

Politechnika Krakowska  
Biblioteka Główna



100000182064

# PODREČCZNIK INŻYNIERSKI

W ZAKRESIE INŻYNIERJI  
LĄDOWEJ I WODNEJ

REDAKTOR NACZELNY

PROF. DR. INŻ. STEFAN BRYŁA

★

TOM II

MOSTY — STATYKA BUDOWLI



LWÓW I WARSZAWA 1928

NAKŁADEM KSIĘGARNI POLSKIEJ B. POŁONIECKIEGO

WYDANO ZE WSPÓŁDZIAŁEM  
ZWIĄZKU STUDENTÓW INŻYNIERJI  
POLITECHNIKI LWOWSKIEJ



II- 325352

## PRZEDMOWA

Układ podręcznika, ustalony przy rozpatrywaniu pracy redakcyjnej, musiał zostać zmieniony wskutek opóźnienia niektórych rękopisów, co też jest powodem pewnego opóźnienia wydawnictwa wogóle. Wydając tom drugi, dziękuję serdecznie autorom za ich życzliwość w stosunku do wydawnictwa. Za pomoc zaś w pracy około niego dziękuję przede wszystkim p. inż. dr. Alfonsowi Chmielowcowi, następnie pp. inż. J. Mikule, inż. D. Stróżeckiemu i p. Augustowi Spyrze, kierownikowi biura rysunkowego; — oddzielnie zaś p. B. Połonieckiemu, który z całym poświęceniem wydawnictwo to prowadzi.

Naczelny redaktor

Lwów-Warszawa, luty 1928



## CZEŚĆ PIĄTA.

### MOSTY.

---

#### TREŚĆ.

Strona	Strona
Zasady projektowania mostów. Napisał inż. dr. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów . . . . .	Mosty żelazne. Napisał inż. dr. kom. Dr. Andrzej Pszenicki, profesor politechniki, Warszawa . . . . .
751	860
Mosty drewniane. Napisał inż. dr. Stefan Bryła, profesor politech- niki, Lwów . . . . .	I. Część ogólna . . . . .
775	860
Mosty tymczasowe. Napisał inż. dr. Stefan Bryła, profesor poli- techniki, Lwów . . . . .	II. Nitowanie . . . . .
796	877
Mosty kamienne. Napisał inż. dr. Maksymiljan Thullie, profesor politechniki, Lwów . . . . .	III. Belki o ściance pełnej . . . . .
806	882
Przyczółki i filary kamienne. Napisał inż. dr. Maksymiljan Thullie, profesor politechniki, Lwów . . . . .	IV. Dźwigary główne . . . . .
830	889
Mosty żelbetowe. Napisał inż. dr. Maksymiljan Thullie, profesor politechniki, Lwów . . . . .	V. Przekroje prętów . . . . .
835	907
	VI. Projektowanie węzłów . . . . .
	918
	VII. Łożyska (poduszki) . . . . .
	922
	VIII. Tężniki podłużne i poprzeczne . . . . .
	938
	IX. Część przejazdowa i chodniki . . . . .
	947
	Mosty ruchome. Napisał inż. dr. Stefan Bryła, profesor poli- techniki, Lwów . . . . .
	976
	Montowanie mostów żelaznych. Napisał inż. Aureljusz Chróście- lewski, Mińsk Mazowiecki . . . . .
	985
	Wzmocnianie mostów żelaznych Napisał inż. Aureljusz Chróście- lewski, Mińsk Mazowiecki . . . . .
	1003





# Zasady projektowania mostów.

Napisał

inż. dr. Stefan Bryła,  
profesor politechniki, Lwów.

**Podział mostów.** Mosty dzielą się wedle rodzaju drogi komunikacyjnej na: *a*) drogowe (kołowe), — tu należą też mosty dla pieszych, czyli t. zw. kładki, *b*) kolejowe, *c*) kanałowe i *d*) wodociągowe (akwadukty). Mosty drogowe dzieli się w Polsce na trzy klasy, a to: pierwszej klasy na drogach państwowych i na głównych ulicach większych miast, drugiej klasy na drogach wojewódzkich i powiatowych, oraz na ulicach miejskich, nie objętych pierwszą kategorią, wreszcie trzeciej klasy na drogach gminnych poza obrębem miast.

Ze względu na rodzaj konstrukcji na mosty stałe i ruchome.

Wreszcie podział można przeprowadzić ze względu na materiał, użyty na konstrukcję (mosty drewniane, żelazne, kamienne, betonowe, żelbetowe), oraz ze względu na charakter belek głównych (np. mosty łukowe, wspornikowe itd.).

Przepustami nazywamy małe mosty o rozpiętościach do 4 m.

Wiaduktami nazywamy mosty ponad wgłębieniami terenu, a więc zastępujące nasyp; zwykle opłacają się one dla wysokości 16—20 m nad terenem.

Most składa się z konstrukcji (budowy) *a*) spodniej czyli dolnej i *b*) wierzchniej czyli górnej. Do pierwszej należą filary (podpory środkowe) i przyczółki (podpory końcowe). Konstrukcja wierzchnia składa się z belek (dźwigarów) głównych, na których spoczywają poprzecznice (belki poprzeczne) i podłużnice (belki podłużne), podtrzymujące jezdnię i chodniki; belki główne związane są nadto ze sobą t. zw. łożnikami (wiatrownicami) pionowymi i poziomymi.

Most może być o pomoście górą, pomoście dołem i pomoście pośrodku (wgłębionym). Dla mniejszych rozpiętości korzystniejsza jest jazda górą (dobre steżenia poprzeczne, lżejsza konstrukcja pomostu, mniejsze przyczółki i filary); o ile jednak jesteśmy skrepowani zbyt małą wysokością konstrukcyjną, dajemy pomost dołem lub wgłębiony. Dla większych rozpiętości lżejsze są mosty o pomoście dołem.

Wysokością ustrojową mostu nazywamy odległość od najniższego punktu dolnej krawędzi belki mostowej do niwelety mostu, tj. do wierzchu nawierzchni w osi mostu drogowego, względnie do stopy szyny mostu kolejowego.

**Wymiary poprzeczne mostów.** Szerokość mostów drogowych ustala się odpowiednio do rodzaju drogi. Najmniejsze dopuszczalne wymiary wedle przepisów M.R.P. z r. 1925 podane są na fig. 1. Mosty w większych miastach mają szerokości znacznie większe i dostosowane do szerokości ulic. Chodniki należy urządzać zawsze w miastach i osiedlach, lub w ich pobliżu. Najmniejsza ich szerokość 75 cm. Jeżeli niema chodników, należy dać krawężniki o szerokości 40 cm.

Małe mosty i przepusty o rozpiętościach do 4 m należy budować o tej samej szerokości, co korona drogi, na której znajduje się most.

Teżniki (wiatrownice) górne itp. konstrukcje winny znajdować się nad powierzchnią jezdni conajmniej 4,5 m, zaś nad powierzchnią chodników conajmniej 2,5 m.

Wymiary poprzeczne mostów kolejowych należy dostosować do skrajni, dodając nadto około 20 cm (por. dział: „Koleje“, str. 235, fig. 267). Szerokość w świetle normalnotorowego mostu kolejowego wynosić będzie co-

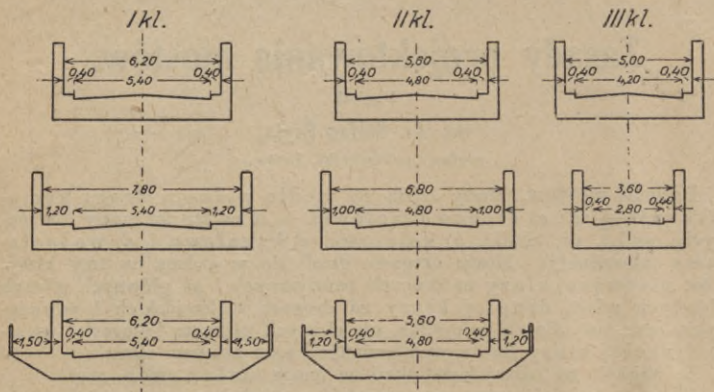


Fig. 1.

najmniej 4,80 m. Jeżeli most jest w łuku, to szerokość jego zwiększa się odpowiednio do strzałki łuku na moście. Por. niżej o rozpiętości przejazdów nad kolejami.

Wzniesienie dolnej krawędzi mostu nad najwyższy stan wody wynosić powinno wedle przepisów M. R. P. conajmniej . . . . . 0,5 m,  
jeżeli rzeką płynąć mogą pnie itd. . . . . 1,0 m,  
na rzekach spławnych przy spławie luzem . . . . . 1,0 m,  
na rzekach spławnych przy spławie wiązonym . . . . . 2,5 m,  
na rzekach żeglownych . . . . . 5,5 m.

Wzniesienie nad kanałami żeglugi por. str. 644. Powyższe normy może M. R. P. zmienić w poszczególnych wypadkach.

Mosty łukowe, których  $f < \frac{1}{6} l$ , zaś  $\alpha < 90^\circ$ , należy założyć tak, aby najwyższe zwierciadło wody nie sięgało ponad wezglowia. Jeżeli  $f > \frac{1}{6} l$ , zwierciadło najwyższe wody nie powinno sięgać do punktu  $a$  (fig. 2).

Wzniesienie konstrukcji mostu nad torami kolejowymi należy dostosować do skrajni; przyczem przy mostach drewnianych powinno ono wynosić conajmniej 0,5 m nad skrajnią, o ile zastosuje się urządzenia, chroniące drzewo od pożaru, względnie 2,0 m nad skrajnią, o ile tychże niema.

Wzniesienie nad drogą kołową: min. 2,50 m nad chodnikami, oraz 4,50 m nad jezdnią; na drogach podrzędnych można ten wymiar zmniejszyć do 3,20 m za zezwoleniem M. R. P.

Wysokość poręczy conajmniej 1,10 m.

Rozpiętości mostów. Łączna rozpiętość mostów nad rzekami zależy od największej ilości przepływającej wody, zwiększenia chyżości pod mo-

stem i dopuszczalnego spiętrzenia. Dla małych mostów oblicza się ilość wody z wzorów empirycznych, dla większych wykonywa się odpowiednie pomiary (por. dział: „Pomiary wodne“).

Przy określonej długości mostu należy rozpiętości poszczególnych przęseł dostosować do warunków miejscowych, do wymiarów największych statków i tratw, jakie mogą kursować w danym miejscu, wreszcie do kosztów. Rozpiętości są tem większe, im większy jest koszt filarów, tj. im trudniejsze fundowanie i im są one wyższe. Przesła przepływowe są często większe od przęseł inundacyjnych. Przy kilku możliwych ewentualnościach decydują najmniejsze koszty. Na zakrętach rzek powinny być przesła większe niż w miejscach normalnych. Rozpięć ościwiaduktów zależą przedewszystkiem od kosztów i w konsekwencji od wysokości filarów.

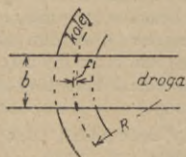


Fig. 3.

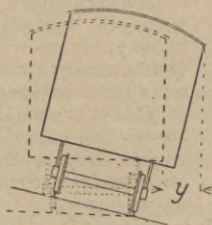


Fig. 4.

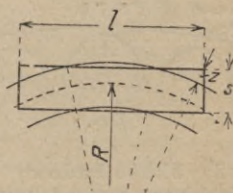


Fig. 5.

Przy niewielkiej ilości przęseł budujemy je zwykle w nieparzystej ilości.

Ze względu na prostotę roboty i ekonomję staramy się o to, aby możliwie wielka ilość przęseł była taka sama; o ile zatem rozpiętości są różne, to zmieniamy je grupami.

Mosty nad kanałami żeglugi powinny obejmować jednym przęsłem całą (niezmniejszoną) szerokość profilu wraz z drogami holowniczymi (por. dział: „Kanały żeglugi“).

Mosty nad ulicami i drogami powinny dostosować się rozpiętością do szerokości drogi. Można jednak ustawić słupy w środku drogi, co zresztą nie jest pożądane, oraz na chodnikach obok krawężnika.

Przejazdy nad kolejami powinny mieć rozpiętość równą szerokości skrajni, zwiększoną o  $\mp 20$  cm. Jeżeli tor kolejowy pod mostem przechodzi w łuku, należy zwiększyć rozpiętość mostu: 1. o strzałkę krzywizny toru  $f = \frac{b^2}{8R}$ , gdzie  $b$  jest szerokością mostu, a  $R$  promieniem krzywizny toru (fig. 3), 2. o poszerzenie toru w łuku (por. dział: „Koleje żelazne“, str. 230), 3. o wielkość  $y$ , powstałą wskutek ukośnego położenia skrajni (fig. 4), i 4. o wielkość  $z$ , powstałą wskutek odchylenia osi wozu od osi toru (fig. 5); przyjmując można, jeżeli  $s$  jest szerokością wozu,  $l$  długością tegoż:

$$z = \sqrt{\left(R + \frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} - \left(R + \frac{s}{2}\right).$$

Przy przejazdach nad kolejami lub drogami kołowymi można przeprowadzić rowy  $a$  pomiędzy przyczółkami (filarami) jako otwarte lub kryte,  $b$ ) poza filarami (przyczółkami), wreszcie nawet  $c$ ) przez przyczółki (rzadko).

Mosty ukośne mają większe rozpiętości i kosztowniejszą konstrukcję od prostych, to też w miarę możliwości staramy się ich unikać.

Niweleta mostu niejednokrotnie dana z góry. Przy mostach drogowych przeważnie pozioma; podniesienie niwelety ku środkowi mostu wy-

chodzi z użycia, chyba, gdy chodzi o uzyskanie większej wysokości konstrukcyjnej (stosunkowo najczęściej przy mostach łukowych); wtedy w środkowej części zaokrągla się spadek łukiem koła lub parabolą o długości  $2l'$  (fig. 6.) Najwyższe spadki por. dział: „Ulice“. Czasem niweleta spada w jedną stronę, gdy wynika to ze spadku całej drogi. Przy mostach kolejowych niweleta stosuje się do spadku linii kolejowej. Załamanie spadku na moście możliwe, ale niemiłe i rzadko używane.

Spadek poprzeczny: dylé 2,5—3%, droga bita 4—6%, bruk 2,5—3%, chodniki 1—2%; pozatem por. dział: „Ulice“.

**Porównanie mostów z różnych materiałów.** Koszta budowy. Najtańsze są mosty drewniane; żelazne zwykle tańsze od betonowych i żelbetowych, niemniej potrzebne jest porównanie.

Koszta utrzymania mostów drewnianych wynoszą około 2—3% kosztów budowy, mostów żelaznych 0,2—0,3% tychże, mosty kamienne i betonowe nie wymagają niemal żadnych kosztów utrzymania.

Czas trwania mostów drewnianych 10—20 lat, co do żelaznych brak definitywnych danych, kamiennych i betonowych praktycznie nieograniczony.

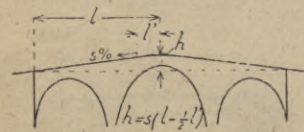


Fig. 6.

Szybkość budowy: najszybciej buduje się mosty drewniane, następnie żelazne, potem żelbetowe i betonowe, wreszcie kamienne.

Rozpiętości mostów żelaznych dochodzą do 610 m (projekty do 1000 m i wyżej), żelbetowych do 200 m (projekty do 250 m i wyżej), betonowych i kamiennych prawie do 100 m, drewnianych do 50 m.

Wysokość konstrukcyjna: najmniejsza w mostach żelaznych, następnie drewnianych i żelbetowych, wreszcie betonowych i kamiennych.

Mosty ukośne najłatwiej wykonać żelazne (ukos do 20°), najtrudniej kamienne (30° dla mostów odcinkowych, 70° dla półkolistych).

Wstrząśnienia najmniej działają na mosty kamienne, betonowe, wreszcie na żelbetowe i żelazne.

Wpływ dymu i gazów nie szkodzi mostom kamiennym i betonowym, — szkodzi żelaznym i żelbetowym.

Wygląd najbardziej monumentalny mają mosty kamienne i betonowe, dalej żelbetowe, żelazne i drewniane.

Dzisiaj buduje się z drzewa mosty, których czas trwania nie ma być długi (mosty tymczasowe, rusztowania), dalej mosty drogowe III. klasy i czasem mosty dla kolei drugorzędnych. Pozatem staramy się budować mosty o charakterze stałym, przeważnie żelbetowe dla mniejszych rozpiętości, żelazne dla rozpiętości większych, oraz tam, gdzie mała wysokość konstrukcyjna lub inne względy nie pozwalają na zastosowanie żelbetu. Wskazane jest budować nawet mosty drewniane na filarach i przyczółkach kamiennych lub betonowych; trwałość mostu znacznie się wtedy zwiększa, gdyż przyczółki i filary drewniane szybko niszczeją.

**Obciążenia mostów.** Na mosty działają następujące obciążenia: a) ciężar stały (belek głównych, poprzecznic, podłużnic itd.), b) ciężar ruchomy czyli zmienny (na mostach drogowych automobile, wozy, walce parowe, ludzie itd., na kolejowych pociągi), c) parcie wiatru, d) parcie ziemi i wody, a nadto e) zmiany temperatury i ewentualnie f) skurcz materiałów.

1. Ciężar stały przyjmuje się wedle wzorów; najważniejsze podane są w odpowiednich działach. Ciężary materiałów konstrukcyjnych poleca M. R. P. przyjmować w następujących wielkościach:

Żelazo zlewne . . . . .	7,85 t/m <sup>3</sup>	Mur z cegieł na cemencie	1,70 t/m <sup>3</sup>
„ spawane . . . . .	7,80 „	Beton stwardniały . . . . .	2,20 „
Stal . . . . .	7,86 „	„ mokry (w deskowa-	
Zeliwo . . . . .	7,30 „	niu) . . . . .	2,40 „
Drzewo miękkie mokre . . . . .	0,90 „	Żelbet stwardniały . . . . .	2,40 „
„ „ suche . . . . .	0,80 „	„ mokry (w deskowa-	
„ twarde mokre . . . . .	1,00 „	niu) . . . . .	2,60 „
„ „ suche . . . . .	0,90 „	Bruk drewniany . . . . .	1,10 „
Mur ciosowy . . . . .	2,40—2,60 „	Piasek . . . . .	1,60 „
„ z kamienia łamanego		Żwir lub tłuczeń na jezdni	1,90 „
(wapień) . . . . .	2,40 „	Ziemia, glina . . . . .	1,80 „
„ z kamienia łamanego		Bruk kamienny . . . . .	2,40—2,80 „
(piaskowiec) . . . . .	2,20 „	Asfalt lany . . . . .	1,20 „
„ z cegieł na wapnie . . . . .	1,60 „		

2. Ciężar ruchomy. *a*) Mosty drogowe. W poszczególnych państwach istnieją rozmaite rozporządzenia, określające rodzaj i wielkość obciążeń drogowych. Zazwyczaj składają się na nie: walec drogowy, jako obciążenie największe, samochody ciężarowe, czasem wozy dla dróg podrzędnych; oraz tłum ludzi, przyjmowany jako ciężar jednostajnie rozłożony. Niektóre rozporządzenia przyjmują nadto obciążenie moździerzem, kolejką polową itd. W Polsce przepisy M. R. P. z r. 1925 wprowadzają tylko jeden rodzaj obciążenia zasadniczego, ułatwiając tem samem obliczenie mostu w bardzo wybitnym stopniu, tem bardziej, że dla różnych klas i dla różnych szerokości mostu należy pomnożyć je tylko przez odpowiednie współczynniki.

Obciążenie zasadnicze rozmieszczone jest na pasie jezdni o szerokości 2,50 m. Jest nim walec parowy o ciężarze 20 t (oś przednia 8 t, oś tylna 12 t); przed nim i za nim tłum ludzi o ciężarze 500 kg/m<sup>2</sup> dla długości mostu  $l \leq 50$  m, zaś 400 kg dla  $l \geq 100$  m, gdzie  $l$  oznacza długość przęsła; dla pośrednich długości  $l$  należy interpolować linjowo (fig. 7). Na chodnikach należy przyjmować tłum ludzi o tymże ciężarze jednostajnie rozłożonym. Zasadnicze obciążenie (jezdni i chodników) należy pomnożyć przez współczynnik  $\varphi$  (spółczynnik klasy mostu), zależny od klasy mostu; wynosi on

dla mostów	I. klasy	$\varphi = 1,0$ ,
„	„	II. „ $\varphi = 0,8$ ,
„	„	III. „ $\varphi = 0,4$ .

Aby znaleźć całkowity ciężar, działający na jezdnię mostową, należy pomnożyć tak określone obciążenie przez współczynnik  $\alpha$  (spółczynnik szerokości mostu), wynoszący:

$$\alpha = 0,4 b \quad \text{dla jezdni o szerokości } b \leq 5,0 \text{ m,}$$

$$\text{zaś } \alpha = 1 + 0,2 b \quad \text{dla jezdni o szerokości } b > 5,0 \text{ m,}$$

gdzie  $b$  jest szerokością jezdni (fig. 8 a, b, c). Krawężników można nie obciążać.

Z powyższego wynika, że dla szerokości równej lub mniejszej od 5,00 m obciążenie mostu zwiększa się wprost proporcjonalnie do szerokości. Dla szerokości  $b > 5,0$  m obciążenie to wzrasta znacznie wolniej, co uzasadnia się tem, że jest mniejsze prawdopodobieństwo, aby cała jezdnia była obciążona równie silnie.

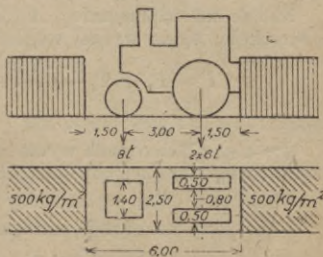


Fig. 7.

Przy obliczeniu mostów o dwu belkach głównych przyjąć należy, że na każdą belkę przenosi się połowa obciążenia, obliczonego w powyższy sposób. Jeżeli most ma większą ilość belek głównych w odstępie

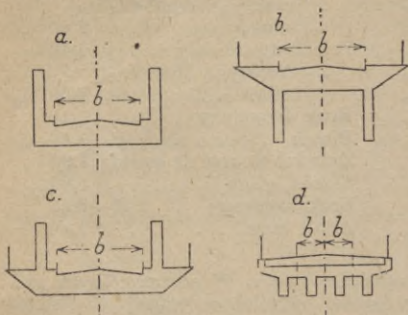


Fig. 8.

mniejszym niż 2,5 m, to współczynnik  $\alpha = 0,4 b$  należy zastosować przy ich obliczeniu, jeżeli urządzenie pomostu zapewnia ścisłe współdziałanie belek (np. mostu żelbetowego z silnymi stężeniami poprzecznymi). Przez  $b$  należy rozumieć wtedy odstęp belek głównych (fig. 8 d). Jeżeli urządzenie pomostu nie zapewnia ścisłego współdziałania belek, to ciężary, działające na jedną belkę, należy przyjąć odpowiednio do rozkładu ciśnienia na te belki z uwzględnieniem szerokości kół walca i obciążenia każdego z nich. To samo należy zastosować przy obliczaniu pomostu. Pomost należy nadto przeliczyć na ciężar skupiony koła samochodu ciężarowego o wielkości  $P = 4 t$  dla mostów I. klasy,  $3,2 t$  dla II. klasy, zaś  $1,6 t$  dla III. klasy.

Nacisk na poprzecznicy  $A$  (fig. 9) z powodu obciążenia pasa jezdni o szerokości 2,5 m wynosi wogóle:

$$P = P_1 + P_2 \frac{\lambda - 2a}{\lambda} + \frac{q(\lambda - 3a)^2}{2\lambda} + \frac{q(\lambda - a)^2}{2\lambda},$$

gdzie  $P_1 = 12 t$ ,  $P_2 = 8 t$ , zaś  $q = 1,24 t/m$ .

Dla  $\lambda < 4,5 m$  odpada wyraz trzeci, dla  $\lambda < 3 m$  także wyraz drugi; dla poprzecznic skrajnej odpada także wyraz ostatni.

Obciążenie całej poprzecznic:  $(P) = \alpha \varphi P$ .

Największy moment poprzecznic, jeżeli oblicza się ją jako belkę wolno podpartą: najw.  $M = \frac{1}{8} (P) b$ .

Przy obliczaniu mostów o rozpiętości  $l > 50 m$  można zamiast ciężarów skupionych kół walca przyjąć ciężar zastępczy, jaki otrzymamy, rozkładając ciężar walca jednostajnie na powierzchnię, zajęta przez walec, tj.

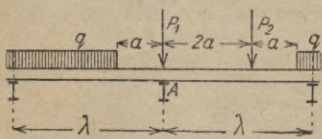


Fig. 9.

$2,50 \times 6,00 = 15,00 m^2$ . Takież ciężar zastępczy przyjmować można też przy obliczaniu mostów o rozpiętościach między 30 m a 50 m, o ile odpowiednia gałąź linii wpływowej ma długość równą lub większą niż 30 m. Wreszcie tenże sam ciężar zastępczy przyjmuje się przy obliczaniu przyczółków.

Dla poszczególnych mostów wszystkich klas może M. R. P. zarządzić zastosowanie innych obciążeń. Dotyczy to zwłaszcza mostów w większych miastach, gdzie ruch jest większy i cięższy. Można w nich przyjmować albo współczynnik  $\varphi > 1$ , albo też wogóle inne obciążenie, np. szereg wozów tramwajowych jeden za drugim itd.

Przy obliczaniu części ustrojowych chodników należy przyjmować obciążenie tłumem ludzi  $600 kg/m^2$ , zaś ciśnienie poziome na poręczu  $80 kg/m$ .

Przy obliczaniu kładek przyjmuje się tłum ludzi, jak dla II. klasy, tj.  $400 kg/m^2$ .

Bezwzględnie największy moment zgięcia dla belek wolno podpartych otrzymujemy:

a) dla  $l < 3 m$  pod cięższą osią walca w środku przesa (fig. 10 b):

$$\text{najw. } M = \frac{1}{4} Pl;$$

b) od  $l = 3,00 m$  do  $l = 5,50 m$  pod cięższą osią walca (fig. 10 c):

najw.  $M = Ax$ , przyczem

$$A = \frac{1}{2} q \frac{x^2}{l} - \left[ P + q(l-a) \right] \frac{x}{l} + P + \frac{1}{2} \frac{q}{l} (l-a)^2$$

$$x = \frac{1}{3q} \left\{ 2P + 2q(l-a) - \sqrt{4P^2 + 2q(l-a)P + (l-a)^2q^2} \right\};$$

c) od  $l = 5,50 m$  do  $l = 8,25 m$  pod cięższą osią walca (fig. 10 d):

najw.  $M = Ax - \frac{4}{3} a P$ , przyczem

$$A = \frac{1}{2} \frac{q}{l} x^2 - \left[ \frac{5}{3} P + q(l-a) \right] \frac{x}{l} + \frac{P}{3} \left( 5 + 4 \frac{a}{l} \right) + \frac{1}{2} \frac{q}{l} (l-a)^2$$

$$x = \frac{1}{3q} \left\{ \frac{10}{3} P + 2q(l-a) - \sqrt{\left( \frac{10}{3} P \right)^2 + \frac{Pq}{3} (10l - 64a) + q^2(l-a)^2} \right\};$$

d) od  $l = 8,25 m$  do  $l = 30 m$  pod cięższą osią walca (fig. 10 e):

$$\text{najw. } M = Bz - \frac{1}{2} q(z^2 - a^2),$$

$$\text{gdzie } B = - \left( \frac{5}{3} P - 4aq \right) \frac{z}{l} + \frac{P}{3} \left( 5 - 4 \frac{a}{l} \right) + q \left[ \frac{l}{2} - 4a \left( 1 - \frac{a}{l} \right) \right],$$

$$z = \frac{l}{2} - 4a \frac{P - 3aq}{10P + 3q(l-8a)};$$

e) dla  $l > 30 m$  najw.  $M = \frac{1}{2} G \left( \frac{l}{2} - a \right) + \frac{1}{2} q \left( \frac{l}{2} - 2a \right)^2$ , przyczem

$G$  = ciężar walca drogowego. We wzorach powyższych  $P = 12 t$ , zaś  $q = 1,25 t/m$  dla  $l \leq 50 m$ , zaś  $q = 1 t/m$  dla  $l \geq 100 m$ . Dla pośrednich wartości należy interpolować linjowo.

W tablicy I. (str. 758/759) zestawione są największe momenty zgięcia, obliczone w odstępach co  $0,1 l$ , oraz bezwzględnie największe momenty i ich odstępki od środka belki. Poczynając od  $l = 30 m$ , bezwzględnie największy moment występuje w środku belki, gdyż ciężar walca przyjęty jest tam jako ciężar jednostajnie rozłożony.

Największy moment w dowolnym przekroju występuje:

a) dla  $l < 30 m$ , gdy cięższa oś walca ( $12 t$ ) stanie w danym przekroju;

b) dla  $l \geq 30 m$ . Wykres dla najniekorzystniejszego położenia walca podany jest na fig. 11. Prowadzimy  $C''F \parallel A'B'$ , odcinamy  $C''F = 4a = 6 m$ ;

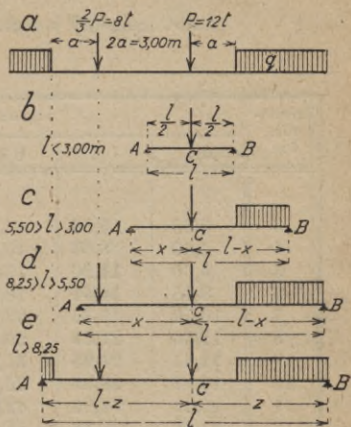


Fig. 10.

Tabli-

Najw. momenty w tonmetrach dla belki wolno podpartej, w prze-  
najw. momenty wskutek obciążenia walcem i tłumem ludzi na

W ostatniej rubryce podane

Rozpię- tość <i>l m</i>	$\varphi = x : l$					Bez wzgl. najw. <i>M</i>	<i>e cm</i> *)
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
3	3,33	5,86	7,62	8,66	9,00	9,00	0
4	4,60	8,04	10,40	11,72	12,08	12,085	5
5	6,60	11,20	13,80	14,49	13,31	15,33	11
6	8,45	14,41	18,04	19,50	18,71	19,55	51
7	10,40	17,75	22,39	24,64	24,25	24,82	45
8	12,46	21,26	26,98	29,91	29,95	30,32	38
9	14,61	24,96	31,84	35,46	35,82	36,1	35
10	16,87	28,86	36,96	41,30	41,90	42,1	34
11	19,22	32,95	42,34	47,45	48,31	48,5	32
12	21,68	37,26	47,98	53,80	55,05	55,3	31
13	24,24	41,75	53,89	60,65	62,09	62,3	30
14	26,90	46,46	60,08	67,70	69,40	69,6	29
15	29,66	51,35	66,49	75,05	77,06	77,2	28
16	32,54	56,44	73,20	82,70	85,01	85,1	28
17	35,52	61,78	80,10	90,67	93,30	93,5	27
18	38,61	67,25	87,30	98,85	101,92	102,0	26
19	41,80	72,92	94,80	107,4	110,8	110,8	26
20	45,16	78,85	102,6	116,3	120,0	120,1	25
21	48,57	84,97	110,6	125,5	129,6	129,8	24
22	52,10	91,28	118,8	134,9	139,5	139,6	24
23	55,77	97,75	127,4	144,7	149,5	149,6	23
24	59,50	104,4	136,1	154,7	160,0	160,1	22
25	63,40	111,4	145,3	165,0	170,9	171,0	22
26	67,4	118,5	154,5	175,7	182,0	182,1	21
27	71,5	125,8	164,2	186,6	193,5	193,6	21
28	75,7	133,3	173,9	197,9	205,2	205,2	21
29	80,0	141,0	184,1	209,5	217,1	217,1	21
30	84,5	148,8	195,6	221,4	229,5	229,5	21
31	85,6	152,1	199,6	228,2	237,7		
32	90,2	160,4	210,5	240,6	250,6		
33	95,0	168,9	221,7	253,4	263,9		
34	99,9	177,6	233,1	266,4	277,5		
35	104,9	186,5	244,8	279,8	291,4		
36	110,0	195,6	256,7	293,4	305,6		
$\varphi =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		

\*) Odstęp niebezpiecznego przekroju od środka belki.



ca I.

krojach, oddalonych od podpory o  $x = \varphi l$ , tudzież bezwzględnie szerokości 2,5 m wedle przepisów M. R. P. z dnia 9 listopada 1925 r. jest położenie miejsca najw.  $M$ .

Rozpię- tość $l$ m	$\varphi = x : l$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
37	115,3	204,9	268,9	307,4	320,2
38	120,6	214,4	281,4	321,6	335,0
39	126,1	224,1	294,1	336,2	350,2
40	131,6	234,0	307,1	351,0	365,6
41	137,3	244,1	320,4	366,2	381,4
42	143,1	254,4	333,9	381,6	397,5
43	149,0	264,9	347,7	397,4	413,9
44	155,0	275,6	361,7	413,4	430,6
45	161,2	286,5	376,0	429,8	447,7
46	167,4	297,6	390,6	446,4	465,0
47	173,8	308,9	405,4	463,4	482,7
48	180,2	320,4	420,5	480,6	500,6
49	186,8	332,1	435,9	498,2	518,9
50	193,5	344,0	451,5	516,0	537,5
52	206,3	366,7	481,3	550,1	573,0
54	219,3	389,9	511,8	584,9	609,3
55	225,9	401,6	527,1	602,4	627,5
56	232,6	413,6	542,9	620,4	646,3
58	246,3	437,9	574,8	656,9	684,3
60	260,1	462,4	606,9	693,6	722,5
62	274,1	487,4	639,7	731,0	761,5
64	288,5	512,8	673,2	769,2	801,2
65	293,5	521,8	684,8	782,6	815,2
66	303,0	538,6	706,8	807,8	841,5
68	317,7	564,8	741,3	847,2	882,5
70	332,6	591,4	776,2	887,0	924,0
72	347,7	618,1	811,2	927,1	965,7
74	363,0	645,3	846,9	967,9	1008,2
75	370,6	658,9	864,8	988,3	1029,5
76	378,4	672,6	882,8	1009,0	1051,0
78	393,9	700,3	919,2	1050,5	1094,3
80	409,7	728,3	955,9	1092,5	1138,0
89	449,5	799,0	1048,7	1198,6	1248,5
90	490,0	871,0	1143,2	1306,6	1361,0
100	572,2	1017,3	1335,2	1525,9	1589,5
$\varphi =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

Największe siły poprzeczne w tonnach dla belki wolno  
o  $x = \varphi l$  wskutek obciążenia walcem i tłumem  
M. R. P. z dnia

Rozp. $l$ $m$	$\varphi = x : l$										$l$ $m$
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
3	12,00	10,80	9,60	8,40	7,20	6,00	4,80	3,60	2,40	1,20	3
4	14,00	12,00	10,00	"	"	"	"	"	"	"	4
5	15,23	13,20	11,20	9,20	"	"	"	"	"	"	5
6	16,23	14,08	12,01	10,00	8,00	"	"	"	"	"	6
7	17,13	14,86	12,68	10,58	8,57	6,57	"	"	"	"	7
8	17,96	15,57	13,28	11,09	9,01	7,00	5,00	"	"	"	8
9	18,73	16,23	13,84	11,56	9,39	7,33	5,33	"	"	"	9
10	19,49	16,87	14,36	11,98	9,74	7,62	5,60	"	"	"	10
11	20,22	17,47	14,87	12,39	10,07	7,88	5,82	3,82	"	"	11
12	20,93	18,06	15,36	12,80	10,38	8,12	6,01	4,00	"	"	12
13	21,62	18,64	15,82	13,17	10,67	8,34	6,17	4,15	"	"	13
14	22,32	19,22	16,29	13,54	10,97	8,57	6,34	4,29	"	"	14
15	23,00	19,78	16,74	13,90	11,25	8,78	6,49	4,40	"	"	15
16	23,66	20,33	17,19	14,25	11,52	8,98	6,64	4,50	2,50	"	16
17	24,34	20,87	17,63	14,60	11,79	9,18	6,78	4,60	2,59	"	17
18	25,01	21,42	18,08	14,95	12,05	9,38	6,92	4,70	2,67	"	18
19	25,66	21,96	18,51	15,29	12,31	9,57	7,06	4,79	2,74	"	19
20	26,31	22,50	18,94	15,62	12,56	9,75	7,19	4,87	2,80	"	20
21	26,97	23,03	19,36	15,96	12,81	9,93	7,31	4,96	2,86	"	21
22	27,62	23,57	19,79	16,29	13,06	10,11	7,44	5,04	2,91	"	22
23	28,27	24,09	20,21	16,62	13,30	10,29	7,56	5,12	2,96	"	23
24	28,91	24,62	20,63	16,94	13,56	10,47	7,68	5,19	3,00	"	24
25	29,54	25,14	21,04	17,26	13,80	10,64	7,80	5,27	3,05	"	25
26	30,18	25,66	21,45	17,58	14,04	10,82	7,92	5,34	3,09	"	26
27	30,81	26,21	21,88	17,91	14,28	10,99	8,03	5,41	3,13	"	27
28	31,44	26,60	22,29	18,24	14,52	11,16	8,14	5,48	3,17	"	28
29	32,09	27,25	22,71	18,55	14,75	11,33	8,26	5,55	3,21	"	29
30	32,73	27,75	23,12	18,88	15,00	11,50	8,37	5,62	3,25	"	30
31	"	28,27	23,54	19,19	15,24	11,67	8,49	5,70	3,29	1,23	31
32	"	28,77	23,95	19,50	15,47	11,83	8,59	5,76	3,32	1,25	32
33	"	29,27	24,32	19,82	15,71	12,00	8,70	5,82	3,35	1,27	33
34	"	"	24,79	20,14	15,94	12,17	8,81	5,89	3,39	1,29	34
35	33,29	"	25,16	20,46	16,17	12,33	8,92	5,95	3,42	1,31	35
36	33,93	"	25,61	20,78	16,41	12,50	9,03	6,02	3,46	1,33	36
$\varphi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	

c a II.

podpartej w przekrojach oddalonych od lewej podpory  
 ludzi na szerokości 2,5 m wedle przepisów  
 9 listopada 1925 r.

Rozp. $l$ $m$	$\varphi = x : l$										$l$ $m$
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
37	34,58	"	26,01	21,10	16,65	12,67	9,14	6,09	3,49	1,35	37
38	35,30	29,52	"	21,42	16,87	12,83	9,25	6,15	3,53	1,37	38
39	35,81	30,02	"	21,73	17,11	12,99	9,36	6,21	3,56	1,38	39
40	36,55	30,55	"	22,04	17,35	13,16	9,46	6,23	3,59	1,40	40
41	37,22	31,07	"	22,35	17,56	13,31	9,57	6,34	3,62	1,41	41
42	37,87	31,67	"	22,68	17,80	13,49	9,69	6,41	3,66	1,43	42
43	38,50	32,11	26,32	"	18,03	13,64	9,78	6,46	3,68	1,44	43
44	39,14	32,64	26,74	"	18,25	13,80	9,89	6,53	3,71	1,45	44
45	39,66	32,97	27,17	"	18,52	13,97	10,01	6,59	3,75	1,47	45
46	40,46	33,70	27,60	"	18,74	14,15	10,12	6,66	3,78	1,48	46
47	41,13	34,23	28,02	"	18,96	14,29	10,21	6,72	3,81	1,49	47
48	41,75	34,75	28,44	"	19,19	14,45	10,31	6,78	3,84	1,50	48
49	42,38	35,29	28,83	22,98	19,41	14,61	10,41	6,84	3,87	1,51	49
50	43,00	35,80	29,78	23,34	19,66	14,77	10,52	6,90	3,90	1,52	50
52	44,00	36,70	29,95	23,85	"	15,05	10,65	7,01	3,96	1,54	52
54	45,17	37,54	30,68	24,44	"	15,33	10,89	7,11	4,01	1,56	54
55	45,64	37,96	31,00	24,66	"	15,46	10,98	7,17	4,04	1,58	55
56	46,13	38,38	31,33	24,94	"	15,58	11,05	7,22	4,06	1,59	56
58	47,17	39,17	32,07	25,43	"	15,85	11,24	7,32	4,11	1,60	58
60	48,16	40,04	32,64	25,96	20,00	"	11,40	7,43	4,16	1,62	60
62	49,03	40,83	33,23	26,43	20,37	"	11,57	7,52	4,21	1,64	62
64	50,06	41,66	33,94	26,96	20,75	"	11,73	7,62	4,26	1,66	64
65	50,50	41,98	34,18	27,18	20,93	"	11,80	7,66	4,28	1,67	65
66	51,04	42,29	34,49	27,40	21,09	"	11,89	7,71	4,31	1,68	66
68	51,90	43,12	35,11	27,88	21,47	"	12,04	7,80	4,35	1,69	68
70	52,84	43,84	36,69	28,30	21,79	16,05	12,19	7,89	4,40	1,71	70
72	53,74	44,54	36,28	28,76	22,14	16,30	12,34	7,98	4,44	1,72	72
74	54,43	45,17	36,76	29,19	22,45	16,54	12,49	8,07	4,49	1,74	74
75	54,90	45,56	37,00	29,40	22,60	16,64	"	8,12	4,51	1,75	75
76	55,39	45,86	37,36	29,61	22,73	16,76	"	8,15	4,53	1,76	76
78	56,04	46,58	37,83	30,03	23,09	16,98	"	8,24	4,57	1,77	78
80	56,85	47,25	38,41	30,45	23,40	17,20	"	8,31	4,61	1,78	80
85	58,69	48,69	39,59	31,39	24,09	17,73	"	8,51	4,71	1,82	85
90	60,53	50,13	40,75	32,28	24,76	18,23	12,58	8,69	4,80	1,85	90
100	63,58	52,68	42,78	33,88	25,98	19,08	13,18	"	4,96	1,91	100
$\varphi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	

prowadzimy  $FE'' \parallel C''A'$  aż do przecięcia z  $B'C''$  w punkcie  $E''$ . Walec powinien obciążać długość  $DE$ .

Zastosowanie tablicy II. (str. 760/761) przy obciążeniu pośrednim:

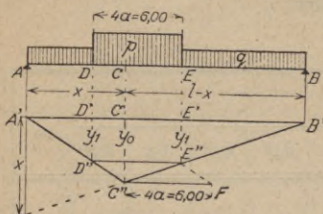


Fig. 11.

Niech  $\lambda =$  długość badanego pola, zaś  $x =$  odstęp prawej poprzecznicy od lewej podpory, to  $\xi$  (odległość punktu obojętnego od prawej poprzecznicy):

$$\xi = \lambda \frac{l-x}{l-\lambda},$$

względnie  $\xi = \lambda \frac{n-m}{n-1} \dots \dots (a)$

jeżeli pola są równe:  $l = n\lambda$ ,  $x = m\lambda$ .

Największa siła poprzeczna  $T$  w danym polu  $T = T_x + \Delta T \dots \dots (b)$

gdzie  $T_x =$  najw.  $T$  dla przekroju  $x$ , zaś  $\Delta T =$  siła poprzeczna z powodu obciążenia w obrębie  $\xi$ .  $T_x$  znajdziemy w tablicy sił poprzecznych.

Obliczenie  $\Delta T$ : a)  $l-x+\xi < 30$  m; walec należy przyjmować jako ciężary skupione (fig. 12), wartość  $T_x$  w tablicy II. znajduje się na prawo od linii schodkowej. Na prawej poprzecznicy stoi oś 12 t.

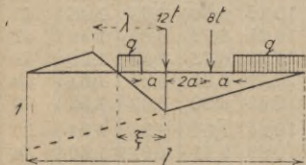


Fig. 12.

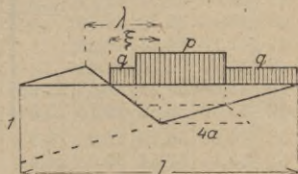


Fig. 13.

Jeżeli  $\xi \leq a = 1,5$  m, to  $\Delta T = 0$ ,  $T = T_x$ .

Jeżeli  $\xi > a$  ( $a = 1,5$  m), to  $\Delta T = \frac{1}{2} q \frac{l-\lambda}{l\lambda} (\xi-a)^2 \dots \dots (c)$

względnie  $\Delta T = \frac{1}{2} q \frac{n-1}{l} (\xi-a)^2$ , jeżeli  $\frac{l}{\lambda} = n$ .

b)  $l-x+\xi \geq 30$  m, walec należy przyjmować jako obciążenie jednostajnie rozłożone  $p = \frac{G}{4a} = \frac{20}{6} t/m$  (fig. 13); wartość  $T_x$  w tablicy II. znajduje się na lewo od linii schodkowej.

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{l} \left[ q \frac{(l-x)^2}{l-\lambda} + (p-q) \frac{(4a)^2}{l} \right],$$

względnie, jeżeli  $l = n\lambda$ ,  $x = ml$ ,

$$\Delta T = \frac{1}{2n} \left[ q \frac{n-m}{n-1} (l-x) + (p-q) \frac{(4a)^2}{l} \right].$$

Przykłady.

1. Most żelbetowy III. klasy,  $l = 9$  m, odstęp belek od osi do osi 1,4 m; współczynnik szerokości  $\alpha = 0,4 \cdot 1,4 = 0,56$ . Spółczynnik klasy  $\varphi = 0,4$ .

Bezwzględnie najw.  $M = 0,56 \cdot 0,4 \cdot 36,1 = 8,1$  tm; wystąpi wtedy, gdy tylna oś walca stanie w odległości  $3,9 \cdot \frac{l}{100} = 3,9 \cdot 9 = 35,1$  cm od środka belki.

W przekroju belki w odległości  $x = 0,3$  l od lewej podpory najw.  $M = 0,56 \cdot 0,4 \cdot 31,84 = 7,14$  tm.

Najw. oddziaływanie  $A = 0,56 \cdot 0,4 \cdot 19,49 = 4,36$  t.

2. Most kratowy II. klasy;  $l = 28 \text{ m}$ ; szerokość jezdni  $b = 4,80 \text{ m}$ ; szerokość dwu chodników  $2 \times 1,0 = 2 \text{ m}$ . Odstęp węzłów  $\lambda = \frac{1}{8} l$ . Spółczynnik klasy  $\varphi = 0,8$ ; współczynnik szerokości  $\alpha = 0,4 \times 4,8 = 1,92$ .

Najw.  $M$  w środku belki z powodu obciążenia jezdni  $M_j$ :

$$M_j = \alpha \cdot \varphi \cdot 205,2 = 1,92 \cdot 0,8 \cdot 205,2 = 314,6 \text{ tm.}$$

Najw.  $M$  z powodu obciążenia chodników  $M_c$ :

$$M_c = \frac{1}{8} g l^2 = \frac{1}{8} \cdot 2 \times 0,5 \times 28^2 = 98,0 \text{ tm.}$$

$$\text{Najw. } M_p = M_j + M_c = 412,6 \text{ tm.}$$

Na jedną belkę  $M'_p = \frac{1}{2} M_p = 206,3 \text{ tm.}$

Moment w węźle odległym o  $x = \frac{2}{8} l = 0,25 l$  od lewej podpory  $M_{0,25} = M_j + M_c$ .

$M_j$  znajdziemy przez interpolację:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dla } x = 0,2 l \dots M'_2 = 133,3 \text{ tm} \\ \text{Dla } x = 0,3 l \dots M''_2 = 173,9 \text{ tm} \end{array} \right\} \text{stad } M_2 = \frac{M'_2 + M''_2}{2} = 153,6 \text{ tm.}$$

$$M_j = \alpha \cdot \varphi \cdot M_2 = 1,92 \cdot 0,8 \cdot 153,6 \text{ tm} = 236,0 \text{ tm}$$

$$M_c = \frac{1}{2} q x (l - x) = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2,0 \cdot 0,25 \cdot (1 - 0,25) \cdot 28^2 = 73,6 \text{ tm}$$

$$\underline{\underline{309,6 \text{ tm.}}}$$

Na jedną belkę  $M_{0,25} = \frac{1}{2} 309,6 = 154,8 \text{ tm.}$

3. Most kratowy żelazny I. klasy ( $\varphi = 1$ );  $l = 64,8 \text{ m}$ ,  $b = 5,4 \text{ m}$ ,  $a = 1 + 0,2 b = 2,08 \text{ m}$ . Odstęp belek głównych od osi do osi  $6,65 \text{ m}$ . Odstęp węzłów  $\frac{1}{12} l$ .

Znaleźć moment w odległości  $x = \frac{5}{12} l = 0,417 l$ .

Moment od obciążenia jezdni:  $M_j = \alpha \varphi M_2$ . Dla znalezienia  $M_2$  interpolujemy podwójnie.

$x : l$	$l =$	
	64	65
0,4	769,2	801,2
0,5	801,2	815,2
diff. 0,1	32,0	14,0
0,017	5,5	2,4
0,417	774,7	803,6

$l$	$M_2$
64	774,7
65	803,6
diff. 1	28,9
0,8	23,1

$$64,8 \quad | \quad = 774,7 + 23,1 = 797,8 \text{ tm.}$$

Moment od ciężaru ruchomego jezdni, przypadający na obie belki główne:  $2M = \alpha \varphi M_2 = 2,08 \cdot 1 \cdot 797,8 = 1660 \text{ tm.}$

Na jedną belkę:  $M_j = \frac{1}{2} 1660 = 830 \text{ tm.}$

4. Odstęp podłużnic mostu jak w przykładzie 3., stężonych płytą żelbetową, odstęp podłużnic  $c = 1,8 \text{ m}$ ; rozpiętość = odstępowi węzłów belki głównej  $l = 5,4 \text{ m}$ .

Bezwzględnie najw.  $M$ : abs.  $M_{\max} = \alpha \varphi M_2 = (0,4 \cdot 1,8) \cdot 1 \cdot M_2 = (0,4 \cdot 1,8) \cdot 2 \cdot 17,02 = 12,24 \text{ tm.}$

$M_2 = 17,02$  znajdujemy przez interpolację między  $M_t = 15,33 \text{ tm}$  dla  $l = 5 \text{ m}$ , oraz  $M_t = 19,55 \text{ tm}$  dla  $l = 6 \text{ m}$ .

5. Most, jak w przykładzie 2. Znaleźć najw. siłę poprzeczną w drugim przedziale.

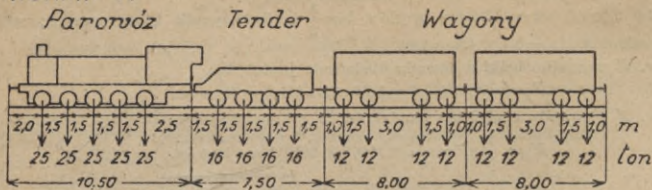
Dla  $x = \frac{2}{8} l = 0,25 l$  znajdujemy w tablicy II.:  $T_{II} = T_x + \Delta T_x = 18,24 + 0,5(22,29 - 18,24) = 20,27 \text{ t.}$

$$\text{Z równania (a): } \xi = \frac{l}{8} \cdot \frac{8-2}{8-1} = 3 \text{ m, } \quad \xi - a = 3,0 - 1,5 = 1,5.$$

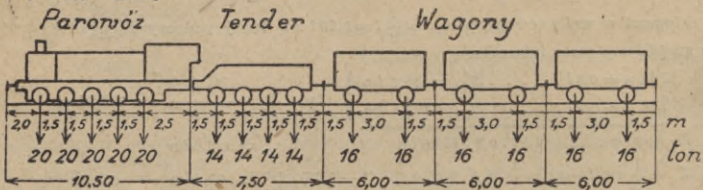
$$\text{Z równania (c): } \quad \Delta T = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot \frac{7}{28} \cdot 1,5^2 = 3,52 \text{ t,}$$

$$T_{II} = T_x + \Delta T = 20,27 + 3,52 = 23,79 \text{ t.}$$

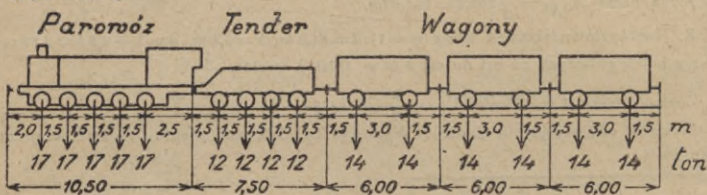
## NORMA A



## NORMA B i C



## NORMA D



Obciążenie jezdni i dźwigarów małych mostów do 5m. rozp.:

Norma A

Norma B

1 oś obciążająca



30



25

2 osi —"—



29

29



24

24

3 osi —"—



28

28

28



23

23

25

4 osi —"—



27

27

27

27



22

22

22

22

Dla normy C i D bez powiększenia nacisku kół parowozu.

Fig. 14.

$$\text{Wpływ jezdni: } T_j = a \varphi T_{II} = 1,92 \cdot 0,8 \cdot 23,79 = 36,4 \text{ t.}$$

$$\text{Wpływ chodników: } T_c = \frac{1}{2} q \frac{(l-x)^2}{l-\lambda} = \frac{1}{2} q \frac{n-m}{n-1} (l-x) = \frac{1,0}{2} \cdot \frac{6}{7} (28-7) = 9 \text{ t.}$$

$$\text{Zatem najw. } T \text{ w przedziale drugim z powodu ciężaru ruchomego } T_{\max} = T_j + T_c = 45,4 \text{ t. Na jedną belkę przypada } T_{\max} = \frac{1}{2} 45,4 = 22,7 \text{ t.}$$

Tablica III.

Bezwzględnie największe momenty (bez powiększonych ciężarów osi dla mniejszych rozpiętości) w *tm*.

$l$ w <i>m</i>	Norma A	Norma B i C	$l$ w <i>m</i>	Norma A	Norma B i C
1	6,250	5,000	26	1039,604	836,11
2	12,500	10,000	27	1114,035	897,32
3	21,094	16,875	28	1192,496	961,31
4	37,500	30,000	29	1270,964	1025,30
5	56,250	45,000	30	1349,433	1089,28
6	77,344	61,875	31	1431,6335	1155,95
7	106,250	85,00	32	1515,753	1222,93
8	137,500	110,00	33	1602,253	1293,92
9	168,750	135,00	34	1692,293	1367,76
10	200,000	160,00	35	1781,273	1442,21
11	231,250	185,00	36	1874,450	1518,71
12	262,500	210,00	37	1967,450	1598,42
13	293,750	235,00	38	2067,815	1680,35
14	328,662	262,94	39	2169,219	1762,22
15	370,263	296,21	40	2271,629	1844,23
16	415,149	332,12	41	2369,616	1926,18
17	464,6605	371,70	42	2472,4285	2009,99
18	516,3375	413,09	43	2573,0285	2096,00
19	575,625	460,52	44	2675,018	2181,99
20	637,500	510,00	45	2778,518	2267,99
21	699,375	559,52	46	2882,9225	2356,49
22	762,947	610,58	47	2989,348	2446,49
23	829,2475	663,93	48	3095,709	2536,48
24	895,873	717,95	49	3206,259	2626,45
25	965,007	775,74	50	3315,759	2716,65

b) Mosty kolejowe. Obciążeniem jest t. zw. pociąg normalny, składający się z jednego lub dwu parowozów z jaszczkami (tendrami), oraz szeregu wagonów. W Polsce pociągi normalne ustalone są rozporządzeniem Ministerstwa Kolei z dnia 10 marca 1923, Nr. V. 1939/22/23 w następujący sposób:

1. Norma A — pociąg ciężki normalny.
2. Norma B — pociąg lżejszy normalny.

W obu tych normach przyjmuje się dla podłużnic, poprzecznic i belek mostowych do 5 *m* powiększone ciśnienie osi parowozu (fig. 14).

3. Norma C — jak B, tylko bez zwiększenia ciśnień osi parowozu.

4. Norma D — lekka. W każdym poszczególnym wypadku M. K. wskaże, która norma ma być użyta. Dla mostów drewnianych (prowizorycznych) stosuje się zawsze normę D.

Dla kolei dojazdowych normalno- i wąskotorowych należy przy obliczaniu mostów przyjmować obciążenie ruchome w zależności od taboru, jaki będzie na danej linii.

Dla uzyskania najniekorzystniejszego obciążenia można przyjąć ewent. pociąg rozdzielony na (najwyżej) dwie części, przy czem tendra nie należy odłączać od parowozu. Mosty dwutorowe oblicza się dla najniekorzystniejszego obciążenia obu torów. Rozróżnia się cztery schematy ustawienia pociągu

zależne od umieszczenia parowozów: schemat I.: dwa parowozy z tendrami, jeden za drugim; schemat II.: dwa parowozy z tendrami, kominami do siebie; schemat III.: dwa parowozy, kominami do siebie, pierwszy bez tendra; schemat IV.: dwa parowozy z tendrami, oba tyłem (fig. 15). Największe

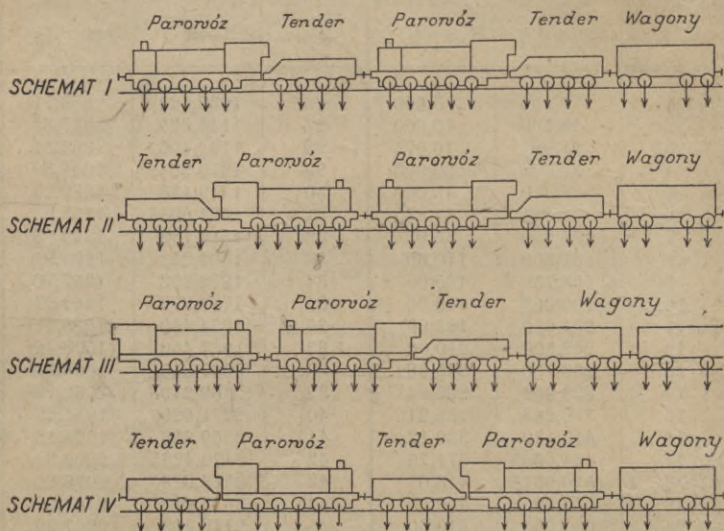


Fig. 15.

oddziaływania dla belek wolno podpartych zazwyczaj daje schemat III.; największe siły poprzeczne schemat I.; największe momenty schemat II.

Tablice pomocnicze do obliczania największych sił poprzecznych i momentów zgięcia dla polskich norm obciążenia mostów kolejowych podane są na str. 765, 767 i nast. (tablice III., IV., V., VI.).

Przykład 6.

Most o rozpiętości 40 m. Belka wolno podparta. Norma A.

Oddziaływanie A otrzymujemy, posługując się tablicą IV i schematem III. (fig. 16) ze wzoru:

$$\max A = \frac{M_n}{L} = \frac{M_{21} + \frac{\sum P(L-l)}{1}}{L} = \frac{9525 + 398 \cdot 0,5}{40} = 243,10 \text{ t.}$$

Czyli na jeden dźwigar przy jednotorowym moście:  $\max A = \frac{243,10}{2} = 121,55 \text{ t.}$

Najw. siłę poprzeczną dla przekroju w odległości  $x=10 \text{ m}$  od lewej podpory otrzyma się przy ustawieniu na prześle pociągu według schematu I. (por. fig. 17):

$$\max T_c = \frac{M_n}{L} = \frac{M_{16} + \frac{\sum P a}{1}}{L} = \frac{5503 + 346 \cdot 0,5}{40} = 141,90 \text{ t.}$$

Czyli na jeden dźwigar  $\max T_c^1 = \frac{141,90}{2} = 70,95 \text{ t.}$

Największy moment gnący w środku prześła: Nad tym przekrojem i w pobliżu niego należy ustawić ciężary największe (schemat II.). Oś miarodajną, tj. tę, którą należy ustawić nad przekrojem, ażeby otrzymać największy moment gnący, określamy w sposób następujący: na prześle o rozpiętości  $L=40 \text{ m}$  można ustawić, według tablicy II., osi  $n=21$ ; miarodajną będzie ta oś  $x$ , która czyni sumę nacisków (od pierwszego do  $x$ )



$\sum_1^x P$  większą od połowy sumy wszystkich nacisków  $n$ , znajdujących się na przęśle,

czyli  $\sum_1^x P > \frac{1}{2} \sum_1^n P$ .

Ośią najbardziej zbliżoną do rozpatrywanego przekroju, czyniącą zadość powyższemu warunkowi, jest oś 10., ponieważ

$\sum_1^{x=10} P = 214 t$ , jest większa od  $\frac{1}{2} \sum_1^{n=21} P = \frac{414}{2} = 207 t$ .

Ustawivszy 10-tą oś nad środkiem belki, widzimy, że oś 21. zesła z przęsta, wobec czego czynność powyższą musimy powtórzyć dla  $n=20$ :

$\frac{1}{2} \sum_1^{n=20} P = \frac{402}{2} = 201 t$ ;  $\sum_1^{x=10} P = 214 t$ .

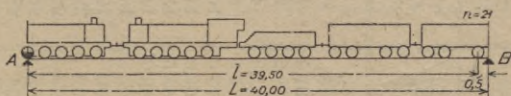


Fig. 16.

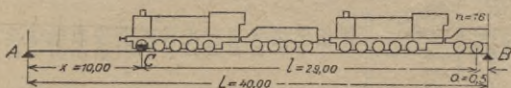


Fig. 17.

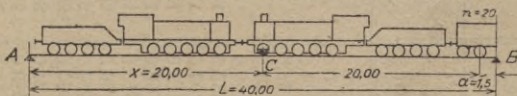


Fig. 18.

Pierwszą ośią, dającą sumę nacisków większą od 201 t, jest oś 10-ta. Rozkład ciężarów por. fig. 18.

Jeżeli powyższe ustawienie pociągu odpowiada największemu momentowi gnącemu, to przy przesunięciu tego układu ciężarów w lewo i w prawo o jakąś małą odległość „ $dx$ ”, musimy otrzymać warunki, wyrażone następującymi dwiema nierównościami:

1.  $\frac{\sum_1^n P}{\sum_1^x P} < \frac{L}{x}$ , czyli dla powyższego przykładu:

$\frac{\sum_1^{20} P}{\sum_1^{10} P} < \frac{40}{20}$ ;  $\frac{402}{214} = 1,878 < \frac{40}{20} = 2$ .

2.  $\frac{\sum_1^n P}{\sum_1^{x-1} P} > \frac{L}{x}$ , czyli  $\frac{\sum_1^{20} P}{\sum_1^9 P} > \frac{40}{20}$ ;  $\frac{402}{189} = 2,127 > \frac{40}{20} = 2$ .

Na podstawie powyższego twierdzimy, że taki układ ciężarów daje największy moment gnący dla rozpatrywanego przekroju w punkcie C, który to moment obliczymy ze wzoru:  $\max M_C = Ax - M_x$ , gdzie A jest oddziaływaniem podpory A, zaś  $M_x$  sumą momentów gnących względem punktu C, wszystkich ciężarów, znajdujących się między A i C.

Tablica IV.  
Norma obciążenia „A”.

n	Schemat I.				Schemat II.				Schemat III.				Schemat IV.			
	$l_m$	$\sum_{i=1}^n P_t$	$M_{tm}$		$l_m$	$\sum_{i=1}^n P_t$	$M_{tm}$		$l_m$	$\sum_{i=1}^n P_t$	$M_{tm}$		$l_m$	$\sum_{i=1}^n P_t$	$M_{tm}$	
1	0	25	0		0	16	0		0	25	0		0	16	0	
2	1,5	50	37,5		1,5	32	24,0		1,5	50	37,5		1,5	32	24,0	
3	3,0	75	112,5		3,0	48	72,0		3,0	75	112,5		3,0	48	72,0	
4	4,5	100	225,4		4,5	64	144,0		4,5	100	225,0		4,5	64	144,0	
5	6,0	125	375,0		6,0	89	400,0		6,0	125	375,0		6,0	89	400,0	
6	10,0	141	875,0		10,0	114	533,5		10,0	150	875,0		10,0	114	533,5	
7	11,5	157	1086,5		11,5	139	704,5		11,5	175	1100,0		11,5	139	704,5	
8	13,0	173	1322,0		13,0	164	913,0		13,0	200	1362,5		13,0	164	913,0	
9	14,5	189	1581,5		14,5	189	1159,0		14,5	225	1662,5		14,5	189	1159,0	
10	18,0	214	2243,0		18,0	214	1915,0		16,0	250	2000		18,0	205	1820,5	
11	19,5	239	2564,0		20,0	239	2236,0		20,0	266	3000		19,5	221	2128,0	
12	21,0	264	2922,5		21,5	264	2594,5		21,5	282	3399		21,0	237	2459,5	
13	22,5	289	3318,5		23,0	289	2990,5		23,0	298	3822		22,5	253	2815,0	
14	25,0	314	3752		24,5	314	3424,0		24,5	314	4269		26,5	278	3827,0	
15	28,0	330	5008		28,5	330	4680,0		27,0	326	5054		28,0	303	4244,0	
16	29,5	346	5503		30,0	346	5175,0		28,5	338	5543		29,5	328	4698,5	
17	31,0	362	6022		31,5	362	5694,5		31,5	350	6557		31,0	353	5190,5	
18	32,5	378	6565		33,0	378	6237		33,0	362	7082		32,5	378	5720	
19	35,0	390	7510		35,5	390	7182		35,0	374	7806		35,5	390	6854	
20	36,5	402	8095		37,0	402	7767		36,5	386	8367		37,0	402	7439	

21	39,5	414	9301	40,0	414	8973	39,5	398	9525	40,0	414	8245	21
22	41,0	426	9922	41,5	426	9594	41,0	410	10122	41,5	426	9266	22
23	43,0	438	10774	43,5	438	10446	43,0	422	10942	43,5	438	10118	23
24	44,5	450	11431	45,0	450	11103	44,5	434	11575	45,0	450	10775	24
25	47,5	462	12781	48,0	462	12453	47,5	446	12877	48,0	462	12125	25
26	49,0	474	13474	49,5	474	13146	49,0	458	13546	49,5	474	12818	26
27	51,0	486	14422	51,5	486	14094	51,0	470	14462	51,5	486	13766	27
28	52,5	498	15151	53,0	498	14823	52,5	482	15167	53,0	498	14495	28
29	55,5	510	16645	56,0	510	16317	55,5	494	16613	56,0	510	15989	29
30	57,0	522	17410	57,5	522	17082	57,0	506	17354	57,5	522	16754	30
31	59,0	534	18454	59,5	534	18126	59,0	518	18366	59,5	534	17798	31
32	60,5	546	19255	61,0	546	18927	60,5	530	19143	61,0	546	18599	32
33	63,5	558	20893	64,0	558	20565	63,5	542	20733	64,0	558	20237	33
34	65,0	570	21730	65,5	570	21402	65,0	554	21546	65,5	570	21074	34
35	67,0	582	22870	67,5	582	22542	67,0	566	22654	67,5	582	22214	35
36	68,5	594	23743	69,0	594	23415	68,5	578	23503	69,0	594	23087	36
37	71,5	606	25525	72,0	606	25197	71,5	590	25237	72,0	606	24869	37
38	73,0	618	26434	73,5	618	26106	73,0	602	26122	73,5	618	25778	38
39	75,0	630	27670	75,5	630	27342	75,0	614	27326	75,5	630	27014	39
40	76,5	642	28615	77,0	642	28287	76,5	626	28247	77,0	642	27959	40
41	79,5	654	30541	80,0	654	30213	79,5	638	30125	80,0	654	29885	41
42	81,0	666	31522	81,5	666	31194	81,0	650	31082	81,5	666	30866	42
43	83,0	678	32854	83,5	678	32526	83,0	662	32382	83,5	678	32198	43
44	84,5	690	33871	85,0	690	33543	84,5	674	33375	85,0	690	33215	44
45	87,5	702	35941	88,0	702	35613	87,5	686	35397	88,0	702	35285	45
46	89,0	714	36994	89,5	714	36666	89,0	698	36426	89,5	714	36338	46
47	91,0	726	38422	91,5	726	38094	91,0	710	37822	91,5	726	37766	47
48	92,5	738	39511	93,0	738	39183	92,5	722	38887	93,0	738	38855	48
49	95,5	750	41725	96,0	750	41397	95,5	734	41053	96,0	750	51069	49
50	97,0	762	42850	97,5	762	42522	97,0	746	42154	97,5	762	42194	50
51	99,0	774	44374	99,5	774	44046	99,0	758	43646	99,5	774	43718	51
52	100,5	786	45535	101,0	786	45207	100,5	770	44783	101,0	786	44879	52

Tablica V.

Norma obciążenia „B” i „C”.

n	Schemat I.			Schemat II.			Schemat III.			Schemat IV.			n
	$l_m$	$\sum_1^n P_t$	$M_n$ $tm$	$l_m$	$\sum_1^n P_t$	$M_n$ $tm$	$l_m$	$\sum_1^n P_t$	$M_n$ $tm$	$l_m$	$\sum_1^n P_t$	$M_n$ $tm$	
1	0	20	0	0	14	0	0	20	0	0	14	0	1
2	1,5	40	30	1,5	28	21	1,5	40	30	1,5	28	21	2
3	3,0	60	90	3,0	42	63	3,0	60	90	3,0	42	63	3
4	4,5	80	180	4,5	56	126	4,5	80	180	4,5	56	126	4
5	6,0	100	300	8,5	76	350	6,0	100	300	8,5	76	350	5
6	10,0	114	700	10,0	96	464	10,0	120	700	10,0	96	464	6
7	11,5	128	871	11,5	116	608	11,5	140	880	11,5	116	608	7
8	13,0	142	1063	13,0	136	782	13,0	160	1090	13,0	136	782	8
9	14,5	156	1276	14,5	156	986	14,5	180	1330	14,5	156	986	9
10	18,0	176	1822	18,5	176	1610	16,0	200	1600	18,0	170	1532	10
11	19,5	196	2086	20,0	196	1874	20,0	214	2400	19,5	184	1787	11
12	21,0	216	2380	21,5	216	2168	21,5	228	2721	21,0	198	2063	12
13	22,5	236	2704	23,0	236	2492	23,0	242	3063	22,5	212	2360	13
14	24,0	256	3058	24,5	256	2846	24,5	256	3426	26,5	232	3208	14
15	28,0	270	4082	28,5	270	3870	27,5	272	4194	28,0	252	3556	15
16	29,5	284	4487	30,0	284	4275	30,5	288	5010	29,5	272	3934	16
17	31,0	298	4913	31,5	298	4701	33,5	304	5874	31,0	292	4342	17
18	32,5	312	5360	33,0	312	5148	36,5	320	6786	32,5	312	4780	18
19	35,5	328	6296	36,0	328	6084	39,5	336	7746	36,0	328	5872	19
20	38,5	344	7280	39,0	344	7068	42,5	352	8754	39,0	344	6856	20
21	41,5	360	8312	42,0	360	8100	45,5	368	9810	42,0	360	7888	21
22	44,5	376	9392	45,0	376	9180	48,5	384	10914	45,0	376	8968	22
23	47,5	392	10520	48,0	392	10308	51,5	400	12066	48,0	392	10096	23
24	50,5	408	11696	51,0	408	11484	54,5	416	13266	51,0	408	11272	24
25	53,5	424	12920	54,0	424	12708	57,5	432	14514	54,0	424	12496	25
26	56,5	440	14192	57,0	440	13980	60,5	448	15810	57,0	440	13768	26
27	59,5	456	15512	60,0	456	15300	63,5	464	17154	60,0	456	15088	27
28	62,5	472	16880	63,0	472	16668	66,5	480	18546	63,0	472	16456	28
29	65,5	488	18296	66,0	488	18084	69,5	496	19986	66,0	488	17872	29
30	68,5	504	19760	69,0	504	19548	72,5	512	21474	69,0	504	19336	30
31	71,5	520	21272	72,0	520	21060	75,5	528	23010	72,0	520	20848	31
32	74,5	536	22832	75,0	536	22620	78,5	544	24594	75,0	536	22408	32
33	77,5	552	24440	78,0	552	24228	81,5	560	26226	78,0	552	24016	33
34	80,5	568	26096	81,0	568	25884	84,5	576	27906	81,0	568	25672	34
35	83,5	584	27800	84,0	584	27588	87,5	592	29634	84,0	584	27376	35
36	86,5	600	29552	87,0	600	29340	90,5	608	31410	87,0	600	29128	36
37	89,5	616	31352	90,0	616	31140	93,5	624	33234	90,0	616	30928	37
38	92,5	632	33200	93,0	632	32988	96,5	640	35106	93,0	632	32776	38
39	95,5	648	35096	96,0	648	34884	99,5	656	37026	93,0	648	34672	39
40	98,5	664	37040	99,0	664	36828	102,5	672	38994	99,0	664	36616	40
41	101,5	680	39032	102,0	680	38820	105,5	688	41010	102,0	680	38608	41

Tablica VI.

Norma obciążenia „D<sup>4</sup>”.

n	Schemat I.			Schemat II.			Schemat III.			Schemat IV.			n
	$l_m$	$\sum_1^n P_t$	$M_{tm}$	$l_m$	$\sum_1^n P_t$	$M_{tm}$	$l_m$	$\sum_1^n P_t$	$M_{tm}$	$l_m$	$\sum_1^n P_t$	$M_{tm}$	
1	0	17	0	0	12	0	0	17	0	0	12	0	1
2	1,5	34	25,5	1,5	24	18	1,5	34	25,5	1,5	24	18	2
3	3,0	51	76,5	3,0	36	54	3,0	51	76,5	3,0	36	54	3
4	4,5	68	153	4,5	48	108	4,5	68	153	4,5	48	108	4
5	6,0	85	255	6,0	60	180	6,0	85	255	6,0	60	180	5
6	10,0	97	595	10,0	82	397,5	10,0	102	595	10,0	82	397,5	6
7	11,5	109	740,5	11,5	99	520,5	11,5	119	748	11,5	99	520,5	7
8	13,0	121	904	13,0	116	669	13,0	136	926,5	13,0	116	669	8
9	14,5	133	1085,5	14,5	133	843	14,5	153	1130,5	14,5	133	843	9
10	18,0	150	1551	18,5	150	1375	16,0	170	1360	18,0	145	1308,5	10
11	19,5	167	1776	20,0	167	1600	20,0	182	2040	19,5	157	1526	11
12	21,0	184	2026,5	21,5	184	1850,5	21,5	194	2313	21,0	169	1761,5	12
13	22,5	201	2302,5	23,0	201	2126,5	23,0	206	2604	22,5	181	2015	13
14	24,0	218	2604	24,5	218	2428	24,5	218	2913	26,5	198	2739	14
15	28,0	230	3476	28,5	230	3300	27,5	232	3567	28,0	215	3036	15
16	29,5	242	3821	30,0	242	3645	30,5	246	4263	29,5	232	3358,5	16
17	31,0	254	4184	31,5	254	4008	33,5	260	5001	31,0	249	3706,5	17
18	32,5	266	4565	33,0	266	4389	36,5	274	5781	32,5	266	4080	18
19	35,5	280	5363	36,0	280	5187	39,5	288	6603	36,0	280	5011	19
20	38,5	294	6203	39,0	294	6027	42,5	302	7467	39,0	294	5851	20
21	41,5	308	7085	42,0	308	6909	45,5	316	8373	42,0	308	6733	21
22	44,5	322	8009	45,0	322	7833	48,5	330	9321	45,0	322	7657	22
23	47,5	336	8975	48,0	336	8799	51,5	344	10311	48,0	336	8623	23
24	50,5	350	9983	51,0	350	9807	54,5	358	11343	51,0	350	9631	24
25	53,5	364	11033	54,0	364	10857	57,5	372	12417	54,0	364	10681	25
26	56,5	378	12125	57,0	378	11949	60,5	386	13533	57,0	378	11773	26
27	59,5	392	13259	60,0	392	13083	63,5	400	14691	60,0	392	12907	27
28	62,5	406	14435	63,0	406	14259	66,5	414	15891	63,0	406	14083	28
29	65,5	420	15653	66,0	420	15477	69,5	428	17133	66,0	420	15301	29
30	68,5	434	16913	69,0	434	16737	72,5	442	18417	69,0	434	16561	30
31	71,5	448	18215	72,0	448	18039	75,5	456	19743	72,0	448	17863	31
32	74,5	462	19559	75,0	462	19383	78,5	470	21111	75,0	462	19207	32
33	77,5	476	20945	78,0	476	20769	81,5	484	22521	78,0	476	20593	33
34	80,5	490	22373	81,0	490	22197	84,5	498	23973	81,0	490	22021	34
35	83,5	504	23843	84,0	504	23667	87,5	512	25467	84,0	504	23491	35
36	86,5	518	25355	87,0	518	25179	90,5	526	27003	87,0	518	25003	36
37	89,5	532	26909	90,0	532	26733	93,5	540	28581	90,0	532	26557	37
38	92,5	546	28505	93,0	546	28329	96,5	554	30201	93,0	546	28153	38
39	95,5	560	30143	96,0	560	29967	99,5	568	31863	96,0	560	29791	39
40	98,5	574	31823	99,0	574	31647	102,5	582	33567	99,0	574	31471	40
41	101,5	488	33545	102,0	588	33369	105,5	596	35313	102,0	588	33193	41

Posługując się tablicą IV. otrzymamy:  $\max M_c = \left[ \frac{M_{20} + \frac{\sum P \cdot a}{1}}{L} \right] \cdot x$

$$M_{10} = \left[ \frac{7767 + 402 \cdot 1,6}{40} \right] \cdot 20 - 1915 = 4185 - 1915 = 2270 \text{ tm.}$$

Na jeden dźwigar  $\max M_c = \frac{2270}{2} = 1135 \text{ tm.}$

Największy moment gnący w przekroju, odległym od lewej podpory o  $x=15 \text{ m}$ , wywoła pociąg, zgrupowany według schematu II. Po zrobieniu kilku prób znajdujemy, że osią miarodajną będzie oś 8., przy ustawieniu której nad przekrojem rozpatrywanym na przęśle wchodzi  $n=20$  osi (por. fig. 19).

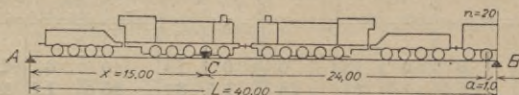


Fig. 19.

Oś 8. czyni zadość warunkom:

$$1. \quad \frac{\frac{\sum P}{1}}{\frac{x}{1}} < \frac{L}{x}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\frac{20}{\sum P}}{8} = \frac{402}{164} = 2,45 < \frac{40}{15} = 2,67.$$

$$2. \quad \frac{\frac{\sum P}{1}}{\frac{x-1}{1}} > \frac{L}{x}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\frac{20}{\sum P}}{7} = \frac{402}{139} = 2,89 > \frac{40}{15} = 2,67.$$

Największy moment obliczymy, posługując się tablicą II. ze wzoru:

$$\max M_c = Ax - M_x = \left[ \frac{M_{20} + \frac{\sum P \cdot a}{1}}{L} \right] \cdot x - M_8 = \left[ \frac{7767 + 402 \times 1,6}{40} \right] \cdot 15 - 913 = 2150,375 \text{ tm.}$$

Na jeden dźwigar  $\max M_c^1 = \frac{2150,375}{2} = 1075,1875 \text{ tm.}$

Powyższe tablice mają zastosowanie również przy obliczaniu sił osiowych w prętach kratownic zapomocą linii wpływowych.

Jako przykład rozpatrzmy obliczenie siły osiowej w przekątni  $D_2$  kratownicy o rozpiętości teoretycznej  $L=40 \text{ m}$  (fig. 20).

Największą rozciągającą siłę osiową w skosie  $D_2$  otrzymamy przy ustawieniu na dodatniej części linii wpływowej pociągu według schematu I., w ten sposób, że drugie koło parowozu stanie w punkcie C, gdyż w tym wypadku

$$\frac{\frac{\sum P}{1}}{\frac{x}{1}} < \frac{L_1}{x}; \quad \frac{362}{50} = 7,24 < \frac{34,286}{4,286} = 7,9995,$$

oraz  $\frac{\frac{\sum P}{1}}{\frac{x-1}{1}} > \frac{L_1}{x}; \quad \frac{362}{25} = 14,48 > 7,9995$

Ażeby otrzymać siłę osiową w skosie  $D_2$  zapomocą linii wpływowej, należałoby każdy nacisk osi  $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$  pomnożyć przez odpowiednią rzędną  $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$  linii wpływowej, czyli

$$D_2 = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots + P_n y_n - P_1 z,$$

ponieważ  $y_1 = b_1 \operatorname{tg} \alpha, y_2 = b_2 \operatorname{tg} \alpha \dots y_n = b_n \operatorname{tg} \alpha,$

przeto  $D_2 = P_1 b_1 \operatorname{tg} \alpha + P_2 b_2 \operatorname{tg} \alpha + P_3 b_3 \operatorname{tg} \alpha + \dots + P_n b_n \operatorname{tg} \alpha - P_1 z =$   
 $= (P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3 + \dots + P_n b_n) \operatorname{tg} \alpha - P_1 z.$

Odcinek  $z = e (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = 1,5 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta),$  przyczem  $e =$  odstęp osi porowozu.

Ostatecznie otrzymamy:

$$D_2 = (P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3 + \dots + P_n b_n) \operatorname{tg} \alpha - P_1 e (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) =$$

$$= M_B \operatorname{tg} \alpha - M_C (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

W równaniu powyższem  $M_B =$  moment wszystkich ciężarów, ustawionych na prześle względem podpory  $B, M_C =$  moment ciężarów, ustawionych przed punktem  $C$  względem tegoż punktu. Obydwa te momenty otrzymujemy z tablic.

W danym przykładzie:

$$D_2 = (6022 + 362 \cdot 0,5) \operatorname{tg} \alpha - 37,5 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = 6203 \operatorname{tg} \alpha - 37,5 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

**Obciążenie chodników.** Przy obliczaniu części ustrojowych chodników, przeznaczonych tylko dla służby kolejowej, należy przyjmować obciążenie tłumem ludzi

$p = 450 \text{ kg/m}^2;$  obciążenia tego nie uwzględnia się przy obliczaniu innych części mostu. O ile służą one i dla ruchu publicznego, należy przyjmować  $p = 500 \text{ kg/m}^2.$

Poręcze oblicza się na siłę poziomą  $50 \text{ kg/m b.}$  na wysokości pochwytu poręczy, względnie  $100 \text{ kg/m b.}$  jeżeli chodniki służą i dla ruchu publicznego.

**Wpływ wstrząśnień.** Ruch ciężarów na moście wywołuje wstrząśnienia, zwiększające naprężenia. Wpływ ten nie da się zupełnie dokładnie określić. Działają tu bowiem rozliczne wpływy, przedewszystkiem zaś: 1. nierówność pomostu; jest ona większa na mostach drogowych, jednakowoż pojazdy poruszają się tu wolniej; na mostach kolejowych odgrywają główną rolę styki szyn, które wobec znacznej szybkości pociągów wywołują znaczne wstrząśnienie; 2. drgania, powstające wskutek tego, że szybko poruszające się ciężary wywołują w belkach głównych szybko zmieniające się naprężenia; 3. zmiana nacisku pędnych osi lokomotyw. Te i inne wpływy, sumując się, powodują zwiększenie naprężeń, które należałoby uwzględnić przy wszelkiego rodzaju obciążeniach mostowych. Najprościej to zrobić, mnożąc obciążenie przez współczynnik dynamiczny  $\mu > 1,$  lub też zmniejszając odpowiednio naprężenia. W projekcie przepisów żelbetowych z r. 1919 proponowali prof. Huber i Thullie przyjąć dla obciążeń drogowych  $\mu = 1,3,$  dla kolejowych  $1,7.$  W przepisach dotyczących mostów drogowych przyjęto sposób drugi; zmniejszając naprężenia i uzależniając je od rozpiętości. Co do mostów kolejowych, por. dział: „Mosty żelazne“.

**3. Parcie wiatru.** a) Mosty drogowe. Parcie wiatru przyjmuje się jako siłę poziomą jednostajnie rozłożoną o natężeniu  $250 \text{ kg/m}^2$  powierzchni bocznej mostu nieobciążonego, względnie  $100 \text{ kg/m}^2$  mostu obciążonego ciężarem ruchomym, uwzględniając przy obliczeniu przekroju

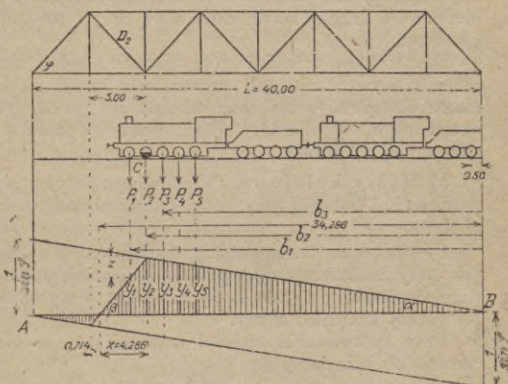


Fig. 20.

i przy badaniu stałości mostu niekorzystniejszy z obu wypadków. Jako powierzchnię boczną, na którą wiatr działa, przyjąć należy:

1. przy moście nieobciążonym; przy dźwigarach pełnościennych (np. blachownicach) rzeczywistą powierzchnię boczną dźwigara głównego i pomocniczego; przy dźwigarach kratowych zaś prócz powierzchni pierwszej kraty, leżącej od strony wiatru, także i część powierzchni drugiej kraty, odpowiadającą stosunkowi niewypełnionej powierzchni pierwszego dźwigara do całkowitej powierzchni tegoż. Jeżeli zatem całkowita powierzchnia dźwigara (fig. 21; pełny prostokąt  $a b c d$ ) wynosi  $F$ , zaś część jej narażona na parcie wiatru  $F'_w = a F$  (część zakreskowana), to

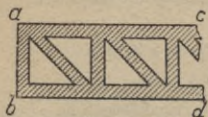


Fig. 21.

z dźwigara drugiego przyjąć należy powierzchnię całkowitą, pomnożoną przez współczynnik  $a(1 - a)$ , a więc powierzchnię  $Fa(1 - a)$ .

2. Przy moście obciążonym przyjmuje się jako powierzchnię boczną ciężarów ruchomych (wozów i pieszych) pełny postępujący prostokąt o wysokości 2 m ponad jezdnią w najniekorzystniejszym położeniu. Wpływ kraty pierwszej i drugiej uwzględnia się tylko w częściach, sięgających poza ten prostokąt.

Dla mostów o jezdni górną należy zbadać stałość (stateczność) mostu przeciw wywróceniu lub przesunięciu przez nacisk wiatru, a to tak dla mostu obciążonego ciężarem jednostajnie rozłożonym  $300 \text{ kg/m}^2$ , jakoteż nieobciążonego. W obu wypadkach pewność przeciw wywrotowi powinna być co najmniej 1,5-krotna.

b) Mosty kolejowe. Parcie wiatru przyjmuje się w wielkości  $250 \text{ kg/m}^2$  powierzchni bocznej przy moście nieobciążonym, zaś  $150 \text{ kg/m}^2$  przy moście obciążonym.

Powierzchnię boczną mostu, wystawioną na działanie wiatru, określa się jak przy mostach drogowych. Jako powierzchnię pociągu, narażoną na parcie wiatru, przyjmuje się prostokąt o wysokości 3,5 m poruszający się po górnej krawędzi szyny.

Przy sprawdzaniu stałości (stateczności) mostu należy uwzględnić trzy rodzaje obciążenia:

1. Most nieobciążony przy ciśnieniu wiatru  $w = 250 \text{ kg/m}^2$  (zwykle najniekorzystniejszy wypadek na przesunięcie).

2. Most obciążony pociągiem z próżnych wagonów ciężarowych o wadze 1 t/m b. pociągu, przy  $w = 150 \text{ kg/m}^2$ .

3. Most obciążony pociągiem z wagonów ciężarowych niepełnie nalożonych o wadze (zładunkiem) 2,2 t/m b. pociągu, przy sile wiatru  $250 \text{ kg/m}^2$  (z reguły najniekorzystniejszy wypadek na wywrócenie).

Jeżeli współczynnik pewności na wywrócenie jest mniejszy niż 1,5, albo współczynnik pewności na przesunięcie mniejszy niż 1,25, to należy dźwigary zakotwić, lub zapewnić stateczność konstrukcji w inny sposób.

4. Siła hamowania działa w osi toru; przyjmować ją należy równą  $\frac{1}{10}$  obciążenia ruchomego (współczynnik tarcia 0,2; jednak przyjmuje się, że hamowana jest tylko połowa osi). Wystarczy je uwzględniać przy mostach w spadku  $> 10\text{‰}$ , oraz przy mostach na stacjach lub w ich pobliżu.

5. Wpływ bocznych wahań i bocznych ciśnień taboru na stężenia poziome, umieszczone między podłużnicami, uwzględnia się jako siły poziome o wielkości 0,05 ciśnienia osi parowozu. Punkty zaczepienia ich przyjmuje się na wysokości górnej krawędzi szyny.

6. Siła odśrodkowa. Przy obliczaniu mostów w łuku uwzględnia się wpływ siły odśrodkowej, którą przyjmujemy w wielkości:



$$C_t = \frac{P \cdot v^2 \left( \frac{1000}{60 \cdot 60} \right)^2}{9,81 \rho} = \frac{P v^2}{127 \rho},$$

gdzie  $v$  = szybkość pociągu w *km/godz.*;  $\rho$  = promień krzywizny w metrach;  $P$  = ciśnienie na oś w tonnach. Punkt zaczepienia siły odśrodkowej przyjmuje się w środku ciężkości taboru, na wysokości 2,0 *m* nad górną krawędzią szyny.

7. Tarcie. Rozporządzenie Ministerstwa Kolei poleca przyjmować następujące współczynniki tarcia w łożyskach metalowych: przy ślizganiu (łożyska przesurowe) 0,2; przy toczeniu się (łożyska wałkowe) 0,03.

8. Wpływ zmian ciepłoty. Zmiany temperatury przyjmować należy dla mostów żelaznych od  $-35^{\circ}\text{C}$  do  $+45^{\circ}\text{C}$ , współczynnik rozszerzalności 0,000012 na  $1^{\circ}\text{C}$ ,

dla mostów kamiennych  $l > 20\text{ m}$  od  $-10^{\circ}\text{C}$  do  $+10^{\circ}\text{C}$ , współczynnik rozszerzalności 0,000007 na  $1^{\circ}\text{C}$ ,

dla mostów betonowych i żelbetowych od  $-15^{\circ}\text{C}$  do  $+15^{\circ}\text{C}$ , współczynnik rozszerzalności 0,00001 na  $1^{\circ}\text{C}$ ,

względnie  $-10^{\circ}\text{C}$  do  $+10^{\circ}\text{C}$ , o ile każdy wymiar przekroju jest większy od 70 *cm*, albo jeżeli konstrukcja chroniona jest dostatecznie przez inne materiały.

Innych wpływów przepisy nie przewidują. O ileby należało wprowadzić je w obliczenie, należy to zrobić wedle ogólnie przyjętych norm.

#### LITERATURA.

- Przepisy o budowie i utrzymaniu mostów drogowych. Warszawa 1926.  
 Dziennik urzędowy Ministerstwa Kolei Żelaznych Nr. 11 z d. 17 maja 1923.  
 Thullie: Podręcznik teorii mostów. Cz. 1. Tom I. Lwów 1904.  
 Pszenicki: Kurs budowy mostów. Aut. Warszawa 1925/1926.  
 Bryła: O przekroczeniach większych dróg wodnych. Lwów 1913.  
 Bryła: Największe momenty i siły poprzeczne mostów drogowych. Warszawa 1926.  
 Séjourné: Grandes Voûtes. Bourges. 1913—1916.  
 Arago: Ponts en bois et en métal. Rouen 1911.  
 Waddell: Bridge engineering. N. York 1916.  
 Waddell: Economics of bridgework. N. York 1921.  
 Handbuch der Ingenieurwissenschaften. II. Teil. I. Band.  
 Melan: Der Brückenbau. I. Band. Lipsk i Wiedeń 1922.  
 Schönhofer: Die wirtschaftlich günstigste Anordnung einer Brückenanlage. Berlin 1915.  
 Nikolaj: Mosty.

## Mosty drewniane.

Napisał

inż. dr. Stefan Bryła,

profesor politechniki, Lwów.

**Zalety:** materiał tani i łatwy do uzyskania; łatwość wykonania (bez specjalnych urządzeń i bez kwalifikowanego robotnika); łatwość wymiany i naprawy; szybkość wykonania; mały ciężar własny.

**Wady:** mało wytrzymały materiał, więc niewielkie rozpiętości: dla belkowych do kilkunastu metrów, dla kratowych zw. do 40 *m*, wyjątkowo więcej; mała odporność na wpływy atmosferyczne, więc krótki czas trwania; duże niebezpieczeństwo pożaru; trudne połączenia na rozciąganie (w belkach kratowych).

Używane zatem: dla większych obciążeń (koleje, drogi I. i II. kl.) zw. jako mosty tymczasowe; — jako stałe zaś dla dróg III. kl. lub tam, gdzie małe środki finansowe (j. np. obecnie w Polsce); przy budowie mostów drewnia-

nych na dłuższy czas należy w miarę możliwości zastosować stałe (kamienne, betonowe) filary i przyczółki, założone tak, by mogły potem posłużyć dla mostu stałego; najłatwiej bowiem te części drewniane mostu ulegają zniszczeniu. O ile przebudowa mostu drewnianego nie jest przewidywana po 8—12 latach, należy stosować do jarzm dębiny.

**Materiał.** Najlepszy dąb, ale drogi, dlatego zw. drzewo miękkie: sosna, świerk, jodła, olcha (na pale). M. R. P. poleca używanie drzewa miękkiego w jarzmach i przyczółkach tylko przy mostach tymczasowych. Na dylinę używana dębina, buczyna. Drzewo powinno być suche, zdrowe, proste bez seków i nie popękane. Dla przyspieszenia wyschnięcia najlepiej ścinać je w zimie; drzewo ścięte w porze innej należy po odplywie pierwszych soków roślinnych odrzec z kory i pozostawić w miejscu przewiewnym i zakrytem.

Używane są: a) okrągłaki, b) belki ofisowe, c) krawędziaki. Okrągłaki są tańsze i wytrzymalsze, natomiast trudniej znaleźć w nich wadę, trudniejsze odprowadzenie wody, trudniejsze połączenia, gorsze impregnowanie; dziś jednak używa się ich najczęściej, ściosując je tylko tam, gdzie to potrzebne. Największe długości do 18—20 m, przy średnicy w cieńszym końcu 25—30 cm.

Do połączeń używane są: śruby, w podrzędnych częściach gwoździe, dalej klamry, opaski, rzadziej inne łączniki. Pod śrubami umieszcza się podkładki o gr. 4—8 mm i więcej dla zmniejszenia naprężeń. Długie trzpienie mają na obu końcach gwint i naśrubek. Gwoździe kute  $l = 12—30$  cm, zw. = 2—2,5-krotnej grubości części łączonych, gr. 0,05 l; do cienkich desek używane też gwoździe druciane  $l = 6—12$  cm. Klamry (fig. 22)  $l = 20—35$  cm,  $l_1 = 6—10$  cm,  $g = 10—15$  mm.

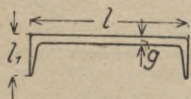


Fig. 22.



Fig. 23.

**Trwałość mostów drewnianych:** z drzewa miękkiego 15—20 lat, z dębiny 30—50 lat i więcej. Cyfry wyższe przy zastosowaniu zdrowego dobrego drzewa, ochronie od wilgoci, napawaniu środkami przeciwnilnymi, dobrem wykonaniu połączeń, niezbyt wielkich naprężeniach. Części użyte stale pod wodą trwają długo, części używane naprzemian pod wodą i na powietrzu najkrócej; najlepiej utrzymuje się w tych warunkach dębina. Trwałość dyliny 1—5 lat, w miastach najw. 3 lata.

**Zabezpieczenie drzewa przed gniciem.** 1. Nasylenie środkami przeciwnilnymi (impregnowanie), jak chlorek cynku, kreozot, siarkan miedzi. 2. Powleczenie powierzchni drzewa karbolineum, smołą ziemną. 3. Zwęglenie powierzchni (np. pale). 4. Pokrycie części specjalnie narażonych blachą żelazną cynkowaną, papą asfaltową (najcz. na belkach głównych mostów leżajowych), daszkiem (belki główne mostów leżajowych (fig. 23), pasy mostów kratowych lub nawet całe mosty). Szczególnie pamiętać należy o zabezpieczeniu końców belek. 5. Ułatwienie przewiewu powietrza.

Dla zabezpieczenia od pożaru: dobry nadzór, beczki z wodą, lepiej zbiorniki, zabezpieczone od zamarznięcia, hydranty. Czasem pokład mostów kolejowych pokryty między szynami 5 cm warstwą żwiru. Przewody gazowe układać należy w piasku, elektryczne w rurach. Miejsce, gdzie grozić mogą iskry (np. z kominów lokomotyw lub parowców), osłonić blachą.

Naprężenia dopuszczalne dla drewnianych mostów drogowych wedle przepisów M. R. P. o budowie i utrzymaniu mostów drogowych z dnia 9 listopada 1925 w  $kg/cm^2$  podaje tablica 1.

Tablica 1.

Napreżenia na	Dla mostów stałych		Dla mostów tymczasowych		Dla mostów kratowych <sup>1)</sup>		Dla konstr. naprzemian pod wodą i na powietrzu	
	drzewo		drzewo		drzewo		drzewo	
	miękkie	twarde	miękkie	twarde	miękkie	twarde	miękkie	twarde
rozciąganie .....	110	120	132	144	121	132	82,5	90
zginanie .....	100	110	120	132	110	121	75	82,5
ściskanie    do włókien...	65	80	78	96	71,5	88	48,5	60
„     ⊥     „     „     „     „	15	40	18	48	16,5	44	11,2	30
ściananie        „     „     „	12	20	14,4	24	13,2	22	9	15
„     ⊥     „     „     „     „	30	40	36	48	33	44	22,5	30
ciśnienie na ściankę otworu    do włókien .....	120	130	144	156	132	143	90	97,5

Napreżenia na ściskanie pod kątem ukośnym do włókien przyjmować należy wedle prawa elipsy, której osiami głównymi są napreżenia dopuszczalne || i ⊥ do włókien.

<sup>1)</sup> Z uwzględnieniem wpływu sił poziomych (wiatru).

Napreżenia w częściach żelaznych, jak dla mostów żelaznych.

Dla mostów kolejowych przyjmować można powyższe napreżenia zmniejszone o 10—20%.

**Zasady konstrukcji.** 1. Ustrój możliwie prosty. 2. Połączenia nieskomplikowane. 3. Belki możliwie chronić od wody (zwłaszcza końce belek), wodę odprowadzać możliwie prędko, unikać zbiorników wody (miejsce, w których zbiera się woda). 4. Ułatwić dostęp powietrza. 5. Umożliwić wymianę uszkodzonych części bez przerwy ruchu; dlatego przy mostach leżajowych zbliżamy zwykle obie belki środkowe.

**Pomost.** 1. Mosty drogowe. Najczęściej dylina lub żwirówka (makadam), rzadko bruk.

Dylina: zw. dębowa, dla silnego ruchu też bukowa (śliska w zimie i podczas deszczu), gorsza sosnowa, świerkowa. Grubość dyliny pojedynczej  $g$  oblicza się, dodając 2  $cm$  na zużycie, zw. 10—15  $cm$ , szerokość  $b = 15—30$   $cm$ . Lepiej dylina pod wójną: górna najlepiej z drzewa twardego  $g = 4—7$   $cm$ ,  $b = 20—25$   $cm$ , szczelna, poprzeczna lub (rzadziej) podłużna, wzgl. ukośna, i dolna z drzewa miękkiego  $g$  z obliczenia,  $b = 20—25$   $cm$  w odstępach około 2—3  $cm$ ; przy obliczeniu przyjmujemy, że ciężar skupiony przenosi się na 2 dyle dolne przy dylinie dolnej prostopadłej do górnej, na  $1\frac{1}{2}$  dyla przy równoległej.

Dylinę umieszcza się stroną rdzenną do góry. Górną do dolnej przybija się gwoździami, na brzegach przytrzymuje się krawężnikiem. Dylinę układa się często poziomo; lepiej w spadku popr. 1—2%, co uzyskuje się przez różne wysokości belek (rzadko), siodełek, układanie klocków na belkach, zacięcia; wtedy w środku styk dyliny przykryty płaskownikiem lub belką. O ile do pomostu dyłowanego przytyka droga bita (żwirowana), dobrze jest 8—10  $m$  przy moście wybrukować.

Żwirówka, używana jeżeli chodzi o jednostajną nawierzchnię, jest jednak ciężka i zatrzymuje wodę. Najmn. grubość u brzegów 8—12  $cm$  (stąd krawężnik  $h = 10—14$ ,  $b = 18—25$   $cm$ ). Przy obliczeniu przyjmujemy, że ciśnienie koła przenosi się na szerokość i długość ( $2g + h$ ), gdzie  $g$  jest gru-

bością żwirówki,  $h$  dyliny. Żwirówka leży na impregnowanych dylach o gr. do 12 cm umieszczonych w odstępach 3—4 cm, też na okrągłakach (mosty rosyjskie).

Dylina leży bezpośrednio na belkach, gdy ich odstęp jest niewielki, do 1,20 m, lub na poprzecznicach (wtedy dolna dylina jest prostopadła do górnej). Poprzecznice robi się dla mostów leżajowych, wzmocnionych i rozporowych zw. z pojedynczych belek, leżących jako ciągle na głównych. Rozkładają one wtedy ciśnienie pojazdów na kilka belek. Opłacają się one zwłaszcza dla mostów I. i II. kl. Poprzecznice mostów kratowych (i wieszarowych) wykonywa się zw. jako belki wzmocnione, rozpornice, czasem jako wieszary.

Ciężar własny pomostu przyjmować można:

przy dylinie z drzewa miękkiego o gr. $g$ cm . . .	9 g kg/m <sup>2</sup>
„ „ „ twardego „ „ g cm . . .	10 g kg/m <sup>2</sup>
„ pomoście żwirowanym . . . . .	380 kg/m <sup>2</sup>
„ bruku kamiennym . . . . .	700 kg/m <sup>2</sup> .

2. Mosty kolejowe. Podkłady (mostownice) zw.  $\frac{25}{20}$ , dł. 2,70 i 5,00, kładzie się na belkach głównych w odstępach mniejszych niż na szlaku (śr. 63—68 cm, na stykach 50—53 cm, dla kolei podrzędnych 68—72 cm, wzgl. 50—55 cm), i łączy na śruby  $\phi \frac{7}{8}$  i zacięcia 2—3 cm; na nich szyny, odbojnice z belek śr. 18×24 cm lub szyn, kątowników itd., wewnętrzne lub zewnętrzne, utwierdzone do każdego podkładu (na śrubę i zacięcie 2—3 cm) w odstępnie 16—19 cm od szyny (por. dział: „Koleje“), oraz dylina podłużna  $h = 5-7$  cm, w odstępach 2—4 cm. Co drugi lub trzeci podkład dłuższy ( $l = 5,00$  m) dla podparcia dyliny i słupków poręczowych.

Ciężar pokładu i pomostu przyjmować można w kg/m b. toru dla kolei głównych 620 kg/m b., dla kolei drugorzędnych normalnotorowych 500 kg/m b., dla kolei o szerokości toru 1,00 m — 320 kg/m b.

**Chodniki:** najcz. dylina podłużna, lub poprzeczna. Chodnik oddzielony od jezdni czasem tylko krawężnikiem (gdy mały ruch pieszych), również rzadko utworzony przez opuszczenie dyliny górnej; najczęściej podniesiony 10—25 cm nad jezdnię na belkach podłużnych lub poprzecznych, opartych na belkach głównych, poprzecznicach, lub dylinie. Przy dylinie poprzecznej spad 1,5‰ na wewnątrz. Między jezdnią a chodnikiem ściek, lepiej szpara dla spływu wody deszczowej. Należyte odwodnienie chodnika ważne ze względu na konstrukcję mieszczącą się pod nim. Ciężar chodników wraz z podparciem i usztywnieniem można przyjmować 120—150 kg/m<sup>2</sup>.

Na długich mostach miejscami występy na beczki z wodą i dla zatrzymywania się przechodniów.

**Poręcze** zw. drewniane, rzadko żelazne,  $h = 1,10$  cm. Słupki: w odstępach 1,5—2,5 m, śr. 2,0 m, mniejsze odstęp w dużych miastach; gr. 14—18 cm, zw. 15 cm. Przytwierdza się je do belek (z boku, na śruby), dyliny (na czopy) lub poprzecznice i usztywnia zastrzałami ( $\frac{10}{12}$  do  $\frac{14}{16}$ , średnio  $\frac{12}{14}$ ), połączonymi na czop lub miecz z zaciosem i śruby. Pochwyty  $\frac{16}{14}$ , górą ścięty dla spływu wody (fig. 24). Wypełnienie jedną, lepiej dwiema poziomymi belkami, gr. 8—12 cm, śr. 10 cm, rzadko krata.

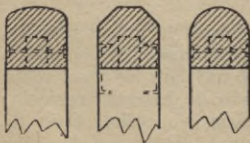


Fig. 24.

**Mosty leżajowe.** Dla mostów drogowych najw. rozpiętości 3—6 m, zależnie od klasy mostu, przy zastosowaniu siodełek z zastrzałami 5—8 m. Odstęp belek głównych 0,8—1,2 m, najw. 1,5 m, zw. około 1,00 m. Przy odstępach ponad 1,2 m dylina leży na poprzecznicach, poniżej 1,2 m wprost na belkach głównych.

Dla mostów kolejowych najw. rozpiętości do 2—3 m dla 2 belek głównych, 3—4,5 m dla 4 belek; przy zastosowaniu siodełek z zastrzałami do 5 m dla 2 belek głównych, do 7 m dla 4 belek. Granice zależne od obciążeń. Pod każdym torem 2, 3, 4, 6 belek (fig. 25), wyjątkowo więcej.

Zw. uż. okrągłaków, najw.  $d = 45$  cm (moment wytrż.  $W = 0,095 d^3$ ); rzadko krawędziaków ( $24 \times 24$  do  $32 \times 32$  wzgl.  $28 \times 36$  cm.)

Na filarach i przyczółkach murowanych (betonowych) podparte są belki na ławie dębowej  $h = 16 - 20$  cm,  $b = 16 - 26$  cm, opartej na murze najlepiej tylko pod belkami, by dać odpływ wodzie (fig. 26). Końce belek zabezpiecza się deskami.

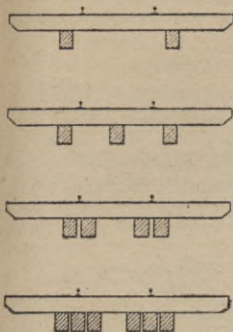


Fig. 25.

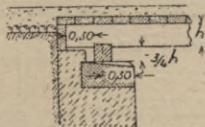


Fig. 26.

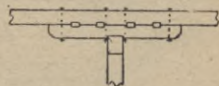


Fig. 27.

Na jazmach i przyczółkach drewnianych belki zacięte 2—3 cm, oparte są na oczepie zazwyczaj dębowym. Przy oczepie pojedynczym belki najlepiej umieszcza się na siodełkach (sposób najlepszy; fig. 27, por. niżej), ścina ukośnie (fig. 29) lub  $\perp$  przestawia się (sposób najgorszy, gdyż nierównomierne pod-

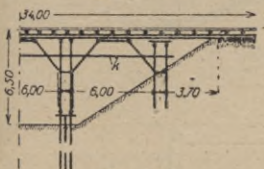


Fig. 28.

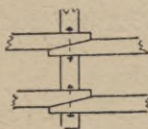


Fig. 29.

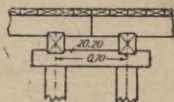


Fig. 30.

parcie; fig. 31). Na jazmach podwójnych podparcie na oczepie podłużnym (por. fig. 30), lepiej też na siodełku (fig. 28 i 32).

Końce belek na przyczółku drewnianym wysuwają się poza oczep o 30—45 cm i chroni od gnicia przez umieszczenie w żwirze, przybicie deski smołowanej do czoła, czasem też położenie desek pod koniec belki. Oczep (ława) na palach (fig. 32) lub progach (mosty tymczasowe; fig. 33).

Siodełka. Używane na podporach belek wolno podpartych dla lepszego podparcia i zmniejszenia rozpiętości lub — rzadko — na podporach belek ciągłych dla przejęcia momentu ujemnego. Połączenie z belkami głównymi na śruby  $d = (0,06 - 0,07) h$  lub na kliny, wzgl. zęby i śruby. Wysokość siodełka  $h_s = (0,85 - 1) h$ , gdzie  $h$  jest wysokością belek. Długość siodełka  $l_s =$

$= (0,2 - 0,25) l$ , najwyżej 1,70 m. Wtedy rozpiętość teoretyczna  $l_o = (0,8 - 0,95) l$ , średnio 0,9  $l$ . Lepiej stosować (o ile profil pozwala) siodełka z zastrzałami (fig. 32 i 34); wtedy  $l_s = (0,3 - 0,4) l$ , zaś moment zgięcia  $M = 0,8 M_o$ , gdzie  $M_o$  jest momentem belki wolno podpartej o długości  $l' = l - l_s$ , gdyż powstaje (niezupełne) utwierdzenie. Na przyczółku nie daje się zwykle zastrzału, przeto długość przęśła skrajnego  $= 0,7 l$  (fig. 32).

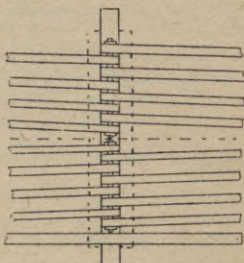
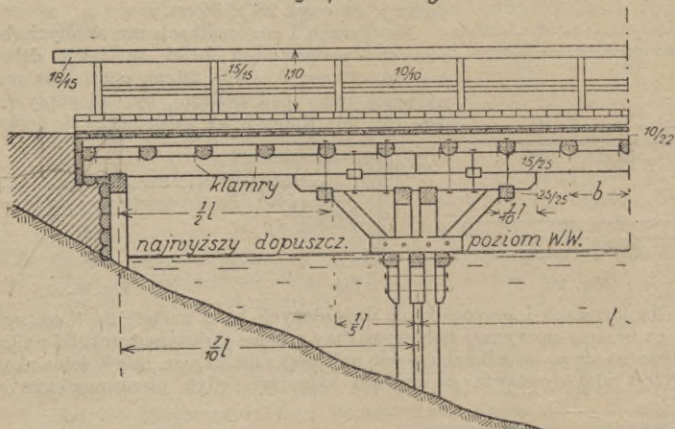


Fig. 31.

Pochylenie zastrzałów 35–60°, najchętniej 45°. Dajemy je prawie zawsze pod każdą belką, wyjątkowo co druga belka; pozostałe leżą wtedy na podciągu. Oparcie zastrzałów na siodelku na zacios, rzadziej zacios z czopem, także oparcie i wpuszczenie w belkę poprzeczną (fig. 32). Podparcie dołem na zacios, podpórkę lub belkę poprzeczną. Wymiary zastrzałów wystarczy

Przekrój podłużny



Przekrój poprzeczny

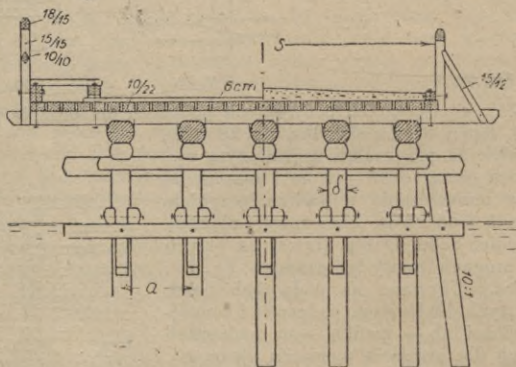


Fig. 32.

obliczyć ze wzoru:  $F_z = \frac{2,4 A}{k \cos \alpha}$ , (gdzie  $A$  jest oddziaływaniem belki wolno podpartej o długości  $l$ ,  $k$  naprężeniem dopuszczalnym,  $\alpha$  kątem pochylenia zastrzału) z uwzględnieniem wpływu wybożenia. Wymiary siodelka równe lub nieco mniejsze ( $b_s = b$ ,  $h_s = 0,8 - 1 h$ ) od wymiarów belek. Połączenie należy sprawdzić na ścinanie i ciśnienie.

Ciążar własny belek głównych można przyjmować w przybliżeniu  $a$ ) dla mostów drogowych:

mosty I. kl. pomost żwirow.  $(25l + 1,8l^2) kg/m^2$ , dyłowany  $(22l + 1,7l^2) kg/m^2$   
 " II. " " "  $(20l + 1,6l^2) kg/m^2$ , "  $(18l + 1,5l^2) kg/m^2$   
 " III. " " "  $(8l + 1,4l^2) kg/m^2$ , "  $(8l + 1,0l^2) kg/m^2$

b) dla mostów kolejowych:

koleje główne . . . . .  $(55l + 20l^2) kg/m$  b. toru  
 " podrzędne normalnotorowe . . . . .  $(48l + 15l^2) kg/m$  b. "  
 " o szerokości 1,0 m . . . . .  $(28l + 14l^2) kg/m$  b. "

**Belki wzmocnione.** 1. Belki podwójne, połączone tylko śrubami, dają pewną oszczędność na jarzmach; natomiast ich moment wytrzymałości jest tylko sumą momentów wytrzymałości poszczególnych belek, nadto wysokość konstrukcyjna jest większa; używane rzadko, na mosty tymczasowe. Również rzadko (na mosty bardzo krótkotrwałe) używa się belek, związanych klamrami o różnych długościach, utwierdzonymi w dwu prostokątnych do siebie kierunkach (por. fig. 34), lepiej klamrami i śrubami, czasem opaskami żelaznymi.

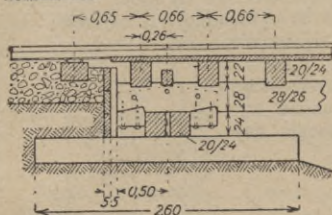


Fig. 33.

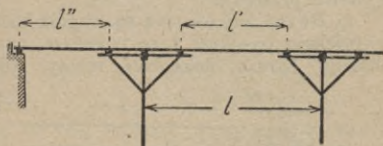


Fig. 34.

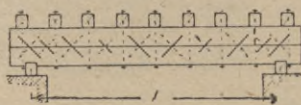


Fig. 35.

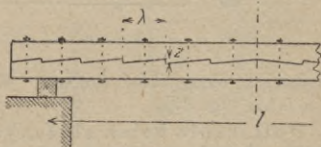


Fig. 36.

2. Belki złożone składają się z 2 lub 3 (wyjątkowo więcej) belek połączonych ze sobą zębami, klinami lub klockami.

a) Belki zazębione wogóle nie opłacają się wobec małych wartości współczynnika  $\mu$  (por. tabl. 2) i strat na wysokości. Za nimi przemawia prostota konstrukcji. Przy składaniu wygina się je w górę (na sucho lub polewając gorącą wodą, przez co uzyskuje się większą szczelność w zębach); strzałka powinna wynosić przytem około  $\frac{1}{400} l$ . Dobre składanie zabezpiecza

najlepiej od pękania zębów. Wymiary:  $z = \text{ok. } 0,1 h$  ( $3-6 \text{ cm}$ ),  $\lambda = (0,8-1) h$  (fig. 35). Dla szczelności i aby zapobiec wżeraniu się włókien, wstawia się pomiędzy zęby blaszki cynkowe 8 mm, lepiej kliny z twardego drzewa.

b) Belki klinowane (zaporkowe). Kliny są proste (poprzeczne) lub ukośne (podłużne); robi się je z drzewa twardego.

Kliny poprzeczne (włókna w kierunku poprzecznym; fig. 37), składane są z 1 lub 2 klinów, zabijanych w odpowiednio wycięte otwory i ewentualnie przytrzymanych gwoździami. Pochyłość klinów podwójnych od 1:20 do 1:40, pojedynczych 1:200. Odstęp belek zwykle około  $0,1 h$ , czasem belki bezpośrednio na sobie. Śruby pomiędzy klinami na podkładkach. Wymiary: głębokość wcięcia  $z = (0,1-0,13) h$ , czasem na końcach belek, o ile potrzeba, więcej  $(0,13-0,16) h$ , gdzie  $h =$  wysokość

belki pojedynczej,  $\lambda' = (5-6)z$ . Odstęp od środka do środka  $m$  najwyżej  $16z$ , względnie  $1,50 m$ ; najmniejszy odstęp oblicza się na siłę poprzeczną; jeżeli z obliczenia wypada (na podporze) odstęp zbyt mały, dajemy tam kliny ukośne, ewentualnie zwiększamy szerokość belek.

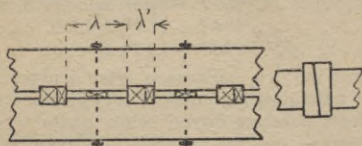


Fig. 37.

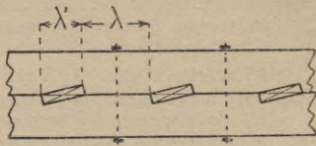


Fig. 38.

Kliny podłużne (włókna w kierunku podłużnym; fig. 38). Śruby przechodzą pomiędzy klinami; belki leżą bezpośrednio na sobie. Wymiary:  $z = (0,12-0,13)h > 4 \text{ cm}$ ,  $\lambda = (0,5-0,7)h$ ,  $m =$  najmniej  $8z$ , najwyżej  $20z$ .

Przy trzech belkach kliny przestawia się, by nie osłabiać przekroju.

c) Belki klockowe są wogóle korzystne, dają największą wysokość i są najtańsze, natomiast wymagają bardzo dokładnej roboty. Obecnie naj-

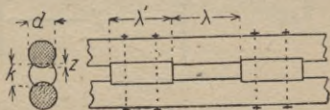


Fig. 39.

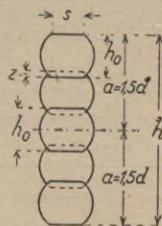


Fig. 40.

częściej z okrągłaków (gorsze). Klocki są podłużne. Zwykle  $k = 0,8 d$ ,  $z = 0,1 d$  (fig. 39).

Obliczenie belek złożonych. Oblicza się je jako belki jednolite, mnożąc jednak moment wytrzymałości przez współczynnik zmniejszający  $\mu$ , który wynosi wedle przepisów M. R. P.:

Tablica 2.

Pość belek	Dźwigar ząbiony	Dźwigar klinowany	Dźwigar klockowy
2	70%	80%	70%
3	60%	70%	60%

Dla belek złożonych z okrągłaków (najczęściej klockowe) otrzymujemy, przyjmując  $s = (0,3-0,5)d$  (fig. 40), gdzie  $d =$  średnica okrągłaka:

$$W = \varepsilon h_m d^2,$$

gdzie  $h_m = 0,5(h_0 + d) = 0,933 d$ . Dla współczynników  $\mu$  j. w. otrzymujemy  $\varepsilon$  równe

dla 2 belek klockowych  $\varepsilon = 0,55$ , klinowanych  $\varepsilon = 0,37$ , ząbionych  $\varepsilon = 0,25$ ,  
 " 3 " "  $\varepsilon = 1,1$ , " "  $\varepsilon = 0,75$ , " "  $\varepsilon = 0,5$ ,  
 " 4 " "  $\varepsilon = 1,7$  (przyjęto  $\mu = 50\%$ ).

Zęby, kliny i klocki oblicza się na siłę poprzeczną na ścięciu i na ciśnienie na ściankę. Pozioma siła ścinająca wynosi na  $1 m$  b. długości



belki  $s = m \frac{T}{h}$ , gdzie  $m$  (średnio) dla 2 belek wynosi 1,5, dla 3 belek 1,35. Obliczenie szczegółowe por. dział: „Budownictwo drewniane“.

Przy belkach złożonych daje się zwykle odstęp belek 1,5–2,0 m, na belkach poprzecznic. Między belkami stężenia, por. niżej. Styki na podporach. Średnica śrub łączących (0,1–0,13)  $h$ , zwykle  $\frac{3}{4}$  do  $1\frac{1}{4}$ ". Podkładka 8–12 mm, szer. 3–4  $d$ . Wymiary siodełek zwykle równe wymiarom poszczególnych belek.

Używane dla rozpiętości: dla mostów drogowych I. klasy do 8 m (11 m), III. klasy do 11 m (14 m); dla kolejowych tymczasowych do 5 m (7 m), przy zastosowaniu 4 belek pod 1 tor, dla wąskotorowych  $s = 1,0$  m do 7 m (11 m),  $s = 0,75$  m do 9 m (12,5 m), przy zastosowaniu 2 belek pod 1 tor. Cyfry w nawiasach odnoszą się do dźwigarów trójbelkowych.

Przy krótkim czasie trwania najlepsze są belki klockowe, przy dłuższym lepsze są klinowe, względnie zazębiane.

Ciężar belek złożonych (bez pomostu):

dla dróg I. klasy . . . . .	$g = 8 l + 100 \text{ kg/m}^2$
" " II. klasy . . . . .	$g = 7 l + 90 \text{ kg/m}^2$
" " III. klasy . . . . .	$g = 5 l + 60 \text{ kg/m}^2$

dla kolei głównych . . . . .	$75 l + 300 \text{ kg/m}$ b. toru
" " II-rzędnych $s = 1,435$ m . . . . .	$65 l + 250 \text{ kg/m}$ b. "
" " wąskotorowych $s = 1,00$ m . . . . .	$50 l + 180 \text{ kg/m}$ b. "

**Belki rozporowe.** Pozwalają na dość znaczne rozpiętości (do 30 m), oraz na dobre stężenie poprzeczne, nadto są trwałe, gdyż belki główne są przykryte, natomiast wywierają znaczne parcie poziome i wymagają dużej wysokości konstrukcyjnej, zaś dolne końce zastrzałów ulegają szybko butwieniu.

1. Rozpornica pojedyncza trójkątna, rozpiętości  $l = 4 - 8$  m, najkorzystniejsze  $\alpha = 45^\circ$  (fig. 52 i 41), wymagają bardzo dużej wysokości konstrukcyjnej. Ustrój sztywny, używany na mosty kolejowe (rusztowaniowe).

2. Rozpornica trójkątna podwójna,  $l = 8 - 12$  m (fig. 42).

3. Rozpornica trapezowa,  $l = 8 - 12 - 15$  m (fig. 43); ustrój używany bardzo często. Stosunek  $a : b : a$  wynosi średnio  $= 4 : 5 : 4$ . Rygiel  $r$

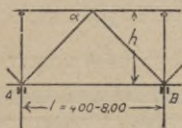


Fig. 41.

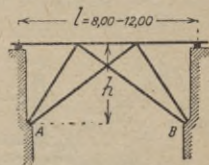


Fig. 42.

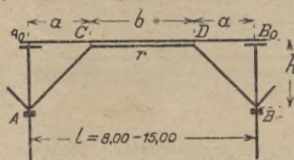


Fig. 43.

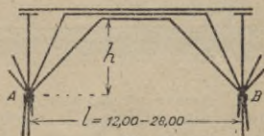


Fig. 44.

połączony z belką na śruby i kliny lub klocki. Częściej belki poprzeczne między belką a ryglem, lub ryglem a zastrzałem. Kąt  $\alpha$  zwykle  $45^\circ$ , co najmniej  $30^\circ$ .

4. Rozpornica trapezowa wielokrotna (fig. 44), używana dla  $l = 12 - 28$  m. Punkty podparcia belki poziomej co 2–4 m. Zwykle rozpora jedna między zastrzałami środkowymi, dalsze pary zastrzałów natomiast wpuszczone w belkę poziomą, ewentualnie skrajne zastrzały oparte o siodełka.

W mostach rozporowych drogowych odstęp belek głównych wynosi dla średnich rozpiętości 2—2,5 m, przy kolejowych 1,5—2 m (pod każdym torem 2 belki). Na belkach głównych umieszcza się poprzecznice, czasem przy lekkich mostach drogowych umieszcza się pomiędzy belkami głównymi na podciągach belki podłużne drugorzędne.

Zastrzały stęży się kleszczami ukośnymi (fig. 45) lub poziomymi (k na fig. 28) i ewentualnie poziomymi belkami poprzecznymi, które wraz z dyliną

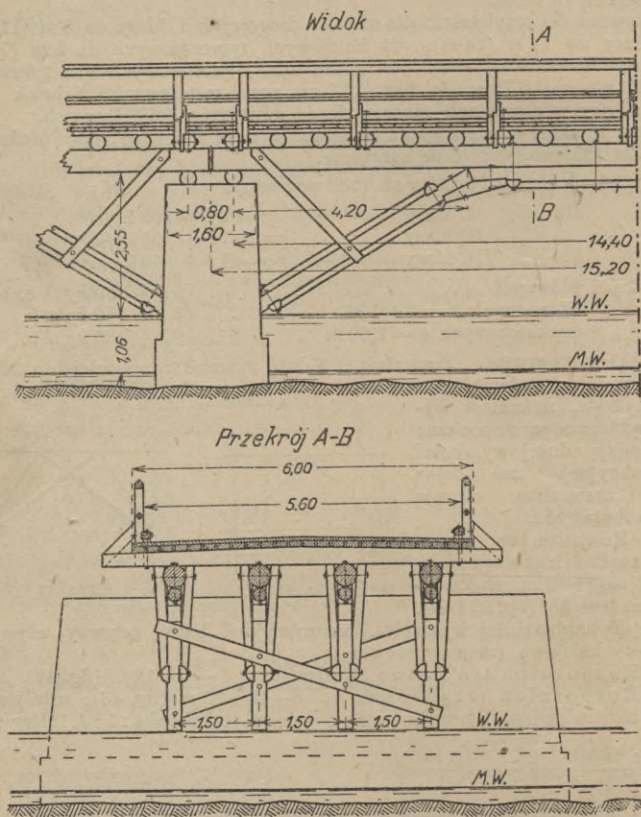


Fig. 45.

stanowią dla mniejszych mostów drogowych wystarczające stężenie poprzeczne i poziome. Zresztą daje się z reguły w płaszczyźnie rozpór i zastrzałów tężnik poziomy (fig. 45).

Szczegóły konstrukcyjne. Górny szczegół podparcia zastrzałów: najlepiej na klocek z drzewa twardego lub podciąg (fig. 46); gorszy jest styk bezpośredni na czop i kłamrę; — można też styk chwycić kleszczami.

Szczegóły dolny: a) na dębowej ławie; b) na łożysku żeliwnym z żebrami (fig. 47 a), pozwalającymi jednak na odpływ wody, lepiej na łożysku z trzpieciem żelaznym (fig. 47 b); c) oparcie w gnieździe w murze (złe, drzewo łatwo gnije); d) na jarzmach drewnianych oprzeć można zastrzał na zacios,

lepiej na klocku podłużnym, lub na poprzecznej belce. Podparcie stopy zastrzału jest zawsze częścią konstrukcji, najprędzej ulegającą gniciu.

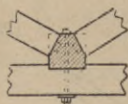


Fig. 46.

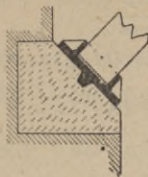


Fig. 47 a.

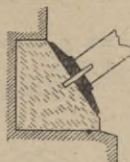


Fig. 47 b.

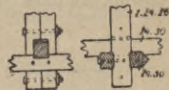


Fig. 47 c.

**Belki wieszarowe.** Używane, gdy mała wysokość konstrukcyjna. Oddziaływania pionowe. Natomiast mała sztywność, trudne połączenie, belki bardzo narażone na wpływy atmosferyczne. Korzystne zatem dla lekkich mostów drogowych i kładek. Zależnie od ilości słupów wiszących, mamy:

1. Wieszar pojedynczy.  $l = 5-7 \text{ m}$ ,  $\min \alpha = 25^\circ$  (fig. 48).
2. Wieszar podwójny (trapezowy).  $l = 6-12 \text{ m}$ ,  $\max h = 1,5-2 \text{ m}$ , jeżeli górą steżeń niema; jeżeli most zamknięty,  $h$  znacznie wyższe; dla większych obciążeń należy dać przekątnie w polu środkowym (fig. 48 a).
3. Wieszar potrójny (fig. 49).

Zwykle 2 belki, między nimi poprzecznice z belek złożonych. Gdy szerokość mostu większa niż  $6 \text{ m}$ , umieszcza się trzecią belkę w środku. Chodniki można umieścić nazewnątrz belek.

Szczegóły konstrukcyjne (należy pamiętać o osiowości połączeń). Dolne podparcie zastrzału: a) na zacios (fig. 51 a i b), b) na trzewik żelazny, c) na kątownik i śrubę (najlepiej; fig. 50).

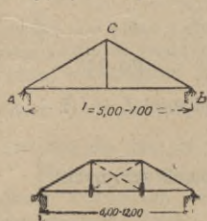


Fig. 48 i 48 a.

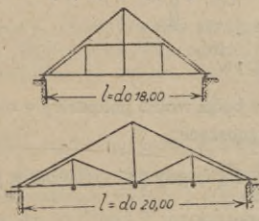


Fig. 49.

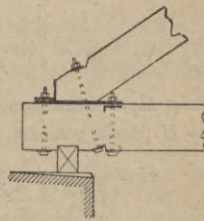


Fig. 50.

Połączenie zastrzału ze ściągnem (słupem wiszącym) wykonywa się: a) na zacios, b) na zacios i opaski; najlepiej c) chwycić zastrzały podwójnym słupem; również używamy d) trzewik żelazny, jeżeli ściągnie jest żelazne, (fig. 51). Przy rozpornicach podwójnych najczęściej połączenie na zacios i kłamy.

Połączenie ściągnia pionowego z belką poziomą: a) na opaski; lepiej dać b) słup podwójny i chwycić nim belkę (fig. 47 c); jeżeli ściągnie jest żelazne, używa się podciągu poprzecznego, opartego o podwójną mutrę i żelazną podkładkę; przyczem ściągnie przechodzi przez podciąg i belkę, a ta łączy się z podciągiem na wcięcie.

Inne szczegóły połączeń por. dział: „Budownictwo drewniane“.

Obliczenie belek rozporowych i wieszarowych odbywa się na tej samej zasadzie.

1. Belka rozporowa pojedyncza (fig. 52). Belkę poziomą oblicza się zwykle jako belkę wolno podpartą na podporach i w środku, lepiej jako

ciągłą. Zastrzały obliczamy na siłę osiową: jeżeli największe ciśnienie na podporze środkowej wynosi  $C$ , to siła w zastrzale:

$$Z = -\frac{C}{2 \cos \alpha} \dots \dots \dots (1)$$

2. Belka rozporowa podwójna (trapezowa). Moment zgięcia w dowolnym punkcie  $C$  wynosi:

$$M = M_0 - Hy \dots \dots \dots (2)$$

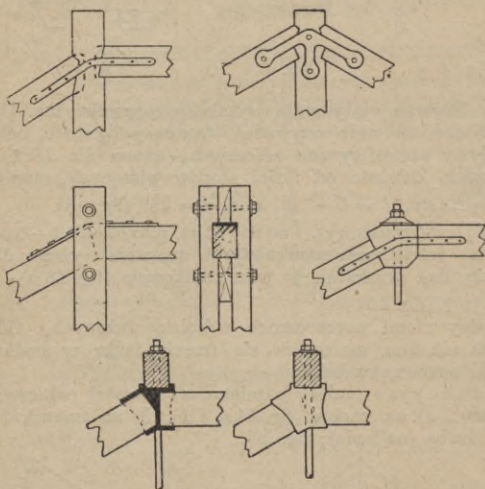


Fig. 51.

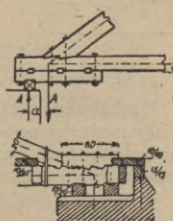


Fig. 51 a i b.

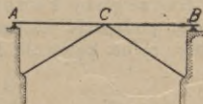


Fig. 52.

gdzie  $M_0$  oznacza moment belki wolno podpartej o rozpiętości  $L = l(2 + \varphi)$ , zaś  $H$  parcie poziome, wynoszące:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{3 - \xi^2 + 3\varphi}{2\mu h(2 + 3\varphi)} P \xi l, \text{ gdy } \xi \leq 1, \text{ (ciężar w polach skrajnych),} \\ \text{wzgl. } H &= \frac{2 + 3\varphi\xi - 3(\xi - 1)^2}{2\mu h(2 + 3\varphi)} Pl, \text{ gdy } 1 < \xi < \left(1 + \frac{\varphi}{2}\right), \text{ (ciężar} \end{aligned} \right\} (3)$$

w polu środkowym). Znaczenie  $\varphi$  i  $\xi$  por. fig. 53;  $h$  jest pionowym rzutem zastrzału.

Zazwyczaj można przyjąć  $\mu = 1$ .

Linję wpływową momentu zgięcia w punkcie  $C$  znajdujemy zatem wedle fig. 53, odejmując od rzędnych linii wpływowej  $M_0$  rzędne  $Hy$ .

Dla całkowitego obciążenia jednostajnego:

$$H = \frac{1}{4\mu h} gl^2 \frac{\varphi^3 + 6\varphi^2 + 10\varphi + 5}{2 + 3\varphi},$$

zaś moment ujemny na podporze  $D$  (bezwzględnie największy):

$$M_D = -\frac{1}{4\mu} gl^2 \frac{\varphi^3 + 1 + (1 - \mu)(6\varphi^2 + 10\varphi + 4)}{2 + 3\varphi}.$$

Dla polskich ruchomych obciążeń drogowych występuje najw. ( $+M$ ) w przęśle skrajnym, przyczem dla  $\bar{L} < 16$  m na moście mieści się tylko jeden ciężar skupiony (cięższa oś walca). Wtedy można dla ( $+M$ ) nie kreślić linii

wpływowych, ale obliczać najw. (+M) ze wzoru: najw. (+M) =  $+\eta_{\max} P$ . Wartości na położenie niebezpiecznego przekroju, oraz na  $\eta_{\max}$  podaje tablica:

$\varphi = 1$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$\frac{x}{l} = 0,577$	0,587	0,596	0,605	0,614	0,623	0,631	0,639	0,646
$\frac{\eta_{\max}}{l^2} = 0,277$	0,282	0,287	0,292	0,296	0,300	0,304	0,308	0,312

Dla  $\varphi > 1,8$  najw. moment występuje w środku belki.

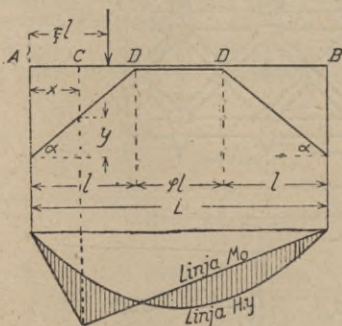


Fig. 53.

Najw. (-M) występuje w punkcie D; często posiada on bezwzględnie największą wartość. Dla polskich obciążeń drogowych nie potrzeba go obliczać, jeżeli  $\varphi < 1,25$ .

Linje wpływowe sił poprzecznych w prześle skrajnym wypro-

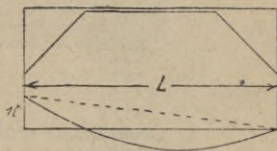


Fig. 54.

wadza się z linii wpływowej oddziaływania skrajnego A, którą otrzymuje się, odejmując od rzędnych linii wpływowej oddziaływania belki wolno podpartej o rozpiętości  $L = l(2 + \varphi)$  rzędne linii wpływowej H, pomnożone przez  $\frac{h}{l}$  (fig. 54). Linje wpływowe sił poprzecznych w polu środkowym przedstawiają się, jak dla belki wolno podpartej o rozpiętości  $L = l(2 + \varphi)$ .

**Mosty drewniane kratowe.** Dawniej używane belki Towne'a, oraz nasze Ibjąńskiego i Pintowskiego wyszły z użycia. Dziś spotyka się najczęściej belki Howe'a, u nas Rychtera<sup>1)</sup> (te ostatnie coraz rzadziej); wchodzi też w użycie belki Rechniewskiego i Grocha, w Rosji Patona<sup>2)</sup>, w Niemczech Tuchscherera, Küblera<sup>3)</sup> i in. (por. dział: „Budownictwo drewniane“). Belki prawie wyłącznie równoległe. Przy budowie należy zastosować wygięcie w górę.

Mosty Howe'a (fig. 55 a). Krata złożona drewniana ze ścięgniemi żelaznemi, przez naciągnięcie których wywołuje się sztuczne naprężenie.

Mosty Howe'a są używane do rozpiętości  $l = 50$  m dla mostów drogowych,  $l = 35$  m dla kolejowych.  $h = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} l$ , zwykle  $\frac{1}{10} - \frac{1}{8} l$ . Nachylenie przekątni  $\alpha = 45-60^\circ$ . Dla  $h < 3,5$  m, tj. dla  $l < 25-30$  m, krata złożona pojedyncza; dla  $h > 3,5$  m krata złożona podwójna.

Przy obliczeniu przyjmuje się zazwyczaj, że siła  $V_n$  w ścięgnię wskutek naciągnięcia jest tak wielka, że przekątnie narażone są tylko na ściskanie.

<sup>1)</sup> Por. Thullie: „Mosty drewniane“.

<sup>2)</sup> Por. Paton: „Dierewiannyje mosty“.

<sup>3)</sup> Gesteschi: „Hölzerne Dachkonstruktionen“.

Napężenie faktyczne jest przecież bardzo trudne do skontrolowania. Średnicę śrub przyjmować można:  $d = 0,86 \sqrt{\frac{V}{k_r}} + 0,14 \text{ cm}$ , przyczem  $V$  jest najw. siłą, przypadającą na 2 ścięgna, zaś  $k_r$  = napężeniem dopuszczalnym żelaza na rozciąganie.

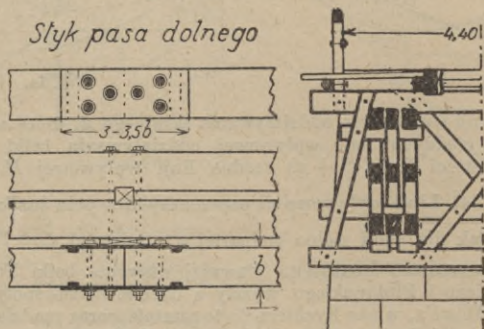
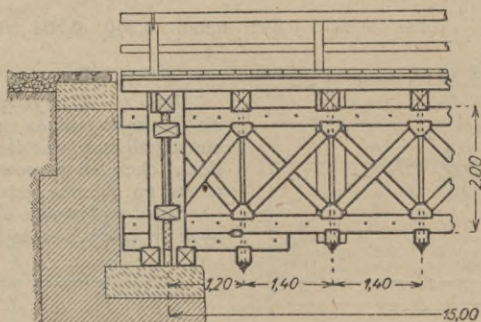


Fig. 55.

Pas górny zwykle stały na całej długości, więc obliczamy go na max  $M$ , uwzględniając przytem osłabienia śrubami itd. (do 25%).

Pas dolny obliczamy na max  $M$ , względnie w miejscu najbliższego styku; przyczem z belki zetkniętej uwzględniamy najwyżej 20%. Należy uwzględnić ewentualny mimośród zastrzałów i momenty zginające od poprzecznie, ułożonych nie w węzłach.

Pasy najczęściej z 3 belek w odstępach 8 cm, rzadziej 2 lub  $2 \times 3 = 6$ , gr. 25—30 cm, dziś często okrągłaki lub belki oflisowe, dł. zwykle około 10 m, czasem do 12 i 18 m.

Styki przedstawione, możliwie rozsunęte i daleko od środka; z 2 przykładkami w pasie rozciągany, z jedną w ściskany (fig. 55 b). Belki łączone zaporkami co 1,5—2 m.

Przekątnie kwadratowe (lub okrągłe) opierają się na pasach, na czopy lub trzpienie przy pomocy klocków z drzewa twardego (dębowego),

wpuszczonych w pas na 4 cm. Przy konstrukcjach prostszych, przewozowych, zastrzały opierają się na pasach na zaciosy (bez klocków). Zastrzały (wznoszące się do środka) są podwójne, odstrzały (spadające) pojedyncze. Tężniki por. niżej. Ściągna są to zwykle pręty okrągłe z gwintem na końcach i naśrubkami; opierają się na podkładkach żelaznych i podciągach, rzadko na poprzecznicach.

Mosty Rychtera (fig. 56). Krata pojedyncza prostokątna. Pas górny, dolny, zastrzały i słupy z drzewa krawędziowego miękkiego. Styki pasów przy pomocy kilkakrotnego zazębienia jednej belki pasowej z dwiema ją obejmującymi, i śrub. Zastrzały opierają się na piętkach, połączonych z pasem zapomocą zębów i śrub. Połączenia słupów z pasami zapomocą klinów dębowych. Należy zwrócić uwagę na ściśle przyleganie słupów do belek pasowych. Poprzecznice w węzłach. Wymiana łatwa. Robocizna droga.

Mosty Rechniewskiego (fig. 57). Krata pojedyncza równoramienna. Pas górny i zastrzały z okrągłaków, pas dolny i słupy z półokrągłaków,

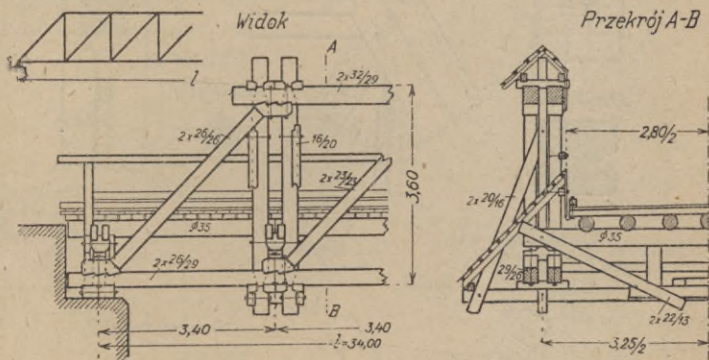


Fig. 56.

ściągna z okrągłaków przeciętych w kierunku podłużnym na 3 części. Połączenia w pasie dolnym na klocki betonowe zazębione z wkładkami żelaznymi i śruby wchodzące między półokrągłaki pasu; zastrzały opierają się na wystającej części klocka betonowego na czop, ściągna utwierdzone są na kotwy żelazne z blach i kątowników. Podobnie połączone są tężniki. Mosty można oddać do użytku dopiero po stwardnieniu betonu. Poprzecznice w węzłach. Wymiana trudna. Robocizna tańsza niż w mostach Rychtera.

Mosty Grocha (fig. 58). Krata pojedyncza. Części ściskane z drzewa krawędziowego miękkiego, części mostu rozciągane z żelaza. Słupy z żelaza okrągłego, zakończone z obu stron podwójnym naśrubkiem. Pas dolny z ceowników żelaznych. Połączenia zastrzałów z pasem górnym przy mostach o mniejszej rozpiętości przy pomocy zetowników, przy większych rozpiętościach przy pomocy piętek dębowych; w pasie dolnym zastrzały opierają się na kątownikach, nanitowanych na pas. Poprzecznice w węzłach. Wymiana łatwa. Robocizna tania.

Z powodu nieznacznej ilości obiektów tych typów trudno podać narazie dane dotyczące ciężaru własnego tych mostów.

Tężniki (wiatrownice) poprzeczne. Mosty leżajowe: wystarczy dylina, względnie poprzecznice, czasem podciąg (fig. 32).

Mosty wzmocnione i rozporowe: zastosować można: krzyż ukośny, stężenie prostokątne z dyli lub okrągłaków, czasem podciąg lub belki poprzeczne. Przy małym odstepie belek — belka pionowa. Utwierdzenie

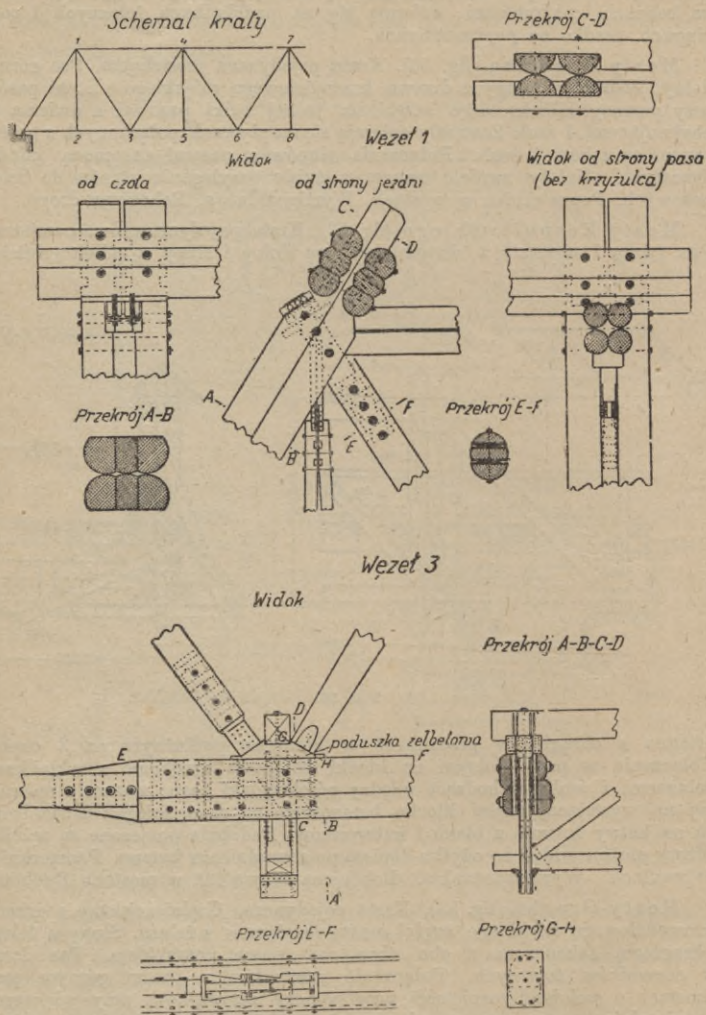


Fig. 57.

śrubami. Zwykle dla mostów kolejowych tężniki między wszystkimi belkami, dla mostów drogowych między każdą parą belek.

Mosty kratowe o pomoście górą: najlepiej krzyż ukośny z belek, przytwierdzony do ramy (fig. 55).

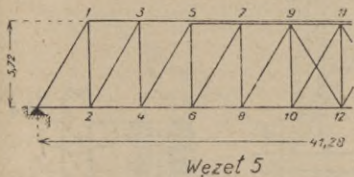


Mosty kratowe i wieszary o pomoście dołem, górą zamknięte: teżniki składają się z belki poziomej, rozpory, przytwierdzonej do pasów wprost, usztywnionej mieczami z wyzyskaniem kształtów skrajni.

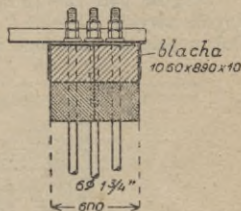
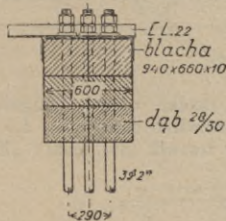
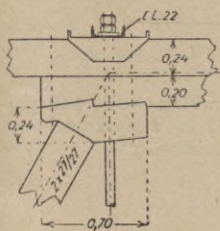
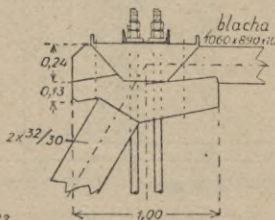
Mosty kratowe i wieszary o pomoście dołem, górą otwarte: należy starać się o małą wysokość belek głównych ponad poprzecznkami. Usztywnienie naroży przy pomocy zastrzałów wewnętrznych i zewnętrznych (fig. 56).

**Teżniki poziome.** Zwykle dopiero przy mostach rozporowych, wieszarowych, kratowych, jako krata podwójna złożona między poprzecznkami do rozpiętości 12—15 m z dyli 6—10 cm na krzyż, przytwierdzonych do dźwigarów (przy mostach rozporowych do zastrzałów i rozpór; fig. 45), lub

Schemat kraty



Węzeł 1



Węzeł 6

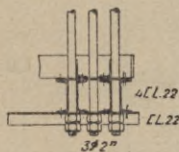
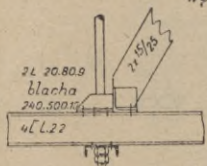


Fig. 58.

na podciągach, przy mostach kratowych z belek. Mosty kolejowe otrzymują teżniki poziome już dla  $l = 4-5$  m.

**Jarzma (filary) drewniane.** Pale zazwyczaj pod każdą belką, rzadko co druga belka (mosty bardzo lekkie), najczęściej pionowe, skrajne, albo ukośnie 8 : 1 do 15 : 1 (fig. 60 i 60 a), albo też pionowo (łatwiejsze wbijanie), ucięte nisko (nad m. w.) i od nich zastrzał ukośny (2 : 1, 3 : 1) do pali głównych (fig. 59).

Obliczenie pali: na ciężar pionowy i siły poziome (hamowanie, wiatr przy wysokich mostach, ewent. woda, kra, belki niesione przez wodę) na ściskanie i wyboczenie (pale dołem utwierdzone, górą przytrzymane). Naprężenie dopuszczalne najwyżej 30—35 kg/cm<sup>2</sup> przekroju pala. Średnicę w środku długości często przyjmuje się wedle wzoru  $d = 15 + 2l$  ( $d$  w cm,

$l$  = całkowita długość pala w  $m$ ); najw.  $d = 30-35$   $cm$ . O ile pal nie osiąga gruntu wytrzymałego, to udźwig liczymy na tarcie:  $U = \varphi d \pi l'$ , gdzie  $\varphi$  = współczynnik tarcia =  $0,1-0,15$   $kg/cm^2$ ,  $l'$  = długość wbicia). Zazwyczaj daje się ze względów konstrukcyjnych więcej pali niż wypada z obliczenia.

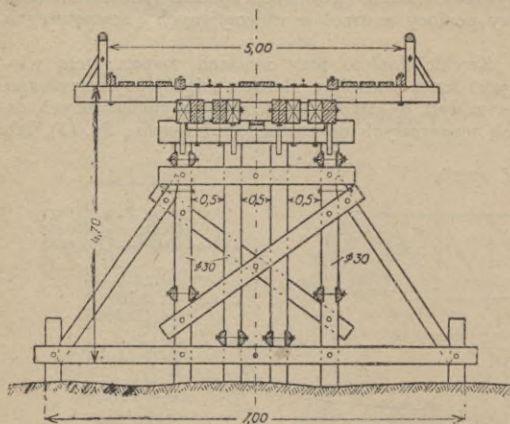


Fig. 59.

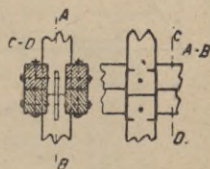


Fig. 59 a.

Długość pali 12—15  $m$ , rzadko więcej. Długość wbicia wedle pali próbnych, zwykle  $0,3-0,5$   $l$ , w żwirze conajmniej 1,5—2  $m$ , w piasku 4—5  $m$ . Dołem pale są uzbrojone w trzewik (por. dział: „Fundamenty“).

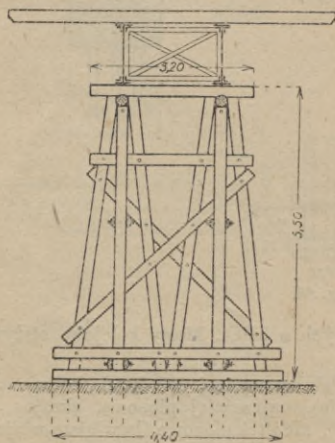


Fig. 60.

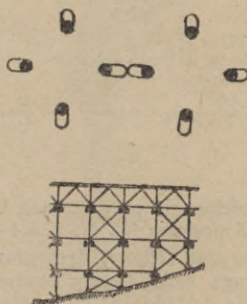
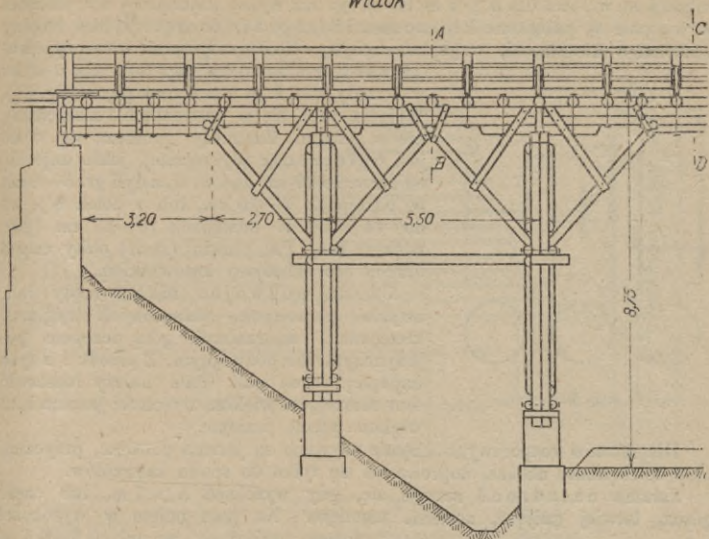


Fig. 60 a i b.

Przeciw wynyciu pali stosowany pakunek z kamienia, faszyn, rzadko ścianka szczelna.

Góra pale łączy się oczepem  $30 \times 30$  do  $30 \times 36$   $cm$ , leżącym conajmniej 30  $cm$  nad w. w. na czop (dł. 8  $cm$ ), czop rozwidlony (przez cały

Widok



Przekrój

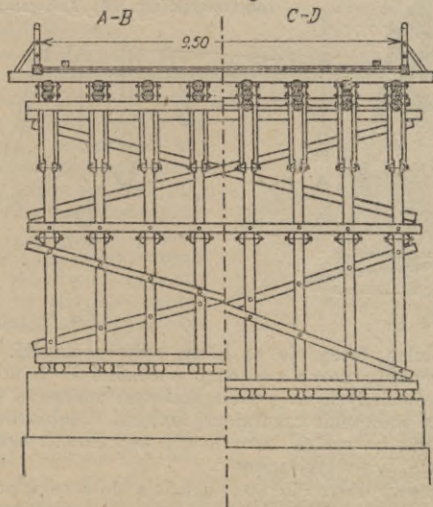


Fig. 61

oczep), też na klamry. Czasem oczep podwójny z 2 belek  $24 \times 20$ . W wysokości m. w., zaś dla  $h > 5 m$  też drugi raz wyżej, najczęściej w wysokości w. w., pale są połączone kleszczami 2 ( $12 \times 24$ ) do 2 ( $20 \times 30$ ). Między oczepem a kleszczami, względnie między dwiema parami kleszczy, zastrzały, gr. do 20 cm (fig. 60), dla  $\alpha < 30$  w 2 rzędy, dla  $h > 5 m$  w dwa piętra (fig. 61). Wcięcia robi się w zastrzałach i kleszczach, nie w palach. Zastrzały opuszcza się, o ile jest opierzenie (dylowanie), jakie daje się od m. w. do 20 cm nad w. w. z dyli gr. 5–8 cm w odstępach 3–10 cm, lub z belek  $8 \times 12$  do  $14 \times 20$  w odstępach 10–15 cm (gdy większa kra). Pal przedni (stróż) obity często blachą lub uzbrojony kątownikiem.

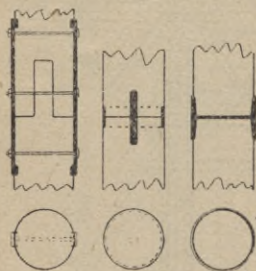


Fig. 62.

Jarzma podwójne mają 2 rzędy pali, zwykle pionowych, połączonych ryglami, kleszczami, zastrzałami, górą oczepem pojedynczym lub podwójnym. Z przodu i z tyłu najlepiej jeden pal. Pale należy rozstawić tem szerzej, im większa wysokość jarzma i im większe parcie poziome.

Dla mostów rozporowych chętnie używane są jarzma potrójne, przyczem pale zewnętrzne, ukośne, doprowadza się tylko do spodu zastrzałów.

Jarzma nasadzone stosuje się, gdy wysokość  $h > 7 m$ , lub część górna, łatwiej gnijąca, zostanie usunięta. Na pale ucięte w wysokości 0,2–0,4 m poniżej m. w. lub 0,2–0,5 m nad ziemią, o ile wody niema, nasadza się oczep, usztywniając styk silnie poprzeczkami, lub pale górne ustawia na dolnych przy pomocy kleszczy i klamr (fig. 59 a), rygli i poprzeczek na czop, lepiej na trzpień, i pierścień żelazny o szerokości 8–10 cm lub trzewik (fig. 62). Też wstawić można pale

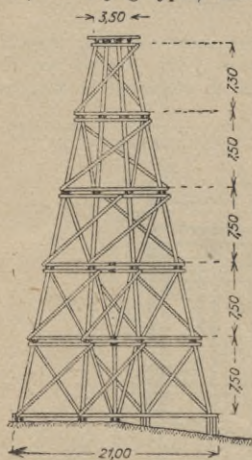


Fig. 63.

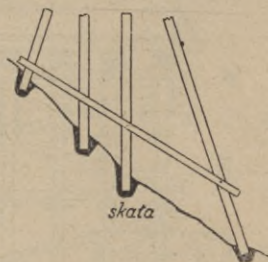


Fig. 64.

górne między dolne, łącząc je na kliny, zęby, podkładki. Dla  $h > 12 m$  buduje się jarzma piętrowe z pięter o wysokości 7–10 m (fig. 63).

Jarzma mostów stałych na gruncie skalistym umieszcza się na cokołach murowanych, na podwalinie zakotwionej śrubami. Można też wstawić pale w gniazda w skale i wypełnić betonem (fig. 64). Jarzma mostów tymczasowych por. dział: „Mosty tymczasowe“.

Mosty rusztowaniowe (fig. 60 b) składają się z belek prostych lub rozporowych trójkątnych o niewielkich rozpiętościach, podpartych na jarzmach pojedynczych, połączonych ze sobą poziomymi kleszczami, zastrzałami, krzy-

żami podłużnemi. Jarzma oparte zwykle na progach, rzadziej na palach wbitych lub cokołach.

Przyczółki drewniane wstawia się możliwie głęboko w nasyp, by uniknąć parcia ziemi. Za palami w odstępach około 1 m, o dużych średnicach

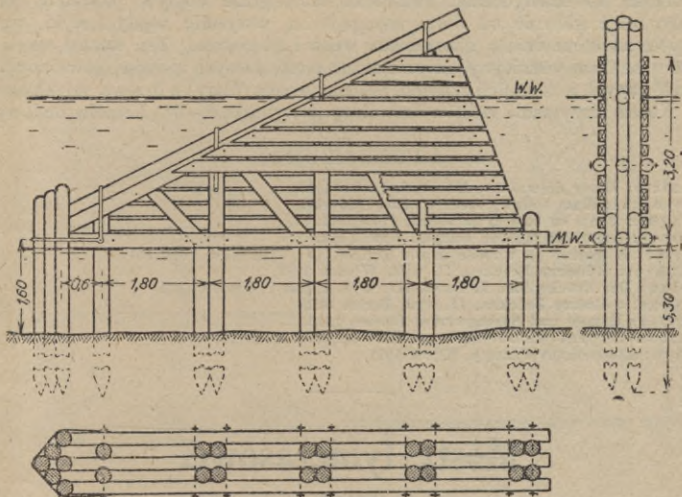


Fig. 65.

(łatwo gniją), połączonymi oczepem, umieszcza się bale poziome (fig. 32). Skrzydła zwykle ukośne z oczepem w płaszczyźnie stoku. Czasem osobno pale ze ścianką drewnianą, podtrzymujące parcie ziemi, osobno — tuż obok — jarzmo przyczółka. Gdzie grunt nie pozwala na pale, daje się podwaliny (leżnie) (fig. 33).

Dla  $h > 3$  m należy pale zakotwić, najczęściej na drewniane kleszcze. Przyczółki drewniane łatwo niszczejają, więc używane niechętnie. Dla mostów, które mają potrwać dłużej, lepiej zbudować przyczółki murowane.

Izbice (fig. 65 i 66) budoje się dla ochrony jarzm przed krą w odstępnie 1—3 m przed jarzmami. Muszą być silne, stałe, dobrze przecinać lód. Składają się z pali bitych w odstępach 0,8—1,5 m, w 1, 2, 3 rzędy, zależnie od szerokości jarzma, usztywnionych bardzo mocno kleszczami, ryglami, połączonych górą silnym oczepem na czopy i opaski, osłoniętych dyliną. Oczep, nachylony 1 : 2 do 1 : 3, sięga 20—50 cm poniżej m. w. i o 50—100 cm ponad wysoką krę, z

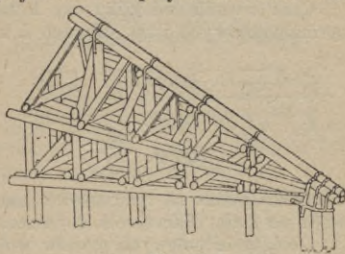


Fig. 66.

przodu chwycony często między 2 pale; uzbrojony jest kątownikiem, teownikiem, szyną, ewentualnie obity blachą. Ściany izbic mogą być pionowe, zakończone u góry nożem (fig. 65), lub — gorzej — ukośne. Izbice nasadzone są mniej silne, tem samem gorsze. Narzut kamienny bardzo pożądany.

Utrzymanie mostów drewnianych. Kontrola powinna się odbywać corocznie, przy starych mostach 2 razy rocznie. Należy baczyć, by nie

robił się przy wjeździe próg (podsypywać), usuwać mech, zatykać otwory i szpary, badać stan gwoździ, śrub. Powłokę odnawia się dopiero po wykonaniu tych czynności.

Specjalną uwagę należy zwrócić na miejsca konstrukcji, najbardziej narażone na zawilgocenie, zwłaszcza tam, gdzie dopływ powietrza jest mały, więc głównie od dołu, następnie na wszystkie węzły i styki, oraz części, na które działa naprzemian woda i powietrze. Ten ostatni wzgląd jest u nas tem ważniejszy, że przeważna część naszych mostów drewnianych, zbudowanych w ostatnich czasach, posiada jarzma (filary) z drzewa miękkiego.

Koszta utrzymania mostów drewnianych wynoszą 2—3% kosztów budowy.

## LITERATURA.

- Thullie: Mosty drewniane. III. wyd. Lwów 1913.  
 Pszenicki: Kurs budowy mostów. Lit. 1925—26.  
 Aragon: Ponts en bois et en métal. Paris 1911.  
 Cooper: American railroad bridges. New York.  
 Foster: A treatise on wooden trestle bridges. IV. wyd. New York 1913.  
 Winkler: Hölzerne Brücken. II. wyd. Wiedeń 1887.  
 Melan: Der Brückenbau. I. Band. III. wyd. Lipsk i Wiedeń 1922.  
 Laskus: Hölzerne Brücken. II. wyd. Berlin 1922.  
 Seyller: Hänge- und Sprengwerke. Leoben 1913.  
 Hauska-Mijura: Holzbrücken aus Rundträgern. Wien 1924.  
 Paton: Dierewiannyje mosty. Kijów 1921.

# Mosty tymczasowe.

Napisał

inż. dr. Stefan Bryła,  
 profesor politechniki, Lwów.

Mosty tymczasowe (prowizoryczne) buduje się:

a) dla celów budowlanych (rusztowania; por. dział: „Rusztowanie mostowe“), dla robotników lub dla transportu materiałów, b) w razie przebudowy mostu stałego, lub, o ile brak funduszy nie pozwala chwilowo na budowę mostu stałego, c) w razie zniszczenia tegoż; tu należą wreszcie d) mosty wojskowe. Te dzielą się na: polowe, pojazdowe, pływające (pontonowe), składane.

Czas trwania od kilku czy kilkunastu dni do kilku lat. Na kolejach normalnotorowych i na drogach I. klasy uważa się w zasadzie wszystkie

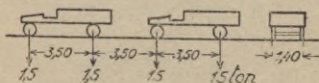


Fig. 67.

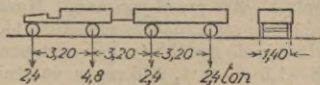


Fig. 68.

mosty drewniane za tymczasowe, które w miarę możliwości zostaną przebudowane na stałe. Naprężenia dopuszczalne por. str. 777.

Obciążenia polowych mostów wojskowych:

1. Zwykle mosty polowe: Szereg samochodów 3 t (fig. 67), w odstępach 3,5 m, za sobą; obok tłum ludzi 260 kg/m<sup>2</sup>. 2. Ciężkie mosty polowe: Samochód 7,2 t z przyprzeżonym wozem 4,8 t (fig. 68), obok tłum ludzi 400 kg/m<sup>2</sup>. 3. Kładki dla pieszych: Można przyjąć obciążenie 260 kg/m<sup>2</sup>. 4. Kładki dla jezdnych: 400 kg/m<sup>2</sup>. Szerokość jezdni mostów polowych 3,00 m; kładek dla pieszych 0,5—1,00 m; kładek dla jezdnych 2,00 m.

Mosty tymczasowe wykonane być mogą: a) z drzewa obrobionego na miejscu, b) częściowo z żelaza (zw. dźwigary dwuteowe, szyny), c) z części-

wem wykorzystaniem zdalnych do użycia części zniszczonej konstrukcji (np. żelaznej kratowej), *d*) z materiałów gotowych, tj. ze składanych części rozbiernalnych (mosty pojazdowe, pontonowe, składane).

Mosty polowe są najprostszym typem. Mogą one być: *a*) na kozłach, *b*) na palach, *e*) dla większych obciążeń i rozpiętości na stosach czyli klatkach z podkładów lub belek.

Kozły (fig. 69) składają się z nóg, połączonych oczepem (kapturem), ryglami i zastrzałami na zaciosy, przy najprostszych konstrukcjach nawet na

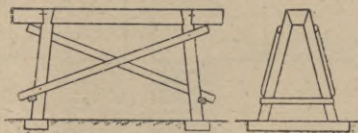


Fig. 69.

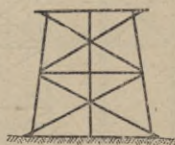


Fig. 70.

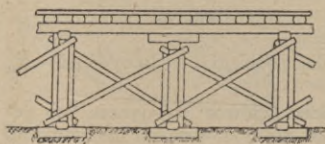


Fig. 71.

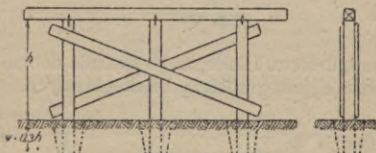


Fig. 72.

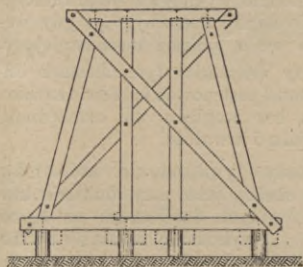


Fig. 73.

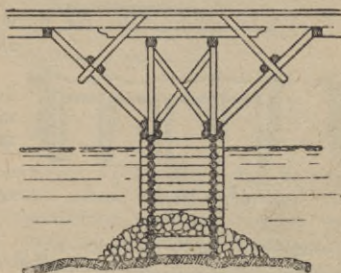


Fig. 74.

sznury. Używane w wodzie do 2,5–3,0 m, na suchym gruncie do 3,0–5,0 m; dla większych wysokości kozły podwójne (fig. 70). Czasem kozły z dyli (do 3,0 m), kozły murarskie, wreszcie kozły z podkładów i szyn.

Jarzma na palach mogą być: *a*) na podwalinach, ułożonych na ziemi (fig. 71), *b*) wkopane do głębokości  $w = 0,3 h$ , dla  $h < 3,0$  m conajmniej 1,0 m (fig. 72), *c*) na palach wbitych 1,0–2,0 m (por. też str. 792, fig. 60), *d*) nasadzone, np. na palach spalonego mostu (fig. 73), *e*) kaszycowe (fig. 74), *f*) zatopione w wodę i obciążone kamieniami, — tylko na twardym i gładkim dnie, jako skrzyniowe, lub na platformach (fig. 75). Oczep łączy się z palami na klamry, kleszcze, trzpienie żelazne, kołki.

Podpory na klatkach (fig. 76), (stosach) z podkładów lub belek, układanych na krzyż i łączonych klamrami, są znacznie silniejsze i dlatego używane często przy prowizorjach kolejowych. Szybka robota, natomiast nadmiar materiału.

Podpory skrajne: na podwalinie, ułożonej w żwirku, na kamieniach, przy gruncie słabym na krótkich palach, a ustalonej przy pomocy wbitych z boku palików (fig. 77). Belki utwierdza się na oczepie przy najprostszej konstrukcji zapomożą sznurów i krótkich beleczek, dylinę na belkach gwoździami, ewentualnie przytrzymuje się listwą, utwierdzoną gwoździami, sznu-

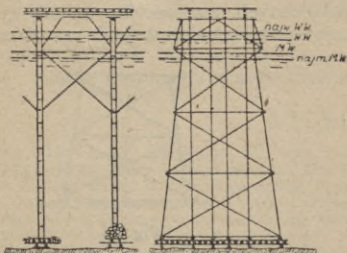


Fig. 75.

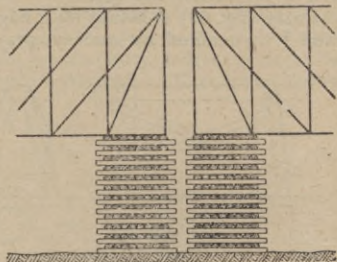


Fig. 76.

rami, drutem. Dla lepszego stężenia dobrze dać podciąg o średnicy ( $\frac{3}{4}d - d$ ), gdzie  $d$  jest grubością belek głównych.

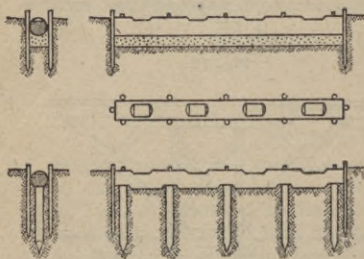


Fig. 77.

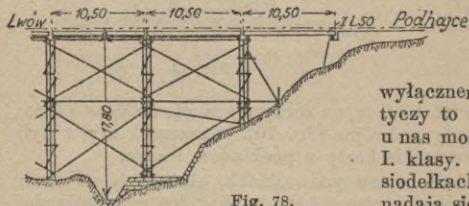


Fig. 78.

nie jest nagła, oraz rozporowe, też dźwigary żelazne (dwuteowe), jeżeli są do dyspozycji; pozwalają bowiem na łatwe przykrycie znaczniejszych rozpiętości (fig. 78).

Prowizorium, budowane w razie zniszczenia mostu, całkowitego lub częściowego, zależy od konstrukcji zniszczonego mostu, oraz od rodzaju i wielkości uszkodzenia. Staramy się tu zwykle o zużytkowanie tych jego części, które do tego celu się nadają, najczęściej przez podniesienie opadniętych części przęseł żelaznych i oparcie na przyczółkach, filarach, oraz na

Belki główne pojedyncze lub podwójne, złączone śrubami lub kłami utwierdzone w dwu prostokątnych do siebie kierunkach (str. 781, fig. 35).

Podobnie wykonywa się prowizoria w razie nagłej potrzeby, np. gdy wezbrana woda uniesie most istniejący.

Przy wszystkich tych mostach budowa musi postępować możliwie szybko, nieraz bez względu na oszczędność materiału i trwałość.

Mosty tymczasowe, które mają trwać dłużej, oraz przy budowie których dość czasu na lepsze wykonanie, różnią się od stałych nie tyle konstrukcją, ile większymi naprężeniami dopuszczalnymi, oraz prawie wyłącznym użyciem okrągłaków. Dotyczy to przeważnie np. budowanych u nas mostów drewnianych na drogach I. klasy. Prócz belek pojedynczych na siodełkach, ewentualnie z zastrzałami, nadają się tu także dźwigary złożone (zwłaszcza klockowe), o ile budowa



dobudowywanych podporach drewnianych. Jest to możliwe, jeżeli rodzaj uszkodzenia przeszła pozwala na to, jeżeli głębokość rzeki nie jest zbyt znaczna, jeżeli wysokość spadu nie jest zbyt wielka, wreszcie, jeżeli belki, spadając, nie odsunęły się zanadto od osi mostu.

Podnoszenie konstrukcji żelaznej zazwyczaj wykonywa się przez stopniowe podnoszenie belek i ustalanie ich na filarach stosowych (klatkowych) z podkładów, które stopniowo powiększa się, dodając wciąż nowe rzędy podkładów (fig. 79). Stosy albo zostają jako tymczasowa podpora, albo, po do-

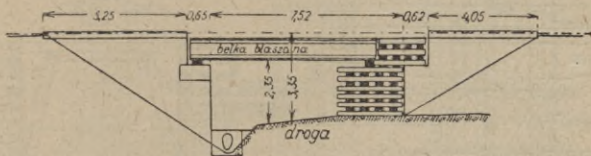


Fig. 79.

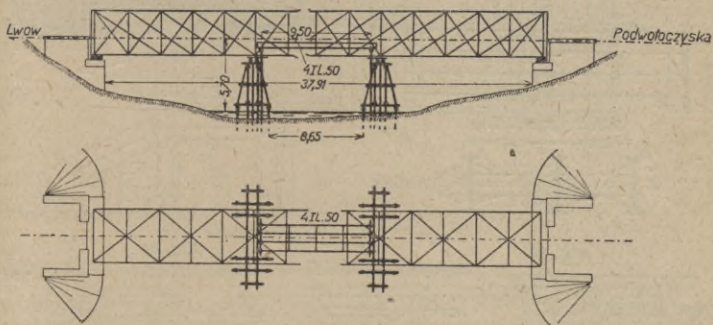


Fig. 80.

prowadzeniu konstrukcji żelaznej do ostatecznego położenia, buduje się zwykle filary jarzmowe z okrągłaków, rozbierając stosy. Części brakujące można uzupełnić dźwigarami żelaznymi o odpowiedniej wielkości, również umieszczonemi na osobnych palach tychże jarzm lub konstrukcją drewnianą (por. np. prowizorium mostowe na Gnieźnie; fig. 80).

Przy mostach i przepustach betonowych i kamiennych, których części pozostały, można wstawić prowizoryczną konstrukcję drewnianą na kozłach, stosach (klatkach); tu nadają się też niekiedy belki rozporowe (fig. 81).

O ile są do dyspozycji dźwigary żelazne, można umieścić je na jarzmach drewnianych, przykrywając nimi otwór (fig. 82).



Fig. 81.

Również z drzewa wykonać można w całości tymczasową rekonstrukcję przepustów zupełnie zniszczonych (fig. 83 i 84).

**Mosty pojazdowe p. w wykazie literatury: „Mosty pojazdowe, instrukcja saperska“.**

**Mosty pływające.** Zalety: taniosc budowy i utrzymania, łatwe dostosowanie do zmiany wysokości wody, łatwa manipulacja. Do wylądowania służą mostki ładownicze, oparte przegibnie na brzegu i na pontonie, łączącym konstrukcję pływającą z brzegiem; zwykle największy spadek ich przyjmuje się dla przejazdu 5%.

1. Promy. Promy używane są, gdy ruch jest zbyt mały, aby opłacała się budowa mostu. Mogą one być:

a) na linie (cumie), rozpiętej między brzegami;

b) na krążku; cumy napięta silnie nad wodą, na niej wspiera się krążek promowy;

c) wahadłowe (fig. 85) na linie, zakotwiczonej w nurcie, o długości  $l = (1,5 - 2) b$ , przyczem  $b$  jest szerokością rzeki; te promy poruszają się pod wpływem prądu, uderzającego skośnie, przez odpowiednie nastawienie;

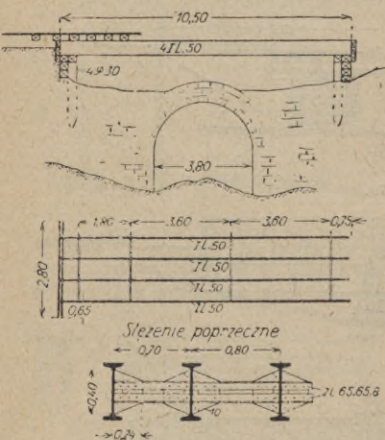


Fig. 82.

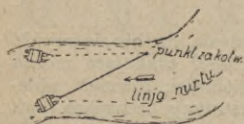


Fig. 85.

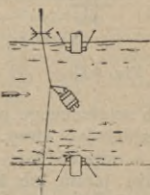


Fig. 86.

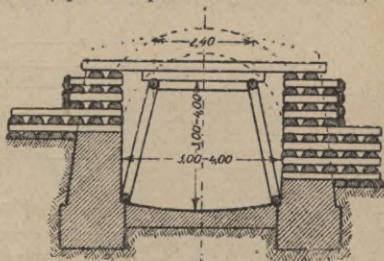


Fig. 83.

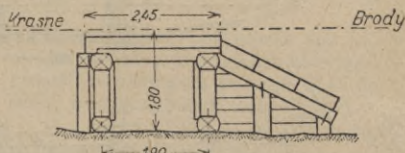


Fig. 84.

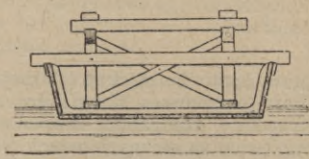


Fig. 87.

d) przeciągane liną z jednego brzegu na drugi, za pomocą liny przechodzącej przez krążki, utwierdzone na brzegach (fig. 86);

e) holowane.

2. Mosty pływające właściwie wykonywa się na statkach (pontonach), rzadziej na tratwach, beczkach, cylindrach żelaznych.

a) Mosty na statkach (pontonach). Statki drewniane mają zazwyczaj przekrój prostokątny, zakończony dziobem. Ściany należy silnie stężyć żebrami i rozporami. Belki mostowe wspierają się na rusztowaniu, rozdzielającym ciężar możliwie jednostajnie na dno (i ściany) przy pomocy kozłów i podwalin (fig. 87). Lepsze statki (pontony) żelazne. Statki powinny być, o ile możliwości, równe wymiarami, szczelne (szpary wypełnić pałkami i osmołować) i możliwie łatwo dostępne we wszystkich częściach.

Udźwig jednego statku wynosi:

$$P = Fz\gamma - G = \mu l_s b_s z - G \quad (\text{w tonnach i metrach}),$$

gdzie  $F$  = powierzchnia rzutu poziomego statku,

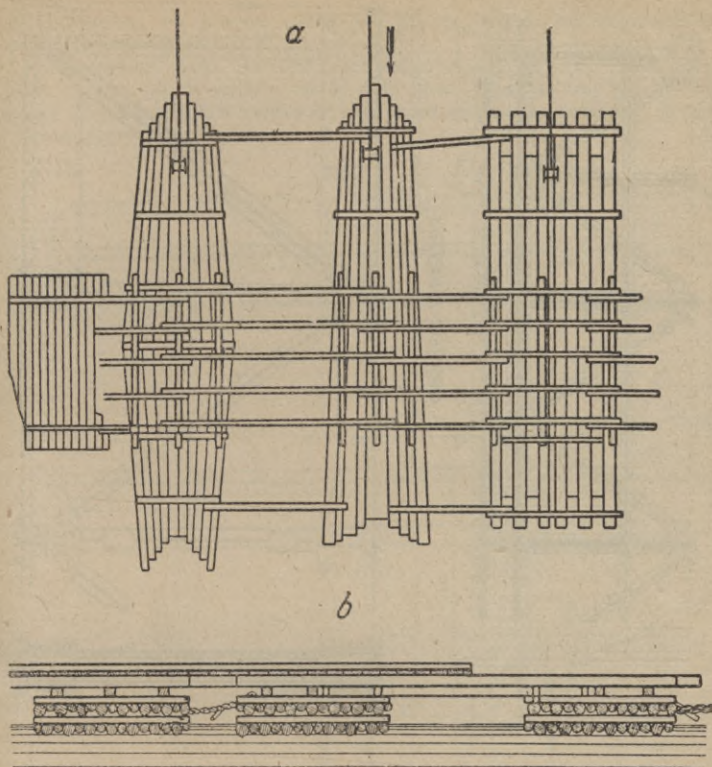


Fig. 88.

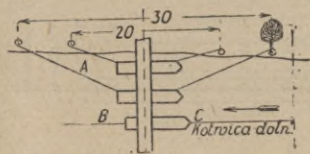


Fig. 89.

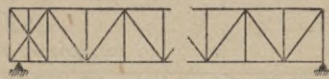


Fig. 90.

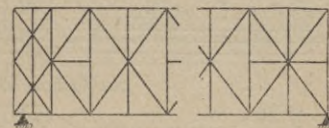


Fig. 91.

$l_s$  wzgl.  $b_s$  = długość, wzgl. szerokość statku (prostokątnego),

$z$  = głębokość zanurzenia,

$\mu$  = współczynnik uwzględniający zaokrąglenia itd., zwykle  $\mu = 0,8-0,9$ ,

$G$  = ciężar stały statku z pomostem.

O ile belki przechodzą przez parę przeseł, mamy do czynienia z belkami ciągłymi na oporach poddających się. Belki, nawet wolno podparte, opiera

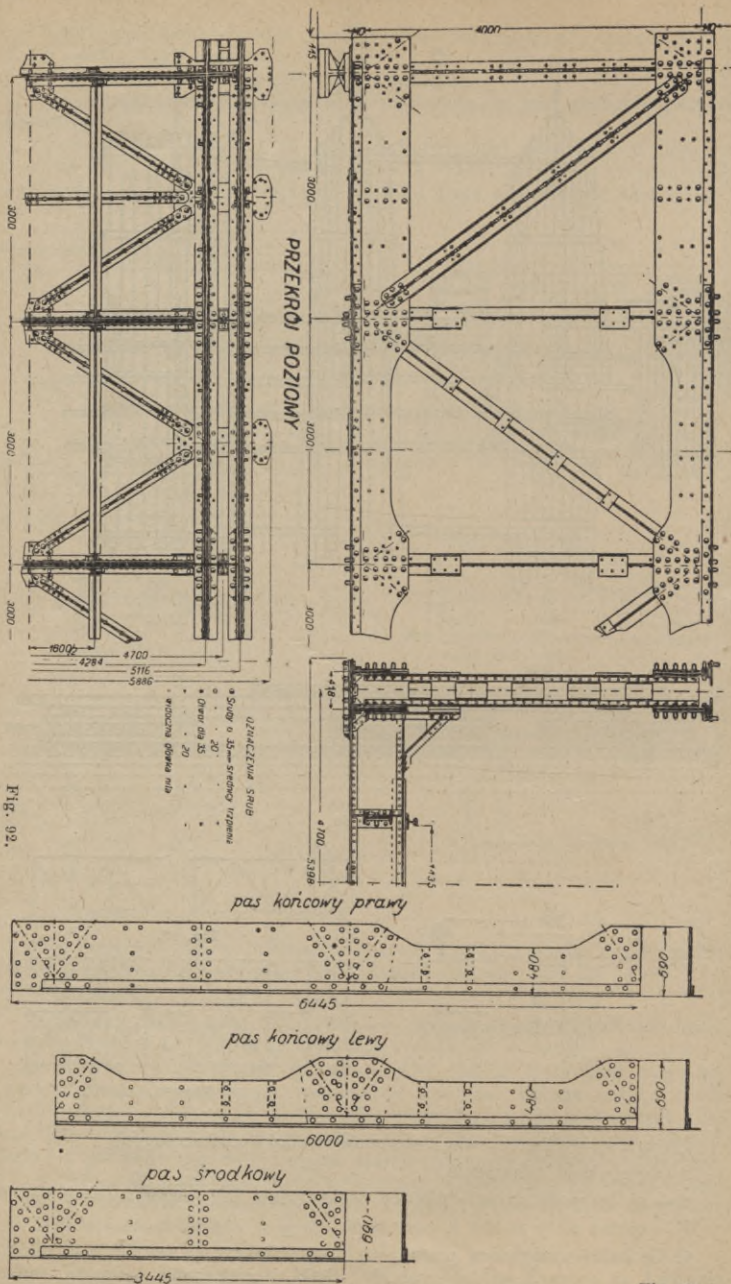


FIG. 92.

Fig. 93.

się naprzemian, na jednym statku na jednym oczepie, na drugim statku na dwu oczepach.

Poszczególne statki utwierdza się na kotwicach od góry rzeki, nadto jeden na parę (4—5) statków też od dołu rzeki. Dwa lub trzy przybrzeżne statki, przy nieszerokich rzekach cały most, można przytwierdzić do pali i drzew przybrzeżnych (fig. 89).

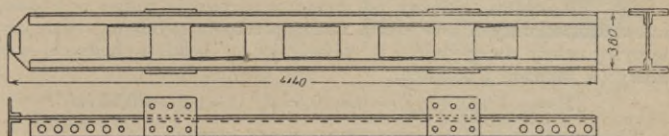
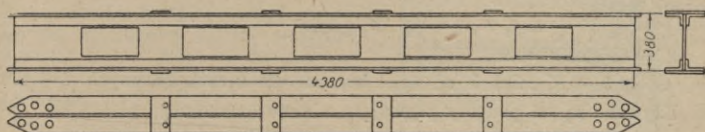
*stup**krzyżulec*

Fig. 94.

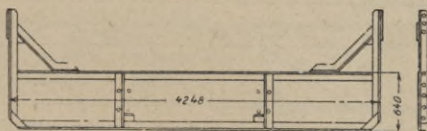


Fig. 95.

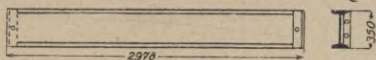


Fig. 96.

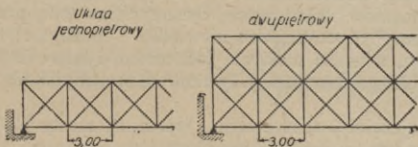


Fig. 97.

Przesła przejazdowe (otwierane dla przepływu statków) najczęściej w nurcie, powinny mieć rozpiętości większe, zwykle do 12 m, natomiast przesła sąsiadujące z nimi możliwie małe (do 4 m). Statki wyjazdowe (promy) powinny być łatwo zwrotne, statki sąsiadujące z nimi możliwie wielkie i silne. W mostach pływających o charakterze bardziej stałym otwieranie następuje często przy pomocy siły motorycznej.

b) Mosty na tratwach (fig. 88), używane tylko na prowizoryczne budowy, są najłatwiejsze do wykonania, natomiast wymagają dużo materiału i silnie ulegają prądowi i falowaniu wody. Belki w jednej lub dwu

warstwach łączy się ze sobą przy pomocy dyliny i belek poprzecznych na śruby, kolki, liny itd., układając je od górnej strony rzeki w ostrza o długości  $\frac{1}{4} b$  (prąd słaby) do  $\frac{1}{2} b$  (prąd silny), gdzie  $b$  jest szerokością tratwy. Pomost wzniesiony około 50 cm ponad wodę.

Niech  $V =$  objętość jednej belki  $\frac{1}{8} l (d_1^2 + d_2^2) \pi = \frac{1}{4} l d_s^2 \pi = \infty 0,8 l d_s^2$

$\gamma_w$  wzgl.  $\gamma_d = c$ . gat. wody, wzgl. drzewa —  $d_1, d_2$  i  $d_s$  są to grubości belki na jej końcach i w połowie —

$\mu =$  współcz., zależny od czasu przebywania tratwy w wodzie, dla tratw krótkotrwałych  $\mu = 1$ , dla dłuższych przebywających w wodzie  $\mu = 0,8$  (tę cyfrę należy uwzględnić), to udźwig jednej belki, wchodzącej w skład tratwy (w tonnach i metrach):

$$P = \mu V (\gamma_w - \gamma_d) = 0,8 \cdot 0,8 l d_s^2 (1 - 0,6) = 0,25 l d_s^2.$$

Tratwy ustawia się w rzece przy pomocy kotwic.

c) Mosty na beczkach używane tylko dla małej szybkości wody ( $< 1$  m/sek.) i krótkotrwałych mostów. Beczki muszą być szczelne, z otworami, zamkniętymi górną czopem, o ile możliwości równe wielkością. Udźwig jednej beczki:

$$P = \mu_1 V \gamma_w = \mu_1 V \cdot 1 = \mu_1 \cdot V, \text{ gdzie}$$

$V =$  objętość beczki,

$\mu = 0,5 - 0,8$ , zależnie od stanu beczek; dla beczek żelaznych  $\mu = 1$ .

Używane są też podpory pływające z nieprzemakalnego płótna itd.

Wykratowanie pasa

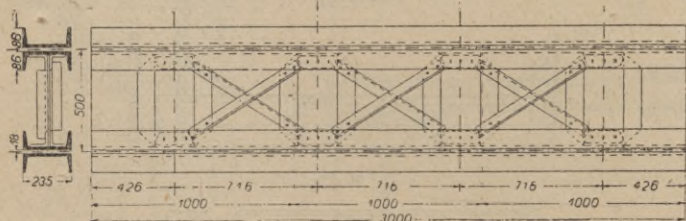


Fig. 98.

**Żelazne mosty składane.** Mosty składane (rozbiegalne) składają się z żelaznych elementów składowych, łączonych ze sobą przy pomocy śrub. Elementy te muszą być stosunkowo niewielkie i niezbyt ciężkie z uwagi na łatwość przewozu, a nadto możliwie jednorodne i łatwe do łączenia z uwagi na możliwość szybkiego montażu. Używane są systemy Eiffla, Roth-Wagnera, Kohna i in.

W Polsce najczęściej spotykanym typem są mosty Roth-Wagnera. Schemat podany jest na fig. 90; podstawą jego jest część kraty równoległej o długości 3,0 m, ewentualnie w przedziałach skrajnych  $\frac{1}{2} 3,0 = 1,5$  m. Układy piętrowe por. fig. 91; układ wiatrownic (teżników) i przekroje poprzeczne por. fig. 92.

Używane są następujące rodzaje konstrukcji:

dla rozpiętości	do 45 m	układ	jednopiętrowy	pasy	podwójne
"	od 46,5 do 72,0 m	"	dwupiętrowy	"	"
"	od 73,5 do 84,0 m	"	"	"	potrójne

Elementy składowe posiadają  $l < 6,5$  m. Są niemi: części a) dźwigarów głównych, b) pomostu, c) teżników, d) łożyska, e) śruby łączące.

a) Części dźwigarów: Elementem pasów jest blacha z nanitowanym kątownikiem. Dwa takie elementy stanowią jedną ściankę; składa się je tak, że styki ich są przesunięte (fig. 92). Końcowe części pasów por. fig. 93. Słupy i przekątnie są dwuteowe (fig. 94). Połączenia w węzłach na blachy węzłowe.

b) Części pomostu: Poprzecznice są blachownicami, element ich (połówkowy; por. fig. 95). Podłużnice są dwuteownikami (fig. 96).

c) Teżniki (fig. 92).

d) Łożyska są odlane ze stali.

e) Śruby są o średnicach 35 mm i 20 mm.

Mosty Kohna mają za podstawę element kraty równoległej wielokrotnej o długości 3,0 m. względnie 6,0 m. Układ jedno- i dwupiętrowy (fig. 97). Używane jako mosty kolejowe i drogowe.

a) Dźwigar główny. Elementem są części pasów o długości 3–6 m, wykonanych z 2 lub 4 ceowników w zależności od tego, czy belka jest jedno- czy też dwuścienna. Styki elementów pasowych są przesunięte. Połączenie ich por. fig. 98. Słupy i przekątnie z kątowników. Połączenia w węzłach na blachy węzłowe.

b) Części pomostu; podłużnice i poprzecznice są blachownicami.

c) Teżniki są wykonane z kątowników.

d) Łożyska są odlane ze stali.

e) Śruby o średnicach 20, 26 i 35 mm.

Fig. 99 przedstawia widok, oraz przekrój poprzeczny mostu Kohna.

Najlepsze wykorzystanie materiału dają belki o rozpiętości podporowej 18–30 m.

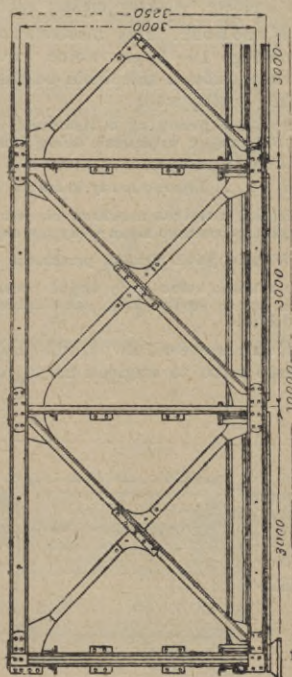
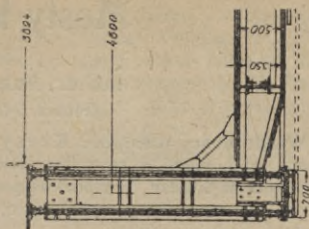


Fig. 99.

## LITERATURA.

- Głogowski: Mosty wojenne. Warszawa 1920.  
 Machlowski: Mosty polowe i organizacja ich budowy. Warszawa 1920.  
 Mosty wojenne. Cz. I. Mosty polowe. Warszawa 1920.  
 Wędziagolski: Mosty wojenne. Warszawa 1920.  
 Czajka: Odbudowa zniszczonych mostów kolejowych. Warszawa 1923.  
 Dworakowski: Wojenne mosty drewniane. Lit. 1925–26.  
 Mosty pojazdowe. Instrukcja saperska. Warszawa 1925.  
 Normand: Roboty polowe (tłum. z franc.). Warszawa 1924.  
 Saper i inżynier wojskowy. Miesięcznik.  
 Laskus: Hölzerne Brücken. Berlin 1922.  
 Der Bauingenieur. Tygodnik.  
 Paton: Wozstanowienie razruszennych mostow. Cz. I. Dierewiannyje mosty. Kijów 1921.

# Mosty kamienne.

Napisał

inż. dr. Maksymilian Thullie,

profesor politechniki, Lwów.

**Wiadomości wstępne.** Korzyści mostów kamiennych: Mały wpływ ciężaru ruchomego w stosunku do ciężaru własnego, mała wysokość konstrukcyjna w kluczu, przeprowadzenie żwirówki przez most, możliwie małe niebezpieczeństwo przy wykojeniu, mały koszt utrzymania, bardzo wielka trwałość, piękny wygląd.

Wady w stosunku do mostów żelaznych: Trudne do wykonania, względnie niemożliwe bardzo wielkie rozpiętości, kosztowne rusztowania i zwykle dłuższy czas budowy, większy ciężar, zatem większe obciążenie gruntu.

**Wysokość.** Przy mostach kolejowych zostawiamy powyżej przekroju normalnego 10—20 cm wolne, ewent. potrzebne miejsce na krążyny. Wezglowia mostów o sklepieniu odcinkowem powinny leżeć najmniej 30 cm nad zwykłą wielką wodą.

Polskie przepisy o budowie i utrzymaniu mostów drogowych z r. 1926 brzmią: § 19. Najmniejsze wzniesienie dolnej krawędzi konstrukcji niosącej oznacza się w sposób następujący:

a) . . . . Łukowe mosty kamienne i betonowe, o ile mają strzałkę mniejszą niż  $\frac{1}{6}$  rozpiętości, a styczna nasadowa nie jest pionowa, należy założyć tak, ażeby zwierciadło najwyższego znanego stanu wody nie sięgało ponad wezglowia.

W razie, jeżeli strzałka przekracza  $\frac{1}{6}$  rozpiętości, nie powinno zwierciadło najwyższego znanego stanu wody sięgać ponad punkt, w którym promień poprowadzony pod kątem 30° ze środka koła, zakreślającego najniższą część podniebienia łuku, przebija podniebienie.

**Rozpiętości.** Zwyczajnie przyjmujemy w rzekach rozpiętości 25—30 m, większe tylko ze względu na żeglugę lub w razie znaczniejszych trudności

fundowania, a to aż do 100 m. Mosty o większych rozpiętościach robi się zwykle żelbetowe lub betonowe; największe rozpiętości mostów kamiennych dochodzą do 90 m, w Polsce w Jaremczu na Prucie  $l = 65$  m. Dla mostów lądowych przyjmuje się rozpiętości mniejsze, bo fundowanie filarów jest tańsze, a mianowicie rozpiętości zależne tu są od wysokości filarów w metrach  $l = 6 + 0,4 h$ .

Szerokość mostu zależy od szerokości drogi

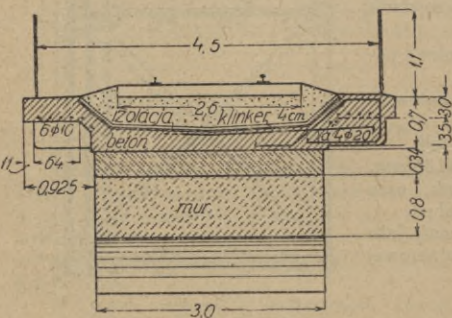


Fig. 100.

i chodników. Szerokość sklepienia musi być taka, aby podparcie poręczy było dostatecznym, ewentualnie rozszerzenie na wspornikach (fig. 100).

**Skrzydła.** Boczne zakończenie nasypu stanowią skrzydła równoległe, ukośne lub prostopadłe. Aby skrócić długość skrzydeł równoległych, robimy stożki stromsze niż nasyp, mianowicie 1 : 1, a nawet 1 :  $\frac{2}{3}$ , w ostatnim wypadku kamienne. Czasem zanurzamy sklepienia w nasypie, oszczędzając na skrzydłach (fig. 101).

**Rodzaj muru.** Mosty kamienne budujemy albo z kamieni naturalnych albo sztucznych. Do pierwszych należą ciosy i kamień łamany, do drugich





5. W sklepieniach mniejszych mostów o rozpiętościach w świetle, nie przekraczających 15 m, jako też w przyczółkach i filarach, na których spoczywają przęsla o rozpiętościach, nie przekraczających 25 m, można dopuścić następujące naprężenia:

Materiały	Naprężenia dopuszczalne
Mur ciosowy z granitu, porfiru, twardego piaskowca kwarcytowego . . . . .	40 kg/cm <sup>2</sup>
Mur ciosowy z wapienia . . . . .	30 kg/cm <sup>2</sup>
" " z piaskowca miękkiego . . . . .	25 kg/cm <sup>2</sup>
" " z kamienia warstwowego . . . . .	12—18 kg/cm <sup>2</sup>
" zwykły . . . . .	10—12 kg/cm <sup>2</sup>
" z cegły wyborowej . . . . .	12—20 kg/cm <sup>2</sup>
" " maszynowej . . . . .	10—14 kg/cm <sup>2</sup>
" " zwyczajnej . . . . .	8 kg/cm <sup>2</sup>

W powyższem przyjęto wszędzie zaprawę z cementu portlandzkiego 1 : 3.

Ciężar własny wyznaczamy na podstawie przybliżonego projektu z rysunku.

Zmiany ciepłoty. Dla sklepień kamiennych wystarczy przyjąć zmianę ciepłoty  $\pm 15^{\circ}$  C.

Przepisy polskie o budowie mostów drogowych z r. 1926. § 54. 2. Przy obliczaniu statycznym należy uwzględnić . . . . dla sklepień o rozpiętościach, przekraczających w świetle 20 m, także i wpływ zmian temperatury w granicach  $\pm 10^{\circ}$  C.

Ciężar ruchomy uwzględnia się, przyjmując, że nadsypka rozdziela ciśnienie pod kątem  $45^{\circ}$ . W kierunku podłużnym mostu zazwyczaj nie uwzględniamy dla większych mostów rozkładu ciśnienia. Przy rozkładzie przez beton można przyjąć  $55^{\circ}$ .

Obliczenie dźwigarów głównych. Mosty kamienne wykonywujemy zwykle jako sklepienia; dla bardzo małych rozpiętości używa się też płyt.

Przepusty płytowe (fig. 102; typy M. R. P.) obliczamy na zginanie wedle

wzoru  $W = \frac{M}{k}$ , przyczem naprężenie dopuszczalne na złamanie  $k$  przyjmuje

się wedle następującej tabliczki:

łupek ilowy . . . . .	10 kg/cm <sup>2</sup>	granit . . . . .	5 kg/cm <sup>2</sup>
kwarc . . . . .	8 kg/cm <sup>2</sup>	piaskowiec średni . . . . .	4,5 kg/cm <sup>2</sup>
bazalt . . . . .	6 kg/cm <sup>2</sup>	łupek krzemionkowy . . . . .	2 kg/cm <sup>2</sup>
łupek łyszczkowy . . . . .	5 kg/cm <sup>2</sup>	wapień . . . . .	1,5 kg/cm <sup>2</sup>

Typy M. R. P. podają następujące wymiary:

Klasa drogi	Rozpiętość w świetle	Grubość płyty $g$	Szerokość podparcia $b$
I i II	0,60	0,20	0,20
	0,80	0,25	0,25
III	0,60	0,15	0,15
	0,80	0,20	0,20
	1,00	0,25	0,25

Sklepienia obliczamy jako łuki sprężyste bezprzegubowe lub trójprzegubowe. Naprężenia wyznaczamy dla mostów mniejszych (do 20 m) zapomocą linii ciśnienia, dla większych na podstawie linii wpływowych. Linję ciśnienia wyznacza się zw. dla obciążenia zupełnego i dla obciążenia połowy sklepienia. Obciążenie do połowy, względnie nieco poza połowę, jest najniekorzystniejsze dla wezglowia i dla przekroju w  $\frac{1}{4} l$ . Pierwsze koło wałka lub parowozu należy zatem umieścić w odległości 0,4  $l$  od podpory. Obciążenie zupełne wywołuje najw.  $H$  i najw.  $M$  w kluczu. Przy sklepieniach obliczamy pasek o szerokości 1 m, przy odrębnych łękach musimy wyznaczyć, jaki ciężar przypada na jeden łęk.

2. Przy obliczeniu statycznym należy uwzględnić najniekorzystniejsze działanie sił zewnętrznych, a dla sklepień o rozpiętościach, przekraczających w świetle 20 m, także

i wpływ zmian temperatury w granicach  $\pm 10^\circ \text{C}$ . Współczynnik rozszerzalności można przyjmować równy 0,000.007 na  $1^\circ \text{C}$ , a współczynnik sprężystości równy  $60.000 \text{ kg/cm}^2$ .

**Przepusty.** Przepusty płytowe kamienne tylko dla małych rozpiętości od 0,25 m do 1 m (fig. 102). Jeżeli rozpiętość większa, robimy wyższą część przyczółków wystającą o 0,1 l (fig. 103). Jeżeli i to nam nie wystarczy, buduje się przepusty podwójne (fig. 104). Grubość przyczółków  $b = 0,4 + 0,3 h$ , najmniej

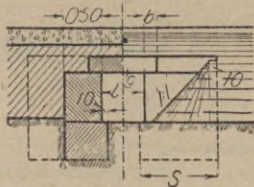


Fig. 102.

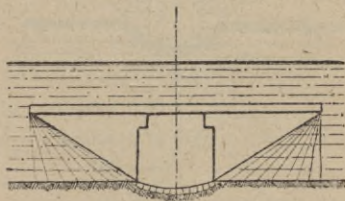


Fig. 103.

0,6 m, grubość filara średniego  $b_1 = 0,6 b$ . Nadsypka wynosi przy kolejach co najmniej 0,8 m, przy drogach 0,3 m.

Przepusty sklepienne budujemy dla  $l > 1,00 \text{ m}$ . Sklepienie zw. półkoliste albo odcinkowe. Obecnie najczęściej przepusty betonowe, bo kamień musi być gładko obrobiony, aby uniknąć zamulenia, zaś szwy dobrze wypełnione, aby się woda przez nie nie dostawała do gruntu i nie podmywała.

Dla mniejszych rozpiętości wspólny fundament pod oba przyczółki (fig. 105), dla większych przy dobrym gruncie osobne fundamenty (fig. 106; typy M. R. P.). Dla oszczędzenia kosztów ścina się sklepienie przepustu w płaszczyźnie stoku, przez co zaoszczędza się na murach czołowych i skrzydłach (fig. 107).

Pod wysokimi nasypami powiększa się stosownie do wysokości nadsypki u brzegów i w środku grubość sklepienia w kluczu o  $0,2 h_1$ , gdy  $h_1$  oznacza wysokość nadsypki nad grzbietem w kluczu. We Francji wzmacnia się sklepienie pierścieniami gęstszymi w środku, a rzadszymi pod stokami.

Małe przepusty dla małych ścieków są owalne (fig. 108) lub rurowe (fig. 109). Na dobrym gruncie kładziemy rury wprost na ziemię, na słabym na warstwę żwiru grubą do 15 cm, albo je podmurowujemy. Wyjątkowo używa się także rur z blachy falistej.<sup>1)</sup>

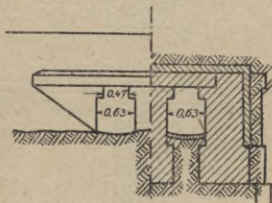
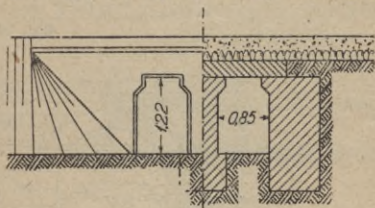


Fig. 104.

<sup>1)</sup> Por. Jasiewicz: „O zastosowaniu rur z blachy pod nasypami kolejowymi“, Przegląd Techniczny 1902, str. 321.

**Kształt i grubość łuku.** Grubość sklepienia w kluczu. Rozpiętość i strzałkę wyznaczamy zwykle wedle skrajni lub wysokości wielkiej wody i niwelety, poczem przystępujemy do wyznaczenia grubości sklepienia

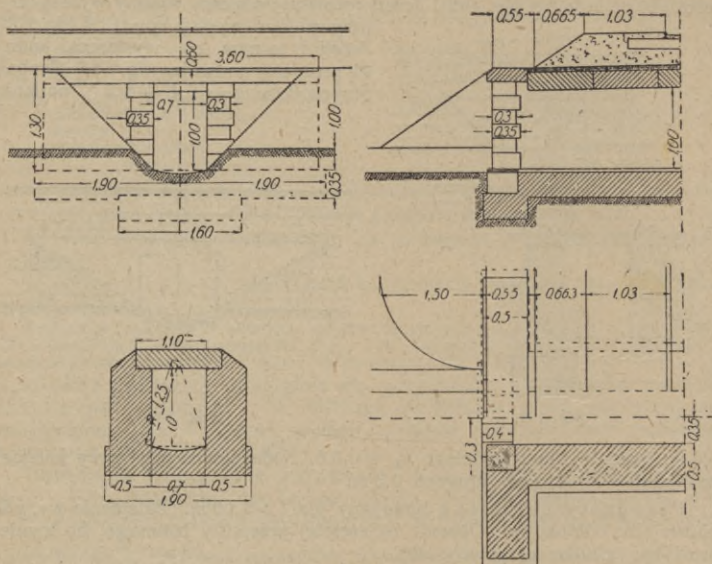


Fig. 105.

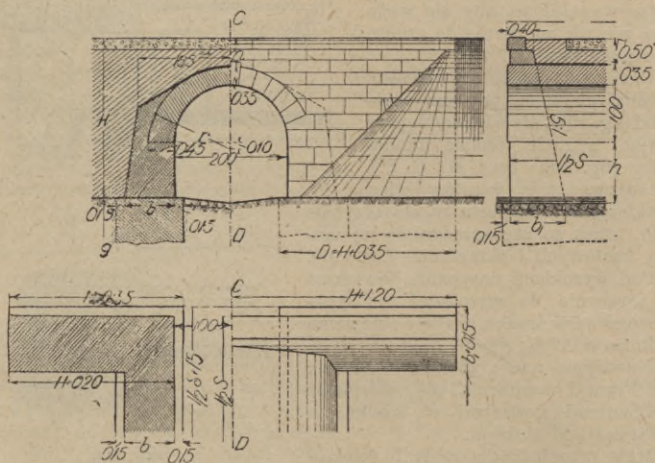


Fig. 106.

w kluczu i w węzłowie. Przy bezprzegubowym grubość rośnie od  $d_0$  w kluczu ciągle do  $d_1$  w węzłowie, tak, aby rzut pionowy szwów pozostał ten sam. Przy trójprzegubowym sklepieniu największa jest grubość  $d_2$  w jednej czwartej rozpiętości.

Croizette Desnoyers podaje następujące wzory, przy czym  $r_1$  oznacza promień krzywizny w kluczu.

Dla sklepień półkolistych i eliptycznych:

$$\left. \begin{array}{l} \text{mosty drogowe } d_0 = 0,15 + 0,15 \sqrt{2 r_1} \\ \text{mosty kolejowe } d_0 = 0,20 + 0,17 \sqrt{2 r_1} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Dla sklepień odcinkowych:

stosunek $f : l$	mosty drogowe	mosty kolejowe
1 : 4	$d_0 = 0,15 + 0,15 \sqrt{2 r_1}$	$0,20 + 0,17 \sqrt{2 r_1}$
1 : 6	$d_0 = 0,15 + 0,14 \sqrt{2 r_1}$	$0,20 + 0,16 \sqrt{2 r_1}$
1 : 8	$d_0 = 0,15 + 0,13 \sqrt{2 r_1}$	$0,20 + 0,15 \sqrt{2 r_1}$
1 : 10	$d_0 = 0,15 + 0,12 \sqrt{2 r_1}$	$0,20 + 0,14 \sqrt{2 r_1}$
1 : 12	$d_0 = 0,15 + 0,11 \sqrt{2 r_1}$	$0,20 + 0,13 \sqrt{2 r_1}$

Wzory te ważne tylko dla  $l > 10 m$ .  $r_1 = \frac{l^2 + 4 f^2}{8 f}$ .

Dla mniejszych rozpiętości poleca Heinzerling:

dla sklepień z ciosu, nadsypka	$h < 1,5 m$	$d_0 = 0,40 + 0,025 r_1$	} (2)
" " " " "	$h > 1,5 m$	$d_0 = 0,45 + 0,03 r_1$	
" " ceglanych, " "	$h < 1,5 m$	$d_0 = 0,43 + 0,028 r_1$	
" " " " "	$h > 1,5 m$	$d_0 = 0,51 + 0,033 r_1$	
" " z kam. łam. " "	$h < 1,5 m$	$d_0 = 0,48 + 0,031 r_1$	
" " " " " "	$h > 1,5 m$	$d_0 = 0,55 + 0,037 r_1$	

Séjourné przyjmuje dla większych sklepień:

$$d_0 = \alpha (1 + \sqrt{l}) \mu \dots \dots \dots (3)$$

Spółczynnik  $\alpha$  przyjąć należy:

- dla mostów drogowych
- $\alpha = 0,12 - 0,18$ , średnio 0,15,
- dla mostów kolei normalnotorowych
- $\alpha = 0,15 - 0,21$ , średnio 0,185,
- dla mostów kolei wąskotorowych
- $\alpha = 0,14 - 0,20$ , średnio 0,17.

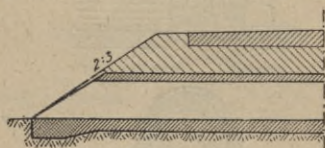


Fig. 107.

$\mu$  jest funkcją  $\varphi = \frac{f}{l}$  i wynosi dla półkola . . . . . 1,

dla elipsy zniżonej .  $\frac{4}{3 + 2\varphi}$   
 „ odcinka . . . .  $\frac{4}{3} (1 + \varphi^2)$ .

Grubość w wezglowiu  $d_1$  przyjmuje Croizette Desnoyers:

dla łuku pełnego podwyższonego  $\frac{d_1}{d_0} = 2$ .

dla łuków eliptycznych dla  $\frac{f}{l} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$   
 $\frac{d_1}{d_0} = 1,8 \quad 1,6 \quad 1,4$ ,

dla łuków odcinkowych dla  $\frac{f}{l} = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{18}$   
 $\frac{d_1}{d_0} = 1,8 \quad 1,4 \quad 1,25 \quad 1,15 \quad 1,10$ .

Séjourné przyjmuje dla elipsy  $\frac{d_1}{d_0} = 1 + 2 \frac{f}{l}$ , dla odcinka żelazi  $\frac{f}{l} > \frac{1}{2\sqrt{3}}$ . . . 2, jeśli  $\frac{f}{l} < \frac{1}{2\sqrt{3}}$  . . .  $1 + 2 \left(\frac{f}{l}\right)^2$ .

Powyższe wzory doświadczalne dają tylko wartości przybliżone. Najpewniejsze są wzory Séjournégo. Chcąc liczyć dokładniej, użyjemy jednego z poniżej podanych sposobów.

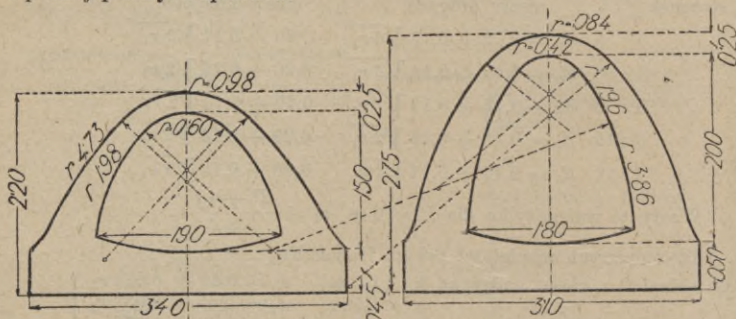


Fig. 108.

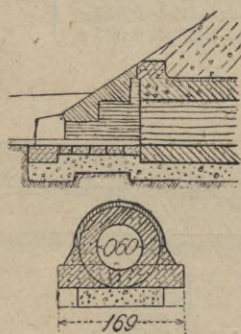


Fig. 109.

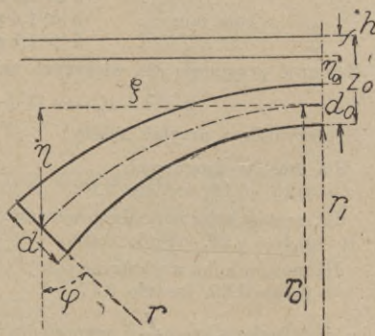


Fig. 110.

1. Sposób Melana. Jeżeli nadsypka w kluczu jest  $\eta_0$  (fig. 10), a wysokość obciążenia  $z_0$ , to  $H = z_0 r_0$ . Jeżeli ciśnienie w kluczu przy jednostajnym rozdzieleniu jest  $\sigma_0$ ,  $\gamma$  i  $\gamma_1$  są ciężarami gatunkowymi muru i nadsypki, to  $z_0 r_0 = z_0 (r_1 + d_0) = d_0 \sigma$ , stąd

$$d_0 = \frac{(\gamma_1 \eta_0 + p) r_1}{\sigma - \gamma r_1 - z_0} \dots \dots \dots (4)$$

wszystko w *t* i *m*.  $d_0$  należy tymczasowo przyjąć.  $\sigma_0$  należy przyjąć mniejsze niż dopuszczalne  $\sigma$  przy największym wychyleniu się linii ciśnienia. Przy obciążeniu połowy sklepienia ciężarem  $p_1$  otrzymuje Melan, nazwawszy

$$w = \gamma_1 \eta_0 + \frac{1}{2} p_1,$$

$$d_0 = -\frac{w}{2\gamma} + \sqrt{\frac{w^2}{4\gamma^2} + \frac{p_1 f}{2\gamma} \cos^2 \varphi} \dots \dots \dots (5)$$

przyczem  $\cos^2 \varphi = \frac{l^2}{l^2 + 4f^2}$ .

## 2. Sposób Tolkmitta.

$$d_0 = \frac{0,15 \gamma \frac{l^2}{f} \left( \eta_0 + \frac{p}{2} + \frac{f}{10} \right)}{10 \sigma - 0,15 \gamma \frac{l^2}{f}}, \dots \dots \dots (6)$$

jeśli  $\sigma$  w  $kg/cm^2$ , reszta w  $t$  i  $m$ .

Dokładniej  $d_0 = \frac{\gamma z_0 r_1}{10 \sigma_0 - \gamma z_0}$ .

Jeżeli nazwiemy  $m = \frac{z_0}{\frac{1}{8} + \frac{\gamma z_0}{10 \sigma}}$ , to  $r_1 = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{f + m}{f m}$ .

Jednak ze względu na obciążenie jednostronne musi być także

$$d_0 \geq 0,43 \frac{p f}{d_0 + \eta_0 + \frac{p}{2} + \frac{f}{10}} \dots \dots \dots (7)$$

**Przykład 1.** Dane  $l = 30 m$ ,  $f = 10 m$ ,  $\eta_0 = 0,8 m$ ,  $p = 1 m$ ,  $\sigma_0 = 12 kg/cm^2$ ,  $\gamma = 2,4 t/m^3$ .  
Mamy naprzód

$$d_0 = \frac{0,15 \cdot 2,4 \cdot \frac{900}{10} \left( 0,8 + 0,5 + \frac{10}{10} \right)}{10 \cdot 12 - 0,15 \cdot 2,4 \cdot \frac{900}{10}} = 0,85 m,$$

więc  $z_0 = 0,85 + 0,80 + \frac{1,0}{2} = 2,15 m$ ,

$$m = \frac{\frac{245}{1} + \frac{2,4 \cdot 245}{10 \cdot 12}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{12,8}} = 12,8, \quad r_1 = \frac{900}{8} \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{12,8} \right) = 20 m,$$

$$d_0 = \frac{2,4 \cdot 2,15 \cdot 20}{10 \cdot 12 - 2,4 \cdot 2,15} = 0,90 m.$$

Dla obciążenia częściowego:

$$d_0 \geq 0,43 \frac{1 \cdot 10}{0,9 + 0,8 + \frac{1}{2} + \frac{10}{10}} = 1,34 m.$$

Liczmy jeszcze raz; przyjmujemy  $d_0 = 1,2 m$ .

$$d_0 \geq 0,43 \frac{1 \cdot 10}{1,2 + 0,8 + \frac{1}{2} + \frac{10}{10}} = 1,23, \text{ co się dostatecznie zgadza z przyjęciem.}$$

Według Melana otrzymamy:

$$d_0 = \frac{(1,8 \cdot 0,8 + 1) 20}{120 - 2,4 \cdot 20 - 2,15} = 0,7 m.$$

Przy uwzględnieniu obciążenia jednostronnego otrzymamy dla  $p_1 = 1,2$ ,  $w = 2,04$ ,

$$\text{dost}^2 \varphi = \frac{30^2}{30^2 + 4 \cdot 10^2} = 0,69, \quad d_0 = \frac{2,04}{2,24} + \sqrt{\left( \frac{2,04}{2,24} \right)^2 + \frac{1,2 \cdot 10}{2 \cdot 2,24}} \cdot 0,69 = 0,95 m.$$

Wedle Melana otrzymujemy więc mniejszą grubość.

**Kształt łuku.** Oś łuku przyjmujemy w kształcie półkola, odcinka, elipsy, paraboli, łuku kosowego. Dla nieco większych sklepień przyjmujemy obecnie oś łuku w kształcie linii ciśnienia dla obciążenia ciężarem własnym i połową ciężaru ruchomego.

Linję ciśnienia, która ma wpadać w oś łuku, wyznaczamy wedle Köglera nazwawszy  $\varphi = \frac{z - z_0}{6 z_0} = \frac{z'}{6 z_0}$  (fig. 111). Rzędne  $y$  należy odnieść na dół od poziomej przez oś w kluczu; równają się one współczynnikiowi, podanemu w tabl. 1, pomnożonemu przez  $f$ .

Tablica 1.

$x: \frac{l}{2}$	$\psi = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,0100	0,0072	0,0064	0,0060	0,0057	0,0054	0,0051	0,0049	0,0047	0,0046	0,0045	0,0044	0,0043
0,2	0,0400	0,0352	0,0320	0,0306	0,0285	0,0271	0,0259	0,0249	0,0241	0,0234	0,0228	0,0223	0,0217
0,3	0,0900	0,0810	0,0752	0,0710	0,0674	0,0643	0,0617	0,0596	0,0576	0,0560	0,0544	0,0531	0,0518
0,4	0,1600	0,1463	0,1369	0,1297	0,1237	0,1186	0,1143	0,1106	0,1071	0,1040	0,1013	0,0990	0,0967
0,5	0,2500	0,2308	0,2184	0,2082	0,1995	0,1921	0,1856	0,1803	0,1751	0,1708	0,1667	0,1628	0,1593
0,6	0,3600	0,3367	0,3213	0,3088	0,2973	0,2876	0,2794	0,2722	0,2658	0,2600	0,2549	0,2496	0,2447
0,7	0,4900	0,4649	0,4476	0,4328	0,4206	0,4097	0,4009	0,3920	0,3844	0,3777	0,3718	0,3658	0,3604
0,8	0,6400	0,6167	0,5999	0,5860	0,5739	0,5633	0,5539	0,5456	0,5382	0,5318	0,5256	0,5202	0,5151
0,9	0,8100	0,7936	0,7813	0,7713	0,7627	0,7550	0,7481	0,7420	0,7364	0,7314	0,7269	0,7226	0,7184
0,975	0,9506	0,9459	0,9420	0,9389	0,9361	0,9337	0,9315	0,9295	0,9276	0,9258	0,9245	0,9231	0,9220
1,0	1,000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000



Przyjmując linię obciążenia paraboliczną, otrzymamy wedle Färbera i Rittera, gdy nazwiemy  $\xi = x : \frac{l}{2}$ ,  $\eta = y : f$ ,  $\varphi' = 1 + \varphi$

$$\eta = \frac{1}{\varphi} \xi^2 (1 + \varphi \xi^2) \dots \dots \dots (8)$$

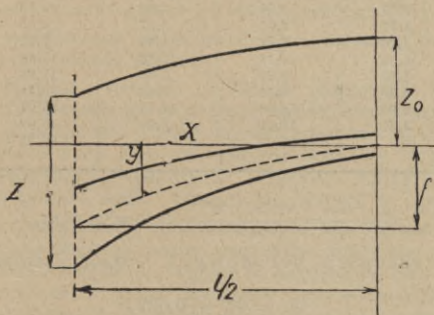


Fig. 111.

Łuki trójprzegubowe. Oś łuku, która ma wpadać na linię ciśnienia, wyznaczyć możemy, jak poprzednio. Grubość w kluczu i w węzłowie obliczymy także, jak poprzednio, dla obciążenia zupełnego, chodzi jeszcze o grubość  $d_2$  w  $\frac{l}{4}$ . Tolkmitt otrzymuje  $d_2 = 0,94 \frac{\gamma p l^2}{H} \cos \alpha$ . Wstawivszy wartość za  $H$ , otrzymamy:

$$d_2 = 0,73 \frac{p f}{z_0 - 0,5 p} \cos \alpha \dots \dots \dots (9)$$

Mörsch wyznacza linię ciśnienia, a zarazem oś, w następnym sposob. Wyznaczamy najpierw, począwszy od klucza, momenty ciężarów pasków (fig. 112)

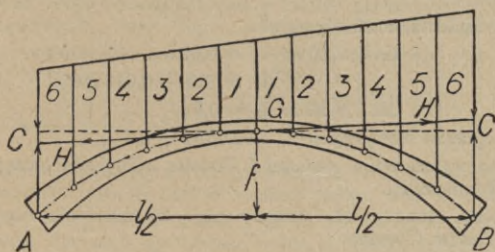


Fig. 112.

ze względu na poszczególne linie podziału zapomocą sił poprzecznych  $M = \sum T dx$ , aż do podpór  $A$  i  $B$ . Momenty w węzłowiach niech będą  $M_a$  i  $M_b$ , wtedy mamy  $M_a = H(f - c)$ ,  $M_b = H(f + c)$ , a stąd wyznaczymy  $H$  i  $c$ , przyczem dla obciążenia symetrycznego  $c = 0$ .  $M : H = y$  oznacza odstęp punktów linii ciśnienia pod linią  $H$ .

Przykład 2. Dla sklepienia zaprojektowanego wedle fig. 113 ( $l = 20,8$  m,  $f = 3,2$  m) należy wyznaczyć dokładny kształt osi. Przyjmujemy  $dx = \frac{l}{20} = 1,04$  m.

$x: \frac{l}{2}$	$P: dx$	$T: dx$	$T_{\text{śred.}}: dx$	$M: dx^2$	$y$ w m
0	0,86	0	0,43	0	0
0,1	0,88	0,86	3,30	0,43	0,022
0,2	0,97	1,74	2,22	1,73	0,085
0,3	1,11	2,71	3,27	3,95	0,203
0,4	1,29	3,82	4,46	7,22	0,371
0,5	1,54	5,11	5,88	11,68	0,601
0,6	1,85	6,65	7,58	17,06	0,963
0,7	2,26	8,56	9,63	25,14	1,292
0,8	2,80	10,76	12,16	34,77	1,787
0,9	3,47	13,56	15,30	46,93	2,413
1,0	0	17,03		62,23	3,200

$$H = \frac{M_{10}}{f} = \frac{62,23 \cdot 1,04^2}{3,2} = 21,03 \text{ m}^3 = 50,5 \text{ t.}$$

Grubość sklepień betonowych. Wzór doświadczalny podaje Housselle

$$d_0 = 0,2 + 0,022 r \dots \dots \dots (10)$$

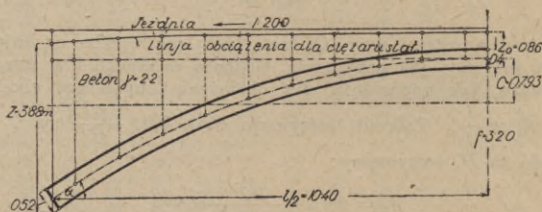


Fig. 113.

Dla płaskich mostów drogowych ( $\frac{f}{l} = \frac{1}{10}$ ) i dla sklepień, zbudowanych wedle linii ciśnienia, można przyjąć:

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } l > 10 \text{ m } d_0 &= 0,02 l \\ d_1 &= (1,5 + 0,015 l) d_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

$$\text{dla } l > 30 \text{ m } d_0 = 0,01 l \dots \dots \dots (12)$$

$$\text{Dla przepustów kolejowych } d_0 = 0,033 l + 0,1 \dots \dots \dots (13)$$

Dokładne wyznaczenie grubości i kształtu sklepienia następuje, jak powyżej dla kamiennych.

**Sklepienia.** Materiał. Możemy użyć do sklepienia cegły, kamienia łamanego, ciosów i betonu.

a) Cegły. Zmianę grubości osiągamy odsadkami.

b) Kamień łamany. Szwy mają być cienkie przy kamieniu obrobionym (0,5—1 cm), grubsze przy nieobrobionym (2—3 cm). Do zaprawy używa się obecnie tylko cementu portlandzkiego 1:3 do 1:5.

c) Ciosy. Wysokość ciosów ma być, ile możności, równa grubości sklepienia  $g$ ,  $\frac{1}{2}g$  lub  $\frac{1}{3}g$ . Szerokość ciosów wynosi 30—60 cm, rzadko 75 cm.

d) Beton. Używamy zwykle mieszanki 1:2:5 do 1:3:6. W miejscach, gdzie naprężenia są większe, w kluczu i w wezłowiach mieszanki tłustszej 1:2:4, nawet 1:1,5:1,5.

Wykonanie sklepień. Małe sklepienia sklepimy w całej grubości od przyczółków do klucza. Dla większych sklepień używa się rozmaitych sposobów, aby uniknąć otwarcia szwów podczas sklepienia i potem. Najpierw zostawia się w kluczu, w wezłowiach i w szwach niebezpiecznych szwy otwarte, nawet przerwy, rozparte beleczkami, i zapełnia się je dopiero przed zdjęciem krążyn, a nawet i potem, i zamyka się sklepienie w kilku punktach równocześnie, przez co zmniejsza się też odkształcenie krążyn podczas budowy.

Dla  $l > 40 m$  wykonywa się sklepienia pierścieniami z zazębieniem naturalnym, wynikiem z układu klinów.

Beton układa się w warstwach 18—20 cm, prostopadle do podniebienia i ubija bijakami. Betonuje się w paskach takich, aby je można w jednym dniu wykonać (60—100 m<sup>3</sup>). Jeżeli trzeba betonować dłużej, to albo robi się bez przerwy i w nocy albo też zostawia szczelinę, którą wypełniamy dopiero po ustaniu ruchów rusztowania. Sklepienie trzeba w pierwszych tygodniach często polewać wodą. Obecnie wchodzi też w użycie beton lany.

Przeguby ustalają linię ciśnienia i przeciwdziałają powstawaniu naprężeń wskutek zmiany ciepłoty i ruchów przyczółka. Konieczne przy niepewnym gruncie, a wskazane wogóle dla większych rozpiętości. Przy mostach murywanych używamy zawsze trzech przegubów, przy żelbetowych czasem dwu przegubów. Charakterowi mostów kamiennych odpowiadają przeguby kamienne (most kolei Drezno-Staremiasto; fig. 114) lub betonowe (najw.  $k = 90 \frac{1}{2} kg/cm^2$ ).

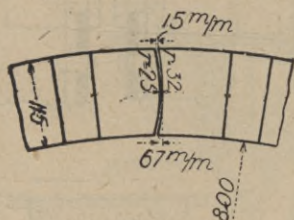


Fig. 114.

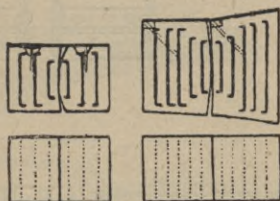


Fig. 115.

Często wstawiamy wkładki ołowiane o grub. 2 mm, ujęte w blachy mosiężne. Przy większych rozpiętościach używamy ciosów przegubowych żelbetowych (fig. 115). Nazwijmy  $k_m$  najw. dop. ciśnienie,  $P$  ciśnienie na jednostkę długości,  $E, E_1$  współczynniki sprężystości,  $R$  i  $R_1$  promienie obu walców się dotykających,  $a$  połowę szerokości zetknięcia, to

$$a = \frac{2P}{\pi k_m}, k_m = 2 \sqrt{\frac{5P}{18\pi} \cdot \frac{EE_1}{E+E_1} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right)} \dots \dots (14)$$

$R_1$  jest ujemne, jeżeli leży na tej samej stronie, co  $R$ . Ponieważ największe ciśnienie występuje tylko w bardzo wąskim pasku, więc można  $k_m$  przyjąć bardzo wysokie; dla żelaza możemy pójść aż do granicy plastyczności (2,2—2,4 t/cm<sup>2</sup>), dla stali do 2,8 t/cm<sup>2</sup>, dla kamieni do połowy wytrzymałości materiału.

Przeguby ołowiane, nieodpowiednie dla wielkich sklepień, składają się z warstwy ołowiu, zwykle 15—25 mm, przy wielkich ciśnieniach nawet 8 mm grubej. Zw. grubość płyty wynosi  $\frac{1}{8}$  do  $\frac{1}{12}$  szerokości płyty  $b$ .

Aby ołów nie wciskał się w pory kamienia, kładziemy zwykle między ołów a kamień blachę miedzianą lub mosiężną. Szerokość płyty  $b = \frac{N}{60}$ , jeżeli dopuszczamy ciśnienia na ołów 120 kg/cm<sup>2</sup>. Jeżeli ciśnienie na cios  $v$ ,

a grubość sklepienia  $d$ , to  $v = \frac{N}{b} \sqrt{\frac{b}{d}}$ . Resztę szwu zwykle wypełnia się zaprawą cementową po zdjęciu krążyn. Lepiej jednak zostawić przeguby otwarte. Przeguby ołowiane są dla mostów do 20 m rozpiętości bardzo dobre, dla średnich jeszcze możliwe.

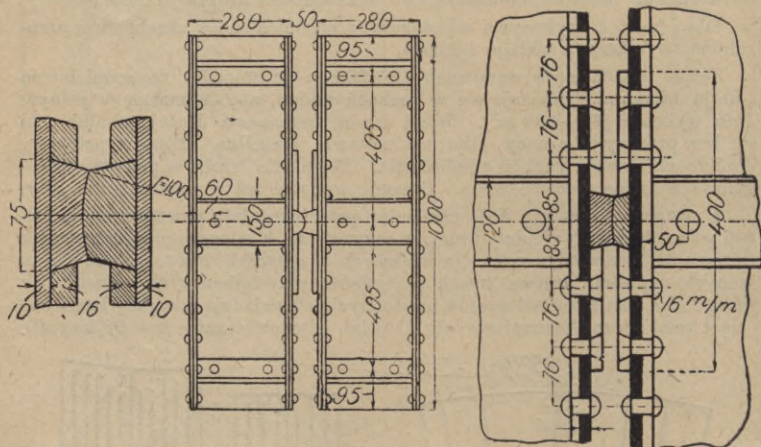


Fig. 116.

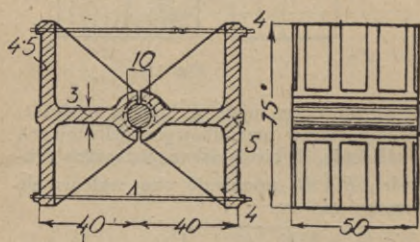


Fig. 117.

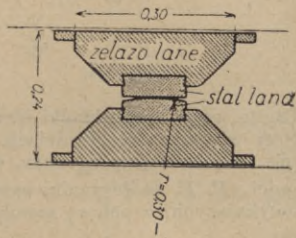


Fig. 118.

Przeguby żelazne są dobre ale drogie; podobne są do łożysk kołkowych mostów żelaznych (fig. 116), czopowe (fig. 117) lub styczne (fig. 118).

Przy użyciu przegubów musimy dla umożliwienia ruchów urządzić też w nadmurowaniu i murach czołowych szczeliny, które należy odpowiednio przykryć blachami.

**Nadmurowanie i mury pachwinowe.** Nadmurowanie jest konieczne potrzebne przy sklepieniach półkolistych, gdzie powiększa grubość sklepienia. Przy sklepieniach płaskich stanowi ono podstawę powłoki i reguluje odpływ wody. Zwykle wykonywamy je z kamienia łamanego lub chudego betonu.

**Nadsypka.** Przestrzeń między sklepieniem, murami czołowymi i powierzchnią drogi wypełniamy piaskiem i żwirem, wogóle materiałem przepuszczającym wodę, nigdy gliniastym. Czasem jako nadsypki używa się też betonu chudego (1:14 do 1:18), co jest jednak droższe.

Najmniejsza grubość nadsypki w kluczu wynosi:

	mosty murowane	betonowe
Mosty drogowe . . . . .	45 cm	20 cm
„ „ „ kolei głównych . . . . .	85 cm	75 cm
„ „ „ drugorzędnych . . . . .	50 cm	45 cm
Kładki . . . . .	0 cm	0 cm

W Niemczech grubość żwirówki pod podkładami wynosi

	najmniej	poleca się
dla mostów kolei głównych . . . . .	20 cm	30 cm
„ „ „ „ drugorzędnych . . . . .	15 cm	20 cm

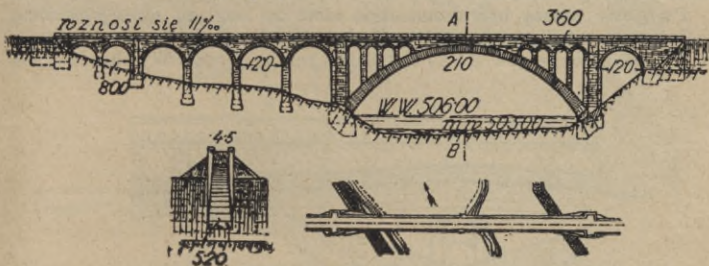


Fig. 119.

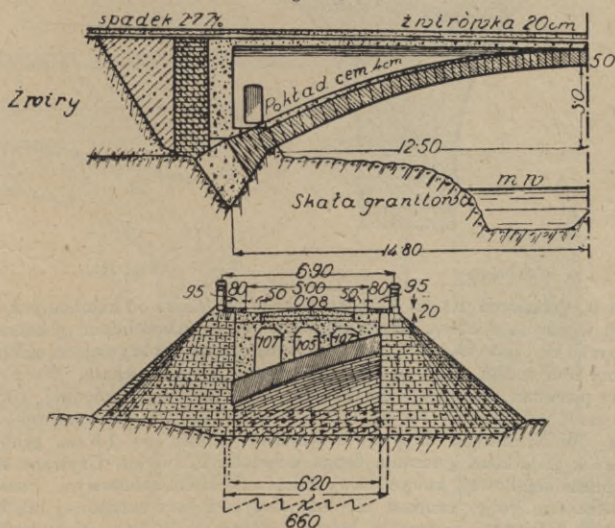


Fig. 120.

Przepisy polskie o budowie mostów drogowych z r. 1926. § 51. Nadsypka jezdni.  
2. Grubość nadsypki z pomostem nie powinna w żadnym miejscu być mniejsza, niż 45 cm. 3. Spad poprzeczny jezdni należy dostosować do rodzaju użytego materiału.

Mury pachwinowe. Aby zmniejszyć objętość nadsypki przy mostach dla  $l > 15 m$ , a w wiaduktach dla  $l > 19 m$ , budujemy często w pachwinach mury, ograniczające komory, a przykryte płytami lub sklepieniami. Zmniejszają one ciężar własny mostu, umożliwiają lepsze odwodnienie i ładnie wyglądają. Mury pachwinowe mogą być poprzeczne (most na Prucie w Jarzemcu; fig. 119) lub podłużne (fig. 120). Przy mostach jednoprzęsłowych i mo-

stach o  $l > 40$  m spotykamy mury podłużne tylko wyjątkowo. Odstęp w świetle murów pachwinowych podłużnych wynosi średnio 1,3 m, rozpiętość sklepień pachwinowych poprzecznych wynosi średnio 3—4 m. Komory można przykryć sklepieniami lub płytami kamiennymi lub żelbetowymi. Mury pachwinowe przerywa się czasem otworami; wtedy mamy tylko filary odosobnione.

Mury czołowe mają u góry grubość najmniej 40—50 cm. Powierzchnia wewnętrzna zwykle pochyła, nakryta powłoką aż do gzymsu. Należy obliczać je na parcie ziemi.

Gzyms główny nie powinien brakować nawet przy najskromniejszym moście, choćby w kształcie płyty nieco wysuniętej.

Poręcze muszą być dostatecznie silne ze względu na siły poziome, działające w wysokości oparcia. Grubość kamiennych poręczy najmniej 25—30 cm, żelbetowych 8—10 cm, żelaznych 4—5 cm. Wysokość wynosi

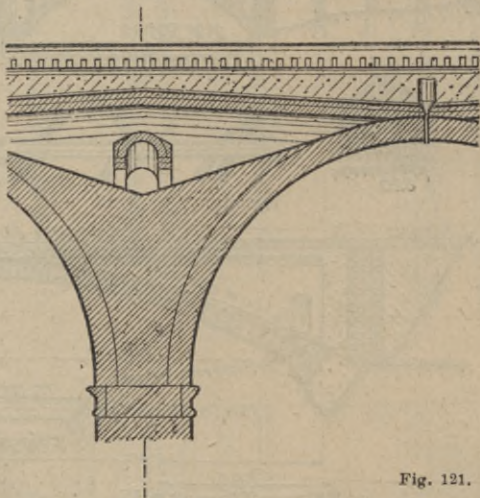


Fig. 121.

około 1 m, żelaznych 1,1 m. Poręcze żelazne są tańsze od kamiennych i wymagają węższych sklepień, architektonicznie więcej uzasadnione są kamienne.

Powłoka jest to warstwa nieprzepuszczalna, pokrywająca sklepienie lub inny mur mostu. Musi ona być sprężysta, aby nie pękała. We Francji zwykle pierwsza warstwa 3 cm składa się z zaprawy wapiennej, 1350 kg wapna na 1 m<sup>3</sup> piasku. Na tej warstwie ubitej układa się warstwę 1,5 cm asfaltu. W Niemczech dają dwie warstwy asfaltu po 1,5 cm grubości; pierwsza z dodatkiem gudronu, druga z dodatkiem żwirku. Używane są też płyty pilśni asfaltowej, których szwy zalepia się kitem asfaltowym. Ponieważ pilśń z czasem gnije, zamiast niej używamy też juty asfaltowej lub tektolitu, płyty asfaltowej, wewnątrz której znajduje się płótno. Najpewniejszą, ale najdroższą powłoką są płyty ołowiane 2 mm grube. Wszystkie te powłoki zakłada się na warstwie 2—3 cm grubej zaprawy cementowej 1:2 do 1:3, dobrze wygładzonej i wyschniętej, czasem na warstwie betonu 8 cm grubej lub na jednej lub dwu warstwach cegieł na cemencie. Na ściany pionowe daje się asfalt czysty bez piasku na warstwie 1 cm zaprawy wapiennej. Na powłoce nie można dawać ostrokanciastego żwiru, lepiej nakryć ją warstwą cegieł lub piasku.

Odwodnienie wykonujemy wedle zasady, że wodę odprowadzić należy drogą pewną i jak najkrótszą, ochronić ją przed mrozem, a urządzenia muszą być takie, aby rewizja była łatwa.

Odwodnienie powierzchniowe jest ważne zwłaszcza przy mostach drogowych. W tym celu dajemy powierzchni spadek poprzeczny dla żwirówki 40—60‰, dla bruku 24—30‰, dla chodników 12—20‰, oprócz tego spadek podłużny najmniej 1—2‰. Por. jednak str. 754. Co 25 m należy odprowadzić wodę z rynien rurami spustowymi na zewnątrz.

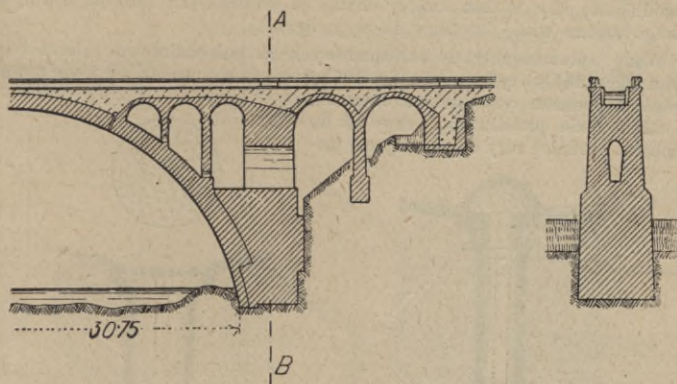


Fig. 122.

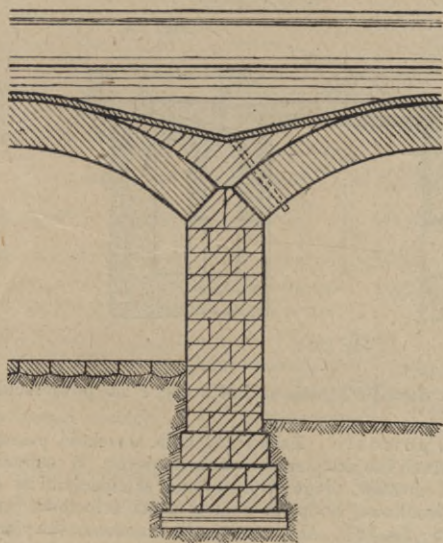


Fig. 123.

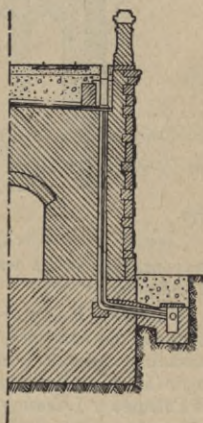


Fig. 124.

Odprowadzenie wody wsiąkającej może być rozmaite. Ilość wody przy mostach drogowych zależy od rodzaju pokrycia pomostu; przy mostach kolejowych należy przyjąć całą ilość wody opadowej jako wsiąkającą. Przy mostach o małej rozpiętości odprowadzamy wodę poza przyczółki (fig. 106). Warstwa kamienia o grub. 50—60 cm ułatwia odwodnienie. Przy dłuższych

mostach nadajemy nadmurowaniu spadek ku rurom odpływowym. Odprowadzić wodę możemy przez klucz (fig. 121), co robimy zazwyczaj tylko przy małych rozpiętościach, przez boki sklepienia (fig. 122) lub w pobliżu wezglowia (fig. 123). Jeżeli pod sklepieniem jest droga lub ulica, odprowadzamy też wodę przez filar (fig. 124). W takim razie należy się starać urządzić tak odwodnienie, aby można każdej chwili je kontrolować (szeroki otwór, do którego można wleźć lub rury do wyjmowania).

Wodę wprowadzamy do rur spadowych za pośrednictwem talerza i koszyka (fig. 125) lub tylko rusztu (fig. 126). Czasem sprowadza się wodę równocześnie z pomostu tym samym otworem. W takim razie przedłużamy rurę aż do pomostu. Średnicę rury odwadniającej mo-

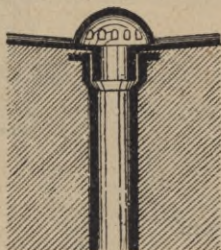


Fig. 125.

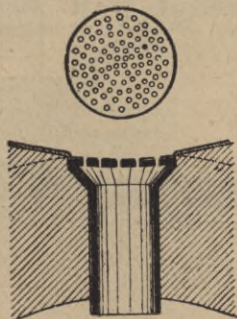


Fig. 126.

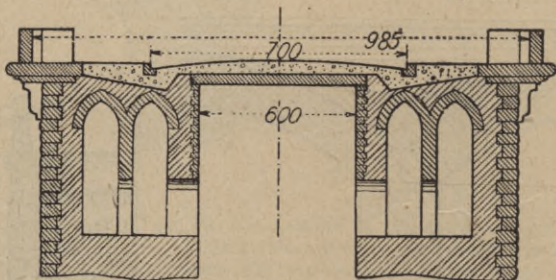


Fig. 127.

żemy przyjąć wedle wzoru  $d = \sqrt{F}$ , gdzie  $d$  jest w  $cm$ ,  $F$  zaś powierzchnią odwodnioną w  $m^2$ .

**Pomost. Podparcie pomostu.** Zazwyczaj cała szerokość pomostu spoczywa na nadsypce, płytach lub sklepieniach pachwinowych. W ostatnich czasach podpierają pomost mostów drogowych dwoma sklepieniami w odstępnie 5–6  $m$ . Na części środkowej podpira pomost płyta żelbetowa (most na Petrusse w Luksemburgu; fig. 127). Aby zmniejszyć szerokość sklepienia, umieszczamy też chodniki na wspornikach. Przy mostach kolejowych zmniejszamy wtedy szerokość sklepienia do 3,80  $m$ , dwutorowych do 7,50  $m$ , wąskotorowych do 3,70  $m$ .

Szerokość pomostu zależy od szerokości drogi czy ulicy. W miastach szerokości bywają większe, nawet do 55  $m$ .

**Przyczółki i filary.** Przy obliczeniu przyczółka musimy uwzględnić oprócz ciężaru własnego i nadsypki parcie sklepienia i parcie ziemi. Filary obliczamy, przyjmując jedno sklepienie obciążone, drugie nie. Wtedy linja



ciśnienia nie powinna wyjść z rdzenia. W razie zawalenia się jednego sklepienia, drugie nieobciążone działa jednostronnie; wtedy linja ciśnienia nie powinna wyjść z przekroju.

Kształt. Przyczółki mają kształt prostokątny tylko dla małych przepustów, zresztą nachylamy ós przyczółka wedle linii ciśnienia. Ściany wysokich filarów także nachylamy w kierunku podłużnym mostu, średnio 2%, w kierunku poprzecznym 2–5% (fig. 128).

Grubość przyczółków u góry przyjmując możemy wedle Melana dla  $l \geq 16 m$  i nachylenia tylnej powierzchni 1:5.

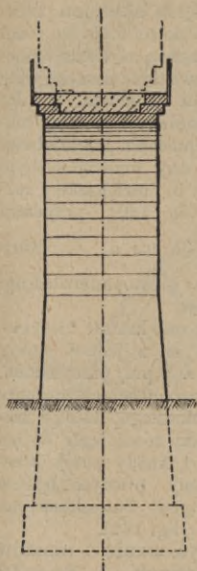


Fig. 128.

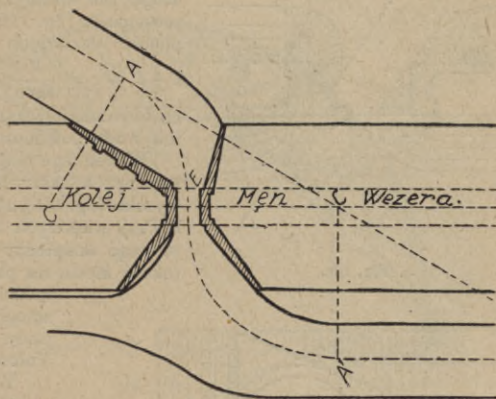


Fig. 129.

$$\begin{aligned} &\text{dla sklepień półkolistych} && b = 0,8 + 0,13 l \\ &\text{dla sklepień odcinkowych} && \frac{f}{l} = \frac{1}{4} \quad b = 0,8 + 0,2 l \end{aligned} \quad (15)$$

Należy sprawdzić, czy wymiary są odpowiednie, przy pomocy linii ciśnienia.

Grubość filarów. Dla mostów rzecznych przyjmując możemy dla  $40 m > l > 15 m$  grubość filara u góry

$$b = 2,0 + 0,07 l \quad (16)$$

Wedle Séjourné'go jeżeli nazwiemy  $h$  wysokość filarów do pomostu,

$$\begin{aligned} &\text{dla mostów niskich} && \left. \begin{aligned} b &= 0,1 l + 0,04 h \\ b &\leq 0,125 l \end{aligned} \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

$$\text{dla sklepień półkolistych,} \quad b = 0,125 l \text{ do } 0,1 l \quad (18)$$

dla sklepień eliptycznych i odcinkowych.

Dla wiaduktów możemy przyjmując z Houssellem

$$b = 0,5 + 0,16 l \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &\text{Séjourné przyjmuje} && \left. \begin{aligned} b &= 0,2 l + 0,04 h \\ &\text{dla małych} && b = 0,4 + 0,15 l \end{aligned} \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

Jeżeli przyległe sklepienia mają rozpiętości nierówne, to grubość musi być większa  $0,25 l$  do  $0,3 l$ .

Głowice urządzamy przy filarach rzecznych. Dajemy im dla ułatwienia odpływu wody kształt półkolisty, eliptyczny lub ostrołukowy. Por. „Przy-

czołki i filary“, str. 833. Głowice powinny wystawać około 0,5 m nad wielką wodę. Przykrywamy je czapką stożkową. Filary ładowe są w rzucie poziomym prostokątne, wzmacnia się je czasem przyporami. Jeżeli most jest w łuku, przekrój filarów jest trapezowy.

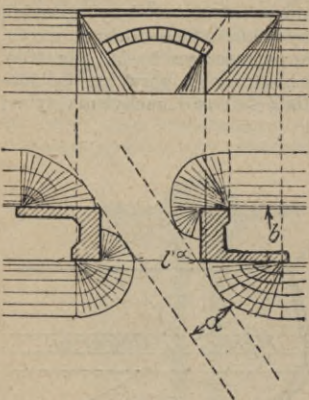


Fig. 130.

**Sposoby uniknięcia sklepień ukośnych.** 1. Jeżeli kąt ukosu mało co różni się od prostego, to można wykonać sklepienie proste, a potem ścinać poszczególne klince równoległe do osi mostu. 2. Jeżeli kąt ukosu jest mniejszy, to przy małych mostach i przepustach przekładamy drogę lub strumyk, aby przecięcie było prostopadłe (fig. 129). 3. Powiększamy rozpiętość w świetle (fig. 130), przyczem  $l + l' + c = \frac{a}{\sin \alpha} + b \cos \alpha$ . 4. Mury czołowe zamieszczamy prostopadle do drogi lub wody pod mostem.

Wobec tego mają one kształt niesymetryczny, a skrzydła są z jednej strony wysokie (fig. 131), uż. zwł. przy przepustach. 5. Przy większych rozpiętościach możemy uniknąć sklepień ukośnych, dzieląc szerokość mostu na paski równoległe do osi mostu i każdy pasek przesklepiamy prostym łukiem (most pod Sutterhaus na Volme; fig. 132).

### Wykonanie mostów sklepionych.

1. Rusztowania krążynowe. Rusztowanie krążynowe ma służyć jako podparcie nieukończonego sklepienia, powinno być więc mało odkształcalne i pod całym ciężarem sklepienia ma mieć kształt projektowany. Musi ono być tak ułożone, aby można zdjąć krążyny, łatwo je wreszcie ustawić i rozebrać. Rusztowanie krążynowe składa się z następujących części: 1. Krążyny, belki, niosące ciężar sklepienia. Górna część krążyny, mająca kształt podniebienia, nazywa się wieńcem. 2. Deskowanie, którego górna powierzchnia leży dokładnie w powierzchni podniebienia. 3. Przy-

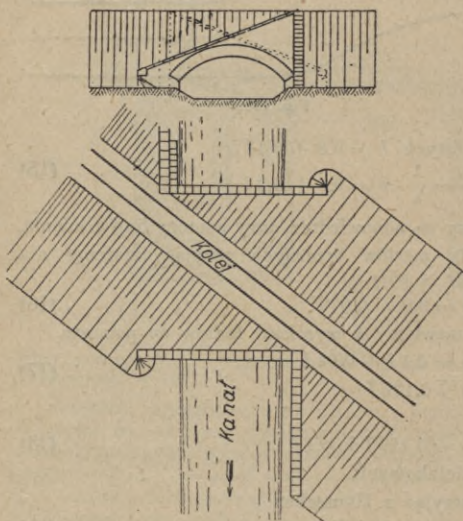


Fig. 131.

rzędy do zdjęcia krążyn. 4. Teżniki poprzeczne. 5. Rusztowanie podpierające, słupy.

Polskie przepisy o budowie i utrzymaniu mostów drogowych z r. 1926, § 55. Rusztowania krążynowe 1. Dla podtrzymania sklepienia przez cały czas budowy aż do zupełnego stężenia zaprawy, wiążącej kamienie, należy wykonać silne i pewne rusztowanie krążynowe, które oprócz ciężaru sklepienia powinno utrzymać bez widocznego odkształcenia ciężar maszyn roboczych i ludzi pracujących.

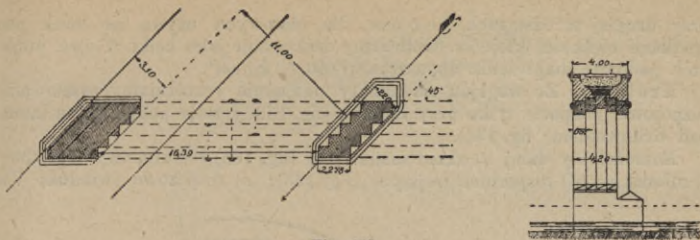


Fig. 132.

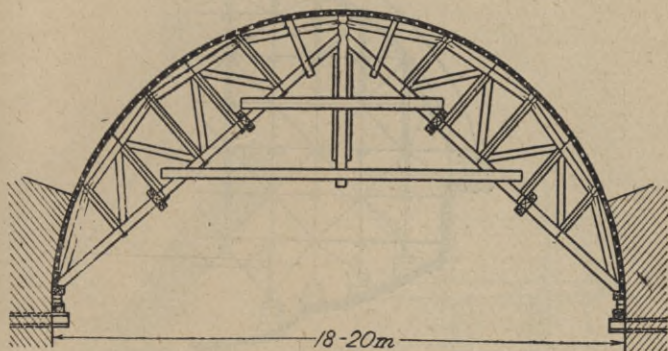


Fig. 133.

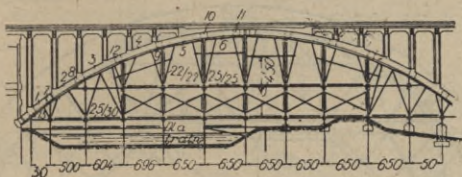


Fig. 134.

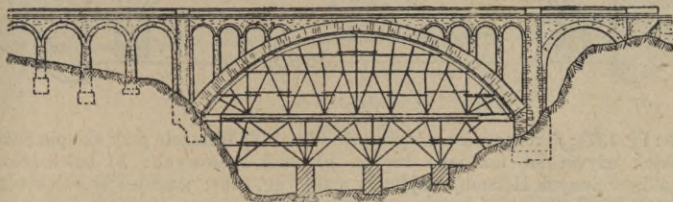


Fig. 135.

Zasady przy projektowaniu. Unikać zginania belek, lepiej dopuszczać tylko ciśnienie, poszczególne słupy, o ile możliwości, równomiernie obciążać, jak najmniej wykonywać połączeń.

Deskowanie dla sklepień ceglanych robi się z łąt z odstępami 2—4 cm, przy kamieniu łamanym do 10 cm, dla betonowych daje się deski jedna

przy drugiej w odstępach 3—5 mm, dla ciosowych używa się belek pod środkami ciężkości kłinców. Obliczamy deskowanie jako belki w dwu punktach podparte, naprężenia dopuszczamy do 60 kg/cm<sup>2</sup>.

Krażyny. Ze względu na punkty podparcia rozróżniamy rusztowanie rozporowe, podparte tylko przy filarach (fig. 133) i stałe podparte (na Izarze pod Grünwaldem; fig. 134).

Rozróżniamy dalej *a*) układ zastrzałowy (fig. 135) i *b*) słupowy (fig. 136); *c*) mieszany; *d*) rozpornice trójkątne (fig. 133); *e*) trapezowe (wiadukt Val

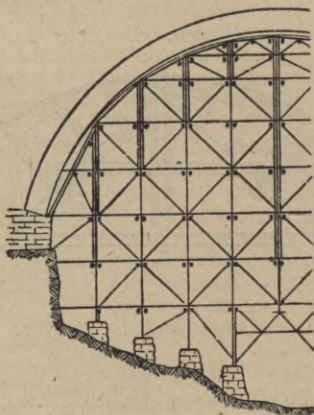


Fig. 136.

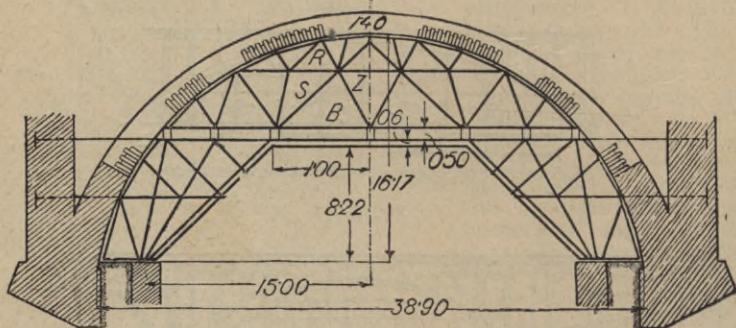


Fig. 137.

Mela; fig. 137); *f*) rozpornice wieloboczne (fig. 138). Wreszcie przy sklepieniach płaskich używa się też jako krażyn *g*) belek kratowych; *h*) belek łukowych drewnianych Hetzera, spajanych masą (fig. 139); jako też *i*) belek blaszanych lub *k*) kratowych żelaznych (fig. 140).

Odstęp krażyn wynosi 1—2 m, skrajną krażynę umieszczamy w odstępie do 0,5 m od czoła. Krażyny i rusztowania osiadają się, dlatego podwyższamy nieco krażyny w kluczu. Dla stałe podpartych krażyn понижение klucza podczas murowania sklepienia wynosi  $\Delta f = \frac{1}{200}(l - f)$ , dla rozporowych  $\Delta f = \frac{1}{100}(l - f)$ .

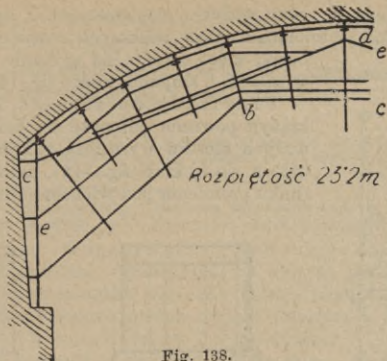


Fig. 138.

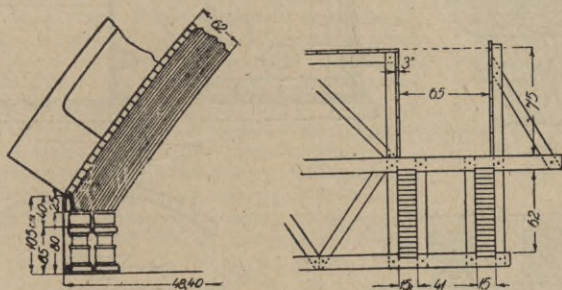


Fig. 139.

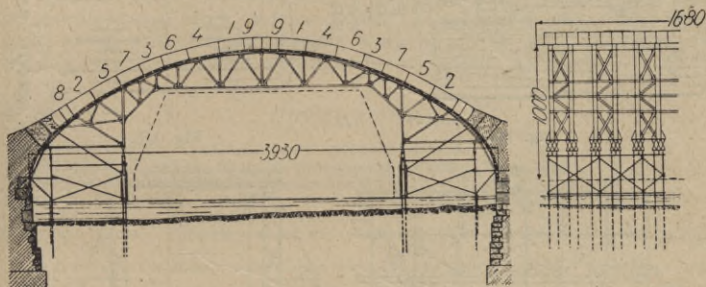


Fig. 140.

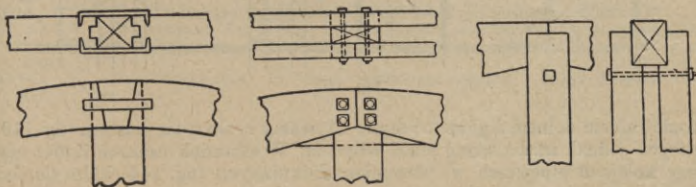


Fig. 141.

Wieniec składa się przy małych rozpiętościach z dyli u góry wyciętych wedle kształtu podniebienia. Przy większych rozpiętościach używamy belek, które pracują na zginanie. Połączenie z astrzałami i słupami wedle fig. 141.

Przyrządy do zdjęcia krawężników. Zdjęcie krawężników powinno odbywać się bez wstrząśnień. Dla małych mostów wystarczą *a*) kliny, dla większych używa się *b*) śrub (fig. 142), umieszczonych w kierunku promienia pod wieniec albo pionowo między

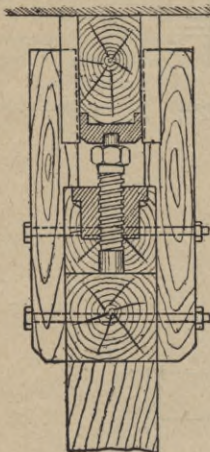


Fig. 142.

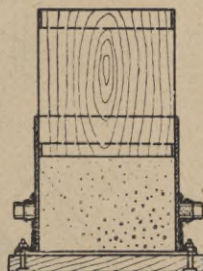
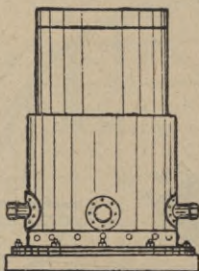


Fig. 143.

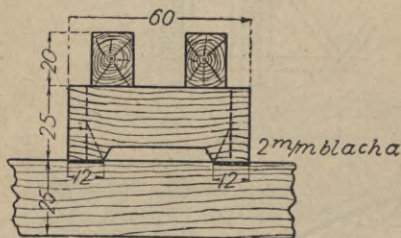


Fig. 144.

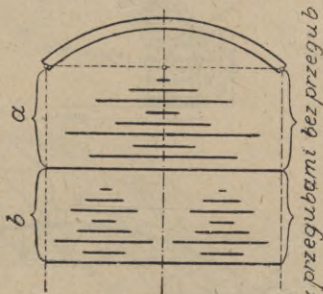


Fig. 145.

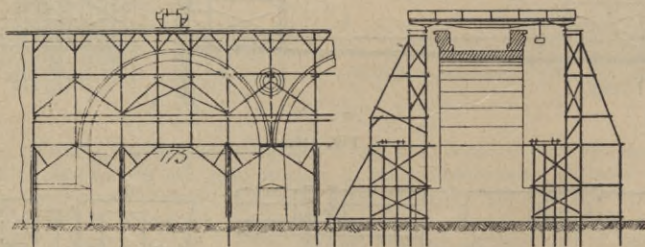


Fig. 146.

rusztowaniem dolnym a górnym; często używamy *c*) skrzyń z piaskiem (fig. 143), których jednak trzeba strzec przed wilgocią. W ostatnich czasach Zuffer użył przy kolejach alpejskich *d*) strzemion drewnianych (fig. 144), które się podcina i sprowadza zgniecenie podstawy strzemiona, a przez to zniżenie krawężników.

Wreszcie używa się też wind hydraulicznych, składających się z walca z tłokiem, do którego pompuje się wodę, a potem ją wypuszcza.

Sposób spuszczenia krążyn wskazuje fig. 145. Przy sklepieniach bezprzegubowych zaczynamy zniżenie w kluczu, przy trójprzegubowych w jednej czwartej rozpiętości.

Polskie przepisy o budowie i utrzymaniu mostów drogowych z r. 1926. § 55. 3. Podparcie krążyn na rusztowaniu należy urządzić w ten sposób, ażeby przy rozbieraniu nie wywołać szkodliwych wstrząśnień sklepienia, a zarazem, ażeby obniżenie krążyn mogło się odbywać spokojnie i stopniowo.

4. Czas usunięcia krążyn oznaczy techniczny kierownik budowy . . . W każdym razie czas ten nie może być mniejszy, niż 1 miesiąc od chwili wykonania sklepienia.

2. Wykonanie. Rusztowanie wykonawcze. Dla wykonania sklepień potrzebne są osobne rusztowania, na których poruszają się żórawie. Budujemy je z obu stron mostu (fig. 146). Odstęp słupów 4—9 m, wysokość piętr 5—8 m. Przy obliczaniu można przyjąć naprężenie 120 kg/cm<sup>2</sup>.

Wykonanie sklepień zależy od materiału.

Obecnie używamy zaprawy cementowej. Małe sklepienia wykonywamy, sklepiąc z obu stron od wezłowia do klucza. Przy większych zostawia się w kluczu, wezłowiu lub szwach niebezpiecznych szwy otwarte albo przerwy rozparte beleczkami (most Gour Noir; fig. 147) i zapełnia szwy i przerwy dopiero przed zdjęciem krążyn lub potem. Sklepienie zamyka się równocześnie w kilku punktach. Większe sklepienia wykonywano też w pierścieniach.

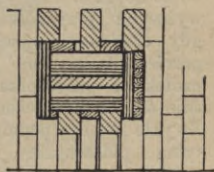


Fig. 147.

Betonowe sklepienia budujemy w takich paskach, aby je można w jednym dniu wykonać (60—100 m<sup>3</sup>).

Na drugi dzień zostawia się szczelinę, którą się wypełnia po ustaniu ruchów rusztowania, albo też robi się bez przerwy dzień i noc. Szerokie sklepienia można podzielić na dwie lub więcej części. Nadmurowanie wykonywamy albo równocześnie ze sklepieniem, ale przy dostatecznym obciążeniu krążyn albo później, ale przed zdjęciem krążyn.

Wykończenie. Po wykończeniu sklepienia dajemy powłokę sklepienia, po zdjęciu krążyn mury czołowe, gzymsy, poręcze, nadsypkę, stożki. Nadsypkę należy nakładać równocześnie w warstwach cienkich, ubitych symetrycznie, aby nie powstało niejednostajne obciążenie lub parcie.

## LITERATURA.

- Thullie M.: Mosty kamienne. Lwów 1902, II. w. 1908.  
 Croizette-Desnoyers: Cours de construction de ponts. Paryż 1885.  
 Morandière R.: Traité de la construction de ponts et viaducs. Paryż 1888.  
 Rézal J.: Emplacement, débouchés, fondations des ponts en maçonnerie. Paryż 1896.  
 Séjourné P.: Grandes voûtes. Bourges 1913—1916.  
 Grattan Tyrrel: Concrete bridges and culverts for both railroads and highways. Londyn 1909.  
 Heinzerling: Die Brücken der Gegenwart. II. Steinerne Brücken. Akwizgran 1875 i 1877.  
 Färber R.: Dreigelenkbogenbrücken. Stuttgart 1908.  
 Zimmermann K.: Der Dreigelenkbogen aus Stein, Beton oder Eisenbeton. Stuttgart 1909.  
 Schönhöfer R.: Die Haupt-, Neben- und Hilfsgerüste im Brückenbau. Berlin 1911.  
 Schmid K.: Steinbrücken, Durchlässe, Dohlen. Techn. Studienhefte 13. Stuttgart 1916.  
 Foerster: Massive Brücken in Stein, Beton und Eisenbeton, Handb. d. Ingw., II. wyd. Lipsk 1917.  
 Melan J.: Der Brückenbau, II. Band. Steinerne Brücken. Lipsk-Wiedeń 1911, III. w. 1924.

# Przyczółki i filary kamienne.

Napisał

inż. dr. Maksymiljan Thullie,

profesor politechniki, Lwów.

**Przyczółki.** Określenie. Przyczółek jest to budowla, która służy do podparcia dźwigarów głównych mostu i do ograniczenia nasypu.

Siły działające na przyczółek. Na przyczółek działają: ciężar własny, ciśnienie dźwigarów głównych (ewentualnie należy uwzględnić składową poziomą ciężaru dźwigarów przy mostach w spadzie), parcie ziemi, ewentualnie parcie do góry.

Przekrój przyczółka. Przy niskich przyczółkach przyjmujemy przekrój prostokątny, przy wyższych zazwyczaj pochylamy ścianę wewnętrzną 1:10 do 1:5. Przy jeszcze wyższych przyczółkach i gdy dźwigary wywierają parcie ukośne na przyczółek, oś przyczółka stosuje się do linii ciśnienia. Zwykle wtedy podcinamy tylną płaszczyznę przyczółka, dając stoczystość 1:10 lub więcej (fig. 148).

Skrzydła. Z obu boków kończymy przyczółek

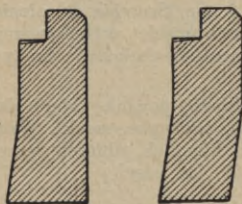


Fig. 148.

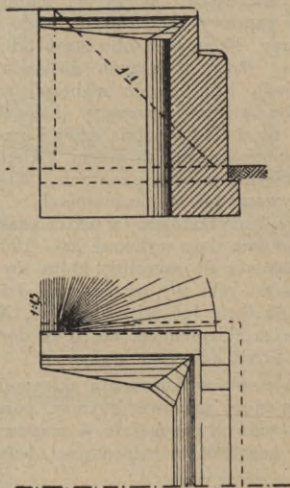


Fig. 149.

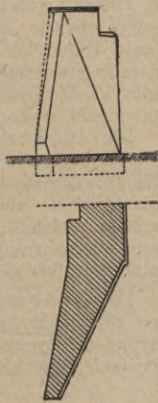


Fig. 150.

skrzydłami, ograniczającymi stok nasypu. Mogą one być równoległe do osi mostu (most na Pełtwi; fig. 149), przyczem nasyp zakończony jest stożkami, ukośne (fig. 150), prostopadłe (fig. 161) do osi mostu, wreszcie (rzadko używane) wklęsłe (fig. 152) lub wypukłe. Stożki przy skrzydłach równoległych mają stoczystość 1:1, niekiedy dla skrócenia skrzydeł stromsze 2:1, nawet 3:1; wtedy muszą być brukowane albo całkowicie kamienne. Jeżeli skrzydła wypadają za długie, rozdzielamy przyczółek na kilka części, połączonych sklepieniami (fig. 153).

Przy skrzydłach ukośnych wysokość ich zmniejsza się ku stopie nasypu więc też zmniejsza się ich grubość do 70 cm dla mostów kolejowych, zaś do 50 cm dla mostów drogowych.

Wybór rodzaju skrzydeł. Wprowadzenie drogi lub wody pod most jest najmniej dobre przy skrzydłach prostopadłych, korzystne przy ukośnych, najlepsze przy wypukłych. Wstrząśnienia działają szczególnie niekorzystnie na skrzydła równoległe, zwłaszcza niskie i cienkie. Dla małych mostów kolejowych należy ich unikać. Najgorzej wyglądają skrzydła prostopadłe, ładniej ukośne, najładniej wypukłe i równoległe. Skrzydła prostopadłe wy-



magają najmniej materiału, ukośne więcej, najwięcej równoległe i wypukłe. Wedle tych wskazówek należy wybrać rodzaj skrzydeł.

Pokrycie i zakończenie skrzydeł. Najkosztowniejsze pokrycie skrzydeł stanowią ciosy, obecnie bardzo mało używane; bardzo dobrze pokrywamy skrzydła płytami grubymi około 15 cm a szerokimi 40—50 cm. Aby się nie zsuwały, dajemy w odstępach 3—4 m ciosy oporowe. Ceglane skrzydła kryjemy czasem warstwą cegieł rębem na cemencie. Najtańsze, choć najgorsze jest pokrycie warstwą wybieranych kamieni łamanych na cemencie.

Zazwyczaj ucina się skrzydła płaszczyzną pionową przed zetknięciem się pokrycia z ziemią, kończąc nasyp małym stożkiem (fig. 154). Często wzmacnia się to zakończenie różkiem prostopadłym do skrzydła (fig. 151 i 152) lub słupkiem (fig. 155).

W górnej części przyczółka umieszcza się ławę lub łożyska, pod którymi daje się ciosy pod-

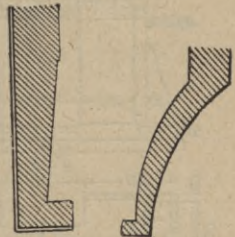


Fig. 151.

Fig. 152.

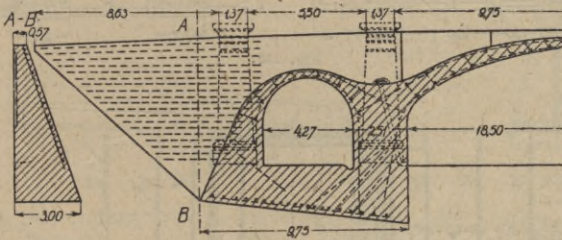


Fig. 153.

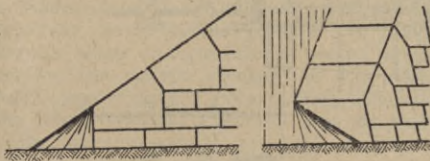


Fig. 154.

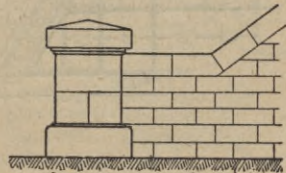


Fig. 155.

porowe o wysokości 40—70 cm kamienne, w ostatnich czasach także betonowe i żelbetowe, które zachodzą w głąb przyczółka 25—30 cm dalej, niż łożyska. Nasyp ponad poziomem łożysk ograniczamy murem żwirowym. Jeśli przyczółki są betonowe, to pod łożyskami umieszcza się nieraz w betonie dwie

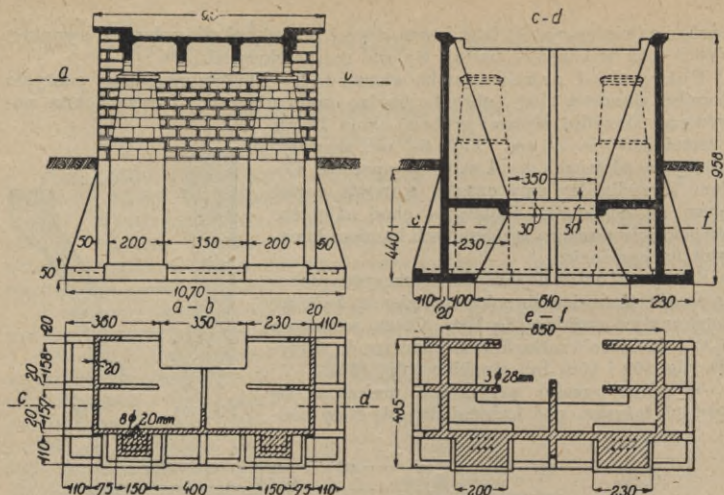


Fig. 166.

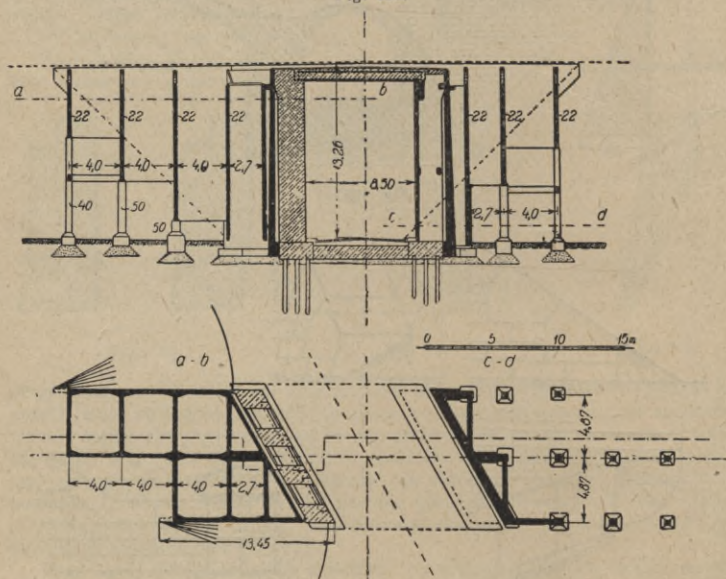


Fig. 157.

warstwy starych szyn, drugą warstwę w kierunku prostopadłym do pierwszej w celu rozdzielenia lepszego ciśnienia. Co do obliczenia por. str. 836 i fig. 166.

Portale. Przy większych mostach ze względów estetycznych ustawia się na przyczółku portale kamiennie wieżowe, składające się z dwu wież i bramowe, w których obie wieże łączymy rozporą poziomą lub sklepieniem, np. przy moście na Wiśle pod Tazewem.

Przyczółki żelbetowe mogą być trojaki: a) przyczółki, na których spoczywają dźwigary główne, b) stałe połączone z dźwigarami, więc stanowiące część ramy i c) przyczółki z otworami.

Dla podparcia dźwigarów przy moście w Samborze (fig. 156) zrobiono pod nimi słupy żelbetowe, łącząc je ścianką żelbetową, wzmocnioną żebrami.

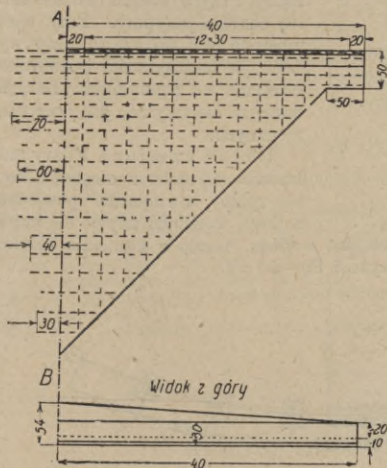


Fig. 158.

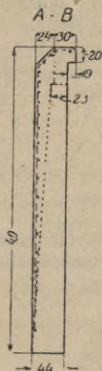


Fig. 159.

Przy przyczółkach żelbetowych robi się też skrzydła żelbetowe i to najczęściej równoległe, połączone żebrami, które wraz z przyczółkiem tworzą skrzynkę z prostokątnymi otworami, jak przy podjeździe pod koleją w Zabrze (fig. 157). Skrzydła żelbetowe albo spoczywają na fundamentach, albo też mogą być tylko zawieszane na przyczółku nawet betonowym (fig. 158, mosty małopolskie). Skrzydła służą do ograniczenia nasypu, a więc są to mury oporowe. Dla małych wysokości do 4 m możemy użyć przekroju L; przy większych wzmacnia się przekrój żebrami (fig. 159). Przy jeszcze większej wysokości daje się dwie płyty, jedną u dołu, drugą w połowie wysokości.

**Filary.** Filary służą tylko do podparcia dźwigarów głównych. Mogą być one rzeczne lub lądowe.

**Filary rzeczne.** Filarem rzeczny daje się w rzucie poziomym inny kształt niż lądowym ze względu na lepszy przepływ wody, kończąc je dwiema głowicami, przednią i tylną (fig. 160). Głowice mogą mieć kształt półkola, elipsy, ostrołuku, trójkąta (fig. 161). Głowica tylna nie

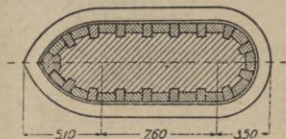


Fig. 160.

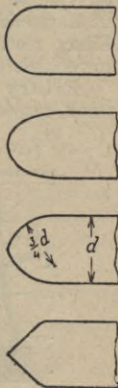


Fig. 161.

jest koniecznie potrzebna, to też w nowszych czasach albo ją spłaszczamy albo zupełnie opuszczamy. Jeżeli na rzece jest wielka kra, to głowicę przednią robimy zwykle półkolistą lub eliptyczną, a unikamy ostrych krawędzi.

Ściany boczne filaru pochyla się około 4%, niskie filary robi się także ze ścianami pionowymi, czasem buduje się filary ze ścianami bocznymi za-

krzywionemi. Cokołu albo nie daje się wcale, albo mało, wystający do 20 cm, a to około 40 cm ponad małą wodą. Głowice sięgają 0,5—1 m ponad wielką wodą. Nakrywamy je często ciosowymi stożkowatymi czapkami.

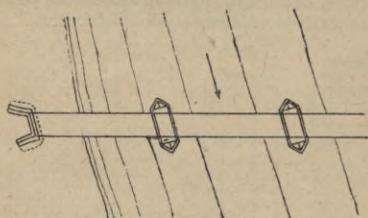


Fig. 162.

Filary lądowe. Przekrój poziomy przyjmuje się zwykle prostokątny. Przy wysokich filarach urządza się czasem przypory. Przy wielkich mostach robi się często filary wydrążone dla oszczędności i zmniejszenia ciśnienia na fundament. Boki filaru nachyla się zwykle, jak przy filarach rzecznych.

Układ kamieni. Filary rzeczne buduje się albo z ciosów albo robi się tylko zewnętrzną powierzchnię z ciosu, wewnątrz używa się kamienia łamanego.

Czasem tylko głowica jest z ciosu, reszta z kamienia łamanego. Wysokość warstw ciosowych wynosi 30—60 cm.

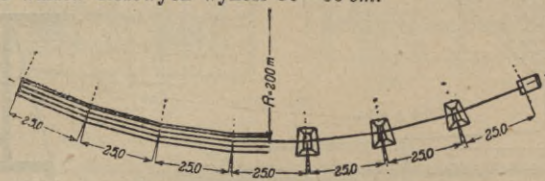


Fig. 163.

Filary mostów ukośnych i w łuku leżących. Jeżeli most przecina rzekę ukośnie, to filary buduje się równoległe do kierunku rzeki (fig. 162; most nad Limmatem). Jeżeli most jest w łuku, buduje się filary w kierunku promienia, otrzymując wtedy kształt trapezowy (fig. 163, most na Ravennie), co jednak możliwe jest tylko na lądzie. Filary rzeczne nawet mostów w łuku muszą być równoległe do prądu.

Filary żelbetowe używane są, gdy przy mostach rozporowych i łukowych lub przy belkach

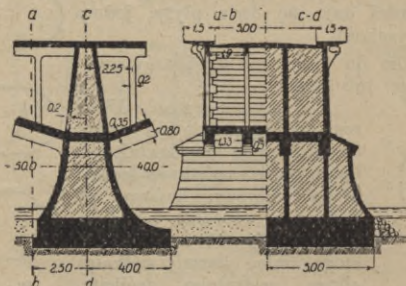


Fig. 164.

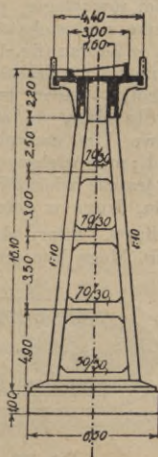


Fig. 165.

ciągłych, połączonych z filarami, powstają w filarach ciągnięcia, lub gdy szerokość ich chcemy znacznie zmniejszyć. Wskazane jest wtedy pod każdym dźwigarem urządzić słupy (fig. 164; most w Chatellerault). Często filary takie podobne są do jarzm drewnianych (fig. 165; wiadukt Brasso).

Wymiary filarów. Podajemy tu kilka wzorów doświadczalnych. Grubość filarów kamiennych u góry przyjmuje dla mostów kolejowych Melan:

$$g = 1,0 + 0,03 l \dots \dots \dots (1)$$

Kolej państwowa austriacka przyjmuje

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } l = 10 \text{ do } 15 \text{ m} \quad g = 1,0 + 0,05 l \\ \text{„ } l = 15 \text{ „ } 31 \text{ m} \quad g = 1,6 + 0,013 l \\ \text{„ } l > 31 \text{ m} \quad g = 1,0 + 0,03 l \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Szerokość filaru bez głowic  $b$  zależna jest od odstepu dźwigarów głównych skrajnych  $b_1$ . W przybliżeniu można przyjąć:

$$b = b_1 + 1,6 \text{ m} \dots \dots \dots (3)$$

### LITERATURA.

- Thullie Maksym: Przyczółki i filary kamienne mostów drewnianych i żelaznych. wyd. IX. Lwów 1921.  
 Croizette Desnoyers Th.: Cours de construction de ponts. Paryż 1885.  
 Morandière R.: Traité de la construction de ponts et viaducs. Paryż 1888.  
 Ketchum Milo: The design of highway bridges and the calculation of stresses in bridge trusses. New York 1908.  
 Waddel: Bridge engineering. New York 1916.  
 Emperger: Handbuch für Eisenbetonbau. II. Aufl., III. Band. Grund- und Mauerwerksbau. Berlin 1910.  
 Melan J.: Der Brückenbau. II. Band. Steinerne Brücken. Lipsk i Wiedeń. III. wyd. 1924.

## Mosty żelbetowe.

Napisał

inż. dr. Maksymilian Thullie,

profesor politechniki, Lwów.

**Ogólne uwagi. Zalety i wady.** W porównaniu do mostów kamiennych dopuszczamy w mostach żelbetowych większe naprężenia, stąd przekroje są mniejsze. Beton chroni żelazo od rdzy, stąd mniejszy koszt utrzymania, niż mostów żelaznych. Dalszemi zaletami są ogniotrwałość i dłuższe trwanie, zwykle mniejszy koszt niż żelaznych; krótszy czas budowy niż mostów kamiennych i żelaznych; łatwość budowania mostów ukośnych. Wadą ich jest potrzeba ścisłego nadzoru przy budowie, wielka trudność wzmocnienia mostu, względ na mrozy podczas wykonania i potrzeba deskowania dla betonowania.

Naprężenia dopuszczalne. Dla mostów drogowych polskie przepisy M. R. P. z r. 1926 podają w § 77.:

1. Naprężenia dopuszczalne należy w obliczeniach statycznych przyjmować równe wytrzymałości betonu po 28 dniach tężenia, pomnożone przez następujące współczynniki zmniejszające wedle tablicy 1.:

Tablica 1.

Rodzaj naprężeń	Spółcz. zmniejszający	Najw. granica naprężeń dopuszcz. w $kg/cm^2$
Ściskanie przy zginaniu . . . . .	0,22	(32 + 0,5 L), najw. 45
„ osiowe . . . . .	0,16	30
Ścinanie . . . . .	0,022	4,5
Przyczepność . . . . .	0,022	4,5
Rozciąganie przy mimośrodkowym ściskaniu i zginaniu . . . . .	0,025	5

2. O ile uwzględnia się wszystkie wpływy, wymienione w § 22. (wiatr, zmiana ciepłoty, skurcz materiału), można przyjąć naprężenia powyższe wedle tablicy 2.

Tablica 2.

Rodzaj naprężeń	Spółcz. zmniejszający	Najw. granica naprężeń dopuszcz. w $kg/cm^2$
Ściskanie przy zginaniu . . . . .	0,25	$(35 + 0,5 L)$ , najw. 50
„ osiowe . . . . .	0,18	35
Ścinanie . . . . .	0,025	5
Przyczepność . . . . .	0,025	5
Rozciąganie przy mimośrodkowym ścisłaniu i zginaniu . . . . .	0,028	5,5

3. Naprężenia dopuszczalne w żelazie należy przyjmować wedle § 47, p. 2 jak dla mostów żelaznych; por. dział „Mosty żelazne“).

4. Siły ciągnące ukośne w tych częściach belek zginanych, w których naprężenia są większe niż 0,022 wytrzymałości kostkowej betonu, względnie niż  $4,5 kg/cm^2$ , mogą być przeniesione przez beton tylko w wysokości 30%. Resztę należy przenieść na wkładki ukośnie odgięte i na strzemiona.

Naprężenia dopuszczalne w  $kg/cm^2$  dla betonu i żelaza w mostach kolejowych wedle rozporządzenia M. K. z dnia 13 stycznia 1926 podaje tablica 3.

Rozporządzenie to przepisuje:

1. Grubość żwiru minimum 30 cm.
2. Grubość płyt żelbetowych  $\geq 10$  cm, za specjalnem zezwoleniem M. K.  $\geq 8$  cm.
3. 30% siły tnącej musi przejąć sam beton.
4. Ciągnięcie w betonie przy zginaniu wspólnie z żelazem  $\leq 24 kg/cm^2$ .
5. W dolnej warstwie belek ciągłych nad podporami można wartości kolumny 2 zwiększyć o 25% aż do  $50 kg/cm^2$  dla  $K_{25} \geq 150$ , zaś do  $55 kg/cm^2$  dla  $K_{25} \geq 200$ .
6. Jeżeli nacisk przenosi się tylko na część środkową (o polu  $F_1$ ) przekroju  $F$  (fig. 166 a), to wartość kolumny 1 można zwiększyć w stosunku  $\sqrt{F:F_1}$ . Jeżeli  $F_1$  nie leży w pośrodku, to za  $F$  należy wziąć wartość centryczną wedle fig. 166 b.

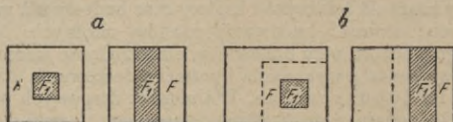


Fig. 166 a b.

7. Wartości podane dla  $l \leq 10$  m odnoszą się i do jezdni.

8. Kostki próbne z materiałów przeznaczonych do budowy mostu o określonym stosunku mieszanki i wilgotności, o krawędzi 20 cm, mają być dokonane w dostatecznej ilości na miejscu budowy.

Zmiana ciepłoty. Dla mostów drogowych należy uwzględnić zmianę ciepłoty przy dźwigarach ramowych i łukowych  $\pm 15^\circ C$ . Dla dźwigarów, których każdy wymiar przekroju jest większy, niż 70 cm, albo dostatecznie chronionych można przyjąć  $\pm 10^\circ C$ . Spółczynnik rozszerzalności 0,00001 na  $1^\circ C$ , sprężystości  $210.000 kg/cm^2$ . Wpływ skurczu betonu przyjmujemy równoważny obniżeniu się ciepłoty o  $15^\circ C$ . W Niemczech przyjmują zmianę ciepłoty większą  $\pm 20-25^\circ$ .

Należy się starać, by poszczególne części budowli mogły się bez przeszkody rozszerzać, więc urządzać odpowiednie przerwy co 20—40 m, oddzielić

Tablica 3.

Obciążenie uwzględnione w obliczeniu	Wytrzyma- łość kost- kowa po 28 dniach $K_{28}$ $kg/cm^2$	Rozpiętość $l$ $m$	Ściskanie		3 Ścinanie i naprężenie główne	4 Przy- czepność betonu do żelaza	5 Rozciąganie w żelazie
			1 osiowe	2 zginanie i obciążenie mimośrodkowe			
a) normalne, tj. ciężar stały, ciężar ruchomy naj- niekorzystniej ustawiony, przy mostach w łuku także siła odśrodkowa	$\geq 150$	$\leq 10$ $> 10$ najwyżej	20 $18 + 0,2l$ 25	26 $24 + 0,2l$ 31	3 3	3,5 4	800 $750 + 5l$ 850
	$\geq 200$	$\leq 10$ $> 10$ najwyżej	25 $23 + 0,2l$ 30	30 $28 + 0,2l$ 35	3,5 3,5	4 4,5	800 $750 + 5l$ 850
b) maksymalne, tj. prócz a) także: parcie wiatru, wpływ wahań tempera- tury, skurczu betonu i ha- mowania pociągu	$\geq 150$	$\leq 10$ $> 10$ najwyżej	25 $23 + 0,2l$ 31	35 $33 + 0,2l$ 38 41	3,5 4 { dla mostów belkowych " łukowych i ramowych }	4 4,5	900 $850 + 5l$ 950 1100
	$\geq 200$	$\leq 10$ $> 10$ najwyżej	30 $28 + 0,2l$ 36	40 $38 + 0,2l$ 43 46	4 5 { dla mostów belkowych " łukowych i ramowych }	4,5 5	900 $850 + 5l$ 950 1100

pomost od filarów i przyczółków, zastosować łożyska przesuwowe lub wałkowe.

Szczegóły ustroju. Wedle zasad znanych z teorii i ustroju budowli żelbetowych należy starannie układać i odginać wkładki, oraz kończyć je hakami półkolistymi o średnicy 2,5—5 *d*. Rozporządzenie szwajcarskie z r. 1916 przepisuje najmniejszą grubość prętów w następujący sposób:

	belki	plyty	strzemiona
mosty kolejowe . . . . .	14	10	7 mm
„ drogowe . . . . .	12	8	5 mm

Odstęp wkładek między sobą w świetle powinien być równy lub większy od grubości wkładek, jednak nie mniejszy niż 2 *cm*, a większy niż 15 *cm*. Najmn. grubość okrycia nie może być mniejsza niż 1 *cm* w płytach, 2 *cm* w belkach, przy mostach kolejowych lepiej 3 *cm*.

Łączenia wkładek należy unikać, w razie konieczności przedłużyć zetknięte wkładki poza punkt zetknięcia 50—80 *cm* i związać je drutem. Używają też spajania, które może być odpowiednie przy dobrym wykonaniu; przepisy polskie dla mostów drogowych jednak spawania nie pozwalają.

Należy zawsze zastosować strzemiona, zakończone hakami. Dla tylko ściskanych części budowli można też zastosować żeliwo uzwojone układu Empergera.

Wysokość nadsypki przy mostach kolejowych wynosi najmn. 40 *cm* od górnej powierzchni płyty do dolnej powierzchni szyny, przy mostach drogowych najmn. 15—30 *cm*, przy drobnym bruku 15 *cm* do dolnej powierzchni bruku.

Powłoką pokrywamy powierzchnię żelbetu, aby przeszkodzić zamoczeniu, podobnie jak przy mostach kamiennych. Przeprowadzamy ją poza szczeliną między dźwigarem a przyczółkiem, w przekroju poprzecznym przedłużamy ją w górę (fig. 167). Aby uchronić powłokę od uszkodzenia, pokrywamy ją warstwą 6—10 *cm* grubą betonu chudego lub żwiru niekancaistego.

**Mosty belkowe.** Przepustы płytowe używane dla małych rozpiętości dla dróg do 5 *m* (fig. 168), kładek 6 *m*, kolei 2—4 *m* (fig. 169). Grubość płyt wynosi 15—40 *cm*. Przepustы mogą być też podwójne, a płyty ciągłe (fig. 170).

Przepustы mogą też być ramowe. Fig. 171 przedstawia przepust kolei Kutno—Strzałków, a fig. 172 typ ramowy, opracowany dla dróg przez M. R. P., oraz tabelę ilości materiału dla różnych rozpiętości.

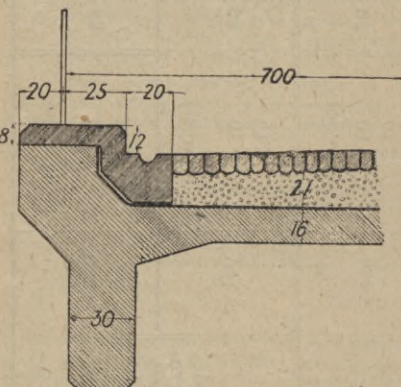


Fig. 167.

Przepustы płytowe z wkładkami tęgimi używane często dla kolei aż do  $l = 11$  *m* (fig. 173). Dwuteowniki umieszczamy w równych odstępach, skrajne czasem w większych. Odstęp w świetle między główkami powinien być najmniej 20 *cm* ze względu na betonowanie. W Prusiech warstwa zaprawy cementowej u dołu wynosi 2—4 *cm*, u góry beton sięga 3 *cm* ponad główki. Dla małych przepustów do 2 *m* używa się też starych szyn. Zazwyczaj oblicza się takie przepustы w ten sposób, by dźwigary żelazne niosły cały ciężar. W Prusiech przyjmuje się, że ciężar rozdziela się na 3,5 *m* szerokości



przy wysokości nadsypki 35 cm. Deskowanie do betonowania zawieszają się na dźwigarach albo wogóle wykonuje się całą płytą obok toru.

Kommerell<sup>1)</sup> podaje następną tabliczkę:

Tablica 4.

Rozpiętość . . . . .	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14 m
Wysokość ustroju . . . .	45	49	56	61	73	78	88 cm
Wysokość dźwigarów . . .	22	30	38	42 $\frac{1}{2}$	55	60	70 cm
Odstęp dźwigarów . . . .	60	63	68	55	73	85	73 cm
Ciężar kg/m <sup>2</sup> . . . . .	51,7	86,0	123,5	187,4	277,4	277,7	349,7

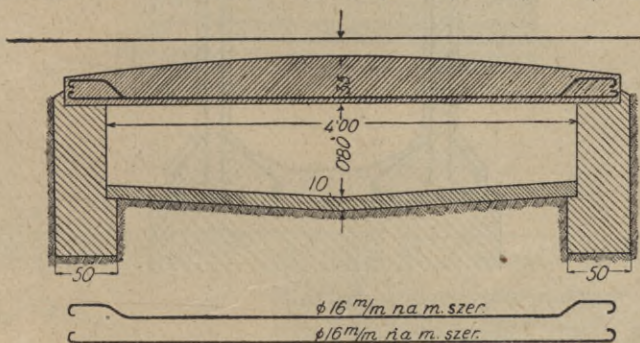


Fig. 168.

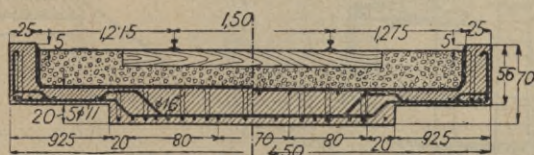


Fig. 169.

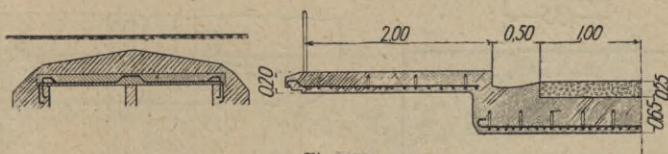


Fig. 170.

Mosty belkowe z pomostem górą używane są dla dróg dla  $l = 5$  do  $25$  m, wyjątkowo do  $40$  m, dla kolejowych od  $4$  do  $13$  m, wyjątkowo do  $16$  m. Odstęp żeber wynosi dla dróg  $1,0$ — $2,0$  m, średnio  $1,5$  m (fig. 174). Melan przyjmuje  $c = 0,8 + 0,07 l$ . Dla kolei daje się 2 lub 4 belki żebrowe (fig. 175). Wysokość belek przyjmujemy dla dróg  $\frac{1}{10}$  do  $\frac{1}{15} l$ , dla belek ciągłych  $\frac{1}{11}$  do  $\frac{1}{15} l$ , dla kładek  $\frac{1}{20}$  do  $\frac{1}{22} l$ , dla kolei  $\frac{1}{8}$  do  $\frac{1}{10} l$ . Grubość płyty  $10$ — $20$  cm. Szerokość żebra powinna być tak wielka, aby wygodnie pomieścić wkładki żelazne. Najm.  $b_1 = 30$  cm, lepiej  $35$ — $40$  cm. Melan przy-

<sup>1)</sup> Tafeln für Eisenbahnbrücken mit einbetonierten Walzträgern. Berlin 1911.

muje dla dróg  $b_1 = 0,2 + 0,15 h$ , dla kolei  $b_1 = 0,25 + 0,2 h$ . Belki skrajne, mniej obciążone, mogą być węższe lub niższe.

W przekroju poprzecznym możliwe są rozmaite ustroje: 1. Płyta wystaje (fig. 176). 2. Płyta spoczywa na wspornikach (fig. 174). 3. Chodnik podparty

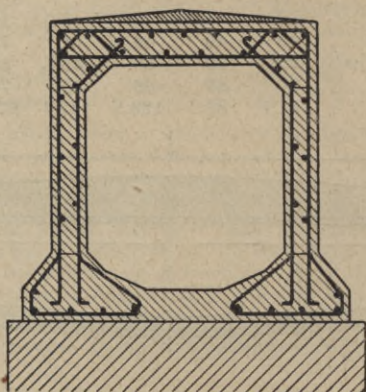


Fig. 171.

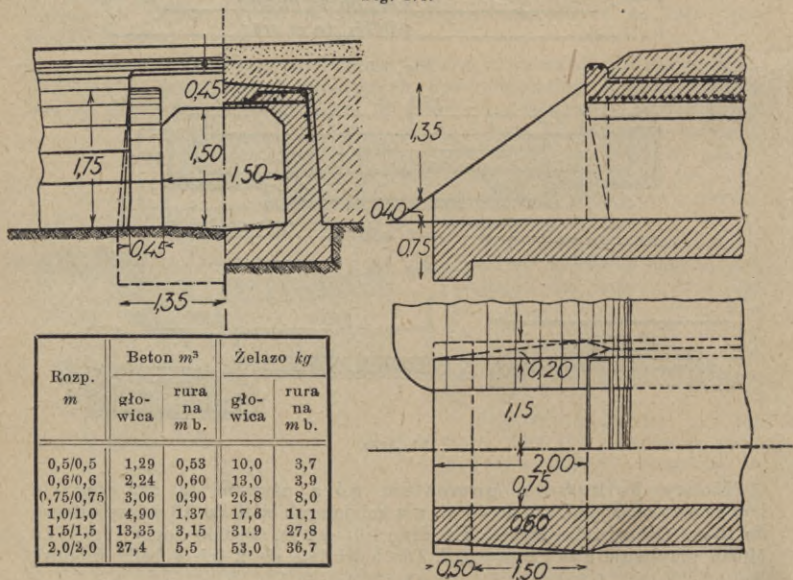


Fig. 172.

osobną belką (fig. 175). Umieszczenie rur wodociągowych, kabli uwidocznione na fig. 177 i 178. Wodę zbieramy przy krawężniku w rynnach i odprowadzamy na zewnątrz rurą (fig. 179). Fig. 180 przedstawia odwodnienie powierzchniowe. Przy małych mostach do 8 m kładziemy belki żelbetowe wprost na mur (fig. 181) lub za pośrednictwem asfaltu. Przy większych rozpiętościach nad 10 m dajemy łożysko żelazne stałe (fig. 182) lub ruchome. Zaleca się zawsze

urządzać silne rozpory w odstępach 3–5 m, aby uzyskać rozdział ciśnienia na belki, a żebra rozprzeć.

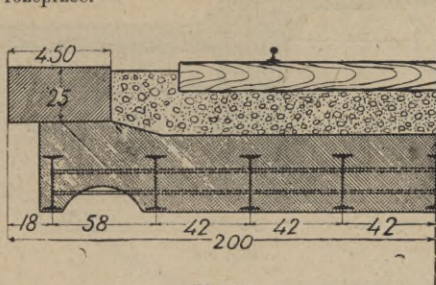


Fig. 173.

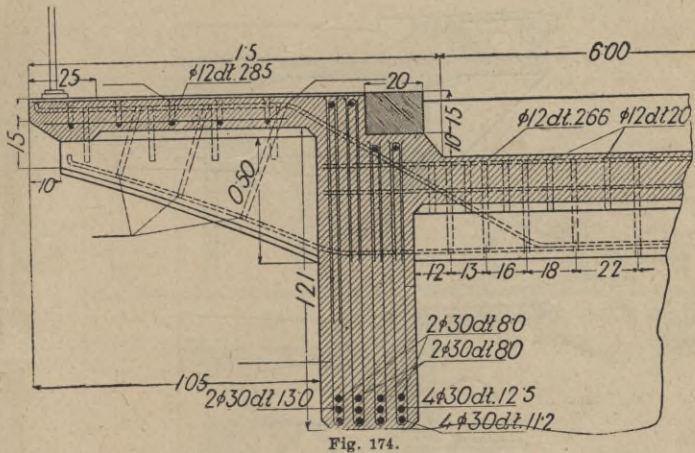


Fig. 174.

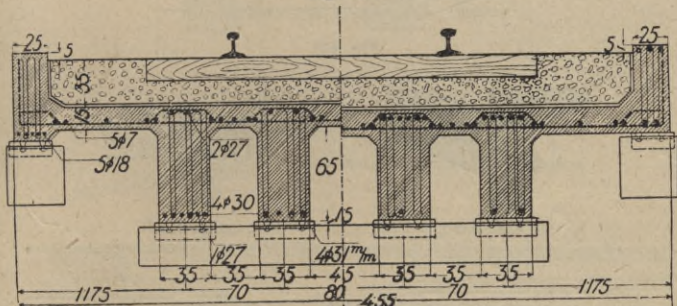


Fig. 175.

Pomost mostów drogowych: żwirówka, asfalt, bruk. Dla mostów kolejowych dajemy żwirówkę o szerokości 3,3 m, grubość jej, liczona od górnej powierzchni powłoki do górnej powierzchni podkładu, ma wynosić 40 cm.

Mosty belkowe z pomostem dołem. Pomost opieramy na poprzecznicach w odstępach średnio  $a = 2$  m. Wysokość ich ma wynosić najmniej

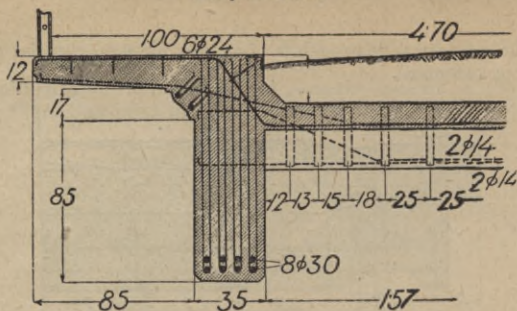


Fig. 176.

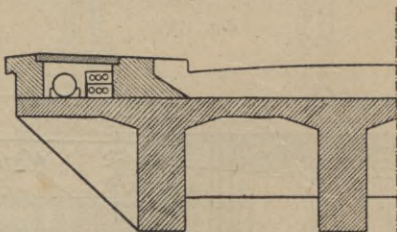


Fig. 177.

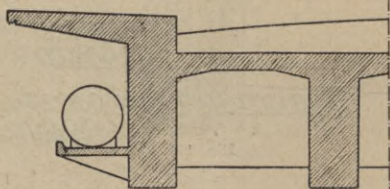


Fig. 178.

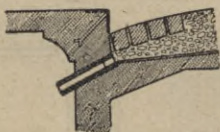


Fig. 179.

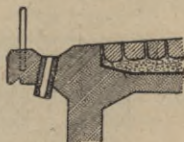


Fig. 180.

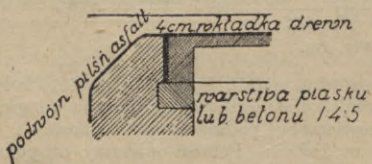


Fig. 181.

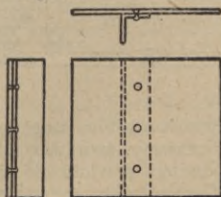


Fig. 182.

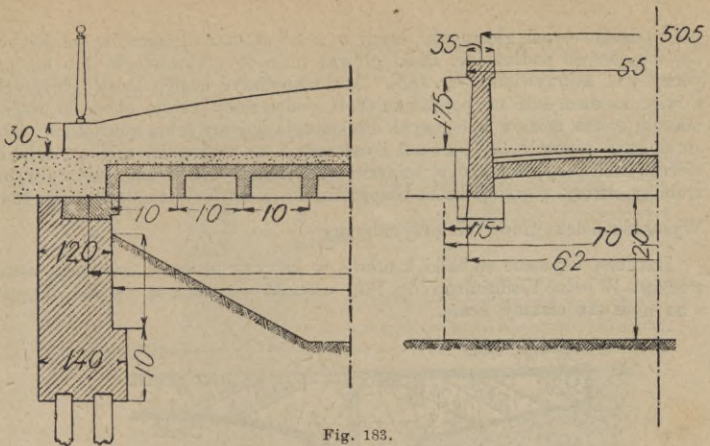


Fig. 183.

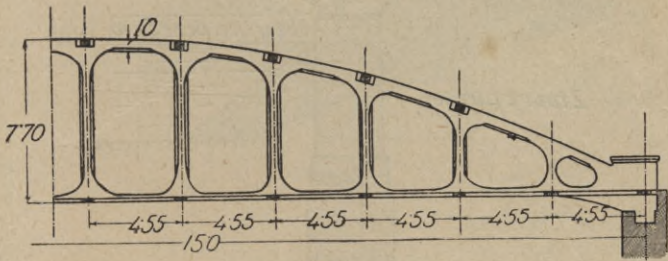


Fig. 184.

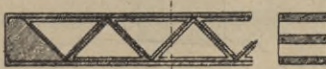


Fig. 185.

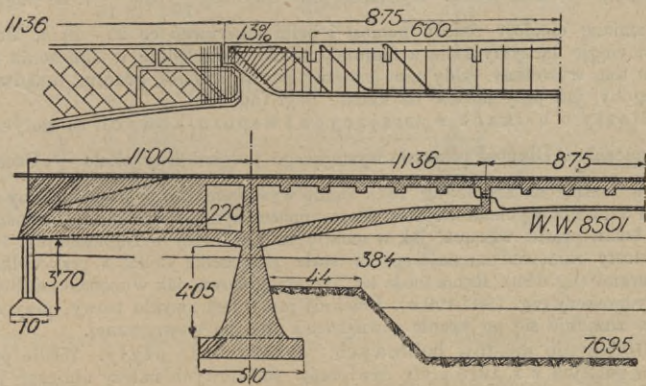


Fig. 186.

0,1  $b$  odstepu belek głównych. Jeżeli  $a > 1,8 m$ , oraz dla mostów kolejowych dajemy jeszcze podłużnice. Belki główne mogą być równoległe lub też pas górny jest zakrzywiony (fig. 183). Aby zmniejszyć odstęp belek głównych, a więc zaoszczędzić na poprzecznicach, podpieramy często chodniki wspornikami, a dla mostów kolejowych dla stężenia dajemy żebra zewnętrzne. Aby zmniejszyć ciężar belki głównej i oszczędzić na materiale, robi się ściankę cieńszą niż pasy, a także w ściance wydrążenia. Jeżeli zamiast wydrążenia zrobimy otwory, powstaje belka bezprzekątniowa czyli Vierendeel'a (fig. 184).

Wysokość belek głównych przyjmujemy  $\frac{1}{8}$  do  $\frac{1}{9} l$ .

Rzadziej używane są belki kratowe, w których trudność nastrecza ustrój węzłów. W belce Visintiniego (fig. 185) wkładki w pasach są zwykle okrągłe, a na nich zawieszamy kratę.

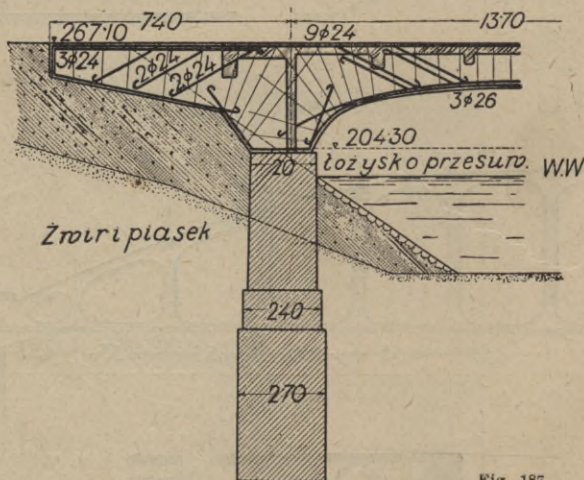


Fig. 187.

Mosty o belkach ciągłych. Użycie belek ciągłych pozwala na mniejszą wysokość belek. Wysokość przyjmuje się  $\frac{1}{10}$  do  $\frac{1}{15} l$ . Ze względu na zmianę ciepłoty należy pomost i belki przerywać co 25—40 m. Jeżeli belki ciągle łączymy stale z filarami, należy uwzględnić w obliczeniu momentem wywołany. Gdy nie jesteśmy pewni stałości gruntu, urządzamy przeguby, jak przy moście na kanale Begi (fig. 186).

Mosty o belkach wystających i wspornikowych są statycznie wyznaczalne. Długość ramienia wystającego przyjmujemy około  $\frac{l}{5}$ . Czasem,

jak w moście na Ergolz (fig. 187), ramię wystające tkwi w nasypie. Przy belkach wspornikowych na szerokim filarze, opatrzonym wspornikami, zawieszona jest belka prosta wisząca, jak w moście na Lublency w Lublanie (fig. 188).

Mosty ramowe powstają przez stałe połączenie belki z przyczółkami i filarami (fig. 189). Rama może też być przegubowa, jak w moście na Brdzie w Bydgoszczy (fig. 190 i 190 a). Przekrój rama jest zwykle teowy, przyczem płyta znajduje się po stronie zewnętrznej albo po wewnętrznej.

Obliczenie mostów belkowych. Obliczenie płyty. Wedle przepisów polskich z r. 1926 płyty dźwigarów żelbetowych należy obliczać jako belki ciągłe. Jest to uzasadnione, gdy mamy silne poprzecznicę lub rozpory.

Jeżeli  $M_{om}$  oznacza najw. moment belki podpartej w dwu punktach, to dla ciężarów, działających za pośrednictwem żwirówki mamy największy moment dodatni belki ciągłej  $M_m = M_{om} \cdot \mu$ .

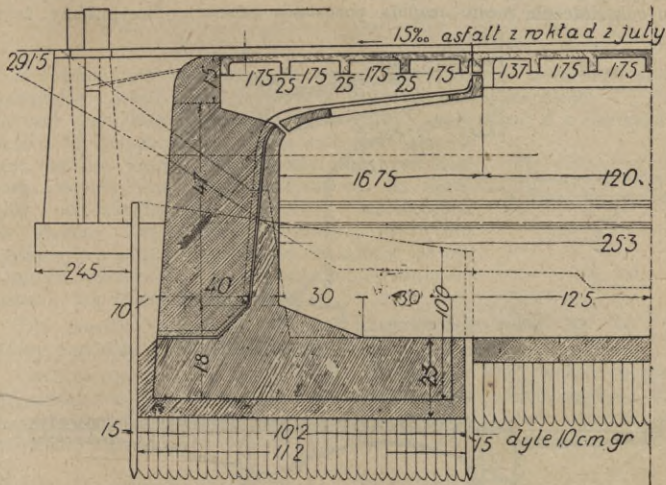


Fig. 188.

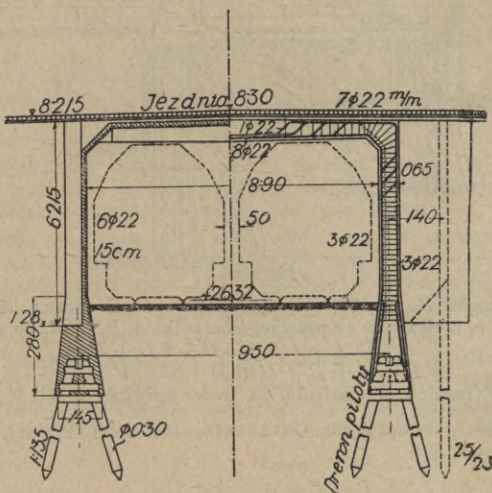


Fig. 189.

Spółczynnik  $\mu$  można przyjąć dla skrajnego przesła  $\mu_g = \frac{3}{4}$ ,  $\mu_p = \frac{4}{5}$ , dla średniego  $\mu_g = \frac{1}{3}$ ,  $\mu_p = \frac{2}{3}$ . Dla ciężarów, działających wprost bez

nadsypki, dla skrajnego przesła  $\mu_g = \frac{3}{4}$ ,  $\mu_p = 0,82$ , dla średniego  $\mu_g = 0,34$ ,  $\mu_p = 0,69$ .

Największe ciśnienie na poszczególne belki obliczamy przyjmując, że i po odkształceniu mostu rozpora pozostanie prosta<sup>1)</sup>. Przypuśćmy, że na

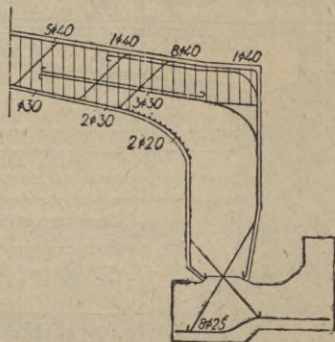


Fig. 190.

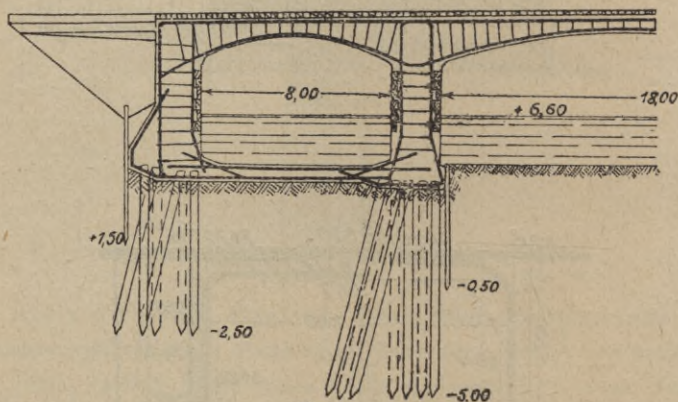


Fig. 190 a.

most działa ciężar  $R$  (fig. 191) między belkami  $A$  i  $B$ . Odstęp siły  $R$  od  $F$  niech będzie  $r$ , a ciśnienia na poszczególne belki  $A, B, C$  itd., to otrzymamy:

$$R \cdot r = (5A + 4B + 3C + 2D + E) a \dots (1)$$

$$\text{i } R = A + B + C + D + E + F \dots (2)$$

Nazwijmy różnicę w ciśnieniu na dwie sąsiednie belki  $\Delta$ , a stosunek  $\frac{J_1}{J_0} = k$ , jeżeli  $J_1$  oznacza moment bezwładności belki skrajnej, a  $J_0$  belki średniej, to:

$$A = (C + 2\Delta)k, \quad B = C + \Delta, \quad D = C - \Delta, \quad E = C - 2\Delta, \\ F = (C - 3\Delta)k \dots (3)$$

Wstawmy to w równania (1) i (2), a otrzymamy:

$$5C(k+2) + 10\Delta k = \frac{Rr}{a} \text{ i } C(4+2k) - \Delta(k+2) = R \dots (4)$$

<sup>1)</sup> Por. autora: Mosty żelbetowe, str. 33.



Z tych dwu równań możemy wyznaczyć  $C$  i  $\Delta$ , a gdy  $R$ ,  $r$  i  $k$  są znane, możemy wyznaczyć wszystkie ciśnienia, a potem momenty i siły poprzeczne rozpory, podparte na belkach skrajnych i środkowych.

Z równania (4) otrzymamy:

$$C = \frac{R \cdot r - 10 a \Delta k}{5 a (k + 2)} \quad \text{i} \quad \Delta = \frac{R \cdot r - 5 a C (k + 2)}{10 a k} \dots (5)$$

Z równań tych widzimy, że  $C$  i  $\Delta$  są funkcjami pierwszego stopnia zmiennej  $r$ . Jeżeli więc dla dwu położań siły  $R$  wyznaczamy  $C$  i  $\Delta$ , to dla tych dwu ilości wykreślić możemy linię wpływową, a z równania (3) także i dla innych ciśnień. Linie wpływowe wskażą nam, czy dla pewnej belki należy całą szerokość mostu obciążyć, czy tylko część, bo np. dla obciążenia, przedstawionego na fig. 191, ciśnienie w  $F'$  jest ujemne. Znając linię wpływową, łatwo już wyznaczymy najniekorzystniejsze obciążenie dla ciśnienia na każdą belkę. Licząc dokładniej, uwzględnić możemy też odkształcenie rozpór<sup>1)</sup>.

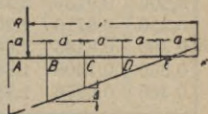


Fig. 191.

Dla mostów drogowych polskich liczyć należy wedle str. 755 i 756. Wtedy powyższe obliczenie opada.

Obliczenie belek głównych. Obliczenie belek w dwu punktach podpartych nie przedstawia żadnych trudności. Przy belkach ciągłych, chcąc liczyć dokładniej, należałoby uwzględnić zgrubienia belek na podporach. Zmniejszają się przez to odstępy punktów stałych  $a$  i  $b$ . Strassner otrzymuje dla  $n = \frac{v}{J_n}$ , długości zgrubienia  $\alpha l = l_1$ ,  $l - 2 l_1 = l_3$

$$a = \frac{l \cdot \eta'}{\eta + c_1 \left( \eta_1 - \frac{\eta_1' \cdot l_1}{l_1 - a_1} \right)}, \quad b = \frac{l \cdot \eta'}{\eta + c_2 \left( \eta_2 - \frac{\eta_2' \cdot l_2}{l_2 - b_2} \right)}$$

$$\eta' = 3 - 4 \alpha (1 - n), \quad \eta = 1 - \alpha^2 (3 - 1,6 \alpha) (1 - n),$$

$$c_1 = \frac{J l_1}{J_1 l}, \quad c_2 = \frac{J l_2}{J_2 l} \quad a_1 \text{ i } b_2 \text{ są to odstępy punktów stałych sąsiednich przeseł. Wartości } \eta \text{ i } \eta' \text{ podaje tablica 2.}$$

Jeżeli belka jest połączona stale z filarami, musimy to w obliczeniu uwzględnić, zwłaszcza dla filaru<sup>2)</sup>. Aby te momenty dodatkowe nie były za wielkie, należy filar zrobić tak cienki, jak tylko można.

Jeżeli belki są ramowe, to zwrócić należy uwagę, że zupełne utwierdzenie słupów da się z trudnością osiągnąć. Zwykle mamy utwierdzenie niezupełne albo też urządzamy przeguby, aby uzyskać jasne działanie sił.

Co do obliczenia belek bezprzekątniowych (Vierendeel'a) por. dział: „Statyka budowli, a także autora „Mosty żelbetowe“, str. 40.

**Ustrój mostów łukowych.** Ogólne uwagi co do kształtu i obliczenia mostów kamiennych stosują się i do mostów żelbetowych. Mosty żelbetowe możemy budować dla większych rozpiętości niż kamienne, bo są one znacznie lżejsze od kamiennych. Także dla małych rozpiętości, dla których wpływ ciężaru ruchomego jest wielki i dla łuków płaskich, dla których  $\frac{f}{l} < \frac{1}{8}$  używamy łuków żelbetowych, gdyż ciągnięcia występujące w kamiennych spowodowałyby pęknięcia. Dla średnich rozpiętości budujemy mosty betonowe bez uzbrojenia.

<sup>1)</sup> Por. autora: Rozkład ciężarów na belki mostów żelbetowych. Arch. Tow. Nauk. we Lwowie; także w Beton und Eisen 1922.

<sup>2)</sup> Por. autora: Mosty żelbetowe, str. 37.

Tablica 2.

$\alpha$	$n = \frac{1}{5}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{20}$	
	$\eta'$	$\eta$	$\eta'$	$\eta$	$\eta'$	$\eta$	$\eta'$	$\eta$
0,1	0,9773	2,680	0,9744	2,640	0,9735	2,6268	0,9730	2,620
0,125	0,9650	2,600	0,9586	2,550	0,9571	2,5335	0,9564	2,525
0,150	0,9503	2,520	0,9441	2,460	0,9421	2,4402	0,9410	2,430
0,200	0,9136	2,360	0,9028	2,280	0,8992	2,2536	0,8974	2,240
0,250	0,8710	2,200	0,8438	2,100	0,8483	2,0671	0,8456	2,050
0,300	0,8185	2,040	0,7959	1,920	0,7884	1,8804	0,7845	1,860
0,350	0,7608	1,880	0,7309	1,740	0,7210	1,6938	0,7160	1,670
0,400	0,6976	1,720	0,6598	1,560	0,6472	1,5072	0,6409	1,480

$\alpha$	$n = \frac{1}{30}$		$\frac{1}{40}$		$\frac{1}{50}$	
	$\eta'$	$\eta$	$\eta'$	$\eta$	$\eta'$	$\eta$
0,1	0,9725	2,6136	0,9723	2,6100	0,9716	2,608
0,125	0,9557	2,5170	0,9553	2,5125	0,9551	2,510
0,150	0,9400	2,4204	0,9395	2,4150	0,9381	2,412
0,200	0,8956	2,2272	0,8947	2,2200	0,8942	2,216
0,250	0,8429	2,0340	0,8416	2,0250	0,8409	2,020
0,300	0,7808	1,8408	0,7789	1,8300	0,7777	1,824
0,350	0,7110	1,6476	0,7085	1,6350	0,7070	1,628
0,400	0,6346	1,4544	0,6315	1,4400	0,6296	1,432

Sklepienia pełne o wkładce gibkiej. Wkładki z żelaza okrągłego dajemy zazwyczaj obustronnie. Łączymy je wkładkami rozdzielającymi w odstępach 30—60 cm i strzemiionami co 40—100 cm dla połączenia wkładek górnych i dolnych (fig. 192).

Stosunek  $\frac{f}{l}$  wynosi zwykle  $\frac{1}{5}$  do  $\frac{1}{10}$ , grubość w kluczu  $\frac{1}{100}$  do  $\frac{1}{160} l$ . Przy moście na Varze zastosowano z powodu wielkich ciśnień beton uzwojony.

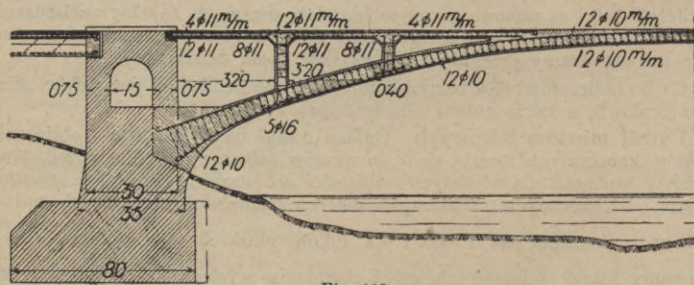


Fig. 192.

Sklepienia z wkładkami tęgimi mogą być ustroju Wünscha (fig. 193; most w Serajewie) lub Melana (na Kłokucze w Czerniowcach; fig. 194). Łuki żelazne kratowe, blaszane lub dwuteowniki układamy w odstępach około 1 m. W kierunku poprzecznym łączy się łuki żelazne rozporami co 5—8 m. Na

łękach żelaznych możemy zawiesić deskowanie dla betonowania; wskutek tego ciężar własny sklepienia noszą same łęki żelazne.

Hennebique używa mostów sklepionych dla  $l > 10$  m. Pomost składa się z płyty, podpartej żebrami. Przy mostach  $l > 20$  m zakrzywia on płytę według kształtu łuku (fig. 195; most na Lys w Gandawie). Dla większych rozpiętości używa murów pachwinowych lub nawet tylko słupów.

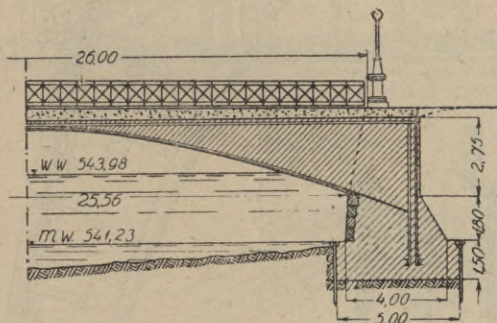


Fig. 193.

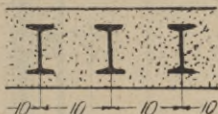
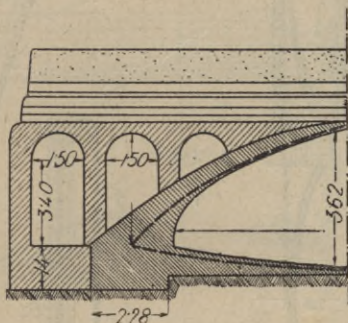


Fig. 194.

Mosty łukowe z osobnymi dźwigarami, pomost górą. Tu budujemy dwa lub więcej łuków, a na nich spoczywa pomost zapomocą murów pachwinowych. Przekrój łuków jest prostokątny (most w Trembowli; fig. 196).

Mosty łukowe z pomostem dołem budujemy w razie małej rozporządzałnej wysokości ustroju. Pomost zawieszony jest zapomocą słupów wiszących, których przekrój bywa zwykle prostokątny. Często końce łuku łączymy ścięgnem (most na Sprewie w Lubinie, fig. 197). Połączenie ścięgna z łukiem i jego przekrój por. fig. 198. Jeżeli łuk ma sam przyjąć na siebie momenty, a pomost nie ma go usztywniać, to robimy ścięgna wąskie i sprę-

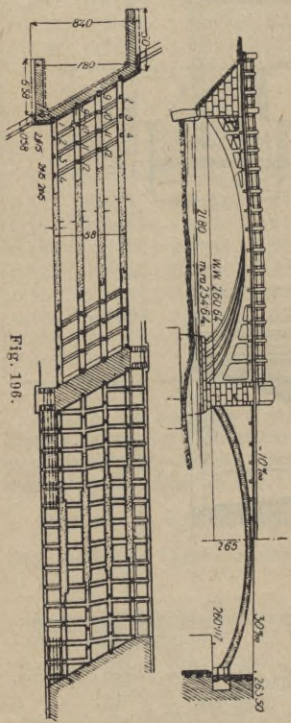


Fig. 195.

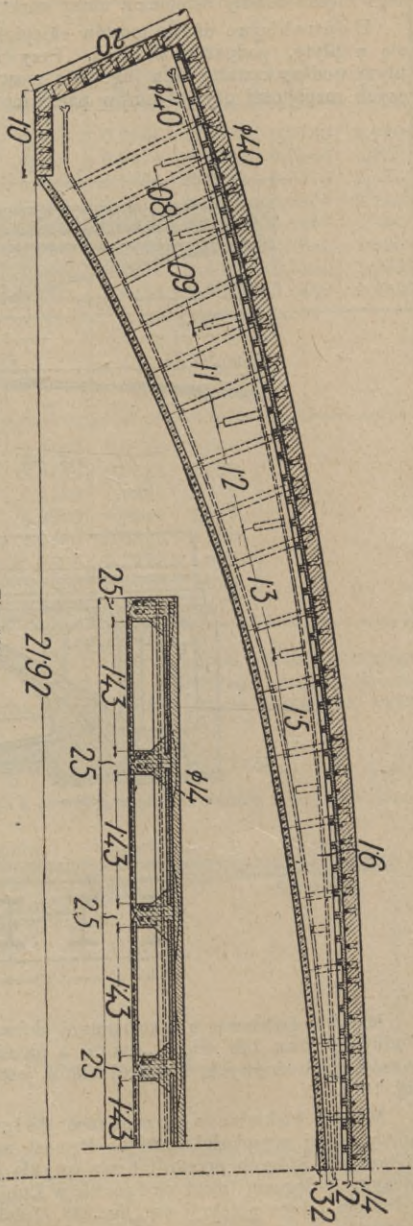


Fig. 196.

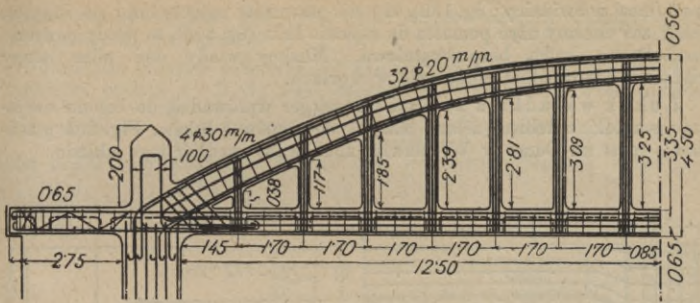


Fig. 197.

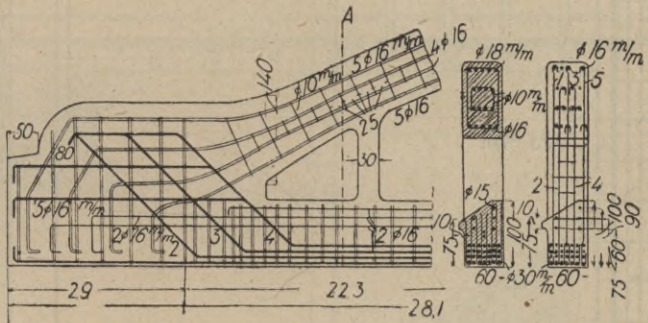


Fig. 198.

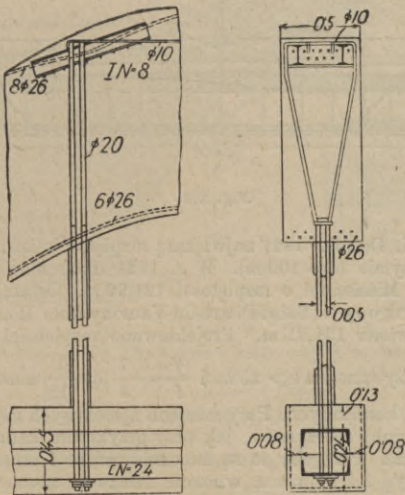


Fig. 199.

żyte (most w Świdnicy; fig. 199), aby nie przenosiły ugięcia łuku na ścięgna. Jeżeli zaś chcemy użyć pomostu do steżenia łuku (fig. 200), to wtedy powstaje paraboliczna belka bezprzekątniowa. Musimy wtedy dać silne słupy wiszące i odpowiednie połączenie w węzłach.

Łuki z wkładką z żeliwa. Emperger wprowadził do betonu owijanego wkładki z żeliwa (żelaza lanego) do słupów i łuków. Fig. 201 przedstawia most na Odrze w Wrocławiu, zbudowany według tego układu.

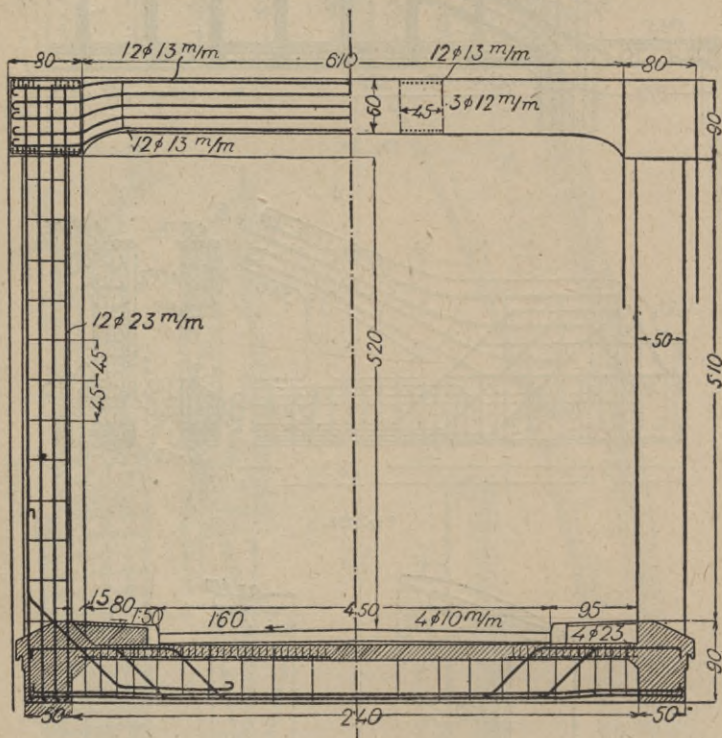


Fig. 200.

Roźpiętości. Do roku 1921 największą roźpiętość miał most Odrodzenia na Tybrze w Rzymie ( $l = 100$  m). W r. 1921 ukończono budowę mostu w Minneapolis na Mississippi o roźpiętości 121,92 m. Ostatnio wybudowano most żelbetowy drogowy w Saint-Pierre-du-Vauvray koło Rouen na Sekwanie o roźpiętości w świetle 131,81 m. Projektowano roźpiętości ponad 200 m.

Przeguby, używane dla  $l > 25$  m i  $\frac{f}{l} = \frac{1}{8}$  do  $\frac{1}{15}$ , można wykonać tak, jak przy mostach kamiennych. Przy mostach żelbetowych używane są nadto półprzeguby, przeguby sprężynowe, jak przy przykryciu kanału św. Marcina w Paryżu (fig. 202). Przeguby te są znacznie tańsze i prostsze od innych. Przeguby mogą być też ołowiane, wreszcie żelazne, podobne do używanych przy mostach żelaznych. Fig. 203 przedstawia przegub mostu na Igelsbach. Przy mostach przegubowych musimy umożliwić płycie pomostowej ruchy

wskutek zmiany ciepłoty. Nad przegubami przeprowadzamy szczelinę przez mur czołowy aż do pomostu.

**Obliczenie mostów łukowych.** Najkorzystniejszy kształt łuku. Przyjąwszy punkta  $A$  i  $B$  (fig. 204), łączymy je i wyznaczamy wedle Melana rządne  $\gamma_1$  dla  $x = \frac{l}{4}$ , przyczem  $\gamma_1 = \frac{17 q_0 + 7 q_1}{16 (5 q_0 + q_1)} f$ , jeżeli  $q_0$  i  $q_1$  oznaczają ciężar jednostkowy w kluczu i w wezłowie. Promień krzywizny w kluczu  $r_0 = \left(5 + \frac{q_1}{q_0}\right) \frac{l^2}{48 f}$ .

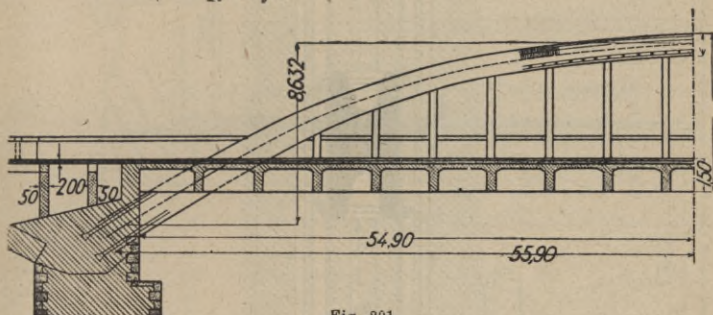


Fig. 201.

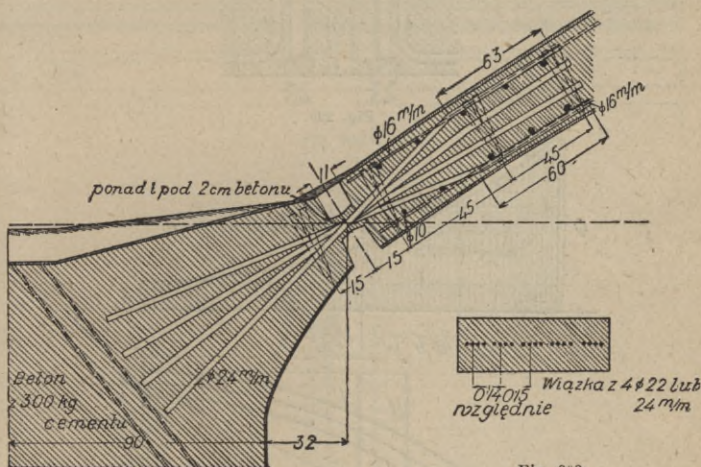


Fig. 202.

**Grubość sklepienia.** Dla mostów żelbetowych możemy przyjąć w przybliżeniu grubość w kluczu  $g_0 = 10 + l$ , jeżeli  $g_0$  w  $cm$ , zaś  $l$  w  $m$ . Dla łuków betonowych  $g_0 = 15 + 1,3 r_0$ , przyczem  $r_0 = \frac{l^2 + 4 f^2}{8 f}$ . Wzory dokładniejsze teoretyczne por. autora Mosty żelbetowe, str. 69 i nast.

**Obliczenie naprężeń w łukach.** Naprężenia wyznaczamy dla  $l < 20 m$  zapomocą linii ciśnienia, dla  $l > 20 m$  na podstawie linii wpływowych.

Jeżeli ciągnięcia nie przekraczają  $10 \text{ kg/cm}^2$ , obliczamy naprężenia wedle fazy I., powyżej tej granicy wedle fazy II. Siły zewnętrzne oblicza się zawsze wedle fazy I., przyczem  $n = 10$ .

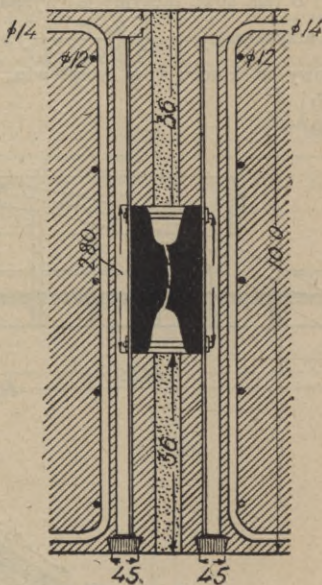


Fig. 203.

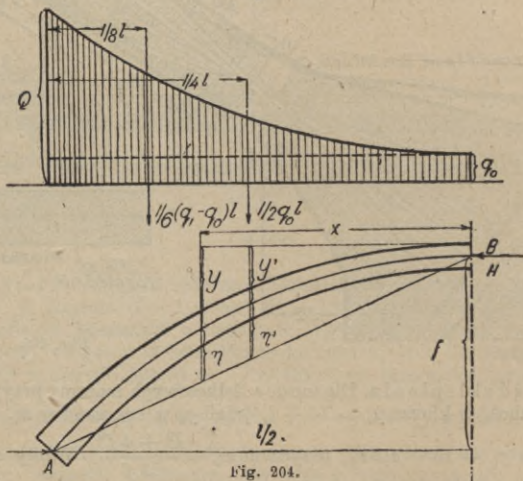


Fig. 204.

Polskie przepisy o budowie i utrzymaniu mostów drogowych z r. 1926 § 76. 2. Przy obliczaniu dźwigarów żelaznobetonowych statycznie niewyznaczalnych (hyperstatycznych) należy przekroje i momenty bezwładności przekrojów, złożonych z betonu i żelaza, zastąpić przekrojami sprowadzonymi (idealnymi), przyjmując, że każdy element przekroju żelaza w równaniach sprężystości posiada 10-krotną wartość takiegoż elementu



przekroju betonu. Przy tem należy przyjąć współczynnik sprężystości betonu tak dla rozciągania, jak i dla ściskania równy  $210.000 \text{ kg/cm}^2$ .

**Mosty wyjątkowe, filary i przyczółki.** Mosty ukośne żelbetowe nie przedstawiają takich trudności, jak mosty kamienne. Mury pachwinowe urządzamy równoległe do przyczółka.

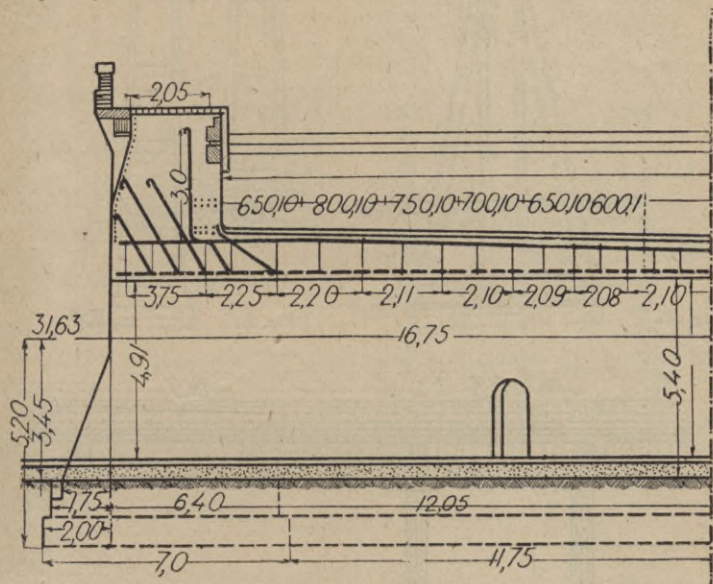


Fig. 205.

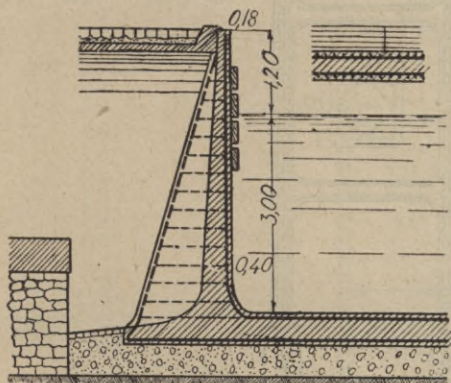


Fig. 206.

**Mosty kanałowe i wodociągowe.** Mosty kanałowe budujemy coraz częściej żelbetowe. Fig. 205 przedstawia most nad koleją Szczecin—Eberswalde. Przy małych rozpiętościach koryto samo się podtrzymuje, przy większych musi być podparte, a wtedy ściany boczne liczymy tylko na parcie wody

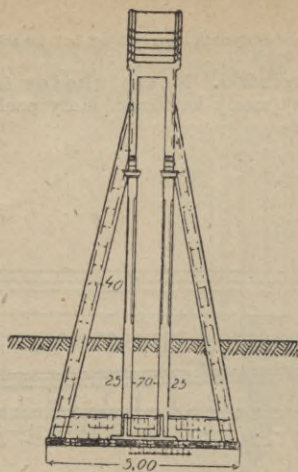


Fig. 207.

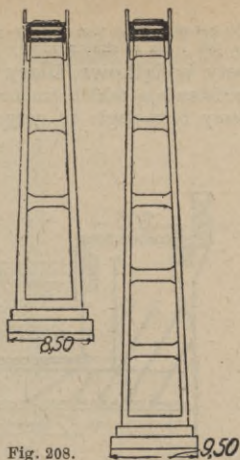


Fig. 208.

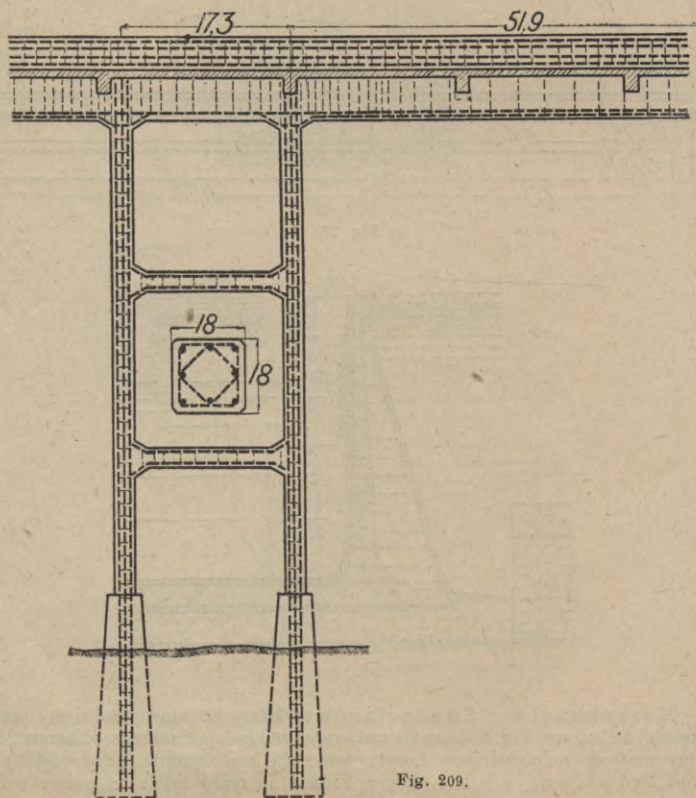


Fig. 209.

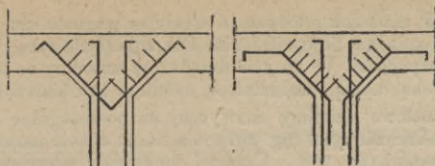


Fig. 210.

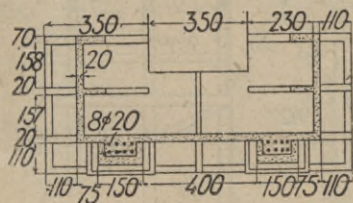
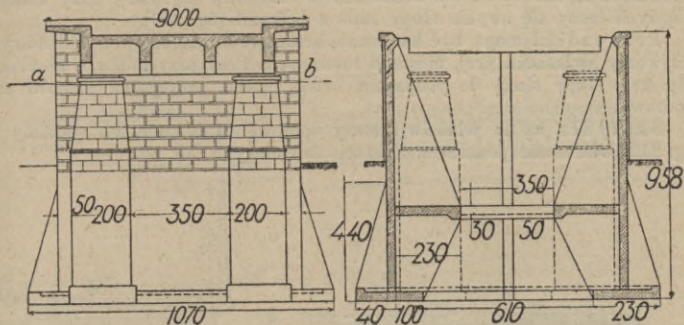


Fig. 211.

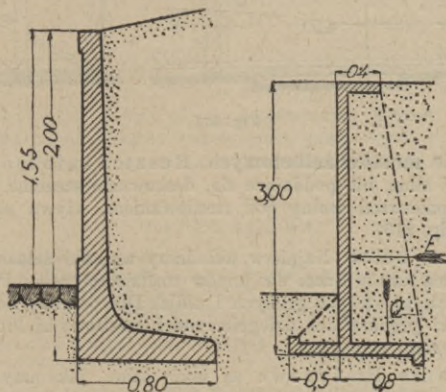


Fig. 212.

(fig. 206). Ściany koryta, względnie skrzydła należy jak najdalej wpuścić w nasyp, aby zapobiec przesiąkaniu wody. Oddzielenie koryta od belki jest korzystne, bo można belce dać kształt korzystniejszy. Jako belek lepiej

używać sklepień, niż belek prostych, a wtedy ze względu, że tu ciężar stały, oś sklepienia wpada na linię ciśnienia. Dla uniknięcia szczelin należy przyjmować małe rozpiętości. W korycie urządzamy szczeliny co 20—30 m, które zakrywamy blachą falistą, uszczelnioną asfaltem lub kauczukiem.

Filary żelbetowe dzielimy zazwyczaj na poszczególne słupy podobnie jak w jazmach drewnianych (fig. 207). Często na cokole umieszczamy słupy, połączone rozporami (fig. 208). Czasami fundujemy słupy osobno, jak przy wiadukcie na Arroco seco w Passadeno w Kalifornji (fig. 209). Przy belkach ciągłych łączy się zwykle słupy stałe z belkami (fig. 210).

Przyczółki mogą być kamienne, betonowe lub żelbetowe. Żelbetowych używamy zwłaszcza przy mostach ramowych. Przy przyczółku w Samborze (fig. 211) słupy służą do podparcia belek, reszta przyczółka stanowi mur oporowy.

Skrzydła są to właściwie mury oporowe. Przekroje ich widzimy na fig. 212. Obliczenia podane w Mostach żelbetowych, str. 92.

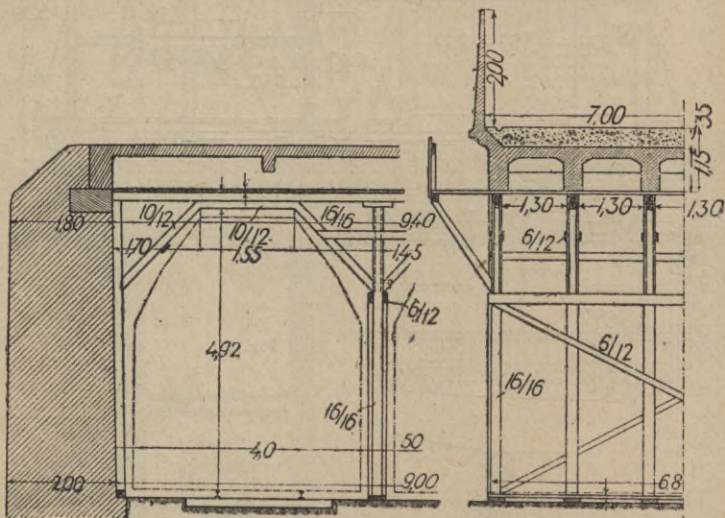


Fig. 215.

**Wykonanie mostów żelbetowych.** Rusztowanie mostów belkowych ma być silne, nie poddające się, deskowanie szczelne. Aby podczas budowy mieć przestrzeń wolną pod rusztowaniem, używa się często belek rozporowych (fig. 213).

**Wykonanie belek.** Najpierw układamy wkładki żelazne i przytwierdzamy za pomocą drutu 1 mm do prętów rozdzielających. Potem betonuje się w warstwach 15—20 cm grubych i ubija. Dla ochrony od dymu często maluje się belki preparatami dziegciowymi i asfaltowymi lub też wyprawę naciera się czystym cementem.

Rusztowania kraźynowe są takie same, jak przy mostach kamiennych, muszą być tylko trochę silniejsze ze względu na wstrząśnienia przy ubijaniu betonu. Kraźyny podwyższamy w kluczu 3—8 cm ze względu na zniżenie po wykonaniu sklepienia.

Przy ustroju Melana zawieszamy deskowanie na tęgim łuku żelaznym za pomocą opasek lub śrub (fig. 214).

Betonowanie sklepień wykonywa się najlepiej w warstwach, przechodzących przez całą szerokość sklepienia. Na fig. 215 widzimy, w jakim

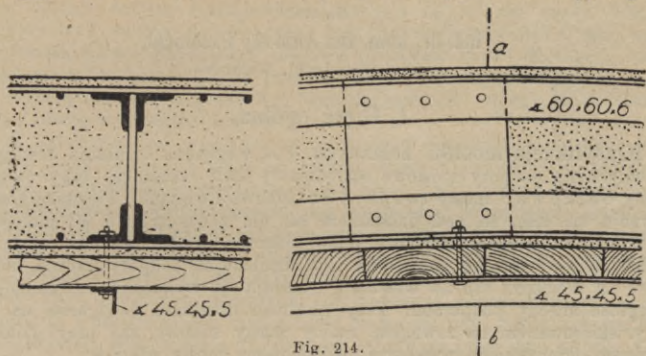


Fig. 214.

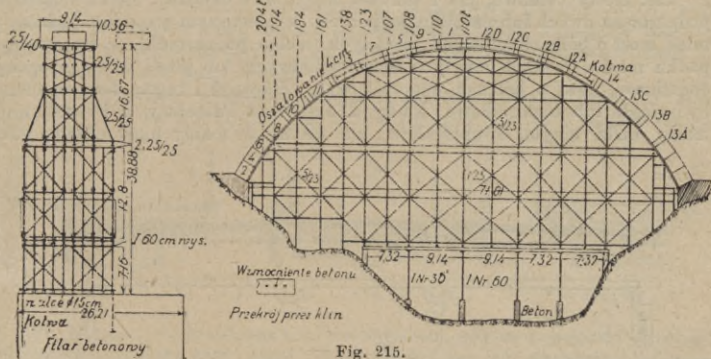


Fig. 215.

porządku wykonywano warstwy. Poszczególne warstwy podpieramy tymczasowo.

Zdjęcie krążyn odbywa się po dostatecznym stężeniu betonu, a więc około 5 tygodni po ukończeniu betonowania, przy użyciu cementu wyboro-  
wego znacznie prędzej. Przyrządów w tym celu używa się tych samych, co przy mostach kamiennych.

### LITERATURA.

Thullie M. dr.: Mosty żelbetowe. Lwów 1921.  
 Thullie M. dr.: Rozkład ciężarów na belki mostów żelbetowych, Arch. Tow. Nauk. we Lwowie; także w Beton und Eisen 1922.  
 Tedesco et Forestier: Manuel théorique et pratique du constructeur en ciment armé, II ed. Paryż i Leodjum 1920.  
 Waddell: Bridge Engineering. New York 1916.  
 Emperger: Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. VI., II. w. 1911. Bd. VII. III. w. Bogenbrücken. Berlin 1921.  
 Kersten C.: Brücken in Eisenbeton, I. Platten und Balkenbrücken, IV. w. Berlin 1918, II. Bogenbrücken, II. w. Berlin 1910.  
 Saliger R.: Der Eisenbeton, seine Berechnung und Gestaltung, IV. w. 1920, V. w. 1926.  
 Schächterle Dr. K. W.: Eisenbetonbrücken, II. w. Berlin i Lipsk 1920.  
 Santarella e Miozzi: Ponti italiani in cemento armato. Medjolan 1924.

# Mosty żelazne.

Napisał

inż. dr. kom. Dr. Andrzej Pszenicki,  
profesor politechniki, Warszawa.

## I. Część ogólna.

**Klasyfikacja mostów żelaznych.** Pod względem działania dźwigarów głównych na podpory mostowe rozróżniamy dwa zasadnicze typy mostów: mosty belkowe i mosty rozporowe (łukowe i wiszące). Pierwsze charakteryzują się tem, że pod działaniem na nie zewnętrznych sił pionowych wywołują na podpory ciśnienia tylko pionowe, drugie zaś pod działaniem tychże sił zewnętrznych pionowych dają ciśnienia na podpory ukośne, skierowane na zewnątrz lub na wewnątrz i starają się zwiększyć lub zmniejszyć odległość między podporami. Przy ukośnym działaniu dźwigarów na podpory, skierowanem na zewnątrz, mamy mosty łukowe, zaś przy działaniu ukośnem, skierowanem wewnątrz, otrzymujemy mosty wiszące.

Tak mosty belkowe, jak i łukowe, mogą mieć odmiany. Belka może być podparta na dwóch lub na kilku podporach: w pierwszym wypadku będziemy mieć most o belkach prostych rozciętych (wolno podpartych), w drugim wypadku most o belkach ciągłych bezprzegubowych, lub jeżeli mamy przeguby dodatkowe, most o belkach wspornikowych. Również i mosty łukowe mogą być ciągłe lub wspornikowe. Na fig. 216 *a* (most Pałacowy w Petersburgu) mamy belki ciągłe, dwuprzęsłowe, na fig. 216 *b* mamy most układu mie-

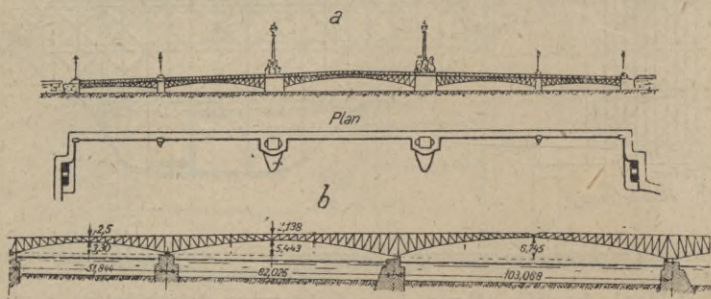


Fig. 216 *a, b*,

szanego: belkowy wspornikowy i łukowy wspornikowy (Troicki most w Petersburgu). Pod względem kształtu zewnętrznego mogą być mosty o obu pasach prostych, o jednym pasie prostym i drugim krzywym lub wielobocznym, paraboliczne, hyperboliczne, o obu pasach krzywych lub wielobocznych (system Pauli, łukowe ze ściąganiem).

W zależności od ustroju ścianki, łączącej pasy dźwigara, mamy mosty o ściance pełnej lub kratowe. Te ostatnie zaś mogą mieć kratę pojedynczą lub wielokrotną, statycznie wyznaczalną lub statycznie niewyznaczalną. Mosty belkowe o ściance pełnej zwykle stosuje się do rozpiętości do 20 m. Do tej rozpiętości są one ekonomiczniejsze i lżejsze. Przy większej rozpiętości waga własna mostów kratowych staje się już mniejsza w porównaniu z wagą własną mostów o ściance pełnej, lecz wykonanie tych ostatnich jest znacznie prostsze, a zatem i tańsze. Ostateczna przewaga tego lub innego systemu pod względem tanioci zależy od stosunku kosztów materiału i robocizny. W Ameryce mosty o ściance pełnej budują do rozpiętości

35 m. Mosty belkowe rozcięte (wolno podparte) mamy do rozpiętości 204 m, wspornikowe do rozpiętości 550 m, łukowe do 250 m, wiszące do 490 m. Przy bardzo dużych rozpiętościach możliwe są jedynie mosty wiszące; projekty tych mostów doprowadzone były do rozpiętości 945 m przy szerokości mostu 35 m. Największa możliwa rozpiętość mostu żelaznego wiszącego, jak to wykazały prace komisji, która opracowywała projekt mostu przez rzekę Hudson, mogłaby być doprowadzona nie więcej, niż do 1320 m. Waga mostu wynosiłaby około 93 t m b.

W zależności od położenia pomostu rozróżniamy mosty z jazdą górą, z jazdą dołem lub jazdą po środku. Mosty z jazdą górą stosujemy zwykle, jeżeli wysokość ustrojowa mostu może być znaczna i jeżeli przeto dźwigary główne można umieścić pod pomostem. W mostach kolejowych o niewielkich rozpiętościach (do 35 m) mamy możliwość obejścia się bez belek poprzecznych i podłużnych i układać mostownice (podkłady) bezpośrednio na dźwigarach głównych (fig. 217). W mostach szerokich drogowych możemy dawać kilka dźwigarów głównych, co zmniejsza znacznie wagę pomostu a przez to i całego mostu. Nadto jazda górą daje nam mosty otwarte, które nie zakrywają nam widoku, co również należy do zalet tego ustroju. Lecz, o ile w mostach szerokich można je stosować z wygodą do dużych rozpiętości, o tyle w mostach nie szerokich (kolejowych jednotorowych) przy większej rozpiętości mogą okazać się niedogodne, gdyż wymagają większej odległości pomiędzy dźwigarami, niż przy umieszczeniu pomostu w dole, tj. przy zastosowaniu jazdy dołem.

Przy niewielkiej wysokości ustrojowej stosujemy zwykle jazdę dołem (fig. 218). Jazda pośrodku (fig. 219), lub w górze pomiędzy pasami dolnym

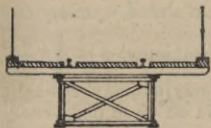


Fig. 217.

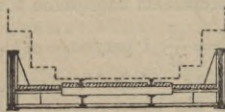


Fig. 218.

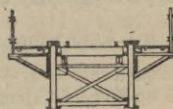


Fig. 219.

i górnym może być urządzona przedewszystkiem, gdy na to pozwala wysokość ustrojowa i gdy oba pasy, górny i dolny, są krzywe, gdy wysokość dźwigarów jest niedostateczna, aby je można było powiązać u góry i chodzi o zmniejszenie wysokości dźwigarów, wystającej ponad pomostem dla tych lub innych przyczyn, np. dla zwiększenia sztywności słupków.

**Zależność poprzecznego przekroju mostu od wysokości ustrojowej.** Jeżeli nie jesteśmy ograniczeni co do wysokości ustrojowej, to mosty o niewielkiej i średniej rozpiętości robimy zwykle z jazdą górą, które prócz innych zalet (lepsze usztywnienie poprzeczne) są zwykle tańsze. Przy rozpiętości około 65—70 m waga mostów kolejowych z jazdą górą lub dołem jest mniej więcej jednakowa. Przy większej rozpiętości mosty z jazdą dołem są lżejsze od mostów z jazdą górą. W mostach z jazdą górą możemy zmniejszyć rozstaw między dźwigarami, zatem otrzymujemy poprzecznicę lżejszą, możemy dobrze połączyć dźwigary główne tężnikami poprzecznymi, przez co osiągamy równomierniejszą pracę dźwigarów przy nierównomiernym obciążeniu dźwigarów; ilość dźwigarów może być dowolna w zależności od szerokości mostu i odpowiadać najmniejszej wadze całego mostu. Dając mniejszą odległość pomiędzy dźwigarami skrajnymi, niż w mostach z jazdą dołem, możemy zmniejszyć szerokość przyczółków i długość filarów. Wreszcie, przy jeździe górą mamy most otwarty, zatem dobrą komunikację na szerokości mostu, co ma niewątpliwie zalety zwłaszcza w mostach długich.

Jeżeli wysokość ustrojowa mostu jest mała, wtedy stosujemy mosty z jazdą dołem. Te ostatnie mogą być otwarte, tj. takie, które nie mają

ponad pomostem wiązań, łączących dźwigary ze sobą, albo mosty zamknięte, gdy ponad pomostem są wiązania — teźniki, które łączą dźwigary ze sobą. Drugi ustrój jest lepszy, gdyż teźniki podłużne, łącząc pasy górne, usztywniają je i nadają im większą stateczność. Aby jednak można było stawiać teźniki górne podłużne, trzeba mieć odpowiednią wysokość dźwigarów, która jest zależna od rozpiętości mostu. W mostach kolejowych teźniki górne można dawać przy rozpiętościach nawet od 32 m. W mostach drogowych, w których wolna wysokość przejazdu jest mniejsza, niż w mostach kolejowych, teźniki górne można dawać i przy nieco mniejszej rozpiętości.

Rozpiętość teoretyczna dźwigarów. Mając rozpiętość danego przęsła w świetle  $L$ , możemy znaleźć rozpiętość teoretyczną  $l$  dźwigarów, o ile są dane wymiary ciosów podporowych, na których spoczywają poduszki czyli łożyska<sup>1)</sup> mostowe. Nie mając wymiarów ciosów, można w przybliżeniu znaleźć rozpiętość teoretyczną dla mostów belkowych ze wzoru  $l = aL$ , gdzie współczynnik  $a$  można przyjąć równym w zależności od rozpiętości  $L$  (fig. 220) według poniżej podanej tablicy:

$L = m$	15	30	40	50	60	80	100
$a$	1,08	1,05	1,04	1,035	1,03	1,025	1,02

Mając teoretyczną rozpiętość  $l$ , możemy znaleźć wagę mostu według jednego ze wzorów empirycznych i obciążenie ruchome; zatem będziemy mieć ciśnienie na podporę  $A$ , które da nam możliwość znaleźć wymiary ciosu podporowego przy dopuszczalnym naprężeniu  $k$  na mur. Jeżeli wymiary ciosu

są  $a$  i  $b$ , to mamy:  $ab = \frac{A}{k}$  i przy  $a = nb$ , otrzymujemy  $a = \sqrt{\frac{nA}{k}}$ .

Rozpiętość  $l = L + a + 2c$ , wielkość odsadzki  $c$  przyjmujemy równą od 15 do 30 cm i dajemy ją, aby lepiej rozłożyć ciśnienie od ciosu podporowego na mur i aby można było ustawiać na niej dźwigi przy podnoszeniu dźwigarów.

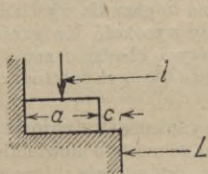


Fig. 220.

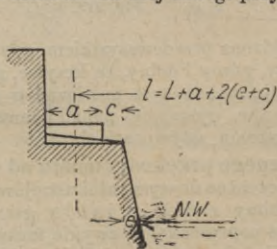


Fig. 221.

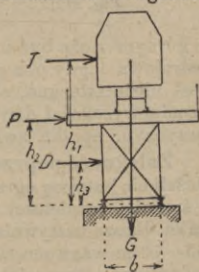


Fig. 222.

Dopuszczalne naprężenie  $k$  na mur zwykły przyjmujemy około 10—12 kg/cm<sup>2</sup>, zaś na mur ciosowy w zależności od jakości kamienia  $k = 20—30$  kg/cm<sup>2</sup>. Otrzymaną tym sposobem rozpiętość teoretyczną  $l$  zaokrąglamy zwykle tak, aby ona była wielokrotna do długości przedziału mostu, lub wyrażała się w całkowitych metrach. Czasem przy większej wysokości podpór do wielkości  $L + a + 2c$  dodają jeszcze pochylenie bocznych ścianek podpór  $2c$ , liczone od podstawy ciosu do poziomu wody normalnej, mając na uwadze, że rozpiętość w świetle  $L$  winna być mierzona na tym poziomie (fig. 221).

<sup>1)</sup> „Łożyisko“, wyraz używany w Małopolsce i Wielkopolsce, „poduszka“ w b. zaborze rosyjskim.



W mostach łukowych rozpiętość teoretyczna zależy od stosunku strzałki łuku do rozpiętości. Dla łuków wyniosłych rozpiętość teoretyczna jest zwykle nieco większa od rozpiętości w świetle, zaś w łukach płaskich, odwrotnie, rozpiętość teoretyczna jest mniejsza od rozpiętości w świetle. W mostach łukowych można zatem dla pierwszego przybliżenia przyjąć, że  $l = L$ , znaleźć ciśnienie na podporę  $A$  od jednego dźwigara, znaleźć wymiary płyty łożyskowej i ciosu podporowego, naszkicować cios i łożysko, i następnie już przeprowadzić obliczenie rozpiętości teoretycznej.

Szerokość mostu, wysokość wolna przejazdu i odległość między dźwigarami. Szerokość mostu zależy przedewszystkiem od zadanej szerokości części przejazdowej, od rozpiętości mostu i od stateczności w zależności od sił poziomych: parcia wiatru, siły odśrodkowej w moście w krzywej.

W mostach kolejowych o niewielkich rozpiętościach z jazdą górą najmniejszą szerokość przyjmuje się 1,8 m przy dostatecznej stałości mostu przeciw wywracaniu się pod działaniem parcia wiatru i siły odśrodkowej, jeżeli most leży w krzywej. Zatem, jeżeli oznaczymy (fig. 222) siłę parcia wiatru na tabor kolejowy przez  $T$ , na pomost przez  $P$  i na dźwigary przez  $D$ , zaś odległość wypadkowych tych sił do dołu dźwigara (do osi czopa łożyskowego) odpowiednio przez  $h_1$ ,  $h_2$  i  $h_3$ , wagę mostu wraz z obciążeniem przez  $G$  i odległość dźwigarów przez  $b$ , to przy współczynniku stateczności 1,5 mamy:

$$b \geq \frac{3,0(T h_1 + P h_2 + D h_3)}{G}$$

W mostach o znacznej wysokości, szczególnie z jazdą górą, by osiągnąć dostateczną stałość mostu (współczynnik pewności 1,2—1,5) przeciw wywracaniu się pod działaniem sił poziomych, należy stawiać dźwigary pochyło. Nadto odległość między dźwigarami winna być taka, aby była zabezpieczona sztywność mostu w płaszczyźnie poziomej, aby pod działaniem parcia wiatru most w planie zbytnio się nie uginał. Aby zabezpieczyć dostateczną sztywność mostu w planie odległość  $b$  pomiędzy dźwigarami mostów o dużych rozpiętościach

nie powinna być mniejsza od  $\frac{1}{20} l$ , w stosunku zaś do wysokości  $H$  dźwi-

garów przy pasach prostych winno być  $b \geq 0,4 H$ , przy pasach zaś krzywych  $b \geq 0,33 H$ .

W mostach z jazdą dołem najmniejsza szerokość mostu określa się szerokością skrajni (por. str. 235, fig. 267), w granice której nie może wkroczyć żadna część konstrukcji mostowej, zatem  $b = 4,40$  m. Odległość pomiędzy osiami dźwigarów będzie tutaj zależna od wystawiania dźwigarów ponad nawierzchnią części przejazdowej.

Jeżeli wystająca część dźwigarów nie dochodzi do pierwszego odskoku skrajni, odległość pomiędzy dźwigarami może być w granicach 3,2—3,4 m (fig. 223 a). Przy wystającej części dźwigarów na wysokości pomiędzy pierwszym i drugim odskokiem odległość ta winna być w granicach 3,7—4,8 m (fig. 223 b). Przy wyższych dźwigarach szerokość w świetle musi wynosić 4,4 m, zatem odległość między osiami dźwigarów będzie najmniej 4,8 m, mając na uwadze, że szerokość pasów wynosi conajmniej 40 cm (fig. 223 c). Inne warunki, którym powinna odpowiadać szerokość mostu z jazdą dołem,

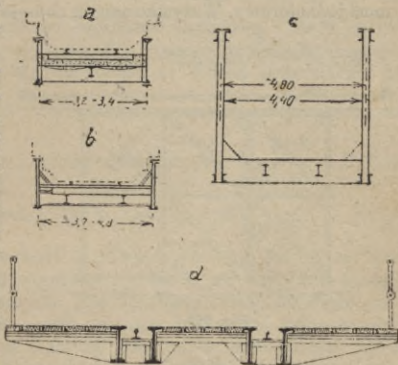


Fig. 223 a, b, c, d.

są te same, które były wskazane wyżej. Dla mostów kolejowych dwutorowych szerokość się zwiększa o 3,5 m, tj. o odległość pomiędzy osiami torów.

W mostach kolejowych jednotorowych zwykle dajemy dwa dźwigary, a tylko w wypadkach, gdy wysokość ustrojowa mostu jest bardzo mała, cztery dźwigary, t. zw. bliźniacze (fig. 223 d). Dźwigary, które tworzą parę, są wtedy zbliżone do siebie do odległości około 300 mm. W mostach dwutorowych ilość dźwigarów może być: dwa, trzy lub cztery. Przy dwóch dźwigarach szerokość mostu może być najmniejsza, gdyż skrajne szyny mogą leżeć nad dźwigarami, odległość wtedy między dźwigarami przy jeździe górą będzie 5 m, przy jeździe zaś dołem odległość ta musi wynosić  $7,90 m + S$ , gdzie  $S$  jest szerokością pasa dźwigara, zatem najmniej 8,3 m.

Stosowanie w mostach dwutorowych dwóch dźwigarów ma tę niedogodność, że dźwigary otrzymują niejednakowe obciążenie, co powoduje ich niejednakowe ugięcie. Przy jeździe górą można odpowiednio połączyć dźwigary teźnikami poprzecznymi i sprowadzić różnicę ugięć do minimum. Przy jeździe dołem stężenie poprzeczne jest dość trudne, ugięcie otrzymuje się niejednakowe, w przekroju poprzecznym most się zniekształca, psując połączenia belek poprzecznych z dźwigarami. Dlatego w tym wypadku lepiej dawać połączenie belek poprzecznych z dźwigarami przegibne, a nie sztywne.

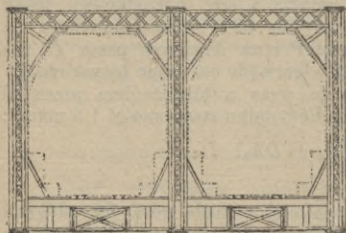


Fig. 224.

Przy trzech dźwigarach (fig. 224) przy jeździe dołem szerokość mostu zwiększa się o szerokość pasa dźwigara środkowego, który zwykle jest dwa razy silniejszy, niż dźwigary skrajne. Wady, podane powyżej co do ugięć i zniekształcenia przekroju poprzecznego mostu przy dwóch dźwigarach, mają oczywiście miejsce i przy trzech dźwigarach.

Dając cztery dźwigary, możemy mieć trzy następujące kombinacje:

a) Dwa dźwigary połączone odpowiednio ze sobą tworzą niezależny most jednotorowy. Wszystko zatem, co było powiedziane o mostach jednotorowych, ma tutaj całkowite zastosowanie.

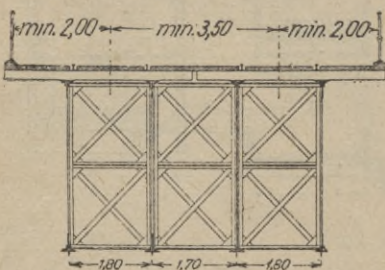


Fig. 225.

Dla mostów o niewielkich rozpiętościach przeważnie stosujemy taki ustrój, gdyż to nam daje możliwość przede wszystkim podczas remontu połowy mostu zachować ruch w zupełności na drugiej połowie. Następnie przy budowie linii kolejowej przy niewielkim ruchu daje nam możliwość budować budowę wierzchnią mostu dla jednego toru i tylko w miarę wzmożenia się ruchu dobudować przesło dla drugiego toru. Wymaga to wprawdzie nieco szerszych podpór, gdyż pomiędzy

środkowymi dźwigarami musi być pewien wolny odstęp około 0,8 m, aby można było nitować.

b) Dwa dźwigary, będąc niezależne pod względem sił i odkształceń pionowych od drugich dwóch dźwigarów, są połączone ze sobą tak, aby mogły się wspomagać pod względem parcia wiatru, aby przy zmniejszeniu odległości pomiędzy dźwigarami każdej pary zapewnić jednakowoż ich stałość przez odpowiednie połączenie jednej pary z drugą na podporach.

c) Wreszcie trzecia kombinacja przy jeździe górą powstaje, gdy wszystkie dźwigary są ze sobą połączone tężnikami pionowymi (fig. 225). Daje ona nam możność zmniejszyć odległość pomiędzy skrajnemi dźwigarami, przez co zmniejsza się szerokość podpór, lecz za to przy obciążeniu jednego toru zniekształcenie poprzeczne mostu ma miejsce.

Jeżeli most z jazdą dołem leży w krzywej, wtedy, ponieważ szyna zewnętrzna wznosi się nad szyną wewnętrzną na wielkość  $h$ , szerokość mostu musi być zwiększona nie tylko o strzałkę łuku  $f$ , odpowiadającą długości przesła, lecz nadto na poszerzenie wskutek pochylenia obrysu (por. str. 752 i 753, fig. 4 i 5).

Przy jeździe górą poszerzenie mostu położonego w krzywej, w porównaniu z mostem, leżącym na linii prostej, odpowiada tylko strzałce. Ponieważ tutaj mamy dodatkową siłę poziomą odśrodkową, przeto przy określeniu stałości mostu siła ta powinna być uwzględniona.

**Wysokość ustrojowa mostów.** Wysokość ustrojowa mostu zależy od warunków miejscowych. Mogą one określać ściśle granice poziomu stopy szyny mostu kolejowego lub poziomu górnej krawędzi nawierzchni pomostu mostu drogowego. Również mogą ograniczać obniżenie dolnej krawędzi budowy wierzchniej mostu na całej jego długości lub też częściowo. Mając takie warunki, musimy stosować ustrój taki, któryby czynił im zadość, zatem posiadał odpowiednią wysokość ustrojową. Dane przeto ilościowe, dotyczące wysokości ustrojowej mostów, mogą być rozważane pod kątem, że miejscowe warunki nie ograniczają tej wysokości i że, stosując ten lub inny ustrój budowy wierzchniej, możemy wysokość ustrojową nadawać taką, jaka okaże się najdogodniejsza dla danego systemu, a więc stosując most z jazdą górą, nadać wysokość dźwigarom na podporze i w przelocie taką, jaka wypada najdogodniejsza pod względem wagi mostu; przy jeździe dołem poprzecznicom nadać wysokość, jaka okazuje się najdogodniejsza również pod względem wagi, tj. np.  $\frac{1}{5} - \frac{1}{8}$  rozpiętości.

Tymczasem z warunków miejscowych może wynikać, że trzeba stosować belki poprzeczne lub nawet dźwigary główne ustroju belkowego  $\frac{1}{24}$  rozpiętości, by zmniejszyć do minimum wysokość ustrojową. Najmniejszą wysokość ustrojową można osiągnąć pośrodku danego przesła w mostach z jazdą górą w układach łukowych. Wysokość tę można doprowadzić do  $h = \frac{l}{60} + 0,35$  m, jeżeli rozpiętość  $l$  wyrazimy w metrach, w mostach zaś belkowych wysokość ta może być sprowadzona do  $h = \frac{l}{20-23} + 0,35$  m przy jeździe górą, i w mostach kolejowych nawet do  $h = \frac{l}{20}$  m.

W normalnych warunkach wysokość ta zależy od ustroju jezdnii, od sposobu połączenia poprzecznic z dźwigarami, wreszcie od tego lub innego systemu samych dźwigarów głównych. Nie będziemy tutaj podawać tych wielkości przy różnych ustrojach, gdyż podanie ich często tylko w błąd wprowadza tych, którzy korzystają z takich wzorów, a szczególnie, jeżeli warunki miejscowe są w niezgodzie ze wzorami. Jak rozważymy dalej ustrój poszczególnych części mostów, z których składa się całość budowy wierzchniej, wtedy każdy może łatwo znaleźć, w jakich granicach może się znajdować wysokość ustrojowa jednego i tego samego systemu mostu. Ogólnie tutaj musimy tylko zaznaczyć, że, stosując belki niewielkiej wysokości, musimy takowe obliczać nie tylko ze względu na wytrzymałość, lecz również i ze względu na sztywność. O ile bowiem stosujemy belki nor-

malnej wysokości w granicach nie mniej niż  $\frac{1}{12}$  rozpiętości w mostach kolejowych i do  $\frac{1}{15}$  rozpiętości w mostach drogowych, to sztywność belki jest dostateczna. Poza temi granicami przy dopuszczalnych naprężeniach zwykłych sztywność może się okazać niedostateczna. Ugięcie belki może być zbyt duże i w tych wypadkach wypadnie znacznie obniżyć dopuszczalne naprężenia, by ugięcie nie przekraczało wymaganej wielkości.

W normalnych warunkach możemy przyjmować następujące wysokości ustrojowe mostów w zależności od ich ustroju:

1. Mostownice leżą bezpośrednio na dźwigarach (fig. 226 a):

$$h = \frac{l}{7 \infty 10} + 0,30 \text{ m.}$$

2. Na dźwigarach głównych postawione są belki poprzeczne, do belek poprzecznych przynitowane są belki podłużne i na tych ostatnich ułożone są mostownice (fig. 226 b):

$$h = \frac{l}{7 \infty 10} + \frac{b}{6 \infty 8} + 0,30 \text{ m.}$$

3. W moście z jazdą dołem belki podłużne przynitowane są do belek poprzecznych tak, że pasy górne poprzecznic i podłużnic leżą w jednym poziomie. Na podłużnicach ułożone są mostownice (fig. 226 c):

$$h = \frac{b}{5 \infty 15} + 0,30 \text{ m.}$$

4. Most z jazdą dołem; na podłożu z blach cylindrycznych lub nieckowych jest podsypka i na niej podkłady (fig. 227 a):

$$h = \frac{b}{5 \infty 10} + 0,35 \text{ m.}$$

5. W moście z jazdą dołem dźwigary główne połączone są blachą falistą o fali prostokątnej nitowanej i szyny ułożone na podkładach drewnianych (fig. 227 b):

Wysokość ustrojowa mostów jednotorowych:  $h = 270-450 \text{ mm}$ , mostów dwutorowych:  $h = 500-530 \text{ mm}$ .

6. Przy małej wysokości ustrojowej, gdy dźwigary nie mogą się wznosić ponad pomostem, wysokość belek głównych bliźniaczych może być doprowadzona do  $\frac{1}{20}$  rozpiętości. Szyny ułożone są wtedy na poprzecznicach, łączących belki między sobą (fig. 227 c) i całkowita wysokość ustrojowa  $h = \frac{l}{20}$ , lecz nie mniej niż  $0,35 \text{ m}$ .

W mostach drogowych, w których obciążenie ruchome jest zwykle znacznie mniejsze, o ile most nie jest zbyt szeroki przy jeździe dołem, wysokość ustrojowa może być mniejsza, niż w mostach kolejowych. Przy jeździe dołem, gdy rozstaw dźwigarów głównych jest znaczny, belki poprzeczne mogą wypaść dość wysokie i przez to wypada większa wysokość ustrojowa.

W mostach belkowych z jazdą górą wysokość ustrojowa przy grubości nawierzchni  $d$  może być przyjęta:

$$h = \frac{l}{8 \infty 12} + d, \text{ a nawet } h = \frac{l}{20} + d.$$

W mostach belkowych z jazdą dołem przy odległości między dźwigarami  $b$ :

$$h = \frac{b}{8 \sim 15} + d.$$

W mostach łukowych z jazdą górá wysokość ustrojowa pośrodku (w kluczu):

$$h = \frac{l}{60} + d$$

na podporze:  $h = \frac{l}{60} + \frac{l}{8 \sim 17} + d - \frac{li}{2}$ ,

jeżeli przez  $i$  oznaczymy średni spadek podłużny nawierzchni mostu.

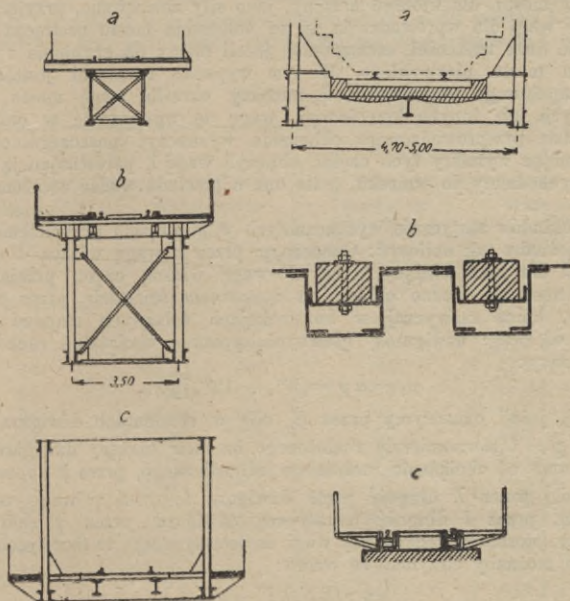


Fig. 226 a, b, c.

Fig. 227 a, b, c.

**Sily zewnętrzne** mogą być pionowe lub poziome. Do pierwszych należą: iwaga (ciężar) własna mostu czyli obciążenie stałe, oraz obciążenie ruchome pod postacią pociągu w moście kolejowym lub pod postacią ciężkich wozów, ciężarowych samochodów, wałków szosowych, tłumy ludzi itp. w mostach drogowych.

**Ciężar własny** mostu stanowi obciążenie statyczne i jest zazwyczaj niezmienny, o ile nie uwzględniać w mostach, np. drogowych, wsiąkliwości wody w nawierzchnię pomostu, ścieralności pomostu lub w nawierzchni drewnianej większej lub mniejszej zawartości wilgoci w zależności od stanu pogody. Zmiana wagi od powyższych przyczyn jest zazwyczaj nieznaczna i dlatego przyjmujemy ją jako stałą, aczkolwiek w pewnych wypadkach przyjmujemy tę wagę większą lub mniejszą w zależności, co jest niedogodniejszym dla danego ustroju, np. gdy chodzi o stateczność dźwigarów wspornikowych.

Wagę własną mostu przyjmujemy zwykle jako równomiernie rozłożoną na całość rozpiętości mostu, gdyż to nam upraszcza obliczenie, jednak

w mostach o dużych rozpiętościach, w mostach np. wspornikowych, wiszących lub wysokich łukowych jest ona rozłożona nierównomiernie i dlatego też lepiej ją przyjmować rozłożoną na węzły. W ostatnim wypadku przyjmujemy, że na węzeł przypada połowa wagi wszystkich prętów dźwigara, schodzących się w danym węźle. Waga części przejazdowej przypada na te węzły, w których jest położona, zatem przy jeździe górą na węzły górne i przy jeździe dołem na węzły dolne.

Waga własna mostu a priori właściwie nie jest wiadoma, bo musimy wpieryw most obliczyć, zaprojektować i po wykonaniu projektu dopiero możemy obliczyć jego wagę, mając dokładne wymiary wszystkich jego części. Aby zaś mieć wymiary wszystkich części dokładne, musimy przeprowadzić obliczenie mostu, dla którego musimy, jako siły zewnętrzne, przyjąć wagę. Przyjęcie wagi dla wprowadzenia jej do obliczenia mostu nastęrcza częstokroć dość duże trudności, szczególnie, jeżeli mamy do czynienia z projektowaniem mostu niezwykłego. W tym wypadku zmuszeni jesteśmy iść drogą stopniowego przybliżenia, tj. możemy określić wagę mostu na zasadzie tych lub innych kombinacji, wagę tę wprowadzić w obliczenie, na zasadzie przeprowadzonego obliczenia wyznaczyć poszczególne części mostu, mając wymiary tych części, obliczyć wagę i, porównując ją z przyjętą, przechodzimy do wniosku, o ile ona odpowiada wadze założonej pierwotnie.

Dla układów statycznie wyznaczalnych w pierwszym przybliżeniu wagę mostu możnaby tak obliczyć: Oznaczając przez  $p$  wagę własną dźwigarów głównych na metr bieżący, przez  $F$  wagę własną części przejazdowej, którą zawsze nie trudno obliczyć z dostateczną ścisłością, przez  $p_1$  wagę tężników, która zazwyczaj w konstrukcjach żelaznych stanowi pewien procent od wagi dźwigarów głównych, przez  $q$  obciążenie ruchome na metr bieżący:

$$p_1 = \alpha p = [9\% - 12\%] p.$$

Dalej, jeżeli oznaczymy przez  $S_p$  siłę w elementach dźwigara od obciążenia  $p = 1$  równomiernie rozłożonego na metr bieżący dźwigara, przez  $S_q$  tak samo od obciążenia ruchomego jednostkowego, przez  $k$  dopuszczalne naprężenie, przez  $\lambda$  długość pręta dźwigara i przez  $\gamma$  wagę właściwą materiału, przez  $l$  długość teoretyczną dźwigara, przez  $\varphi$  współczynnik ustrojowy (stosunek rzeczywistej wagi do teoretycznej), to teoretyczną wagę dźwigara możnaby otrzymać ze wzoru:

$$p = \frac{\varphi \gamma (\sum S_p \lambda F + q \sum S_q \lambda)}{l k - \varphi \gamma (1 + \alpha) \sum S_p \lambda}$$

W tym wzorze znak sumy rozpościera się na wszystkie pręty dźwigara. Współczynnik ustrojowy  $\varphi$  jest różny dla różnych mostów i zależy często nietylko od rozpiętości mostu i systemu, lecz nadto od indywidualności projektującego. Współczynnik ten waha się w granicach od 2,45 do 1,65, przytem dla mostów małych rozpiętości jest zwykle większy, niż dla mostów dużych rozpiętości. Kilka współczynników tych podanych jest w niżej umieszczonej tabeli:

Rozpiętość $l$	33,0 m	75 m	110,0 m	127,4 m	158,4 m
Współczynnik $\varphi$	2,50	2,50	1,75	1,71	1,67

Dla rozpiętości pośrednich można brać  $\varphi$  również pośrednie.

Wagę mostu możemy przyjąć na zasadzie projektów już wykonanych, jeżeli projektujemy most mniej więcej według jednakowych warunków

technicznych. Z całego szeregu mostów wykonanych, przytem mostów mniej więcej jednego systemu i dla jednakowych celów, możemy się posilkować wzorami empirycznymi o prostym kształcie, z których można określać wagę mostów projektowanych. Tak dla mostów belkowych kolejowych jednotorowych mamy następujący wzór:

$$p = Cl + F,$$

gdzie  $p$  jest wagą mostu na metr bieżący,  $l$  teoretyczną rozpiętością mostu,  $F$  waga pomostu na metr bieżący i  $C$  pewnym współczynnikiem. Mając wielkości  $C$  i  $F$  dla różnych rozpiętości, dla innych rozpiętości ilość  $C$  i  $p$ , można otrzymać według prostolinijowej interpolacji i tym sposobem otrzymać dość dokładną wagę mostu i dostateczną przynajmniej dla pierwszego obliczenia. W tabl. 1 są wskazane współczynniki  $c$  i  $p$  dla mostów kolejowych jednotorowych przy parowozach 100 t, tendrach 56 t i wagonach 48 t.

Tablica 1. dla Normy B.

Jazda górą		Jazda dołem	
Rozpiętość teoretyczna $l$ $m$	Waga mostów $kg/m$ $p = Cl + F$	Rozpiętość teoretyczna $l$ $m$	Waga mostu w $kg/m$ $p = Cl + F$
5	77,7 l + 600	20	61,0 l + 1300
10	72,5 l + 600	25	55,5 l + 1400
15	71,2 l + 600	30	51,5 l + 1400
20	69,2 l + 600	35	48,2 l + 1400
25	67,5 l + 600	40	45,0 l + 1400
30	63,0 l + 600	45	43,0 l + 1400
35	59,8 l + 600	50	42,4 l + 1400
40	58,4 l + 600	55	41,7 l + 1400
45	58,6 l + 1250	60	40,0 l + 1400
50	55,3 l + 1250	90	40,5 l + 1400
55	52,0 l + 1250	100	41,0 l + 1750
60	49,5 l + 1250	120	41,0 l + 1800
65	47,0 l + 1250	130	42,0 l + 1800
		140	43,0 l + 1800
		152	44,5 l + 1800
		158	47,0 l + 2200

Dla obciążeń innych wagę własną dźwigarów głównych można w przybliżeniu obliczyć, wychodząc z założenia, że całkowite wagi dźwigarów mostów mają się, jak całkowite obciążenia. Przeto, mając wagę mostu  $p = Cl + F$  przy obciążeniu  $q$ , możemy znaleźć wagę  $p_1$  mostu tej samej rozpiętości przy obciążeniu  $q_1$  z równania:

$$\frac{Cl}{C_1 l} = \frac{Cl + F + q}{C_1 l + F_1 + q_1}, \quad \text{skąd} \quad C_1 = \frac{C[F_1 + q_1]}{F + q}.$$

Waga części przyjazdowej  $F_1$  oczywiście musi być obliczona dla nowego obciążenia, co zazwyczaj nie sprawia wielkiej trudności, o ile konstrukcja jest wyjaśniona przynajmniej w głównych zarysach, a co powinno być zrobione przed przystąpieniem do obliczania poszczególnych części mostu.

Dla dźwigarów z pasami prostymi równoległymi można zastosować następujący wzór do obliczenia wagi własnej dźwigarów:

$$p = \frac{2F[a^2(2m^2 + 3m - 2) + 6mh^2] + q[a^2(4m^2 + 7m - 6) + 2h^2(7m - 2)]}{\frac{24kh}{\varphi\gamma} - 2 \cdot 2[a^2(2m^2 + 3m - 2) + 6mh^2]} t/m \text{ b.}$$

W tym wzorze  $F$  oznacza wagę części przejazdowej w  $t/m \text{ b.}$  mostu,  $a$  długość przedziału przesła w metrach,  $m$  ilość przedziałów, licząc węzły główne,  $k$  dopuszczalne naprężenie w  $t/m^2$ ,  $h$  wysokość dźwigara,  $q$  obciążenie ruchome w  $t/m \text{ b.}$  mostu,  $\gamma$  wagę właściwa materiału, z którego most się buduje i  $\varphi$  współczynnik ustrojowy, który jest różny dla różnych rozpiętości i może być przyjęty średnio 1,75.

Dla wsporników o  $n$  przedziałach można korzystać ze wzoru:

$$p = \frac{(F + q)a[a^2(2n^2 + 1) + 3n(a^2 + 2h^2)] + 6Q[a^2(n + 1) + 2h^2]}{\frac{6ahk}{\varphi \cdot \gamma} - 1,1a[a^2(2n^2 + 1) + 3(a^2 + 2h^2)]} t/m \text{ b.}$$

We wzorze tym  $Q$  oznacza całkowite ciśnienie na wspornik od belki zawieszanej,  $n$  ilość przedziałów wspornika, inne zaś wielkości, jak wyżej.

Jeżeli oznaczymy przez  $p_1$  wagę tężników i pozostawimy oznaczenia innych wartości, jak we wzorze powyższym, to uzyskamy następujące wzory, dane przez prof. Nikolai'ego i otrzymane na zasadzie teoretycznej objętości dźwigarów:

1. Dla dźwigarów z pasami prostymi równoległymi:

$$p = \frac{13,74(F + p_1)\left(\frac{l^2}{6h} + \frac{3}{4}l + \frac{h}{4}\right) + q\left(\frac{l^2}{6h} + \frac{21}{24}l + \frac{7h}{24}\right)}{k - 13,74\left(\frac{l^2}{6h} + \frac{3}{4}l + \frac{h}{4}\right)} t/m \text{ b.}$$

2. Dla dźwigarów o pasie krzywym (parabolicznych, hyperbolicznych, wielobocznych):

$$p = \frac{13,74(F + p_1)\left(2,126\frac{l^2}{8h} + \frac{2}{3}h - \frac{4}{9}\frac{h^2}{l}\right) + \frac{9h}{18}\left(3\frac{l}{h} - 4\right)}{k - 13,74\left(2,126\frac{l^2}{8h} + \frac{2}{3}h - \frac{4}{9}\frac{h^2}{l}\right)} t/m \text{ b.}$$

Według Bertschingera waga dźwigarów głównych w mostach drogowych o rozpiętości  $L$  w  $m$  wynosi:

I. Mosty kratowe z pomostem z dyli:  $g = 25 + 2L + 0,008L^2 \text{ kg/m}^2$ .

II. Mosty z pomostem ciężkim.

a) Dźwigary o ścianie pełnej (blachownicy), mosty bez chodników:

$$g = 60 + 5L \text{ kg/m}^2.$$

b) Takież dźwigary, mosty z chodnikami:

$$g = 20 + 5L \text{ kg/m}^2.$$

c) Dźwigary kratowe, most z chodnikami wewnętrznymi.

1. Pasy równoległe, rozpiętość od 15 do 40  $m$ :  $g = 50 + 3,7L \text{ kg/m}^2$

2. Pasy krzywe, rozpiętość od 15 do 40  $m$ :  $g = 30 + 3,7L \text{ kg/m}^2$

3. Pasy krzywe, rozpiętość od 40 do 60  $m$ :  $g = 60 + 3,7L \text{ kg/m}^2$

d) Mosty kratowe z chodnikami zewnętrznymi.

1. Pasy równoległe, mosty otwarte, rozpiętość od 15 do 40  $m$ :

$$g = 40 + 2,8L \text{ kg/m}^2.$$



2. Pasy krzywe, mosty otwarte, rozpiętość od 15 do 40 m:

$$g = 20 + 2,8 L \text{ kg/m}^2.$$

3. Pasy krzywe z tężnikami górnymi, rozpiętość od 40 do 200 m:

$$g = 50 + 2 L + 0,01 L^2 \text{ kg/m}^2.$$

4. Mosty łukowe kratowe ze ściągami rozpiętości od 30 do 200 m:

$$g = 100 + 2 L + 0,01 L^2 \text{ kg/m}^2.$$

5. Mosty łukowe ze strzałką  $f$ :

$$g = \frac{L}{f} [15 + 0,002 L^2] \text{ kg/m}^2.$$

**Jakość żelaza stosowanego w mostach.** Do mostów używane jest prawie wyłącznie żelazo zlewne stosunkowo miękkie. Żelazo to powinno posiadać gładką powierzchnię, bez zader, bąbli, pęcherzy, rys w krawędziach i wogóle miejsc niewypełnionych. Wytrzymałość krańcowa tego żelaza na rozciąganie winna być od  $R = 37$  do  $45 \text{ kg/mm}^2$  przy wydłużalności nie mniej niż  $i = 20\%$  dla żelaza o grubości 8 i więcej mm. Przytem winna być zachowana następująca zależność  $R$  i  $i$ :

$$R + 2i \geq 85.$$

Dla żelaza o grubości 7 mm wydłużenie winno wynosić nie mniej, niż 18%

"	"	"	"	6 mm	"	"	"	"	"	"	17%
"	"	"	"	5 mm	"	"	"	"	"	"	16%
"	"	"	"	4 mm	"	"	"	"	"	"	15%

Dla nitów wytrzymałość żelaza zlewego winna być  $R = 34 - 40 \text{ kg/mm}^2$  przy wydłużalności nie mniejszej niż 25%, tak aby  $R + 2i \geq 90$ .

Stal, stosowana do łożysk mostowych, winna być drobnoziarnista bez pęcherzy i płon z powierzchnią zupełnie gładką po otoczeniu. Wytrzymałość stali kutej powinna być nie mniejsza, niż  $50 \text{ kg/mm}^2$  i wydłużalność nie mniejsza, niż 15%, zaś dla stali lanej w odlewach stalowych  $R \geq 45 \text{ kg/mm}^2$  i  $i \geq 8\%$ .

Żelazo lane (żeliwo) powinno być z kopulaka (żeliwiaka) miękkie o złomie drobnoziarnistym bez wszelkich pęcherzy, dziurek i innych wad, zmniejszających jego wytrzymałość. Krawędź odlewu pod uderzeniem młotka powinna się stepić, lecz nie wykruszyć. Wytrzymałość na rozerwanie  $R = 12 \text{ kg/mm}^2$ .

Waga właściwa żelaza zlewego i stali powinna być 7,85, a żeliwa 7,2. Te wielkości przyjmuje się za podstawę do obliczeń wagi mostów.

Co się tyczy innych wysokich gatunków stali, które mogą być stosowane w specjalnych wypadkach, to własności tych gatunków stali jako to większa wytrzymałość i ciągliwość zazwyczaj określa się specjalnie dla określonych budowli lub ich części.

**Normy naprężeń dopuszczalnych Ministerstwa Kolei** (rozporządzenie z dnia 10 marca 1923 r.).

1. Dla żelaza zlewego o wytrzymałości nie niżej  $37 \text{ kg/mm}^2$ , przy ciągliwości nie mniejszej niż 20%, przy granicy proporcjonalności nie niżej niż  $20 \text{ kg/mm}^2$  i granicy płynności nie niżej niż  $24 \text{ kg/mm}^2$ .

Zasadnicze dopuszczalne naprężenie na rozciąganie i proste równomierne ściskanie (bez wyboczenia), oraz na zginanie przy zwykłym statycznym sposobie obliczenia, należy wyznaczać indywidualnie dla każdego pręta albo elementu według następujących wzorów, odpowiadającym normalnym obciążeniom:

A. Dla ustrojów, w których zmiana temperatury nie wywołuje naprężeń:

a) od ciężaru własnego i obciążenia ruchomego:

$$k'_r = \frac{1250}{1 + \mu \left(1 - \frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right)} \text{ kg/cm}^2,$$

lecz nie wyżej, niż 1200 kg/cm<sup>2</sup>;

b) od ciężaru własnego, obciążenia ruchomego, parcia wiatru, względnie hamowania i bocznych wahań.

$$k''_r = \frac{1450}{1 + \mu \left(1 - \frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right)} \text{ kg/cm}^2,$$

lecz nie wyżej, niż 1400 kg/cm<sup>2</sup>.

W tych wzorach  $S_{\min}$  i  $S_{\max}$  są siłami w danym przęciu: najmniejszą i największą według ich absolutnych wielkości, przytem znak sił powinien być uwzględniany, zaś współczynnik dynamiczny  $\mu$  otrzymuje się ze wzoru:

$$\mu = 0,625 \frac{1}{1 + 0,02 \lambda},$$

gdzie  $\lambda$  w metrach jest długością obciążenia dźwigara, odpowiadającą max  $S$ . Przy obliczaniu belek poprzecznych i wieszarów przyjmuje się  $\lambda$  równe dwóm przedziałom dźwigara. Przy obliczaniu mostownic przyjmuje się  $\lambda = 0$ . W wiatrownicach dla wszystkich prętów kraty jednego przęsła przyjmuje się  $\lambda = \frac{1}{2} l$ , gdzie  $l$  — rozpiętość dźwigara. Dla kraty wiązań poziomych między podłużnicami  $\lambda = \frac{1}{2} l$ , gdzie  $l$  jest długością podłużnicy. Dla prętów wiatrownic i wiązań między podłużnicami przyjmuje się  $S_{\min} = 0$ . Dla prętów ściskano-rozciąganych  $\mu$  bierze się odpowiednio do  $\lambda$ , lecz nie mniej, niż 0,25.

Dla blachownic wyżej wskazane wzory odpowiednio będą dla momentów gnących:

$$k_g = \frac{1250}{1 + \mu \left(1 - \frac{M_{\min}}{M_{\max}}\right)} \text{ kg/cm}^2.$$

Dopuszczalne naprężenie na ścinanie ścianek blachownic będzie:

$$k_t = \frac{0,75 \cdot 1250}{1 + \mu \left(1 - \frac{V_{\min}}{V_{\max}}\right)} \text{ kg/cm}^2,$$

gdzie  $V$  jest siłą poprzeczną.

B. Dla ustrojów, w których zmiana temperatury, jednakowa dla całego ustroju, wywołuje dodatkowe naprężenie, należy stosować następujące wzory:

a) od ciężaru własnego i ruchomego:

$$k_r = \frac{1300 - k^t}{1 + \mu \left(1 - \frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right)} \text{ kg/cm}^2;$$

b) od ciężaru własnego, obciążenia ruchomego i wiatru względnie hamowania i wahań bocznych

$$k_{rw} = \frac{1500 - k^t}{1 + \mu \left( 1 - \frac{S_{w \min}}{S_{w \max}} \right)} \text{ kg/cm}^2.$$

W tych wzorach  $k^t$  oznacza naprężenie od zmiany temperatury w danym przecię. Zmiana temperatury winna być przyjmowana od  $-25^\circ\text{C}$  do  $+45^\circ\text{C}$  i współczynnik linowego rozszerzenia żelaza zlewnego przyjmuje się 0,0000125. Różnica temperatury w jednym i tym samym czasie dla różnych części danego zespołu przyjmuje się  $\pm 15^\circ\text{C}$ .

Przy stosowaniu mostownic żelaznych i ułożeniu szyn bezpośrednio na mostownicach bez elastycznych podkładek dopuszczalne naprężenie winno być zmniejszone o  $50 \text{ kg/cm}^2$ . Przy pomocy balastowym dopuszczalne naprężenie w żebrach części przejazdowej można zwiększyć o  $50 \text{ kg/cm}^2$ .

Dopuszczalne naprężenie na ścinanie w nitach przyjmuje się  $0,8 k_r$ , gdzie  $k_r$  jest zasadniczym dopuszczalnym naprężeniem na rozciąganie w danym przecię.

Dopuszczalne naprężenie na zgniatanie ścianki  $k_c = 2 k_r$ , lecz nie wyżej niż  $2200 \text{ kg/cm}^2$ .

Przy połączeniu śrubami naprężenie to może być przyjęte  $k_c = 1,6 k_r$ , lecz nie większe niż  $1800 \text{ kg/cm}^2$ .

W prętach ściskanych dopuszczalne naprężenie zmniejsza się według wzorów Tetmajera i Jasińskiego tak, że  $k_c = \varphi k_r$ , gdzie  $\varphi$  jest współczynnikiem zależnym od stosunku  $l:r$ , tj. długości danego pręta do najmniejszego promienia bezwładności jego przekroju. (Spółczynniki  $\varphi$  por. tablica 3, str. 875.)

Pręty ściskane powinny być oprócz tego sprawdzone, czy współczynnik pewności  $m$  na wyboczenie jest dostateczny; powinien on wynosić:

$$\text{przy } \frac{l}{r} < 66: \quad m = \frac{k_w}{k_{rz}} = 2,65,$$

$$\text{przy } \frac{l}{r} \geq 110: \quad m = \frac{k_w}{k_{rz}} = 4,$$

przytem dla  $\frac{l}{r}$  w granicach między 66 i 110 współczynnik ten określa się według prostolinjowej interpolacji między 2,65 i 4.

Przy uwzględnianiu działania wiatru współczynniki te mogą być:

$$\text{przy } \frac{l}{r} < 66: \quad m = \frac{k_w}{k_{rz}} = 2,3,$$

$$\text{przy } \frac{l}{r} \geq 110: \quad m = \frac{k_w}{k_{rz}} = 3,5;$$

przy pośrednich znaczeniach  $\frac{l}{r}$  bierze się  $m$  według prostolinjowej interpolacji między 2,3 i 3,5.

W wyżej wskazanych wzorach  $k_w$  (por. tablica 2, str. 874) jest krytycznym naprężeniem na wyboczenie, zależne od danej wysmukłości pręta i powinno się przyjmować nie większe, niż  $2400 \text{ kg/cm}^2$ , o ileby się otrzymało większe według niżej podanych wzorów:

Tablica 2.

$$k_w^0 = 3387 - 14,83 \frac{l}{r}; \quad k_w^0 = 21220000 \left( \frac{r}{l} \right)^2 \text{ w } \text{kg/cm}^2.$$

$\frac{l}{r}$	$k_w$	$\Delta$	$\frac{l}{r}$	$k_w$	$\Delta$	$\frac{l}{r}$	$k_w$	$\Delta$	$\frac{l}{r}$	$k_w$	$\Delta$	$\frac{l}{r}$	$k_w$	$\Delta$
10	3230	15	40	2794	15	70	2349	15	100	1904	15	130	1256	19
11	3224	15	41	2779	15	71	2334	15	101	1889	15	131	1237	19
12	3209	15	42	2764	15	72	2319	15	102	1874	14	132	1218	18
13	3194	15	43	2749	15	73	2304	14	103	1860	15	133	1200	18
14	3179	14	44	2734	14	74	2290	15	104	1845	15	134	1182	18
15	3165	15	45	2720	15	75	2275	15	105	1830	15	135	1164	17
16	3150	15	46	2705	15	76	2260	15	106	1815	15	136	1147	16
17	3135	15	47	2690	15	77	2245	15	107	1800	15	137	1131	17
18	3120	15	48	2675	15	78	2230	15	108	1785	14	138	1114	16
19	3105	15	49	2660	14	79	2215	14	109	1771	15	139	1098	15
20	3090	14	50	2646	15	80	2201	15	110	1756	34	140	1083	16
21	3076	15	51	2631	15	81	2186	15	111	1722	32	141	1067	15
22	3061	15	52	2616	15	82	2171	15	112	1692	31	142	1052	14
23	3046	15	53	2601	15	83	2156	15	113	1661	28	143	1038	15
24	3031	15	54	2586	15	84	2141	15	114	1633	28	144	1023	14
25	3016	15	55	2571	14	85	2126	14	115	1605	28	145	1009	14
26	3001	14	56	2557	15	86	2112	15	116	1577	27	146	995	13
27	2987	15	57	2542	15	87	2097	15	117	1550	26	147	982	13
28	2972	15	58	2527	15	88	2082	15	118	1524	26	148	969	13
29	2957	15	59	2512	15	89	2067	15	119	1498	24	149	956	13
30	2942	15	60	2497	15	90	2052	15	120	1474	25	150	943	12
31	2927	15	61	2482	14	91	2037	14	121	1449	23	151	931	13
32	2912	14	62	2468	15	92	2023	15	122	1426	23	152	918	12
33	2898	15	63	2453	15	93	2008	15	123	1403	23	153	906	12
34	2883	15	64	2438	15	94	1993	15	124	1380	22	154	894	11
35	2868	15	65	2423	15	95	1978	15	125	1358	21	155	883	11
36	2853	15	66	2408	15	96	1963	15	126	1337	21	156	872	11
37	2838	15	67	2393	14	97	1948	14	127	1316	21	157	861	11
38	2823	14	68	2379	15	98	1934	15	128	1295	20	158	850	11
39	2809	15	69	2364	15	99	1919	15	129	1275	19	159	839	10
40	2794		70	2349		100	1889		130	1256		160	829	

Tablica 3.

Spółczynnik  $\varphi$  na wyboczenie.

$\frac{l}{r}$	$\varphi$	$\frac{l}{r}$	$\varphi$	$\frac{l}{r}$	$\varphi$	$\frac{l}{r}$	$\varphi$	$\frac{l}{r}$	$\varphi$
10	0,956	40	0,825	70	0,694	100	0,562	130	0,371
11	0,952	41	0,820	71	0,689	101	0,558	131	0,365
12	0,947	42	0,816	72	0,685	102	0,553	132	0,360
13	0,943	43	0,812	73	0,680	103	0,549	133	0,354
14	0,939	44	0,807	74	0,676	104	0,545	134	0,349
15	0,934	45	0,803	75	0,672	105	0,540	135	0,344
16	0,930	46	0,799	76	0,667	106	0,536	136	0,339
17	0,926	47	0,794	77	0,663	107	0,531	137	0,334
18	0,921	48	0,790	78	0,658	108	0,527	138	0,329
19	0,917	49	0,785	79	0,654	109	0,523	139	0,324
20	0,912	50	0,781	80	0,650	110	0,518	140	0,320
21	0,908	51	0,777	81	0,645	111	0,508	141	0,315
22	0,904	52	0,772	82	0,641	112	0,500	142	0,311
23	0,899	53	0,768	83	0,637	113	0,490	143	0,306
24	0,895	54	0,764	84	0,632	114	0,482	144	0,302
25	0,890	55	0,759	85	0,628	115	0,474	145	0,298
26	0,886	56	0,755	86	0,624	116	0,466	146	0,294
27	0,882	57	0,750	87	0,619	117	0,458	147	0,290
28	0,877	58	0,746	88	0,615	118	0,450	148	0,286
29	0,873	59	0,742	89	0,610	119	0,442	149	0,282
30	0,869	60	0,737	90	0,606	120	0,435	150	0,278
31	0,864	61	0,733	91	0,601	121	0,428	151	0,275
32	0,860	62	0,729	92	0,597	122	0,421	152	0,271
33	0,856	63	0,724	93	0,593	123	0,414	153	0,267
34	0,851	64	0,720	94	0,588	124	0,407	154	0,264
35	0,847	65	0,715	95	0,584	125	0,401	155	0,261
36	0,842	66	0,711	96	0,580	126	0,395	156	0,257
37	0,838	67	0,707	97	0,575	127	0,389	157	0,254
38	0,833	68	0,702	98	0,571	128	0,382	158	0,251
39	0,829	69	0,698	99	0,567	129	0,376	159	0,248
40	0,825	70	0,694	100	0,562	130	0,371	160	0,245

$$\text{dla } \frac{l}{r} > 10 \text{ i } \frac{l}{r} < 110:$$

$$k_w = \left[ 3387 - 14,83 \frac{l}{r} \right] \text{ kg/cm}^2, \quad \varphi = \frac{3387 - 14,83 \frac{l}{r}}{3387};$$

$$\text{dla } \frac{l}{r} \geq 110,1: \quad k_w = \pi^2 E \left( \frac{r}{l} \right)^2 = 21220000 \left( \frac{r}{l} \right)^2 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Dopuszczalne naprężenia dla żeliwa i stali w łożyskach podporowych podaje tablica 4.

Tablica 4.

Gatunek materiału żelaznego	Dopuszczalne naprężenia w $\text{kg/cm}^2$			
	bez uwzględnienia dodatkowego sił wiatru, hamowania pociągu i tarcia		z uwzględnieniem dodatkowych sił wiatru, hamowania pociągu i tarcia	
	przy zginaniu	na ściskanie	przy zginaniu	na ściskanie
Żeliwo	rozciąganie . 300 ściskanie . . . 750	850	rozciąganie . 330 ściskanie . . . 850	950
Stal lana	rozciąganie . 1100 ściskanie . . 1100		rozciąganie . 1200 ściskanie . . 1200	
Stal kuta	rozciąganie . 1300 ściskanie . . 1300	1600	rozciąganie . 1400 ściskanie . . 1400	1700

W mostowniach drewnianych należy stosować następujące dopuszczalne naprężenia:

a) dla drzewa miękkiego iglastego (sosna, jodła) na rozciąganie i ściskanie wzdłuż włókien przy zginaniu do  $90 \text{ kg/cm}^2$ , na ściskanie prostopadle do włókien do  $15 \text{ kg/cm}^2$ ;

b) dla drzewa twardego (dąb) odpowiednie dopuszczalne naprężenie przyjmuje się  $110 \text{ kg/cm}^2$  i  $30 \text{ kg/cm}^2$ .

**Normy dopuszczalnych naprężeń Ministerstwa Robót Publicznych.** Według ostatnich przepisów M. R. P. przy projektowaniu mostów żelaznych drogowych należy przyjmować następujące dopuszczalne naprężenia:

1. Przy uwzględnieniu tylko sił pionowych jak tablica 5.

Tablica 5.

Rodzaj naprężenia	Naprężenia dopuszczalne w $\text{kg/cm}^2$
1. Ściskanie lub rozciąganie w części przejazdowej . . . . .	875 <i>850</i>
2. Ściskanie lub rozciąganie w dźwigarach głównych . . . . .	$k = 900 + 3l$ , lecz nie więcej niż 1150
3. Ścinanie blach i prętów . . . . .	0,75 k, " " " " 750
4. Ścinanie nitów . . . . .	0,8 k, " " " " 900
5. Ścinanie śrub . . . . .	0,7 k, " " " " 700
6. Ciśnienie na ściankę otworu nitów . . . . .	2 k, " " " " 2000
7. Ciśnienie na ściankę otworu śrub . . . . .	1,5 k, " " " " 1500

Za  $l$  należy przyjmować dla dźwigarów wolnopodpartych i międzypodporowych części dźwigarów wspornikowych rozpiętość tych przęseł w metrach, dla wsporników zaś podwójną długość wspornika.

2. Przy uwzględnieniu nie tylko sił pionowych, lecz także sił poziomych od parcia wiatru i od zmiany temperatury dopuszczalne naprężenia należy przyjmować wedle tablicy 6.

Tablica 6.

Rodzaj naprężenia	Naprężenie dopuszczalne w $kg/cm^2$
1. Ściskanie lub rozciąganie w dźwigarach głównych . . . . .	$k = 1000 + 4l$ , lecz nie więcej niż 1350
2. Ścinanie blach i prętów . . . . .	0,75 $k$ , " " " " 800
3. Ścinanie nitów . . . . .	0,8 $k$ , " " " " 1000
4. Ścinanie śrub . . . . .	0,7 $k$ , " " " " 750
5. Ciśnienie na ściankę otworu nitów . . . . .	2 $k$ , " " " " 2200
6. Ciśnienie na ściankę otworu śrub	1,5 $k$ , " " " " 1700

3. Żelazo spawane, którego można używać tylko wyjątkowo, otrzymać może naprężenia o 10% niższe od dopuszczalnych dla żelaza zlewne.

4. Odlewy żeliwne (żelazo lane) w częściach podrzędnych konstrukcji przy uwzględnieniu działania sił tylko pionowych mogą otrzymać naprężenia najwyżej: a) na ściskanie 850  $kg/cm^2$ , b) na ściskanie przy zginaniu 750  $kg/cm^2$ , c) na rozciąganie przy zginaniu 300  $kg/cm^2$ .

5. Przy uwzględnieniu oprócz sił pionowych także sił poziomych i wpływu zmiany temperatury można podnieść naprężenia: a) na ściskanie do 950  $kg/cm^2$ , b) na ściskanie przy zginaniu do 850  $kg/cm^2$ , c) na rozciąganie przy zginaniu do 350  $kg/cm^2$ .

6. Dla stali lanej w odlewach w łożyskach dopuszczalne naprężenia przy uwzględnieniu sił pionowych przyjmują się: na ściskanie 1400  $kg/cm^2$ , na zginanie 1150  $kg/cm^2$ . Przy uwzględnieniu parcia wiatru: na ściskanie 1500  $kg/cm^2$ , na zginanie 1250  $kg/cm^2$ .

7. Dla stali kutej w łożyskach dopuszczalne naprężenia wynoszą przy uwzględnieniu tylko sił pionowych: na ściskanie 1600  $kg/cm^2$ , na zginanie 1300  $kg/cm^2$ . Przy uwzględnieniu działania wiatru: na ściskanie 1700  $kg/cm^2$ , na zginanie 1400  $kg/cm^2$ .

8. Przy dokładnem obliczeniu wałków można dopuścić dla stali kutej na ściskanie 5000  $kg/cm^2$ , dla stali zaś zlewnej 4000  $kg/cm^2$ . Pręty ściskane należy obliczać na wyboczenie podług wzorów Tetmajera i Jasińskiego.

Spółczynnik rozszerzalności dla żelaza i stali należy przyjmować  $\alpha = 0,000012$  na jeden stopień Celsjusza, zaś zmianę temperatury w granicach  $-35^\circ C$  do  $+45^\circ C$ .


## II. Nitowanie.

**Ogólne uwagi.** Nitowanie w mostach stosujemy, aby z oddzielnych elementów wytworzyć zespół, który można byłoby rozważać jako jednolity, aby przedłużać oddzielne elementy, gdyż te albo walcuje się tylko w określonych długościach albo też muszą być używane tylko w ograniczonych długościach ze względu na możliwość przewozu lub dogodność manipulowania niemi w warsztatach; wreszcie zapomocą nitów łączymy pręty ze sobą.

Na nity używamy żelaza zlewne o wytrzymałości  $K = 34-40 kg/mm^2$  przy wydłużalności najmniej  $i = 25\%$  przy zachowaniu warunku, aby  $K + 2i \geq 90$ .

Mówiąc o średnicy nitów, będziemy mieć zawsze na względzie średnicę otworu, nie zaś średnicę trzpienia nita, która zwykle jest około 5% mniejsza od średnicy otworu na nit.

Kształt główki nita stanowi zwykle odcinek kuli, przytem średnica  $D$  odcinka tego powinna być taka, aby nacisk od główki na żelazo odpowiadał wytrzymałości nita na rozerwanie i aby główka nita nie mogła się ściąć po obwodzie trzpienia. Zatem, jeżeli oznaczymy odpowiednio przez  $k_r$ ,  $k_c$ ,  $k_t$  dopuszczalne naprężenie w żelazie na rozerwanie, ciśnienie i ścinanie, to mamy (fig. 228):



$$\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} k_c \geq \frac{\pi d^2}{4} k_r \quad \text{czyli} \quad D \geq d \sqrt{\frac{k_c + k_r}{k_c}} = 1,23 d$$

$$\text{i} \quad \pi d h_1 k_t \geq \frac{\pi d^2}{4} k_r, \quad h_1 \geq \frac{d}{4} \frac{k_r}{k_t} = 1,25 \frac{d}{4} = 0,3 d.$$

Fig. 228.

Przyjmują zwykle średnicę główki nita  $1,6 d - 1,8 d$  i wysokość główki  $0,6 d$ . Średnica nitów, stosowanych w mostach, waha się od 12 do 26 mm; większej średnicy nity stosują się tylko w poszczególnych wypadkach.

Ponieważ nitowanie robi się na gorąco, nit nagrzewa się do temperatury około  $900^\circ\text{C}$  i zakończenie nitowania powinno być przy stosunkowo wysokiej temperaturze (około  $500^\circ\text{C}$ ); przeto długość nita, a zatem grubość części nitowanych musi być ograniczona i uzależniona od średnicy nita. Przy dużej grubości i niewielkiej średnicy nity rozrywają się. Największa grubość części nitowanych nie powinna przekraczać  $4,5 d$ .

Przy większej grubości należy stosować albo śruby, albo nitowanie na chłodno. Nitowanie na chłodno przy użyciu należytego materiału miękkiego o wytrzymałości około  $35 = 37 \text{ kg/mm}^2$  i z dobrem wydłużeniem około 30% daje bardzo dobre rezultaty. Nity tutaj mają kształt stożkowy o bardzo łagodnem pochyleniu boków. Dziury do takich nitów mają w przekroju kształt pokazany na fig. 229: ~~odek~~odek cylindryczny, zewnętrzne części — stożki ścięte. Główki ich mają kształty niezupełnie foremne. Stosuje się je często do przynitowania łożysk do dźwigarów lub jakichkolwiek innych części lanych fasonowych.

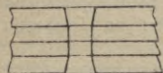


Fig. 229.

Stosując nity zwykle, nagrzewamy je zwykle całe przy nitowaniu. Jednak, jeżeli grubość nitowanych konstrukcyj jest dość znaczna i dochodzi do  $4,5 d - 5 d$ , wtedy otrzymuje się lepsze rezultaty, jeżeli tylko koniec trzpienia nita, który ma wytworzyć główkę, jest nagrzany, zaś cały trzpień jest stosunkowo chłodny. Skurczenie się nita jest wtedy znacznie mniejsze i nie otrzymuje się zważenia nita pośrodku, a przez to i znacznego osłabienia przekroju. Doświadczenia pod tym względem przeprowadzone przez autora w fabryce Putilowskiej przy nitowaniu grubości dochodzących do  $5 d$  i przy nitach o średnicy  $d = 28 \text{ mm}$  wykazały bezwzględną przewagę wytrzymałości i szczelności nitowania nitów, których tylko końce były nagrzewane, w porównaniu z nitami nagrzewanymi na całej długości.

W zależności od połączeń nitami jednych części z drugimi mamy nity razięte (jednocięte), dwucięte, trójcięte i wielocięte (fig. 230). Połączenia, w których płaszczyzny cięć nitów są położone symetrycznie względem osi sił, działających na połączenie, są lepsze od połączeń, gdzie ta siła działa niesymetrycznie. Przy jednociętych nitach jest dążność do wykrzywiania się nitów i części łączonych (fig. 231 a) i nacisk nitów na dziury również jest nierównomierny (fig. 231 b).

Przy obliczaniu nitów przyjmujemy zwykle, że nacisk nitu na dziurę jest równomierny, jak również naprężenie na ścinanie w nici jest równomiernie rozłożone na całym jego przekroju. Przeto obciążenie dopuszczalne



Zestawienie rozwiązań najczęstszych zadań obliczenia belki prostej.

L. p.	Schemat obciążenia i podparcia	Reakcje $A, B$ i momenty podporowe $M_A$ i $M_B$	Momenty zgięcia $M$ w dowolnym przekroju i $M_{\max}$	Równania linii ugięcia i tang. kąta $\beta$ obrotu przekroju belki (nachylenia stycznej)	Ugięcia $f$	U w a g i
1.		$A = P$ $M_A = -P \cdot l$	$M = -P \cdot x$ $\max  M  = P \cdot l$	$f - y = \frac{Pl^3}{2EJ} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$ $\text{tg } \beta = -\frac{dy}{dx} = \frac{Pl^2}{2EJ} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$	$f = \frac{Pl^3}{3EJ}$ $(\text{tg } \beta)_{x=0} = \frac{Pl^2}{2EJ} = \frac{3f}{2l}$	Przekrój niebezpiecz. w $A$
2.		$A = q \cdot l$ $M_A = -\frac{ql^2}{2}$	$M = -\frac{qx^2}{2}$ $\max  M  = \frac{ql^2}{2}$	$f - y = \frac{ql^4}{2EJ} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{x^3}{l^3}\right)$ $\text{tg } \beta = -\frac{dy}{dx} = \frac{ql^3}{6EJ} \left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right)$	$f = \frac{ql^4}{8EJ} = \frac{Ql^3}{8EJ}$ $(\text{tg } \beta)_{x=0} = \frac{ql^3}{6EJ} = \frac{4}{3} \frac{f}{l}$	Przekrój niebezpiecz. w $A$ $Q = ql$
3.		$A = Q = \frac{pl}{2}$ $M_A = -\frac{Ql}{3}$	$M = -\frac{Qx^3}{3l^2}$ $\max  M  = \frac{Ql^3}{3}$	$f - y = \frac{Ql^3}{12EJ} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{1}{5} \frac{x^4}{l^4}\right)$ $\text{tg } \beta = -\frac{dy}{dx} = \frac{Ql^2}{12EJ} \left(1 - \frac{x^4}{l^4}\right)$	$f = \frac{Q}{EJ} \frac{l^3}{15} = \frac{2}{5} \frac{k_g}{E} \cdot \frac{l^3}{h}$ $(\text{tg } \beta)_{x=0} = \frac{Ql^2}{12EJ} = \frac{5}{4} \frac{f}{l}$	Przekrój niebezpiecz. w $A$ $h$ wysokość przekroju symetrycznego względem osi obojętnej
4.		$A = \frac{P(l-c)}{l}, B = \frac{P \cdot c}{l}$	$M = Ax$ dla $x \leq c$ $M = B(l-x)$ dla $x \geq c$ $\max M = M_c = \frac{P(l-c)c}{l}$	$y = \frac{P}{EJ} \frac{c^2 c_1^2}{6l} \cdot \frac{x}{c} \left(2 + \frac{c}{c_1} - \frac{x^2}{c c_1}\right)$ $y_1 = \frac{P}{EJ} \frac{c^2 c_1^2}{6l} \cdot \frac{x_1}{c_1} \left(2 + \frac{c_1}{c} - \frac{x_1^2}{c c_1}\right)$	$f = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l^3}{3} \cdot \frac{c^2}{l^2} \cdot \frac{c_1^2}{l^2}$ dla $x = c \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{c_1}{c}}$ przy $c > c_1$ $f_{\max} = \frac{P}{3EJ} \cdot \frac{c_1}{l} \left[\frac{c}{3} (l + c_1)\right]^{3/2}$	Przekrój niebezpiecz. w $C$
		Dla $c = \frac{l}{2}$	$A = B = \frac{P}{2}$	$\max M = \frac{Pl}{4}$	$y = \frac{Pl^3}{16EJ} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$	$f = \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{1}{6} \frac{k_g}{E} \frac{l^3}{h}$
5.		$A = B = \frac{ql}{2} = \frac{Q}{2}$	$M = \frac{qx}{2} (l-x)$ $\max M = \frac{ql^2}{8}$	albo $y = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{24} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)$ $y = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{24} \cdot \frac{x x_1}{l^2} \left(1 + \frac{x x_1}{l^2}\right)$	$f_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$ $(\text{tg } \beta)_{x=0} = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^2}{24} = 3,2 \frac{f}{l}$	Przekrój niebezpiecz. w środku
6.		$A = \frac{Q}{3} = \frac{pl}{6}$ $B = \frac{2}{3} Q = \frac{pl}{3}$	$M = \frac{Qx}{3} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$ $\max M = \frac{2}{9\sqrt{3}} Ql = 0,128 Ql$	$y = \frac{Q}{EJ} \frac{l^3}{180} \left(7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5}\right)$	$f_{\max} = 0,01304 \frac{Ql^3}{EJ}$ dla $x = 0,5193 l$	Przekrój niebezpiecz. dla: $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,5774 l$
7.		$A = B = P$	Między $A$ i $B$ $M = P \cdot a = \text{stałej}$ zewnątrz podpór $M = Px$	Między $A$ i $B$ linia ugięcia jest łukiem koła o promieniu $r = \frac{EJ}{Pa}$	$f = \frac{P \cdot a \cdot l^2}{8EJ} = \frac{l^2}{8r}$ w środku $f_1 = \frac{Pa^2}{6EJ} (3l + 2a)$ po końcach	Przekroje niebezpiecz. na podporach ze względu na siłę poprzeczną

Zestawienie rozwiązań najczęstszych zadań obliczenia belki prostej.

L. p.	Schemat obciążenia i podparcia	Reakcje A, B i momenty podporowe $M_A$ i $M_B$	Momenty zgięcia M w dowolnym przekroju i $M_{max}$	Równania linii ugięcia i tang. kąta $\beta$ obrotu przekroju belki (nachylenia stycznej)	Ugięcia f	U w a g i
8.		$A = B = \frac{Q}{2} = q \frac{l + 2a}{2} = \frac{ql_1}{2}$	$M = \frac{Qx}{2} \left(1 - \frac{a-x}{l_1}\right) \text{ między A i B}$ $M = -\frac{Qx^2}{2l^2} \text{ zewnątrz podpór}$ Bezwzględne wartości momentów zgięcia $M_A$ i $M_C$ stają się równe przy $a = 0,207 l_1$ a mianowicie $M_A = M_{max} = 0,02145 Q l_1 = \infty \frac{1}{47} Q l_1$		$f = \frac{Ql^2}{384 EJ l_1} (5l^2 - 24a^2)$ $f_1 = \frac{Qc}{24 EJ l_1} (3a^3 + 6a^2 l - l^3)$	Przekroje niebezpiecz. na podporach albo w środku, zależnie od tego czy jest $a > 0,207 l_1$ czy też $a < 0,207 l_1$
9.		$A = \frac{Pc^2(2l+c)}{2l^3}$ $B = \frac{P \cdot c(3l^2 - c^2)}{2l^3}$	$M = Ax \text{ (A do C)}$ $M = Ax - P(x-c) = M_B + B(l-x) \text{ (C do B)}$ $M_B = -\frac{P \cdot c \cdot (l^2 - c^2)}{2l^2}$ najw. $M_B$ (dla $c = l/\sqrt{3}$ ) = $-0,193 Pl$	Gdy $c = l/2$ $y = \frac{P l^3}{EJ 32} \left(\frac{x}{l} - \frac{5x^3}{3l^3}\right)$ $y_1 = \frac{P l^3}{EJ 32} \left(\frac{1}{4} \frac{x_1}{l} + \frac{5}{2} \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3} \frac{x_1^3}{l^3}\right)$	$f = \frac{Pc^2(l-c)^3}{12 EJ l^3} (3l+c)$ $\max f = \frac{P(l-c)^2 c}{6 EJ} \sqrt{\frac{c}{2l+c}}$ dla $x = l \sqrt{\frac{c}{2l+c}}$	Przekrój niebezpiecz. w B Punkt przegięcia dla $x_1 = \frac{5}{22} l$
10.		$A = \frac{P}{l^3} (l-c)^2 (l+2c)$ $B = \frac{P}{l^3} (3l-2c)c^2$	$M = M_A + Ax \text{ (A do C)}$ $M = M_B + B(l-x) \text{ (C do B)}$ $M_A = -\frac{P \cdot c}{l^2} (l-c)^2$ $M_B = -\frac{Pc^2}{l^2} (l-c)$ $\max M_A = -\frac{4}{27} Pl \text{ dla } c = l/3$	Gdy $c = l/2$ $y = \frac{P l^3}{EJ 16} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{3l^3}\right)$	$f = \frac{Pc^2(l-c)^3}{3 EJ l^3}$ $\max f = \frac{2P \cdot c^2}{3 EJ} \cdot \frac{(l-c)^3}{(3l-2c)^2} \cdot \frac{Pl^3}{192 EJ}$ gdy $c = l/3$ , to $\max f = \frac{Pl^3}{192 EJ}$	Przekroje niebezpiecz. w A, B i C dla $x = \frac{l^2}{3l-2c}$
11.		$A = \frac{3}{8} Q$ $B = \frac{5}{8} Q$	$M = \frac{Qx}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right), M_B = -\frac{Ql}{8}$ $\max M = \frac{9}{128} Ql$ w przekroju $x = 3/8 l$	$y = \frac{Q l^3}{EJ 48} \left(\frac{x}{l} - 3 \frac{x^3}{l^3} + 2 \frac{x^4}{l^4}\right)$	$\max f = \frac{Q l^3}{EJ 185}$ dla $x = 0,4215 l$	Przekrój niebezpiecz. w B Punkt przegięcia dla $x = 3/4 l$
12.		$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{Ql}{12}$ $M_C = \frac{Ql}{24}$	$y = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{24} \cdot \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$	$f = \frac{Q l^3}{EJ 384} = \frac{1}{16} \frac{k_b}{E} \cdot \frac{l^2}{h}$	Przekrój niebezpiecz. w A i B Punkty przegięcia $x_1 = 0,2113 l$ $x_2 = 0,7887 l$
13.		$A = \frac{1}{5} Q$ $B = \frac{4}{5} Q$	$M = Qx \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_B = -\frac{Ql}{7,5}$ $\max M = 0,0596 Ql$	$y = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{60} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2$	$\max f = \frac{1}{209,63} \frac{Ql^3}{EJ}$ dla $x = \frac{l}{\sqrt{5}} = 0,447 l$	Przekrój niebezpiecz. w B Największy moment dodatni dla $x = l/\sqrt{5}$ Punkt przegięcia dla $x = 0,775 l$
14.		$A = \frac{3}{10} Q$ $B = \frac{7}{10} Q$	$M = Ql \left(-\frac{1}{15} + \frac{3x}{10l} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3}\right)$ $M_A = -\frac{Ql}{15}$ $\max M = M_B = -\frac{Ql}{10}$ Największy moment dodatni $M_D = \frac{Ql}{23,3}$	$y = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{60} \left(2 \frac{x^2}{l^2} - 3 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^5}{l^5}\right)$	$\max f = \frac{1}{382} \frac{Ql^3}{EJ}$ dla $x = 0,525 l$	Przekrój niebezpiecz. w B Największy moment dodatni dla $x = 0,548 l$ Punkty przegięcia $x = 0,237 l$ i $0,808 l$

nita na ścinanie i zgniatanie wyraża się wzorami:  $\frac{\pi d^2}{4} k_t$  i  $d \delta k_c$ ;  $\delta$  oznacza grubość elementu nitowanego. Średnica nitów w stosunku do grubości nitowanych elementów otrzymuje się z wymagań, aby wytrzymałość nita na ścinanie równała się wytrzymałości jego na zgniatanie, tj. dla nitów jednociętych:  $\frac{\pi d^2}{4} k_t = d \delta k_c$ . Jeżeli założyć, że  $k_t = 0,8 k_r$  i  $k_c = 1,5 k_r$ , to  $d = 2,4 \delta$ , przy  $k_c = 2 k_r$ ,  $d = 3,2 \delta$ ; dla nitów dwuciętych otrzymamy odpowiednio:  $d = 1,2 \delta$  i  $d = 1,6 \delta$ . Praktycznie jednak od norm tych odstepuje się, lecz sprawdza się zawsze, aby naprężenie na ścinanie i naprężenie na zgniatanie nie przekraczało dopuszczalnych. Można tutaj zauważyć, że przy zwykłych grubościach elementów, stosowanych w mostownictwie, przy nitach jednociętych można nie sprawdzać wytrzymałości na docisk, a tylko przy nitach wielociętych.

Odległość pomiędzy nitami i odstep nitów od krawędzi elementu nitowanego w kierunku działania siły i w kierunku prostopadłym do działania siły przy sztukowaniach (przedłużeniach) wynika z następujących równań (fig. 232):

$$2 \left( e - \frac{d}{2} \right) \delta k'_t = \frac{\pi d^2}{4} k_t; \quad (e_1 - d) \delta k_r = \frac{\pi d^2}{4} k_t.$$

Po wstawieniu  $k'_t = 0,75 k_r$  i stosunku  $\frac{d}{\delta} \approx 2,4$  otrzymujemy  $e = 1,5 d$

i  $e_1 = 2,5 d$ . Zwykle daje się  $e = 2 d$  i  $e_1$  conajmniej  $3 d$ , a przeważnie  $4 d$ ;  $e_2 \geq 1,75 d$ , lecz nie więcej niż  $3,5 d$ , a to ze względu na szczelność nitowania. Największa odległość między nitami, łączącymi elementy prętów w jeden zespół, w prętach rozciąganych nie powinna przekraczać  $8 d - 10 d$ , zaś w prętach ściskanych  $6 d - 8 d$ . Najmniejsza szerokość  $b$  elementu, aby można było stosować nit średnicy  $d$ , jest  $b = 3,25 d$ .

**Obliczenie ilości nitów.** Mogą być dwa sposoby obliczania ilości nitów: na zasadzie siły, jaka ma miejsce w danym elemencie, który nitujemy, lub wychodząc z pola przekroju danego elementu, niezależnie od tego, jaka siła działa na dany element. Zasadniczo w mostach obliczenie powinno się przeprowadzać w zależności od przekroju danego elementu i tylko w wyjątkowych wypadkach w zależności od siły w danej części danego zespołu. Przekroje części, które nitujemy, bierzemy netto, tj. za potrąceniem osłabień otworami do nitów, przytem osłabienie winno być sprawdzone w linii prostej prostopadłej do osi pręta lub według linii zygawkowej (fig. 233); bierze się pod uwagę przekrój mniejszy.

Jako ogólny wypadek obliczenia nitów rozpatrzmy styk blach połączonych dwiema nakładkami. Niech  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  oznaczają przekroje blachy i nakładek,  $k_r$  dopuszczalne naprężenie dla blach,  $d$  średnicę nita. Styk

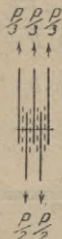


Fig. 230.

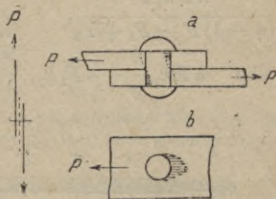


Fig. 231 a, b.

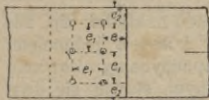


Fig. 232.

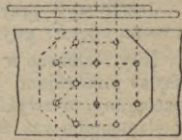


Fig. 233.

będzie schodkowy (stopniowy; fig. 234<sup>a</sup>), przeważnie stosowany w mostach; blach niech będzie  $n$ . Wtedy  $nFk_r$  jest siłą, przenoszącą się na wszystkie blachy.

W przekrojach 1 — 1', 2 — 2',  $n$  —  $n'$  naprężenia będą:

$$\frac{nFk_r}{(n-1)F + F_1 + F_2}$$

a siły, przypadające na blachę i na nakładki, będą odpowiednio:

$$\frac{nFk_r F}{(n-1)F + F_1 + F_2}, \quad \frac{nFk_r F_1}{(n-1)F + F_1 + F_2}, \quad \frac{nFk_r F_2}{(n-1)F + F_1 + F_2}$$

albo  $\alpha Fk_r$ ,  $\alpha F_1 k_r$ ,  $\alpha F_2 k_r$ , jeżeli  $\alpha = \frac{nF}{(n-1)F + F_1 + F_2}$



Fig. 234 a, b.

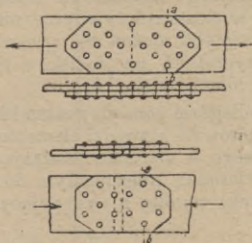


Fig. 235.

Liczba nitów  $m$  odpowiednio będzie przy  $\mu = \frac{1}{\frac{\pi d^2}{4} 0,8}$ :

$$m = \frac{\alpha F k}{\frac{\pi d^2}{4} 0,8} = \alpha \mu F, \quad m_1 = \alpha \mu F_1, \quad m_2 = \alpha \mu F_2.$$

Jeżeli  $F = F_1 = F_2$ , to  $m = m_1 = m_2 = \frac{n}{n+1} F \mu$ .

Przy  $F_1 = F_2 = \frac{1}{2} F$ ,  $\alpha = 1$  i  $m = \mu F$ ,  $m_1 = m_2 = \frac{1}{2} \mu F$ .

$F_1 + F_2$  winno być większe lub conajmniej równe  $F$ .

Jeżeli styk przykrywamy tylko jedną nakładką, to  $F_1 = F$  i wtedy  $m = m_1 = \mu F$ , gdyż  $\alpha = 1$ . Połączenie takie pokazane jest na fig. 234 b.

Nity rozłożone w końcach nakładek (fig. 234 a) są tutaj dwucięte, zaś pomiędzy przekrojami 1 — 1' i  $n$  —  $n'$  jednocięte. Jeżeli zespół elementów jest rozciągany, to zwykle rozpoczynamy nitowanie od jednego lub dwóch nitów, w elementach zaś ściskanych stawia się dwa lub trzy nity (fig. 235). Rozpoczynanie nitowania w złączach od niepełnej ilości nitów, stawianych w przekroju, ma tę zaletę, że można uważać przekrój osłabionym nie pełną ilością nitów, jaka jest postawiona w przekroju  $a$  —  $b$  w styku, lecz tylko ilością umieszczoną w pierwszym szeregu.

Łącząc jakikolwiek pręt, składający się z kilku części, z blachą pojedynczą zapomocą nitów dwuciętych, sprawdzamy wytrzymałość na ciśnienie w ściance, czyli na zgniatanie. Wtedy rozłożenie nitów może być w nakładkach niejednakowe, np. pręt o przekroju      łączymy z blachą

węzłową według fig. 236. Nity w blasze węzłowej są dwucięte, i jeżeli  $n_1$ ,  $n_2$  i  $n_3$  oznacza odpowiednio liczbę nitów postawionych w blasze szerokiej, wąskiej i kątownikach,  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  przekrój tychże części, to przy grubości blachy, szerokiej  $\delta$ , mamy następujące naprężenia na zgniatanie :

$$\left(\frac{F_1}{n_1} + \frac{F_2}{n_2}\right) \frac{k_r}{d \delta} \quad \text{i} \quad \left(\frac{F_1}{n_1} + \frac{F_3}{n_3}\right) \frac{k_r}{d \delta}.$$

Gdyby przekrój składał się tylko z blachy szerokiej i kątowników, a w połączeniu dane były dwie nakładki  $F_2$  i  $F_4$ , wtedy, zachowując powyższe znakowanie, otrzymalibyśmy naprężenia na zgniatanie przy oznaczeniu

przez  $\alpha = \frac{F_1 + F_3}{F_2 + F_3 + F_4}$  następujące :

$$\left(\frac{F_2}{n_2} + \frac{F_4}{n_4}\right) \frac{\alpha k_r}{d \delta} \quad \text{i} \quad \left(\frac{F_3}{n_3} + \frac{F_4}{n_4}\right) \frac{\alpha k_r}{d \delta}.$$

Połączenie kątowników wykonywa się zapomocą kątowników albo tego samego przekroju albo też o bokach nieco węższych, lecz zato grubszych, by przekrój nakładek był nie mniejszy niż kątowników, które łączymy. Można też nakładki dawać z dwóch kątowników o mniejszym przekroju, lecz nieco większym od połowy przekroju kątownika łączonego, łącząc dwa kątowniki, przylegające do siebie lub do jednej ścianki, lub wreszcie nakładka może składać się z kątowników o mniejszym przekroju i z dodatkowych nakładek płaskownikowych. W trzecim wypadku styki robimy schodkowe, a obliczenie wykonywa się według wzoru, podanego na str. 880.

Linia nitów w kątownikach przyjmuje się zwykle w odległości  $w = \frac{b + \delta}{2}$  od krawędzi zewnętrznej (fig. 237), jeżeli w bokach kątowników stawia się tylko jeden szereg nitów (do szerokości boków mniejszych od 120 mm). W bokach 120 mm i większych należy stawiać dwa szeregi nitów. Wtedy wolna szerokość boku dzieli się na trzy równe części (fig. 238). Zwykle te odległości od krawędzi, oraz pomiędzy szeregami nitów zaokrągla do 0 lub 5 mm i naznacza się taki odstęp nitów (wymiary w mm):

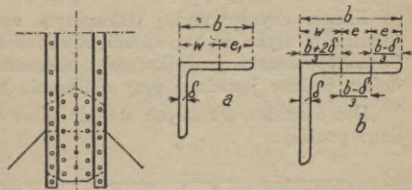


Fig. 236.

Fig. 237.

Fig. 238.

Bok kątownika .	55	60	65	70	75	80	85	90	100	110
Odległość $w$ i $e_1$ .	30—25	35—25	35—30	40—30	40—35	45—35	45—40	50—40	55—45	60—50
Bok kątownika .	120		130		140		150		160	
Odległość $w, e$ i $e_1$	50—30—40 65—55		50—40—40		55—45—40		55—55—40 55—50—45		55—60—45	

Nity w bokach kątowników należy stawiać w szeregach przestępnych według fig. 239.

Spółczynnik  $\mu = \frac{1}{\pi d^2} \frac{1}{4} 0,8$  dla różnych średnic nitów przy ścinaniu :

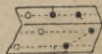


Fig. 239.

$d$ mm	10	12	14	15	16	17	18	20	22	23	24	25	26	28	30	32
$\mu$	1,59	1,11	0,81	0,71	0,62	0,55	0,49	0,40	0,33	0,30	0,28	0,26	0,24	0,20	0,18	0,16

Wyżej rozpatrzone połączenia nitami dotyczyły elementów, które były rozciągane lub ściskane. W belkach zginanych o ściance pełnej obliczenie nitów w pasach przeprowadza się, jak w elementach ściskanych lub rozciąganych. Styki środника (ścianki) przekrywamy zawsze przykładkami z dwóch stron, przymet zasadniczo połączenie styku co do swej wytrzymałości powinno w zupełności odpowiadać wytrzymałości samego środnika, niezależnie od sił, jakie mają miejsce w środniku. Jeżeli przeto oznaczymy przez  $F_s$ ,  $F_n$ ,  $F_{nit}$ ,  $I_s$ ,  $I_n$ ,  $I_{nit}$ ,  $I_d$  odpowiednio przekrój środnika, nakładek, przekrojów nitów, moment bezwładności środnika, nakładek, przekrojów nitów i przekrojów otworów środnika, pracujących na docisk, to powinno być:  $F_n \geq F_s$ ;  $F_{nit} \geq F_s$ ;  $I_n \geq I_s$ ;  $0,8 I_{nit} \geq I_s$ . (1,5 — 2)  $I_d \geq I_s$ .

Zadość czyniąc wyżej wskazanym warunkom, otrzymujemy połączenie ścianki w styku w zupełności równoznaczne ze środnikiem całkowitym. Sposoby połączeń środnika, oraz obliczenie według sił, panujących w środniku, podane jest dalej przy obliczeniu blachownic.

Dla oznaczenia różnych średnic nitów można stosować znakowanie, podane poniżej:

$d_m$	12	16	18	20	22	23	24	25	26	Śruby	Nity z główkami wlopienymi		
											górna	dolna	obiema

### III. Belki o ściance pełnej.

Uwagi ogólne. Belki o ściance pełnej mogą być stosowane bądź to jako żebra pomostu (belki poprzeczne i podłużne części przejazdowej), bądź to jako dźwigary główne w mostach o niewielkich rozpiętościach do 20—25 m. Belki te mogą być albo walcowane o kształcie dwuteowym lub korytkowym albo też nitowane. Belki walcowane z szerokimi bokami czyli tak zwane dwuteowniki Grejowskie można stosować, jako dźwigary główne, do mostów dość znacznych rozpiętości. Belki bliźniacze o wysokości 750 mm możemy stosować w mostach kolejowych do 12 m rozpiętości, zaś w mostach drogowych do 15 m. Wprawdzie pod względem wagi stosowanie ich nie jest dogodne, gdyż stosunek wysokości do rozpiętości jest w ostatnich wypadkach dość mały i wagę belek nitowanych otrzymuje się mniejszą dla tych rozpiętości i sztywność większą, lecz zato belki te wymagają

mniej roboty, niż belki nitowane. Zresztą belki te można otrzymać tylko z zagranicy, gdyż huty krajowe ich nie walcują. Nie tylko do większych rozpiętości, lecz i do mniejszych stosuje się belki nitowane, które składają się z blachy pionowej (środnika czyli ścianki), kątowników pasowych i blach poziomych (fig. 240). Belki o ściance pełnej mogą być tak o pasach prostych równoległych, jak również i o jednym pasie prostym, a drugim krzywym lub wielobocznym (fig. 241), najczęściej jednak robi się je o pasach prostych. Kształt tych belek, pokazany na fig. 241 (1, 2, 4) należy do kształtów zupełnie racjonalnych, gdyż zwiększa swą wysokość według

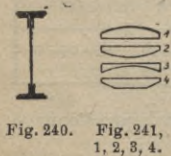


Fig. 240. Fig. 241, 1, 2, 3, 4.

W tym celu zwiększa się wysokość belki w miarę zwiększania się rozpiętości, co jest widoczne na rysunku 241.

wzrastania momentów gnących. Kształt zaś według fig. 241 (3) jest niedogodny, gdyż w przekrojach największych momentów gnących ma najmniejszą wysokość, przeto może być stosowany tylko wtedy, gdy wymagają tego inne względy nie natury technicznej, np. względy estetyczne lub dążność do zmniejszenia wysokości ustrojowej pośrodku dźwigara. Stosując blachownice do wiaduktów, szczególnie w miastach, w postaci belek ciągłych, nadajemy im wysokość większą nad podporami i mniejszą pośrodku rozpiętości tak ze względów estetycznych, jak również i technicznych, gdyż nad podporami otrzymujemy wtedy przeważnie momenty gnące większe, niż pośrodku dźwigarów.

Wysokość belek zależy od wysokości ustrojowej, jaką dopuszczają warunki miejscowe; jeżeli zaś wysokością nie jesteśmy skrepowani, to przyjmujemy taką wysokość, jaka daje nam najmniejszą wagę belki; wreszcie kierujemy się względami praktycznymi, np., gdyby najdogodniejsza wysokość wypadła dość znaczna i trudnoby było otrzymać blachę o potrzebnej szerokości, to trzeba nadać wysokość belce mniejszą. Stosunek wysokości

belki do rozpiętości normalnie leży w granicach  $\frac{h}{l} = \frac{1}{6}$  do  $\frac{1}{12}$ ; jednak w wy-

jątkowych okolicznościach może być doprowadzony do  $\frac{1}{20}$  i nawet  $\frac{1}{24}$ .

O ile belka jest niska, wtedy oblicza się ją nie na wytrzymałość, lecz na sztywność tak, aby strzałka ugięcia od obciążenia ruchomego nie przekraczała  $\frac{1}{1200} - \frac{1}{1500}$  rozpiętości belki.

Strzałka ugięcia  $\Delta f$  dla wszelkich układów wynosi:

$$\Delta f = \frac{1}{E} \sum \frac{M \cdot \mu \cdot l}{I} + \frac{1}{E} \sum \frac{S \cdot \sigma \cdot l}{F},$$

gdzie  $M$  i  $S$  są to momenty gnące i siły osiowe w elementach przy obciążeniu, odpowiadajacemu największemu ugięciu w danym węźle,  $l$  długość elementu,  $I$  moment bezwładności,  $F$  pole przekroju, zaś  $\mu$  i  $\sigma$  momenty gnące i siły osiowe od obciążenia siły  $P=1$ , zaczepionej w węźle ugięcia i w danym układzie.  $E$  współczynnik sprężystości.

Najdogodniejsza wysokość blachownic pod względem najmniejszej wagi otrzymuje się ze wzoru:

$$h = \sqrt{\frac{600 M}{\alpha^2 (220 \delta + 3 F') k_g}} \dots \text{ dla belek o przekroju stałym,}$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{480 M}{\alpha^2 (220 \delta + 3 F') k_g}} \dots \text{ dla belek o przekroju zmiennym.}$$

$M$  oznacza największy moment gnący,  $\delta$  grubość środnika belki,  $k_g$  dopuszczalne naprężenie i  $F'$  pole przekroju kątowników usztywniających na metr długości belki,  $\alpha$  stosunek odległości między środkami ciężkości pasów belki do całej jej wysokości — wymiary w kilogramach i centymetrach. Jeżeli założyc, że  $\alpha = 0,9$  i  $F' = 30 \text{ cm}^2$ , to dla

$$\delta = 10 \text{ mm} \quad h = 1,55 \sqrt{W} \quad h_1 = 1,38 \sqrt{W},$$

$$\delta = 12 \text{ mm} \quad h = 1,45 \sqrt{W} \quad h_1 = 1,29 \sqrt{W},$$

$$\delta = 14 \text{ mm} \quad h = 1,37 \sqrt{W} \quad h_1 = 1,22 \sqrt{W},$$

gdzie  $W$  moment wytrzymałości przekroju  $W = \frac{M}{k_g}$ .

Niewielkie zwiększenie lub zmniejszenie wysokości  $h$  mało wpływa na zmianę wagi belki. Przeto wyżej wskazanymi wzorami można się posil-

kować przy określaniu wysokości blachownic, jako pewną wskazówką, koło jakiej wysokości należy się trzymać.

Blacha przy odpowiedniej grubości walcuje się do 3,0 m szerokości, lecz ceny normalne stosują się tylko do pewnych szerokości; przy większych szerokościach wzrastają dość znacznie, co przy projektowaniu trzeba brać pod uwagę.

**Obliczenie blachownic.** Wprowadzimy następujące znakowanie (fig. 242):

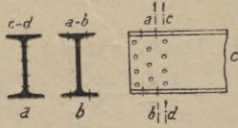
$M$  — moment gnący w belce,  $T$  — siła poprzeczna,  $I_{br}$  — moment bezwładności nieosłabionego przekroju belki,  $I_{net}$  — moment bezwładności przekroju belki po odciążeniu dziur na nity,  $W$  — moment wytrzymałości netto,  $S_{br}$  — moment statyczny połowy przekroju nieosłabionego względem osi obojętnej,  $S'$  — moment statyczny części przekroju zakreskowanej względem osi obojętnej,  $h$  — wysokość belki,  $\delta$  — grubość ścianki,  $e$  — odległość między nitami w pasach belki,  $d$  — średnica nitów,  $k_g$ ,  $k_t$ ,  $k'_t$ ,  $k_c$  — dopuszczalne naprężenia na zginanie, ścinanie w ściance i ścinanie w nitach i bezpośrednie ciśnienie na dziurę nita.

$$\frac{I_{br}}{S_{br}} = h_0 \quad h_0 = \alpha h.$$

W belkach walcowanych przy obliczaniu momentu bezwładności i przekrojów będziemy odciążać tylko te otwory na nity, które przypadają w danym przekroju  $a-b$  lub  $c-d$ , zatem to osłabienie, które będzie większe (fig. 243  $a, b, c$ ). W belkach zaś nitowanych każdy element belki będziemy przyjmować jako osłabiony swoją ilością dziur, o ile przekroje tych elementów ze swem największym osłabieniem znajdują się w odległości nie większej, niż jeden skok nitów.



Fig. 242.

Fig. 243  $a, b, c$ .

Zatem przyjmujemy, że pasy blachownicy są osłabione otworami na nity pionowe, zaś środnik na nity poziome na całej swej wysokości (fig. 244).

Na zasadzie wzoru, podanego na str. 883, znajdujemy najpierw przybliżoną wysokość blachy pionowej  $h$ , przyjmując takową w całych  $cm$ . Ze wzoru  $\delta = \alpha \frac{TS}{I_{br} k_t}$ , gdzie  $\alpha = \frac{e}{e-d} \approx 1,25$ , otrzymamy grubość śro-

dnika, zakładając, że  $h_0 = \frac{I_{br}}{S_{br}} = (0,85 - 0,95) h$ , przytem dla belek do 60  $cm$  wysokości można przyjąć  $h_0 = 0,85 h$ , zaś dla belek wyższych średnio  $h_0 = 0,90 h$ . Otrzymaną ze wzoru grubość ścianki zwiększamy nieco, przyjmując, że w belkach mostów kolejowych  $\delta \geq 9 mm$ , zaś w mostach drogowych w jezdni  $\delta \geq 8 mm$ , a w belkach chodników  $\delta$  może być i 7  $mm$ . Zreszta grubość zależy również od wysokości  $h$ , im większe jest  $h$ , tem musi być większe  $\delta$ , a to ze względu możności walcowania blach.

Mając grubość  $\delta$  i wysokość  $h$ , przekrój pasów  $F$  blachownicy znajduje się ze wzoru:

$$F = \frac{Mh}{k_g \cdot h_0^2} - \frac{0,8 \delta h}{6} = W \frac{1}{\alpha^2 h} - \frac{2}{15} \delta h.$$

Przekroje pasów tworzy się z kątowników, przyczem w mostach drogowych najmniejsze kątowniki w belkach stosuje się  $60 \times 60 \times 8$ , zaś w mostach kolejowych najmniejsze  $80 \times 80 \times 9$ . Jeżeli przekroje pasów wypadają znaczne, to składa się je z kątowników o większych profilach i z blach poziomych.



Szerokość blach poziomych  $b_1$  winna się równać szerokości boków  $b$  dwóch kątowników, więcej grubość środnika, więcej 25—60 mm, przy zachowaniu warunku, że odległość  $e_1$  od nitów do krawędzi blachy nie przekracza  $3,5d$ . Jeżeli blachy wypadają poszerzyć, aby zwiększyć przekrój pasa oraz sztywność względem osi pionowej i odległość  $e_1$  przekracza  $3,5d$ , wtedy  $b_1 = 2b + \delta +$

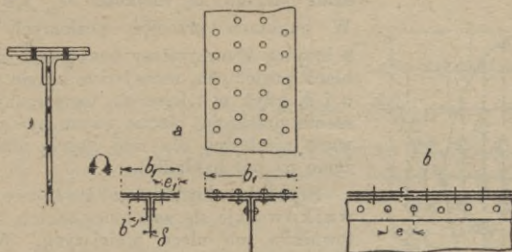


Fig. 244.

Fig. 245 a, b.

+ 120 mm, aby można było dać z boków jeszcze dwa szeregi nitów w blachach (fig. 245 a).

Odległość pomiędzy nitami  $e$  (fig. 245 b) musi zadość czynić następującym warunkom:

$$e \leq \frac{\pi d^2 I k'_t}{2 T S'}; \quad e \leq \frac{d \delta I k_c}{T S'}; \quad e \geq \frac{d}{1 - \frac{T S'}{2 I \delta k_t}}$$

Zwykle ostatnie dwa warunki decydują o wielkości odległości  $e$ , którą przyjmuje się około 5  $d$ .

Po wytworzeniu przekroju blachownicy oblicza się ostatecznie  $W_{net}$  i  $S_{br}$  i określa się naprężenia ze wzorów:

$$\sigma_g = \frac{M}{W} \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_t = 1,25 \frac{T S}{I \delta} \quad \text{lub} \quad \sigma_t = \frac{T \cdot S}{I \delta} \cdot \frac{e}{e - d}$$

Oprócz tego w przekrojach, gdzie schodzą się największe momenty gnące i siły poprzeczne, winno być określone naprężenie główne normalne i tnące na linii nitów pasowych ze wzoru:

$$\nu_t = \frac{\sigma_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_g}{2}\right)^2 + \sigma_t^2}; \quad \tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_g}{2}\right)^2 + \sigma_t^2}$$

Naprężenie główne normalne powinno być określone również w przekroju, gdzie się kończą blachy poziome w blachownicach o przekrojach zmiennych.

Długość, na jakiej winny być dane blachy poziome, można określić w następujący sposób: Jeżeli  $M$  jest największym momentem gnącym w danej belce od całkowitego obciążenia, wtedy obciążenie zastępcze  $p$  otrzyma się z równania  $p = \frac{8M}{l^2}$ , a moment gnący dla dowolnego przekroju w odle-

głości  $X$  od podpory (belka wolno podparta) będzie  $M_x = \frac{p x (l - x)}{2}$ .

Jeżeli przez  $W_n$  oznaczymy moment wytrzymałości z  $n$  blachami poziomymi, to przekrój z  $W_n$  nadaje się do długości  $x = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{2 W_n k_g}{p}}$ .

Od tej odległości przekrój trzeba zwiększyć przez dodanie blach poziomych, które oczywiście muszą już pracować, zatem końce ich muszą być

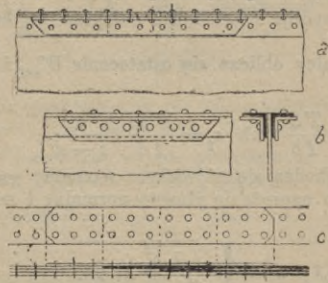
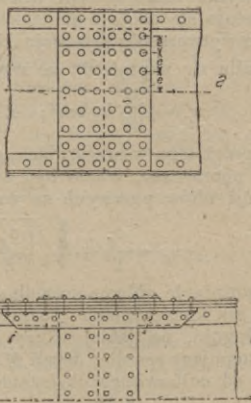
wydłużone w kierunku zmniejszenia  $x$  co najmniej na dwa szeregi nitów. Zwykle wydłużają na pełną ilość nitów, niezbędną do przymocowania dodatkowej blachy.

Zmianę przekroju blachownicy można naznaczyć wykreślnie. Na długości belki wykreśla się wykres momentów gnących w pewnej skali. W tej samej skali odkłada się wielkości  $W_n \times k_g$  (fig. 246).

W punktach przecięć poziomych  $W_n \times k_g$  z krzywą  $M$  otrzymamy teoretyczne zakończenie blach poziomych, rzeczywiste będzie w punktach  $a$  i  $b$ , gdyż w miejscach teoretycznych zwiększenia przekroju blacha winna być już umocowana niezbędną dla niej ilością nitów (wydłużenie na pół nakładki).

**Styki blachownic.** *a*) Połączenie kątowników daje się zapomocą takich samych kątowników lub nieco mniejszych. W ostatnim wypadku styki kątowników jednego pasa winny tworzyć styk stopniowy (fig. 247 *a*), przekryty dwiema nakładkami, jak to już było mówione przy obliczaniu nitów (str. 881). Przy nakładkach tego samego przekroju styki kątowników jednego pasa mogą być w jednym przekroju lub różnych (fig. 247 *b*).

*b*) Styki blach poziomych kryje się nakładkami tego samego przekroju, jak blachy, przytem styki robi się stopniowe (schodkowe). Ilość nitów wypadnie tutaj z obliczeń, przeprowadzonych na ogólnych zasadach, według przekroju blachy łączonej (fig. 247 *c*).

Fig. 247 *a, b, c, d*.Fig. 248 *a, b*.

*c*) Styki środznika kryjemy dwiema przykładkami. W belkach wysokich, gdy dwa boki kątowników pasowych stanowią stosunkowo niewielki procent całkowitej wysokości blachy pionowej, połączenie może być według fig. 247 *d*, tj. nakładki stawiamy tylko na wolnej szerokości środznika, gdyż w tym wypadku stosunkowo nietrudno zadość uczynić warunkom postawionym na str. 882. W belkach niskich połączenie musi być dokonane na całej szerokości środznika według fig. 248 *a* lub *b*.

Obliczenie momentów bezwładności, cięć nitów i otworów do nitów, pracujących na zginięcie, otrzyma się dla jednego szeregu  $AB$  (fig. 248 a) ze wzoru:

$$I_{\text{nit}} = \frac{\pi d^2}{6} e^2 n(n+1)(2n+1); \quad I_d = \frac{d \delta}{3} e^2 n(n+1)(2n+1).$$

Dla jednego szeregu (fig. 247 d):

$$I_{\text{nit}} = \frac{\pi d^2}{r^2} e^2 n(2n+1)(2n-1); \quad I_d = \frac{d \delta}{6} e^2 n(2n+1)(2n-1).$$

W tych wzorach  $e$  oznacza odstęp między nitami, zaś  $n$  liczbę nitów w szeregu z jednej strony osi obojętnej.

Obliczenie połączenia środka w zależności od panującego momentu gnącego i siły poprzecznej w danym przekroju będzie następujące. Niech będzie  $M_c$  — moment, całkowity największy w przekroju styka poprzeczniczy,  $M_s$  — moment gnący, przypadający na środknik,  $T_c$  i  $T_s$  — siła poprzeczna, przypadająca na cały przekrój w styku i na środknik,  $I_c$ ,  $I_s$  — momenty bezwładności odpowiednio całego przekroju i środknika belki w miejscu styku,  $S_c$  i  $S_s$  — również odpowiednio momenty statyczne całego przekroju i środknika,  $I_{\text{nit}}$  i  $I_d$  — momenty bezwładności cięć nitów i przekrojów otworów, pracujących na zginięcie, wtedy:

$$M_s = M_c \frac{I_s}{I_c}; \quad T_s = T_c \frac{S_c I_s}{S_s I_c}$$

i jeżeli z każdej strony styku mamy  $m$  szeregów, to największa siła  $N$ , przypadająca na jedno cięcie nita, wynosi:

$$N = \frac{1}{2m(2n+1)} \sqrt{\frac{9M_s^2}{e^2(n+1)^2} + T_s^2}$$

przy szeregowym rozłożeniu nitów według fig. 248 a, lub na jeden nit:

$$N_1 = \frac{1}{m(2n+1)} \sqrt{\frac{9M_s^2}{e^2(n+1)^2} + T_s^2}.$$

Przy szeregach według fig. 46:

$$N = \frac{1}{2mn} \sqrt{\frac{9M_s^2}{e^2(2n+1)^2} + \frac{T_s^2}{4}} \quad \text{i} \quad N_1 = \frac{1}{mn} \sqrt{\frac{9M_s^2}{e^2(2n+1)^2} + \frac{T_s^2}{4}}.$$

Jeżeli ścianka pionowa jest z dwóch blach, każda o grubości  $\delta_b$ , wtedy styk zwykle daje się stopniowy (fig. 249), i obliczenie według przekroju środknika przy zachowaniu oznaczników poprzednich będzie następujące: naprężenie w styku będzie:

$\frac{2I_b}{I_b + 2I_n} k_g$ , dopuszczalny moment

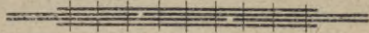


Fig. 249.

gnący na nakładkę będzie:  $M_n = \frac{4I_b}{I_b + 2I_n} \cdot \frac{I_n}{h_n} k_g$ , jeżeli  $h_n$  jest wysokość nakładki.

Moment gnący, który się oddaje na blachę w styku, będzie:

$$M_b = \frac{4I_b}{I_b + 2I_n} \cdot \frac{I_b}{h_b} \cdot k_g.$$

Dopuszczalna siła poprzeczna  $T = \frac{4}{3} \delta_b h_b k_t$ , przypadająca na środnik belki w styku podzieli się między blachą i dwiema nakładkami proporcjonalnie do przekrojów nakładek i środnika, tj.:

$$T_n = \frac{2 \delta_b h_b \delta_n h_n}{\delta_b h_b + 2 \delta_n h_n} \cdot k_t; \quad T_b = \frac{2 (\delta_b h_b)^2}{\delta_b h_b + 2 \delta_n h_n} \cdot k_t.$$

Mając momenty gnące dopuszczalne na blachę i na nakładki oraz siły poprzeczne, ilość nitów obliczamy według poprzednich wskazówek, mając na uwadze, że tak momentowi  $M_n$  jak i  $M_b$  będą odpowiadać nity jednociełe.

**Usztywnienie środnika blachownicy.** W każdym przekroju blachownicy mamy siłę poprzeczną, wzrastającą ku podporom. Pod działaniem tej siły poprzecznej blacha pionowa belki jest ściskana, przeto, aby zapobiec wyboczeniu, ścianka winna być usztywniona żebrami<sup>1)</sup>. To usztywnienie wykonywa się zapomocą profilów sztywnych: kątowników, teowników, zetowników (fig. 250 a). Szczególnie silne usztywnienie powinno być na końcach belek nad podporami i tutaj składa się ono zwykle z czterech, sześciu, a nawet czasem ośmiu kątowników. Najmniejsze wymiary kątowników są zwykle  $75 \times 75 \times 8$  i dochodzą do  $100 \times 100 \times 10$ , a nawet i większych w zależności od wysokości środnika; im większy środnik, tem silniejsze muszą być kątowniki. Symetryczne usztywnienie jest lepsze od jednostronnego. Żebra usztywniające powinny nachodzić na kątowniki pasów (fig. 250 b).

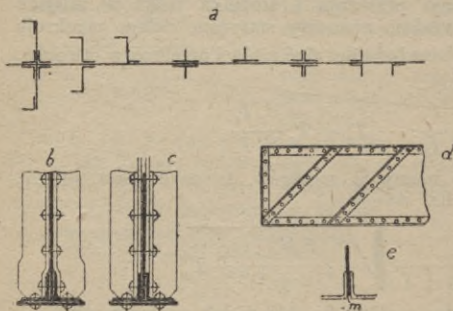


Fig. 250 a, b, c, d, e.

wyrównawcze (fig. 250 c). Stosowanie podkładek jest lepsze, więcej konstrukcyjne, choć przy wysokich blachach droższe. Przy wysokościach ścianki, nie przekraczających 600—700 mm, podkładowe są nawet tańsze, niż wygięcia kątowników, zwłaszcza, że przy podkładkach kątowniki mogą być słabsze, gdyż podkładowe również usztywniają środnik. Szerokość podkładki powinna być o 10 mm większa od podwójnej szerokości boków kątowników, pod którymi leży więcej odległość pomiędzy bokami prostopadłami  $b_1 = 2b + \delta + 10$  mm. Jeżeli niema potrzeby dawać odstępu pomiędzy kątownikami  $\delta$  dla tych lub innych powodów, np. kątowniki usztywniające nie służą jednocześnie do przymocowania belek poprzecznych lub tężników, to wtedy lepiej odstępu nie dawać i boki prostopadłe do ścianki znitować.

Odległość pomiędzy żebrami usztywniającymi zależy od wysokości belki i od obciążenia. W mostach kolejowych odległość ta nie powinna przekraczać odległości między osiami parowozu, w mostach zaś drogowych dochodzi ona do 2,5 m.

Zamiast żeber pionowych dają czasami żebra ukośne pod kątem  $45^\circ$ , szczególnie na końcach belek (fig. 250 d). Na podporze, gdzie siła poprzeczna jest największa, słupki usztywniające winny być obliczone na wyboczenie. Całe ciśnienie od belki na podporę przenosi się przez poduszkę i blachy poziome belki na środnik i kątowniki pasowe, przeto nad poduszkami dolna

<sup>1)</sup> O usztywnieniu ścianki patrz pracę pod tytułem: H. Rode: Beitrag zur Theorie der Knickerscheinungen. „Der Eisenbau“. 1916.

krawędź łożyska powinna być dobrze wyrównana z kątownikami. Pozostawianie tutaj luzu  $m$  (fig. 250 *e*) jest niedopuszczalne, gdyż zazwyczaj wtedy nity kątowników pasowych pod naciskiem reakcji podporowej się ścinają i belka opiera się na łożysku. Poza obrębem poduszek luz taki może być zostawiony. Usztywnienie łożyska żebrami jest niezbędne nie tylko dlatego, by uniemożliwić wygięcie się lub fałdowania łożyska, lecz ma ono jeszcze znaczenie dla usztywnienia pasa górnego belki przy mostach z jazdą dołem, gdy niema tężników podłużnych w poziomie pasa górnego. Siła ściskająca pas  $N = \frac{MS}{I}$  bez dostatecznego usztywnienia pionowego może wyboczyć pas ściskany z płaszczyzny dźwigara.

#### IV. Dźwigary główne.

**Dźwigary belkowe.** Belki, które przez łożyska przenoszą ciśnienie na podpory, nazywamy dźwigarami. Każdy dźwigar składa się z pasów i ścianki, która łączy pasy. Ścianki może być pełna lub pod postacią kraty. W pierwszym wypadku mamy dźwigary o ściance pełnej, w drugim zaś dźwigary kratowe.

Jeżeli krata składa się z prętów pionowych i pochyłonych, nazywamy ją kratą krzyżulcową (prostokątną; fig. 251 *a*) i odróżniamy ją od kraty tylko z prętów pochyłonych — kraty siatkowej (fig. 251 *b*).

Jeżeli pręty jedne przecinają inne pomiędzy pasami, mamy kratę wielokrotną; dwukrotną, gdy się raz przecinają (fig. 252 *a*), czworokrotną, gdy się trzy razy przecinają (fig. 252 *b*). W mostach zasadniczo stosujemy taką kratę, która wraz z pasami tworzy układy niezmiennie, tj. układy,

w których dźwigar zmienia swój kształt tylko wtedy, gdy zmieniają swe długości pręty, a to albo statycznie wyznaczalne, albo statycznie niewyznaczalne (przesztywnione, hiperstatyczne). Por. dział: „Statyka budowl.” Dźwigary statycznie wyznaczalne mają  $m = 2n - 3$  prętów, gdzie  $n$  jest ilością prętów. Dźwigary statycznie niewyznaczalne mają  $m > 2n - 3$ .

Obecnie do mostów o stosunkowo niewielkich rozpiętościach stosowane są przeważnie dźwigary proste belkowe jednoprzęsłowe. Dźwigary wieloprzęsłowe ciągle są nieco w uposledzeniu ze względu na dodatkowe naprężenia, jakie powstają w prętach przy osiadaniu podpór, a zatem, gdy łożyska mogą się okazać nie na projektowanej wysokości na poszczególnych podporach. Nie uważamy za słuszne, aby z tych względów dźwigary te ignorować i odrzucać. Przedewszystkiem dzisiejsze sposoby fundowania podpór nie nastroją obaw, dotyczących osiadania podpór. Gdyby jednak podpora osiadła już po ustawieniu i obciążeniu mostu, to klinami, którymi winny być zaopatrzone poduszki belek ciągłych, można zawsze różnice wysokości wyrównać, podnosząc dźwigary zapomocą dźwigów hydraulicznych, których siła dzisiaj łatwo daje się doprowadzić do kilkuset tonn. Belki te mają swoje zalety, gdyż są naogół lżejsze od belek rozciętych i są sztywniejsze. Stosunek wysokości tych belek do rozpiętości może być znacznie mniejszy, niż dla belek rozciętych, co jest bardzo ważne przy niewielkiej wysokości ustrojowej. W mostach petersburskich stosowane były belki te przy stosunku  $h:l$  od 1:15 do 1:23 (most Pałacowy przez Nową) przez autora niniejszej pracy z zupełnie dobrymi wynikami. Montowanie tych dźwigarów może być wykonane na brzegu i ustawienie na podpory nasuwaniem podłużnym bez specjalnych

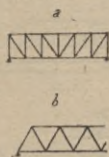


Fig. 251 a, b.

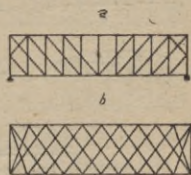


Fig. 252 a, b.

rusztowań między podporami mostu, co ma czasem bardzo ważne znaczenie, tak pod względem szybkości wykonania robót, jak też i zmniejszenia wydatków.

Również obecnie stosują przeważnie dźwigary wewnętrznie statycznie wyznaczalne, zatem o kracie pojedynczej lub podwójnej i wielokrotnej takiej, która jednak zadłość czyni warunkowi  $m = 2n - 3$ . Stosowanie kratownic statycznie wyznaczalnych usprawiedliwia się prostotą obliczeń i również większą dokładnością i prostotą zestawiania w porównaniu z kratownicami przeszywnionymi, które wymagają znacznie większej ostrożności i ścisłości przy zestawianiu, by pręty należąycie pracowały. Dźwigary przeszywnione są jednak żywotniejsze, bo o ile w dźwigarze nieprzeszywnionym każdy pręt stanowi żywotną część całości, stanowi jakby serce organizmu i uszkodzenie jego powoduje katastrofę całego ustroju, o tyle w dźwigarach przeszywnionych uszkodzenie pewnych prętów nie powoduje katastrofy i dlatego też dla tych względów należałoby w pewnych okolicznościach dźwigary te stosować.

Belki proste rozcięte (wolno podparte) stosowane są obecnie do rozpiętości 204 m. Największe rozpiętości w Europie wynoszą 158,4 m przez Wołgę i 186 m przez Ren koło Ruhrortu. W Ameryce jest znaczna liczba mostów,

przekraczających rozpiętość 160 m, przytem rozpiętość mostu przez Mississippi w St. Louis wynosi 204 m.

Jeżeli rozpiętość przesła nie przekracza 20—25 m, należy stosować dźwigary o ściance pełnej z pasami równoległymi lub o jednym pasie krzywym.

Przy rozpiętościach od 25 do 35 m w mostach z jazdą dołem stosuje się mosty otwarte

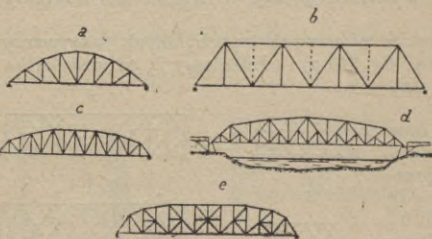


Fig. 253 a, b, c, d, e.

z pasami równoległymi lub o pasie górnym krzywym parabolicznym (fig. 253 a). Stosowanie pasa górnego krzywego, w którym słupki w pobliżu podpór są krótkie, jest racjonalne, gdyż słupki krótkie lepiej trzymają pas górny w jego płaszczyźnie, sam pas zaś górny, zbiegając się z pasem dolnym, otrzymuje lepsze zamocowanie.

Dźwigary o rozpiętości do 50—60 m robi się przeważnie z pasami równoległymi; przytem krata może tu być stosowana z krzyżulców zasadniczych i słupków drugorzędnych (fig. 253 b). Lecz jeżeli stosować wysokość dźwigarów pośrodku około  $\frac{1}{5}$  rozpiętości, to można i przy rozpiętościach 50—60 m stosować dźwigary o pasach krzywych (wielobocznych), dając końce ścięte, przytem pierwszy słupek dostatecznej wysokości (około 6,5—7,5 m w mostach kolejowych), by można było od słupka tego prowadzić ęźniki podłużne.

Przy rozpiętościach, przekraczających 60 m i do 120 m pas górny jest zwykle wieloboczny. Stosunek wysokości pośrodku do rozpiętości wynosi od  $\frac{1}{5}$  do  $\frac{1}{6}$ . Krata zasadnicza — z krzyżulców z dodatkowymi słupkami (fig. 253 c), lub też z dodatkowymi słupkami i wzmocnieniem górnym lub dolnym (fig. 253 d). Niewykluczona jest tutaj i krata krzyżulcowa, tj. z zasadniczymi słupkami, lecz wtedy dla zmniejszenia długości słupków na wyboczenie należy środki słupków łączyć z węzłami wewnętrznymi prętami (fig. 253 e).

W dźwigarach o większych rozpiętościach stosuje się tylko pasy krzywe. Krata zasadnicza składa się z krzyżulców i dodatkowych słupków ze wzmocnieniem tak górnym, jak dolnym. Stosunek wysokości do rozpiętości jest nieco mniejszy około 1:6,5. Ponieważ w mostach kolejowych jednotorowych odległość w świetle między dźwigarami jest dostateczna 4,8 m i jeżeli grubość pasów przyjmiemy 1,2 m, to odległość między osiami dźwigarów otrzymamy 6 m. Przy stosunku wysokości do szerokości, ze względu na sztywność po-

przeczną 3,33, wysokość dźwigarów otrzymamy  $3,33 \times 6 = \approx 20$  m. Przyjmując, że najmniejszy stosunek szerokości do rozpiętości przy dużych rozpiętościach winien być nie mniejszy od 1 : 20, otrzymamy, że przy szerokości 6 m, rozpiętość będzie 120 m. Zwiększając rozpiętość, musimy zwiększać szerokość mostu niezależnie od tego, czy jest ona konieczna dla przejazdu. Dla mostu dwutorowego odległość między dźwigarami wynosi około 9,0 m. Zatem przy tej szerokości, mając na uwadze sztywność poziomą mostu, może stosować dźwigary do rozpiętości  $9 \times 20 = 180$  m i wysokości do 27—30 m. Zaznaczyć tutaj musimy, że wysokość dźwigarów zależy od ilości przedziałów; im mniej jest przedziałów, tem wysokość winna być większa. Zmniejszając przedziały, musimy wysokość zmniejszać, by otrzymać wagę dźwigarów mniejszą. Dla dźwigarów o pasach równoległych stosunek  $h : l$  może być wyrażony następującym wzorem:

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{(1+\alpha)[(m+2)(2m-1)\varphi_1 + (m-2)(2m+1)\varphi_2 + (6m\alpha + 7m-2)\varphi_3]}{(6m\alpha + 7m-2)(\varphi_3 + \varphi_4)}}$$

We wzorze tym oznacza  $m$  ilość przedziałów,  $\alpha$  — stosunek obciążenia stałego do ruchomego  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  — współczynniki ustrojowe pasa górnego, pasa dolnego, krzyżulców i słupków.

Wielkość przedziału  $a$  daje się w granicach 4 do 8 m i tylko w dźwigarach dużych rozpiętości czasem dochodzi do 10 m. W mostach kolejowych dwutorowych ze względu na belki poprzeczne i ich przymocowanie do dźwigarów należy przedziały  $a$  przyjmować mniejsze, niż w mostach jednorodowych 5—6 m.

Dźwigary ciągłe bez przegubowe, trójprzęsłowe mają stosunek rozpiętości około 7 : 8 : 7 i czteroprzęsłowe 7 : 8 : 8 : 7. Przy małych rozpiętościach dźwigary te nie dają ekonomii w materiale, przy większych zaś rozpiętościach od 50 m ekonomia w materiale jest widoczna około 8—10% i przy rozpiętościach około 100 m dochodzi do 15%. Krata w dźwigarach ciągłych może być stosowana jak i w belkach zwykłych rozciętych.

Zwrócić tutaj należy uwagę, że jeżeli krzyżulec przecina kilka słupków (krata wzmocniona), to pas górny nad słupkami, umieszczonymi w węzłach głównych, lepiej łamać, to jest lepiej, by górne końce tych słupków 2, 6, 2' leżały na wypukłej krzywej, a nie na prostej pomiędzy głównymi węzłami pasa górnego (fig. 254 a). Wtedy słupki te są rozciągane, a nie ściskane i łatwiej im nadawać odpowiednie przekroje.

W dźwigarach znacznej wysokości, gdy krzyżulec przechodzi przez dwa lub więcej przedziałów (krata wzmocniona), lepiej stosować przy zasadniczej kracie prostokątnej krzyżulec pochylony ku środkowi (fig. 254 b). Krzyżulec te są zasadniczo ściskane, lecz, będąc przecięte pośrodku słupkiem, otrzymują długość wybożeniową w płaszczyźnie dźwigara równą połowie ich całkowitej długości, zaś z płaszczyzny dźwigara długość ta może być również zmniejszona do połowy lub mniejszej przez postawienie w słupkach dodatkowych tężników pionowych. Słupki główne zasadnicze są przeważnie rozciągane i, jako

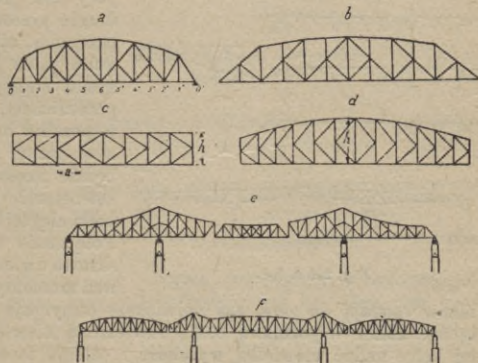


Fig. 254 a, b, c, d, e, f.

takie, nie wymagają przekroi rurowych, a to ułatwia połączenie poprzecznie z dźwigarami, oraz rozpórek tężników podłużnych i poprzecznych.

Co się tyczy końców dźwigarów, to przy znacznych rozpiętościach lepiej zakończyć dźwigary słupkami pionowymi, bo, choć to wymaga cokolwiek więcej materiału, niż przy końcach zbieżnych, daje jednak możliwość skonstruowania dobrze sztywnych ramownic. W dźwigarach o końcach zbieżnych tworzenie ramownicy pochyłej następuje dość duże trudności. W dźwigarach o rozpiętości do 70—80 m można również stosować kratę półkrzyżulcową (fig. 254 *c* i *d*). W kracie tej węzły wewnętrzne daje się na połowie wysokości słupków, zaś długość przedziału *a* około 0,7 *h*. Według Z. Bażanta krata ta daje najmniejsze naprężenia drugorzędne od sztywności węzłów.

**Dźwigary wspornikowe.** Jeżeli w belce ciągłej dwu- lub trójprzęsłowej w miejscach najmniejszych momentów gnących mamy tyle dodatkowych przegubów, o ile liczba podpór belki ciągłej przewyższa dwa, otrzymamy wtedy układ belek statycznie wyznaczalny względem sił zewnętrznych, — belki wspornikowe: jednowspornikowe (fig. 254 *e*) lub dwuwspornikowe (fig. 254 *f*). Jak w belkach ciągłych, tak i w belkach wspornikowych, jedna z podpór może być nieruchoma, inne zaś muszą być przesuwne (fig. 255 *a*). Każda

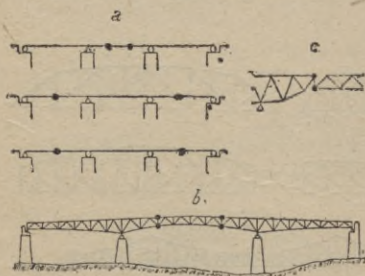


Fig. 255 *a, b, c*.

belka oddzielna od podpory do podpory ma jedno łożysko nieruchome, drugie przesuwne, lub od podpory do przegubu, albo od przegubu do przegubu jeden koniec winna mieć na łożysku stałym, drugi zaś na łożysku przesuwnym. Belka wsparta na końcu wspornika może mieć takie połączenie zewnętrzne, że miejsce połączenia nie będzie nazewnątrż widoczne. Most zewnętrznie będzie mieć kształt, jakby belki ciągłej bezprzegubowej (fig. 255 *b*). Połączenie to może być również jaskrawo widoczne (fig. 255 *c*). Ponieważ momenty gnące na końcach wsporników spadają do zera, zaś największe otrzymuje się na podporach, przeto, łącząc końce wsporników belką zawieszoną niewielkiej rozpiętości, możemy tej belce nadać niewielką wysokość i całemu mostowi kształt mostu wiszącego sztywnego (fig. 256 *a*) lub też łukowego (fig. 256 *b*). Belka międzypodporowa może mieć niewielką wysokość, lecz zato będzie wzmocniona łańcuchem wiszącym, zwykle sztywnym, i wspornik jako belka zawieszona do tego łańcucha. Na końcach wsporników spoczywa belka łącząca wolnopodparta (fig. 256 *c*). Otrzymuje się układ wspornikowy o trzech pasach. Mosty wspornikowe nie należą do zbyt sztywnych układów. Wsporniki dają znaczne ugięcie. Układ zaś o trzech pasach jest najmniej sztywny. Most w Mannheimie tak silnie się ugina, że jazda po nim dozwolona jest tylko stępa. Układ ten nie jest godny naśladowania.

Mosty wspornikowe statycznie wyznaczalne o podporach bliźniaczych bez kraty między podporami bliźniaczemi pokazane są na fig. 257 *a*. Dają one możliwość przy wysokich podporach metalowych ciśnienie od dźwigarów rozłożyć na każdą nogę podpory oddzielnie przy reakcjach dodatnich.

Mosty wspornikowe mają bardzo ważną zaletę, bo dają możliwość zestawienia ich na miejscu budowy bez użycia rusztowań, których często nie możnaby było zbudować. Przy obliczaniu mostów tych tak waga własna, jak i działanie wiatru powinny być obliczone rozłożone na poszczególne węzły, a nie przyjmowane, jako równomiernie rozłożone. Przy dużych rozpiętościach mosty wspornikowe dają ekonomję i w żelazie i w podporach.

W mostach drogowych przy układzie dwuwspornikowym (fig. 257 *b*) można beleczki zawieszane dawać krótkie, kilka metrów rozpiętości i przez to



otrzymywać bardzo małe przyczółki, które wtedy mogą być wzniesione nawet na nasypach. Filary przy brzegach mogą być bez izbic i również tanie, tak, że filar może kosztować znacznie taniej, niż przyczółek. Waga zaś dźwigarów otrzymuje się tylko nieznacznie większa przez ich wydłużenie o wsporniki, gdyż wsporniki zato zmniejszają momenty gnące w części międzypodporowej. Ogólne koszty mogą być znacznie mniejsze, niż przy stosowaniu belki zwykłej jednoprzęsłowej na należytych przyczółkach.

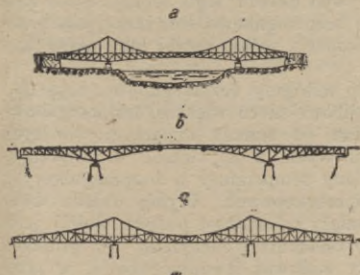


Fig. 256 a, b, c.

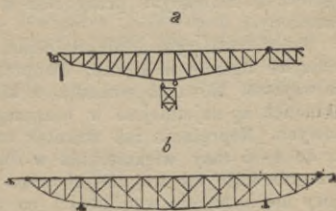


Fig. 267 a, b.

Mosty wspornikowe dochodzą do bardzo dużych rozpiętości; do 549 m ma most przez rzekę Św. Wawrzyńca w Quebec. Projekt mostu przez rzekę Hudson — 701 m rozpiętości.

Mosty jednowspornikowe w zależności od długości wspornika i belki zawieszanej mogą mieć reakcje na podporze skrajnej dodatnie i ujemne.

Zwykle dążą do tego, by reakcje otrzymywać tylko dodatnie, gdyż zakotwienie końców dźwigarów połączone jest z pewnymi trudnościami, zaś umieszczanie przeciwwag wymaga miejsca i zwiększa wagę żelaza dźwigarów. Jaka powinna być długość wsporników i belki zawieszanej w stosunku do długości belki międzypodporowej by waga była najmniejsza, jest to zadanie, które ściśle teoretycznie nie może być rozwiązane. Można korzystać z tablicy 7, w której podany jest przez różnych autorów stosunek długości części przęsła przy oznaczeniach według fig. 258.

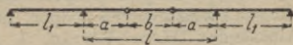


Fig. 258.

Tablica 7.

Autor	$\frac{a}{l_1}$	$\frac{a}{l}$	$\frac{b}{l}$	$\frac{l_1}{l}$
Winkler . . . . .	0,18—0,27	0,17—0,23	0,66—0,54	0,96—0,84
Nikolai . . . . .	0,20	0,18	0,64	0,90
Bayer . . . . .	0,4 —0,6	0,30	0,40	0,75—0,50
Burr . . . . .	0,62—0,5	0,25	0,50	0,4 —0,5
Merriman i Jacoby	0,43	0,16	0,68	0,37

Dźwigary łukowe stosuje się obecnie przeważnie dwuprzegubowe i trójprzegubowe. Bezprzegubowe stosuje się tylko kratowe przy znacznych rozpiętościach, jeżeli jest możliwość dobrego zamocowania pasów łuku do podpór. Bezprzegubowe w ostatnim wypadku dają możliwość łatwiejszego zestawienia na podporach bez rusztowań, niż łuki przegubowe. Dźwigary łukowe blaszane sztywne, jako bezprzegubowe, nie mają racji bytu, gdyż

zamocowanie ich w stopie byłoby bardzo trudne i trzeba by było dźwigar zapuszczać dobrze w podporę i zamurowywać, by osiągnąć łuk istotnie bezprzegubowy (fig. 259). Pozostawiając zaś stopy płaskie z klinami, jak to stosowano (mosty Morand, Lafayette w Lugdunie, Mikołajewski w Petersburgu i inne), nie możemy przyjmować układu tego rodzaju jako łuki bezprzegubowe, lecz raczej jako prze-



Fig. 259.

gubowe ze zmiennym przegubem w stopach, zatem raczej jako układ nieokreślony.

Jeżeli rozpatrywać odkształcenia, to dźwigary bezprzegubowe dają najmniejsze ugięcia w kluczu, dwuprzegubowe nieco większe, trójprzegubowe największe. Również wahania w kluczu od zmiany temperatury w tych układach są najmniejsze w bezprzegubowych, a największe w trójprzegubowych. Naprężenia zaś wskutek zmiany temperatury w bezprzegubowych są do 4—5 razy większe, niż w dwuprzegubowych. Wybór układu dwuprzegubowego lub trójprzegubowego zależy od stałości podpór. Jeżeli podpory nie nasuwają wątpliwości co do osiadania i odchylenia (na gruntach stałych twardych i skalistych), należy stosować dwuprzegubowe, w przeciwnym razie trójprzegubowe, gdyż przy nieznacznym przesunięciu się podpory pod działaniem rozporu w łuku trójprzegubowym powstaną nieznaczne dodatkowe naprężenia, zaś w łuku dwuprzegubowym naprężenia te mogą być bardzo znaczne, szczególnie w łukach płaskich.

Stosunek wysokości łuku do jego rozpiętości normalnie leży w granicach od  $\frac{f}{l} = \frac{1}{7} - \frac{1}{12}$ , choć dochodzi do  $\frac{1}{2,5}$  i  $\frac{1}{17}$ . Łuki płaskie są ładne, lecz wymagają dobrych podpór, zatem albo dobrego gruntu, albo też bardzo silnych i kosztownych podpór. Stosunek 1 : 17 jest w moście trójprzegubowym Aleksandra III. w Paryżu, 1 : 17,2 w moście dwuprzegubowym Panteleimonowskim w Petersburgu. Przy dobrym gruncie możnaby dojść do 1 : 20, lecz nie dalej.

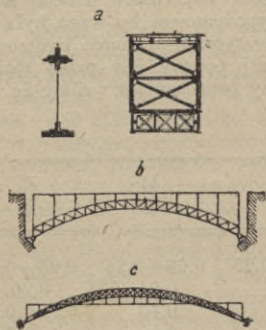


Fig. 260 a, b, c.

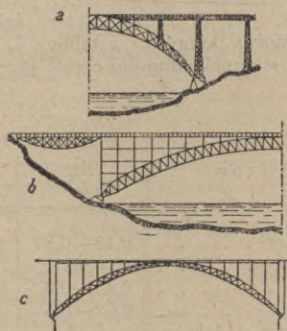


Fig. 261 a, b, c.

Łuki o ściance pełnej mogą być stosowane do rozpiętości około 60 m, przyczem wysokość dźwigara waha się w granicach  $\frac{l}{40} - \frac{l}{60}$ . Przy znacznym obciążeniu ruchomem stosuje się granicę większą, przy mniejszym granicę mniejszą. Pomost, zwykle wzniesiony, spoczywa na słupkach (fig. 260 a). Kształt łuku tworzy przeważnie krzywą koła, choć parabola przy równomiernym

obciążeniu całego dźwigara daje momenty w przekrojach łuku trójprzegubowego zerowe, w dwuprzegubowym bliskie do zera; nie jest ona jednak tak ładna, jak krzywa koła. Jeżeli rozpiętość jest znaczna, wtedy przeważnie stosują łuki kratowe o pasach równoległych (fig. 260 b), lub też o kształcie sierpowym (fig. 260 c), również ze słupkami do podtrzymania pomostu, lub też przy znacznej wysokości mostów z filarami wieżowymi (fig. 261 a). Słupki pojedyncze wysokie łączą wtedy poziomymi prętami z węzłami, by zmniejszyć ich długość wybaczną i przez to ich przekroje (fig. 261 b). Ponieważ pod wpływem zmiany temperatury belki podłużne się wydłużają lub skracają, przeto przy stosowaniu wieży każdy z dźwigarów podłużnych musi mieć łożyska na jednym końcu przesuwne i na drugim stałe. Przy słupkach pojedynczych (fig. 261 c) słupki należy obliczać na ściskanie i na zginanie. By zmniejszyć naprężenie od zginania, przy większych rozpiętościach należy sto-

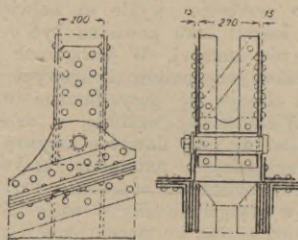


Fig. 262.

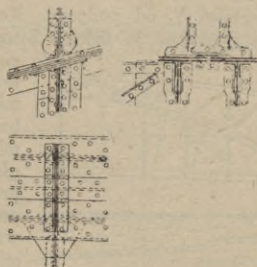


Fig. 263.

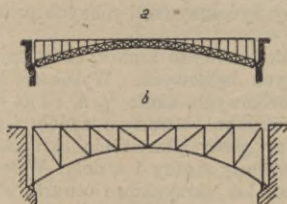


Fig. 264 a, b.

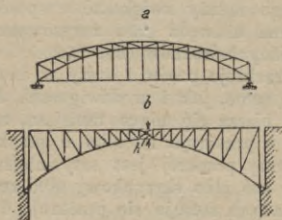


Fig. 265 a, b.

sować połączenie słupków z łukiem przegibne (fig. 262), a czasem też przegibne i z podłużnicą. Zamiast przegubów można użyć połączenia blachami (fig. 263).

W łukach trójprzegubowych blaszanych oraz z pasami równoległymi przegub środkowy zwykle daje się na osi łuku. Łuki kratowe przeważnie wykonywa się dwuprzegubowe, rzadziej trójprzegubowe. Są one tak z jazdą górą (fig. 264 a, b), jak też i z jazdą dołem (fig. 263 a). W ostatnim wypadku mogą być ze ściągami, wtedy ciśnienie na podpory od sił pionowych wywierają pionowe (fig. 265 a). Jeżeli w łukach kratowych (fig. 265 b) daje się trzeci przegub w kluczu, to należy go umieścić w pobliżu pasa górnego (w odległości  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{3}$  wysokości w kluczu). Umieszczenie przegubów w kluczu w pobliżu pasa górnego lepiej rozkłada ciśnienie na pas górny, oraz na kratę. Pasy pracują równomierniej. Przy położeniu przegubu w poziomie pasa dolnego pracuje przeważnie pas dolny, pas górny zaś bardzo słabo, ze względu jednak ustrojowych przekrój trzeba mu dawać znaczny, niewyzyskany, co podnosi znacznie współczynnik ustrojowy.

Wysokość dźwigarów kratowych w kluczu daje się około  $\frac{1}{25}l$  dla mostów kolejowych, a nawet  $\frac{1}{20}l$ , zaś dla mostów drogowych wysokość ta może być mniejsza i może być doprowadzona do  $\frac{1}{60}l$ . Strzałka  $f$  około  $\frac{1}{6}l - \frac{1}{6,5}l$ , o ile wysokość ustrojowa to dopuszcza. W mostach z jazdą górą strzałka  $f$  może być znacznie mniejsza i niewykluczone jest  $f = \frac{1}{15}l - \frac{1}{16}l$ . Należy wszakże mieć na uwadze, że tak płaskie łuki wymagają dobrych podpór. Na podporach wysokość dźwigarów z jazdą dołem zależy od obrysu i stanowi około  $\frac{1}{12}l - \frac{1}{17}l$ . Pochylenie krzyżuleców do pionu przyjmuje się około  $45^\circ$  w odległości  $\frac{1}{4}$  od podpory. Koło tego przekroju zwykle są największe momenty gnące. W łukach blaszanych kształt łuku powinien być o linii ciągłej, a nie łamanej. W dźwigarach kratowych łukowych mostów kolejowych, nie miejskich, stosuje się pasy łamane wieloboczne, proste między węzłami, w mostach miejskich należy pasy dawać o krzywej ciągłej, uwzględniając naturalnie krzywiznę prętów przy obliczeniu naprężeń. Przytem, ponieważ w dźwigarach siły w pasie dolnym wzrastają od klucza ku stopom, zaś w pasie górnym przeważnie odwrotnie, przeto wysokość ścianki pasów pasa górnego można dawać jednakową na całej długości, zaś pasa

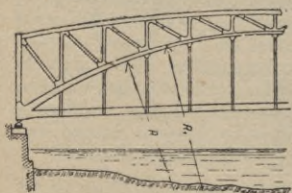


Fig. 266.

dolnego należy zwiększać w sposób ciągły od klucza ku stopom. Górna i dolna krawędź pasa zarysowane winny być krzywymi różnych promieni i z różnych środków (fig. 266).

Przekroje pasów i kraty w dźwigarach łukowych kratowych stosuje się takie same, jak i w dźwigarach kratowych belkowych. Wysokość blach tylko bierze się nieco mniejszą, niż u belkowych, około  $\frac{2}{3}h$ . Pas dolny albo o przekroju  $H$ , albo o przekroju rurowym otwartym z dołu i góry. Pierwszy przekrój jest sztywniejszy. Pas górny przeważnie skrzynkowy, ściąg zaś albo skrzynkowy albo rurowy otwarty z góry i z dołu. W łukach blaszanych stosuje się przekroje dwuteowe lub skrzynkowe otwarte z dołu dla dużych rozpiętości i obciążeń.

Dźwigary łukowe wspornikowe otrzymujemy, jeżeli dźwigar kryje nie jeden przelot, lecz częściowo także dwa sąsiednie przeloty, jak belka dwuwspornikowa. Na końcach wsporników spoczywają belki zwykle rozcięte, które drugimi końcami mogą spoczywać również na wspornikach dźwigarów belkowych (fig. 216 *b*; most Troicki) lub łukowych, lub też na podporach (fig. 267 *a*). Jeżeli wysunięte części dźwigara łukowego nie wystają swobodnie, lecz spoczywają na podporach, otrzymamy właściwie dźwigar ciągły. Zwykle boczne części, spoczywające na podporach, mają poduszki (łożyska) przesuwne, tak że właściwie boczne dźwigary są układu belkowego (fig. 267 *b*). Gdyby poduszki bocznych przesł dać przegibne nieruchome, wtedy otrzymalibyśmy most łukowy ciągły; na podporach środkowych poduszki wtedy robi się przegibno przesuwne. Jeżeli w tych układach niema przegubów pośrodku, to otrzymuje się układy trzy razy statycznie niewyznaczalne ze względu na reakcje podpór, przy zastosowaniu jednego przegubu pośrodku (fig. 267 *c*; most Mirabeau) dwukrotnie statycznie niewyznaczalny, przy trzech przegubach (fig. 267 *d*) statycznie wyznaczalny. Długość wsporników, jak w układach belkowych około  $\frac{1}{4} - \frac{1}{3}$  rozpiętości przesła łukowego (most Troicki w Petersburgu, fig. 216 *b*; Viaurski wiadukt, fig. 267 *e*). Należy tak wyznaczać długość wsporników i be-

lek zawieszonych, by uniknąć rozporu ujemnego. Waga mostów łukowych wspornikowych jest mniejsza od belkowych, lecz większa od łukowych. Podpory dla tych układów otrzymują zwykle niesymetryczny kształt (fig. 268). Mosty łukowe wspornikowe dobrze stosować, gdy trzeba zestawienie ich robić bez rusztowań, lub gdy trzeba nadać dźwigarom możliwie niewielką wysokość

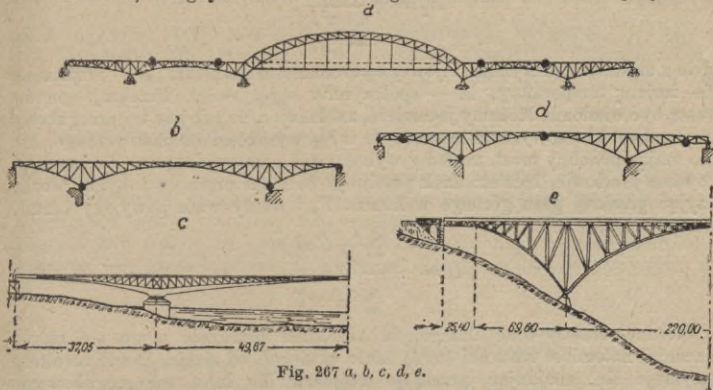


Fig. 267 a, b, c, d, e.

ustrojową pośrodku przęsła (względę żeglugi) przy zachowaniu jazdy górą. Wysokość dźwigarów w kluczu można sprowadzić do  $\frac{1}{50} l$ .

Do układów łukowych można zaliczyć jeszcze łuki gibkie zeszytwnione belkami (fig. 269), przytem belka pośrodku może mieć przegub (fig. 269) z prętem fałszywym *ab*, lub też być bez przegubu (fig. 270). W pierwszym wypadku mamy układ statycznie wyznaczalny, w drugim statycznie niewyznaczalny. Układ ten nie posiada zalet, któreby przemawiały za jego stosowaniem. Nie należy do układów ładnych i sztywnych. Może być stosowany jedynie do mostów drogowych, gdzie obciążenie obliczeniowe rzadko ma miejsce, prawie tylko przy próbie mostu, i dla których większe ugięcie ma mniejsze znaczenie, niż dla mostów kolejowych.

**Obliczenie mostów łukowych.** Rozpatrzmy tutaj tylko łuki dwuprzegubowe blaszane i kratowe bez ściągu



Fig. 268.



Fig. 269.

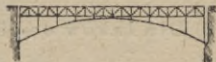


Fig. 270.

i ze ściągiem. Trójprzegubowe nie nastroczają najmniejszych trudności, jako układy statycznie wyznaczalne. Dwuprzegubowe należą do statycznie niewyznaczalnych, przeto przy obliczaniu tych dźwigarów musimy mieć z góry dane przekroje. W dźwigarach kratowych dostatecznie mieć tylko wielkość przekroju, w dźwigarach blaszanych wielkość przekroju i sam przekrój, bo niezbędny jest moment bezwładności przekroju.

a) Dźwigary łukowe kratowe. Rozpór od siły  $P=1$ , położonej w dowolnym węźle, otrzymuje się ze wzoru:

$$H = - \frac{\sum \frac{S \sigma l}{F}}{\sum \frac{\sigma^2 l}{F}}$$

gdzie  $S$  jest siła w dowolnym przecie w założeniu, że dźwigar jest belkowy,  $\sigma$  — siła w przecie od siły  $H=1$  w dźwigarze również belkowym,  $l$  — długość pręta i  $F$  — przekrój. Znaki sum rozpościerają się na wszystkie przety danego dźwigara. Rozpór od zmiany temperatury otrzymuje się ze wzoru:

$$H_l = \pm \frac{\alpha L t E}{\sum \frac{\sigma^2 l}{F}}$$

gdzie  $\alpha$  oznacza współczynnik linjowej wydłużalności dla żelaza,  $L$  — rozpiętość,  $t^0$  — zmianę temperatury,  $E$  — współczynnik sprężystości. Przekroje prętów muszą być wiadome. Możemy je znaleźć, zakładając, że łuk jest trójprzegubowy z przegubem kluczowym umieszczonym w  $\frac{1}{3}$  wysokości od pasa górnego, lub też, mając podobny most, możemy wykorzystać przekroje tego mostu, stosując nie same przekroje, lecz stosunek przekroju jednego pręta do innych. Można przyjąć przekrój pasa górnego w kluczu  $F_0$  i wtedy wzór powyższy brzmi:

$$H = - \frac{\sum \frac{F_0}{F} S \sigma l}{\sum \frac{F_0}{F} \sigma^2 l}$$

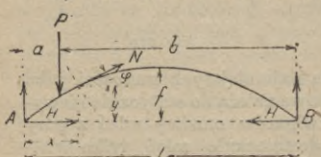
Stosunek należy brać dlatego, że absolutne przekroje mogą się różnić znacznie, natomiast stosunki mogą mało odbiegać od siebie. Dobre rezultaty otrzymuje się, znajdując przekroje najpierw dla łuku trójprzegubowego. Gdy na zasadzie powyższych wzorów znajdziemy rozpór, wtedy określamy siły w prętach i przekroje, które wprowadzalne do tychże wzorów, dadzą nam dokładniejsze wielkości dla  $H$ . Na podstawie nowego  $H$  obliczamy znowu siły i przekroje prętów. Nowe przekroje wstawiamy znowu do wzoru dla  $H$ . Jeżeli dla  $H$  otrzyma się znaczenie, różniące się nie więcej niż 3—4%, to przyjęte przekroje można przyjąć jako ostateczne, w przeciwnym razie obliczenie należy powtórzyć.

Jeżeli dźwigary są ze ściąganiem, wtedy obliczenie przeprowadzamy, jak i bez ściągu, lecz tylko wtedy zwykle przyjmuje się stosunek innych prętów do ściągu. Dla  $H$  tedy mamy wzór:

$$H = - \frac{\sum \frac{F_s}{F} S \sigma l}{\sum \frac{F_s}{F} \sigma^2 l + L}$$

który właściwie mieści się we wzorze powyższym, gdyż dla pręta ściągu  $\sigma = 1$ .

b) Dla łuków o ścianie pełnej dla rozporu  $H$  mamy wzór:



$$H = \frac{\int_0^L \frac{M_0 y ds}{I} - \int_0^L V \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{F}}{\int_0^L \frac{y^2 ds}{I} + \int_0^L \frac{\cos^2 \varphi ds}{F}}$$

gdzie  $M_0$  jest moment gnący od siły  $P=1$ , zaczepionej w odległości  $a$  od lewej podpory, w założeniu, że łuk ma podpory, jak belka zwykła; inne wielkości są pokazane na

fig. 271. Całki w tym wzorze mogą być zastąpione przezsumy, przytem sumowanie może być wzięte według wzoru Simpsona, wtedy:

$$H = - \frac{\sum \frac{M_0 y \Delta S}{I} - \sum V \frac{\sin \varphi \cos \varphi \Delta S}{F}}{\sum \frac{y^2 \Delta S}{I} + \sum \frac{\cos^2 \varphi \Delta S}{F}}$$

Dla niewielkich rozpiętości do 25—35 m można przekrojów nie zmieniać. Przy większych rozpiętościach przekroje są zmienne. Dla pierwszego przybliżenia można znaleźć przekroje dla łuku trójprzegubowego. Należy tylko mieć na uwadze, że naprężenia od zmiany temperatury dla łuków płaskich, gdy  $\frac{f}{l} = \frac{1}{15} - \frac{1}{17}$ , są dość znaczne i dochodzą do 30—50% naprężeń od sił pionowych, przeto przekroje trzeba odpowiednio zwiększyć. Mając rozpór, otrzymamy siłę normalną w łuku i moment gnący  $N = V \sin \varphi + H \cos \varphi$ ;  $M = M_0 - Hy$ .  $V$  oznacza siłę poprzeczną w belce prostej tej samej rozpiętości i obciążenia, co łuk.

Naprężenie znajdujemy z wzoru: 
$$K = \frac{N}{F \varphi} \pm \frac{Mz}{I}.$$

Ponieważ linje wpływe dają inną granicę obciążeń dla  $N$  i  $M$ , przeto dla prawidłowego obliczenia należy obliczyć linje wpływu naprężeń według powyższego wzoru i według linii naprężeń obciążać łuk najnieodgodniej. Zamiast linii wpływe naprężeń można obliczyć linje wpływu momentów gnących względem krańcowych punktów rdzennych danego przekroju: dla

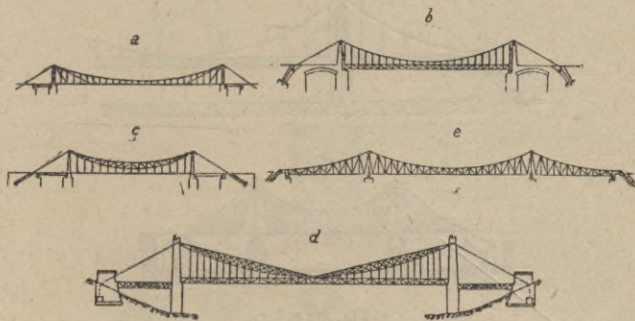


Fig. 272 a, b, c, d, e.

naprężeń w górnych włóknach momenty rdzene dolne, dla naprężeń dolnych włókien momenty rdzene górne, obciążenie według linii wpływu tych momentów da nam największe naprężenie:

$$K = \pm \frac{M_d z}{I} \quad \text{i} \quad K = \pm \frac{M_g z}{I},$$

$M_g$  i  $M_d$  odpowiednio momenty rdzene dolne i górne.

**Dźwigary mostów wiszących.** Mosty wiszące są gibkie, gdy na łańcuchu zawieszony jest pomost (fig. 272 a). Mosty te ze względu na swe znaczne odkształcenia, duże przesunięcia w kierunku pionowym i podłużnym nie nadają się do mostów kolejowych. Nawet do mostów drogowych z powodu braku sztywności nie są do zalecenia, jedynie można ich używać, jako mostów dla pieszych. Obecnie stosuje się łańcuchy gibkie w połączeniu z belkami zwykłymi, które nadają im odpowiednią sztywność (fig. 272 b), łańcuchy sztywne, do których jest podwieszona część przejazdowa (fig. 272 c), lub też łańcuchy sztywne w połączeniu z belkami sztywnymi (fig. 272 d). Wreszcie, do mostów wiszących zaliczamy odwrócone dźwigary kratowe łukowe. Otrzymujemy układy, w których pręty są przeważnie rozciągane, gdy tymczasem te pręty w układzie łukowym były ściskane (fig. 272 e). Ponieważ mosty te mają punkty podparcia wyżej środka ciężkości, przeto należą do układów statecznych.

Miarą sztywności dźwigarów mostowych jest stosunek strzałki ugięcia dźwigarów od obciążenia ruchomego do jego rozpiętości. Zatem im waga własna mostu jest większa, a zatem przekracza obciążenie ruchome, tem naprężenia w elementach dźwigarów od obciążenia ruchomego stanowią mniejszy procent od całkowitych naprężeń i dlatego ugięcie jest mniejsze. Waga zależy od rozpiętości i dlatego mosty wiszące nadają się dobrze do dużych rozpiętości. Do średnich i małych rozpiętości mosty te pod względem ekonomicznym się nie nadają. Stosowanie ich do mniejszych rozpiętości może

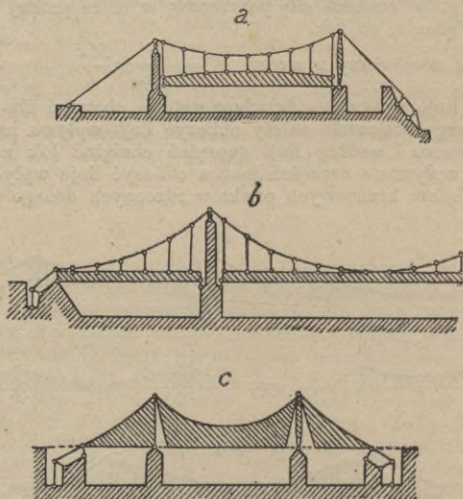


Fig. 273 a, b, c.

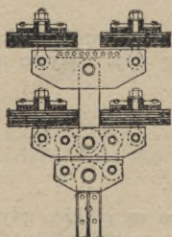


Fig. 274.

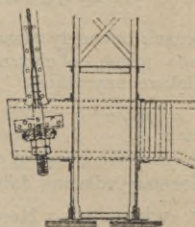


Fig. 275.

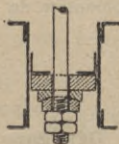


Fig. 276.

być podyktowane względami estetycznymi, bo należą do mostów adnych, lub też względami dogodnego zestawienia na miejscu bez rusztowań. Nadają się natomiast do dużych rozpiętości i przy bardzo dużych rozpiętościach są niemal jedyne. Układy według fig. 273 a, b są raz przesztynnione, według fig. 273 c dwa razy przesztynnione.

Strzałka łańcucha przyjmuje się od  $\frac{1}{8}$  do  $\frac{1}{13} l$ . Wysokość dźwigarów usztywniających około  $\frac{1}{30}$  do  $\frac{1}{60} l$ . Druga granica daje mało sztywne belki przeto lepiej się trzymać bliżej pierwszej granicy około  $\frac{1}{40} l$ . Łańcuchów w każdym dźwigarze może być jeden i więcej w zależności od przekroju, jakie wypadają. Przy kilku łańcuchach podwieszenie pomostu lub belki



usztyniającej do łańcuchów powinno być zrobione zapomocą szeregu orczyków, by obciążenie na łańcuchy było rozłożone możliwie jednakowo

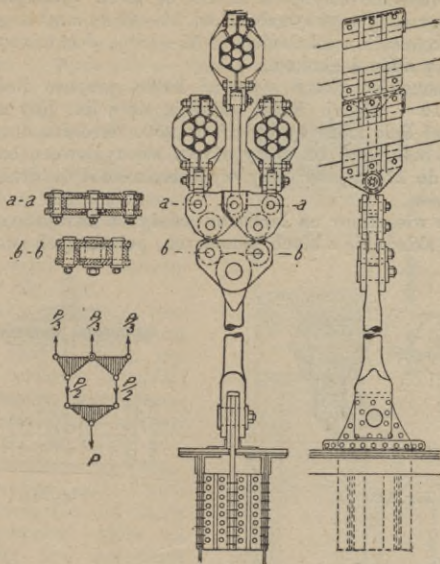


Fig. 277.

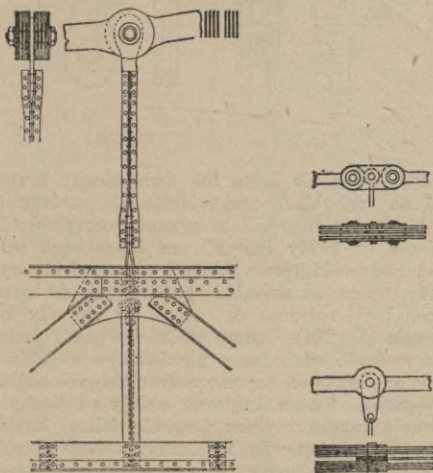


Fig. 278.

Fig. 279.

(fig. 274), i przytem tak, by przy obrotach w dowolnym kierunku wieszaki mogły się obracać, a nie giąć, zatem połączenie przegibno kuliste (fig. 275, 276 i 281), lub przegibne w dwóch kierunkach prostopadłych do siebie (fig. 277).

Łańcuchy robi się w postaci prostych ogniw (fig. 279), lub w dużych mostach z blach pionowych grubości od 12—25 mm i szerokości do 1500 mm i więcej, lub nitowane sztywne i gibkie (fig. 278). Materiał na łańcuchy winien być o wysokiej wytrzymałości od 55—65 kg/mm<sup>2</sup> z granicą sprężystości około 35 kg/mm<sup>2</sup> i wydłużeniem od 15—18%. Jest to zwykle szlachetna stal z domieszką niklu i chromu.

Zamiast łańcuchów można stosować kable, przytem ilość kabli może dochodzić do 12 i więcej. Kable składają się z lin, liny z drutów; ilość drutów w jednej linie może dochodzić do 250. Średnica drutów przyjmuje się od 3,5—6,5 mm. Stal na druty używa się tyglowa o bardzo wysokiej wytrzymałości do 115 kg/mm<sup>2</sup> przy wydłużeniu do 4%. Średnica kabli dochodzi do 600 mm.

Zawieszenie wieszaków na łańcuchu zależy od ustroju samego łańcucha. Jeżeli łańcuch składa się z blach pionowych, połączonych sworzniami, to na

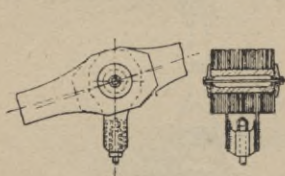


Fig. 280.

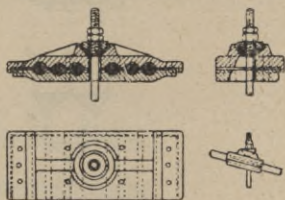


Fig. 281.

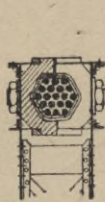


Fig. 282.

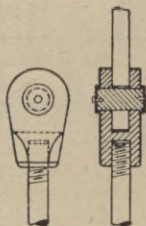


Fig. 283.

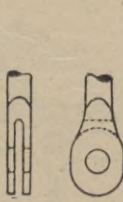


Fig. 284.



Fig. 285.

sworzniach tych zawiesza się jedną lub dwie blachy kształtowe pośrodku lub z boków i do tych blach przytwierdza się wieszak (fig. 280). Przy łańcuchach z blach poziomych i stosowaniu orczyków do jednakowego rozłożenia ciśnienia na każdy łańcuch, na łańcuchach są przyśrubowane specjalne odlewy podstawki, przez których otwory i otwory w łańcuchach przechodzą śruby wzięte na naśrubki; pod naśrubkami są podkładki z dołu sferyczne; na podkładki nałożone są czapki, by chroniły kuliste podkładki od zanieczyszczenia (fig. 274). Otwory w łańcuchach i podstawkach są podłużne, by była możliwość swobodnego niewielkiego wahania.

Kable zwykle zaciskane są zapomocą dwudzielnych kajdanek, do których zawiesza się wieszaki. Forma kajdanek zależy od liczby kabli łańcucha, przytem stosowanie tutaj orczyków przy niewielkiej liczbie kabli w łańcuchu (3 lub 4) jest pożądane (fig. 277). Przy większej liczbie kabli orczyki komplikowałyby konstrukcję, przeto w tych wypadkach stosuje się kajdanki wspólne na wszystkie kable i na te kajdanki zawiesza się wieszak tak, by mógł mieć swobodne niewielkie wahania i by nie był narażony na łamanie (fig. 281).

Mocne zaciśnięcie kabli kajdankami otrzymuje się przy ustroju według fig. 282, zaprojektowanej przez firmę Harkort. Kajdanki mają z boku czopy,

na których zawieszono są blachy do przynitowania wieszaków; z boków kajdanek są pierścienie, które zakrywają boki kajdanek; u góry i u dołu kajdanki mają czopy lekko stożkowe; w górnym czopie jest otwór, przez który zalewa się stop metalowy. Po zalaniu pustego miejsca między kajdankami i kablem, na czopy nasadza się rozgrzane stalowe pierścienie, które po ostygnięciu i skurczeniu się dobrze zaciskają kajdanki. Wieszaki robią się przeważnie z kształtowników: z kątowników, ceowników, a także i żelaza okrągłego (fig. 283). Okrągły wieszak zakończy się albo widelkami z otworem na sworzeń (fig. 284), albo jest spłaszczony i w spłaszczonym końcu ma otwór na sworzeń (fig. 285), lub też może być zakończony gwintem, na którym się trzyma w odpowiednim odlewie (fig. 283).

Podwieszanie pomostu do wieszaków zależy od tego, czy most jest z belką usztywniającą, czy też nie. W ostatnim wypadku zwykle podwieszono są na wieszakach poprzecznice. Jeżeli zaś jest belka usztywniająca, wtedy wieszaki albo połączone są bezpośrednio ze słupkami belki i podtrzymują takową lub też łączą się z poprzecznicami, które na sztywno muszą być połączone

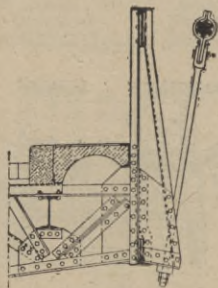


Fig. 286.

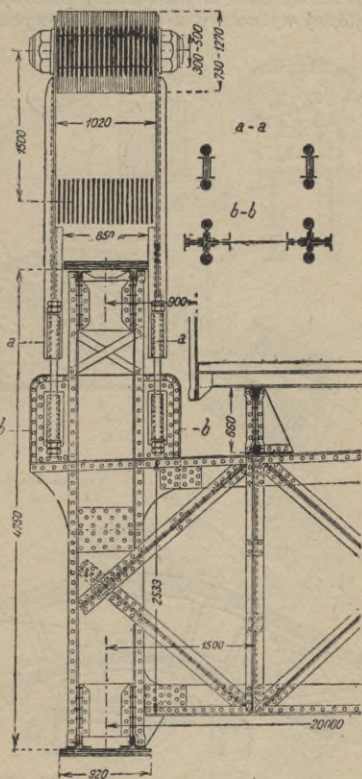


Fig. 287.

z belką usztywniającą, gdyż na poprzecznicę w tym wypadku przenosi się ciśnienie i od belki usztywniającej.

Zawieszenie pomostu na wieszakach pokazane jest na fig. 286. Według fig. 287 wykonane jest połączenie mostu Elżbiety w Budapeszcie. Wieszaki i belka poprzeczna są zaopatrzone w rurki z blachy, których odgięte części tworzą ściankę podwójną w postaci żebra wzdłuż rurki. Te ścianki zaciśnięte są między ceownikami wieszaka i kątownikami, przynitowanymi do blach pionowych belki poprzecznej. Przez rurki są przepuszczone śruby, po cztery na każdy koniec poprzecznicę, które trzymają belkę usztywniającą.

Podparcie łańcuchów może być dwojakie: albo łańcuch jest zamocowany do podpory przegibnie i sama podpora jest ruchomo-wahadłowa, zatem może wykonywać niewielkie obroty koło przegubu dolnego, na którym

spoczywa, albo podpora w postaci pylonu jest nieruchoma i wtedy łańcuch jest umocowany do przegubu poduszki przesuwnej na wałkach. Tak w pierwszym, jak i w drugim wypadku łańcuch ciśnie na pilony pionowo, jeżeli nie uwzględniać nieznacznej tarcia potoczystego, jakie się wytwarza przy nieznacznych przesunięciach kadłubów poduszki na wałkach. Ustrój samej poduszki zależy przede wszystkim od ustroju łańcuchów.

Jeżeli łańcuchy składają się z blach pionowych, bądź to jako ogniwa (fig. 288 *a*), bądź to jako blachy pionowe (fig. 288 *b*), wtedy kadłub poduszki najlepiej wytworzyć z blach pionowych z przekładkami i dwoma sworz-

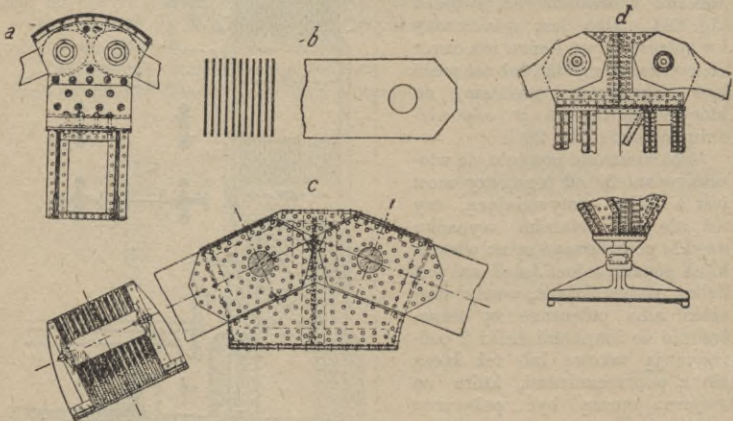
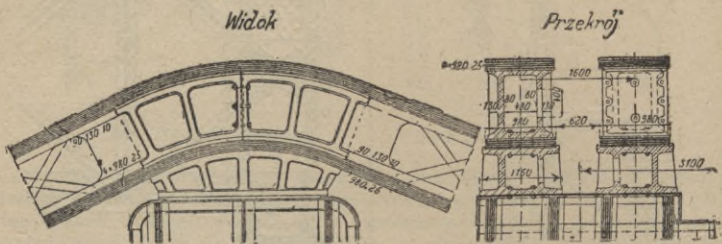
Fig. 288 *a*, *b*, *c*, *d*.

Fig. 289.

niami (fig. 288 *c*). Kadłub w danym wypadku tworzy jakby krótkie ogniwo, łączące łańcuch zawieszony i kotwiczny, zaś dolna część tego krótkiego łączącego ogniwa z przekładkami, ściągnięta nawskroś przechodzącymi śrubami i z dołu zheblowana i połączona z płytą stalową, tworzy kadłub dostatecznie sztywny, który leży na wałkach. Jeżeli kadłub taki połączymy ze słupem, dolny koniec którego spoczywa na przegubie poduszki nieruchomej, to otrzymamy podparcie łańcucha podporą wahadłową (fig. 288 *d*).

Jeżeli łańcuchy są z blach poziomych znitowanych, wtedy leżą one zwykle na poduszce lanej stalowej, która spoczywa na wałkach, gdy pilony są nieruchome, lub też są przytwierdzone do głowicy słupa, gdy pilony są wahadłowe (fig. 289 i 290).

Jeżeli łańcuch składa się z kilku części, wtedy nad podporą łańcuchy, położone jeden nad drugim, łączy się odpowiednimi rozłącznikami stalo-

wemi, które trzymają te łańcuchy na należytej odległości, i następnie mogą spoczywać na odlewie stalowym, położonym na walcach lub głowicy pilonu wahadłowego (fig. 289):

W mostach kablowych rozróżnia się dwa zasadnicze wypadki:

a) kable zawieszane przechodzą nad podporami i dalszy ciąg ich tworzy kable kotwicowe (utrzymujące);

b) kable zawieszane kończą się nad podporą, są do podpory lub poduszki przymocowane, kable zaś kotwicowe idą od zakotwienia do podpory,

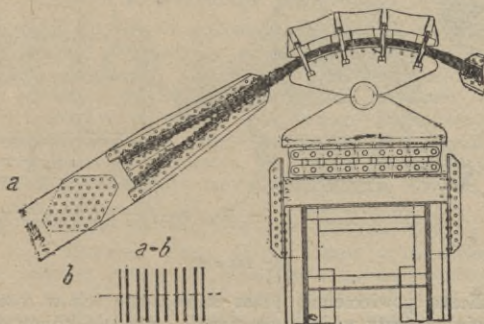
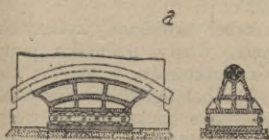


Fig. 290.



b

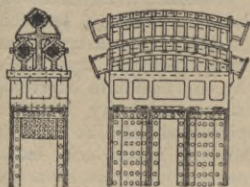


Fig. 291 a, b.

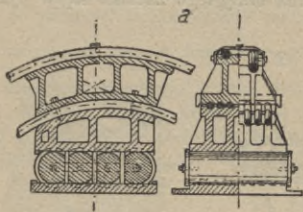


Fig. 292 a, b, c.

przytem ilość kabli kotwicowych może być taka sama, jak kabli zawieszonych lub też większa.

W pierwszym wypadku na pilonie nieruchomym na walcach spoczywa poduszka stalowa, której wierzchnia część jest kołista ze żłobkiem, w którym leży kabel (fig. 291 a). Promień koła osi żłobka powinien odpowiadać średnicy kabla i winien być dość duży, by wygięty kabel nie był narażony na znaczne dodatkowe naprężenia od zgięcia. Jeżeli pilony są wahadłowe, wtedy poduszki bezpośrednio są przytwierdzone do głowicy pilonów (fig. 291 b). W zależności od ilości kabli, przerzuconych przez pilony, poduszkom nadaje się odpowiedni kształt (fig. 292 a).

Zakończenie kabli i ich zamocowanie. Kable zakończają się główkami ze stali najlepszego gatunku, które mają kształt cylindryczny lub też stożkowy z otworami stożkowymi (fig. 292 b). Kabel jest rozszczepiony szcztkowato, by każdy drut był oddzielnie. Drutom przywraca się

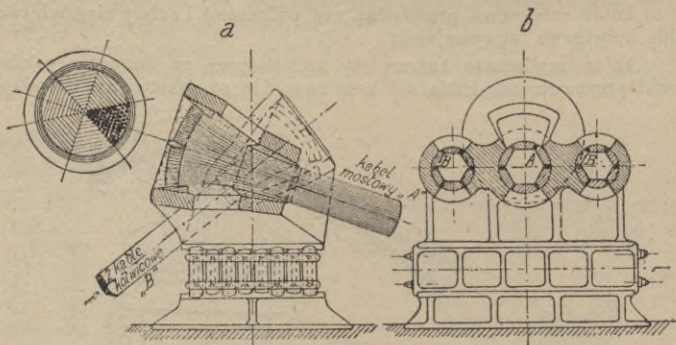


Fig. 293 a, b.

czystą metaliczną powierzchnię przez zamocowanie ich w roztworze kwasu solnego. Pomiedzy druty wkłada się cienkie gwoździe klinowate i wszystko zalewa się stopem z ołowiu, cyny i antymonu. Wytworzona głowka o kształcie klina okrągłego zaciska się w cylindrze (fig. 292 c).

Jeżeli kabel zawieszony kończy się nad pilonem, wtedy poduszka musi mieć otwór stożkowy, w którym zatwierdza się kabel (fig. 293 a). Również w teje poduszce muszą być otwory stożkowe do zatwierdzenia końców kabli kotwicowych (fig. 293 b).

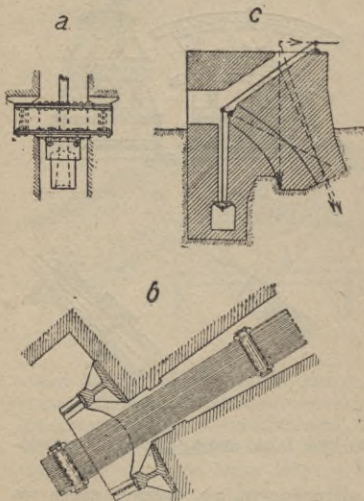


Fig. 294 a, b, c.

Zakotwienie łańcuchów i kabli kotwicowych zwykle jest w murze odpowiedniej wielkości, a zatem i wagi, by pod działaniem naciągu łańcucha kotwicowego nie mogło nastąpić przesunięcie. Mury powinny być dobrze wyłożone, by nie nastąpiło oderwanie się części muru, za który bezpośrednio zaczepiają poduszki lub belki kotwicowe. Miejsca zakotwienia łańcuchów powinny być dostępne, same łańcuchy powinny przechodzić przez kanały dostępne do rewizji i malowania. Tylko w mostach niewielkich można łańcuchy kotwiczne zakładać w beton. Samo ciśnienie, wywołwane naciągiem łańcuchów, oddaje się na specjalne ciosy lub dobrze uzbrojony beton przez poduszki lub płyty stalowe. Łożyska

łańcucha kotwicznego cisną przeważnie na specjalne belki i te ostatnie na łożyska lub płyty, wsparte na ciosach podpór (fig. 294 a i b). Łożysk lub płyt może być dwie lub cztery na każdy łańcuch kotwiczny w zależności od siły w łańcuchu. Połączenie łańcuchów z podszkami powinno być takie, by należycie zabezpieczało końce łańcuchów i kabli od

ewentualnego zginania. Osiąga się to przez stosowanie przegubów cylindrycznych lub kulistych.

W miejscach załamania się łańcuchów kotwicznych w murach powinny być poduszki, by łańcuch cisnął na poduszkę i ta na ciosy muru (fig. 294 c). By zmniejszyć wymiary poduszek, można zakończyć łańcuchy kotwiczne kilku odnogami. Od jednego przechodzić od dwóch do czterech. Może to ułatwić przeniesienie ciśnienia na mur.

## V. Przekroje prętów.

Przy nadawaniu przekrojów prętom należy mieć na uwadze następujące zasady: prety powinny być naogół o przekrojach sztywnych, prętów gibkich z blach płaskich obecnie się nie stosuje. Przekroje powinny być proste i dostępne do nitowania, dawać możliwość dogodnej stopniowej zmiany przekroju w miarę zmiany sił w przecie, oraz łatwego przymocowania jednego pręta do drugiego. Winno się unikać przekrojów z wąskimi głębokimi szparami, niedogodnymi do malowania. W prętach ściskanych promień bezwładności winien być możliwie duży i jednakowy w różnych kierunkach, wysmukłość pręta ściskanego nie powinna przekraczać 150. Najmniejszy wymiar przekroju pręta nie powinien być mniejszy, niż  $\frac{1}{50}$  i w ostateczności  $\frac{1}{60}$  jego długości. Pręty zatem długie z niewielkimi siłami mają zwykle nadmiar przekroju. Wymaganie pewnego minimalnego wymiaru przekroju w zależności od długości pręta dyktuje się koniecznością osiągnięcia pewnej sztywności i unikania silnych drgań prętów w mostach. Używanie zbyt szerokich prętów w płaszczyźnie dźwigarów jest niewskazane ze względu na powstające duże dodatkowe naprężenia wskutek sztywności węzłów. Wysokość pasów  $h$  w zależności od długości  $a$  przedziałów można

przyjmować od  $h = \frac{1}{10} a$  do  $\frac{1}{15} a$ , zaś szerokość prętów kraty (w płaszczyźnie dźwigara) od  $\frac{1}{15}$  do  $\frac{1}{25}$  ich długości. Przekroje prętów kraty dźwigarów powinny być tak zestawiane, aby oś obojętna pręta leżała na osi teoretycznej pręta, na osi siły, i aby środek ciężkości nitów, którymi pręt przynitowuje się do pasa, również leżał możliwie na osi teoretycznej pręta. Pręty o przekroju symetrycznym względem osi, prostopadłej do płaszczyzny dźwigara i leżącej w płaszczyźnie dźwigara, zadość czynią wyżej wymienionym warunkom.

Przy obliczeniu naprężeń pole przekroju prętów należy brać netto, tj. po odciążeniu z przekroju otworów na nity, przytem należy każdy element danego przekroju przyjmować z największym osłabieniem, chociażby te osłabienia znajdowały się nie w jednym prze-

kroju, a w różnych, lecz oddalonych jeden od drugiego nie więcej, niż na skok nita (fig. 295 a, b, c, d). Przy obliczaniu momentów statycznych dla określenia położenia środków ciężkości, również momentów bezwładności dla określenia wysmukłości pręta i współczynników na wyboczenie prętów ściskanych, przyjmuje się przekroje brutto, tj. bez odciążania dziur na nity.

Pasy. Przekroje pasów stosuje się obecnie: a) jednościankowe — teowe  $\bar{T}$ , b) dwuściankowe — skrzynkowe  $\bar{\Pi}$ ,  $\underline{\Pi}$ , c) w kształcie litery H lub rurowe

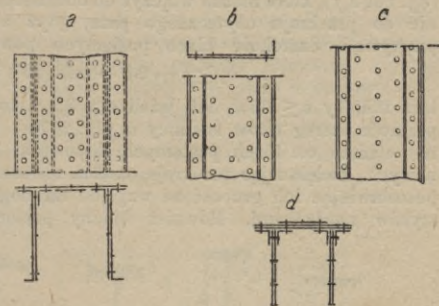


Fig. 295 a, b, c, d.

otwarte z dołu i góry  $\square$   $\square$ , i wreszcie  $d$ ) wielościankowe  $\square$   $\square$ ; ostatnie w mostach wielkich rozpiętości.

Najczęściej stosowane są przekroje pasów teowe i skrzynkowe. Pierwsze stosują do rozpiętości 60 m, przy większej rozpiętości stosują skrzynkowe, które można również stosować i do mniejszych rozpiętości od 25 m. Pierwsze są więcej zwarte, nie wymagają dodatkowej kraty do usztywnienia, gdyż są jednogałęziowe i podlegają jednakowemu nagrzewaniu od działania słońca, zato są mniej sztywne względem osi pionowej i pozwalają na stosowanie kraty niezbyt sztywnej w kierunku prostopadłym do płaszczyzny dźwigara. Przekroje skrzynkowe są sztywniejsze, dają możliwość stosowania kraty odpowiednio sztywnej tak w płaszczyźnie dźwigara, jak i prostopadłej do tej płaszczyzny, wymagają przepon usztywniających, oraz kraty do połączenia blach pionowych, co podnosi nieco współczynnik ustrojowy konstrukcji. Pod działaniem słońca blachy pionowe mogą się niejednakowo

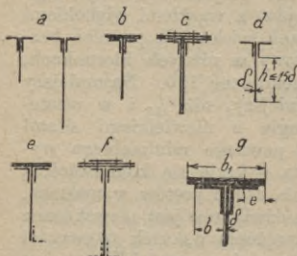


Fig. 296 a, b, c, d, e, f, g.

rozszerzać, co powoduje dodatkowe naprężenie; zewnętrzna powierzchnia ich, przypadająca na jednostkę przekroju, jest większa, niż w przekrojach teowych. Jednak możliwość stosowania sztywniejszych przekrojów prętów kraty i łatwiejszy i lepszy sposób połączenia prętów kraty z pasami jest przyczyną, że naogół przekroje skrzynkowe są częściej używane, niż przekroje teowe. Najmniejszy przekrój teowy, pokazany na fig. 296 a, składa się z blachy pionowej i kątowników. Kątowniki stosuje się od  $80 \times 80 \times 9$ , lepiej od  $90 \times 90 \times 9$  wwyż, a blachy pionowe od 9 mm grubości i więcej, wysokość blachy pionowej

od  $3b + (5-10)$  mm, gdzie  $b$  szerokość boku kątownika, do 600 mm. Zwiększenie przekroju można skutecznie zapomocą blach poziomych i dodatkowych pionowych (fig. 296 b, c). W pasie ściskanym wolna wysokość blachy pionowej poza kątownikami nie powinna przekraczać  $15\delta$ , jeżeli  $\delta$  jest grubością blachy (fig. 296 d); w każdym razie lepiej usztywniać je kątownikami (fig. 296 e, f), które można włączyć do obliczenia momentów bezwładności, lecz nie do przekroju użytecznego pasa, gdyż zwykle koło węzłów trzeba je przerywać. Szerokość blach poziomych powinna się równać (fig. 296 g):

$$b_1 \geq \delta + 2b + \min(25-30) \text{ mm},$$

lecz tak, by  $e \leq 3,5\delta$ , lub jeżeli  $e > 3,5\delta$ , to  $e_1 \leq 65$  mm, by można było postawić szereg nitów średnicy  $d$  (fig. 297 a). Blachy pionowe powinny być nie cieńsze od blach poziomych, kątowniki zaś nie cieńsze od blach pionowych. Zwiększając przekroje, można również zwiększać boki kątowników, pozostawiając ich grubość ze względu na dogodność sztukowania i krycia styków nakładkami. Również blachy poziome można stosować o różnej



Fig. 297 a. Fig. 297 b. Fig. 298. Fig. 299. Fig. 300.

szerokości, lecz o jednakowej grubości (fig. 296 c, 296 f). Dodatkowe blachy pionowe (fig. 297 b) należy stosować o takiej grubości, jak kątowniki pasowe ze względu na dogodność połączeń z pasami poprzecznic i wiatrownic. Szerokość tych blach lepiej brać od 5 do 10 mm mniejszą, niż wolna wysokość  $h_1$  blachy pionowej (fig. 297). Dodając kątowniki zewnętrzne od dołu do blach poziomych, zwiększamy moment bezwładności względem osi



pionowej, co ma znaczenie w pasach ściskanych (fig. 298). Pod te kątowniki należy dawać podkładki (fig. 299), które w węzłach przechodzą w blachy fasonowe do połączenia z pasami tężników podłużnych (fig. 300), o ile tężniki te winny mieć miejsce. Podkładki te można wliczać do użytecznego przekroju pasa, gdyż zawsze jest możliwość przekrycia ich styku z blachami węzłowymi.

Przekroje dwusciankowe pasów rozciąganych pokazane są na fig. 301, zaś pasów ściskanych na fig. 302. Kątowniki stosuje się od  $90 \times 90 \times 9$

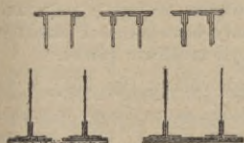


Fig. 301.

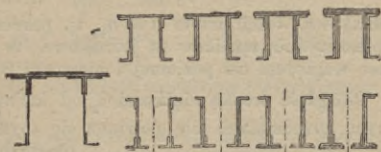


Fig. 302.

wzwyż do największych w zależności od rozpiętości, a zatem od siły panującej w pasach; grubość kątowników nie mniejsza od grubości blach pionowych. Grubość kątowników na długości pasa zwykle się nie zmienia ze względu na dogodność stykowania, szerokość boków może się zwiększać. Nie wykluczona jest i zmiana grubości, lecz wtedy conajmniej około 3 mm, by tej grubości podkładkami wyrównać grubość boków kątowników na styku do przekrycia nakładką. Blachy pionowe grubości od 9 mm i więcej do 15—19 mm. Wysokość blach od 300—900 mm i więcej przy dużych rozpiętościach. Wysokość  $h$  można przyjąć według Schapera  $h = \left[ L - \frac{L^2}{400} \right] \text{cm}$ , jeżeli  $L$  jest rozpiętością w metrach. Odległość  $b$  pomiędzy blachami pionowymi nie mniej, niż 200 mm, choć lepiej 250 mm, ze względu na dogodność nitowania i do 800 mm, lub według Schapera:

a) dla małych i średnich rozpiętości  $b = (h - 0,1 L) \text{cm}$ ,

b) dla dużych rozpiętości  $b = (h - 0,2 L) \text{cm}$  ( $h$  w cm,  $L$  w metrach).

Ilość blach pionowych w zależności od siły w pasie może dochodzić do 4—5 w każdej ścianie i zależy od ogólnej grubości nitowania. Ogólna grubość nie powinna przekraczać  $4,5 d$ , a lepiej  $4 d$ , gdzie  $d$  średnica nita. Blachy poziome używa się takiej szerokości, by pokrywały kątowniki pasów i się nieco zwieszały. Przeto  $b_2 = b + 2 b_1 + 2 \delta + (25-30) \text{mm}$ ; inne warunki przestrzega się te same, co w przekrojach jednościankowych.

Gdyby blachy poziome wypadały zbyt szerokie, można je dawać z dwóch, węższej i szerszej, składanych naprzemian (fig. 303).



Fig. 303.

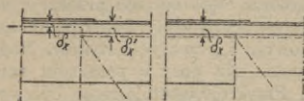


Fig. 304.

Ponieważ wzrastanie sił w pasach powstaje wskutek składowych rzutu prętów kraty na pasy, przeto należy większość przekroju pasów zśrodkowywać w blachach pionowych i kątownikach pasowych, nie zaś w blachach poziomych, by tym sposobem blachy pionowe nie otrzymywały zbyt znacznych dodatkowych naprężeń w pobliżu węzłów. Blachy dodatkowe pionowe i poziome między kątownikami lepiej dawać o tej samej

grubości, co grubość kątowników, gdyż to ułatwia połączenie poprzecznic i rozpórek z pasami. Kątowniki, usztywniające blachy pionowe, można włączać do przekroju, jeżeli takowe się nie przerywają w węzłach, lub jeżeli choć przerwane są, lecz zamienione przez inne elementy; kątowniki te powinny być włączane do momentu bezwładności. Stosunek wysokości blach  $h$  do

ich rozstawu powinien być taki, by wysmukłość pręta pasa  $\frac{a}{r}$  w płaszczyznach pionowej i  $\frac{a_1}{r_1}$  w płaszczyźnie osi pasów była mniej więcej

jednakową. Jeżeli przeto  $a = a_1$ , tj. przedział dźwigara w jego płaszczyźnie i płaszczyźnie teźników są jednakowe, to momenty bezwładności przekroju pasa względem osi poziomej i pionowej winny być możliwie równe.

Odległość środka ciężkości  $\delta_x$  od krawędzi kątowników (fig. 304), w różnych przedziałach nie powinna się zbytnio różnić, szczególnie w pasach prostych; różnica  $\delta'_x - \delta_x$  tutaj nie powinna przekraczać 3% wysokości blachy pionowej. W pasach załamanych różnica ta może być i większa, gdyż tutaj zawsze jest możliwość odpowiednio osie obojętne przekrojów pasów, schodzących się w węzle, skierować do węzła. Przy różnicy w odległości środków ciężkości od kątowników w pasach prostych najlepiej brać średnią odległość i takową przyjąć za oś pasa prostego.

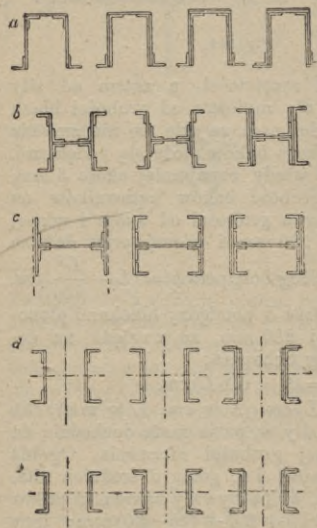


Fig. 305 a, b, c, d, e.

Przekroje w kształcie litery H (fig. 305 b, c), stosowane są obecnie rzadziej niż przekroje skrzynkowe do pasów górnych, gdyż, mając tą zaletę, że położenie środka ciężkości ich przekroju się nie zmienia, sprawiają pewne trudności do połączeń kraty, belek poprzecznych, wnitowywanych między pasami, wiatrownic i przekrycia styków. Nadają się do pasów środkowych i są więcej sztywne niż pasy o przekroju rurowym otwartym z dołu i z góry (fig. 305 d). Przekroje ostatnie mogą być wytworzone z dwóch korytek; wzmocnienie przekroju można wykonać donitowaniem blach pionowych do ścianki korytka (fig. 305 c). Co się tyczy wzmocnienia boków korytek zapomocą płaskowników, to takowe mogłyby mieć miejsce tylko przy bokach o szerokości conajmniej 120 mm, gdyż to jest najmniejsza szerokość, na której można postawić dwa szeregi nitów w szachownicy. Blach, wziętych na jeden szereg nitów, nie należy stosować w konstrukcjach mostowych.

Przekroje wielościankowe stosują się tylko w mostach bardzo dużych rozpiętości, gdy przekroje przekraczają kilka tysięcy  $cm^2$ : most w Queensboro

—  $7224 \text{ cm}^2$ , w Quebec —  $5038 \text{ cm}^2$ , most przez Mississippi w St. Louis —  $4300 \text{ cm}^2$ .  
W moście Fortskim pasy są o przekroju rurowym okrągłym o średnicy  $3 \text{ m}$ .

Wszystkie przekroje dwu- i wielościenne wymagają usztywnienia, wykonanego pod postacią przepon, szczególnie jeżeli należą do prętów ściskanych, by przekroje prostokątne się nie zniekształciły na inne. Przepony takie w prętach ściskanych dają się w każdym węźle obowiązkowo i co  $2,5 - 3 \text{ m}$ , w prętach rozciąganych w każdym węźle, zaś między węzłami, jeżeli odległość od węzła do węzła przekracza  $5 - 6 \text{ m}$ . Przepony stawia się albo prostopadle do osi pasa (fig. 306), albo też prostopadle do blach pionowych i pochylone do osi (fig. 307), w celu uniknięcia osłabienia blach pionowych dodatkowymi nitami dla przepon.

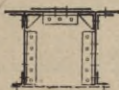


Fig. 306.



Fig. 307.

Pręty kraty dźwigarów. Przekroje prętów kraty zależą od przekroju pasów. Przy pasach jednościankowych przekroje mogą być według fig. 308 *a, b, c, d, e*. Przekrój 308 *d* nadaje się dobrze do prętów rozciąganych, zadość czyni warunkom zbiegu osi obojętnej i środka ciężkości nitów z osią pręta. Z powodu małego momentu bezwładności względem osi  $x_0$  słabo się nadaje do prętów ściskanych. Przekrój krzyżowy (fig. 308 *f*) dobrze się nadaje do prętów ściskanych, jako najsztywniejszy z przekrojów, złożonych z dwóch kątowników, oś obojętnej i oś nitów leżą na osi prętów; do prętów rozciąganych mniej zdalny, gdyż do połączenia kątowników wymaga więcej materiału. Przekrój teowy (fig. 308 *g*) zajmuje ostatnie miejsce

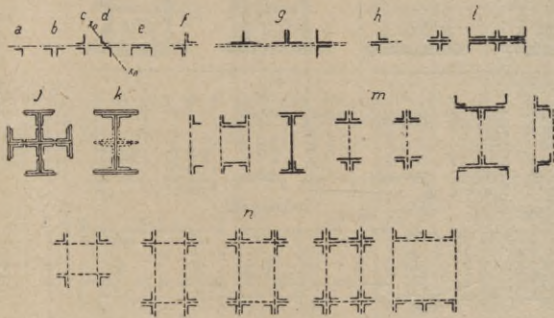


Fig. 308.



Fig. 309.

jako pręt rozciągany, z powodu, że oś nitów nie leży ani na osi obojętnej, ani na osi pręta. Do prętów ściskanych stosowany ze względu na dość duży moment bezwładności. Jako zwiększenie przekroju można do przekroju krzyżowego dodać blachę (fig. 308 *h* lub fig. 308 *i*), jednak przynitowanie blach do pasów w ostatnim wypadku jest dość trudne i może być dokonane przez zwiększenie liczby nitów w kątownikach. Przekrój według fig. 308 *j* może być stosowany, gdy chodzi o sztywność w kierunku prostopadłym do płaszczyzny dźwigara, np. w mostach otwartych, by utrzymać pas górny w jego płaszczyźnie. Wtedy można stosować i przekrój dwuteowy wzmocniony (fig. 308 *k*).

Przy pasach dwuściankowych przekroje krzyżulców i słupków mogą być według fig. 308 *m* i fig. 308 *n*. W przekrojach złożonych z kątowników, które mogą być przynitowane do pasów tylko jednym bokiem, należy stosować kątowniki nierównoboczne, przytem bok szerszy winien być równoległy do

płaszczyzny dźwigara. Łącząc kątownik z pasem jednym tylko bokiem w pobliżu węzła, otrzymujemy zwiększone naprężenia w kątowniku. Przeto im większy jest stosunek boku, który jest przynitowany do nieprzynitowanego, tem mniejsze jest to dodatkowe naprężenie. Kątowniki zewnętrzne (fig. 309),

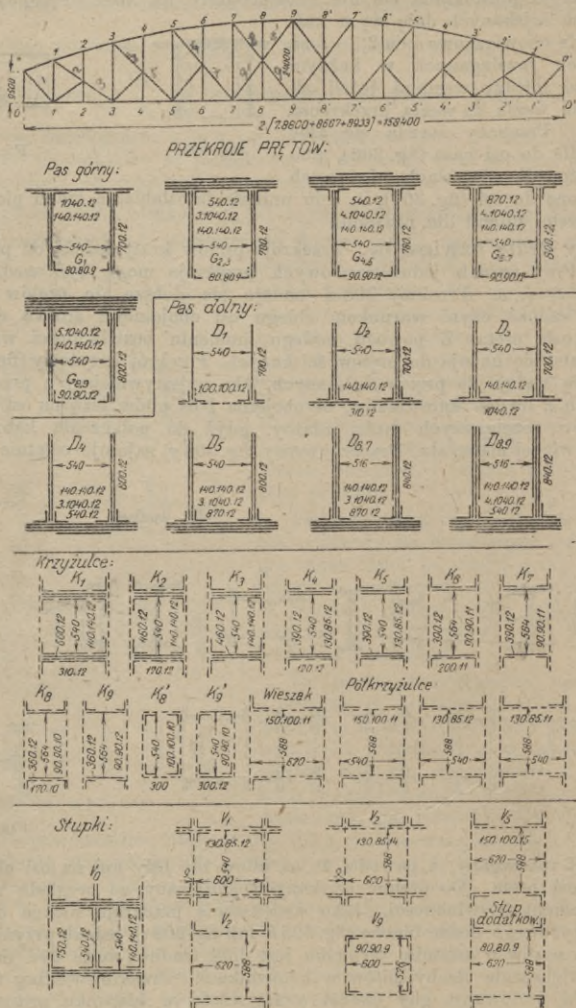


Fig. 310.

które można przynitować obydwoima bokami, można stosować o bokach dużych i jednakowych, mając na uwadze, że kątownik taki może być przynitowany do pasa czterema szeregami nitów po cztery nity w szeregu. Co się tyczy momentów bezwładności przekroju prętów kraty, to mogą one być niejednakowe względem osi symetrii, leżącej w płaszczyźnie dźwigara i prosto-

padłej do płaszczyzny dźwigara. Ten moment powinien być większy, gdzie teoretyczna długość wybaczalna jest większa; przeważnie długość ta jest większa w kierunku poprzecznym mostu.

Grubość blach należy brać taką samą, jak blach pionowych pasów, jeżeli stosuje się przynitowywanie kraty zapomocą wstawek fasonowych. Jeżeli stosuje się nakładki fasonowe, to grubość powinna być taka jak nakładki, które zwykle są grubości kątowników pasowych. Jeżeli blachę przynitowuje

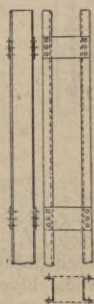


Fig. 311.

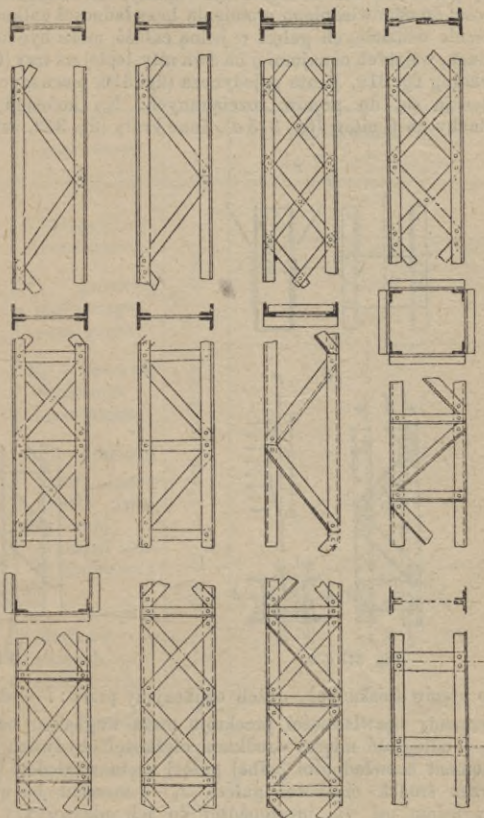


Fig. 312.

się przez proste nałożenie na drugą blachę (w nakładkę), wtedy grubość może być dowolna, byleby tylko można ją było przynitować odpowiednią ilością nitów (nie więcej niż cztery lub pięć nitów w jednym szeregu w kierunku działania siły).

By przekrój prostokątny pręta zachował swój kształt, należy co pewną odległość dawać przepony: w prętach ściskanych mniej więcej co 3 m, w prętach zaś rozciąganych nieco rzadziej. Grubość blachy dla przepon od 7 mm wzwyż w zależności od przekroju. W mostach o niezbyt dużych rozpiętościach do 100—120 m można stosować grubość 8—9 mm. Na fig. 310 pokazany jest schemat dźwigara o rozpiętości 158,4 m i przekroje prętów.

**Krata prętów.** Ponieważ przekroje kraty składają się z oddzielnych gałęzi, przeto gałęzie te muszą być odpowiednio połączone, by tworzyły jedną całość. Szczególniej krata taka ma znaczenie dla prętów ściskanych. Musi być ona takich wymiarów, aby pręt taki mógł pracować jako pręt jednolity, by można było przyjmować moment bezwładności całego przekroju względem jego osi symetrii, a nie oddzielnych części. Wolna długość oddzielnej gałęzi winna być taka, by stosunek tej długości do najmniejszego jej promienia bezwładności był większy, niż stosunek całej wybaczalnej długości do odpowiedniego promienia bezwładności całkowitego przekroju. Połączenie oddzielnych gałęzi w jedną całość może być uskutecznione zapomocą blach, wziętych conajmniej na dwa nity, lepiej na trzy (fig. 311). Krata może być według fig. 312. Krata pojedyncza (fig. 312, pierwszych ośm) z płaskowników stosuje się do prętów rozciąganych. Na końcach prętów należy dawać blachy na 6 nitów (fig. 313 a). Inne kraty (fig. 312, cztery ostatnie) nadają się

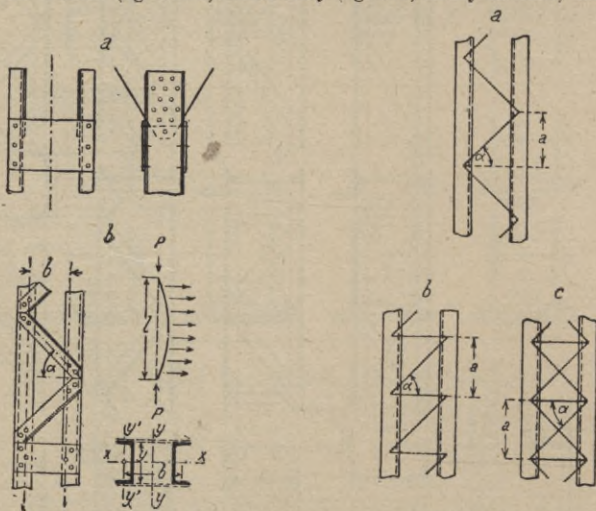


Fig. 313 a, b.

Fig. 314 a, b, c.

do prętów ściskanych. Jeżeli oznaczymy przez:  $l$  — długość pręta,  $I_x$  i  $I_y$  — momenty bezwładności przekroju pręta względem osi  $xx$  i  $yy$  (fig. 313 b),  $b$  — odległość między środkami ciężkości obydwóch gałęzi przekroju,  $I_1$  — moment bezwładności jednej gałęzi pręta względem osi  $y'y'$ , przechodzącej przez środek ciężkości gałęzi,  $I_2$  — moment bezwładności dwóch blach względem osi  $yy$ , prostopadłej do ich płaszczyzny i przechodzącej przez środek ciężkości  $I_2 = 2 \frac{\delta c^3}{12}$ ,  $\delta$  — grubość blachy,  $c$  — szerokość wzdłuż pręta, przez  $\alpha$  — kąty pochylenia krzyżulców kraty, jak to pokazane na fig. 314 a, b, c, przez  $F$  — przekrój kraty, to mamy dla połączeń blachami wzory (według Timoszenki):

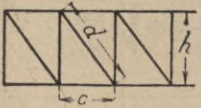
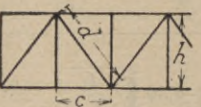
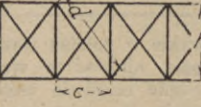
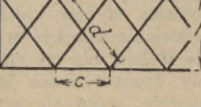
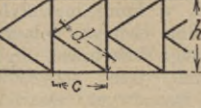
$$\lambda = -\frac{I_1}{I_2} b + \sqrt{\left(\frac{I_1}{I_2} b\right)^2 + 2,44 l^2 \frac{I_1}{I_y} \left(\frac{I_y}{I_x} - 1\right)} \quad \text{powinno być } I_y > I_x,$$

$$F = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha l^2 \left(\frac{I_y}{I_x} - 1\right)}{1 + 2 \cos^3 \alpha I_y \pi^2} \dots \dots \dots \text{ dla kraty fig. 175 } I_y > I_x,$$

$$F = \frac{1 + 2 \cos^3 \alpha}{4 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \cdot \frac{I_y \pi^2}{l^2 \left( \frac{I_y}{I_x} - 1 \right)} \dots \dots \dots \text{ dla kraty fig. 176 } I_y > I_x,$$

$$F = \frac{1}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \cdot \frac{I_y \pi^2}{l^2 \left( \frac{I_y}{I_x} - 1 \right)} \dots \dots \dots \text{ dla kraty fig. 177 } I_y > I_x.$$


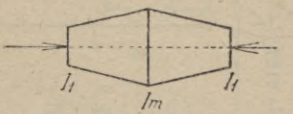
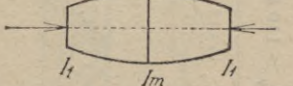
Tablica 8.

Rodzaj kraty w przecie	Znakowanie	Siła wyoboczeniowa $P_{\omega} = [F_1 + F_2] \cdot k_{\omega}$
	<p><math>l</math> - długość wyoboczeniowa.</p> <p><math>F_1</math> - przekrój mniejszego pasa pręta.</p>	$\gamma = \sqrt{1 + k_{\omega}^0 \frac{F_1 + F_2}{E \cdot c \cdot h^2} \left[ \frac{d^3}{F'_d} + \frac{h^3}{F'_v} \right]}$
	<p><math>F_2</math> - przekrój większego pasa pręta.</p> <p><math>F_d</math> - przekrój kraty (przy kracie dwusciennej: przekrój kraty obu ścian).</p>	$\gamma = \sqrt{1 + k_{\omega}^0 \frac{F_1 + F_2}{E \cdot c \cdot h^2} \cdot \frac{d^3}{F'_d}}$
	<p><math>F_v</math> - przekrój słupków w kratkach prostokątnych.</p>	$\gamma = \sqrt{1 + k_{\omega}^0 \frac{F_1 + F_2}{E \cdot c \cdot h^2} \cdot \frac{d^3}{F'_d}}$
	<p><math>i_y</math> - promień bezwładności względem osi prostopadłej do płaszczyzny kraty.</p>	$\gamma = \sqrt{1 + 2k_{\omega}^0 \frac{F_1 + F_2}{\omega E \cdot c \cdot h^2} \cdot \frac{d^3}{F'_d}}$
	<p><math>k_{\omega}^0</math> - naprężenie wyoboczeniowe według wzoru Eulera - Tetmajera przy wysmukłości pręta. <math>l/i_y</math> w <math>t/cm^2</math>.</p>	$\gamma = \sqrt{1 + 2k_{\omega}^0 \frac{F_1 + F_2}{\omega E \cdot c \cdot h^2} \cdot \frac{d^3}{F'_d}}$

Ponieważ pręt kraty może być rozciągany i ściskany, przeto powinno się przekrój otrzymany zwiększyć ze względu na możliwość wybooczenia. Zatem przyjęty przekrój  $F_1$  winien być  $\geq \frac{F}{\varphi}$ , jeżeli  $\varphi$  jest współczynnikiem wybooczeniowym.

Pręty kratowe ściskane można obliczać według wzorów Bleicha (tablica 8, str. 915).

Dla prętów o przekroju zmiennym można przy obliczeniu tych prętów na ściskanie korzystać ze wzorów Bleicha. Obliczeniowy moment bezwładności  $I_0 = \mu \cdot I_m$ . Współczynnik  $\mu$  i moment bezwładności  $I_m$  w przekrojach pręta są widoczne z tabeli:

Kształt pręta	$I_0 = \mu \cdot I_m$
	$= 0,20 + 0,80 \sqrt[3]{\left(\frac{I_1}{I_m}\right)^2}$
	$= 0,34 + 0,66 \sqrt{\frac{I_1}{I_m}}$
	$= 0,61 + 0,39 \sqrt{\frac{I_1}{I_m}}$

**Styki pasów.** Styki elementów pasa daje się zwykle w pobliżu węzła i grupuje tak, by można było oddzielne części pasa nitować w warsztatach, na miejsce budowy mostu dostarczać w stanie możliwie znitowanym, na miejscu dokonywać jak najmniej nitowania. To daje pewną ekonomję, gdyż nitowanie w warsztatach kosztuje zwykle mniej, niż na miejscu robót i przyspiesza budowę. Zresztą grupowanie styków zależy również i od sposobu zestawienia mostu. Jeżeli zestawienie ma być wykonane na zwykłych rusztowaniach, wtedy położenie styków nie ma znaczenia. Przy montowaniu jednak bez rusztowań, gdy dźwigar zwisa jak



Fig. 315.

wspornik, odpowiednie rozłożenie styków elementów prętów ma duże znaczenie. W tym wypadku styki winny być grupowane tak, by najłatwiej można było jedną część dołączać do drugiej, by elementy danego pręta nie tworzyły szczelin głębokich, w które musiałyby wchodzić odpowiednie elementy dołączonego pręta, gdyż zasuwanie jest zwykle trudne i wymaga dużo czasu. Styki blach pionowych przeważnie są około węzła, szczególnie, jeżeli połączenie kraty dźwigara z pasami wykonywa się zapomocą fasonowych wstawek. Styki tych blach kryjemy zwykle dwiema nakładkami. Jeżeli przytem ścianka pionowa składa się z kilku blach, styk robi się stopniowy (fig. 315). Kątownicy pasowe mają styki albo wszystkie w jednym przekroju, albo lepiej



w różnych, tj. kątowniki wewnętrzne w jednym, zewnętrzne w drugim przekroju. Odległość między stykami winna wynosić pół długości nakładki lub więcej. Również odległość między stykami blach pionowych i kątowników przyjmuje się równą co najmniej połowie długości nakładki.

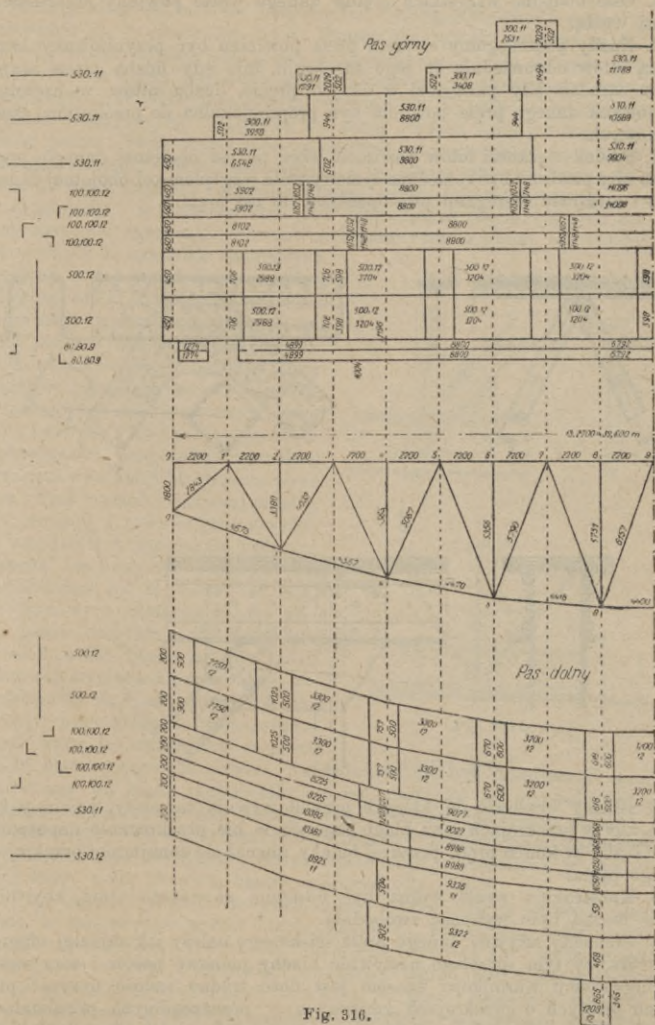


Fig. 316.

Blachy poziome mają styki stopniowe i zwykle kryje się je jedną nakładką zewnętrzną. Styki tych blach mogą nie być uzależnione od styków blach pionowych i kątowników pasów, choć dąży się do tego, by dwa bezpośrednio przylegające do siebie elementy nie miały styku w jednym przekroju. Na wykresie materiału pasów (fig. 316) widać, jak są rozłożone styki różnych elementów.

## VI. Projektowanie węzłów.

Przy prawidłowym projektowaniu węzłów należy kierować się następującymi zasadami:

1. Ośie obojętne wszystkich prętów danego węzła powinny przecinać się na osi węzła.

2. Każdy poszczególny element pręta powinien być przynitowany swoją ilością nitów odpowiednio do jego przekroju, lub, gdy liczba nitów stawia się na zasadzie siły panującej w danym pręcie, liczba nitów w częściach składowych danego pręta powinna być proporcjonalna do przekrojów części składowych.

3. Środek ciężkości nitów powinien leżeć na osi obojętnej danego pręta, przeto nity powinny być rozłożone symetrycznie względem osi obojętnej danego pręta i możliwie szeregami prostopadłymi do osi pręta.

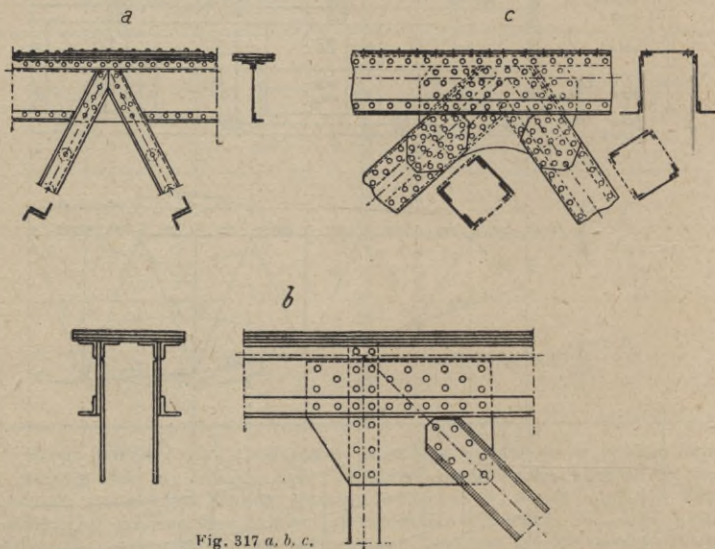


Fig. 317 a, b, c.

4. Blachy węzłowe, do których przynitowuje się pręty, powinny być takie, aby w przekrojach tych blach naprężenie nie przekraczało dopuszczalnego i aby w końcu pręta przekrój blachy równał się conajmniej przekrojowi danego pręta.

5. Konstrukcja węzła winna być dostępna ze wszystkich stron, aby nitowanie można było wykonać swobodnie.

6. Elementy sztywne danego pręta ściskanego należy jak najdalej ciągnąć do węzła, by tym sposobem usztywnić blachy pionowe pasów i sam węzeł.

Pierwszemu warunkowi czasem jest dość trudno zadość uczynić przy pasach prostych o przekrojach zmiennych w poszczególnych przedziałach, co najczęściej ma miejsce. W tym wypadku dążyć należy, aby odległość pomiędzy środkami ciężkości pasów dwóch sąsiednich przedziałów była jak najmniejsza i nie przekraczała np. 3% wysokości blachy pionowej pasa. Za oś pasa prostego przyjmuje się zwykle średnią arytmetyczną odległości środków ciężkości przekrojów pasa od krawędzi kątowników pasowych. W pasach łamanych różnica między odległościami środków ciężkości od krawędzi kątowników nie ma wielkiego znaczenia, choć i tutaj należy unikać zbyt

różnic. W pasach łamanych osie obojętne tych pasów kieruje się wzdłuż osi prętów.

Przymocowanie prętów kraty do pasów może być wykonane w następujący sposób:

1. Pręty kraty nakłada się bezpośrednio na blachy pionowe pasów i przynitowuje się do blach (fig. 317 a). Sposób ten jednak stosować można stosunkowo rzadko i tylko wtedy, gdy do przynitowania pręta do pasa potrzeba niewielu nitów i gdy wysokość blachy pionowej jest stosunkowo duża.

2. Pręty kraty dźwigara przynitowuje się do pasa za pośrednictwem nakładek kształtowych. Nakładki te mają zwykle taką grubość, jak kątowniki pasów. Pręty kraty albo nakładamy na te nakładki i do nich bezpośrednio nitujemy nitami jednociętymi, o ile liczba nitów niezbędna do przynitowania pręta daje się rozmieścić, licząc cztery nity w szeregu w kierunku siły działającej i w ostateczności pięć pracujących (fig. 317 b), lub też elementy sztywne, kątowniki, ceowniki nakładamy na nakładki, zaś blachy damy w dotyk do nakładek fasonowych i łączymy z takowymi zapomocą nakładek (fig. 317 c). W ostatnim wypadku blachy kraty winny mieć grubość nakładek fasonowych, zatem grubość kątowników pasowych. Połączenie kraty dźwigarów z pasami zapomocą nakładek fasonowych stosuje się zwykle przy pasach prostych i niewielkich przedziałach dźwigarów i przy stałej lub rzadkiej zmienności wysokości blach pionowych pasów. Przy pasach o krzywej ciągłej, a nie łamanej, i również przy niewielkich przedziałach stosowanie połączeń zapomocą fasonowych nakładek jest racjonalniejsze, niż zapomocą tak zwanych fasonowych wstawek. Blachy pionowe pasów otrzymuje się mniej pocięte na kawałki. Stosowanie nakładek fasonowych wymaga odpowiedniego ich przynitowania do blach pionowych pasów, o ile nity, które przynitowane są pręty kraty, rozmieszczone są poza obrębem blach pionowych pasów. Nakładka winna być dostatecznie mocno przynitowana do blach pionowych, by nie nastąpiło jej przesunięcie pod działaniem wypadkowej siły prętów kraty. Praktycznie można przyjąć, że liczba nitów, przytwierdzająca nakładkę do blach pionowych pasa poza prętami kraty, powinna być co najmniej równa ilości nitów, rozłożonych w nakładce i przecie kraty poza obrębem blachy pionowej (fig. 318 a).

3. Pręty kraty dźwigarów przytwierdzamy do fasonowych wstawek pasów. Wstawki te leżą w płaszczyźnie blach pionowych, zamieniając takowe w węzłach. Blachy pionowe, nie dochodząc do węzła, przerywa się i na ich miejsce daje fasonowe wstawki o kształcie i wymiarach takich, aby odpowiednio i racjonalnie przynitować pręty kraty dźwigara do pasa i następnie wstawki te łączy się z blachami pionowymi zapomocą nakładek, jak zwykle styki blach pionowych (fig. 318 c). Przynitowanie prętów kraty do blach węzłowych jest takie same, jak i do nakładek fasonowych, tj. albo nakłada się pręt na blachę węzłową i przynitowuje się nitami jednociętymi (fig. 318 c), lub też blacha pręta dochodzi w dotyk do blachy węzłowej i może być połączona nakładkami (fig. 318 b).

W zależności od przekroju pręta kraty i ilości blach pionowych ilość wstawek fasonowych w danym węźle może być różna. Może być taka,

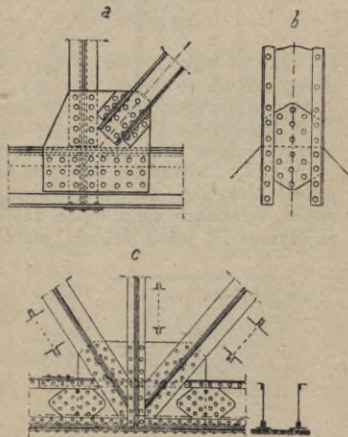


Fig. 318 a. b. c.

jaka jest ilość blach pionowych pasa, lub może być mniejsza lub nawet większa. W ostatnim wypadku oczywiście otrzymuje się już dodatkowe blachy węzłowe w postaci nakładek. W dźwigarach o pasach łamanych zwykle blachy pionowe pasa łamanego w węzłach zamienia się wstawkami fasonowymi, a to ze względu na dogodność konstrukcji. Elementy sztywne

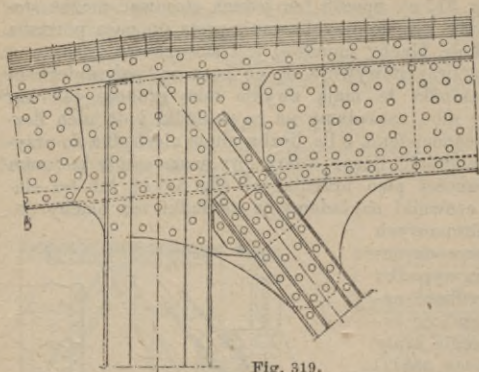


Fig. 319.

Węzły zbieżne na podporze. Ustrój węzłów tych właściwie prawie niczem się nie różni od węzłów pośrednich dźwigara. Blachy pionowe pasów, schodzące się w węzle, zamienia się zwykle wstawkami fasonowymi pojedynczymi, jeżeli ścianki pionowe składają się z blach pojedynczych

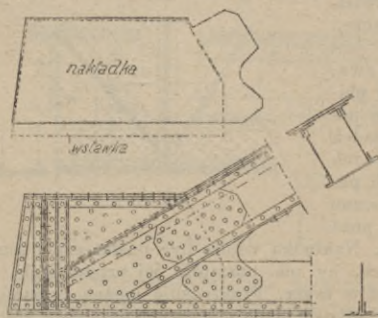


Fig. 320.

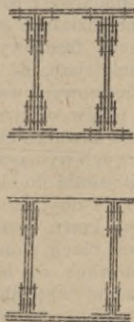


Fig. 321 a, b.

lub podwójnymi, jeżeli ścianki są podwójne. Przy ściankach, składających się z większej ilości blach pionowych, odpowiednio mogłoby być i więcej wstawek fasonowych. Ponieważ węzeł ten jako podporowy powinien być szczególnie sztywny, przeto przy pojedynczych blachach pionowych oprócz wstawek fasonowych zwykle daje się jeszcze i nakładki fasonowe (fig. 320). Wysokość blach pionowych w węzle podporowym powinna być nie mniejsza od wysokości belki poprzecznej na podporze i równa około 0,02 rozpiętości dźwigara. Ilość blach pionowych zależy tutaj od siły poprzecznej na podporze, zatem od reakcji podpory. Naprężenie w blachach tych na ścinanie nie powinno przekraczać dopuszczalnego. Również naprężenie w nitach kątowników pasowych powinno zadość czynić warunkom wytrzymałości tych nitów na ścinanie i zgniatanie (por. str. 885) i dlatego też często tutaj należy zmniejszać skok nitów albo też stosować nity czterocięte (fig. 321 a, b). Oprócz sprawdzania ścianek

na ścinanie należy węzeł podporowy sprawdzać również i na zginanie w przekroju, gdzie wysokość blach pionowych tego węzła (fig. 320) równa się sumie wysokości blach pionowych pasów zbieżnych. Blachy poziome częściowo odginają się tutaj i nachodzą na dodatkowe kątowniki (fig. 320), częściowo zaś wycięte wchodzą w środek przekroju, tworząc silną przepone,

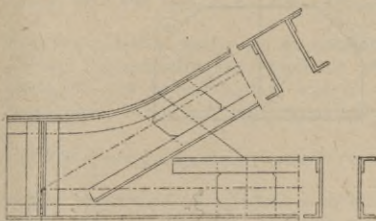


Fig. 322.

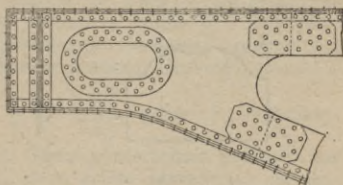


Fig. 323.

steżającą węzeł podporowy. Na osi belki poprzecznej zwykle też daje się przepone pionową z wycięciem pośrodku, by mieć dostęp do środka węzła. Jeżeli pasy schodzą się pod kątem niewielkim, wtedy zwykle kątowniki pasa krzywego odginają się i przechodzą w poziome wraz z blachami, które do nich są przynitowane (fig. 322). Przy wydłużonych tych węzłach należy stosować okna dla możliwości nitowania, oraz malowania (fig. 323).

Węzły wewnętrzne (fig. 324—326) dźwigarów konstruuje się tak samo, jak węzły zewnętrzne. Przekroje krzyżujących się prętów daje się zwykle takie, że jeden pręt albo swobodnie przechodzi przez drugi (fig. 109), albo też element zewnętrzny jednego i element wewnętrzny drugiego (zwykle blacha) leżą w jednej płaszczyźnie i wtedy blachy te zamienia się wstawkami fasonowymi, z którymi łączy się zapomocą nakładek. Również trzeba sto-

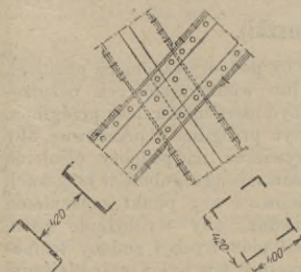


Fig. 324.

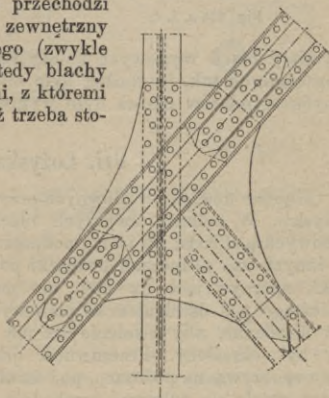


Fig. 325.

sować fasonowe wstawki i w tym wypadku, gdy pręt jeden może swobodnie przechodzić przez drugi, lecz szerokość pręta, do którego trzeba przymocować drugi pręt, jest niedostateczna (fig. 325).

Tak wstawki fasonowe jak i nakładki mogą mieć boki o liniach prostych (fig. 326 a), lub też o liniach prostych i krzywych (fig. 326 b i 326 c). Drugi kształt jest nieco trudniejszy w wykonaniu, lecz jest ładniejszy i przeto w mostach miejskich powinien być stosowany. Kształt blachom węzłowym należy nadawać taki, aby w walcowniach mogły być wycinane nożycami, zatem kąty zewnętrzne  $\alpha$  powinny być nieco większe od  $180^\circ$  (fig. 327 a). Kątów mniejszych od  $180^\circ$ , wklęsłych należy naogół unikać i dawać je wtedy, gdy to

jest konieczne, np. w węzłach podporowych. Nie dotyczy to blach z wycięciami krzywymi, choć i te przed wycięciem powinny zadość czynić warunkowi powyższemu, tj. by kąty zewnętrzne były nie mniejsze od  $180^\circ$  (fig. 327).

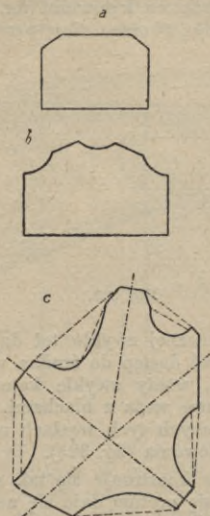


Fig. 326 a, b, c.

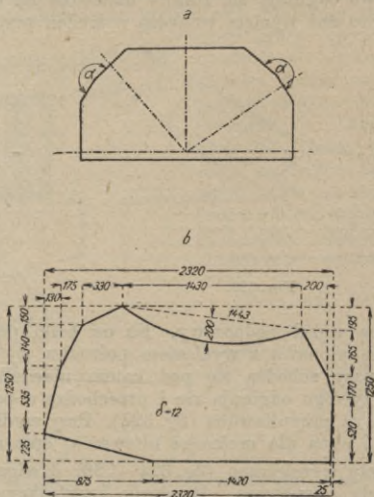


Fig. 327 a, b.

Wymiary blach węzłowych należy dawać nazewnątrz według spórzędnych prostopadłych tak, by można było obliczyć pole blachy, oraz by na zasadzie danych wymiarów można było wykreślić blachę (fig. 327 b).

## VII. Łożyska (poduszki).

Ciśnienie dźwigarów głównych przenosi się na podpory zapomocą poduszek (łożysk<sup>1</sup>). W belkach zwykłych rozciętych lub wieloprześłowych bezprzegubowych poduszka na jednej podporze może być nieruchoma, lecz przegibna, na innych zaś podporach poduszki powinny być przegibne i przesuwne, aby belki, spoczywające na nich, nie mogły wywierać na podpory ciśnienia poziomego pod działaniem sił pionowych. Stosowanie przegubów w łożyskach jest niezbędne, aby ciśnienie na nie było osiowe i aby punkt zaczepienia siły był określony. Przesuwność jest niezbędna, aby wydłużenie pasa, który spoczywa na poduszce, pod działaniem sił pionowych i zmiany temperatury mogło się odbywać swobodnie. By przesuwać ten był z najmniejszym oporem, łożyska przesuwne spoczywają na wałkach i tym sposobem mamy tutaj do czynienia z tarcieniem potoczystym. Ponieważ jest ono odwrotnie proporcjonalne do średnicy wałka, stąd wynik, że trzeba dążyć do wałków o większej średnicy. Poduszki z tarcieniem posuwistym mogą być stosowane tylko, gdy ciśnienie na nie jest stosunkowo niewielkie, to jest w mostach niewielkich.

Mamy trzy rodzaje poduszek: 1. płaskie, 2. styczne, 3. przegibne. Każde z tych trzech rodzajów może być nieruchome (czyli stałe) albo przesuwne. Łożysko płaskie jest to płyta prostokątna o bokach nierównych lub kwadratowa, przytem wymiary jej winny być takie, by ciśnienie od tej płyty na cios podporowy nie przekraczało dopusz-

<sup>1</sup>) Por. uwagę na str. 862.

czalnego naprężenia. Zatem jeżeli największe ciśnienie od dźwigara na podporę jest  $A$ , zaś dopuszczalne naprężenie na cios podporowy  $k_c$ , to płaszczyna poduszki  $F = \frac{A}{k_c}$ . Szerokość poduszki równa się szerokości pasa dolnego  $b$

więcej 80—120 mm, tj.  $b + [8 - 12] \text{ cm}$ ; stąd długość  $l = \frac{F}{b + [8 - 12]} \text{ cm}$ .

Łożyska płaskie stosuje się do mostów małych do 5—6 m; dla tych rozpiętości dopuszczalne naprężenie na cios podporowy winno być niewielkie około 15—20 kg/cm<sup>2</sup>, gdyż wpływ dynamiczny obciążenia ruchomego, szczególnie w mostach kolejowych jest bardzo znaczny. Grubość poduszki  $\delta$

(fig. 328 a) otrzymuje się z równania  $\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3Al}{bk_g}}$ , gdzie  $k_g$  — dopuszczalne naprężenie na zginanie stali lanej. Górna powierzchnia poduszki, na której leży pas dźwigara, powinna mieć nieco ściętą płaszczynę na dłu-

żej leży pas dźwigara, powinna mieć nieco ściętą płaszczynę na dłu-

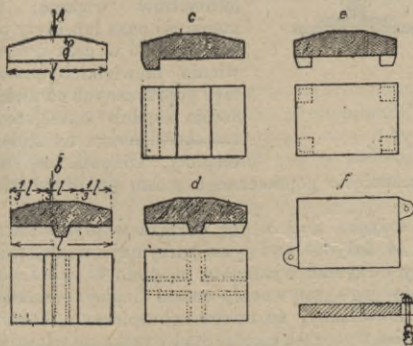


Fig. 328 a, b, c, d, e, f.

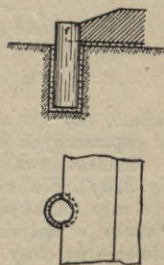


Fig. 329.

gości  $\frac{1}{3}$  na kilka mm (fig. 328 b, c), by przy ugięciu się belki nacisk na poduszkę nie otrzymywał się na krawędź wewnętrzną.

Połączenie z ciosem podporowym robi się zapomocą żeber u spodu poduszki o przekroju trapezowym i wysokości około 0,8 grubości poduszki (fig. 328 c, d, e) zapomocą trzpieni na rogach poduszki lub też zapomocą śrub wtopionych w ciosach podporowych na głębokości około 10—12 średnic śrub, które albo przechodzą przez uszy poduszki (fig. 328 f), albo też przez dziury na krawędziach poduszki (fig. 329). Średnica śrub około 22—25 mm.

Łożyska kładzie się na ciosy podporowe na warstwie zaprawy cementowej 1:1 grubości około 10—15 mm.

Poduszka nieruchoma łączy się z dźwigarem tak, by ten ostatni nie mógł się przesuwać wzdłuż poduszki, co może być wykonane albo według fig. 330 a, b zapomocą nitów z główkami w kształcie trzpieni, które wchodzą w odpowiednie dziury w poduszkach, albo według fig. 330 c, gdzie w wycięcia w blachach pasa dolnego wchodzi występy obrzeży łożyska lub przy zastosowaniu płyty górnej, co przy znacznych obciążeniach mostów kolejowych należy stosować według fig. 330 d. Ciśnienie łożyska przez pas dolny dźwigara przenosi się na środnik i kątowniki pasowe. Na końcach przeto dźwigarów środnik winien być dobrze przyheblowany i tworzyć jedną płaszczynę z bokami poziomymi kątowników i, o ile pewien nieznaczny luz jest dopuszczalny i nawet pożądanym pomiędzy podporami, to bezpośrednio nad podporami nie powinien mieć miejsca, gdyż nity w kątownikach nad

łożyskami ścięłyby się lub wygięły (fig. 330 e). Ponieważ ciśnienie ostatecznie przenosi się przeważnie na środek, przeto zaleca się dla lepszego rozłożenia ciśnienia na środek nad poduszkami dawać płyty stalowe grubości 25—30 mm. Ustrój poduszki przesuwnej jest taki sam, jak poduszki stałej, tylko nie daje się połączenia poduszki z dźwigarem, lecz płyta górna jest z pod spodu zupełnie gładka

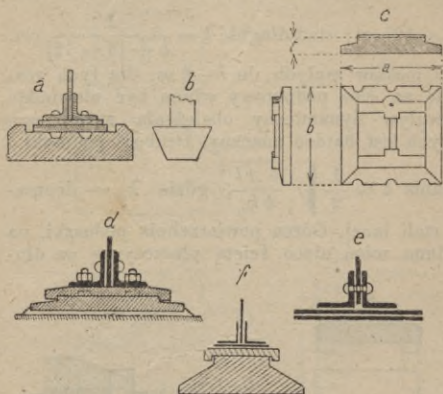


Fig. 330 a, b, c, d, e, f.

zbędne, aby nie nastąpiło przesunięcie poprzecznego mostu pod działaniem sił poprzecznych poziomych.

Zamiast dawać obrzeża w łożysku można dać obrzeża w płycie górnej (fig. 330 f). Ma to tę zaletę, że łożysko lepiej się utrzymuje w czystości, lecz zato musi być grubsze, by otrzymać wymagany moment bezwładności. Obrzeża w łożysku zwiększają jego sztywność, zatem lepiej rozkładają ciśnienie na ciosy podporowe. Mówiliśmy, że trzeba zabezpieczyć możliwość przesuwania się dźwigarów również w poprzek mostu. Stąd wynika, że właściwie w mostach o dwóch dźwigarach tylko jedna podpora powinna być stała,

zaś trzy inne powinny być ruchome (fig. 331 a): podpora o (zaznaczona czarno) stała, reszta podpór przesuwne jak zaznaczono na figurze. W mostach o niewielkiej szerokości przesuwność poprzeczną osiąga się przez pewne zwiększenie odległości między obrzeżami, tak, że przesuw ma tu miejsce z tarcim posuwistym. W mostach szerokich stosuje się przesunięcie potoczyste, tj. na wałkach. Przy kilku dźwigarach na szerokości mostu i dźwigarach wieloprzesłowych

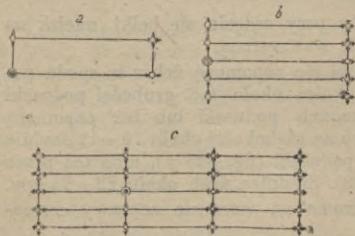


Fig. 331 a, b, c.

wych poduszki winny być według fig. 331 b i c, tj. jedna tylko z nich winna być stała nieruchoma, wszystkie inne zaś ruchome, przesuwne.

Poduszki styczne. W poduszkach płaskich ciśnienie może się oddawać nie osiowo, zatem ciśnienie na cios podporowy i od ciosu na mur może być nierównomierne. Ponieważ jednak winniśmy dążyć do równomiernego ciśnienia na cios podporowy, przeto należy stosować dla dźwigarów większych rozpiętości taki ustrój poduszek, by ciśnienie na nie od dźwigarów zawsze oddawało się osiowo, zatem musimy stosować poduszki, w których ciśnienie będzie się oddawać teoretycznie na jedną linię (fig. 332 a) lub jeden punkt (fig. 332 b), w zależności od powierzchni poduszki: przy cylindrycznej



górną powierzchnię ciśnienie jest wzdłuż linii, przy kulistej ciśnienie teoretycznie jest ześrodkowane w jednym punkcie. W mostach do rozpiętości 20 m należy stosować poduszki styczne o powierzchni cylindrycznej, przytem poduszki ruchome z przesuwem potoczystym, tj. na wałkach.

Ponieważ oba łożyska tak nieruchome, jak i ruchome zwykle mają jednakową wysokość, przeto nieruchome ma dość znaczną wysokość i robi

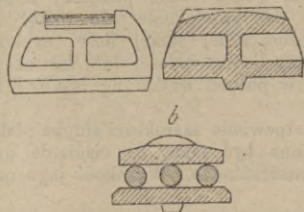


Fig. 332 a, b.

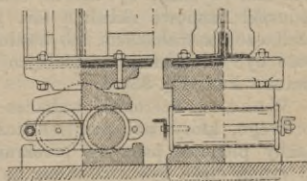


Fig. 333.

się niejednolite, lecz z pewnemi wydrążeniami (fig. 332 a). Górna płyta winna być dość gruba, by ciśnienie równomiernie rozkładała na pas dźwigara. Połączenie dźwigara z poduszką w celu unieruchomienia może być takie, jak w poduszkach płaskich.

Łożysko ruchome (fig. 333) składa się z czterech części: płyty górnej czyli wahacza, przytwierdzonego do dźwigara, części środkowej — kadłuba, na której spoczywa płyta górna, wałków i płyty dolnej, która oddaje ciśnienie na cios podporowy od wałków. Płyta górna jest jak w poduszce nieruchomej. Kadłub ma górną powierzchnię cylindryczną, jak w poduszce nieruchomej; wysokość jego można znaleźć ze wzoru:

$$h = \sqrt{\frac{6 A \Sigma l_i}{n b k_g}}$$

gdzie  $A$  — ciśnienie na poduszkę,  $n$  — ilość wałków,  $b$  — szerokość poduszki,  $k_g$  — dopuszczalne naprężenie na zginanie,  $l_i$  — odległość od osi poduszki do wałka. Znak sumy rozpocziera się na wszystkie wałki położone z jednej strony osi poduszki. By zapobiec przesunięciom poprzecznym płyty górnej po kadłubie, dajemy na kadłubie obrzeża jak w poduszkach płaskich. Płyta dolna łączy się z ciosem podporowym, jak poduszka płaska, lub też przy dużych rozpiętościach całą płytę zapuszcza się na głębokość około 15—25 mm w cios podporowy i pośrodku nadto daje się występ okrągły lub kwadratowy (fig. 334 a). Grubość płyty zależy od ciśnienia i od średnicy wałków. Jeżeli odległość od krawędzi do skrajnego wałka jest  $e$ , szerokość i długość płyty  $b$  i  $l$ , to grubość płyty można znaleźć ze wzoru:

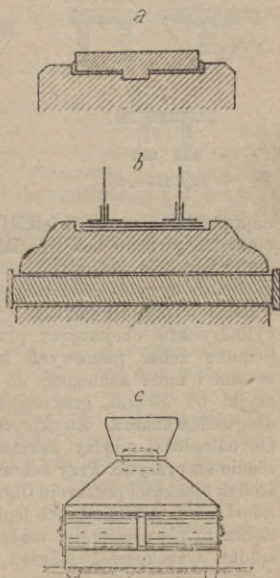


Fig. 334 a, b, c.

$$\delta = \sqrt{\frac{3 A e^2}{l b k_g}} \quad \text{lub} \quad \delta_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 A e_1^2}{l b k_g}},$$

jeżeli  $e_1$  jest odległością między osiami wałków. Ustrój wałków jest jednakowy przy poduszkach stycznych i poduszkach czopowych, przeto rozpatrzmy wpierv ustrój poduszek czopowych i następnie wałków.

Poduszki czopowe stosuje się przy mostach większych. Ciśnienie na poduszkę  $A$  jest tu dość duże, zatem górna część poduszki musi być dość wysoka, by mogła ciśnienie na pas górny należycie rozłożyć. Poduszki czopowe składają się, jak i stycznne, z tej samej ilości części, jeżeli czop z wahaczem lub kadłubem tworzy jedną całość, lub też czop może być elementem oddzielnym poduszki w postaci wałka (fig. 334 b) lub odcinka kuli (fig. 334 c).

Wahacz. Szerokość wahacza zwykle odpowiada szerokości słupka podporowego, który stoi nad wahaczem, i winna być taka, by ciśnienie na blachy pionowe pasa nie przekraczało dopuszczalnego. Wysokość jego na osi czopa może być znaleziona ze wzoru:

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 A l}{b k_g}},$$

$A$  — ciśnienie,  $l$  — szerokość i  $b$  — długość wahacza,  $k_g$  — dopuszczalne

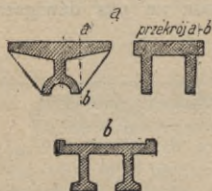


Fig. 335 a, b.

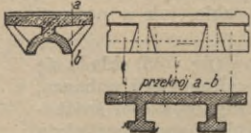


Fig. 336.

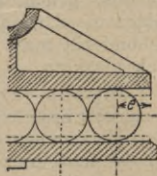


Fig. 337.

napężenie. Przy niewielkiej wysokości czasem wahacz robi się w postaci ciała masywnego bez wszelkich wydrążeń dla zmniejszenia wagi.

Przeważnie jednak dąży się do zmniejszenia wagi przy zachowaniu momentu bezwładności względem osi podłużnej wahacza. Wtedy nadaje się wahaczowi kształt pokazany na fig. 335 a. Płyta górna, połączona z częścią cylindryczną, obejmującą przegub zapomocą szyjki, łączy się jeszcze zapomocą żeber pionowych lub pochyłych. Grubość płyty nie mniej, niż 40 mm i może dochodzić do 100—200 w zależności do siły  $A$ , grubość szyjki od 50 mm, grubość żeber od 45 do 100 mm; ilość ich zależy od długości wahacza. Zwykle daje się żebra pod blachami pionowymi pasów. Od odległości między żebrami zależy mniej lub więcej równomierne ciśnienie na przegub. Przy żebrach zwykłych prostokątnych dąży się do tego, by środek ciężkości przekroju (fig. 335, przekrój  $a-b$ ) był około  $\frac{1}{3}$  wysokości. Zamiast żeber prostokątnych lepiej stosować żebra o przekroju teowym (fig. 336). Żebra te równomiej rozkładają materiał. Środek ciężkości zbliżają do środka wysokości i łożysko otrzymuje się znacznie lżejsze, niż w typie fig. 335, przekrój  $a-b$ . Formowanie takich poduszek nie wymaga stosowania dusz przy odlewie, jeżeli dać odpowiednie pochylenie częściom, jak to jest pokazane na fig. 335 b. Wahacz do pasa przytwierdza się zwykle czterema śrubami o średnicy 25—30 mm. Obrzeża boczne nie dają możliwości przesuwania się dźwigarom wpoprzek mostu. Wysokość obrzeży około 15—20 mm, szerokość zaś od 50—120 mm. Między blachą pasa dźwigara i płytą wahacza kładzie się blachę ołowianą grubości od 3 do 5 mm, która wyrównuje nierówności pasa dźwigara. Płyta wahacza winna być równo zheblowana.

Kadłub ma ogólny kształt taki sam, jak wahacz, lecz, ponieważ jest zwykle w podstawie swej szerszy, a czasem i dłuższy od wahacza, przeto i wysokość jego musi być większa.

Wysokość kadłuba poduszki nieruchomej zwykle równa się wysokości kadłuba poduszki ruchomej i średnicy wałków. O ile jednak wałki mają znaczną średnicę, można kadłub nieruchomy dawać nieco niższy i wtedy oczywiście ciosy podporowe poduszek nieruchomych muszą być nieco wyższe od ciosów poduszek ruchomych. Zbyt wysokie poduszki choć dobrze rozkładają ciśnienie, lecz są mniej stateczne przy działaniu sił poziomych na dźwigary (sił hamowania, odśrodkowej, parcia wiatru), i dlatego też wymagają zwiększenia swej szerokości i długości, a czasem i specjalnego zakotwienia. Dlatego też nie powinny być zbyt wysokie. Kadłub ruchomy spoczywa na wałkach. Wymiary jego podstawy zależą od wymiarów i ilości wałków, oraz przesunięcia:

$$\Delta L = \alpha L t + \frac{1}{E} \sum k_i l_i,$$

gdzie  $\alpha$  jest współczynnik rozszerzalności żelaza,  $L$  — rozpiętość dźwigara,  $t$  — zmiana temperatury,  $E$  — współczynnik sprężystości,  $k$  — naprężenie w prętach pasa, spoczywającego na poduszce od obciążenia ruchomego, dającego największe ugięcie dźwigara i  $l_i$  — długości prętów pasa. Jeżeli przeto skrajny wałek przy temperaturze 0 zajmuje położenie w odległości  $e$  od krawędzi kadłuba (fig. 337), to  $e$  winno być nieco większe od  $\frac{d}{2} + \frac{\Delta L}{2}$

lub równe  $\frac{d}{2} + \frac{\Delta L}{2}$ , jeżeli  $d$  oznacza średnicę wałków.

Ponieważ wymiary kadłuba zależą od wymiarów i ilości wałków, przeto rozpatrzmy ustrój wałków i ich wymiary. Trzeba dążyć do najmniejszej ilości wałków, ze względu na trudności w osiąganiu równomiernego ciśnienia na nie przy dużej ich ilości, do stosowania nie małej średnicy, gdyż od średnicy zależy tarcie potoczyste i naprężenie na linii dotyku: średnica  $d$  winna być nie mniejsza od 12—15 cm, naprężenie na ciśnienie w dotyku nie powinno przekraczać granicy sprężystości, przeto nie powinno dla stali twardej kutej przekraczać 45 kg/mm<sup>2</sup>. Przy znacznie większem naprężeniu do 50—70 kg/mm<sup>2</sup> wałki nie toczą się łagodnie w sposób ciągły, lecz skokami. Dźwigary naprężają się, nie mogąc zmóc oporu tarcia wałków, które tracą kształt kołowy i stają się eliptyczne, dźwigary wyginają się do góry i dopiero pod uderzeniem wchodzącego pociągu przesuwiają się. W mostach małych rozpiętości, gdzie się stosują poduszki styczne, można zastosować i jeden wałek, który jednocześnie może grać rolę kadłuba cylindrycznego, na który opiera się płyta górna. Zaznaczyć jednak należy, że przy jednym wałku tak płyta górna, jak też i dolna muszą mieć znaczną grubość, by rozkładały ciśnienie równomiernie na pas dźwigara i cios podporowy. Naprężenie od ciśnienia na wałki może być obliczone ze wzoru

Hertza:  $k = 0,418 \sqrt{\frac{pE}{r}}$ , gdzie  $p$  = ciśnienie na jednostkę długości wałka,  $E = 2\,150\,000$  kg/cm<sup>2</sup> współczynnik sprężystości i  $r$  — promień wałka.  $k$  nie powinno przekraczać granicy sprężystości i w każdym razie być nie większe od 45 kg/mm<sup>2</sup> dla twardej stali. Wałki łączy się ramką, by odległość ich względna pozostawała niezmienna, przytem ramka, gdy wałki są niedługie, może być według fig. 338.

Jeżeli ilość wałków jest znaczna i wałki są długie, ramki dają się sztywne (fig. 339). Wolna odległość między wałkami może być doprowadzona do 10 lub nawet do 5 mm. By kadłub nie mógł się zsunąć po wałkach wpoprzek mostu, wałkom nadaje się obrzeża (fig. 340 a), lub kadłub i płyta

dolna ma listwy (fig. 340 b), lub też pośrodku kadłub i płyta mają żebra, które wchodzą w odpowiednie rowki w wałkach (fig. 340 c). Przy listwach trudniej utrzymać płytę dolną w czystości.

Głębokość i szerokość rowków musi być odpowiednio na 2—3 mm większa od grubości i wysokości żeber. Wysokość i grubość żeber winna odpowiadać wytrzymałości na zgniatanie i ścinanie pod działaniem sił po-

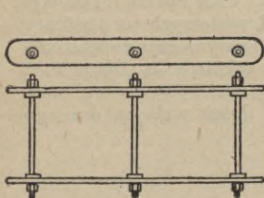


Fig. 338.

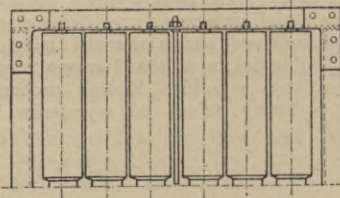


Fig. 339.

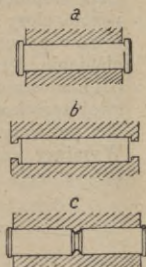


Fig. 340 a, b, c.

ziomych, za potrąceniem siły tarcia. Zatem jeżeli  $W$  jest siłą poziomą, przypadającą na jedną poduszkę, i  $A$  ciśnieniem na poduszkę, to  $W - fA$  jest siłą, działającą na żebro. Spółczynnik  $f$  tarcia można przyjąć równym 0,12. Na tę samą siłę można obliczać żebra, przytwierdzające płytę dolną do ciosów podporowych, lecz przy  $f \approx 0,4$ .

Grubość obrzeży daje się 25—45 mm, i wysokość 20—35 mm, w zależności od rozpiętości mostu. Czopy o średnicy 20—40 mm są wytoczone i stanowią z wałkiem jedną całość (fig. 341 a), lub też są wytoczone oddzielnie i wpuśczone w wałki na gwint (fig. 341 b).

Można nie wszystkie wałki dawać z obrzeżami, jeżeli chodzi o zmniejszenie wymiarów płyty lub kadłuba, lecz tylko niektóre (fig. 341 c i d), gdyż to daje możliwość zbliżyć wałki do siebie. By zabezpieczyć wałki od zsunienia się z płyty, można w płycie dawać obrzeża u góry poprzeczne, choćby nie na całej długości płyty, lub też na niektóre wałki dawać kierownice, nasadzone wolno na śruby; kierownice te mają wolny obrót i niewielki przesuw pomiędzy odlaniami w kadłubie i płycie

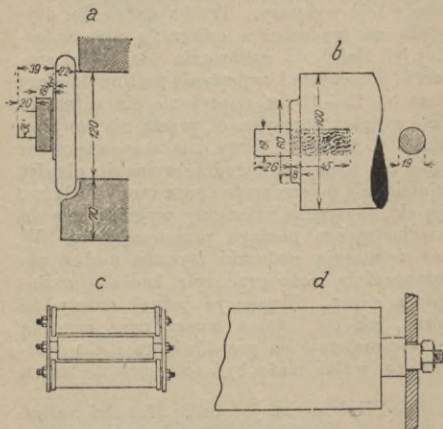


Fig. 341 a, b, c, d.

dolnej występami (fig. 342). — Jeżeli według obliczenia wypada znaczna liczba wałków i o znacznej średnicy, wtedy, by zmniejszyć szerokość kadłuba oraz płyty, można stosować wałki ścięte z dwóch stron (fig. 343 a). Przy przesunięciach wałek zwykle robi niewielki obrót. Jeżeli przesunięcie oznaczmy przez  $\Delta L$ , to kąt obrotu wałka  $\alpha$  otrzymamy z równania:  $\Delta L = \frac{2\alpha 2\pi r}{360}$ , grubość wałka  $b = 2r \cos \alpha$  i odległość między wałkami  $x$ , by

takowe nie należały jeden na drugi  $x = \frac{b}{\cos \alpha}$ . Zwykle  $b$  i  $x$  daje się nieco większe, niż otrzymuje się ze wzorów.

Dla zachowania nadanej walców odległości, oraz równoległości należy je łączyć dwiema ramkami równoległymi (fig. 343 b). By wálki nie mogły się stoczyć z płyty wskutek tych lub innych przyczyn, łączymy je z kadłubem, oraz płytą zapomocą trzpieni, zamocowanych w wálkach i wpuszczonych w odpowiednie otwory, dające możliwość toczenia się wálków (fig. 343 b), lub zapomocą poprzeczek, zamocowanych do wálków, zwykle skrajnych, końce których, odpowiednio zaokrąglone, wchodzi między występy boczne kadłuba  $m$  i płyty (fig. 342). Poprzeczkę  $a$  lepiej wcinąć w wálki.

Długość wálków może być różna i dochodzić do dwóch i więcej metrów, również średnica wálka może dochodzić do 500 i więcej  $mm$ . Dla

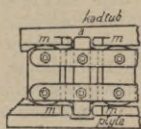


Fig. 342.

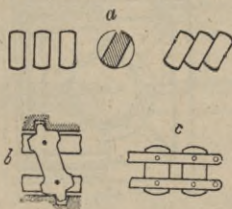


Fig. 343 a, b, c.

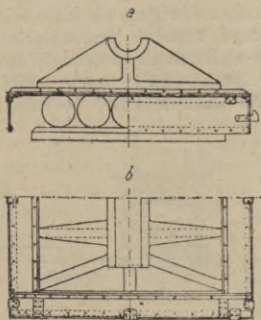


Fig. 344 a, b.

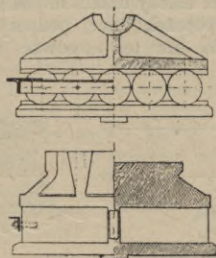


Fig. 345.

zabezpieczenia wálków od kurzu i śmieci, które mogą spadać z mostu na framugi podporowe, poduszkom ruchomym wálkowym dajemy często płaszcze (fig. 344 a, b) z blachy 3  $mm$  grubości. Boki tych płaszczy są na zawiasach, tak, że mogą się podnosić. Zamykają się na zwykle klamki (fig. 344 a).

Kadłub poduszki ruchomej składa się z płyty, spoczywającej na wálkach, szyjki łączącej płytę ze żłobkiem cylindrycznym, w którym spoczywa przegub cylindryczny lub też z miseczki półkulistej lub innego kształtu w zależności od kształtu przegubu i żeber, usztywniających płytę dolną (fig. 345). Jeżeli kadłub wypada niski, wtedy przegub, jako czop, stanowi jedną całość z kadłubem, który wtenczas robi się w postaci jednej pełnej bryły (fig. 346). Przy czopach kulistych żebra usztywniające idą wzdłuż przekątnej i pośrodku szerokości i długości (fig. 347).

Grubość płyty winna być taka, by zabezpieczała równomierne ciśnienie na wálki. Zatem jeżeli żebra są w niewielkiej odległości, wtedy grubość

plyty może być mniejsza i odwrotnie. By w przybliżeniu znaleźć grubość płyty, można ją rozpatrywać, jako równomiernie obciążoną beleczkę, podparta na dwóch podporach żebrach, zatem jeżeli odległość między żebrami jest  $b$  a ciśnienie od wałków na jednostkę szerokości kadłuba jest  $p$ , to grubość:

$$\delta = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{3p}{k_g}}$$

jeżeli  $k_g$  jest dopuszczalnym naprężeniem na zginanie materiału poduszki. Stosując poduszki ruchome w planie układu pajakowego, lepiej dawać przeguby kuliste, gdyż wtedy wszystkie mogą być wykonane według jednego modelu. Również w mostach ukośnych stosowanie poduszek z przegubami kulistymi jest więcej celowe i daje łatwiejsze ustawienie dźwigarów. Stawianie wałków prostopadle do przekątnej, łączącej podporę nieruchomą z ruchomą innego dźwigara, winno mieć miejsce tylko w mostach o znacznej szerokości. W mostach kolejowych jednotorowych lepiej stawiać poduszki według fig. 348. Praktyka wskazuje, że wałki stawiane według przekątnej niezupełnie spełniają swoje zadanie, gdyż przesunięcie końca dźwigara nie idzie ściśle wzdłuż przekątnej.

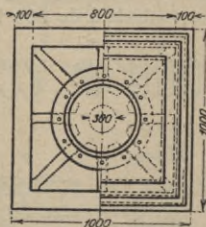


Fig. 347.



Fig. 346.

Dlatego też, by zabezpieczyć zupełne przesunięcie podłużne i poprzeczne, należy urządzać poduszki z wałkami piętrowymi, tj. dawać wałki wzdłuż i w poprzek danej podpory (fig. 349), wtedy praca takiej poduszki jest należyta, lub też stosować zamiast wałków kule, co jednak jest ko-

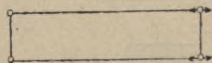


Fig. 348.

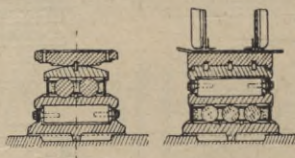


Fig. 349.



Fig. 350.

sztowne i nadaje się do niezbyt wielkich ciśnień. Poduszki z wałkami piętrowymi wypadają dosyć wysokie i są mało stateczne, a dość ruchliwe.

Kadłub poduszek nieruchomych różni się od kadłuba poduszek ruchomych tylko swą większą wysokością. Wysokość jego, o ile ciosy podporowe na wszystkich podporach dają się na jednej wysokości, równa się wysokości kadłuba poduszki, wałków i płyty pod wałkami razem wziętych. Kadłub nieruchomy stawia się bezpośrednio na cios podporowy. Ma on żebra, jak poduszka płaska, które wpuszczają się w cios podporowy i zalewa zaprawą cementową lub też pośrodku ma występ, który wpuszcza się w odpowiednie wgłębienie ciosu i zalewa zaprawą (fig. 350). Wymiary tego występu i jego wysokość winny zadość czynić następującym równaniom:

$$W - Af = b_1 \cdot b_2 \cdot k_t \quad \text{i} \quad W - Af = b_1 \cdot c \cdot k_c,$$

gdzie oznacza  $W$  — siłę poziomą,  $A$  — ciśnienie na poduszkę,  $f$  — współczynnik tarcia stali po kamieniu,  $b_1$ ,  $b_2$  i  $c$  — szerokość, długość i wy-

sokość występu,  $k_t$  — dopuszczalne naprężenie na ścinanie materiału kadłuba i  $k_c$  — dopuszczalne naprężenie ciśnienia na kamień. Czasem kadłub poduszki nieruchomej stawia się nie bezpośrednio na cios podporowy, lecz na płycie. Otrzymuje się kadłub nieco niższy. Płyta zaś ma zwykle około krawędzi listwy nie na całej długości swych boków. Odległość między listwami w kierunku szerokości mostu ściśle odpowiada długości kadłuba, w kierunku zaś rozpiętości mają odległość nieco większą od szerokości kadłuba, by można było umieścić kliny w celu regulowania odległości między poduszkami odpowiednio do długości dźwigara (fig. 351 a, b, c).

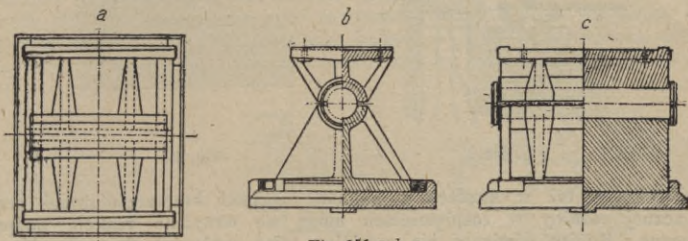


Fig. 351 a, b, c.

Należy mieć na uwadze, że wysokie łożyska winny być odpowiednio szerokie i długie, by były stateczne pod działaniem sił poziomych na dźwigary mostowe. W mostach prostych belkowych rozciętych regulowanie wysokości ustawiania poduszek na ciosach podporowych wykonywa się zwykle przez mniejsze lub większe wcięcie płyt poduszek w ciosy. Klinów nie stosuje się, gdyż niewielka niedokładność, dotycząca wysokości na różnych podporach nie ma znaczenia. Zaś na jednej podporze można wszystkie poduszki ustawić zupełnie na jednej wysokości. Również niejednakowe osiadanie podpór mostowych nie ma znaczenia. Inaczej jednak jest, jeżeli most jest z belkami ciąglemi bezprzegubowymi. Tutaj nierównomierność osiadania podpór, oraz ustawienie na różnych podporach łożysk (poduszek) na nie należytej wysokości może wywołać znaczne zmiany w naprężeniach dźwigarów głównych, przeto łożyska (poduszki) takich mostów powinny być uposażone w kliny, któremi można byłoby regulować wysokość przegubów poduszek. Ciśnienie na kliny winno być możliwie jednakowe, zatem powinno się dążyć, by ilość klinów pod poduszką była możliwie najmniejsza. Najlepiej stosować jeden klin, podłożony bezpośrednio pod przegubem (fig. 352), nadając pewną stoczystość dolnej płaszczyźnie przegubu, lub dwa kliny położone jeden na drugim i skierowane w różne strony cienkimi końcami (fig. 353).

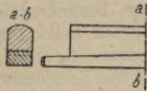


Fig. 352.

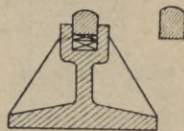


Fig. 353.

Zakotwienie poduszek przeciw siłom poziomym wzdłuż mostu powinno mieć miejsce w mostach, gdzie siły te mogą być znaczne, zatem w mostach długich, na których może mieć miejsce hamowanie pociągu, w mostach dużych w pobliżu stacji oraz w mostach, położonych na spadkach. We wszystkich tych wypadkach należy zbadać, czy poduszka stała jest dostatecznie stateczna, czy pod działaniem sił hamowania pociągu nie może nastąpić oderwanie poduszki od ciosu podporowego, zatem, czy siły pionowe są dostateczne, by poduszkę utrzymać na ciosie. Jeżeli może nastąpić oderwanie poduszki od ciosu, należy zakotwić poduszkę lub też

koniec dźwigara. Wtedy pas dolny może być połączony z kotwą zapomocą blachy poziomej, która pozwala dźwigarowi na nieznaczne obroty na przegubie poduszki i jednocześnie przejmuje siły poziome, oddając je na kotwę i mur (fig. 354). Zamiast połączenia z kotwą końca dźwigara można połączyć z kotwą przegub poduszki (fig. 355). W mostach wsporni-

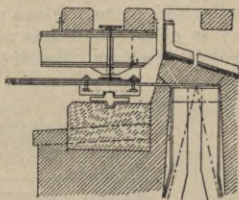


Fig. 354.

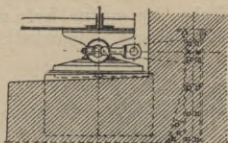


Fig. 355.

kowych lub też w mostach z belkami ciągłymi bezprzegubowymi przy znacznej różnicy w rozpiętościach mogą się utrzymać reakcje podpór ujemne. Koniec dźwigara nie powinien mieć możliwości się podnosić ze swej poduszki, czyli, że zawsze powinien szczelnie przylegać do niej. Można to osiągnąć albo przez zastosowanie specjalnych przeciwwag, co jednak nie zawsze jest dogodne, gdyż przeciwwagi obciążają dodatkowo podpory, wymagają specjalnego pokładu, na którym leżą, i dodatkowo obciążają dźwigary, co pociąga za sobą zwiększenie ich wagi, lub też można zastosować specjalne poduszki

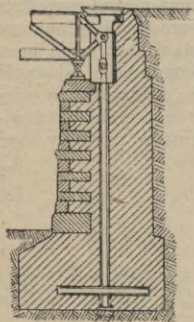


Fig. 356.

ujemne i dodatnie. Ostatnie są zwykle poduszki stosowane przy reakcji dodatniej. Przy reakcji ujemnej daje się specjalne poduszki, trzymane przez kotwy, zamocowane w murze podpory. Jeżeli reakcja ujemna ma miejsce na podporze stałej, wtedy ustrój może być bardzo prosty. Dźwigary mogą być wzięte na kotwy bezpośrednio (fig. 356), lub przez belki poprzeczne na podporze (fig. 357 a), lub też przez tężniki pionowe (fig. 357 b).

Bezpośrednie zakotwienie może mieć miejsce i na podporze ruchomej przesuwnej, lecz jeżeli przesunięcia dźwigara są nieznaczne. Przy znaczniejszych

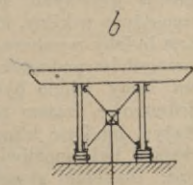
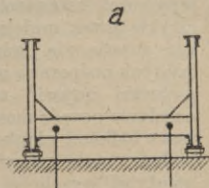


Fig. 357 a, b.

przesunięciach podpora ujemna musi mieć możliwość również wolnego przesuwu i powinna być urządzona z wałkami. By przy przesunięciu wałków kotwy, trzymające poduszki ujemne siłą tarcia, się nie odginały, należy stosować również kotwy poziome (fig. 358). Poduszki reakcyj ujemnych można stawiać na wypuszczone w kształcie wsporników końce pasów dźwigarów (fig. 359). Głębokość zakotwienia i zakończenia kotw w podporach powinno odpowiadać reakcji ujemnej. Przyjmuje się, że mur może się oderwać pod kątem 45°. Zamocowanie końców kotw do belek, założonych w murze, powinno być możliwie dostępne. Zatem powinno być umieszczone w specjalnych komorach lub łażach (fig. 360). Poduszki belek, spoczywających na końcach wsporników, mogą być urządzone w zupełności, jak na podporach zwykłych. Na



wsporniku, gdzie ma spoczywać poduszka, musi być urządzony odpowiedni stolik, na którym albo stawiamy bezpośrednio kadłub poduszki nieruchomej (fig. 361), albo też stawiamy płytę, na której leżą wałki, jeżeli poduszka ma być ruchoma (fig. 362).

Zamiast zwykłej poduszki wałkowej, która wymaga czasem dużo miejsca, można stosować albo słupki wahadłowe, albo też zawieszać belki na strunach. W obu tych wypadkach słupki belki zawieszanej wchodzi w słupki wspornika, który musi mieć pasy nieco szersze, niż belka zawieszona, co zresztą prawie zawsze ma miejsce, gdyż belka wspornikowa ma przeważnie większą rozpiętość, niż belka zawieszona. Przy stosowaniu słupków wahadłowych (fig. 363) podporą dla belki zawieszanej jest dolny pas wspornika, na którym spoczywa dolny koniec słupka wahadłowego. Belka zawieszona opiera się swym górnym pasem na tym słupku. By nie było poprzecznych wahań

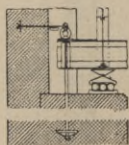


Fig. 358.

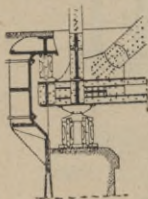


Fig. 359.

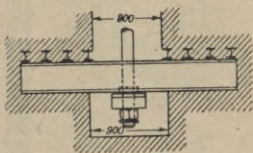


Fig. 360.

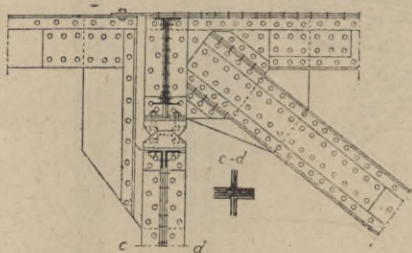


Fig. 361.

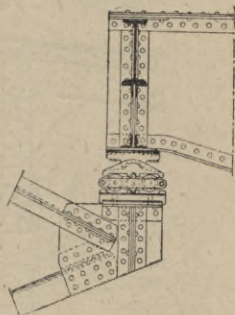


Fig. 362.

słupków, takowe powinny mieć u góry kierownice podłużne, między którymi mają możliwość przesuwania się wzdłuż. Słupki wsporników powinny tworzyć w tym wypadku ramownice. Przy zastosowaniu strun podporą dla belki jest węzeł górnego pasa wspornika; na nim zawieszane są struny, które swymi dolnymi końcami trzymają za pas dolny belkę zawieszoną. Otwory u góry belki zawieszanej i u dołu wspornika w tym przypadku muszą być owalne i o większej średnicy, niż jest bolec, na którym wisi belka zawieszona, by ciśnienie oddawało się na należyte końce (fig. 364 a, b). Belki o niewielkiej rozpiętości mogą być zawieszane na blachach, gibkość blachy służy tutaj, jako podpora wahadłowa. Niewielkość przesunięcia belki w zupełności jest możliwa wskutek gibkości blachy.

Poduszki dźwigarów łukowych zasadniczo mało się różnią od poduszek nieruchomych dźwigarów prostych belkowych. Kadłub może być taki sam, jak w mostach belkowych, również przeguby. Co się tyczy górnej części, tj. wahacza, to takowy może być albo oddzielny i przytwierdzony odpowiednio do łuku, albo też może nawet stanowić jedną całość z łukiem.

Ponieważ ustawianie dźwigarów łukowych na podpory wymaga wielkiej ścisłości co do rozpiętości, na odległość zaś pomiędzy przegubami podporowymi ma znaczny wpływ temperatura chwili ostatecznego ustawiania, przeto poduszki w mostach łukowych powinny być uposażone w kliny, którymi można by było zmieniać rozpiętość i tym sposobem nadawać należytą wy-

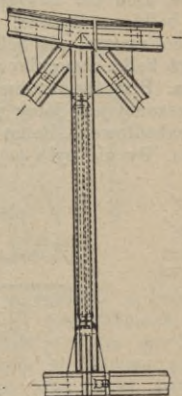


Fig. 363.

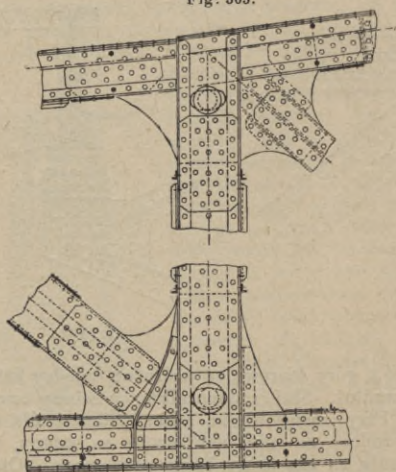


Fig. 364 a.

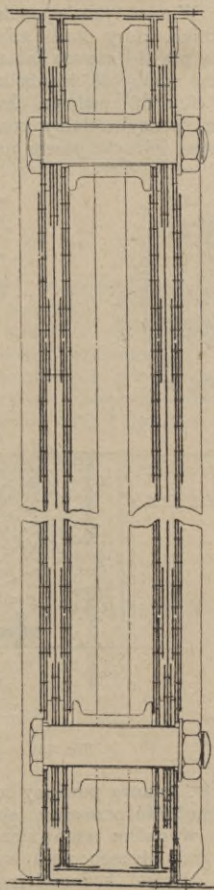


Fig. 364 b.

nosłość łukowi. Jeżeli przeto teoretyczna strzałka łuku przy temperaturze  $0^{\circ}$  była  $f$ , to przy temperaturze ustawiania dźwigarów  $= t^{\circ} \text{C}$  winna być  $f \pm \Delta f$ . Temperatura montowania niema znaczenia, gdyż jest ona różna w zależności od okresu czasu, w którym odbywa się montowanie. Wszelkie wymiary w warsztatach wyznacza się taśmami mierniczymi stalowymi, zatem, jeżeli miara stalowa jest ścisła przy temperaturze  $0^{\circ}$ , to i wykonane części stalowe lub żelazne mostu mają ścisłe wymiary, sprowadzone do zera. Odległość między podporami, mierzona miarami metalowymi przy tempera-

turze  $t^{\circ}$  C, powinna być sprowadzona do temperatury  $0^{\circ}$ , czyli otrzymana odległość między podporami powinna być poprawiona na wydłużenie lub skrócenie miary w zależności od  $+t^{\circ}$ . Ustawianie łuków na podpory należy robić w pogodę pochmurną, gdyż wtedy wszystkie łuki danego przesła mają jednakową temperaturę. Przy słonecznej pogodzie ustawianie jest dość trudne, gdyż temperatura nie tylko różnych łuków, lecz nawet jednego i tego samego łuku może być różna, zatem trudno nadać należyłą strzałkę łukowi.

Połączenie kadłuba z ciosem podporowym, jak w mostach belkowych, tj. zapomożą żeber lub śrub, zapuszczonych w ciosy podporowe (fig. 365).

Cześć górna poduszki, wahacz, ma połączenie takie, że końce łuków oddają swe ciśnienie na wahacz przez bezpośredni docisk. Końce zatem

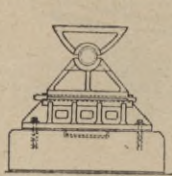


Fig. 365.

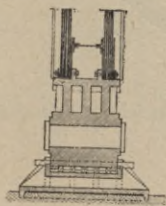


Fig. 366.

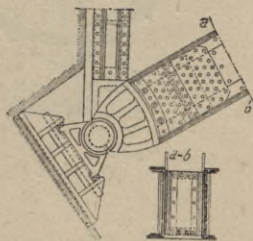


Fig. 367.

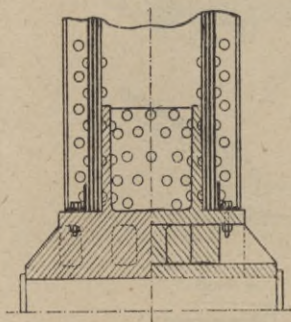
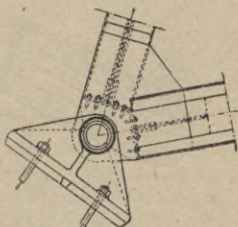


Fig. 368.



łuków muszą być zupełnie równo ścięte i przyheblowane, by ciśnienie oddawało się na cały przekrój łuku. Cienkie ścianki łuków muszą być pogrubione przez odpowiednie nakładki, by je stężyć. Połączenie daje się zwykle śrubami (fig. 366). Można też połączenie wahacza z łukiem dać takie, by ciśnienie przenosiło się na łuk przez cięcie nitów. Wahacz wtedy ma specjalne wydłużone ścianki, które wchodzi w skrzynkę łuku. Te ścianki są znitowane z elementami łuku (fig. 367). Jeżeli dźwigary łukowe są kratowe, wtedy należy wahacz tak łączyć z łukiem, by oś przegubu leżała w węźle podporowym (fig. 368), w przeciwnym bowiem razie pas łuku prócz sił osiowych miałby jeszcze ugięcie, które należałoby przyjąć pod uwagę, gdybyśmy umieścili przegub poza węzłem. Umieszczenie przegubu nie w węźle podporowym często się stosuje w mostach łukowych wspornikowych (fig. 369 a, b). Wahacz może stanowić z łukiem jedną całość. Łuk tworzy stopę, którą się opiera o przegub poduszki. Stopę tworzą wtedy specjalne odlewy, które

łączą się z poszczególnymi częściami łuku o przekroju dwuteowym. W łukach niewielkich rozpiętości odlewy te mają kształt szczęk, które obejmują z dwóch stron dźwigar i są do niego przynitowane; w przekroju poprzecznym mają kształt korytek, w przekroju zaś podłużnym kątowników nierównobocznych. Siła łuku oddaje się na te szczęki przez nity, które je łączą ze środnikiem i pasami (fig. 370 a). W większych mostach można stosować takie

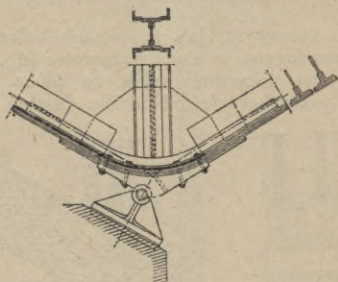


Fig. 369 a.

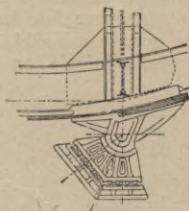


Fig. 369 b.

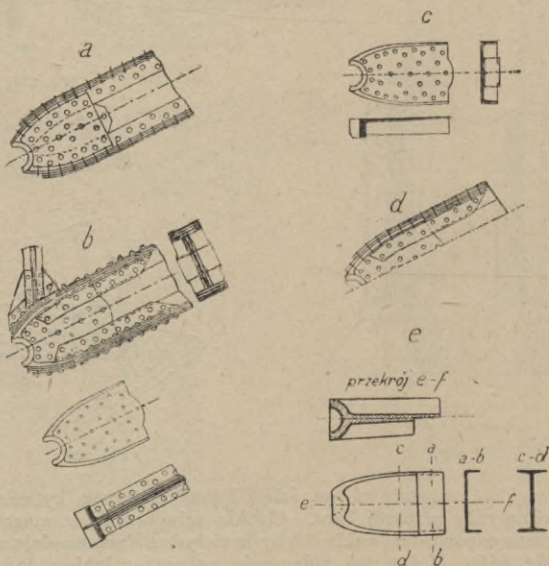


Fig. 370 a, b, c, d, e.

same szczęki, lecz tylko połączenie z łukiem winno być nieco inne, by w bokach poziomych tych szczęk można było zastosować nity dwucięte (fig. 370 b). Grubość szczęk koło przegubu winna być taka, by cały przekrój wytworzonej stopy odpowiadał całkowitej największej reakcji łuku; ku końcowi daje się wszystkie części szczęk coraz cieńsze, i mogą dojść do grubości kątowników, tj. do 12—15 mm (fig. 370 c). Gdyby jednak grubość taka była niedogodna do wykonania, to można ją zwiększyć do 20 mm i zastosować podkładki wyrównawcze (fig. 370 d).

W mostach łukowych ukośnych, szczególnie bardzo szerokich, przy kilku dźwigarach na szerokości mostu powinno się stosować przeguby kuliste. Poduszki w takich mostach daje się normalnie do osi łuku. Zatem przy przegubach cylindrycznych otrzymalibyśmy kilka osi równoległych. Łuki, połączone tężnikami w jakby jedną bryłę, nie mogłyby się obracać koło swych przegubów, gdy tymczasem przeguby kuliste położone swymi osiami na jednej prostej tworzą jakby jedną oś. Następnie ustawianie łuków

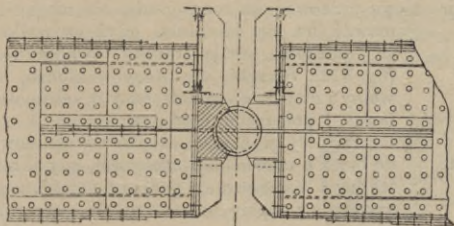


Fig. 371.

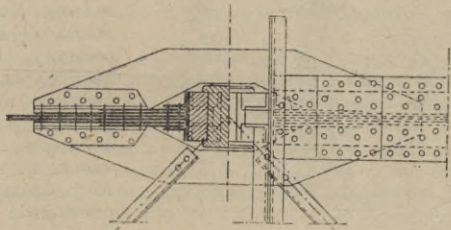


Fig. 372.

w mostach ukośnych na przeguby cylindryczne nasuwa dużo trudności. Ustawienie wszystkich poduszek ściśle równoległe jest nader trudne, zaś najmniejsza nierównoległość powoduje ciśnienie nie na całą długość przegubu, lecz tylko na jego krawędź. Przy stosowaniu przegubów kulistych unika się tej niedokładności. Przy przegubach kulistych jednak stopę trzeba wytwarzać z jednego odlewku, a nie z dwóch w kształcie szczęk, by przegub kulisty nie rozsadał tych szczęk, jak klin (fig. 370 e). Przy stosowaniu szczęk obróbka końcowych części stóp, tj. wytaczanie wgłębień do przegubów powinna się odbywać, gdy szczęki są znitowane z końcami dźwigarów, by otrzymać

dokładność roboty<sup>1)</sup>. Przeguby w kluczu mostów łukowych trójprzegubowych mają ustrój taki sam, jak i w stopach. Połączenie wahacza z łukiem musi tu odpowiadać nie tylko rozporowi, lecz też i sile poprzecznej. Gdyby rozpor od obciążenia stałego był niezbyt duży, a od parcia wiatru otrzymałoby się rozciąganie w kluczu, wtedy naturalnie konstrukcja przegubu w kluczu powinna być taka, by nie dopuszczała możliwości rozwarcia się łuku w kluczu, co może być dokonane przez połączenie przeciwległych części łuków gibkimi blachami, tak zwanymi kołnierzykami (fig. 371), lub też specjalnymi ściągami, które mogą pracować na rozciąganie, nie mogąc natomiast przyjmować na się ściskania, gdyż na wałkach, na których są osadzone, mają otwory owalne wolne do środka (fig. 372). Szczęki, stosowane w kluczu, mają kształt dowolny i zwykle niesymetryczny w zależności od ustroju pomostu i połączenia jezdni w kluczu.

Podpory w postaci słupków wahadłowych stosuje się do belek o niewielkiej rozpiętości, gdy jednak brak miejsca wymaga zastosowania podpory najcieńszej. Podpora taka zastępuje podporę przesuwaną. W przekroju poprzecznym

mostu słupki te są połączone ze sobą tężnikami tak, że tworzą zwykle układy niezmiennie. Każdy słupek taki składa się z trzech części: podstawy, która jest nic innego, jak tylko zwykła poduszka nieruchoma przegibna z przegubem cylindrycznym lub kulistym, z trzonu, tj. słupka i z głowicy, która w istocie swej przedstawia również poduszkę przegibną, lecz tylko jakby odwróconą do góry

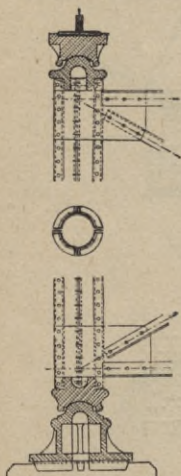


Fig. 373.

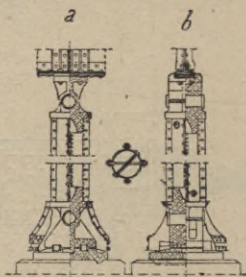


Fig. 374.

kadłubem. Na kadłubie spoczywa belka, zaś wahacz jest związany z trzonem słupka (fig. 373).

W zależności od miejsca, gdzie kolumny takie stawiamy, tak ich podstawom, jak też i głowicom nadają pewne kształty architektoniczne. Dolne części zakrywają przytem płaszczami również pewnej formy tak, by płaszcze te dawały wrażenie odpowiedniej podstawy dla danego słupka kolumny (fig. 374 a, b).

## VIII. Tężniki podłużne i poprzeczne.

Pasy dźwigarów głównych łączymy kratą tak, aby pas górny i dolny, połączone kratą, wytworzyły układ niezmienny w płaszczyźnie pionowej. Również w płaszczyźnie poziomej pasy górne i pasy dolne jednego dźwigara i drugiego powinny być połączone ze sobą kratą, aby wytworzyć układy niezmiennie w płaszczyznach pasów górnych i dolnych. Jest to niezbędne nie tylko wskutek działania sił poziomych, jak wiatr, siła odśrodkowa przy położeniu mostu w krzywej lub uderzenia boczne parowozów, lecz i bez tych sił wiązania te są niezbędne w szczególności w poziomie pasów ścispanych, bo długie pasy mogłyby ulec wyboczeniu. Oprócz tych wiązań pasów, zwanych tężnikami podłużnymi albo wiatrownicami, gdyż przeważnie obliczają się na działanie wiatru, by dźwigary główne wytworzyły bryłę niezmienną, winny

<sup>1)</sup> Tego rodzaju przeguby stosowane były w wielu mostach łukowych przez autora niniejszego w Petersburgu.

być zakończone również powierzchniami niezmiennymi. Przeto płaszczyzny czołowe, które tworzą zwykle słupki podporowe lub przy pasach zbieżnych pasy pochyłe, muszą być połączone odpowiednio wiązaniami, by czworoboki czołowe pod działaniem sił poziomych były niezmiennie. Ograniczona tym sposobem bryła sześcienna powierzchniami niezmiennymi otrzymuje się niezmienną naturalnie w granicach odkształceń sprężystych. Tężniki, położone w granicach pasów, nazywamy tężnikami podłużnymi, a czasem poziomymi, zaś tężniki, które leżą w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny dźwigarów pionowych, lub czasem w płaszczyznach pod pewnym kątem do poziomu, nazywamy tężnikami poprzecznymi lub pionowymi. Zatem możemy powiedzieć, że, aby dźwigary wytworzyły bryłę niezmienną, muszą być powiązane tężnikami podłużnymi na całej długości mostu w poziomie pasów górnych i dolnych i tężnikami poprzecznymi na podporach (fig. 375). Tężniki poprzeczne pośrednie nie są niezbędne z punktu widzenia niezmienności, jednak mają znaczenie z innych względów. Przy niejednakowym obciążeniu pionowym dźwigarów zmniejszają one niejednakowość ugięcia się dźwigarów, zatem zniekształcenie się mostu w przekroju poprzecznym jest mniejsze przy tężnikach pionowych poprzecznych, niż bez nich. Nie zawsze jednak można postawić tężniki podłużne w poziomie pasa górnego przy pomoście dolnym i wtedy tężniki poprzeczne pośrednie są niezbędne. Jeżeli nawierzchnia pomostu ma podłoże z blachy falistej, płaskiej, cylindrycznej lub nieckowej na całej szerokości mostu, wtedy pokład ten może zastąpić tężniki podłużne w poziomie tego pasa, gdzie jest pomost. Kształtowniki — zoresówki lub woterenówki — nie zastępują tężników podłużnych ze względu na swoje stosunkowo słabe przytwierdzenie do żeber pomostu i dźwigarów. Poprzecznicę sztywno połączone z dźwigarami zwykle służą jednocześnie jako części tężników podłużnych, oraz poprzecznych.

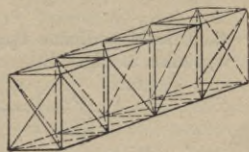


Fig. 375.

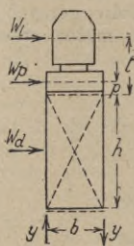


Fig. 376.

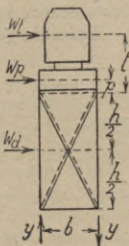


Fig. 377.

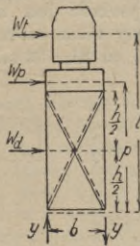


Fig. 378.

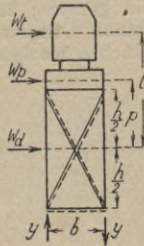


Fig. 379.

Mosty z jazdą górą. 1. Tężniki podłużne między pasami górnymi, dolnymi i poprzeczne na podporach (fig. 375). Oznaczmy wysokość dźwigarów przez  $h$  (fig. 376), rozstaw dźwigarów przez  $b$ , odległość od osi pasa górnego do środka powierzchni pomostu, wystającej ponad pasem górnym, przez  $p$ , odległość od tegoż pasa do środka powierzchni obciążenia ruchomego przez  $t$ , siły poziome od działania wiatru na obciążenie ruchome, pomost i dźwigar przez  $W_t$ ,  $W_p$  i  $W_d$ , siły poziome, działające na pasy górny i dolny przez  $X_g$  i  $X_d$  przeciążenie dźwigarów przez  $Y$ , to otrzymamy:

$$Y = \frac{W_t \cdot t + W_p p}{b}; \quad X_g = W_t + W_d + \frac{W_p}{2}; \quad X_d = \frac{W_d}{2}.$$

2. Teżniki podłużne są między pasami górnymi, teżniki poprzeczne na podporach i pośrednie między podporami (fig. 377):

$$Y = \frac{W_t \cdot t + W_p \cdot p - W_d \cdot \frac{h}{2}}{b}; \quad X_g = W_t + W_p + W_d; \quad X_d = 0.$$

3. Teżniki podłużne łączą pasy dolne, teżniki poprzeczne, jak w wypadku 2. (fig. 378):

$$Y = \frac{W_t \cdot t + W_p \cdot p + W_d \cdot \frac{h}{2}}{b}; \quad X_g = 0; \quad X_d = W_t + W_p + W_d.$$

4. Teżniki podłużne łączą pasy górne i dolne, teżniki poprzeczne, jak w wypadku 2. (fig. 379).

$$Y = \left[ \frac{W_t + W_p}{4} + \frac{W_t \cdot t + W_p \cdot p}{2h} \right] \frac{h}{b};$$

$$X_g = \frac{W_d}{2} + \frac{3}{4} (W_t + W_p) + \frac{W_t \cdot t + W_p \cdot p}{2h};$$

$$X_d = \frac{W_d}{2} + \frac{1}{4} (W_t + W_p) - \frac{W_t \cdot t + W_p \cdot p}{2h};$$

przy

$$h = \frac{2(W_t \cdot t + W_p \cdot p)}{2W_d + W_t + W_p}. \quad X = 0$$

czyli, że przy tej wielkości  $h$  wiatrownie dolnych podłużnych stawiać nie warto.

Mosty z jazdą dołem. Mogą tu być dwa wypadki: 1. Wysokość dźwigarów jest dostateczna i dopuszcza umieszczenie teżników podłużnych w pasie górnym; 2. wysokość jest niedostateczna, teżników górnych dać nie można. Otrzymujemy most otwarty. Teżniki górne można stosować w mostach o rozpiętości od 31—32 m.

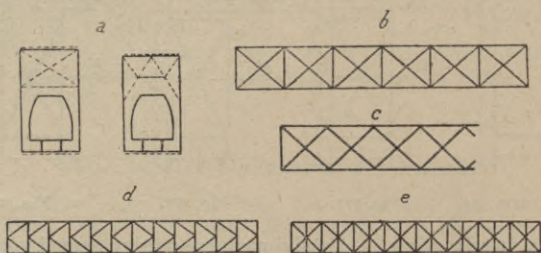


Fig. 380 a, b, c, d, e.

W wypadku pierwszym mamy teżniki podłużne dolne, górne i teżniki poprzeczne w kształcie ramownic na podporach (fig. 380 a).

$$Y = \frac{W_t \cdot t + W_p \cdot p}{b}; \quad X_g = \frac{W_d}{2}; \quad X_d = \frac{W_d}{2} + W_t \cdot W_p.$$

W wypadku drugim teżniki podłużne są tylko dolne, teżniki zaś poprzeczne na podporach i pośrednie.



$$Y = \frac{W_d \cdot \frac{h}{2} + W_t \cdot t + W_p \cdot p}{b}; \quad X_g = 0, \quad X_d = W_d + W_p + W_t.$$

Najczęściej stosowany jest układ teżników podłużnych o kracie prostokątnej dwukrotnej, układ statycznie niezwyznaczalny (fig. 380 b). W układzie tym zwykle stosują rozpórki sztywne, zaś krzyżulce czasem gibkie lub półsztywne. Uważamy, że krzyżulce winny być również sztywne, gdyż przy dwóch układach przy uginaniu się dźwigara w płaszczyźnie teżników będą zawsze pracować oba układy, zatem sztywność każdego krzyżulca (przekątnej) powinna być dostateczna do przejścia conajmniej połowy siły poprzecznej na ściskanie. Koło środka przeszła zwykle siła poprzeczna od działania wiatru jest bardzo mała, szczególnie w górnych teżnikach przy jeździe dołem i dolnych przy jeździe górą. Nadawanie jednak krzyżulcom przekroji zbyt małych, odpowiednio do otrzymanej siły działania wiatru nie powinno być naśladowane, gdyż teżniki te pracują nie tylko przy działaniu wiatru, lecz też i od wszelkich uderzeń bocznych idącego pociągu i przy słabych wiatrownicach powodują dość duże wahania pasów w płaszczyźnie poziomej. Można dawać zamiast kraty prostokątnej kratę podwójną bez rozpórek

(fig. 380 c), układ raz statycznie niewyznaczalny. W mostach szerokich, gdy przedziały są stosunkowo małe w porównaniu do odległości między dźwigarami, można stosować układ półkrzyżulcowy (fig. 380 d), lub też stosować kratę według fig. 380 b, lecz przekątne prowadzić przez dwa przedziały (fig. 380 e), przytem w punktach przecięcia się krzyżulców takowe mogą być podwieszane do poprzecznicy, by nie zwiślały i przez to nie otrzymywały dodatkowych naprężeń od wagi własnej. Nadto podwieszenie ma jeszcze tę dobrą zaletę, że zmniej-

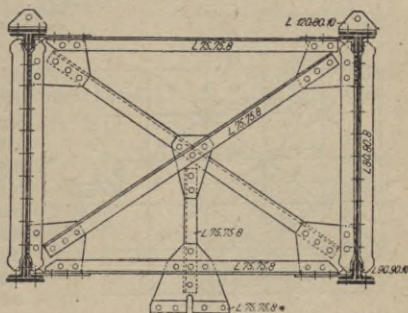


Fig. 381.

sza wolną długość przekątnej ścisanej, dlatego też nawet przy układzie według fig. 380 b podwieszają przekątne, np. do podłużnic (fig. 381). Teżniki według fig. 382 a stosują się do małych rozpiętości, do stężenia belek podłużnych. Jeżeli most ma kilka dźwigarów na swej szerokości, co ma miejsce w mostach miejskich z jazdą górą, wtedy teżniki można urządzić według fig. 382 b lub fig. 382 c. W mostach szerokich z wielu dźwigarami siły w pasach dźwigarów od działania wiatru są bardzo małe; dodatkowe naprężenia zwykle nie pokrywają nadwyżki dopuszczalnych naprężeń, tak że ich można nie uwzględniać. Przy obliczaniu sił w pasach od działania wiatru można rozpatrywać pasy dźwigarów połączone teżnikami, jako belkę złożoną, w której rolę klinów odgrywają przekątne i rozpórki i obliczenie przeprowadzić, jak dla belki złożonej. Zatem, jeżeli przez  $F_i$  oznaczymy średni przekrój pasa dźwigara, zaś przez  $b_i$  odległość od osi mostu do dźwigara, przez  $a$  długość przedziału i przez  $\alpha$  kąt pochylenia przekątnej do pasa, przez  $M$  i  $T$  moment gnący i siłę poprzeczną w danym przekroju od sił poziomych (fig. 382 d), to możemy napisać, że siła w pasie będzie:

$$K = \frac{M b_e}{2 \sum F_i b_i^2}.$$

Sily w krzyżulcach:

$$S_1 = \pm T \frac{F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 + F_3 \cdot b_3}{2 \cos \alpha \sum F_i b_i^2},$$

$$S_2 = \pm T \frac{(F_2 \cdot b_2 + F_3 \cdot b_3) \cdot a}{2 \cos \alpha \sum F_i b_i^2},$$

$$S_3 = \pm T \frac{F_3 \cdot b_3 \cdot a}{2 \cos \alpha \sum F_i b_i^2}.$$

Zatem przekroje krzyżulców muszą być silniejsze pośrodku mostu, zaś słabsze ku skrajom. Przekroje tężników mogą być takie same, jak w innych prętach w dźwigarach.

Przedział tężników, zwykle odpowiada przedziałowi dźwigarów, a węzły tężników umieszcza się zwykle w tych samych przekrojach, co i węzły dźwigarów, choć może też być przedział tężników mniejszy lub większy

od przedziału dźwigara pionowego. Tężniki podłużne zwykle przynitowujemy do blach węzłowych poziomych, które są jako wstawki blach poziomych pasowych (fig. 383), lub też jako blachy przynitowane do kątowników pasowych (fig. 384 a), lub też przynitowane do krawędzi blach poziomych (fig. 384 b). W ostatnim wypadku szerokość  $e$  winna być nie mniejsza od 90 mm. W mostach szerokich przekątnie otrzymuje się o znacznej dłu-

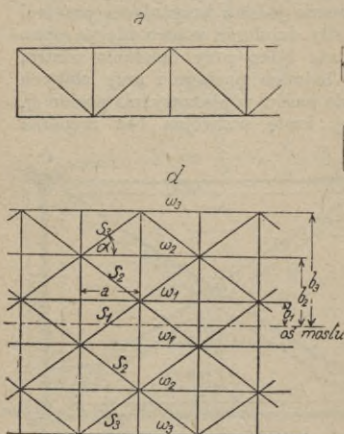


Fig. 382 a, b, c, d.

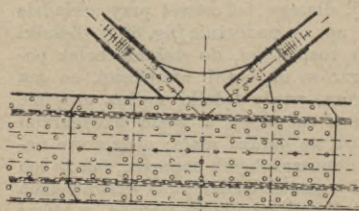


Fig. 383.

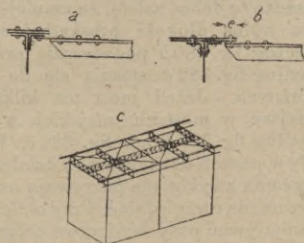


Fig. 384 a, b, c.

gości; aby je podtrzymać pośrodku, dają czasem między pasami górnymi lekką beleczkę podłużną (fig. 384 c).

Przy obliczaniu tężników podłużnych trzeba mieć na uwadze, że tężniki te otrzymują naprężenia nie tylko od sił poziomych działania wiatru lub siły odśrodkowej w mostach położonych w krzywej, lecz nadto od obciążenia pionowego i to dość znaczne. W pasie rozciągającym mogą one dochodzić do 50% naprężeń w pasach. Dlatego też tężniki te przynitowywać należy po zdjęciu mostu z rusztowań, aby przynajmniej uwolnić je od dodatkowego

naprężenia od ciężaru stałego mostu i przekroje winny być im nadawane z pewnym zapasem do 25—30%.

Na fig. 385 *a* linjami przerwanymi pokazane jest położenie żeńników podłużnych i poprzecznych. Górne żeńniki jako podparcie swe mają zwykle ramownice, które oddają parcie poziome, otrzymane od żeńników podłużnych, na podpory. Jeżeli wysokość dźwigarów pozwala, to żeńniki podłużne górne idą na całej długości dźwigarów i wtedy ramownice umieszczają się na końcach: pionowe, jeżeli są słupki podporowe, i pochyłe, jeżeli pasy są zbieżne. Ramownice pionowe są łatwiejsze do wykonania, lepiej zeszywniają poprzecznie most i dlatego często chętniej je stosują, niż pochyłe. Widok ogólny dźwigarów zbieżnych jest nieco ładniejszy i dźwigary zbieżne otrzymuje się nieco lżejsze, lecz usztywnienie ramownicy jest dość trudne, szczególnie trudno uzyskać sztywne połączenie nóg ramownicy z rozpórką dolną, która przeważnie jest pionowa, a nie w płaszczyźnie ramownicy i dlatego też zwykle przy obliczaniu ramownic pochyłych przyjmuje się, że w dole nogi ramownicy połączone są z poprzeczną rozpórką przegibnie. Jeżeli wysokość dźwigarów nie pozwala ciągnąć żeńników podłużnych górnych na całej długości dźwigarów, wtedy zwykle zajmują one tylko część długości dźwigarów i na końcach ich w węzłach  $B$  i  $B'$  (fig. 385 *b*) daje się ramownice, które przenoszą ciśnienie poprzeczne poziome na dolne wiatrownice, i te oddają już to ciśnienie na podpory. Przy ustroju tego rodzaju końce dźwigarów  $A_1 B_1$  i  $A_2 B_2$  (fig. 385 *b*) tworzą most otwarty i dlatego też słupki na tych częściach dźwigarów powinny być szczególnie sztywne w kierunku poprzecznym mostu, aby dobrze trzymać pas dolny w jego płaszczyźnie.

W mostach wielopręsłowych bezprzegubowych żeńniki podłużne daje się na całej długości, jak w mostach belkowych rozciętych, przytem ramownice — żeńniki pionowe — dają się obowiązkowo nad każdą podporą (fig. 386). Co się tyczy żeńników poprzecznych pośrednich, to takowe przy jeździe górą mogą być dawane lub nie. Jednak jeżeli się przewiduje znaczną różnicę w obciążaniu dźwigarów ciężarem ruchomym, np. w moście kolejowym dwutorowym, to lepiej je dawać, choć nie

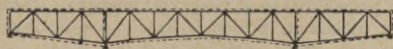


Fig. 386.

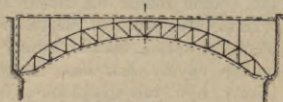


Fig. 387.

w każdym przedziale, gdyż one zmuszają dźwigary do współpracy, i przez to otrzymuje się mniejszą różnicę w ugięciu pionowym dźwigarów.

W mostach wspornikowych żeńniki nie mogą być prowadzone w sposób ciągły na całej długości mostu, gdyż one wytworzyłyby zamieszanie w pracy poszczególnych części tego ustroju. W miejscach, gdzie belka wolno wsparta łączy się ze wspornikiem, muszą być żeńniki przerwane i mieć możność przenosić z jednej części na drugą tylko siłą poprzeczną poziomą, nie działając wzdłuż dźwigara. Żeńniki belki zawie-

szanej powinny mieć możność przesuwania się podłużnego w miejscu połączenia ze wspornikiem, nie mając natomiast możności przesuwu poprzecznego.

W mostach łukowych z jazdą górną teźniki podłużne dają się zwykle w poziomie pomostu i poziomie pasa dolnego łuku (fig. 387). Dlatego też w poziomie pomostu muszą być dane albo specjalne pasy wiatrownicowe lub też belki zewnętrzne podłużne, o ile ciągną się bez przerwy, grając rolę jednocześnie pasów dźwigara wiatrownicowego. Teźniki pionowe łączą tutaj łuki na ich wysokości; na podporach zaś słupki tworzą z teźnikami ramownice. Stawianie teźników pionowych między słupkami pośrednimi nie jest konieczne, lecz to dobrze łączy łuki między sobą i zmusza je do lepszej współpracy. Przy niejednakowem obciążeniu łuków otrzymuje się mniejszą różnicę w ugięciu dźwigara obciążonego i nieobciążonego.

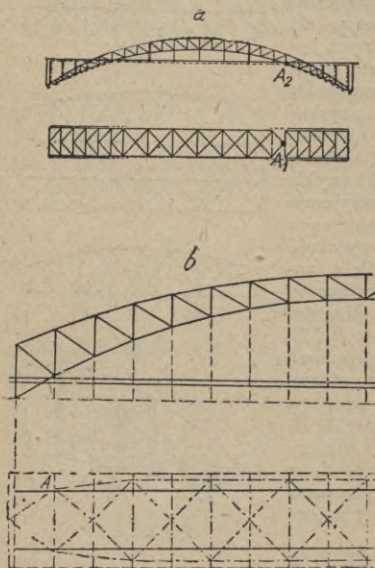


Fig. 388.

Zamiast tworzyć ramownice nad podporami, by przenieść siłę pozioma parcia wiatru z górnej części mostu, na dół na łuki i przez te na podpory, można dźwigar wiatrownicy oprzeć bezpośrednio na górną część podpory, tak jednak, by dźwigar miał możność przesunięć pionowych i podłużnych, będąc pozbawiony możności przesunięć poziomych poprzecznych.

Jeżeli łuk ma przegub w kluczu, wtedy teźniki podłużne muszą być tak konstruowane, by nie przeszkadzały wykonywać zadanie swe przegubowi. W tym celu najlepiej łączyć kołnierzyki przy przegubie rozpórkami i do tych sprowadzać teźniki podłużne. Ponieważ przegub winien być umieszczony w pobliżu pasa górnego w łukach kratowych, przeto teźniki w przedziale około klucza znacznie wyżej przymocowywują się na osi klucza, niż na osi słupków sąsiednich z kluczem.

W mostach łukowych z jazdą dołem lub z pomostem na pewnej wysokości nad podporami trzeba rozpatrzyć dwa wypadki: 1. łuk jest ze ściągami, 2. łuk jest bez ściągu.

W pierwszym wypadku ustrój teźników w poziomie ścięgnięciem nie będzie różnić od mostu zwykłego belkowego. Jak w moście belkowym, teźniki tutaj pracują nie tylko od sił poziomych, lecz i od obciążenia pionowego, a zatem teźniki winny być projektowane z pewnym zapasem. Jeżeli mamy czysty łuk bez ściągu, to teźniki w poziomie części przejazdowej winny być tak urządzone, by ani ich krata, ani ich pasy nie mogły odgrywać roli ściągu. Ponieważ w tym wypadku zawsze trzeba dawać specjalne pasy wiatrownicowe, przeto te pasy, będąc podwieszane do wieżaków łuku, nie mogą być z łukami połączone, lecz albo mogą swobodnie przechodzić przez łuki, mając możność swobodnego przesuwu wzdłuż swych osi i również w kierunku pionowym, natomiast nie mogą mieć możności przesunięć w poprzek mostu i tym sposobem ciśnienie poziome mogą oddać na łuki, a te ostatnie przez swe teźniki na podpory, albo też pasy mogą się kończyć w węzłach  $A_2$  (fig. 388 a), w węźle  $A_1$  mogą się schodzić na osi mostu i tam mieć połączenie z rozpórką między łukami przesuwne wzdłuż. Pasy wiatrownicowe mogą być położone nazewnątrz dźwigarów

głównych i podwieszono do wsporników belek poprzecznych, które mogą służyć jako rozpórki dźwigara wiatrownicowego, sprowadzają w jeden punkt na osi mostu nad podporą i tam otrzymują podparcie przesuwne. W punktach *A* (fig. 388 *b*) przecięcia się pasów wiatrownicowych z łukiem pasy te winny wolno przechodzić bez żadnego połączenia z łukiem. Pasy górne dźwigara mają zwykle teżniki, które końcami swymi opierają się na ramownice końcowe. W pasie

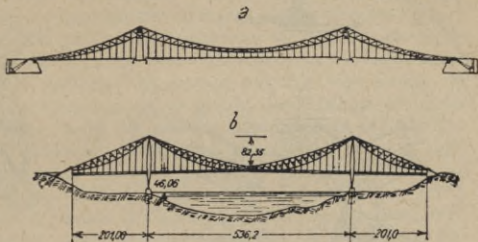
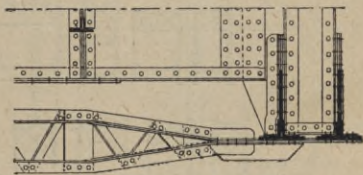


Fig. 389 a, b.

środkowym (w łuku) teżników podłużnych zwykle nie dają; by steżyc pas ten i zabezpieczyć przeciw wyboczeniu, dają teżniki pionowe.

W mostach wiszących z łańcuchami gibkimi teżniki podłużne daje się tylko w poziomie pomostu; nie będą różnić od ustroju teżników w poziomie pomostu mostów łukowych z podwieszoną częścią przejazdową. Na podporach teżniki muszą mieć oparcie przeciw przesunięciom bocznym i swobodne przesunięcie wzdłuż i pionowo. Co się tyczy łańcucha, to ponieważ ten jest tylko rozciągany, przeto steżenia nie wymaga.



Jeżeli do łańcucha gibkiego jest zawieszona belka usztywniająca, to belka ta właściwie przedstawia nic innego, jak tylko belkę zwykłą z jazdą dołem lub górą, przeto i teżniki będą tutaj takie same, jak w mostach zwykłych belkowych: przy jeździe górą, jak w mostach z jazdą górą, i przy jeździe dołem, jak w mostach z jazdą dołem otwartych, gdyż przeważnie teżników górnych nie dają.

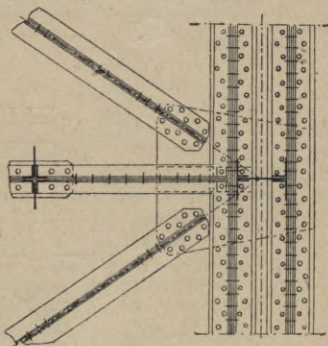


Fig. 390.

Należy zwrócić uwagę, że w tym systemie mostów oba pasy belek są ściskane i rozciągane, i przeto usztywnienie ich teżnikami, by zapobiec wyboczeniu, jednakowo jest niezbędne dla obu pasów. Tylko w mostach o bardzo dużych rozpiętościach, w których łańcuchy stosuje się kratowe (fig. 389 *a, b*), mogą części tych łańcuchów być ściskane, przeto tam zachodzi potrzeba stosowania teżników podłużnych, oraz poprzecznych między łańcuchami. Ustrój teżników podłużnych, oraz ich połączenie z pasami widać z fig. 390. Na fig. 391 i 392 pokazane jest połączenie teżników przegibnoprusowane, gdy teżniki oddają siłę poziomą belce poprzecznej lub rozpórce.

Na fig. 393 *a* pokazane są różne systemy ramownic w mostach z jazdą dołem; w mostach z jazdą górą ramownice dają przeważnie w kształcie krzyży ukośnych (fig. 393 *b*) lub półkrzyżulecowe (fig. 393 *c*).

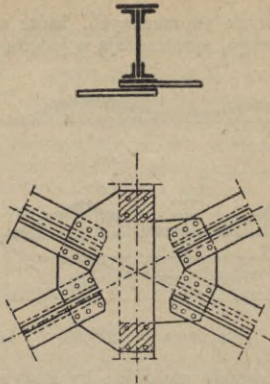


Fig. 391.

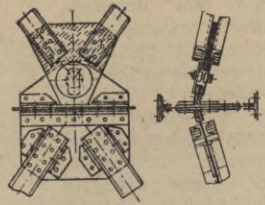


Fig. 392.

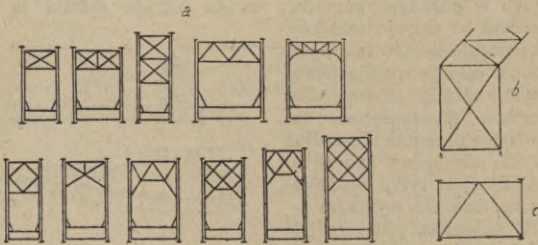


Fig. 393 a, b, c.

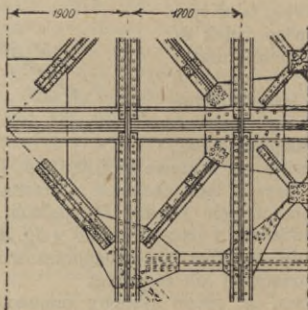
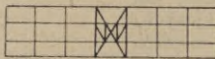


Fig. 394.

Tężniki hamowne. Tężniki hamowne daje się tylko w mostach kolejowych większych rozpiętości lub w mostach, położonych na spadku, oraz w pobliżu stacji kolejowej. W mostach poziomych o niewielkiej rozpiętości na szlaku kolejowym hamowanie pociągu niema miejsca, przeto tężników te nie stosuje się. Siła podłużna, powstająca wskutek hamowania pociągu na moście, oddaje się szynom, które przenoszą ją na mostownice i te na belki podłużne. Belki podłużne wywierają wskutek tego nacisk na belki poprzeczne i te ostatnie wyginają się w planie, jeżeli niema tężników hamownych. Tężniki hamowne mają za zadanie przeniesienia tej siły podłużnej na pasy dźwigarów głównych, które już przenoszą te siły na podpory. Tężniki hamowne urządza się albo pośrodku danego przęsła, albo też na końcach. Czasem jednak w dźwigarach o dużej rozpiętości, jeżeli belki podłużne są przerwane w dwóch lub kilku miejscach, tężniki hamowne daje się w każdymuczastku przerwanych podłużnic. Zatem, gdy podłużnice w dwóch punktach mają połączenie przegibno-przesuwne, tężniki

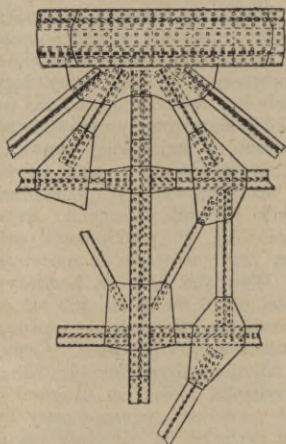


Fig. 395.

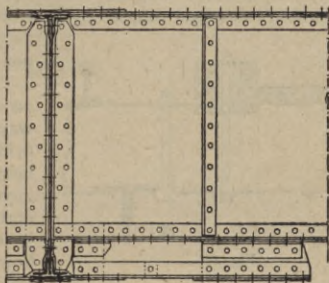


Fig. 396.

hamowne muszą być postawione w trzech miejscach: na końcu i pośrodku. Schematycznie tężniki te pokazane są w planie na fig. 394. Przy tężnikach podłużnych w poziomie jezdni te ostatnie mogą być jednocześnie tężnikami hamownymi, o ile będą odpowiednio połączone z podłużnicami (fig. 394). Na fig. 395 pokazane jest połączenie tężników hamownych z podłużnicami, zaś na fig. 396 tężników podłużnych i jednocześnie hamownych z podłużnicami. Połączenie tężników hamownych z dźwigarami jest takie, jak i tężników podłużnych, i zwykle do ich przynitowania służą te same blachy węzłowe, które łączą wiatrownice z dźwigarami.

## IX. Część przejazdowa i chodniki.

Część przejazdowa czyli pomost składa się z dwóch części: z nawierzchni, tj. tej warstwy zewnętrznej, po której bezpośrednio odbywa się ruch, i z żeber pomostu, tj. belek podłużnych i poprzecznych, na których spoczywa nawierzchnia i które mają na celu przeniesienie sił, otrzymywanych od nawierzchni, na dźwigary główne.

Nawierzchnia mostów kolejowych. Nawierzchnię mostów kolejowych stanowią szyny z kontrszynami i odbojnicami, chodniki pomiędzy szynami

i z boków szyn i wreszcie podkłady, na których spoczywają szyny, względnie dyle podłużne, podtrzymujące szyny. Podkłady leżą albo bezpośrednio na belkach podłużnych, albo na dźwigarach głównych w mostach niewielkich rozpiętości z jazdą górą, albo też na podsypce, która leży na podłożu żelaznym, betonowym lub żelazobetonowym. Nawierzchnię z podsypką stosuje się zwykle do mostów niewielkich rozpiętości (przepustów) na szlaku i w wiaduktach, położonych w miastach, oraz nad drogami z silnym ruchem.

Ustrój nawierzchni w mostach, co do swej stałości i wytrzymałości, powinien zadość czynić tym samym wymaganiom, co i na szlaku. Zatem odległość pomiędzy szynami, oraz ich pochylenie powinno być zabezpieczone. Nawierzchnia powinna być dostatecznie sprężysta, aby przy wejściu pociągu na most nie miały miejsca uderzenia i wstrząśnienia, powinna być dostępna dla dozoru i łatwa do remontu. Nadto na wypadek wykojenia się bądź to parowozu, bądź jakiegokolwiek z wagonów, koła wykojone nie powinny się zapadać, lecz mieć możliwość toczenia się po moście. Ponieważ styki szyn powodują uderzenia kół, przez co otrzymuje się wstrząśnienia całego mostu, przeto na mostach małych rozpiętości winno się unikać połączeń szyn. Na mostach dużych rozpiętości ilość złącz szyn doprowadza się do minimum, stosując długie ogniwa szyn, przytem w stykach szyny łączy się szczelnie bez żadnych luzów, zaś nad podporami daje się przyrządy wyrównawcze.

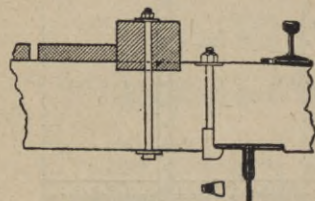


Fig. 397.

Najprostsza i najczęściej stosowana nawierzchnia składa się z szyn, spoczywających na mostownicach (podkładach drewnianych lub też żelaznych). Szyny bezpośrednio leżą na podkładkach żelaznych i są przymocowane do mostownic śrubami. Wewnątrz toru są kontrszyny w odległości od 16 do 25 cm lub też odbojnice drewniane, które dają się wewnątrz toru lub też zewnątrz (fig. 397). Czasem

dają wewnątrz toru kontrszyny i na zewnątrz odbojnice drewniane (fig. 398 a). Tak jedne, jak i drugie ciągną się poza przyczółki mostu na długości od 4,5 do 5 m, przytem kontrszyny schodzą się na osi toru, tworząc ostry kąt, zaś odbojnice zewnętrzne rozchodzą się na zewnątrz na odległość połowy szerokości toru (fig. 398 b).

Mostownice drewniane są zwykle dwóch długości, krótkie 2,4 m i długie 4,8—5 m. Na jedną długą przypadają zwykle dwie krótkie lub jedna, w zależności od prześwitu między mostownicami. Jeżeli prześwit ten jest 20 cm, to można na jedną długą mostownicę dawać dwie, a nawet trzy krótkie, przy prześwicie około 35—40 cm krótkie i długie idą naprzemian, gdyż na długich daje się chodniki i przy znacznej odległości wypadłoby deski dawać znacznej grubości.

Wymiary mostownic są od  $20 \times 25$  do  $24 \times 30$  cm w zależności od nacisku kół parowozu.

Przymocowanie mostownic długich do belek podłużnych robi się według fig. 398 c. Krótkie mostownice mogą być przymocowane do podłużnic hakami (fig. 397), lecz przytem, aby nie mogły się przesuwac wzdłuż podłużnic, winny być odpowiednio wcięte na głębokość 1,5 cm w odbojnice i połączone z nimi co druga lub trzecia mostownica śrubami. Czasem oprócz wcięć dają jeszcze krótkie kątowniki  $100 \times 65 \times 8$ , które biorą się na dwie krętki do mostownic i na jedną do odbojnicy. Długość wkrętek 120 mm, średnica 18 mm (fig. 398 a i d). Aby mostownice nie mogły się przesuwac na podłużnicach wpoprzek mostu, winny być wcięte nieco około 12 mm w podłużnice. Mostownice, spoczywając na pasach podłużnic, działają na te ostatnie nie osiowo, lecz naciskają na krawędź wewnętrzną pasów podłużnic.



Aby otrzymać osiowe ciśnienie, trzeba dać pośrodku pasa podłużnicy nie-szeroką podkładkę (fig. 398 e), na której spoczywają mostownice. Jednak wobec niewielkiego dopuszczalnego naprężenia na ciśnienie w mostownicach drewnianych prostopadle do włókien ( $15 \text{ kg/cm}^2$  dla drzewa iglastego i  $30 \text{ kg/cm}^2$  dla drzewa twardego) jest to trudne do urzeczywistnienia. Pod mostownicami trzeba byłoby dawać specjalne podkładki żelazne. Przy mostownicach żelaznych należy to stosować.

Mostownice żelazne stosują się przeważnie typu Woterena [Vautherin] (fig. 399). Odległość pomiędzy osiami mostownic daje się do  $65 \text{ cm}$ . Aby uchronić od zapadania się kół w razie wykolejenia pociągu na moście,

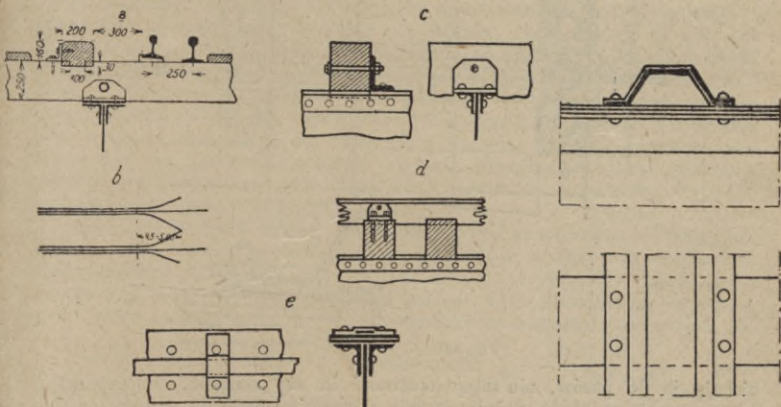


Fig. 398.

Fig. 399.

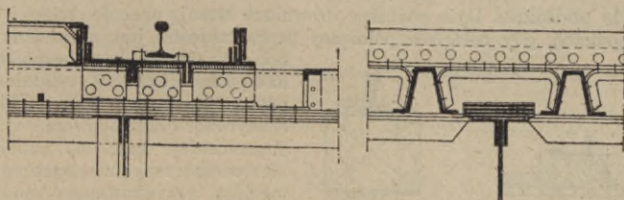


Fig. 400.

pod szyny daje się ceownik i obok szyn dwa zetowniki, których boki, wystające do góry, są nadto wzmocnione kątownikami  $150 \times 75 \times 10$ . Na fig. 400 pokazany jest tego rodzaju ustrój nawierzchni, zastosowany na mostach przez rzekę Wołgę koło Kazani i Symbirska. Pokrycie nawierzchni zrobione jest z blachy tłoczonej grubości  $3 \text{ mm}$  i wzmocnionej kątownikami  $60 \times 30 \times 6$ . Stosując woterenówki, trzeba mieć na uwadze, że pochyłe boki pod ciśnieniem szyn mają dążność do rozsuwania się i całe korytko płaszczy się. Przeto, o ile w inny sposób nie jest uniemożliwione rozsuwanie się ścianek bocznych, trzeba pod szynami i między szynami na odległości około  $500 \text{ mm}$  dawać przewiązki-ściągi. Nadto pod szynami i nad podłużnicami ścianki boczne należy stężyć kątownikami choćby  $60 \times 60 \times 6$ . Szyny tutaj również leżą na podkładkach żelaznych. Aby zmniejszyć szum oraz stworzyć większą elastyczność toru, pod podkładki należy dawać filc asfaltowy lub też wołók przesycony gudronem i dobrze sprasowany. Dobre połączenie woterenówek z podłużnicami pokazane jest na fig. 318, które było zastosowane w moście przez rzekę Wupper w Müngsten. Jak widać

z fig. 401, mostownice spoczywają tutaj wolno na podłużnicach, ciskając na nie osiowo.

Poprzeczne blachy *B* z niewielkimi wycięciami z boków pozbawiają mostownice ruchów w płaszczyźnie pasów blachownicy, zaś łapki *Ł* do-

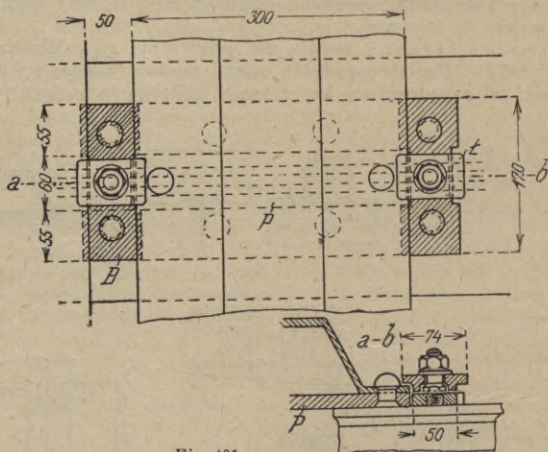


Fig. 401.

ciskają je do pasów, nie dając możliwości im się podnosić. Poprzeczki *P* łączą stopki podkładu i jednocześnie powodują ciśnienie osiowe na podłużnice.

**Dyle podłużne.** Dyle podłużne drewniane stosują obecnie rzadko i tylko w wypadkach, gdy odległość pomiędzy poprzecznicami jest niewielka, albo

też, gdy szyny leżą bezpośrednio nad podłużnicami. W ostatnim wypadku dyle tworzą tylko podkładkę elastyczną. Przymocowanie dyli do poprzecznic daje się zapomoć nierównobocznego zewnętrznego kątownika, przynitowanego do pasa poprzecznic. Nadto, aby pod działaniem sił poziomych dyl się nie podnosił na poprzecznicę, mocują go do poprzecznic śrubą pionową od wewnątrz toru. Styki dyli dają tylko nad poprzecznicami i w tym celu do pasów poprzecznic

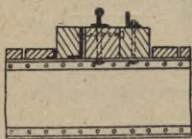


Fig. 402.



Fig. 403.

przynitowuje się w miejscach styków blachy podłużne. By zabezpieczyć od zawalenia się kół w razie wykołejenia się wozu tak z jednej, jak też i z drugiej strony dyla, niosącego szynę, daje się dyle dodatkowe o tej samej wysokości, co i dyl niosący, i oprócz tego na wewnętrznych dylach mocuje się kątowniki kierownicze (fig. 402). Aby nie było zsuwania się dyli wzdłuż mostu, muszą takowe być wcięte w belki poprzeczne. O ile stałość w kierunku poprzecznym, oraz należyta odległość między szynami jest zabezpieczona nad belkami poprzecznymi przez odpowiednie przymocowanie dyli do poprzecznic, to między poprzecznicami stałość ta nie jest zupełnie zabezpieczona. Paczenie się dyli może powodować zmianę odległości między szynami, przeto należy szyny połączyć ściągami żelaznymi tak, aby szerokość

toru była utrzymana. Dyle, ułożone bezpośrednio na podłużnicach, przymocowuje się zapomocą krótkich kątowników, które tworzą korytko (fig. 403). Do podłużnicy dyle przytwierdzają się pionowymi śrubami w odległości około 0,5 m jedna od drugiej; śruby dają się w szachownicy. Szyny do dyli przytwierdzamy zapomocą haków.

Górna płaszczyzna dyla ma pochylenie odpowiednio do pochylenia szyny, około  $\frac{1}{16}$  do  $\frac{1}{20}$ .

**Obliczenie nawierzchni.** Mostownice poprzeczne zwykle obliczamy w trzech założeniach:

1. Podkłady-mostownice dla sztywnej szyny stanowią podpory sprężyste, przeto siła nacisku koła, działając na sztywną szynę, oddaje to ciśnienie na kilka mostownic. Dopuszczalne naprężenie na zginanie nie powinno wtedy przekraczać  $90 \text{ kg/cm}^2$  dla drzewa miękkiego i  $120 \text{ kg/cm}^2$  dla drzewa twardego. 2. Ciśnienie koła oddaje się całkowicie na jeden podkład przy dopuszczalnych naprężeniach odpowiednio  $135 \text{ kg/cm}^2$  i  $160 \text{ kg/cm}^2$ . 3. Ciśnienie koła wykolejonego oddaje się całkowicie na jeden podkład, przytem położenie koła na mostownicy bierze się najnieudogodniejsze, jakie pozwalają zająć szyny kierownicze lub odbojnice. Naprężenie w ostatnim wypadku może wynosić około  $180 \text{ kg/cm}^2$ .

Niech będzie  $EI$  i  $E_1 I_1$  — sztywność szyny i mostownicy,  $l$  — odległość między podłużnicami,  $c$  — odległość od podłużnicy do szyny,  $a$  — odległość między osiami mostownic,  $R$  — nacisk koła na szynę,  $P_1$  — ciśnienie na mostownicę środkową, nad którą stoi koło,  $P_2$  — ciśnienie na sąsiednie, obok leżące mostownice,  $P_3$  i  $P_4$  — ciśnienie na następne mostownice, to:

$$R = P_1 + 2 P_2 + 2 P_3 + 2 P_4;$$
 dalej, jeżeli  $\frac{E_1 I_1 a^3}{E \cdot I \cdot c^2 (3l - 4c)}$  oznaczamy przez  $k$ , to możemy napisać:

$$P_1 = \frac{1 + 2k}{3 + 2k} R \text{ i } P_2 = \frac{1}{3 + 2k} R$$
 w założeniu, że siła  $R$  oddaje się na trzy mostownice, tj.  $R = P_1 + 2 P_2$ .

W założeniu, że siła  $R$  rozkłada się na pięć mostownic, mamy:

$$R = P_1 + 2 P_2 + 2 P_3; \quad P_1 = \frac{1 + 18k + 7k^2}{5 + 34k + 7k^2} R; \quad P_2 = \frac{1 + 11k}{5 + 34k + 7k^2} R$$

$$\text{ i } P_3 = \frac{1 - 3k}{5 + 34k + 7k^2} R.$$

Zwykle więcej niż na pięć mostownic ciśnienie koła się nie oddaje. Na ile mostownic oddaje się ciśnienie, zależy od wielkości  $k$ .

Jeżeli  $k \geq \frac{1}{3}$ , ciśnienie oddaje się na 3 mostownice;

„  $k \geq 0,055$ , lecz  $< \frac{1}{3}$ , ciśnienie oddaje się na 5 mostownic;

„  $k < 0,055$ , ciśnienie oddaje się na 7 mostownic.

Przeto należy najpierw obliczyć  $k$  i w zależności od  $k$  znaleźć siłę  $P_1$  ze wzorów poprzednich. Mając zaś  $P_1$ , mamy moment gnący  $P_1 c$  i siłę poprzeczną  $Q = P_1$ , zatem i naprężenia na zginanie  $k_g = \frac{P_1 c}{W} \text{ kg/cm}^2$  i na

ściananie  $k_t = \frac{3 P_1}{2 b h}$ , gdzie  $b h$  jest przekrój mostownicy.

Przy mostownicach żelaznych  $k_t = \frac{P_1 S}{2 \delta \cdot I} \frac{e}{e - d}$ , gdzie  $S$  oznacza moment statyczny połowy przekroju względem osi obojętnej,  $I$  — moment bezwładności,  $\delta$  — grubość ścianki,  $e$  — odległość między nitami w ścianie mostownicy,  $d$  — średnicę nita.

**Obliczenie dyli podłużnych.** Jeżeli przez  $a$  oznaczymy rozpiętość dyla,  $E_2 I_2$  jego sztywność, przez:  $E_1 I_1$  sztywność szyny  $S_1$  i  $S_2$  momenty statyczne dyla i szyny i przez całkowite  $M_c$  i  $T_c$  moment gnący i siłę poprzeczną i przez  $T_2$  i  $T_1$  siłę poprzeczną, i przez  $M_2$  i  $M_1$  momenty gnące, które się oddają na dyl i na szynę, wtedy mamy  $M_c = M_2 + M_1$ ;  $M_2 = M_c \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$  i  $M_1 = M_c \frac{E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$ ;  $T_2 = T_c \frac{S_1 I_2}{S_1 I_2 + S_2 I_1}$ ;  $T_1 = T_c \frac{S_2 I_1}{S_1 I_2 + S_2 I_1}$ ;

$$k_g = \frac{M}{W_2}; \quad k_t = \frac{T_2 \cdot S_2}{I_2 \cdot \delta}.$$

Bezpośrednie przytwierdzenie szyn do poprzecznic żelaznych powoduje bardzo silne pucie połączeń nitami żeber pomostu, przeto, jak to już było wskazane, bezpośrednio układanie szyn na mostownice żelazne nie powinno mieć miejsca. Należy pomiędzy szyną i mostownicami dawać podkładki wołkowe dobrze sprasowane o grubości około 2 cm lub też we wgłębienia mostownic wstawiać drewniane krótkie podkłady (fig. 22), wystające nieco ponad mostownice (2—3 cm) i do nich przytwierdzać szyny. Podkłady utwierdza się na śruby pionowe, by nie mogły się przesuwać wzdłuż mostownic i podnosić.

**Nawierzchnia z podsypką.** Do podtrzymania podsypki obecnie w mostach żelaznych stosuje się blachę płaską, falistą, cylindryczną, nieckową,

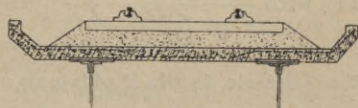


Fig. 404.

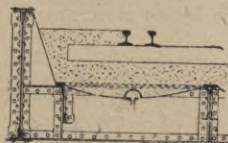


Fig. 405.

kształtówki Zores i Vautherin'a i płyty żelazobetonowe (fig. 404). Podsypka może być położona bezpośrednio na swem podłożu żelaznem (fig. 405), lub też żelazo pokrywa się warstwą betonu z warstwą odwadniającą i dopiero na beton kładzie się podsypkę (fig. 406). Pokrycie podłoża żelaznego warstwą betonu ma tę zaletę, że przedewszystkiem izoluje żelazo od wody deszczowej, następnie steża je, przez co ciśnienie od podkładów lepiej się rozkłada, szczególnie przy stosowaniu „zoresówek“ i „woterenówek“.

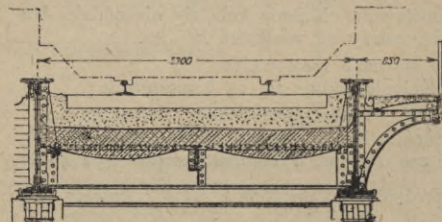


Fig. 406.

Beton łączy je jakby w jedną płytę. Bez betonu kształtowniki, nie będąc niczem ze sobą połączone, utrzymują przy niejednakowym obciążeniu różne ugięcia i tem powodują nierówność toru. Warstwa betonu powinna mieć grubość conajmniej 50 mm, a wraz z pokryciem warstwą zaprawy cementowej 60 mm. Na warstwę cementową daje się warstwę izolacyjną, która może być z asfaltu, brezentu naklejonego zapomocą gudronu, ruberojdu lub najlepiej z cienkiej blachy ołowianej (0,2—0,3 mm) pomiędzy dwiema warstwami papy, również naklejonej zapomocą gudronu i pokrytej gudronem. Aby warstwa izolacyjna nie mogła być uszkodzona przez ostre ka-

mienie nadsypki lub też przy zgartywaniu jej podczas remontu, dobrze jest pokryć ją również warstwą chudego betonu grubości choćby 45—50 mm i dopiero na beton dawać podsypkę. Grubość warstwy podsypki winna wynosić od 15—20 cm, licząc do spodu podkładu. Warstwa izolacyjna daje się ze spadkiem poprzecznym ku środkowi mostu lub ku bokom. Woda, spływająca po niej, schodzi do rur i rynien. Rynny winny być przeciągnięte do podpór, gdzie przez odpowiednie rury woda odprowadza się do stoków kanalizacyjnych. Jako podtrzymanie podsypki, najlepsza jest blacha nieckowa. Jest ona lżejsza od blachy płaskiej, która wymaga usztywnienia w postaci kątowników, zetowników lub ceowników i nadto większej grubości, niż blacha nieckowa przy tej samej wytrzymałości; blacha nieckowa doskonale steża most w kierunku poprzecznym, tak że w zupełności zastępuje teźniki poziome. Ilość betonu jednak jest większa, niż przy blachach płaskich, i odwodnienie jest nieco więcej skomplikowane, gdyż każda niecka wymaga w największym swem pogłębieniu oddzielnych rurek do odprowadzenia wody, któraby się dostała przez warstwę izolacyjną. Przy należytej izolacji od wody ogólnej mostu można w nieckach i nie dawać rurek do odprowadzania wody.

Blacha cylindryczna co do swej wytrzymałości mniej więcej odpowiada nieckom, lecz jest mniej sztywna.

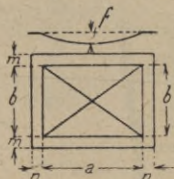


Fig. 407.

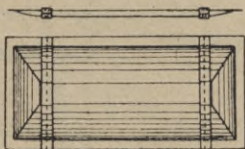


Fig. 408.

Wymiary niecek od  $1,5 \times 1,5$  m do  $1,0 \times 2,5$  m grubości od 5 do 10 mm, strzałka około  $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{18}\right)b$ , licząc za  $b$  wymiar mniejszy niecki. Wymiary  $a$  i  $b$  (fig. 407), jak również i boki niecek, mogą być dowolne w granicach wyżej wskazanych. Jednak stosowanie różnych wymiarów  $a$  i  $b$  niecek przy niewielkich ilościach silnie podnosi cenę jednostki wagi blachy. Przeto przy niewielkich ilościach blach wymiary takowych  $a$  i  $b$  należy stosować takie, jakie huty wyrabiają, boki zaś  $m$  i  $n$  można stosować różne, gdyż te mogą być różnej szerokości, przy danych matrycach i tłokach. Niecki mogą być wyrabiane i ręcznie i wtedy wymiary ich mogą być dowolne i długość ich może dochodzić do 4 m. Ręczne niecki nie są tak dokładne, i przeto rzadko je stosują. Czasem stosuje się niecki złożone, składające się z trzech części: końce — niecki rozciętej na dwie części i środek — blacha cylindryczna tej samej szerokości i wypukłości, co i niecki. Niecki i blachę cylindryczną nituje się jednym szeregiem nitów, nakładając jedną blachę na drugą, lub też zapomocą nakładki (fig. 408). Żelazo nieckowe daje się czasem wypukłą stroną do góry, pracuje wtedy ono, jak sklepienie. Otrzymuje się lepsze odwodnienie i, czasem, wagę betonu mniejszą, niż przy zastosowaniu wypukłością w dół. Jednak, mając na uwadze, że wklęsłe niecki są znacznie wytrzymalsze, gdyż żelazo pracuje na rozciąganie, gdy tymczasem przy wypukłych, pracując jako sklepienie, jest ściskane, przeważnie stosują niecki wklęsłe, tj. wypukłością skierowane do dołu. Przytwierdzenie żelaza nieckowego, jak również i żelaza płaskiego, wymaga, aby górne pasy żeber pomostu, tj. belek podłużnych i poprzecznych, do których przytwierdzamy żelazo, leżały w jednej płaszczyźnie. Żebra pomostu tworzą zazwyczaj czworoboki prostokątne, równoległoboki lub też trapezy,

a nawet trójkąty w mostach ukośnych, i stosownie do figur, jakie tworzą żebra pomostu, blacha płaska lub nieckowa otrzymuje kształt w planie. Przytwierdzenie blachy może być wykonane według sposobu, pokazanego na fig. 409. Ponieważ żelazo bądź to płaskie, bądź nieckowe lub cylindryczne przy obciążeniu daje rozpór, przeto pas belki, do którego żelazo nitujemy, winien mieć blachę poziomą, aby nie miało miejsce odrywanie się główek nitów poziomych pasa. Gdy się okazuje, że danie blach ze względu na wytrzymałość jest zbyt ciężkie i zbyt nioby wagę pomostu podnosiło, wtedy można się zadowolić niewielkiej długości nakładkami na 3 lub 5 szeregów nitów pośrodku rozpiętości belki (fig. 410).

Stosowanie belek walcowanych jest tu zupełnie wskazane, lecz przy szerokości każdego boku nie mniej niż 45 mm, zatem dwuteowniki o wysokości najmniej 24 cm. Jeżeli wypada stosować mniejsze profile, wtedy lepiej stosować korytka, przytwierdzając blachy według fig. 411.

Porównyując nawierzchnię lekką prętową z nawierzchnią zwartą ciężką na podsypce, możemy wskazać na następujące zalety i wady tych ustrojów.

Przy nawierzchni na podsypce wpływ dynamiczny pociągu na budowę wierzchnią, szczególnie zaś na poprzecznicę i podłużnicę, jest mniejszy, ponieważ podsypka dla szyn jest podłożem sprężystym. Jednakowość na-



Fig. 409.

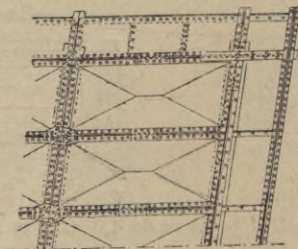


Fig. 410.



Fig. 411.

wierzchni tak na moście, jak i na szlaku nie powoduje uderzeń przy wjeździe pociągu na most, również zwiększenie wagi samego mostu, a zatem zwiększenie stosunku wagi własnej do obciążenia ruchomego, zmniejsza wstrząśnienia. Remont nawierzchni prosty i łatwy i jednakowy, jak na szlaku. W razie wykolejenia się pociągu na moście podsypka zabezpiecza od zapadnięcia się kół, nawierzchnia podsypki jest niepalna i głuszy szum i turkot przechodzącego pociągu. Mając te zalety nawierzchnia z podsypki, przez znaczną wagę zwiększa całą wagę mostu do 2—2,5 razy, wagę zaś żelaza do 25—45%. Ponieważ podsypka pokrywa ściśle całą konstrukcję żelazną, na której leży, przeto rewizja i malowanie żelaza jest połączone z pewnymi trudnościami, gdyż wymaga czasowego usunięcia podsypki.

Co się tyczy nawierzchni lekkiej prętowej, to obecnie stosuje się przeważnie mostownice poprzeczne na belkach podłużnych. Nawierzchnia z mostownic ma urządzenie takie same, jak na szlaku, wydłużone mostownice dają możliwość prostego ustroju chodników, trzymają dobrze szerokość toru i pochylenie szyn i przy dość gęstym ułożeniu mostownic zabezpieczają od zapadania się kół wykolejonych. Wymagają natomiast więcej materiału, niż nawierzchnia z dyli podłużnych, i utrudniają nieco stykowanie szyn na moście, gdyż przy odpowiednim rozłożeniu mostownic trzeba szyny przycinać, aby styki trafiały między mostownicami lub przy danej długości szyn odpowiednio układać mostownice.

Tej ostatniej niedogodności nie ma nawierzchnia z dyli podłużnych, lecz ta ostatnia ma zato wady, dla których stosuje się rzadziej. Mianowicie wskutek paczenia się dyli od działań atmosferycznych odległość między szynami, oraz pochylenie szyn się zmienia. Zejście z szyn koła powoduje zapadnięcie się kół i, co zatem idzie, katastrofę.

Pokrycie pomostu mostów kolejowych przy mostownicach lub dylach drewnianych przeważnie robi się z desek grubości 5–6,5 cm i szerokości około 25 cm, między deskami daje się odstęp około 2–5 cm. Wzdłuż szyn deski winny być tak ułożone, aby zmiana szyn nie wymagała zdjęcia desek. Deski do mostownic przytwierdza się gwoździami. Przy mostownicach deski układa się wzdłuż mostu, przytem chodnik środkowy pomiędzy szynami zawsze kładzie się na mostownicach, zaś boczne chodniki albo na mostownicach wydłużonych (fig. 398 a), albo też na specjalnych beleczkach, tak, że tor kolejowy jest uniezależniony od chodników bocznych (fig. 412 i 413). W drugim wypadku wszystkie mostownice są jedna-

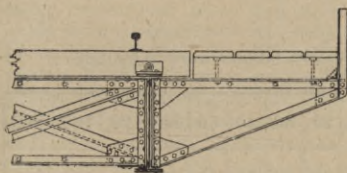


Fig. 412.

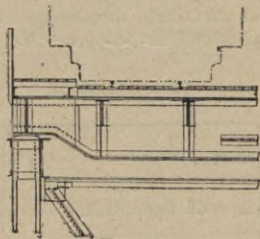


Fig. 413.

kowej długości. Uniezależnienie chodników bocznych od toru ma tę zaletę, że zmiana mostownicy nie wymaga zrywania pokrycia chodników bocznych, i przez to ułatwia się wykonanie naprawy toru. Mostownice krótkie mogą być długości 2,4 m przy odległości między podłużnicami 1,8 m. Jeżeli odległość między podłużnicami jest  $1,80\text{ m} + \Delta$ , to długość mostownic winno być  $2,4\text{ m} + \Delta$ .

Odległość między długimi mostownicami, podtrzymującymi chodniki, może być sprowadzona do 1,6 m i wtedy deska grubości 5 cm dopuszcza

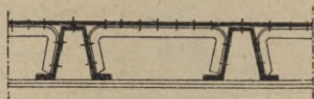


Fig. 414.

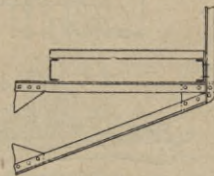


Fig. 415.

obciążenie skupione do 175 kg (człowiek, niosący ciężar). Przy mostownicach żelaznych pokrycie robi się przeważnie z blachy tłoczonej grubości około 3 mm i usztywnionej kątownikami (fig. 414). Przytem chodniki z boków mogą być urządzone na wydłużonych mostownicach. Jeżeli chodniki boczne nie są związane z mostownicami, wtedy wspierają je lekkie wsporniki, przymocowane do belek podłużnych i podtrzymujące bezpośrednio pokrycie (fig. 412), lub też wsporniki te podtrzymują dodatkowe beleczki podłużne, na których spoczywają poprzecznice, i na tych ostatnich deski podłużne chodników, lub też na beleczkach podłużnych daje się bezpośrednio pokrycie z desek poprzecznych (fig. 415).

Połączenie mostu kolejowego z nasypem. Jeżeli nawierzchnia mostu składa się z podsypki, wtedy połączenie jest bardzo proste. Ponieważ ten rodzaj nawierzchni stosuje się zwykle do mostów małej rozpiętości, dla których przesunięcia dźwigarów głównych od zmiany temperatury w granicach od  $-35^{\circ}\text{C}$  do  $+35^{\circ}\text{C}$  są nieznaczne, zakończenie może być wykonane według fig. 416. Jak widać z tej figury, nawierzchnia zupełnie tutaj się nie zmienia, jakby mostu nie było. Jednak przy mostach większych rozpiętości przesunięcia od zmiany temperatury, oraz od zmiany długości pasa dźwigarów, w poziomie którego leży pomost, od obciążenia ruchomego mogą być dość znaczne. Przy współczynniku wydłużalności żelaza zlewne  $\alpha = 0,0000125$  przy różnicy temperatury  $70^{\circ}\text{C}$  i przy naprężeniu w pasach od obciążenia ruchomego średnio  $750\text{ kg/cm}^2$  przesunięcie dźwigarów o rozpiętości  $l$  na podporze otrzyma się:

$$\Delta l = 0,0000125 \times 70 l + \frac{750}{2150000} l = 0,000875 l + 0,000286 l;$$

Rozpiętość $l\text{ m}$ . . . . .	10	15	20	25	30	40	60	80	120	160	300
$\Delta_1 l$ od temperatury $\text{mm}$ .	9	13	18	22	26	35	53	70	105	140	263
$\Delta_2 l$ od obciążenia ruch. $\text{mm}$	3	4	6	7	9	11	17	23	34	46	86

Z tej tablicy widać, że stosunkowo do niewielkich rozpiętości 30—40 m przesunięcie w jednym kierunku jest niezbyt wielkie, nie przekracza 28 mm,

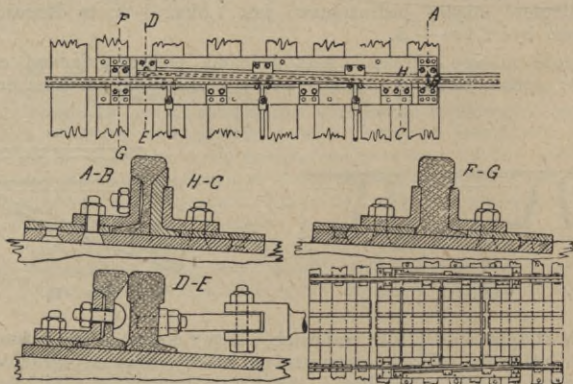


Fig. 417.

i przeto do tych rozpiętości niema potrzeby stosować do szyn przyrządów wyrównawczych. Do większych zaś rozpiętości luz między szynami wypadłby zbyt duży, przeto należy stosować przyrządy wyrównawcze, które winny być stawiane albo bezpośrednio nad podporami ruchomymi dźwigarów, albo też w pobliżu nich. Przyrządy wyrównawcze w mostach jedno-



przesłowych najlepiej dawać na końcu budowy wierzchniej, nie zaś na ściance przyczółka lub bezpośrednio za ścianką. W mostach wieloprzesłowych przy belkach rozciętych przyrządy te daje się nad filarami. Przyrząd wyrównawczy z iglicą pokazany jest na fig. 417.

Zakończenie mostu i przejście szyn z mostu na przyczółek winno być takie, aby była zachowana sprężystość toru i aby wstrząśnienia i uderzeniu od kół pociągu były najniezgodliwsze dla muru przyczółków. Układanie przeto mostownic na przednich ściankach przyczółków i przytwierdzenie do nich szyn (fig. 418) nie jest zbyt dobre, gdyż mostownice nie są dostatecznie elastyczne, aby łagodziły uderzenia w dostatecznej mierze. Lepiej przeto stosować zakończenie według fig. 419 lub jeszcze lepiej według fig. 420. W pierwszym wypadku pokład drewniany służy tylko do podtrzymania podsypki, aby ta nie zsypanywała się do niszy łożyskowej, stopa zaś szyny wznosi się nieco nad podkładem około 2 cm i spoczywa na podkładzie, który leży na podsypce. W drugim wypadku przednia ścianka przyczółka zakończona jest beleczką żelazną, która podtrzymuje podsypkę, szyna zaś spoczywa na podkładzie na podsypce. W drugim wypadku odległość między podkładem ostatnim na beleczkach podłużnych i podkładem na przyczółku może być dostatecznie mała przy odpowiedniej warstwie podsypki pod tym podkładem.

Jeżeli budowa wierzchnia jest znacznej wysokości na przyczółku, np. w mostach z jazdą górą dużych rozpiętości, wtedy od zmiany temperatury

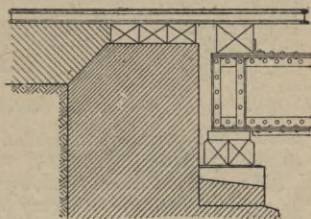


Fig. 418.

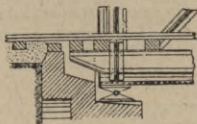


Fig. 419.

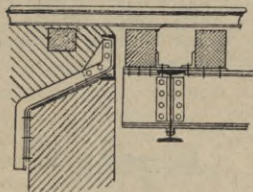


Fig. 420.

otrzymamy podnoszenie się lub opuszczanie szyn, które przy wysokości ustrojowej mostu 30 m dochodzić będzie do  $\Delta h = \pm 13 \text{ mm}$ . Gdyby przeto połączenie pozostawić, jak było wskazane na fig. 420, to otrzymalibyśmy znaczne załamanie toru w płaszczyźnie pionowej. Aby załamanie było możliwe łagodne, należy połączenie mostu z przyczółkami wykonać za pomocą beleczek podłużnych, wspartych na przyczółkach przesuwno przegibnie, zaś z dźwigarami albo przegibnie, albo nawet sztywnie, lecz z warunkiem, że końce, wsparte na przyczółku, nie będą się podnosić ze swych podpór, tj. że obciążenie stałe jest dostateczne, aby ugiąć końce beleczek na wielkość  $\Delta h$ .

Przy obliczaniu beleczek takich należy przyjąć pod uwagę naprężenie dodatkowe wywołane tem ugięciem. Jeżeli długość beleczki jest  $l$  i obciążenie stałe  $p$ , to mamy:

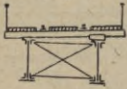
$$\Delta h = f = \frac{p l^4}{8 E I} = k_g \frac{l^2}{2 E h_1}; \quad k_g = \frac{2 E h_1 \Delta h}{l^2}, \text{ jeżeli przez } h_1 \text{ oznaczy-$$

my całkowitą wysokość beleczki podłużnej i przez  $I$  jej moment bezwładności.

$$\text{Obciążenie } p = \frac{8 \Delta h \cdot E I}{l^4}.$$

**Położenie mostu w łuku.** Jeżeli most leży w krzywej promienia  $R$ , wtedy szyna zewnętrzna wznosi się nad szyną wewnętrzną na wielkość  $h = \frac{S v^2}{g R}$ , gdzie  $S$  jest to szerokość toru,  $v$  — szybkość pociągu,  $g$  — przyspieszenie siły ciężkości.

Wzniesienie to można osiągnąć przy niewielkiem  $h$  nieco większem wcięciem podkładów do podłużnic wewnętrznych, przy znacznej wielkości  $h$  daje się podkładki między podkładami i zewnętrzną belką podłużną (fig. 421), lub też na belce podłużnej zewnętrznej kładzie się podłużny dyl przymocowany odpowiednio i w niego wcina się mostownice. W wyżej wskazanych wypadkach belki poprzeczne i podłużne daje się normalnie, jak w mostach na prostej. Zamiast stawiać pod-



† fig. 421.

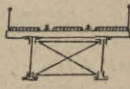


Fig. 422.

kładki pod mostownice, można belki podłużne stawiać pionowo, lecz na różnej wysokości (fig. 422).

Wreszcie można całą budowę wierzchnią wykonać normalnie, jak w mostach na prostej i postawić dźwigary pochyło: zewnętrzny wyżej od wewnętrznego. Sposób bardzo prosty, lecz nadaje się tylko do mostów o niewielkiej rozpiętości, dla których obciążenie stałe jest bardzo małe w porównaniu z obciążeniem ruchomem. Naturalnie, przy tego rodzaju położeniu dźwigarów siła od obciążenia ruchomego działa równoległe do płaszczyzny dźwigarów tylko wtedy, gdy szybkość odpowiada przyjętemu przechyleniu dźwigarów, przy innych szybkościach siła pociągu nie będzie równoległa do płaszczyzny dźwigarów.

**Mosty na wzniesieniu.** Dźwigary mostów na wzniesieniach lub spadkach stawia się poziomo lub z pochyleniem, odpowiednio do spadku toru. Łożyska leżą wtedy na ciosach podporowych poziomych i walki są poziomo położone, wobec czego reakcje otrzymują się pionowe. Ma to jednak tę wadę, że koniec ruchomy dźwigara przesuwają się nie równoległe do toru, lecz poziomo, wskutek tego w połączeniu nawierzchni mostu z nadsypem

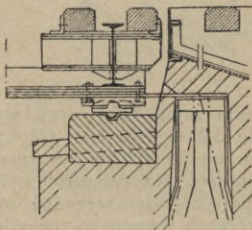


Fig. 423.

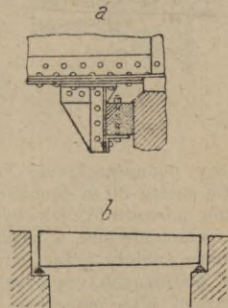


Fig. 424 a, b.

toru wytwarza się pewna nierówność, która naogół bywa bardzo nieznaczna. Łożysko nieruchome daje się na końcu dźwigarów niżej położonym, przytem zaleca się ten koniec połączyć z przyczółkiem tak, aby nie mógł się zsuwać (fig. 423). W mostach małych można zadawalniać się beleczką drewnianą między wspornikiem, przynitowanym do spodu dźwigarów, i przyczółkiem (fig. 424 a).

Jeżeli dźwigary stawiamy na jednym poziomie, wtedy pomost musi mieć odpowiedni spadek, który wytwarza się albo tem, że podłużnicom nadajemy spadek, albo na podłużnicach poziomych dajemy dyle klinowe na pasach

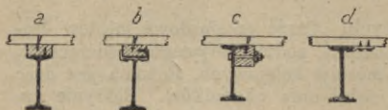
ze stoczystością górnej powierzchni dyla odpowiednio do spadku toru. Najmniejsza grubość dyla 60—65 mm.

W mostach niewielkich rozpiętości z jazdą górą można również pas górny dać z pochyleniem, czyli nadać blachownicy kształt trapezowy (fig. 424 b).

**Nawierzchnia mostów drogowych.** Część przejazdowa mostów drogowych co do żeber pomostu, oraz podłoża, podtrzymującego nawierzchnię, nie różni się od części przejazdowej mostów kolejowych. Różnica jest dość duża tylko w pokryciu nawierzchni jezdni oraz chodników. Pokrycie nawierzchni jezdni z desek (dyli) podłużnych lub poprzecznych daje się zwykle na podłożu również z desek poprzecznych lub podłużnych w zależności od żeber pomostu. Grubość dyliny wierzchniej stosuje się zwykle od 5 do 6,5 cm i szerokość od 20 do 25 cm. Nawierzchnię z jednej warstwy dyli daje się rzadko i to tylko na mostach o bardzo słabym ruchu, gdy raczej liczyć trzeba na gnicie desek, a nie na ścieranie od jazdy. Przy pojedynczej warstwie deski winny być nieco grubsze, niż wypadają według obliczenia, gdyż zawsze trzeba mieć zapas na ścieranie około 1—1,5 cm. Przy podwójnej warstwie dolna warstwa jest warstwą niosącą, zaś górna jej pokryciem, które chroni warstwę dolną od uszkodzenia przez wozy, jadące po moście, oraz do przenoszenia ciężarów skupionych w postaci kół wozów na dwie lub więcej desek dolnych. Przy silnym ruchu górna warstwa winna mieć grubość około 5—6,5 cm. Jak już było wspomniane, górną warstwę daje się poprzeczną lub podłużną. Poprzeczne deski mniej się ścierają od jazdy, dają lepsze oparcie kopytom końskim, lepiej ścieka woda po nich przy spadku pomostu poprzecznym, lecz gorzej przy spadku podłużnym. Podłużne deski dają mniejszy opór koniom, spokojniejszą jazdę po moście, lepszy ściek wody przy spadku podłużnym i, choć więcej się niszcą od jazdy, niż deski poprzeczne, lecz zato ścieranie się tych desek jest przeważnie w określonych miejscach, wstęgach, zmiana tych desek jest łatwa, i nie wymaga zamiany pokrycia na całej szerokości mostu, jak to ma miejsce przy pokryciu poprzecznym, gdzie wyżłobienie desek w pewnych tylko miejscach wymaga jednak zamiany desek na całej szerokości mostu. Dlatego też, jeżeli przyjąć pod uwagę możliwość częściowej reperacji desek podłużnych, to naogół okazuje się, że pokrycie podłużne choć jest mniej trwałe niż poprzeczne, to jednak może być naogół tańsze od poprzecznego. By uchronić górne deski od szybkiego niszczenia, dobrze jest na mostach o silnym ruchu kołowym dać podłużne wstęgi z blachy cienkiej o szerokości 40—50 cm, odpowiednio do szerokości kolei wozów. Jeżeli do mostu podchodzi szosa, wtedy lepiej od mostu na długości około 10 m szosę zamienić brukiem zwykłym. Z szosy bowiem drobne i ostre kamyki przenoszą się na most i szybko niszczą pokrycie jego deskowe, nadto, ścierając się na moście, tworzą miazgę, która od deszczu przeistacza się w śliskie błoto, robiąc jezdnię niebezpieczną dla jazdy. Górną warstwę dyli daje się przeważnie z drzewa miękkiego iglastego. Pokrycie drzewa twardego jest znacznie droższe, nadto drzewo twarde od jazdy szybko się wygładza i jazda staje się niebezpieczną. Deski górne układa się szczelnie i winny one być suche. Mokre deski po uschnięciu dają szczeliny, które powodują szybkie niszczenie desek. Dolna warstwa, niosąca, może być z desek lub dyli w zależności od odległości między żebrami pomostu, na których spoczywa. Dolne deski kładą się z odstępem około 2,5—3 cm. Styki ich dajemy na osi mostu, jeżeli leżą wprostek mostu. Przytwierdzenie dolnych desek do żeber pomostu żelaznych może być wykonane według fig. 425 a, b, c, d. Przy belkach drewnianych, ułożonych na belkach żelaznych, deski przybija się wprost gwoździami.

Przy pokryciach z kostki drewnianej, kamiennej, asfaltu, bruku zwyczajnego z kamienia polnego, podłoża zwykle jest betonowe, wyłożone na blachach płaskich, falistych, cylindrycznych, nieckowych, na kształtownikach Zores i Woterena. Grubość betonu i pokrycie go warstwą izolacyjną z po-

kryciem takowej betonem, by zabezpieczyć warstwę izolacyjną od uszkodzeń, jest takie same jak w mostach kolejowych. Jezdnia mostów drogowych daje się zwykle ze spadkiem poprzecznym. Przy dwóch dźwigarach wypukłość tę wytwarza się w ten sposób, że pasom górnym belek poprzecznych



nadaje się kształt odpowiednio do wypukłości nawierzchni (fig. 425 e), przy kilku dźwigarach z jazdą górą wypukłość osiąga się przez pogrubianie warstwy betonu ku środkowi mostu (fig. 425 f).

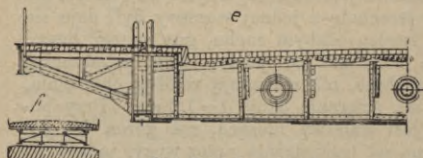


Fig. 425 a, b, c, d, e, f.

Na mostach o znacznej długości odprowadzanie wody wzdłuż mostu bocznymi rynsztokami jest niemożliwe. Przy znacznych ulewach woda zalałaby cały most, przeto odprowadza się ją zapomocą rur pionowych lub pochyłych (fig. 426, 427) do

Jezdnia chodników winna być oddzielona przy pokryciu z desek specjalną beleczką odbojnicową, nadto chodniki winny się wznosić nad jezdnią na 12—15 cm. Przy pokryciach innych dają się zwykle specjalne kamienie krawężnikowe naturalne lub sztuczne. Koło krawężników jezdni daje się czasem kamienie żłobkowe, które służą jako rynsztoki do ścieku wody.

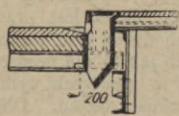


Fig. 426.

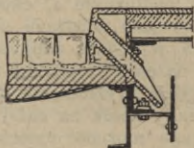


Fig. 427.

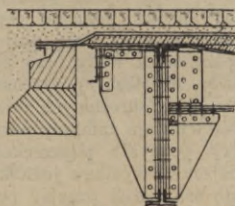


Fig. 428.

rynien, umieszczonych pod pomostem, które odprowadzają wodę do przyczółków i filarów.

**Przerwa nawierzchni i jej połączenie.** We wszystkich miejscach, gdzie dźwigary główne, względnie belki podłużne, mają połączenia przegibne lub przegibno przesuwne, nawierzchnia części opartej przegibnie powinna być przerwana. Przerwa jest niezbędna, aby umożliwić pracę przegubów. Połączenie zaś nawierzchni w miejscach przerw winno być takie, aby, zadość czyniąc ciągłości pokrycia mostu, jednocześnie nie kępowało swobody ruchów przegubów. Przerwy zatem takie są niezbędne na końcach dźwigarów nad łożyskami lub w ich pobliżu, w miejscach połączeń belek łączących ze wspornikami, w miejscach przegubów mostów łukowych lub belkowych przegubowych i w miejscach zastosowania połączeń przegibno przesuwnych belek podłużnych.

Nad podporami nieruchomymi mostów belkowych pokrycie pomostu może być wykonane bez przerwy i tylko podłoże, podtrzymujące nawierzchnię pomostu, powinno być przerwane. Na podporze nieruchomej wahania są tak nieznaczne, że specjalnego połączenia nawierzchni budowy wierzchniej z podporami niema potrzeby dawać. By podtrzymać pokrycie, dostatecznie dać blachę płaską, przymocowaną jedną krawędzią do skrajnej belki poprzecznej, drugą zaś swobodnie położoną na ciosy ścianki podporowej (fig. 428), lub na blaszę, przymocowaną do muru podpory. Jeżeli podłoże nawierzchni składa

się z kształtowników, wtedy końce kształtowników mogą być wysunięte poza skrajną belkę poprzeczną i wsparte na podporze (filarze lub przyczółku; fig. 429). Skrajna belka poprzeczna powinna być w niewielkiej odległości od ścianki podpory. Aby nie dawać czasem specjalnej belki poprzecznej na wspornikach dość wystających, można wysunąć kamienie podpory (fig. 430), lecz wtedy kamienie powinny być odpowiednich wymiarów tak, aby pod obciążeniem ruchomem wystający kamień nie mógł się wywrócić. Przy pokryciu z dyli połączenie można wykonać według fig. 431 lub fig. 432.

Nad przegubami dźwigarów łukowych trzeba przerywać i odpowiednio łączyć nie tylko podłoże nawierzchni, lecz i pokrycie. Przesunięcia nad przegubami zależą tutaj od odległości od osi przegubu do wierzchu nawierzchni, nad podporami, gdzie ta odległość może być dość znaczna, przesunięcia są również znaczne, w kluczu zaś są niewielkie. Przerwa nawierzchni i połączenie można wykonać według fig. 433 a. Na końcach

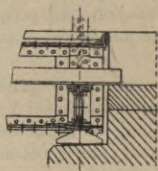


Fig. 429.



Fig. 430.

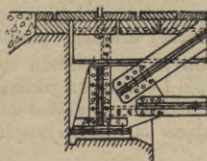


Fig. 431.

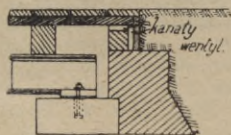


Fig. 432.

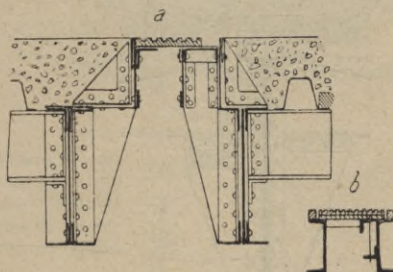


Fig. 433.

przeciwnych dźwigarów są belki poprzeczne, podtrzymujące podłoże, na belkach tych są postawione beleczki poprzeczne, które zakończone są pokryciem. Luz pozostawiony pomiędzy temi beleczkami przekryty jest blachą żeberkową przymocowaną z jednej strony. Ponieważ blacha żeberkowa szybko się ściera i wygładza i wymaga zmiany, przeto lepiej dawać blachę tłoczoną niewielkiej grubości około 8 mm i pod nią blachę grubą, niosącą, wtedy tylko wierzchnia blacha się zmienia, dolna zaś może pozostawać bez zmiany. Przy znacznych przesunięciach blacha przekrywająca może być wolno położona na beleczkach i, aby się nie podnosiła, odpowiednio zamocowana (fig. 433 b). Aby jednak przesunięcie nie było jednostronne, można dać połączenie tych blach z beleczkami zapomocą śrub, które pozwalają blasze na jednostronne przesunięcie tylko do pewnej granicy. Tego rodzaju połączenie nawierzchni może być zastosowane i przy połączeniu budowy wierzchniej podporami nad łożyskami przesuwными.

Połączenie zapomocą grzebieni. Do beleczek poprzecznych końcowych przytwierdza się specjalne odlewy stalowe, które zakończone są zębami. Zęby grzebienia jednej beleczki okalającej wchodzi między zęby

przeciwległego grzebienia (fig. 434), lub nawet kładą się na przeciwległym grzebieniu i tym sposobem każdy ząb pracuje przy nacisku ciężaru ruchomego, jako beleczka jednym końcem zamocowana i drugim wolno podparte. Zamiast odlewów całych grzebieni można do beleczek okalających przytwierdzić stalowe lane zęby (fig. 435). Górna krawędź beleczek poprzecznych, okalających pokrycie, powinna odpowiadać linii górnej przekroju poprzecznego nawierzchni mostu.

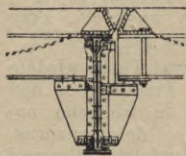


Fig. 434.

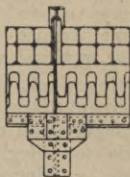


Fig. 435.

W mostach belkowych wieloprzęsłowych połączenie dwóch przęseł jednego filara może być wykonane zapomocą belek podłużnych, przynitowanych do belek poprzecznych nad podporą jednego przęsła i wolno wspartych z możliwością przesunięcia na belce skrajnej poprzecznej drugiego przęsła (fig. 436).

Obliczenie podłoża nawierzchni. Jeżeli przez  $\delta$  oznaczymy grubość podsypki i betonu na jakimkolwiek podłożu, nie włączając do wielkości  $\delta$  grubości podkładu, wysokości kostki drewnianej lub kamiennej, to ciśnienie  $R$ , działające na płaszczyznę  $b_1 \cdot b_2$  rozpościera się przez podsypkę i beton na

a

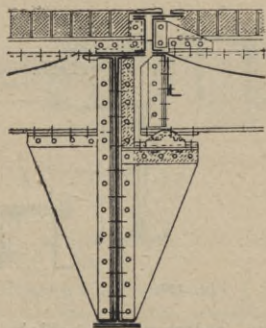


Fig. 436.

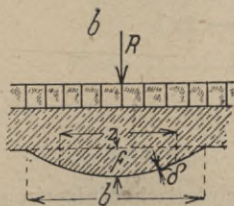
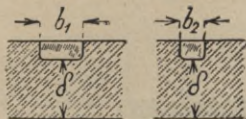


Fig. 437 a, b.

płaszczyznę  $[b_1 + 2\delta][b_2 + 2\delta]$  (fig. 437 a). Zatem ciśnienie na jednostkę kwadratową podłoża będzie:

$$\frac{R}{[b_1 + 2\delta][b_2 + 2\delta]}$$

Żelazo nieckowe. Jeżeli przyjmijemy wielkości oznaczone na fig. 437 b i przez  $z$  oznaczymy szerokość, na którą rozkłada się siła  $R$  i przez  $\delta$  grubość żelaza nieckowego, przez  $k$  dopuszczalne naprężenie, to dla określenia grubości  $\delta$  można korzystać ze wzoru Häselera:

$$R = \frac{32k \frac{a}{b} \left[ 1 + \frac{b^4}{a^4} \right] \cdot \delta^2}{9 - 24 \frac{z}{b} + 18 \frac{z^2}{b^2} - 3 \frac{z^4}{b^4} + \left( 7,5 - 5 \frac{z^2}{b^2} + 1,5 \frac{z^4}{b^4} \right) \frac{\delta}{f}}$$

Gdy  $z = b$ , obciążenie równomiernie rozłożone:

$$R_1 = 8k \frac{a}{b} \left[ 1 + \frac{b^4}{a^4} \right] f \delta.$$

Odległość między nitami:

$$l_1 = 16\pi \frac{a}{b} \left[ 1 + \frac{b^4}{a^4} \right] \frac{k_t f d^2}{R \left( 15 + 3 \frac{z^4}{b^4} - 10 \frac{z^2}{b^2} \right)},$$

zwykle  $l_1 = \dots 5d$ .

Dla żelaza cylindrycznego można korzystać z tychże wzorów zakładając, że  $\frac{a^4 + b^4}{a^4} = 1$ .

**Chodniki i poręcze.** Chodniki w mostach kolejowych są niezbędne tylko dla przejścia przez most obsługi kolejowej, o ile most nie ma służyć jednocześnie i dla pieszych. W pierwszym wypadku, jak to już było mówione o pokryciu mostów kolejowych, chodniki daje się z boków toru i między szynami. W mostach z jazdą dołem, jeżeli odległość między dźwigarami jest niewielka, czasem daje się specjalne chodniki na wystających na zewnątrz wspornikach (fig. 438).

Jeżeli jednak most ma służyć dla ruchu kolejowego i jednocześnie dla pieszych, wtedy chodniki winny być zupełnie oddzielone od jezdnii tak, aby przechodzący przez most mógł się dostać na jezdnię mostu. Chodniki w tym wypadku robi się na zewnątrz na wspornikach; winny one być oddzielone od jezdni poręczami, przytem dość gęstymi.

Poręcze na mostach kolejowych, nieprzeznaczonych dla pieszych, mogłyby nie być ustawiane, jednak na mostach większych rozpiętości i na mostach wysokich lepiej je dawać. Poręcze składają się z trzech części: ze słupków, pochwyty i ścianki czyli wypełnienia między słupkami, pochwytem i chodnikiem. Słupki stawia się w odległości około 2 m; mają one wysokość od poziomu chodnika 1,00—1,20 m; przytwierdza się słupki do końców mostowni (fig. 439 a), albo do końców wsporników (fig. 439 b), lub też do beleczki podłużnej krawężnikowej (fig. 439 c), o ile niema obawy, że beleczka może się skrócić pod naciskiem poziomym słupka. W mostach z jazdą dołem poręcze mogą być przytwierdzone do pasa dolnego. Jako słupki poręczy może tutaj służyć krata dźwigarów, do której przytwierdza się pochwyty poręczy. Słupki robi się z kątowników lub korytek, pochwyty może być z kątownika lub z żelaza okrągłego. Pomiedzy pochwytem i chodnikiem daje się zwykle jeden pręt. Słupki i poręcze w mostach kolejowych nie-

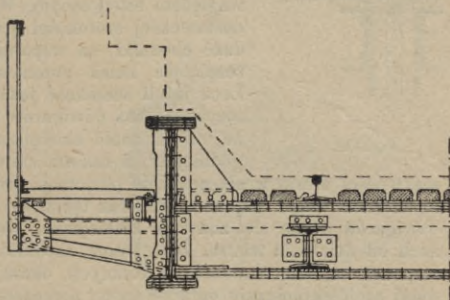


Fig. 438. f.

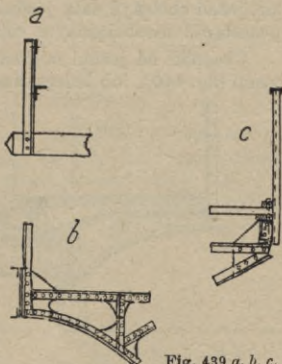


Fig. 439 a, b, c.

beleczki podłużnej krawężnikowej (fig. 439 c), o ile niema obawy, że beleczka może się skrócić pod naciskiem poziomym słupka. W mostach z jazdą dołem poręcze mogą być przytwierdzone do pasa dolnego. Jako słupki poręczy może tutaj służyć krata dźwigarów, do której przytwierdza się pochwyty poręczy. Słupki robi się z kątowników lub korytek, pochwyty może być z kątownika lub z żelaza okrągłego. Pomiedzy pochwytem i chodnikiem daje się zwykle jeden pręt. Słupki i poręcze w mostach kolejowych nie-

przeznaczonych dla pieszych, wystarczy obliczać na poziome ciśnienie 50 kg. Poręcze ciągną się zwykle i na całej długości przyczółków.

W mostach drogowych w miejscowościach o dużym ruchu winno się stosować chodniki najmniej 0,75 m szerokości. Chodnik powinien się wznosić nad jezdnią na 12—15 cm. Pokrycie chodników może być z desek, płyt betonowych, kamiennych, ceramicznych lub asfaltu. W mostach z jazdą

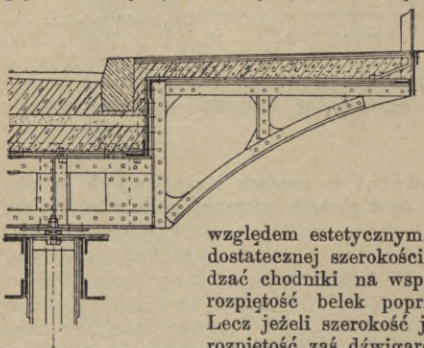


Fig. 440.

górą umieszcze się chodniki zwykle na wspornikach, przymocować albo całkowicie (fig. 440), albo też częściowo (fig. 441). Częściowo zwykle wtedy, gdy chodniki są znacznej szerokości (kilka metrów) i wsporniki wypadłyby zbyt długie, co mogłoby utrudnić ich konstrukcję, i niekorzystne pod względem estetycznym. W mostach z jazdą dołem przy dostatecznej szerokości jezdni również dogodniej urządzić chodniki na wspornikach, zmniejsza to bowiem rozpiętość belek poprzecznych, a zatem i ich wagę. Lecz jeżeli szerokość jezdni jest stosunkowo niewielka, rozpiętość zaś dźwigarów znaczna, to może się okazać, że umieszczenie chodników między dźwigarami jest dogodniejsze, a czasem nawet nieodzowne, ze względów sztywności mostu w płaszczyźnie poziomej. Dogodniejsze może być dlatego, że chociaż waga poprzecznic, oraz tężników wzrasta, zato waga samych dźwigarów może się znacznie zmniejszyć, wskutek zmniejszenia sił w pasach od działania wiatru. Zewnętrzne chodniki przy odpowiednich kształtach wsporników, oraz beleczek podłużnych okalających, łącznie z uwidocznionymi architektonicznie opracowanymi poręczami, stanowią upiększenie mostu. Przy stosowaniu wsporników do podtrzymania chodników należy pamiętać, że największe ciśnienie na dźwigar, przylegający do danego chodnika, otrzyma się, jeżeli obciążyć całą jezdnię i tylko jeden chodnik, zaś chodnik oddalony pozostawić nieobciążonym ciężarem ruchomym.

Chodniki od jezdni odgradzają się specjalnymi kamieniami krawężnikowymi (fig. 440), lub beleczkami, jeżeli i chodniki i jezdnia pokryte są deskami,

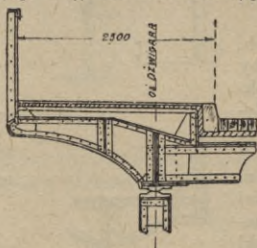


Fig. 441.

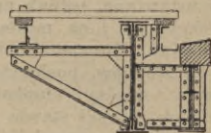


Fig. 442.

lub beleczkami żelaznymi ze żłobkami z korytek do odprowadzenia wody z mostu (fig. 442). Poręcze w mostach drogowych są koniecznością a jednocześnie winny być ich ozdobą.

Ponieważ w mostach drogowych ciśnienie może być dość znaczne, przeto przy obliczaniu poręczy przyjmuje się ciśnienie poziome od 80 do 100 kg na metr bieżący. Takie ciśnienie zupełnie wystarcza, chociaż oczywiście tłum może wytworzyć i znacznie większe. W tych jednak wypadkach naprężenie



może dojść swobodnie do granicy sprężystości, a nawet i przekroczyć ją. Zresztą, gdy ciśnienie dojdzie do wielkości, że słupki zaczną się łamać, wtedy bliżej stojący koło poręczy będą zgniećeni. W poręczach obliczeniu podlegają słupki, ich przytwierdzenie do żeber pomostu lub do podpór i pochwyty, który przyjmuje się, jako belkę swobodnie wspartą na dwóch podporach i obciążoną równomiernie siłami poziomymi  $p = (80 - 100) \text{ kg/m b.}$

Słupki poręczy mogą być żelazne z żelaza płaskiego lub okrągłego lub z kształtówek: kątowników, teowników lub ceowników lub też specjalnych kształtów lane z żeliwa. W ostatnim wypadku zwykle o przekroju rurowym i ściankach grubości od 20 do 10 mm. Zwykle grubość ścianek u dołu jest większa i u góry słupka mniejsza (fig. 443 a, b).

Przytwierdzenie słupków poręczy jest rozmaite w zależności od ich przekroju i konstrukcji żelaznej, ograniczającej chodniki na zewnątrz (fig. 412, 439 a, 439 b, 439 c, 444).

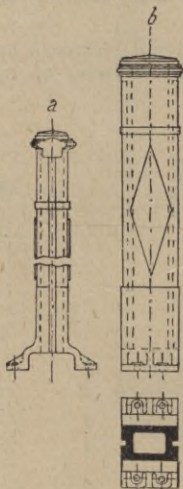


Fig. 443.

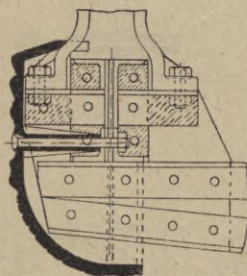


Fig. 444.

Pochwyty powinny być form zaokrąglonych. Najprostszy przekrój pochwyty jest kątownik (fig. 439), ceownik (fig. 445 a), lub rura okrągła walcowana (fig. 445 b). Więcej skomplikowane przekroje mamy na fig. 445 c, d, c. Ostatni profil pochwyty, walcowany w Hucie Bankowej, stosowany był do mostów w Petersburgu, jest dość lekki ( $12,8 \text{ kg/m}$ ) i kształtny. Według fig. 445 d pochwyty są różnych wymiarów, pokazanych w tablicy 8.

Tablica 8.

Profil pochwyty	Wymiary w mm					Pole przekroju w cm	Waga 1 m b. kg
	Nr.	B	H	b	h		
Por. fig. 445 d.	4	40	18	20	10	4,2	3,3
	6	60	27	30	15	9,4	7,3
	8	80	36	40	20	16,7	13,0
	10	100	45	50	25	26,1	20,4
	12	120	54	60	30	37,5	29,3

Przytwierdzenie pochwytu do słupków może być według fig. 445 *f* na wkrętkę. Na fig. 445 *g* pochwyty przechodzi przez otwór w słupku i sam jest przytwierdzony do kraty poręczy, która ze słupkami połączona jest na całej swej wysokości i na dole z belką podłużną, okalającą chodniki.

Krata poręczy powinna być dość gęsta, by dziecko nie mogło głowy przesunąć przez kratę, i jednocześnie dość mocna, by nie można jej kolanami wyłamać lub wygiąć. Co się tyczy rysunku kraty, to takowy winien być ładny, odpowiadać całości budowli, a czasem i charakterowi przyległych budynków, i powinien być wykonany przez odpowiedniego architekta, jak również i nadanie formy zewnętrznej mostu miejskiego powinno być dokonane przez inżyniera łącznie z architektem.

We wszystkich miejscach, gdzie konstrukcja żelazna mostu jest przerwana, gdzie nawierzchnia przerywa swą ciągłość, poręcze również winny być przerwane i tak urządzone, by w tych miejscach mogły mieć przesunięcia wzdłuż mostu.

**Połączenie belek podłużnych z poprzecznymi.** Połączenie belek podłużnych do poprzecznych może być głucho, stałe, sztywne, lub też prze-

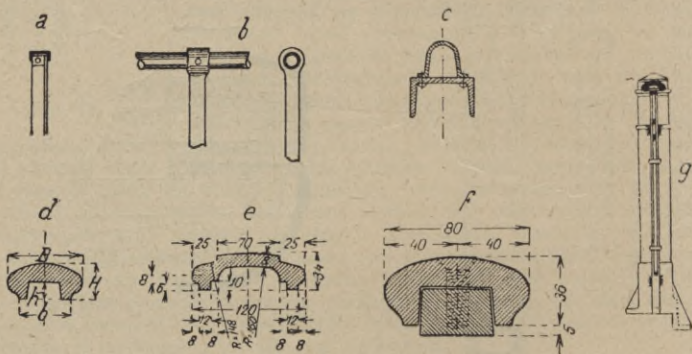


Fig. 445 *a, b, c, d, e, f, g.*

gibne i przegibno przesuwne. Przegibne i przegibno przesuwne stosuje się wtedy tylko, gdy cały pomost musi być przerwany, co ma miejsce nad podporami, nad przegubami dźwigarów, w mostach łukowych z jazdą dołem lub pośrodku, by belki podłużne nie pracowały jako ściągi łuku, wreszcie w mostach belkowych dużych rozpiętości (80 i więcej *m*), by belki podłużne, zmuszone się rozciągać wskutek wydłużeń pasów od obciążenia ruchomego, nie wyginały zbyt w planie belek poprzecznych. W innych wypadkach belki podłużne łączymy z belkami poprzecznymi sztywno, tj. na nity.

W zależności od położenia belki podłużnej względem belki poprzecznej możemy mieć następujące sposoby połączenia:

1. Belka podłużna leży na belce poprzecznej (fig. 446). W miejscu zetknięcia belek łączymy je na nity, i tak podłużnicę, jak i poprzecznice usztywniamy kątownikami pionowymi.

2. Podłużnica wznosi się nieco nad belką poprzeczną (fig. 447). Stosuje się, gdy belki poprzeczne są wnitowane między pasami dźwigarów i tężniki podłużne trzeba przepuszczać przez podłużnice. Podłużnica powinna się wznosić nad pasem poprzecznic co najmniej na podwójną wysokość boku kątownika pasowego podłużnicy, by można było dodać kątownik *a* (fig. 378).

Styki kątowników belek podłużnych mogą być albo nad poprzecznicą, albo lepiej, na odległości połowy długości nakładki kątowników pasowych.

3. Pasy górne podłużnic i poprzecznic leżą w jednym poziomie (fig. 448 a). Przymocowanie podłużnic do poprzecznic wykonywuje się zapomocą kątowników pionowych, które jednocześnie usztywniają środek poprzecznicy. Kątowniki te albo się nagina na kątowniki pasowe poprzecznicy, albo stawia się na podkładki wyrównawcze. Kątowniki pasa dolnego podłużnicy nagina się na boki kątowników pionowych dla usztywnienia. By nity górne poziome poprzecznicy nie pracowały na rozrywanie, pasy podłużnic winny być połączone nakładkami przynajmniej na 3 szeregi nitów.

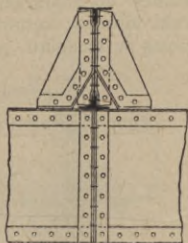


Fig. 446.

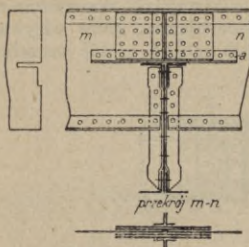


Fig. 447.

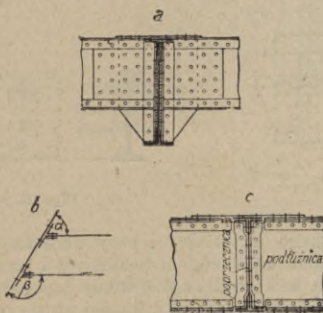
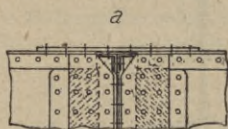


Fig. 448 a, b, c.

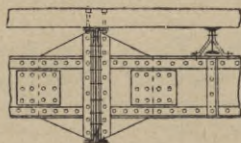
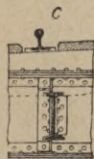
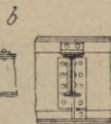
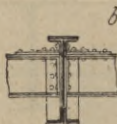
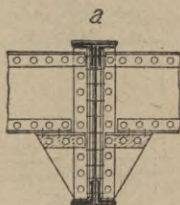
Wielkość boków kątowników pionowych, które łączą jedne belki z drugimi, zależy od rozpiętości belek i od obciążeń. W mostach kolejowych, gdzie obciążenia są znaczne, kątowniki te winny być silniejsze, niż w mostach drogowych. Przy długości belek podłużnych od 4 do 6 m kątowniki winny być nie mniejsze niż  $90 \times 90 \times 9$ , przy większej długości kątowniki winny być  $130 \times 85 \times 10$  lub nawet  $150 \times 100 \times 10$ , przytem szerszy bok obejmuje środek podłużnicy dwoma szeregami nitów. Najmniejsze kątowniki dla małych długości podłużnic około 2 m mogą być  $80 \times 80 \times 9$ . W mostach drogowych do przytwierdzenia beleczek małych drugorzędnych można stosować kątowniki i  $65 \times 65 \times 8$ . Należy jednak pamiętać, że w kątownikach pionowych często nity wypada stawiać w jednym i drugim boku w jednym przekroju i wtedy stosunkowo dobrze daje się postawić takie nity w kątownikach conajmniej  $80 \times 80$ .

Jeżeli belki jedne podchodzą do drugich nie pod prostym kątem (w mostach ukośnych), wtedy kątowniki te jedne są zwarte (fig. 448 *b*,  $\alpha$ ) i drugie rozwarłe (fig. 448, *b*  $\beta$ ). Szerokość boków wtedy zależy od wielkości kąta ostrego i od grubości nitowanej części. Bok winien być taki, aby można było włożyć nit w dziurę od strony zwartej, co w każdym poszczególnym wypadku winno być zbadane. Boki kątowników w różnych miejscach mogą być wtedy różne.

Jeżeli podłużnica i poprzecznicę są jednej wysokości, wtedy oba pasy belek podłużnych łączy się nakładkami (fig. 448 *c*). W belkach niskich, gdy wysokość belki jest za mała do rozmieszczenia nitów w środku podłużnicy, można zastosować nity wielocięte (fig. 449 *a*), lub też połączenie wykonać zapomocą blach węzłowych (fig. 449 *b*), lub dodatkowych wsporników (fig. 450 *a*). Ponieważ w płaszczynie zamocowania podłużnicy do poprzecznicę panują momenty gnące ujemne, które odrywają główki nitów w kątownikach pionowych, przeto można zrobić szczelinę poziomą w środku poprzecznicę



b

Fig. 449 *a*, *b*.Fig. 450 *a*, *b*, *c*.

na poziomie pasa górnego podłużnicy i pasy podłużne połączyć nakładką z odpowiednim stężeniem kątownikiem poziomym i pionowym (fig. 450 *b*).

Jeżeli podłużnice są belki walcowane, wtedy połączenie można wykonać według fig. 450 *c*; jeden z kątowników z każdej strony poprzecznicę należy dawać na całej wysokości poprzecznicę, aby stężyć tę ostatnią i zapobiec wyginaniu się środnika przy uginaniu się podłużnic, boki poziome podłużnic z jednej strony muszą być wtedy ścięte.

Wyżej wskazane sposoby połączeń podłużnic z poprzecznicami oczywiście mogą być stosowane i do połączeń wogóle jednych belek do drugich.

Połączenie przegibne i przesuwne. Połączenie przegibne i przesuwne powinno dawać możliwość niewielkiego obrotu belki i przesunięcia wzdłuż osi, natomiast beleczka nie powinna mieć możliwości ani się podnosić, ani też się przesuwać w kierunku poprzecznym.

Jeżeli siła poprzeczna na podporze jest niewielka, połączenie można uskutecznić według fig. 451.

Z rysunków tych widać, że wyżej wskazane warunki są tutaj w zupełności spełnione.

Przy większych siłach poprzecznych połączenie może być według fig. 452.

Podłużnice wspierają się na słupkach wahadłowych lub też wiszą na strunach (fig. 453).

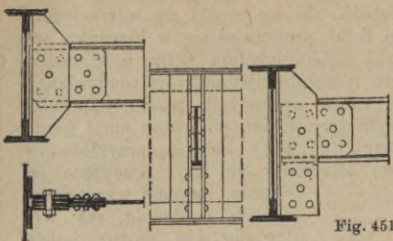


Fig. 451

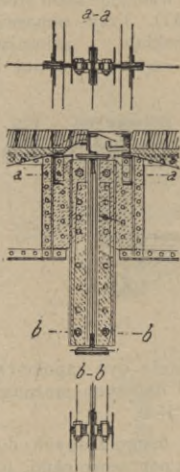
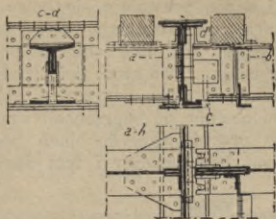


Fig. 452.

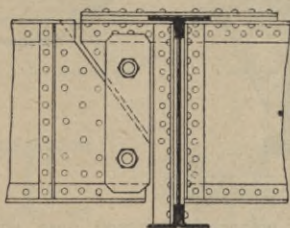


Fig. 453.

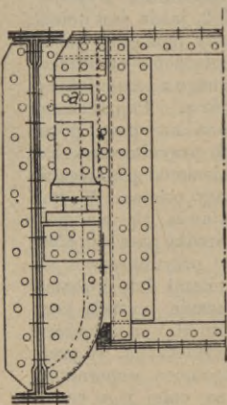


Fig. 454.

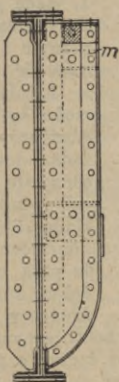


Fig. 455.

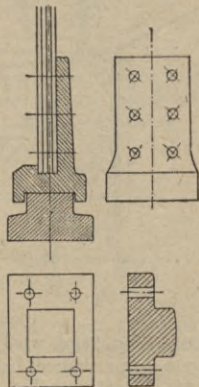


Fig. 456.

Przy znacznych siłach połączenie może być według fig. 454; tutaj kątowniki *a* nie pozwalają się belce podnosić, zaś kątowniki *m*, odpowiednio przycięte, nie pozwalają górnej części belki przesunąć się w kierunku poprzecznym. Na dole obrzeża poduszki unieruchamiają belkę w kierunku poprzecznym. Ponieważ pod działaniem momentu ujemnego we wspornikach mogłoby nastąpić odrywanie główek nitów poziomych, przeto wsporniki przymocowane do poprzecznic i podtrzymujące końce podłużnic mają górne końce przynitowane do blach poziomych (fig. 455), które są przynitowane do pasa poprzecznic i tym sposobem otrzymuje się nity, pracujące na ścinanie. Zamiast wycięcia w

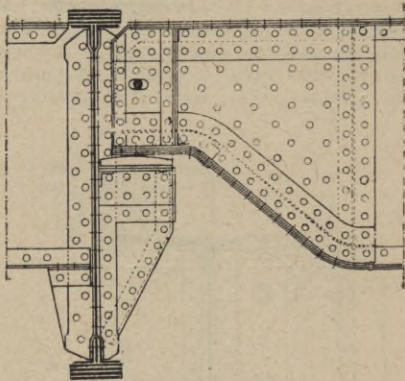


Fig. 457.

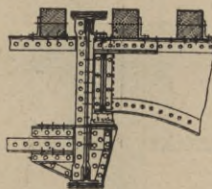


Fig. 458.

poprzecznej, połączenie górnego pasa wspornika może być za pomocą nakładek, przenikających przez środek poprzecznic i dających możliwość zastosować nity ścinane przy momencie ujemnym (fig. 458).

**Poprzecznicę główną.** Połączenie poprzecznic drugorzędnych do podłużnic niczem się nie różni od połączeń podłużnic z poprzecznicami, przeto

tutaj wskażemy tylko sposób połączenia poprzecznic głównych z dźwigarami. Mamy tutaj dwa zasadnicze wypadki: 1. jazda jest górą i 2. jazda jest dołem. Przy urządzeniu jazdy pomiędzy pasem górnym i dolnym połączenie zasadniczo mało się różni od jednego z zasadniczych.

1. Jazda górą. Poprzecznicę może być postawiona na pasy górne dźwigarów i do nich przynitowana. Pożądane jest, aby ciśnienie od poprzecznic oddawało się na pasy osiowo. W tym celu poprzecznicę stawia się na podkładce, która leży na środku pasa (fig. 459). Poprzecznicę wtedy przynitowuje się do pasa czterema nitami lub śrubami. Jeżeli końce poprzecznic wystają poza dźwigary, jako wsporniki, i są połączone

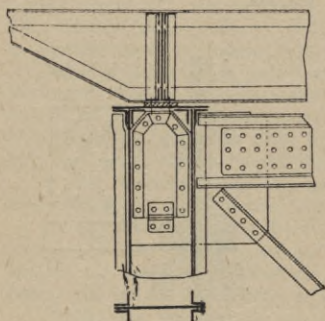


Fig. 459.

belkam podłużnicami, wtedy stałość belek jest zupełnie zabezpieczona. W przeciwnym razie końce belek trzeba łączyć z pasami za pomocą wsporników (fig. 446). Można belkę poprzeczną połączyć z pasem na całej jego szerokości, otrzymamy nacisk od poprzecznic na pas nie osiowy, lecz możemy

wtedy przynitować poprzecznicę do pasa znacznie większą ilością nitów i wtedy poprzecznicę może służyć jako rozpórka tężników podłużnych.

Połączenie sztywne poprzecznic z dźwigarami wywołuje pewne skrećanie pasów dźwigarów, a zatem i kraty dźwigarów. Przez przegibne połączenie poprzecznic z dźwigarami unikamy tego skrećania, przeto czasem konstruktorzy chętniej stosują przegibne połączenie niż sztywne, choć jest ono naogół droższe. W Rosji stosowane ono było dość często, szczególnie przez prof. N. Bielelubskiego, który pierwszy zaczął wogóle stosować to połączenie (fig. 460 *a, b*). Zwrócić uwagę tutaj należy, że zastosowanie według fig. 460 *a, b* może mieć miejsce tylko wtedy, jeżeli obciążenie stale jest dostateczne i, że przeto przy obciążeniu jednego przedziału ciężarem ruchomym, nie może się podnieść belka poprzeczna sąsiedniego przedziału nieobciążanego. W przeciwnym razie otrzymuje się znaczne uderzenia od

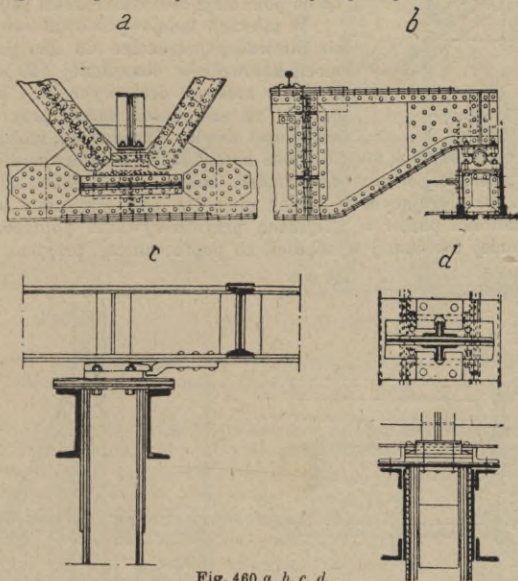


Fig. 460 *a, b, c, d*.

belek poprzecznych przy przejściu pociągu. Dając wolne podparcie według fig. 460 *c, d*, nie dajemy możliwości podnoszenia się belkom poprzecznym nawet w wypadkach, gdy reakcja podpór od obciążenia stałego jest mniejsza, niż reakcja ujemna, którą dają belki podłużne, jako ciągłe, od obciążenia ruchomego.

Belki poprzeczne wnitowane są między pasami górnymi. Pas górny belki poprzecznej daje się zwykle niżej o grubość blachy (9—15 mm) od dolnej krawędzi boków poziomych kątowników pasowych, jeżeli blachy poziome pasów są takiej szerokości, że pokrywają tylko boki kątowników, lub też na tę samą grubość od spodu blach poziomych pasów, jeżeli blachy poziome wystają poza szerokość kątowników pasowych conajmniej na 90 mm, co daje możliwość postawienia szeregu nitów poza kątownikami pasów, i środnik poprzecznicę ujmuję się między boki kątowników pionowych i bierze na nity, pas zaś górny przynitowuje się do blachy fasonowej poziomej, która jest przynitowana do pasa. Tym sposobem środnik belki, blacha pionowa pasa i blacha pozioma tworzą kąty trójkątne,

dają sztywność w płaszczyznach pionowych i poziomych. Połączenia te są pokazane na fig. 461. Blacha węzłowa może służyć do przytwierdzenia tężników poziomych. Jeżeli w węzłach przytwierdzenia poprzecznic są słupki zewnętrzne, to kątowniki tych słupków służą jednocześnie do przynitowania belki poprzecznej.

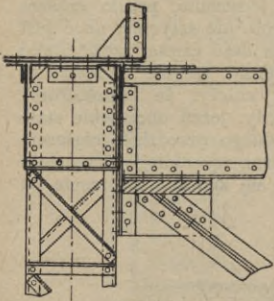


Fig. 461.

Wielkość boków tych kątowników zależy od rozpiętości belki poprzecznej i od jej obciążenia. W mostach kolejowych, gdzie belki poprzeczne wypadają o znacznym przekroju, zwłaszcza przy nowych dużych obciążeniach, kątowniki te powinny być nie mniejsze, niż  $100 \times 100 \times 10$ , a nawet jest pożądané, aby można było stawiać dwa szeregi nitów dobrze rozstawionych, na co pozwalają boki o szerokości 140–160 mm.

W mostach kolejowych dwutorowych winno się nitować poprzecznicę do dźwigarów za pomocą kątowników conajmniej  $140 \times 140 \times 12$ . Tylko w mostach drogowych przy kilku dźwigarach na szerokości mostu, przy niewielkiej odległości między dźwigarami, można stosować

kątowniki małe od  $80 \times 80 \times 8$ . Boki kątowników, przylegające do pasa co do swej szerokości winny odpowiadać bokom kątowników słupków wewnętrznych, przylegającym do blachy pionowej pasa. Przepony między blachami pionowymi pasów w miejscach przynitowywania poprzecznic winny być conajmniej tej samej wysokości, co poprzecznicę, przytem, jeżeli na-

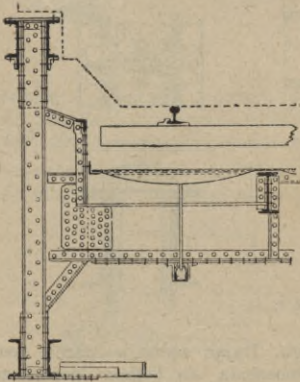


Fig. 462.

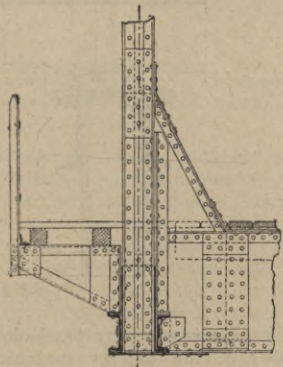


Fig. 463.

zewnątrz dźwigara jest wspornik do podtrzymania chodnika, dolną krawędź przepony należy usztywnić kątownikami.

2. Jazda pośrodku. Poprzecznicę stawia się między pasami dolnymi i górnymi. Przymocowanie daje się do słupków. Blacha pionowa poprzecznicy obrywa się, nie dochodząc do słupka, i przechodzi w blachę fasonową (fig. 462). Zwrócić należy uwagę, że słupki w tym wypadku pracują nie tylko na siły osiowe, lecz są jeszcze zginane od ugięcia się blachownicy. Blacha fasonowa winna być na krawędzi swej szczególniejszej u dołu usztywniona kątownikami, aby się nie fałdowała przy nacisku od poprzecznic. Jeżeli most jest otwarty (bez tężników podłużnych) usztywniona blacha fasonowa usztywnia silnie słupek w kierunku poprzecznym mostu i trzyma



przeto pas górny ściskany w płaszczyźnie pionowej, nie dając mu się wyboczyć. Z tych względów usztywnienie słupków winno być należyte. Kątowniki pasów poprzecznic powinny być nagięte na boki kątowników pionowych, trzymających, w celu usztywnienia w kierunku poziomym.

3. Jazda dołem. Poprzecznice wnitowane między pasami dolnemi. Przymocowanie będzie tutaj zupełnie takie same, jak przy poprzecznicach umieszczonych między pasami górnemi, tylko cała konstrukcja jest obrócona o  $180^\circ$ . O ile wysokość belki jest niewielka i ilość nitów niezbędna do przy-

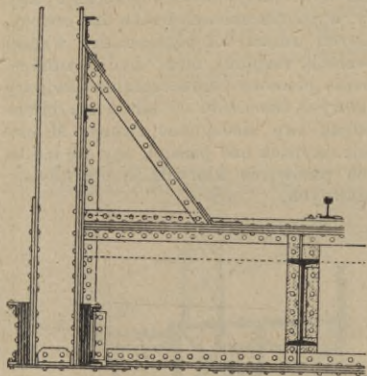


Fig. 464.

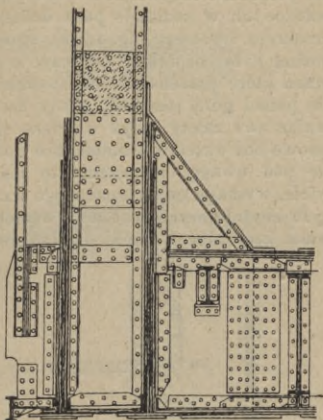


Fig. 465.

nitowania belki nie mieściłaby się w środku, należy wtedy środk poprzecznic zakończyć w pewnej odległości od pasa i zamienić blachą (fig. 463).

Ponieważ na podporze belki przynitowanej do słupków dźwigarów zawsze powstaje moment ujemny, który odrywa pas górny poprzecznic od słupka, należy nitowanie takie zastosować, by nity górne pracowały na ścinanie, a nie na rozerwanie. Blacha fasonowa powinna przeto łączyć obie gałęzie słupka (fig. 463), lub też można zastosować specjalną wstawkę u góry poprzecznic, połączoną z pasem górnym za pomocą kątowników poziomych wzdłuż pasa poprzecznic (fig. 464). Dawanie wsporników wysokich, jeżeli one nie mają na celu usztywnienia słupków, nie uważamy za pożyteczne. Im wspornik belki (fig. 463) jest wyższy, tem ugięcie słupków jest większe. Kątowniki pionowe, które łączą poprzecznicę z dźwigarem, lepiej dawać całe, nie przerywane, jak pokazano na fig. 465, gdyż w miejscu przerwania i przecięcia środku wytwarza się słabe miejsce. Można uniknąć krojenia kątowników albo przez zastosowanie podkładek wyrównawczych (fig. 463), albo też przez odpowiednie nagięcie kątowników z podkładkami klinowemi, (fig. 466). Przy połączeniach sztywnych poprzecznic nieuniknione jest odkształcenie dźwigarów z ich płaszczyzny, co naturalnie pociąga za sobą naprężenia drugorzędne. Uniknąć można tych odkształceń przez zastosowanie połączeń poprzecznic z dźwigarami przegibnych.

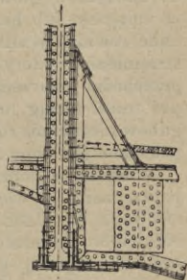


Fig. 466.

Połączenie przegibne poprzecznic z dźwigarami. Połączenie z pasem dolnym będzie tutaj takie samo, jak i przy połączeniach z pasami górnemi, tylko że tutaj między ściankami pasów trzeba wytworzyć

ryc specjalne podparcie w kształcie stolika, wytworzonego z przepon fig. 460 *a*, *b*). Poprzecznicę zwykle ma końce ścięte tak, że na podporze wysokość jej winna być tylko dostateczna ze względu na ścinanie, momenty zaś spadają do zera. Słupki natomiast muszą być o przekroju rurowym i takiej odległości między ściankami wewnętrznymi w płaszczyźnie dźwigara, aby swobodnie przechodziły pasy belki poprzecznej. Zatem szerokość ta powinna się równać szerokości pasa poprzecznicę więcej 25—30 mm. Belki poprzecznicę tak połączone oczywiście nie mogą służyć, jako rozpórki tężników podłużnych, położonych w poziomie pasa dolnego, i takowe daje się zwykle oddzielne przekroju rurowego (fig. 460 *b*). Rozpórki te obejmują belki poprzecznicę. Aby można było rozpórki te połączyć u góry, w poprzecznicach trzeba dać otwory, przez które przechodzą płaskowniki. Jeżeli jednak dół poprzecznicę wznosi się ponad górą rozpórki, wtedy usztywnienie rozpórki może być normalne. Mając swe zalety, gdyż wywiera ciśnienie pionowe poprzecznicę na dźwigary osiowe bez wszelkich momentów dodatkowych (momentu od tarcia nie bierze się pod uwagę), połączenie to ma jednak swe niedogodne strony. Mianowicie, wymaga często znacznego wzniesienia belek nad pasami, aby nie trzeba było zbyt często wycinać blach węzłowych pasów, do których są przynitowane krzyżulce i słupki dźwigarów głównych.

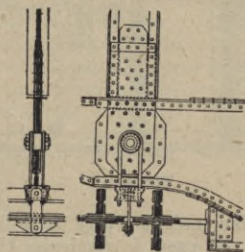


Fig. 467.

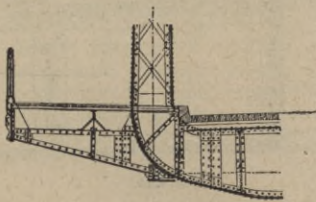


Fig. 468.

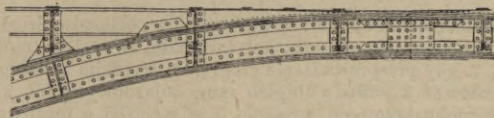
W mostach z jazdą dołem, w których część przejazdowa jest zawieszona do dźwigarów głównych, co ma najczęściej miejsce w układach łukowych ze ściągiem lub bez ściągu, wolne podparcie poprzecznicę może być wykonane również według fig. 397, tylko wieszak tutaj musi być zakończony strzemiem, który tworzą wygięte kątowniki wieszaków i przez to strzemię przechodzi poprzecznicę. Ponieważ zwykle do wieszaków jest zawieszony pas trzeci (ściągi lub pas tężników dolnych podłużnych), przeto urządzenie przegubów niczem nie różni się od rozpatrzonych wyżej. Na fig. 467 schematycznie pokazane jest inne zawieszenie przegibne, zastosowane w moście w Wormacji.

Połączenie poprzecznicę z wieszakami może być według fig. 468. Tutaj poprzecznicę z wieszakami tworzy jakby podkowę, końce której są przynitowane do blach fasonowych pasa dolnego dźwigara głównego. Pewną różnicę w przymocowaniu belek poprzecznych wytwarzają dźwigary łukowe sztywne z jazdą górą w tym wypadku, gdy wysokość ustrojowa mostu w kluczu musi być sprowadzona do minimum. Wtedy zwykle podłużnicę, która ma pewną wysokość nad podporami, podchodząc do łuku, zmniejsza swą wysokość w zetknięciu się z łukiem i osiąga zero nad kluczem (fig. 469 *a*, *b*). Właściwie mówiąc, nie tyle w tym wypadku jest różnica w połączeniu poprzecznicę, ile w samych przekrojach poprzecznicę, które mogą być i różnych przekrojów i różnych wysokości w poszczególnych węzłach. Nadto sam łuk, podchodząc ku kluczowi, może również zmieniać swą formę według fig. 470 *a*.

Uważamy, że połączenie podłużnicę z łukiem według fig. 469 *b* i 470 *b* jest lepsze, niż według fig. 470 *a*, gdyż oś łuku zachowuje swą ciągłość, gdy tymczasem według fig. 470 *a* oś się załamuje. W łukach według fig. 469 *b* należy

podłużnicę zakończyć w tem miejscu, gdzie ich wysokość dochodzi do 90 lub 100 mm, naturalnie, przyjmując pod uwagę ewentualny spadek podłużny nawierzchni mostu drogowego. W miejscu zakończenia podłużnicy (węzeł 8) daje się poprzecznicę o przekroju pokazanym na fig. 469 b, którego jeden kątownik górny leży w poziomie pasa podłużnicy, drugi zaś w poziomie pasa łuku i jest zwykle nieco rozwarty. Jeżeli podłoże nawierzchni składa się z nasypki, betonu na żelazie nieckowem, to, by nie zwiększać zbytnio warstwy

a



b

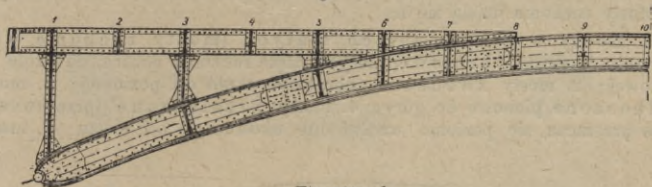
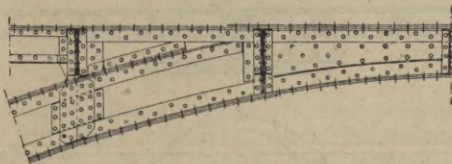


Fig. 469 a, b.

a



b

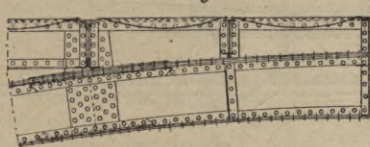


Fig. 470 a, b.

betonu pomiędzy belkami 8 i 9 (fig. 469 b), można w tym przedziale dać niecki wpukłością do góry, gdy inne są wklęsłe. Jeżeli podłużnica przechodzi nad łukiem na pewnej wysokości około 160—200 mm, wtedy połączenie jest zwykle podłużnicy z łukiem i poprzecznic z podłużnicą i łukiem, według fig. 470 b.

## LITERATURA.

Thullie M.: Teorja mostów.  
 Thullie M.: Mosty blaszane.  
 Thullie M.: Mosty kratowe.  
 Résal Jean: Cours de ponts métalliques.  
 Godard T.: Ponts et combles métalliques.  
 Bonhomme: Constructions métalliques.  
 Hod and Kinne: Movable and Long Span Steel Bridges.  
 Waddell I. A. L.: Economics of Bridgework.

Schaper G.: Eiserne Brücken.  
 Häselser E.: Die eisernen Brücken.  
 Bleich Fr.: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken.  
 Bernhard K.: Eiserne Brücken.  
 Mehrrens G. Ch.: Eisenbrückenbau.  
 Melan Joseph: Der Brückenbau.  
 Mayer Rudolf: Die Knickfestigkeit.  
 Paton E.: Żelaznyje mosty.

# Mosty ruchome.

Napisał

inż. dr. Stefan Bryła,

profesor politechniki, Lwów.

Mosty ruchome buduje się: 1. gdy różnica poziomów drogi wodnej i lądowej, krzyżujących się ze sobą, jest tak mała, że stałego mostu zbudować nie można, 2. gdy przeprowadzenie drogi górą wysokim mostem stałym staje się zbyt kosztowne z powodu długich ramp dojazdowych, lub z powodu bardzo małego ruchu kołowego, wreszcie 3. gdy chodzi o możliwość szybkiego usunięcia mostu.

Mosty ruchome dzielą się na:

I. Mosty o fundamentach stałych (mosty ruchome właściwe): 1. mosty obrotowe, których część ruchoma obraca się około osi pionowej; 2. mosty zwodzone, obracalne około osi poziomej; 3. mosty podnoszone pionowo do góry; 4. mosty przetaczane (przesuwowe), które przetacza się poziomo wzdłuż lub ukośnie do osi mostu; 5. mosty

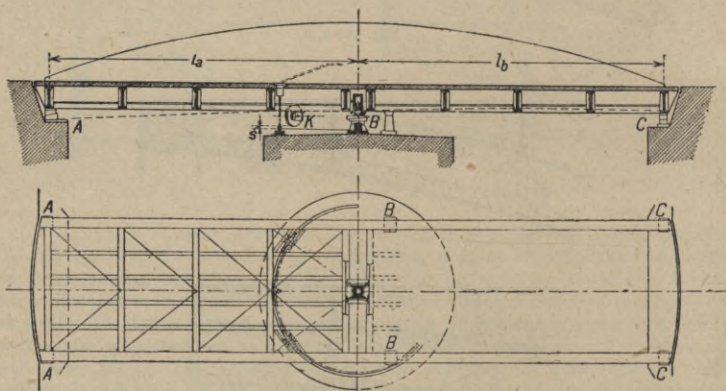


Fig. 471.

przewozowe (promowe), których część ruchoma (wózek) porusza się na kołach na stałym wysoko umieszczonym pomoście.

II. Mosty pływające (por. str. 800).

III. Mosty składane (por. str. 804).

Poniżej podamy tylko najczęściej spotykane systemy w najogólniejszym zarysie.

Mosty o fundamentach stałych składają się z fundamentów, konstrukcji ruchomej i urządzeń maszynowych; te ostatnie powinny być o możliwie prostej konstrukcji, małych oporach tarcia, kosztach ruchu i utrzymania, oraz umożliwić łatwe operowanie mostem podczas ruchu.

1. Mosty obrotowe są wogóle, zwłaszcza dla większych rozpiętości, najkorzystniejsze i najtańsze w założeniu i w utrzymaniu. Najczęstszym

typem są mosty równoramienne (por. fig. 471); gdy chodzi o większą szerokość przepływu, używa się mostów nierównoramiennych, które są jednakoż droższe i wymagają na krótszym ramieniu przeciwwagi. Dla większych rozpiętości użyć można albo mostu nierównoramiennego, albo podwójnego, który ma dla tej samej otworzystości lżejsze belki, zato bardziej skomplikowane urządzenia ruchowe, a nadaje się zwłaszcza dla mostów drogowych.

Aby zapobiec wjechaniu statków na otwarte skrzydło mostu, buduje się od filara w kierunku drogi wodnej rusztowanie ochronne z pali drewnianych, którego wymiary w rzucie poziomym muszą być nieco większe od poziomych wymiarów zupełnie otwartego przesła.

Mosty obrotowe mogą być w stanie otwartym podparte osiowo na czopie (mosty czopowe) lub obwodowo na szeregu kół, poruszających się na kołowym torze (mosty obrotowe wałkowe).

Przeważnie używane dziś mosty czopowe wymagają wogóle mniejszej siły do uruchomienia i posiadają mniej skomplikowany mechanizm, a tem

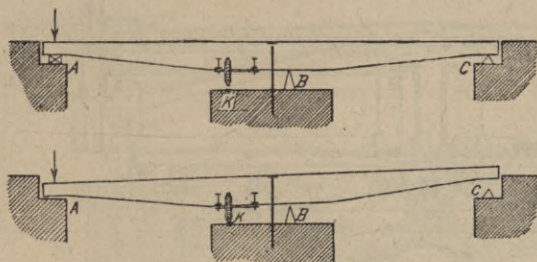


Fig. 472.

samem są tańsze w budowie i utrzymaniu, oraz pewniejsze w działaniu. Most otwarty spoczywa w całości na czopie; dla ustalenia poprzecznego używa się najczęściej dwu pionowych kół, poruszających się po kołowym torze obwodowym, rzadko kół poziomych, poruszających się bezpośrednio na obwodzie czopa. W stanie zamkniętym most spoczywa albo na czopie (wtedy musi być tenże z wyborowego materiału), albo na osobnych łożyskach.

Przy ustroju starszym most zamknięty spoczywa na 3 parach łożysk  $A, B, C$  (fig. 471). W celu otwarcia obniża się łożysko  $A$  i pochyła most, przez co kolejno przestają działać te łożyska ( $A, B, C$ ) a ciężar przenosi się na łożysko centralne (w największej części) i na koła kierownicze  $K$  (w małej części), poczem następuje obrót (otwieranie przez pochylenie; fig. 472). W konstrukcjach nowszych łożysko środkowe, sporządzone z materiałów wysoce wartościowych, przejmuje zawsze (nawet w stanie zamkniętym) znaczną część obciążenia, łożyska bowiem  $B$  położone są tak, że przy moście nieobciążonym nie działają, i dopiero pod wpływem ugięcia poprzecznego konstrukcji na filarze środkowym wskutek obciążenia ruchomego osiadają na nich belki główne, przenosząc na nie odpowiednią część ciężaru (fig. 471). Podczas obrotu ciężar spoczywa na łożysku centralnym i w małej części na kołach  $K$ .

Celem umożliwienia obrotu musimy obniżyć łożysko  $A$  o wielkość:

$$\delta = \delta_a + s + (\delta_b + s) \frac{l_a}{l_b},$$

przyczem  $\delta$  = wielkość obniżenia łożyska,  $\delta_a$  (wzgl.  $\delta_b$ ) = sprężyste ugięcie

końca belki  $A$  (wzgl.  $C$ ),  $l_a$  (wzgl.  $l_b$ ) = odległość pozioma osi łożyska  $A$  (wzgl.  $C$ ) od osi łożyska  $B$ ,  $s$  = odległość pionowa obwodu koła kierowniczego od toru kierowniczego przy moście zamkniętym.

Gdy most w stanie zamkniętym opiera się na kołach kierowniczych, to  $s = 0$ .

Wyjątkowo używa się konstrukcyj, w których zamiast obniżania łożysk skrajnych podwyższa się łożysko centralne (zwykle przy użyciu siły hydraulicznej).

Do podnoszenia końców mostu używane są najczęściej kliny o pochyleniu 1 : 5 do 1 : 6, dźwignie lub windy śrubowe. Przy mostach czopowych,

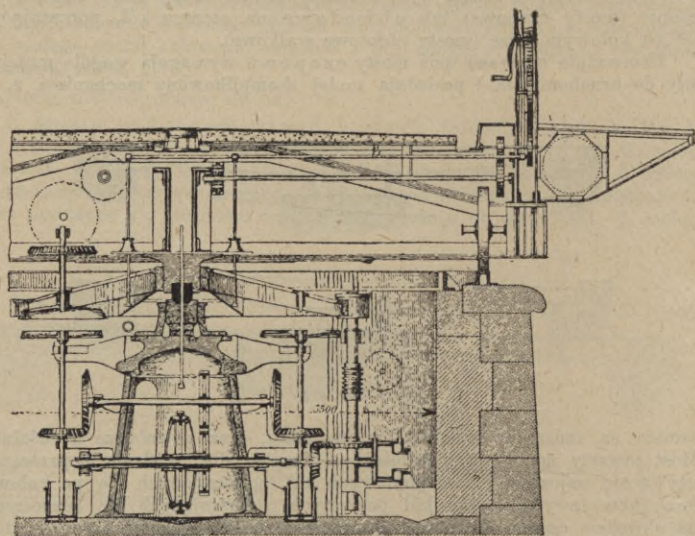


Fig. 473.

otwieranych przez pochylenie, znajdują się one na jednym końcu, przy systemach innych na obu końcach.

Łożysko środkowe mostu obrotowego czopowego (fig. 473) składa się ze stałego, zwykle żeliwnego, kadłuba, utwierdzonego na filarze przy pomocy śrub, na którym w panewce ze stali lanej spoczywa czop, obecnie najczęściej z brązu fosforowego. Na czopie opiera się wahacz, odlany ze stali lub żeliwny, a na tymże konstrukcja mostowa. Wysokość czopa regulowana przy pomocy klinów stalowych (por. fig. 474). Wyjątkowo używano zamiast czopa łożysk kulowych. Konstrukcja mostowa spoczywa na czopie bezpośrednio lub jest na nim zawieszona przy pomocy silnych blachownicowych poprzecznic (co umożliwi łatwiejsze dostosowanie się do wysokości, oraz podparcie mostu w pobliżu jego środka ciężkości).

Mosty obrotowe wałkowe wymagają znacznie dokładniejszej roboty, kształtowanego bębna i wałków, są nadto trudne w naprawie i obciążają niejednostajnie filar, są więc gorsze i kosztowniejsze. Używane dla bardzo znacznych rozpiętości, oraz bardzo szerokich mostów. Wałki żeliwne o kształcie odpowiednio stożkowym o średnicy 30—50 cm, a szerokości 15—25 cm, w ilości możliwie wielkiej, conajmniej 8, poruszają się na okrągłym torze żeliwnym,

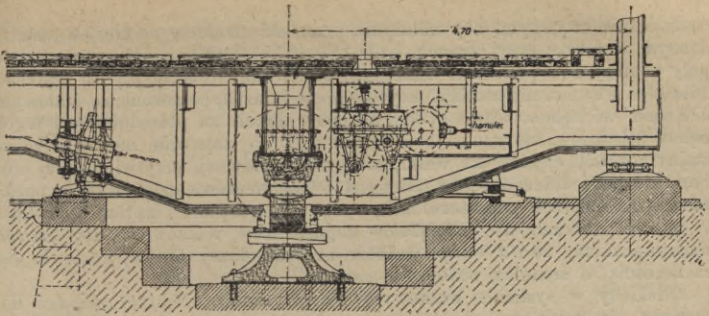


Fig. 474.

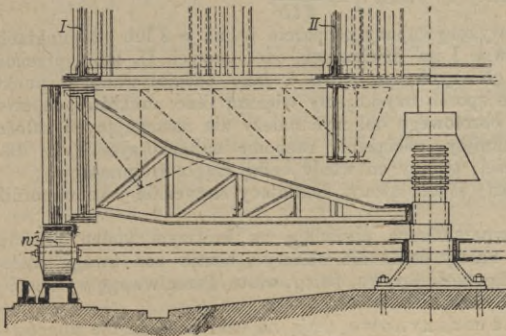
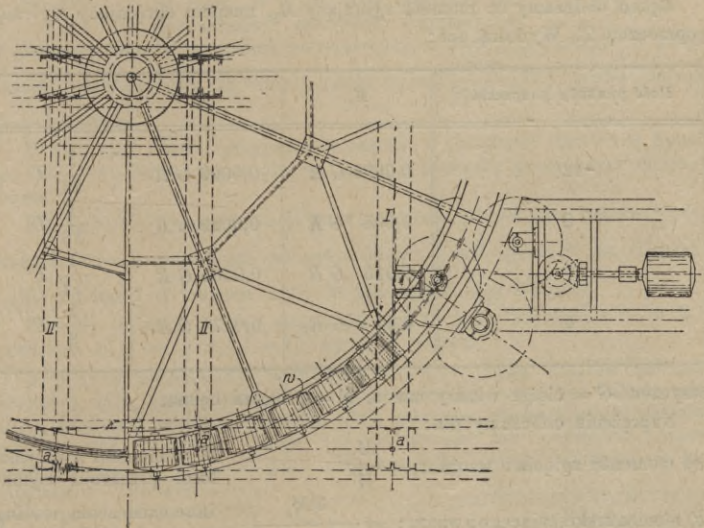


Fig. 476.

dostatecznie sztywnym, aby należycie przenieść ciśnienie na filar, a utwierdzonym w murze przy pomocy śrub  $1\frac{1}{2}$ — $2''$ . Położenie ich ustalone jest przy pomocy dwu pierścieni żelaznych, przez które przechodzą osi wałków. Pierścieni wewnętrzny ustalają sztywne pręty żelazne, połączone ze stalowym odlewem osi bębna. Most spoczywa na wałkach za pośrednictwem tegoż bębna żelaznego, który musi być bardzo tęgi, aby zapewnić możliwie jednostajny rozkład ciężaru na wałki, oraz płyty żeliwnej, przytwierdzonej śrubami do pasu dolnego bębna. Na fig. 475 belki mostowe spoczywają w punktach  $a$  na czterech poprzecznicach, opartych na bębnie i za ich pośrednictwem na wałkach  $w$ . Obciążenie dopuszczalne wałków (wedle danych amerykańskich)  $28 bd$  w  $kg$ , wałków ze stali lanej  $56 bd$ , gdzie  $b$  jest szerokością,  $d$  średnicą wałków w  $cm$ .

Niekiedy w systemie wałkowym dla uzyskania większej stałości dopuszcza się częściowe obciążenie łożyska środkowego, jednak nie więcej niż do  $\frac{1}{5}$  całkowitego ciężaru mostu.

Bęben obliczamy na moment zginający  $M_z$ , moment skręcający  $M_s$  i siłę poprzeczną  $T$ . Wynoszą one:

Ilość punktów podparcia	$M_z$	$M_s$	$T$
12	0,0036 $GR$	0,0009 $GR$	$\frac{1}{24} T$
8	0,008 $GR$	0,0029 $GR$	$\frac{1}{16} T$
6	0,015 $GR$	0,0065 $GR$	$\frac{1}{12} T$
4	0,34 $GR$	0,017 $GR$	$\frac{1}{8} T$

przyczem  $G$  = ciężar własny mostu,  $R$  = promień bębna.

Naprężenia obliczamy dla:

- a) momentu zgięcia z wzoru  $\sigma_z = \frac{M_z}{W}$   $W$  = moment wytrzymałości przekroju bębna;
- b) momentu skręcającego z wzoru  $\tau_s = \frac{3 M_s}{2(h-t)tb}$  inne oznaczenia według fig. 476.
- c) siły poprzecznej z wzoru  $\tau_t = \frac{3 T}{2tb}$ .

Praktycznie wykonywujemy podparcie bębna w 8 lub 12 punktach, opierając belki główne I na dźwigarach odcinkowych II, które przenoszą obciążenie belek głównych na bęben  $b$  jako oddziaływania w punktach  $a$  (fig. 477). W ten sposób uzyskujemy większą ilość punktów podparcia.

Belki mostu obrotowego obliczyć należy dla następujących założeń:

- most zamknięty, obciążenie ruchome najniekorzystniejsze dla obrachowywanej części; tworzy on wtedy belkę ciągłą trójprzęsłową;
- most otwarty nieobciążony, działający statycznie jako wspornik dwuramienny.

Mosty nierównoramienne posiadają na krótszym końcu przeciwwagę, której wielkość należy dokładnie obliczyć, biorąc pod uwagę rzeczywisty ciężar żelaza, wilgotność drzewa, śnieg, wiatr. Przeciwwagę wykonać można z betonu, żelaza, ołowiu itd.

Urządzenia maszynowe mają na celu podnoszenie końców mostu, oraz obrót tegoż. W tym celu używa się motorów elektrycznych (wogóle



najkorzystniejsze, proste, tanie i zajmujące mało miejsca), parowych, hydraulicznych (wodę należy zabezpieczyć od zamarzania przez dodanie gliceryny, alkoholu metylowego itd.); nadto każdy most ma urządzenie do uruchomienia siłą ludzką na wypadek, gdy motor zawiedzie.

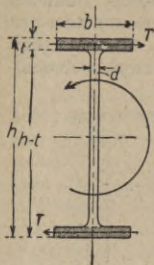


Fig. 476.

Siła motoryczna przewyciężyć musi: opory tarcia, opory bezwładności mostu i opory wiatru.

1. Wielkość tarcia jest bardzo różna. Wogóle przyjąć można dla motorów czopowych całkowite opory tarcia do  $0,115 P$  dla rozpoczynającego się ruchu, do  $0,08 P$  dla mostu w ruchu.

2. Opory bezwładności mostu zależą od czasu, w jakim most powinien zostać otwarty; zazwyczaj przyjmuje się w pierwszej połowie czasu ruch przyspieszony, w drugiej opóźniony. W przybliżeniu potrzebna siła dla ich pokonania wynosi  $\frac{Pl^2}{2000 t^3}$  HP (wedle danych amerykańskich).

3. Ciśnienie wiatru przyjmować należy w wielkości  $100-150 \text{ kg/m}^2$  (por. str. 773), działające na dłuższe ramię w kierunku przeciwnym ruchowi mostu.

Dla najogólniejszej orientacji most ruchomy (dowolnego systemu) wymaga średnio wedle danych amerykańskich:  $\frac{P}{15}$  HP, gdzie  $P$  jest ciężarem części ruchomej w tonnach (cyfra ta jest wzięta zbyt wysoko).

Dla siły ludzkiej przyjąć można  $15$  (do  $20 \text{ kg}$ ) z szybkością  $50$  (do  $60$ )  $m/\text{minutę}$ , tj.  $A = 15 \times 50 = 750 \text{ kg/m}$  na minutę.

2. Mosty zwodzone wykonywa się, gdy niema miejsca na most obrotowy, gdy istnieje parę torów obok siebie lub mogą być dobudowane nowe, gdy ruch wodny jest bardzo silny (gdy most trzeba otwierać częściej niż 25 razy dziennie). Mogą być pojedyncze lub podwójne. Mosty podwójne można wykonać jako trójprzegubowe (most Pałacowy w Leningradzie (Piotrogradzie), proj. prof. Pszenickiego<sup>1)</sup> fig. 478. Małe mosty można wykonać z drzewa ( $l_1$  do  $7 \text{ m}$  dla pojedynczych,  $l_2$  do  $14 \text{ m}$  dla podwójnych); żelazne dochodzą jako blachownice do  $l_1 = 15 \text{ m}$  (duża sztywność, mała wysokość konstrukcyjna), jako kratowe do  $l_1 = 50 \text{ m}$ .



Fig. 478.

Najstarsze systemy, używane czasem do dziś dnia dla małych rozpiętości, były zwodzone na linach; obecnie częściej przy pomocy przeciwwagi, równoważącej zazwyczaj w zupełności ciężar konstrukcji mostowej wraz z pomostem. Mogą one być: a) obracalne dokoła osi stałej, zwane klapowymi (środek ciężkości stały, zwykle w osi obrotu; fig. 479); b) obracalne na odzinkach koła, zwane też kołuskowymi (środek ciężkości ruchomy w linii poziomej lub prawie poziomej; fig. 480).

a) Mosty klapowe składają się z belek obracalnych około stałej osi, których część tylna z przeciwwagą kryje się podczas otwarcia w t. zw. komorze klapowej, mieszczącej się w filarze lub przyczółku, a mającej

<sup>1)</sup> Por. Pszenicki. Przegląd Techniczny. 1924.

zwykle szerokość jezdni bez chodników. Zazwyczaj  $\frac{L_2}{L'}$  mieści się w granicach 1,5 (mosty małe) do 4 (mosty duże);  $L_2$  jest tu długością ramienia podnoszonego (por. fig. 479),  $L'$  przeciwważącego  $AD$ . Komora powinna być zabezpieczona od przeciekania wody, przykryta stałe stropem. Otwór między ruchomym pokładem mostu, a stałym stropem, przykrywa się zwykle obracal-

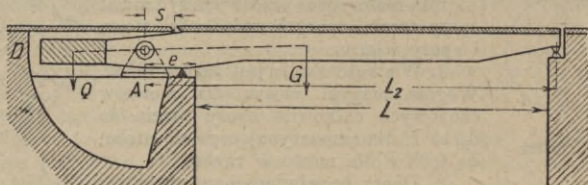


Fig. 479.

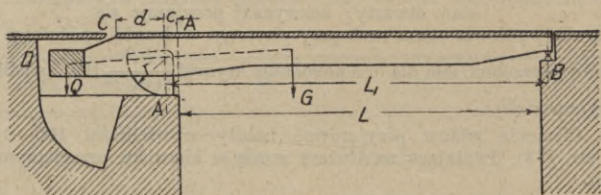


Fig. 480.

nym dylem, względnie kłapą pomostową. Przeciwwaga, składana z bloków żeliwnych lub kamiennych, w skrzyniach drewnianych umieszczona jest najczęściej na belce poprzecznej. W stanie zamkniętym najczęściej ciężar mostu spoczywa nie na osi, ale na osobnych łożyskach.

Przeciwwaga zwykle równoważy zupełnie ciężar mostu; do pokonania pozostaje tarcie ( $f = 0,15 - 0,2$  dla starszej konstrukcji) i parcie wiatru na podniesioną belkę ( $50 - 150 \text{ kg/m}^2$ ), wreszcie ewentualne zwiększenie ciężaru drewnianego pomostu wskutek przesiąknięcia wilgocią atmosferyczną.

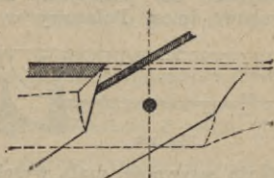


Fig. 481.

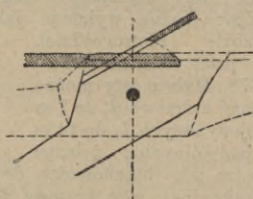


Fig. 482.

b) Mosty zwodzone kołskowe otwierają się przez obrót części tylnej, skonstruowanej jako odcinek ćwiartki koła po torze poziomym. Segment posiada zęby wchodzące w odpowiednie otwory również zębatego toru. Ruch powoduje motor przy pomocy zębatego pręta, utwierdzonego do belki w środku ciężkości tejże lub nieco powyżej (rzadko).

Mosty o ruchomej osi obrotu posiadają mniejszą długość konstrukcji, prostszy i lżejszy mechanizm, mniejszą komorę, wymagają dla zupełnego otwarcia mniejszego obrotu, oraz mniejszej siły, wreszcie są łatwe do wykonania przy małej wysokości konstrukcyjnej; natomiast ciężar mostu działa

na fundament podczas otwierania coraz to w innym punkcie, załamanie pomostu wypada zwykle daleko, ugięcie sprężyste jest większe, tor psuje się łatwo, a koszt utrzymania jest większy. Mosty te, stosowane przez jakiś czas bardzo w Ameryce, zaczynają wychodzić z użycia, głównie ze względu na szybkie niszczenie zębatego toru.

Zakończenie pomostu przy mostach zwodzonych wykonywa się za osią obrotu mostu (fig. 481) lub przed nią (fig. 482), nigdy zaś w osi. W pierwszym przypadku należy przykryć szparę stykową szeroką blachą, dla uniemożliwienia spływu nieczystości z mostu do komory klapowej. W drugim przypadku natomiast nie możemy doprowadzić wiatrownie do osi obrotu, a styki muszą być ukośnie wykształcone. Styków nie należy odsuwać zbytnio od osi mostu.

Siła potrzebna do otwarcia mostu wynosi (fig. 483):

$$k = \frac{f d G + w b l^2}{2 e}$$

przyczem  $f$  = współczynnik tarcia,  $b$  = szerokość mostu,  $G$  = ciężar mostu.

3. Mosty podnoszone pionowo (fig. 484) są kosztowne w konstrukcji i utrzymaniu; używane dzisiaj, gdy chodzi tylko o niewielkie zwiększenie wysokości wolnego przejazdu, lub gdy nie można dla braku miejsca zastosować systemów innych.

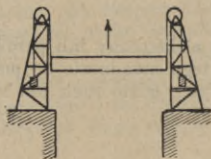


Fig. 484.

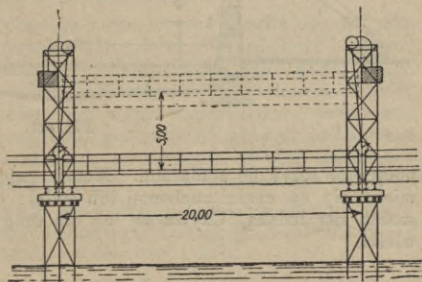


Fig. 485.

Prawie zawsze belki główne podnosi się wraz z pomostem; od ich końców prowadzą liny, umieszczone na wieżach o odpowiedniej wysokości z przeciwwagami, wyrównywującymi ciężar mostu, tak, że do przewyciężenia pozostają tylko opory ruchu (głównie tarcie), oraz działanie wiatru, śniegu itd. Wyjątkowo spotyka się belki główne stałe umieszczone wysoko; wtedy podnosi się tylko zawieszony na nich pomost. Jednostajność ruchu zapewniają kierownice zębate lub linowe.

Fig. 485 przedstawia przęsło ruchome mostu na Wiśle w Wyszogrodzie.

4. Mosty przetaczane (przesuwowe, fig. 486), używane stosunkowo rzadko, gdyż wymagają większej siły motorycznej i wiele miejsca na brzegu, zaś w ruchu są powolne. Z kilku systemów podajemy tylko szkic jednego z przesuwni  $p$ , którą przetacza się w bok, aby zrobić miejsce otwierającemu się mostowi.

5. Mosty przewozowe (promowe, fig. 487), składają się z belki opartej w odpowiedniej wysokości (w portach morskich zwykle  $> 40 m$ ) na

dwu filarach z umieszczonym na niej torem. Na torze porusza się wózek z platformą, przenoszącą przechodniów i wozy („prom wiszący“), umieszczoną w wysokości brzegów, a zawieszoną na linach lub prętach sztywnych. Belki wykonywa się zwykle jako wiszące, na końcach zakotwione, lub jako ramowe,

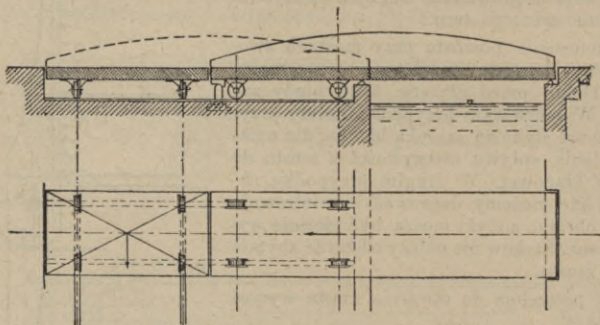


Fig. 486.

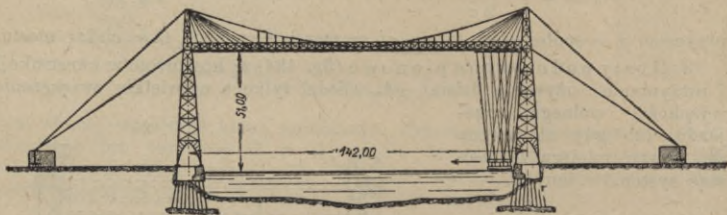


Fig. 487.

połączone sztywnie z filarami. Motor, najczęściej elektryczny lub parowy, mieści się na części ruchomej lub stałej; oprócz tego urządzenie do poruszania siłą ludzką. Używa się ich dla dróg kołowych, gdzie ruch jest niewielki.

### LITERATURA.

- Pszeniccki: Sposób zastosowania łuków trójprzegubowych do budowy mostów obrotowych. Przegląd techniczny. 1924.  
 Bryła: Mosty przewozowe. Lwów 1914.  
 Arnodin: Le transbordeur. Anvers 1908.  
 Schneider: Movable bridges. Amer. Trans. Civil Eng. 1908.  
 Lift bridges: Proc. Eng. Soc. W. Pennsylvania. 1909.  
 Howard: Vertical lift bridges. Amer. Trans. Civil Eng. 1921.  
 Bernhard: Eiserne Brücken. Berlin 1911.  
 Dietz: Bewegliche Brücken. Leipzig 1907.  
 Hotopp: Bewegliche Brücken. 2. t. Hannover.  
 Strielieckij: Razwodnyje mosty.

# Montowanie mostów żelaznych.

Napisał

inż. Aureljusz Chróścielewski,

Mińsk Mazowiecki.

**Wstęp.** Przesła żelazne, oprócz niewielkich, nitowanych w wytwórni całkowicie, wysyła się na miejsce montażu w częściach najdogodniejszych do montowania i przesyłki, tak pod względem wagi, jak i wymiarów. Zazwyczaj przytem sporządza się specjalne wyszczególnienia wysyłanych części, oraz nitów, aby w wytwórni było podług czego przygotować wysyłkę, a na miejscu montażu sprawdzić, czy wszystko przyszło. W wyszczególnieniu podaje się ilość nitów o 5% wyższą od rzeczywiście potrzebnej ze względu na spalenie się i psucie nitów podczas nitowania.

Wybór sposobu montowania, w zależności od warunków miejscowych, powinien być uskuteczniiony już w okresie projektowania mostu.

**Dane do obliczania rusztowań.** Na rusztowania działa:

a) obciążenie stałe, składające się z ciężaru własnego zmontowanego przesła, oraz ciężaru rusztowań;

b) obciążenie ruchome, składające się z wagi najcięższej części mostowej, wysłanej na montaż lub oddziaływania obciążonego tą częścią zórawia, oraz ciężaru ludzi i narzędzi;

c) parcie wiatru na przesło i na rusztowanie.

Ciężar własny przesła (bez pomostu i bez łożysk) określa się na podstawie porównania z ciężarem przesła zbliżonych co do rozpiętości i systemu kraty lub na zasadzie znanych wzorów (por. str. 868). Ciężar mostu działa na rusztowanie w węzłach przesła za pośrednictwem podłożonych klinów, na których przesło spoczywa. Ponieważ słupy rusztowaniowe przeważnie znajdują się bezpośrednio pod węzłami, przeto belki główne rusztowania w rzadkich tylko wypadkach narażone są na zginanie od wagi zmontowanego przesła, a zazwyczaj obciążenie węzła działa bezpośrednio na słup.

Ciężar rusztowań określimy wedle zestawionego uprzednio rysunku, przyjmując wagę 1 m<sup>3</sup> drzewa miękkiego (odkrytego) 900 kg lub wedle wzoru (1), podającego wagę całego rusztowania na długości 1 m b.

$$g = 1,006 \cdot 900 \cdot C \cdot h = 905 Ch \frac{kg}{m \text{ b. przesła}} \dots \dots (1)$$

gdzie 1,006 — współczynnik wprowadzony dla uwzględnienia połączeń żelaznych.

$C$  — ilość m<sup>3</sup> drzewa na 1 m<sup>2</sup> płaszczyzny rzutu pionowego rusztowania. Ilość ta zależy od ilości słupów i zastrzałów w przekroju poprzecznym rusztowań, mianowicie:

jeżeli jarzmo składa się z czterech lub pięciu

$$\text{słupów i dwóch zastrzałów} \dots \dots \dots C = 0,13 \frac{m^3 \text{ drzewa}}{m^2 \text{ rzutu pion.}}$$

jeżeli jarzmo składa się z trzech słupów i dwóch

$$\text{zastrzałów} \dots \dots \dots C = 0,11 \quad "$$

jeżeli jarzmo składa się z dwóch słupów i dwóch

$$\text{zastrzałów} \dots \dots \dots C = 0,08 \quad "$$

$h$  — wysokość rusztowania, wyrażona w metrach od poziomu wody lub ziemi do poziomu pomostu.

Na wypadek jeżeli wysokość rusztowań będzie niższa niż 4,5 m, współczynnik  $C$  należy powiększyć o 25%.

Jeżeli rusztowania są szczególnie złożone (np. dźwigary drewniane złożone, zazębione itd.), wzór powyższy nie odpowiada rzeczywistości i wtedy wagę należy specjalnie obliczyć. Ponieważ jednak pomyłka w określeniu wagi własnej tylko w małym stopniu wpływa na zmianę naprężeń, a krótki czas trwania rusztowań pozwala na pewne przeciążenie prętów (do 5%), przeto na dokładność określenia wagi można nie zwracać szczególniejszej uwagi.

Wagę największej części nitowanej w fabryce możemy dla pręseł średniej wielkości przyjąć w przybliżeniu równą około 1,7 tonny. Przyjmując ten ciężar jako siłę skupioną, możemy już nie przyjmować pod uwagę obciążenia rusztowania wagą, ludzi i narzędzi. Ponieważ oddziaływanie żórawia, niosącego tę największą część pręseł, będzie mniejsze niż siła skupiona równa wadze tej części, więc przy obliczaniu rusztowań również i oddziaływania żórawia można nie przyjmować pod uwagę.

Ciśnienie wiatru poleca przyjmować M. K., oraz M. R. P. w wysokości 250 kg/m<sup>2</sup>. Płaszczyznę, na którą wiatr działa, wedle str. 774.

Spółczynnik pewności na przewrócenie od wiatru przyjmuje się dla rusztowań 1,25.

**Naprężenia dopuszczalne.** Naprężenia dopuszczalne, ze względu na krótki stosunkowo czas pracy drzewa rusztowaniowego, oraz brak większych wstrząszeń podczas jego pracy, można przyjąć wedle przepisów M. R. P o 50% większe niż dla mostów drewnianych, mianowicie (por. str. 777).

Naprężenia dopuszczalne w kg/cm <sup>2</sup>	dla drzewa	
	miękkiego	twardego
Na rozciąganie . . . . . $k_r =$	165	180
„ zginanie . . . . . $k_g =$	150	165
„ ciśnienie równoległe do włókien . $k_c =$	97,5	120
„ „ prostopadłe „ „ . $k'_c =$	22,5	60
„ ścinanie równoległe „ „ . $k_s =$	18	30
„ „ prostopadłe „ „ . $k'_s =$	45	60

**Obliczenie statyczne rusztowań.** Rusztowanie składa się z pali, słupów, zastrzałów, oczepów, rygli, kleszczy, poprzecznic i dyliny (wyściółki).

Poprzecznice pomostu, leżące bezpośrednio pod wyściółką z desek  $g = 4 \text{ cm}$  ( $1\frac{1}{2}''$ ), układa się w odległościach od 600 do 1000 mm od siebie, przyjmując ich średnice 16,18 lub 20 cm. Oblicza się je na obciążenie ciężarem własnym i ciężarem dyliny, oraz ciężarem najcięższej znitowanej części pręseł, wysłanej z wytwórni na montaż, zakładając, że ciężar ten jako siła skupiona działa w środku rozpiętości na trzy sąsiednie poprzecznice.

Belki główne oblicza się na ciężar własny pomostu, oraz ciężar najcięższej części pręseł, położonej w środku rozpiętości belki głównej. Jeżeli na belkę główną w miejscu nie podpartym słupem przenosi się ciężar zmontowanego pręseł przez kliny, ułożone pod węzłem, to w tym (wyjątkowym) wypadku należy sprawdzić belkę główną również na odpowiedni moment zginający.

Dźwigarami takimi zazwyczaj przykrywa się tylko przejazd, pozostawiony dla statków, ruchu kołowego lub kolejowego.

Jeżeli belka główna składa się z dwóch odrębnych materiałów, np. z szyn żelaznych i z belek drewnianych, co ma miejsce przy przesuwaniach przesł (patrz fig. 500), to określamy część momentu gnącego przejętego przez oba materiały, wychodząc z założenia, że ugięcie sprężyste obu części belki jest jednakowe, gdyż belki połączone w jedną całość,

$$r_1 = r_2 = \frac{E_1 I_1}{M_1} = \frac{E_2 I_2}{M_2},$$

gdzie  $r_1$  i  $r_2$  — promień ugięcia belek drewnianych i żelaznych,  $E_1$  i  $E_2$  — współczynniki sprężystości dla drzewa i żelaza,  $I_1$  i  $I_2$  — momenty bezwładności belki drewnianej, względnie żelaznej w  $cm^4$ ,  $M_1$  i  $M_2$  — części momentu gnącego  $M$ , przypadające na oba materiały.

Wtedy:  $M_1 = M \cdot \frac{E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$  i  $M_2 = M \cdot \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \dots (2)$

Słupy i zastrzały sprawdza się na wyboczenie, przyjmując za  $l$  całą długość pręta, względnie odległość pomiędzy punktami stężeń.

Legary sprawdza się na zginanie od jednostajnego obciążenia ciśnieniem ziemi.

Sprawdzając stałość rusztowania na przewrócenie przez wiatr, zakładamy, że zmontowane przesło spoczywa całkowicie na rusztowaniu, nie wspierając się na filarach lub przyczółkach. Spółczynnik pewności na przewrócenie nie powinien być mniejszy niż 1,25.

Niekiedy zachodzi potrzeba wzmocnienia kratowego dźwigara żelaznego na czas montażu. Wzmocnienie słupów lub ściegien uskutecznia się zapomocą belek drewnianych, obejmujących słup żelazny z dwóch albo czterech stron. Belki drewniane łączy się ze sobą i z konstrukcją żelazną zapomocą śrub. Sprawdzenie słupa wzmocnionego wykonywa się na zgniecenie, względnie wyboczenie, zakładając, że odkształcenie obu materiałów od napięcia ścisniającego jest jednakowe, czyli, że:

$$\frac{\sigma_z}{E_z} = \frac{\sigma_d}{E_d} \text{ i } \sigma_z = \frac{E_z}{E_d} \sigma_d \text{ i } \frac{E_z}{E_d} = \frac{2150000}{110000} \approx 19,5, \text{ czyli } \sigma_z = 19,5 \sigma_d.$$

Jeżeli siłę działającą na słup oznaczymy przez  $P$ , płaszczyznę przekroju drzewa przez  $F_d$ , a płaszczyznę przekroju żelaza przez  $F_z$ , to mamy:

$$P = \sigma_d F_d + \sigma_z \cdot F_z.$$

Czyli:  $\sigma_d = \frac{P}{F_d + 19,5 F_z} \dots (3)$

Stosując współczynnik zmniejszający  $\beta$  (por. dział: „Budownictwo“), otrzymamy naprężenie dla drzewa na wyboczenie:

$$k_d \geq \frac{P}{(F_d + 19,5 F_z)} \leq \beta \cdot 97,5 \text{ kg/cm}^2 \dots (4)$$

Jeżeli zachodzi potrzeba wzmocnienia pasu dolnego wskutek dodatkowego zginania, to uskuteczniamy to drzewem (por. fig. 495) sprawdzając podług wzorów (2).

Posadowanie rusztowań odbywa się na legarach, palach, a czasami na pontonach lub barkach.

Posadowanie na legarach stosuje się zawsze jako najtańsze, gdy rusztowanie wznosi się na łądzie stałym. Ciśnienie na grunt, zależnie od jego

rodzaju, nie powinno przekraczać 2—3  $kg/cm^2$ . Czasami grunt wzmacnia się zapomocą ubijania kamieni, ułożenia warstwy podkładów itp. Posadowanie na palach stosuje się wszędzie, gdzie tylko pozwala na to dno rzeki. Pale, które osiągnęły grunt stały i nie dają już przy uderzeniu babą wpedu, lub dają nieznaczny, mogą nieść następujące obciążenia:

$\phi = 22 \text{ cm}$	$P \leq 20 \text{ t}$
$\phi = 27 \text{ cm}$	$P \leq 25 \text{ t}$
$\phi = 31 \text{ cm}$	$P \leq 30 \text{ t}$

Jeżeli stałego gruntu przy wbijaniu pala nie osiągnięto, to siłę nośną pala określamy podług wzoru Brixa, zakładając wielkość wpedu przy ostatniem uderzeniu babą, lub też przyjmując wped otrzymany podczas wbijania próbnego.

$$P = \frac{h \cdot Q^2 \cdot q}{e \cdot (Q + q)^2} \quad (\text{por. str. 710}),$$

gdzie  $P$  — obciążenie pala w  $kg$ ,  $Q$  — waga baby w  $kg$ ,  $q$  — waga pala w  $kg$ ,  $h$  — wysokość spadania baby w  $mm$ ,  $e$  — wped pala przy ostatniem

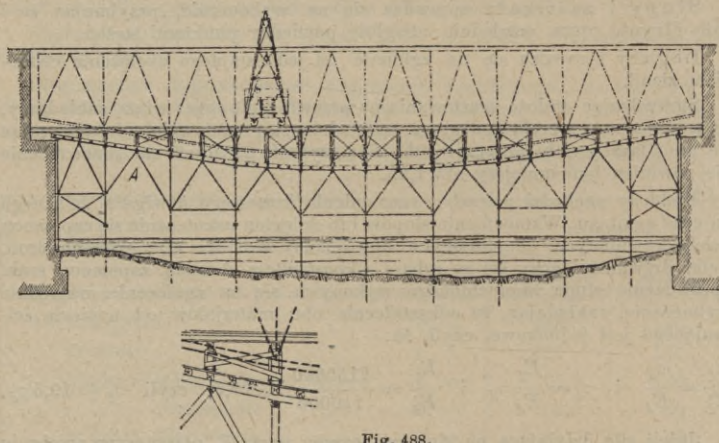


Fig. 488.

uderzeniu baby w  $mm$ . Przy rusztowaniach jako budowli czasowej, siłę nośną pala przyjmujemy  $= \frac{1}{2} P$ , przy budowlach stałych  $= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} P$ .

Dla steżenia pali, wbitych w dno rzeki, przy bardzo głębokiej wodzie ( $\approx 4,5 \text{ m}$ ), stosuje się ściągacze żelazne podwodne (fig. 491) z żelaza okrągłego, które się przymocowuje jednym końcem do pala przed wbiciem na takiej wysokości, aby po wbiciu dochodziły do dna rzeki, zaś drugi koniec umocowywa się wysoko do innego pala po wbiciu takowego. Długość ściągaczy reguluje się przy pomocy gwintu rzymskiego. Jeżeli ukończenie montażu przed nadejściem wiosennych lodów nie da się uskuteczyć, należy przed jarmami zbudować izbice, oraz wyrąbywać lód naokoło pali.

Jeżeli wbijanie pali jest niemożliwe z powodu okoliczności miejscowych, np. wskutek kamienistego dna, wielkiej głębokości itp., to czasami, gdy rzeka nie jest zbyt bystra i niema wielkiej fali, ustawia się rusztowanie na pontonach. Dla zwiększenia stałości takiego rusztowania daje się mu przeważnie formę drewnianej belki kratowej (Howe'a, Town'a itd.). Można też utwierdzić słupy w skrzyniach, wypełnionych kamieniami.

**Montaż na rusztowaniach.** Sposób montowania na rusztowaniach jest najdogodniejszy i najczęściej stosowany. Stosować go nie można lub



nie trzeba tam tylko, gdzie dno jest skaliste, bardzo głęboka woda, wielka szybkość rzeki lub wielka odległość przęsła od wody (gdzie koszt wysokiego rusztowania byłby bardzo znaczny).

Rozróżniamy rusztowanie dolne, służące do podparcia przęsła aż do tego stadium robót, w którym całość oprze się na oporach, oraz górne, służące do zmontowania pasów i wiązań górnych, oraz do ich zanitowania.

Zamiast rusztowań górnych stosuje się obecnie często żórawie bramiaste zewnętrzne lub wewnętrzne przesuwne, służące do montażu; nitowanie zaś odbywa się na pomostach, układanych na samej konstrukcji.

Konstrukcję rusztowań objaśniają następujące przykłady:

a) Rusztowanie do demontażu i montażu mostu na rzece Słucz. Dla zdemontowania dwu starych przęsła równoległych  $l = 33,7 \text{ m}$ , oraz zmontowania na ich miejscu przęsła nowego (fig. 488 i 489), na których rozmontowanie i zmontowanie każdego przęsła miało odbywać się kolejno.<sup>1)</sup>

Słupy, dla dogodności wbijania pali, rozstawiono na zewnątrz istniejących dźwigarów w odległości poprzecznej ok. 7 m. Ażeby zmniejszyć rozpiętości

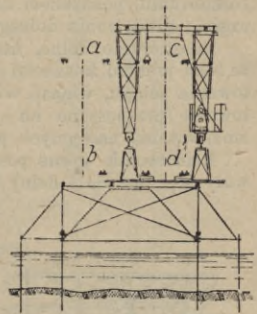


Fig. 489.  
(przekrój poprzeczny fig. 488.)

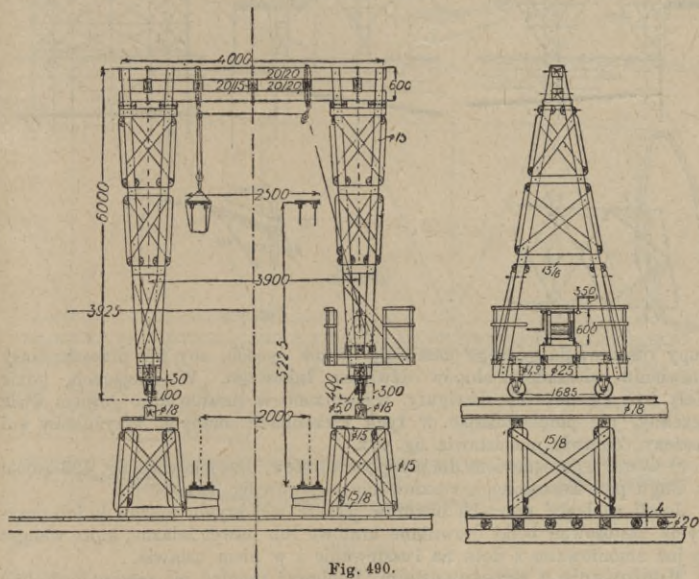


Fig. 490.

poprzecznie pod dźwigarem wewnętrznym przęsła, narazie jeszcze nie demontowanego pomieszczono trzecią belkę główną, którą w jarzmach podparto zastrzałami.

<sup>1)</sup> Na fig. 488, 491 i nast. linje pełne oznaczają zarys rusztowania, linje kreskowane zarys dźwigarów żelaznych.

Dla udogodnienia demontażu i montażu pobudowano na pomoście specjalnym żóraw bramiasty drewniany o napędzie ręcznym i sile nośnej, równej wadze najcięższej, wysłanej na montaż, sztuki ok. 2000 kg (por. fig. 490).

b) Rusztowania montażowe mostu na rzece Dźwinie Zachodniej w Rydze. Montaż 7 przęseł o rozpiętości  $l = 84,36 \text{ m}$  odbywał się na rusztowaniu, pokazanym na fig. 491, które składa się z trzech zasadniczych części: rusztowania dolnego, górnego, oraz dwóch żóraw bramiastych.

Rusztowanie dolne, którego pale z powodu głębokiej wody powiązane ze sobą prętami żelaznymi (por. fig. 491), posiadało pomost, służący do zmontowania ściągu, wiązań wiatrowych i jezdni oraz rusztowania górnego. Rusztowanie przenoszono na nowe miejsce stosownie do postępu roboty dla zmontowania następnych przęseł.

Rusztowanie górne posiadało dwa pomosty — górny, po którym posuwały się żórawie i dolny dla montażu pasu dolnego dźwigaru łukowego.

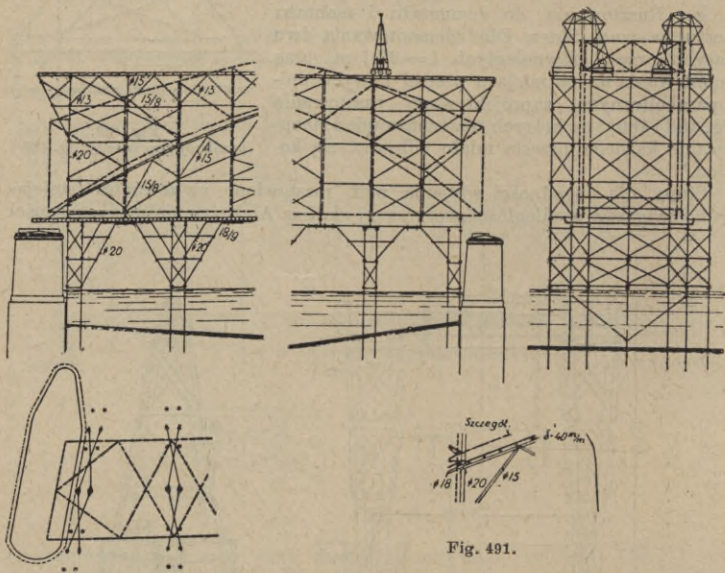


Fig. 491.

Słupy rusztowania górnego ustawiano w ten sposób, aby nie przeszkadzały ustawieniu wieszadeł i słupów dźwigaru łukowego. W miejscach, gdzie miały być zmontowane dźwigary, wytworzono w rusztowaniu górnym dwie szczeliny, nie pomieszczając w tych szczelinach żadnych krzyżulców ani kleszczy. Żórawie przedstawia fig. 492.

c) Otwory, pozostawione dla przepływu tratw, przedstawiają fig. 493 (most na Bugu pod Terespołem), rusztowanie piętrowe fig. 494.

Jeżeli zachodzi potrzeba otworów jeszcze większych, można do ich przykrycia zastosować belki drewniane kratowe lub nawet żelazne, które wciąga się już zmontowane z dołu na rusztowanie i w niem ustawia.

**Montowanie z przesuwaniem.** Ponieważ montaż nie zawsze może być wykonany na właściwym miejscu, z powodu niemożności postawienia rusztowania wskutek skalistego dna, bardzo głębokiej wody, wielkiej odległości pomiędzy przęsłem a wodą, wymaganej bardzo znacznej szybkości wykonania montażu, znacznych kosztów rusztowania itp., przeto czasami wybiera się drogę trudniejszą, montując przęsła na brzegu i nasuwając je później na swoje miejsca.

Nasuwanie może być poprzeczne, jeżeli przeszło toczy się w kierunku do osi mostu prostopadłym, i podłużne, jeżeli przesuwane przeszło toczy się wzdłuż osi.

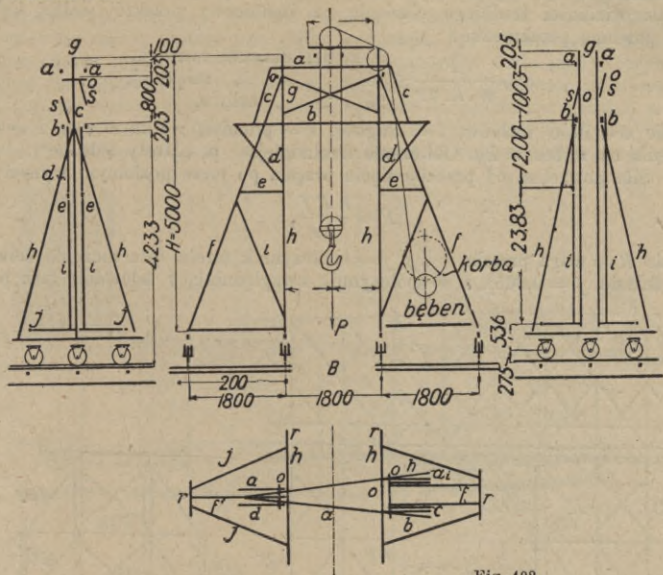


Fig. 492.

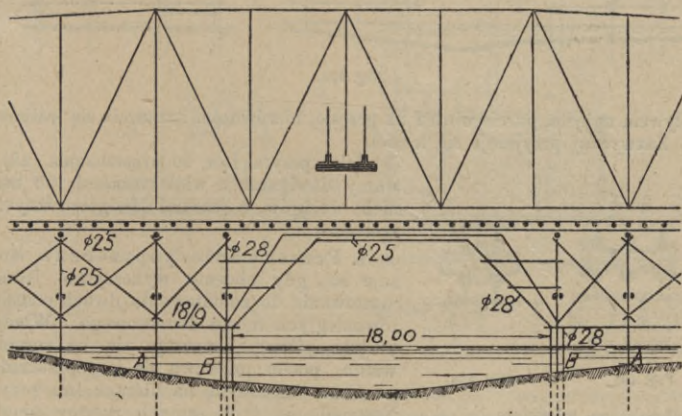


Fig. 493.

Przetaczanie odbywa się na wałkach żelaznych lub stalowych po torze ułożonym z szyn. Wałki bywają cylindryczne ze zgrubieniami na końcach (fig. 495), ze zgrubieniami w środku (fig. 496), lub zupełnie bez zgrubień (fig. 499). Zgrubienia służą jako kierownice.

Niekiedy łączy się w osobne wózki po kilka wałków. Jeżeli pas dolny toczy się bezpośrednio po wałkach, to wałki muszą mieć wgłębienia dla

przepuszczenia główek nitów. Zamiast wałków używa się niekiedy wózków o specjalnej konstrukcji.

Liczbę wałków, potrzebnych do przetoczenia przęsła, określa się zwykle wedle wielkości średniego ciśnienia na średnicowy przekrój wałka, które nie powinno przekraczać:

$$\sigma = \frac{P}{n \cdot l \cdot 2r} \leq \begin{matrix} 50 \text{ kg/cm}^2 \text{ dla stali twardej,} \\ 35 \text{ " " " " miękkiej,} \\ 25 \text{ " " " " żeliwa,} \end{matrix}$$

gdzie  $n$  = ilość wałków,  $l$  = długość,  $r$  = promień wałka w  $cm$ ,  $P$  = ciśnienie na wałek w  $kg$ . Obliczenie dokładniejsze p. „Mosty żelazne“.

Siła potrzebna od przeciągnięcia przęsła po torze poziomym wynosi:

$$P = \frac{n R f}{2 r},$$

gdzie  $R$  = waga przęsła w  $kg$ ,  $f$  = współczynnik tarcia (dla toczenia żelaza po żelazie,  $f = 0,065$ ),  $n$  = współczynnik uwzględniający falowanie toru pod

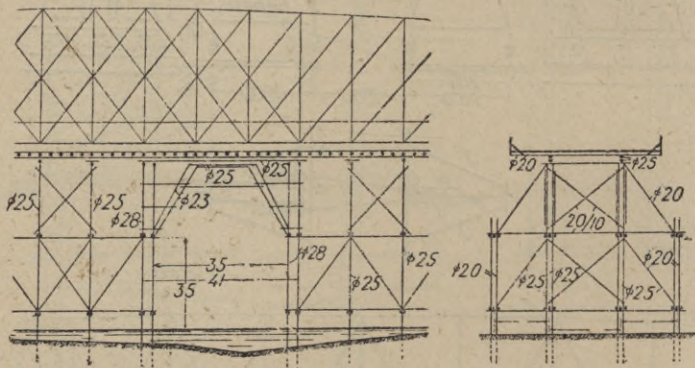


Fig. 494.

wplywem ugięcia, parcie wiatru na przęsło, nierówności i zatarcia się wałków itp. Zazwyczaj przyjmuje się  $n = 3$ .

Jako przyrządów do przetaczania używamy dźwigarek z wielokrążkami lub bez nich, wciągów, a czasami dźwigów różnych systemów.

1. Przesuwanie poprzeczne stosuje się, gdy chcemy wykorzystać jedno rusztowanie do zmontowania dwóch przęsł równoległych mostu dwutorowego. Wtedy przęsło pierwsze montuje się na rusztowaniu, potem przesuwa się je poprzecznie po torze, ułożonym na filarach lub przyczółkach, na właściwe łożyska. Następnie na tych samych rusztowaniach montuje się przęsło drugie, którego już się nie przesuwa, lecz tylko opuszcza na łożyska. Obecnie najczęściej stosuje się przesuwanie poprzeczne dla zamiany na most stały, prowizorium mostowego, obok którego buduje się rusztowanie, na niem montuje przęsło, następnie przerywa ruch, usuwa prowizorium, układa tor do przesuwania i przesuwa samo przęsło. Jeżeli dla jakichś powodów przesuwać po filarach lub przyczółkach nie można, to wtedy buduje się specjalny tor pod węzłem podporowym lub pierwszym węzłem pasa dolnego.

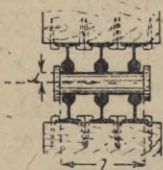


Fig. 495.

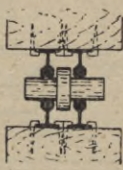


Fig. 496.

Fig. 497 przedstawia przesunięcie poprzeczne przęsła ( $G = 148 t$ ) mostu na Bugu na linii Warszawa—Wilno. Dokonano go na wałkach po torze, ułożonym z jednej strony na przyczółku, a z drugiej na belce żelaznej, przerzuconej pomiędzy dwoma słupami, stanowiącymi filar istniejącego częściowo mostu, którego jedno zburzone przęsło było zastąpione prowizorium drewnianem (fig. 497). Część górną toru stanowiły dwie szyny, przymocowane do poprzecznie wyrównanych odpowiednio podkładek, główkami na dół. Część dolną, cztery szyny przymocowane do podkładek hakami, a ustawione główkami do góry. Wałki stalowe (po 10 z każdej strony przęsła) miały średnicę 100 mm. Samego przeciągnięcia dokonano zapomocą dwóch

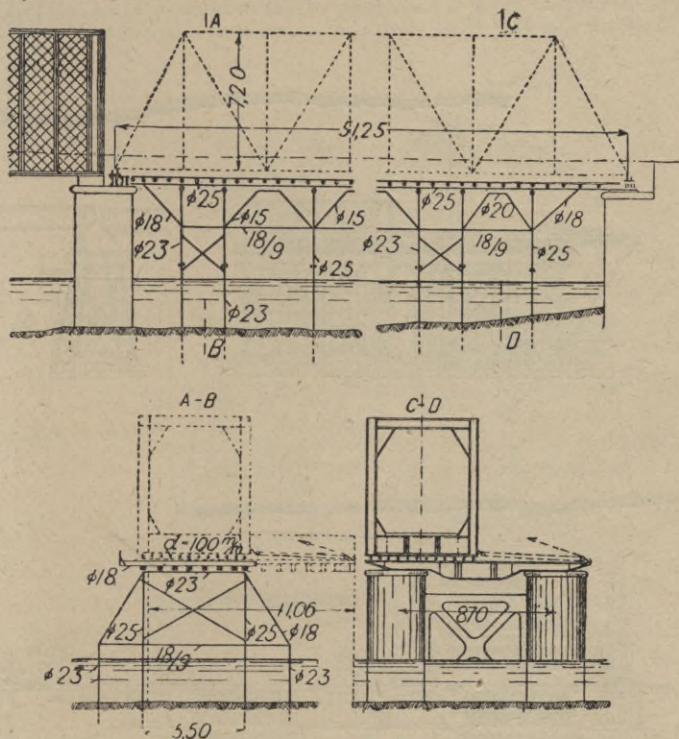


Fig. 497.

wciągów dziesięciotonnowych. Przesunięcie wynosiło  $\approx 5 m$ , a trwało 2 godziny ( $v = 2,5 m/godz.$ ).

Przesunięcia jednego z przęseł mostu na Bugu pod Fronołowem ( $G = 445 t$ ) z toru nieczynnego (pod którym ustawiono rusztowanie) na czynny, dokonano na torach, ułożonych z jednej strony na filarze kamiennym, z drugiej na filarze żelaznym, zbudowanym na miejsce kamiennego, zburzonego podczas działań wojennych (fig. 498). Filar żelazny wzmocniono tu drzewem. Przesunięcia dokonano zapomocą dwóch wciągów dziesięciotonnowych. Czas trwania przetaczania na odległość  $7,70 m$  wyniósł  $2\frac{3}{4}$  godziny ( $v = 2,8 m/godz.$ ), około  $2,8 m$  na godzinę. Znacznie więcej czasu zabrało zdjęcie przęsła z łożysk i przesunięcie tych ostatnich na nowe miejsca, oraz opuszczenie przęseł na łożyska.

Na fig. 499 pokazano przesunięcia poprzeczne zapomocą dźwigarki, ustawionej na prześle, oraz kompletu wielokrażków. Jako toru górnego

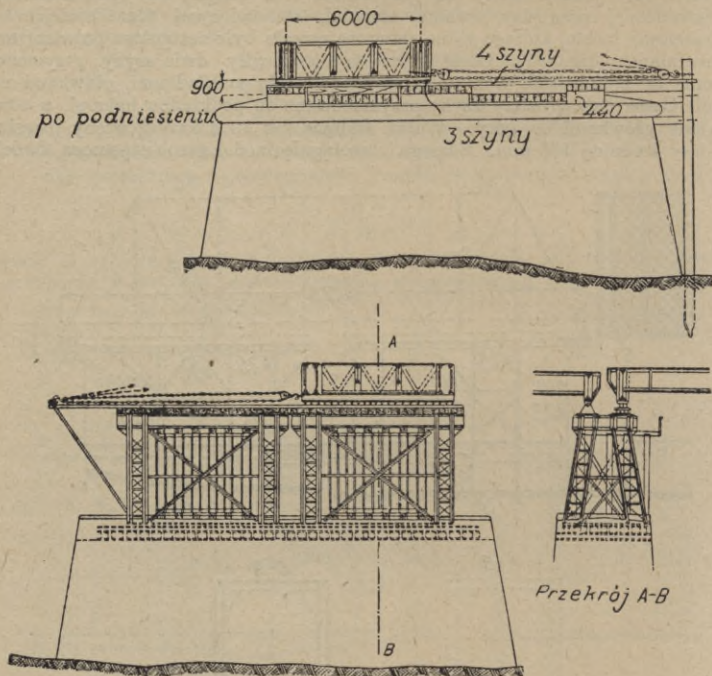


Fig. 498.

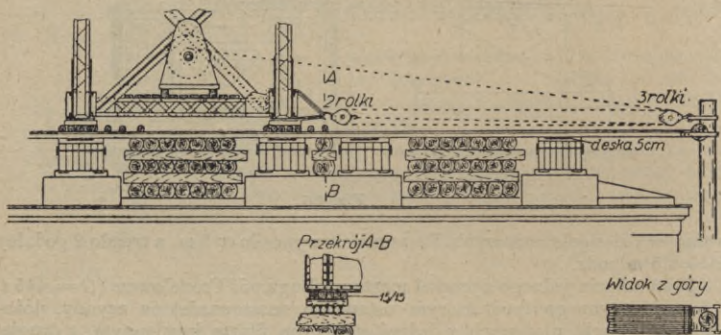


Fig. 499.

użyto krótkich belek dębowych, przymocowanych na miejscu odjętych waczycy górnych.

Wadę toru dolnego stanowi tu jednak różny stopień osiadania materiałów, podtrzymujących szyny pod wpływem ciśnienia. Tę różnicę możnaby zmniejszyć, gdyby drzewo postawione było na sztorce.

## 2. Przesuwanie podłużne może być wykonane jako:

- przesuwanie po rusztowaniach;
- przesuwanie z zastosowaniem dzioba (awanbeku);
- przesuwanie na oporach pływających.

a) Przesuwanie po rusztowaniach używane jest w razie możliwości pobudowania w otworze rusztowania.

Fig. 500 przedstawia przesunięcie podłużne przęsła mostu na Bugu na linii Siedlce—Lida pod Fronołowem. Na rusztowaniu umieszczono 2 tory po 4 szyny w każdym; na torach zaś ułożono 72 wałków stalowych o średnicy 150 mm. Do pasów dolnych umocowano 3 szyny za pośrednictwem klocków drewnianych, ułożonych w odległości około 0,75 m. Przetoczenia

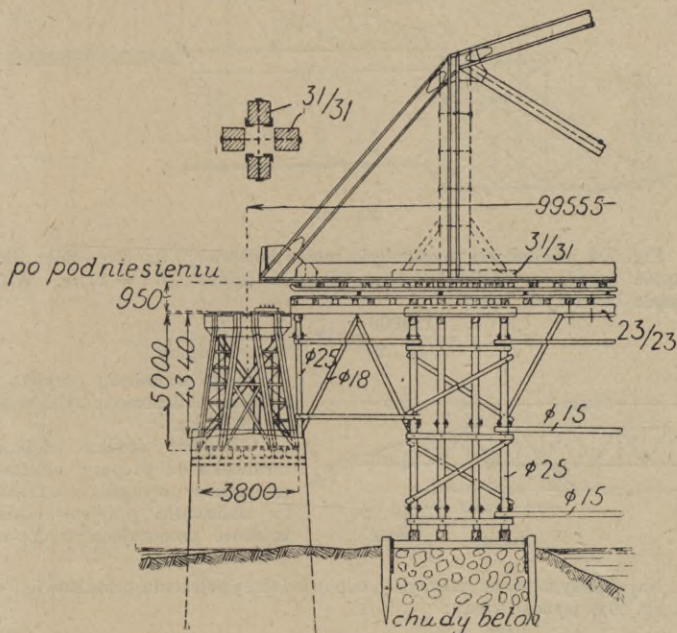


Fig. 500.

z pomocą trzech dźwigarek, ustawionych na przyczółku, dokonano w ciągu dziesięciu godzin (10 m na godzinę).

b) Przesuwanie z dziobem (awanbkiem). Przesuwanie przęsła przez większy otwór, którego nie można zarusztować, opiera się na zasadzie zrównoważenia wysuniętego w otwór t. zw. dzioba (awanbku) i części przęsła ciężarem pozostałej na brzegu części przęsła. Dziób (awanbek) stanowi konstrukcję możliwie lekką, celowo do przesuwania zbudowaną, mającą środek ciężkości możliwie blisko tego końca, którym konstrukcja przytwierdza się do przęsła, gdyż chodzi o otrzymanie możliwie małego momentu przechylnego. Czasami dla przeciwdziałania momentowi przechylnemu trzeba zastosować przeciwwagę. Ponieważ sposób działania sił zewnętrznych na przęsło przy nasuwaniu jest inny od tego, na który przęsło było obliczane, przeto przęsło należy przeliczyć na nowe warunki obciążenia i wzmocnić te pręty, które okażą się za słabe.

Sposób przesuwania stosowany był często, gdy budowane były belki ciągle, które przy przesuwaniu nie potrzebowały przeciwwagi, a czasami i awanbeku. Belki na dwóch oporach przeważnie wymagają awanbeku, przeciwwagi i wzmacniania prętów. Długość dzioba przyjmuje się zwykle 0,6  $l$  do 0,7  $l$ . Ponieważ wysunięty w otwór koniec przęsła i awanbek uginają się, więc należy je obliczyć i odpowiednio podnieść nos awanbeku, aby przy osiągnięciu przeciwległej opory trafić na powierzchnię wałków.

Fig. 501 przedstawia przesunięcie wiaduktu o rozpiętości 40 m w Strzemieszycach nad torami, gdzie częściowo nie można było ustawić rusztowań.

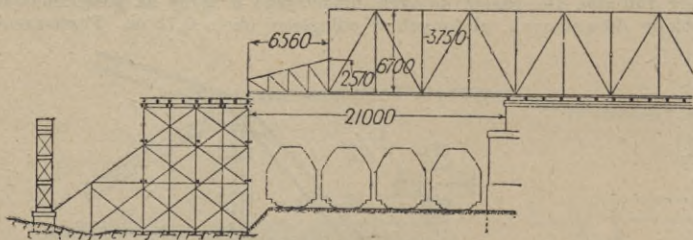


Fig. 501.

Fig. 502 przedstawia przesunięcie mostu kolejowego na rzece Bóbr. Rozpiętość przęsła wynosiła  $l = 45$  m, długość dzioba 0,6  $l = 27$  m. Waga przęsła bez łożysk 129 t,

$$\text{więc: } g = \frac{129000}{45 \cdot 2} = 1433 \frac{\text{kg}}{\text{m b. dźwigaru}}$$

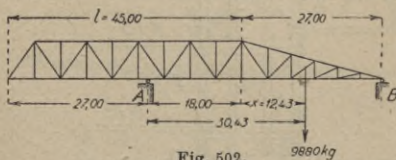


Fig. 502.

Waga awanbeku przyjęta na zasadzie obliczenia przybliżonego = 19760 kg.

Odległość środka ciężkości awanbeku od podpory, obliczona rachunkowo, wynosiła  $x = 12,43$  m (w obliczeniu przyjęto ciężary węzłowe proporcjonalne do wysokości słupów).

Największy moment przechylny, odpowiadający położeniu, przedstawionemu na fig. 502, wynosi wtedy:

$$M = \frac{1433 \cdot 1800^2}{2} + 9880 \cdot 30,43 = 54923000 \text{ kgcm.}$$

$$\text{Moment stałości: } M_1 = \frac{1433 \cdot 2700^2}{2} = 52233000 \text{ kgcm.}$$

Ponieważ moment przechylny okazuje się większy niż moment równoważny, przeto tylną część przęsła obciążamy przeciwwagą. Zakładając, że wypadkowa przeciwwagi będzie odległa o 1 m od teoretycznego punktu opory i że stosunek pomiędzy momentami równoważnym i przechylnym będzie:

$$\frac{M_1}{M} = 1,1,$$

określmy wielkość przeciwwagi  $G$  z równania:

$$G \cdot 2600 + 52233000 \cdot 2 = 54923000 \cdot 2 \quad 1,1$$

$$G = \frac{2(54923000 \cdot 1,10 - 52233000)}{2600} \approx 6300 \text{ kg.}$$



*Βελικα μοσχογυα*

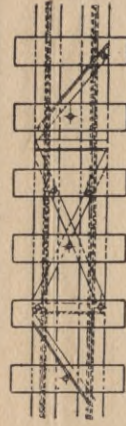
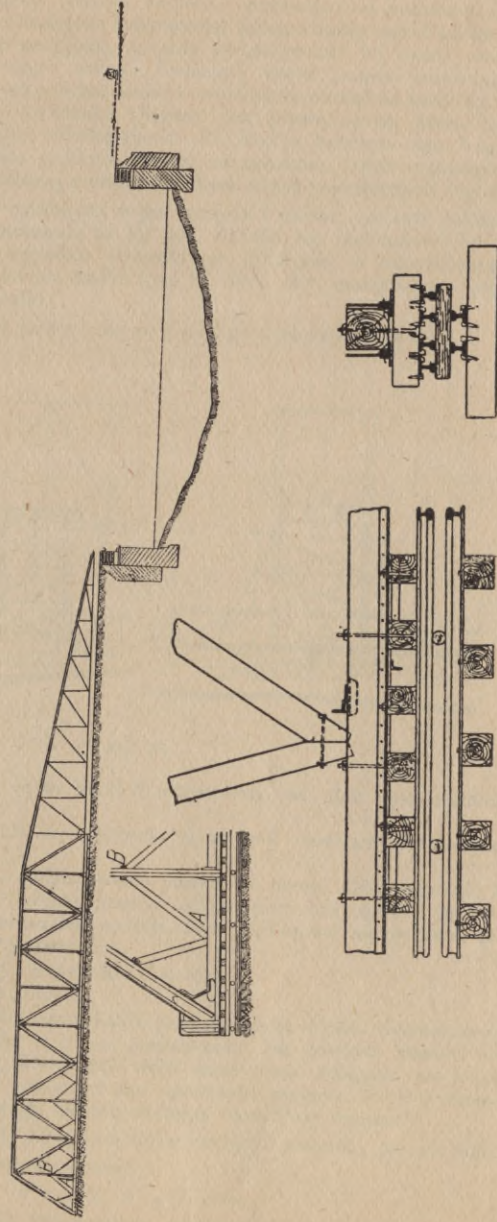


Fig. 503.

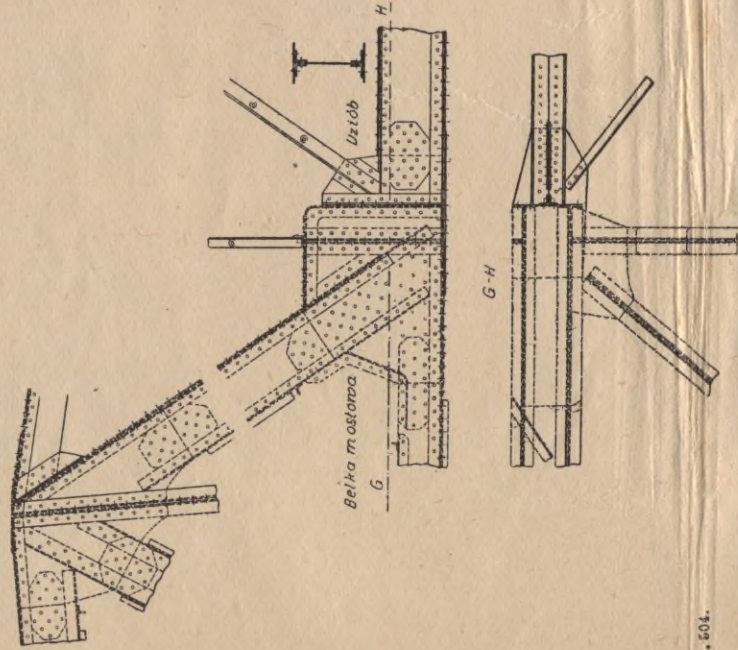
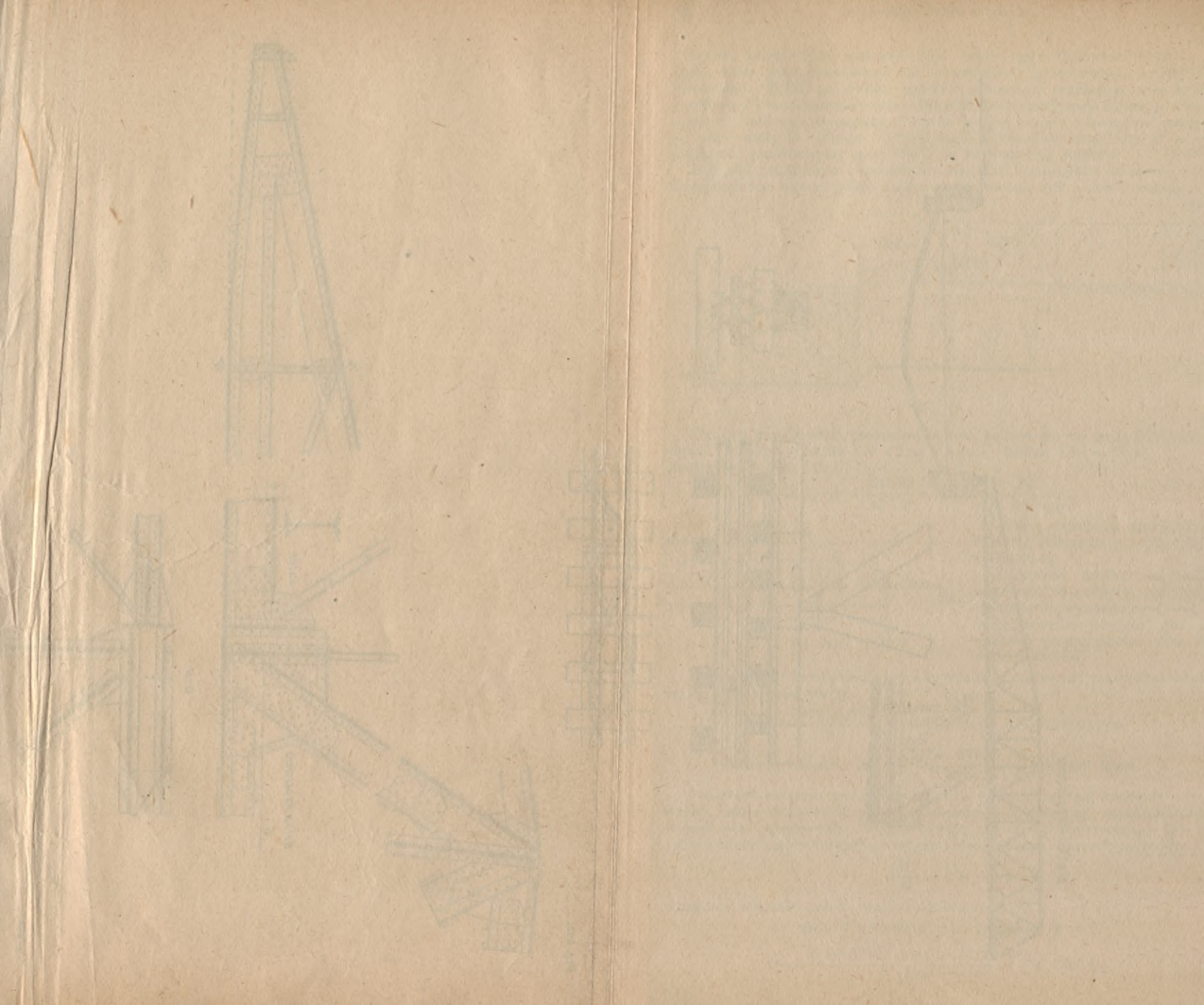


Fig. 504.



Napężenia w prętach dzióba i zwisającej części przęsła wyznacza się wykreślnie dla różnych położen zespołu, poczynając od położenia, oznaczonego na fig. 502, a następnie umieszczając kolejno każdy węzeł dzióba nad prawą oporą *B*, przy przyjęciu, że całe oddziaływanie tej opory przenosi się zapomocą pierwszego wálka. Zwisającą część przęsła sprawdza się również dla tych samych położen dzióba i ewentualnie wzmacnia wedle fig. 503. Ponieważ pas dolny awanboku zginany jest prawą oporą, przeto trzeba określić wielkość tego oddziaływania dla środka każdego pola i sprawdzić każdą część pasa dolnego również na zginanie. Dziób wykonuje się jako belkę kratową żelazną z uwzględnieniem steżeń poprzecznych (fig. 504).

Wielkość ugięcia wystającej części przęsła i dzióba, podczas położenia, odpowiadającego pokazanemu na fig. 502, określa się rachunkowo lub wykreślnie. W danym wypadku wynosiło ono 37,3 mm; o odpowiednią też wielkość podniesiono koniec dzióba (por. fig. 504), aby, dosięgnąwszy prawej opory, oparł się na wálki.

c) Przesuwanie przy pomocy podpór pływających.

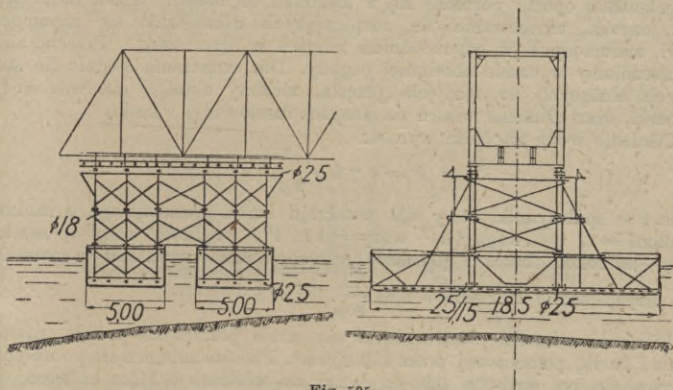


Fig. 505.

Podpory pływające są to barki z ustawionymi na nich rusztowaniami (fig. 505).

Największe zanurzenie się podpory pływającej określamy w następnym sposób:

Niech oznacza: *A* — oddziaływanie przęsła na oporę. Oddziaływanie to jest większe, niż waga połowy przęsła, gdyż opory nie ustawia się pod końcem przęsła, lecz koniec ten wystaje, aby mógł oprzeć się na filarze lub przyczółku przy końcu przesunięcia.

*G* — waga rusztowań, przyrządów i barek.

*Q* — waga balastu wodnego.

Balast wodny służy dla wyrównania poziomu barki w razie ewentualnego opadnięcia poziomu rzeki w czasie przesuwania, jak również stanowi on tę konieczną ilość wody, której już węże ssące pomp ściągnąć nie mogą (średnio 0,25 m). Jeżeli przewidywane opadnięcie poziomu wody w czasie przesuwania jest *h*, to waga balastu wodnego określi się wzorem:

$$Q = F(h + 0,25) \gamma_w = 0,71 b(h + 0,25) \text{ (w tonnach i metrach; por. str. 800).}$$

Siła nośna barki powinna wynosić:

$$P = 1,25 (A + G + Q),$$

gdzie 1,25 — współczynnik zwiększający, wprowadzony na nieprzewidziane ewentualności.

Wobec powyższego największe zanurzenie się barek określi się ze wzoru:

$$z = \frac{P}{F} = \frac{P}{0,7 \cdot l \cdot b} \text{ (w metrach).}$$

gdzie  $l$  — długość barki,  $b$  — szerokość w metrach.

Konstrukcję opór pływających pokazano na fig. 505. Ażeby uchronić ścianki barek od odkształceń, spowodowanych ciśnieniem wody, wzmacnia się je zapomocą zastrzałów (por. str. 800). Czasami cały spód rusztowania, opierający się bezpośrednio o dno i ścianki barek, buduje się dla większej sztywności w formie dźwigara drewnianego. Na tym dźwigarze wspiera się dopiero właściwe rusztowanie.

Zazwyczaj ciągnie się bezpośrednio przęsło przy pomocy lin, nawijających się na bębny dźwigarek, ustawionych na podporze lub poza nią. Ażeby zaś barki w czasie przesuwania zdążyły za niem, przytwierdza się je do przęsła z obu stron linami. Dla uchronienia opory pływającej od zniesienia jej prądem rzeki lub zepchnięcia przez wiatr, rozpiną się z obu stron stalowe liny, utwierdzone na obu brzegach, tak jednakże, ażeby to rozpięcie nie przeszkadzało oporze poruszać się w kierunku osi mostu. Jeżeli rzeka jest zbyt szeroka, umocowanie lin rozpinających uskutecznia się zapomocą kotwi, zanurzonych w odpowiedniemu miejscu w dno rzeki. Przeciąganie uskuteczniamy w czasie absolutnej pogody. Dla oznaczenia średnic lin stalowych, służących do rozpięcia przęsła, musimy określić ciśnienie wody na barki, oraz ciśnienie wiatru na przęsło, rusztowanie i barki.

Ciśnienie wody na barki wynosi:

$$P = \varphi \gamma b h \frac{v^2}{2g},$$

gdzie  $\varphi$  — współczynnik, który dla przekroju barek prostokątnego z zaokrągleniami = 1,  $\gamma$  — waga  $1 m^3$  wody =  $1 t$ ,  $V$  — prędkość wody w  $m/sec.$ ,  $b$  i  $h$  — szerokość barek i głębokość ich zanurzenia, wyrażona w metrach,  $g$  — przyspieszenie ziemskie =  $9,81 \frac{m}{sek}$ .

Wielkość ciśnienia wiatru równa się sumie płaszczyzn przęsła, rusztowania i barek, pomnożonej przez  $250 kg/cm^2$ . Przesuwanie przęsła po nasypie odbywa się na wózkach lub co lepiej na wózkach o kilku kółkach, toczących się po kilku szynach.

Istnieją trzy sposoby przesuwania przy pomocy podpór pływających.

1. Przęsło, zmontowane na nasypie lub na rusztowaniu stojącym na brzegu w kierunku osi mostu, nasuwa się jednym końcem na oporę pływającą. Wspierając się na niej, zostaje ono przeciągnięte do następnego przyczółka lub filaru.

Tok roboty przy przesuwanu przęsła: Przęsło, zmontowane na nasypie, wysuwa się poza przyczółek tak daleko, aby zmieściła się pod nim podpora pływająca, w którą napompowuje się wody tak dużo, aby podplynęła pod wystający koniec mostu. Następnie część wody wypompowuje się, aż podpora uniesie koniec przęsła, poczem następuje przesuwanie. Po przybyciu do filara lub przyczółka woda napompowuje się do barek, aż przęsło opuści się na łożyska. Podpora pływająca podplywa pod drugi koniec przęsła i znowuż tym samym sposobem, służąc zamiast dźwigów, opuszcza przęsło na łożyska. Jeżeli przęsło ma być przeniesione do następnego otworu, to, po osiągnięciu filara przez koniec przęsła, druga podpora ruchoma podplywa pod koniec przęsła od strony przyczółka i unosi je. Przęsło przeciąga się dalej po filarze, aż do położenia, w którym analogicznie do początku operacji, podpora pływająca pierwsza, opłynawszy filar, będzie mogła dźwignąć przęsło, aby je poprowadzić dalej, jak w otworze pierwszym.

Przesuwanie podłużne zapomocą opór pływających posiada następujące wady: położenie środka ciężkości wysoko nad poziomem wody daje wielki

moment wywrotowy, ustawienie zaś przęsła jednym końcem na oporze stałej, a drugim na ruchomej, zależnej od falowania, parcia wiatru, wody itp. nie daje bezwzględnej gwarancji przed odkształceniem prętów przęsła, a nawet przed zsunieniem się przęsła z opory pływającej.

2. Drugim sposobem zastosowania podpór pływających jest nadwożenie przęsła na oporach pływających. W miejscu najodpowiedniejszym przy brzegu rzeki buduje się rusztowanie do wysokości, odpowiadającej położeniu przęsła na przyczółkach. Od rusztowania tego, prostopadle do jego kierunku, buduje się dwa występy tej samej wysokości, na których układa się tor do nasuwania poprzecznego przęsła. Przęsła montuje się na rusztowaniu, a po ukończeniu, przesuwa się je na występy; na rusztowaniu zaś montuje się przęsła następujące. W otwór pomiędzy występami wprowadza się pod zmontowane przęsło odpowiednie podpory pływające, podnosi się na nich przęsło i podczas zupełnej pogody, korzystając z parostatków, jako siły pociągowej, przewozi się je na właściwe miejsce. Zaletami tego sposobu w porównaniu z uprzednim jest to, że przęsło, opierając się z obu stron na podporach pływających, nawet gdyby było zniesione prądem lub parciem wiatru, nie jest narażone na przewrócenie. Ważną również zaletą tego sposobu jest to, że może on być zastosowany do przewozu przęsła, mających

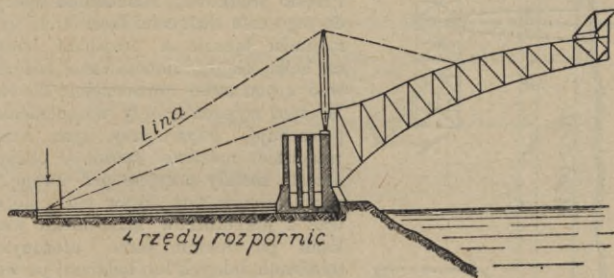


Fig. 506.

pas dolny wypukły lub wklęsły. Jednakże ujemna cecha zastosowania opór pływających, mianowicie wielki moment wywrotowy, występuje i tutaj w całej rozciągłości.

3. Czasami, gdy niema możliwości postawienia rusztowania w otworze, ale zato można je postawić przy brzegu, stosuje się sposób trzeci, polegający na tem, że przęsło, zmontowane wzdłuż brzegu na rusztowaniach, jednym końcem spoczywa na przyczółku, a drugim na oporze pływającej. Po ukończeniu montażu, przy zastosowaniu odpowiednich urządzeń mechanicznych na przyczółku następuje nasunięcie przęsła w otwór, przyczem podpora pływająca zatacza łuk  $90^\circ$ , a koniec na oporze obraca się około własnej osi.

Montaż bez rusztowań stosujemy, gdy rusztowania są niemożliwe lub byłyby zbyt drogie z powodu bardzo wysokich brzegów, bardzo głębokiej i bystrej wody, skalistego dna itp. Zasada jego polega na wykorzystaniu właściwości belki jednym końcem utwierdzonej lub wystającej (przewieszanej).

Montaż zaczyna się od opory i polega na ciągłym dodawaniu nowych, odpowiednio skonstruowanych części, ku środkowi przęsła, zwykle z obu stron jednocześnie przy pomocy specjalnych żórawi. Montaż przęsła belkowych i łukowych rozpoczyna się umocowaniem narożnika (słupa lub skosu oporowego, na górze i na dole do jakichś solidnych punktów stałych, np. do istniejącego już przęsła, przyczółka itp.; fig. 506). Ponieważ pręty obliczone były dla ustroju inaczej pracującego, niż to ma miejsce podczas mon-

tażu, przeto niekiedy wypada je wzmocnić. Do tego typu montażu nadają się najbardziej mosty wspornikowe w swych częściach wystających, ponieważ otrzymują w czasie montażu naprężenia analogiczne do tych, na jakie były obliczone, a przeważnie mniejsze (gdyż w czasie montażu niema na moście obciążenia ruchomego). Najczęściej przesła przybrzeżne tych mostów montuje się na rusztowaniach, a wsporniki — bez rusztowań. Przesła środkowe wiszące wciąga się z dołu jako już zmontowane lub też montuje się je bez rusztowań, jak przesła belkowe.

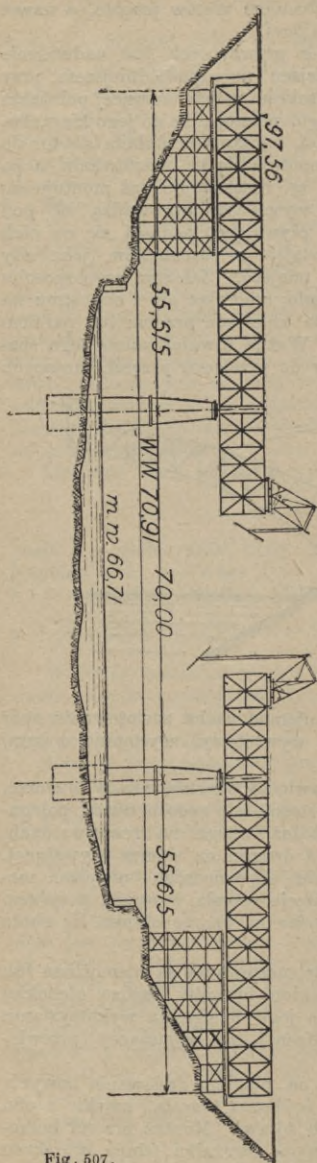


Fig. 507.

tykających się, były pionowe. Milimetrowe różnice łatwo było zregulować, ustawivszy na filarach dźwigi hydrauliczne na walkach, skierowanych

poprzecznie, a to w tym celu, ażeby doprowadzić końce do zetknięcia się na wypadek, gdyby okazała się różnica w płaszczyźnie poprzecznej. Rzeczywistość potwierdziła obliczenia w zupełności.

Do tego samego rezultatu dojść byłoby można opuszczając końce przybrzeżne przesła, tak aby otrzymać pomiędzy pasem dolnym a linią poziomą kąt  $\varphi$ . Można było również podnieść, opuszczony na strzałkę ugięcia, koniec wspornikowo wystającej części przesła zmontowanego poziomo zapomocą lin stalowych, przerzuconych przez pylon, ustawiony nad filarem, i zamocowanych do przesła przybrzeżnego. Zapomocą skrócenia mechanicznego tych lin możnaby doprowadzić słup środkowy do położenia pionowego.

Montaż przesła o rozpiętości  $69 + 57 + 69$  m, wagą około 750 t, trwał 34 dni.

### LITERATURA.

- Pszenicki A.: O montowaniu mostu na Niemnie pod Grodnem. Przegl. Techn. 1923 r.  
 Ciszewski J.: Montaż i spławianie dźwigarów wielkiej rozpiętości. Przegl. Techn. 1924 r.  
 Ciszewski J.: Odbudowa mostu na Wiśle we Włocławku. Przegl. Techniczny. 1924 r.  
 Chróścielewski A.: Przesunięcie podłużne i poprzeczne mostu na Bugu. Przegląd Techniczny. 1921 r.  
 Chróścielewski A.: Montaż prowizorium mostowego mostu Poniatowskiego w Warszawie. Przegląd Techniczny. 1924 r.  
 Schmidt Michel: Montages des ponts et charpentes, Mémoires de la Soc. d. Ing. Civ. 1900 r.  
 Erection of Bridges. (The Railway Engineering: 1905, Dec.; 1906, Nov.; 1907, Apr., June, Aug., Oct., Nov.; 1908, Jan., Mar., May, Aug., Dec.).  
 Hdb. der Ing.-Wiss.: Der Brückenbau. VI. Abt. 1903 r.  
 Bernhard K.: Eiserne Brücken. 1911 r.  
 Schönhöfer R.: Die Haupt-, Neben- und Hilfsgerüste im Brückenbau. 1911 r.  
 Kirchner: Rüstungsbau. 1925.  
 Prokofiew J.: Żelaznyje mosty. 1911 r.  
 Paton O. E.: Żelaznyje mosty. 1910 r.

## Wzmacnianie mostów żelaznych.

Napisał

inż. Aureljusz Chróścielewski,

Mińsk Mazowiecki.

Mosty istniejące wzmacnia się, gdy stają się za słabe z uwagi na zwiększające się z czasem obciążenia. Wedle przepisów M. R. P. potrzebne jest wzmocnienie tych części mostu, których naprężenia wskutek zmiany obciążeń przewyższą o 20% granicę dopuszczalną. Ta sama przewyżka przyjęta jest w Niemczech i Rosji; we Francji natomiast 33%. Dla M. K. wzmacnia się przesła, obliczając je na normy A, B lub C, przy naprężeniach dopuszczalnych podług warunków z 1923 r.

Zaznaczyć należy, że wzmacnianie mostów wogóle nie jest pożądane; praca materiału nie będzie się bowiem odbywała w tych samych warunkach; lepiej jest nawet nieco przekroczyć naprężenia dopuszczalne. Niemniej wzmacnianie stosowane bywa dość często, tem bardziej dziś, gdy warunki finansowe uniemożliwiają wymianę mostów na większą skalę.

Ogólne warunki wzmacniania mostów. Przystępując do wzmacniania mostu, trzeba wypróbować materiał przesła. Dla tego celu należy wziąć próbki z prętów najbardziej pracujących i zbadać je, czy pod wpływem drgań i naprężeń, przechodzących czasami poza granicę sprężystości, materiał nie uległ częściowej krystalizacji, wskutek której wytrzymałość i spręży-

stość jego mogły spaść poniżej granic dopuszczalnych. Zależnie od otrzymanych rezultatów rozstrzyga się, czy należy stare przęsło zastąpić nowem (jeżeli żelazo okazało się nieodpowiednie), czy należy most wzmocnić, czy też można most pozostawić bez wzmocnienia (o ile naprężenia nie przekroczyły dopuszczalnych o 20% i o ile żelazo jest zadowolające, a stan ogólny przęsła nie wykazuje wadliwości.)

Przyjmując, że (średnio) cena kilograma żelaza, służącego do wzmocnienia jest dwukrotnie wyższa od ceny *kg* konstrukcji nowej, uwzględniając

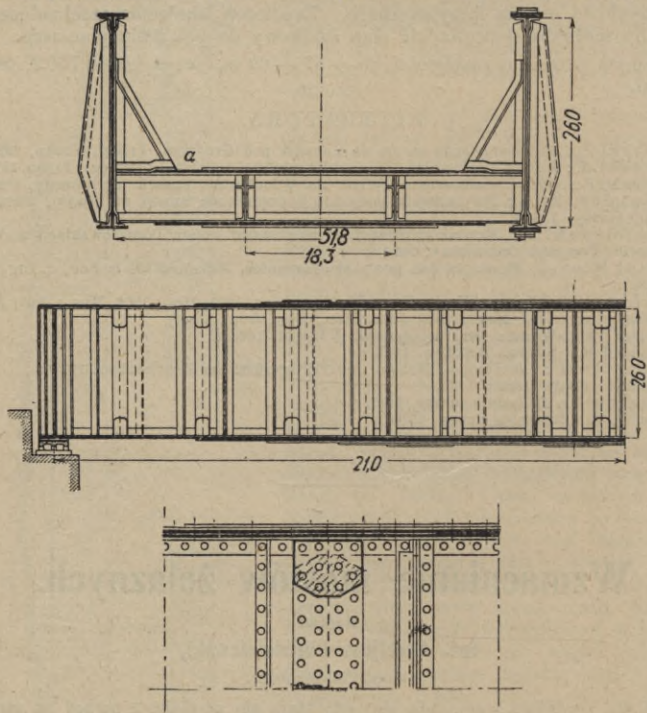


Fig. 508.

nadto, że moc, trwałość itd. są niższe w moście wzmocnianym niż w moście nowym, dochodzi się do wniosku, że wzmocnienie opłaca się, gdy ilość żelaza potrzebnego na nie, nie przekracza 30% wagi przęsła nowego.

Sposoby wzmocniania mostów są następujące:

- a) wzmocnianie, bezpośrednie, czyli wzmocnianie prętów przęsła za pomocą zwiększania ich przekrojów przez przynitowywanie materiału nowego;
- b) wzmocnianie pośrednie, czyli dodanie nowych części ustroju, zmieniających przeważnie system dźwigara pod względem statycznym;
- c) powiększenie liczby dźwigarów w celu odciążenia pracujących;
- d) dodanie w tymże celu dodatkowych filarów.

Wybór jednego z wyżej podanych sposobów wzmocnienia zależy od warunków ekonomicznych, konstrukcyjnych, estetycznych itp.

a) Wzmocnianie bezpośrednie. Powiększenie przekroju skutecznia się zwykle przy pomocy żelaza, czasem jednak przy pomocy innych ma-



terjałów. (Zamiana pręseł żelaznych na żelbetowe przez okrażenie ustroju żelaznego warstwą betonu, czasami nawet z dodaniem uzbrojenia żelaznego, gdzie tego zajdzie potrzeba, oraz, niewłaściwe zresztą, wzmacnianie dźwigarów żelaznych drzewem.)

Wzmocnienie podłużnic, poprzecznie, oraz dźwigarów blaszanych i kratowych odbywa się przez przynitowywanie nowych nakładek (najczęściej!), kątowników, przykładek, lub wymiany istniejących na mocniejsze.

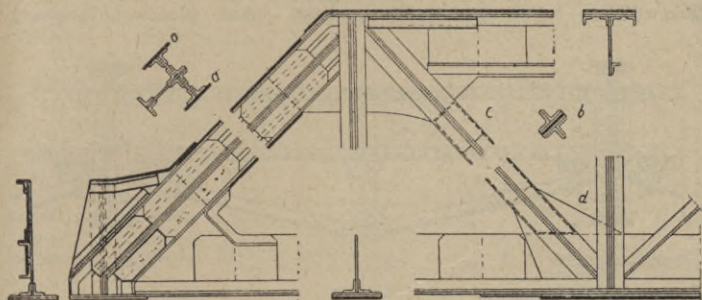


Fig. 509.

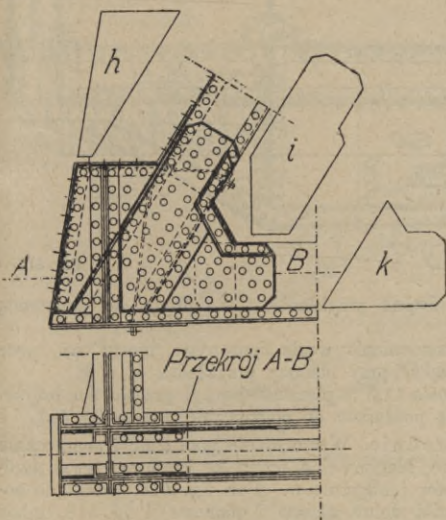


Fig. 510.

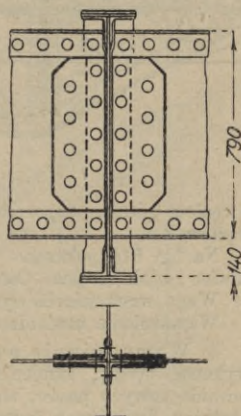


Fig. 511.

Fig. 508 przedstawia wzmocnienie wiaduktu nad szosą Pabjanicką w Łodzi. Poprzecznie wzmocniono tu, dodając do każdego pasa jedną długą nakładkę, oraz przytwierdzając blachę kątową do poprzecznicy dwoma kątownikami *a* w miejsce dotychczasowego jednego. Blachownice belek głównych wzmocniono dwiema długimi nowymi nakładkami w każdym pasie, przenosząc dawne nakładki jako krótsze powyżej dodanych. Wreszcie, ponieważ naprężenie na zgniatanie ścianek dla nitów przekroczyło naprężenie dopuszczalne, przeto u dołu i u góry łącznika dodano przykładki, wprowadzając

z każdej strony złącza w grę jeszcze po dwa nity, leżące na kątownikach głównych.

Fig. 509 przedstawia szczegóły wzmocnienia mostu pod Siedlcami na szlaku Warszawa—Brześć. Pas górny kratownicy został wzmocniony w polach drugim i trzecim jedną, a w czwartym i piątym dwiema nakładkami, pas dolny jedną nakładką.

Ściskany krzyżulec pierwszy wzmocniony został symetrycznie dwiema nakładkami *a* (na wyboczeniu). Rozciągany krzyżulec drugi wzmocniono płaskownikiem *b*, równym co do grubości blasze pionowej, łącząc go

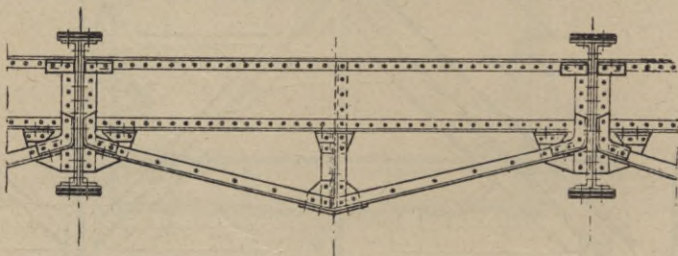


Fig. 512.

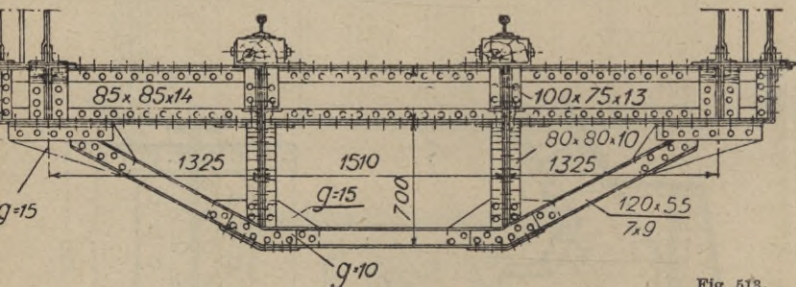


Fig. 513.

z węzłem górnym zapomocą dwóch przyładek *c*, z dolnym zaś zapomocą węzłówek *d*.

Na fig. 510 pokazano wzmocnienie węzła oporowego mostu na rzece Liwiec (szlak Siedlce—Ostrołęka) przy pomocy przyładek *h*, *i*, *k*.

Waga wzmocnienia wyniosła 11,5% pierwotnej wagi prześła bez łożysk.

Wzmocnienie utwierdzenia podłużnic do poprzecznicy podaje fig. 511.

*b*) Wzmacnianie pośrednie. Wzmocnienie podłużnic i poprzecznicy wykonać można, zamieniając blachownicę na belkę kratową przez nantowanie nowych pasów, słupów i krzyżuleców. Por. fig. 512, gdzie do podłużnicy donitowano kątowniki dolne ukośne i pionowe) i fig. 513, gdzie podobnie (wzmocniono poprzecznicy, zamieniając ją na belkę wzmocnioną.

Belki kratowe wzmacnia się przez dodanie lub zmianę ustroju belki. Np. most na rzece Leśna na linii Brześć—Czeremcha projektowano wzmocnić, dodając do istniejącej kratownicy konstrukcję łukową (*e*) obejmującą obustronnie starą (*a*, *b*) konstrukcję (fig. 514), co dało się uskutecznić dzięki znacznej szerokości mostu. Częściej daje się wykonać wzmocnienie także na lub pod dźwigarem kratowym. (Fig. 515, wzmocnienie mostu na kolei Gottwardzkiej i fig. 516, wzmocnienie mostu na kolei Budapeszt—Żelazna Brama.)

Wzmocnienie pośrednie pozwala w większej mierze wykończyć wszystkie dodawane części w warsztatach, a robotę wykonać bez przerwy ruchu;

ponieważ jednak wzmacnianie bezpośrednie jest przeważnie ekonomiczniejsze pod względem ilości żelaza, potrzebnego na wzmocnienie, przeto dziś u nas stosuje się je najczęściej, a wzmacnianie pośrednie stosujemy, gdy przeszło sposobem bezpośrednim wzmocnić się dobrze nie da.

*c*) Wzmacnianie przeseł zapomocą dodawania dźwigarów, i *d*) Wzmacnianie przeseł zapomocą dodawania filarów w środku rozpiętości: Sposoby te używane są stosunkowo bardzo rzadko.

**Wykonanie wzmocnienia i próba mostu.** Przed wykonaniem wzmocnienia którymkolwiek sposobem należy obciążyć je (jeżeli przeszło nie jest uszkodzone) obciążeniem ruchomym, odpowiadającym przyjętemu w obliczeniu statycznym, zmierzyć ugięcie elastyczne, wychylenie (amplitude)

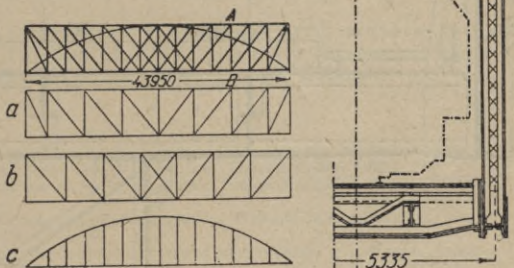


Fig. 514.

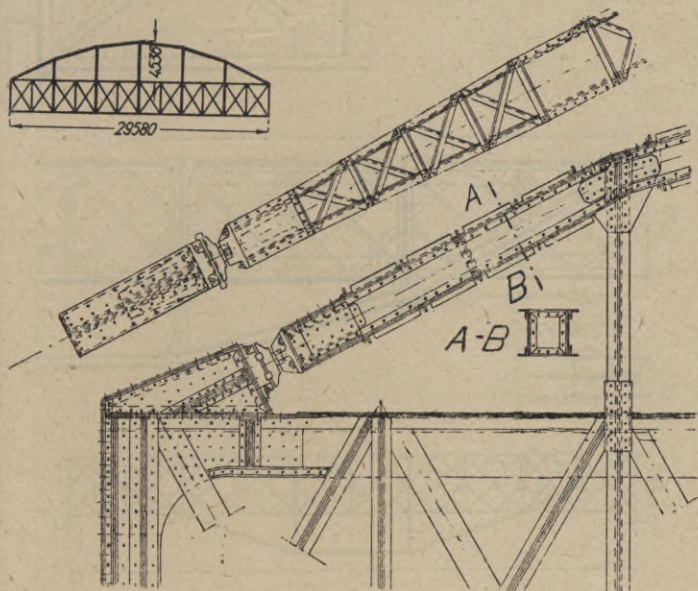


Fig. 515.

wahań poprzecznych, oraz zmierzyć naprężenia w prętach zapomocą aparatów Fränkla, Manet-Rabut'a, Balke'go lub innych.

Jeżeli wzmacnianie odbywa się sposobem bezpośrednim, to musimy przeszło podeprzeć w węzłach i zapomocą dźwigów lub klinów wypchnąć w nich strzałkę, odpowiadającą wielkości ugięcia od wagi własnej w danym

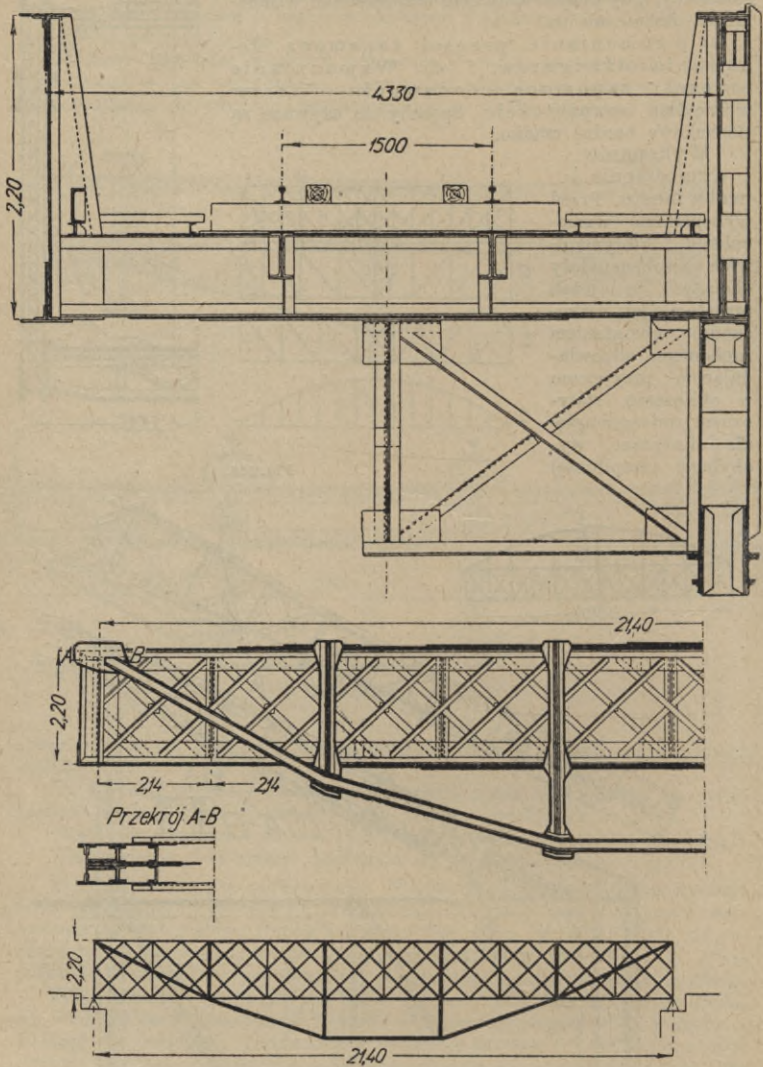


Fig. 516.

węzle. W tem położeniu przeszła przystąpić należy do wycinania nitów i przymocowywania dodawanych części przekroju, tak, aby nowy materiał przyjął odpowiedni udział w pracy przeszła, także od wagi własnej.

Jeżeli przesło nie jest uszkodzone, wzmacnianie powinno się zacząć od dźwigarów, aby nie obciążać wagą dodanego do jezdni żelaza i tak już za słabych dźwigarów.

Jeżeli wzmacnienie przez powiększenie przekrojów uskutecznia się bez przerwy w ruchu, to podparcie w węzłach po każdym przejściu pociągu może zmienić poziom i trzeba je regulować.

Po wykonaniu wzmacnienia i oswobodzeniu przesła od rusztowań należy powtórnie obciążyć przesło, i poddać je analogicznym pomiarom.

Ugięcie sprężyste, wychylenie (amplituda) wahań poprzecznych i naprężenia w prętach, mierzone zapomocą przyrządów, powinny być mniejsze niż przed wzmacnieniem i z pewną tolerancją równać się naprężeniom obliczonym teoretycznie.

Wzmacnianie i naprawianie uszkodzonych mostów przy pomocy spawania łukiem elektrycznym zaczęto stosować w ostatnich czasach, zwłaszcza przy francuskich mostach żeliwnych (por. niżej Literatura).

### LITERATURA.

- Chróścielewski: Wzmacnianie mostów żelaznych. Czasop. techn. 1922.  
 Bryła: Spawanie elektryczne żelaza w budownictwie i mostownictwie. Przegląd Techn. 1927.  
 „Bulletin de l'association du congrés international des chemins de fer“ Nr. 8—10, 1909 r. i Nr. 1, 2, 3, 5, 6, 8. 1910 r.  
 Boulongue: Réparation et renforcement du viaduc sur le Rhône à la Voulte. Annales des Ponts et Chaussées. 1924.  
 Boulongue: Réparation par soudure à l'arc électrique. Annales des Ponts et Chaussées. 1925.  
 Renaut: Nouveau procédé de construction et de renforcement des ponts métalliques. Paris 1926.  
 Bernhard: Eiserne Brücken. 1911 r.









# CZĘŚĆ SZÓSTA

## STATYKA BUDOWLI

---

### TREŚĆ

Mechanika ogólna. Napisał inż. dr. Maksymiljan T. Huber, profesor politechniki, Warszawa

I. Kinematyka (Geometria ruchu) . . . . .	1009
II. Dynamika ogólna . . . . .	1018
III. Statyka . . . . .	1047
IV. Kinetyka . . . . .	1066

Sprężystość i wytrzymałość. Napisał inż. dr. Maksymiljan T. Huber, prof. politechniki, Warszawa

I. Część ogólna . . . . .	1079
II. Rozciąganie i ściskanie . . . . .	1105
III. Ścinanie i skręcanie . . . . .	1111
IV. Zginanie . . . . .	1116
V. Praca odkształcenia . . . . .	1141
VI. Pręty zakrzywione . . . . .	1150
VII. Płyty . . . . .	1153
VIII. Wyboczenie . . . . .	1166
IX. Ważniejsze złożone przypadki zgięcia i wyboczenia . . . . .	1174

Statyka budowli. Napisali: inż. dr. Jan Bogucki, profesor politechniki, Lwów; inż. dr. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów; inż. Stefan Pazirski, Lwów; inż. dr. Maksymiljan Thullie, profesor politechniki, Lwów

I. Belki statycznie wyznaczalne o ściance pełnej (Bryła) . . . . .	1185
II. Kratownice statycznie wyznaczalne (izostatyczne), Bryła . . . . .	1210
III. Kratownice przestrzenne (Bryła) . . . . .	1232
IV. Przesunięcia kratownic (Bryła) . . . . .	1238
V. Naprężenia drugorzędne w belkach kratowych (Bryła) . . . . .	1249
VI. Ustroje hiperstatyczne (Bryła, Pazirski, Thullie) . . . . .	1256
VII. Budowle ziemne i mury oporowe (Bogucki) . . . . .	1323
VIII. Teoria żelbetu (Thullie) . . . . .	1332
Tablice . . . . .	1379
Przepisy dotyczące obliczeń statycznych w budownictwie lądowym . . . . .	1433



# Mechanika ogólna.

Napisał

dr. inż. Maksymiljan T. Huber,

profesor politechniki, Lwów.

## I. Kinematyka (Geometria ruchu).

### A. Ruch punktu.

1. Wstępne określenie. Mówimy, że punkt  $M$  (lub wogóle ciało  $C$ ) się porusza, jeżeli z upływem czasu  $t$  zmienia swoje położenie w przestrzeni geometrycznej, określonej danym układem odniesienia. Tym układem jest zwykle ład stały naszej ziemi; niekiedy zaś inny układ, praktycznie niezmienny i poruszający się względem ziemi, jak np. pokład statku, klatka windy, rama lokomotywy itp. Jakikolwiek układ odniesienia da się zastąpić układem trzech osi spólrzędnych, zwykle prostokątnym. Położenie punktu  $M$  określają wtedy jego spólrzędne prostokątne  $x, y, z$ , albo promień — wektor  $\vec{r}$ , łączący początek układu  $O$  z punktem  $M$  ( $\vec{r} = \overline{OM}$ ), albo spólrzędne biegunowe itp.

Względne położenie dwu punktów  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  wyznacza wektor  $\vec{w} = \overline{M_1 M_2}$  niezależnie od obranego układu osi spólrzędnych. Symbol  $\vec{w}$  zastępuje trzy rzuty  $w_x = x_2 - x_1$ ,  $w_y = y_2 - y_1$ ,  $w_z = z_2 - z_1$  zorientowanego w przestrzeni odcinka  $\overline{M_1 M_2}$ , co wyrażamy równaniem określającym:

$$\vec{w} \equiv \{w_x, w_y, w_z\}.$$

Jeżeli rozpatrywane położenia punktu  $M$  leżą na jednej płaszczyźnie, to obierając ją za płaszczyznę  $XY$  prostokątnego układu spólrzędnych, określamy wektor  $\overline{M_1 M_2} = \vec{w}$  dwoma rzutami  $w_x, w_y$  (fig. 1); czyli:

$$\vec{w} \equiv \{w_x, w_y\} \equiv \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}.$$

Podobnie widzimy z fig. 1, że

$$\vec{r}_1 \equiv \{x_1, y_1\}, \quad \vec{r}_2 \equiv \{x_2, y_2\}.$$

Pomiędzy  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  i  $\vec{w}$  zachodzi przeto związek, który wyrażamy równaniem wektorowym

$$\vec{w} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

w ogólnym przypadku wyrażającym zwięźle to samo, co trzy równania algebraiczne

$$w_x = x_2 - x_1, \quad w_y = y_2 - y_1, \quad w_z = z_2 - z_1.$$

(W tym przypadku można pojmować fig. 1 jako rzut utworu trójwymiarowego na płaszczyznę  $XY$ , obraną za płaszczyznę rysunku.)

2. Niektóre pomocnicze pojęcia rachunku wektorowego. W mechanice mamy do czynienia z różnymi wielkościami (prędkość, przyspieszenie, siła itd.), mającymi te same cechy matematyczne, co zorientowany odcinek  $\overline{M_1 M_2} = \vec{w}$ , czyli mającymi charakter wektora. Cechami temi są

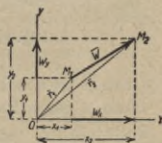


Fig. 1.

1. wartość bezwzględna, określona liczbą mianowaną, 2. kierunek, określony prostą w przestrzeni i 3. znak albo zwrot (kierunku), oznaczony strzałką odróżniająca zarazem początek od końca wektora. Dany wektor może mieć znaczenie mechaniczne niezależne od umieszczenia początku wektora w przestrzeni (wektory swobodne), albo niezależne od umieszczenia początku wektora na jego prostej (wektory nieswobodne, związane z prostą), albo wreszcie może być związany ze swym punktem początkowym (wektor nieswobodny, związany z punktem).

Dla wszystkich tych wektorów określa się w ten sam sposób operacje dodawania, odejmowania i mnożenia, które są uogólnieniem tak samo nazwanych operacji wielkościami algebraicznymi.

Tutaj określimy narazie tylko dodawanie i odejmowanie dwu wektorów.

$$\bar{a} \equiv \{a_x, a_y, a_z\} \quad \text{i} \quad \bar{b} \equiv \{b_x, b_y, b_z\}$$

zapomocą schematu:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}.$$

Wektor  $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b}$  nazywa się (geometryczną) sumą, wektor  $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$  (geom.) różnicą wektorów  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$  (fig. 2). Symbol  $-\bar{a}$  oznacza wektor przedstawiony tym samym odcinkiem, co wektor  $\bar{a}$ , lecz opatrzonym strzałką przeciwną (fig. 3).

(Geometryczna) suma  $\bar{s}$  ilu kolwiek wektorów (fig. 4)  $\bar{w}_1 = \overline{A_1 B_1}$ ,  $\bar{w}_2 = \overline{A_2 B_2}$ , . . . ,  $\bar{w}_n = \overline{A_n B_n}$  jest określona równaniem:

$$\bar{s} = \Sigma \bar{w} \equiv \{\Sigma w_x, \Sigma w_y, \Sigma w_z\}.$$

Wykreślnie otrzymujemy tę sumę, łącząc wektory-dodajniki (w dowolnym porządku) tak, aby koniec poprzedniego dodajnika był początkiem następnego



Fig. 2.



Fig. 3.

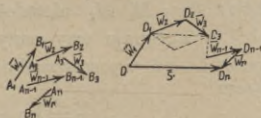


Fig. 4.

(wielobok wektorów). Wektor, który łączy początek utworzonego wieloboku z jego końcem i tworzy bok zamykający wieloboku wektorów-dodajników, przedstawia sumę  $\bar{s} = \overline{CD_n}$ , zwaną niekiedy wektorem wypadkowym układu  $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$ .

Uwagi. Suma geometryczna podlega (tak samo jak algebraiczna) prawom przemienności ( $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ ) i łączności [ $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = (\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})$  itd.].

Niektórzy autorowie uwydatniają operacje wektorami zapomocą odmiennych znaków dodawania i odejmowania. Ten sposób można usprawiedliwić jedynie względami dydaktycznymi, gdyż kładąc znak + między dwoma wektorami, zaznaczamy tem samym powyżej określone (geometryczne) dodawanie wektorów. Dodawanie zaś ich bezwzględnych wartości przedstawiamy przez  $a + b$ , albo  $|\bar{a}| + |\bar{b}|$ .

**3. Różne sposoby przedstawienia ruchu punktu.** Najpierw nasuwa się sposób nomograficzny. W nim dana jest wykreślnie linja, którą opisuje punkt podczas ruchu, zwana torem punktu. Na torze tym (płaskim lub przestrzennym) oznaczamy przez  $O$  punkt początkowy, w którym poruszający się punkt znajdował się w chwili początkowej, a następnie oznaczamy liczbą 1, 2, 3 itd. miejsca zajęte przez ten punkt po jednej, dwu, trzech... sekundach (minutach, godzinach itd., zależnie od dokła-

ności, z jaką ruch przedstawić chcemy i od wielkości przedziału czasu potrzebnego do opisania całego toru). Zamiast tego można na torze odmierzyć od punktu początkowego jedną, dwie, trzy...  $n$  jednostek długości i otrzymane w ten sposób miejsca oznaczyć liczbami określającymi chwilę  $t$ , w której się tam punkt znajdował.

Te oznaczania liczbami punktów na torze zastępuje z pewną korzyścią równanie

$$s = f(t),$$

zwane równaniem ruchu. Tutaj oznacza  $s$  drogę, tj. długość toru mierzona od punktu początkowego do miejsca zajętego przez punkt w chwili  $t$ . Przedstawiając funkcję  $f(t)$  obrazem geometrycznym (fig. 5) mamy t. zw. wykres drogi.

Dwa rysunki, tj. wykres toru (przedstawiony w ogólnym przypadku rzutami prostokątnymi na dwie płaszczyzny) i wykres drogi daje zupełny wykresalny obraz ruchu punktu.

Matematycznie określa się ruch punktu zwykle trzema równaniami

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

przedstawiającymi współrzędne prostokątne poruszającego się punktu, albo też równoważnym z nimi jednym równaniem wektorowym

$$\vec{r} = \vec{F}(t),$$

określającym promień-wektor tegoż punktu, wychodzący ze stałego punktu  $O$ , obranego w układzie odniesienia.

4. Różne rodzaje ruchu punktu rozróżniamy 1. według postaci toru: ruch prostoliniowy i krzywoliniowy; 2. według wykresu drogi: ruch jednostajny, gdy wykres drogi jest linią prostą, czyli droga  $s$  jest liniową funkcją czasu  $t$ , i ruch niejednostajny, czyli zmienny, gdy wykres drogi jest linią krzywą.

Uwaga. Rozpatrywanie ruchu punktu ma nie tylko znaczenie teoretyczne, przygotowujące do studjów ruchu ciał, lecz także nader ważne znaczenie praktyczne; często bowiem ruch punktu jest wystarczającym obrazem ruchu ciała nawet bardzo złożonego jak np. pociągu kolejowego, jeżeli chodzi tylko o obraz ogólny, potrzebny np. przy sporządzaniu rozkładu jazdy itp. zadaniach. Wtedy mówimy zwykle o ruchu ciała, mając przytem na myśli ruch jednego stosownie obranego punktu tego ciała; dajmy na to środka przedniej latarni lokomotywy w przypadku ruchu pociągu kolejowego.

5. Prędkość średnia i chwilowa. Wektor prędkości. Gdy pociąg wyjeżdżający ze stacji  $A$  do drugiej  $B$ , odległej o 80 km, osiąga ją po 80 minutach, to mówimy, że jechał ze średnią prędkością  $\frac{80 \text{ km}}{80 \text{ min.}} = 1 \text{ km/min.}$  (jednego kilometra na minutę, czyli 60 km na godzinę, albo wreszcie  $16\frac{2}{3} \text{ m/sek.} = \frac{60000 \text{ m}}{3600 \text{ sek.}}$ ). Oznaczywszy przez  $s_1$  i  $s_2$  długość drogi mierzonych od początku linii kolejowej do stacji  $A$  i  $B$ , zaś przez  $t_1$  i  $t_2$  chwile wyjazdu ze stacji  $A$  i przyjazdu do  $B$ , widzimy, że średnią prędkość  $v_m$  określa równanie

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

przyczem  $\Delta s \equiv s_2 - s_1$ ,  $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ .

Wogóle ma prędkość średnią różną wartość na rozmaitych odcinkach drogi. Jeżeli ta wartość jest stała bez względu na długość odcinka  $\Delta s$ , na

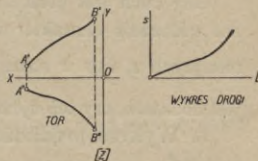


Fig. 5.

jego miejsce na torze i na odpowiadający przedział czasu  $\Delta t$ , to ruch jest jednostajny. Jego równaniem jest  $s = s_0 + ct$ .

W ogólnym przypadku ruchu zmiennego odpowiada przedziałowi czasu od chwili  $t$  do chwili  $t + \Delta t$  średnia prędkość  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ , która się zmienia zależnie od  $t$ . Gdy  $\Delta t \rightarrow 0$  (czytaj: zdąża do zera), to

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

nazywa się prędkością chwilową w odpowiadającym chwili  $t$  miejscu toru, albo krótko prędkością w chwili  $t$ .

Gdy ruch jest prostoliniowy i określony równaniem  $s = f(t)$ , to prędkość ma widocznie charakter wektora  $\vec{v}$  leżącego na torze i skierowanego w stronę rosnących  $s$ , lub w stronę przeciwną, zależnie od tego czy pochodna  $\frac{ds}{dt}$  jest dodatnia, czy też ujemna. Wektor  $\vec{v}$  nazywa się wektorem prędkości.

**6. Wykres prędkości.** Tak nazywamy geometryczny obraz równania  $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$ . Wykres prędkości przedstawia przeto krzywą różniczkową dla wykresu drogi jako krzywej całkowej. Według wykresu prędkości rozróżniamy ruch jednostajnie zmienny, którego wykres prędkości jest prostoliniowy od ruchu niejednostajnie zmiennego, którego wykres prędkości jest krzywoliniowy.

**7. Przyspieszenie średnie i chwilowe.** Wektor przyspieszenia. Iloraz przyrostu prędkości  $v_2 - v_1 = \Delta v$  przez odpowiadający przedział czasu  $t_2 - t_1 = \Delta t$  nazywamy przyspieszeniem średnim ruchu w czasie  $\Delta t$ . Dla ruchu jednostajnie zmiennego ma przyspieszenie średnie wartość stałą, niezależną od przedziału czasu. Wówczas

$$v = v_0 + at.$$

W ogólnym przypadku ruchu niejednostajnie zmiennego jest

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = a$$

wartością przyspieszenia w chwili  $t$ , określoną jako funkcja zmiennej  $t$ .

Dla ruchu prostoliniowego jest charakter wektorowy przyspieszenia od razu widoczny. Strzałka wektora przyspieszenia  $\vec{a}$  jest skierowana zgodnie z  $\vec{v}$  lub przeciwnie zależnie od tego czy  $v$  rośnie (przyśp. dodatnie) czy też maleje z upływem czasu (przyśp. ujemne).

**8. Najogólniejsze określenie wektora prędkości ruchu krzywoliniowego.** Gdy ruch ten przedstawia równanie

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

określające promień-wektor  $\vec{r}$  jako funkcję czasu  $t$ , to wektor prędkości średniej

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

ma kierunek cięciwy łączącej punkt toru  $M$ , zajęty w chwili  $t$ , z punktem  $M'$ , zajęty w chwili  $t + \Delta t$ .

Wektor 
$$\lim \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

czyli iloraz różniczkowy promienia-wektora względem czasu określa wektor prędkości w chwili  $t$ , styczny do toru w odpowiadającym miejscu.

Ta definicja jest w zgodzie z poprzednią mniej ogólną, albowiem  $|\bar{v}| = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$ .

**9. Hodograf. Najogólniejsze określenie wektora przyspieszenia ruchu krzywoliniowego.** Naturalnem uogólnieniem wykresu prędkości ruchu prostoliniowego jest dla ruchu krzywoliniowego t. zw. hodograf, tj. krzywa utworzona przez końce wektorów prędkości, wykreślonych z obranego dowolnie stałego punktu początkowego, np.  $\Omega$  na fig. 6.

Jeżeli  $\bar{r} = \bar{F}(t)$  jest równaniem ruchu danego, to

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F}'(t)$$

jest równaniem odpowiadającego ruchu po hodografie.

Prędkość ruchu po hodografie (jako wektor)

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{a}$$

określa zarazem wektor przyspieszenia  $\bar{a}$  danego ruchu krzywoliniowego.

Wektor przyspieszenia leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru (gdź tor jest płaski w płaszczyźnie tego toru); jest wogóle nachylony do toru i zawsze skierowany ku wnętrzu jego wklęsłości.

**10. Przyspieszenie styczne i normalne.** Wektor przyspieszenia da się zawsze rozłożyć na sumę geometryczną dwu wektorów według schematu:

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n.$$

Pierwszy z nich  $\bar{a}_t$  nazywa się przyspieszeniem stycznem, gdyż leży na stycznej do toru, przyczem ma wartość i kierunek określony drugą pochodną łuku toru względem czasu, tj.  $\frac{d^2s}{dt^2}$ . Drugi zaś, czyli

$\bar{a}_n$  nazywa się przyspieszeniem normalnem, czyli dośrodkowem i ma wartość bezwzględną  $\frac{v^2}{\rho}$ , jeżeli  $\rho$  jest długością promienia krzywizny toru. Przytem ma kierunek wzdłuż normalnej głównej toru ku środkowi jego krzywizny:

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

W ruchu krzywoliniowym jednostajnym jest przyspieszenie styczne stałe równe zeru, a całkowite przyspieszenie jest normalne i równa się  $\frac{v^2}{\rho}$ .

Wogóle można powiedzieć, że przyspieszenie styczne jest warunkowane tylko zmianą wielkości prędkości, zaś przyspieszenie normalne tylko zmianą kierunku prędkości.

**11. Rzutowanie ruchu.** Rzut równoległy albo prostokątny poruszającego się punktu porusza się na płaszczyźnie rzutów z prędkością i przyspieszeniem, które są odpowiednio rzutami prędkości i przyspieszenia ruchu danego.

Z trzech równań określających ruch punktu

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

przedstawia każde z osobna dla siebie ruch rzutu tegoż punktu na odpowiadającą oś. Prędkościami tych oddzielnych ruchów są rzuty prędkości ruchu danego, tj.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f_1'(t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = f_2'(t), \quad v_z = \frac{dz}{dt} = f_3'(t).$$

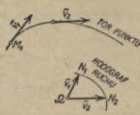


Fig. 6.

Podobnie ma się rzecz z przyspieszeniami:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

**12. Prosty ruch harmoniczny** (drżanie harmoniczne). Tak nazywamy rzut ruchu jednostajnego po okręgu koła na oś leżącą w płaszczyźnie tego koła (fig. 7). Licząc czas  $t$  od chwili przejścia punktu przez  $C$  a jego rzutu przez  $O'$ , mamy dla drogi  $s$  rzutu  $M'$  równanie  $s = a \sin \varphi$ , przy czem  $\varphi = \frac{2\pi}{T} t$ ,



Fig. 7.

a więc:  $s = a \sin \frac{2\pi}{T} t$ .  
Promień koła  $a$  określa t. zw. amplitudę (obszerność) drżania,  $T$  zaś okres drżania, tj. czas, w którym punkt  $M$  opisuje cały okrąg koła, a odpowiadający promień kąt  $2\pi$ . Wartość  $\frac{2\pi}{T} = \omega$  nazywają częstością drżania. (Jest to liczba pełnych drżań przypadająca na  $2\pi$  sekund. Inni autorowie nazywają częstością  $\frac{1}{T}$ , czyli liczbę pełnych drżań w jednej sekundzie.) Oznaczywszy przez  $V$  prędkość ruchu po kole, a  $\frac{V^2}{a}$  przyspieszenie (normalne) tego ruchu, mamy widocznie dla ruchu harmonicznego jako rzutu: prędkość  $v = V \cos \frac{2\pi}{T} t$ , przyspieszenie  $p = -\frac{V^2}{a} \sin \frac{2\pi}{T} t$ .

To samo wyrażają równania:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad p = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin \frac{2\pi}{T} t$$

zważywszy, że  $V = \frac{2\pi a}{T}$ . Na rysunku uwidoczniono także wykres drogi jako sinusoidę o długości fali  $= T$ .

**Uwaga.** Jeżeli czas mierzymy nie od chwili gdy kąt  $\varphi = 0$ , lecz od chwili gdy kąt  $\varphi = \alpha$ , to równanie drżania harmonicznego ma postać ogólną

$$s = a \sin (\omega t + \alpha).$$

Kąt  $\alpha$  nazywa się kątem fazy. Jakikolwiek dwa drżania harmoniczne mogą się różnić 1. amplitudą 2. okresem lub częstością i 3. fazą, tj. wartością kąta  $\alpha$ . Skoro np. w dwu drżaniach równokierunkowych jest dla pierwszego  $s = 0$ , a jednocześnie dla drugiego  $s = +a$ , to mówimy że drugi ruch wyprzedza fazą pierwszy o  $\frac{\pi}{2}$ , albo o ćwierć okresu.

Inne przykłady w kinetyce.

## B. Ruch ciała sztywnego (układu niezmiennego).

**13. Ogólny ruch ciała sztywnego** jest określony ruchem jego trzech punktów tworzących trójkąt. Tory tych punktów nazywają się kierownicami ruchu. Każdy z tych punktów może być obrany także zewnątrz ciała, byleby zachowywał niezmiennie odległości od wszystkich punktów ciała.

W szczególności nazywamy ruch postępowym, gdy trójkąt punktów nie zmienia podczas ruchu orientacji w przestrzeni (odpowiadającej układowi odniesienia). Taki ruch jest zupełnie określony ruchem jednego punktu ciała. Ruch postępowy może być krzywoliniowy, jak np. ruch trzonu łączącego dwie korby równe i równoległe, albo prostoliniowy, zwany także przesunięciem (translatio).



Ruch postępowy krzywoliniowy można sobie wyobrazić jako nieprzerwany ciąg przesunięć chwilowych, tj. przesunięć dokonanych w elementach czasu  $dt$ .

Ruch ciała nazywamy obrotowym (obrotem), gdy z owych trzech punktów są dwa nieruchome. Te dwa punkty wyznaczają oś obrotu. Wszystkie punkty ciała nie leżące na osi obrotu opisują koła o promieniach  $r$  równych odległościom tych punktów od osi. Kąty, jakie jednocześnie opisują wszystkie te promienie, mają wspólną wartość  $\varphi$  zwaną kątem obrotu ciała. Ruch obrotowy jest zatem zupełnie określony daną osią i kątem obrotu  $\varphi$  jako daną funkcją czasu.

Pierwsza pochodna kąta obrotu  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  nazywa się prędkością kątową, druga zaś, tj.  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt^2} = \varepsilon$  przyspieszeniem kątowym.

Wartość prędkości (linkowej) punktu ciała obracającego się, leżącego w odległości  $r$  od osi obrotu, daje równanie

$$v = r\omega = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Przyspieszenie styczne tegoż punktu określa równanie

$$a_t = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\varepsilon,$$

przyspieszenie normalne zaś

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

Ogólny ruch chwilowy ciała da się zastąpić zespołem przesunięcia chwilowego z obrotem chwilowym na nieskończenie wiele sposobów. W każdym zespole jest kierunek osi obrotu ten sam, a tylko kierunki przesunięcia są różne. Pomiedzy temi zespólami zachodzi tylko jeden, w którym kierunek przesunięcia jest równoległy do osi obrotu. Taki ruch nazywa się skrętem (ruchem śrubowym).

Jakikolwiek ruch chwilowy ciała da się wywołać skrętem chwilowym.

Przesunięcie i obrót są przeto ruchami elementarnymi, do których wszelkie inne ruchy ciała sprowadzić można. Przesunięcie da się nadto pojmować jako obrót około osi leżącej w nieskończoności z prędkością kątową nieskończenie małą.

**14. Ruch równoległy do płaszczyzny stałej**, zwany także ruchem posuwistym, albo płaskim, jest wyznaczony ruchem dwu punktów ciała  $A$  i  $B$  (fig. 8) obranych w tej płaszczyźnie (płaszczyzna ruchu, albo płaszczyzna kierująca).

Po czasie  $\Delta t$  zajmie odcinek  $AB$  położenie  $A'B'$ . To położenie łatwo osiągnąć obrotem odcinka  $AB$  około osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu. Jej ślad  $C$  znajdujemy jako punkt przecięcia się symetrycznych dla odcinków  $AA'$  i  $BB'$  (fig. 8). Przebieg rzeczywistego ruchu ciała między dwoma rozpatrywanymi położeniami różni się wogóle od powyższego obrotu, gdyż drogi  $AA'$  i  $BB'$  mogą się różnić od łuków kół zakreślonych ze środka  $C$ . Skoro jednakże przedział czasu,  $\Delta t$  zdąża do 0 a wraz z nim i wektory przemieszczeń  $\overline{AA'}$  i  $\overline{BB'}$ , to rzeczywisty ruch chwilowy zlewa się z obrotem chwilowym.  $A$  zatem:

Ogólny ruch posuwisty można uważać za nieprzerwany szereg obrotów chwilowych około coraz to nowych osi chwilowych prostopadłych do płaszczyzny kierującej.

Znając tory dwu punktów ciała  $A$  i  $B$ , leżących na płaszczyźnie kierującej, znajdujemy dla każdego położenia  $AB$  odpowiadający środek chwilowy  $C$  (ślad osi chwilowej na płaszczyźnie kierującej), jako punkt

przecięcia się prostopadłych  $AC$  i  $BC$  do prędkości chwilowych obu punktów (fig. 9), czyli do stycznych obu torów w odpowiadających punktach.

Przytem jest  $\frac{V_1}{AC} = \frac{V_2}{BC} =$  prędkości kątowej obrotu chwilowego. Miejsce

geometycznym środków chwilowych  $C$  (zwanymi także „biegunami“) na płaszczyźnie kierującej jako stałej płaszczyźnie odniesienia jest krzywa  $[C]$  zwana centrodją stałą, albo centrodją w przestrzeni (do której ruch ciała odnosimy). Skoro w poruszającym się ciele oznaczymy punkty  $C$ , to otrzymamy krzywą  $[F]$  nieruchomą względem ciała a więc poruszającą się wraz z niem. Jest to centrodją ruchoma, albo centrodją ciała.

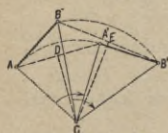


Fig. 8.

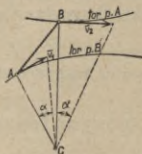


Fig. 9.

Skoro w punktach  $P_1, P_2, \dots$  układu poruszającego się równoległe do płaszczyzny (fig. 10) wykreślimy wektory prędkości  $v_1, v_2, \dots$  i obrócimy je o kąt prosty taki, iż padną na promienie łączące środek chwilowy  $C$  z punktami  $P_1, P_2, \dots$ , to otrzymujemy t. zw. prędkości „prostopadłe“ lub „obrócone“ ( $v_1$ ), ( $v_2$ )....

Końce prędkości prostopadłych tworzą wielobok podobny i podobnie położony do wieloboku punktów  $P_1, P_2, \dots$  ze środkiem podobieństwa w  $C$ .

Kreśląc z dowolnie obranego początku  $O$  (fig. 10) wektory prędkości (rzeczywistych lub obróconych) punktów  $P_1, P_2, \dots$  otrzymujemy wielokąt utworzony z końców  $A_1, A_2, \dots$  podobny do wielokąta  $P_1, P_2, \dots$ . Otrzymany przytem rysunek nazywa się planem prędkości i oddaje ważne usługi przy kreśleniu planu przesunięć dla kratownic.

**15. Wektor obrotu chwilowego  $\omega$  i składanie obrotów.** Stan ruchu ciała obracającego się w chwili  $t$  około pewnej osi jest zupełnie określony wektorem  $\omega$  związanym z tą osią, którego długość wyraża liczbową wartość prędkości kątowej  $\omega$ , a strzałka jest umieszczona tak, ażeby można było znaleźć kierunek obrotu według następującej umowy:

Skoro pomyślanego obserwatora zwiążemy z wektorem  $\omega$  tak, aby strzałka wektora wskazywała od stóp ku głowie, to obserwator stwierdzi pod stopami obrót ciała zgodny z obrotem wskazówek na tarczy zegarowej. (Patrzac przed siebie widzi ruch punktów ciała od ręki lewej ku prawej.)

Uwaga. W niektórych książkach przyjęło umowę odwrotną, co oczywiście prowadzi do odwrócenia strzałki wektora  $\omega$  określającego obrót dany.

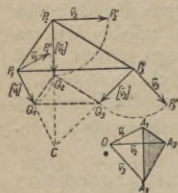


Fig. 10.

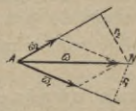


Fig. 11.

Często ciało bierze udział jednocześnie w dwu obrotach chwilowych, jeżeli np. należy do dwu układów odniesienia, z których jeden obraca się względem drugiego. (Np. wirnik prądniczy w wagonie tramwajowym obraca się względem wagonu, a wagon jadący w łuku obraca się względem ziemi. Osi obu obrotów przecinają się pod kątem prostym). Dwa obroty chwilowe określone wektorami prędkości

kątowych  $\omega_1$  i  $\omega_2$  około osi przecinających się w punkcie  $A$  (fig. 11) są równoważne obrotowi chwilowemu z prędkością kątową

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$$

około osi przechodzącej przez tenże punkt  $A$  (i leżącej z tamtymi w jednej płaszczyźnie). Składanie obrotów chwilowych sprowadza się w ten sposób do geometrycznego dodawania wektorów prędkości kątowych (podobnie jak składanie sił). Odwrotnie każdy obrót chwilowy można rozłożyć na obroty składowe około osi przecinających się, czyli zastąpić dany obrót chwilowy  $\overline{\omega}$  obrotami  $\overline{\omega}_1$  i  $\overline{\omega}_2$ , byleby powyższe równanie było spełnione.

Dowód polega na okazaniu, że dowolny punkt ciała  $N$  na prostej wektora  $\overline{\omega}$  otrzymuje od obrotów  $\overline{\omega}_1$  i  $\overline{\omega}_2$  odpowiadające prędkości o równych wartościach bezwzględnych  $r_1 \omega_1$  i  $r_2 \omega_2$ , a wprost przeciwnych kierunkach, które zatem się znoszą. Prosta  $AN$  jest przeto osią obrotu wypadkowego itd.

Dwa obroty chwilowe około osi równoległych, określone wektorami prędkości kątowych  $\overline{\omega}_1$  i  $\overline{\omega}_2$ , dają obrót wypadkowy z prędkością kątową  $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$  zależnie od tego czy obroty są zgodne, czy też przeciwne. Wektor obrotu wypadkowego  $\overline{\omega}$  znajduje się tak samo jak wypadkowa sił równoległych.

**16. Zmiana układu odniesienia. Ruch względny.** Dla obserwatora na płynącym statku  $W$  jako układzie odniesienia przedstawia się ruch jakiegokolwiek ciała, np. piłki, inaczej, aniżeli dla obserwatora stojącego na brzegu, czyli na ziemi jako układzie odniesienia  $U$ . Często wypada znając prędkość  $\overline{v}_w$  i przyspieszenie  $\overline{a}_w$  punktu ciała względem układu  $W$ , wyznaczyć prędkość  $\overline{v}_b$  i przyspieszenie  $\overline{a}_b$  w odniesieniu do układu  $U$  lub nawzajem. Dla wygody nazywamy często (zapożyczając się z dynamiki) układ  $U$  układem „bezwzględnym“, zaś  $W$  układem „względny“, jakkolwiek ze stanowiska kinematyki są oba układy równouprawnione i mogą zamienić swoje role.

Ruch chwilowy w układzie  $W$  (statku) względem  $U$  (ziemi) jest wogóle złożony z przesunięcia z prędkością  $\overline{v}_o$  i obrotu  $\omega$ . Wskutek tego każdy punkt nieruchomy w układzie  $W$  (względem statku) porusza się względem  $U$  (ziemi) z prędkością  $\overline{v}_u$  i przyspieszeniem  $\overline{a}_u$ , które wyznaczamy według prawideł powyżej wymienionych. Nazywamy je prędkością unoszenia  $\overline{v}_u$  i przyspieszeniem unoszenia  $\overline{a}_u$ . Każdemu przeto położeniu punktu  $M$  względem układu  $U$  odpowiadają pewne wartości prędkości i przyspieszenia unoszenia  $\overline{v}_u$  i  $\overline{a}_u$ , obok jednoczesnych wartości prędkości i przyspieszenia względnego  $\overline{v}_w$  i  $\overline{a}_w$ . Od nich zależą wartości prędkości  $\overline{v}_b$  i przyspieszenia  $\overline{a}_b$  w układzie  $U$  w sposób przedstawiony wzorami:

$$\overline{v}_b = \overline{v}_w + \overline{v}_u; \quad \overline{a}_b = \overline{a}_w + \overline{a}_u + \overline{a}_c,$$

które wyrażają twierdzenia:

I. Prędkość bezwzględna punktu jest sumą geometryczną prędkości względnej i prędkości unoszenia.

II. Przyspieszenie bezwzględne punktu jest sumą geometryczną przyspieszenia względnego, przyspieszenia unoszenia i przyspieszenia Coriolis'a, zwanego także dodatkowem.

Przyspieszenie Coriolis'a ma wartość bezwzględną

$$a_c = 2 v_w \omega \sin(\overline{v}_w, \overline{\omega}),$$

a kierunek prostopadły do  $\overline{v}_w$  i do  $\overline{\omega}$  tak, aby wektory  $\overline{v}_w$ ,  $\overline{\omega}$  i  $\overline{a}_c$  tworzyły w tym porządku układ prawy (tj. odpowiadający kolejno rozstawionym przestrzennie trzem palcom prawej ręki, począwszy od wielkiego; fig. 12).

Z równań powyższych wynika nawzajem:

$$\overline{v_w} = \overline{v_b} + (-\overline{v_u}); \quad \overline{a_w} = \overline{a_b} + (-\overline{a_u}) + (-\overline{a_c}),$$

czyli słowami:

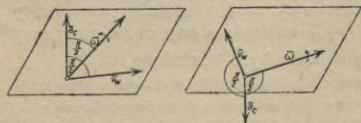


Fig. 12.

względne, przeciwnie wziętego przyspieszenia unoszenia i przeciwnie wziętego przyspieszenia Coriolisa.

I. Prędkość względna jest sumą geometryczną (wypadkową) prędkości bezwzględnej i przeciwnie wziętej prędkości unoszenia.

II. Przyspieszenie względne jest sumą geometryczną (wypadkową) przyspieszenia bez-

## II. Dynamika ogólna.

### A. Podstawy dynamiki.

17. Jednostki podstawowe. Wszelkie wielkości mechaniczne dają się wyrazić jednostkami długości czasu i masy. W t. zw. centymetrogramo-sekundowym układzie jednostek (skrót C. G. S.) jest:

a) Jednostką długości centymetr ( $cm$ ) określony jako jedna setna długości wzorca metrowego przechowywanego w Sèvres pod Paryżem (przy temperaturze  $0^{\circ}C$  i normalnem ciśnieniu barometrycznym).

b) Jednostką czasu jest sekunda ( $sk$ ) czasu średniego, wyznaczonego pośrednio przez obserwacje astronomiczne. Te obserwacje określają bezpośrednio czas gwiazdowy, którego sekunda ( $s$ ) jest nieco mniejsza od ( $sk$ ), a mianowicie:

$$1 (s) = 0,99726957 (sk).$$

Nawzajem jest

$$1 (sk) = 1,00273972 (s).$$

c) Jednostką masy jest masa jednego grama ( $g^*$ ), określona jako  $1/1000$  masy jednego kilograma ( $kg^*$ ), czyli masy wzorca kilogramowego ze stopu platyny z irydem, przechowywanego w Sèvres pod Paryżem. (Ostatnia masa jest z wielkiem przybliżeniem równa masie  $1000 cm^3$  czystej wody przy  $4^{\circ}C$ .)

Obok układu jednostek C. G. S. używa się jeszcze, zwłaszcza w mechanice technicznej, układu technicznego, który ma te same jednostki długości i czasu, co układ C. G. S. (fizyczny); natomiast trzecią jednostką podstawową jest w nim nie jednostka masy, lecz jednostka siły.

Techniczną jednostką siły jest siła jednego kilograma ( $kg$ ), określona naciskiem, jaki wywiera na podstawę ciężar jednego kilograma spoczywającego w Paryżu, czyli siła ciężkości działająca na masę jednego kilograma w Paryżu.

Przejdzie od jednostki siły do jednostki masy w układzie technicznym i odwrotnie w układzie C. G. S. będzie omówione w następnym ustępie.

18. Pierwsze podstawowe prawo dynamiki wyraża się równaniem

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{P},$$

w którym oznacza  $m$  masę punktu materialnego,  $\bar{v}$  jego prędkość, a  $\bar{P}$  siłę nań działającą. Wektor  $m\bar{v}$  nazywa się ilością ruchu, albo pędem punktu materialnego. A zatem słowami: Pochodna pędu punktu materialnego względem czasu równa się sile wywołującej zmianę pędu.

To wysłowienie stwierdza już charakter wektorowy siły  $\bar{P}$ . Według trzeciego z założeń w ust. 2 jest masa  $m$  stałą, a równanie przybiera postać zwykle stosowaną:

$$m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}; \quad (\text{masa} \times \text{przyspieszenie} = \text{sile})$$

albo po rozłożeniu wektorów na trzy składowe w kierunkach osi  $X, Y, Z$ :

$$m \frac{d v_x}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = X; \quad m \frac{d v_y}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y; \quad m \frac{d v_z}{dt} = m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Pierwsze prawo pozwala wielkości sił mierzyć przyspieszeniami, jakich te siły udzielają jednemu i temu samemu punktowi materialnemu. Z drugiej strony mając daną siłę określoną statycznie, np. nateżeniem pola sił, możemy przy pomocy pierwszego prawa znaleźć przyspieszenie, jakiego siła udzieli punktowi materialnemu o masie  $m$ . Nakoniec pierwsze prawo określa jednostkę siły w układzie C. G. S., zaś jednostkę masy w układzie technicznym, a mianowicie:

W układzie C. G. S. jest jednostką siły dyna, t. j. siła, która masie jednego grama udziela przyspieszenia równego jednostce, t. j.  $1 \text{ cm/sk}^2$ .

Ponieważ siła jednego kilograma (jako ciężar) udziela masie jednego kilograma w Paryżu przyspieszenia  $980,665 \text{ cm/sk}^2$ , przeto ta sama siła udzieliłaby masie jednego grama przyspieszenia  $980,665 \text{ cm/sk}^2$ ; czyli techniczna jednostka siły

$$1 \text{ kg} = 980,665 \text{ dyn.}$$

$$\text{Naodwrot} \quad 1 \text{ dyna} = \frac{1}{980,665} \text{ kg} = 1,0197 \cdot 10^{-6} \text{ kg.}$$

(W zwykłych rachunkach technicznych wystarczy przyjąć w przybliżeniu  $1 \text{ kg} = 0,981 \cdot 10^6 \text{ dyn}$  i  $1 \text{ dyna} = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ .)

Przy rzeczywistym mierzeniu sił ciężarami trzeba pamiętać, że ciężar jednej i tej samej masy zmienia się zależnie od szerokości geograficznej  $\varphi$  i wzniesienia nad poziom morza  $h$ . Zależność tę określa wzór dla przyspieszenia ciężkości  $g$ , który ma postać:

$$g = 9,806\,056 - 0,025\,028 \cos 2\varphi - 0,000\,003 \cdot h,$$

przyczem  $h$  jest wyrażone w metrach, zaś  $g$  w  $\text{m/sk}^2$ .

Stąd wypada dla poziomu morza na równiku  $g_0 = 9,781 \text{ m/sk}^2$ ; na biegunach  $g_{90^\circ} = 9,831 \text{ m/sk}^2$ ; dla środkowej Polski okrągło  $g_P = 9,81 \text{ m/sk}^2$ , a więc około  $2^\circ_{/00}$  mniej niż na biegunach, a  $3^\circ_{/00}$  więcej niż na równiku.

Zapomocą ważenia na zwykłych wagach dźwigniowych znajdujemy nie ciężar ciała, lecz jego masę wyrażoną w  $\text{kg}^*$ . W utartym sposobie wyrażania się: „Ciało waży  $x$  kilogramów“ tkwi właściwie zdanie: „Ciało ma masę  $x$  kilogramów ( $\text{kg}^*$ )“, jeżeli wykluczmy zastosowanie wag sprężynowych. Ciężar tegoż ciała w układzie C. G. S. będzie równy

$$1000 x \cdot g \text{ dyn (jeżeli } g \text{ wyrazimy w } \text{cm/sk}^2\text{)}.$$

Ten sam ciężar wyrażony w jednostkach technicznych równa się, biorąc ściśle:

$$x \cdot \frac{g}{g \text{ Paryż}} (\text{kg}),$$

zaś z błędem nie przekraczającym  $3^\circ_{/00}$  w żadnym miejscu powierzchni ziemi...  $x (\text{kg})$ .

Natomiast masa naszego ciała wyraża się w układzie C. G. S. jako  $x (\text{kg}^*)$ , albo  $1000 x (g^*)$ , zaś w układzie technicznym ściśle jako

$$\frac{x}{980,665} = \frac{x}{g \text{ Paryż}} (\text{kg} \cdot \text{cm}^{-1} \text{sk}^2),$$

a w przybliżeniu najczęściej wystarczającym:

$$\frac{x}{9,81} (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{sk}^2).$$

Z powyższego widać, jak pożytecznym jest odróżnienie gwiazdką jednostek masy  $g^*$  i  $\text{kg}^*$  układu C. G. S., nazywanych na nieszczęście temi samymi wyrazami, co jednostki siły układu technicznego. Jest to nieraz powodem fatalnych nieporozumień, zwłaszcza u początkujących.

19. Drugie podstawowe prawo dynamiki wyraża, że jakkolwiek siły  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$  działające na dany punkt materialny można zastąpić wypadkową  $\bar{R}$ , która jest ich sumą geometryczną, czyli

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots$$

To prawo stanowi zarazem punkt wyjścia statyki. (Prawo składania sił.)  
(Zasada niezależności działania sił.)

**20. Trzecie podstawowe prawo dynamiki** brzmi w lapidarnem wyśłowieniu: Działanie jest równe i wprost przeciwne oddziaływaniu. Znaczy to, że sile  $\bar{P}$  określającej działanie punktu materialnego  $m_2$  na punkt materialny  $m_1$  towarzyszy zawsze siła  $-\bar{P}$ , przedstawiająca działanie  $m_1$  na  $m_2$ , przy czem kierunki obu sił leżą na prostej  $m_1 m_2$ .

T. zw. prawo bezwładności, które Newton postawił na czele dynamiki jako wysnute z doświadczenia, mieści się już w pierwszym podstawowym prawie prawie jako przypadek szczególny jego zastosowania. Skoro bowiem  $\bar{P}=0$ , to  $m \bar{v} = \text{stała}$ , czyli punkt materialny, na który żadne siły nie działają, porusza się jednostajnie i prostoliniowo (oczywiście w bezwzględny układ odniesienia). To samo zachodzi widocznie i wtedy, gdy siły działające na punkt materialny się nawzajem znoszą, czyli są w równowadze.

**21. Zasada względności mechaniki klasycznej** opiewa: Skoro znajdziemy jeden bezwzględny układ odniesienia, to każdy układ poruszający się względem niego prostoliniowo i jednostajnie jest również układem bezwzględnym. We wszystkich tych układach są ważne podstawowe prawa dynamiki, a więc i prawo bezwładności. O żadnym z tych układów nie można twierdzić, że jest w bezwzględnym spoczynku, albo w bezwzględnym ruchu. Wszystkie są równouprawnione w dynamice. Dlatego tradycyjna nazwa: „układ bezwzględny“ nie jest stosowna i ustępuje nowszej: „układ inercjalny (bezwładnościowy)“. Za taki układ można uważać z bardzo wielką ścisłością układ gwiazd stałych. Wobec tego ziemia obracająca się względem tego układu nie jest, biorąc ściśle, układem inercjalnym, jakkolwiek w bardzo wielu zadaniach mechaniki technicznej można ją z dostatecznym przybliżeniem traktować jako taki układ. Natomiast układ spórzędnych o początku w środku ziemi i osiach równoległych do osi układu związanego z gwiazdami stałymi ma z bardzo znacznym przybliżeniem cechy układu bezwładnościowego. Względem tego układu obraca się ziemia ze stałą prędkością kątową

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 (s)} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 0,99727 (sk)} = 0,000072921 (sk^{-1}).$$

### B. Środek masy.

**22. Określenie środka masy. Środek ciężkości.** Ciała materialne traktujemy w mechanice bądź to jako układy oddzielnych punktów materialnych, bądź też jako bryły geometryczne wypełnione materją ciągłą. W pierwszym modelu określamy położenia punktów materialnych o masach  $m_1, m_2, \dots$  promieniami — wektorami  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots$  wychodzącymi z obranego punktu  $O$  w układzie odniesienia, w drugim zaś określamy położenie dowolnego elementu masy  $dM = \mu dV$  ( $\mu$  gęstość,  $dV$  objętość elementu) jego promieniem-wektorem  $\bar{r}$  zmieniającym się w sposób ciągły od punktu do punktu ciała. Środkiem masy ciała nazywamy punkt  $S$  wyznaczony promieniem-wektorem  $\bar{r}_0 = \overline{OS}$  zapomocą równania:

$$M\bar{r}_0 = m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \dots \equiv \sum m_i\bar{r}_i, \text{ albo } M\bar{r}_0 = \int_V \bar{r} dM,$$

w którym  $M$  oznacza masę całego ciała. To równanie czytamy: Moment masy całego ciała skupionej w punkcie  $S$  względem dowolnie obranego punktu stałego  $O$  równa się sumie geometrycznej momentów mas wszystkich punktów materialnych ciała względem tegoż punktu.

Łatwo się przekonać, że położenie środka masy określonego powyższem równaniem nie zależy od obioru początku  $O$  promieni wektorów.

Przy stosowaniu metody analitycznej określamy środek masy spólrzędnymi  $x_0, y_0, z_0$ , czyli odległościami środka  $S$  od płaszczyzn spólrzędnych. Zamiast powyższego równania mamy następujące trzy równania analityczne:

$$M x_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots = \Sigma m_i x_i; \quad \text{albo} = \int x dM$$

$$M y_0 = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots = \Sigma m_i y_i; \quad \text{„} = \int y dM$$

$$M z_0 = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots = \Sigma m_i z_i; \quad \text{„} = \int z dM$$

Iloczyn  $m_i x_i, m_i y_i$  itd. nazywamy momentami mas  $m_i$  względem płaszczyzny  $YZ, ZX$  itd.

Z postaci równań określających wynika, że środek masy jest zarazem środkiem sił zgodnie równoległych i proporcjonalnych względem mas  $m_i$ . Takimi siłami są w pierwszym, zwykle bardzo wielkim przybliżeniu siły ciężkości, działające na ciała, z którymi technika ma do czynienia. Dlatego środek masy zlewa się praktycznie ze środkiem ciężkości i bywa nazywany tem mianem.

**Własności kinetyczne środka masy.** Różniczkując równania określające środek masy względem czasu otrzymujemy:

$$M \frac{d\bar{r}_0}{dt} = \Sigma m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}; \quad M \frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} = \Sigma m_i \frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2}, \quad \text{albo}$$

$$M \bar{v}_0 = \Sigma m_i \bar{v}_i; \quad M \bar{p}_0 = \Sigma m_i \bar{p}_i,$$

czyli słowami: Pęd (ilość ruchu) całej masy ciała skupionej w środku masy równa się sumie geometrycznej pędów wszystkich punktów materialnych (cząstek) ciała.

Siła bezwładności ( $M \bar{p}_0$ ) całej masy ciała skupionej w środku masy równa się sumie geometrycznej ( $\Sigma m_i \bar{p}_i$ ) sił bezwładności wszystkich cząstek ciała.

Te bardzo ogólne twierdzenia nadają znaczenie konkretne (fizyczne) matematycznej fikcji punktu materialnego. Drugie z nich tłumaczy nadto jasno, dlaczego w wielu książkach, zwłaszcza angielskich, nazywają środek masy „środkiem bezwładności“.

#### 24. Inne ogólne własności środka masy.

a) Jeżeli dla obranego początku promieni-wektorów  $O$  (dla obranej płaszczyzny spólrzędnych np.  $YZ$ ) jest  $\Sigma m_i \bar{r}_i = 0$  (jest  $\Sigma m_i x_i = 0$ ), to w tym punkcie (na tej płaszczyźnie) leży środek masy.

b) Jeżeli wszystkie punkty materialne danego układu punktów materialnych leżą na jednej płaszczyźnie (lub prostej), to na tej płaszczyźnie (prostej) leży środek masy tego układu.

c) Jeżeli dany układ punktów materialnych (ciało) podzielimy na części o masach  $M_1, M_2, \dots$  i znajdziemy środki mas  $S_1, S_2, \dots$  każdej części, to środek masy całego układu o masie  $M = M_1 + M_2 + \dots$  jest zarazem środkiem masy układu punktów materialnych o masach  $M_1, M_2, \dots$  umieszczonych w  $S_1, S_2, \dots$

d) Jeżeli układ punktów materialnych posiada płaszczyznę, oś lub środek symetrii, to na nich leży środek masy układu.

**25. Środek masy ciał jednolitych (jednorodnych).** Gęstość u takich ciał (wyrażona w  $g^*/cm^3$ ) jest stałą, wskutek czego równanie określające środek masy upraszcza się i po podstawieniu  $M = \mu V, dM = \mu dV$  (przy czym  $V$  oznacza objętość) przybiera postać:

$$V \bar{r}_0 = \int_V \bar{r} dV.$$

Z tego widać, że środek masy układów materialnych jednolitych jest zupełnie określony ich postacią geometryczną. Obok ciał trójwymiarowych rozważamy często w mechanice dwuwymiarowe powierzchnie materialne i jednowymiarowe linje materialne. Oznaczywszy przez  $dS$  element powierzchni (jego pole), a przez  $d\ell$  element długości linii, mamy wzory dla wyznaczenia środka masy w przypadku jednolitości:

$$S\bar{r}_0 = \int_S \bar{r} dS; \quad \ell\bar{r}_0 = \int_\ell \bar{r} d\ell.$$

Wszystkie te równania oraz odpowiadające im równania analityczne dają się ująć w wysłowienie:

Moment całości skupionej w szukanym środku masy równa się sumie geometrycznej (lub algebraicznej) momentów wszystkich części elementarnych względem tego samego dowolnie obranego punktu (lub płaszczyzny).

**26. Wyznaczenie środka masy w przypadkach praktycznych** ułatwiają własności podane w ust. 24, a nadto twierdzenie: Jeżeli dany układ materialny da się podzielić na części, których środki masy leżą na jednej prostej lub na jednej płaszczyźnie, to na tej prostej lub tej płaszczyźnie musi leżeć środek masy układu.

W przypadku ciał lub powierzchni jednolitych prowadzi często do celu podział na elementy o równej masie, których środki są znane. W ten sposób sprowadzamy szukanie środka masy ciała do szukania środka masy powierzchni jednolitej, w której leżą owe środki elementów; zaś szukanie środka masy powierzchni materialnej do szukania środka masy linii jednolitej.

Wyznaczanie środka masy w zagadnieniach praktycznych odbywa się rachunkiem, wykreślnie lub doświadczalnie. Metoda wykreślna jest wskazana zwłaszcza dla figur i linii płaskich nieokreślonych analitycznie, lecz danych na rysunku. Metodę doświadczalną stosujemy do ciał rzeczywistych w postaci złożonej, np. samolotów, bądź to dla ominięcia żmudnego rachunku, bądź też dla jego sprawdzenia. W tym celu zawieszamy ciało na stosownem ciężnie. Po ustaleniu równowagi musi prosta oś napiętego ciężna trafiać środek ciężkości, a więc i środek masy. Wieszając ciało w innym punkcie znajdujemy znowu prostą, zajmującą inne położenie względem ciała, na której leży środek masy. Obie proste połączone niezmiennie z ciałem wyznaczają zatem środek masy swoim punktem przecięcia się.

Z pośród sposobów wykreślnych są najprostsze dwa następujące:

a) Mając np. znaleźć środek masy jednolitej krzywej  $AB$  (fig. 13) dzielimy ją na równe części dość małe, aby je można traktować w przybliżeniu jako odcinki proste i przyjmując środki masy w połowie ich długości. Z dowolnie obranego punktu  $O$  prowadzimy promienie-wektory  $1, 2, 3, \dots$ , które sumujemy geometrycznie rozpoczynając od jakiegokolwiek punktu  $\Omega$  (fig. 13). Znaleziona suma  $\overline{\Omega D}$  jest widocznie równa  $n$ -krotnemu promieniowi-wektorowi środka masy  $\bar{r}_0 = \overline{OS}$ , jeżeli  $n$  jest liczbą części, (w naszym przypadku 7).

Gdyby sumowanie nie mieściło się na płaszczyźnie rysunku, to zamiast dodawać całe wektory

$1, 2, 3, \dots$  można doda-

wać  $m$ -te części, czyli zmniejszyć skalę rysunku ( $b$ )  $m$ -krotnie. Wówczas

$$\bar{r}_0 = \overline{OS} = \frac{m}{n} \overline{\Omega D}.$$



Fig. 13.

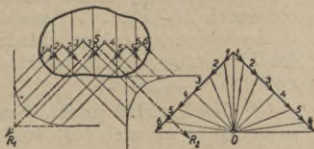


Fig. 14.



b) Chcąc znaleźć środek masy figury płaskiej jednolitej czyli środek pola (powierzchni) tej figury (fig. 14) dzielimy ją prostymi równoległymi na paski, których pola i środki są z dostateczną dokładnością znane. W tych środkach wyobrażamy sobie siły 1, 2, 3, ... równoległe i proporcjonalne względem pól pasków. Kreśląc wielobok sznurowy tych sił znajdujemy linię działania wypadkowej  $R$ , na której musi leżeć szukany środek masy.

Przez powtórzenie tej konstrukcji dla innego, najlepiej prostopadłego do poprzedniego kierunku prostych podziału i sił pomocniczych, otrzymujemy drugą prostą, na której leży środek masy figury, w punkcie przecięcia się z poprzednią.

Uwaga. Niekiedy okazuje się korzystnym wprowadzenie fikcyjnych mas (objętości, pól itp.) ujemnych, czyli uważanie danego ciała za różnicę dwu innych. Wówczas należy w rachunku uwzględnić zmianę znaku w momentach mas ujemnych, a w konstrukcji wykreślonej odwrócić odpowiadające kierunki pomocniczych sił równoległych.

**27. Położenie środka masy najważniejszych technicznie linii, powierzchni i ciał jednolitych.** (W tekście i na rysunkach oznacza  $S$  środek masy.)

Odcinek prosty:  $S$  leży w połowie odcinka.

Obwód trójkąta:  $S$  leży w środku koła wpisanego w trójkąt, którego wierzchołkami są środki boków  $a_1, a_2$  i  $a_3$  danego trójkąta.

Odległością  $S$  od boku trójkąta  $a_1$  jest

$$x_s = \frac{h_1}{2} \cdot \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

jeżeli  $h_1$  oznacza wysokość odpowiadającą  $a_1$  jako podstawie.

Obwód równoległoboku:  $S$  leży w punkcie przecięcia się przekątnych.

Łuk koła (fig. 15):  $S$  na dwusiecznej kąta środkowego  $2\alpha$  w odległości od środka koła  $x_s = r \frac{\text{cięciwa } AB}{\text{łuk } AB} = \frac{r \sin \alpha}{\text{arc } \alpha}$ , (przyczem  $\text{arc } \alpha = \pi \alpha^\circ / 180^\circ$ ).

Płaski łuk jakiegokolwiek krzywej regularnie w jedną stronę zakrzywionej (fig. 16): Odległość  $S$  od cięciwy,  $y_s = \infty \frac{2}{3} h$ . Rzut prostokątny na cięciwę ( $S'$ ) połowi ją w przybliżeniu, jakkolwiek rzut wierzchołka łuku  $C$  dość znacznie zbacza od środka cięciwy.

Wzór przybliżony daje  $y_s$  z nadwyżką, która np. dla łuku kołowego  $60^\circ$  jest mniejsza od 0,5%, zaś dla łuku  $90^\circ$  nie dochodzi do 1,1%.

Pole trójkąta:  $S$  leży w punkcie przecięcia się linii środkowych (łączących środki boków z przeciwległymi wierzchołkami). Odległość  $S$  od boku równa się jednej trzeciej odpowiadającej wysokości trójkąta. Jeżeli  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$  są spólrzędnymi prostokątnymi trzech wierzchołków trójkąta, to spólrzędne środka masy przedstawiają wzory:

$$x_s = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y_s = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad z_s = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Pole równoległoboku:  $S$  w punkcie przecięcia się przekątnych.

Pole trapezu: 1.  $S$  leży na linii środkowej t. j. prostej łączącej środki boków równoległych  $a$  i  $b$  (fig. 17). Odległościami  $S$  od tychże boków są:

$$h_a = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}, \quad h_b = \frac{h}{3} \frac{2a + b}{a + b}.$$

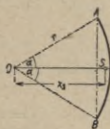


Fig. 15.

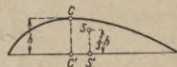


Fig. 16.

Stąd konstrukcja: Na przedłużeniach boków równoległych odcinamy  $BE = a$ ,  $CF = b$ . Prosta  $EF$  wyznacza  $S$  na  $MN$ . 2. Dzielimy trapez na dwa trójkąty (fig. 18) o środkach masy  $S_1$  i  $S_2$ . Prosta  $S_1 S_2$  przecina  $MN$  w  $S$ .

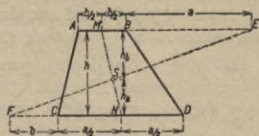


Fig. 17.

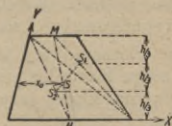


Fig. 18.

Odciętą  $x_0$  punktu  $S$  w ukośnokątnym układzie spólrzędnych o osi  $x$  na  $D$  i osi  $Y$  na  $CA$  określa wzór:

$$x_0 = \frac{1}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

Pole czworokąta (fig. 19):  $S$  jest zarazem środkiem masy trójkąta  $ACF$ , którego jednym bokiem jest przekątna  $AC$ , a wierzchołkiem przeciwnym punkt  $F$  znaleziony na drugiej przekątnej tak, aby było  $FB = DE$ . Łącząc zatem środek  $AC$ , czyli  $G$  z  $F$  i odcinając  $GS = \frac{1}{3} GF$ , otrzymujemy  $S$ .

Jeżeli jedna z przekątnych jest połowiona drugą, to na tej drugiej musi leżeć  $S$  czworokąta.

Pole wielokąta: Jeżeli  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) oznaczają spólrzędne prostokątne kolejno po sobie następujących wierzchołków  $W_i$  wielokąta (jednospójnego), przyczem kierunek obiegu jest zgodny z kierunkiem obrotu zapomożą którego oś  $X$  zajmie położenie osi  $Y$  na drodze najkrótszej, to rozłożywszy wielokąt na trójkąty prostami poprowadzonymi z początku spólrzędnych mamy:

$$Ax_s = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{6} (x_i + x_{i+1}) (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}),$$

$$Ay_s = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{6} (y_i + y_{i+1}) (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1})$$

przyczem pole wielokąta  $A = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1})$ , zaś wielkości

$x_{n+1}$  i  $y_{n+1}$  są identyczne z  $x_1$  i  $y_1$ .

Dla skrócenia rachunku obieramy zwykle początek spólrzędnych  $O$  na jednym z wierzchołków. To samo czynimy przy zastosowaniu sposobu wykreślnego przy pomocy wieloboku sznurowego, podobnie jak w ust. 11, II. Ażeby przytem dla wygody uniknąć trójkątów o polach ujemnych, trzeba obrać  $O$  tak, aby obieg  $O W_i W_{i+1} O$  był u wszystkich trójkątów zgodny.

Wycinek koła (fig. 20):  $x_s = \frac{2}{3} r \frac{\text{cięciwa } AB}{\text{łuk } AB} \equiv \frac{2}{3} r \frac{c}{l}$ , albo  $x_s = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\text{arc } \alpha} = 38,1972 \frac{r \sin \alpha}{\alpha (o)} = \frac{c r^2}{3 A}$ , jeżeli  $A = r^2 \text{arc } \alpha$  jest polem wycinka.

Wycinek półkolisty:  $x_s = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = 0,4244 r$ . Wycinek ćwierć-

kolisty:  $x_s = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}}{\pi} r = 0,6002 r$ . Wycinek  $60^\circ$ :  $x_s = \frac{2}{\pi} r = 0,6366 r$ .

Odcinek koła (fig. 21):  $x_s = \frac{C^3}{12 A} = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3 \alpha}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{\text{arc } 2 \alpha - \sin 2 \alpha}$

przyczem pole odcinka  $A = \frac{1}{2} r^2 (\text{arc } 2 \alpha - \sin 2 \alpha)$ .

Wycinek pierścienia kołowego (fig. 22).

$$x_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{\text{arc } \alpha} = 38,1972 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha(\circ)}$$

Pole ograniczone łukiem koła i dwiema stycznymi (fig. 23).

Odstęłość  $S$  od środka koła  $x_s = \frac{r}{3} \frac{\sin \alpha \text{tg}^2 \alpha}{\text{tg } \alpha - \text{arc } \alpha}$ .

Wycinek i odcinek elipsy (fig. 24): Spółrzędne środka masy znajdujemy najprościej uważając elipsę za rzut koła o promieniu  $a$ , nachylonego

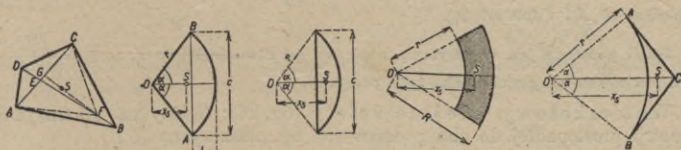


Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 23.

do płaszczyzny elipsy pod kątem  $\alpha$ , dla którego  $\cos \alpha = \frac{b}{a}$ . Rachunek można

zastąpić konstrukcją wykreślną uwidocznioną na rysunku, a polegającą na pokrewieństwie elipsy z kołem. Wogóle są środki masy dwu figur pozostających do siebie w stosunku pokrewieństwa punktami odpowiadającymi sobie nawzajem.

Parabola  $y^2 = 2 p x = \frac{b^2}{a} x$  (fig. 25) dzieli prostokąt utworzony ze współrzędnych  $a$   $b$  na pola o środkach  $S$  i  $S'$ . Pierwszy ma współrzędne

$$x_s = \frac{3}{5} a, \quad y_s = \frac{3}{8} b,$$

drugi zaś  $x_{s'} = \frac{3}{10} a, \quad y_{s'} = \frac{3}{4} b$ .

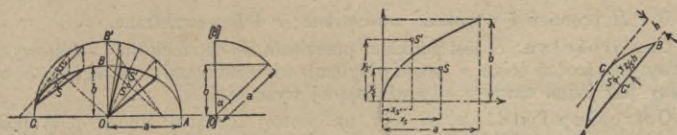


Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

Odcinek paraboli (fig. 26):  $S$  leży na prostej łączącej środek cięciwy  $C'$  z punktem styczności  $C$  równoległej do niej stycznej do paraboli (ta prosta ma kierunek osi paraboli), przyczem

$$S C' = \frac{2}{5} C C', \quad \text{czyli} \quad y_s = \frac{2}{5} h.$$

Pas i czasza kuli:  $S$  na osi symetrii w połowie wysokości.

Pobocznicza stożka obrotowego:  $S$  leży na prostej łączącej wierzchołek ze środkiem podstawy, w odległości od tejże równej jednej trzeciej wysokości.

Pobocznicza stożka obrotowego ściętego o wysokości  $h$ , promieniach  $R$  i  $r$ , podstawy dolnej i górnej, ma  $S$  na osi symetrii, w odległości od dolnej podstawy:

$$x_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{R + 2r}{R + r}.$$

Graniastosłup i walec o podstawach równoległych:  $S$  leży w połowie prostej łączącej środki obu podstaw.

Dla walca o tworzących równoległych do osi  $Z$  i podstawie dolnej na płaszczyźnie  $XY$ , a górnej na płaszczyźnie przechodzącej przez oś  $Y$  i nachylonej do  $X$  pod kątem  $\alpha$  (fig. 27) jest:

$$x_s = \frac{\int x^2 dA}{\int x dA}; \quad y_s = \frac{\int xy dA}{\int x dA}; \quad z_s = \frac{1}{2} x_s \operatorname{tg} \alpha.$$

Tutaj jest  $\int x dA = M_y$  momentem statycznym,  $\int x^2 dA = J_y$  „momentem bezwładności“ pola podstawy  $A$  względem osi  $Y$ ,  $\int xy dA = I_{xy}$  „momentem zbroczenia“ tegoż pola względem osi  $X$  i  $Y$  (ob. art. 30).

Jeżeli podstawa jest symetryczną względem osi równoległej do  $Y$ , to  $y_s = \frac{\int y dA}{A}$ , czyli jest równe odległości środka tejże podstawy.

Walec kołowy ukośnie ścięty (fig. 28):  $S$  leży na płaszczyźnie symetrii prostopadłej do obu podstaw (na fig. płaszczyzna  $XY$ )

$$x_s = \frac{1}{4} \frac{r^2 \operatorname{tg} \alpha}{h},$$

$$y_s = \frac{h}{2} + \frac{1}{8} \frac{r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{h}.$$

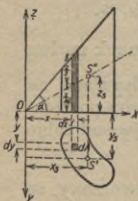


Fig. 27.

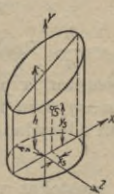


Fig. 28.

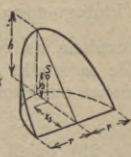


Fig. 29.

Klin walcowy (fig. 29) o jednej ścianie (podstawie) półkolistej:

$$x_s = \frac{3}{16} \pi r,$$

$$y_s = \frac{3}{32} \pi h.$$

Pobocznicza tego klina:

$$x_s = \frac{1}{4} \pi r,$$

$$y_s = \frac{1}{8} \pi h.$$

Klin z walca wydrążonego o podstawie kształtu pierścienia półkolistego:

$$x_s = \frac{3}{16} \pi (R^4 - r^4) / (R^3 - r^3), \quad y_s = \frac{3}{32} \pi (H^4 - h^4) / (H^3 - h^3).$$

$R$  i  $H$  promień i wysokość zewnętrzne;  $r$  i  $h$  wewnętrzne.

Czworościan:  $S$  jest punktem przecięcia się czterech linii środkowych (łączących środki ścian z przeciwległymi wierzchołkami). Odległość  $S$  od ściany jest jedną czwartą odpowiadającej wysokości.

Ostrosłup i stożek:  $S$  leży na prostej łączącej środek pola podstawy  $\Sigma$  z wierzchołkiem  $W$ , przyczem odległość  $S$  od podstawy równa się ćwierci wysokości.

Ostrosłup ścięty: Przy oznaczeniach przez  $A$  i  $B$  pól dolnej i górnej podstawy, a przez  $h$  wysokości ostrosłupa ściętego, mamy dla odległości  $S$  od podstawy  $A$  wzór:

$$y_s = \frac{h}{4} \frac{A + 2\sqrt{AB} + 3B}{A + \sqrt{AB} + B}.$$

Stożek ścięty o promieniach  $R$  i  $r$  podstawy dolnej i górnej, a wysokości  $h$  ma  $S$  w odległości od podstawy dolnej:

$$y_s = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Obelisk (fig. 30): Odległość środka  $S$  od podstawy dolnej jest

$$y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{a(b + b_1) + a_1(b + 3b_1)}{a(2b + b_1) + a_1(b + 2b_1)}.$$

Klin prosty: Z poprzedniego wzoru wypływa po podstawieniu  $b_1 = 0$  odległość środka  $S$  od podstawy (głowy klina) o polu  $ab$ :

$$y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{a + a_1}{2a + a_1}.$$

Odcinek kuli: Oznaczywszy przez  $h$  wysokość odcinka mamy dla odległości jego środka masy od środka kuli wzór:

$$x_s = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h},$$

zaś dla odległości tegoż środka masy od koła podstawowego o promieniu  $\rho$

$$x'_s = h - (r - x_s) = \frac{h}{4} \cdot \frac{4r - h}{3r - h} = \left[ \frac{h}{2} \frac{h^2 + 2\rho^2}{h^2 + 3\rho^2} \right].$$

Te wzory (z wyjątkiem ostatniego wyrażenia ujętego w klamry) stosują się także do odcinka elipsoidy obrotowej, której oś obrotu równa się  $2r$ .

Dla półkuli pełnej:  $x_s = \frac{3}{8}r$ ; dla półkuli wydrążonej:

$$x_s = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$$

Wycinek kuli (utworzony przez obrót wycinka koła o kącie środkowym  $2\alpha$  około osi symetrii): Przy oznaczeniach jak na fig. 18 jest:

$$x_s = \frac{3}{8}(1 + \cos \alpha)r = \frac{3}{8}(2r - h).$$

Paraboloida obrotowa (utworzona przez obrót paraboli około swej osi) ograniczona przekrojem kołowym prostopadłym do osi jako podstawą ma środek masy w odległości od podstawy równej jednej trzeciej wysokości.

Elipsoida trójosiowa o osiach  $2a$ ,  $2b$  i  $2c$ . Objętość jednej ósmej elipsoidy, wyciętej płaszczyznami głównymi, ma środek określony współrzędnymi:

$$x_s = \frac{3}{8}a, \quad y_s = \frac{3}{8}b, \\ z_s = \frac{3}{8}c.$$

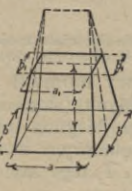


Fig. 30.

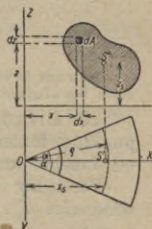


Fig. 31.

Wycinek bryły obrotowej (fig. 31) utworzonej obrotem figury o polu  $A$  około osi  $Z$  (jej nie przecinającej) ma środek masy  $S$  w punkcie, który jest zarazem środkiem masy łuku o promieniu  $\rho = \int x^2 dA / \int x dA = I_z / M_z$ . Odległością  $S$  od osi  $Z$  jest przeto:

$$x_s = \rho \sin \alpha / \text{arc } \alpha$$

jeżeli  $2\alpha$  jest kątem środkowym wycinka; odległością zaś od płaszczyzny  $XY$  jest:

$$z_s = \frac{\int xz \cdot dA}{\int x \cdot dA}.$$

W przypadku symetrii figury tworzącej względem prostej równoległej do osi obrotu upraszcza się powyższy wzór na:

$$z_s = \frac{\int x dA}{A}.$$

czyli  $z_s$  jest równe odległości środka pola figury tworzącej od osi  $X$ .

### C. Momenty bezwładności.

#### 1. Momenty bezwładności i zbieżności ciał materialnych.

**28. Określenia. Ramię czyli promień bezwładności. Masa zredukowana.** Zwyczajnym, albo osiowym momentem bezwładności  $I$  układu punktów materialnych  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) nazywamy sumę iloczynów  $m_i r_i^2$  tj. iloczynów mas punktów materialnych układu przez kwadraty ich odległości od danej prostej zwanej osią momentu. Dla układu materialnego ciągłego staje się w granicy ta suma całką elementów  $r^2 dM$  rozpostartą na całą objętość układu o masie  $M$ . A zatem:

$$I = \Sigma m_i r_i^2, \text{ albo } = \int r^2 dM.$$

Jednostką momentu bezwładności w układzie C. G. S. jest  $g^* cm^2$  albo  $kg^* cm^2$ ; w układzie technicznym  $kg. cm. sk^2$ .

Odległość  $k$  od osi momentu, w której pomyślany punkt materialny o masie równej masie  $M$  danego ciała, ma ten sam moment bezwładności  $I$ , co to ciało, nazywa się ramieniem lub promieniem bezwładności. A zatem:

$$I = Mk^2, \text{ a stąd } k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

Pomyślaną masę  $M_{\text{red}}$  skupioną w punkcie o danej odległości  $d$  od osi momentu, dla której  $M_{\text{red}} d^2 = I$ , czyli równa się momentowi bezwładności danego ciała, nazywamy masą zredukowaną, albo sprowadzoną na odległość  $d$ . A więc:

$$M_{\text{red}} = \frac{I}{d^2}.$$

Moment bezwładności ciała może być przeto określony także: a) jego masą i ramieniem bezwładności, b) dowolnie obraną odległością  $d$  i masą sprowadzoną na tę odległość.

**29. Biegunowy moment bezwładności** jest to suma iloczynów mas punktów materialnych (elementów) układu przez kwadraty ich odległości od danego punktu (bieguna lub środka momentu).

Pomiędzy biegunowym momentem bezwładności  $I_0$  a momentami bezwładności  $I_x, I_y, I_z$  tego samego ciała względem trzech wzajemnie prostopadłych osi przechodzących przez biegun momentu  $I_0$  zachodzi związek:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z.$$

Tak osiowy jak i biegunowy moment bezwładności jest zawsze wielkością dodatnią.

**30. Moment zbieżności, albo moment odśrodkowy** ciała względem dwu płaszczyzn jest to suma iloczynów z mas elementarnych i obu ich odległości np.  $x$  i  $y$  od tych płaszczyzn:

$$I_{xy} = \int xy dM, \text{ albo } = \Sigma x_i y_i dM.$$

Najczęściej przyjmuje się obie płaszczyzny wzajemnie prostopadłe, wobec czego  $x$  i  $y$  są spólrzędnymi prostokątnymi.

Obranamu układowi spólrzędnych  $X, Y, Z$  odpowiadają trzy momenty zbieżności  $I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}$ , które bywają także oznaczane symbolami  $D_z, D_x, D_y$ .

Momenty zboczenia mają ten sam wymiar, co momenty bezwładności, lecz mogą być zarówno ujemne jak dodatnie, a w szczególności równe zero.

**31. Momenty względem osi równoległych.** Moment bezwładności  $I$  względem jakiejkolwiek osi równa się sumie z momentu bezwładności  $I^{(0)}$  względem osi do niej równoległej, a przechodzącej przez środek masy  $S$  i iloczynu  $Ma^2$ , tj. masy ciała przez kwadrat odległości obu osi:

$$I = I^{(0)} + Ma^2.$$

Taki sam związek zachodzi pomiędzy biegunowym momentem bezwładności  $I_0^{(0)}$  względem  $S$ , a biegunowym momentem bezwładności  $I_0$  względem punktu  $O$  odległego od  $S$  o  $a$ :

$$I_0 = I_0^{(0)} + Ma^2.$$

Podobny związek między momentami zboczenia dla układu prostokątnego o początku w środku masy  $S$ , a takimiż momentami (odróżnionymi kreską) dla układu równoległego, w którym środek masy ma współrzędne  $a, b, c$ , ma postać:

$$I'_{xy} = I_{xy} + M a b, \quad I'_{yz} = I_{yz} + M b c, \quad I'_{zx} = I_{zx} + M c a.$$

**32. Momenty względem osi przecinających się w jednym punkcie ciała. Elipsoida bezwładności.** Jeżeli  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}$  oznaczają odpowiednio momenty bezwładności i zboczenia względem osi i płaszczyzn danego układu prostokątnego, którego początkiem jest dowolny punkt ciała  $O$ , to moment bezwładności  $I$  względem prostej przechodzącej przez  $O$  i tworzącej z osiami kąty  $\alpha, \beta, \gamma$  określa równanie:

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2 I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2 I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Dla każdego punktu  $O$  można znaleźć taki układ osi  $x, y, z$ , dla którego momenty zboczenia stają się zerami. Te trzy osi nazywają się osiami głównymi, a odpowiadające im osiowe momenty bezwładności noszą nazwę głównych (dla punktu  $O$ ). Oznaczamy je zwykle przez  $A, B$  i  $C$  (przyczem  $A \geq B \geq C$ ). W odniesieniu do osi głównych jako osi współrzędnych mamy tedy:

$$I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Skoro na każdej z osi przechodzących przez  $O$  odmierzymy po obu stronach  $O$  długości  $= K/\sqrt{I}$  (jeżeli  $K$  oznacza dowolnie obraną stałą), to miejscem geometrycznym wyznaczonych w ten sposób punktów jest elipsoida zwana elipsoidą bezwładności (Poinot) punktu  $O$ .

Jej osie leżą na głównych osiach bezwładności tegoż punktu ciała, a jej równanie ma postać:

$$K^2 = A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2.$$

Wielkościami półosi są  $K/\sqrt{A}, K/\sqrt{B}, K/\sqrt{C}$ , a zatem największemu momentowi bezwładności odpowiada najkrótsza oś elipsoidy.

**33. Centralna elipsoida bezwładności** odpowiada punktowi  $O$  obranemu w środku masy ciała  $S$ . Jej osie noszą nazwę centralnych głównych osi  $b$ , albo z powodu ważnych własności kinetycznych: osi swobodnych. Szukanie głównych osi bezwładności ułatwiają twierdzenia następujące:

a) Układ trzech głównych osi bezwładności dla każdego punktu leżącego na jednej z głównych osi centralnych jest równoległy do tychże osi.

b) Jedną z głównych osi bezwładności dla każdego punktu leżącego na płaszczyźnie dwu głównych osi centralnych jest równoległą do trzeciej z tychże osi.

c) Głównymi osiami bezwładności ciała są (między innymi): 1. Każda oś symetrii, 2. każda prosta prostopadła do płaszczyzny symetrii i 3. każda prosta, na której leżą środki masy warstw elementarnych, otrzymanych przez podział ciała płaszczyznami prostopadłymi do tej prostej.

2. Momenty bezwładności i zбочenia płaskich układów materjalnych.

**34. Elipsa bezwładności.** Obrawszy osie  $X$  i  $Y$  na płaszczyźnie układu widzimy, że dla jakiegokolwiek punktu tej płaszczyzny jest oś  $Z$  osią główną, albowiem momenty zбочenia  $I_{xz}$  i  $I_{yz}$  stają się równe zeru. Nadto  $I_z$  staje się równe biegunowemu momentowi bezwładności  $I_o$ , wobec czego:

$$I_z = I_o = I_x + I_y.$$

Zatem mamy do czynienia z jednym momentem zбочenia  $I_{xy}$ , który oznaczamy zwykle przez  $D$ .

Śladem elipsoidy bezwładności na płaszczyźnie układu jest elipsa:

$$I_x \xi^2 + I_y \eta^2 - 2 D \xi \eta = K^2$$

zwana elipsą bezwładności.

Obróciwszy dany układ osi  $X$  i  $Y$  o kąt  $\alpha$  otrzymujemy dla nowego układu  $X'$  i  $Y'$  momenty bezwładności i zбочenia w postaci:

$$I_x' = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - D \sin 2 \alpha$$

$$I_y' = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + D \sin 2 \alpha$$

$$D' = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2 \alpha + D \cos 2 \alpha.$$

**35. Culmannowska elipsa bezwładności.** Elipsa i elipsoida bezwładności Poinso't'a jest określona równaniami w poprzednich ustępach tylko co do postaci i położenia, a nieokreślona co do wielkości, gdyż parametr  $K$  jest dowolny. Jeżeli  $X$  i  $Y$  są kierunkami głównych osi bezwładności, a odpowiadające momenty bezwładności  $I_x$  i  $I_y$  oznaczmy przez  $I_1$  i  $I_2$ , to równanie elipsy bezwładności przyjmie postać:

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 = K^2.$$

Ustaliwszy wartość  $K$  zapomocą równania

$$K^2 = \frac{I_1 I_2}{M}$$

i wprowadziwszy ramiona bezwładności  $i_1$ ,  $i_2$  równaniami  $I_1 = M i_1^2$ ,  $I_2 = M i_2^2$ , otrzymujemy zupełnie oznaczoną szczególną elipsę bezwładności, zwaną Culmannowską, która gra nader ważną rolę w teorii zginania belek. Jej równanie jest:

$$\frac{x^2}{i_2^2} + \frac{y^2}{i_1^2} = 1.$$

Elipsa Culmann'a ma ważną własność następującą: Ramię bezwładności  $i$  względem prostej o dowolnym kierunku, przechodzącej przez środek elipsy równa się odległości tego środka od stycznej do elipsy równoległej do danej prostej.

**36. Szukanie głównych osi bezwładności. Koło bezwładności.** Jeżeli dla obranego kierunku osi spólrzędnych  $X$  i  $Y$ , o początku  $O$  w danym



punkcie układu płaskiego, znamy  $I_x, I_y$  i  $D$ , to główne momenty bezwładności dla tego punktu określają wzory:

$$I_{\max} \equiv A = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 D^2}$$

$$I_{\min} \equiv B = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 D^2}.$$

Kąt  $\alpha_0$ , o jaki trzeba obrócić układ osi, aby padły na kierunki główne, wyznacza się z warunku  $D' = 0$ , czyli

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_0 = \frac{2 D}{I_y - I_x}.$$

Temu równaniu czynią zadość dwie wartości  $\alpha_0$  w granicach od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Jedna z nich odpowiada oczywiście osi  $I_{\max}$ , druga zaś  $I_{\min}$ . Na pytanie „która?” odpowiada reguła:

Oś momentu  $I_{\max}$  przechodzi przez pierwszą i trzecią ćwiartkę płaszczyzny  $XY$ , jeżeli moment zбочenia  $D$  jest ujemny; w przypadku dodatniej wartości  $D$  leży oś  $I_{\max}$  w ćwiartce drugiej i czwartej.

W praktyce można zwykle z postaci figury poznać, jaki mniej więcej kierunek odpowiada  $I_{\max}$  i  $I_{\min}$ .

Obliczenie zapomocą powyższych równań zastępuje nader prosta konstrukcja wykreslna:

Na osi  $OY$  (fig. 32) odmierzamy  $OC = I_x$ ,  $CE = I_y$ , znajdujemy środek  $M$  odcinka  $OE$  i promieniem  $MO = \frac{1}{2}(I_x + I_y)$  zakreślamy z tego środka koło. W punkcie  $C$  wystawiamy następnie prostopadłą do  $OY$  i odcinamy na niej długość  $CT = D$  (momentowi zбочenia) z uwzględnieniem

znaku (na rysunku przyjęto  $D$  dodatnie). Średnica  $AB$  poprowadzona przez punkt  $T$  wyznacza swemi końcami  $A$  i  $B$  kierunki osi głównych  $OA$  i  $OB$ ; zaś wielkości głównych momentów bezwładności długością odcinków  $BT = I_{\max}$  i  $AT = I_{\min}$ .

Koło nakreślone w powyższej konstrukcji, zwane kołem bezwładności i punkt  $T$ , zwany głównym punktem bezwładności, można nadto zastosować do wyznaczenia  $I_{x'}, I_{y'}$  i  $D'$  dla układu osi obróconego z danego położenia  $XY$  o dowolny kąt  $\alpha$  (fig. 33). W tym celu wystarczy połączyć punkty przecięcia się tych osi z okręgiem koła średnicą  $FG$  i spuścić z  $T$  prostopadłą  $TH$  na tę średnicę. Wtedy  $GH = I_{y'}$ ,  $HF = I_{x'}$ ,  $HT = D'$ .

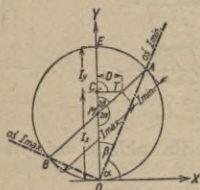


Fig. 32.

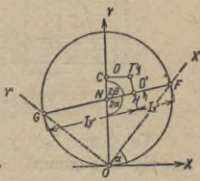


Fig. 33.

### 3. Momenty bezwładności najważniejszych technicznie linii, powierzchni i ciał materialnych.

37. Uproszczenia dla ciał jednolitych. Geometryczne momenty bezwładności i zбочenia. Gdy gęstość  $\mu$  ciała jest stała, to

$$I = \int r^2 dM = \mu \int r^2 dV = \mu J,$$

a wielkość

$$J = \int r^2 dV$$

o wymiarze  $\text{cm}^5$  nazywamy geometrycznym momentem bezwładności. Mnożąc go przez gęstość otrzymujemy zwykły (materialny) moment bezwładności ciała jednolitego.

Podobnie  $J_{xy} = \int xy dV$  jest geometrycznym momentem zbieżenia,  $J = \int r^2 dF$  geometrycznym momentem figury płaskiej lub powierzchni (o elemencie pola  $dF$ ), wreszcie  $J = \int r^2 d\ell$  geometrycznym momentem bezwładności linii (o elemencie długości  $d\ell$ ). Pierwszy mnożymy przez gęstość powierzchniową (w  $g^*/cm$ ), drugi zaś przez gęstość liniową (w  $g^*/cm$ ), ażeby otrzymać materialne momenty bezwładności.

Wymiarem geometrycznym momentu bezwładności pola i linii są odpowiednio  $cm^4$  i  $cm^3$ .

Używając technicznego układu jednostek piszemy zamiast gęstości  $\mu$  równy jej iloraz  $\gamma/g$ . Przytem oznacza  $\gamma$  ciężar jednostki objętości (w  $kg/cm^3$ ), pola (w  $kg/cm^2$ ) lub długości (w  $kg/cm$ ), zaś  $g$  przyśpieszenie ciężkości.

Ponieważ u ciał jednolitych ramię bezwładności  $i$  (lub  $k$ ) jest niezależne od gęstości, a tylko od postaci geometrycznej, przeto określwszy wartość ramienia wyrażamy wzorem  $I = M i^2$  nie tylko materialny, ale i geometryczny moment bezwładności takich ciał, rozumiejąc przez  $M$ , bądź to masę, bądź też objętość, albo pole, lub wreszcie długość przy gęstości = 1.

**38. Wzory dla przypadków szczególnych.** (Wskaźnik przy  $I$  oznacza poniżej oś lub biegun momentu bezwładności.)

Odcinek prosty lub równoległobok (fig. 34). Niezależnie od nachylenia do osi  $x$  jest  $I_x = \frac{1}{3} M h^2$  względem osi przechodzącej przez koniec odcinka lub podstawę równoległoboku, jeżeli  $h$  oznacza wysokość spuszczoną na  $X$  z drugiego końca odcinka lub przeciwległego podstawie wierzchołka równoległoboku.

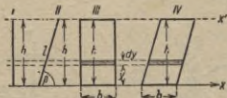


Fig. 34.

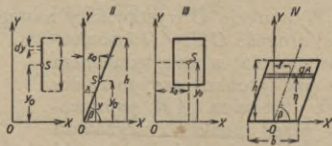


Fig. 35.

Te same figury dla układu osi przedstawionego na (fig. 35) mają momenty zbieżenia.

$$D = M x_0 y_0 \quad (\text{w przyp. I i III.})$$

$$D = I_x \cotg \beta \quad (\text{„ „ II i III.})$$

W przyp. II. można  $D$  przedstawić nadto w postaci  $D = \frac{4}{3} M x_0 y_0$ .

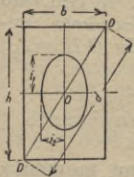


Fig. 36.

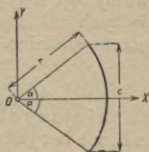


Fig. 37.

Prostokąt (fig. 36). Centralne główne momenty bezwładności są:

$$I_x = M \frac{h^2}{12} = \mu \frac{b h^3}{12};$$

$$I_y = M \frac{b^2}{12} = \mu \frac{b^3 h}{12}.$$

Odpowiadające ramiona bezwładności a zarazem półosi elipsy Culmannowskiej  $i_1 = 0,2887 h$ ,  $i_2 = 0,2887 b$ .

$$\text{Względem przekątnej } I_d = M \frac{b^2 h^2}{6 d^2}$$

$$\text{„ „ środka } O \quad I_0 = M \frac{b^2 + h^2}{12} = M \frac{d^2}{12}.$$

Łuk kołowy o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $2\alpha$  (fig. 37):

$$I_x = M \frac{r^2}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{\text{arc } 2\alpha} \right), \quad I_y = M \frac{r^2}{2} \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{\text{arc } 2\alpha} \right)$$

$$I_0 = I_x + I_y = M r^2, \quad M = \mu r \text{ arc } 2\alpha.$$

Dla całego okręgu:  $2\alpha = 360^\circ$ ,  $\text{arc } 2\alpha = 2\pi$

$$I_x = I_y = M \frac{r^2}{2}, \quad I_0 = M r^2.$$

Obwód elipsy o półosiach  $a$ ,  $b$  ( $a > b$ ) i mimośrodkie liczbowym  $\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  ma długość:

$$l = 2\pi a \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \cdot \epsilon^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot 3 \epsilon^4 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot 5 \epsilon^6 - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \cdot 7 \epsilon^8 - \dots \right]$$

a moment bezwładności względem osi wielkiej:

$$J_a = 2\pi a b^2 \left[ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \epsilon^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} \epsilon^4 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{5}{8} \epsilon^6 - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \cdot \frac{7}{10} \epsilon^8 - \dots \right]$$

Pole trójkąta o środku masy  $S$  (fig. 38):

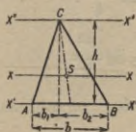


Fig. 38.

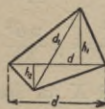


Fig. 39.

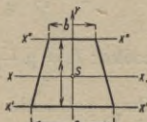


Fig. 40.

$$I_x = M \frac{h^2}{18}, \quad I_{x''} = M \frac{h^2}{2}, \quad I_{x'} = M \frac{h^2}{6};$$

$$(J_h)_B = \frac{bh^3}{4} + \frac{(b_1^3 + b_2^3)h}{12}; \quad (J_b)_{S'} = M \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36}.$$

Względem dowolnej prostej przechodzącej przez  $S$  jest

$$J = M(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)/12,$$

przyczem  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  są odległościami wierzchołków trójkąta od tej prostej.

Trójkąt równoramienny ( $b_1 = b_2 = b/2$ ):

$$\text{Względem osi symetrii: } J = \frac{b^3 h}{48};$$

$$\text{względem środka } S: \quad J_s = \frac{b h (4 h^2 + 3 b^2)}{144};$$

$$\text{względem wierzchołka } B: \quad J_B = \frac{b h (12 h^2 + b^2)}{48}.$$

Pole czworokąta (fig. 39). Względem przekątnej  $d$  jest:

$$J_d = \frac{d(h_1^3 + h_2^3)}{12}, \quad I_d = M \frac{1}{6} \frac{h_1^3 + h_2^3}{h_1 + h_2}.$$

W przypadku równoległoboku jest:

$$J_d = \frac{d d_1^3 \sin^3 \varphi}{48}, \quad I_d = M \frac{d_1^2 \sin^2 \varphi}{24}.$$

W przypadku trapezu równoramiennego (fig. 40):

$$I_{x'} = \mu \frac{h^3 (a + 3b)}{12} = M \frac{h^2}{6} \cdot \frac{a + 3b}{a + b},$$

$$I_{x''} = \mu \frac{h^3 (3a + b)}{12} = M \frac{h^2}{6} \frac{3a + b}{a + b},$$

$$I_y = \mu \frac{h}{48} \frac{a^4 - b^4}{a - b} = M \frac{a^2 + b^2}{24},$$

$$I_x = \mu \frac{h^3}{36} \left[ 2(a + b) - \frac{a^2 + b^2}{a + b} \right] = M \frac{h^2}{18} \left[ 1 + \frac{2ab}{(a + b)^2} \right].$$

Pole wielokąta umiarkowego. Długość boku  $a$ , liczba boków  $n$ , promień koła wpisanego  $r$ , opisanego  $R$ . Dla osi przechodzących przez środek jest

$$I_x = I_y = I = \mu \frac{n a r (12 r^2 + a^2)}{48} = M \frac{12 r^2 + a^2}{24} = M \frac{6 R^2 - a^2}{12}.$$

Pole koła. Względem każdej średnicy o długości  $d = 2r$  jest

$$I = \mu \frac{\pi r^4}{4} = \mu \frac{\pi d^4}{64} = M \frac{r^2}{4}.$$

Względem środka:  $I_o = \mu \frac{\pi r^4}{2} = \mu \frac{\pi d^4}{32} = M \frac{r^2}{2}.$

Półkole. Przy położeniu osi  $X$  na średnicy ograniczającej, a osi  $Y$  na osi symetrii jest:

$$I_x = I_y = \mu \frac{\pi r^4}{8} = M \frac{r^2}{4}.$$

Względem środka koła  $O$ :  $I_o = \mu \frac{\pi r^4}{4} = M \frac{r^2}{2}.$

Względem środka masy  $S$ :  $I_s = M \frac{r^2}{2} \left( 1 - \frac{32}{9\pi^2} \right).$

Pierścień kołowy o promieniu zewnętrznym  $R$ , wewnętrznym  $r$ .

Względem każdej średnicy jest  $I = \mu \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4} = M \frac{R^2 + r^2}{4}.$

Względem środka  $I_o = 2I.$

Wycinek koła (fig. 37).

$$I_x = \mu \frac{r^4}{8} \left( \text{arc } 2\alpha - \sin 2\alpha \right) = M \frac{r^2}{4} \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{\text{arc } 2\alpha} \right),$$

$$I_y = \mu \frac{r^4}{8} \left( \text{arc } 2\alpha + \sin 2\alpha \right) = M \frac{r^2}{4} \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{\text{arc } 2\alpha} \right),$$

$$I_o = M \frac{r^2}{2}, \quad I_s = M \frac{r^2}{2} \left( 1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{c^2}{r^2} \right).$$

Odcinek koła (fig. 41).

$$J_x = \frac{r^4}{8} \left( \text{arc } 2\alpha - \frac{4}{3} \sin 2\alpha + \frac{1}{6} \sin 4\alpha \right),$$

$$I_x = M \frac{r^2}{4} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\text{arc } 2\alpha - \sin 2\alpha} \right),$$

$$J_y = \frac{r^4}{8} \left( \text{arc } 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right),$$

$$I_y = M \frac{r^2}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\text{arc } 2\alpha - \sin 2\alpha} \right),$$

$$J_o = \frac{r^4}{4} \left( \text{arc } 2\alpha - \frac{2}{3} \sin 2\alpha - \frac{1}{6} \sin 4\alpha \right),$$

$$I_o = M \frac{r^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\text{arc } 2\alpha - \sin 2\alpha} \right).$$

Pole ograniczone łukiem koła i dwiema stycznymi (fig. 42).  
Centralnymi głównymi momentami bezwładności są:

$$J_x = r^4 \left( \frac{1}{6} \text{tg } \alpha + \frac{1}{24} \sin 2\alpha - \frac{1}{8} \text{arc } 2\alpha \right),$$

$$J_y = r^4 \left( \frac{1}{6} \text{tg}^3 \alpha + \frac{1}{3} \text{tg } \alpha - \frac{1}{24} \sin 2\alpha - \frac{1}{8} \text{arc } 2\alpha - \frac{1}{9} \frac{\sin^2 \alpha \text{tg}^4 \alpha}{\text{tg } \alpha - \text{arc } \alpha} \right).$$

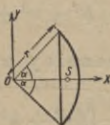


Fig. 41.

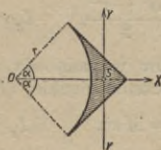


Fig. 42.

Nadto jest:  $J_o = \frac{r^4}{2} \left( \text{tg } \alpha + \frac{1}{3} \text{tg}^3 \alpha - \text{arc } \alpha \right).$

Elipsa. Względem osi wielkiej  $2a$  jest  $I_a = \mu \frac{\pi a b^3}{4} = M \frac{b^2}{4},$

względem osi małej  $2b$  jest  $I_b = \mu \frac{\pi a^3 b}{4} = M \frac{a^2}{4},$

względem środka  $O$  jako bieguna:  $I_o = M \frac{a^2 + b^2}{4}.$

Parabola (fig. 43).  $I_x = \mu \frac{4 a b^3}{15} = M \frac{b^2}{5},$

$$I_y = \mu \frac{4 a^3 b}{7} = M \frac{3 a^2}{7}; \quad I_{y''} = \mu \frac{32 a^3 b}{105} = M \frac{8 a^2}{35};$$

$$I_{y'} = \mu \frac{16 a^3 b}{175} = M \frac{12 a^2}{175}; \quad I_s = M \frac{12 a^2 + 35 b^2}{175}.$$

Prosty graniastosłup lub walec o wysokości  $h$  i polu podstawy (przekroju normalnego)  $B$ . Jedna z centralnych osi głównych  $Z$  łączy środki podstaw, dwie pozostałe  $X$  i  $Y$  są zarazem centralnymi osiami głównymi przekroju  $B$ . Oznaczywszy przez  $i_x, i_y, i_z$  odpowiadające ramiona bezwładności tego przekroju, mamy dla głównych centralnych momentów bezwładności ciała wzory:

$$I_x = M \left( \frac{h^2}{12} + i_x^2 \right), \quad I_y = M \left( \frac{h^2}{12} + i_y^2 \right), \quad I_z = M i_z^2.$$

W przypadku prostopadłościanu o krawędziach  $a, b, c$  przybierają powyższe wzory postać:

$$I_a = M \frac{b^2 + c^2}{12}, \quad I_b = M \frac{c^2 + a^2}{12}, \quad I_c = M \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

W przypadku sześcienu o krawędzi  $a$ :

$$I_x = I_y = I_z = M \frac{a^2}{6}.$$

W przypadku walca kołowego o promieniu  $r$ :

$$I_x = I_y = M \cdot \frac{3r^2 + h^2}{12}, \quad I_z = M \frac{r^2}{2}.$$

Względem prostej nachylonej do osi walca pod kątem  $\alpha$  (przechodzącej przez środek masy):

$$I_\alpha = M \frac{1}{12} \left[ 3r^2 (1 + \cos^2 \alpha) + h^2 \sin^2 \alpha \right].$$

W przypadku walca kołowego wydrążonego o promieniach  $R$  i  $r$ :

$$I_z = M \frac{R^2 + r^2}{2}, \quad I_x = I_y = M \frac{1}{4} \left( R^2 + r^2 + \frac{1}{3} h^2 \right).$$

Z tych wzorów wypada dla samej poboczniczy walca jako rury o ścianie nieskończenie cienkiej ( $R = r$ ):

$$I_z = M r^2, \quad I_x = I_y = M \frac{1}{12} (6r^2 + h^2).$$

Prosty ostrosłup lub stożek o wysokości  $h$  i polu podstawy  $B$ . Prosta łącząca środek podstawy z wierzchołkiem (prostopadła do podstawy) jest jedną z centralnych głównych osi bezwładności (oś  $Z$ ). Dwie drugie ( $X$  i  $Y$ ) są równoległe do głównych centralnych osi bezwładności podstawy  $B$ . Oznaczywszy przez  $i_x, i_y, i_z$  odpowiadające ramiona bezwładności podstawy  $B$ , mamy dla głównych centralnych osi bezwładności ciała wzory:

$$I_x = M \frac{3}{5} \left( \frac{h^2}{16} + i_x^2 \right), \quad I_y = M \frac{3}{5} \left( \frac{h^2}{16} + i_y^2 \right), \quad I_z = M \frac{3}{5} i_z^2.$$

W przypadku ostrosłupa prostokątnego o bokach podstawy  $a$  i  $b$  przyjmują powyższe wzory postać:

$$I_a = M \cdot \frac{4b^2 + 3h^2}{80}, \quad I_b = M \frac{4a^2 + 3h^2}{80}, \quad I_h = M \frac{a^2 + b^2}{20}.$$

W przypadku stożka obrotowego (kołowego) o promieniu podstawy  $r$ :

$$I_x = I_y = M \frac{3}{20} \left( r^2 + \frac{h^2}{4} \right), \quad I_z = M \frac{3r^2}{10}.$$

Dla samej poboczniczy stożka (jako jednolitej powierzchni materialnej) jest przy oznaczeniu długości tworzącej przez  $t$ :

$$I_x = M \frac{r^2}{2}, \quad I_z = \frac{\pi r^3 t}{2}.$$

Stożek obrotowy ścięty, o wysokości  $h$ , promieniach podstaw  $R$  i  $r$ . Moment bezwładności względem osi symetrii:

$$I_z = \frac{\pi h}{10} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R - r} = M \frac{3}{10} \frac{R^3 - r^3}{R - r}.$$

Dla samej poboczniczy stożka ściętego:  $I_z = M \frac{R^2 + r^2}{2}$ .

Kula o promieniu  $r$ . Względem którejkolwiek średnicy jest

$$I = \mu \frac{8}{15} \pi r^5 = M \frac{2 r^2}{5}.$$

Półkula. Względem którejkolwiek prostej przechodzącej przez środek kuli jest:

$$I = \mu \frac{4}{15} \pi r^5 = M \frac{2 r^2}{5}.$$

Kula wydrążona o promieniu zewnętrznym  $R$ , wewnętrznym  $r$ . Względem każdej średnicy jest

$$I = \mu \frac{8 \pi}{15} (R^5 - r^5) = M \frac{2}{5} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Powierzchnia kuli, względem którejkolwiek średnicy ma

$$J = \frac{8 \pi r^4}{3}, \quad I = M \frac{2 r^2}{3}.$$

Odcinek kuli o wysokości  $h$  (promień kuli  $r$ ). Względem osi symetrii jest

$$I = \mu \frac{\pi h^3}{30} (20 r^2 - 15 r h + 3 h^2) = M \frac{1}{10} \frac{20 r^2 - 15 r h + 3 h^2}{3 r - h}.$$

Wycinek kuli. (Wysokość czaszy  $h$ , promień kuli  $r$ .) Względem osi symetrii jest

$$I = \mu \frac{2 \pi r^2 h^2}{15} (3 r - h) = M \frac{h}{5} (3 r - h).$$

Elipsoida trójosiowa o półosiach  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ma centralne główne momenty bezwładności:

$$I_a = M \cdot \frac{1}{5} (b^2 + c^2), \quad I_b = M \frac{1}{5} (c^2 + a^2), \quad I_c = M \cdot \frac{1}{5} (a^2 + b^2).$$

Paraboloida obrotowa. Przy oznaczeniach jak na fig. 43 moment bezwładności względem osi symetrii:

$$I_x = M \frac{b^2}{3}, \quad \text{przyczem} \quad M = \mu \frac{\pi}{2} a b^2.$$

Pierścień, tj. bryła obrotowa pierścieniowata. Przy założeniu, że przekrój radialny pierścienia jest figurą symetryczną względem prostej  $Z'Z'$ , równoległej do osi obrotu  $ZZ$  (fig. 44); przy oznaczeniu ramion bezwładności tej figury tworzącej o polu  $F$  przez  $i_z$  (względem osi  $Z'Z'$ )  $i_x$  (względem osi  $XO \perp Z'Z'$ ) mamy:

$$I_z = \mu 2 \pi R F (R^2 + 3 i_z^2)$$

$$I_x = \mu \pi R F (R^2 + 3 i_z^2 + 2 i_x^2).$$

Nadto jest:  $M = \mu 2 \pi R F$  (według reguły Pappusa-Guldina).

Pierścień okrągły. Dla osi  $X$  przechodzącej przez środek koła tworzącego o promieniu  $a$  wypada z powyższych wzorów ogólnych:

$$I_z = \mu \frac{\pi^2 R a^2}{2} (4 R^2 + 3 a^2) = M (R^2 + \frac{3}{4} a^2),$$

$$I_x = \mu \frac{\pi^2 R a^2}{4} (4 R^2 + 5 a^2) = M \frac{1}{2} (R^2 + \frac{5}{4} a^2).$$

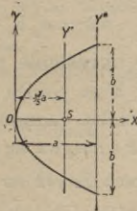


Fig. 43.

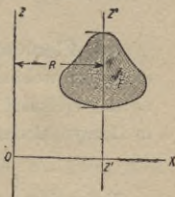


Fig. 44.

Pierścień okrągły wydrążony. Figura tworząca jest pierścieniem kołowym o promieniu wewnętrznym  $a_0$ , zewnętrznym  $a$ . Przy tem samym położeniu osi  $X$ , co powyżej, jest

$$I_z = M \left[ R^2 + \frac{3}{4} (a_0^2 + a^2) \right]; \quad M = \mu \cdot 2 \pi^2 R (a^2 - a_0^2).$$

$$I_x = M \cdot \frac{1}{2} \left[ R^2 + \frac{5}{4} (a_0^2 + a^2) \right]$$

Pierścień eliptyczny. Dla osi  $X$  przechodzącej przez środek elipsy tworzącej o półosiach  $a$  (w płaszczyźnie równikowej) i  $b$  (równoległej do osi obrotu  $z$ ), otrzymujemy podobnie jak powyżej:

$$I_z = \mu \frac{\pi^2 R a b}{2} (4 R^2 + 3 a^2) = M \left( R^2 + \frac{3}{4} a^2 \right)$$

$$I_x = \mu \frac{\pi^2 R a b}{2} (4 R^2 + 3 a^2 + 2 b^2) = M \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2 \right).$$

#### D. Praca i energia.

39. Pomocnicze wiadomości z rachunku wektorowego. Wielkość algebraiczną, czyli skalar, utworzony z dwu jakichkolwiek wektorów  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$  przez pomnożenie bezwzględnej wartości wektora  $\bar{a}$  przez bezwzględną wartość wektora  $\bar{b}$  i przez dostawę kąta między  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$ , nazywamy iloczynem skalarowym obu wektorów i wyrażamy symbolem:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \text{ albo } \bar{a} \bar{b}.$$

A zatem:

$$\bar{a} \bar{b} = a b \cos (\bar{a}, \bar{b}).$$

Z powyższego określenia wynika odrazu:

$$\bar{a} \bar{b} = \bar{b} \bar{a} \text{ (prawo przemienności)}$$

$$\bar{a} (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \bar{b} + \bar{a} \bar{c} \text{ (prawo rozdzielności).}$$

Nadto gdy wektory  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$  są określone swemi rzutami na osie współrzędnych prostokątnych, tj.

$$\bar{a} \equiv \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \bar{b} \equiv \{b_x, b_y, b_z\},$$

wówczas

$$\bar{a} \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

40. Elementarne określenie pracy. Jeżeli ciało odbywa przesunięcie określone wektorem  $\bar{s}$ , a na pewien punkt  $m$  tego ciała działa siła  $\bar{P}$ , stała co do wielkości i kierunku, zamykająca z przesunięciem  $\bar{s}$  punktu  $m$  kąt  $\alpha$ , to iloczyn skalarowy  $\bar{P} \bar{s}$  nazywa się pracą siły  $\bar{P}$  na przesunięciu  $\bar{s}$ . A zatem:

$$\text{Praca } L = P \cdot s \cos \alpha = \bar{P} \bar{s}.$$

Praca jest zatem wielkością algebraiczną, dodatnią w przypadku, gdy kąt  $\alpha$  jest ostry, ujemną zaś, gdy kąt  $\alpha$  jest rozwarty. Gdy w szczególności  $\alpha = 90^\circ$ , czyli gdy siła  $\bar{P}$  jest prostopadła do przesunięcia  $\bar{s}$ , to praca równa się zeru.  $L = P s$ , gdy  $\alpha = 0$ , czyli gdy siła ma ten sam kierunek co przesunięcie (droga); w przypadku gdy kierunek siły jest wprost przeciwny kierunkowi przesunięcia, jest  $\alpha = 180^\circ$ , zaś  $L = -P s$  (jeżeli  $P = |\bar{P}|$ ,  $s = |\bar{s}|$ ).



Ponieważ  $s \cos \alpha = s'$  jest rzutem przesunięcia  $s$  na kierunek siły  $\bar{P}$ , czyli „przesunięciem składowym w kierunku siły  $\bar{P}$ “, przeto pracę siły  $\bar{P}$  na przesunięciu  $s$  można określić także jako iloczyn z wielkości siły i przesunięcia składowego w kierunku tejże siły, albo też jako iloczyn z wielkości przesunięcia i składowej siły w kierunku tegoż przesunięcia.

Przy działaniu na ten sam punkt ciała ilukolwiek sił  $\bar{P}_1, \bar{P}_2 \dots$ ; o wypadkowej  $\bar{R}$ , mamy:

$$\bar{R}s = \bar{P}_1 s + \bar{P}_2 s + \dots,$$

czyli: Praca siły wypadkowej równa się sumie algebraicznej prac sił składowych.

Podobnie gdy przesunięcie  $\bar{s}$  punktu  $m$ , na który działa dana siła  $\bar{P}$ , jest wypadkowym przesunięciem  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots$ , to

$$\bar{P}s = \bar{P}s_1 + \bar{P}s_2 + \dots$$

czyli: Praca siły na przesunięciu wypadkowym równa się sumie algebraicznej prac tej siły na przesunięciach składowych.

**41. Ogólne określenie pracy.** Gdy siła  $\bar{P}$ , zmieniając wogóle wielkość i kierunek, działa na punkt  $m$  (fig. 45), poruszający się z położenia  $A$  do  $B$  po drodze krzywoliniowej o długości  $s$ , to rozkładamy cały ruch na przesunięcia elementarne  $\bar{d}s$ , a pracę pojmujemy jako sumę, czyli całkę prac elementarnych. Przez pracę elementarną zaś rozumiemy (w każdym dowolnym punkcie drogi) pracę chwilowej wartości geometrycznej siły  $\bar{P}$  na przesunięciu elementarnym  $\bar{d}s$  (odpowiadającym temu punktowi drogi). A zatem:

Praca elementarna  $dL = \bar{P} \bar{d}s = P \cos \alpha \cdot ds$ ,

zaś praca całkowita:

$$L = \int_{(A)}^{(B)} \bar{P} \bar{d}s = \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz),$$

jeżeli  $X, Y, Z$  oznaczają składowe siły a  $dx, dy, dz$  składowe przesunięcia w kierunkach osi prostokątnego układu współrzędnych.

Wymiarem pracy jest iloczyn  $[L][P]$  wymiaru długości i siły. Jednostką pracy w układzie technicznym jest  $1 \text{ kgm}$  („kilogramometr“, albo „metrokilogram“) tj. praca siły jednego kilograma na długości jednego metra. W układzie .O.G.S. jest jednostką pracy  $1 \text{ erg}$ , tj. praca siły 1 dyny na długości = 1 cm. Większą jednostką pochodną jest 1 Joule (czyt. Dżul) =  $10^7$  ergów.

$1 \text{ km} = 9,81 \text{ Joule'ów}$ ;  $1 \text{ Joule} = 0,102 \text{ kgm}$ .

**42. Praca w jednostce czasu, czyli moc lub dzielnosc** jest określona ogólnym równaniem

$$E = \frac{dL}{dt} = P v \cos \alpha,$$

jeżeli  $\alpha$  jest kątem pomiędzy siłą  $\bar{P}$  a prędkością  $\bar{v}$  punktu, na który siła działa.

Gdy w szczególności siła ma kierunek prędkości, to  $E = P \cdot v$ .

Jednostką techniczną mocy jest  $1 \text{ kgm/sk}$ , czyli 1 kilogramometr na sekundę. Osobną nazwę ma tradycyjna jednostka pochodna:  $75 \text{ kgm/sk} = 1 \text{ KM}$ , tj. koń mechaniczny.

Jednostką mocy w układzie C. G. S. jest 1 Joule na sekundę =  $10^7$  ergów na sekundę = 1 Watt (skrót = 1 W). Większą jednostką pochodną jest 1 kilowatt = 1000 Wattów =  $10^{10}$  erg/sk.

$1 \text{ KM} = 75 \text{ kgm/sk} \simeq 0,736 \text{ KW}$ ,  
 $1 \text{ KW} \simeq 1,36 \text{ KM}$ , albo  $102 \text{ kgm/sk}$ ,  
 $1 \text{ kgm/sk} \simeq 9,81 \text{ W}$ .



Fig. 45.

Moc  $E$  określona powyżej jest to moc chwilowa. Znając moc chwilową w zależności od czasu  $t$  obliczamy pracę w czasie  $t_2 - t_1$  z wzoru:  $L = \int_{t_1}^{t_2} E dt$ .

$$\text{Iloraz } \frac{L}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} E dt}{t_2 - t_1} = E_{\text{śr}}$$

określa moc średnią. Nawzajem jest  $L = E_{\text{śr}}(t_2 - t_1)$ .

To równanie prowadzi do nowych, również rozpowszechnionych w praktyce, jednostek pracy:

$$1 \text{ koniogodzina} = 1 \text{ KM godz.} = 270\,000 \text{ kgm} = 270 \text{ tm (tonmetrów)}$$

$$1 \text{ kilowattgodzina} = 1 \text{ KW h} \approx 367\,000 \text{ kgm} = 367 \text{ tm.}$$

### 43. Wykres pracy. Z określenia pracy równaniem,

$$L = \int P' ds,$$

przyczem  $P' = P \cos \alpha$  jest rzutem siły na kierunek przesunięcia, wypływa wykreślne przedstawienie pracy (fig. 46) jako pola ograniczonego krzywą  $AB$ , przedstawiającą zależność  $P'$  od  $s$ , osią dróg i rzędnymi odpowiadającymi początkowym i końcowym wartościom  $P'$  i  $s$ .

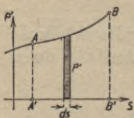


Fig. 46.

Podobnie przedstawia się wykreślne pracę daną w postaci  $L = \int P ds'$ , przyczem  $ds' = ds \cos \alpha$  jest rzutem elementu drogi na kierunek siły. W przypadku np. siły ciężkości  $G$  uważanej za stałą, jest przy jakimkolwiek ruchu punktu, na który siła działa, wykres pracy ograniczony prostą równoległą do osi  $s'$ , czyli do osi wysokości, a praca

$$L = Gh,$$

jeżeli  $h$  oznacza wysokość położenia początkowego nad końcowym.

44. Obliczenie pracy w przypadku, gdy siła jest określona polem potencjalnym. Pole sił nazywamy potencjalnym, jeżeli praca elementarna siły pola jest różniczką zupełną jednowartościowej funkcji miejsca  $-U(x, y, z)$ , czyli jeżeli

$$X dx + Y dy + Z dz = -dU = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Ten warunek jest identyczny z następującym:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Funkcja  $U$  nazywa się potencjałem pola sił. (Wprowadzenie jej ze znakiem  $-$  ma tylko historyczne uzasadnienie, dzięki pierwszemu zastosowaniu pojęcia potencjału do pola ciężkości.)

Pracę siły  $\vec{P}$  na dowolnej drodze od położenia początkowego  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  do końcowego  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  przedstawia w tym przypadku wyrażenie:

$$L = \int_{M_0}^{M_1} (X dx + Y dy + Z dz) = U(x_0, y_0, z_0) - U(x_1, y_1, z_1) = U_0 - U_1$$

niezależnie od postaci i długości drogi.

Potencjał ma przeto wymiar pracy. Jego wartość liczbowa jest jednakże nieoznaczona, skoro bowiem dane pole sił określa funkcja  $U$ , to określa je również funkcja  $U + C$ , przyczem  $C$  jest stałą dowolną, która przy różniczkowaniu znika. Dlatego można mierzyć tylko różnice potencjału w różnych

miejskach, przyjmując w jednym miejscu, stosownie obranem, dowolną stałą wartość potencjału, np, równą  $O$ .

**45. Potencjał jednostkowy, czyli właściwy. Pole siły ciężkości.** Jeżeli siła pola jest określona w odniesieniu do punktu materjalnego o masie  $= 1$ , czyli dana natężeniem pola, to odpowiadający potencjał nazywamy jednostkowym. Ma on wymiar ilorazu pracy przez masę. (Natężenie pola ma wymiar przyspieszenia). Mnożąc potencjał właściwy przez masę punktu materjalnego, znajdującego się w pewnym miejscu pola, otrzymujemy odpowiadający potencjał zwyczajny. Dla siły ciężkości, określonej natężeniem pola  $g$  uważanem w pierwszym przybliżeniu za stałe, jest potencjał jednostkowy

$$U = g z,$$

jeżeli  $z$  oznacza wysokość ponad obranym poziomem porównawczym, dla którego  $U = 0$ . Stąd nazwa „powierzchni poziomu“ dla powierzchni ekwipotencjalnych wogóle.

Dla siły ciężkości określonej w drugim przybliżeniu jako siła skierowana ku środkowi ziemi (uważanej za kulę) jest stosownie do newtonowskiego prawa grawitacji natężenie ciężkości  $= f \frac{M}{(R+z)^2} = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$ , jeżeli  $f$  oznacza stałą grawitacji,  $M$  masę ziemi o promieniu  $R$ ,  $z$  wysokość nad poziomem morza, zaś  $g_0$  natężenie ciężkości w poziomie morza. Stąd potencjał:

$$U = -\frac{g_0 R^2}{R+z} = -gR + gz - g\frac{z^2}{R} + \dots$$

Powierzchnie ekwipotencjalne są kulami współśrodkowymi z ziemią. (Wpływ obrotu ziemi na pole ciężkości względnej będzie rozpatrywany w art. 54.).

**46. Energia kinetyczna. ( $E_k$ ).** Dla punktu materjalnego o masie  $m$ , poruszającego się z prędkością  $\bar{v}$ , jest

$$E_k = \frac{1}{2} m \bar{v} \bar{v} = \frac{1}{2} m v^2.$$

Dla układu punktów materjalnych  $m_i$  o prędkościach  $\bar{v}_i$  jest

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2.$$

Dla ciała materjalnego ciągłego:  $E_k = \int \frac{1}{2} v^2 dM$ .

Energja kinetyczna jest przeto zawsze skalarem dodatnim o tym samym wymiarze co praca. Jednostki pracy są zarazem jednostkami energii kinetycznej.

Mimo to nie wolno utożsamiać pojęć energii kinetycznej i pracy. Wszak i moment siły ma ten sam wymiar co praca i energja. Obok wybitnych różnic fizykalnych łatwo zauważyć i matematyczne; np. praca może być równie dobrze dodatnia jak ujemna, podczas gdy energja kinetyczna tylko dodatnia. Obliczenie energii kinetycznej ciała przedstawia się szczególnie prosto w przypadkach ruchu postępowego i ruchu obrotowego. W pierwszym jest  $E_k = \frac{1}{2} M v^2$ , jeżeli  $M$  oznacza masę całego ciała; w drugim zaś

$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$ , przyczem oznacza  $I$  moment bezwładności, a  $\omega$  prędkość kątową ciała względem (chwilowej) osi obrotu.

47. Twierdzenie Koenig'a. Energia kinetyczna ciała sztywnego. Połączmy w myśli ze środkiem masy  $S$  danego układu materjalnego (najogólniejszego), poruszającego się dowolnie, pomocniczy układ odniesienia, obdarzony ruchem postępowym; wówczas energia kinetyczna układu danego jest sumą dwu wielkości: Jedna z nich przedstawia energję kinetyczną, jakąby miał punkt materjalny poruszający się z prędkością  $u$  środka masy układu  $S$ , gdyby w nim skupić całą masę układu  $M$ ; druga zaś jest energją kinetyczną ruchu względnego w pomocniczym układzie odniesienia. Czyli

$$E_k = \frac{1}{2} M u^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

jeżeli  $\overline{w_i}$  oznaczają prędkości punktów  $m_i$  względem pomocniczego układu odniesienia.

Gdyby pomocniczy układ odniesienia miał początek nie w  $S$ , lecz w innym punkcie poruszającego się układu materjalnego, to w równaniu powyższem przybywa jeszcze wyraz  $M \overline{u w_0}$ , w którym  $\overline{w_0}$  oznacza prędkość środka masy  $S$  względem pomocniczego układu odniesienia. Stosując powyższy wynik do ciała sztywnego, którego ogólny ruch chwilowy, jak wiadomo z kinematyki, jest złożony z obrotu chwilowego z prędkością kątową  $\overline{\omega}$ , około osi przechodzącej przez dowolnie obrany punkt ciała i z przesunięcia chwilowego z prędkością  $\overline{u}$ , otrzymujemy w wypadku ogólnym:

$$E_k = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + M(\overline{u} \cdot \overline{v_0} - u^2).$$

Tutaj oznacza  $I$  moment bezwładności ciała względem obranej osi obrotu,  $\overline{v_0}$  prędkość środka masy ciała, wreszcie  $\overline{u}$  prędkość punktu leżącego na obranej osi obrotu. Skoro zaś oś obrotu oierzemy tak, aby przechodziła przez środek masy ciała  $S$ , to  $\overline{u} = \overline{v_0}$ , a zatem:

$$E_k = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

czyli energia kinetyczna ciała sztywnego jest równa sumie energii kinetycznej jego ruchu chwilowego postępowego z prędkością środka masy i energii kinetycznej obrotu chwilowego około osi przechodzącej przez ten środek.

#### E. Zasady dynamiki punktu materjalnego.

48. Zasada pracy. Jeżeli  $\overline{P}$  jest wypadkową sił działających na punkt materjalny swobodny o masie  $m$ , to mnożąc podstawowe równanie dynamiki  $m \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{P}$  skalarowo przez  $\overline{v} dt = d\overline{s}$ , dochodzimy do równania:

$$d \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \overline{P} d\overline{s} \text{ albo } = X dx + Y dy + Z dz,$$

czyli: Przyrost elementarny energii kinetycznej równa się pracy elementarnej całkowitej siły wywołującej ruch punktu materjalnego swobodnego.

Całkowanie zaś powyższego równania między położeniem początkowem  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  a końcowem  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  daje:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = L \equiv \int_{(M_0)}^{(M_1)} \overline{P} d\overline{s},$$

lub słowami: Przyrost energii kinetycznej punktu materialnego swobodnego między jakimikolwiek dwoma po sobie następującymi punktami jego toru równa się pracy siły wywołującej ruch tego punktu na drodze od położenia początkowego do końcowego.

49. Ruch nieswobodny powstaje, gdy przy pomocy pewnych ciał uważanych za sztywne zmusimy punkt materialny poruszający się pod wpływem sił danego pola do uczynienia zadość pewnym warunkom geometrycznym jak np.:

1. Punkt materialny jest zmuszony do pozostawania na pewnej powierzchni.

2. Punkt materialny jest zmuszony do pozostawania na pewnej krzywej.

W pierwszym przypadku mamy do czynienia z jednym warunkiem ograniczającym w postaci równania powierzchni  $F(x, y, z) = 0$ . Punkt materialny ma jeszcze 2 stopnie swobody. W drugim przypadku zachodzą dwa warunki ograniczające w postaci dwu równań krzywej np.  $\Phi(x, y, z) = 0$  i  $\Psi(x, y, z) = 0$ , a punkt ma już tylko 1 stopień swobody.

Ograniczenie swobody jest równoważne sile, jaka powierzchnia lub krzywa ograniczająca swobodę wywiera na dany punkt materialny. Tę siłę nazywamy reakcją, oddziaływaniem, albo odporem powierzchni lub krzywej. Przez wprowadzenie reakcji sprowadza się zadanie ruchu nieswobodnego do zadania ruchu swobodnego pod wpływem wypadkowej siły pola i reakcji.

Siły pola (zależne zwyczajnie od miejsca, a niekiedy i od czasu) noszą także nazwę sił czynnych, tj. takich, które wytwarzają ruch punktu materialnego ze stanu jego spoczynku. Natomiast reakcje ciał (sztywnych) ograniczających swobodę punktu materialnego, oraz siły zależne od prędkości (jak np. opór ośrodka ciągłego), zalicza się do sił biernych, tj. takich, które same nie mogą wywołać ruchu punktu materialnego będącego w spoczynku.

Ogromne uproszczenie uzyskujemy w przypadku, gdy reakcja może być tylko normalną do powierzchni lub krzywej ograniczającej swobodę. Powierzchnie i krzywe nazywamy wtedy doskonale gładkimi. Praca odpowiadających im reakcji jest zawsze równa zeru. Wtedy dla ruchu po danej krzywej pod wpływem danych sił pola znajdujemy z zasady pracy odrazu skończone równanie ruchu.

50. Reakcja toru doskonale gładkiego. Siła odśrodkowa. Całkowite przyspieszenie  $\bar{p}$  punktu materialnego zmuszonego, do pozostawania na torze danym, odpowiada wypadkowej z siły czynnej (siły pola)  $\bar{P}$  i reakcji  $\bar{R}$ , która ma kierunek normalny do toru, czyli

$$m\bar{p} = \bar{P} + \bar{R}$$

Ograniczając się do przypadku gdy siła  $P$  i tor leżą w jednej płaszczyźnie (fig. 47), otrzymujemy przez rzutowanie powyższego równania na kierunek stycznej i normalnej:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = P_t \quad m \frac{v^2}{\rho} = P_n + R.$$

Te równania wyrażają:

1. Składowa styczna przyspieszenia  $\frac{d^2 s}{dt^2}$  jest uwarunkowana składową styczną  $P_t$  siły czynnej.

2. Składowa normalna przyspieszenia  $\frac{v^2}{\rho}$  jest uwarunkowana wypadkową składowej normalnej  $P_n$  siły czynnej i reakcją  $R$ .

3. Reakcja toru występuje wogóle także wtedy, gdy  $P_n = 0$  i równa się wówczas  $\frac{mv^2}{\rho}$  (siła dośrodkowa). Nawzajem punkt materialny poruszający się po torze danym wywiera nań nacisk o tej samej wielkości  $\frac{mv^2}{\rho}$ , lecz skierowany przeciwnie, t. zn. od środka krzywizny na zewnątrz toru. Siła ta nosi nazwę: „Siła odśrodkowa“.

Zważywszy, że pod tem samym mianem kryją się jeszcze dwa inne pojęcia dynamiczne, należy pamiętać, że przez siłę odśrodkową w ruchu nieswobodnym na danym torze rozumiemy siłę, jaką poruszający się punkt materialny wywiera na tor.

**51. Zasada zachowania energii.** W polu sił potencjalnem jest (według ust. 44)  $L = U_0 - U_1$ . Po wstawieniu tej wartości w równanie wyrażające zasadę pracy (ust. 48) otrzymujemy wzór:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + U_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 + U_0 = \text{stałe};$$

albo

$$E_k + U = \text{stałe},$$

ważny tak dla ruchu swobodnego, jak i nieswobodnego bez oporów (tj. gdy reakcje są normalne do torów). Wyrażenie  $E_k + U$  nazywamy całkowitą energją punktu materialnego. Otrzymane równanie wyraża zasadę zachowania energii dla jednego punktu materialnego; czyli słowami:

Podczas ruchu punktu materialnego w potencjalnem polu sił zachowuje całkowita energia punktu wartość stałą.



Fig. 47.

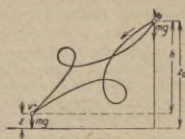


Fig. 48.

Dla pola siły ciężkości, uważanej w niewielkim obszarze za stałą jest:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g z = \text{stałe} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0.$$

Stąd dla punktu materialnego, spadającego (bez tarcia) po jakimkolwiek wymuszonym torze (zakrzywionym w sposób ciągły; fig. 48) przy prędkości początkowej  $v_0 = 0$ , mamy:

$$v^2 = 2g(z_0 - z) = 2gh.$$

**52. Równowaga punktu materialnego. Położenie równowagi. Zasada prac przygotowanych.** Położeniem równowagi punktu materialnego w danem polu sił i przy danych warunkach geometrycznych nazywamy miejsce, w którym punkt materialny może spoczywać. Koniecznym i wystarczającym warunkiem równowagi jest:

1. Dla punktu materialnego swobodnego, aby w tem miejscu siła pola  $\bar{P} = 0$  (albo  $X = 0, Y = 0, Z = 0$ ).

2. Dla punktu materialnego nieswobodnego (bez tarcia), aby siła  $\bar{P}$  była prostopadła do krzywej lub powierzchni organiczującej swobodę.

Obadwa powyższe wysłowienia warunków równowagi ujmuje razem z ogólnego stanowiska zasada prac przygotowanych.

W położeniu równowagi jest suma algebraiczna prac przygotowanych wszystkich sił działających na punkt materialny równa zeru. Ta równość stanowi konieczny i wystarczający warunek równowagi.

Przez pracę przygotowaną (wyobraźlną, wirtualną) rozumiemy fikcyjną pracę na przesunięciu przygotowanym, t. zn. takim przesunięciu elementarnem, jakiego by mógł punkt doznać, gdyby go w jakimkolwiek sposób niezależny od sił rzeczywiście działających wyprowadzić z położenia równowagi. Przesunięcie przygotowane punktu materialnego swobodnego jest przeto zupełnie dowolne tak co do kierunku, jak i wielkości (nieskończenie małej); dla punktu materialnego, zmuszonego do przebywania na danej powierzchni, leżą wszystkie kierunki przesunięcia przygotowanego w płaszczyźnie stycznej do powierzchni w odpowiadającym punkcie; zaś dla punktu materialnego, zmuszonego do pozostawiania na

danej krzywej, wskazuje styczna w odpowiadającym punkcie jedyne dwa możliwe kierunki przesunięcia przygotowanego o wielkości również dowolnej, lecz nieskończenie małej.

Dla odróżnienia od przesunięć elementarnych rzeczywistych oznaczamy przesunięcia przygotowane przez  $\delta \bar{s}$ , a pracę przygotowaną  $\bar{P} \delta \bar{s}$  przez  $\delta L$ .

W polu sił, określonych potencjałem  $U$ , jest:

$$\delta L = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right) = - \delta U.$$

W położeniu równowagi jest  $\delta U = 0$ , czyli  $U$  jako funkcja współrzędnych  $x, y, z$  osiąga ekstremum.

### 53. Stałość czyli stateczność równowagi w polu potencjalnym.

Równowagę punktu materialnego nazywamy stałą czyli stateczną, gdy po udzieleniu punktowi bardzo małej prędkości w położeniu równowagi powstają pod wpływem sił pola tylko bardzo małe wahnięcia około tego położenia. Skoro natomiast zamiast wahań powstaje ruch oddalający punkt materialny na zawsze od położenia równowagi, to nazywamy ją niestalą. Równowaga punktu materialnego w polu potencjalnym jest stałą w położeniu odpowiadającym minimum energii potencjalnej (kryterjum Minding'a i Lejeune-Dirichlet'a), zaś niestalą w położeniu odpowiadającym maximum energii potencjalnej.

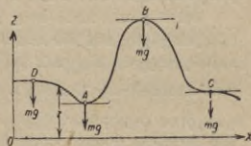


Fig. 49.

**Przykład.** Na krzywej  $DABC$  (fig. 49), leżącej w płaszczyźnie pionowej i ograniczającej swobodę ruchu punktu materialnego jest  $A$  położeniem równowagi stałej,  $B$  niestalej. W punktach  $C$  i  $D$  jest równowaga widocznie również niestala (z wykluczeniem sarnia).  $U = mgz$  osiąga w nich również ekstremum, które nie jest ani minimum, ani maximum.

### 54. Dynamika punktu materialnego w układzie względnym.

Jeżeli siła „bezwzględna“  $\bar{P}_b$  udziela punktowi o masie  $m$  przyspieszenia  $\bar{a}_b$  w układzie bezwzględnym czyli inercyjnym, to  $\bar{P}_b = m \bar{a}_b$ . Według związku, podanego w ust. 16 kinematyki, jest przyspieszenie względne  $\bar{a}_w = \bar{a}_b - \bar{a}_u - \bar{a}_c$ , przyczem oznacza  $\bar{a}_u$  przyspieszenie unoszenia, zaś  $\bar{a}_c$  przyspieszenie Coriolis'a. A zatem:

$$m \bar{a}_w = m \bar{a}_b - m \bar{a}_u - m \bar{a}_c,$$

$$\text{czyli} \quad \bar{P}_w = \bar{P}_b - \bar{P}_u - \bar{P}_c,$$

co wyraża twierdzenie:

W układzie względnym odbywa się ruch punktu materialnego tak, jak gdyby nań działała „siła względna“  $\bar{P}_w$ , która jest wogóle wypadkową „siły bezwzględnej“  $\bar{P}_b$ , przeciwnie wziętej „siły unoszenia“  $\bar{P}_u = m \bar{a}_u$  i przeciwnie wziętej „siły Coriolis'a“  $\bar{P}_c = m \bar{a}_c$ .

W szczególnym przypadku równowagi względnej znikają zawsze siły Coriolis'a  $\bar{P}_c$ , a siła względna jest wypadkową siły bezwzględnej i przeciwnie wziętej siły unoszenia.

Skoro ruch układu względnego jest obrotem jednostajnym z prędkością kątową  $\omega$ , to  $-\bar{P}_u = m \rho \omega^2$  nazywamy „siłą odśrodkową“ (jeżeli  $\rho$

jest promieniem-wektorem prostopadłym do osi obrotu, którego koniec schodzi się z punktem materialnym). Oto drugie ze znaczeń nazwy „siła odśrodkowa“, wspomnianych w art. 50.

Takim układem jest ze znacznym przybliżeniem nasza ziemia dzięki obrotowi dziennemu z prędkością kątową  $\omega = \frac{2\pi}{86164 \text{ sk}} = 0,000073 \text{ sk}^{-1}$ . Pomiary siły ciężkości na powierzchni ziemi określają siłę względną, która jest wypadkową grawitacji jako siły bezwzględnej i siły odśrodkowej. Ta ostatnia ma ściśle wartość  $\rho \omega^2$ , jeżeli  $\rho$  oznacza promień równoleżnika i jest prostopadłą do osi ziemskiej. Wartość grawitacji według prawa Newton'a przedstawia się w pierwszym przybliżeniu wyrażeniem  $f \frac{M \cdot m}{r^2}$ , przyczem oznacza:  $f$  stałą grawitacji,  $M$  masę ziemi,  $m$  masę punktu materialnego  $r$  jego odległość od środka ziemi. (To wyrażenie byłoby ściśłem gdyby ziemia miała budowę o symetrii kulistej). Z powodu sferoidalnego kształtu ziemi jest dokładne obliczenie grawitacji wielce złożone i prowadzi do wyrażenia, które również maleje ze wzrostem  $r$ , czyli w miarę oddalania się od biegunów ku równikowi. Obraczący za zmienną niezależną szerokość geograficzną  $\varphi$ , otrzymujemy przyrost grawitacji od równika ku biegunom z wielką dokładnością proporcjonalny względem  $\sin^2 \varphi$ . Taką samą zależność znajdujemy dla składowej pionowej siły odśrodkowej, którą należy odjąć od odpowiadającej składowej grawitacji, ażeby otrzymać ciężkość względną. Stąd prawdziwie, że ciężkość względną przyrasta od równika ku biegunom proporcjonalnie względem  $\sin^2 \varphi$ .

Jeżeli punkt materialny porusza się w polu ciężkości względnej, to zachowuje się tak, jak gdyby nań działała nadto siła Coriolis'a. Jej wartość  $2m v \omega \sin(\bar{v}, \omega)$  staje się największą, gdy kierunek prędkości (względnej)  $\bar{v}$  jest prostopadły do osi ziemskiej. Wówczas stosunek siły Coriolis'a do ciężkości względnej  $mg$  równa się  $\frac{0,000146 v}{9,81}$ , czyli około

0,000015  $v$  (jeżeli  $v$  wyrażamy w  $m/sk$ ). A zatem dla prędkości kuli karabinowej może siła Coriolis'a dopiero dojść do 1% ciężkości, dlatego pomijamy ją w zwykłych zadaniach mechaniki technicznej, a pole ciężkości względnej, uważane w obrębie jednego budynku za jednorodne, traktujemy zarazem jako pole siły bezwzględnej.

**55. Względna równowaga ważkiego punktu materialnego w układzie poruszającym się względem ziemi.** Takim układem jest np. wagon kolejowy, statek itp,

a) Przy ruchu postępowym układu z poziomym przyspieszeniem  $\bar{a}$  (fig. 50) jest siła względna  $\bar{P}_w$  wypadkową pionowej siły ciężkości  $m\bar{g}$  i poziomej  $-m\bar{a}$ . Siła  $\bar{P}_w$  jest odchylna od pionu o kąt  $\alpha$ , określony równaniem

$\text{tg } \alpha = \frac{a}{g}$ . Jej natężenie  $a_w = \sqrt{a^2 + g^2}$ . W tym przypadku mamy więc

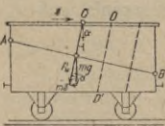


Fig. 50.

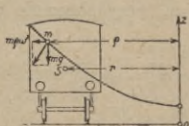


Fig. 51.

do czynienia z polem jednorodnym o pochyłych liniach sił i płaszczyznach ekwipotencjalnych opadających pod kątem  $\alpha$  w kierunku przyspieszenia układu względem ziemi.

b) Przy ruchu obrotowym układu około osi pionowej ze stałą prędkością kątową  $\omega$  (np. wagon jadący po łuku poziomym, fig. 51) jest siła względna wypadkową ciężkości  $mg$  i siły odśrodkowej  $m\rho\omega^2$ . Obraczący osie  $x$  i  $y$  w płaszczyźnie poziomej, a  $z$  na osi obrotu otrzymujemy wyrażenie dla energii potencjalnej:

$$U = mgz - \frac{1}{2} m \omega^2 \rho^2.$$

Powierzchnie ekwipotencjalne  $\omega^2 \rho^2 - 2gz = \text{stałe}$ , czyli

$$x^2 + y^2 - \frac{2g}{\omega^2} z = C$$

są paraboloidami obrotowymi o wspólnym parametrze  $p = \frac{g}{\omega^2}$ . Kąt nachylenia siły względnej do pionu jest określony równaniem



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 g}{g} = \frac{v^2}{g \rho}.$$

Wartość tego kąta dla środka masy wagonu wyznacza taką „przechyłkę toru“, przy której siła względna jest w przybliżeniu prostopadła do toru, a rąbki kół nie wywierają bocznego nacisku na szyny.

Przykład. Dla łuku o promieniu  $r = 400$  m i szerokości toru  $s = 1,435$  m przy prędkości jazdy  $v = 16$  m/sk wypada podwyższenie  $h$  szyny wewnętrznej (jeżeli przy małych  $\alpha$  przyjmiemy w przybliżeniu  $h/s = \operatorname{tg} \alpha$ ):  $h = v^2 s / g r = 0,093$  m.

c) Punkt materialny, zmuszony do pozostawania na gładkiej krzywej, leżącej w płaszczyźnie pionowej, która się obraca jednostajnie około osi pionowej (kule regulatorów), będzie równowadze względnej, jeżeli wypadkowa ciężkości  $mg$  i siły odśrodkowej  $m \rho \omega^2$  jest normalna do krzywej, (fig. 52) czyli gdy  $m \rho \omega^2 / mg = \operatorname{tg} \alpha = \rho / h$ .

Dla równowagi musi zatem długość podnormalnej  $h$  na osi obrotu czynić zadość warunkowi:

$$h = g / \omega^2.$$

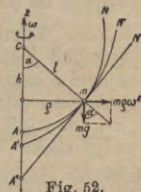


Fig. 52.

Ta równowaga jest stała, jeżeli dana krzywa w otoczeniu położenia równowagi  $m$  leży wewnątrz paraboli  $A'N'$  o parametrze  $g/\omega^2$  przechodzącej przez  $m$ . Wówczas bowiem odpowiada położeniu punktu  $m$  minimum energii potencjalnej, ponieważ ta energia, mając na paraboli wartość stałą, zwiększa się wewnątrz niej, a zmniejsza na zewnątrz. Dlatego też równowaga będzie niestała, jeżeli krzywa przecina lub leży zewnątrz paraboli (np.  $A''N''$ ) zaś obojętną w przypadku gdy krzywa zlewa się z tą parabola.

### III. Statyka.

#### A. Część ogólna.

56. Zasada prac przygotowanych (wyobrażalnych, wirtualnych) wyraża konieczny i wystarczający warunek równowagi najogólniejszego układu materialnego, pojmowanego jako układ punktów materialnych, na które działają jakiekolwiek siły zewnętrzne  $\bar{P}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) i wewnętrzne  $\bar{W}_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ). Przy oznaczeniu przez  $\delta \bar{s}_i$  wektorów przesunięć przygotowanych punktów  $m_i$ , wyraża ten warunek równanie:

$$\sum_i \bar{P}_i \delta \bar{s}_i + \sum_i \sum_k \bar{W}_{ik} \delta \bar{s}_i = 0.$$

W położeniu równowagi układu materialnego jakiegokolwiek jest suma algebraiczna prac przygotowanych wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych układu równa zeru przy każdym chwilowym ruchu przygotowanym układu.

57. Rodzaje równowagi układów materialnych. Jeżeli tak siły zewnętrzne jak i wewnętrzne mają potencjał, to równanie powyższe staje się identycznym z warunkiem extremum energii potencjalnej jako funkcji współrzędnych punktów układu.

$$\delta U = 0.$$

Ten warunek może odpowiadać:

1. Minimum energii potencjalnej, jeżeli przyrost rzędu drugiego  $\delta^2 U$  (wzgl. inny pierwszy nieznikający przyrost rzędu parzystego) jest dodatni. Odpowiadające położenie równowagi jest położeniem równowagi stałej (Minding i Lejeune-Dirichlet).

2. Maximum energii potencjalnej, jeżeli  $\delta^2 U < 0$  (albo inny pierwszy nieznikający przyrost  $\delta^{2r} U < 0$ ).

3. Ani maximum ani minimum. Obu ostatnim przypadkom odpowiada wogóle równowaga niestała.

Oprócz ogólnych dwu typów równowagi stałej i niestałej, czyli chwiejnej, rozróżniają w technice niektóre szczególne rodzaje równowagi. Najważniejszym jest przypadek t. zw. równowagi obojętnej, gdy w otoczeniu położenia równowagi ma energia potencjalna  $U$  charakter stałej, czyli nie zmienia się przy żadnym z ruchów przygotowanych układu.

Przykładem równowagi stałej jest wałka kula jednolita spoczywająca na dnie wydrążenia kulistego o większym promieniu. Ta sama kula umieszczona na szczycie innej kuli jest w równowadze niestałej, zaś spoczywająca na poziomej płaszczyźnie jest w równowadze obojętnej.

58. Warunki równowagi, gdy praca przygotowana sił wewnętrznych jest równa zeru. Dla ciał sztywnych lub układów złożonych z ogniw sztywnych i nierozciągliwych cięgien (tj. sznurów, łańcuchów itp.) przyczem poszczególne ogniwa są połączone przegubami itp. bez tarcia, jest praca sił wewnętrznych zawsze równa zeru, a więc równanie równowagi takich układów, wyrażające zasadę prac przygotowanych, sprowadza się do:

$$\sum_i \overline{P_i} \delta s_i = 0.$$

Ważny wniosek: Dwie siły, działające na dwa jakiegokolwiek punkty ciała sztywnego (fig. 53), są w równowadze gdy się spełniają razem dwa

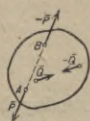


Fig. 53.

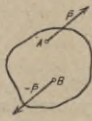


Fig. 54.

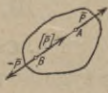


Fig. 55.



Fig. 56.

warunki: 1. suma geometryczna sił jest równa zeru i 2. wektory sił leżą na tej samej prostej.

(Albowiem praca przygotowana takich sił jest przy każdym przesunięciu i każdym obrocie ciała równa zeru.)

59. Para sił. Jeżeli suma geometryczna dwu sił jest wprawdzie równa zeru, ale ich wektory nie leżą na tej samej prostej, (fig. 54), to praca przygotowana przy przesunięciu ciała jest wprawdzie zerem, ale przy jego obrocie nie. Takie dwie siły nie równoważące się nawzajem stanowią parę sił.

60. Przekształcenie układów sił, tj. zastąpienie danego układu sił działających na ciało sztywne innym układem równoważnym odbywa się wogóle przez stosowne dołączanie do układu danego innego układu pomocniczego sił równoważących się nawzajem. Najprostsze ważne przykłady są następujące:

a) Przeniesienie siły  $\overline{P}$ , działającej na punkt  $A$  (fig. 55) na jakiegokolwiek inny punkt  $B$  ciała, leżący na linii działania tej siły (przez dołączenie układu  $(\overline{P})$  i  $-\overline{P}$  sił działających na punkt  $B$  i znoszących się nawzajem).

b) Zastąpienie siły  $\overline{P}$ , działającej na punkt  $A$  (fig. 56) taką samą siłą  $(\overline{P})$  działającą na inny punkt ciała  $B$  wraz z parą sił  $(\overline{P}, -\overline{P})$ .

Drugi sposób przekształcenia układu sił polega na zrównoważeniu danego układu drugim układem stosownie dobranym. Te dwa układy nie są przeto równoważne (także równowarte), lecz znoszące się, czyli równoważące się nawzajem. Atoli odwróciwszy kierunki wszystkich sił układu drugiego, bez zmiany ich wartości, otrzymujemy widocznie nowy układ równoważny z pierwszym (ponieważ równoważący się z drugim).

61. Składanie sił leżących w jednej płaszczyźnie i działających na różne punkty ciała sztywnego zapomocą t. zw. wieloboku sznurowego jest najważniejszym zastosowaniem powyższego sposobu przekształcania układów sił (fig. 57).

Chcąc układ sił  $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}$  i  $\overline{P_4}$  (fig. 57 a) zastąpić innym prostszym, równoważymy każdą z sił danych dwiema siłami pomocniczymi, które wyznaczamy kreśląc trójkąt tych trzech sił. Siłę  $\overline{P_1}$  równoważymy przeto siłami  $\overline{S_1}$  i  $\overline{S_{12}}$ , działającymi na ten sam punkt  $F$ . Ich kierunki wybieramy dowolnie, a wielkości znajdujemy z  $\Delta ABO$  nakreślonego z boku (fig. 57 b).

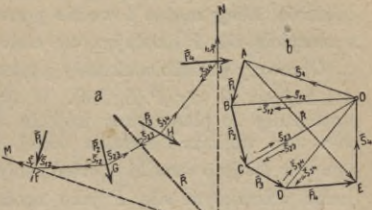


Fig. 57 a, b.

Siłę  $\overline{P_2}$  równoważymy podobnie dwiema siłami, ale już nie zupełnie dowolnymi, obierając jedną z nich ( $-\overline{S_{12}}$ ) tak, aby się znosiła z siłą  $\overline{S_{12}}$ ; druga  $\overline{S_{23}}$  wypadnie zatem z trójkąta sił  $BCO$  (fig. 57 b). Postępując kolejno w ten sposób dochodzimy do siły ostatniej  $\overline{P_4}$ , zrównoważonej siłami pomocniczymi  $-\overline{S_{34}}$  i  $\overline{S_4}$  określonymi trójkątem  $DEO$ .

Wszystkie siły pomocnicze  $S$  leżą na bokach wieloboku  $MFGHIN$ , zwanego sznurowym i z wyjątkiem sił  $\overline{S_1}$  i  $\overline{S_4}$ , położonych na bokach skrajnych, znoszą się widocznie nawzajem. Wypadkowa sił  $\overline{S_1}$  i  $\overline{S_4}$ , przechodząca przez punkt  $K$  przecięcia się ich linii działania, równoważy przeto układ sił danych, a odwróciwszy jej kierunek otrzymujemy siłę  $\overline{R} = \overline{AE}$ , która oczywiście zastępuje układ sił danych  $\overline{P_1}, \dots, \overline{P_4}$ , czyli jest wypadkową tegoż układu. Ta wypadkowa  $\overline{AE} = \overline{R}$  jest bokiem zamykającym wieloboku sił  $ABCDE$ . Punkt  $O$ , dowolnie obrany, nazywa się biegunem, zaś proste  $OA, OB, \dots$  promieniami.

Uwaga. Nazwa wieloboku sznurowego pochodzi stąd, ponieważ ten wielobok przedstawia zarazem postać równowagi sznura (lub wogóle cięgna) idealnego (tj. nieważkiego, doskonale giętkiego i nierozciągliwego), na który działają w punktach  $F, G, H, I$  siły dane, oczywiście przy założeniu, że wszystkie siły  $S$  są (jak na fig. 54) siłami rozciągającymi. W przypadku, gdyby siły  $S$  na którymś z boków były ściskające, można sobie pomyśleć dla przywrócenia równowagi zamiast sznura pręt sztywny z przegubami na końcach boku. Wielobok sznurowy jest przeto wogóle postacią równowagi łańcucha prętów przegibnie połączonych, jeżeli na przeguby końcowe działają siły  $\overline{S_1}$  i  $\overline{S_4}$ , zaś na przeguby pośrednie siły  $\overline{P_1}, \dots, \overline{P_4}$ .

Z konstrukcji wieloboku sznurowego wypływają twierdzenia:

a) Płaski układ sił, których wielobok się nie zamyka, ma zawsze siłę wypadkową równą sumie geometrycznej danych sił układu. Ta wypadkowa przechodzi przez punkt przecięcia się boków skrajnych jakiegokolwiek wieloboku sznurowego wykreślonego dla tegoż układu.

b) Płaski układ sił, których wielobok się zamyka (fig. 58) nie ma siły wypadkowej, lecz jest wogóle równoważny parze sił, czyli ma parę wypadkową, wyjąwszy przypadek szczególny, w którym:

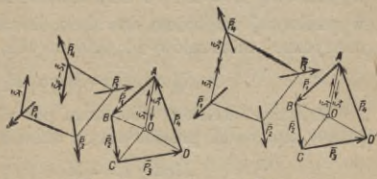


Fig. 58.

Fig. 59.

c) Płaski układ sił jest w równowadze jeżeli tak wielobok sił, jak i wielobok sznurowy się zamykają (fig. 59).

**62. Momenty sił względem punktu.** Ponieważ działanie dynamiczne siły  $\vec{P}$  na ciało sztywne jest zupełnie określone wektorem swobodnym  $\vec{P}$  i linią działania, tj. prostą tego wektora, a jest zupełnie niezależne od punktu działania, który można dowolnie przesuwać na tej prostej, przeto określamy z korzyścią siłę  $\vec{P}$  działającą na ciało sztywne w sposób następujący:

Obrawszy gdziekolwiek stały punkt  $O$ , łączymy go w myśli z początkiem  $A$  i końcem  $B$  siły  $\vec{P}$  (fig. 60). W tym punkcie  $O$  wystawiamy wektor  $\vec{M}$  prostopadły do płaszczyzny trójkąta  $ABO$  o wielkości równej podwójnemu polu tego trójkąta i strzałce takiej, ażeby stojąc stopami w  $O$ , a mając głowę w miejscu strzałki widzieć pomyślany obrót promienia  $\vec{OA} = \vec{r}$  w kierunku wskazanym siłą  $\vec{P}$  jako zgodny z obrotem wskazówki zegarowej. Wektor  $\vec{M}$  tak określony nazywamy momentem siły  $\vec{P}$  względem punktu  $O$ .

Bezwzględna wartość momentu:

$$\vec{M} = |\vec{M}| = Ph,$$

przyczem  $h$ , tj. ramię momentu, albo ramię siły jest długością prostopadłej spuszczonej z  $O$  na linię działania siły  $\vec{P}$ .

Punkt  $O$  nazywają także środkiem momentów.

**63. Momenty sił względem prostej.** Ich określenie wynika z łatwego do uzasadnienia twierdzenia:

Jeżeli momenty danej siły  $\vec{P}$  względem różnych punktów  $O_1, O_2, \dots$  jednej i tej samej dowolnie obranej prostej (osi, np.  $X$ ) rzutujemy na tę prostą, to otrzymujemy rzuty geometrycznie równe. Każdy z nich (jako wektor) przedstawia moment siły  $P$  względem obranej prostej. Jego bezwzględna wartość jest iloczynem bezwzględnej wartości siły  $\vec{P}$ , „najkrótszej odległości“  $k$  linii działania siły od obranej prostej i wstawy kąta nachylenia  $\alpha$  siły  $\vec{P}$  do tej prostej.

$$|\text{Mom}_x \vec{P}| = Pk \sin \alpha$$

Wniosek. Moment siły  $P$  względem osi leżącej z nią w tej samej płaszczyźnie równa się zeru.

**64. Momenty sił względem płaszczyzny.** Gdy mamy do czynienia z przestrzennym układem sił równoległych, to skalary (nie wektory) określające iloczyny sił przez odległości ich punktów początkowych od pewnej płaszczyzny (płaszczyzny momentów) z uwzględnieniem znaków algebraicznych, nazywamy momentami tych sił względem obranej płaszczyzny. Znakami  $+$  i  $-$  odróżniamy przytem siły zgodne kierowane od przeciwnie skierowanych oraz odległości punktów leżących po jednej i drugiej stronie płaszczyzny.

**65. Momenty sił układu centralnego,** tj. sił, których linie działania przecinają się w jednym punkcie  $C$ . Takie siły  $\vec{P}_i$  mają oczywiście zawsze wypadkową  $\vec{R} = \Sigma \vec{P}_i$  o linii działania przechodzącej przez  $O$ . Moment tej wypadkowej względem dowolnie obranego punktu  $O$  równa się sumie geometrycznej momentów sił składowych, czyli

$$\text{Mom}_o \vec{R} = \text{Mom}_o \vec{P}_1 + \text{Mom}_o \vec{P}_2 + \dots$$

Rzutując wektory obu stron powyższego równania na dowolnie obraną prostą, np. oś  $X$  prostokątnego układu współrzędnych, mamy правило:

$$\text{Mom}_x \vec{R} = \text{Mom}_x \vec{P}_1 + \text{Mom}_x \vec{P}_2 + \dots,$$

czyli: Moment wypadkowej względem jakiejkolwiek prostej równa się sumie algebraicznej<sup>1)</sup> momentów sił składowych względem tejże prostej.

<sup>1)</sup> „Algebraicznej“, ponieważ wszystkie wektory-dodajniki leżą na tej prostej.

**66. Ogólny moment sił** jakiegokolwiek układu przestrzennego względem obranego środka  $O$  (lub osi) jest to suma geometryczna (wzgl. algebraiczna) momentów wszystkich sił względem tego środka (lub osi).

Ogólny moment pary sił jest wektorem stałym niezależnym od obioru środka momentów i nazywa się momentem pary. Jest przeto wektorem swobodnym  $\overline{M}$  (fig. 61) o wartości bezwzględnej równej polu równoległoboku, którego bokami równoległymi są siły pary. Wektor ten jest prostopadły do płaszczyzny pary i tak skierowany, ażeby człowiek, stojący na tej płaszczyźnie z głową umieszczoną obok strzałki wektora widział obieg strzałek sił dokoła równoległoboku zgodny z obiegiem wskazówek zegara.

Odległość wzajemną obu sił pary nazywamy ramieniem pary.

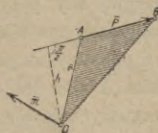


Fig. 60.

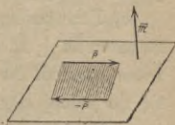


Fig. 61.

**67. Równoważność par sił** jest uwarunkowana geometryczną równością ich momentów, czyli:

Para sił  $(\overline{P}, -\overline{P})$  o ramieniu  $a$  da się zastąpić inną równoważną  $(\overline{Q}, -\overline{Q})$  o ramieniu  $b$ , leżącą w płaszczyźnie tej samej, lub równoległej, przyczem siły drugiej pary mogą mieć zresztą położenie dowolne, byleby zachodziła równość  $Pa = Qb$ , a kierunki obiegu były zgodne.

**68. Składanie par**, rozmaicie w przestrzeni zorjentowanych, wypływa z powyższego twierdzenia o równoważności w połączeniu ze składaniem sił i tak:

Niekolwiek par sił można zawsze zastąpić jedną parą wypadkową, której moment jest sumą geometryczną momentów par składowych.

Wniosek. Układ par sił zorjentowanych jakkolwiek w przestrzeni jest w równowadze, jeżeli suma geometryczna ich momentów jest równa zeru.

**69. Przestrzenny układ sił**  $\overline{P}_i$  da się zawsze zastąpić układem par i układem centralnym sił geometrycznie równych siłom danym. W tym celu obieramy dowolny punkt  $O$  (zwany środkiem redukcji układu sił) i dołączamy pomocniczy układ sił równoważący się nawzajem, a złożony z sił  $(\overline{P}_i)$  równych  $\overline{P}_i$  i działających na punkt  $O$  oraz z sił równych  $-\overline{P}_i$  działających również na punkt  $O$ . Siły  $\overline{P}_i$  i  $-\overline{P}_i$  tworzą układ par sił, który daje parę wypadkową o momencie  $\overline{M}$  równym ogólnemu momentowi wszystkich danych sił  $\overline{P}_i$  względem punktu  $O$ ; siły zaś  $(\overline{P}_i)$  jako działające na punkt  $O$ , dają siłę wypadkową  $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_i$ . A zatem:

Przestrzenny układ sił jest wogóle równoważny jednej sile i jednej parze sił.

Takie sprowadzenie danego układu sił w przestrzeni  $\overline{P}_i$  do jednej siły  $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_i$  i jednej pary o momencie  $\overline{M} = \Sigma \text{Mom}_O \overline{P}_i$ , da się wykonać na nieskończenie wiele sposobów różniących się obioru punktu  $O$  (środka redukcji). W każdym zespole siły  $\overline{R}$  i pary  $\overline{M}^1$  zastępujących dany układ sił  $\overline{P}_i$ , zmienia się tylko położenie prostej, wzdłuż której działa  $\overline{R}$  (zależnie od  $O$ ) a wielkość i kierunek  $\overline{R}$  pozostaje bez zmiany; wielkość natomiast i kierunek wektora momentu pary  $\overline{M}$  zmienia się zależnie od obioru punktu  $O$ . Atoli z pośród nieskończenie wielu zespołów siły  $\overline{R}$  i pary  $\overline{M}$ , zastępują-

<sup>1)</sup> Mówimy krótko „para  $\overline{M}$ “, zamiast: „para o momencie  $\overline{M}$ “.

cych dany przestrzenny układ sił  $\overline{P}_i$ , wyróżnia się wogóle jeden, w którym  $\overline{R} \parallel \overline{M}$ , czyli płaszczyzna pary  $\overline{M}$  jest prostopadła do kierunku siły  $\overline{R}$ . Taki zespół nosi nazwę: skrętnik.

Wnioski: a) Przestrzenny układ sił nie da się wogóle zastąpić jedną siłą, czyli nie ma siły wypadkowej. Natomiast da się wtedy zastąpić dwiema siłami skośnemi, z których jedną stanowi jedna ze sił pary, a drugą wypadkowa siły  $\overline{R}$  i drugiej siły pary przecinającej linię działania siły  $\overline{R}$ .

b) Przestrzenny układ sił ma siłę wypadkową, jeżeli  $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_i = 0$ , a zarazem  $\overline{M} \perp \overline{R}$ , czyli płaszczyzna pary  $\overline{M}$  jest równoległa do  $\overline{R}$ , wtedy bowiem para sił  $\overline{M}$  i siła  $\overline{R}$  jako leżące w jednej płaszczyźnie sprowadzają się do jednej siły geometrycznie równej  $\overline{R}$ , a tylko przesuniętej równolegle.

c) Przestrzenny układ sił jest równoważny parze sił (czyli ma parę wypadkową), jeżeli  $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_i = 0$ , a zarazem  $\overline{M} \neq 0$ .

d) Przestrzenny układ sił znosi się nawzajem, czyli jest równoważny zeru, jeżeli spełniają się razem warunki:

$$\Sigma \overline{P}_i = 0 \quad \text{i} \quad \Sigma \text{Mom}_0 \overline{P}_i = 0.$$

**70. Ogólne warunki równowagi**, konieczne i wystarczające dla ciała sztywnego, a tylko konieczne dla jakiegokolwiek układu materjalnego wyrażają się [jak wynika z wniosku (d)] powyższemi dwoma równaniami wektorowemi, czyli słowami:

Dla najogólniejszego układu sił (układu materjalnego), będącego w równowadze, jest zarówno suma geometryczna wszystkich sił (układu) jak i suma geometryczna ich momentów względem dowolnie obranego jednego i tego samego punktu równa zeru.

Wniosek. Siły wewnętrzne jakiegokolwiek układu materjalnego (pojmowanego jako układ punktów materjalnych) spełniają (wszystkie razem) zawsze ogólne warunki równowagi.

Jeżeli siły  $\overline{P}_i$  są określone analitycznie składowemi  $X_i, Y_i, Z_i$  w kierunkach trzech osi prostokątnego układu spólrzędnych, a położenia punktów  $m_i$ , na które siły działają spólrzëdnemi  $x_i, y_i, z_i$ , to obadwa ogólne warunki równowagi, wyrażone powyższemi dwoma równaniami wektorowemi, prowadzą do sześciu równań zwyczajnych, czyli sześciu analitycznych warunków równowagi. Trzy pierwsze odpowiadają warunkowi  $\Sigma \overline{P}_i = 0$  i noszą nazwę warunków rzutów; zaś trzy pozostałe wyrażają to samo co  $\Sigma \text{Mom}_0 \overline{P}_i = 0$  i nazywają się warunkami momentów.

Obrawszy bowiem punkt  $O$  za początek układu spólrzędnych i oznaczwszy przez  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , kąty, jakie wektor  $\overline{P}_i$  tworzy z osiami  $x, y, z$ , mamy

$$\left. \begin{aligned} \Sigma P_i \cos \alpha_i &\equiv \Sigma X_i = 0 \\ \Sigma P_i \cos \beta_i &\equiv \Sigma Y_i = 0 \\ \Sigma P_i \cos \gamma_i &\equiv \Sigma Z_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{warunki rzutów})$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \text{Mom}_x \overline{P}_i &\equiv \Sigma (Y_i z_i - Z_i y_i) = 0 \\ \Sigma \text{Mom}_y \overline{P}_i &\equiv \Sigma (Z_i x_i - X_i z_i) = 0 \\ \Sigma \text{Mom}_z \overline{P}_i &\equiv \Sigma (X_i y_i - Y_i x_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{warunki momentów}).$$

Słowami: Dla najogólniejszego układu sił w równowadze jest suma algebraiczna rzutów sił, czyli składowych w kierunku dowolnie obranych

osi prostokątnego układu współrzędnych, dla każdej osi z osobna równa zeru a zarazem suma algebraiczna momentów sił układu względem tychże osi, dla każdej z osobna, równa zeru.

Uwaga. Powyższe warunki można także wyprowadzić z zasady prac przygotowanych, przyczem warunki rzutów wyrażają warunki równowagi ze względu na przesunięcia ciała wzdłuż odpowiednich osi współrzędnych; zaś warunki momentów określają warunki równowagi ze względu na obroty około tychże osi.

**71. Warunki równowagi płaskiego układu sił, wyrażone „wykreślnie“** na końcu ust. 61, sprowadzają się w postaci analitycznej do trzech następujących, skoro osie  $x$  i  $y$  oberzemy w płaszczyźnie układu (dwa warunki rzutów i jeden momentów):

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum (X_i y_i - Y_i x_i) = 0;$$

albo jeżeli przez  $r_i$  oznaczymy ramię momentu siły  $\overline{P}_i$  względem punktu  $O$ , a przez  $\alpha_i$  kąt  $(\overline{P}_i, x)$ :

$$\sum P_i \cos \alpha_i = 0, \quad \sum P_i \sin \alpha_i = 0, \quad \sum \pm P_i r_i = 0.$$

Iloczyn  $P_i r_i$  opatrujemy przytem znakiem  $+$  lub  $-$  zależnie od tego, czy wektor momentu jest skierowany ku przodowi dla patrzącego na płaszczyznę  $XY$ , czy też przeciwnie. Wyrażają to także inaczej mówiąc, że moment siły  $P_i$  względem punktu  $O$  poczytujemy za dodatni lub ujemny, stosownie do tego (w razie pomyślanego ustalenia punktu ciała w  $O$ ) czy siła  $\overline{P}$  powodowałaby obrót zgodny, czy też przeciwny z obrotem wskazówek zegara.

W przypadku, gdy się nie spełnia warunek momentów, a nadto jeden lub obadwa z warunków rzutów, czyli gdy np.  $\sum P_i \cos \alpha_i = R_x \neq 0$ ,  $\sum P_i \sin \alpha_i = R_y \neq 0$ ,  $\sum \pm P_i r_i = \mathfrak{M} \neq 0$ , układ sił ma siłę wypadkową o wielkości  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ , nachyloną do osi  $X$  pod kątem  $\alpha$ , wyznaczonym równaniem  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}$  i działającą wzdłuż prostej odległej od początku układu współrzędnych o  $\frac{\mathfrak{M}}{R}$ .

W przypadku wreszcie, gdy się spełniają warunki rzutów, a warunek momentów nie, czyli  $\sum X_i = 0$ ,  $\sum Y_i = 0$ ,  $\sum \pm P_i r_i = \mathfrak{M} \neq 0$  układ sił ma parę wypadkową o momencie określonym zupełnie znakiem i wartością  $\mathfrak{M}$ .

**72. Siły równoległe w przestrzeni posiadają wogóle siłę wypadkową** równą sumie algebraicznej wszystkich sił układu, jeżeli jednak ta suma jest zerem, a zarazem ogólny moment nie jest zerem, to układ sił sprowadza się do pary wypadkowej.

Układ sił równoległych zgodnie skierowanych posiada zawsze siłę wypadkową równą sumie arytmetycznej wszystkich sił układu. Jeżeli siły  $P_i$  takiego układu obracamy około ustalonych w ciele punktów  $x_i, y_i, z_i$ , na które działają, to ich wypadkowa  $\overline{R} = \sum \overline{F}_i$  obraca się około pewnego punktu stałego  $(x_0, y_0, z_0)$ , zwanego środkiem sił równoległych. Punkt ten określają równania:

$$x_0 = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}, \quad y_0 = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}, \quad z_0 = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}.$$

W przypadku sił ciężkości działających na wszystkie cząstki ciała i uważanych z wystarczającym przybliżeniem za równoległe, schodzi się środek tych sił ze środkiem masy ciała, co usprawiedliwia nazwę: środek ciężkości.

## B. Część szczegółowa.

73. Statyka ciała sztywnego nieswobodnego. Podparcie lub zawieszenie. Gdy na ciało nieswobodne działają dane siły zewnętrzne, jak np. ciężar  $Q$ , a ciało to pozostaje w równowadze, to dołączywszy do owych sił nieznanne reakcje (oddziaływania) punktów podparcia lub zawieszenia, otrzymujemy układ sił, który musi czynić zadość ogólnym warunkom równowagi wyprowadzonym dla ciała swobodnego. Z równań równowagi można więc niekiedy wyznaczyć szukane reakcje (przypadki statycznej wyznaczalności, albo izostaticzne), ale skoro np. liczba niewiadomych, określających reakcje, jest większa od liczby równań równowagi, to mamy do czynienia z przypadkami statycznie niewyznaczalnymi, czyli hyperstatycznymi.

Największą liczbą niewiadomych wielkości statycznie wyznaczalnych dla jednego ciała jest 6, stosownie do liczby równań równowagi i stopni swobody.

a) Łącząc (fig. 62) punkt 1 ciała ze stałym punktem  $A$  zapomocą idealnego sztywnego pręta z przegubami kulistymi na obu końcach odbieramy ciału tylko jeden stopień swobody, gdyż usuwamy możliwość przesunięcia przygotowanego w kierunku tego pręta. Przesunięcia w dwu kierunkach doń prostopadłych i obroty około trzech osi wzajemnie prostopadłych pozostają możliwe i określają 5 pozostałych stopni swobody.

Tę samą rolę co pręt łączący, lub sznur, gra także podpora gładka, w której kierunek reakcji jest prostopadły do płaszczyzny styczności (fig. 63). Przy zawieszeniu na pręcie, koniecznym i wystarczającym warunkiem równowagi jest, aby siły zewnętrzne miały wypadkową  $\bar{Q}$  o linii działania leżącej na osi pręta. Wtedy bowiem znoszą się z reakcją  $\bar{R}$ , która co do wielkości jest równa, a co do kierunku przeciwna sile  $\bar{Q}$ .

(W przypadku podpory gładkiej musi być nadto siła  $Q$  skierowana ku wnętrzu ciała podpierającego.)

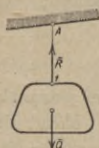


Fig. 62.

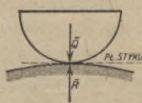


Fig. 63.

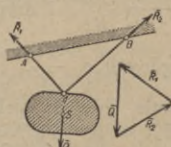


Fig. 64.



Fig. 65.

b) Dwa pręty łączące jeden punkt (1) ciała z punktami stałymi  $A$  i  $B$  (fig. 64) zabierają mu dwa stopnie swobody, umożliwiając tylko przesunięcia w jednym kierunku prostopadłym do płaszczyzny prętów i obroty około wszystkich trzech osi. Tutaj jest koniecznym i wystarczającym warunkiem równowagi, aby siły zewnętrzne miały wypadkową  $\bar{Q}$ , o linii działania przechodzącej przez punkt 1 i leżącej w jednej płaszczyźnie z obu prętami. Reakcje  $R_1$  i  $R_2$  znajdujemy z trójkąta sił. Tak samo ma się rzecz w przypadku dwu podpór gładkich (fig. 65) a podobnie przy połączeniu dwu punktów ciała z dwoma punktami stałymi (fig. 66).

Atoli w przypadku szczególnym, gdy te dwa pręty są równe i równoległe (fig. 67), mamy do czynienia z utratą jednego przesunięcia (w kierunku prętów) i jednego obrotu (około osi prostopadłej do płaszczyzny prętów). Dla równowagi musi wypadkowa z sił zewnętrznych, czyli „obciążień“ leżeć w płaszczyźnie prętów i być do nich równoległa. Z warunku momentów dla punktów 1 i 2, tj.

$$Qa - R_2 l = 0,$$

$$Qb - R_1 l = 0,$$



znajdujemy bezwzględne wartości i kierunki reakcyj  $R_1$  i  $R_2$ . Do kontroli służy warunek rzutów:

$$Q + R_2 - R_1 = 0.$$

c) Trzy pręty, łączące punkt ciała (1) z punktami stałymi  $A$ ,  $B$  i  $C$  (fig. 68), ustalają ten punkt, zabierając ciału 3 stopnie swobody tj. trzy przesunięcia, a pozostawiając trzy obroty. Dla równowagi musi wypadkowa z obciążeń (np.  $\bar{Q}$ ) przechodzić przez ten punkt. Reakcje  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$  i  $\bar{R}_3$  dają się obliczyć z warunków rzutów, wyjąwszy przypadek, w którym wszystkie trzy pręty leżą w jednej płaszczyźnie (przypadek statycznie niewyznaczalny).

d) Zupełne ustalenie ciała przy statycznej wyznaczalności reakcyj dla jakiegokolwiek obciążenia osiągamy zapomocą 6 prętów łączących je z punktami

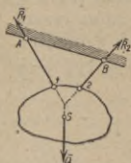


Fig. 66.

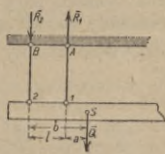


Fig. 67.

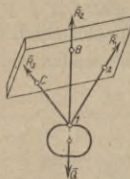


Fig. 68.

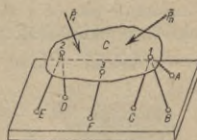


Fig. 69.

stałymi. Jeden z najprostszyc układów uzmysławia fig. 69, przyczem punkty 1, 2 i 3 ciała  $C$  muszą tworzyć trójkąt właściwy. Inny praktycznie ważny przypadek przedstawia fig. 70.

Już na powyższych przypadkach widać, że o statycznej niewyznaczalności nie rozstrzyga sama tylko liczba niewiadomych  $\leq 6$ . Ona jest tylko warunkiem koniecznym, ale często niewystarczającym. Tak np. zawieszenie ciała na dwu prętach, leżących na tej samej prostej (fig. 71), prowadzi przy sile obciążającej  $\bar{Q}$  działającej wzdłuż tejże prostej do statycznej niewyznaczalności reakcyj  $\bar{R}_1$  i  $\bar{R}_2$ , albowiem warunki równowagi nie więcej nie dają ponad równanie:

$$R_1 + R_2 = Q.$$

Każda z reakcyj może mieć przeto wartość dowolnie wielką, byleby ich suma algebraiczna była równa  $Q$ .

W przypadku siły obciążającej  $S$ , prostopadłej do prostej  $AB$ , wymagałyby warunki równowagi widocznie nieskończenie wielkich wartości  $R_1$  i  $R_2$  (które jednakże stają się skończone przy założeniu pewnej, choćby bardzo małej odkształcalności prętów).

**74. Dwuwymiarowe zagadnienia równowagi ciała sztywnego nieswobodnego.** Gdy wszystkie siły obciążające i reakcje podpór leżą w jednej płaszczyźnie, to rozpatrujemy ciało pod postacią figury płaskiej, czyli „płazę”, połączonej z nieruchomym układem odniesienia (ziemią) w punktach odpowiadającym podporom.

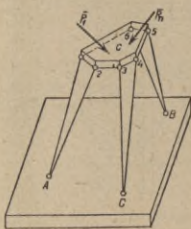


Fig. 70.

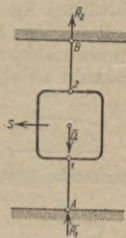


Fig. 71.

Trzy główne sposoby podparcia płazy odpowiadają pozbawieniu jej jednego, dwu lub trzech stopni swobody.

Pierwszy i drugi przypadek, rozpatrywany już w ust. 73, realizuje się w praktyce często przy pomocy łożysk, trzeci przez t. zw. „utwierdzenie” (zamocowanie).

1. Łożysko wałkowe (fig. 72) zastępuje jeden pręt podpierający (fig. 73) i znosi jeden stopień swobody. Linja działania reakcji jest dana, jej wielkość nieznaną. (Jedna niewiadoma.)

2. Przegub stały lub łożysko kołyskowe (fig. 74) zastępuje dwa pręty podpierające (fig. 75) i znosi dwa stopnie swobody. Tylko punkt działania reakcji dany, zaś wielkość jej i kierunek nieznaną. (Dwie niewiadome, za które uważamy zwykle składową poziomą  $X$  i pionową  $Y$  reakcji.)

3. Utwierdzenie, czyli zupełnie sztywne połączenie z układem podpierającym (fig. 76) czyto zapomożą przyśrubowania, przyklejenia itp.

Utwierdzenie znosi wszystkie 3 stopnie swobody i dostarcza trzech niewiadomych. Jako takie uważamy (fig. 77) poziomą i pionową składową siły  $X$  i  $Y$  oraz moment pary  $M$ , które razem określają układ reakcyj rozmieszczonych w nieznanym zwykle sposobie w miejscu utwierdzenia. Układ ten sprowadza się oczywiście do siły  $\bar{R}$  (fig. 76), gdy



Fig. 72.

Fig. 73.

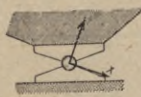
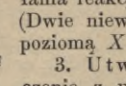


Fig. 74.

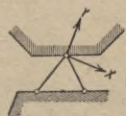


Fig. 75.

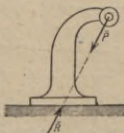


Fig. 76.

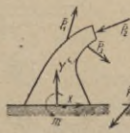


Fig. 77.



Fig. 78.

siły obciążające mają wypadkową  $P$ , przyczem  $\bar{P} + \bar{R} = 0$ . Skoro w szczególności realizujemy utwierdzenie przez połączenie trzema prętami (fig. 78) to rozmieszczenie reakcyj jest statycznie wyznaczalne.

Pręty te mogą wychodzić z trzech różnych punktów płazy (fig. 79), byleby ich osi nie przecinały się w jednym punkcie.

Uwaga. Obciążenia pionowe (poziome) wywołują wogóle nie tylko pionowe składowe reakcyj podpór, lecz także i poziome (pionowe), można jednakże urządzić podpory tak, ażeby obciążenia pionowe (poziome) wywoływały tylko reakcje pionowe (poziome). Taki przypadek zachodzi zwykle u belek prostych.

75. Wyznaczenie reakcyj podpór belki prostej (lub krzywej) przy działaniu obciążeń na linię środkową, czyli oś belki, odbywa się rachunkiem lub wykreślnie przez zastosowanie warunków równowagi dla układu sił obciążających wraz reakcjami.

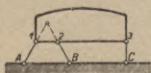


Fig. 79.

a) Belka na podporze „stałej“  $A$  i „ruchomej“  $B$  według fig. 80 a. Oznaczmyż te reakcje odpowiednich podpór, piszemy warunek momentów dla środka obra-

nego w jednym z teoretycznych punktów podparcia, np. w  $A$ :

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots = Bl, \text{ a stąd } B = \frac{1}{l} \sum P_i a_i.$$

Z warunku rzutów:  $A + B = P_1 + P_2 + \dots$ ,

znajdziemy  $A$ :  $A = \sum P_i - B$ .

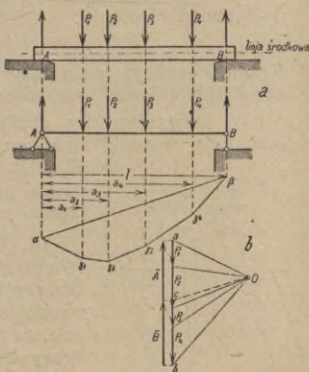


Fig. 80 a, b.

Bezpośrednio z warunku momentów dla środka w  $B$  otrzymujemy też:

$$Al = P_1 b_1 + P_2 b_2 + \dots,$$

czyli 
$$A = \frac{1}{l} \sum P_i b_i, \quad \text{przyczem } b_i = l - a_i,$$

a warunku rzutów używamy tylko do sprawdzenia rachunku.

Dla wykreślnego rozwiązania zadania kreślimy wielobok danych sił  $P_1, P_2 \dots P_n$  (fig. 80 b) i obrawszy biegun  $O$ , kreślimy odpowiadający wielobok sznurowy dla tychże sił. Ponieważ szukane reakcje  $A$  i  $B$  muszą się równoważyć z temi siłami, przeto tak wielobok sił  $P_1, P_2 \dots, A$  i  $B$ , jako też ich wielobok sznurowy musi być zamknięty. Niewiadomy bok „zamykający“ wieloboku sznurowego znajdujemy przeto łącząc punkty przecięcia się  $\alpha$  i  $\beta$  boków „skrajnych“ (wychodzących z pierwszej i ostatniej z sił  $P_i$ ) z danymi linjami działania reakcyj. Kreśląc teraz z bieguna promień  $Oc \parallel \alpha\beta$ , wyznaczamy na wieloboku sił reakcje  $\overline{ca} = \overline{A}$  i  $\overline{bc} = \overline{B}$ , zamykające ten wielobok.

Uwaga. W przypadku działania siły poziomej  $W$  na jakikolwiek punkt tej belki powstaje odpowiadająca reakcja  $= -W$  tylko na podporze stałej.

b) W przypadkach, przedstawionych na fig. 81 a i b, nie zmieniają się reakcje przy obciążeniach pionowych w porównaniu z przypadkiem poprzednim. Natomiast siła pozioma  $W$  (fig. 81 c) wywoła w  $B$  reakcję pionową  $B'$ , wyznaczalną z warunku momentów względem  $A$ , tj.

$$B' l = W h, \quad \text{a więc } B' = W \frac{h}{l};$$

zaś w  $A$  reakcję pionową  $A' = -B'$  i poziomą  $A'' = -W$  (stosownie do warunku rzutów).

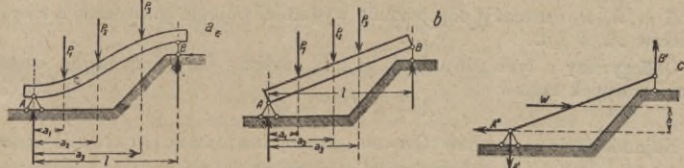


Fig. 81 a, b, c.

c) W przypadku podpory ruchomej  $B$ , oddziaływującej ukośnie względem obciążeń pionowych, zachodzą obok pionowych składowych reakcyj także i poziome. Jeżeli belka  $AB$  jest pozioma (fig. 82), to pionowe składowe  $V$  i  $V'$  reakcyj  $A$  i  $B$  wypadają z warunku momentów takie same jak w przypadku (a). Poziome skła-

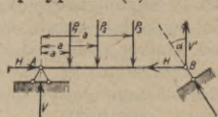


Fig. 82.

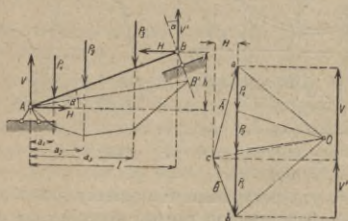


Fig. 83.

dowe zaś są co do wartości równe a co do kierunku wprost przeciwne (jak wynika z warunku rzutów).

Ich wartością jest:  $H = V' \operatorname{tg} \alpha.$

Jeżeli jednak belka  $AB$  jest nachylona do poziomu pod kątem  $\alpha$  (fig. 83), to warunek momentów dla środka w  $A$  daje:  $\sum P_i a_i - H h - V' l = 0,$

a ponieważ  $H = V' \operatorname{tg} \alpha = V' \frac{h}{l}$ , więc po wstawieniu tej wartości i rozwiązaniu względem  $V'$  otrzymujemy:

$$V' = \frac{l}{h^2 + l^2} \sum P_i a_i; \text{ albo } V' = \frac{\sum P_i a_i}{l} \cos^2 \alpha.$$

Z warunków rzutów wypływa:

$$V = \sum P_i - \frac{\sum P_i a_i}{l} \cos^2 \alpha$$

$$H = \frac{\sum P_i a_i}{l} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Wykreślne rozwiązanie znajdujemy, kreśląc wielobok sznurowy danych obciążeń belki (fig. 83), tak, aby bok między reakcją podpory stałej  $A$ , a sąsiednią siłą  $P_i$  przechodził przez punkt  $A$ , który jest jednym punktem boku zamykającego  $AB'$ . Promień  $Oc$ , doń równoległy, wyznacza na kierunku  $bc \parallel B'B$  wielkość reakcji  $\overline{B}$ , a bok zamykający  $c'a$  wyznacza reakcję  $\overline{A}$ .

76. Równowaga ciała ciężkiego podpartego w trzech lub więcej punktach gładką płaszczyzną poziomą. Takim ciałem jest np. stół o trzech nogach dotykający podłogi w punktach  $A, B, C$  (fig. 84) tworzących trójkąt. Kierunek ciężaru  $Q$  trafia ten trójkąt w punkcie  $Q'$ , odległym o  $a_1, a_2, a_3$  od boków tego trójkąta. Pisząc kolejno warunek momentów dla prostych  $BC, AC$  i  $AB$ , jako osi momentów, mamy:

$$Q a_1 = A h_1, \quad Q a_2 = B h_2, \quad Q a_3 = C h_3,$$

jeżeli  $h_1, h_2, h_3$  oznaczają odpowiednie wysokości trójkąta spuszczone z wierzchołków  $A, B$  i  $C$ .

Obliczywszy z tych równań  $A, B$  i  $C$ , możemy dla sprawdzenia zastosować warunek rzutów

$$A + B + C = Q.$$

Najmniejszy z momentów  $Q a_i$  nosi nazwę momentu stałości ciała.

Gdyby trzy punkty podparcia znalazły się na jednej prostej, która trafia kierunek  $Q$ , to mielibyśmy do czynienia widocznie ze statyczną niewyznaczalnością reakcyj. To samo zachodzi wogóle, gdy liczba punktów podparcia jest większa od trzech. Wszelako równowaga jest zapewniona pod warunkiem, ażeby linja działania siły  $Q$  trafiała płaszczyznę podpierającą w punkcie  $Q'$ , leżącym wewnątrz najmniejszej figury, wszędzie wypukłej, która zawiera wszystkie punkty podparcia. (Figura podparcia.) W tym ogólniejszym przypadku rozumiemy przez moment stałości najmniejszy moment ciężaru względem prostej stycznej do obwodu figury podparcia.

77. T. zw. „stałość dynamiczna“ ciała ciężkiego podpartego mierzy się pracą konieczną do przewrócenia tego ciała zapomocą obrotu około jednej z „krawędzi podparcia“. Skoro np. obrócimy ciało, przedstawione na fig. 85 około krawędzi podstawy, prostopadłej do płaszczyzny rysunku, którem śladem jest  $B$ , aż środek ciężkości  $S$  znajdzie się w  $S'$  pionowo nad  $B$ , to musimy przytem podnieść środek ciężkości o wysokość  $S'k = z = \sqrt{h^2 + r^2} - h$ , czyli wykonać pracę:

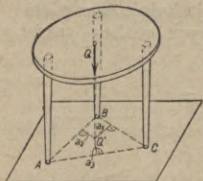


Fig. 84.

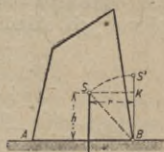


Fig. 85.

$$Qz = \frac{Qr^2}{h + \sqrt{h^2 + r^2}}$$

Stałość dynamiczna naszego ciała jest więc proporcjonalna do jego ciężaru, a nadto jest tem większa, im większa jest pozioma odległość  $r$  środka ciężkości od krawędzi podparcia, a im mniejsza jest wysokość  $h$  tego środka nad podstawę.

78. Zasada Torricelli'ego. Skoro jedno ciało sztywne lub układ ciał, określony w art. 58, znajduje się w polu ciężkości, uważanem za jednorodne, to w położeniu równowagi stałej środek ciężkości układu zajmuje położenie możebnie najniższe. Statyczne warunki równowagi są spełnione także np. w przypadku, gdy środek ciężkości zajmuje położenie najwyższe, ale wówczas równowaga jest niestala, czyli chwilowa. Jeżeli wreszcie przy każdym ruchu chwilowym środek ciężkości układu pozostaje w tej samej wysokości, to równowaga jest obojętna.

79. Równowaga ciała obracalnego około osi stałej. Jedynemu stopniowi swobody takiego ciała odpowiada jeden analityczny warunek równowagi sił obciążających, który wyraża, że suma algebraiczna momentów tych sił względem osi obrotu musi być równa zeru.

W odpowiadające równanie warunkowe nie wchodzi widocznie reakcje osi obrotu, które wraz z obciążeniami muszą czynić zadość pozostałym pięciu warunkom. Zadanie staje się statycznie wyznaczalnem, gdy np. ustalenie osi obrotu jest urzeczywistnione jednym łożyskiem stopowym i jednym sztywnym (fig. 86). Reakcja bowiem łożyska sztywnego dostarcza dwu niewiadomych składowych do osi prostopadłych, łożyska stopowego zaś oprócz tych dwu jeszcze trzeciej, mającej kierunek osi, zwanej przeto „podłużną”. (Razem 5, tj. tyle, ile równań warunkowych.)

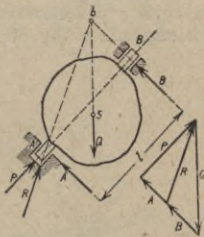


Fig. 86.

W przypadku działania tylko dwu sił obciążających np.  $\bar{P}$  i  $\bar{Q}$  nosi ciało obracalne około stałej osi  $x$  często nazwę dźwigni, zwłaszcza gdy występuje w roli „maszyny prostej”. Wtedy warunek równowagi:

$$\text{Mom}_x \bar{P} = - \text{Mom}_x \bar{Q}$$

wyraża t. zw. „prawo dźwigni”, odkryte przez Archimedesesa w postaci szczegółowej, jaką otrzymuje, gdy obie siły leżą w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu:

Wówczas jest  $Pa = Qb$ , jeżeli  $a$  oznacza ramię siły  $P$ , zaś  $b$  ramię „ciężaru“  $Q$ .

80. Tarcie statyczne. Kąt i stożek tarcia. Spółczynnik tarcia. Doświadczenie poucza, że reakcja, jakiej doznaje w stanie równowagi ciało stałe obciążone, od ciała je podpierającego, może zbaczać od kierunku normalnej płaszczyzny stykania się nawet wówczas, gdy powierzchnie zetknięcia się są tak oszlifowane, że przedstawiają się jako „optycznie gładkie”. Atoli w tych samych zresztą warunkach nie może kąt nachylenia  $\alpha$  reakcji do normalnej przekroczyć granicy zwanej kątem tarcia  $\varphi$ . Rozłożywszy reakcję  $\bar{R}$  na składową normalną  $N$  i styczną  $T$ , nazywamy tę ostatnią siłą tarcia, albo krótko „tarcie” (statycznym). A zatem:

$$T = N \text{tg } \alpha \leq N \text{tg } \varphi \text{ } T_{\text{max}} \text{ (całkowite tarcie statyczne).}$$

Stożek opisany obrotem kąta  $\varphi$  dokoła normalnej nazywa się stożkiem tarcia; wartość zaś  $\text{tg } \varphi = f_0$  współczynnikiem tarcia (fig. 87).

Spółczynnik tarcia okazuje się w dość obszernych granicach wartości nacisku normalnego  $N$  prawie niezależnym od wielkości tego nacisku (jeżeli

zachodzi bezpośrednie stykanie się obu ciał stałych, czyli tarcie „na sucho“ przy dość wielkiej powierzchni stykania się). Ten współczynnik liczbowy może być przeto uważany w przybliżeniu za stałą charakterystyczną dla materiałów ciał trących i stopnia wygładzenia ich powierzchni stykających się nawzajem.

Wielkość  $f_0$  dla dwu danych materiałów znajduje się doświadczalnie, sporządziwszy z jednego materiału równię pochyłą a z drugiego płaską ścianę ciała ciężkiego, które się kładzie na równi, poczem zwiększa się jej nachylenie do poziomu stopniowo, aż do wartości, po przekroczeniu której ciało zię zsuwa. Ta wartość jest widocznie kątem tarcia.

To doświadczenie poucza zarazem, że tarcie statyczne występuje tylko w takiej wielkości, jaka jest niezbędna do utrzymania równowagi. Gdy ciało spoczywa na płaszczyźnie poziomej tylko pod działaniem ciężaru własnego, to niema wcale tarcia. Natomiast podczas ślizgania się tegoż ciała po płaszczyźnie poziomej zachodzi tarcie o określonej wielkości podobnież zależnej głównie od nacisku normalnego i dającej się przedstawić w postaci:

$$T = Nf,$$

przyczem jednakże współczynnik  $f$  jest mniejszy od  $f_0$  malejąc ze wzrostem prędkości względnej.

**81. Zagadnienia równowagi z uwzględnieniem tarcia.** Tarcie ułatwia znakomicie urzeczywistnienie równowagi w przypadkach, w których by jej nie mogło być bez tarcia.

a) Tak np. drabina, oparta o poziomą posadzkę i pionową ścianę, nie mogłaby pozostawać w równowadze przy żadnej skończonej wartości kąta nachylenia  $\alpha$  (fig. 88), gdyby nie tarcie. Dzięki tarcniu jest równowaga za-

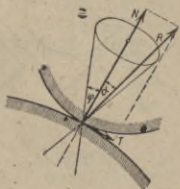


Fig. 87.

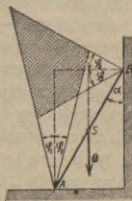


Fig. 88.

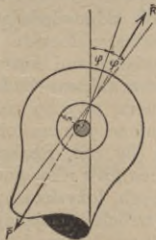


Fig. 89.

pewniona przy tych wartościach  $\alpha$ , dla których ciężar drabiny  $Q$  (lub wypadkowa z jej obciążeń) trafia zakreskowany czworokąt jako ślad wspólnej przestrzeni obu stożków tarcia w punktach  $A$  i  $B$  na płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez te punkty i zawierającej siłę  $Q$ . (Rysunek przedstawia skrajne położenie równowagi.)

b) Ciało obracalne na przegubie walcowym (fig. 89) byłoby bez tarcia w równowadze tylko wtedy, gdyby składowe obciążeń prostopadłe do osi obrotu, miały wypadkową  $\bar{P}$  o kierunku normalnej stykania się ciała z czopem, a więc gdyby ta siła  $\bar{P}$  trafiała dokładnie oś czopa. Z powodu tarcia może ta siła wraz z równoważącą ją reakcją czopa przegubu zbaczać od normalnej o kąt  $\alpha \leq \varphi$ , czyli może mieć względem osi czopa ramię momentu zwanego momentem tarcia, które musi być  $\leq r \sin \varphi$ , jeżeli  $r$  jest promieniem czopa.

Koło o promieniu  $\rho = r \sin \varphi = r f'$  nazywają kołem tarcia, a współczynnik  $f' = \sin \varphi < f$  współczynnikiem tarcia przegubowego (czopowego). Dla krańcowego momentu tarcia mamy przeto wyrażenie:

$$\mathfrak{M}_f = Fr \sin \varphi = Pr f'.$$

**82. Statyka układów ciał sztywnych.** Układy przegubowe prętów. Łańcuchy i kratownice<sup>1)</sup>. W układzie ciał połączonych ze sobą w jakikolwiek sposób dają się połączenia określić siłami zależnymi od obciążeń danych. Siły te jako siły wewnętrzne dla całego układu znikają z jego

<sup>1)</sup> Por. też dział: „Statyka budowli“.

warunków równowagi; natomiast wchodzą w warunki równowagi każdego poszczególnego ogniwa układu, jakie również muszą być spełnione, skoro każde z tych ogniw jest w równowadze. Przez zastosowanie równań równowagi do odpowiednio wydzielonych części układu można przeto obliczyć siły wewnętrzne (reakcje) częściowo lub zupełnie, zależnie od warunków statycznej wyznaczalności. W równania równowagi każdej takiej wydzielonej części układu wchodzą jako siły wewnętrzne, oprócz danych obciążeń jeszcze wszystkie reakcje od pozostałych części układu. W szczególnie prosty sposób rozwiązują się zadania wyznaczenia sił wewnętrznych w układzie przegubowym prętów, jeżeli siły obciążające działają tylko w przegubach. Każdy bowiem z prętów pozostaje wówczas pod działaniem dwu sił przeniesionych nań przez przeguby, które dla równowagi muszą działać wzdłuż osi pręta i być co do wielkości równe, a co do kierunku przeciwne. Siły te ( $\bar{S}$  i  $-\bar{S}$ ) mogą być rozciągające albo ściskające (fig. 90).

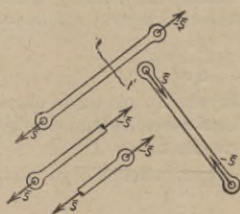


Fig. 90.

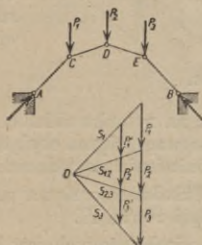


Fig. 91.



Fig. 92.

Dwie części pręta rozdzielone w myśli przekrojem  $tt'$  (fig. 90), działają na siebie nawzajem siłami wewnętrznymi czyli napięciami ( $\bar{S}$  i  $-\bar{S}$ ), które również będą albo siłami rozciągającymi albo też ściskającymi.

Układ przegubowy prętów może być jako całość sztywnym, czyli może mieć postać geometryczną niezależną od sił zewnętrznych, albo też niesztywnym (jako całość), a wówczas przybiera postać równowagi zależną od sił zewnętrznych. W pierwszym przypadku bywa nazywany zwykle kratownicą, w drugim zaś łańcuchem. Atoli można także pojmować łańcuch prętów jako kratownicę niesztywną, albo nawzajem krato-wnice jako łańcuch sztywny.

W płaskim zagadnieniu równowagi łańcucha prętów, obciążonego siłami pionowymi (fig. 91), którego końce ustalono przegibnie w punktach A i B, znajdujemy wartości sił  $P_1, P_2 \dots$  odpowiadające danej postaci równowagi, traktując ją jako wielobok sznurowy i kreśląc z dowolnie obranego bieguna O promienie  $S_1, S_2 \dots$  równoległe do odpowiednich boków AC, CD, ... tego wieloboku.

W ten sposób znajdujemy oczywiście tylko stosunki wielkości szukanych sił  $P_1 : P_2 : \dots$ . Rozwiązanie staje się dopiero oznaczonym, skoro np. suma obciążeń jest dana.

Uwaga. W rozpatrywanym przypadku jest każdy z prętów ściskany, a równowaga układu niestała.

W płaszczyźnie ma łańcuch z  $n$  ogniw ( $n + 2$ ) stopnie swobody; po ustaleniu początku i końca pozostaje jeszcze ( $n - 2$ ) stopni. Układ, złożony z dwu ogniw o ustalonych dwu przegubach końcowych, jak np. t. zw. „łuk trójprzegubowy“ (fig. 92), jest przeto sztywny i statycznie wyznaczalny (izostatyyczny), t. zn. dla każdego obciążenia można z warunków równowagi znaleźć reakcje w przegubach podporowych. Przy obciążeniu tylko jednego ogniwa, np. lewego, siłą  $P$ , znajdujemy reakcje w A i w B

jako boki trójkąta sił uwzględniając równowagę drugiego ogniwa nieobciążonego, która wymaga, ażeby reakcje w  $B$  i w  $C$  leżały na prostej  $BC$ .

**83. Krzywa sznurowa.** Dla płaskiego układu sił rozmieszczonych w sposób ciągły (jak np. ciężar własny cięgna, uważanego za ważką linję materialną itp.), przechodzi wielobok sznurowy w krzywą sznurową. W szczególności ważnym przypadku sił równoległych przedstawiamy je jako ciężary pasków elementarnych pola jednorodnego (fig. 93), ograniczonego z jednej strony osią prostopadłą do kierunku sił. Pasek o polu  $\eta dx$  ma ciężar  $\gamma \eta dx$ , a zatem siła przypadająca na jednostkę szerokości paska (w  $kg/cm$ )

$$q = \gamma \eta$$

jest proporcjonalna do rzędnej  $\eta$ .

Oznaczywszy przez  $H$  „odległość biegunową” od wieloboku sił (mierzoną w podziałce sił), mamy równanie różniczkowe krzywej sznurowej:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -q$$

przy uwidocznionym na rysunku układzie współrzędnych. To równanie określa zarazem postać równowagi cięgna obciążonego siłami równoległymi do osi  $Y$  o natężeniu  $q$  w odniesieniu do jednostki rzutu cięgna na oś  $X$ .

**Wnioski.** a) Składowa pozioma napięcia cięgna obciążonego siłami pionowymi jest stała i równa  $H$ .

b) W miejscach nieobciążonych jest krzywa sznurowa prosta, a napięcie cięgna  $S$  stałe.

c) Gdy  $q$  jest stałe, t. zn. przy obciążeniu równomiernie rozłożonym ze względu na rzut poziomy cięgna jest krzywa sznurowa parabolą, o osi pionowej:

$$\frac{2H}{q} y = -x^2 + Cx + C',$$

przyczem  $C$  i  $C'$  są stałymi całkowania. Parametrem tej paraboli jest iloraz  $H/q$ .

d) Jeżeli w pewnym punkcie cięgna działa nadto siła skupiona  $P$ , to w krzywej sznurowej powstaje załom (fig. 94), przyczem:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{P}{H},$$

ponieważ dla równowagi musi być  $P - S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 = 0$ .

e) Napięcia końców cięgna, a zarazem reakcje stałych punktów zawieszania są określone skrajnymi promieniami wieloboku sił.

f) Krzywa sznurowa jest drugą linją całkową dla linii obciążenia  $\eta = f(x)$ .

g) Danej linii obciążenia odpowiada, przy stałym  $H$ ,  $\infty^2$  krzywych sznurowych na płaszczyźnie, atoli tylko jedna krzywa przechodząca przez dwa punkty dane, lub przechodząca przez jeden punkt dany i mająca w nim styczną daną.

h) Gdy dane obciążenie ciągle podzielimy na części pionowymi prostymi i każde obciążenie częściowe zastąpimy siłą wypadkową, to wielobok sznurowy układu sił wypadkowych (odpowiadający temu samemu biegunowi), jest opisany na krzywej sznurowej, a punkty styczności leżą na prostych podziałowych.



i) Jeżeli punkty zawieszenia ciężna są na tym samym poziomie, to składowe pionowe reakcyj w tych punktach są takie same, jak dla belki poziomej o tej samej rozpiętości (i tak samo obciążonej).

84. Linja łańcuskowa (katenoïda) zwyczajna jest postacią równowagi ciężna jednorodnego, doskonale giętkiego i nierozciągliwego, zawieszono go oba końcami w stałych punktach  $A$  i  $B$  (fig. 95) i pozostającego tylko pod wpływem ciężaru własnego  $\gamma \text{ kg/m}$ . Ta postać jest krzywą sznurową, dla której

$$-q \, dx = \gamma \, ds,$$

jeżeli  $ds$  oznacza długość elementu łuku. A zatem:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = \gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

a po zcałkowaniu i wyznaczeniu punktu  $x_0, y_0$ , leżącego na pionowej najniższego punktu łańcuskowej w odległości  $m = \frac{H}{\gamma}$  (parametr łańcuskowej) otrzymujemy:

$$y - y_0 = \frac{m}{2} \left[ e^{\frac{x-x_0}{m}} + e^{-\frac{x-x_0}{m}} \right],$$

albo dla układu spólrzędnych o początku w  $\Omega (x_0, y_0)$ :

$$y = \frac{m}{2} \left( e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}} \right) = m \, Ch \, \frac{x}{m},$$

(jeżeli  $Ch$  oznacza „cosinus hyperbolicus“).

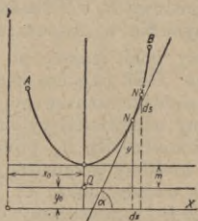


Fig. 95.

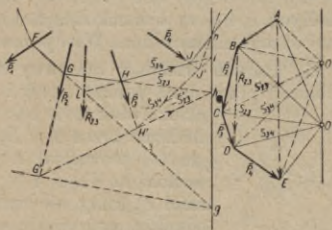


Fig. 96.

Parametr  $m$  ma znaczenie długości ciężna o ciężarze równym  $H$ , tj. poziomej składowej napięcia. Napięcie  $S$  w dowolnym miejscu ciężna określa równanie:

$$S = \gamma (y - y_0).$$

Wniosek. Środek ciężkości łuku łańcuskowej leży na pionowej przecięcia się stycznych w jego końcach.

85. Najważniejsze własności wieloboku sznurowego (i krzywej sznurowej).

a) Gdy wykreślimy dwa wieloboki sznurowe danego układu sił dla dwu biegunów  $O$  i  $O'$  (fig. 96), to odpowiednie boki tych wieloboków przecinają się w punktach  $(g, h, i \dots)$ , leżących na prostej równoległej do  $OO'$ .

b) Moment wypadkowej sił danego układu względem jakiegokolwiek środka  $\Omega$  na jego płaszczyźnie równa się iloczynowi odległości biegunowej  $H$  przez odcinek prostej przechodzącej przez  $\Omega$  i równoległej do tej wypadkowej, wyznaczony przez boki skrajne wieloboku sznurowego (fig. 97):

$$\text{Mom}_{\Omega} \overline{R} = R r = H m,$$

$$\text{Mom}_{\Omega'} \overline{R} = -R r' = -H m'.$$

To twierdzenie pozwala mierzyć momenty siły  $\overline{R}$  zapomocą podziałki na wykresie uwydatnionym przez zakreskowanie równoległe do  $\overline{R}$ .

Szczególnie korzystne jest powyższe przedstawienie momentu, gdy wszystkie siły układu są równoległe jak np. na fig. 98, przedstawiającej

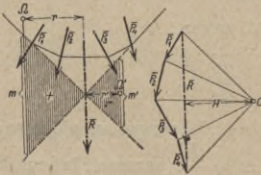


Fig. 97.

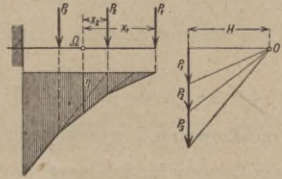


Fig. 98.

belkę końcem utwierdzoną i obciążoną siłami  $P_1, P_2$  i  $P_3$ . Rzędna  $\eta$  zakreskowanego pola, pomnożona przez odległość biegunową  $H$ , daje moment wypadkowej sił, leżących po prawej stronie względem odpowiadającego punktu  $\Omega$ . Moment ten nosi w nauce o wytrzymałości nazwę momentu zginającego daną belkę w przekroju  $\Omega$ . Wielobok sznurowy dostarcza przeto wykresu momentów zginających.

86. Konstrukcja wieloboku sznurowego, którego pewne trzy boki przechodzą przez punkty dane, polega na twierdzeniu *a*) w ust. 85. Nazwawszy te boki dla wygody przez  $a, b, c$  znajdujemy wypadkową  $\overline{R}_1$  sił, dla których  $a$  i  $b$  są bokami skrajnymi, oraz wypadkową  $\overline{R}_2$  sił, dla których bokami skrajnymi są  $b$  i  $c$ . Wtedy mamy do czynienia z dwiema siłami  $\overline{R}_1$  i  $\overline{R}_2$ , których wielobok sznurowy zawiera trzy boki, mające po kolei przechodzić przez dane punkty  $A, B$  i  $C$  (fig. 99). Otóż najpierw kreślimy jakiegokolwiek dwa boki  $a'$  i  $b'$  wieloboku sznurowego, przechodzące przez  $A$  i  $B$ , znajdujemy odpowiadający im biegun  $O'$ , prowadząc z początku i końca siły  $R_1$  promienie równoległe do  $a'$  i  $b'$ ; a potem kreślimy przynależny bok trzeci  $c'$ , który nie będzie wogóle trafiać punktu  $C$ . Skoro jednakże poprowadzimy prostą  $AB$  i przedłużymy bok  $c'$  aż do przecięcia się z tą prostą w  $n$ , to przez punkt  $n$  przechodzić musi na podstawie przytoczonego twierdzenia także bok  $c$  szukanego wieloboku, poczem boki  $b$  i  $a$  znajdujemy z łatwością. Inne rozwiązanie tego samego zadania w teorii łuku trójprzegubowego.



Fig. 99.

87. Warunki sztywności i statycznej wyznaczalności (izostaty-

czności) kratownicy płaskiej w jej płaszczyźnie.<sup>1)</sup> Ażebym w węzłów połączyć prętami w figurę sztywną, musi liczba prętów  $p$  wynosić przynajmniej:

$$p = 2w - 3,$$

albowiem każdy nowy węzeł ustala się przez połączenie go dwoma prętami (nie leżącymi na jednej prostej) z dwoma innymi węzłami, a tylko pierwsze (trzy węzły tworzące trójkąt wymagają nie  $6 = 2 \cdot 3$ , lecz tylko 3 prętów fig. 100). Kratownica, zbudowana w ten sposób i tworząca figurę złożoną

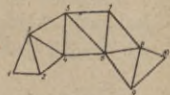


Fig. 100.

<sup>1)</sup> Przy art. 87—91 por. też dział: „Statyka budowli“.

z szeregu trójkątów, nigdzie się nawzajem nie nakrywających, nazywa się kratownicą prostą. Jest ona sztywna, oraz statycznie wyznaczalna, czyli izostaticzna. Jeżeli bowiem na węzły tej kratownicy działają siły zewnętrzne  $P_1, P_2, \dots$ , czyniące zadość trzem warunkom równowagi, koniecznym do unieruchomienia całości, to wyciąwszy w myśli każdy węzeł z osobna i zastąpiwszy połączenie siłami wewnętrznymi w prętach, otrzymujemy dla każdego węzła 2 równania równowagi. Razem tedy mamy  $2w$  równań, w których jednakże tkwią jeszcze owe 3 warunki równowagi sił zewnętrznych. Do wyznaczania  $p$  niewiadomych sił wewnętrznych w prętach pozostaje więc  $2w - 3$  równań, czyli tyle, ile koniecznie potrzeba. Że te równania są zarazem wystarczające, łatwo się przekonać w każdym poszczególnym przypadku, rozwiązując je wykreślnie, czyli kreśląc dla każdego węzła zamknięty wielobok sił. W tym celu trzeba rozpocząć od węzła, w którym się schodzą tylko dwa pręty, co jest zawsze możliwe u kratownicy prostej.

Gdy kratownica nie jest prosta, może warunek  $p = 2w - 3$  okazać się niewystarczający. Jeżeli w kratownicy płaskiej jest  $p < 2w - 3$ , to kratownica jest oczywiście niesztwna, jeżeli zaś  $p > 2w - 3$ , to jest przesztywniona, czyli (wewnętrznie) statycznie niewyznaczalna (por. dział: „Statyka budowli“).

88. Plan sił jako figura „odwrotna“ względem planu kratownicy prostej wraz z siłami zewnętrznymi. Taki plan jest wielce dogodnym połączeniem wszystkich wieloboków sił równoważących się nawzajem w skażdym węzle z osobna. Jego kreślenie ułatwia reguła Bow'a, wynikająca ze stwierdzenia, że:

1. „Plan kratownicy“ i „plan sił“ zawierają tę samą liczbę prostych, przyczem każdej prostej jednego planu (osi pręta lub siły zewnętrznej) odpowiada równoległa do niego prosta planu drugiego (siła wewnętrzna lub zewnętrzna).

2. Proste każdego z obu planów dzielą płaszczyznę na tę samą ilość pól.

3. Prostym otaczającym pole na jednym planie odpowiadają proste wychodzące z jednego punktu na planie drugim i odwrotnie.

Wobec tego przed kreśleniem planu sił dla danego planu kratownicy (fig. 101) oznaczamy wszystkie pola np. literami  $a, b, c, \dots$  a węzły np. cyframi rzymskimi  $I, II, III, \dots$ . Rozpoczynając teraz kreślenie planu sił od węzła  $I$ , ponieważ w nim schodzą się tylko 2 pręty, oznaczamy pole trójkąta sił  $P_1, S_4, S_5$  również przez  $I$ ; wierzchołek zaś tego trójkąta, utworzony

przez  $S_4$  i  $S_5$ , oznaczamy literą  $f$ , albowiem pręty 4, 5 i 6 otaczają pole  $f$  na planie kratownicy itd. Po wykreśleniu planu sił odróżniamy siły wewnętrzne ściskające np. przez zgrubienie lub podwojenie linii na planie kratownicy. (Kreślenia strzałek unika się, ponieważ każda siła  $S_i$  na planie przedstawia dwie siły wewnętrzne, jakimi pręt działa na swoje przeguby końcowe).

89. Sposób Culmann'a. Kratownica prosta da się zawsze podzielić na dwie części przekrojem przecinającym nie więcej jak trzy pręty (nie schodzące się w jednym węzle), np. 1, 2, 3 na fig. 102. Rozpatrując równowagę

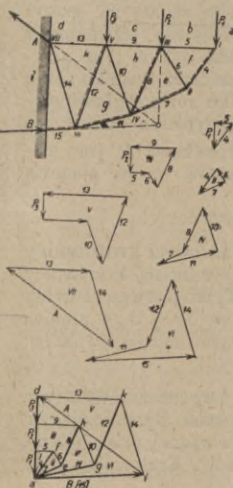


Fig. 101.

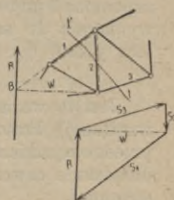


Fig. 102.

np. lewej odciętej części kratownicy, mamy do czynienia z warunkami równowagi wypadkowej  $\bar{R}$  sił zewnętrznych na tę część działających z napięciami  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ , które określają działanie drugiej części na część rozpatrywaną. Równowaga tych czterech sił wymaga, aby wypadkowa dwu z nich, np.  $\bar{R}$  i  $\bar{S}_1$ , która musi przechodzić przez znany punkt  $\beta$ , leżała na tej samej prostej, co wypadkowa dwu pozostałych, tj.  $S_2$  i  $S_3$ , przechodząca przez  $\alpha$ . Kierunek  $\alpha\beta$  wyznacza przeto linię działania  $\bar{W}$  obu wypadkowych, co pozwala natychmiast wykreślić czworokąt sił (fig. 102), rozpoczynając od  $S_1 \parallel 1$  aż do przecięcia się z kierunkiem  $\bar{W}$  itd.

**90. Sposób Ritter'a.** Podzieliwszy kratownicę na dwie części przekrojem przecinającym pręty 1, 2, 3, nie schodzące się w jednym węźle (fig. 103) piszemy warunek momentów dla części rozpatrywanej, przyczem obieramy środek momentów tak, aby równanie zawierało tylko jedną niewiadomą. Chcąc więc znaleźć siłę wewnętrzną  $S_1$  w pręcie 1 obieramy środek momentów w  $\alpha$ , gdzie przecinają się pręty 2 i 3. Warunek momentów daje:

$$Rr + S_1 r_1 = 0, \text{ czyli } S_1 = -R \frac{r}{r_1}.$$

Znak  $-$  wskazuje, że siła  $S_1$  jest skierowana ku węzłowi 1, czyli że jest siłą ściskającą pręt 1.

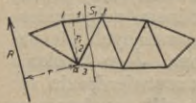


Fig. 103.

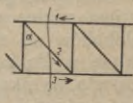


Fig. 104.

tów 1 i 3 — w nieskończoności. W tym ostatnim przypadku stosuje się często z korzyścią warunek rzutów zwłaszcza gdy wypadkowa  $\bar{R}$  jest pionowa, a pręty 1 i 3 poziome (fig. 104). Warunek rzutów na oś pionową daje wówczas:

$$S_2 \cos \alpha - R = 0, \text{ czyli } S_2 = R \sec \alpha.$$

**91. Warunki sztywności i statycznej wyznaczalności kratownicy przestrzennej.** Każdy nowy węzeł łączy się sztywnie z resztą kratownicy zapomocą 3 prętów nie leżących w jednej płaszczyźnie. Tylko pierwsze 4 węzły wymagają do sztywnego połączenia w czworoscian nie  $12 = 3 \cdot 4$  prętów, lecz tylko 6 (tj. o 6 mniej), a zatem liczba prętów  $p$  musi czynić zadość równaniu:

$$p = 3w - 6.$$

Jest to warunek konieczny sztywności i statycznej wyznaczalności (wewnętrznej) kratownicy przestrzennej. Będzie on zarazem wystarczającym przedewszystkiem w przypadku kratownicy prostej utworzonej przez kolejne dołączanie czworoscianów (por. dział: „Statyka budowli“, Kratownice przestrzenne).

## IV. Kinytyka.

### A. Zagadnienia kinytyki punktu materialnego.

**92. Ruch pionowy w polu ciężkości uważanem za jednorodne.**  
a) Równanie ruchu bez uwzględnienia oporu powietrza napiszemy w postaci:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \pm mg, \text{ albo } \frac{d^2 z}{dt^2} = \pm g,$$

przyczem znak  $+$  odpowiada osi dodatnich  $z$  skierowanej w dół, a znak  $-$  w górę. Przyjmując  $c$  jako wartość prędkości skierowanej w górę w położeniu początkowym  $z = 0$ , otrzymujemy z pierwszego całkowania:

$$v = \frac{dz}{dt} = c - gt,$$

z drugiego zaś:

$$z = ct - \frac{1}{2}gt^2,$$

jeżeli  $z$  liczymy dodatnio w górę. Punkt wznosi się ruchem jednostajnie zwalnianym, aż jego początkowa energja kinetyczna  $\frac{mv^2}{2}$  zamieni się na potencjalną  $mgh$ , a prędkość  $v$  stanie się równa zeru. Czas wznoszenia się jest przeto równy  $t_1 = \frac{c}{g}$ , a wysokość wzniesienia się  $h = \frac{c^2}{2g}$ . Jest to największa wartość, jaką osiąga  $z$ , jak wynika z powyższego równania. Od tej chwili  $t_1$  rozpoczyna się swobodny spadek i dla  $t = 2t_1$  otrzymujemy znówu  $z = 0$ , a  $v = -c = -\sqrt{2gh}$ , czyli punkt wraca z prędkością o tej samej wartości, z którą wyszedł.

b) Z uwzględnieniem oporu powietrza lub innego ośrodka jednorodnego, będzie równaniem spadania:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg - kv^2,$$

jeżeli  $k$  oznacza współczynnik oporu proporcjonalnego do kwadratu prędkości. Wartość  $k$  znajdujemy empirycznie obserwując tę prędkość spadku  $v_0$  przy której ruch staje się jednostajnym, czyli  $mg - kv_0^2 = 0$ .

Stąd

$$k = \frac{mg}{v_0^2},$$

a równanie ruchu przybierze postać:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \left( 1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right).$$

Całkowanie daje

$$v = v_0 \sqrt{1 - e^{-\frac{2gs}{v_0^2}}},$$

z czego widać, że prędkość zdoła asymptotycznie do prędkości jednostajnego spadania  $v_0$ , którą teoretycznie osiąga dla  $s = \infty$ . Atoli po przebieżeniu drogi  $s$ , kilkakrotnie większej od  $\frac{v_0^2}{2g}$  staje się różnica między  $v$  a  $v_0$  znikomo mała, tak iż przy stosunkowo znacznych współczynnikach oporu, jakich doznają np. krople deszczu w powietrzu, albo ziarenka piasku w wodzie, obserwujemy już po spadku z niewielkiej wysokości ruch praktycznie jednostajny.

Z powtórnego całkowania wynika:

$$S = \frac{v_0^2}{g} \log \text{nat} \frac{1}{2} \left( e^{\frac{gt}{v_0}} + e^{-\frac{gt}{v_0}} \right) = \frac{v_0^2}{g} \log \text{nat} \text{Ch} \frac{gt}{v_0}.$$

**93. Wążki punkt materialny na równi pochyłej** porusza się w płaszczyźnie równi jak swobodny pod wpływem wypadkowej siły ciężkości  $mg$  i reakcji równi, która bez tarcia ma kierunek normalnej do równi. Siła poruszająca ma wtedy wartość  $mg \sin \alpha$  i kierunek największego spadku na płaszczyźnie równi. Reakcja  $N = mg \cos \alpha$ . To samo otrzymujemy rozkładając siłę ciężkości  $mg$  na składową normalną i styczną do równi, ponieważ składowa normalna jest zniesiona reakcją, a tylko styczna wytwarza przyspieszenie  $a = g \sin \alpha$  (fig. 105).

Bez prędkości początkowej jest tor punktu materialnego prostą nachyloną do poziomu pod kątem  $\alpha$ , a ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem  $a = g \sin \alpha$ . Tak samo ma się rzecz, gdy prędkość początkowa ma kierunek owej prostej.

Jeżeli pomiędzy punktem materialnym a równią zachodzi tarcie przy stałej wartości współczynnika tarcia  $f$ , wówczas przyspieszenia  $a$  spadku po prostej nachylonej pod kątem  $\alpha$ <sup>1)</sup> określi równanie ruchu:

$$ma = mg \sin \alpha - Nf = mg \sin \alpha - mf \cdot g \cos \alpha,$$

czyli

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Przy ruchu zaś w górę po tejże prostej ma przyspieszenie wartość:

$$a = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

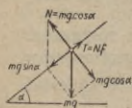


Fig. 105.

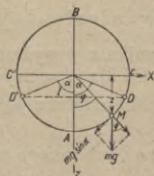


Fig. 106.

**94. Ruch ważkiego punktu materialnego po okręgu pionowym. Wahadło proste matematyczne.** Oznaczywszy przez  $s$  długość łuku mierzonego od najniższego punktu jako położenia równowagi stałej, a przez  $\varphi$  odpowiadający kąt środkowy (fig. 106), otrzymujemy bez oporów równanie ruchu:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}, \quad \text{albo} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Jego pierwszą całkę znajdujemy najprościej z zasady zachowania energii. Obracszy poziom porównawczy (odpowiadający zeru energii potencjalnej) na wysokości środka koła mamy:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \equiv v^2 = v_0^2 - 2gl(1 - \cos \varphi),$$

jeżeli  $v_0$  oznacza wartość prędkości w najniższym punkcie. Od tej wartości zależy ogólny charakter ruchu:

1. Gdy  $v_0^2 > 2gh$ , przyczem  $h = 2l$  (średnicy koła), to  $v$  nie staje się zerem przy żadnej wartości kąta  $\varphi$ , a ruch odbywa się po jednym półkołu oddzielnym pionową średnicą z dołu ku górze z prędkością malejącą, a po drugim w dół z prędkością rosnącą, poczem powtarza się identycznie w nieskończoność. Punkt obiega okrąg z prędkością okresowo zmienną w tym samym kierunku.

2. Gdy  $v_0^2 < 2gh = 4gl$ , to prędkość staje się zerem w dwu położeniach odpowiadających  $\varphi = \pm \alpha$ , przyczem  $\alpha$  otrzymujemy z warunku

$$v_0^2 = 2gl(1 - \cos \alpha).$$

Ruch ma wówczas charakter wahadłowy czyli odbywa się tam i napowrót po łuku odpowiadającym kątowi  $2\alpha$ . Przy bardzo małym kącie amplitudy  $\alpha$  (czyli małych odchyleniach) można z wielką dokładnością zastąpić  $\sin \varphi$  przez  $\varphi$  i napisać równanie ruchu nieskończenie małych wahań w postaci:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s,$$

określającej według art. 45 prosty ruch harmoniczny o okresie (podwójnego) wahnięcia

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

niezależnym od amplitudy.

<sup>1)</sup> Równym kątowi nachylenia płaszczyzny.

Dla wielkich odchyień znajdujemy dokładnie po łatwym przekształceniu:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (\text{całka eliptyczna}),$$

a stąd po rozwinięciu na szereg trwanie (okres) jednego pełnego (podwójnego) wahnienia:

$$T_{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right].$$

Te wahnienia nie są już izochroniczne, jak wahnienia nieskończenie małe, lecz zależą od kąta amplitudy  $\alpha$ . Skoro jednakże  $\hat{\alpha} \leq 8^{\circ}$ , to  $T_{\alpha} \leq 1,0012 T_0$ .

Wahadło sekundowe tj. takie, dla którego  $T_0/2 = 1 \text{ sk}$ , ma długość  $l_1 = g/\pi^2$ .

W Warszawie, gdzie  $g = 9,8122 \text{ m/sk}^2$ , jest  $l_1 = 0,9943 \text{ m}$ .

Reakcja okręgu jako toru, albo napięcie nici łączącej punkt materialny ze środkiem  $O$ , ma wartość:

$$R = mg \cos \varphi + ml \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

### 95. Wpływ obrotu ziemi na ruch ważkiego punktu materialnego.

Z powodu obrotu ziemi w układzie bezwzględny z prędkością kątową  $\omega = 0,000\,073 \text{ sk}^{-1}$  porusza się punkt materialny względem układu stale połączonego z ziemią tak, jakby nań oprócz siły ciężkości względnej  $m\bar{g}$  działała nadto przeciwnie wzięta siła Coriolis'a  $2m\bar{v}_w \omega \sin(\bar{v}_w, \bar{\omega})$ .

Dostrzegalne skutki siły Coriolis'a wykazano np. na spadku swobodnym ze znacznej wysokości. Punkt materialny zbacza od pionu na wschód, a wielkość tego zбочenia obliczamy z dostatecznym przybliżeniem przyjmując wartość prędkości pionowej  $v_z = gt$ . Wektor prędkości kątowej

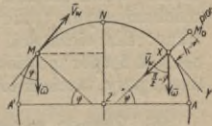


Fig. 107.

obrotu ziemi  $\bar{\omega}$  tworzy z  $\bar{v}_z$  kąt  $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$  (fig. 107), a zatem przyspieszenie Coriolis'a jest skierowane poziomo na zachód i ma wartość  $2v_z \omega \cos \varphi$ . Obrawszy oś  $X$  skierowaną ku wschodowi otrzymujemy:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2gt \omega \cos \varphi, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = g$$

jako przybliżone równania ruchu.

Całkowanie daje:

$$x = \frac{gt^3}{3} \omega \cos \varphi, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2} gt^2.$$

Zбочenie wschodnie  $x$  wynosi np. dla wysokości spadku  $158,8 \text{ m}$  i szerokości geograficznej  $\varphi = 50^{\circ} 53'$  (doświadczenie Reich'a w kopalniach saskich w r. 1831), obliczone przy pomocy powyższych wzorów  $x = 2,75 \text{ cm}$ .

Przy ruchu nieswobodnym punktu materialnego w płaszczyźnie poziomej wchodzi w grę pozioma składowa siły Coriolis'a. Jej wartość jest niezależna od azymutu prędkości względnej  $\bar{v}$  i równa się  $2m\bar{v} \omega \sin \varphi$ . Kierunek odpowiadającej poziomej składowej siły dodatkowej  $-m\bar{a}_c$  dla patrzącego w kierunku prędkości wskazuje na półkuli północnej na prawo, na połu-

dniowej zaś na lewo. Wskutek tego np. pociąg jadący na północnej półkuli wywiera boczny nacisk na prawą szynę nie przekraczający jednakże przy  $v = 30 \text{ m/sk}$  w naszej szerokości  $1/3000$  ciężaru pionowego.

### B. Kinetyka układów materialnych.

Rzeczywiste ciała materialne lub ich zespoły, czyli wogóle układy materialne rozpatrujemy pod postacią dwu modeli teoretycznych: albo jako układy skończonej lub nieskończonej liczby punktów materialnych, albo też jako twory geometryczne wypełnione materją ciągłą. W najogólniejszych rozważaniach mechaniki stosujemy zwykle model pierwszy; w mechanice płynów i sprężystych ciał stałych a także materiałów sypkich posługujemy się nadto z korzyścią modelem drugim i traktujemy te ciała jako continua materialne.

Ciało sztywne można uważać za układ punktów materialnych o niezmiennym ustroju geometrycznym, czyli nieodkształcalny. W obu modelach ważną rolę gra dokładne rozróżnianie sił zewnętrznych od wewnętrznych, jakkolwiek siła wewnętrzna w jednym zagadnieniu może się stać zewnętrzną w innym. Tak np. grawitacja pomiędzy ciałami układu słonecznego, rozpatrywanego jako całość, stanowi siły wewnętrzne układu, natomiast przy badaniu ruchu układu ziemia—księżyc określa przyciąganie przez słońce obu ciał siły zewnętrzne, a ich wzajemna grawitacja siły wewnętrzne. W układzie: rura działowa z pociskiem wewnątrz podczas wybuchu naboju są siłami wewnętrznymi: prężność gazów wybuchowych i tarcie między rurą a pociskiem; zewnętrznymi zaś: siła ciężkości i nacisk sprężyny przenoszącej reakcję wystrzału na lawetę. W poruszającym się ciele sprężystem są siłami wewnętrznymi naprężenia (napięcia). W nowoczesnych pojazdach mechanicznych (parowóz, rower, samochód itp.) występują jako siły zewnętrzne: siła ciężkości, reakcja tarcia kół napędowych o podłoże, opór toczenia się kół i opór powietrza; zaś jako siły wewnętrzne, np. w parowozie: prężność pary, tarcie w łożyskach osi, nacisk w krzyżulcu, czopach korbowych itd.

96. Zasada pracy i energii. Jeżeli  $E_0 = \frac{1}{2} \sum m_i c_i^2$  oznacza energję kinetyczną układu punktów materialnych  $m_i$  o prędkościach  $\bar{c}_i$  w położeniu obranem za początkowe,  $E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$  energję kinetyczną w jakimkolwiek późniejszym położeniu układu,  $L_w$  pracę sił wewnętrznych,  $L_z$  pracę sił zewnętrznych układu, wykonaną podczas ruchu pomiędzy temi dwoma położeniami, wówczas:

$$E - E_0 = L \equiv L_w + L_z,$$

czyli słowami: Energja kinetyczna jakiegokolwiek układu materialnego wzrasta (względnie maleje) podczas ruchu o wielkość pracy wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych układu (zależnie od tego czy ta praca jest dodatnia, czy też ujemna).

Gdy siły układu mają potencjał, a  $U_0$  i  $U$  oznaczają odpowiadające wartości energii potencjalnej układu (tj. sumy algebraicznej energii potencjalnych wszystkich punktów materialnych układu) w obu jego położeniach, to z powyższego równania otrzymujemy:

$$E + U = E_0 + U_0 = \text{stałej},$$

czyli: W przypadku sił (zewnętrznych i wewnętrznych), pochodzących od potencjału, całkowita energja (tj. suma energii kinetycznej i potencjalnej) układu podczas ruchu zachowuje wartość stałą.

Uwaga. W zagadnieniach technicznych występują zawsze obok sił pochodzących od potencjału, czyli sił zachowawczych, także siły innego rodzaju (jak tarcie, opór powietrza



itp.) zwane siłami rozpraszającymi (energję). Wskutek tego całkowita energia układu ubywa podczas ruchu o wartość pracy sił rozpraszających. Ten ubytek idzie oczywiście na koszt energii kinetycznej. Nazwa sił rozpraszających pochodzi stąd, ponieważ strata energii mechanicznej jest ze stanowiska fizyki pozorna i polega właściwie na zamianie tej energii na inną postać, w ostatniej instancji na zdążającą do rozprószania w przestrzeni energję cieplną.

97. Ważniejsze zastosowania zasady pracy i energii polegają na tem, że przy ich pomocy można w niektórych przypadkach znaleźć łatwo ruch układu pod wpływem danych sił czynnych. Np:

Obrót ciała sztywnego około stałej osi z pominięciem tarcia w łożyskach pod wpływem jakichkolwiek sił czynnych  $\bar{P}_i$ . Przy chwilowej prędkości kątovej  $\omega$  i momencie bezwładności  $I$  względem osi obrotu, jest

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

wartością energii kinetycznej tego ciała. Stosując zasadę pracy dla nieskończenie małego przyrostu energii kinetycznej w czasie  $dt$ , otrzymujemy zważywszy, że praca reakcyj łożysk i sił wewnętrznych jest równa zeru,

$$I \omega d\omega = \mathfrak{M} \omega dt,$$

jeżeli  $\mathfrak{M} = \Sigma \text{Mom}_{\text{os}} \bar{P}_i$  oznacza ogólny moment sił czynnych względem osi obrotu. Stąd

$$\varepsilon \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{I},$$

czyli przyspieszenie kątove równa się ilorazowi z momentu sił czynnych względem osi obrotu przez moment bezwładności ciała względem tejże osi.

98. Zasada d'Alemberta sprowadza zagadnienie ruchu układu materialnego pod wpływem danych sił działających do zagadnienia równowagi na podstawie następującego rozumowania: Siły zewnętrzne  $\bar{P}_i$ , działające na punkty  $m_i$  układu materialnego, nie wywołują wogóle takich przyspieszeń tych punktów, jakieby zachodziły, gdyby te punkty  $m_i$  były swobodne i zupełnie niezależne od innych punktów materialnych układu. Atoli w myśl zasadniczych praw dynamiki można traktować każdy z punktów układu  $m_i$  jako swobodny, ale pozostający pod wpływem nie tylko danej siły  $\bar{P}_i$ , lecz także pewnej siły  $\bar{W}_i$  zastępującej więzy nałożone punktowi  $m_i$  i siły (wewnętrzne), które działają nań inne punkty materialne układu. Obie te siły udzielają punktowi  $m_i$  przyspieszenia  $\bar{a}_i$ . To przyspieszenie rzeczywiste dałoby się oczywiście znieść działaniem na punkt  $m_i$  siły fikcyjnej  $\bar{B}_i = -m_i \bar{a}_i$ . Nazywamy ją siłą (albo oporem) bezwładności. W każdym przeto położeniu poruszającego się układu materialnego (fikcyjne) siły bezwładności równoważą się z siłami zewnętrznymi, o ile siły wewnętrzne same się nawzajem znoszą. Tak się rzecz ma w przypadku ciała sztywnego lub układu ciał sztywnych połączonych ze sobą przegubami bez tarcia, niciami nierozciągliwymi itp. W innych przypadkach należy do sił zewnętrznych oddzielnych punktów materialnych układu zaliczyć nadto te siły wewnętrzne, których praca przygotowana jest różna od zera.

Zasadę d'Alemberta wyrażamy przy pomocy zasady prac przygotowanych równaniem:

$$\sum_i \left( \bar{P}_i - m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} \right) \delta \bar{r}_i = 0,$$

albo przy zastosowaniu metody analitycznej:

$$\sum_i \left[ \left( X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left( Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left( Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right] = 0.$$

**Wniosek.** Dwa układy sił działających na ciało sztywne, które są równoważne statycznie, są zarazem równoważne kinetycznie, t. zn. wywołują ten sam ruch ciała swobodnego ze stanu spoczynku.

**Przykłady.** 1. Przy ruchu postępowym ciała sztywnego swobodnego poruszają się wszystkie jego punkty z tem samym przyspieszeniem  $\bar{a}$ . Odpowiadające równoległe siły bezwładności mają więc wypadkową  $\sum m_i \bar{a} = M\bar{a}$ , która przechodzi przez środek masy ciała. Dlatego siły zewnętrzne, ruch taki wywołujące, muszą mieć również wypadkową, przechodzącą przez środek masy ciała o wielkości  $M\bar{a}$ .

2. Przy ruchu obrotowym ciała sztywnego osadzonego na stałej osi w łożyskach  $A$  i  $B$  ma siła bezwładności każdego punktu  $m_i$  ciała składową styczną (do koła o promieniu  $\rho_i$ , jakie opisuje ten punkt) i składową normalną. Pierwsza, tj. styczna siła bezwładności ma wartość  $m_i \rho_i \varepsilon$ ; druga zaś zwana znowu siłą odśrodkową (z powodu formalnej identyczności z siłą odśrodkową w dwu pierwszych znaczeniach) jest równa  $m_i \rho_i \omega^2$  (jeżeli  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ , oznaczają odpowiednio prędkość i przyspieszenie kątowe). Siły odśrodkowe są w ogólnym przypadku zrównoważone odpowiednimi reakcjami łożysk. Styczne siły bezwładności dają ogólny moment względem osi obrotu o wartości  $\sum m_i \rho_i^2 \varepsilon = I\varepsilon$ , który się znosi z momentem sił czynnych  $\bar{P}_i$  względem tejże osi oznaczonym już poprzednio przez  $\mathfrak{M}$ . Stąd równanie ruchu obrotowego, wprowadzone w art. 98 z zasady pracy. Zastosowanie zasady d'Alembert'a przedstawia w naszym zadaniu tę korzyść, że pozwala wyznaczyć także reakcje łożysk z warunków równowagi tych reakcyj z danymi siłami zewnętrznymi i siłami bezwładności. Ograniczając się do przypadku, w którym niema sił zewnętrznych, widzimy, że do utrzymania obrotu jednostajnego około danej osi  $AB$  wystarcza równowaga sił odśrodkowych z reakcjami łożysk (oczywiście z pominięciem tarcia). Układ sił odśrodkowych sprowadza się metodami podanymi w statyce do jednej siły  $\bar{R} = M\bar{r}_0 \omega^2$ , tj. siły odśrodkowej całej masy ciała pomyślanej w jej środku (o promieniu  $\bar{r}_0$ ) i do jednej pary ( $\bar{Q}$ ,  $-\bar{Q}$ ) (fig. 108) w płaszczyźnie przechodzącej przez oś obrotu o momencie  $\mathfrak{M}_C = (D_y \bar{j} - D_z \bar{k}) \omega^2$  (przyczem  $\bar{j}$  i  $\bar{k}$  oznaczają wektory jednostkowe na osiach  $Y$  i  $Z$  prostokątnego układu związanego z ciałem, którego osią  $X$  jest oś obrotu;  $D_y$  zaś i  $D_z$  są odpowiadającymi momentami zbrocenia.

W szczególnym przypadku  $r_0 = 0$ , tj. gdy oś obrotu przechodzi przez środek ciała, staje się  $\bar{R} = 0$ , ale pozostaje jeszcze para sił, chyba, że jednocześnie jest  $D_y = D_z = 0$ , czyli gdy oś obrotu jest główną osią bezwładności. Wtedy i tylko wtedy siły odśrodkowe nawzajem się znoszą, a zatem obrót jednostajny zachodzi bez reakcyj w łożyskach. Taka oś jest swobodną osią obrotu ciała sztywnego.

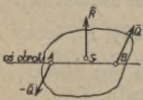


Fig. 108.



Fig. 109.

3. Wahadło fizyczne, jest to jakiegokolwiek ciało sztywne obracalne około poziomej stałej osi nie przechodzącej przez jego środek masy i poruszające się „wahadłowo” pod wpływem samej tylko siły ciężkości. Moment siły ciężkości  $Mg$  względem osi obrotu  $= -Mg \cdot a \sin \varphi$ , jeżeli  $a$  oznacza odległość środka ciężkości  $S$  od osi obrotu, zaś  $\varphi$  kąt odchylenia (fig. 109). Równanie ruchu

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{Mg \cdot a \sin \varphi}{I}$$

różni się od równania ruchu wahadła matematycznego o długości  $l$ :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin \varphi$$

tylko postacią stałego współczynnika. Prawo obu ruchów będzie jednakowe skoro obadwa współczynniki będą sobie równe, czyli gdy  $\frac{Ma}{I} = \frac{1}{l}$ . Obliczona z tego warunku długość wahadła matematycznego wyznacza na przedłużeniu  $OS_0$  punkt  $C$  wahadła fizycznego, zwany środkiem wahnienia. Odległość

$$CO = l_{\text{red}} = \frac{I}{Ma} = \frac{r^2}{a}$$

(jeżeli  $I = Mr^2$ ) nazywa się długością sprowadzoną danego wahadła fizycznego albowiem okres jego pełnego wahanienia (przy bardzo małym kącie amplitudy  $\alpha$ ) wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg \cdot a}}$$

Przy pomocy twierdzenia z teorii momentów bezwładności  $I = I_0 + Ma^2$  łatwo dowieść, że zawieszony wahadło na osi równoległej do pierwotnej i przechodzącej przez środek wahanienia  $C$  otrzymujemy znowu ten sam czas wahanienia, chociaż zmieniła się odległość środka ciężkości od osi obrotu.

Z warunków równowagi sił bezwładności z ciężkością i reakcjami osi obrotu nie trudno teraz wyznaczyć te ostatnie.

**99. Zasada ruchu środka masy i zasada pól, czyli zasada momentów ilości ruchu (pędów).** Siły wewnętrzne jakiegokolwiek układu materialnego nie wpływają na ruch środka masy tego układu, który odbywa się tak, jak ruch punktu materialnego o masie ( $M = \sum m_i$ ) równej całej masie układu pod działaniem wszystkich sił zewnętrznych  $\bar{P}_i$  układu przeniesionych do środka masy.

$$M \frac{d^2 \bar{r}_0}{dt^2} = \sum \bar{P}_i, \quad \text{albo} \quad \frac{d}{dt} (M \bar{v}_0) = \sum \bar{P}_i,$$

jeżeli  $M \bar{v}_0 = \sum m_i \bar{v}_i$  ( $\bar{r}_0, \bar{v}_0$  promień wektor i prędkość środka masy układu).

Dowód wynika z dodania równań ruchu wszystkich punktów materialnych układu, ponieważ suma sił wewnętrznych równa się zero. Podobnie uwzględniając, że geometryczna suma momentów sił wewnętrznych układu jest dla każdego środka momentów  $O$  równa zero, znajdujemy łatwo równanie:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \text{Mom}_O m_i \bar{v}_i = \sum_i \text{Mom}_O \bar{P}_i.$$

Dla wygody wysłowienia t. zw. zasady pól wyrażonej powyższem równaniem, nazwiemy sumę geometryczną momentów ilości ruchu względem punktu  $O$ , czyli  $\sum \text{Mom}_O m_i \bar{v}_i = \bar{K}$ , krętem układu. A zatem:

Dla dowolnie obranego punktu przestrzeni  $O$  jest prędkość zmiany (pochodna względem czasu) krętu jakiegokolwiek układu materialnego (geometrycznie) równa ogólnemu momentowi sił zewnętrznych tegoż układu.

Posługując się metodą analityczną otrzymujemy z powyższego równania wektorowego trzy następujące:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \left( y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \sum (Z_i y_i - Y_i z_i),$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \left( z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) = \sum (X_i z_i - Z_i x_i),$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \left( x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = \sum (Y x_i - X_i y_i).$$

Wyrażenia w nawiasach po lewej stronie mają proste znaczenie kinematyczne, albowiem przedstawiają podwójne prędkości wycinkowe rzutów punktów  $m_i$  na odpowiadające płaszczyzny współrzędnych (fig. 110). Tem się tłumaczy nazwa „zasady pól”.

**100. Szczególne przypadki i przykłady zastosowania zasady ruchu środka masy i zasady pól.** Pierwsza zasada, wyrażona drugiem z równań na początku art. 99, daje się także wysłowić w postaci: Prędkość zmiany pędu jakiegokolwiek układu materialnego równa się wypadkowej sił zewnętrznych układu. (Przez pęd układu rozumiemy przytem sumę  $\sum m_i \bar{v}_i$

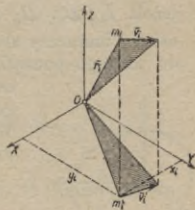


Fig. 110.

równą  $M\bar{v}_0$ , tj. pędowi całej masy skupionej w środku masy i poruszającej się z prędkością tego środka.)

W przypadku gdy niema sił zewnętrznych, albo gdy  $\Sigma \bar{P}_i = 0$ , jest  $M\bar{v}_0 = \text{stałe}$ , czyli środek masy układu porusza się jednostajnie i prostoliniowo, albo w szczególności jest w spoczynku.

**Przykłady.** 1. Dwa ciała o masach  $M_1$  i  $M_2$  są w ruchu postępowym prostoliniowym ze stałymi prędkościami  $v_1$  i  $v_2$ . To dowodzi, że siły wewnętrzne na nie działające albo się znoszą, albo też ich niema wcale. Skoro te ciała podczas ruchu się zderzą, to powstają między nimi wewnętrzne siły uderzenia, które sprawiają, że ich prędkości staną się inne po rozłączeniu się obu ciał w przypadku uderzenia (choćby częściowo) sprężystego. Oznaczywszy je przez  $\bar{w}_1$  i  $\bar{w}_2$ , mamy według zasady ruchu środka masy:

$$M_1 \bar{v}_1 + M_2 \bar{v}_2 = M_1 \bar{w}_1 + M_2 \bar{w}_2.$$

W szczególnym przypadku zderzenia prostego i środkowego otrzymujemy zamiast powyższego równania wektorego równanie algebraiczne:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 w_1 + M_2 w_2.$$

2. Środek masy bomby rzuconej t. zw. miotaczem min opisuje z pominięciem wpływu oporu powietrza parabolę. Po wybuchu bomby w powietrzu poruszają się odłamki w różnych kierunkach, ale tak, że ich wspólny środek masy opisuje dalej parabolę do chwili, w której jeden lub więcej z odłamków uderzy o przeszkodę, czyli do chwili pojawienia się nowej siły zewnętrznej obok siły ciężkości.

Kręt układu  $\bar{K} = \sum_i \text{Mom}_O m_i \bar{v}_i$  ma wogóle wartość zależną od obioru punktu odniesienia  $O$ , chyba, że spełnia się warunek  $\Sigma m_i \bar{v}_i = 0$ . Tak się ma rzecz przedewszystkiem wtedy, gdy środek masy układu jest w spoczynku, albo też gdy ruch danego układu materialnego odnosimy do układu współrzędnych połączanego niezmiennie z owym środkiem masy.

Obliczenie krętu ciała sztywnego przy jego obrocie chwilowym około osi  $X$  (fig. 111) z prędkością kątową  $\bar{\omega} = \omega \bar{i}$ , daje

$$\bar{K} = \omega (I_x \bar{i} - D_x \bar{j} - D_y \bar{k}),$$

jeżeli  $I_x, D_x, D_y$  oznaczają odpowiednio moment bezwładności względem osi  $X$  i momenty zbieżności względem osi  $X, Y$  oraz  $X, Z$  układu współrzędnych, do którego początku  $O$  odnosimy kręt. Ten kręt nie leży przeto wogóle na osi obrotu z wyjątkiem ważnego szczególnego przypadku, gdy oś obrotu jest jedną z głównych osi bezwładności. Wówczas jest

$$\bar{K} = I \bar{\omega}.$$

W ogólnym przypadku można jeszcze inaczej przedstawić wektor  $\bar{K}$ , rozłożywszy obrót chwilowy z prędkością kątową  $\bar{\omega}$  na trzy obroty około głównych osi bezwładności ciała (wzajemnie prostopadłych), przecinających się na danej osi obrotu, według schematu:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3.$$

Wtedy jest

$$\bar{K} = I_1 \bar{\omega}_1 + I_2 \bar{\omega}_2 + I_3 \bar{\omega}_3,$$

przyczem  $I_1, I_2, I_3$  oznaczają odpowiadające momenty bezwładności.

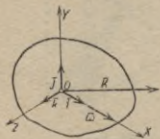


Fig. 111.

Skoro kręt ciała obracającego się około osi  $x$ , nie będącej osią główną, odniesiony do środka  $O$  obranego na tej osi, rzutujemy na tęż oś, to wartością rzutu, czyli składowej krętu w kierunku  $x$  jest

$$K' = I\omega.$$

W przypadku ustalonej osi obrotu otrzymujemy z zasady pól odrazu równanie ruchu obrotowego  $I \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}$ .

Kręt jakiegokolwiek układu materialnego, odniesiony do jego środka masy jako początku bezwzględnej osi współrzędnych jest stałym, jeżeli ogólny moment sił zewnętrznych względem tego środka jest stale równy zeru. Płaszczyzna prostopadła do krętu nazywa się wówczas płaszczyzną niezmienną.

**Przykłady.** 1. Ziemia nasza zachowuje się z wielkim przybliżeniem jak ciało sztywne, obracające się około głównej osi bezwładności przechodzącej przez jej środek masy. Jej kręt  $I\omega$  musi być przeto stałym i niezależnym od sił wewnętrznych. Jeżeli zaś stygnięcie ziemi wywołuje jej kurczenie się, i co zatem idzie zmniejszanie momentu bezwładności  $I$ , to musi odpowiednio zwiększyć się prędkość kątowna jej obrotu, aby  $I\omega$  pozostało stałym. Temu przeciwdziała poniekąd spadający na ziemię pył kosmiczny, który zwiększa  $I$ .

2. Tratwę pływającą na spokojnej wodzie można obrócić dokoła osi pionowej o dowolny kąt bez użycia wiosel itp., maszerując po torze zamkniętym na tratwie w tym samym kierunku. W najprostszym przypadku kołowego toru obsadzonego równomiernie załogą maszerującą ze stałą prędkością kątowną (bezwzględną)  $\omega_1$  około środka masy tratwy osiągamy jej obrót w kierunku przeciwnym z prędkością kątowną  $\omega_2$ , który trwa tak długo, aż załoga stanie. Albowiem kręt tratwy o momencie bezwładności  $I_1$  był na początku równy zeru, a więc podczas marszu musiało być  $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = 0$  (z pominięciem nieznacznego oporu ruchu). Stąd łatwo obliczyć  $\omega_2$  z danego  $\omega_1$ .

### C. Uderzenie.

**101. Określenia i pomocnicze twierdzenia z dynamiki.** Uderzenie zachodzi, gdy poruszające się dwa ciała stałe zetkną się podczas ruchu w ten sposób, że każde z nich stanowi przeszkodę dla ruchu drugiego. Uderzenie zmienia zatem ruch obu ciał, a zmianę tę określa — w myśl zasad dynamiki — siła uderzenia. Ta siła powstaje w miejscu stykania się ciał, i działa nie dłużej jak trwa zetknięcie się. Czas jej działania nazywa się trwaniem uderzenia i bywa zwykle bardzo krótki. W ciągu tego czasu siła uderzenia  $P$  rośnie od zera do pewnego maximum, a następnie maleje aż do zera. Jej działanie mierzy najdogodniej t. zw.

$$\text{impuls siły} \equiv \bar{\Pi} = \int_t^{t+\tau} \bar{P} dt,$$

jeżeli  $\tau$  oznacza trwanie uderzenia, a  $t$  chwilę początkową. Wektor  $d\bar{\Pi} = \bar{P} dt$  nazywa się impulsem chwilowym, albo elementarnym.

Jeżeli siła  $\bar{P}$  działa na punkt materialny o masie  $m$ , to stosownie do punktu 3. jest

$$\bar{P} dt = d(m\bar{v})$$

a stąd przez całkowanie w przedziale czasu  $\tau$ :

$$m\bar{v}' - m\bar{v} = \int \bar{P} dt = \bar{\Pi},$$

czyli: Geometryczny przyrost pędu (ilości ruchu) punktu materialnego równa się impulsowi odpowiadającej siły.

To twierdzenie pozostaje ważnem dla ciała skończonego, jeżeli ruch ciała był postępowym na początku działania siły  $\bar{P}$ , a impuls tej siły przechodzi przez środek masy ciała.

Impuls siły uderzenia można przeto mierzyć wielkością przyrostu pędu, jaki ona wywołuje. Wielkość zaś samej siły uderzenia zależy od trwania  $\tau$ , i jest tem większa, im  $\tau$  jest krótsze. Średnia wartość siły uderzenia jest bowiem równa ilorazowi z impulsu  $\Pi$  przez trwanie  $\tau$ .

Jeżeli w początkowej chwili uderzenia ciała dotykają się ścianami regularnie zakrzywionemi, to wspólna normalna w punkcie zetknięcia się tych ścian nazywa się normalną uderzenia (osią uderzenia).

Uderzenie nazywa się środkowem lub mimośrodowem (dla jednego z obu ciał) stosownie do tego czy normalna uderzenia przechodzi lub nie przez środek masy ciała. Uderzenie nazywamy nadto prostem lub ukośnem (dla jednego z obu ciał) zależnie od tego, czy prędkość środka masy tego ciała jest równoległa, czy też nachylona do normalnej uderzenia.

Ponieważ siły uderzenia są dla układu złożonego z obu ciał siłami wewnętrznymi, przeto uderzenie nie może zmienić wartości geometrycznej sumy pędów obu ciał. Skoro te ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$  poruszały się przed uderzeniem postępowo z prędkościami  $\bar{v}_1$  i  $\bar{v}_2$ , a po uderzeniu (również postępowo) z prędkościami  $\bar{w}_1$  i  $\bar{w}_2$ ; wówczas

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{w}_1 + m_2 \bar{w}_2$$

bez względu na własności fizykalne obu ciał.

Natomiast całkowita energia kinetyczna obu ciał po uderzeniu jest wogóle mniejsza od takiejże energii przed uderzeniem. W idealnym przypadku równości energii przed i po uderzeniu mówimy o uderzeniu doskonale sprężystem.

W dobrem przybliżeniu mamy z takim uderzeniem do czynienia w przypadku zderzenia się przetaczanych ostrożnie na stacji wagonów kolejowych albo w przypadku kul bilardowych z kości słoniowej.

**102. Uderzenie środkowe i proste.** Jeżeli np. kula o masie  $m_1$  i prędkości  $v_1$  zderzy się z kulą o masie  $m_2$  i prędkości  $v_2$  (fig. 112), to pod wpływem nacisku (siły) uderzenia w miejscu zetknięcia się nastąpi spłaszczenie obu ciał rosnące aż do chwili zrównania się ich prędkości. Wspólną wartość  $u$  tych prędkości po pierwszym „akcie“ uderzenia określa równanie pędów. W „akcie“ drugim wzajemny nacisk obu ciał maleje aż do zera. Impuls  $\Pi_2$  tego nacisku zmienia pęd  $m_1 u$  na  $m_1 w_1$  i  $m_2 u$  na  $m_2 w_2$ . Oznaczywszy przez  $\Pi_1$  impuls nacisku (siły) uderzenia w akcie pierwszym, mamy:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u = m_1 w_1 + m_2 w_2$$

$$\Pi_1 = m_1 (v_1 - u) = m_2 (u - v_2); \quad \Pi_2 = m_1 (u - w_1) = m_2 (w_2 - u).$$

Gdy  $\Pi_1 = \Pi_2$ , to uderzenie nazywamy doskonale sprężystem; gdy  $\Pi_2 = 0$  — doskonale niesprężystem (czyli plastycznym). Wogóle jest  $\Pi_1 > \Pi_2$ , a stosunek  $\Pi_2/\Pi_1$  nazywamy współczynnikiem uderzenia  $k$ . Jego wielkość określa równanie:

$$k = (w_2 - w_1)/(v_1 - v_2).$$

Strata energii wskutek uderzenia wyraża się wzorem:

$$E_{\text{str}} = (1 - k^2) \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

z którego czytamy, że największa strata zachodzi dla  $k = 0$ , tj. przy uderzeniu doskonale niesprężystem; zaś dla  $k = 1$  (uderzenie doskonale sprężyste) jest strata równa 0.

W pierwszym przypadku da się strata przedstawić w formie:

$$E_{\text{str}} = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} m_2 (u - v_2)^2,$$

wyrażającej t. zw. twierdzenie Carnot'a.

Spółczynnik uderzenia  $k$  wyznacza się np. zapomocą spuszczenia swobodnie kuli  $m_1$  z wysokości  $h$  na płytę z danego materiału i mierzenia wysokości  $h_1$ , do której kula odskakuje. Wówczas  $k = \sqrt{h_1/h}$ , skoro oczywistą statę  $m_1 g (h - h_1)$  obliczymy nadto z powyższego wzoru przy założeniu  $v_2 = 0$ ,  $m_2 = \infty$ ,  $v_1 = \sqrt{2gh}$ .

**103. Uderzenie proste mimośrodkowe.** Przy założeniu upraszczającym, że płaszczyzna, przechodząca przez normalną uderzenia i środek masy ciała jest prostopadła do jego głównej centralnej osi bezwładności, a obadwa ciała były przed uderzeniem w ruchu postępowym — uderzenie sprawi, że ciało uderzone mimośrodkowo otrzyma ruch złożony z postępowego i obrotowego około wymienionej głównej osi bezwładności.

W przypadku np. przedstawionym na fig. 113 sprowadza się rozwiązanie do postaci podanej w art. 102, jeżeli wprowadzimy t. zw. masę sprowadzoną

$$m_2' = m_2 \frac{i_2^2}{e^2 + i_2^2},$$

przyczem  $i_2$  jest ramieniem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy  $S_2$  i prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Wówczas wspólną prędkość  $u$  miejsca zetknięcia się obu ciał po pierwszym akcie uderzenia określa wzór:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2' v_2}{m_1 + m_2'}.$$

Jednoczesną prędkość  $u_0$  środka  $S_2$  i prędkość kątową  $\omega$  w obrotu dają wzory:

$$u_0 = u - e\omega; \quad \omega = \frac{m_1(v_1 - u)e}{m_2 i_2^2}.$$

Na prostej  $Y$ , przechodzącej przez  $S_2$  i prostopadłej do  $X$ , leży oś obrotu chwilowego  $C$  zastępującego obrót  $\omega$  około  $S_2$  i przesunięcie z prędkością  $u_0$ . Punkty  $C$  tej osi nie zmieniają zatem wogóle prędkości wskutek uderzenia. Odległość  $CA = l$  oblicza się z wzoru:

$$l = e + \frac{i_2^2}{e}.$$

Wzór ten daje zarazem długość sprowadzoną wahadła, jakoby tworzyło ciało  $m_2$ , zawieszone bądź to na osi  $A$ , bądź też  $C$ . Stąd prawdziwość:

Ciało spoczywające i swobodnie uderzone mimośrodkowo wzdłuż prostej prostopadłej do jednej z głównych centralnych osi bezwładności obraca się około osi chwilowej do niej równoległej. Ta oś i normalna uderzenia są zamienne tak samo jak „środek wahnięcia“ i „punkt zawieszenia“ wahadła.

#### 104. Uderzenie ciała obracalnego dokoła osi stałej.

Zadanie sprowadza się również do zadania uderzenia prostego i środkowego (art. 102) przy pomocy t. zw. masy sprowadzonej, określonej teraz jako iloraz z momentu bezwładności ciała przez kwadrat odległości normalnej uderzenia od osi obrotu (przy założeniu ich prostopadłości). Np. ciała, przedstawione na fig. 114, obracające się (przed uderzeniem) z prędkościami kątowymi  $\omega_1$  i  $\omega_2$

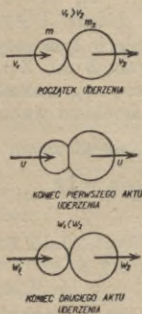


Fig. 112.



Fig. 113.



Fig. 114.

około osi  $O_1$  i  $O_2$ . A więc prędkości miejsca są:  $v_1 = r_1 \omega_1$ ,  $v_2 = r_2 \omega_2$ . Po pierwszym akcie uderzenia będzie wspólną prędkością tego miejsca:

$$u = \frac{m_1' v_1 + m_2' v_2}{m_1' + m_2'}, \quad \text{jeżeli } m_1' = \frac{I_1}{r_1^2}, \quad m_2' = \frac{I_2}{r_2^2};$$

zaś odpowiadającymi prędkościami kątowymi będą:

$$\omega_1' = \frac{u}{r_1}, \quad \omega_2' = \frac{u}{r_2}.$$

Uderzenie wywołuje w tym przypadku wogóle oddziaływanie uderzenia (wstrząśnienia) w łożyskach osi. Z p. 104 wynika jednak, że te oddziaływania znikną pod warunkiem, aby normalna uderzenia trafiała t. zw. środek uderzenia, identyczny ze środkiem wahnienia ciała rozpatrywanego jako wahadło na danej osi obrotu. Jeżeli zatem  $r_2 = e + \frac{i_2^2}{e}$ , to oś  $O_2$  nie dozna wstrząśnień wskutek uderzenia w  $A$ .

## LITERATURA.

### A. W języku polskim.

1. Autenrieth E.: Mechanika techniczna. Przekł. z niem. St. Patschke'go. Warszawa 1910.
2. Czopowski H.: Mechanika teoretyczna. Warszawa 1911 i 1916.
3. Franke J. N.: Mechanika teoretyczna. Warszawa 1889.
4. Kucharzewski F.: Mechanika w swym rozwoju historycznym. Warszawa 1924.
5. Routh J.: Statyka teoretyczna. Przekł. z ang. Z. Straszewicza. Warszawa 1916.
6. Straszewicz Z.: Nauka o ruchu. Warszawa 1918.

### B. W językach obcych.

7. Appell P.: Cours de Mécanique rationnelle, II. wyd. Paryż 1905.
8. Appell P. & Dautherville S.: Précis de Mécanique rationnelle. Paryż 1910.
9. Appell P.: Traité de Mécanique rationnelle. Wyd. II, 3 t. Paryż 1902—1909.
10. Bouligand G.: Précis de Mécanique rationnelle. Paryż 1925.
11. Love A. E. H.: Theoretical Mechanics. II. wyd. Cambridge 1906. (Także w przekładzie niemieckim H. Polster'a. 1920. Springer).
12. Perry J.: Applied Mechanics. Londyn 1907. (Także w przekładzie niemieckim R. Schick'a. 1908. Teubner).
13. Routh E. J.: Rigid Dynamics. 2 tomy. Wyd. VII. Londyn 1905. (Także w przekładzie niemieckim A. Schepp'a. 1898. Teubner).
14. Autenrieth E. & Ensslin M.: Technische Mechanik. 1922. Springer.
15. Föpl A.: Vorlesungen über technische Mechanik. 6 tomów. 1900—1909. Teubner.
16. Hamel G.: Elementare Mechanik. 1912. Teubner.
17. Helmholtz H.: Dynamik diskreter Massenpunkte. Lipsk 1898. J. A. Barth.
18. Planck M.: Einführung in die allgemeine Mechanik. II. wyd. Lipsk 1920. Hirzel.
19. Pöschl Th.: Lehrbuch der technischen Mechanik. 1923. Springer.
20. Tallquist H.: Lehrbuch der technischen Mechanik. 2 tomy. Helsingfors 1903.
21. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd. IV. Mechanik. 4 tomy. 1901—1908. Teubner.
22. Kirpiczew W. L.: Biesiedy o mechanikie (ross.). Petersburg 1907.



# Sprężystość i wytrzymałość.

Napisał

dr. inż. Maksymiljan T. Huber,  
profesor politechniki, Lwów.

## I. Część ogólna.

**Wstęp.** Praktyczny cel tego działu mechaniki technicznej streszcza się w odpowiedzi na następujące pytania: Jakie zastosować rozmiary, postać i materiał dla pewnego elementu konstrukcyjnego, aby z pośród różnorodnych warunków technicznych, jakie winne być spełnione, uczynić zadość trzem następującym, zwykle najważniejszym:

1. Odształcenia elementu nie powinny przekraczać pewnych wielkości, podyktowanych jego przeznaczeniem. (Warunek sztywności.)

2. Zniweczenie spójności (pęknięcie, złamanie itp.) musi być wykluczone z dostatecznym stopniem bezpieczeństwa czyli dostateczną pewnością. (Warunek wytrzymałości.)

3. Koszta (budowy, utrzymania itd.) elementu powinny być jak najmniejsze. (Warunek ekonomji.)

**Uwaga.** Prócz powyższych warunków mają na rozmiar, postać i materiał elementu konstrukcyjnego mniejszy lub większy wpływ inne własności natury fizyczno-chemicznej, zależne od jego przeznaczenia, jak np. przewodnictwo cieplne, odporność na wpływy atmosferyczne, ogniotrwałość, przepuszczalność dla ciepła lub głosu u ścian budynków i stropów, a dla płynów lub gazów u ścian zbiorników itd.

Zwykle np. mury ceglane niewysokich budynków mogłyby być ze względu na warunek wytrzymałości znacznie cieńsze od powszechnie używanych, gdyby nie wzgląd na straty ciepła rosnące ze zmniejszeniem grubości na niekorzyść warunku ekonomji.

**1. Stan odkształcenia.** Pod wpływem sił wewnętrznych czyli napięć lub też innych przyczyn jak np. ogrzanie, wysychanie (u drewna), tężenie (u betonu) itp. doznaje każdy element konstrukcyjny zmiany postaci i wymiarów, czyli odkształca się. W wielu przypadkach zadowolniamy się podaniem najbardziej w oko wpadających objawów odkształcenia. Np. w prostym przecie rozciąganym śledzimy jego wydłużenie, w belce zginanej jej ugięcie itd. Do zupełnego opisu odkształcenia ciała dzielimy je w myśli na elementy (nieskończenie małe), np. prostopadłościennie o krawędziach  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  przed odkształceniem i wyznaczamy ich położenie i postać po odkształceniu. W nowe położenie przechodzi element ruchem złożonym wogóle z przesunięcia i obrotu (jak ciało sztywne); nową postać określają długości krawędzi  $dx(1 + \varepsilon_x)$ ,  $dy(1 + \varepsilon_y)$ ,  $dz(1 + \varepsilon_z)$

i kąty ścienne (przed odkształceniem proste)  $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right)$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{yz}\right)$ ,

$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{zx}\right)$ . Bardzo małe liczby (algebraiczne)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  okre-

ślają stan odkształcenia, czyli odkształcenie właściwe w punkcie  $(x, y, z)$  ciała i stanowią sześć składowych tego odkształcenia. Składowe  $\varepsilon$  nazywamy wydłużeniami jednostkowymi (właściwymi), zaś składowe  $\gamma$  kątami odkształcenia postaciowego lub posunięciami (względniemi). Ujemnym wydłużeniom odpowiadają skrócenia krawędzi. Na fig. 115 przedstawiono (przesadnie) odkształcony element dla wygodnego porównania z pierwotną postacią tak, jak gdyby nie wykonał obrotu, a naroże  $O$  pozostało nieruchome.

Wyrazu „odkształcenie“ używamy w dwojakim znaczeniu: 1. ogólniej-  
szem, jako łączną zmianę położenia i postaci elementów ciała, 2. ciaśniej-  
szem, jako samą tylko zmianę postaci każdego z elementów z osobna (od-  
kształcenie właściwe).

Jeżeli składowe odkształcenia właściwego są dla każdego punktu ciała  
jednakowe, to odkształcenie nazywamy jednorodnym. W nieskończenie  
małych obszarach ciała można zawsze uważać odkształcenie za jednorodne.  
Wówczas obszar pierwotnego kształtu kuli o promieniu  $\rho$  zamienia się na  
elipsoidę, o półosiach  $\rho(1 + \varepsilon_1)$ ,  $\rho(1 + \varepsilon_2)$ ,  $\rho(1 + \varepsilon_3)$ . Kierunki tych osi na-  
zywamy głównymi kierunkami odkształcenia, a liczby  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  głównymi  
wydłużeniami jednostkowymi. Dla elementu prostokątnego zorjento-  
wanego w kierunkach głównych mają kąty odkształcenia postaciowego war-  
tość 0. W każdym odkształconym ciele można wyznaczyć trzy układy  
prostokątne krzywych, mających tę własność, że styczne do nich wskazują

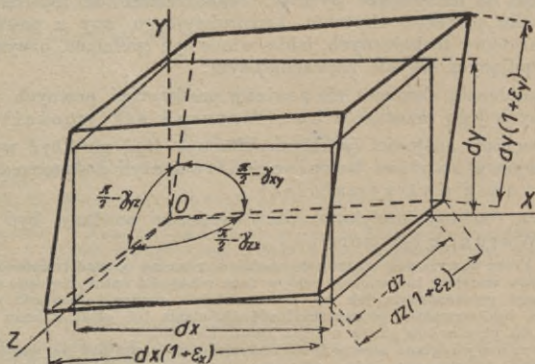


Fig. 116.

główne kierunki odkształcenia w punkcie styczności. Nazywamy je trajek-  
torjami odkształceń (głównych) lub liniami izostatycznymi.

Każde odkształcenie jednorodne da się rozłożyć na a) odkształcenie  
objętościowe, przy którym kula zamienia się na kulę nieco większą lub  
mniejszą, i b) odkształcenie postaciowe, przy którym kula zamienia  
się na elipsoidę o tej samej objętości. Stosunek zmiany objętości do objętości  
pierwotnej, czyli rozszerzenie (wzgl. skurczenie) objętościowe  
właściwe  $\Theta$  określa równanie:

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Przy każdym odkształceniu postaciowym jest  $\Theta = 0$ .

Szczególnie proste rodzaje odkształcenia jednorodnego są:

a) Proste wydłużenie lub skrócenie (odkształcenie jednowymiarowe,  
czyli linjowe) w pewnym kierunku. Skoro np. ten kierunek jest równoległy  
do osi  $x$ , to wartość  $\varepsilon_x$  wyznacza dokładnie rozpatrywane odkształcenie,  
gdyż wszystkie pozostałe składowe są równe 0.

b) Proste odkształcenie postaciowe czyli proste posunięcie  
(fig. 116), jeżeli tylko jedna para ścian równoległych sześcianu elementarnego  
zamienia się na romby o kątach  $\frac{\pi}{2} \pm \gamma$ , przyczem  $\gamma$  jest (bardzo małym)  
kątem odkształcenia postaciowego. (Pozostałe kąty i wydłużenia krawędzi są  
równe 0). Proste odkształcenie postaciowe jest równoważne z prostym wydłuże-  
niem  $+\varepsilon$  i skróceniem  $-\varepsilon$  w kierunkach wzajemnie prostopadłych i nachylonych

do ścian nieodkształconych pod kątem  $45^\circ$ , przy czym  $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$ . Każde odkształcenie jednorodne da się rozłożyć na trzy proste wydłużenia w określonych kierunkach wzajemnie prostopadłych.

## 2. Stan napięcia.

Wzajemne działanie sił molekularnych po obu stronach elementu płaskiego przekroju o polu  $dF$ , pomyślanego wewnątrz ciała, da się określić przez napięcie, tj. przez siłę powierzchniową  $\overline{dS}$ , wogóle nachyloną do elementu i przechodzącą przez jego

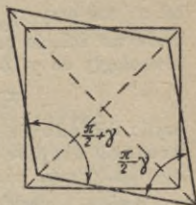
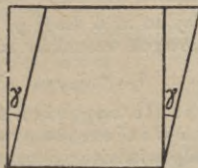


Fig. 116.

środek. Iloraz różniczkowy  $\overline{dS}/dF$  nazywamy naprężeniem (albo nateżeniem) w elemencie  $dF$ . Rozkładamy je na naprężenie normalne  $\sigma$  i styczne (ścinające)  $\tau$  do elementu. Wymiarem naprężeń są:  $kg/cm^2$ , czyli „nowa atmosfera“, albo  $kg/mm^2$  itp. Naprężenia normalne są ciągnięciami lub ciśnieniami, zależnie od tego, czy siły molekularne cząsteczek po obu stronach przekroju działają przyciągająco, czy też odpychająco (fig. 117). Wykreślnie należałoby przedstawiać naprężenia (normalne lub całkowite) odcinkami ze strzałkami na obu końcach („tensorami“); w rozważaniach statycznych traktujemy je najczęściej jako siły zastępujące działanie odciętej w myśli części ciała na część rozpatrywaną. Rachując naprężeniami normalnymi przyjmujemy dla ciągnięć znak  $+$ , a dla ciśnień  $-$ . (Fizycy posługują się umową odwrotną). To samo robimy zazwyczaj dla wygody rachunku przy obliczeniu sklepień).

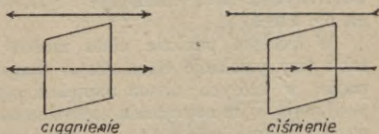


Fig. 117.

W płaskim przekroju o skończonym polu  $F$  określa wielkość składowej normalnej napięcia (siły wewnętrznej) wyrażenie:

$$S = \int_{(F)} \sigma dF.$$

Do określenia składowej stycznej napięcia potrzeba dwu wielkości odpowiadających dwu składowym naprężen stycznych wziętym w dwu dowolnych wzajemnie prostopadłych kierunkach, obranych w płaszczyźnie przekroju. Oznaczywszy te ostatnie przez  $\tau_1$  i  $\tau_2$  mamy dla wyznaczenia pierwszych wyrażenie:

$$T_1 = \int_{(F)} \tau_1 dF, \quad T_2 = \int_{(F)} \tau_2 dF.$$

Gdy rozkład naprężeń w płaskim przekroju jest równomierny, czyli gdy  $\sigma, \tau_1, \tau_2$  są stałe, to napięcie (siłę wewnętrzną) określa algebraiczna wielkość składowej normalnej  $S$  i wielkość, oraz kierunek składowej stycznej  $T$ . Przytem jest:

$$\sigma = \frac{S}{F}, \quad \tau = \frac{T}{F} \quad (\text{jeżeli } \tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}).$$

Ogół naprężeń we wszystkich elementach płaskich przechodzących przez obrany punkt ciała określa stan napięcia w tym punkcie. Z powodu wpływającej z prawideł statyki wzajemnej zależności naprężeń w różnych przekrojach elementarnych, wyznaczają stan napięcia w punkcie  $(x, y, z)$

ciała trzy naprężenia normalne  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , i sześć składowych naprężeń stycznych  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}; \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$  w trzech przekrojach elementarnych równoległych do płaszczyzn współrzędnych. Przytem oznacza wskaźnik np.  $x$  przy  $\sigma_x$ , że to jest naprężenie normalne w przekroju prostopadłym do osi  $x$ ; zaś przy  $\tau_{xy}$ , np. oznacza pierwszy wskaźnik  $x$ , że to jest naprężenie na ścianie prostopadłej do  $x$ , a drugi  $y$ , że kierunek naprężenia jest równoległy do  $y$ . Z momentowych warunków równowagi wypływa, że

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz};$$

czyli: Składowe prostopadłe naprężeń stycznych w dwu przekrojach elementarnych wzajemnie prostopadłych są zawsze równe. (Prawo równości odpowiadających naprężeń stycznych).

Ważne wnioski: a) Jeżeli na powierzchnię ciała działają tylko siły normalne (jak to najczęściej bywa), to w skrajnych zewnętrznych elementach pola jakiegokolwiek przekroju (normalnego do powierzchni) ma całkowite naprężenie styczne kierunek równoległy do konturu przekroju. A więc:

b) Gdzie kontur przekroju się załamuje, tworząc kąt  $< 180^\circ$ , tam jest przy powyższem założeniu zawsze  $\tau = 0$ . (Np. w  $A$  i  $A'$  na fig. 118 a). Natomiast w załomach konturu przekroju o kącie wewnętrznym  $> 180^\circ$  może być  $\tau \leq 0$ . (Np. w  $B$  i  $B'$  na fig. 118 b).

W każdym punkcie ciała można poprowadzić takie trzy przekroje elementarne wzajemnie prostopadłe, w których niema naprężeń stycznych. Odpowiadające im naprężenia normalne nazywamy naprężeniami głównymi. Stan napięcia w dowolnym punkcie ciała określają tedy kierunki wiel-



Fig. 118 a.

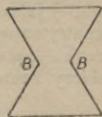


Fig. 118 b.

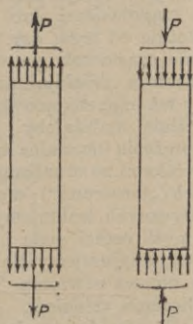


Fig. 119.

kości trzech naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Jedno z nich jest (algebraicznie) największe, a drugie najmniejsze. Największe naprężenie ścinające równe połowie (algebraicznej) różnicy naprężeń głównych panuje w płaszczyźnie tworzącej z płaszczyznami tych naprężeń kąty  $45^\circ$ .

Szczególnie proste stany napięcia są:

a) Linjowy lub jednoosiowy, czyli proste rozciąganie lub ściskanie, jeżeli tylko jedno z naprężeń głównych jest różne od 0. Taki stan zachodzi zwykle u prętów lub słupów przyrzątecznych obciążonych siłami normalnymi i rozłożonemi równomiernie na podstawach (fig. 119).

b) Dwuwymiarowy czyli płaski stan napięcia, jeżeli dwa z naprężeń głównych np.  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są różne od 0 (fig. 120 a). Wówczas niema naprężeń w płaszczyznach równoległych do  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , a naprężenie normalne  $\sigma$  i styczne  $\tau$  w płaszczyźnie prostopadłej do tamtych i nachylonej pod kątem  $\varphi$  do  $\sigma_1$  wyznacza „koło naprężeń” (O. Mohr).

3. Konstrukcja koła naprężeń. Na dowolnej osi  $x$  (fig. 120 b) odcinamy  $OA = \sigma_1$ ,  $OB = \sigma_2$ , i na  $AB$  jako średnicy zakreślamy koło. Aby znaleźć naprężenia w przekroju  $SS'$ , którego normalna tworzy z kierunkiem  $\sigma_1$  (wzgl.  $\sigma_2$ ) kąt (ostry)  $\varphi$ , odmierzymy od punktu  $A$  (wzgl.  $B$ ) łuk koła  $AP$  odpowiadający kątowi  $2\varphi$ . Odcięta  $OP'$  punktu  $P$  będzie naprężeniem normalnym  $\sigma$

przekroju  $SS'$ , zaś rzędna  $PP'$  naprężeniem stycznem  $\tau$  w tymże przekroju. Odpowiadające wzory analityczne:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\varphi, \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi$$

wypływają z warunku równowagi elementu o dwu ścianach równoległych do przekrojów głównych, a trzeciej równoległej do  $SS'$ .

Koło naprężeń może służyć do bardzo wygodnego rozwiązania nast. zadania: Dane są naprężenia normalne  $\sigma_x, \sigma_y$  i styczne  $\tau$  w dwu dowolnych przekrojach wzajemnie prostopadłych; znaleźć położenie przekrojów głównych i wielkości naprężeń głównych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ .

Rozwiązanie (fig. 121): Obrawszy prostokątny układ współrzędnych wyznaczmy punkt  $P_1$  o współrzędnych  $(\sigma_x, \tau)$  i  $P_2$  o współrzędnych  $(\sigma_y, -\tau)$ ; łączymy  $P_1$  z  $P_2$  i ze środka  $C$  odcinka  $P_1P_2$ , leżącego widocznie na osi  $x$ , zakreślamy

koło promieniem  $\frac{1}{2} P_1P_2$ . To koło wyznacza na osi  $x$  naprężenia główne  $OA = \sigma_1, OB = \sigma_2$ , które zachodzą w przekrojach nachylonych do danych pod kątem  $-\varphi_0$ , przy czem  $2\varphi_0 = \sphericalangle P_1CX$ . Ich wartości określa wzór:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

**4. Jednorodny i niejednorodny stan napięcia. Ogólne związki między składowymi stanu napięcia.** Jeżeli stan napięcia jest we wszystkich punktach ciała jednakowy (tj. wszystkie trzy naprężenia główne stałe co do kierunku i wielkości), to nazywamy go jednorodnym albo równomiernie rozłożonym. Szczególnie prosty stan tego rodzaju panuje zwykle w pryzmatycznych prętach rozciąganych lub ścisiskanych osiowo siłami  $PP$ . Wtedy naprężenie główne  $\sigma_1$  ma kierunek osi

pręta i wartość  $\sigma = \pm \frac{P}{F}$ , zaś  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Innego przykładu dostarcza

ciało jednolite i równokierunkowe dowolnego kształtu zanurzone w płynie, na którego powierzchnię wywieramy stałe ciśnienie  $p$ . Wówczas  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$  i mówimy o wszechstronnem równomiernem ścisiskanu ciała.

Prosty przykład niejednorodnego stanu napięcia widzimy w prostym pręcie pionowym obciążonym ciężarem własnym. W ogólnym niejednorodnym stanie napięcia są składowe  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  funkcjami współrzędnych

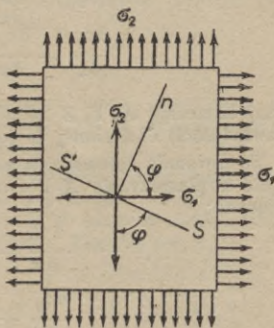


Fig. 120 a.

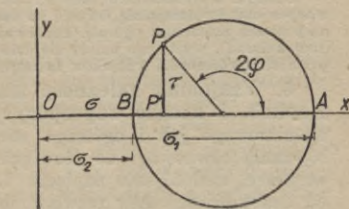


Fig. 120 b.

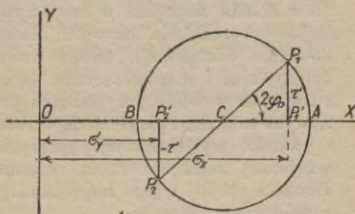


Fig. 121.

$x, y, z$ , które muszą czynić zadość trzem następującym równaniom różniczkowym wpływającym z warunków równowagi:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\gamma}{g} X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} Y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\gamma}{g} Z = 0.$$

Tutaj oznaczają  $X, Y, Z$  składowe siły masowej (np. siły ciężkości, siły bezwładności) odniesionej do jednostki masy, zaś  $\gamma/g$  gęstość.

Te równania sprowadzają się w przypadku dwuwymiarowego stanu napięcia w płaszczyźnie  $XY$  (warunek konieczny  $Z = 0$ ), do dwu następujących:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\gamma}{g} X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} Y = 0.$$

**Uwaga.** Wszystkie powyższe wyniki w ust. 1—4 są niezależne od natury rozpatrywanych ciał i opierają się jedynie na uproszczonym założeniu ciągłości materji, tudzież na prawach mechaniki ogólnej. Ponieważ materja ma w rzeczywistości budowę nieciągłą (molekularną), przeto nie należy się dziwić pojawianiu się, aczkolwiek nader rzadkiemu, pewnych sprzeczności wniosków teoretycznych z wynikami doświadczeń.

**5. Wzajemna zależność stanu odkształcenia i napięcia. Prawo Hooke'a i zasada superpozycji skutków.** Tak w przypadku dwuwymiarowego jak i ogólnego stanu napięcia nie wystarczają widocznie równania równowagi do rozwiązania ogólnego zadania: Dane są siły zewnętrzne, znaleźć stan napięcia. Liczba niewiadomych jest bowiem większa od liczby równań. Aby rozwiązanie znaleźć posługujemy się głównie dwiema drogami. — Pierwsza, dawniejsza, elementarna polega na dodatkowych możliwie prostych i popartych doświadczeniem hipotezach (przyjęciach) co do rozkładu naprężeń w rozpatrywanych przekrojach ciała. (Np. przyjęcie linjowego rozkładu naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym belki dowolnie obciążonej). Drugą nowszą opiera się na matematycznej teorii sprężystości i rozpowszechnia się coraz bardziej, dzięki znalezieniu ścisłych rozwiązań w wielu przypadkach praktycznego znaczenia, a zwłaszcza dzięki nowym metodom przybliżonego rozwiązania zadań szczegółowych.

Punkt wyjścia teorii sprężystości ujmującej w formę matematyczną wzajemną zależność stanu odkształcenia i stanu napięcia stanowi prawo Hooke'a (1660) i jego uogólnienie, które jest zastosowaniem t. zw. zasady superpozycji skutków.

Prawo Hooke'a opiewa: Odkształcenie uwarunkowane napięciem  $S$  jest doń proporcjonalne.

Uogólnienie zaś brzmi: Składowe stanu odkształcenia są linjowemi, jednorodnemi funkcjami składowych stanu napięcia (i nawzajem).

Zasada superpozycji skutków da się wysłowić w następujący sposób: Jeżeli z przyczyn tego samego rodzaju, określonych wielkościami  $\bar{P}', \bar{P}'', \dots$  każda z osobna wywołuje na danym układzie materjalnym skutek, określony odpowiadającemi wielkościami  $\bar{\varepsilon}', \bar{\varepsilon}'', \dots$  to wszystkie przyczyny razem wywołują skutek określony sumą:  $\bar{\varepsilon}' + \bar{\varepsilon}'' + \dots$  (geometryczną lub algebraiczną zależnie od charakteru wielkości  $\bar{\varepsilon}$ ).

Ważność uogólnionego prawa Hooke'a jest warunkiem koniecznym stosowalności zasady superpozycji do obciążeń i wywołanych nimi odkształceń układu, atoli wogóle nie jest warunkiem wystarczającym. (Np. wzajemne zbliżenie końców pręta lekko zakrzywionego pod wpływem podłużnych sił ściskających nie jest proporcjonalne względem ich wielkości, chociaż materiał pręta podlega prawu Hooke'a).

Najprostszą postać przybiera prawo Hooke'a w przypadku linowego stanu napięcia, np. przy rozciąganiu lub ściskaniu prostego pręta. Wówczas przy naprężeniu  $\sigma$  powstaje wydłużenie jednostkowe:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

przyczem stała  $E$  charakterystyczna dla materiału pręta, o wymiarze naprężenia ( $kg/cm^2$ ), nosi nazwę: moduł wydłużenia (moduł Younga) albo (pierwszy) współczynnik sprężystości.

Doświadczenie poucza, że przy prostym rozciąganiu (lub ściskaniu) pręta naprężeniem  $\sigma$  powstaje także odkształcenie poprzeczne  $\varepsilon'$  o znaku przeciwnym odkształceniu podłużnemu  $\varepsilon$  i stosownie do prawa Hooke'a również proporcjonalne względem  $\sigma$ , a więc i względem  $\varepsilon$ . Piszemy tedy:

$$\varepsilon' = -\frac{1}{m} \varepsilon = -\frac{1}{m} \frac{\sigma}{E}.$$

Liczbę stałą  $\frac{1}{m}$  właściwą materiałowi nazywamy liczbą Poisson'a. Jeżeli z dużej bryły danego materiału wytniemy pręty próbne rozmaicie zorientowane i dla każdego znajdziemy te same wartości stałych  $E$  i  $m$  to materiał jest równokierunkowy (izotropowy). Z wyjątkiem drewna można wszystkie prawie materiały konstrukcyjne uważać z większym lub mniejszym przybliżeniem za równokierunkowe. Wszystkie zaś bez wyjątku podlegają prawu Hooke'a, jednakże w nader różnych granicach. Granice ważności prawa Hooke'a nazywamy granicami proporcjonalności. Należałoby je mierzyć tą największą wartością wydłużenia właściwego (skrócenia), przy której zachodzi jeszcze proporcjonalność względem siły rozciągającej (ściskającej), albowiem ściśle biorąc tylko te wielkości dają się obserwować, a naprężenia można tylko obliczać, dzieląc siłę przez pole pierwotnego przekroju, który podczas wydłużenia pręta nieco się zmniejsza. Zważywszy jednak, że ta zmiana przekroju jest (wyjawszy kauczuk) bardzo niewielka, określamy zazwyczaj granicę proporcjonalności wartością naprężenia, powyżej którego dostrzegamy zboczenia od prawa Hooke'a.

Przy ogólnym (trójwymiarowym) stanie napięcia materiału równokierunkowego zlewają się kierunki naprężeń głównych  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  z kierunkami wydłużeń głównych  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$ , przyczem na podstawie prawa Hooke'a i zasady superpozycji zachodzą związki:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{m} (\sigma_2 + \sigma_3) \right],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \left[ \sigma_2 - \frac{1}{m} (\sigma_3 + \sigma_1) \right],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \left[ \sigma_3 - \frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_2) \right].$$

Z dodania tych równań wynika wzór dla rozszerzenia (skurczenia) objętościowego:

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{2}{m} \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Przy wszechstronnem równomiernem ściskaniu jest  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ , a więc  $\Theta = -3 \frac{m-2}{mE} \cdot p$ , czyli materiał się kurczy gdy liczba  $m > 2$ . Tak się zachowują prawie wszystkie ciała stałe.

Gdy  $m = 2$ , to przy każdej wartości naprężeń  $\sigma$  jest  $\Theta = 0$ . Taki materiał nazywamy nieściśliwym. W przybliżeniu jest nim kauczuk, ołów i parafina.

Nie znamy w przyrodzie materiałów dla których  $m < 2$ , czyli takich, któreby przy wszechstronnem ściskaniu pęczniały.

Uwaga. Przy obliczaniu naprężeń z danych obciążeń nie uwzględniamy z reguły zmiany pola przekroju wywołanej odkształceniem (poprzecznem) jako wielkości zazwyczaj bardzo małej.

**6. Proste odkształcenie postaciowe i proste ścinanie.** Równania teorii sprężystości. Jeżeli w dwuwymiarowym stanie napięcia jedno naprężenie główne jest ciągnieniem  $\sigma$  a drugie ciśnieniem o tej samej wielkości ( $-\sigma$ ), to w przekrojach nachylonych do głównych pod kątem  $45^\circ$ , panują tylko naprężenia styczne  $\tau$  o tej samej wielkości co  $\sigma$ . Taki stan napięcia nazywamy prostem ścinaniem. Przy ważności prawa Hooke'a jest odpowiadające odkształcenie czysto postaciowe i określa je zmiana kąta prostego w kwadracie  $KLMN$  (fig. 123), tj.

$$\gamma = 2\varepsilon = 2 \left( \frac{\tau}{E} + \frac{1}{m} \frac{\tau}{E} \right) = \frac{2(m+1)}{mE} \tau.$$

A zatem: Kąt odkształcenia postaciowego jest proporcjonalny względem odpowiadającego naprężenia stycznego, czyli

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ przyczem } G = \frac{m}{2(m+1)} E \dots (\alpha)$$

Spółczynnik proporcjonalności  $G$  jest znowu stałą charakterystyczną dla materiału (o wymiarze  $kg/cm^2$ ) i nazywa się modułem ścinania (także modułem skręcenia z powodów wyjaśnionych w teorii skręcenia) albo współczynnikiem sprężystości postaciowej. Wyznacza się go zwykle bezpośrednio z doświadczeń nad skręceniem okrągłych prętów, a następnie oblicza liczbę Poisson'a ze związku ( $\alpha$ ).

W ogólnym stanie napięcia, określonym składowymi  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , wypadają tedy dla składowych stanu odkształcenia (przy ważności prawa Hooke'a) wyrażenia następujące:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{2(m+1)}{mE} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \frac{1}{m} (\sigma_z + \sigma_x) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y) \right], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned}$$

Te równania pozwalają nawzajem 6 składowych stanu napięcia wyrazić przez tyleż składowych stanu odkształcenia, które znowu dają się przedstawić jako następujące proste wyrażenia różniczkowe trzech składowych  $u, v, w$  przemieszczenia punktu ciała  $x, y, z$ :

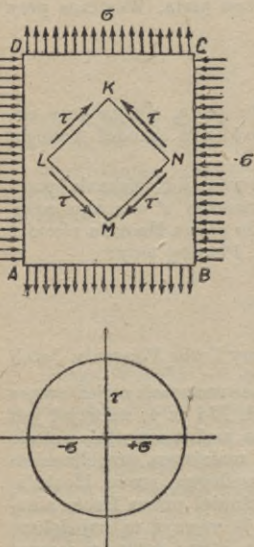


Fig. 122.



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

(Trzy ostatnie równania są ściśle tylko przy założeniu, że  $u, v, w$  są nieskończenie małe wobec  $x, y, z$ .)

Wyraziwszy za pomocą powyższych związków naprężenia przez  $u, v, w$  i stałe sprężystości i wstawivszy znalezione wyrażenia w równania równowagi (art. 4), otrzymujemy podstawowe trzy równania różniczkowe, klasycznej teorii sprężystości ciał jednolitych, równokierunkowych i podległych prawu Hooke'a w postaci:

$$\nabla^2 u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{X}{G} = 0,$$

$$\nabla^2 v + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\gamma}{g} \frac{Y}{G} = 0,$$

$$\nabla^2 w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\gamma}{g} \frac{Z}{G} = 0,$$

przyczem  $\nabla^2$  jest skróconym symbolem t. zw. operacji Laplace'a, określonej symbolicznem równaniem:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

zaś

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Te równania w połączeniu z poprzednimi i warunkami krańcowymi pozwalają już, przynajmniej teoretycznie, rozwiązać zadanie: Dane są postać, materiał i siły zewnętrzne elementu konstrukcyjnego w równowadze; znaleźć odkształcenia i naprężenia. Skoro uda się znaleźć bodaj przybliżone rozwiązanie, to po doświadczalnem sprawdzeniu wyników możemy dla praktyki technicznej dostarczyć pewnej wskazówki tylko co do warunku sztywności, oczywiście o ile wolno pominąć zboczenia od prawa Hooke'a, a zarazem o ile znaleziona odkształcona postać równowagi jest stateczną (stałą). Nader ważny warunek stateczności może nie być spełniony zwykle tylko wtedy, gdy jeden lub dwa wymiary elementu konstrukcyjnego są małe wobec innych (smukłe słupy, cienkie płyty i ściany naczyń). Z niespełnieniem tego warunku mamy do czynienia w dobrze znanem zjawisku wyboczenia prętów osiowo ściskanych, zakłębienia rur płomiennych w kotłach pod ciśnieniem itp. (Ob. rozdz. VIII. i IX.).

**7. Wyteżenie materiału przy prostem rozciąganiu i ściskaniu. Granica sprężystości. Granica plastyczności.** Rozwiązania znalezione przy pomocy teorii sprężystości nie wystarczają jeszcze do zawyrokowania, czy konstrukcja czyni zadość warunkowi wytrzymałości; do tego bowiem trzeba znać zależność niebezpieczeństwa pęknięcia od stanu odkształcenia i napięcia. Wielkość, mierzącą niebezpieczeństwo pęknięcia, nazywamy wyteżeniem materiału. Podobnie jak zależność stanu odkształcenia od stanu napięcia znaleziono doświadczalnie i na prawie Hooke'a oparto teorię sprężystości, tak też doświadczalnie należało zbadać zależność wyteżenia materiału od jego stanu odkształcenia i napięcia, aby zbudować teorię wytrzymałości. Ten podstawowy problem technicznej nauki o wytrzymałości okazał się w całej ogólności niezmiernie trudny i zawily. Jest nawet wiele wadliwych, czy objawy wytrzymałości dadzą się dla każdego z materiałów przed-

stawić stałymi charakterystycznymi dlań i czy nie zależą także od rozmieszczenia odkształceń i naprężeń w skończonym obszarze ciała. Trudności eksperymentalnego badania są olbrzymie. (Niemożliwość bezpośredniego pomiaru naprężeń, nieskończona rozmaitość stosunków naprężeń i odkształceń głównych, ogromna trudność zrealizowania określonego jednorodnego stanu napięcia itd.) To też dostateczny zasób doświadczeń mamy jedynie dla nader prostego, a zarazem ważnego przypadku linowego stanu napięcia, łatwego do zrealizowania na prostych prętach. Doświadczenia nad rozciąganiem lub ścisiskaniem prętów ujawniają nadto inne ważne własności materiałów, dające się odczytać z wykresu (fig. 123), który się sporządza, odmierzając jako odcięte wydłużenia właściwe pręta  $\epsilon$ , a jako rzędne odpowiadające im naprężenia  $\sigma$ , obliczane jako iloraz z siły rozciągającej  $P$  przez pole pierwotnego przekroju  $F$ . Część prosta linii wykresu od początku spójrzędnych odpowiada ważności prawa Hooke'a. Punkt, w którym zaczyna się linia zakrzywiać, odpowiada granicy proporcjonalności. Skoro od pewnego punktu obciążenie powoli zmniejszamy i notujemy odpowiadające wartości  $\epsilon$  i  $\sigma$ , to otrzymujemy wykres odwrotny. Jeżeli ten wykres zlewa się dokładnie z poprzednim, to materiał okazuje (w rozpatrywanym przedziale

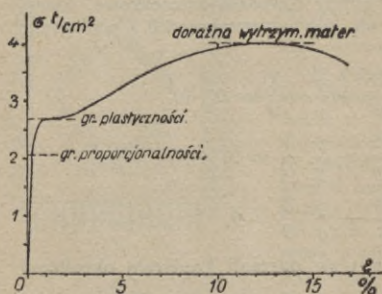


Fig. 123.

odkształceń i naprężeń) sprężystość zupełną czyli doskonałą. Jeżeli nie, to tylko część odkształcenia, zwana odkształceniem sprężystym, znika po usunięciu obciążenia, a reszta pozostaje nadal jako odkształcenie trwałe (niesprężyste, plastyczne). Ten punkt wykresu, od którego począwszy pojawiają się dostrzegalne odkształcenia trwałe, określa granicę sprężystości. Ponieważ jego obserwacja jest bardzo trudna, przeto w doświadczeniach technicznych wyznacza się zwykle t. zw. „praktyczną granicę sprężystości“, przy której odkształcenie trwałe jest określone przez umowę małym ułamkiem odkształcenia całkowitego. Praktyczna granica sprężystości leży oczywiście zawsze powyżej granicy teoretycznej i nie ma istotnego związku z granicą proporcjonalności, jakkolwiek obie granice leżą bardzo blisko siebie u żelaza kowalnego i stali.

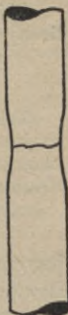
Przy dalszym powolnym wzroście naprężenia  $\sigma$  (po przekroczeniu granicy sprężystości) zachowują się materiały rozmaicie. Można je podzielić na dwie główne grupy: materiały plastyczne i kruche. Do pierwszej należą przede wszystkim wszelkie rodzaje żelaza kowalnego, miękkiej stali i innych metali plastycznych, do drugiej żelazo lane, twarda stal, szkło, kamienie naturalne i sztuczne.

U najważniejszych technicznie materiałów pierwszej grupy pojawia się w wykresie powyżej granicy proporcjonalności i sprężystości raptowne przejście w linię mniej więcej równoległą do osi odkształceń. To odpowiada znacznemu wzrostowi odkształceń trwałych bez zmiany wielkości naprężenia  $\sigma_f$ . Materiał „płygnie“, jak lód w lodowcu górskim pod wpływem stałej siły ciężkości. Wartość  $\sigma_f$  określa granicę plastyczności (gr. płynięcia, gr. ciastowatości). Płynięcie kończy się dość szybko i dalszy wzrost odkształcenia przy rozciąganiu wymaga znowu zwiększenia obciążenia. To zjawisko charakterystyczne dla żelaza i innych metali nazywają wzmocnieniem lub stwardnieniem materiału wskutek odkształceń plastycznych o zwykłej temperaturze („obróbka na zimno“). Zwiększanie obciążenia osiąga kres w najwyższym punkcie wykresu. Wówczas odkształcenie pręta przestaje być jednorodnym i w pewnym

jego miejscu pojawia się t. zw. szyjka (fig. 124), zapowiadająca pęknięcie w najwęższym przekroju. To pęknięcie zachodzi przy obciążeniu mniejszem od poprzedzającego wytworzenie się szyjki, już choćby z tego powodu, ponieważ przekrój szyjki jest znacznie mniejszy od przekroju reszty pręta.

Przy ścisaniu występuje również granica plastyczności, ale nie pojawia się szyjka, ponieważ podłużnemu skurczeniu pręta towarzyszy poprzeczne rozszerzenie przekroju. Wskutek tego rzeczywista wartość naprężeń maleje, chociaż zwiększamy obciążenie po osiągnięciu granicy plastyczności, albowiem przekrój rośnie prawie bez ograniczenia.

**8. Doraźna wytrzymałość na rozciąganie i na ściskanie. Miara plastyczności metali. Pewność.** Odniesione do pierwotnego przekroju największe naprężenie, jakiego doznawał pręt przy rozciąganiu, określa jego doraźną wytrzymałość na rozciąganie  $K_r$ . Ponieważ doświadczenia wykazały w dość obszernych granicach przybliżoną niezależność wielkości  $K_r$  od postaci i wielkości przekroju prętów przyrządowych z tego samego materiału, przeto uważamy  $K_r$  za stałą charakterystyczną dla materiału pręta i w tem znaczeniu mówimy o doraźnej wytrzymałości danego materiału przy rozciąganiu. Z powodów wyżej wyluszczonej nie wyznaczamy do świadczalnie doraźnej wytrzymałości materiałów plastycznych przy ścisaniu  $K_c$ , lecz przyjmujemy ją praktycznie równą  $K_r$ .



Materiały drugiej grupy (materiały kruche) nie mają granicy plastyczności i przy bardzo nieznacznych odkształceniach trwałych pękają przy wartości ciągnięcia  $K_r$  lub ciśnienia  $K_c$  przekraczających niezbyt wiele odpowiadające granice sprężystości. Nadto jest u nich  $K_c$  najczęściej o wiele większe od  $K_r$ .

Odrębne stanowisko zajmuje drewno, które dzięki swej strukturze jest materiałem w wysokim stopniu nierównokierunkowym a nawet niejednorodnym i posiada różną sprężystość i wytrzymałość w różnych kierunkach. W kierunku równoległym do włókien jest  $K_c$  znacznie mniejsze od  $K_r$ . Drewno nie ma granicy plastyczności, ale jest zdolne do dość znacznych odkształceń trwałych.

Plastyczność metali (zdolność do odkształceń trwałych) ocenia się przy próbach rozrywania w ten sposób, że po przerwaniu stula się obie części pręta możliwie dokładnie i mierzy odległość  $l'$  dwu kresek wyznaczających długość pierwotną  $l$  badanej części pręta. Wartość:

$$\varphi = 100 \cdot \frac{l' - l}{l},$$

wyrażająca w odsetkach rozciągnięcie trwałe pręta, jest wcale dobrą miarą plastyczności materiału. Inną również dobrą, lecz mniej wygodną miarą plastyczności jest

$$\psi = 100 \cdot \frac{F' - F''}{F},$$

jeżeli  $F'$  oznacza pole przekroju przerwanego w szyjce. Liczba  $\psi$  wyraża w odsetkach poprzeczne plastyczne skurczenie pręta. Sprawa wyężenia materiału jest w przypadku prostego rozciągania lub ściskania nadzwyczaj prosta. Ponieważ odkształcenie  $\epsilon$  rośnie i maleje z wielkością naprężenia  $\sigma$  przeto tak  $\epsilon$ , jak i  $\sigma$  może służyć za miarę wyężenia. Ze względów praktycznych mierzymy od dawna wyężenie wartością naprężenia  $\sigma$ , jakie rzeczywiście zachodzi w elemencie konstrukcyjnym przy najniekorzystniejszym obciążeniu.

Stosunek doraźnej wytrzymałości materiału  $K$  do rzeczywiście zachodzącego naprężenia  $\sigma$  określa stopień bezpieczeństwa czyli pewność  $n$  przeciwko pęknięciu. Tę samą wartość  $n$  daje oczywiście stosunek siły łamiącej

(rozrywającej lub zgniatającej)  $P_w$  do rzeczywistej siły osiowej pręta  $P$  (obciążenia użytkowego).

$$n = \frac{K}{\sigma} = \frac{P_w}{P}.$$

Obierając dla pewnego elementu konstrukcyjnego z danego materiału liczbę  $n > 1$  ustalamy tem samym wartość  $\sigma$  uznaną za bezpieczną:

$$k = \frac{K}{n}.$$

Takie ustalenie naprężenia bezpiecznego (dopuszczalnego) może być wystarczające dla materiałów kruchych; u materiałów plastycznych musimy wykluczyć pojawienie się wyraźnych odkształceń trwałych, czyli musimy mieć  $n'$ -krotną pewność przeciwko przekroczeniu granicy plastyczności  $\sigma_f$ . Wtedy:

$$k = \frac{\sigma_f}{n'}.$$

przyczem  $n'$  może być znacznie mniejsze od  $n$ , albowiem  $K > \sigma_f$  (u żelaza zlewego np. odpowiada 2,5-krotnej pewności przeciw przekroczeniu granicy plastyczności, 4-krotna pewność przeciw rozerwaniu).

9. Wpływ powtarzania i wahania obciążeń na wyteżenie. Obciążenie dzielimy na stałe i zmienne. W przypadku obciążeń zmiennych wartość doraźnej wytrzymałości nie decyduje o wyteżeniu materiału, albowiem doświadczenia wielu badaczy, poczynwszy od Wöhler'a (1870) wykazały, że zmienność obciążenia obniża z reguły granicę wytrzymałości materiału w porównaniu do wytrzymałości doraźnej. Z tego powodu wielkość  $\sigma_{\text{bezp}}$  przy obciążeniu zmiennem należy obierać mniejszą, niż przy obciążeniu stałym, przestrzegając następujących reguł, wynikających z doświadczeń nad żelazem kowalnym i stalą.

1. Różnica  $k^{(0)} - k$  czyli obniżenie wartości  $k$  w porównaniu w wartością  $k^{(0)}$ , odpowiadającą stałemu obciążeniu, a więc doraźnej wytrzymałości, ma być tem większe, im większą jest różnica  $\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}$ , pojmwana algebraicznie.

2. To obniżenie nie zależy od częstości zmian obciążenia, którym podlega pręt w konstrukcji, w granicach 60—800 zmian na minutę; atoli przy częstościach powyżej 800—2400 wzrasta z częstością dość znacznie (według doświadczeń O. Reynolds'a i J. H. Smith'a), aby przy jeszcze większych częstościach (do 7000 według B. Hopkinson'a) znowu wyraźnie zmaleć.

Wielkie częstości zmian obciążenia występują nierzadko w elementach maszynowych, podczas gdy w budowlanych mamy do czynienia zwykle z częstościami jeszcze znacznie mniejszemi od stosowanych w badaniach Wöhler'a. Na podstawie tych badań ustawiono (Lannhardt i Weyrauch) przybliżony wzór postaci:

$$k^{(0)} - k = \alpha \cdot k^{(0)} \left( 1 - \frac{S_{\text{min}}}{S_{\text{max}}} \right),$$

w którym  $S$  oznacza siłę rozciągającą lub ściskającą pręt, a współczynnik  $\alpha = \frac{1}{3}$  dla żelaza kowalnego i miękkiej stali. Stąd wyznacza się bezpieczną wartość  $\sigma_{\text{max}}$  przy projektowaniu prętów w belkach kratowych mostów itp.

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{2}{3} k^{(0)} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{S_{\text{min}}}{S_{\text{max}}} \right).$$

Przykład. W krzyżulcu belki kratowej z żelaza zlewego jest  $S_{\text{max}} = 12 t$ ,  $S_{\text{min}} = -3$  (ściśkanie). Przyjawszy  $k^{(0)} = 1600 \text{ kg/cm}^2$  mamy:

$$\sigma_{\max} = \frac{2}{3} \cdot 1600 \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{12} \right) = \frac{2}{3} \cdot 1600 \cdot \frac{7}{8} = \approx 933 \text{ kg/cm}^2.$$

Potrzebny przekrój pręta:  $F = \frac{S_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{12000}{933} = 12,9 \text{ cm}^2.$

Zjawisko obniżenia wytrzymałości metali przy wahaniami wartości obciążenia, zwane także zmęczeniem (znużeniem) materiału, da się częściowo objaśnić t. zw. histerezą sprężystą, która polega na tem, że nawet przy małych naprężeniach, rosnących od zera do pewnej wartości i następnie malejących znowu do zera, linja powrotna wykresu odkształceń nie zlewa się z linją odkształceń rosnących. Obie linje zamykają waziatkie pole, którego wielkość mierzy nieodzyskaną część pracy odkształcenia. To pole histerezy jest, jak się zdaje, tem większe, im krócej trwa odkształcenie. Odpowiadająca mu drobna część pracy zużywa się na rozluźnienie spójności, które przy wielokrotnem powtarzaniu procesu doprowadza (nieraz po wielu milionach wahnien) do pęknięcia. Tem się tłumaczy, że przy wielkiej częstotliwości wahnien (szybkie odkształcenia) wystarczają mniejsze naprężenia krańcowe do pokonania spójności. Zarazem wydaje się wiele wątpliwem, czy zastosowanie wzoru Launhardta i Weyraucha ma rację bytu przy zwykłym obliczeniu statycznym, zważywszy, że pomiędzy dwoma wahnieniami siły wewnętrznej  $S$  przy przejeździe np. pociągu upływają minuty, lub godziny, w ciągu których materiał „ma czas wypocząć”. Badania doświadczalne na prętach próbnych, wyciętych z różnych części mostu żelaznego rozebranego po półwiekowym użyciu (Zentralbl. d. Bauw. z 7./I. 1905) wykazały jednakową doraźną wytrzymałość u wszystkich próbek, chociaż materiał jednych nie „pracował” wcale, drugich był narażony na zmienne ciśnienia, a trzecich na zmienne ciągnięcia w ciągu 50-ciu lat ruchu po moście.

**10. Wytrzymałość a warunek ekonomji.** Jeżeli element konstrukcyjny narażony na proste rozciąganie lub ściskanie siłą  $S$  możemy sporządzić z dwu różnych materiałów, z których pierwszy (np. żeliwo) ma ciężar właściwy  $\gamma_1$ , cenę jednostki ciężaru  $C_1$ , a naprężenie bezpieczne  $\sigma_1$ , drugi zaś (np. stal)  $\gamma_2$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_2$ , to koszt jednostki długości pręta z pierwszego materiału  $K_1 = \frac{S}{\sigma_1} \gamma_1 C_1$ , zaś z drugiego  $K_2 = \frac{S}{\sigma_2} \gamma_2 C_2$ .

Zastąpienie zatem materiału pierwszego drugim będzie połączone z korzyścią gospodarczą, jeżeli

$$\frac{\gamma_2 C_2}{\sigma_2} < \frac{\gamma_1 C_1}{\sigma_1},$$

czyli gdy stosunek ceny jednostki objętości drugiego materiału do jego naprężenia bezpiecznego (spółczynnik ekonomji materiału) jest mniejszy od takiegoż stosunku materiału pierwszego. Oszczędność wyrażoną w odsetkach kosztów  $K_1$  przedstawia wyrażenie:

$$100 \left( 1 - \frac{K_2}{K_1} \right) = 100 \left( 1 - \frac{\gamma_2 C_2 \sigma_1}{\gamma_1 C_1 \sigma_2} \right).$$

Uwaga. Powyższe rozważanie nie uwzględnia wpływu ciężaru własnego konstrukcji, który to wpływ może być tak znaczny przy wielkich rozmiarach teje, iż zupełnie wykluzy zastosowanie powyższego prostego rachunku.

**11. Nowsze pojmowanie stopnia bezpieczeństwa czyli pewności.** Siła wewnętrzna  $S$  pręta jako elementu konstrukcyjnego jest najczęściej sumą dwu części: stałej  $G$ , pochodzącej od ciężaru własnego konstrukcji i zmiennej  $P$ . Pierwsza jest ściśle określona, przynajmniej teoretycznie, wielkość zaś drugiej normuje się nieco dowolnie, biorąc pod uwagę rozmaite możliwe w przyżłości obciążenia zmienne ruchome i ich położenie. Zważywszy, że ciężar własny zmienić się nie może, wystarczy zupełnie dla zapewnienia bezpie-

czeństwa konstrukcji postawić żądanie, aby dopiero przy  $n$ -krotnem obciążeniu zmiennem, przyjętem za podstawę obliczenia, osiągnęło naprężenie  $\sigma$  wartość niebezpieczną  $\sigma_{nieb}$ . Wyrażamy to równaniem:

$$G + n \cdot P = F \cdot \sigma_{nieb}.$$

Tak pojmowana pewność  $n$  prowadzi do naprężeń bezpiecznych rosnących wraz z stosunkiem  $G:P$ , podobnie jak się to praktykuje oddawna przy obliczaniu mostów na podstawie rozważań dynamicznego działania obciążeń ruchomych przy zwykłym dawnem pojmowaniu pewności. W samej rzeczy, naprężenie użytkowe pręta obliczonego przy pomocy powyższego wzoru będzie miało wartość:

$$\sigma = \frac{G + P}{F} = \frac{G + P}{G + nP} \cdot \sigma_{nieb},$$

która dla  $G = 0$  staje się  $= \frac{\sigma_{nieb}}{n}$ , a ze wzrostem  $G$  rośnie zdążając do granicy  $= \sigma_{nieb}$ . Przytem wypada przyjąć jako  $\sigma_{nieb}$  granicę plastyczności  $\sigma_p$ , a dla  $n$  około 3. Jeżeli materiał nie ma granicy plastyczności, to zależnie od jego jakości za  $\sigma_{nieb}$  uznać wypadnie  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{3}$  lub mniejszy ułamek doraźnej wytrzymałości. Bliższe ustalenie tego współczynnika, jako też wartości  $n$  należy do działów specjalnych.

**12. Zboczenia od prawa Hooke'a.** Materiały takie jak żeliwo (żelazo lane), kamienie naturalne i sztuczne mają granicę proporcjonalności tak niską (do kilku  $kg/cm^2$ ), że przy obciążeniach praktykowanych w konstrukcjach technicznych objawiają dość znaczne zboczenia od prawa Hooke'a. Dlatego przyzwyczajono się nazywać te materiały „niepodlegającymi prawu Hooke'a“.

Linja wykresu odkształceń sprężystych przedstawia się dla wymienionych materiałów jako krzywa zwrócona wypukłością ku osi naprężeń. Dla całego obszaru zmienności ciągnięć i ciśnięć ma ona kształt litery  $S$  (fig. 125) z punktem przecięcia wyższego rzędu w początku układu współrzędnych. Powtarzane wielokrotnie próby ustawienia prawa sprężystości ogólniejszego do prawa Hooke'a, któreby odpowiadało zachowaniu się powyższych materiałów, nie doprowadziły do pomyślnego wyniku. Jest to zrozumiałe wobec wielkiej zawiłości ich struktury. Te próby dały tylko szereg wzorów interpolacyjnych, z których najbardziej rozpowszechnionym jest t. zw. wzór potęgowy:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m.$$

$\alpha$  i  $m$  są tutaj stałymi charakterystycznymi dla materiału. Ten wzór odzwierciedla wcale dobrze zachowanie się materiału przy dość wielkich wartościach naprężeń, ale zupełnie zawodzi przy małych, wobec czego nie może mieć pretensji do miana „prawa“, którem go obdarzają liczne podręczniki.

W wielu przypadkach jest dogodniej opisać zboczenia materiału od prawa Hooke'a przez uogólnienie pojęcia modułu wydłużenia (współczynnika sprężystości) i tak:

1. Wartość ilorazu różniczkowego  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  w punkcie  $(\varepsilon, \sigma)$  wykresu

nazywamy modułem wydłużenia  $E_\sigma$  odpowiadającym naprężeniu  $\sigma$  (albo wydłużeniu  $\varepsilon$ ). Ponieważ ta wartość maleje ze wzrostem naprężenia u wymienionych materiałów (u skóry rośnie), a ta zależność da się dość dokładnie przedstawić funkcją liniową, przeto możemy napisać:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_\sigma = E_0 - \alpha \cdot \sigma,$$

przyczem  $E_0$  jest modułem wydłużenia przy naprężeniach nieskończenie małych, zaś  $\alpha$  liczbą stałą wyznaczoną również z danych doświadczalnych. Całkowanie powyższego równania daje:

$$\sigma = \frac{E_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \varepsilon})$$

przyczem  $e = 2,7182818$

2. Wartość ilorazu  $\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$  nazywamy średnim modułem wydłużenia między punktami  $(\varepsilon_1, \sigma_1)$  i  $(\varepsilon_2, \sigma_2)$ .

Zboczenia od prawa Hooke'a objawiają się nie tylko zmiennością modułu wydłużenia  $E$ , lecz także zmiennością liczby Poisson'a  $\frac{1}{m}$ , przyczem oczywiście traci swą ważność zasada superpozycji.

**13. Praca odkształcenia i energia potencjalna wewnętrznych sił sprężystości.** Skoro proste rozciąganie lub ściskanie pręta siłą osiową  $P$  (rosnącą bardzo powoli od zera) przedstawimy wykresem odmierzając jako odcięte całkowite wydłużenia pręta  $l$ , a jako rzędne odpowiadające siły, to pole zawarte między linią wykresu a współrzędnymi punktu końcowego mierzy pracę siły  $P$  potrzebną do odkształcenia pręta, czyli jego pracę odkształcenia. Jeżeli odkształcenie jest doskonale sprężyste, to całkowita praca odkształcenia  $L$  nagromadza się w postaci energii potencjalnej wewnętrznych sił sprężystości czyli  $L = U$ . Z tego to powodu w literaturze technicznej, zwłaszcza niemieckiej, nie rozróżnia się zwykle obu pojęć i używa dla obu tej samej nazwy: praca odkształcenia. Jeżeli jednak odkształcenie jest niezupełnie sprężyste, to  $L > U$ , a część pracy odkształcenia zużywa się na pokonanie tarcia wewnętrznego w materiale i zamienia się na ciepło oraz inne nieodwracalne formy energii.

Dzieląc pracę odkształcenia jednorodnego przez objętość pręta otrzymujemy pracę odniesioną do jednostki objętości, czyli właściwą pracę odkształcenia. Właściwa praca odkształcenia potrzebna do przerwania pręta z danego materiału charakteryzuje wcale dobrze jego odporność na uderzenia i dlatego prof. L. Tetmajer zalecał wyznaczenie tej wielkości przy próbach rozrywania.

Materiał	Właściwa praca odkształcenia przy rozerwaniu
Żelazo spawalne . . . . .	2—7 $\text{kgm/cm}^3$
„ zlewne . . . . .	6—8 „
Miękka stal . . . . .	8 i więcej „

W granicach doskonałej sprężystości i ważności prawa Hooke'a określa energję potencjalną pręta o przekroju  $F$  i długości  $l$ , rozciąganego lub ściskanego siłą  $P$  do końcowej długości  $l \pm \lambda$ , oczywiście wyrażenie:

$$L = U = \frac{1}{2} P \lambda = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EF} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 EF}{l}$$

Dzieląc je przez objętość pręta  $F.l$  otrzymujemy właściwą pracę odkształcenia lub energję potencjalną jednostki objętości:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2.$$

Przy tychże samych założeniach przedstawia energję potencjalną jednostki objętości materiału w ogólnym stanie napięcia wyrażenie:

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}),$$

które po wyrażeniu  $\varepsilon$  i  $\gamma$  przez  $\sigma$  i  $\tau$  albo odwrotnie przybiera postać:

$$\Lambda = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \frac{m+1}{m} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] \right\}$$

albo:

$$\Lambda = G \left\{ \frac{m-1}{m-2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2} [\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 - 4(\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x)] \right\}.$$

Można je także napisać w postaci:

$$\Lambda = \Lambda_v + \Lambda_f$$

przyczem: 
$$\Lambda_v = \frac{m-2}{6mE} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

oznacza samą energję odkształcenia objętościowego, zaś:

$$\Lambda_f = \frac{m+1}{6mE} [(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]$$

samą energję odkształcenia postaciowego.

Dla całego ciała przedstawi energję odkształcenia wyrażenie:

$$L = U = \int_{(V)} \Lambda dV,$$

w którym  $dV$  jest elementem objętości, a całkowanie rozciąga się na całą objętość ciała.

W dwuwymiarowym stanie napięcia, który stanowi najczęściej podstawę obliczeń wytrzymałości, upraszczają się wyrażenia dla właściwej pracy odkształcenia do postaci:

$$\Lambda_v = \frac{m-2}{6mE} (\sigma_x + \sigma_y)^2; \Lambda_f = \frac{m+1}{6mE} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6\tau^2].$$

$$\Lambda = \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)^2 + \frac{m+1}{m} (\tau^2 - \sigma_x \sigma_y) \right].$$

**14. Wytrzymałość na rozciąganie cienkich drutów i blach.** U drutów ciągniętych z tego samego materiału okazuje się doraźna wytrzymałość  $K_r$ , mierzona ilorazem siły rozrywającej przez pole przekroju, zależną od grubości drutu  $d$  według empirycznego wzoru:

$$K_r = K + \frac{c}{d}.$$



Wartości stałych  $K$  i  $c$  przy pomiarze  $d$  w  $mm$ , a  $K_p$  w  $kg/cm^2$  podaje następująca tabliczka podług Karmarsch'a:

Rodzaj drutu	niewyżarzony		wyżarzony	
	$K$	$c$	$K$	$c$
Zwykły drut żelazny . . . . .	4580	2290	2870	640
Drut stalowy . . . . .	6370	2670	5730	380
Drut miedziany . . . . .	3500	960	2360	—

Wyjawszy jednak bardzo cienkie druty i blachy można w przypadkach prostego rozciągania lub ściskania mierzyć wyężenie każdego materiału wartością naprężenia.

15. Wyężenie materiału przy ogólnym stanie napięcia. Teorie wytrzymałości. Inaczej ma się rzecz w przypadkach ogólnego dwu- lub trójwymiarowego stanu napięcia określonego naprężeniami głównymi  $\sigma_1, \sigma_2$ , i  $\sigma_3$  (lub odpowiadającymi wydłużeniami głównymi  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ). Badania doświadczalne A. Föppl'a i innych pouczają bowiem, że przy wszechstronnem równomiernem ściskaniu ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ ) materiału dostatecznie jednolitego nie zachodzi niebezpieczeństwo pęknięcia lub przekroczenia granicy sprężystości, nawet przy wartościach naprężenia przekraczających wielokrotnie  $K_c$  tegoż materiału. Wytrzymałość takiego materiału przy wszechstronnem równomiernem ciśnieniu jest przeto, praktycznie biorąc, nieograniczona. Już to samo dowodzi niezbitie, że sama wartość jednego z naprężeń głównych nie może być wogóle miarą wyężenia materiału, jak dawniej mylnie mniemano (hipoteza największego naprężenia). — Nie może nią być także wartość jednego (bezwzględnie największego) z wydłużeń głównych, jak się przyjmuje w bardzo rozpowszechnionej po dziś dzień hipotezie największego wydłużenia, bo według tej hipotezy doprowadziłoby wszechstronne ściskanie naprężeniem  $\sigma$  do tej samej wartości wyężenia, co przy prostem ściskaniu, gdyby bezwzględna wartość tego ostatniego  $\sigma_1$  czyniła zadość warunkowi równych sprężystych wydłużeń w obu przypadkach.

Musiałoby wtedy być:  $\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \epsilon = \frac{\sigma}{E} \left(1 - \frac{2}{m}\right)$ , z czego wynika warunek  $\sigma_1 = \frac{m-2}{m} \sigma$ . Ponieważ dla najważniejszych materiałów konstrukcyj-

nych jest  $m \geq 3$ , przeto wypadaloby z powyższego warunku  $\sigma \geq \frac{1}{3} \sigma_1$ , co by znaczyło, że przy wszechstronnem ściskaniu jest wyężenie (mierzone wartością naprężenia) co najwyżej 3 razy mniejsze od wyężenia przy prostem ściskaniu z tą samą wartością naprężenia. Według doświadczeń jest to wyężenie przynajmniej kilkadziesiąt razy mniejsze, wobec czego nie może się ostać hipoteza największego wydłużenia, zakorzeniona niestety głęboko w podręcznikach i w umysłach inżynierów. Przy dzisiejszym stanie naukowego doświadczalnego badania wytrzymałości materiałów jest rzeczą pewną, że nie posiadamy jeszcze ogólnej teorii wytrzymałości dla wszelkich materiałów, któraby pozwalała na podstawie doświadczeń nad prostem rozciąganiem i ściskaniem obliczyć z góry wyężenie materiału przy każdym układzie wartości trzech naprężeń głównych w ogólnym stanie napięcia. Atoli jedna z najstarszych hipotez wytrzymałościowych (Coulomb) a mianowicie hipoteza największego odkształcenia postaciowego, albo równoważna jej hipoteza największej różnicy naprężeń głównych, czyli inaczej hipoteza największego naprężenia stycznego odpowiada dość dobrze zachowaniu się tak

ważnych technicznie plastycznych metali. Liczne doświadczenia zwłaszcza angielskich badaczy przy różnorodnych stanach napięcia wykazały, że osiągnięcie granicy plastyczności tego samego materiału zachodzi mniej więcej przy tej samej wartości największego naprężenia stycznego, albo co na jedno wychodzi przy tej samej największej różnicy naprężeń głównych. Ta hipoteza jest nadto w zgodzie z wspomnianymi doświadczeniami nad wszechstronnem ściskaniem materiałów kruchych i prowadzi jak zobaczymy do reguł i wzorów praktycznych prostszych od wynikających z hipotezy największego wydłużenia. Jest ona przytem szczególnym przypadkiem uniwersalnej teorii O. Mohra. Obecnie wszakże rywalizuje z nią skutecznie hipoteza największej pracy odkształcenia postaciowego (Huber), która również jest w zgodzie z doświadczeniami A. Föppl'a, a nadto z najnowszymi doświadczeniami amerykańskimi, niemieckimi i szwajcarskimi.

Ocena wyteżenia przy złożonym stanie napięcia u materiałów kruchych, jak żelazo lane i kamienie jest ściśle biorąc możebna tylko na podstawie bezpośrednich doświadczeń.

Zastosowanie teorii wytrzymałości do obliczenia wyteżenia materiału przy złożonym stanie napięcia (określonym stosunkiem wartości trzech naprężeń głównych lub sześciu składowych stanu napięcia) polega na zastąpieniu tego stanu pomyślanem prostem rozciąganiem lub ściskaniem, któreby prowadziło do tego samego wyteżenia. Obliczone w ten sposób naprężenie pomyślanego stanu nazywamy naprężeniem zredukowanym (sprowadzonym, idealnem, zastępczem)  $\sigma_{red}$ .

a) Stosując hipotezę największej różnicy naprężeń głównych mamy tedy:

$$\sigma_{red} = \sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_{bezp},$$

jeżeli  $\sigma_I$  i  $\sigma_{II}$  oznaczają dwa z naprężeń głównych dobrane tak, by ich algebraiczna różnica miała największą wartość bezwzględną. Obliczenie wyteżenia zapomocą naprężenia zredukowanego przedstawia się zatem bardzo prosto. Pewne praktyczne trudności wychodzą jednakże na jaw, gdy stan napięcia jest określony sześciu naprężeniami składowymi. Wówczas wypadałoby najpierw obliczyć naprężenia główne, co prowadzi w ogólnym przypadku do równania trzeciego stopnia. Te trudności odpadają przy zastosowaniu

b) hipotezy największej pracy odkształcenia postaciowego. Wtedy bowiem

$$\sigma_{red}^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] = \sigma_{bezp}^2$$

dla najogólniejszego przypadku.

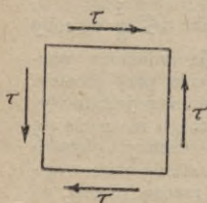


Fig. 126.

c) Zastosowanie hipotezy największego wydłużenia jest nie tylko mniej wygodne od obu poprzednich, ale co ważniejsze prowadzi w wielu przypadkach do rażącej niezgodności z doświadczeniami. Tę hipotezę należy przeto stanowczo porzucić. Mimo to podajemy tutaj jej wzory już to dla wykazania ich błędności, już też z powodu ich wielkiego rozpowszechnienia w podręcznikach zwłaszcza francuskich i niemieckich. Według tej hipotezy wypada:

$$\sigma_{red} = \sigma_I - \frac{1}{m}(\sigma_{II} + \sigma_{III}) = \sigma_{bezp} = k,$$

przyczem należy dobrać tak porządek naprężeń głównych  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  i  $\sigma_{III}$  aby wyrażenie między znakami równości było bezwzględnie biorąc największe.

## 16. Wyteżenie plastycznych metali przy prostym ścinaniu (fig. 126).

Jeżeli naprężeniem ścinającym jest  $\tau$ , to  $\sigma_I = +\tau$ ,  $\sigma_{II} = -\tau$ ,  $\sigma_{III} = 0$ .

A zatem według (I) będzie  $\sigma_{red} = 2\tau = k$ ,

czyli  $k_t = \frac{1}{2} k \dots \dots \dots (31. I)$

Według (II) wypada:

$$\sigma_{\text{red}}^2 = 3\tau^2 = k^2, \quad \text{czyli } k_t = 0,58k \dots (31. \text{ II})$$

Wreszcie według (III):

$$\sigma_{\text{red}} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)\tau = k.$$

Przy  $m = \frac{10}{3}$  (żelazo kowalne i stal) wypada stąd  $k_t = 0,77k$ .

**Uwaga.** Dawniejsze badania doświadczalne (1900—1910) popierały hipotezę I, nowsze amerykańskie (1920) i szwajcarskie (1926) przemawiają raczej na korzyść II; wszystkie są zgodne w tem, że hipoteza III daje wyniki średnio o 40% za wielkie.

**17. Wyteżenie plastycznych metali przy prostym rozciąganiu lub ściskaniu w połączeniu ze ścinaniem.** (Fig. 127). Odpowiadające naprężenia główne określają według wzoru (ze str. 7) wyrażenia:

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_{\text{II}} = \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

A zatem według (I):  $\sigma_{\text{red}} = \sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ ,

według (II):  $\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ ,

zaś według (III):  $\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m}\sigma \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ ,

przyczem znak — drugiego wyrazu obowiązuje wtedy gdy  $\sigma$  jest ujemne.

**Uwaga.** Bach, który dawno dostrzegł niezgodność z doświadczeniami wzorów opartych na hipotezie największego wydłużenia (III), położył to błędnie na karb zbroczeń materiału od równokierunkowości i „poprawił” wzór ostatni mnożąc  $\tau$  współczynnikiem  $a_0$  zależnym od stosunku wydłużenia bezpiecznego przy prostym rozciąganiu lub ściskaniu do takiegoż wydłużenia przy prostym ścinaniu. Tak „poprawiony” i „uzupełniony” wzór stosują bezkrytycznie nawet do materiałów kruchych niemal wszystkie podręczniki niemieckie z ostatnich lat trzydziestu.

**18. Wnioski o stanie napięcia z pęknięć w miejscach niebezpiecznych.** Takie wnioski są szczególnie ważne przy interpretacji doświadczeń i ekspertyzach z powodu sporów o bezpieczeństwo nowej budowli albo z powodu katastrof budowlanych groźących lub zaszłych. O stanie napięcia w elemencie konstrukcyjnym nienadwężonym można coś pewnego wnioskować tylko z pierwszych zaledwie dostrzegalnych rys i pęknięć, a nie z powierzchni odłamu po katastrofie, albowiem z chwilą powstania pierwszych rys zmienia się stan napięcia w otoczeniu zagrożonego miejsca tak znacznie, że dalsze pęknięcia nie odpowiadają już pierwotnemu rozmieszczeniu naprężeń. Dostateczna jednolitość i równokierunkowość materiału (oczywiście kruchego) jest drugim koniecznym warunkiem pewności wniosku. Przy zachowaniu tych warunków jest pęknięcie prawie zawsze prostopadłe do kierunku głównego ciągnięcia, a równoległe do głównego ciśnienia (w dwuwymiarowym stanie napięcia).

Odstępstwa od tego prawidła zachodzą tylko wskutek choćby miejscowych nierównokierunkowości (drewno, walcowane żelazo spawalne) lub niejednorodności (seki w drewnie, wyjątkowo twarde kamyki w betonie itp.). Na dowód można przytoczyć mnóstwo doświadczeń laboratoryjnych należących do interpretowanych. Ta interpretacja była niestety mylna nawet u wybitnych inżynierów-badaczy przy doświadczeniach nad ściskaniem i t. zw. ścinaniem, wskutek czego rozpowszechniło się mniemanie, że w tych przypadkach zachodzi zawsze pęknięcie w płaszczyźnie największych naprężeń stycznych. Do tego błędu przyczyniła się niewątpliwie okoliczność, że po zupełnym pęknięciu w pewnym przekroju zostaje badane ciało podzielone na dwie części, przyczem z reguły zachodzi zaburzenie

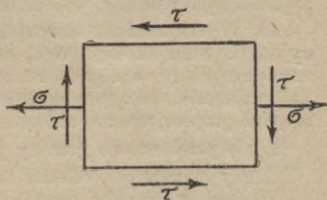


Fig. 127.

równowagi, które prowadzi często do dostrzegalnego względnego przesunięcia obu tych części wzdłuż powierzchni pęknięcia.<sup>1)</sup>

Pamiętając o tem, że na swobodnej powierzchni ciała jest stan napięcia (z pominięciem nieznacznego wpływu ciśnienia atmosferycznego) zawsze dwuwymiarowy, możemy ustalić następujące praktyczne reguły: Początkowe drobne rysy w materiale kruchym, dostatecznie jednolitym i równokierunkowym, wskazują tylko kierunki naprężeń głównych, wszelako nie pozwalają jeszcze zawyrokować, które z nich jest ciągnieniem, a które ciśnieniem. Mogą bowiem zajść następujące przypadki: 1. Naprężenie prostopadłe do rysy jest ciągnieniem, a drugie również ciągnieniem, ale znacznie mniejszem, albo ciśnieniem. 2. Naprężenie główne w kierunku rysy jest ciśnieniem a drugie również ciśnieniem, ale znacznie mniejszem. 3. Obydwa naprężenia są równymi ciągnięciami.

**19. Wytrzymałość materiału a wytrzymałość elementu konstrukcyjnego.** Stan napięcia w elemencie konstrukcyjnym zależy od jego sił zewnętrznych (tj. obciążeń i reakcyj). Gdy dane siły zewnętrzne bez zmiany linii działania rosną proporcjonalnie, to wywołane nimi naprężenia rosną również proporcjonalnie, ale tylko wtedy, gdy:

1. nie przekroczono granicy proporcjonalności w materiale,
2. gdy powstające odkształcenia nie wpływają w godny uwagi sposób na ramiona momentów danych obciążeń względem dowolnego punktu rozpatrywanego elementu konstrukcyjnego,
3. gdy te odkształcenia nie powodują nowych punktów podparcia albo też zmian w wielkości powierzchni podparcia (wzgl. liczbie punktów podparcia).

Skoro te wszystkie trzy warunki się spełniają, to odkształcenia (ugięcia itd.) elementu konstrukcyjnego, jako skutki obciążeń, podlegają zasadzie superpozycji. Przy niespełnieniu bodaj jednego z nich zasada ta traci ważność i jej stosowanie może prowadzić do grubych błędów. Atoli bez uwagi godnego błędu można z reguły stosować zasadę superpozycji aż do granicy plastyczności, gdy spełniają się warunki (2) i (3). Skoro obciążenia wzrosną do wartości  $P_f$ , przy której w pewnym miejscu osiąga materiał granicę plastyczności, to to obciążenie nazywamy obciążeniem niebezpiecznym. Obciążenie bezpieczne  $P_{bezp}$  będzie w powyższych warunkach mniejsze od  $P_f$  w tym samym stosunku, w jakim stoi  $\sigma_{bezp}$  do  $\sigma_f$ , da się przeto obliczyć teoretycznie, o ile znamy rozwiązanie odnośnego zadania teorii sprężystości. Zwiększając obciążenie stopniowo dalej dochodzimy zwykle do pewnego maximum  $P_w$ , przy którym pojawiają się uszkodzenia prowadzące po krótkim czasie nawet przy mniejszym obciążeniu do pęknięcia lub trwałego odkształcenia o niedozwolonej wielkości. To maximum obciążenia, jakie zniósł badany element konstrukcyjny, zwane obciążeniem łamiącym, określa wytrzymałość tego elementu. Niekiedy jednak można iść z obciążeniem znacznie powyżej wartości  $P_w^{(1)}$  odpowiadającej pierwszym uszkodzeniom i dopiero pod wpływem  $P_w^{(2)}$  następuje zupełne wyczerpanie zdolności elementu do znoszenia obciążeń. Czy wówczas wytrzymałość elementu konstrukcyjnego określa się wartością  $P_w^{(1)}$ , czy też  $P_w^{(2)}$ , to zależy od jego materiału i przeznaczenia. Wyjawszy najprostszyp przypadk rozciąganych prętów nie wystarcza wogóle do obliczenia z góry  $P_w$  samo rozwiązanie odnośnego zadania teorii sprężystości już z powodu niespełnienia warunku (1). Mimo to obliczają często  $P_w$  tak, jak gdyby prawo Hooke'a było ważne aż do granicy wytrzymałości i poprawiają otrzymany wzór wynikami bezpośrednich doświadczeń aż do złamania.

<sup>1)</sup> Niektórzy badacze rozróżniają pęknięcie wskutek „rozdarcia“ (prostopadłe do kierunku wydłużeń głównych) i pęknięcie wskutek „poślizgu“ (w płaszczyźnie największych naprężeń stycznych), charakterystyczne dla kryształów.

Sposób ten daje wcale dobre przybliżenie tylko w przypadku małej plastyczności i małych zwoezności materiału od prawa Hooke'a. W każdym razie obliczone „teoretycznie“  $P_w$  jest zawsze mniejsze od rzeczywistego, a różnica rośnie bardzo ze zdolnością materiału do odkształceń trwałych. Wszystko to odnosi się przedewszystkiem do wytrzymałości doraźnej, a więc do przypadków stałego obciążenia. Ponieważ obciążenia częstotzienne obniżają granicę wytrzymałości plastycznych metali nawet poniżej granicy plastyczności, przeto w przypadkach takich obciążeń (zwłaszcza w elementach maszynowych) mogą rozwiązania teorii sprężystości w połączeniu z teorią wytrzymałości dostarczyć bardzo dokładnych wartości obciążeń łamiących co wysoko podnosi ich praktyczną wartość.

**20. Wpływ czasu na objawy sprężystości i wytrzymałości materiału.** Ten wpływ zaznacza się bądź to bezpośrednio, bądź też pośrednio. Bezpośredni wpływ czasu polega na tem, że odkształcenia nawet sprężyste, przy niezmiennem obciążeniu rosną z biegiem czasu, aczkolwiek nadzwyczaj powolnie i nieznacznie. Podobnież po zniesieniu obciążenia znika zaraz nie całe sprężyste odkształcenie, lecz pozostaje pewna drobna część, malejąca coraz wolniej z upływem czasu. Te objawy, znane od dawna pod nazwą opóźnień sprężystego, występują wyjątkowo wyraźnie u materiałów organicznego pochodzenia jak drewno, skóra itp., a nadto u szkła, kamieni i niektórych metali mniejszego technicznego znaczenia.

Nader ważnym rodzajem pośredniego wpływu czasu jest stwardnienie (Verfestigung, ecrouissage) plastycznych metali, a w szczególności żelaza kowalnego i stali. Ten objaw polega na tem, że kiedy naprężenie przekraczające niezbyt wiele granicę plastyczności działa przez dłuższy czas bez zmiany, to ponowne doraźne badanie materiału wykazuje większe  $\sigma_p$ ,  $\sigma_f$  i  $K_r$ , a mniejsze  $\varphi$  i  $\psi$  niż w stanie pierwotnym. Krótko mówiąc, zwiększa się wytrzymałość materiału, a zmniejsza jego plastyczność. To samo zachodzi, gdy po jednorazowym przekroczeniu granicy plastyczności pozwolimy materiałowi „wypocząć“ przez dłuższy czas. Stopień stwardnienia rośnie w tych samych zresztą warunkach z nadwyżką wywołującego je naprężenia ponad (niższą) granicę plastyczności. Stwardnienie działa korzystnie w przypadkach, w których naprężenie użytkowe materiału pozostaje tego samego znaku, co naprężenie stwardniające; natomiast niekorzystnie w razie przeciwnym, najniekorzystniej zaś, gdy zmienne naprężenie użytkowe waha ustawicznie między ciągnięciem a równem mu ciśnieniem.

Na zjawisko stwardnienia rzucają pewne światło nowoczesne badania metalograficzne. Stwardnienie materiału, wywołane przekroczeniem granicy plastyczności przy t. zw. mechanicznej obróbce na zimno, da się usunąć przez wyżarzanie.

**21. Wpływ ciepła.** Ten wpływ może być również bezpośredni i pośredni. Bezpośredni objawia się przedewszystkiem zależnością stałych sprężystości i wytrzymałości materiału od temperatury, w jakiej dokonywamy badania. Z względów praktycznych wystarczy tutaj omówić wpływ temperatury na  $\sigma_f$  i  $K$ . Jest rzeczą jasną, że tak  $\sigma_f$  jak i  $K$  zdąża do zera, gdy temperatura (oczywiście jednakowo w całej próbce) zbliża się do temperatury topliwości materiału. Z tego jednakże nie wynika, aby wytrzymałość zmniejszała się stale z podwyżką temperatury ponad zwykłą ( $20^\circ \text{C}$ ). Wytrzymałość żelaza kowalnego rośnie zrazu z temperaturą choć nieznacznie i osiąga maximum przy  $\infty 250^\circ \text{C}$ , poczem dopiero trwale maleje. Odwrotnie zachowuje się plastyczność. Obniżając zaś temperaturę (od  $20^\circ \text{C}$ ), znaleziono mały wzrost doraźnej wytrzymałości i mniejszy ubytek plastyczności.

Kamienie naturalne i sztuczne nie były badane w analogiczny sposób, albowiem w praktyce objawia się wpływ ciepła na ich własności mechaniczne najczęściej pośrednio. Komin fabryczny pęka zewnątrz bynajmniej

nie z tego powodu, że jego materiał traci na wytrzymałości przy ogrzaniu od wewnątrz przez gazy spalinowe, lecz wskutek naprężeń termicznych, wywołanych różnicą temperatur wewnętrznej i zewnętrznej warstwy. Dzięki bardzo słabemu (w porównaniu do metali) przewodnictwu cieplnemu a wielkiej pojemności cieplnej tych materiałów przyjmują one nadzwyczajnie powoli temperaturę otoczenia i dlatego pożar uszkadza tylko powierzchnie ściany, stropy itp. z cegły, kamienia lub betonu nie niweczając ich wytrzymałości i nie zagrażając umieszczonym wewnątrz (ewentualnie) wzmocnieniom z żelaza. Natomiast nie osłonięta ogniotrwałym materiałem konstrukcja żelazna nie wytrzymuje z reguły większego pożaru, gdyż wskutek silnego przewodnictwa i małej pojemności cieplnej przyjmuje w krótkim czasie nawszkroś temperaturę niebezpieczną dla wytrzymałości materiału. (Pojemność cieplna konstrukcji murowanej lub betonowej przewyższa znacznie takąż pojemność odpowiadającej konstrukcji żelaznej nie tylko z powodu mniejszego ciepła właściwego, ale także z powodu większej objętości, a mniejszej powierzchni.)

Wyjątkowe stanowisko zajmuje drewno jako materiał wyróżniający się z pośród wszystkich innych stosowanych w konstrukcjach budowlanych palnością.

Co do wspomnianego już wyżej pośredniego wpływu ciepła na wytrzymałość elementów konstrukcyjnych por. ustęp p. t. „Napięcia termiczne“.

**22. Inne wpływy.** Nazwy, pod jakimi znane są różnorodne materiały techniczne, nie określają ani ciał chemicznie czystych, ani też połączeń lub stopów o pewnym oznaczonym składzie. Np. przez żelazo zlewne rozumiemy materiał, otrzymany znanymi procesami hutniczymi, którego głównym składnikiem jest żelazo *Fe*, a który nadto zawiera jako istotny składnik 0,05 do 0,25% węgla *C* oprócz innych składników nieistotnych w postaci drobnych przymieszek, mających jednakże wpływ bądź to korzystny, bądź też niekorzystny na własności mechaniczne materiału. Stal zaś zlewna różni się od żelaza zlewego, i to tak pod względem technologicznym jak i chemicznym, jedynie większą zawartością węgla, która wynosi 0,25—1,6%. Zatem objawy sprężystości i wytrzymałości materiału są zależne w wysokim stopniu od jego składu chemicznego.

Wskutek procesu walcowania (wyciągania w druty) stają się metale materiałami nierównokierunkowymi i okazują nieco różne stałe sprężystości i wytrzymałości przy liniowych stanach napięcia o osi równoległej lub prostopadłej do kierunku walcowania. Podobną nierównokierunkowość objawiają skały warstwowe w jeszcze silniejszym stopniu. Nawet beton ubijany okazuje nieco różną sprężystość i wytrzymałość przy obciążeniu prostopadłym do warstw, a równoległym do nich.

U odlewów metalowych i szkła rośnie wytrzymałość z szybkością ostygnięcia, ale zarazem maleje plastyczność (rośnie kruchość).

U drewna określonego typu botanicznego (np. sosnina) rośnie wytrzymałość z ciężarem właściwym, a maleje ze wzrostem wilgoci.

Szczególnie licznym wpływom podlega beton. Tu zaznaczymy tylko, że:

1. Tak moduł wydłużenia sprężystego  $E$  jak i wytrzymałość przy prostym rozciąganiu lub ściskaniu rosną z wiekiem betonu (z początku szybko, później coraz wolniej) zdążając asymptotycznie do pewnej granicy, którą osiągają zapewne dopiero po więcej jak 6-u latach, tj. dopóki trwa złożony proces tężenia betonu.

2. W tych samych zresztą warunkach jest wytrzymałość betonu na proste rozciąganie lub ściskanie tem mniejsza, im większe są rozmiary badanego ciała (przy zachowaniu reguły podobieństwa Barba'y i Kick'a). Główna przyczyna tego zjawiska (przypominającego zachowanie się cienkich drutów) tkwi prawdopodobnie w tem, że proces tężenia większych brył betonu odbywa się powolniej, aniżeli mniejszych.

**Uwaga.** Wszystkie powyżej omawiane wpływy na wytrzymałość przy prostym rozciąganiu lub ścisaniu odnoszą się do wytrzymałości materiału. Do wytrzymałości ciała (elementu konstrukcyjnego) można je odnieść tylko wtedy, gdy siły zewnętrzne wywołują w niem z dostateczną dokładnością linjowy stan napięcia i odkształcenia. O ile jednak łatwo taki stan zrealizować w doświadczeniach nad prostym rozciąganiem, stosując pręty próbne dostatecznie długie w stosunku do grubości, ażeby wielce złożony stan napięcia w miejscach przeniesienia sił zewnętrznych (tj. w głowach) nie wpływał w dostrzegalny sposób na jednorodność stanu napięcia i odkształcenia w badanej środkowej walcowej części pręta; o tyle trudno to osiągnąć w przypadku ściskania, albowiem ze wzrostem długości rośnie szybko niebezpieczeństwo wyboczenia i wskutek tego przestaje się spełniać drugi z warunków rozpatrywanych w ust. 19.

Według badania Prandtl'a i Rinne'go można wywołać w środkowej walcowej części (fig. 128) ściszanego próbnego słupka bardzo dokładnie linjowy stan napięcia i otrzymać wartości (naprężeń zgniatających) niezależne od jego wysokości, jeżeli 1. część walcowa choćby bardzo krótka przechodzi łagodnie w znacznie rozszerzone i dość długie głowy, a zarazem 2. długość tej części nie przekracza 2- do 3-krotnej grubości.

**23. Wytrzymałość ciał pryzmatycznych o małej smukłości przy osiowym ścisaniu.** W doświadczeniach technicznych używa się tradycyjnie ciał próbnych kształtu graniastosłupów lub walców o wysokości niewiele większej od grubości i wywiera nacisk na dwie równoległe podstawy za pośrednictwem stalowych płyt prasy hydraulicznej itp. Wskutek ograniczenia swobody rozszerzenia poprzecznego podstaw przez tarcie między niemi a płytami ścisakającymi jest stan napięcia w takim ciele bardzo skomplikowany. Poznajemy to odrazu po beczułkowatej postaci ściśniętego niskiego walca. Wobec tego iloraz siły zgniatającej  $P_w$  przez pierwotne pole przekroju  $F$  nie określa wytrzymałości materiału, lecz wytrzymałość ciała odniesioną do jednostki pola przekroju i nic dziwnego, że ta wytrzymałość okazała się zależną od stosunku wymiarów. Wyniki doświadczeń oddaje dość dokładnie empiryczny wzór Bauschinger'a o postaci:

$$\frac{P_w}{F} = \left( \alpha + \beta \frac{\sqrt{F'}}{h} \right) \sqrt{\frac{F'}{\frac{1}{4}u}}$$

przyczem  $\alpha$  i  $\beta$  są stałymi materiału, podanemi w poniżej umieszczonej tablicy,  $F'$  polem,  $u$  obwodem przekroju poprzecznego podstawy, zaś  $h$  wysokością.

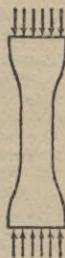


Fig. 128.

Materiał	Kierunek nacisku względem płaszczyzny uwarstwienia	$\alpha$	$\beta$	Badacz
Piaskowiec szwajcarski . . . . .	prostopadle	310	346	} Bauschinger
Piaskowiec pstry . . . . .	równoległe	262	320	
Piaskowiec z Heilbronn . . . . .	"	358	118	} Bach
Żeliwo . . . . .	"	5480	895	

Praktyczne znaczenie tych wyników jest niewielkie. Nieco ważniejsze są wyniki doświadczeń, w których nacisk przenosił się z jednej strony tylko na pewną część podstawy słupa o wielkości  $F_1 < F'$ , z drugiej zaś na całą podstawę. Wtedy stan napięcia jest również bardzo zawiły i nie dopuszcza ścisłego rozwiązania teoretycznego. Doświadczenia Bauschinger'a i Bach'a

z sześciánami kamiennymi w granicach  $\frac{F}{F_1} = 1$  do 20 dadzą się ująć we wzór empiryczny:

$$\frac{P_w}{F_1} = K_k \sqrt[3]{\frac{F}{F_1}},$$

przyczem  $K_k$  oznacza t. zw. wytrzymałość kostkową, otrzymaną przy zwykłym zgniataniu kostek między stalowymi płytami ściskającymi.  $K_k$  jest oczywiście współczynnikiem wytrzymałości ciała (kostki) a nie wytrzymałością materiału,  $K_c$ , która będzie zawsze mniejsza od  $K_k$ . Ponieważ stosunek  $K_c : K_k$  można w przybliżeniu uważać dla danego materiału za stały, przeto przyjęto od dawna wytrzymałość kostkową za praktyczną miarę porównawczą wytrzymałości materiałów kruchych.

Obliczone z powyższego wzoru średnie ciśnienie „zgniatające“ na polu  $F_1 < F$  jest widocznie większe od  $K_k$ . Ze stanowiska teorii sprężystości i wytrzymałości tłumaczy się to ciśnieniami poprzecznymi w elementach leżących na liniach działania nacisku na pole  $F_1$ . Te ciśnienia poprzeczne powstać muszą wskutek zapory, jaką stawia rozszerzeniu poprzecznemu materiał leżący zewnątrz  $F_1$ . One będą tem większe w stosunku do ciśnień podłużnych, im większe jest  $F$  wobec  $F_1$ .

Natomiast wartość stosunku  $P_w : F$  wypada z powyższego wzoru mniejsza od  $K_k$ , co było również do przewidzenia.

Wniosek praktyczny: Ciśnienie dopuszczalne między płytą łożyskową o polu  $F_1$  a ciosem o polu przekroju  $F$  może być większe w stosunku  $\sqrt[3]{\frac{F}{F_1}}$  od dopuszczalnego ciśnienia materiału ciosu przy równej pewności.

**24. Naprężenia termiczne.** Równomierne ogrzanie lub oziębienie ciała swobodnego wywołuje jego odkształcenie objętościowe, podobnie jak wszechstronne równomierne rozciąganie lub ściskanie. Gdy ciało jest nieswobodne, a ograniczenie swobody tego rodzaju, że rozszerzenie lub skurczenie wywołane zmianą temperatury jest utrudnione lub uniemożliwione, to muszą powstać siły zewnętrzne (reakcje) i napięcia zwane termicznymi. Naprężenia termiczne mogą powstać w ciele swobodnym wskutek częściowego, miejscowego ogrzania. One to wywołują np. pęknięcie szklanki ogrzanej od wnętrza przez wlanie gorącego płynu. W konstrukcjach budowlanych liczymy się częściej z naprężeniami termicznymi przy równomiernej zmianie temperatury uwarunkowanymi sposobem ustalenia konstrukcji. Najprostszym przykładem jest pręt o stałym przekroju i zupełnie ustalonych punktach końcowych osi długości  $l$ . Skoro ten pręt osadzono przy pewnej temperaturze, to wydłużenie termiczne wywołane podwyższeniem temperatury o  $t^0$  byłoby  $= \alpha \cdot l \cdot t$ , jeżeli  $\alpha$  jest współczynnikiem tego wydłużenia. Ponieważ to wydłużenie jest zniesione naprężeniem termicznym  $\sigma$ , a odpowiadające temu naprężeniu wydłużenie sprężyste  $= \frac{\sigma \cdot l}{E}$ , przeto  $\frac{\sigma \cdot l}{E} + \alpha \cdot l \cdot t = 0$  a stąd:

$$\sigma = - \alpha E t.$$

(Wzór ważny do granicy proporcjonalności materiału i przy stałej wartości termicznego współczynnika wydłużenia  $\alpha$ .)

Obliczona w powyższym przykładzie wartość naprężenia termicznego jest oczywiście wyższą granicą wartości rzeczywistej, albowiem zupełne ustalenie zachodzi w praktyce tylko z większym lub mniejszym przybliżeniem.

Inne technicznie ważne przypadki będą rozpatrywane w zagadnieniach dotyczących belek, łuków, kratownic itp.

**25. Naprężenia pierwotne, odlewnicze, skurczowe i zestawcze (montażowe).** Elementy konstrukcyjne są nie zawsze ciałami pozbawionymi naprężeń w stanie naturalnym (tj. bez sił zewnętrznych), jak się to zwykle



przyjmuje w teorii sprężystości. Niekiedy procesy technologiczne, jakim podlegał materiał przy wytwarzaniu elementu, pozostawiają wyraźny ślad w postaci naprężeń pierwotnych (samonaprężeń). Powstają one zwłaszcza przy obróbce na zimno metali (doświadczenia Heyna, 1911—1914), albo przy ostygnięciu odlewów. W tym drugim przypadku noszą nazwę naprężeń odlewniczych. W pierwszym przypadku są samonaprężenia wywołane zjawiskiem twardnienia i można je usunąć przez wyżarzenie, w drugim zaś powstają przez krzepnięcie i kurczenie kolejno ostygających najpierw warstw zewnętrznych, a potem wewnętrznych. W obu wypadkach powstają ciągnięcia w warstwach zewnętrznych, a ciśnienia wewnątrz ciała, które przy obciążaniu go składają się z naprężeniami obliczonymi przez teorię sprężystości w obrębie ważności prawa Hooke'a, a zatem wpływają niekorzystnie na wytrzymałość ciała.

Naprężenia skurczowe występują w drewnie i w betonie. W drewnie powstają one wskutek procesu wysychania, przy którym ten materiał się kurczy najsłabiej w kierunku równoległym do włókien, najsilniej zaś w kierunku prostopadłym do włókien, a zarazem stycznym do słoju.

W betonie powstają naprężenia skurczowe wskutek procesu tężenia (krzepnięcia). Tężąc na powietrzu beton się kurczy i skoro temu stoi na przeszkodzie, czy to sposób podparcia, czy też wzmacniające pręty żelazne, to w nim powstaną w najprostszych przypadkach ciągnięcia doprowadzające nawet do pęknięć. Tężąc zaś pod wodą beton pęcznieje, co wywołuje w tych samych przypadkach daleko mniej szkodliwe ciśnienia.

Wpływ skurczenia betonu na odpowiadające mu naprężenia jest oczywiście równoważny wpływowi stosownie dobranej obniżenia temperatury i dlatego np. niemieckie przepisy żelbetowe z r. 1916 zalecają uwzględnianie poprzedniego wpływu przez przyjęcie w obliczeniu równoważnej obniżki temperatury o  $15^{\circ}\text{C}$ , przy średniej wartości współczynnika termicznego wydłużenia  $\alpha = 0,00001$  (na  $1^{\circ}\text{C}$ ).

Nakoniec naprężenia zestawcze mogą być zamierzone lub przypadkowe. Pierwsze, zwane także „sztucznymi“, są z góry dane i mają ostatecznie na celu korzyści gospodarcze; natomiast drugie, wywołane błędami wykonania, są z reguły szkodliwe.

Przykładem pierwszego rodzaju naprężeń zestawczych są naprężenia w śrubach żelaznych, ściągających poprzecznie drewnianą belkę kratową Howe'a, albo naprężenia w ścięgnaach belek wzmocnionych, na jakich zwykle opierają konstrukcję długich wagonów kolejowych. Przykładem drugiego rodzaju tych naprężeń jest pręt „zbyteczny“ belki kratowej, mający łączyć dwa dane węzły już ustalone w układzie głównym (statycznie wyznaczalnym), który to pręt jest wskutek niedokładności wykonania (wiercenia dziur na nity itp.) nieco za krótki albo za długi. Aby połączenie wykonać, trzeba go nieco rozciągnąć lub ścisnąć, wskutek czego w obu przypadkach powstaną naprężenia zestawcze w całej kratownicy, które się dodają algebraicznie do naprężeń wywołanych obciążeniem.

**26. Zasada de Saint-Venant'a.** Warunki krańcowe technicznych zagadnień teorii sprężystości są zwykle tak złożone i nieuchwytnie, że nawet przy uproszczonym do możliwych granic modelu elementu konstrukcyjnego nader trudno znaleźć całkiem dokładnie stan napięcia i odkształcenia przez rozwiązanie równań różniczkowych teorii. To jednakże nie przeszkodziło rozwiązaniu ogromnej liczby zadań technicznego znaczenia z wystarczającym przybliżeniem nawet bez uciekania się do owych równań różniczkowych dzięki pewnej własności rozwiązań ścisłych, którą sformułował ogólnie de Saint-Venant. Tę własność objaśni najlepiej przykład następujący. Na górny podstavę słupa wywieramy w środku osiowo nacisk  $P$ , raz za pośrednictwem bardzo sztywnej płyty nakrywającej cały przekrój  $F$ , drugi raz za pośrednictwem podobnej płyty o polu  $F_1 < F$ , trzeci raz za pośrednictwem

niewielkiej stalowej kuli. (Fig. 129.) W każdym z tych trzech przypadków otrzymujemy oczywiście w górnym końcu słupa bardzo różne stany napięcia, ale obserwując odkształcenia w przekroju odległym od górnego np. o  $1,5d$  do  $2d$  (jeżeli  $d$  oznacza największy wymiar przekroju), zauważymy już różnice bardzo małe. W tych przekrojach jest rozkład ciśnienia praktycznie jednakowy i równomierny we wszystkich trzech przypadkach.

Uogólniając to można wyrazić zasadę de Saint-Venant'a w następującej postaci:

Jeżeli na pewien obszar ciała sprężystego w równowadze działamy kolejno rozmaicie rozmieszczonymi, ale statycznie równoważnymi układami sił zewnętrznych (obciążeń), to w odległości od obszaru, przekraczającej dość znacznie jego rozmiary, powstają praktycznie jednakowe stany napięcia.

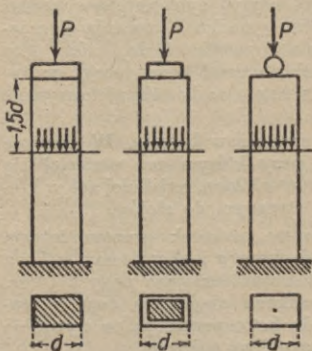


Fig. 129.

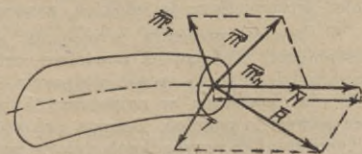


Fig. 130.

O stanie napięcia i odkształcenia w przekroju dość odległym od miejsc bezpośrednio obciążonych decyduje przeto w pierwszym rzędzie tylko wypadkowa  $\bar{R}$  i ogólny moment  $\bar{M}$  wszystkich sił zewnętrznych, działających na część ciała tym przekrojem odciętą. (Biorąc zamiast tej części drugą, pozostałą, otrzymujemy oczywiście, z powodu równowagi, wypadkową  $-\bar{R}$  i moment  $-\bar{M}$ ). Dzięki temu można posługując się zasadą superpozycji składać doświadczalnie sprawdzone przybliżone rozwiązania najprostszych zadań częściowych, aby otrzymać wystarczające dla praktyki rozwiązania bardzo wielu zadań złożonych.

**27. Główne rodzaje wytrzymałości prętów czyli belek.** Najbardziej rozpowszechnionym typem elementu konstrukcyjnego jest pręt czyli belka. Wyznaczywszy naprężenia normalne i styczne w każdym przekroju poprzecznym pręta, znajdujemy tem samem stan napięcia i odkształcenia całego pręta, co pozwala zwykle ocenić jego warunki sztywności, wytrzymałości i ekonomji. W tym celu sprowadzamy według prawideł statyki ciała sztywnego wszystkie siły zewnętrzne, działające na część pręta odciętą danym przekrojem, do jego środka geometrycznego (środką ciężkości). Otrzymałą w ten sposób siłę  $\bar{R}$  rozkładamy na siłę normalną  $N$  i styczną  $T$  do przekroju (fig. 130). Parę sił zaś rozkładamy również na parę leżącą w płaszczyźnie przekroju o momencie  $\mathcal{M}_N$  (którego wektor jest normalny do przekroju) i parę w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju o momencie  $\mathcal{M}_T$  (którego wektor leży w płaszczyźnie przekroju).

Siłę  $N$  jako działającą wzdłuż osi pręta nazywamy siłą podłużną [rozciągającą (+) lub ściskającą (-)],  $T$  siłą poprzeczną,  $\mathcal{M}_N$  momentem skręcającym,  $\mathcal{M}_T$  momentem zginającym. Mówimy, że pręt jest w rozpatrywanym przekroju  $F'$  narażony tylko

I. i II. na (a) rozciąganie lub (b) ściskanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części I sprowadzają się do siły podłużnej  $N$ , skierowanej (a) od przekroju ku części odciętej I lub (b) od części I ku przekrojowi;

III. na ścinanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części sprowadzają się do siły poprzecznej  $T$ ;

IV. na skręcanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części sprowadzają się do pary skręcającej, tj. pary sił leżącej w płaszczyźnie równoległej do przekroju  $F$  [moment tej pary  $M_N$  nazywa się momentem skręcającym (momentem skręcenia)];

V. na zginanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części sprowadzają się do pary zginającej, tj. pary sił leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju  $F$  (czyli równoległej do osi pręta w danym miejscu). [Moment tej pary  $M_T$  nazywa się momentem zginającym (momentem zgięcia).]

W przypadku prętów prostych o stałym przekroju (pryzmatycznych) rozróżniamy stosownie do powyższych pięciu przypadków, tyleż głównych rodzajów wytrzymałości prętów. Jeżeli zaś pręt jest narażony jednocześnie na dwa lub więcej z powyższych sposobów obciążenia przekroju, to mówimy o złożonej wytrzymałości pręta. I tutaj odróżniamy doraźną wytrzymałość od wytrzymałości przy powtarzającym się lub przemiennym obciążeniu. Zależnie tedy od sposobu obciążenia pręta mówimy jak w ustępie 19. o obciążeniu rozrywającym, zgniatającym, a nadto o obciążeniu ścinającym, ukrecającym i łamiącym.

Przekrój, w którym zachodzi największe wyężenie materiału, nazywamy przekrojem niebezpiecznym.

## II. Rozciąganie i ściskanie.

28. Pręty proste narażone na rozciąganie lub ściskanie bez niebezpieczeństwa wybożenia (fig. 130 a). Ogólny typ wzorów do obliczenia (wzory podstawowe):

I. napężenie  $\sigma$  przy danym obciążeniu  $P$  przekroju o polu  $F$ :

$$\sigma = \frac{P}{F} \dots \dots \dots I$$

II. potrzebne pole przekroju przy danym obciążeniu i danej wartości napężenia bezpiecznego:

$$F = \frac{P}{k} \dots \dots \dots II$$

III. obciążenie bezpieczne przekroju przy danym polu  $F$  i danej wartości napężenia bezpiecznego materiału:

$$P_{\text{bezp}} = F \cdot k \dots \dots \dots III$$

a) Pręty proste o stałym przekroju. 1. Jeżeli siły zewnętrzne działają tylko na przekroje końcowe, to przy najprostszym założeniu ich równomiernego rozkładu na tych przekrojach mamy do czynienia z jednakowym we wszystkich przekrojach linjowym stanem napięcia, a zatem obowiązują wzory podstawowe (I, II, III). Chcąc nadto obliczyć całkowite wydłużenie sprężyste pręta o długości pierwotnej  $l$ , zastosujemy do granicy proporcjonalności wzór:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{EF}$$

2. Uwzględniając ciężar własny pręta wiszącego lub stojącego pionowo (fig. 131) widzimy, że przekrojem niebezpiecznym jest ten przekrój końcowy,

w którym sumuje się obciążenie siłą zewnętrzną  $P$  z obciążeniem własnym ciężarem  $G$ . A zatem:

$$\sigma_{\max} = \frac{P+G}{F} \dots \dots \dots (I)$$

Przy projektowaniu jest nieznanem  $F$ , a więc i  $G = F \cdot l \cdot \gamma$  ( $\gamma$  ciężar właściwy materiału). Wstawivszy to we wzór (I) i zastąpiwszy  $\sigma_{\max}$  przez  $k$ , otrzymujemy:

$$F = \frac{P}{k - \gamma l} \dots \dots \dots (II)$$

a zarazem:  $P_{\text{bezp}} = F(k - \gamma l) \dots \dots \dots (III)$

Z ostatniego równania widać, że jeżeli długość pręta  $l = \frac{k}{\gamma}$ , to pręt może bezpiecznie dźwigać tylko ciężar własny. Podstawiając zamiast  $k$  doraźną wytrzymałość  $K_r$ , względnie  $K_c$ , otrzymujemy t. zw. długość zerwania  $l_r = \frac{K_r}{\gamma}$ , albo wysokość zgniecenia  $l_c = \frac{K_c}{\gamma}$ .

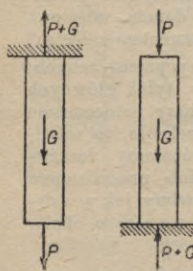


Fig. 131.

Pręt czyni zadość warunkowi ekonomji, jeżeli jego koszt  $C F l \gamma$  jest mniejszy od kosztu  $C' F' l' \gamma'$  pręta z każdego innego materiału ( $C$  jest ceną jednostki ciężaru pierwszego,  $C'$  drugiego materiału). A zatem:

$$\frac{C P l \gamma}{k - \gamma l} < \frac{C' P l' \gamma'}{k' - \gamma' l'}, \quad \text{czyli} \quad \frac{C}{C'} < \frac{\frac{k}{\gamma} - l}{\frac{k'}{\gamma'} - l'}$$

jest warunkiem gospodarczej wyższości pręta pierwszego nad drugim (kreskowanym).

Sprężyste wydłużenie pręta

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E F} + \frac{1}{2} \frac{G \cdot l}{E F} = (P + \frac{1}{2} G) \frac{l}{E F}$$

3. Jeżeli pręt jest zbudowany symetrycznie z dwu materiałów (np. beton i żelazo), to z warunku równego wydłużenia obu materiałów wynika, że naprężenia w tym samym przekroju są wprost proporcjonalne względem modułów wydłużenia  $E_b$  i  $E_z$  tychże materiałów. Gdy zatem oznaczymy stosunek  $E_z : E_b = n$ , to naprężenie w materiale  $b$  (betonie) określi wzór:

$$\sigma_b = \frac{P}{F + n f} \quad \text{a w materiale } z \text{ (żelazo)} \quad \sigma_z = \frac{n P}{F + n f}$$

przyczem  $F$  oznacza przekrój materiału  $b$ , a  $f$  materiału  $z$ .

Uwaga. Z powodu wielkich zbroczeń betonu od prawa Hooke'a rośnie stosunek  $n$  z wartością naprężenia, wskutek czego coraz większa część obciążenia przenosi się na żelazo.

b) Pręty proste o przekroju zmiennym. Przy łagodnie zmiennym przekroju możemy zawsze bez wielkiego błędu stosować wzory podstawowe prętów o stałym przekroju, albowiem rozkład naprężeń normalnych w każdym przekroju różni się niewiele od równomiernego, a powstające dodatkowe naprężenia styczne są bardzo małe. W przypadku działania sił zewnętrznych tylko na przekroje końcowe jest niebezpiecznym przekrój najmniejszy  $F_0$  i ten przekrój bierzemy w rachubę.

Przy ostrych zmianach przekroju jest rozkład naprężeń aż do granicy sprężystości wysoce nierównomierny i największe naprężenie (na konturze przekroju) przewyższa nieraz wielokrotnie średnią wartość naprężenia. Po przekroczeniu granicy sprężystości, a zwłaszcza po przekroczeniu granicy plastyczności wyrównywują się naprężenia tem bardziej, im materiał jest plastyczniejszy. Dlatego w przypadku stałego obciążenia prętów z żelaza kowalnego, miękkiej stali, miedzi itp. można obliczenia wytrzymałości wykonywać ze względu na przekrój niebezpieczny  $F_0$ , tak jak gdyby pręt miał przekrój  $F_0$  na całej długości. Doświadczenia pouczają nawet, że wytrzymałość doraźna pręta okrągłego o przekroju  $F$ , który pomniejszono lokalnie do wartości  $F_0$  przez wytoczenie dokoła żłobka, jest większa od wytrzymałości pręta walcowego o przekroju  $F_0$ . To się tłumaczy utrudnieniem poprzecznego zwięzienia po przekroczeniu granicy plastyczności przez materiał sąsiednich grubszych części pręta.

W przypadku obciążeń przemiennych wytrzymałość prętów o lokalnie zmniejszonym przekroju  $F_0$  okazuje się z doświadczeń mniejszą od wytrzymałości pręta walcowego tegoż przekroju. Różnica zaś jest tem większa, im ostrzejsze są zmiany przekroju. Przez miejscowe osłabienie przekroju zmniejsza się wytrzymałość prętów z plastycznych metali przy obciążeniu przemiennem w tym samym prawie stosunku, co doraźna wytrzymałość prętów tego samego kształtu z materiału kruchego (np. szkła).<sup>1)</sup>

Przy uwzględnieniu ciężaru własnego jest zmienność przekroju poddyktowana niekiedy wa-

runkiem ekonomji. Najmniejszy ciężar własny będzie wtedy, gdy w każdym przekroju zachodzi ta sama pewność przeciwko osiągnięciu granicy plastyczności, względnie granicy wytrzymałości. Taką postać pręta o równomiernej wytrzymałości (fig. 132) określa równanie

$$F = F_0 e^{\frac{\gamma}{k} x},$$

w którym  $F_0 = \frac{P}{k}$  oznacza przekrój obciążony siłą  $P$ ,  $k$  naprężenie bezpieczne,  $\gamma$  ciężar właściwy materiału, a  $F$  przekrój w odległości  $x$  od  $F_0$ .

**29. Naprężenia w cienkich ścianach naczyń.** Jeżeli grubość ściany  $\delta$  jest mała wobec rozmiarów naczynia i promieni krzywizny powierzchni środkowej (tj. połowiącej wszędzie grubość  $\delta$ ), to przy zwykle obieranych kształtach tej powierzchni można pominąć zmianę jej postaci i przyjmując równomierny rozkład naprężeń przez całą grubość ściany.

Przy założeniu, że ta powierzchnia jest obrotową i obciążoną od wewnątrz ciśnieniem gazu lub płynu  $p$  ( $kg/cm^2$ ), znajdujemy z warunków równowagi elementu (fig. 133), wyciętego dwoma nieskończenie bliskimi przekrojami południkowymi i takimiż przekrojami do nich prostopadłymi:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{\delta}.$$

<sup>1)</sup> A. Föppl, „Mittel. aus d. mech.-techn. Labor.“, München, Heft 31.

Tutaj oznacza:

- $\sigma_1$  naprężenie równoleżnikowe, normalne do płaszczyzny południkowej, (o kierunku stycznym do równoleżnika),  
 $\sigma_2$  naprężenie południkowe, tj. działające na przekrój normalny do południka,  
 $\rho_1$  promień krzywizny tegoż przekroju,  
 $\rho_2$  " " przekroju południkowego.

Szczególne przypadki:

a) Naczynie kuliste ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = r$ )

$$\sigma = \frac{p \cdot r}{2 \delta}.$$

b) Rura walcowa (fig. 134 a)  $\rho_2 = \infty$ ,  $\rho_1 = r = \frac{d}{2}$ , jeżeli  $d$  oznacza średnicę.

Naprężenie obwodowe  $\sigma_1 = \frac{p \cdot r}{\delta} = \frac{p \cdot d}{2 \delta}$ .

Do wyznaczenia naprężenia podłużnego  $\sigma_2$  służy warunek równowagi sił wewnętrznych w przekroju poprzecznym (fig. 134 b) o wypadkowej  $\sigma_2 \cdot 2 r \pi \cdot \delta$

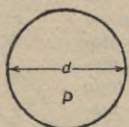


Fig. 134 a.

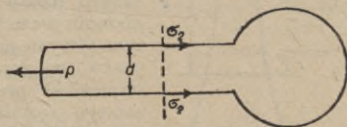


Fig. 134 b.

z siłami zewnętrznymi działającymi na część odciętą o wypadkowej  $r^2 \pi p$ . A zatem:

$$\sigma_2 = \frac{p \cdot r}{2 \delta} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{p d}{4 \delta}.$$

30. Wytrzymałość ściskanych kul i wałków. a) Wskutek nacisku  $F$  na kulę o promieniu  $r$ , podpartą grubą płytą z tego samego materiału, odkształcają się oba ciała w miejscu stykania (fig. 135). Według ogólnego roz-

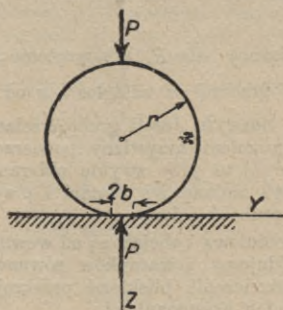


Fig. 135.

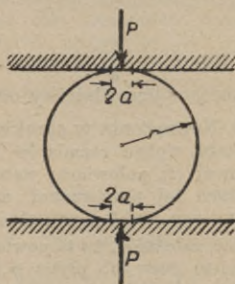


Fig. 136.

wiązania odpowiadającego zadania teorii sprężystości zachodzi stykanie w bardzo płytkiej czaszy kulistej o promieniu konturu.

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P r}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}.$$

(Rozwiązanie jest bardzo dokładne w granicach ważności prawa Hooke'a, o ile  $a$  jest dość małe w porównaniu do  $r$ , co się z reguły spełnia w praktycznych zastosowaniach).

Średnie ciśnienie w miejscu stykania ma zatem wartość

$$p = \frac{P}{a^2 \pi}.$$

Rozkład ciśnień wzdłuż średnicy koła stykania przedstawia się wykresem eliptycznym. Największe ciśnienie zachodzi przeto w środku i ma wartość bezwzględną:

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2} p = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{E^2}{\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2} \frac{P}{r^2}}.$$

Towarzyszą mu główne ciśnienia poprzeczne o tej samej wielkości:

$$\sigma' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) \sigma_{\max}$$

widocznie mało różniącej się od  $\sigma_{\max}$ . W materiale nieściśliwym ( $m = 2$ ) byłoby nawet  $\sigma' = \sigma_{\max}$ . Dla stali ( $m = \frac{10}{3}$ ) wypada  $\sigma' = 0,8 \sigma_{\max}$ . Doświadczenie poucza, że ten punkt nie jest miejscem niebezpiecznym. Pęknięcie kruchej materjału zachodzi bowiem zawsze wzdłuż obwodu koła stykania. To dowodzi istnienia ciągnięć w kierunku promienia lub ciśnień w kierunku obwodu, albo wreszcie jednego i drugiego. Teoria potwierdza to ostatnie i daje:

$$\sigma_r = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sigma_{\max}, \quad \sigma_t = -\frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sigma_{\max}$$

jako wartości ciągnięcia w kierunku promienia  $\sigma_r$  i ciśnienia w kierunku obwodu. W miejscu niebezpiecznym panuje zatem proste ścinanie. Odpowiadające wyężenie materjału, określone wartością  $\sigma_{\text{red}} = 2\tau$  według hipotezy największego naprężenia stycznego obliczymy zatem z wzoru:

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sigma_{\max} = \left[ \frac{2}{3\pi} \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{E^2}{\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2}} \right] \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{r^2}},$$

albo:

$$\sigma_{\text{red}} = \beta \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{r^2}},$$

jeżeli  $\beta = [\dots]$  oznacza stałą wartość, zależną od sprężystych własności materjału. Stąd znajdujemy niebezpieczne obciążenie kul:

$$P_{\text{nieb}} = \frac{\sigma_{\text{nieb}}^3}{\beta^3} r^2 = \frac{\sigma_{\text{nieb}}^3}{4 \beta^3} d^2,$$

zaś obciążenie bezpieczne przy  $n$ -krotnej pewności

$$P_{\text{bezp}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma_{\text{nieb}}^3}{4 \beta^3} d^2.$$

Okazuje się, że obciążenie bezpieczne jest (w rozpatrywanym prostym przypadku) proporcjonalne względem kwadratu średnicy kuli i sześciannu wytrzymałości materiału.<sup>1)</sup>

W przypadku stali jako materiału kuli i płyty można przyjąć, średnio  $4 \beta^3 = 12 \cdot 10^9 \text{ kg}^2 \cdot \text{cm}^{-4}$  ( $E = 2\,120\,000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $m = 3$ ). A zatem:

$$P_{\text{bezp}} = \frac{1}{n} \frac{\sigma_{\text{nieb}}^3}{12 \cdot 10^9} d^2 = \frac{1}{n} C d^2.$$

Wartość  $\sigma_{\text{nieb}}$  waha się dla stali zlewnej od 5000 do 20 000  $\text{kg/cm}^2$ . Odpowiadająca wartość  $C = 10,4$  do 667  $\text{kg/cm}^2$ . Zgodnie z tem dały bezpośrednio doświadczenia Stribeck'a z kulami z twardej stali jako wartość obciążenia, przy którym zachodzi pęknięcie dokoła powierzchni stykania  $P = 550 d^2$  do 700  $d^2$ .

b) Przy przyciskaniu wałka do płyty z tego samego materiału (fig. 136) zachodzi według rozwiązania teorii sprężystości zetknięcie powierzchnią paska o szerokości:

$$2b = 4 \sqrt{\frac{2 P \cdot r}{\pi l E} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}.$$

Średnie ciśnienie na pasek stykania jest:

$$p = \frac{P}{2 b l}.$$

Miejsce niebezpieczne leży na linii środkowej paska. Odpowiadające ciśnienie (w kierunku siły  $P$ ) ma wartość bezwzględną

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{4}{\pi} p.$$

Taką samą wartość ma ciśnienie poprzeczne  $\sigma_y$  w przekroju podłużnym wałka; ciśnienie zaś  $\sigma_x$  w przekroju poprzecznym wałka, tj. ciśnienie podłużne ma wartość:

$$\sigma' = \frac{2}{m} \sigma_{\text{max}}.$$

A zatem wyężenie materiału według hipotezy największego naprężenia ścinającego:

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_{\text{max}} - \sigma' = \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sigma_{\text{max}}$$

czyli 
$$\sigma_{\text{red}} = \left[ \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sqrt{\frac{E}{\pi \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}} \right] \cdot \sqrt{\frac{P}{2 l \cdot r}} = \beta \sqrt{\frac{P}{2 l \cdot r}}$$

jeżeli  $\beta = [\dots]$  oznacza znowu stałą materiału. Wstawiwszy  $\sigma_{\text{nieb}}$  zamiast  $\sigma_{\text{red}}$  i rozwiązawszy względem  $P$  mamy:

$$P_{\text{nieb}} = \frac{\sigma_{\text{nieb}}^2}{\beta^2} \cdot 2 l \cdot r$$

zaś przy  $n$ -krotnej pewności i  $d = 2 r$ :

$$P_{\text{bezp}} = \frac{1}{n} \frac{\sigma_{\text{nieb}}^2}{\beta^2} l d.$$

<sup>1)</sup> Prawidło proporcjonalności względem  $d^2$  wynika z najelementarniejszych rozważań podobieństwa dynamicznego i było oddawna znane; natomiast prawo proporcjonalności względem  $\sigma_{\text{nieb}}^3$  zawdzięczamy dopiero rozwiązaniu teorii sprężystości.



Powyższy wzór wyraża, że obciążenie bezpieczne wałka przyciskanego do płyty z tego samego materiału jest proporcjonalne względem pola  $ld$  przekroju osiowego wałka i względem kwadratu wytrzymałości materiału.

Skoro np. materiałem jest odlew stalowy (łożyska belek mostowych), to przyjmąwszy  $m = \frac{10}{3}$ ,  $E = 2\,150\,000 \text{ kg/cm}^2$ , znajdziemy:

$$\beta^2 = 12 \cdot 10^4,$$

czyli 
$$P_{\text{bezp}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma_{\text{nieb}}^2}{12 \cdot 10^4} \cdot ld = \frac{1}{n} \cdot C \cdot l \cdot d.$$

A zatem dla  $\sigma_{\text{nieb}} = K_r = 3500 \text{ do } 5000 \text{ kg/cm}^2$  mamy:

$$C = 102 \text{ do } 208 \text{ kg/km}^2.$$

**Uwaga.** W obu powyższych przypadkach jest  $P_{\text{nieb}}$  znacznie mniejsze od tej wartości doraźnego obciążenia, przy której kula lub wałek pęka w płaszczyźnie średnicowej przechodzącej przez kierunek siły, rozpadając się przytem na dwie części. Takie pęknięcie zachodzi oczywiście tylko przy dostatecznie małej plastyczności materiału (czyli znacznej kruchości). Odpowiadające obciążenie (zgniatające) jest np. według doświadczeń Stribecka z kulami stalowymi 6–10 razy większe od dającego się teoretycznie obliczyć  $P_{\text{nieb}}$ , przy którym grozi tylko powierzchowne pęknięcie lub trwałe odkształcenie w najbliższej okolicy miejsca stykania. Dlatego przy stosowaniu powyższych wzorów do praktyki można stosownie do okoliczności zejść z wartością  $n$  nawet poniżej 2, tem bardziej, że rzeczywiste wyciężenie materiału jest jeszcze nieco mniejsze od obliczonego na podstawie teorii sprężystości.

### III. Ścinanie i skręcanie.

**31. Pręty proste, narażone głównie na ścinanie.** Siła poprzeczna o stałej wartości nie może występować na skończonej długości pręta bez współdziałania momentów zginających, atoli w jednym przekroju da się przypadek samej siły poprzecznej zrealizować przez dwustronne podparcie końców długiego pręta i obciążenie go w środkowej części dwiema siłami prostopadłymi  $P$ ,  $P$  tworzącymi parę (fig. 137). Wówczas w środkowym przekroju między siłami  $P$ ,  $P$  panuje widocznie siła poprzeczna bez żadnego momentu zginającego, a pręt jest w tym przekroju narażony tylko na ścinanie. Nie jest to oczywiście proste ścinanie, albowiem rozkład naprężeń stycznych jest nierównomierny. W przypadku przekroju prostokątnego udało się ten rozkład wyznaczyć na drodze teoretycznej, przyczem się pokazało, że zależy on w znacznej mierze od względnej odległości przekroju od miejsca bezpośrednio obciążonego. Rozmieszczenie naprężeń stycznych w przekroju środkowym  $CC$  przedstawia wykres na fig. 137 dla różnych wartości stosunku  $b : h$ . To rozmieszczenie różni się znacznie od równomiernego, zwłaszcza przy małej wartości  $b : h$ . Przy rosnących wartościach  $b : h$  zdąża rozkład naprężeń szybko do rozkładu parabolicznego z wartością  $\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \tau_{\text{śred}}$  w połowie wysokości przekroju.

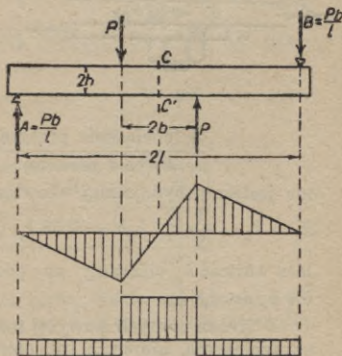


Fig. 137.

Już z tego widać, że niebezpieczna wartość siły poprzecznej w danym przekroju pręta zależy nie tylko od jego rozmiarów i wytrzymałości mate-

rjału, ale nadto od sposobu rozmieszczenia sił zewnętrznych. Im bardziej te siły są skoncentrowane w bezpośredniej bliskości przekroju, tem mniejszą się okazuje niebezpieczna wartość siły poprzecznej.

Z powodu praktycznych trudności nie wykonywa się w doświadczeniach technicznych prób ścinania według powyższego teoretycznego schematu, lecz np. dla betonu w sposób przedstawiony na fig. 138. Zakreskowane prostokąty przedstawiają stalowe tłoki (stemple), za których

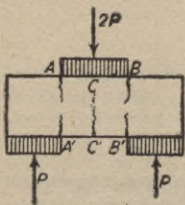


Fig. 138.

pośrednictwem wywieramy nacisk na górną i dolną powierzchnię krótkiej belki prostokątnej. W przekrojach  $AA'$  i  $BB'$ , w których nakoniec zachodzi pęknięcie, przy osiągnięciu przez  $P$  wartości krańcowej, panować musi obok siły poprzecznej o wielkości  $P$ , także dość znaczny moment zginający, którego ramię jest tem większe, im szersze są (stemple) tłoki przenoszące nacisk  $P$ . Ten moment ma niewątpliwie największą wartość w przekroju środkowym  $CC'$ , co zdradza się przy doświadczeniach pęknięciem w punkcie  $C'$ , powstającym jeszcze przed pęknięciami w punktach  $A, A', B$  i  $B'$ .

Te ostatnie zaś wskazują bynajmniej nie na kierunek naprężeń stycznych, jak to zwykle przyjmują, ale na kierunek zbyt wielkich ciśnień albo kierunek prostopadły do miejscowych niebezpiecznych ciągnięć. Iloraz z krańcowej wartości  $P_w$  siły  $P$  przez przekrój  $F'$  będzie przeto zależny od stosunku szerokości tłoków (stempli) do wysokości belki, co też stwierdzono doświadczeniem. Wartość tego ilorazu  $\left(\frac{P_w}{F'}\right)$  wyrażoną w  $kg/cm^2$  nazywają mimo to

w praktyce wytrzymałością na ścinanie materiału belki. Ponieważ ona nie ma oczywiście nic (a przynajmniej bardzo niewiele) wspólnego z wytrzymałością materiału przy prostym ścinaniu (czyli przy czystym odkształceniu postaciowym), przeto dla odróżnienia będziemy ją nazywać technologiczną wytrzymałością na ścinanie. Nic tedy dziwnego, że obliczając w praktyce sworznie (fig. 139), nity itp. elementy, narażone przeważnie na ścinanie, na podstawie równania:

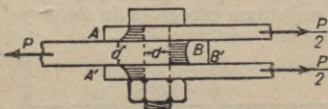


Fig. 139.

$$\frac{P(\text{obciążenie przekroju})}{F'(\text{pole przekroju})} = k'_s(\text{naprężenie ścinające})$$

nie jesteśmy bynajmniej obowiązani przyjmować (dla plastycznych metali

$k'_s = k_s = \frac{1}{2} k_r$ , lub  $= 0,58 k_r$ , (jak tego żądają hipotezy wytrzymałościowe),

lecz wartość  $k'_s$  obieramy na podstawie praktycznych doświadczeń równą  $0,7 k_r$  do  $0,8 k_r$ .

Z tychże samych powyżej rozważanych powodów nie wystarcza połączeń sworzniowych, nitowych itp. obliczać tylko ze względu na technologiczną wytrzymałość na ścinanie w płaszczyznach przylegania łączonych części, lecz zupełnie słusznie domaga się praktyka od dawna, aby średnie ciśnienie na ściankę otworu (wywierane przez trzon sworznia, nitu itp.)  $\sigma_d$  nie przekraczało oznaczonej wartości  $k_d$  pozostającej w stałym stosunku do  $k_r$  lub  $k'_s$ .

Dla konstrukcyj żelaznych przyjmują  $k_d = 1,5 k_r$  do  $2 k_r$ , albo  $k_d = 2 k'_s$  do  $3 k'_s$ .

**32. Pręty proste narażone na skręcanie.** a) Przekrój okrągły. Teoria małych odkształceń sprężystych i odpowiadających im naprężeń w prętach narażonych na moment skręcający  $M_s$  da się wyprowadzić drogą elementarną tylko w przypadku kołowej symetrii przekroju, a więc dla prze-

kroju pierścieniowego i jego szczególnego przypadku przekroju kołowego. Wtedy bowiem można przyjąć, że kolejne płaskie przekroje poprzeczne pręta (fig. 140) nie ulegają wskutek skrećenia żadnemu odkształceni, a tylko obracają się względem siebie o kąt  $\varphi$  proporcjonalny względem ich wzajemnej odległości.

Ustaliwszy w myśli np. lewy przekrój i obróciwszy prawy (odległy od niego o  $dx$ ) o kąt  $d\varphi$ , znajdujemy, że punkt tego przekroju, odpowiadający promieniowi  $\rho$ , przesuwa się w kierunku prostopadłym do tego promienia o długość  $\rho d\varphi$ . Ta wielkość jest zarazem posunięciem ściany elementu  $dF$  przekroju prawego względem takiegoż elementu przekroju lewego przy niezmięionej wzajemnej odległości  $dx$ . Oznaczywszy przez  $\gamma$  (bardzo mały) kąt odpowiadającego prostego odkształcenia postaciowego, mamy tedy:

$$\rho d\varphi = \gamma dx, \text{ czyli } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} = \text{stałej } (C)$$

dla wszystkich punktów przekroju.

Tak w przekrojach poprzecznych, jak i w przekrojach osiowych panują przeto naprężenia styczne  $\tau = \gamma \cdot G = \rho C \cdot G$  proporcjonalne względem promienia  $\rho$  (odległości od środka przekroju) i prostopadłe do tego promienia. Największe  $\tau$  występuje na zewnętrznym konturze o promieniu  $r$ . A zatem:

$$\tau_{\max} : r = \tau : \rho = C \cdot G.$$

Z warunku równowagi sił wewnętrznych  $\tau \cdot dF$  z zewnętrznymi, tworzącymi moment  $M_s$ , wynika:

$$\int_{(F)} \tau \rho dF = C \cdot G \int_{(F)} \rho^2 dF = M_s = C \cdot G \cdot J_p,$$

jeżeli  $J_p = \frac{r^4 \pi}{2} - \frac{r_0^4 \pi}{2}$  oznacza biegunowy moment bezwładności przekroju o wewnętrznym promieniu  $r_0$ .

Stąd:

$$C = \frac{M_s}{G \cdot J_p},$$

a zatem:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_s}{G \cdot J_p}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_s}{J_p} \cdot r = \frac{M_s}{W_s}.$$

Z powyższych wzorów czytamy:

1. Kąt skrećenia na jednostkę długości pręta równa się ilorazowi momentu skręcającego przez „sztywność skrećenia“, która dla przekroju okrągłego  $= G \cdot J_p$ .

2. Największe naprężenie styczne występuje w elementach, leżących na zewnętrznej poboczniczy pręta walcowego (wydrążonego lub pełnego) i równa się ilorazowi momentu skręcającego przez odpowiadający „moduł przekroju“ (moment oporu), który dla przekroju okrągłego  $= \frac{J_p}{r}$  (bieg. moment bezwład.)

Te wyniki potwierdza ogólna teoria sprężystości pod warunkiem, że siły zewnętrzne równoważne parze skręcającej są na każdym z przekrojów końcowych rozłożone według tego samego prawa, co w przekrojach pośrednich. Wszelako odmienny rozkład sił zewnętrznych ma według zasady de Saint-

Venant'a uwagi godny wpływ, tylko w bezpośredniej bliskości; w dalszych zaś przekrojach zbliża się rozmieszczenie naprężeń i odkształceń do powyższego prostego obrazu, zgodnie z wynikami licznych doświadczeń.

Jak wyżej zaznaczono, mamy przy skręcaniu do czynienia z prostym ścinaniem w najczystszej postaci i dlatego tylko doświadczenia ze skręcaniem okrągłych prętów mogą posłużyć do wyznaczenia wytrzymałości materiału na proste ścinanie.

Geometrycznym obrazem rozmieszczenia naprężeń w przekroju skręcanym są t. zw. linie naprężeń stycznych. Kierunek naprężenia w dowolnym punkcie przekroju  $P$  wskazuje styczna w tym punkcie do linii naprężeń poprowadzonej przez ten punkt. W przypadku przekroju okrągłego są linie naprężeń oczywiście kołami współśrodkowymi. Kreśląc bardzo wiele linii naprężeń, możemy ich gęstością przedstawić wielkość naprężenia.

**b) Przekroje nieokrągłe.** Dla przekrojów nieokrągłych są linie naprężeń krzywami zamkniętymi (nigdzie się nawzajem nie przecinającymi), których kształt przechodzi od wewnątrz w sposób ciągły w kontur przekroju. To wypływa z rozwiązań teorii sprężystości i własności stanu napięcia na swobodnej powierzchni ciała (ust. 2.). W szczególności są naprężenia we wszystkich wypukłych wierzchołkach przekroju wielobocznego równe 0, a w wierzchołkach wklęsłych osiągają z reguły największe wartości. Dlatego nawet w przybliżeniu nie może być mowy o proporcjonalności  $\tau$  względem odległości elementu od środka przekroju. Przyjmując zatem dla wygody tę samą postać wzorów dla  $\varphi'$  i  $\tau_{\max}$ , co w przypadku przekroju okrągłego, musimy zastosować inne wyrażenia dla sztywności skręcenia  $\Gamma$  i dla modułu przekroju  $W_s$ . Na-

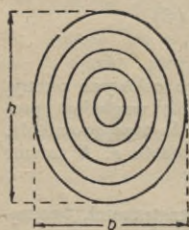


Fig. 141.

leży przytem starannie odróżniać przekroje pełne (o polach jednospójnych) od przekrojów wydrążonych (o polach wielospójnych), które znowu mogą być dwu-, trzy-,  $n$ -spójne. Z tych ostatnich mają praktyczne znaczenie przede wszystkim przekroje dwuspójne, czyli rurowe.

1. Przekroje pełne. Proste ścisłe rozwiązanie dla przekroju eliptycznego znalazł de Saint-Venant (1878): Linie naprężeń są elipsami homotetycznymi z konturem (fig. 141), zaś  $\tau_{\max}$  powstaje na końcach osi małej (szerokości)  $b$ , przyczem:

$$\varphi' = \frac{M_s}{\Gamma}, \quad \Gamma = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2} \cdot G = \frac{F^4 \cdot G}{4 \pi^2 J_p}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_s}, \quad W_s = \frac{\pi}{16} \cdot b^2 h.$$

Wzór dla  $\varphi'$  podają często w postaci:

$$\varphi' = \Psi \cdot \frac{J_p}{F^4 \cdot G} M_s,$$

ważnej dla wszelkich przekrojów pełnych przy stosownej wartości współczynnika liczbowego  $\Psi$ , która wynosi:

dla koła i elipsy . . . . .	$\Psi = 39,5 = 4 \pi^2$
" prostokąta, jeżeli $b:h = 1:1$ . . . . .	$\Psi = 42,68$
" " " $b:h = 1:2$ . . . . .	$\Psi = 42,0$
" " " $b:h = 1:4$ . . . . .	$\Psi = 40,2$
" " " $b:h = 1:8$ . . . . .	$\Psi = 38,5$
" trójkąta równobocznego . . . . .	$\Psi = 45$

Do niedawna zalecano jako przybliżoną wspólną wartość  $\Psi$  dla wszelkich przekrojów pełnych  $\Psi = 40$ , jednakże już wartość dla trójkąta równobocznego przekracza ją o 12,5%. Jeszcze większe zboczenia zachodzą u smukłych przekrojów (kształtowniki  $\text{+} \overline{\text{I}} \overline{\text{I}} \overline{\text{I}}$ ), które nadto nastrojąca wielkie trudności ścisłemu obliczeniu. Wystarczającą nieraz dla praktyki dokładność daje dla takich przekrojów przybliżony wzór A. Foepl'a:

$$\varphi' = \frac{M_s}{\frac{1}{3} G \sum_i h_i \delta_i^3},$$

o ile można je rozłożyć na wąskie prostokąty o długościach  $h_i$  i szerokościach  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). W szczególności dla prostokątnego przekroju cienkiej a bardzo szerokiej wstęgi jest sztywność skręcania

$$\Gamma = \frac{1}{3} b^3 h. G$$

(z błędem przez niedobór mniejszym od 7% przy  $b:h = 0,1$  i zdążającym do 0 wraz z wartością  $b:h$ ). W przekroju prostokątnym powstaje  $\tau_{\max}$  w środkach dłuższych boków ( $h > b$ ) i określa je wzór przybliżony, wystarczający dla praktyki:

$$\tau_{\max} = (1,8 b + 3 h) \frac{M_s}{b^2 h^2}, \text{ a zatem } W_s = \frac{b^2 h^2}{1,8 b + 3 h}.$$

W przekrojach, dających się rozłożyć na wąskie prostokąty (jak wyżej), jest w przybliżeniu:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\frac{1}{3} \sum_i h_i \delta_i^3} \cdot \delta_{\max},$$

przyczem  $\delta_{\max}$  oznacza szerokość najgrubszej prostokątnej części przekroju, a miejscem  $\tau_{\max}$  jest środek długiego boku tej części. Jest to ważne pod warunkiem (z reguły w praktyce spełnionym), że wklęsłe kąty przekroju są stosownie zaokrąglone.

Uwaga. Wszystkie przekroje niekołowe zakrzywiają się wskutek skręcania, przyczem pewne ich części wyginają się nieco w jedną, inne zaś w drugą stronę; są jednak przypadki wyjątkowe, w których zakrzywienie przekroju jest utrudnione, albo nawet uniemożliwione warunkami statycznymi. Tak się rzecz ma np. gdy na przekrój środkowy pręta działa moment skręcający  $2M$  zrównoważony dwoma momentami o wielkości  $M$  działającymi na przekroje końcowe. Z powodu symetrii musi przekrój środkowy pozostać płaskim. Znaczne zaś utrudnienie zakrzywienia przekroju zachodzi w przypadku, gdy stosunkowo krótki pręt (nieokrągły) o małej sztywności dokładnie utwierdzony w końcowych przekrojach prętów o sztywności bardzo wielkiej. W tych przekrojach powstanie niewątpliwie rozkład naprężeń ścinających  $\tau$  tem bardziej różny od zwykłego, im mniejsza jest długość pręta wobec rozmiarów przekroju. Skoro ta długość zdąży do zera, to prawo rozkładu naprężeń  $\tau$  będzie się nawet zbliżać do prawa, które daje teoria prętów okrągłych (t. zn. proporcjonalność  $\tau$  do promienia  $\varphi$ , mierzzonego od środka przekroju). Nakońc w obu przypadkach okaże się sztywność skręcania większą, aniżeli w normalnych warunkach.

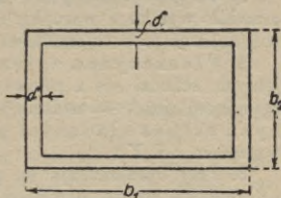


Fig. 142.

2. Przekroje rurowe. W przekroju prostokątnym o ścianach jednakowej grubości  $\delta$ , a średniej szerokości  $b_1$  i  $b_2$  (fig. 142) panuje  $\tau_{\max}$  na obwodzie zewnętrznym i ma wartość:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_s}, \text{ przy czym } W_s = \frac{2 b_1 \cdot b_2 \delta}{1 + \frac{b_1^2 + b_2^2 - 2 \delta^2}{b_1 b_2 - \delta^2} \cdot \frac{\delta}{b_1 + b_2}},$$

zaś kąt skręcenia na jednostkę długości:

$$\varphi' = \frac{M_s}{G \cdot J_{\text{red}}}, \text{ przy czym } J_{\text{red}} = \frac{b_1 \cdot b_2 \delta (b_1 + b_2 - 2 \delta)}{1 + \frac{(b_1 - b_2)^2}{2 (b_1 - \delta) \cdot (b_2 - \delta)}}.$$

Obydwa wzory są przybliżone (ze stanowiska teorii sprężystości) i tem dokładniejsze, im mniejsze jest  $\delta$  wobec  $b_1$  i  $b_2$ .

### IV. Zginanie.

#### A. Naprężenia w prętach prostych narażonych na zginanie.

33. Naprężenia przy czystym zginaniu w płaszczyźnie obciążenia. Odróżnia się czyste zgięcie (bez sił poprzecznych) od zgięcia ogólnego, albo złożonego (z udziałem sił poprzecznych). Przy czystym zgięciu powstają tylko naprężenia normalne  $\sigma$  podłużnych włókien elementarnych pręta, które muszą być w jednej części przekroju ciągnięciami, a w drugiej ciśnieniami, aby siły wewnętrzne równoważyły parę zginającą. Obliczamy je z warunków równowagi przy pomocy dodatkowej „hipotezy płaskich przekrojów“. Z tej hipotezy wynika bezpośrednio, że wydłużenia właściwe  $\epsilon$  włókien są proporcjonalne względem odległości  $\eta$  od warstwy obojętnej (fig. 143). O ile więc materiał pręta podlega prawu Hooke'a, to i naprężenia  $\sigma$  będą proporcjonalne względem  $\eta$ . Wówczas jest

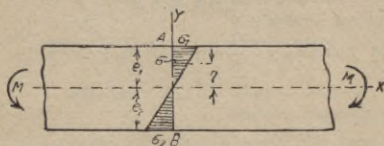


Fig. 143.

jeżeli  $e_1, e_2$  oznaczają odległości włókien skrajnych od warstwy obojętnej albo od osi obojętnej (w której warstwa obojętnej przecina przekrój).

$$\frac{\sigma}{\eta} = \frac{\sigma_1}{e_1} = \frac{\sigma_2}{e_2} = \text{stałej},$$

Niechaj płaszczyzna rysunku będzie płaszczyzną  $XY$  pary zginającej o momencie  $M$ . Z warunków równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych wypływa teraz:

1. Oś obojętna przechodzi przez środek pola przekroju. To prawidło wynika z warunku rzutów na oś  $X$  i jest oczywiście ważne tylko w granicach proporcjonalności:

2. Płaszczyzna zginania, tj. płaszczyzna prostopadła do osi obojętnej schodzi się z płaszczyzną obciążenia (tj. płaszczyzną pary zginającej), jeżeli ta ostatnia jest płaszczyzną jednej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju. (Wynika to z warunku momentów względem osi  $Y$ .)

3. Przy upraszczającym założeniu, że płaszczyzna pary zginającej jest prostopadła do osi obojętnej jako osi głównego momentu bezwładności  $J$  daje warunek momentów względem osi  $Z$  (osi obojętnej):

$$\frac{\sigma}{\eta} = \frac{M}{J} = \frac{\sigma_1}{e_1} = \frac{\sigma_2}{e_2}.$$

Stąd wynika bezpośrednio podstawowy dla obliczeń wytrzymałości przy zginaniu wzór na naprężenie „skrajne“ (tj. we włóknie skrajnym):

$$\sigma_{\text{skr}} = \frac{M}{W} \dots \dots \dots (A)$$

przyczem za  $W$ , tj. moduł przekroju (dla zginania) [zwany także niefortunnie momentem wytrzymałości lub oporu] wstawiamy:

$$W_1 = \frac{J}{e_1} \quad \text{albo} \quad W_2 = \frac{J}{e_2},$$

zależnie od tego, które z naprężeń skrajnych (czy ciągnienie, czy też ciśnienie) decyduje o wytrzymałości. Prawidło wyrażone wzorem (A) obowiązuje również tylko w granicach proporcjonalności.

**34. Naprężenia przy zginaniu ukośnem.** Zgięcie nazywamy ukośnem, jeżeli płaszczyzna obciążenia nie jest prostopadła do jednej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju. Wtedy przy założeniach poprzednich jest:

Kierunek płaszczyzny pary zginającej sprzężony z kierunkiem odpowiadającej osi obojętnej ze względu na centralną elipsę bezwładności przekroju.

Naprężenia najłatwiej obliczyć rozłożywszy siły pary zginającej na składowe w kierunkach  $Y$  i  $Z$  głównych osi bezwładności przekroju. (Fig. 144). Jeżeli płaszczyzna obciążenia odchyła się od płaszczyzny  $XY$  o kąt  $\alpha$ , to  $F \cdot \cos \alpha$  i  $F \cdot \sin \alpha$  będą odpowiednio składowymi sił  $P$  w kierunku  $Y$  i  $Z$ . Ten rozkład pociąga za sobą rozkład momentu zginającego na  $M \cdot \cos \alpha$  i  $M \cdot \sin \alpha$ . Każdy z nich z osobna wytwarza proste zgięcie; pierwszy wytwarza naprężenia normalne:

$$\sigma' = \frac{M \cdot \cos \alpha}{J_1} \cdot \eta, \quad \text{drugi zaś} \quad \sigma'' = \frac{M \cdot \sin \alpha}{J_2} \cdot \zeta.$$

W granicach proporcjonalności będzie według zasady superpozycji naprężeniem wypadkowym:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = M \left( \frac{\eta \cdot \cos \alpha}{J_1} + \frac{\zeta \cdot \sin \alpha}{J_2} \right).$$

Ażeby znaleźć  $\sigma_{\text{skr}}$ , trzeba wyszukać na konturze przekroju takie punkty ( $\eta, \zeta$ ), dla których wyrażenie w nawiasie przybiera skrajną wartość dodatnią lub ujemną.

W przypadku przekroju prostokątnego (drewniana płatek dachowa) jest takim punktem wierzchołek  $A$  (fig. 31), a odp. naprężenie określa wzór:

$$\sigma_{\text{skr}} = \frac{M \cos \alpha}{12} \cdot \frac{h}{b^3} \cdot \frac{h}{2} + \frac{M \sin \alpha}{12} \cdot \frac{b}{b^3 h} \cdot \frac{b}{2} = \frac{6M}{b^2 h^2} (b \cos \alpha + h \sin \alpha) = \frac{6Mc}{b^2 h^2},$$

przyczem  $c = b \cos \alpha + h \sin \alpha$  jest szerokością rzutu przekroju na płaszczyznę prostopadłą do kierunku obciążenia.

**35. Naprężenia styczne przy ogólnem zgięciu w płaszczyźnie obciążenia.** Przyjawszy, że siła poprzeczna  $T$  nie wpływa na rozkład naprężeń normalnych (i pomijawszy wpływ nieuniknionych naprężeń poprzecznych<sup>1</sup>) możemy z warunków równowagi warstwy elementarnej o gru-

<sup>1</sup> W rzeczywistości może siła poprzeczna mieć wpływ na rozmieszczenie naprężeń normalnych, atoli ten wpływ jest godnym uwagi tylko w okolicy przekroju bezpośrednio obciążonego siłą nie o wiele mniejszą od  $T$ . Wówczas, jak poucza ścisła teoria i doświadczenie, różni się prawo rozkładu nawet bardzo znacznie od przedstawionego wzorem (B). Wobec tego muszą w tych warunkach wystąpić także zbroczenia od linowego rozkładu naprężeń normalnych.

Iloczyn  $\tau_{\text{gr}} \cdot v = T'$  przedstawia t. zw. siłę ścinającą w warstwie  $AB$ , odniesioną do jednostki długości pręta. Tą siłą działają na siebie wzajemnie podłużne warstwy zginanego pręta.

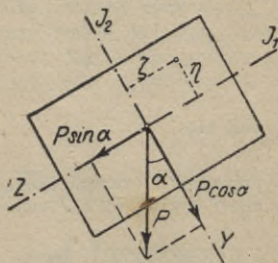


Fig. 144.

bości  $dx$  (zakreskowanej na fig. 145) obliczyć dokładnie średnią wartość naprężeń stycznych  $\tau$  wzdłuż cięciwy  $AB = v$  przekroju, uwzględniając związek  $\frac{dM}{dx} = T$ .

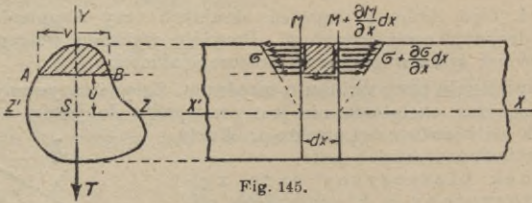


Fig. 145.

Jest nią :

$$\tau_{sr} = \frac{T \cdot S}{J \cdot v} \dots \dots \dots (B)$$

przyczem  $S$  oznacza moment statyczny zakreskowanej części przekroju (odciętej cięciwą  $v$ ), a  $J$  moment bezwładności całego przekroju względem osi obojętnej  $ZZ'$  (odpowiadającej płaszczyźnie pary zginającej  $YY'$ ).

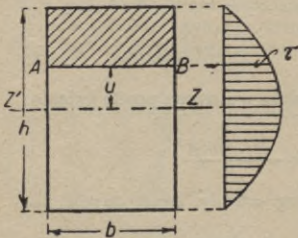


Fig. 146.

Z wzoru:  $T'' = \frac{T}{J} \cdot S$

czytamy, że siła ścinająca ma największą wartość w osi obojętnej i maleje w miarę odległości od tej osi aż do zera w warstwach skrajnych.

O rozmieszczeniu naprężeń stycznych wzdłuż cięciwy  $AB$  nie możemy nic pewnego dowiedzieć się elementarną drogą dalszych prostych hipotez, stosowanych dawniej powszechnie w literaturze technicznej. Wyjątek stanowi przekrój prostokątny i do pewnego stopnia przekroje złożone z prostokątów jak np. przekroje  $\Gamma$   $\Gamma$  itp. belek walcowanych lub nitowanych.

a) Przekrój prostokątny. Wzdłuż odcinka  $AB$  równoległego do osi obojętnej  $ZZ'$  (fig. 146) jest  $\tau$  stałe i równe:

$$\tau = \tau_{sr} = \frac{T}{2J} \left( \frac{h^2}{4} - u^2 \right) = \frac{6 T}{b h^3} \left( \frac{h^2}{4} - u^2 \right) \dots \dots (a_1)$$

Rozkład  $\tau$  na wysokości przekroju jest zatem paraboliczny z największością w osi obojętnej, tj. dla  $u = 0$ :

$$\tau_{maz} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{F}$$

$\left( \frac{T}{F} \right)$  jest oczywiście średnią wartością  $\tau$  w całym przekroju.)

b) Przekrój  $\Gamma$ . Z wyjątkiem miejsc osobliwych, gdzie ścianka łączy się ze stopką, można również ze znaczną dokładnością przyjąć w przekrojach równoległych do osi obojętnej  $\tau$  stałe i równe  $\tau_{sr}$  (fig. 147 a.) A zatem w stopkach obowiązuje wzór  $(a_1)$ , w ściance zaś wzór

$$\tau = \frac{T}{J \cdot \delta} \left[ \frac{b h^2}{8} - \frac{b h_1^2}{8} \left( 1 - \frac{\delta}{b} \right) - \delta \frac{u^2}{2} \right],$$



z którego dla  $u = 0$  wypada:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot b \cdot h^2}{8 J \cdot \delta} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{h_1}{h} \right)^2 \left( 1 - \frac{\delta}{b} \right) \right],$$

zaś dla  $u = \frac{h}{2}$ , tj. w miejscach połączenia ścianki ze stopkami:

$$\tau_1 = \frac{T \cdot b \cdot h^2}{8 J \cdot \delta} \left[ 1 - \left( \frac{h_1}{h} \right)^2 \right].$$

Dla całkiem cienkich ścianek, jakie się stosuje w praktyce, różni się  $\tau_{\max}$  niewiele od  $\tau_1$ , a w stopkach są naprężenia  $\tau$  bardzo małe. W obliczeniach orientacyjnych można wówczas przyjąć przybliżeniu, że cała siła poprzeczna przenosi się na ściankę o polu  $F_1$  i warunek wytrzymałości napisać w postaci,

$$\frac{T}{F_1} = \tau \leq k_s.$$

W stopkach należy szukać największych naprężeń stycznych raczej w przekrojach prostopadłych do osi obojętnej ( $AA'$  na fig. 147 b). Dla tych

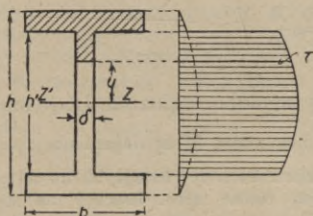


Fig. 147 a.

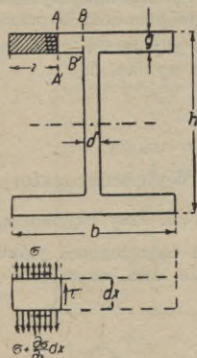


Fig. 147 b.

naprężeń  $\tau'$  otrzymujemy z warunków równowagi elementu wyciętego z warstwy o grubości  $dx$ , podobnie jak powyżej:

$$\tau = \frac{T \cdot S'}{J \cdot g},$$

jeżeli  $S'$  oznacza moment statyczny zakreskowanej części pola przekroju względem osi obojętnej, a  $g$  grubość stopki w rozpatrywanym miejscu. W zwykłym przypadku stałej grubości  $g$  jest

$$S' = z \cdot g \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{g}{2} \right),$$

a zatem:

$$\tau' = \frac{T}{J} \cdot \frac{h - g}{2} \cdot z,$$

czyli  $\tau'$  rośnie proporcjonalnie względem odległości od krawędzi stopki osiągając największą wartość w przekroju  $BB'$ , gdzie stopka przechodzi w ściankę

$$\text{a } z = \frac{b}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

c) Przekrój okrągły pełny. (Fig. 148.) Ponieważ w punktach  $A$  i  $B$  musi całkowite naprężenie styczne mieć kierunek stycznej do konturu, przeto kierunki naprężeń w punktach  $A$ ,  $B$  i  $C$  przecinają się w  $D$ . Dlatego przyjmują w przybliżonym rachunku 1., że przez tenże punkt  $D$  przechodzą kierunki wszystkich  $\tau$  wzdłuż  $AB$ . Nadto przyjmują 2., że końce odcińków) przedstawiających całkowite naprężenia  $\tau$  wzdłuż  $AB$ , leżą na prostej równoległej do  $AB$ .

Jakkolwiek z tych założeń, zwłaszcza drugie znacznie odbiega od rzeczywistości, jak to wykazuje dokładniejsze rozwiązanie<sup>1)</sup>, to jednak główny wynik, tj. obliczenie  $\tau$  w warstwie obojętnej jest wystarczająco dokładny. Wypada bowiem:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T}{F} = 1,33 \frac{T}{F},$$

podczas gdy rozwiązanie ścisłe daje (w środku koła):

$$\tau_{\max} = \frac{3m+2}{2(m+1)} \cdot \frac{T}{F} = 1,4 \frac{T}{F} \text{ do } 1,33 \frac{T}{F}.$$

d) Przekrój kwadratowy obciążony w kierunku przekątnej. (Fig. 149.) Założenia przybliżonego obliczenia  $\tau$  są tutaj zupełnie niedopuszczalne, albowiem prowadzą w warstwie obojętnej do  $\tau_{\max}$  w wierzchołkach  $A$  i  $B$ , podczas gdy tamże musi być  $\tau = 0$ . Z dokładniejszego rozwiązania dra Z. Fuchs'a wynika, że

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{F}$$

panuje w środku.

36. Wyteżenie materiału przy ogólnym zginaniu. Linje naprężeń głównych. Przy czystym zginaniu momentem  $M$  są naprężenia  $\sigma = \frac{M}{J} \eta$  zarazem naprężeniami głównymi o kierunkach równoległych do osi pręta  $X$ . Pozostałe dwa naprężenia główne są równe zeru. Inaczej ma się rzecz

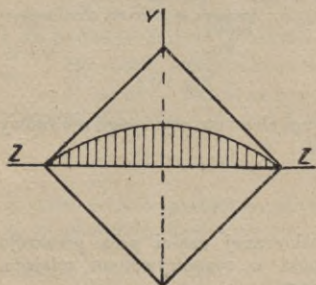


Fig. 149.

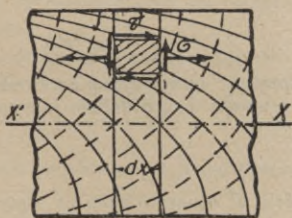


Fig. 150.

w przypadku ogólnego zgięcia, tj. przy współdziałaniu siły poprzecznej  $T$ , albowiem wtedy są naprężenia normalne  $\sigma$  (uwarunkowane momentem  $M$ ) tylko w warstwach skrajnych naprężeniami głównymi. Wydzieliwszy w innych warstwach element prostokątny przekrojami poprzecznymi i podłużnymi (fig. 150) mamy widocznie do czynienia przynajmniej z dwuwymiarowym stanem napięcia określonym naprężeniami normalnymi  $\sigma_x = \sigma$ .

<sup>1)</sup> Dr. Z. Fuchs. Zur Berechnung der Schubspannungen in gebogenen Stäben. Zeitschrift d. Ver. d. Ing. r. 1914, str. 1330.

$\sigma_y = 0$  i stycznymi  $\tau$ , wywołanemi siłą poprzeczną  $T$ . Wtedy kierunki i wielkości naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$  znajdujemy najprościej zapomocą koła naprężeń (fig. 121). Przytem jest

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}.$$

A zatem największa różnica naprężeń głównych (jako miara wyciężenia materiału dla plastycznych metali):

$$\sigma_{red} = \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \dots \dots \dots (C)$$

To równanie ma zastosowanie przy obliczeniu belek walcowanych i nitowanych w przekrojach narażonych jednocześnie na wielki moment i wielką siłę poprzeczną. (Nie można go stosować do belek z żeliwa, kamienia, drewna itp.) W takich belkach o przekroju  $\Gamma$  może  $\sigma_{red}$  osiągnąć największą wartość w miejscach połączenia ścianki ze stopką. Zaprojektowawszy zatem przekrój tak, aby  $\sigma_{max}$  we włóknach skrajnych i  $\tau_{max}$  we warstwie obojętnej nie przekroczyły wartości bezpiecznych, sprawdzamy dodatkowo, czy  $\sigma_{red}$  w wymienionem niebezpiecznem miejscu czyni zadość warunkowi wytrzymałości  $\sigma_{red} \leq \sigma_{bezp} = k_r$ .

Znajdując w płaszczyźnie obciążenia, przechodzącej przez oś pręta i główną oś bezwładności przekroju, kierunki naprężeń głównych dla wielu punktów różnych przekrojów, łatwo nakreślić linje naprężeń głównych (fig. 150).

Każda z tych linii przecina warstwę obojętną pod kątem  $45^\circ$  i trafia warstwę skrajną (o ile nie napotyka przekroju końcowego) normalnie z jednej strony, a styczniwie z drugiej.

**37. Wytrzymałość na zginanie. Moment niebezpieczny („łamiący“).** O pewności pręta, narażonego na czyste zgięcie, decyduje „moment łamiący“, albo ogólniej moment niebezpieczny, tj. ta wartość momentu zgięcia, przy której pojawiają się niedopuszczalne odkształcenia trwałe (ugięcie) lub pęknięcie. Ta wartość nie da się obliczyć z wzoru (A) po podstawieniu za  $\sigma$  wartości  $\sigma_{nieb} = \sigma_f$  lub  $K_r$ , jako

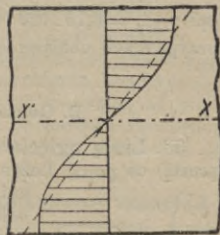


Fig. 151.

$$M = W \cdot \sigma_{nieb}$$

W rzeczywistości jest bowiem najczęściej  $M_{nieb} > W \sigma_{nieb}$  albo, co na jedno wychodzi,  $\sigma$  obliczone z wzoru (A) po podstawieniu wartości  $M = M_{nieb}$ , znalezionej doświadczalnie, jest zawsze większe od  $\sigma_{nieb}$ , otrzymanego z doświadczeń nad rozciąganiem lub ściskaniem. Główną przyczyną tego jest fakt, że po przekroczeniu granicy proporcjonalności we warstwie skrajnej, a jeszcze więcej po przekroczeniu granicy plastyczności, przestają prawie wzrastać naprężenia w tej warstwie, a zato warstwy pod nią leżące biorą na siebie coraz większą część odporu siłom zewnętrznym. Wykres naprężeń przybiera postać przedstawioną na fig. 151, zamiast zakreskowanej, odpowiadającej wzorowi (A).

Druga przyczyna, wybijająca się na pierwszy plan u materiałów kruchych (jak szkło) i podlegających aż do pęknięcia prawu Hooke'a, tkwi w tem, że sama wartość naprężenia nie decyduje jeszcze o wyciężeniu materiału przy nierównomiernym rozkładzie naprężeń w przekroju, nawet w tym prostym przypadku linjowego stanu napięcia. Wskutek tego w rzeczywistości:

$$M_{nieb} = \alpha W \cdot \sigma_{nieb} \dots \dots \dots (A')$$

przyczem  $\alpha$  zwykle  $> 1$  jest liczbowym współczynnikiem doświadczalnym,

zależnym niestety, także od postaci przekroju. W przypadku przekroju prostokątnego zaleca np. Geusen dla żeliwa, granitu, wapienia  $\alpha \approx 2$  dla betonu 2,2, dla piaskowca 3. Jednakże Bach znajduje w tymże przypadku dla żeliwa  $\alpha = 1,75$  (bez względu na stosunek  $b:h$ ). Dla szkła w postaci płyt (szyb) jest  $\alpha$  zależne od grubości (co dowodzi wpływu drugiej przyczyny) i rośnie, gdy grubość maleje. Dla żelaza spawanego i zlewnego w postaci kształtowników  $\text{I}$   $\text{L}$  itd., znaleziono  $\alpha = 1$ , zaś w postaci belek nitowanych  $\alpha = 0,9$  do  $0,8$ . Podobnie jest dla belek drewnianych według Tetmajera  $\alpha = 0,7$  do  $0,75$ , a więc znowu  $\alpha < 1$ , jednakże z innego powodu. U belek żelaznych nitowanych jest powodem zejścia wartości  $\alpha$  poniżej 1 mała sztywność ścianki, wywołująca wraz z naprężeniami drugorzędni miejscowe objawy niestateczności (wyboczenia). Natomiast u belek drewnianych jest właściwie  $\alpha > 1$ , jeżeli odniesiemy równanie ( $A'$ ) do  $\sigma_{\text{nieb}}$  jako ciśnienia. Podana powyżej wartość  $\alpha$  odnosi się do  $\sigma_{\text{nieb}}$  jako ciągnięcia, albowiem tak oblicza się  $\alpha$  dla innych materiałów, które mają  $k_r \leq k_r$ , podczas gdy dla drewna jest  $k_r > k_c$ .

Ponieważ przy obliczeniach wytrzymałości posługujemy się zawsze równaniem ( $A$ ), przeto wartość  $\alpha$  daje wskazówkę do obioru wartości  $\sigma_{\text{bezp}}$  przy zginaniu, a mianowicie należy przyjąć:

$$\sigma_{\text{bezp}} = \alpha \cdot k_r.$$

Skoro np. dla drewna jest  $k_r = 120 \text{ kg/cm}^2$ , to przy zginaniu trzeba przyjąć  $\sigma_{\text{bezp}} = 0,75 \cdot 120 = 90 \text{ kg/cm}^2$ , aby osiągnąć tę samą pewność w obu przypadkach obciążenia.

## B. Odkształcenia belek prostych przy zginaniu.

38. Linją ugięcia nazywamy zakrzywioną wskutek zgięcia (pierwotnie prosta) oś pręta. Leżąc w warstwie obojętnej, nie doznaje ta oś wydłużenia ani skrócenia. Dwa sąsiednie przekroje o wzajemnej odległości  $dx$  (fig. 152) przed zgięciem wyznaczają

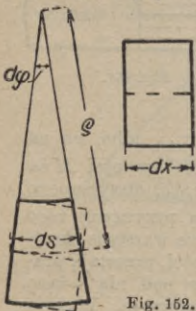


Fig. 152.

przeto na linii ugięcia element łuku  $ds = dx$ , a na innych włóknach odległych o  $\eta$  od osi obojętnej wyznaczają długości  $ds + \Delta ds$ , przyczem  $\Delta ds = \varepsilon ds = \frac{\sigma}{E} ds = \frac{M}{EJ} \eta ds$ . Ponieważ  $\Delta ds = \eta d\varphi$ , jeżeli  $d\varphi$  oznacza kąt nachylenia obu przekrojów, przeto:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{\rho} \dots \dots \dots (D)$$

przyczem  $\rho$  oznacza promień krzywizny linii ugięcia.

Przy prostym zgięciu jest  $M$  stałe, a więc i  $\rho$  stałe, czyli linja ugięcia jest łukiem koła.

Skoro  $M$  zmienia się od przekroju do przekroju, to i krzywizna  $\frac{1}{\rho}$  jest zmienna. Odnosząc linję ugięcia do pierwotnej osi pręta jako osi  $X$  i do osi  $Y$ , leżącej w płaszczyźnie zgięcia, mamy:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EJ} \dots \dots \dots (D')$$

Wyraziwszy  $M$  jako funkcję współrzędnych  $(x, y)$  dowolnego punktu linii ugięcia, należy powyższe równanie różniczkowe zcałkować, aby otrzymać skończone analityczne równanie linii ugięcia.

W przeważającej liczbie przypadków praktyki  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  jest znikomo małe wobec 1 i z wystarczającą dokładnością zastępujemy powyższe równanie bez porównania prostszem przybliżeniem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \dots \dots \dots (E)$$

Dwie stałe całkowania dadzą się wyznaczyć z warunków podporowych. Te warunki mogą też posłużyć do wyznaczenia reakcyj, momentów utwierdzenia — wogóle wielkości statycznie niewyznaczalnych.

Jeżeli sztywność zginania  $EJ$  pręta zmienia się łagodnie od przekroju do przekroju, to można z wystarczającym dla praktyki przybliżeniem zastosować również powyższe równanie linii ugięcia, uwzględniając zmienność  $EJ$ .

Ugięcia  $y$ , obliczone przez całkowanie równania (E), podlegają widocznie zasadzie superpozycji, jeżeli  $M$  jest funkcją samego  $x$ , o ile oczywiście nie przekroczono granicy proporcjonalności (por. załączoną tablicę).

Inaczej ma się rzecz 1. gdy  $M$  jest zależne także od  $y$ , albo 2. gdy wypada się uciec do dokładnego równania (D), albo wreszcie 3. gdy materiał pręta objawia znaczne zboczenia od prawa Hooke'a. Z pośród tych przypadków musimy w praktyce uwzględniać szczególnie często trzeci (belki betonowe), nierzadko pierwszy (giętkie belki, obciążone nie tylko siłami poprzecznymi, ale i podłużnymi), a tylko wyjątkowo drugi (sprężyny).

Przy stosowaniu równań (D') i (E) należy umowę co do znaku algebraicznego momentu  $M$  uzgodnić z ustaleniem wyrażenia analitycznego po przeciwnej stronie znaku równości. (Obrawszy np. pierwotną oś pręta, pomyślaną poziomo za oś  $X$  o kierunku dodatnim na prawo i skierowaną w dół dodatnią oś  $Y$ , musimy moment  $M$  w równaniu (E) uważać za dodatni, jeżeli wygina belkę wypukłością do góry.)

**39. Wykreślna konstrukcja linii ugięcia jako krzywej sznurowej.** Równanie różniczkowe krzywej sznurowej dla obciążenia siłami równoległymi do osi  $Y$  ma postać:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} \dots \dots \dots (F)$$

przyczem  $q$  (kg/cm) jest rzędną powierzchni obciążenia, a  $H$  (kg) „odległością biegunową“.

Z porównania tego równania z równaniem (E) wynika:

Linja ugięcia belki prostej o stałej sztywności zginania  $EJ$ , obciążonej siłami prostopadłymi do osi belki (leżąciami w płaszczyźnie zgięcia) jest krzywą sznurową dla odpowiadającej powierzchni momentów, uważanej za powierzchnię obciążenia przy odległości biegunowej równej sztywności  $EJ$  (o ile oczywiście są spełnione warunki podporowe).

Jeżeli sztywność zginania  $EJ$  jest zmienna na długości belki, to obrawszy pewną stałą jej wartość  $(EJ)_0$  i zredukowawszy rzędne powierzchni momentów w stosunku  $(EJ)_0 : EJ$  znajdujemy linię ugięcia jako krzywą sznurową zredukowanej powierzchni momentów, uważanej za powierzchnię fikcyjnego obciążenia przy odległości biegunowej  $(EJ)_0$ .

Ponieważ rzędne powierzchni momentów mają wymiar „siła  $\times$  długość“, przeto pole tej powierzchni ma wymiar siła  $\times$  (długość)<sup>2</sup>. Ten sam wymiar ma widocznie odległość biegunowa  $EJ$ , albo  $(EJ)_0$ . Ażeby rzędne linii ugięcia, jako bardzo małe wobec odciętych, nie zgubiły się w wykreślnej

konstrukcji opartej na powyższej zasadzie, zwiększa się ich podziałkę  $n$ -krotnie, zmniejszając  $n$ -krotnie odległość biegunową ( $\frac{EJ}{n}$  zamiast  $EJ$ ). Skoro np. skala długości rysunku jest  $1:n$ , a przy wykresie powierzchni momentów przyjęto odległość biegunową  $H kg$ , to rzędne powierzchni momentów mierzymy skalą:  $1 cm = n H kg/cm$ . Obrawszy przy kreśleniu linii ugięcia jako krzywej sznurowej odległość biegunową równą  $\frac{EJ}{n}$ , otrzymamy rzędne linii ugięcia w naturalnej wielkości. Samo wykreślenie krzywej sznurowej dla powierzchni momentów belki uważanej za powierzchnię obciążenia nie wystarcza jeszcze do znalezienia ugięć, albowiem ogólna całka równania ( $E$ ) czyli:

$$y = \int dz \int \frac{M}{EJ} dz + C_1 x + C_2$$

zawiera dwie stałe dowolne  $C_1$  i  $C_2$ . Ich wyznaczenie jest równoznaczne z wyznaczeniem linii zamykającej drugiej krzywej sznurowej z warunków podporowych. (Pierwsza krzywa sznurowa daje wykres momentów.) W przypadku podparcia obu końców są ugięcia tychże końców dane i zwykle równe 0. Linja zamykająca łączy tedy punkty przecięcia drugiej krzywej sznurowej z pionowemi podporowemi.

W przypadku doskonałego utwierdzenia tylko jednego końca przy drugim swobodnym jest linja zamykająca styczną do drugiej krzywej sznurowej w punkcie jej przecięcia się z pionową utwierdzonego przekroju. Z przedstawienia linii ugięcia jako krzywej sznurowej nie trudno odczytać jeszcze inne proste twierdzenia, prowadzące do bardzo wygodnego obliczenia ugięcia  $y$  i kąta nachylenia stycznej, tj.  $\frac{dy}{dz}$  w obranym przekroju. Jeżeli  $M^*$  i  $T^* = \frac{dM^*}{dz}$  oznacza moment zgięcia i siłę poprzeczną, które odpowiadają fikcyjnemu obciążeniu belki przez powierzchnię momentów  $M$ , to w przypadku zwykłego podparcia obu końców belki jest

$$y = \frac{M^*}{EJ}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{T^*}{EJ} \dots \dots \dots (79)$$

przyczem  $EJ$  oznacza stałą sztywność zginania.

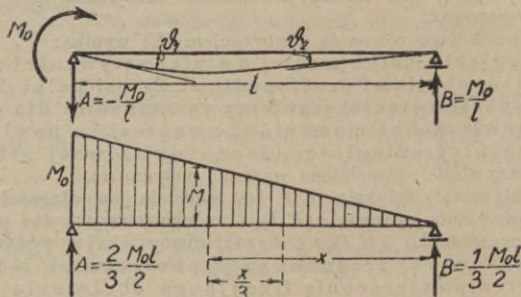


Fig. 153.

Przykład A. Obciążenie belki tworzy tylko para sił  $M_0$ , działająca na przekrój podporowy A (fig. 153). Wtedy powierzchnia momentów jest trójkątem o polu  $\frac{1}{2} M_0 l$ , a zatem fikcyjne reakcje:

$$A^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{M_0 l}{2}, \quad B^* = \frac{1}{3} \frac{M_0 l}{2}.$$

Stąd kąty stycznych podporowych (według wzoru 79):

$$\vartheta_1 = \frac{1}{3} \frac{M_0 l}{EJ}, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{6} \frac{M_0 l}{EJ} \dots \dots \dots (77)$$

Fikcyjny moment zgięcia w przekroju odległym o  $x$  od podpory  $B$  ma wartość:

$$M^* = B^* x - \frac{x}{3} \cdot \frac{M_0 x}{2}, \text{ a ponieważ } M = M_0 \frac{x}{l},$$

więc:

$$y = \frac{M^*}{EJ} = \frac{M_0}{6EJ} \cdot lx \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

**Przykład B.** Obciążenie jedną siłą skupioną  $P$  w przekroju odległym o  $a$  i  $b$  od podpór  $A$  i  $B$  ( $a+b=l$ ) (fig. 154). Powierzchnia momentów jest trójkątem o polu

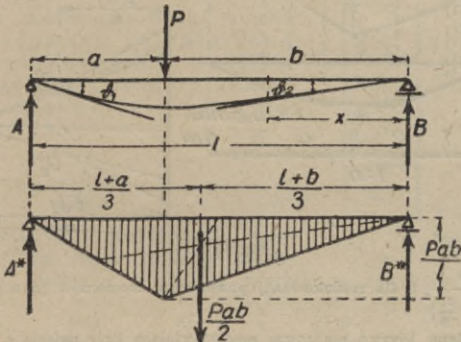


Fig. 154.

$\frac{1}{2} l \cdot \frac{P \cdot a \cdot b}{l} = P \frac{ab}{2}$ . Środek ciężkości tego pola leży w odległości  $\frac{l+a}{3}$  i  $\frac{l+b}{3}$  od pionowych podporowych  $A$  i  $B$ .

A zatem fikcyjne reakcje:

$$A^* = \frac{P \cdot a \cdot b}{2} \cdot \frac{l+b}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{P \cdot a \cdot b (b+l)}{6l}, \quad B^* = \frac{P \cdot a \cdot b (a+l)}{6l},$$

zaś fikcyjny moment zgięcia w przekroju odległym o  $x$  od prawej podpory:

$$M^* = \frac{P \cdot a \cdot b (a+l)}{6l} x - \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{x}{b} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3} x = \frac{P \cdot a \cdot x}{6l} (l^2 - a^2 - x^2).$$

Stąd kąty stycznych podporowych:

$$\vartheta_1 = \frac{A^*}{EJ} = \frac{Pab(b+l)}{6EJ \cdot l}, \quad \vartheta_2 = \frac{B^*}{EJ} = \frac{P \cdot a \cdot b \cdot (a+l)}{6EJ \cdot l},$$

zaś ugięcie:

$$y = \frac{Pax}{6EJ \cdot l} (l^2 - a^2 - x^2).$$

**Przykład C.** Belka  $AB$  (fig. 155) ma w środkowej części o długości 3,6 m stałą sztywność zginania  $EJ_2$ , zaś w dwu częściach skrajnych o długościach 0,7 m i 1,7 m mniejszą, lecz również stałą sztywność  $EJ_1$ . Materiałem jest żelazo zlewne ( $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ), przyczem  $J_1=5450 \text{ cm}^4$ ,  $J_2=9950 \text{ cm}^4$ . Naprężenia normalne nie przekraczają nigdzie  $1200 \text{ kg/cm}^2$ . Linje ugięcia znaleziono jako krzywą sznurową dla fikcyjnego obciążenia powierzchnią momentów, przyczem dla części środkowej przyjęto jako odległość biegunową  $\frac{EJ_2}{n}$ , zaś dla części skrajnych  $\frac{EJ_1}{n}$ , jeżeli 1:  $n$  oznacza obraną na rysunku skalę długości.

**Przykład D.** Płyta żelbetowa, działająca jako belka  $AB$  obustronnie doskonale utwardzona (fig. 156), o szerokości  $b=100 \text{ cm}$  i wysokości  $h=24 \text{ cm}$  w części środkowej,  $h=37 \text{ cm}$  na podporach. Przekroje obliczono dla naprężeń dopuszczalnych  $\sigma_b=40$  (betonu) i  $\sigma_z=1200 \text{ kg/cm}^2$  (żelaza). Przyjąwszy  $E_b=140000 \text{ kg/cm}^2$ , otrzymano dla części środ-

kowej stałą sztywność  $EJ_1 = 691000 \cdot 22^3$ , zaś dla części skrajnej sztywność zmienną  $EJ_x = 691000 \cdot \left(35 - \frac{x}{8}\right)^3$ . Momenty  $M$  zredukowano przeto na rysunku według równania

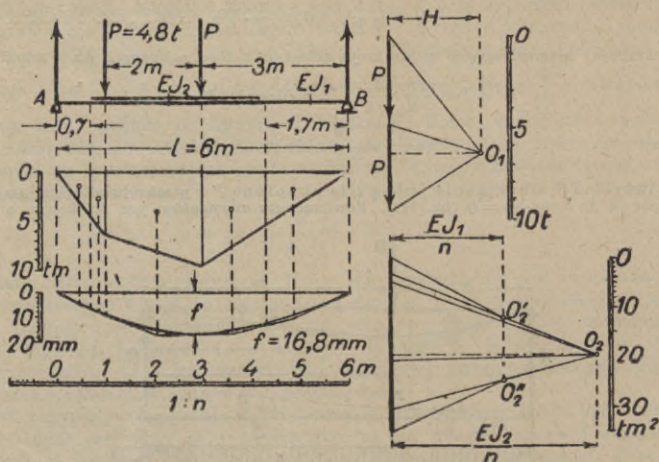


Fig. 155.

$M_{red} = M \frac{22^3}{\left(35 - \frac{x}{8}\right)^3}$  i dla zredukowanej powierzchni momentów jako powierzchni ob-

ciążenia wykreślono krzywą sznurową, przedstawiającą linię ugięcia o skali rzędnych 2 n-rzy większej od skali długości 1:n (ponieważ odległość biegunowa  $H = EJ_1/2n$ ).

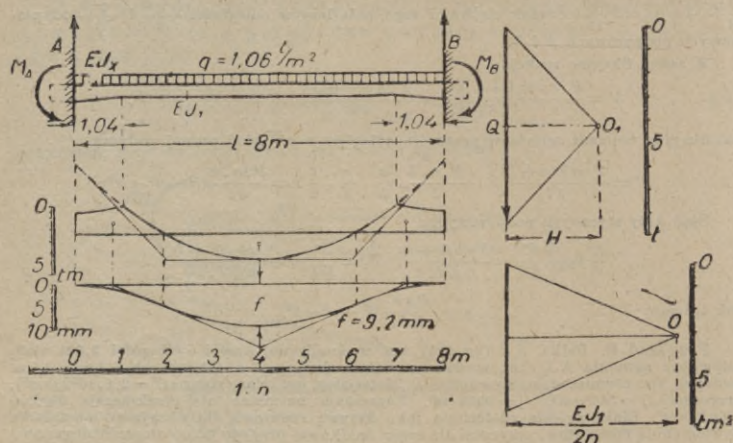


Fig. 156.

40. Wpływ sił poprzecznych na ugięcie belek. Naprężenia styczne, uwarunkowane siłą poprzeczną, wywołują odkształcenia postaciowe prostopadłościennych elementów pręta  $dx \cdot dy \cdot dz$ , które osiągają największą wartość w warstwie obojętnej. Oznaczywszy przez  $\beta$  odpowiadający kąt



odkształcenia postaciowego (fig. 157), a przez  $dy_1$  przyrost ugięcia wywołany tem odkształceniem, mamy:

$$dy_1 = \beta dx = \frac{\tau_0}{G} dx,$$

jeżeli  $\tau_0$  oznacza naprężenie styczne w środkowym elemencie przekroju. Zważywszy, że  $\tau_0 = \alpha \cdot \frac{T}{F}$ , przyczem  $k > 1$  jest współczynnikiem liczbowym, zależnym od kształtu przekroju, otrzymujemy:

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha \cdot \frac{T}{G \cdot F} = \frac{\alpha}{G \cdot F} \cdot \frac{dM}{dx}.$$

Stąd łatwo znaleźć dla belki w obu końcach podpartej, że dodatkowe ugięcia, uwarunkowane naprężeniami stycznymi są proporcjonalne względem odpowiadających momentów zgięcia:

$$y_1 = \frac{\alpha M}{G F}.$$

W ogólniejszych przypadkach podparcia i obciążenia belek szukamy całkowitego ugięcia, całkując uogólnione przybliżone równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} + \frac{\alpha}{GF} \cdot \frac{d^2 M}{dx^2},$$

wynikające z kombinacji równań (E) i (F).

(Znak prawej strony odpowiada umowie, że dodatnie  $M$  zgina pręt wygiętością w kierunku dodatniej osi  $Y$ .)

Przy wyznaczaniu stałych całkowania w przypadku, gdy przynajmniej jeden z przekrojów podporowych jest utwierdzonym (np. przekrój  $x_1$ ) należałoby teoretycznie odróżnić utwierdzenie dwojakiego rodzaju:

1. Utwierdzenie, które nie dopuszcza obrotu elementu osi belki

$$\left( \text{odpowiadający warunek podporowy: } \left. \frac{dy}{dx} = 0 \right|_{x=x_1} \right).$$

2. Utwierdzenie, które nie dopuszcza obrotu środkowego elementu pola przekroju

$$\left( \text{odpowiadający warunek podporowy: } \left. \frac{dy}{dx} = \frac{\tau_0}{G} \right|_{x=x_1} \right).$$

Zważywszy, że w praktyce niepodobna najczęściej liczyć na utwierdzenie doskonałe, lecz tylko na częściowe, przy którym kąt obrotu przekroju podporowego  $\vartheta$  jest proporcjonalny względem wielkości odpowiadającego momentu, możemy jako warunek podporowy przyjąć

$$\left. \frac{dy}{dx} = \vartheta + \frac{\tau_0}{G} \right|_{x=x_1}$$

stosownie do drugiego rodzaju utwierdzenia.

#### 41. Odkształcenie przekroju poprzecznego przy czystym zginaniu.

Jakkolwiek przekroje pręta zginanego stałym momentem  $M$  pozostają płaskie, to jednak w płaszczyźnie przekroju zachodzą wogóle wydłużenia lub skrócenia, wywołujące pewną zmianę geometrycznej postaci przekroju.

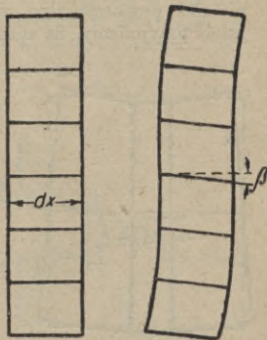


Fig. 157.

Ta zmiana zależy od wartości liczby Poisson'a  $\frac{1}{m}$  i to w ten sposób, że gdyby istniał materiał, dla któregooby było dokładnie  $\frac{1}{m} = 0$ , to przekrój pozostałby zupełnie niezmiennym. Wtedy bowiem nie byłoby odkształcenia poprzecznego podłużnych włókien pręta, narażonych na naprężenia  $\sigma$ . Te odkształcenia poprzeczne są równe  $-\frac{1}{m}$  odkształceń podłużnych, a więc są również proporcjonalne względem odległości  $\eta$  włókna od osi obojętnej, jeżeli przyjmiemy, że niema żadnych naprężeń poprzecznych, co odpowiada

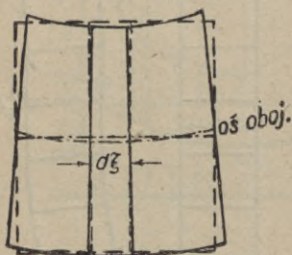


Fig. 158.

rzeczywistości tem ściślej, im mniejsze są rozmiary poprzeczne pręta wobec promienia krzywizny zgięcia. Dzięki odkształceniom poprzecznym zamieni się prostokątny elementarny pasek przekroju, prostopadły do osi obojętnej o stałej szerokości  $d\xi$  na pasek zwężający się równomiernie ku warstwie skrajnej rozciąganej, a rozszerzający się w ten sam sposób ku warstwie ściskanej, tak, iż przybiera postać nieskończenie wąskiego trapezu, a właściwie elementu pierścienia kołowego (fig. 158). Wskutek łączności wszystkich takich pasków, na jakie dzielimy w myśli cały przekrój, nastąpi równomierne zakrzywienie każdej z warstw równoległych do warstwy obojętnej. W szczególności zakrzywi się oś obojętka przekroju tak, że jej krzywizna  $\frac{1}{\rho}$ , jest

$m$ -tą częścią krzywizny  $\frac{1}{\rho}$  osi pręta wywołanej zgięciem. Zgięciu osi pręta do promienia  $\rho$  towarzyszy przeto zakrzywienie (zgięcie) poprzeczne o promieniu  $m\rho$ , co stwierdzono (Cornu 1869) bardzo ściśle pomiarami na prętach szklanych. Te wyniki mają ważne zastosowanie w teorii zgięcia płyt.

### C. Statycznie niewyznaczalne przypadki zgięcia belek prostych.

42. Proste sposoby podparcia belek i obliczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych. Napotykanne w praktyce zwykle sposoby ustalenia belek prostych można sprowadzić zwykle do kombinacji następujących teoretycznych rodzajów ustalenia jednego przekroju:

1. Podpora ruchoma, jeżeli środek przekroju jest zmuszony do pozostawania na prostej, najczęściej na pierwotnej osi belki. Reakcję takiej podpory określa w płaszczyźnie jedna wielkość algebraiczna  $A$  (fig. 159).

2. Podpora stała, jeżeli środek przekroju jest unieruchomiony. Do określenia reakcji potrzeba dwu wielkości algebraicznych, np. składowa prostopadła  $V$  i równoległa do osi  $H$  (fig. 160).

3. Utwierdzenie ruchome, jeżeli położenie stycznej do osi jest ustalone w utwierdzonym przekroju, ale sam przekrój (a właściwie pewna część belki) może się jeszcze przesuwać np. w kierunku osi (fig. 161). Reakcję określają dwie wielkości: Moment utwierdzenia  $M_A$  i składowa prostopadła do osi  $A$ .

4. Utwierdzenie stałe, jeżeli ustalono nie tylko położenie stycznej do osi w przekroju utwierdzonym, lecz i jego środek. Reakcję określają trzy wielkości: Moment utwierdzenia  $M_A$ , oraz składowe prostopadła  $V$  i równoległa  $H$  (fig. 162).

Do ustalenia belki w przypadku dowolnych obciążeń, leżących w płaszczyźnie jej osi, wystarcza widocznie utwierdzenie stałe jednego przekroju. Wielkości podporowe  $M_A$ ,  $V$  i  $H$  dadzą się wówczas zawsze obliczyć z trzech warunków równowagi.

Utwierdzenie ruchome wystarcza tylko wtedy, gdy wypadkowa z danych obciążeń jest prostopadła do pierwotnej osi belki.

Trzecim przypadkiem podparcia statycznie wyznaczalnego jest widocznie kombinacja podpory stałej w jednym przekroju z ruchomą w drugim. Wszelkie inne kombinacje prowadzą wogóle do przypadków statycznie niewyznaczalnych, tj. do liczby niewiadomych większej od trzech. Atoli w szczególnie ważnym praktycznie przypadku dwu podpór stałych przy obciążeniu, nie dającym składowej równoległej do osi, można, o ile belka

Fig. 159.

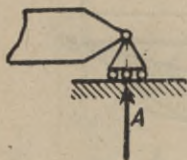


Fig. 160.

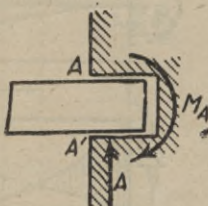
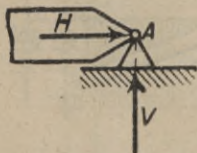


Fig. 161.

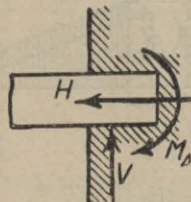


Fig. 162.

nie jest zbyt wiotka, pominąć wpływ składowych reakcyj równoległych do osi i bez wielkiego błędu traktować zadanie jako statycznie wyznaczalne, czyli „izostaticzne“.

Podobnie można zadanie belki w obu końcach stałe utwierdzonej traktować przy powyższem zastrzeżeniu tak, jak gdyby jeden jej koniec był utwierdzony ruchomo, czyli uważać ją w przybliżeniu za podwójnie (zamiast potrójnie) statycznie niewyznaczalną, czyli „hiperstatyczną“.

Teoria linii ugięcia pozwala zawsze obliczyć wielkości „statycznie niewyznaczalne“ z warunków podporowych. Aby je znaleźć, wychodzimy z równania różniczkowego linii ugięcia i wyraziwszy moment zginający  $M$  w zależności od odciętej  $x$  oraz sił zewnętrznych, między którymi będą także wielkości statycznie niewyznaczalne, całkujemy je. Warunki podporowe wystarczają nie tylko do wyznaczenia stałych całkowania, ale także wszystkich wielkości statycznie niewyznaczalnych.

Prościej dochodzimy do celu drogą następującą:

Usuwamy zbędne ustalenia tak, aby otrzymać belkę statycznie wyznaczalną i obliczamy kąty obrotu lub ugięcia przekrojów podporowych pod wpływem danych obciążeń. Następnie usuwamy te obciążenia i działamy na belkę nieznanymi siłami, zastępującymi zbędne ustalenia. Będą to bądź reakcje poprzednie usuniętych podpór, bądź też momenty usuniętych utwierdzeń. Uważając je za znane, obliczamy znowu odpowiadające ugięcia i kąty obrotów przekrojów podporowych. Z warunku, aby wypadkowe ugięcia

zbędnych podpór, albo kąty obrotu przekrojów, niepotrzebnie utwierdzonych, były równe zero, łatwo obliczyć wielkości statycznie niewyznaczalne.

**Przykład.** Belka równomiernie obciążona, w jednym końcu utwierdzona, a w drugim ruchomo podparta.

Rozwiązanie I. Usuwamy zbędne utwierdzenie, wskutek czego belka staje się w obu końcach podpartą. Reakcje podpór są teraz obie równe  $+\frac{ql}{2}$ ; wykres momentów jest parabolą  $A'C'B'$  (fig. 163) a wykres sił poprzecznych prostą  $A_1B_1$ . Z równania linii ugięcia (lub według ust. 7, str. 77) obliczamy kąty obrotu przekrojów podporowych:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{ql^3}{24 EJ}.$$

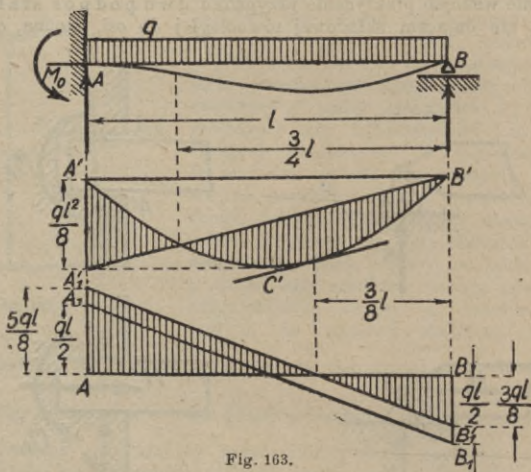


Fig. 163.

Na koniec A działamy teraz nieznanym momentem  $M_0$ , który wywołuje w A i B dodatkowe reakcje równe  $-\frac{M_0}{l}$  i  $+\frac{M_0}{l}$  i kąty obrotu przekrojów:

$$\vartheta_1' = +\frac{M_0 l}{3 EJ}, \quad \vartheta_2' = +\frac{M_0 l}{6 EJ}.$$

Z warunku utwierdzenia, tj.  $\vartheta_1 + \vartheta_1' = 0$ , czyli  $\frac{ql^3}{24 EJ} + \frac{M_0 l}{3 EJ} = 0$ , wynika  $M_0 = -\frac{1}{8} ql^2$ . Dla reakcyj otrzymujemy wartości wypadkowe:

$$A = \frac{ql}{2} - \frac{M_0}{l} = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{8} = \frac{5}{8} ql; \quad B = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{8} = \frac{3}{8} ql,$$

zaś w wykresie sił poprzecznych prostą  $A_1'B_1'$  równoległą do  $A_1B_1$ .

Rozwiązanie II. Usuwamy podporę B, wskutek czego belka staje się jednym końcem utwierdzoną. Reakcja w utwierdzonym przekroju staje się teraz równą  $+ql$ , a moment utwierdzenia równy  $-\frac{ql^2}{2}$ . Wykres momentów zginających (fig. 164) staje się parabolą  $A''B$  o wierzchołku w B. Dla ugięcia końca B mamy wzór:

$$f_1 = \frac{ql^3}{8 EJ}.$$

Teraz działamy na tenże koniec siłą równą niewiadomej reakcji B, która sama wywoła ugięcie:

$$f_2 = -\frac{B l^3}{3 EJ}.$$

Z warunku:  $f_1 + f_2 = 0$  wynika:

$$B = \frac{3}{8} ql.$$

Odpowiadający moment podporowy w  $A$  równa się  $+Bl = \frac{3}{8}ql^2$ , a zatem wypadkowy moment utwierdzenia w  $A$ :

$$M_0 = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3}{8}ql^2 = -\frac{1}{8}ql^2 = \overline{A'A''}.$$

Łącząc linią prostą punkt  $A''$  z  $B$  otrzymujemy zakreskowany wykres momentów zginających ilościowo zgodny ze znalezionym poprzednio. Do identycznego z poprzednim wy-

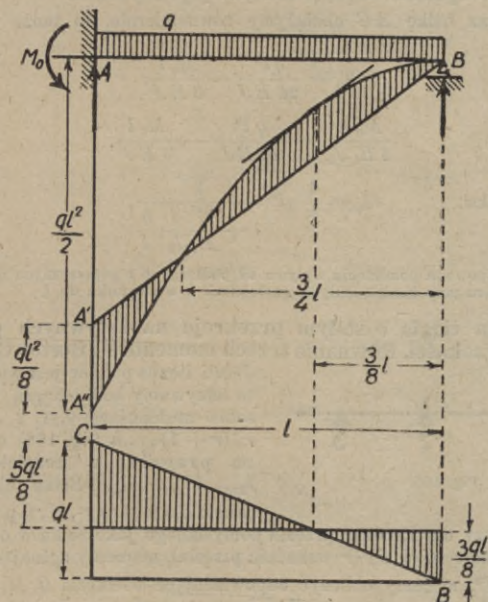


Fig. 164.

kresu sił poprzecznych dochodzimy zaś odejmując od rzędnych trójkąta  $ABC$  o wysokości  $AC = ql$  rzędne prostokąta o wysokości  $\frac{3}{8}ql$ .

**43. Belka o końcach sprężysto utwierdzonych.** Przy utwierdzeniu sprężystym obraca się styczna podporowa (do linii ugięcia) o kąt  $\vartheta_0$ , który z wystarczającym przybliżeniem przyjmujemy jako proporcjonalny względem momentu podporowego  $M_0$ .

A zatem:  $M_0 = K \cdot \vartheta_0$ .

Spółczynnik  $K$  o wymiarze momentu mierzy „sztywność utwierdzenia”. Przy utwierdzeniu zupełnym (doskonałym)  $K = \infty$ , przy swobodnym podparciu  $K = 0$ . W wielu przypadkach można obliczyć  $K$ , np.: Belka pozioma  $AC$  (fig. 165) półramy  $ACB$  zachowuje się jak podparta w punkcie  $A$ , a sprężysto utwierdzona w  $C$ . Słup zaś  $CB$  działa jako belka podparta

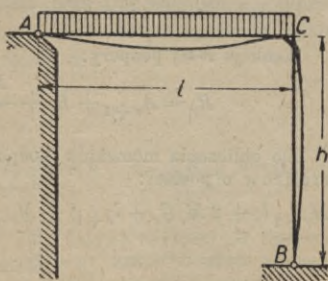


Fig. 165.

w  $B$  i sprężystość utwierdzona w  $C$ . Pomijając wpływ sił podłużnych i poprzecznych na odkształcenie, mamy dla słupa  $BC$  kąt obrotu przekroju  $C$  pod wpływem momentu  $M_0$  w tymże przekroju:

$$\vartheta_0 = \frac{M_0}{K} = \frac{M_0 h}{3 E_1 J_1}; \text{ a więc } K = \frac{3 E_1 J_1}{h},$$

sztwywność utwierdzenia  $K$  belki  $AC$  jest przeto tem większa, im większa jest sztywność zginania słupa, a mniejsza jego wysokość.

Jeżeli teraz belkę  $AC$  obciążymy równomiernie, to tenże kąt określi równanie:

$$\vartheta_0 = \frac{q l^3}{24 E J} - \frac{M_0 l}{3 E J}.$$

A zatem:

$$\frac{M_0 h}{3 E_1 J_1} = \frac{q l^3}{24 E J} - \frac{M_0 l}{3 E J},$$

z czego wynika:

$$M_0 = \frac{1}{8} q l^2 \frac{1}{1 + \frac{E \cdot J}{E_1 \cdot J_1} \frac{h}{l}}.$$

Uwaga. Z powodu pominięcia wpływu sił podłużnych i poprzecznych nie można stosować tego wzoru przy bardzo małych wartościach  $h$  w stosunku do  $l$ .

#### 44. Belka ciągła o stałym przekroju na sztywnych podporach o równej wysokości. Równanie trzech momentów (Bertot-Clapeyron).

Jeżeli liczba podpór jest większa od 2, to nazywamy belkę ciągłą. Podpory po sobie następujące  $0, 1, 2, \dots (r-1), r, (r+1) \dots n$  (fig. 166) dzielą belkę na przęsła o rozpiętościach  $l_1, l_2, \dots, l_r, \dots, l_n$ . Belka ciągła bywa przeto dwu-, trzy-, ...  $n$ -przęsłowa.

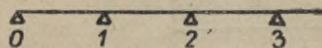


Fig. 166.

Obliczywszy dla każdego przęsła pomyślanego jako belka w obu końcach podparta reakcje  $A_r$  i  $B_r$  ( $r$  wskaźnik przęsła), momenty zginające  $M^0$  i siły poprzeczne  $T^0$ , możemy obliczyć odpowiadające wielkości  $R, M, T$  dla belki ciągłej, jeżeli wyznaczymy wielkości momentów podporowych  $M_0, M_1, \dots, M_n$ .

Dla  $r$ -tego przęsła (fig. 167) mamy w przekroju odległym o  $x$  od lewej podpory:

$$M = M^0 + M_{r-1} \frac{l_r - x}{l_r} + M_r \frac{x}{l_r},$$

$$T = T^0 + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} x.$$

Reakcja  $r$ -tej podpory:

$$R_r = A_{r+1} + B_r + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} l_r - \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} l_r.$$

Do obliczenia momentów podporowych służą równania trzech momentów o postaci:

$$\begin{aligned} M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = \\ = -6 \frac{\Omega_r \cdot a_r}{l_r} - 6 \frac{\Omega_{r+1} \cdot b_{r+1}}{l_{r+1}} = U_{r, r+1}. \end{aligned}$$

Tutaj oznacza:

$\Omega_r$  pole powierzchni momentów  $M^0$  przęsła  $r$ -go przy dowolnem obciążeniu;  $a_r$  i  $b_r$  odległości środka tego pola od lewej i prawej podpory. Te równania w liczbie  $(n-1)$  wystarczają do obliczenia  $(n-1)$  momentów podporowych. W przypadku doskonałego utwierdzenia na podporach skrajnych przybývają nadto równania:

$$2 M_0 l_1 + M_1 l_1 = - \frac{6 \Omega_1 b_1}{l_1} = U_{0,1},$$

$$M_{n-1} l_n + 2 M_n l_n = - \frac{6 \Omega_n a_n}{l_n} = U_{n,n+1},$$

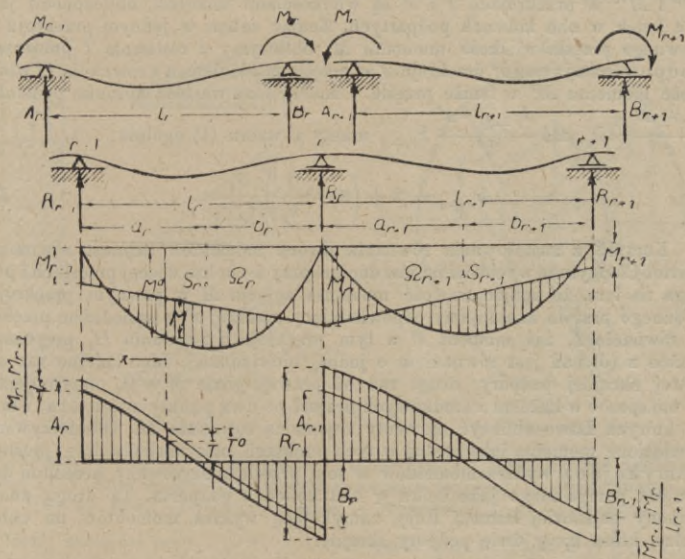


Fig. 167.

które łatwo napisać według ogólnego schematu dla pomyślanego przęsła zero- i 1-go, oraz dla przęsła  $n$ -tego i pomyślanego  $(n+1)$ -go, przyjmąwszy  $l_0 = l_{n+1} = 0$ ,  $\Omega_0 = \Omega_{n+1} = 0$ .

Jeżeli obciążenie każdego przęsła tworzy jedna siła skupiona  $P_r$ , odległa od lewej podpory o  $c_r$ , a od prawej o  $d_r$ , tudzież obciążenie równomiernie rozłożone  $q_r$  (kg/m) na całej długości przęsła, to:

$$U_{r,r+1} = - \frac{q_r \cdot l_r^3}{4} - \frac{q_{r+1} \cdot l_{r+1}^3}{4} - \frac{P_r \cdot c_r \cdot d_r (l_r + c_r)}{l_r} - \frac{P_{r+1} \cdot c_{r+1} \cdot d_{r+1} (l_{r+1} + c_{r+1})}{l_{r+1}}$$

45. Równanie dwóch momentów (M. Lévy). Niechaj  $M$  oznacza moment zgięcia w przekroju  $x|l_r - x$  przęsła  $r$ -go, zaś  $M'$  oznacza moment zgięcia w przekroju  $x'|l_{r+1} - x'$  przęsła  $(r+1)$ -go; to jeżeli zachodzi związek:

$$2(l_r + l_{r+1}) - \frac{x}{l_r - x} \cdot l_r - \frac{l_{r+1} - x'}{x'} \cdot l_{r+1} = 0 \quad \dots I$$

albo

$$\frac{l_r^2}{l_r - x} + \frac{l_{r+1}^2}{x'} = 3(l_r + l_{r+1}) \quad \dots I'$$

wówczas  $M$  i  $M'$  czynią zadość równaniu dwóch momentów:

$$(M - M^0) \frac{l_r^2}{l_r - x} + (M' - M'^0) \frac{l_{r+1}^2}{x'} = U_{r,r+1} \quad \dots II$$

przyczem  $U_{r,r+1}$  ma to samo znaczenie, co w ustępie 44., a momenty  $M^0$  i  $M'^0$  w przekrojach  $x$  i  $x'$  są wielkościami znanymi, obliczonymi jak dla belek w obu końcach podpartych. Znając zatem w jednym przekroju  $x$  pewnego przęsła wielkość momentu  $M$ , obliczymy z równania  $I$  położenie „odpowiadającego“ przekroju  $x'$  w przęśle sąsiednim, a z równania  $II$  wielkość momentu  $M'$  w temże przęśle. Oznaczywszy wartość stosunku podziału  $\frac{l_r - x}{x} = k_r$ , zaś  $\frac{l_{r+1} - x'}{x'} = k_{r+1}$  mamy z wzoru (I) ogólnie:

$$k_{r+1} = 2 + \left(2 - \frac{1}{k_r}\right) \frac{l_r}{l_{r+1}} \quad \dots II''$$

Korzyść z zastosowania równania dwóch momentów zamiast równania Bertot-Clapeyrona wychodzi na jaw dopiero przy 5-ciu lub więcej przęsłach i polega na tem, że znając wartość momentu zgięcia  $M$  w pewnym przekroju  $x$  danego przęsła znajdujemy odpowiadający przekrój  $x'$  w sąsiednim przęśle z równania  $I$ , zaś moment  $M$  w tym przekroju z równania  $II$ , przyczem każde z równań jest równaniem o jednej niewiadomej. Idąc kolejno raz od lewej skrajnej podpory, drugi raz od prawej, gdzie  $M = 0$ , otrzymujemy w ten sposób w każdym z środkowych przęseł po dwa punkty zwane stałemi, w których łatwo obliczyć momenty zapomocą równania  $II$ . Odmierzwszy znalezione momenty jako rzędne w tych punktach, otrzymujemy linię (prostą), zamykającą wykres momentów w tem przęśle, narysowany przedtem dla przęsła pomyślanego jako belka w obu końcach podparta. Tą drogą znajdujemy najłatwiej łamaną linię, zamykającą wykres momentów na całej belce, która łączy dwie podpory skrajne.

#### D. Zginanie w połączeniu z siłą podłużną.<sup>1)</sup>

(Mimoosiowe rozciąganie lub ściskanie.)

46. Prosty przypadek szczególny. Jeżeli siły zewnętrzne, działające na część pręta, odciętą rozpatrywanym przekrojem, sprowadzają się do siły podłużnej  $P$  i momentu zginającego  $M$  (fig. 168), to takie obciążenie przekroju jest statycznie równoważne z obciążeniem mimośrodkowem taką samą siłą  $P$ , przyczem mimośród  $e = \frac{M}{P}$  i leży w płaszczyźnie pary zginającej.

Ten przypadek zachodzi najczęściej u prętów pionowych czyli słupów. Jeżeli zatem mimośrodkowe obciążenie  $P$  leży w płaszczyźnie głównej słupa, czyli trafia w główną centralną oś bezwładności przekroju, to obrawszy ją za oś  $Y$ , obliczymy naprężenie normalne  $\sigma$  przy pomocy zasady superpozycji jako sumę:

<sup>1)</sup> W tym rozdziale pominięto ważną kwestję wpływu sił ściskających lub rozciągających pręt podłużnie na zginanie główne, wywołane momentami poprzecznymi. O tem będzie traktować rozdział IX.



$$\sigma = \pm \frac{P}{F} \pm \frac{M}{J_z} y = \pm \frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot e}{J_z} y.$$

Pierwszy wyraz oznacza tutaj naprężenia, wywołane obciążeniem środkowym  $P$ ; drugi zaś naprężenie, wywołane momentem zginającym  $M = P \cdot e$ , przy czym oś objętna (zginania) jest oś  $Z$ . Znak  $+$  obu wyrazów odpowiada przypadkowi siły ciągnącej  $P$  w punkcie leżącym na dodatniej części osi  $Y$ . Rozmieszczenie naprężeń wzdłuż osi  $Y$  (lub jakiegokolwiek prostej równoległej do niej) przedstawia wykres, trapezowy (fig. 169), jeżeli w całym obszarze przekroju ma  $\sigma$  ten sam znak algebraiczny. Pomyślana oś obojętna (linja zerowa) leży wówczas zewnątrz przekroju. Natomiast wykres ten składa się z dwu trójkątów, jeżeli  $\sigma$  zmienia znak na obszarze przekroju. Odpowiadająca oś obojętna przecina wtedy przekrój, dzieląc go na część rozciąganą

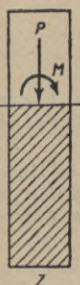


Fig. 168.



Fig. 169.

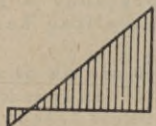


Fig. 170.



Fig. 171.

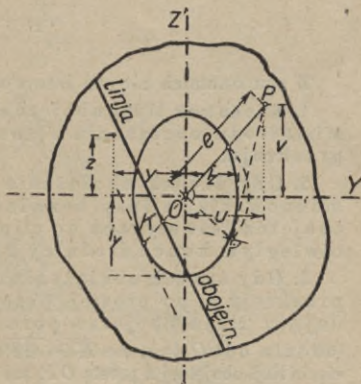


Fig. 172.

i ściskaną (fig. 170). W przypadku granicznym staje się wykres trójkątem (fig. 171); linja zerowa dotyka wtedy konturu przekroju nie przecinając go.

Gdy np. przekrój jest prostokątem o wymiarach  $b \cdot h$ , to wypadek graniczny zachodzi przy  $e = \pm \frac{h}{6}$ . Jeżeli zatem jest liczebnie  $e \leq \frac{h}{6}$ , to naprężenia nie zmieniają znaku w przekroju. To prowadzi do reguły, przestrzeganej odnośnie do murów na zaprawie wapiennej, aby wypadkowa z obciążeń przekroju nie wychodziła ze środkowej trzeciej części grubości muru. Ta reguła ma na celu uniknięcie ciągnięć, na które zaprawa wapienna jest mało wytrzymała.

**47. Przypadek ogólny.** Jeżeli płaszczyzna pary zginającej nie przechodzi przez jedną z głównych osi bezwładności przekroju, czyli gdy środek obciążenia  $P$  nie trafia żadnej z tych osi  $Y$  i  $Z$  (fig. 172), lecz ma współrzędne  $(u, v)$ , to moment zginający  $P \cdot e$  rozkładamy na dwa momenty  $M_z = P \cdot u$  i  $M_y = P \cdot v$  zginające odpowiednio w płaszczyznach  $XY$  i  $XZ$ , a naprężenie  $\sigma$  w dowolnym punkcie przekroju o współrzędnych  $(y, z)$  obliczamy według zasady superpozycji jako sumę:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot u}{J_z} y + \frac{P \cdot v}{J_y} z.$$

Ponieważ  $J_z = F i_z^2$ ,  $J_y = F i_y^2$  ( $i_y, i_z$  odpowiadające ramiona bezwładności), przeto:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{u \cdot y}{i_z^2} + \frac{v \cdot z}{i_y^2} \right).$$

Kładąc  $\sigma = 0$ , otrzymujemy równanie odpowiadającej linii obojętnej:

$$1 + \frac{u \cdot y}{i_z^2} + \frac{v \cdot z}{i_y^2} = 0.$$

Ta linia wyznacza na osiach  $Y$  i  $Z$  odcinki  $-\frac{i_z^2}{u}$ ,  $-\frac{i_y^2}{v}$ , a zatem ze względu na środek przekroju  $O$  leży po przeciwnej stronie niż środek obciążenia  $(u, v)$  i to tem bliżej  $O$ , im większe  $u$  i  $v$ , czyli im większe  $e$ . Równanie Culmannowskiej elipsy bezwładności przekroju ma postać:

$$\frac{\eta^2}{i_z^2} + \frac{\xi^2}{i_y^2} = 1.$$

Z obu ostatnich równań łatwo odczytać następujące prawidła:

1. Kierunek linii obojętnej jest sprzężony z kierunkiem mimośrodowym obciążenia ze względu na elipsę bezwładności przekroju.

2. Gdy środek obciążenia znajduje się na obwodzie Culmannowskiej elipsy bezwładności, to odpowiadająca linia obojętna jest styczna do elipsy w punkcie leżącym na przeciwległym końcu średnicy  $2\rho$ .

3. Gdy środek obciążenia  $P$  oddala (zbliża) się od środka przekroju  $O$  po prostej, przechodzącej przez  $O$ , to odpowiadająca linia obojętna porusza się równolegle i zbliża do (oddala od)  $O$  tak, że  $\overline{KO} \cdot \overline{OP} = \text{stała} = \rho^2$  ( $K$  jest punktem przecięcia linii obojętnej z prostą  $OP$ , zaś  $\rho$  połową średnicy elipsy leżącej na  $OP$ ).

Zważywszy, że taki sam związek ( $\overline{KO} \cdot \overline{OP} = \rho^2$ ) zachodzi między punktem  $P$  jako biegunem, a prostą  $l$  jako biegunową, przecinającą średnicę o kierunku  $OP$  w punkcie  $K$ , przyczem jednak  $K$  i  $P$  leżą po tej samej stronie środka elipsy  $O$ , nazywamy linię obojętną przeciwbiegunową punktu  $P$  i nawzajem ten punkt przeciwbiegunem dla owej linii. Przenosząc znane z geometrii twierdzenie o biegunach i biegunowych krzywych rzędu drugiego do środka obciążenia i linii obojętnej jako przeciwbieguna i przeciwbiegunowej, otrzymujemy prawidła następujące:

1. Każdemu punktowi płaszczyzny przekroju, uważanemu za środek obciążenia, odpowiada jako oś obojętna przeciwbiegunowa tego punktu względem Culmannowskiej elipsy bezwładności; nawzajem każdej dowolnej prostej na płaszczyźnie przekroju, uważanej za oś obojętną odpowiada przeciwbiegun tej prostej jako środek obciążenia.

2. Gdy środek obciążenia porusza się na dowolnej prostej, to odpowiednia oś obojętna obraca się około przeciwbieguna tej prostej i nawzajem:

3. Gdy oś obojętna obraca się około dowolnego punktu, to odpowiedni środek obciążenia porusza się na przeciwbiegunowej tego punktu.

48. Rdzeń czyli jądro przekroju. Tak nazywamy miejsce geometryczne wszystkich środków obciążenia, które w danym przekroju wywołują naprężenia tego samego znaku. Ażeby tedy znaleźć dowolną liczbę punktów konturu rdzenia, kreślimy dla przekroju Culmannowską elipsę bezwładności i dowolną liczbę prostych nie przecinających przekroju, lecz mających z jego

konturem przynajmniej jeden punkt wspólny. Wyznaczymy na podstawie związku  $\overline{KO} \cdot \overline{OP} = \rho^2$  przeciwbieguny tych prostych mamy tyleż punktów konturu rdzenia.

Jeżeli kontur przekroju jest wielobokiem wypukłym, to każdemu bokowi jako linii obojętnej odpowiada punkt jako wierzchołek wielokątnego konturu rdzenia.

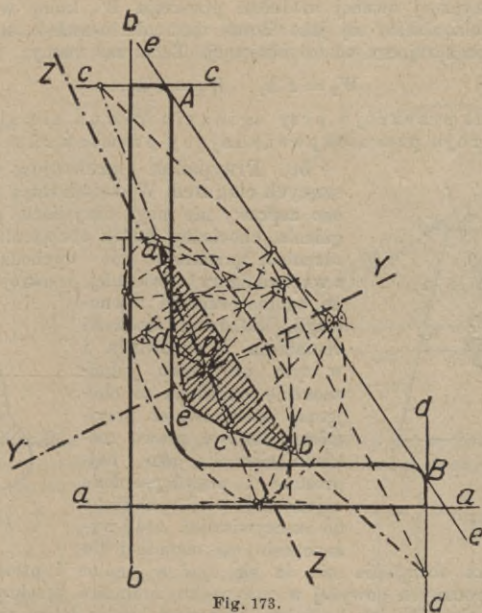


Fig. 173.

Jeżeli kontur przekroju jest wklęsły między punktami  $A$  i  $B$  (fig. 173), to łączymy je prostą  $AB$ , a odpowiadający jej przeciwbiegun  $e$  jest wierzchołkiem konturu rdzenia.

Wykreślenie Culmannowskiej elipsy bezwładności nie jest konieczne potrzebne do konstrukcji rdzenia. Można ją oprzeć na równaniu linii obojętnej w postaci odcinkowej:

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

przyczem  $b = -\frac{i_z^2}{u}$ ,  $c = -\frac{i_y^2}{v}$ .

Przedłużymy np. prostą  $AB$  aż do przecięcia się z osiami bezwładności  $Y$  i  $Z$ , znajdujemy odcinki  $b$  i  $c$ , a z nich obliczamy lub wyznaczamy wykreślnie zapomocą znanej konstrukcji (fig. 174):

$$u = -\frac{i_z^2}{b}, \quad v = -\frac{i_y^2}{c}.$$

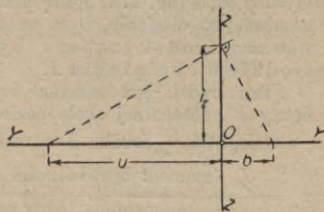


Fig. 174.

49. Wyznaczenie naprężeń skrajnych przy ukośnym zginaniu przy pomocy rdzenia przedstawia się w nadzwyczaj prosty sposób. Płaszc-

czyzna obciążenia, wywołującego zgięcie, wyznacza dwa promienie rdzenia  $\overline{OK}_1 = k_1$  i  $\overline{OK}_2 = k_2$  (fig. 174 a). Naprężenia we włóknie skrajnym, leżącym po przeciwnej stronie punktu  $K$  (względem  $O$ ), określa wzór:

$$\sigma_1 = \frac{M}{F k_1}$$

i podobnie dla punktu  $K_2$ . Wzór powyższy prowadzi do uogólnienia wielkości geometrycznej zwanej modułem przekroju  $W$ , którą w przypadku prostego zgięcia określa się jako iloraz momentu bezwładności przez odległość włókna skrajnego od osi obojętnej. Teraz zaś mamy:

$$W_1 = F k_1, \quad W_2 = F k_2,$$

czyli moduł przekroju przy zginaniu równa się iloczynowi pola przekroju przez odpowiadający promień rdzenia.

50. Przypadek przekrojów nieprzenośzących ciągnięć. W szwach słupa muranego bez zaprawy nie mogą oczywiście powstać ciągnięcia, chociażby środek obciążenia leżał poza rdzeniem przekroju [nie wychodząc zarazem z wnętrza figury (obwiedniej) przekroju ze względu na ogólne warunki równowagi]. Każdemu środkowi obciążenia  $P$  odpowiada i w tym przypadku jednoznacznie określona oś obojętna, jeżeli również przyjmujemy linjowe prawo rozkładu ciśnień, jako najprostsze i prawdopodobnie najczęściej wielce zbliżone do rzeczywistości. Atoli wyznaczenie osi obojętnej dla

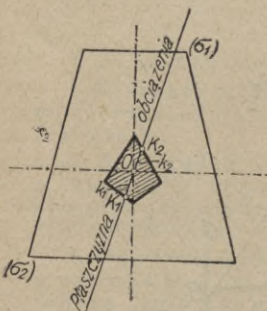


Fig. 174 a.

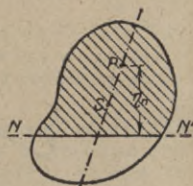


Fig. 175.

danego środka obciążenia nie da się ująć w ogólne i proste prawa, podobne do podanych powyżej w przypadku zdolności przekroju do przenoszenia tak ciągnięć jak i ciśnień. Natomiast bardzo łatwo rozwiązać zadanie odwrotne, tj. znaleźć środek obciążenia, odpowiadający danej osi obojętnej.

Ich wzajemną zależność można określić w następujący sposób: Pomysłmy sobie (fig. 175) figurę przekroju w takim położeniu, aby jej część  $F'$ , narażona na ciśnienie, była zanurzona w płynie aż po oś obojętną  $NN'$ ; wówczas środek naporu hydrostatycznego na  $F'$  jest zarazem środkiem obciążenia  $P$ .

[Ten środek jest zarazem środkiem wahnienia jednolitej ciężkiej figury  $F'$ , obracalnej około poziomo ustawionej osi  $NN'$ ].

Odległość  $r_n$  środka  $P$  od osi  $NN'$  określa wtedy równanie

$$r_n = \frac{J_n \text{ (moment bezwładności ściskanej części przekroju względem } NN')}{S_n \text{ (moment statyczny ściskanej części przekroju względem } NN')}$$

To równanie wystarcza do rozwiązania zadania w przypadku, gdy oś obojętna jest prostopadła do osi symetrii przekroju jak np.:

A. W przekroju prostokątnym obciążonym siłą osi  $P$  na osi symetrii (fig. 176) w odległości  $d < \frac{1}{3} b$  od boku  $h$ , leży odpowiadająca oś obojętna  $NN'$  w odległości  $r_n = 2d$  od  $P$ . Szerokość ściskanej strefy =  $3d$ . Skrajne ciśnienie:

$$\sigma_1 = 2 \frac{P}{3bd} = 2\sigma_0',$$

jeżeli  $\sigma_0'$  oznacza średnią wartość ciśnienia w tej strefie. Ta wartość jest widocznie większa od  $\sigma_0 = \frac{P}{bh}$ , czyli średniej wartości ciśnienia w całym przekroju.

B. Inne przypadki. 1.) Oś obojętna odcina trójkąt jako przekrój „skuteczny“. Jeżeli środek obciążenia  $P$  (fig. 177) leży dość

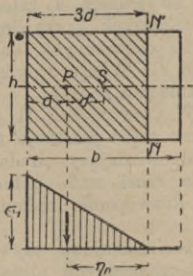


Fig. 176.

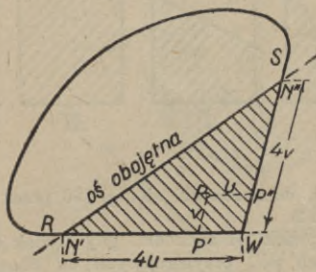


Fig. 177.

blisko wierzchołka  $W$ , w którym się schodzą dwa proste boki  $WR$  i  $WS$ , ograniczające przekrój, wtedy łatwo znaleźć ściśle odpowiadającą oś obojętną zapomocą konstrukcji następującej:

Prowadzimy z  $P$  prostą  $PP' \parallel SW$  i  $PF'' \parallel RW$ , odcinamy  $WN' = = 4PP' = 4u$  i  $WN'' = PF'' = 4v$ .

Prosta  $N'N''$  jest szukaną osią obojętną, o ile punkty  $N'$  i  $N''$  wypadają na odpowiadających bokach, a nie na ich przedłużeniach. Największe ciśnienie  $\sigma_w$  w wierzchołku  $W$ :

$$\sigma_w = \frac{3P}{8uv \sin \alpha}.$$

2. Oś obojętna  $NN'$  odcina trapez  $NN'BA$  (fig. 178) jako „skuteczną“ część przekroju  $ABCD$ . Aby znaleźć środek obciążenia, odcinamy  $AK = \frac{AN}{3} = \frac{x_1}{3}$

i łączymy  $K$  z  $O$ . Następnie obliczamy długość odcinka  $x_0$  z wzoru:

$$x_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{x_1^4 - x_2^4}{x_1^3 - x_2^3}$$

i wstawiamy ten odcinek między proste  $AB$  i  $NN'$  równoległe do  $x_1$  i  $x_2$ . Jego punkt przecięcia się z prostą  $KO$  jest szukanym środkiem obciążenia  $P$ . Czasami dogodniej obliczyć i odmierzyć wielkość  $y_0$  z wzoru:

$$y_0 = \frac{y_1}{x_1} x_0 = \frac{y_2}{x_2} x_0 = \frac{3}{4} \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{x_1^4 - x_2^4}{x_1^3 - x_2^3}.$$

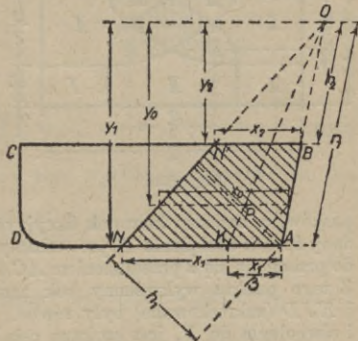


Fig. 178.

Największe ciśnienie  $\sigma_A$  w punkcie  $A$  znajdujemy z wzoru:

$$\sigma_A = \frac{6 P x_1^2}{y_1 (x_1^3 - x_2^3)}$$

C. Przekrój prostokątny w przypadku ogólnym. Linje wyznaczące. Zależnie od położenia środka obciążenia będzie skuteczna część przekroju mieć jedną z postaci zakreskowanych na fig. 179.

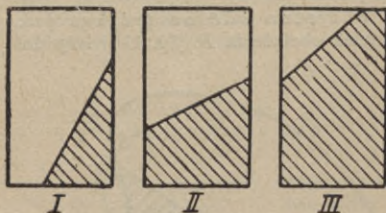


Fig. 179.

rech pól, oznaczonych na fig. 180 przez  $I$ ,  $II$ ,  $III$  z siebie w  $B$ . 2.

Przypadek III zachodzi, gdy środek obciążenia znajduje się w jednym z czterech pól, przylegających do rdzenia i oznaczonych przez  $III$  na fig. 180. Skuteczna część przekroju jest teraz pięciobokiem. Linje rozgraniczające pola częściowe przekroju  $I$ ,  $II$ ,  $III$  wraz z rdzeniem nazywają linjami wyznacznymi.

D. Wykreślne wyznaczenie osi obojętnej w przypadku, gdy środek obciążenia leży na osi symetrii przekroju. Dany przekrój (fig. 181) dzielimy na wąskie paski prostopadłe do osi symetrii i kreślimy wielobok sznurowy fikcyjnych ciężarów tych pasków, podobnie jak się to robi dla wyznaczenia momentu bezwładności sposobem Mohra. Kierunek długości

pasków, a zarazem kierunek fikcyjnych sił, jest równoległy do osi  $Y$ . Przez dany środek obciążenia  $P$  prowadzimy następnie prostą o tymże kierunku aż do przecięcia się z przedłużeniem  $AC$  skrajnego boku wieloboku w punkcie  $G$ . Z tego punktu wykreślamy bok zamykający  $GED$  tak, aby pola  $AGE$  i  $EJD$  (zakreskowane) były równe. Wtedy prosta, przechodząca przez  $D$  i równoległa do  $Y$ , jest szukaną osią obojętną, odpowiadającą środkowi obciążenia  $P$ . Dowód wynika z równania określającego odległość  $P$  od osi obojętnej ilorazem  $J_n/S_n$ . Ponieważ  $J_n =$  iloczynowi pola figury  $AEJDC$  przez  $2H$  ( $H$  odległość biegunowa), a figurę tę przekształciliśmy na równoważny  $\triangle DGC$ , przeto  $J_n = \frac{bh}{2} \cdot 2H$ .

Zważywszy zaś, że  $S_n = bH$ , otrzymamy:

$$\frac{J_n}{S_n} = \frac{bhH}{bH} = h.$$

Ażeby znaleźć skrajną wartość naprężenia  $\sigma_1$  w punkcie  $B$ , obliczamy średnią wartość naprężenia  $\sigma_s$ , dzieląc obciążenie  $P$  przez pole  $F'$  przekroju

skutecznego i wyznaczamy następnie środek ciężkości tego pola  $S'$ . Wystawiliśmy w tym punkcie rzędną  $\sigma_s$ , otrzymamy  $\sigma_1$  z wykresu linjowego  $KLM$ .

**Uwaga.** Gdy środek obciążenia nie leży na osi symetrii przekroju, to odpowiadającą oś obojętną można znaleźć tylko przez próby.

### V. Praca odkształcenia.

51. Energja potencjalna (praca odkształcenia) prętów (belek) prostych. *a)* Przy działaniu samej siły podłużnej  $N$  (rozciągającej lub ściskającej) określa według ustępu 13 energję potencjalną elementu pręta o długości  $ds$  wyrażenie:

$$dU = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} ds = dL.$$

*b)* Przy działaniu samej siły poprzecznej  $T$  jest (w zwykłych przypadkach symetrii przekroju względem płaszczyzny obciążenia):

$$dL = \frac{1}{2} T \cdot \beta \cdot ds,$$

przyczem  $\beta$  jest średnią wartością kąta odkształcenia postaciowego w całym przekroju. Ta wartość da się przedstawić w postaci:

$$\beta = \alpha' \cdot \frac{T}{G \cdot F'}$$

A zatem:

$$dU = \frac{1}{2} \alpha' \cdot \frac{T^2}{G \cdot F'} ds = dL \dots \dots \dots (96)$$

Wartość  $\alpha'$  znajdujemy z porównania tego wyrażenia z wyrażeniem dla  $dU$  w postaci:

$$dU = ds \int \frac{\tau^2}{2G} dF,$$

jeżeli, znając rozmieszczenie  $\tau$  w przekroju, wykonamy całkowanie na obszarze pola  $F$ .

*c)* Przy działaniu samego momentu skręcającego  $M_s$  mamy:

$$dL = \frac{1}{2} M_s \cdot d\varphi,$$

jeżeli  $d\varphi$  jest kątem skręcenia na długości  $ds$  (str. 1113).

Zważywszy, że

$$d\varphi = \frac{M_s}{\Gamma} ds,$$

jeżeli  $\Gamma = GJ_{red}$  oznacza sztywność skręcenia, mamy:

$$dL = \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{G \cdot J_{red}} ds = dU \dots \dots \dots (96')$$

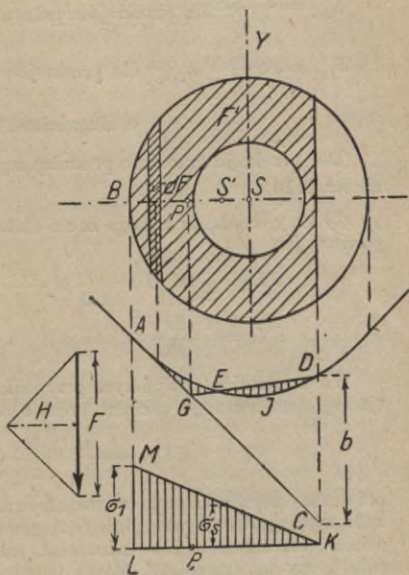


Fig. 181.

przyczem:

$$J_{\text{red}} = J_P \text{ dla przekrojów okrągłych,}$$

$$J_{\text{red}} = \frac{F^4}{\Psi J_P} \text{ dla przekrojów pełnych, wymienionych na str. 1114,}$$

$$J_{\text{red}} = \infty \frac{1}{3} \sum_i h_i \delta_i^3 \text{ dla przekrojów składanych z wąskich prostokątów}$$

o długościach  $h_i$  i szerokościach  $\delta_i$ .

(Dla przekroju rurowego prostokątnego podano przybliżoną wartość  $J_{\text{red}}$  na str. 1116.)

d) Przy działaniu samego momentu zginającego  $M$  w płaszczyźnie głównej jest

$$dL = \frac{1}{2} M \cdot d\varphi = \frac{1}{2} M \cdot \frac{ds}{\rho} \text{ (por. wzór } D, \text{ str. 1122), czyli}$$

$$dL = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} \cdot ds = dU \dots \dots \dots (97)$$

We wszystkich powyższych przypadkach ma wyrażenie dla energii potencjalnej elementarnego odcinka pręta o długości  $ds$  postać:

$$dU = \frac{1}{2} \frac{(\text{siła lub moment})^2}{\text{„sztywność”}} \cdot ds \dots \dots \dots (97a)$$

przyczem sztywność pręta w rozpatrywanym przekroju mierzy iloczyn modułu sprężystości  $E$ , względnie  $G$ , przez wielkość geometryczną o wymiarze pola  $F$ , lub momentu bezwładności  $J$ , zależnie od tego, czy w liczniku jest (siła)<sup>2</sup>, czy też (moment)<sup>2</sup>. Mamy tedy:

$$\begin{aligned} EF &= \text{sztywność rozciągania lub ściskania,} \\ \frac{1}{\chi'} \cdot GF &= \text{„} \quad \text{ścianania,} \\ EJ &= \text{„} \quad \text{zginania,} \\ GJ_{\text{red}} &= \text{„} \quad \text{skręcania.} \end{aligned}$$

Przy jednoczesnym działaniu siły podłużnej  $N$ , poprzecznej  $T$ , momentu skręcającego  $M_s$  i zginającego  $M$ , otrzymujemy (dzięki poczynionym założeniom upraszczającym):

$$dU = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} ds + \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} ds + \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{GJ_{\text{red}}} ds + \frac{1}{2} \chi' \frac{T^2}{GF} ds \quad (79b)$$

Gdyby w jeszcze ogólniejszym przypadku moment zgięcia nie leżał w płaszczyźnie głównej przekroju, to rozłożywszy go na dwa momenty składowe  $M_1$  i  $M_2$  w płaszczyznach głównych, otrzymalibyśmy zamiast pierwszego wyrazu w powyższym wzorze dwa następujące:  $\frac{1}{2} \frac{M_1^2}{EJ_1} + \frac{1}{2} \frac{M_2^2}{EJ_2}$ . ( $J_1, J_2$  oznaczają przytem odpowiadające główne momenty bezwładności przekroju.)

Uwaga. Powyższy wzór stosuje się z dostatecznym przybliżeniem do obliczenia energii potencjalnej prętów w zakrzywionych (łuków), o ile promień krzywizny jest dość wielki w porównaniu do wymiarów przekroju, czyli jest ważny dla prętów słabo zakrzywionych.

52. Energia potencjalna (praca odkształcenia) układu sprężystego. Gdy układ jest złożony z prętów prostych lub słabo zakrzywionych, to wyznacza się dla każdego z prętów siłę podłużną (normalną)  $N$ , poprzeczną  $T$ , moment zgięcia  $M$  i moment skręcenia  $M_s$  (jako funkcje współrzędnych środka



przekroju) i stosując wzór (97, b) dla energii potencjalnej elementu o długości  $ds$ , sumuje się wyrażenia  $dU$  dla całego układu.

Jeżeli punkty działania  $a, b, \dots, m, n, \dots$  sił  $P_a, P_b, \dots, P_m, P_n, \dots$  doznają przesunięć sprężystych  $\delta_a, \delta_b, \dots, \delta_m, \delta_n, \dots$ <sup>1)</sup>, przyczem:

1. materiał układu podlega prawu Hooke'a i
2. działania sił zewnętrznych są od siebie nawzajem niezależne, tj. zachodzi zasada superpozycji, natenczas:

$$\delta_m = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \dots + \delta_{mm} P_m + \delta_{mn} P_n + \dots \quad (98)$$

czyli  $\delta_i = \sum \delta_{ik} P_k \quad (i, k = a, b, c, \dots, m, n, \dots)$

a więc przesunięcia („ugięcia”) są linjowemi jednorodnemi funkcjami sił zewnętrznych, nadto zaś

$$L = U = \sum_i \frac{1}{2} P_i \delta_i = \frac{1}{2} \sum_i \delta_{ik} P_i P_k \quad \dots \quad (98a)$$

czyli energja potencjalna jest jednorodną kwadratową funkcją sił zewnętrznych.

W obu powyższych twierdzeniach można którąkolwiek z sił  $P_i$  zastąpić przez moment  $M_i$ , a odpowiadające przesunięcie  $\delta_i$  przez kąt obrotu  $\varphi_i$  przekroju, na który działa moment. Twierdzenia te stosują się zatem do uogólnionych sił i uogólnionych przesunięć. Spółczynniki  $\delta_{ik}$ , zależne jedynie od postaci i materiału układu, nazywamy wielkościami (liczbami) wpływowemi tego układu. Skoro bowiem na układ działa tylko jedna siła zewnętrzna, np.  $P_m$  (wraz z reakcjami nieruchomych punktów podparcia), przyczem  $P_m = 1$ , to  $\delta_n = \delta_{mn}$  czyli  $\delta_{mn}$  określa wpływ jednostki siły umieszczonej w przekroju (punkcie)  $m$  na ugięcie w przekroju  $n$ . Rozwiązawszy równanie (98) względem sił  $P_k$  otrzymujemy te siły jako linjowe funkcje przesunięć, a po wstawieniu tych wyrażen w równanie (98a) przekonujemy się, że energja potencjalna układu jest także jednorodną kwadratową funkcją uogólnionych przesunięć (uogólnionych spółrzędnych).

**Przykład.** Na końcu  $A$  belki  $AB$  (fig. 182) swobodnie podpartej działa moment (zginający)  $M_1$ , zaś na środek siła  $P_2$ . Z równania linii ugięcia znajdujemy kąt obrotu przekroju  $A$ :

$$\varphi_1 = \frac{M_1 l}{3 EJ} + \frac{P_2 l^2}{16 EJ},$$

zaś ugięcie pod siłą  $P_2$ :

$$f_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{M_1 l^2}{EJ} + \frac{P_2 l^3}{48 EJ}.$$

A zatem praca odkształcenia:

$$L = \frac{1}{2} M_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} P_2 f_2 =$$

$$= \frac{l}{6 EJ} \left( M_1^2 + \frac{3}{8} l \cdot M_1 \cdot P_2 + \frac{l^2}{16} P_2^2 \right) = \frac{24}{7} \cdot \frac{EJ}{l} \cdot \left( \varphi_1^2 - \frac{6}{l} \varphi_1 f_2 + \frac{16}{l^2} f_2^2 \right).$$

**Uwaga.** Jakkolwiek w praktyce mamy najczęściej do czynienia z przypadkami, w których uogólnione przesunięcia i siły podlegają zasadzie superpozycji, to jednak pamiętać należy o przypadkach wyjątkowych, w których ta zasada nie zachodzi, w których zatem energja potencjalna układu nie jest jednorodną kwadratową funkcją uogólnionych sił, względnie przesunięć. Jeden z najważniejszych przykładów stanowi belka zginania i jednocześnie ściskana podłużnie. (Por. rozdz. IX., A)

**53. Twierdzenie Castigliano'a.** Jeżeli energję potencjalną  $U$  układu sprężystego przedstawimy w postaci funkcji uogólnionych sił zewnętrz-

<sup>1)</sup> Wielkości  $\delta$  oznaczają tutaj składowe całkowitych przesunięć, wzięte w kierunku odpowiadającej siły  $P$ .

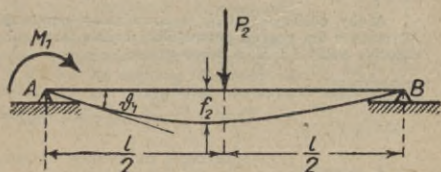


Fig. 182.

trznym jako zmiennych niezależnych  $P_i$ , a funkcja ta jest kwadratową jednorodną, to

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i, \quad \text{czyli}$$

pochozna cząstkowa energii potencjalnej układu względem jakiegokolwiek (ogólnion) siły zewnętrznej równa się odpowiadającemu przesunięciu.

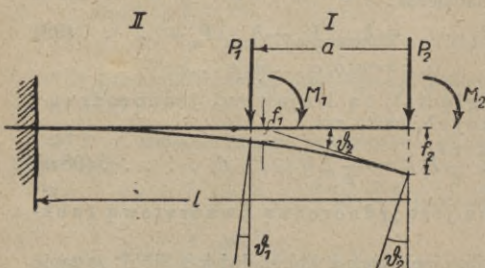


Fig. 183.

[Przymiotnikiem „odpowiadający“ określamy w przypadku siły  $P_i$  składową przesunięcia jej punktu działania, wziętą w kierunku siły; w przypadku zaś momentu (pary sił) kąt obrotu przekroju, względem osi równoległej do wektora momentu.]

Przykład. Na swobodny koniec belki prostej, doskonale utwierdzonej drugim końcem, (fig. 183) działa siła  $P_2$  i para zginająca o momencie  $M_2$ . Chcemy obliczyć ugięcie  $f$  i kąt obrotu  $\varphi_2$  przekroju końcowego oraz ugięcie  $f_1$  i kąt  $\varphi_1$  przekroju odległego o  $a$  od końca (przekroju  $a$ ). Pomijając wpływ sił poprzecznych, mamy:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx, \quad \text{przyczem} \quad M = M_2 + P_2 x.$$

A więc:

$$f_1 = \frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial P_2} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (M_2 + P_2 x) x dx = \frac{M_2 l^2}{2 EJ} + \frac{P_2 l^3}{3 EJ},$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial U}{\partial M_2} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial M_2} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (M_2 + P_2 x) dx = \frac{M_2 l}{EJ} + \frac{P_2 l^2}{2 EJ}.$$

Ażeby obliczyć  $f_1$  i  $\varphi_1$  wprowadzamy pomocniczą siłę  $P_1$  i parę  $M_1$  w przekroju  $a$ . Wyrażenie dla energii potencjalnej będzie teraz sumą dwu części, odpowiadających działom belki I i II, a mianowicie:

$$U_I = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M_I^2}{EJ} dx \quad \text{i} \quad U_{II} = \frac{1}{2} \int_a^l \frac{M_{II}^2}{EJ} dx.$$

A zatem:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial U}{\partial P_1} = \int_0^a \frac{M_I}{EJ} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial P_1} dx + \int_a^l \frac{M_{II}}{EJ} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial P_1} dx = \\ &= 0 + \frac{1}{EJ} \int_a^l [M_1 + M_2 + P_1(x-a) + P_2 x] (x-a) dx. \end{aligned}$$

Kładąc dalej wielkości pomocnicze  $P_1 = 0$ ,  $M_1 = 0$ , otrzymujemy:

$$f_1 = \frac{1}{EJ} \left[ M_2 \frac{(l-a)^2}{2} + P_2 (l-a)^2 \frac{2l+a}{6} \right].$$

Podobnież mamy:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= \frac{\partial U}{\partial M_1} = \int_0^a \frac{M_I}{EJ} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial M_1} dx + \int_a^l \frac{M_{II}}{EJ} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial M_1} dx = \\ &= 0 + \frac{1}{EJ} \int_a^l [M_1 + M_2 + P_1(x-a) + P_2x] \cdot 1 \cdot dx,\end{aligned}$$

z czego po podstawieniu  $M_1 = 0$ ,  $P_1 = 0$  i scałkowaniu:

$$\vartheta = \frac{1}{EJ} \left[ M_2(l-a) + \frac{1}{2} P_2(l^2 - a^2) \right].$$

**54. Zasada najmniejszości pracy odkształcenia** wypływa jako wniosek z twierdzenia Castigliano'a. Pomiedzy danymi obciążeniami jako siłami zewnętrznymi, a nieznanymi reakcjami podpór lub siłami wewnętrznymi układu, zachodzą związki określone warunkami równowagi. Jeżeli liczba  $r$  od siebie niezależnych równań równowagi jest mniejsza od liczby tych niewiadomych  $m$ , natenczas przez  $m-r$  niewiadomych, zwanych wielkościami hiperstatycznymi (lub statycznie niewyznaczalnymi), dowolnie zresztą obranych, da się wyrazić  $r$  pozostałych wielkości. Oznaczywszy obrane wielkości hiperstatyczne przez  $X, Y, Z, \dots$  mamy:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0 \quad \dots \dots \dots (102)$$

jako dodatkowe równania warunkowe, które wraz z warunkami równowagi wystarczają do obliczenia wszystkich reakcyj, lub sił wewnętrznych. Te równania są wyrazem następującego prawidła:

Wielkości hiperstatyczne mają wartości odpowiadające najmniejszości pracy odkształcenia (energji potencjalnej) układu sprężystego.

**Przykład.** Belka pozioma  $AB$  (fig. 184), obciążona równomiernie  $q \text{ kg/m}$ , utwierdzona doskonale końcem  $A$ , opiera się (przegubowo) końcem  $B$  na słupie  $BC$  o wysokości  $h$  i przekroju  $F$ . Szukane reakcje dostarczają trzech niewiadomych: momentu utwierdzenia  $M_0$ , pionowej reakcji podporowej  $A$  i takież reakcji w  $B$  i  $C$ . Tę ostatnią obramy za wielkość hiperstatyczną  $X$ . Wtedy reakcja  $A = ql - X$  (według warunku rzutów), a  $M_0 = -\frac{q l^2}{2} + Xl$  (według warunku momentów).

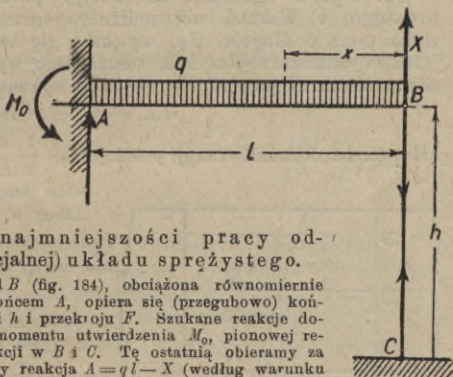


Fig. 184.

Energja potencjalna belki (z pominięciem wpływu sił poprzecznych):

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx, \quad \text{przyczem} \quad M = Xx - \frac{qx^2}{2}.$$

Energja potencjalna słupa:

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{X^2 \cdot h}{E' F'}$$

Warunek minimum daje:

$$\frac{\partial}{\partial X} (U_1 + U_2) = 0 = \int_0^l \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx + \frac{X \cdot h}{E' F'}$$

Po wstawieniu  $\frac{\partial M}{\partial X} = x$ , scałkowaniu i rozwiązaniu względem  $X$  znajdujemy:

$$X = \frac{3}{8} ql \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 EJ \cdot h}{E' F \cdot \beta}}$$

Gdy w szczególności  $h=0$ , to podpora  $B$  staje się stałą, a  $X = \frac{3}{8} ql$ . Im większa jest wysokość słupa  $h$  i sztywność zginania belki  $EJ$ , a zarazem im mniejsza jest sztywność ściskania słupa i rozpiętość belki  $l$ , tem mniejsza część obciążenia  $ql$  przenosi się na podporę  $B$ .

**Uwaga.** Jeżeli jeden z punktów podparcia, np. odpowiadający hiperstatycznej reakcji  $X$ , dozna niezależnie od obciążenia małego przesunięcia składowego  $\delta_x$  w kierunku  $X$ , np. z powodu niedokładności wykonania konstrukcji, to odpowiadające równanie warunkowe z (102) zamieni się na następujące:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \delta_x.$$

Niechaj np. w zadaniu powyżej rozpatrzonem będzie podpora  $C$  osadzona o  $\delta_x$  za wysoko lub za nisko. Wówczas:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{X \beta}{3 EJ} - \frac{1}{8} \frac{q l^3}{EJ} + \frac{X \cdot h}{E' F} = \delta_x,$$

a stąd:

$$X = \frac{3}{8} ql \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 EJ}{E' F \cdot \beta}} + \frac{3 EJ}{E' F \cdot \beta} \delta_x.$$

**55. Wpływ ogrzania na energję potencjalną obciążonego pręta prostego.** a) Wskutek równomiernego ogrzania o  $t^0$  C elementarnego odcinka pręta o długości  $ds$ , zwiększa się ta długość o  $\Delta ds = \alpha \cdot t \cdot ds$ , jeżeli  $\alpha$  oznacza współczynnik termicznego wydłużenia materiału. A zatem siła podłużna  $N$  jako siła wewnętrzna wykona przytem pracę:

$$dL_t = N \cdot \alpha \cdot t \cdot ds,$$

którą trzeba dodać do energii potencjalnej  $\frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} ds$ , ażeby otrzymać całkowitą energję potencjalną, nagromadzoną w elemencie o długości  $ds$ , tj.

$$dU = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} ds + N \cdot \alpha \cdot t \cdot ds.$$

(Momenty i siły poprzeczne nie wykonywa przytem pracy.)

b) Skoro tenże element belki ogrzeje się nierównomiernie tak, iż temperaturę  $t$  włókna odległego o  $v$  od osi obojętnej określa równanie linjowe:

$$t = t_0 + v \cdot \frac{t_g - t_d}{h},$$

przyczem  $t_0$  oznacza temperaturę warstwy obojętnej,  $t_g$  i  $t_d$  górnej i dolnej warstwy skrajnej, zaś  $h$  wysokość belki (fig. 185), natenczas wewnętrzna

siła podłużna  $N$  wykona dodatkową pracę  $N \cdot \alpha \cdot t_0 \cdot ds$ , zaś moment zginający  $M$  dodatkową pracę  $M \cdot d\varphi_t$ .

Kąt

$$d\varphi_t = \frac{\alpha(t_g - t_d) \cdot dx}{h} \dots \dots \dots (105)$$

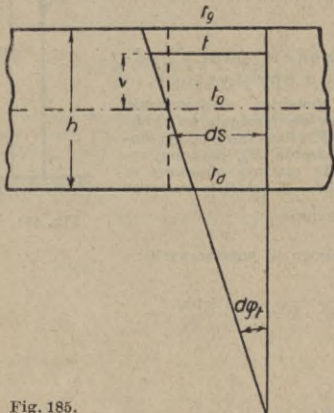


Fig. 185.

określa przytem wzajemne nachylenie obu końcowych przekrojów elementu, wywołane ogrzaniem. A zatem dodatkową pracę  $dL_t$ , o którą zwiększa się energia potencjalna  $dU$  elementu, określa równanie:

$$dL_t = \frac{M \cdot \alpha \cdot (t_g - t_d)}{h} ds + N \cdot \alpha \cdot t_0 ds \dots (105 a)$$

**Uwaga.** Każdy z wyrazów dodatkowej pracy może wypaść dodatni lub ujemny zależnie od tego, czy siły wewnętrzne działają zgodnie z odkształceniem termicznym, czy też przeciwnie. Skoro np. moment zginający działa tak, że górne włókna są rozciągane a dolne ściskane, to przy  $t_g > t_d$  będzie  $dL_t$  dodatnie.

**Przykład.** Belka, obu końcami doskonale utwierdzona, zmienia temperaturę włókna górnego i dolnego (fig. 186) odpowiednio o  $t_g$  i  $t_d$ ; obliczyć wywołany przez to moment utwierdzenia  $M_0$  i siłę podłużną  $X$ .

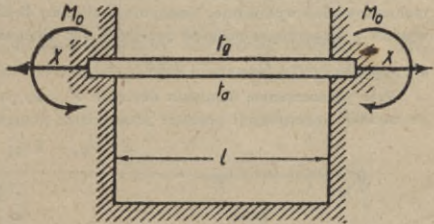


Fig. 186.

Dla pracy odkształcenia (wskutek niewiadomych) sił zewnętrznych mamy wyrażenia:

$$\frac{1}{2} \frac{M_0^2}{EJ} \cdot l + \frac{1}{2} \frac{X^2}{EF} \cdot l,$$

zaś dla pracy dodatkowej:

$$+ M_0 \frac{\alpha(t_g - t_d) \cdot l}{h} + X \cdot \alpha t_0 l,$$

przyczem  $t_0 = \frac{t_g + t_d}{2}$  przy założeniu przekroju o wysokości  $h$  symetrycznego względem osi obojętnej. Przyrównywując pochodne sumy obu prac względem wielkości statycznie niewyznaczalnych  $M_0$  i  $X$  do zera, mamy:

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{M_0 l}{EJ} + \frac{\alpha(t_g - t_d) l}{h} = 0, \text{ czyli } M_0 = -\frac{EJ}{h} \alpha(t_g - t_d),$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{X}{EF} \cdot l + \alpha t_0 l = 0, \text{ czyli } X = -EF \cdot \alpha \cdot t_0.$$

**56. Zasada wzajemności przesunięć. Prawa Betti'ego i Maxwell'a.**

Jeżeli (uogólnionym) siłom  $P_a, P_b, P_c, \dots, P_m, P_n, \dots$ , działającym na punkty (przekroje)  $a, b, c, \dots, m, n, \dots$  układu sprężystego, odpowiadają przesunięcia  $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \dots, \delta_m, \delta_n, \dots$  tychże punktów, innej zaś grupie sił  $P'_a, P'_b, \dots, P'_m, \dots$ , działających na te same punkty, odpowiadają przesunięcia  $\delta'_a, \delta'_b, \dots, \delta'_m, \dots$ , natenczas zachodzi równanie:

$$P_a \delta'_a + P_b \delta'_b + \dots = P'_a \delta_a + P'_b \delta_b + \dots \dots \dots (106)$$

wyrażające uogólnione przez Betti'ego (1876) prawo wzajemności przesunięć.

$$\text{Ponieważ } \delta_i = \delta_{ia} P_a + \delta_{ib} P_b + \dots + \delta_{ii} P_i + \delta_{ik} P_k + \dots$$

$$\delta'_k = \delta_{ka} P'_a + \delta_{kb} P'_b + \dots + \delta_{ki} P'_i + \delta_{kk} P'_k + \dots$$

przeto przyjąwszy, że wszystkie siły są równe zeru z wyjątkiem  $P_k = 1$  i podobnie, że wszystkie  $P'$  są równe, z wyjątkiem  $P'_i = 1$ , otrzymujemy z równania (106):

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \dots \dots \dots (106 a)$$

czyli prawo Maxwell'a (1864): Wpływ siły  $P_k$  na przesunięcie punktu działania siły  $P_i$  w jej kierunku jest taki sam, jak wpływ siły  $P_i$  na przesunięcie punktu działania siły  $P_k$  w kierunku tejże siły  $P_k$ .

Przykład. Siła pionowa  $P_i = 1$ , działająca w dowolnym przekroju  $i$  belki poziomej ramy (fig. 187), opartej na przegubie stałym  $A$  i poziomo przesuwalnym  $B$ , wywołuje przesunięcie poziome  $\delta_{bi}$  tego przegubu. Nawzajem siła pozioma  $P_b = 1$ , działająca na  $B$ , wywołuje ugięcie pionowe przekroju  $i$  o wielkości  $\delta_{ib} = \delta_{bi}$ .

I. Jeżeli obie podpory ramy są przegubami stałymi, to obciążenia pionowe belki wywołują w tych przegubach reakcje o składowych pionowych statycznie wyznaczalnych, lecz niewyznaczalnej składowej poziomej  $X$  (parcie poziome). Do jej obliczenia posłuży zasada superpozycji w połączeniu z prawem Maxwell'a. W tym celu czynimy najpierw przegub  $B$  przesuwalnym i działamy nań siłą poziomą  $X = 1$ . Ta siła wywołuje przesunięcie poziome tego przegubu  $\delta_{bb}$  i przesunięcie pionowe punktów  $\delta_{ib}$ . Można je wyznaczyć rachunkowo lub wykreślić. Następnie obciążamy belkę ramy siłami pionowymi  $P_i$ , które wywołają przesunięcie poziome przegubu  $B$  o wielkości  $\sum_i P_i \delta_{bi}$ . Ta suma jest znana, gdyż dzięki prawu Maxwell'a jest  $\delta_{bi} = \delta_{ib}$ .

Przy jednoczesnym działaniu obciążeń  $P_i$  i siły poziomej  $X$  (w przegubie  $B$ ), powstanie na zasadzie superpozycji poziome przesunięcie przegubu  $B$  o wielkości:

$$\sum_i P_i \delta_{bi} - X \delta_{bb},$$

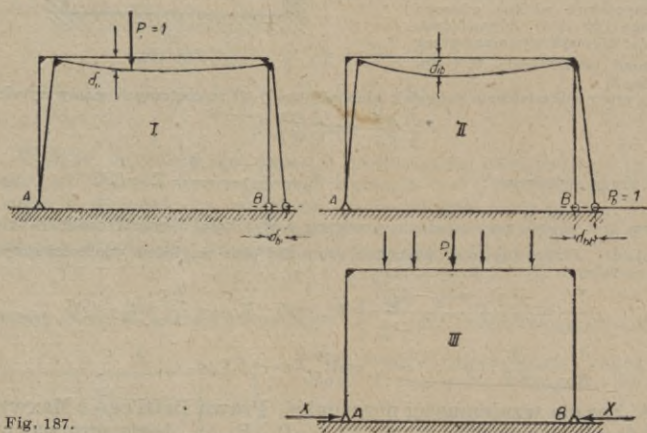


Fig. 187.

które musi się równać zero, jeżeli  $X$  jest poziomą reakcją przegubu  $B$  zupełnie ustalonego względem  $A$ . Równanie warunkowe:

$$\sum_i P_i \delta_{bi} - X \delta_{bb} = 0$$

pozwała wtedy obliczyć wartość reakcji poziomej, wywołanej dowolnym obciążeniem w przypadku przegubów zupełnie ustalonych.

II. Uwzględniając ogrzanie (równomierne) całej ramy, które w przypadku swobodnej przesuwalności przegubu  $B$  spowodowałoby jego przesunięcie o  $\delta_{bt}$  w kierunku  $-X$ , mamy równanie warunkowe dla  $X$ :

$$\sum_i P_i \delta_{bi} + \delta_{bt} - X \cdot \delta_{bb} = 0.$$

III. Przyjmując, że ustalenie przegubów nie jest zupełnie, przyczem wskutek poddania się podpór lub jakichkolwiek innych przyczyn zachodzi przesunięcie przegubu  $B$  o  $\delta_b$  w kierunku  $-X$ , otrzymujemy jako równanie dla  $X$ :

$$\sum_i P_i \delta_{bi} - \delta_b - X \cdot \delta_{bb} = 0.$$

Uwaga. Ściła ważność zasady wzajemności przesunięć jest oczywiście związana z ważnością zasady superpozycji, na której się opiera.

## 57. Ogólne równanie warunkowe dla reakcyj hiperstatycznych.

I. Gdy reakcje  $X_a, X_b, X_c, \dots$  nie wykonują pracy przy odkształceniu



## VI. Pręty zakrzywione.

Technicznie ważne przypadki pozwalają najczęściej na elementarne przybliżone obliczenia teoretyczne przy następujących założeniach:

1. Oś pręta jest krzywą płaską, a przekrój stały lub słabo zmienny w sposób ciągły.

2. Siły zewnętrzne leżą w płaszczyźnie osi pręta, która jest zarazem płaszczyzną główną dla każdego przekroju poprzecznego.

3. Materiał pręta podlega prawu Hooke'a i zasadzie superpozycji.

**58. Obliczenie naprężeń.** Sprowadzając przy powyższych założeniach siły zewnętrzne części pręta odciętej rozpatrywanym przekrojem (np. części prawej) do siły wypadkowej  $R$  (fig. 189), trafiającej przekrój w odległości  $v$  od środka  $O$ , mamy wogóle do czynienia z siłą podłużną  $N$ , poprzeczną  $T$  i momentem zginającym

$$M = Nv = Rv.$$

Naprężenia styczne, uwarunkowane siłą poprzeczną  $T$ , grają u prętów zakrzywionych najczęściej jeszcze mniejszą rolę niż u prętów prostych. W razie potrzeby można je w przybliżeniu wyznaczyć tak, jak gdyby pręt był prosty.

Naprężenia normalne składają się z naprężeń  $\sigma_N$ , wywołanych siłą podłużną i naprężeń  $\sigma_{zg}$ , wywołanych momentem zginającym  $M$ . Pierwsze

można z dostateczną dokładnością przyjąć jako rozłożone równomiernie w przekroju.

A zatem:

$$\sigma_N = \frac{N}{F}.$$

Drugie zaś oblicza się (również w przybliżeniu) z t. zw. „hipotezy płaskich przekrojów“ (jak dla prętów prostych), a właściwie z przyjęcia linowego rozkładu wydłużeń podłużnych włókien elementarnych, na obszarze przekroju poprzecznego. Z tego przyjęcia wynika hiperboliczny rozkład naprężeń zginających  $\sigma_{zg}$  w zależności od  $\eta$ , tj. odległości włókna od głównej osi przekroju prostopadłej do płaszczyzny obciążenia. Przyjmując, że dodatni kierunek rzędnych  $\eta$  wskazuje od środka krzywizny osi pręta, a dodatni moment  $M$  zwiększa krzywiznę, czyli zmniejsza promień krzywizny  $r$ , mamy:

$$\sigma_{zg} = \frac{M}{rF} + \frac{1}{k} \cdot \frac{M}{rF} \cdot \frac{\eta}{r + \eta} \quad (\text{wzór III. przybliżenia}),$$

przyczem stałą przekroju  $k$  (zawsze dodatnią) określa równanie:

$$k = -\frac{1}{F} \int \frac{\eta dF}{r + \eta}.$$

Całkowanie rozpocziera się tutaj na całe pole przekroju. Hiperbola wykresu naprężeń zginających przecina oś  $\eta$  w odległości:

$$\eta_0 = -\frac{k}{1 + k} \cdot r$$

od środka przekroju i ma asymptotę prostopadłą do przekroju, wystawioną w środku krzywizny osi pręta. Oś obojętna przy czystym zginaniu zbacza zatem od środka przekroju ku wklęsłej stronie osi pręta.

Liczba stała przekroju  $k$  maleje szybko z krzywizną  $\frac{1}{r}$  osi pręta przy niezmiennych wymiarach poprzecznych i da się wyznaczyć rachunkiem



lub wykreślnie. Jeżeli, jak to często bywa, rozmiary poprzeczne są niewielkie w stosunku do promienia  $r$  (łuki mostowe, sklepienia itp.), to z dostatecznym przybliżeniem jest:

$$k = \infty \frac{J}{r^2 F}, \text{ zaś } \eta_0 = -\frac{i^2}{r^2 + i^2} \cdot r,$$

przyczem  $J$  oznacza moment bezwładności przekroju względem osi, przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do płaszczyzny obciążenia, a  $i$  odpowiadające ramię bezwładności. Wtedy:

$$\sigma_{zg} = \infty \frac{M}{r F} + \frac{M}{J} \cdot \frac{r \eta}{r + \eta} \text{ (wzór II. przybliżenia).}$$

Dla jeszcze większych wartości  $r$  można pierwszy wyraz pominąć wobec drugiego, a w drugim zastąpić ułamek  $\frac{r}{r + \eta}$  przez 1.

A zatem w pierwszym przybliżeniu mamy:

$$\sigma_{zg} = \infty \frac{M}{J} \eta,$$

jak dla prętów prostych.

Przy jednoczesnym działaniu siły podłużnej  $N$  i momentu zginającego  $M (= Nv)$  określają tedy naprężenia normalne wzory następujące:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{J} \cdot \eta \dots \dots \dots \text{ (w I. przybliżeniu dla bardzo wielkich } r \text{).}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{r F} + \frac{M}{J} \cdot \frac{r \eta}{r + \eta} \dots \dots \dots \text{ (w II. przybliżeniu dla dość wielkich } r \text{).}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{r F} + \frac{1}{k} \cdot \frac{M}{r F} \cdot \frac{\eta}{r + \eta} \dots \dots \dots \text{ (w III. przybliżeniu).}$$

**59. Odkształcenia osi pręta.** Siła podłużna  $N$  nie zmienia krzywizny pręta, a tylko zmienia długość elementu  $ds$  jego osi w stosunku:

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF}.$$

Przyrost długości elementu  $ds$ , wywołany (dodatnim) momentem  $M$ , określa równanie:

$$\Delta ds = \frac{M}{r EF} \cdot ds.$$

Całkowitą zmianę długości  $s$  osi pręta określa przeto równanie:

$$\Delta s = \int \left( \frac{M}{r EF} + \frac{N}{EF} \right) ds.$$

Kąt elementarny  $d\alpha$  między dwoma sąsiednimi przekrojami przed odkształceniem zmienia się wskutek siły podłużnej o

$$\Delta d\alpha = \frac{N}{EF} d\alpha,$$

zaś wskutek momentu  $M$  o

$$\Delta d\alpha = \frac{M}{r EF} \left( 1 + \frac{1}{k} \right) d\alpha,$$

przyczem  $k$  ma to samo znaczenie co w ust. 56.

Całkowitą zmianę kąta  $\Delta \alpha$  na długości  $s$  przedstawia zatem wzór:

$$\Delta \alpha = \int \left[ \frac{M}{r^2 E F} \left( 1 + \frac{1}{k} \right) + \frac{N}{r E F} \right] ds \quad \text{w III. przybliżeniu,}$$

albo wzór: 
$$\Delta \alpha = \int \left[ \frac{M}{E J} \left( 1 + \frac{i^2}{r^2} \right) + \frac{N}{r E F} \right] ds \quad \text{w II. przybliżeniu,}$$

lub wreszcie: 
$$\Delta \alpha = \int \left( \frac{M}{E J} + \frac{N}{r E F} \right) ds \quad \text{w I. przybliżeniu.}$$

**60. Linja ugięcia.** Zmianę krzywizny  $\frac{1}{r}$  na  $\frac{1}{\rho}$ , wywołaną momentem  $M$ , i siłą podłużną  $N$  określa równanie:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{k r^2 E F} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M}{r E F} + \frac{N}{E F}} \quad (\text{w III. przybliżeniu}),$$

albo 
$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{E J} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M}{r E F} + \frac{N}{E F}} \quad (\text{w II. przybliżeniu}),$$

albo wreszcie 
$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{E J} \quad (\text{w I. przybliżeniu dla łuków niezbyt płaskich}).$$

Jeżeli oś pręta jest łukiem koła o promieniu  $R$ , to obrawszy początek  $O$  biegunowego układu współrzędnych (fig. 190) w środku koła i oznaczywszy przez  $R + y$  promień wodzący zgiętej osi, mamy przy założeniu, że  $y$  i  $\frac{dy}{d\varphi}$  są bardzo małe wobec  $R$ :

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = -\frac{y}{R^2} - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{d^2 y}{d\varphi^2} = -\frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{y}{R^2},$$

przyczem  $R d\varphi = ds$ . Równanie różniczkowe linii ugięcia w pierwszym przybliżeniu przybiera zatem postać:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -\frac{M}{E J} - \frac{y}{R^2},$$

odpowiadającą przybliżonemu równaniu linii ugięcia prętów prostych.

**61. Energia potencjalna (praca odkształcenia).** Pomijając wpływ naprężeń ścinających i odkształceń poprzecznych mamy w III. przybliżeniu:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \frac{M^2}{r^2 E F} ds + \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{E F} ds + \frac{M N}{r E F} ds,$$

jako wyrażenie dla energii potencjalnej elementu pręta o długości  $ds$ .

W II. przybliżeniu (tj. przy podstawieniu  $k = \frac{J}{F r^2}$ ) będzie:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{E J} ds + \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{r^2 E F} ds + \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{E F} ds + \frac{M N}{r E F} \cdot ds.$$

Nakoniec w I. przybliżeniu, tj. z opuszczeniem wyrazu drugiego i czwartego, otrzymamy to samo co dla prętów prostych.

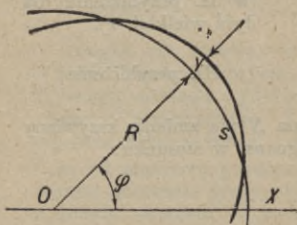


Fig. 190.

## VII. Płyty.

62. Zgięcie walcowe płyty. Sztywność zginania. Założywszy, że płaszczyzna środkowa płyty nie rozciąga się, ani kurczy w żadnym kierunku, czyli że spełnia rolę warstwy obojętnej, łatwo wywnioskować, że zgięcie walcowemu (o tworzących równoległych do osi  $X$ ) towarzyszą:

1. Naprężenia zginające główne  $\sigma_y$  (fig. 191), rozciągające lub ściskające włókna elementarne prostopadłe do tworzących walca, czyli równoległe do płaszczyzny zginania. Te  $\sigma_y$  są proporcjonalne względem odległości  $\eta$  od warstwy obojętnej.

2. Naprężenia zginające poprzeczne  $\sigma_x$  rozciągające lub ściskające włókna elementarne równoległe do tworzących walca, czyli prostopadłe do płaszczyzny zginania. Przytem jest

$$\sigma_x = \frac{1}{m} \sigma_y.$$

Fig. 191.

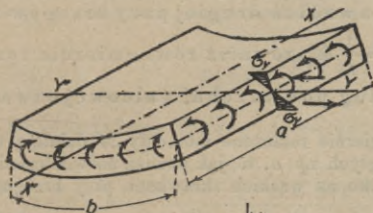
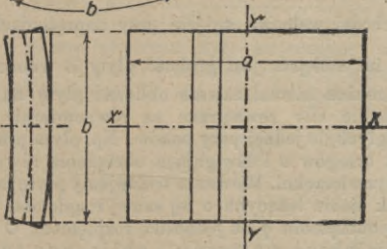


Fig. 192.



Naprężenia  $\sigma_x$  zapobiegają poprzecznemu zakrzywieniu przekrojów skrawków (prętów) elementarnych, na które dzielimy płytę w myśli płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny zgięcia (por. ust. 40 a). Tych naprężeń nie byłoby wcale przy zgięciu walcowem tylko wówczas, gdyby liczba Poisson'a była równą zeru.

Krzywiznę główną zgięcia walcowego określa wzór:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot EJ}, \text{ przyczem } J = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot h^3$$

oznacza moment bezwładności prostokątnego przekroju skrawka płyty o szerokości 1, a grubości  $h$ , zaś  $M$  oznacza moment sił wewnętrznych w tymże przekroju tworzących parę zginającą.

Wielkość  $\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot J = \bar{B}$  jest miarą sztywności zginania płyty, podobnie jak  $EJ = B$  jest miarą sztywności zginania belki. A zatem: Sztywność

zginania walcowego płyty  $\bar{B}$  jest  $\frac{m^2}{m^2 - 1}$  razy większa od sztywności zginania pręta  $B$  z tego samego materiału przy równych momentach bezwładności przekroju.

Ponieważ  $m \geq 2$ , przeto  $\bar{B} \leq \frac{4}{3} B$ , skąd widać znaczenie liczby Poisson'a w teorii płyt. (Dla  $m = \infty$  jest  $\bar{B} = B$ .)

Gdy zgięcie zachodzi według walca kołowego, to wyciąwszy w myśli prostokątną część płyty przekrojami wzdłuż tworzących walca i prostopadłymi do nich (fig. 192), otrzymujemy równomierny rozkład momentów zginających  $M_y$  wzdłuż dwu pierwszych i równomierny rozkład momentów zginających  $M_x$  wzdłuż dwu drugich przekrojów. Wszystkie momenty  $M_x$  i  $M_y$  dokoła prostokątnej części płyty tworzą układ sił zewnętrznych czyniący zadość ogólnym warunkom równowagi. A zatem:

Jeżeli wzdłuż jednej pary brzegów równoległych  $a$  płyty prostokątnej działają równomiernie rozmieszczone momenty zginające  $M_y$ , a wzdłuż drugiej pary brzegów równoległych  $b$  momenty  $M_x = \frac{1}{m} M_y$ , również równomiernie rozłożone, to płyta zgina się według powierzchni walcowej o tworzących równoległych do  $a$ .

Skoro równomiernie rozłożone momenty  $M$  działają tylko na jedną parę brzegów równoległych np.  $a$ , to, jak pouczy doświadczenie, różni się zgięcie od walcowego tylko na wąskich skrawkach przy brzegach  $b$ . W środkowej części płyty zachodzi walcowe zgięcie przy naprężeniach  $\sigma_y$  i  $\sigma_x = \frac{1}{m} \sigma_y$  tem dokładniej, im mniejsza jest grubość płyty  $h$  wobec  $a$ .

W praktyce można niemal zawsze obliczać płytę na zginanie walcowe, jeżeli tylko wszelkie siły zewnętrzne są równomiernie rozłożone wzdłuż prostych równoległych do jednej pary boków. Np. płyta prostokątna swobodnie podparta wzdłuż brzegów  $a$  i dźwigająca obciążenie równomiernie rozłożone  $q \text{ kg/cm}^2$  na całej powierzchni. Wówczas traktujemy płytę jako belkę, względnie układ belek obok siebie leżących o tej samej rozpiętości  $b$ , przekroju prostokątnym  $1, h$  i o obciążeniu  $q$  na jednostkę rozpiętości. O wytrzymałości decyduje największa wartość  $\sigma_y$ , obliczona tak jak dla belki, a wpływ  $\sigma_x$  można z reguły pominąć. Tylko przy obliczaniu ugięć należy pamiętać o wprowadzeniu sztywności zginania płyty:

$$\bar{B} = \frac{m^2}{m^2 - 1} E J.$$

Jeżeli płyta jest podparta lub utwierdzona brzegami równoległymi  $ru$  i  $ch$  (ust. 41), to wskutek zgięcia zbliżają się brzegi płyty. Nierzadko brzegi płyty są podparte lub utwierdzone stale, wskutek czego powstają reakcje rozciągające płytę w kierunku rozpiętości, a zarazem zmniejszające momenty zgięcia. Szczegółowe obliczenie w tych przypadkach por. Timoszenko: „Kurs wytrz. Materj.“, § 145.

63. Ogólne zgięcie płyty. (Energja potencjalna zgiętej płyty.)  
 a) Przy ogólnem zgięciu płyty zamienia się płaszczyzna środkowa, położąca jej grubość  $h$  na powierzchnię bardzo słabo zakrzywioną, zwaną powierzchnią ugięcia. Jej równanie ma postać  $w = f(x, y)$ . Niechaj  $\rho_1$  i  $\rho_2$  oznaczają promienie krzywizny głównych przekrojów normalnych, wzajemnie prostokątnych, poprowadzonych w dowolnym punkcie powierzchni ugięcia,

którego spólrzędne przed ugięciem  $(x, y, o)$  zmieniły się na  $(x, y, w)$ . Element płyty (fig. 193), wycięty przekrojami równoległymi do głównych, ma w płaszczyźnie środkowej wymiary  $d s_1$  i  $d s_2$ . W warstwach, leżących w odległości  $z$  od tej płaszczyzny, doznają te wymiary wydłużeń głównych w stosunku:

$$\varepsilon_1 = \frac{z}{\rho_1} \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = \frac{z}{\rho_2}.$$

Wydłużeniom głównym  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  towarzyszą (główne) normalne naprężenia:

$$\sigma_1 = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} z \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_2} \right),$$

$$\sigma_2 = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot z \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_1} \right).$$

Odpowiadające momenty zgięcia, działające na ściany boczne elementu, mają w odniesieniu do jednostki szerokości wartość:

$$M_1 = \bar{B} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_2} \right); \quad M_2 = \bar{B} \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_1} \right).$$

Dla energii potencjalnej (pracy odkształcenia) elementu mamy wyrażenie:

$$dL = \frac{1}{2} \left( \frac{M_1}{\rho_1} + \frac{M_2}{\rho_2} \right) d s_1 d s_2 = \frac{\bar{B}}{2} \left[ \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \right] d s_1 d s_2. \quad (1191)$$

b) Skoro ściany boczne elementu płyty zorjentujemy według obranych osi spólrzędnych, to  $dx$  i  $dy$  są wymiarami jego w płaszczyźnie środkowej. Na ścianach bocznych elementu (fig. 194 a i b) działają teraz (w płaszczyźnie

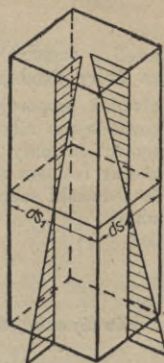


Fig. 193.

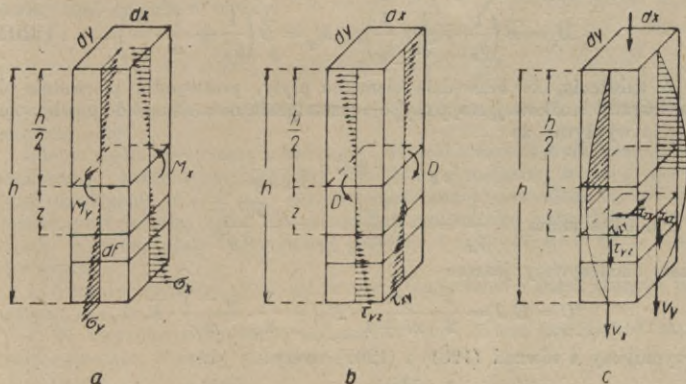


Fig. 194.

$XY$ , równoległej do płaszczyzny płyty) obok naprężeń normalnych  $\sigma_x$ , względnie  $\sigma_y$ , także naprężenia styczne  $\tau_{xy}$ , względnie  $\tau_{yx}$ , przyczem  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Wartości  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  określają dwuwymiarowy stan napięcia w warstwie elementarnej równoległej, do płaszczyzny środkowej o grubości  $d z$ . Ponieważ:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \vartheta + \sigma_2 \sin^2 \vartheta; \quad \sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \vartheta + \sigma_2 \cos^2 \vartheta;$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\vartheta,$$

jeżeli  $\vartheta$  oznacza kąt nachylenia do osi  $x$  głównego przekroju normalnego, na który działają tylko naprężenia  $\sigma_1$ ; przeto naprężenia styczne  $\tau_{xy}$  są również proporcjonalne względem odległości  $z$  od warstwy obojętnej. Odpowiadające siły, działające na ścianę boczną elementu, sprowadzają się znowu do pary. Jej moment, jako prostopadły do płaszczyzny ściany, tworzy moment skręcający. Oznaczmy przez  $D$  jego wartość odniesioną do jednostki szerokości przekroju (widocznie równą dla obu ścian elementu), mamy:

$$D = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz \dots \dots \dots (1201)$$

Zważywszy, że

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_y dz,$$

widzimy, że między  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $D$  a momentami  $M_1$ ,  $M_2$  w przekrojach głównych, zachodzą takie same związki, jak między  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  a  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , a mianowicie:

$$M_x = M_1 \cos^2 \vartheta + M_2 \sin^2 \vartheta, \quad M_y = M_1 \sin^2 \vartheta + M_2 \cos^2 \vartheta.$$

$$D = \frac{1}{2} (M_1 - M_2) \sin 2\vartheta.$$

Oznaczmy przez  $\rho_x$  i  $\rho_y$  promienie krzywizny przekrojów  $XZ$  i  $YZ$  powierzchni ugięcia, mamy analogicznie jak wyżej:

$$M_x = \bar{B} \left( \frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_y} \right); \quad M_y = \bar{B} \left( \frac{1}{\rho_y} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_x} \right) \dots (1202)$$

Z założenia, że krawędzie elementu płyty, prostopadłe pierwotnie do płaszczyzny środkowej, stają się po odkształceniu normalnemi do powierzchni ugięcia wypływa, że

$$\tau_{xy} = -2 G z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Ponieważ nadto  $\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ,

przeto oznaczwszy jeszcze

$$C = GJ = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot EJ = \frac{1}{2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \bar{B},$$

otrzymujemy z równań (1201) i (1202) wzory:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); & M_y &= -\bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ D &= -\frac{m-1}{m} \bar{B} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Te wzory pozwalają obliczyć momenty zginające i skręcające, a więc i naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  w dowolnem miejscu płyty z danej powierzchni ugięcia w postaci równania  $w = f(x, y)$ .

Energję potencjalną (pracę odkształcenia) elementu o polu  $dx \cdot dy$  znajdziemy, dodając do pracy zginania, wyrażonej według (1191) w postaci:

$$dL_{zg} = \frac{\bar{B}}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{2}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy,$$

pracę skręcania:

$$dL_{skr} = \frac{m-1}{m} \bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

albowiem obie prace są od siebie niezależne.

A zatem:

$$dL = \frac{\bar{B}}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{2}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{m-1}{m} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Uwaga. W najogólniejszym przypadku działają na ścianach elementu płyty jeszcze siły poprzeczne  $V_x$  (na ścianach prostopadłych do  $x$ ),  $V_y$ , wywołujące naprężenia ścinające  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$  (fig. 194 c), rozłożone jak w belce prostokątnej parabolicznie, a wreszcie siły podłużne. Wpływ sił poprzecznych na pracę odkształcenia jest najczęściej tak nieznacznym, że nie potrzeba dodawać odpowiedniego wyrazu do wyrażenia dla  $dL$ . Atoli w przypadku sił podłużnych będzie uzupełnienie wyrażenia dla  $dL$  najczęściej koniecznym.

**64. Siły poprzeczne i równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty. Warunki krańcowe.** Z warunku równowagi (warunek momentów) elementu płyty wypływają analogicznie do równania  $T = \frac{dM}{dx}$  dla prętów zginanych następujące wyrażenia dla sił poprzecznych, odniesionych do jednostki szerokości przekroju:

$$V_x = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}; \quad V_y = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y}.$$

Zaś z warunku rzutów na oś  $Z$  otrzymujemy równanie różniczkowe powierzchni ugięcia w postaci:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B},$$

przyczem  $p$  oznacza obciążenie płyty (jako funkcja  $x, y$ ), odniesione do jednostki pola.

Ażeby całka powyższego równania różniczkowego dawała rozwiązanie konkretnego zadania zgięcia płyty obciążonej i podpartej w dany sposób, musi rozwiązanie  $w = f(x, y)$  czynić jeszcze zadość warunkom krańcowym. Rozpatrzmy je tutaj tylko dla przypadku swobodnego podparcia i utwierdzenia brzegów płyty pomyślanej poziomo i obciążonej z góry siłami pionowymi.

1. Przedewszystkiem musi być w obu przypadkach wzdłuż brzegów podpartych  $w = 0$ .

2. W wypadku swobodnego podparcia brzegu muszą tam znikać naprężenia zginające, a zatem musi być:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

W wypadku doskonałego utwierdzenia momenty zginające nie znikają; natomiast wzdłuż brzegów utwierdzonych musi być:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

czyli styczne do powierzchni ugięcia muszą być poziome.

3. W obu przypadkach muszą zniknąć naprężenia styczne poziome. Jednakże z tego nie wynika, aby musiało być  $D = 0$ , względnie  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$ ; albowiem momenty skracające, rozmieszczone w sposób ciągły wzdłuż brzegu płyty, są statycznie równoważne siłom pionowym o wielkości  $\frac{\partial D}{\partial s}$  odniesionej do jednostki długości podpartego brzegu płyty (jeżeli  $ds$  oznacza element tej długości; fig. 195). Te siły zaś są zrównoważone dodatkowymi reakcjami podparcia  $R''$ , które wraz z reakcjami  $R'$ , określonymi wartością sił poprzecznych  $V$  wzdłuż brzegu podpartego tworzą reakcje całkowite  $\hat{R} = R' + R''$  (odniesione do jednostki długości). Przytem jest:

$$R' = -V; \quad R'' = -\frac{\partial D}{\partial s}.$$

Gdy podparty brzeg płyty załamuje się pod kątem prostym tworząc róg (fig. 196), a  $D$  w tem miejscu nie znika, natenczas obok dodatkowych reakcyj  $\hat{R}$

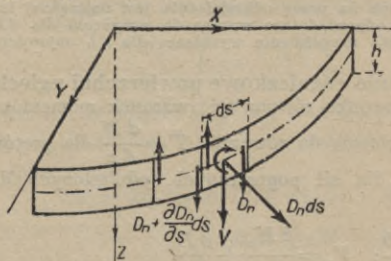


Fig. 195.

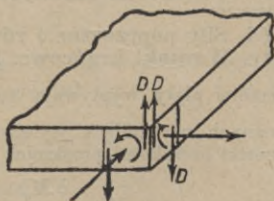


Fig. 196.

wzdłuż brzegów potrzeba do zrównoważenia momentów skracających w rogu jeszcze siły skupionej  $\hat{R} = -2D$ , zwanej reakcją narożną.

65. Kuliste zgięcie płyty. Naprężenia termiczne. Przy kulistym zgięciu płyty musi być widocznie  $M_1 = M_2$ ,  $D = 0$  w każdym przekroju, a więc i wzdłuż brzegów płyty o dowolnej postaci, czyli: Momenty zginające  $\hat{M}$  (jako siły zewnętrzne), rozłożone równomiernie wzdłuż brzegu płyty wywołują jej zgięcie kuliste o promieniu:

$$R = \frac{\bar{B}}{M} \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{Eh^3}{12M}.$$

Zgięcie kuliste może także powstać bez udziału sił zewnętrznych, gdy płyta o brzegach swobodnych tworzy ścianę oddzielającą dwie przestrzenie o różnych temperaturach. Przyjawszy wtedy jednostajny spadek temperatury na grubości płyty i oznaczywszy temperaturę obu powierzchni zewnętrznych przez

$$t + \frac{\Delta t}{2} \quad \text{i} \quad t - \frac{\Delta t}{2},$$

mamy dla promienia środkowej kulistej powierzchni wygięcia wyrażenie:

$$R = \frac{h}{\alpha \Delta t},$$

przyczem  $\alpha$  oznacza współczynnik termicznego wydłużenia materiału płyty.

Gdy brzegi takiej płyty są doskonale utwierdzone, to wzdłuż brzegów powstają reakcyjne momenty zginające  $M$ , które zapobiegają kulistemu



zgięciu płyty wskutek nierównego ogrzania obu ścian. Te momenty obliczymy z porównania prawych stron obu powyższych wyrażeń dla  $R$ , a mianowicie:

$$M = \frac{m}{m-1} \cdot E \cdot \frac{h^2}{12} \alpha \Delta t.$$

Ich wielkość określa odpowiadające naprężenia termiczne w płycie:

$$\sigma = \frac{6M}{h^2}.$$

Gdy utwierdzenie brzegów płyty nie jest doskonałe, to oczywiście naprężenia termiczne się zmniejszą.

**66. Środkowo symetryczne zgięcie płyt okrągłych** zachodzi w szczególnie prostej postaci, jeżeli obciążenia i reakcje są równomiernie rozłożone na okręgach kół współśrodkowych z płytą. Wówczas ugięcia  $w$ , siły wewnętrzne itd. są funkcjami jednej zmiennej, tj. promienia wodzącego  $r$ , a równanie różniczkowe powierzchni ugięcia przybiera postać:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = \frac{p}{B},$$

przy czym  $p$  w  $kg/cm^2$  oznacza obciążenie właściwe płyty.

W przypadku gdy  $p = \text{stała} = q$ , a nadto w środku działa siła skupiona  $I$ , jest ogólnym rozwiązaniem powyższego równania:

$$w = \frac{qr^4}{64B} + \frac{Pr^2}{8\pi B} (\log r - 1) - \frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \log r + C_3.$$

a) Płyta okrągła o promieniu  $R$  całkowicie równomiernie obciążona i dokoła doskonale utwierdzona. Momenty zginające  $M_r$  (w przekrojach elementarnych prostopadłych do promieni) i momenty zginające obwodowe  $M_t$  (w przekrojach radialnych) określają wzory:

$$M_r = \frac{q}{16} \cdot \left[ R^2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) - r^2 \left( 3 + \frac{1}{m} \right) \right],$$

$$M_t = \frac{q}{16} \cdot \left[ R^2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) - r^2 \left( 1 + \frac{3}{m} \right) \right].$$

Wartości skrajne przyjmują  $M_r$  na utwierdzonym obwodzie, zaś  $M_t$  w środku płyty, a mianowicie:  $M_r$  (dla  $r = R$ ) =  $-\frac{qR^2}{8}$ , albo =  $-\frac{ql^2}{32}$  jeżeli  $l = 2R$  oznacza średnicę (rozpiętość) płyty.

$$M_t \text{ (dla } r = 0) = M_r = \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{qR^2}{16} = \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{ql^2}{64}.$$

Niebezpieczne miejsce leży zatem na obwodzie.

Strzałka ugięcia w środku płyty:

$$f = \frac{qR^4}{64B} = \frac{ql^4}{1024B}.$$

b) Płyta okrągła całkowicie równomiernie obciążona i dokoła swobodnie podparta.

$$M_r = \frac{q}{16} \left( 3 + \frac{1}{m} \right) (R^2 - r^2); \quad M_t = \frac{q}{16} \left[ \left( 3 + \frac{1}{m} \right) R^2 - \left( 1 + \frac{3}{m} \right) r^2 \right];$$

$$\max M_t = \max M_r \text{ (dla } r = 0) = \left( 3 + \frac{1}{m} \right) \frac{qR^2}{16} = \left( 3 + \frac{1}{m} \right) \frac{ql^2}{64};$$

$$w_{r=0} = f = \frac{5m+1}{m+1} \cdot \frac{qR^4}{64B} = \frac{5m+1}{m+1} \cdot \frac{ql^4}{1024B}.$$

c) Płyta okrągła obciążona siłą skupioną  $P$  w środku i dookoła doskonale utwierdzona.

$$M_r = \frac{P}{4\pi} \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{R}{r} - 1 \right]; \quad M_t = \frac{P}{4\pi} \cdot \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{R}{r} - \frac{1}{m} \right].$$

Skrajne wartości momentów na utwierdzonym obwodzie są:

$$M_r = -\frac{P}{4\pi}; \quad M_t = -\frac{1}{m} \frac{P}{4\pi}.$$

Te wartości są niezależne od promienia (rozpiętości) płyty. Drugie skrajne wartości (maximum momentów dodatnich) w środku płyty wypadają z powyższych wzorów nieskończenie wielkie, z czego wynika, że w teorii zgięcia płyt nie można schematyzować obciążenia skupionego analogicznie do teorii zgięcia prętów, lecz trzeba zgodnie z rzeczywistością, przyjąć rozłożenie siły skupionej na pewnym polu skończonym o promieniu  $R_0$ . Atoli dla obliczenia strzałki ugięcia  $f$  okazał się schemat obciążenia  $P$  skupionego w punkcie zupełnie wystarczającym, a mianowicie:

$$f = \frac{PR^2}{16\pi B} = \frac{3}{16\pi} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{Pl^2}{Eh^3} = \left[ 0,0597 \frac{m^2 - 1}{m^2} \right] \cdot \frac{Pl^2}{Eh^3}.$$

d) Płyta okrągła obciążona siłą skupioną  $P$  w środku i dookoła swobodnie podparta.

$$M_r = \frac{P}{4\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{R}{r}; \quad M_t = \frac{P}{4\pi} \cdot \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{R}{r} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right],$$

$$f = \frac{3m + 1}{m + 1} \cdot \frac{3PR^2}{16\pi B} = 0,0597 \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{Pl^2}{Eh^3}.$$

Przy założeniu, że  $P$  rozkłada się równomiernie na polu kołowym o promieniu  $R_0$ , otrzymujemy dla największego momentu w środku wyrażenie:

$$M_{\max} = \frac{P}{4\pi} \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{R}{R_0} + 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{R_0^2}{4R^2} \right].$$

Uwaga. Przy obciążeniu silnie skupionem decydują o wytrzymałości płyty nie tyle naprężenia zginające (momenty zginające), ile siły poprzeczne, albo też ciśnienie  $\sigma_z$  prostopadłe do powierzchni płyty. W przypadkach (c) i (d) powstaje największa siła poprzeczna  $V$  na obwodzie koła o promieniu  $R_0$ , przyczem

$$V = \frac{P}{2\pi R_0}.$$

Przyjąwszy paraboliczny rozkład naprężeń ścinających  $\tau$ , znajdujemy:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{4} \frac{P}{\pi R_0 h}.$$

Średnią wartość ciśnienia  $\sigma_z$  obliczymy łatwo według wzoru:

$$\text{śred } \sigma_z = \frac{P}{\pi R_0^2}.$$

Przy obliczeniu płyt ze względu na wytrzymałość należy przeto baczyć, aby tak naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , uwarunkowane momentami zginającymi, jak i naprężenia styczne  $\tau_{\max}$  i ciśnienia poprzeczne  $\sigma_z$  nie przekroczyły wartości bezpiecznej.

Ze względów konstrukcyjnych wystaje bregz płyty mniej lub więcej poza linię podparcia. Podczas gdy wystawianie belki poza podpory nie ma żadnego wpływu na jej zgięcie pod obciążeniami rozmieszczonymi między podporami, to wystająca część płyty zwiększa wydatnie jej odporność na obciążenie rozpostarte w obrębie linii podparcia. Współdziałanie wystającej części płyty objawia się najsilniej w przypadku kołowej, kwadratowej itp. linii podparcia.

67. Płyta prostokątna dookoła swobodnie podparta. Jeżeli podparcie płyty pomyślanej poziomo dopuszcza reakcje podporowe z obu stron, to przy obciążeniu  $p \text{ kg/cm}^2$ , rozłożonym dowolnie, można znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego powierzchni ugięcia (ust. 62) w postaci szeregow nieskoń-

zonych (por. autora: „Teoria płyt“, str. 56), a stąd obliczyć strzałkę ugięcia, momenty, siły poprzeczne i reakcje. Tutaj ograniczymy się tylko do podania kilku najprostszych i najważniejszych wyników, odsyłając zresztą do „Teorii płyt“. Doświadczenia potwierdzają główne teoretyczne wyniki wcale dokładnie nawet wtedy, gdy podparcie jest jednostronne i nie mogą powstać reakcje narożnikowe, zapobiegające podniesieniu się rogów płyty, byleby tylko podpory linjowe były dostatecznie sztywne w porównaniu do sztywności samej płyty.

Dla uproszczenia wzorów wprowadzamy t. zw. momenty zastępcze  $M_1'$ ,  $M_2'$  określone równaniami:

$$M_1' = \frac{\bar{B}}{\rho_1} = -\bar{B} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad M_2' = \frac{\bar{B}}{\rho_2} = -\bar{B} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Rzeczywiste momenty zginające  $M_1$  i  $M_2$  wyrażają się zatem przez powyższe wzorami:

$$M_1 = M_1' + \frac{1}{m} M_2'; \quad M_2 = M_2' + \frac{1}{m} M_1'.$$

a) Wzory I-go przybliżenia dla momentów zginających wskutek całkowitego obciążenia równomiernego  $q$   $kg/cm^2$ .

Przyjawszy w przybliżeniu rozmieszczenie reakcyj wzdłuż boków  $a$  i  $b$  według wykresu (fig. 197), znajdujemy dla średniej wartości momentu zgina-

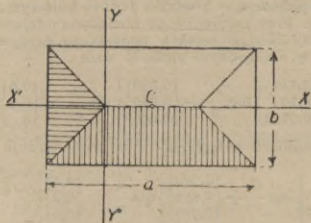


Fig. 197.

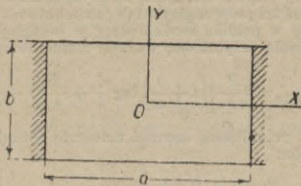


Fig. 198.

jącego  $M_2$  (odniesionego do jednostki szerokości) w przekroju niebezpiecznym  $XX'$  i średniej wartości momentu  $M_1$  w przekroju  $YY'$  wyrażenia:

$$M_2 = \frac{1}{24} \left( 3 - 2 \frac{b}{a} \right) q b^2 \dots \quad M_1 = \frac{1}{24} q b^2 \dots \dots \dots (1290)$$

Porównanie ze ścisłymi obliczeniami największych wartości  $M_1$  i  $M_2$  poucza, że powyższe wzory określają te wartości z przybliżeniem wystarczającym dla wielu celów praktycznych. (Por. M. T. Huber „Prosty sposób obliczania płyt prostokątnych ...“. Czas. techn. 1919.)

b) Wzory interpolacyjne II-go przybliżenia, obliczone na podstawie ścisłych rozwiązań dla obciążenia równomiernie rozłożonego na całej płycie. Momenty zastępcze.

W środku płyty  $C$  mają momenty zastępcze wartości:

$$M_1' = \frac{17,2 \varepsilon^2 \cdot q b^2}{(\varepsilon^2 + 1)^2 (\varepsilon^4 + 8,5 \varepsilon^2 + 107)}; \quad M_2' = \left( 0,125 + \frac{0,19 \varepsilon}{3 \varepsilon^2 - 2,83 \varepsilon + 8,4} \right) \frac{\varepsilon^4 q b^2}{(\varepsilon^2 + 1)^2}$$

przyczem 
$$\varepsilon = \frac{a}{b} \quad (a \geq b).$$

Strzałka ugięcia w środku płyty:

$$f = \left( 0,013 + \frac{0,0073 \varepsilon}{1,3 + \varepsilon^2} \right) \frac{\varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + 1)^2} \cdot \frac{q b^4}{B}.$$

W szczególności dla płyty kwadratowej o boku  $a$  wypada dokładnie:

$$M_1' = M_2' = 0,0368 q a^2; \quad f = 0,00406 \frac{q a^4}{B} = \frac{1}{246,3} \cdot \frac{q a^4}{B}$$

$$M_1 = M_2 = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdot 0,0368 q a^2.$$

c) Siła skupiona  $P$  w środku płyty wywołuje ugięcia:

$$f = \frac{P b^2}{2 \pi^3 B} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n^3} \frac{S h \cdot n \pi \varepsilon - n \pi \varepsilon}{C h n \pi \varepsilon + 1} \dots \text{ (wzór ścisły) (1301)}$$

W szczególności dla płyty kwadratowej wypada z dokładnością 0,1%:

$$f = \frac{1}{86,5} \cdot \frac{P a^2}{B} = 0,01156 \frac{P a^2}{B}.$$

Skupienie obciążenia w środku płyty kwadratowej zwiększa przeto strzałkę ugięcia niemal trzykrotnie (dokładniej 2,85 razy). Odpowiadające zwiększenie momentu zginającego jest, oceniając z grubszą, przynajmniej czterokrotne. Dokładniejsze obliczenie jest możliwe tylko przy bliższym określeniu wymiarów skończonego pola, na które siła  $P$  się przenosi. Rozważania teoretyczne A. i L. Föppla (Drang und Zwang — tom I, § 30) prowadzą do następującego przybliżonego obliczenia niebezpiecznych momentów zginających pod siłą skupioną  $P$ , działającą na płytę dokoła swobodnie podpartą, o konturze bądź to kołowym, bądź też prostokątnym lub jakimkolwiek wypukłym. Przy założeniu, że obciążone miejsce leży w pobliżu środka płyty w odległości  $d$  od najbliższego punktu podpartego brzegu określa przybliżoną wartość momentu zginającego w obciążonym punkcie wzór:

$$M_{\max} = \frac{P}{4\pi} \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{d}{h} + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right] = P \left[ \begin{matrix} 0,119 \\ 0,103 \\ 0,0796 \end{matrix} \right] \log \frac{d}{h} + \begin{matrix} (0,030) \\ (0,040) \\ (0,060) \end{matrix} \text{ dla } \frac{1}{m} = \begin{matrix} (0,5) \\ (0,3) \\ (0) \end{matrix}$$

zaś przybliżoną wartość momentu zginającego w punktach odległych o  $r$  od tegoż punktu wzór:

$$M = \frac{P}{4\pi} \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{d}{r} + 1 - \frac{1}{m} \right] = \left[ \begin{matrix} 0,119 \\ 0,103 \\ 0,0796 \end{matrix} \right] \log \frac{d}{r} + \begin{matrix} (0,040) \\ (0,053) \\ (0,080) \end{matrix} \text{ dla } \frac{1}{m} = \begin{matrix} (0,5) \\ (0,3) \\ (0,0) \end{matrix}.$$

68. Płyta bardzo długa\* o brzegach równoległych swobodnie podpartych. Pod obciążeniem całkowitem równomiernie rozłożonym ( $q \text{ kg/m}^2$ ) zachodzi (por. ust. 60), zgięcie walcowe. Obliczenie największego momentu zginającego i strzałki ugięcia wykonywa się przeto dla skrawka poprzecznego płyty o szerokości 1 tak, jak dla belki o przekroju prostokątnym  $1h$ . Tylko na końcach płyty ma ugięcie inny charakter, zależny oczywiście od sposobu ewentualnego ustalenia brzegów poprzecznych [krótkich boków prostokątnego konturu płyty<sup>1)</sup>].

Natomiast obciążenie częściowe płyty, czyto polowe (powierzchniowe), czy też linjowe lub wreszcie punktowe, wywołuje ugięcie odczuwalne tylko w odległości mniejszej od 1,5-krotnej rozpiętości (szerokości  $b$ ) płyty. (Odległość należy przytem mierzyć od konturu obciążonego pola.) Obustronny zasięg działania ciężaru skupionego obejmuje tedy część długości płyty równą  $3b$ .

W praktyce określa się działanie płytowe zwykle tą szerokością poprzecznego skrawka płyty, traktowanego jako belka, na którą trzeba rozłożyć dane obciążenie skupione, aby wyteżenie materiału było w obu przypadkach równe. Taka szerokość zastępuje, czyli równoważna  $s$ , da się wyznaczyć teoretycznie lub doświadczalnie i okazuje się oczywiście zależną od koncentracji obciążenia i tak:

<sup>1)</sup> Badaniem stanu napięcia i odkształcenia w tych miejscach zajmują się prace: A. Nádaí „Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten“, Berlin 1916, M. T. Huber „Teoria płyt“ Lwów 1921.

a) Przy obciążeniu linjowem, równomiernie rozłożonem na całej rozpiętości, jest teoretycznie  $s_r = (0,90 \text{ do } 1,35) b$ , średnio  $\infty 1,1 b$  przy  $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$  do 0.

b) Przy obciążeniu linjowem, skupionem na długości  $\frac{1}{9} b$  w środku rozpiętości (porównywanem z działaniem siły skupionej), wypada („Teoria płyt“, str. 74)  $s_r = (0,61 \text{ do } 0,92) b$ , średnio  $\infty \frac{3}{4} b$  przy  $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$  do 0.

Uwaga. Powyższe wyniki teorii są w dobrej zgodzie z nowszymi doświadczeniami Niem. Wydz. Żelbetowego (zesz. 44), z których przy obciążeniu praktycznie skupionem wynioskowano, że  $s_r = b$ . Dawniejsze przyjęcie  $s_r = \frac{2}{3} b$  widocznie nie doceniało korzyści działania płytowego.

69. Płyta prostokątna o brzegach podłużnych (a) podpartych i poprzecznych (b) utwierdzonych (doskonale). a) Wzory I-go przybliżenia dla niebezpiecznych momentów zginających przy całkowitem obciążeniu równomiernem  $q \text{ kg/cm}^2$ . W środku płyty (fig. 198):

$$M_1 = \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{5 + \varepsilon^4} q a^2; \quad M_2 = \frac{1}{8} \frac{\varepsilon^4}{5 + \varepsilon^4} q b^2.$$

W środku brzegu utwierdzonego:

$$M_1 = - \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{5 + \varepsilon^4} q a^2.$$

Dokładność praktycznie wystarczająca przy wartościach  $\varepsilon = \frac{a}{b}$ , niezbyt różniących się od 1.

b) Wzory dokładne (por. „Teoria płyt“, § 18) nie nadają się do bezpośredniego praktycznego zastosowania. Zastąpi je tablica A, obliczona z tych wzorów dla przypadku całkowitego obciążenia równomiernie rozłożonego ( $q \text{ kg/cm}^2$ ).

Tablica A.

Stosunek boków $\varepsilon = \frac{a}{b}$	Spółczynniki $\psi$ Strzałki ugięcia $f = \psi \frac{q b^4}{B}$	Niebezpieczne momenty zginające przy wartości liczby Poisson'a $m = \frac{10}{3}$				Zastępcze niebezpieczne momenty (niezależne od liczby Poisson'a)			
		W środku płyty		W środku brzegu utwierdzonego		W środku płyty		W środku brzegu utwierdzonego	
		$M_1/q b^2$	$M_2/q b^2$	$M_1/q b^2$	$M_2/q b^2$	$M_1'/q b^2$	$M_2'/q b^2$	$M_1'/q b^2$	$M_2'/q b^2$
0,4	0,000019	0,0069	0,0009	-0,01225	-0,0087			-0,0122	0
0,6	0,000294	0,0151	0,0041	-0,02975	-0,0089			-0,0300	0
0,8	0,000913	0,02465	0,0124	-0,0499	-0,0150	0,0230	0,0055	-0,0499	0
1	0,00189	0,0334	0,0239	-0,06975	-0,0209	0,0288	0,0153	-0,0698	0
$\frac{3}{4} = 1,25$	0,00355	0,0413	0,0411	-0,0904	-0,0271	0,0318	0,0315	-0,0904	0
$\frac{2}{3} = 1,667$	0,00647	0,0473	0,0691	-0,1114	-0,0334	0,0292	0,0603	-0,1114	0
$\frac{3}{2} = 2,5$	0,01051	0,0448	0,1045	-0,1234	-0,03705	0,0148	0,1001	-0,1234	0
$\infty$	0,01302	0,0375	0,125	-0,125	-0,0375	0,0000	0,125	-0,125	0

70. Płyta prostokątna dokoła doskonale utwierdzona. Wzory interpolacyjne oparte na dokładnych rozwiązaniach teorii płyt przy całkowitem obciążeniu równomiernie rozłożonem; ważne dla  $\infty > \varepsilon \geq 1$ .

a) Strzałka ugięcia w środku płyty:

$$f = \frac{0,00260 + \frac{0,00103}{\varepsilon} - \frac{0,00036}{\varepsilon^2}}{1 + \frac{4}{7} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \cdot \frac{q b^4}{B}$$

b) Momenty zastępcze w środku płyty:

$$M_1' = \frac{0,0659}{1,35 + (1,57 \varepsilon - 1)^4} \cdot \frac{q b^2}{1 + \frac{4}{7} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}}$$

$$M_2' = \left[ 0,0417 + \frac{0,00237 \varepsilon^2}{0,657 + (\varepsilon - 1)^4} \right] \frac{q b^2}{1 + \frac{4}{7} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}}$$

c) Niebezpieczny moment utwierdzenia w środku krótszego boku  $b$ :

$$M_2 = - \frac{0,0833 + \frac{0,0122}{\varepsilon} + \frac{0,0300}{\varepsilon^2}}{1 + \frac{4}{7} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \cdot q b^2$$

71. Płyta ciągła na prostokątnej sieci podpór. Rozróżniamy 1. podpory linjowe, zrealizowane praktycznie przez ściany, mury lub belki podpierające płytę wzdłuż prostych, wyznaczających sieć prostokątów o długości  $a$  i szerokości  $b$ ; 2. podpory punktowe, utworzone przez słupy (filary), podpierające płytę w wierzchołkach sieci prostokątów. Ten drugi przypadek jest szczególnie ważny w zastosowaniu do t. zw. stropów grzybkowych (fig. 199), (por. dział: „Żelbetnictwo“). Ścisłą teorią zajmował się dr. Lewe

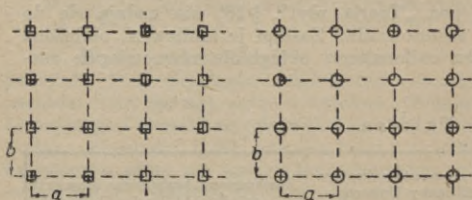


Fig. 199.

(Die strenge Lösung des Pflzdeckenproblems, „Bauingenieur“ 1920, H. 22), podając dokładne rozwiązania dla wielu przypadków przy założeniu równokierunkowości płyty. Zastosowanie w praktyce ułatwiają liczne tablice, zawarte w pracy dra Lewe'go. Największe momenty zginające (ujemne) występują z reguły nad konturem głowicy słupa i osiągają wartość tem większą, im mniejsze są wymiary głowicy w porównaniu do wymiarów pola  $a \cdot b$  płyty. [Gdyby wymiary głowicy zdążyły do zera, to powyższe momenty stałyby się logarytmicznie nieskończone (por. ust. 64, c)].

72. Płyty ortotropowe. Płyta betonowa, uzbrojona niejednakowo w obu kierunkach wzajemnie prostopadłych, jednolita deska drewniana, blacha falista, prostokątna sieć belek o różnej sztywności w obu kierunkach itp. elementy konstrukcyjne można objąć schematem teoretycznym płyty ortotropowej (czyli prostokątnie różnokierunkowej), tj. płyty, obdarzonej różną sztywnością zginania w każdym z dwu kierunków głównych wzajemnie prostopadłych. Jeżeli  $\bar{B}_1$  i  $\bar{B}_2$  oznaczają odpowiednio sztywność zginania pasków płyty równoległych do długości  $a$  (osi  $X$ ) i do szerokości  $b$  (osi  $Y$ );  $\frac{1}{m_1}$  i  $\frac{1}{m_2}$  odpowiadające uogólnione liczby Poisson'a; to zamiast wzorów

(1210) dla momentów w płycie równokierunkowej, otrzymujemy („Teoria płyt“, część I.) następujące:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\bar{B}_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -\bar{B}_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ D &= -2 C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1370)$$

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia przybiera przytem postać:

$$\bar{B}_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{B}_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad \dots \quad (1371)$$

z oznaczeniem dla skrócenia:

$$2H = \frac{\bar{B}_1}{m_2} + \frac{\bar{B}_2}{m_1} + 4C \quad \dots \quad (1371a)$$

Dla energii potencjalnej ugiętej płyty ortotropowej wypada wyrażenie:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \iint \left[ \bar{B}_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \bar{B}_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\bar{B}_1}{m_2} + \frac{\bar{B}_2}{m_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4C \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad \dots \quad (1380) \end{aligned}$$

Rozwiązania zagadnień płyt zwykłych (z materiału równokierunkowego) można przenieść na płyty ortotropowe tylko wtedy, gdy

$$H = \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}.$$

Ten warunek można uważać za spełniony, przynajmniej z dość znacznym przybliżeniem, u płyt żelaznobetonowych. On się nie spełnia zwykle u krat belkowych z powodu małej stosunkowo sztywności skręcania. Ogólne rozwiązania, ważne dla wszelkich wartości stosunku  $\eta = H : \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}$ , zwanego charakterystyką płyty ortotropowej, podaje „Teoria płyt“, w której można znaleźć liczne wzory i tablice. Tutaj musimy poprzestać na podaniu przekształcenia rozwiązań dla płyt ortotropowych, gdy spełnia się warunek  $\eta = 1$  (czyli  $H = \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}$ ). W tym celu, nie zmieniając  $b$  i  $y$ , zastępu-

jemy  $\bar{B}$  przez  $\bar{B}_2$ ,  $a$  przez  $a \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$ ,  $x$  przez  $x \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$ ; a zatem  $\varepsilon = \frac{a}{b}$

musimy zastąpić przez  $\frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$  (sprowadzony stosunek boków).

**Przykłady.** Wzory (1290) zmieniają się w przypadku nierównej sztywności zginania podłużnego i poprzecznego na następujące:

$$M_2 = \frac{1}{24} \left( 3 - 2 \frac{b}{a} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} \right) q b^2, \quad M_1 = \frac{1}{24} q b^2 \quad \dots \quad (1380)$$

Wzór ścisły (1301) dla strzałki ugięcia wskutek siły skupionej  $P$  w środku płyty prostokątnej przybiera postać:

$$f = \frac{P b^2}{2 \pi^3 \bar{B}_2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^4 \frac{1}{n^3} \frac{Sh n \pi \varepsilon - n \pi \varepsilon}{Ch n \pi \varepsilon + 1} \quad \dots \quad (1381)$$

przyczem  $\varepsilon = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$  itd.

## VIII. Wyboczenie.

73. Doświadczenie podstawowe objaśniające istotę wyboczenia. Jeżeli bardzo smukły prosty pręt, utwierdzony dokładnie pionowo dolnym końcem (fig. 200), obciążymy środkowo na górnym końcu kolejno ciężarem  $P_1, P_2, \dots$  coraz to większym, to zauważymy:

1. Przy obciążeniu, nie dochodzącem do pewnej wartości  $P_{kr}$ , jest równowaga pręta w pionowej prostej postaci stałą i to tem stałszą, im mniejsze jest  $P$ . Przekonywamy się o tem łatwo, zginając obciążony pręt niewielką dodatkową siłą i puszczając go następnie swobodnie. Pręt wraz z ciężarem waha około pionowego położenia równowagi i to tem szybciej, im mniejsze jest  $P$ .

2. Gdy obciążenie  $P$  zbliża się do  $P_{kr}$ , wahania stają się bardzo powolne; pręt wraca leniwo do położenia pionowego; stałość równowagi w tem położeniu zachodzi jeszcze, ale jest już bardzo mała.

3. Skoro wreszcie  $P$  przekroczy choćby bardzo nie wiele wartość  $P_{kr}$ , to nawet przy największej staranności przy pionowym ustawieniu i środkowym obciążeniu, pręt nie utrzyma się w równowadze w postaci pionowej, lecz przyjmie nową postać równowagi, wygiętą tem silniej, im większe jest  $P$ . Ta wygięta postać równowagi jest teraz postacią równowagi stałej, a prosta stała się postacią równowagi niestałej.

Jest rzeczą jasną, że po przekroczeniu przez obciążenie wartości krytycznej staje się wzrost naprężeń w przecie bez porównania szybszy od poprzedniego (proporcjonalnego do przyrostu obciążenia), albowiem w przekroju utwierdzonym działa obok siły  $P$ ,

jeszcze moment zginający  $P \cdot f$ . Dlatego, chociaż iloraz  $\frac{P_{kr}}{F}$ , określający

naprężenie ściskające przy prostej postaci pręta, nie przekracza wartości bezpiecznej dla materiału, to jednak obciążenie  $P = P_{kr}$  musimy uznać za niebezpieczne dla pręta jako elementu konstrukcyjnego, który ma spełniać swoje zadanie w prostej postaci, jako postaci równowagi stałej.

Zjawisko zmiany postaci równowagi stałej przy pewnej wartości obciążenia nazywamy w tym przypadku (i w wielu pokrewnych) wyboczeniem, a odpowiadające obciążenie zowiemy obciążeniem krytycznym albo wybaczającym.

Rozróżniamy wyboczenie sprężyste i niesprężyste, zależnie od tego, czy siła  $P_{kr}$ , ściskająca pręt podłużnie, wywołuje naprężenia poniżej, czy też powyżej granicy sprężystości.

W powyższem podstawowem doświadczeniu zachodzi wyboczenie sprężyste tylko przy dostatecznie wielkiej smukłości pręta. Smukłość można zmierzyć stosunkiem długości do najmniejszego wymiaru poprzecznego. Doskonalsza miara smukłości wynika z teorii wyboczenia.

Doświadczenia pouczają nadto, że bardzo małe zboczenia od prostolinjowości pierwotnej osi pręta, jednolitości materiału i środkowości obciążenia mają pewien niewielki wpływ obniżający na wartość  $P_{kr}$ . Te zboczenia powodują oczywiście wygięcie przy każdej dowolnie małej wartości  $P$ , ale te wygięcia stają się znacznymi i niebezpiecznymi dopiero przy  $P$ , zbliżającym się do  $P_{kr}$ .

Prawdziwa przyczyna wyboczenia tkwi zatem nie w nieuniknionych drobnych zboczeniach od doskonałej prostolinjowości pręta, jednolitości jego materiału i osiowości obciążenia, lecz w zmianie warunków stałości



równowagi. Dla  $P < P_{kr}$  równowaga pręta jest stała przy jego postaci prostej, zaś dla  $P > P_{kr}$  jest równowaga w postaci prostej niestała, a postacią równowagi stałej może być tylko postać wygięta (o ile oczywiście przy tem wygięciu nie zostanie pręt złamany). Dla  $P = P_{kr}$  mamy widocznie do czynienia z przypadkiem równowagi obojętnej.

74. Wytrzymałość na wyboczenie określa się powszechnie w praktyce jako największe obciążenie podłużne pręta  $P_w$ , które on zniesie przed złamaniem lub trwałem wygięciem przy próbie obciążenia. Jest to zupełnie coś innego od określonego powyżej obciążenia krytycznego, czyli wybaczonego. Mieszanie obu pojęć wywołało już wiele nieporozumień naukowych. Do tego przyczynia się nadto niezbyt szczęśliwy zwyczaj nazywania wyboczeniem każdego wygięcia pręta, wywołanego siłą równoległą do osi, jakkolwiek zdecydowanie mimośrodową. Innym ważnym powodem zamieszania pojęć jest fakt doświadczalny, że w wielu wypadkach jest różnica wartości  $P_w$  i  $P_{kr}$  praktycznie znikoma. Wszystko to wyjaśnia naukowo interpretowana teorja wyboczenia.

75. Teorja wyboczenia prętów (słupów). Wzory Euler'a. Jeżeli przy jakiegokolwiek możliwej (przygotowanej) zmianie postaci lub położenia układu z danego położenia równowagi z większą się jego energia potencjalna, to równowaga w danem położeniu jest stała, skoro zaś ta energia się zmniejsza, to równowaga jest niestała. Wychodząc zatem z prostej postaci równowagi pręta ścisiskanego daną siłą  $P$ , udzielamy mu przygotowanego wygięcia, które powoduje obniżenie obciążonego końca o  $\delta y$ , a zwiększenie energii potencjalnej wewnętrznych sił sprężystości o  $\delta V$ . Razem tedy zwiększa się całkowita energia układu o

$$\delta U = \delta V - P \cdot \delta y.$$

Dla danego  $P$  może ta wielkość  $\delta U$  wypaść dodatnia dla wszelkiego wygięcia przygotowanego, a wtedy równowaga prostej postaci pręta jest stała; w razie ujemnej wartości  $\delta U$  przy innej wartości  $P$  jest ta równowaga niestała. Na granicy obu rodzajów równowagi będzie  $\delta U = 0$ , a odpowiadająca wartość obciążenia jest oczywiście wartością krytyczną. Ścisłe rozwiązanie zadania wymaga zastosowania rachunku przemienności, atoli w bardzo wielu wypadkach da się uzyskać drogą elementarną, wskazaną już przez Euler'a.

Dla czterech typowych prostych przypadków ustalenia końców, przedstawionych w tablicy I, podano wartości obciążenia krytycznego, znalezione z pominięciem wpływu sił poprzecznych na energję zginania.

Do powyższych wyników dochodzi się przez całkowanie przybliżonego równania różniczkowego linii ugięcia, napisanego np. dla przypadku II. w postaci:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py$$

przy założeniu, że wyboczenie zajdzie w płaszczyźnie najmniejszej sztywności zginania pręta, czyli, że  $J$  jest najmniejszym momentem bezwładności przekroju, a zarazem przy pominięciu zbliżenia końców pręta wskutek wygięcia. To pominięcie nie ma wpływu na wartość krytyczną obciążenia, która wypada zgodnie ze ścisłym rozwiązaniem Lagrange'a, a tylko nie pozwala na obliczenie strzałki wygięcia  $f$ . Ta ostatnia da się wyznaczyć tylko przy zastosowaniu dokładnego równania linii ugięcia ( $D'$ , str. 1122), całkowalnego przy pomocy funkcji eliptycznych.

76. Granice ważności wzoru Euler'a i jego stosowności do praktycznego obliczenia wytrzymałości na wyboczenie. Podstawwszy

Tablica I.

Określenie przypadku ustalenia końców	I. Jeden koniec doskonale utwierdzony, drugi swobodny	II. Oba końce przegibnie ustalone na prostej (pierwotnej osi pręta)	III. Jeden koniec doskonale utwierdzony, drugi przegibnie ustalony na pierwotnej osi pręta	IV. Oba końce doskonale utwierdzone
Rysunek przypadku				
$P_E =$ Eulerowska wartość obciążenia krytycznego	$\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ}{l^2}$	$\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ praktycznie najważniejszy	(w przybliżeniu) $2\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$	$4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$

$\frac{F_E}{F} = \sigma_E$ ,  $J = F i^2$  i oznaczywszy przez smukłość pręta stosunek  $s = \frac{l}{i}$  możemy wzór Euler'a dla II. przypadku<sup>1)</sup> napisać w postaci:

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{s^2} \dots \dots \dots (1430)$$

Stąd: naprężenie Eulerowskie  $\sigma_E$  jest odwrotnie proporcjonalne względem kwadratu smukłości  $s$ . Przedstawimy wykresnie związek między  $\sigma_E$  i  $s$ , otrzymujemy (kubiczną) hiperbolę Eulerowską (fig. 201).

Wzór Euler'a traci swą ważność, gdy zeń wypada  $\sigma_E$  większe od granicy proporcjonalności materiału pręta. Taki przypadek zachodzi przy smukłościach mniejszych od wartości granicznej  $s_{gr}$ , którą obliczamy z równania:

<sup>1)</sup> Tylko ten przypadek jako praktycznie najważniejszy będzie w dalszym ciągu brany pod uwagę.

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{s_{gr}^2}, \quad \text{czyli} \quad s_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

Wartość smukłości granicznej dla kilku materiałów zawiera tablica II.

Tablica II.

Materiał	$\sigma_p$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$E$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$s_{gr}$
Drewno . . . . .	150	100 000	80
Żelazo spawane . . . . .	1500	2 000 000	115
Żelazo zlewne . . . . .	2000	2 100 000	102
Stal zlewna . . . . .	2400	2 200 000	95

Jeżeli smukłość pręta jest większa od  $s_{gr}$ , to wzór Euler'a podaje rzeczywistą wartość siły wybaczającej, jak to stwierdzono licznymi doświadczeniami. Co więcej, ta siła, wywołująca sprężyste wyboczenie pręta, okazała się zarazem praktycznie równą jego wytrzymałości na wyboczenie w całym stosowanym w technice obszarze zmienności  $s$  powyżej  $s_{gr}$ .

Teoretycznie tłumaczy się to jasno okolicznością, iż bardzo nawet małe przekroczenie siły Eulerowskiej wywołuje według dokładnego obliczenia tak znaczne wygięcie, że trwale odkształcenie lub złamanie staje się niechybnem. Wszystko to jest ważne przy bardzo dokładnym

spełnieniu podstawowych warunków teorii, tj. środkowości obciążenia, prostolinjowości osi, jednolitości materiału i oczywiście ważności prawa Hooke'a.

77. Wyboczenie niesprężyste. Wzory doświadczalne i półempiryczne. Tylko bardzo stosunkowo niskie (krępe) słupy nie objawiają wyboczenia, pękając lub odkształcając się beczułkowato przy nacisku osiowym, wywołującym w materiale zbyt wielkie ciśnienia. Przy takich małych (rzadziej mających praktyczne zastosowanie) smukłościach jest wytrzymałość słupa niezależna od jego wysokości (w pewnych granicach). Przy nieco większych smukłościach można już obserwować wyboczenie niesprężyste, a wytrzymałość maleje ze wzrostem smukłości. Tę zależność ujęto we wzory doświadczalne. Z nich najprostszą postać posiada

a) Wzór Tetmajera:  $\sigma_w = a - b s$ ,

w którym współczynniki  $a$  i  $b$  obliczył najdokładniej prof. Jasiński na podstawie doświadczeń Bauschinger'a, Considere'a i Tetmajer'a. Dla zwykłego żelaza zlewne (o doraźnej wytrzymałości 4500 kg/cm<sup>2</sup>) otrzymał Jasiński:

$$\sigma_w = [3387 - 14,83 s] \text{ kg/cm}^2 \quad \text{w granicach } 70 < s < 110 \quad (1450)$$

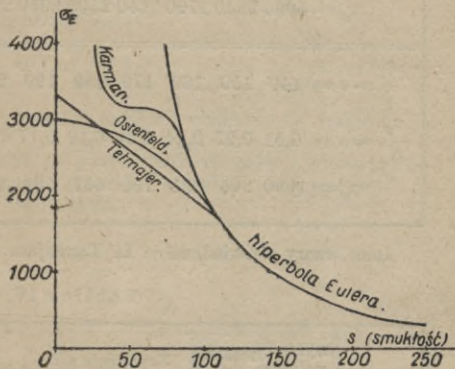


Fig. 201.

Fig. 201 przedstawia wykreślnie zależność naprężenia niebezpiecznego (łamiącego)  $\sigma_w$  od smukłości  $s$  według powyższego wzoru empirycznego i wzoru Euler'a, który dla żelaza zlewnego przybiera postać:

$$\sigma_E = \left[ 2128 \left( \frac{100}{s} \right)^2 \right] \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots (1451)$$

Wykres może zastąpić tablica III.

Tablica III.

naprężeń krytycznych (łamiących) dla słupów z żelaza zlewnego, ściskanych w warunkach przypadku II. (podstawowego).

$\frac{l}{i} = s =$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
$\frac{\sigma_w}{K_c} = \alpha =$	0,88	0,84	0,80	0,76	0,71	0,67	0,63	0,59	0,54	0,50	0,42	0,36
$\sigma_w =$	3090	2940	2790	2650	2500	2350	2200	2050	1900	1760	1480	1260
$\frac{l}{i} = s =$	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250
$\frac{\sigma_w}{K_c} = \alpha =$	0,31	0,27	0,24	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13	0,11	0,10	0,10
$\sigma_w =$	1090	946	831	736	657	589	532	483	440	402	369	340

Inne wzory doświadczalne L. Tetmajera zawiera tablica IV.

Tablica IV.

Materiał	Wytrzymałość na ciśnienie $K_c$ w $\text{kg/cm}^2$	Granice smukłości $\frac{l}{i} = s$	Naprężenie wybaczące (łamiące) $\sigma_w = P_w : F$	$\alpha = \frac{\sigma_w}{K_c}$ dla smukłości							
				40	50	60	70	80	90	100	110
Drewno miękkie	280	$< 100$	prosta Tetmajera 293 — 1,94 s	0,771	0,700	0,632	0,561	0,493	0,421	—	—
		$\geq 100$	wzór Euler'a	—	—	—	—	—	—	0,353	0,293
Żeliwo	8000	$< 80$	parabola Tetmajera 7760 — 120 s + + 0,53 s <sup>2</sup>	0,476	0,386	0,309	0,245	—	—	—	—
		$\geq 80$	wzór Euler'a	—	—	—	—	0,194	0,162	0,123	0,102
Żelazo spawalne	3500	$< 112$	prosta Tetmajera 3030 — 13 s	0,717	0,680	0,643	0,606	0,569	0,531	0,494	0,457
		$\geq 112$	wzór Euler'a	—	—	—	—	—	—	—	—
Stal zlewna	6000	$< 89$	prosta Tetmajera 3350 — 6,2 s	0,517	0,507	0,496	0,486	0,476	—	—	—
		$\geq 86$	wzór Euler'a	—	—	—	—	—	0,457	0,370	0,306

Uwaga. Doświadczenia nowsze wraz z teoretycznymi badaniami Engesser'a, v. Karmán'a i innych dowodzą, że przypadkowe mimośrodowo obciążenia i inne źródła błędów były u Tetmajera jeszcze dość znaczne. Wskutek tego wartości otrzymane z jego wzorów doświadczalnych są zawsze niższe od rzeczywistych  $\sigma_w$ , osiągalnych przy dokładnie osiowym działaniu siły. Mimo to można oczywiście zalecić wzory Tetmajera do praktycznego zastosowania w tych wszystkich przypadkach, kiedy nie mając pewności, że obciążenie działa dokładnie osiowo, nie możemy zarazem ocenić wielkości drobnego przypadkowego mimośrodu tego obciążenia. Na nich opierają się wzory przepisane w Polsce przez Ministerstwo Robót Publ. i Ministerstwo Kolei (por. działy: „Budownictwo“ i „Mosty“).

b) Wzór Johnson'a i Ostenfelda ma charakter półempiryczny i jest przeznaczony dla prętów z żelaza kowalnego. Ma postać:

$$\sigma_w = \sigma_f \left( 1 - \frac{s^2}{30000} \right) \dots \dots \dots (1460)$$

przyczem  $\sigma_f$  oznacza granicę plastyczności. Wzór ten daje wartości bardziej zbliżone do rzeczywistych  $\sigma_w$  przy znikomo małych zboczeniach od osiowości działania siły. Jest nadto godny polecenia jeszcze z tego powodu, ponieważ

po podstawieniu  $\sigma_w = \frac{n P}{F}$  ( $n$  pewność),  $F = \varphi i^2$ , a więc  $J = F i^2 = \varphi \cdot i^4$  i rozwiązaniu względem  $F$ , otrzymuje postać:

$$F = F_0 + \frac{1}{3} \varphi l^2 \dots \dots \dots (1461)$$

przyczem  $F_0 = \frac{P}{\sigma_{\text{bezp.}}}$  w  $\text{cm}^2$  oznacza przekrój, obliczony ze względu na

zwykle ściskanie, a drugi wyraz po podstawieniu długości  $l$  w metrach i wartości liczbowej  $\varphi$  z tablicy V. przedstawia zwiększenie przekroju ze względu na niebezpieczeństwo wyoboczenia.

Tablica V.

$$\text{Wartość } \varphi = \frac{F}{i^2} = \frac{F^2}{J}.$$

L. p.	Przekroje lite		L. p.	Przekroje złożone	
	Postać	Wartość $\varphi$		Postać	Wartość $\varphi$
1	Kwadrat . . . . .	12,0	6	4 kątowniki rozdzielone przestrzenią o szerok. $\infty 1 \text{ cm}$	4,0
2	Prostokąt ( $b > h$ ) . . . . .	$12 \frac{b}{h}$	7	2 kształtowniki $\lfloor$	
3	Koło . . . . .	$4 \pi$	8	$\rfloor$ rozdzielone przestrzenią o szerokości $\infty 1 \text{ cm}$	6,0
4	Dźwigar $\Gamma$ . . . . .	10,0			
5	Kątownik $\lfloor$ dla $b:h =$	$\begin{cases} 1:1 & 6,0 \\ 2:3 & 7,0 \\ 2:1 & 11,0 \end{cases}$		$\rfloor$ $J_x = J_y$ . . . . .	1,2

Uwaga. Dla kształtowników są powyższe wartości  $\varphi$  przybliżone. Wyznaczywszy przy ich pomocy  $F$  i  $J$  (wzgl.  $i$ ), wypadnie powtórzyć rachunek z dokładną wartością  $\varphi$ .

Pręty znitowane z kształtowników zachowują się jak lite pod warunkiem, że odstępny nitów są co najwyżej 70  $\delta$  ( $\delta$  = grubość nitowanych części) i że osłabienie przekroju przez nity nie przekracza 12% (Tetmajer).

Inne wzory półempiryczne, niegdyś bardzo rozpowszechnione w praktyce, dzięki swej uniwersalności, jak np. wzór Navier'a - Schwarz - Rankine'a, mają obecnie już tylko znaczenie historyczne.

78. Wyboczenie w przypadku, gdy materiał zbacza od prawa Hooke'a. Zakładając ważność wzoru Eulera przy zmiennym module sprężystości  $E$  i przyjmując w przybliżeniu:

$$E = E_0 - \eta \sigma,$$

przyczem  $E_0$  jest wartością  $E$  dla  $\sigma = 0$ ,  $\eta$  drugą stałą materiału (bezwymiarową), otrzymujemy po rozwiązaniu względem  $\sigma = \frac{P}{F}$

$$\sigma_w = \frac{P_w}{F} = \frac{\pi^2 E_0}{\eta \pi^2 + s^2} = \frac{\frac{E_0}{\eta}}{1 + \frac{s^2}{\eta \pi^2}} \dots \dots \dots (1480)$$

Ten wzór zastosował między innymi Mörsch do betonu i żelazo-betonu, nadając mu charakter półempiryczny na podstawie doświadczeń Bacha nad wyboczeniem słupów żelazno-betonowych. Ma on postać:

$$\text{Dop. } \sigma_w = \frac{1,25 \sigma_b}{1 + 0,0001 s^2} \text{ dla } s \geq 50 \dots \dots \dots (1481)$$

Tutaj oznacza  $\sigma_b$  dopuszczalne ciśnienie w betonie bez niebezpieczeństwa wyboczenia. Podobny wzór można zbudować dla żeliwa.

79. Wpływ sił poprzecznych na obciążenie krytyczne. Inne wpływy. Uwzględniając wpływ sił poprzecznych na energję zginania przy wyboczeniu (por. ust. 49), dochodzimy łatwo do wzoru:

$$P_{kr} = \frac{P_E}{1 + \frac{k' P_E}{G F}} \dots \dots \dots (1482)$$

Tutaj oznacza  $k'$  współczynnik liczbowy, zależny od rozkładu naprężeń stycznych w przekroju (który np. dla prostokąta = 1,2) a  $G$  moduł ścinania. A zatem dokładna wartość  $P_{kr}$  jest nieco mniejsza od obciążenia Eulerowskiego  $P_E$ . To zmniejszenie nie przekracza u prętów litych 1%; jest zatem wobec innych źródeł błędów bez praktycznego znaczenia. Atoli bardzo ważną rolę gra wpływ sił poprzecznych, określony wielkością  $\frac{k'}{G F}$ , u prętów złożonych (kratowych itp.), o czym poniżej (ust. 80).

Przy ściskaniu słupa pionowego współdziała z siłą zewnętrzną  $P$  ciężar własny słupa  $G$  jako obciążenie dodatkowe przekroju, rosnące linjowo od  $O$  w górnym końcu słupa do  $G$  w końcu dolnym. Wartość krytyczna siły  $P$  zmniejsza się wówczas, jak wykazał Sommerfeld, a mianowicie dla przypadku I, o:

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4}{\pi^2} \right) G, \text{ czyli około } 0,30 G,$$

co może grać rolę praktyczną tylko przy bardzo wielkich rozmiarach pręta.

Wpływ osłabienia pręta przez otwory na nity (w równych odstępach) można uważać za równoważny ze zwiększeniem długości swobodnej pręta o  $\Delta l$ , przyczem:

$$\Delta l = \frac{n d}{2} \cdot \frac{J - J'}{J'},$$

jeżeli  $n$  oznacza liczbę przekrojów osłabionych,  $d$  średnicę otworu, a  $J'$  moment bezwładności osłabionego przekroju. Wpływ ten jest wogóle nieznaczny i może być w praktyce pominięty.

Wszystkie dotychczas rozważane wpływy działają zmniejszająco na wartość obciążenia krytycznego, czyli niekorzystnie. Wpływ korzystny ma oczywiście wszystko to, co kępuje swobodę obrotu końcowych przekrojów pręta, a więc sposób podparcia tych przekrojów, tarcie w przegubie łożyskowym itp. Te wpływy, zwiększające  $P$ , są jednakowoż mniej uchwytne od tamtych (zmniejszających) i dlatego nie liczymy zwykle na nie w praktyce.

Doświadczenia wykazały, że przy wywarceniu osiowego nacisku na obie płaskie podstawy słupa przez dokładnie przylegające stalowe tłoiki prasy, prowadzone prostoliniowo, zwiększa się  $P_{kr}$  w stosunku do przypadku II, tak, że odpowiadająca długość sprowadzona  $l_{red} = \infty 0,7l$ .

Podobnie przy innych sposobach rzeczywistego utwierdzenia końców nie obserwowano nigdy teoretycznej wartości  $l_{red} = 0,5l$ , odpowiadającej utwierdzeniu doskonałemu, lecz  $l_{red} \geq 0,58l$ , przy czym współczynnik redukcji 0,58 odpowiada smukłości  $s = 200$  (B. Kirsch) i rośnie, gdy  $s$  maleje. To się doskonale tłumaczy niemożliwością zrealizowania utwierdzenia zupełnego z powodu odkształcalności każdego materiału.

### 80. Wyboczenie prętów złożonych.

Uwzględniając wpływ sił poprzecznych, powstających przy wyboczeniu, na odkształcenie postaciowe pól o długości  $a$  i szerokości  $b$  (fig. 202) pręta kratowego, doszli jednocześnie Prandtl i Timoszenko do poniżej podanych wzorów, przybliżonych dla  $P_{kr}$ . W nich oznacza:

$J_0$  moment bezwładności przekroju poprzecznego (z pominięciem kraty) względem osi symetrii,

$F_p$  pole przekroju poprzecznego przekątnej,

$F_s$  pole przekroju poprzecznego słupa (rozpory),

$\alpha$  kąt ostry, jaki tworzą przekątne z kierunkiem prostopadłym do osi pręta, wreszcie:

$$P_E = \pi^2 \frac{E J_0}{l^2}.$$

$$\text{Do fig. a) } P_{kr} = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{1}{E F_p \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{E F_s \operatorname{tg} \alpha}}.$$

$$\text{Do fig. b) } P_{kr} = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{1}{2 E F_p \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{E F_s \operatorname{tg} \alpha}}.$$

$$\text{Do fig. c) } P_{kr} = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{1}{E F_p \cos^2 \alpha \sin \alpha}}.$$

Jeżeli przekrój pręta jest rurowy (według fig. d), to w odpowiadających wzorach należy zamiast  $F_p$  i  $F_s$  wstawić  $2 F_p$  i  $2 F_s$ .

Wszystkie te wzory dadzą się przedstawić w postaci:

$$P_{kr} = \alpha' \cdot P_E, \text{ przy czym } \alpha' < 1$$

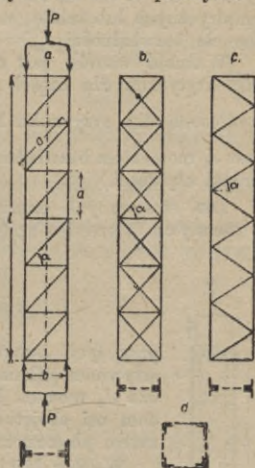


Fig. 202.

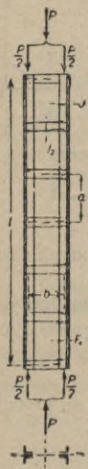
jest spólczynnikiem zmniejszającym wytrzymałość na wyboczenie pręta złożonego kratowego w porównaniu do pręta litego o tym samym momencie bezwładności przekroju  $J_0$ .

Powyższe wzory wyprowadzono przy założeniu wyboczenia sprężystego. W praktyce można je widocznie stosować i do wyboczenia niesprężystego, wprowadzając zamiast  $P_E$  wartość  $P_w = F_0 \cdot \sigma_w$ , obliczoną z wzorów empirycznych lub tablic (str. 1170). ( $F_0$  oznacza tutaj pole przekroju o momencie bezwładności  $J_0$ .)

Ważność wzorów jest nadto ograniczona warunkiem oczywistym, aby siła krytyczna dla części pasa o długości  $a$  i momencie bezwładności  $J_1$  (obliczona dla przypadku II.) wypadła  $\geq \frac{1}{2} P_{kr}$ . (W przypadku z fig. (d) jest  $J_1$  momentem bezwładności dwu kątowników względem osi łączącej ich środki ciężkości.)

Dla stosowanych często w nowszych czasach prętów bezprzekątniowych (Vierendeel'a; fig. 203) znaleziono powyższą metodą:

$$P_{kr} = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{a^2}{24 E J_1} + \frac{ab}{12 E J_2}} \dots \dots \dots (1510)$$



przy tych samych, co powyżej warunkach ważności, a nadto sztywnem połączeniu poprzeczek (słupków) z pasami. Tutaj oznacza  $J_2$  moment bezwładności przekroju słupka (rozpórki) względem osi objętej prostopadłej do płaszczyzny wyboczenia (zarazem płaszczyzny rysunku).

Według Müller-Breslau'a (Eisenbau 1916, str. 266) przybiera powyższy wzór przybliżoną postać:

$$P_{hr} = \frac{\pi^2 E}{\frac{n-1}{n-0,8} s^2 + 0,8 s_1^2} \dots \dots \dots (1511)$$

przy oznaczeniach  $n = l : a$  (liczba pól):

$$s = l : i = l : \sqrt{\frac{J_0}{2 F_1}}, \quad s_1 = a : i_1 = a : \sqrt{\frac{J_1}{F_1}}$$

Zamiast tego radzi Engesser przyjąć w I. przybliżeniu:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E}{s^2 + s_1^2} \dots \dots \dots (1512)$$

Fig. 203.

## IX. Ważniejsze złożone przypadki zgięcia i wyboczenia.

W rozpatrywanych w rozdz. VI.—VII. przypadkach zgięcia prętów i płyt były ugięcia i naprężenia linjowemi funkcjami obciążeń, a energia potencjalna kwadratową jednorodną funkcją uogólnionych sił, albo uogólnionych przesunięć. Szła za tem nader wygodna stosowalność zasady superpozycji, zasady najmniejszości pracy odkształcenia itd. To wszystko przestaje być wogóle ważnem w zagadnieniach niniejszego rozdziału. Dwa razy większa siła nie wywołuje w rozpatrywanych tutaj przypadkach podwójnych ugięć i naprężeń, lecz większe lub mniejsze od nich, stosownie do warunków. Tak się rzecz ma, bez przekroczenia gdziekolwiek granicy proporcjonalności materiału, albowiem powód zmiany prawa zależności tkwi nie w materiale, lecz w tem, że działania sił stają się od siebie nawzajem zależne. Zmiana wielkości jednej siły wywołuje np. zmianę ramienia momentu siły drugiej i nawzajem. Łatwo to zauważyć w każdym z podanych poniżej rozwiązań.



### A. Zgięcie prętów prostych w połączeniu z siłami rozciągającymi lub ściskającymi.

81. Przypadek przegibnego ustalenia końców na prostej. Dokładne rozwiązanie prowadzi do bardzo zawiłych wzorów. Do celów praktycznych wystarcza rozwiązanie przybliżone Timoszenki w postaci wzorów następujących.

a) Strzałka ugięcia  $f$  (fig. 204):

$$f = \frac{f_0}{1 \mp \frac{S}{S_E}} \dots (1520)$$

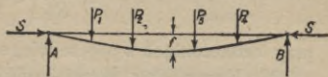


Fig. 204.

Tutaj oznacza  $f_0$  strzałkę, wywołaną przez same obciążenia  $P_i$  (skierowane zgodnie),  $S_E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$  wartość krytyczną siły ściskającej, znak — odnosi się do przypadku ściskania, + do rozciągania siłą  $S$ . Wzór jest dostatecznie dokładny, gdy  $S < 0,8 S_E$  (oczywiście przy założeniu, że nigdzie nie przekroczono granicy proporcjonalności).

b) Moment zginający w przekroju środkowym:

$$M = M_0 \pm S \cdot f = M_0 \pm \frac{S f_0}{1 \mp \frac{S}{S_E}} \dots (1530)$$

jeżeli  $M_0$  oznacza moment wskutek samych obciążeń  $P_i$ . Znaki górne odnoszą się do ściskania, dolne do rozciągania.

Uwaga. 1. Przy zastosowaniu tego wzoru do oceny wytrzymałości belki nie wolno wogóle obliczać przekroju z warunku, aby przy danym obciążeniu było  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{bezp}}$ , albowiem stopień pewności przeciwko złamaniu mógłby wypaść znacznie mniejszy od  $n = \frac{\sigma_{\text{niebezp}}}{\sigma_{\text{bezp}}}$ . Obliczenie poprawne przedstawia przykład następujący:

Belka z żelaza kowalnego, obciążona całkowicie ciężarem  $q \cdot l$  i ściskana siłą  $S$ . Znaleźć wymiary przekroju przy  $n$ -krotnej pewności przeciwko przekroczeniu granicy plastyczności  $\sigma_f$ .

Przy danym obciążeniu jest  $M_0 = \frac{1}{8} q l^2$ ,  $f_0 = \frac{5}{384} \frac{q l^3}{EJ}$ , a zatem ciśnienie we włóknie skrajnym przekroju środkowego, jako niebezpiecznego, jest przy  $n$ -krotnej wartości obciążenia:

$$\frac{n S}{F} + \frac{n q l^2}{8 W} \left[ 1 + \frac{1,028 n (S/S_E)}{1 - n (S/S_E)} \right] \leq \sigma_f$$

Podzieliwszy obustronnie przez  $n$  otrzymujemy jako warunek wytrzymałości:

$$\frac{S}{F} + \frac{q l^2}{8 W} \left[ 1 + 1,028 \frac{n (S/S_E)}{1 - n (S/S_E)} \right] \leq \frac{\sigma_f}{n} = \sigma_{\text{bezp}}$$

Stąd wyznaczamy szukane wielkości przekrojowe  $F$  i  $W$  z danych  $q$ ,  $S$ ,  $l$ ,  $n$  i  $\sigma_{\text{bezp}}$ . Warunek wytrzymałości wyraża tutaj, że przy sumowaniu naprężeń wywołanych siłą po dłużną  $S$ , momentem zginającym  $M_0$  obciążenia poprzecznego i momentem zginającym siły  $S$ , należy w ostatniej części pomnożyć siłą  $S$  przez  $n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{\text{bezp}}}$ . Dopiero tak obliczone naprężenie winno mieć wartość  $\leq \sigma_{\text{bezp}}$ .

2. Wzory (1520) i (1530) nie zmieniają postaci w przypadku doskonałego utwierdzenia końców belki, przy stosownej interpretacji wielkości  $f_0$ ,  $M_0$  i  $S_E$ . W szczególności będzie wtedy:

$$S_E = 4 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

82. **Przypadek nieznanymi sił podłużnych.** Gdy końce belki są ustalone tak, że nie mogą się do siebie zbliżyć wskutek jej zgięcia, to powstaje niewiadoma siła rozciągająca  $S$ . W przybliżeniu, wystarczającym do celów praktycznych, można ją obliczyć (Timoszenko, str. 231) z równania warunkowego:

$$\frac{S}{S_E} \left( 1 + \frac{S}{S_E} \right)^2 = \frac{f_0^2}{4i^2},$$

przy oznaczeniach z poprzedniego ustępu ( $i$  promień bezwładności przekroju).

83. **Przypadek mimośrodkowego działania sił ściskających.** Początkowy moment zginający  $P \cdot \delta$  (fig. 205) wywołuje wygięcie sprężyste osi pręta o strzałce  $f$ . Do jej wyznaczenia służy równanie linii ugięcia w postaci dokładnej:

$$y = (f + \delta) \left\{ \cos \alpha z + \frac{(\alpha z)^4}{4!} \alpha^2 (f + \delta)^2 - \frac{(\alpha z)^6}{6!} [\alpha^2 (f + \delta)^2 + 11] + \dots \right\} \quad (1542)$$

przyczem  $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ , a  $z$  oznacza długość łuku linii ugięcia, mierzoną od jej środka; albo w postaci przybliżonej, wystarczającej do celów praktycznych:

$$y = (f + \delta) \cos \alpha x.$$

Powstające krańcowe naprężenia  $\sigma_1$  (po stronie wklęsłej) i  $\sigma_2$  (po stronie wypukłej) określają wzory:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = -\frac{P}{F} \mp \frac{P(f + \delta)}{W_{1,2}}, \quad \text{przyczem} \quad W_1 = \frac{J}{e_1}$$

$$W_2 = \frac{J}{e_2}$$

$$\text{albo:} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = -\frac{P}{F} - \frac{P \delta e_1}{J \cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}}} \\ \sigma_2 = -\frac{P}{F} + \frac{P \delta e_2}{J \cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}}} \end{array} \right\} \dots \quad (154,4)$$

Te wzory, jedynie racjonalne w rozpatrywanym przypadku i bardzo ogólnie zastępuje się w praktyce rozmaitymi przybliżeniami, których granice stosowności są dość nieuchwytnie. Byłoby bardzo pożądanym ułatwić praktyczne zastosowanie równań (154,4) obliczeniem tablic lub nomogramów. Aby znaleźć  $P_{\text{bezp}}$  dla słupa, należy po lewej stronie pierwszego z tych równań<sup>1)</sup> podstawić zamiast  $\sigma_1$  niebezpieczną wartość ciśnienia (np. granicę plastyczności) i rozwiązać równanie względem  $P$ .

Znaleziona wartość obciążenia będzie niebezpieczną  $P_w$ . Biorąc jej  $n$ -tą część, otrzymujemy:

$$P_{\text{bezp}} = \frac{P_w}{n}, \quad \text{przyczem} \quad n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{\text{bezp}}}$$

Aby obejść żmudne rozwiązywanie równania przestępnego wyprowadził Ostenfeld przy założeniu niezbyt małych mimośrodków  $\delta$  i niezbyt wielkich smukłości  $s$  wzór pierwszego przybliżenia:

<sup>1)</sup> Drugie może służyć za podstawę rachunku tylko w przypadku materiału o wielkiej wytrzymałości na ściskanie, a małej na rozciąganie.

$$\frac{P_w}{F} = \frac{\sigma_f}{1 + \frac{\delta}{k} \beta s^2} \dots \dots \dots (155,1)$$

Tutaj oznacza  $P_w$  obciążenie niebezpieczne,  $\sigma_f$  naprężenie na granicy plastyczności  $k = \frac{i^2}{e}$  promień rdzenny,  $\beta = \frac{1}{8} \frac{\sigma_f}{E}$ .

**B. Zgięcie i wyobczenie prętów prostych objętych sprężystym podłożem.**

Założenie: Na każde małe ugięcie pręta  $y$  oddziałują podłoże siłą  $-ky$  odniesioną do jednostki długości pręta. Spółczynnik  $k$  ( $kg/cm^2$ ) cechujący sprężystą podatność podłoża nazywają „znamięniem“ podłoża. Stosowniejszą nazwą byłoby dla  $k$ : moduł podatności, zaś dla  $\frac{1}{k}$  podatność.

To założenie odpowiada schematowi belki na nieskończenie wielu nieskończenie bliskich i równo odległych podporach sprężystych, odkształcających się niezależnie od siebie nawzajem. Podłoże ciągle zachowuje się, biorąc ściśle, nieco inaczej, albowiem odkształcenie jednego elementu podłoża nie jest możliwe bez współdziałania wszystkich pobliskich. Mimo to teoria, oparta na powyższem uproszczonem założeniu, oddaje dobre usługi w wielu zastosowaniach praktycznych.

**84. Belka nieograniczona. Równanie różniczkowe linii ugięcia :**

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky$$

daje po zcałkowaniu w przypadku jednej siły skupionej  $P$  (fig. 206) w początku współrzędnych dla belki rozciągającej się w obie strony w nieskończoność :

$$y = \frac{P}{8EJ\alpha^3} \cdot f_1(x), \text{ przyczem } f_1(x) = e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \dots (156,1)$$

Ta funkcja jest ważną dla  $0 \leq x \leq \infty$ . Lewa gałąź krzywej jest oczywiście symetryczna.

Nadto oznacza  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$ .

Moment zginający :

$$M = \frac{P}{4\alpha} f_2(x), \text{ przyczem } f_2(x) = -e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x) \dots (156,2)$$

Siła poprzeczna  $Q = -\frac{P}{2} f_3(x)$ , przyczem

$$f_3(x) = e^{-\alpha x} \cos \alpha x \dots \dots \dots (156,3)$$

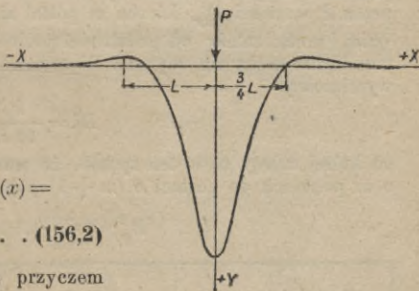


Fig. 206.

Dla funkcyj  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  i  $f_3(x)$  posiadamy tablice<sup>1)</sup>, przy pomocy których łatwo obliczyć długą belkę obciążoną dowolnym układem sił, byleby te siły były dość odległe od końców belki. Działanie bowiem każdej siły skupionej daje się odczuwać tylko na niewielkiej długości po obu jej stronach. Linja ugięcia jest falista o długości fali :

$$2L = 2\pi \sqrt[4]{\frac{4EJ}{k}} = \frac{2\pi}{\alpha}$$

<sup>1)</sup> Ob. np. Timoszenko-Huber: „Wytrzymałość materiałów“, str. 166.

Wysokość fali maleje bardzo szybko z oddaleniem od miejsca obciążonego wskutek czynnika  $e^{-\alpha x}$ . W odległości większej od  $2L$  jest wpływ obciążenia praktycznie znikomy.

85. Belka o długości skończonej. Dokładny rachunek jest bardzo uciążliwy i może być zastąpiony z korzyścią przybliżoną metodą Timoszenki.

W przypadku obciążenia siłą  $P$  w środku belki (fig. 207) przyjmujemy w przybliżeniu równanie linii ugięcia:

$$y = a + f \sin \frac{\pi x}{l} \dots \dots \dots (156,5)$$

a z rozważań energii potencjalnej układu znajdujemy:

$$a = \frac{P}{kl} - \frac{3f}{\pi}, \quad f = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{\pi^4 EJ} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)} \dots (156,6)$$

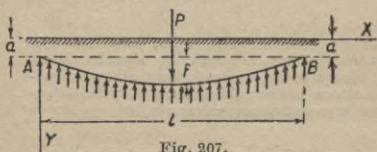


Fig. 207.

Znając  $a$  i  $f$ , otrzymamy z łatwością nacisk na podłoże  $p = -ky$ , a stąd momenty zginające itd. Dla największego momentu zginającego w środku otrzymujemy:

$$M = k \left( \frac{a}{8} + \frac{f}{\pi^2} \right) l^2 \dots$$

Warunkiem stosowalności powyższego rozwiązania jest oczywiście:

$$l < \frac{3}{2} L.$$

Inne przypadki traktuje „Kurs Wytrzymałości“ Timoszenki (str. 235).

86. Wyboczenie pręta objętego sprężystym podłożem. Przy założeniu przegibnego ustalenia obu końców pręta ściskanego osiowo siłą  $P$  prowadzi teoria do sinusowej postaci równowagi pręta, po przekroczeniu przez  $P$  wartości  $P_{kr}$ . Liczba  $m$  półfal sinusoidy, mieszczących się na długości  $l$  pręta, zależy od podatności podłoża. Im podłoże jest mniej podatne, tem liczba  $m$  będzie większa. W szczególności określa teoria wielkość bezwymiarową:

$$B^2 = \frac{kl^4}{16 EJ} \dots \dots \dots (157,0)$$

od której zależy  $m$  w ten sposób, że wartość  $B^2$  przy przejściu od postaci o  $m$  półfalach do postaci o  $(m+1)$  półfalach oblicza się z równania:

$$B_{gr}^2 = \frac{\pi^4}{16} m^2 (m+1)^2 \dots \dots \dots (157,1)$$

Wartościom $m =$	1	2	3	4	5	6	7
odpowiada $B^2 =$	24,35	219,2	876,7	2435	5479	10739	19091

Skoro np. dla danego pręta, przy danem  $k$ , wypadnie  $B^2 < 24,35$ , to powstanie wyboczenie z jedną półfalą; gdy  $24,35 < B^2 < 219,2$  to będą dwie półfały itd.

Znając liczbę półfal  $m$ , obliczamy  $P_{kr}$  z równania:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left( m^2 + \frac{16 B^2}{m^2 \pi^4} \right) \dots \dots \dots (157,2)$$

Dla długości sprowadzonej mamy wzór:

$$l_{\text{red}} = \frac{l}{\sqrt{m^2 + \frac{16 B^2}{m^2 \pi^4}}}$$

Przy wielkiej liczbie półfal zdąża długość jednej półfali  $\lambda$  do wartości:

$$\lambda = \pi \sqrt[4]{\frac{EJ}{k}} \dots \dots \dots (158, 0)$$

zaś  $P_{kr}$  do wartości:

$$P_{kr} = \frac{2 \pi^2 EJ}{\lambda^2} \dots \dots \dots (158, 1)$$

$(m \rightarrow \infty)$

87. Wyboczenie ściskanych pasów u mostów otwartych. (Fig. 208.)  
Pas taki zachowuje się jak pręt na sprężystych podporach, oddziaływają-

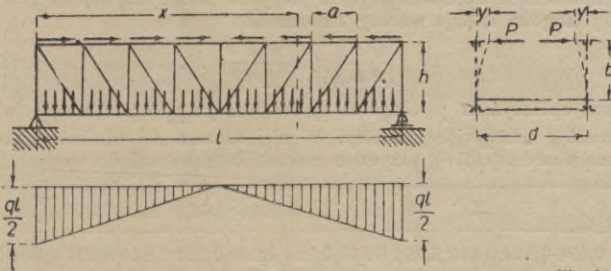


Fig. 208.

cych w kierunku poziomym wskutek sztywności zginania słupów belki kratowej.

a) Końce słupów są punktami podparcia dla pasa. Uważając słup za belkę, dolnym końcem utwierdzoną o sztywności zginania  $EJ_1$ , mamy dla ugięcia  $y$  górnego końca pod wpływem poziomej siły  $P$  wyrażenie:

$$y = \frac{Pb^3}{3EJ_1}$$

Z uwzględnieniem sił  $S$ , ściskających słup podłużnie, będzie zamiast powyższego:

$$y = \frac{Pb^3}{3EJ_1} \cdot \frac{1}{1 - S/S_E}, \text{ przyczem } S_E = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ_1}{b^2}$$

Stąd znajdujemy reakcję  $P$  końca słupa, jako podatnej podpory pasa górnego, w postaci:

$$P = \frac{3EJ}{b^3} \left(1 - \frac{S}{S_E}\right) y$$

Zastąpiwszy dla uproszczenia obliczeń te podpory sprężystym podłożem ciąglem, znajdujemy reakcję podłoża odniesioną do jednostki długości, dzieląc  $P$  przez odstęp słupów, czyli:

$$p = \frac{P}{a} = \frac{3EJ_1}{ab^3} \left(1 - \frac{S}{S_E}\right) y = ky,$$

co prowadzi do określenia „znamięnia” podłoża:

$$k = \frac{3EJ_1}{ab^3} \left(1 - \frac{S}{S_E}\right) \dots \dots \dots (158, 2)$$

b) Jeżeli przez  $Q$  oznaczymy obciążenie całkowite jednej belki, rozłożone równomiernie na rozpiętości  $l$ , to siła, przeniesiona przez przekątną na pas górny da się, przy założeniu bardzo wielu węzłów, określić w przekroju oddalonym o  $x$  od końca pasa wyrażeniem:

$$\frac{Q}{h \cdot l} \left( x - \frac{l}{2} \right) = \frac{Q}{h} \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right).$$

Jest to oczywiście siła, odniesiona do jednostki długości. Ta siła ma na końcu wartość  $\frac{Q}{2h}$ , maleje potem linjowo ze wzrostem  $x$ , a w środku rozpiętości ma wartość 0. Wywołana nią siła wewnętrzna w pasie ma widocznie największą wartość w środku:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{2h} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Q \cdot l}{8h}.$$

c) Najprostsza ścisła teoria wybożenia sprężystego, oparta na powyższych założeniach upraszczających i przyjęciu stałej sztywności  $EJ$  pasa na całej długości  $l$ , daje według Timoszenki:

$$\left[ \frac{Q \cdot l}{8h} \right]_{\text{kryt}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu \cdot l)^2} \dots \dots \dots (159,1)$$

przyczem współczynnik  $\mu$  długości sprowadzonej  $l_{\text{red}} = \mu \cdot l$  należy wyznaczyć według następującej tablicy. W niej oznacza  $B^2$  wielkość liczbowa, określoną wzorem (157, 0), przyczem wartość  $k$  trzeba wziąć z wzoru (158, 2):

$B^2 = 0$	5	10	15	22,8	56,5	100	162,8	200	300	500	1000
$\mu = 0,694$	0,524	0,443	0,394	0,363	0,324	0,289	0,257	0,245	0,224	0,204	0,174

Uwaga. W razie zmienności przekroju pasa wypadnie przy stosowaniu wzoru (159,1) wstawić tę z wartości  $EJ$  na całej długości pasa, której odpowiada najmniejsza wartość krytyczna.

### C. Wybożenie prętów zakrzywionych, płyt itp.

88. Wybożenie łuku kołowego dwuprzegubowego. Równomierny nacisk  $q$  ( $kg/m^2$ ) prostopadły wszędzie do łuku (fig. 209) nie wywołuje w nim momentów zginających, lecz tylko stałą siłę podłużną o wielkości  $q \cdot r$ .

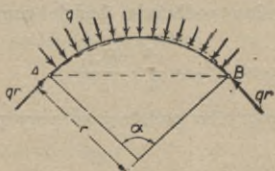


Fig. 209.

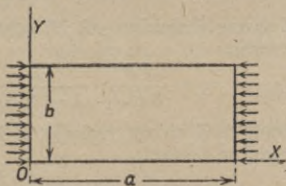


Fig. 210.

Atoli równowaga łuku w tej pierwotnej postaci przestaje być stałą i łuk się „wyboczy” w swej płaszczyźnie (fig. 209), skoro  $q$  przekroczy wartość:

$$q_{kr} = \frac{EJ}{r^3} \left( \frac{4\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \dots \dots \dots (160,0)$$

Przy małym kącie  $\alpha$  można w powyższym wzorze pominąć 1 wobec wyrazu pierwszego, a oznaczywszy długość łuku  $r \cdot \alpha = l$  otrzymujemy:

$$(q \cdot r)_{kr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \dots \dots \dots (160,1)$$

89. Wyboczenie płyt prostokątnych. a) Płyta o brzegach dookoła przegibnie ustalonych, równomiernie ściskana w kierunku boków  $a$  (fig. 210).

Jeżeli  $a > b$ , to równaniem powierzchni wyboczenia jest:

$$w = f \sin \frac{n \pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

przyczem  $n = 1, 2, 3, \dots$ , zależnie od wartości stosunku  $a : b$ . Gdy stosunek  $0 < \frac{a}{b} < \sqrt{2}$ , to wytwarza się jedna półfala ( $n = 1$ ).  $n$  półfal wytwarza się w granicach wartości:

$$\sqrt{(n-1)n} < \frac{a}{b} < \sqrt{n(n+1)}. \dots \dots \dots (160, 2)$$

Długość półfali  $\frac{a}{n}$  leży przy bardzo wielkiem  $a$  między granicami:

$$b \sqrt{1 - \frac{1}{n}} < \frac{a}{n} < b \sqrt{1 + \frac{1}{n}},$$

czyli przy bardzo wielkiej długości dzieli się wyboczona płyta na kwadraty naprzemian wypukłe i wklęsłe. Krytyczną wartość ciśnienia określa równanie:

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{\bar{B}}{b^2 h} \left( \frac{1}{n} \frac{a}{b} + n \frac{b}{a} \right)^2 = \Omega \left( \frac{100 h}{b} \right)^2 \dots \dots (161, 0)$$

w którym należy wstawić wartość  $n$ , dogadzającą warunkowi (160,2). Nadto oznacza  $\bar{B} = \frac{m^2}{m^2 - 1} E J = \frac{m^2}{m^2 - 1} E \cdot \frac{h^3}{3}$  sztywność zginania płyty, zaś  $h$  jej grubość.

We wzorze powyższym przedstawia  $\Omega$  wartość naprężenia krytycznego, odpowiadającego płycie, której grubość  $h = \frac{b}{100}$ . Tę wartość podano w poniższej tabelicy (VI.) dla żelaza kowalnego, jako materiału płyty:

$$\left( E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, m = \frac{10}{3} \right).$$

W przypadkach innej wartości samego  $E$ , np. dla stali, wystarczy liczby tabelicy pomnożyć przez  $\frac{E}{2 \cdot 10^6}$ ; zaś dla materiału o innej wartości obu stałych  $E$  i  $m$  należy liczby tabelicy pomnożyć przez  $\frac{m^2}{m^2 - 1} E \cdot \frac{0,91}{2 \cdot 10^6}$ , aby otrzymać odpowiednie wartości krytyczne naprężeń.

Tablica VI.

$\frac{a}{b} = 0,5$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3		
$\Omega = 1130$	929	819	760	731	723	730	747	774		
$\frac{a}{b} = 1,4$	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2		
$\Omega = 808$	784,5	759,6	742,3	731,2	724,9	723,0	724,8	729,7		
$\frac{a}{b} = 2,3$	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	> 3		
$\Omega = 737,2$	747,3	747,3	737,9	731,2	726,5	723,9	723,0	723		

b) Płyta podparta, jak powyżej pod działaniem naprężeń stycznych, rozłożonych równomiernie na całym konturze (fig. 211).

W takich mniej więcej warunkach znajduje się ścianka blachownicy w miejscach małego momentu zgięcia, a wielkiej siły poprzecznej.

Krytyczną wartość naprężenia  $\tau$ , po przekroczeniu której wystąpi ukośne pofałdowanie płyty, określa przy  $a$  wielkiem wobec  $b$ , wzór:

$$\tau_{kr} = \pi^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \left(\frac{h}{b}\right)^2 = \Omega \left(\frac{100 h}{b}\right)^2 \dots \dots \dots (161, 1)$$

Gdy materiałem jest żelazo kowalne, to powyższy wzór przybiera postać:

$$\tau_{kr} = 1022 \left(\frac{100 h}{b}\right)^2 \dots [w \text{ kg/cm}^2] \dots \dots \dots (161, 2)$$

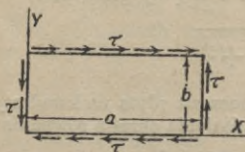


Fig. 211.

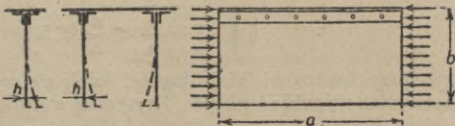


Fig. 212.

Dla szeregu skończonych wartości stosunku  $a : b$  podaje  $\Omega$  (w  $\text{kg/cm}^2$ ) następująca tablica, obliczona według dokładnego rozwiązania Timoszenki w przypadku żelaza kowalnego (jak powyżej):

$\frac{a}{b} = 1$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0
$\Omega = 1703$	1451	1321	1269	1228	1197	1135	1104

c) Płyta, trzema brzegami przegibnie ustalona i ściskana równomiernie siłami równoległymi do brzegu swobodnego (fig. 212).

Takie warunki zachodzą np. u blachy stojącej pasa belki kratowej o przekroju T. Teoria wybożenia płyt daje wówczas wzór:

$$\sigma_{kr} = U \frac{\bar{B}}{b^2 h} \dots \bar{B} + \frac{m^2}{m^2 - 1} E \frac{h^3}{12} \dots \dots \dots (162, 0)$$

Wartości współczynnika liczbowego  $U$ , zależnego od stosunku  $a : b$ , zawiera tablica następująca („Studja nad belkami I,<sup>u</sup> str. 95):

$\frac{a}{b} = 0,5$	1	1,5	2	3	5	8	$\infty$
$U = 42,49$	13,04	7,75	6,00	4,88	4,40	4,27	4,20

d) Płyta otwierdzonym jednym brzegu podłużnym i przegibnie ustalonych obu brzegach poprzecznych, ściskana równomiernie wzdłuż. Jest to schemat blachy stojącej pasa ściskanego kształtu U (fig. 212). Wzór teoretyczny dla  $\sigma_{kr}$  ma tę samą postać, co w poprzednim przypadku (162,0), a tylko  $U$  ma wartości inne, zestawione w niżej umieszczonej tablicy („Studja...,” str. 101).



$\frac{a}{b} = 0,5$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,65	1,7
$U = 45,28$	16,82	15,41	14,43	13,76	13,32	13,06	12,93	12,91	12,92
$\frac{a}{b} = 1,8$	1,9	2,0	2,2	2,35	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
$U = 13,01$	13,18	13,41	14,06	14,66	14,43	13,76	13,32	13,06	12,93
$\frac{a}{b} = 3,3$	3,4	3,6	3,8	4,0	4,06	4,2	4,5	4,8	4,95
$U = 12,91$	12,92	13,01	13,18	13,41	13,49	13,32	13,06	12,93	12,91
$\frac{a}{b} = 5,1$	5,4	5,7	5,74	6,0	6,4	6,6	6,8	7,2	
$U = 12,92$	13,01	13,18	13,21	13,06	12,93	12,91	12,92	13,01	

90. Wyboczenie poprzeczne lub skrętne (torsyjne). Przekroje belek zginanych w jednej płaszczyźnie, np. pionowej, obiera się zwykle ze względu na wyzyskanie materiału tak, aby  $W = \frac{J}{e}$  było jak największe, przy danym polu przekroju  $F$ . Jeżeli takie zwiększenie sztywności i wytrzymałości na zgięcie w tej płaszczyźnie odbywa się kosztem zmniejszenia sztywności zginania  $B_2 = J_2 E$  w płaszczyźnie prostopadłej i sztywności skręcania, jak się rzecz ma w przypadku bardzo wysokiego, a wąskiego przekroju prostokątnego albo dwuteowego itp., to może zająć niebezpieczeństwo wyboczenia skrętnego, przedstawionego w prostym szczególnym przypadku na fig. 213. Przy takim wyboczeniu powstaje obok skręcenia belki także jej wygięcie w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny obciążenia, czyli wygięcie poprzeczne. Jeżeli wyboczenie poprzeczne zajdzie, zanim naprężenie zginające we włóknie skrajnym przekroczy granicę sprężystości, to mamy do czynienia z wyboczeniem sprężystym, w razie przeciwnym jest wyboczenie niesprężyste.

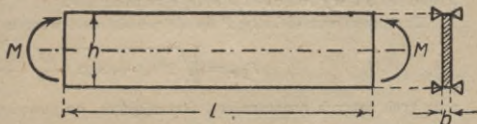


Fig. 213.

Teoria, opracowana najpierw przez A. G. M. Michell'a, Z. Prandtl'a i S. P. Timoszenkę, a sprawdzona doświadczeniami, pozwala w licznych przypadkach praktycznego znaczenia obliczyć wartość obciążenia krytycznego. Ta wartość jest w dość znacznym stopniu zależną od tego, w którym miejscu przekroju działa obciążenie. Np. przy obciążeniu działającym na górny pas belki dwuteowej, jest wartość krytyczna mniejsza, aniżeli przy takim samym obciążeniu pasa dolnego.

Tutaj podamy tylko kilka rozwiązań w najprostszych przypadkach, odsyłając czytelnika do odpowiednich prac Timoszenki lub do monografii autora p. t. „Studia nad belkami o przekroju I (dwuteowemi)“, Warszawa, 1923.

a) Belka o rozpiętości  $l$ , obu końcami swobodnie podparta i narażona na czyste zginanie w płaszczyźnie pionowej momentem  $M$ . (Podparcie końcowego przekroju trzeba sobie przytem wyobrazić tak, aby wykluczało obrót tego przekroju około osi równoległej do osi belki, umożliwiając jednocześnie obroty około obu osi do niej prostopadłych.)

1. Jeżeli przekrój belki jest prostokątem o małej wartości stosunku  $b:h$ , a nadto  $h:l$  jest niewielkie, to wartość krytyczną momentu określa z wielką dokładnością równanie:

$$M_{kr} = \pi \frac{\sqrt{B_2 \Gamma}}{l} \dots \dots \dots (164,0)$$

przyczem sztywność zginania poprzecznego  $B_2 = \frac{b^3 h}{12} \cdot E$  (dokładnie), zaś sztywność skręcania  $\Gamma = \frac{1}{3} b^3 h \cdot G$  (w dostatecznym przybliżeniu).

2. W przypadku przekroju I o wysokości  $h$  mamy:

$$M_{kr} = P_E \cdot \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{\Gamma}{P_E}} \dots \dots \dots (164,1)$$

jeżeli  $P_E = \pi^2 \frac{B_2}{l^2}$ , zaś  $\Gamma$  wyznaczamy według ust. 32.

2. Jeżeli obok momentu  $M$  działa na belkę siła podłużna  $N$ , to powyższą wartość momentu krytycznego trzeba pomnożyć przez:

$$\sqrt{1 \mp \frac{N}{P_E}}$$

przyczem znak  $-$  odnosi się do ściskania, a  $+$  do rozciągania.

Ten wynik obejmuje także przypadek wybożenia poprzecznego przy podłużnem ściskaniu siłą  $P$  o mimośrodku  $\delta$ , leżącym na pionowej osi symetrii przekroju. Wtedy bowiem jest  $M = P \cdot \delta$ ,  $N = P$ . Po wstawieniu i rozwiązaniu równania względem  $P$  otrzymujemy:

$$P_{kr} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \Psi}} \cdot P_E, \quad \text{przyczem} \quad \Psi = \frac{4 \delta^2 P_E}{\Gamma \left(1 + \pi^2 \frac{a^2}{l^2}\right)} \dots \dots (165,1)$$

Nadto  $a^2 = \frac{B_2 h^2}{12 \Gamma}$  dla przekroju prostokątnego, albo też  $a^2 = \frac{D \cdot h}{2 \Gamma}$  dla przekroju I, jeżeli  $D$  oznacza moment bezwładności jednej stopki względem pionowej osi symetrii przekroju

Równanie (165,1) poucza, że zboczenie siły ściskającej od środka przekroju w płaszczyźnie największej sztywności obniża wartość krytyczną siły w porównaniu do wartości Eulerowskiej i to tem bardziej, im mniejszą jest sztywność skręcania  $\Gamma$ .

b) Belka, obu końcami swobodnie podparta i obciążona w środku rozpiętości  $l$  i wysokości  $h$  siłą skupioną  $P$ .

Krytyczna wartość siły  $P$  da się przedstawić wzorem przybliżonym:

$$P_{kr} = \sqrt{294,4 + 2892,8 \frac{a^2}{l^2}} \cdot \frac{\sqrt{B_2 \Gamma}}{l^2} \dots \dots \dots (164,3)$$

przy tych samych oznaczeniach skracających, co powyżej.

## LITERATURA.

### A. W języku polskim.

1. Bogucki J.: Wykłady statyki budowli. (Litograf.). Lwów 1911.
2. Bryła S.: Podręcznik statyki budowli. Wyd. 2. Lwów i Warszawa 1925.
3. Franke J. N.: Mechanika teoretyczna. Warszawa 1889. (Rozdz. XVII.).
4. Jewniewicz H.: Teorja sprężystości. Warszawa 1910.
5. Humnicki A.: Zasady nauki o wytrzymałości materiałów. Wyd. Zakł. Nar. im. Ossolińskich 1922.
6. Karasiński L.: Wytrzymałość tworzyw. Wyd. 2. Warszawa 1921.
7. Kluger Wł.: Wykład wytrzymałości materiałów i stałości budowli. Paryż 1876.
8. Stephan P.: Nauka o wytrzymałości materiałów. Tłum. T. Radziszewski. Warszawa 1914.
9. Thullie M.: Podręcznik statyki budowli. Wyd. 3. Lwów 1917.
10. Timoszenko S. P.: Kurs wytrzymałości materiałów. Przełożył z IV. wyd. (ross.) M. T. Huber. Lwów—Warszawa 1921.

### B. W językach obcych.

11. Bach C.: Elastizität und Festigkeit. Wyd. 5. Berlin 1905.
12. Flamant A.: Stabilité des constructions. Résistance des matériaux. Wyd. 3. Paryż 1909.
13. Fontvirolant, B. de: Les méthodes modernes de la résistance des matériaux. Wyd. 2. Paryż 1920.

14. Föppl A.: Festigkeitslehre. Wyd. 8. T. III. Vorl. u. Techn. Mech. 1920. Teubner.
15. Föppl A. u. O.: Grundzüge der Festigkeitslehre. 1923. Teubner.
16. Föppl A. u. L.: Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure. I. Bd. 3. Aufl. 1924. II. Bd. 1920. Monachium i Berlin.
17. Keck W.—L. Hotopp: Vorträge über Elastizitätslehre. Wyd. 3. Cz. I. 1922. II. 1924. Hannover.
18. Kirpiczew W.: Soprotiwlenje materjałow. 2 tomy. Moskwa i Petrograd 1923.
19. Lorenz H.: Technische Elastizitätslehre. Monachium i Berlin 1913.
20. H. Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. Wyd. IV. Lipsk 1913.
21. Perry J.: Applied mechanics. Londyn 1907. (Także w przekładzie niemieckim R. Schick'a. 1908. Teubner.)
22. Pigeaud G.: Résistance des matériaux et élasticité. Paryż 1920.
23. Prescott J.: Applied elasticity. Londyn 1924.
24. Rabozée H.: Cours de résistance des matériaux. Wyd. 3. Bruksela i Paryż 1923.
25. Swain G. F.: Structural engineering. Strength of materials. New York 1924.
26. Tallquist H.: Lehrbuch der technischen Mechanik. T. II. Helsingfors 1903.
27. Tefmajer L.: Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre. Wyd. 3. Lipsk i Wiedeń 1905.
28. Timoshenko S. & Lessels J. M.: Applied elasticity. East Pittsburgh. Pa. 1925.
29. Timoshenko S.: Kurs teorji uprugosti. 2 tomy. Petersburg 1914—1916.
30. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd. IV. Mechanik. 4 tomy. 1901—1908. Teubner.

### C. Niektóre prace autora z powyższego działu.

31. Właściwa praca odkształcenia jako miara wyciężenia materiału. Lwów Czas. Techn. 1904.
32. Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. Ann. d. Phys. 1904, IV., Bd. 14.
33. O nateżeniach wywołanych nierównem ogrzaniem wewnętrznej i zewnętrznej ściany rury. Czas. Techn. 1906.
34. Teorja płyt prostokątne-różnokierunkowych wraz z technicznymi zastosowaniami. Lwów, Tow. Nauk. 1921.
35. Studja nad belkami o przekroju I. Warszawa. Spraw. i prace W. T. P. 1923.
36. Wzory obliczenia statycznego rami prostokątnej nierównoramiennej o słupach doskonałe utwierdzonych. Przegl. Techn. 1924.
37. Kryterja stałości równowagi i ich stosunek do statyki układów sprężystych. 1926, zes. 3., wyd. Akad. Nauk Techn. w Warszawie.
38. O wytrzymałości rury walcowej na wewnętrzne ciśnienie hydrostatyczne. Technika ciepła 1927.
39. Równanie pięciu momentów. Czas. Techn. 1927.
40. Biegungsprobleme eines durch Querrippen versteiften orthotropen Plattenstreifens. Verhandl. des 2. intern. Kongr. f. techn. Mechanik. Zürich 1926. Orell Füssli Verl. 1927.

## Statyka budowli.

### I. Wstęp. Belki statycznie wyznaczalne o ścianie pełnej.

Napisał

inż. dr. Stefan Bryła,

profesor politechniki, Lwów.

#### a) Statyczna wyznaczalność.

Belką lub dźwigarem płaskim nazywamy ustrój materialny, złożony z (nieważkich) prętów lub tarcz sztywnych, leżących w jednej płaszczyźnie, który służy do przeniesienia na ziemię sił działających w tejże płaszczyźnie czyli obciążeń.

Pręty przenosić mogą tylko siły osiowe, zatem obciążone mogą być tylko w węzłach. Tarcze mogą przenosić prócz sił osiowych także momenty zginające, muszą one zatem posiadać pewien moment bezwładności. Mogą to

być albo *a*) utwory o ściance pełnej (np. blachownice) albo *b*) kratownice, składające się z prętów połączonych w kratę, albo wreszcie *c*) utwory mieszane, w skład których wchodzi częściowo elementy o ściance pełnej, częściowo elementy kratowe.

Belkę kratową (kratownicą płaską) nazywamy belkę, składającą się w całości z prętów nieważkich, połączonych ze sobą przegibnie w węzłach. Siły zewnętrzne działają na nią (teoretycznie) tylko w węzłach.

Tarcza (lub pręt) jest połączona stale i statycznie wyznaczalnie z drugą tarczą (prętem) wogóle przy pomocy trzech prętów. Do ustalenia punktu (na płaszczyźnie) względem tarczy potrzeba dwu prętów. Układ płaski, złożony z *t* tarcz i *w* węzłów, połączony będzie stale (sztywnie) i statycznie wyznaczalnie z innym układem stałym, jeżeli posiada:

$$p = 3t + 2w \text{ prętów}$$

(połączonych ze sobą odpowiednio, tj. tak, aby nie zachodził wypadek wyjątkowy, por. str. 1187 i 1212).

Ziemię uważać można też za tarczę sztywną; zatem dla stałego i statycznie wyznaczalnego ustalenia układu względem ziemi potrzeba  $p = 3t + 2w$  prętów, z czego część może przypaść na pręty istotne (ustrojowe), część na pręty podporowe (łożyskowe), część na przegubowe.

Do ustalenia belek (dźwigarów) względem ziemi używamy zwykle łożysk, które w działaniu swem są równowarte z pewną ilością prętów, i które przy obliczaniu często się temi prętami zastępuje (t. zw. pręty łożyskowe). Łożysko stałe na płaszczyźnie (fig. 214) odpowiada dwu prętom podporowym, które możemy przyjąć dowolnie (fig. 215); zazwyczaj jednak przyjmujemy jeden pręt poziomy i jeden pionowy (fig. 216). Łożysko ruchome (na płaszczyźnie)



Fig. 214.

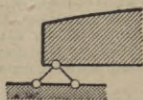


Fig. 215.

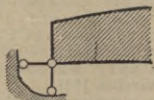


Fig. 216.



Fig. 217.

odpowiada jednemu prętowi podporowemu, który ma kierunek oddziaływania, a więc prostopadły do kierunku ruchu (tarcia zazwyczaj nie uwzględniamy) (fig. 217 i 218). Utwierdzenie, czyli wmurowanie odpowiada w przyjęciu statycznym zwykle trzem prętom, nie przecinającym się w jednym punkcie (fig. 219 i 220; por. też str. 1056).

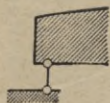


Fig. 218.

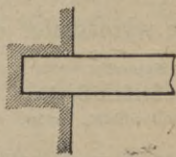


Fig. 219.

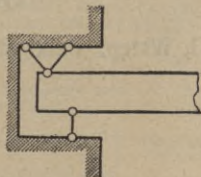


Fig. 220.

Pręty układu, łączące ze sobą tarcze i węzły, mogą być albo istotne, wykonane jako pręty (np. belka kratowa) albo mogą być zastąpione przegubami (pręty przegubowe). Przegub stały odpowiada dwu prętom przegubowym, przecinającym się w środku przegubu (przegub urojony), przegub ruchomy jednemu prętowi przegubowemu. Łożyska są właściwie również przegubami, a pręty łożyskowe prętami przegubowymi.

Nazywając  $p_i$  = ilość prętów istotnych,  $p_t$  = ilość prętów łożyskowych,  $p_g$  = ilość prętów przegubowych, otrzymamy dla belki stałej i statycznie wyznaczalnej czyli izostatecznej (por. str. 1064) potrzebną ilość prętów:

$$p = p_i + p_t + p_g = 3t + 2w \dots \dots \dots (1)$$

Podparcie stałe i statycznie wyznaczalne wymaga przynajmniej 3 prętów łożyskowych. Wtedy:

$$p_i = p - p_g - 3 = 3t + 2w - p_g - 3 \dots \dots \dots (2)$$

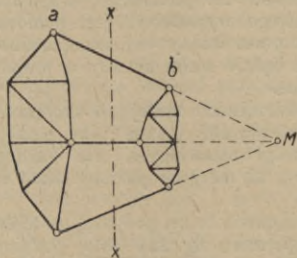


Fig. 221 a.

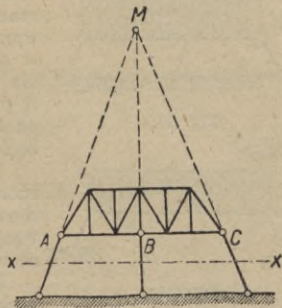


Fig. 221 b.

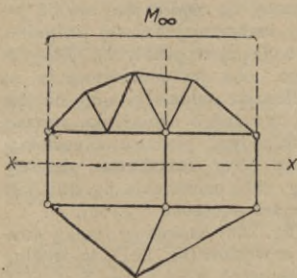
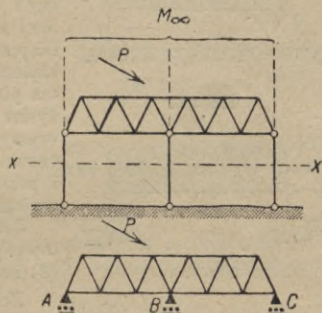


Fig. 222.



Jeżeli belka nie posiada tarcz, ale wyłącznie pręty, to  $t = 0$ , a wtedy:

względnie

$$p = 2w, \\ p_i = 2w - 3 \dots \dots \dots (3)$$

Warunki te są konieczne, jednak w wyjątkowych wypadkach mogą być niewystarczające. Mimo ich spełnienia bowiem belka może nie być sztywne, ale być chwiejna o nieskończenie małej, lub skończonej ruchomości. Pierwszy wypadek zachodzi wtedy, gdy pod wpływem obciążenia wystąpią wogóle w kratownicy teoretycznie siły nieskończenie wielkie (por. str. 1055 i 1212), a przyposzczególnych obciążeniach siły o wielkości skończonej ale nieokreślone (por. str. 1061). Wypadek drugi, gdy dla ogólnego obciążenia belka będzie chwiejna, a tylko dla specjalnego układu belka może spełnić swoje zadanie.

Np. przy trzech prętach istotnych, łączących z sobą tarcze sztywne, względnie kratownicy  $a$  i  $b$  (fig. 221 a), lub podporowych (fig. 221 b) zachodzi wypadek ruchomości nieskończenie małej. Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych przekroju  $xx$  przechodzi przez punkt  $M$ , wystąpią w prętach przeciętych

siły skończone, ale nieokreślone; jeżeli nie przechodzi przez ten punkt, wystąpią siły nieskończenie wielkie, które wprawdzie wskutek sprężystości dojdą do wielkości skończonych, pozostaną jednak w każdym razie bardzo znaczne i albo uniemożliwią, albo bardzo utrudnią wykonanie takiej belki w praktyce.

Jeżeli punkt  $M$  znajdować się będzie w nieskończoności (pręty przecięte będą równoległe), nastąpi wogóle pod wpływem dowolnej siły zmiana kształtu, więc belka będzie chwiejna. Np. pod wpływem składowej siły  $P$  (fig. 222), prostopadłej do kierunku prętów podporowych, belka  $ABC$  zostanie wprawiona w ruch. Dla specjalnego obciążenia, w danym wypadku dla pionowego, względnie dla takiego, którego wypadkowa jest pionowa, tj. przechodząca przez leżący w nieskończoności punkt  $M$ , belka będzie stała, ale siły w prętach będą nieokreślone.

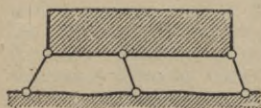


Fig. 223.

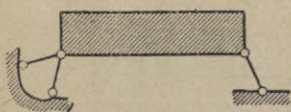


Fig. 224.

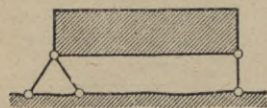


Fig. 225.



Fig. 226.

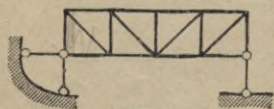


Fig. 227.

Wypadek nieskończenie małej lub skończonej ruchomości belki określić można przy pomocy równań równowagi ustawionych dla każdego węzła (str. 1210), lub też przy pomocy zasad kinematyki.

Fig. 223 przedstawia belkę, podpartą na trzech ruchomych podporach; fig. 224 belkę podpartą na jednej stałej i jednej ruchomej ukośnej podporze; fig. 225 i fig. 226 belkę t. zw. prostą, czyli wolno podpartą, tj. wspierającą się na jednej stałej i jednej ruchomej pionowej podporze, (najczęściej przychodząca w praktyce). Dla obciążenia pionowego, oba jej oddziaływania są też pionowe. Obliczając oddziaływanie na łożysku stałym dla dowolnego obciążenia, wyznaczamy zwykle składową pionową i poziomą, czemu odpowiadają pręty łożyskowe pionowy i poziomy (por fig. 226; oznaczenie fig. 225 jest mniej celowe. Por. też str. 1056 i 1186).

Jeżeli tarczę (fig. 226) zastąpimy belką kratową, posiadającą  $w$  węzłów (fig. 227), to według (3) ilość prętów istotnych  $p_i = 2w - 3$ .

Belka (fig. 224) nie jest prostą, ale rozporową (bez względu na swój wygląd), gdyż oddziaływania są ukośne. Belki rozporowe o kształcie łukowym nazywamy łukowemi; natomiast belka o kształcie łukowym, ale podparta wedle fig. 226 (por. fig. 228) jest belką prostą, a nie łukiem. Wyjątkowo belkę wedle fig. 229 nazywamy belką łukową ze zniesionem parciem poziomem (por. str. 1203).

Pręty ustrojowe i pręty łożyskowe belek kratowych można pomiędzy sobą wymieniać, byle zostało zachowane równanie (1) i byle przy zamianie stałość i statyczna wyznaczalność nie były naruszone (por. fig. 228 i 230).

Przykłady. Opuszczając w belce wolno podpartej (fig. 228) pręt  $ab$  i zastępując go prętem łożyskowym  $m$  (fig. 230) otrzymujemy znów belkę statycznie wyznaczalną (łuk trój-przegubowy); natomiast nie możemy zmienić go na inny pręt istotny, gdyż belka będzie wtedy chwiejna.

Belka  $AB$  (fig. 231a) składa się z trzech tarcz, połączonych ze sobą: pierwsza z drugą przy pomocy trzech, druga z trzecią też przy pomocy trzech prętów; uwzględniając trzy pręty podporowe, otrzymamy:  $3 \times 3 = 9 = 3i$  prętów łączących (równanie 1). Wymieniając pręty  $ab$ , oraz  $cd$ , i zastępując je prętami podporowymi  $m$  i  $n$  (fig. 231b), otrzymujemy

belkę ciągłą przegubową o 1 łożysku stałym, 3 ruchomych i 2 przegubach stałych (układ w praktyce niekorzystny). Usuwając nadto pręt  $ef$  i zastępując go prętem podporowym  $h$ , otrzymujemy również belkę ciągłą przegubową o 2 łożyskach stałych, 2 ruchomych, 1 przegubie stałym i 1 ruchomym (fig. 231c), co daje układ korzystniejszy i jest zwykle używane (w nieco zmienionej postaci).

Belki kratowe dzielimy na pojedyncze (tj. składające się z jednej tarczy) i złożone (z dwu lub więcej tarcz połączonych ze sobą przegubami).

Belki kratowe, którym brakuje  $n$  prętów do ilości wymaganej przez wzory 1–3, które zatem posiadają  $p = (3t + 2w) - n$  prętów, nie zapewniają stałości połączenia dla ogólnego układu sił zewnętrznych; nazywamy je belkami chwiejnymi  $n$ -tego stopnia. Chwiejność może dotyczyć tak prętów ustrojowych, jak i podporowych.

Do obliczenia belek posiadających więcej prętów niż wymagają równania 1–3, nie wystarczają równania równowagi, ale potrzeba dołączyć do tychże jeszcze  $n$  równań sprężystości, jeżeli

$$p = 3t + 2w + n.$$

Belki takie nazywamy statycznie niewyznaczalnymi (hiperstatycznymi)  $n$ -tego stopnia. Statyczna niewyznaczalność może być zewnętrzna, jeżeli prętami nadliczbowymi są pręty podporowe, lub wewnętrzna, jeżeli są niemi pręty ustrojowe.

### b) Linje wpływowo (linje wpływu).

Linje wpływowo (wpływu) pewnej ilości statycznej, są to linje, których rzędne podają wielkość tej ilości statycznej pod wpływem poruszającego

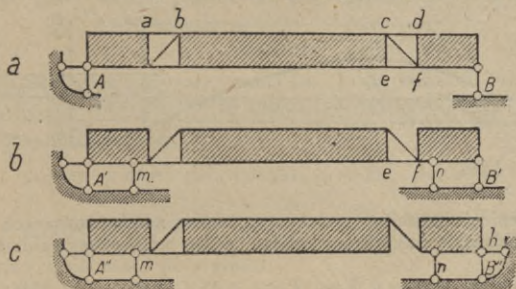


Fig. 231.

się ciężaru  $P = 1$ . W praktyce ciężar ten jest najczęściej pionowy. Powierzchnię zawartą między linją wpływową, a osią, nazywamy powierzchnią wpływu (powierzchnią wpływową).

Fig. 232 przedstawia linię wpływu oddziaływania  $A$  belki ciągłej. Jeżeli ciężar  $P=1$  znajduje się np. w punkcie  $m$ , to oddziaływanie  $A$  wynosi  $1 \cdot \eta_m$ . Ta linia wpływowa ma swój punkt obojętny o rzędnej  $\eta = 0$  w  $C$  (gdy ciężar  $P=1$  stanie w  $C$ , oddziaływanie  $A=0$ ), oraz część dodatnią (między punktami  $A$  i  $C$ ) i ujemną (między  $C$  i  $B$ , gdy ciężar  $P=1$  stanie w  $n$ , oddziaływanie  $A = -1 \cdot \eta_n = -\eta_n$ ); (tj. na podporze  $A$  występuje wtedy oddziaływanie, skierowane ku górze i starające się belkę na tej podporze podnieść).

Fig. 232.

Dla ciężaru  $P$  oddziaływanie  $A = P\eta_m$ , względnie  $A = P\eta_n$ . Gdy na belce jest kilka ciężarów, to:

$$A = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + \dots = \Sigma P \eta.$$

Dla ciężaru jednostajnie rozłożonego między  $m$  a  $n$ :

$$A = \int_m^n p \cdot \eta \, dx = p \int_m^n \eta \, dx = p F_{mn},$$

gdzie  $F_{mn} = \int_m^n \eta \, dx$  przedstawia algebraiczną powierzchnię wpływową, zamkniętą między rzędnymi  $\eta_m$  a  $\eta_n$ .

Zazwyczaj mamy do czynienia z ciężarem własnym  $g$ , rozłożonym na całej długości belki, oraz z obciążeniem ruchomem (ciężary skupione  $P$

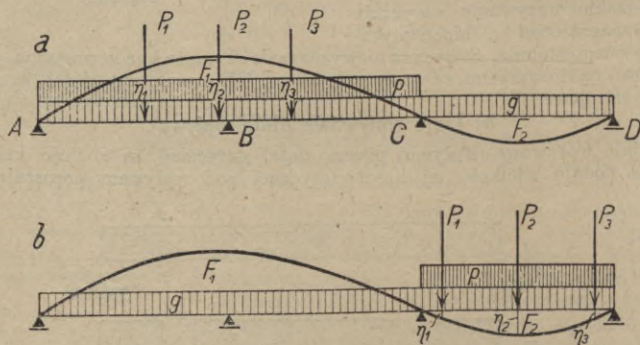


Fig. 233.

lub obciążenie jednostajnie rozłożone  $p$ ), które należy rozmieścić tak, aby uzyskać obciążenie najniekorzystniejsze celem bezpiecznego obliczenia belki. Wtedy:

$$\text{najw. } + B = g(F_1 - F_2) + p F_1 + \Sigma P \eta \quad (\text{fig. 233 a}),$$

$$\text{najw. } - B = g(F_1 - F_2) - p F_2 - \Sigma P \eta \quad (\text{fig. 233 b}).$$

Ciężary  $P$  rozmieszczamy tak, aby  $\Sigma F \eta$  było największe. Jeżeli największa rzędna występuje wybitnie (fig. 235 d), umieszczamy w niej największy ciężar.



Obciążenie pośrednie zachodzi, gdy ciężary przenoszą się na belkę pośrednio, przez poprzecznicę; wtedy ciężar  $P$  rozdziela się na  $P_1 = P \frac{a-m}{a}$

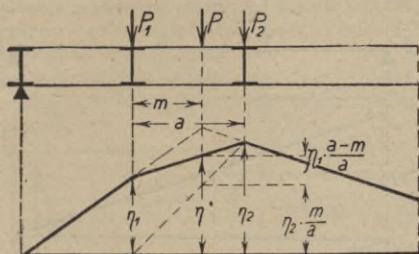


Fig. 234.

i  $P_2 = P \frac{m}{a}$ , których wpływ jest równy wpływowi siły  $P$ . Zatem:

$$P\eta = P_1\eta_1 + P_2\eta_2, \quad \text{czyli} \quad \eta = \frac{a-m}{a}\eta_1 + \frac{m}{a}\eta_2.$$

Linja wpływuwa pomiędzy poprzecznkami jest zatem prostą (fig. 234).

### c) Belka wolno podparta.

Oddziaływania (fig. 235 b). Dla  $P=1$  w odstępnie  $a$  od podpory  $A$  otrzymujemy:

$$A = P \frac{l-a}{l} = 1 \cdot \frac{l-a}{l}, \quad B = P \frac{a}{l} = 1 \cdot \frac{a}{l}.$$

Linje wpływu mają kształt linii prostych, a mianowicie:

dla	$a$	$A$	$B$
	0	1	0
	$l$	0	1

Siła poprzeczna w punkcie  $m$  równa się sumie wszystkich sił działających po lewej stronie punktu  $m$ . Siły poprzeczne  $T$  wynoszą więc

$$\begin{array}{ll} \text{dla } P \text{ między } m \text{ a } B & T = +A \\ \text{„ „ „ „ } A \text{ a } m & T = A - P = -B. \end{array}$$

Na podporze lewej odcinamy rzędną (+1), na prawej (-1), i łączymy prostymi wedle fig. 235 c. Ważne są części zakreskowane, grubo wyciągnięte.

Momenty zginające (fig. 235 d).

Dla  $P=1$  między  $A$  a  $m$ :  $M = B(l-x) = P \frac{a}{l}(l-x) = 1 \frac{a}{l}(l-x)$ .

Dla  $P=1$  między  $m$  a  $B$ :  $M' = Ax = P \frac{l-a}{l} \cdot x = 1 \frac{l-a}{l} x$ .

Otrzymujemy zatem dwie linie proste:

dla	$a$	$M$	$M'$
	0	0	1 $x$
	$l$	1 $(l-x)$	0
	$x$	1 $\frac{x(l-x)}{l}$	1 $\cdot \frac{x(l-x)}{l}$

Linje wpływowe momentów można wykreślić, odcinając na pionowej przez  $A$  długość  $x$  i łącząc  $A'$  z  $B$ , oraz analogicznie odcinając w  $B$  długość  $(l-x)$  i łącząc  $B'$  z  $A$ . Wygodniej jest obliczyć w  $m$  rzędną

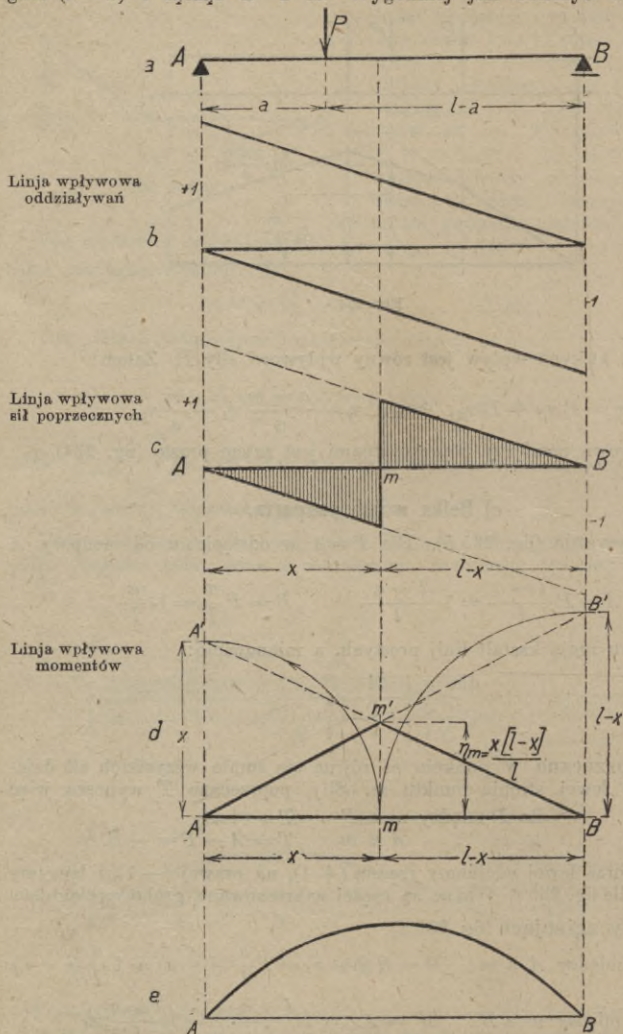


Fig. 235.

$\eta_m = \frac{x(l-x)}{l}$ , odciąć  $mm' = \eta_m$  i połączyć  $m'$  z  $A$  i  $B$ , zwłaszcza, że wtedy możemy przyjąć najwygodniejszą podziałkę. Wierzchołki  $m'$  dla poszczególnych punktów leżą na paraboli (fig. 235 e) o równaniu:

$$\eta = \frac{x(l-x)}{l}$$

**Obciążenie pośrednie.** Linja wpływaowa sił poprzecznych otrzymuje kształt wedle fig. 236 *a*, por. fig. 234 i jest ważna dla całego przedziału *mn*. Zatem i siła poprzeczna dla każdego punktu danego przedziału jest ta sama.

Linja wpływaowa momentów przyjmuje kształt fig. 236 *b*. Rysuje się najpierw linję wpływu bez uwzględnienia poprzecznic, a następnie wstawia prostą *mn* na długości danego przedziału.

**Obciążenie jednostajnie rozłożone.** Przyjmujemy, że ciężar *g* jest rozłożony jednostajnie na całej belce, zaś ciężar ruchomy *p* umieszczony jest najniekorzystniej.

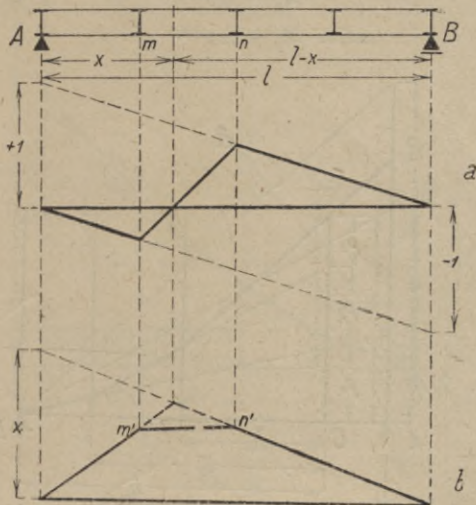


Fig. 236.

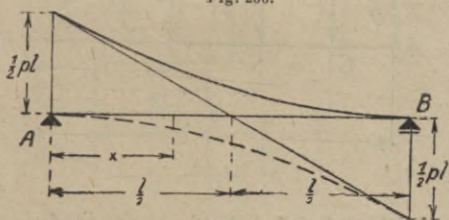


Fig. 237.

Oddziaływanie (najniekorzystniejsze jest całkowite obciążenie):

$$A_g = \frac{1}{2} g l = B_g$$

$$\text{najw. } A_p = \frac{1}{2} p l = \text{najw. } B_p$$

Siły poprzeczne (w odległości *x* od lewej podpory):

$$T_g = \frac{1}{2} g (l - 2x).$$

Siły poprzeczne dla ciężaru stałego zmieniają się podług linii prostej.

Dla otrzymania najw. *T* obciążamy belkę na długości  $(l - x)$ ; dla otrzymania najmn. *T*, na długości *x* (por. fig. 235 *c*). Wtedy:

$$\text{najw. } T_p = \frac{1}{2} p \frac{(l - x)^2}{l}; \quad \text{najmn. } T_p = -\frac{p x^2}{2l}.$$

Największe siły poprzeczne dla ciężaru ruchomego zmieniają się wedle paraboli, której największa rzędna na podporze wynosi:  $\frac{1}{2} pl$ , rzędne w środku belki  $\frac{1}{8} pl$ . Konstrukcja jej podana jest na fig. 237.

Momenty zginające (najniekorzystniejsze obciążenie całkowite):

$$M_g = \frac{1}{2} gx(l-x): \quad \text{najw. } M_p = \frac{1}{2} px(l-x).$$

Największy moment występuje w środku belki i wynosi:

$$M_g = \frac{1}{8} gl^2,$$

$$\text{najw. } M_p = \frac{1}{8} pl^2.$$

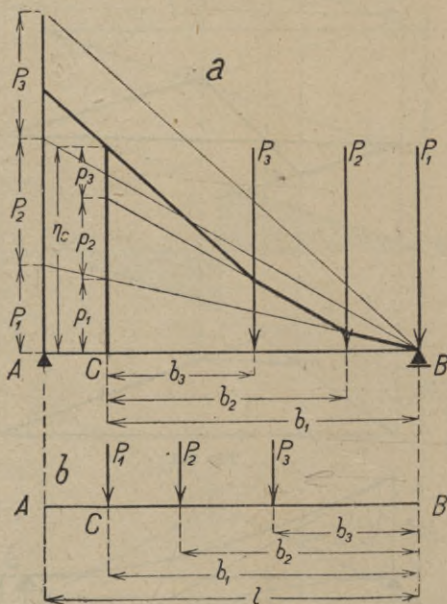


Fig. 238.

**Wielobok oddziaływań.** Obciążenie bezpośrednie. Ustawmy na belce  $AB$  szereg ciężarów  $P_1, P_2, P_3$  (np. pociąg) tak, aby pierwszy ciężar  $P_1$  stanął na podporze  $B$  (fig. 238 *a*), odetnijmy ciężary  $P_1, P_2, P_3$  na pionowej przez  $A$ , wykreślmy promienie sznurowe dla bieguna, przyjętego w  $B$ , a wreszcie narysujmy wielobok sznurowy, poczynając od  $B$ . Wtedy rzędna  $\eta_c$  w punkcie  $C$  określi wielkość oddziaływania  $A$ , dla położenia pociągu wedle fig. 238 *b*, tj., gdy  $P_1$  stoi w  $C$ . Jeżeli bowiem przedłużymy promień wieloboku sznurowego, znajdujące się na prawo od rzędnej  $\eta_c$ , aż do przecięcia się z tą rzędną, to odetną one na niej odcinki  $p_1, p_2, p_3$ , przyczem według rys. *a*) jest  $p_1 : b_1 = P_1 : l$ ,  $p_2 : b_2 = P_2 : l$  itd., zatem:

$$\eta_c = p_1 + p_2 + p_3 + \dots = P_1 \frac{b_1}{l} + P_2 \frac{b_2}{l} + P_3 \frac{b_3}{l} + \dots = A.$$

Siła poprzeczna w przekroju  $C$  jest z reguły największa wtedy, gdy na nim stoi pierwszy ciężar (fig. 238 *b*), zatem wykres oddziaływań jest zarazem wykresem największych sił poprzecznych.

Jeżeli pierwszy ciężar jest stosunkowo mały i bardzo oddalony od drugiego, to największa siła poprzeczna może wystąpić dla drugiego ciężaru

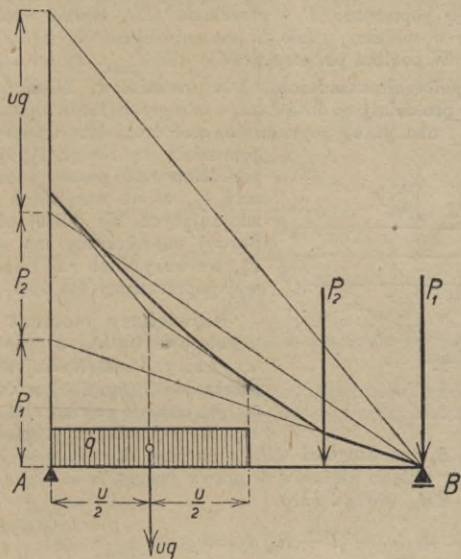


Fig. 239.

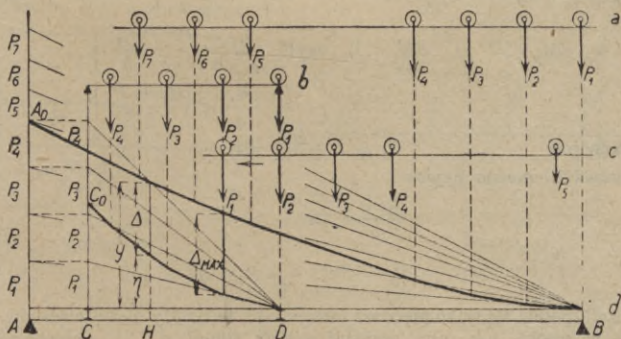


Fig. 240.

znajdującego się w danym przekroju. Jeżeli między ciężarami skupionymi są też ciężary ciągłe, jednostajnie rozłożone na pewnych długościach, to należy je zamienić na ciężary skupione, zaczepiające w środkach tych długości, a w wielobok tak otrzymany wkreślić parabole na długości obciążenia jednostajnego, por. fig. 239.

Obciążenie pośrednie. Dla danego szeregu ciężarów (fig. 240 *a*) wykreślmy wielobok oddziaływań  $BA_0$  dla belki  $AB$  i także wielobok  $DC_0$

dla belki (podłużnicy)  $CD$  przy pomocy bieguna  $D$  i sił  $P_1, P_2, P_3$ , odciętych na pionowej punktu  $C$ , a ustawionych wedle fig.  $b$ ). Jeżeli pierwszy ciężar pociągu, jadącego w lewo, stoi w dowolnym punkcie  $H$  przedziału  $CD$ , to rzędna  $y$  w tymże punkcie wieloboku  $BA_0$  przedstawia oddziaływanie  $A$ , rzędna  $\eta$  wieloboku  $DC_0$  działanie poprzecznic  $C$ , zatem różnica  $y - \eta = \Delta$  przedstawia siłę poprzeczną  $T$  w przedziale  $CD$ . Będzie ona największa, gdy  $P_1$  stanie w miejscu, gdzie  $\Delta$  jest największe (fig. 240  $c$  i  $d$ ). Wtedy  $T_{\max} = \Delta_{\max}$ . W pobliżu podpory prawej dla  $T_{\max}$ ,  $P_1$  ma stać na prawej poprzecznic (położenie zasadnicze). Dla przedziałów, bliskich podpory  $A$ , zwłaszcza, gdy przedziały są dość duże, a odstęp ciężarów znacznie mniejsze, może dla  $T_{\max}$  nad prawą poprzeczną stać drugi albo trzeci ciężar. Jeżeli

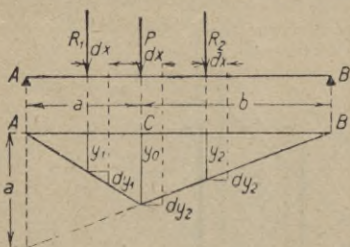


Fig. 241.

przedziały są równe, i gdy w pewnym przedziale nad prawą poprzeczną ma stać  $P_2$ , to we wszystkich przedziałach znajdujących się bliżej podpory  $B$  na prawej poprzecznic ma stać  $P_1$  albo  $P_2$ , we wszystkich zaś bliżej  $A$ , na prawej poprzecznic ma stać  $P_2$  albo  $P_3$ .

**Największy moment w pewnym przekroju belki.** *a)* Sposób analityczny. Z kształtu linii wpływowej dla przekroju  $C$  (fig. 241) widać, że należy na nim ustawić pewien ciężar  $P$ . Nazwijmy  $R_1$  wypadkową ciężarów na długości  $AC$ , zaś  $R_2$ , na długości  $CB$ , to moment  $M = R_1 y_1 + P y_0 + R_2 y_2$ . Przez posunięcie układu ciężarów w prawo (ewent. w lewo) o  $dx$  zwiększy się moment o  $dM_p$  (ewent.  $dM_l$ ):

$$dM_p = R_1 dy_1 - (P + R_2) dy_2 = y_0 dx \left[ \frac{R_1}{a} - \frac{P + R_2}{b} \right].$$

Analogicznie będzie  $dM_l = y_0 dx \left[ -\frac{R_1 + P}{a} + \frac{R_2}{b} \right]$ . Jeżeli  $P$  ma stać

w  $C$ , to  $dM_p < 0$  i  $dM_l < 0$ , czyli  $\left. \begin{array}{l} \frac{R_1 + P}{a} > \frac{R_2}{b} \\ \text{i} \quad \frac{R_1}{a} < \frac{R_2 + P}{b} \end{array} \right\} \dots \dots (a)$

Nazwijmy  $R_1 + P + R_2 = R$ ,

to zamiast  $a$ ) można napisać:

$$\frac{R_1 + P}{a} > \frac{R}{l} > \frac{R_1}{a} \dots \dots \dots (b)$$

albo:  $(R_1 + P) > \frac{a}{l} R > R_1 \dots \dots \dots (c)$

Jeżeli spełnia się tylko pierwsza nierówność, to należy układ ciężarów przesunąć w prawo tak, aby sąsiedni ciężar stanął w  $C$  i zastosować dla nowego położenia ciężarów kryterjum powyższe.

**Sposób wykreślny.** Wykreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy dla danego szeregu ciężarów. Ustawmy belkę  $AB$  tak, aby przekrój badany  $C$  znalazł się na kierunku pewnej siły, np.  $P_3$  (fig. 242). Pionowe przez  $A$  i  $B$  wyznaczają na wieloboku sznurowym punkty zamykającej  $A'B'$ . Odcinek  $\eta_c$  (w skali długości), pomnożony przez biegunową  $H$  (w skali sił), przedstawia  $M_c$ , gdy  $P_3$  stoi w  $C$ . Jeżeli przekrój  $C$  wpadnie w kierunek siły innej, to w powyższy sposób otrzymamy inną wartość  $\eta_c$ . Przesuwając więc belkę,

znajdziemy łatwo najw.  $r_{lc}$ ; wtedy najw.  $M_c = \text{najw. } r_{lc} \cdot H$ . Podobnie znajdziemy najw.  $r_{ld}$  dla przekroju  $D$  belki. Jeżeli jeden ciężar jest wybitnie większy od innych, to zwykle on właśnie stanąć winien na badanym przekroju. Sposobu tego używa się, gdy mamy znaleźć najw.  $M$  w pewnej liczbie przekrojów, np. pod każdą poprzeczną. Często jednak, zwłaszcza dla

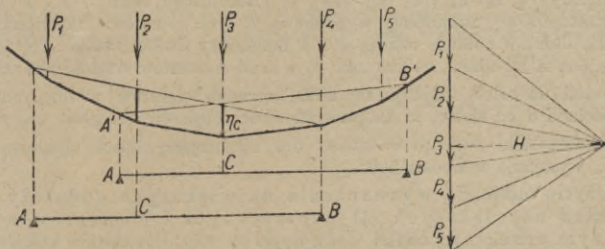


Fig. 242.

mniejszych belek, potrzeba dla wyznaczenia przekroju wyznaczyć bezwzględnie największy moment.

**Bezwzględnie największy moment.** Jest to największy z spośród największych momentów poszczególnych wszystkich przekrojów belki. Występuje on w pewnym przekroju belki (przekrój niebezpieczny), gdy na nim stanie jeden z ciężarów układu np.  $P$  (fig. 243). Jeżeli  $R =$  wypadkowa ciężarów, znajdujących się na belce,  $Q =$  wypadkowa ciężarów, znajdujących się na belce na lewo od  $P$ , to z równowagi względem  $B$  wynika:

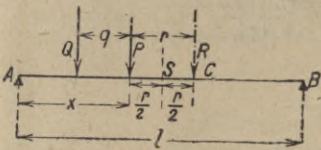
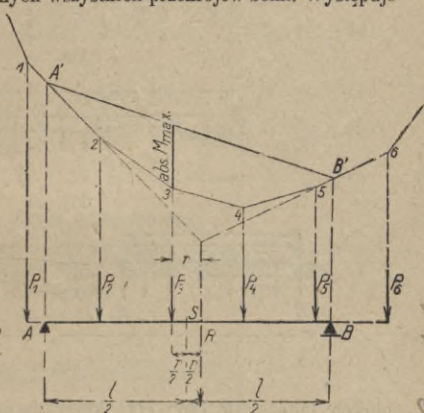


Fig. 243.

Fig. 244.

$$Al = R(l - x - r) \dots \dots \dots (a)$$

stąd  $\frac{dA}{dx} \cdot l = -R \dots \dots \dots (b)$

Moment w  $C$   $M_x = Ax - Q \cdot q$ .

Z równania:  $l \frac{dM_x}{dx} = \left( A + x \frac{dA}{dx} \right) \cdot l = 0$

otrzymamy po wstawieniu a) i b) oddalenie przekroju niebezpiecznego od podpory  $A$   
 $x = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}(l - r)$ .

Pravo Cullmena

Zatem środek belki  $S$  połowi odstęp  $r$  wypadkowej  $R$  od niebezpiecznego przekroju. W powyższym wyprowadzeniu przyjęto, że  $R$ ,  $Q$ ,  $r$  i  $q$  są niezależne od  $x$ , czyli, że przy podporach niema obciążeń ciągłych. W przeciwnym wypadku wzory stają się bardziej zawiłe (por. wzory dla obciążenia zasadniczego mostów drogowych str. 757). Zwykle na przekroju niebezpiecznym ma stać ciężar najbliższy wypadkowej. Jeżeli np. na belce zmieszczą się ciężary  $P_2, P_3, P_4$  i  $P_5$  (fig. 244), to przedłużając boki 1—2 i 5—6 aż do przecięcia się, znajdziemy wypadkową  $R$  tych ciężarów. Najbliższą siłą jest  $P_3$ . Jeżeli w połowie między  $P_3$  i  $R$  umieścimy środek  $S$  belki  $AB$ , to zamykająca  $A'B'$  odcina na kierunku  $P_3$  w skali momentów wartość abs  $M_{\max}$ .

Jeżeli na belce znajduje się kilka równych ciężarów w równych odległościach  $a$  od siebie, to dla parzystej ilości ciężarów odległość abs  $M_{\max}$  od środka belki  $e = \frac{1}{2}r = 0,25a$ ; dla nieparzystej ilości ciężarów abs  $M_{\max}$  występuje w środku belki.

Użycie tablic do wyznaczenia największych oddziaływań tudzież największych sił poprzecznych i momentów w dowolnym przekroju belki wolno podpartej: Dla mostów kolejowych

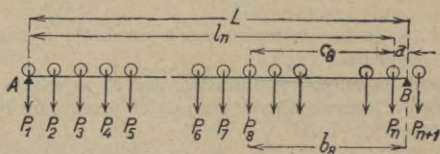


Fig. 245.

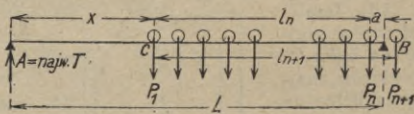


Fig. 246.

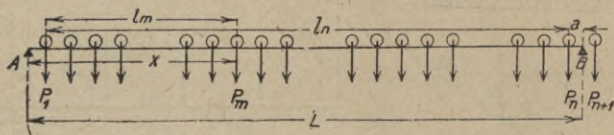


Fig. 247.

ułożono tablice (str. 768—771), które dla danych norm i schematów obciążenia (por. fig. 14, str. 764, i fig. 15, str. 766) podają  $l$  = odstęp dowolnej osi  $n$  od osi pierwszej danego schematu, następnie  $\sum_1^n P$  = sumę nacisków osi od 1 do  $n$ , wreszcie  $M_n$  = moment sił  $\sum_1^n P$  ze względu na oś  $n$ .

Jeżeli  $L$  = rozpiętość belki  $AB$ , a pierwsza oś schematu III stoi w  $A$  (fig. 245), to największe oddziaływanie  $A$  znajdziemy z równania:

$$AL = \sum_1^n Pb = \sum_1^n Pc + a \sum_1^n F$$

czyli

$$AL = M_n + a \sum_1^n P,$$

gdzie

$$a = L - l_n$$

przyczem

$$l_n < L < l_n + 1.$$



Jeżeli pierwsza oś schematu *I* stoi w *C* (fig. 246), to w przekroju *C*

$$\text{najw. } T = A, \quad A \cdot L = M_n + a \sum_1^n P,$$

gdzie  $a = L - x - l_n,$

przyczem  $l_n < L - x < l_{n+1}.$

Jeżeli chodzi o najw. *M* w dowolnym przekroju *x* (fig. 247), to ustawiamy na tymże przekroju *m*-tą oś *P<sub>m</sub>* schematu *II*, która wedle *c*) str. 1196 czyni zadość nierównościom:

$$\sum_1^m P > \frac{x}{L} \sum_1^n P > \sum_1^{m-1} P. \dots \dots \dots (c)$$

przyczem dla *n* mamy warunek:

$$l_n < L - x + l_m < l_{n+1} \dots \dots \dots (d)$$

Wtedy najw.  $M_x = A x - M_m,$

przyczem  $AL = M_n + a \sum_1^n P$  j. w.,

zaś  $a = L - x - (l_n - l_m).$

Ponieważ w miejscu *x* ma stać jako *P<sub>m</sub>* oś parowozu, przeto schemat *II* jest nieważny, jeżeli *m* < 5 (t. zn. gdy *x* jest małe).

Przykłady na str. 766, 767 i 772. W przykładzie na str. 767 jest dla normy  $A x = 20 m, L = 40 m, m = 10, n = 20,$  gdyż spełnia się nierówność *c*), tj.  $214 > \frac{20}{40} \cdot 402 = 201 > 189,$  tudzież nierówność *d*)  $37 < 40 - 20 + 18,5 < 40.$

Podobnie dla  $x = 15$  jest  $m = 8, n = 20,$  gdyż

$$\text{wedle (c): } 164 > \frac{15}{40} 402 = 151 > 13,9,$$

tudzież wedle *d*):  $37 < 40 - 15 + 13 = 38 < 40.$

### d) Belka ciągła przegubowa.

Dla belki o *n* przęsłach czyli (*n* + 1) podporach mamy *n* tarcz i (*n* - 1) przegubów, w tem *s* stałych, *r* ruchomych. Wedle równania 1 (str. 1187) ilość prętów łożyskowych powinna wynosić:

$$p_l = 3n - 2s - r.$$

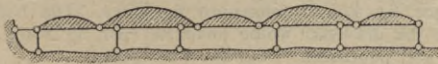


Fig. 248.

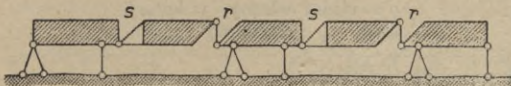


Fig. 249.

Jeżeli wszystkie przeguby są stałe, to

$$p_l = 3n - 2(n - 1) = n + 2,$$

czyli tylko jedno łożysko stałe np.  $n = 5, p_l = 5 + 2 = 7,$  por. fig. 248.

Najczęściej  $s = r,$  wtedy  $p_l = 3n - 3s = 3(n - s),$  np. dla  $n = 5, s = r = 2, p_l = 3(5 - 2) = 9,$  por. fig. 249.

W jednym przęśle mogą być najwyżej dwa przeguby (w belkach ciągłych łukowych mogą być 3 przeguby). Zwykle wykonywamy belki ciągle przegubowe, dając: w przęsłach skrajnych po jednym przegubie, w następnych zaś co drugie przęsło dwa przeguby; w przęsłach skrajnych nie dajemy przegubów, w następnych zaś co drugie przęsło po 2 przeguby.

W ten sposób rozkładamy belkę ciągłą przegubową na belki wspornikowe i na wolno podparte, wiszące na wspornikach.

Dla obciążenia stałego obliczamy najpierw belki zawieszane, względnie ich oddziaływania, które są siłami zewnętrznymi dla belki wspornikowej, a następnie belkę wspornikową.

Linje wpływowe. Dla oddziaływania  $A$  (fig. 250) rzędna linii wpływowej w punkcie  $A$   $AA' = 1$ , rzędna w punkcie  $B$  równa się 0. Prostą  $A'B$  przedłużamy nazewnątrz aż do przecięcia się z pionowymi przez przeguby  $E$  i  $F$ . Punkty  $E'$  i  $F'$  łączy się ze skrajną podporą  $C$ , względnie z przegubem  $D$  (fig. 250 a). Dla siły poprzecznej (fig. 250 b) i momentu (fig. 250 c) w punkcie  $m$  linja wpływowa na dłu-

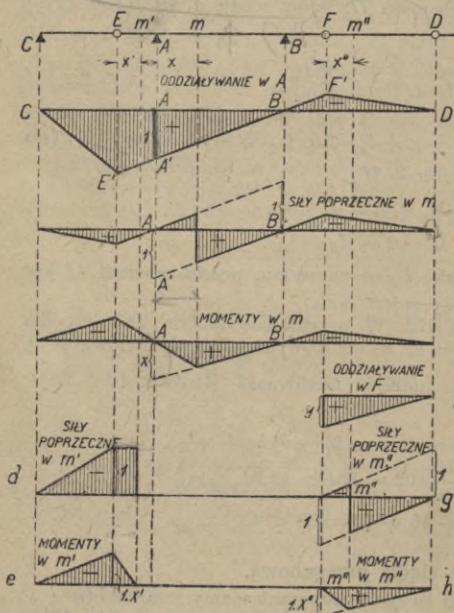


Fig. 250.

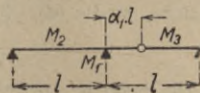


Fig. 251.

gości  $AB$ , jak dla belki wolno podpartej; proste zewnętrzne przedłużamy nazewnątrz jak wyżej. Dla punktu  $m'$  wspornika  $AE$  linja wpływowa sił poprzecznych por. fig. 250 d, momentów fig. 250 e. Dla belki zawieszonej w  $F$ , fig. 250 g siły poprzeczne i fig. 250 h momenty).

**Szczególne przypadki.** Przęsła równe. Obciążenie jednostajnie rozłożone<sup>1)</sup>.

Oznaczenia:  $g$  = ciężar własny w  $kg/m$  b.,  
 $p$  = " użytkowy " "  
 $q = g + p$ .

1. Dwa przęsła (fig. 251).

Najkorzystniejszy odstęp przegubu od podpory środkowej  $x = \alpha_1 l$ , przyczem

$$\alpha_1 = \left[ \frac{q}{g} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{g}{q}} \right) \right]^2.$$

Wtedy:  $M_1 = M_2 = \frac{\alpha_1}{2} q l^2$ ,  $M_3 = \frac{q l^2}{8} (1 - \alpha_1)^2$ .

<sup>1)</sup> Wzory poniżej podane mają najczęściej zastosowanie przy płatwiach dachowych przegubowych.

Jeżeli uwzględnimy tylko ciężar stały  $q$ , to dla  $\alpha_1 = 0,172$ :

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0,0858 q l^2.$$

## 2. Trzy przęsła.

Układ  $a$  (fig. 252).

Dla: 
$$\alpha_2 = 0,5 (1 - \sqrt{1 - 4 \alpha_1}) = \frac{x}{l}$$

jest: 
$$M_1 = M_2 = \frac{\alpha_1}{2} q l^2, \quad M_3 = \frac{q l^2}{8} (1 - 2 \alpha_2)^2.$$

Gdy tylko ciężar stały  $q$ :

$$\alpha_2 = 0,22, \quad M_1 = M_2 = 0,0858 q l^2, \quad M_3 = 0,0392 q l^2.$$

Układ  $b$  (fig. 253).

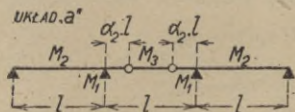


Fig. 252.

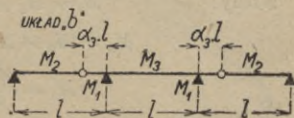


Fig. 253.

Dla: 
$$\alpha_3 = \frac{q}{4(q+g)}$$

jest: 
$$M_1 = M_3 = \frac{q l^2}{2} \alpha_3, \quad M_2 = \frac{q l^2}{8} (1 - \alpha_3)^2.$$

Dla samego tylko ciężaru stałego  $q$ :

$$\alpha_3 = 0,125, \quad M_1 = M_3 = 0,0625 q l^2, \quad M_2 = 0,0957 q l^2.$$

Dla  $\alpha_3 = 0,172, \quad M_1 = M_2 = 0,0858 q l^2, \quad M_3 = \frac{q l^2}{8} \left( \frac{q}{g} - 4 \alpha_3 \right).$

Dla samego tylko ciężaru stałego  $q$ :

$$\alpha_3 = 0,172, \quad M_1 = M_2 = 0,0858 q l^2, \quad M_3 = 0,0392 q l^2.$$

## 3. Więcej niż 3 przęsła.

A. Pość przęseł nieparzysta.

Układ  $a$  (fig. 254).

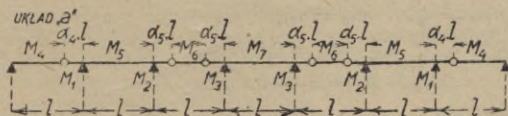


Fig. 254.

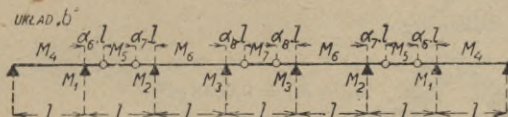


Fig. 255.

Jeżeli: 
$$\alpha_4 = \frac{q}{4(q+g)}, \quad \alpha_5 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{g}{g+q}} \right),$$

to: 
$$M_1 = M_2 = M_3 = M_5 = M_7 = 0,5 \alpha_4 q l^2,$$

$$M_4 = \frac{ql^2}{8} (1 - \alpha_4)^2, \quad M_6 = \frac{ql^2}{8} (1 - 2\alpha_5)^2.$$

Dla samego tylko ciężaru  $q$ :

$$\alpha_4 = 0,125, \quad \alpha_5 = 0,1465,$$

$$M_1 = M_5 = M_2 = M_7 = M_3 = M_6 = 0,0625 ql^2, \quad M_4 = 0,0957 ql^2.$$

Układ  $b$  (fig. 255).

$$\alpha_6 = 0,5 [1 - \alpha_4 + \alpha_1 - \sqrt{(1 - \alpha_4 + \alpha_1)^2 - 4\alpha_1}],$$

$$\alpha_7 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_6}, \quad \alpha_8 = \alpha_5.$$

Wtedy:

$$M_4 = M_1 = 0,5 ql^2 \alpha_6 (1 - \alpha_7),$$

$$M_2 = M_6 = M_3 = 0,5 ql^2 \alpha_8 (1 - \alpha_8),$$

$$M_5 = \frac{ql^2}{8} (1 - \alpha_6 - \alpha_7),$$

$$M_7 = \frac{ql^2}{8} (1 - 2\alpha_8)^2.$$

Dla całkowitego obciążenia:

$$\alpha_6 = 0,2035, \quad \alpha_7 = 0,157, \quad \alpha_8 = 0,1465,$$

$$M_4 = M_1 = 0,0858 ql^2, \quad M_2 = M_3 = M_6 = 0,0625 ql^2,$$

$$M_5 = 0,0511 ql^2, \quad M_7 = 0,0625 ql^2.$$

B. Pość przeseł parzystą (fig. 256).

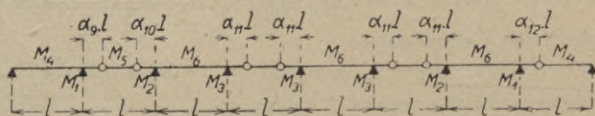


Fig. 256.

Zróbmy:  $\alpha_9 = \alpha_6, \quad \alpha_{10} = \alpha_7, \quad \alpha_{11} = \alpha_5, \quad \alpha_{12} = \alpha_4,$

to:  $M_4 = M_1 = 0,5 ql^2 \alpha_9 (1 - \alpha_{10}),$

$$M_2 = M_6 = M_3 = 0,5 ql^2 \alpha_{11} (1 - \alpha_{11}),$$

$$M_5 = \frac{ql^2}{8} (1 - \alpha_9 - \alpha_{10})^2, \quad M_7 = \frac{ql^2}{8} (1 - 2\alpha_{11})^2.$$

Dla ciężaru całkowitego:

$$\alpha_9 = \alpha_6, \quad \alpha_{10} = \alpha_7, \quad \alpha_{11} = \alpha_5, \quad \alpha_{12} = \alpha_4,$$

$$M_4 = M_1 = 0,0858 ql^2,$$

$$M_2 = M_3 = M_6 = M_7 = 0,0625 ql^2,$$

$$M_5 = 0,0511 ql^2.$$

Dla płatwi dachowych, obciążonych stałymi i równymi sobie ciężarami w równych odstępach „ $a$ ” korzystne są poniższe wzory  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$ . We wzorach tych  $P = abq$ , gdzie  $a$  jest odstępem krokwi,  $b$  odstępem płatwi, zaś  $q$  obciążeniem na  $1 m^2$ .  $M_s$  = moment w środku przęsła.

sunięcia (nieskończenie małe) poszczególnych punktów, oraz ich prędkości (skończone) są prostopadłe do odpowiednich promieni ( $aO$ ) i proporcjonalne do nich. Obracając wszystkie te prędkości o  $90^\circ$  (t. zw. prędkości prostopadłe) otrzymamy figurę  $a'b'c'$ , podobną do  $abc$  (fig. 278); fig.  $a'b'c'$  jest t. zw. planem prędkości prostopadłych. Wszystkie cechy obrotu tarczy sztywnej będą więc ustalone, jeżeli znany jest  $a$ ) biegun obrotu  $O$  i prędkość wzgl. przesunięcie prostopadłe któregośkolwiek punktu, lub  $b$ ) prędkości (przesunięcia) prostopadłe dwu punktów.

Jeżeli przesunięcie dowolnego punktu  $a$  tarczy równa się promie-

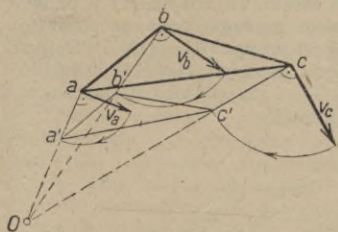


Fig. 278.

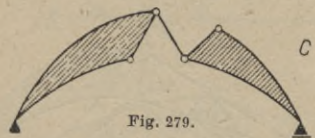
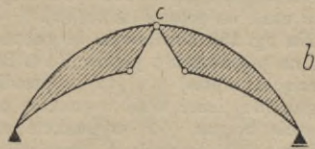
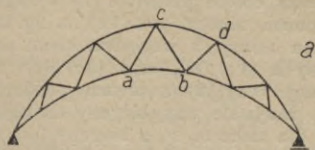


Fig. 279.

niowi  $Oa$ , to punkt  $a'$  (a tem samym i każdy inny punkt planu prędkości prostopadłych) nakrywa się z biegunem  $O$ . Przy pomocy planu prędkości prostopadłych można wyznaczyć siły wewnętrzne w kratownicy, a także określić, czy nie zachodzi wypadek jej ruchomości (por. str. 1187 i 1212).

Łańcuchem wodzonym  $n$ -tego stopnia nazywamy utwór płaski, składający się z tarcz sztywnych (str. 1185), połączonych ze sobą przegibnie, posiadający o  $n$  prętów mniej niż wymaga tego warunek  $p = 3t + 2w$ . Np. opuszczając w belce (fig. 279 *a*) pręt  $ab$ , otrzymujemy łańcuch wodzony pierwszego stopnia (fig. 279 *b*), opuszczając pręty  $ab$  i  $cd$  łańcuch wodzony 2. stopnia (fig. 279 *c*). Pręty sztywne są tu równoważne z tarczami sztywnymi. Łańcuch wodzony 1. stopnia ma pojedynczą wolność ruchu; jeżeli bowiem jednemu jego elementowi nadamy jedno określone (jakikolwiek) przesunięcie, to wszystkie punkty łańcucha są zmuszone do ruchu na określonych drogach. Podczas takiego ruchu każda tarcza sztywna odbędzie obrót około pewnego bieguna tak względem stałej ziemi, jakoteż około biegunów względnych względem innych tarcz łańcucha wodzonego.

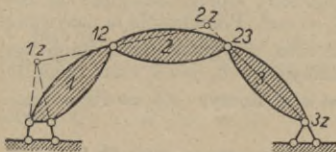


Fig. 280.

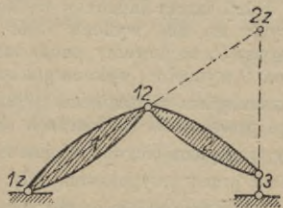


Fig. 281.

Tarcze sztywne, połączone ze sobą (lub z zawsze sztywną i stałą ziemią) przy pomocy przegubu istotnego lub urojonego (por. str. 1186), obracają się względem siebie około tegoż bieguna. Por. fig. 280, gdzie ( $1z$ ), ( $3z$ ) oznaczają bieguny

obrotu tarcz 1 i 3 względem stałej ziemi, zaś (12), względnie (23), bieguny obrotu tarcz względem siebie. Przy przegubach urojonych biegun w każdym momencie znajduje się w punkcie przecięcia odpowiednich prętów; podczas obrotu przesuwa się i biegun; dlatego nazywamy go chwilowym biegunem obrotu [por. (1z) na fig. 280]. Tak samo chwilowym biegunem obrotu tarczy 2 względem ziemi na fig. 280 jest punkt (2z) przecięcia prostych (1z)(12), oraz (3z)(32); zaś na fig. 281 punkt (2z) przecięcia prostej (1z)(12) z prętem podporowym 3. Wogóle na jednej prostej leżą wszystkie trzy bieguny trzech którekolwiek tarcz względem siebie, np. dla tarcz  $m, n, z$  bieguny  $(mn), (mz)$  i  $(nz)$ . Jeżeli zatem znane są np. bieguny  $(mn)$  i  $(nz)$ , to biegun  $(mz)$  (oznaczony dwoma znakami, nie powtarzającami się w obu tych biegunach — litera  $n$  powtarza się w obu!) leżeć musi na prostej  $(mn)(nz)$ .

Na fig. 282 chwilowym biegunem obrotu tarczy 1 względem 2 jest punkt (12) na przedłużeniu prętów 3 i 4. Biegun obrotu (2z) znajdziemy w punkcie przecięcia prostej (1z)(12) z przedłużeniem prawego pręta podporowego. Biegun (3z) leżeć musi w punkcie przecięcia prostych (1z)(13) i (23)(2z); wreszcie biegun (4z) w punkcie przecięcia prostych (1z)(14) i (2z)(24), a biegun (34) w punkcie przecięcia (13)(14) i (23)(24). Kontrola: bieguny (34), (z4) i (z3) muszą leżeć na jednej prostej.

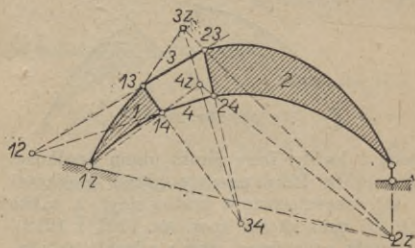


Fig. 282.

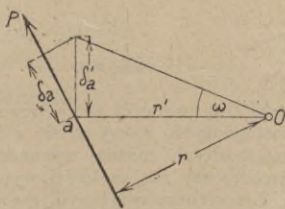


Fig. 283.

Jeżeli przegub  $G$  jest w równowadze, to gdybyśmy pomyśleli sobie dowolne nieskończenie małe przesunięcie  $(\delta_g)$  przegubu (przesunięcie przygotowane), to praca sił  $G_i$  zaczepiających w przegubie byłaby równa iloczynowi przesunięcia  $(\delta_g)$  przez rzut wypadkowej sił na  $(\delta_g)$ . Ale wypadkowa sił będących w równowadze jest równa zero, więc i praca tych sił na przesunięciu przygotowanym czyli praca przygotowana  $\sum G_i \delta_i = 0$ , przyczem  $\delta_i =$  rzut przesunięcia punktu  $G$  na kierunek siły  $G_i$ .

Jeżeli tarcza łańcucha wodzonego, niezależnie od badanych sił, działających na nią, wykona obrót o niezmiernie mały kąt  $\omega$  około swojego bieguna  $O$ , to dowolny punkt tarczy  $a$  (fig. 283), którego odległość od bieguna  $O$  wynosi  $r'$ , wykona przesunięcie  $\delta'_a = \omega r'$ . Przesunięcie to nazywamy przesunięciem wirtualnym (tj. możliwym) albo przygotowanym. Jeżeli rzut tego przesunięcia na kierunek siły  $P$ , działającej w  $a$ , jest  $\delta_a$ , zaś ramię tej siły względem bieguna  $O$  jest  $r$ , to  $\delta_a = \omega r$ . Iloczyn  $P \delta_a = Pr \omega$  nazywamy pracą przygotowaną siły  $P$ .

Jeżeli tarcza jest w równowadze, to praca przygotowana sił  $P$ , działających na tą tarczę,  $L = \sum \omega Pr = \omega \sum (Pr) = 0$ , gdyż  $\sum (Pr)$  jako moment statyczny sił  $P$ , będących w równowadze, jest równy zero. Jeżeli dowolny punkt łańcucha wodzonego dozna pewnego niezmiernie małego przesunięcia możliwego, to wszystkie tarcze łańcucha wykonają obrót niezmiernie mały,

każda około swojego bieguna, a siły, działające na łańcuch, wykonają pracę przygotowaną  $\Sigma \bar{Q} \delta$ . Jeżeli łańcuch (a więc i każda jego tarcza) jest w równowadze, to praca sił zaczepiających na każdej tarczy jest równe zero. Na tarczę działają oprócz sił zewnętrznych  $P$  jeszcze oddziaływania przegubów  $G$  i ewentualnie podpór  $C$ .

Jeżeli pracę przygotowaną oddziaływań podpór nazwiemy  $L_C$ , oddziaływań przegubowych  $L_G$ , sił zewnętrznych  $L_P$ , to dla każdej tarczy jest  $L_P + L_C + L_G = 0$ , więc dla wszystkich tarcz łańcucha jest  $\Sigma L_P + \Sigma L_C + \Sigma L_G = 0$ . Przesunięcia łożysk stałych są równe zero, zaś przesunięcia łożysk ruchomych są prostopadłe do kierunku oddziaływań, zatem  $\Sigma L_C = 0$ . Ponieważ każdy przegub jest w równowadze, więc  $\Sigma L_G = 0$ .

Wobec tego:  $\Sigma L_P = \Sigma P_m \delta_m = 0 \dots \dots \dots (1)$

Praca przygotowana sił zewnętrznych (wyłączając oddziaływania), działających na łańcuch wodzony, jest równe zero. (Zasada pracy przygotowanej). Na tej zasadzie można obliczyć siłę wewnętrzną w dowolnym przecie kratownicy statycznie wyznaczalnej. Należy tylko kratownicę zamienić na łańcuch wodzony przez opuszczenie badanego pręta ( $m n$  na fig. 284 *a*) i zastąpienie go dwiema siłami  $S$ , zaczepiającymi we węzłach, w których był osadzony, a działającymi w sensie ich zbliżenia, jeżeli był rozciągany (fig. 284 *b*) i przez udzielenie temu łańcuchowi możliwego niezmiernie małego odkształcenia. Jeżeli przyrost odległości węzłów opuszczonego pręta, mierzony w kierunku tego pręta, jest  $\Delta s$ , to praca sił  $S$  jest  $-S \Delta s$ . Równanie (1) będzie wtedy:

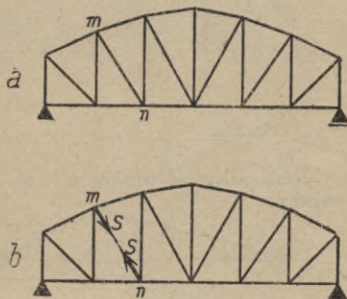


Fig. 284.

$$\Sigma P_m \delta_m = S \Delta s,$$

a stąd:

$$S = \frac{\Sigma P_m \delta_m}{\Delta s} \dots \dots \dots (2)$$

Można też siłę  $S$  wyznaczyć przy pomocy planu przesunięć (prędkości) prostopadłych. Jeżeli  $m m'$  (fig. 285) jest przesunięciem prostopadłym punktu  $m$ , zaś odległość  $m'$  od kierunku siły  $P$ , zaczepiającej w  $m$ , jest  $c_m$ , to  $\delta_m = c_m$ , zatem prawo pracy przygotowanej (równ. 1) można też wyrazić w formie:

$$\Sigma P_m c_m = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Fig. 286 jest przykładem zastosowania ostatniego równania. Wyznamy mianowicie napięcie  $S$  w przecie  $ab$  belki fig. 279 *a* pod obciążeniem  $P_m, P_n$ .

Plan przesunięć prostopadłych tarczy  $I$  obrano w jej biegunie  $A$ , zatem punkty  $G', a', n'$  leżą w  $A$ .

Punkt  $B'$  leży na pionowej podpory  $B$  i na prostej  $G' B' \parallel G B$ .

Punkt  $b'$  leży na prostych  $G' b' \parallel G b$ , oraz  $B' b \parallel B b$ .

Punkt  $m'$  leży na prostej  $G' m' \parallel G m$ , „  $b' m' \parallel b m$ ,

gdź czworobok  $G' B' m' b' \infty G B m b$  (por. fig. 278).

Uważając kierunek wskazówek zegara za dodatni dla iloczynów  $P_m c_m$ , mamy równanie:

$$P_m c_m + P_n c_n + S c_a - S c_b = 0,$$

czyli:  $S(c_b - c_a) = P_m c_m + P_n c_n$ .

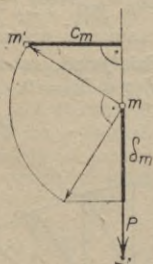


Fig. 285.

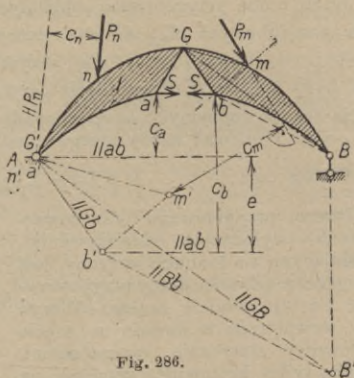


Fig. 286.

Jeżeli odległość węzłów  $a'$  i  $b'$ , mierzona na prostopadłej do  $ab$ , nazwiemy:

$$c_b - c_a = e,$$

to: 
$$S = \frac{P_m c_m + P_n c_n}{e} = \frac{\Sigma P c}{e} \dots \dots \dots (4)$$

**Linie wpływowe.** Dla siły  $P=1$  pionowej i poruszającej się po belce, otrzymujemy wedle równań (2) lub (4):

$$S = \frac{1 \cdot \delta_m}{\Delta s} \dots \dots \dots (5)$$

względnie  $S = \frac{1 \cdot c_m}{e}$ . Siła wewnętrzna w przecie  $ab$  jest zatem wprost proporcjonalna do przesunięcia pionowego, względnie pionowej składowej prędkości danego punktu łańcucha wodzonego, zaś linja przesunięć (linja prędkości) tegoż ze współczynnikiem  $\frac{1}{\Delta s}$  jest linją wpływową siły  $S$ .

Pionowe przesunięcia poszczególnych punktów każdej tarczy wchodzącej w skład łańcucha wodzonego wynoszą  $x_m \cdot \omega$ , gdzie  $\omega$  jest prędkością kątową (względnie kątem obrotu), zaś  $x_m$  odstępem poziomym punktów tarczy od bieguna obrotu. W linji przesunięć odpowiada zatem każdej tarczy linja prosta, tem samym zaś linja wpływowa dla każdej tarczy jest prostą, której punkt zerowy (obojętny) leży na pionowej bieguna ( $x_m = 0$ , więc i przesunięcie, względnie prędkość = 0). Biegun względny dwu tarcz przesuwają się dla obu tarcz o tę samą ilość. Muszą się w nim zatem przecinać linje wpływowe obu tarcz (względnie ich przedłużenia). Stąd wynika kształt linji wpływowej: określone są bowiem wszystkie punkty obojętne, oraz wszystkie punkty przecięcia (załamania) linji wpływowej. Dla jej całkowitego określenia potrzeba określić jedną jej rzędną. Uczynić to można paru sposobami; tu podajemy drogę kinematyczną określenia rzędnych.



Jeżeli ciężar  $P = 1$  zaczepia w punkcie  $m$  tarczy  $A$  (fig. 287), któremu odpowiada pionowe przesunięcie  $\delta_I$ , to wedle równania (5)  $S_I = \frac{1 \cdot \delta_I}{\Delta s} = \eta_I$ . Gdyby punkt  $m$  był sztywnie połączony z tarczą  $B$ , to jego przesunięcie pionowe byłoby  $\delta_{II}$ , a siła wewnętrzna w badanym przecię  $s$  byłaby  $S_{II} = \frac{1 \cdot \delta_{II}}{\Delta s} = \eta_{II}$ . Różnica tych sił  $S_{II} - S_I = \frac{\delta_{II} - \delta_I}{\Delta s} = \frac{\Delta \delta}{\Delta s}$  równa się różnicy rzędnych prostych wpływowych, odpowiadających tarczom  $A$  i  $B$ , zatem  $\frac{\Delta \delta}{\Delta s} = \eta_{II} - \eta_I = w$ , czyli pionowemu odstępowi obu prostych w  $m$ . Jeżeli

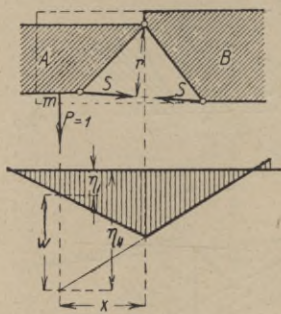


Fig. 287.

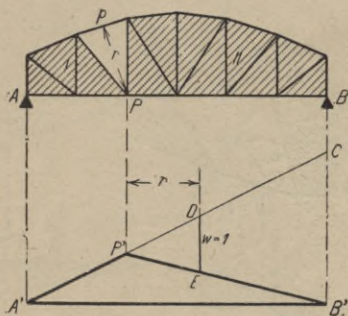


Fig. 288.

obie tarcze łączy pręt badany, to względny obrót obu tarcz  $\Delta \alpha = \Delta s : r$ , gdzie  $r =$  odstęp wzajemnego bieguna ( $AB$ ) od przęta  $s$ .

Przyrost pionowego przesunięcia jest oczywiście:

$$\Delta \delta = x \Delta \alpha = \frac{x \Delta s}{r},$$

stąd:

$$w = \frac{\Delta \delta}{\Delta s} = \frac{x}{r}.$$

Jeżeli  $x = r$ , to  $w = 1$ .

Mając np. znaleźć linię wpływową siły wewnętrznej w przecię  $p$  kratownicy  $AB$  (fig. 288), postępujemy w sposób następujący: Przez opuszczenie przęta  $p$  powstaje łańcuch wodzony, złożony z dwu tarcz I i II, których wspólny biegun jest w węźle  $P$  w odległości  $r$  od  $p$ . Na pionowej punktu  $P$ , tj. w  $P'$ , przecinają się zatem obie proste linii wpływowej, odpowiadające tarczom I i II. Wykreślmy dowolną prostą  $A'P'C$ . W odległości poziomej  $r$  od punktu  $P'$  tej prostej odetnijmy  $DE = 1$ ; prosta  $P'EB'$  ogranicza rzędne linii wpływowej na długości  $PB$ . Ponieważ biegun tarczy I jest w  $A$ , zaś biegun tarczy II leży na pionowej podpory  $B$ , więc rzędne linii wpływowej w  $A$  i  $B$  są równe zeru. Zatem przez punkty  $A'$  i  $B'$ , leżące na pionowych podporowych przechodzi zamykająca.

W przypadku, jak na fig. 289, znajdziemy względne pionowe przesunięcie punktu  $n$  tarczy  $B$  względem punktu  $a$  tarczy  $C$ , jeżeli, uważając tarczę  $C$  za nieruchomą, udzielimy punktowi  $n$  przesunięcia prostopadłego  $na$ ; wtedy

i punkt  $C'$  wpadnie w  $a$ , punkt  $b'$  leży na  $c'b' \parallel cb$ , zaś ramię  $r' \perp ab$  jest równe  $\Delta s$  (por. fig. 285), a składowa pionowa przesunięcia jest  $nn' = x = \Delta \delta$ , czyli według równania (5):

$$S = \frac{1 \cdot x}{r'} = w.$$

Linję wpływową siły wewnętrznej w przecię  $ED$  belki  $AB$  (fig. 290) znajdujemy zatem w sposób następujący: Opuszczając pręt  $ED$ , otrzymamy łańcuch wodzony 1. stopnia, złożony z tarcz I i III i prętów II i IV. Uważając tarczę I za nieruchomą, udzielmy punktowi  $n$  zaczepienia siły  $P=1$  prędkość prostopadłą  $cn = x$ , to i punkt  $D'$  planu prędkości prostopadłych znajdzie się w punkcie  $C$ , którego odległość od przęta  $DE$  jest  $r$ . Będzie więc  $1 \cdot x = r \cdot S$ . Zatem siła w przecię  $DE$ , a zarazem rzędna

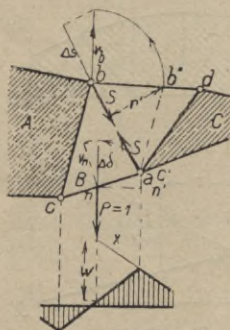


Fig. 289.

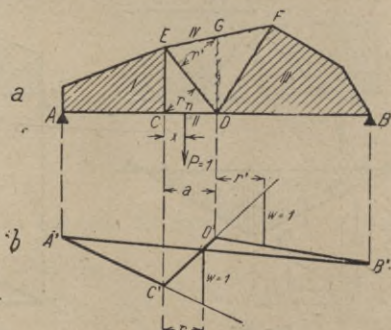


Fig. 290.

w punkcie  $n$  linii wpływu siły wewnętrznej  $S = w = x : r$ . Dla  $x = r$  jest  $w = 1$ . Wykreślmy (fig. b) dowolną prostą  $A'C'$ . Z punktu  $C'$  (na pionowej punktu  $C$ ) wykreślmy  $C'D'$ , tak, aby rzędna między  $A'C'$  a  $C'D'$  w odległości  $r$  od  $C'$  wynosiła  $w=1$ , to linja łamana  $A'C'D'$  odpowiada długościom  $AC$  i  $CD$ . Odpowiednio do figury 289 wykreślmy  $DG \parallel CE$ , z punktu  $G$  zaś prostą  $r' \perp ED$  (fig. 290 a). Z punktu  $D'$  wykreślmy prostą  $D'B'$  tak, aby rzędna pomiędzy  $C'D'$  a  $D'B'$  w odległości  $r'$  od  $D'$  wynosiła  $w=1$ , to  $D'B'$  odpowiada długości  $DB$ . Zamykającą jest prosta  $A'B'$ .

### b) Belka wolno podparta.

Belki o pasach równoległych. Prowadząc przekrój  $I-I$  na fig. 291 a otrzymujemy  $Gh + M_m = 0$ , oraz  $Dh - M_n = 0$ ; a stąd:

$$\text{siłę w pasie górnym: } G = -\frac{M_m}{h},$$

$$\text{" " " dolnym: } D = +\frac{M_n}{h}.$$

Zatem linje wpływu sił w pasach są linjami wpływu momentów ze względu na punkty  $m$ , względnie  $n$ , ze współczynnikiem  $\frac{1}{h}$  (por. fig. 291 b).

Siłę w przekątnej otrzymamy, ustawiając równanie równowagi składowych pionowych sił działających na odciętą (lewą) część belki. Wtedy:

$$T - K \cos \alpha = 0,$$

a stąd:

$$K = \pm \frac{T}{\cos \alpha}.$$

Dla słupów (przekrój  $II-II$ ) otrzymamy:  $V + T = 0$ , a stąd:

$$V = -T.$$

Linje wpływowe por. fig. 291 c) i d). Linja wpływowa słupa  $V_4$  por. fig. 291 e).

Dla tej samej belki, jednak o pomoście dołem, linja wpływowa pręta  $V$  podana jest na fig. 292. Dla  $V_4$  siła wewnętrzna od obciążenia ruchomego  $= 0$ . Dla  $K$  i  $G$  linja wpływowa taka sama, jak dla pomostu górą.

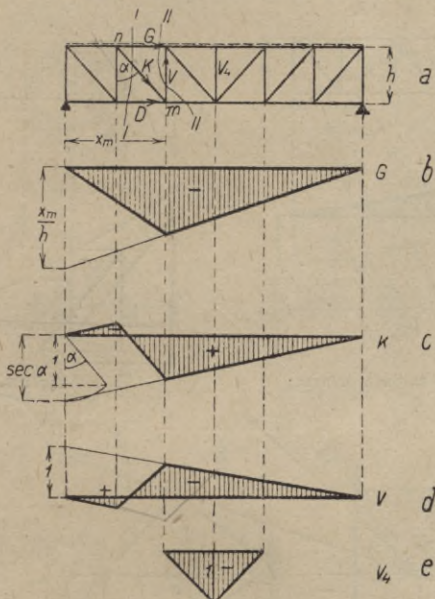


Fig. 291. (Pomost na pasie górnym.)

Przekątnie spadające ku miejscu, gdzie  $T$  zmienia znak, są rozciągane, przekątnie wznoszące się ku temu miejscu, są ściskane. Słupy są ściskane, jeżeli przekątnie sąsiadnie są rozciągane i odwrotnie.

Dla szeregu (ciągu) ciężarów skupionych wygodnie jest wyznaczyć największe siły wewnętrzne w krzyżulcach i słupach przy pomocy wieloboku oddziaływań. Ponieważ  $K = \pm \frac{T}{\cos \alpha}$ , przeto największe siły wewnętrzne w przekątniach otrzymamy, prowadząc w każdym przedziale wieloboku równoległą do odpowiedniej przekątnej (por. fig. 293).

Najczęściej używamy kraty prostokątnej z przekątniami spadającymi ku środkowi, ścięgnami (krata N; fig. 292, 293), aby uniknąć długich prętów ściskanych. Belkom drewnianym natomiast dajemy często kratę prostokątną z zastrzałami (mosty Rychtera, str. 789). Krata równoramienna (krata V; fig. 306) jest niewygodna ze względów konstrukcyjnych (trudność przytwierdzenia poprzecznicy i znaczny ich odstęp); używana najczęściej w połączeniu ze słupami (fig. 296), albo z drugorzędem podparciem (por. niżej).

**Belki o pasach nierównoległych.** Z równania momentów ze względu na punkt  $m$  (fig. 294):

$$M_m + Gr_g = 0,$$

otrzymamy dla pasu górnego:

$$G = - \frac{M_m}{r_g}.$$

Analogicznie dla pasu dolnego:

$$D = + \frac{M_m}{r_d}.$$

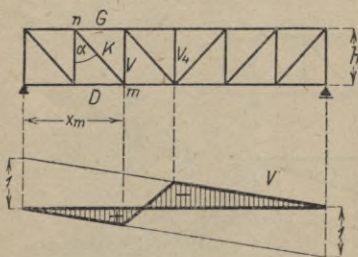


Fig. 292. (Pomost na pasie dolnym.)

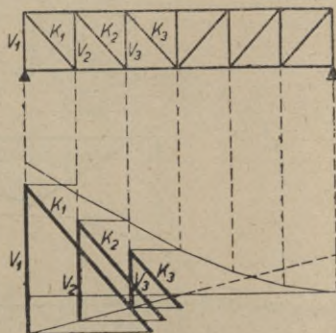


Fig. 293.

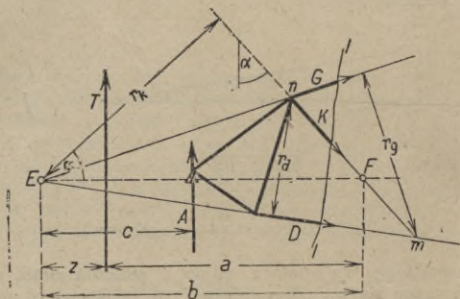


Fig. 294.

Linje wpływowe sił wewnętrznych w pasach są linjami wpływowymi momentów dla punktów  $m$  i  $n$  ze współczynnikiem  $-\frac{1}{r_g}$ , względnie  $+\frac{1}{r_d}$ .

Z równania momentów ze względu na punkt przecięcia się pasów  $E$ :

$$\mp Tz + Kr_k = 0$$

otrzymamy:

$$K = \pm T \frac{z}{r_k} = \pm T \frac{z}{b} \frac{1}{\cos \alpha} = \pm Y \frac{1}{\cos \alpha},$$

gdzie  $b = EF$  jest poziomą odległością punktu  $E$  od krzyżulca  $k$ , zaś  $\alpha$  kątem odchylenia krzyżulca od pionu.  $Y$  nazywamy sprowadzoną siłą po-

przeczną. Jeżeli po lewej stronie przekroju niema żadnej siły zewnętrznej prócz oddziaływania  $A$ , to:

$$K = \pm A \frac{c}{b \cos \alpha}.$$

Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych na lewo od danego przekroju (fig. 295) jest pionowa, to suma rzutów sił  $G$ ,  $K$  i  $D$  na poziom jest  $= 0$ , więc:

$$G \cos \beta + D \cos \gamma + K \sin \alpha = 0,$$

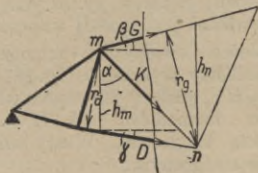


Fig. 295.

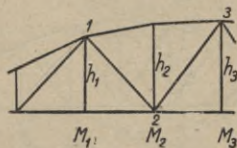


Fig. 296.

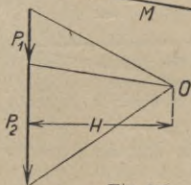
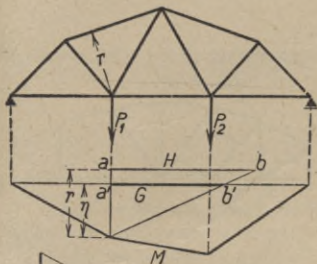


Fig. 297.

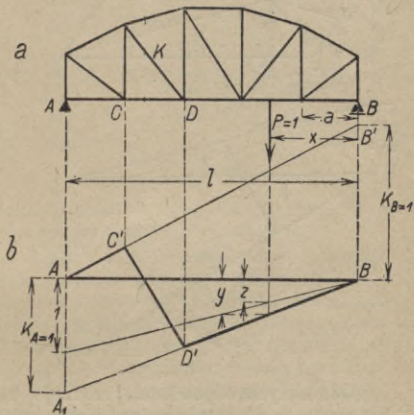


Fig. 298.

stad:

$$K \sin \alpha = - \left( - \frac{M_n}{r_g} \cos \beta + \frac{M_m}{r_d} \cos \gamma \right),$$

czyli:

$$K = \left( \frac{M_n}{h_n} - \frac{M_m}{h_m} \right) \frac{1}{\sin \alpha};$$

więc:

$$K > 0, \text{ jeżeli } \frac{M_n}{h_n} > \frac{M_m}{h_m}.$$

Przekątnia jest zatem rozciągana, gdy spada w stronę, dla której  $\frac{M}{h}$  jest większe. Jeżeli np.  $\frac{M_1}{h_1} < \frac{M_2}{h_2} < \frac{M_3}{h_3}$  (fig. 296), to rozciągana jest przekątnia 1-2, zaś ściskana 2-3 (tj. wznosząca się ku większemu  $\frac{M}{h}$ ).

Jeżeli więc wysokości belki (mierzone w węzłach) są wszędzie proporcjonalne do momentów, tj. jeżeli  $\frac{M_n}{h_n} = \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}}$ , to siła wewnętrzna w przekątniach = 0. Dla całkowitego jednostajnego obciążenia siły wewnętrzne w przekątniach belki parabolicznej zbieżnej są więc równe zeru; zaś siła wewnętrzna w pasie prostym jest stała, w pasie zakrzywionym mało zmienna.

Wygodnie jest nieraz wykorzystać to przy obciążeniu stałym wogóle, zwłaszcza symetrycznym, wykonywując jeden pas kratownicy o kształcie linii momentów (a drugi prosty). Np. dla dwu ciężarów symetrycznych odpowiedni jest kształt trapezowy.

Jeżeli wielobok momentów znaleźliśmy wykreślnie (fig. 297), to  $M = H\eta$ , gdzie  $\eta$  jest rzędną wieloboku momentów, zaś  $H$  odległością biegunową. Wtedy siła w pasie np. górnym:

$$G = -\frac{M}{r} = -\eta \frac{H}{r}.$$

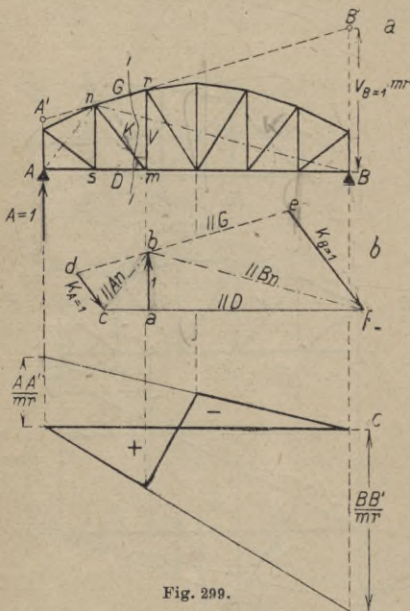


Fig. 299.

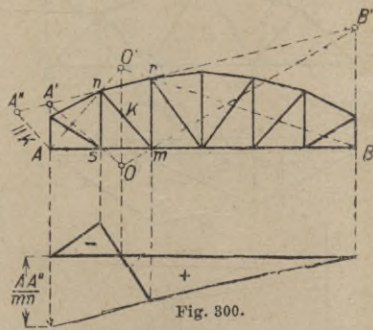


Fig. 300.

Odniesmy na odpowiedniej rzędnej  $\eta$  długości  $r$ , zaś z  $a$  długość  $ab = H$ , to prosta  $a'b'$  przedstawia szukaną wielkość siły  $G$ .

Linje wpływowe belek o pasach nierównoległych najlepiej wyznaczyć metodą „oddziaływań = 1”, fig. 298, 299, 300. Jeżeli  $P = 1$  stoi na prawo od prawej poprzecznicy  $D$ , w odległości  $x$  od  $B$  (fig. 298 a), to  $A = \frac{x}{l} = z$  (fig. b), zaś siła wewnętrzna  $K = y$ . Oznaczmy  $K_{A=1}$  siłę w przecie  $K$  wskutek  $P = \frac{l}{x}$ , czyli  $A = 1$ . Jeżeli  $AA_1 = K_{A=1}$ , to odcinek  $BD'$  prostej  $BA_1$  jest linią wpływową dla  $K$  na długości  $DB$ , ponieważ siła  $K$  jest proporcjonalna do  $A$  (o ile  $P$  jest na prawo od  $D$ ). Podobnie, odcinając  $BB_1 = K_{B=1}$ , otrzymamy linię wpływową na długości  $AC$ . Na długości  $CD$  linią wpływową jest  $C'D'$ . Jeśli chcemy mieć linje wpływowe wszystkich prętów, najlepiej wyznaczyć wielkości  $K_{A=1}$  i  $K_{B=1}$ , przy pomocy planu sił (Cremony) dla  $A = 1$  i siły  $P = \frac{l}{a}$  w przedostatnim węzle, oraz dla  $B = 1$  (o ile belka jest niesymetryczna). Jeżeli chodzi tylko o jeden pręt, to lepiej znaleźć  $K_{A=1}$  i

$K_{B=1}$  metodą Culmanna (fig. 299). Siły  $D$ ,  $K$ ,  $G$  i  $A=1$ , działające na lewą część odciętą przekrojem I—I, są w równowadze. Wypadkowa sił  $D$  i  $A=1$  przechodzi przez punkt  $A$  i nakrywa się z wypadkową sił  $G$  i  $K$ , przechodzącą przez  $n$ . Jeżeli (fig. b)  $ab=1=A$ ,  $ac \parallel D$ , to  $bc \parallel An$  jest wypadkową sił  $G$  i  $K$ . Jeżeli  $bd \parallel G$  i  $cd \parallel K$ , to  $cd=K_{A=1}$  i jest dodatnie, gdyż działa od węzła  $n$ . Podobnie  $ef=K_{B=1}$  i jest ujemne, gdyż działa do węzła  $m$  (odciętej prawej części belki). Jeżeli pręt  $nr$  przedłużymy na obie strony aż do przecięcia się z pionowami podporowemi, to z uwagi na podobieństwo

czworoboków  $mrA'A$  i  $mrB'B$  z odpowiednimi czworobokami Culmanna jest  $AA'=-V_{A=1} \cdot mr$  i  $BB' = V_{B=1} \cdot mr$  (por. fig. 299 c, linia wpływowa dla słupa  $mr$ ).

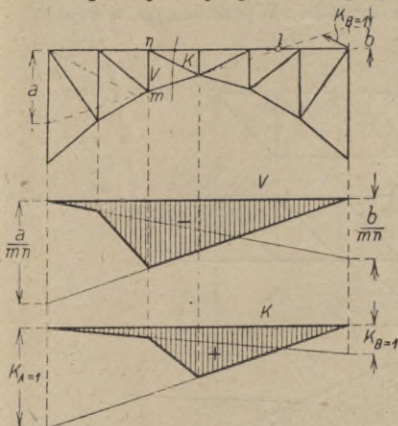


Fig. 301.

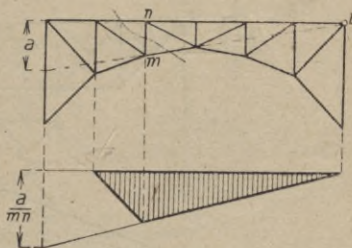


Fig. 302.

Linje wpływowe pasów belek wolno podpartych mają na całej swej długości ten sam znak, więc pasy są zawsze ściskane lub rozciągane.

Linje wpływowe krzyżulców (przekatni i słupów) mają punkt obojętny i składają się z dwu gałęzi o różnych znakach, gdy punkt przecięcia odpowiednich prętów pasu leży (jak zwykle) poza podporami  $A$  i  $B$ . Położenie punktu obojętnego można wyznaczyć, przedłużając pas nieobciążony (na którym niema poprzecznic) aż do przecięcia z pionowami podporowemi (w punktach  $A'$  i  $B'$ , fig. 300) i łącząc je z sąsiednimi węzłami odpowiednich części pasu  $s$  i  $m$ . Proste  $A's$  i  $B'm$  przecinają się w punkcie  $O$ , leżącym w pionowej nad punktem obojętnym. Na tej samej pionowej przetną się proste  $An$  i  $Br$ . Znając zaś położenie punktu obojętnego, wystarczy nawet dla belek niesymetrycznych wyznaczyć tylko jeden plan sił, albo tylko  $K_{A=1} = AA'' : mn$ , przyczem  $AA'' \parallel mn$  (por. fig. 300).

Jeżeli punkt przecięcia odpowiednich pasów  $i$  znajduje się pomiędzy podporami, to linja wpływowa siły wewnętrznej w odpowiednim krzyżulcu ma na całej długości ten sam znak (fig. 301). Jeżeli punkt  $i$  leży na pionowej podpory  $A$ , względnie  $B$ , to odpowiednia część linji wpływowej spada do zera (fig. 302).

Belka kratowa równoległa z drugorzędem podparciem (fig. 303). Używana dla znaczniejszych rozpiętości, a właściwie dla większych odległości węzłowych. Dla wyznaczenia linij wpływowych najwygodniej system drugorzędny wyodrębnić od zasadniczego.

Celem znalezienia linji wpływowej pasu np.  $G_3$  z podparciem drugorzędem (tu górnego) wyznacza się najpierw linję wpływową  $a'b'c'$  dla układu zasadniczego. Dla dźwigara drugorzędnego 3-6-4-5 (fig. 303a) jako dźwigara samodzielnego, obciążonego siłą  $P=1$  w  $5'$ , otrzymujemy siłę dodatkową

w pasie górnym  $G_3'$  o wielkości  $G_3' = -\frac{M'}{h'} = -\frac{1/2 \lambda \cdot 1}{1/2 h} = -\frac{\lambda}{h}$ . Wielkość  $\frac{\lambda}{h}$  przedstawia jednak wysokość trójkąta  $c'd'e$ , a stąd wynika kształt linii wpływowej, podany na fig. 303 b.

Dla górnej części przekątni głównej otrzymujemy siłę dodatkową  $K_3'$  o wielkości  $+\frac{1}{2 \cos \alpha}$  (przez rozłożenie siły  $\frac{1}{2}$  na  $G_3'$  i  $K_3'$ ), por. fig. 303 c. Linja wpływowa pręta  $V'$  jest trójkątem (fig. 303 d). W pasie dolnym, w słupach

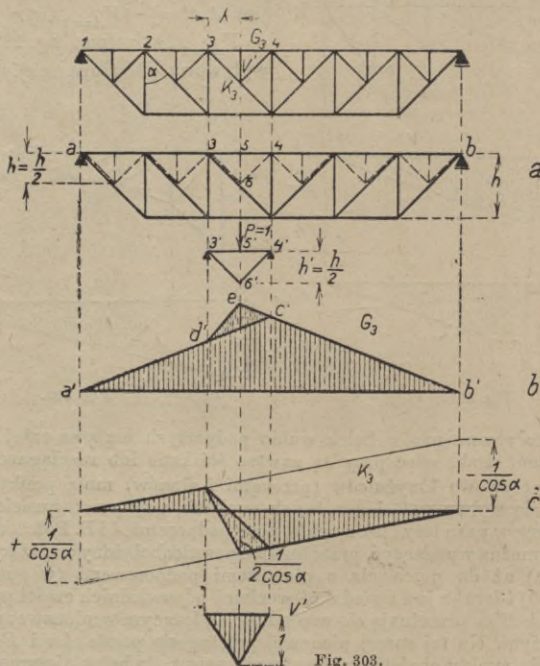


Fig. 303.

głównych i w dolnych częściach przekątni siły (i linje wpływowe) są takie same, jak dla belki bez podparcia drugorzędowego.

Belka równoległa o kracie półprzekątniowej (kracie K, fig. 304). Ustawiając dla przekroju 1—1 równanie momentów względem punktu 2.:  $Gh + M = 0$ , otrzymamy:

$$G = -\frac{M}{h}, \text{ podobnie: } D = +\frac{M}{h}.$$

Dla przekątni otrzymujemy, prowadząc przekrój 2—2 i ustawiając równanie  $\Sigma H = 0$ :

$$K \sin \alpha + K' \sin \alpha = 0, \text{ a więc: } K = -K'.$$

Dla przekroju 3—3 i równania  $\Sigma V = 0$ :

$$K \cos \alpha - K' \cos \alpha + T = 0,$$



a stąd: 
$$K = -\frac{T}{2 \cos \alpha}, \quad K' = +\frac{T}{2 \cos \alpha}.$$

Dla przekroju 4-4 i  $\Sigma V = 0$ :

$$V + K \cos \alpha = 0, \quad V = -K \cos \alpha = +\frac{1}{2} T.$$

Linje wpływowe wszystkich tych sił są zatem linjami wpływowymi momentu, względnie siły poprzecznej, z odpowiednimi współczynnikami.

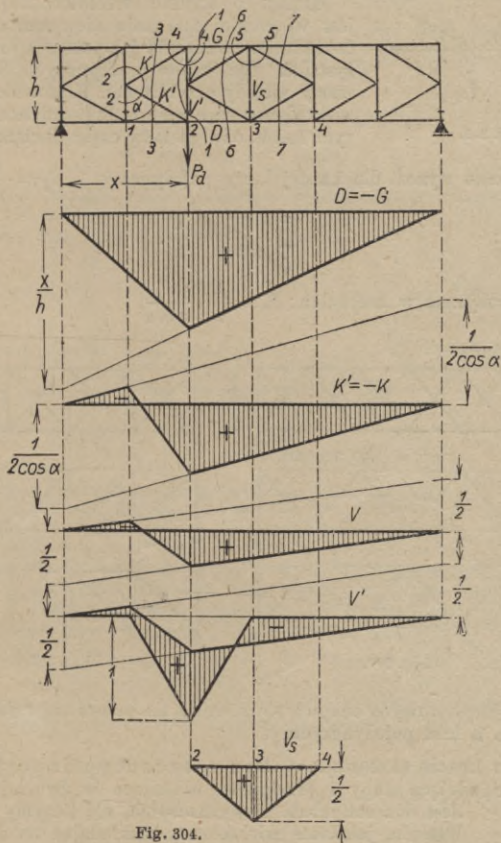


Fig. 304.

Siłę wewnętrzną w części słupa  $V'$  (pomost na pasie dolnym) znajdziemy z równania  $\Sigma \bar{V} = 0$ ,

$$V' + K' \cos \alpha - P = 0, \quad V' = -\frac{1}{2} T + P.$$

Zatem od linii wpływowej dla  $T \cdot \frac{1}{2}$  należy odjąć linię wpływową siły węzłowej  $P_d$  (rzędna = 1 w węźle 2, rzędna = 0 w węzłach 1 i 3).

Linję wpływową  $V_s$  otrzymujemy, prowadząc przekroje 5, 6 i 7, dla warunku  $\Sigma V = 0$  (fig. 305).

Dla przekroju 6:  $2 K_l \cos \alpha + P - A = 0$ ,  $K_l \cos \alpha = \frac{1}{2}(A - P)$ .

" " 7:  $2 K_p \cos \alpha + A - P - P_s = 0$ ,  $K_p \cos \alpha = \frac{1}{2}(P + P_s - A)$ ,

a ponieważ:

$$V_s = K_l \cos \alpha + K_p \cos \alpha,$$

przeto, podstawiając wyżej otrzymane wartości, otrzymujemy:

$$V_s = \frac{1}{2}P_s.$$

Belka o kratce wielokrotnej (fig. 306) jest właściwie statycznie niewyznaczalna i dla dokładnego obliczenia jej potrzeba równań sprężystości. Dla celów praktycznych jednak używamy metody przybliżonej. Kratownicę  $n$ -krotną rozkładamy na  $n$  kratownic pojedynczych, z których każda dźwiga  $n$ -tą część obciążenia.

Siła w pasie wynosi dla każdej kraty pojedynczej:  $S_t = \frac{M}{nh}$ ,

czyli razem:

$$S = \sum_1^n \frac{M}{nh} = \frac{M}{h}.$$

Siła wewnętrzna w krzyżulcu:  $K = \frac{1}{n} \cdot \frac{T}{\cos \alpha}$ .

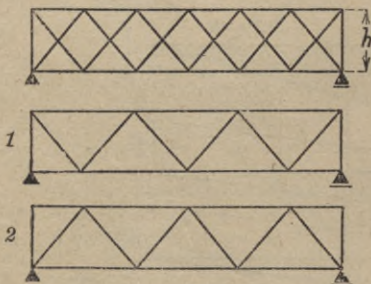


Fig. 306.

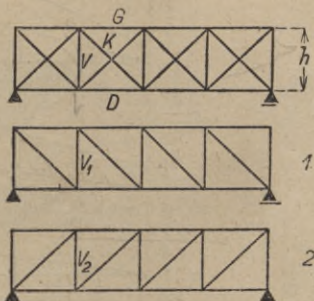


Fig. 307.

Wykres linii wpływowych odbywa się również na podstawie rozdziału kraty  $n$ -krotnej na  $n$  krat pojedynczych.

**Belka o kratce złożonej.** a) Bez sztucznego naprężenia. Jest to krata, posiadająca słupy i przekątne, spadające w dwóch kierunkach. Jest ona statycznie niewyznaczalna, ale liczymy ją w przybliżeniu, jak kratę wielokrotną, rozkładając na dwie części: kratę z przekątniami, spadającymi w lewo, oraz na kratę z przekątniami, spadającymi w prawo.

Wtedy siła w krzyżulcach:  $K = \frac{T}{2 \cos \alpha}$ ,

w pasach:  $S = \frac{M}{h}$  (fig. 307).



Fig. 308.

Słup  $V$  w kratce pierwszej jest ściskany, w kratce drugiej rozciągany i w rezultacie niesie tylko różnicę ciężarów węzłowych  $V = P_d - P_g$ ; jest więc rozciągany, gdy pomost jest dołem, zaś ściskany, gdy pomost jest górą.

b) Ze sztucznem naprężeniem (belka Howe'a; fig. 308). Jeżeli w belce kratowej złożonej, podpartej jeszcze rusztowaniem, tak, że ciężar własny kraty nie wywołuje sił w prętach, naciągniemy sztucznie śruby, czyli spowodujemy sztuczne napięcia w słupach  $V_0$ , powstaną sztuczne siły wewnętrzne:

$$\text{w krzyżulcach: } K_0 = K'_0 = \frac{V_0}{2 \cos \alpha},$$

$$\text{zaś w pasach: } G_0 = D_0 = -K_0 \sin \alpha = \frac{1}{2} V_0 \tan \alpha.$$

Możemy wywołać tak wielkie rozciąganie  $V_0$ , aby  $K$  i  $K'$  były zawsze ściskane tak, aby dla najniekorzystniejszego obciążenia ruchomego była siła w odstrzale  $K' = 0$ . Musi więc być  $V_0 = T_{\max}$ .

Wówczas największa siła w zastrzale  $K$  osiąga taką wartość, jak gdyby odstrzałów nie było, czyli

$$K_{\max} = T_{\max} \sec \alpha,$$

więc dwa razy większą aniżeli w kracie złożonej bez sztucznego napięcia.

Największa siła w pasie dolnym:

$$D_{\max} = \frac{M}{h} + \frac{1}{2} V_0 \tan \alpha = \frac{M_{\max}}{h} + \frac{1}{2} T_{\max} \tan \alpha.$$

Największa siła w pasie górnym:  $G_{\max} = -\frac{M_{\max}}{h}$ , jeżeli opuścimy dla większej pewności wpływ naciągnięcia śrub.

### c) Belki ciągle wspornikowe (fig. 309).

Linje wpływowe prętów belki wiszącej  $CD$  są takie same, jak belki wolno podpartej na podporach  $C$  i  $D$ .

Jeżeli ciężar  $P=1$  znajduje się pomiędzy  $A$  i  $B$ , to we wszystkich prętach pomiędzy  $A$  i  $B$  siły wewnętrzne są takie same, jak dla belki wolno podpartej  $AB$ , natomiast we wszystkich prętach na prawo od  $B$  siła wewnętrzna  $= 0$ ; więc dla prętów pomiędzy  $A$  i  $B$  jest linja wpływowa na długości  $A$  i  $B$  taka, jak dla belki wolno podpartej  $AB$ , zaś na długości  $BD$  rzędne jej są proporcjonalne do rzędnych linii wpływowej oddziaływania  $A$  [trójkąt o podstawie  $BD$  o wierzchołku w  $C$  (por. linje wpływowa  $g_1$  i  $k$ ) fig. 309  $c$  i  $d$ ]. Dla prętów, znajdujących się na prawo od  $B$ , linja wpływowa nie posiada gałęzi na długości  $AB$ .

Ze względu na węzeł 8 jest:

$$M_8 - G_2 r_2 = 0, \text{ stąd } G_2 = \frac{M_8}{r_2}.$$

$$\text{Podobnie: } D_2 = -\frac{M_8}{h_8}.$$

Linja wpływowa  $D_2$  podana jest na fig. 309  $e$ .

Gdy ciężar  $F=1$  jest w  $C$ , siła wewnętrzna dla słupa  $S_2$  we wsporniku  $BC$  wynosi  $S_{C=1}$ . Można ją znaleźć według metody Culmanna dla przekroju  $t-t$  (fig.  $g$ ). Gdy ciężar  $P=1$  jest w węźle 7, to  $S_2 = 1$  (por. fig.  $f$ ). Wpływ ciężaru znajdującego się na prawo od  $C$  na wielkość oddziaływania  $C$  maleje z odległością od  $C$  do zera w punkcie  $D$ , zatem i rzędne linii wpływowych wszystkich prętów belki wspornikowej maleją na długości  $CD$  do zera według prostej.

## d) Łuk trójprzegubowy (fig. 310).

Dla wyznaczenia linii wpływowych najwygodniej zastosować zasadę belki zastępczej (por. str. 1210). Biorąc moment ze względu na punkt  $i$  (fig. a), otrzymujemy dla pasa górnego:  $Gh_i + M_{0i} = 0$ , a stąd:

$$G = -\frac{M_{0i}}{h_i}.$$

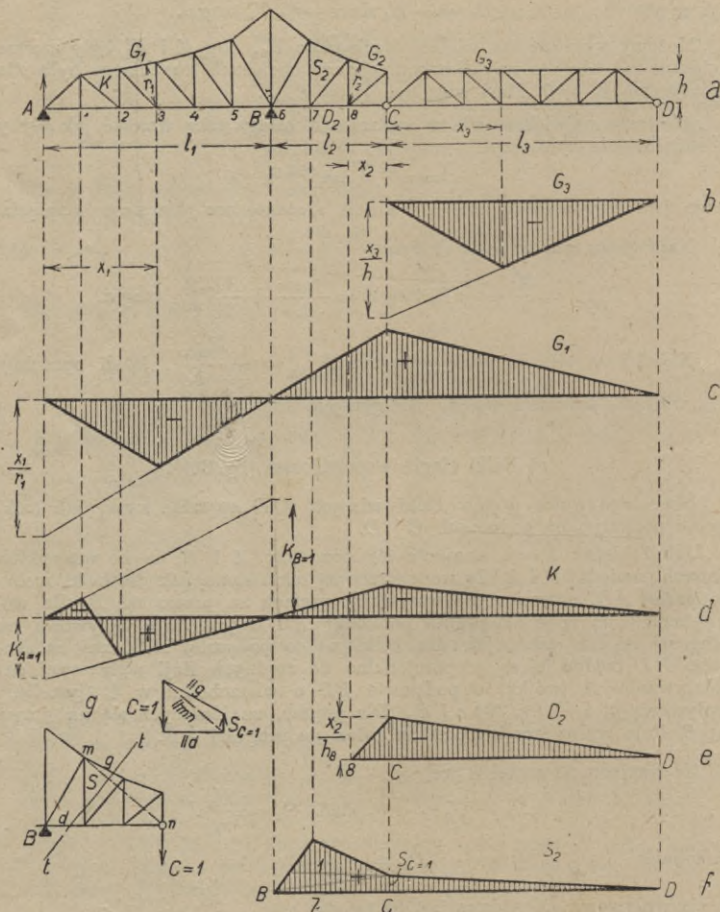


Fig. 309.

Moment  $M_{0i} = 0$ , gdy ciężar  $P = 1$  znajduje się w punkcie  $m$ , zatem belka zastępcza ma długość  $AM$ . Linia wpływowa siły  $G$  jest linią wpływową momentu  $M_{0i}$ , pomnożoną przez  $\frac{1}{h_i}$  (fig. b). Analogicznie znajdujemy linie wpływowe dla pasa dolnego (fig. c).

Krzyżulce. Z równania momentów ze względu na punkt  $p$  mamy:  $M_{0p} - K.t = 0$ , a stąd  $K = \frac{1}{t} M_{0p}$ . Linja wpływowa — por. fig.  $d$ .

Słupy:  $M_{0p} - V l_p = 0, \quad V = \frac{M_{0p}}{l_p}$  (fig.  $e$ ).

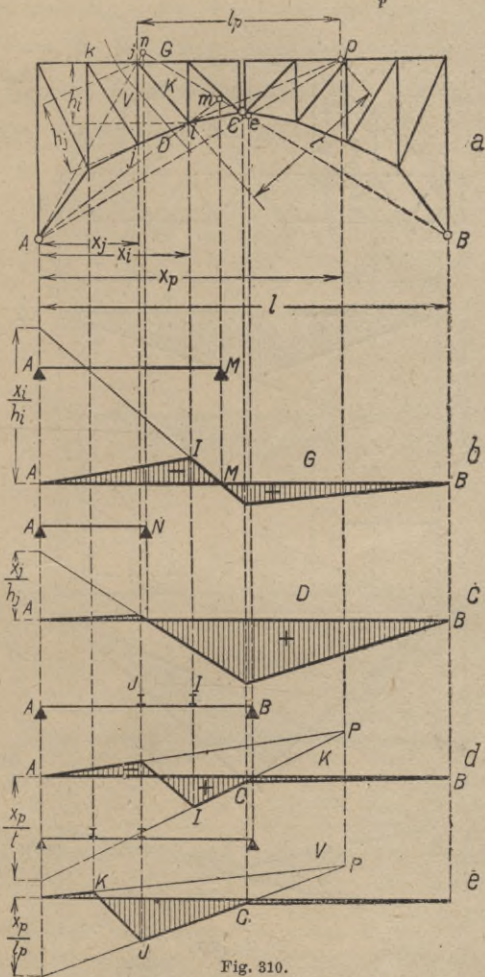


Fig. 310.

Łuk gibki z usztywnieniem belką przegubową (fig. 311). Posiada 2 tarcze (belki kratowe), oraz  $w$  węzłów (na fig. 311  $w = 5$ ), zatem do uzyskania belki statycznie wyznaczalnej potrzeba wedle równania (1)  $(6 + 2w)$  prętów. Mamy  $2w + 1$  prętów istotnych, tj.  $w + 1$  prętów łuku i  $w$  podwieszek, nadto 2 pręty przegubu; zatem potrzeba  $(6 + 2w) - (2w + 1 + 2) = 3$  prętów łożyskowych; więc podparcie, jak dla belki wolno podpartej (prostej).

Dla obciążenia pionowego oddziaływania są pionowe. Składowa pozioma  $H$  sił w prętach łuku jest stała. Prowadząc przekrój 1-1 (fig. a), otrzymujemy ze względu na punkt  $O$ :

$$M_{0o} + Hf = 0, \text{ a stąd } H = -\frac{M_{0o}}{f},$$

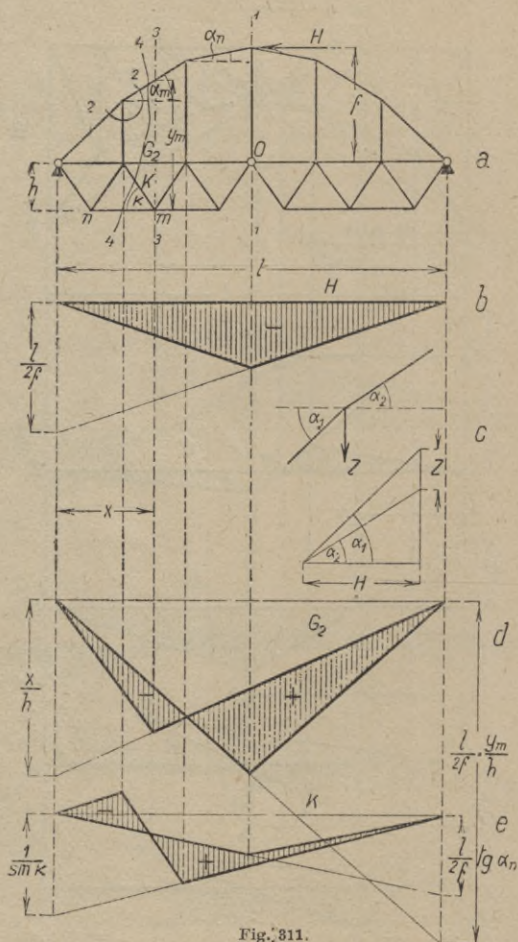


Fig. 311.

gdzie  $M_{0o}$  jest momentem sił zewnętrznych dla belki wolno podpartej, w punkcie  $O$ . Linia wpływowa, por. fig. b.

Siła wewnętrzna w prętach łuku  $L = \frac{H}{\cos \alpha_n} = -\frac{M_{0o}}{f \cos \alpha_n}$ . Linje wpływowe  $L$  daje więc linja wpływowa  $H$  ze współczynnikiem  $\frac{1}{\cos \alpha_n} = \sec \alpha_n$ .

Siły w podwieszakach znajdziemy, wycinając odpowiedni węzeł górny (przekrój 2—2 i fig. c) i rzutując siły w wyciętych prętach na oś pionową. Wtedy  $Z = H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)$ .

Dla znalezienia siły w pasie górnym, np.  $G_2$ , prowadzimy przekrój 3—3 przez węzeł  $m$ , wtedy  $M_{0m} + Hy_m + G_2 h = 0$ , a stąd  $G_2 = -\frac{1}{h}(M_{0m} + Hy_m)$ . Linja wpływowa  $G_2$  jest zatem sumą linii wpływowej  $H$  ze współczynnikiem  $-\frac{y_m}{h}$ , oraz  $M_{0m}$  ze współczynnikiem  $-\frac{1}{h}$  (por. fig. d). Podobnie znajdziemy linję wpływową pasa dolnego.

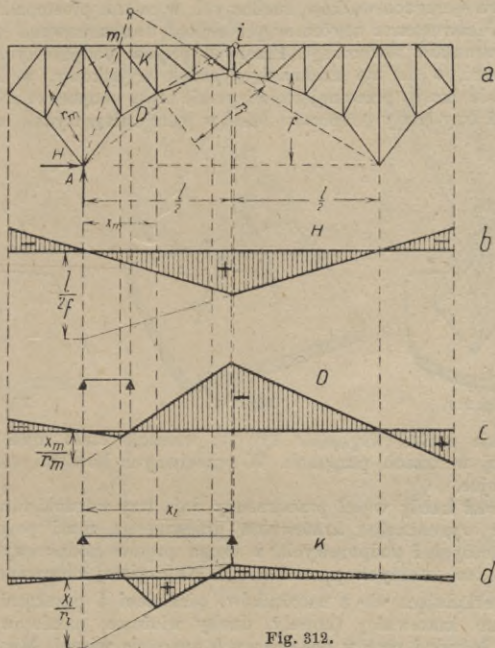


Fig. 312.

Prowadząc wreszcie przekrój 4—4 i ustawiając dlań równanie  $\Sigma V = 0$ , otrzymujemy:

$$T_{0n} + E_m \sin \alpha_m - K \sin \alpha = 0;$$

a stąd po podstawieniu wartości za  $E$ :

$$K = \frac{T_{0n} + H \operatorname{tg} \alpha_m}{\sin \alpha} \quad (\text{Linja wpływowa, por. fig. e}).$$

Zupełnie podobnie znajduje się linje wpływowe dla łuku trójprzegubowego usztywnionego belką kratową.

Łuk trójprzegubowy ze wspornikami (fig. 312). Linje wpływowe dla łuku bez wsporników przedłuża się aż do końców wsporników, por. fig. b — linja wpływowa parcia poziomego, c) pasa dolnego D, d) krzyżulca K.

### III. Kratownice przestrzenne.

Łożyska utworów przestrzennych mogą być:

a) stałe (fig. 313); w obliczeniu dają się zastąpić trzema prętami podporowymi, których siły wewnętrzne są równe odpowiednim składowym oddziaływania;

b) ruchome linjowe (jednokierunkowe, wahadłowe = dwu prętom podporowym; fig. 314), poruszające się w linii prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez pręty podporowe; można je wykonać jako wałkowe lub przesuwowe;

c) ruchome płaszczyznowe (wielokierunkowe) = jednemu prętowi podporowemu (fig. 315), poruszające się w płaszczyźnie prostopadłej do pręta podporowego w dowolnym kierunku; można je wykonać jako kulowe lub wałkowe o dwu szeregach wałków, ruchomych w osiach prostopadłych do siebie.

Stalność zewnętrzna utworu w przestrzeni uwarunkowana jest spełnieniem sześciu warunków równowagi. Przeto 6 prętów podporowych ustala ciało w przestrzeni, o ile nie zachodzi wypadek wyjątkowy, w którym da się poprowadzić prosta przecinająca wszystkie pręty podporowe. Nie mogą zatem więcej niż trzy pręty podporowe leżeć w jednej płaszczyźnie, ani przechodzić

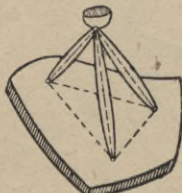


Fig. 313.

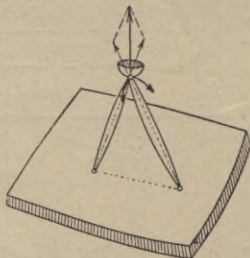


Fig. 314.

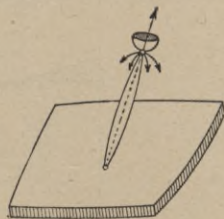


Fig. 315.

przez jeden punkt (względnie być  $\parallel$ ); wreszcie ciało musi być podparte conajmniej w trzech punktach. W przeciwnych bowiem razach podparcie jest chwiejne.

Ponieważ każdy węzeł przestrzenny daje trzy warunki równowagi, przeto statycznie wyznaczalna kratownica przestrzenna musi posiadać  $p = 3w$  prętów istotnych i podporowych, z czego prętów podporowych conajmniej  $p_p = 6$ , zatem istotnych  $p_i = 3w - 6$ . Najczęściej stosowane utwory przestrzenne, składające się z narożników, pierścieni i przekątni, leżących na powierzchni kratownicy (kopuły, dachy wieżowe, namiotowe, filary itd.), posiadają łożyska i pręty podporowych znacznie więcej. Mianowicie zwykle dla  $n$  naroży,  $p_p = 2n$  (w każdym węźle podporowym łożysko ruchome), jeżeli dołem istnieje pierścień podporowy; zaś  $p_p = 3n$  (w każdym węźle podporowym łożysko stałe), jeżeli pierścienia podporowego niema. Wtedy dla zachowania statycznej wyznaczalności ilość prętów istotnych wynosić musi  $p_i = 3w - 2n$ , względnie  $p_i = 3w - 3n$ . Zazwyczaj osiąga się to w ten sposób, że w kopułach pierścień najwyższy wykonywa się jako pierścień otwarty, zwykle używany pod latarnię, w dachach, posiadających zaś ostry szczyt, opuszcza się w obliczeniu pręty szczytowe, uważając je z wystarczającą dokładnością za ustrój drugorzędny.

Np. filar o postaci, jak fig. 316, jest statycznie wyznaczalny; posiada bowiem  $w = 12$  węzłów, zaś  $p = 36 = 3w$  prętów, w czym  $p_i = 30$ ,  $p_p = 6$ . Zazwyczaj jednak opuszcza się pręty istotne 1-3 i 9-11, zwiększając odpowiednio ilość prętów podpartych. Por. fig. 317, gdzie  $p_i = 28$ ,  $p_p = 8$ ,



$p = 28 + 8 = 36$ , oraz fig. 318, gdzie  $p_i = 24$ ,  $p_p = 12$ ,  $p = 24 + 12 = 36$ .  
Ustrój wedle fig. 318 jest częściej używany.

Statycznie wyznaczalną kratownicę przestrzenną otrzymać można:

a) przez dołączanie do stałej podstawy, względnie stałej kratownicy, nowych węzłów, każdego przy pomocy trzech prętów (istotnych lub podporowych);

b) przez połączenie ze stałą statycznie wyznaczalną kratownicą drugiej kratownicy statycznie wyznaczalnej przy pomocy sześciu prętów;

c) przez wymianę prętów w istniejącej statycznie wyznaczalnej kratownicy (por. fig. 316—318, a także str. 1234); wymieniać można pręty istotne

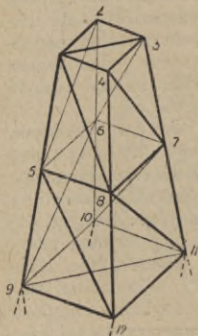


Fig. 316.

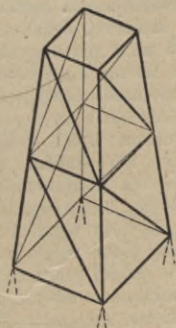


Fig. 317.

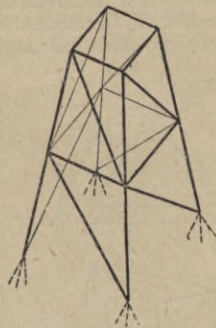


Fig. 318.

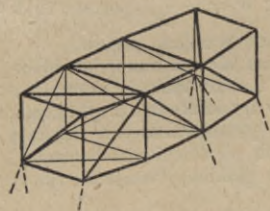


Fig. 319.

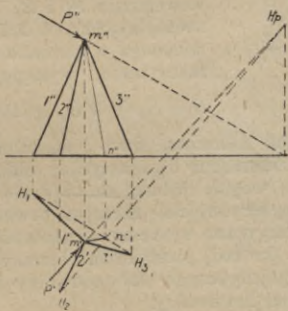


Fig. 320.

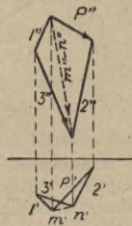


Fig. 321.

między sobą lub z podporowymi, przemieszczając je wogóle dowolnie, tak jednak, aby utrzymać wewnętrzną i zewnętrzną stałość kratownicy.

Kształtem statycznie wyznaczalnej kratownicy przestrzennej, jaki daje ująć się najłatwiej, a z którego dadzą się wyprowadzić prawie wszystkie używane postacie, jest kratownica siatkowa (fig. 319), której wszystkie pręty powiązane są w trójkąty, a leżą na powierzchni, zamykającej swojemi płaszczyznami pewną przestrzeń.

**Wyznaczanie sił wewnętrznych w prętach kratownicy przestrzennej.** a) Wyznaczanie sił wewnętrznych w węźle trójprętowym. Przez kierunek siły  $P$  i jeden z prętów, np. 2 (fig. 320), przeprowadza się płaszczyznę ( $P-2$ ), która przecina się z płaszczyzną, przechodzącą przez pozostałe pręty (1-3) wedle prostej ( $mn$ ). Siłę  $P$  rozkłada się następnie

w obu rzutach na siły 2 i  $(mn)$ , a wreszcie składowa  $(mn)$  na siły 1 i 3 (fig. 321). Wielkości sił 1, 2 i 3 znajduje się z składu rzutów tychże sił.

Zazwyczaj można jedną z płaszczyzn przeprowadzić równoległe, względnie prostopadłe do płaszczyzny rzutowej, a wtedy wyznaczenie sił wewnętrznych znacznie się upraszcza.

Metody tej używamy również, gdy w węźle o większej ilości prętów trzy siły wewnętrzne są nieznane, a pozostałe wiadome.

b) Metoda momentów w używana, gdy kratownica nie ma węzłów trójprętowych.

Prowadzi się płaszczyznę przekroju tak, aby przecięła pręt, którego siłę wewnętrzną chcemy wyznaczyć, wybierając jako oś momentów prostą, przecinającą możliwie wiele przekrojonych prętów, i ustawia równanie momentów siły zewnętrznej i siły szukanej. Jeżeli oś momentu przecina wszystkie pręty prócz badanego (np. 5 na 6 przeciętych), wystarczy jedno równanie; o ile np. 4 na 6 przeciętych, należy ustawić dwa równania ze względu na dwie osi.

c) Metoda wymiany prętów używana, gdy niema węzła trójprętowego lub gdy inne metody nie dadzą się zastosować (znacznie częściej niż w kratownicach płaskich). Dowolny pręt  $W$  (fig. 322), zwykle w pierścieniu górnym, odrzuca się (pręt wymienny), tak, aby uzyskać przynajmniej jeden węzeł o trzech prętach, nie leżących w jednej płaszczyźnie; dla utrzymania stałości umieszcza się natomiast w dogodnym miejscu pręt, t. zw. zastępczy  $Z$ . W tak otrzymanej kratownicy wyznacza się siły wewnętrzne  $S_0$  i  $Z_0$  dla obciążenia zewnętrznego (stan  $X=0$ ), oraz siły wewnętrzne  $S_1$  i  $Z_1$  dla obciążenia siłami  $= 1$ , zaczepiającymi w końcach usuniętego pręta wymiennego w kierunku osi tegoż (stan  $X=1$ ). Siły rzeczywiste, występujące w prętach, wynoszą:

$$S = S_0 + W S_1, \quad \text{gdzie: } W = -\frac{Z_0}{Z_1}, \quad \text{por. str. 1212.}$$

Podobnie można zastosować dwu- i wielokrotną wymianę prętów.

Kratownice przestrzenne hiperstatyczne oblicza się tak samo, jak hiperstatyczne płaskie; wogóle jednak staramy się unikać takiego skomplikowanego obliczenia, decydując się raczej na pewne uproszczenia i przybliżenia.

Najczęściej używane systemy kratownic przestrzennych składają się z narożników (krokwi) prostych lub łamanych, pierścieni wielobocznych, oraz przekątni (pojedynczych lub podwójnych gibkich); wszystkie pręty leżą na powierzchni kratownicy.

a) Kopuły przestrzenne. Węzły narożników leżą na krzywej; w najczęściej używanych kopułach Schwedlerowskich na paraboli (por. fig. 323). Łożyska zwykle ruchome o kierunku ruchu prostopadłym do jednego z przyległych pierścieni (fig. 323). Dla kopuły o rzucie poziomym regularnym i obciążenia rozłożonego jednostajnie na całym pierścieniu (np. obciążenie stałe) obliczenie przeprowadza się następująco (fig. 324):

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= -P_1 \frac{k_1}{a_1}, & K_n &= -\left(\sum_1^n P\right) \frac{k_n}{a_n} \\ R_1 &= -\frac{1}{2 \cos \alpha} P_1 \frac{b_1}{a_1}, & R_n &= \frac{1}{2 \cos \alpha} \left[ \left(\sum_1^{n-1} P\right) \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} - \left(\sum_1^n P\right) \frac{b_n}{a_n} \right] \end{aligned} \right\} (1)$$

dla pierścienia murewego (najniższego)  $R_m = \frac{1}{2 \cos \alpha} \left(\sum_1^{m-1} P\right) \frac{b_m}{a_m}$

We wzorach tych  $2\alpha$  jest to kąt, jaki zawierają dwa sąsiednie pręty pierścienia. Dla kopuły ośmiobocznej umiarowej  $\alpha = 67^\circ 30'$ .

Dla sił inaczej rozłożonych (np. wiatru) najlepiej użyć metody Müller-Breslau'a (fig. 325). Obciążenie węzła (w węzłach niższych złożone z siłą wewnętrzną krokwi górnej i składowymi przekątni w kierunku tej krokwi)

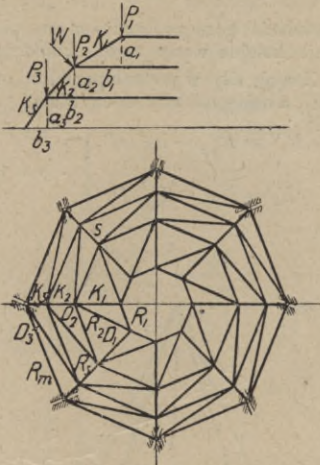


Fig. 323.

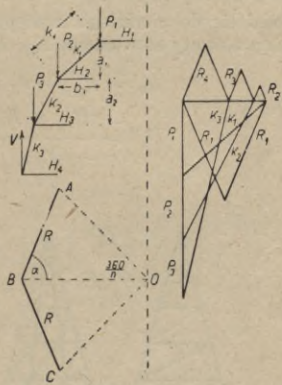


Fig. 324.

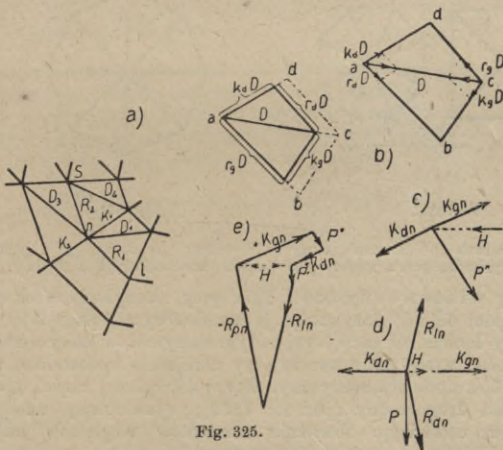


Fig. 325.

rozkłada się na siłę w kierunku krokwi dolnej, oraz siłę poziomą, z których to sił znajdujemy siły rzeczywiste w krokwi i przekątniach dolnych. Niech oznacza (fig. 325):  $k_g$ , względnie  $r_g$  — składowe siły  $D=1$  w kierunku krokwi, względnie pierścienia górnego,  $k_d$ , względnie  $r_d$  — składowe siły  $D=1$  w kierunku krokwi, względnie pierścienia dolnego (wartości dla każdego pręta inne; najlepiej wyznaczyć je wykreślnie; por. fig. 325), to suma sił w kierunku krokwi powyżej węzła  $n$ :

poniżej  $n$ :  
 w kierunku pierścienia prawego:  $R_{pn} = R_2' + r_{d1} D_1'$   
 w kierunku pierścienia lewego:  $R_{ln} = R_2'' + r_{g2} D_2''$

$$\left. \begin{aligned} K_{gn} &= K_1 + k_{d1} D_1' \\ K_{dn} &= K_2 + k_{g2} D_2'' \\ R_{pn} &= R_2' + r_{d1} D_1' \\ R_{ln} &= R_2'' + r_{g2} D_2'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Obliczenie rozpoczyna się od pierścienia górnego, gdzie niema prętów górnych, więc  $k_g = r_g = 0$ , i obejmuje kolejno węzły tegoż. Potem przechodzi się do pierścienia następnego. Znając siły w prętach ponad  $m$ , otrzymamy z figury niewiadome  $K_d$ ,  $R_p$  i  $R_l$ , a następnie siły rzeczywiste:

$$\left. \begin{aligned} R_2' &= R_{pn} - r_{d1} D_1' & R_2'' &= R_{ps} - r_{d1} D_1'' \\ D_2'' &= \frac{R_{ln} - R_2''}{r_{g2}} & K_2 &= K_{dn} - k_{g2} D_2'' \end{aligned} \right\} \dots \dots (2a)$$

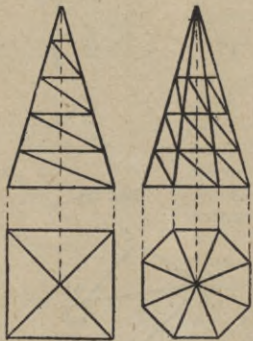


Fig. 326.

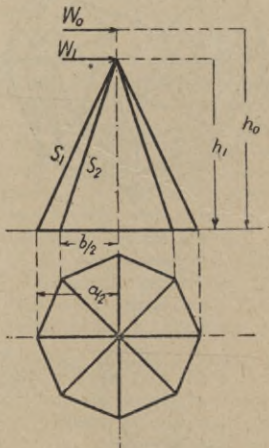


Fig. 327.

U waga. Znaczek „p” oznacza „prawy”, „l” — lewy, „d” dolny, „g” — górny, „n” dotyczy prętów, wychodzących z węzła  $n$ , „s” prętów, wychodzących z węzła  $s$ .

b) Dachy wieżowe (fig. 326 i 327; przy nachyleniu krokwi do poziomu mniejszem od  $45^\circ$  nazywamy je namiotowymi) posiadają narożniki proste. U góry kończą się zazwyczaj ostrym szczytem, w którym zbiegają się wszystkie naroża; wtedy dla  $n$  naroży przy normalnie stosowanem podparciu dach jest  $(n-3)$ -krotnie hiperstatyczny. Siły w najwyższej części dachu, uważanej za układ drugorzędny (por. str. 1232), wyznaczamy wtedy zwykle w przybliżeniu, ustawiając równanie momentów względem najwyższego pierścienia (fig. 327):

$$M = W_0 h_0 + W_1 h_1 = S_1 a \sin \alpha + 2 S_2 b \sin \alpha; \text{ ponieważ zaś } S_1 : S_2 = a : b, \text{ przeto:}$$

$$S_1 = \frac{Ma}{(a^2 + 2b^2) \sin \alpha} = \frac{Mas}{(a^2 + 2b^2) h_1} \dots \dots \dots (3)$$

We wzorach tych  $\alpha$  jest kątem nachylenia krokwi do poziomu,  $s$  długością krokwi.

Pozatem dachy te oblicza się jak kopuły; wzory i wykresy upraszczają się jednak wskutek stałego pochylenia krokwi. (Stosunek  $\frac{k}{a}$  (por. wzór 1) jest stały.)

Na parcie wiatru można je też obliczać jako dźwigary kratowe płaskie, zawarte między narożnikami. Obciążenie węzłowe  $P$  rozkłada się na trzy składowe, jedną  $P_n$  w kierunku narożnika i dwie poziome  $P'_h$  i  $P''_h$  w płaszczyznach, przylegających ścian. Następnie oblicza się kratownicę płaską, jako utwierdzoną dołem, na siły poziome  $P'_h$  i  $P''_h$ , leżące w jej płaszczyźnie. Siły w narożnikach są równe sumie odpowiednich składowych  $P_n$ , oraz sił w pasach tych kratownic płaskich. Siły w pozostałych prętach wyznacza się wprost z obliczenia odpowiednich kratownic płaskich.

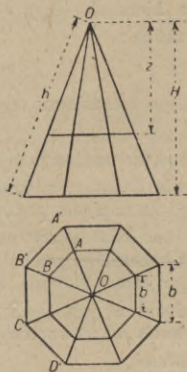


Fig. 328.

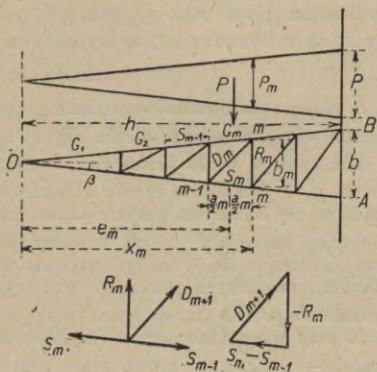


Fig. 329.

Obliczenie dachów wieżowych ośmiobocznych (fig. 328) da się w myśl powyższego sprowadzić do obliczenia więzara płaskiego  $ABO$  o powierzchni obciążenia wedle trójkąta (fig. 329), przy czym  $p = 0,7 b w$  ( $w$  = parcie wiatru na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku wiatru). Siły wewnętrzne w krokwi:

$$G_m = + \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \sec \beta, \quad S_m = - \frac{M_m}{b_m} \sec \beta.$$

Odpowiednio dla ściany  $CDO$ :

$$G'_m = + \frac{M_m}{b_m} \sec \beta, \quad S'_m = - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \sec \beta \quad \dots (4)$$

przyczem: 
$$M_m = \frac{p x_m^3}{6 h}, \quad M_{m-1} = \frac{p x_{m-1}^3}{6 h}.$$

Siła w przekątnej o długości  $d_m$ :

$$D_m = 0,233 e_m d_m w \dots \dots \dots (4a)$$

Siła w pierścieniu:

$$R_m = - \frac{w}{3} (1,04 e_{m+1} b_{m+1} + 0,35 e_m b_{m-1}) \dots \dots (4b)$$

Zupełnie podobnie oblicza się filary wieżowe, gdzie dla sił poziomych zaczepiających powyżej  $aa$   $V = \frac{H h_0}{b}$  (fig. 330), i inne podobne konstrukcje przestrzenne.

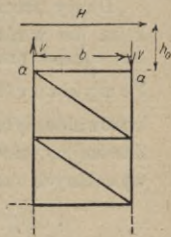


Fig. 330.

c) Mosty itp. konstrukcje, rozpatrywane wspólnie z poprzecznicami, oraz łożnikami pionowymi i poziomymi są też utworami przestrzennymi.

#### IV. Przesunięcia kratownic.

##### a) Metody analityczne.

Prawo pracy przygotowanej. Jeżeli węzeł  $m$  kratownicy dozna przesunięcia  $m m' = [\bar{\delta}_m]$ , to praca sił  $P_i$ , zaczepiających w  $m$ , równa się sumie iloczynów tych sił przez rzuty  $\bar{\delta}_i$  przesunięcia  $[\bar{\delta}_m]$  na kierunki tychże sił, więc  $L_m = \sum P_i \bar{\delta}_i$ . Praca  $L_m$  równa się jednak też przesunięciu  $[\bar{\delta}_m]$ , pomnożonemu przez rzut wypadkowej tychże sił na kierunek  $[\bar{\delta}_m]$ . Jeżeli siły  $P_i$  są w równowadze, to wypadkowa ich  $= 0$ ; zatem:

$$\sum P_i \bar{\delta}_i = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$\bar{\delta}_i$  oznacza rzut dowolnie pomyślanego (przygotowanego) niezmiernie małego przesunięcia punktu zaczepienia siły  $P_i$  na kierunek jej.

Dla każdego węzła kratownicy, będącej w równowadze, można pomyśleć pewne  $[\bar{\delta}]$  i ustawić równanie (1). Skoro te równania dodamy, to znak  $\sum$  rozciągać się będzie na wszystkie zewnętrzne siły  $Q_m$  i na napięcia prętów  $S$ , działające na węzły. Niech dowolny pręt działa na dwa węzły napięciem  $S$ , starając się je zbliżyć (napięcie dodatnie = siła rozciągająca). Jeżeli wskutek pomyślanego przesunięcia obu węzłów nastąpi ich oddalenie czyli wydłużenie pręta o  $\Delta s$ , to praca przygotowana napięcia  $S$  jest  $-S \cdot \Delta s$ . Suma prac wszystkich prętów (czyli praca przygotowana sił wewnętrznych) wynosi  $-\sum S \Delta s$ , zaś prawo pracy przygotowanej brzmi:

$$\sum Q_m \bar{\delta}_m = \sum S \Delta s \dots \dots \dots (2)$$

czyli praca przygotowana sił zewnętrznych = pracy przygotowanej sił wewnętrznych.

Dany rzeczywisty układ sił  $Q_m$ , działających we węzłach kratownicy która jest w równowadze, powoduje w jej prętach napięcia  $S$  i wydłużenia  $\Delta s$ , tudzież przesunięcia węzłów, których rzuty na kierunek sił  $Q_m$  są  $\bar{\delta}_m$ . Pomyślany (urojony, przygotowany) układ sił  $\bar{Q}_m$ , wskutek którego badana kratownica byłaby także w równowadze, wywołałby w prętach napięcia  $\bar{S}$ . Zastosujmy równanie (2) do pomyślanego układu sił  $\bar{Q}_m$  i przesunięć, wywołanych rzeczywistym układem  $Q_m$ , to będzie:

$$\sum \bar{Q}_m \bar{\delta}_m = \sum \bar{S} \Delta s \dots \dots \dots (2 a)$$

Siły zewnętrzne  $\bar{Q}$  składają się z sił  $\bar{P}_m$  i oddziaływań  $\bar{C}$ , którym w stanie rzeczywistym odpowiadają przesunięcia podpór  $c$ , mierzone w kierunku sił  $C$  (o ile podpory nie są absolutnie stałe). Równanie (2 a) będzie więc brzmiało:

$$\sum \bar{P}_m \bar{\delta}_m = \sum \bar{S} \Delta s - \sum \bar{C} c \dots \dots \dots (3)$$

Jeżeli nazwiemy  $s$  długość,  $F$  przekrój jednego pręta,  $E$  moduł sprężystości,  $\omega$  współczynnik rozszerzalności,  $t$  przyrost temperatury pręta i podstawimy:

$$\rho = \frac{s}{EF},$$

to:  $\Delta s = S \rho + \omega t s,$

$$\text{zaś:} \quad \Sigma \bar{P}_m \delta_m = \Sigma \bar{S} S \rho + \Sigma \bar{S} \omega t s - \Sigma \bar{C} c \quad \dots \quad (4)$$

Jeżeli przygotowanym stanem sił jest:  $\bar{P}_m = 1$ , to

$$\Sigma \bar{P}_m \delta_m = 1 \cdot \delta_m.$$

Równanie (4) będzie wtedy brzmiało:

$$1 \cdot \delta_m = \Sigma \bar{S} S \rho + \Sigma \bar{S} \omega t s - \Sigma \bar{C} c \quad \dots \quad (5)$$

W przypadku belki o ścianie pełnej, skoro  $\bar{\sigma} \cdot dF =$  napięcie przygotowane włókna o przekroju  $dF$ , długości  $ds$  i wydłużeniu rzeczywistym  $\Delta ds$ , praca przygotowana sił wewnątrznych wynosi:

$$L_w = \int \bar{\sigma} dF \cdot \Delta ds \quad \dots \quad (a)$$

(Znak  $\int$  rozciąga się na całkowitą objętość belki.)

$$\text{Ale:} \quad \Delta ds = \left( \frac{\sigma}{E} + \omega t + \omega \frac{\Delta t}{h} v \right) ds \quad \dots \quad (b)$$

przyczem  $\Delta t$  jest różnicą temperatur włókien skrajnych, górnych i dolnych.  $v$  odstępem włókna od osi obojętnej,  $h$  wysokością belki w danym miejscu.

$$\text{Dalej:} \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}; \quad \text{podobnie zaś} \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{F} + \frac{\bar{M}v}{J} \quad \dots \quad (c)$$

Podstawmy  $b$ ) i  $c$ ) w  $a$ ), to z uwagi na  $\int dF = F =$  powierzchni przekroju,  $\int v dF = 0$ , zaś  $\int v^2 dF = J =$  momentowi bezwładności przekroju, otrzymamy [analogicznie do (3)] pomijając (zwykle bardzo mały) wpływ sił poprzecznych:

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{P}_m \delta_m + \Sigma \bar{C} c &= L_w = \\ &= \int \bar{M} M \frac{ds}{EJ} + \int \bar{N} N \frac{ds}{EF} + \int \omega t \bar{N} ds + \int \omega \frac{\Delta t}{h} \bar{M} ds \quad \dots \quad (6) \end{aligned}$$

Jeżeli wreszcie układ składa się z pretów i elementów o ścianie pełnej (tarcz sztywnych), to wedle równań (4), (6) i (7) prawo pracy przygotowanej wyrazi się:

$$\begin{aligned} \Sigma P_m \delta_m + \Sigma C c &= \Sigma \bar{S} S \rho + \Sigma S \omega t s + \\ &+ \int \bar{M} M \frac{ds}{EJ} + \int \bar{N} N \frac{ds}{EF} + \int \bar{N} \omega t ds + \int \bar{M} \omega \frac{dt}{h} ds \quad \dots \quad (7) \end{aligned}$$

Równanie (5) posłuży do wyznaczenia uogólnionego przesunięcia  $\delta_m$  w stanie rzeczywistych obciążeń ( $S, t, c$ ), jeżeli jako obciążenie przygotowane

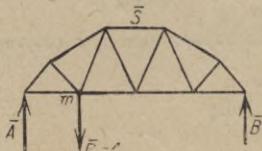


Fig. 331.

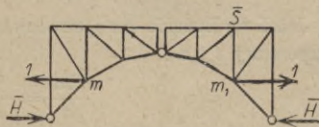


Fig. 332.

(które powoduje napięcia  $\bar{S}$  i oddziaływania  $\bar{c}$ ) obierzemy odpowiednio uogólnioną jednostkę siły. Fig. 331 przedstawia przygotowany stan sił ( $\bar{P}_m = 1, \bar{A}, \bar{B}, \bar{S}$ ) dla wyznaczenia pionowego ugięcia węzła  $m$ . (Podobnie można znaleźć przesunięcie poziome; rzeczywiste przesunięcie jest wypadkową obu przesunięć). Fig. 332 przedstawia uogólnioną jednostkę siły dla wyznaczenia przyrostu

poziomej odległości węzłów  $m$  i  $m_1$ ; fig 333 dla wyznaczenia obrotu pręta  $m m_1$  w kierunku wskazówek zegara, fig. 334 dla wyznaczenia przyrostu kąta  $\varphi_m$  między kierunkami prętów  $lik$ .

Fig. 335 *a* przedstawia przygotowany stan sił (dwie pary sił na ramionach  $b$  i  $c$ , których momenty są równe 1, gdyż  $\frac{1}{c} \cdot c = 1$ ) dla wyznaczenia przyrostu kąta  $\alpha$  w trójkącie  $a, b, c$  wskutek przyrostu boków  $\Delta a, \Delta b$  i  $\Delta c$ . Jeżeli siłę zaczepiającą w wierzchołku kąta  $\gamma$  rozłożymy na składowe w kierunku  $a$  i  $b$  (fig. 335 *b*), to napięcie przygotowane pręta  $a$  wynosi:  $\bar{A} = 1 : b \sin \gamma = 1 : h$ , zaś  $\bar{B} = -\bar{A} \cos \gamma = -\cos \gamma : h$  i analogicznie  $\bar{C} = -\cos \beta : h$ . Pomyślmy sobie w wierzchołku  $\alpha$  łożysko stałe, w wierzchołku  $\gamma$  łożysko ruchome wzdłuż pręta  $b$ , to tylko siła  $1 : c$  w wierzchołku  $\beta$  może wykonać pracę na przesunięciu  $\delta = c \Delta \alpha$ , zatem pracę  $(1 : c) \cdot \delta = \Delta \alpha$ .

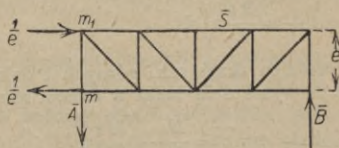


Fig. 333.

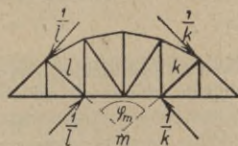


Fig. 334.

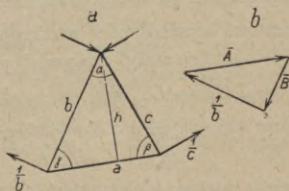


Fig. 335.

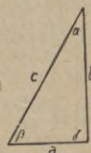


Fig. 336.

Równanie (5) przybierze kształt:

$$\begin{aligned} 1. \Delta \alpha &= \bar{A} \Delta a + \bar{B} \Delta b + \bar{C} \Delta c = \frac{\Delta a}{h} - \frac{1}{h} (\Delta b \cos \gamma + \Delta c \cos \beta) = \\ &= \frac{\Delta a}{a} \frac{a}{h} - \frac{\Delta b}{b} \frac{b \cos \gamma}{h} - \frac{\Delta c}{c} \frac{c \cos \beta}{h} = \\ &= \left( \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta c}{c} \right) \cotg \beta + \left( \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} \right) \cotg \gamma. \end{aligned}$$

Jeżeli wydłużenie  $\Delta a$  spowodowane zostało naprężeniem  $\sigma_a$  i przyrostem temperatury  $t_a$ , to:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\sigma_a}{E} + \omega t_a \text{ itd.};$$

więc:

$$E \Delta \alpha = [(\sigma_a - \sigma_c) + \omega E(t_a - t_c)] \cotg \beta + [(\sigma_a - \sigma_b) + \omega E(t_a - t_b)] \cotg \gamma.$$

Dla  $t_a = t_b = t_c$  jest:

$$E \Delta \alpha = (\sigma_a - \sigma_c) \cotg \beta + (\sigma_a - \sigma_b) \cotg \gamma \dots \dots \dots (8)$$

W trójkącie prostokątnym (fig. 336)  $\gamma = 90^\circ$ ,  $\cotg \gamma = 0$ ; więc przyrost kąta ostrego:

$$E \Delta \alpha = (\sigma_a - \sigma_c) \cotg \beta,$$



podobnie:

$$E \Delta \beta = (\sigma_a - \sigma_b) \cotg \gamma,$$

zaś przyrost kąta  $90^\circ$ :

$$E \Delta \gamma = (\sigma_c - \sigma_a) \cotg \beta + (\sigma_c - \sigma_b) \cotg \alpha.$$

Linia ugięcia (ugięta) pasa pomostowego pod ciężarem  $P=1$  w punkcie  $a$  (fig. 337 *a*) jest zarazem linią wpływową pionowego przesunięcia tegoż punktu. Wedle bowiem prawa wzajemności przesunięć (por. str. 1147)

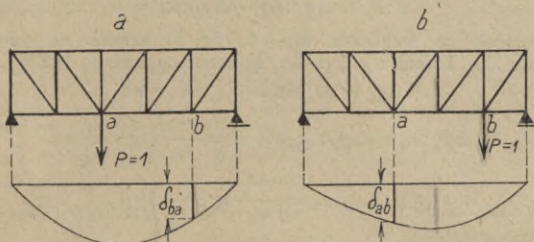


Fig. 337.

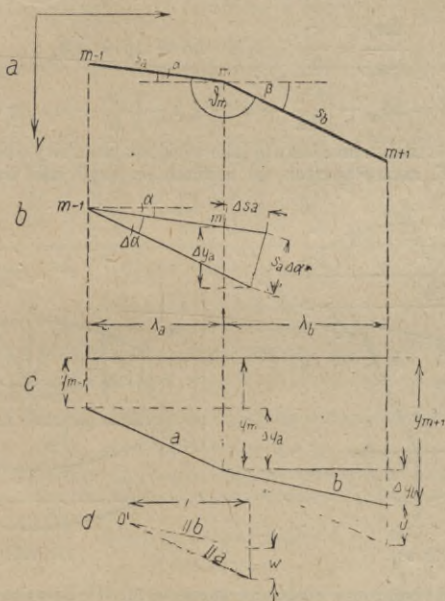


Fig. 338.

pionowe przesunięcie  $\delta_{ba}$  wskutek ciężaru  $P=1$  w  $a$  jest takie samo, jak pionowe przesunięcie  $\delta_{ab}$  punktu  $a$  pod działaniem ciężaru  $P=1$  w punkcie  $b$  (fig. 337 *b*), czyli:  $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ .

Linia ugięcia ciagu prętów jako wielobok sznurowy ciężarów sprężystych ( $W$ ). Niech będą (fig. 338 *a*)  $m-1, m, m+1$  trzema sąsiednimi węzłami sztywnymi łamanego ciagu prętów  $s_a, s_b, \dots$ , tworzących

między sobą kąt  $\vartheta_m$ , mierzony od dołu, zaś  $y_{m-1}, y_m, y_{m+1}$  (fig. 338c) rzędnymi linii ugięcia). Równoległe, poprowadzone do boków  $a$  i  $b$  ugiętej (fig. c) z dowolnego bieguna  $O$  (fig. d), odcinają na pionowej odległej od bieguna o 1 odcinek  $W$  (t. zw. ciężar sprężysty).

Z fig. c i d wynika:  $W : 1 = u : \lambda_b$ .

Z fig. c zaś:  $(u + \Delta y_b) : \lambda_b = \Delta y_a : \lambda_a$ .

czyli:  $u : \lambda_b = \Delta y_a : \lambda_a - \Delta y_b : \lambda_b = W \dots \dots \dots (9)$

Przesunięcie  $m$  względem  $m-1$  (fig. b) składa się geometrycznie z przyrostu  $\Delta s_a$  i obrotu o kąt  $\Delta \alpha$ , któremu odpowiada łuk  $s_a \cdot \Delta \alpha$ .

Więc:  $\Delta y_a = \Delta s_a \sin \alpha + s_a \Delta \alpha \cdot \cos \alpha$ ;

a stąd:  $\Delta y_a : \lambda_a = \Delta y_a : (s_a \cos \alpha) = \frac{\Delta s_a}{s_a} \operatorname{tg} \alpha + \Delta \alpha$ .

Podobnie:  $\Delta y_b : \lambda_b = \frac{\Delta s_b}{s_b} \operatorname{tg} \beta + \Delta \beta$ ;

więc wedle (9):

$$W = \Delta \alpha - \Delta \beta + \frac{\Delta s_a}{s_a} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\Delta s_b}{s_a} \operatorname{tg} \beta.$$

Ale:  $\frac{\Delta s_a}{s_a} = \frac{\sigma_a}{E} + \omega t, \quad \Delta \alpha - \Delta \beta = \Delta \vartheta_m$ ;

zatem:  $W = \Delta \vartheta_m - \left[ \left( \frac{\sigma_a}{E} + \omega t \right) \operatorname{tg} \beta - \left( \frac{\sigma_a}{E} + \omega t \right) \operatorname{tg} \alpha \right] \dots (10)$

Linję ugięcia można przedstawić jako wielobok sznurowy o biegunowej = 1 dla ciężarów  $W$ , zaczepiających we węzłach  $m$ , czyli jako linję momentów

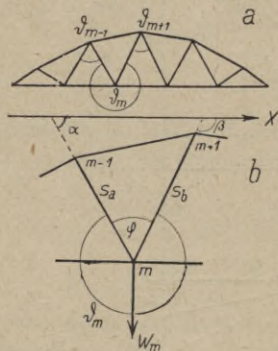


Fig. 339.

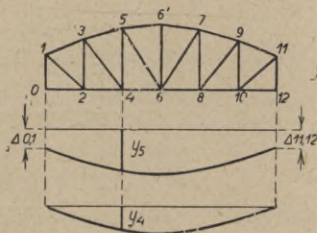


Fig. 340.

dla belki prostej obciążonej ciężarami sprężystymi  $W$ . Zamykająca wieloboku sznurowego wynika z warunków podporowych.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie pionowych przesunięć wszystkich węzłów belki, to można równanie (10) zastosować do ciągu złożonego z krzyżulców belki (fig. 339 a). Dla węzła  $m$  (fig. b)  $\Delta \vartheta_m = -\Delta \varphi_m$ . Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są to kąty między dodatnim kierunkiem osi  $X$ , a przedłużeniem prętów  $s_a$  i  $s_b$ , mierzone w kierunku wskazówek zegara (fig. b).  $\Delta \varphi_m$  można znaleźć z równania (8).

Dla belki o kracie prostokątnej (fig. 340) należy oddzielnie znaleźć linje ugięcia obu pasów. Tu dla węzła 4 dla ciągu 3, 4, 5 kąt  $\beta$ , zaś dla węzła 5 i ciągu

4, 5, 6 kąt  $\alpha$  jest prosty, zatem  $\operatorname{tg} \beta$ , względnie  $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ . Dla ciągu 3, 5, 6' jest  $\vartheta_5 = \sphericalangle 354 + \sphericalangle 456 + \sphericalangle 656'$ , zatem,  $\Delta \vartheta_5 = \Delta \alpha_{354} + \Delta \alpha_{456} + \Delta \alpha_{656}'$ . Dla pasu dolnego, prostego, jest  $\Delta \vartheta_4 = -(\Delta \alpha_{243} + \Delta \alpha_{345} + \Delta \alpha_{546}) = W_4$ . Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są tu = 0. Zamykająca linji ugięcia pasa górnego wynika stąd, że przesunięcie pionowe węzła 1 = skróceniu pręta 0—1, zaś przesunięcie węzła 11 = skróceniu pręta 11-12. Przyrosty kątów w trójkącie znaleźć można wedle równania (8).

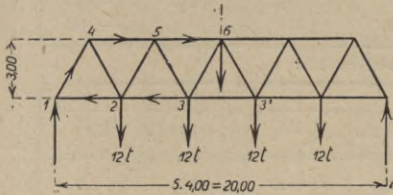


Fig. 341.

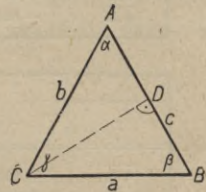


Fig. 342.

**Przykład.** Obliczyć ugięcie pasa dolnego belki (fig. 341). Długości prętów  $s$ , przekroje  $F$  siły wewnętrzne  $S$  i naprężenia  $\sigma = S:F$  zestawiono na tablicy I.

Tablica I.

Pręt	$s$ cm	$F$ cm <sup>2</sup>	$S$ t	$\sigma$ kg/cm <sup>2</sup>	Pręt	$s$ cm	$F$ cm <sup>2</sup>	$S$ t	$\sigma$ kg/cm <sup>2</sup>
1—2	400	44	+ 16	+ 364	1—4	360	60	- 28,8	- 480
2—3	400	60	+ 40	+ 667	4—2	360	40	+ 28,8	+ 720
3—3'	400	60	+ 48	+ 800	2—5	360	44	- 14,4	- 328
4—5	400	65	- 32	- 492	5—3	360	44	+ 14,4	+ 328
5—6	400	65	- 48	- 739	3—6	360	44	0	0

Kratownica składa się z trójkątów równoramiennych (fig. 342) o podstawie  $a = 4$  m i wysokości  $h = 3$  m.

$$\text{Bok: } b = c = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3,6 \text{ m.} \\ \cot \beta = \cot \gamma = 2:3 = 0,667.$$

Poprowadźmy  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ , to z równań  $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 13$ , tudzież  $(3,6 - \overline{AD})^2 + \overline{CD}^2 = 16$ , otrzymamy  $\overline{AD} = 1,39$  m,  $\overline{CD} = 3,32$  m,  $\cot \alpha = 1,39 : 3,32 = 0,42$ . Kontrola:  $\cot \beta = (3,60 - 1,39) : 3,32 = 0,667$ .

Przyrost kąta  $\alpha$  obliczono tabelarycznie (Tabl. IIa) według wzoru (8):

$$E \Delta \alpha = 0,667 (2\sigma_a - \sigma_b - \sigma_c).$$

Podobnie:  $E \Delta \beta = 0,667 (\sigma_b - \sigma_a) + 0,42 (\sigma_b - \sigma_c)$  (por. Tabl. II b) i  $E \Delta \gamma = 0,667 (\sigma_c - \sigma_a) + 0,42 (\sigma_c - \sigma_b)$  (por. Tabl. II c). Kontrolę stanowi warunek:  $E(\Delta \alpha + \Delta \beta + \Delta \gamma) = 0$ .

Tablice zmiany kątów.

Tablica II a.

1	2	3	4	5
$\alpha$	$2\sigma_a$	$\sigma_b + \sigma_c$	$\frac{E \Delta \alpha}{0,667}$	$E \Delta \alpha$
$\overline{425}$	- 984	+ 392	- 1376	- 918
$\overline{536}$	- 1478	+ 328	- 1806	- 1203
$\overline{142}$	+ 728	+ 240	+ 488	+ 326
$\overline{253}$	+ 1334	0	+ 1343	+ 890
$\overline{363}'$	+ 1600	0	+ 1600	+ 1069

Tablica II b.

1	2	3	4	5	6
$\beta$	$\sigma_b - \sigma_a$	$(\sigma_b - \sigma_a)0,667$	$\sigma_b - \sigma_c$	$(\sigma_b - \sigma_c)0,42$	$E A \beta$
542	+ 164	+ 109	- 1048	- 440	- 331
653	+ 739	+ 493	- 328	- 138	+ 355
421	- 844	- 564	- 1200	- 505	- 1069
532	- 995	- 665	- 656	- 276	- 941
633'	- 800	- 535	0	0	- 535

Tablica II c.

1	2	3	4	5	6
$\gamma$	$\sigma_c - \sigma_a$	$(\sigma_c - \sigma_a)0,667$	$\sigma_c - \sigma_b$	$(\sigma_c - \sigma_b)0,42$	$E A \gamma$
452	+ 1212	+ 810	+ 1048	+ 440	+ 1260
563	+ 1067	+ 712	+ 328	+ 138	+ 850
412	+ 356	+ 238	+ 1200	+ 505	+ 743
523	- 339	- 226	+ 656	+ 276	+ 50
633'	- 800	- 535	0	0	+ 535

Ciążar sprężysty we węźle 2:  $W_2 = \Delta \vartheta_2 = -(\Delta a_{422} + \Delta \beta_{421} + \Delta \gamma_{523})$ .

Czyli:  $E W_2 = -(-918 - 1069 + 50) = +1937 \text{ kg/cm}^2$

Podobnie:  $E W_3 = -(-1203 - 941 - 535) = +2679 \text{ n}$

Oddziaływanie sprężyste  $E[A] = E(W_2 + W_3) = +4616 \text{ kg/cm}^2$ .

Ugięcie węzła 2:  $y_2 = s_{1-2} [A] = 400 \frac{4616}{2,100.000} = 0,88 \text{ cm}$ .

Ugięcie węzła 3:  $y_3 = [A] (s_{1-2} + s_{2-3}) - W_2 \cdot s_{2-3} =$   
 $= 800 \frac{4616}{2,100.000} - 400 \frac{1937}{2,100.000} = 1,760 - 0,368 = 1,392 \text{ cm}$ .

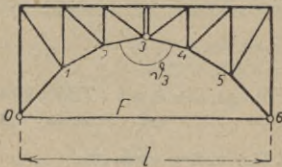


Fig. 343.

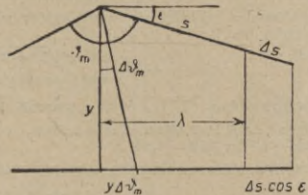


Fig. 344.

Na fig. 343 przyrost kąta  $\vartheta_3$  w przegubie znaleźć można wedle równania (5), stosując jako  $\bar{S}$  napięcia wskutek dwu par sił na ramionach 23 i 34, których moment  $= 1$ , działających w sensie zwiększenia kątu  $\vartheta_3$ . Lepiej jednak znaleźć  $\Delta \vartheta_3$  ze związku między przyrostami kątów węzłowych  $\Delta \vartheta$ , wydłużeniami prętów  $\Delta s$  i wydłużeniem cięciwy  $l$  o  $\Delta l = \frac{Hl}{EF}$ , przyczem  $H =$  napięcie,

$F =$  przekrój pręta 06. Jeżeli prostopadła odległość węzła  $m$  od cięciwy (fig. 344) jest równa  $y$ , to wskutek przyrostu  $\Delta \vartheta_m$  wzrośnie cięciwa o  $y \Delta \vartheta_m$ .

Wskutek przyrostu  $\Delta s$  wzrośnie cięciwa o  $\Delta s \cos \epsilon = \frac{\Delta s}{s} \lambda$ . Zatem:

$$\Delta l = \Sigma y \Delta \vartheta + \Sigma \frac{\Delta s}{s} \lambda \dots \dots \dots (11)$$

W równaniu tem dla fig. 343 jest tylko jedna niewiadoma  $\Delta \vartheta_3$ .

Równanie (9) można napisać (por. fig. 338):

$$W = \frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_a} - \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_b} = -y_{m-1} \frac{1}{\lambda_a} + y_m \left( \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} \right) - y_{m+1} \frac{1}{\lambda_b}.$$

Jeżeli:  $\frac{1}{\lambda_a} = \bar{Q}_{m-1}$ ,  $\frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} = \bar{Q}_m$ ,  $\frac{1}{\lambda_b} = \bar{Q}_{m+1}$ ,

to wedle (2 a):  $W_m = \sum \bar{Q} \delta = \sum \bar{S} \Delta s$ ,

przyczem  $\bar{S}$  są to napięcia w prętach wskutek sił  $\bar{Q}$ , zaś  $\Delta s$  rzeczywiste wydłużenia. Suma  $\sum \bar{S} \Delta s$  rozciąga się zwykle tylko na kilka prętów, na fig. 345

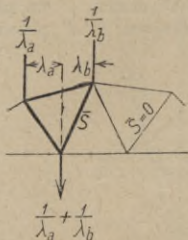


Fig. 345.

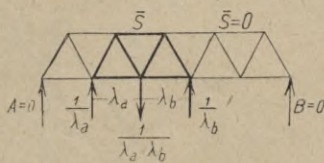


Fig. 346.

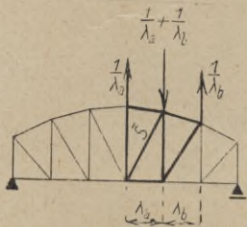


Fig. 347.

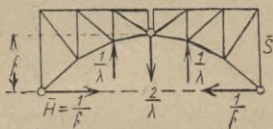


Fig. 348.

trzy pręty, fig. 346 i 347 siedem prętów, w innych prętach bowiem  $\bar{S} = 0$ . Na fig. 348 w żadnym przecię  $\bar{S}$  nie jest  $= 0$ , więc tu nie warto stosować tej metody.

### b) Metoda wykreślna.

Jeżeli pręty  $a$  i  $b$  pewnej kratownicy płaskiej, schodzące się we węzle  $C$ , przejdą wskutek jej odkształcenia z położenia  $ACB$  w położenie  $A_1C_1B_1$  (fig. 349 a), to każdy z prętów doznaje: 1. równoległego przesunięcia w położenie  $A_1A'$  względnie  $B_1B'$ , 2. wydłużenia  $\Delta a$ , względnie skrócenia  $\Delta b$  i 3. obrotu około punktu  $A_1$ , względnie  $B_1$ , przyczem koniec  $C$  pręta  $a$  opisuje łuk niezmiernie mały, który zatem można zastąpić odcinkiem  $\rho_a \perp a$ , podobnie  $\rho_b \perp b$ .  $C_1$  znajduje się w punkcie przecięcia  $\rho_a$  i  $\rho_b$ .

Wykreślimy z dowolnego punktu  $O$  (fig. 349 b) przesunięcia węzłów  $A$  i  $B$ , mianowicie  $OA' \parallel \delta_a$  i  $OB' \parallel \delta_b$ , to  $A'B'$  przedstawia wzajemne przesunięcie węzłów  $A$  i  $B$ . Z punktu  $A'$  wykreślimy wydłużenie  $\Delta a \parallel a$  w kierunku  $AC$ , zaś z  $B'$   $\Delta b \parallel b$  w kierunku  $CB$ ; z końców odcinków  $\Delta a$  i  $\Delta b$  poprowadzone  $\rho_a \perp a$ , oraz  $\rho_b \perp b$  niech się przecinają w  $C'$ , to fig. b jest identyczna z figurą zakreskowaną, więc  $OC' \parallel CC_1 = \delta_c$  jest przesunięciem węzła  $C$ ,  $A'C'$  jest względem przesunięciem węzłów  $A$  i  $C$ , zaś  $B'C'$  węzłów  $B$  i  $C$ . Podobnie można znaleźć punkt  $D'$ , odpowiadający

węzłowi  $D$  kratownicy, nawiązującemu się do węzłów  $A$  i  $C$  prętami  $AD$  i  $CD$  itd. Fig.  $b$  jest t. zw. planem przesunięć Williot'a.

Jeżeli kratownica (fig. 350  $a$ ) jest symetryczna i symetrycznie obciążona, to jeden pręt nie doznaje zmiany kierunku (mianowicie pręt, który leży w osi symetrii, względnie, którego ta oś jest symetralną; na fig. 350  $CD$ ). Odcinek równoległy do tego pręta  $C'D'$  na fig.  $b$ , a przedstawiający w pewnej skali jego wydłużenie, względnie skrócenie, przedstawia zarazem wzajemne (względne) przesunięcie obu jego końców. Można więc, podobnie jak do punktów  $A'$  i  $B'$  we fig. 349  $b$  do końców odcinka  $C'D'$  nawiązywać dalsze punkty planu Williot'a. Węzeł  $A$  (fig. 350  $a$ ; łożysko stałe) jest nieruchomy, zatem przesunięcie rzeczywiste dowolnego węzła  $C$  jest  $A'C'$ . Niech  $A''$  (fig. 350  $c$ ) będzie rzutem punktu  $A'$  na pionową przez  $A$ , zaś  $C''$  rzutem  $C'$  na pionową przez  $C$ , to pionowy odcinek między  $C''$ , a zamykająca  $A''A'$  przedstawia

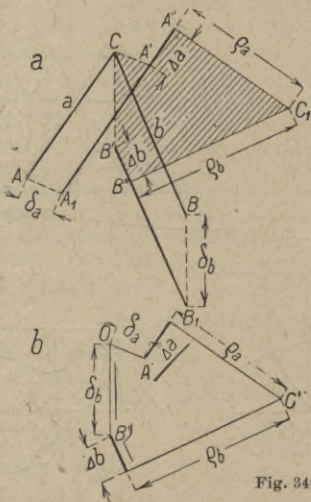


Fig. 349.

pionową składową przesunięcia węzła  $C$ . Linja  $A''C''D''B''$  jest linią ugięcia pasa dolnego,  $A'1''2''3''B''$  zaś pasa górnego. Dla przejrzystości znaczymy na planie Williot'a wydłużenia i skrócenia grubo, zaś odcinki  $\rho$  cienko.

Jeżeli obciążenie jest niesymetryczne, to nie znamy kierunku żadnego pręta po odkształceniu. Jeśli przyjmujemy, że dowolny pręt nie zmienia swego kierunku, a jeden z jego przekrojów, np. środkowy, jest nieruchomy, to planem względnych przesunięć, nakreślonym dla powyższych przyjęć (fałszywych) wyznaczony jest prawdziwy kształt belki ugiętej, lecz we fałszywym położeniu. Odkształconą belkę, niby tarczę sztywną, należy jeszcze przesunąć tak, aby odpowiadała warunkom podporowym.

Niezmiernie małe przesunięcie tarczy można uważać za obrót około pewnego bieguna (por. str. 1213), a końce wektorów wychodzących z dowolnego punktu  $O'$  (albo początki wektorów, których końce zbiegają się w  $O'$ ), a przedstawiających przesunięcia lub prędkości punktów tarczy, tworzą figurę  $F''$ , podobną do danej tarczy, lecz obróconą o  $90^\circ$ . Rzeczywiste przesunięcie węzła  $C$  belki jest sumą geometryczną przesunięcia  $O'C'$  względem punktu  $O$ , oraz przesunięcia  $C''O'$  z powodu obrotu, więc:

$$\overline{C''C'} = \overline{C''O'} + \overline{O'C'}$$

Całkowite rzeczywiste przesunięcie punktu  $A$  (łożysko stałe)  $A''A' = 0$  (fig. 351  $a$ ), więc przesunięcie jego wskutek obrotu belki odkształconej jest

$A'O'$ . Punkt  $A'$  figury  $F'''$ , od której wychodzą wektory przesunięć wskutek obrotu, zbiegające się w  $O'$ , nakrywa się więc z punktem  $A'$  planu przesunięć względnych. Punkt  $B''$  leży na prostej  $A''B'' \perp AB$ . Rzeczywiste przesunięcie  $B''B'$  punktu  $B$  możliwe jest tylko po torze  $tt$  łożyska ruchomego, więc  $B'B'' \parallel tt$ . Znając dwa punkty  $A''$  i  $B''$  figury  $F'''$ , możemy

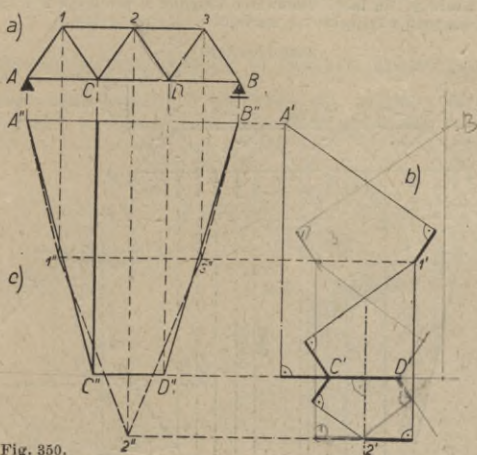


Fig. 350.

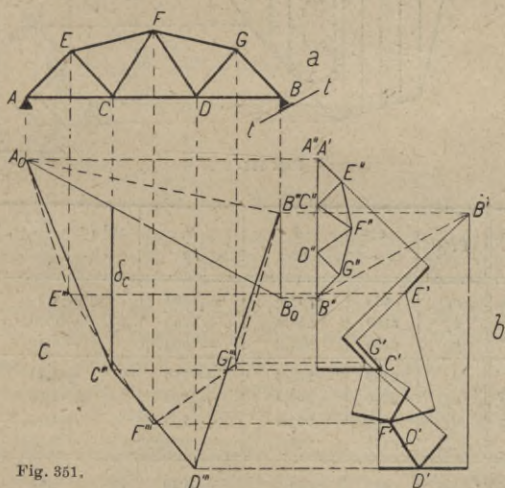


Fig. 351.

ją wykreślić, a tem samym wyznaczyć rzeczywiste przesunięcie dowolnego węzła. Np. rzeczywiste przesunięcie węzła  $C$  jest wektorem  $C''C'$  (fig. b). Jeżeli chodzi tylko o pionowe składowe przesunięć węzłów, to kreślenie  $F'''$  jest zbyteczne.

Jeżeli  $A_0$  leży na pionowej punktu  $A$  i poziomej punktu  $A''$ , podobnie  $B_0$ , zaś  $C'''$  na pionowej  $C$  i poziomej punktu  $C'$ , to pionowy odcinek pomiędzy  $C'''$  i zamykającą  $A_0B_0$  jest pionowym przesunięciem  $\delta_c$  węzła  $C$ .

Zatem  $A_0 C''' D''' B'''$  (fig. 352 c) jest linią ugięcia pasa dolnego,  $A_0 E''' F''' G''' B'''$  jest linią ugięcia pasa górnego belki  $AB$  (fig. a).  $B_0 B'''$  jest pionową składową przesunięcia punktu  $B$ .

Przykład (fig. 352). Znaleźć największe ugięcie węzła 2 belki kratowej (fig. a), obciążonej pociąganiem normy  $A$ . W tym celu wykreślmy linię wpływową ugięcia węzła 2. Według Maxwell'a będzie to linia ugięcia pasa pomostowego pod ciężarem  $P=1$ , zaczepiającym we węzle 2. Na tabeli zestawiono długości  $s$ , przekroje  $F$  i napięcia prętów  $S$ . Ostatnia rubryka podaje tysiąckrotne wartości wydłużeń prętów:

$$1000 ds = 1000 \frac{Ss}{EF}.$$

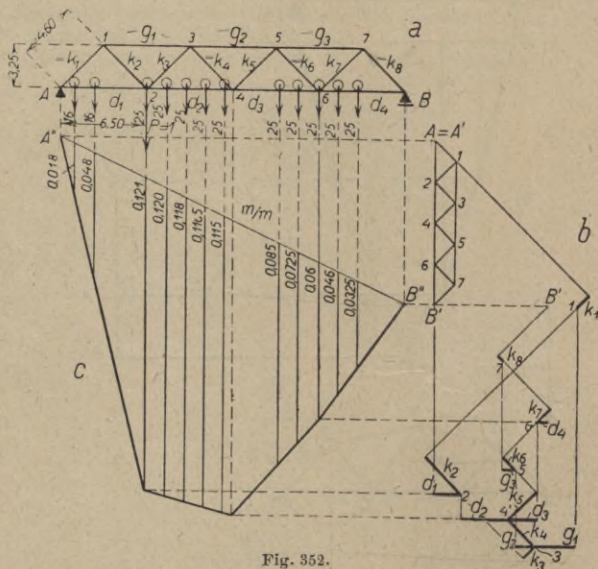


Fig. 352.

		Pręt	$s$ cm	$F$ cm <sup>2</sup>	$S$ kg	$10^3 ds = \frac{Ss}{EF} \cdot 10^3$ cm
Pasa	górnny	$g_1$	650	308,8	- 1500	- 1,5
		$g_2$	6180	359,2	- 1000	- 0,86
		$g_3$	6180	308,8	- 500	- 0,50
	dolny	$d_1$	6180	208,4	+ 750	+ 1,11
		$d_2$	6180	208,4	+ 1253	+ 1,86
		$d_3$	6180	208,4	+ 752	+ 1,12
		$d_4$	6180	208,4	+ 251	+ 0,37
Krzyżulce	$k_1$	460	359,2	- 1060	- 0,65	
	$k_2$	460	114,96	+ 1060	+ 2,02	
	$k_3$	460	114,96	+ 354	+ 0,68	
	$k_4$	460	52,0	- 354	- 1,49	
	$k_5$	460	52,0	+ 354	+ 1,49	
	$k_6$	460	52,0	- 354	- 0,68	
	$k_7$	460	114,96	+ 354	+ 0,68	
	$k_8$	460	359,2	- 354	- 0,22	



Moduł sprężystości  $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ . Na planie Williot'a (fig. b) przyjęto najpierw kierunek 4-3 jako stały.

Punkty planu Williot'a odrzutowane na pionowych, przechodzących przez węzły 1, 2, 4, 6, B (fig. c), dają linię ugięcia pasa dolnego, a zarazem linię wpływową ugięcia węzła 2. Na fig. a i c wskreślono najniekorzystniejsze położenie pociągu. Największe ugięcie węzła 2  $\delta_2 = 10^{-3} \cdot [16(18 + 48) + 25(121 + 120 + 118 + 116,5 + 115 + 85 + 72,5 + 60 + 46 + 32,5)] = 10^{-3} \cdot [16 \cdot 66 + 25 \cdot 886,5] = 1,06 + 22,16 = 23,22 \text{ mm}$ .

### V. Naprężenia drugorzędne w belkach kratowych.

Przy obliczaniu belek kratowych przyjmuje się, że pręty są połączone w węzłach przegibnie, że występują w nich zatem tylko siły osiowe. Naj-

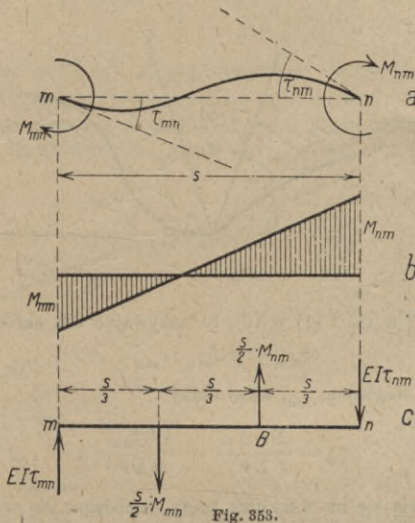


Fig. 353.

częściej jednak węzły są sztywne, więc kąty między prętami we węzłach nie mogą się zmienić, zaś pręty po odkształceniu belki wyginają się i wskutek tego powstają w nich naprężenia zginające, zwane drugorzędami.

Styczne do pręta  $mn$  (fig. 353 a) odchyliły się od jego cięciwy o kąty  $\tau_{mn}$  i  $\tau_{nm}$ , dodatnie, jeżeli w kierunku wskazówek zegara. Na koniec  $m$  pręta  $mn$  działa moment  $M_{mn}$  (moment węzłowy), na koniec  $n$  moment  $M_{nm}$ . Wzdłuż pręta linia momentów jest prostą (fig. 353 b). Pomijając wpływ siły osiowej, znajdziemy  $M_{mn}$  wedle zasady Mohra z równania momentów ciężarów sprężystych (fig. 353 c) ze względu na punkt  $B$ :

$$M_{mn} = 2 \frac{EJ}{s} (2 \tau_{mn} + \tau_{nm}) \dots \dots \dots (1)$$

Z powodu równowagi suma momentów węzłowych we wszystkich prętach, zbiegających się centrycznie w danym węźle  $m$ :

$$\sum M_{mn} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Jeżeli połączenie prętów we węźle jest ekscentryczne, to  $\sum M_{mn} = \sum S \cdot c$  ( $S$  siła osiowa,  $c$  mimośród). Przy  $w$  węzłach mamy  $w$  równań (2). Jeżeli

znamy przyrosty  $\Delta\alpha$  kątów pomiędzy cięciwami prętów, to możemy wszystkie kąty odchylenia  $\tau_{mn}$  węzła  $m$  wyrazić przez jeden z nich  $\xi_m$ . Z fig. 354 widać, że

$$\tau_{mn} = \xi_m - \Delta\alpha_{0mn} \dots \dots \dots (3)$$

Jeżeli pomiędzy prętem  $mo$  i  $mn$  (fig. 354) są jeszcze pręty  $m1$ ,  $m2$ , to  $\alpha_{0mn} = \alpha_{0m1} + \alpha_{1m2} + \alpha_{2mn}$ ,

zatem:  $\Delta\alpha_{0mn} = \Delta\alpha_{0m1} + \Delta\alpha_{1m2} + \Delta\alpha_{2mn}$ .

Przyrosty  $\Delta\alpha_{0m1}$ ,  $\Delta\alpha_{1m2}$ ... znajdziemy według wzoru na zmianę kąta w trójkącie wskutek przyrostu boków [równanie (8), str. 1240].

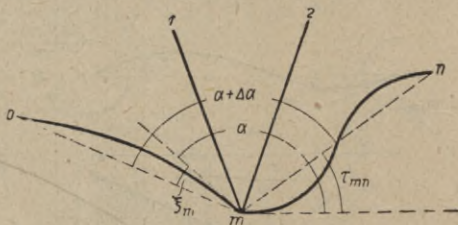


Fig. 354.

Podstawmy (3) w (1) i (1) w (2), to nazywając dla skrócenia:

$$r_{mn} = 2 J_{mn} : s_{mn} \dots \dots \dots (4)$$

i rozwiązując (2) względem  $\xi_m$ , otrzymamy:

$$\xi_m = \frac{\sum r \Delta\alpha}{\sum r} - \frac{\sum r \tau_{nm}}{2 \sum r} \dots \dots \dots (5)$$

Sumy rozciągają się na wszystkie pręty, schodzące się we węzle  $m$ . Dla każdego węzła mamy takie równanie, więc  $w$  równań. Rozwiążemy je drogą kolejnych przybliżeń.

Przyjmując  $\tau_{nm} = 0$ , otrzymamy pierwszą wartość przybliżoną:

$$\xi'_m = \frac{\sum r \Delta\alpha}{\sum r} \dots \dots \dots (6)$$

Podstawiając (6) w (3), otrzymamy pierwsze wartości przybliżone kątów odchylenia. Wstawiając je w (5), otrzymamy drugie przybliżenie dla  $\xi_m$ , tj.  $\xi''_m$ . Podobnie znajdziemy  $\xi'''_m$ ,  $\xi^{IV}_m$  itd., aż różnice pomiędzy kolejnymi przybliżeniami staną się dowolnie małe. Na podstawie ostatecznych wartości  $\xi$  obliczamy kąty odchylenia  $\tau$  z równania (3) i momenty węzłowe z równania (1). Jako kontrolę mamy równanie (2). Ewentualną odchyłkę należy rozdzielić pomiędzy pręty proporcjonalnie do wartości  $r$ . Jest to uproszczony sposób Manderli.

Mohr zastąpił kąt odchylenia  $\tau_{mn}$  obrotem  $\varphi_m$  węzła  $m$  i obrotem  $\psi_{mn}$  pręta  $mn$ . Fig. 355 przedstawia odkształcenie i przesunięcie pręta  $mn$  w położenie  $m'n'$ . Czytamy z niej:

$$\tau_{mn} = \varphi_m - \psi_{mn}, \quad \tau_{nm} = \varphi_n - \psi_{mn} \dots \dots \dots (7)$$

$\varphi_m$ ,  $\varphi_n$  i  $\psi_{mn}$  są dodatnie, jeżeli w kierunku wskazówek zegara. Podstawmy (7) i (4) w (1), to:

$$M_{mn} = r E (2 \varphi_m + \varphi_n - 3 \psi_{mn}) \dots \dots \dots (8)$$

Podstawiając (8) w (2), otrzymamy analogicznie do (5):

$$\varphi_m = \frac{\sum r \psi}{\sum r} + \frac{1}{2} \frac{\sum r (\psi - \varphi_n)}{\sum r} \dots \dots \dots (9)$$

System równań (9) rozwiązuje się, podobnie jak (5), drogą kolejnych przybliżeń, przyjmując jako pierwszą wartość przybliżoną:

$$\varphi'_m = \frac{\sum r \psi}{\sum r} \dots \dots \dots (10)$$

Podstawiając w (9)  $\varphi'_n$  za  $\varphi_n$ , otrzymamy drugą wartość przybliżoną  $\varphi''_m$  itd. Podstawiając obliczone wartości  $\varphi_m$  i  $\varphi_n$  w (8), otrzymamy momenty węzłowe. Obroty prętów  $\psi$  można odczytać z planu Williot'a. Prętowi  $mn$  (fig. 356 a) odpowiadają na planie dwa odcinki:  $\lambda =$  wydłużenie pręta

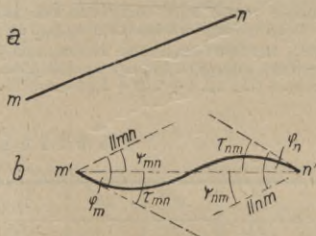


Fig. 355.

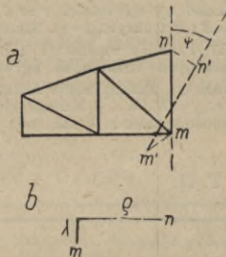


Fig. 356.

i  $\rho =$  względne przesunięcie obu węzłów pręta w kierunku prostopadłym do pręta. Jeżeli  $s_{mn} =$  długość pręta, to

$$\psi_{mn} = \frac{\rho_{mn}}{s_{mn}} \dots \dots \dots (11)$$

Z momentów węzłowych oblicza się napężenie drugorzędne ze wzoru:

$$\nu = \frac{M e}{J} = \frac{M}{W} \dots \dots \dots (12)$$

przyczem  $J =$  moment bezwładności przekroju pręta względem osi ciężkości prostopadłej do płaszczyzny belki,  $e =$  odleganie włókien skrajnych od tejże osi. Dla dowolnego pręta  $mn$  mamy dwie wartości  $M$ , mianowicie  $M_{mn}$ , oraz  $M_{nm}$  i wogóle dwie wartości  $e$ , tj.  $e'$  i  $e''$ , więc cztery wartości  $\nu$ , z których dwie są tego samego znaku, co napężenie pierwszorzędne. Z póród tych dwu miarodajna jest bezwzględnie większa.

Jako przykład podajemy obliczenie uproszczonym sposobem Manderli belki (fig. 311, str. 1243); którą Müller-Breslau obliczył swoim sposobem („Graphische Statik II.“ 2, str. 295), zaś Gehler („Die Ermittlung der Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken“, str. 22) sposobem Mohra.

Obliczenie przygotowawcze por. str. 1243. Na tablicy prętów (Tabl. I) zestawiono długości  $s$ , przekroje  $F$ , momenty bezwładności  $J$ , odstępów włókien skrajnych od osi

Tabl. I. Tablica prętów.

Pręt	$s$ cm	$F$ cm <sup>2</sup>	$J$ cm <sup>4</sup>	$e$ cm	$r$ cm <sup>3</sup>	$S$ t	$\nu I$ kg/cm <sup>2</sup>	$\nu II$ kg/cm <sup>2</sup> + -	Mohr Gehler	M. Br.	$100 \frac{\nu II}{\nu I}$ %
12	400	44	400	6,5	2	16	+ 364	91,4	94	92	25
23	400	60	800	8	4	40	+ 667	78,5	77	78	11,7
33'	400	60	800	8	4	48	+ 800	51,5	46	52	6,4
45	400	65	4000	12	20	32	- 492	106,6	106	108	21,7
56	400	65	4000	12	20	48	- 739	85,4	86	89	11,5
14	360	60	900	8,5	5	28,8	- 480	46,6	50	47	9,7
42	360	40	300	5	1,67	28,8	+ 720	35,8	38	35	5
25	360	44	400	6,5	2,22	14,4	- 328	66,1	60	67	20
53	360	44	400	6,5	2,22	14,4	+ 328	61,8	60	61	18,8
36	360	44	400	6,5	2,22	0	0	36,2	44	36	∞

ciężkości  $e$ , sztywności  $r = 2J : s$ , siły osiowe  $S$  w tonnach i naprężenia główne  $\nu I = S : F$  (rubryki 1-8). Momenty węzłowe obliczono przy pomocy tablicy kierunków (T. II) i tablicy węzłów (T. III). Jako niewiadome  $\xi$  obrano kąty odchylenia kierunków oznaczonych strzałką na fig. 341. Kolumna 4 (T. II) podaje wartości  $E \Delta \alpha_{0mn}$  do równania (3). Zmiany kątów zestawiono na tablicy II, str. 1243 i 1244. Dla kierunku 25 jest  $E \Delta \alpha_{025} = E \Delta \alpha_{125} + E \Delta \alpha_{425} = -1069 - 918 = -1987$ . Rubr. 5 (II) podaje wartości rubr. 4, pomnożone przez  $r$ . T. III, rubr. 2 podaje sumy rubr. 3 (II), np. 4 + 2,22 + 2,22 + 4 = 12,44.

T. II.

T a b l i c a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m$	$n$	$r$	$E \Delta \alpha_{0mn}$	$r \Delta \alpha$	$\tau'_{mn}$	$\tau''_{mn}$	$r \tau''_{nm}$	$\tau''_{mn}$	$\tau''_{nm}$	$r \tau''_{nm}$
3	2	4	0	0	- 1410	527	+ 2108	- 1318	+ 845	+ 3380
	5	2,22	- 941	- 2095	- 469	846	+ 1880	- 377	+ 1160	+ 2578
	6	2,22	- 2145	- 4763	+ 735	535	- 1188	+ 827	- 535	- 1188
	3'	4	- 2680	- 10720	+ 1270	1270	- 5080	+ 1362	- 1362	- 5448
2	1	2	0	0	- 1410	531	- 1062	- 1092	- 324	- 648
	4	1,67	- 1069	- 1785	- 341	309	+ 515	- 23	+ 784	+ 1308
	5	2,22	- 1987	- 4405	+ 577	44	- 98	+ 895	+ 270	+ 600
	3	4	- 1937	- 7748	+ 527	1410	- 5640	+ 845	- 1318	- 5272
1	4	5	0	0	+ 212	17	- 85	+ 419	+ 458	+ 2290
	2	2	+ 743	+ 1486	- 531	1410	- 2820	- 324	- 1092	- 2184
4	5	20	0	0	- 22	1294	- 25880	+ 453	- 980	- 19600
	2	1,67	+ 331	- 553	+ 309	341	- 570	+ 784	- 23	- 38
	1	5	- 5	- 25	- 17	212	+ 1060	+ 458	+ 419	+ 2095
5	6	20	0	0	+ 1200	1385	- 27700	+ 1514	- 1385	- 27700
	3	2,22	+ 354	+ 786	+ 846	469	- 1040	+ 1160	- 377	- 837
	2	2,22	+ 1244	+ 2760	- 44	577	+ 1230	+ 270	+ 895	+ 1987
	4	20	+ 2494	+ 49880	- 1294	22	- 440	- 980	+ 453	+ 9060
6	3	2,22	+ 535		- 535			- 535		
	5	20	+ 1385		- 1385			- 1385		

Podobnie rubr. 3 (III)  $\Sigma r \Delta a$  sume wartości rubr. 5 (II), np.:  $0 - 2095 - 4763 - 10720 = -17578$ . Rubr. 4 (III) podaje  $\xi' = \Sigma r \Delta a : \Sigma r$  (równ. 6), np.  $\xi_3' = -17575 : 12,44 = -1410$ . W rubr. 6 (II) jest pierwsza wartość przybliżona kąta odchylenia  $\tau_{mn}$  według równ. (3), np.  $\tau_{36}' = -1410 - (-2145) = +735$ . W rubr. 7 (I) jest  $\tau_{mn}'$ , w rubr. 8 (II)  $r \tau_{nm}'$ . W rubr. 5 (III)  $\Sigma r \tau_{nm}'$ , np.  $+2108 + 1880 - 1188 - 5080 = -2280$ . W rubr. 6 (III) jest  $\Sigma r \tau_{nm}' : 2 \Sigma r$ , np.  $-2280 : 24,88 = -91,5$ , w rubr. 7 (III) jest druga wartość przybliżona.  $\xi'' = \xi' - \Sigma r \tau_{nm}' : 2 \Sigma r$  (równ. 5), np.  $\xi_3'' = -1410 - (-91,5) = -1318$ .

W podobny sposób przy pomocy T. II, rubr. 9, 10 i 11 i T. III, rubr. 8 i 9, znaleziono  $\xi^{III}$  (rubr. 10, III), następnie  $\xi^{IV}$  (T. II, 12-14, T. III, 11-13). Z porównania  $\xi'$ ,  $\xi''$ ,  $\xi'''$  i  $\xi^{IV}$  można wnioskować, że  $\xi^V$  już nie wiele się różni od  $\xi^{IV}$ , zatem przestaniemy na wartości  $\xi^{IV}$ , na podstawie której wedle równ. (3) znaleziono  $\tau_{mn}$  (rubr. 15, II). Rubr. 18 (II) podaje wartość  $E\eta = (2\tau_{mn} + \tau_{nm})$ . Wartości  $\tau$  i  $\xi$  w T. II i III są już pomnożone przez  $E$  i wyrażone w  $kg/cm^2$ . Rubr. 19 (II) podaje momenty węzłowe według równ. (1):  $M_{mn} = r E \eta$ , np.  $M_{32} = 4 \cdot (-1930) = -7720 kg/cm = -7,72 t cm$ . Rubr. 14 (III) podaje  $\Sigma M$ , które wedle równ. (2) powinny być = 0. Odchyłki  $\Sigma M$  rozdzielono proporcjonalnie do  $r$ . Rubr. 20 (II) podaje poprawione wartości momentów węzłowych.

Rubr. 9 (I) podaje napężenie drugorzędne  $v_{II} = eM : J$  (równanie 12). Przekroje są symetryczne, więc wartość dodatnia równa się bezwzględnie wartości ujemnej. Dla pręta 1,2 jest  $M_{12} = -4,30 t cm$ ,  $M_{21} = -5,62$ , więc  $|M_{21}| > |M_{12}|$ , zatem napężenie drugorzędne  $v_{II 12} = 5620 \cdot 6,5 : 400 = 91,4 kg/cm^2$ . Gehler znalazł 94 (rubr. 10, D), Müller-Breslau, licząc dokładniej, 92 (rubr. 11, D). Rubr. 12 (I) podaje wartość napężenia drugorzędnego w procentach napężenia głównego. Z powodu symetrii obciążenia wystarczyło tu badać tylko połowę belki. Jako kierunek początkowy węzła 6 obrano kierunek w osi symetrii, zatem kąt odchylenia kierunku 63  $E \tau_{63} = -\frac{1}{2} E \Delta \alpha_{3'63} = -\frac{1}{2} 1069 = -535$ , zaś  $E \tau_{65} = -E \tau_{63} - E \Delta \alpha_{365} = -535 - 850 = -1385$ .

Z przykładu powyższego widać, że sposoby opisane są żmudne i wymagają znajomości przekrojów prętów. Już jednak przy projektowaniu tychże należy mieć choć przybliżony obraz naprężeń drugorzędnych. Dlatego wielką wartość praktyczną posiadają wzory przybliżone.

k i e r u n k ó w.

12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\tau'''_{mn}$	$\tau'''_{mn}$	$r \tau'''_{nm}$	IV $\tau_{mn}$	IV $2 \tau_{mn}$	IV $\tau_{nm}$	$E\eta$	$M$ $t cm$	$M$ popr. $t cm$
-1388	730	+ 2920	-1360	-2720	+ 790	1930	- 7,72	- 7,85
- 442	1043	+ 2320	- 419	- 838	+1081	243	+ 0,54	+ 0,47
+ 762	535	- 1188	+ 785	+1570	- 535	1035	+ 2,30	+ 2,23
+1297	1297	- 5188	+1320	+2640	-1320	1320	+ 5,28	+ 5,15
-1207	539	- 1078	-1147	-2294	- 470	2764	- 5,53	- 5,62
- 138	638	+ 1064	- 078	- 156	+ 705	549	+ 0,92	+ 0,85
+ 780	153	+ 340	+ 840	+1680	+ 191	1871	+ 4,16	+ 4,06
+ 730	1383	- 5532	+ 790	+1580	-1360	220	+ 0,88	+ 0,71
+ 204	312	+ 1560	+ 273	+ 546	+ 379	925	+ 4,63	+ 4,30
+ 539	1207	- 2414	- 470	- 940	-1147	2087	- 4,17	- 4,30
+ 307	1097	-21940	+ 374	+ 748	-1039	311	- 6,22	- 7,09
+ 638	138	- 230	+ 705	+1410	- 78	1332	+ 2,22	+ 2,15
+ 312	204	+ 1020	+ 379	+ 758	+ 273	1031	+ 5,16	+ 4,94
+1397	1385	-27700	+1435	+2870	-1385	1485	+29,10	+28,47
+1043	442	- 982	+1081	+2162	- 419	1743	+ 3,87	+ 3,80
+ 153	780	+ 1730	+ 191	+ 382	+ 840	1222	+ 2,72	+ 2,65
-1097	307	+ 6140	-1059	-2118	+ 374	1744	-34,88	-35,52
			- 535	-1070	+ 785	285	- 0,63	- 0,63
			-1385	-2770	+1435	1335	-26,70	-26,70

## T. III.

## T a b l i c a

1	2	3	4	5	6	7
$m$	$\Sigma r$	$\Sigma r \Delta a$	$\xi'$	$\Sigma r r_{nm}$	$: 2 \Sigma r$	$\eta''$
3	12,44	- 17,578	- 1410	- 2280	- 91,5	- 1318
2	9,89	- 13,933	- 1410	- 5285	- 318	- 1092
1	7	+ 1486	+ 212	- 2905	- 207	+ 419
4	26,67	- 578	- 22	- 25390	- 475	+ 453
5	44,44	+ 53,426	- 1200	- 27900	- 314	+ 1514

P a s y. Gdyby krata zmuszała oba pasy do wspólnego identycznego ugięcia, to równanie linii ugięcia osi ciężkości obu pasów byłoby:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{E J_x}$$

W rzeczywistości jest: 
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu M_x}{E J_x} \dots \dots \dots (13)$$

przyczem wedle Bleicha należy przyjąć:

dla belki	równoległej				parabolicznej		
dla stosunku $\frac{h}{l} =$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$
$\mu =$	1,2	1,27	1,35	1,4	1,2	1,25	1,3

W powyższem oznacza  $h$  = wysokość belki,  $l$  = rozpiętość,  $M_x$  = moment w przekroju  $x$ ,  $J_x$  = moment bezwładności przekroju obu pasów względem ich osi ciężkości. Jeżeli  $F$  jest przekrojem pasa rozciąganego,  $F'$  ściskanego, to

$$J_x = a^2 F + a'^2 F',$$

gdzie:  $a F = a' F'$ ,  $a + a' = h$ .

Dla samego pasa zachodzi równanie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M'}{E J'}$$

przyczem naprężenie drugorzędne w pasie  $v_{II} = \frac{M'}{J'} e$ ,

zatem: 
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{v_{II}}{E e} \dots \dots \dots (14)$$

Z porównania (13) i (14) otrzymamy:

$$v_{II} = \mu \frac{M_x}{J_x} e \dots \dots \dots (15)$$

Dla  $F' = F''$  jest:

$$v_I = \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2} \dots \dots \dots (16)$$

czyli: 
$$\frac{v_{II}}{v_I} = 2 \mu \frac{e}{h} \dots \dots \dots (17)$$

w ę z ł ó w.

8	9	10	11	12	13	14
$\Sigma r \tau_{nm}^{II}$	$: 2 \Sigma r$	$\xi^{III}$	$\Sigma r \tau_{nm}^{III} +$	$: 2 \Sigma r$	$\sigma_r^{IV}$	$\Sigma M$
- 678	- 27	- 1383	1136 -	50	- 1360	+ 0,40
- 4012	- 203	- 1207	5206 -	263	- 1147	+ 0,43
+ 106	+ 8	+ 204	854 -	61	+ 273	+ 0,46
- 17543	- 329	+ 807	21150 -	396	+ 374	+ 1,16
+ 17490	- 197	+ 1397	20812 -	235	+ 1435	+ 1,41

Dla  $F = \alpha F'$

i gdy przekrój użyteczny pasa rozciąganego:

$$F_u = \lambda F'$$

i odpowiednio:

$$F'_u = \lambda' F',$$

to uwzględniając na korzyść pewności rozkład naprężeń drugorzędnych wzdłuż pręta wedle trójkąta, otrzymamy dla pasa rozciąganego:

$$\rho = \nu_{II \max} : \nu_I = 2 \mu \lambda (1 + \alpha) \frac{e}{h},$$

zaś dla pasa ściskanego:

$$\rho' = 2 \mu \lambda' \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{e}{h}.$$

Jeżeli chcemy, aby:  $\nu_I + \nu_{II \max} = k,$

to potrzebny przekrój użyteczny pasa rozciąganego:

$$F_u = (1 + \rho) \frac{S_0}{k}.$$

Podobnie:

$$F'_u = (1 + \rho') \frac{S_0}{k}.$$

Oczywiście pas ściskany należy oprócz tego zbadać na wyboczenie. Obliczając naprężenia drugorzędne, należałoby przyjąć naprężenie dopuszczalne  $k$  o 20% większe niż zwykle.

Jeżeli pomiędzy węzłami I-rzędnymi, odległymi o  $\lambda$  (fig. 357), zawieszona jest poprzecznicza we węzle II-rzędnym przy pomocy słupa o długości  $h$ , należy uwzględnić w pasie pomostowym naprężenie dodatkowe  $\nu'_{II}$ . Moment w pasie we węzle II:  $M_{II} = \frac{1}{2} P \lambda$ , zaś ugięcie węzła II:

$$y = \frac{1}{24} \frac{P \lambda^3}{E J'} = \frac{M_{II} \lambda^2}{6 E J'} = \frac{\nu_s h}{E}$$

( $\nu_s$  = naprężenie w słupie).

Stąd: 
$$\nu'_{II} = \frac{M_{II}}{J'} e = 6 \frac{h e}{\lambda^2} \nu_s.$$

Słupy. Naprężenia drugorzędne w słupach są z reguły większe niż w krzyżulcach i wogóle bardzo znaczne. Przyjmując dla słupa  $mn$  w równaniu (8)  $\varphi_m = \varphi_n = \varphi$ , otrzymamy:

$$M_{mn} = \frac{6 E J}{h} (\varphi - \psi),$$

stąd: 
$$\nu_{II} = \frac{6 E e}{h} (\varphi - \psi) \dots \dots \dots (18)$$

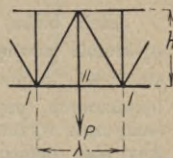


Fig. 357.

Uważając linię ugięcia za parabolę o równaniu  $y = \frac{4y_0}{l^2} x(l-x)$ , gdzie  $y_0 =$  ugięcie w środku rozpiętości, otrzymujemy:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4y_0}{l^2} (l-2x) \dots \dots \dots (19)$$

W przybliżeniu można przyjąć:

$$\psi = \frac{\Delta g + \Delta d}{h} = \nu \text{ śr. } \frac{l-2x}{Eh},$$

gdzie  $\nu$  śr. jest to średnie naprężenie w pasach (bez względu na znak). Lepiej jednak znaleźć  $\psi$  z planu Williot'a. Wzór 18. w połączeniu z 19. można zastosować do narożnika, dla innych słupów należałoby zastosować linie wpływowe naprężeń II-rzędnych.

Z porównania równań (1) i (12) wynika:  $\nu_{II} = 2 \frac{e}{s} E \eta$ . Dla prętów o przekroju symetrycznym jest  $2e$  równe szerokości pręta. Należy się więc starać o możliwie lekki wygląd belki w widoku. Wartość  $\eta = 2\tau_{mn} + \tau_{nm}$  zależy w wysokim stopniu od rodzaju kraty. W pasach (pomijając pola skrajne przy narożnikach) naprężenia drugorzędne w przypadku kraty prostokątnej N i półprzekątniowej K są bardzo małe (około 5%). Jeżeli linia ugięcia pasa pomostowego wykazuje załomy odwrotne, naprężenia II-rzędne są procentowo do naprężeń I-rzędnych znaczne: przy kracie (fig. 357) dochodzą do 28%, kracie N i V z drugorzędem podparciem odpowiednio do 33 i 44%, przy kracie dwukrotnej do 86% (por. Bażant). Należałoby w tym przypadku zastosować przekrój pasa pomostowego symetryczny, aby zmniejszyć  $e$ . Bardzo znaczne są naprężenia drugorzędne w łukach kratowych ze ścięgnem, belkach kratowych wzmocnionych łukiem, belkach trójpasowych, oraz w wieszarach z belkami usztywniającymi.

## VI. Ustroje hiperstatyczne.

### A. Równania sprężystości.

Jeżeli belka, np. fig. 358 a, jest  $n_w$ -krotnie wewnątrznie, względnie  $n_z$ -krotnie zewnętrznie hiperstatyczna (statycznie niewyznaczalna; por. str. 1189), to przez opuszczenie  $n_w$  prętów istotnych, względnie  $n_z$  prętów łożyskowych (pręty nadliczbowe) można kratownicę uczynić izostatyczną (statycznie wyznaczalną), tj. sprowadzić ją do układu zasadniczego (fig. b). Aby stan napięć w układzie zasadniczym był identyczny ze stanem w belce rzeczywistej, należy każdy opuszczony pręt łożyskowy zastąpić siłą, działającą w kierunku tego pręta, jako nacisk na belkę, zaś pręt istotny dwiema siłami zaczepiającymi we węzłach, w których był osadzony i działającymi w sensie ich zbliżenia, jeżeli pręt był rozciągany, zaś oddalenia, jeżeli był ściskany, a równymi co do wielkości napięciu tegoż pręta (tensory). Niech będą  $X_a, X_b, X_c$ , niewiadome oddziaływania opuszczonych podpór, względnie napięcia opuszczonych prętów istotnych (fig. b). Jeżeli nazwiemy  $R_o, S_o$  reakcje podpór i siły wewnętrzne w układzie zasadniczym (fig. c) wskutek sił zewnętrznych  $\Sigma P$ , zaś  $R_a, S_a$  wskutek siły, względnie napięcia  $X_a = -1$  (fig. d) i wreszcie odpowiednio  $R_b, S_b; R_c, S_c \dots$  (fig. e i f), to w ustroju rzeczywistym (fig. a) na podstawie prawa superpozycji reakcja pewnej podpory:



zaś napięcie dowolnego pręta:

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 - R_a X_a - R_b X_b - R_c X_c \dots \\ S &= S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

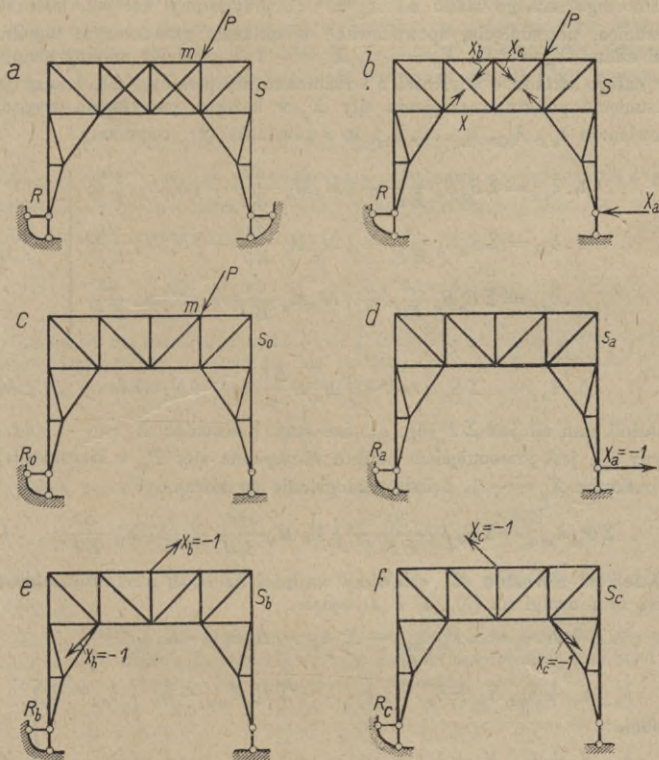


Fig. 358.

Jeżeliby w kratownicy prócz prętów były jeszcze elementy o ścianie pełnej, pracujące nie tylko siłą osiową (zmienną)  $N$ , ale i momentem  $M$ , to w dowolnym przekroju odpowiednio do równania (1) byłoby:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 - M_a X_a - M_b X_b - M_c X_c \dots \\ N &= N_0 - N_a X_a - N_b X_b - N_c X_c \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (1a)$$

Zastosujemy równanie pracy przygotowanej do rzeczywistego układu przesuńc (fig. b) i przygotowanego stanu napięć  $X_a = -1$  (fig. d), nazywając  $\delta_a$  przesuńc w układzie rzeczywistym punktu zaczepienia siły  $X_a$  w kierunku siły  $X_a = -1$ ,  $\delta_b$  przyrost rzeczywisty oddalenia węzłów, w których zaczepiają siły  $X_b$ , zaś  $L_a = \sum R_a r$  pracę oddziaływań  $R_a$  na rzeczywistych przesuńc podpar  $r$ , to wedle równania (7), str. 1239:

$$L_a + 1 \cdot \delta_a = \sum S_a S \frac{s}{EF} + \sum S_a \omega t s + \int M_a M \frac{ds}{EJ} + \\ + \int N_a N \frac{ds}{EF} + \int N_a \omega t ds + \int M_a \omega \frac{\Delta t}{h} ds \dots (2)$$

Dla tego samego stanu sił  $X_a = -1$  przyjmijmy kolejno, jako stan przesunięć, przesunięcia, spowodowane w układzie zasadniczym uogólnionymi siłami  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$ ,  $X_c = -1 \dots$ , tudzież zmiany temperatury całego układu o wielkości  $t$  i różnicami temperatury  $\Delta t$ , i nazwijmy przesunięcie punktu zaczepienia siły  $X_a$  w każdym powyższym wypadku odpowiednio  $\delta_{aa}$ ,  $\delta_{ab}$ ,  $\delta_{ac} \dots$ ,  $\delta_{at}$ , to z równania (2) otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} 1. \delta_{aa} &= \sum S_a S_a \frac{s}{EF} + \int M_a M_a \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_a \frac{ds}{EF} \\ 1. \delta_{ab} &= \sum S_a S_b \frac{s}{EF} + \int M_a M_b \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_b \frac{ds}{EF} \\ 1. \delta_{ac} &= \sum S_a S_c \frac{s}{EF} + \int M_a M_c \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_c \frac{ds}{EF} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

$$1. \delta_{at} = \sum S_a \omega t s + \int M_a \omega \frac{\Delta t}{h} ds + \int N_a \omega t ds \dots (4)$$

Jeżeli stan sił jest  $\Sigma P$  (fig. c), zaś stan przesunięć  $X_a = -1$  (fig. d), to, gdy  $\delta_{ma}$  jest przesunięciem punktu zaczepienia siły  $P_m$  w kierunku tejże siły wskutek  $X_a = -1$ , będzie analogicznie do równań (3):

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \sum S_0 S_a \frac{s}{EF} + \int M_0 M_a \frac{ds}{EJ} + \int N_0 N_a \frac{ds}{EF} \dots (5)$$

Jeżeli w równaniu (2) wstawimy wartości na  $S$ ,  $M$  i  $N$  z równania (1) i (1a), to z uwagi na (3), (4) i (5) będzie:

$$L_a + 1 \cdot \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} + \delta_{at}$$

albo:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{aa} X_a + \delta_{ab} X_b + \delta_{ac} X_c + \dots &= \Sigma P_m \delta_{ma} - L_a + \delta_{at} - \delta_a \\ \text{Podobnie:} \\ \delta_{ba} X_a + \delta_{bb} X_b + \delta_{bc} X_c + \dots &= \Sigma P_m \delta_{mb} - L_b + \delta_{bt} - \delta_b \\ \delta_{ca} X_a + \delta_{cb} X_b + \delta_{cc} X_c + \dots &= \Sigma P_m \delta_{mc} - L_c + \delta_{ct} - \delta_c \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Tych, t. zw. równań sprężystości (por. str. 1149), jest tyle, co niewiadomych hiperstatycznych  $X$ , można je więc wyznaczyć. Przy pomocy wyznaczników otrzymamy:

$$X_a = \frac{D_a}{D}, \quad X_b = \frac{D_b}{D}, \quad X_c = \frac{D_c}{D} \dots (7)$$

We wzorach tych:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{aa} & \delta_{ab} & \delta_{ac} & \dots \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} & \delta_{bc} & \dots \\ \delta_{ca} & \delta_{cb} & \delta_{cc} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$D_a, (D_b, D_c \dots)$  otrzymamy, jeżeli wyrazy pierwszej (drugiej, trzeciej...) kolumny zastąpimy prawymi stronami, więc wyrazami wolnymi równań (6). Spółczynniki przy niewiadomych  $X$  w równ. (6) otrzymamy z równ. (3).

Na podstawie prawa Maxwella można spółczynniki:  $\delta_{aa}, \delta_{ab}, \delta_{ac}$  i  $\delta_{am}$  otrzymać z planu przesunięć układu zasadniczego, obciążonego siłą  $X_a = -1$ .

Linia ugięcia pasa pomostowego, wykreślona na podstawie tego planu, jest linią wpływową dla  $\delta_{ma}$ , jeżeli siły  $P_m$  są pionowe. Mając linie wpływowe dla  $\delta_{ma}, \delta_{mb}, \delta_{mc} \dots$ , otrzymamy linię wpływową dla  $D_a$  i tem samym dla  $X_a$  na zasadzie równania:

$$D_a = d_{aa} \delta_{ma} - d_{ba} \delta_{mb} + d_{ca} \delta_{mc} - \dots \dots \dots (9)$$

przyczem np.  $d_{ba}$  jest to podwyznacznik otrzymany z wyznacznika  $D$  przez opuszczenie wiersza i kolumny w których znajduje się  $\delta_{ba}$ , więc np. w przypadku trzech niewiadomych:

$$d_{ba} = \begin{vmatrix} \delta_{ab} & \delta_{ac} \\ \delta_{cb} & \delta_{cc} \end{vmatrix} = \delta_{ab} \delta_{cc} - \delta_{ac} \delta_{cb}.$$

Zasada najmniejszości pracy odkształcenia. Jeżeli opuścimy wpływ temperatury i poddania się podpór, to możemy równania sprężystości (6) przedstawić w formie przejrzystej:

$$\frac{\delta L}{\delta X_a} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta X_b} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta X_c} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

przyczem praca odkształcenia układu wynosi:

$$L = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 s}{EF} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EJ} + \frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{EF} \dots \dots \dots (11)$$

Jest ona funkcją zmiennych  $X_a, X_b, X_c \dots$  za pośrednictwem równań (1) i (1a).

Zatem niewiadome hiperstatyczne  $X$  przyjmują takie wartości, aby praca odkształcenia układu  $L$ , jako ich funkcja była najmniejszością (por. str. 1145).

Pierwsze z równań (10) możemy tedy napisać:

$$\sum \frac{Ss}{EF} \frac{\delta S}{\delta X_a} + \int \frac{M ds}{EJ} \frac{\delta M}{\delta X_a} + \int \frac{N ds}{EF} \frac{\delta N}{\delta X_a} = 0 \dots (10a)$$

**Przykłady.**

1. Belka jednym końcem poziomo utwierdzona, a drugim wolno podparta (fig. 359) tworzy utwór hiperstatyczny pierwszego stopnia, gdyż dla przejścia do utworu zasadniczego wystarczy usunięcie jednego pręta podporowego (fig. b). Mamy:  $M = M_0 - M_a X_a$  [por. równanie (1a)].

Celem obliczenia wielkości statycznie niewyznaczalnej  $X_a$  zastosujemy równania (6), (3) i (5). W przypadku sztywnych podpór i stałego  $J$  będzie:

$$X_a \cdot \delta_{aa} = \sum P_m \delta_{ma}, \quad X_a = \frac{\int_0^l M_0 M_a dx}{\int_0^l M_a^2 dx} \dots \dots \dots (12)$$

a) Dla obciążenia ciężarem jednostajnie rozłożonym  $g$  (fig. a, b, c):

$$\int_0^l M_0 M_a dx = \int_0^l \frac{g x^3}{2} dx = \frac{g l^4}{8}, \quad \int_0^l M_a^2 dx = \int_0^l x^2 dx = \frac{l^3}{3}.$$

$$X_a = 3/8 gl.$$

Moment w dowolnym punkcie:

$$M = X_a x - \frac{g x^2}{2}$$

Największą wartość dodatnią osiąga moment dla  $x = 3/8 l$ :

$$M_{+ \max} = \frac{9}{128} g l^2;$$

zaś największą ujemną na podporze  $b$ :

$$M_{- \max} = -\frac{g l^2}{8}$$

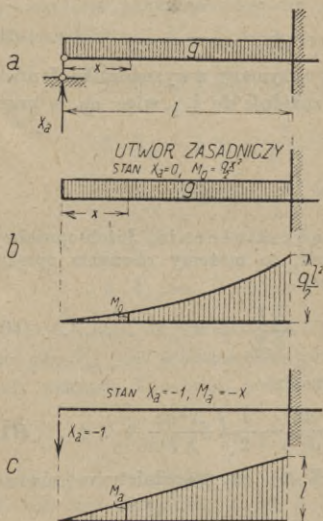


Fig. 359.

b) Dla obciążenia ciężarem skupionym  $P$  (fig. 360) otrzymamy, stosując równania (6) i (12):

$$X_a = \frac{P(l-u)^2(2l+u)}{2l^3}$$

Moment w dowolnym punkcie:

$$M = X_a x - P(x-u)$$

2. Belka obu końcami poziomo utwierdzona (fig. 361) jest dwukrotnie hiperstatyczna; wielkości hiperstatyczne tworzą momenty podporowe  $X_a$  i  $X_b$ . Wedle równania (1 a):

$$M = M_0 - M_a X_a - M_b X_b$$

Wedle równań (6) i (8) przyjmując zupełne utwierdzenie belki i stały moment bezwładności  $J$  otrzymamy:

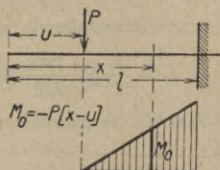


Fig. 360.

$$\left. \begin{aligned} \sum P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} &= 0 \\ \sum P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

przyczem:

$$\left. \begin{aligned} EJ \cdot \delta_{aa} &= \int_0^l M_a^2 dx = \frac{l}{3} \\ EJ \cdot \delta_{bb} &= \int_0^l M_b^2 dx = \frac{l}{3} \\ EJ \cdot \delta_{ab} &= \int_0^l M_a M_b dx = \frac{l}{6} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

(por. fig. c i d).

a) Dla obciążenia ciężarem jednostajnie rozłożonym  $g$  na całej długości belki:

$$M_0 = \frac{1}{2} g x (l-x)$$

Z powodu symetrii:

$$\sum P_m \delta_{am} = \sum P_m \delta_{bm} = \int M_0 M_a dx = \frac{g l^3}{24}$$

zatem z równań (13) i (14):

$$X_a = X_b = \frac{g l^2}{12}$$

Moment w dowolnym przekroju X (fig. a):

$$M = \frac{1}{2} g x (l-x) - X_a \frac{l-x}{l} - X_b \frac{x}{l}$$

$$M_{+\max} = \frac{g l^2}{24} \text{ (w \u015brodku belki)}$$

$$M_{-\max} = -\frac{g l^2}{12} \text{ (na podporze).}$$

Oddzia\u0142ywania:  $C_a = C_b = \frac{1}{2} g l$ .

b) Dla obci\u0105żenia ci\u0119\u017carem skupionym P (fig. 362):

$$\Sigma P_m \delta_{am} = \int_0^l M_0 M_a dx = \int_0^u \frac{P(l-u)}{l} x \frac{l-x}{l} dx + \int_u^l \frac{l-u}{l} \frac{P x}{l} dx = \frac{P u}{6 l} [2 l^2 - 3 u l + u^2]$$

$$\Sigma P_m \delta_{bm} = \int_0^l M_0 M_b dx = \int_0^u \frac{P(l-u)}{l} x \frac{x}{l} dx + \int_u^l \frac{l-u}{l} \frac{P x}{l} dx = \frac{P u}{6 l} [l^2 - u^2].$$

Z r\u00f3wna\u0144 (13) i (14) i ostatnich dwu:

$$X_a = \frac{P u}{l^2} (l-u)^2,$$

$$X_b = \frac{P u^2}{l^2} (l-u).$$

Oddzia\u0142ywania [por. r\u00f3wn. (1)]:

$$C_a = \frac{P}{l^2} (l^3 + 2 u^3 - 3 u^2 l),$$

$$C_b = \frac{P u^2}{l^3} (3 l - 2 u).$$

Metoda ca\u0142kowania linii ugi\u0119cia: Baszy\u0144ski wychodzi z r\u00f3wnania linii ugi\u0119cia (por. str. 1123):

$$y = \frac{1}{EJ} f(x) \dots (a)$$

Wtedy nachylenie do poziomu w dowolnym punkcie:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{1}{EJ} f'(x) \quad (b)$$

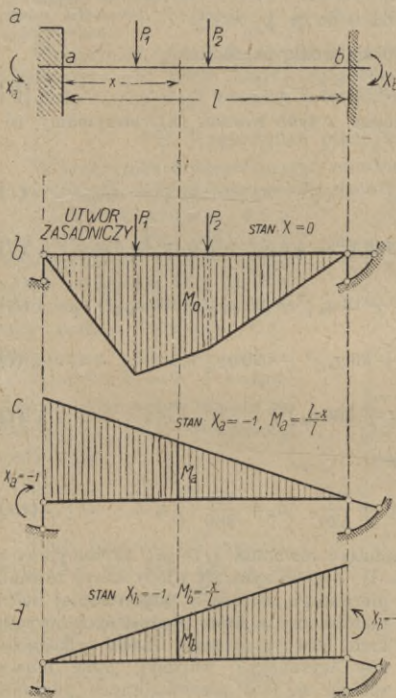


Fig. 361.

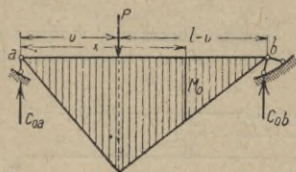


Fig. 362.

Moment:  $M_x = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -f''(x) \dots (c)$

Si\u0142a poprzeczna:  $T_x = \frac{d M_x}{dx} = -f'''(x) \dots (d)$

Obci\u0105\u017cenie jednostkowe:  $p_x = -\frac{d T_x}{dx} = f^{IV}(x) \dots (e)$

Dla różnych rodzajów belek możemy z góry określić pewne warunki, jakie powyższe równania spełnić muszą. Np. dla belki wolno podpartej mamy na podporze:  $y = 0$ ,  $M = 0$ , dla belki utwierdzonej na podporze:  $y = 0$ ,  $\text{tg } \alpha = 0$ , dla wspornika na końcu teżoż:  $M = 0$ ,  $V = 0$ .

Wstawiając odpowiednie wartości w równania (a) — (e) otrzymujemy warunki, jakie muszą spełnić się dla pewnej belki, a stąd możemy też określić w każdym punkcie momenty, siły poprzeczne i kształt linii ugięcia dla pewnego danego obciążenia  $p_x$ . Dla poszczególnych rodzajów obciążenia mamy:

$$a) \text{ dla obciążenia jednostajnego: } p_x = p \dots \dots \dots (f)$$

$$b) \text{ dla obciążenia wzrastającego wedle linii prostej: } p_x = p(\alpha + \beta \xi) \dots (g)$$

gdzie 
$$\xi = \frac{x}{l},$$

np. dla obciążenia wzrastającego od  $p_1$  do  $p_2$ :  $p_x = p_1 \left(1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1} \xi\right)$ ,  
zaś dla obciążenia wzrastającego od 0 do  $p$ :  $p_x = p \xi$ .

c) dla obciążenia zmieniającego się wedle paraboli:

$$p_x = p(\alpha + \beta \xi + \gamma \xi^2) \dots \dots \dots (h)$$

Biorąc za podstawę najogólniejsze z tych równań (h), otrzymamy równania (a) — (e) w postaci:

$$y = \frac{p l^4}{n EI} (\alpha + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + a_6 \xi^6) \dots (i)$$

$$a = \frac{p l^3}{n EI} (\alpha_1 + 2 a_2 \xi + 3 a_3 \xi^2 + 4 a_4 \xi^3 + 5 a_5 \xi^4 + 6 a_6 \xi^5) \dots (j)$$

$$M_x = -\frac{p l^2}{n} (2 a_2 + 6 a_3 \xi + 12 a_4 \xi^2 + 20 a_5 \xi^3 + 30 a_6 \xi^4) \dots (k)$$

$$V_x = -\frac{p l}{n} (6 a_3 + 24 a_4 \xi + 60 a_5 \xi^2 + 120 a_6 \xi^3) \dots \dots \dots (l)$$

$$p_x = -\frac{p}{n} (24 a_4 + 120 a_5 \xi + 360 a_6 \xi^2) \dots \dots \dots (l')$$

W równaniach tych oczywiście:

$$a_4 = \frac{n \alpha}{24}, \quad a_5 = \frac{n \beta}{120}, \quad a_6 = \frac{n \gamma}{360} \dots \dots \dots (m)$$

Znając obciążenie, możemy oznaczyć równania (f) — (h), za ich pomocą równanie (m), a wreszcie równania (i) — (l). Otrzymamy wtedy szereg równań pierwszego stopnia o odpowiedniej ilości niewiadomych, które w prostszych wypadkach łatwo rozwiązać. Chodzi tylko o to, aby wyznaczyć warunki, jakie muszą spełnić się dla poszczególnych punktów belki.

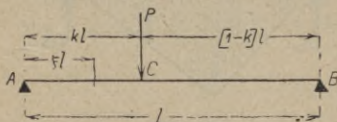


Fig. 363.

Równań powyższych można też użyć dla ciężaru skupionego (fig. 363): Niech ciężar  $P$  znajduje się w odległości  $kl$  od podpory  $A$  belki o długości  $l$ ; w tym punkcie  $\xi = k$ . Wtedy jest  $p_x = 0$ , zatem współczynniki dla części  $AC$ :  $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ , podobnie dla  $CB$ :  $b_4 = b_5 = b_6 = 0$ . Pozostałe 8 współczynników  $a, a_1 \dots a_3$  i  $b, b_1 \dots b_3$  znajdziemy na podstawie danych, odnoszących się do końców belki i do punktu  $C$ . Dla punktu  $C$  mamy:  $y' = y''$ ,  $\text{tg } \alpha' = \text{tg } \alpha''$ ,  $M' = M''$ ,  $T' - T'' = P$ .

Czyli:  $a - b = k^3, \quad a_2 - b_2 = 3k,$   
 $a_1 - b_1 = -3k^2, \quad a_3 - b_3 = -1.$

**Przykład.** Dla belki obustronnie wmurowanej, obciążonej ciężarem jednostajnie rozłożonym, otrzymamy:  $p_x = p$ , więc  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ . Przyjmując  $n = 24$ , otrzymamy z równań (m):  $a_4 = 1, a_5 = 0, a_6 = 0$ . Dla lewego utwierdzonego końca belki:  $y = 0, \alpha = 0$ , a więc z równań (i) i (j):  $a = 0, a_1 = 0$ . Na prawym końcu ( $\xi = 1$ ), też  $y = 0, \alpha = 0$ , a stąd:

$$0 = \alpha + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + a_3 + 1 = 0,$$

$$0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 2a_2 + 3a_3 + 4 = 0.$$

Z tych dwu równań znajdujemy  $a_2 = 1, a_3 = -2$ , a stąd:  $y = \frac{p l^3}{24 E J} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4)$ ,

$$a_x = \frac{p l^3}{12 E J} (\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3), \quad M_x = -\frac{p l^2}{12} (1 - 6\xi + 6\xi^2), \quad V_x = \frac{p l}{2} (1 - 2\xi),$$

na podporze:  $y = 0, \alpha = 0, M = -\frac{p l^2}{12}, V = \frac{p l}{2}$ ,

w środku:  $y = f = \frac{1}{384} \frac{p l^4}{E J}, \alpha = 0, M = +\frac{p l^2}{24}, V = 0.$

Metoda ta może być z korzyścią użyta np. przy belkach krzyżujących się wzajemnie (stropy żelbetowe). Niedogodnością jej jest konieczność rozwiązywania bardzo znacznej ilości równań.

Prócz metod opisanych powyżej używa się do obliczenia niektórych ustrojów hiperstatycznych także innych sposobów jak np. metody punktów stałych i metody trzech wzgl. czterech momentów (por. *F. Belki ciągle i G. Ramy*).

### B. Kratownice płaskie hiperstatyczne.

W kratownicach wszystkie pręty narażone są wyłącznie na siły osiowe, więc równania (3), (4) i (5) upraszczają się o tyle, że znikają całki prawej strony.

Belka kratowa dwuprzęsłowa. (Fig. 364). Opuuszczając podporę C, otrzymujemy układ zasadniczy (fig. b). Niewiadomą hiperstatyczną jest tedy reakcja podpory  $CX_c$ . Przyjmując podpory sztywne, tj.  $L_c = 0$  i  $\delta_c = 0$ , i uwzględniając tylko wpływ ciężaru ruchomego  $P_m = 1$ , otrzymamy z równ. (6):

$$X_c = \frac{1 \cdot \delta_{mc}}{\delta_{cc}}.$$

Linia ugięcia pasa pomostowego AB wskutek siły  $X_c = -1$ , czytana w skali  $1 : \delta_{cc}$ , jest linią wpływową oddziaływania  $X_c$ . Można ją wykreślić przy pomocy ciężarów sprężystych „w” (por. str. 1241), naniesionych w dowolnej skali przy pomocy dowolnego bieguny (fig. c), gdyż  $X_c$  zależy od stosunku  $\delta_{mc} : \delta_{cc}$ . Obierając ugięcie punktu C  $\delta_{cc}$  za jednostkę, możemy wprost odczytywać  $X_c = \delta_{mc}$ . Gdy nie chodzi nam o linie wpływowe, tylko o wartość dla danego obciążenia stałego, to z równania (6), (3) i (5), otrzymamy:

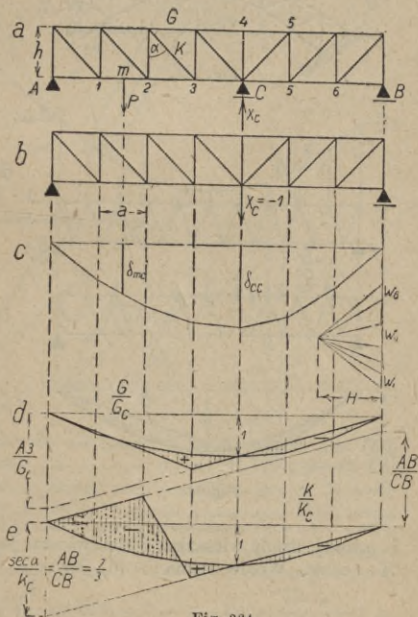


Fig. 364.

$$X_c = \frac{\sum P_m \delta_{mc}}{\delta_{cc}} = \frac{\sum S_0 S_c \frac{s}{EF}}{\sum S_c^2 \frac{s}{EF}},$$

przyczem wartości  $S_0$  i  $S_c$  znaleźć można z dwu planów Cremony jednego dla obciążenia układu zasadniczego siłami  $\sum P_m$ , drugiego dla obciążenia siłą  $X_c = -1$ . Siła wewnętrzna w dowolnym przecię  $S = S_0 - S_c X_c = S_c \left( \frac{S_0}{S_c} - X_c \right)$ . Fig. *d* przedstawia linię wpływową pręta *G*, fig. *e* zaś pręta *K*, podzielone odpowiednio przez  $G_c$  i  $K_c$ .  $G_c$  i  $K_c$  są to siły w prętach *G* i *K* wskutek

$$X_c = -1, \text{ więc } G_c = \frac{CB}{AB} \cdot \frac{A3}{h}, K_c = \frac{CB}{AB} \sec \alpha, \text{ czyli } \frac{\sec \alpha}{K_c} = \frac{AB}{CB}.$$

Łuk kratowy bezprzegubowy (fig. 365). Opuszczając pręty  $\alpha$ ,  $b$  i  $c$ , które możemy uważać za pręty

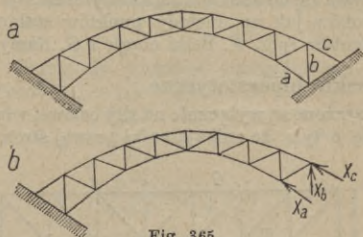


Fig. 365.

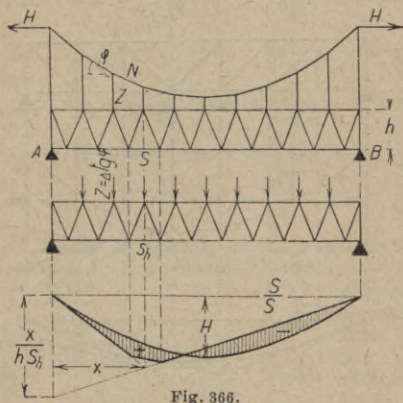


Fig. 366.

i prawej strony wieszaka. Jeżeli wieszak jest parabolą, to  $\Delta \text{tg } \varphi = \text{const.}$ , więc  $Z = \text{const.}$  Wedle równania (6) jest:

$$H = \frac{\delta_{mh}}{\delta_{hh}}.$$

Jeżeli  $H = -1$ , to pręty wiszące naciskają na belkę usztywniającą siłami  $\Delta \text{tg } \varphi$ . Należy je uważać za ciężary działające w węzłach pasa

łożyskowe, otrzymamy wspornik (układ zasadniczy, fig. *b*). Działając nań kolejno siłą  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$ ,  $X_c = -1$  (fig. *b*), otrzymamy trzy plany sił, następnie trzy plany przesunięć, a stąd trzy linie ugięcia pasa górnego (pomostowego), które są liniami wpływowymi przesunięć  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{mb}$  i  $\delta_{mc}$ . Można z nich skonstruować linie wpływowe niewiadomych  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  (równanie 9 i 8), a następnie linie wpływowe sił wewnętrznych w prętach i linie wpływowe oddziaływań wedle równania (1).

Wieszak usztywniony belką kratową (fig. 366) jest ustrojem hiperstatycznym pierwszego stopnia. Jako wielkość hiperstatyczną obierzemy składową poziomą  $H$  ciągnięcia w wieszarze  $N$ . Otrzymamy wtedy:

$$N = H \sec \varphi.$$

Siła w przecię wiszącym (wieszaku):

$$Z = H \Delta \text{tg } \varphi,$$

gdzie  $\Delta \text{tg } \varphi =$  różnica tangensów nachylenia wieszara z lewej



górnego belki  $AB$  (fig.  $b$ ). Plan Cremony przedstawia wówczas siłę  $S_h$ , zaś linja ugięcia pasa pomostowego (dolnego) linję wpływową dla  $\delta_{mh}$ , względnie  $H$ , jeżeli za jednostkę obierzemy  $\delta_{hh}$ . Wedle równania 3 i 5:

$$\delta_{hh} = \Sigma S_h^2 \frac{s}{EF}, \quad \delta_{mh} = \Sigma S_0 S_h \frac{s}{EF}.$$

$S_0$  jest siłą wewnętrzną w przecie belki wolno podpartej  $AB$  (jak gdyby wiszara nie było).

Siła wewnętrzna w dowolnym przecie belki usztywniającej (równanie 1):

$$S = S_0 - HS_h = S_h \left( \frac{S_0}{S_h} - H \right) = S_h \cdot s.$$

Linję wpływową dla

$$s = \frac{S_0}{S_h} - H = \frac{S}{S_h}$$

łatwo skonstruować na linii  $H$ , przez naniesienie linii wpływowej dla  $S_0$  w skali  $1 = S_h$  (por. fig.  $c$ ).

Poniżej podajemy liczbowy przykład obliczenia hiperstatycznego więzara dachowego (fig. 367). Ciężary węzłowe pionowe  $P = 3000 \text{ kg}$ .

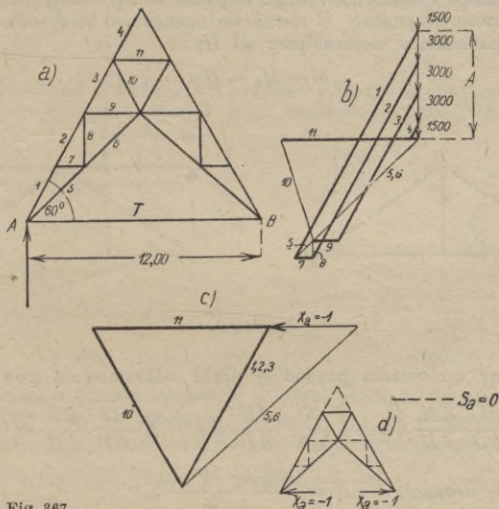


Fig. 367.

Jako ilość hiperstatyczną przyjmujemy siłę w ścięgnie  $T = X_a$ . Wyznamy plan sił  $S_0$  dla obciążenia pionowego (fig.  $b$ ) i plan sił  $S_a$  dla  $X_a = -1$  (fig.  $c$ ). Siły  $S_a$  w prętach 4, 7, 8 i 9 są równe zero (fig.  $d$ ). Dla obliczenia  $X_a$  musimy przyjąć przekroje prętów. W mniejszych konstrukcjach dachowych możemy uczynić to w sposób następujący. Jeżeli średni przekrój pasa górnego wynosi  $F_g$ , to przekrój pasa dolnego w przybliżeniu  $F_d = 0,6 - 0,8 F_g$ , zaś przeciętny przekrój krzyżulców  $F_k = 0,2 - 0,5 F_g$ . W danym wypadku szacujemy:  $F_g = 40 \text{ cm}^2$ ,  $F_d = 32 \text{ cm}^2$ ,  $F_k = 20 \text{ cm}^2$ , przekrój ścięgna  $F_s = 15 \text{ cm}^2$ . Podstawiając w pierw-

szem z równań (6), str. 1258:  $L_a = 0$ ,  $\delta_{at} = 0$ ,  $X_b = X_c = 0$ ,  $E\delta_a = \frac{X_a s_a}{F_a} = X_a \varrho_a$

otrzymamy, rozwiązując ze względu na  $X_a$ ,  $X_a = \frac{\Sigma S_0 S_a \varrho}{\Sigma S_a^2 \varrho} = \frac{+ 4350}{+ 702,4} = 6,17 \text{ t}$ , por.

tabele. Siły w prętach  $S = S_0 - S_a X_a$  są około 50% mniejsze niż  $S_0$ . Podobnie należy uwzględnić wpływ parcia wiatru. Przekroje potrzebne będą mniejsze, niż gdyby ściegna nie było, a wskutek tego więzar hiperstatyczny wypadnie o 25–30% tańszy.

Tablica 80.

Pręt	$s$ cm	$F$ cm <sup>2</sup>	$e = \frac{s}{F}$ 1/cm	$S_a$	$S_a^2$	$S_a^2 e$	$S_0$	$S_0 S_a e$	$S_a X_a$	$S$
1	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-24,4	+366	-12,34	-12,06
2	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-21,8	+328	-12,34	-9,46
3	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-15,8	+237	-12,34	-3,47
10	300	20	15	+2,0	+4,0	60	+12,0	+360	+12,34	+0,34
11	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-18,4	+276	-12,34	-6,06
$T$	1200	15	80	-1,0	+1,0	80	0	0	-6,17	+6,17
						$\Sigma S_a^2 e = 702,4$	$\Sigma = +4350$			

### C. Belki rozporowe i wieszarowe.

Rozpornica trójkątna (wzgl. więzanie wiszące trójkątne) (fig. 368). Moment w dowolnym punkcie  $C$  równa się momentowi belki wolno podpartej  $AB$ , pomniejszonemu o moment pary sił  $Hy$ :

$$M = M_0 - Hy \dots \dots \dots (15)$$

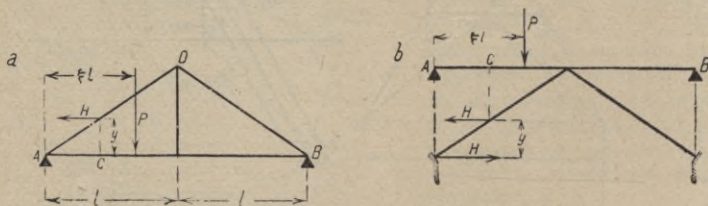


Fig. 368.

Wychodząc z równania pochodnej pracy odkształcenia (równanie 10a)

$$\int \frac{M}{EJ} \frac{dM}{dH} dx + \int \frac{N}{EF} \frac{dN}{dH} dx + \sum \frac{Ss}{EF} \frac{dS}{dH} = 0,$$

otrzymuje się równanie: 
$$H = \frac{P\xi(3 - \xi^2)l}{4\mu h},$$

względnie dla obciążenia jednostajnie rozłożonego na całej długości belki:

$$H = \frac{5gl^2}{8\mu h},$$

przyczem współczynnik  $\mu$  zależy od wymiarów i materiału i wynosi:

$$\mu = 1 + \frac{3J}{Fh^2} \left( 1 + \frac{E}{E_1} \cdot \frac{F}{F_1} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} + 2 \frac{EF}{E_2 F_2} \operatorname{tg}^3 \alpha \right). \dots (16)$$

w którym to równaniu  $E$ ,  $J$  i  $F$  oznaczają moduł sprężystości, moment bezwładności i przekrój belki poziomej  $AB$ ,  $E_1$  i  $F_1$  moduł sprężystości i przekrój zastrzałów  $AD$  i  $BD$ , a  $E_2$  i  $F_2$  odpowiednie wartości dla słupa.

Przy pomocy górą (fig. 368 b):

$$\mu = 1 + \frac{3J}{F_1 h^2} \frac{E}{E_1} \cdot \frac{s}{l \cos^2 \alpha} \dots \dots \dots (16 a)$$

przyczem  $s$  jest rzeczywistą długością zastrzałów.

Spółczynnik  $\mu$  różni się niewiele od jedności; dla  $\mu = 1$  wartości zarówno momentów zginających, jak i oddziaływań są identyczne z wartościami dla belki ciągłej dwuprzęsłowej, bo opuszcza się wtedy wpływ skrócenia zastrzałów, przez co podpora środkowa  $D$  staje się stałą.

Oddziaływanie środkowe:  $D = \frac{Hh}{l} = \frac{P\xi(3 - \xi^2)}{4\mu}$ ;

dla ciężaru jednostajnie rozłożonego:  $D = \frac{5gl}{8\mu}$ .

Linje wpływe momentów otrzymuje się w myśl równania (15) przez odjęcie rzędnych linii wpływowej parcia poziomego  $H$ , pomnożonych przez  $y$  od rzędnych linii wpływowej momentu belki wolno podpartej o rozpiętości  $2l$  (fig. 369).

Wartość  $\mu$  uwzględnia się praktycznie w ten sposób, że obliczywszy przekroje dla  $\mu = 1$ , wyznacza się  $\mu$  z wzoru (16), poczem poprawia się linje wpływowe, dodając różnicę powstałą przez zmianę wartości  $\mu$ :

$$\Delta_\mu = Hy - \frac{Hy}{\mu} = Hy \frac{\mu - 1}{\mu}$$

Jeżeli przekroje obliczono na moment ujemny na podporze  $D$ , to powyższą poprawkę można opuścić, gdyż zmniejszenie parcia  $H$  wywołuje



Fig. 369.

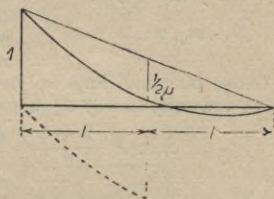


Fig. 370.

zmniejszenie się momentu ujemnego, a zatem popełnia się błąd na korzyść pewności. Poprawka dla przekroju zastrzałów nie ma praktycznej wartości.

Linje wpływowe sił poprzecznych i oddziaływań otrzymuje się, odejmując rzędne linii wpływowej parcia  $H$ , pomnożonej przez  $\frac{h}{l}$  od trójkąta oddziaływań belki wolno podpartej o rozpiętości  $2l$  (fig. 370).

Rozpornica podwójna (trapezowa) (fig. 371). Wychodząc j. w. z zasadniczego równania (15), otrzymuje się z równania pracy odkształcenia:

$$H = \frac{\int_0^L My dx}{L \mu \int_0^L y^2 dx}$$

co czyni dla  $\xi < 1$  (por. fig.):  $H = P\xi l \frac{3(1 + \varphi) - \xi^2}{2\mu h(2 + 3\varphi)}$ ,

$$\text{zaś dla } 1 < \xi < \frac{2 + \varphi}{2} : \quad H = Pl \frac{2 + 3\xi\varphi - 3(\xi - 1)^2}{2\mu h(2 + 3\varphi)}$$

$$\text{dla całk., jednostajnego obciążenia } g: \quad H = \frac{g(5 + 10\varphi + 6\varphi^2 + \varphi^3)l^2}{4\mu h(2 + 3\varphi)}$$

Dla belek o pomoście zawieszonym na rozpornicy wartość  $\mu$  wynosi:

$$\mu_1 = 1 + 3 \frac{J}{Fh^2} \frac{2 + \varphi}{2 + 3\varphi} + \frac{3}{h^2(2 + 3\varphi)} \left( 2 \frac{E}{E_1} \cdot \frac{J}{F_1} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{E}{E_2} \cdot \frac{J}{F_2} \cdot \varphi + \frac{E}{E_3} \cdot \frac{J}{F_3} \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha \right),$$

przyczem  $E, J, F$  oznaczają moduł sprężystości, moment bezwładności i przekrój belki głównej  $AB$ ,  $E_1$  i  $F_1$  moduł sprężystości i przekrój zastrzałów,  $E_2$  i  $F_2$  moduł sprężystości i przekrój rozporcy, a  $E_3$  i  $F_3$  moduł sprężystości i przekrój słupów wiszących.

Jeżeli belka główna spoczywa na rozpornicy (pomost górą), to  $\mu$  oblicza się z wzoru:

$$\mu_2 = 1 + \frac{3EJ}{E_1 h^2 (2 + 3\varphi) l} \left( \frac{2s}{F_1} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} + \frac{\varphi l}{F_2} \right).$$

Przy rozpornicy trapezowej można tak samo, jak poprzednio, opuścić  $\mu$  (zwłaszcza, dla  $\alpha \geq 30^\circ$ , gdy  $\mu_1$  dochodzi do 5%, zaś  $\mu_2$  do 1,5%). Linje wpływowe momentów otrzymuje się j. w. przez odejmowanie linii  $H_y$  od linii  $M_0$  (fig. 371), por. dział: „Mosty drewniane“, str. 787.

Chcąc otrzymać linję wpływową momentu, mającą absolutnie największą rzędną dodatnią, tworzy się moment ze względu na punkt zaczepienia siły  $P$ :

$$M = P \frac{2 + \varphi - \xi}{2 + \varphi} \xi l - P \xi l \frac{3(1 + \varphi) - \xi^2}{2\mu h(2 + 3\varphi)} \cdot y,$$

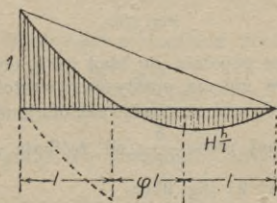


Fig. 371.

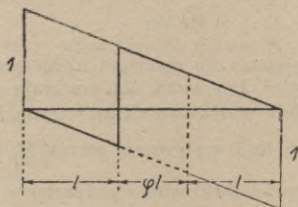


Fig. 372.

Fig. 373.

podstawiając  $y = \xi h$ ,  $P = 1$  oraz  $\mu = 1$ , co w tym wypadku można przyjąć z wystarczającą dokładnością, otrzymuje się równanie:

$$M = \frac{\{\xi^4(2 + \varphi) - \xi^2(10 + 15\varphi + 3\varphi^2) + \xi(8 + 16\varphi + 6\varphi^2)\} l}{2(2 + \varphi)(2 + 3\varphi)}$$

Różniczkując podług  $\xi$  i porównując pochodną do zera:

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = \frac{\{4\xi^3(2 + \varphi) - 2\xi(10 + 15\varphi + 3\varphi^2) + (8 + 16\varphi + 6\varphi^2)\} l}{2(2 + \varphi)(2 + 3\varphi)} = 0,$$

dochodzi się do równania 3. stopnia, określającego  $\xi$  w zależności od  $\varphi$ . (Wyniki zestawiono tabelarycznie, por. „Mosty drewniane“, str. 787).

Linje wpływowe sił poprzecznych i oddziaływań<sup>1)</sup> znajduje się, jak dla rozpornicy trójkątnej; ponieważ oba oddziaływania środkowe są przy dowolnym obciążeniu zawsze sobie równe, przeto wystarczy odjąć od oddziaływania belki wolno podpartej o rozpiętości  $L = l(2 + \varphi)$ , jedno z oddziaływań

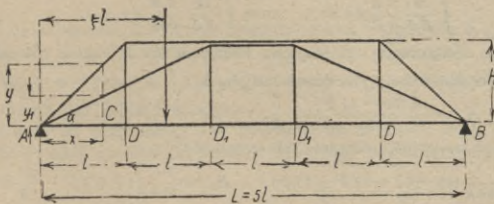


Fig. 374.

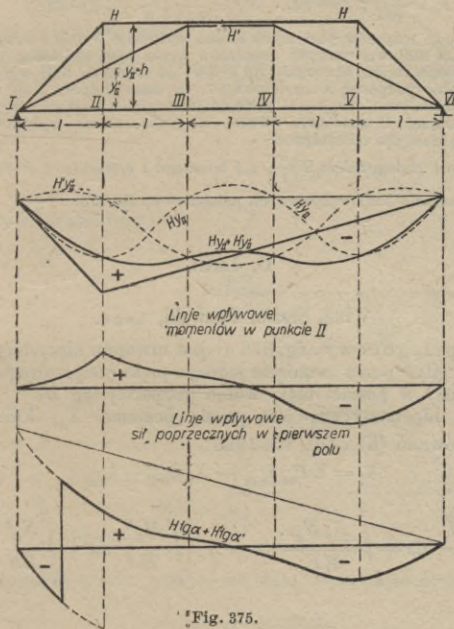


Fig. 375.

środkowych  $D = H \frac{h}{l}$ , by uzyskać wartość oddziaływania rozpornicy, przypadającego na belkę poziomą (fig. 372).

Ponieważ suma sił po lewej stronie przekroju jest dla punktów położonych w polu środkowym większa o  $D$  niż dla punktów położonych w polu skrajnym, przeto linja wpływowa sił poprzecznych dla środkowego pola nie różni się niczem od tejże linii wpływowej dla belki wolno podpartej o rozpiętości  $l(2 + \varphi)$ , por. fig. 373.

<sup>1)</sup> Tablicę rzędnych linii wpływowych oddziaływań  $D$  podano na końcu działu: „Statyka budowli“.

**Przykład.** Rozpornica trapezowa poczwórna (fig. 374). Jeżeli siły poziome rozpornic, działające na przyczółek, nazwiemy  $H$ , oraz  $H'$ , to równanie momentu zginającego (por. równanie 1a), przedstawi się następująco:

$$M = M_0 - Hy - H'y' \dots \dots \dots (17)$$

przyczem  $y$  i  $y'$  oznaczają wysokości przekroju jak poprzednio.

Wychodząc, jak poprzednio, z równania (10a):  $\frac{\partial L}{\partial H} = 0$ , oraz  $\frac{\partial L}{\partial H'} = 0$ ,

czyli: 
$$\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial H} dx = 0, \quad \text{oraz} \quad \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial H'} dx = 0,$$

otrzymuje się po scałkowaniu i rozwiązaniu względem  $H$  i  $H'$ , układ równań:

a) gdy ciężar stoi w polu pierwszym lub piątym:

$$H_1 = \frac{\xi(30 - 11\xi^2)}{38} \cdot \frac{l}{h}, \quad H_1' = \frac{12\xi(\xi^2 - 1)}{38} \cdot \frac{l}{h};$$

b) gdy ciężar stoi w polu drugim lub czwartym:

$$H_2 = \frac{l}{38h} (19 - 3\xi - 33\xi^2 + 17\xi^3), \quad H_2' = \frac{3l}{19h} \left( 4\xi + 6\xi^2 - \frac{11}{3}\xi^3 \right);$$

c) gdy ciężar stoi w polu środkowym:

$$H_3 = \frac{3l}{19h} (3\xi^2 - 3\xi), \quad H_3' = \frac{3l}{19h} \left( \frac{19}{3} + 5\xi - 5\xi^2 \right).$$

Linje wpływowe rozporów poziomych można wykreślić wprost z powyższych wzorów, zaś do wykreślenia linii wpływowych momentów trzeba użyć równania zasadniczego (17), odejmując wykreślenie rzędne krzywych  $Hy$  i  $H'y'$  od rzędnych linii wpływowej dla momentów belki wolno podpartej o rozpiętości  $5l$ . To samo dotyczy linii wpływowych sił poprzecznych i oddziaływań skrajnych, gdzie odejmuje się od trójkąta o wysokości równej  $l$  na podporze skrajnej i podstawie równej  $5l$ , powierzchnie wpływowe oddziaływań środkowych, przyczem dla oddziaływań

drugiego i piątego:  $D = H \frac{h}{l}$ , zaś trzeciego i czwartego:  $D' = H' \frac{h}{2l}$ .

Sposób wykreślenia linii wpływowych pokazano na fig. 375.

## D. Łuki.

Napisał

† inż. Stefan Pazirski, Lwów.

Łuk dwuprzegubowy (fig. 376 a) jest tworem hiperstatycznym pierwszego stopnia, gdyż przez usunięcie jednego pręta podporowego otrzymujemy utwór zasadniczy w postaci belki wolno podpartej (fig. b).

Wielkością hiperstatyczną jest parcie poziome  $X_a$ , którego wielkość obliczymy z równań (6) i (3), str. 1258:

$$\delta_a = \sum P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} + \delta_{at}$$

$$\delta_a = \int_0^S \frac{M_0 M_a}{EJ} ds + \int_0^S \frac{N_0 N_a}{EF} ds - X_a \left[ \int_0^S \frac{M_a^2}{EJ} ds + \int_0^S \frac{N_a^2}{EF} ds \right] + \int_0^S \omega t N_a ds.$$

Dla sztywnych podpór, z uwagi na  $dx = ds \cos \varphi$ , i z pominięciem wpływu  $N_0$ :

$$X_a = \frac{\int_0^S \frac{M_0 y}{J} ds + E \omega t l}{\int_0^S \frac{y^2 ds}{J} + \frac{l}{F_s}} \dots \dots \dots (1)$$

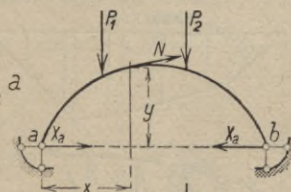
gdzie  $F_s$  oznacza średnią powierzchnię pionowego przekroju, zaś  $S$  długość osi łuku, lub:

$$X_a = \frac{\sum_1^n M_0 y \frac{s}{J} + E\omega t l}{\sum_1^n y^2 \frac{s}{J} + \frac{l}{F_s}} \dots \dots \dots (2)$$

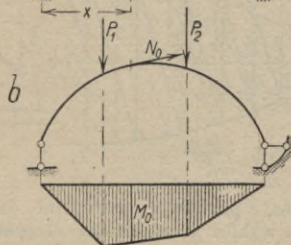
Dla łuku ze ściągnem, łączącym przegibnie oba węzłowania a posiadającym przekrój stały  $F_s$  i moduł sprężystości  $E_s$ , należy mianownik równania (1) i (2) powiększyć o wyraz  $(El):(E_s F_s)$ ; wtedy  $X_a$  jest napięciem ściąga,  $t$  różnicą temperatury łuku i ściąga.

Celem określenia sum należy łuk podzielić na możliwie małe części  $s$  tak, aby można je uważać za odcinki prostej. Momenty bezwładności przekroju  $J$

Ustrój statycznie niewyznaczalny:  
 $M = M_0 - X_a y.$



Utwór zasadniczy:  
 $X_a = 0.$



Stan  $X_a = -1,$   
 $M_a = 1 \cdot y, N_a = 1 \cdot \cos \varphi.$

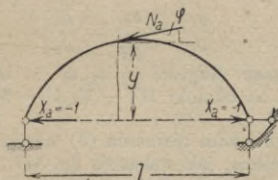


Fig. 376.

na długości odcinków można przyjąć za stałe. Dobierając długości tak, aby

$$\frac{s}{J} = \frac{1}{K} = \text{const},$$

otrzymamy:

$$X_a = \frac{\sum_1^n M_0 y + K E \omega t l}{\sum_1^n y^2 + \frac{K l}{F_s}} \dots \dots \dots (3)$$

Postępowanie przy obliczeniu  $X_a$  jest następujące:

Oś łuku (fig. 377) dzielimy na pewną ilość równych części; punkty podziału przenosimy na rozwiniętą oś łuku  $OO$  (fig. c), a na pionowych

przechodzących przez nie odcinamy po obu stronach osi  $O - O$  odpowiednie momenty bezwładności przekroju, przez co otrzymujemy dwie symetryczne krzywe bezwładności  $J - J$ .

Pierwszą długość odcinka łuku  $OA$  wybieramy dowolnie; pionowa w  $A$  przecina krzywe  $J - J$  w punktach  $a$  i  $b$ ; z punktu  $b$  kreślimy  $bc$  równo-

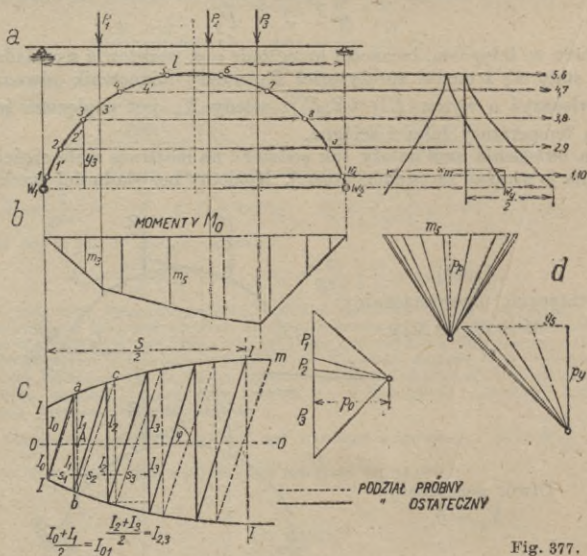


Fig. 377.

ległą do  $Ja$ , z punktu  $c$  pionową itd., jak wskazuje kreskowana linja łamana. Ten wykres przez zmianę długości pierwszego odcinka  $OA$  trzeba powtarzać, póki punkt  $m$  nie wpadnie w punkt  $J$ . Wówczas otrzymamy:

$$\frac{s_1}{J_1} = \frac{s_2}{J_2} = \frac{s_3}{J_3} = \dots = 2 \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{K} \dots \dots \dots (4)$$

Przenosząc długości  $s_1, s_2, s_3 \dots$  na oś łuku (fig. *a*), otrzymujemy łuk podzielony na odcinki  $W_1 - 1', 1' - 2' \dots$  ze środkami ciężkości w punktach 1, 2, 3...

Obliczenie sum równania (3) następuje albo według podanej tabliczki albo wykreślnie, jak wskazuje fig. 377.

Tabela do obliczenia sum równania (1).

Punkt	$y$ $m$	$y^2$ $m^2$	$M_0$ $t \cdot m$	$M_c y$ $t \cdot m^2$
1	...	...	...	...
2	...	...	...	...
...	...	...	...	...
$n$	...	...	...	...
		$\sum_1^n y^2$		$\sum_1^n M_0 y$



Z fig. d czytamy:

$$\sum_1^n M_0 y = p_0 p_p w_m, \quad \sum_1^n y^2 = p_y w_y.$$

Moment w dowolnym punkcie osi łuku:

$$M = M_0 - X_a y,$$

zaś siła normalna (fig. 378):

$$N = X_a \cos \varphi + V \sin \varphi \dots (5)$$

W łukach płaskich w przybliżeniu  $N = X_a$ .

a) Łuk dwuprzegubowy pod działaniem ciężaru skupionego ruchomego  $P$ .

W tym wypadku dla ustroju zasadniczego (fig. 379 a):

$$\text{dla } x < u \quad M_0 = P \frac{l-u}{l} x, \quad \text{dla } x > u \quad M_0 = \frac{P(l-x)}{l} u.$$

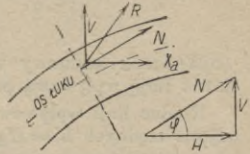


Fig. 378.

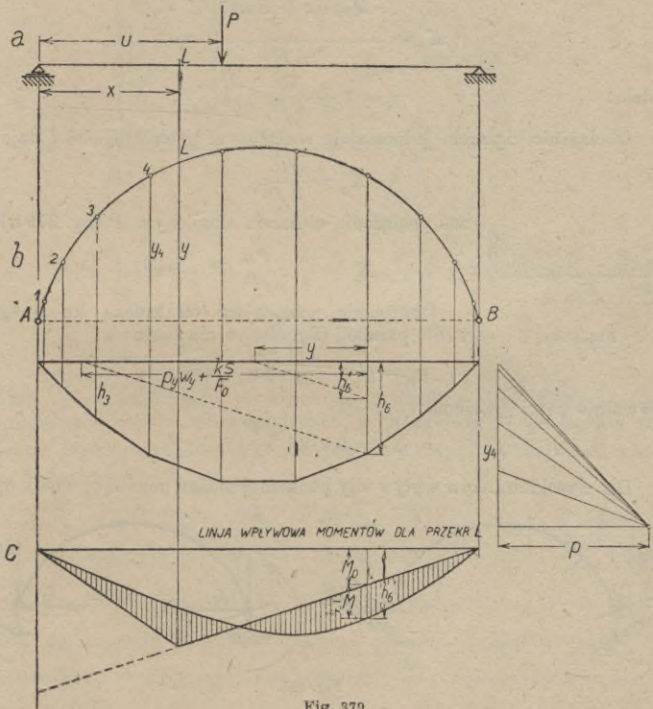


Fig. 379.

Wstawiając wyrażenie na  $M_0$  w iloczyn  $\sum_1^n M_0 y$ , można  $P$  umieścić przed znakiem sumy i wówczas suma wyraża moment w punkcie  $L$ , wywołany obciążeniem belki siłami  $y$ :

$$\sum_1^n M_0 y = P M_{0y} \dots \dots \dots (6)$$

tak, że parcie poziome  $X_a = \frac{P M_{0y}}{p_y w_y + \frac{Kl}{F_s}}$ .

Wielobok sznurowy wykreślony dla obciążenia siłami  $y$  (fig. b) przedstawia linię wpływową parcia poziomego ( $M_{0y} = p h$ ).

Rzędne linii wpływowej momentu  $M$  dla przekroju  $L$  otrzymamy przez odjęcie rzędnych  $h' = H y$  od rzędnych linii wpływowej  $M_0$  (fig. c).

b) Dla łuku parabolicznego o równaniu osi:

$$y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2) \dots \dots \dots (7)$$

i dla  $J_0 = J \cos \varphi$ , gdzie  $f$  oznacza strzałkę łuku zaś  $J_0$  moment bezwładności łuku w kluczu otrzymujemy:

$$X_a = \frac{\int_0^l M_0 y dx + E \omega t l J_0}{\frac{8}{15} f^2 l} \eta_1,$$

gdzie:  $\eta_1 = 1 + \frac{15}{8 f^2} \cdot \frac{J_0}{F_s}$ .

Obciążenie ciężarem jednostajnie rozłożonym  $g$  na długości  $l$  daje:

$$X_a = \frac{g l^2}{8 f} \eta_1,$$

zaś obciążenie ciężarem skupionym  $P$  (fig. 379 a):

$$X_a = \frac{5}{8} \cdot \frac{P u}{f l^3} (l^3 - 2 u^2 l + u^3) \eta_1.$$

Obciążenie wzrastające od klucza ku wezglowiu wedle paraboli (fig. 380) o równaniu:

$$g_u = g' - \frac{4 g'}{l^2} (l u - u^2)$$

wywołuje parcie poziome:

$$X_a = 0,0106 \frac{g' l^2}{f} \eta_1.$$

Dla wysokich łuków wpływ siły podłużnej można pominąć; wtedy  $\eta_1 = 1$ .

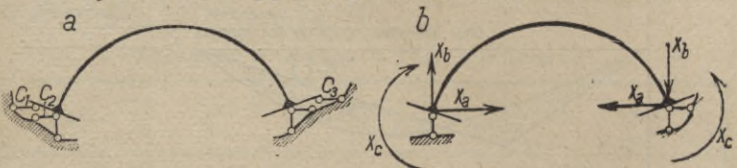


Fig. 381.

Łuk bezprzegubowy jest belką hiperstatyczną stopnia trzeciego, gdyż do obliczenia sześciu niewiadomych podporowych mamy trzy równania równowagi (trzy pręty nadleźbowe  $C_1, C_2, C_3$ ) (fig. 381 a).

Dla przejścia od utworu zasadniczego (fig. b) do utworu pierwotnego (fig. a), należy belkę poddać działaniu wielkości statycznie niewyznaczalnych  $X_a, X_b$  i  $X_c$ , których wielkość wyznaczmy w następujący sposób:

Linja łamana kreskowana na fig. 382 *a* przedstawia linję ciśnienia, wykreśloną dla odległości biegunowej  $H$  (fig. 382 *b*); wówczas moment  $M$  w dowolnym punkcie  $L$  osi łuku odniesionego do układu  $x, y$ , o początku  $O$ :

$$M = H \cdot \overline{KL} = H \left[ KR - y - e_0 - \frac{e}{l} x \right]$$

lub  $M = M_0 - X_a y - X_b x - X_c \dots \dots \dots (8)$

gdzie wielkości hiperstatyczne:

$$X_a = H, \quad X_b = X_a \frac{e}{l}, \quad X_c = X_a e_0.$$

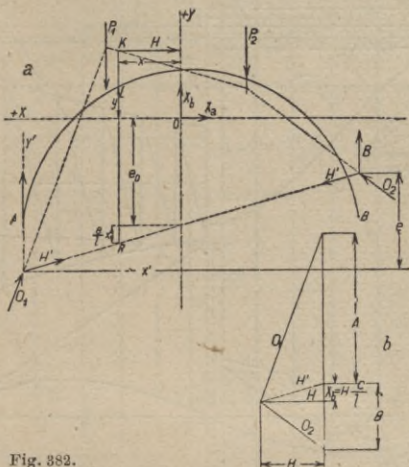


Fig. 382.

Obranie początku układu w dowolnym punkcie  $O$  jest równoznaczne z przeniesieniem układu sił działających w węzłowie  $A$  do punktu  $O$ .

Stosując równanie (6), str. 1258, otrzymamy z uwagi na sztywność podpór ( $L_a = L_b = L_c = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \delta_a &= \Sigma P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} + \delta_{at} \\ \delta_b &= \Sigma P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} + \delta_{bt} \\ \delta_c &= \Sigma P_m \delta_{cm} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} + \delta_{ct} \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

Celem uproszczenia rachunku obieramy położenie początku układu  $O$  w środku ciężkości elementarnych mas idealnych  $\frac{ds}{J}$ ; wówczas współczynniki:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} = 0, \quad \delta_{ac} = \delta_{ca} = 0, \quad \delta_{bc} = \delta_{cb} = 0,$$

$$\delta_{ac} = \int_0^s \frac{M_a M_c}{J} ds = \int_0^s y \frac{ds}{J} = 0, \quad \delta_{bc} = \int_0^s \frac{M_b M_c}{J} ds = \int_0^s \frac{x ds}{J} = 0$$

(równanie 3, str. 1258), gdyż całki powyższe oznaczają momenty statyczne ze względu na środek ciężkości łuku, zaś

$$\delta_{ab} = \int \frac{M_a M_b}{EJ} ds = \int \frac{xy ds}{J} = 0$$

oznacza moment zbroczenia ze względu na osie sprzężone  $x, y$ .

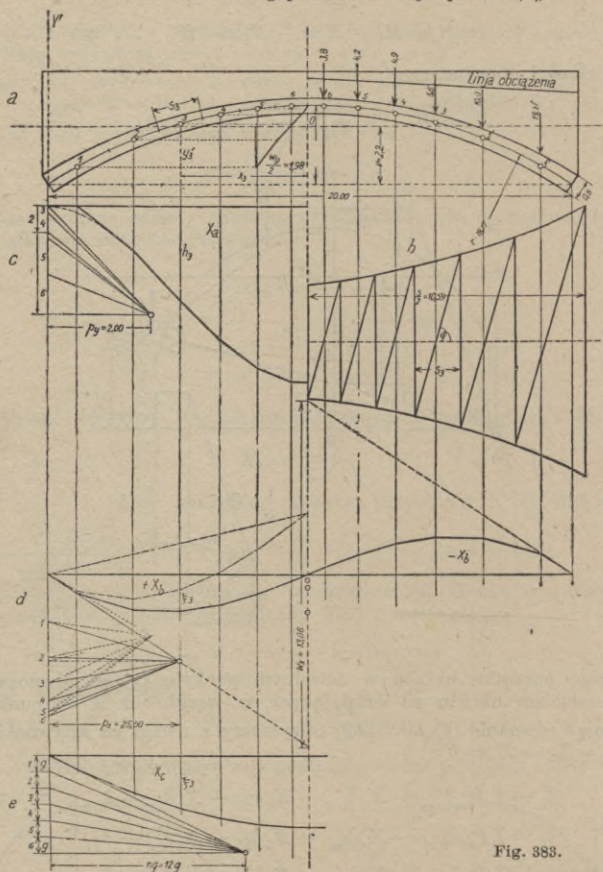


Fig. 383.

Z uwagi na  $\delta_{bt} = \delta_{ct} = 0$  przyjmując sztywne podpory i stosując podział łuku na takie elementy, aby  $\frac{s}{J} = \frac{1}{K} = \text{const}$  (równanie 4) otrzymamy:

$$X_a = \frac{\sum_1^n M_0 y + KE\varepsilon + l}{\sum_1^n y^2 + c}, \quad X_b = \frac{\sum_1^n M_0 x}{\sum_1^n x^2}, \quad X_c = \frac{\sum_1^n M_0}{n} \dots (10)$$

gdzie

$$c = \frac{Kl}{F_s}$$

**Przykład.** Dla łuku symetrycznego o rozpiętości  $l=20\text{ m}$  i strzałce  $f=3\text{ m}$  należy obliczyć wielkości  $X_a$ ,  $X_b$  i  $X_c$  dla obciążenia układem ciężarów stałych, oraz wykreślić ich linje wpływowe (fig. 383).

Podziału osi łuku dla warunku  $\frac{s}{J} = \frac{1}{K}$  dokonano na fig. b (por. str. 1272). Dane potrzebne do obliczenia łuku zestawiono w tabeli.

Punkt	$x$ m	$y'$ m	$y=y'-v$ m	$x^2$ $m^2$	$y^2$ $m^2$	$F=d$ $m^2$	$s$ m	$J$ $m^3$	$K = \frac{J}{s}$ $m^2$	$M_0$ t m	$M_0 y$ t $m^2$	$M_0 x$ t $m^2$
1	8,87	0,67	-1,54	78,677	2,371	0,78	2,68	0,039550	0,01476	55,14	-84,916	
2	6,72	1,70	-0,51	45,168	0,260	0,73	2,12	0,032418	0,01529	118,58	-60,476	
3	4,90	2,33	0,12	24,010	0,014	0,68	1,73	0,026203	0,01515	154,07	18,488	
4	3,36	2,68	0,47	11,290	0,221	0,65	1,49	0,022885	0,01536	173,94	81,752	
5	1,92	2,90	0,69	3,686	0,476	0,63	1,35	0,020837	0,01543	185,48	127,981	
6	0,66	2,98	0,77	0,436	0,593	0,61	1,22	0,018915	0,01554	190,26	146,500	
Sumy	13,26	0,00		163,257	3,935	4,08	10,59	—	0,09153	877,47	229,329	

Spółrzedne początku układu  $O$ :

$$u = \frac{l}{2} = 10\text{ m}, \quad v = \frac{1}{n} \sum y' = \frac{13,26}{6} = 2,21\text{ m}.$$

Średnia wartość stałej  $K = \frac{0,09153}{6} = 0,01525\text{ m}^2$ ,

$$F_s = \frac{4,08}{6} = 0,68\text{ m}^2,$$

$$c = \frac{0,01525 \cdot 21,18}{0,68} = 0,475.$$

Obciążenie stałe:

$$X_a = \frac{\frac{1}{n} \sum M_0 y}{\sum y^2 + c} = \frac{229,329 \cdot 2}{3,935 \cdot 2 + 0,475} = 54,9\text{ t}.$$

$$X_b = 0,$$

$$X_c = \frac{\frac{1}{n} \sum M_0}{12} = \frac{877,47 \cdot 2}{12} = 146,3\text{ t/m}.$$

Wpływ temperatury:

Dla  $t = 25^\circ$ ,  $E = 2,000,000\text{ t/m}^2$ ,  $\omega = 0,000010$ ,

$$X_{at} = \frac{K E \omega t l}{\sum y^2 + c} = \frac{0,01525 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 20}{2 \cdot 3,935 + 0,475} = 18,3\text{ t}.$$

Linje wpływowe. Jeżeli w równaniu (9) wstawimy za  $M_0$  wartość momentu dla obciążenia belki ciężarem skupionym  $P$  (por. równanie 6), to wówczas:

$$X_a = \frac{P \sum_1^n M_{0y}}{\sum_1^n y^2 + c}, \quad X_b = \frac{P \sum_1^n M_{0x}}{\sum_1^n x^2}, \quad X_c = \frac{P \sum_1^n M_{0y}}{n}.$$

Wielobok sznurowy, wykreślony dla obciążenia belki siłami pionowymi  $y$ , przedstawia wpływową parcia poziomego (fig. c), której rzędne odczytać należy w podziałce 1:  $(p_y w_y + c)$ ; wartość  $p_y w_y = \sum y^2$  otrzymamy z wieloboku sznurowego) wykreślonego dla wieloboku sił  $y$ , obróconego o  $90^\circ$  (fig. a).

W podobny sposób otrzymamy wpływową  $X_b$  jako wielobok sznurowy dla sił  $x$ , z warunkiem, że rzędne jej  $\xi$  muszą być zmniejszone w stosunku  $1 : p_x w_x$  (fig. d).

Obciążając belkę  $n$  siłami równymi  $g$ , otrzymamy dla odległości biegunowej  $ng$  wielobok sznurowy, którego rzędne  $\xi$  są równe momentowi  $X_c$  (fig. e).

W danym przykładzie z uwzględnieniem podziałki długości:

$$X_a = \frac{200 p_y h}{w_y p_y + c} = \frac{h}{0,02086}; \quad X_b = \frac{200 p_x \xi}{p_x w_x} = \frac{\xi}{0,0653}; \quad X_c = 200 \zeta.$$

Odczytane rzędne mają być wyrażone w metrach. Moment w dowolnym punkcie osi łuku obliczymy wedle równania (8), zaś siłę normalną wedle równania (5), gdzie  $V = V_0 + X_b$ .

Łuk paraboliczny. Równanie (7) osi łuku parabolicznego przybiera dla układu spólrzędnych o początku w  $O$  ( $u = \frac{l}{2}$ ,  $v = \frac{2}{3}f$ ) formę:

$$y = \frac{f}{l^2} (l^2 - 12x^2);$$

wówczas przyjmując  $J_0 = J \cos \varphi$ ,

$$X_a = \frac{45}{4 f^2 l} \left[ \int_0^l M_0 y dx + E \varepsilon J_0 t l \right] \eta,$$

$$X_b = \frac{12}{l^3} \int_0^l M_0 x dx = \frac{12}{l^3} F_0 \quad X_c = \int_0^l M_0 \frac{dx}{l} = \frac{F_0}{l},$$

gdzie  $F_0$  oznacza powierzchnię momentów  $M_0$ , zaś  $\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{45 J_0}{4 f^2 F_s}$ .

Dla łuków symetrycznych o kształcie linii ciśnienia podaje Strassner („Neuere Methoden zur Statik d. Rahmentragwerke“, II. Bd., D. Bogen u. d. Brückengewölbe) tablice do linii wpływowych parcia poziomego i momentów, tablice rzędnych osi łuku w zależności od stosunku obciążenia łuku w kluczu i węzłowi i od stosunku grubości łuku w kluczu i we węzłowi, wreszcie wzory i tablice do obliczenia grubości łuku w kluczu i we węzłowi.

## E. Obliczanie sklepień i murów przy pomocy linii ciśnienia.

Napisał

inż. dr. Maksymilian Thullie, profesor politechniki, Lwów.

Warunki równowagi sklepień, murów i filarów, są następujące:

1. Środek ciśnienia czyli punkt zaczepienia wypadkowej, działającej na szew, a więc punkt przecięcia się szwu z linią ciśnienia, powinien leżeć w przekroju. Jeżeli jednak sklepienie składa się z kłińców, połączonych zaprawą, to, ponieważ nie możemy liczyć na wytrzymałość zaprawy na rozciąganie, więc w sklepieniu nie dopuszczamy wcale ciągnięcia. Środek więc ciśnienia a zatem i linia ciśnienia powinny leżeć w rdzeniu a dla przekroju prostokątnego w średniej trzeciej części sklepienia. Warunek ten nie odnosi się jednakże do sklepień litych betonowych lub żelbetowych, u których możemy dopuścić ciągnięcie. Tam więc linia ciśnienia może wyjść nie tylko z rdzenia, ale i z przekroju.

2. Jeżeli sklepienie składa się z kłińców, to wypadkowa na szew nie powinna być odchyloną od prostopadłej na szew więcej, niż wynosi kąt tarcia, aby nie nastąpiło przesunięcie kłińców. Średnio możemy przyjąć  $f = 0,4$ ,  $\rho = 22^\circ$ . Dla świeżej zaprawy  $\rho$  może być mniejsze.

3. Wreszcie naprężenie nie powinno być większe, niż dopuszczalne. Jeżeli  $c$  oznacza odstęp środka ciśnienia od środka przekroju, więc odstęp linii ciśnienia od osi, to:

$$v_1 = \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{bc}{h}\right), \quad v_2 = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{bc}{h}\right);$$

a jeżeli  $b = 100 \text{ cm}$ , to:

$$v_1 = \frac{P}{100h} \left(1 + \frac{bc}{h}\right), \quad v_2 = \frac{P}{100h} \left(1 - \frac{bc}{h}\right).$$

Naprężenie w środku ciężkości przekroju:  $v_1 = \frac{P}{F}$ .

Wykreślić możemy wyznaczyć naprężenia w przekroju w nast. sposób: Zróbmy  $s s_1 = v_0$  (fig. 384 a). Połączmy  $O_1$  z  $J_1$  i  $J_2$  z punktami rdzennymi (przyczem  $A J_1 = J_1 J_2 = J_2 B = \frac{1}{3}h$ ), aż do przecięcia się z kierunkiem siły  $p$  i wykreślmy  $C_2 B_1$  i  $C_1 A_1 \parallel AB$ , to  $A A_1 = v_2$ ,  $B B_1 = v_1$ .

Jeżeli środek ciśnienia wychodzi z rdzenia, a ciągnięcie jest możliwe, to powyższa konstrukcja da nam  $v_2$  ujemne (fig. b). Jeżeli, ze względu na bardzo małą wytrzymałość zaprawy na rozciąganie, nie przyjmujemy wcale rozciągania, to  $v_1 = \frac{2P}{3be}$  (fig. c). Najkorzystniej byłoby dla sklepienia i dla

zeskładów murowanych wogóle, gdyby  $c = s_1$ , tj., gdyby linia ciśnienia wpadała na oś, to wtedy w każdym przekroju naprężenie rozdzielałoby się równo na przekrój, byłoby więc stosunkowo najmniejszym. Wedle przepisów mostowych M. R. P. można przy obliczaniu murów oporowych i przyczółków dopuścić wyjście linii ciśnienia z rdzenia przekroju do 0,2 szerokości, licząc od krawędzi przyczółka, o ile naprężenia nie przekraczają granicy dopuszczalności.

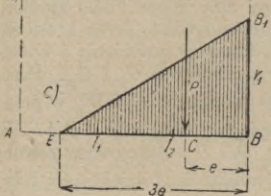
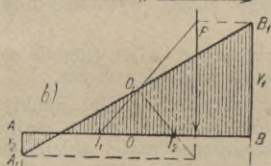
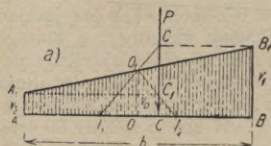


Fig. 384.

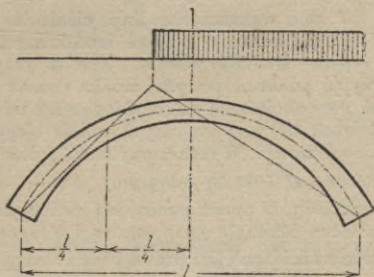


Fig. 385.

Linia ciśnienia. Dla mniejszych sklepień (mosty do 20 m) wyznacza się zazwyczaj naprężenia przy pomocy linii ciśnienia. Linia ciśnienia nazywamy linię, łączącą środki ciśnienia poszczególnych szwów. Położenie jej w sklepieniu można wyznaczyć analitycznie, wychodząc z równania różniczkowego linii ciśnienia:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \gamma \frac{q}{H} \dots \dots \dots (1)$$

(por. str. 1062, a także Thullie: „Statyka budowli“, wyd. IV., str. 419) lub też wykreślić. Sposób analityczny jest żmudny i dlatego rzadko go się używa. Wykreślić wyznaczyć można linię ciśnienia w przybliżeniu lub dokładnie.

1. Sposób przybliżony. Tok postępowania: Obciążamy łuk najniekorzystniej; obciążenie nieco poza połowę rozpiętości według konstrukcji na fig. 385 jest najniekorzystniejsze dla węzłowania i dla przekroju w  $\frac{1}{4} l$ . Dla klucza najniekorzystniejsze jest obciążenie  $\frac{1}{4}$  rozpiętości przy obu podporach. Największe parcie poziome wywołuje obciążenie zupełne sklepienia. We-

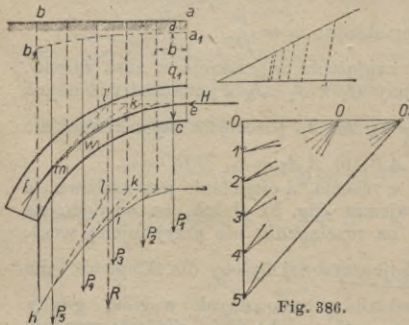


Fig. 386.

de powyższego trzeba wykreślić 3 linie ciśnienia, pierwszą dla obciążenia niesymetrycznego, dwie drugie dla symetrycznego. Jeżeli obciążamy sklepienie symetrycznie (fig. 386), to badanie ogranicza się do połowy sklepienia:  $ab$  jest linią obciążenia, zaś  $a_1 b_1$  sprowadzoną linią obciążenia. Sklepienie wraz z obciążeniem wyznaczamy wykreślić przy pomocy konstrukcji, podanej na fig. 386; dzielimy je na paski o równej szerokości, obliczamy ciężar pasków, który zaczepiamy w środku ciężkości pasków (zwykle w połowie szerokości) jako siły

pionowe  $P_1, P_2, P_3 \dots P_5$ . Ciężary  $P$  składamy w wielobok sił, a przyjmując dowolną odległość biegunową  $H$ , kreślimy wielobok sznurowy, z którego przez przedłużenie boków skrajnych dla połowy sklepienia znajdujemy położenie wypadkowej  $R$  sił  $P$ . Musimy teraz zmienić  $H$  tak, aby linia ciśnienia przechodziła przez  $e$  i  $f$ . W tym celu przedłuża się  $H$ , działające w  $e$ , aż do przecięcia się z  $R$  w  $l'$  i łączy  $f$  z  $l'$ . W końcu robimy 50  $\parallel f'l'$  i otrzymujemy biegun  $O$ , na podstawie którego można wykreślić linię ciśnienia  $ewf$ .

Jeżeli sklepienie jest niesymetrycznie obciążone (fig. 387), postępuje się jak poprzednio, dzieląc sklepienie na paski i wyznaczając ich ciężar.

W celu wyznaczenia linii ciśnienia należy przyjąć trzy jej punkty. W kluczu możemy przyjąć środek szwu  $C$ , w węzłowniach byłoby mylnie przyjęcie środków szwów. Trzeba przy nieobciążonej części sklepienia przyjąć punkt  $A$  powyżej środka (punkt rdenny albo nieco bliżej środka), zaś przy obciążonej części sklepienia punkt  $B$  poniżej środka. Teraz kreśli się wielobok sił, przyjmujemy dowolnie biegun  $O'$ , kreślimy promienie i wielobok sznurowy. Wyznaczamy teraz położenie wypadkowych  $G_l$  i  $G_p$ . Przedłużamy  $BC$  do  $S_1$  i łączymy  $A$  z  $S_1$ . Skrajne promienie  $W_l$  i  $W_p$  w przypuszczeniu, że prawa strona jest nieobciążona, będą równoległe do  $AS_1$  i  $S_1 B$ . To samo robimy z prawą stroną i otrzymujemy  $D_l$  i  $D_p$ . Jeżeli teraz równocześnie obciążoną jest prawa i lewa strona sklepienia, to w  $A$  działają  $D_l$  i  $W_l$  dające wypadkową  $K_l$  a w  $B$   $D_p$  i  $W_p$ , dające wypadkową  $K_p$ . Przecięcie się boków skrajnych równoległych do  $K_l$  i  $K_p$  wyznacza biegun  $O$ , a teraz można już łatwo wykreślić linię ciśnienia, przechodzącą przez  $A, C$  i  $B$ .

2. Sposób dokładny. Linia ciśnienia jest prawdziwa, gdy czyni zadość równaniom:

$$\int_A^B M dx = 0, \quad \int_A^B M x dx = 0, \quad \int_A^B M y dx = 0 \quad \dots \dots (2)$$



(por. autora „Statyka budowli“, IV. w., str. 436). W celu wykreślenia linji ciśnienia postępujemy w następujący sposób:

Dzielimy sklepienie, jak pierwej, na paski, wyznaczamy ich ciężary, kreślimy wielobok sił, przyjmujemy narazie dowolnie biegun (fig. 388) i wielobok sznurowy. W tym wieloboku kreślimy linję zamykającą  $L_1 K_1$ , by suma powierzchni, zawartych między zamykającą, a wielobokiem sznurowym powyżej i poniżej

zamykającej, była zerem, gdyż w tym przypadku będzie  $\int_A^B M dx = 0$ .

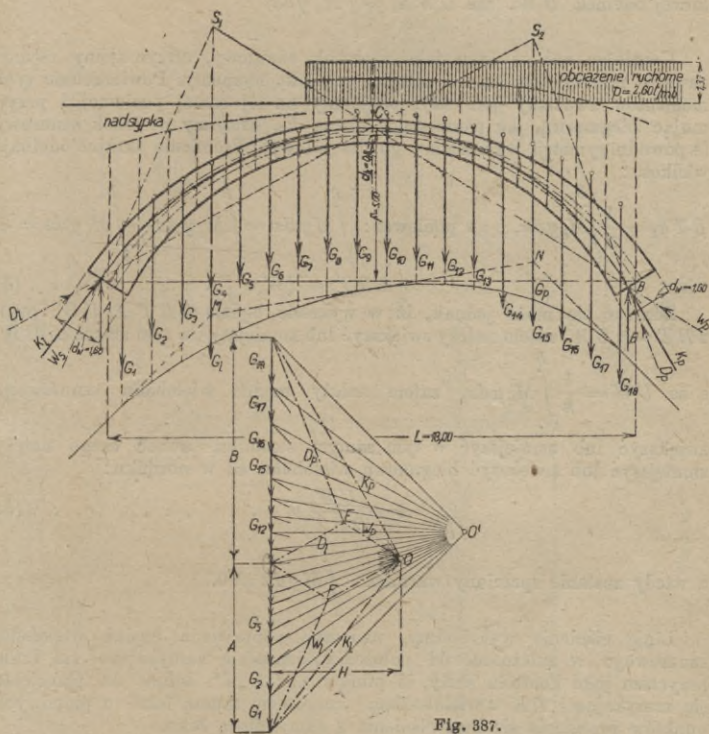


Fig. 387.

Teraz sprawdzamy, czy moment statyczny powierzchni powyżej i poniżej zamykającej ze względu na prostą  $EF$  jest zerem. Gdy nie zachodzi ten wypadek, natenczas należy skrócić zamykającą około punktu środkowego

o wielkość  $L_2 L_3 = \frac{6S}{l^2}$ , przyczem:  $L_2 L_3 =$  długość, o jaką należy przesunąć punkt  $L_2$ ,  $S =$  moment statyczny powierzchni poniżej i powyżej zamykającej ze względu na prostą  $EE$ ,  $l =$  rozpiętość.

Po wykonaniu tego przesunięcia będzie spełnione równanie:  $\int_A^B M x dx = 0$ , przyczem poprzednio uzyskany warunek nie zostanie naruszony.

Teraz oś łuku uważamy jako wielobok sznurowy i kreślimy dla niego zamykającą, jak poprzednio. Rzędne wieloboku sznurowego, liczone od zamykającej, wyobrażają momenty. Poszczególne powierzchnie tych momentów z uwzględnieniem ich znaków uważamy jako siły, kreśląc na dowolnej prostej poziomej wielobok sił z uwzględnieniem znaków i przyjmując dowolną odległość biegunową  $h_1$ . Potem kreślimy promienie, a z punktów osi ponad środkami ciężkości trapezów kreślimy poziome i wykreślamy wielobok sznurowy  $UNW$ . Promienie skrajne odcinają na prostej równoległej do wypad-

kowej odcinek  $UW$ , zaś  $UW h_1 = \int_A^B M_a y dx$ .

Uważając zaś oś łuku jako wielobok sznurowy, otrzymujemy rzędne, zawarte między osią łuku a zamykającą jako momenty. Powierzchnie tych momentów uważamy jako siły, odcinamy na tej samej poziomej i przyjmując biegunową, jak poprzednio, równą  $h_1$ , kreślimy wielobok sznurowy (z powodu symetrii wykreślamy go dla połowy). Promienie skrajne odcinają wielkość:

$$RT h_1 = \frac{1}{2} \int_A^B M_b y dx, \quad \text{a ponieważ: } \int_A^B M y dx = \int_A^B M_a y dx - \int_A^B M_b y dx = 0,$$

więc:  $2RT = UW \dots \dots \dots (3)$

Zdarzyć się może jednak, iż w wykresie będzie  $2RT \geq UW$ , czyli  $2RT = \alpha UW$ , zatem należy zwiększyć lub zmniejszyć w tym stosunku  $UW$ ,

a że  $UW = \frac{1}{h} \int_A^B M_a y dx$ , zatem należy rzędne wieloboku sznurowego

zwiększyć lub zmniejszyć w tym samym stosunku, wobec czego należy zmniejszyć lub zwiększyć biegunową wieloboku sił w stosunku:

$$b = \frac{UW}{2RT} b_1 \dots \dots \dots (4)$$

a wtedy zostanie spełniony warunek:  $\int_A^B M y dx = 0$ .

Linję ciśnienia wykreślamy, nanosząc poprawione rzędne wieloboku sznurowego w zależności od położenia względem zamykającej na łuku, przyczem jako kontrola służy, iż punkty „ $g^u$ ” i „ $d^u$ ”, leżące na przecięciu się zamykającej  $LK$  z wielobokiem sznurowym muszą leżeć u pionowych punktów przecięcia się linii ciśnienia z zamykającą łuku.

Wykres naprężeń w sklepieniu kreślimy w znany sposób, przyczem należy z końca odpowiedniej siły  $G$  wykreślić równoległą do szwu, następnie zaś z bieguna prostopadłą do kierunku szwu, odległość tak otrzymanego punktu od bieguna, mierzona w kierunku prostopadłym do szwu, da wielkość siły normalnej.

**Przykład.** Wyznaczyć linję ciśnienia w sklepieniu kamiennem sposobem przybliżonym i dokładnym.

Dane:  $l = 18,00 \text{ m}$ ,  $f = 5,00 \text{ m}$ , grubość sklepienia w kluczu  $d_k = 0,80 \text{ m}$ , grubość sklepienia w węzłowie  $d_w = 1,60 \text{ m}$ , grubość żwirówki w kluczu  $z = 0,50 \text{ m}$ , obciążenie ruchome  $p = 2,60 \text{ t/m b.}$ , ciężar żwirówki  $\gamma_1 = 1,90 \text{ t/m}^3$ , ciężar kamienia ciosowego  $\gamma = 2,40 \text{ t/m}^3$ .

I. Sposób przybliżony (fig. 387). Obciążenie ruchome  $p = 2,60 \text{ t/m b.}$  zamieniamy na warstwę o ciężarze gatunkowym nadsypki żwirowej o wysokości  $h = \frac{p}{\gamma_1} = \frac{2,60}{1,90} = 1,37 \text{ m}$ . Obciążenie zaś, wywołane nadsypką żwirową i ciężarem ruchomym, zamieniamy na takżeż

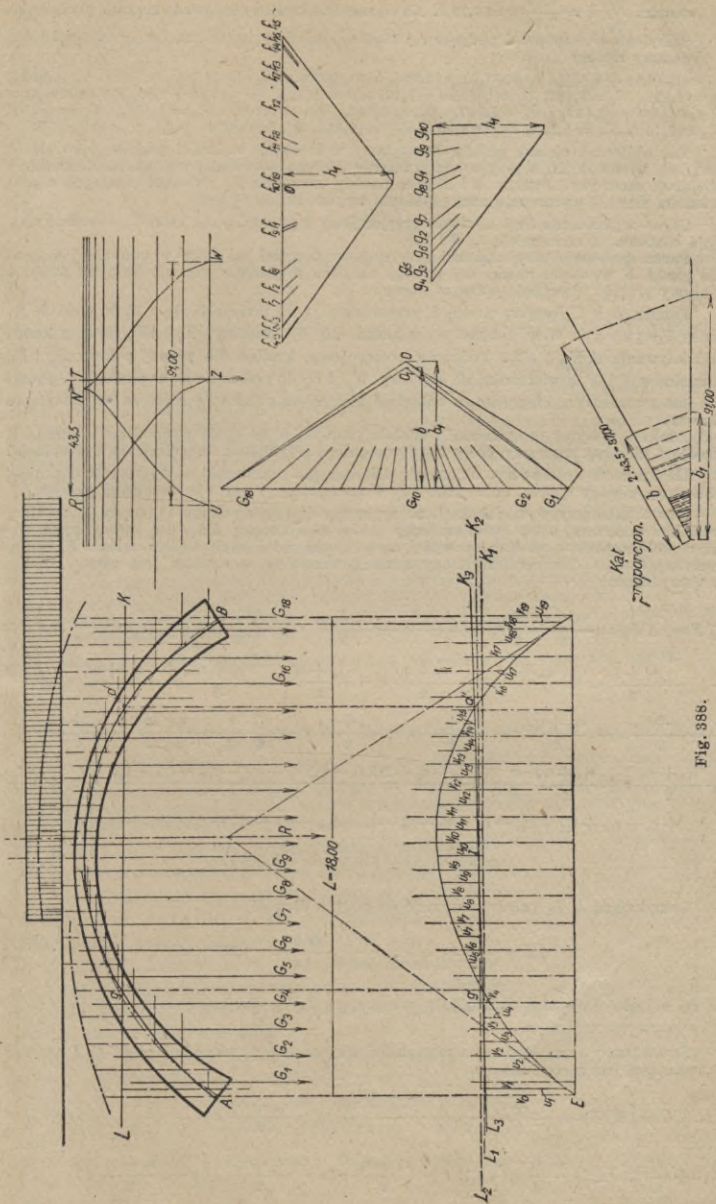


Fig. 386.

same obciążenie, murem z kamienia ciosowego, zmniejszając warstwę nadsypki żwirowej w stosunku  $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} h = \frac{1,90}{2,40} h = 0,79 h$ . Na tej zasadzie kreślimy sprowadzoną linię obciążenia.

Sklepienie o rozpiętości podporowej 18,00 m, dzielimy na 18 pasków, szerokości 1,0 m i obliczamy ciężary pasków:

$G_1 = \frac{1}{2}(6,50 + 4,30) \times 2,40 \times 1,00 = 12,96 t$ , analogicznie:  $G_2 = 9,14 t$ ,  $G_3 = 7,08 t$ ,  $G_4 = 5,52 t$ ,  $G_5 = 4,82 t$ ,  $G_6 = 3,48 t$ ,  $G_7 = \frac{1}{2}(1,30 + 1,12) \times 2,40 \times 0,70 + \frac{1}{2}(2,30 + 2,20) \times 2,40 \times 0,30 = 3,61 t$ ,  $G_8 = 5,16 t$ ,  $G_9 = 5,04 t$ ,  $G_{10} = 5,04 t$ ,  $G_{11} = 5,16 t$ ,  $G_{12} = 5,58 t$ ,  $G_{13} = 6,21 t$ ,  $G_{14} = 7,10 t$ ,  $G_{15} = 8,32 t$ ,  $G_{16} = 9,90 t$ ,  $G_{17} = 12,15 t$ ,  $G_{18} = 16,07 t$ .

Tak obliczone ciężary pasków zaczepiamy w środkach ciężkości pasków jako siły  $G$ , kreślimy wielobok sił, a przyjmując położenie bieguna  $O$  w punkcie  $O'$ , kreślimy wielobok sznurowy. Punkty  $M$  i  $N$  jako punkty przecięcia się promieni skrajnych z promieniem przez  $C$  wyznaczają nam położenie wypadkowych  $G_I$  i  $G_p$ .

Celem wykreślenia linii ciśnienia przyjmujemy 3 punkty, przez które przechodzić musi linia ciśnienia, a mianowicie  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

Punkt  $A$  w części nieobciążonej przyjmujemy powyżej osi łuku w punkcie jędrnym, zaś punkt  $B$  w części obciążonej poniżej osi łuku w punkcie jędrnym dolnym, punkt  $C$  możemy przyjąć w punkcie jędrnym górnym.

Punkty  $B$  i  $C$  łączymy prostą i prowadzimy ją do przecięcia się z  $G_I$  w punkcie  $S_1$ , który łączymy z  $A$ . W wieloboku sił z końca siły  $G_I$  kreślimy  $W_I \parallel AS_1$ , oraz z końca oddziaływania  $A W_p \parallel BS_1$ . Podobnie postępujemy, kreśląc dla prawej połowy  $D_p$  i  $D_l$ . Z punktów  $E$  i  $F$  w wieloboku sił kreślimy  $W_p$  i  $D_l$  do przecięcia się w punkcie  $O$ . Punkt ten jest prawdziwym biegunem, a odległość biegunowa parciem poziomem w sklepieniu  $H = 44,0 t$ .

Punkt  $O$  łączymy promieniami z wielobokiem sił, a następnie wychodząc z punktu  $A$  kreślimy wielobok sznurowy, który jest równocześnie przybliżoną linią ciśnienia w sklepieniu.

II. Sposób dokładny. Sklepienie dzielimy jak poprzednio na 18 pasków (fig. 388), obliczamy ciężary tychże, które jako siły  $G$  zaczepiamy w połowie szerokości pasków.

Siły  $G$  składamy w wielobok sił a przyjmując dowolnie położenie bieguna  $O$ , kreślimy wielobok sznurowy, a następnie szukamy takiej zamykającej  $L K_1$ , dla której suma powierzchni momentów poniżej i powyżej zamykającej położonych, będzie zerem. Kreślimy zamykającą  $L_2 K_2$  i sprawdzamy, czy suma powierzchni momentów jest zerem. Otrzymujemy zatem:

$$\begin{aligned} \Sigma F = \int_A^B M dx &= \frac{v_0 + v_1}{2} \frac{e}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} e + \frac{v_2 + v_3}{2} e + \frac{v_3 + v_4}{2} e + \frac{v_4}{2} 0,4 e - \frac{v_5}{2} 0,6 e - \\ &- \frac{v_5 + v_6}{2} e - \frac{v_6 + v_7}{2} e - \frac{v_7 + v_8}{2} e - \frac{v_8 + v_9}{2} e - \frac{v_9 + v_{10}}{2} e - \frac{v_{10} + v_{11}}{2} e - \\ &- \frac{v_{11} + v_{12}}{2} e - \frac{v_{12} + v_{13}}{2} e - \frac{v_{13} + v_{14}}{2} e - \frac{v_{14} + v_{15}}{2} e - \frac{v_{15}}{2} \frac{e}{2} + \frac{v_{16}}{2} \frac{e}{2} + \frac{v_{16} + v_{17}}{2} e + \\ &+ \frac{v_{17} + v_{18}}{2} e + \frac{v_{18} + v_{19}}{2} \frac{e}{2} = \left[ \frac{v_0 - v_1 + 2,8 v_4 - 3,2 v_5 + v_{15} - v_{16} - v_{18} + v_{19}}{4} + v_1 + v_2 + \right. \\ &\left. + v_3 + v_{16} + v_{17} + v_{18} - v_6 - v_7 - v_8 - v_9 - v_{10} - v_{11} - v_{12} - v_{13} - v_{14} - v_{15} \right] e = \\ &= \left[ \frac{9,8}{4} + 98 - 128,5 \right] e = -28,05 e. \end{aligned}$$

Zamykającą  $L_1 K_1$  należy przesunąć do góry o długość:

$$\Delta a = \frac{em}{l} = \frac{em}{en} = \frac{m}{n} = \frac{28,05}{18} = 1,557 \text{ mm.}$$

W tej odległości ponad  $L_1 K_1$  kreślimy zamykającą  $L_2 K_2$ , dla której  $\Sigma F = \int_A^B M dx = 0$ .

Sprawdzamy teraz, czy suma momentów statycznych powierzchni powyżej i poniżej zamykającej jest zerem, zatem:

$$\begin{aligned} \Sigma S = \int_A^B M x dx &= \frac{v_0 + v_1}{2} \frac{e}{2} \frac{e}{4} + \frac{v_1 + v_2}{2} e e + \frac{v_2 + v_3}{2} e 2 e + \frac{v_3 + v_4}{2} e 3 e + \\ &+ \frac{v_4}{2} 0,6 e 3,7 e - \frac{v_5}{2} 0,4 e 4,13 e - \frac{v_5 + v_6}{2} e 5 e - \frac{v_6 + v_7}{2} e 6 e - \frac{v_7 + v_8}{2} e 7 e - \\ &- \frac{v_8 + v_9}{2} e 8 e - \frac{v_9 + v_{10}}{2} e 9 e - \frac{v_{10} + v_{11}}{2} e 10 e - \frac{v_{11} + v_{12}}{2} e 11 e - \frac{v_{12} + v_{13}}{2} e 12 e - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{v_{12} + v_{13}}{2} e 13 e - \frac{v_{13} + v_{15}}{2} e 14 e - \frac{v_{15}}{2} 0,3 e 14,6 e + \frac{v_{16}}{2} 0,7 e 15,23 e + \frac{v_{16} + v_{17}}{2} e 16 e + \\
 & + \frac{v_{17} + v_{18}}{2} e 17 e + \frac{v_{18} + v_{19}}{2} e 17,66 e = \frac{e^2}{2} \left[ \frac{v_0 + 9 v_1}{8} + 3 v_2 + 5 v_3 + 5,22 v_4 - 6,652 v_5 - \right. \\
 & - 11 v_6 - 13 v_7 - 15 v_8 - 17 v_9 - 19 v_{10} - 21 v_{11} - 23 v_{12} - 25 v_{13} - 27 v_{14} - 18,38 v_{15} + \\
 & \left. + 26,661 v_{16} + 33 v_{17} + 34,66 v_{18} + 17,66 v_{19} \right] = \frac{e^2}{2} [2425,926 - 2242,222] = 91,852 e^2.
 \end{aligned}$$

Zatem należy zamykającą  $L_2 K_2$  skrócić około punktu  $J$  o wielkość:

$$L_2 L_3 = \frac{6 S}{l^2} = \frac{6 \times 91,852 e^2}{(18 e^2)} = 1,70 \text{ mm.}$$

Po wykonaniu powyższego skrótu warunek  $\int_A^B Mx dx = 0$  będzie spełniony bez naruszenia poprzednio spełnionego warunku  $\int_A^B M dx = 0$ . W podobny sposób postępujemy, kreśląc zamykającą  $LK$  dla osi łuku, którą uważamy za wielobok sznurowy.

Rzędne wieloboku sznurowego, liczone od zamykającej, wyobrażają momenty. Zatem w połowie szerokości pasków powierzchni momentów zaczepiamy siły równe powierzchni pasków i na dowolnej poziomej kreślimy wielobok sił, wychodząc z punktu  $O$  z uwzględnieniem znaków powierzchni momentów, a przyjmując dowolną biegunową  $h_1$ , łączymy biegun promieniami z wielobokiem sił. Odcinamy zatem  $Of_1 = \frac{1}{2} u_1$ ,  $f_1 f_2 = u_2$  itd., uwzględniając ich znaki. A że  $\Sigma F = 0$ , zatem punkt ostatni  $f_{19}$  wieloboku sił musi się zejść z punktem  $O$ .

Punkty zaczepienia sił „ $u$ ” rzutujemy na oś łuku, skąd kreślimy poziome, a na nich wielobok sznurowy  $UNW$ . Promienie skrajne wieloboku sznurowego odcinają na poziomej odcinek  $UW = 91 \text{ mm}$ . Podobnie składamy w wielobok sił rzędne, zawarte między zamykającą a osią łuku. Ponieważ łuk jest symetryczny, więc robimy to tylko dla połowy łuku. A przyjmując biegunową, jak poprzednio, łączymy biegun promieniami z wielobokiem sił, a następnie kreślimy wielobok sznurowy  $TZR$ . Promienie skrajne odcinają na poziomej odcinek  $TR = 43,5 \text{ m}$ . Mamy tu zatem  $2TR < UW$ , gdyż  $2 \times 43,5 < 91$  musimy zmienić więc rzędne wieloboku sznurowego oraz odległość biegunową  $b = 45t$  w stosunku  $\frac{91}{87}$ , zatem prawdziwa odległość biegunowa, a tem samym parcie poziome będzie:

$$H = b_1 = 45 \times \frac{91}{87} = 47,1 t.$$

Dokładną linię ciśnienia wykreślamy, mnożąc rzędne zawarte między wielobokiem sznurowym a zamykającą  $L_3 K_3$  przez  $a = \frac{91}{87} = 1,046$  i odcinając tak otrzymane rzędne od zamykającej  $LK$  w dół lub górę, zależnie od położenia ich w wieloboku sznurowym względem zamykającej  $L_3 K_3$ . Zmianę rzędnych można również wykonać przy pomocy kąta proporcjonalnego, jak to uwidoczniło na fig. 388.

**Filary.** Aby filar był w równowadze, muszą spełnić się te same warunki, co dla sklepień (por. str. 1278).

Dla równowagi ze względu na punkt  $A$  (fig. 389) musi być  $P \cdot b \leq C \cdot a$ , t. zn., wypadkowa  $R$  musi przechodzić przez podstawę  $AB$ .

Jeżeli  $P \cdot b = C \cdot a$ , tj., gdy zachodzi równość momentów, mamy do czynienia ze stanem równowagi niestałej (chwijnej), wtedy najmniejsze zwiększenie siły  $P$  może ciało wyrzucić.

Jeżeli wreszcie  $C \cdot a < P \cdot b$ , wtedy ciało wywraca się (wypadkowa  $R$  wyszła z przekroju), o ile ciągnięcie w podstawie jest niedopuszczalnym. W budowlach inżynierskich żądamy 1,5–2-krotnej

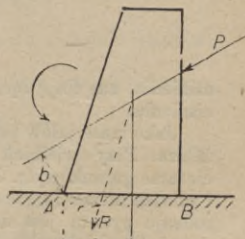


Fig. 389.

pewności; wtedy największa dopuszczalna siła ukośna:  $P = \frac{C \cdot a}{1,5 b}$

do  $P = \frac{C \cdot a}{2 b}$ .

Przy nowszych ustrojach żelbetowych (np. ramowych), gdzie filary są sztywnie połączone z belkami głównymi, słupy odkształcają się wraz z całym układem. Tutaj słupy pracują na zginanie przy jednoczesnym działaniu siły osiowej (mimośrodkowe obciążenie), a oblicza się je na podstawie zasad zeskładów hiperstatycznych.

Jeżeli na filar działają oprócz sił pionowych także siły ukośne (np. przy sklepieniach lub łukach), to obliczamy naprężenia nie tylko w podstawie, ale i w kilku przekrojach (szwach) poziomych. W tym celu dzieli się filar na kilka części (fig. 390) i dla każdej z nich znajduje się położenie odpowiedniej wypadkowej i największe naprężenie. Punkty przecięcia poszczególnych wypadkowych z odpowiednimi przekrojami nazywamy środkami

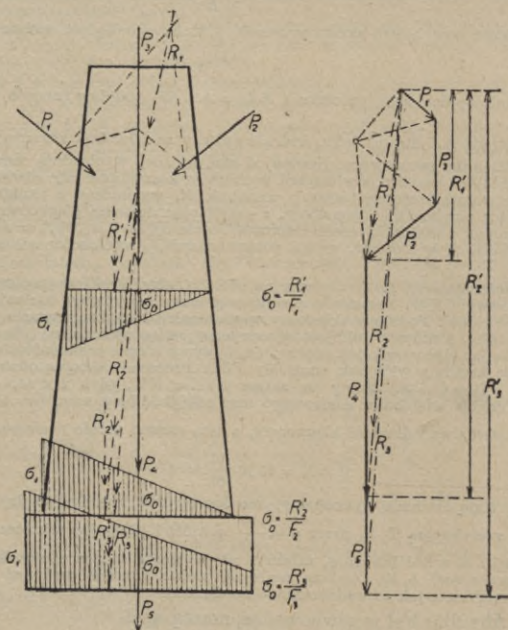


Fig. 390.

ciśnienia, zaś linję łączącą środki ciśnienia poszczególnych przekrojów linją ciśnienia.

Jako materiałów przy budowie filarów używamy kamienia, betonu, żelbetu, żelaza. Przy wielkich siłach poziomych jest wskazany materiał o wielkim ciężarze gatunkowym. Jeżeli filar stoi w wodzie, to wypór odgrywa ważną rolę i zmusza nieraz do rozszerzenia podstawy. Wielkość wyporu w zależności od rodzaju gruntu jest najczęściej nieznaną. Przyjmujemy go na podstawie doświadczeń laboratoryjnych lub spostrzeżeń w praktyce. Naprężenia dopuszczalne nie powinny być przekroczone, a w tym celu wypadkowa sił zewnętrznych nie powinna bardzo zbliżyć się do krawędzi filaru. Odległość między punktem zaczepienia wypadkowej, a krawędzią powinna być nie mniejsza jak  $\frac{1}{5} - \frac{1}{4}$  szerokości szwu.

Przykład. Należy zbadać filar mostowy (fig. 390), na który działają obustronnie sklepienia, t. j. na 1 m szerokości siły  $P_1 = 15 t$  i  $P_2 = 20 t$  pod kątem  $45^\circ$ . Ciężar właściwy  $2,2 t/m^3$ .

Składamy ciężary  $P_1, P_2$  i  $P_3$ , przy czym  $P_3 = 3 \cdot 1,5 \cdot 1,2 \cdot 2 = 9,9 t$ , zapomocą wieloboku sznurowego i otrzymujemy wypadkową  $R_1$ . Obliczamy teraz  $P_4 \cdot 1/2 = (1,0 + 2,5) \cdot 1,5 \cdot 2,2 = 22 t$  i otrzymujemy wypadkową  $R_2$ . Wreszcie wyznaczamy  $P_5 = 1,25 \cdot 3 \cdot 1,2 \cdot 2 = 8,25 t$ , składamy z  $R_2$  i otrzymujemy  $R_3$ . Badamy naprężenia w przekroju  $aa_1$  i  $bb_1$ .

W przekroju  $aa_1$  działa prostopadłe do przekroju  $R_2' = 56 t$ , składowa pionowa siły  $R_2$ .

Naprężenie w środku przekroju:  $\sigma_0 = \frac{56000}{100 \cdot 250} = 2,3 \text{ kg/cm}^2$

a największe naprężenie: najw.  $\sigma = 2,3 \left( 1 + \frac{6 \cdot 20}{1250} \right) = 3,4 \text{ kg/cm}^2$ .

Pionowa składowa siły  $R_3, R_3' = 64 t$ , wtedy ciśnienie na grunt w środku przekroju:

$\sigma_0 = \frac{64000}{100 \cdot 300} = 2,13 \text{ kg/cm}^2$ , zaś najw.  $\sigma = 2,13 \left( 1 + \frac{6 \cdot 25}{300} \right) = 3,2 \text{ kg/cm}^2$ .

Tesame wartości otrzymaliśmy z wykresu.

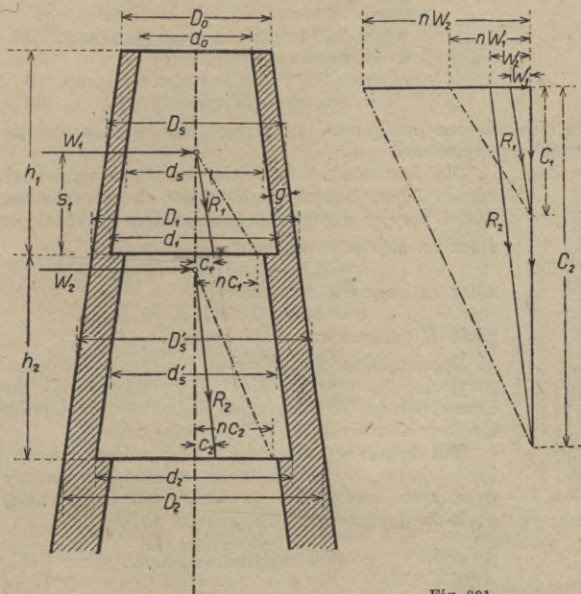


Fig. 391.

**Kominy fabryczne.** Komin fabryczny składa się z trzonu (słupca), podnóża (odziemia) i fundamentu (posady).

Przekrój trzonu i podnóża jest prawie zawsze kołowy lub ośmioboczny, fundament natomiast prawie zawsze kwadratowy.

Na komin działają: a) ciężar własny, b) parcie wiatru.

Ciężar własny (fig. 391): przy stałej grubości  $g$  dla piętra o wysokości  $h$ .

$$C = O\gamma = \left. \begin{aligned} &0,785 (D_s^2 - d_s^2) h \gamma \text{ (dla przekroju kołowego)} \\ &0,828 (D_s^2 - d_s^2) h \gamma \text{ ( " " ośmiobocznego)} \end{aligned} \right\} \cdot (1)$$

( $\gamma = 1650 \text{ kg/cm}^2$  dla muru z cegły zwykłej, 1900 z klinkierów i zendrówek, 2250 dla żelbetu).

Parcie wiatru:  $W_1 = D_s \cdot h_1 \cdot w \cdot \delta \dots \dots \dots (2)$

gdzie  $w$  parcie wiatru według przepisów M.R.P. przyjmuje się według podanego szkicu (fig. 392, — w Niemczech  $150 \text{ kg/m}^2$ ),  $\delta$  jest współczynnikiem, uwzględniającym wpływ ześlizgania wiatru i wynosi:

dla kominów okrągłych	$\delta = 0,67,$
" " ośmiobocznych	$\delta = 0,7,$
" " kwadratowych	$\delta = 1,00.$

Trzon powinien u podstawy wykazać najmniej podwójną pewność ( $n = 2$ ) przeciw wyrotowi. W żadnym przekroju nie może być naprężenie większe niż podano poniżej.

Na ściskanie: z cegły zwykłej na zaprawie wapiennej	7 $kg/cm^2,$
" " " " wapienno-cementowej	8,5 $kg/cm^2,$
" " " " cementowej	10 $kg/cm^2,$
" maszynowej na zapr. wapiennej	8,5 $kg/cm^2,$
" " " " cem.-wap.	11,0 $kg/cm^2,$
" " " " cementowej	14,0 $kg/cm^2,$
" wyborowej normalnej lub kominowej o wytrz. 200 $kg/cm^2$ na zapr. cem.-wap.	13,5 $kg/cm^2,$
" j. w. na zaprawie cementowej	16 $kg/cm^2,$
z klinkierów (wytrz. 300 $kg/cm^2$ ) na zapr. cem.-wap.	16 $kg/cm^2,$
" j. w. na zaprawie cementowej	20 $kg/cm^2.$

O ile ciśnienie ma przekraczać te granice, nie może ono dojść do  $1/10$  stwierdzonej wytrzymałości muru.

Dla kominów na zaprawie cementowo-wapiennej do wysokości 50 m, jakoteż dla kominów na zaprawie cementowej można przyjąć naprężenia dopuszczalne na rozciąganie:

muru na zaprawie wapienno-cementowej

$$k = 1,5 - 0,05 (H - 30) \text{ kg/cm}^2,$$

muru na zaprawie cementowej

$$k = 2,5 - 0,05 (H - 30) \text{ kg/cm}^2,$$

gdzie  $H$  oznacza wysokość kominu.

Dopuszczalne jest również obliczenie uproszczone przy przyjęciu, że zaprawa nie jest wytrzymała na rozciąganie i szew pęknie. To samo założenie należy przyjmować zawsze dla kominów wyższych niż powyżej podane.

Dla kominów żelbetowych przyjmować należy przy dokładniejszym obliczeniu także różnice temperatury gazów dymowych wewnątrz i powietrza ( $10^\circ C$ ) zewnątrz<sup>1)</sup>. Naprężenia dopuszczalne przyjmować należy:

Przy uwzględnieniu obciążeń, oraz ciepła:

Bez uwzględnienia ciepła:

Beton (na ściskanie) . . . . .	0,22 $K$	0,15 $K$
Żelazo (na rozciąganie) . . . . .	1200 $kg/cm^2$	900 $kg/cm^2$

W powyższym  $K$  jest wytrzymałością kostkową betonu.

Obliczenie kominu murowanego przeprowadzamy piętrami, zaczynając od piętra najwyższego.

I tak dla piętra najwyższego mamy:

$$\text{Ramię momentu dla parcia wiatru (fig. 391): } S_1 = \frac{h_1}{3} \cdot \frac{2 D_0 + D_1}{D_0 + D_1} \quad (3)$$

$$\text{moment parcia wiatru: } M_1^w = S_1 W_1 = \frac{1}{6} \delta w h_1^2 (2 D_0 + D_1) \quad (4)$$

$$\text{moment ciężaru własnego: } M_1^g = C_1 \frac{D_1}{2} = O_1 \gamma \cdot \frac{D_1}{2} \quad (5)$$

Z obu tych momentów można znaleźć punkt, w którym wypadkowa z ciężaru własnego i wiatru przecina podstawę:

<sup>1)</sup> Por. Döring: „Wind und Wärme bei der Berechnung hoher Schornsteine aus Eisenbeton“ i art. Mörscha (Beton und Eisen, 1925, str. 377).



$$M_1^w = C_1 c, \quad \text{a stąd: } c = \frac{M_1^w}{C_1} \dots \dots \dots (6)$$

wreszcie naprężenia krawędziowe obliczamy z wzorów:

$$\left. \begin{aligned} \text{najw. } \sigma_1^{\max} &= \sigma_0 \left( 1 + \frac{c}{r} \right) \\ \text{najmn. } \sigma_2^{\min} &= \sigma_0 \left( 1 - \frac{c}{r} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

gdzie  $r$  jest promieniem rdzennym i wynosi:

$$\begin{aligned} \text{dla przekroju kołowego: } & r = \frac{W}{F} = \frac{1}{8} \left( D_1 + \frac{d_1^2}{D_1} \right) \\ \text{" " ośmiobocznego: } & r = 0,133 \left( D_1 + \frac{d_1^2}{D_1} \right) \end{aligned} \dots \dots \dots (8)$$

Zupełnie tak samo postępujemy dla niższych pierścieni, przyczem należy pamiętać, że parcie wiatru, jakoteż ciężar własny uwzględnić musimy dla całej górnej części kominu ponad danym przekrojem.

Wypadkowa  $R$  z ciężaru własnego  $C$  i parcia wiatru  $W$  nie powinna wychodzić z rdzenia ( $c < r$ ).

W wypadku przeciwnym występują ciągnienia, które według przepisów M. R. P. nie powinny przekraczać wyżej podanych wartości.

Tak samo obliczamy wszystkie bębny i trzon, wreszcie badamy stałość całego kominu. Ponieważ w fundamencie nie możemy dopuścić żadnego ciągnienia, więc wypadkowa na fundament nie może wychodzić z rdzenia.

Obecnie przy coraz szerszym zastosowaniu żelbetu do budowy kominów fabrycznych dopuszczamy ciągnienia znacznie większe, które w całości muszą być przeniesione przez wkładki żelazne. Z powodu znacznej wytrzymałości żelaza na ciągnienie grubość kominów jest mała. Naprężenia sprawdzamy na podstawie wzorów podanych w żelbetnictwie dla obciążenia mimośrodkowego, dla których położenie osi obojętnej najłatwiej jest wyznaczyć wykreślnie.

**Przykład.** Niech będzie wysokość kominu  $H = 30 \text{ m}$ . Wymiary podane zresztą na fig. 393. Użyto cegły promieniówki na zaprawie półcementowej ( $\gamma = 1800$ ), podnoże z cegiel zwykłych ( $\gamma = 1650$ ), fundament z betonu ( $\gamma = 2200 \text{ kg/cm}^2$ ).

Parcie wiatru na trzon wynosi:

$$P_1 = 0,75 \cdot \frac{1,10 + 1,100}{2} \cdot 15 + \frac{130 + 100}{2} + \\ + 0,75 \cdot \frac{1,31 + 2,4}{2} \cdot 9 \cdot 100 = 1825 + 1117 = 2942 \text{ kg.}$$

Parcie wiatru na podnoże (przekrój ośmioboczny):

$$P_2 = 0,89 \cdot 100 \cdot 2,72 \cdot 600 = 1452 \text{ kg}^1).$$

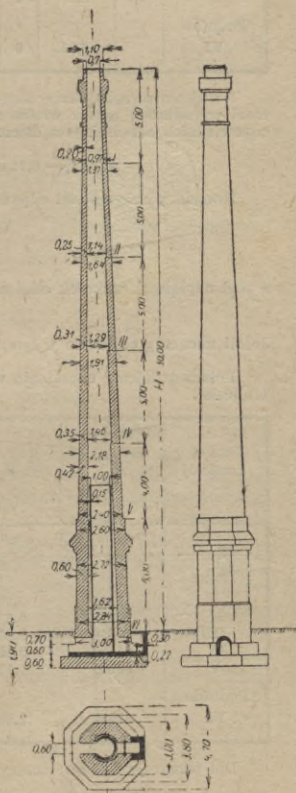


Fig. 393.

<sup>1)</sup> Obliczenie wykonane wedla dawniej obowiązujących przepisów. Obecnie należy przyjmować  $\delta$  nie 0,89, ale 0,7 (por. str. 1288).

Obliczać będziemy naprężenie w wysokości każdej odsadzki komina, więc w przekrojach I, II i III. W tym celu znaleźć należy ciężar każdego pierścienia i parcie wiatru na jego powierzchnię. Zestawiamy dane wyniki w następującej tabelce:

Przekrój poziomy	Grubość ścian	Powierzchnia średniego przekroju <sup>1)</sup>	Wysokość $h$	Objętość $O = F_s h$	Ciężar gątownkowy	Ciężar $C = O \cdot g$	Ciężar wszystkich pierścieni górnych $\Sigma C$	Powierzchnia podstawy $T$	Cisnienie jednostkowe $\sigma_0$
	cm	m <sup>2</sup>	m	m <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>	kg	kg	m <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>
Trzon									
I	20	0,66	5	3,30	1800	5940	5940	0,73	0,8
II	25	0,99	5	4,95	1800	8910	14850	1,09	1,4
III	31	1,43	5	7,15	1800	12870	27730	1,58	1,8
IV	36	1,91	5	9,55	1800	17190	44920	2,06	2,2
V	42	2,47	4	9,88	1800	17780	62700	2,61	2,4
Podnóże									
VI		4,31	6	25,86	1650	42670	105070	4,47	2,4

Następnie uwzględniamy naprężenia, powstające wskutek parcia wiatru na komin. Moment wypadkowy parcia wiatru na poszczególne części komina, mierzone od szczytu do odpowiednich odsadek, znajdziemy (4) w  $kgm$ :

$$M_n^w = \frac{1}{6} 0,75 w \cdot h_n^2 (2D_2 + D_1) = \frac{1}{8} w h_n^2 (2D_0 + D_1) \dots \dots \dots (9)$$

Moment wytrzymałości odpowiedniego przekroju (I, II, ...) wynosi:

$$W = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D} \dots \dots \dots (10)$$

a stąd naprężenia wskutek ciśnienia wiatru:  $\sigma_w = \pm \frac{M_n^w}{W}$ .

Jeżeli momenty obliczono w  $kgm$ , a  $W$  w  $m^3$ , to:  $\sigma_w = \pm \frac{M_n^w}{10000 W} \dots \dots \dots (11)$

Potem dodajemy naprężenia wskutek ciężaru własnego i wiatru. Otrzymujemy następują tabliczkę.

Przekrój	$M_n^w$	$W$	$\sigma_w$ (11)	Skrajne naprężenia	
				najw. $\sigma = \sigma_0 + \sigma_w$	najmn. $\sigma = \sigma_0 - \sigma_w$
	kg/m	m <sup>3</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>
Trzon					
I	1394	0,192	0,7	1,5	0,1
II	5760	0,338	1,7	3,1	- 0,3
III	13520	0,552	2,5	4,3	- 0,7
IV	21423	0,828	2,6	4,8	- 0,4
V	38380	1,130	3,4	5,8	- 1,0
Podnóże					
VI	67952	2,06	3,3	5,7	- 0,9

Dla przekroju IV. otrzymamy:

$$M_n^w = \frac{1}{2} 0,75 (1,11 + 1,91) 15 \cdot 115 \left( 5 + \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{2 \cdot 111 + 1,91}{1,11 + 1,91} \right) + \frac{1}{2} 0,75 \cdot 5 (1,91 + 2,18) \cdot 100 \frac{5}{3} = 21423.$$

<sup>1)</sup> Dla trzonu wedle wzoru  $(D_s^2 - d_s^2) \frac{\pi}{4}$ , dla podnóża wedle wzoru  $0,828 D^2 - d^2 \frac{\pi}{4}$ .

Dla przekroju V.:

$$M_5^w = \frac{1}{2} 0,75 (1,11 + 1,91) 15 \cdot 115 \left( 9 + \frac{15}{3} \frac{2,111 + 1,91}{1,11 + 1,91} \right) + \frac{1}{2} 0,75 \frac{9^2}{3} (2 \cdot 1,91 + 2 \cdot 80) 100 = 38380.$$

Dla podnóża mamy:

$$M_{II} = \frac{1}{2} 0,75 (1,11 + 1,91) 15 \cdot 115 \left( 15 + \frac{15}{3} \frac{2 \cdot 1,11 + 1,91}{1,11 + 1,91} \right) + \frac{1}{2} 0,75 \cdot 9 (6 + 3) (2 \cdot 1,91 + 2,80) \cdot 100 + 4,31 \cdot 6 \cdot 100 \frac{6}{3} = 42670 + 20110 + 5172 = 67952.$$

$$W = 0,101 D^3 - 0,091 \frac{d^3}{D} = 2,06 m^3.$$

Obliczenie fundamentu:

Ciężar słupa i podnóża	.....	= 105370 kg
Ciężar murów fundamentowych z cegły	.....	
$\left( 0,828 (3,00^2 \cdot 0,70 + 3,80^2 \cdot 0,60) - 1,50^2 \frac{\pi}{4} 1,08 \right) 1600$	.....	= 16768 kg
Ciężar ścianki $(1,3^2 - 1,0^2) \frac{\pi}{4} 8,0 \cdot 1600$	.....	= 6936 kg
Ciężar łąwy betonowej: $0,828 \cdot 4,7^2 \cdot 0,6 \cdot 2200$	.....	= 24144 kg
	Razem	153218 kg

Powierzchnia podstawy:  $0,828 \cdot 4,7^2 = 18,29 m^2$ .Naprężenie od ciężaru własnego:  $\frac{153218}{182900} = 0,85 kg/cm^2$ .

Moment wiatru względem podstawy fundamentu:

$$M_p^w = \frac{1}{2} 0,75 (1,11 + 1,91) 15 \cdot 115 \left( 16,9 + \frac{15}{3} \frac{2,111 + 1,91}{1,11 + 1,91} \right) + \frac{1}{2} 0,75 \cdot 9 (7,9 + 3) \cdot (2 \cdot 2,91 + 2,80) \cdot 100 + 4,31 \cdot 6 \cdot 100 \left( 1,9 + \frac{6}{3} \right) = 46390 + 24350 + 10090 = 80830 kgm.$$

Moment wytrzymałości podstawy:  $W = 0,0982 \cdot 4,7^2 = 10,19$ .Naprężenie wskutek wiatru:  $\frac{80830}{101900} = 0,8 kg/cm^2$ .Największe ciśnienie na grunt:  $\sigma = 0,85 + 0,8 = 1,65 kg/cm^2$ .Najmniejsze ciśnienie:  $0,85 - 0,8 = 0,05 kg/cm^2$ .

## F. Belki ciągłe o ścianie pełnej.

Są to belki proste, podparte na więcej, niż dwu łożyskach, z których tylko jedno jest stałe (por. str. 1132 i 1185). Jako utwory hiperstatyczne można je obliczać na zasadzie ogólnych równań sprężystości (por. str. 1258). Sposobu tego używa się czasem do wykreślenia linii wpływowych oddziaływań belki dwuprzęsłowej (por. str. 1263). Zwykle jednak wychodzimy z twierdzenia Mohra (por. str. 1124) i obliczamy belki ciągłe przy pomocy równań trzech momentów (sposób analityczny) lub też przy pomocy punktów stałych (sposób wykreślny). W tym ostatnim wypadku stosuje się najczęściej linie krzyżowe.

W przypadkach prostych, często w praktyce się zdarzających (ciężar jednostajnie rozłożony stały lub ruchomy, ciężary skupione w równych odstępach), można z korzyścią użyć tablic liczbowych. Punktem wyjścia do teoretycznych rozważań, a zarazem specjalnym i najprostszym przypadkiem belki ciągłej jest belka utwierdzona.

### Obliczenie analityczne.

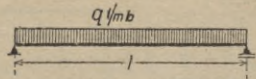
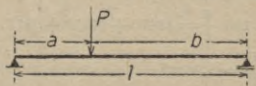
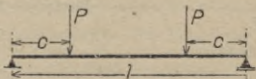
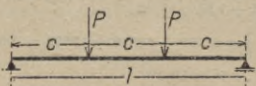
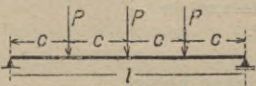
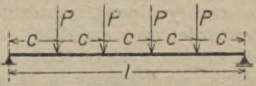
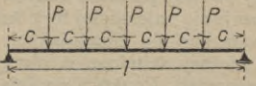
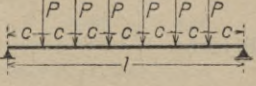
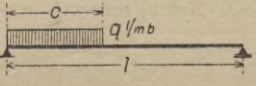
Napisał

dr. inż. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów.

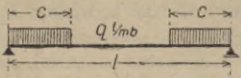
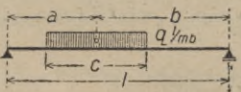



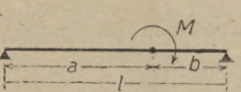
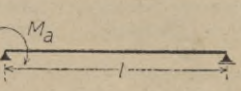
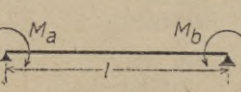
Wedle równania 79 (str. 1124, twierdzenie Mohra) mamy:

$$\tau = \frac{R_m}{EJ} \dots \dots \dots (1)$$

Tablica I.

1		$[A_0] = [B_0] = \frac{q l^3}{24}$
2		$[A_0] = P \cdot \frac{a b (l + b)}{6 l}$ $[B_0] = P \cdot \frac{a b (l + a)}{6 l}$
3	dla $a=b$	$[A_0] = [B_0] = \frac{P l^2}{16}$
4		$[A_0] = [B_0] = \frac{1}{2} P c (l - c)$
5		Dla $c = l/3$ $[A_0] = [B_0] = \frac{1}{9} P l^2$
6		Dla $c = l/4$ $[A_0] = [B_0] = \frac{5}{32} P l^2$
7		Dla $c = l/5$ $[A_0] = [B_0] = \frac{1}{5} P l^2$
8		Dla $c = l/6$ $[A_0] = [B_0] = \frac{35}{144} P l^2$
9		Dla $c = l/7$ $[A_0] = [B_0] = \frac{2}{7} P l^2$
10		$[A_0] = \frac{q c^2 (2l - c)^2}{24 l}$ $[B_0] = \frac{q c^2 (2l^2 - c^2)}{24 l}$

Tablica I.

11		$[A_0] = [B_0] = \frac{qc^2}{12} (3l - 2c)$
12		$[A_0] = \frac{qcb}{6l} \left[ a(l+b) - \left(\frac{1}{2}c\right)^2 \right]$ $[B_0] = \frac{qca}{6l} \left[ b(l+a) - \left(\frac{1}{2}c\right)^2 \right]$
13	<p>dla <math>a=b=l/2</math></p>	$[A_0] = [B_0] = \frac{qc}{48} (3l^2 - c^2)$
14		$[A_0] = \frac{qlc^2}{36} \left[ 2,0 - 1,5 \cdot \frac{c}{l} + 0,3 \left(\frac{c}{l}\right)^2 \right]$ $[B_0] = \frac{qlc^2}{36} \left[ 1,0 - 0,3 \left(\frac{c}{l}\right)^2 \right]$
15	<p>dla <math>c=l</math></p>	$[A_0] = \frac{ql^3}{45,0}$ $[B_0] = \frac{ql^3}{51,4}$
16		$[A_0] = [B_0] = \frac{ql^3}{38,4}$
17		$[A_0] = [B_0] = \frac{ql^3}{64}$
18		$[A_0] = -\frac{Ml}{6} \left[ 1 - 3 \left(\frac{b}{l}\right)^2 \right]$ $[B_0] = +\frac{Ml}{6} \left[ 1 - 3 \left(\frac{a}{l}\right)^2 \right]$
19		$[A_0] = M_a \cdot \frac{l}{3}$ $[B_0] = M_a \cdot \frac{l}{6}$
20		$[A_0] = \frac{1}{6} l (2M_a + M_b)$ $[B_0] = \frac{1}{6} l (2M_b + M_a)$

Czyli: kąt nachylenia stycznej do linii ugięcia na podporze belki jest proporcjonalny do reakcji, jaką otrzymamy na tejże podporze, uważając powierzchnię momentów jako obciążenie belki. Reakcje te oznaczamy będziemy  $R_m = [A]$  lub  $[B]$ , zależnie od podpory — lewej czy prawej — przyczem wartości  $[A_0]$  i  $[B_0]$  odnosić się będą do figury momentów belki wolno podpartej, statycznie wyznaczalnej. Dla zasadniczych wypadków obciążenia belki podajemy wartości  $[A_0]$  i  $[B_0]$  w tabelcy I.

1. Belka jednym końcem sztywnie utwierdzona (fig. 394). Na podstawie twierdzenia (1) otrzymujemy:

$$\tau_a = \frac{R_m^a}{EJ} = \frac{[A]}{EJ} = 0,$$

czyli

$$[A] = 0;$$

a ponieważ w tym wypadku na podstawie tabelcy I. pod 19:

$$[A] = [A_0] + M_a \frac{l}{3} = 0,$$

stąd moment podporowy:

$$M_a = -\frac{3[A_0]}{l}.$$

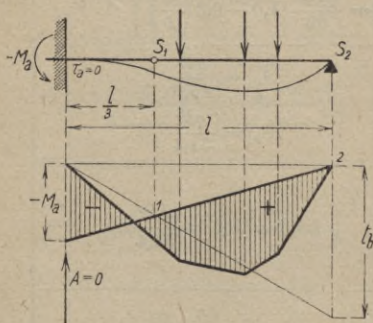


Fig. 394.

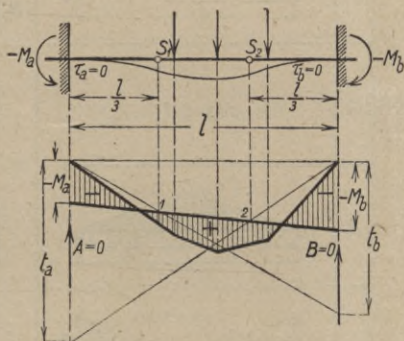


Fig. 395.

Moment ten da się obliczyć na podstawie wartości  $[A_0]$ , podanych w tabelcy I. (por. str. 1130).

2. Belka obustronnie sztywnie utwierdzona (fig. 395). Analogicznie do poprzedniego:

$$[A] = 0, \quad [B] = 0,$$

a ponieważ według tabelcy I. pod 20:

$$[A] = [A_0] + \frac{1}{6} l (2M_a + M_b) = 0$$

i

$$[B] = [B_0] + \frac{1}{6} l (2M_b + M_a) = 0,$$

więc szukane momenty podporowe:

$$M_a = -\frac{2(2[A_0] - [B_0])}{l}, \quad M_b = -\frac{2(2[B_0] - [A_0])}{l}.$$

W szczególnym wypadku, dla obciążenia symetrycznego, gdy  $[A_0] = [B_0] = \frac{1}{2} F_0$ , gdzie  $F_0$  oznacza powierzchnię momentów statycznie wyznaczalnych (jak dla belki wolno podpartej):

$$M_a = M_b = -\frac{F_0}{l}.$$

3. Belki ciągłe. a) Przekrój na całej długości belki stały. Dla środkowej podpory każdej pary sąsiednich przęseł (fig. 396)  $\tau_1 = -\tau_2$ , czyli

$$\tau_1 + \tau_2 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Biorąc pod uwagę twierdzenie (1) i podstawiając w równaniu powyższem:

$$\tau_1 = \frac{[B_1]}{EJ}, \quad \tau_2 = \frac{[A_2]}{EJ} \quad \dots \quad (3)$$

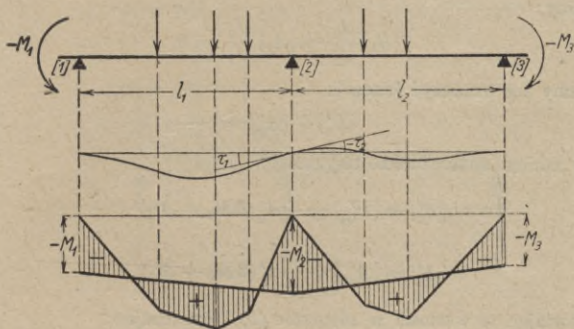


Fig. 396.

gdzie na podstawie tablicy I. pod 20:

$$[B_1] = [B_{01}] + \frac{1}{6} l_1 (2 M_2 + M_1)$$

i

$$[A_2] = [A_{02}] + \frac{1}{6} l_2 (2 M_2 + M_3),$$

otrzymamy znane ogólnie równanie trzech momentów w formie:

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + 6 [C_{02}] = 0 \quad \dots \quad (4)$$

gdzie  $[C_{02}] = [B_{01}] + [A_{02}]$  i dla obciążeń według tablicy I. da się obliczyć.

Ustawiając równanie (4) dla każdej pary sąsiednich przęseł otrzymamy tyle równań, ile jest niewiadomych momentów podporowych; z tych więc równań momenty te dadzą się obliczyć.

W razie, jeżeli koniec belki nie jest wolno podparty, ale sztywnie utwierdzony, należy po stronie utwierdzenia dodać przęsło nieobciążone, na końcu wolno podparte o rozpiętości  $l = 0$ , i wprowadzić je do rachunku przy pomocy równań (4).

Po wyznaczeniu momentów podporowych moment w dowolnym przekroju przęsła w odległości  $x$  od lewej podpory:

$$M_x = M_0 + M_a \frac{l-x}{l} + M_b \frac{x}{l},$$

a siła poprzeczna w tym przekroju:

$$T_x = T_0 + \frac{M_b - M_a}{l},$$

gdzie  $M_0$  i  $T_0$  odnoszą się do belki statycznie wyznaczalnej, a  $M_a$  i  $M_b$  oznaczają momenty podporowe na lewej i prawej podporze przęsła.

b) Przekrój wzdłuż każdej rozpiętości stały w każdym jednak przęśle inny. Niechaj dla danej pary sąsiednich przęseł (fig. 396) o rozpiętościach  $l_1$  i  $l_2$  moment bezwładności przekroju belki wynosi w pierwszym przęśle  $J_1$ , w drugim  $J_2$ .

Zamiast równań (3) otrzymamy:

$$\tau_1 = \frac{[B_1]}{EJ_1}, \quad \tau_2 = \frac{[A_2]}{EJ_2}.$$

Mnożąc z uwzględnieniem równania (2) dla uproszczenia rachunku powyższe wartości przez dowolnie obraną stałą wartość  $J_0$  (zwykle równą  $J_{\min}$  danego układu lub najczęściej się powtarzającej w tym układzie wartości  $J$ ), otrzymamy:

$$[B_1] \frac{J_0}{J_1} + [A_2] \frac{J_0}{J_2} = 0,$$

co możemy też oznaczyć inaczej:

$$[B'_1] + [A'_2] = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Przy takim znakowaniu otrzymamy:

$$[B'_1] = [B'_{01}] + \frac{1}{6} l'_1 (2M_2 + M_1)$$

$$[A'_2] = [A'_{02}] + \frac{1}{6} l'_2 (2M_2 + M_3),$$

a podstawiając te wartości w równanie (5) i oznaczając:

$$[B'_{01}] + [A'_{02}] = [C'_{02}],$$

dojdziemy do równania trzech momentów w formie:

$$M_1 l'_1 + 2M_2 (l'_1 + l'_2) + M_3 l'_2 + 6[C'_{02}] = 0,$$

gdzie każda z kreskowanych wartości uwzględnia czynnik  $\frac{J_0}{J_1}$  lub  $\frac{J_0}{J_2}$ , zależnie od rozpiętości, do której się odnosi, a więc:

$$\left. \begin{aligned} l'_1 &= l_1 \frac{J_0}{J_1}; & l'_2 &= l_2 \cdot \frac{J_0}{J_2}; \\ [B'_{01}] &= [B_{01}] \cdot \frac{J_0}{J_1}; & [A'_{02}] &= [A_{02}] \cdot \frac{J_0}{J_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Dalsze zastosowanie równania (6) jest analogiczne do tego, co powiedziano o równaniu (4).

Przykład. Belka ciągła dwuprzęsłowa (fig. 397).

Stosunek momentów bezwładności  $J_1 : J_2 = 4 : 5$ . Oba przęsła obciążone na całej swej długości ciężarem jednostajnym  $g = 200 \text{ kg/m}$ , ponadto lewe przęsło obciążone całkowicie ciężarem ciągłym jednostkowym  $p = 500 \text{ kg/m}$  i ciężarem skupionym  $P = 3000 \text{ kg}$  w odległości  $a = 3,2 \text{ m}$  od lewej podpory. Znaleźć momenty podporowe, moment w miejscu działania siły  $P$  i oddziaływania  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

Przyjmijmy  $J_0 = J_1$ , to  $l'_1 = l_1 = 8 \text{ m}$ ,  $l'_2 = l_2 \frac{J_1}{J_2} = 12 \cdot \frac{4}{5} = 9,6 \text{ m}$ .

Moment podporowy  $M_C$  z uwagi na  $M_A = 0$  i  $M_B = 0$  znajdziemy z równania:

$$2M_C (l'_1 + l'_2) = -6[B_{01}] - 6[A_{02}],$$

przyczem wedle tabl. 1., pozycji 1 i 2, jest:



$$[B_{01}] = \frac{1}{24} (g+p) l_1^3 + P \frac{a(l_1-a)(l_1+a)}{6l} = \frac{1}{24} \cdot (200+500) \cdot 8^3 + 3000 \frac{3,2 \cdot 4,8 \cdot 11,2}{6 \cdot 8} =$$

$$= \frac{700}{3} \cdot 64 + 10752 = 25652 \text{ kgm}^2.$$

$$[A_{02}] = \frac{1}{24} g l_2^3 \frac{J_0}{J_2} = \frac{1}{24} \cdot 200 \cdot 12^3 \cdot \frac{4}{5} = 100 \cdot 144 \cdot \frac{4}{5} = 11500 \text{ kgm}^2.$$

$$[B_{01}] + [A_{02}] = 37152 \text{ kgm}^2, \quad l_1' + l_2' = 8 + 9,6 = 17,6 \text{ m}.$$

$$M_C = -\frac{6 \cdot 37152}{2 \cdot 17,6} = -6320 \text{ kg/m} = -6,32 \text{ tm}.$$

Oddziaływanie lewej podpory:

$$A = A_0 + \frac{M_C}{l_1},$$

$$A_0 = \frac{1}{2} (g+p) l_1 + \frac{l_1-a}{l_1} P = \frac{1}{2} 0,7 \cdot 8 + \frac{4,8}{8} 3,0 = 2,8 + 1,8 = 4,6 \text{ t}.$$

$$M_C : l_1 = -6,32 : 8 = -0,79, \quad A = 4,60 - 0,79 = 3,81 \text{ t}.$$

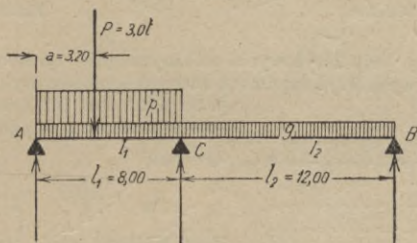


Fig. 397.

$$\text{Podobnie: } B = \frac{1}{2} g l_2 + \frac{M_C}{l_2} = \frac{0,2}{2} 8 - \frac{6,32}{12} = 0,8 - 0,527 = 0,273 \text{ t}.$$

Oddziaływanie środkowej podpory:

$$C = (g+p) l_1 + g l_2 + P - A - B = 0,7 \cdot 8 + 0,2 \cdot 12 + 3,0 - 3,81 - 0,273 =$$

$$= 5,6 + 2,4 + 3,0 - 4,083 = 6,917 \text{ t}.$$

Moment w miejscu działania siły  $P$  w odległości  $a$  od podpory  $A$ .

$$M_a = A \cdot a - \frac{a^2}{2} (g+p) = a \left[ A - \frac{a}{2} (g+p) \right] = a (3,81 - \frac{1}{2} 3,2 \cdot 0,7) =$$

$$= 3,2 (3,81 - 1,12) = 3,2 \cdot 2,69 = 8,6 \text{ tm}.$$

## Metoda wykreślna.

Napisał

† inż. Stefan Pazirski, Lwów.

Obliczanie wykreślnie belek ciągłych polega na wyznaczeniu punktów stałych i linii krzyżowych. W każdym przęśle belki mamy dwa punkty stałe i dwie linie krzyżowe; rzutując punkty stałe na górną część linii krzyżowych, otrzymujemy na tych ostatnich dwa punkty, przez które przechodzi prosta momentów podporowych, wywołanych obciążeniem danego przęśla.

Punkt stały danego przęśla jest to punkt, w którym moment = 0, gdy na jeden z końców przęśla działa moment dowolny, a zresztą przęsło jest nieobciążone.

Dla dwóch podpór otrzymujemy przeto dwa punkty stałe:  $S_1$  i  $S_2$  (fig. 398 i 399). Położenie tych punktów od wielkości momentów  $M_b$  i  $M_a$  nie zależy (stąd nazwa: „punkty stałe“), — zależy natomiast od sposobu podparcia i utwierdzenia belki na przyległej, bliższej punktu stałego podporze. I tak: dla belki w punkcie  $A$  wolno podpartej  $s_1 = 0$ , dla belki w tym punkcie sztywnie utwierdzonej  $s_1 = \frac{1}{3} l$ , dla częściowego natomiast

utwierdzenia (np. z powodu obecności poza punktem  $A$  sąsiedniego przęsła) wartość  $s_1$  leży w granicach od 0 do  $\frac{1}{3}l$ , a wyznaczenie jej por. poniżej.

To samo odnosi się i do wartości  $s_2$ , oraz przyległej jej podpory  $B$ . Na fig. 398 i 399 stopień utwierdzenia belki na podporach oznaczony jest ogólnie literami  $u_a$  i  $u_b$ .

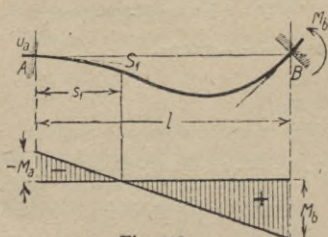


Fig. 398.

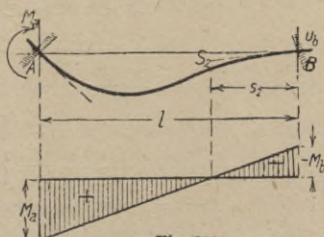


Fig. 399.

Co się tyczy linii krzyżowych, zależnych tylko od obciążenia belki, to dadzą się one wyznaczyć zapomocą znanych sposobów wykreślnych (fig. 400, 401 i 402), lub też analitycznie na podstawie odcinków  $t_a$  i  $t_b$ , obliczonych z wzoru ogólnego:

$$t_a = \frac{6[B_0]}{l}, \quad t_b = \frac{6[A_0]}{l} \quad \dots (7)$$

gdzie wartości  $[A_0]$  i  $[B_0]$  dla rozmaitych rodzajów obciążenia podane są w tabeli I.

1. Belka jednym końcem sztywnie utwierdzona. Po wyznaczeniu punktu stałego  $S_1$  w odległości  $s_1 = \frac{1}{3}l$  od utwierdzonej podpory (fig. 394) na podstawie wzoru (7) obliczamy odcinek linii krzyżowej  $t_b$ , na którą odrzutujemy punkt

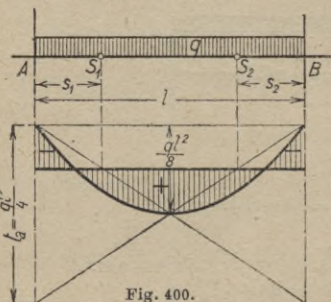


Fig. 400.

stały  $S_1$ . Przez otrzymany w ten sposób punkt 1 oraz punkt 2, spadający w tym wypadku z prawą podporą belki kreślimy prostą 1—2 momentu podporowego  $M_a$ .

O ile obciążenie belki da się rozłożyć na stany obciążenia, odpowiadające fig. 400, 401 i 402, wartość  $t_b$  można znaleźć także wykreślnie, co jednak się opłaca tylko w wypadkach mniej skomplikowanych.

2. Belka obustronnie sztywnie utwierdzona. Punkty stałe  $S_1$  i  $S_2$  (fig. 395) leżą w odległościach  $s_1 = s_2 = \frac{1}{3}l$  od podpór. Po wyznaczeniu linii krzyżowych zapomocą odcinków  $t_a$  i  $t_b$  (jak poprzednio) i odrzutowaniu punktów stałych, otrzymujemy prostą 1—2 momentów podporowych  $M_a$  i  $M_b$ .

3. Belki ciągle. a) Przekrój na całej długości belki stały. Wyznaczenie punktów stałych odbywa się albo:

a) wykreślnie — zapomocą znanej konstrukcji, uwidocznionej na fig. 406, zaczynając od pierwszej lub ostatniej podpory, gdzie pierwsza prosta  $I$  lub  $I'$  o kierunku dowolnym, wychodzi z punktu stałego pierwszego przęsła (który dla belki na końcu wolno podpartej spada z tą podporą, a dla belki na końcu sztywnie utwierdzonej leży w  $\frac{1}{3}l$  od podpory), lub też

β) analitycznie — na podstawie wzoru:

$$s = \frac{l}{3 + \frac{l'}{l} \left( 2 - \frac{s'}{l' - s'} \right)} \dots \dots \dots (8)$$

w którym wartości kreskowane odnoszą się do przęsła poprzedniego, a niekreskowane do tego przęsła, w którym  $s$  obliczamy. Idąc od początku belki i podstawiając  $s' = s_1'$ , znajdujemy wartości  $s = s_1$ ; idąc od końca belki dla  $s' = s_2'$ , otrzymamy wartości  $s = s_2$ .

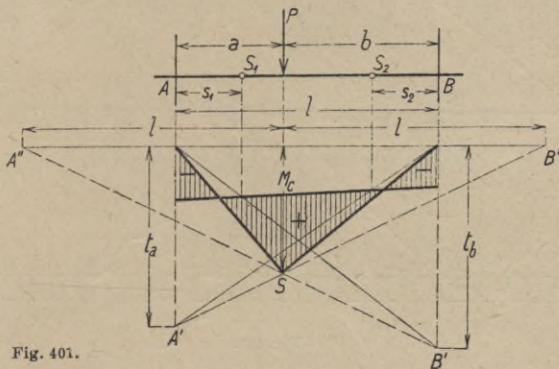


Fig. 401.

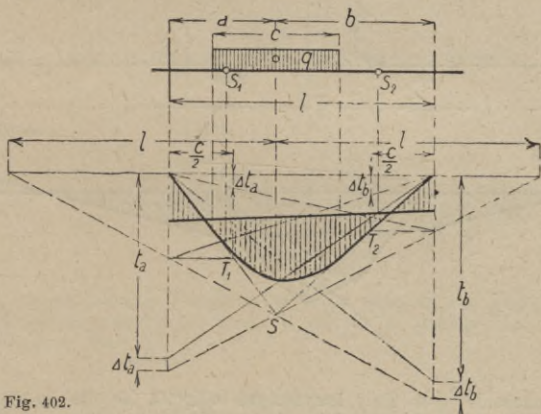


Fig. 402.

Linje krzyżowe wyznaczamy sposobem poprzednio już omówionym, zaznaczyć jednak należy, że za każdym razem badamy belkę obciążoną w jednym tylko przęsle, wyznaczając wpływ tego obciążenia na przęsła nieobciążone zapomocą prostych, wychodzących z otrzymanych w przęsle obciążonym wartości  $M_a$  i  $M_b$ , a przechodzących przez następne (w stosunku do przęsła obciążonego) punkty stałe (fig. 404). Otrzymane w ten sposób, przy obciążeniu poszczególnych przęseł, momenty podporowe dla równoczesnego obciążenia całej belki sumujemy na podporach z uwzględnieniem znaku, pamiętając o tem, że pomiędzy podporami wpływ tych momentów na belkę rozkłada się wedle linii prostej.

b) Przekrój w każdym przęśle inny, w obrębie jednak przęśła stały.

W stosunku do poprzedniego zmianie ulega tylko sposób wyznaczenia punktów stałych. Wykreślnie otrzymujemy je zapomocą pewnego rodzaju linii krzyżowych (o innym jednak niż poprzednio znaczeniu), a według fig. 405 *a* i *b* zastępują one nie nadającą się już w tym wypadku konstrukcję, podaną na fig. 405.

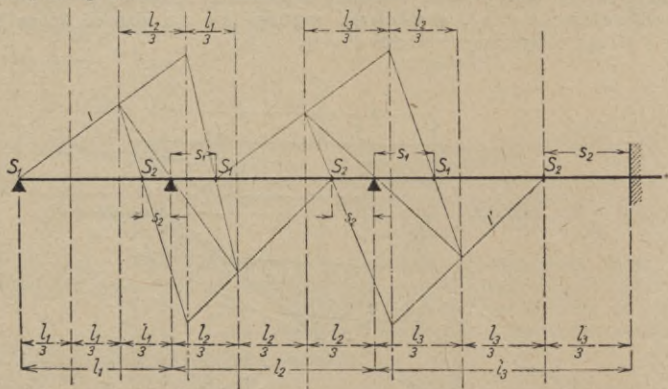


Fig. 403.

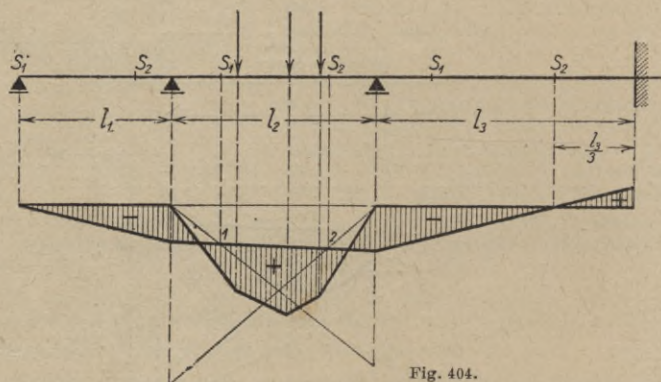


Fig. 404.

Wyznaczenie tych linii krzyżowych odbywa się dla każdego przęśła z osobna na podstawie wartości  $z$ , którą obliczamy z wzoru:

$$z = \frac{J_0}{J} l^2,$$

gdzie  $l$  i  $J$  odnoszą się do danego przęśła, a  $J_0$  jest dowolną wartością dla wszystkich przęśła stałą (por. ustęp 3 *b*, str. 1296).

Analityczne wyznaczenie punktów stałych odbywa się w tym wypadku zapomocą podobnego do (8) wzoru:

$$s = \frac{l}{3 + k \left( 2 - \frac{s'}{l - s'} \right)},$$

gdzie w mianowniku zamiast wartości  $l'/l$  występuje współczynnik:

$$k = \frac{l'}{l} \cdot \frac{J}{J'}$$

przyczem tak samo jak i poprzednio wartości kreskowane odnoszą się do przeszła poprzedniego, a niekreskowane — do tego przeszła, w którym  $s$  obliczamy.

Właściwe linje krzyżowe, zapomocą których przez odrzutowanie punktów stałych znajdujemy proste momentów podporowych, nie zależą od przekroju belki i sposobu jej podparcia, lub utwierdzenia, to też dalsze zastosowanie ich w obliczeniu tych belek nie ulega żadnej zmianie, a więc było już poprzednio omówione.

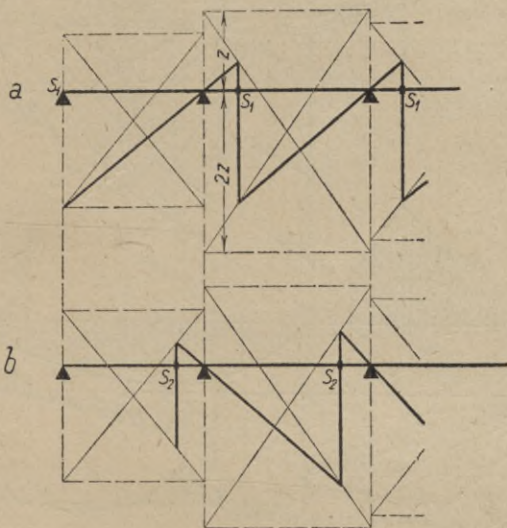


Fig. 405.

Z konieczności pomijamy belki o przekroju zmiennym w każdym punkcie, jakoteż wpływ przesunięcia i ugięcia podpór (p. Straßner, Der einfache und durchlaufende Balken).

### Linje wpływowe.

a) Linje wpływowe momentów (fig. 406). Wykreślić linje wpływowe momentu dla przekroju  $t_2$  w przeszle  $l_2$  belki ciągłej na 5 podporach.

W tym celu dzielimy przeszle  $l_2$  na 8 równych części i wykreślamy dla położen w 1, 2, 3... (fig. a) ciężaru ruchomego skupionego  $P=1$  linje momentów  $M_0$  belki wolno podpartej. Linje te otrzymamy, dzieląc w wieloboku sił (fig. b) siłę  $P=1$  na 8 równych części i wykreślając dla biegunów  $O_1, O_2, O_3...$ , umieszczonych naprzeciw punktów podziału w odległości  $H$  wieloboki sznurowe. Dla tak otrzymanych powierzchni momentów kreślimy linje krzyżowe  $b_1, c_1, b_2, c_2...$  (fig. a), które odcinają na stałych linjach  $S_1, S_2$  punkty, przez które przechodzą zamykające odpowiednie powierzchni momentów. Z otrzymanych tym sposobem powierzchni momen-

tów  $M$  dla poszczególnych położeń  $P$  w punktach 1, 2, 3... przesła znajdziemy momenty w przekroju, oznaczone na fig. *a* czarnymi punktami. Po naniesieniu tych momentów jako rzędnych punktów 1, 2, 3, 4... otrzymamy gałąź  $b'$ ,  $c'$  wpływowej momentu  $M_2$  (fig. *e*).

Celem otrzymania gałęzi wpływowej  $M_2$  w przesłach  $l_1$  wykreślamy linje krzyżowe dla przesła  $l_1$  (fig. *c*), tudzież zamykające w przesłach  $l_1$  i  $l_2$ .

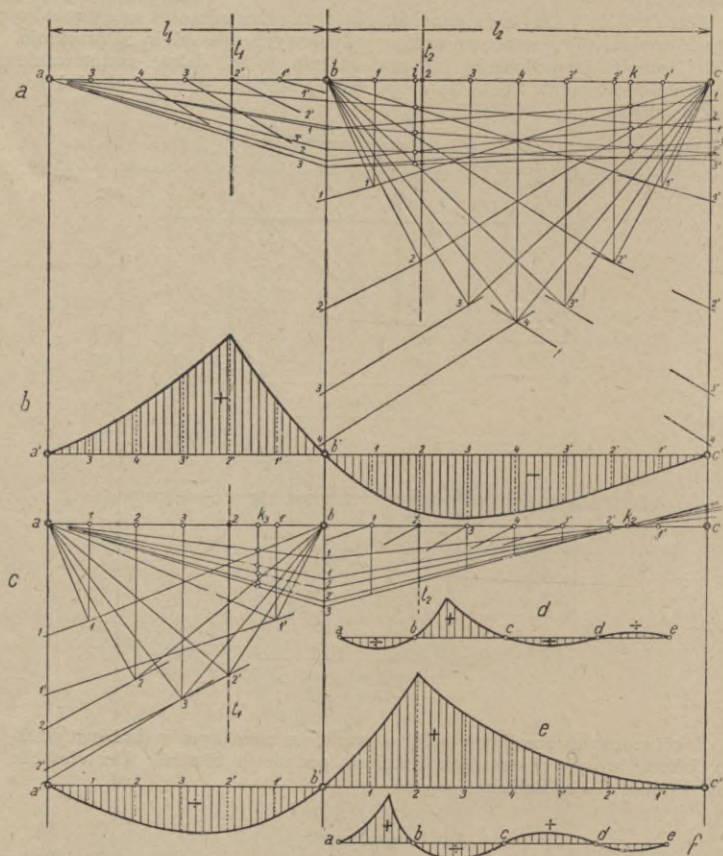


Fig. 406.

Rzędne momentu  $M_2$  (oznaczone na fig. *c* czarnymi punktami), przeniesione pod punkty 1', 2', 3'... przesła  $l_1$ , tworzą część wpływowej  $M_2$  w tem przesłach (fig. *e*).

Fig. 184 *d* wskazuje przebieg wpływowej  $M_2$  w przesłach  $l_3$  i  $l_4$ .

W podobny sposób wykreślimy wpływową momentu  $M_2'$  dla przekroju  $t_1$  przesła  $l_1$ . Rzędne momentu  $M_2'$  dla gałęzi  $a'b'$  oznaczone są czarnymi punktami na fig. *c*, zaś dla gałęzi  $b'c'$  na fig. *a*.

*b*) Linje wpływowe sił poprzecznych i oddziaływań (fig. 407). Po znalezieniu linji momentów belki ciągłej dla kolejnych położeń w przesłach  $l_2$

ciężaru skupionego  $P$ , kreślimy przez bieguny  $O_1, O_2 \dots$  (fig.  $b$ ), równoległe do odpowiednich zamykających, przez co otrzymujemy na linii  $P$  szukane siły poprzeczne. Te siły poprzeczne naniesione jako rzędne na odpowiednich pionowych, tworzą dwie krzywe  $c' b''$  i  $b' c''$ , które są wpływami sił poprzecznych; rzędne wpływowej  $c' b''$  przedstawiają siłę poprzeczną po lewej stronie ciężaru, zaś rzędne wpływowej  $b' c''$  siłę poprzeczną po prawej stronie ciężaru (fig.  $c$ ).

Dla danego przekroju np. 2 linja wpływowa składa się z dwu części:  $b' 2'' 2$  i  $2 2' c'$  (fig.  $c$ ); do określenia przebiegu jej w dalszych przęsłach (fig.  $d$ ) potrzebna jest znajomość powierzchni momentów w tych przęsłach.

Siły poprzeczne w sąsiednich przęsłach otrzymamy, kreśląc pionowe w odległości  $H$  od punktów  $S_1, S_2$  (fig.  $a$ ); odcinki odcięte przez zamykające na tych pionowych przedstawiają siłę poprzeczną w przęsłach sąsiadujących z przęsłem  $l_2$  dla kolejnych położań 1, 2... ciężaru  $P$ ; te siły

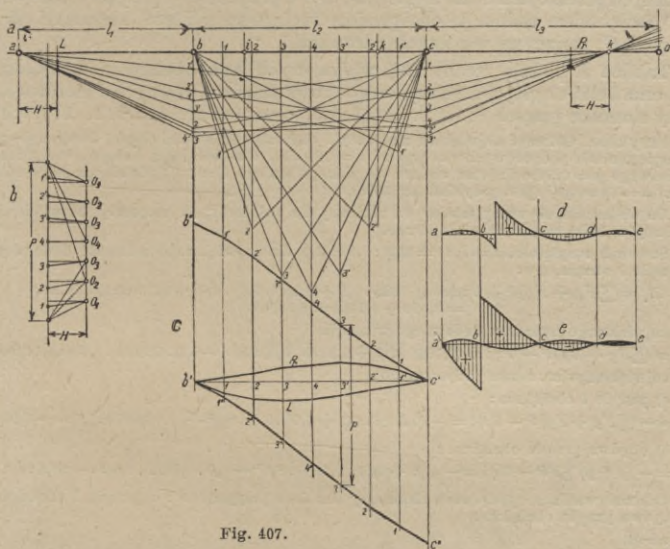


Fig. 407.

poprzeczne naniesione jako rzędne, tworzą wpływową  $b' L c'$  siły poprzecznej w przęśle  $l_1$  i wpływową  $b' P c'$  siły poprzecznej w przęśle  $l_3$ .

Oddziaływanie podpory pośredniej jest równe sumie sił poprzecznych działających z prawej i lewej strony podpory; sumując przeto rzędne wpływowych sił poprzecznych dla przekrojów z lewej i prawej strony podpory, uzyskujemy wpływową oddziaływania (fig.  $e$ ).

$c$ ) Największe siły poprzeczne i momenty. W danym przekroju powstaje największa siła poprzeczna, jeśli przęsło jest obciążone z prawej strony przekroju, zaś lewa część przęsła pozostaje nieobciążona; pozostałe przęsła są naprzemian nieobciążone i obciążone w ten sposób, że z nieobciążoną częścią przęsła przekrojonego graniczy obciążone, zaś z obciążoną częścią przęsła nieobciążone. Największa siła ujemna powstaje przy obciążeniu, uzupełniającem poprzednie obciążenie.

Największy moment dodatni w przekroju między punktami stałymi powstaje dla całkowitego obciążenia przęsła przekrojonego i naprzemian nieobciążonych przęsł sąsiednich. Uzupełniające obciążenie daje największy moment ujemny.

Największy moment dodatni w przekroju zewnątrz punktów stałych powstaje podczas obciążenia przęsła przekrojonego między punktem granicznym, a najbliższą podporą, pozostała zaś część przęsła ma pozostać nieobciążona. Oprócz tego reszta przęseł ma być naprzemian nieobciążona i obciążona. Uzupełniające obciążenie wywołuje największy moment ujemny.

### Tablice.

Dla użytku praktyki podajemy na końcu działu: „Statyka budowli“ tablice do obliczenia belek ciągłych (i belek utwierdzonych), obciążonych ciężarem jednostajnym  $g$ , rozłożonym na całość długości belki, ciężarem jednostajnym częściowym  $p$ , oraz ciężarami skupionymi  $G$ .

Tablice  $A$  podają momenty zgięcia siły poprzeczne i oddziaływania w różnych przekrojach belki ciągłej (2-, 3- i 4-przęsłowej o przęsłach różnych) pod obciążeniem stałym  $g$ , obciążeniem ruchomym  $p$  i pod ciężarami skupionymi  $G$ , stojącymi w różnych odstępach.

Tablice  $B$  podają rzędne linii wpływowych belki obustronnie utwierdzonej, oraz belki ciągłej 2- i 3-przęsłowej o rozpiętościach równych i nierównych (przy stosunku przęseł 1:1, 1:1,2, 1:1,5, oraz 1:1:1, 1:1,2:1, 1:1,5:1).

**Przykład.** Obliczyć największe momenty i oddziaływania belki ciągłej dwuprzęsłowej o rozpiętościach podporowych  $l = 8,00$  m,  $l_1 = 12,00$  m, dla obciążenia stałego  $g = 0,2$  t/m b, użytkowego  $p = 0,5$  t/m b; oraz ciężaru skupionego stałego  $G = 3,0$  t, działającego w odległości  $a = \xi l = 0,4$  l (por. przykład str. 1296).

Do obliczenia używamy tablicy 4., ułożonej dla założenia, iż momenty bezwładności przekrojów belki są stałe i sobie równe.

Stosunek rozpiętości  $n = l_1 : l = 12,0 : 8,0 = 1,5$  dla największego momentu dodatniego w przęśle  $l$  otrzymamy:

$$M_1 = (\sum Fg + Fg)l^2 + G\eta l = (0,0325 \cdot 0,2 + 0,100 \cdot 0,5) \cdot 8,0^2 + 3,0 \cdot 0,2131 \cdot 8,0 = 3,616 + 5,1144 = 8,7304 \text{ tm};$$

dla największego momentu dodatniego w przęśle  $l_1$ :

$$M_2 = (\sum Fg + Fp)l^2 - G\eta l = (0,1825 \cdot 0,2 + 0,2025 \cdot 0,5) \cdot 8,0^2 - 3,0 \cdot 0,0156 \cdot 8,0 = 8,44 \text{ tm};$$

dla największego momentu podporowego:

a) przęsło  $l$  obciążone:

$$M_c = -(\sum Fg + Fp)l^2 - G\eta l = -(0,2188 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,5) \cdot 8,0^2 - 3,0 \cdot 0,0671 \cdot 8,0 = -6,01 \text{ t};$$

b) obydwie przęsła obciążone:

$$M_c = -(g + p) \sum F l^2 - G\eta l = -(0,2 + 0,5) \cdot 1,2188 \cdot 8,0^2 - 3,0 \cdot 0,0671 \cdot 8,0 = -56,21 \text{ tm}.$$

Oddziaływania na podporach obliczamy dla dwu przypadków: a) przęsło  $l$  obciążone, b) obydwie przęsła obciążone.

ad a).

$$A = (\sum Fg + Fp)l + G\eta \xi = 0,4 = (0,2812 \cdot 0,2 + 0,45 \cdot 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,533 = 3,85 \text{ t}.$$

$$B = (0,6042 \cdot 0,2 - 0,0333 \cdot 0,5) \cdot 8,0 - 3,0 \cdot 0,0447 = 0,69 \text{ t},$$

$$C = (1,6146 \cdot 0,2 + 0,5833 \cdot 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,5117 = 6,45 \text{ t}.$$

ad b).

$$A = 0,2812 \cdot (0,2 + 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,533 = 3,17 \text{ t},$$

$$B = 0,6042 \cdot (0,2 + 0,5) \cdot 8,0 - 3,0 \cdot 0,0447 = 3,25 \text{ t},$$

$$C = 1,6146 \cdot (0,2 + 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,5117 = 10,58 \text{ t}.$$

### G. Ramy.

Napisał

inż. dr. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów.

Są to utwory hiperstatyczne, złożone z prętów najczęściej prostych (niekiedy zakrzywionych lub łamanych), połączonych ze sobą przy pomocy sztywnych węzłów. Pręty pionowe (lub o kierunku, zbliżonym do pionu), nazywamy słupami, poziome zaś (lub zbliżone do poziomu) rozporami. Każdy pręt ustroju ramowego znajduje się wogóle pod działaniem momentów, oraz sił osiowych i poprzecznych, musi być więc wykształcony sztywnie.



Rozróżniamy ramy jednoprzęsłowe, wieloprzęsłowe i piętrowe, posiadające kilka rozpór jedna nad drugą. Słupy mogą być dołem utwierdzone lub oparte na przegubach.

Ramy można obliczać przy pomocy różnych metod:

1. Metoda ogólnych równań sprężystości, str. 1258, także str. 1148 i 1149.

Jest to sposób najdokładniejszy, gdyż pozwala na uwzględnienie wpływu sił osiowych i poprzecznych na odkształcenie. Ramę dwusłupową (jedno-

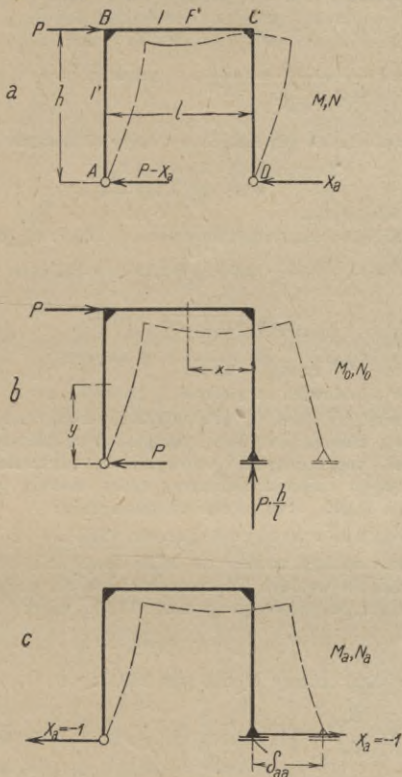


Fig. 408.

przęsłową), dwuprzegubową, oblicza się jak łuk dwuprzegubowy, zaś ramę utwierdzoną jak łuk bezprzegubowy.

Przykład 1. (Fig. 408). Niewiadoma hiperstatyczna:

$$X_a = P \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

$$\text{Słup } AB: \quad M_o = Py, \quad M_a = y, \quad N_o = P \frac{h}{l}, \quad N_a = 0.$$

$$\text{Słup } CD: \quad M_o = 0, \quad M_a = y, \quad N_o = -P \frac{h}{l}, \quad N_a = 0.$$

$$\text{Rozpora } BC: \quad M_o = P \frac{h}{l} x, \quad M_a = h, \quad N_o = 0, \quad N_a = 1.$$

$$E\delta_{ma} = \int_A^D M_0 M_a \frac{ds}{J} + \int_A^D N_0 N_a \frac{ds}{F} = \int_A^B P y \cdot y \cdot \frac{dy}{J^1} + \int_C^B P \frac{h}{l} x \cdot h \frac{dx}{J} = \frac{P}{J^1_0} \int y^2 dy +$$

$$+ \frac{P}{J} \frac{h^2}{l} \int_0^l x dx = P \left[ \frac{h^3}{3J^1} + \frac{h^2 l}{2J} \right] = P \frac{h^2 t}{J}, \quad \text{gdzie } t = \frac{h}{3} \frac{J}{J^1} + \frac{l}{2}.$$

$$E\delta_{aa} = \int_A^B y^2 \frac{ds}{J^1} + \int_B^C h^2 \frac{dx}{J} + \int_C^D y^2 \frac{dy}{J^1} + \int_B^C l^2 \frac{dx}{F} = 2 \int_0^h y^2 \frac{dy}{J^1} + \int_0^l h^2 \frac{dx}{J} + \int_0^l \frac{dx}{F} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{h^3}{J^1} + \frac{h^2 l}{J} + \frac{l}{F} = \frac{h^2}{J} \left( 2t + l \frac{J}{F h^2} \right),$$

$$X_a = P \frac{t}{2t + l \frac{J}{F h^2}} = \frac{P}{2 + \varepsilon}, \quad \text{przy czym } \varepsilon = \frac{l}{t} \frac{J}{F h^2}.$$

Dla  $F = \infty$ , albo  $l = 0$ , lub gdy zaniedbamy wpływ sił osiowych  $X_a = \frac{P}{2}$ .

Moment w C:  $M_C = -h X_a$

„ w B:  $M_B = h(P - X_a)$ .

Niech:  $l = 8 \text{ m}, \quad h = 4 \text{ m}.$

Rozpora: 2 [ ] Nr. 30:  $F = 117,6 \text{ cm}^2, \quad J = 16\,052 \text{ cm}^3.$  Słupy: 2 [ ] Nr. 28:  $J : J^1 = 1,28,$

$$P = 4t, \quad t = \frac{4}{3} 1,28 + \frac{8}{2} = 1,705 + 4 = 5,705 \text{ m},$$

$$\varepsilon = \frac{8}{5,705} \frac{16\,052}{117,6 \cdot 400^2} = 0,0012,$$

$$X_a = \frac{4t}{2,0012} = \frac{2}{1,0006} = (2 - 0,0012)t.$$

Widać stąd, że wpływ sił osiowych na wielkość  $X_a$  jest znikomy.

W przypadku większej ilości niewiadomych hiperstatycznych (ramy wieloprzesłowe i piętrowe) metoda powyższa byłaby zbyt uciążliwa. Toteż, z uwagi na mały wpływ sił poprzecznych i osiowych na odkształcenia (por. przykład 1.) pomijamy go często i obliczamy ramy metodą punktów stałych, lub metodą równań trzech, wzgl. czterech momentów.

## 2. Metoda punktów stałych (por. str. 1297).

Każdy pręt ramy można uważać za belkę sprężysto utwierdzoną, o ile pominiemy przesunięcia węzłów. W belce takiej obrót podpory jest proporcjonalny do momentu podporowego (por. str. 1131), więc:

$$\tau_a = -\varepsilon_a M_a \dots \dots \dots (1)$$

Jednakowoż według zasady Mohra (str. 1291):

$$\tau_a = \frac{R_m}{EJ} = \left\{ [A_0] + \frac{1}{6} l (2 M_a + M_b) \right\} = EJ \dots \dots (2)$$

Z porównania (1) i (2) otrzymamy zatem:

$$M_a \left( 2 + \frac{1}{l} 6 EJ \varepsilon_a \right) + M_b = - \frac{6 [A_0]}{l} \dots \dots \dots (3)$$

Jeżeli przeszło jest nieobciążone, to  $[A_0] = 0$ , więc:

$$M_a : M_b = -1 : \left( 2 + \frac{1}{l} 6 EJ \varepsilon_a \right) = a : (l - a),$$

stąd odstęp lewego punktu stałego od lewej podpory:

$$a = \frac{l}{3} \frac{1}{l + \frac{1}{l} 2 EJ \varepsilon_a} \dots \dots \dots (4)$$

Jeżeli  $M_3$  jest lewym momentem podporowym przesła znajdującego się na prawo od  $D$  (fig. 409) i jeżeli 1, 2 i 3 są punktami nieskończenie bliskimi matematycznego węzła  $D$ , to w punktach 1 i 2 powstaną odpowiednio momenty:

$$M_1 = \mu_{31} M_3, \quad M_2 = \mu_{32} M_3 \quad \dots \quad (5)$$

tak, że:  $M_1 + M_2 = M_3 \quad \dots \quad (6)$

czyli:  $\mu_{31} + \mu_{32} = 1 \quad \dots \quad (7)$

Moment dodatni powoduje wypukłość linii ugięcia w rozporach ku dołowi, w słupach zaś ku prawej stronie (fig. b). Gdyby na koniec 1 pręta  $A-1$  działał moment  $M=1$  (fig. c), to kąt odchylenia stycznej w punkcie 1 od cięciwy  $A-1$  wynosilby  $\gamma_1$ .

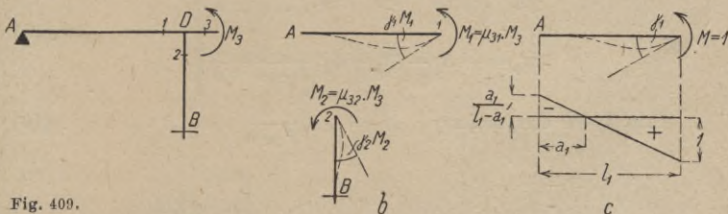


Fig. 409.

Ponieważ zaś moment wynosi  $M_1$ , więc kąt ten będzie  $\gamma_1 M_1$  (fig. b). Podobnie kąt odchylenia pręta 2-C jest  $\gamma_2 M_2$ . Wskutek sztywności węzła  $B$  obrót jego:

$$\varepsilon_3 M_3 = \gamma_1 M_1 = \gamma_2 M_2 \quad \dots \quad (8)$$

Z równań (5), (6) i (8) wynika:

$$\frac{1}{\varepsilon_3} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \quad \dots \quad (9)$$

$$\mu_{31} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \mu_{32} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad \dots \quad (10)$$

Jeżeli w  $A$  jest utwierdzenie sprężyste, określone wartością  $a_1$  (fig. c), to podstawiając we wzorze na  $[B_0]$  tabl. I., str. 1293, poz. 20,  $M_b = 1$ ,  $M_a = -\frac{a_1}{l_1 - a_1}$ , otrzymamy:

$$\gamma_1 = \frac{[B_0]}{EJ_1} = \frac{l_1}{6 EJ_1} \left( 2 - \frac{a_1}{l_1 - a_1} \right) \quad \dots \quad (11)$$

Jeżeli  $A$  jest podporą skrajną, wolną, to  $a = 0$ ,

więc:  $\gamma_1 = \frac{l_1}{3 EJ_1} \quad \dots \quad (12)$

W przypadku utwierdzenia zupełnego jak w punkcie  $B$  (fig. d):  $a_2 = l_2$ ; 3,

więc:  $\gamma_2 = \frac{l_2}{4 EJ_2} \quad \dots \quad (13)$

Jeżeli tylko jedno przesło jest obciążone, to linia momentów we wszystkich rozporach lewych przechodzi przez lewe punkty stałe, we wszystkich rozporach prawych przez prawe punkty stałe, a w słupach przez dolne punkty stałe. W przesle obciążonym wykres momentów składa się z trapezu, odpowiadającego ujemnym momentom podporowym i wykresu momentów dodatnich dla belki wolno podpartej.

Zamykającą linię momentów znajdziemy wykreślić przy pomocy punktów stałych i linii krzywych, jak w belce ciągłej (por. str. 1298, równ. 7). Można to zrobić i analitycznie. Pionowy odstęp zamykającej od punktu stałego lewego:

$$\left. \begin{aligned} S_a &= t_b \frac{a}{l} \\ S_b &= t_a \frac{b}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

podobnie:

Mómenty podporowe wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= -S_a - (S_a - S_b) \frac{a}{l - a - b} \\ M_b &= -S_b - (S_b - S_a) \frac{b}{l - a - b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

$$\text{Dla } b = 0 \text{ otrzymujemy } M_a = -t_b \frac{a}{l - a} \dots \dots \dots (16)$$

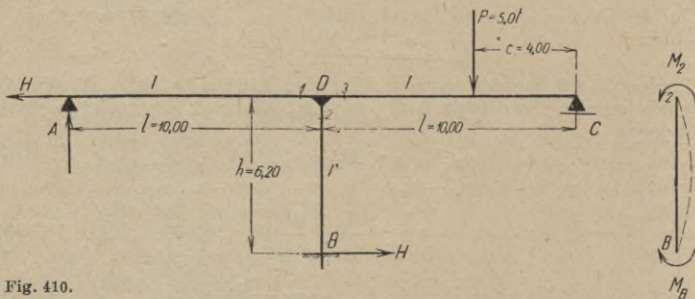


Fig. 410.

Przyjmując po kolei każde przesło obciążone, sumujemy następnie algebraicznie rzędne poszczególnych wykresów dla otrzymania rzeczywistego obrazu momentów wskutek równoczesnego obciążenia wszystkich przesł.

Przykład 2. (Fig. 410).  $l = 10 \text{ m}$ ,  $h = 6,2 \text{ m}$ ,  $J : J' = 3 : 2$ ,  $c = 4 \text{ m}$ ,  $P = 5 \text{ t}$ . Znaleźć momenty przy węźle  $D$ :  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , moment stopowy  $M_B$  i moment w miejscu działania siły  $P$   $M_P$  i oddziaływania  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

$$\text{Wedle (11): } \gamma_1 = \frac{l}{3EJ}, \quad \text{wedle (12): } \gamma_2 = \frac{h}{4EJ'}$$

Nazwijmy dla skrócenia:

$$\gamma_1 : \gamma_2 = \frac{4}{3} \frac{l}{h} \frac{J'}{J} = k = \frac{4 \cdot 10 \cdot 2}{3 \cdot 6,2 \cdot 3} = 1,433, \quad \text{to } \mu_{31} = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2,433} = 0,41 \text{ (równ. 10),}$$

$$\mu_{32} = 1 - \mu_{31} = \frac{k}{k+1} = 0,59, \quad \gamma_1 = \frac{l}{3EJ} \text{ (równ. 12),}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_3} = \frac{1}{\gamma_1} (1+k) \text{ (równ. 9),} \quad \varepsilon_3 = \frac{\gamma_1}{1+k} = \frac{l}{3EJ(1+k)}$$

$$\frac{6EJ\varepsilon_3}{l} = \frac{2}{1+k} = \frac{2}{2,433} = 0,822, \quad a = \frac{l}{3 + \frac{2}{1+k}} = \frac{10}{3,822} = 2,615 \text{ m,}$$

$$t_b = \frac{6}{l} P \frac{6 \cdot 4 \cdot 14}{6 \cdot 10} = 16,8 \text{ tm (równ. 7, str. 1298, poz. 2, tabl. 1., str. 1292).}$$

$$M_3 = -t_b \frac{a}{l-a} = -16,8 \frac{2,615}{7,385} = 5,95 \text{ tm (równ. 16).}$$

$$M_1 = -0,41 \cdot 5,95 = -2,44 \text{ t/m}, \quad M_2 = -0,59 \cdot 5,95 = -3,51 \text{ tm}.$$

Kontrola:  $M_1 + M_2 = M_3, \quad 2,44 + 3,51 = 5,95,$   
 $M_B = -\frac{1}{2} M_2 = +1,755 \text{ t/m},$

$$M_P = P \frac{c(l-c)}{l} + M_3 \frac{c}{l} = \frac{4}{10} (5 \cdot 6 - 5,95) = 0,4 \cdot 24,05 = 9,62 \text{ tm},$$

$$A = \frac{M_1}{l} = -0,244 \text{ t},$$

$$C = P \frac{c}{l} + \frac{M_3}{l} = (5,0 \cdot 4,0 - 5,95) : 10 = 1,405 \text{ t},$$

$$B = P - A - C = 5 - 1,161 = 3,839 \text{ t},$$

$$H = M_2 : h - M_B : h = (M_2 - M_B) : h = (-3,51 - 1,755) : 6,2 = -\frac{5,265}{6,2} = -0,85 \text{ t}.$$

W rozporze AD wystąpi ciągnienie  $N = H = 0,85 \text{ t}.$

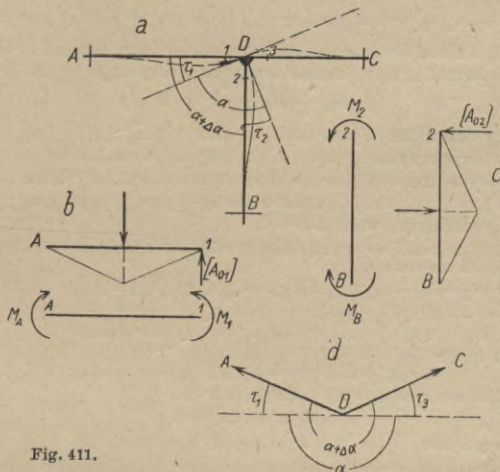


Fig. 411.

3. Metoda równań trzech, wzgl. czterech momentów (czysto rachunkowa).

Weźmy pod uwagę spośród prętów, schodzących się w sztywnym węźle D, pręty A-1 i 2-B, zamykające ze sobą kąt  $\alpha$  (fig. 411 a). Wskutek obciążenia pręty te wygną się, węzły się przesuną i kąt pomiędzy cięciwami A-1 i 2-B będzie wynosił  $\alpha + \Delta \alpha$ . Kąt między cięciwą A-1 a styczną w 1:

$$\tau_1 = \left[ [A_{01}] + \frac{1}{6} s_1 (2 M_1 + M_A) \right] : EJ_1 \dots \dots \dots (17)$$

por. str. 1295.

Dla pręta 2-B będzie odpowiednio:

$$\tau_2 = \left[ [A_{02}] + \frac{1}{6} s_2 (2 M_2 + M_B) \right] : EJ_2 \dots \dots \dots (18)$$

Z figury a) czytamy:  $\alpha + \Delta \alpha + \tau_2 = \alpha + \tau_1$

czyli:  $\tau_1 - \tau_2 = \Delta \alpha \dots \dots \dots (19)$

Wstawmy (17) i (18) w (19) i nazwijmy:

$$s_1 \frac{J_0}{J_1} = s_1', \quad s_2 \frac{J_0}{J_2} = s_2', \quad [A_{02}] \frac{J_0}{J_2} = [A_{02}'],$$

to otrzymamy równanie czterech momentów:

$$6 EJ_0 \Delta \alpha_{12} = M_A s_1' + 2 M_1 s_1' - 2 M_2 s_2' - M_B s_2' + 6 ([A_{01}'] - [A_{02}']). \quad (20)$$

Dla prętów  $A-1$  i  $3-C$  byłoby (fig.  $d$ ):  $\alpha + \Delta\alpha = \alpha + \tau_1 + \tau_3$ , stąd zamiast (19):

$$\tau_1 + \tau_3 = \Delta\alpha_{13},$$

zatem równanie czterech momentów będzie:

$$6 EJ_0 \Delta\alpha_{13} = M_A s_1' + 2M_1 s_1' + 2M_3 s_3' + M_C s_3' + 6([A_{01}'] + [A_{03}']). \quad (21)$$

Jeżeli w węźle  $D$  schodzą się tylko dwa pręty, np.  $A-1$  i  $2-B$ , to  $M_1 = M_2 = M_D$ , więc zamiast (20) będzie:

$$6 EJ_0 \Delta\alpha_{12} = M_A s_1' + 2M_D (s_1' - s_2') - s_2' M_B + 6([A_{01}'] - [A_{02}']). \quad (22)$$

Analogicznie dla prętów  $A-1$  i  $3-C$  byłoby zamiast (21) z uwagi na  $M_1 = M_3 = M_D$ :

$$6 EJ_0 \Delta\alpha_{13} = M_A s_1' + 2M_D (s_1' + s_3') + M_C s_3' + 6([A_{01}'] + [A_{03}']). \quad (23)$$

$S_2$  to uogólnione równania trzech momentów (por. równanie (4), str. 1295). Prócz tych równań mamy jeszcze warunek równowagi węzła  $D$ :

$$M_1 + M_2 - M_3 = 0 \dots \dots \dots (24)$$

Dla ramy trójkątnej (por. tabl. C. Ramy, pozycje 1—10), tudzież dla ram symetrycznych, symetrycznie obciążonych, wreszcie dla ram wieloprzęsłowych, których rozpora skrajna przytrzymała jest łożyskiem nieruchomem (por. fig. 413), można, pomijając skrócenie sprężyste prętów, przyjąć, że węzły nie doznają przesunięć, więc  $\Delta\alpha = 0$ .

**Przykład 3.** Zagadnienie z przykładu 2. (fig. 410) rozwiązać metodą równań trzech względnie czterech momentów.

Tutaj jest  $M_A = M_C = 0$ ,  $\Delta\alpha_{12} = \Delta\alpha_{13} = 0$ ,  $[A_{01}] = [A_{02}] = [A_{0B}] = 0$ . Będzie więc dla prętów  $A-1$  i  $2-B$ :

$$2M_1 s_1' - 2M_2 s_2' - M_B s_2' = 0 \quad (\text{por. równ. 20});$$

dla prętów  $A-1$  i  $3-C$ :

$$2M_1 s_1' + 2M_3 s_3' = -6[A_{03}'] \quad (\text{por. równ. 21});$$

dla pręta nieskończenie małego w  $B$  i dla pręta  $B-2$ :

$$2M_B s_2' + M_2 s_2' = 0,$$

wreszcie dla węzła  $D$ :

$$M_3 = M_1 + M_2 \quad (\text{por. równ. 18}).$$

Obierzmy  $J_0 = J$ , to  $s_1' = s_3' = 10 \text{ m}$ ,

$$s_2' = h \frac{J}{J'} = 6,2 \frac{3}{2} = 9,3 \text{ m},$$

$$6[A_{03}'] = 6[A_{03}] = 6P \frac{(l-c)c(l+c)}{6l} = 5,0 \frac{6,0 \cdot 4,0 \cdot 14,0}{10,0} = 168 \text{ tm}^2,$$

(por. tabl. I., str. 1292, poz. 2).

Równania momentów podporowych będą zatem:

$$20M_1 - 18,6M_2 - 9,3M_B = 0,$$

$$20M_1 + 20(M_1 + M_2) = -168 \text{ tm}^2,$$

$$2M_B + M_2 = 0.$$

Stąd: 
$$M_2 = -\frac{168 \text{ tm}^2}{47,9 \text{ m}} = -3,51 \text{ tm},$$

$$M_1 = \frac{27,9}{40} M_2 = -2,45 \text{ tm},$$

$$M_3 = M_1 + M_2 = -5,98 \text{ tm}.$$

$$M_B = -M_2 : 2 = +1,755 \text{ tm}.$$

Wartości  $M_P$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $H$  patrz przykład 2.

Dla ramy prostokątnej (fig. 412) otrzymujemy (ponieważ prostokąt zamienić się może tylko na równoległobok):

$$\Delta\alpha + \Delta\beta = 0,$$

$$\Delta\beta + \Delta\gamma = 0,$$

$$\Delta\gamma + \Delta\delta = 0.$$

W innych przypadkach posłużyć się możemy równaniem (11), str. 1244:

$$\sum y \Delta \alpha = \Delta l - \sum \Delta s \cos \varphi.$$

Jeżeli opuścimy wpływ sił osiowych, to:

$$\sum \Delta s \cos \varphi = \omega t \Delta l.$$

Zamiast  $l$  możemy obrać którykolwiek pręt, np.  $s_{1n}$ , wtedy:

$$\sum y \Delta \alpha = \Delta s_{1n} - \omega t s_{1n}.$$

Jeżeli podpory są sztywne, to  $\Delta l = 0$ .

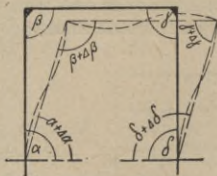


Fig. 412.

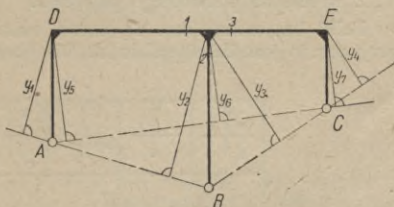


Fig. 413.

Dla ramy wedle fig. 413 mamy np. dla dowolnego obciążenia:

$$\Delta s_{AB} = 0 = y_1 \Delta \alpha_D + y_2 \Delta \alpha_{12},$$

$$\Delta s_{BC} = 0 = y_3 \Delta \alpha_{23} + y_4 \Delta \alpha_E,$$

$$\Delta s_{AC} = 0 = y_5 \Delta \alpha_D + y_6 (\Delta \alpha_{12} + \Delta \alpha_{23}) + y_7 \Delta \alpha_E.$$

Przyrosty  $\Delta \alpha_D$  i  $\Delta \alpha_E$  wyraża się przy pomocy równań trzech momentów, zaś  $\Delta \alpha_{12}$  i  $\Delta \alpha_{23}$  przy pomocy równań czterech momentów.

Jeżeli rama zostaje ogrzana równomiernie o  $t^0$ , to lewe strony równań powyższych będą odpowiednio  $-\omega t s_{AB}$ ,  $-\omega t s_{BC}$  i  $\omega t s_{AC}$ .

## H. Belki bezprzekątniowe.<sup>1)</sup>

Napisał

inż. dr. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów.

Omówimy tu wyłącznie belki bezprzekątniowe równoległe<sup>2)</sup>. a) Obciążenie pionowe stałe (fig. 414). Przyjmujemy, iż ciężary węzłowe skutkiem obciążenia stałego działają w węzłach pasa dolnego.

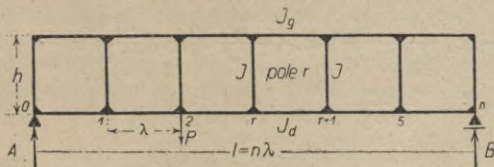


Fig. 414.

Dla wyznaczenia sił wewnętrznych sprowadzamy belkę do układu zasadniczego, tj. belki w dwu punktach wolno podpartej, przyjmując każdy pręt pasa górnego przy pomoście dołem (lub pasa dolnego przy pomoście

<sup>1)</sup> Belki bezprzekątniowe nazywamy czasem belkami Vierendeel'a.

<sup>2)</sup> Według Kriso, „Statik der Vierendeelträger“, rok 1922.

górną) przecięty w połowie swej rozpiętości, przyczem z punktów przecięcia prowadzimy dwa ramiona sztywne ( $J = \infty$ ) do środka ciężkości pola (fig. 415). W układzie pracuje pas dolny (górny) jako belka wolno podparta w dwu punktach, zaś pas drugi i słupy nie doznają żadnych naprężeń.

Ugięcie wywołuje w układzie zasadniczym przesunięcia  $\Delta x$  i  $\Delta y$  i obrót ramion sztywnych o kąt  $\Delta \varphi$  w stosunku do pierwszego położenia (fig. 416).

Ażeby układ zasadniczy działał jako belka bezprzekątniowa, musi doznawać tych samych odkształceń, zatem ramiona sztywne układu zasadniczego, które pod wpływem ciężarów węzłowych  $P$  doznały przesunięć  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta x$  i  $\Delta y$ , muszą pod wpływem wielkości statycznie niewyznaczalnych  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  wrócić do pierwotnego położenia.

Belki bezprzekątniowe są zatem układem  $3n$ -krotnie hiperstatycznym, przyczem  $n$  jest ilością pól belki. Dla równowagi oprócz trzech zasadniczych

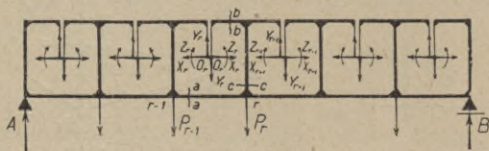


Fig. 415.

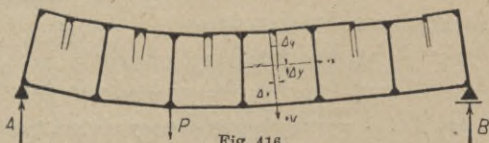


Fig. 416.

warunków musi być w każdym polu suma odkształceń równa zero, zatem  $\Delta \varphi_r = 0$ ,  $\Delta x_r = 0$ ,  $\Delta y_r = 0$ .

Odształcenia belki i związane z nimi przesunięcia  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , oraz obrót  $\Delta \varphi$ , następują pod działaniem sił poprzecznych i normalnych, oraz momentów zgięcia. Odształcenia skutkiem sił poprzecznych są bardzo małe i można je opuścić.

Dla wyznaczenia odkształceń skutkiem momentów zgięcia z uwzględnieniem wpływu sąsiednich pól otrzymujemy równania (Kriso, str. 28):

$$\Delta \varphi_r = \frac{\lambda h}{2E} \left( \frac{1}{J_g} - \frac{1}{J_d} \right) X_r - \frac{\lambda h}{2EJ} Y_{r-1} + \frac{\lambda h}{2EJ} Y_{r+1} - \frac{h}{EJ} Z_{r-1} +$$

$$+ \frac{1}{E} \left[ \frac{2h}{J} + \lambda \left( \frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d} \right) \right] Z_r - \frac{h}{EJ} Z_{r+1} + \frac{fr}{EJ_d} = 0 \dots (1)$$

$$\Delta x_r = \frac{h^3}{12EJ} X_{r-1} - \frac{h^2}{2E} \left[ \frac{h}{3J} + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d} \right) \right] X_r + \frac{h^3}{12EJ} X_{r+1} +$$

$$+ \frac{\lambda h}{2E} \left( \frac{1}{J_d} - \frac{1}{J_d} \right) Z_r + \frac{hfr}{2EJ_d} = 0 \dots (2)$$

$$\Delta y_r = -\frac{\lambda^2 h}{4EJ} Y_{r-1} + \frac{\lambda^2}{2E} \left[ \frac{h}{J} + \frac{\lambda}{6} \left( \frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d} \right) \right] Y_r -$$

$$- \frac{\lambda^2 h}{4EJ} Y_{r+1} - \frac{\lambda h}{2EJ} Z_{r-1} + \frac{\lambda h}{2EJ} Z_{r+1} - \frac{\lambda^3}{12EJ_d} T_{or} = 0 \dots (3)$$







Sposób przybliżony, dogodny dla pierwszego przeliczenia przekrojów (fig. 417).

Oznaczmy przez  $S_g, J_d, J_1, J_2 \dots$  momenty bezwładności pasu górnego, dolnego i słupów 1, 2...

$N_g, N_d, N_1, N_2 \dots$	siły osiowe	w	prętach	pasów	i	słupów
$T_g, T_d, T_1, T_2 \dots$	siły poprzeczne	"	"	"	"	"
$M_g, M_d, M_1, M_2 \dots$	momenty zgięcia	"	"	"	"	"

Jeżeli rozpatrywać będziemy ramę zamkniętą między słupami 2 i 3 o długości rozpory  $a_2$ , to punkty zerowe momentów będą w słupach w odległości  $v_g$  od pasa górnego, oraz w pasach w odległości  $w_2$  od lewego słupa 2. Położenie tych punktów można wyznaczyć w przybliżeniu jak w ramie zamkniętej. Przeciętnie:

$$v_g = \frac{m_0 h}{1 + m_0} = k_0 h,$$

$$w_2 = \frac{m_2 a_2}{1 + m_2} = k_2 a_2,$$

przyczem:

$$m_0 = \sqrt{\frac{J_g}{J_d}},$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{J_2}{J_3}};$$

siła osiowa w pasach:

$$-N_{g2} = N_{d2} = \frac{M_{a2}}{h},$$

siła poprzeczna w pasach:  $T_{g2} = k_0 T_{a2}, \quad T_{d2} = (1 - k_0) T_{a2}$ ;

moment zgięcia w pasach w odległości  $x$  od punktu zerowego:

$$M_{g2} = T_{g2} x = k_0 T_{a2} x = k_0 (M_x - M_{a2}),$$

$$M_{d2} = T_{d2} x = (1 - k_0) T_{a2} x = (1 - k_0) (M_x - M_{a2}).$$

Siła poziomo ścinająca w słupie 2:

$$T_2 = \int \frac{T_x dx}{h} = \frac{M_{a2} - M_{a1}}{h} = N_{d2} - N_{d1};$$

moment zgięcia w odległości  $y$  od punktu zerowego w słupie 2:  $M_2 = T_2 y$ .

Siła osiowa w słupie 2:  $N_2 = (1 - k_0) (P_{d2} - P_{g2})$ .

Siła osiowa w słupie 1:  $N_1 = -(k_0 T_{a1} = P_{g1})$ .

Moment pasowe w węzłach słupa 2:

lewe: pas górny:  $M_{g12} = k_0 (M_{II} - M_{a1}),$

pas dolny:  $M_{d12} = (1 - k_0) (M_{II} - M_{a1});$

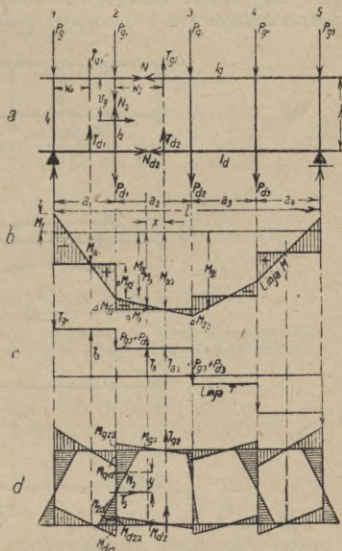


Fig. 417.

$$\begin{aligned} \text{prawe: pas górny:} & \quad M_{g_{22}} = k_0 (M_{II} - M_{a2}), \\ \text{pas dolny:} & \quad M_{d_{22}} = (1 - k_0) (M_{II} - M_{a2}). \end{aligned}$$

Momenty węzłowe w słupie 2:

$$\begin{aligned} \text{górny:} & \quad M_{2g} = k_0 (M_{a1} - M_{a2}), \\ \text{dolny:} & \quad M_{2d} = (1 - k_0) (M_{a2} - M_{a1}). \end{aligned}$$

Gdy pas dolny jest gibki, natenczas:  $V_0 = h$ , gdy zaś  $S_g = J_d$ , to  $v_0 = 1/2 h$ . Powyższy sposób może być zastosowany do przybliżonego obliczenia belek bezprzekątniowych o dowolnym rodzaju podparcia.

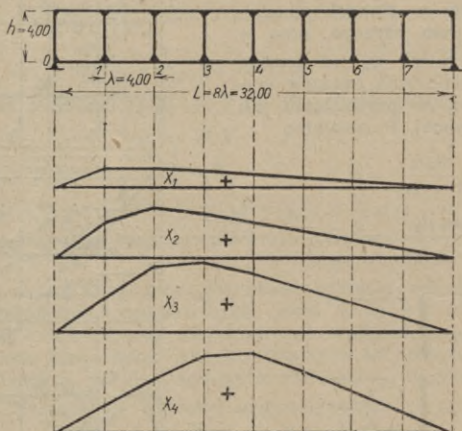


Fig. 418.

Dla belki bezprzekątniowej wolno podpartej będzie  $M_I = 0$ , dla belki utwierdzonej na podporach  $M_I$  jest momentem utwierdzenia, dla belki ciągłej momentem podporowym.

**Przykład.** Wykreślić linie wpływowe sił normalnych, poprzecznych i momentów, w pasach i słupach belki bezprzekątniowej równoległej o pomoście dołem (fig. 418).

Wymiary belki:  $L = 32,00$ ,  $h = 4,00$ , ilość pól  $n = 8$ ,  $\lambda = 4,00$  m.

Dla pierwszego obliczenia przyjmujemy:  $J_g = J_d = J$ . Wtedy z wzorów 4. i 5.:

$$Z_r = -0,5 M_{or} \quad Y_r = -0,5 T_{or}$$

Wyznaczenie  $X_r$ . Podstawiając w równ. 6:  $\sum_1^{\xi} T = \frac{M_0 \xi}{\lambda}$ , oraz  $f_{\xi} = \frac{\lambda}{2} (M_0 \xi - 1 + M_0 \xi)$ ,

otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= k \frac{6}{h^2} (f_1 + f_2 k + \dots + f_{\xi} k^{\xi-1} + \dots + f_{n-1} k^{n-2} + f_n k^{n-1}) \\ X_r &= \frac{k}{1-k^2} \frac{6}{h^2} (f_1 k^{r-1} + \dots + f_{\xi} k^{r-\xi} + \dots + f_{r-1} k + f_r + \\ & \quad + f_{r+1} k + \dots + f_{\xi} k^{\xi-r} + \dots + f_n k^{n-r}) \\ X_n &= k \frac{6}{h^2} (f_1 k^{n-1} + f_2 k^{n-2} + \dots + f_{\xi} k^{n-\xi} + \dots + f_{n-1} k + f_n) \end{aligned} \right\} \dots (6'')$$

przy pomocy tego równania obliczamy rzędne linii wpływowych sił normalnych w pasach.

Linia wpływowa  $X_1$ .

$$X_1 = k \frac{6}{h^2} (f_1 + f_2 k + f_3 k^2 + f_4 k^3 + f_5 k^4 + f_6 k^5 + f_7 k^6 + f_8 k^7)$$

w równaniu tem  $f_r =$  powierzchnia linii wpływowej momentów belki wolno podpartej w polu  $r$ ; z fig. 419 otrzymamy:

$$f_1 = 1 \frac{\lambda^2}{2n} \quad f_2 = 3 \frac{\lambda^2}{2n} = 3f_1 \quad f_3 = 5 \frac{\lambda^2}{2n} = 5f_1$$

$$f_4 = 7 \frac{\lambda^2}{2n} = 7f_1 \quad f_5 = 9 \frac{\lambda^2}{2n} = 9f_1 \quad f_6 = 11 \frac{\lambda^2}{2n} = 11f_1$$

$$f_7 = 13 \frac{\lambda^2}{2n} = 13f_1 \quad f_8 = 15 \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^2}{2} = 15f_1 - \frac{\lambda^2}{2}$$

Wstawiając te wartości w równanie na  $X_1$ , otrzymamy rzędną linii wpływowej w węźle 7:

$$\eta_7 = k \frac{6}{h^2} \left[ f_1 (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 + 11k^5 + 13k^6 + 15k^7) - \frac{\lambda^2}{2} k^7 \right]$$

a ponieważ:

$$f_1 = \frac{\lambda^2}{2n}, \quad m_1 = 3k \left( \frac{\lambda}{h} \right)^2,$$

$$A_1 = 1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 + 11k^5 + 13k^6 + 15k^7,$$

zatem rzędne linii wpływowej  $x_1$  będą:

$$\eta_7 = m_1 \left[ \frac{1}{n} A_1 - k^7 \right]$$

$$\eta^5 = m_1 \left[ \frac{3}{n} A_1 - k^5 (1 + 3k + 5k^2) \right]$$

$$\eta_6 = m_1 \left[ \frac{9}{n} A_1 - k^6 (1 + 3k) \right] \quad \eta^4 = m_1 \left[ \frac{4}{n} A_1 - k^4 (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3) \right]$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\eta_1 = m_1 \left[ \frac{7}{n} A_1 - k (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 + 11k^5 + 13k^6) \right].$$

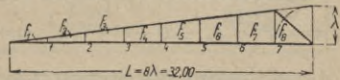


Fig. 419.

Linia wpływowa  $X_1$ . Rozróżniamy tu dwa przypadki: 1. ciężar z prawej strony węzła 4., 2. ciężar z lewej strony węzła 4., i w zależności od tych przypadków obliczamy równania rzędnych linii wpływowej.

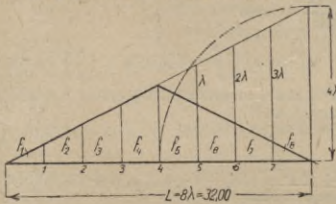


Fig. 420.

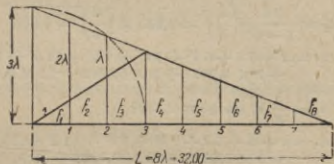


Fig. 421.

Ad 1 (fig. 420).

$$f_1 = 1 \frac{4\lambda^2}{2n} \quad f_2 = 3 \frac{4\lambda^2}{2n} = 3f_1 \quad f_3 = 5 \frac{4\lambda^2}{2n} = 5f_1 \quad f_4 = 7 \frac{4\lambda^2}{2n} = 7f_1$$

$$f_5 = 9 \frac{4\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^2}{2} = 9f_1 - \frac{\lambda^2}{2} \quad f_6 = 11 \frac{4\lambda^2}{2n} - 3 \frac{\lambda^2}{2} = 11f_1 - 3 \frac{\lambda^2}{2}$$

$$f_7 = 13 \frac{4\lambda^2}{2n} - 5 \frac{\lambda^2}{2} = 13f_1 - 5 \frac{\lambda^2}{2} \quad f_8 = 15 \frac{4\lambda^2}{2n} - 7 \frac{\lambda^2}{2} = 15f_1 - 7 \frac{\lambda^2}{2};$$

równanie rzędnej linii wpływowej w węźle 4. będzie:

$$\eta_4 = \frac{k}{1-k^2} \frac{6}{h^2} \left[ f_1 (k^3 + 3k^2 + 5k + 7k + 9k + 11k^2 + 13k^3 + 15k^4) - \frac{\lambda^2}{2} (k + 3k^2 + 5k^3 + 7k^4) \right]$$

a że:

$$f_1 = \frac{4\lambda^2}{2n}, \quad m_2 = \frac{3k}{1-k^2} \left( \frac{\lambda}{h} \right)^2,$$

$$A_4 = k^3 + 3k^2 + 5k + 7k + 9k + 11k^2 + 13k^3 + 15k^4,$$

zatem rzędne prawej gałęzi linii wpływowej będą:

$$\eta_7 = m_2 \left[ \frac{1}{n} A_4 - k^4 \right]$$

$$\eta_6 = m_2 \left[ \frac{2}{n} A_4 - k^3 (1 + 3k) \right]$$

$$\eta_5 = m_2 \left[ \frac{3}{n} A_4 - k^2 (1 + 3k + 5k^2) \right]$$

$$\eta_4 = m_2 \left[ \frac{3}{n} A_4 - k (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3) \right].$$

Ad 2 (fig. 421).

$$f_8 = 1 \frac{3 \lambda^2}{2n} \quad f_7 = 3 \frac{3 \lambda^2}{2n} = 3 f_8 \quad f_6 = 5 \frac{3 \lambda^2}{2n} = 5 f_8 \quad f_5 = 7 \frac{3 \lambda^2}{2n} = 7 f_8$$

$$f_4 = 9 \frac{3 \lambda^2}{2n} = 9 f_8 \quad f_3 = 11 \frac{3 \lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^2}{2} = 11 f_8 - \frac{\lambda^2}{2}$$

$$f_2 = 13 \frac{3 \lambda^2}{2n} - 3 \frac{\lambda^2}{2} = 13 f_8 - 3 \frac{\lambda^2}{2} \quad f_1 = 15 \frac{3 \lambda^2}{2n} - 5 \frac{\lambda^2}{2} = 15 f_8 - 5 \frac{\lambda^2}{2}$$

$$\eta_3 = \frac{k}{1-k^2} \frac{6}{k^2} \left[ f_8 (15 k^3 + 13 k^2 + 11 k + 9 + 7 k + 5 k^2 + 3 k^3 + k^4) - \frac{\lambda^2}{2} (5 k^3 + 3 k^2 + k) \right];$$

$$\text{podstawiając zaś:} \quad f_8 = \frac{3 \lambda^2}{2n}, \quad m_2 = \frac{3k}{1-k^2} \left( \frac{\lambda}{h} \right)^2,$$

$$B_4 = 15 k^3 + 13 k^2 + 11 k + 9 + 7 k + 5 k^2 + 3 k^3 + 3 k^3 + k^4,$$

otrzymamy równania rzędnych linii wpływowych:

$$\eta_3 = m^2 \left[ \frac{3}{n} B_4 - k(1 + 3k + 5k^2) \right] \quad \eta_2 = m_2 \left[ \frac{2}{n} B_4 - k^2(1 + 3k) \right] \quad \eta_1 = m_2 \left[ \frac{1}{n} B_4 - k^3 \right].$$

W podobny sposób obliczamy rzędne linii wpływowych dla  $X_2$ ,  $X_3$ .

Obliczenie analityczne rzędnych linii wpływowych sił normalnych przeprowadzamy schematycznie, obliczając wartości pomocnicze, a następnie zestawiając wartości rzędnych w tabeli:

$$2 = 2 + \frac{6 \lambda}{h} \frac{J}{Jd} = 2 + \frac{6 \times 4}{4} \times \frac{1}{1} = 8$$

$$k = 0,5 (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}) = 0,5 (8 - \sqrt{8^2 - 4}) = 0,12$$

$$k^2 = 0,0144, \quad k^3 = 0,0017, \quad k^4 = 0,0002, \quad k^5 = 0,0000,$$

$$1 - k^2 = 0,9856, \quad \frac{3k}{1-k^2} = \frac{3 \times 0,12}{0,9856} = 0,365$$

$$m_2 = \frac{3k}{1-k^2} \left( \frac{\lambda}{h} \right)^2 = 0,365 \times \left( \frac{4}{4} \right)^2 = 0,365 \quad m_1 = 3k \left( \frac{\lambda}{h} \right)^2 = 3 \times 0,12 \times \left( \frac{4}{4} \right)^2 = 0,36$$

$$A_1 = 1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 + 11k^5 + 13k^6 + 15k^7 = 1 + 3 \times 0,12 + 0,0144 \times 5 + 7 \times 0,0017 + 9 \times 0,0002 + 11 \times 0,0000 = 1,4457$$

$$\frac{1}{n} A_1 = \frac{1}{8} \times 1,4457 = 0,1807$$

$$A_2 = k + 3 + 5k + 7k^2 + 9k^3 + 11k^4 + 13k^5 + 15k^6 = 0,12 + 3 + 5 \times 0,12 + 7 \times 0,0144 + 9 \times 0,0017 + 11 \times 0,0002 + 13 \times 0,0000 = 3,8883$$

$$\frac{1}{n} A_2 = \frac{1}{8} \times 3,8883 = 0,4797$$

$$B_2 = 15k + 13 + 11k + 9k^2 + 7k^3 + 5k^4 + 3k^5 + k^6 = 15 \times 0,12 + 13 + 11 \times 0,12 + 9 \times 0,0144 + 7 \times 0,0017 + 5 \times 0,0002 + 3 \times 0,0000 = 16,2625$$

$$\frac{1}{n} B_2 = \frac{1}{8} \times 16,2625 = 2,0328$$

$$A_3 = k^2 + 3k + 5 + 7k + 9k^2 + 11k^3 + 13k^4 + 15k^5 = 0,0144 + 3 \times 0,12 + 5 + 7 \times 0,12 + 9 \times 0,0144 + 11 \times 0,0017 + 13 \times 0,0002 + 15 \times 0,0000 = 6,3653$$

$$\frac{1}{n} A_3 = \frac{1}{8} \times 6,3653 = 0,7956$$

$$B_3 = 15k^2 + 13k + 11k + 9k + 7k^2 + 5k^3 + 3k^4 + k^5 = 15 \times 0,0144 + 13 \times 0,12 + 11 + 9 \times 0,12 + 7 \times 0,0144 + 5 \times 0,0017 + 3 \times 0,0002 + 0,0000 = 14,9574$$

$$\frac{1}{n} B_3 = \frac{1}{8} \times 14,9574 = 1,8695$$

$$A_4 = k^3 + 3k^2 + 5k + 7 + 9k + 11k^2 + 13k^3 + 15k^4 = 0,0017 + 3 \times 0,0144 + 5 \times 0,12 + 7 + 9 \times 0,12 + 11 \times 0,0144 + 13 \times 0,0017 + 15 \times 0,0002 = 8,9084$$

$$\frac{1}{n} A_4 = \frac{1}{8} \times 8,9084 = 1,1135$$

$$B_4 = 15k^3 + 13k^2 + 11k + 9 + 7k + 5k^2 + 3k^3 + k^4 = 15 \times 0,0017 + 13 \times 0,0144 + 11 \times 0,12 + 9 + 7 \times 0,12 + 5 \times 0,0144 + 3 \times 0,0017 + 0,0002 = 11,4500$$

$$\frac{1}{n} B_4 = \frac{1}{8} \times 11,4500 = 1,4312$$

$$\begin{aligned}
 1 + 3k &= 1 + 3 \times 0,12 = 1,36 \\
 1 + 3k + 5k^2 &= 1,36 + 5 \times 0,0144 = 1,432 \\
 1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 &= 1,432 + 7 \times 0,0017 = 1,4439 \\
 1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 &= 1,4439 + 9 \times 0,0002 = 1,4457
 \end{aligned}$$

Rzędne linii wpływowych sił normalnych  $X_r$  w pasach:

Punkt	Rzędne linii wpływowych			
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3929	0,6982	0,6771	0,5218
2	0,3828	0,9872	1,3052	1,0376
3	0,3244	0,8679	1,3886	1,5045
4	0,2601	0,6994	1,1540	1,5625
5	0,2052	0,5252	0,8703	1,2118
6	0,1301	0,3465	0,5807	0,8120
7	0,0651	0,1751	0,2904	0,4064
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Linje wpływowe sił normalnych w pasach na podstawie powyżej obliczonych rzędnych naniesiono na fig. 418. Siły normalne w pasie górnym otrzymują znak  $-$ , w pasie dolnym znak  $+$ .

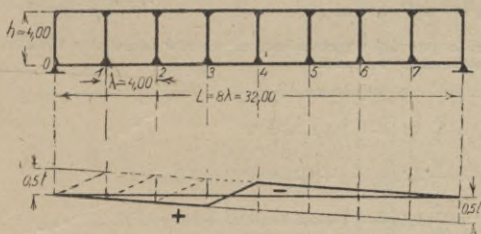


Fig. 422.

Ogólnie możemy napisać równanie rzędnych linii wpływowych sił normalnych wzorem:

$$\begin{aligned}
 \eta_{\xi} &= \frac{n - \xi}{n} A_r^0 - a_{\xi} r & \text{dla } \xi \geq r, \\
 \eta_{\xi} &= \frac{\xi}{n} B_r^0 - \beta_{\xi} r & \text{dla } \xi \leq r - 1,
 \end{aligned}$$

przyczem:  $A_r^0 = m_r A_r$ ;  $B_r^0 = m_r B_r$ .

Linje wpływowe sił poprzecznych w pasach. Dla założenia  $J_g = J_d = J$  otrzymujemy  $y_r = 0,5 T_r$  dla obu pasów. Zatem linję wpływową sił poprzecznych kreślimy jak dla belki wolno podpartej przy obciążeniu pośrednim, z tą różnicą, że odcinamy na podporze zamiast wielkości  $1,0t$ , tylko  $0,5t$ . Linje wpływowe sił poprzecznych w pasach wykreślono na fig. 422.

Linje wpływowe momentów w pasach. Dla przyjętego założenia otrzymujemy  $M_{rx} = 0,5 (M_{orx} - X_r h)$ . Mając zatem wyznaczone wielkości  $X_r$ , możemy łatwo wykreślić linję wpływową momentów w pasach jako różnicę  $M_{orx}$  i  $X_r h$ , jednakowoż przez odpowiednie przekształcenie możemy obliczyć wprost wielkości rzędnych linii wpływowych momentów. Oznaczając przez  $y_{\xi}$  rzędne linii wpływowej momentów w belce wolno podpartej, otrzymamy równanie jej rzędnych:

$$y_{\xi} = \frac{n - \xi}{n} a_{\xi} \quad \text{dla } \xi \geq r, \quad \text{oraz} \quad y_{\xi} = \frac{\xi}{n} b_{\xi} \quad \text{dla } \xi \leq r - 1,$$

przyczem:

$$a_{\xi} = (2r - 1 + \varphi) \frac{\lambda}{2} \quad b_{\xi} = [2(n - r) + 1 - \varphi] \frac{\lambda}{2} \quad X = \varphi \frac{\lambda}{2};$$

równanie więc rzędnych linii wpływowych momentów w pasach będzie:

$$\eta_{\xi}^m = 0,5 (y_{\xi} - \eta_{\xi}),$$

po podstawieniu zaś wartości za  $y_{\xi}$  i  $\eta_{\xi}$  otrzymamy:

$$\eta_{\xi}' = \frac{n-\xi}{n} A'_{r x} + \alpha' \xi r \quad \text{dla } \xi \geq r,$$

$$\eta_{\xi}' = \frac{\xi}{n} B'_{r x} + \beta' \xi r \quad \text{dla } \xi \leq r-1,$$

przyчем:

$$A'_{r x} = (\varphi - R'_{A r}) \frac{\lambda}{4} \quad B'_{r x} = -(\varphi - R'_{B r}) \frac{\lambda}{2}$$

$$R'_{A r} = \mu_a k^r - \nu_a k^{n-r} \quad R'_{B r} = \nu_b k^r - \mu_b k^{n-r}$$

$$\mu_a = \frac{1}{1-k} \quad \mu_b = k \mu_a \quad \nu_b = \frac{2n}{1+k} + \frac{1}{1-k} \quad \nu_a = k \nu_b$$

$$\alpha_r' = 0,5 h \alpha_{\xi r} \quad \beta_{\xi}' = 0,5 h \beta_{\xi r};$$

dla otrzymania lewego momentu węzłowego pola  $r$  należy w powyższych równaniach podstawić:  $X = -\frac{1}{2}\lambda$ ,  $\varphi = -1$ ,

zaś dla prawego momentu węzłowego pola  $r$ :  $X = +\frac{1}{2}\lambda$ ,  $\varphi = +1$ ,

Zatem otrzymamy dla:

$$\begin{aligned} \text{lewego momentu węzłowego} \\ A_r'(-\frac{1}{2}\lambda) &= -(1 + R'_{A r}) \frac{1}{4}\lambda \\ B_r'(-\frac{1}{2}\lambda) &= +(1 + R'_{B r}) \frac{1}{4}\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{prawego momentu węzłowego} \\ A_r'(+\frac{1}{2}\lambda) &= +(1 - R'_{A r}) \frac{1}{4}\lambda \\ B_r'(+\frac{1}{2}\lambda) &= -(1 - R'_{B r}) \frac{1}{4}\lambda \end{aligned}$$

Na podstawie powyżej wyprowadzonych wzorów ustawiamy równania rzędnych linii wpływowych momentów w pasach.

a) Lewe momenty węzłowe.

$$\begin{aligned} \text{Węzeł 1. } \eta_7' &= \frac{1}{8} A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_1 k^7 \\ \eta_6' &= \frac{2}{8} A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_1 k^6 (1 + 3k) \\ \eta_5' &= \frac{3}{8} A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_1 k^5 (1 + 3k + 5k^2) \\ \eta_4' &= \frac{4}{8} A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_1 k^4 (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3) \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_1' &= \frac{7}{8} A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_1 k (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 + 11k^5 + 13k^6). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Węzeł 4. } \eta_7' &= \frac{1}{8} A_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k^4 \\ \eta_6' &= \frac{2}{8} A_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k^3 (1 + 3k) \\ \eta_5' &= \frac{3}{8} A_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k^2 (1 + 3k + 5k^2) \\ \eta_4' &= \frac{4}{8} A_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3) \\ \eta_3' &= \frac{3}{8} B_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k (1 + 3k + 5k^2) \\ \eta_2' &= \frac{2}{8} B_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k^2 (1 + 3k) \\ \eta_1' &= \frac{1}{8} B_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k^3. \end{aligned}$$

b) Prawe momenty węzłowe. Równania rzędnych linii momentów pozostają te same co dla lewych momentów węzłowych z tą zmianą, że zamiast  $A_r'(-\frac{1}{2}\lambda)$  i  $B_r'(-\frac{1}{2}\lambda)$  należy wprowadzić  $A_r'(+\frac{1}{2}\lambda)$  i  $B_r'(+\frac{1}{2}\lambda)$ ; w ten sam sposób obliczamy linje wpływowe dla momentów w węzłach 2 i 3.

Obliczenie wartości pomocniczych:



$1 - k = 0,88,$

$1 + k = 1,12$

$\mu_a = \frac{1}{1 - k} = 1,1363$

$\mu_b = k \mu_a = 0,1386$

$\nu_b = \frac{2n}{1 + k} + \frac{1}{1 - k} = 13,1494$

$\nu_a = k \nu_b = 1,5779$

$R'_{A_1} = 1,1363 \times 0,12 - 1,5779 \times 0,12^7 = 0,1363$

$R'_{A_2} = 1,1363 \times 0,12^2 - 1,5779 \times 0,12^6 = 0,0164$

$R'_{A_3} = 1,1363 \times 0,12^3 - 1,5779 \times 0,12^5 = 0,0019$

$R'_{A_4} = 1,1363 \times 0,12^4 - 1,5779 \times 0,12^4 = 0,0001$

$R'_{B_2} = 13,1494 \times 0,12^2 - 0,1386 \times 0,12^6 = 0,1894$

$R'_{B_3} = 13,1494 \times 0,12^3 - 0,1386 \times 0,12^5 = 0,0237$

$R'_{B_4} = 13,1494 \times 0,12^4 - 0,1386 \times 0,12^4 = 0,0026$

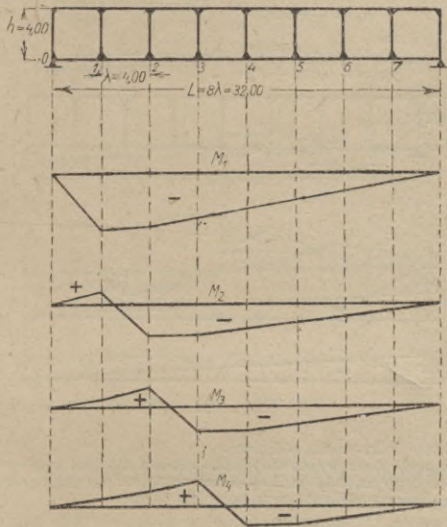


Fig. 423.

$A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -(1 + 0,1363) \frac{4,0}{4} = -1,1363$        $B_3' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = +(1 + 0,0237) \frac{4,0}{4} = 1,0237$

$A_2' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -(1 + 0,0164) \frac{4,0}{4} = -1,0164$        $A_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -(1 - 0,0001) \frac{4,0}{4} = -0,9999$

$B_2' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = +(1 + 0,1894) \frac{4,0}{4} = 1,1894$        $B_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = +(1 + 0,0026) \frac{4,0}{4} = 1,0026$

$A_3' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -(1 + 0,0019) \frac{4,0}{4} = -1,0019.$

Linje wpływowe lewych momentów węzłowych w pasie dolnym wykreślono na fig. 423. na podstawie powyżej obliczonych rzędnych.

Linje wpływowe sił normalnych w słupach. Siły normalne w słupach obliczamy na zasadzie równania:

$$u_r = \frac{-}{+} (Y_r - Y_{r+1}) \quad \begin{matrix} - & \text{dla pomostu dołem,} \\ + & \text{" " " " " górą,} \end{matrix}$$



z relacji tej wynika, że chcąc otrzymać linie wpływowe momentów w słupie należy pomnożyć rzędne linii wpływowych sił poprzecznych w słupie przez połowę wysokości słupa, lub też odczytywać wprost w zmienionej odpowiednio skali wysokości.

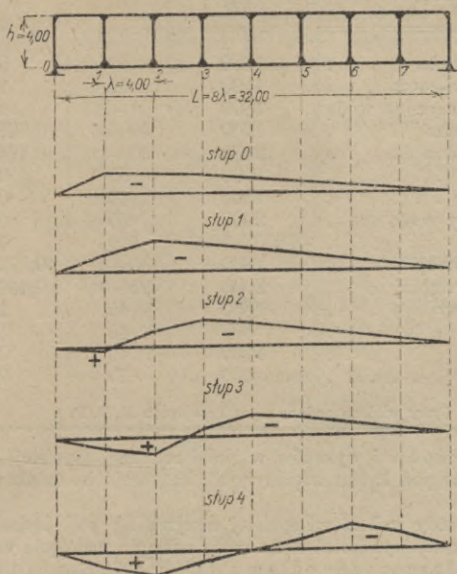


Fig. 425.

W naszym przypadku należy rzędne linii sił poprzecznych pomnożyć przez 2, gdyż  $m_p \pm \frac{1}{2}h = \pm 0,5 \times 4 t_p = 2 t_p$ .

Moment w stopie słupa otrzymuje znak +, w głowicy —.

## VII. Budowle ziemne i mury oporowe.

Napisał

inż. dr. Jan Bogucki,

profesor politechniki, Lwów.

**Równowaga stoków** Stoki nasypów z luźnych materiałów (nie tylko ziemne, lecz także np. węgla, zboża) utrzymują się w równowadze stałej pod działaniem ciężaru własnego cząstek  $G$  i oporu tarcia  $T$ , które przeciwdziałają składowej ciężaru  $P$ , działającej wzdłuż pochyłości stoku (fig. 426). Tarcie  $T$  przyjmujemy proporcjonalne do nacisku  $Q$ , a więc  $T = f \cdot Q$ , nazywając  $f$  współczynnikiem tarcia. Dla równowagi będzie  $T = P = Q \operatorname{tg} \alpha$ ; stąd graniczny kąt równowagi odpowiada równaniu  $\operatorname{tg} \alpha = f$  i nazywa się kątem tarcia lub kątem zesypu; oznaczamy go zwykle  $\rho$ , więc  $\operatorname{tg} \rho = f$ .

Wartości  $f$  i  $\rho$ , wyznaczone doświadczalnie (podgartując dany materiał w stoku), zestawione są w tablicy I. wraz z ciężarem jednostkowym  $\gamma$  danego materiału.

Stok ziemny, nachylony pod kątem tarcia do poziomu, nazywamy stokiem naturalnym. Dla nasypów ziemnych przyjmujemy zwykle  $\rho = 34^\circ$ ,

$$\operatorname{tg} \rho = 0,67 = \frac{2}{3}.$$

Tablica I.

Materiał nasypu	$\gamma$ $kg/m^3$	$\rho^\circ$	$tg \rho$
Ziemia luźna sucha . . . . .	1400	40	0,839
„ „ wilgotna . . . . .	1600	45	1,000
„ „ nasycona wodą . . . . .	1800	27—30	0,509—0,577
Gлина luźna sucha . . . . .	1500	40—45	0,839—1,00
„ „ mokra . . . . .	2000	20—25	0,364—0,466
Piasek suchy . . . . .	1600	35	0,700
„ wilgotny . . . . .	1800	40	0,839
„ nasycony wodą . . . . .	2000	25	0,466
Tłuczeń . . . . .	1600—1800	40	0,839
Żwir rzeczny suchy . . . . .	1800	30—40	0,577—0,839
„ „ wilgotny . . . . .	2000	25—30	0,466—0,577
Węgiel kamienny . . . . .	850	45	1,00
Koks . . . . .	500	45	1,00
Cement . . . . .	1400	40	0,839
Zboże . . . . .	800	25	0,466

Cyfrы większe podane są w Przepisach M. R. P.

Stoki przekopów i wykopów w ziemi rodzimej (spójstej) utrzymują się w równowadze pod kątem większym niż kąt tarcia, bo działa tu spójność cząstek ziemnych.

Jednak nie każdy stok ziemi spojstej utrzyma się pod żądanym kątem  $\alpha > \rho$ . Przy większej wysokości stoku może nastąpić usunięcie części materiału aż po t. zw. płaszczyznę odłamu  $AC$  (fig. 427). Rozkładając ciężar  $G$

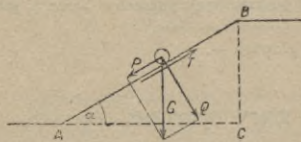


Fig. 426.

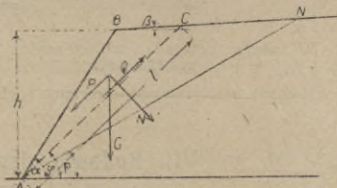


Fig. 427.

klina odłamu  $ABC$  na siły  $P$  i  $N$ , otrzymamy tu pod wpływem nacisku  $N$  opór przeciw oderwaniu i zesunięciu w płaszczyźnie  $AC$ :  $Q = fN + cl$ , złożony z wpływu tarcia  $fN$  i oporu spójności  $cl$  na powierzchni  $l m^2$  (spójność jednostkowa  $c$  wynosi 150—250  $kg/m^2$ ).

Dla równowagi  $P \geq Q$ ; wartość graniczna  $P = Q$  określa płaszczyznę odłamu, która przy naziomiu płaskim  $BCN$  wypada pod kątem  $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \rho)$  do poziomu. Płaszczyzna odłamu połówi kąt między stokiem naturalnym  $\rho$  a rzeczywistym  $\alpha$ . Położenie płaszczyzny odłamu pozostaje toż samo również i przy naziomiu płaskim obciążonym.

Wysokość stoku  $h$ , przy której utrzyma się ziemia o ciężarze jednostkowym  $\gamma$ , oraz spójności  $c$  w równowadze stałej pod żądanym kątem  $\alpha$ , wynosi:

$$h = \frac{2c \cos \rho \sin \alpha}{\gamma \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \rho)},$$

niezależnie od wartości  $\beta$  nachylenia naziomu, jeżeli tylko  $\beta < \rho$ .

Dla  $\alpha = 90^\circ$  będzie wysokość stoku pionowego:  $h = h_0 = \frac{4c}{\gamma} \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\rho}{2}\right)$ .

W praktyce można  $h_0$  wyznaczyć doświadczalnie, co służy zwykle do wyznaczenia wartości  $c$ . Stoki pionowe (urwiska), zwykle kilkumetrowe, dochodzą w glinie nawianej (löss) do kilkunastu metrów wysokości.

Wartości  $h$ , zestawione dla różnych kątów  $\alpha$ , leżą na t. zw. paraboli spójności (fig. 428), której osią jest stok naturalny, spód stoku  $A$  ogniskiem, a połową parametru wartość  $\frac{4c}{\gamma} \cos \rho$ . Przy obciążeniu naziomu ciężarem jednostajnie rozłożonym  $p$ , utrzyma się stok o danej wysokości  $h$  pod kątem mniejszym  $\alpha_1$ , który otrzymamy, dodając w wykresie zastępczą wartość ziemi o grubości  $\frac{2p}{\gamma}$ .

**Stok zakrzywiony.** Stosując w różnych wysokościach stoku nachylenie, odpowiednie do częściowej, a nie całkowitej wysokości, otrzymamy stok zakrzywiony (fig. 429), stosowany czasem w głębokich przekopach, celem skrócenia stoku i zmniejszenia objętości przekopu.

**Mury oporowe.** Równowagę stoków, stromszych niż stok naturalny, można także zabezpieczyć przez podparcie ich ścianą oporową, a to mury (kamienną, betonową) albo ramową (drewnianą, żelazną, żelazno-betonową).

Ściana oporowa  $AB$  (fig. 430) znosi wtedy nacisk

czynny, ziemi (napór czyli parcie ziemi), powstający wskutek możliwości zesunięcia się w dół klina odłamu  $ABC$ , ograniczonego ścianą oporową, naziemem i płaszczyzną odłamu  $AC$ , której położenie będzie różne od płaszczyzny odłamu przy stokach niepodpartych ścianą oporową.

Parcie czynne między ziemią, a murem oporowym odróżnić należy od parcia biernego, które znosi ziemia w razie nacisku ze strony muru np. obciążonego sklepieniem; usunięcie klina odłamu byłoby wtedy możliwem ku górze.

Kierunek parcia ziemi na mur oporowy powinien uwzględnić możliwość przesunięcia klina odłamu po murze w dół, po pokonaniu tarcia. Parcie czynne będzie więc pochylone ku dołowi, pod kątem  $\delta'$  do normalnej; parcie bierne przyjmujemy po drugiej stronie normalnej (pod kątem  $-\delta'$ ). Wartość kąta  $\delta'$  leży w granicach od zera (dla ściany zupełnie gładkiej, dla nasypu przesiąkniętego wodą, albo przy silnych wstrząśnieniach np. przy torze kolejowym ponad murem) aż do pełnej wartości kąta tarcia  $\rho$  dla danego materiału ziemnego, którą przyjmujemy jedynie w bardzo korzystnych warunkach (przeźreń za murem dobrze odwodniona, obciążenie spokojne). W ostatnim razie przyjęć lepiej  $\delta' = \frac{2}{3}\rho$  dla większej pewności obliczenia. Müller-Breslau uważa przyjęcie  $\delta'$  stosownie do warunków, za środek w rękę inżyniera zbliżenia się do rzeczywistości, wobec niepewnej teorii parcia ziemi.

Dotychczasowe teorie (Coulomb, Rankine, Müller-Breslau, Färber) uwzględniają tylko parcie ziemi niespoistej, a jako jedynie działające siły: ciężar ziemi wraz z obciążeniem zmiennem, oraz tarcie wzdłuż ściany oporowej i wzdłuż płaszczyzny odłamu. Przy małym poddaniu się muru (przechyleniu na zewnątrz) tworzy się według Coulomba płaszczyzna odłamu  $AC$  (fig. 430), a ciężar  $G$  usuwającego się klina odłamu pokonać musi opory

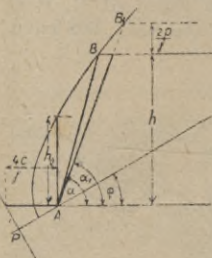


Fig. 428.

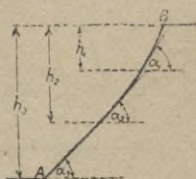


Fig. 429.

ruchu wzdłuż  $AB$  i  $AC$ ; tworzy więc dwie składowe równe siłom  $P$  i  $Q$ , z których składowa  $P$  jest parciem ziemi i działa pod kątem  $\delta'$  do normalnej muru, a pod kątem  $\psi$  do pionu. Przyjmując siłę  $Q$  pod kątem  $\rho$  do normalnej na  $AC$ , wyznaczmy  $F$  z trójkąta sił  $G, P, Q$  najlepiej wykreślnie, albo z równania:

$$P = G \frac{\sin(\varphi - \rho)}{\sin(\varphi - \rho + \psi)}$$

Dla różnych kątów  $\varphi$  należałoby wyznaczyć odnośne wartości  $P$  i znaleźć wartość największą, którą ściana oporowa znieść winna z wystarczającą pewnością. Klin odłamu, wywierający  $P_{\max}$ , jest t. zw. „klinem Coulomba o największym ciśnieniu“, a  $P_{\max}$  jest najmniejszą wartością reakcji muru, potrzebną dla równowagi.

Określenie Coulomba  $P_{\max}$  przez  $\frac{dP}{d\varphi} = 0$  stosuje Culmann do wykreślnego wyznaczenia płaszczyzny odłamu, wkładając trójkąt sił  $G, P, Q$  w rysunek między stok naturalny a płaszczyznę odłamu (fig. 431). Dla kilku

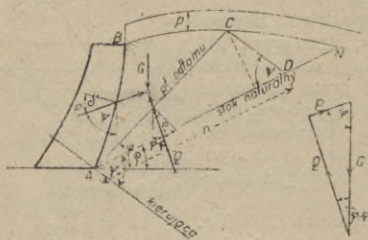


Fig. 430.

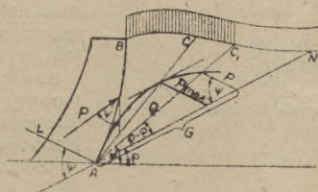


Fig. 431.

przyjęć próbnych  $AC_1, AC_2 \dots$  wyznacza się odnośne wartości  $G$  i wykreśla je wzdłuż  $AN$ , poczem  $P \parallel$  do „kierującej“, którą jest prosta  $L$  nachylona pod kątem  $\psi$  do stoku naturalnego. Końce odcinków  $P$  łączą się

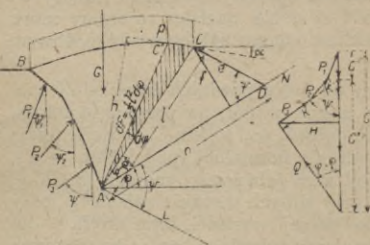


Fig. 432.

krzywą, której maximum daje prawdziwą wartość  $P$  i położenie płaszczyzny  $AC$ . Nachylenie kierunku siły  $P$  do pionu (kąt  $\psi$ ) dane jest przez przyjęcie kąta  $\delta'$  między  $P$  a normalną muru oporowego.

Parcie ziemi na ścianę łamaną. Wyznaczenie sił działających rozpoczyna się tu od górnych części ściany (fig. 432). Niech będą już znalezione siły  $P_1, P_2$  co do kierunku i wielkości, a znany tylko kierunek następnej siły  $P_3$ ; szukana wielkość  $P_3$ . Przedłużenie  $P_3$  daje siły  $K'$  i  $G'$ ; przy nieokreślonej jeszcze płaszczyźnie odłamu  $AC$  nieznanne są siły  $G''$  i  $Q$ , a całkowity klin odłamu  $G = G' + G''$ . Jako warunek dla wyznaczenia płaszczyzny odłamu będzie w myśl teorii Coulomba dla całkowitej siły  $K$ :

$$K = \left[ \frac{G'' \sin(\varphi - \rho)}{\sin(\varphi - \rho + \psi)} \right] \max, \quad \frac{dP_3}{d\varphi} = \frac{dK}{d\varphi} = 0.$$

Możnaby więc dla wyznaczenia  $K_{\max}$  użyć wykresu Culmanna podobnie jak dla  $F_{\max}$  (fig. 431), a stąd wypadnie położenie płaszczyzny odłamu  $AC$  i wartość  $P_3$ .

Praktycznie rozpocząć należy od wyznaczenia  $P_1$  jak dla ściany płaskiej, poczem określa się kolejno  $P_2, P_3 \dots$  metodą ogólną, wskazaną tu dla  $P_3$ .

Wzór Rebhanna. Przy wyznaczeniu rachunkiem wartości  $\frac{dK}{d\varphi} = 0$  otrzymamy po wstawieniu podanej wartości za  $K$ :

$$G'' \sin \psi = - \frac{dG''}{d\varphi} \sin(\varphi - \rho) \sin(\varphi - \rho + \psi).$$

Wprowadźmy tu dla ziemi obciążonej ciężar zastępczy  $\gamma' = \gamma + \frac{2p}{h}$ , wtedy będzie po wkreśleniu trójkąta  $ACD$  między stok naturalny a płaszczyznę odłamu:

$$\frac{dG''}{d\varphi} = - \frac{1}{2} \gamma' l^2; \quad \sin(\varphi - \rho + \varphi) = \frac{n}{l} \sin \psi; \quad \sin(\varphi - \rho) = \frac{f}{l};$$

a po wstawieniu tych wartości w równanie górne otrzymamy:  $G'' = \frac{1}{2} \gamma' f n$  jako wzór Rebhanna w najogólniejszym kształcie.

Ponieważ  $K : Q : H : G'' = e : l : f : n$ , będzie więc:  $K = \frac{1}{2} \gamma' f e$ ;

$$Q = \frac{1}{2} \gamma' f l; \quad H = \frac{1}{2} \gamma' f^2.$$

Ściana płaska, naziom płaski obciążony. Dla ściany płaskiej  $G' = 0$ ,  $G'' = G$  (fig. 433), zatem  $G = \frac{1}{2} \gamma' f n$  (względnie  $G = \frac{1}{2} \gamma f n$  dla ziemi nieobciążonej). Przy naziomie płaskim będzie jednak  $G = \gamma' ABC = \gamma' ACD$ , czyli  $ABC = ACD$ , co wyraża się określeniem Rebhanna: „Płaszczyzna odłamu połowi pole  $ABCD$ , ograniczone ścianą oporową, naziomem, prostą  $CD \parallel$  do kierującej i stokiem naturalnym“. Prawidło to ważne zarówno dla naziomu obciążonego, jak i dla ziemi nieobciążonej.

Z przekształceń geometrycznych wynika przytem  $AD = n = \sqrt{AN \cdot AL}$ , a stąd konstrukcja Poncela (fig. 433, linje 1–6) dla określenia płaszczyzny odłamu  $AC$  i wartości  $P$  jako ciężaru „graniastosłupa parcia“ o podstawie  $CDK$ :

$$P = CDK \cdot 1 \cdot \gamma', \text{ albo prościej: } P = \frac{1}{2} \gamma' f e.$$

Wypadki szczególne (fig. 434). I. Gdy kierująca  $BL$  wypada nad naziomem, konstrukcja pozostaje ta sama ze wskazaną zmianą.

II. Kierująca kryje się z naziomem; wtedy będzie wprost  $BC = CN$ .

III. Mur przechylony,  $\vartheta = \rho$ ; także dla IV, gdy  $\vartheta < \rho$ . W obu wypadkach płaszczyzna odłamu pionowa ( $Q = 0$ ), parcie ziemi pionowe  $P = G$ , równe więc ciężarowi pionowego słupa ziemi od muru do naziomu. Ważne dla nacisku ziemi na górne części sklepień, nadmurowań itp., gdy są od góry ograniczone nachyleniem  $< \rho$ .

V. Naziom, nachylony pod kątem  $\rho$  do poziomu. Konstrukcja Poncela jest tu niemożliwa, więc punkt  $C$  nieokreślony; jednak dla stałych wartości  $e$  i  $f$  z dowolnego  $C$  będzie  $P = \frac{1}{2} \gamma' e f$ .

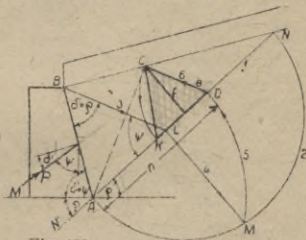
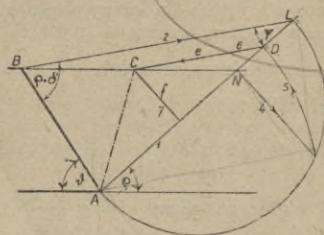


Fig. 433.

Parcie ziemi sposobem rachunkowym (fig. 435). Ściana płaska o długości  $s$ , naziom pochyły, obciążony jednostajnie ciężarem  $p$ . Wyznaczamy tu składowe parcie ziemi:



$$P_n = P_z \cotg \psi, \quad P_z = \frac{1}{2} \gamma' s^2 v^2,$$

gdzie  $v = \frac{1}{t} \sin(\vartheta + \rho)$ ,

$$t = 1 + \sqrt{\frac{\sin(\rho - \alpha) \sin(\rho + \delta')}{\sin(\vartheta + \alpha) \sin \psi}},$$

$$BC = s \cdot v \cdot \frac{t - 1}{\sin(\rho - \alpha)}.$$

Wypadki szczególne: 1. Ściana pionowa gładka, naziom poziomy (fig. 436).

$$\vartheta = 90^\circ, \quad \delta' = 0, \quad \alpha = 0.$$

$$P = P_z = \frac{1}{2} \gamma' h^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{1}{2} \rho),$$

$$CD = BC = h \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2} \rho),$$

co wynika również z przystawania trójkątów  $ABC$  i  $ACD$ .

2. Ściana pionowa, naziom poziomy,  $\delta' \geq 0$ . Wielkość parcia ziemi w przybliżeniu jak wyżej, tylko wpływ jego na mur będzie inny, bo kierunek zmieni się.

Rozkład parcia na ścianę płaską (fig. 437). Parcie całkowite na ścianę o długości  $s$  a naziomie obciążonym ciężarem  $p \frac{kg}{m^2}$  (wykres  $\alpha$ )

będzie:

$$P = \frac{1}{2} \gamma' f e = \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{2p}{h} \right) f e.$$

Rozkładamy je na:

$$P_\gamma = \frac{1}{2} \gamma' f e \quad \text{i} \quad P_p = \frac{p f e}{h};$$

dla części ściany  $s'$  będą  $P'_\gamma$  i  $P'_p$ .

$$P'_\gamma : P_\gamma = h'^2 : h^2 \text{ — rośnie według paraboli;}$$

$$P'_p : P_p = h' : h \text{ — rośnie według linii prostej.}$$

Parcie jednostkowe (wykres  $\beta$ ):

$$k_p = \frac{dP'_p}{dh'} = \frac{P_p}{h}; \quad k_\gamma = \frac{dP'_\gamma}{dh'} = \frac{2P_\gamma h'}{h^2}.$$

Fig. 434.



W wykresie  $\beta$ :

$$b' = \frac{P_p}{h}; \quad b = \frac{2P_\gamma}{h} = \frac{\gamma f e}{h}; \quad b' : b = \frac{P}{\gamma} : h,$$

stąd przecięcie  $T$  na linii  $\frac{P}{\gamma}$  i konstrukcja dla  $b'$  przy danem  $b$ .

Wypadkowa  $P_p$  zaczepia w połowie wysokości ściany; wypadkowa  $P_\gamma$  w  $\frac{1}{3}$  wysokości ściany. Wypadkowa ogólna  $P$  zaczepia w wysokości środka ciężkości trapezu parcia.

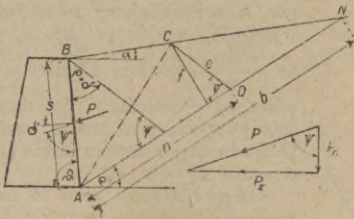


Fig. 435.

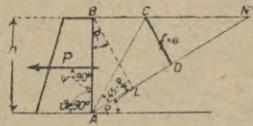


Fig. 436.

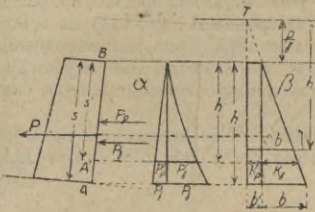


Fig. 437.

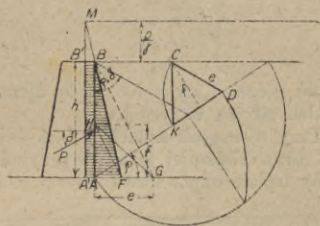


Fig. 438.

Drugi sposób wykresu trapezu parcia (fig. 438).

$$P = \Delta CDK. \text{ i. } \gamma' = \left( \gamma + \frac{2p}{h} \right) CDK.$$

Zamienia się  $CDK = AHG$  na trójkąt  $ABF$ ; dodaje prostokąt  $AA'BB'$  zapomocą punktu  $M$ , poczem cała powierzchnia trapezu, mnożona przez  $\gamma$ , daje wartość  $P$ .

Parcie ziemi wykreślnie przy ścianie łamanej i naziemie łamanym (fig. 439). Dane  $P_1$  i  $P_2$ , szukane  $P_m$ . Konstrukcja ściany zastępczej  $AB'_m$  polega na zamianie klina odłamu  $G_0 - G'$  na klin  $\frac{1}{2} \gamma' x_m h_m$ , więc będzie:

$$x_m = \frac{G_0 - G'}{\frac{1}{2} \gamma' h_m}.$$

Stąd kierująca  $B'_m L$  pod kątem  $\psi_m$  do stoku naturalnego, poczem  $e$  i  $f$ ;

$$K = \frac{1}{2} \gamma' e f, \quad P_m = K - K'.$$

Równocześnie wykonywujemy wykres sił. Jest to więc sposób mieszany rachunkowo-wykreślny. Dla naziomu płaskiego składa się klin  $G_0$  z szeregu trójkątów o podstawach  $d_1 d_2 \dots$ , a wysokościach  $h_1 h_2 \dots$ . Wtedy będzie:

$$x_m = \frac{\frac{1}{2} \sum_{m-1} \gamma' dh - G'_m}{\frac{1}{2} \gamma'_m h_m}; \quad \text{gdzie } \frac{1}{2} \gamma'_m = \frac{1}{2} \gamma + \frac{p}{h_m}.$$

Sposób przybliżony (fig. 440). Pomijamy tu wpływ na dolną część ściany tego klina ziemi, który leży między murem a przedłużeniem w górę danej ściany, np. wpływ klina  $BA_1A_2B_3$  na parcie  $P_3$ .

Wykreślamy więc parcie na ściany różnego nachylenia 1, 2, 3, 4 o tej samej wysokości okrągłej  $h$ , a redukujemy to na inną wysokość, znajdując np.  $b_3 = \frac{\gamma e_3 f_3}{h}$ , poczem promień z  $T$  przez  $b_3$  przedłużony do danej ściany i wyznaczona średnia szerokość odnośnego trapezu parcia  $b_3'$ ; wreszcie  $P_3 = a \cdot b_3'$  itd.

Odpór ziemi. Jest to największa siła  $P$ , jaką może działać mur oporowy (który sam pozostaje pod działaniem nacisku, np. parcia sklepienia  $K$ ; fig. 441) na ścianę ziemną, aby ona jeszcze pozostała w równowadze, nie wysuwając

się ku górze. Kąty  $\rho$  i  $\delta'$  będą ujemne przy zmianie kierunku ruchu, stąd rozkład sił jak w rysunku.

Przy ujemnych kątach  $\rho$  i  $(\rho + \delta')$  ważną będzie konstrukcja Ponceleta (fig. 442). Najlepiej jednakże przyjąć  $C$  przez próby tak, aby  $BM = MK$ ; wtedy będzie odpór ziemi  $P = \gamma \cdot CIK$ .

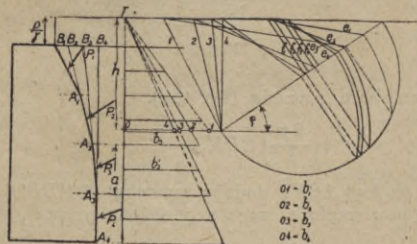


Fig. 440.

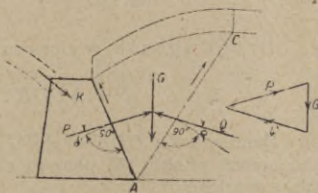


Fig. 441.

Odpór ziemi ujawnia się w stokach brukowanych i przy murach okładzinowych, których środek ciężkości pada poza krawędź podstawy (fig. 443). Odpór ziemi działa w  $\frac{1}{3}$  długości ściany  $AB$  (bruku). Minimum  $P$  odpowiada wypadkowej  $R$ , przechodzącej przez krawędź podstawy  $A$ .

Siłę  $R$  należy uwzględnić przy badaniu stałości muru oporowego  $M_1$ .

Linję ciśnienia w murze oporowym można wykreślić jako ciąg wypadkowych parcia ziemi i ciężaru muru dla poszczególnych przekroi poziomych, poczynając od góry, podobnie jak linję ciśnienia w sklepieniu.

Stąd trzy warunki stałości murów oporowych (por. str. 1324):  
1. Linja ciśnienia powinna leżeć w rdzeniu przekroju (dla przekroju prostokątnego w środkowej trzeciej części grubości muru), aby cały przekrój pra-

cował na ciśnienie. 2. Kierunek wypadkowej dla poszczególnych szwów nie powinien się odchyłać od normalnej szwu o kąt większy, niż kąt tarcia, aby nie było przesunięcia warstw po sobie. 3. Naprężenia w murze nie powinny przekroczyć granic dopuszczalnych.

Warunki te stosują się ściśle do murów suchych lub na zaprawie, niewytrzymałej na ciągnięcie i ścinanie. Dla muru na zaprawie cementowej lub z betonu są większe odchyłki przy 1. i 2. dopuszczalne, choć niepożądane

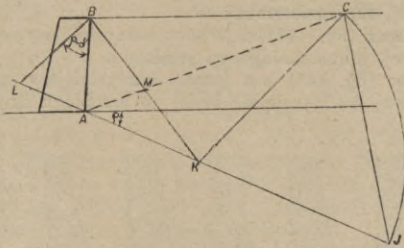


Fig. 442.

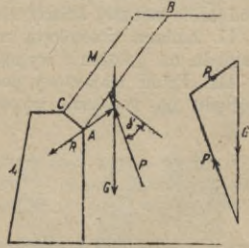


Fig. 443.

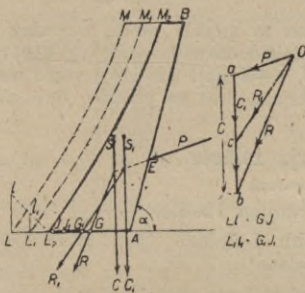


Fig. 444.

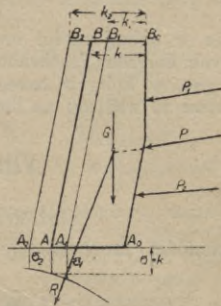


Fig. 445.

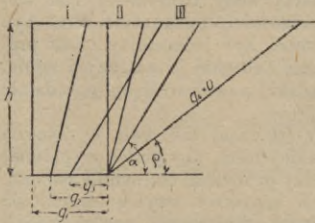


Fig. 446.

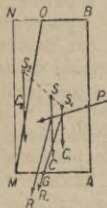


Fig. 447.

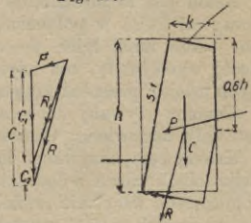


Fig. 448.

I tak dla murów betonowych może wyjść linja ciśnienia z każdej strony osi do  $\frac{1}{5} h$  ( $h$  = grubość muru), dla betonu uzbrojonego do  $\frac{1}{3} h$ ; wahania jej skrajne zajmować więc mogą  $0,4 h$ , względnie  $0,67 h$ .

Wyznaczenie wykresne grubości muru oporowego. Sposób I. (fig. 444) dla warunku, aby w szukanej grubości muru leżała wypadkowa w  $\frac{1}{3}$  podstawy. Przyjęcia próbne  $L, L_1$ ; odchyłki wypadkowej od  $\frac{1}{3}$  podstawy odcinane w górę jako błąd przyjęcia, poczem linja błędów i szukana szerokość podstawy  $L_2 A$ .

Sposób II. (fig. 445) dla warunku, aby naprężenie  $\sigma$  u krawędzi podstawy wynosiło określoną wartość  $k$ . Rysuje się krzywą naprężeń krawędziowych dla różnych grubości muru; przecięcie jej z wartością  $\frac{k}{\sigma}$  wskazuje grubość szukaną.

Korzystny przekrój murów oporowych. I. Zmiana prostokąta na romboid (fig. 446) daje ze względu na ilość materiału mury coraz korzystniejsze ze zmniejszającym się kątem  $\alpha$ ; potrzebne grubości  $g_1, g_2, g_3$  wypadają coraz mniejsze. To jednak mija się często z celem muru oporowego (podparcie stromej ściany ziemnej, skrócenie stoku).

II. Zmiana prostokąta na trapez (fig. 447) daje mur korzystniejszy ze względu na położenie wypadkowej, mimo mniejszego przekroju.

III. Profil trapezowy podcięty (fig. 448) jest jeszcze korzystniejszy ze względu na położenie wypadkowej, bo stosuje się lepiej do przebiegu linii

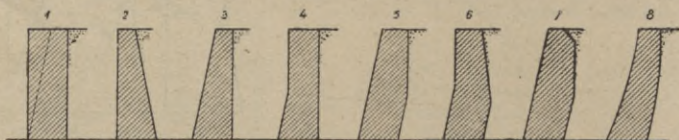


Fig. 449.

ciśnienia w dolnej części muru. Jest to zwykły profil normalny murów oporowych. Foerster (Taschenbuch) podaje dobre zestawienie (fig. 449) różnych przekrojów, w których szereg 1—3, 4—8 daje przekroje muru coraz korzystniejsze ze względu na ilość materiału, oraz na przebieg linii ciśnienia.

## VIII. Teorja żelbetu.

Opracował

inż. dr. Maksymiljan Thullie.

### I. Własności mechaniczne betonu i żelaza (por. także „Materiały budowlane“).

#### 1. Własności betonu.

Beton jest to mieszanina cementu, piasku i żwiru lub tłuczni, względnie kruszywa, która w połączeniu z pewną ilością wody twardnieje. Dla żelbetu beton musi mieć pewne wyborowe własności, mianowicie musi być więcej wytrzymały, niż użyty bez żelaza, musi być jednostajny i bez próżnych miejsc, posiadać przyczepność do żelaza i chronić je od rdzy i ognia.

Cement używany do betonu jest portlandzki i powoli wiążący (por. dział: Materiały budowlane. Cementy).

Kruszywem nazywamy kamień tłuczony (tłuczeń) lub żwir o różnych wielkościach ziarn z dodatkiem piasku w takiej ilości, aby piasek wypełniał, ile możliwości, wszystkie próżnie, zawarte między grubszymi ziarnami kamienia. Dla cieńszych części zespołów żelbetowych kruszywo zwykle składa się tylko z piasku o różnej wielkości ziarn piasku, dla innych części jednak ze względu na większą gęstość betonu dodaje się też tłuczni lub żwiru aż do grubości 3 cm, co zależne jest od wymiarów i odstępów żelaza. Kruszywo musi być wolne od wszelkich domieszek, które wpływają szkodliwie na wytrzymałość betonu, oraz wytrzymałe na mróz i zmiany atmosferyczne.

Kruszywo wydziela się zwykle wedle objętości, cement wedle wagi, przeliczając przy luźnym napełnieniu naczynia wedle ciężaru 1200 do 1300 kg/m<sup>3</sup>. Zazwyczaj stosunek ten należy wyznaczyć próbami. Stosunek piasku do kamienia zwykle waha się od 1:1,5 do 1:2. Stosunek mieszanki oznacza się albo ilością każdego materiału z osobna, więc 1:1,5:3 aż

do 1:3:6, albo też zaznacza się stosunek objętości cementu do objętości kruszywa 1:3, 1:4, 1:5. Stosunek 1:4 i 1:5 jest dla żelbetu najczęściej używany, 1:3 używa się rzadziej przy cienkich i silnie obciążonych częściach budowli. Rozporządzenie polskie nakazuje podawać ilość cementu w  $kg$  na  $1 m^3$  kruszywa. Nie może ona być mniejsza dla żelbetu niż  $300 kg$  na  $1 m^3$  kruszywa, dla części zginanych nie powinna ona przekraczać  $500 kg$  na  $1 m^3$  kruszywa.

Ponieważ przy mieszaniu części składowych betonu jeden materiał wypełnia częściowo próżnię w drugim, więc suma objętości części składowych jest większa od objętości betonu.

Na  $1 m^3$  betonu potrzeba przeciętnie:

dla stosunku mieszanki	1:3	1:3,5	1:4	1:4,5	1:5	1:5,5	1:6
cementu w $kg$	472	420	376	343	314	290	270
kruszywa w $m^3$	1,01	1,05	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16

Ilość wody musi być taka, ażeby wymieszany beton dawał się do form wlewać lub też, o ile ma być ubijany, ażeby się w rękach dawał ugniatać w kule. Wedle ilości wody rozróżniamy beton wilgotny, mokry (plastyczny) i lany (por. „Materiały budowlane“).

Wytrzymałość betonu powinna wynosić po 28 dniach dla kostek  $20 cm$   $140 kg/cm^2$ , po 45 dniach  $170 kg/cm^2$ , chociaż przepisy polskie tego nie ustalają. Jeżeli nie wykonywamy przy mniejszych robotach prób wytrzymałości, można przyjąć wedle przepisów z 1927:

przy $500 kg$ cementu na $1 m^3$ kruszywa	$200 kg/cm^2$ ,
„ $400 kg$ „ „ $1 m^3$ „	$170 kg/cm^2$ ,
„ $300 kg$ „ „ $1 m^3$ „	$140 kg/cm^2$ ,
„ $200 kg$ „ „ $1 m^3$ „	$100 kg/cm^2$ ,
„ $100 kg$ „ „ $1 m^3$ „	$60 kg/cm^2$ .

Wytrzymałość po 8 dniach należy przyjmować  $2/3$  wytrzymałości po 28 dniach.

W ostatnich czasach zaczęto wyrabiać cement wyborowy, najpierw we Francji topiony, który przedstawia znacznie większą wytrzymałość na ciśnienie, niż zwykły cement portlandzki, zwłaszcza w pierwszych dniach po wykonaniu. Rozp. niemieckie z r. 1925 żąda od cementów wyborowych przy próbach wedle norm dla cementu portlandzkiego następujących najmniejszych wytrzymałości:

Po 3 dniach (1 dzień w wilgotnem powietrzu, 2 dni pod wodą):

wytrzymałość na ciśnienie	$250 kg/cm^2$ ,
„ „ „ „ ciągnięcie	$25 kg/cm^2$ .

Po 28 dniach (1 dzień w wilgotnem powietrzu, 2 dni pod wodą, reszta na powietrzu):

wytrzymałość na ciśnienie	$450 kg/cm^2$ ,
„ „ „ „ ciągnięcie	$35 kg/cm^2$ .

Wytrzymałość betonu przy użyciu cementu wyborowego jest odpowiednio większa.

Napężenie dopuszczalne wedle polskich przepisów dla mostów por. str. 835, dla budownictwa por. dodatek do działu „Statyka budowli“.

Spółczynnik sprężystości betonu jest inny na ciśnienie, inny na ciągnięcie, a wogóle zmienny z napężeniem. Dla uzmysłowienia zmienności podajemy tablicę 1. wedle Mörscha.

W praktyce przyjmujemy przeciętne wartości, a to dla małych naprężeń  $E_b = 210\,000 kg/cm^2$ , dla wielkich  $E_b = 140\,000 kg/cm^2$ , a że dla żelaza  $E_s = 2\,100\,000 kg/cm^2$ , więc  $n = E_s : E_b = 10$  dla małych, zaś  $n = 15$  dla wielkich naprężeń.

Tablica 1.

Naprężenia w $kg/cm^2$	Mieszanka 1:3			Mieszanka 1:4	
	<i>E</i> na ściskanie w $kg/cm^2$ przy ilości wody				
	8%	14%		8%	14%
	po 3 mies.	po 3 mies.	po 2 latach	po 3 mies.	po 3 mies.
3	300 000	272 000	—	273 000	250 000
9,2	287 000	260 000	300 000	257 000	219 000
12,2	284 000	254 000	290 000	250 000	215 000
18,3	273 000	241 000	286 000	241 000	203 000
24,5	266 000	235 000	283 000	235 000	198 000
30,6	261 000	227 000	280 000	230 000	191 000
36,8	257 000	222 000	278 000	225 000	185 000
49,0	247 000	216 000	272 000	218 000	177 000
61,3	240 000	209 000	268 000	211 000	170 000
73,7	—	—	263 000	—	—

Wydłużenie betonu wzmocnionego. Beton w żelbecie pęka przy tem samym naprężeniu, co beton sam. Bardzo małe pęknięcia pojawiają się przy wydłużeniu 0,00006 do 0,0001 już przy bardzo małym naprężeniu żelaza. Pęknięcia poprzedzają plamy mokre, które wskazują na rozluźnienie spójności betonu.

Ponieważ pęknięcia przy powtarzających się naprężeniach rozszerzają się, przeto przy obliczeniach statycznych nie można liczyć na wytrzymałość betonu na ciągnięcie.

Kurczenie i rozszerzanie się betonu z wiekiem zależne jest od tego, czy beton znajduje się w suchem miejscu, czy w wodzie lub mokrym piasku. W pierwszym wypadku następuje kurczenie się, w drugim rozszerzanie (pęcznienie) betonu. Spółczynnikiem kurczenia się nazywamy skrócenie jednostki długości. Spółczynnik ten  $\beta$  jest tem większy, im beton jest tłustszy, tj. im więcej cementu zawiera. Przy mieszaniu 1:3 do 1:5 może on wzrosnąć do 0,5 mm/m, co odpowiada ciśnieniu betonu 24  $kg/cm^2$ , a ciągnięciu 18  $kg/cm^2$ . W obliczeniu wyznaczamy zwykle te naprężenia jako zmniejszenie ciepłoty o 10°C przy zeszkładach statycznie niewyznaczalnych. Cement wyborowy ma z początku skurez 3 razy tak wielki, jak zwykły. Po 90 dniach jest skurez dla obu cementów równy.

Spółczynnik rozszerzalności betonu wynosi około 0,000010, żelaza 0,000012. Różnica jest tak mała, że sił, powstających wskutek tej różnicy przy ogrzaniu, można nie uwzględniać. Przyjmuje się najczęściej ten sam współczynnik 0,00001. Beton jest złym przewodnikiem ciepła, to też w budynkach zazwyczaj nie uwzględniamy wpływu zmiany ciepłoty, tylko urządzamy co 30 do 50 m szczeliny, umożliwiające rozszerzanie się. Przy mostach i budowlach na wolnem powietrzu uwzględnia się zwykle zmianę ciepłoty o  $\pm 15^\circ C$ . Cyfrę tę zmniejsza się do 10°C dla części dźwigarów chronionych nasypem czy żwirówką, gdy każdy wymiar przekroju jest większy od 70 cm, albo też w budynkach osłoniętych.

Wytrzymałość betonu przy zginaniu jest większa niż wytrzymałość na ciśnienie w stosunku 1:1,5 do 1:1,7. Tak samo ma się z wytrzymałością na ciągnięcie, która wynosi około 12  $kg/cm^2$  po 45 dniach. Ponieważ zaś stosunek ten wynosi 1,8 do 2, więc przy zginaniu beton pęka dopiero przy 22 do 24  $kg/cm^2$ , a nawet i przy naprężeniu wyższem.

2. Własności żelaza.

Na wkładki żelazne używane jest zazwyczaj żelazo zlewne, odpowiadające przepisom dla żelaza budowlanego. Żelazo powinno mieć wytrzymałość większą niż  $3700 \text{ kg/cm}^2$ , a mniejszą niż  $4500 \text{ kg/cm}^2$ , przyczem wydłużenie ma być tak wielkie, aby iloczyn z wytrzymałości (w  $t/cm^2$ ) i wydłużenia (w procentach) wynosił dla próbek wyciętych w kierunku walcowania co najmniej 100, dla próbek prostopadle do kierunku walcowania 90.

Dla stali zlewnej wytrzymałość ma wynosić najmniej  $4500 \text{ kg/cm}^2$  przy wydłużeniu jednostkowym najmniej 25%. Granica ciastowatości powinna wynosić dla żelaza zlewego co najmniej  $2250 \text{ kg/cm}^2$ , dla stali zlewnej  $3000 \text{ kg/cm}^2$ .

Próbki żelaza należy nawinąć na walcu o średnicy, równej 2-krotnemu najmniejszemu wymiarowi przekroju próbki, przyczem na stronie ciągniętej nie mogą się pokazać żadne ślady rozerwania żelaza.

Żelazo wzmacniające może mieć przekrój prostokątny, wieloboczny lub kołowy, powierzchnie płaskie lub karbowane, a największe wymiary przekroju w jakimkolwiek kierunku nie powinny przekraczać 50 mm.

Spółczynnik sprężystości żelaza zlewego wynosi 2 100 000  $\text{kg/cm}^2$ .

Przeważnie używa się wkładek z żelaza okrągłego. Ciężar i przekrój wkładek podaje tabl. 2. Połączenie żelaza okrągłego, gdy długość jego jest niewystarczająca, może być trojaki: 1. zapomocą spawania; jest to

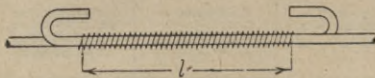


Fig. 450.

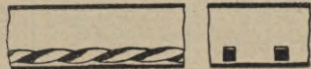


Fig. 451.

połączenie dobre, lecz drogie; 2. zapomocą ześrubowania z nasadzoną rurą gwintowaną; połączenie drogie, dobre, lecz tylko tam do użycia, gdzie niema obawy rozsądzenia betonu; 3. zapomocą przedłużenia pręta o długość  $l$  (fig. 450); zachodzące na siebie pręty łączy się drutem, a końce obu prętów zaginamy. Długość  $l$  oblicza się ze względu na przyczepność  $\tau_p$ , mianowicie siła rozciągająca  $R \leq \tau_p d \pi l$ , więc:

$$l \geq \frac{R}{\tau_p d \pi} \dots \dots \dots (1)$$

Pomijamy tu rozmaite pręty karbowane, używane w Ameryce, jak żelazo skręcane Ransome'a (fig. 451) i Johnsona (fig. 452). Są one droższe od żelaza okrągłego, a nie przedstawiają znacznych korzyści, u nas więc nieużywane. Natomiast u nas używane są:



Fig. 452.



Fig. 453.

1. Żelazo rozsuwane (fig. 453), które wykonywuje się w ten sposób, że w blasze robi się nacięcia i naciąga tak, że powstaje krata. Wymiary żelaza rozsuwanego są zwykle 4,80 lub 2,40 m, dlatego używane tylko dla tych rozpiętości.

Tablica 2.  
Żelazo okrągłe (zlewne). Ciężar gat. 7,85.

Średnica mm	Ciężar kg/m	Obwód cm	Przekrój cm <sup>2</sup>	Powierzchnie przekroju prętów w cm <sup>2</sup>									
				2	3	4	5	6	7	8	9	10*	
5	0,154	1,57	0,20	0,39	0,59	0,78	0,98	1,18	1,37	1,57	1,77	1,96	
6	0,222	1,88	0,28	0,56	1,13	1,18	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54	2,83	
7	0,302	2,20	0,38	0,77	1,54	1,54	1,92	2,31	2,69	3,08	3,46	3,85	
8	0,395	2,51	0,50	1,00	1,51	2,01	2,51	3,01	3,52	4,02	4,52	5,03	
9	0,499	2,83	0,64	1,27	1,91	2,54	3,18	3,82	4,45	5,09	5,73	6,36	
10	0,616	3,14	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	7,85	
11	0,746	3,46	0,95	1,90	2,85	3,80	4,75	5,70	6,65	7,60	8,55	9,50	
12	0,888	3,77	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,91	9,05	10,18	11,31	
13	1,042	4,08	1,33	2,65	3,98	5,31	6,64	7,96	9,29	10,62	11,95	13,27	
14	1,208	4,40	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,77	12,32	13,86	15,39	
15	1,387	4,71	1,77	3,53	5,30	7,07	8,84	10,60	12,37	14,14	15,91	17,67	
16	1,578	5,03	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,09	20,11	
17	1,782	5,34	2,27	4,54	6,81	9,08	11,35	13,62	15,89	18,16	20,43	22,70	
18	1,998	5,65	2,54	5,09	7,63	10,18	12,72	15,26	17,81	20,36	22,90	25,45	
19	2,226	5,97	2,84	5,67	8,51	11,34	14,18	17,02	19,85	22,68	25,52	28,35	
20	2,466	6,28	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,84	21,99	25,14	28,28	31,42	
21	2,714	6,60	3,46	6,93	10,39	13,85	17,32	20,78	24,24	27,70	31,17	34,64	
22	2,984	6,91	3,80	7,60	11,40	15,21	19,01	22,81	26,61	30,41	34,21	38,01	
23	3,261	7,23	4,15	8,31	12,46	16,62	20,77	24,93	29,08	33,24	37,40	41,55	
24	3,551	7,54	4,52	9,05	13,57	18,10	22,62	27,14	31,67	36,19	40,71	45,24	
25	3,853	7,85	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18	49,09	



26	4,168	8,17	5,31	10,62	15,93	21,24	26,55	31,86	37,17	42,47	47,78	53,09
27	4,495	8,48	5,73	11,45	17,18	22,90	28,63	34,35	40,08	45,80	51,53	57,26
28	4,834	8,80	6,16	12,31	18,47	24,63	30,79	36,94	43,10	49,26	55,82	61,58
29	5,185	9,11	6,61	13,21	19,81	26,42	33,02	39,62	46,23	52,84	59,44	66,05
30	5,549	9,42	7,07	14,14	21,21	28,27	35,34	42,41	49,48	56,55	63,62	70,69
31	5,925	9,74	7,55	15,09	22,64	30,19	37,74	45,29	52,83	60,38	67,93	75,48
32	6,313	10,05	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,26	56,30	64,34	72,38	80,42
33	6,714	10,37	8,55	17,11	25,66	34,21	42,76	51,32	59,87	68,42	76,97	85,53
34	7,127	10,68	9,08	18,16	27,24	36,32	45,40	54,48	63,56	72,63	81,71	90,79
35	7,553	11,00	9,62	19,24	28,86	38,48	48,41	57,73	67,34	76,97	86,54	96,21
36	7,990	11,31	10,18	20,36	30,54	40,72	50,90	61,07	71,26	81,43	91,61	101,79
37	8,440	11,62	10,75	21,50	32,26	43,01	53,76	64,51	75,27	86,02	96,77	107,52
38	8,903	11,94	11,34	22,68	34,02	45,36	56,70	68,04	79,38	90,73	102,07	113,41
39	9,378	12,25	11,95	23,89	35,84	47,78	59,73	71,68	83,62	95,57	107,51	119,46
40	9,865	12,57	12,57	25,13	37,70	50,26	62,83	75,40	87,96	100,53	113,09	125,66
41	10,364	12,88	13,20	26,41	39,61	52,81	66,01	79,22	92,42	105,63	118,82	132,03
42	10,876	13,19	13,85	27,71	41,56	55,42	69,27	83,12	96,98	110,83	124,68	138,54
43	11,400	15,51	14,52	29,04	43,56	58,09	72,61	87,13	101,65	116,18	130,70	145,22
44	11,936	13,82	15,21	30,41	45,61	60,82	76,03	91,23	106,43	121,64	136,84	152,05
45	12,485	14,14	15,90	31,81	47,71	63,62	79,52	95,42	111,33	127,23	143,13	159,04
46	13,046	14,45	16,62	33,24	49,86	66,48	83,10	99,71	116,34	132,95	149,57	166,19
47	13,619	14,77	17,35	34,70	52,05	69,40	86,75	104,10	121,45	138,79	156,14	173,49
48	14,205	15,08	18,10	36,19	54,29	72,38	90,48	108,58	126,67	144,77	162,86	180,97
49	14,803	15,39	18,86	37,71	56,57	75,43	94,28	113,14	132,00	150,86	169,72	188,57
50	15,413	15,71	19,64	39,27	58,90	78,54	98,17	117,81	137,44	157,08	176,71	196,35

2. Żelazo Kahna (fig. 454). Boczne wypustki nadcina się i zagina pod kątem około  $45^{\circ}$ , pozostają one jednak stale połączone z głównym przekrojem. Przekroje żelaza przedstawia fig. 455. Odgięte pręty muszą być tak długie, aby zachodziły aż do środka ciśnienia. Tablica 3. podaje wymiary wedle cennika fabryki Jordahl i Spół. w Berlinie.

Tablica 3.

Żelazo Kahna. *D* i *C* mają przekrój trapezowy.

Kształt przekroju	Przekrój $cm^2$	Ciężar $kg/m$	Przekrój bez prętów odgiętych $cm^2$	Przekrój jednego pręta odgiętego $cm^2$
D	2,20	1,70	1,64	0,28
C	1,80	1,40	1,58	0,21
B	0,70	0,56	—	—
A	0,85	0,65	—	—
I	2,55	2,00	1,59	0,48
II	5,10	4,00	3,34	0,88
III	9,50	7,4	7,70	0,90
IV	12,75	10,0	10,28	1,23

3. Belki kratowe bez nitów (fig. 456) z blach lub płaskowników, wykonane przez nacięcie i rozciągnięcie. Korzyść: możliwość zawieszania deskowania, wada: mała zmienność przekroju, stąd droższe w użyciu niż żelazo okrągłe.

4. Żelaza dla zawieszania łożysk (fig. 457).

Układanie żelaza. Żelazo przed ułożeniem w deskowaniu należy oczyścić z wszelkich nieczystości, usunąć rdzę, jeżeli odpada łuskami. Wkładki

żelazne w deskowaniu trzeba tak silnie umocować, aby przy nanoszeniu betonu nie zmieniły swego kształtu ani położenia. Wkładki należy zakotwić przy pomocy zagięcia końców.

Odstęp wkładek między sobą dla tego samego rodzaju wzmocnienia powinien być w świetle równy lub większy od grubości wkładek, nie po-

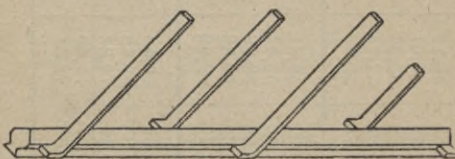


Fig. 454.



Fig. 455.



Fig. 456.

winien jednak schodzić niżej 2 *cm*. Jeżeli odstęp ten wyjątkowo zmniejszymy do 15 *mm*, to trzeba użyć zaprawy cementowej tłustej, aby wkładki żelazne dokładnie objęły. Od powierzchni zewnętrznej powinna odgraniczać żelazo warstwa betonu najmniej 1 *cm* przy płytach, w innych zespolach 2 *cm*, od powierzchni strzemiion najmniej 1,5 *cm* (fig. 458).

Przyczepność żelaza do betonu wzrasta z wiekiem, jest większa dla żelaza ze skórką walcową niż bez niej, zmniejsza się z długością pręta za-

betonowanego, jest większa dla większych przekrojów, niż dla mniejszych, większa przy ciśnieniu, niż przy ciągnięciu. Doświadczenia Bacha wykazały, że przez haki początek przesunięcia nie o wiele się opóźnia, że jednak wytrzymałość się zwiększa o 40 do 50%. Ponieważ pręty dolne bez udziału górnych nie mogą się przesunąć, należy wedle doświadczeń Bacha do obliczania naprężeń przyczepnych przyjąć oprócz powierzchni prętów dolnych także powierzchnię prętów górnych.

Opór przeciw przesunięciu polega właściwie w małej mierze na przyczepności, w większej (50 do 80%) na tarcii, które zależnem jest od chropowatości powierzchni. Jednak cały opór przeciw przesunięciu nazywamy tu zwyczajnie przyczepnością.

Ponieważ haki prostopadłe lub o kształcie  $\sqsubset$  przeszkadzają skutecznie przesunięciu żelaza i ponieważ rozkład naprężeń przyczepnych jest bardzo

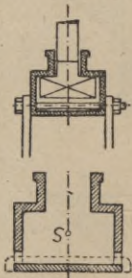


Fig. 457.

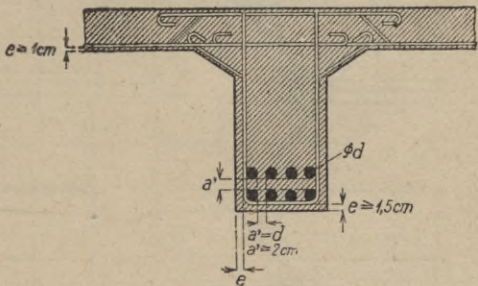


Fig. 458.

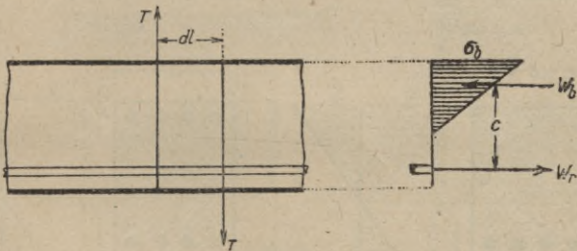


Fig. 459.

niepewny, a dobrze skonstruowane belki nie łamią się zazwyczaj przez wyćnięciem przyczepności, przeto w ostatnich czasach nie obliczamy naprężeń przyczepnych, jeżeli żelaza zakończymy hakami. Rozporządzenie polskie dla mostów z 1925 dozwala opuścić obliczenie na przyczepność, jeżeli wkładki są zakończone hakami, a średnica żelaza nie przekracza  $\frac{1}{300}$  rozpiętości, zaś niemieckie dla wkładek o średnicy 26 mm i mniej.

Jeżeli na pręt o średnicy  $d$ , długości  $l$  działa osiowo siła  $P$ , to obliczamy  $\tau_p$  wedle równania (1). Jeżeli przyjmiemy, że siła poprzeczna  $T$  jest na długości  $dl$  (fig. 459), to  $T dl = W_r \cdot c = \tau_p \cdot O \cdot dl \cdot c$ , stąd:

$$\tau_p = \frac{T}{O c} \dots \dots \dots (2)$$

jeżeli  $O$  oznacza obwód przekroju pręta,  $c$  odstęp środka ciśnienia od środka ciągnięcia.

## II. Obliczanie naprężeń belek zginanych.

## 3. Zasady obliczenia.

Przy obliczaniu belek żelbetowych na zginanie robimy następujące założenia: żelazo i beton tak są ze sobą połączone, że względem siebie się nie przesuwają, więc belka stanowi jedną całość, a oba materiały mają naprężenia proporcjonalne do ich współczynników sprężystości, oraz że przekroje po ugięciu pozostają płaskie.

Ponieważ współczynnik sprężystości betonu zmienia się z naprężeniem, zaś wytrzymałość betonu na ciągnięcie jest mała, a po jej przewyżczeniu działa tylko żelazo, przeto rozróżniamy kilka faz podczas obciążania belek.

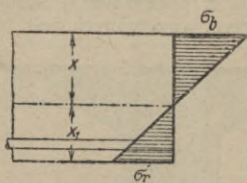


Fig. 460.

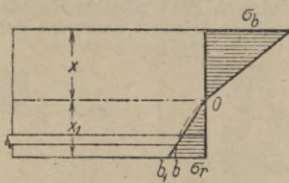


Fig. 461.

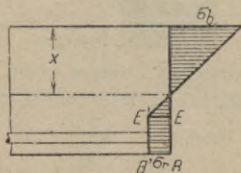


Fig. 462.

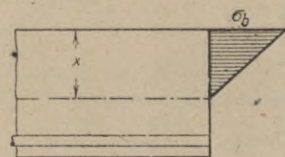


Fig. 463.

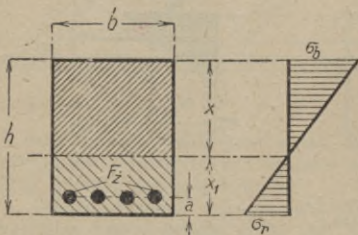


Fig. 464.

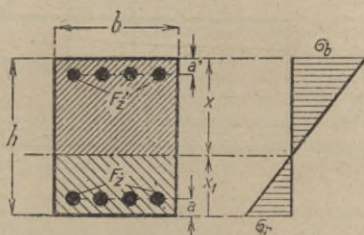


Fig. 465.

Faza I dla małych naprężeń (fig. 460). Współczynniki sprężystości na rozciąganie i ściskanie są równe, więc linia naprężeń jest prosta.

Dla nieco większych naprężeń należałoby uwzględnić zmienność współczynnika sprężystości. Zamiast krzywej  $O b$  (fig. 461) przyjmuje Melan prostą  $O b_1$ , a więc inny współczynnik sprężystości na ciśnienie  $E_b$  i na ciągnięcie  $E_r$ .

Faza II a (fig. 462) dla nieco większych naprężeń. Tu Considère przyjmuje prostą  $E'B' \parallel EB$ , przypuszczając, że beton rozciąga się dalej bez pęknięć. Obecnie wedle tej fazy nie oblicza się belek.

Faza II b dla większych naprężeń. Przypuszczamy, że beton pękł, a na ciągnięcie działa tylko żelazo. Obecnie przyjmujemy zazwyczaj dla ciśnienia linię prostą (fig. 463).

Faza III następuje, gdy ciągnięcie żelaza przekroczy granicę ciastowatości. Wtedy ciśnienie betonu nagle wzrasta i doprowadza do złamania belki.

4. Faza I.

Belka prostokątna pojedynczo uzbrojona w pasie (fig. 464). Ustawiając równanie momentów naprężeń ze względu na oś obojętną z przyjęciem  $n = 10$ , otrzymamy odstęp osi obojętnej:

$$x_1 = \frac{b h^2 + 2 a n F_z}{2 (b h + n F_z)}; \quad x_1 = \frac{b h^2 + 20 a F_z}{2 (b h + 10 F_z)} \dots (3 i 4)$$

Naprężenia obliczamy ze wzorów:

$$\tau_r = \frac{M x_1}{J}; \quad \sigma_b = \frac{M (h - x_1)}{J}; \quad \sigma_z = \frac{10 M (x_1 - a)}{J} \dots (5)$$

przyczem:  $J = \frac{1}{3} b [x_1^3 + (h - x_1)^3] + 10 F_z (x_1 - a)^2 \dots (6)$

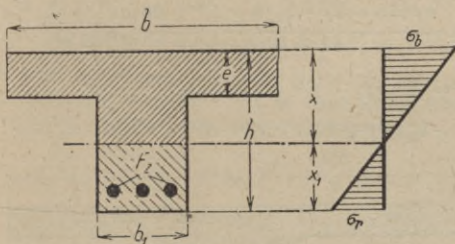


Fig. 466.

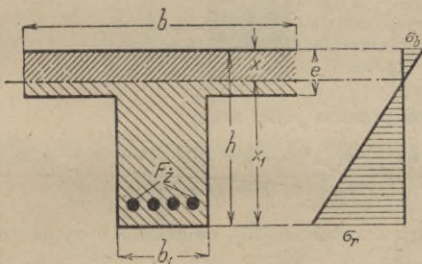


Fig. 467.

Belka prostokątna obustronnie uzbrojona (fig. 465). Tu otrzymamy odstęp osi obojętnej:

$$x_1 = \frac{b h^2 + 20 [a F_z + (h - a') F'_z]}{2 [b h + 10 (F_z + F'_z)]} \dots (7)$$

$$J = \frac{1}{3} b [x_1^3 + (h - x_1)^3] + 10 F_z (x_1 - a)^2 + 10 F'_z (h - x_1 - a')^2 \dots (8)$$

Naprężenia obliczymy z (5), a

$$\sigma'_z = \frac{10 M (h - x_1 - a')}{J} \dots (9)$$

Belka teowa pojedynczo uzbrojona. Tu rozróżniamy dwa wypadki.

a) Oś obojętna nie przecina płyty (fig. 466). Wtedy mamy:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b e (2 h - e) + b_1 (h - e)^2 + 20 \cdot a F_z}{b e + b_1 (h - e) + 10 F_z} \dots (10)$$

$$J = \frac{1}{3} (b x^3 - (x - e)^3 (b - b_1) + b_1 x_1^3) + 10 F_z (x_1 - a)^2 \quad \dots (11)$$

Napężenia obliczamy wedle (5).

b) Gdy oś obojętna przecina płytę, otrzymamy (fig. 467):

$$x = \frac{1}{2} \frac{b e^2 + b_1 (h^2 - e^2) + 20 F_z (h - a)}{b e + b_1 (h - e) + 10 F_z} \quad \dots (12)$$

$$J = \frac{1}{3} (b x^3 + b (e - x)^3 + b_1 [(h - x)^3 - (e - x)^3]) + 10 F_z (x_1 - a)^2 \quad (13)$$

Napężenia wyznaczamy wedle (5).

**Belka teowa obustronnie uzbrojona.** Jeżeli oś obojętna nie przecina płyty, otrzymamy:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b e (2h - e) + b_1 (h - e)^2 + 20 [a F_z + (h - a') F'_z]}{b e + b_1 (h - e) + 10 (F_z + F'_z)} \quad \dots (14)$$

$$J = \frac{1}{3} \left\{ b \cdot x^3 - (h - x_1 - e)^3 \cdot (b - b_1) + \right. \\ \left. + b_1 x_1^3 \right\} + 10 [F_z (x_1 - a)^2 + F'_z (h - x_1 - a')] \quad \dots (15)$$

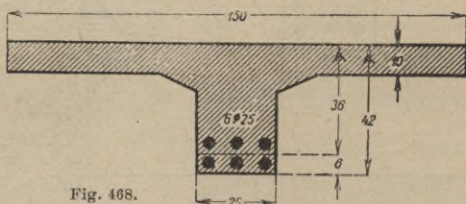


Fig. 468.

Jeżeli oś obojętna przecina płytę, mamy:

$$x = \frac{1}{2} \frac{b e^2 + b_1 (h^2 - e^2) + 20 [F_z (h - a) + F'_z a']}{b e + b_1 (h - e) + 10 (F_z + F'_z)} \quad \dots (16)$$

Dla  $J$  ważne tu jest wyrażenie (13), zwiększone o wyraz  $10 F'_z (x - a')^2$  (Fig. 468).

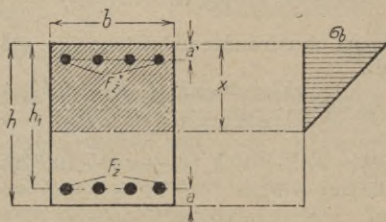


Fig. 469.

### 5. Faza II b.

**Belka prostokątna obustronnie uzbrojona** (fig. 469). Oś obojętną znajdziemy, tworząc sumę momentów statycznych przekroju równą zero i przyjmując  $n = 15$ .

Więc:  $\frac{1}{2} b x^2 - 15 F'_z (h_1 - x) + 15 F'_z (x - a') = 0 \dots (17)$

a stąd:  $x = 15 \frac{F'_z + F'_z a'}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2b(F'_z h_1 + F'_z a')}{15(F'_z + F'_z a')^2}} \right] \dots (18)$

Dla belki pojedynczo uzbrojonej  $F'_z = 0$ , więc:

$$x = \frac{15 F'_z}{b} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2b h_1}{15 F'_z}} \right) \dots (19)$$

Naprężenia otrzymamy następnie wedle wzorów:

$$\sigma_b = \frac{Mx}{J}, \quad \sigma_z = \frac{15 M (h_1 - x)}{J}, \quad \sigma'_z = \frac{15 M (x - a')}{J} \dots (20)$$

przyczem:  $J = \frac{1}{3} b x^3 + 15 F'_z (h_1 - x)^2 + 15 F'_z (x - a')^2 \dots (21)$

Naprężenia belki pojedynczo uzbrojonej dadzą się jeszcze inaczej wyznaczyć. Tworzymy sumę momentów raz ze względu na środek ściskania, drugi raz ze względu na środek rozciągania i otrzymamy:

$$M = F'_z \left( h_1 - \frac{x}{3} \right) \sigma_z, \quad \text{oraz} \quad M = \frac{b x}{2} \left( h_1 - \frac{x}{3} \right) \sigma_b,$$

a stąd:  $\sigma_z = \frac{M}{F'_z \left( h_1 - \frac{x}{3} \right)}, \quad \sigma_b = \frac{2 M}{b x \left( h_1 - \frac{x}{3} \right)} \dots (22)$

Obliczenie naprężeń zapomocą tablic Foerстера (tablica 4.): Wyznamy  $F'_z$  w stosunku do powierzchni użytecznej  $b h_1$ . Zatem:

$$F'_z = \frac{b h_1}{m} \dots (23)$$

Wstawivszy tę wartość w równanie (19), otrzymamy:

$$x = \frac{15}{m} \left[ \sqrt{1 + \frac{2m}{15}} - 1 \right] h_1 = k h_1 \dots (24)$$

Dalej:  $\sigma_b = \frac{2 M}{b x (h_1 - \frac{1}{3} x)} = \frac{2 M}{b k h_1 (h_1 - \frac{1}{3} k h_1)} = k' \frac{M}{b h_1^2} \dots (25)$

gdzie:  $k' = \frac{2}{k(1 - \frac{1}{3} k)}$

Wreszcie:  $\sigma_z = \frac{M}{F'_z (h_1 - \frac{1}{3} x)} = \frac{M}{\frac{b h_1}{m} (h_1 - \frac{1}{3} k h_1)} = k'' \frac{M}{b h_1^2} \dots (26)$

gdzie:  $k'' = \frac{m}{1 - \frac{1}{3} k}$

Obliczenie ułatwia tablica 4.

Belka teowa podwójnie uzbrojona. Tu musimy znów rozróżnić wypadek, gdy oś obojętna przecina płytę i gdy oś obojętna nie przecina płyty. W pierwszym wypadku możemy wprost użyć wzorów dla przekroju prostokątnego, bo rozciągania poniżej osi obojętnej i tak nie uwzględniamy, więc obojętne jest, czy przekrój jest pełny, czy też mamy tylko żebro.

Tablica 4.

$m = \frac{bh_1}{F_z}$	$k = \frac{x}{h_1}$	Napężenia	
		$\sigma_b$	$\sigma_z$
100	0,418	5,559	116
110	0,403	5,735	127
120	0,391	5,895	138
130	0,379	6,040	149
140	0,368	6,194	160
150	0,358	6,344	170
160	0,349	6,485	181
170	0,341	6,617	192
180	0,333	6,756	203
190	0,326	6,883	213
200	0,320	7,000	224
210	0,313	7,132	234
		$\frac{M}{bh_1^2}$	$\frac{M}{bh_1^2}$

Jeżeli oś obojętna nie przecina płyty (fig. 470), otrzymamy dla belki uzbrojonej podwójnie w analogiczny sposób, co dla belki równoległej:

$$x = - \frac{e(b - b_1) + 15(F'_z + F''_z)}{b_1} + \sqrt{\left(\frac{(b - b_1)e + 15(F'_z + F''_z)}{b_1}\right)^2 + \frac{e^2(b - b_1) + 30(F'_z h_1 - F''_z a')}{b_1}} \quad (27)$$

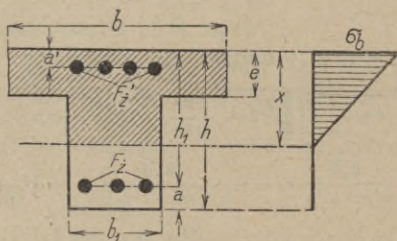


Fig. 470.

$$\text{Dalej: } \sigma_b = \frac{Mx}{J_1}, \quad \sigma_z = \frac{15M(h_1 - x)}{J_1}, \quad \sigma'_z = \frac{15M(x - a')}{J_1} \quad (28)$$

Wreszcie:

$$J_1 = \frac{1}{3} b x^3 - \frac{1}{3} (b - b_1)(x - e)^3 + 15 F'_z (h_1 - x)^2 + 15 F''_z (x - a')^2 \quad (29)$$

Dla belki teowej pojedynczo uzbrojonej jest  $F''_z = 0$ , więc:

$$x = - \frac{(b - b_1)e + 15 F'_z}{b_1} + \sqrt{\left(\frac{(b - b_1)e + 15 F'_z}{b_1}\right)^2 + \frac{(b - b_1)e^2 + 30 F'_z h_1}{b_1}} \quad (30)$$

$$\text{oraz: } J_1 = \frac{1}{3} b x^3 - \frac{1}{3} (b - b_1)(x - e)^3 + 15 F'_z (h_1 - x)^2 \quad (31)$$



Przybliżony sposób wyznaczania naprężeń polega na tem, że nie uwzględniamy stosunkowo małych ciśnień w żebrze. W budownictwie da on się z korzyścią użyć, dla mostów (gdzie mamy często wysokie belki) lepiej liczyć dokładnie.

a) Dla belki teowej podwójnie uzbrojonej (fig. 471) mamy:

$$\sigma' = \sigma_b \frac{x-e}{x}, \quad \sigma'_z = 15 \sigma_b \frac{x-a'}{x}, \quad \sigma_z = 15 \sigma_b \frac{h_1-x}{x}.$$

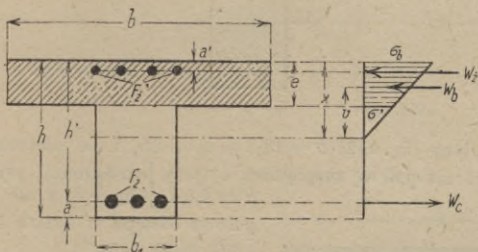


Fig. 471.

$$W_b + W_z = \frac{1}{2}(\sigma_b + \sigma') e b + \sigma'_z F'_z = W_c = \sigma_z F_z,$$

stad:

$$x = \frac{\frac{1}{2} e^2 b + 15 (F'_z a' + F_z h_1)}{e b + 15 (F'_z + F_z)} \dots \dots \dots (32)$$

$$J_{III} = \frac{1}{3} b x^3 - \frac{1}{3} (x-e)^3 b + 15 [F'_z (x-a')^2 + F_z (h_1-x)^2]. \quad (33)$$

b) Dla belki teowej pojedynczo uzbrojonej jest  $F'_z = 0$ , więc:

$$x = \frac{\frac{1}{2} b e^2 + 15 F_z h_1}{b e + 15 F_z} \dots \dots \dots (34)$$

$$J_{III} = \frac{1}{3} b x^3 - \frac{1}{3} b (x-e)^3 + 15 F_z (h_1-x)^2 \dots \dots \dots (35)$$

Odstęp środka ciężkości trapezu ciśnień od osi obojętnej niech będzie  $v$ ,

to:

$$x - v = \frac{e}{3} \cdot \frac{\sigma_b + 2 \sigma'}{\sigma_b + \sigma'},$$

a po wstawieniu wartości:  $v = x - \frac{e}{2} + \frac{e^2}{6(2x-e)} \dots \dots \dots (36)$

$$\sigma_z = \frac{M}{F_z (h_1 - x + v)}, \quad \sigma_b = \frac{\sigma_z \cdot x}{15 (h_1 - x)} \dots \dots \dots (37)$$

Przepisy polskie nakazują przyjmować szerokość użyteczną płyty  $c$  po każdej stronie żebra żelbetowych dźwigarów teowych, zależnie od odstepu żeber w świetle  $a$  i ich rozpiętości  $l$  według następującej tabliczki:

Tablica 5.

Dla $a$	od 0 do 0,25 $l$	0,50 $l$	0,75 $l$	$\geq l$
$c =$	0,5 $a$	0,45 $a$	0,40 $a$	$\frac{1}{3} a$ .

Dla pośrednich wartości należy interpolować według prawa linii prostej. Nadto należy przyjmować  $c \leq 8e$ .

Mesnager podaje wzór:

$$b = \frac{l a_1}{l + 3 a_1} \dots \dots \dots (38)$$

przyczem  $a_1$  oznacza osiowy odstęp żeber.

Rozporządzenie francuskie żąda, by  $b < \frac{1}{3} l$  i  $b < \frac{3}{4} d_1$ .

Przepisy niemieckie z r. 1926 orzekają, że płyta belki żebrowej musi mieć grubość najmniej 8 cm. Dopuszczalna szerokość płyty jest: a) przy

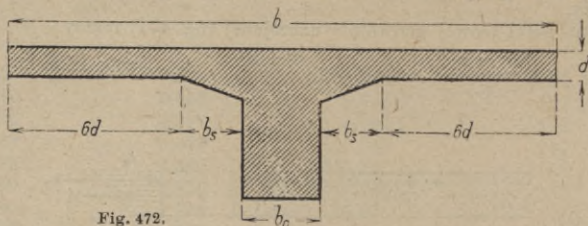


Fig. 472.

obustronnej płycie (fig. 472)  $b = 12d + b_0 + 2b_s$  i nie większa, niż odstęp środków pól i niż połowę rozpiętości, b) przy jednostronnej płycie (fig. 473)

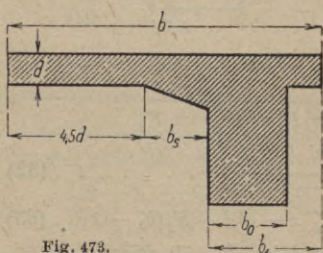


Fig. 473.

$b = 4,5d + b_0 + b_s$  a nie większa, niż połowa odstępu w świetle żeber  $+ \frac{1}{2} b_0$  i niż jedną czwartą  $l$ .

### III. Wyznaczenie wymiarów belek zginanych.

#### 6. Przekrój prostokątny.

Przy projektowaniu mamy dla danego momentu  $M$  i danych naprężeń dopuszczalnych betonu  $\sigma_{bd}$  i żelaza  $\sigma_z$  wyznaczyć wysokość użyteczną przekroju

$h_1$  i uzbrojenie  $F_z$ , przy belkach teowych dana jest też grubość płyty  $e$  i szerokość żebra  $b_1$ .

Przekrój prostokątny pojedynczo uzbrojony. Jeżeli wymiary tak obierzemy, że naprężenia betonu i żelaza są równe danym dopuszczalnym, to przekrój taki nazywamy idealnym. Przy przekroju prostokątnym belka taka jest też zwykle najtańsza. Dla tego założenia mamy:  $x : (h_1 - x) = 15 \sigma_b : \sigma_z$ ,

stąd: 
$$x = \frac{15 \sigma_b}{\sigma_z + 15 \sigma_b} h_1 = k_1 h_1 \dots \dots \dots (39)$$

albo gdy 
$$\gamma = \frac{\sigma_b}{\sigma_z}, \quad k_1 = \frac{15 \gamma}{1 + 15 \gamma} \dots \dots \dots (40)$$

Dalej:  $c = h_1 - \frac{1}{3} x = h_1 - \frac{1}{3} k_1 h_1 = h_1 (1 - \frac{1}{3} k_1) = k_2 h_1 \dots \dots (41)$

Dalej mamy: 
$$\sigma_b = \frac{2M}{b x (h_1 - \frac{1}{3} x)^2}$$

a po wstawieniu: 
$$h_1 = \sqrt{\frac{2}{k_2 k_1 \sigma_b}} \sqrt{\frac{M}{b}} = k_3 \sqrt{\frac{M}{b}} \dots \dots (42)$$

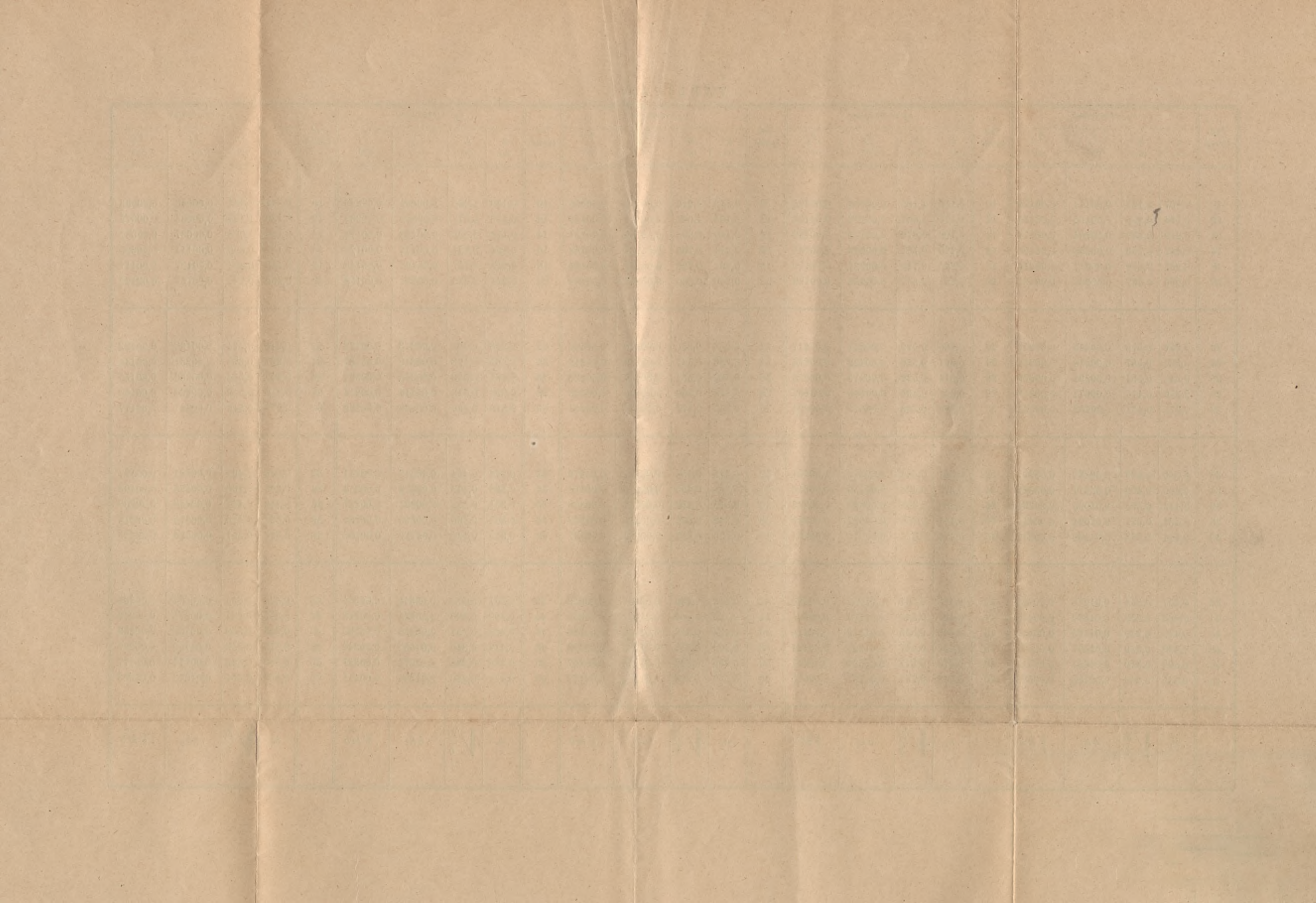
Ponieważ  $W_c \cdot c = F_z \sigma_z k_2 h_1 = M$ , więc:  $F_z = \frac{M}{h_1 \sigma_z k_2} \dots \dots (43)$

a po wstawieniu wartości z (42):  $F_z = k_4 h_1 b \dots \dots \dots (44)$

jeżeli 
$$k_4 = \frac{1}{\sigma_z k_2 \cdot k_3^2}.$$

TABLICA 6.

$\sigma_{bd}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_z = 750 \text{ kg/cm}^2$				$\sigma_{bd}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_z = 850 \text{ kg/cm}^2$				$\sigma_{bd}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_z = 900 \text{ kg/cm}^2$				$\sigma_{bd}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_z = 1000 \text{ kg/cm}^2$				$\sigma_{bd}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_z = 1200 \text{ kg/cm}^2$			
	$x$ cm	$h_1$ cm	$F_z$ cm <sup>2</sup>	$F_z$ cm <sup>2</sup>		$x$ cm	$h_1$ cm	$F_z$ cm <sup>2</sup>	$F_z$ cm <sup>2</sup>		$x$ cm	$h_1$ cm	$F_z$ cm <sup>2</sup>	$F_z$ cm <sup>2</sup>		$x$ cm	$h_1$ cm	$F_z$ cm <sup>2</sup>	$F_z$ cm <sup>2</sup>		$x$ cm	$h_1$ cm	$F_z$ cm <sup>2</sup>	$F_z$ cm <sup>2</sup>
10	0,167	1,125	0,00111	0,00124	10	0,150	1,185	0,00088	0,00105	10	0,143	1,212	0,00079	0,00095	10	0,130	1,266	0,00065	0,00826	10	0,111	1,367	0,00046	0,00063
12	0,194	0,958	0,00155	0,00149	12	0,175	1,007	0,00123	0,00124	12	0,164	1,028	0,00111	0,00113	12	0,153	1,073	0,00092	0,00982	12	0,130	1,154	0,00065	0,00076
14	0,219	0,839	0,00204	0,00171	14	0,198	0,879	0,00173	0,00152	14	0,169	0,895	0,00159	0,00131	14	0,174	0,935	0,00122	0,00114	14	0,149	1,004	0,00087	0,00087
16	0,242	0,750	0,00258	0,00193	16	0,220	0,761	0,00220	0,00168	16	0,211	0,798	0,00187	0,00148	16	0,194	0,831	0,00155	0,00128	16	0,167	0,890	0,00111	0,00099
18	0,265	0,678	0,00317	0,00216	18	0,241	0,714	0,00251	0,00179	18	0,231	0,722	0,00231	0,00164	18	0,213	0,751	0,00192	0,00143	18	0,183	0,803	0,00137	0,00111
20	0,286	0,621	0,00380	0,00237	20	0,261	0,647	0,00308	0,00199	20	0,250	0,660	0,00278	0,00184	20	0,231	0,685	0,00231	0,00158	20	0,200	0,732	0,00167	0,00122
22	0,306	0,575	0,00448	0,00258	22	0,280	0,599	0,00361	0,00217	22	0,268	0,610	0,00328	0,00196	22	0,248	0,632	0,00273	0,00172	22	0,216	0,674	0,00198	0,00133
24	0,324	0,537	0,00518	0,00278	24	0,297	0,556	0,00422	0,00234	24	0,286	0,567	0,00380	0,00212	24	0,265	0,588	0,00318	0,00187	24	0,231	0,625	0,00231	0,00144
26	0,342	0,504	0,00592	0,00299	26	0,314	0,522	0,00479	0,00250	26	0,302	0,531	0,00437	0,00232	26	0,281	0,550	0,00365	0,00201	26	0,245	0,584	0,00266	0,00155
28	0,359	0,476	0,00671	0,00318	28	0,331	0,495	0,00540	0,00267	28	0,318	0,500	0,00495	0,00248	28	0,296	0,518	0,00414	0,00214	28	0,259	0,549	0,00302	0,00166
30	0,375	0,451	0,00752	0,00338	30	0,346	0,466	0,00611	0,00285	30	0,333	0,474	0,00554	0,00264	30	0,310	0,490	0,00466	0,00228	30	0,273	0,519	0,00341	0,00177
32	0,390	0,429	0,00833	0,00357	32	0,361	0,444	0,00679	0,00301	32	0,348	0,451	0,00617	0,00279	32	0,324	0,464	0,00519	0,00241	32	0,286	0,492	0,00381	0,00187
34	0,405	0,409	0,00917	0,00377	34	0,375	0,423	0,00750	0,00318	34	0,362	0,430	0,00685	0,00294	34	0,338	0,443	0,00574	0,00254	34	0,298	0,468	0,00423	0,00198
36	0,419	0,393	0,01005	0,00394	36	0,388	0,405	0,00822	0,00333	36	0,375	0,412	0,00752	0,00308	36	0,351	0,423	0,00631	0,00267	36	0,310	0,447	0,00466	0,00208
38	0,432	0,377	0,01094	0,00413	38	0,401	0,389	0,00897	0,00349	38	0,388	0,395	0,00820	0,00323	38	0,363	0,406	0,00690	0,00280	38	0,322	0,428	0,00510	0,00218
40	0,444	0,363	0,01186	0,00430	40	0,414	0,374	0,00974	0,00364	40	0,400	0,380	0,00889	0,00337	40	0,375	0,390	0,00750	0,00293	40	0,333	0,411	0,00556	0,00228
42	0,457	0,351	0,01279	0,00447	42	0,426	0,361	0,01052	0,00380	42	0,412	0,366	0,00961	0,00352	42	0,387	0,376	0,00812	0,00305	42	0,344	0,395	0,00602	0,00238
44	0,468	0,339	0,01374	0,00472	44	0,437	0,349	0,01132	0,00395	44	0,423	0,354	0,01034	0,00365	44	0,399	0,363	0,00875	0,00318	44	0,355	0,381	0,00675	0,00248
46	0,479	0,329	0,01468	0,00489	46	0,448	0,339	0,01213	0,00410	46	0,434	0,342	0,01109	0,00380	46	0,408	0,351	0,00939	0,00330	46	0,365	0,368	0,00700	0,00258
48	0,490	0,319	0,01567	0,00507	48	0,459	0,327	0,01295	0,00424	48	0,444	0,332	0,01185	0,00393	48	0,419	0,340	0,01005	0,00342	48	0,375	0,356	0,00750	0,00267
50	0,500	0,310	0,01667	0,00517	50	0,473	0,317	0,01392	0,00441	50	0,455	0,322	0,01265	0,00407	50	0,429	0,330	0,01071	0,00354	50	0,385	0,345	0,00776	0,00277
60	0,545	0,269	0,02183	0,00593	60	0,513	0,281	0,01797	0,00505	60	0,500	0,283	0,01667	0,00472	60	0,474	0,289	0,01384	0,00411	60	0,429	0,301	0,01072	0,00323
	$\cdot h_1$	$\cdot \sqrt{\frac{M}{b}}$	$\cdot b h_1$	$\cdot \sqrt{M b}$		$\cdot h_1$	$\cdot \sqrt{\frac{M}{b}}$	$\cdot b h_1$	$\cdot \sqrt{M b}$		$\cdot h_1$	$\cdot \sqrt{\frac{M}{b}}$	$\cdot b h_1$	$\cdot \sqrt{M b}$		$\cdot h_1$	$\cdot \sqrt{\frac{M}{b}}$	$\cdot b h_1$	$\cdot \sqrt{M b}$		$\cdot h_1$	$\cdot \sqrt{\frac{M}{b}}$	$\cdot b h_1$	$\cdot \sqrt{M b}$



Wstawiając w równaniu (43) wartość za  $h_1$  z równania (42), otrzymamy:

$$F_z = \frac{\sqrt{Mb}}{\sigma_z k_2 k_3} = k_5 \sqrt{Mb} \dots \dots \dots (45)$$

Z porównania równań (44) i (45) otrzymamy wreszcie:

$$M = \frac{h_1^2 b}{k_4^2 \cdot k_5^2} = \frac{b h_1^2}{k_6} \dots \dots \dots (46)$$

Na podstawie powyższych wzorów podajemy obliczoną tabelicę 6.,

przyczem idealne uzbrojenie:  $p_i = \frac{100 F_z}{b h_1} = \frac{100}{\sigma_z k_2 k_3^2} \dots \dots \dots (47)$

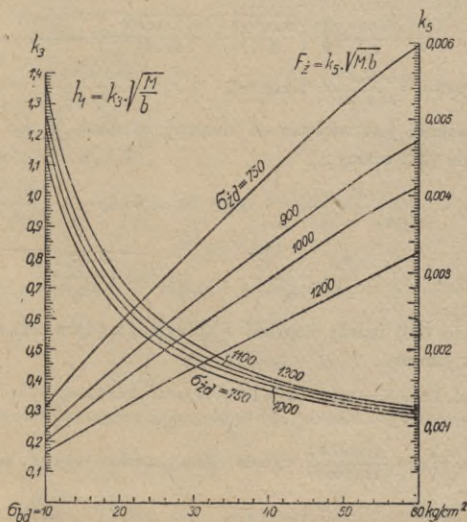


Fig. 474.

Na fig. 474 przedstawiliśmy wykreślenie współczynników  $k_3$  i  $k_5$  dla  $\sigma_{zd} = 750, 900, 1000$  i  $1200 \text{ kg/cm}^2$ . Jeżeli  $\sigma_{zd}$  ma inną wartość, możemy na tablicy interpolować. Linje dla  $k_5$  są, jak widzimy, bardzo mało zakrzywione i zbliżone do prostych.

1. Przykład. Dane  $M = 1\,000\,000 \text{ kgcm}$ ,  $b = 30 \text{ cm}$ ,  $\sigma_{bd} = 40 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_z = 1000 \text{ kg/cm}^2$ .

Według tablicy 6.  $h_1 = 0,390 \sqrt{\frac{1\,000\,000}{30}} = 71,2 \text{ cm}$ ,

$$F_z = 0,00293 \sqrt{1\,000\,000 \cdot 30} = 16,05 \text{ cm}^2.$$

Przyjmujemy  $8\phi 16 \text{ mm}$ ,  $F_z = 16,08 \text{ cm}^2$ ,  $a = 4,6 \text{ cm}$ ,  $h = 71,2 + 4,6 = 75,8 \text{ cm} \approx 76 \text{ cm}$ , stąd  $h_1 = 76 - 4,6 = 71,4 \text{ cm}$ .

Sprawdzenie naprężeń. Według (23)  $m = \frac{b h_1}{F_z} = \frac{30 \cdot 71,4}{16,08} = 133,2$ .

Według tablicy 3. mamy:  $x = 0,375 \cdot 71,4 = 27,8 \text{ cm}$ ,  $\sigma_b = 6,09 \frac{M}{h b_1^2} = 39,8 \text{ kg/cm}^2$ ,

$$\sigma_z = 153 \frac{M}{b h_1^2} = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Wyznaczenie wkładki żelaznej dla danej wysokości. Jeżeli wysokość jest mniejsza od idealnej, to dane  $M$ ,  $h_1$  i  $\sigma_b$ , szukane  $F_z$  i  $\sigma_z$ .

Mamy wedle (22):  $\sigma_b = \frac{2M}{bx(h_1 - \frac{1}{3}x)}$ , stąd  $x^2 - 3h_1x + \frac{6M}{b\sigma_b} = 0$ ,

więc:

$$x = \frac{3h_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{3h_1}{2}\right)^2 - \frac{6M}{b\sigma_b}} \dots \dots \dots (48)$$

$$\sigma_z = 15\sigma_b \frac{h_1 - x}{x}, \quad F_z = \frac{bx\sigma_b}{2\sigma_z} \dots \dots \dots (49)$$

2. Przykład. Dane  $h_1 = 60 \text{ cm}$ ,  $M = 1\,000\,000 \text{ kg/cm}$ ,  $b = 30 \text{ cm}$ ,  $\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2$ . Według (48)

$$x = \frac{3 \cdot 60}{2} - \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 60}{2}\right)^2 - \frac{6 \cdot 1\,000\,000}{30 \cdot 40}} = 34,3 \text{ cm},$$

$$\sigma_z = 15 \cdot 40 \frac{60 - 34,3}{34,3} = 450 \text{ kg/cm}^2, \quad F_z = \frac{30 \cdot 34,3 \cdot 40}{2 \cdot 450} = 45,7 \text{ cm}^2.$$

Jeżeli wysokość jest większa od idealnej, to dane  $M$ ,  $h_1$  i  $\sigma_z$ , szukane  $F_z$  i  $\sigma_b$ . Wedle (22) mamy:

$$\sigma_z = \frac{M}{F_z(h_1 - \frac{1}{3}x)}, \quad \text{stąd } x = 3\left(h_1 - \frac{M}{F_z\sigma_z}\right) \dots \dots (50)$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_z}{15} \cdot \frac{x}{h_1 - x}, \quad F_z = \frac{bx\sigma_b}{2\sigma_z} \dots \dots \dots (51)$$

W równaniu (50) należy naprzód  $F_z$  przyjąć, a gdy z (51) wypadnie inne  $F_z$ , liczyć raz jeszcze.

3. Przykład. Dane  $h_1 = 80 \text{ cm}$ ,  $M = 1\,000\,000 \text{ kg/cm}$ ,  $b = 30 \text{ cm}$ ,  $\sigma_z = 1000 \text{ kg/cm}^2$ . Dla belki idealnej wypada  $F_z = 16,05 \text{ cm}^2$ . Tu będzie mniej, przyjmijmy na razie  $F_z = 12 \text{ cm}^2$ .

Wtedy z (50)  $x = 3\left(80 - \frac{1\,000\,000}{12 \cdot 1000}\right)$  wypada ujemne, musimy więc  $F_z$  powiększyć. Dla

$$F_z = 14 \text{ cm}^2, \quad x = 3\left(80 - \frac{1\,000\,000}{14 \cdot 1000}\right) = 25,8 \text{ cm}, \quad \sigma_b = \frac{1000}{15} \cdot \frac{25,8}{80 - 25,8} = 31,7 \text{ kg/cm}^2.$$

Przyjmijmy:  $F_z = 14,2 \text{ cm}^2$ , to:

$$x = 3\left(80 - \frac{1\,000\,000}{14,2 \cdot 1000}\right) = 28,8 \text{ cm}, \quad \sigma_b = \frac{1000}{15} \cdot \frac{28,8}{80 - 28,8} = 37,5 \text{ kg/cm}^2,$$

$$F_z = \frac{30 \cdot 37,5 \cdot 28,8}{2 \cdot 1000} = 16,2 \text{ cm}^2, \text{ za wiele. Wystarczy więc: } F_z = 14,1 \text{ cm}^2.$$

$$x = 3\left(80 - \frac{1\,000\,000}{14,1 \cdot 1000}\right) = 27,3 \text{ cm}, \quad \sigma_b = \frac{1000}{15} \cdot \frac{27,3}{80 - 27,3} = 34,5 \text{ kg/cm}^2,$$

$$F_z = \frac{30 \cdot 27,3 \cdot 34,5}{2 \cdot 1000} = 14,4 \text{ cm}^2. \text{ Przyjmiemy } \phi 19, \text{ więc } F_z = 14,18 \text{ cm}^2.$$

Sprawdzenie naprężeń:

$$x = -\frac{15 \cdot 14,18}{30} + \sqrt{\frac{15 \cdot 14,18}{30} \left(\frac{15 \cdot 14,18}{30} + 2,80\right)} = 27,3 \text{ cm},$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 1\,000\,000}{30 \cdot 27,3 \left(80 - \frac{27,3}{3}\right)} = 34,5 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_z = \frac{1\,000\,000}{14,18 \left(80 - \frac{27,3}{3}\right)} = 995 \text{ kg/cm}^2.$$

Więc  $F_z$  jest dobrze dobrane.

Boerner podaje wzór dla obliczenia wprost  $F'_z$ , mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} x^3 - 3h_1x^2 - \frac{90M}{b\sigma_z}x + \frac{90Mh_1}{b\sigma_z} &= 0 \\ F'_z = \frac{M}{\sigma_z(h_1 - \frac{1}{3}x)}, \quad \sigma_b = \sigma_z \frac{x}{15(h_1 - x)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (52)$$

Przekrój prostokątny podwójnie uzbrojony. Jeżeli podwójne uzbrojenie daliśmy ze względu na zmianę znaku momentu, to dla pierwszego przyjęcia wystarczy obliczyć tak, jak gdyby była tylko wkładka górna lub dolna. Ponieważ druga wkładka jednak istnieje, więc naprężenia wypadną nieco mniejsze. Potem możemy obliczyć wymiary dokładnie.

Jeżeli mamy dane  $M$ ,  $h_1$ ,  $a$  i  $a'$ ,  $\sigma_b$  i  $\sigma_z$ , a szukamy wielkości uzbrojenia  $F'_z$  i  $F_z$ ,

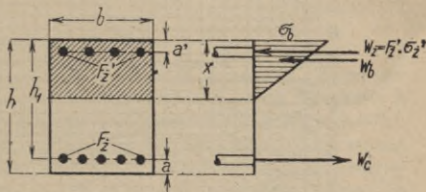


Fig. 475.

to  $x = \frac{15\sigma_b}{15\sigma_b + \sigma_z} h_1 = k_1 h_1$ , jak (39). Dalej (fig. 475):

$$W_b = \frac{1}{2} x b \sigma_b \dots \dots \dots (53)$$

Jeżeli ustawimy równanie momentów ze względu na wkładkę dolną, to:

$$M = W_z(h_1 - a') + W_b(h_1 - \frac{1}{3}x),$$

więc:

$$W_z = \frac{M - W_b(h_1 - \frac{1}{3}x)}{h_1 - a'} \dots \dots \dots (54)$$

$$W_c = W_b + W_z \dots \dots \dots (55)$$

$$F'_z = \frac{W_b + W_z}{\sigma_z}, \quad F_z = \frac{W_z}{15\sigma_b} \cdot \frac{x}{x - a'} \dots \dots \dots (56)$$

Z równania (54) widzimy, że uzbrojenie górne potrzebne jest tylko wtedy, gdy  $M > W_b(h_1 - \frac{1}{3}x)$ , gdy więc  $h_1$  jest za małe, aby zrównoważyć moment. Wzory (54) do (56) służą do obliczenia uzbrojenia idealnego, bo równocześnie otrzymujemy  $\sigma_{bd}$  i  $\sigma_{zd}$ , górne zaś uzbrojenie nie jest wyzyskane.

Jeżeli przyjmiemy inne  $F'_z$  niż wypada z (56), to musimy też przyjąć inne  $F'_z$ . Melan sporządził wykreślną tablicę (fig. 476) dla  $a = 0,1h$ . Dla przyjętego  $\sigma_b$  i  $h$  szuka się  $m = \frac{M}{bh^2\sigma_b}$ . Każdy punkt linii, oznaczonej przez  $m$ , wyznacza dwa odpowiednie punkty  $p$  (na osi poziomej) i  $p_1$  (na osi pionowej), oznaczające procenty uzbrojenia. Mianowicie  $p = \frac{100F'_z}{bh}$

i  $p_1 = \frac{100F_z}{bh}$ . Prosta  $ab$  przecina linie  $m$  w punktach  $n$ , które dają nam  $p$  i  $p_1$ , dla których osiąga się równocześnie  $\sigma_b$  i  $\sigma_z$ . Inne punkty linii  $m$  dają nam inne  $p$  i odpowiednie  $p_1$ . Dodając dla rozmaitych punktów  $p$  i  $p_1$  możemy łatwo znaleźć, dla jakich  $p$  i  $p_1$  będzie suma  $p + p_1$  najmniejszą.

4. Przykład. Dane  $M = 6,8 \text{ tm}$ ,  $b = 0,3 \text{ m}$ ,  $h = 0,6 \text{ m}$ ,  $\sigma_b = 33 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_z = 1000 \text{ kg/cm}^2$ .

Wtedy  $m = \frac{680000}{30 \cdot 60^2 \cdot 33} = 0,19$ . Każdy punkt krzywej 0,19 wskazuje nam procenty  $p$  i  $p_1$ , których możemy użyć. Jeżeli uzbrojenie będzie tylko w części ciągnionej, to  $p_1 = 0$  i z tabliczki widzimy, że  $p = 2,43\%$ . Jednak wtedy byłoby wprawdzie  $\sigma_b = 33 \text{ kg/cm}^2$ , ale wedle

$$p_1 = \frac{100F_z'}{bh}$$

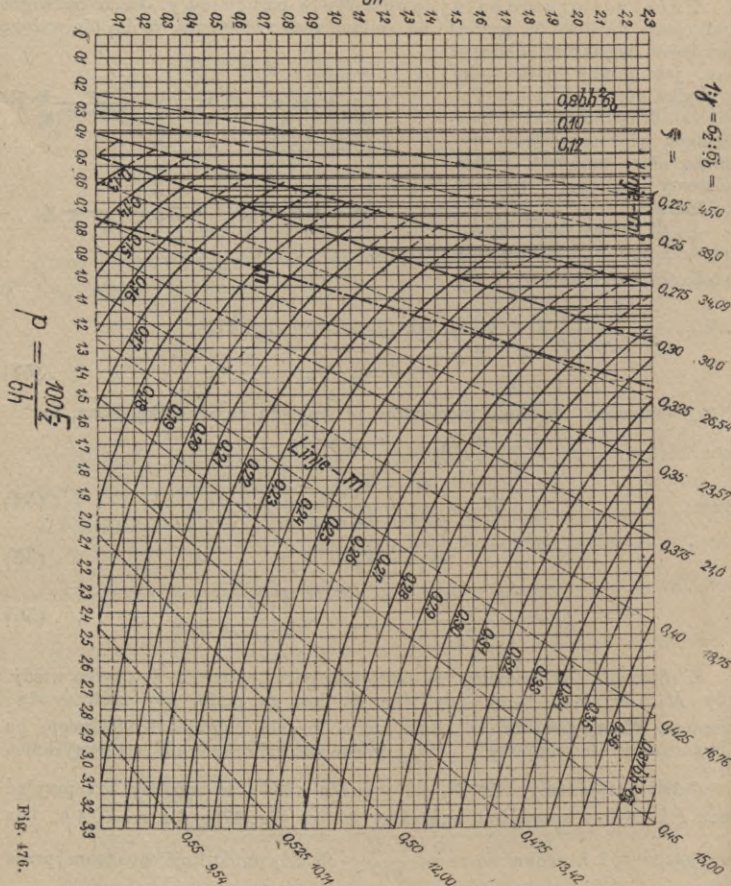


Fig. 176.

linij ukośnych w tem miejscu byłoby  $\sigma_z = 10,78 \cdot 33 = 356 \text{ kg/cm}^2$ , a więc żelazo nie byłoby wyzyskane. Gdybyśmy chcieli wyzyskać żelazo, a więc  $\frac{1}{\gamma} = 1000 : 33 = 30$ , to przecięcie się linii na  $m = 0,192$  z prostą ukośną 30 wskazuje, że musiałyby być  $p = 0,79$ ,  $p_1 = 0,87\%$ ,  $p + p_1 = 1,66$ , zatem znacznie mniej, niż poprzednio. Najmniejszą ilość żelaza dla obustronnego uzbrojenia otrzymamy dla punktu  $n$ . Otrzymamy mianowicie  $p = 0,96$ ,  $p_1 = 0,67$ , więc  $p + p_1 = 1,63$ .

Suenson podaje następujący sposób wyznaczenia wymiarów. Dla danych naprężeń dopuszczalnych  $\sigma_{zd}$  i  $\sigma_{bd}$  da się dla belki pojedynczo uzbrojonej



obliczyć  $F'_z$ ,  $x$  i  $M'$  moment, który odpowiada tym wymiarom (równanie 39 do 46). Jeżeli dany moment jest  $M$ , to dla reszty momentu  $\Delta M = M - M'$  trzeba dać uzbrojenie górne  $F'_z$ . Jeżeli chcemy zatrzymać położenie osi obojętnej, to  $F'_z \sigma'_z = \Delta F'_z \cdot \sigma_z$ , a przytem  $F'_z \sigma'_z (h_1 - a') = \Delta M = M - M'$ .

Stąd mamy:

$$F'_z = \frac{M - M'}{\sigma'_z (h_1 - a')} \dots \dots \dots (57)$$

przyczem  $\sigma'_z = 15 \sigma_b \frac{x - a'}{x}$ , a wreszcie:  $\Delta F'_z = F'_z \frac{\sigma'_z}{\sigma_z} \dots \dots \dots (58)$

### 7. Przekrój teowy.

Przypuśćmy naprzód, że przekrój jest pojedynczo uzbrojony. Tutaj zazwyczaj przekrój idealny nie jest najtańszy. Przez powiększenie wysokości  $h$  można zmniejszyć przekrój żelaza i zazwyczaj zaoszczędzić na koszcie belki.

Grubość płyty albo obliczamy według poprzedniego, albo mamy wprost daną. Płyt cieńszych niż 6 cm w budownictwie, a 8 cm w mostach nie uwzględnia się w obliczeniu. Obecnie cena betonu w stosunku do żelaza bardzo się

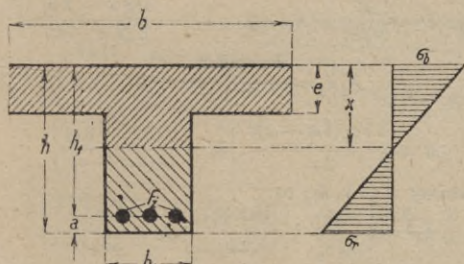


Fig. 477.

zmniejszyła, dlatego lepiej przyjmować grubsze płyty, względnie obliczać je dla mniejszych naprężeń dopuszczalnych np. 25 kg/cm<sup>2</sup>. To samo stosuje się do obliczenia wymiarów belki teowej, staramy się uzyskać mniejsze naprężenia w betonie 25 do 30 kg/cm<sup>2</sup>.

Nazwijmy  $\frac{b_1}{b} = \beta$  (fig. 477),  $\frac{e}{h} = \delta$ ,  $\frac{\sigma_b}{\sigma_z} = \gamma$ ,  $\frac{x}{h_1} = k_1$ , a otrzymamy

wedle (39) i (40):  $x = \frac{15\gamma}{1 + 15\gamma} h_1 = k_1 h_1 \dots \dots \dots (59)$

Dla osi obojętnej suma momentów statycznych musi być równa zero, więc:

$$\frac{1}{2} b x^2 - \frac{1}{2} (b - b_1) (x - e)^2 = 15 F'_z (h_1 - x),$$

stąd:

$$F'_z = \frac{b x^2 - (b - b_1) (x - e)^2}{30 (h_1 - x)} = \frac{b_1 x^2 + 2 x e (b - b_1) - e^2 (b - b_1)}{30 (h_1 - x)}$$

a wstawiwszy:

$$\gamma = \frac{\sigma_b}{\sigma_z} = \frac{1}{15} \frac{k_1}{1 - k_1},$$

otrzymamy:

$$F'_z = C_1 \cdot b h \dots \dots \dots (60)$$

jeżeli

$$C_1 = \frac{\gamma}{2} \left[ \beta k_1 + \delta (1 - \beta) \left( 2 - \frac{\delta}{k_1} \right) \right] \dots \dots \dots (61)$$

Moment  $M$  otrzymamy z wzoru:

$$15 M (h_1 - x) = \sigma_b J_1,$$

a stąd:

$$M = C_2 \cdot b h^2 \dots \dots \dots (62)$$

jeżeli  $C_2 = \frac{C_1 k_1}{15 \gamma} + \frac{\gamma}{3 k_1} [\beta (k_1 - \delta)^3 + \delta (3 k_1^2 - 3 k_1 \delta + \delta^2)] \dots (63)$

W przybliżeniu przyjmujemy środek ciśnienia w połowie grubości płyty,

wtedy:  $F_z = \frac{M}{\sigma_z (h_1 - 1/2 e)} \dots \dots \dots (64)$

O  $\sigma_z$  tu zwykle nie chodzi, bo i tak przyjmujemy  $h_1$  większe niż idealne. Z wzoru tego otrzymamy  $F_z$  nieco za wielkie, gdyż środek ciśnienia leży wyżej.  $h_1$  możemy wyznaczyć na razie, jak dla belki prostokątnej i powiększyć o 20 do 30%, a wtedy  $F_z$  wyznaczamy z (64).

Saliger oblicza wymiary inaczej. Nazwijmy:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma_z}{\sigma_b}, \text{ to } k_1 = \frac{15}{15 + \gamma_1} \dots \dots \dots (65)$$

Dalej mamy:  $c = \frac{M}{F_z \sigma_z} = h_1 - y = h_1 - \frac{e(3x - 2e)}{3(2x - e)},$

również:  $F_z \sigma_z = \frac{b e \sigma_b (2x - e)}{2x},$

więc:  $M = \frac{b e \sigma_b (2x - e)}{2x} \cdot \left[ h_1 - \frac{e(3x - 2e)}{3(2x - e)} \right].$

Jeżeli wstawimy  $x = k_1 h_1$ , to:

$$h_1^2 - \left[ \frac{M}{b e \sigma_b} + \frac{(1 + k_1) e}{2 k_1} \right] h_1 + \frac{e^2}{3 k_1} = 0.$$

Wstawimy:  $r = \frac{M}{b e \sigma_b} + \frac{(1 + k_1) e}{2 k_1}, \quad s = \frac{e^2}{3 k_1},$

to:  $h_1 = \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - s} \dots \dots \dots (65)$

$$F_z = \frac{b e (2x - e)}{2x} \cdot \frac{\sigma_b}{\sigma_z} = \frac{M}{c \sigma_z} \dots \dots \dots (66)$$

5. Przykład. Dane  $M = 900\,000 \text{ kg/cm}$ ,  $b = 150 \text{ cm}$ ,  $b_1 = 25 \text{ cm}$ ,  $e = 10 \text{ cm}$ ,  $\sigma_{bd} = 35 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{zd} = 950 \text{ kg/cm}^2$ , to:  $\gamma_1 = \frac{950}{35} = 27,1$ ,  $k_1 = \frac{15}{15 + 27,1} = 0,356$ ,

$$r = \frac{900\,000}{150 \cdot 10 \cdot 35} + \frac{(1 + 0,356) 10}{2 \cdot 0,356} = 36,15, \quad s = \frac{10^2}{3 \cdot 0,356} = 93,7,$$

$$h_1 = \frac{36,15}{2} + \sqrt{\left(\frac{36,15}{2}\right)^2 - 93,7} = 31,28 \approx 32 \text{ cm}.$$

Według (64):

$$F_z = \frac{900\,000}{950 (32 - 5)} = 35 \text{ cm}^2. \text{ Dokładniej: } c = 32 - \frac{10 (3 \cdot 0,356 \cdot 32 - 2 \cdot 10)}{3 (2 \cdot 0,356 \cdot 32 - 10)} = 28,3 \text{ cm},$$

$$F_z = \frac{900\,000}{950 \cdot 28,3} = 33,5 \text{ cm}^2. \text{ Przyjmijmy: } 8 \phi 23, F_z = 33,24 \text{ cm}^2.$$

Zbadajmy teraz naprężenia. Z (30) mamy:

$$x = - \frac{(150 - 25) 10 + 15 \cdot 33,24}{25} + \sqrt{\left(\frac{(150 - 25) 10 + 15 \cdot 33,24}{25}\right)^2 + \frac{(150 - 25) 10^2 + 30 \cdot 33,24 \cdot 32}{25}}$$

$$x = 11,6 \text{ cm}.$$

$$J_1 = \frac{1}{3} 150 \cdot 11,6^3 - \frac{1}{8} (150 - 25) (11,6 - 10)^3 + 15 \cdot 33,24 (32 - 11,6)^2 = 285 830 \text{ cm}^4.$$

$$\sigma_b = \frac{900 000 \cdot 11,6}{285 830} = 36,8 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_z = \frac{15 \cdot 900 000 \cdot 20,4}{285 830} = 964 \text{ kg/cm}^2.$$

$\sigma_b$  trochę za wielkie, trzeba więc przyjąć  $h_1$  o 1 cm większe,  $h_1 = 33 \text{ cm}$ .

Przekrój teowy podwójnie uzbrojony. Podwójnie uzbrajamy przekrój wtedy, gdy przyjmujemy wysokość mniejszą niż dla przekroju idealnego.

Przyuszczamy, że chodzi nam o przekroje  $F_z$  i  $F'_z$  takie, aby uzyskać ciśnienie dopuszczalne betonu i ciągnięcie dopuszczalne dla wkładki ciągnionej żelaznej. Wtedy musi być, jak pierwiej,  $x = \frac{15 h_1 \gamma}{1 + 15 \gamma} = \frac{15 (h - a) \gamma}{1 + 15 \gamma}$ .

$$k_0 = \frac{x}{h} = \frac{15 \gamma (1 - \alpha)}{1 + 15 \gamma}, \text{ jeżeli } \alpha = \frac{a}{h}.$$

Teraz rozróżniamy dwa wypadki. Jeżeli  $x < e$ ,  $k_0 < \delta_1 = \frac{e}{h}$ . Wtedy możemy zastosować wprost wzory dla przekroju prostokątnego. Jeżeli  $x > e$ , otrzymuje Haberkalt:

$$F'_z = \frac{k_0 M + \frac{1}{6} [k_0 (k_0 - 3 \alpha_1) - (1 - \beta) (k_0 + 2 \delta - 3 \alpha_1) (k_0 - \delta)^2] \sigma_b b h^2}{15 (1 - \alpha - \alpha_1) (1 - \alpha - k_0) \sigma_b h} \quad (67)$$

$$F_z = \frac{k_0 M - \frac{1}{6} [k_0 (3 - 3 \alpha - k_0) - (1 - \beta) (3 - 3 \alpha - 2 \delta - k_0) (k_0 - \delta)^2] \sigma_b b h^2}{15 (1 - \alpha - \alpha_1) (k_0 - \alpha_1) \sigma_b h} \quad (68)$$

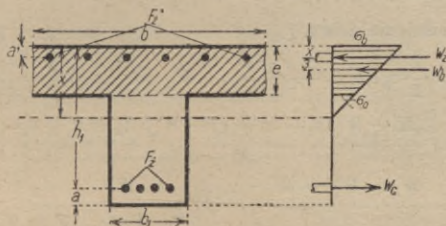


Fig. 478.

Boerner oblicza powierzchnie wkładek nie uwzględniając ciśnienia w żelbrze w następnym sposób (fig. 478). Dane  $h, b, e, a, a', \sigma_b$  i  $\sigma_z$ , szukane  $F_z$  i  $F'_z$ .

Mamy: 
$$x = \frac{15 \sigma_b}{15 \sigma_b + \sigma_z} h_1 = k_1 \cdot h_1.$$

Odstęp:  $W_b$  od osi obojętnej wedle (36) 
$$v = x - \frac{e}{2} + \frac{e}{6(2x - e)}. \quad (69)$$

$$W_b = b e \frac{\sigma_b + \sigma_0}{2} = \frac{1}{2} b e \sigma_b \frac{2x - e}{x} \dots \dots \dots (70)$$

$$W_z = (h_1 - a') = M - W_b (h_1 - x + v),$$

stad: 
$$W_z = \frac{M - W_b (h_1 - x + v)}{h_1 - a'} \dots \dots \dots (71)$$

Wreszcie: 
$$F'_z = \frac{W_b + W_z}{\sigma_z}, \quad F_z = \frac{W_z}{15 \sigma_b} \cdot \frac{x}{x - a'} \dots \dots \dots (72)$$

6. Przykład. Dane  $h = 55 \text{ cm}$ ,  $a = 3 \text{ cm} = a'$ ,  $e = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 160 \text{ cm}$ ,  $\sigma_{bd} = 40 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{zd} = 1000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $M = 2500000 \text{ kgcm}$ .

$$x = \frac{15 \cdot 40}{15 \cdot 40 + 1000} \cdot 52 = 19,5 \text{ cm}, \quad v = 19,5 - \frac{10}{2} + \frac{10^2}{6(2 \cdot 19,5 - 10)} = 15 \text{ cm},$$

$$W_b = \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 10 \cdot 40 \cdot \frac{2 \cdot 19,5 - 10}{19,5} = 47600 \text{ kg},$$

$$W_z = \frac{2500000 - 47600(52 - 19,5 + 15)}{52 - 3} = 4900 \text{ kg},$$

$$F_z = \frac{47600 + 4900}{1000} = 52,5 \text{ cm}^2, \quad F'_z = \frac{4900}{15 \cdot 40} \cdot \frac{19,5}{19,5 - 3} = 9,65 \text{ cm}^2.$$

Przyjmijmy u dołu 8  $\phi$  29,  $F'_z = 52,84 \text{ cm}^2$ , u góry 6  $\phi$  14,  $F'_z = 9,24 \text{ cm}^2$ .

Sprawdźmy teraz naprężenia.

$$\text{Wedle (32): } x = \frac{\frac{10^2 \cdot 160}{2} + 15(9,24 \cdot 3 + 52,84 \cdot 52)}{10 \cdot 160 + 15(9,24 + 52,84)} = 19,6 \text{ cm}, \quad v = 15,2 \text{ cm},$$

$$\sigma_z = \frac{2500000}{52,84(52 - 19,6 + 15,2)} = 994 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_b = \frac{994 \cdot 19,6}{15(52 - 19,6)} = 40,1 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma'_z = 710 \text{ kg/cm}^2.$$

Jeżeli chcemy uwzględnić ciśnienia w żebrze, to otrzymamy dla danych  $h$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $a$ ,  $a'$ ,  $\sigma_{bd}$ ,  $\sigma_{zd}$ , a szukanych  $F_z$  i  $F'_z$ :

$$x = \frac{15 \sigma_b}{15 \sigma_b + \sigma_z} h_1 = k_1 h_1, \quad \text{wedle (36): } v = x - \frac{e}{2} + \frac{e^2}{6(2x - e)}. \quad (73)$$

$$\text{odstęp środka ciśnienia płyty, zaś: } v_1 = \frac{2}{3}(x - e) \dots \dots \dots (74)$$

odstęp środka ciśnienia żebra.

$$W_b = \frac{1}{2} \sigma_b e b = \frac{2x - e}{x}, \quad W_{b1} = \frac{1}{2} \sigma_b b_1 \frac{(x - e)^2}{x} \dots \dots (75)$$

$$W_z = \frac{M - W_b(h_1 - x + v) - W_{b1}(h_1 - x + v_1)}{h_1 - a'} \dots \dots (76)$$

$$F_z = \frac{W_b + W_{b1} + W_z}{\sigma_z}, \quad F'_z = \frac{W_z}{15 \sigma_b} \cdot \frac{x}{x - a'} \dots \dots (77)$$

8. Inne przekroje.

Przekrój trójkątny (fig. 479).

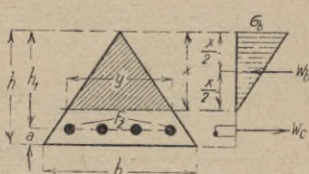


Fig. 479

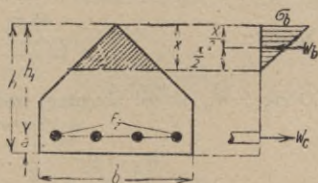


Fig. 480.

$$\text{Dla osi obojętnej: } \frac{1}{2} y x \frac{x}{3} - 15 F_z (h_1 - x) = 0, \quad y = x \frac{b}{h},$$

$$\text{stąd jeśli } \text{tg } \varphi = \frac{2h}{b}, \quad x^3 + 45 F_z x \text{tg } \varphi - 45 F_z h_1 \text{tg } \varphi = 0 \dots \dots (78)$$

z którego to równania możemy wyznaczyć  $x$ .

Odstęp środka ciśnienia  $W_b$  od górnej krawędzi wynosi  $\frac{1}{2}x$ , więc:

$$W_c = W_b = F_z \sigma_z = \frac{1}{2} y \frac{x^2}{3} \sigma_b = \frac{1}{3} \frac{x^3}{\text{st } \varphi} \sigma_b = \frac{M}{h_1 - \frac{1}{2}x} \quad (79)$$

stad: 
$$\sigma_b = \frac{3 W_b \text{tg } \varphi}{x^3} = \frac{3 M \text{tg } \varphi}{(h_1 - \frac{1}{2}x)x^3}, \quad \sigma_z = \frac{M}{(h_1 - \frac{1}{2}x)F_z} \quad (80)$$

Przekrój pięciokątny (fig. 480). Ponieważ obojętną jest rzeczą kształt przekroju ciągniętego betonu, zatem ten wypadek jest identyczny z poprzednim i dadzą się zastosować te same wzory (78) do (80).

#### IV. Napężenia ścinające, główne i przyczepne.

##### 9. Belka prostokątna.

Napężenie ścinające  $\tau = \frac{TS}{Ju}$ , jeżeli  $u$  jest szerokością przekroju w danej warstwie. Dla belki prostokątnej  $u = b$  jest stałe, więc  $\tau = \frac{TS}{bJ}$ . Dla belki żelbetowej jest  $S = \frac{bx^2}{2}$ ,  $J = \frac{bx^3}{3} + 15 F_z (h_1 - x)^2$ , a jeżeli wsta-

wimy: 
$$F_z = \frac{b}{30} \cdot \frac{x^2}{h_1 - x}, \quad \text{otrzymamy } \tau = \frac{T}{bc} \quad (81)$$

gdzie  $c$  oznacza odstęp środka ciśnienia od środka ciągnięcia =  $h_1 - \frac{1}{3}x$ .

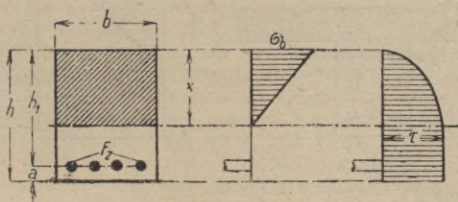


Fig. 481.

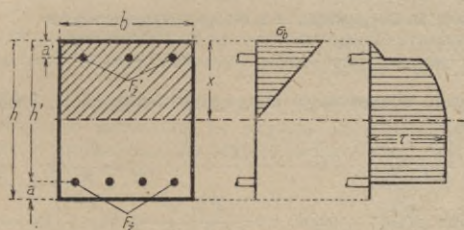


Fig. 482.

Dla wkładki jednostronnej (fig. 481) otrzymamy:  $\tau = \frac{1}{2} \frac{T}{J} (x^3 - v_1^3)$ , jeżeli  $v_1$  oznacza odstęp danej warstwy od osi obojętnej.

$$\text{Najw. } \tau = \frac{T}{2J} x^3 \quad (82)$$

albo wedle (81): 
$$\text{najw. } \tau = \frac{T}{b(h_1 - \frac{1}{3}x)} \quad (83)$$

Dla wkładki obustronnej (fig. 482) otrzymamy:

$$\text{najw. } \tau = \frac{T}{J} \left( \frac{1}{2} x^2 + 15 F'_z (x - a) \right) \dots \dots \dots (84)$$

przyczem:  $J = \frac{1}{3} b x^3 + 15 F'_z (x - a)^2 + 15 F'_z (h_1 - x)^2 \dots \dots (85)$

7. Przykład. Przyjąwszy w przykładzie 5.  $T = 10000 \text{ kg}$ , mamy według (83):

$$\tau = \frac{10000}{30 \left( 71,4 - \frac{27,8}{3} \right)} = 5,37 \text{ kg/cm}^2.$$

10. Przekrój teowy.

Jeżeli oś obojętna przecina płytę, to obliczamy najw.  $\tau$ , jak poprzednio, tylko że w żebrze będzie  $\tau \frac{b}{b_1}$  razy większe, zatem najw.  $\tau = \frac{1}{2} \frac{T}{J} x^2 \dots (86)$

lub najw.  $\tau = \frac{T}{b_1 (h_1 - \frac{1}{3} x)} \dots \dots \dots (87)$

Jeżeli oś obojętna przecina żebro, to (fig. 483) mamy dla uzbrojenia pojedynczego:

$$\text{najw. } \tau = \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{T}{J_1} [x^2 - (x - e)^2 (1 - \beta)] \dots \dots \dots (88)$$

przyczem  $J_1 = \frac{1}{3} b [x^3 - (x - e)^3 \cdot (1 - \beta)] + 15 F'_z (h_1 - x)^2 \dots \dots (89)$

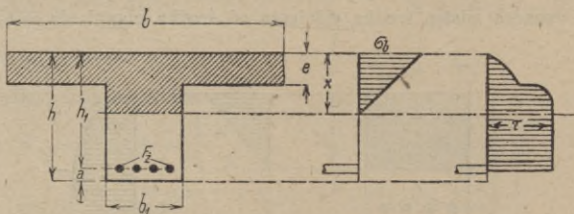


Fig. 483.

8. Przykład. Z przykładu 5. mamy:  $e = 10 \text{ cm}$ ,  $x = 11,6 \text{ cm}$ ,  $J_1 = 285830 \text{ cm}^4$ ,  $\beta = \frac{b_1}{b} = \frac{25}{150} = 0,167$ . Przyjąwszy  $T = 10000 \text{ kg}$ , otrzymamy z (88):

$$\text{najw. } \tau = \frac{1}{2 \cdot 0,167} \cdot \frac{10000}{284830} [11,6^2 - (11,6 - 10)^2 (1 - 0,167)] = 14,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Dla uzbrojenia obustronnego otrzymamy analogicznie, jeżeli oś obojętna przecina żebro,

$$\text{najw. } \tau = \frac{T}{\beta J} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{(x - e)^2 (1 - \beta)}{x} + 15 \frac{F'_z}{b} (x - a') \right] \dots (90)$$

a jeżeli przecina płytę: najw.  $\tau = \frac{T}{\beta J} \left[ \frac{x^2}{2} + 15 \frac{F'_z}{b} (x - a') \right] \dots (91)$

11. Belka wieloboczna.

Jeżeli belka nie jest równoległa (fig. 484), to

$$W_b = W_c = \frac{M}{c}, \quad \frac{dM}{dx} = T.$$

Jeżeli w przybliżeniu przyjmiemy  $c = \frac{7}{8} h_1$ , to:

$$\tau = \frac{T - \frac{M}{h_1} \text{tg } \alpha}{\frac{7}{8} b h_1} \dots \dots \dots (92)$$

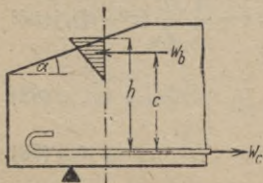


Fig. 484.

Obliczamy więc  $\tau$  jak dla belki równoległej, tylko  $T$  należy zmniejszyć o  $\frac{M}{h_1} \operatorname{tg} \alpha$ .

12. Rozporządzenia co do naprężeń ścinających.

Wedle przepisów dla budownictwa z r. 1923 i tymczasowych przepisów budowy mostów drogowych z r. 1925 należy naprężenia dopuszczalne przyjmować równe wytrzymałości betonu po 28 dniach, pomnożonej przez współczynnik dla budownictwa 0,025, najwyżej 5 kg/cm<sup>2</sup>, dla mostów 0,022, najwyżej 4,5 kg/cm<sup>2</sup>.<sup>1)</sup>

Przy mniejszych budowlach można dla budownictwa prób nie wykonywać i przyjmować naprężenie przy 500 kg cementu 4,5 kg/cm<sup>2</sup>, przy 300 kg cementu 3,5 kg/cm<sup>2</sup>.

Dla mostów, o ile uwzględnia się też parcie wiatru, zmianę ciepłoty i skurcz materiału, można przyjąć współczynnik zmniejszający 0,025, a najwyżej 5 kg/cm<sup>2</sup>.

13. Naprężenia główne.

W belce zginanej powstają naprężenia główne nachylone do pionu, a w osi obojętnej kąt wychylenia największych naprężeń jest 45°. Dla belki żelbetowej wchodzi w grę ciągnięcie, przyczem:

$$\text{najw. } \nu = \frac{1}{2} \left[ \sigma_b \pm \sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau^2} \right] \dots \dots \dots (93)$$

W osi obojętnej jest  $\sigma_b = 0$ , a stąd  $\nu = \tau$ , a zatem ciągnięcie główne jest równe naprężeniu ścinającemu, które jest proporcjonalne do siły poprzecznej. Naprężenie dopuszczalne główne dla betonu przyjmujemy równe naprężeniu dopuszczalnemu na ścinanie.

Wedle przepisów dla budownictwa z r. 1923 siły ciągnące ukośne w tych częściach belek zginanych, w których naprężenie ciągnące jest większe, niż 0,025 wytrzymałości kostkowej, należy przenieść w całości przez wkładki odgięte i strzemia. Przepisy zaś mostowe z r. 1925 postanawiają, że siły ciągnące ukośne w tych częściach belek zginanych, w których naprężenia są większe niż 0,022 wytrzymałość kostkowej betonu względnie 4,5 kg/cm<sup>2</sup>, mogą być przeniesione przez beton tylko w wysokości 30%. Resztę należy przenieść na wkładki ukośne odgięte i na strzemia. W Niemczech naprężenia ukośne, obliczone bez uwzględnienia wkładek żelaznych nie mogą przekraczać wytrzymałości betonu na rozciąganie, którą oznacza się na 14 kg/cm<sup>2</sup>. Jeżeli po spełnieniu tego warunku naprężenie przekracza 4 kg/cm<sup>2</sup>, to należy całą siłę ukośną przenieść przez pręty odgięte i strzemia.

14. Obliczenie strzemion.

Dawniej obliczano strzemia ze względu na siłę ścinającą. Obecnie oblicza się zwykle strzemia jako słupy belki kratowej, której przekątnie

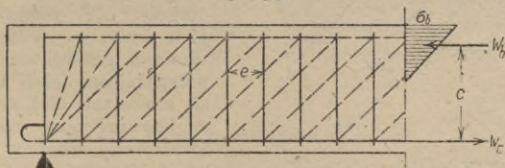


Fig. 485.

zastępuje beton (fig. 485). Od stosunku  $\frac{c}{e}$  zależy czy krata jest pojedyncza, dwu- czy trzykrotna. W ogólności możemy napisać:  $V = \frac{e}{c} T \dots (94)$

<sup>1)</sup> W ostatnich dniach ukazały się nowe przepisy polskie dla budownictwa — zob. str. 1433.

Nazwijmy naprężenie żelaza na ścinanie  $\tau_z$ , powierzchnię przekroju wszystkich strzemion w danym przekroju  $F_s$ , a część siły poprzecznej, którą chcemy przenieść przez strzemiona  $T_s$ , to  $V = \frac{e}{c} T_s = \tau_z F_s$ , a stąd dla danego  $F_s$  odstęp:  $e = \frac{\tau_z F_s c}{T_s}$ , względnie  $T_s = \frac{\tau_z F_s c}{e}$  . . . . . (95)

### 15. Pręty odgięte.

Resztę ciągnięć głównych, proporcjonalnych do siły poprzecznej, przenosimy prętami odgiętymi (fig. 486).

Na długość, równą jednostce, przypada  $\frac{1}{2} \sqrt{2}$  długości, w której działa ciążnienie główne. Dlatego, jeżeli odstęp odgiętych prętów jest  $e$ , a ciążnienie w nich  $R$ , to:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot e \frac{T - T_s}{h_1 - \frac{1}{3}x} = F_z \sigma_z \dots \dots \dots (96)$$

Stąd da się obliczyć  $e$  lub  $F_z$ , które oznacza sumę powierzchni przekrojów odgiętych prętów.

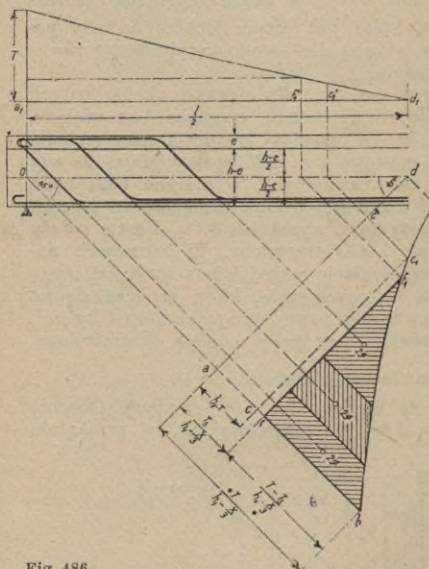


Fig. 486.

równe części. Z środków ciężkości odnośnych powierzchni kreślimy równoległe do  $Oa$ , które wyznaczają położenie odgiętych prętów. Rozumie się, że odginać pręty możemy tylko o tyle, o ile na to pozwoli badanie ze względu na momenty, inaczej musimy dać pręty dodatkowe. Przy belkach podwójnie uzbrojonych zamiast  $\frac{T}{h_1 - \frac{1}{3}x}$ , musimy wyznaczyć  $\frac{T}{c}$ .

Wykreślnie wyznaczamy miejsca odgięć prętów w następujący sposób. W połowie wysokości żebra, w połowie rozpiętości w  $d$  wykreślamy  $da$  pod kątem  $45^\circ$ . Na prostej  $Oa$  odcinamy długość

$$ab = \frac{T}{h_1 - \frac{1}{3}x} = \frac{TS}{J},$$

dalej robimy  $ac = b_1 \tau$  i kreślimy  $cc_1 \parallel ad$ . Na długości  $d_1 c_1'$  wystarczy sam beton, na długości  $a_1 c_1'$  potrzeba beton wzmocnić strzemionami i odgiętymi prętami. Jeżeli odstęp strzemion

$$e = \frac{F_s \tau_z (h_1 - \frac{1}{3}x)}{T_s}$$

jest stały, to i  $T_s$  będzie stałe, otrzymamy  $ff_1 \parallel ac'$  i na tej długości  $a_1 f_1$  potrzebne są odgięte pręty, a powierzchnia kreskowana przedstawia siłę na nie przypadającą. Jeżeli teraz okaże się z równania (96), że potrzebne są trzy pręty, to powierzchnię kreskowaną dzielimy na trzy



9. Przykład. Przypuśćmy, że według (95)  $T_s = \frac{800 \cdot 1,28 \cdot 45}{12} = 3840 \text{ kg}$ . Przypuśćmy,

że mamy dane  $T = 15000 \text{ kg}$ ,  $h_1 = 52,2 \text{ cm}$ ,  $x = 20 \text{ cm}$ ,  $b_1 = 32 \text{ cm}$ ,  $\tau = 4,5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_z = 950 \text{ kg/cm}^2$ , to  $b_1 \tau = 32 \cdot 4,5 = 144 \text{ kg/cm}^2 = ac$  (fig. 486),

$$\frac{T_s}{h_1 - \frac{1}{3}x} = \frac{3840}{52,2 - \frac{1}{3}20} = 84,4 \text{ kg/cm} = af, \quad \frac{T - T_s}{h_1 - \frac{1}{3}x} = \frac{15000 - 3840}{52,2 - \frac{1}{3}20} = 245,3 \text{ kg/cm} = fb.$$

Jeżeli przekrój jednego pręta o średnicy 19 mm jest  $2,84 \text{ cm}^2$ , a chcemy po 2 pręty odginać, to dwa pręty przenoszą siłę  $2 \cdot 2,84 \cdot 950 = 5400 \text{ kg}$ . Cała powierzchnia kreskowana wynosi 9810 kg, to potrzebne są dwa odgięcia po 2 pręty.

### 16. Naprężenia przyczepne.

Dla zabezpieczenia współdziałania wkładek żelaznych z betonem siły wewnętrzne, działające na przekrój żelaza ciągnionego lub ciśnionego i starające się żelazo wyciągnąć z betonu, powinny być mniejsze, niż opór, jaki temu przesunięciu stawia połączenie betonu z żelazem. Siłę, działającą w osi żelaza, podzieloną przez powierzchnię pręta, nazywamy naprężeniem przyczepnym. Wedle przepisów polskich dla budowy mostów drogowych z r. 1925 nie powinno ono być większe niż 0,022 wytrzymałości betonu a najwyżej  $4,5 \text{ kg/cm}^2$ . Przy uwzględnieniu parcia wiatru, zmiany ciepłoty i skurczu dopuszcza się naprężenie przyczepne 0,025 wytrzymałości, najwyżej 5 kg. Jeżeli obwód pręta nazwiemy  $o$ , długość liczoną od największej siły wewnętrznej do końca wkładki,  $l$ , to

$$\tau_p = \frac{F_z \sigma_z}{ol} \dots \dots \dots (97)$$

Dla wkładek żelaznych o końcach silnie w betonie zakotwionych zwiększa się naprężenie dopuszczalne o 40 do 50%. Jeżeli druty zakończone są hakami a średnica żelaza nie przekracza  $\frac{l}{300}$ , to można obliczenia na przyczepność zaniechać.

Jeżeli zamiast żelaza o powierzchni obwodu gładko wykonanej użyjemy prętów o powierzchni nierównej (karbowanej), to uwzględniamy wpływ tej chropowatości, przyjmując większą średnicę pręta z tego powodu. Zwykle zwiększenie obwodu wynosi wtedy 10%.

Według rozporządzenia niemieckiego z r. 1925 naprężeń przyczepnych nie trzeba obliczać, gdy końce prętów zaopatrzymy hakami okrągłymi lub ukośnymi, a pręty nie są grubsze niż 25 mm. Jeżeli mamy tylko poziome pręty, to należy obliczać naprężenia przyczepne wedle wzoru:

$$\tau_p = \frac{b_1 \tau}{o} \dots \dots \dots (98)$$

jeżeli  $\tau$  oznacza naprężenie ścinające. Jeżeli jednak są pręty odgięte, które zdolne są do przeniesienia wszystkichciągnięć ukośnych, to dla obliczenia naprężenia przyczepnego dla dolnych prętów należy uwzględnić tylko połowę siły poprzecznej.

### V. Pręty ściskane środkowo.

#### 17. Słupy żelbetowe uzbrojone podłużnie.

Jeżeli siła  $P$  działa na słup żelbetowy środkowo, to przypuszczamy, że siła rozdziela się na żelazo i beton w stosunku współczynników sprężystości, przyczem  $n = 15$ . Otrzymujemy więc:

$$P = \sigma_b (F_b + 15 F_z) \dots \dots \dots (99)$$

Równanie to ważne jest jednak tylko, jeżeli  $F'_z$  wynosi najmniej 0,8%, a najwyżej 3%  $F'_b$ . Jeżeli uzbrojenie podłużne jest silniejsze, niż 3%, to z nadwyżki ponad 3% wolno uwzględnić tylko trzecią część.

Na podstawie przepisów możemy wyznaczyć wymiary z tabelicy 7. Jeżeli procent uzbrojenia nazwiemy  $p$ , to  $F'_z = p F'_b$ , stąd:

$$F'_b = \frac{P}{\sigma_b(1 + 15p)} = \frac{P}{K_1}, \quad F'_z = p F'_b \dots \dots \dots (100)$$

Fig. 487 przedstawia wartości  $K_1$  dla rozmaitych  $\sigma_b$ .

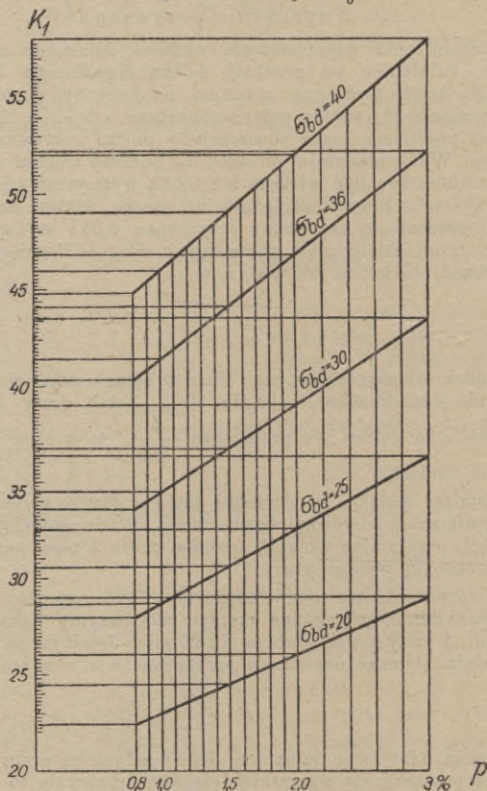


Fig. 487.

10. Przykład. Dane  $P = 90\,000$  kg,  $\sigma_b = 30$  kg/cm<sup>2</sup>,  $p = 0,015$ . Otrzymamy  $K_1 = 36,75$ , więc  $F'_b = \frac{90\,000}{36,75} = 2449$  cm<sup>2</sup>. Przyjmijmy przekrój 50.50 cm,  $F_b = 2500$  cm<sup>2</sup>,  $F'_z = 0,015 \cdot 2500 = 37,5$  cm<sup>2</sup>. Przyjmijmy 8  $\phi$  25, więc  $F'_z = 39,27$  cm<sup>2</sup>,  $\sigma_b = \frac{90\,000}{2500 + 15 \cdot 39,27} = 29,1$  kg/cm<sup>2</sup>.

### 18. Słupy żelbetowe uzwojone.

Dla kołowego przekroju rdzenia podają polskie przepisy:

$$\sigma_b = \frac{P}{1,25 F'_r + 15 F'_p + 30 F'_o} \dots \dots \dots (101)$$

Tablica 7.

Procent uzbrojenia $p$	Wartość $K_1$ dla naprężenia betonu $\sigma_b$				
	20	25	30	36	40
0,008	22,4	28,00	33,60	40,3	44,8
0,009	22,7	28,35	34,05	40,9	45,4
0,010	23,0	28,75	34,50	41,4	46,0
0,011	23,3	29,10	34,95	41,9	46,6
0,012	23,6	29,50	35,40	42,5	47,2
0,013	23,9	29,90	35,85	43,0	47,8
0,014	24,2	30,25	36,30	43,6	48,4
0,015	24,5	30,60	36,75	44,1	49,0
0,016	24,8	31,00	37,20	44,6	49,6
0,017	25,1	31,35	37,65	45,2	50,2
0,018	25,4	31,70	38,10	45,7	50,8
0,019	25,7	32,10	38,55	46,3	51,4
0,020	26,0	32,50	39,00	46,8	52,0
0,022	26,6	33,25	39,90	47,9	53,2
0,024	27,2	34,00	40,80	49,0	54,4
0,026	27,8	34,70	41,70	50,0	55,6
0,028	28,4	35,50	42,60	51,1	56,8
0,030	29,0	36,25	43,50	52,2	58,0

jeżeli  $F_r$  oznacza powierzchnię przekroju rdzenia, tj. betonu wewnątrz owinięcia,  $F_p$  przekrój wzmocnienia podłużnego,  $F_o$  zastępuje przekrój owinięcia, równy objętości uzwojenia na jednostkę wysokości, a więc dla rdzenia okrągłego  $F_o = \frac{\pi d_r F_d}{s}$ , gdzie  $d_r$  oznacza średnicę rdzenia,  $F_d$  powierzchnię przekroju drutu owijającego,  $s$  krok owinięcia.

Tablica 8.

$F_o = 2 F_p$	$F_o = 2,5 F_p$	$F_o = 3,0 F_p$	$K_2$ dla ciśnienia betonu $\sigma_b$ w $\text{kg/cm}^2$			
$p_p$	$p_p$	$p_p$	20	25	30	36
0,0040	0,00333	0,00286	31,00	38,80	46,50	55,80
0,0050	0,00416	0,00357	32,50	40,60	48,80	58,50
0,0060	0,00500	0,00428	34,00	42,50	51,00	61,20
0,0070	0,00583	0,00500	35,50	44,40	53,30	63,90
0,0080	0,00667	0,00571	37,00	46,30	55,50	66,60
0,0090	0,00750	0,00643	38,50	48,10	57,80	69,30
0,0100	0,00833	0,00714	40,00	50,00	60,00	72,00
0,0110	0,00917	0,00786	41,50	51,90	62,30	74,70
0,0120	0,01000	0,00857	43,00	53,80	64,50	77,40
0,0130	0,01080	0,00928	44,50	55,60	66,80	80,10
0,0140	0,01167	0,01000	46,00	57,50	69,00	82,80
0,0150	0,01250	0,01071	47,50	59,40	71,30	85,50
0,0160	0,01333	0,01143	49,00	61,30	73,50	88,20
0,0170	0,01417	0,01214	50,50	63,10	75,80	90,90
0,0180	0,01500	0,01286	52,00	65,00	78,00	93,60

Jeżeli wstawimy  $F'_z = p_p F'_r$ ,  $F'_o = p_o F'_r$ , to

$$F'_r = \frac{P}{\sigma_b(1,25 + 15 p_p + 30 p_o)} = \frac{P}{K_2} \dots \dots (102)$$

Przytem przyjmujemy  $F'_z \geq 1/3 F'_o$ , zaś krok śruby ma być  $< 0,2 d_r$ , przy  $\sigma_b = 50 \text{ kg/cm}^2$ , zaś  $s < 0,125 d_r$ , przy  $\sigma_b = 100 \text{ kg/cm}^2$ , i zarazem  $s < 8 \text{ cm}$ .

$$F'_i = 1,25 F'_r + 15 F'_p + 30 F'_o \leq 2 F'_r.$$

Por. tabliczkę 8. (str. 1361) dla kilku naprężeń dopuszczalnych i stosunków  $\frac{F'_o}{F'_p} = \frac{p_o}{p_p} = 2,0, 2,5 \text{ i } 3,0$ .

Górną granicę wielkości przekroju sprowadzonego  $F'_i$  określa warunek  $F'_i \leq 2 F'_r$ , wedle przepisów niemieckich  $F'_i \leq 2 F'_b$ . Dla  $\frac{F'_o}{F'_p} = 2,0, 2,5, 3,0$  otrzymamy  $p_p = 0,0180, 0,0150 \text{ i } 0,01286$ .

11. Przykład. Dane  $P = 22000 \text{ kg}$ ,  $\sigma_b = 20 \text{ kg/cm}^2$ ,  $F'_o = 2 F'_p$ ,  $p_p = 0,01$ ,  $p_o = 0,02$ . Z tabliczki 8. otrzymamy  $K_2 = 40,00 \text{ kg/cm}^2$  a przekrój rdzenia  $F'_r = \frac{22000}{40} = 550 \text{ cm}^2$ . Przyjmijmy  $d_r = 27 \text{ cm}$  ( $F'_r = 572,6 \text{ cm}^2$ ),  $F'_p = 0,01 \cdot 572,6 = 5,7 \text{ cm}^2$ . Temu odpowiada  $8 \phi 10$  ( $F'_p = 6,28 \text{ cm}^2$ ),  $F'_o = 0,02 \cdot 572,6 = 11,45 \text{ cm}^2$   $s < 0,2 \cdot 27$ ,  $s = 5 \text{ cm}$ .  $F'_d = \frac{F'_o s}{\pi d_r} = \frac{11,45 \cdot 5}{\pi \cdot 27} = 0,675 \text{ cm}^2$ . Przyjmujemy  $\phi 9 \text{ mm}$  ( $F'_d = 0,0636 \text{ cm}^2$ ),  $F'_o = \frac{\pi \cdot 27 \cdot 0,636}{5} = 10,8 \text{ cm}^2$ ,  $\sigma_b = \frac{22000}{1,25 \cdot 572,6 + 15 \cdot 5,7 + 30 \cdot 10,8} = 19,6 \text{ kg/cm}^2$ .

Przyjmijmy grubość skorupy  $3 \text{ cm}$ , to  $d = 33 \text{ cm}$ ,  $F'_b = 855 \text{ cm}^2$ .

$$F'_i = 1,25 \cdot 572,6 + 15 \cdot 5,7 + 30 \cdot 10,8 = 1125 < 2 \cdot 572,6.$$

Dla rdzenia kwadratowego nakazują przepisy polskie przyjmować:

$$F'_i = 1,25 F'_r + 15 F'_p + 15 F'_o \dots \dots (103)$$

Najkorzystniejsze  $p_o$  są  $0,01$  do  $0,02$ .

Tablica 9.

$F'_o = 2 F'_p$	$F'_o = 2,5 F'_p$	$F'_o = 3 F'_p$	$K_3$ dla ciśnienia betonu $\sigma_b$ w $\text{kg/cm}^2$					
			$p_p$	$p_p$	$p_p$	20	25	30
0,006	0,0051	0,0045		30,4	38,0	45,6	53,2	60,8
0,007	0,0060	0,0052		31,3	39,1	47,0	54,8	62,6
0,008	0,0069	0,0060		32,2	40,2	48,3	56,3	64,4
0,009	0,0077	0,0067		33,1	41,4	49,7	58,3	66,2
0,010	0,0086	0,0075		34,0	42,5	51,0	59,5	68,0
0,011	0,0094	0,0082		34,9	43,6	52,3	61,1	69,8
0,012	0,0103	0,0090		35,8	44,7	53,7	62,6	71,6
0,013	0,0111	0,0097		36,7	45,9	55,0	64,2	73,4
0,014	0,0120	0,0105		37,6	47,0	56,4	65,8	75,2
0,015	0,0129	0,0112		38,5	48,1	57,7	67,4	77,0
0,016	0,0137	0,0120		39,4	49,2	59,1	68,9	78,8
0,017	0,0146	0,0127		40,3	50,4	60,4	70,5	80,6
0,018	0,0154	0,0135		41,2	51,5	61,8	72,1	82,4
0,019	0,0163	0,0142		42,1	52,6	63,1	73,7	84,2
0,020	0,0171	0,0150		43,0	53,7	64,5	75,2	86,0

Analogicznie do (102) mamy tu:  $F_r = \frac{P}{K_3} \dots \dots \dots (104)$

Wartości  $K_3$  zestawiono w tabliczce 9.

12. Przykład. Dane  $P = 100\,000\text{ kg}$ ,  $\sigma_b = 35\text{ kg/cm}^2$ ,  $p_0 = 0,02 = 2,5 p_p$ ,  $p_p = 0,008$ .  
 Z tabliczki 9. mamy  $K_3 = 58,7\text{ kg/cm}^2$ ,  $F_r = \frac{100\,000}{58,7} = 1704\text{ cm}^2$ . Przyjawszy długość boku rdzenia kwadratowego  $a = 42\text{ cm}$ , otrzymamy  $F_r = 1764\text{ cm}^2$ ,  $F_p = 0,008 \cdot 1764 = 14,11\text{ cm}^2$ .  
 Przyjmijmy  $4 \phi 23$  ( $F_p = 15,21\text{ cm}^2$ ),  $F_0 = 0,02 \cdot 1764 = 35,3\text{ cm}^2$ . Dla  $s = 6\text{ cm} < 0,2 \cdot 47$ ,  
 $F_d = \frac{F_0 s}{4 a} = \frac{35,3 \cdot 6}{4 \cdot 42} = 1,26\text{ cm}^2$ . Przyjmujemy  $\phi 13\text{ mm}$   $F_d = 1,33\text{ cm}^2$ .  $F_o = \frac{4 \cdot 42 \cdot 1,33}{6} = 37,2\text{ cm}^2$ ,  $p_0 = \frac{37,2}{1,704} = 0,022$ ,  $p_p = \frac{15,21}{1704} = 0,0089$ ,  $\sigma_b = \frac{100\,000}{1,25 \cdot 1764 + 15 \cdot 15,21 + 15 \cdot 37,2} = 33,4\text{ kg/cm}^2$ .  
 Gdy grubość skorupy przyjmiemy  $3\text{ cm}$ , to długość boku  $a_1 = 39 + 2 \cdot 3 = 45\text{ cm}$ ,  $F_b = 2025\text{ cm}^2$ .

$$F_i = 2790 < 2 \cdot 1521.$$

Marsh oblicza grubość drutu owijającego i otrzymuje:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla kroku śruby } s = \frac{1}{5} d_r \quad \frac{1}{6} d_r \quad \frac{1}{7} d_r \quad \frac{1}{8} d_r \\ \text{grubość drutu } d_s = 0,029 d_r, 0,0275 d_r, 0,0250 d_r, 0,0234 d_r \end{array} \right\} \dots (105)$$

Dla słupów uzwojonych z betonu wyborowego przyjąć można:

$$P = (1,25 F_r + 10 F_p + 20 F_0) \sigma_b \dots \dots \dots (106)$$

19. Uzwojenie ściskanej części belki zginanej.

Fig. 488 przedstawia uzwojenie ściskanej części belki zginanej. Dla braku doświadczeń przyjmujemy, że przez uzwojenie ściskanie w rdzeniu rozłoży

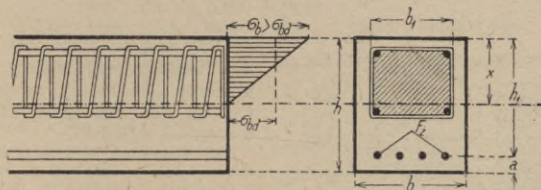


Fig. 488.

się jednostajnie, a więc trójkąt ciśnień przemieniamy na prostokąt o podstawie równej szerokości rdzenia, zatem otrzymamy:

$$P = \frac{1}{2} \sigma_b x b = F_i \sigma_b = \sigma_b (\alpha F_r + 15 F_p) \dots \dots (107)$$

20. Wyboczenie słupów.

Dla słupów ciśnionych należy według przepisów polskich uwzględnić niebezpieczeństwo wyboczenia, jeżeli smukłość, tj. stosunek swobodnej długości pręta  $l$  do najmniejszego promienia bezwładności przekroju  $i$  przekracza:

- 60 w wypadku wzmocnienia podłużnego,
- 40 " " " uzwojonego,
- 20 " " " betonu bez wzmocnienia.

Spółczynniki zmniejszające  $\beta$  należy przyjmować wedle następującej tablicy.

Tablica 10.

Dla słupów żelbetowych uzbrojonych podłużnie.

$\frac{l}{i}$	$\beta$	$\frac{l}{i}$	$\beta$	$\frac{l}{i}$	$\beta$
65	0,95	80	0,76	95	0,57
70	0,88	85	0,70	100	0,51
75	0,82	90	0,62		

W przybliżeniu  $\beta = 1,78 - 0,0127 \frac{l}{i}$ .

Tablica 11.

Dla słupów żelbetowych uzwojonych.

$\frac{l}{i}$	$\beta$	$\frac{l}{i}$	$\beta$	$\frac{l}{i}$	$\beta$	$\frac{l}{i}$	$\beta$
45	0,97	60	0,85	75	0,73	90	0,60
50	0,93	65	0,81	80	0,69	95	0,56
55	0,89	70	0,77	85	0,65	100	0,51

W przybliżeniu  $\beta = 1,87 - 0,0086 \frac{l}{i}$ , przyczem  $l$  oznacza długość wolną,  $i$  najmniejszy promień bezwładności.

Dalej:

$$\sigma_w = \frac{P}{\beta(F_b + 15 F_p)} = \beta \sigma_b \dots \dots \dots (108)$$

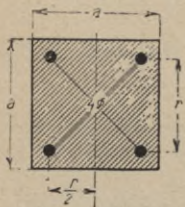


Fig. 489 a.

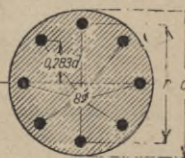


Fig. 489 b.

Gdy długość słupa jest większą niż 20-krotny najmniejszy wymiar przekroju, to należy moment wywołany siłą zginającą zwiększyć o wartość 0,005  $Pl$ .

13. Przykład. Wyznaczyć największe ciśnienie betonu dla słupa 4 m wysokiego o przekroju, podanym na fig. 489 dla  $a = 30$  cm pod działaniem siły  $P = 30\,000$  kg.  $F_b = 900$  cm<sup>2</sup>,  $F_p = 12,57$  cm<sup>2</sup> (4  $\phi$  20 mm,  $p = 0,014$ ),  $l = 8,00$  m.

$$J = \frac{30^4}{12} + 15 \cdot 12,57 \cdot 12,5^2 = 96\,900 \text{ cm}^4,$$

$$i = \sqrt{\frac{96\,900}{900 + 15 \cdot 12,57}} = 9,4 \text{ cm},$$

$\frac{l}{i} = \frac{800}{9,4} = 85,2$ , z tablicy 10.  $\beta = 0,70$ , z równania (100)  $K_1 = \frac{30\,000}{900} = 33,3$ , z tablicy 7. dla  $p = 0,014$ ,  $\sigma_b = 27,5$  kg/cm<sup>2</sup>.

Projektowanie słupów na wyboeczenie. a) Przekrój kwadratowy (fig. 489 a). Przyjmijmy  $r = 0,8 a$ , to ponieważ  $\frac{100 F_p}{F_b} = p$ ,  $F_b = a^2$ , więc:

$$i = \sqrt{\frac{J_b + 30 \frac{F_p}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^2}{F_b + 15 F_p}} \dots \dots \dots (109)$$

Dla:  $p = 0,8$      $1,4$      $2$      $3$   
 $i = 0,302$      $0,312$      $0,318$      $0,327$ . a; w przybliżeniu:  $i = 0,315$  a.

$$\sigma_w = \frac{P}{F_b + 15 F_p} \left[ 1 + 0,0001 \left( \frac{l}{i} \right)^2 \right], \text{ a po podstawieniu:}$$

$$F_b = a^2 = \frac{P}{2 \sigma_w (1 + 0,15 p)} \pm \sqrt{\left[ \frac{P}{2 \sigma_w (1 + 0,15 p)} \right]^2 + \frac{0,00102 P l^2}{\sigma_w (1 + 0,15 p)}}. \quad (110)$$

b) Przekrój okrągły (fig. 489 b). Przeprowadzając analogicznie rozumowanie, otrzymamy:

$$d = 0,01427 l + \sqrt{(0,01427 l)^2 + \frac{0,715 P}{\sigma_b (1 + 0,15 p)}} \dots \dots (111)$$

Projektowanie słupów uzwojonych na wyboeczenie. Uzwojenia przy obliczaniu  $J$  i  $F_i$  nie uwzględniamy, możemy jednak przyjąć większe naprężenie dopuszczalne. Wedle (104) dla przekroju kwadratowego:

$$\sigma_w = \sigma_b \frac{1,25 F_r + 15 F_p + 30 F_o}{F_r} \dots \dots \dots (112)$$

$$r = 0,00915 l + \sqrt{(0,00915 l)^2 + \frac{P}{1,37 \sigma_w (1 + 0,15 p)}} \dots (113)$$

Dla przekroju okrągłego otrzymujemy:

$$r = 0,0122 l + \sqrt{(0,0122 l)^2 + \frac{0,93 P}{\sigma_w (1 + 0,15 p)}} \dots \dots (114)$$

## 21. Słupy żelbetowe z wkładką żeliwną.

Dla słupów żelbetowych z wkładką żeliwną możemy przyjąć dla pewności  $n = 5$  (fig. 490 a):  $P = 1,5 F_r \sigma_b + 480 F_z + \sigma_l F_l \dots \dots \dots (115)$

jeżeli  $P$  oznacza siłę łamiącą,  $F_r$  przekrój rdzenia betonu,  $F_z$  przekrój wkładek podłużnych z żelaza zlewne,  $F_l$  przekrój wkładki żeliwnej,  $\sigma_l$  naprężenie żeliwa. Przy betonie uwzględniamy  $1\frac{1}{2}$ -krotne zwiększenie wytrzymałości przez owinięcie. Jeżeli wchodzi w grę wyboeczenie, należy  $\sigma_l$

zmniejszyć stosownie do  $\frac{l}{i}$ , przytem można przyjąć:

$$F_i = F_l + \frac{F_z}{2} + \frac{l_r}{30}, \quad J_i = J_l + \frac{J_z}{2} + \frac{J_z}{30} \dots \dots (116)$$

$$i = \sqrt{\frac{J_i}{F_i}} \dots \dots \dots (117)$$

Jeżeli wytrzymałość żeliwa przyjmiemy  $\mu_l = 8000 \text{ kg/cm}^2$ , to  $\sigma_l = 1600 \text{ kg/cm}^2$ , dla gorszych gatunków żeliwa mniej; co należy odpowiednio uwzględnić.

Przepisy polskie mówią: Słupy żelbetowe uzwojone z duszą żeliwną można obliczać przy założeniu, że wytrzymałość całego słupa jest sumą wytrzymałości zewnętrznej części żelbetowej i wewnętrznej żeliwnej, jeżeli skok uzwojenia będzie równy lub mniejszy, niż podwójny odstęp uzwojenia od wkładki żeliwnej. Przy uwzględnieniu wyboeczenia należy wziąć w rachubę przekrój zastępczy  $F_i = F_z + \frac{1}{2} F_p + \frac{1}{30} F_r$ , gdzie oznacza  $F_z$  powierzchnię przekroju żeliwa,  $F_p$  uzbrojenia podłużnego,  $F_r$  rdzenia betonu.

VI. Ciśnienie mimośrodkowe.

22. Faza pierwsza.

Na przekrój działa siła  $F$  równoległe do osi z mimośrodem  $c$  (fig. 490 b).

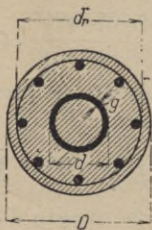


Fig. 490 a.

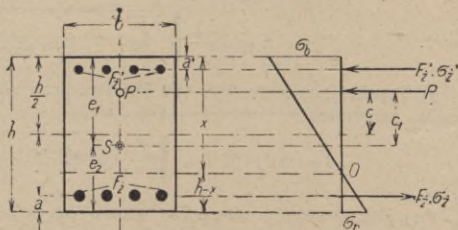


Fig. 490 b.

Dla dwustronnego uzbrojenia słupa prostokątnego mamy przekrój idealny:

$$F_i = bh + n(F'_z + F''_z) \dots \dots \dots (118)$$

$$e_1 = \frac{\frac{bh^2}{2} + nF'_z h_1 + nF''_z a'}{bh + n(F'_z + F''_z)} \dots \dots \dots (119)$$

$$J = \frac{1}{3} b(e^3 + e_1^3) + nF'_z(e - a)^2 + nF''_z(e_1 - a')^2 \dots (120)$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_b \\ \sigma_r \end{matrix} \right\} = -\frac{P}{F_i} \mp \frac{M e_1}{J} = -P \left( \frac{1}{F_i} \pm \frac{c_1 \cdot e_1}{J} \right) \dots \dots \dots (121)$$

gdź:  $M = P \cdot c_1 = P[c + (e_1 - \frac{1}{2}h)]$ .

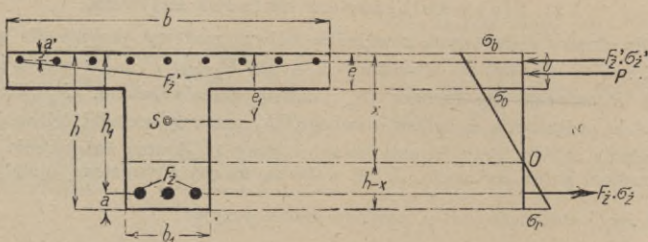


Fig. 491.

Z rysunku otrzymamy:  $x = \frac{\sigma_b \cdot h}{\sigma_b \pm \sigma'_b} \dots \dots \dots (122)$

Jeżeli  $\sigma_b = \sigma_r$  oznacza rozciąganie, to  $x = \frac{\sigma_b}{\sigma_b + \sigma_r} \cdot h \dots \dots (123)$

$h - x = 0$ , gdy  $\sigma_r = 0$ , więc  $\frac{1}{F_i} = \frac{c_1 e}{J}$  czyli  $c_1 = \frac{i^2}{e} = r_1$  odstępowi punktu rdzennego.

Jeżeli przekrój jest teowy (fig. 491), otrzymamy analogicznie:

$$e = \frac{\frac{1}{2} b h^2 + \frac{1}{2} (b - b_1) e^2 + nF'_z a' + nF''_z h_1}{b_1 h + (b - b_1) e + n(F'_z + F''_z)} \dots \dots (124)$$



Dalej moment bezwładności ze względu na  $S'$ :

$$J = \frac{1}{3} b_1 [x_1^3 + (h - x_1)^3] + \frac{1}{3} (b - b_1) [x_1^3 - (x_1 - e)^3] + n F'_z (h_1 - x)^2 + n F''_z (x_1 - a')^2 \dots \dots \dots (125)$$

Naprężenia obliczymy teraz z równania (122). Jeżeli uzbrojenie jest jednostronne, to należy w tych wzorach wstawić  $F''_z = 0$ .  $n = E'_z : E_b$  w pierwszej fazie należy przyjąć równe 10. Przepisy polskie dla budownictwa z 1923 każą przyjmować niewłaściwie w tym przypadku  $n = 15$  i ciągnięcia nie uwzględniać. Dla słupów mimośrodkowo uzbrojonych dopuszczają ciśnienia w betonie, jak dla belek zginanych.

14. Przykład. Dane: przekrój prostokątny  $h = 60 \text{ cm}$ ,  $b = 100 \text{ cm}$ ,  $P = 42000 \text{ kg}$ ,  $F'_z = 23,09 \text{ cm}^2$  (15  $\phi$  14 mm),  $F''_z = 0$ ,  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $c = 31,5 \text{ cm}$ .

Wedle (118)  $F'_i = 60 \cdot 100 + 10 \cdot 23,09 = 6231 \text{ cm}^2$ ,

$$e_1 = \frac{1/2 \cdot 100 \cdot 60^2 + 10 \cdot 23,09 \cdot 55}{6231} = 30,93 \text{ cm}, \quad e = 29,07 \text{ cm},$$

$$J = \frac{100 (30,93^3 + 29,07^3)}{3} + 10 \cdot 23,09 (29,07 - 5)^2 = 1938180 \text{ cm}^4,$$

$$c_1 = 31,5 + (30,93 - 30) = 32,43 \text{ cm},$$

$$\sigma_b = -42000 \left( \frac{1}{6231} + \frac{32,43 \cdot 30,93}{1938180} \right) = 29,4 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_b = -13,7 \text{ kg/cm}^2,$$

$$x = \frac{29,4}{29,4 + 13,7} \cdot 60 = 40,9 \text{ cm}, \quad \sigma'_z = 10 \cdot 13,7 \frac{(60 - 40,9) - 5}{60 - 40,9} = 101 \text{ kg/cm}^2.$$

W ten sposób możemy obliczać, jeżeli wypada ciągnięcie mniejsze niż dopuszczalne (poniżej  $20 \text{ kg/cm}^2$ ) lub gdy ciągnięcia niema.

### 23. Faza druga.

Jeżeli wypada ciągnięcie za wielkie lub, jak polskie przepisy żądają jeżeli wogóle w fazie I występuje ciągnięcie, zatem  $P$  wychodzi z rdzenia nie liczymy na ciągnięcie betonu i wyznaczamy naprężenia w fazie II

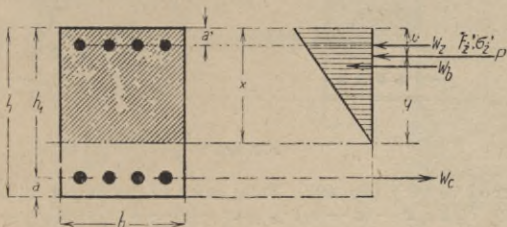


Fig. 492.

Przekrój prostokątny (fig. 492). Utwórzmy momenty ze względu na  $P$ , to:

$$\frac{x b \sigma_b}{2} \left( \frac{x}{3} - u \right) - \sigma'_z F'_z (u - a') - \sigma'_z F''_z (h_1 - u) = 0,$$

$$\sigma'_z = 15 \sigma_b \frac{h_1 - x}{x}, \quad \sigma'_z = 15 \sigma'_b \frac{x - a'}{x},$$

$$\text{stad: } x^3 - 3ux^2 + \frac{90}{b} [F'_z(h_1 - u) - F'_z(u - a')]x + \\ - \frac{90}{b} [F'_z h_1(h_1 - u) - F'_z a'(u - a')] = 0 \dots \dots (126)$$

$x$  wyznaczamy albo próbowaniem albo wzorem Cardana, wstawiając  $y = x - u$ . Naprężenia otrzymamy z wzorów:

$$\sigma_b = \frac{2Px}{bx^2 + 30[F'_z(x - a') - F'_z(h_1 - x)]} \dots \dots (127)$$

$$\tau'_z = -15 \frac{x - a'}{x} \sigma_b, \quad \sigma_z = 15 \frac{h_1 - x}{x} \sigma_b \dots \dots (128)$$

$$\text{Próba: } \frac{1}{2} \sigma_b x b + F'_z \sigma'_z - F'_z \sigma_z = P.$$

Jeżeli z wzoru (126) otrzymamy  $x > h$ , to oś obojętna jest cała poza przekrojem i nie należy używać tych wzorów, lecz wzorów fazy I (118–123).

15. Przykład. Dane:  $P = 42000 \text{ kg}$ ,  $u = -18 \text{ cm}$ ,  $h = 60 \text{ cm}$ ,  $b = 100 \text{ cm}$ ,  $F'_z = F'_z' = 11,78 \text{ cm}^2$  (15  $\phi$  10 mm),  $a = a' = 4 \text{ cm}$ .

Wtedy mamy:

$$x^3 + 3 \cdot 18 \cdot x^2 + \frac{90}{100} [11,78 \{ (56 + 18) - (-18 - 4) \}] x - \frac{90}{100} [11,78 \cdot 56 (56 + 18) + \\ - 11,78 \cdot 4 (-18 - 4)] = 0, \\ x^3 + 54x^2 + 804x - 44867 = 0, \quad x = 19,5 \text{ cm}.$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 42000 \cdot 19,5}{100 \cdot 19,5^2 + 30 \cdot 11,78 (15,5 - 36,5)} = 53,6 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\sigma_z = 15 \cdot 53,6 \frac{56 - 19,5}{19,5} = 1500 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_z = 639 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\text{Próba: } \frac{1}{2} 53,6 \cdot 19,5 \cdot 100 + 11,78 \cdot 639 - 11,78 \cdot 1500 = 42000.$$

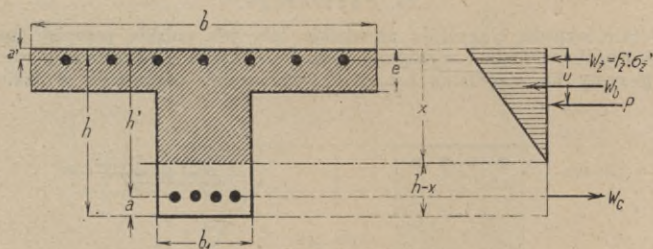


Fig. 493.

Przekrój teowy (fig. 493). Tutaj suma sił poziomych musi być równa zero, więc:  $\frac{1}{2} b \sigma_b x - (b - b_1) \frac{1}{2} \sigma_0 (x - e) + F'_z \sigma'_z - F'_z \sigma_z = P$ ,

$$\text{a gdy: } \sigma_0 = \sigma_b \frac{x - e}{x}, \text{ to}$$

$$\frac{b x^2}{2} - (b - b_1) \frac{(x - e)^2}{2} + 15 F'_z (x - a') - 15 F'_z (h_1 - x) = \frac{Px}{\sigma_b} = S_x.$$

Podobnie otrzymamy z równania momentów:

$$\frac{b x^3}{3} - \frac{b - b_1}{3} (x - e)^3 + 15 F'_z (x - a')^2 + 15 F'_z (h_1 - x)^2 = \frac{Px(x - u)}{\sigma_b} = J_x.$$

Z obu tych równań otrzymamy:

$$x - u = \frac{J_x}{S_x}. \text{ Jeżeli } \frac{b_1}{b} = \beta, \text{ to po wstawieniu wartości za } J_x \text{ i } S_x \text{ otrzymamy:}$$

$$x^3 - 3ux^2 + 3 \frac{1-\beta}{\beta} e(e-2u)x - \frac{90F_z}{b\beta} (u-a')x +$$

$$+ \frac{90F_z}{b\beta} (h_1-u')x + \frac{1-\beta}{\beta} e^2(3u-2e) - \frac{90F_z'}{b\beta} a'(a'-u) +$$

$$- \frac{90F_z'}{bh} h_1(h_1-u) = 0 \dots \dots \dots (129)$$

Równanie to trzeciego stopnia możemy rozwiązać albo próbami albo wzorem Cardana.

Wstawiliśmy:  $y = x - u,$

$$p = \frac{30}{b\beta} [F_z(h_1-u) - F_z'(u-a')] - u^2 + \frac{1-\beta}{\beta} e(e-2u),$$

$$\text{zaś: } q = -\frac{45}{b\beta} [F_z'(a'-u)^2 + F_z'(h_1-u)^2] - u^3 +$$

$$+ \frac{3}{2} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} e \cdot u(e-2u) + \frac{1-\beta}{2\beta} e^2(3u-2e)$$

$$\left. \dots \dots \dots (130) \right\}$$

otrzymamy:

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \dots \dots \dots (131)$$

Wreszcie mamy:  $x = y + u \dots \dots \dots (132)$

$$\sigma_b = \frac{Px}{S_x} = \frac{Px(x-u)}{J_x} \dots \dots \dots (133)$$

$$\sigma_z = 15 \tau_b \frac{h_1-x}{x}, \quad \sigma'_z = 15 \tau_b \frac{x-a'}{x}.$$

24. Projektowanie przekrojów ciśnionych mimośrodkowo.

Przekrój prostokątny. Cały przekrój ciśniony, względnie w fazie I (fig. 494).

Tu mamy:

$$\sigma_z = 15 \left( \sigma'_b + \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{h} a \right),$$

$$\sigma'_z = 15 \left( \sigma'_b + \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{h} h_1 \right).$$

$$P = \frac{\sigma_b + \sigma'_b}{2} b \cdot h + 15 F_z \left( \sigma'_b + \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{h} \cdot a \right) + 15 F'_z \left( \sigma'_b + \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{h} h_1 \right),$$

a stąd:

$$F'_z = \frac{P - \frac{\sigma_b + \sigma'_b}{2} \cdot bh - 15 F_z \left( \sigma'_b + \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{h} \cdot a \right)}{15 \left( \sigma'_b + \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{h} \cdot h_1 \right)} \dots \dots (134)$$

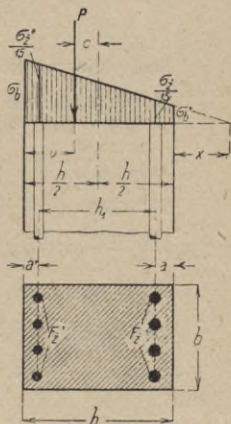


Fig. 494.

Teraz utwórzmy równanie momentów ze względu na  $F'_z$ :

$$P \left( \frac{h}{2} - a - c \right) = 15 F'_z \left( \sigma'_b + \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{h} \cdot a \right) (h_1 - a) + \sigma'_b \cdot b \cdot h \cdot \left( \frac{h}{2} - a \right) + \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{2} \cdot b \cdot h \left( \frac{h}{3} - a \right),$$

a stąd:

$$\sigma'_b = \frac{P \left( \frac{h}{2} - a - c \right) - 15 \frac{F'_z a}{h} \sigma_b (h_1 - a) - \frac{\sigma_b}{2} b h \left( \frac{h}{3} - a \right)}{15 F'_z \left( 1 - \frac{a}{h} \right) (h_1 - a) + \frac{b h}{6} (2h - 3a)} \quad (135)$$

Jeżeli mamy dane  $P, c, b, h, a, \sigma_b$  i przyjmiemy  $F'_z$  bardzo małe, może 0,4%  $b h$ , to z równania (135) obliczymy  $\sigma'_b$ , a potem z równania (134)  $F'_z$ .

Przekrój prostokątny w fazie II. Dane wymiary  $b, h$ , dalej  $P$  i  $c, \sigma_b$ , szukane  $F'_z$  i  $F'_z$ .

Stark i Dankelmann tworzą momenty ze względu na ciągnioną wkładkę (fig. 441)  $M_p = P(h_1 - u)$ :

$$M_c = W_b \left( h_1 - \frac{x}{3} \right), \quad x = \frac{15 \sigma_b}{\sigma_z + 15 \sigma_b} h_1, \quad W_b = \sigma_b \frac{x b}{2}, \quad M_f = M_p - M_c \quad (136)$$

$$W_z = F'_z \sigma'_z = \frac{M_f}{h_1 - a'} \quad \dots \quad (137)$$

$$W_c = W_b + W_z - P = F'_z \sigma_z \quad \dots \quad (138)$$

Stąd obliczyć można  $F'_z$  i  $F'_z$ .

16. Przykład. Dane  $P = 42000 \text{ kg}$ ,  $u = -18 \text{ cm}$ ,  $h = 60 \text{ cm}$ ,  $b = 100 \text{ cm}$ ,  $a = a' = 4 \text{ cm}$ ,  $\sigma_b = 30 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_z = 800 \text{ kg/cm}^2$ . Mamy wtedy  $M_p = 42000 (56 + 18) = 3108000 \text{ kgcm}$ ,

$$x = \frac{15 \cdot 30}{800 + 15 \cdot 30} \cdot 56 = 20,2 \text{ cm}, \quad W_b = 30 \frac{20,2 \cdot 100}{2} = 30300 \text{ kg}, \quad M_c = 30300 \left( 56 - \frac{20,2}{3} \right) =$$

$$= 1492000 \text{ kgcm}, \quad M_f = 3108000 - 1492000 = 1616000 \text{ kgcm}, \quad \sigma'_z = 15 \cdot 30 \frac{20,2 - 4}{20,2} = 361 \text{ kg/cm}^2$$

$$W_z = \frac{1616000}{52} = 31100 \text{ kg}, \quad F'_z = \frac{31100}{361} = 86,3 \text{ cm}^2, \quad R = 30300 + 31100 - 42000 = 19400 \text{ kg}$$

$$F_z = \frac{19400}{800} = 24,28 \text{ cm}^2.$$

Przyjmujemy  $F_z = 25,14 \text{ cm}^2$  (8 § 20),  $F'_z = 86,02 \text{ cm}^2$  (8 § 37).

$$x^3 + 3 \cdot 18 \cdot x^2 + \frac{90}{100} [25,14 (56 + 18) - 86,02 (-18 - 4)] x - \frac{90}{100} [25,14 \cdot 56 (56 + 18) + -86,02 \cdot 4 (-18 - 4)] = 0,$$

$$x^3 + 54x^2 + 3375x - 100000 = 0, \quad x = 20,5 \text{ cm},$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 42000 \cdot 20,5}{100 \cdot 20,5^2 + 30 [86,02 (20,5 - 4) - 24,28 (56 - 20,5)]} = 29,05 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_z = 15 \cdot 29,05 \frac{56 - 20,5}{20,5} = 756 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma'_z = 15 \cdot 29,05 \frac{20,5 - 4}{20,5} = 351 \text{ kg/cm}^2.$$

Próba:  $14,52 \cdot 20,5 \cdot 100 + 86,02 \cdot 351 - 25,14 \cdot 756 = 41080 \approx 42000$ .

Przekrój prostokątny w fazie drugiej. Dane  $P, b, e, \sigma_b, \sigma_z$ , szukane  $h, F'_z$  i  $F'_z$ .

Wedle Spangenberg przyjmujemy  $\mu = \frac{F'_z}{F_z}$  i nazwijmy  $a' = p h_1$  (fig. 495).

Wtedy otrzymamy:

$$x = \frac{15 \sigma_b}{15 \sigma_b + \sigma'_z} \cdot h_1 = \xi h_1 \dots \dots \dots (139)$$

$$W_b = \frac{1}{2} x b \sigma_b = \frac{1}{2} \xi b \sigma_b h_1 \dots \dots \dots (140)$$

$$\frac{\sigma'_z}{\sigma_z} = \frac{x - a'}{h_1 - x} = \frac{\xi - p}{1 - \xi}, \text{ więc } \sigma'_z = \frac{\xi - p}{1 - \xi} \sigma_z.$$

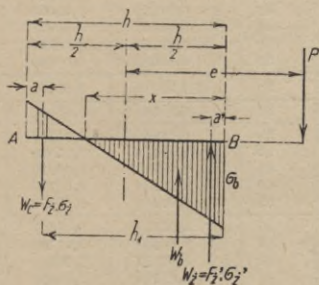


Fig. 495.

$$W_z = F'_z \sigma'_z = \mu F_z \frac{\xi - p}{1 - \xi} \sigma_z = W_r \mu \frac{\xi - p}{1 - \xi} \dots \dots \dots (141)$$

$$W_r + P = W_b + W_z,$$

więc:

$$W_r = \frac{\frac{1}{2} b h_1 \sigma_b \xi - P}{1 - \mu \frac{\xi - p}{1 - \xi}} \dots \dots \dots (142)$$

Ustawmy równanie momentów ze względu na wkładkę ciśnienia, to:

$$W_r (h_1 - a') = \frac{1}{2} b h_1^2 \sigma_b \xi (\frac{1}{3} \xi - p) + P (e - \frac{1}{2} (h_1 + a) - a').$$

Nazwijmy:

$$q = \frac{1 - p}{1 - \mu \frac{\xi - p}{1 - \xi}} \dots \dots \dots (143)$$

to:  $h_1^2 - 2 \frac{q - \frac{1}{2} + p}{\xi \sigma_b (q - \frac{1}{3} \xi + p)} \cdot \frac{P}{b} \cdot h_1 - \frac{2 P (e - \frac{1}{2} a)}{\xi \sigma_b (q - \frac{1}{3} \xi + p) b} = 0;$

jeżeli:  $\alpha = \frac{q - \frac{1}{2} + p}{\xi \sigma_b (q - \frac{1}{3} \xi + p)}, \beta = \frac{1}{2} \alpha (q - \frac{1}{2} + p) \dots (144 \text{ i } 145)$

to:  $h_1 = \frac{\alpha P}{b} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{b}{\beta P} \left( e - \frac{a}{2} \right)} \right] \dots \dots \dots (146)$

Jeżeli:  $\gamma = \frac{\xi \sigma_b q}{2 \sigma_z (1 - p)} \dots \dots \dots (147)$

to:  $F_z = \gamma \left( b h_1 - \frac{2 P}{\xi \sigma_b} \right), F'_z = \mu \cdot F_z \dots \dots \dots (148 \text{ i } 149)$

Spangenberg podaje następującą tablicę:

Tablica 13.

$\mu$	$\sigma_z$	$\sigma_b$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\eta$
0,00	750	30	0,05079	0,01269	0,007500	0,3750
	900	35	0,04421	0,01105	0,007163	0,3684
	1000	35	0,04688	0,01172	0,006025	0,3443
		40	0,03810	0,00952	0,007500	0,3750
		45	0,03185	0,00796	0,009067	0,4030
		50	0,02722	0,00680	0,010715	0,4286
		55	0,02346	0,00586	0,012433	0,4521
	1200	35	0,05225	0,01306	0,004438	0,3043
		40	0,04220	0,01055	0,005555	0,3333
		45	0,03507	0,00877	0,006750	0,3600
		50	0,02982	0,00745	0,008013	0,3846
		55	0,02582	0,00645	0,009336	0,4074
0,10	750	30	0,05272	0,01441	0,007871	0,3750
	900	35	0,04583	0,01248	0,007505	0,3684
	1000	35	0,04842	0,01307	0,006280	0,3443
		40	0,03954	0,01080	0,007871	0,3750
		45	0,03320	0,00919	0,009581	0,4030
		50	0,02849	0,00798	0,011397	0,4286
		55	0,02489	0,00706	0,013320	0,4521
	1200	35	0,05367	0,01427	0,004588	0,3043
		40	0,04352	0,01169	0,005775	0,3333
		45	0,03631	0,00986	0,007059	0,3600
		50	0,03100	0,00851	0,008428	0,3846
		55	0,02693	0,00746	0,009876	0,4074
0,25	750	30	0,05557	0,01737	0,008500	0,3750
	900	35	0,04824	0,01497	0,008084	0,3684
	1000	35	0,05073	0,01537	0,006704	0,3443
		40	0,04167	0,01303	0,008500	0,3750
		45	0,03520	0,01136	0,010470	0,4030
		50	0,03039	0,01013	0,012610	0,4286
		55	0,02668	0,00918	0,014925	0,4521
	1200	35	0,05580	0,01629	0,004834	0,3043
		40	0,04547	0,01360	0,006135	0,3333
		45	0,03817	0,01173	0,007579	0,3600
		50	0,03258	0,01034	0,009137	0,3846
		55	0,02858	0,00927	0,010816	0,4074
0,50	750	30	0,06026	0,02378	0,009807	0,3750
	900	35	0,05222	0,02030	0,009277	0,3684
	1000	35	0,05454	0,02014	0,007554	0,3443
		40	0,04520	0,01783	0,009807	0,3750
		45	0,03848	0,01624	0,012890	0,4030
		50	0,03346	0,01514	0,015327	0,4286
		55	0,02958	0,01437	0,018670	0,4521
	1200	35	0,05933	0,02030	0,005308	0,3043
		40	0,04877	0,01762	0,006869	0,3333
		45	0,04121	0,01573	0,008640	0,3600
		50	0,03560	0,01436	0,010630	0,3846
		55	0,03129	0,01336	0,012850	0,4074
1,00	750	30	0,06940	0,04633	0,014160	0,3750
	900	35	0,05998	0,03860	0,013160	0,3684
	1000	35	0,06201	0,03531	0,010120	0,3443
		40	0,05205	0,03474	0,014160	0,3750
		45	0,04482	0,03556	0,019550	0,4030
		50	0,03935	0,03781	0,026930	0,4286
		55	0,03509	0,04194	0,037450	0,4521
	1200	35	0,06631	0,03177	0,006602	0,3043
		40	0,05520	0,02989	0,008997	0,3333
		45	0,04717	0,02903	0,012000	0,3600
		50	0,04116	0,02905	0,015780	0,3846
		55	0,03651	0,02986	0,020620	0,4074

17. Przykład. Dane:  $P = 10\,000\text{ kg}$ ,  $e = 150\text{ cm}$ ,  $b = 50\text{ cm}$ ,  $a = a' = 4\text{ cm}$ ,  $\sigma_b = 40\text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_z = 1000\text{ kg/cm}^2$ . Przyjmijmy  $\mu = 0,25$ ,  $F'_z = 0,25 F_z$ .

W równanie (146) wstawimy współczynniki z tablicy i otrzymamy:

$$h_1 = \frac{0,0417 \cdot 10\,000}{50} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{50}{0,0130 \cdot 10\,000} (150 - 2)} \right] = 71,8\text{ cm},$$

przyjmijmy  $h_1 = 72\text{ cm}$ ,  $h = 76\text{ cm}$ .

Z równania (148) otrzymamy:

$$F_z = 0,0085 \left( 50,72 - \frac{2 \cdot 10\,000}{0,375 \cdot 40} \right) = 1,3\text{ cm}^2, \quad F'_z = 0,25 \cdot 19,3 = 4,83\text{ cm}^2$$

Przyjmijmy  $F_z = 19,01\text{ cm}^2$  (5  $\phi$  22),  $F'_z = 5,31\text{ cm}^2$  (4  $\phi$  13).

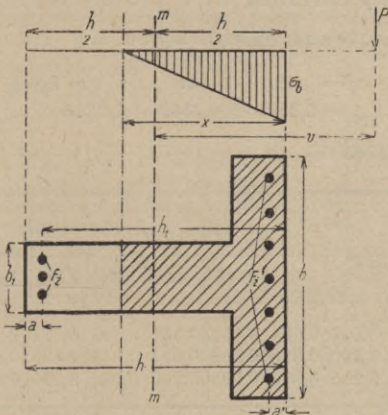


Fig. 496.

Tutaj  $u = -(150 - 88) = -112\text{ cm}$ . Zatem z równania (126):

$$x^3 + 330 \cdot x^2 + \frac{90}{50} [10,01 (72 + 112) - 5,31 (-112 - 4)] x - \frac{90}{50} [19,01,72 (72 + 112) - 5,31,4 (-112 - 4)] = 0,$$

$$x^3 + 336 \cdot x^2 + 7400 \cdot x - 458,000 = 0, \quad x = 26,8\text{ cm}.$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 10\,000 \cdot 30,9}{50 \cdot 26,8^2 + 30 [5,31 (26,8 - 4) - 19,01 (72 - 26,8)]} = 39,0\text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma'_z = 15 \frac{26,8 - 4}{26,8} \cdot 39,0 = 498\text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_z = 15 \frac{72,0 - 26,8}{26,8} \cdot 39,0 = 986\text{ kg/cm}^2.$$

Próba:  $\frac{1}{2} \cdot 39,0 \cdot 26,8 \cdot 50 + 5,31 \cdot 498 - 19,01 \cdot 986 = 10\,030 \approx 10\,000\text{ kg}$ .

Przekrój teowy w fazie drugiej. Dane  $P$  (fig. 496), siła działająca

w odstępnie  $v$  od połówki  $m - m$ ,  $a = p h_1$ ,  $\frac{b_1}{b} = \beta$ ,  $\frac{e}{h_1} = \delta_1$ ,  $\mu \frac{F'_z}{F_z}$ ,

$\frac{x}{h_1} = \xi = \frac{15 \sigma_b}{15 \sigma_b + \sigma_z}$ . Można udowodnić (Thullie, „Österr. Wochenschrift

f. d. öffentl. Baudienst“, 1918), jeżeli nazwiemy:

$$\varphi = 1 - (1 - \beta) \left( 1 - \frac{\delta_1}{\xi} \right)^2, \quad q = \frac{1 - p}{1 - \mu \frac{\xi - p}{1 - \xi}} \quad (150 \text{ i } 151)$$

$$\alpha = \frac{q - \frac{1}{2} + p}{\xi \sigma_b \left[ \varphi q - \frac{\xi}{3} + p + (1 - \beta) \left( 1 - \frac{\delta_1}{\xi} \right)^2 \cdot \left( \frac{2 \delta_1 + \xi}{3} - p \right) \right]} \quad (152)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \alpha (q - \frac{1}{2} + p) \dots \dots \dots (153)$$

że:

$$h_1 = \frac{\alpha P}{b} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{b}{P\varepsilon} \left( v - \frac{\alpha}{2} \right)} \right] \dots \dots \dots (154)$$

a gdy:

$$\gamma = \frac{\xi \sigma_b q}{2 \sigma_z (1-p)} \dots \dots \dots (155)$$

$$F_z = \gamma \left( b h_1 \varphi - \frac{2P}{\xi \sigma_b} \right), \quad F'_z = \mu F_z \dots \dots (156 \text{ i } 157)$$

Poniżej podajemy tablice dla  $\xi$ ,  $\varphi$  i  $\gamma$ , (tablice 14., 15., 16.).Tablica 14. dla  $\xi = \frac{x}{h_1}$ .

$$\sigma_z = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_b = \begin{matrix} 42 & 37 & 32 \text{ kg/cm}^2 \\ \xi = 0,3865 & 0,3569 & 0,3243 \end{matrix}$$

Tablica 15. dla  $\varphi = 1 - (1 - \beta) \left( 1 - \frac{\delta_1}{\xi} \right)^2$ .

	$\beta = 0,1$			$\beta = 0,2$			$\beta = 0,3$			
	$\sigma_b$	42	37	32	42	37	32	42	37	32
$\delta_1 = 0,1$	$\varphi =$	0,506	0,534	0,569	0,561	0,585	0,617	0,616	0,637	0,665
$\delta_2 = 0,2$	$\varphi =$	0,790	0,826	0,868	0,814	0,845	0,883	0,837	0,864	0,897
$\delta_3 = 0,3$	$\varphi =$	0,955	0,995	0,995	0,960	0,980	0,995	0,965	0,982	0,996

Tablica 16. dla  $\gamma = \frac{\xi \sigma_b q}{2 \sigma_z (1-p)}$ .

$\sigma_b$	$p = 0,10$				$p = 0,06$			
	$\mu = 0,00$	0,25	0,50	1,00	0,00	0,25	0,50	1,00
42	0,00812	0,00919	0,01059	0,01523	0,00811	0,00937	0,01105	0,01734
37	0,00660	0,00733	0,00825	0,01100	0,00660	0,00739	0,00858	0,01227
32	0,00519	0,00565	0,00623	0,00777	0,00519	0,00573	0,00645	0,00852

18. Przykład. Dane:  $P = 30000 \text{ kg}$ ,  $v = 40 \text{ cm}$ ,  $\mu = 0,25$ ,  $b = 150 \text{ cm}$ ,  $\sigma_b = 42 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_z = 1000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $\delta_1 = 0,2$ ,  $\alpha = 2,6 \text{ cm}$ . Wtedy otrzymamy dla  $p = 0,06$ ,  $\varphi = 0,814$   $\alpha = 0,0467$ ,  $\varepsilon = 0,0150$ ,  $\gamma = 0,00937$ .

$$\text{Wtedy: } h_1 = \frac{0,0467 \cdot 30000}{150} \left[ 1 + \sqrt{\frac{150 \cdot 38,7}{0,0150 \cdot 30000}} \right] = 44,2 \text{ cm},$$

$$h = 44,2 + 2,6 = 46,8 \text{ cm}, \quad h = 47 \text{ cm}.$$

$$F_z = 0,00937 \left( 150 \cdot 44,2 \cdot 0,814 - \frac{2 \cdot 30000}{0,3865 \cdot 42} \right) = 15,9 \text{ cm}^2,$$

$$F'_z = 0,25 \cdot 15,9 = 4 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Wtedy: } u = \frac{1}{2} 47 - 40 = -16,5 \text{ cm}, \quad e = 0,2 \cdot 44,2 = 8,8 \text{ cm}.$$

$$p = \frac{30}{150 \cdot 0,2} [15,9 (44,2 + 16,5) - 4 (-16,5 - 2,6)] + 16,5^2 + \frac{1 - 0,2}{0,2} 8,8 (8,8 -$$

$$- + 2 \cdot 16,5) = 2240,$$



$$q = -\frac{46}{150 \cdot 0,2} [4(2,6 + 16,5)^2 + 15,9(44,2 + 16,5)^2] - 16,5^3 +$$

$$+ \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - 0,2}{0,2} 8,8 \cdot 16,5(8,8 + 2 \cdot 16,5) + \frac{1 - 0,2}{2 \cdot 0,2} 8,5^2(-3 \cdot 16,5) - 2 \cdot 8,8) = -132\,380,$$

$$y = \sqrt[3]{132\,380 + \sqrt{+132\,380^2 + 2240^3}} + \sqrt[3]{132\,380 - \sqrt{+132\,380^2 + 2240^3}} = 33,7 \text{ cm},$$

$$x = 33,7 - 16,5 = 17,2 \text{ cm}, \sigma_b = 41,6 \text{ kg/cm}^2, \sigma_z = 979 \text{ kg/cm}^2.$$

## VII. Dźwigary hiperstatyczne.

### 25. Zasada obliczenia.

Obliczenie dźwigarów hiperstatycznych podano w dziale: „Ustroje hiperstatyczne”. Tu podamy tylko zastosowanie tych zasad do żelbetu.

Ponieważ wyznaczamy siły zewnętrzne, badając ugięcie, więc dla obliczenia sił wewnętrznych przyjmujemy fazę pierwszą, przyjmując  $n = 10$ .

Belki ciągle. Ze względu na większe siły ścinające na podporach należy przyjmować większą szerokość żeber niż dla belki zwykłej, za to mniejszą wysokość, tak że iloraz  $bh$  pozostaje ten sam.

Dźwigary ciągle należy obliczać najwyżej jako trzyprzęsłowe.

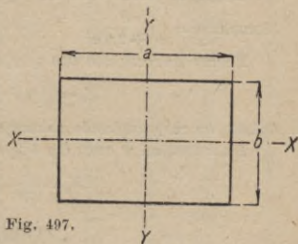


Fig. 497.

### 26. Płyty, spoczywające na czterech krawędziach.

Huber dochodzi do nast. wyników. Dla obciążenia  $q$ , rozłożonego jednostajnie na całej powierzchni płyty o bokach  $a$  i  $b$  (fig. 497).

$$M_x = \frac{1}{6,1} q a^2 \frac{b^2 \left( \frac{1}{m} a^2 + b^2 \right) J_y}{N} \dots \dots \dots (158)$$

$$M_y = \frac{1}{6,1} q b^2 \frac{a^2 \left( a^2 + \frac{1}{m} b^2 \right) J_x}{N} \dots \dots \dots (159)$$

$$N = J_x a^4 + \left[ \frac{1}{m} (J_x + J_y) + 2 \frac{m-1}{m} J' \right] a^2 b^2 + J_y b^4$$

Dla obciążenia skupionego  $P$  w środku płyty:

$$\left. \begin{aligned} \text{najw. } M_x &= 0,405 P \frac{a b \left( \frac{1}{m} a^2 + b^2 \right) J_y}{N} \\ \text{najw. } M_y &= 0,405 P \frac{a b \left( a^2 + \frac{1}{m} b^2 \right) J_x}{N} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (160)$$

$$J' = J_b + \nu J_c.$$

Przytem możemy przyjąć  $m = 8, \nu = 0$ .

19. Przykład. Płyta prostokątna  $a = 1,5 \text{ m}, b = 2,0 \text{ m}$ , obciążenie całkowite bez ciężaru własnego  $4800 \text{ kg}$ . Jeżeli tymczasowo przyjmiemy grubość płyty  $10 \text{ cm}$ , to:

$$q = \frac{1}{3} (4800 + 720) = 1,84 \text{ t/m}^2 = 0,184 \text{ kg/cm}^2.$$

Otrzymamy: 
$$\text{najw. } M_x = \frac{1}{6,1} 0,184 \cdot 150^2 \cdot \frac{200^2 \left( \frac{1}{8} 150^2 + 200^2 \right) J_y}{N},$$

$$J_y = \frac{1}{12} 10^3 = 83,33 = J_x = J', \quad N = 83,33 \cdot 150^3 + \left[ \frac{1}{8} (83,33 + 83,33) + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{8-1}{8} 83,33 \right] 150^2 \cdot 200^2 + 83,33 \cdot 200^3 = 3254,5 \cdot 10^8,$$

więc: 
$$\text{najw. } M_x = 297,7 \text{ kg/cm}, \quad \text{najw. } M_y = \frac{1}{6,1} 0,184 \cdot 200^2 \cdot \frac{150^2 \left( 150^2 + \frac{1}{8} 200^2 \right) 83,33}{3254,5 \cdot 10^8} =$$

$$= 191,1 \text{ kg/cm}.$$

Przepisy polskiego ministerstwa dla budownictwa z 1923. Przy płytach o stosunku boków między 1:1 a 1:2, zbrojonych krzyżowo, można uwzględnić przenoszenie się obciążenia w dwu kierunkach.

Mesnager poleca wzór dla płyt na krzyż zbrojonych rozdzielnie momentu, na oba kierunki  $a = \frac{b^3}{b^3 + 2,3 a^3}$  i  $b = \frac{a^3}{a^3 + 2,3 b^3}$ .

Normy francuskie z 1906 przyjmują:

$$M_1 = \frac{1}{8} 9 a^2 \frac{b^3}{2 a^3 + b^3}, \quad M_2 = \frac{1}{8} 9 b^2 \frac{a^3}{a^3 + 2 b^3},$$

dotychczasowe rozporządzenie nakazuje liczyć wedle wzoru Mesnagera.

Huber zaleca w 1923 dla  $b \geq a$  (str. 1101):

$$M_1 = \frac{1}{24} b^2 9, \quad M_2 = \frac{1}{24} b^2 9 \left( 3 - 2 \frac{b}{a} \right).$$

### Tablica wymiarów płyt.

Szerokość  $b = 1,00 \text{ m}$ ;

naprężenia dopuszczalne:  $\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_z = 1200 \text{ kg/cm}^2$ .

$M$ $tm$	$h_1$ $cm$	$h$ $cm$	$F_z$ $cm^2$	$f_i$ $mm$	$t$ $cm$
0,10	4,7	6	2,28	6	9
0,14	5,2	6,5	2,70	6	9
0,15	5,2	6,5	2,79	6	10
0,16	5,7	7	2,88	6	9,5
0,17	5,6	7	2,97	7	10
0,20	6,1	7,5	3,23	7	10
0,23	6,6	8	3,46	7	11
0,24	6,6	8	3,53	7	10
0,26	6,6	8	3,68	7	10
0,29	7,6	9	3,88	7	9
0,36	8,6	10	4,33	8	11
0,41	8,6	10	4,62	8	10
0,45	9,6	11	4,84	8	10
0,51	9,6	11	5,15	8	9,5
0,56	10,6	12	5,40	8	9
0,61	10,6	12	5,63	8	8,5
0,69	11,6	13	5,99	8	8
0,77	11,6	13	6,33	8	7,5
0,82	12,6	14	6,53	8	7,5
0,88	12,6	14	6,76	8	7
0,96	13,6	15	7,07	8	7
1,00	13,6	15	7,22	8	6,5
1,05	13,5	15	7,40	10	10
1,15	14,5	16	7,73	10	10
1,25	14,5	16	8,06	10	9,5

$M$ $tm$	$h_1$ $cm$	$h$ $cm$	$F_z$ $cm^2$	$\phi$ $mm$	$t$ $cm$
1,30	15,5	17	8,22	10	9,5
1,40	15,5	17	8,53	10	9
1,45	16,5	18	8,69	10	9
1,55	16,5	18	8,98	10	8,5
1,65	17,5	19	9,26	10	8,5
1,70	17,5	19	9,40	10	8
1,85	18,5	20	9,81	10	8
1,90	18,5	20	9,94	10	7,5
2,05	19,5	21	10,32	10	7,5
2,20	19,6	21	10,68	12	11
2,30	20,4	22	10,93	12	11
2,45	20,4	22	11,29	12	10
2,50	21,4	23	11,40	12	10
2,55	21,4	23	11,51	12	9,5
2,75	22,4	24	11,94	12	9,5
2,90	22,4	24	12,28	12	9
3,00	23,4	25	12,48	12	9
3,20	23,3	25	12,88	14	12
3,40	24,3	26	13,30	14	11
3,60	25,3	27	13,70	14	11
4,00	26,3	28	14,30	14	10
4,20	27,3	29	14,77	14	10
4,60	28,3	30	15,45	14	10
4,80	29,2	31	15,80	15	11
5,20	30,2	32	16,45	15	10
5,60	31,2	33	17,05	15	10
5,80	32,2	34	17,35	15	10
6,20	33,2	35	17,94	15	10
6,50	34,2	36	18,40	15	19
7,00	35,2	37	19,10	16	10
7,50	36,2	38	19,75	16	10
8,00	37,2	39	20,40	16	10
8,50	38,2	40	21,00	16	9
9,00	39,1	41	21,60	18	11
9,50	40,1	42	22,20	18	11
10,00	41,1	43	22,80	18	11
10,50	42,1	44	23,30	18	10
11,00	43,1	45	23,90	18	10
11,50	44,1	46	24,50	18	10
12,00	45,1	47	25,00	18	10
12,50	46,1	48	25,50	18	10
13,00	47,0	49	26,00	20	12
13,50	48,0	50	26,50	20	12

Grubości płyt  $h$ , podane w niniejszym zestawieniu, określono powyżej  $h = 8 \text{ cm}$  w okrągłych centymetrach, poniżej  $h = 8 \text{ cm}$  w połówkach centymetrów; zatem wartości  $h_1$  nie są teoretycznie ściśle, ale otrzymane z każdorazowej różnicy  $h - a$ ; natomiast ściśle są wartości  $F_z$ . Odstępy  $t$  zaokrąglone zawsze w dół tak, że rzeczywiście  $F_z$  jest nieco większe i tę większą wartość należy przyjąć dla ewentualnego sprawdzenia naprężeń.

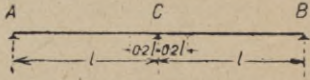
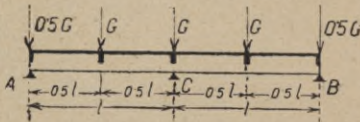


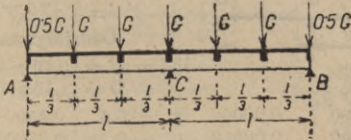
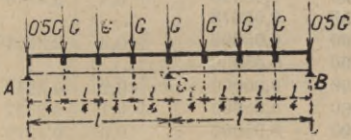
# TABLICE

№	№	№	№	№	№
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126
127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138
139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156
157	158	159	160	161	162
163	164	165	166	167	168
169	170	171	172	173	174
175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186
187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198
199	200	201	202	203	204
205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216
217	218	219	220	221	222
223	224	225	226	227	228
229	230	231	232	233	234
235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246
247	248	249	250	251	252
253	254	255	256	257	258
259	260	261	262	263	264
265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276
277	278	279	280	281	282
283	284	285	286	287	288
289	290	291	292	293	294
295	296	297	298	299	300

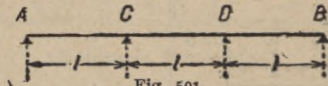
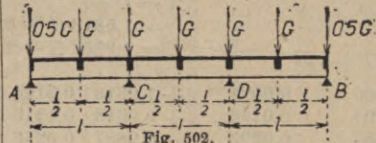
## A. Momenty i siły poprzeczne belek ciągłych.

## 1. Belka dwuprzęsłowa.

Odległość od skrajnej podpory $\frac{x}{l}$	Momenty zgięcia			Siły poprzeczne		
	Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$		Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$	
		$\alpha$	$+\beta$		$-\beta$	$\gamma$
<p>Obciążenie jednostajne.</p>  <p>Fig. 497 a.</p> <p><math>\max M = (\alpha g + \beta p) l^2</math></p>						
				$T_{\max} = (\gamma g + \delta p) l$ Oddziaływania: $A = B =$ $= (0,3750 g + 0,4375 p) l,$ $C = 1,250 (g + p) l$		
0,000	0,0000	0,00000	0,00000	+ 0,3750	0,4375	0,0625
0,100	+ 0,0325	0,03875	0,00625	+ 0,2750	0,3437	0,0687
0,200	+ 0,0550	0,06750	0,01250	+ 0,1750	0,2624	0,0874
0,300	+ 0,0675	0,08625	0,01875	+ 0,0750	0,1932	0,1182
0,375	+ 0,0703	0,09375	0,02344	0,0000	0,1491	0,1491
0,400	+ 0,0700	0,09500	0,02500	- 0,0250	0,1359	0,1609
0,500	+ 0,0625	0,09375	0,03125	- 0,1250	0,0898	0,2148
0,600	+ 0,0450	0,08250	0,03750	- 0,2250	0,0544	0,2794
0,700	+ 0,0175	0,06125	0,04375	- 0,3250	0,0287	0,3537
0,750	0,0000	0,04688	0,04688	- 0,3750	0,0193	0,3943
0,800	- 0,0200	0,03000	0,05000	- 0,4250	0,0119	0,4369
0,850	- 0,0425	0,01523	0,05773	- 0,4750	0,0064	0,4814
0,900	- 0,0675	0,00611	0,07361	- 0,5250	0,0027	0,5277
0,950	- 0,0950	0,00138	0,09638	- 0,5750	0,0007	0,5757
1,000	- 0,1250	0,00000	0,12500	- 0,6250	0,0000	0,6250
 <p>Fig. 498.</p> <p><math>M_{\max} = \alpha G l + \beta p l^2</math></p>						
				$T_{\max} = \gamma G + \delta p l$ Oddziaływania: $A = B =$ $= 0,8125 G + 0,45318 p l$ $C = 2,3750 G + 1,1875 p l$		
0,000	0,0000	0,0000	0,0000	+ 0,3125	0,20318	0,04681
0,500	+ 0,1562	0,1016	0,0234			
0,842	- 0,0789	0	0,0395			
0,850	- 0,0844	0	0,0422			
0,900	- 0,1188	0	0,0594	- 0,6875	0,00000	0,34375
0,950	- 0,1531	0	0,0765			
1,000	- 0,1875	0	0,0937			

Odległość od skrajnej podpory $\frac{x}{l}$	Momenty zgięcia			Siły poprzeczne		
	Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$		Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$	
	$a$	$+\beta$	$-\beta$	$\gamma$	$+\delta$	$-\delta$
				$T_{\max} = \gamma G + \delta pl$ Oddziaływania: $A = B =$ $= 1,1667 G + 0,4444 pl$ $C = 3,6667 G + 1,2221 pl$		
	Fig. 499. $M_{\max} = \alpha Gl + \beta pl^2$					
0,000	0,0000	0,0000	0,0000	+ 0,6667	0,2777	0,0550
0,333	+ 0,2222	0,0926	0,0185	- 0,3333	0,0550	0,1660
0,666	+ 0,1111	0,0741	0,0370			
0,800	- 0,0667	0,0222	0,0444			
0,850	- 0,1333	0,0057	0,0501			
0,900	- 0,2000	0,0000	0,0667	- 1,3333	0,0000	0,4444
0,950	- 0,2664	0,0000	0,0889			
1,000	- 0,3333	0,0000	0,1111			
				$T_{\max} = \gamma G + \delta pl$ Oddziaływania: $A = B =$ $= 1,5313 G + 0,4414 pl$ $C = 4,9367 G + 1,2344 pl$		
	Fig. 500. $M_{\max} = \alpha Gl + \beta pl^2$					
0,000	0,0000	0,0000	0,0000	+ 1,0313	0,3164	0,0586
0,250	+ 0,2578	0,0791	0,0146	+ 0,0313	0,1216	0,1138
0,500	+ 0,2656	0,0957	0,0293	- 0,9687	0,0256	0,2678
0,750	+ 0,0234	0,0498	0,0439			
0,800	- 0,0750	0,0281	0,0469			
0,850	- 0,1734	0,0102	0,0535	- 1,9687	0,0000	0,4922
0,900	- 0,2719	0,0000	0,0680			
0,950	- 0,3703	0,0000	0,0926			
1,000	- 0,4687	0,0000	0,1172			

## 2. Belka trójprzęsłowa.

Odległość od skrajnej podpory $\frac{x}{l}$	Momenty zgięcia			Siły poprzeczne		
	Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$		Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$	
		$\alpha$	$+\beta$		$-\beta$	$\gamma$
	 <p style="text-align: center;">Fig. 501.</p> $M = (\alpha g + \beta p) l^2$			$T_{\max} = (\gamma g + \delta p) l$ <p style="text-align: center;">Oddziaływania:</p> $A = B = (0,40 g + 0,45 p) l$ $C = D = (1,10 g + 1,20 p) l$		
0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	+ 0,4	0,4500	0,0500
0,1000	+ 0,03500	0,04000	0,00500	+ 0,3	0,3560	0,0563
0,2000	+ 0,06000	0,07000	0,01000	+ 0,2	0,2752	0,0752
0,3000	+ 0,07500	0,09000	0,01500	+ 0,1	0,2065	0,1065
0,4000	+ 0,08000	0,10000	0,02000	0,0	0,1496	0,1496
0,5000	+ 0,07500	0,10000	0,02500	- 0,1	0,1042	0,2042
0,6000	+ 0,06000	0,09000	0,03000	- 0,2	0,0694	0,2694
0,7000	+ 0,03500	0,07000	0,03500	- 0,3	0,0443	0,3442
0,7895	+ 0,00414	0,04362	0,03948			
0,8000	0,00000	0,04022	0,04022	- 0,4	0,0280	0,4280
0,8500	- 0,02125	0,02773	0,04898			
0,9000	- 0,04500	0,02042	0,06542	- 0,5	0,0193	0,5191
0,9500	- 0,07125	0,01706	0,08831			
1,0000	- 0,10000	0,01667	0,11667	- 0,6	0,0167	0,6167
1,0000	- 0,10000	0,01667	0,11667	+ 0,5	0,5833	0,0833
1,0500	- 0,07625	0,01408	0,09033			
1,1000	- 0,05500	0,00748	0,06248	+ 0,4	0,4870	0,0870
1,1500	- 0,03625	0,02053	0,05678			
1,2000	- 0,02000	0,03000	0,05000	+ 0,3	0,3991	0,0991
1,2764	0,00000	0,05000	0,05000			
1,3000	+ 0,00500	0,05500	0,05000	+ 0,2	0,3210	0,1210
1,4000	+ 0,02000	0,07000	0,05000	+ 0,1	0,2537	0,1537
1,5000	+ 0,02500	0,07500	0,05000	0,0	0,1979	0,1979
	 <p style="text-align: center;">Fig. 502.</p> $M = \alpha G l + \beta p l^2$			$T_{\max} = \gamma G + \delta p l$ <p style="text-align: center;">Oddziaływania:</p> $A = B = 0,85 G + 0,4625 p l$ $C = D = 2,15 G + 1,15 p l$		
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	+ 0,3500	0,2125	0,0375
0,50	+ 0,1750	0,1062	0,0187			
0,80	- 0,0200	0,0200	0,0300	- 0,6500	0,0125	0,3375
0,85	- 0,0525	0,0106	0,0369			
0,90	- 0,0850	0,0112	0,0538			
0,95	- 0,1175	0,0119	0,0706			
1,00	- 0,1500	0,0125	0,0875			
1,05	- 0,1250	0,0094	0,0719			
1,10	- 0,1000	0,0062	0,0562			
1,15	- 0,0750	0,0031	0,0406	+ 0,5000	0,3125	0,0625
1,20	- 0,0500	0,0125	0,0375			
1,50	+ 0,1000	0,0875	0,0375			



Odległość od skrajnej podpory $\frac{x}{l}$	Momenty zgięcia			Siła poprzeczna		
	Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$		Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$	
	$\alpha$	$+\beta$	$-\beta$	$\gamma$	$+\delta$	$-\delta$
				$T_{\max} = \gamma G + \delta pl$ Oddziaływania: $A = B = 1,2333 G + 0,4556 pl$ $B = C = 3,2667 G + 1,1777 pl$		
<p>Fig. 503.</p> $M = \alpha Gl + \beta pl^2$						
0,000	0,0000	0,0000	0,0000	+ 0,7333	0,2889	0,0444
0,333	+ 0,2444	0,0963	0,0148	- 0,2667	0,0680	0,1569
0,666	+ 0,1556	0,0814	0,0296			
0,800	- 0,0133	0,0311	0,0355			
0,850	- 0,0767	0,0165	0,0421	- 1,2667	0,0148	0,4370
0,900	- 0,1400	0,0133	0,0600			
0,950	- 0,2033	0,0140	0,0818			
1,000	- 0,2667	0,0148	0,1037			
1,050	- 0,2167	0,0111	0,0833			
1,100	- 0,1667	0,0074	0,0630	+ 1,0000	0,4074	0,0741
1,115	- 0,1167	0,0109	0,0498			
1,200	- 0,0667	0,0222	0,0445			
1,333	+ 0,0667	0,0667	0,0445			
1,500	+ 0,0667	0,0667	0,0445	0,0000	0,1513	0,1513
				$T_{\max} = \gamma G + \delta pl$ Oddziaływania: $A = B = 1,6250 G + 0,4531 pl$ $C = D = 3,3750 G + 1,1875 pl$		
<p>Fig. 504.</p> $M = \alpha Gl + \beta pl^2$						
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	+ 1,1250	0,3281	0,0469
0,2500	+ 0,2813	0,0820	0,0117	+ 0,1250	0,1343	0,1031
0,5000	+ 0,3125	0,1016	0,0235	- 0,8750	0,0402	0,2590
0,7500	+ 0,0938	0,0586	0,0352			
0,8000	0,0000	0,0375	0,0375			
0,8500	- 0,0938	0,0218	0,0453	- 1,8750	0,0156	0,4844
0,9000	- 0,1875	0,0140	0,0609			
0,9500	- 0,2813	0,0148	0,0851			
1,0000	- 0,3750	0,0156	0,1094			
1,0500	- 0,3000	0,0117	0,0867			
1,1000	- 0,2250	0,0087	0,0650	+ 1,5000	0,4531	0,0781
2,1500	- 0,1500	0,0152	0,0527			
1,2000	- 0,0750	0,0281	0,0469			
1,2500	0,0000	0,0469	0,0469			
1,5000	+ 0,2500	0,0781	0,0469	+ 0,5000	0,2388	0,1137

## 3. Belka czteroprzęsłowa.

Odległość od skrajnej podpory $\frac{x}{l}$	Momenty zgięcia			Siły poprzeczne		
	Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$		Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$	
	$a$	$+\beta$	$-\beta$	$\gamma$	$+\delta$	$-\delta$
	$M = (\alpha g + \beta p) l^2$			$T_{\max} = (\gamma g + \delta p) l$		
	Oddziaływania:					
	$A = B = (0,3929 g + 0,4464 p) l$					
	$C = D = (1,1428 g + 1,2232 p) l$					
	$E = (0,9286 g + 1,1428 p) l$					
0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	+ 0,3929	0,4464	0,0535
0,1000	+ 0,03429	0,03964	0,00536	+ 0,2929	0,3528	0,0599
0,2000	+ 0,05857	0,06929	0,01071	+ 0,1929	0,2717	0,0788
0,3000	+ 0,07286	0,08893	0,01607	+ 0,0929	0,2029	0,1101
0,3929				0,0000	0,1498	0,1498
0,4000	+ 0,07714	0,09857	0,02143	- 0,0071	0,1461	0,1533
0,5000	+ 0,07143	0,09822	0,02679	- 0,1071	0,1007	0,2079
0,6000	+ 0,05572	0,08786	0,03214	- 0,2071	0,0660	0,2731
0,7000	+ 0,03000	0,06750	0,03750	- 0,3071	0,0410	0,3481
0,7857	0,00000	0,04209	0,04209	.	.	.
0,7887	- 0,00117	0,04108	0,04225	.	.	.
0,8000	- 0,00571	0,03738	0,04309	- 0,4071	0,0247	0,4319
0,8500	- 0,02732	0,02484	0,05216	.	.	.
0,9000	- 0,05143	0,01629	0,06772	- 0,5071	0,0160	0,5231
0,9500	- 0,07803	0,01393	0,09197	.	.	.
1,0000	- 0,10714	0,01340	0,12054	- 0,6071	0,0134	0,6205
1,0000	- 0,10714	0,01340	0,12054	+ 0,5357	0,6027	0,0670
1,0500	- 0,08160	0,01163	0,09323	.	.	.
1,1000	- 0,05857	0,01455	0,07212	+ 0,4357	0,5064	0,0707
1,1500	- 0,03803	0,02537	0,06340	.	.	.
1,2000	- 0,02000	0,03000	0,05000	+ 0,3357	0,4187	0,0830
1,2661	0,00000	0,04882	0,04882	.	.	.
1,3000	+ 0,00857	0,05678	0,04821	+ 0,2357	0,3410	0,1153
1,4000	+ 0,02714	0,07357	0,04643	+ 0,1357	0,2742	0,1385
1,5000	+ 0,03572	0,08036	0,04464	+ 0,0357	0,2190	0,1833
1,5357				0,0000	0,2028	0,2028
1,6000	+ 0,03429	0,07715	0,04286	- 0,0643	0,1755	0,2398
1,7000	+ 0,02286	0,06393	0,04107	- 0,1643	0,1435	0,3078
1,7896	+ 0,00416	0,04363	0,03947	.	.	.
1,8000	+ 0,00143	0,04170	0,04027	- 0,2643	0,1222	0,3865
1,8053	0,00000	0,04092	0,04092	.	.	.
1,8500	- 0,01303	0,03451	0,04754	.	.	.
1,9000	- 0,03000	0,03105	0,06105	- 0,3643	0,1106	0,4749
1,9500	- 0,04947	0,03173	0,08120	.	.	.
2,0000	- 0,07143	0,03571	0,10714	- 0,4643	0,1071	0,5714

Fig. 505.

Odległość od skrajnej podpory $\frac{x}{l}$	Momenty zgięcia			Siły poprzeczne		
	Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$		Wpływ ciężaru własnego $g$	Wpływ obciążenia użytkowego $p$	
	$\alpha$	$+\beta$	$-\beta$	$\gamma$	$+\delta$	$-\delta$

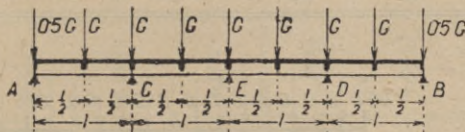


Fig. 506.

$$M = \alpha Gl + \beta p l^2$$

$$T_{\max} = \gamma G + \delta pl$$

Oddziaływania:  $A = B = 0,8393 G + 0,4599 pl$   
 $C = D = 2,2143 G + 1,1674 pl$   
 $E = 1,8928 G + 1,1072 pl$

0,00	0,0000	0,0000	0,0000	+ 0,3393	0,2099	0,0402
0,50	+ 0,1696	0,1049	0,0201			
0,80	- 0,0286	0,0179	0,0322			
0,85	- 0,0616	0,0085	0,0393			
0,90	- 0,0946	0,0090	0,0563	- 0,6607	0,0100	0,3404
0,95	- 0,1277	0,0095	0,0734			
1,00	- 0,1607	0,0100	0,0904			
1,05	- 0,1330	0,0075	0,0740			
1,10	- 0,1053	0,0050	0,0577			
1,15	- 0,0776	0,0027	0,0415	+ 0,5536	0,3270	0,0502
1,20	- 0,0500	0,0125	0,0375			
1,50	+ 0,1161	0,0915	0,0335			
1,80	- 0,0178	0,0212	0,0301			
1,85	- 0,0401	0,0147	0,0348			
1,90	- 0,0624	0,0188	0,0500	- 0,4464	0,0804	0,3036
1,95	- 0,0848	0,0228	0,0652			
2,00	- 0,1071	0,0268	0,0804			

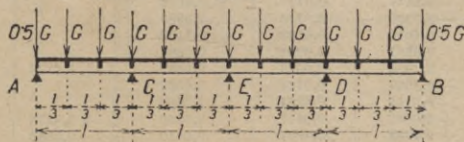


Fig. 507.

$$M = \alpha Gl + \beta p l^2$$

$$T_{\max} = \gamma G + \delta pl$$

Oddziaływania:  $A = B = 1,2144 G + 0,4524 pl$   
 $C = D = 3,310 G + 1,193 pl$   
 $E = 2,8092 G + 1,269 pl$

0,000	0,0000	0,0000	0,0000	+ 0,7144	0,2857	0,0476
0,333	+ 0,2381	0,0953	0,0159	- 0,2856	0,0650	0,1602
0,666	+ 0,1429	0,0794	0,0318			
0,800	- 0,0285	0,0286	0,0381			
0,850	- 0,0928	0,0140	0,0449			
0,900	- 0,1571	0,0107	0,0631	- 1,2856	0,0119	0,4404
0,950	- 0,2214	0,0113	0,0851			
1,000	- 0,2856	0,0119	0,1071			
1,050	- 0,2309	0,0089	0,0859			
1,100	- 0,1761	0,0059	0,0649	+ 1,0954	0,4246	0,0595
1,150	- 0,1213	0,0104	0,0508			
1,200	- 0,0665	0,0223	0,0444			
1,333	+ 0,0795	0,0688	0,0423			
1,666	+ 0,1114	0,0741	0,0370	+ 0,0954	0,1702	0,1384
1,800	- 0,0093	0,0326	0,0357			
1,850	- 0,0545	0,0230	0,0412			
1,900	- 0,0997	0,0223	0,0555	- 0,9046	0,0953	0,3968
1,950	- 0,1449	0,0270	0,0753			
2,000	- 0,1902	0,0318	0,0952			

## Belka czteroprzęsłowa.

Odległość od skrajnej podpory $\frac{x}{l}$	Momenty zgięcia			Siły poprzeczne		
	Wpływ ciężaru własnego $g$		Wpływ obciążenia użytkowego $p$		Wpływ obciążenia użytkowego $p$	
	$a$	$+\beta$	$-\beta$	$\gamma$	$+\delta$	$-\delta$

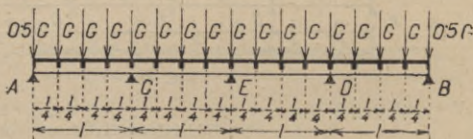


Fig. 508.

$$M = aGl + \beta p l^2$$

$$T_{\max} = \gamma G + \delta pl$$

Oddziaływania:

$$A = B = 1,5982 G + 0,4498 pl$$

$$C = D = 4,5356 G + 1,2092 pl$$

$$E = 3,7324 G + 1,1338 pl$$

0,00	0,0000	0,0000	0,0000	+ 1,0982	0,3248	0,0502
0,25	+ 0,2745	0,0812	0,0126	+ 0,0982	0,1310	0,1065
0,50	+ 0,3991	0,0999	0,0251	- 0,0918	0,0371	0,2625
0,75	+ 0,0736	0,0561	0,0377			
0,80	- 0,0215	0,0348	0,0402			
0,85	- 0,1166	0,0191	0,0482	- 1,9018	0,0125	0,4880
0,90	- 0,2117	0,0113	0,0642			
0,95	- 0,3068	0,0119	0,0886			
1,00	- 0,4018	0,0126	0,1130			
1,05	- 0,3201	0,0094	0,0894			
1,10	- 0,2384	0,0073	0,0669	+ 1,6338	0,4712	0,0628
1,15	- 0,1567	0,0146	0,0588			
1,20	- 0,0750	0,0281	0,0469			
1,25	+ 0,0067	0,0477	0,0460	+ 0,6338	0,2576	0,0992
1,50	+ 0,1651	0,0832	0,0419	- 0,3662	0,1348	0,2263
1,75	+ 0,0735	0,0561	0,0377			
1,80	+ 0,0052	0,0390	0,0377			
1,85	- 0,0631	0,0281	0,0439			
1,90	- 0,1314	0,0236	0,0565	- 1,3662	0,1004	0,4419
1,95	- 0,1997	0,0284	0,0783			
2,00	- 0,2680	0,0335	0,1005			

W powyższych tablicach oznacza:

 $g$  = ciężar stały w jednostkach ciężaru na jednostkę długości. $G$  = oddziaływanie skutkiem ciężaru stałego jako ciężar skupiony w jednostkach ciężaru. $p$  = obciążenie użytkowe w jednostkach ciężaru na jednostkę długości.

B. Linje wpływowe belki utwierdzonej.

Linje wpływowe dla	Rzędne linii wpływowych dla $\xi =$						Powierzchnie linii wpływowej	Odstęp punktów stałych
	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8		
$M_1$	0,000	0,020	0,080	0,125	0,080	0,020	0,000	0,0417
$M_A$	0,000	0,128	0,144	0,125	0,086	0,032	0,000	0,0833
A	1,000	0,896	0,648	0,500	0,352	0,104	0,000	0,500
$M_1$	0,000	0,060	0,140	0,188	0,140	0,060	0,000	0,0833
$M_A$	0,000	0,052	0,066	0,063	0,054	0,028	0,000	0,0417
A	1,000	0,824	0,612	0,500	0,388	0,176	0,000	0,500

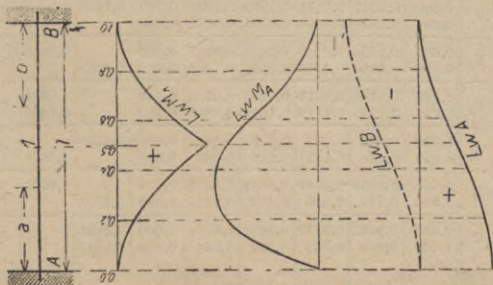


Fig. 509.

## C. Linje wpływowe belek ciągłych.

## 1. Belka dwuprzęsłowa (fig. 510).

$l_1 : l_2 = n$	Linja wpływowa dla	Rzędne linij wpływowych: liczba górna: przęsło lewe obciążone " dolna: " prawe "						Obciążenie jednostajnie rozłożone			Punkty state	
		$x=0,0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	+F	-F	$\Sigma F$		
1,0	$M_1$	0,000 0,0000	0,1008 0,0288	0,2064 0,0944	0,1216 0,0336	0,0512 0,0192	0,000 0,000	0,0950		0,0250	+0,070	$a=0,0$ $b=0,0$ $a_1=0,2l$ $b_1=0,2l$
	$M_2$	0,000 0,000	0,0192 0,0512	0,1216 0,0336	0,0384 0,2064	0,0288 0,1008	0,000 0,000	0,0950	0,0250		+0,070	
	$M_c$	0,000 0,000	0,0480 0,0960	0,0840 0,0960	0,0960 0,0840	0,0720 0,0480	0,000 0,000		0,0625	0,0625	-0,125	
	A	1,000 0,000	0,752 0,072	0,516 0,096	0,304 0,084	0,128 0,048	0,000 0,000	0,4375	0,0625		+0,375	
	B	0,000 0,000	0,048 0,128	0,084 0,304	0,096 0,516	0,072 0,752	0,000 1,000	0,4375	0,0625		+0,375	
	C	0,000 1,000	0,320 0,944	0,568 0,792	0,792 0,588	0,944 0,320	1,000 0,000	0,6248	0,6248		+1,2496	
1,2	$M_1$	0,000 0,000	0,1025 0,0379	0,2095 0,0505	0,1252 0,0441	0,0539 0,0252	0,000 0,000	0,0973		0,0393	+0,0580	$a=0$ $b=0$ $a_1=0,257l$ $b_1=0,185l$
	$M_2$	0,000 0,000	0,0174 0,0581	0,0305 0,1416	0,0349 0,2441	0,0261 0,1186	0,000 0,000	0,1335	0,0227		+0,1108	
	$M_c$	0,000 0,000	0,0436 0,0942	0,0763 0,1252	0,0873 0,1104	0,0654 0,0631	0,000 0,000		0,0567	0,0982	-0,1549	
	A	1,000 0,000	0,756 0,095	0,524 0,125	0,313 0,110	0,135 0,063	0,000 0,000	0,4433	0,0982		+0,3451	
	B	0,000 0,000	0,0363 0,121	0,0636 0,295	0,0728 0,508	0,0545 0,746	0,000 1,000	0,5182	0,0473		+0,4709	
	C	0,000 1,000	0,2604 0,974	0,5396 0,830	0,7598 0,602	0,9195 0,317	1,000 0,000	0,6040	0,7800		+1,3840	
1,6	$M_1$	0,000 0,000	0,1047 0,0518	0,2131 0,0690	0,1292 0,0605	0,0570 0,0345	0,000 0,000	0,1000		0,0675	+0,0325	$a=0$ $b=0$ $a_1=0,346l$ $b_1=0,167l$
	$M_2$	0,000 0,000	0,0156 0,0682	0,0269 0,1710	0,0307 0,2995	0,0229 0,1450	0,000 0,000	0,2025	0,0200		+0,1825	
	$M_c$	0,000 0,000	0,0384 0,1295	0,0671 0,1726	0,0768 0,1512	0,0576 0,0863	0,000 0,000		0,0500	0,1688	-0,2188	
	A	1,000 0,000	0,762 0,130	0,533 0,173	0,323 0,151	0,142 0,086	0,000 0,000	0,4500	0,1688		+0,2812	
	B	0,000 0,000	0,0256 0,114	0,0447 0,285	0,0512 0,499	0,0384 0,742	0,000 1,000	0,6375	0,0333		+0,6042	
	C	0,000 1,000	0,2636 0,986	0,5117 0,888	0,7282 0,652	0,8964 0,344	1,000 0,000	0,5833	1,0313		+1,6146	

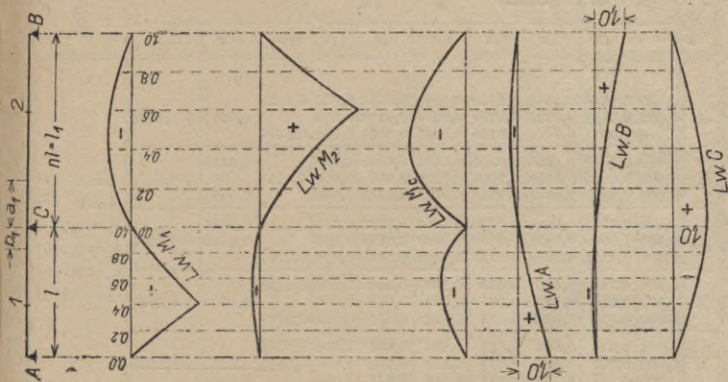


Fig. 510. (Do str. 1388.)

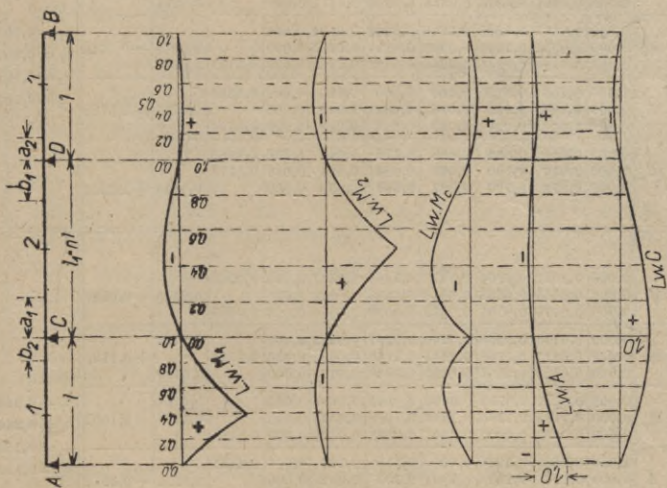


Fig. 511. (Do str. 1390.)

## 2. Belka trójprzęsłowa (fig. 511).

$l_1: l = n$	Linje wpływowe dla	Rzędne linij wpływowych:							Obciążenie jednostajnie rozłożone			Punkty state
		liczba górna: pierwsze przęsło obciążone							+F	-F	$\Sigma F$	
		n	środkowa: drugie					n				
		n	dolna: trzecie					n				
		0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0				
1,0	$M_1$	0,000	0,0995	0,2042	0,1600	0,1190	0,0493	0,000	0,0933			
		0,000	0,0256	0,0320	0,0300	0,0256	0,0128	0,000		0,020	+0,0800	
		0,000	0,0077	0,0102	0,0100	0,0090	0,0051	0,000	0,0067			
	$M_2$	0,000	0,0192	0,0336	0,0375	0,0384	0,0288	0,000		0,0250		
		0,000	0,0520	0,1280	0,1750	0,1280	0,052	0,000	0,0750		+0,0250	$a=0$
		0,000	0,288	0,0384	0,0375	0,0336	0,0192	0,000		0,0250		$b=0$
	$M_C$	0,000	0,0512	0,0896	0,1000	0,1024	0,0768	0,000		0,0667		$a_1=0,200l$
		0,000	0,0640	0,0800	0,0750	0,0640	0,0320	0,000		0,0500	-0,1000	$b_1=0,200l$
		0,000	0,0192	0,0256	0,0250	0,0224	0,0128	0,000	0,0167			$a_2=0,210l$
	A	1,000	0,749	0,510	0,400	0,298	0,123	0,000	0,4333			$b_2=0,210l$
		0,000	0,064	0,080	0,075	0,064	0,032	0,000		0,0500	+0,4000	
		0,000	0,019	0,026	0,025	0,022	0,013	0,000	0,0167			
	C	0,000	0,314	0,594	0,725	0,826	0,969	1,000	0,6500			
		1,000	0,893	0,694	0,575	0,458	0,200	0,000	0,5500		+1,1000	
		0,000	0,096	0,128	0,125	0,112	0,064	0,000		0,1000		
1,2	$M_1$	0,000	0,1012	0,2071	0,1632	0,1223	0,0518	0,000	0,0954			
		0,000	0,0333	0,0413	0,0385	0,0327	0,0160	0,000		0,0308	+0,0713	
		0,000	0,0072	0,0102	0,0100	0,0090	0,0051	0,000	0,0067			
	$M_2$	0,000	0,0171	0,0300	0,0335	0,0343	0,0257	0,0000		0,0224		$a=0$
		0,000	0,0583	0,1476	0,2037	0,1476	0,0583	0,000	0,1028		+0,0580	$b=0$
		0,000	0,0257	0,0343	0,0335	0,0300	0,0171	0,000		0,0224		$a_1=0,257l$
	$M_C$	0,000	0,0471	0,0823	0,0919	0,0942	0,0706	0,000				$b_1=0,257l$
		0,000	0,0835	0,1032	0,0963	0,0817	0,0401	0,000		0,0614	-0,1218	$a_2=0,197l$
		0,000	0,0192	0,0256	0,0250	0,0224	0,0128	0,000	0,0167	0,0771		$b_2=0,197l$
	A	1,000	0,753	0,518	0,408	0,306	0,129	0,000	0,4386			
		0,000	0,083	0,103	0,096	0,082	0,040	0,000		0,0771	+0,3782	
		0,000	0,019	0,026	0,025	0,022	0,013	0,000	0,0167			
	C	0,000	0,291	0,563	0,689	0,772	0,943	1,000	0,6265			
		1,000	0,916	0,720	0,596	0,484	0,204	0,000	0,6771		+1,2218	
		0,000	0,072	0,100	0,097	0,087	0,050	0,000		0,0818		
1,5	$M_1$	0,000	0,1032	0,2104	0,1670	0,1264	0,0547	0,000	0,0980			
		0,000	0,0454	0,0558	0,0518	0,0435	0,0209	0,000		0,0519	+0,0528	
		0,000	0,0076	0,0101	0,0099	0,0088	0,0050	0,000	0,0067			
	$M_2$	0,000	0,0148	0,0260	0,0290	0,0297	0,0223	0,000		0,0193		$a=0$
		0,000	0,0671	0,1758	0,2454	0,1758	0,0671	0,000	0,1514		+0,1128	$b=0$
		0,000	0,0223	0,0297	0,0290	0,0260	0,0148	0,000		0,0193		$a_1=0,346l$
	$M_C$	0,000	0,0420	0,0739	0,0825	0,0845	0,0633	0,000		0,0549		$b_1=0,346l$
		0,000	0,1136	0,1396	0,1295	0,1088	0,0522	0,000		0,1298	-0,1682	$a_2=0,180l$
		0,000	0,0190	0,0253	0,0247	0,0221	0,0126	0,000	0,0165			$b_2=0,180l$
	A	1,000	0,758	0,526	0,418	0,316	0,137	0,000	0,4451			
		0,000	0,114	0,140	0,130	0,109	0,052	0,000		0,1298	+0,3318	
		0,000	0,019	0,025	0,025	0,022	0,013	0,000	0,0165			
	C	0,000	0,296	0,533	0,653	0,755	0,951	1,000	0,6026			
		1,000	0,949	0,758	0,6299	0,486	0,212	0,000	0,8798		+1,4183	
		0,000	0,056	0,073	0,072	0,064	0,037	0,000		0,0641		



**D. Rzędne linii wpływowych oddziaływań  $C$  w belce rozporowej trapezowej (fig. 512).**

$$C = D = \frac{3 - \xi^2 + 3\varphi}{2\mu(2 + 3\varphi)} \xi \quad \text{dla } \xi \leq 1 \text{ [przedział skrajny],}$$

$$C = C = \frac{2 + 3\varphi\xi - 3(\xi - 1)^2}{2\mu(2 + 3\varphi)} \quad \text{dla } 1 < \xi < \left(1 + \frac{\varphi}{2}\right) \text{ [przedział środkowy].}$$

dla  $\mu = 1$ .

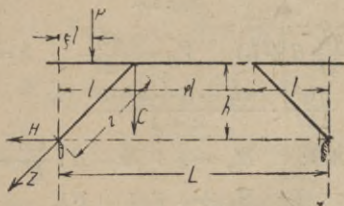


Fig. 512.

$\xi$	Przedział skrajny				$\xi$	Przedział środkowy			
	$\varphi = 1:2$	$= 3:4$	$= 4:5$	$= 1:1$		$\varphi = 1:2$	$= 3:4$	$= 4:5$	$= 1:1$
0	0	0	0	0	1,0	0,5	0,5	0,5	0,5
0,1	0,064	0,062	0,061	0,060	1,1	0,517	0,523	0,524	0,527
0,2	0,127	0,123	0,122	0,119	1,2	0,526	0,539	0,541	0,548
0,3	0,189	0,182	0,181	0,177	1,3	0,526	0,548	0,552	0,563
0,4	0,248	0,243	0,238	0,234	1,4	0,517	0,550	0,555	0,572
0,5	0,304	0,294	0,292	0,287	1,5	0,500	0,545	0,552	0,575
0,6	0,355	0,345	0,343	0,339	1,6		0,532	0,541	0,572
0,7	0,401	0,392	0,391	0,386	1,7		0,512	0,524	0,563
0,8	0,441	0,434	0,433	0,429	1,8		dla $\xi = 1,75$ 0,500	0,500	0,548
0,9	0,475	0,471	0,469	0,467	1,9				0,527
1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	2,0				0,500

Rzędne linii wpływowej parcia poziomego znajduje się z równania:

$$H = C \frac{e}{h}.$$

Rzędne linii wpływowej siły w zastrzale z równania:

$$Z = C \frac{z}{h}.$$

Rzędne wpływe linii wpływowej momentów por. „Mosty drewniane“, str. 786 i 787.

## E. Ramy.

## I. Rama trójkątna z przegubami stopowymi.

1.

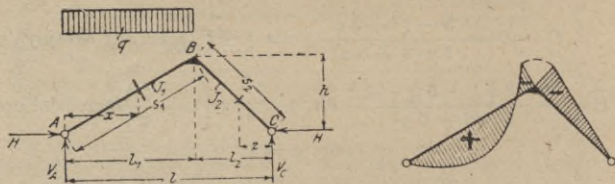


Fig. 513.

$$V_A = \frac{ql_1}{2l}(l+l_2) \quad V_C = \frac{ql_2^2}{2l} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{s_1}{s_2}$$

$$H = \frac{ql_1^2}{8hl} \cdot \frac{4l_2 + (l+4l_2)k}{k+1}$$

$$\text{Dla } AB: \quad M_x = +V_A x - H \cdot \frac{hx}{l_1} - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_B = +V_C l_2 - Hh.$$

$$\text{" } BC: \quad M_z = +V_C z - H \cdot \frac{hz}{l_2}$$

$$\text{" } AB: \quad N_x = +(V_A - qx) \frac{h}{s_1} + H \cdot \frac{l_1}{s_1}$$

$$\text{" } BC: \quad N = +V_C \cdot \frac{h}{s_2} + H \cdot \frac{l_2}{s_2}.$$

2.

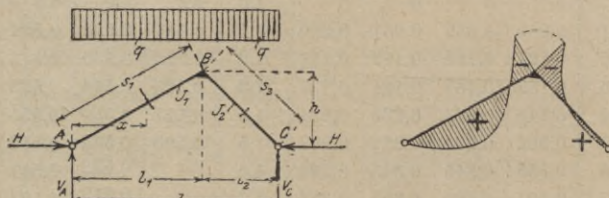


Fig. 514.

$$V = \frac{ql}{2} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{s_1}{s_2}$$

$$H = \frac{q}{8h} \cdot \frac{l_2(4l_1 + l_2) + (l_1 + 4l_2)l_1 k}{k+1}$$

$$\text{Dla } AB: \quad M_x = + \frac{qx(l-x)}{2} - H \cdot \frac{hx}{l}$$

$$M_B = + \frac{ql_1 l_2}{2} - Hh$$

$$\text{" } BC: \quad M_z = + \frac{qz(l-z)}{2} - H \cdot \frac{hz}{l_2}$$

$$\text{" } AB: \quad N_x = +(V - qx) \frac{h}{s_1} + H \cdot \frac{l_1}{s_1}.$$

3.

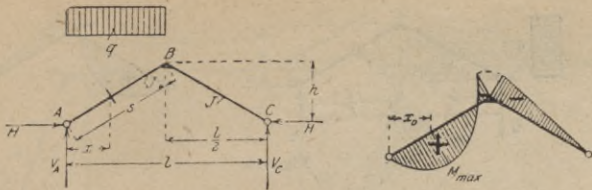


Fig. 515.

$$V_A = \frac{3}{8} ql \quad V_C = \frac{ql}{8} \quad H = \frac{5ql^2}{64h} \quad k = 1.$$

$$\text{Dla } AB: M_x = + \frac{7qlx}{32} - \frac{qx^2}{2} \quad M_B = - \frac{ql^2}{64}$$

$$+ M_{\max} = + \frac{49}{2048} ql^2 = \infty + \frac{ql^2}{42} \left( \text{występuje dla } x_0 = \frac{7}{32} l \right).$$

$$\text{Dla } BC: M_x = - \frac{qlx}{32} \quad (x \text{ mierzone od } c)$$

$$\text{" } AB: N_x = + (V_A - qx) \frac{h}{s} + H \cdot \frac{l}{2s}$$

$$\text{" } BC: N = + V_C \cdot \frac{h}{s} + H \cdot \frac{l}{2s}.$$

4.

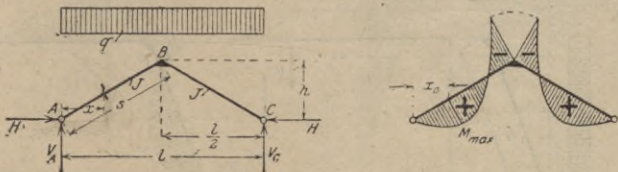


Fig. 516.

$$V = \frac{ql}{2} \quad H = \frac{5ql^2}{32h} \quad k = 1$$

$$\text{Dla } AB: M_x = + \frac{3qlx}{16} - \frac{qx^2}{2} \quad M_B = - \frac{ql^2}{32}$$

$$+ M_{\max} = + \frac{9}{512} ql^2 = \infty + \frac{ql^2}{57}; \quad \text{dla } x_0 = \frac{3}{16} l.$$

$$\text{Dla } AB \text{ i } BC: N_x = + (V - qx) \frac{h}{s} + H \cdot \frac{l}{2s}$$

$$\left( \begin{array}{l} x \text{ mierzone od } A, \\ \text{wzgl. } B \end{array} \right).$$

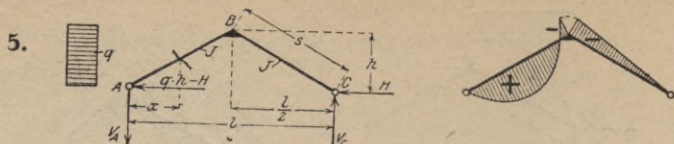


Fig. 517.

$$V = \frac{qh^2}{2l} \quad H = \frac{5}{16} \cdot qh \quad k = 1$$

Dla AB:  $M_x = + \frac{qh^2x}{8l^2} (7l - 16x) \quad M_B = - \frac{qh^2}{16}$

Dla BC:  $M_x = - \frac{qh^2x}{8l} \quad (x \text{ mierzone od } C)$

" AB:  $N_x = - V \cdot \frac{h}{s} - \left( qh - H - \frac{2qh^2x}{l} \right) \frac{l}{2s}$

" BC:  $N = + V \cdot \frac{h}{s} + H \cdot \frac{l}{2s}$

## II. Rama dwuprzegubowa ze słupem ukośnym i rygłem poziomym.

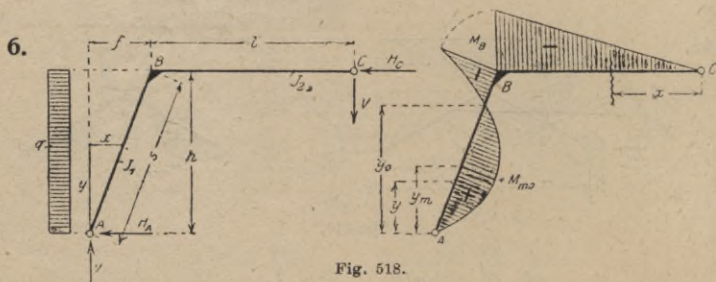


Fig. 518.

$$H_A = \frac{qh}{8} \left[ 4 - \frac{k \cdot s^2 (l+f)}{h^2 l (l+1)} \right] \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$H_C = qh - H_A$$

$$V = \frac{qs^2k}{8k(l+1)} \quad M_y = + H_A \cdot y + V \cdot x - \frac{1}{2} qy^2$$

$$M_B = + H_A \cdot h - \frac{1}{2} qh^2$$

$$y_m = \frac{1}{q} \left( H_A + V \frac{f}{h} \right) \quad M_x = - V \cdot x$$

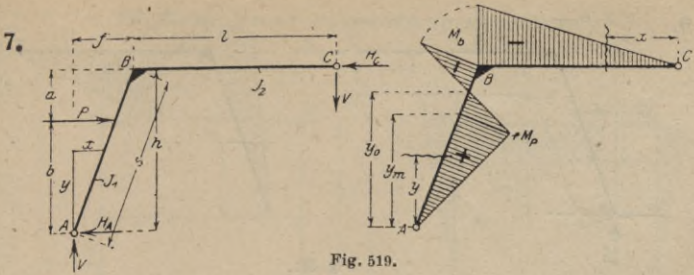


Fig. 519.

$$H_A = P \cdot \frac{a}{h} - V \frac{l+f}{h} \quad H_C = P \cdot \frac{b}{h} + V \frac{l+f}{h} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$V = \frac{P \cdot a b k s^2 (h+b)}{2 h^2 l (k+1)}$$

$$\text{Pole } b: M_y = + H_A \cdot y + V \cdot x \quad M_P + H_A \cdot b + V \cdot f \cdot \frac{1}{2} b$$

$$\text{" } a: M_y = + H_A \cdot y + V \cdot x - P(y-b)$$

$$M_B = -V \cdot l \quad M_x = -V \cdot x.$$

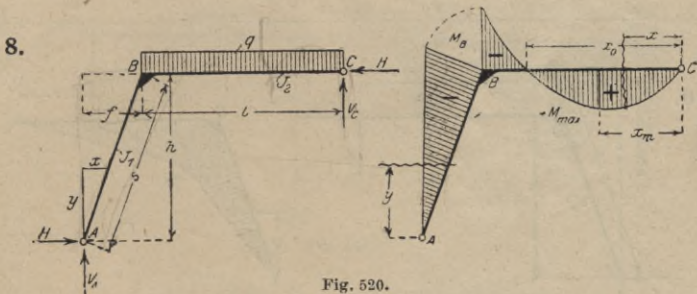


Fig. 520.

$$V_A = \frac{q l^2}{2(l+f)} + H \frac{h}{l+f} \quad V_C = \frac{q l}{2} \cdot \frac{l+2f}{l+f} - H \frac{h}{l+f}$$

$$H = \frac{q l}{8 h^2 (k+1)} \{ h(l+5f) + 4 f s^2 k \}.$$

$$M_y = + V_A \cdot x - H \cdot y \quad M_B = + V_A \cdot f - H \cdot h$$

$$M_x = + V_C \cdot x - \frac{1}{2} q x^2.$$

$$\text{max } M \text{ występuje w miejscu: } x_m = \frac{V_C}{q}.$$

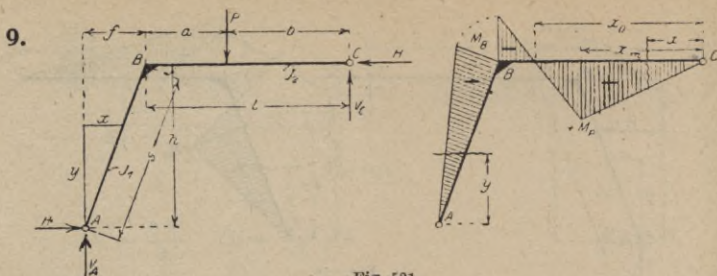


Fig. 521.

$$V_A = P \cdot \frac{b}{l+f} + H \frac{h}{l+f} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$V_C = P \cdot \frac{a+f}{l+f} - H \frac{h}{l+f}$$

$$H = \frac{P \cdot b}{2h^3 l^3 (k+1)} [h^2 \{2b^2(a+f) + 3af(2b+a) + a^2(3b+a)\} + 2l^2 f s^2 k]$$

$$M_y = +V_A \cdot f \cdot \frac{y}{h} - H \cdot y \quad M_B = +V_A \cdot f - H \cdot h$$

$$\text{Pole } b: M_x = +V_C \cdot x \quad M_P = +V_C \cdot b$$

$$\text{, } a: M_x = +V_C \cdot x - P(x-b).$$

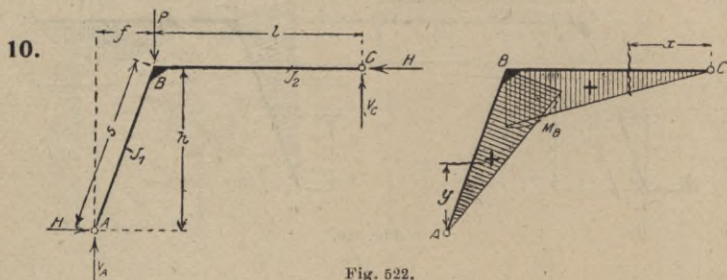


Fig. 522.

$$V_A = P \cdot \frac{l}{l+f} + H \cdot \frac{h}{l+f}$$

$$V_C = P \cdot \frac{f}{l+f} - H \cdot \frac{h}{l+f}$$

$$H = P f \cdot \frac{h^2 + s^2 k}{h^3 (k+1)}$$

$$M_y = +V_A \cdot f \cdot \frac{y}{h} - H \cdot y \quad M_B = +V_C \cdot l \quad M_x = +V_C \cdot x$$

## III. Rama prostokątna dwuprzegubowa.

11.

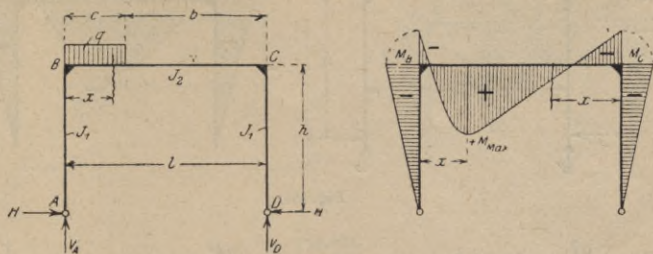


Fig. 523.

$$V_A = \frac{qc}{2l}(l+b) \quad V_D = \frac{qc^2}{2l} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$H = \frac{qc^2}{4hl} \cdot \frac{l+2b}{2k+3} \quad M_B = M_C = -Hh = -\frac{qc^2}{4l} \cdot \frac{l+2b}{2k+3}$$

$$\text{Pole } c: M_x = +V_A x - \frac{1}{2}qx^2 - M_B \quad (x \text{ mierzone od } B)$$

$$+M_{\max} = +\frac{qc^2}{8l^2}(l+b)^2 - M_B \text{ w miejscu } x = \frac{c}{2l}(l+b) < c.$$

$$\text{Pole } b: M_x = +V_D x - M_C \quad (x \text{ mierzone od } C).$$

12.

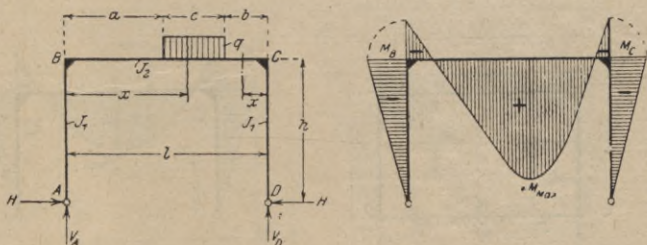


Fig. 524.

$$V_A = \frac{qc}{2l}(2b+c) \quad V_D = \frac{qc}{2l}(2a+c)$$

$$H = \frac{qc}{4hl} \cdot \frac{(6bl+3cl-6bc-6b^2-2c^2)}{2k+3} \quad M_B = M_C = -H \cdot h.$$

$$\text{Pole } a: M_x = +V_A x - M_B \quad (x \text{ mierzone od } B)$$

$$\text{„ } c: M_x = +V_A x - q \cdot \frac{1}{2}(x-a)^2 - M_B \quad (x \text{ „ „ } B)$$

$$\text{„ } b: M_x = +V_D x - M_C \quad (x \text{ „ „ } C).$$

$$M_{\max} \text{ występuje w miejscu } x_m = a + \frac{c}{2l}(2b+c).$$

$$\text{W rozporze: } +M_{\max} = +\frac{qc(2b+c)}{2l} \left[ a + \frac{c}{4l}(2b+c) \right] - M_B.$$

$$\text{Dla obciążenia symetr. } a=b: V_A = V_D = \frac{1}{2}qc \quad H = \frac{qc}{8hl} \cdot \frac{3l^2 - c^2}{2k+3}.$$

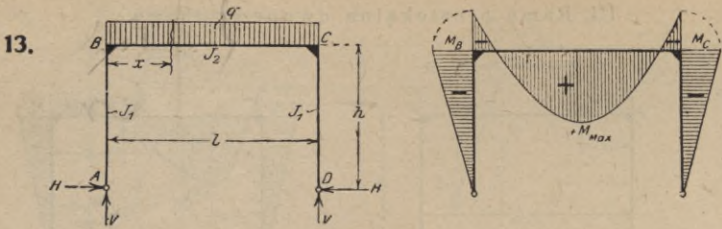


Fig. 525.

$$V = \frac{ql}{2} \quad M_B = M_C = -H \cdot h = -\frac{ql^2}{4(2k+3)} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$H = \frac{ql^2}{4h(2k+3)}$$

$$M_x = M_0 - M_B = \frac{1}{2}qx(l-x) - M_B.$$

W rozporze  $M_{\max} = +\frac{2k+1}{2k+3} \cdot \frac{ql^2}{8}$  (w środku rozporzy).

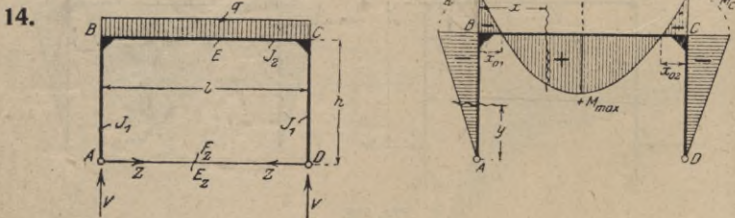


Fig. 526.

$$V = \frac{ql}{2} \quad n = \frac{EJ_2}{E_z F_z}$$

$$Z = \frac{1}{4} \frac{qh l^2}{h^2(2k+3) + 3n}.$$

$E(E_z)$  = współczynnik sprężystości materiału ramy (ścięgna):

$F_z$  = przekrój ścięgna.

$$M_B = M_C = -Zh = -\frac{1}{4} \frac{qh^2 l^2}{h^2(2k+3) + 3n}.$$

W rozporze:  $+M_{\max} = +\frac{1}{8}ql^2 - M_B.$



15.

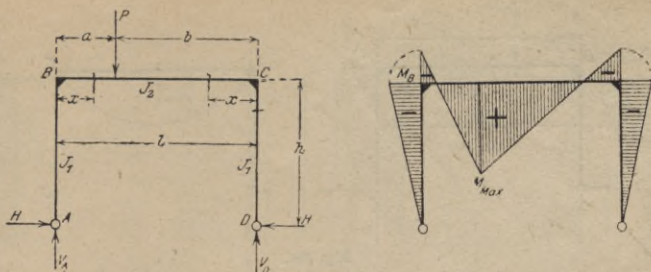


Fig. 527.

$$V_A = \frac{Pb}{l} \quad V_D = \frac{Pa}{l} \quad H = \frac{3Pab}{2hl(2k+3)} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$M_B = M_C = -H \cdot h = -\frac{3ab}{2l(2k+3)} \cdot P.$$

W polu a:  $M_x = +\frac{Pb}{l} \cdot x - M_B$  (x mierzone od B)

" b:  $M_x = +\frac{Pa}{l} \cdot x - M_C$  (x " " C).

W rozporze:  $M_{\max} = +\frac{4k+3}{2k+3} \cdot \frac{Pab}{2l}$  dla  $x_m = a$ .

16.

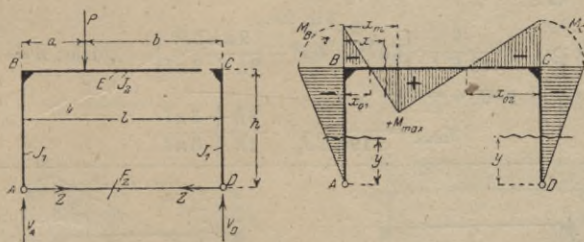


Fig. 528.

Dla  $a = b = \frac{1}{2}l$ ,  $V_A = V_D = \frac{1}{2}P$   $H = \frac{3Pl}{8h(2k+3)}$ .

$$V_A = P \frac{b}{l} \quad V_D = P \frac{a}{l} \quad m = \frac{EJ_2}{E_Z F_Z} \cdot l.$$

$$Z = \frac{1,5abhP}{h^2l(2k+3) + 3m}$$

$$M_B = M_C = -Z \cdot h = -\frac{1,5abh^2P}{h^2l(2k+3) + 3m}$$

$$+M_{\max} = +\frac{Pab}{l} - M_B.$$

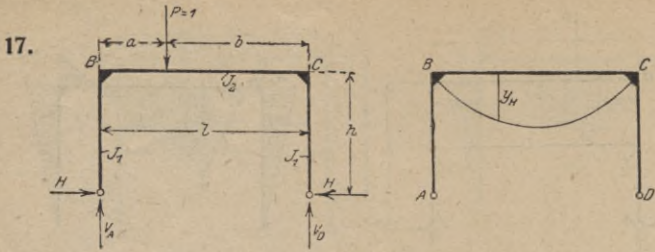


Fig. 529.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

Linja wpływową rozporu poziomego  $H$  wskutek poruszającego się  $P=1$

$$y_H = \frac{1,5}{hl(2k+3)} \cdot ab = m \cdot ab, \quad \text{gdzie: } m = \frac{1,5}{hl(2k+3)}$$

$$\max y_H = \frac{3l}{8h(2k+3)}, \quad \text{w miejscu } a = b = \frac{l}{2}$$

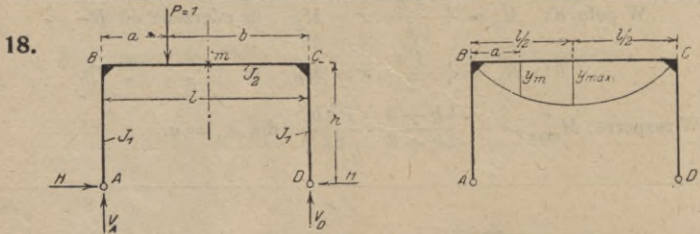


Fig. 530.

Ugięcie:  $y_m = \frac{1}{48EJ_2} \left\{ 3al^2 - 4a^3 - \frac{9nabl^2}{2h+3nl} \right\}$ , gdzie:  $n = \frac{J_1}{J_2}$ .

Dla  $P=1$  przy  $a=b=1/2 l$ .

$$y_{\max} = \frac{l^3}{192EJ_2} \cdot \frac{8h+3nl}{2h+3nl}$$

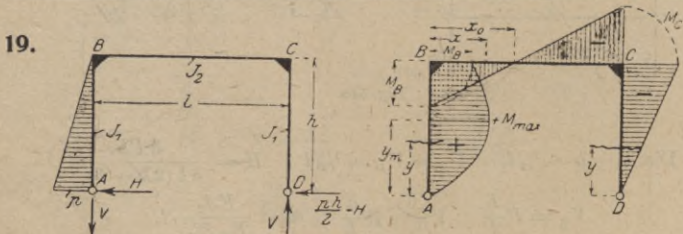


Fig. 531.

$$V = \frac{ph^2}{6l} \quad H = \frac{ph}{40} \cdot \frac{31k+50}{2k+3}$$

Słup  $AB$ :  $M_y = +Hy - \frac{py^2}{6h}(3h-y)$   $M_B = + \frac{ph^2}{120} \cdot \frac{13k+30}{2k+3}$

$$M_C = - \frac{ph^2}{40} \cdot \frac{9k+10}{2k+3} \quad x_0 = \frac{l}{20} \cdot \frac{13k+30}{2k+3}$$

20.

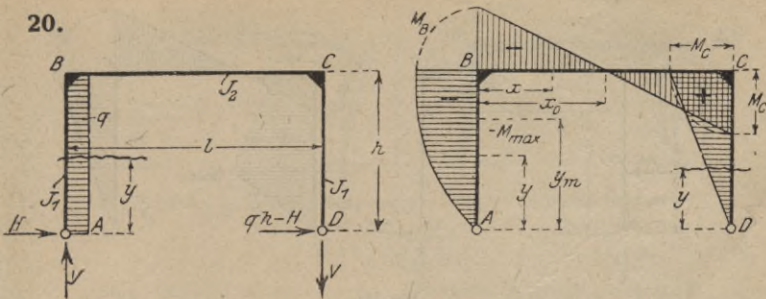


Fig. 532.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$V = \frac{q h^2}{2l} \quad H = \frac{q h}{8} \cdot \frac{11 k + 6}{2k + 3} \quad M_y = -H \cdot y + \frac{1}{2} q y^2.$$

Przekrój niebezpieczny w słupie AB występuje dla:

$$y_m = \frac{h}{8} \cdot \frac{11k + 6}{2k + 3}$$

$$-M_{\max} = \frac{q h^2}{128} \left( \frac{11k + 6}{2k + 3} \right)^2 \quad M_B = -\frac{3}{8} q h^2 \frac{k - 2}{2k + 3}$$

$$M_C = +\frac{q h^2}{8} \cdot \frac{5k + 18}{2k + 3}$$

$$x_0 = \frac{3}{4} l \frac{k - 2}{2k + 3}.$$

21.

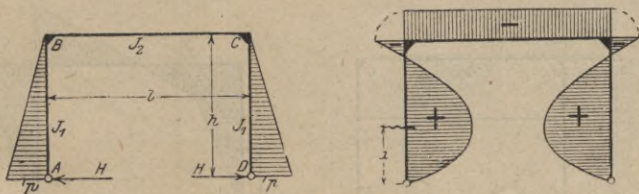


Fig. 533.

$$V = 0 \quad H = \frac{p h}{20} \cdot \frac{11k + 20}{2k + 3}$$

$$M_x = +Hx - \frac{p x^2}{6h} (3h - x) \quad M_B = M_C = -\frac{p h^2}{60} \cdot \frac{7k}{2k + 3}$$

$$M_x = M_B = M_C = -\frac{p h^2}{60} \cdot \frac{7k}{2k + 3}.$$

22.

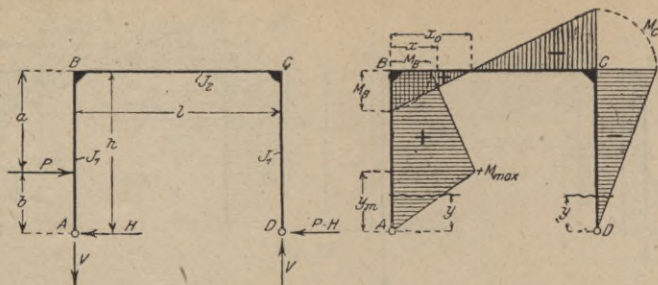


Fig. 534.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$V = \frac{P \cdot b}{l} \quad H = \frac{P}{2} \cdot \frac{k(4h^3 + b^3 - 3b \cdot h^2) + 6h^3 - 3b \cdot h^2}{h^3(2k + 3)}$$

Słup AB w polu  $b$ :  $M_y = +H \cdot y$

"  $a$ :  $M_y = +H \cdot y - P(y - a)$

$$M_B = +H \cdot h - P \cdot a = +P \cdot b \frac{k(h^2 + b^2) + 3h^2}{2h^2(2k + 3)}$$

$$M_C = -(P - H) \cdot h = -P \cdot b \frac{k(b^2 - 3h^2) - 3h^2}{2h^2(2k + 3)}$$

$$x_0 = \frac{k(h^2 + b^2) + 3h^2}{2h^2(2k + 3)} \cdot l$$

Dla:  $a = b = \frac{1}{2}h$  mamy:  $V = \frac{Ph}{2l}$   $H = \frac{3}{16}P \frac{7k + 12}{2k + 3}$

23.

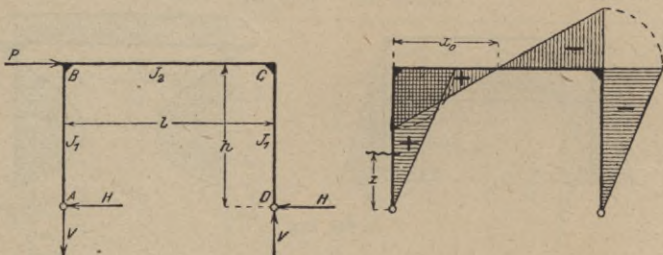


Fig. 535.

$$V = \frac{Ph}{l} \quad H = \frac{P}{2} \quad x_0 = \frac{l}{2}$$

Słup:  $M_x = \pm H \cdot x$   $M_B = +\frac{1}{2}P \cdot h = -M_C$

Rozpora:  $M_x = +H \cdot h - V_A \cdot x$

24

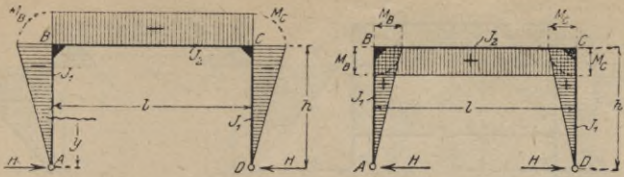


Fig. 536. Wpływ podniesienia temperatury. Wpływ obniżenia temperatury.

$$H = \frac{3 \varepsilon E J_2 t}{h^2 (3 + 2k)} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

Stup:  $M_y = \mp H \cdot y.$

Rozpora:  $M_B = M_C = \mp H \cdot h.$

25.

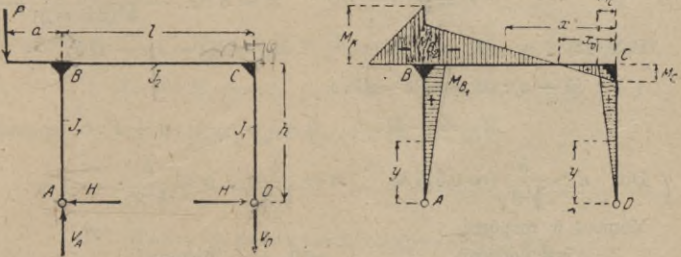


Fig. 537.

$$V_A = P \cdot \frac{a+l}{l} \quad V_D = P \cdot \frac{a}{l} \quad H = \frac{3Pa}{2h(2k+3)}$$

Stup:

$$M_y = + H \cdot y \quad M_{B_1} = M_C = + H \cdot h$$

$$M_{B_2} = + Hh - P \cdot a = - P \cdot a \frac{4k+3}{2(2k+3)}$$

Rozpora:

$$M_x = + Hh - V_D \cdot x \quad x_0 = \frac{3l}{2(2k+3)}$$

26.

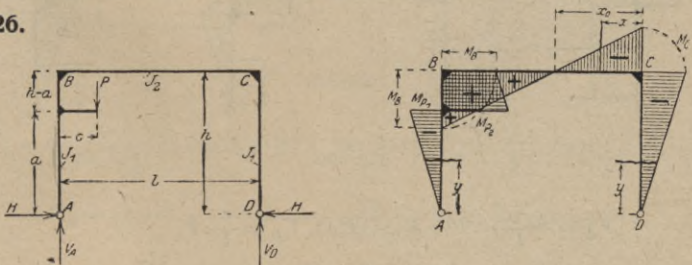


Fig. 538.

$$V_A = P \cdot \frac{l-e}{l} \quad V_D = \frac{Pc}{l} \quad H = \frac{3}{2} Pc \cdot \frac{k(h^2 - a^2) + h^2}{h^3(2k+3)}$$

Stup:

pole a:  $M_y = - H y \quad M_B = + Pc - H h$

" (h - a):  $M_y = + Pc - H y$

Rozpora:

$$M_x = + \frac{Pc}{l} x - H h \quad M_C = - H h.$$

27.

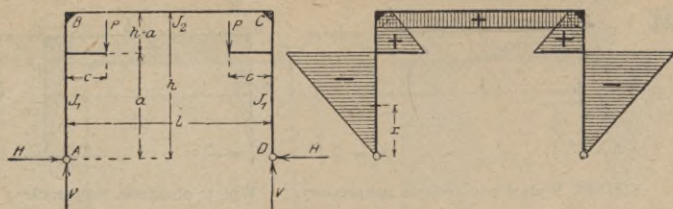


Fig. 539.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$V = P$$

$$H = 3Pc \cdot \frac{k(h^2 - a^2) + h^2}{h^3(2k + 3)}$$

$$\text{Pole } a: \quad M_x = -H \cdot x \quad M_B = M_C = Pc - Hh$$

$$(h - a): M_x = Pc - H \cdot x$$

$$M_{P_1} = -H \cdot a \quad M_{P_2} = -H \cdot a + P \cdot c$$

$$\text{Dla } a > \frac{h}{\sqrt{3}} (\approx 0,577h) \quad a = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad a < \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Moment w rozporze  
jest dodatni

= 0, ujemny<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> To samo dotyczy przypadku 29., tylko zamiast > będzie <.

28.

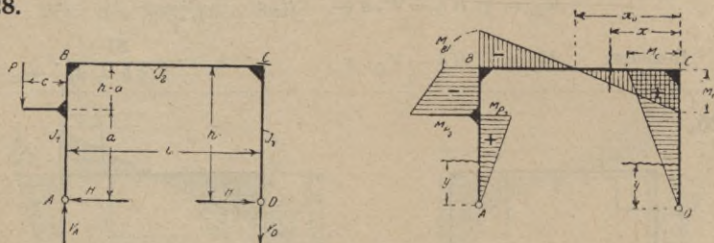


Fig. 540.

$$V_A = \frac{c+l}{l} \cdot P = V_D + P \quad V_D = \frac{c}{l} \cdot P$$

$$H = \frac{3}{2} P \cdot c \cdot \frac{k(h^2 - a^2) + h^2}{k^3(2k + 3)}$$

$$\text{Słup } AB, \text{ pole } a: \quad M_y = +H \cdot y \quad M_B = +H \cdot h - P \cdot c$$

$$, (h - a): M_y = +H \cdot y - P \cdot c$$

$$\text{Rozpora:} \quad M_x = +H \cdot h - P \cdot \frac{c}{l} \cdot x \quad M_C = +H \cdot h$$

29.

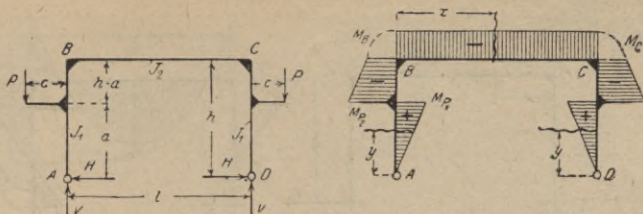


Fig. 541.

$$V = P \quad H = 3Pc \cdot \frac{k(h^2 - a^2) + h^2}{h^3(2k + 3)} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

Słupy pola  $a$ :  $M_y = +H \cdot y \quad M_{P_1} = +H \cdot a \quad M_{P_2} = +H \cdot a - P \cdot c$

" "  $(h-a)$ :  $M_y = +H \cdot y - P \cdot c \quad M_B = M_C = +H \cdot h - P \cdot c.$

Rozpora:  $M_x = M_B = M_C = +H \cdot h - P \cdot c.$

## IV. Rama prostokątna bezprzegubowa.

30.

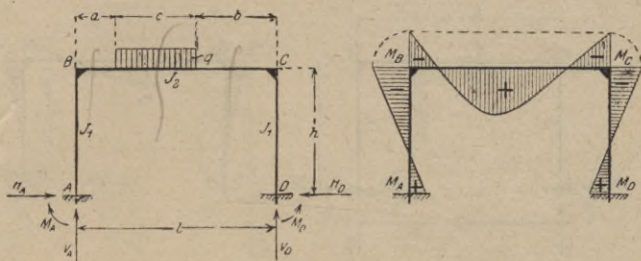


Fig. 542.

$$V_A = \frac{qc}{l^3(6k+1)} \left[ 3abc + b^2(3l-2b) + c^2 \left( l + b - \frac{c}{2} \right) + 3l^2(2b+c)k \right]$$

$$V_D = qc - V_A \quad H = \frac{qc}{4hl(k+2)} (6ab + 3cl - 2c^2)$$

$$M_A = \frac{q}{4l^2(k+2)(6k+1)} \left[ 6abcl + 4a^2c^2 + 8ab^2c + \frac{10}{3} \cdot c^3l - \right. \\ \left. - c^2l^2 - 2c^4 + (14abcl + 2a^2c^2 - 4ab^2c - 2c^3l + 5c^2l^2 - c^4)k \right].$$

Przez zamianę  $a$  i  $b$  otrzymamy  $M_D$ :

$$M_B = M_A = Hh \quad M_C = M_D - Hh.$$

31.

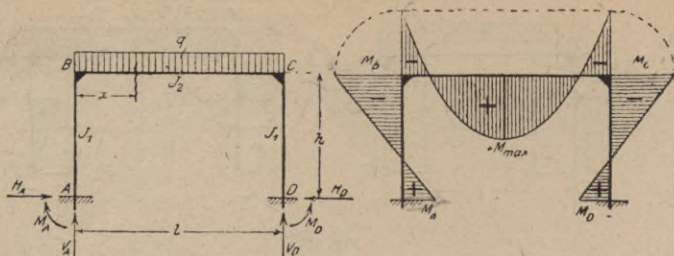


Fig. 543.

$$V = \frac{1}{2} q l \quad H = \frac{q l^2}{4 h (k + 2)} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$M_A = M_D = + \frac{q l^2}{12 (k + 2)} \quad M_B = M_C = - \frac{q l^2}{6 (k + 2)}$$

Rozpora:

$$M_x = \frac{q x}{2} (l - x) - \frac{q l^2}{6 (k + 2)}$$

$$+ M_{\max} = \frac{q l^2}{8} - \frac{q l^2}{6 (k + 2)} = \frac{q l^2}{24} \cdot \frac{2 + 3k}{k + 2}$$

32.

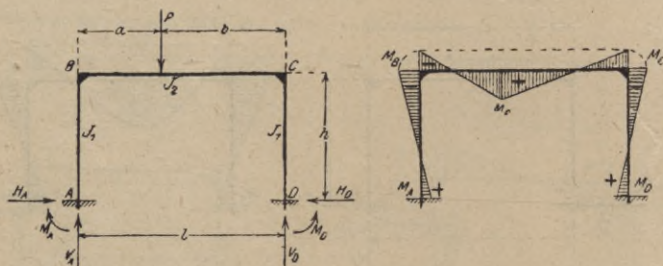


Fig. 544.

$$V_A = \frac{P b}{l} \cdot \frac{6k + 1 + \delta - 2\delta^2}{6k + 1} \quad V_D = \frac{P a}{l} \cdot \frac{6k + 3\delta - 2\delta^2}{6k + 1}$$

$$H = \frac{3 a b P}{2 h l (k + 2)} \quad \delta = \frac{a}{l}$$

$$M_A = + \frac{a b P}{2 l} \cdot \frac{5k - 1 + 2\delta (k + 2)}{(k + 2) (6k + 1)}$$

$$M_D = + \frac{a b P}{2 l} \cdot \frac{3 + 7k - 2\delta (k + 2)}{(k + 2) (6k + 1)}$$

$$M_B = M_A - H h \quad M_C = M_D - H h \quad M_P = M_A - H h + V_A a$$

$$\text{Dla } a = b = \frac{l}{2} \quad V_A = V_D = \frac{P}{2} \quad H = \frac{3 P l}{8 h (k + 2)}$$



33.

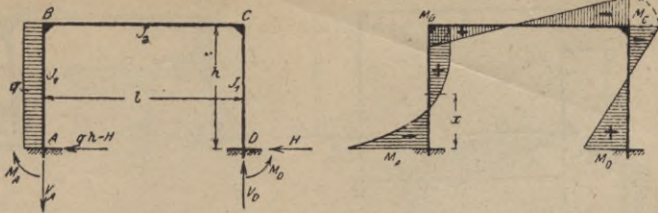


Fig. 545.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$V = \frac{q h^2 k}{l(6k+1)} \quad H = \frac{q h}{8} \cdot \frac{2k+3}{2+k}$$

$$M_A = -\frac{q h^2}{24} \left( 12 - \frac{5k+9}{k+2} - \frac{12k}{6k+1} \right)$$

$$M_D = +\frac{q h^2}{24} \left( +\frac{5k+9}{k+2} - \frac{12k}{6k+1} \right).$$

Slup AB:  $M_x = M_A + (qh - H)x - \frac{1}{2}qx^2$

$$M_B = M_A - Hh + \frac{1}{2}qh^2 \quad M_C = M_D - Hh.$$

34.

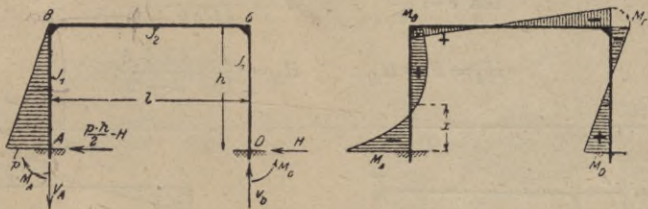


Fig. 546.

$$V = \frac{p k h^2}{4l(6k+1)} \quad H = \frac{p h}{40} \cdot \frac{3k+4}{k+2}$$

$$M_A = -\frac{p h^2}{120} \left( 20 - \frac{7k+12}{k+2} - \frac{15k}{6k+1} \right)$$

$$M_D = +\frac{p h^2}{120} \left( +\frac{7k+12}{k+2} - \frac{15k}{6k+1} \right).$$

Slup AB:  $M_x = M_A + \left( \frac{p h}{2} - H \right) x - \frac{p x^2}{6h} (3h - x)$

$$M_B = M_A - Hh + \frac{p h^2}{6} \quad M_C = M_D - Hh.$$

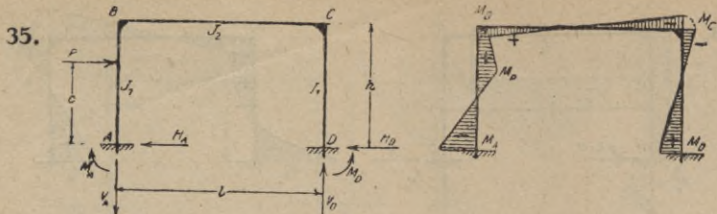


Fig. 547.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad \delta = \frac{c}{h}$$

$$V = \frac{3Pc\delta k}{l(6k+1)} \quad H_A = P - H_D$$

$$H_D = \frac{P\delta^2}{2(k+2)} [3(k+1) - \delta(2k+1)]$$

$$M_A = -\frac{Pc\delta}{2} \left[ \frac{2}{\delta} - \frac{3+2k-\delta(k+1)}{k+2} - \frac{3k}{6k+1} \right]$$

$$M_D = +\frac{Pc\delta}{2} \left[ \frac{3+2k-\delta(k+1)}{k+2} - \frac{3k}{6k+1} \right]$$

$$M_B = M - H_D h + Pc \quad M_C = M_D - H_D h \quad M_P = M_A + H_A c$$

$$\text{Dla } c = \frac{h}{2} \quad V = \frac{3P \cdot h \cdot k}{4l(6k+1)}$$

$$H_A = P - H_D \quad H_D = \frac{P}{16} \cdot \frac{4k+5}{k+2}$$

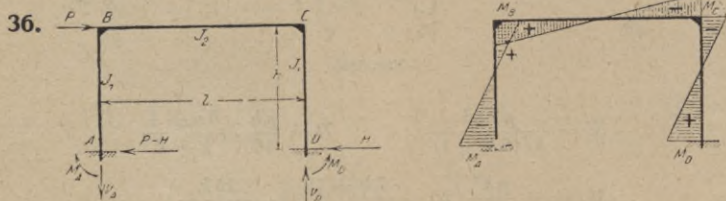


Fig. 548.

$$V = \frac{3Phk}{l(6k+1)} \quad H = \frac{P}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_A \\ M_D \end{array} \right\} = \mp \frac{Ph}{2} \cdot \frac{3k+1}{6k+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_B \\ M_C \end{array} \right\} = \pm \frac{Ph}{2} \cdot \frac{3k}{6k+1}$$

V. Rama o rozporze łamanej symetrycznej i słupach pionowych dwuprzegubowa.

37.

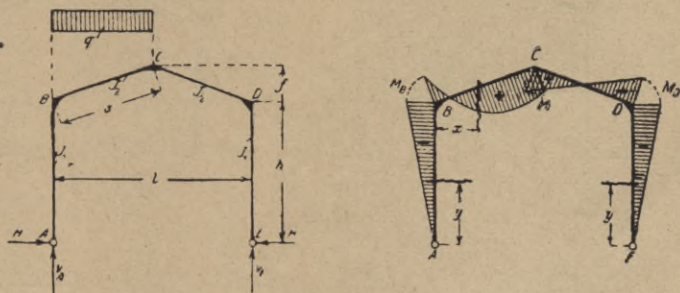


Fig. 549.

$$V_A = \frac{3ql}{8} \quad V_E = \frac{ql}{8} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{s}$$

$$H = \frac{ql^2}{64} \cdot \frac{8h + 5f}{h^2(k+3) + f(3h+f)}$$

Słupy:  $M_y = -Hy \quad M_B = -Hh.$

Rozpora, część BC:  $M_x = +V_A x - H\left(h + \frac{2fx}{l}\right) - \frac{qx^2}{2}$

$$M_C = +V_E \cdot \frac{1}{2}l - H(h+f) \quad M_D = -Hh.$$

38.

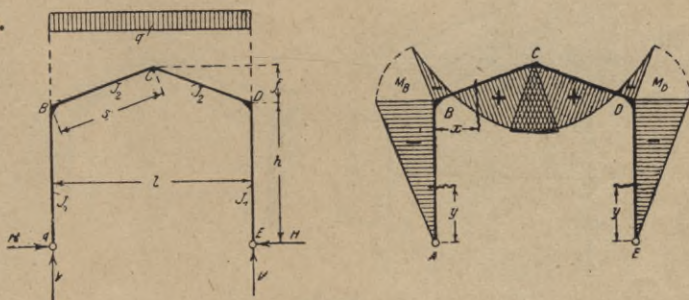


Fig. 550.

$$V = \frac{1}{2}ql \quad H = \frac{ql^2}{32} \cdot \frac{8h + 5f}{h^2(k+3) + f(3h+f)}$$

Słupy:  $M_y = -Hy \quad M_B = -Hh.$

Rozpora:  $M_x = +\frac{qx}{2}(l-x) - H\left(h + \frac{2fx}{l}\right)$

$$M_C = +\frac{1}{8}ql^2 - H(h+f).$$

39.

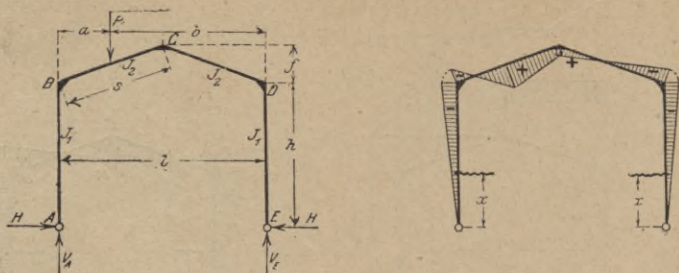


Fig. 551.

$$V_A = \frac{Pb}{l} \quad V_E = \frac{Pa}{l}$$

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{s}$$

$$H = \frac{Pa}{4l^2} \cdot \frac{6hbl + f(3l^2 - 4a^2)}{h^2(k+3) + f(3h+f)}$$

Słupy:  $M_x = -Hx \quad M_B = -Hh.$

W miejscu działania siły  $P$ :  $M_P = +V_A a - H\left(h + \frac{2fa}{l}\right)$

$$M_C = +\frac{1}{2}Pa - H(h+f) \quad M_D = -Hh.$$

40.

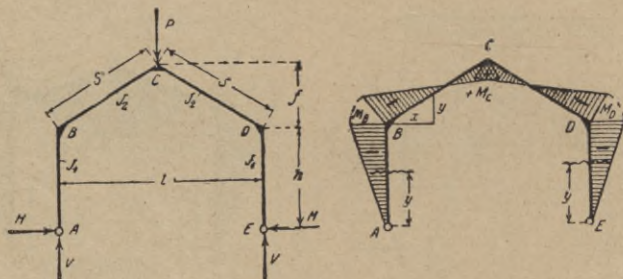


Fig. 552.

$$V = \frac{P}{2} \quad H = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{3h + 2f}{h^2(k+3) + f(3h+f)}$$

Słupy:  $M_y = -H \cdot y \quad M_B = M_D = -H \cdot h.$

Rozpora:  $M_x = +\frac{P}{2} \cdot x - H\left(h + \frac{2fx}{l}\right).$

$$M_C = +\frac{1}{4}Pl - H(h+f).$$

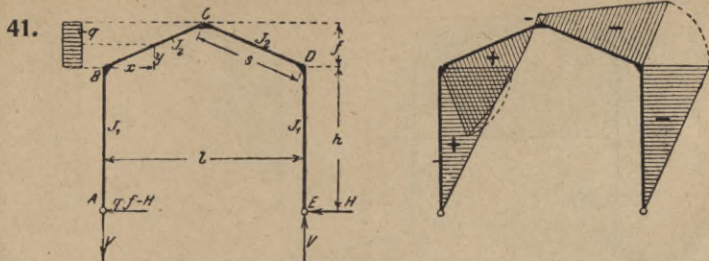


Fig. 553.

$$V = \frac{qf(2h+f)}{2l} \quad H = \frac{qf}{16} \cdot \frac{8h^2(k+3) + 5f(4h+f)}{h^2(k+3) + f(3h+f)}$$

$$M_B = +(qf - H)h.$$

Dla BC:  $M_x = +(qf - H)(h + y) - Vx - \frac{1}{2}qy^2$

$$M_C = +\frac{1}{2}Vl - H(h+f)$$

$$M_D = -Hh.$$

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{s}$$

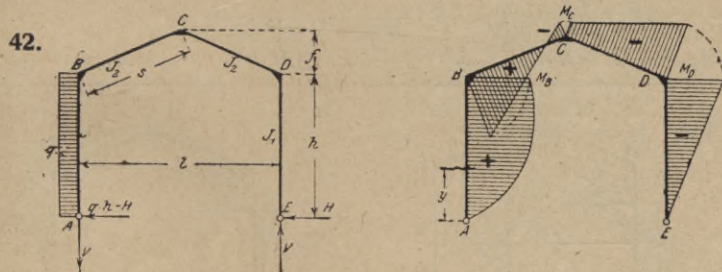


Fig. 554.

$$V = \frac{qh^2}{2l} \quad H = \frac{qh^2}{16} \cdot \frac{5hk + 6(2h+f)}{h^2(k+3) + f(3h+f)}$$

Dla AB:  $M_y = +(qh - H)y - \frac{1}{2}qy^2$

$$M_B = +\frac{1}{2}qh^2 - Hh$$

$$M_C = +\frac{1}{4}qh^2 - H(h+f) \quad M_D = -Hh.$$

43.

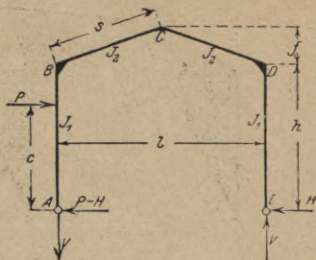


Fig. 555.

$$V = \frac{Pc}{l} \quad H = \frac{P \cdot c}{4} \cdot \frac{k(3h - \frac{c^2}{h}) + 3(2h + f)}{h^2(k + 3) + f(3h + f)} \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{s}$$

$$M_P = + (P - H)c \quad M_B = + Pc - Hh$$

$$M_C = + \frac{1}{2} Pc - H(h + f) \quad M_D = - Hh.$$

44.

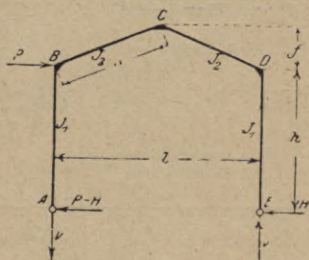


Fig. 556.

$$V = \frac{Ph}{l} \quad H = \frac{Ph}{4} \cdot \frac{2hk + 3(2h + f)}{h^2(k + 3) + f(3h + f)}$$

$$M_B = + (P - H)h \quad M_C = + \frac{1}{2} Ph - H(h + f) \quad M_D = - Hh.$$

45.

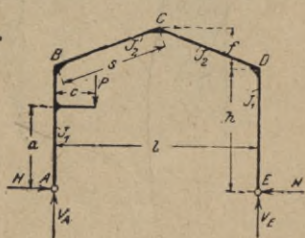


Fig. 557.

$$V_A = P \cdot \frac{l - c}{l} \quad V_E = P \cdot \frac{c}{l}$$

$$H = \frac{3Pc}{4h} \cdot \frac{k(h^2 - a^2) + h(2h + f)}{h^2(k + 3) + f(3h + f)}$$

$$M_{P_1} = - Ha \quad M_{P_2} = + Pc - Ha$$

$$M_B = + Pc - Hh \quad M_C = + \frac{1}{2} Pc - H(h + f) \quad M_D = - Hh.$$

46.

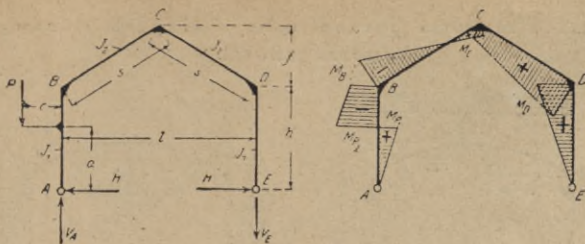


Fig. 558.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{s}$$

$$V_A = P \cdot \frac{l+c}{l} \quad V_E = P \cdot \frac{c}{l} \quad H = \frac{3}{4} \cdot \frac{P \cdot c}{h} \cdot \frac{k(h^2 - a^2) + h(2h + f)}{h^2(k + 3) + f(3h + f)}$$

$$M_{P_1} = + H \cdot a \quad (\text{tuż pod wspornikiem})$$

$$M_{P_2} = + H \cdot a - P \cdot c \quad (\text{tuż nad wspornikiem})$$

$$M_B = + Hh - P \cdot c \quad M_C = + H(h + f) - \frac{1}{2} Pc \quad M_D = + Hh.$$

47.

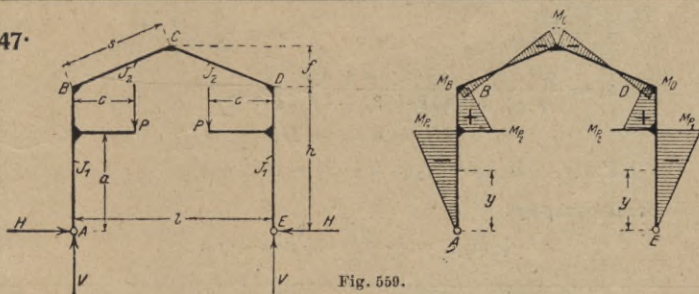


Fig. 559.

$$V = P \quad H = \frac{3Pc}{2h} \cdot \frac{k(h^2 - a^2) + h(2h + f)}{h^2(k + 3) + f(3h + f)}$$

$$M_{P_1} = - Ha \quad (\text{tuż pod wspornikiem})$$

$$M_{P_2} = + Fe - Ha \quad (\text{tuż nad wspornikiem})$$

$$M_B = M_D = + Pc - Hh \quad M_C = + Pc - H(h + f).$$

48.

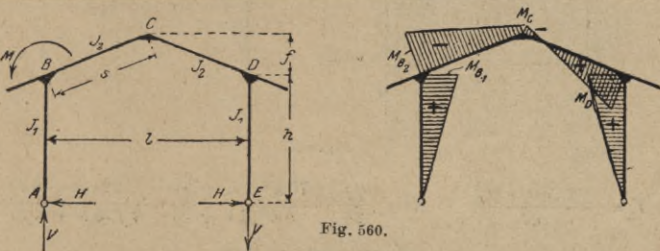


Fig. 560.

$$V = \frac{M}{l} \quad H = \frac{3M}{4} \cdot \frac{2h + f}{h^2(k + 3) + f(3h + f)}$$

$$M_{B_1} = + Hh$$

$$M_{B_2} = + Hh - M$$

$$M_C = + H(h + f) - \frac{1}{2} M$$

$$M_D = + Hh.$$

## VI. Rama o rozporze parabolicznej i słupach pionowych dwuprzegubowa.

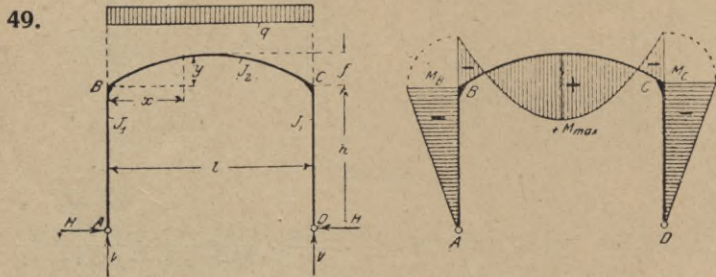


Fig. 561.

Równanie osi rozporzy:  $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$

$$V = \frac{ql}{2} \qquad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$H = \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{5h + 4f}{5h^2(2k + 3) + 4f(5h + 2f)}$$

$$M_B = M_C = -Hh.$$

Dla BC:  $M_x = +\frac{1}{2}qx(l-x) - H(h+y).$

W środku rozporzy:

$$+M_{\max} = +\frac{ql^2}{8} - H(h+f).$$

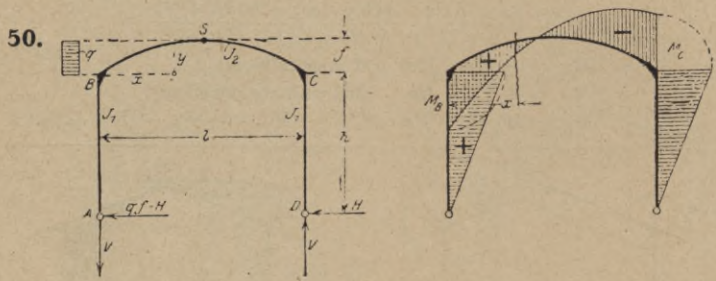


Fig. 562.

$$V = \frac{qf(2h+f)}{2l} \qquad H = \frac{qf}{28} \cdot \frac{70h^2(2k+3) + f(224h+64f)}{5h^2(2k+3) + 4f(5h+2f)}$$

$$M_B = +(qf - H)h.$$

Dla BS:  $M_x = +(qf - H)(h+y) - Vx - \frac{qy^2}{2}$

" SC:  $M_x = +V(l-x) - H(h+y) \qquad M_C = -Hh.$



51.

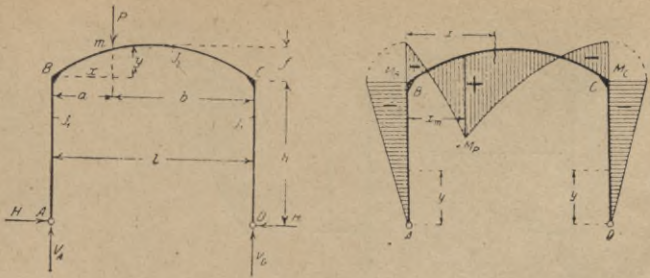


Fig. 563.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$V_A = \frac{Pb}{l} \quad V_D = \frac{Pa}{l} \quad H = \frac{5Pa}{2l^3} \cdot \frac{3bh^2 + 2fl^3 - 4fa^2l + 2fa^3}{5h^2(2k+3) + 4f(5h+2f)}$$

$$M_B = M_C = -Hh. \quad \text{Rozpora: } M_x = M_0 - H(h+y).$$

( $M_0$  = moment belki wolno podpartej BC).

52.

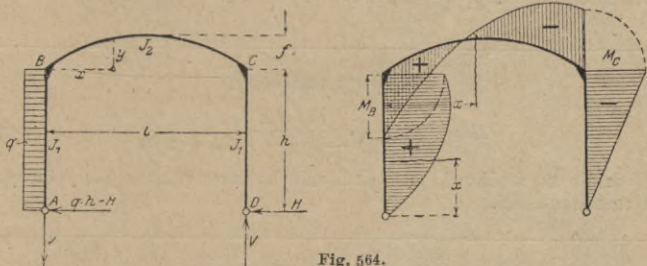


Fig. 564.

$$V = \frac{qh^2}{2l} \quad H = \frac{5qh^2}{8} \cdot \frac{h(5k+6) + 4f}{5h^2(2k+3) + 4f(5h+2f)}$$

$$\text{Dla } AB: \quad M_x = +(qh - H)x - \frac{1}{2}qx^2 \quad M_B = +\frac{1}{2}qh^2 - Hh.$$

$$\text{Dla } BC: \quad M_x = +V(l-x) - H(h+y) \quad M_C = -Hh.$$

53.

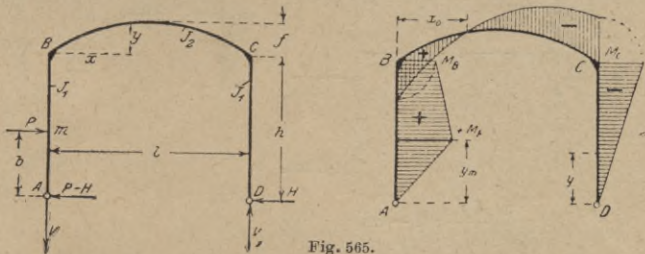


Fig. 565.

$$V = P \cdot \frac{b}{l} \quad H = \frac{5Pb}{2h} \cdot \frac{3h^2(k+1) + 2fh - b^2k}{5h^2(2k+3) + 4f(5h+2f)}$$

$$\text{Pod siłą } P: \quad M_p = +(P-H)b \quad M_B = +Pb - Hh.$$

$$\text{Dla } BC: \quad M_x = +P \cdot \frac{b}{l}(l-x) - H(h+y) \quad M_C = -Hh.$$

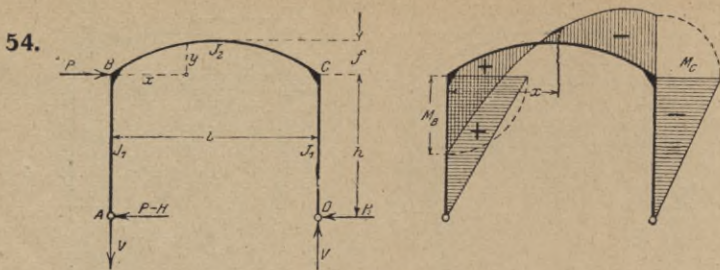


Fig. 566.

$$V = P \cdot \frac{h}{l} \quad H = \frac{5P}{2} \cdot \frac{h^2(2k+3) + 2fh}{5h^2(2k+3) + 4f(5h+2f)}$$

$$M_B = +(P-H)h. \quad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}.$$

Dla BC:  $M_x = +P \cdot \frac{h}{l}(l-x) - H(h+y) \quad M_C = -Hh.$

55. Wpływ temperatury.

$$H = \frac{15 \omega t E J_2}{5h^2(2k+3) + 4f(5h+2f)}$$

$H$  działa ku środkowi, przy obniżeniu na zewnątrz,  $\omega$  jest współczynnikiem rozszerzalności.

56.

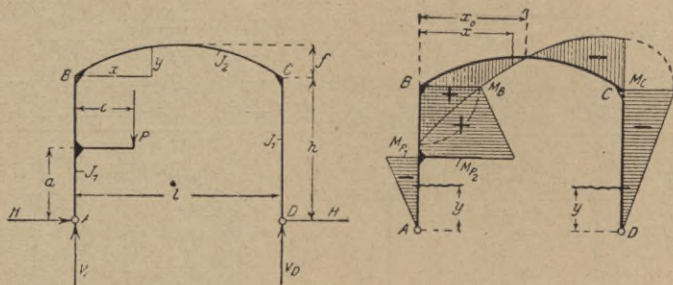


Fig. 567.

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

$$V_A = P \cdot \frac{l-c}{l} \quad V_D = P \cdot \frac{c}{l} \quad H = \frac{5Pc}{2h} \cdot \frac{3k(h^2 - a^2) + h(3h+2f)}{5h^2(2k+3) + 4f(5h+2f)}$$

$$M_{P_1} = -Ha \quad M_{P_2} = +Pc - Ha \quad M_B = +Pc - Hh.$$

Rozpora:  $M_x = +P \cdot \frac{c}{l}(l-x) - H(h+y) \quad M_C = -Hh.$

57.

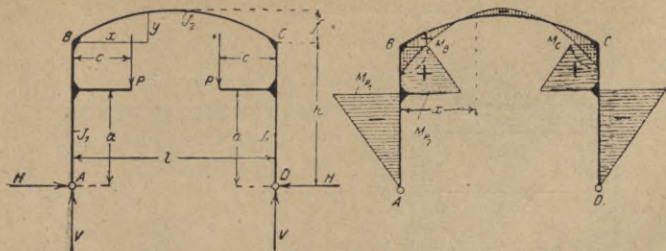


Fig. 568.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$V = P \quad H = \frac{5Pc}{h} \cdot \frac{3k(h^2 - a^2) + h(3h + 2f)}{5h^2(2k + 3) + 4f(5h + 2f)}$$

$$M_{P_1} = -Ha \quad M_{P_2} = +Pc - Ha$$

$$M_B = M_C = +Pc - Hh.$$

Rozpora:  $M_x = +Pc - H(h + y).$

58.

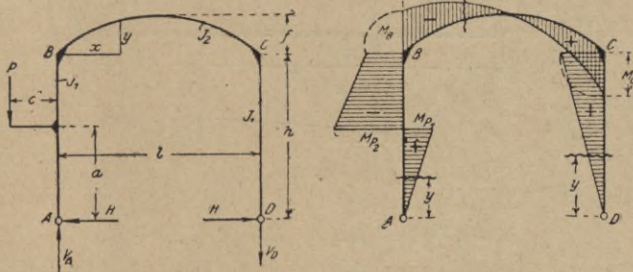


Fig. 569.

$$V_A = P \cdot \frac{c+l}{l} \quad V_D = P \cdot \frac{c}{l} \quad y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

$$H = \frac{5Pc}{2h} \cdot \frac{3k(h^2 - a^2) + h(3h + 2f)}{5h^2(2k + 3) + 4f(5h + 2f)}$$

$$M_{P_1} = +Ha \quad M_{P_2} = +Ha - P \cdot c \quad M_B = +Hh - P \cdot c.$$

Rozpora:  $M_x = -P \cdot \frac{c}{l}(l-x) + H(h+y)$

$$M_C = +Hh.$$

## VII. Rama prostokątna zamknięta.

59.

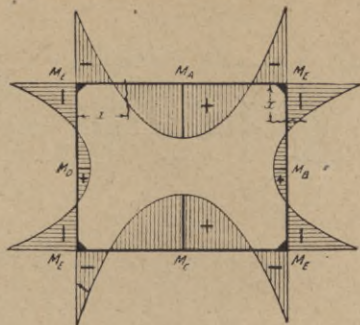
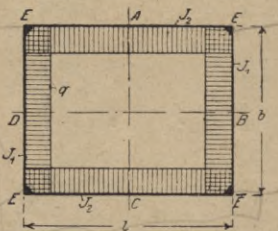


Fig. 570.

$$M_E = -\frac{q}{12} \cdot \frac{l^2 + b^2 k}{k + 1}$$

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{b}{l}$$

$$M_A = M_C + \frac{q l^2}{8} - \frac{q}{12} \cdot \frac{l^2 + b^2 k}{k + 1}$$

$$M_B = M_D = +\frac{q b^2}{8} - M_E$$

Dla AE (wzgl. CE) w odł.  $x$  od E:  $M_x = +\frac{1}{2} q x (l - x) - M_E$

Dla BE (wzgl. DE) w odł.  $x$  od E:  $M_x = +\frac{1}{2} q x (b - x) - M_E$

## VIII. Rama trójprzęsłowa symetryczna o dwu słupach.

60.

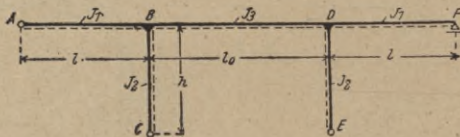


Fig. 571.

$$k = \frac{J_3}{J_2} \cdot \frac{h}{l_0}$$

$$k_1 = \frac{J_1}{J_2} \cdot \frac{h}{l}$$

$$N = 3 + 2k + 3k_1 \quad N_1 = 1 + 2k + k_1$$

U w a g a. Momenty, wywołujące po stronie kreskowanej rozciąganie, są dodatnie (+).

61.

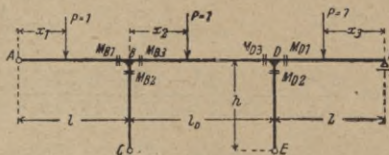


Fig. 572.

Równania linii wpływowych.

$$\delta_1 = \frac{x_1}{l}$$

$$\delta_2 = \frac{x_2}{l_0}$$

$$\delta_3 = \frac{x_3}{l}$$

62.

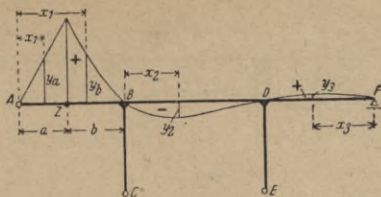


Fig. 573.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

Moment bieżący w punkcie Z przęsła AB

$$\text{w polu } AZ^1): \quad y_a = + \delta_1 b - a \cdot \frac{\delta_1 (1 - \delta_1^2)}{4} \left[ \frac{2k + 1}{N_1} + \frac{2k + 3}{N} \right]$$

$$\text{w polu } ZB: \quad y_b = + a(1 - \delta_1) - a \cdot \frac{\delta_1 (1 - \delta_1^2)}{4} \left[ \frac{2k + 1}{N_1} + \frac{2k + 3}{N} \right]$$

$$\text{w polu } BD: \quad y_2 = - \frac{a}{l} \cdot \frac{x_2 (1 - \delta_2^2) k_1}{2} \left[ \frac{3}{N} + \frac{1 - 2\delta_2}{N_1} \right]$$

$$\text{w polu } DF: \quad y_3 = + a \cdot \frac{\delta_3 (1 - \delta_3^2)}{4} \left[ \frac{2k + 1}{N_1} - \frac{2k + 3}{N} \right].$$

1) Z jest punktem działania ciężaru.

63.

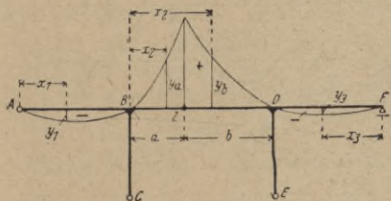


Fig. 574.

Moment bieżący przęsła BD

$$\text{w polu } AB: \quad y_1 = - \frac{x_1 (1 - \delta_1^2) k}{2} \left[ \frac{1}{N} + \frac{1}{N_1} - \frac{a}{l_0} \cdot \frac{2}{N_1} \right]$$

$$\text{w polu } BZ: \quad y_a = + \delta_2 b - \frac{\delta_2 (1 - \delta_2^2) (k_1 + 1)}{2} \left[ \frac{3l_0}{N} + (b - a) \cdot \frac{(1 - 2\delta_2)}{N_1} \right]$$

w polu ZD:

$$y_b = + (1 - \delta_2) a - \frac{\delta_2 (1 - \delta_2^2) (k_1 + 1)}{2} \left[ \frac{3l_0}{N} + (b - a) \cdot \frac{(1 - 2\delta_2)}{N_1} \right]$$

$$\text{w polu } DF: \quad y_3 = - \frac{x_3 (1 - \delta_3^2) k}{2} \left[ \frac{1}{N} - \frac{1}{N_1} + \frac{a}{l_0} \cdot \frac{2}{N_2} \right].$$

64.

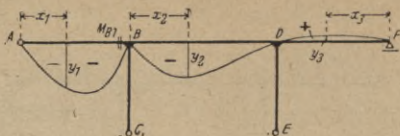


Fig. 575.

Moment podporowy  $M_{B1}$ 

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

w polu  $AB$ : 
$$y_1 = - \frac{x_1 (1 - \delta_1^2)}{4} \left[ \frac{2k + 1}{N_1} + \frac{2k + 3}{N} \right]$$

w polu  $BD$ : 
$$y_2 = - \frac{x_2 (1 - \delta_2^2) k_1}{2} \left[ \frac{3}{N} + \frac{1 - 2\delta_2}{N_1} \right]$$

w polu  $DF$ : 
$$y_3 = + \frac{x_3 (1 - \delta_3^2)}{4} \left[ \frac{2k + 1}{N_1} - \frac{2k + 3}{N} \right].$$

65.

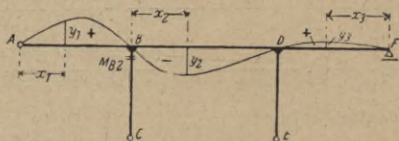


Fig. 576.

Dla  $M_{B2}$ 

w polu  $AB$ : 
$$y_1 = + \frac{x_1 (1 - \delta_1^2)}{4} \left[ \frac{3}{N} + \frac{1}{N_1} \right]$$

w polu  $BD$ : 
$$y_2 = - \frac{x_2 (1 - \delta_2^2)}{2} \left[ \frac{3}{N} + \frac{1 - 2\delta_2}{N_1} \right]$$

w polu  $DF$ : 
$$y_3 = + \frac{x_3 (1 - \delta_3^2)}{4} \left[ \frac{3}{N} - \frac{1}{N_1} \right].$$

U w a g a. Dla parcia poziomego  $H$  podzielić  $y_1$ ,  $y_2$  i  $y_3$  przez  $h$ .

66.

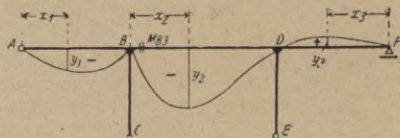


Fig. 577.

Dla  $M_{B3}$ 

w polu  $AB$ : 
$$y_1 = - \frac{x_1 (1 - \delta_1^2) k}{2} \left[ \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N} \right]$$

w polu  $BD$ : 
$$y_2 = - \frac{x_2 (1 - \delta_2^2) (k_1 + 1)}{2} \left[ \frac{3}{N} + \frac{1 - 2\delta_2}{N_1} \right]$$

w polu  $DF$ : 
$$y_3 = + \frac{x_3 (1 - \delta_3^2) k}{2} \left[ \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N} \right].$$

67.

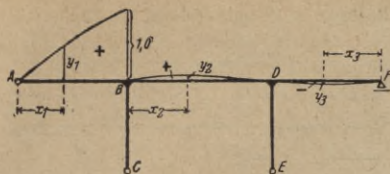


Fig. 578.

Siła poprzeczna z lewej strony B

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$\text{w polu } AB: \quad y_1 = + \delta_1 + \frac{\delta_1 (1 - \delta_1^2)}{4} \left[ \frac{2k + 1}{N_1} + \frac{2k + 3}{N} \right]$$

$$\text{w polu } BD: \quad y_2 = + \frac{x_2 (1 - \delta_2) k_1}{2l} \left[ \frac{3}{N} + \frac{1 - 2\delta_2}{N_1} \right]$$

$$\text{w polu } DF: \quad y_3 = - \frac{\delta_3 (1 - \delta_3^2)}{4} \cdot \left[ \frac{2k + 1}{N_1} - \frac{2k + 3}{N} \right].$$

68.

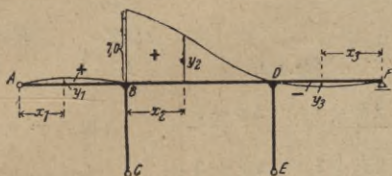


Fig. 579.

Siła poprzeczna z prawej strony B

$$\text{w polu } AB: \quad y_1 = + \frac{x_1 (1 - \delta_1^2) k k_1}{l_0 N_1}$$

$$\text{w polu } BD: \quad y_2 = + (1 - \delta_2) + \frac{\delta_2 (1 - \delta_2) (1 - 2\delta_2) (k_1 + 1)}{N_1}$$

$$\text{w polu } DF: \quad y_3 = - \frac{x_3 (1 - \delta_3^2) k k_1}{l_0 N_1}.$$

69.

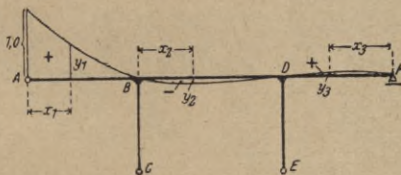


Fig. 580.

Siła poprzeczna i reakcja w A

$$\text{w polu } AB: \quad y_1 = + (1 - \delta_1) - \frac{\delta_1 (1 - \delta_1^2)}{4} \left[ \frac{2k + 1}{N_1} + \frac{2k + 3}{N} \right]$$

$$\text{w polu } BD: \quad y_2 = - \frac{x_2 (1 - \delta_2) k_1}{2l} \left[ \frac{3}{N} + \frac{1 - 2\delta}{N_1} \right]$$

$$\text{w polu } DF: \quad y_3 = + \frac{\delta_3 (1 - \delta_3^2)}{4} \left[ \frac{2k + 1}{N_1} - \frac{2k + 3}{N} \right].$$

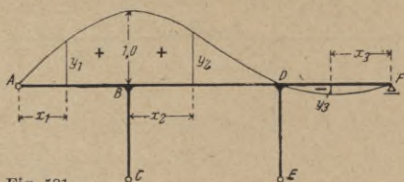
70. Reakcja w  $B$  (siła osiowa w słupie  $BC$ ).

Fig. 581.

Linję wpływową reakcji  $B$  otrzymujemy, sumując rzędne „ $y^u$ ” z wzorów 67 i 68.

## 71.

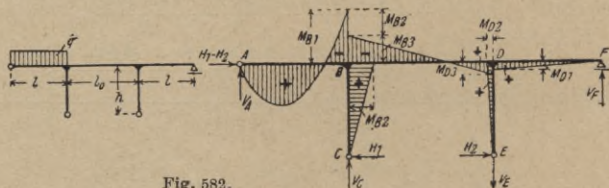


Fig. 582.

$$\begin{aligned}
 M_{B1} &= -\frac{q l^2}{16} \left[ \frac{2k+1}{N_1} + \frac{2k+3}{N} \right] & M_{B2} &= M_{B3} - M_{B1} \\
 M_{D1} &= +\frac{q l^2}{16} \left[ \frac{2k+1}{N_1} - \frac{2k+3}{N} \right] & M_{D2} &= M_{D3} - M_{D1} \\
 M_{B3} &= -\frac{q l^2 k}{8} \left[ \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N} \right] & V_A &= \frac{q l}{2} + \frac{M_{B1}}{l} \\
 M_{D3} &= +\frac{q l^2 k}{8} \left[ \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N} \right] & V_C &= \frac{q l}{2} - \frac{M_{B1}}{l} + \frac{M_{D3} - M_{B3}}{l_0} \\
 V_E &= \frac{M_{D3} - M_{B3}}{l_0} + \frac{M_{D1}}{l} & V_F &= \frac{M_{D1}}{l} & H_1 &= \frac{M_{B2}}{h} & H_2 &= \frac{M_{D2}}{h}
 \end{aligned}$$

## 72.

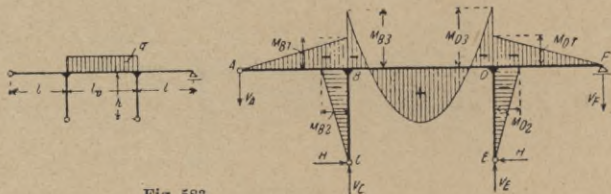
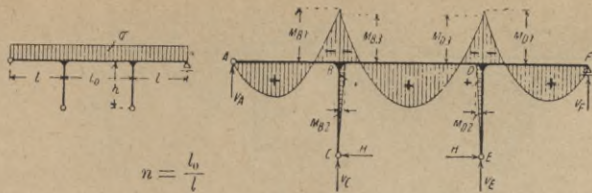


Fig. 583.

$$\begin{aligned}
 M_{B1} &= M_{D1} = -\frac{q l_0^2 k_1}{4 N} \\
 M_{B2} &= M_{D2} = -\frac{q l_0^2}{4 N} & V_A &= V_F = -\frac{M_{B1}}{l} & H &= -\frac{M_{B2}}{h} \\
 M_{B3} &= M_{D3} = -\frac{q l_0^2 (k_1 + 1)}{4 N} & V_C &= V_E = \frac{q l_0}{2} - \frac{M_{B1}}{l}
 \end{aligned}$$



73.



$$n = \frac{l_0}{l}$$

Fig. 584.

$$n = \frac{l_0}{l} \qquad k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$M_{B1} = M_{D1} = -\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{2k + 3 + 2n^2k_1}{N} \qquad V_A = V_F = \frac{ql}{2} + \frac{M_{B1}}{l}$$

$$M_{B2} = M_{D2} = +\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{3 - 2n^2}{N} \qquad V_C = V_E = \frac{q(l + l_0)}{2} - \frac{M_{B1}}{l}$$

$$M_{B3} = M_{D3} = -\frac{ql^2}{4} \cdot \frac{k + n^2(k_1 + 1)}{N} \qquad H = \frac{M_{B2}}{h}$$

74.

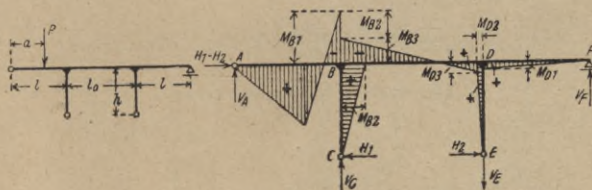


Fig. 585.

$$\delta = \frac{a}{l}$$

$$\left. \begin{matrix} M_{B1} \\ M_{D1} \end{matrix} \right\} = \mp \frac{Pa(1 - \delta^2)}{4} \left[ \frac{2k + 1}{N_1} \pm \frac{2k + 3}{N} \right] \qquad \begin{matrix} M_{B2} = M_{B3} - M_{B1} \\ M_{D2} = M_{D3} - M_{D1} \end{matrix}$$

$$M_{B3} = -\frac{Pa(1 - \delta^2)k}{2} \left[ \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N} \right] \qquad V_A = P(1 - \delta) + \frac{M_{B1}}{l}$$

$$M_{D3} + \frac{Pa(1 - \delta^2)k}{2} \left[ \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N} \right] \qquad V_C = P\delta - \frac{M_{B1}}{l} + \frac{M_{D3} - M_{B3}}{l_0}$$

$$V_E = \frac{M_{D3} - M_{B3}}{l_0} + \frac{M_{D1}}{l} \qquad V_F = \frac{M_{D1}}{l} \qquad H_1 = \frac{M_{B2}}{h} \qquad H_2 = \frac{M_{D2}}{h}$$

75.

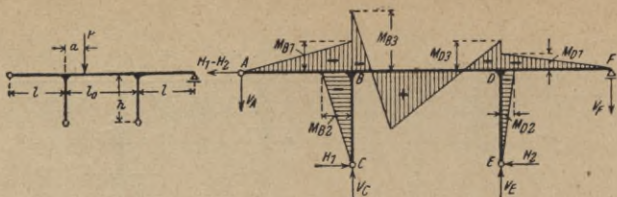


Fig. 586.

$$\delta = \frac{a}{l_0}$$

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$\left. \begin{matrix} M_{B1} \\ M_{D1} \end{matrix} \right\} = - \frac{Pa(1-\delta)k_1}{2} \left[ \frac{3}{N} \pm \frac{1-2\delta}{N_1} \right]$$

$$V_A = - \frac{M_{B1}}{l}$$

$$V_F = - \frac{M_{D1}}{l}$$

$$\left. \begin{matrix} M_{B3} \\ M_{D3} \end{matrix} \right\} = - \frac{Pa(1-\delta)(k_1+1)}{2} \left[ \frac{3}{N} \mp \frac{1-2\delta}{N_1} \right]$$

$$H_1 = - \frac{M_{B2}}{h}$$

$$H_2 = - \frac{M_{D2}}{h}$$

$$M_{B2} = M_{B3} - M_{B1}$$

$$V_C = P(1-\delta) - \frac{M_{B1}}{l} + \frac{M_{D3} - M_{B3}}{l_0}$$

$$M_{D2} = M_{D3} - M_{D1}$$

$$V_E = P\delta + \frac{M_{B3} - M_{B2}}{l_0} + \frac{M_{D1}}{l}$$

## IX. Rama jednopiętrowa.

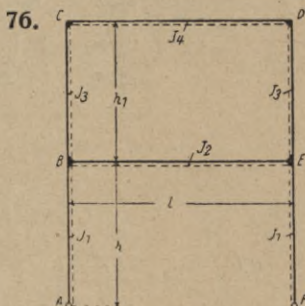


Fig. 587.

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l};$$

$$k_1 = \frac{J_2}{J_3} \cdot \frac{h_1}{l};$$

$$k_2 = \frac{J_2}{J_4};$$

$$N = k_1^2(2k+3) + 6k_2(k+k_1) + 4kk_1(k_2+1)$$

$$N_1 = 6k_1 + k_2 + 1.$$

Uwaga. Momenty, wywołujące ciągnięcie po stronie kreskowanej, są dodatnie (+).

77.

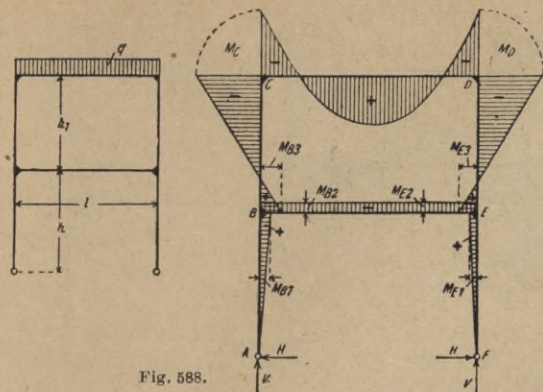


Fig. 588.

$$V = \frac{ql}{2}$$

$$H = \frac{M_{B1}}{h} = \frac{M_{E1}}{h}$$

$$M_{B1} = M_{E1} = + \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{k_1 k_2}{h}$$

$$M_{B2} = M_{E2} = - \frac{ql^2}{6} \cdot \frac{k k_1 k_2}{N}$$

$$M_{B3} = M_{E3} = M_{B1} - M_{B2}$$

$$M_C = M_D = - \frac{ql^2}{6} \cdot \frac{k_2 (2k k_1 + 3k + 3k_1)}{N}$$

78.

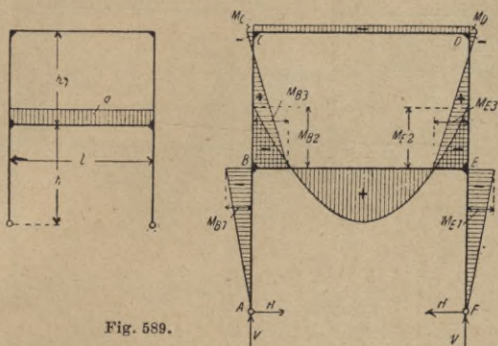


Fig. 589.

$$V = \frac{ql}{2}$$

$$H = - \frac{M_{B1}}{h} = - \frac{M_{E1}}{h}$$

$$M_{B1} = M_{E1} = - \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{k_1 (k_1 + 2k_2)}{N}$$

$$M_{B2} = M_{E2} = M_{B1} - M_{B3}$$

$$M_{B3} = M_{E3} = + \frac{ql^2}{6} \cdot \frac{k (2k_1 + 3k_2)}{N}$$

$$M_C = M_D = - \frac{ql^2}{6} \cdot \frac{k k_1}{N}$$

79.

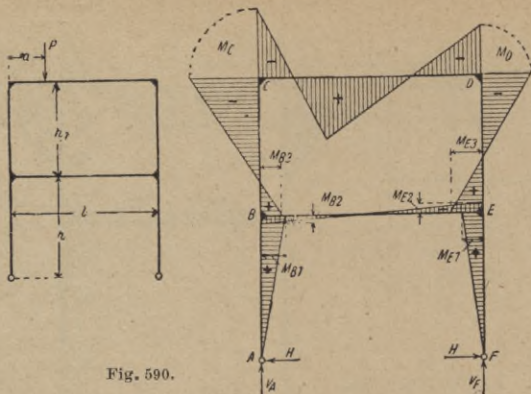


Fig. 590.

$$\delta = \frac{a}{l} \quad V_A = P(1 - \delta) \quad V_F = P\delta \quad H = \frac{M_{B1}}{h} = \frac{M_{E1}}{h}$$

$$M_{B1} = M_{E1} = + \frac{3Pa(1 - \delta)}{2} \cdot \frac{k_1 k_2}{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_{B3} \\ M_{E3} \end{array} \right\} = + \frac{Pa(1 - \delta)k_2}{2} \left[ \frac{k_1(2k + 3)}{N} + \frac{1 - 2\delta}{N_1} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} M_C \\ M_D \end{array} \right\} = - \frac{Pa(1 - \delta)k_2}{2} \left[ \frac{2(2kk_1 + 3k + 3k_1)}{N} + \frac{1 - 2\delta}{N_1} \right]$$

$$M_{B2} = M_{B1} - M_{B3}$$

$$M_{E2} = M_{E1} - M_{E3}$$

80.

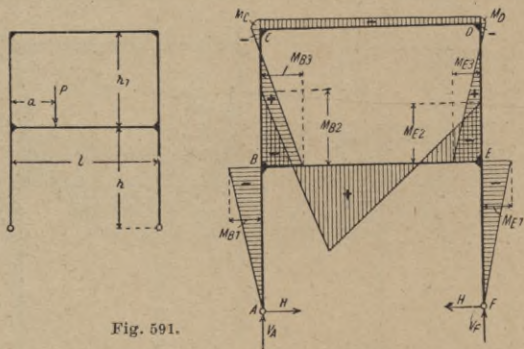


Fig. 591.

$$\delta = \frac{a}{l} \quad V_A = P(1 - \delta) \quad V_F = P\delta \quad H = - \frac{M_{B1}}{h} = - \frac{M_{E1}}{h}$$

$$M_{B1} = M_{E1} = - \frac{3Pa(1 - \delta)}{2} \cdot \frac{k_1(k_1 + 2k_2)}{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_{B3} \\ M_{E3} \end{array} \right\} = + \frac{Pa(1 - \delta)}{2} \left[ \frac{2k(2k_1 + 3k_2)}{N} + \frac{1 - 2\delta}{N_1} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} M_C \\ M_D \end{array} \right\} = - \frac{Pa(1 - \delta)}{2} \left[ \frac{2kk_1}{N} + \frac{1 - 2\delta}{N_1} \right]$$

$$M_{B2} = M_{B1} - M_{B3}$$

$$M_{E2} = M_{E1} - M_{E3}$$

81.

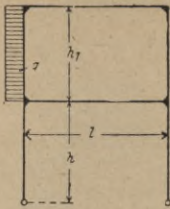
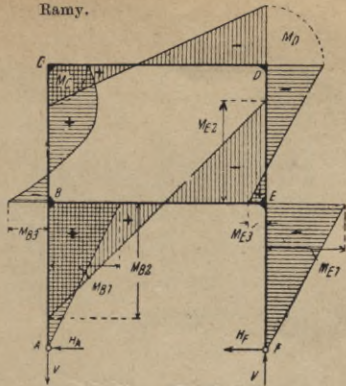


Fig. 592.



$$n = \frac{h}{h_1} \quad V = \frac{q h_1^2 (1 + 2n)}{2l} \quad H_A = \frac{M_{B1}}{h} \quad H_F = -\frac{M_{E1}}{h}$$

$$\begin{aligned} M_{B1} &= \pm \frac{q h_1^2}{8} \left[ 4n \mp \frac{k_1 (k_1 + 3k_2)}{N} \right] & M_{B2} &= M_{B1} - M_{B3} \\ M_{E1} &= \pm \frac{q h_1^2}{8} \left[ 4n \mp \frac{k_1 (k_1 + 3k_2)}{N} \right] & M_{E2} &= M_{E1} - M_{E3} \\ M_{B3} &= \pm \frac{q h_1^2}{4} \left[ \frac{4k_1 + k_2 - 2n}{N_1} \pm \frac{k_1 (2k + 3)(k_1 + 3k_2)}{6N} \right] \\ M_{E3} &= \pm \frac{q h_1^2}{4} \left[ \frac{4k_1 + k_2 - 2n}{N_1} \pm \frac{k_1 (2k + 3)(k_1 + 3k_2)}{6N} \right] \\ M_C &= \pm \frac{q h_1^2}{4} \left[ \frac{2k_1 + 1 + 2n}{N_1} \mp \frac{k_1 (2kk_1 + 6k + 3k_1)}{6N} \right] \\ M_D &= \pm \frac{q h_1^2}{4} \left[ \frac{2k_1 + 1 + 2n}{N_1} \mp \frac{k_1 (2kk_1 + 6k + 3k_1)}{6N} \right] \end{aligned}$$

82.

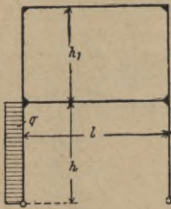
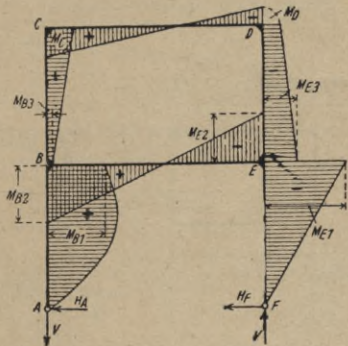


Fig. 593.



$$V = \frac{q h^2}{2l} \quad H_A = \frac{M_{B1}}{h} + \frac{q h}{2} \quad H_F = -\frac{M_{E1}}{h}$$

$$\begin{aligned} M_{B1} &= + \frac{q h^2}{8} \left[ 2 - \frac{k [k_1 (k_1 + 2) + k_2 (2k_1 + 3)]}{N} \right] & M_{B2} &= M_{B1} - M_{B3} \\ M_{E1} &= - \frac{q h^2}{8} \left[ 2 + \frac{k [k_1 (k_1 + 2) + k_2 (2k_1 + 3)]}{N} \right] & M_{E2} &= M_{E1} - M_{E3} \\ M_{B3} &= + \frac{q h^2}{8} \left[ \frac{2}{N_1} - \frac{k (2k_1 + 3k_2)}{N} \right] \\ M_{E3} &= - \frac{q h^2}{8} \left[ \frac{2}{N_1} + \frac{k (2k_1 + 3k_2)}{N} \right] \\ M_C &= \pm \frac{q h^2}{8} \left[ \frac{2}{N_1} \mp \frac{k k_1}{N} \right] \\ M_D &= \pm \frac{q h^2}{8} \left[ \frac{2}{N_1} \mp \frac{k k_1}{N} \right] \end{aligned}$$

83.

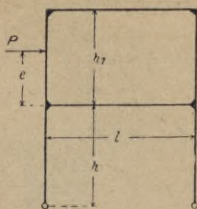
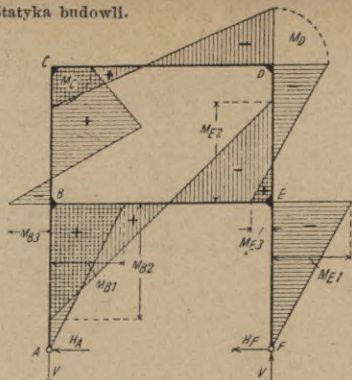


Fig. 594.



$$\delta = \frac{e}{h_1} \quad V = \frac{P(h+e)}{l} \quad H_A = \frac{M_{B1}}{h} \quad H_F = -\frac{M_{E1}}{h}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{B1} \\ M_{E1} \end{aligned} \right\} = \pm \frac{P}{2} \left[ h \mp \frac{3ek_1(1-\delta)[k_1(1-\delta) + k_2(2-\delta)]}{N} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} M_{B3} \\ M_{E3} \end{aligned} \right\} = \pm \frac{P}{2} \left[ \frac{e[3k_1(2-\delta) + k_2] - h}{N_1} + \frac{ek_1(1-\delta)(2k+3)[k_1(1-\delta) + k_2(2-\delta)]}{N} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} M_C \\ M_D \end{aligned} \right\} = \pm \frac{P}{2} \left[ \frac{e(3k_1\delta + 1) + h}{N_1} + \frac{ek_1(1-\delta)[\delta(2kk_1 + 2k + 3k_1) + 2k]}{N} \right]$$

$$M_{B2} = M_{B1} - M_{B3} \quad M_{E2} = M_{E1} - M_{E3}$$

84.

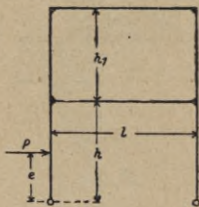
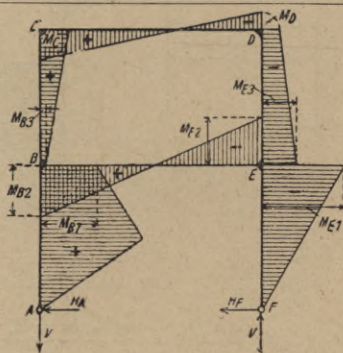


Fig. 595.



$$\delta = \frac{e}{h} \quad V = \frac{Pe}{l} \quad H_A = \frac{M_{B1}}{h} + P(1-\delta) \quad H_F = -\frac{M_{E1}}{h}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{B1} \\ M_{E1} \end{aligned} \right\} = \pm \frac{Pe}{2} \left[ 1 \mp \frac{(1-\delta^2)k[k_1(k_1+2) + k_2(2k_1+3)]}{N} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} M_{B3} \\ M_{E3} \end{aligned} \right\} = \pm \frac{Pe}{2} \left[ \frac{1}{N_1} \mp \frac{(1-\delta^2)k(2k_1+3k_2)}{N} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} M_C \\ M_D \end{aligned} \right\} = \pm \frac{Pe}{2} \left[ \frac{1}{N_1} \mp \frac{(1-\delta^2)kk_1}{N} \right]$$

$$M_{B2} = M_{B1} - M_{B3} \quad M_{E2} = M_{E1} - M_{E3}$$

## LITERATURA DO STATYKI BUDOWLI.

(Skróty: C. T. = Czasopismo Techniczne. P. T. = Przegląd Techniczny.)

## A. Dzieła ogólne.

- Thullie: Statyka budowli. Wyd. IV. Lwów 1924.  
 Thullie: Podręcznik teorii mostów. 3 tomy. Lwów.  
 Karasiński: Wytrzymałość tworzyw. Wyd. II. Warszawa 1920.  
 Huber: Statyka wykreślna. (Litogr.). Lwów 1909.  
 Bogucki: Wykłady statyki budowli. (Litogr.). Lwów 1911.  
 Miller: Statyka budowli. (Litogr.). Warszawa 1922.  
 Bryła: Podręcznik statyki budowli. Wyd. II. Lwów i Warszawa 1925.  
 Popławski: Statyka wykreślna. Warszawa 1917.  
 Timoszenko-Huber: Wytrzymałość materiałów. Lwów 1922.  
 Pigeaud: Cours de mécanique appliquée. Paryż 1915.  
 Rousset et Aimé Petit: Stabilité des constructions usuelles. 1926.  
 Vierendeel: Stabilité des constructions. Louvain 1912.  
 Koechlin: Applications de la statique graphique. Paryż.  
 Flamant: Stabilité des constructions. Paryż 1909.  
 Fontviolant: Les méthodes modernes de la résistance des matériaux. Paryż 1920.  
 Andrews Ewert: The theory and design of structures. Londyn 1913.  
 Timoshenko and Lessels: Applied elasticity. Pittsburg 1926.  
 Waldram Percy: The principles of structural mechanics. Londyn 1912.  
 Swain: Structural engineering. New York 1924.  
 Prescott: Applied elasticity. Londyn 1924.  
 Case: The strength of materials. 1925.  
 Müller-Breslau: Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Wyd. V. Berlin 1924.  
 Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. Wyd. V. Berlin 1924.  
 Mehrtens: Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. Lipsk 1909.  
 Henneberg: Graphische Statik der starren Systeme. Lipsk i Berlin 1911.  
 Fischer: Statik und Festigkeitslehre. Berlin 1926.  
 Kaufmann: Statik. Berlin 1923.  
 Kirchhof: Statik der Bauwerke. Berlin 1921.  
 Otzen: Praktische Winke zum Studium der Statik. Wyd. III. Berlin 1921.  
 Pirllet: Kompendium der Statik der Baukonstruktionen. Berlin 1921.  
 Saliger: Praktische Statik. Wiedeń 1921.  
 Timoszenko: Sbornik zadań po soprotiwleniju materjałow. Kijów 1910.  
 Timoszenko: Kurs teorii uprugosti. 1914—1916.  
 Czerepaszynskij: Stroitielnaja mechanika. Petersburg 1904.  
 Bełżeckij: Statika sooruzenij. Petersburg 1915.

## B. Ustroje płaskie statycznie wyznaczalne.

- Thullie: Analityczne wyznaczenie najniekorzystniejszego obciążenia belki prostej. P. T. 1887.  
 Karasiński: Ilkrotność hiperstatyczności ustrojów prętowych. P. T. 1925.  
 Balićki: Studium nad belkami z drugorzędem zawieszeniem. C. T. 1902.  
 Balićki: Linje wpływoe dla belek trzypasowych. C. T. 1903.  
 Bryła: Obliczenie płati przegubowych. Warszawa 1911.  
 Chmielowiec: Wykres największych sił poprzecznych w belce prostej z poprzecznicami i największych sił wewnętrznych w krzyżulcach belki kratowej. C. T. 1926.  
 Frank: Dreigelenkbogenbrücken aus Beton. Stuttgart 1916.  
 Färber: Dreigelenkbogenbrücken. Stuttgart 1908.

## C. Kratownice przestrzenne.

- Bryła: Obliczanie kopuł płaszczowych. Lwów 1910.  
 Bryła: Systemy dachów więzarowych jako kratownice przestrzenne. Lwów 1911.  
 M. Mayor: La statique graphique des systèmes de l'espace. 1910.  
 Föppl: Das Fachwerk im Raume. Lipsk 1892.  
 Zimmermann: Über Raumbachwerke. Berlin 1901.  
 Schlink: Statik der Raumbachwerke. Lipsk i Berlin 1907.  
 Marcus: Stiebenlose Raumbachwerke und verwandte Gebilde. Berlin 1914.  
 Millies: Räumliche Vieleckrahmen. Berlin 1927.  
 Ryszkow: Mostowija firmy kak prostranstiennija sistemy. Kijów 1908.

## D. Naprężenia drugorzędne.

- Pareński: Wyniki badań naprężeń drugorzędnych. P. T. 1923.  
 Thullie-Chmielowiec: Przybliżony sposób badania naprężeń drugorzędnych. C. T. 1928.  
 Thullie-Chmielowiec: Linje wpływoe naprężeń drugorzędnych. C. T. 1928.  
 Chmielowiec: Projektowanie przekroju pasów kratownicy z uwzględnieniem naprężeń drugorzędnych. P. T. 1927.  
 Bažant: Influence du système de triangulation sur les efforts secondaires. Praga 1922.  
 Grimm: Secondary stresses in bridge trusses. New York 1908.  
 Abo: Secondary stresses in bridges. 1925.

- Manderla: Die Berechnung der Secundärspannungen. Allg. Bztg. 1880.  
 Engesser: Die Zusatzkräfte u. Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. Berlin 1893.  
 Mohr: Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenpunkten. Civilingenieur 1892.  
 Patton: Beitrag zur Berechnung der Nebenspannungen. Zeitschrift für Arch.- u. Ingenieurwesen. 1902.  
 Gehler: Die Ermittlung der Nebenspannungen. Berlin 1910.  
 Roš: Nebenspannungen infolge vernieteter Knotenpunktverbindungen. (Bericht der Gruppe V der Technischen K. V. S. B.). Schw. Bztg., 1922.  
 Patton: Rasczot firm s żostkimi uzłami. 1901.  
 Pieriedierij: Wlijanie żostkosti uzłow na usilja i naprjażenja. 1904.

### E. Ustroje hiperstatyczne wogóle. Belki ciągłe.

- Thullie: Podręcznik teorii mostów. Tom II. Lwów 1906.  
 Thullie: O wykreślnem oznaczeniu sił działających w belce dwuprzęsłowej. P. T. 1884.  
 Huber: Z teorii belki ciągłej. C. T. 1925.  
 Huber: Równanie pięciu momentów. C. T. 1927.  
 Karasiński: Ogólne równanie pięciu momentów. P. T. 1927.  
 Karasiński: Ogólne wzory Clerc'a i Clapeyrona. P. T. 1927.  
 Jasiński: Linje wpływowe belek ciągłych kratowych. C. T. 1920.  
 Jasiński: Linje wpływowe belek ciągłych na sprężycie ugialnych podporach. C. T. 1911.  
 Bryła: Teoria belek dwukrotnie wzmocnionych. C. T. 1911.  
 Brzozowski: Linje wpływowe belek na sprężystych podporach. C. T. 1927.  
 Brzozowski: Belka poziomo utwierdzona i łuk bezprzegubowy. Życie Techniczne. 1922.  
 Kluz: Ustroje hiperstatyczne o elementach prostych. C. T. 1927.  
 Miłaszewski: Belka ciągła na podporach sprężycie ugialnych i obracalnych. 1928.  
 Bartoszewicz: Nowy sposób wykreślny rozwiązywania ustrojów statycznie niewyznaczalnych. Lwów 1928.  
 Nachtergal: Déformation des pièces fléchies. Paryż.  
 Thomas: Calcul des constructions continues à éléments droits. Paryż 1925.  
 Swain: On a new principle in the theory of structures. Am. Soc. of C. E. Vol. 83. New York 1920.  
 Church: Mechanics of internal work. New York 1910.  
 Hudson Clarence: Deflections and statically indeterminate stresses. New York 1911.  
 Bazali: Die Berechnung der durchlaufenden Balken. 1911.  
 Arnstein: Einflußlinien statisch unbestimmter Fachwerke. Berlin 1912.  
 Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin 1913.  
 Suter: Berechnung des kontinuierlichen Balkens. Berlin.  
 Pirelet: Compendium der Statik der Baukonstruktionen. Berlin 1921.  
 Buchholz: Theorie und Berechnung der statisch unbestimmten Tragwerke. 1921.  
 Baszynskij: Nowyj metod rasczota balok. Kijów 1913.

### F. Łuki.

- Thullie: Łuki i wieszary. Lwów 1913.  
 Kłoś: Materiały do projektowania bezprzegubowych łuków parabolicznych. 1922.  
 Vetulani: Wyznaczenie nateżeń normalnych w łukach płaskich C. T. 1911.  
 Chmielowiec: Studja nad najkorzystniejszym kształtem wieszarów i łuków. 1928.  
 Cain: Theory of steel concrete arches and of vaulted structures. New York 1918.  
 Färber: Der Gewölbebau. 1916.  
 Tolkmitt: Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. 1912.  
 Weyrauch: Elastische Bogenträger. Stuttgart 1911.  
 Schönhöfer: Verfahren mit konstanten Bogengrößen. Berlin 1911.  
 Strassner: Der Bogen und das Brückengewölbe. Berlin 1927.  
 Strassner: Der durchlaufende Bogen. Berlin 1919.  
 Kirchhoff: Zweigelenbogen als statisch unbestimmtes Hauptsystem. Berlin 1911.  
 Kirchhoff: Beiderseits eingespannte Fachwerksbogen. Berlin 1912.

### G. Ramy.

- Thullie: Teoria ram. Lwów 1916.  
 Thullie: Rama prostokątna dwuprzegubowa. 1918.  
 Huber: Wzory obliczenia ramy prostokątnej. 1924.  
 Pazirski: Wzory do obliczania ramy pojedynczej bezprzegubowej. C. T. 1913.  
 Paszkowski: Belki ciągłe w ramownicach piętowych. P. T. 1923.  
 Marcichowski: Ramy w budownictwie betonowym. 1912.  
 Bryła: Obliczenie podwójnej ramy symetrycznej. 1920.  
 Brzozowski: Belka obustronnie sprężycie utwierdzona o dowolnej sztywności i jej zastosowanie do ram i belek ciągłych. C. T. 1924.  
 Berdo: Z teorii płaskich utworów ramowych. P. T. 1926.  
 Milkowski: O ramach wieloprzędzowych. P. T. 1920.  
 Fatio: Statique des constructions à angles rigides. Paris.  
 Gehler: Der Rahmen. Wyd. II. Berlin 1919.  
 Mohr: Beitrag zur Berechnung der Rahmenträger. Berlin 1915.  
 Kleinogel: Rahmenformeln. 1923.  
 Kleinogel: Mehrstielige Rahmen. Berlin 1924.  
 Meier-Leibnitz: Berechnung einfacher und mehrfacher Rahmen. Stuttgart 1918.  
 Strassner: Neuere Methoden. Band I. Berlin 1925.



Strassner: Tabellen für die Einflußlinien und die Momente des durchlaufenden Rahmens. 1922.

Nakouz: Die Berechnung mehrstieliger Rahmen. Berlin 1915.

#### H. Belki bezprzekątniowe.

Balicki: Linje wpływowe belek Vierendeel'a. C. T. 1910.

Bryła: Obliczenie wykresne belek o kracie czworokątnej. Lwów 1910.

Vierendeel: Théorie générale des poutres Vierendeel. Paryż 1900.

Vierendeel: Calcul des poutres Vierendeel. 1912.

Joyant: Note sur le calcul de stabilité des ponts en arcades. Bruksela 1902.

Paton: Über diagonallose Träger (Bauart Vierendeel). Berlin 1907.

Freytag: Gesetzmäßigkeiten in der Statik des Vierendeelträgers. Berlin 1911.

Reich: Vierendeelträger mit parallelen Gurten. Wiedeń 1911.

Mann: Das strebenlose Ständerfachwerk. Lipsk 1912.

Kriso: Statik der Vierendeelträger. 1922.

Vincenz: Der Vierendeelträger. Praga 1917.

Podolskij: Besraskosnyja fierny. Moskwa 1909.

Abramow: Fiermy arkady. Petersburg 1904.

Nikołaj: Besraskosnyja fierny. Petersburg 1905.

#### I. Parcie ziemi.

Skibiński: Mury oporowe i podporowe. Lwów 1921.

Thullie i Kuryłło: O wyznaczeniu parcia ziemi sposobem Färbera. C. T. 1920.

Bryła: Obliczenie parcia ziemi na przyczółki mostowe. Warszawa 1920.

Krzeczkowski: Ciśnienie w gruntach. P. T. 1921.

Boussinesq M. L.: Poussée des terres. Paryż 1918.

Résal J.: Poussée des terres, stabilité des murs de soutènement. Paryż 1903.

Sprague E.: Stability of masonry. Londyn 1915.

Müller-Breslau: Erddruck auf Stützmauern. Stuttgart 1906.

Skibiński: Das Gleichgewicht des rolligen Materiales. Wiedeń 1917.

Krey H.: Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes in größerer Tiefe.

Berlin 1918.

#### J. Kominy fabryczne.

Pawłowski: Komin fabryczny. Warszawa 1912.

Skwarczyński: Podręcznik budowlany. Lwów. Wyd. III. 1928.

Lefèvre Victor: Les cheminées usines (le Genie Civ. 1900).

Merriman Jacoby: Vol. IV. Higher structures.

Bastine: Berechnung und Bau hoher Schornsteine.

Bazali: Berechnung freistehender Schornsteine.

#### K. Teorja żelbetu.

Thullie: Teorja żelbetu. Lwów 1915.

Kuryłło: Żelbetnictwo. Lwów 1925.

Jurkowski: Żelbetnictwo. Warszawa 1914.

Paszkowski: Żelbetnictwo. (Litogr.). Warszawa 1922.

Kłós: Wzory obliczeń zeskładów żelbetowych. Warszawa 1924.

Nadto wiele artykułów w Czasopiśmie Technicznym, Przeglądzie Technicznym i Robotach Publicznych, głównie prof. Thulliego, Hubera, Paszkowskiego, Marcichowskiego, Kłosa, Kuryłły, Łazoryka i w. i.

Aubry: Calcul du béton armé.

Tedesco et Maurel: Béton et ciment armé. Paryż 1911.

Christophe: Le béton armé. Paryż 1902.

Mesnager: Cours de béton armé. Paryż 1921.

Nivet A.: Méthode du calcul du béton armé. Paryż 1908.

Magny A. V.: La construction en béton armé. Paryż 1914.

Devedac: Application de la résistance des matériaux au calcul du beton armé. Paryż 1920.

Dumontier: Méthode pratique pour le calcul du béton armé. Paris 1925.

Baudart C.: Béton armé. Paryż 1924.

Charles Amar: Ciment armé. 1925.

Tourneure: Principles of reinforced concrete construction. Nowy Jork.

Mörsch: Eisenbetonbau. Wyd. V. Stuttgart 1920.

Probst: Vorlesungen über Eisenbetonbau. Berlin 1923.

Frank: Eisenbetonbau. Wyd. III. Stuttgart 1920.

Saliger: Der Eisenbeton. Wyd. IV. Stuttgart 1920.

Hager: Theorie des Eisenbetons. Berlin 1916.

Emperger: Handbuch für Eisenbetonbau. Berlin 1921.



# Przepisy

## dotyczące obliczeń statycznych w budownictwie lądowym.

zatwierdzone przez Ministra Robót Publ. rozp. Nr. VII. 693/27 z d. 2. września 1927.  
(Z przykładami.)

### (I. Obciążenia i siły zewnętrzne.

§ 1. Przy obliczaniu statycznym konstrukcyj budowlanych należy uwzględnić następujące obciążenia:

- a) ciężar stały, tj. ciężar własny konstrukcji, oraz tych części konstrukcyjnych, które stale na nią działają,
  - b) ciężar zmienny (użytkowy) określony przeznaczeniem budowli,
  - c) obciążenie śniegiem,
  - d) parcie wiatru,
  - e) parcie ziemi lub wody;
- nadto uwzględnić należy następujące działania fizyczne:
- f) wpływ zmian ciepłoty,
  - g) wpływ skurczu i pęcznienia materiałów.

### § 2. Ciężar własny materiałów.

Ciężar własny materiałów przyjmować należy w obliczeniach w następujących wielkościach:

#### 1. Drzewo suche (zawierające około 15% wilgoci).

Drzewo bukowe . . . . . 750 kg/m <sup>3</sup>	Drzewo sosnowe i modrzewiowe . . . . . 650 kg/m <sup>3</sup>
„ dębowe . . . . . 850 „	Drzewo świerkowe . . . . . 550 „
„ jodłowe . . . . . 600 „	

#### 2. Metale.

Bronz (spiż) . . . . . 8600 kg/m <sup>3</sup>	Nikiel . . . . . 8800 kg/m <sup>3</sup>
Cyna . . . . . 7400 „	Ołów . . . . . 11400 „
Cynk lany . . . . . 6900 „	Stal . . . . . 7860 „
„ walcowany . . . . . 7200 „	Żelazo spawane . . . . . 7800 „
Glin . . . . . 2600 „	„ zlewne . . . . . 7850 „
Miedź . . . . . 8900 „	Żeliwo . . . . . 7300 „
Mosiądz . . . . . 8600 „	

#### 3. Kamienie naturalne.

Bazalt . . . . . 3000 kg/m <sup>3</sup>	Porfir . . . . . 2800 kg/m <sup>3</sup>
Granit . . . . . 2800 „	Sżenit . . . . . 2800 „
Marmur . . . . . 2700 „	Wapień zwykły . . . . . 2500 „
Piaskowiec ciężki . . . . . 2700 „	„ porowaty . . . . . 2000 „
„ lekki . . . . . 2400 „	

#### 4. Ziemie.

Gлина sucha . . . . . 1600 kg/m <sup>3</sup>	Tłuczeń z kamienia lekkiego . . . . . 1600 kg/m <sup>3</sup>
„ mokra, nasyc. wodą 2000 „	Ziemia roślinna sucha . 1400 „
Piasek suchy . . . . . 1600 „	„ „ mokra . 1800 „
„ nasycony wodą . 2000 „	Żwir rzeczny suchy . . 1700 „
Tłuczeń z kamienia ciężkiego . . . . . 1800 „	

## 5. Mur ceglany.

Z cegły zwykłej na zapr. wapiennej . . . . .	1600 $kg/m^3$	Z cegły dziurawki . . .	1300 $kg/m^3$
Z cegły zwykłej na zapr. cement.-wapiennej . . .	1650 "	Z cegły dziurawki poro- watej . . . . .	1000 "
Z cegły zwykłej na zapr. cementowej . . . . .	1700 "	Z cegły korkowej . . .	600 "
Z cegły porowatej . . . . .	1100 "	Z cegły piaskowo-cemen- towej . . . . .	2100 "
		Z zendrówek i klinkierów	1900 "

## 6. Beton.

Zwykły . . . . .	2200 $kg/m^3$	Żuźłowy wielkopiecowy .	2200 $kg/m^3$
Ceglany . . . . .	1800 "	Wzmocniony (żelbet) . .	2400 "
Żuźłowy lekki . . . . .	1300 "		

## 7. Zaprawy.

Wapienna . . . . .	1700 $kg/m^3$	Cementowa . . . . .	2100 $kg/m^3$
Wapienno-cementowa .	1900 "	Gipsowa . . . . .	1000 "

## 8. Pomocnicze materiały budowlane.

Asfalt lany . . . . .	1200 $kg/m^3$	Linoleum . . . . .	1200 $kg/m^3$
" ubijany . . . . .	1800 "	Szkoło dęte . . . . .	2600 "
Gruz (tłuczeń) ceglano- wapienny . . . . .	1400 "	" lane . . . . .	2900 "
Ksylolit . . . . .	1400 "	Terazzo . . . . .	2000 "
Korkowe płyty . . . . .	330 "	Żuźel koksowy ubity . .	1000 "

## 9. Paliwa.

Antracyt . . . . .	1700 $kg/m^3$	Węgiel brunatny . . .	750 "
Drwa w polanach miękkie	350 "	" czarny . . . . .	900 "
" " " twarde . . . . .	400 "	" w brykietach . . . . .	1000 "
Koks . . . . .	500 "	" drzewny . . . . .	250 "
Torf . . . . .	600 "	Wosk . . . . .	970 "

## 10. Płody roślinne.

Buraki . . . . .	650 $kg/m^3$	Proso, gryka . . . . .	850 $kg/m^3$
Cukier . . . . .	750 "	Siano, słoma . . . . .	80 "
Groch . . . . .	850 "	" prasowane . . . . .	280 "
Jęczmień . . . . .	640 "	Słód . . . . .	530 "
Kawa . . . . .	700 "	Trawa, koniczyna . . .	350 "
Mąka w workach . . . . .	700 "	Ziemiaki . . . . .	700 "
Owies . . . . .	450 "	Żyto, pszenica . . . . .	750 "
Owoce . . . . .	350 "		

## 11. Niektóre inne obciążenia.

Cement w beczkach . . .	1500 $kg/m^3$	Papier . . . . .	1100 $kg/m^3$
Książki i papier (z uwzgl. przestrzeni wolnych) . .	800 "	Sól w workach . . . . .	1200 "
Lód . . . . .	750 "	Wetna . . . . .	1300 "

## 12. Niektóre zwierzęta.

Koń . . . . .	sztuka 500 $kg$	Wieprz . . . . .	sztuka 200 $kg$
Krowa . . . . .	" 600 "	Wół roboczy . . . . .	" 650 "
Owca . . . . .	" 80 "	" karmny . . . . .	" 800 "

13. Celem wyznaczenia ciężaru własnego muru ceglanego  $\gamma$  wystarczy określić ciężar własny cegły  $\gamma_c$  i ciężar własny zaprawy  $\gamma_z$ ; ciężar własny muru  $\gamma_m$  można przyjąć wtedy:

$$\gamma_m = \frac{2}{3} \gamma_c + \frac{1}{3} \gamma_z$$

14. O ile dla obliczenia mają być przyjęte ciężary jednostkowe wyższe niż podane w ust. 5., należy dla wyznaczenia ciężaru własnego muru ceglanego wykonać ciało próbne o objętości  $1 m^3$  z danego materiału ceglanego z zastosowaniem zwykłych spoin o grubości do  $1,2 cm$  i ciało to zważyć. Ilość wody, potrzebnej do zarobienia zaprawy i zwilżenia cegieł, należy odmierzyć, a ciężar jej odjąć od ciężaru ciała próbnego.

15. W razie użycia materiałów powyżej niewymienionych należy ciężar jednostkowy przyjąć wedle norm ogólnie przyjętych, ewentualnie oznaczyć próbami.

§ 3. Ciężar własny stropów.

Ciężar własny stropów przyjmować należy wedle następującej tablicy:

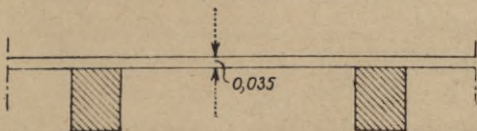


Fig. 596.

1. Strop drewniany belkowy z podłogą pojedynczą z desek (fig. 596)  $70 kg/m^2$

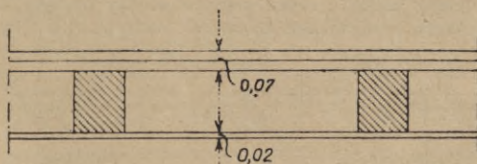


Fig. 597.

2. Strop drewniany belkowy z podłogą podwójną (bez podsypki) i z sufitem (fig. 597)  $90 kg/m^2$

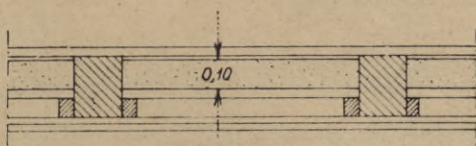


Fig. 598.

3. Strop drewniany belkowy z podsypką 10 cm, podłogą, trzcinowaniem i wyprawą (fig. 598)  $250 kg/m^2$

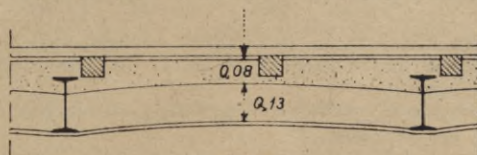


Fig. 599.

4. Strop sklepiony z cegieł zwykłych między dźwigarami z nad-sypką 8 cm w kluczu przy odstępach dźwigarów do  $1,50 m$  (fig. 599)  $450 kg/m^2$

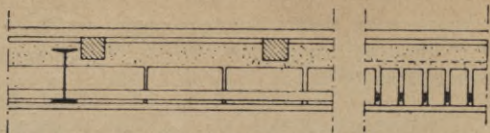


Fig. 600.

5. Strop ceglany płaski z cegieł porowatych między dźwigarami o grubości  $\frac{1}{2}$  cegły z wkładkami żelaznymi z nadsypką i podłogą (fig. 600) . . . . . 350 kg/m<sup>2</sup>

6. Strop ceglany płaski z cegły pełnej między dźwigarami o grubości  $\frac{1}{2}$  cegły z wkładkami żelaznymi z nadsypką i podłogą (fig. 600) . . . . . 400 kg/m<sup>2</sup>

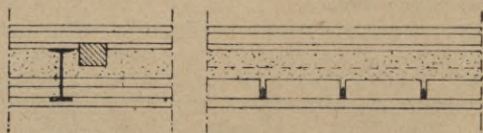


Fig. 601.

7. Strop ceglany płaski z cegieł porowatych między dźwigarami o grubości  $\frac{1}{4}$  cegły z wkładkami żelaznymi z nadsypką i podłogą (fig. 601) . . . . . 320 kg/m<sup>2</sup>

8. Strop ceglany płaski z cegieł pełnych między dźwigarami o grubości  $\frac{1}{4}$  cegły z wkładkami żelaznymi, nadsypką i podłogą 350 kg/m<sup>2</sup>

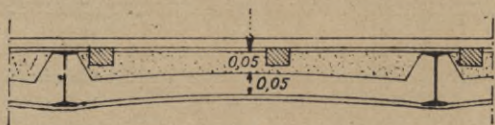


Fig. 602.

9. Strop sklepiony Moniera, grubości 5 cm w kluczu z nadsypką 5 cm nad kluczem (fig. 602) . . . . . 350 kg/m<sup>2</sup>

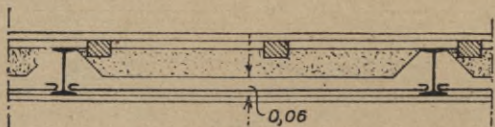


Fig. 603.

10. Strop płytowy Moniera, grubości 6 cm z nadsypką i wyprawą (fig. 603) . . . . . 420 kg/m<sup>2</sup>

W powyższych stropach przyjęto wszędzie podłogę drewnianą.  
W razie użycia innych stropów lub innych ciężarów należy uzasadnić przyjęty ciężar stropów.

W ciężar ten nie jest wliczony ciężar osobnych podciągów stropowych.

#### § 4. Ciężar własny dachów.

1. Ciężar własny pokrycia dachowego na m<sup>2</sup> pochylej powierzchni dachów bez więzarów i płatwi, natomiast z uwzględnieniem odeskowania i krokwi, przyjmować należy wedle następującej tablicy:

Rodzaj pokrycia:		Ciężar w $kg/m^2$
Gontem . . . . .		40 ✓
Dachówką ceglana zakładkowa . . . . .		65
" holenderską . . . . .		80
" rzymską . . . . .		100 ✓
" karpiówką . . . . .		70
" " podwójną . . . . .		120
" cementową . . . . .		75
Łupkiem na łątach, angielskie . . . . .		45
" " deskowaniu . . . . .		55 ✓
" " łątach, niemieckie . . . . .		65
Papą pojedynczą bez piasku . . . . .		35 ✓
Warstwowcem (cementem drzewnym) z warstwą żwiru o grub. 8 cm . . . . .		180
Błachą na deskowaniu . . . . .		40 ✓
Słomą lub trzcina . . . . .		80
Szklę na listwach żelaznych zwykłym o grub. 5 mm . . . . .		25 ✓
" drutowem . . . . .		30 ✓
Każdy 1 mm szyby ponad 5 mm zwiększa ciężar o . . . . .		3 ✓

2. Ciężar płatwi i więzarów przyjmować należy odpowiednio do materiału i konstrukcji tychże. W normalnych wypadkach przyjmować można ciężar własny więzarów na  $1 m^2$  rzutu poziomego:

Drewnianych . . . . .	20—30 $kg/m^2$
" o rozpiętościach większych (ponad 20 m) . . . . .	30—45 "
Żelaznych lekkich . . . . .	15—20 "
" ciężkich . . . . .	20—30 "
" łukowych do rozpiętości 40 m . . . . .	15—25 "
" " do rozpiętości 60 m . . . . .	do 45 "
Kopuł żelaznych płaszczowych . . . . .	10—25 "

### § 5. Obciążenie zmienne (użytkowe).

#### 1. Obciążenia zmienne stropów:

	$kg/m^2$
Mieszkania zwykle . . . . .	200 ✓
Mieszkania w małych domkach przy rozpiętości stropów poniżej 5 m . . . . .	150 ✓
Strychy zwykły, nieobciążony konstrukcją dachu . . . . .	125 ✓
Sale szkolne . . . . .	300 ✓
Teatry, kinoteatry . . . . .	400 ✓
Sale gimnastyczne . . . . .	500
Lokale handlowe (sklepy) w parterze . . . . .	500
" " na piętrach . . . . .	400 ✓
" " biurowe, restauracje itd. . . . .	300 ✓
Budynki fabryczne conajmniej . . . . .	500 ✓
(o ile nie przewiduje się większych obciążeń — por. ust. 6).	
Schody domów mieszkalnych . . . . .	400 ✓
" gmachów publicznych i lokali handlowych . . . . .	500 ✓
Korytarze w budynkach użyteczności publicznej . . . . .	400
Stropy pod przejazdami, obciążone wozami ciężkimi . . . . .	800
Dachy płaskie (najwyżej 1:20) łącznie z wiatrem i śniegiem, o ile mogą być obciążone przez ludzi (np. tarasy) . . . . .	250
Balkony . . . . .	500 ✓

#### 2. Nacisk poziomy na poręcze balkonów w domach mieszkalnych $50 kg/m$ b.

" " " " " w teatrach itp. . . . . 80 "

3. Ciężar lekkich ścianek działowych (drewnianych, z cegieł lekkich itd.), o grubości najw. 7 cm, które mogą być następnie przestawiane, wystarczy uwzględnić, przyjmując dodatkowe obciążenie  $70 kg/m^2$  stropu.

4. Przy obliczaniu sal bibliotecznych, archiwów itp. przyjmować należy obciążenie  $500 \text{ kg/m}^3$  objętości szaf i półek.

5. Obliczenie pokrycia dachu w miejscach, na których może stać człowiek, należy przeprowadzić: a) na ciężar śniegu i wiatru, b) na ciężar skupiony (człowieka z narzędziami  $100 \text{ kg}$ ), — i uwzględnić niekorzystniejsze z obu obciążeń.

**Przykład.** Obliczyć krokwie dachu o nachyleniu połaci  $1:5$ . Krycie blachą na deskowaniu. Odstęp krokwi  $a = 1,10 \text{ m}$ . Rozpiętość krokwi  $l = 3,00 \text{ m}$ .

Obciążenie na  $1 \text{ m}^2$  dachu pochyłego:

$$\begin{array}{l} \text{ciężar pokrycia, deskowania i krokwi} \quad g_0 = 40 \text{ kg/m}^2 \\ \text{ciężar śniegu} \quad s_1 = s \cos \alpha = 80 \cos 11^\circ 20' = \approx 80 \text{ kg/m}^2 \\ \text{razem} \quad g = 120 \text{ kg/m}^2 \end{array}$$

Parcie wiatru (j. niżej):

$$u = w_0 \sin \alpha = 100 \sin 11^\circ 20' = \approx 20 \text{ kg/m}^2.$$

Składowa obciążenia prostopadła do połaci dachu:

$$g \cos \alpha = 120 \cos 11^\circ 20' = \approx 120 \text{ kg/m}^2.$$

Składowa równoległa do połaci dachu:

$$g \sin \alpha = 120 \sin 11^\circ 20' = \approx 24 \text{ kg/m}^2.$$

$$g_0 \sin \alpha = 40 \sin 11^\circ 20' = \approx 8 \text{ kg/m}^2.$$

Obciążenie na  $1 \text{ m b.}$  krokwi:

$$g_0 = 40 \times 1,1 = 44 \text{ kg/m b.},$$

$$g_1 = 120 \times 1,1 = 132 \text{ kg/m b.},$$

$$g_2 = 24 \times 1,1 = \approx 27 \text{ kg/m b.},$$

$$n = 20 \times 1,1 = 22 \text{ kg/m b.}$$

Momenty zginające:

a) skutkiem ciężaru stałego:  $M_0 = \frac{1}{8} \times 44 \times 3,00^2 = 49,5 \text{ kgm};$

b) skutkiem ciężaru własnego i śniegu:  $M_1 = \frac{1}{8} \times 132 \times 3,00^2 = 148,5 \text{ kgm};$

c) skutkiem parcia wiatru:  $M_w = \frac{1}{4} \times 22 \times 3,00^2 = 24,75 \text{ kgm}.$

Całkowite obciążenie równoległe do połaci dachu:  $G_2 = 27 \times 3,00 = 81 \text{ kg}.$

Ciężar człowieka z narzędziami jako pionowa siła skupiona  $P = 100 \text{ kg}.$

Składowa prostopadła do połaci dachu:  $P_1 = P \cos \alpha = 100 \cos 11^\circ 20' = 98 \text{ kg}.$

Składowa równoległa do połaci dachu:  $P_2 = P \sin \alpha = 100 \sin 11^\circ 20' = \approx 20 \text{ kg}.$

Moment zgięcia skutkiem obciążenia ciężarem skupionym:

$$M_2 = \frac{1}{4} \times 98 \times 3,00 = 73,5 \text{ kgm}.$$

Obciążenie ciężarem własnym, śniegiem i parciem wiatru:

$$M = 148,5 + 24,75 = 173,25 \text{ kgm}, \quad G_2 = 81 \text{ kg};$$

obciążenie ciężarem własnym i człowiekiem z narzędziami:

$$M = 49,5 + 73,5 = 123,0 \text{ kgm},$$

$$N = 20 + 8 = 28,0 \text{ kg}.$$

Wypadek pierwszy jest niekorzystniejszy.

Przyjęto wymiar krokwi  $12 \times 10 \text{ cm}$   $F = 120 \text{ cm}^2$ ,  $W = 240 \text{ cm}^3$ .

Największe naprężenie:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W} = \frac{81,0}{120} + \frac{173,25}{240} = 0,7 + 72,2 = 72,9 \text{ kg/cm}^2.$$

6. W fabrykach o ruchu cięższym i w magazynach należy uwzględnić potrzebne obciążenie w każdym wypadku z osobna i umieścić w pobliżu wykonanej konstrukcji napis, podający wielkość przyjętego obciążenia. Wstrząśnienia maszyn należy uwzględnić, mnożąc ciężar tychże przez współczynnik dynamiczny, wynoszący zazwyczaj od 1,5 (np. maszyny rotacyjnej) do 4,0 (np. turbiny parowej). Należy przyjmować go w każdym wypadku indywidualnie, zależnie od rodzaju maszyn.

7. Dla obliczenia słupów, podciągów, fundamentów itp. konstrukcyj, na które przenosi się ciężar szeregu pięter, należy w najwyższym piętrze przyjąć pełną wartość najniekorzystniejszego obciążenia ruchomego, w następnych



piętrach natomiast obniżać je kolejno o 10%, 20% itd. Redukcja taka dojść jednak może najwyżej do 40% całkowitego obciążenia, poczem stale należy wciągać w rachunek 60% tegoż. O ile do obciążenia zmiennego wliczono ciężar lekkich ścianek przedziałowych wedle 3, należy go przy tej redukcji wliczyć do ciężaru stałego. Przy obliczeniu magazynów redukcji powyższej uwzględniać nie należy.

**Przykład.** Na murach zewnętrznych budynku (fig. 604) spoczywa dach i stropy. Obciążenie dachu przenosi się w połowie bezpośrednio na ściankę kolankową 30 cm gr., w połowie zaś na tramy. Belki stropowe wchodzą w mur 30 cm, tak, że ich oddziaływania zaczepiają w odległości 15 cm od wewnętrznej krawędzi muru. Osiowy odstęp filarów okiennych wynosi 4,3 m. Ciężar muru wynosi 1,6 t/m<sup>3</sup>. Stropy wedle fig. 599, strop najwyższy fig. 602.

Obciążenie murem:

$$G_1 = 4,3 \times 1,5 \times 0,3 \times 1,6 = 3,1 t,$$

$$G_2 = G_3 = (4,3 \times 3,4 - 2 \times 2,2) \times 0,45 \times 1,6 = 6,9 t,$$

$$G_4 = (4,3 \times 3,8 - 2 \times 2,6) \times 0,6 \times 1,6 = 10,7 t,$$

$$G_5 = (4,3 \times 3,5 - 2 \times 2,3) \times 0,6 \times 1,6 = 10,1 t,$$

$$G_6 = (4,3 \times 3,6 - 2 \times 2,4) \times 0,75 \times 1,6 = 12,8 t,$$

$$G_7 = \left[ (4,3 \times 3,3 - 1,5 \times 0,8) \times 1,05 - \frac{0,75 \times 1,5}{2} \times 1,0 \right] \times 1,6 = 21,1 t,$$

$$G_8 = 4,3 \times 0,8 \times 1,35 \times 1,6 = 7,5 t.$$

Oddziaływania dachu i stropów:

$$A_1' = 4,3 \times \frac{7,17}{2} \times 0,24 = 3,7 t,$$

$$A_2' = 4,3 \times \frac{5,9}{2} \times 0,35 = 4,5 t,$$

$$A_3' = A_4' = 4,3 \times \frac{5,9}{2} \times 0,45 = 5,7 t,$$

$$A_5' = A_6' = 4,3 \times \frac{5,68}{2} \times 0,45 = 5,5 t,$$

$$A_7' = 4,3 \times \frac{5,45}{2} \times 0,45 = 5,3 t.$$

Oddziaływania stropów skutkiem obciążenia użytkowego:

$$A_2'' = 4,3 \times \frac{5,9}{2} \times 0,125 = 1,6 t,$$

$$A_3'' = 4,3 \times \frac{5,9}{2} \times 0,200 = 2,6 t,$$

$$A_4'' = 2,6 - 10\% = 2,4 t,$$

$$A_5'' = 4,3 \times \frac{5,68}{2} \times (0,2 - 20\%) = 2,0 t,$$

$$A_6'' = 4,3 \times \frac{5,68}{2} \times (0,2 - 30\%) = 1,7 t,$$

$$A_7'' = 4,3 \times \frac{5,45}{2} \times (0,2 - 40\%) = 3,5 t.$$

Całkowite obciążenie filarów stropami wynosi zatem:

$$A_2 = 4,5 + 1,6 = 6,1 t,$$

$$A_5 = 5,5 + 2,0 = 7,5 t,$$

$$A_3 = 5,7 + 2,6 = 8,3 t,$$

$$A_6 = 5,5 + 1,7 = 7,2 t,$$

$$A_4 = 5,7 + 2,4 = 8,1 t,$$

$$A_7 = 5,3 + 3,5 = 8,8 t.$$

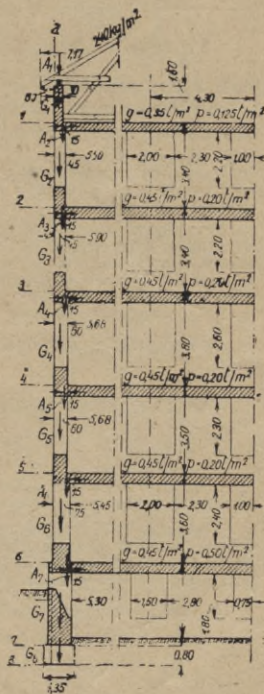


Fig. 604.

8. Przy obliczeniu podciągów, na które przenosi się ciężar z powierzchni stropu większej niż 30 m<sup>2</sup>, można wielkość obciążenia ruchomego zmniejszyć o 10%.

9. Przy obliczeniu podciągów, podtrzymujących mur związany na całej wysokości ze ścianami głównymi, można przyjąć, że na podciąg przenosi się obciążenie części muru ograniczonej prostymi, wychodzącymi pod kątem  $60^\circ$  do poziomu ze skrajnych najniższych punktów muru, o ile proste nie trafiają w murze w otwory. W tym ostatnim przypadku należy ograniczające proste podnieść tak, aby nie przecinały otworu (fig. 605). Grubość filara narożnego podtrzymującego podciąg tak obliczony, mierzona w kierunku otworu, powinna być conaj-

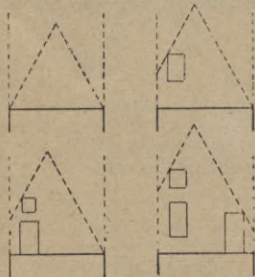


Fig. 605 a, b, c, d.

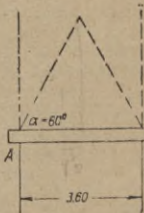


Fig. 606.

mniej równa połowie rozpiętości otworu w świetle w przeciwnym razie podciąg należy obliczać na cały ciężar ściany, ograniczonej liniami pionowymi.

Największy moment belki obciążonej wedle fig. 605 a i 606 wynosi  $M = \frac{1}{6} Pl$ , gdzie  $l$  jest rozpiętością, zaś  $P$  całkowitem obciążeniem.

Przykłady. 1. Obliczyć największy moment zginający belki podtrzymującej ścianę z cegły zwykłej o grubości 0,42 m (por. fig. 606).

Jeżeli rozpiętość w świetle wynosi  $l_0 = 3,60$  m, to teoretyczny odstęp punktów podparcia belki wynosi:  $l = 1,05 l_0 = 1,05 \cdot 3,60 = 3,78$  m.

Całkowity ciężar muru działający na belkę:

$$P = 3,78 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,28 \cdot 0,42 \cdot 1600 = 4240 \text{ kg.}$$

Największy moment zginający w środku rozpiętości belki:

$$M = \frac{Pl}{6} = \frac{4240 \cdot 3,78}{6} = 2672 \text{ kgm.}$$

2. Obliczyć belkę żelazną dźwigającą ścianę o grubości 0,30 m, wysoką 7,70 m, z otworami na zasadzie trójkątego rozkładu ciśnienia muru (por. fig. 607).

Obciążenie belki przyjmujemy odpowiednio do przepisów wedle figury ograniczonej od dołu prostą poziomą, przechodzącą przez punkty podparcia A i B, z boku rzędnymi wychodzącymi z punktów A i B, jakoteż prostymi nachylenymi pod kątem  $60^\circ$  do poziomu, przechodzącymi przez naroża górnego otworu.

Ciążary poszczególnych pasków wynoszą wtedy:

$$P_1 = 1600 \cdot 0,30 \cdot 4,45 \cdot 0,50 = 1170 \text{ kg}$$

$$P_2 = 1600 \cdot 0,30 \cdot 7,95 \cdot 0,50 = 1910 \text{ kg}$$

$$P_3 = 1600 \cdot 0,30 \cdot 11,45 \cdot 0,50 = 2750 \text{ kg}$$

$$P_4 = 1600 \cdot 0,30 (1,20 \cdot 1,05 \cdot 0,50 + 1,20 \cdot 1,40) = 1100 \text{ kg.}$$

Oddziaływanie:

$$O_1 = \frac{1}{4,20} (1170 \cdot 4,64 + 1910 \cdot 2,66 + 2750 \cdot 1,68 + 1100 \cdot 1,20) = \frac{16460}{4,20} = 3680 \text{ kg.}$$

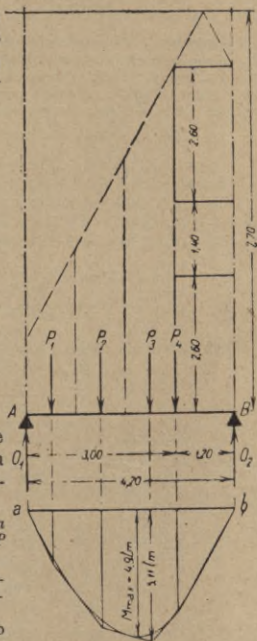


Fig. 607.

Momenty:

$$M_1 = O_1 (4,20 - 3,64) = 2060 \text{ kgm}$$

$$M_2 = O_1 \cdot 1,64 - P_1 \cdot 0,98 = 5670 - 1150 = 4520 \text{ kgm}$$

$$M_3 = O_1 \cdot 2,52 - P_1 \cdot 1,96 - P_2 \cdot 0,98 = 9280 - 2300 - 1870 = 5110 \text{ kgm.}$$

$$M_4 = O_1 \cdot 3,00 - P_1 \cdot 2,44 - P_2 \cdot 1,46 + P_3 \cdot 0,48 = 11040 - 2860 - 2790 - 1320 = 4070 \text{ kgm.}$$

Moment największy wypada, jak widać z rysunków, w pobliżu p. 3. Różni się on jednak co do wielkości bardzo mało od  $M_3$ , tak, że przyjmując możemy i dla obliczenia, że najw.  $M = M_3 = 5110 \text{ kgm}$ .

10. W obliczeniach przyjmując można, że ciśnienie słupów itp. ciężarów skupionych rozkłada się w murze ceglany na zaprawie wapiennej pod kątem 4:1, na zaprawie cementowo-wapiennej 3:1, cementowej 2:1, zaś w betonie najwyżej 1:1. Odsadki w murze ceglany nie mogą być przytem szersze niż  $\frac{1}{4}$  długości cegły. Wysokość ich musi wynosić więc przy zaprawie wapiennej 4 warstwy cegieł, cementowo-wapiennej 3, zaś cementowej 2 warstwy cegieł.

Przykład. Obliczyć fundament słupa obciążonego osiowo ciężarem  $P = 60 t$  jako: 1. mur ceglany na zaprawie wapiennej, 2. mur ceglany na zaprawie cementowo-wapiennej, 3. mur ceglany na zaprawie cementowej, 4. betonowy — przy dopuszczalnym ciśnieniu na grunt  $2 \text{ kg}$ .

Ad 1:

Słup otrzymuje podstawę kwadratową o boku:

$$b = \sqrt{\frac{60000}{7}} = \approx 95 \text{ cm};$$

przybliżona szerokość podstawy fundamentu w głębokości  $g = 1,68 \text{ m}$ :

$$b_1 = b + 2 g \operatorname{tg} \varphi = 0,95 + 2 \times 1,68 \times \frac{1}{4} = 1,79 \text{ m};$$

ciężar fundamentu:

$$G = \frac{1}{3} (b^2 + b b_1 + b_1^2) g' \gamma = \approx 3,7 t;$$

potrzebna szerokość fundamentu:

$$b_1 = \sqrt{\frac{G + P}{k}} = \sqrt{\frac{63700}{2}} = \approx 179 \text{ cm.}$$

Ad 2:

$$b = \sqrt{\frac{60000}{9}} = \approx 82 \text{ cm}; \text{ potrzebna głębokość } g = 1,44 \text{ m}$$

$$b_1 = 0,82 + 2 \times 1,44 \times \frac{1}{3} = \approx 1,78 \text{ m}$$

$$G = \approx 3,1 t$$

potrzebne:

$$b_1 = \sqrt{\frac{63100}{2}} = \approx 178 \text{ cm.}$$

Ad 3:

$$b = \sqrt{\frac{60000}{12}} = \approx 71 \text{ cm} \text{ potrzebna głębokość } g = 1,06 \text{ m}$$

$$b_1 = 0,71 + 2 \times 1,06 \times \frac{1}{2} = 1,77 \text{ m}$$

$$G = \approx 2,3 t$$

potrzebne:

$$b_1 = \sqrt{\frac{62300}{2}} = \approx 177 \text{ cm.}$$

Ad 4:

$$b = \sqrt{\frac{60000}{12}} = \approx 71 \text{ cm} \text{ potrzebna głębokość } g = 0,61 \text{ m}$$

$$b_1 = 0,54 + 2 \times 0,61 \times 1 = 1,76 \text{ m}$$

$$G = \approx 1,6 t$$

potrzebne:

$$b_1 = \sqrt{\frac{61600}{2}} = \approx 176 \text{ cm.}$$

Z przykładu tego wynika, że w fundamencie ceglany na zaprawie wapiennej potrzeba w danym przykładzie założyć stopę w głębokości  $1,68 \text{ m}$  (bez względu na grubość cegły), aby uzyskać potrzebną jej powierzchnię, fundament ceglany na zaprawie cementowo-wapiennej w głębokości  $1,44 \text{ m}$ , na zaprawie cementowej w głębokości  $1,06 \text{ m}$ , zaś na betonie  $0,61 \text{ m}$ . Widać stąd jasno, że pierwszy, a nawet drugi sposób wymagają znacznej ilości materiału i są tem samym nieracjonalne.

11. Przy obliczaniu rusztowań uwzględnić należy ciężar konstrukcji spoczywającej na rusztowaniu, ciężar i działanie maszyn roboczych, obciążenie ruchome  $200 \text{ kg/m}^2$  na pozostałych częściach konstrukcji, oraz parcie wiatru na powierzchnie rusztowania i konstrukcji (por. § 7).

### § 6. Obciążenie śniegiem.

1. Obciążenie śniegiem przyjmować należy:

W województwach: pomorskim, poznańskim, warszawskim, łódzkim, lubelskim, kieleckim, krakowskim i śląskiem  $60 \text{ kg/m}^2$  rzutu poziomego; w województwach: wileńskim, nowogródzkim, białostockim, poleskim, wołyńskim, lwowskim, tarnopolskim i stanisławowskim  $80 \text{ kg/m}^2$  rzutu poziomego.

W okolicach górskich, położonych ponad  $400 \text{ m}$  nad poziom morza należy jednak przyjmować obciążenie śniegiem o wielkości:

$$s = 80 + 0,12(h - 400) \text{ kg/m}^2,$$

gdzie  $h$  jest wysokością nad poziomem morza w metrach.

Np. w Zakopanem (wys. n. p. m.  $900 \text{ m}$ ) należy przyjąć  $s = 80 + 0,12(900 - 400) = 140 \text{ kg/m}^2$ . Zaś w Krynicy (wys.  $600 \text{ m}$ ) należy przyjąć  $s = 80 + 0,12(600 - 400) = 104 \text{ kg/m}^2$ .

2. Dla pochyłeń dachów większych niż  $30^\circ$  należy wielkość obciążenia śniegiem, obliczoną wedle 1., zredukować, mnożąc ją przez współczynnik  $\delta$ , który wynosi:

dla $30^\circ$	$\delta = 1$
" $40^\circ$	$\delta = 0,5$
" $45^\circ$	$\delta = 0$ .

Wartości pośrednie należy interpolować linjowo. Dla pochylenia ponad  $45^\circ$  obciążenia śniegiem można nie uwzględniać.

3. Przy obliczeniu należy uwzględnić możliwość tworzenia się worków śnieżnych we wgłębionych częściach dachu.

4. Należy uwzględnić możliwość całkowitego lub jednostronnego obciążenia śniegiem.

### § 7. Parcie wiatru:

1. Kierunek parcia wiatru przyjmować można wogóle poziomy.

2. Składową parcia wiatru prostopadłą do powierzchni dachu przyjmować należy w wielkości:

$$n = w_0 \sin a,$$

gdzie  $a$  jest kątem pochylenia dachu.

3. Wielkości  $w_0$  przyjmować należy wedle następującej tabeli:

w miejscach zasłoniętych	50 $\text{kg/m}^2$
" " odsłoniętych do $15 \text{ m}$ wysokości	100 "
" " " " " " " " " " " "	ponad $30 \text{ m}$ wysok. 130 "

dla wysokości między  $15 \text{ m}$ , a  $30 \text{ m}$  należy interpolować linjowo (fig. 608).

4. W miejscach, narażonych na szczególnie silne wiatry (wybrzeże morskie, góry itd.), należy powyższe wartości zwiększyć o  $50\%$ .

5. Przy obliczaniu wiat (hal) otwartych należy uwzględnić parcie wiatru na dach i ściany od wewnątrz o wielkości  $60 \text{ kg/m}^2$  prostopadle do powierzchni.

6. Przy obliczaniu kominów itp. budowli o kształcie okrągłym lub wielobocznym należy wielkości parcia wiatru, podane w ustępie 3., pomnożyć przez współczynnik zmniejszający, który należy przyjmować dla

kominów okrągłych	$\mu = 0,67$ ,
" ośmiobocznych	$\mu = 0,71$ ,
" kwadratowych	$\mu = 1,00$ .

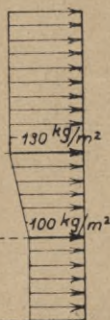



Fig. 608.

Do §§ 6. i 7. pomocna być może następująca tabliczka:

Pochylenie dachu	1:1	1:1,5	1:2	1:2,5	1:3	1:3,5	1:4	1:4,5	1:5
$\alpha$	45°	33° 40'	26° 40'	21° 50'	18° 25'	16°	14°	12° 30'	11° 20'
Obciążenie śniegiem na 1 m <sup>2</sup> połaci dachu dla 60 kg/m <sup>2</sup> dla 80 kg/m <sup>2</sup>		50 66	54 72	56 74	57 76	58 77	58 78	59 78	59 79
Obciążenie wiatrem									
$n = w \sin \alpha$									
$n = 50 \sin \alpha$	35	28	22	19	16	14	12	11	9
$n = 60 \sin \alpha$	42	34	27	23	20	17	15	13	12
$n = 70 \sin \alpha$	50	39	31	26	22	19	17	15	14
$n = 100 \sin \alpha$	71	55	45	37	31	28	24	22	19
$n = 110 \sin \alpha$	78	61	50	41	35	30	27	24	21
$n = 120 \sin \alpha$	85	67	54	45	38	33	29	26	23
$n = 130 \sin \alpha$	92	72	58	48	41	36	32	28	25

Momenty bezwładności i momenty wytrzymałości przekrojów najczęściej używanych w budowie kominów:

Przekrój	Moment bezwładności względem osi równoległej do boków	Moment wytrzymałości względem osi	
		przekątnej	równoległej do boków
Koło . . . . .	$0,0491 D^4 = \frac{\pi D^4}{64}$	$0,0982 D^3$	$0,0982 D^3$
Ośmiobok . . . . .	$0,0574 D^4$	$0,101 D^3$	$0,1095 D^3$
Kwadrat . . . . .	$0,0833 D^4 = \frac{D^4}{12}$	$0,118 D^3$	$0,167 D^3 = \frac{1}{6} D^3$
Koło z otworem kołowym 	$0,0491 (D^4 - d^4)$	$0,0982 (D^3 - \frac{d^3}{D})$	$0,0982 (D^3 - \frac{d^3}{D})$
Ośmiobok z otworem ośmiobocznym	$0,0547 (D^4 - d^4)$	$0,101 (D^3 - \frac{d^3}{D})$	$0,1095 (D^3 - \frac{d^3}{D})$
Ośmiobok z otworem kołowym . .	$0,0547 D^4 - 0,0491 d^4$	$0,101 D^3 - 0,091 \frac{d^3}{D}$	$0,1095 D^3 - 0,0982 \frac{d^3}{D}$
Kwadrat z otworem kwadratowym . .	$0,0833 (D^4 - d^4) = \frac{D^4 - d^4}{12}$	$0,118 (D^3 - \frac{d^3}{D})$	$0,167 (D^3 - \frac{d^3}{D}) = \frac{1}{6} (D^3 - \frac{d^3}{D})$
Kwadrat z otworem ośmiobocznym . .	$0,0833 D^4 - 0,0547 d^4$	$0,118 D^3 - 0,0774 \frac{d^3}{D}$	$0,167 D^3 - 0,1095 \frac{d^3}{D}$
Kwadrat z otworem kołowym . . . . .	$0,0833 D^4 - 0,0491 d^4$	$0,118 D^3 - 0,0694 \frac{d^3}{D}$	$0,167 D^3 - 0,0982 \frac{d^3}{D}$

We wzorach powyższych  $D$ , względnie  $d$ , oznaczają średnicę koła wpisanego w zewnętrzną, wzgl. wewnętrzną figurę (więc w kwadracie, bok kwadratu). Średnica koła opisanego, a tem samem długość przekątnej wynosi w ośmioboku  $D_1 = 1,0324 D$ , zaś w kwadracie  $1,4142 D$ .

## § 8. Parcie ziemi i materiałów sypkich, oraz parcie wody.

1. Obliczanie parcia ziemi należy wykonać wedle ogólnie przyjętych zasad. O ile niema dokładnych danych co do właściwości materiału ziemnego, przyjąć należy dla ziemi:

20-40°

Materiał	Kąt zesypu (tarcia) $\varphi$	Ciężar gatunkowy $kg/m^3$	$tg \varphi$	$tg^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$
Ziemia roślinna sucha . . . . .	35°	1400	0,700	0,271
"  "  wilgotna . . . . .	45°	1600	1,000	0,172
"  "  nasycona wodą . . . . .	30°	1800	0,577	0,333
Gлина sucha . . . . .	40°	1600	0,839	0,217
"  wilgotna . . . . .	45°	1700	1,000	0,172
"  nasycona wodą . . . . .	20°	2000	0,364	0,490
Piasek suchy . . . . .	35°	1600	0,700	0,271
"  wilgotny . . . . .	40°	1800	0,839	0,217
"  nasycony wodą . . . . .	25°	2000	0,466	0,406
Żwir rzeczny . . . . .	30°	1700	0,577	0,333
Tłuczeń z kamienia ciężkiego . . . . .	40°	1800	0,839	0,217
"  "  "  lekkiego . . . . .	40°	1600	0,839	0,217

2. Obliczając ciśnienie na ściany i dno zbiorników, należy przyjmować następujące wartości kątów zesypu, o ile niema dokładniejszych danych na podstawie bezpośrednich prób:

Materiał	Kąt zesypu (tarcia)	Ciężar gatunkowy $kg/m^3$	$tg \varphi$	$tg^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$
Cement . . . . .	40°	1500	0,839	0,217
Groch . . . . .	20°	850	0,364	0,496
Owies . . . . .	28°	450	0,532	0,455
Słód . . . . .	22°	530	0,404	0,361
Sól . . . . .	40°	1200	0,839	0,217
Węgiel . . . . .	45°	900	1,000	0,172
Koks . . . . .	45°	500	1,000	0,172
Żyto, pszenica . . . . .	25°	700	0,478	0,406

3. Obliczenie parcia wody należy wykonać wedle zasad hydrostatyki.

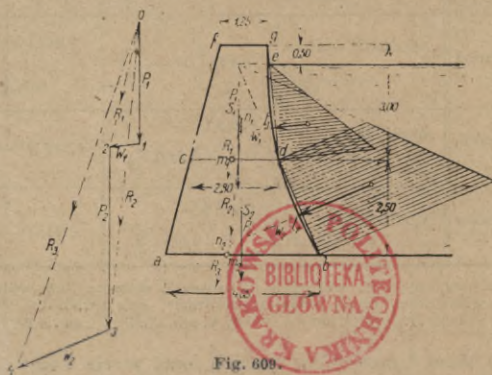


Fig. 609.

Przykład. Zbadać, czy w jaszce przedstawionym na fig. 609 linja ciśnienia nie wychodzi z rdzenia. (Ciężar gatunkowy muru wynosi 2400  $kg/m^3$ ).

Biblioteka Główna PK

11-325352



Politechnika Krakowska  
Biblioteka Główna



100000182064

Politechnika Krakowska  
Biblioteka Główna



100000182064