



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000231379





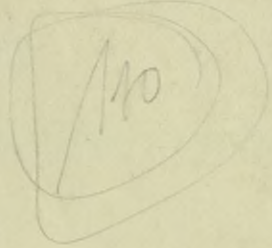






1966

By the way



**PERSPEKTYWA MALARSKA**

KRÓTKA  
HISTORIA



# NAUKA I SZTUKA

TOM XVI

## PERSPEKTYWA MALARSKA

TOM I



K S I A Ż N I C A - A T L A S

ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE

TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ., SP. AKC.

LWÓW—WARSZAWA

1928



*Nr. 732/II.*

# PERSPEKTYWA MALARSKA

ZASADY - ZARYS HISTORYCZNY - ESTETYKA

NAPISAŁ

DR. KAZIMIERZ BARTEL

PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

TOM I

Z 397 ILUSTRACJAMI

*348/1*



K S I A Ź N I C A - A T L A S

ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE

TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ., SP. AKC.

LWÓW - WAŁSZAWA

1928



II ~~1666~~/16

II - 347802

2146

*Klisze, skład i druk wykonano w Zakładach Graficznych Sp. Akc. Książnica-Atlas  
we Lwowie*

~~108~~ 149



# Spis rzeczy.

## Rozdział pierwszy.

### O odwzorowaniu perspektywicznym na płaszczyźnie.

	Str.
1. Uwagi wstępne . . . . .	1
2. Perspektywa punktów . . . . .	2
3. Perspektywa linii prostych . . . . .	3
4. Perspektywa płaszczyzn . . . . .	7
5. Proste i punkty na płaszczyźnie . . . . .	10
6. Płaszczyzny przechodzące przez proste . . . . .	12
7. Proste równoległe do płaszczyzny . . . . .	12
8. Proste przecinające się. Proste skośne . . . . .	13
9. Proste prostopadłe do płaszczyzny . . . . .	14
10. Płaszczyzny prostopadłe do prostej . . . . .	16
11. Krawędzie płaszczyzn . . . . .	18
12. Punkt przebiecia się prostej z płaszczyzną . . . . .	18
13. Obroty i kłady płaszczyzn . . . . .	19
14. Podnoszenie płaszczyzn z kładu . . . . .	26
15. Punkty mierzenia . . . . .	30
16. Zadania . . . . .	33

## Rozdział drugi.

### Zasady płaskiej perspektywy stosowanej.

17. Określenia i założenia . . . . .	39
18. Proste prostopadłe do tła. Proste przekątne. Podziałka perspektywiczna . . . . .	44
19. Zadania . . . . .	48
20. Konstrukcyjne zastosowanie części głębokości tłowej . . . . .	49
21. Proste poziome, dowolnie nachylone do tła . . . . .	52
22. Częściowe ślady zbiegu . . . . .	60
23. Podziałki zbiegu. Lineały perspektywiczne . . . . .	65
24. Płaszczyzny poziome. Płaszczyzny pionowe . . . . .	71
25. Proste równoległe do tła . . . . .	74
26. Perspektywa „czołowa“, „boczna“ i „ukośna“ . . . . .	80
27. Dzielenie odcinków . . . . .	81
28. Mierzenie odcinków . . . . .	89
29. Zadania . . . . .	99
30. Stożek, obszar, pole i koło widzenia. Kąt widzenia obrazu . . . . .	119
31. Perspektywa wewnątrz . . . . .	121
32. Perspektywa fotograficzna . . . . .	131

## Rozdział trzeci.

### Perspektywa krzywych stożkowych.

33. Uwagi ogólne o perspektywie koła . . . . .	139
34. Konstrukcja perspektywy koła, jako elipsy . . . . .	145

	Str.
35. Związek między śladem łowym, śladem zbiegu, śladem zniknięcia i okiem . . . . .	152
36. Perspektywa koła — parabola . . . . .	153
37. Perspektywa koła — hiperbola . . . . .	154
38. Biegun, biegunowa, środek, średnice i osie krzywych stożkowych . . . . .	158
39. Dalsze konstrukcje perspektywy koła, jako elipsy . . . . .	161
40. Perspektywa koła — kołem . . . . .	164
41. Perspektywa elipsy — elipsą, hiperbolą lub parabola . . . . .	166
42. Perspektywa elipsy — kołem . . . . .	168
43. Perspektywa pęku kół współśrodkowych . . . . .	169
44. Zadania . . . . .	176

## Rozdział czwarty.

### Perspektywa powierzchni obrotowych.

45. Określenia . . . . .	180
46. Przybliżone sposoby rysowania perspektyw obrotowych stożków i walców . . . . .	181
47. Dalsze konstrukcje perspektywy stożków i walców . . . . .	185
48. Perspektywa wewnątrz obrotowych walców i stożków . . . . .	199
49. Perspektywa kuli . . . . .	200
50. Dalsze konstrukcje perspektywy kuli . . . . .	205
51. Perspektywa wnętrza kuli . . . . .	210
52. Perspektywa dowolnej powierzchni obrotowej o osi pionowej . . . . .	218
53. Perspektywa powierzchni obrotowej o osi prostopadłej do tła . . . . .	228
54. Perspektywa powierzchni obrotowej, której oś ma dowolne położenie w przestrzeni . . . . .	234

## Rozdział piąty.

### Perspektywa obrazów odbitych w zwierciadłach płaskich.

55. Prawo odbicia . . . . .	239
56. Przykłady odbić w zwierciadłach pionowych . . . . .	241
57. Przykłady odbić w zwierciadłach nachylonych do ściany pionowej . . . . .	246

## Rozdział szósty.

### Konstrukcja cieni.

58. Związek między perspektywą prostej a perspektywą jej rzutu prostokątnego na dowolną płaszczyznę . . . . .	252
59. Cień punktu . . . . .	254
60. Cienie prostych . . . . .	257
61. Cienie wielokątów . . . . .	263
62. Cienie utworów przestrzennych, ograniczonych płaszczyznami . . . . .	265
63. O cieniach koła . . . . .	272
64. Cienie stożków, walców i ich zespołów . . . . .	274

## Rozdział siódmy.

### Perspektywa pośrednia.

65. Perspektywa malarzy a perspektywa architektów . . . . .	279
66. Metoda punktów przebiecia promieni widzenia z tłem . . . . .	281
67. Metoda dwóch śladów zbiegu . . . . .	285
68. Połączenie metody punktów przebiecia z metodą dwóch śladów zbiegu . . . . .	291
69. Metoda śladów zbiegu i punktów mierzenia . . . . .	292
70. Metoda współrzędnych . . . . .	301
71. Perspektywa aksonometryczna . . . . .	304



„Ci, którzy lubują się w praktyce bez wiedzy, podobni są do żeglarza, co wsiada do łodzi bez steru i busoli i nie ma nigdy pewności, dokąd jedzie.

Malarz, który maluje wedle praktyki i sądu oka, bez udziału rozumu, jest jak zwierciadło, które odbija w sobie wszystkie przed nim stojące przedmioty, nie znając ich“.

*Leonardo da Vinci.*

Co nazywamy perspektywą malarską? Czy mianem tem określić można perspektywę liniową, pojętą, jako geometryczny rzut środkowy na płaszczyznę? Czy wszystko, co nie odpowiada rygorom, związanym ze ścisłością geometryczną w pozostawionych nam przez wieki pracach rysowników, malarzy i sztycharzy, ma być określone, jako pozbawione perspektywy? Czy istnieje jedna perspektywa malarska, czy też jest ich więcej, a w takim razie, ile i jakich? Czy malowidła pompejańskie lub dokumenty najstarszego malarstwa chrześcijańskiego stanowią dowód znajomości jakiejś perspektywy i jak perspektywę tę ewentualnie określić? Czy perspektywa malarska jest identyczna z perspektywą malarzy? Czy dadzą się do niej zastosować sprawdziany obiektywne, czy subiektywne? Czy perspektywa malarska znajduje oparcie w optyce fizjologicznej i psychologicznej i w jakim ewentualnie stopniu? Czy perspektywa malarska jest syntezą, czy też może tylko kompromisem geometrii, fizjologii i psychologii?

Oto przykłady pytań, które nasuwają się każdemu uważnemu obserwatorowi natury i jej obrazów, rysowanych ręką człowieka lub aparatem fotograficznym.

Praca ta jest próbą odpowiedzi na te pytania; zapewne nie na wszystkie z nich i nie na wszystkie z wymaganą dokładnością.

Kiedy studja moje i rozważania nad obszernym i wielostronnym przedmiotem posunęły się dość znacznie i kiedy przystąpiłem do formułowania odpowiedzi, spostrzegłem, że porozumienie się z czytelnikami, bez odpowiedniego ich poprzednio przygotowania, będzie niemożliwe. Stąd układ książki, a także konieczność podziału jej na dwie części.

W tomie, który czytelnik ma przed sobą, zdołałem zawrzeć, skracając się najusilniej, zaledwie zasady perspektywy stosowanej. Mam na myśli zasady w znaczeniu geometrycznym.

Szeroko rozpowszechnione jest mniemanie, że dziedzina sztuki nie znosi przenikania się z nauką. Pogląd ten podzielany jest przez niewy-

kształconych, praktykujących artystów, a także przez fotografów i tych z tak zwanych „miłośników“, którzy patrzą na sztukę jedynie, jak na przedmiot lekkich a przez to i miłych rozmów towarzyskich. Dla tej kategorii czytelników książka ta jest mało interesująca, a więc mało dostępna.

Kolega mój i przyjaciel, prof. dr. Tadeusz Obmiński, uświetnił tę pracę szeregiem kapitalnych rysunków, za które dłoń Jego serdecznie ściskam; poza tem dziękuję Mu niewątpliwie czytelnicy.

Wykreślenie rysunków tuszem wykonał p. Mieczysław Teliczek; żmudną korektę całego dzieła przeprowadził p. Grzegorz Syniewski — obaj asystenci przy mojej katedrze. Za prace te, które wysoko cenię, składam im głęboką podziękę.

Rysunki 122 i 131 są reprodukcją fotografii, użyczonych mi łaskawie przez kolegę, prof. dr. Jana Sas-Zubrzyckiego.

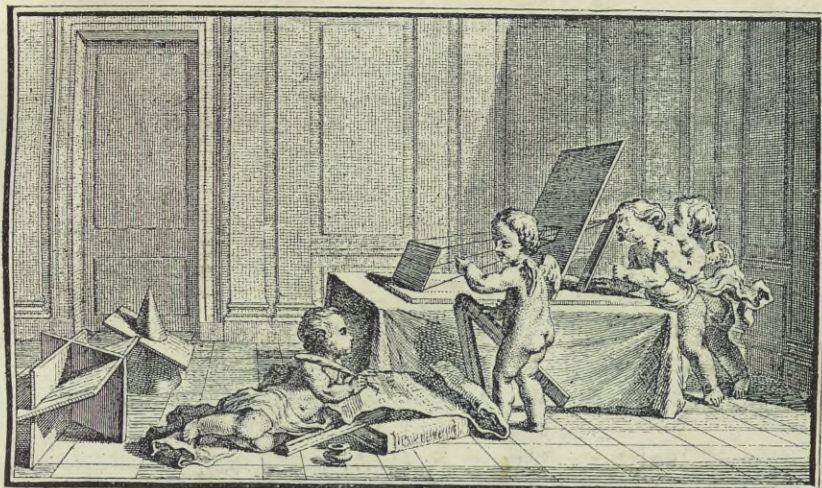
Na zupełnie szczególną wdzięczność moją zasługuje wydawca „Książnica-Atlas“, najpierw za wyjątkowe, w naszych warunkach, wyposażenie wydawnictwa, a potem za okazaną wielką wyrozumiałość w stosunku do moich bardzo licznych i różnorodnych życzeń. Kierownictwu drukarni, panom składającym książkę i maszynistom dziękuję gorąco za to, że nie opuściła ich cierpliwość.

Literatura podana będzie w tomie drugim.

Warszawa, w marcu 1928 r.

*Kazimierz Bartel.*





## Rozdział I.

# O perspektywicznym odwzorowaniu na płaszczyźnie.

**1. Uwagi wstępne.** Rysunkowe odtwarzanie otaczającego nas świata zakreślone być może wymaganiami sztuki lub życia praktycznego. Obywać się ono może bez wszelkich podstaw naukowego przygotowania, nie kierowane konsekwencją stosowania żadnych wyrozumowanych praw, i być rysunkiem dziecka; może mieć swe źródło w tej szczególnej władzy umysłu, którąby nazwać można pamięcią przestrzeni, nie rozwiniętą w żadnej szkole metod naukowej pracy. Są ludzie — i tych jest olbrzymia większość — którzy, pozbawieni zmysłu przestrzeni, nie posiadają zdolności zapamiętywania odbieranych wrażeń wzrokowych — „mają oczy, lecz nie widzą“. Są inni, którzy nie potrafią, w najmniejszym nawet stopniu, wyrazić rysunkiem obserwowanego przedmiotu; są mniej liczni, którzy czynią to w sposób bardziej lub mniej doskonały — najzdolniejsi z nich są plastykami. Ale między ostatnimi tylko niewielu będzie takich, którym fenomenalna pamięć wzrokowa pozwoli zatrzymać i w dowolnym czasie odtworzyć nawet wyraz ludzkiej twarzy.

Zarówno dziedzina sztuki, jak i techniki, wymagały ustalenia praw odtwarzania, czyli, jak mówimy, odwzorowania, przestrzeni na powierzchni

---

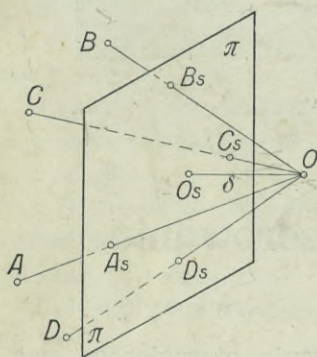
Rysunek z dzieła: M. Edme-Sebastian Jeaurat, *Traité de Perspective*, Paris 1750.



płaskiej, t. j. płaszczyźnie, względnie na powierzchniach krzywych. W dziedzinie sztuki malarskiej kodeks tych praw ma tytuł perspektywy, stanowiąc jeden z działów geometrii wykreślnej.

Jak aparat fotograficzny pozwala na odwzorowanie przestrzeni drogą mechaniczną, tak prawa nauki perspektywy otwierają możliwość otrzymania tych odwzorowań drogą konstrukcji. Osiągnięcie tego celu wymaga zapoznania się z perspektywnym odwzorowaniem geometrycznych utworów przestrzennych, poczynając od elementów, t. j. punktu, prostej i płaszczyzny.

**2. Perspektywa punktów.** Przyjmijmy dowolnie w przestrzeni płaszczyznę  $\pi$  (rys. 2), stałą, w odniesieniu do niej, punkt  $O$  i postanówmy *odwzorować* na tej płaszczyźnie, zwanej *tłem*, płaszczyzną obrazu lub płaszczyzną rzutu, układ punktów  $A, B, C, \dots$  przyjęty w przestrzeni. W tym celu połączmy każdy z danych punktów liniami prostymi z punktem  $O$ , zwanym *środkiem rzutów* lub *okiem*, i wyznaczmy punkty przecięcia się  $A_s, B_s, C_s, \dots$  tych promieni z tłem  $\pi$ .



Rys. 2.

Otrzymane punkty, zwane *perspektywami*, rzutami lub obrazami perspektywnymi, a także rzutami środkowymi, stanowią perspektywiczne (środkowe) odwzorowanie danego w przestrzeni układu punktów, na danej płaszczyźnie  $\pi$ , z punktu  $O$ . Promienie, łączące punkty układu z okiem, nazywać będziemy *promieniami rzutów* lub *promieniami widzenia*.

Ponieważ położenie oka względem tła jest stałe, przeto każdemu punktowi przestrzeni odpowiada na tle  $\pi$  jeden jedyny punkt, jako jego perspektywa, a to w tem zrozumieniu tego zwrotu, że promień, łączący dany punkt z okiem, przebija tło w jednym punkcie. Ale odpowiedniość ta nie jest wzajemną, t. zn., że punkt przyjęty na tle nie może być uważany za rzut jednego tylko punktu. Każdy punkt płaszczyzny tła jest bowiem obrazem wszystkich punktów promienia widzenia, który przez ten punkt przechodzi.

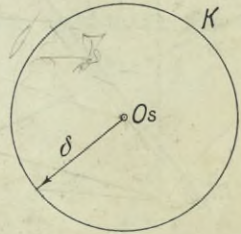
Położenie środka rzutów (oka) względem tła ustalimy w ten sposób, że wyznaczmy jego rzut prostokątny na tło, t. j. punkt przecięcia się  $O_s$  promienia, poprowadzonego z oka  $O$  prostopadłe do tła (rys. 2), a ponadto ustalimy oddalenie oka od tła, które równe jest odcinkowi  $OO_s = \delta$ .

Punkt  $O_s$  nazywać będziemy *punktem głównym*, promień, przechodzący przez punkt główny i oko, *promieniem głównym*, a odcinek  $OO_s = \delta$  tego promienia, *głębokością tłową* (oddaleniem tłowem).



Tłem jest oczywiście zawsze płaszczyzna, na której rysujemy, więc w naszym przypadku zawsze karta książki. Przyjęty punkt główny  $O_s$  i głębokość tłowa  $\delta$  (rys. 3) wyznaczają położenie oka względem tła. Znajduje się ono nad tłem, na promieniu poprowadzonym prostopadłe do niego w punkcie  $O_s$ , w odległości  $\delta$ .

Zakreślmy z punktu  $O_s$ , jako środka, promieniem głębokości tłowej  $\delta$  koło  $K$ . Każdy punkt tego koła uważać możemy za oko, położone na tło przez wykonanie obrotu promienia głównego około punktu głównego; każdy promień tego koła jest więc kładem na tło odcinka promienia głównego, wyrażającego głębokość tłową. Koło  $K$  nazywać będziemy *kołem głębokości*, a każdy jego punkt *punktem głębokości*. Koło głębokości ma znaczenie wyłącznie konstrukcyjne, a racjonalność jego przyjęcia znajdzie potwierdzenie w ciągu wykładu. Koło to uważać możemy za podstawę stożka obrotowego, którego wierzchołkiem jest oko, a którego kąt wierzchołkowy jest kątem prostym.



Rys. 3.

Jeżeli układ punktów, których perspektywy szukamy, jest układem geometrycznym, t. zn. należy do geometrycznego utworu przestrzeni, to rzut środkowy (odwzorowanie środkowe) tego układu stanowi perspektywę odnośnego utworu geometrycznego. W ten sposób mówić możemy o perspektywie linii prostej, wielokątów, wielościanów, linii krzywych, stożków, walców, kuli i t. d. Jako zespoły utworów geometrycznych, wystąpią budowle i ich wnętrza.

**3. Perspektywa linii prostych.** a) *Perspektywiczne odwzorowanie prostej.* Niechaj pionowa płaszczyzna  $\pi$  (rys. 4) będzie tłem, a zewnątrz niej leżący punkt  $O$  środkiem rzutów (okiem). Rzut prostokątny  $O_s$  oka  $O$  na tło jest punktem głównym, odcinek  $OO_s$  głębokością tłową.

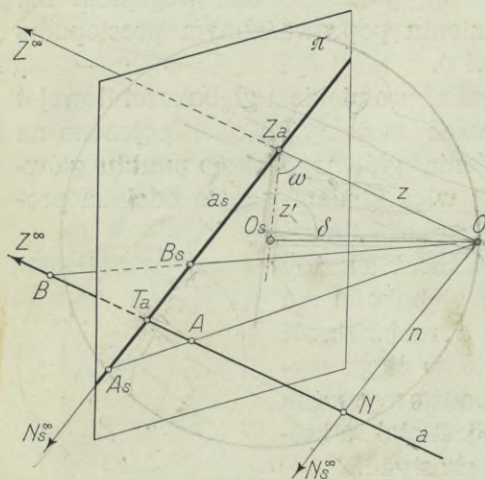
Przyjęta dowolnie w przestrzeni prosta  $a$  przebija tło w punkcie  $T_a$ , który nazywać będziemy *śladem tłowym* tej prostej.

Płaszczyzna  $\varphi$ , poprowadzona przez oko i przez prostą  $a$ , przecina tło  $\pi$  wzdłuż prostej  $a_s$ , która jest rzutem prostej  $a$  z punktu  $O$  na tło, czyli jej perspektywą. Ale prosta  $a_s$  jest równocześnie perspektywą wszystkich prostych, leżących na płaszczyźnie  $\varphi$ .

Jeżeli prócz prostej  $a_s$  weźmiemy pod uwagę także ślad tłowy  $T_a$ , to wówczas ilość prostych płaszczyzny  $\varphi$ , których odwzorowaniem jest prosta  $a_s$ , ograniczy się do pęku prostych, przechodzących przez punkt  $T_a$ . Aby prosta  $a_s$  uważaną być mogła za odwzorowanie środkowe jednej tylko prostej  $a$ , czyli aby odwzorowanie to było jednoznaczne (doskonałe), weźmy pod uwagę punkt  $Z^\infty$  nieograniczenie daleki na prostej  $a$ , t. zw. jej punkt niewłaściwy. Promień widzenia  $z$ , łączący punkt  $Z^\infty$



z okiem, zwany promieniem zbiegu, jest równoległy do prostej  $a$  i przebija tło w punkcie  $Z_a$ . Punkt  $Z_a$  jest perspektywą punktu niewłaściwego  $Z^\infty$  prostej  $a$  i zwie się jej *śladem zbiegu*. Odcinek  $\overline{OZ_a}$  nazywać będziemy *długością promienia zbiegu prostej  $a$* .



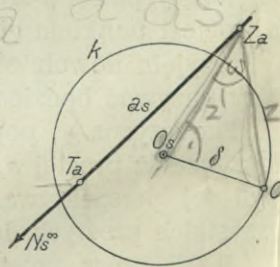
Rys. 4.

Prosta  $a_s$  i przyjęte na niej punkty  $T_a$  (ślad tłowy) i  $Z_a$  (ślad zbiegu) wyznaczają, w sposób jednoznaczny, położenie prostej  $a$  w przestrzeni. Znaczący to, że znajomość obu śladów prostej — przy danym położeniu oka względem tła — stanowi warunek odtworzenia położenia prostej w przestrzeni, czyli warunek przeprowadzenia t. zw. *restytucji* perspektywicznej. W istocie prosta  $a$  przechodzi przez dany ślad tłowy  $T_a$  równoległe do promienia zbiegu  $z$ , łączącego oko z danym śladem zbiegu  $Z_a$ .

Prosta  $a_s$  jest miejscem geometrycznym rzutów środkowych (perspektyw) wszystkich punktów prostej  $a$ ; promienie rzucające punkty prostej  $a$  na tło leżą na płaszczyźnie  $\varphi$ . Tak więc punkt  $A_s$  jest perspektywą punktu  $A$  prostej  $a$ , punkt  $B_s$  perspektywą punktu  $B$  i t. d. Punkt  $T_a$  prostej  $a$  jest równocześnie swoją perspektywą. Promień  $n$ , równoległy do prostej  $a_s$ , a więc równoległy do tła, przecina prostą  $a$  w punkcie  $N$ , który nazywamy *punktem (śladem) zniknięcia* tej prostej. Perspektywą śladu zniknięcia  $N$  prostej  $a$  jest punkt niewłaściwy  $N_s^\infty$  prostej  $a_s$ .

Niechaj promień główny będzie prostopadły do płaszczyzny tej karty, to poglądowy rys. 4 stanie się rysunkiem perspektywnym. Położenie oka względem tła (płaszczyzny rysunku) określone będzie, przy tym założeniu, punktem głównym  $O_s$  (rys. 5) i daną głębokością tłową  $\delta$ , którą zakreślmy — jako promieniem — koło głębokości  $k$ , z punktu  $O_s$ , jako środka. Prosta  $a_s$  wraz z przyjętymi na niej punktami  $T_a$  i  $Z_a$  wyznacza, w sposób jednoznaczny, położenie prostej  $a$  w przestrzeni

Aby odtworzyć położenie prostej  $a$  w przestrzeni, odmierzmy r prostopadłej, poprowadzonej do tła w punkcie głównym  $O_s$ , od tego punktu ku nam, odcinek  $\overline{O_s O} = \delta$ . Otrzymany punkt  $O$  jest okiem (śro-



Rys. 5.



kiem rzutów). Promień, łączący oko ze śladem zbiegu  $Z_a$ , wyznacza kierunek prostej  $a$ , która przejdzie przez ślad tłowy  $T_a$ , równolegle do tego kierunku.

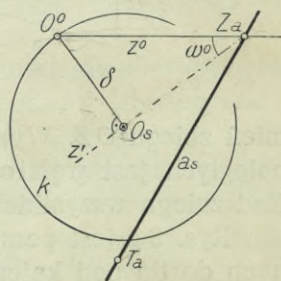
Perspektywa prostej, leżącej na tle, pokrywa się z tą prostą.

Perspektywa prostej, przechodzącej przez oko, jest punktem.

Każdy punkt prostej  $a_s$  jest perspektywą jednego punktu prostej  $a$ ; punkt niewłaściwy  $N_s^\infty$  jest odwzorowaniem perspektywicznym punktu zniknięcia  $N$  prostej  $a$ .

b) *Kąt nachylenia prostej do tła.* Kątem nachylenia prostej do płaszczyzny nazywamy kąt, jaki prosta zawiera ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę.

Promień zbiegu z prostej  $a$  (rys. 4) jest — jak wiadomo — do niej równoległy, wobec czego kąt, jaki promień ten zawiera z tłem, równy jest kątowi nachylenia prostej  $a$  do tła. Rzutem prostokątnym promienia zbiegu  $z$  na tło jest prosta  $z'$ , łącząca ślad zbiegu  $Z_a$  prostej  $a$  z punktem głównym. Kąt  $\omega$  zawarty między prostymi  $z$  i  $z'$  wyraża nachylenie prostej  $a$  do tła.



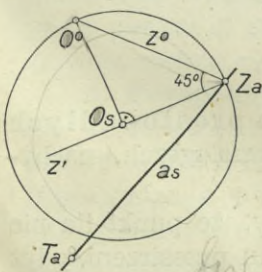
Rys. 6.

Trójkąt  $OO_sZ_a$  (rys. 4) jest trójkątem prostokątnym w punkcie  $O_s$ , a jego płaszczyzna jest prostopadłą do tła. Obróćmy go około przyprostokątnej  $O_sZ_a$  i połączmy na tło, czyli wykonajmy *kład* tego trójkąta na tło. Oko zajmie położenie punktu  $O^0$  (rys. 6) na kole głębokości, przyczem odcinek  $O_sO^0 = \delta$  będzie prostopadły do prostej  $z'$ . Przeciwpromienna  $OZ_a$ , trójkąta  $OO_sZ_a$ , stanowiąca długość promienia zbiegu (str. 4) prostej  $a$ , padnie na tło jako odcinek  $O^0Z_a$ . Kąt  $O^0Z_aO_s = \omega^0$  równy jest kątowi nachylenia prostej  $a$  do tła.

Z rys. 6 czytamy bezpośrednio, że wielkość kąta  $\omega^0$ , a więc wielkość kąta, jaki prosta  $a$  zawiera z tłem, zależy jedynie od położenia śladu zbiegu  $Z_a$ . W szczególności kąt ten maleje, gdy ślad  $Z_a$  oddala się od punktu głównego, a rośnie, gdy ślad ten zbliża się do punktu głównego.

*Jeżeli ślad zbiegu  $Z_a$  prostej  $a$  leży na kole głębokości (rys. 7), to prosta tworzy z tłem kąt  $45^\circ$ . Jeżeli ślad zbiegu prostej schodzi się z punktem głównym, to prosta jest prostopadłą do tła.*

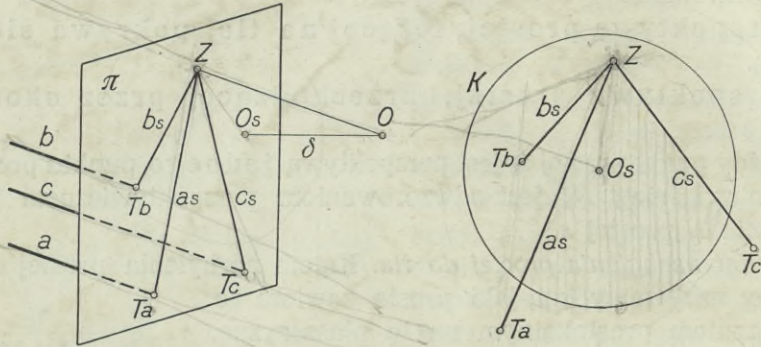
Położenie śladu tłowego prostej jest bez wpływu na wielkość kąta, jaki prosta ta zawiera z tłem.



Rys. 7.



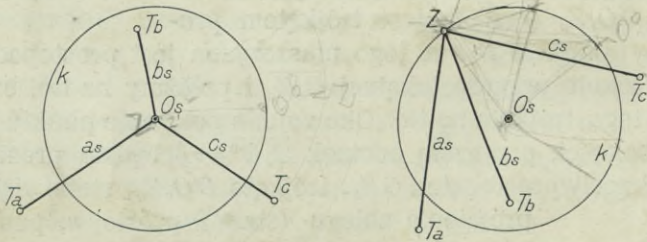
c) *Proste równoległe.* Proste równoległe  $a, b, c, \dots$  (rys. 8a), przebijające tło  $\pi$  w śladach  $T_a, T_b, T_c, \dots$  posiadają jeden, wspólny, pro-



Rys. 8 a, b.

mień zbiegu  $OZ$ . Wynika stąd, że perspektywa wiązki prostych równoległych jest pękiem prostych, którego wierzchołkiem jest wspólny ślad zbiegu wszystkich prostych, tworzących wiązkę.

Rys. 8 b jest perspektywą trzech prostych równoległych, nachylnych do tła pod kątem większym, aniżeli  $45^\circ$ .



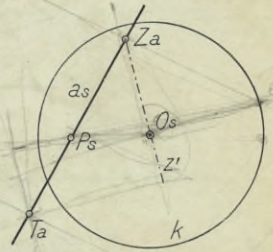
Rys. 9 a, b.

Rys. 9a przedstawia perspektywę trzech prostych prostopadłych do tła; rys. 9b jest perspektywą trzech prostych równoległych, nachylnych do tła pod  $\sphericalangle 45^\circ$ .

d) *Punkt i prosta.* W ust. 2 str. 2 zauważyliśmy, że punkt tła nie może być uważany za perspektywę jednego punktu przestrzeni, gdyż jest on równocześnie perspektywą wszystkich punktów, leżących na promieniu widzenia, który przez niego przechodzi. Aby punkt  $P_s$  był jednoznacznie odwzorowaniem perspektywnym punktu  $P$  przestrzeni, przyjmijmy dowolną prostą  $a$ , przechodzącą przez punkt  $P$  i znajdziemy jej perspektywę  $a_s$ . Prosta  $a_s$  przejdzie przez punkt  $P_s$  (rys. 10). Teraz możemy już przeprowadzić restytucję perspektywną i odnaleźć poło-



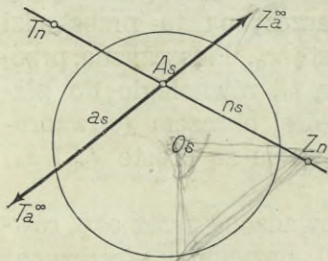
żenie punktu  $P$  w przestrzeni. W odległości równej promieniowi koła głębokości  $k$  od punktu głównego  $O_s$ , nad płaszczyznę rysunku, znajduje się oko. Promień, łączący oko ze śladem zbiegu  $Z_a$  prostej  $a$ , wyznacza kierunek tej prostej, która przechodzi przez ślad tłowy  $T_a$ . Promień, łączący oko z punktem  $P_s$ , przetnie prostą  $a$  w punkcie  $P$ .



Rys. 10.

Tak więc, aby oznaczyć metodą rzutu środkowego (zapomocą perspektywy) położenie punktu w przestrzeni, obieramy go zawsze na jakiejś prostej i znajdujemy perspektywę zarówno tego punktu, jak i tej prostej.

e) *Proste równoległe do tła.* Zarówno ślad zbiegu, jak i ślad tłowy prostej równoległej do tła są punktami niewłaściwymi. Perspektywa takiej prostej jest prostą, podług której płaszczyzna  $\varphi$ , przechodząca przez nią i przez oko, przecina tło. Ale dowolna prosta przyjęta na tle nie wyznacza położenia prostej, równoległej do tła, w sposób jednoznaczny. Jest ona bowiem równocześnie perspektywą wszystkich prostych równoległych do tła, leżących na płaszczyźnie  $\varphi$ .



Rys. 11.

Aby prosta  $a_s$  (rys. 11) była perspektywą jednej prostej  $a$ , równoległej do tła, obrzemy na niej punkt  $A_s$ , przez który poprowadzimy prostą  $n_s$ . Punkty  $T_n$  i  $Z_n$  tej prostej uważamy za jej ślady. Pośrednictwo prostej  $n$ , przecinającej prostą  $a$  w punkcie  $A$ ,

umożliwiło wyznaczenie położenia jednego punktu prostej  $a$ . Ponieważ prócz punktu  $A$  znany jest i kierunek prostej  $a$ , więc tym sposobem zadanie zostało rozwiązane w sposób jednoznaczny.

**4. Perspektywa płaszczyzn.** a) *Wyznaczenie płaszczyzny.* Dowolnie w przestrzeni przyjęta płaszczyzna  $\alpha$  (rys. 12) przecina tło  $\pi$  wzdłuż prostej  $t_a$ , którą nazywamy *śladem tłowym* tej płaszczyzny. Płaszczyzna  $\zeta$ , poprowadzona przez oko, równoległe do płaszczyzny  $\alpha$ , t. zw. *płaszczyzna zbiegu*, przecina tło wzdłuż prostej  $z_a$ , zwanej *śladem zbiegu* płaszczyzny  $\alpha$ .

*Ślad tłowy  $t_a$  i równoległy do niego ślad zbiegu  $z_a$ , wyznaczają w sposób jednoznaczny położenie płaszczyzny  $\alpha$ , w odniesieniu do danego tła i oka.*

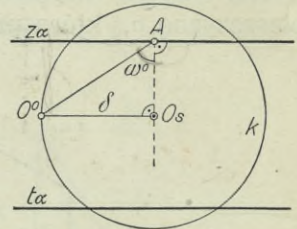
W istocie, wyznaczywszy — przy danym punkcie głównym  $O_s$  i danym kole głębokości  $k$  (rys. 13) — położenie oka  $O$ , które leży nad płaszczyzną rysunku, w odległości równej promieniowi koła  $k$ , odmie-





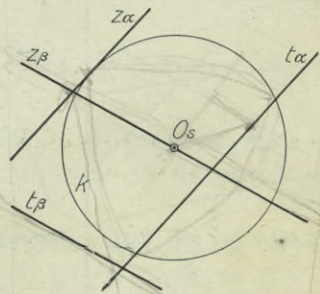


Płaszczyzna trójkąta  $O_s A O$  jest prostopadłą do tła i prostopadłą w punkcie  $A$  do śladu zbiegu  $z_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 14). Obróćmy ten trójkąt około przyprostokątnej  $\overline{O_s A}$  na tło, czyli wykonajmy jego kład. W tym celu wykreślmy w punkcie głównym  $O_s$  prostopadłą do boku  $\overline{O_s A}$ , która przetnie koło głębokości w punkcie  $O^0$ , kładzie oka. Kąt  $O^0 A O_s = \omega^0$  równy jest kątowi  $\omega$  i wyraża nachylenie płaszczyzny  $\alpha$  do tła.



Rys. 14.

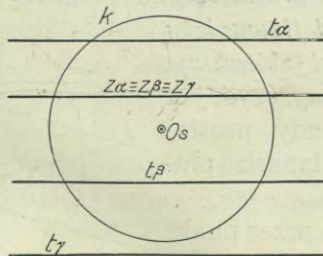
Z rysunków 12 i 14 widzimy wprost, że wielkość kąta nachylenia płaszczyzny do tła zależy jedynie od oddalenia jej śladu zbiegu od punktu głównego. Ze wzrostem tego oddalenia kąt  $\omega$  maleje. W szczególności jeżeli ślad zbiegu płaszczyzny przecina koło głębokości, to kąt  $\omega$  jest większy od  $45^\circ$  (rys. 14) i staje się kątem prostym, gdy ślad zbiegu przechodzi przez punkt główny (płaszczyzna  $\beta$  na rys. 15). Jeżeli ślad zbiegu płaszczyzny jest styczny do koła głębokości, to kąt nachylenia tej płaszczyzny do tła wynosi  $45^\circ$  (płaszczyzna  $\alpha$  na rys. 15).



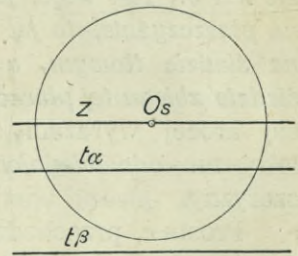
Rys. 15.

c) *Płaszczyzny równoległe.* Pęk płaszczyzn równoległych przecina tło wzdłuż prostych do siebie równoległych. Wszystkie płaszczyzny pęku posiadają jedną wspólną płaszczyznę zbiegu, równoległą do nich i przechodzącą oczywiście przez oko, a przecinającą tło wzdłuż jednego śladu zbiegu, równoległego do śladów tłowych płaszczyzn pęku.

Rys. 16 jest perspektywą trzech płaszczyzn równoległych, nachylonych do tła pod kątem większym od  $45^\circ$ .



Rys. 16.



Rys. 17.

Rys. 17 przedstawia odwzorowanie perspektywiczne dwóch płaszczyzn równoległych i prostopadłych do tła a równocześnie poziomych.

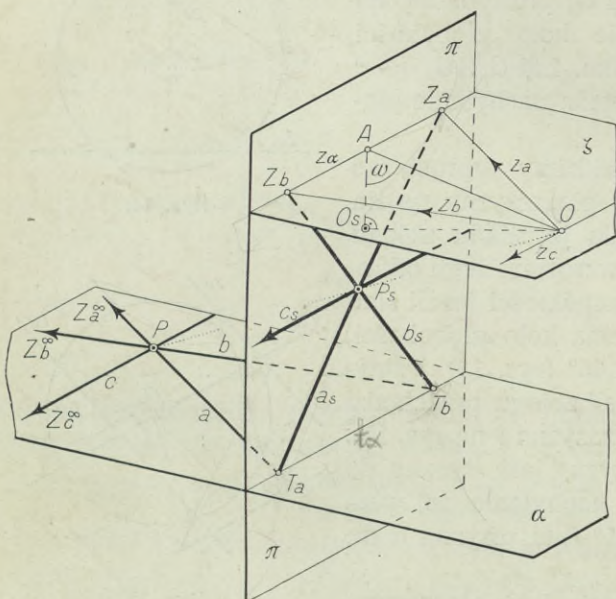
d) *Płaszczyzna równoległa do tła.* Oba ślady płaszczyzny równoległej do tła leżą nieograniczenie daleko na tle, są prostą niewłaściwą



płaszczyzny rysunku. Ustalenie położenia takiej płaszczyzny wymaga znajomości położenia jednego jej punktu, danego na dowolnej prostej.

**5. Proste i punkty na płaszczyźnie.** a) Weźmy pod uwagę płaszczyznę  $\alpha$ , która przecina tło  $\pi$  (rys. 18) wzdłuż prostej  $t_a$ , (czytelnik zechce ozna-

czyć prostą  $T_a - T_b$  znakiem  $t_a$ ), a której śladem zbiegu jest prosta  $z_a$ . Przyjęta na płaszczyźnie  $\alpha$  dowolna prosta  $a$  przebija tło w punkcie  $T_a$ , który leży na śladzie  $t_a$ ; promień zbiegu  $z_a$ , prostej  $a$ , leży na płaszczyźnie zbiegu  $\zeta$  i przebija tło w punkcie  $Z_a$ , leżącym na śladzie zbiegu  $z_a$  płaszczyzny  $\alpha$ . Prosta  $a_s$ , wyznaczona punktami  $T_a$  i  $Z_a$ , jest perspektywą prostej  $a$ , leżącej na płaszczyźnie  $\alpha$ . Podobnie prosta  $b_s$  jest obrazem

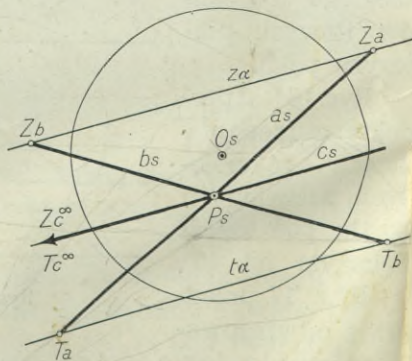


Rys. 18.

prostej  $b$ , przyjętej również na płaszczyźnie  $\alpha$ . Punkt  $P_s$  przecięcia się prostych  $a_s$  i  $b_s$  jest perspektywą punktu  $P$ , w którym przecinają się proste  $a$  i  $b$ . Tak więc, jeżeli prosta leży na płaszczyźnie, to jej ślad tłowy leży na śladzie tłowym, a ślad zbiegu na śladzie zbiegu tej płaszczyzny, czyli, jak się krócej wyrażamy: ślady prostej leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny.

Prosta  $c$ , przechodząca przez punkt  $P$ , równoległa do śladu tłowego  $t_a$ , jest równoległą do tła. Oba jej ślady są punktami niewłaściwymi, a jej perspektywa  $c_s$  przechodzi przez punkt  $P_s$ , równoległa do śladu  $t_a$  a więc i  $z_a$ .

Obrazem perspektywnym płaszczyzny  $\alpha$  i trzech znajdujących się na niej prostych jest rys. 19. Płaszczyzna  $\alpha$  zawiera z tłem kąt większy

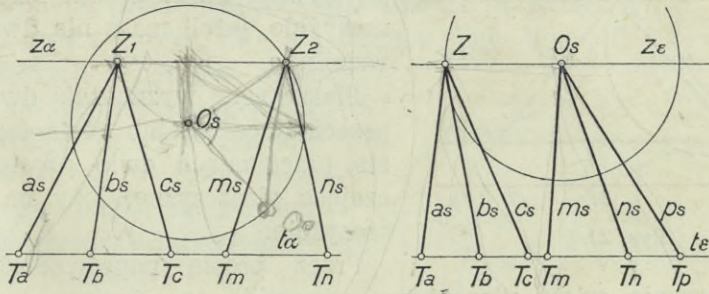


Rys. 19.



aniżeli  $45^\circ$ , proste  $a$  i  $b$  kąty mniejsze od  $45^\circ$ , a prosta  $c$  jest równoległą do tła.

Rys. 20a przedstawia płaszczyznę  $\alpha$ , nachyloną do tła pod kątem większym, aniżeli  $45^\circ$ , na której znajdują się proste  $a$ ,  $b$  i  $c$  do siebie

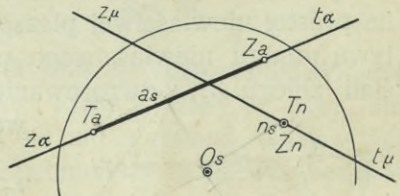


Rys. 20 a, b.

równoległe, a zawierające z tłem kąt większy od  $45^\circ$ . Na płaszczyźnie  $\alpha$  leżą ponadto dwie proste równoległe  $m$  i  $n$ , nachylone do tła pod kątem  $45^\circ$ .

Rys. 20b jest perspektywą płaszczyzny  $\epsilon$ , prostopadłej do tła (ślad zbiegu  $z_\epsilon$  przechodzi przez punkt główny) i dwóch trójek prostych równoległych, leżących na tej płaszczyźnie. Proste  $a$ ,  $b$  i  $c$  są nachylone do tła pod kątem  $45^\circ$ , proste  $m$ ,  $n$  i  $p$  są do tła prostopadłe.

Rys. 21 przedstawia dwie płaszczyzny rzucające  $\alpha$  i  $\mu$ . Na pierwszej z nich leży prosta  $a$ , zawierająca z tłem kąt większy, aniżeli  $45^\circ$ . Na płaszczyźnie  $\mu$  przyjęliśmy prostą  $n$ , przechodzącą przez oko. Perspektywą tej prostej jest punkt  $T_n \equiv Z_n$ , w którym schodzą się oba jej ślady.



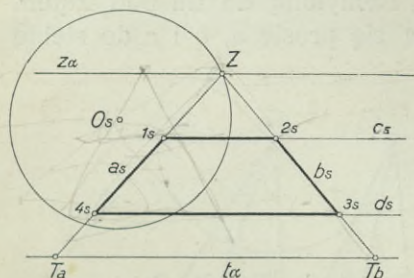
Rys. 21.

b) Aby wyznaczyć perspektywę punktu, leżącego na płaszczyźnie, której ślady są dane, należy przyjąć na płaszczyźnie prostą, a na niej dopiero punkt.

Równoległe do siebie proste  $t_\alpha$  i  $z_\alpha$  na rys. 22 przedstawiają odwzorowanie perspektywiczne płaszczyzny  $\alpha$ , nachylonej do tła pod kątem większym, aniżeli  $45^\circ$ . Proste  $a_s$  i  $b_s$  są perspektywą prostych  $a$  i  $b$ , leżących na płaszczyźnie  $\alpha$ , a nachylonych do tła pod kątem  $45^\circ$ . Punkty  $1_s$  i  $4_s$ , przyjęte na prostej  $a_s$ , stanowią perspektywę punktów  $1$  i  $4$ , leżących na płaszczyźnie  $\alpha$ . Podobnie punkty  $2_s$  i  $3_s$ , przyjęte na prostej  $b_s$ , są odwzorowaniem punktów  $2$  i  $3$ , leżących także na płaszczyźnie  $\alpha$ .



Trapez  $1_s 2_s 3_s 4_s$  jest więc perspektywą równoległoboku, leżącego na płaszczyźnie  $\alpha$ . Boki  $1, 2$  i  $3, 4$  tego równoległoboku są równoległe do tła.



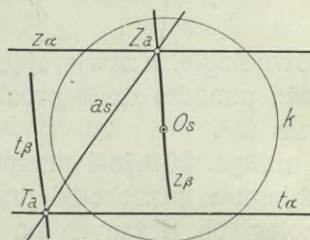
Rys. 22.

**6. Płaszczyzny przechodzące przez proste.** Prostą wyznaczają dwa jej punkty, stąd: prosta leży na płaszczyźnie, jeżeli ma z nią dwa punkty wspólne.

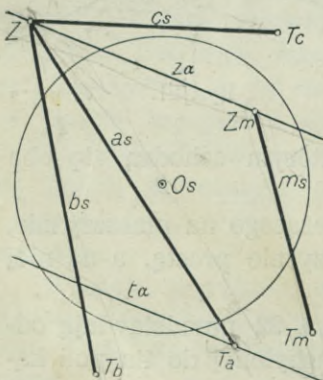
Płaszczyznę wyznaczają dwie proste przecinające się lub równoległe; prosta, przecinająca dwie proste wyznaczające płaszczyznę, leży na tej płaszczyźnie.

Przez prostą poprowadzić można nieograniczenie wiele płaszczyzn; wszystkie one tworzą pęk, którego osią (krawędzią) jest owa prosta.

Płaszczyzna  $\alpha$ , której ślad tłowy  $t_\alpha$  przechodzi przez ślad tłowy  $T_\alpha$  prostej  $a$ , a ślad zbiegu  $z_\alpha$  przez ślad zbiegu  $Z_\alpha$  tej prostej, przechodzi przez tę prostą (rys. 23). Prosta  $a$  ma z płaszczyzną  $\alpha$  dwa punkty wspólne: pierwszym jest jej ślad tłowy  $T_\alpha$ , leżący na śladzie tłowym  $t_\alpha$ , drugim punkt niewłaściwy, leżący na prostej niewłaściwej płaszczyzny. Perspektywą punktu niewłaściwego prostej  $a$  jest jej ślad zbiegu  $Z_\alpha$ , odwzorowaniem perspektywnym prostej niewłaściwej płaszczyzny  $\alpha$  jest jej ślad zbiegu  $z_\alpha$ .



Rys. 23.



Rys. 24.

Między płaszczyznami przechodzącymi przez prostą znajduje się jedna prostopadła do tła. Jej ślad zbiegu  $z_\beta$  (rys. 23) przechodzi przez punkt główny  $O_s$ .

### 7. Proste równoległe do płaszczyzny

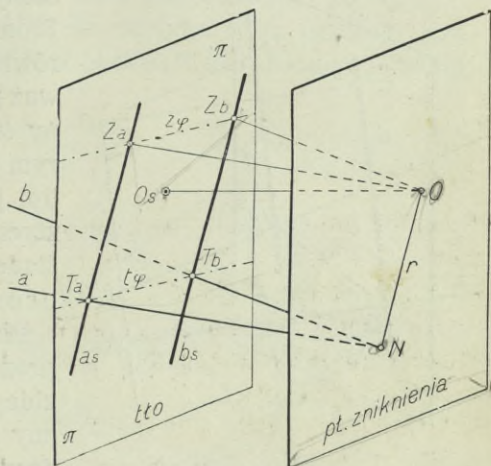
Prosta jest równoległa do płaszczyzny, jeżeli jest równoległa do prostej, leżącej na tej płaszczyźnie. Ponieważ proste równoległe posiadają wspólny ślad zbiegu, a ślad zbiegu prostej, leżącej na płaszczyźnie, leży na śladzie zbiegu tej płaszczyzny, więc: *ślad zbiegu prostych równoległych do płaszczyzny leży na śladzie zbiegu tej płaszczyzny.*

Prosta  $a_s$  na rys. 24 jest perspektywą prostej  $a$ , leżącej na płaszczyźnie  $\alpha$ , wyznaczonej śladami  $t_\alpha$  i  $z_\alpha$ . Proste  $b_s$  i  $c_s$ , przecinające się w wspólnym śladzie zbiegu  $Z$  z prostą  $a_s$ , są perspektywami prostych  $b$  i  $c$ .



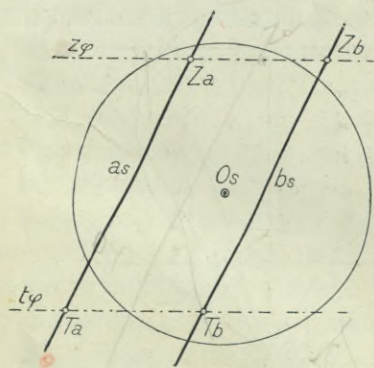
równoległych do prostej  $a$ , a więc równoległych do płaszczyzny  $\alpha$ . Prosta  $m_s$ , której ślad zbiegu  $Z_m$  leży na śladzie zbiegu  $z_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , jest perspektywą prostej  $m$ , również równoległej do tej płaszczyzny.

**8. Proste przecinające się. Proste skośne.** Z ust. 5 wynika, że jeżeli prosta  $t_\alpha$  (rys. 18 i 19), łącząca ślady tłowe  $T_a$  i  $T_b$  dwóch danych prostych  $a$  i  $b$ , jest równoległa do prostej  $z_\alpha$ , łączącej ślady zbiegu  $Z_a$  i  $Z_b$  tych samych prostych, to owe dwie proste równoległe są śladami jednej płaszczyzny, przechodzącej przez proste  $a$  i  $b$  w przestrzeni. I odwrotnie: jeżeli prosta, łącząca ślady tłowe dwóch prostych, jest równoległa do prostej, która przechodzi przez ślady zbiegu tych samych prostych — to owe dwie proste, śladami temi wyznaczone, leżą na jednej płaszczyźnie, a więc przecinają się w punkcie.



Rys. 25.

Jeżeli prosta, łącząca ślady tłowe dwóch prostych, nie jest równoległa do prostej, wyznaczonej śladami zbiegu tych prostych — to owe dwie proste, których ślady są dane, nie przecinają się ani w punkcie właściwym, ani w punkcie niewłaściwym. Proste takie określamy mianem prostych *skośnych*.



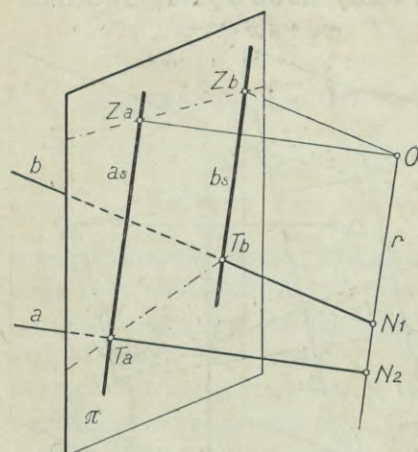
Rys. 26.

Jeżeli proste  $a$  i  $b$  (rys. 25) przecinają się w punkcie  $N$  na płaszczyźnie zniknienia, to ich perspektywy  $a_s$  i  $b_s$  są prostami równoległymi do siebie. Równocześnie jednak prosta  $t_\varphi$ , łącząca ślady tłowe  $T_a$  i  $T_b$  prostych  $a$  i  $b$ , jest równoległa do prostej  $z_\varphi$ , która przechodzi przez ich ślady zbiegu  $Z_a$  i  $Z_b$ . Prosta  $t_\varphi$  jest śladem tłowym, a prosta  $z_\varphi$  śladem zbiegu płaszczyzny  $\varphi$ , przechodzącej przez przecinające się, na płaszczyźnie zniknienia, proste  $a$  i  $b$  (rys. 26).

Jeżeli prosta  $T_a - Z_a$  (rys. 27) jest równoległa do prostej  $T_b - Z_b$ , ale równocześnie proste  $T_a - T_b$  i  $Z_a - Z_b$  nie są do siebie równoległe,

to wówczas mamy perspektywę dwóch prostych skośnych  $a$  i  $b$ , przecinających prostą  $r$ , leżącą na płaszczyźnie zniknięcia, a przechodzącą przez oko.

**9. Proste prostopadłe do płaszczyzny.** a) Jeżeli prosta  $a$  (rys. 28a) jest prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ , to jest równocześnie prostopadłą do wszystkich prostych tej płaszczyzny, a więc i do jej śladu tłowego  $t_\alpha$ .

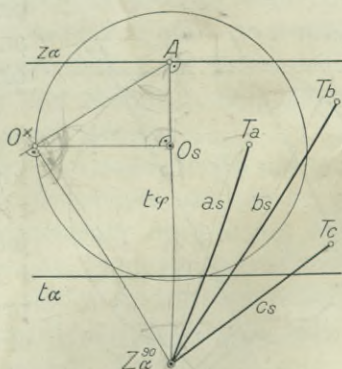
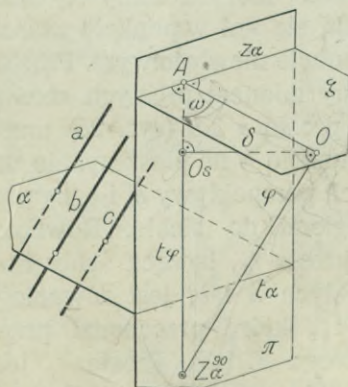


Rys. 27.

Promień zbiegu prostej  $a$  jest wobec tego również prostopadły do śladu  $t_\alpha$ . Ponieważ proste równoległe posiadają wspólny ślad zbiegu, więc punkt  $Z_\alpha^{90}$ , w którym promień zbiegu prostej  $a$  przebija tło, jest śladem zbiegu wszystkich prostych, równoległych do prostej  $a$ , czyli śladem zbiegu wszystkich prostych, prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ .

Płaszczyzna  $\varphi$ , przechodząca przez promień główny  $O-O_s$  i przez promień zbiegu  $O-Z_\alpha^{90}$  prostopadły do płaszczyzny zbiegu  $\zeta$ , jest prostopadłą zarówno do płaszczyzny tła, jak i do płaszczyzny  $\zeta$ .

Wobec tego jest płaszczyzna  $\varphi$  prostopadłą do krawędzi płaszczyzny tła i płaszczyzny  $\zeta$ , czyli do śladu  $z_\alpha$ . Nawzajem prosta  $z_\alpha$  jest prostopadłą do płaszczyzny  $\varphi$ , a zatem prosto-



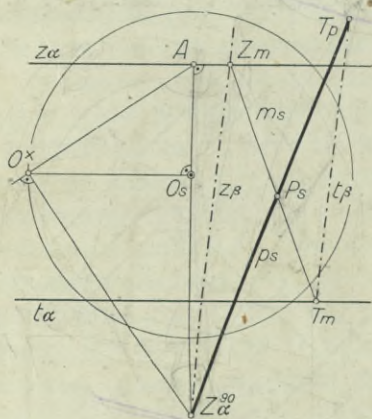
Rys. 28 a, b.

padłą do wszystkich prostych tej płaszczyzny, więc także zarówno do prostej  $OA$ , jak i prostej  $t_\varphi$ . Ta ostatnia jest śladem płaszczyzny  $\varphi$  na tle, a równocześnie rzutem prostokątnym promienia zbiegu  $OZ_\alpha^{90}$  na tło.

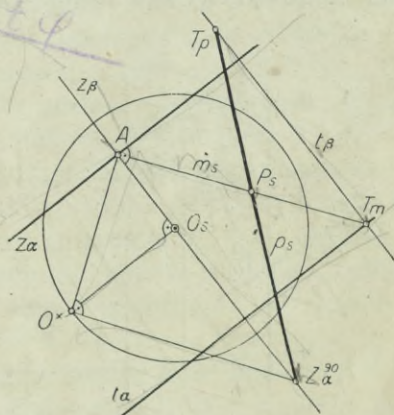


Trójkąt  $OA Z_{\alpha}^{90}$  jest trójkątem prostokątnym w wierzchołku  $O$ ; kąt  $OA Z_{\alpha}^{90} = \omega$  równy jest kątowi nachylenia płaszczyzny  $\alpha$  do tła.

Jeżeli dane są ślady  $t_{\alpha}$  i  $z_{\alpha}$  płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 28 b), to w celu znalezienia śladu zbiegu  $Z_{\alpha}^{90}$  prostych prostopadłych do tej płaszczyzny wykreślimy z punktu głównego  $O_s$  prostą  $t_{\rho}$ , prostopadłą do śladu zbiegu  $z_{\alpha}$  i przecinającą go w punkcie  $A$ . W punkcie  $O_s$  poprowadzimy prostopadłą do prostej  $t_{\rho}$ , która przetnie dane koło głębokości w punkcie  $O^{\times}$ . Prostopadła wykreślona w tym punkcie do odcinka  $\overline{O^{\times}A}$  przetnie prostą  $t_{\rho}$  w szukanym punkcie  $Z_{\alpha}^{90}$ . Trójkąt  $AO^{\times}Z_{\alpha}^{90}$  jest kładem, na tło,



Rys. 29.



Rys. 30.

trójkąta  $AO Z_{\alpha}^{90}$ , leżącego na prostopadłej do tła płaszczyźnie  $\rho$ . Kład ten wykonaliśmy przez obrót trójkąta  $AO Z_{\alpha}^{90}$  około jego przeciwprostokątnej  $\overline{AZ_{\alpha}^{90}}$ , leżącej na tle.

Jeżeli punkty  $T_a, T_b, \dots$  uważać będziemy za ślady tłowe prostych  $a, b, \dots$  to proste  $a_s, b_s, \dots$  łączące te punkty ze śladem  $Z_{\alpha}^{90}$ , są perspektywą prostych, prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ .

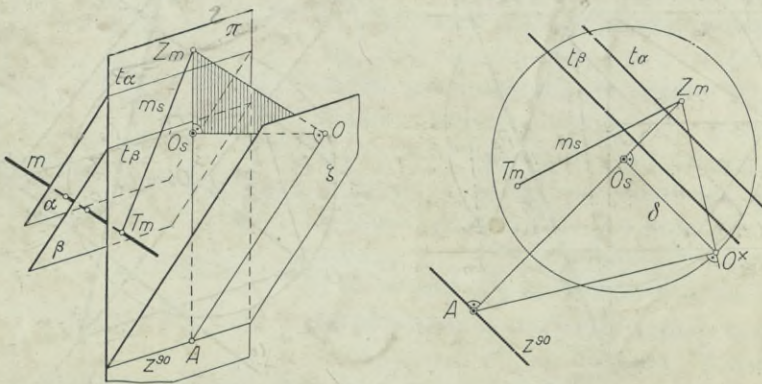
b) Wykreślić perspektywę prostej, prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha$ , w jej danym punkcie  $P$  (rys. 29). Na płaszczyźnie  $\alpha$ , której ślady  $t_{\alpha}$  i  $z_{\alpha}$  są dane, przyjęliśmy prostą  $m$ , a na niej punkt  $P$ . Ślady  $T_m$  i  $Z_m$  prostej  $m$ , leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny  $\alpha$ . Perspektywa  $P_s$  punktu  $P$ , leży na perspektywie  $m_s$  prostej  $m$ .

W sposób omówiony w punkcie a) tego ustępu, znajdziemy ślad zbiegu  $Z_{\alpha}^{90}$  prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$  i połączymy go z punktem  $P_s$  prostą  $p_s$ , która jest perspektywą szukaney prostej  $p$ . Pozostaje do wyznaczenia ślad tłowy  $T_p$  tej prostej. Ponieważ prosta  $p$  przecina prostą  $m$  w punkcie  $P$ , więc prosta  $z_{\beta}$ , łącząca ślady zbiegu  $Z_m$  i  $Z_{\alpha}^{90}$ , jest śladem zbiegu płaszczyzny  $\beta$ , wyznaczonej prostymi  $p$  i  $m$ .



Ślad tłowy  $t_\beta$  tej płaszczyzny przejdzie przez ślad tłowy  $T_m$  prostej  $m$ , równoległe do śladu  $z_\beta$ , i przetnie prostą  $p_s$  w punkcie  $T_p$ , który jest śladem tłowym prostej  $p$ .

Niechaj prosta  $m$  płaszczyzny  $\alpha$ , na której przyjęty jest punkt  $P$ , będzie prostopadłą do śladu tłowego tej płaszczyzny. Śladem zbiegu tej prostej jest punkt  $A$  (rys. 30), w którym prosta  $z_\beta$ , wykreślona z punktu głównego  $O_s$ , prostopadłe do śladu zbiegu  $z_\alpha$ , ślad ten przecina. W tym wypadku płaszczyzna  $\beta$ , przechodząca przez proste  $m$  i  $p$ , będzie prostopadłą do tła; jej ślad zbiegu  $z_\beta$  przejdzie przez punkt główny, i wraz ze śladem tłowym  $t_\beta$  będzie prostopadły do śladów płaszczyzny  $\alpha$ .



Rys. 31 a, b.

**10. Płaszczyzny prostopadłe do prostej.** a) Płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 31a) są prostopadłe do prostej  $m$ ; płaszczyzna zbiegu  $\zeta$  tych płaszczyzn, przechodząca przez oko równoległe do nich, przetnie tło wzdłuż prostej  $z^{90}$ , równoległej do ich śladów tłowych  $t_\alpha$  i  $t_\beta$ .

Promień zbiegu  $OZ_m$  prostej  $m$ , jest prostopadły do płaszczyzn  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\zeta$ , a więc i do prostych  $t_\alpha$ ,  $t_\beta$  i  $z^{90}$ . Rzut prostokątny  $O_s - Z_m$  promienia  $O - Z_m$  na tło jest prostopadły do śladów  $t_\alpha$ ,  $t_\beta$  i  $z^{90}$  i przecina ślad  $z^{90}$  w punkcie  $A$ . Płaszczyzna, przechodząca przez punkty  $OZ_mA$ , jest prostopadłą zarówno do tła, jak i do płaszczyzny  $\zeta$ , a więc i do śladu  $z^{90}$ . Trójkąt  $AOZ_m$  jest trójkątem prostokątnym w wierzchołku  $O$ .

Jeżeli znamy ślady  $T_m$  i  $Z_m$  prostej  $m$ , to ślad zbiegu płaszczyzn prostopadłych do tej prostej znajdziemy w sposób następujący: łączymy ślad zbiegu  $Z_m$  z punktem głównym  $O_s$  i z okiem  $O$ . W punkcie  $O$  poprowadzimy do odcinka  $OZ_m$ , na płaszczyźnie  $OZ_mO_s$  prostopadłej do tła, prostopadłą, która przetnie prostą  $Z_m - O_s$  w punkcie  $A$ . Szukany ślad zbiegu  $z^{90}$  przejdzie przez punkt  $A$ , prostopadłe do odcinka  $Z_mA$ .

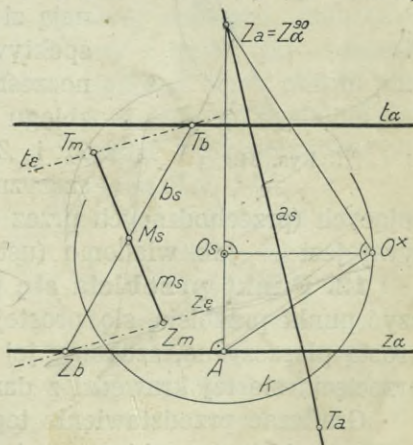


Płaszczyzna trójkąta  $OZ_mA$  jest prostopadłą do płaszczyzny rysunku i dlatego zmuszeni jesteśmy wykonać jej kład około przeciwprostokątnej  $Z_mA$  (rys. 31 b). W punkcie głównym  $O_s$  kreślimy prostopadłą do prostej  $Z_m - O_s$ ; na kole głębokości otrzymamy kład  $O^x$  oka. Prostopadła wykreślona do odcinka  $Z_m - O^x$  w punkcie  $O^x$ , przecina prostą  $Z_m - O_s$  w punkcie  $A$ , przez który przechodzi szukany ślad zbiegu  $z^{90}$  płaszczyzn, prostopadłych do danej prostej  $m$ . Proste  $t_\alpha$  i  $t_\beta$ , równoległe do  $z^{90}$ , są śladami tłowymi dwóch takich płaszczyzn.

b) *Poprowadzić płaszczyznę prostopadłą w punkcie  $P$  do prostej  $p$ .* Konstrukcyjnie zadanie to pokrywa się z przeprowadzonym w ust. 9 pkt b. Jeżeli bowiem prosta  $p$  jest prostopadłą w punkcie  $P$  do płaszczyzny  $\alpha$ , to w tym punkcie płaszczyzna  $\alpha$  jest prostopadłą do prostej  $p$ .

Oznaczmy ślad zbiegu danej prostej  $p$  symbolem  $Z_a^{90}$  (rys. 30) i połączmy go z punktem głównym  $O_s$  prostą  $z_\beta$ . Prostopadła wykreślona w punkcie  $O_s$  do  $z_\beta$ , przetnie koło głębokości w punkcie  $O^x$ , który połączymy ze śladem  $Z_a^{90}$ . Wykreślimy w punkcie  $O^x$  prostopadłą do  $O^x Z_a^{90}$  i oznaczmy jej punkt przecięcia się z prostą  $z_\beta$  literą  $A$ . Prosta  $z_\alpha$ , wykreślona w punkcie  $A$  prostopadłe do prostej  $z_\beta$ , jest śladem zbiegu wszystkich płaszczyzn prostopadłych do prostej  $p$ . Jedna z nich przechodzi przez punkt  $P$ ; jej ślad tłowy znajdziemy w sposób następujący: łączymy punkt  $A$  z punktem  $P_s$  prostą  $m_s$ , uważając ją za perspektywę prostej  $m$ , która przecina prostą  $p$  w punkcie  $P$  i leży na szukanej płaszczyźnie  $\alpha$ . Śladem zbiegu prostej  $m$  jest punkt  $A$ , a śladem tłowym punkt  $T_m$ , w którym prosta  $t_\beta$ , poprowadzona przez ślad  $T_p$  równoległe do  $z_\beta$ , przecina prostą  $m_s$ . W istocie, skoro proste  $p$  i  $m$  przecinają się, więc leżą na jednej płaszczyźnie  $\beta$ , której ślady  $z_\beta$  i  $t_\beta$  muszą być do siebie równoległe. Prosta  $t_\alpha$ , wykreślona przez punkt  $T_m$ , równoległe do  $z_\alpha$ , jest śladem tłowym płaszczyzny  $\alpha$ , prostopadłej do prostej  $p$  w punkcie  $P$ .

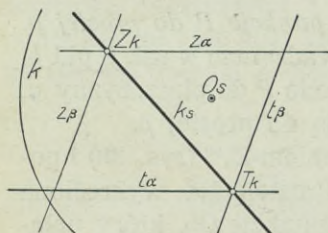
c) *Poprowadzić przez punkt  $M$ , leżący na prostej  $m$ , płaszczyznę  $\alpha$ , prostopadłą do danej prostej  $a$*  (rys. 32). Ponieważ prosta  $a$  będzie prostopadłą do szukanej płaszczyzny  $\alpha$ , więc ślad zbiegu  $Z_a$  tej prostej możemy uważać za ślad zbiegu  $Z_a^{90}$  wszystkich prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ . Połączmy punkt  $Z_a \equiv Z_a^{90}$  z punktem głównym  $O_s$  i wykreślimy trójkąt prostokątny  $Z_a O^x A$ . Ślad zbiegu  $z_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  przejdzie przez punkt  $A$ , prostopadłe do przeciwprostokąt-



Rys. 32.



nej  $Z_a A$ . Aby otrzymać ślad tłowy  $t_a$  płaszczyzny  $\alpha$ , poprowadźmy przez punkt  $M$  dowolną prostą  $b$ , leżącą na tej płaszczyźnie. Ślad zbiegu  $Z_b$  prostej  $b$  leżeć będzie na śladzie zbiegu  $z_a$  płaszczyzny  $\alpha$ . Ponieważ prosta  $b$  przecina prostą  $m$ , więc ślad tłowy  $t_b$  płaszczyzny  $\beta$ , wyznaczonej przez te proste, będzie równoległy do śladu zbiegu  $z_b$  tej płaszczyzny i przetnie prostą  $b$  w punkcie  $T_b$ , śladzie tłowym prostej  $b$ . Prosta  $t_a$ , przechodząca przez punkt  $T_b$  równoległe do śladu  $z_a$ , jest śladem tłowym płaszczyzny  $\alpha$ , która przechodzi przez punkt  $M$  i jest prostopadła do prostej  $a$ .



Rys. 33.

się prostych, leżących na jednej płaszczyźnie, z płaszczyzną drugą. Punkt  $T_k$  (rys. 33) przecięcia się śladów tłowych  $t_a$  i  $t_b$  dwóch płaszczyzn jest jednym punktem, leżącym równocześnie na obu płaszczyznach, a więc punktem ich krawędzi.

Punkt ten leży na tle, jest więc równocześnie swoją perspektywą i śladem tłowym krawędzi. Punkt  $Z_k$ , w którym przecinają się ślady zbiegu obu płaszczyzn, jest perspektywą punktu niewłaściwego, leżącego równocześnie na obu płaszczyznach, więc śladem zbiegu ich krawędzi. Prosta  $k_s$ , łącząca ślady  $T_k$  i  $Z_k$ , jest perspektywą krawędzi  $k$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Krawędź dwóch płaszczyzn rzucających (przechodzących przez oko) przechodzi przez oko; jej perspektywą jest — jak wiadomo (ust. 3, str. 5) — punkt  $T_k \equiv Z_k$  (rys. 34).

Punkt ten leży na tle, jest więc równocześnie swoją perspektywą i śladem tłowym krawędzi. Punkt  $Z_k$ , w którym przecinają się ślady zbiegu obu płaszczyzn, jest perspektywą punktu niewłaściwego, leżącego równocześnie na obu płaszczyznach, więc śladem zbiegu ich krawędzi. Prosta  $k_s$ , łącząca ślady  $T_k$  i  $Z_k$ , jest perspektywą krawędzi  $k$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Krawędź dwóch płaszczyzn rzucających (przechodzących przez oko) przechodzi przez oko; jej perspektywą jest — jak wiadomo (ust. 3, str. 5) — punkt  $T_k \equiv Z_k$  (rys. 34).

**12. Punkt przebicia się prostej z płaszczyzną.** Aby wyznaczyć punkt przebicia się prostej z płaszczyzną, prowadzimy przez tę prostą płaszczyznę, szukamy jej krawędzi z daną płaszczyzną, a punkt przecięcia się tej krawędzi z daną prostą rozwiązuje zadanie.

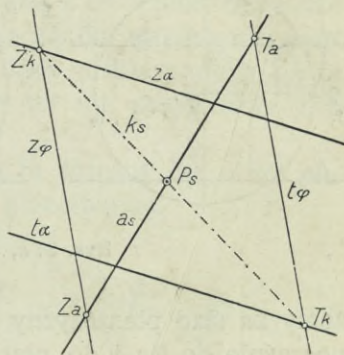
Graficzne przedstawienie tego zadania podaje rys. 35. Prosta  $a$  wyznaczona jest perspektywą  $a_s$  i śladami  $T_a$  i  $Z_a$ ; ślady  $t_a$  i  $z_a$  określają położenie płaszczyzny  $\alpha$ . Przez prostą  $a$  poprowadziliśmy płaszczyznę  $\varphi$ , prowadząc jej ślady  $t_\varphi$  i  $z_\varphi$  przez odpowiednie ślady prostej. Prosta  $k_s$  jest perspektywą krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varphi$ , a punkt  $P_s$  perspektywą punktu przebicia się prostej  $a$  z płaszczyzną  $\alpha$ .



Na rys. 35 nie zaznaczyliśmy ani punktu głównego ani głębokości łowej, wobec czego przeprowadzenie restytucji przestrzennej nie jest możliwe; zadanie jest nieoznaczone.

**13. Obroty i kłady płaszczyzn.**

a) Weźmy pod uwagę płaszczyznę  $\alpha$ , przecinającą tło wzdłuż prostej  $t_\alpha$  (rys. 36). Równoległa do płaszczyzny  $\alpha$  i przechodząca przez oko płaszczyzna  $\zeta$  przecina tło wzdłuż prostej  $z_\alpha$ , równoległej do prostej  $t_\alpha$ . Proste  $t_\alpha$  i  $z_\alpha$  są śladami płaszczyzny  $\alpha$  na tle. Płaszczyzna  $\varphi$ , poprowadzona przez oko, prostopadłe do śladu  $z_\alpha$ , jest prostopadłą zarówno do tła, jak i do płaszczyzn  $\zeta$  i  $\alpha$ . Przecina ona tło wzdłuż prostej  $q$ , a płaszczyznę  $\zeta$  wzdłuż prostej  $r$ . Obie te proste są prostopadłe do śladu zbiegu  $z_\alpha$  w punkcie  $A$  i tworzą kąt  $\omega$ , wyrażający nachylenie

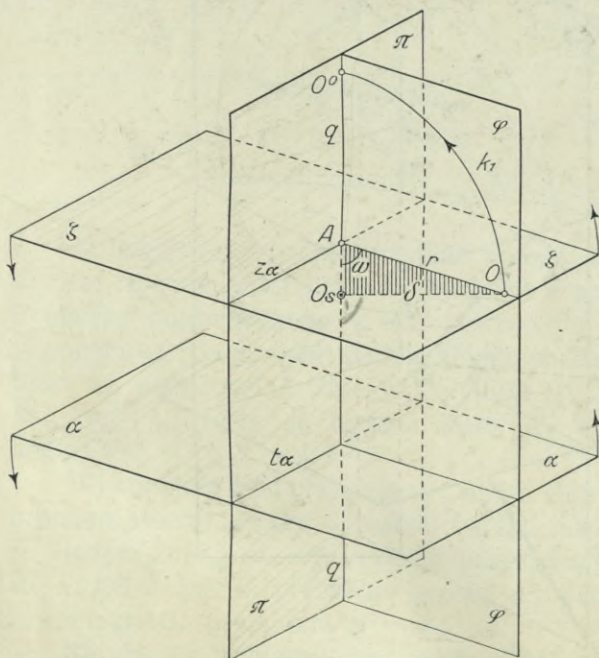


Rys. 35.

płaszczyzny  $\zeta$  do płaszczyzny tła. Kąt ten równy jest kątowi nachylenia płaszczyzny  $\alpha$  do tła.

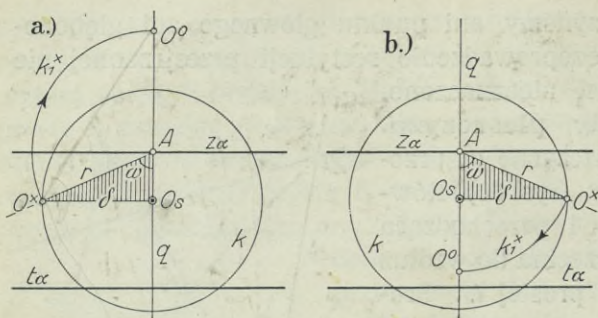
Przyjmijmy, że płaszczyzny  $\alpha$  i  $\zeta$  obracają się równocześnie i w tym samym kierunku, każda około swej krawędzi, jaką tworzy z tłem. Oko zakreśli podczas tego obrotu łuk koła, którego środkiem jest punkt  $A$  a promieniem odcinek  $\overline{AO}$ .

Po dokonaniu obrotu o kąt  $(180^\circ - \omega)$ , płaszczyzny  $\zeta$  i  $\alpha$  padną na tło; mówimy, że wykonany został *kład* tych płaszczyzn na tło. Kład płaszczyzny zbiegu  $\zeta$  sprowadzi na tło oko, które zajmie położenie punktu  $O^0$  na prostej  $q$ ,



Rys. 36.

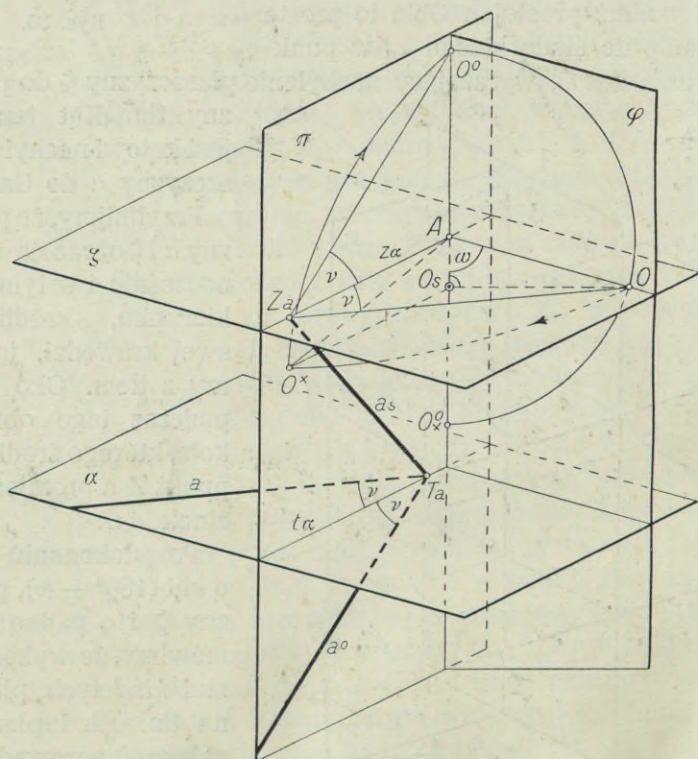
przyczem oczywiście odcinek  $\overline{AO^0} = \overline{AO}$ . Gdybyśmy obrót obu płaszczyzn wykonali w kierunku przeciwnym, to wówczas kład  $O^0$  oka  $O$  znalazłby się pod śladem zbiegu  $z_\alpha$ .



Rys. 37 a, b.

żemy za ślad płaszczyzny  $\varphi$ , przechodzącej przez oko i prostopadłej równocześnie do  $t_\alpha$  i do płaszczyzny  $\alpha$ . Na płaszczyźnie tej znajduje się

Niechaj promień główny będzie prostopadły do płaszczyzny rysunku (rys. 37 a), to wówczas kład płaszczyzny  $\alpha$ , wyznaczonej śladami  $t_\alpha$  i  $z_\alpha$ , wykonamy w sposób następujący: z punktu głównego  $O_s$  wykreślimy prostą  $q$  prostopadłą do śladu zbiegu  $z_\alpha$ . Prosta tę uważać mo-



Rys. 38.

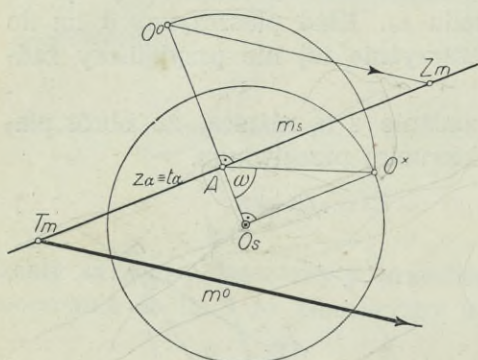
w odległości równej głębokości tłowej  $\delta$ , od punktu  $O_s$  ku nam — oko, a także prosta  $r$ , łącząca oko z punktem  $A$ . Obróćmy płaszczyznę  $\varphi$  około prostej  $q$  tak, aby padła na tło, czyli wykonajmy jej *kład*. Wtedy







Poglądowy rysunek 38 ułatwi zrozumienie konstrukcji układu płaszczyzny  $\alpha$ , wraz ze znajdującą się na niej prostą  $a$ , gdy kierunek promienia głównego będzie prostopadły do płaszczyzny rysunku (rys. 39).



Rys. 41.

Kład płaszczyzny zbiegu sprowadzi na tło oko (które zajmie położenie punktu  $O^0$ ) i promień zbiegu prostej  $a$ . Prosta  $a^0$ , wykreślona przez ślad tłowy  $T_a$ , prostej  $a$ , równoległe do kładu  $O^0 - Z_a$  jej promienia zbiegu, jest kładem prostej  $a$  na tło.

Jeżeli obrót płaszczyzny zbiegu, a więc i płaszczyzny  $\alpha$ , wykonamy w kierunku przeciwnym, to oko zajmie położenie punktu  $O^x$ , a zadanie kładu płaszczyzny  $\alpha$ , wraz ze znajdującą się na niej

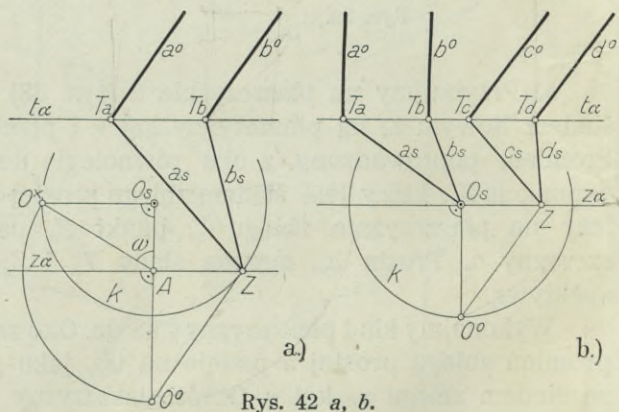
prostą  $a$ , przedstawi się tak, jak to widzimy na rys. 40.

Rys. 41 przedstawia kład rzucającej płaszczyzny  $\alpha$ , wraz ze znajdującą się na niej prostą  $m$ . Perspektywa  $m^s$  tej prostej schodzi się ze śladami  $z\alpha \equiv t\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ . Gdy płaszczyzna  $\alpha$  padnie na tło, prosta  $m$  zajmie położenie prostej  $m^0$ , przechodzącej przez ślad tłowy  $T_m$ , równoległe do promienia  $O^0 - Z_m$ .

Z rys. 42a czytamy: na płaszczyźnie  $\alpha$ , nachylonej do tła pod kątem  $\omega$ , leżą dwie proste równoległe  $a$  i  $b$ , nachylone do tła pod kątem  $45^\circ$ . Po sprowadzeniu płaszczyzny  $\alpha$  na tło, proste  $a$  i  $b$  zajmą położenie prostych  $a^0$  i  $b^0$ , równoległych do promienia  $O^0 - Z$ .

Rys. 42b jest perspektywą płaszczyzny  $\alpha$ , prostopadłej do tła, na której leżą proste  $a$  i  $b$  prostopadłe do tła i dwie proste równoległe  $c$  i  $d$ , nachylone do tła pod kątem większym, aniżeli  $45^\circ$ . Po dokonaniu kładzie płaszczyzny  $\alpha$ , proste na niej leżące padną także na tło, a to jako proste  $a^0$ ,  $b^0$  i  $c^0$ ,  $d^0$ .

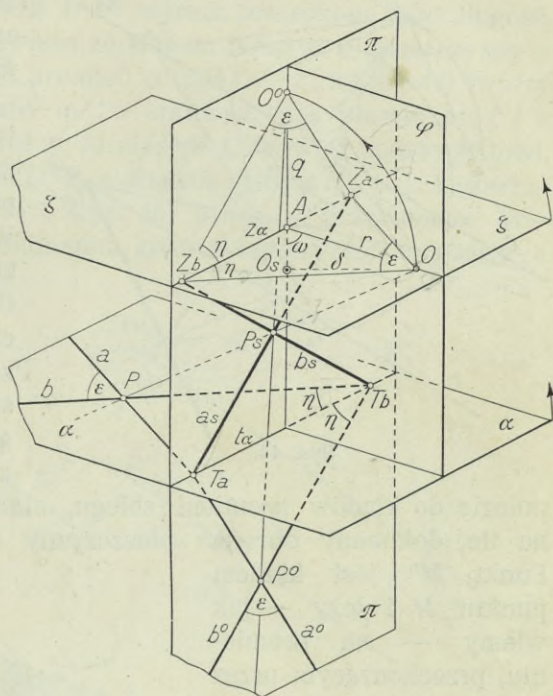
c) Przyjmijmy na płaszczyźnie  $\alpha$ , nachylonej do tła pod kątem  $\omega$ ,



Rys. 42 a, b.



proste  $a$  i  $b$ , przecinające się w punkcie  $P$  i zawierające ze sobą kąt  $\varepsilon$  (rys. 43). Promienie wykreślone z oka  $O$ , równoległe do tych prostych, przebiją tło w punktach  $Z_a$  i  $Z_b$ , leżących na śladzie zbiegu  $z_a$  płaszczyzny  $\alpha$ . Proste  $a_s$  i  $b_s$ , łączące ślady zbiegu  $Z_a$  i  $Z_b$  z punktami  $T_a$  i  $T_b$ , w których proste  $a$  i  $b$  przebijają tło, są perspektywą tych prostych. Punktowi  $P$  odpowiada na tle punkt  $P_s$ , jako jego perspektywa, leżąca wraz z nim na promieniu, przechodzącym przez oko.



Rys. 43.

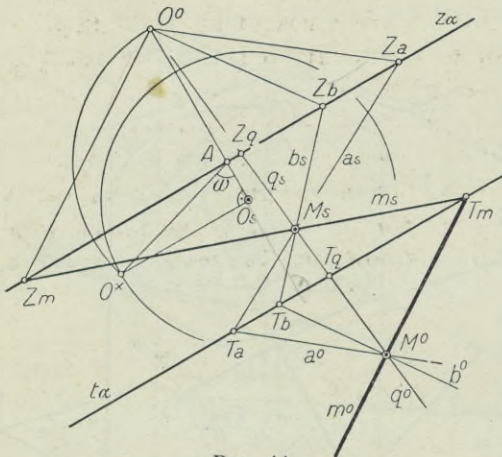
Obróćmy płaszczyznę  $\alpha$  około śladu  $t_a$ , a płaszczyznę zbiegu  $\zeta$  około jej śladu  $z_a$  — obie w tym samym kierunku i o ten sam kąt. Ślady tło-  
we  $T_a$  i  $T_b$  prostych  $a$  i  $b$  nie zmieniają swych położenia na śladzie  $t_a$  płaszczyzny  $\alpha$ . Oko  $O$  obróci się wraz z płaszczyzną  $\zeta$ , ale promienie zbiegu obu prostych pozostać muszą — według założenia — równoległe do tych prostych w ich nowym położeniu, tworząc ze sobą kąt  $\varepsilon$ . W czasie obrotu, ślady zbiegu  $Z_a$  i  $Z_b$  prostych  $a$  i  $b$  nie zmieniają swych położenia na śladzie zbiegu  $z_a$  płaszczyzny  $\alpha$ . Tak więc proste  $a_s$  i  $b_s$  pozostaną perspektywami prostych  $a$  i  $b$  w ich nowym położeniu, wywołanem obrotem płaszczyzny  $\alpha$  około jej śladu  $t_a$ .

Ponieważ to nowe położenie płaszczyzny  $\alpha$  zostało dokonane jej obrotem o kąt dowolny, więc proste  $a_s$  i  $b_s$  pozostaną perspektywami prostych  $a$  i  $b$  w każdym położeniu płaszczyzny  $\alpha$ , obracającej się około śladu  $t_a$ . Punkt  $P_s$  przecięcia się prostych  $a_s$  i  $b_s$  będzie — w każdym położeniu płaszczyzny  $\alpha$  — perspektywą punktu  $P$ , w którym przecinają się proste  $a$  i  $b$ , leżące na tej płaszczyźnie.

Niechaj płaszczyzny  $\alpha$  i  $\zeta$ , obracając się około swoich śladów, padną na tło. Oko zajmie położenie punktu  $O^0$ , a proste  $a$  i  $b$  padną na tło jako proste  $a^0$  i  $b^0$ , tworzące ze sobą kąt  $\varepsilon$  i równoległe do sprowadzonych na tło promieni zbiegu  $O^0 - Z_a$  i  $O^0 - Z_b$ . Wykonaliśmy kład



płaszczyzny  $\alpha$  na tło, a więc i kład leżących na niej prostych  $a$  i  $b$ . Punkt  $P^0$  jest kładem punktu  $P$ . Z tego, co powiedzieliśmy wyżej, wynika, że perspektywa  $P_s$  punktu  $P$  i jego kład  $P^0$  leżą na promieniu, przechodzącym przez kład  $O^0$  oka.



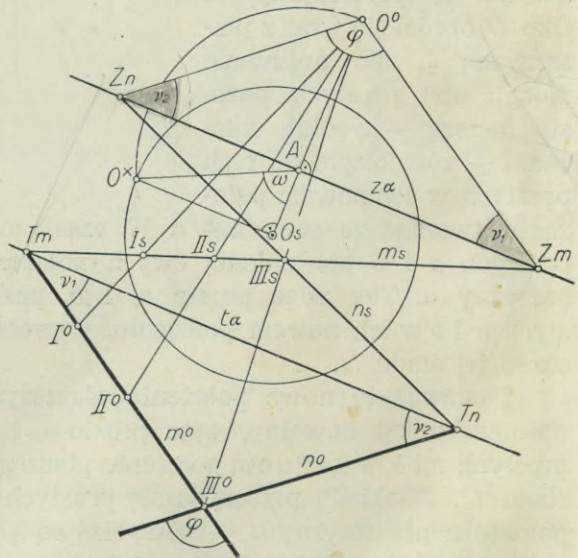
Rys. 44.

Rys. 44 przedstawia perspektywę płaszczyzny  $\alpha$ , na której znajdują się proste  $m$ ,  $a$  i  $b$ , przechodzące przez punkt  $M$ . Wykonaliśmy kład płaszczyzny zbiegu  $\zeta$  płaszczyzny  $\alpha$  na tło. Oko znalazło się na tle w punkcie  $O^0$ . Proste, łączące punkt  $O^0$  ze śladami zbiegu  $Z_m$ ,  $Z_a$  i  $Z_b$ , są kładem na tło promieni zbiegu tych trzech prostych. Proste  $m^0$ ,  $a^0$  i  $b^0$ , wykreślone równolegle do kładów promieni zbiegu, stanowią kład prostych  $m$ ,  $a$  i  $b$  na tło, dokonany obrotem płaszczyzny  $\alpha$  około jej śladu tłowego  $t_\alpha$ .

Punkt  $M^0$  jest kładem punktu  $M$  i leży — jak wiemy — na promieniu, przechodzącym przez punkty  $M_s$  i  $O^0$ . Uważajmy ten promień za perspektywę  $q_s$  prostej  $q$ , leżącej na płaszczyźnie  $\alpha$ , a przechodzącej przez punkt  $M$ . Śladami tej prostej są punkty  $T_q$  i  $Z_q$ , a jej kładem prosta  $q^0$ , schodząca się z prostą  $q_s$ , gdyż kład promienia zbiegu prostej  $q$  pokrywa się z prostą  $q_s$ . Tym sposobem stwierdzamy ponownie, że kład punktu, leżącego na płaszczyźnie i jego

perspektywa, leżą na promieniu, przechodzącym przez kład  $O^0$  oka.

Jeżeli więc punkty  $I_s$ ,  $II_s$ ,  $III_s$  prostej  $m_s$  (rys. 45) są perspektywami punktów  $I$ ,  $II$ ,  $III$  prostej  $m$ , leżącej na płaszczyźnie  $\alpha$ , a kładem



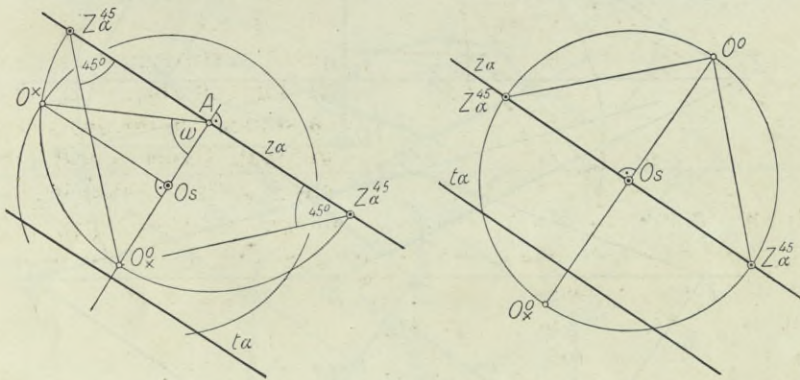
Rys. 45.



tej prostej jest prosta  $m^0$  — to punkty  $I^0, II^0, III^0$  przecięcia się promieni, przechodzących przez punkt  $O^0$  i punkty  $I_s, II_s, III_s$ , z prostą  $m^0$  — stanowią kład szeregu punktów prostej  $m$ . Jeżeli odcinek  $\overline{I_s II_s}$  jest perspektywą odcinka  $\overline{I II}$ , to odcinek  $\overline{I^0 II^0}$  wyraża prawdziwą jego długość.

d) Kąt  $\eta$ , jaki prosta  $b$  zawiera ze śladem tłowym  $t_a$  płaszczyzny  $a$  (rys. 43), równy jest kątowi, jaki promień zbiegu  $O - Z_b$  tej prostej tworzy ze śladem zbiegu  $z_a$  płaszczyzny  $a$ . Po sprowadzeniu płaszczyzn  $\xi$  i  $a$  na tło, kąt, jaki prosta  $b^0$  utworzy ze śladem  $t_a$ , równy będzie kątowi, zawartemu między promieniem  $O^0 Z_b$  a śladem zbiegu  $z_a$ , t. j. kątowi  $\eta$ .

Przyjmijmy na płaszczyźnie  $a$  (rys. 45) prostą  $n$ , przecinającą prostą  $m$  w punkcie  $III$ . Po dokonaniu kładu płaszczyzny  $a$ , prosta  $n$



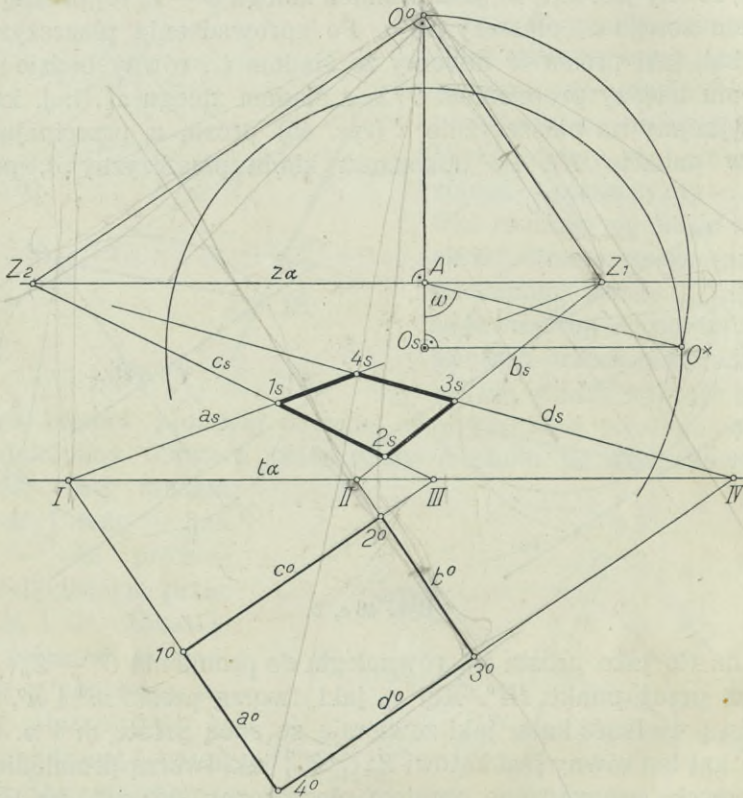
Rys. 46 a, b.

padnie na tło jako prosta  $n^0$ , równoległa do promienia  $O^0 - Z_n$ , a przechodząca przez punkt  $III^0$ . Kąt  $\varphi$ , jaki tworzą proste  $m^0$  i  $n^0$ , wyraża prawdziwą wielkość kąta, jaki zawierają ze sobą proste  $m$  i  $n$ . Oczywiście, że kąt ten równy jest kątowi  $Z_m O^0 Z_n$ , jaki tworzą promienie zbiegu obu prostych, sprowadzone obrotem płaszczyzny zbiegu  $\xi$  na tło.

Każdy punkt śladu zbiegu płaszczyzny jest śladem zbiegu prostych równoległych do danej płaszczyzny (ust. 7), a zawierających z jej śladem tłowym, a raczej z kierunkiem określonym tym śladem, pewien ściśle określony kąt. Kąt ten równy jest temu, jaki tworzy ślad zbiegu płaszczyzny z promieniem, powstałym z połączenia uważanego punktu tego śladu i punktu  $O^0$ , względnie  $O_x^0$ . Tak np. punkt  $Z_m$  (rys. 45) jest śladem zbiegu prostych równoległych do płaszczyzny  $a$ , a nachylonych do kierunku  $t_a$  pod kątem  $\nu_1$ .

Punkty  $Z_a^{45}$ , w których koło zakreślone promieniem  $\overline{AO^x}$  (rys. 46 a) przecina ślad zbiegu  $z_a$  płaszczyzny  $a$ , są śladami prostych, równoległych do tej płaszczyzny lub na niej leżących, a nachylonych do kierunku  $t_a$  pod kątem  $45^\circ$ . Z tego samego powodu, punkty przecięcia się śladu

zbiegu  $z_\alpha$ , płaszczyzny  $\alpha$ , prostopadłej do tła, z kołem głębokości (rys. 46 b), są śladami zbiegu prostych, równoległych do tej płaszczyzny lub na niej leżących, a nachylonych do kierunku  $t_\alpha$  pod kątem  $45^\circ$ . W tym szczególnym przypadku proste, których śladami zbiegu są punkty  $Z_\alpha^{45}$ , nachylone są także i do tła pod kątem  $45^\circ$ .



Rys. 47.

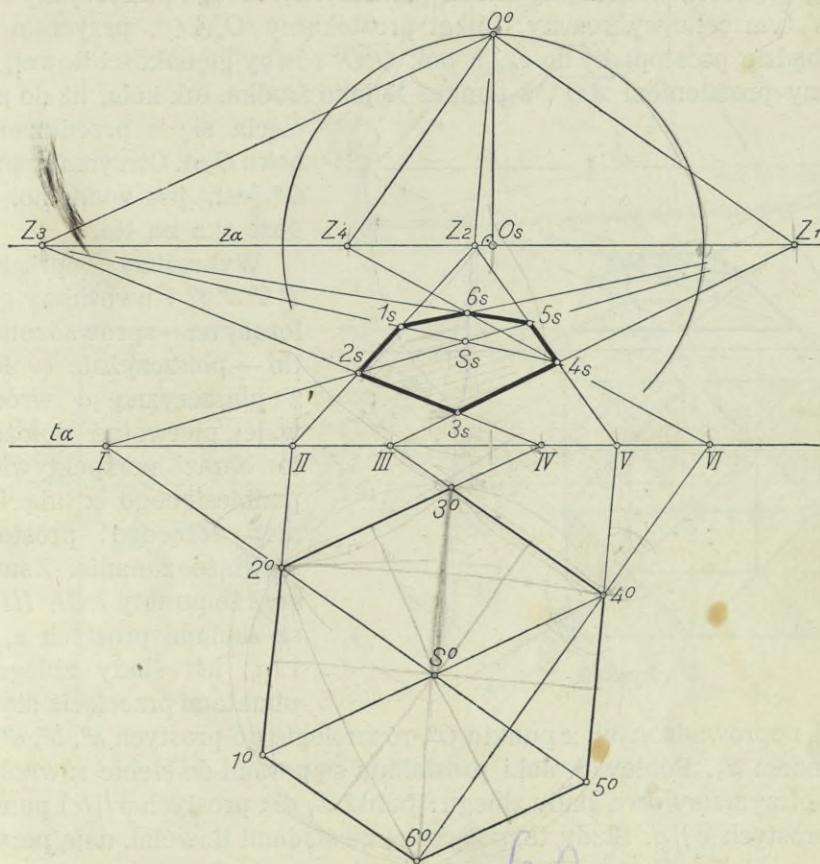
Gdy płaszczyzna  $\alpha$  nie jest prostopadłą do tła, jak to ma miejsce na rys. 46 a, to punkty  $Z_\alpha^{45}$  nazywać będziemy *punktami przekątnymi*. W przypadku, gdy płaszczyzna  $\alpha$  jest prostopadłą do tła, punkty przekątne  $Z_\alpha^{45}$  są *punktami głębokości* (ust. 2, str. 3).

**14. Podnoszenie płaszczyzn z kładu.** a) Zadaniu wykonania kładu płaszczyzny odpowiada, jako zadanie odwrotne, obracanie punktów i linii, leżących na tle, około śladu tłowego danej płaszczyzny tak, aby na nią padły. Operację taką nazywamy *podnoszeniem płaszczyzn z kładu*.

Jeżeli leżąca na tle prosta  $a^o$  w rys. 39 ma być podniesiona na płaszczyznę  $\alpha$ , to najpierw wykonamy kład płaszczyzny zbiegu  $\zeta$  na tło.



Oko zajmie położenie punktu  $O^0$ , z którego wykreślimy promień równoległy do prostej  $a^0$ , otrzymując na śladzie zbiegu  $z_a$  płaszczyzny  $a$  ślad zbiegu  $Z_a$  prostej  $a$ . Ponieważ punkt  $T_a$ , w którym prosta  $a^0$  przecina



Rys. 48.

ślad  $t_a$ , jest śladem tłowym prostej  $a$ , więc prosta  $a_s$ , łącząca ten ślad ze śladem  $Z_a$ , jest perspektywą prostej  $a$ .

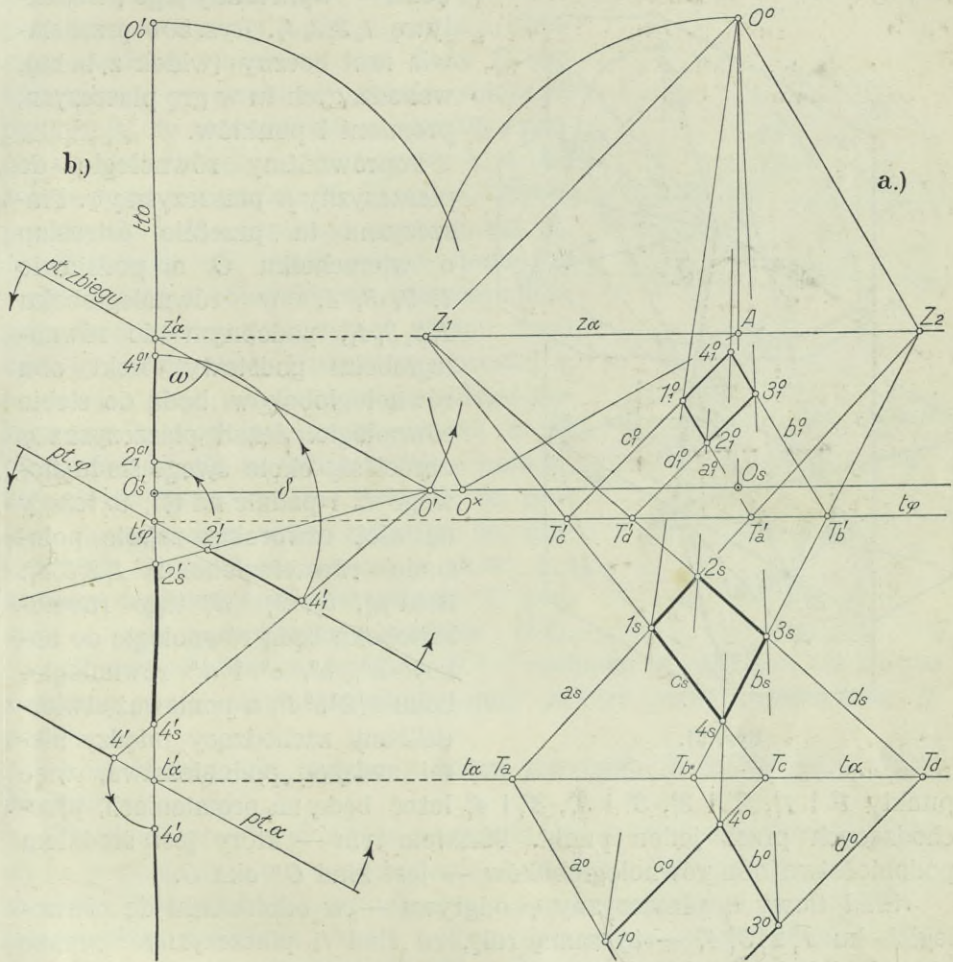
Każdy rysunek, przedstawiający kład płaszczyzny, uważać można za obraz zadania odwrotnego. Np. rys. 42a przedstawia kład płaszczyzny  $a$  wraz ze znajdującymi się na niej dwiema równoległymi prostymi, ale też i obraz perspektywiczny dwóch prostych równoległych, podniesionych z kładu, t. j. z tła, na daną płaszczyznę  $a$ .

Jeżeli zadanie wymaga wykreślenia perspektywy określonego płaskiego utworu geometrycznego, leżącego na danej płaszczyźnie w przestrzeni, to wówczas „wychodzimy z kładu“, t. zn. rysujemy żądany utwór





kątem  $\omega$  do tła — płaszczyźnie  $a$ . Proste prostopadłe do śladu tłowego  $t_a$  mają ślad zbiegu w punkcie  $A$ . Śladami zbiegu prostych, nachylonych do śladu  $t_a$  pod kątem  $45^\circ$ , są dwa punkty przekątne  $Z_{\alpha}^{45}$  płaszczyzny  $a$ ,

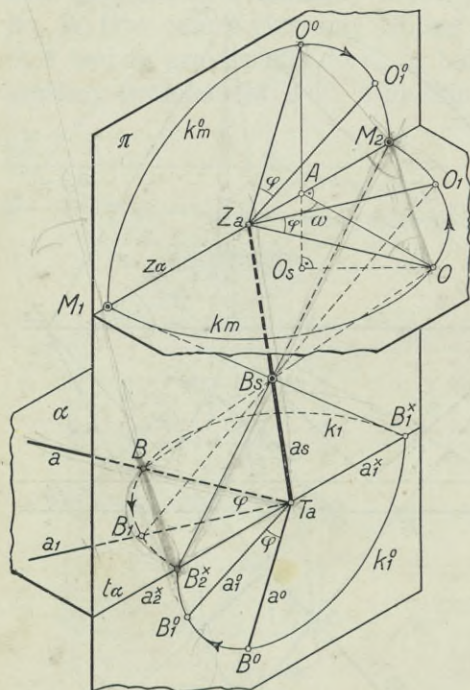


Rys. 50 b, a.

leżące na śladzie zbiegu  $z_a$  symetrycznie względem punktu  $A$  (patrz ust. 13, pkt. d).

b) Promienie, łączące punkty utworu płaskiego, przyjętego na płaszczyźnie  $a$ , z okiem, tworzą t. zw. wiązkę promieni. Płaszczyzna równoległa do płaszczyzny  $a$  przetnie tę wiązkę w punktach, które utworzą utwór płaski, geometrycznie podobny do utworu, znajdującego się na płaszczyźnie  $a$ . Fakt zachodzącego tu podobieństwa pozwala zastąpić — z korzyścią dla konstrukcji — jeden utwór płaski drugim.

Przyjmijmy płaszczyznę  $\alpha$ , wyznaczoną śladem tłowym  $t_\alpha$  i śladem zbiegu  $z_\alpha$  (rys. 50a), a na niej równoległobok 1, 2, 3, 4. Wykonajmy kład tej płaszczyzny na tło i — wychodząc z kładu  $1^0 2^0 3^0 4^0$  równoległoboku — wykreślmy jego perspektywę  $1_s 2_s 3_s 4_s$ . Rys. 50b przedstawia rzut boczny (widok z boku), wchodzących tu w grę płaszczyzn, promieni i punktów.



Rys. 51.

punkty  $1^0$  i  $1_s^0$ ,  $2^0$  i  $2_s^0$ ,  $3^0$  i  $3_s^0$ ,  $4^0$  i  $4_s^0$  leżeć będą na promieniach, przechodzących przez jeden punkt. Punktem tym — który jest środkiem podobieństwa obu równoległoboków — jest kład  $O^0$  oka  $O$ .

Ślad tłowy  $t_\phi$  płaszczyzny  $\phi$  odgrywa — w odniesieniu do równoległoboku  $1_s^0 2_s^0 3_s^0 4_s^0$  — tę samą rolę, co ślad  $t_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  wobec równoległoboku  $1^0 2^0 3^0 4^0$ . Tak więc przy pomocy utworu podobnego, przyjętego na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny właściwego utworu, wyznaczyć możemy perspektywę, pokrywającą się z tą, jaką otrzymamy, konstruując bezpośrednio.

**15. Punkty mierzenia.** Przyjmijmy na płaszczyźnie  $\alpha$  (rys. 51), nachylonej do tła pod kątem  $\omega$ , prostą  $a$  i na niej punkt  $B$ . Perspektywą prostej  $a$  jest prosta  $a_s$ , punktu  $B$  punkt  $B_s$ .

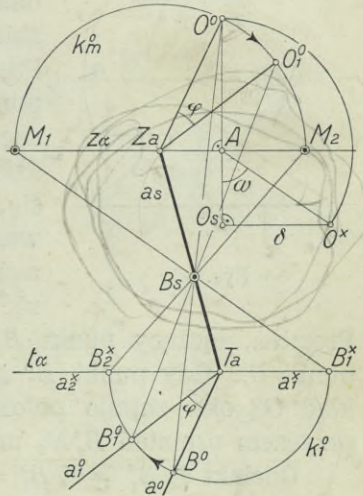
Pozostawiając prostą  $a$  na płaszczyźnie  $\alpha$ , obróćmy ją około jej śladu  $T_\alpha$  tak, aby zajęła położenie prostej  $a_1$ . Równocześnie z obrotem prostej  $a$  jej promień zbiegu  $OZ_\alpha$  obróci się około śladu zbiegu  $Z_\alpha$ , na

Poprowadźmy równoległe do płaszczyzny  $\alpha$  płaszczyznę  $\phi$ . Płaszczyzna ta przetnie ostrosłup o wierzchołku  $O$  a podstawie 1, 2, 3, 4, w równoległoboku  $1_1 2_1 3_1 4_1$ , podobnym do równoległoboku podstawy. Boki obu równoległoboków będą do siebie równoległe. Jeżeli płaszczyzna  $\phi$  obróci się około swego śladu tłowego  $t_\phi$  i padnie na tło, to leżący na niej czworokąt zajmie położenie równoległoboku  $1_1^0 2_1^0 3_1^0 4_1^0$ . Boki  $a_1^0$ ,  $b_1^0$ ,  $c_1^0$  i  $d_1^0$  tego równoległoboku będą równoległe do boków  $a^0$ ,  $b^0$ ,  $c^0$  i  $d^0$  równoległoboku  $1^0 2^0 3^0 4^0$ , a ponieważ stwierdziliśmy zachodzący między nimi związek podobieństwa, więc



płaszczyźnie zbiegu płaszczyzny  $\alpha$ , w tym samym, co prosta  $a$  kierunku i o ten sam kąt, przyjmując położenie promienia  $\overline{O_1 Z_a}$ , równoległego do prostej  $a_1$ . Punkt  $B$  prostej  $a$  zakresli łuk koła o promieniu  $T_a B$ , z punktu  $T_a$  jako środka i zajmie położenie punktu  $B_1$ . Promień  $O_1 B_1$  przejdzie przez punkt  $B_s$ . Jeżeli prosta  $a$ , obracając się dalej, padnie na ślad tłowy  $t_a$  płaszczyzny  $\alpha$ , a punkt  $B$  zajmie położenie punktu  $B_2^x$ , to promień zbiegu prostej  $a$  padnie na ślad zbiegu  $z_a$  płaszczyzny  $\alpha$ , a oko zajmie położenie punktu  $M_2$ . Promień, łączący punkty  $B_2^x$  i  $M_2$ , przejdzie przez punkt  $B_s$ .

Obracając się około swego śladu tłowego, prosta  $a$  obiegnie całą płaszczyznę  $\alpha$ , gdy równocześnie jej promień zbiegu obracać się będzie około śladu zbiegu prostej  $a$ , pozostając stale na płaszczyźnie zbiegu płaszczyzny  $\alpha$ . Podczas obrotu prostej  $a$  jej punkt  $B$  zakresli na płaszczyźnie  $\alpha$  koło  $k_1$ , którego środkiem jest ślad tłowy  $T_a$  tej prostej. Równocześnie oko zakresli na płaszczyźnie zbiegu płaszczyzny  $\alpha$  koło  $k_m$ , którego środkiem jest ślad zbiegu  $Z_a$  prostej  $a$ , zaś promieniem odcinek  $\overline{O Z_a}$ .



Rys. 52.

Między położeniami punktów  $B$  i  $O$  zachodzi ta zależność, że są one związane promieniami, przechodzącymi zawsze przez perspektywę  $B_s$  punktu  $B$ .

Koło  $k_m$  nazywać będziemy *kołem mierzenia*, a każdy jego punkt *punktem mierzenia*.

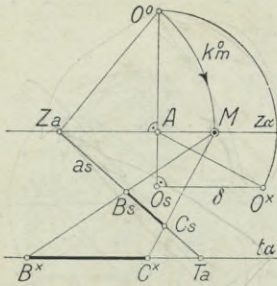
Każdemu promieniowi koła mierzenia odpowiada jedno położenie prostej  $a$  na płaszczyźnie  $\alpha$ , przechodzącej stale przez jej ślad tłowy  $T_a$ . Promieniom koła mierzenia, schodzącym się ze śladem zbiegu płaszczyzny  $\alpha$ , odpowiadają położenia prostej, pokrywające się ze śladem tłowym płaszczyzny  $\alpha$ . Punkty mierzenia  $M_1$  i  $M_2$  prostej  $a$ , leżące na śladzie zbiegu  $z_a$  płaszczyzny  $\alpha$ , nazywać będziemy *istotnymi punktami mierzenia*.

Po wykonaniu kładu płaszczyzny  $\alpha$  i jej płaszczyzny zbiegu na tło, koło mierzenia zajmie położenie koła  $k_m^0$ , a koło  $k_1$  położenie koła  $k_1^0$ . Proste  $a$  i  $a_1$  padną na tło, jako proste  $a^0$  i  $a_1^0$ , a ich promienie zbiegu, jako odcinki  $\overline{O^0 Z_a}$  i  $\overline{O_1^0 Z_a}$ . Odcinki  $\overline{T_a B^0} = \overline{T_a B_1^0} = \overline{T_a B_1^x} = \overline{T_a B_2^x}$  wyrażają prawdziwą długość odcinka, którego perspektywą jest odcinek  $T_a B_s$ .

Rysunek perspektywiczny konstrukcji uzmysłowionej na rys. 51 — przy założeniu, że promień główny jest prostopadły do płaszczyzny rysunku (tła) — podaje rys. 52. Na płaszczyźnie  $\alpha$ , wyznaczonej śla-



dami  $t_a$  i  $z_a$  leży prosta  $a$ , której śladami są punkty  $T_a$  i  $Z_a$ . Po wykonanym kładzie płaszczyzny  $\alpha$ , a więc i jej płaszczyzny zbiegu, prosta  $a$  zajęła położenie prostej  $a^0$ , zaś promień zbiegu prostej  $a$  położenie odcinka  $\overline{O^0 Z_a}$ . Gdy prosta  $a^0$  obróciła się około śladu  $T_a$  o kąt  $\varphi$  i zajęła położenie  $a^1$ , to kład oka zajął położenie punktu  $O_1^0$ , a promień zbiegu  $\overline{O_1^0 Z_a}$  pozostał równoległy do prostej  $a^1$ .



Rys. 53.

Punktowi  $B^0$  prostej  $a^0$  odpowiada na prostej  $a_s$  punkt  $B_s$ , leżący z nim na promieniu, przechodzącym przez kład  $O^0$  oka. Promień  $\overline{B_1^0 B_s}$  przejdzie przez punkt  $O_1^0$ . Gdy prosta  $a^0$  zejdzie się, podczas swego obrotu około śladu  $T_a$ , ze śladem  $t_a$  płaszczyzny  $\alpha$ , a punkt  $B^0$  zajmie położenie punktu  $B_1^x$ , to punkt  $O^0$  padnie na ślad zbiegu  $z_a$  jako punkt mierzenia  $M_1$ .

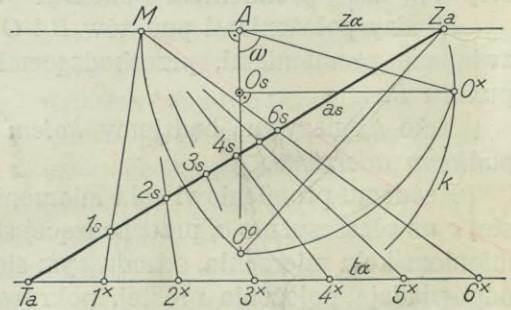
Promień, łączący punkt  $B_1^x$  z punktem mierzenia  $M_1$ , przejdzie przez punkt  $B_s$ . Gdy punkt  $B^0$  znajdzie się na śladzie  $t_a$  jako punkt  $B_2^x$ , to kład  $O^0$  oka zajmie położenie punktu mierzenia  $M_2$  na śladzie  $z_a$ , przyczem promień  $\overline{B_2^x M_2}$  przejdzie przez punkt  $B_s$ .

Odcinki  $\overline{T_a B_1^x} = \overline{T_a B_2^x} = \overline{T_a B^0}$  wyrażają prawdziwą długość odcinka, którego perspektywą jest odcinek  $\overline{T_a B_s}$ . Znaczy to, że rzut perspektywy odcinka, z punktu mierzenia, na ślad tłowy płaszczyzny, na której on leży, równy jest jego prawdziwej długości. W tem leży wielkie znaczenie praktyczne punktów mierzenia, które pozwalają mierzyć prawdziwe długości danych w perspektywie odcinków, bez wykonywania ich kładów na tło.

Jeżeli więc — jak to widzimy na rys. 53 — na płaszczyźnie  $\alpha$  znajduje się prosta  $a$ , a na niej odcinek  $\overline{BC}$ , to prawdziwą

długość tego odcinka znajdziemy w sposób następujący: wykonamy kład płaszczyzny zbiegu płaszczyzny  $\alpha$  i kład  $O^0$  oka połączymy ze śladem zbiegu  $Z_a$  prostej  $a$ . Następnie zakreślimy promieniem  $\overline{O^0 Z_a}$ , z punktu  $Z_a$  jako środka, łuk koła  $k$ , który przetnie ślad zbiegu  $z_a$  w punkcie mierzenia  $M$ . Kreślimy promienie  $\overline{MB_s}$  i  $\overline{MC_s}$ , które przetną ślad tłowy  $t_a$  płaszczyzny  $\alpha$  w punktach  $B^x$  i  $C^x$ . Odcinek  $\overline{B^x C^x}$  równy jest prawdziwej długości odcinka, którego perspektywą jest odcinek  $\overline{B_s C_s}$ .

Zastosowanie punktu mierzenia do wyznaczenia podziałki perspek-

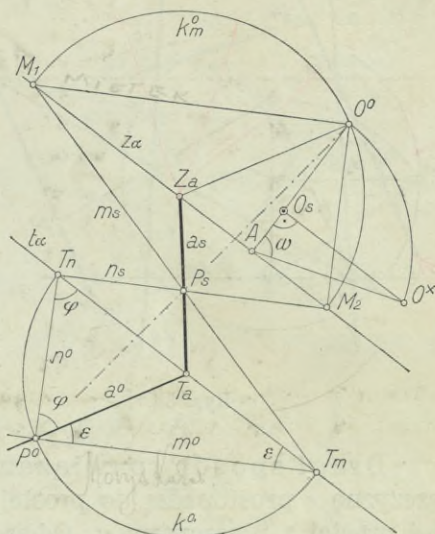


Rys. 54.



tywicznej na danej prostej  $a$ , która leży na płaszczyźnie  $\alpha$ , podaje rys. 54. Odcinek  $\overline{O^0 Z_a}$  jest kładem promienia zbiegu prostej  $a$ , punkt  $M$  jej punktem mierzenia. Na śladzie tłowym  $t_a$  płaszczyzny  $\alpha$  narysujemy podziałkę o żądanej jednostce i punkty podziału  $1^x, 2^x, \dots$  rzucimy z punktu  $M$  na prostą  $a_s$ , jako punkty  $1_s, 2_s, \dots$

Przyjmijmy na płaszczyźnie  $\alpha$ , wyznaczonej śladami  $t_a$  i  $z_a$ , a nachylonej do tła pod kątem  $\omega$  (rys. 55), prostą  $a$ , której perspektywą niech będzie prosta  $a_s$ . Rzucmy punkt  $P_s$ , przyjęty na prostej  $a_s$ , z istotnych punktów mierzenia  $M_1$  i  $M_2$  na ślad tłowy  $t_a$  płaszczyzny  $\alpha$ , to odcinek  $\overline{T_a T_m} = \overline{T_a T_n}$  wyraża prawdziwą długość odcinka, którego perspektywą jest odcinek  $\overline{T_a P_s}$ . Proste  $a^0, m^0$  i  $n^0$  są kładem na tło prostych  $a, m$  i  $n$ , leżących na płaszczyźnie  $\alpha$ , a przechodzących przez punkt  $P$ . Punkty  $O^0, P_s$  i  $P^0$  leżą na jednym promieniu. Ponieważ  $\overline{T_a T_m} = \overline{T_a T_n} = \overline{T_a P^0}$ ,



Rys. 55.

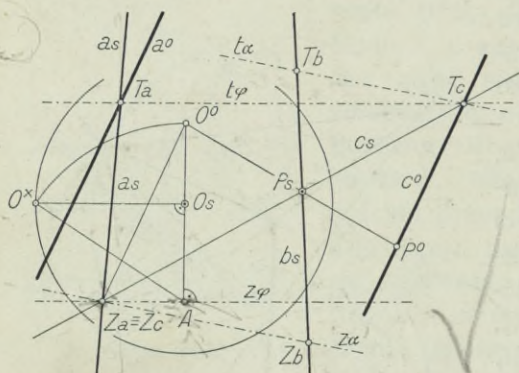
więc punkty  $T_m, T_n$  i  $P^0$  leżeć muszą na kole  $k^0$ , którego środkiem jest punkt  $T_a$ . Prosta  $m^0$  zawiera z prostą  $a^0$  i ze śladem tłowym  $t_a$  ten sam kąt  $\epsilon$ , podobnie i prosta  $n^0$  przecina prostą  $a^0$  i  $t_a$  pod tym samym kątem  $\varphi$ . Stąd określić można każdy z istotnych punktów mierzenia prostej, jako ślad zbiegu pęku równoległych — i wraz z tą prostą na jednej płaszczyźnie leżących — promieni, które zawierają z tą prostą i ze śladem tłowym płaszczyzny te same kąty.

**16. Zadania.** a) Wyznaczyć odległość punktu  $P$  od prostej  $a$ . Perspektywa  $P_s$  punktu  $P$  leży na perspektywie  $b_s$  prostej  $b$ , której śladami są punkty  $T_b$  i  $Z_b$ .

Pierwszy sposób rozwiązania. Przez punkt  $P$  prowadzimy prostą  $c$ , równoległą do prostej  $a$ , i znajdujemy odległość tych dwóch równoległych, kładąc je na tło.

Konstrukcyjnie przedstawia się sprawa następująco (rys. 56): łączymy punkty  $P_s$  i  $Z_a$  prostą  $c_s$ . Proste  $b$  i  $c$  przecinają się, więc leżą na jednej płaszczyźnie, której śladem zbiegu jest prosta  $z_a$ , łącząca ślady zbiegu  $Z_a \equiv Z_c$  i  $Z_b$  obu prostych. Ślad tłowy tej płaszczyzny przejdzie przez punkt  $T_b$  równoległe do  $z_a$  i przetnie prostą  $c_s$  w punkcie  $T_c$ , śladzie tłowym prostej  $c$ .

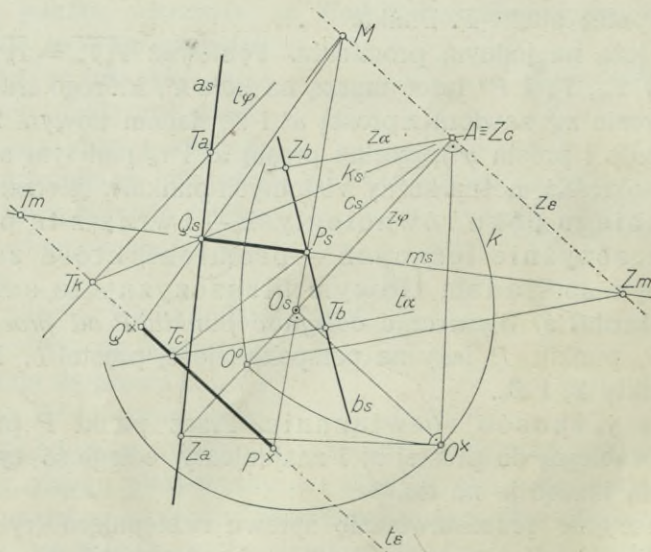
Równoległe proste  $a$  i  $c$  wyznaczają płaszczyznę  $\varphi$ , której ślad tłowy  $t_\varphi$  łączy ślady tłowe  $T_a$  i  $T_c$  tych prostych, a której ślad zbiegu  $z_\varphi$  przechodzi przez punkt  $Z_a \equiv Z_c$ .



Rys. 56.

Z punktu głównego  $O_s$  kreślimy prostą  $a^0$  i równoległą do śladu  $z_\varphi$ ; otrzymamy punkty  $A$  i  $O^x$ , a następnie kład  $O^0$  oka na tło. Prosta  $O^0 Z_a$  jest kładem promienia zbiegu prostych  $a$  i  $c$  na tło; proste  $a^0$  i  $c^0$ , wykreślone przez ślady  $T_a$  i  $T_c$  równoległe do  $O^0 Z_a$ , stanowią kład prostych  $a$  i  $c$  na tło. Rzut  $P^0$  punktu  $P_s$  z punktu  $O^0$  na prostą  $c^0$  jest kładem punktu  $P$  na tło. Oddalenie punktu  $P^0$  od prostej  $a^0$  rozwiązuje zadanie.

Drugi sposób rozwiązania. Przez punkt  $P$  poprowadzimy płaszczyznę  $\varepsilon$  prostopadłą do prostej  $a$  i znajdziemy punkt  $Q$  przebiecia się tej prostej z płaszczyzną  $\varepsilon$ . Odcinek  $PQ$  jest rozwiązaniem zadania.

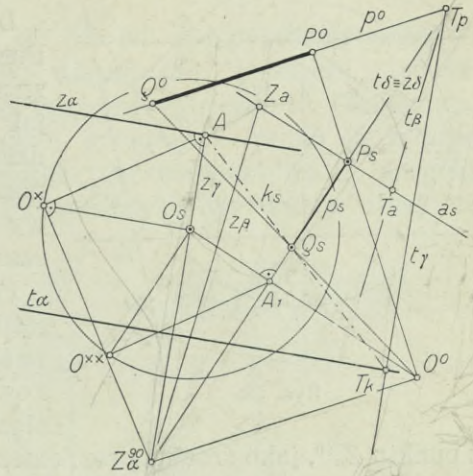


Rys. 57.

Ślad zbiegu  $Z_a$  prostej  $a$  (rys. 57) uważamy za ślad zbiegu prostych prostopadłych do szukanej płaszczyzny  $\varepsilon$  i łączymy go z punktem głów-



nym  $O_s$ . Szukamy punktu  $O^x$ , kreślimy w nim prostopadłą do  $O^x Z_a$ , która przetnie prostą  $O_s - Z_a$  w punkcie  $A$ . Przez ten punkt przejdzie ślad zbiegu  $z_\epsilon$  płaszczyzny  $\epsilon$ , prostopadłe do prostej  $A - O_s - Z_a$ . Ślad łowy  $t_\epsilon$  tej płaszczyzny znajdziemy podobnie, jak na rys. 32 (str. 17). Więc przez punkt  $P$  poprowadzimy prostą  $c$ , leżącą na płaszczyźnie  $\epsilon$ . Jeżeli punkt  $A$  przyjmiemy za ślad zbiegu tej prostej, to jej ślad łowy  $T_c$  będzie punktem przecięcia się prostej  $c_s$  z prostą  $t_a$ , wykreśloną przez punkt  $T_b$ , równoległe do prostej  $z_a$ , która łączy punkty  $A$  i  $Z_b$ . Ślad łowy  $t_\epsilon$  przejdzie przez punkt  $T_c$  równoległe do śladu zbiegu  $z_\epsilon$ . Przy pomocy płaszczyzny  $\varphi$ , poprowadzonej przez prostą  $a$ , znaleźliśmy jej punkt przebicia się  $Q$  z płaszczyzną  $\epsilon$ . Odcinek  $P_s Q_s$  jest perspektywą odległości punktu  $P$  od prostej  $a$ . Prosta  $m$ , wyznaczona punktami  $P$  i  $Q$ , leży na płaszczyźnie  $\epsilon$ . Śladami tej prostej są punkty  $T_m$  i  $Z_m$ . Łuk koła, zakreślony z punktu  $Z_m$ , jako środka, promieniem  $Z_m O^0$ , przetnie prostą  $z_\epsilon$  w punkcie mierzenia  $M$ . Rzut  $P^x Q^x$  odcinka  $P_s Q_s$  z punktu  $M$  na prostą  $t_a$  wyraża prawdziwe oddalenie punktu  $P$  od prostej  $a$ .



Rys. 58.

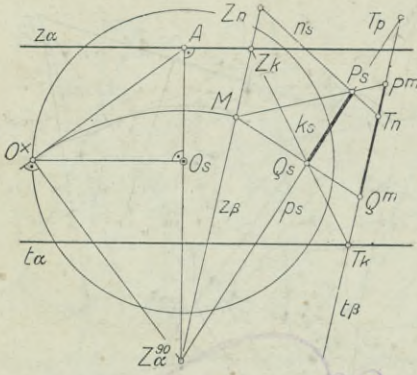
b) Wyznaczyć odległość punktu  $P$  od płaszczyzny  $a$ . Pierwsza konstrukcja (rys. 58). Najpierw wyznaczymy ślad zbiegu  $Z_a^{90}$  prostych prostopadłych do płaszczyzny  $a$ . Prosta  $p_s$ , łącząca ten ślad z punktem  $P_s$ , jest perspektywą prostopadłej, poprowadzonej z punktu  $P$  do płaszczyzny  $a$ . Ponieważ punkt  $P$  przyjęliśmy na prostej  $a$ , więc prosta  $z_\beta$ , łącząca punkty  $Z_a^{90}$  i  $Z_a$ , jest śladem zbiegu płaszczyzny  $\beta$ , która przechodzi przez proste  $p$  i  $a$ . Ślad łowy  $t_\beta$  tej płaszczyzny przechodzi przez punkt  $T_a$  i przecina prostą  $p_s$  w punkcie  $T_p$ , śladzie łowym prostej  $p$ . Przechodząca przez prostą  $p$ , prostopadłe do tła, płaszczyzna  $\gamma$  przecina płaszczyznę  $a$  wzdłuż prostej  $k$ , której perspektywą jest prosta  $k_s$ . Punkt przecięcia się  $Q_s$  prostych  $p_s$  i  $k_s$  jest perspektywą punktu przebicia się prostej  $p$  z płaszczyzną  $a$ . Odcinek  $P_s Q_s$  jest perspektywą odległości punktu  $P$  od płaszczyzny  $a$ .

Prawdziwą długość odcinka  $PQ$  znajdziemy, dokonując kładu na tło rzucającej płaszczyzny  $\delta$ , poprowadzonej przez prostą  $p$ . Ślady tej płaszczyzny schodzą się z prostą  $p_s$ . Oko zajmie położenie punktu  $O^0$  na prostopadłej, wykreślonej z punktu  $O_s$  do  $t_\delta \equiv z_\delta$ , przyczem  $O^0 A_1 = A_1 O^x$ .

Prawdziwą długość odcinka  $PQ$  znajdziemy, dokonując kładu na tło rzucającej płaszczyzny  $\delta$ , poprowadzonej przez prostą  $p$ . Ślady tej płaszczyzny schodzą się z prostą  $p_s$ . Oko zajmie położenie punktu  $O^0$  na prostopadłej, wykreślonej z punktu  $O_s$  do  $t_\delta \equiv z_\delta$ , przyczem  $O^0 A_1 = A_1 O^x$ .



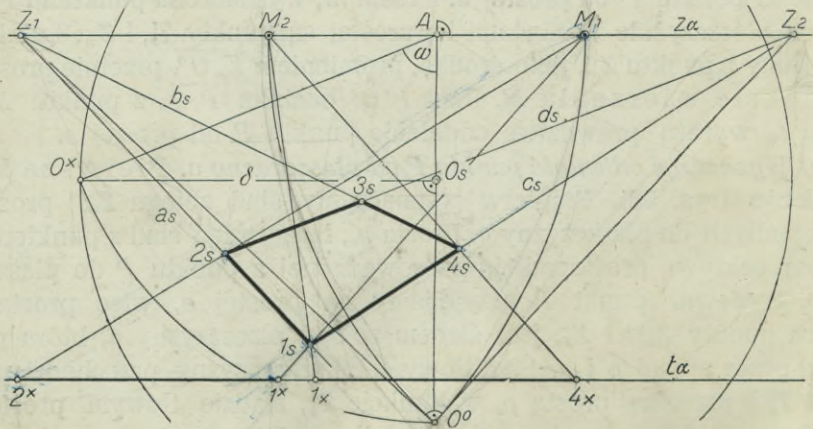
Prosta  $p^0$ , wykreślona przez ślad tłowy  $T_p$ , równoległe do promienia  $O^0 - Z_{\alpha}^{90}$ , jest kładem prostej  $p$ . Rzut  $\overline{P^0 Q^0}$  odcinka  $\overline{P_s Q_s}$  z punktu  $O^0$  na prostą  $p^0$  rozwiązuje zadanie.



Rys. 59.

Druga konstrukcja (rys. 59). Punkt  $P$  przyjęliśmy na prostej  $n$ , wyznaczonej śladami  $T_n$  i  $Z_n$ . Podobnie jak w konstrukcji pierwszej, poprowadziliśmy z punktu  $P$  prostopadłą  $p$  do płaszczyzny  $\alpha$ , wyznaczyli jej ślad tłowy  $T_p$  i punkt przebiecia się  $Q$  z płaszczyzną  $\alpha$ .

Prawdziwą długość odcinka  $\overline{PQ}$  znaleźliśmy przy pomocy punktu mierzenia  $M$ , odpowiadającego kierunkowi prostej  $p$ . Punkt ten jest przecięciem się łuku koła, zakreślonego z punktu  $Z_{\alpha}^{90}$ , jako środka, promieniem  $Z_{\alpha}^{90} O^x$  — ze śladem zbiegu  $z_{\beta}$ , płaszczyzny  $\beta$ , na której leży prosta  $p$ . Odcinek  $\overline{P^m Q^m}$ , będący rzutem odcinka  $\overline{P_s Q_s}$  z punktu  $M$  na ślad tłowy  $t_{\beta}$ , wyraża prawdziwe oddalenie punktu  $P$  od płaszczyzny  $\alpha$ .



Rys. 60.

c) Narysować perspektywę kwadratu, który leży na wyznaczonej śladami  $t_{\alpha}$  i  $z_{\alpha}$  płaszczyźnie, a którego długość boku jest dana (rys. 60). Kład płaszczyzny zbiegu płaszczyzny  $\alpha$  na tło sprowadzi oko do punktu  $O^0$ . Przyjęty dowolnie na śladzie  $z_{\alpha}$  punkt  $Z_1$  uważamy za ślad zbiegu pary równoległych boków kwadratu; śladem zbiegu drugiej pary boków będzie punkt  $Z_2$ , w którym prostopadła, wykreślona w punkcie  $O^0$  do pro-







wędzi sześcianu. Długość tę moglibyśmy odmierzyć na prostej prostopadłej, poprowadzonej w którymkolwiek z wierzchołków kwadratu, stanowiącego podstawę sześcianu. Nie uczyniliśmy tego jedynie ze względu na chęć otrzymania możliwie najbardziej przejrzystego rysunku.

W celu otrzymania odcinka  $\overline{P_s Q_s}$ , poprowadźmy przez prostą  $n$  płaszczyznę. Ponieważ ślad tłowy prostej  $n$  nie jest nam znany, więc przetniemy ją prostą  $e$ , leżącą na płaszczyźnie  $\alpha$ , a przechodzącą przez punkt  $P$ . Jako ślad zbiegu prostej  $e$  przyjęliśmy punkt  $A$ ; ślad tłowy  $T_e$  leży na śladzie tłowym  $t_\alpha$ , płaszczyzny  $\alpha$ . Płaszczyzna, przechodząca przez proste  $n$  i  $e$ , jest prostopadłą do tła; jej śladami są proste  $t_\beta$  i  $z_\beta$ .

Kład płaszczyzny zbiegu płaszczyzny  $\beta$  sprowadzi na tło oko, które zajmie położenie punktu  $O^\times$ . Koło zakreślone z punktu  $Z_\alpha^{90}$ , jako środka, promieniem  $\overline{Z_\alpha^{90} O^\times}$ , jest kołem mierzenia dla kierunku, określonego śladem  $Z_\alpha^{90}$  i przecina ślad  $z_\beta$  w punkcie mierzenia  $M^{90}$ . Z punktu tego rzucimy punkt  $P_s$  na ślad  $t_\beta$ , odmierzymy  $\overline{P^m Q^m}$ , równe długości krawędzi sześcianu i punkt  $Q^m$  połączymy z  $M^{90}$ . Na prostej  $n_s$  otrzymamy punkt  $Q_s$ , który łączymy ze śladem zbiegu  $Z_2$ . Promień  $Z_2 - Q_s$  przecina proste  $1_s - Z_\alpha^{90}$  i  $4_s - Z_\alpha^{90}$  w punktach  $I_s$  i  $IV_s$ , stanowiących perspektywę dwóch wierzchołków sześcianu. Promienie  $I_s - Z_1$  i  $IV_s - Z_1$  przetną proste  $2_s - Z_\alpha^{90}$  i  $3_s - Z_\alpha^{90}$  w punktach  $II_s$  i  $III_s$ , które leżą na prostej, przechodzącej przez punkt  $Z_2$ .

Przy założeniu, że korzystanie z punktu  $Z_\alpha^{90}$  nie jest możliwe, znajdziemy punkt mierzenia  $M^{90}$  w sposób następujący: równoległe do  $z_\beta$  poprowadzimy prostą, która przetnie prostą  $O^\times - Z_\alpha^{90}$  w punkcie  $Z^1$ . Łuk koła, zakreślony z punktu  $Z^1$  promieniem  $Z^1 - O^\times$ , przetnie ową równoległą do  $z_\beta$  w punkcie  $M^1$ . Promień  $O^\times - M^1$  przecina prostą  $z_\beta$  w punkcie  $M^{90}$ , trójkąty bowiem  $O^\times M^1 Z^1$  i  $O^\times M^{90} Z_\alpha^{90}$  są podobne.





## Rozdział II.

### Zasady płaskiej perspektywy stosowanej.

**17. Określenia i założenia.** Z ogólnych rozważań nad odwzorowaniem perspektywnym na płaszczyźnie, które w historycznym rozwoju stały się punktem wyjścia cennych dociekań teoretycznych i podstawą nowych dyscyplin matematycznych — wyodrębnić się da pewna kategoria zadań, stanowiących przedmiot praktycznego zainteresowania się architekta i malarza. Całą tę dziedzinę zadań perspektywnych, mieszczącą się jako szczegóły w ogólnej teorii perspektywy, określamy nazwą *perspektywy stosowanej*.

Obejmuje ona wszystkie praktycznie ważne konstrukcje, a więc i te, które liczą się z koniecznością otrzymywania obrazów perspektywnych na ściśle, pod względem wymiarów, ograniczonej płaszczyźnie rysunku.

Płaszczyzna rysunku, *tło*, ma w perspektywie stosowanej zazwyczaj położenie pionowe (rys. 63), pokrywając się z położeniem obrazów, umieszczanych przeważnie na pionowych ścianach wewnątrz. Tło pionowe nie jest jednak regułą; w malowidłach sufitowych np. ma ono położenie poziome, co zresztą nie wpływa w żadnym stopniu na zmianę metod konstrukcyjnych. O ile tego w poszczególnych wypadkach wyraźnie nie zaznaczymy, to, mówiąc o tle, mieć będziemy zawsze na myśli jego położenie pionowe.

Środek rzutu, czyli *oko*, umieszczone jest z reguły przed tłem. Promień, poprowadzony z oka prostopadle do tła, nazywa się *promieniem*







Rys. 64. A. Dürer: Rysowanie postaci siedzącej.

węźli pionowej ramy i od jednej krawędzi poziomej i s p ó ł r z ę d n e te przenosi na zaznaczony na rycinie arkusz rysunkowy. Tym sposobem odtwarza on, punkt po punkcie, rysowany przedmiot i punkty te następnie łączy.

Jeszcze inaczej radzi sobie rysownik przedstawiony na rys. 66. Na pionowej szklanej płaszczyźnie tła wyrysował on kwadratowe pola. Taki sam co do powierzchni i w ten sam sposób, jak tafla szklana, pokratkowany papier umieścił przed sobą na stole. Patrząc przez otwór pionowego pręta, ustalającego położenie oka, widzi rysownik punkt odtwarzanego przedmiotu w polu jednego z kwadratów. Oddalenie tego punktu od boków kwadratu ocenia okiem i przenosi je następnie w odpowiedni kwadrat na papierze.

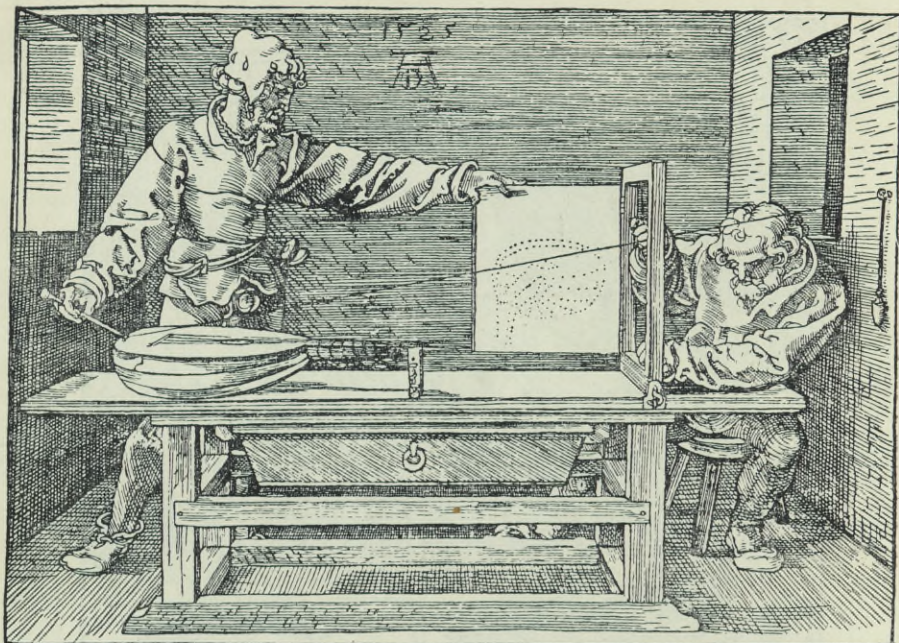
Wróćmy do rys. 63.

Pozioma – a więc równoległa do płaszczyzny podstawy – płaszczyzna  $\chi$ , poprowadzona przez oko, nosi nazwę *płaszczyzny horyzontu*. Przecina ona tło wzdłuż prostej  $h$ , zwanej *linją horyzontu* lub krótko *horyzontem*. Horyzont przechodzi przez punkt główny  $O_s$  i jest równoległy do podstawy.

Płaszczyzna horyzontu jest płaszczyzną zbiegu, a horyzont śladem zbiegu wszystkich płaszczyzn poziomych (ust. 4, str. 9).

Rzut prostokątny  $O'$  oka na płaszczyznę podstawy nazywać będziemy *stanowiskiem*. Płaszczyzna  $\xi$ , poprowadzona przez oko równoległa do





Rys. 65. A. Dürer: Rysowanie lutni.

ła, zwana *płaszczyzną zniknięcia* (ust. 4, str. 8), przecina płaszczyznę podstawy wzdłuż prostej  $n$ , która nosi nazwę *śladu zniknięcia*.

Odległość horyzontu od linii podstawy, równa oddaleniu oka od płaszczyzny podstawy i równa odcinkowi  $OO'$ , nazywa się *wysokością horyzontu*.

Tło i płaszczyzna zniknięcia dzielą przestrzeń na trzy obszary: obszar geometryczny, obszar pośredni i obszar istotny. Pierwszy leży przed płaszczyzną zniknięcia, drugi zawarty jest między płaszczyzną zniknięcia i tłem, a obszar istotny rozciąga się za tłem. Obszary istotny i pośredni tworzą łącznie obserwowany obszar przestrzeni.

Pionowa płaszczyzna, przechodząca przez oko i prostopadła do ła, przechodzi przez główny punkt  $O_s$  i stanowisko  $O'$  i zwie się *główną płaszczyzną pionu*. Dzieli ona przestrzeń na dwie części: lewą i prawą, albo, jak się też często wyrażamy, na obszar po lewej, względnie prawej stronie horyzontu. Linia przecięcia się głównej płaszczyzny pionu z tłem nazywa się *główną linią pionu*. Prosta  $q$ , wzdłuż której główna płaszczyzna pionu przecina płaszczyznę podstawy, dzieli tę ostatnią na część lewą, znajdującą się po lewej ręce obserwatora, umieszczonego wzdłuż prostej  $O - O'$ , a zwróconego twarzą ku tłu, i na część prawą.





Rys. 66. A. Dürer: Rysowanie postaci leżącej.

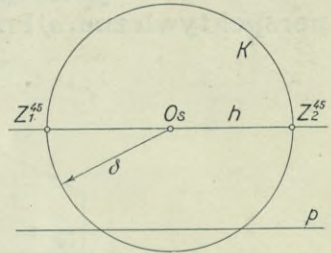
Z rys. 63 widzimy, że w odniesieniu do danego tła i oka położenie płaszczyzny podstawy jest wyznaczone linią podstawy  $p$ , równoległą do horyzontu  $h$ . Płaszczyzna ta przejdzie mianowicie przez podstawę  $p$ , równoległe do płaszczyzny horyzontu, którą poprowadzimy poprzednio poziomo przez oko.

Koło  $K$ , zakreślone na tle z punktu głównego  $O_s$ , jako środka, promieniem  $OO_s = \delta$ , równym głębokości tłowej, nazwane w ust. 2, str. 3 *kołem głębokości*, przecięte jest horyzontem w punktach  $Z_1^{45}$  i  $Z_2^{45}$ . Punkty te nazywać będziemy *punktami głębokości*.

Jeżeli płaszczyzna tej karty będzie uważana za tło, a przyjęty na niej punkt  $O_s$  (rys. 67) za punkt główny — to linia pozioma  $h$ , poprowadzona przez punkt  $O_s$ , będzie horyzontem. Prosta  $p$ , wykreślona równoległe do horyzontu, w odległości równej przyjętej wysokości horyzontu, jest linią podstawy.

Koniecznym warunkiem, umożliwiającym otrzymanie określonych, t. j. jednoznacznych obrazów perspektywicznych, jest ustalenie położenia oka względem tła. Prócz punktu głównego  $O_s$ , który określa położenie promienia głównego, przechodzącego przez ten punkt prostopadle do tła, potrzebna jest jeszcze znajomość głębokości tłowej. Przypuśćmy, że głębokość tę znamy, jako odcinek  $\delta$ , to w takim wypadku oko znajduje się nad płaszczyzną karty, w odległości  $\delta$  na prostopadłej, poprowadzonej w punkcie głównym  $O_s$ . Rolę odcinka  $\delta$  spełni koło oddalenia, zakreślone z punktu  $O_s$  promieniem równym temu odcinkowi. Punkty  $Z_1^{45}$  i  $Z_2^{45}$  są punktami oddalenia.

Z rozważań ust. 3 wynika, że punkty głębokości — odgrywają one w perspektywie stosowanej szczególnie ważną rolę — są śladami zbiegu



Rys. 67.



wszystkich prostych poziomych, nachylonych do tła pod kątem  $45^\circ$ . Proste te nazywać będziemy *przekątnymi*. Punkt  $Z_1^{45}$  jest lewym a punkt  $Z_2^{45}$  prawym punktem głębokości<sup>1)</sup>.

Oddalenie punktu, przyjętego w przestrzeni, od głównej płaszczyzny pionu nazywamy jego „szerokością“, jego oddalenie od tła „głębokością“ a odległość od płaszczyzny podstawy „wysokością“.

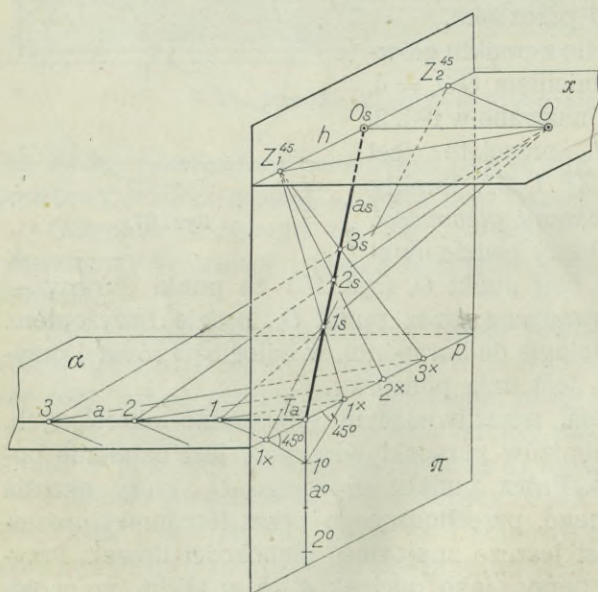
Z punktu  $M$  (rys. 63), przyjętego na płaszczyźnie podstawy, poprowadzimy prostopadłą do podstawy  $p$  i także linię do prostej  $q$ ; otrzymany odcinek  $\overline{MM}_q$  jest „szerokością“ a odcinek  $\overline{MM}_p$  „głębokością“ punktu  $M$ .

Punkty, leżące w obszarze istotnym, mają głębokości „dodatnie“, wszystkie inne „ujemne“. Szerokości punktów, leżących po prawej stronie horyzontu, określamy jako dodatnie; punkty leżące po lewej stronie horyzontu mają szerokości ujemne. Wysokości punktów, znajdujących się nad płaszczyzną podstawy, są „dodatnie“, wobec czego punkty, należące do obszaru pod płaszczyzną podstawy, posiadają wysokość „ujemną“.

**18. Proste prostopadłe do tła. Proste przekątne. Podziałka perspektywiczna.** a) Przyjmijmy na płaszczyźnie podstawy prostą  $a$ , prostopadłą do tła (rys. 68),

a na niej szereg punktów  $1, 2, 3, \dots$ , w równych od siebie odstępach, stanowiących podziałkę.

Prosta  $a$  przebiega tło w punkcie  $T_a$ , który jest jej śladem tłowym; śladem zbiegu tej prostej jest punkt główny (ust. 3, str. 5). Prosta  $a_s$ , łącząca punkt  $T_a$  z punktem głównym  $O_s$ , jest perspektywą prostej  $a$ . Promienie, łączące punkty  $1, 2, 3, \dots$  prostej  $a$  z okiem, przecinają prostą  $a_s$  w szeregu punktów  $1_s, 2_s, 3_s, \dots$ , które



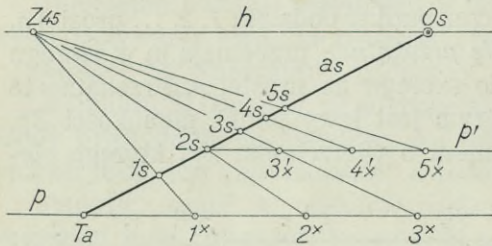
Rys. 68.

<sup>1)</sup> Najwłaściwszem byłoby oznaczanie punktów głębokości symbolami  $G_1$  i  $G_2$ . Aby jednak stale przypominać czytelnikowi fakt, że punkty te są śladami zbiegu poziomych prostych, nachylonych do tła pod kątem  $45^\circ$  (prostych przekątnych), poświęciliśmy racjonalność takiego oznaczania na rzecz dydaktyki i stosujemy w większości rysunków znaki  $Z_1^{45}$  i  $Z_2^{45}$ .



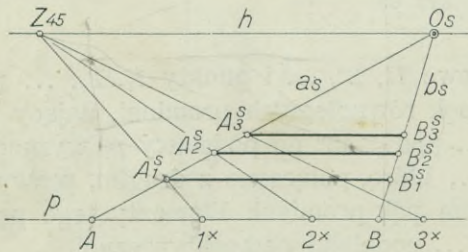


końcowe perspektywy odcinka np.  $1_s$  i  $3_s$  (rys. 69) rzucimy z punktu oddalenia np.  $Z_1^{45}$  na podstawę  $p$ , to otrzymamy tam odcinek  $1^x 3^x$  wyraża prawdziwą długość odcinka  $1, 3$ .

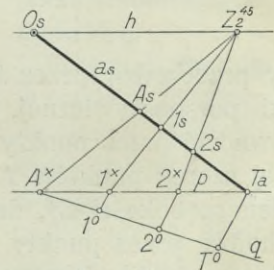


Rys. 70.

b) Przypuśćmy, że ograniczona płaszczyzna rysunkowa nie pozwala na przedłużenie, na prostej  $p$ , szeregu punktów  $1^x, 2^x, 3^x$  poza punkt  $3^x$  (rys. 70) — to wówczas dalsze punkty  $4_s, 5_s, \dots$  podziałki perspektywicznej znajdziemy w sposób następujący: Z punktu  $2_s$  wykreślimy prostą  $p'$  równoległą do  $p$ , zaznaczymy na niej punkt  $3'_x$  i odmierzymy  $3'_x 4'_x = 4'_x 5'_x = \dots = 2_s 3'_x$ . Promienie łączące punkty  $4'_x, 5'_x, \dots$  z lewym punktem oddalenia przetną prostą  $a_s$  w punktach  $4_s, 5_s, \dots$  podziałki perspektywicznej. Geometryczne uzasadnienie konstrukcji leży w tym, że szereg  $2^x, 3^x, \dots$  na prostej  $p$ , jest podobny do szeregu  $2_s, 3'_x, \dots$  na prostej  $p'$ , a ponieważ odcinki pierwszego szeregu są między sobą równe, więc ten sam stosunek zachodzić będzie między odcinkami szeregu drugiego.



Rys. 71.



Rys. 72.

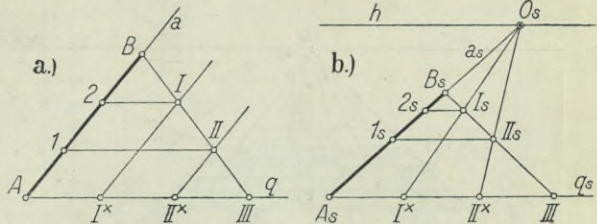
c) Rys. 71 przedstawia perspektywę dwóch prostych prostopadłych do tła, na których znajdują się podziałki perspektywiczne w rzeczywistości przystające. Odcinek  $AB$  leży na tle i wyraża się wskutek tego w swej prawdziwej długości. W miarę oddalania się odcinka od tła, przy zachowaniu równoległości względem swego pierwotnego położenia, perspektywa jego maleje.

d) Widzimy więc, że punkt głębokości umożliwia narysowanie podziałki perspektywicznej o danej jednostce podziału, ale także i podział danego odcinka w pewnym stosunku lub na pewną ilość części. Jeżeli bowiem zadaniem naszym byłoby podział odcinka  $A_s T_a$  na trzy perspektywicznie równe części (rys. 72), to punkt  $A$  rzucimy z punktu



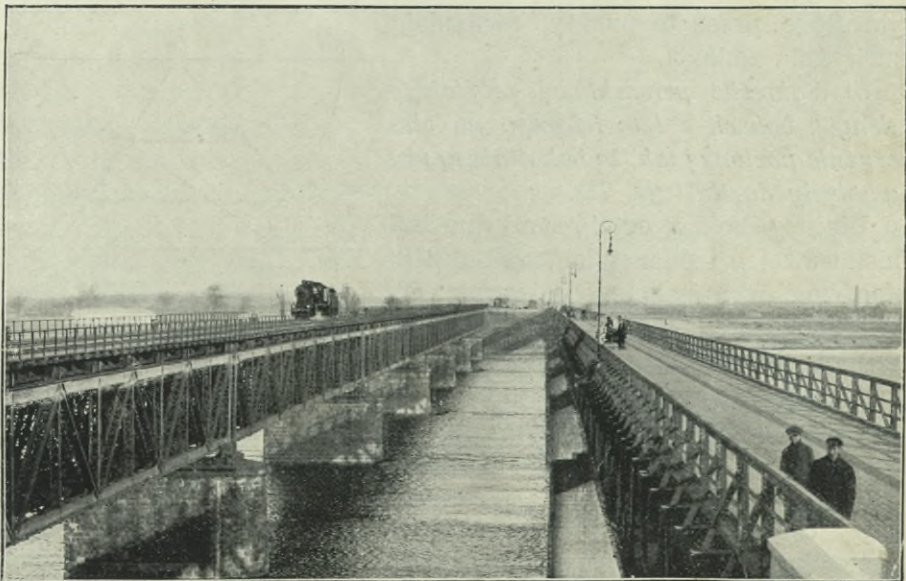
oddalenia na linię podstawy  $p$ , przez punkt  $A^x$  wykreślmy w dowolnym kierunku prostą  $q$ , odmierzymy na niej trzy równe odcinki dowolnej długości, punkt końcowy  $T^0$  połączymy z punktem  $T_a$ , a przez punkty podziału  $1^0$  i  $2^0$  poprowadzimy równoległe. Rzuty  $1_s, 2_s$  punktów  $1^x$  i  $2^x$  z punktu  $Z_2^{45}$  na prostą  $a_s$  rozwiązują zadanie.

e) Gdy punkt głębokości leży poza obszarem płaszczyzny rysunkowej, co jest — jak zobaczymy z dalszego ciągu wykładu — regułą, to wówczas do perspektywicznego podziału odcinka zastosujemy konstrukcję planimetryczną, podaną na rys. 73 a.



Rys. 73 a, b.

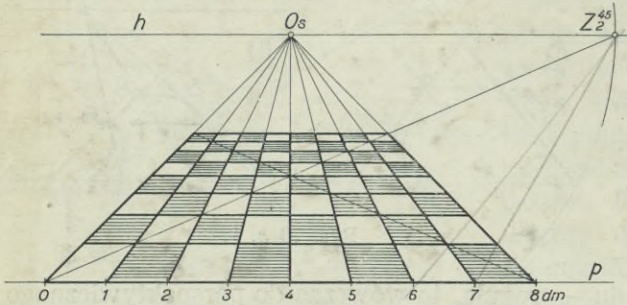
Z punktu końcowego  $A$ , danego odcinka  $\overline{AB}$ , wykreślmy prostą  $q$ , na której odmierzymy żądaną ilość równych sobie, ale dowolnej długości odcinków. W naszym przykładzie przyjęliśmy trzy odcinki. Końcowy punkt  $III$  łączymy z punktem  $B$  naszego odcinka, a przez punkty  $I^x$  i  $II^x$  kreślimy równoległe do  $\overline{AB}$ . Otrzymamy punkty  $I$  i  $II$ , przez które prowadzimy równoległe do  $q$ , wyznaczające na odcinku  $\overline{AB}$  punkty podziału  $1$  i  $2$ .



Rys. 74.



Jeżeli rysujemy w perspektywie (rys. 73b), a odcinek  $\overline{AB}$  jest prostopadły do tła, to konstrukcja podziału odcinka  $A_s B_s$  na trzy perspektywicznie równe części zmieni się, w porównaniu z rys. 73a, tylko o tyle, że proste  $I'I$ ,  $II'II$ , ..., jako równoległe, będą miały wspólny ślad zbiegu, którym jest punkt główny  $O_s$ .



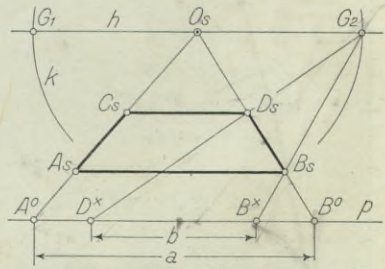
Rys. 75.

**19. Zadania.** a) Wykreślić perspektywę ornamentu, leżącego na płaszczyźnie poziomej, złożonego z 64 pól kwadratowych; bok kwadratu wynosi 1 dm (rys. 75).

Na linii podstawy  $p$  odmierzymy 8 dm w żądanej podziałce rysunku i połączymy punkty 0, 1, 2, ... z punktem głównym. Prosta, łącząca punkt 0 z punktem  $Z_2^{45}$ , jest perspektywą przekątnej wszystkich kwadratów i przecina poprzednio wykreślone proste w punktach, będących perspektywami wierzchołków kwadratów. Równoległe do horyzontu, wykreślone przez te punkty, dopełniają rozwiązania zadania.

b) Wykreślić perspektywę prostokąta o danych bokach  $a$  i  $b$ , leżącego na płaszczyźnie poziomej tak, że bok dłuższy jest równoległy do tła (rys. 76).

Dłuższy bok  $a$  odmierzymy na linii podstawowej  $p$  i punkty końcowe  $A^0$  i  $B^0$  połączymy z punktem głównym  $O_s$ . Na prostej  $A^0 O_s$  przyjmiemy dowolnie punkt  $A_s$ , który uważać będziemy za perspektywę jednego wierzchołka prostokąta i wykreślimy prostą równoległą do horyzontu, otrzymując na prostej  $B^0 O_s$  obraz  $B_s$ , wierzchołka  $B$  prostokąta. Punkt  $B_s$  rzucimy z punktu oddalenia  $G_2$  na podstawę i odmierzymy  $\overline{B^x D^x} = b$ . Prosta  $D^x - G_2$  przetnie prostą  $B^0 - O_s$  w punkcie  $D_s$ , który jest obrazem trzeciego wierzchołka prostokąta. Równoległą do  $p$ , wykreślona z punktu  $D_s$ , wyznacza na  $A^0 - O_s$  punkt  $C_s$ , dopełniający rozwiązania zadania. Trapez  $A_s B_s C_s D_s$  jest perspektywą danego prostokąta.



Rys. 76.



Wymiary równoległe do linii podstawy nazwalimy „szerokościami“, a wymiary prostopadłe do nich, a więc prostopadłe do łła, „głębokościami“ (ust. 17, str. 44). Z rys. 68 i 76 widzimy, że punkt główny umożliwia odmierzenie „szerokości“ a punkty oddalenia — „głębokości“.

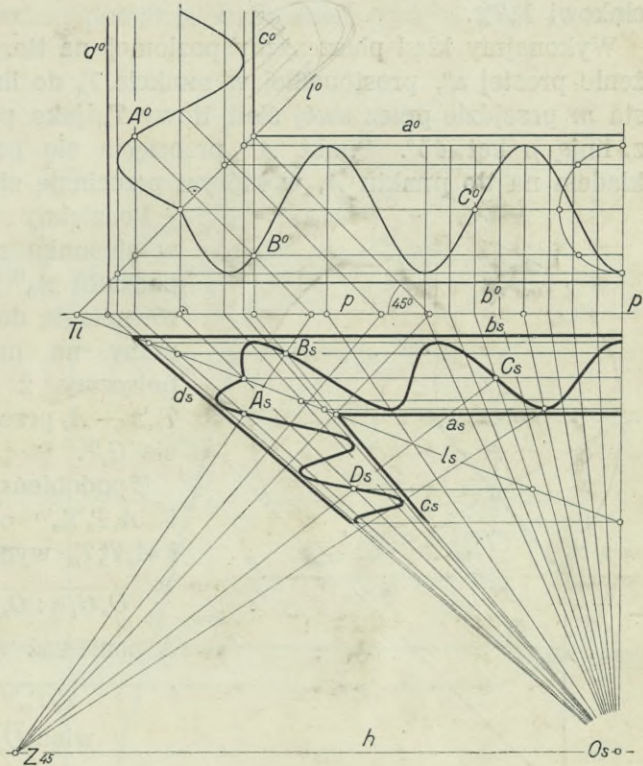
c) Wykreślić perspektywę ornamentu krzywoliniowego, leżącego na płaszczyźnie sufitu. Kład tej płaszczyzny wraz z ornamentem na łł, horyzont  $h$ , podstawa  $p$  (linia przecięcia się płaszczyzny sufitu z łłem), punkt główny  $O_s$  i lewy punkt oddalenia  $Z_{45}$  są dane (rys. 77).

Przez charakterystyczne punkty ornamentu, poprowadzimy proste równoległe, prostopadłe

względnie nachylone pod  $45^\circ$  do linii podstawy. Tę siatkę linii znajdziemy w perspektywie, a miejsce geometryczne punktów przecięcia się odpowiednich promieni będzie rozwiązaniem zadania.

**20. Konstrukcyjne zastosowanie części głębokości łłowej.** a) W praktycznych rysunkach perspektywicznych zniewoleni jesteśmy — z przyczyn, o których mówić będziemy w Tomie drugim — do przyjmowania tak wielkich głębokości łłowych, że koło, a więc i punkty głębokości, leżą z reguły poza obszarem rysunku. W następstwie tego posługiwać się musimy zawsze konstrukcjami, które uwzględniają możliwość użycia tylko części danej głębokości łłowej.

Weźmy pod uwagę perspektywę  $a_s$  prostej  $a$ , prostopadłej do łła leżącej na płaszczyźnie poziomej (rys. 78), i odetnijmy na niej — od łładu łłowego  $T_a$  począwszy — dany odcinek. Odcinek ten odmierzymy

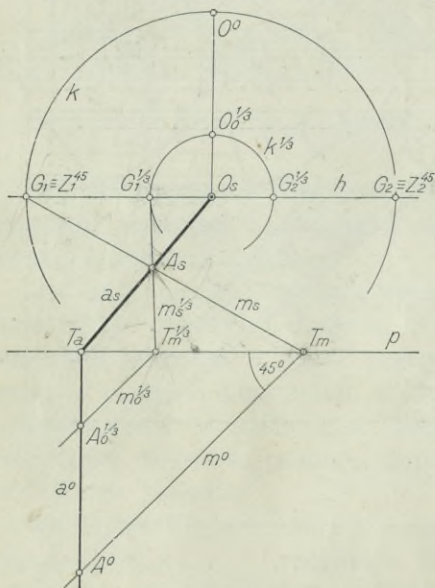


Rys. 77.



na linii podstawy  $p$  i punkt końcowy  $T_m$  połączymy z punktem głębokości  $G_1$  prostą  $m_s$ . Prosta ta przetnie prostą  $a_s$  w punkcie  $A_s$ . Odcinek  $T_a A_s$  jest perspektywą odcinka, którego długość równa się odcinkowi  $T_a T_m$ .

Wykonajmy kład płaszczyzny poziomej na tło. Prosta  $a$  zajmie położenie prostej  $a^0$ , prostopadłej w punkcie  $T_a$  do linii podstawy, zaś prosta  $m$  przejdzie przez swój ślad tłowy  $T_m$  jako prosta  $m^0$ , zawierająca z linią  $p$  kąt  $45^\circ$ . Punkt  $A^0$  przecięcia się prostych  $a^0$  i  $m^0$  będzie kładem na tło punktu  $A$ , w którym przecinają się proste  $a$  i  $m$ .



Rys. 78.

Podzielmy odcinek  $T_a A^0 = T_a T_m$  w stosunku np. 1 : 3 i przez punkt podziału  $A_0^{1/3}$  poprowadźmy prostą równoległą do prostej  $A^0 T_m$ . Otrzymany na prostej  $p$  punkt  $T_m^{1/3}$  połączmy z punktem  $A_s$ . Prosta  $T_m^{1/3} A_s$  przecina horyzont w punkcie  $G_1^{1/3}$ .

Z podobieństwa trójkątów  $A_s O_s G_1^{1/3}$  i  $A_s T_a T_m^{1/3}$  oraz trójkątów  $A_s O_s G_1$  i  $A_s T_a T_m$  wynika, że

$$\overline{O_s G_1^{1/3}} : \overline{O_s G_1} = \overline{T_a T_m^{1/3}} : \overline{T_a T_m}.$$

A ponieważ według założenia:

$$\overline{T_a T_m^{1/3}} : \overline{T_a T_m} = 1 : 3,$$

$$\text{więc } \overline{O_s G_1^{1/3}} = \frac{1}{3} (\overline{O_s G_1}).$$

Ponieważ odcinek  $\overline{O_s G_1}$  równy jest głębokości tłowej  $\delta$ , więc odcinek  $\overline{O_s G_1^{1/3}}$  jest trzecią częścią tej głębokości. Punkt  $G_1^{1/3}$  dzieli więc głębokość tłową, odmierzoną od punktu głównego na horyzoncie, w tym samym stosunku, w jakim punkt  $T_m^{1/3}$ , głębokość punktu  $A$ , t. j. jego odległość od tła.

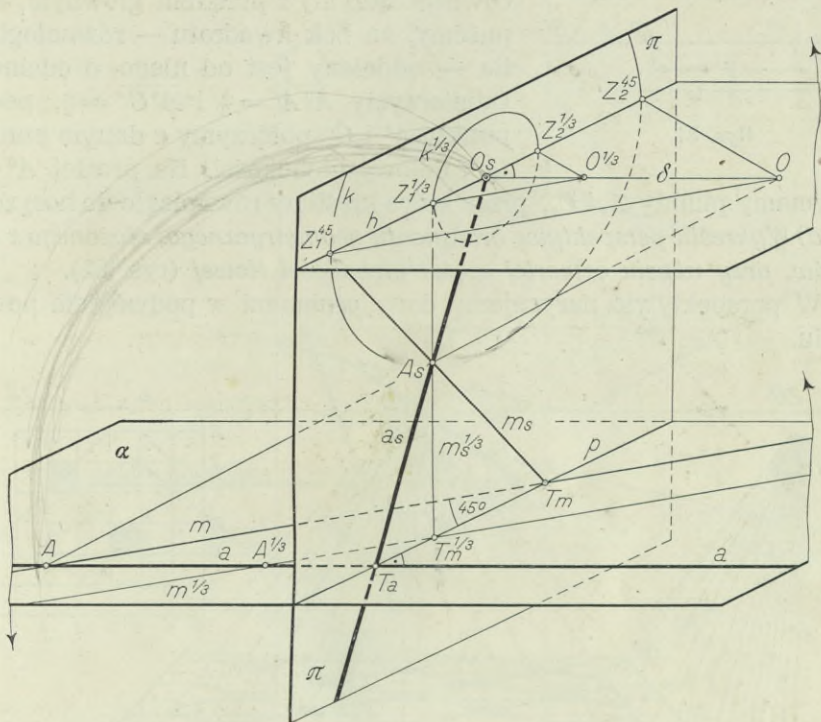
Punkt  $G_1^{1/3}$ , względnie  $G_2^{1/3}$  — ogólnie punkt  $G^{m/n}$  — leżący na horyzoncie, nazywać będziemy punktem częściowej (ułamkowej) głębokości tłowej. Koło  $k^{1/3}$ , współśrodkowe z kołem  $k$ , jest kołem częściowej (ułamkowej) głębokości.

Z powyższego widzimy, że zamiast punktu głębokości użyć możemy zawsze punktu częściowej głębokości, jeżeli równocześnie zmniejszymy, w tym samym stosunku, co głębokość tłową, głębokości punktów.

Rekonstrukcję przestrzenną rys. 78 uzmysławia rys. 79.



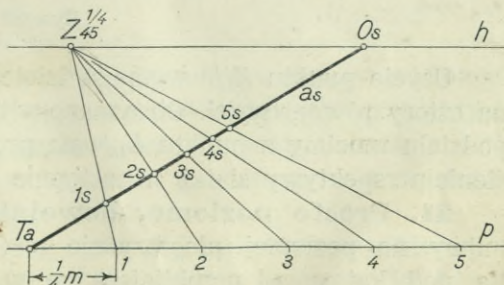
Oko  $O$  zbliżyliśmy do tła  $\pi$  o  $\frac{2}{3} \delta$ , oznaczając to jego nowe położenie przez  $O^{1/3}$ . Promień zbiegu  $OZ_1^{45}$  prostej  $m$ , nachylonej do tła pod kątem  $45^\circ$ , a leżącej na płaszczyźnie poziomej  $\alpha$  — przesunie się równoległe do swego położenia i przejdzie w promień  $O^{1/3}Z_1^{1/3}$ . Koło głębokości  $k$  przejdzie w koło  $k^{1/3}$ .



Rys. 79.

b) Wyznaczyć na prostej  $a$ , prostopadłej do tła, podziałkę perspektywiczną, której jednostką jest odcinek  $m$ . Obszar rysunkowy dopuszcza użycie czwartej części danej głębokości tłowej (rys. 80).

Na linii podstawy  $p$  odmierzymy pięć odcinków, równych czwartej części odcinka  $m$  i punkty końcowe  $1, 2, \dots$  rzucimy z punktu częściowej głębokości  $Z_{45}^{1/4}$  na prostą  $a_s$ . Punkty  $1_s, 2_s, \dots$  są punktami podziałki perspektywicznej; odcinki  $T_a 1_s, 1_s 2_s, 2_s 3_s, \dots$  są perspektywicznie równe.



Rys. 80.











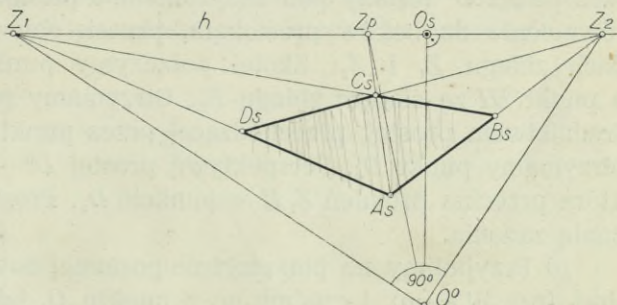






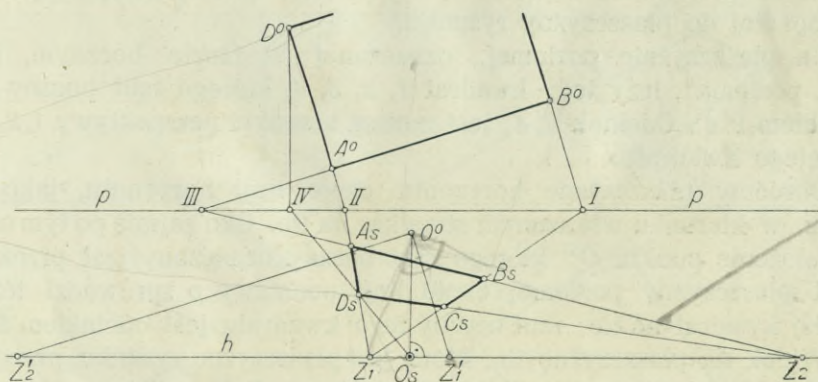


liśmy ślad zbiegu  $Z_1$ , a następnie ślad  $Z_2$  kierunku, prostopadłego do kierunku  $OZ_1$ . Kąt  $Z_1O^0Z_2$  jest więc kątem prostym. Dwusieczna tego kąta przecina horyzont w punkcie  $Z_p$ , który jest śladem zbiegu prostych, równoległych do dwusiecznej kąta prostego  $Z_1OZ_2$ . Punkt ten nazywać będziemy *punktem przekątnym*. Dowolnie przyjęty punkt  $A_s$ , uważany za wierzchołek kwadratu, połączymy ze śladami  $Z_1$ ,  $Z_2$  i  $Z_p$ . Punkt  $B_s$ , przyjęty na prostej  $A_sZ_2$ , uważany za następny wierzchołek kwadratu, połączymy ze śladem  $Z_1$ , a otrzymany na prostej  $A_sZ_p$  punkt  $C_s$  ze śladem  $Z_2$ . Trapezoid  $A_sB_sC_sD_s$  jest perspektywą kwadratu, którego długość boku nie jest nam znana.



Rys. 89.

Proste poziome, dowolnie nachylone do tła.



Rys. 90.

f) Rys. 90 przedstawia konstrukcję perspektywy prostokąta, leżącego na płaszczyźnie poziomej ponad horyzontem. Kłady płaszczyzny horyzontu i płaszczyzny poziomej na tło wykonaliśmy w dwóch przeciwnych kierunkach. Oko padło na tło, jako punkt  $O^0$ , leżący nad horyzontem, prostokąt, jako prostokąt  $A^0B^0C^0D^0$  nad linią podstawy. Promienie, wykreślone z punktu  $O^0$  równoległe do boków tego prostokąta, przeczną horyzont w punktach  $Z'_1$  i  $Z'_2$ . Punkty  $Z_1$  i  $Z_2$ , leżące na horyzontie tak, że:

$$O_s Z_1 = O_s Z'_1 \text{ i } O_s Z_2 = O_s Z'_2$$

są śladami zbiegu promieni równoległych do boków prostokąta. Gdyby kład płaszczyzny horyzontu dokonany był w tym samym kierunku, co kład płaszczyzny poziomej, na której znajduje się prostokąt — to wówczas punkt  $O^0$  leżałby pod horyzontem, a promienie wykreślone z niego, równoległe do boków prostokąta, przecięłyby horyzont wprost w śladach zbiegu  $Z_1$  i  $Z_2$ . Z kolei połączymy punkty  $I$  i  $II$  ze śladem  $Z_1$ , a punkt  $III$  ze śladem zbiegu  $Z_2$ . Otrzymamy punkty  $A_s$  i  $B_s$ . Za pośrednictwem prostej, przechodzącej przez punkt  $D$  i prostopadłej do tła, otrzymamy punkt  $D_s$ . Perspektywą prostej  $D^0 - IV$  jest prosta  $IV - O_s$ , która przecina promień  $Z_1 II$  w punkcie  $D_s$ . Prosta  $D_s Z_2$  dopełnia rozwiązania zadania.

g) Przyjmijmy na płaszczyźnie poziomej dowolny wielokąt, np. kwadrat (rys. 91a i b), i rzućmy go z punktu  $O$ , jako środka rzutów (oka), na tło.

Dla uzmysłowienia sobie tej i następnej operacji przedstawiliśmy na rys. 91a sprawę w widoku z boku. Linja pionowa przedstawia tło, punkt  $O'$  rzut boczny oka, punkt  $O'_s$  rzut boczny punktu głównego; prosta pozioma, przechodząca przez punkty  $O'$  i  $O'_s$ , jest śladem bocznym płaszczyzny horyzontu a punkt  $O'_s \equiv h'$  rzutem bocznym linii horyzontu, prostopadłej do płaszczyzny rysunku.

Na płaszczyźnie poziomej, oznaczonej w rzucie bocznym, jako „I pł. pozioma“, leży tedy kwadrat  $1, 2, 3, 4$ , którego rzut boczny jest odcinkiem  $\overline{2'4'}$ . Odcinek  $\overline{2'_s 4'_s}$  jest rzutem bocznym perspektywy  $1_s 2_s 3_s 4_s$  przyjętego kwadratu.

Obróćmy płaszczyznę horyzontu około linii horyzontu, jako osi obrotu, w kierunku wskazanym strzałką, na tło. Oko zajmie po tym obrocie położenie punktu  $O^0$ , którego rzut boczny oznaczony jest przez  $O'_0$ . Obrót płaszczyzny poziomej około linii podstawy  $p$  sprowadzi leżący na niej kwadrat na tło; rzut boczny tego kwadratu jest odcinkiem  $\overline{2'_0 4'_0}$ .

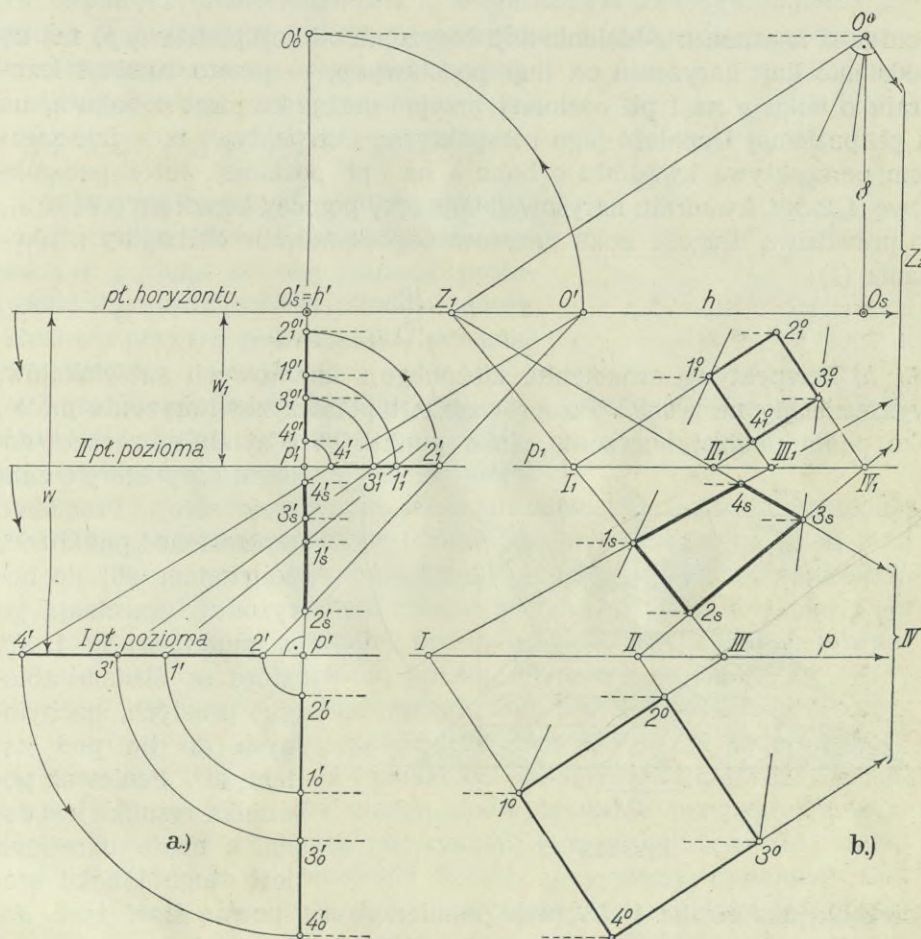
Widok na płaszczyznę tła, którą jest płaszczyzna rysunku, przedstawia rys. 91b, gdzie mamy linię horyzontu  $h$ , linię podstawy  $p$ , punkt główny  $O_s$ , kład  $O^0$  oka na tło, kład  $1^0 2^0 3^0 4^0$  kwadratu i jego perspektywę  $1_s 2_s 3_s 4_s$ , narysowaną przy pomocy śladów zbiegu  $Z_1$  i  $Z_2$  i śladów tłowych  $I II III IV$ .

Czworokąt  $1_s 2_s 3_s 4_s$  jest perspektywą nie tylko kwadratu  $1, 2, 3, 4$ , ale także każdego kwadratu, powstałego z przecięcia ostrosłupa o wierzchołku  $O$  i podstawie  $1, 2, 3, 4$  płaszczyzną równoległą do poziomej płaszczyzny podstawy. Poprowadźmy drugą płaszczyznę poziomą, oznaczoną w rzucie bocznym (rys. 91a), jako „II pł. pozioma“, i przecinającą wspomniany ostrosłup w kwadracie  $1_1 2_1 3_1 4_1$ . Obróćmy teraz tę II pł. poziomą około krawędzi  $p_1$ , jaką tworzy z tłem, wraz z kwadratem  $1_1 2_1 3_1 4_1$  na tło. W widoku z przodu (rys. 91b) otrzymamy kwadrat  $1_1^0 2_1^0 3_1^0 4_1^0$ ,



którego boki, równoległe do boków kwadratu  $1^0 2^0 3^0 4^0$ , przecinać będą nową linię podstawy  $p_1$  w punktach  $I_1 II_1 III_1 IV_1$ .

Wiadomo, że dwa równoległe płaskie przekroje ostrosłupa są wielokątami podobnymi i że powierzchnie tych przekrojów mają się do siebie tak, jak kwadraty ich odległości od wierzchołka ostrosłupa.



Rys. 91 a, b.

Oznaczmy powierzchnię kwadratu, leżącego na I pł. poziomej, literą  $P$ , powierzchnię kwadratu na II pł. poziomej znakiem  $P_1$ , oddalenia wierzchołka  $O$  ostrosłupa od jego obu podstaw przez  $w$  i  $w_1$ , to:

$$P : P_1 = w^2 : w_1^2$$

Oznaczmy bok większego kwadratu literą  $a$ , mniejszego  $a_1$ , to ponieważ

powierzchnie dwóch podobnych wielokątów mają się do siebie, jak kwadraty z ich odpowiadających sobie boków, więc:

$$P : P_1 = a^2 : a_1^2$$

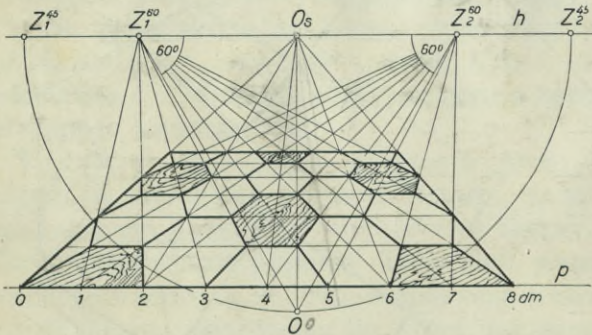
a zatem

$$a : a_1 = w : w_1 \dots \dots \dots 1)$$

Ponieważ  $w$  oznacza oddalenie linii horyzontu od linii podstawy  $p$ , zaś  $w_1$  oddalenie linii horyzontu od linii podstawy  $p_1$  — przeto zamiast kwadratu o boku  $a$  na I pł. poziomej przyjąć można kwadrat o boku  $a_1$  na II pł. poziomej i znaleźć jego perspektywę. Perspektywa ta będzie zarazem perspektywą kwadratu o boku  $a$  na I pł. poziomej. Jeżeli perspektywę  $1_s 2_s 3_s 4_s$  kwadratu narysowaliśmy przy pomocy kwadratu o boku  $a_1$ , to prawdziwą długość boku narysowanego kwadratu obliczymy z równania (1):

$$a = a_1 \cdot \frac{w}{w_1}$$

h) Perspektywę ornamentu, złożonego z umiarowych sześciokątów, wykreśliśmy na rys. 92. Po sprowadzeniu płaszczyzny horyzontu na tło, oko pało poniżej horyzontu, jako punkt  $O^0$ . (Czytelnik zechce dodać u góry litery  $O$  znacząc zero). Promienie wykreślone z punktu  $O^0$ , pod kątem  $60^\circ$  do horyzontu, przecinają go w punktach  $Z_1^{60}$  i  $Z_2^{60}$ , które są śladami zbiegu prostych, nachylnych do tła pod kątem  $60^\circ$ . Ponieważ podziałka rysunku jest dana, a nadto określona jest długość boku sześciokąta, jako równa  $1 \text{ dm}$ , więc odmierzywszy pewną ilość tych  $\text{dm}$  na linii podstawy  $p$ , znajdziemy perspektywy sześciokątów przy pomocy śladów zbiegu  $Z_1^{60}$  i  $Z_2^{60}$  w sposób, który czytelnik odtworzy z łatwością z rysunku.



Rys. 92.

dać u góry litery  $O$  znacząc zero). Promienie wykreślone z punktu  $O^0$ , pod kątem  $60^\circ$  do horyzontu, przecinają go w punktach  $Z_1^{60}$  i  $Z_2^{60}$ , które są śladami zbiegu prostych, nachylnych do tła pod kątem  $60^\circ$ . Ponieważ podziałka rysunku jest dana, a nadto określona jest długość boku sześciokąta, jako równa  $1 \text{ dm}$ , więc odmierzywszy pewną ilość tych  $\text{dm}$  na linii podstawy  $p$ , znajdziemy perspektywy sześciokątów przy pomocy śladów zbiegu  $Z_1^{60}$  i  $Z_2^{60}$  w sposób, który czytelnik odtworzy z łatwością z rysunku.

**22. Częściowe ślady zbiegu.** a) Przyjmijmy na płaszczyźnie poziomej prostą  $a$ , nachyloną do tła pod kątem  $\varphi$ ; jej perspektywą jest prosta  $a_s$  (rys. 93), zaś prosta  $O^0 Z_a$ , kładem jej promienia zbiegu na tło.

Zbliżmy oko do tła na odległość  $\frac{1}{3}$  i poprowadźmy przez punkt  $O_0^{1/3}$  promień równoległy do  $O^0 - Z_a$ . Otrzymany na horyzoncie punkt  $Z_a^{1/3}$ , nazywać będziemy *częściowym* śladem zbiegu kierunku  $a$ . Po-



łączmy ślad łłowy  $T_a$  prostą  $a$  z punktem głównym  $O_s$ , a przez punkt  $Z_a^{1/3}$  wykreślmy prostą  $a_s^{1/3} \parallel a_s$ .

Z podobieństwa trójkątów  $O_s Z_a^{1/3} T_a^{1/3}$  i  $O_s Z_a T_a$  wynika, że:

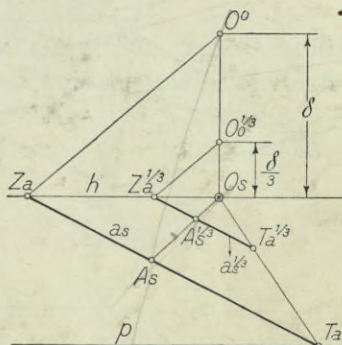
$$\overline{O_s Z_a^{1/3}} : \overline{O_s Z_a} = 1 : 3 = \overline{O_s T_a^{1/3}} : \overline{O_s T_a}$$

t. zn., że punkt  $T_a^{1/3}$  dzieli odcinek  $\overline{O_s T_a}$  w tym samym stosunku, co punkt  $Z_a^{1/3}$  odcinek  $\overline{O_s Z_a}$ . Dowolny promień, wykreślony z punktu  $O_s$ , przecina prostą  $a_s$  w punkcie  $A_s$ , a prostą  $a_s^{1/3}$  w punkcie  $A_s^{1/3}$ , przyczem:

$$\overline{O_s A_s^{1/3}} : \overline{O_s A_s} = 1 : 3 = \overline{Z_a^{1/3} A_s^{1/3}} : \overline{Z_a A_s}$$

b) Równie często, jak punkty głębokości, leżą i ślady zbiegu poza obszarem rysunku, co pociąga za sobą potrzebę posługiwania się częściowymi śladami zbiegu i kreślenia przy ich pośrednictwie perspektyw prostych.

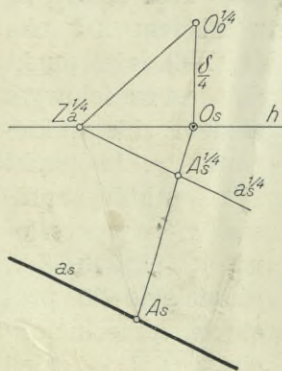
Z rys. 93 wynika, że gdy dany jest częściowy ślad zbiegu, a punkt  $A_s$  mamy połączyć ze śladem właściwym, to najpierw łączymy go z punktem głównym. Następnie odcinek  $\overline{O_s A_s}$  dzielimy punktem  $A_s^{1/3}$  w tym samym stosunku, w jakim częściowy ślad zbiegu dzieli odcinek, ograniczony punktem głównym i właściwym



Rys. 93.

śladem zbiegu, więc na rys. 93 w stosunku 1 : 3. Szukana prosta  $a_s$  przejdzie przez  $A_s$  równoległe do prostej  $a_s^{1/3}$ , łączącej punkty  $A_s^{1/3}$  i  $Z_a^{1/3}$ .

Rozwiązanie tego samego zadania przy użyciu częściowego śladu zbiegu  $Z_a^{1/4}$  podaje rys. 94.



Rys. 94.

c) Przykładem zastosowania częściowych śladów zbiegu do wykreślenia perspektywy kwadratu jest rys. 95. Przy danej trzeciej części głębokości łłowej, przyjęliśmy częściowy ślad zbiegu  $Z_1^{1/3}$  i wyznaczyliśmy częściowy ślad  $Z_2^{1/3}$  kierunku prostopadłego. Wyjdziemy z perspektywy  $A_s$  wierzchołka kwadratu. Punkt  $A_s^{1/3}$ , ograniczający trzecią część odcinka  $A_s O_s$ , połączymy ze śladami  $Z_1^{1/3}$  i  $Z_2^{1/3}$  prostymi, do których wykreślimy równoległe z punktu  $A_s$ . Przyjęty na jednej z nich punkt  $B_s$  połączymy z punktem  $O_s$  i na odcinku tym odmierzymy jego trzecią część  $\overline{O_s B_s^{1/3}}$ . Zkolei wykreślimy z punktu  $B_s$  równoległą do prostej  $B_s^{1/3} Z_1^{1/3}$ . Dwuśieczna kąta  $Z_1^{1/3} O_s^{1/3} Z_2^{1/3}$  przetnie horyzont w punkcie  $Z_p^{1/3}$ , który jest częściowym śladem zbiegu prostych, równoległych do przekątnej

kwadratu. Wyjdziemy z perspektywy  $A_s$  wierzchołka kwadratu. Punkt  $A_s^{1/3}$ , ograniczający trzecią część odcinka  $A_s O_s$ , połączymy ze śladami  $Z_1^{1/3}$  i  $Z_2^{1/3}$  prostymi, do których wykreślimy równoległe z punktu  $A_s$ . Przyjęty na jednej z nich punkt  $B_s$  połączymy z punktem  $O_s$  i na odcinku tym odmierzymy jego trzecią część  $\overline{O_s B_s^{1/3}}$ . Zkolei wykreślimy z punktu  $B_s$  równoległą do prostej  $B_s^{1/3} Z_1^{1/3}$ . Dwuśieczna kąta  $Z_1^{1/3} O_s^{1/3} Z_2^{1/3}$  przetnie horyzont w punkcie  $Z_p^{1/3}$ , który jest częściowym śladem zbiegu prostych, równoległych do przekątnej







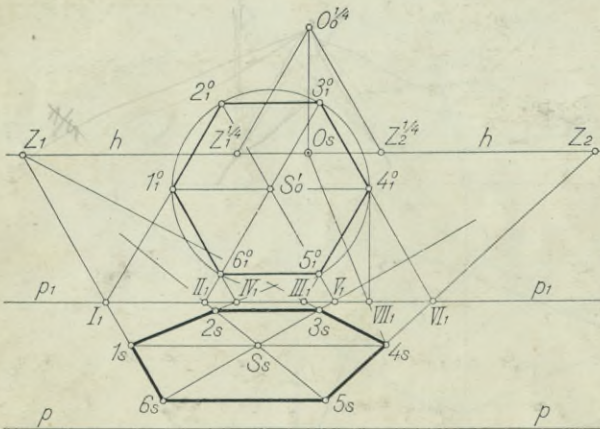
główny i głębokość tłowa są dane. Promienie, wykreślone z punktu  $O_0^{1/4}$  równoległe do boków kwadratu  $A^0 B^0 C^0 D^0$ , przetną horyzont w częściowych śladach zbiegu  $Z_1^{1/4}$  i  $Z_2^{1/4}$ . Znajdziemy właściwy ślad zbiegu  $Z_2$ , odmierzając odcinek  $\overline{O_s Z_2}$ , równy czterokrotnemu odcinkowi  $\overline{O_s Z_2^{1/4}}$ .

Łączymy ślady tłowe  $T_a$  i  $T_b$  z punktem  $Z_2$  a ślad tłowy  $T_c$  z punktem głównym  $O_s$ . Jeżeli punkt  $T_c^{1/4}$ , ograniczający czwartą część odcinka  $\overline{O_s T_c}$ , połączymy z częściowym śladem zbiegu  $Z_1^{1/4}$ , to prosta  $c_s$ , wykreślona przez punkt  $T_c$  równoległe do prostej  $T_c^{1/4} Z_1^{1/4}$ , jest perspektywą prostej  $c$ , przecinającą proste  $a_s$  i  $b_s$  w punktach  $A_s$  i  $D_s$ .

Dwusieczna kąta prostego  $Z_1^{1/4} O_0^{1/4} Z_2^{1/4}$  jest równoległą do przekątnej  $m^0$  kwadratu  $A^0 B^0 C^0 D^0$  i przecina horyzont w punkcie  $Z_p^{1/4}$ , który jest częściowym śladem zbiegu prostej  $m$  i wszystkich prostych do niej równoległych, czyli t. zw. częściowym punktem przekątnym. Przeniesiony czterokrotnie od punktu  $O_s$  na lewo odcinek  $\overline{O_s Z_p^{1/4}}$  wyznacza właściwy punkt przekątny  $Z_p$ , który połączymy prostą  $m_s$  z punktem  $T_m$ . Prosta ta przetnie prostą  $a_s$  w punkcie  $B_s$ . Perspektywą prostej  $r^0$ , poprowadzonej przez punkt  $S^0$ , prostopadłe do linii podstawy, jest prosta  $r_s$ , która przetnie prostą  $m_s$  w punkcie  $S_s$ . Prosta  $n_s$ , łącząca punkty  $S_s$  i  $A_s$ ,

jest perspektywą drugiej przekątnej kwadratu, przecinającej prostą  $b_s$  w punkcie  $C_s$ .

f) Rys. 98 podaje konstrukcję perspektywy umiarowego sześciokąta, leżącego na płaszczyźnie poziomej. Zamiast kładu właściwego sześciokąta, leżącego pod płaszczyzną horyzontu w odległości  $w$ , równej oddaleniu linii horyzontu od linii podstawy  $p$ , użyliśmy



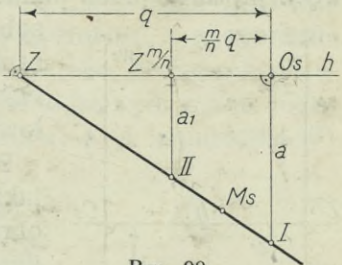
Rys. 98.

sześciokąta podobnego, znajdującego się na II-giej płaszczyźnie poziomej, w odległości  $w_1$  od płaszczyzny horyzontu, przy czym odległość  $w_1$  równa jest odległości linii horyzontu od nowej linii podstawy  $p_1$  (patrz ustęp 21, pkt.  $g$ , rys. 91 a, b).

Sześciokąt  $1_s, 2_s, \dots, 6_s$  jest perspektywą umiarowego sześciokąta, którego bok  $a$  równy jest bokowi  $a_1$  sześciokąta  $1_1^0 \dots 6_1^0$ , pomnożonemu przez wykładnik stosunku  $w : w_1$ .



**23. Podziałki zbiegu. Lineały perspektywiczne.** Gdy chodzi o niewielką ilość linii prostych, przechodzących przez ślady zbiegu, leżące poza obrębem rysunku, użyjemy konstrukcyj, poznanych w ustępie poprzednim. W praktycznych zagadnieniach perspektywy, gdzie ilość promieni, zbiegających się w niedostępnych śladach, jest często bardzo znaczna, uciekamy się do t. zw. podziałek zbiegu lub lineałów perspektywicznych.



Rys. 99.

Podziałka zbiegu opiera się na następującem rozumowaniu: połączmy daną perspektywę  $M_s$  (rys. 99) punktu  $M$  ze śladem zbiegu  $Z$ , a z punktu głównego  $O_s$  i danego częściowego śladu zbiegu  $Z^{m/n}$  wykreślmy promienie prostopadłe do linii horyzontu.

Oznaczmy:  $\overline{O_s I} = a$ ,  $\overline{Z^{m/n} II} = a_1$ ; jeżeli odcinek  $\overline{O_s Z} = q$ , to  $\overline{O_s Z^{m/n}} = \frac{m}{n} \cdot q$

Z podobieństwa trójkątów  $ZO_s I$  i  $ZZ^{m/n} II$  wynika, że:

$$a_1 : a = (\overline{O_s Z} - \overline{O_s Z^{m/n}}) : \overline{O_s Z}, \text{ albo: } a_1 : a = (q - \frac{m}{n} q) : q$$

Z proporcji tej otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{n - m}{n} \cdot a \quad \dots \dots \dots 2)$$

Na rys. 100 mamy  $\frac{m}{n} = \frac{2}{5}$  (odcinek  $\overline{Z^{2/5} O_s} = \frac{2}{5} \cdot \overline{Z O_s}$ ), więc z powyższego równania wypada:  $a_1 = \frac{3}{5} \cdot a$

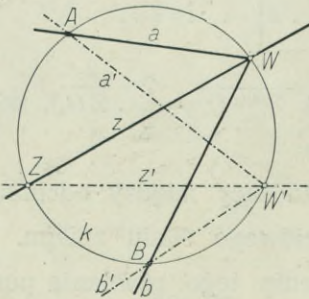
Równanie (2) wyraża związek, zachodzący między odcinkami  $a$ ,  $a_1$  i liczbą  $\frac{m}{n}$ , będącą wskaźnikiem częściowego śladu zbiegu. Możnaść obustronnego pomnożenia lub podzielenia tego równania pociąga za sobą dowolność w obieraniu wielkości  $a$  i uzależnienia od niej — przy danej liczbie  $\frac{m}{n}$  — długości odcinka  $a_1$ . Tym sposobem dochodzimy do podziałki zbiegu, jak ją widzimy na rys. 100. Przez punkt główny  $O_s$  i dany częściowy ślad zbiegu  $Z^{2/5}$  wykreśliliśmy proste  $w_0$  i  $w_1$ , prostopadłe do linii horyzontu. Na pierwszej z nich narysowaliśmy podziałkę o przyjętej jednostce  $a = 10 \text{ mm}$ . Jednostką podziałki na podstawie  $w_1$  będzie, według równania (2), odcinek  $a_1 = \frac{5-2}{5} \cdot 10 = 6 \text{ mm}$ . Promienie, przechodzące przez te same punkty podziału obu podstaw  $w_0$  i  $w_1$ , zbie-

gają się w śladzie  $Z$ , leżącym poza obszarem rysunku. Aby dany punkt  $M_s$  połączyć ze śladem  $Z$ , przyłożymy lineał tak, aby jego krawędź przeszła przez punkt  $M_s$ , a równocześnie podzieliła odpowiadające sobie na obu podziałkach jednostki  $a$  i  $a_1$  w tym samym stosunku. Przy ocenie tego podziału kierujemy się okiem; zbyt drobne jednostki podziałowe nie zapewnią nam większej dokładności.

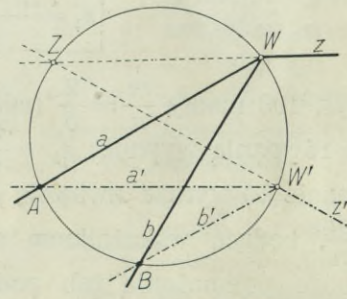
Podziałki zbiegu mają oczywiście zastosowanie także i do punktów głębokości, które leżą poza obrębem rysunku; wiemy, że punkty te są śladami zbiegu prostych, nachylonych do tła pod kątem  $45^\circ$ .

*Lineały perspektywiczne*, budowane z tektury, drzewa lub metalu, a służące do kreślenia linii, zbiegających się w punktach, które leżą poza obszarem płaszczyzny rysunkowej, opierają się na następującym twierdzeniu geometrycznym:

Jeżeli trzy proste  $a$ ,  $b$ ,  $z$  (rys. 101), przechodzące przez jeden punkt  $W$  i tworzące między sobą stałe kąty, poruszają się na płaszczyźnie w ten sposób, że dwie z nich, a mianowicie  $a$  i  $b$ , przechodzą przez dwa stałe punkty  $A$  i  $B$  — to trzecia prosta  $z$  przechodzi również przez stały punkt  $Z$ .



Rys. 101.



Rys. 102.

Ponieważ kąty obwodowe, wspierające się na tym samym łuku koła, są równe, więc i odwrotnie: wierzchołek  $W$  stałego kąta  $AWB$ , którego ramiona przechodzą przez stałe punkty  $A$  i  $B$ , zakreśli koło  $k$ . Ale i kąt  $AWZ$  jest stały i równy połowie kąta środkowego, wspierającego się z nim na łuku  $AZ$ ; a ponieważ punkt  $A$  jest jednym stałym punktem tego łuku, więc drugim musi być stały punkt  $Z$  koła  $k$ , które zakreśli poruszający się wierzchołek  $W$ , sta-



łego kąta  $AWZ$ . Ramiona  $a$  i  $z$  tego kąta przechodzą stale przez punkty  $A$  i  $Z$ .

W przypadku podanym na rys. 101 ramię  $z$  leży „wewnątrz“ pola kąta obwodowego  $AWB$ ; rys. 102 przedstawia drugą możliwość, a mianowicie, gdy ramię  $z$  leży „zewnątrz“ pola kąta  $AWB$ . W obu rysunkach oznaczyliśmy dwa położenia trzech prostych, przechodzących przez jeden punkt: położenie  $a, z, b$  z punktem  $W$  i położenie  $a', z', b'$  z punktem  $W'$ .

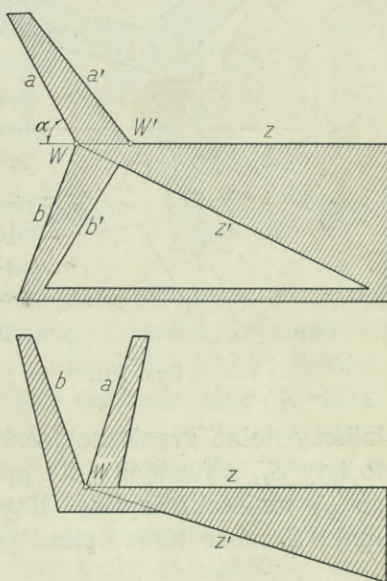
W praktycznym wykonaniu spotykamy lineały perspektywiczne dwojakiiego rodzaju: o ramionach stałych i ramionach ruchomych.

Lineały o ramionach stałych sporządzić sobie może rysownik z kartonu, według wzorów podanych na rys. 103  $a$  i  $b$ . Dolny pasek kartonu lineału *Pillet'a* służy wyłącznie do usztywnienia całości i może być pominięty. Lineał ten przedstawia zespół trzech lineałów perspektywicznych, na które składają się krawędzie  $a, b, z$ ;  $a, b, z'$  i  $a', b', z$ . Lineał na rys. 103  $b$  łączy w sobie lineał o krawędziach  $a, b, z$  i drugi o krawędziach  $a, b, z'$ .

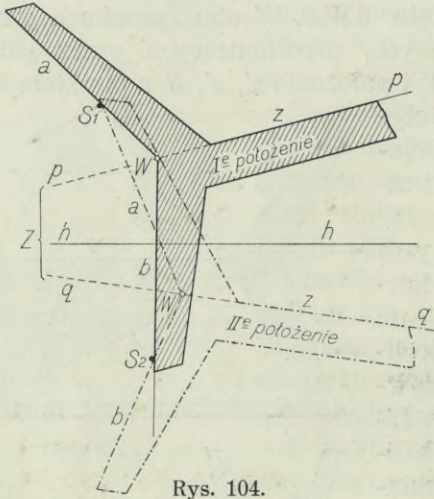
Przyjmijmy horyzont  $h$  (rys. 104) i jeden, względnie dwa promienie zbiegu  $p$  i  $q$ . Ustawmy lineał *Pillet'a* tak, aby jego krawędź  $z$  zeszła się z promieniem  $p$  i w tem położeniu wbijmy w pewnym punkcie  $S_1$  krawędzi  $a$  szpilkę, a wzdłuż krawędzi  $b$  wykreślmy prostą. Następnie nadajmy lineałowi  $II^e$  położenie takie, by krawędź  $a$  dotykała szpilki  $S_1$ , a krawędź  $z$  zeszła się z promieniem zbiegu  $q$ , względnie z horyzontem  $h$ . Wykreślmy wzdłuż krawędzi  $b$ , w nowym położeniu lineału, prostą. Przecięnie ona pierwsze zaznaczone położenie krawędzi  $b$  w punkcie  $S_2$ , w którym wbijemy drugą szpilkę. Jeżeli lineałem poruszać teraz będziemy w ten sposób, że krawędzie  $a$  i  $b$  dotykać będą stale szpilek  $S_1$  i  $S_2$ , to krawędź  $z$  oznaczać będzie położenia promieni zbiegu, przechodzących przez ślad zbiegu  $Z$ .

W podobny sposób posłużymy się lineałem, wykonanym podług rys. 103  $b$ , który nadaje się szczególnie w tych przypadkach, gdy obie szpilki umieszczone być mogą tylko nad lub pod horyzontem.

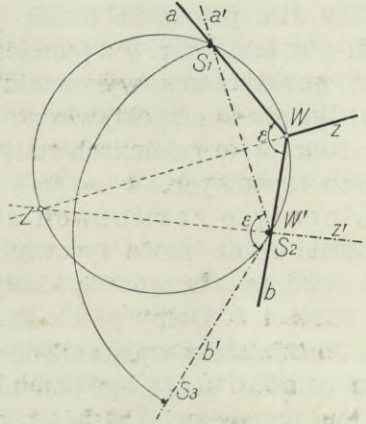
Lineał, którego ramiona  $a$  i  $b$  opierają się stale o szpilki  $S_1$  i  $S_2$ , osiągnie górną granicę położenia, gdy wierzchołek  $W$  zejdzie się z punk-

Rys. 103  $a, b$ .

tem  $S_1$  a granicę dolną, gdy punkt  $W$  dotknie igły  $S_2$  (rys. 105) jako punkt  $W'$ . W wielu wypadkach znajdzie potrzeba rozszerzenia granic działania lineau, co da się uskuteczyć w sposób uwidoczniiony na rys. 105. Lineałowi na-

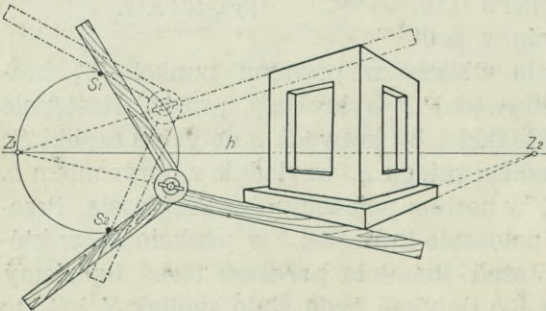


Rys. 104.

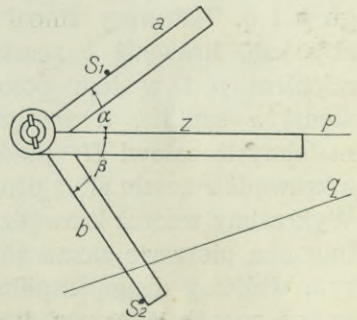


Rys. 105.

daliśmy dolne graniczne położenie, t. zn. jego wierzchołek przesunęliśmy do igły  $S_2$ , a następnie na prostej  $b'$  odmierzyli  $S_2 S_3 = S_1 S_2$  i w punkcie  $S_3$  umieścili szpilkę. Krawędź  $z$  lineau, przechodząc stale przez punkt  $Z$ , może teraz opisać pole w granicach od  $ZS_1$  do  $ZS_3$ .



Rys. 106.



Rys. 107.

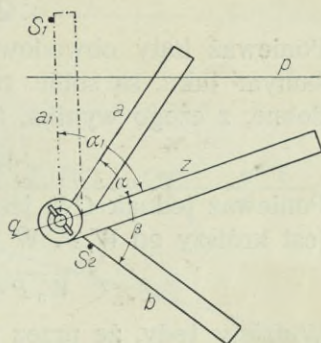
Lineały o ramionach ruchomych, do nastawiania, wykonane być mogą z drzewa lub metalu. Składają się one z trzech ramion, złączonych we wspólnym przegubie. Dwie krawędzie ślizgają się po szpilkach  $S_1$  i  $S_2$ , a trzecia rysuje promienie zbiegu, przecinające się w punkcie  $Z_1$  (rys. 106).



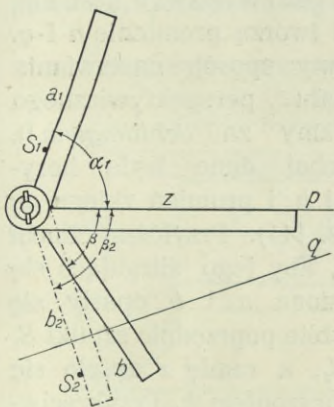
Wynalazcą pierwszego lineału jest Anglik *Piotr Nicholson* (1765—1844), który nazwał go „centrolineałem”. Z biegiem czasu powstał cały ich szereg, znanych dziś pod nazwą lineałów *Mehmkego*, *Schillinga*, *Schrödera*, *Schupmanna* i innych, a różniących się między sobą tylko nieznacznymi udoskonaleniami konstrukcyjnymi.

Zapoznajmy się ze sposobem *Mehmkego*<sup>1)</sup> nastawiania lineału. Przyjmijmy, że leżący poza obszarem płaszczyzny rysunkowej ślad zbiegu  $Z$  jest wyznaczony za pośrednictwem promieni zbiegu  $p$  i  $q$  (rys. 107), względnie jednego promienia zbiegu i horyzontu.

Oprzyjmy o dwie białe szpilki  $S_1$  i  $S_2$  ramiona  $a$  i  $b$  lineału, a krawędzi  $z$  każmy zejść się z prostą  $p$ . Skręćmy lineał w przegubie śrubą, ustalając tym sposobem wzajemne położenie ramion  $a$ ,  $b$  i  $z$ , poczem nadajmy mu takie położenie (rys. 108), aby jego krawędź  $z$  zesza się z promieniem  $q$ , a ramię  $b$  opierało się nadal o igłę  $S_2$ . Przytrzymawszy ramiona  $b$  i  $z$ , rozkręćmy śrubę i obróćmy ramię  $a$  tak, aby dotknęło igły  $S_1$ , przyjmując położenie  $a_1$ , poczem znowu przykręćmy śrubę. Teraz przesuńmy lineał tak, aby ramię  $a_1$  dotykało igły  $S_1$ , zaś krawędź  $z$  pokryła się z prostą  $p$  (rys. 109), poczem rozkręćmy śrubę w przegubie, a ramię  $b$  obróćmy tak, aby dotknęło szpilki  $S_2$ , zajmując położenie  $b_2$ . Skręceniem śruby ustalimy ponownie wzajemne położenie ramion  $a$  i  $b$ . Przesuwając lineał tak, aby ramiona  $a$  i  $b$  dotykały stale szpilek, spróbujemy teraz, czy krawędź  $z$  zejdzie się z promieniem  $q$ . Jeśli próba da wynik przeczący, wówczas powtórzmy omówioną poprzednio operację, aż cel powyższy zostanie osiągnięty.



Rys. 108.



Rys. 109.

Każde powtórzenie zbliża nas do właściwego położenia lineału, które osiągniemy wówczas, gdy środek  $W$  przegubu padnie na koło  $k$ , wyznaczone punktami  $S_1$ ,  $S_2$  i śladem zbiegu  $Z$  (rys. 110).

Oznaczmy punkty przecięcia się promieni  $p$  i  $q$  z kołem  $k$  literami  $P$  i  $Q$ , a punkty, określające poszczególne położenia środka przegubu lineału, symbolami  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ . Jeżeli w pierwszym ustawieniu

<sup>1)</sup> *Mehmke R.*: Über das Einstellen der dreiteiligen Fluchtpunktschiene. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 42 Jahrg. Leipzig 1897, str. 99—105.



lineału krawędzie zajmą położenie  $a_1, b_1, z_1$ , to w drugim ustawieniu kąt  $\alpha = \sphericalangle PW_1S_2$ , jaki tworzą proste  $b_1$  i  $z_1$  nie zmieni się, a ramiona lineału przyjmą położenie  $a_2, b_2, z_2$ , przyczem:

$$\sphericalangle QW_2S_2 = \sphericalangle \alpha = \sphericalangle PW_1S_2$$

Ponieważ kąty obwodowe  $ZPS_2$  i  $ZQS_2$ , jako wspierające się na tym samym łuku, są sobie równe, więc trójkąty  $PW_1S_2$  i  $QW_2S_2$  są podobne, z czego wynika, że:

$$\overline{W_1P} : \overline{W_2Q} = \overline{PS_2} : \overline{QS_2}$$

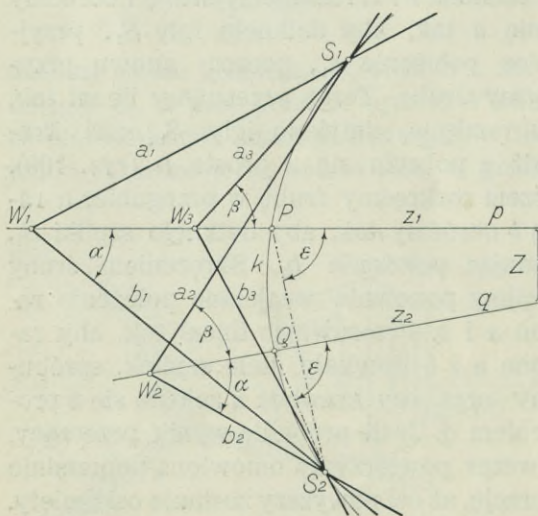
Ponieważ jednak  $QS_2$  jest mniejsze, aniżeli  $PS_2$ , więc i odcinek  $W_2Q$  jest krótszy od  $W_1P$ . W podobny sposób wykazać można, że

$$\overline{W_3P} < \overline{W_2Q}; \overline{W_4Q} < \overline{W_3P} \text{ i t. d.}$$

Widzimy tedy, że przez powtarzanie opisanej wyżej operacji środek  $W$  przegubu zbliża się istotnie do koła  $k$ , na które wkońcu padnie. Stanie się to tem szybciej, im większy jest odcinek  $\overline{PS_2}$  w stosunku do  $\overline{QS_2}$ , a odcinek  $\overline{QS_1}$  w stosunku do  $\overline{PS_1}$ , co oznacza, że szpilki  $S_1$  i  $S_2$  umieszczają należy blisko promieni  $p$  i  $q$  a możliwie najdalej śladu zbiegu  $Z$ .

Sytuacja jest tem dogodniejsza, im większy jest kąt, jaki tworzą promienie  $p$  i  $q$ .

Inny sposób nastawiania lineału perspektywicznego podamy za *Schillingiem*<sup>1)</sup>. Niechaj dane będą horyzont  $h$  i promień zbiegu  $m$  (rys. 111). Przyłożmy lineał tak, aby jego ślizgające się ramiona  $a$  i  $b$  oparły się o wbite poprzednio szpilki  $S_1$  i  $S_2$ , a ramię  $z$  zeszło się z horyzontem  $h$ . Przykręciwszy śrubę przegubu, zaznaczmy to pierwsze położenie lineału — a mianowicie zrobmy na krawędzi ramienia  $z$  kreskę, przenosząc ją równocześnie



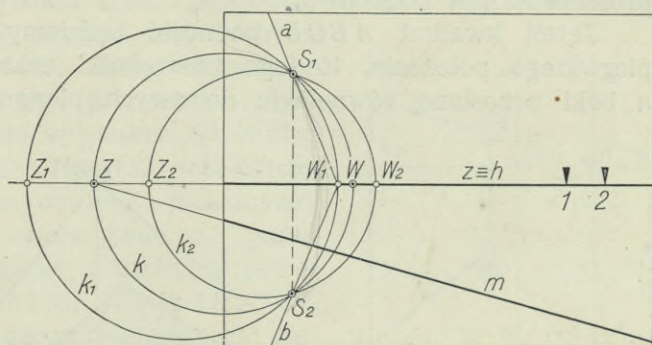
Rys. 110.

na horyzont ze znakiem liczby 1. Następnie skreśmy lineał, którego ramiona  $a$  i  $b$  dotykają stale igieł  $S_1$  i  $S_2$ , ku promieniowi  $m$  i stwierdźmy, czy linja, którą wykreślilibyśmy wzdłuż krawędzi  $z$  w jej nowem poło-

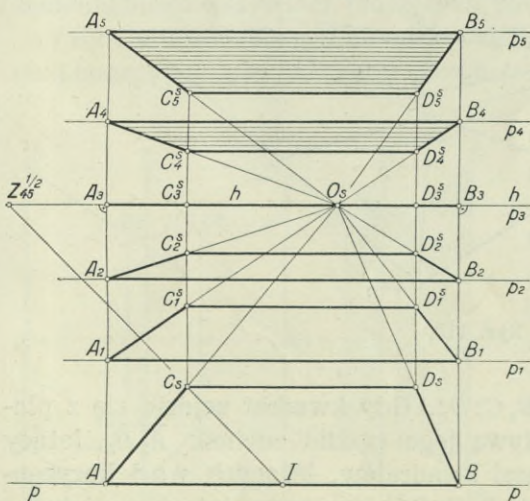
<sup>1)</sup> *Schilling Friedrich*: Über die Anwendung der Fluchtpunktschiene in der Perspektive. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 56. Leipzig 1908, str. 189 — 208.



zeniu, przecięłaby horyzont w punkcie, leżącym po prawej czy też po lewej stronie śladu zbiegu  $Z$ , promienia  $m$ . Przypuścimy, że ten punkt, oznaczony przez  $Z_1$ , leży na lewo od punktu  $Z$ ; wróciwszy z linealem w położenie pierwsze — t. zn. to, w którym krawędź  $z$  schodzi się z horyzontem — rozkręćmy śrubę przegubu i przesuńmy go o jakiś odcinek na prawo, zatem w kierunku przeciwnym, aniżeli kierunku, w jakim przesunięty jest punkt  $Z_1$  względem śladu zbiegu  $Z$ . Ustawmy ramiona  $a$  i  $b$  tak, aby dotknęły szpilek i po przykręceniu śruby oznaczmy na horyzontie położenie przyjętego na lineale znaku liczbą 2; obróćmy znowu lineal około igieł  $S_1$  i  $S_2$  ku promieniowi  $m$  i stwierdźmy, czy punkt  $Z_2$  przecięcia się krawędzi  $z$  z horyzontem leży jeszcze po lewej, czy też już po prawej stronie punktu  $Z$ . Dopuszczmy istnienie tego drugiego przypadku, to wówczas właściwe rozstawienie ramion linealu mieścić się będzie w granicach znaków 1 i 2 na linii horyzontu. Osiągnięcie właściwego położenia jest już teraz bardzo łatwe i wymagać będzie dwóch do trzech dalszych prób. Podczas tych prób środki  $W_1, W_2, \dots, W$  przegubu leżeć będą kolejno na kołach  $k_1, k_2, \dots, k$ , przechodzących przez punkty  $S_1, S_2$  i ślady  $Z_1, Z_2, \dots, Z$ .



Rys. 111.



Rys. 112.

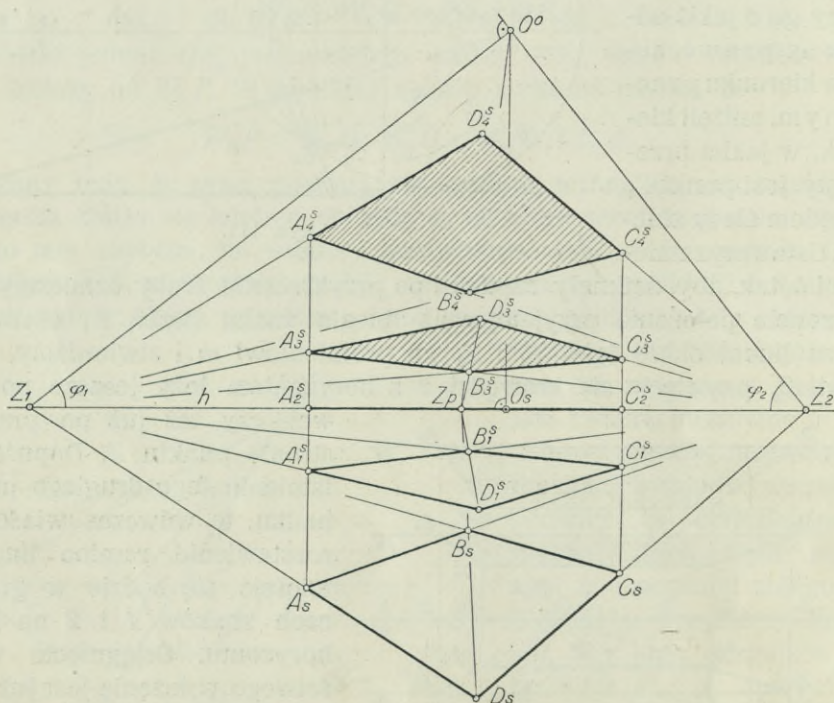
wey, czy też już po prawej stronie punktu  $Z$ . Dopuszczmy istnienie tego drugiego przypadku, to wówczas właściwe rozstawienie ramion linealu mieścić się będzie w granicach znaków 1 i 2 na linii horyzontu. Osiągnięcie właściwego położenia jest już teraz bardzo łatwe i wymagać będzie dwóch do trzech dalszych prób. Podczas tych prób środki  $W_1, W_2, \dots, W$  przegubu leżeć będą kolejno na kołach  $k_1, k_2, \dots, k$ , przechodzących przez punkty  $S_1, S_2$  i ślady  $Z_1, Z_2, \dots, Z$ .

**24. Plaszczyzny poziome. Plaszczyzny pionowe.** a) Ślady łowe płaszczyzn poziomych są do siebie równoległe i równoległe do linii horyzontu, która jest wspólnym śladem zbiegu tych płaszczyzn.

Trapez  $ABC_sD_s$  (rys. 112) jest perspektywą kwadratu, leżącego na płaszczyźnie podstawy. Jego bok  $AB$  znajduje się na tle. Perspek-

tywę  $\overline{AC_s}$  boku  $\overline{AC}$ , prostopadłego do tła, otrzymaliśmy przy użyciu połowy głębokości tłowej w ten sposób, że środek  $I$  odcinka  $AB$  połączyliśmy z punktem częściowej głębokości  $Z_{45}^{1/2}$  prostą, która przecięła promień  $AO_s$  w punkcie  $C_s$ .

Jeżeli kwadrat  $ABCD$  podnieść będziemy równolegle do jego pierwszego położenia, to jego wierzchołki zakreslą proste pionowe, a boki pozostaną równoległe do swych pierwotnych położenia. Otrzy-



Rys. 113.

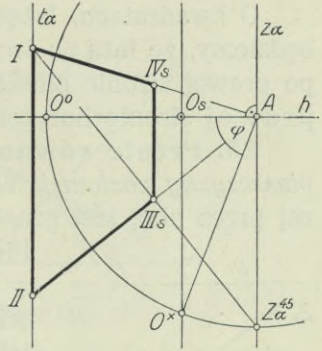
mamy trapezy  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$ . Gdy kwadrat zejdzie się z płaszczyzną horyzontu, to perspektywą jego będzie odcinek  $\overline{A_3B_3}$ , leżący na linii horyzontu. Perspektywami kwadratów, leżących nad horyzontem, są trapezy  $A_4B_4C_4D_4$  i  $A_5B_5C_5D_5$ . Kwadraty, leżące pod horyzontem, obserwujemy zgóry, na kwadraty, znajdujące się nad horyzontem, patrzemy zdołu.

Rys. 113 przedstawia perspektywę kwadratów, leżących na płaszczyznach poziomych, przyczem jedna para ich boków zawiera z tłem kąt  $\varphi_1$ , druga kąt  $\varphi_2$ . Do konstrukcji użyto śladów zbiegu  $Z_1$  i  $Z_2$  oraz punktu przekątnego  $Z_p$ . Punkt  $O^0$  jest kładem oka na tło; odcinek  $\overline{O_sO^0}$ , prostopadły



do linii horyzontu, równy jest głębokości tłowej. Kąt  $O_s Z_1 O^0 = \varphi_1$ , kąt  $O_s Z_2 O^0 = \varphi_2$ . Promienie  $Z_1 - O^0$  i  $Z_2 - O^0$  tworzą kąt prosty.

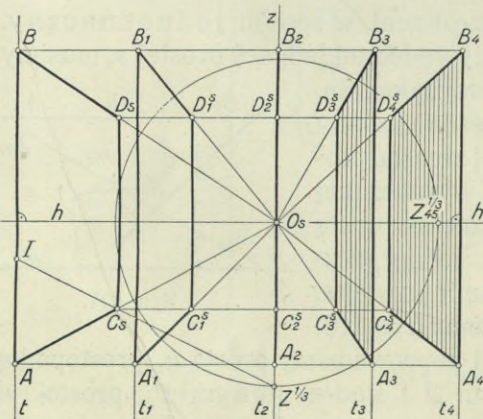
b) Ślad tłowy  $t_\alpha$  i ślad zbiegu  $z_\alpha$  pionowej płaszczyzny  $\alpha$  są prostopadłe do linii horyzontu (rys. 114). Odcinek  $\overline{O_s O^x}$  jest głębokością tłową, kąt  $O_s A O^x = \varphi$  wyraża kąt nachylenia płaszczyzny  $\alpha$  do tła. Koło, zakreślone z punktu  $A$ , jako środka, promieniem  $\overline{A O^x}$ , przetnie linię horyzontu w punkcie  $O^0$ , a ślad zbiegu  $z_\alpha$  w punkcie  $Z_\alpha^{45}$ . Punkt  $O^0$  jest okiem, sprowadzonym na tło obrotem płaszczyzny zbiegu płaszczyzny  $\alpha$  około śladu  $z_\alpha$ ; punkt  $Z_\alpha^{45}$  jest jednym z dwóch punktów przekątnych (ust.13, str. 25 i 26). Trapez  $II III_s IV_s$  jest perspektywą kwadratu, leżącego na pionowej płaszczyźnie  $\alpha$ , nachylonej do tła pod kątem  $\varphi$ . Bok  $\overline{III}$  tego kwadratu leży na tle.



Rys. 114.

Pionową płaszczyznę prostopadłą do tła, przechodzącą przez oko, nazywać będziemy *główną płaszczyzną pionu* (ust. 17, str. 42) — lub krócej: *płaszczyzną pionu* — a jej przecięcie się z tłem *linią pionu*. Linia pionu jest wspólnym śladem zbiegu wszystkich płaszczyzn, równoległych do płaszczyzny pionu.

Rys. 115 przedstawia perspektywę czterech płaszczyzn, równoległych do płaszczyzny pionu. Ślady tłowe  $t, t_1, t_3$  i  $t_4$  tych płaszczyzn są do siebie równoległe, równoległe do linii pionu  $z$  i prostopadłe do horyzontu.



Rys. 115.

tem  $45^\circ$ . Jeżeli połączymy punkt  $I$ , oddzielający trzecią część długości boku  $\overline{AB}$  kwadratu, ze śladem  $Z^{1/3}$ , to punkt  $C_s$ , przecięcia się tej prostej z prostą  $\overline{A O_s}$ , jest perspektywą trzeciego wierzchołka kwadratu.



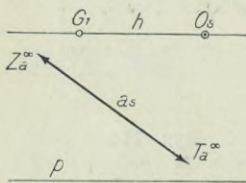
Trapez  $A_1 B_1 C_1^s D_1^s$  jest perspektywą tego samego kwadratu, leżącego na płaszczyźnie bliższej płaszczyzny pionu. Perspektywą tego kwadratu, leżącego na płaszczyźnie pionu, jest odcinek  $A_2 B_2$ . Dalsze posuwanie się płaszczyzny kwadratu, przy zachowaniu równoległości do płaszczyzny pionu, wyrazi się perspektywami  $A_3 B_3 C_3^s D_3^s$  i  $A_4 B_4 C_4^s D_4^s$ .

O kwadratach, leżących po lewej stronie płaszczyzny pionu, mówić będziemy, że leżą po lewej stronie horyzontu; kwadraty, znajdujące się po prawej stronie płaszczyzny pionu, określać będziemy, jako leżące po prawej stronie horyzontu.

**25. Proste równoległe do tła.** a) *Proste dowolnie nachylone do płaszczyzny poziomej.* Wiadomo, że perspektywa prostej, nieprzechodzącej przez oko, jest prostą, wyznaczoną śladem tłowym i śladem zbiegu.

Pierwszy jest punktem przebicia się danej prostej z tłem, drugi punktem przebicia się z tłem promienia, poprowadzonego przez oko, równoległe do tej prostej, czyli t. zw. promienia zbiegu.

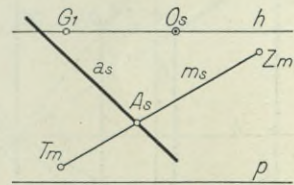
Prosta  $a$ , równoległa do tła, przebija go w punkcie nieograniczenie dalekim  $T_a^\infty$ , w punkcie niewłaściwym. Takim samym punktem jest także ślad zbiegu  $Z_a^\infty$  prostej  $a$  (rys. 116).



Rys. 116.

Płaszczyzna  $\eta$ , przechodząca przez oko i przez prostą  $a$ , przetnie tło wzdłuż prostej  $a_s$ , równoległej do  $a$ . Prosta  $a_s$  jest perspektywą prostej  $a$ . Ale prosta  $a_s$  jest perspektywą wszystkich prostych, leżących na płaszczyźnie  $\eta$  i równoległych do tła — wobec czego rys. 116 nie określa położenia prostej  $a$  w przestrzeni, w sposób jednoznaczny.

Aby prosta  $a_s$  oznaczała perspektywę jednej jedynej prostej  $a$ , musimy znać położenie jednego jej punktu względem tła. A położenie znowu tego punktu określić możemy przez przyjęcie go na jakiejś, dowolnej zresztą, prostej  $m$  (rys. 117). Dopiero przyjęcie wyznaczonej śladami  $T_m$  i  $Z_m$  prostej  $m$ , która przecina prostą  $a$  w punkcie  $A$ , stwarza warunki jednoznacznego perspektywicznego odwzorowania prostej  $a$ .

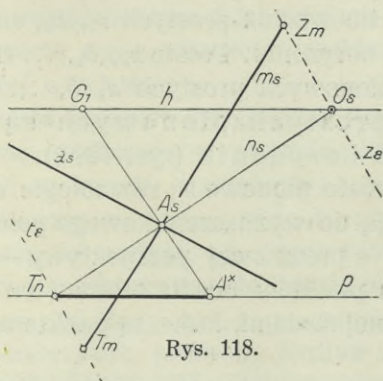


Rys. 117.

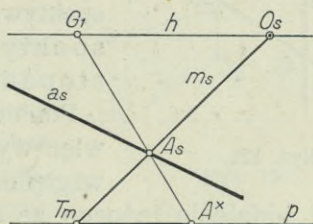
Oddalenie prostej  $a$  od tła znajdziemy (rys. 118) w sposób następujący: z punktu  $A$  poprowadzimy prostą  $n$ , prostopadłą do tła; odcinek ograniczony punktem  $A$  i śladem tłowym  $T_n$  prostej  $n$  daje szukaną odległość. Perspektywą prostej  $n$  jest prosta  $n_s$ , łącząca punkt główny  $O_s$  z punktem  $A_s$ . Proste  $m$  i  $n$  wyznaczają płaszczyznę  $\varepsilon$ , prostopadłą do tła. Jej ślad zbiegu  $z_\varepsilon$  łączy punkty  $O_s$  i  $Z_m$ ; ślad tłow  $t_\varepsilon$  przejdzie przez ślad tłow  $T_m$  równoległe do  $z_\varepsilon$  i przetnie prostą  $n_s$  w szukanym śladzie tłow  $T_n$ . Aby wyznaczyć prawdziwą długość odcinka, którego perspektywą jest odcinek  $A_s T_n$ , poprowadzimy przez prostą  $n$  płą-



szczyzną poziomą, która przetnie tło wzdłuż prostej  $p$ , przechodzącej przez punkt  $T_n$ , równoległe do horyzontu. Rzućmy punkt  $A_s$  z punktu głębokości  $G_1$  na linię podstawy  $p$ , to odcinek  $\overline{T_n A^x}$  wyraża oddalenie prostej  $a$  od

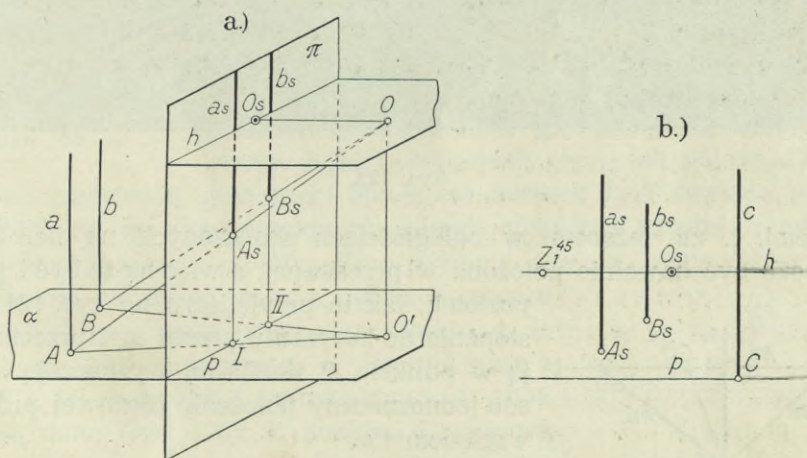


Rys. 118.



Rys. 119.

tła. Zamiast dowolnej prostej  $m$ , przecinającej równoległą do tła prostą  $a$  w punkcie  $A$ , dogodniej jest przyjąć prostą  $m$ , prostopadłą do tła. Śladem zbiegu takiej prostej będzie punkt główny (rys. 119). Rzut  $\overline{T_m A^x}$

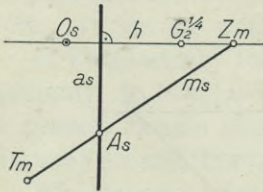


Rys. 120 a, b.

odcinka  $\overline{T_m A_s}$  na linię podstawy  $p$ , równy jest odległości punktu  $A$  prostej  $a$  — więc i samej prostej — od tła.

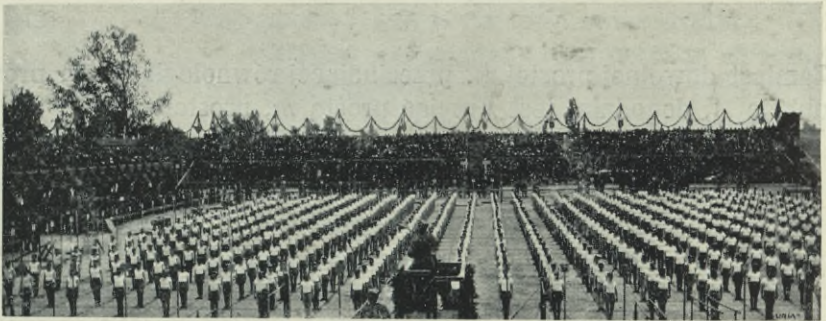
b) *Proste pionowe.* Z pośród prostych równoległych do tła na szczególną uwagę zasługują proste pionowe. Pionowe proste  $a$  i  $b$  (rys. 120 a) są prostopadłe do poziomej płaszczyzny  $\alpha$ , a więc prostopadłe do wszyst-

kich prostych tej płaszczyzny, zatem i do linii podstawy  $p$ . Płaszczyzny, przechodzące przez proste  $a, b, \dots$  i oko, t. j. płaszczyzny rzucające proste  $a, b, \dots$  na tło, są pionowe i przecinają płaszczyznę podstawy wzdłuż prostych, które przechodzą przez stanowisko  $O'$ , zaś tło wzdłuż prostych  $a_s, b_s, \dots$  prostopadłych do horyzontu. Proste  $a_s, b_s, \dots$  są perspektywami pionowych prostych  $a, b, \dots$ . Perspektywy prostych pionowych są prostopadłe do horyzontu (rys. 120b).



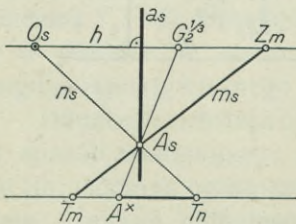
Rys. 121.

Ponieważ proste pionowe są równoległe do tła, więc wymagają do wyznaczenia swego położenia względem tła — prócz swej perspektywy — znajomości oddalenia jednego ze swych punktów od tła. Punkt ten leżeć musi na jakiejś prostej  $m$ , wyznaczonej śladami, które są punktami wła-



Rys. 122.

ściwymi, t. zn. leżącymi w odległościach skończonych na tle. Prosta ta może być dowolnie położona w przestrzeni, a więc może być i prostą poziomą, jak to przyjęliśmy na rys. 121. Prostopadła do horyzontu prosta  $a_s$  i przecinająca ją w punkcie  $A_s$  prosta  $m_s$  wyznaczają w sposób jednoznaczny położenie pionowej prostej  $a$  względem tła.



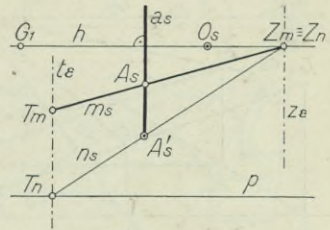
Rys. 123.

Na rys. 123 mamy prostą  $a_s$ , jako perspektywę prostej pionowej, i prostą  $m_s$ , przecinającą ją w punkcie  $A_s$ . Przez punkt  $A$  prostej  $a$  poprowadzimy prostą  $n$ , prostopadłą do tła. Proste  $m$  i  $n$  wyznaczają płaszczyznę poziomą, której śladem zbiegu jest linia horyzontu  $h$ . Ślad tłowy tej płaszczyzny — linia podstawy  $p$  — przejdzie przez ślad tłowy  $T_m$  prostej  $m$ , równoległe do horyzontu. Prosta  $p$  przetnie prostą  $n_s$  w punk-

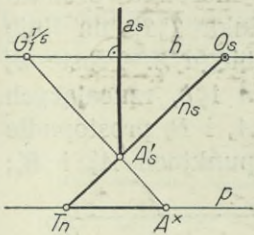


cie  $T_n$ , który jest śladem tłowym prostej  $n$ . Odcinek  $A_s T_n$  jest perspektywą odległości punktu  $A$  od tła. Rzut tego odcinka z punktu głębokości na linię podstawy wyraża jego prawdziwą długość. Na rys. 123 rzuciliśmy odcinek  $A_s T_n$  na linię podstawy  $p$  z punktu częściowej głębokości  $G_2^{1/2}$ ; odcinek  $A^x T_n$  wyraża trzecią część odległości punktu  $A$ , a więc i prostej  $a$ , od tła.

Prosta pionowa  $a$  (rys. 124) przebija płaszczyznę podstawy w punkcie, który znajdziemy w sposób następujący: przez prostą  $a$  i przez poziomą prostą  $m$ , przecinającą pierwszą w punkcie  $A$ , poprowadzimy płaszczyznę  $\varepsilon$ . Płaszczyzna ta będzie płaszczyzną pionową, jej ślady  $t_\varepsilon$  i  $z_\varepsilon$  są prostopadłe do linii horyzontu. Przetnie ona płaszczyznę poziomą wzdłuż krawędzi  $n$ , której perspektywą jest prosta  $n_s$ . Punkt  $A'_s$ , w którym prosta  $n_s$  przetnie prostą  $a_s$ , jest perspektywą punktu przebicia się prostej  $a$  z płaszczyzną podstawy, czyli perspektywą śladu poziomego tej prostej, albo także perspektywą rzutu poziomego prostej  $a$ . Gdy znamy perspektywę prostej pionowej i perspektywę jej śladu (rzutu) poziomego, to położenie tej prostej, w odniesieniu do tła, jest jednoznacznie wyznaczone. Oddalenie bowiem prostej  $a$  od tła wyrazi się rzutem  $T_n A^x$  odcinka  $T_n A'_s$  z punktu głębokości na linię podstawy. Jeżeli posługujemy się — jak na rys. 125 —



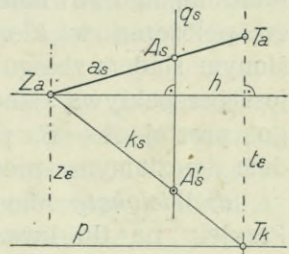
Rys. 124.



Rys. 125.

punktem częściowej głębokości tłowej, to odcinek  $T_n A^x$  wyraża odnośną część (w naszym przykładzie piątą) oddalenia prostej  $a$  od tła.

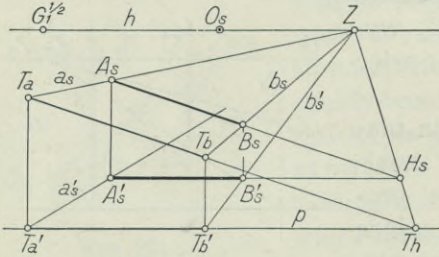
c) *Rzut poziomy punktu. Rzut poziomy odcinka, równoległego do tła.* Niechaj zadaniem naszym będzie wyznaczenie perspektywy rzutu poziomego punktu  $A$ , leżącego na poziomej prostej  $a$ . Perspektywa  $a_s$  prostej  $a$ , jej ślady  $T_a$  i  $Z_a$  i perspektywa  $A_s$  punktu  $A$  są dane (rys. 126). Z punktu  $A$  poprowadzimy pionową prostą  $q$  i znajdziemy punkt przebicia się jej z płaszczyzną poziomą, wyznaczoną linią horyzontu  $h$  i linią podstawy  $p$ . Pionowa płaszczyzna  $\varepsilon$ , przechodząca przez prostą  $a$ , przechodzi także przez prostą  $q$  i przecina płaszczyznę poziomą wzdłuż prostej  $k$ . Punkt  $A'$  przecięcia się prostych  $q$  i  $k$  rozwiązuje zadanie. Ślad tłow  $t_\varepsilon$  płaszczyzny  $\varepsilon$  przejdzie przez punkt  $T_a$ , prostopadłe do linii horyzontu. Ślad zbiegu  $z_\varepsilon$  przejdzie



Rys. 126.



przez ślad zbiegu  $Z_a$ , równoległe do  $t_\epsilon$ . Prosta  $k_s$ , łącząca punkt  $Z_a$  z punktem  $T_k$ , w którym ślad  $t_\epsilon$  przecina linię podstawy  $p$ , jest perspektywą krawędzi płaszczyzny  $\epsilon$  z płaszczyzną poziomą. Punkt  $A'_s$  przecięcia się prostej  $k_s$  z prostą  $q_s$  jest perspektywą rzutu poziomego punktu  $A$  (porównaj rys. 124 i odnoszący się do niego tekst).



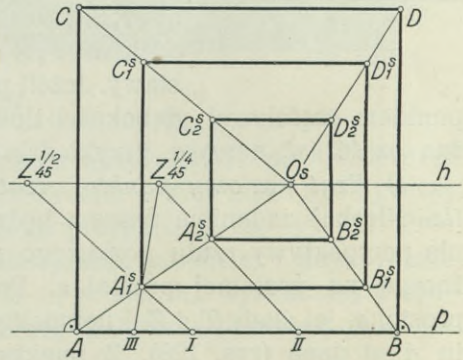
Rys. 127.

W analogiczny sposób znajdziemy perspektywę rzutu poziomego odcinka, równoległego do tła. Niechaj odcinek  $A_s B_s$  (rys. 127) będzie perspektywą odcinka  $\overline{AB}$ , równoległego do tła, a prosta  $a_s$  perspektywą prostej poziomej, przechodzącej przez punkt  $A$ . Odcinek  $\overline{T_a T_b}$ , równoległy do  $\overline{A_s B_s}$  — ograniczony punktem  $T_b$ , który leży na promieniu  $b_s$ , wykreślonym przez punkty  $B_s$  i  $Z$  — jest rzutem równoległym odcinka  $\overline{AB}$  na tło w kierunku promienia  $Z-O$ . Wyznamy rzut prostokątny  $\overline{T'_a T'_b}$  odcinka  $\overline{T_a T_b}$  na linię podstawy  $p$  i połączmy punkty  $T'_a, T'_b$  ze śladem zbiegu  $Z$ . Proste  $a'_s$  i  $b'_s$  są perspektywą rzutów poziomych promieni  $a$  i  $b$ , rzucających odcinek  $AB$  na tło. Proste, wykreślone z punktów  $A_s$  i  $B_s$  prostopadłe do linii podstawy  $p$ , przetną promienie  $a'_s$  i  $b'_s$  w punktach  $A'_s$  i  $B'_s$ ; odcinek  $\overline{A'_s B'_s}$  będzie równoległy do linii  $p$  i jest perspektywą rzutu poziomego odcinka  $\overline{AB}$ .

Jeżeli odcinek  $\overline{T_a T_b}$ , leżący na tle i punkt  $Z$  uważać będziemy za dane, to wówczas odcinek  $\overline{A_s B_s}$  będzie perspektywą odcinka  $\overline{T_a T_b}$ , przesuniętego równoległe do swego położenia w kierunku, określonym śladem zbiegu  $Z$ . Punkt  $H_s$  jest perspektywą śladu poziomego prostej  $A-B$ , punkt  $T_h$  śladem poziomym prostej  $T_a-T_b$ .

d) *Wielokąt równoległy do tła.*

Przyjęty na tle kwadrat  $ABCD$  (rys. 128) przesuniemy o daną odległość w kierunku prostopadłym do tła i wykreślmy jego perspektywę. Perspektywy wierzchołków kwadratu leżeć będą na promieniach, przechodzących przez punkt główny  $O_s$ , perspektywy boków kwadratu pozostaną równoległe do odpowiednich boków kwadratu  $ABCD$ .



Rys. 128.



Operując połową głębokości tłowej, odmierzymy na linii podstawy  $p$  odcinek  $\overline{AI}$  — równy połowie oddalenia od tła kwadratu w jego nowym położeniu — i punkt  $I$  rzucimy z punktu  $Z_{45}^{1/2}$  na promień  $A - O_s$ . Przez otrzymany tam punkt  $A_1^s$  wykreślimy równoległe do boków  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ , poczem uzupełnimy rysunek kwadratu  $A_1^s B_1^s C_1^s D_1^s$ .

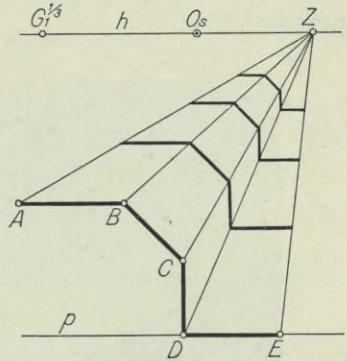
Kwadrat  $A_2^s B_2^s C_2^s D_2^s$  jest perspektywą kwadratu  $ABCD$ , odsuniętego jeszcze dalej od tła; oddalenie jego od kwadratu  $A_1 B_1 C_1 D_1$  równe jest poczwórnemu odcinkowi  $\overline{II'}$ .

Analogicznie przedstawi się sprawa, gdy kierunek przesunięcia wielokąta, leżącego na tle, nie będzie prostopadły do tła (rys. 129). Perspektywy punktów wierzchołkowych wielokąta  $ABCDE$  leżeć będą na promieniach, przechodzących przez ślad zbiegu  $Z$ , który określa kierunek przesunięcia; perspektywy boków poruszającego się wielokąta będą do siebie równoległe.

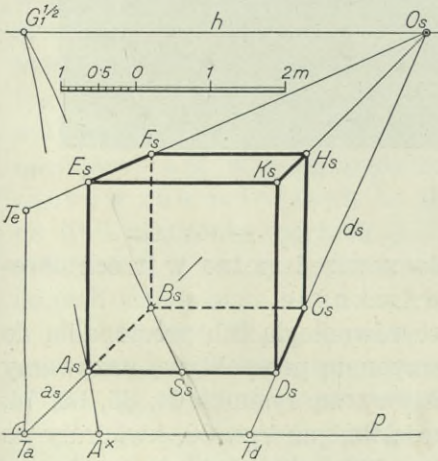
Ogólnie powiedzieć możemy: perspektywy wielokąta — stale równoległego do tła — poruszającego się w określonym kierunku, są wielokątami podobnymi; ślad zbiegu tego kierunku jest środkiem podobieństwa.

e) Wykreślić perspektywę sześciannu, którego przednia ściana jest równoległa do tła i oddalona od niego o 2 m w podziałce rysunku. Długość krawędzi sześciannu wynosi 3 m; konstrukcja ma być wykonana przy użyciu połowy głębokości tłowej (rys. 130).

Na linii podstawy  $p$  odmierzymy  $\overline{T_a T_d} = 3\text{ m}$  w podziałce rysunku i  $\overline{T_a A^x} = 1\text{ m}$ . Punkty  $T_a$  i  $T_d$  połączymy z punktem głównym, a punkt  $A^x$  z punktem  $G_1^{1/2}$  częściowej głębokości. Środek  $S_s$  odcinka  $\overline{A_s D_s}$ , równoległego do  $p$ , łączymy z punktem  $G_1^{1/2}$ . Otrzymamy perspektywę  $A_s B_s C_s D_s$  podstawy sześciannu. Na prostopadłej wykreślonej w punkcie  $T_a$  odmierzymy  $\overline{T_a T_c} = \overline{T_a T_d}$  i punkt  $T_c$  połączymy z  $O_s$ . Dalsza konstrukcja nie wymaga wyjaśnień.



Rys. 129.

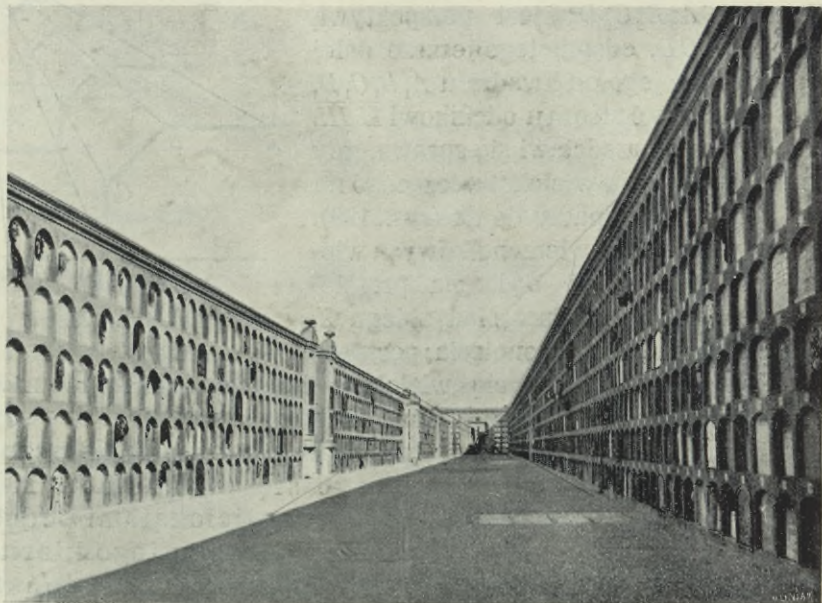


Rys. 130.

z punktem  $G_1^{1/2}$  częściowej głębokości. Środek  $S_s$  odcinka  $\overline{A_s D_s}$ , równoległego do  $p$ , łączymy z punktem  $G_1^{1/2}$ . Otrzymamy perspektywę  $A_s B_s C_s D_s$  podstawy sześciannu. Na prostopadłej wykreślonej w punkcie  $T_a$  odmierzymy  $\overline{T_a T_c} = \overline{T_a T_d}$  i punkt  $T_c$  połączymy z  $O_s$ . Dalsza konstrukcja nie wymaga wyjaśnień.



**26. Perspektywa „czołowa“, „boczna“ i „ukośna“.** Będące w użyciu nazwy: „perspektywa prosta“, „frontowa“, „ukośna“ nie określają bynajmniej różnych sposobów perspektywicznego odwzorowania, lecz stanowią jedynie klasyfikację położeń tła względem rysowanych przedmiotów.



Rys. 131.

Położenia tła względem przedmiotów zawrzeć można w trzech określeniach: położenie czołowe, boczne i ukośne.

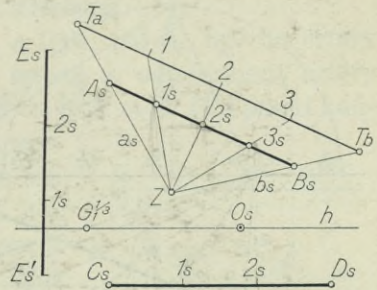
Jeżeli pionowa płaszczyzna tła jest równoległą lub prostopadłą do ściany rysowanego przedmiotu — to otrzymaną perspektywę nazywamy czołową. Przykładami takiej perspektywy są rysunki 64, 65, 66, 74, 130, 131. Ornamenty na rys. 82, 92, sześciokąt na rys. 98, kwadraty na rys. 75, 112, 114, 115 i 128 i postacie na rys. 122 mają położenie czołowe.

Jeżeli płaszczyzna tła ma położenie pionowe, jednak nie prostopadłe ani nie równoległe do ścian odtwarzanego perspektywicznie przedmiotu — jeżeli tło nie jest równoległe do żadnego z boków rysowanego, umiarkowanego wielokąta — to perspektywę nazywać będziemy boczną. Jako przykłady, służyć mogą rys. 62, 84, 89, 90, 91 b, 97, 113.

Jeżeli wreszcie płaszczyzna tła nie ma położenia pionowego, lecz najzupełniej dowolne — to otrzymana perspektywa nazwana będzie ukośną. Taką perspektywą są rys. 187, 188, 192 i 193.



**27. Dzielenie odcinków.** a) *Odcinki równoległe do tła.* Odcinek  $A_s B_s$  (rys. 132) i prosta  $a_s$  wraz z przyjętymi na niej punktami  $T_a$  i  $Z$ , wyznaczają jednoznacznie odcinek  $\overline{AB}$ , równoległy do tła. Prosta  $a_s$  jest perspektywą prostej  $a$ , przecinającej prostą  $A-B$  w punkcie  $A$ . Punkt  $T_a$  jest śladem tłowym, a punkt  $Z$  śladem zbiegu prostej  $a$ . Ślad tłowy  $T_a$  prostej  $a$  uważać należy za rzut punktu  $A$ , w kierunku prostej  $a$  na tło. Rzućmy w tym samym kierunku punkt  $B$  na tło. Perspektywa promienia rzucającego będzie prostą  $b_s$ , łączącą punkt  $B_s$  ze śladem zbiegu  $Z$ . Ponieważ ślad zbiegu prostej  $A-B$ , równoległej do tła, jest punktem niewłaściwym, a rzut równoległy tej prostej na tło



Rys. 132.

jest do niej równoległy — przeto perspektywa  $\overline{A_s B_s}$  odcinka  $\overline{AB}$  i perspektywa jego rzutu będą do siebie równoległe. Prosta, wykreślona z punktu  $T_a$  równoległe do  $\overline{A_s B_s}$ , przetnie promień  $b_s$  w punkcie  $T_b$ , który jest śladem tłowym promienia  $b$ , a więc rzutem punktu  $B$  na tło, w kierunku, określonym śladem zbiegu  $Z$ . Odcinek  $\overline{T_a T_b}$  jest rzutem odcinka  $\overline{AB}$  na tło w kierunku, który określa punkt  $Z$ , jako wspólny ślad zbiegu promieni rzucających. Ponieważ rzut równoległy odcinka, równoległego do tła, jest odcinkiem równoległym do danego odcinka i równym mu co do długości, więc odcinek  $\overline{T_a T_b}$ , równoległy do  $\overline{A_s B_s}$ , równy jest odcinkowi  $\overline{AB}$ . Wynika stąd, że perspektywiczne dzielenie odcinków równoległych do tła, a więc także odcinków równoległych do linii horyzontu (odcinek  $\overline{C_s D_s}$  na rys. 132), lub odcinków pionowych (odcinek  $\overline{E_s E'_s}$  na rys. 132) sprowadza się do dzielenia — w żądanych stosunkach — perspektyw tych odcinków.

b) *Odcinki, leżące dowolnie na płaszczyźnie poziomej.* a) Aby dokonać podziału odcinka, leżącego na płaszczyźnie poziomej, postąpimy, jak w ust. 18, z prostą prostopadłą do tła. Płaszczyznę poziomą obrócimy — wraz z leżącą na niej prostą — około linii podstawy na tło, poczem przeniesiemy punkty dokonanego podziału na perspektywę prostej. Przeniesienie to wykonać można zapomocą promieni, przechodzących przez kład  $O^0$  oka (patrz ust. 21, pkt. b), albo za pośrednictwem prostych, przechodzących przez punkty podziału, a zawierających z linią podstawy dowolny kąt  $\varphi$ .

Prosta  $m_s$  na rys. 133 jest perspektywą prostej  $m$ , która leży na płaszczyźnie poziomej i zawiera z tłem kąt  $\varphi$ . Przyjmijmy na prostej  $m_s$  punkt  $M_s$  i postanówmy podzielić odcinek  $\overline{T_m M_s}$  na trzy, perspektywicznie równe części. W tym celu wykonamy kład płaszczyzny poziomej na tło.







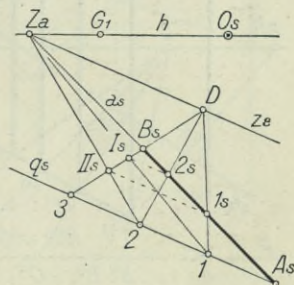
i rzucając punkty podziału  $I$  i  $II$  z punktu  $D$  na  $m_s$ , otrzymamy punkty  $1_s$  i  $2_s$ , które dzielą odcinek  $\overline{T_m M_s}$  na trzy perspektywicznie równe części.

Punkt  $D$ , przy pomocy którego dokonywa się perspektywiczny podział odcinka, nazywać będziemy *punktem dzielenia*.

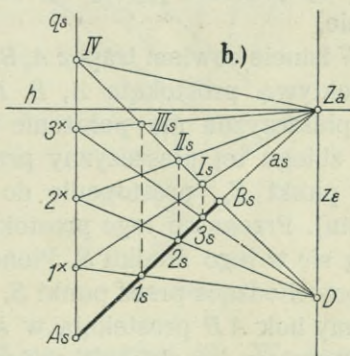
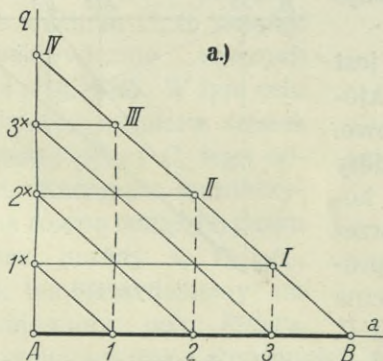
β) Celem podziału odcinka  $AB$  prostej  $a$  (rys. 134a), np. na cztery równe części, poprowadzimy przez punkt  $A$  prostą  $q$ , odmierzmy cztery równe, dowolnej długości odcinki  $A1^x = 1^x 2^x = 2^x 3^x = 3^x IV$  i punkt końcowy  $IV$  połączymy z punktem  $B$ . Promienie, wykreślone z punktów  $1^x, 2^x$  i  $3^x$ , równoległe do boku  $IVB$ , przetną prostą  $a$  w punktach podziału  $1, 2$  i  $3$ . Równoległe do prostej  $a$ , poprowadzone z punktów  $1^x, 2^x$  i  $3^x$ , przetną bok  $IVB$  w punktach  $I, II$  i  $III$ ; proste  $I3, II2$  i  $III1$  są równoległe do prostej  $q$ .

Konfiguracji tej użyć można do podziału dowolnie w przestrzeni położonego odcinka, byleby prosta  $q$  była równoległą do  $\overline{t\Delta}$ . Perspektywę rys. 134a przedstawia rys. 134b; prostą  $q$  przyjęliśmy równoległą do horyzontu. Perspektywy promieni równoległych do boku  $IVB$  przetną się w punkcie dzielenia  $D$  na horyzoncie; perspektywy prostych, równoległych do prostej  $a$  schodzą się w śladzie zbiegu  $Z_a$ ; proste  $I_s 3_s, II_s 2_s$  i  $III_s 1_s$  są równoległe do  $q_s$ .

Przykład użycia prostej  $q$ , równoległej do  $\overline{t\Delta}$ , ale poza tem dowolnie nachylonej do płaszczyzny poziomej, stanowi rys. 135. Odcinek  $A_s B_s$ ,



Rys. 135.



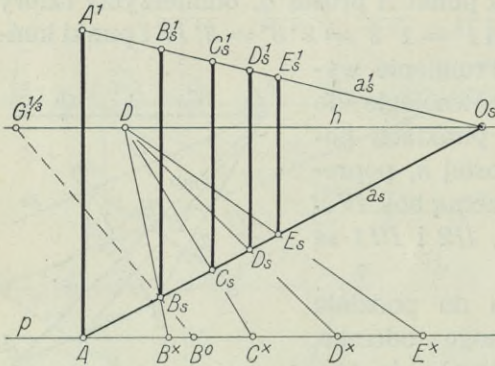
Rys. 136 a, b.

podzieliliśmy tam na trzy perspektywicznie równe części. Ślad zbiegu  $z_e$  płaszczyzny, przechodzącej przez proste  $a$  i  $q$ , jest równoległy do  $q_s$ ; na śladzie tym leży punkt dzielenia  $D$ .



Jeżeli prosta  $q$  będzie pionowa, to konstrukcja podziału odcinka  $\overline{A_s B_s}$  na cztery perspektywicznie równe części przedstawi się tak, jak to widzimy na rys. 136 *a, b*.

Podział odcinka prostopadłego do tła na rys. 73 *a, b* jest wykonany przy użyciu prostej  $q$ , równoległej do horyzontu.

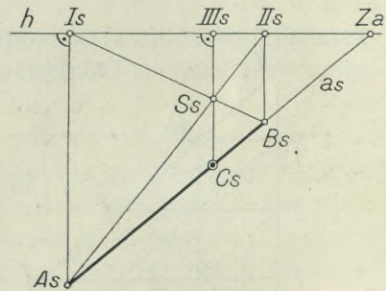


Rys. 137.

Rys. 137 przedstawia perspektywę  $a_s$  prostej  $a$ , prostopadłej do tła. Odcinek  $\overline{A E}$  tej prostej podzieliliśmy na cztery równe części i w punktach podziału poprowadziliśmy proste pionowe równej wysokości i równe odcinkowi  $\overline{A A^1}$ . Prawdziwa długość odcinków  $\overline{A B} = \dots = \overline{D E}$  równa jest potrójnej długości odcinka  $\overline{A B^0}$ .

*c) Perspektywiczny środek odcinka*, t. j. perspektywę środka odcinka, którego rzut perspektywiczny jest dany, znaleźć można przez zastosowanie poznanej wyżej konstrukcji. Szczególnie jednak dogodną metodę perspektywicznego połowienia odcinka podaje rys. 138. Z punktów końcowych odcinka  $\overline{A_s B_s}$ , którego śladem zbiegu jest punkt  $Z_a$ , kreślimy prostopadłe do linii horyzontu, a następnie przekątne  $\overline{A_s II_s}$  i  $\overline{B_s I_s}$ . Punkt  $C_s$ , w którym prostopadła wykreślona do linii horyzontu przez punkt  $S_s$  przecina prostą  $a_s$ , rozwiązuje zadanie.

W istocie bowiem trapez  $A_s B_s I_s II_s$  jest perspektywą prostokąta  $A, B, I, II$ , którego płaszczyzna ma położenie pionowe. (Ślad zbiegu tej płaszczyzny przeszedłby przez punkt  $Z_a$ , prostopadłe do linii horyzontu). Przekątne tego prostokąta przecinają się w jego środku  $S$ . Pionowa prosta, przechodząca przez punkt  $S$ , przecina poziomy bok  $\overline{A B}$  prostokąta w środku  $C$ .



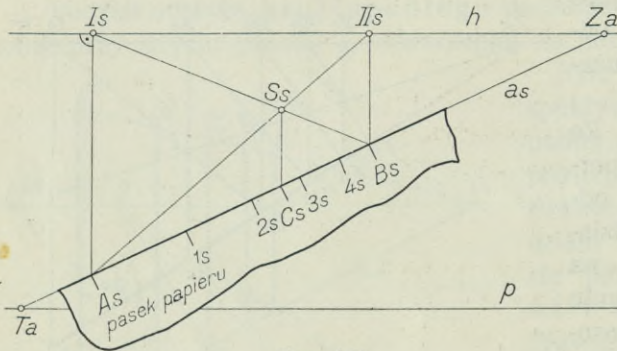
Rys. 138.

Powyższą konstrukcję zastosować można do dzielenia poziomego odcinka na parzystą ilość części, lub do jego wielokrotnego przedłużenia. Pierwsze zadanie wymaga powtórzenia konstrukcji dla każdej uzyskanej części. Drugie zadanie podaje rys. 139, gdzie poziomy odcinek  $\overline{A B}$  przedłużyliśmy pięciokrotnie. Daną perspektywę  $\overline{A_s B_s}$  odcinka  $\overline{A B}$ , rzuciliśmy prostopadłe na linię horyzontu i połączyliśmy środ-





Widzimy, że pośrednictwo pęku promieni pozwala dzielić odcinek w sposób szybki, łatwy i z dokładnością wystarczającą dla celów praktycznych. Wyrysowany na sztywnym papierze pęk *Pillet'a* (byłoby promienie jego były dostatecznie długie) jest przyrządem rysunkowym, którym posługiwać się można z wielką ekonomią linii konstrukcyjnych i czasu.

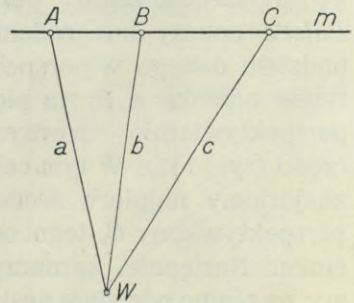


Rys. 141.

*Podstawa teoretyczna podziałki Pillet'a.* Szereg punktów na linii prostej, zwaney podstawą tego szeregu, i pęk promieni, przechodzący przez jeden punkt (wierzchołek pęku), stanowią utwory zasadnicze geometrii, zbudowanej na zasadzie syntezy.

Jeżeli pęk promieni  $W(a, b, c, \dots)$  (rys. 142) przetniemy prostą  $m$ , to otrzymamy na niej szereg punktów  $m(A, B, C, \dots)$  perspektywiczny (homologiczny) z tym pękiem promieni. Jeżeli szereg punktów  $A, B, C, \dots$ , leżący na prostej  $m$  (rys. 142) podstawie tego szeregu, rzucimy z dowolnego punktu  $W$ , t. zn. punkty te połączymy promieniami  $a, b, c, \dots$  z dowolnym punktem, leżącym zewnątrz podstawy — to otrzymamy pęk perspektywiczny (homologiczny) z danym szeregiem punktów. Jeżeli pęk promieni  $W(a, b, c, \dots)$  (rys. 143) przetniemy dwiema prostymi  $m$  i  $m_1$ , to otrzymane na tych prostych szeregi punktów  $A, B, C, \dots$  i  $A_1, B_1, C_1, \dots$  określamy mianem szeregów perspektywicznych (homologicznych).

Zachowując wzajemne położenie promieni  $a, b, c, \dots$  w pęku o wierzchołku  $W$  (rys. 142), przesuńmy prostą  $m$ , wraz z jej elementami  $A, B, C, \dots$  w nowe położenie (rys. 144). Punktowi  $A$ , na podstawie  $m$ , odpowie w dalszym ciągu promień  $a$  w pęku  $W(a, b, c, \dots)$ , punktowi  $B$  odpowie promień  $b$  i t. d. Między elementami obu utworów zasadniczych zachodzi więc nadal odpowiedniość jedno-jednoznaczna, czyli t. zw. odpowiedniość doskonała, tylko że promienie



Rys. 142.



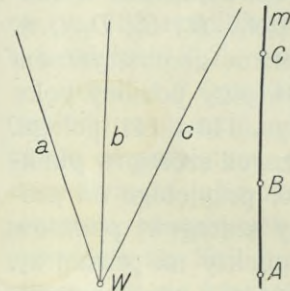
pęku nie przechodzą już przez odpowiadające im punkty w szeregu na podstawie  $m$ . Mówimy, że szereg punktów i pęk promieni na rys. 144 są rzutowe lub homograficzne.

Podobnie, przez wzajemne przesunięcie prostych  $m$  i  $m_1$ , stanowiących podstawy dwóch perspektywicznych szeregów punktów na rys. 143, zniszczymy ich położenie perspektywiczne, ale zachowamy nadal odpowiedniość doskonałą między elementami tych szeregów. Otrzymamy szeregi rzutowe (homograficzne).

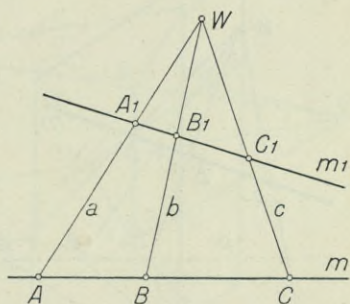
O ile szereg punktów i pęk promieni są perspektywiczne, to szukanie dalszych, odpowiadających sobie elementów w tych utworach zasadniczych, czyli t. zw. ich uzupełnianie, tłumaczy się samo przez się. Punkty podstawy  $m$  i przechodzące przez nie promienie pęku o wierzchołku  $W$  są elementami homologicznymi. Podobnie ma się sprawa z uzupełnianiem dwóch homologicznych szeregów punktów. Odpowiadające sobie punkty leżą na promieniach, które są elementami jednego pęku.

Inaczej przedstawia się sprawa uzupełniania dwóch homograficznych utworów zasadniczych. Pomijając tu metodę konstrukcyj geometrycznych takich uzupełnień, zadowolimy się praktycznym sposobem mechanicznym, w danym wypadku bardziej celowym.

Przenieśmy dany na podstawie  $m$  (rys. 144) szereg punktów  $A, B, C, \dots$  na krawędź paska papieru, a następnie ułożmy ten pasek tak, aby punkty padły na odpowiadające im homograficznie promienie  $a, b, c, \dots$  pęku o wierzchołku  $W$ . Tą drogą sprowadzimy oba utwory zasadnicze do ich położenia pierwotnego, z którego je wyprowadzono, czyli do położenia perspektywicznego. W tem położeniu uzupełnimy oba utwory i tak powielony na pasku papieru szereg punktów przenieśmy na prostą  $m$ .



Rys. 144.

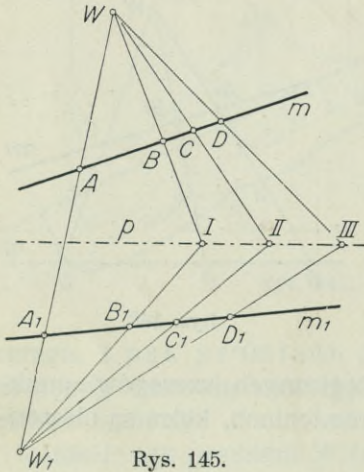


Rys. 143.

Ale w tem miejscu nasuwa się nam zasadnicze pytanie następujące: ile elementów musi być podporządkowanych sobie wzajemnie w dwóch utworach zasadniczych, aby utwory te, jako homograficzne, mogły być następnie uzupełnione? Innymi słowy: iloma parami elementów wyznaczony jest związek homograficzny między dwoma utworami zasadniczymi, albo: z jakiej



najmniejszej ilości elementów składać się mogą dwa perspektywiczne utwory zasadnicze, aby po wzajemnem przesunięciu podstaw tych utworów uzupełnienie ich było możliwe? Odpowiedzią na to pytanie jest następujące, podstawowe, twierdzenie geometrii syntetycznej: homografia dwóch zasadniczych utworów jest wyznaczona



Rys. 145.

wówczas, gdy każdemu z trzech przyjętych elementów jednego utworu podporządkowany jest jeden jedyny element z trzech, należących do utworu drugiego.

Niechaj punktom  $A$ ,  $B$  i  $C$  na podstawie  $m$  (rys. 145) odpowiadają, na podstawie  $m_1$ , punkty  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$ . Punkty  $A$  i  $A_1$ ,  $B$  i  $B_1$ ,  $C$  i  $C_1$  stanowią pary odpowiadających sobie punktów, dwóch homograficznych szeregów na prostych  $m$  i  $m_1$ . Połączmy punkty  $A$  i  $A_1$  prostą i obierzmy na niej dowolnie punkty  $W$  i  $W_1$ ; pierwszy połączmy z punktami  $B$  i  $C$ , drugi z punktami  $B_1$  i  $C_1$ . Promienie  $WB$  i  $W_1B_1$  przetną się w punkcie  $I$ , pozostała para

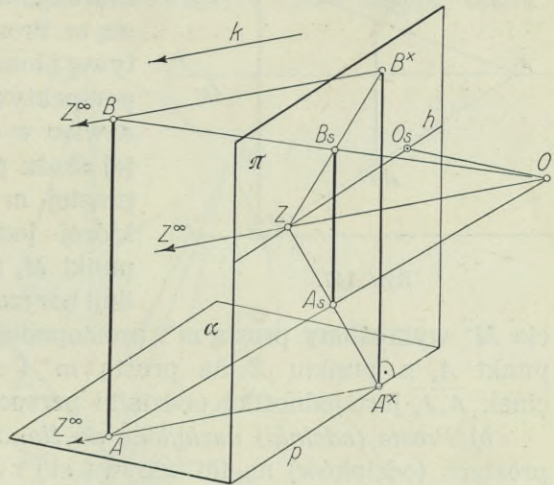
w punkcie  $II$ . Wykreślmy prostą  $p$ , łączącą punkty  $I$  i  $II$ . Każdemu punktowi tej prostej odpowiada jeden punkt na prostej  $m$  i jeden na  $m_1$ . Punkty te, jak np.  $D$  i  $D_1$ , są dalszemi elementami odpowiedniami w szeregach homograficznych  $m$  ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , ...) i  $m_1$  ( $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ , ...).

Wypowiedziane wyżej twierdzenie jest równocześnie geometrycznym uzasadnieniem perspektywicznego dzielenia odcinków przy pomocy pęku promieni. Zadanie bowiem przeprowadzone na rys. 140 i 141 polega, w istocie swej, na uzupełnieniu dwóch homograficznych szeregów punktów: jednego na podstawie  $a_s$  (rys. 141) i drugiego, przyjętego na prostej  $m$  (rys. 140). W szczególności chodzi o to, aby szeregowi punktów na podstawie  $m$  podporządkować homograficznie punkty na prostej  $a_s$ . Warunkiem koniecznym i wystarczającym do określenia, a więc i rozwiązania tego zadania, jest znajomość trzech par odpowiadających sobie elementów w obu szeregach. Punktowi  $A_s$  prostej  $a_s$  podporządkujemy punkt  $O$  na podstawie  $m$ , punktowi  $B_s$  punkt  $5$ , a środkowi  $2\cdot5$  odcinka  $O5$  środek perspektywiczny odcinka  $A_sB_s$ , t. j. punkt  $C_s$ . Punkty podziału odcinka  $A_sB_s$  będą perspektywą punktów podziału odcinka  $O5$ . Znalazszy punkt  $C_s$ , odpowiadający homograficznie punktowi  $2\cdot5$ , sprawdziliśmy oba szeregi, zapomocą paska papieru, do położenia perspektywicznego, uzupełniliśmy szereg, którego podstawą jest krawędź paska papieru, i wróciliśmy z nim na podstawę  $a_s$ .



**28. Mierzenie odcinków.** Pomiar odcinków, których perspektywa jest dana, lub rysowanie perspektyw odcinków o danej długości, względnie rysowanie podziałek perspektywicznych na danych podstawach i o danych jednostkach, może być wykonane dopiero po sprowadzeniu odnośnych odcinków, względnie prostych, na tło.

a) *Proste (odcinki) równoległe do tła.* Aby znaleźć prawdziwą długość odcinka równoległego do tła, gdy jego perspektywa jest dana, sprowadzimy go na tło za pomocą rzutu równoległego w dowolnym kierunku. Rzut ten będzie równy danemu odcinkowi.



Rys. 146.

Odcinek  $\overline{T_a T_b}$  na rys. 127 jest rzutem równoległym odcinka  $\overline{AB}$ , równoległego do tła, którego perspektywa  $\overline{A_s B_s}$  jest dana, a w szczególności rzutem w kierunku poziomym, określonym śladem zbiegu  $Z$ , przyjętym na horyzoncie.

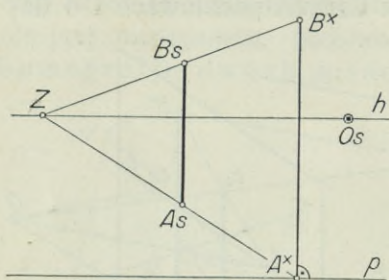
Równoległy do tła odcinek  $\overline{AB}$ , którego perspektywą jest odcinek  $\overline{A_s B_s}$  na rys. 132, rzuciliśmy w kierunku, określonym śladem zbiegu  $Z$ ; rzut ten, t. j. odcinek  $\overline{T_a T_b}$ , równy jest odcinkowi  $\overline{AB}$ .

Jeżeli  $\overline{AB}$  (rys. 146) jest odcinkiem pionowym, punkt  $A$  jego śladem (rzutem) poziomym, odcinek  $\overline{A_s B_s}$  jego perspektywą — to rzut odcinka  $\overline{AB}$  na tło w przyjętym, poziomym kierunku  $k$ , jest odcinkiem  $\overline{A^x B^x}$ , prostopadłym do linii podstawy  $p$ , a więc i do linii horyzontu. Śladem zbiegu promieni, rzucających punkty  $A$  i  $B$  odcinka  $\overline{AB}$  na tło, jest punkt  $Z$  przecięcia się linii horyzontu z promieniem, przechodzącym przez oko, równoległe do kierunku rzutu  $k$ . Proste  $\overline{ZA^x}$  i  $\overline{ZB^x}$  są perspektywami promieni, rzucających punkty końcowe odcinka  $\overline{AB}$  na tło. Jeżeli tedy rzucimy punkt  $A_s$  — perspektywę śladu poziomego pionowego odcinka — z dowolnego punktu  $Z$  linii horyzontu (rys. 147) na linię podstawy, w otrzymanym tam punkcie  $A^x$  poprowadzimy prostopadłą do linii horyzontu i na nią rzucimy punkt  $B_s$  z punktu  $Z$ , to odcinek  $\overline{A^x B^x}$  jest rzutem pionowego odcinka  $\overline{AB}$ , w kierunku poziomym  $Z-O$  na tło i wyraża jego prawdziwą długość.

Jeżeli na prostej  $m$ , równoległej do tła, odmierzyć mamy w perspektywie odcinek danej długości, lub założyć podziałkę perspektywiczną



o danej jednostce — to i w tych wypadkach rzucimy prostą  $m$  równoległą, w dowolnym kierunku, na tło. Na rzucie tym przeprowadzimy żadaną operację geometryczną i otrzymane punkty rzucimy, w tym samym kierunku, na prostą  $m$ . Prosta  $m_s$  na rys. 148 jest perspektywą pionowej prostej  $m$ . Punkt  $M_s$  jest perspektywą rzutu poziomego prostej  $m$ , a więc w danym wypadku perspektywą jej śladu poziomego. Jeżeli od punktu  $A$  prostej  $m$  odmierzyć mamy podziałkę, której jednostką ma być  $1\text{ cm}$  — to punkt  $M_s$  rzucimy z dowolnego punktu  $Z$  linii horyzontu na linię podstawy i w punk-



Rys. 147.

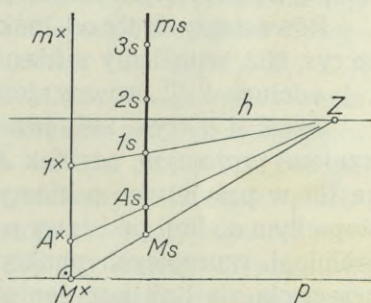
cie  $M^x$  wykreślimy prostą  $m^x$ , prostopadłą do linii  $p$ ; następnie rzucimy punkt  $A_s$  z punktu  $Z$  na prostą  $m^x$  i odmierzymy  $A^x I^x = 1\text{ cm}$ ; odcinek  $A_s I_s$  jest jednostką podziałki perspektywicznej na prostej  $m_s$ .

b) *Proste (odcinki) nachylone do tła.* Sprowadzanie tak położonych prostych (odcinków) na tło odbywa się z reguły za pośrednictwem płaszczyzn przez nie przechodzących. Tym sposobem mierzyliśmy i rysowaliśmy perspektywiczne podziałki na prostych prostopadłych do tła (ust. 18, rys. 69), przyczem okazało się, że rysowanie kładów takich prostych jest zbędne, gdyż pośrednictwo punktów głębokości tłowej, względnie punktów częściowej głębokości, pozwala użytkować dla konstrukcji linie podstaw (rys. 70).

Mierzenie prostych (odcinków), nachylonych pod dowolnym kątem do tła, było już przedmiotem ogólnych rozważań w ust. 15. W tym miejscu omówimy tę ważną sprawę bardziej szczegółowo.

Niechaj punkt  $O_s$  (rys. 149) będzie punktem głównym, a odcinek  $\delta$  głębokością tłową. Prosta  $a_s$ , wyznaczona śladem tłowym  $T_a$  i śladem zbiegu  $Z_a$ , jest perspektywą prostej  $a$ , która nie jest ani równoległą, ani też prostopadłą do tła, lecz zawiera z nim jakiś kąt  $\eta$ . Przyjęte na prostej  $a_s$  punkty  $A_s$ ,  $B_s$  i  $C_s$  tworzą na niej, wraz z punktem  $T_a$ , podziałkę perspektywiczną; znajdziemy podziałkę na prostej  $a$ .

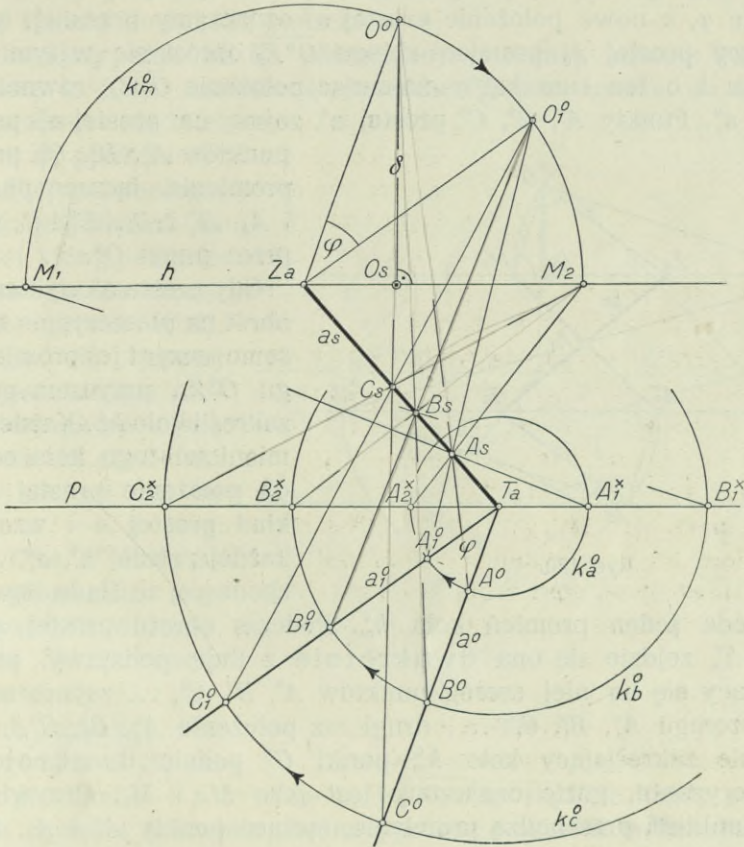
W tym celu poprowadzimy przez prostą  $a$  płaszczyznę i wykonamy jej kład na tło. Tym sposobem sprowadzimy prostą  $a$  i leżące na niej punkty na tło, gdzie otrzymamy szukaną podziałkę. Płaszczyzna, prze-



Rys. 148.



prowadzona przez prostą  $a$ , może być zupełnie dowolna, tak, jak to miało miejsce w zadaniach, rozpatrywanych w ust. 15. Najdogodniej jednak będzie posługiwać się z reguły płaszczyzną prostopadłą do tła, gdyż ta daje największą ekonomję konstrukcyjną. Ślad zbiegu takiej



Rys. 149.

płaszczyzny, poprowadzonej przez prostą  $a$ , przejdzie przez punkt główny i ślad  $Z_a$ ; jej ślad tłowy, równoległy do śladu zbiegu, przejdzie przez ślad tłowy  $T_a$ . W przykładzie na rys. 149 płaszczyzna ta jest poziomą; jej ślad zbiegu jest linią horyzontu  $h$ , a ślad tłowy linią podstawy  $p$ . Po obrocie płaszczyzny horyzontu, około linii horyzontu, na tło, oko zajmie położenie punktu  $O^0$ . Prosta  $a^0$ , równoległa do promienia  $O^0Z_a$ , jest kładem prostej  $a$  na tło, dokonany wskutek obrotu poziomej płaszczyzny około linii podstawy  $p$ . Rzućmy punkty  $A_s, B_s$  i  $C_s$  z punktu  $O^0$

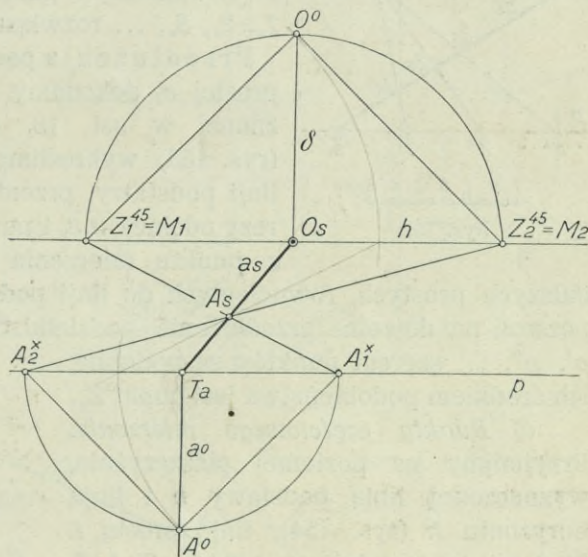




Punkty  $M_1$  i  $M_2$  nazywać będziemy *istotnymi* (poziomymi) *punktami mierzenia*.

Jeżeli dowolny punkt  $A_s$  prostej  $a_s$  (rys. 150) rzucimy z poziomych punktów mierzenia  $M_1$  i  $M_2$  na linię podstawy  $p$  — to odcinek  $\overline{T_a A_1^x} = \overline{T_a A_2^x}$  równy jest prawdziwej długości odcinka prostej  $a$ , ograniczonego jej śladem tłowym  $T_a$  i punktem  $A$ .

Wykonajmy kład na tło płaszczyzny poziomej, wraz z leżącą na niej prostą  $a$ . Koło, zakreślone z punktu  $T_a$ , jako środka, na średnicy  $A_1^x A_2^x$ , przetnie kład  $a^0$  prostej  $a$  w punkcie  $A^0$ . Prosta  $A^0 A_1^x$ , równoległa do  $O^0 M_1$ , jest kładem na tło prostej, której perspektywą jest prosta  $M_1 A_1^x$ ; podobnie, prosta  $A^0 A_2^x$ , równoległa do prostej  $O^0 M_2$ , jest kładem prostej, której perspektywą jest prosta  $M_2 A_2^x$ . Punkt  $A^0$  jest kładem na tło punktu  $A$  — a więc punkty  $O^0 A_s A^0$  leżą na jednym promieniu.



Rys. 151.

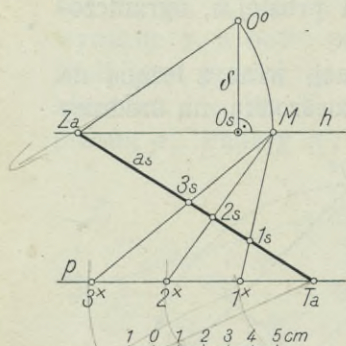
Z rys. 150 widzimy, że prosta  $A^0 A_1^x$  tworzy z linią podstawy  $p$  i z prostą  $a^0$  ten sam kąt. Podobnie promień  $A^0 A_2^x$  zawiera z prostymi  $a^0$  i  $p$  te same kąty. Wynika stąd, że każdy z dwóch istotnych punktów mierzenia poziomej prostej  $a$  określić można, jako ślad zbiegu pęku równoległych promieni, leżących na płaszczyźnie poziomej i zawierających z prostą  $a$  i z linią podstawy  $p$  te same kąty (ust. 15, str. 33).

Z określenia koła mierzenia i istotnych punktów mierzenia wynika wprost, że koło głębokości uważać można za koło mierzenia, a punkty głębokości za istotne punkty mierzenia prostych, prostopadłych do tła. Punkty głębokości są równocześnie śladami zbiegu pęków równoległych prostych, zawierających z linią podstawy  $p$  i z prostą prostopadłą do tła równe kąty, a więc  $45^\circ$  (rys. 151).

*Przykład.* Na prostej  $a_s$  (rys. 152), która jest perspektywą poziomej prostej  $a$ , wyznaczyć podziałkę perspektywiczną; jednostką mają być 3 cm w podziałce rysunku.



Znając punkt główny  $O_s$  i głębokość tłową  $\delta$ , znajdziemy kład  $O^0$  oka i kład promienia zbiegu danej prostej. Koło, zakreślone z punktu  $Z_a$ , jako środka, promieniem równym długości promienia zbiegu, t. j. odcinkiem  $\overline{Z_a O^0}$ , jest kołem mierzenia, a punkt  $M$  przecięcia się tego koła



Rys. 152.

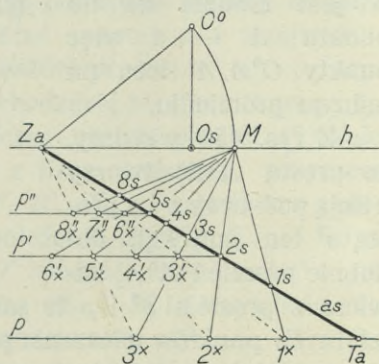
z linią horyzontu jednym z dwóch istotnych punktów mierzenia. Na linii podstawy  $p$  odmierzymy, od punktu  $T_a$  począwszy, odcinki po 3 cm w podziałce rysunku i punkty podziału  $1^x, 2^x, 3^x, \dots$  rzucimy z punktu  $M$  na prostą  $a_s$ . Punkty  $1_s, 2_s, 3_s, \dots$  rozwiązują zadanie.

Przedłużenia podziałki perspektywicznej na prostej  $a_s$  dokonamy zapomocą konstrukcji, poznanej w ust. 18, rys. 70. Przez punkt  $2_s$  (rys. 153) wykreślimy prostą  $p'$ , równoległą do linii podstawy, przeniesiemy na nią pewną ilość razy odcinek  $2_s 3'_s$  i punkty  $4'_s, 5'_s, 6'_s, \dots$  rzucimy z punktu mierzenia  $M$  na prostą  $a_s$ . Użycie

dalszych prostych, równoległych do linii podstawy, jak np. prostej  $p''$ , pozwoli na dowolne przedłużenie podziałki. Otrzymane na prostych  $p, p', p'', \dots$  szeregi punktów są podobne, ich środkiem podobieństwa jest punkt  $Z_a$ .

### c) Punkty częściowego mierzenia.

Przyjmijmy na poziomej płaszczyźnie, wyznaczonej linią podstawy  $p$  i linią horyzontu  $h$  (rys. 154), linię prostą  $l$ . Śladami tej prostej są punkty  $T_l$  i  $Z$ , jej perspektywą prosta  $l_s$ . Kład płaszczyzny horyzontu na tło, przy danym punkcie głównym  $O_s$  i danej głębokości tłowej  $\delta$ , sprowadzi na tło oko, jako punkt  $O^0$  i promień zbiegu prostej  $l$ , jako promień  $O^0 Z$ . Łuk koła, zakreślony z punktu  $Z$  jako środka, długością promienia zbiegu, przetnie horyzont w istotnym punkcie mierzenia  $M$ .



Rys. 153.

Odetnijmy na promieniu  $O_s O^0$  odcinek  $\overline{O_s O_0^{m/n}}$  równy  $\frac{m}{n}$ -tej części głębokości tłowej i poprowadźmy z punktu  $O_0^{m/n}$  równoległą do  $O^0 Z$ ; na linii horyzontu otrzymamy częściowy ślad zbiegu  $Z^{m/n}$  prostej  $l$ . Łuk koła, zakreślony z punktu  $Z^{m/n}$  jako środka, promieniem  $\overline{Z^{m/n} O_0^{m/n}}$ , przetnie horyzont w punkcie  $M^{m/n}$ .

Oznaczmy:  $\overline{O_s Z^{m/n}} = a$ ;  $\overline{O_s M^{m/n}} = b$ , to  $\overline{O_s Z} = \frac{n}{m} \cdot a$ , zaś  $\overline{O_s M} = \frac{n}{m} \cdot b$ .





$$\overline{O_s \frac{M^{m|n}}{r/s}} = a - \frac{r}{s} (a + b) = c \quad \dots \dots \dots 3)$$

Znajdźmy z kolei na linii horyzontu punkt  $\frac{M}{r/s}$ , dzielący odcinek  $\overline{ZM} = \frac{n}{m} (a + b)$  również w stosunku  $r : s$ , t. zn.:

$$\overline{Z \frac{M}{r/s}} : \overline{ZM} = r : s, \text{ czyli:}$$

$$\left( \frac{n}{m} \cdot a - \overline{O_s \frac{M}{r/s}} \right) : \frac{n}{m} (a + b) = r : s, \text{ a stąd:}$$

$$\overline{O_s \frac{M}{r/s}} = \frac{n}{m} \left[ a - \frac{r}{s} (a + b) \right] = \frac{n}{m} \cdot c \quad \dots \dots \dots 4)$$

Równanie (4), porównane z (3), dowodzi, że oddalenie punktu  $\frac{M}{r/s}$  od punktu głównego jest  $\frac{n}{m}$ -krotnością oddalenia punktu  $\frac{M^{m|n}}{r/s}$  od tegoż punktu głównego.

Punkt  $\frac{M}{r/s}$  jest *częściowym punktem mierzenia*, w tem rozumieniu tego określenia, że gdy pośrednictwo punktu mierzenia  $M$  wymaga odnoszenia na linii podstawy całkowitej długości danych odcinków, to przy zastosowaniu częściowego punktu mierzenia  $\frac{M}{r/s}$  odcinać będziemy na linii podstawy  $\frac{r}{s}$ -tą część tych odcinków. Mamy bowiem:

$$\overline{Z \frac{M}{r/s}} : \overline{ZM} = r : s = \overline{T_l \frac{A^\times}{r/s}} : \overline{T_l A^\times} = \overline{T_l \frac{A^\times}{r/s}} : q, \text{ a stąd:}$$

$$\overline{T_l \frac{A^\times}{r/s}} = \frac{r}{s} \cdot q$$

Położenie punktu mierzenia  $\frac{M}{r/s}$  na linii horyzontu znajdziemy w sposób następujący: przyjmiemy punkt  $\frac{M^{m|n}}{r/s}$ , dzielący odcinek  $\overline{Z^{m|n} M^{m|n}}$  w stosunku  $r : s$ ; oddalenie  $c$  tego punktu od punktu głównego, pomnożone  $\frac{n}{m}$  razy, równe jest oddaleniu szukanego, częściowego punktu mierzenia  $\frac{M}{r/s}$  od punktu głównego.









Weźmy pod uwagę punkt  $\frac{M^{1/4}}{4/5}$ , dzielący odcinek  $\overline{Z^{1/4}M^{1/4}}$  w stosunku 4 : 5, czyli stwarzający proporcję:

$$\overline{Z^{1/4} \frac{M^{1/4}}{4/5}} : \overline{Z^{1/4} M^{1/4}} = 4 : 5$$

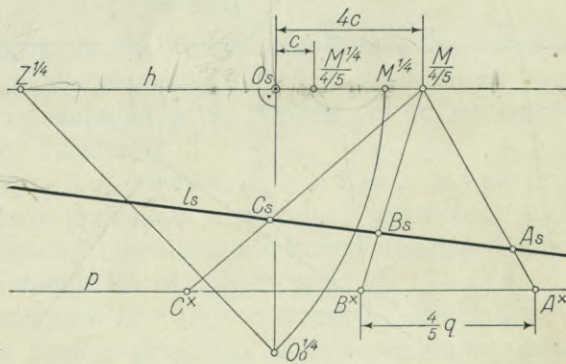
Jeżeli oddalenie punktu  $\frac{M^{1/4}}{4/5}$  od punktu głównego, t. j. odcinek  $O_s \frac{M^{1/4}}{4/5} = c = 5 \text{ mm}$ , to według równania (4), str. 96, oddalenie częściowego punktu mierzenia  $\frac{M}{4/5}$  od punktu głównego, t. j.:

$$\overline{O_s \frac{M}{4/5}} = 4c = 20 \text{ mm}$$

Rzut punktu  $A_s$  z punktu  $\frac{M}{4/5}$  na linię podstawy jest punktem  $A^\times$ . Odmierzmy  $\overline{A^\times B^\times} = \frac{4}{5}q = \overline{B^\times C^\times}$  i punkty  $B^\times, C^\times$  rzucimy z punktu  $\frac{M}{4/5}$  na prostą  $l_s$ .

**29. Zadania.** 1. Wykreślić perspektywę kwadratu, leżącego na płaszczyźnie poziomej, gdy dane są: linja horyzontu, linja podstawy, punkt główny, trzecia część głębokości tłowej i długość boku kwadratu (rys. 158).

Przyjmijmy  $Z_1^{1/3}$ , znajdziemy  $Z_2^{1/3}$ , punkty  $Z_p^{1/3}$  i  $Z_p$ . Wyjdźmy z punktu  $A_s$ , znajdziemy  $A_s^{1/3}$ , wykreślimy  $a_s^{1/3}, b_s^{1/3}$  i proste  $a_s || a_s^{1/3}$  oraz  $b_s || b_s^{1/3}$ . Z punktu  $T_a^{1/3}$  wykreślimy prostą  $a_0^{1/3}$ , równoległą do promienia  $O_0^{1/3} Z_1^{1/3}$ , a z punktu  $T_b^{1/3}$  równoległą do  $O_0^{1/3} Z_2^{1/3}$ . Otrzymamy punkt  $A_0^{1/3}$ . Częściowy punkt przekątnej  $Z_p^{1/3}$  uważajmy za punkt częściowego dzielenia i rzucmy z niego punkt  $A_s^{1/3}$  na  $p^{1/3}$ . Otrzymany tam punkt  $I'$  połączmy z punktem  $A_0^{1/3}$  prostą, która będzie równoległą do promienia  $O_0^{1/3} - Z_p^{1/3}$ . Odmierzmy  $\overline{A_0^{1/3} B_0^{1/3}} = \overline{A_0^{1/3} D_0^{1/3}}$ , równe trzeciej części boku danego kwadratu, i dopełnimy wykreślenia kwadratu, znajdując jego czwarty wierzchołek  $C_0^{1/3}$ . Przez punkty  $B_0^{1/3}$  i  $D_0^{1/3}$  kreślimy równoległe do  $O_0^{1/3} - Z_p^{1/3}$ , a otrzymane na  $p^{1/3}$  punkty  $II'$  i  $IV'$  łączymy z  $Z_p^{1/3}$ . Na prostej  $a_s^{1/3}$  otrzymamy punkt  $B_s^{1/3}$  a na  $b_s^{1/3}$  punkt  $D_s^{1/3}$ . Punkty te łączymy ze śladami  $Z_1^{1/3}$  i  $Z_2^{1/3}$  prostymi, które przecinają się w punkcie  $C_s^{1/3}$ . Punkt  $B_s^{1/3}$

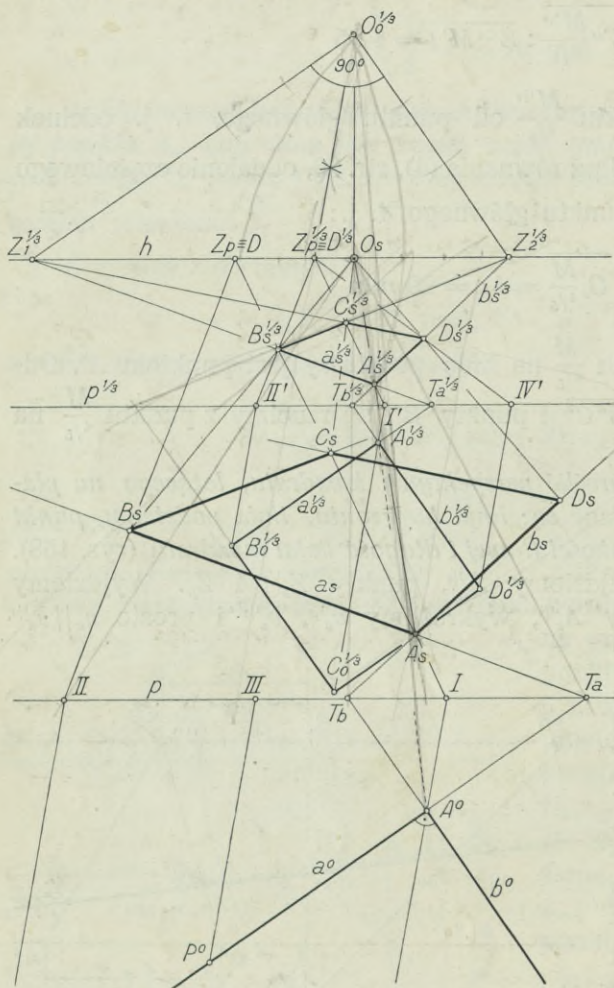


Rys. 157.

rzucimy z punktu  $O_s$  na prostą  $a_s$ , zaś punkt  $D_s^{1/3}$  na  $b_s$ . Otrzymamy punkty  $B_s$  i  $D_s$ , z których wykreślimy równoległe do promieni  $B_s^{1/3}Z_2^{1/3}$  i  $D_s^{1/3}Z_1^{1/3}$ . Te równoległe przetną się w punkcie  $C_s$ . Zamiast rzucać punkty

$B_s^{1/3}$  i  $D_s^{1/3}$  z punktu  $O_s$  na prostą  $a_s$ , względnie  $b_s$ , odmierzymy  $A_sB_s$  równe potrójnej długości boku  $A_s^{1/3}B_s^{1/3}$ ; podobnie  $A_sD_s$  jest trzy razy dłuższe od boku  $A_s^{1/3}D_s^{1/3}$ .

Między czworokątami  $A_sB_sC_sD_s$  i  $A_s^{1/3}B_s^{1/3}C_s^{1/3}D_s^{1/3}$  zachodzi podobieństwo środkowe, którego środkiem jest punkt główny  $O_s$ . Ten sam związek zachodzi między kwadratem  $A_0^{1/3} \dots D_0^{1/3}$  a kwadratem  $A_0 \dots$ , jako kładem przyjętego na płaszczyźnie podstawy. Jeżeli znamy ślady łowe  $T_a$  i  $T_b$  boków  $a$  i  $b$  danego kwadratu, to jego kład znajdziemy, kreśląc  $a^0 \parallel a_0^{1/3}$  i  $b^0 \parallel b_0^{1/3}$ . Proste  $a^0$  i  $b^0$  przetną się w wierzchołku  $A^0$  kwadratu, a promień  $A^0A_0^{1/3}$  przejdzie przez punkt  $O_s$ . Dalszych wierzchołków kwadratu nie rysowaliśmy, ale znajomość



Rys. 158.

punktu  $A^0$  i boków  $a^0$  i  $b^0$  pozwoliłaby na wykreślenie jego perspektywy bez pośrednictwa zmniejszonego kładu podobnego  $A_0^{1/3}B_0^{1/3}C_0^{1/3}D_0^{1/3}$ . Odmierzmy  $A^0P^0$ , równe połowie boku kwadratu, przez  $P^0$  wykreślimy równoległą do  $A^0-I$ , która jest — jak wiemy — równoległą do promienia  $O_0^{1/3} - Z_p^{1/3}$ . Na podstawie  $p$  otrzymamy punkt III. Odmierzmy  $IIIH = I III$  i punkt II rzucimy z punktu  $Z_p \equiv D$  na prostą  $a_s$ , jako punkt  $B_s$ . Prosta  $B_s - Z_2$  jest równoległą do  $B_s^{1/3} - Z_2^{1/3}$  i przecina pro-



stą  $I - A_s - Z_p$  w punkcie  $C_s$ , przez który kreślimy promień równoległy do  $D_s^{1/3} - Z_1^{1/3}$ . Dochodzimy do punktu  $D_s$ , który jest perspektywą czwartego wierzchołka kwadratu.

2. *Wykreślić perspektywę ornamentu, leżącego na płaszczyźnie podstawy, a mieszczącego się w kwadracie, którego bok zawiera z linią podstawy kąt  $\varphi_1$  (rys. 159).*

Z punktu  $O_0^{1/10}$  wykreślimy prostą pod kątem  $\varphi_1$  do linii horyzontu, która przetnie ją w częściowym śladzie zbiegu  $Z_1^{1/10}$ . Prostopadła wykreślona w punkcie  $O_0^{1/10}$  do promienia  $O_0^{1/10} Z_1^{1/10}$  wyznacza na linii horyzontu drugi częściowy ślad zbiegu  $Z_2^{1/10}$ , tworząc z nim kąt  $\varphi_2$ . Znajdziemy częściowy ślad przekątny  $Z_p^{1/10}$ , a następnie właściwy ślad  $Z_p$ , uwzględniając, że  $\overline{O_s Z_p} = 10 \cdot \overline{O_s Z_p^{1/10}}$ .

Ponieważ obszar rysunkowy pozwala na to, więc znajdziemy częściowe ślady zbiegu  $Z_1^{1/5}$  i  $Z_2^{1/5}$ , odmierzając  $\overline{O_s Z_1^{1/10}} = Z_1^{1/10} Z_1^{1/5}$  i  $\overline{O_s Z_2^{1/10}} = Z_2^{1/10} Z_2^{1/5}$ .

Przyjęty na linii podstawy  $p$  punkt  $A$  połączymy z punktem głównym  $O_s$  prostą, na której oznaczymy punkt  $A_s^{1/5}$ , ograniczający piątą część odcinka  $\overline{O_s A}$ . Proste łączące punkt  $A_s^{1/5}$  ze śladami  $Z_1^{1/5}$  i  $Z_2^{1/5}$  stanowią kierunki prostych  $m_s$  i  $n_s$ , które, wychodząc z punktu  $A$ , jako wierzchołka kwadratu, przetną linię horyzontu w śladach zbiegu  $Z_1$  i  $Z_2$ , leżących poza obrębem rysunku.

Powiedzmy, że dany ornament wymaga wkreślenia w ograniczający go kwadrat siatki, złożonej ze stu przystających kwadratów, o danym boku  $a$ .

Wykonajmy kład prostej  $m$  na tło. Będzie nim prosta  $m_0$ , wychodząca z punktu  $A$ , równoległe do promienia  $O_0^{1/10} Z_1^{1/10}$ , zawierająca więc z linią podstawy  $p$  kąt  $\varphi_1$ . Prostopadła  $n_0$  w punkcie  $A$  do  $m_0$  będzie kładem na tło drugiego boku kwadratu.

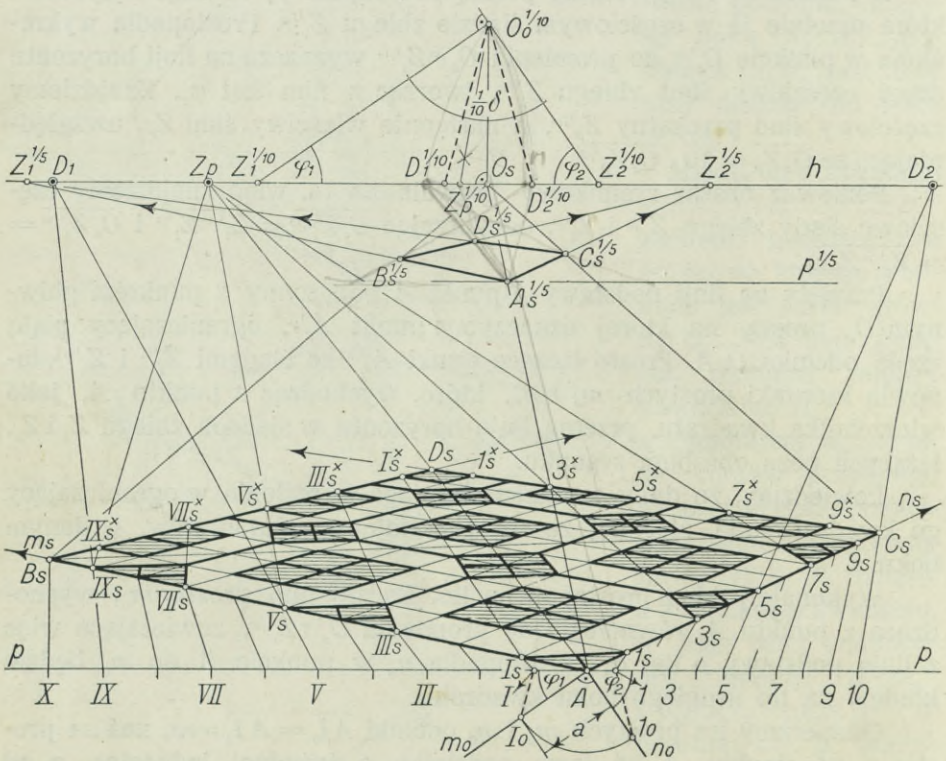
Odmierzmy na prostych  $m_0$  i  $n_0$  odcinki  $\overline{A I_0} = \overline{A I_0} = a$ , zaś na prostej  $p$  od punktu  $A$  na lewo podziałkę o dowolnej jednostce, a od punktu  $A$  na prawo drugą podziałkę, ewentualnie o innej jednostce. Poprowadzone przez punkt  $O_0^{1/10}$  promienie równoległe do prostych  $I_0 - I$  i  $I_0 - 1$  przetną linię horyzontu w punktach  $D_1^{1/10}$  i  $D_2^{1/10}$ . Odnosząc odcinek  $\overline{O_s D_1^{1/10}}$  dziesięciokrotnie na lewo od punktu głównego, otrzymamy punkt dzielenia  $D_1$ ; podobnie otrzymamy punkt dzielenia  $D_2$ , uwzględniając, że  $\overline{O_s D_2} = 10 \cdot \overline{O_s D_2^{1/10}}$ .

Rzut punktów  $X, IX, \dots I$  podziałki linii podstawy  $p$  z punktu  $D_1$  na prostą  $m_s$  podzieli jej odcinek  $\overline{A B_s}$  na dziesięć perspektywnie równych części. Podobnie rzut punktów  $10, 9, \dots 1$  prostej  $p$  z punktu  $D_2$  na prostą  $n_s$  dzieli bok  $\overline{A C_s}$  perspektywy kwadratu.

Punkty  $B_s$  i  $C_s$  połączymy z punktem głównym, a odmierzywszy  $\overline{O_s B_s^{1/5}}$ , równe piątej części odcinka  $\overline{O_s B_s}$  i  $\overline{O_s C_s^{1/5}}$ , równe piątej części odcinka  $\overline{O_s C_s}$ ,



wykreślmy proste  $B_s^{1/5} Z_2^{1/5}$  i  $C_s^{1/5} Z_1^{1/5}$ , które przetną się w punkcie  $D_s^{1/5}$ . Prosta, wykreślona z punktu  $B_s$  równoległe do promienia  $B_s^{1/5} Z_2^{1/5}$ , przetnie prostą, poprowadzoną z punktu  $C_s$  równoległe do kierunku  $C_s^{1/5} Z_1^{1/5}$ , w punkcie  $D_s$ , który jest perspektywą czwartego wierzchołka kwadratu. Promień  $O_s D_s$  przejdzie przez punkt  $D_s^{1/5}$ , przy czym  $\overline{O_s D_s^{1/5}} : \overline{O_s D_s} = 1 : 5$ . Prosta  $A D_s$ , jako perspektywa przekątnej, przejdzie przez punkt  $Z_p$ ,



Rys. 159.

Czworokąty  $A_s^{1/5} B_s^{1/5} C_s^{1/5} D_s^{1/5}$  i  $A_s B_s C_s D_s$  są podobne i podobnie położone; ich środkiem podobieństwa jest punkt główny  $O_s$ . Pierwszy, o boku pięć razy krótszym od boku drugiego, jest perspektywą kwadratu, leżącego na płaszczyźnie poziomej, której śladem poziomym (linią podstawy) jest prosta  $p^{1/5}$ . Oddalenie prostej  $p^{1/5}$  od linii horyzontu równe jest piątej części odległości linii podstawy  $p$  od linii horyzontu.

Proste, łączące punkty podziału boków  $\overline{AB}$  i  $\overline{BD}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{CD}$ , są równoległe do przekątnej  $\overline{AD}$  — punkt  $Z_p$  jest więc ich śladem zbiegu. Rzucimy punkty  $I_s, II_s, \dots IX_s$ , z punktu  $Z_p$  na bok  $B_s D_s$ , gdzie otrzymamy perspektywiczny szereg punktów  $I_s^x, II_s^x, \dots IX_s^x$ . Rzut szeregu punktów





















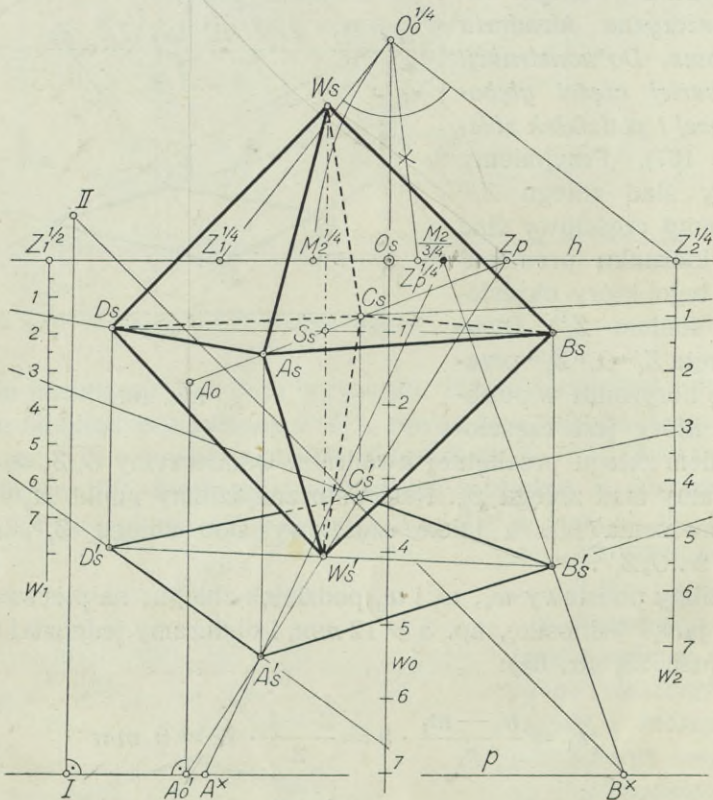




11. Wykreślić perspektywę umiarowego ośmiościanu, którego oś ma położenie pionowe. Długość krawędzi ośmiościanu wynosi 76 mm (rys. 168).

Najpierw rysujemy perspektywę rzutu poziomego tego ośmiościanu, który jest kwadratem.

Wychodząc z danej linii horyzontu, linii podstawy, punktu głównego i czwartej części głębokości tłowej, przyjmujemy częściowy ślad



Rys. 168.

zbiegu  $Z_1^{1/4}$  i znajdziemy ślad zbiegu  $Z_2^{1/4}$  kierunku prostopadłego. Łuk koła, zakreślony z punktu  $Z_2^{1/4}$  promieniem  $Z_2^{1/4}O_o^{1/4}$ , przetnie horyzont w punkcie  $M_2^{1/4}$ . Odmierzmy  $Z_1^{1/4}O_s = Z_1^{1/4}Z_1^{1/2}$  i otrzymamy częściowy ślad zbiegu  $Z_1^{1/2}$ . Dwusieczna kąta  $Z_1^{1/4}O_o^{1/4}Z_2^{1/4}$  przetnie horyzont w punkcie  $Z_p^{1/4}$ . Punkt przekątny  $Z_p$  oddalony jest od punktu głównego o czterokrotny odcinek  $\overline{O_s Z_p^{1/4}}$ .

Szukamy punktu częściowego mierzenia, leżącego w pobliżu punktu głównego. Z rysunku otrzymujemy:

$$\overline{O_s Z_2^{1/4}} = a = 38.5 \text{ mm}; \quad \overline{M_2^{1/4} O_s} = b = 10.5 \text{ mm}.$$



Przyjmijmy wykładnik redukcji  $r : s = 3 : 4$ , to wówczas według równania (4), ust. 28, str. 96:

$$O_s \frac{M_2}{r/s} = \frac{n}{m} [a - \frac{r}{s} (a + b)] = 4 [38 \cdot 5 - \frac{3}{4} (38 \cdot 5 + 10 \cdot 5)] = 7 \text{ mm.}$$

Odmierzywszy 7 mm na prawo od punktu  $O_s$ , otrzymamy szukany punkt częściowego mierzenia  $\frac{M_2}{3/4}$ .

Zkolei wyznaczmy podziałki zbiegu. Jako jednostkę podziałki  $w_0$  przyjęliśmy 10 mm, wobec czego jednostką podziałki  $w_1$  będzie:

$$a_1 = \frac{n_1 - m_1}{n_1} \cdot a = \frac{2 - 1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ mm,}$$

zaś podziałki  $w_2$ :

$$a_2 = \frac{n_2 - m_2}{n_2} \cdot a = \frac{4 - 1}{4} \cdot 10 = 7 \cdot 5 \text{ mm}$$

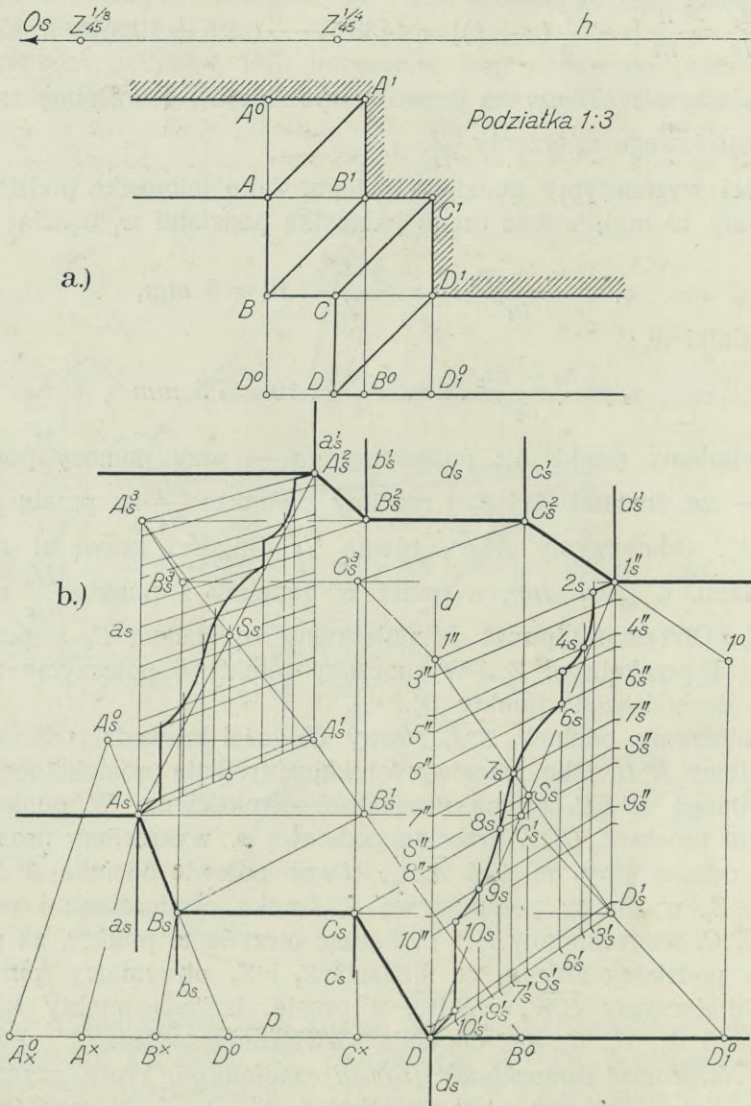
Przyjmijmy punkt  $A'_s$ ; połączmy go — przy pomocy podziałek zbiegu — ze śladami  $Z_1$  i  $Z_2$  i rzucimy z punktu  $\frac{M_2}{3/4}$  na prostą  $p$ , jako punkt  $A^*$ . Odmierzmy  $\overline{A^*B^*}$ , równe  $3/4$  długości krawędzi bocznej ośmiościanu, t. j. 57 mm, a punkt  $B^*$  rzucimy z punktu  $\frac{M_2}{3/4}$  na prostą  $A'_s Z_2$ . Otrzymany punkt  $B'_s$  połączmy ze śladem  $Z_1$  a punkt  $A'_s$  z punktem przekątnym  $Z_p$ . Wyznaczony punkt  $C'_s$  połączmy ze śladem  $Z_2$ , dochodząc do punktu  $D'_s$ .

Odmierzmy odcinek  $\overline{B^*I}$ , równy długości krawędzi ośmiościanu, i znajdziemy  $B^*II$ , jako przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego równoramiennego  $B^*III$ , równą przekątnej ośmiościanu. W punkcie  $A'_0$ , w którym prosta  $Z_p C'_s A'_s$  przecina podstawę  $p$ , wykreślimy prostą pionową i odmierzymy na niej  $\overline{A'_0 A_0}$ , równe połowie odcinka  $\overline{B^*II}$ . Prosta  $A_0 - Z_p$  wyznaczy perspektywę  $S_s$  środka ośmiościanu i perspektywę  $A_s, C_s$  wierzchołków  $A$  i  $C$ . Łącząc otrzymane punkty, za pośrednictwem podziałek zbiegu, ze śladami  $Z_1$  i  $Z_2$  otrzymamy punkty  $B_s$  i  $D_s$ . Odmierzmy  $\overline{S_s W_s} = \overline{S_s W'_s}$ , a proste, łączące punkty  $W_s$  i  $W'_s$  z punktami  $A_s, B_s, C_s, D_s$ , dopełnią rozwiązania zadania.

12. *Narysować perspektywę gzymsu cokołowego.* Profil gzymsu podaje rys. 170a. Ujmiemy go w prostokąt  $1, 1'', D, D_1$ , którego środkiem jest punkt  $S$ , a charakterystyczne punkty tego profilu — w szczególności jego linii krzywych — rzucimy prostopadłe na boki  $D, D_1$  i  $D, 1''$ . Następnie wykreślimy dwa pęki *Pillet'a*, jeden o wierzchołku  $W_1$ , drugi o wierzchołku  $W_2$ .

Rys. 169a przedstawia rzut poziomy gzymsu trzykrotnie zmniejszony w stosunku do wymiarów gzymsu, który ma być narysowany

w perspektywie, a więc w stosunku do rys. 169 b. Rzut ten poucza nas, że gzyms, biegnący początkowo równoległe do tła, załamuje się pod



Rys. 169 a, b.

kątem prostym, biegnie więc prostopadłe do tła, poczem wraca do pierwotnego położenia, załamuje się ponownie i wraca do kierunku, z którego wyszedł.

Chęć uzyskania jasności konstrukcji i jej omówienia nakazała nam



wykonać zadanie w dwóch częściach. Rys. 169 *b* podaje fazę początkową, rys. 170 *b* — pełne rozwiązanie.

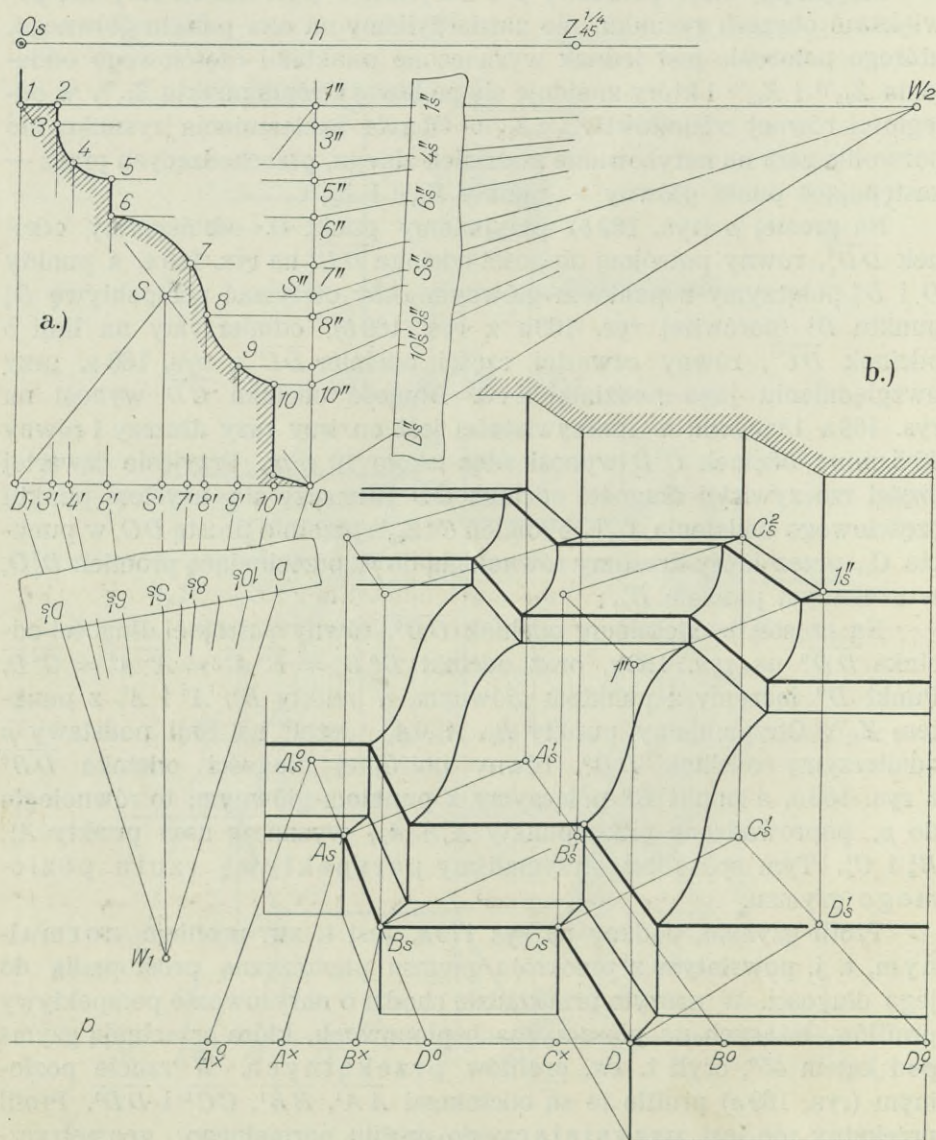
Przyjmijmy linię podstawy  $p$  i horyzont  $h$  (rys. 169 *b*). Aby nie powiększać obszaru rysunku, nie zaznaczyliśmy na nim punktu głównego, którego położenie jest jednak wyznaczone punktami częściowego oddalenia  $Z_{45}^{1/8}$  i  $Z_{45}^{1/4}$  i który znajduje się po lewej stronie punktu  $Z_{45}^{1/8}$ , w odległości równej odcinkowi  $Z_{45}^{1/8} Z_{45}^{1/4}$ . Obawa zaciemnienia rysunku nie pozwoliła nam na narysowanie podziałek zbiegu, przechodzących przez — zastępujące punkt główny — punkty  $Z_{45}^{1/8}$  i  $Z_{45}^{1/4}$ .

Na prostej  $p$  (rys. 169 *b*) przyjmijmy punkt  $D$ , odmierzymy odcinek  $\overline{DD}_1^0$ , równy potrójnej długości odcinka  $\overline{DD}_1^0$  na rys. 169 *a*, a punkty  $D$  i  $D_1^0$  połączymy z punktem głównym. Aby otrzymać perspektywę  $D_s^1$  punktu  $D^1$  (porównaj rys. 169 *a* z rys. 169 *b*), odmierzymy na linii  $p$  odcinek  $\overline{DC}^x$ , równy czwartej części odcinka  $\overline{DC}$  z rys. 169 *a*, przy uwzględnieniu jego podziałki 1:3. Długość odcinka  $\overline{CD}$  wynosi na rys. 169 *a* 13·5 *mm*, w rzeczywistości jest on trzy razy dłuższy i równy 40·5 *mm*; odcinek  $\overline{C^x D}$  wynosi więc około 10 *mm*. Przyjęcie czwartej części rzeczywistej długości odcinka  $\overline{CD}$  tłumaczy się użyciem punktu częściowego oddalenia  $Z_{45}^{1/4}$ . Promień  $C^x Z_{45}^{1/4}$  przetnie prostą  $DO_s$  w punkcie  $C_s$ , przez który kreślimy równoległą do  $p$ , przecinającą promień  $D_1^0 O_s$  w szukanym punkcie  $D_s^1$ .

Na prostej  $p$  odetniemy odcinek  $\overline{DD}^0$ , równy potrójnej długości odcinka  $\overline{DD}^0$  na rys. 169 *a*, oraz odcinki  $\overline{D^0 B^x} = \overline{B^x A^x} = \overline{A^x A_s^0} = \overline{C^x D}$ . Punkt  $D^0$  łączymy z punktem głównym, a punkty  $B^x$ ,  $A^x$  i  $A_s^0$  z punktem  $Z_{45}^{1/4}$ . Otrzymujemy punkty  $B_s$ ,  $A_s$ ,  $A_s^0$ . Jeżeli na linii podstawy  $p$  odmierzymy odcinek  $\overline{DB}^0$ , równy potrójnej długości odcinka  $\overline{DB}^0$  z rys. 169 *a*, a punkt  $B^0$  połączymy z punktem głównym, to równoległe do  $p$ , poprowadzone przez punkty  $A_s^0$  i  $A_s$ , wyznaczą nam punkty  $A_s^1$ ,  $B_s^1$  i  $C_s^1$ . Tym sposobem otrzymaliśmy perspektywę rzutu poziomego gzymsu.

Profil gzymsu, podany na rys 170 *a*, jest t. zw. profilem normalnym, t. j. powstałym z przekroju gzymsu płaszczyzną prostopadłą do jego długości. W naszym przykładzie chodzi o narysowanie perspektywy profilów, leżących na płaszczyznach pionowych, które przecinają gzyms pod kątem 45°, czyli t. zw. profilów przekątnych. W rzucie poziomym (rys. 169 *a*) profile te są odcinkami  $\overline{AA}^1$ ,  $\overline{BB}^1$ ,  $\overline{CC}^1$  i  $\overline{DD}^1$ . Profil przekątny nie jest przystający do profilu normalnego; geometrycznie określamy go, jako powinowaty z profilem normalnym. Wspólną cechą profilów powinowatych, różniących się między sobą wielkościami i kształtami, jest zachowanie proporcjonalności między wysokościami i szerokościami odpowiadających sobie elementów. Jeżeli więc np. punkty 3', 4', 6' ... 10', dzielą odcinek  $\overline{D_1 D}$  (rys. 170 *a*), w okre-

ślonych stosunkach, to odpowiadające tym punktom, punkty odcinka, wyrażającego szerokość profilu przekątnego, podzielią go w tychże sa-



Rys. 170 a, b.

mych stosunkach. To samo odnosiłoby się i do podziału odcinka, wyrażającego wysokość gzymsu, gdyby ta — wskutek dokonanego przekroju — uległa zmianie. W naszym przypadku zmiana ta nie zachodzi,



gdyż wysokość przekroju przekątnego równa jest wysokości profilu normalnego.

Wróćmy do rys. 169 *b*. W punktach  $D, D_1^0, D_s^1, C_s, B_s^1, C_s^1, B_s, A_s$  i  $A_s^1$ , wykreślimy prostopadłe do horyzontu i na pierwszej z nich, t. j. na prostej  $d$ , odmierzymy odcinek  $\overline{D1''}$  równy wysokości gzymsu, czyli równy odcinkowi  $\overline{D1''}$  na rys. 170 *a*. Następnie odmierzymy  $\overline{D_1^0 1^0} = \overline{D1''}$ , a punkty  $1^0$  i  $1''$  połączymy z punktem głównym. Otrzymamy punkty  $C_s^2$  i  $C_s^3$ , a przez wykreślenie z nich równoległych do linii  $p$  punkty  $B_s^2, A_s^3$  i  $B_s^3$ .

Przekątne trapezu  $D1''1_s^1 D_s^1$  (rys. 169 *b*) przetną się w punkcie  $S_s$ . Szereg punktów  $1'', 3'', \dots S'', \dots D$ , z rys. 170 *a*, przeniesiemy za pomocą skrawka papieru na prostą  $d$  w rys. 169 *b* i punkt  $S''$  połączymy z punktem  $S_s$ . Na drugim, równoległym, boku trapezu otrzymamy punkt  $S_s''$ . Punkt  $S_s''$  rzucimy w kierunku prostopadłym do linii podstawy  $p$  na bok  $DD_s^1$  i rzut ten oznaczymy jako  $S_s^1$ . Na skrawku papieru, przyłożonym do prostej  $d_s^1$ , odetniemy punkty  $1_s^1, S_s''$  i  $D_s^1$ , poczem przeniesiemy go na rys. 170 *a* tak, aby punkty te padły na promienie pęku *Pillet'a* o wierzchołku  $W_2$ , przechodzące przez punkty  $1'', S'', D$ . Na tak ułożonym skrawku papieru, którego krawędź, przy dokładnem konstruowaniu, powinna być równoległa do odcinka  $1''D$ , zaznaczymy punkty  $10_s'', 9_s'' \dots 4_s'', 3_s''$ , poczem wrócimy z nim na prostą  $d_s^1$  (rys. 169 *b*). Tym sposobem przeniesiony tam szereg punktów połączymy z punktami  $3'', \dots 10''$ , prostej  $d$ . W analogiczny sposób otrzymamy na prostej  $DD_s^1$  szereg punktów  $D, 10_s', 9_s', \dots 3_s', D_s^1$ , perspektywiczny z szeregiem  $D, 10', 9', \dots 3', D_1$  na rys. 170 *a*, a to przy pomocy pęku *Pillet'a* o wierzchołku  $W_1$ . Przez punkty  $10_s', \dots 3_s'$ , wykreślimy równoległe do prostej  $d$ , które przetną poprzednio otrzymane promienie w punktach  $10_s, 9_s \dots 2_s$ , wyznaczających perspektywę pierwszego profilu przekątnego.

Postępując w ten sam sposób, wyznaczymy perspektywę trzech dalszych profilów przekątnych. Na rys. 169 *b* zamieściliśmy jeszcze konstrukcję ostatniego z nich.

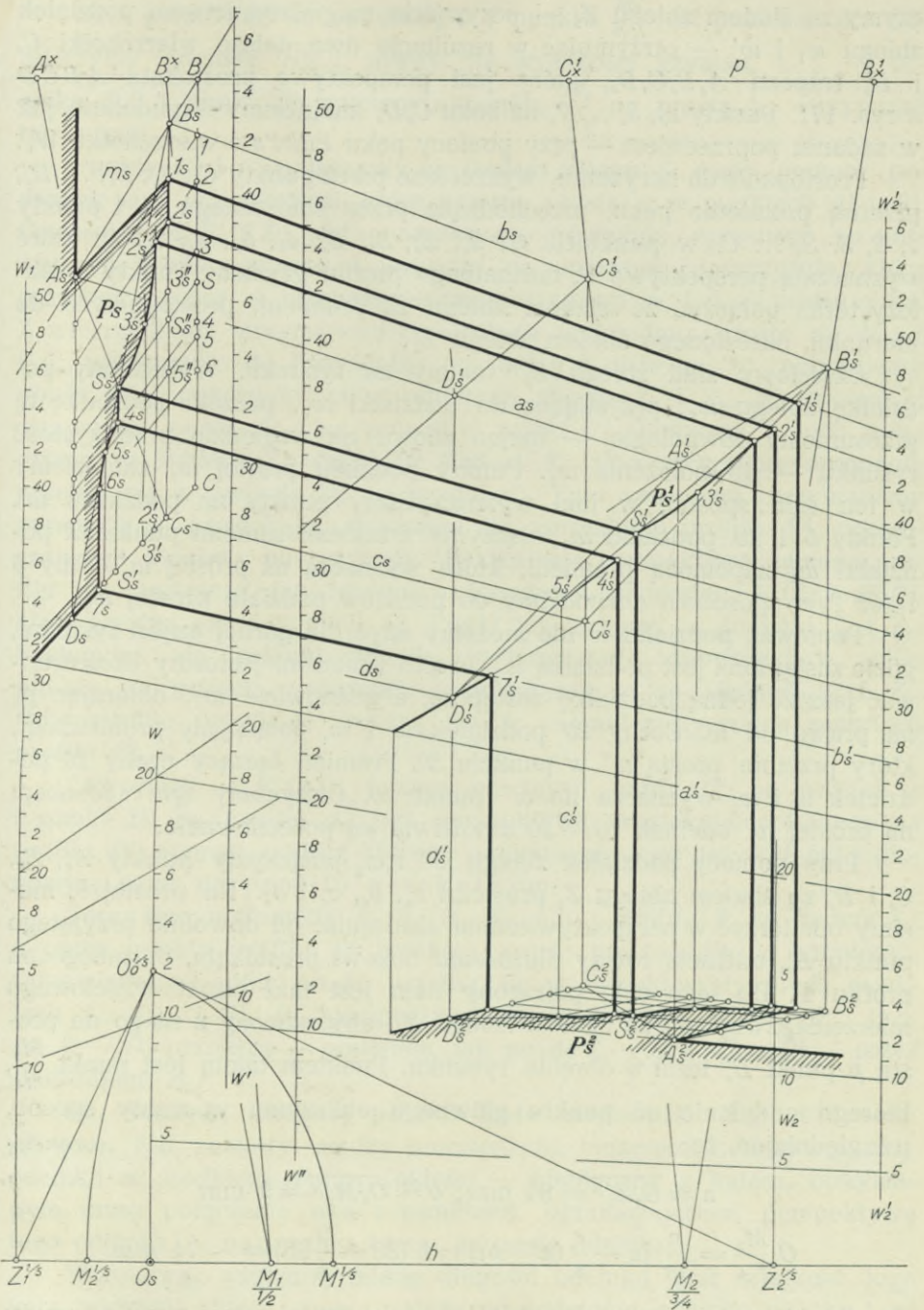
Ostateczny wynik zadania przedstawia rys. 170 *b*.

13. *Wykreślić perspektywę gzymsu, okalającego otwór okienny.* Profil normalny gzymsu podaje rys. 171. Podobnie, jak w zadaniu poprzednim, przyjmujemy pęki *Pillet'a*, o wierzchołkach  $W_1$  i  $W_2$ . Część gzymsu, którego perspektywę zamierzamy narysować, znajdować się ma nad horyzontem. Operujemy piątą częścią głębokości łkowej (rys. 172). Przyjmiemy częściowy ślad zbiegu  $Z_1^{1/5}$  i znajdziemy częściowy ślad zbiegu  $Z_2^{1/5}$  kierunku prostopadłego do kierunku określonego punktem  $Z_1^{1/5}$ . Przystąpimy do wykreślenia podziałek zbiegu  $w$  i  $w_1$ . Jeżeli przyjętą jednostką pierwszej podziałki będzie  $a$  mm, to jednostką









Rys. 172.

czymy ze śladem zbiegu  $Z_1$  — oczywiście za pośrednictwem podziałek zbiegu  $w_1$  i  $w'$  — otrzymując w rezultacie dwa dalsze wierzchołki  $C_s$  i  $D_s$  trapezu  $A_s B_s C_s D_s$ , który jest perspektywą prostokąta  $ABCD$  z rys. 171. Punkty  $2'_s, 3'_s \dots 7_s$  na boku  $C_s D_s$  znajdziemy — podobnie, jak w zadaniu poprzednim — przy pomocy pęku *Pillet'a* o wierzchołku  $W_1$ .

Prostopadłe do horyzontu, wykreślone przez punkty  $C_s, 3'_s, S'_s, \dots D_s$ , przetną promienie pęku, przechodzące przez ślad zbiegu  $Z_1$  i punkty  $1, 2, 3, S, \dots C$ , w punktach  $1_s, 2_s, 2'_s, 3_s, S_s, 4_s, 5_s, 6_s, 7_s, D$ , które wyznaczają perspektywę  $P_s$  normalnego profilu gzymsu. Punkty te należy teraz połączyć ze śladem zbiegu  $Z_2$  promieni, prostopadłych do kierunku, określonego śladem zbiegu  $Z_1$ .

Częściowy ślad zbiegu  $Z_2^{1/5}$  mamy na rysunku. Wykreślimy podziałkę zbiegu  $w_2$ , przystającą do podziałki  $w_1$ , poczem podziałkę tę przesuniemy równolegle — mając znowu na względzie przejrzystość rysunku — do położenia  $w'_2$ . Punkty podziału prostej  $w'_2$  znajdziemy w ten sam sposób, w jaki wyznaczaliśmy punkty na podziałce  $w'$ . Punkty 5 i 10 podziałki  $w$  połączymy z takimi samymi punktami podziałki  $w_2$  za pomocą promieni, które wyznaczą na prostej  $w'_2$  cechy 5 i 10. Tym sposobem dochodzimy do punktów podziału prostej  $w'_2$ .

Ponieważ podziałki  $w$  nie możemy użyć dla górnej części rysunku, gdzie zastąpiona jest podziałką  $w'$ , przeto zmuszeni jesteśmy skonstruować jeszcze jedną podziałkę zastępczą, a mianowicie  $w''$ , obierając ją na prawo od  $w$ . Cechy 20 podziałek  $w$  i  $w'_2$  połączymy promieniem, który przetnie prostą  $w''$  w punkcie 20. Promień łączący cechy 10 podziałek  $w$  i  $w'_2$  wyznacza na  $w''$  punkt 10. Otrzymany tym sposobem na prostej  $w''$  odcinek  $10 - 20$  umożliwi jej pocechowanie.

Przy pomocy podziałek zbiegu  $w''$  i  $w'_2$  połączymy punkty  $A_s, B_s, C_s$  i  $D_s$  ze śladem zbiegu  $Z_2$  prostymi  $a_s, b_s, c_s$  i  $d_s$ . Na prostej  $b_s$  musimy odmierzyć w perspektywicznym skróceniu, od dowolnie przyjętego punktu  $B_s^1$ , odcinek, równy dłuższemu bokowi prostokąta, opisanego na profilu  $P$ . Do tego celu potrzebny nam jest taki punkt częściowego mierzenia, związany ze śladem zbiegu  $Z_2$ , aby rzucony z niego na prostą  $p$  punkt  $B_s^1$  leżał w obrębie rysunku. Punktem takim jest punkt  $\frac{M_2}{3/4}$ , którego oddalenie od punktu głównego obliczymy w znany sposób, uwzględniając, że:

$$a = \overline{O_s Z_2^{1/5}} = 86 \text{ mm}; \quad b = \overline{O_s M_2^{1/5}} = 9 \text{ mm}$$

$$\overline{O_s \frac{M_2}{3/4}} = \frac{n}{m} \left[ a - \frac{r}{s} (a + b) \right] = 5 \left( 86 - \frac{3}{4} 95 \right) = \sim 74 \text{ mm}$$

Punkt częściowego mierzenia leży więc po tej samej stronie punktu głównego, co punkt  $Z_2$ , w odległości 74 mm od  $O_s$ .



Rzut punktu  $B_s^1$  na podstawę  $p$  z punktu  $\frac{M_2}{3/4}$  jest punktem  $B_x^1$ . Odmierzmy odcinek  $\overline{B_x^1 C_x^1}$ , równy  $3/4$  wysokości gzymsu, t. j.  $3/4$  odcinka  $\overline{BC}$  i punkt  $C_x^1$  rzucimy z punktu  $\frac{M_2}{3/4}$  na prostą  $b_s$ , otrzymując tam punkt  $C_s^1$ .

Punkty  $B_s^1$  i  $C_s^1$  połączymy ze śladem zbiegu  $Z_1$  (przy pomocy podziałek  $w_1$  i  $w'$ ) prostymi, które przetną prostą  $a_s$  w punktach  $A_s^1$  i  $D_s^1$ . Czworokąt  $A_s^1 B_s^1 C_s^1 D_s^1$  jest perspektywą prostokąta, opisanego na normalnym profilu gzymsu i leżącego na poziomej płaszczyźnie, która przechodzi przez — wyznaczone perspektywami  $m_s$  i  $b_s$  — proste  $m$  i  $b$ . Z wierzchołków otrzymanego czworokąta wykreślimy proste  $a_s^1$ ,  $b_s^1$ ,  $c_s^1$  i  $d_s^1$ , prostopadłe do horyzontu; na jednej z nich, np.  $b_s^1$ , przyjmiemy punkt  $B_s^2$  i połączymy go z punktami zbiegu  $Z_1$  i  $Z_2$ . Na prostej  $a_s^1$  otrzymamy punkt  $A_s^2$  a na prostej  $c_s^1$  punkt  $C_s^2$ . Pierwszy z nich połączymy ze śladem  $Z_2$ , drugi ze śladem  $Z_1$ . Oba otrzymane promienie przetną się w punkcie  $D_s^2$  na prostej  $d_s^1$ . Tym sposobem otrzymaliśmy perspektywę prostokąta, opisanego na normalnym profilu  $P^2$ , ograniczającym pionowy pas gzymsu. Wykreślenie perspektywy samego profilu nie nastręczy już trudności. Rysujemy przekątne  $A_s^2 C_s^2$  i  $B_s^2 D_s^2$ , które przetną się w punkcie  $S_s^2$ . Punkt ten łączymy ze śladami  $Z_1$  i  $Z_2$ . Posługując się pękami *Pillet'a*, wyznaczymy odpowiadające sobie punkty na bokach czworokąta i połączymy je ze śladami  $Z_1$  i  $Z_2$ . Odpowiednie promienie przetną się w charakterystycznych punktach profilu  $P^2$ .

Czworokąt  $A_s^1 B_s^1 C_s^1 D_s^1$  (mamy na myśli punkt  $C_s^1$  na prostej  $c_s$  i punkt  $D_s^1$  na prostej  $d_s$ ) jest perspektywą prostokąta, opisanego na profilu  $P^1$  gzymsu, podług którego przecina się jego pas poziomy z pionowym, czyli na profilu przekątnym.

Teraz łączymy punkty  $1_s, 2_s, 3_s, S_s, 4_s, \dots$  profilu  $P_s$  ze śladem  $Z_2$ , a przez punkty profilu  $P_s^2$  kreślimy proste prostopadłe do horyzontu. Odpowiadające sobie proste przetną się w charakterystycznych punktach  $1_s^1, 2_s^1, \dots, 7_s^1, D_s^1$ , perspektywy  $P_s^1$  przekątnego profilu  $P^1$ . Prosta  $7_s^1 - D_s^1$  przejdzie — podobnie, jak proste  $7_s - D_s$  i  $C_s^2 - D_s^2$  — przez ślad zbiegu  $Z_1$ .

**30. Stożek, obszar, pole i koło widzenia. Kąt widzenia obrazu.** Kąt zawarty między promieniami, łączącymi końcowe punkty odcinka ze środkiem rzutów (okiem) — identyczny z kątem, otrzymanym przez połączenie oka z punktami, ograniczającymi perspektywę tego odcinka — nazywamy *kątem widzenia* odcinka.

Wzrokową, względną miarą długości odcinka, jest wielkość jego kąta widzenia, która znowu zależy od oddalenia odcinka od oka i od



jego, względem oka, położenia. To ostatnie określamy położeniem odcinka względem tła.

Przy stałym położeniu odcinka względem tła maleje jego kąt widzenia ze wzrostem głębokości tłowej. Gdy głębokość tłowa jest stała, to kąt widzenia odcinka zmienia się w zależności od zmiany oddalenia tego odcinka od tła, względnie od zmiany jego położenia względem tła.

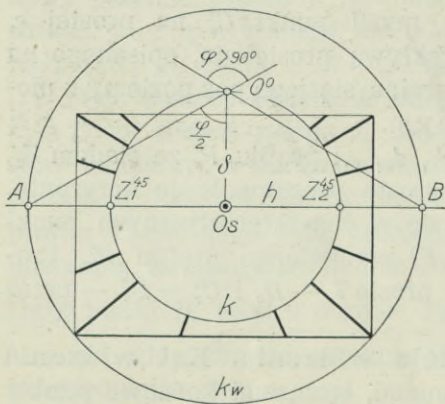
Promienie, łączące punkty obserwowanej przestrzeni z okiem, tworzą wiązki. Z wiązki tej wyodrębnić można promienie, które zawierają z promieniem głównym określony kąt. Miejscem geometrycznym tych promieni będzie stożek obrotowy, którego osią jest promień główny i który nazywać będziemy *stożkiem widzenia*. W myśl tego określenia, ilość stożków widzenia — przy stałym oku, które jest ich wierzchołkiem — jest nieograniczenie wielka, dowolna. Każdy z tych stożków obejmuje pewien *obszar widzenia*, którego wielkość mierzona jest kątem wierzchołkowym stożka widzenia. Ze wzrostem tego kąta rośnie obserwowany przestrzenny obszar widzenia; zmniejszenie kąta wierzchołkowego stożka widzenia obszar ten ścieśnia.

Przekrój wiązki promieni, zawartej w granicach przyjętego stożka widzenia, płaszczyzną tła jest obrazem perspektywnym obserwowanego obszaru. Obraz ten, ograniczony kołem, podług którego płaszczyzna tła przecina stożek widzenia — t. zw. *kołem widzenia obrazu* — stanowi *pole widzenia* oka geometrycznego lub oka fotograficznego.

Jeżeli prostokąt na rys. 173 określa granicę obrazu perspektywnego, to koło  $k_w$ , zakreślone z punktu głównego  $O_s$ , jako środka — a przechodzące przez najdalej od tego środka oddalony wierzchołek prostokąta — jest kołem widzenia obrazu.

Gdy znamy głębokość tłową  $\delta$  danego obrazu, to — przy danym kole widzenia — otrzymamy z łatwością kąt wierzchołkowy  $\varphi$  stożka widzenia. W tym celu położymy płaszczyznę horyzontu, wraz z okiem, na tło, t. j. odmierzymy  $\overline{O_s O^0} = \delta$

na prostopadłej, wykreślonej w punkcie  $O_s$  do linii horyzontu (rys. 173); punkt  $O^0$  połączymy z punktami  $A$  i  $B$ , w których linia horyzontu przecina koło widzenia  $k_w$ . Kąt  $AO^0B = \varphi$  nazywać będziemy *kątem widzenia danego obrazu perspektywnego*.



Rys. 173.



Jeżeli  $\overline{O_s A} = r$  oznacza promień koła widzenia, to z relacji:

$$r : \delta = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

obliczymy w każdym poszczególnym wypadku kąt widzenia  $\varphi$ .

O wpływie kąta widzenia obrazu na charakter perspektywy mówić będziemy w rozdziale, poświęconym estetyce perspektywy.

**31. Perspektywa wnętr.** a) Przestrzeń ograniczoną płaszczyznami, powierzchniami krzywymi lub kombinacją jednych i drugich, obserwowaną z wewnątrz, nazywać będziemy językiem architektów „wnętrzem“. Każdy budynek ma swoją architekturę zewnętrzną i swoje „wnętrze“, przez które rozumieć można wyłącznie ściany boczne z otworami, podłogę i sufit (sklepienie), albo także i przedmioty wypełniające przestrzeń. Przykładami czołowej perspektywy wnętr, otrzymanej drogą fotograficzną, są rys. 174 i 176.



Rys. 174.

Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

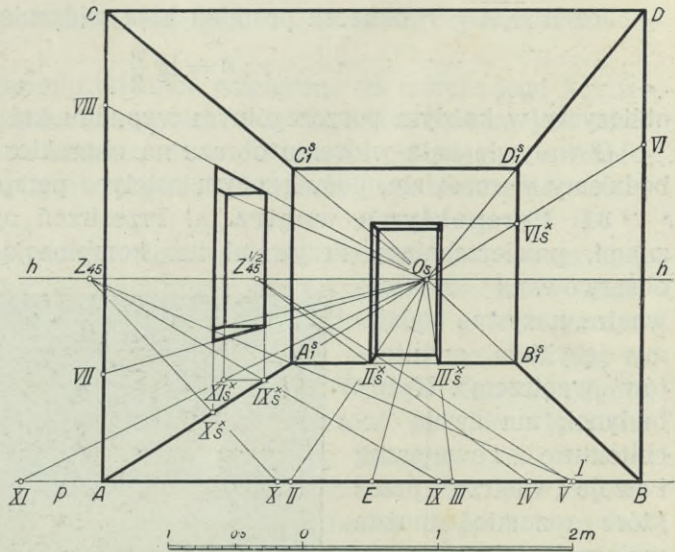
Wyobraźmy sobie, że znajdujemy się wewnątrz pokoju, zwróceniu twarzą do jednej ze ścian bocznych. Szerokość pokoju wynosi 4 m, jego wysokość 3·5 m, w danej na

rysunku 175 podziałce. W ścianie czołowej znajdują się drzwi 1·2 m szerokie i 2·5 m wysokie. W lewej ścianie umieszczony jest otwór okienny szerokości 1·2 m i 2 m wysoki, przy wysokości parapetu 0·8 m. Grubość ścian wynosi 60 cm. Tło, równoległe do ściany czołowej, oddalone jest od niej o 3·5 m; głębokość tłową przyjęliśmy równą 2·5 m.

Płaszczyzna tła przecina płaszczyzny, tworzące wnętrze pokoju, w prostokącie, którego podstawa  $\overline{AB}$ , równa szerokości pokoju, wynosi 4 m, a wysokość  $\overline{AC} = 3·5$  m odpowiada wysokości pokoju. Głębokość pokoju, równą 3·5 m, odmierzymy na linii podstawy  $p$ , jako odcinek  $\overline{AI}$ , poczem punkt  $I$  połączymy z punktem głębokości  $Z_{45}$ . Na promieniu  $\overline{AO_s}$

otrzymamy punkt  $A_1^s$ . Odcinek  $AA_1^s$  jest perspektywą lewej krawędzi podłogi. Punkty  $B, C, D$  połączymy z punktem głównym, poczem, wychodząc z punktu  $A_1^s$ , wykreślimy prostokąt  $A_1^s B_1^s C_1^s D_1^s$ , stanowiący perspektywę przedniej ściany pokoju.

Wyznamy środek  $E$  odcinka  $AB$ , odmierzymy  $EII = EIII = 0.6\text{ m}$  i połączymy punkty  $II$  i  $III$  z punktem głów-



Rys. 175.



Rys. 176.

Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

nym. Na prostej  $A_1^s B_1^s$  otrzymamy punkty  $II_s^x$  i  $III_s^x$ , ograniczające perspektywiczną szerokość drzwi. Wysokość drzwi, wynoszącą  $2.5\text{ m}$ , odmierzymy na boku  $BD$ , jako odcinek  $BVI$ , a punkt  $VI$  rzucimy z punktu  $O_s$  na prostą  $B_1^s D_1^s$ , otrzymując punkt  $VI_s^x$ . Równoległa do horyzontu, poprowadzona przez punkt  $VI_s^x$ , ogranicza wysokość drzwi. Do wyznaczenia grubości ściany w otworze drzwi użyjemy punktu częściowej głębokości  $Z_{45}^{1/2}$ , z którego rzucimy punkt  $II_s^x$  na linię podstawy, otrzymu-





Rys. 177.

Rys. prof. Tad. Obmiński.



jąc na niej punkt  $IV$ . Ponieważ grubość ściany wynosi  $60\text{ cm}$ , więc przy użyciu punktu  $Z_{45}^{1/2}$  odmierzymy odcinek  $\overline{IVV} = 30\text{ cm}$  i punkt  $V$  rzucimy z  $Z_{45}^{1/2}$  na prostą  $II_s O_s$ . Otrzymany tam punkt umożliwia uzupełnienie rysunku otworu drzwi.

Pozostaje do wykreślenia otwór okienny w lewej ścianie. Na boku  $AC$  odmierzymy wysokość parapetu  $A VII = 80\text{ cm}$  a także wysokość okna  $\overline{VII VIII} = 2\text{ m}$ , poczem punkty  $VII$  i  $VIII$  połączymy z punktem głównym  $O_s$ . Następnie odmierzymy na podstawie  $p$  odcinek  $\overline{I IX} = 1\text{ m}$  i odcinek  $\overline{IX X} = 1.2\text{ m}$ , t. j. równy przyjętej szerokości okna. Punkty  $IX$  i  $X$  rzucimy z punktu  $Z_{45}$  na prostą  $A O_s$ , a przez punkty  $IX^*$  i  $X^*$  wykreślimy prostopadłe do linii horyzontu. Grubość ściany bocznej znajdziemy, odnosząc na podstawie  $p$  odcinek  $\overline{A XI} = 60\text{ cm}$  i łącząc punkt  $XI$  z punktem głównym. Dopelnienie linii otworu okiennego nie nastęrczy trudności.

Charakter otrzymanego obrazu perspektywicznego wnętrza zależy oczywiście od położenia oka, a przy ustalonym położeniu tła także od głębokości tłowej  $\delta$ . Im bardziej zbliżone jest oko do jednej ze ścian bocznych, tem większy jest trapez, stanowiący perspektywę ściany przeciwległej, czyli, jak się wyrażamy, ściany tej więcej widzimy. Z obniżaniem się horyzontu zmniejsza się obraz podłogi, a natomiast zwiększa powierzchnia obrazu sufitu.



Rys. 178.

Karol Larsson. Pokój dziecięcy. Klisza F. Bruckmanna, Monachjum.



Ze wzrostem głębokości tłowej — przy niezmiennem położeniu tła — rośnie wielkość figury, stanowiącej obraz przedniej ściany czołowej; obraz staje się bardziej „płaski“, mniej „głęboki“. I przeciwnie: gdy głębokość tłowa — przy stałym położeniu tła — maleje, to figura, będąca perspektywą przedniej ściany czołowej, również maleje; równocześnie trapezy, jako obrazy perspektywiczne ścian bocznych, podłogi i sufitu — rosną. W tym wypadku odnieśliśmy wrażenie, jak gdyby głębokość pokoju wzrosła — obraz stał się „głębszy“.

Pięknym przykładem czołowej perspektywy wnętrza jest rysunek z natury, wykonany przez prof. *Tadeusza Obmińskiego* (rys. 177).

Drugi, nie mniej świetny przykład, stanowi obraz wybitnego malarza szwedzkiego, *Karola Larssona* (ur. 1855, um. 1919), rys. 178. Linja horyzontu przechodzi przez dolną krawędź otwartych okiennic, punkt główny leży na osi symetrii pierwszej kolumny szyb.

b) Jeżeli pionowa płaszczyzna tła nie przecina wnętrza pokoju równolegle do jednej ze ścian pionowych, to wówczas otrzymamy „boczną“ perspektywę wnętrza, która zawierać będzie dwie sąsiednie ściany pionowe, a prócz tego część podłogi i sufitu.

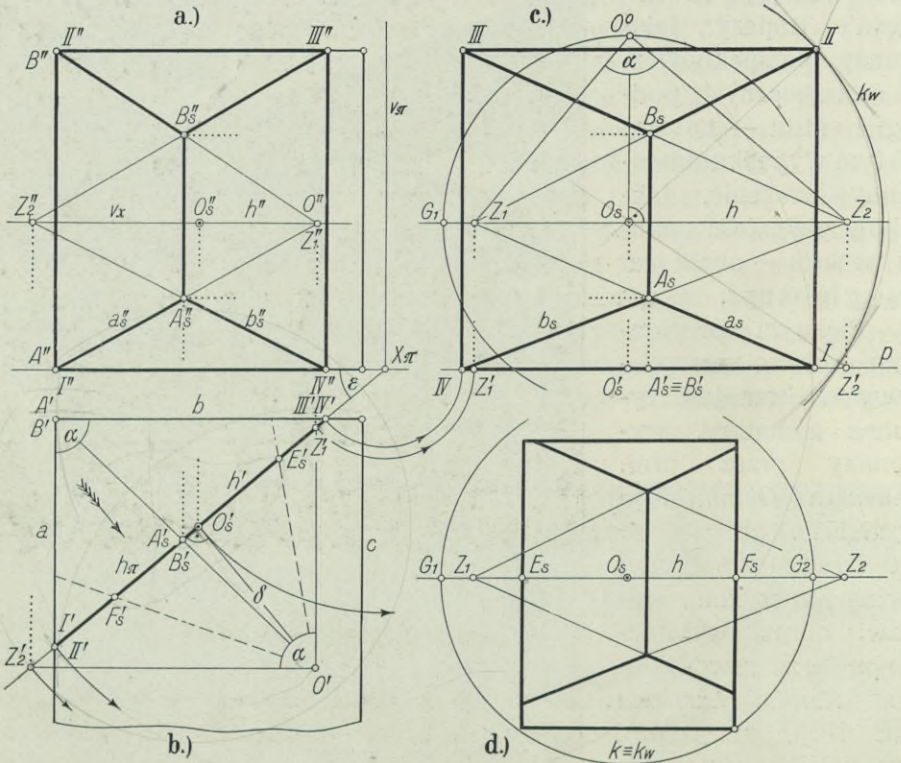
Dla łatwiejszego zorientowania się w zadaniu narysowania takiej bocznej perspektywy wnętrza, wyszliśmy w rys. 180 z rzutów pro-



Rys. 179.

Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

stokątnych: poziomego (rys. 180 b) i pionowego (rys. 180 a). Prosta  $h_\pi$  jest śladem poziomym pionowej płaszczyzny tła, na którą rzucimy z oka naroże pokoju, ograniczone w rzucie poziomym (widoku zgóry) trójbokiem  $a b h_\pi$ ; położenie oka określone jest punktami  $O'$  i  $O''$ . Prosta  $v_\pi$ , na rys. 180 a, przedstawia ślad płaszczyzny horyzontu na pionowej płaszczyźnie rzutów (w widoku z przodu).



Rys. 180 a - d.

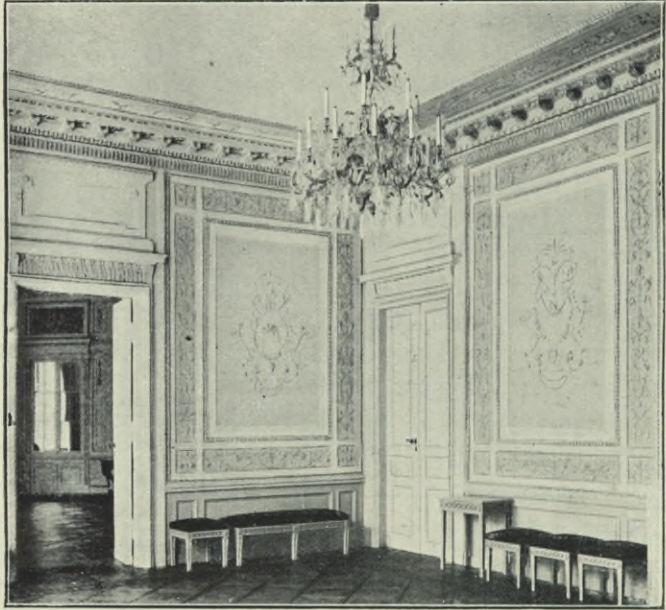
Tło przecina pionowe ściany boczne, podłogę i sufit w prostokącie  $I III III IV$ , którego rzut poziomy jest odcinkiem  $I' IV'$ , a widok z przodu (rzut pionowy) prostokątem  $I'' II'' III'' IV''$ .

Promienie wykreślone z punktu  $O'$ , równoległe do prostych  $a$  i  $b$ , przetną prostą  $h_\pi$  w punktach  $Z'_1$  i  $Z'_2$ , które są rzutami poziomymi, śladów zbiegu kierunków  $a$  i  $b$ . Rzuty pionowe  $Z'_1$  i  $Z'_2$  tych śladów leżą na rzucie pionowym  $h'' \equiv v_\pi$  horyzontu.

Płaszczyzna, przechodząca przez oko i pionową krawędź  $AB$  naroża, przetnie tło wzdłuż prostej pionowej. Rzut poziomy tej prostej jest punktem  $A'_s \equiv B'_s$ , a rzut pionowy prostą prostą do horyzontu, ograni-



czoną punktami  $A_s''$  i  $B_s''$ , które otrzymamy, łącząc punkty  $I''$  i  $II''$  z punktem  $O'' \equiv Z_1''$ , lub punkty  $III''$  i  $IV''$  z punktem  $Z_2''$ . Tym sposobem dochodzimy do rzutu pionowego perspektywy wnętrza. Celem otrzymania samej perspektywy, należy obrócić płaszczyznę tła około jej śladu pionowego  $v_\pi$  na pionową płaszczyznę rzutów, z którą zawiera ona kąt  $\varepsilon$ . Punkty, leżące na prostej  $h_\pi$ , zakreślą łuki kół o wspólnym środku  $X_\pi$  i padną na prostą  $p$ . Punkty  $Z_1'$  i  $Z_2'$  tej prostej, odniesione na horyzont, staną się śladami zbiegu  $Z_1$  i  $Z_2$ ; połączymy je z wierzchołkami prostokąta  $I II III IV$  promieniami, przecinającymi się w punktach  $A_s$  i  $B_s$ .



Rys. 181.

Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

Szczególne trudności przy perspektywicznym przedstawianiu wnętrza następcza przyjęcie położenia oka, wzgl. „stanowiska” — t. j. rzutu prostokątnego  $O'$  oka na płaszczyznę podstawy (podłogi) — (rys. 180 b).

Jeżeli perspektywa ma oddawać ściśle rzeczywistość, to przyjęcie stanowiska ograniczone jest wymiarami rysowanego wnętrza; oko może znajdować się nie dalej, jak na jednej ze ścian ograniczających rysowany obszar. Oddalenie oka od rysowanego przedmiotu okaże się za-zwyczaj zbył małe.

Potrzeba pomieszczenia, na określonym formacie kliszy fotograficznej, obrazu możliwie dużego obszaru przestrzeni — przy stosunkowo małym oddaleniu przedmiotowym, którego powiększenie nie leży w naszej mocy — zniewała fotografa do posługiwania się obiektywami szerokokątnymi o bardzo krótkich ogniskowych. Konsekwencje, wynikające stąd dla charakteru obrazu, omówimy szczegółowo w rozdziale, traktującym o estetyce perspektywy.



Rysownik jest w dogodniejszej sytuacji, aniżeli fotograf. Może on konstruować perspektywę wnętrza przy założeniu, że oko jego znajduje się zewnątrz ścian, okalających wnętrze. Tym sposobem powiększy on oddalenie przedmiotowe do wielkości, dyktowanej wymaganiami poprawnej perspektywy, poświęcając na rzecz tej poprawności warunki rzeczywistości.

Promień  $r$  koła widzenia  $k_w$  na rys. 180c wynosi około 34 mm, a ponieważ głębokość tłowa  $\delta = 25$  mm, więc kąt widzenia obrazu obliczony z relacji (str. 121)

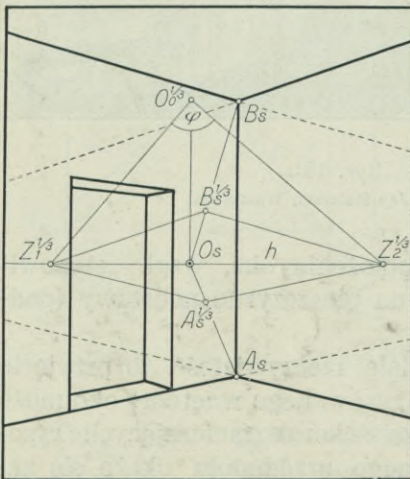
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = r : \delta$$

wynosi około  $108^\circ$ .

Przyjąwszy koło widzenia identyczne z kołem głębokości, t. j.  $k_w \equiv k$ , otrzymaliśmy obraz wnętrza, przedstawiony na rys. 180d.

Jeżeli odcinki  $\overline{O_s E_s}$  i  $\overline{O_s F_s}$  przeniesiemy z rys. 180d na prostą  $h$ , w rys. 180b, jako odcinki  $\overline{O'_s E'_s}$  i  $\overline{O'_s F'_s}$  — to proste  $O'E_s$  i  $O'F_s$  uważać możemy za ślady poziome pionowych płaszczyzn, ograniczających obserwowany obszar wnętrza.

Rys. 179 i 181 przedstawiają boczne perspektywy wnętrza, otrzymane drogą zdjęć fotograficznych. Czytelnik spostrzeże z łatwością, że kąt widzenia obrazu na rys. 181 jest znacznie większy, aniżeli na rys. 179.



Rys. 182.

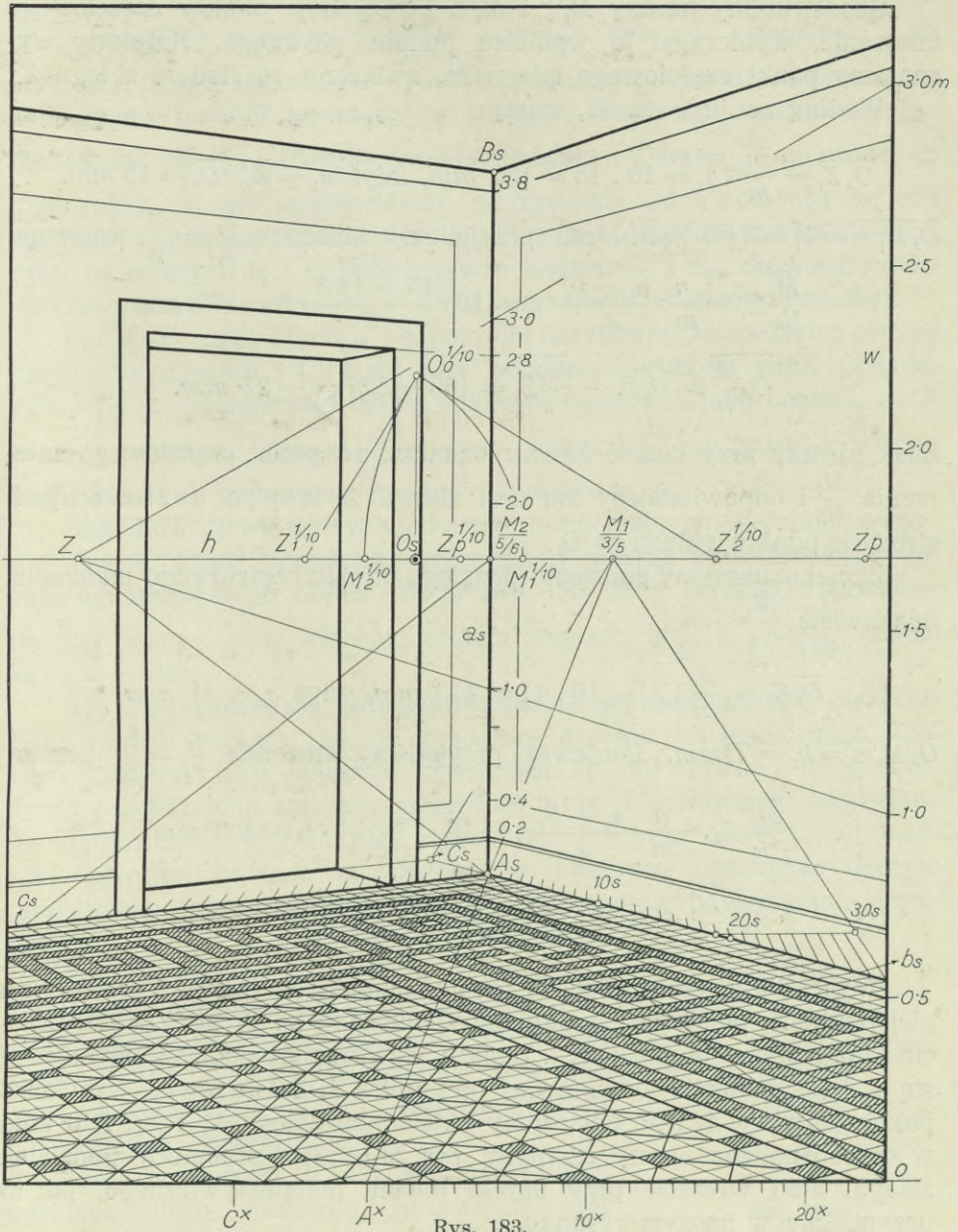
Rys. 182 jest bocznią perspektywą wnętrza, wykreśloną przy użyciu trzeciej części głębokości tłowej. Wychodząc z częściowego śladu zbiegu  $Z_1^{1/3}$ , wykreśliliśmy kąt  $Z_1^{1/3} O_0^{1/3} Z_2^{1/3} = \varphi$ , jaki tworzą ze sobą sąsiednie ściany pionowe naroża. Następnie wykreśliliśmy odcinek  $\overline{A_s B_s}$  i połączyliśmy jego punkty końcowe ze śladami zbiegu, w sposób omówiony w ust. 22.

Promień koła widzenia obrazu łączy prawy, górny wierzchołek prostokąta, ograniczającego obraz z punktem  $O_s$ , i wynosi 46 mm. Ponieważ głębokość

tłowa wynosi 66 mm — więc kąt widzenia obrazu równy jest  $70^\circ$ .

Dalszym przykładem perspektywy wnętrza, a w szczególności prostokątnego naroża pokoju, jest rys. 183. Przyjmijmy, że wielkość obrazu  $119 \times 159$  mm jest zgóry dana. Podziałka rysunku 1 : 20 narysowana jest na prawej jego krawędzi  $w$ . Niechaj wysokość horyzontu wynosi 1,7 m a głębokość tłowa 5 m.





Rys. 183.

Ponieważ, według założenia, ściany boczne są do siebie prostopadłe, więc, przyjmąwszy częściowy ślad zbiegu  $Z_1^{1/10}$ , wykreślimy promień prostopadły do prostej  $Z_1^{1/10} O_0^{1/10}$  w punkcie  $O_0^{1/10}$  i otrzymamy częściowy ślad zbiegu  $Z_2^{1/10}$ , drugiego kierunku, prostopadłego do pierwszego.

Skonstruujemy punkty  $M_1^{1/10}$  i  $M_2^{1/10}$  i znajdziemy punkty częściowego mierzenia, wybierając je w pobliżu punktu głównego. Najpierw wyznaczmy punkt częściowego mierzenia, związany ze śladem zbiegu  $Z_1$ .

Według ust. 28, str. 95, mamy:

$$\overline{O_s Z_1} = \frac{n}{m} \cdot a_1 = 10 \cdot 15 = 150 \text{ mm, gdyż } a_1 = \overline{Z_1^{1/10} O_s} = 15 \text{ mm.}$$

$\overline{O_s M_1^{1/10}} = b_1 = 14 \cdot 5 \text{ mm}$ . Jeśli przyjmiemy stosunek  $\frac{r_1}{s_1} = \frac{3}{5}$ , wówczas:

$$\overline{\frac{M_1}{3/5} Z_1} = \frac{n}{m} \cdot \frac{a_1 + b_1}{s_1} \cdot r_1 = 10 \cdot \frac{15 + 14 \cdot 5}{5} \cdot 3 = 177 \text{ mm}$$

$$\overline{O_s \frac{M_1}{3/5}} = \overline{O_s Z_1} - \overline{\frac{M_1}{3/5} Z_1} = 150 - 177 = -27 \text{ mm.}$$

Znak ujemny przy liczbie 27 mm oznacza, że punkt częściowego mierzenia  $\frac{M_1}{3/5}$  i odpowiadający mu ślad zbiegu  $Z_1$  leżą po przeciwnych stronach punktu głównego  $O_s$ .

Zkolei oznaczymy położenie drugiego punktu częściowego mierzenia, mianowicie  $\frac{M_2}{5/6}$

$$\overline{O_s Z_2} = \frac{n}{m} \cdot a_2 = 10 \cdot 41 = 410 \text{ mm, gdyż } a_2 = 41 \text{ mm}$$

$\overline{O_s M_2^{1/10}} = b_2 = 7 \text{ mm}$ . Ponieważ przyjęliśmy stosunek  $\frac{r_2}{s_2} = \frac{5}{6}$ , przeto:

$$\overline{\frac{M_2}{5/6} Z_2} = \frac{n}{m} \cdot \frac{a_2 + b_2}{s_2} \cdot r_2 = 10 \cdot \frac{41 + 7}{6} \cdot 5 = 400 \text{ mm}$$

$$\overline{O_s \frac{M_2}{5/6}} = \overline{O_s Z_2} - \overline{\frac{M_2}{5/6} Z_2} = 410 - 400 = 10 \text{ mm.}$$

Wykreślmy teraz prostą  $a_s$  prostopadłą do horyzontu i przyjęty na niej punkt  $A_s$  połączmy z punktem  $O$  podziałki  $w$ . Prosta  $O - A_s$  przecina horyzont w punkcie  $Z$ ; z punktu tego rzucimy podziałkę  $w$  na prostą  $a_s$  i jej jednostką odmierzymy od punktu  $A_s$  3·8 m równe wysokości pokoju. Punkty  $A_s$  i  $B_s$  połączmy ze śladami zbiegu  $Z_1$  i  $Z_2$ , i to albo w sposób podany w ust. 22 (patrz rys. 93), albo zapomocą podziałek zbiegu, albo wreszcie przy użyciu linealu perspektywicznego, jak to uczyniliśmy w naszym rysunku.

Zkolei narysujemy podziałki perspektywiczne na krawędziach  $b_s$  i  $c_s$  podłogi. Punktem częściowego mierzenia dla pierwszej jest punkt  $\frac{M_1}{3/5}$ , z niego też rzucimy punkt  $A_s$  na linię podstawy, otrzymując tam punkt  $A^x$ . Od punktu tego odmierzymy na linii podstawy podziałkę, pomniejszoną



do  $\frac{3}{5}$  przyjętej jednostki i punkty podziału rzucimy z punktu  $\frac{M_1}{\frac{3}{5}}$  na prostą  $b_s$ . Teraz wyznaczmy podziałkę perspektywiczną na prostej  $c_s$ ; odmierzymy na linii podstawy tę samą, co poprzednio, jednostkę, pomniejszoną do  $\frac{5}{6}$ , i rzucimy punkty podziału z punktu  $\frac{M_2}{\frac{5}{6}}$  na prostą  $c_s$ . Konstrukcji tej nie zamieściliśmy na rysunku, gdyż pokrywa się ona zupełnie z podaną dla prostej  $b_s$ . Punkty podziałek perspektywicznych na prostych  $b_s$  i  $c_s$  połączymy ze śladami  $Z_1$  i  $Z_2$ , otrzymując perspektywę siatki kwadratów, w którą wrysujemy ornament posadzki.

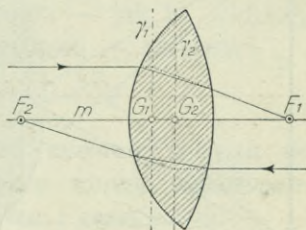
Podziałki na prostych  $a_s$  i  $c_s$  pozwolą narysować perspektywę otworu drzwi o wymiarach  $1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{8}$  m. Aby odmierzyć grubość muru, przeniesiemy ją, w zmniejszonej do  $\frac{3}{5}$  podziałce rysunku, jako odcinek  $A^{\times}C^{\times}$  na linię podstawy i punkt  $C^{\times}$  rzucimy z punktu  $\frac{M_1}{\frac{3}{5}}$  na prostą  $b_s$ . Otrzymany punkt  $C_s$  połączymy następnie z punktem  $Z_2$ .

Głębokość tłowa na rys. 183 wynosi  $250$  mm; promień koła widzenia obrazu, które przechodzi przez dolny prawy wierzchołek prostokąta ograniczającego obraz, równy jest  $106$  mm; styczna trygonometryczna połowy kąta widzenia obrazu wynosi:  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{\delta} = \frac{53}{125}$ , zatem kąt  $\varphi = \sim 46^{\circ}$ .

**32. Perspektywa fotograficzna.** Drogą mechaniczną otrzymujemy obrazy perspektywiczne za pomocą aparatu fotograficznego, którego „okiem“ jest obiektyw. Zwrócona ku obiektywowi fotograficznemu powierzchnia matówki, względnie płyty fotograficznej, odpowiada geometrycznemu pojęciu płaszczyzny tła. Precyzja nowoczesnej techniki optycznej pozwala na założenie, że fotogram, otrzymany dobrym obiektywem fotograficznym, pokrywa się zupełnie z wynikami, otrzymanymi drogą konstrukcji geometrycznej.

W granicach tego wykładu nie możemy zajmować się szczegółami optyki aparatu fotograficznego; omówimy tylko podstawowe jej prawa, potrzebne do zorientowania się w analogji, jaka zachodzi między perspektywą konstrukcyjną a fotograficzną.

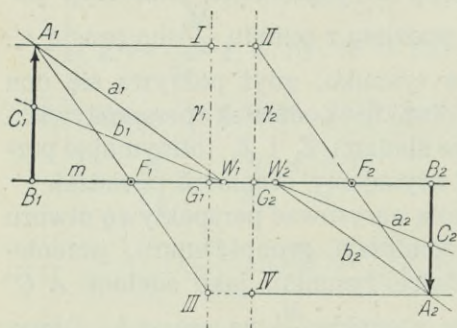
Linja  $m$ , łącząca środki powierzchni kul, ograniczających soczewkę, nazywa się jej *osią optyczną* (rys. 184). Promienie, biegnące w bezpośredniej bliskości osi optycznej i do niej równoległe, przecinają się — po przejściu przez soczewkę — w jednym punkcie na osi, który zwie się *ogniskiem* ( $F$ ) soczewki. Kierunki wszystkich promieni wchodzących i wychodzących przecinają się na *płaszczyźnie głównej*, prostopadłej



Rys. 184.



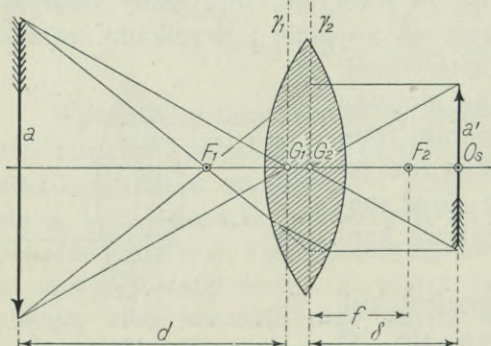
do osi optycznej. Płaszczyzna główna przecina oś optyczną w *punkcie głównym*  $G$  soczewki, którego nie należy identyfikować z punktem głównym w perspektywie. Oddalenie ogniska od głównego punktu soczewki nazywa się jej *ogniskową* ( $f$ ).



Rys. 185.

Każda soczewka ma dwa ogniska, dwie płaszczyzny główne i tyleż punktów głównych. Obie ogniskowe soczewki są sobie równe. W soczewce, użytej jako obiektyw fotograficzny, wchodzi w grę jedno ognisko i jedna płaszczyzna główna. Kilka soczewek, względnie ośrodków ograniczonych powierzchniami kulistymi o wspólnej osi, tworzy *układ osiowy*, który posiada — podobnie, jak soczewka pojedyncza: dwa ogniska  $F_1$  i  $F_2$  (rys. 185), dwie płaszczyzny główne  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  i dwa główne punkty  $G_1$  i  $G_2$ . Ogniskiem układu jest punkt przecięcia się z osią układu — w ostatnim ośrodku — promienia, który w pierwszym ośrodku był równoległy do osi. Innymi słowy, określić można ognisko układu osiowego, jako ten punkt jego osi, przez który przechodzące promienie biegną w ostatnim, przeciwnym, ośrodku, równoległe do osi.

Główne płaszczyzny układu osiowego, będące — podobnie, jak główne płaszczyzny soczewki — miejscem geometrycznym punktów przecięcia się wszystkich promieni wchodzących i wychodzących, są prostopadłe do osi, przecinają ją w punktach głównych i posiadają tę własność, że obraz utworu płaskiego, znajdującego się na jednej z nich, leży na płaszczyźnie drugiej, jest prosty (nie odwrócony) i do danego utworu płaskiego przystający.



Rys. 186.

Na osi układu optycznego znajdują się dwa *punkty węzłowe*  $W_1$  i  $W_2$ , charakteryzujące się tem, że każdy promień, który przed pierwszym załamaniem się skierowany jest ku pierwszemu z nich — po ostatnim załamaniu się przechodzi przez punkt drugi i pozostaje do swego pierwotnego kie-



runku równoległy. Jeżeli ostatni ośrodek jest ten sam, co pierwszy, to punkty węzłowe układu schodzą się z punktami głównymi.

Oznaczmy oddalenie przedmiotu od soczewki, mierzone do jej punktu głównego, literą  $d$ , a oddalenie obrazu tego przedmiotu od drugiego punktu głównego — odpowiadające w perspektywie konstrukcyjnej głębokości tłowej — literą  $\delta$ . Między ogniskową  $f$  soczewki, oddaleniem przedmiotowym  $d$  i oddaleniem obrazu zachodzi związek:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta} \dots \dots \dots 5)$$

*Suma odwrotności oddalenia przedmiotowego i oddalenia obrazu równa jest odwrotności ogniskowej soczewki.*

Z równania (5) otrzymamy trzy następujące:

$$f = \frac{d \cdot \delta}{d + \delta} \dots \dots \dots 6)$$

$$d = \frac{\delta \cdot f}{\delta - f} \dots \dots \dots 7)$$

$$\delta = \frac{d \cdot f}{d - f} \dots \dots \dots 8)$$

Z równań tych możemy obliczyć każdą z trzech, wchodzących w nie wartości, gdy znamy dwie pozostałe.

Ustawmy przed obiektywem fotograficznym (soczewką) przedmiot (strzałę) o długości  $a$  (rys. 186) i przyjmijmy, że strzałą  $a'$  jest obrazem pierwszej. Między wielkością  $a$  przedmiotu a wielkością  $a'$  jego obrazu zachodzi — jak to widzimy bezpośrednio z rysunku — związek:

$$a' : a = \delta : d \dots \dots \dots 9)$$

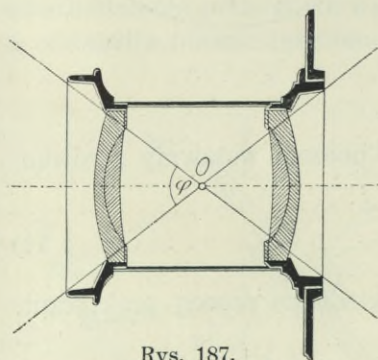
t. zn., że *stosunek wielkości obrazu do wielkości przedmiotu równy jest stosunkowi odlegień obrazu i przedmiotu.*

Oznaczmy stosunek wielkości przedmiotu do wielkości obrazu przez  $\varepsilon$ , to równanie (9) przyjmie formę:

$$\frac{a}{a'} = \varepsilon = \frac{d}{\delta} \dots \dots \dots 10)$$

Wstawmy  $\delta = \frac{d}{\varepsilon}$  z równania (10) w (7), to otrzymamy:

$$d = f(1 + \varepsilon) \dots \dots \dots 11)$$



Rys. 187.

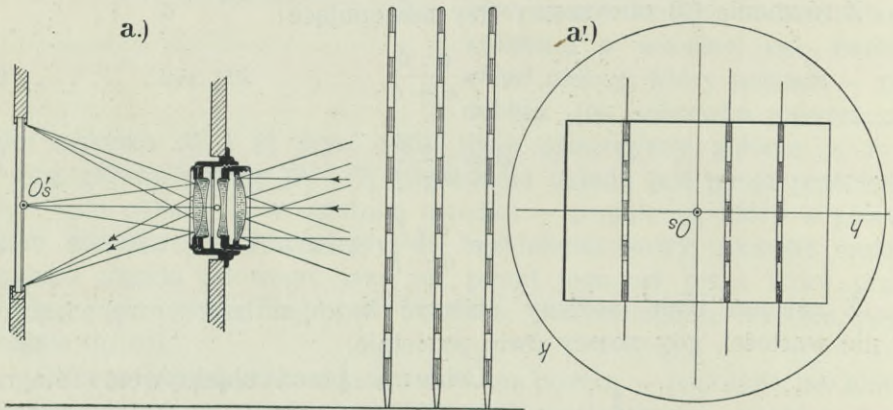
Zastąpmy w równaniu tem czynnik  $\varepsilon$  stosunkiem  $\frac{a}{a'}$  i obliczmy wielkość obrazu  $a'$ :

$$a' = \frac{f \cdot a}{d - f} \dots \dots \dots 12)$$

Równanie (12) poucza nas, że wielkość obrazu uzależniona jest — poza wielkością przedmiotu i jego oddalenia — także i od ogniskowej obiektywu fotograficznego. *Ze wzrostem ogniskowej rośnie wielkość obrazu.*

Wartość  $d = \varepsilon \delta$  z równania (10), wstawiona w równanie (7), daje:

$$\delta = f \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \dots \dots \dots 13)$$



Rys. 188 a, a'.

Pomnóżmy równanie (11) przez  $(1 + \varepsilon)$ , poczem wstawmy z równania (10)  $d = \varepsilon \delta$ , to otrzymamy:

$$f = \frac{\varepsilon(\delta + d)}{(1 + \varepsilon)^2} \dots \dots \dots 14)$$

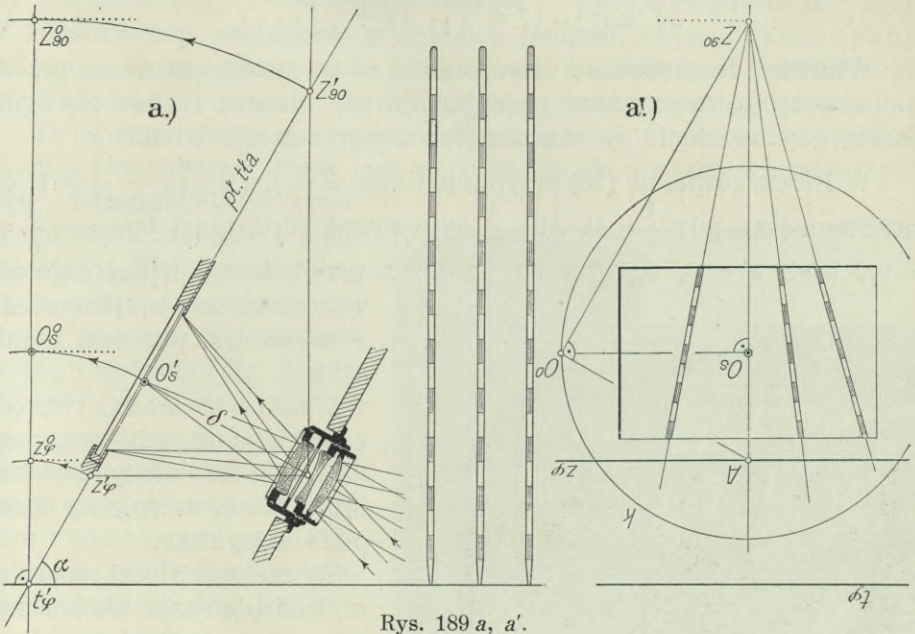
Równania (11), (13) i (14) dają odpowiedź na szereg praktycznie ważnych pytań.

Przyjmijmy np., że wielkość obrazu ma być równa wielkości przedmiotu, czyli, że:

$$\varepsilon = \frac{a}{a'} = 1, \text{ a więc } a = a'.$$

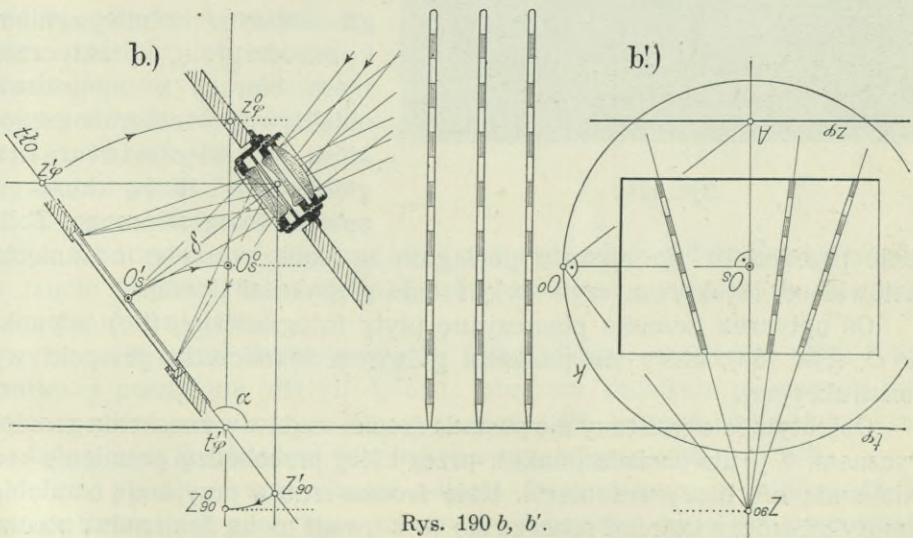
Z równania (11) otrzymujemy przy tem założeniu  $d = 2f$ , a z równania (13)  $\delta = 2f$ . Stąd  $d = \delta$ , co oznacza, że oddalenie przedmiotu równe będzie oddaleniu obrazu a obie te wielkości równe podwójnej ogniskowej obiektywu fotograficznego.





Rys. 189 a, a'.

Niechaj obraz ma być pomniejszony dwu-, trzy-, czterokrotnie w stosunku do przedmiotu, czyli niechaj  $\varepsilon = \frac{a}{a'} = 2, 3, 4, \dots$ , to wówczas oddalenia przedmiotu wypadną z równania (11) równe  $3f, 4f, 5f, \dots$ , a oddalenia obrazu (głębokości tłowe) z równania (13), kolejno:



Rys. 190 b, b'.

$$\left(f + \frac{f}{2}\right), \left(f + \frac{f}{3}\right), \left(f + \frac{f}{4}\right), \dots$$

Widzimy, że głębokość tłowa maleje ze wzrostem oddalenia przedmiotu, przy równoczesnym zmniejszaniu się obrazu, i staje się ogniskową, gdy oddalenie przedmiotu jest nieograniczenie wielkie.

W istocie równanie (13) przyjmuje formę  $\delta = f$ , gdy  $\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = 1$ , co możliwym jest, gdy  $\frac{1}{\varepsilon} = 0$ . Aby  $\frac{1}{\varepsilon}$  było równe zeru, musi być  $\varepsilon = \frac{a}{a'} = \infty$ , czyli  $a' = 0$ , co oznacza, że obraz przedmiotu, znajdującego się

w odległości nieskończenie wielkiej, jest punktem (ogniskiem).

Wynika to zresztą wprost z równania (5), gdy wstawimy tam  $d = \infty$ , wtedy bowiem także  $f = \delta$ , t. zn., że obraz pada w ognisko.

W rzeczywistości operujemy oddaleniami skończonymi, a w technice fotograficznej już po przekroczeniu kilkunastometrowego oddalenia przedmiotu dalsze jego zwiększanie pozostaje bez widocznego wpływu na głębokość tłową. Głębokość ta nie ulega dalszym zmniejszeniom i schodzi się, praktycznie rzecz biorąc, z ogniskową obiektywu fotograficznego, która jest więc minimalną głębokością tłową każdego aparatu fotograficznego. Zbli-



Rys. 191.

żenie przedmiotu do aparatu pociągnie za sobą potrzebę odsunięcia matówki od obiektywu, czyli zwiększenia głębokości tłowej.

Oś optyczna przebija płaszczyznę płyty fotograficznej (tło) w punkcie  $O_s$  (rys. 186), który jest punktem głównym w znaczeniu perspektywy konstrukcyjnej.

Obiektyw fotograficzny nie posiada środka rzutów w znaczeniu geometrycznym, t. j. nie posiada punktu, przez który przechodzą promienie bez załamania lub bez przesunięcia. Rolę środka rzutów przyjmują na siebie punkty główne, z którymi schodzą się — z uwagi na to, że ośrodek pierw-



szy jest identyczny z ostatnim (powietrze) — punkty węzłowe (str. 132). W konsekwencji nie mamy w aparacie fotograficznym płaszczyzny zniknięcia, w znaczeniu rzutu środkowego; analogja każe wstawić w jej miejsce obszar, zawarty między dwiema płaszczyznami głównymi.

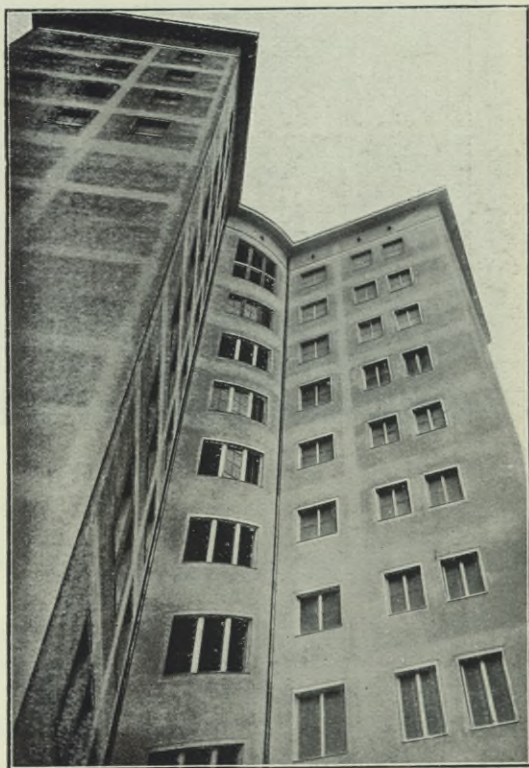
O ile pole widzenia oka geometrycznego jest teoretycznie nieograniczone i obejmować może całą płaszczyznę tła, to pole widzenia aparatu fotograficznego jest ograniczone własnością jego obiektywu. Kąt wierzchołkowy  $\varphi$  stożka widzenia obiektywu, którego wierzchołek przyjąć możemy dla uproszczenia w środku odcinka, ograniczonego punktami głównymi (środek optyczny obiektywu), nazywa się kątem obiektywu (rys. 187). W tak zwanych obiektywach szerokokątnych kąt ten dochodzi do  $140^\circ$ .

Obraz padający na płytę fotograficzną jest odwrócony; jeżeli płyta ma położenie pionowe, to fotogram odpowiada geometrycznie obrazowi perspektywy, stanowiącej przedmiot rozważań tego rozdziału; obrazy prostych pionowych stanowią pęk prostych równoległych (rys. 188a, a').

Jeżeli płyta fotograficzna nie ma położenia pionowego, to otrzymamy fotogram, który ma swój odpowiednik geometryczny w rzucie środkowym, w ogólniejszym rozumieniu tego określenia, omówionem w rozdziale I.

Rys. 189a i a' ilustruje zdjęcie fotograficzne, w którym płyta fotograficzna pochylona jest ku dołowi; obrazem prostych pionowych jest pęk promieni, schodzących się w punkcie  $Z^{90}$ , leżącym pod dolną krawędzią płyty. Przykładem tak dokonanego zdjęcia jest rys. 191.

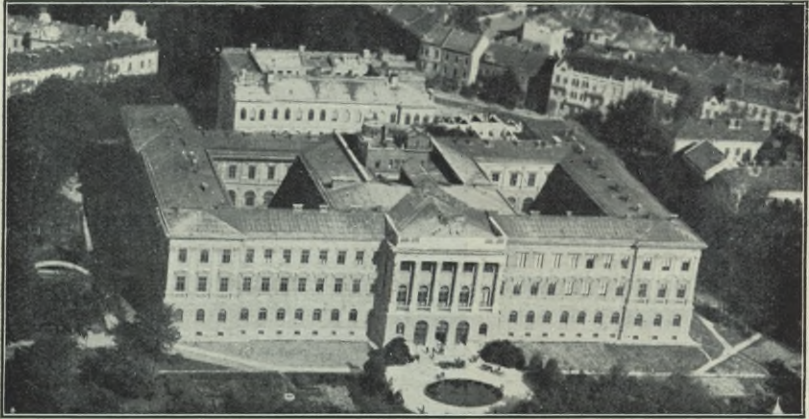
Rys. 190b i b' uzmysławia zdjęcie fotograficzne, w którym płyta fotograficzna jest nachylona ku górze; fotografją prostych pionowych



Rys. 192.

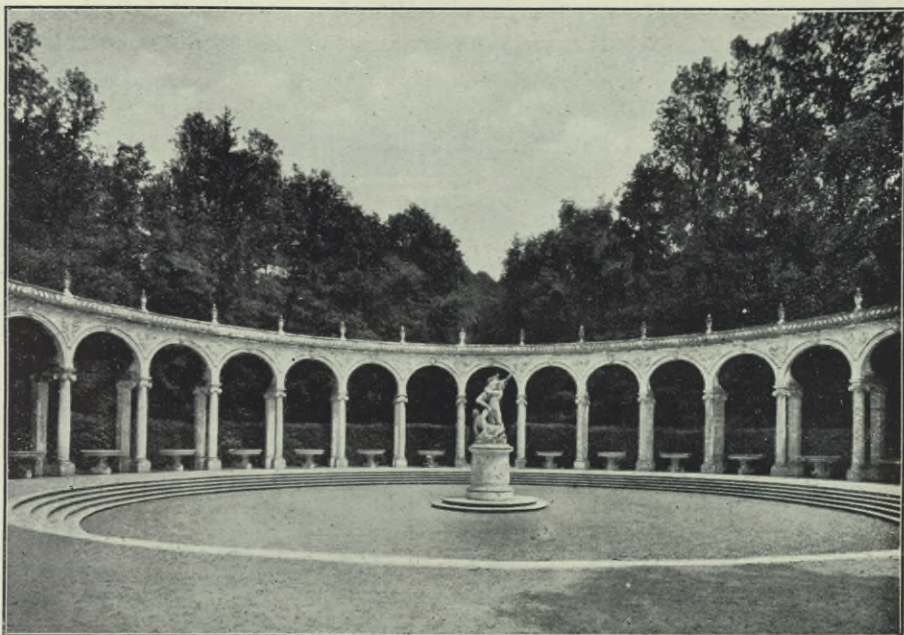
są proste, zbiegające się w punkcie  $Z^{90}$ , który leży nad dolną krawędzią obrazu. Zdjęcie fotograficzne, odpowiadające takiemu położeniu aparatu fotograficznego, przedstawia rys. 192.

Jako dalszy przykład zdjęcia przy dowolnem położeniu płaszczyzny kliszy, czyli przykład perspektywy ukośnej, służyć może zdjęcie, wykonane z balonu, względnie samolotu (rys. 193).



Rys. 193.





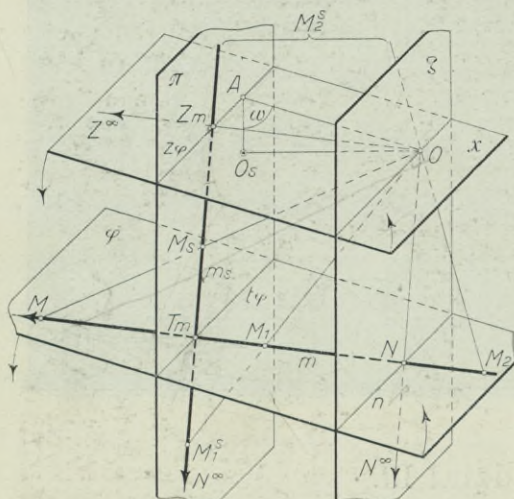
### Rozdział III.

## Perspektywa krzywych stożkowych.

**33. Uwagi ogólne o perspektywie koła.** a) Spójrzmy przede wszystkim wstecz i ujmijmy pewne wyniki dotychczasowych rozmowań bardziej ogólnie. Wiemy, że każdy punkt przestrzeni ma swoją perspektywę, którą jest jeden, ściśle określony punkt, że perspektywą linii prostej jest prosta, że każdy trójkąt, czworokąt — ogólnie  $n$ -ką, przyjęty na płaszczyźnie podstawy lub też na innej, dowolnie w przestrzeni leżącej płaszczyźnie, ma swój jednoznacznie wyznaczony obraz perspektywiczny na tle. Posługując się określeniami geometrycznymi, powiemy: między punktami i prostymi dowolnej płaszczyzny  $\varphi$  a ich perspektywami na tle zachodzi tego rodzaju zależność, że każdemu punktowi tej płaszczyzny odpowiada jeden jedyny punkt na tle, jako jego perspektywa, i że każdej prostej, przechodzącej przez punkt płaszczyzny  $\varphi$ , odpowiada na tle jedna jedyna prosta, przechodząca przez punkt, odpowiadający punktowi płaszczyzny  $\varphi$ . Ale ponadto zależność ta jest wzajemna, t. zn., że każdemu punktowi i każdej prostej, przechodzącej przez ten punkt na tle, odpowiada jeden punkt i jedna prosta na płaszczyźnie  $\varphi$ .



Nazywając punkty i proste, przyjęte na płaszczyźnie  $\varphi$ , jej elementami i pojmując płaszczyznę, jako zbiór tych elementów, powiemy: między elementami płaszczyzny  $\varphi$  a elementami płaszczyzny  $\zeta$  założyć się da odpowiedniość jedno-jednoznaczna, polegająca na tem, że punktowi, leżącemu na jednej z tych dwóch płaszczyzn, odpowiada na płaszczyźnie drugiej punkt, leżący z pierwszym na promieniu widzenia, a prostej na jednej płaszczyźnie — prosta na płaszczyźnie drugiej, leżąca z nią na płaszczyźnie, przechodzącej przez oko, czyli na płaszczyźnie widzenia.



Rys. 195.

Przyjęta na płaszczyźnie  $\varphi$  prosta  $m$  przebija tło w śladzie tłowym  $T_m$ . Promień, wyprowadzony z oka równolegle do prostej  $m$ , przebija tło w punkcie  $Z_m$ , który jest śladem zbiegu prostej  $m$ . Prosta  $m_s$ , łącząca punkty  $T_m$  i  $Z_m$ , jest perspektywą prostej  $m$ .

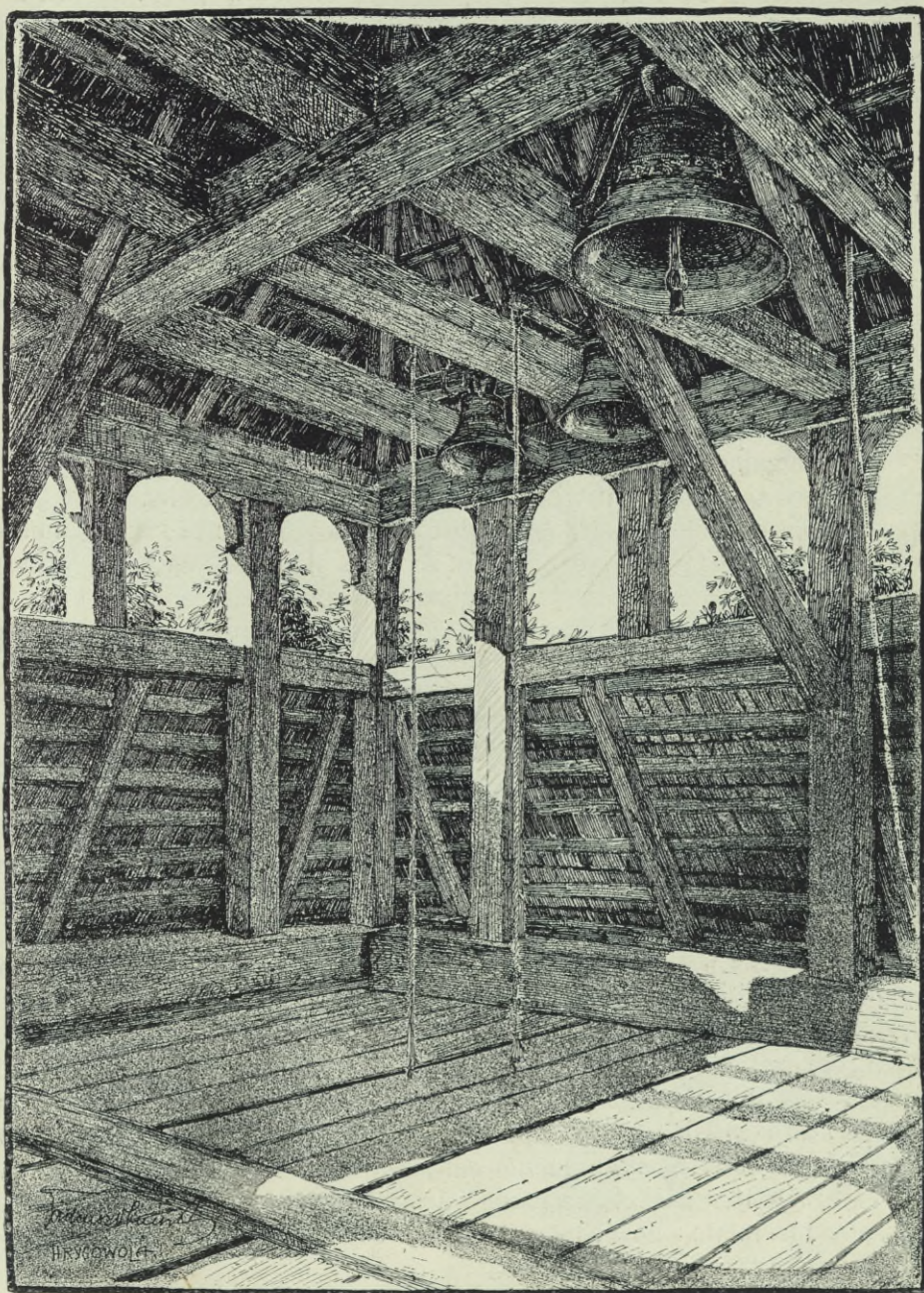
Posługując się sposobem wyrażania, wprowadzonym w punkcie *a*) tego ustępu, powiemy, że prostej  $m$ , leżącej na płaszczyźnie  $\varphi$ , odpowiada na tle prosta  $m_s$  i wzajemnie — prostej  $m_s$ , leżącej na płaszczyźnie  $\zeta$ , odpowiada prosta  $m$  na płaszczyźnie  $\varphi$ .

Między punktami prostej  $m$  a punktami prostej  $m_s$  i wzajemnie zachodzi — stworzona pośrednictwem oka — również odpowiedniość jedno-jednoznaczna. Polega ona na tem, że każdemu punktowi jednej z tych prostych odpowiada jeden punkt na prostej drugiej, leżący z nim na promieniu widzenia.

Wydźmy od punktu, leżącego nieograniczenie daleko na prostej  $m$ , t. j. od punktu niewłaściwego  $Z^\infty$ ; punktowi temu odpowiada, w znaczeniu odpowiedniości geometrycznej, punkt  $Z_m$  (ślad zbiegu) prostej  $m_s$ . Zbliżajmy się od punktu  $Z^\infty$  prostej  $m$  ku jej śladowi tłowemu

*b*) Niechaj płaszczyzna  $\pi$  (rys. 195) będzie płaszczyzną  $\zeta$ , punkt  $O$  okiem (środkiem rzutów), płaszczyzna  $\zeta \parallel \pi$  płaszczyzną zniknięcia a płaszczyzna  $\varphi$  dowolnie przyjętą płaszczyzną, przecinającą tło wzdłuż śladu tłowego  $t_\varphi$  — i nachyloną do niego pod kątem  $\omega$ . Przechodząca przez oko, równoległe do płaszczyzny  $\varphi$ , płaszczyzna  $\chi$  przecina tło wzdłuż prostej  $z_\varphi \parallel t_\varphi$ , która jest śladem zbiegu płaszczyzny  $\varphi$ .





Rys. 196.

Rysował prof. Tadeusz Obmiński.



$T_m$ . Punktowi  $M$  odpowiada na prostej  $m_s$  punkt  $M_s$ , leżący z nim na promieniu widzenia. Punktowi  $T_m$ , uważanemu za element prostej  $m_s$ , odpowiada tenże sam punkt  $T_m$ . Gdy więc, wychodząc od punktu niewłaściwego  $Z^\infty$ , punkt przebiega prostą  $m$  aż do jej śladu tłowego, to perspektywa tego poruszającego się punktu odbywa na prostej  $m_s$  drogę od śladu zbiegu  $Z_m$  do śladu tłowego  $T_m$ . Gdy punkt porusza się dalej w tym samym kierunku i przebiega odcinek  $T_m N$ , to perspektywa jego porusza się równocześnie od punktu  $T_m$  ku punktowi niewłaściwemu  $N^\infty$  prostej  $m_s$ . Punkt  $N$  prostej  $m$ , leżący na śladzie zniknięcia  $n$  (ust. 4, punkt  $a$ ), którego perspektywą jest punkt niewłaściwy  $N^\infty$  prostej  $m_s$ , jest *śladem zniknięcia* prostej  $m$  (ust. 3, punkt  $a$ ). Gdy po przekroczeniu śladu zniknięcia punkt — nie zmieniając kierunku ruchu — oddalać się będzie ku punktowi niewłaściwemu, to obraz jego zbliżać się będzie od punktu niewłaściwego  $N^\infty$  ku punktowi  $Z_m$ .

Rozszerzając sprawę przebiegu punktu i linii prostej na cały obszar płaszczyzny  $\varphi$ , zauważymy, co następuje: punktom niewłaściwym płaszczyzny  $\varphi$ , t. j. nieograniczenie daleko na niej leżącym, których miejsce geometryczne uważamy za linię prostą niewłaściwą — odpowiadają punkty, których miejscem geometrycznym jest ślad zbiegu  $z_\varphi$  tej płaszczyzny; punktom leżącym na płaszczyźnie  $\varphi$  „za tłem“, między prostą niewłaściwą a śladem tłowym, czyli w „obszarze istotnym“, odpowiadają na tle punkty, leżące między śladem zbiegu  $z_\varphi$  a śladem tłowym  $t_\varphi$ . Śladowi tłowemu  $t_\varphi$ , uważanemu za element płaszczyzny  $\varphi$ , odpowiada ta sama prosta, jako element płaszczyzny  $\tau$ ; innymi słowy: ślad tłowy płaszczyzny odpowiada sam sobie. Punktom, leżącym między śladem tłowym a śladem zniknięcia (w „obszarze pośrednim“), odpowiadają na tle punkty, wypełniające część płaszczyzny  $\tau$  od śladu tłowego aż do jej punktów niewłaściwych. Pozostałej części płaszczyzny  $\varphi$ , rozciągającej się od śladu zniknięcia  $n$  (w „obszarze geometrycznym“), odpowiadają na tle punkty, od niewłaściwych począwszy, aż do leżących na śladzie zbiegu  $z_\varphi$ . Śladowi zniknięcia  $n$  odpowiada na tle prosta niewłaściwa, stanowiąca krawędź płaszczyzny  $\tau$  z płaszczyzną widzenia, która jest w tym przypadku równoległą do  $\tau$ . Innymi słowy, wyrazić możemy ostatnie zdanie w sposób następujący: *perspektywa każdego punktu śladu zniknięcia jest punktem niewłaściwym  $\tau$ , t. zn. leży na nim w odległości nieograniczenie dalekiej.*

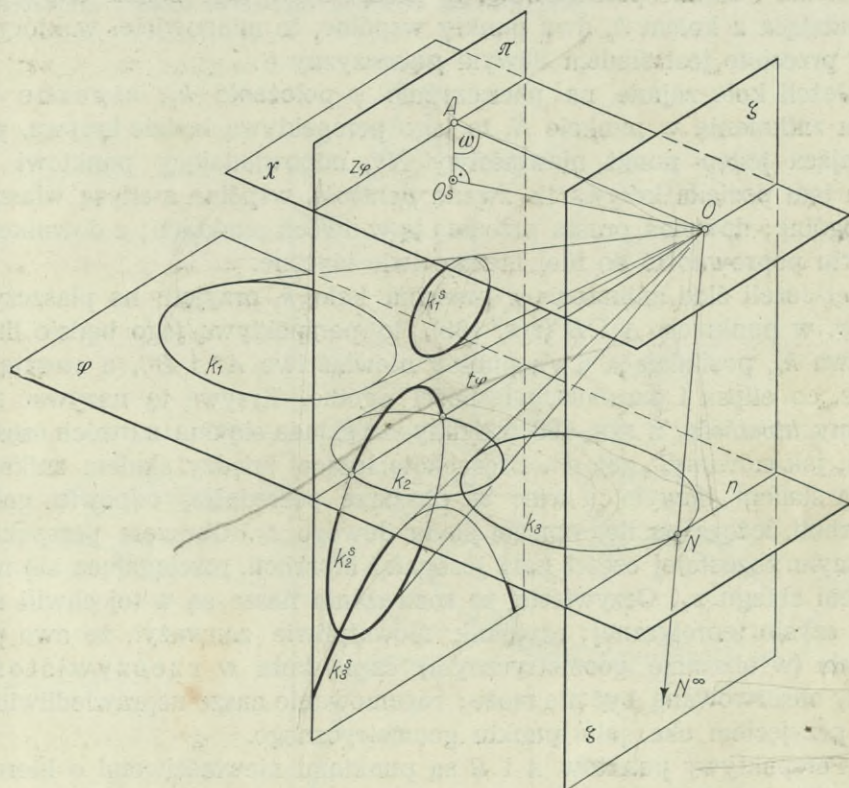
c) Przyjmijmy na płaszczyźnie  $\varphi$ , w miejsce prostej  $m$ , koło  $k_1$  i to tak, aby nie miało ono żadnego punktu wspólnego ze śladem zniknięcia  $n$  (rys. 197).

Każdemu punktowi koła  $k_1$  odpowie jeden punkt na tle, a miejscem geometrycznym tych punktów będzie linia krzywa  $k_1^*$ . Innymi słowy:



linja krzywa  $k_1^s$  jest perspektywą koła  $k_1$ . Z łatwością zauważymy, że krzywa  $k_1^s$  posiada z kołem szereg wspólnych własności.

I tak, stosując twierdzenia, wypowiedziane w punkcie *b*) tego ustępu, stwierdzimy, że krzywa  $k_1^s$  nie posiada — podobnie, jak koło — żadnych punktów niewłaściwych, t. j. wszystkie jej punkty leżą w odległości skończonej. Wistocie bowiem, skoro tylko punktom, leżącym na śladzie zniknie-



Rys. 197.

nia  $n$ , odpowiadają punkty niewłaściwe, a ślad ten koła  $k_1$  nie przecina, więc wszystkie punkty linii  $k_1^s$  są punktami właściwymi, czyli, jak się wyrażamy, krzywa  $k_1^s$  jest linią „zamkniętą“.

Wiadomo, że linja prosta przecina koło w dwóch punktach, a z dowolnego punktu poprowadzić można do koła dwie proste styczne. Ponieważ między elementami płaszczyzn  $\varphi$  i  $\pi$  zachodzi wzajemna odpowiedniość jedno-jednoznaczna, więc wymienione wyżej własności łączą koło i jego perspektywę  $k_1^s$ . Stwierdzamy tem samem, że linja prosta przecina krzywą, która jest perspektywą koła, w dwóch punktach,



i że z dowolnego punktu poprowadzić do niej można dwie proste styczne. Perspektywę koła, nie posiadającą punktów niewłaściwych, a więc stanowiącą linię „zamkniętą“, nazywamy *elipsą*. Elipsa jest perspektywą koła, które nie posiada żadnego punktu wspólnego z płaszczyzną — a więc i ze śladem — zniknięcia.

d) Jeżeli koło, leżące na płaszczyźnie  $\varphi$ , zbliży się do płaszczyzny zniknięcia i zajmie położenie  $k_2$ , to perspektywą jego będzie elipsa  $k_2^s$ , posiadająca z kołem  $k_2$  dwa punkty wspólne, te mianowicie, w których koło przecięte jest śladem tłowym płaszczyzny  $\varphi$ .

Jeżeli koło zajmie na płaszczyźnie  $\varphi$  położenie  $k_3$ , styczne do śladu zniknięcia w punkcie  $N$ , to jego perspektywą będzie krzywa, posiadająca jeden punkt niewłaściwy  $N^\infty$ , odpowiadający punktowi  $N$ . Poza tem posiada krzywa ta, zwana *parabolą*, wspólnie z elipsą własności ogólne; dowolna prosta przecina ją w dwóch punktach; z dowolnego punktu poprowadzić do niej można dwie styczne.

e) Jeżeli ślad zniknięcia  $n$  przecina koło  $k$ , przyjęte na płaszczyźnie  $\varphi$ , w punktach  $A$  i  $B$  (rys. 198), to perspektywą jego będzie linja krzywa  $k_s$ , posiadająca dwa punkty niewłaściwe  $A^\infty$  i  $B^\infty$ , a zresztą te same, co elipsa i parabola, własności ogólne. Krzywą tę nazywać będziemy *hiperbolą*; z rys. 198 widzimy, że składa się ona z dwóch części, czyli, jak mówimy, „gałęzi“. Części koła, leżącej między śladem zniknięcia a śladem tłowym, a więc w obszarze pośrednim, odpowie gałąź hiperboli, leżąca na tle, poniżej śladu tłowego  $t_\varphi$ . Obrazem perspektywnym pozostałej części koła jest gałąź hiperboli, rozciągająca się nad śladem zbiegu  $z_\varphi$ . Oczywiście, że rozważania nasze są w tej chwili natury czysto teoretycznej; czytelnik niewątpliwie zauważył, że owa pozostała (w obszarze geometrycznym) część koła w rzeczywistości nigdy obserwowaną być nie może; rozumowanie nasze usprawiedliwione jest przyjęciem oka, jako punktu geometrycznego.

Perspektywy punktów  $A$  i  $B$  są punktami niewłaściwymi o kierunkach  $OA$  i  $OB$ . Proste  $a_s$  i  $b_s$ , t. j. perspektywy stycznych  $a$  i  $b$ , są prostami równoległymi do kierunków  $OA$  i  $OB$ , przecinającymi się w punkcie  $S_s$ . Ponieważ stycznej do koła odpowiada styczna do jego perspektywy, więc proste  $a_s$  i  $b_s$  są stycznymi do hiperboli w punktach niewłaściwych  $A^\infty$  i  $B^\infty$ , odpowiadających punktom  $A$  i  $B$ , leżącym na śladzie zniknięcia  $n$ . Proste styczne do krzywej w jej punktach niewłaściwych noszą nazwę asymptot; hiperbola posiada więc dwie asymptoty.

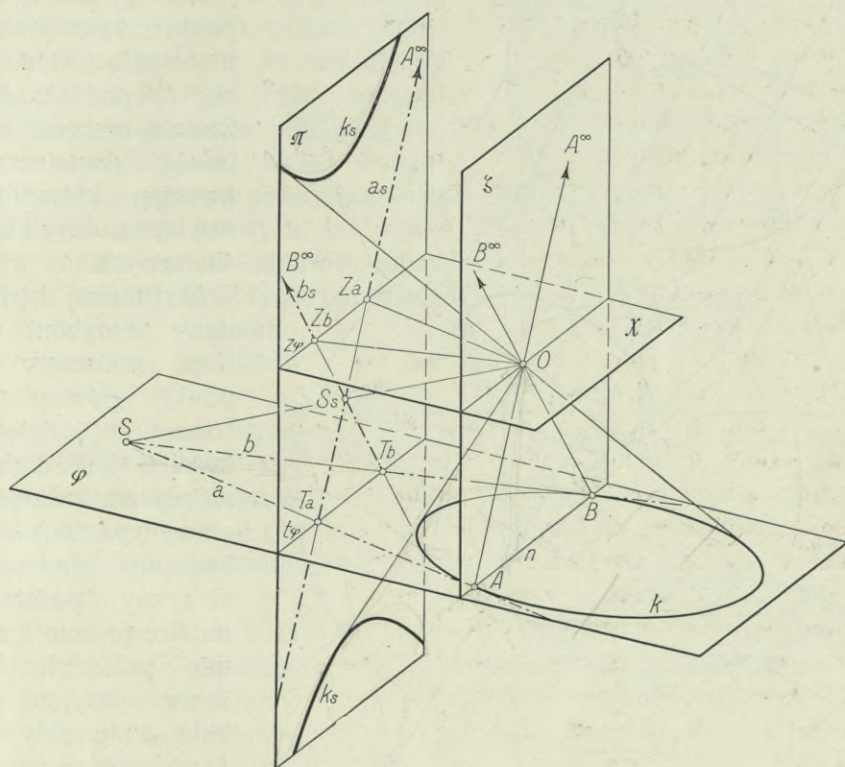
O ile koło leży przed śladem zniknięcia (w obszarze geometrycznym) i nie ma z nim żadnych punktów wspólnych, to perspektywą jego jest elipsa; to położenie koła ma znaczenie li tylko teoretyczne.

Reasumując, powiemy: perspektywa koła zależy od jego położenia względem płaszczyzny zniknięcia i jest elipsą, parabolą lub hiperbolą.



W szczególności, jeżeli ślad zniknięcia koła nie przecina, to jego perspektywą jest elipsa — jeżeli jest styczny do koła, to jego obraz perspektywiczny jest parabolą, a jeżeli przecina koło w dwóch punktach, to perspektywą tak położonego koła jest hiperbola.

Cechy wspólne, które posiadają koło, elipsa, parabola i hiperbola, każą krzywe te zaliczyć do jednej grupy, którą określamy mianem krzywych stożkowych lub krótko: *stożkowych*.



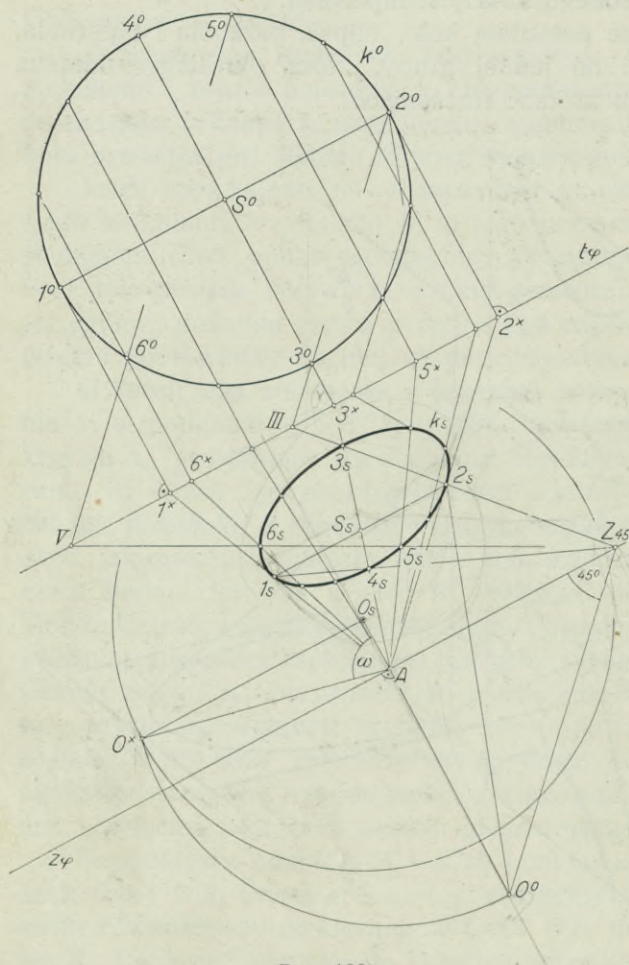
Rys. 198.

**34. Konstrukcja perspektywy koła, jako elipsy.** a) Jako pierwszą, podajemy konstrukcję perspektywy koła, leżącego na płaszczyźnie  $\varphi$ , nachylonej do tła pod kątem  $\omega$  (rys. 199). Po dokonaniu kładu tej płaszczyzny na tło przyjęliśmy na kole pewną ilość punktów i znaleźliśmy w znany sposób ich perspektywy. Więc perspektywy prostopadłych do śladu tłowego  $t_\varphi$  stanowią pęk promieni o wierzchołku  $A$ . Promień, łączący np. punkt  $2^0$  z kładem  $O^0$  oka, przecina prostą  $2^x - A$  w punkcie  $2_s$ , a równoległa, wykreślona przez ten punkt do  $t_\varphi$ , wyznacza na dwóch innych promieniach pęku o wierzchołku  $A$  punkty  $S_s$  i  $1_s$ . Pierw-

szy jest perspektywą środka koła, jednak nie środkiem elipsy, stanowiącej perspektywę tego koła; drugi punktem elipsy. Punkty  $1_s$  i  $2_s$ , połączone ze śladem  $Z_{45}$ , wyznaczają na promieniu  $3^x - A$  punkty  $3_s$  i  $4_s$

elipsy. Zamiast kładem  $O^0$  oka posłużyć się możemy wprost śladem  $Z_{45}$ , kreśląc przez poszczególne punkty koła proste, przecinające ślad tłowy  $t_q$  pod  $\sphericalangle 45^\circ$ . Zresztą rysunek wyjaśnia dostatecznie kwestję, która nie zawiera żadnych myśli nowych.

b) Niechaj będzie dany horyzont  $h$ , linja podstawy  $p$ , punkt główny  $O_s$ , trzecia część głębokości tłowej i koło  $k$  na płaszczyźnie podstawy (rys. 200). Wykonajmy kład płaszczyzny podstawy na tło, to koło  $k$  zajmie położenie  $k^0$ . Przez przyjęte na kole  $k^0$  punkty  $1^0, 2^0, \dots$  poprowadzimy prostopadłe do podstawy  $p$  i połączymy otrzymane na niej



Rys. 199.

punkty  $1^x, 2^x, \dots$  z punktem głównym. Ponieważ posługujemy się — zgodnie z warunkiem zadania — punktem  $Z_{45}^{1/a}$  częściowej głębokości tłowej, więc proste przekątne, których użyjemy do otrzymania punktów  $1_s, 2_s, \dots$ , przechodzić muszą przez punkty  $1^0, 2^0, \dots$  zbliżone odpowiednio do podstawy  $p$ . Rysunek 200 zawiera konstrukcję punktu  $1_s$ . Jeżeli przez punkt  $1_0^{1/a}$ , dzielący odcinek  $1^x 1^0$  w stosunku  $1:3$ , poprowadzimy przekątną i punkt  $1^{1/a}$  połączymy ze śladem  $Z_{45}^{1/a}$ , to prosta otrzymana przetnie promień  $1^x O_s$  w punkcie  $1_s$ .

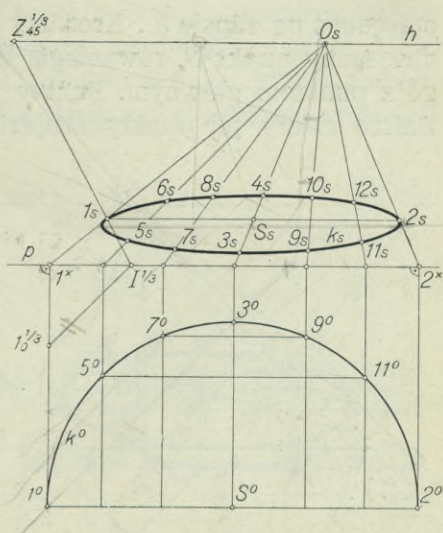


W ten sposób skonstruujemy dalsze punkty elipsy, uwzględniając, że proste  $5_s - 11_s$ ,  $6_s - 12_s$ ,  $7_s - 9_s$  i  $8_s - 10_s$  są równoległe do podstawy  $p$ .

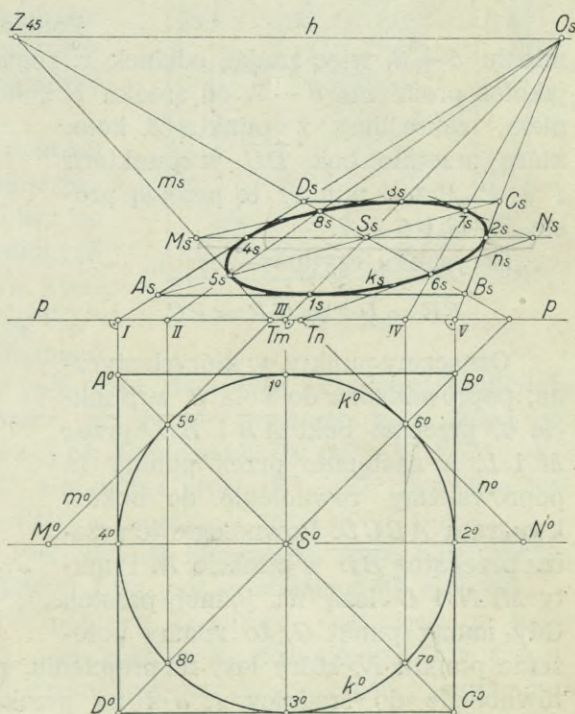
c) Rys. 201 podaje konstrukcję perspektywy koła, leżącego na płaszczyźnie podstawy, którą przeprowadzono przy użyciu punktu głębokości  $Z_{45}$ . Na kole  $k^0$  opisaliśmy kwadrat  $A^0 B^0 C^0 D^0$ , który narysowaliśmy następnie w perspektywie, wraz z przekątnymi. Z kolei wykreśliliśmy perspektywy prostych  $8^0 - II$  i  $7^0 - IV$  oraz prostych  $m^0$  i  $n^0$ . Otrzymaliśmy osiem punktów elipsy i tyleż stycznych w tych punktach, co wystarcza, w praktyce rysunkowej, do wykreślenia elipsy  $k_s$ .

d) Z podanej wyżej konstrukcji da się wyprorowadzić uproszczona, praktycznie dogodna, nie wymagająca kreślenia kładu koła.

Znamy promień koła i ślad  $Z_{45}^{1/2}$  połowy głębokości (rys. 202). Odmierzmy średnicę koła na podstawie  $p$ , równą odcinkowi  $DC$ , i połączmy punkty końcowe  $D$  i  $C$  oraz środek  $3$  z punktem głównym  $O_s$ . Promień  $3 - Z_{45}^{1/2}$  przetnie prostą  $D - O_s$  w punkcie  $A_s$ , przez który prowadzimy równoległą do  $p$ . Na prostej  $C - O_s$  otrzymamy punkt  $B_s$ , który jest czwartym wierzchołkiem trapezu  $A_s B_s C D$ ,



Rys. 200.

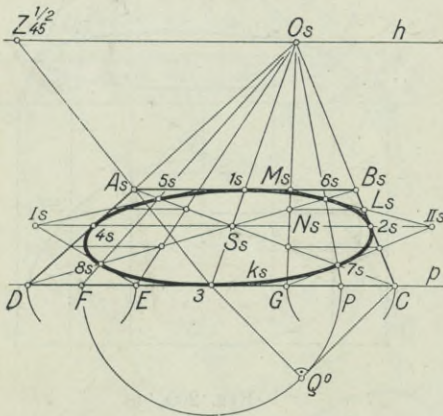


Rys. 201.

662

$\sigma = \frac{Q}{r} + \frac{S}{F} + \frac{M \cdot g}{J_x}$

opisanego na elipsie  $k_s$ . Kreślimy przekątne  $\overline{A_s C}$  i  $\overline{B_s D}$  trapezu, a przez otrzymany punkt  $S_s$  równoległą do linii podstawy  $p$  i promień, łączący go z punktem głównym. Punkty  $1_s, 2_s, 3$  i  $4_s$  są punktami elipsy  $k_s$ . Dalsze cztery jej punkty znajdziemy na podstawie następującego rozumowania: przekątne kwadratu



Rys. 202.

opisanego na kole  $k$  — czyli stycznego w punktach 1, 2, 3 i 4 (rys. 203) — przetną koło w punktach 5, 6, 7 i 8. Wykreślimy kwadrat styczny w tych punktach do koła i połączmy punkty 5 z 8 i 6 z 7. Następnie narysujmy na boku  $3C$ , który jest równy promieniowi koła, równoramienny, prostokątny trójkąt  $3QC$ . Trójkąt ten jest przystający do trójkątów  $8RS$  i  $8RI$ , skąd wynika, że:

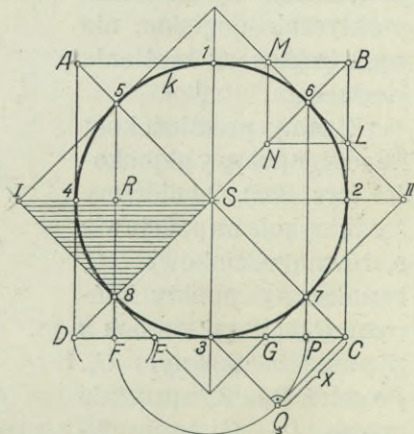
$$\overline{RS} = \overline{QC} = x.$$

Ponieważ punkt  $R$  leży na promieniu 5—8, więc znając odcinek  $x$ , znamy oddalenie tego promienia, jakoteż promienia 6—7, od środka  $S$  koła. Odcinkiem  $x$ , jako promieniem, zakreślimy z punktu 3 koło, które przetnie bok  $\overline{DC}$  w punktach  $F$  i  $P$ . Przez punkty te przejdą proste 5—8 i 6—7.

Z rysunku czytamy, że:

$$\overline{FE} = \overline{DF} = \overline{GP} = \overline{PC}.$$

Oznaczmy punkty, w których styczna, poprowadzona do koła  $k$  w punkcie 6, przecina boki  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$  przez  $M$  i  $L$ , a następnie przez punkty te poprowadźmy równoległe do boków kwadratu  $ABCD$ . Równoległe te przetną przekątną  $\overline{BD}$  w punkcie  $N$ . Punkty  $M, N$  i  $G$  leżą na jednej prostej. Gdy mamy punkt  $G$ , to znamy położenie punktu  $N$ , który leży na promieniu, przechodzącym przez punkt  $G$  równoległe do średnicy  $1, 3$  i na przekątnej  $\overline{BD}$ . Znając położenie punktu  $N$ , znamy też i punkt  $L$ , który, połączony z punktem 6, daje styczną do koła w tym punkcie.



Rys. 203.



Wróćmy do rys. 202 i zastosujmy tam konstrukcje, przeprowadzone na rys. 203. Wykreślmy więc równoramienny, prostokątny trójkąt  $3Q^0C$  i przenieśmy odcinek  $3Q^0$  łukiem koła z punktu  $3$ , jako środka, na podstawę  $p$ . Otrzymane tam punkty  $F$  i  $P$  połączmy z punktem głównym prostymi, które przetną przekątną trapezu w punktach  $5_s, 6_s, 7_s$  i  $8_s$  elipsy  $k_s$ . Odcinając  $DF = FE$  oraz  $CP = PG$ , znajdziemy punkty  $E$  i  $G$  a wreszcie styczne w czterech — otrzymanych na przekątnych trapezu — punktach.

e) Sposób otrzymania szesnastu punktów elipsy, będącej perspektywą koła, znajdującego się na płaszczyźnie poziomej, podaje rys. 204.

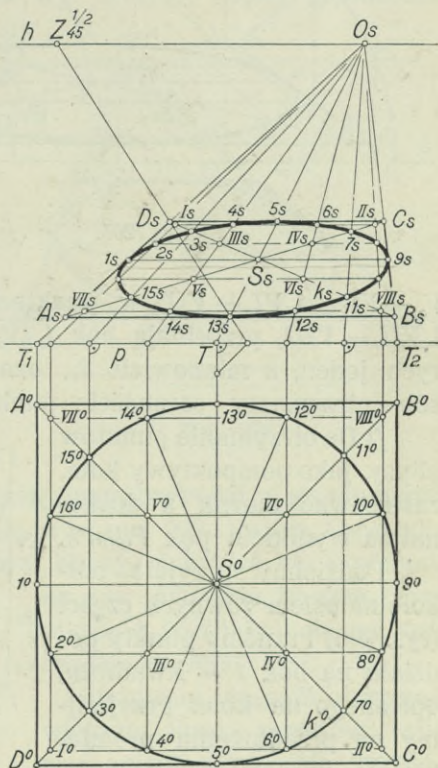
Podzielmy koło  $k^0$ , na którym opisaliśmy kwadrat  $A^0B^0C^0D^0$ , na szesnaście równych części i połączmy punkty podziału prostymi, równoległymi do boków tego kwadratu. Jeżeli wykreślimy perspektywę tych prostych, to tem samym otrzymamy punkty  $1_s, \dots, 16_s$  elipsy  $k_s$ .

Ale wykonany rysunek pozwoli na znaczne uproszczenie konstrukcji, jeżeli uwzględnimy w nim, co następuje: z siatki wykreślonych linii weźmy pod uwagę dwa kwadraty, a mianowicie  $I^0 II^0 VII^0 VIII^0$  i  $III^0 IV^0 V^0 VI^0$ . Każdy bok jednego

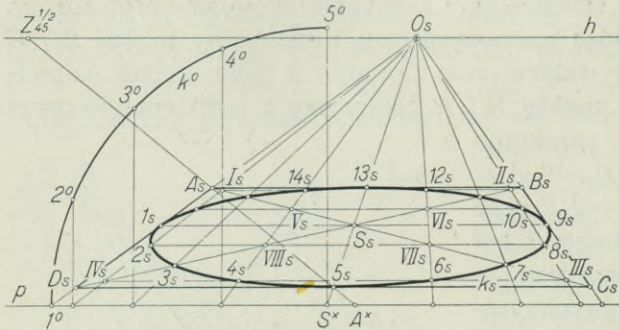
z tych kwadratów przecięty jest przez dwa boki drugiego, względnie przez przedłużenia tych boków, w dwóch punktach koła. Więc np. bok  $I^0 - II^0$  i para prostopadłych do niego boków  $III^0 - V^0$  i  $IV^0 - VI^0$  przecinają się w punktach  $4^0$  i  $6^0$  koła; prosta  $V^0 - VI^0$  przecięta jest przez boki  $I^0 - VII^0$  i  $II^0 - VIII^0$  w punktach  $16^0$  i  $10^0$  i t. d.

Zastosowanie własności tych dwóch kwadratów daje nam bardzo dogodną konstrukcję perspektywy koła, jak to widzimy na rys. 205.

Trapez  $A_s B_s C_s D_s$  jest perspektywą kwadratu, opisanego na kole, którego promień równy jest odcinkowi  $I^0 S^0$ . Promieniem tym zakreślmy ćwierć koła  $k^0$ , które podzielimy na cztery części; punkty podziału rzucimy prostopadłe na podstawę  $p$  i otrzymane rzuty połączmy z punktem głównym promieniami. Promienie te przetną przekątną



Rys. 204.

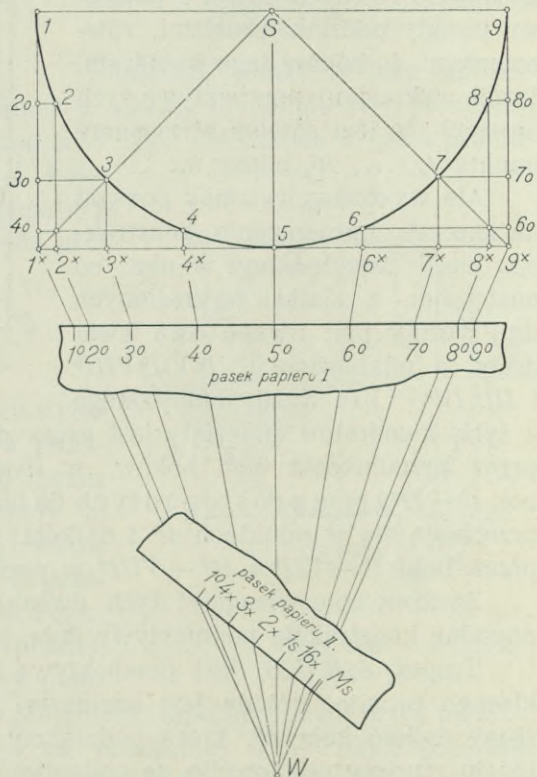


Rys. 205.

$V_s - VIII_s$  i  $VI_s - VII_s$  w punktach  $4_s$  i  $6_s$  elipsy  $k_s$ . Proste  $V_s - VI_s$  i  $VII_s - VIII_s$  przecinają bok  $I_s IV_s$  w dwóch punktach elipsy  $k_s$ , z których jeden, a mianowicie  $2_s$ , oznaczony jest na rysunku. W ten sposób otrzymamy szesnaście punktów elipsy, jako perspektywy koła.

f) Do otrzymania punktów elipsy, jako perspektywy koła, zastosować można z doskonałym wynikiem pęk *Pillet'a*.

Podzielmy przyjęte półkole na osiem równych części (rys. 206) i rzuśmy punkty podziału na bok  $1^x 9^x$  kwadratu, opisanego na kole. Przyjmijmy na przedłużeniu promienia  $\overline{S5}$  w dowolnej odległości punkt  $W$  i połączmy go z punktami  $1^x, 2^x, \dots, 9^x$ . Otrzymaliśmy pęk *Pillet'a* o wierzchołku  $W$ , który pozwoli na narysowanie perspektywy koła, o dowolnie dużym promieniu. Pęk taki, którego promienie należałoby dostatecznie przedłużyć, wyrysowany na sztywnym papierze, jest dla rysownika przyrządem, którym posłużyć się może zawsze przy rysowaniu perspektyw kół.



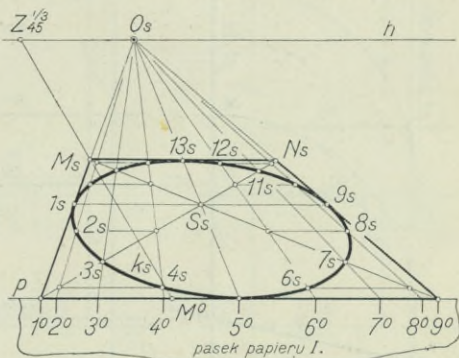
Rys. 206.

trapezu  $\overline{A_s C_s}$  i  $\overline{B_s D_s}$  w punktach  $I_s, V_s, IV_s$  i  $VIII_s$ , a proste, wykreślone w tych punktach równoległe do podstawy  $p$ , wyznaczają na przekątnych trapezu pozostałe wierzchołki  $II_s, VI_s, III_s$  i  $VII_s$  perspektywy kwadratów  $I, II, III, IV$  i  $V, VI, VII, VIII$ . Bok  $\overline{III_s IV_s}$  przecina proste

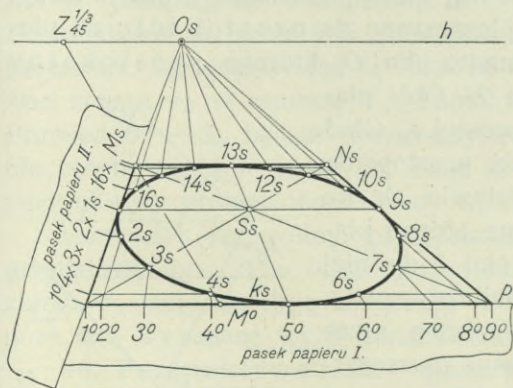


Jako przykład zastosowania pęku *Pillet'a*, narysujmy perspektywę koła, leżącego na płaszczyźnie poziomej i stycznego do tła, a więc i do linii podstawy  $p$  (rys. 207).

Odetniemy  $\overline{1^0 9^0}$ , równe średnicy koła, i punkt  $M^0$ , odcinający trzecią część średnicy, połączymy z punktem  $Z_{45}^{1/3}$  trzeciej części głębokości. Na promieniu  $1^0 - O_s$  otrzymamy punkt  $M_s$ , przez który prowadzimy równoległą do  $p$ . Na promieniu  $9^0 - O_s$  otrzymamy punkt  $N_s$ , jako czwarty wierzchołek trapezu, opisanego na elipsie. Przykładamy do prostej  $p$  pasek papieru, na którym zaznaczymy punkty  $1^0$ ,  $9^0$  i środek  $5^0$  tego odcinka. Teraz pasek ten przeniesiemy na pęk *Pillet'a* tak (rys. 206), aby punkt  $1^0$  padł na promień  $1^x - W$ , punkt  $5^0$  na promień  $5 - W$ , a punkt  $9^0$  na promień  $9^x - W$ . Zaznaczymy na pasku punkty  $2^0$ ,  $3^0$ , ...  $8^0$  przecięcia się jego krawędzi z promieniami pęku, poczem przeniesiemy je na prostą  $p$  w rys. 207. Dalsza konstrukcja, prowadząca do otrzymania punktów elipsy, pokrywa się z podaną na rys. 205, obie bowiem wynikają z podziału koła na szesnaście części.



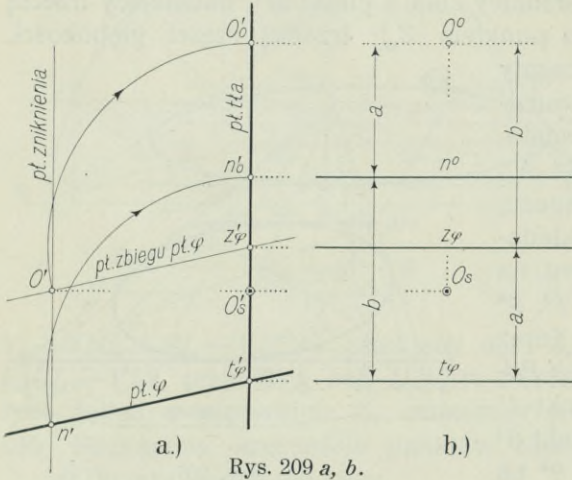
Rys. 207.



Rys. 208.

siemy na pęk *Pillet'a* tak, aby punkt  $1^0$  padł na promień  $1^x - W$ , punkt  $1_s$  na promień  $5 - W$  a punkt  $M_s$  na promień  $9^x - W$ . Zaznaczymy pozostałe punkty podziału i przeniesiemy je na  $\overline{1^0 M_s}$ . W rys. 208 otrzymujemy wprawdzie także tylko szesnaście punktów, ale konstrukcję przeprowadziliśmy tak, jakgdyby chodziło o dowolną ich ilość.

**35. Związek między śladem tłowym, śladem zbiegu, śladem zniknięcia i okiem.** Weźmy pod uwagę prostą  $m$ , leżącą na płaszczyźnie  $\varphi$  (rys. 195), jej perspektywę  $m_s$ , jej trzy ślady  $T_m, Z_m, N$  i oko  $O$ . Ślady te i oko tworzą równoległobok, który wyraża



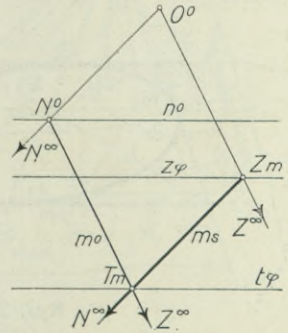
Rys. 209 a, b.

następujący związek: *odległość oka od śladu zbiegu (odcinek  $OZ_m$ ) równa jest odległości śladu zniknięcia od śladu tłowego (odcinek  $NT_m$ ); odległość  $ON$  oka od śladu zniknięcia równa jest odległości  $Z_m T_m$  śladu zbiegu od śladu tłowego.* Na podstawie tego związku ślad zniknięcia prostej zastąpić może jeden z dwóch innych jej śladów. Jeżeli

znamy ślad tłowy  $T_m$  i ślad zniknięcia  $N$  prostej  $m$  — to znamy też i jej perspektywę  $m_s$ , która przejdzie przez ślad  $T_m$  równoległe do  $O - N$ . Jeżeli dane są ślady  $Z_m$  i  $N$ , to promienie, łączące je z okiem, wyznaczają kierunki prostych  $m$  i  $m_s$ , które przechodzą przez te ślady.

Przyjmijmy płaszczyznę  $\varphi$  i płaszczyznę  $t\lambda$  prostopadłe do płaszczyzny papieru (rys. 209a), a nadto oko  $O$ , którego prostokątny rzut na tło jest punktem głównym  $O_s$ . Obie płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej  $t_\varphi$  (ślad tłowy płaszczyzny  $\varphi$ ), która jest prostopadłą do płaszczyzny papieru i przedstawia się na rys. 209 a, jako punkt. Płaszczyzna zbiegu płaszczyzny  $\varphi$ , przechodząca przez oko i do niej równoległa, przecina tło wzdłuż śladu zbiegu  $z_\varphi$ , a płaszczyzna zniknięcia, przechodząca przez oko i równoległa do  $t\lambda$ , wyznacza na płaszczyźnie  $\varphi$  ślad zniknięcia  $n$ . Wypowiedziane wyżej związki, zachodzące między  $O, z_\varphi, t_\varphi$  i  $n$ , występują na rys. 209a z elementarną jasnością.

Sprowadźmy płaszczyznę  $\varphi$  — zapomocą obrotu około śladu  $t_\varphi$ , w kierunku wskazanym strzałką — na tło. Uczyńmy to samo z płaszczyzną zbiegu, obracając ją około śladu zbiegu  $z_\varphi$ . Obrót płaszczyzny  $\varphi$  sprowadzi na tło ślad zniknięcia  $n$ , który pozostanie równoległy do śladu tłowego  $t_\varphi$ , względnie śladu zbiegu  $z_\varphi$ .

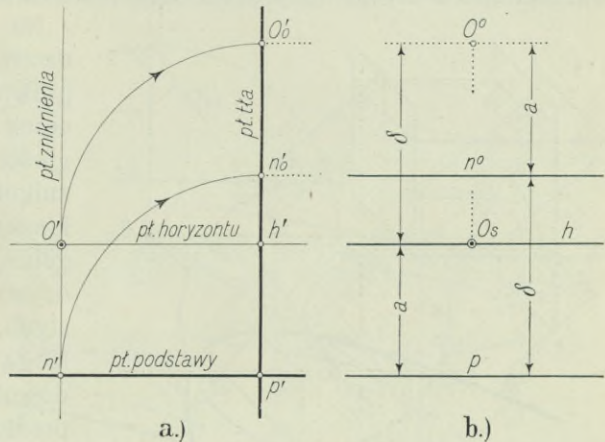


Rys. 210.



Obrót płaszczyzny zbiegu położy na tło oko, przyczem odległość kładu  $O^0$  oka od śladu zbiegu pozostanie równą odległości sprowadzonego na tło śladu zniknięcia od śladu tłowego. Druga relacja miarowa, wyrażająca, że oddalenie oka od śladu zniknięcia jest równe oddaleniu śladu zbiegu od śladu tłowego, pozostaje — po dokonanych obrotach — nienaruszona.

Rys. 209 b przedstawia widok tła z przodu po dokonanych obrotach, przyczem odcinki  $a$  i  $b$  wyrażają związki miarowe, zachodzące między kładem  $O^0$  oka, śladami tłowym, zbiegu i śladem zniknięcia.



Rys. 211 a, b.

Jeżeli przyjmiemy prostą  $m^0$  (rys. 210), jako kład na tło prostej  $m$ , leżącej na płaszczyźnie  $\varphi$ , to punkt, w którym  $m^0$  przecina ślad tłowy  $t_\varphi$ , jest śladem tłowym prostej  $m$ , a punkt  $N^0$  przecięcia się śladu zniknięcia  $n^0$  płaszczyzny  $\varphi$  z prostą  $m^0$  — śladem zniknięcia prostej  $m$ . Perspektywa  $m_s$  prostej  $m$  przejdzie przez punkt  $T_m$ , równoległe do promienia, łączącego kład  $O^0$  oka ze śladem zniknięcia  $N^0$ , i przetnie ślad zbiegu  $z_\varphi$  w punkcie  $Z_m$ . Punkt ten jest śladem zbiegu prostej  $m$ . Promień  $O^0 - Z_m$  będzie równoległy do  $m^0$ . Widzimy, że ślad zniknięcia prostej zastąpić może jej ślad zbiegu, że zatem dla wyznaczenia perspektywy prostej oba te ślady są równoznaczne.

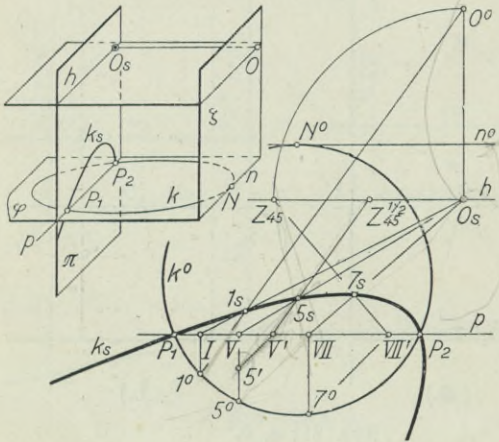
Przypadek szczególny, gdy płaszczyzna  $\varphi$  jest prostopadła do tła, przedstawia rys. 211 a, b, który czytelnik porówna z rys. 209 a, b. Ślad zbiegu  $z_\varphi$  staje się linią horyzontu  $h$ , ślad tłowy  $t_\varphi$  linią podstawy  $p$  — poza tem wykazane wyżej związki nie ulegają żadnym zmianom.

**36. Perspektywa koła — parabola.** W punkcie  $d$ ) ust. 33 zauważyliśmy, że gdy koło styka się ze śladem zniknięcia, to perspektywą jego jest parabola. Sytuację w przestrzeni uzmysławia szkic w górnej części rys. 212. Przyjęte na płaszczyźnie poziomej  $\varphi$  koło  $k$  styka się ze śladem zniknięcia  $n$  w punkcie  $N$ , a linię podstawy przecina w punktach  $P_1$  i  $P_2$ . Punkty te, jako leżące na tle, będą równocześnie punktami paraboli  $k_s$ .

Aby stworzyć konstrukcyjną możliwość otrzymania paraboli, jako perspektywy koła, przyjmiemy linię podstawy  $p$ , horyzont  $h$ , na nim



punkt główny  $O_s$  a wreszcie ślad zniknięcia  $n^0$  i koło  $k^0$ , styczne do tego śladu w punkcie  $N^0$ . Wiemy z ust. 35, a widzimy to także ze szkicu rys. 212 — że dane oddalenie podstawy od śladu zniknięcia określa równocześnie głębokość tłowa, która jest temu oddaleniu równa.



Rys. 212.

Na prostopadłej, poprowadzonej do horyzontu w punkcie głównym  $O_s$ , odmierzymy odcinek  $O_s O^0 = \delta$  i równy odległości podstawy  $p$  od śladu zniknięcia  $n^0$ . Punkt  $O^0$  jest kładem oka na tło. Poszczególne punkty paraboli wyznaczmy za pośrednictwem prostych, przecinających koło  $k^0$ . Mogą to być oczywiście proste dowolne; na rys. 212 użyliśmy prostopadłych do podstawy  $p$ . Pierwsza z nich przecina podstawę  $p$  w punkcie  $I$ . Prosta, łącząca ten punkt z punktem

głównym, jest jej perspektywą. Punkt  $1^0$  koła, rzucony z punktu  $O^0$  na prostą  $I-O_s$ , wyznacza na niej punkt  $1_s$  paraboli  $k_s$ . Powtarzając tę konstrukcję, otrzymamy dowolną ilość punktów paraboli. Zamiast punktu  $O^0$  użyć możemy punktu głębokości, względnie punktu częściowej głębokości. W ten sposób znaleźliśmy punkty  $5_s$  i  $7_s$ ; pierwszy przy użyciu punktu  $Z_{45}^{1/2}$ , drugi — punktu  $Z_{45}$ .

Punktom koła, leżącym w obszarze pośrednim, więc między śladem tłowym (linią podstawy) a śladem zniknięcia, odpowiadają perspektywnie punkty paraboli, leżące poniżej śladu tłowego. Perspektywą części koła, znajdującej się w obszarze istotnym, jest część paraboli, leżąca na tle między śladem tłowym (podstawą) a śladem zbiegu (horyzontem) płaszczyzny koła.

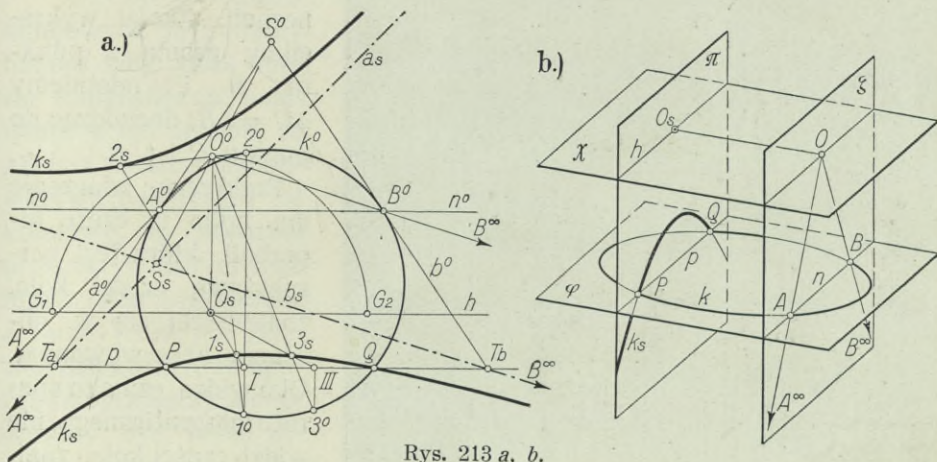
Aby otrzymać parabolę, jako perspektywę koła, drogą fotograficzną, należałoby ustawić aparat w ten sposób, by fotografowane koło było styczne do pierwszej płaszczyzny głównej. Zdjęcie odpowiadające ściśle powyższym warunkom nie jest możliwe poza odpowiednio uposażeniem laboratorium, gdzieby położenie płaszczyzny głównej optycznego układu osiowego (obiektywu fotograficznego) dało się dokładnie ustalić.

**37. Perspektywa koła — hiperbola.** W ust. 33, punkt  $e$ ), nazwaliśmy linię krzywą, będącą perspektywą koła, przecinającego ślad zniknięcia w dwóch punktach — hiperbolą. Sytuację w przestrzeni uzmysławia nam rys. 213 *b*.



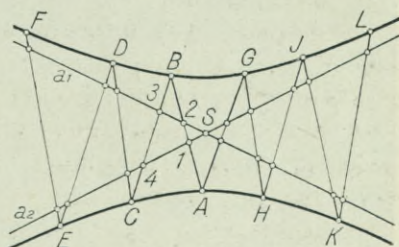
Przystąpmy do konstrukcyjnego rozwiązania tego zadania.

Przyjmijmy horyzont, punkt główny, podstawę i głębokość tłową  $\delta$ . W odległości  $\delta$  od podstawy  $p$  i do niej równoległe wykreślmy ślad zniknięcia  $n^0$ , a następnie koło  $k^0$ , przecinające ten ślad w dwóch punk-



Rys. 213 a, b.

tach. Poszczególne punkty perspektywy koła (hiperboli) wyznaczmy w ten sam sposób, jak punkty paraboli w rys. 212. Perspektywą prostopadłą do podstawy i przecinającą ją w punkcie  $I$ , cięciwy  $1^0 2^0$  koła  $k^0$  jest odcinek  $1_s 2_s$ , przechodzący przez punkty  $O_s$  i  $I$ . Punkty  $1_s$  i  $2_s$  leżą na promieniach, łączących punkty  $1^0$  i  $2^0$  z kładem  $O^0$  oka. Tym sposobem otrzymamy żadaną ilość punktów hiperboli  $k_s$ , na którą składają się dwie jej części („gałęzie“). Jedna gałąź odpowiada części koła, leżącej w obszarze obserwowanym, druga — części znajdującej się w obszarze geometrycznym. Stycznym  $a^0$  i  $b^0$  do koła  $k^0$  w punktach  $A^0$  i  $B^0$  odpowiadają asymptoty  $a_s$  i  $b_s$  hiperboli. Pierwsza z nich będzie równoległą do promienia  $O^0 - A^0$ , druga do promienia  $O^0 - B^0$ . Punktowi  $S^0$  przecięcia się stycznych  $a^0$  i  $b^0$  odpowiada punkt  $S_s$  przecięcia się asymptot. Punkt ten jest środkiem hiperboli.



Rys. 214.

Gdybyśmy wyznaczyli asymptoty  $a_1$  i  $a_2$  hiperboli i jeden punkt, np.  $A$  (rys. 214), to dalsze jej punkty otrzymamy na podstawie tej własności, że każde dwa odcinki dowolnej prostej, zawarte między asymptotami i hiperbolą, są sobie równe. Z punktu  $A$



Rys. 215.

w fotogramie, jako elipsy. Takie zdjęcie fotograficzne wnętrza walcowego, w którym występują hiperbole i elipsy, widzimy na rys. 215.

Dalszym praktycznym przykładem hiperboli, jako perspektywy koła,

wyprowadzimy prostą, przecinającą asymptoty w punktach 1 i 2. Odmierzmy  $\overline{2B} = \overline{A1}$ , otrzymując punkt  $B$  hiperboli. Z kolei wykreślimy prostą z punktu  $B$  i odetniemy  $\overline{4C} = \overline{3B}$ , dochodząc do punktu  $C$  i t. d.

Praktyczne znaczenie ma tylko ta część hiperboli, która jest perspektywą części koła, znajdującej się w obszarze obserwowanym. Oko widza, czy oko aparatu fotograficznego, nie widzi części koła, znajdującej się w obszarze geometrycznym. Widzowi, znajdującemu się w polu koła, przedstawi się obserwowana część tego koła, jako gałąź hiperboli. Aparat fotograficzny, zdejmujący wnętrze walcowe, odbije na kliszy wszystkie koła poziome, leżące na ścianie wnętrza, jako hiperbole. Koła posadzki i sufitu tego wnętrza, nie stykające się z pierwszą płaszczyzną główną obiektywu (płaszczyzną zniknięcia), ani nie przecięte nią, przedstawią się



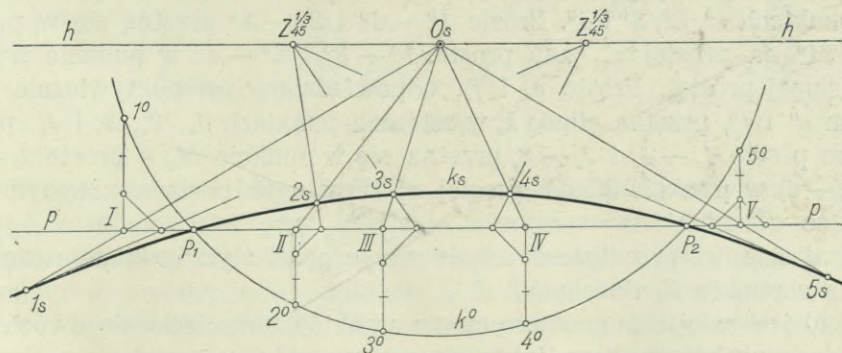
jest zdjęcie fotograficzne krzywizny toru kolejowego, przedstawione na rys. 216.

Krzywizny torów kolejowych są z reguły łukami kół; jeżeli aparat fotograficzny ustawimy w ten sposób, że główna płaszczyzna obiektywu przecina tor kolejowy, to obrazem perspektywicznym tego toru będą hiperbole, a raczej jedne ich gałęzie. Zauważmy, że aparat fotograficzny umieszczony być może zarówno „wewnątrz“, jak „zewnątrz“ krzywizny toru; decydującym jest tutaj położenie tej krzywizny względem płaszczyzny zniknięcia.



Rys. 216.

Ponieważ rysownik w praktyce swej spotyka się tylko z jedną gałęzią hiperboli i nie będzie posługiwał się asymptotami — więc podajemy w rys. 217 jeszcze inną konstrukcję punktów hiperboli, jako perspektywy koła, uwzględniając także częściową głębokość tłową. Horyzont, podstawa,



Rys. 217.



punkt główny, trzecia część głębokości i kład  $k^0$  na tło koła  $k$ , leżącego na płaszczyźnie podstawy, są dane. Gdybyśmy równolegle do linii podstawy  $p$  i w odległości równej głębokości tłowej poprowadzili ślad zniknięcia, to przecięłby on koło  $k^0$  w dwóch punktach, co dowodzi, że perspektywą tego koła będzie hiperbola.

Zamiast niedostępnego dla nas kładu  $O^0$  oka użyjemy do konstrukcji prostych przekątnych. Przez obrane na kole  $k^0$  punkty  $1^0, 2^0, \dots$  kreślimy proste prostopadłe do podstawy  $p$ , oznaczając punkty przecięcia się przez  $I, II, \dots$ . Perspektywy tych prostych — jako prostopadłych do tła — przechodzą przez punkt główny  $O_s$  i przez punkty  $I, II, \dots$ . Przez punkty, ograniczające trzecią część odcinków  $1^0 I, 2^0 II, \dots$ , kreślimy proste przekątne, t. j. nachylone pod kątem  $45^\circ$  do podstawy  $p$ , i punkty przecięcia się tych prostych z podstawą łączymy z jednym z punktów  $Z_{45}^{1/3}$  częściowej głębokości. Otrzymujemy punkty  $1_s, 2_s, \dots$  hiperboli  $k_s$ .

**38. Biegun, biegunowa, środek, średnice i osie krzywych stożkowych.** Wykreślimy, w jeden z poznanych sposobów, elipsę  $k_s$  (rys. 218), jako perspektywę koła  $k$ , leżącego na płaszczyźnie poziomej. Poprowadźmy styczne  $a^0$  i  $b^0$  do koła  $k^0$ , do siebie równoległe. Stycznym tym odpowiadają perspektywicznie proste  $a_s$  i  $b_s$ , styczne do elipsy  $k_s$  w punktach  $A_s$  i  $B_s$ , które są perspektywą punktów  $A$  i  $B$  koła  $k$ .

Promień, wykreślony z punktu  $O_0^{1/3}$  równoległe do prostej  $a^0$ , przecina horyzont w częściowym śladzie zbiegu  $Z_2^{1/3}$ , kierunku  $a$ . Promień, poprowadzony w punkcie  $O_0^{1/3}$  prostopadłe do  $O_0^{1/3} - Z_2^{1/3}$ , przecina horyzont w częściowym śladzie  $Z_1^{1/3}$  kierunku, prostopadłego do kierunku  $a$ . Punkty  $Z_1$  i  $Z_2$  są właściwymi śladami zbiegu obu wziętych pod uwagę kierunków. Proste  $a_s$  i  $b_s$  przejdą przez ślad  $Z_2$ , zaś prosta  $z_s^s$ , odpowiadająca perspektywicznie prostej  $z_2^0$ , łączącej punkty  $A^0$  i  $B^0$  — przez ślad  $Z_1$ .

Poprowadźmy proste  $e^0$  i  $f^0$ , równoległe do  $a^0$ , przecinające koło  $k^0$  w punktach  $1^0, 2^0, 3^0$  i  $4^0$ . Proste  $1^0 - 4^0$  i  $2^0 - 3^0$  przetną się w punkcie  $M^0$  na prostej  $z_2^0$ , zaś proste  $1^0 - 3^0$  i  $2^0 - 4^0$  w punkcie  $N^0$  na tej samej prostej. Proste  $e_s$  i  $f_s$ , odpowiadające perspektywicznie prostym  $e^0$  i  $f^0$ , przetną elipsę  $k_s$  w czterech punktach  $1_s, 2_s, 3_s$  i  $4_s$ , przy czym proste  $1_s - 4_s$  i  $2_s - 3_s$  przetną się w punkcie  $M_s$  a proste  $1_s - 3_s$  i  $2_s - 4_s$  w punkcie  $N_s$  na prostej  $z_2^s$ . Prosta ta posiada zatem następujące własności:

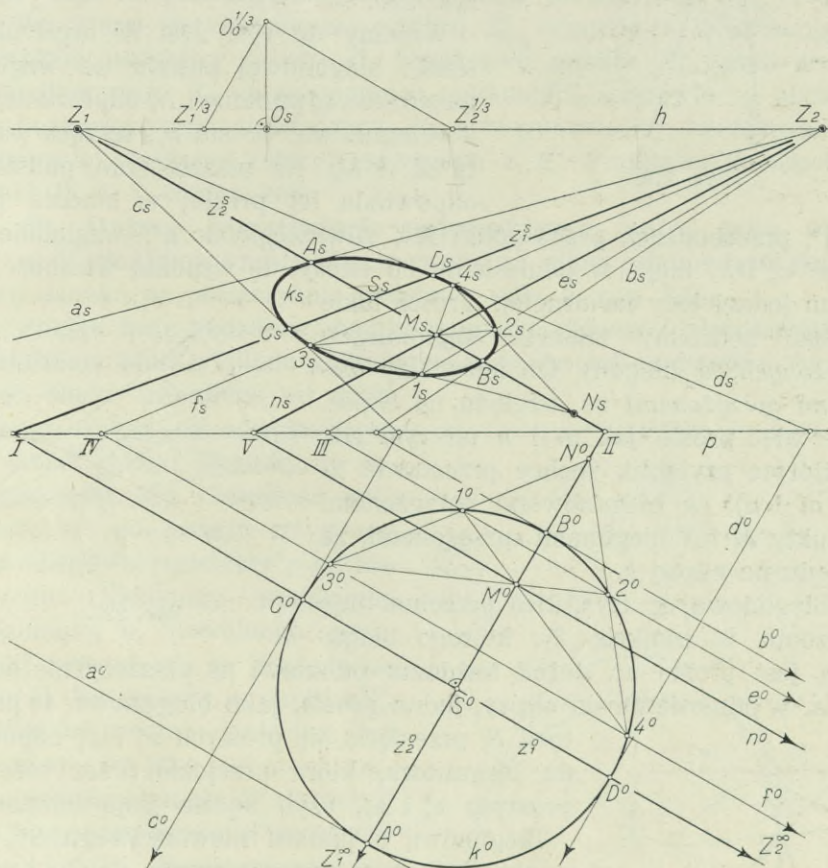
a) stanowi przedłużenie cięciwy styczności stycznych, poprowadzonych z punktu  $Z_2$  do elipsy,

b) jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się dwóch par boków przeciwległych w każdym z czworokątów, powstałych z przecięcia stożkowej promieniami, wykreślonymi z punktu  $Z_2$ .



Każdą prostą, posiadającą w odniesieniu do krzywej stożkowej powyższe własności, nazywamy *biegunową* tej stożkowej a punkt  $Z_2$  jej *biegunem*.

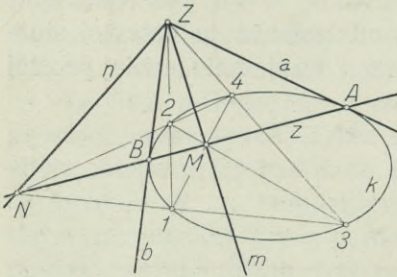
Każdemu punktowi odpowiada — w odniesieniu do krzywej stożkowej — jedna prosta, jako jego biegunowa, i wzajemnie każdej prostej odpowiada jeden punkt, jako biegun.



Rys. 218.

Druga własność biegunowej da się natychmiast praktycznie użyć, a mianowicie, przy kreśleniu stycznych do elipsy, z danego punktu. Dowolne sieczne, poprowadzone z danego punktu  $Z$  (rys. 219) do elipsy  $k$ , przetną ją w punktach 1, 2, 3 i 4, które, odpowiednio połączone, wyznaczają punkty  $M$  i  $N$  biegunowej  $z$ . Biegunowa ta przecina elipsę w punktach  $A$  i  $B$ , które łączymy z punktem  $Z$ , otrzymując tym sposobem żądane styczne  $a$  i  $b$ .

Biegunowa punktu, z którego wykreślić można styczne rzeczywiste do elipsy, przecina tę krzywą w dwóch punktach; jeżeli punkt  $P$



Rys. 219.

ma takie położenie, że stycznych rzeczywistych z niego do elipsy poprowadzić nie można, to biegunowa  $p$  krzywej nie przecina i ma położenie, podane na rys. 220.

Wróćmy do rys. 218. W myśl określenia biegunowej punktu ze względu na stożkową, punktowi  $N_s$  odpowiada, jako biegunowa, prosta  $n_s$ , łącząca punkty  $Z_2$  i  $M_s$ . Na płaszczyźnie podstawy odpowiada tej prostej w kładzie prosta  $n^0$ , przechodząca przez punkt  $M^0$ , równoległe do  $a^0$ , względnie  $b^0$ . Proste  $z_2^s$  i  $n_s$  mają, w odniesieniu do elipsy, tę wspólną własność, że biegun jednej leży na drugiej. Proste takie określać będziemy mianem *biegunowych sprzężonych*, a bieguny ich nazwiemy *biegunami sprzężonymi* ze względu na elipsę. Takie więc proste, jak  $m$  i  $n$  na rys. 219, (w którym czytelnik zechce przestawić litery  $m$  i  $n$ ), są biegunowymi sprzężonymi a punkty  $M$  i  $N$  biegunami sprzężonymi, ze względu na elipsę  $k$ .

Biegunowa  $z_2^s$  (rys. 218) przecina linię horyzontu w punkcie  $Z_1$ , którego biegunową jest prosta  $z_1^s$ . Jeżeli każdemu punktowi na płaszczyźnie odpowiada, w odniesieniu do elipsy, jedna prosta, jako biegunowa, to punktowi  $S_s$  przecięcia się prostych  $z_1^s$  i  $z_2^s$  odpowiada biegunowa, która przejdzie przez bieguny prostych  $z_1^s$  i  $z_2^s$ , czyli będzie linią horyzontu.

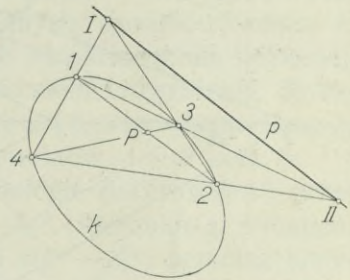
Biegunową  $s$  punktu niewłaściwego  $S^\infty$ , t. j. punktu leżącego nieograniczenie daleko, nazywamy *średnicą* elipsy (rys. 221). Biegunowe sprzężone punktów niewłaściwych noszą nazwę *średnic sprzężonych* elipsy. Punkt przecięcia się średnic sprzężonych jest biegunem prostej niewłaściwej i zwię się *środkiem* elipsy.

Średnice sprzężone, wzajemnie prostopadłe, są osiami symetrii elipsy i zwą się krótko jej *osiąmi*.

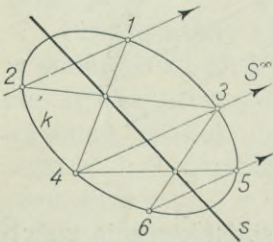
Ponieważ każdą ze stożkowych uważać można za perspektywę pozostałych, zatem omówiona wyżej sprawa biegunów, biegunowych, śred-

nie, z którego wykreślić można styczne rzeczywiste do elipsy, przecina tę krzywą w dwóch punktach; jeżeli punkt  $P$  ma takie położenie, że stycznych rzeczywistych z niego do elipsy poprowadzić nie można, to biegunowa  $p$  krzywej nie przecina i ma położenie, podane na rys. 220.

Wróćmy do rys. 218. W myśl określenia biegunowej punktu ze względu na stożkową, punktowi  $N_s$  odpowiada, jako biegunowa, prosta  $n_s$ , łącząca punkty  $Z_2$  i  $M_s$ . Na płaszczyźnie podstawy odpowiada tej prostej w kładzie prosta  $n^0$ , przechodząca przez punkt  $M^0$ , równoległe do  $a^0$ , względnie  $b^0$ . Proste  $z_2^s$  i  $n_s$  mają, w odniesieniu do elipsy, tę wspólną własność, że biegun jednej leży na drugiej. Proste takie określać będziemy mianem *biegunowych sprzężonych*, a bieguny ich nazwiemy *biegunami sprzężonymi* ze względu na elipsę. Takie więc proste, jak  $m$  i  $n$  na rys. 219, (w którym czytelnik zechce przestawić litery  $m$  i  $n$ ), są biegunowymi sprzężonymi a punkty  $M$  i  $N$  biegunami sprzężonymi, ze względu na elipsę  $k$ .



Rys. 220.



Rys. 221.



nic, środka i osi odnosi się do wszystkich stożkowych, a więc do koła, elipsy, hiperboli i paraboli.

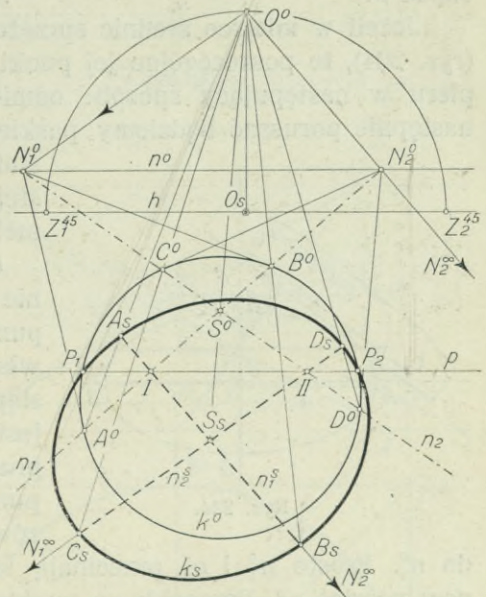
Z pojęcia biegunowych i średnic wynika, że punkt przecięcia się asymptot hiperboli jest jej środkiem.

Zastosujmy określenia powyższe do koła  $k^0$  (rys. 218), którego perspektywą jest elipsa  $k_s$ ; punktowi  $Z_2$ , jako leżącemu na horyzoncie, odpowiada na płaszczyźnie poziomej punkt niewłaściwy  $Z_2^\infty$ . Prostej  $z_2^s$  na tle, która jest biegunową punktu  $Z_2$ , odpowie w układzie na płaszczyźnie podstawy prosta  $z_2^0$ , biegunowa punktu  $Z_2^\infty$ , czyli średnica koła. Biegunowi  $Z_1$ , sprzężonemu z punktem  $Z_2$ , odpowie na płaszczyźnie poziomej punkt niewłaściwy  $Z_1^\infty$ , a biegunowej  $z_1^s$ , sprzężonej z biegunową  $z_2^s$ , średnica koła  $z_1^0$ , sprzężona z  $z_2^0$ . Punktowi  $S_s$  odpowiada punkt  $S^0$ , t. j. środek koła.

### 39. Dalsze konstrukcje perspektywy koła, jako elipsy.

a) Wyznaczmy średnice sprzężone elipsy, stanowiącej perspektywę danego na płaszczyźnie podstawy koła  $k$  (rys. 222).

Znając linię podstawy, horyzont, punkt główny i głębokość tłową, znajdziemy kład  $n^0$  śladu zniknięcia, a to na tej podstawie, że odległość śladu zniknięcia od śladu tłowego równa jest odległości oka od śladu zbiegu płaszczyzny poziomej (ust. 35). Odległość tedy prostej  $n^0$  od punktu  $O^0$  równa jest odległości podstawy  $p$  od horyzontu. Następnie znajdziemy biegunową  $n_1$  dowolnego punktu  $N_1^0$  prostej  $n^0$ , ze względu na koło  $k^0$ . Biegunowa  $n_2$  punktu  $N_2^0$ , w którym prosta  $n_1$  przecina ślad zniknięcia  $n^0$ , jako sprzężona z  $n_1$ , przejdzie przez punkt  $N_1^0$ . Punkt  $S^0$  jest biegunem prostej  $n^0$  ze względu na koło  $k^0$ . Ponieważ perspektywą śladu zniknięcia jest prosta niewłaściwa, a perspektywą punktów, leżących na śladzie zniknięcia, punkty niewłaściwe, więc punktowi  $N_1^0$  odpowie na tle punkt niewłaściwy  $N_1^\infty$  a prostej  $n_1$  prosta  $n_1^s$ , stanowiąca średnicę elipsy. Perspektywą biegunowej  $n_2$ , sprzężonej z  $n_1$  ze względu na koło, będzie średnica  $n_2^s$ , sprzężona ze średnicą  $n_1^s$ . Punktowi  $S^0$  odpowie punkt  $S_s$ , którego biegunowa odpowiada biegunowej punktu  $S^0$ , t. j. prostej  $n^0$ .



Rys. 222.

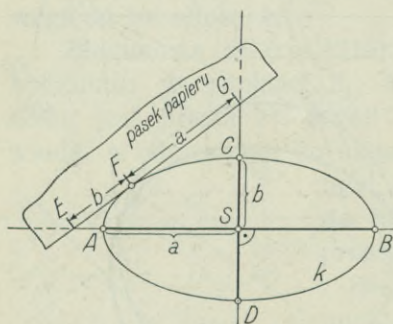


Punkt  $S_s$  jest więc środkiem elipsy, gdyż jego biegunowa jest prostą niewłaściwą.

Ponieważ koło  $k^0$  przecina linię podstawy  $p$  w punktach  $P_1$  i  $P_2$ , więc przez punkty te przejdzie elipsa  $k_s$ . Poszczególne jej punkty wyznaczymy w jeden ze sposobów, jakie podaje geometria. Jako szczególnie praktyczną, przypomnimy konstrukcję przy pomocy paska papieru (rys. 223). Jeżeli odcinki  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  są parą średnic sprzężonych elipsy, to z punktu  $C$  wykreślimy prostopadłą do średnicy  $\overline{AB}$ , odmierzymy  $\overline{CE} = \overline{AS}$  i punkt  $E$  połączymy ze środkiem  $S$  elipsy. Na pasku papieru odmierzymy odcinek  $\overline{ECF}$ , poczem ustawiać będziemy pasek kolejno tak, aby punkt  $E$

znajdował się zawsze na prostej  $E - S$ , zaś punkt  $F$  na prostej, wyznaczonej punktami  $A$  i  $B$ . Miejscem geometrycznym punktów  $C$  będzie elipsa  $k$ .

Jeżeli w miejsce średnic sprzężonych dane są osi  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  elipsy (rys. 224), to poszczególne jej punkty otrzymamy zapomocą paska papieru w następujący sposób: odmierzymy odcinki  $\overline{EF} = b$  i  $\overline{FG} = a$ , następnie poruszać będziemy paskiem tak, aby punkt  $E$  znajdował się stale na prostej  $AB$  a punkt  $G$  na prostej  $CD$ ; elipsa  $k$  będzie miejscem geometrycznym punktów  $F$ .



Rys. 224.

do  $n_1^0$ . Proste  $n_1^0$  i  $n_2^0$  przecinają się w punkcie  $S^0$ , który jest biegunem prostej  $n^0$ . Perspektywą punktu  $S$  jest środek elipsy, jako biegun prostej niewłaściwej  $t_\infty$ , a owa prosta niewłaściwa jest perspektywą śladu zniknięcia  $n$ . Perspektywą biegunowych sprzężonych  $n_1$  i  $n_2$  jest para średnic sprzężonych  $n_1^s$  i  $n_2^s$  elipsy  $k_s$ .

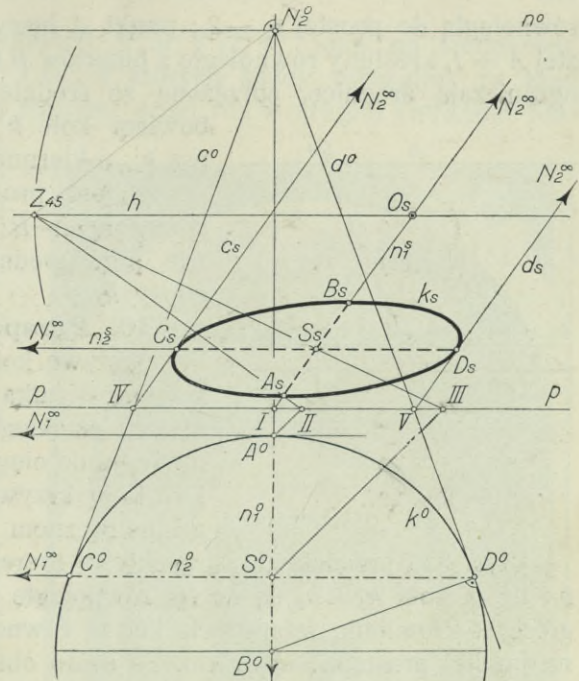
c) Z wywodów powyższych wynika, że perspektywa prostopadłej do linii podstawy średnicy koła, leżącego na płaszczyźnie poziomej, jest

b) Rys. 225 przedstawia poprzednie zadanie, z tą jedynie różnicą, że punkt  $N_1$  przyjęliśmy, jako punkt niewłaściwy  $N_1^\infty$  śladu zniknięcia  $n^0$ . W następstwie tego biegunową punktu  $N_1^\infty$  jest średnica  $n_1^0$  koła, która przetnie prostą  $n^0$  w punkcie  $N_2^0$ . Biegunowa  $n_2^0$  punktu  $N_2^0$  ze względu na koło  $k^0$  jest równoległa do  $n^0$ , a więc prostopadła

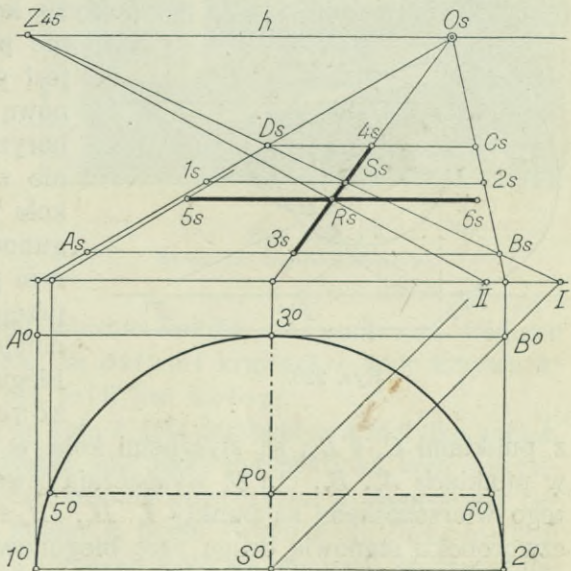


średnicą elipsy. Jeżeli trapez  $A_s B_s C_s D_s$  w rys. 226 jest perspektywą kwadratu, opisanego na kole  $k$ , czyli trapezem, opisanym na elipsie  $k_s$ , to odcinek  $\bar{3}_s \bar{4}_s$  jest średnicą tej elipsy. Aby znaleźć średnicę, sprzężoną ze średnicą  $\bar{3}_s \bar{4}_s$ , znajdziemy środek  $R_s$  elipsy, rzucimy go z punktu głębokości  $Z_{45}$  na linię podstawy, a przez otrzymany punkt  $II$  poprowadzimy prostą, nachyloną do tej linii pod kątem  $45^\circ$ . Otrzymamy punkt  $R^0$ , przez który poprowadzimy cięciwę  $\bar{5}^0 \bar{6}^0$ . Perspektywa  $\bar{5}^0 \bar{6}^0$  tej cięciwy jest szukaną średnicą elipsy  $k_s$ .

d) Jeżeli znamy perspektywę  $\bar{1}_s \bar{2}_s$  i  $\bar{3}_s \bar{4}_s$  pary prostopadłych średnic koła  $k$ , z których jedna jest równoległa a druga prostopadła do tła (rys. 226) — to średnicę  $\bar{5}_s \bar{6}_s$ , (rys. 227), sprzężoną ze średnicą  $\bar{3}_s \bar{4}_s$  elipsy  $k_s$ , znajdziemy w następujący sposób: na odcinku  $\bar{3}_s \bar{4}_s$ , jako na średnicy, zakreślmy koło  $k^x$ . W środku  $R_s$  tego koła i w punkcie  $S_s$  poprowadzimy prostopadłe do prostej  $\bar{3}_s - \bar{4}_s$ . Pierwsza prostopadła przetnie koło  $k^x$  w punktach  $B$  i  $C$ , druga w punkcie  $A$ . Przez punkt  $R_s$  prowadzimy

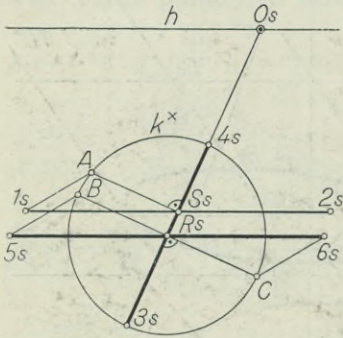


Rys. 225.



Rys. 226.

równoległą do prostej  $1_s - 2_s$ ; punkt  $A$  łączymy z punktem  $1_s$  i do prostej  $A - 1_s$  kreślimy równoległą z punktów  $B$  i  $C$ . Otrzymane punkty  $5_s$  i  $6_s$  ograniczają średnicę, sprzężoną ze średnicą  $3_s 4_s$  elipsy  $k_s$ . Wistocie



Rys. 227.

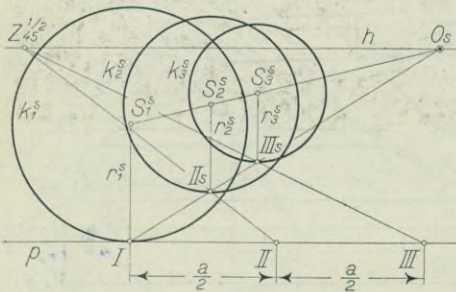
bowiem koło  $k^x$  jest spowinowaczone z elipsą  $k_s$ , a kierunek tego powinowactwa oznaczony jest prostą  $A - 1_s$ . Parze średnic sprzężonych  $BC$  i  $3_s 4_s$  w kole  $k^x$  odpowie para średnic sprzężonych  $3_s 4_s$  i  $5_s 6_s$  elipsy  $k_s$ .

#### 40. Perspektywa koła — kołem.

Perspektywa koła, równoległego do tła, jest kołem. Wynika to stąd, że perspektywa utworu płaskiego, równoległego do tła, jest utworem do niego podobnym (ust. 25, pkt. d), i że linią krzywą, podobną — w znaczeniu geometrycznym — do koła, jest koło.

Rys. 228 przedstawia perspektywę szeregu kół, z których koło  $k_1$  leży na tle, a koła  $k_2$  i  $k_3$  są do tła równoległe i oddalone od siebie o odległość  $a$ . Promienie wszystkich kół są równe, a ich środki znajdują się na prostej prostopadłej do tła. To samo obserwujemy na rys. 229.

W tem miejscu nasuwa się pytanie, czy także i przy innych położeniach koła względem tła perspektywa jego może być kołem. Przypuściwszy możliwość odpowiedzi twierdzącej, przyjmijmy na tle koło  $k_s$  (rys. 230) i uważajmy je za perspektywę koła  $k$ , leżącego na płaszczyźnie



Rys. 228.

nie poziomej, której horyzontem jest prosta  $h$ . Wyznamy biegunową  $m_1^s$  dowolnego punktu  $M_1^s$  horyzontu, a to przez poprowadzenie z tego punktu stycznych do koła  $k_s$  w punktach  $A_s$  i  $B_s$ . Biegunowa  $m_2^s$  punktu  $M_2^s$ , w którym prosta  $m_1^s$  przecina horyzont, przejdzie przez punkt  $M_1^s$ , przecinając koło w punktach  $C_s$  i  $D_s$ . Biegunowe  $m_1^s$  i  $m_2^s$  są sprzężone, a proste, łączące punkt  $M_2^s$

z punktami  $C_s$  i  $D_s$ , są stycznymi koła w tych punktach. Styczne koła w punktach  $A_s, B_s, C_s$  i  $D_s$  wyznaczają czworobok, opisany na kole, którego wierzchołkami są punkty  $I_s, II_s, III_s$  i  $IV_s$ . Przekątne  $n_1^s$  i  $n_2^s$ -tego czworoboku stanowią drugą parę biegunowych sprzężonych ze względu na koło  $k_s$ , a punkty  $N_1^s$  i  $N_2^s$ , w których biegunowe te przetną horyzont, parę biegunów sprzężonych.



Koła zakreślone na odcinkach  $\overline{M_1^s M_2^s}$  i  $\overline{N_1^s N_2^s}$ , jako na średnicach, przetną się w punktach  $O_1^0$  i  $O_2^0$ , z których każdy uważajmy za kład oka na tło, dokonany raz w jednym, drugi raz w drugim kierunku. Niechaj rzut prostokątny  $O_s$  punktu  $O_1^0$ , czy też  $O_2^0$ , na horyzont  $h$  będzie punktem głównym a odcinek  $\overline{O_1^0 O_s} = \overline{O_2^0 O_s}$  głębokością tłową  $\delta$ ; dowolnie przyjęta prosta  $p$ , równoległa do  $h$ , niechaj stanowi linię podstawy płaszczyzny poziomej, na której znajduje się koło  $k$ . Wykonajmy kład tej płaszczyzny na tło. Ponieważ kąty  $M_1^s O_1^0 M_2^s$  i  $N_1^s O_1^0 N_2^s$  — jako wspierające się na średnicach kół, są proste, przeto proste  $m_1^0$  i  $m_2^0$ , a także  $n_1^0$  i  $n_2^0$ , będą do siebie prostopadłe. W następstwie tego czworokąty  $A^0 B^0 C^0 D^0$  i  $I^0 II^0 III^0 IV^0$ , odpowiadające czworokątom  $A_s B_s C_s D_s$  i  $I_s II_s III_s IV_s$ , są kwadratami.

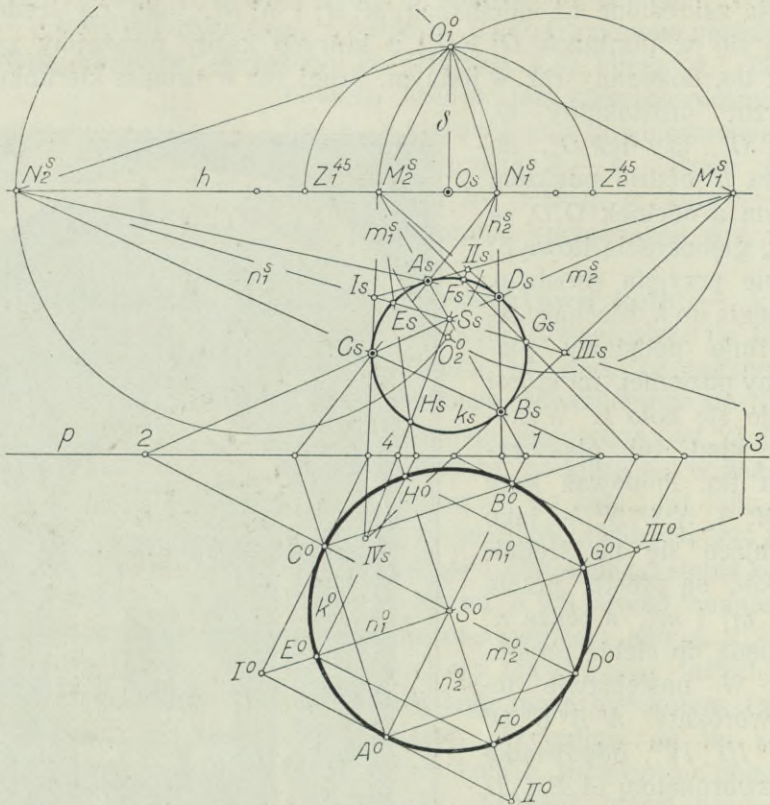
Tak więc każdej parze biegunowych sprzężonych  $m_1^s, m_2^s; n_1^s, n_2^s; \dots$ , ze względu na koło  $k_s$ , odpowiada para średnic sprzężonych  $m_1^0, m_2^0; n_1^0, n_2^0; \dots$  ze względu na krzywą  $k^0$ , odpowiadającą perspektywie kołu  $k_s$ . A ponieważ średnice sprzężone, prostopadłe do siebie, są osiami krzywej — więc krzywa  $k^0$  posiada nieograniczoną ilość osi, czyli jest kołem.

Z ust. 13, pkt. c) wynika, że koło  $k_s$  jest perspektywą nie tylko koła  $k$ , leżącego na płaszczyźnie poziomej, ale także perspektywą tych wszystkich kół, które otrzymamy, gdy pozioma płaszczyzna  $\alpha$  obracać się będzie, wraz z leżącym na niej kołem  $k$ , około swego śladu tłowego (linji podstawy), a oko zakreślać równocześnie koło na pionowej płaszczyźnie, prostopadłej do tła. Tym sposobem stwierdzamy, że koło może być perspektywą koła, niezależnie od nachylenia jego płaszczyzny do tła.



Rys. 229.

Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.



Rys. 230.

#### 41. Perspektywa elipsy — elipsą, hiperbolą lub parabolą.

Ponieważ odpowiedniość, zachodząca między elementami płaszczyzny, t. j. między punktami i prostymi a ich perspektywami, jest jednoznaczna, czyli, jak mówimy, doskonała, więc elipsie, przyjętej na płaszczyźnie  $\varphi$ , odpowie perspektywicznie krzywa, którą dowolna prosta przecina — podobnie, jak koło, w dwóch punktach, a do której poprowadzić można z dowolnego punktu — podobnie, jak do koła — dwie styczne.

Jeżeli elipsa, przyjęta na płaszczyźnie  $\varphi$ , nie ma żadnych punktów wspólnych z płaszczyzną zniknięcia — t. zn. nie jest przez tę płaszczyznę przecięta, ani też nie jest do niej styczną — to perspektywą tak położonej elipsy jest w ogólnym wypadku elipsa a w szczególnym koło (ust. 42).

Jeżeli płaszczyzna zniknięcia przecina elipsę w dwóch punktach, to jej perspektywa będzie hiperbolą. Jeżeli wreszcie elipsa jest styczną do płaszczyzny zniknięcia, to jej perspektywą będzie parabola.



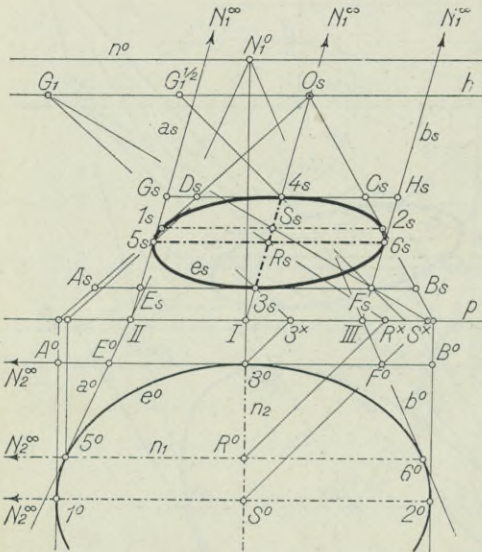




psie  $e_s$  i styczny do niej w punktach  $1_s, 2_s, 3_s$  i  $4_s$ . Nierównoległe boki tego trapezu zbiegają się w śladzie  $Z_1^{00}$ .

Dalsza konstrukcja nie wymaga wyjaśnień.

Rys. 232 jest rozwiązaniem tego samego zadania przy szczególnym położeniu elipsy względem tła, takim mianowicie, że jedna jej oś jest równoległa a więc druga prostopadła do tła.



Rys. 232.

Jeżeli elipsa, leżąca na płaszczyźnie poziomej, jest przecięta śladem zniknięcia  $n^0$ , to jej perspektywą będzie hiperbola. Stosując konstrukcję, przedstawioną na rys. 213, znajdziemy z łatwością asymptoty tej hiperboli i dowolną ilość jej punktów. Możemy także zadowolić się konstrukcją, podaną na rys. 217, jeśli w miejsce koła  $k^0$  przyjmiemy elipsę.

Gdyby elipsa była styczną do śladu zniknięcia, to miejscem geometrycznym perspektyw jej punktów będzie parabola.

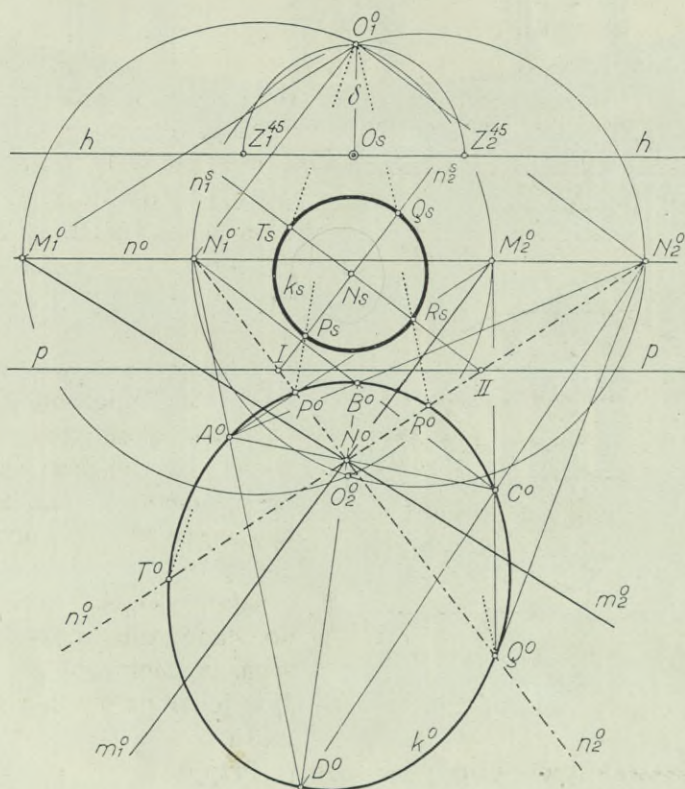
**42. Perspektywa elipsy — kołem.** Przyjmijmy linię podstawy  $p$ , linię horyzontu  $h$ , ślad zniknięcia  $n^0$ , a na płaszczyźnie podstawy, sprowadzonej zapomocą obrotu około prostej  $p$  na tło, elipsę  $k^0$  (rys. 233). Biegunowa  $n_1^0$  dowolnego punktu  $N_1^0$  prostej  $n^0$  ze względu na elipsę przecina ją w punkcie  $N_2^0$ , który jest sprzężony z punktem  $N_1^0$  i którego biegunowa  $n_2^0$ , sprzężona z  $n_1^0$ , przechodzi przez ten punkt. Wychodząc z dowolnie na prostej  $n^0$  przyjętego punktu  $M^0$ , znajdziemy jego biegunową  $m_1^0$ , biegun  $M_2^0$ , sprzężony z punktem  $M_1^0$ , i jego biegunową  $m_2^0$ . Zarówno  $m_1^0$ , jak i  $m_2^0$ , przejdą przez punkt  $N^0$  przecięcia się biegunowych  $n_1^0$  i  $n_2^0$ .

Na średnicach  $\overline{N_1^0 N_2^0}$  i  $\overline{M_1^0 M_2^0}$  zakreslimy koła, które przetną się w punktach  $O_1^0$  i  $O_2^0$ . Punkty te uważać należy za kłady oka na tło, ich oddalenia od linii horyzontu za głębokości tłowe. Zadanie posiada więc dwa rozwiązania, z których jedno — przy użyciu punktu  $O_1^0$  i głębokości tłowej  $\delta$  — przeprowadziliśmy na rysunku.

Biegunowym sprzężonym  $n_1^0$  i  $n_2^0$  odpowiedzą średnice  $n_1^s$  i  $n_2^s$  koła  $k_s$ ; perspektywą punktu  $N^0$  jest środek  $N_s$  koła  $k_s$ . Perspektywą



czworokąta  $P^0Q^0R^0T^0$ , wpisanego w elipsę  $k^0$ , jest kwadrat  $P_sQ_sR_sT_s$ , wpisany w koło  $k_s$ .



Rys. 233.

**43. Perspektywa pęku kół współśrodkowych.** a) Z rozważań ustępu 41 wynika wprost, że perspektywą kół, należących do jednego pęku, posiadających wspólny środek i leżących na jednej płaszczyźnie, mogą być elipsy, hiperbole i parabole.

Jeżeli położenie pęku kół jest takie, że płaszczyzna zniknięcia żadnego z nich nie przecina, to perspektywą tego pęku będzie pęk elips. Jeżeli pęk kół jest przecięty płaszczyzną zniknięcia, to perspektywami wszystkich przeciętych kół będą hiperbole. Perspektywa koła, stycznego do płaszczyzny zniknięcia, będzie parabolą.

Rys. 234 jest reprodukcją fotogramu wnętrza walcowego, na którym widzimy perspektywę pęku kół. Na posadzce występują elipsy i hiperbole, na ścianie wnętrza wyłącznie hiperbole. W miarę zbliżania się do horyzontu, od podstawy, hiperbole na ścianie wnętrza pomniejsz-

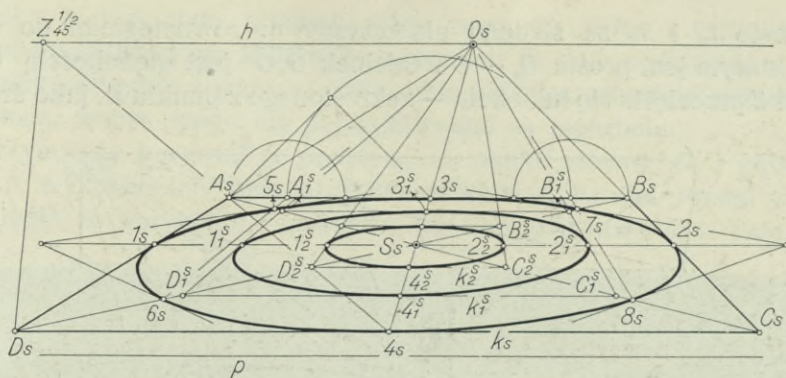


Rys. 234.

szają swoje krzywizny, zbliżając się do linii prostej. Po przekroczeniu horyzontu krzywizny hiperbol rosną. Gdziekolwiek ustawimy aparat fotograficzny we wnętrzu walcowem, zawsze otrzymamy hiperbole, jako perspektywy kół, zawsze bowiem główna płaszczyzna obiektywu, odpowiadająca płaszczyźnie zniknięcia, przetnie koło, ograniczające podłogę w dwóch punktach. Jeżeli na podłodze — jak w przykładzie na rysunku 234 — znajduje się pęk kół, to główna płaszczyzna obiektywu przeciąć może jeszcze inne koła, względnie do jednego z nich może być styczna. Fotogram zawiera w takim wypadku więcej hiperbol (zawsze tylko jedną gałąź każdej z nich), a ewentualnie także jedną parabolę.

b) Przykład perspektywy trzech współśrodkowych kół, leżących na płaszczyźnie poziomej, podaje rys. 235. Ślad zniknięcia nie przecina





Rys. 235.

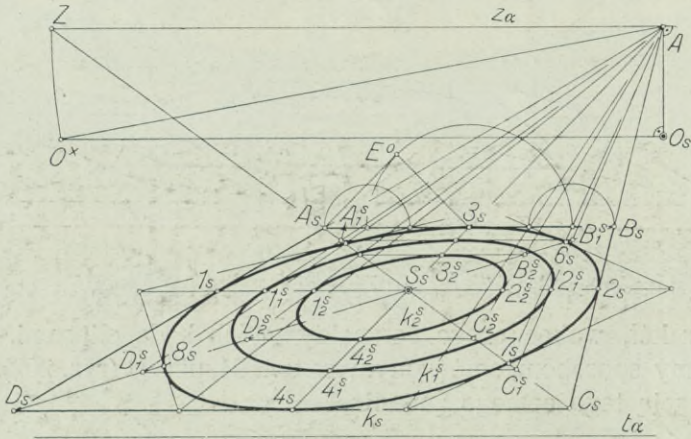
żadnego z kół, wobec czego perspektywy ich będą elipsami, które narysowaliśmy sposobem, omówionym w ust. 34, pkt *d*) (rys. 202). Rys. 236 jest ilustracją tego samego zadania.



Rys. 236.

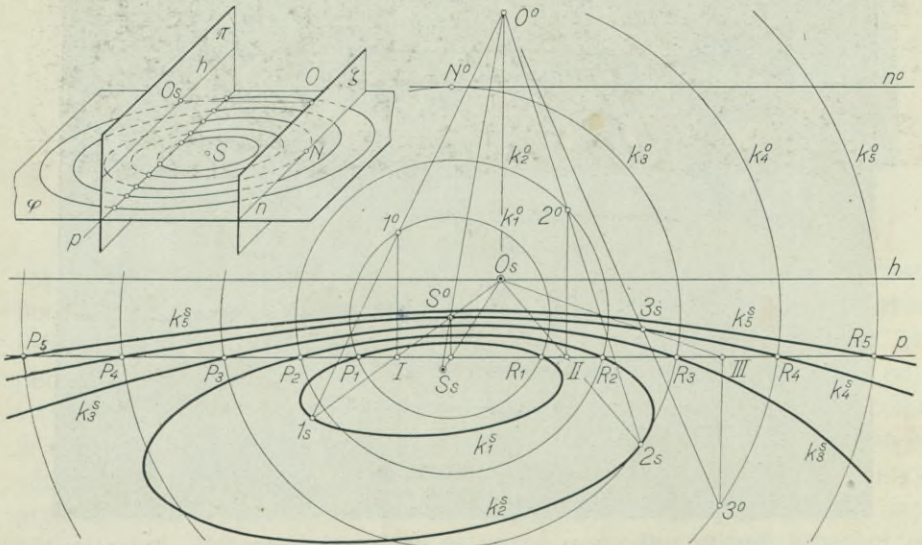
*e*) Perspektywę trzech współśrodkowych kół, leżących na płaszczyźnie  $\alpha$ , równoległej do linii horyzontu, jednak nie prostopadłej do tła, podaje rys. 237.

Proste  $t_a$  i  $z_a$  są śladami płaszczyzny  $\alpha$ , równoległymi do horyzontu, którym jest prosta  $O_s - O^x$ . Odcinek  $O_s O^x$  jest głębokością tłową a punkt  $Z$  przecięcia się łuku koła — zakreślonego z punktu  $A$ , jako środka,



Rys. 237.

promieniem  $\overline{AO^x}$  — ze śladem zbiegu  $z_a$ , śladem zbiegu prostych, równoległych do płaszczyzny  $\alpha$  a nachylonych do horyzontu pod  $\sphericalangle 45^\circ$ .



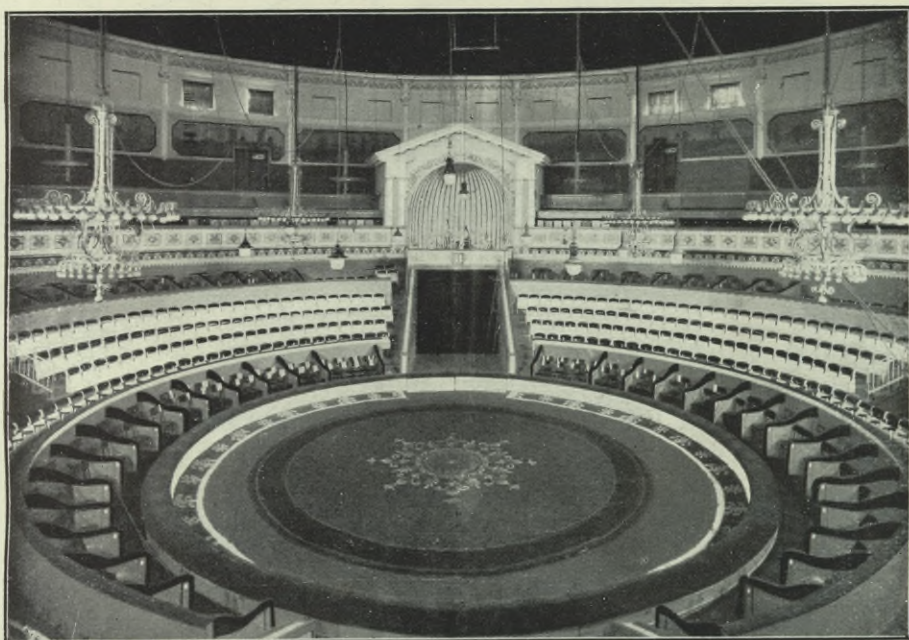
Rys. 238.

d) Rys. 238 przedstawia konstrukcję perspektywy pięciu kół współśrodkowych, leżących na płaszczyźnie poziomej.



Szkic u góry tego rysunku mówi nam, że jedno z tych kół jest styczne do płaszczyzny zniknięcia w punkcie  $N$  śladu zniknięcia  $n$ . Jego perspektywą będzie parabola. Dwa inne koła są przecięte płaszczyzną zniknięcia, wobec czego ich perspektywami są hiperbole.

Przyjąwszy horyzont  $h$ , podstawę  $p$ , punkt główny  $O_s$  i głębokość tłową  $\delta$ , wykreśliłiśmy kład  $n^0$  śladu zniknięcia na tło. Prosta  $n^0$  jest równoległa do horyzontu i oddalona od linii podstawy o  $\delta$ . Teraz wy-



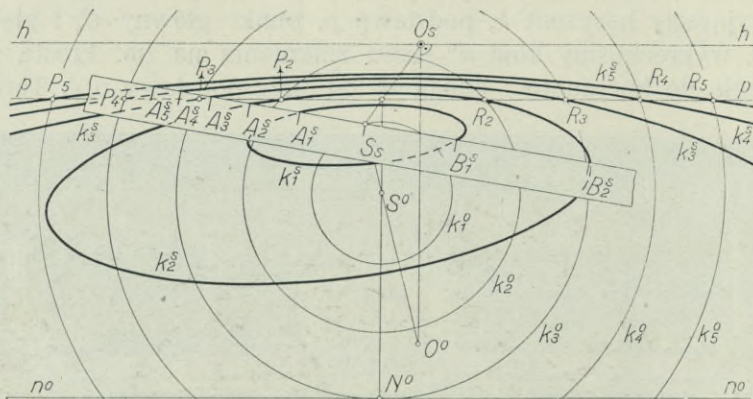
Rys. 239. Wnętrze cyrku w Warszawie.

Wł. fot. Jan Malarski, Warszawa.

kreśliły pięć współśrodkowych kół, z których koło  $k_3^0$  styka się ze śladem  $n^0$  w punkcie  $N^0$ , a koła  $k_4^0$  i  $k_5^0$  ślad ten przecinają. Punkty  $P_1, R_1; P_2, R_2; \dots$ , w których linia podstawy  $p$  przecina koła, są równocześnie punktami krzywych stożkowych, odpowiadających perspektywie tym kołom.

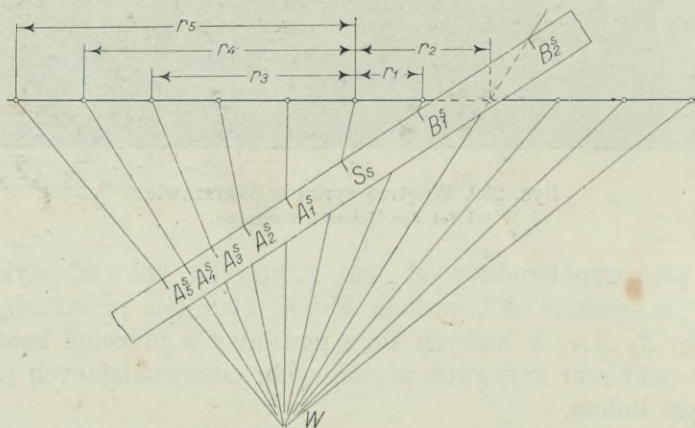
Dla otrzymania poszczególnych punktów elips  $k_1^s$  i  $k_2^s$ , paraboli  $k_3^s$ , i hiperbol  $k_4^s$  i  $k_5^s$  zastosować możemy jedną z poznanych konstrukcyj. Troska o zachowanie przejrzystości rysunku nie pozwoliła na przeładowanie go liniami pomocniczymi. Wskazaliśmy konstrukcję tylko trzech punktów. W punktach  $I, II$  i  $III$  podstawy  $p$  poprowadziliśmy do niej prostopadłe. Perspektywy tych prostopadłych będą prostymi, łączącymi punkty  $I, II$  i  $III$  z punktem głównym. Punkty  $1^0, 2^0$  i  $3^0$  kół  $k_1^0, k_2^0$  i  $k_4^0$ ,

rzucone z kładu  $O^0$  oka na te proste, są punktami  $1_s$ ,  $2_s$  i  $3_s$ . Pierwszy z nich jest punktem elipsy  $k_1^s$ , drugi elipsy  $k_2^s$  a trzeci hiperboli  $k_3^s$ . Pięknymi przykładami rozpatrzonego zadania są fotogramy rys. 239 i 242.



Rys. 240.

e) Do narysowania perspektywy pęku kół współśrodkowych nadaje się znakomicie pęk *Pillet'a*. Dla zademonstrowania sposobu jego użycia powtórzmy zadanie, rozwiązane w poprzednim punkcie d). Mamy więc

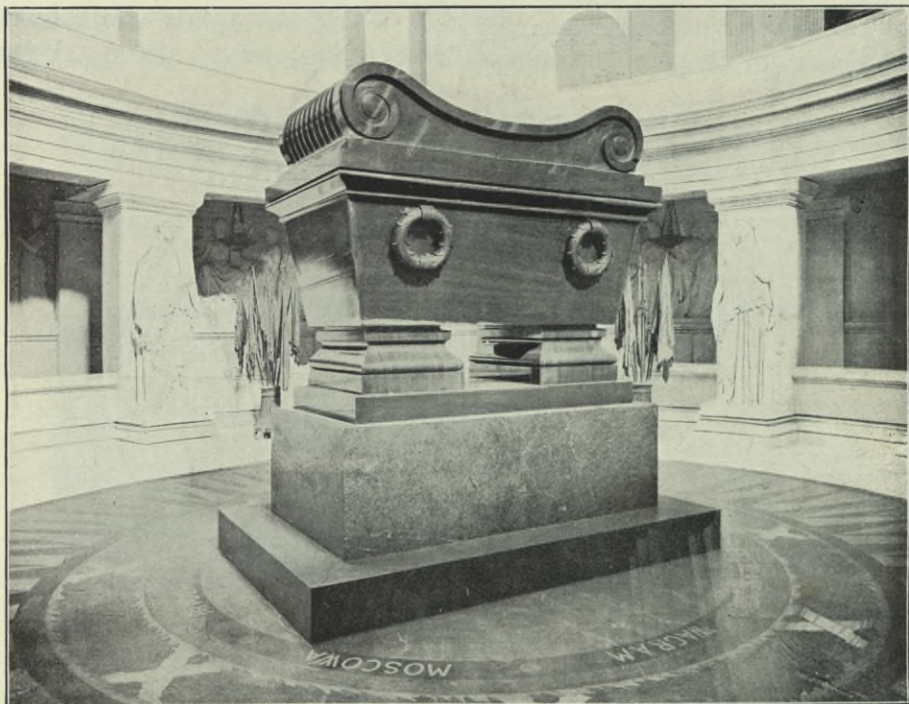


Rys. 241.

pięć kół, z których trzecie styka się ze śladem zniknięcia. Kładu płaszczyzny poziomej, na której znajdują się koła, dokonaliśmy w kierunku przeciwnym, aniżeli na rys. 238, wskutek czego ślad  $n^0$  i punkt  $O^0$  znalazły się pod horyzontem (rys. 240).



Z pięciu krzywych stożkowych, które mamy narysować, jedną, np. elipsę  $k_2^s$ , wykreślimy w jeden ze znanych sposobów, możliwie dokładnie. Punkt  $S_s$  jest perspektywą środka kół. Teraz przyjmijmy prostą i po obu stronach dowolnego jej punktu, który czytelnik zechce nazwać na rys. 241 literą  $S$ , odmierzymy odcinki, równe promieniom  $r_1, r_2, r_3, r_4$  i  $r_5$  kół. Punkty końcowe tych odcinków połączymy z dowolnym punktem  $W$ , uzyskując tym sposobem potrzebny pęk *Pillet'a*.



Rys. 242. Grób Napoleona, Dom Inwalidów w Paryżu.

Teraz wykreślimy przez punkt  $S_s$  na rys. 240 dowolną prostą, która przetnie elipsę  $k_2^s$  w punktach  $A_2^s$  i  $B_2^s$ . Punkty te oraz punkt  $S_s$  zaznaczymy na krawędzi skrawka papieru i przeniesiemy je na pęk *Pillet'a* w ten sposób, by punkt  $S_s$  padł na promień  $S-W$  a dwa pozostałe punkty na promienie, łączące końcowe punkty odcinków  $r_2$  z wierzchołkiem  $W$ . Reszta promieni pęku przetnie krawędź paska papieru w punktach  $A_1^s, B_1^s, A_3^s, \dots$ , które przeniesiemy na rys. 240, jako punkty szukanych krzywych. W tym celu przyłożymy krawędź paska papieru do wykreślonej przez punkt  $S_s$  prostej, tak, aby punkty  $A_2^s, S_s$  i  $B_2^s$  nakryły się. Pozostałe punkty odbijemy ostrym ołówkiem. Operację tę

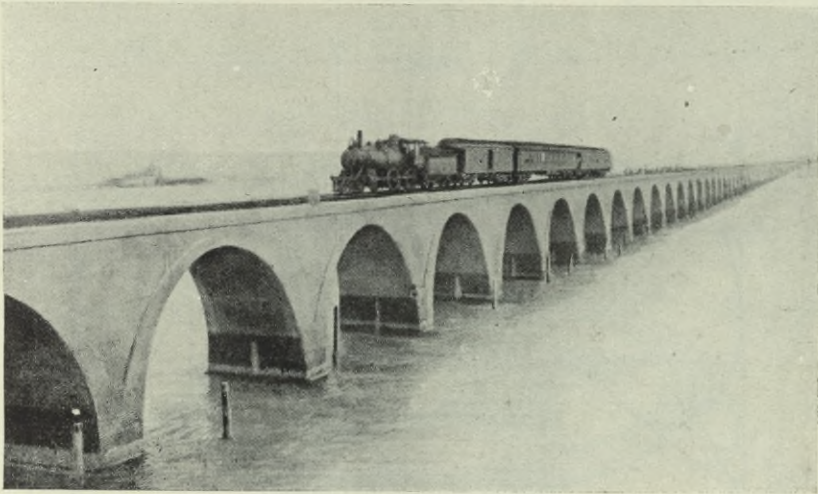




Poniżej wracamy do zadania perspektywy koła, leżącego dowolnie w przestrzeni, rozwiązując je w sposób geometrycznie bardziej zadowalający.

Płaszczyzna  $\varphi$  koła  $k$  wyznaczona jest zapomocą śladu tłowego  $t_\varphi$  i śladu zbiegu  $z_\varphi$  (rys. 243). Ponadto dany jest punkt główny  $O_s$ , głębokość tłowa  $\delta$  i promień  $r$  koła.

Wykreślmy horyzont  $h$ , na którym przyjmijmy punkt  $Z_{45}^{1/2}$  połowy głębokości, poczem wykonajmy kład płaszczyzny  $\varphi$ , względnie kład jej płaszczyzny zbiegu, na tło. W tym celu poprowadzimy z punktu głównego  $O_s$  proste: prostopadłą i równoległą do śladu  $z_\varphi$ . Na równoległej od-



Rys. 244.

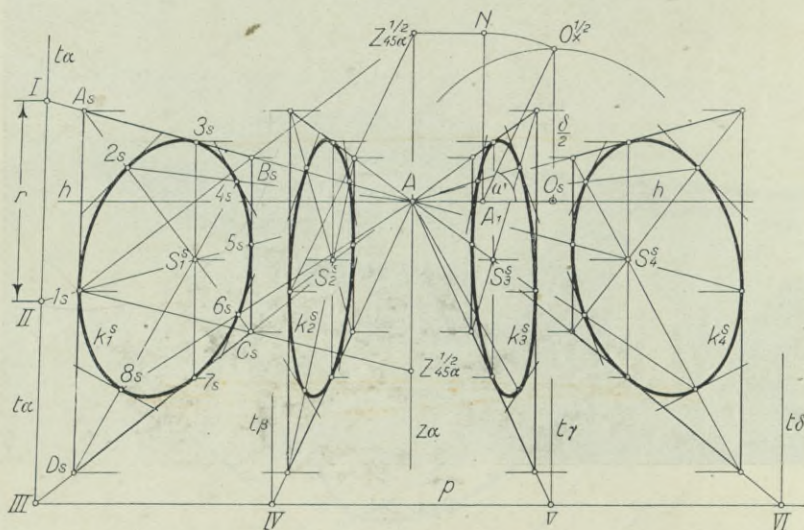
mierzymy odcinek  $\overline{O_s O^*}$ , równy głębokości tłowej, i punkt  $O^*$  połączymy z punktem  $A$ . Kąt  $\omega$  równy jest kątowi nachylenia płaszczyzny  $\varphi$  do tła.

Łuk koła, zakreślony z punktu  $A$ , jako środka, przetnie prostą  $A - O_s$  w punkcie  $O^0$ , który jest kładem oka na tło. Łuk ten przetnie ślad zbiegu  $z_\varphi$  płaszczyzny  $\varphi$  w punkcie  $Z_\varphi^{45}$ , który jest śladem zbiegu prostych, równoległych do płaszczyzny  $\varphi$  i zawierających ze śladem  $z_\varphi$  kąt  $45^\circ$ . Jest to t. zw. ślad przekątny płaszczyzny  $\varphi$  (patrz ust. 13, pkt.  $d$ ).

Na śladzie  $t_\varphi$  odmierzymy odcinek  $\overline{I III}$ , równy średnicy koła, i punkty końcowe tego odcinka, jakoteż jego środek  $II$ , połączymy z punktem  $A$ . Równoległe do śladu  $t_\varphi$  wykreślony odcinek  $\overline{C_s D_s}$  jest perspektywą boku kwadratu, opisanego na kole  $k$ . Promień  $D_s - Z_\varphi^{45}$  przecina prostą  $II - A$  w punkcie  $S_s$ , który jest perspektywą środka koła. Ten sam promień przecina ślad tłowy  $t_\varphi$  w punkcie  $IV$  a prostą  $III - A$  w punkcie  $B_s$ . Odcinek  $\overline{I IV}$  wyraża prawdziwe oddalenie prostej  $\overline{CD}$  od śladu  $t_\varphi$ .

Przez punkt  $B_s$  prowadzimy równoległą do  $t_\varphi$ , która przetnie promień  $I-A$  w punkcie  $A_s$ . Otrzymany czworokąt  $A_s B_s C_s D_s$  jest trapezem, opisanym na elipsie, będącej perspektywą danego koła.

Gdybyśmy musieli posługiwać się np. połową głębokości tłowej, to wówczas postąpimy w sposób następujący: przez środek  $A_1$  odcinka  $O_s A$  poprowadzimy prostą  $z_\varphi^{1/2}$ , równoległą do  $z_\varphi$ , i przeniesiemy na nią łukiem koła o środku  $A_1$  punkt  $O_x^{1/2}$ , połowiący odcinek  $O_s O_x$ . Prostokątny rzut otrzymanego na prostej  $z_\varphi^{1/2}$  punktu  $N$  na ślad  $z_\varphi$  jest częściowym śladem zbiegu  $Z_{45\varphi}^{1/2}$  prostych, nachylonych do kierunku  $z_\varphi$  pod kątem  $45^\circ$ , a równoległych do płaszczyzny  $\varphi$ . Promień, łączący punkt  $B_s$  ze śladem  $Z_{45\varphi}^{1/2}$ , przetnie prostą  $III-A$  w punkcie  $B_s$ .



Rys. 245.

Na równoległych bokach trapezu, opisanego na elipsie, mamy jej punkty  $1_s$  i  $3_s$ . Prosta, przeprowadzona przez punkt  $S_s$  równoległe do  $t_\varphi$ , przecina dwa pozostałe boki trapezu w punktach  $2_s$  i  $4_s$  elipsy.

Dalsze cztery punkty elipsy, a mianowicie  $5_s$ ,  $6_s$ ,  $7_s$  i  $8_s$ , znaleźliśmy przez zastosowanie konstrukcji, omówionej w punkcie  $d$ ) ust. 34. Wchodzący w grę równoramienny trójkąt prostokątny (patrz trójkąt  $3Q^0C$  na rys. 202) wykreśliliśmy tutaj na odcinku  $4_s S_s$ .

Przy pomocy konstrukcji, poznanej w punkcie  $d$ ) ustępu 39, rysunek 227, wyznaczyliśmy także i średnicę  $PQ$ , sprzężoną ze średnicą  $1_s 3_s$  elipsy.

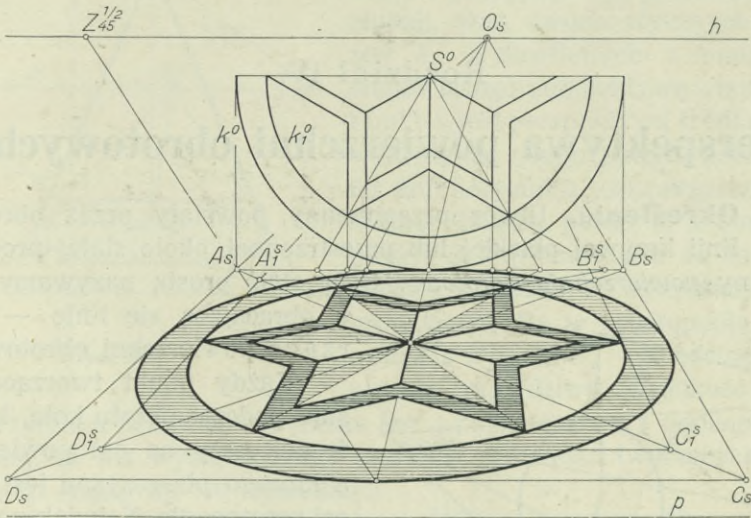
Wkońcu wykonaliśmy kład płaszczyzny  $\varphi$ , który sprowadził na tło koło  $k$ , oznaczone na rysunku znakiem  $k^0$ .



2. Wykreślić perspektywę czterech kół, o jednakowym promieniu, leżących na równoległych do siebie pionowych płaszczyznach, nachylonych do tła pod kątem  $\omega$ .

Przyjmijmy, że dane są: punkt główny  $O_s$ , horyzont, głębokość tła, wspólny czterem płaszczyznom ślad zbiegu  $z_a$ , ich ślady tłowe  $t_a, t_b, t_c, t_d$  i promień  $r$  kół (rys. 245). Operujemy połową głębokości tłowej.

Do konstrukcji potrzebny jest częściowy ślad przekątny  $Z_{45}^{1/2}$  danych pionowych płaszczyzn równoległych, t. j. częściowy ślad zbiegu prostych, równoległych do tych płaszczyzn a nachylonych do kierunku pionowego pod kątem  $45^\circ$ .

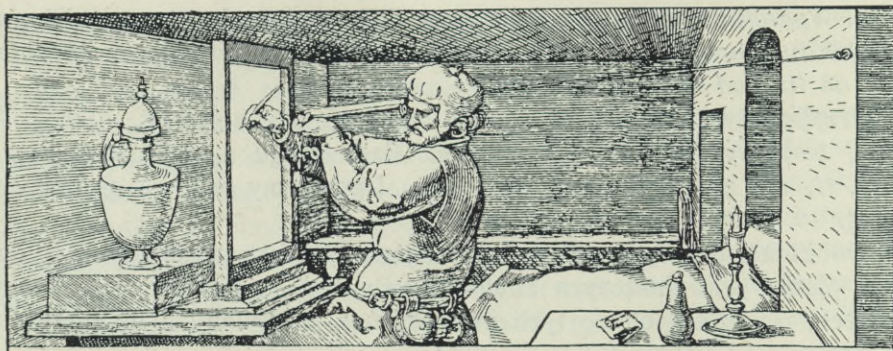


Rys. 246.

Stosując przeprowadzone w zadaniu poprzednim konstrukcje, wykreślimy trapezy, opisane na elipsach, punkty styczności tych trapezów, a następnie dalsze cztery punkty każdej elipsy.

3. Do narysowania perspektywy ornamentu w kole (rys. 246) zastosowaliśmy konstrukcję, poznaną w ust. 21, pkt. g), rys. 91 a, b.

Przyjęliśmy więc na pomocniczej płaszczyźnie poziomej, leżącej między płaszczyzną horyzontu a płaszczyzną poziomą ornamentu, ornament zmniejszony. Przy pomocy połowy głębokości tłowej wyznaczyliśmy perspektywę  $A_s B_s C_s D_s$  i  $A_1^s B_1^s C_1^s D_1^s$  kwadratów, opisanych na obu współśrodkowych kołach, a następnie w jeden z poznanych sposobów wykreśliliśmy w otrzymane trapezy elipsy. Wyznaczenie perspektywy sześcioramiennej gwiazdy oparte jest również o znane nam konstrukcje.

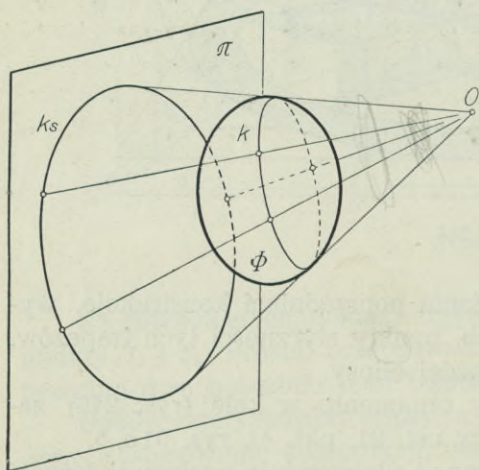


## Rozdział IV.

### Perspektywa powierzchni obrotowych.

**45. Określenia.** Utwór przestrzenny, powstały przez obrót linii prostej, linii krzywej płaskiej lub przestrzennej około stałej prostej — nazywamy *powierzchnią obrotową*. Ową stałą prostą nazywamy osią a obracającą się linię — tworzącą powierzchni obrotowej.

Każdy punkt tworzącej opisuje podczas obrotu koło, którego środek leży na osi powierzchni, a którego płaszczyzna jest do tej osi prostopadła. Największe z tych kół zowie się równikiem, najmniejsze — kołem szyjnym, a wszystkie inne równoleżnikami. Płaszczyzny, przechodzące przez oś, przecinają powierzchnię wzdłuż krzywych przystających, zwanych południkami. Oczywiście, że każdy z południków może być tworzącą tej samej powierzchni obrotowej.



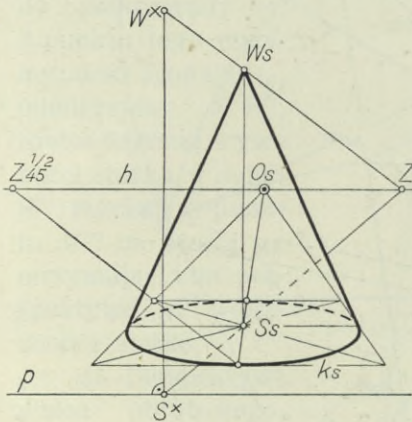
Rys. 248.

Jeżeli tworząca jest linią prostą, przecinającą oś, to otrzymana powierzchnia zowie się *stożkiem* obrotowym; jeżeli tworząca jest równoległa do osi, otrzymujemy *walec* obrotowy.



Opisany na powierzchni obrotowej  $\Phi$  (rys. 248), z oka, jako wierzchołka, stożek, zwany *stożkiem widzenia* tej powierzchni, styka się z nią wzdłuż linii  $k$ , która stanowi t. zw. *zarys* lub *kontur istotny* powierzchni. Rzut tego zarysu z oka  $O$  na tło, równoznaczny z przekrojem stożka widzenia powierzchni  $\Phi$  płaszczyzną  $\pi$ , jest perspektywą tej powierzchni i zwie się także jej *zarysem* (konturem) *pozornym*.

**46. Przybliżone sposoby rysowania perspektyw obrotowych stożków i walców.** a) Zadanie wykreślenia perspektywy stożka obrotowego o osi pionowej (rys. 249)

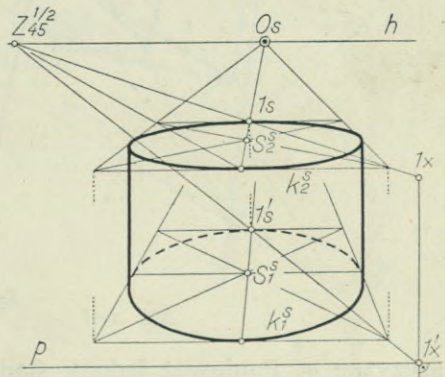


Rys. 249.

sprowadza się do narysowania elipsy  $k_s$ , która jest perspektywą koła podstawy stożka, przyjętego na płaszczyźnie poziomej, oraz dwóch stycznych do elipsy  $k_s$ , wykreślonych z punktu  $W_s$ , stanowiącego perspektywę wierzchołka. Punkt  $S_s$  jest perspektywą środka koła  $k$ ; wykreślona z tego punktu prostopadła do linii horyzontu jest perspektywą osi stożka. Rzućmy punkt  $S_s$  z dowolnego punktu  $Z$  linii horyzontu na linię podstawy i w punkcie  $S^x$  wykreślmy do niej prostopadłą. Na tę prostopadłą rzućmy z punktu  $Z$  punkt  $W_s$  — to odcinek  $W^x S^x$  wyraża prawdziwą wysokość stożka.

Otrzymana perspektywa stożka jest przybliżoną i odbiega o tyle od ściślej, że nie wyznaczyliśmy punktów styczności tworzących konturowych z elipsą  $k_s$ . W rysunkach praktycznych znajomość tych punktów jest zbędna.

b) Rys. 250 jest perspektywą walca obrotowego o osi pionowej i wysokości równej odcinkowi  $\overline{1'1_x}$ . Na zarys pozorny tego walca składają się elipsy  $k_1^s$  i  $k_2^s$  oraz wspólne do nich styczne.



Rys. 250.

c) Rys. 251 jest perspektywą stożka obrotowego, którego podstawa  $k$  leży na płaszczyźnie  $\alpha$ , nachylonej do tła pod kątem  $\omega$ . Najpierw wykreślmy elipsę  $k_s$ , jako perspektywę koła  $k$ , poczem znajdziemy ślad zbiegu  $Z_a^{90}$  prostych, prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ . Prosta  $a_s$ , łącząca ten ślad z punktem  $S_s$ ,

Prosta  $a_s$ , łącząca ten ślad z punktem  $S_s$ ,

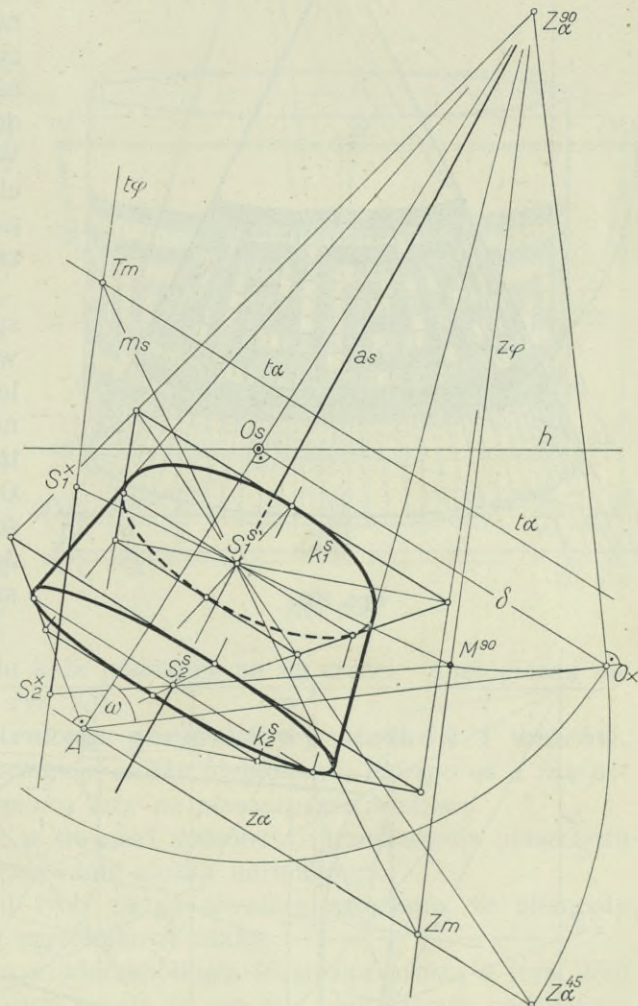




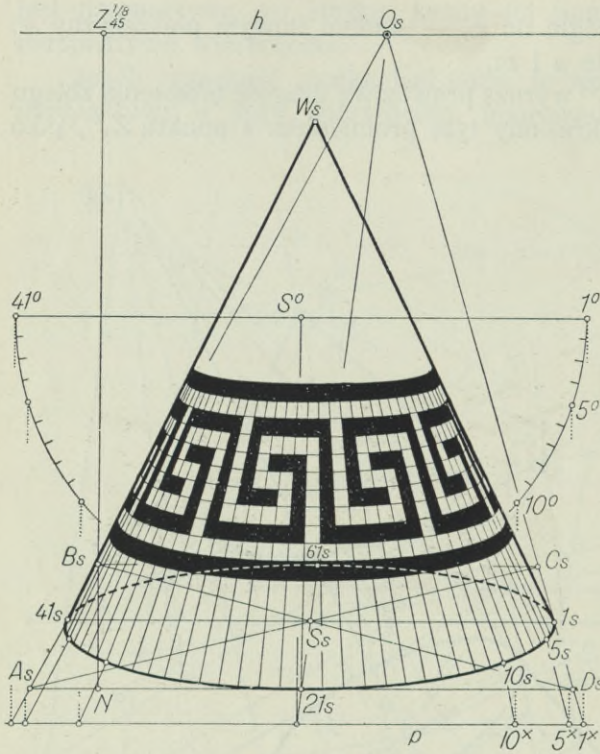
ślona przez ślad  $T_m$  równoległe do  $z_\varphi$  — śladem łowym płaszczyzny  $\varphi$ , poprowadzonej przez proste  $a$  i  $m$ .

Ponieważ odcinek  $O_x Z_{\alpha}^{90}$  wyraża prawdziwą długość promienia zbiegu prostej  $a$ , więc łuk koła, zakreślony tym promieniem z punktu  $Z_{\alpha}^{90}$ , jako środka, przetnie ślad zbiegu  $z_\varphi$  w punkcie mierzenia  $M^{90}$  prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ . Z punktu tego rzucimy punkt  $S_s$  na ślad  $t_\varphi$ , odmierzymy  $S^x W^x$ , równe żądanej wysokości stożka, a punkt  $W^x$  rzucimy z punktu  $M^{90}$  na prostą  $a_s$ , otrzymując tam perspektywę  $W_s$  wierzchołka stożka.

d) Perspektywę walca obrotowego, ograniczonego dwoma przekrojami, prostopadłymi do dowolnie w przestrzeni leżącej osi, podaje rysunek 252. Wyszliśmy z punktu głównego  $O_s$ , głębokości łowej  $\delta$  i wyznaczonej śladami  $t_\alpha$  i  $z_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , na której znajduje się koło  $k_1$  podstawy walca. Wykreśliwszy perspektywę  $k_1^s$  tego koła, znajdziemy ślad zbiegu  $Z_{\alpha}^{90}$  prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ . Prosta  $a_s$ , wyznaczona punktami  $Z_{\alpha}^{90}$  i  $S_1^s$ , jest perspektywą osi walca. Podobnie, jak w zadaniu poprzednim, poprowadzimy przez punkt  $S_1^s$  prostą  $m_s$ , znajdziemy ślady  $z_\varphi$  i  $t_\varphi$  płaszczyzny  $\varphi$ , przechodzącej przez oś stożka, a wreszcie punkt mierzenia  $M^{90}$  prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ .



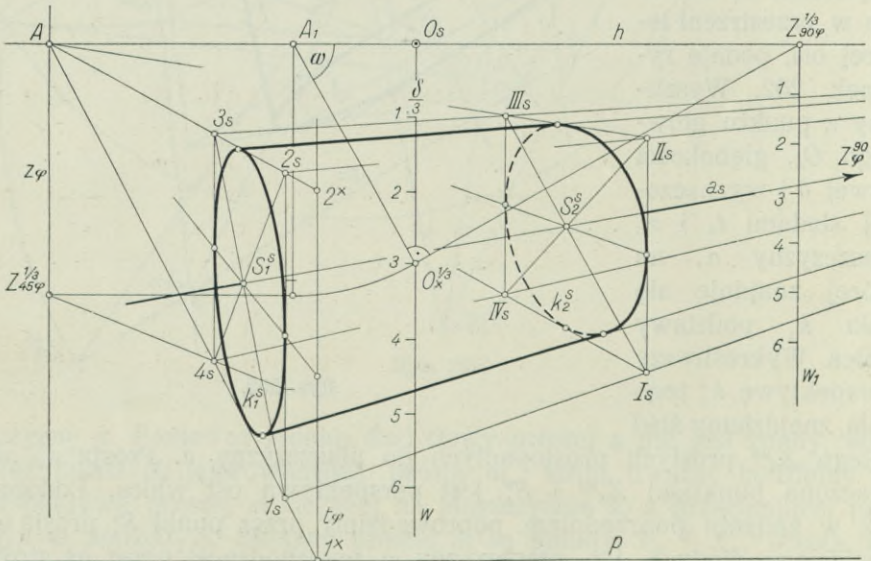
Rys. 252.



Rys. 253.

Z punktu tego rzucimy punkt  $S_1^s$  na ślad  $t_\varphi$ , odmierzymy odcinek  $S_1^s S_2^x$ , równy żądanej wysokości walca, i punkt  $S_2^x$  przeniesiemy, jako punkt  $S_2^s$ , na prostą  $a_s$ . Wykreślenie elipsy  $k_2^s$  wyjaśnia dostatecznie rysunek. Wspólne styczne do obu elips, przechodzące przez punkt  $Z_{\alpha}^{90}$ , uzupełniają zarys pozorny walca.

e) Wykreślmy perspektywę walca obrotowego, którego podstawa leży na płaszczyźnie pionowej  $\varphi$ , nachylonej do tła pod kątem  $\omega$  (rys. 254). Operujemy trzecią częścią głębokości tłowej. Jeżeli ślady  $t_\varphi$  i  $z_\varphi$  płaszczyzny  $\varphi$  są dane, szu-



Rys. 254.



kamy na linii horyzontu punktu  $A_1$ , dzielącego odcinek  $O_s A$  w stosunku  $1:3$ , i znajdujemy częściowy ślad zbiegu  $Z_{90\varphi}^{1/3}$  prostych, prostopadłych do płaszczyzny  $\varphi$ , a także punkt  $Z_{45\varphi}^{1/3}$ . Kreślimy trapez  $1_s 2_s 3_s 4_s$  i elipsę  $k_1^s$ , a wierzchołki trapezu i punkt  $S_1^s$  łączymy z punktem  $Z_{\varphi}^{90}$ . Kreślimy trapez  $I_s II_s III_s IV_s$  i elipsę  $k_2^s$ . Wspólne styczne do obu elips, przechodzące przez punkt  $Z_{\varphi}^{90}$ , dopełniają rozwiązania zadania.

f) Rys. 253 przedstawia perspektywę obrotowego stożka o pionowej osi. Na powierzchni tego stożka znajduje się ornament, który wymaga

do narysowania podziału koła podstawy na 82 części. Analogiczne zadanie z walcem podaje rys. 255.

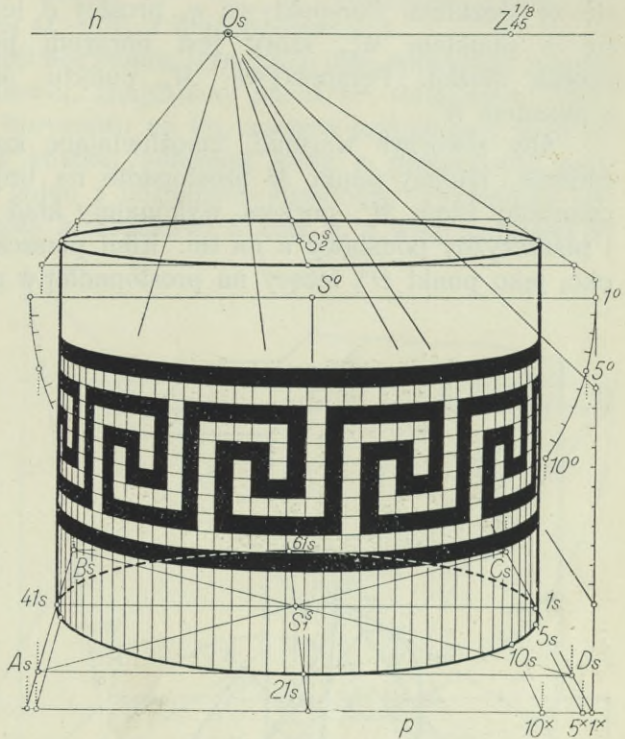
#### 47. Dalsze konstrukcje perspektywy stożków i walców.

a) Wykreślmy perspektywę stożka obrotowego, którego oś  $a$  ma położenie pionowe, a kierownica leży na płaszczyźnie poziomej.

Zadanie rozwiążemy w dwojaki sposób:  $\alpha$ ) przez użycie płaszczyzn stycznych,  $\beta$ ) przez zastosowanie stożka normalnego.

Przy rozwiązywaniu tych zadań czynimy założenie, że elementy geometrii wykreślnej są czytelnikowi znane.

ad  $\alpha$ ). Połączmy oko z wierzchołkiem  $W$  stożka prostą  $q$  (rys. 256) i oznaczmy punkt, w którym prosta ta przebija płaszczyznę podstawy  $a$  literą  $M$ . Styczne  $m$  i  $n$ , wykreślone z punktu  $M$  do koła  $k$ , stanowiącego kierownicę stożka, są śladami płaszczyzn stycznych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  do stożka, wzdłuż tworzących  $t_1$  i  $t_2$ ; płaszczyzny te przecinają się w prostej  $q$ , a więc przechodzą przez oko. Proste  $P - W_s \equiv m_s$  i  $Q - W_s \equiv n_s$ , w których płaszczyzny  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  przecinają tło, stanowią (wraz z elipsą  $k_s$ , będącą perspektywą koła  $k$ ) kontur pozorny stożka na tle, czyli perspektywę tworzących  $t_1$  i  $t_2$ , wzdłuż których płaszczyzny  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  stykają



Rys. 255.

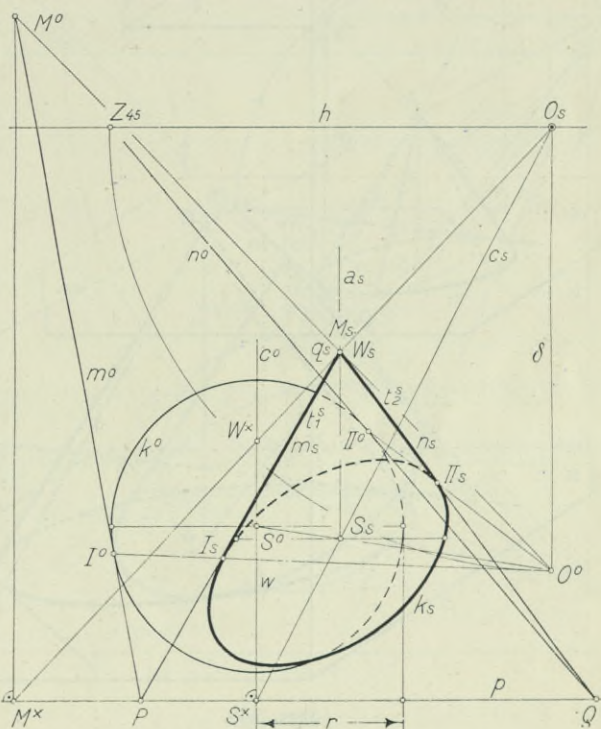




tywą prostej  $M - M^x$  jest prosta  $O_s - W_s - M^x$ , otrzymamy punkt  $M^x$ , jako przecięcie się prostej  $O_s - W_s$  z linią podstawy  $p$ .

Wychodząc z danej linii horyzontu (rys. 257), linii podstawy, punktu głównego i głębokości tłowej, znajdziemy punkt  $O^0$ , dowodzący dokonania układu płaszczyzny horyzontu na tło, poczem przyjmiemy koło  $k^0$ , stanowiące kierownicę  $k$  stożka, położoną wraz z płaszczyzną podstawy  $a$  na tło. Stosując jeden z poznanych sposobów, wykreślimy elipsę  $k_s$ , t. j. perspektywę koła  $k$ . Środkowi  $S$  koła  $k$ , a więc punktowi  $S^0$  koła  $k^0$ , odpowie punkt  $S_s$ ,

z którego wykreślimy prostopadłą do horyzontu, poczem obierzemy na niej punkt  $W_s$ , stanowiący perspektywę wierzchołka stożka. Łącząc punkt  $O_s$  z  $W_s$ , otrzymamy na  $p$  punkt  $M^x$ . Prostopadłą, wykreślona w nim do linii podstawy, przetnie prostą  $O^0 - W_s$  w punkcie  $M^0$ , z którego kreślimy styczne  $m^0$  i  $n^0$  do koła  $k^0$ . Punkty  $P$  i  $Q$ , w których styczne te przecinają linię podstawy, łączymy z punktem  $W_s$  prostymi, stanowiącymi perspektywy zarówno prostych  $m$  i  $n$ , jak i tworzących  $t_1$  i  $t_2$  zarysu istotnego stożka (porównaj rysunek 256).



Ryc. 257.

Punkty  $I^0$  i  $II^0$ , rzucone z punktu  $O^0$  na proste  $t_1^s$  i  $t_2^s$ , są punktami styczności tych ostatnich z elipsą  $k_s$ .

Jeżeli stożek oddalony jest zbyt od tła, to punkt  $M$ , po dokonanym układzie płaszczyzny podstawy, padnie na tło zbyt daleko linii horyzontu, co przy ograniczonej płaszczyźnie rysunku utrudni konstrukcyjne przeprowadzenie zadania. W tym wypadku postąpimy w sposób następujący: znajdziemy perspektywę  $S_s$ , środka  $S$  koła  $k$  (rys. 258), będącego kierownicą danego stożka  $\Phi$ , i perspektywę  $W_s$  jego wierzchołka. Punkt  $W_s$  uważajmy za wierzchołek nowego stożka obrotowego  $\Phi_1$ , którego tworzące są równoległe do danego, a punkt  $S_s$  za













Rys. 261.

Aleksander Gierymski. Wnętrze kościoła św. Marka. Ze zbiorów T-wa Zachęty Sztuk Pięknych w Warszawie.



Czytelnik, znający elementarne konstrukcje geometrii wykreslonej zna takze sposob wyznaczania, przy pomocy stożków normalnych, płaszczyzn stycznych do stożków obrotowych, jak również sposob wyznaczania stożków, opisanych na powierzchniach obrotowych (patrz autor „Geometria wykreslona“, wydanie II, Lwów, 1922).

Stosując metode stożków normalnych, wykreslimy w punkcie  $I$  prostopadłą do prostej  $W-I$  a z punktu  $W^n$  prostopadłą do  $W-O$ . Otrzymany na prostej  $p$  punkt  $M_1$  łączymy z punktem  $W$ ; prosta  $M_1-W$  jest rzutem tworzących  $t_1$  i  $t_2$ , wzdłuż których płaszczyzny, przechodzące przez punkt  $O^0$ , stykają się ze stożkiem. Tworzące  $t_1$  i  $t_2$  przecinają koło  $r$  w punktach 1 i 2. Prosta, punktami temi wyznaczona (cięciwa styczności śladów poziomych płaszczyzn stycznych do stożka), jest prostopadłą do tła, a długość jej znajdziemy, kładąc koło  $r$  około średnicy  $I-II$  na tło i kreśląc w punkcie  $M_1$  prostopadłą do  $r'$ . Odcinek  $\overline{M_1 I'}$  wyraża połowę tej cięciwy; punkt  $M_1$  jest jej środkiem.

Perspektywą  $M_1^s$  punktu  $M_1$  jest rzut punktu  $M_1$  z punktu  $O^0$  na prostą  $a_s$ . Śladem zbiegu cięciwy 1, 2 jest punkt  $Z^{90}$ , w którym prostopadła, wykreslona w punkcie  $(O)$  do  $A-(O)$ , przetnie linię horyzontu; jest to ślad zbiegu prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ . Ponieważ punkt ten leży poza obszarem płaszczyzny rysunkowej, więc użyjemy podziałek zbiegu. Jedną, a mianowicie  $u_0$ , przyjmujemy na prostej  $O_s(O)$ , dzieląc ten odcinek na pewną ilość, np. pięć równych części. Drugą podziałkę  $u_1$  utworzymy w ten sposób, że odcinek, równoległy do  $u_0$  a dający się podzielić z łatwością na pięć równych części, wstawimy między horyzont i prostą  $(O) Z^{90}$ . Korzystając z tych podziałek, połączymy punkt  $M_1^s$  ze śladem  $Z^{90}$  prostą  $m_s$ .

Przy pomocy punktu mierzenia  $M$  dla kierunku  $(O) Z^{90}$  wyznaczymy punkty  $1_s$  i  $2_s$ .

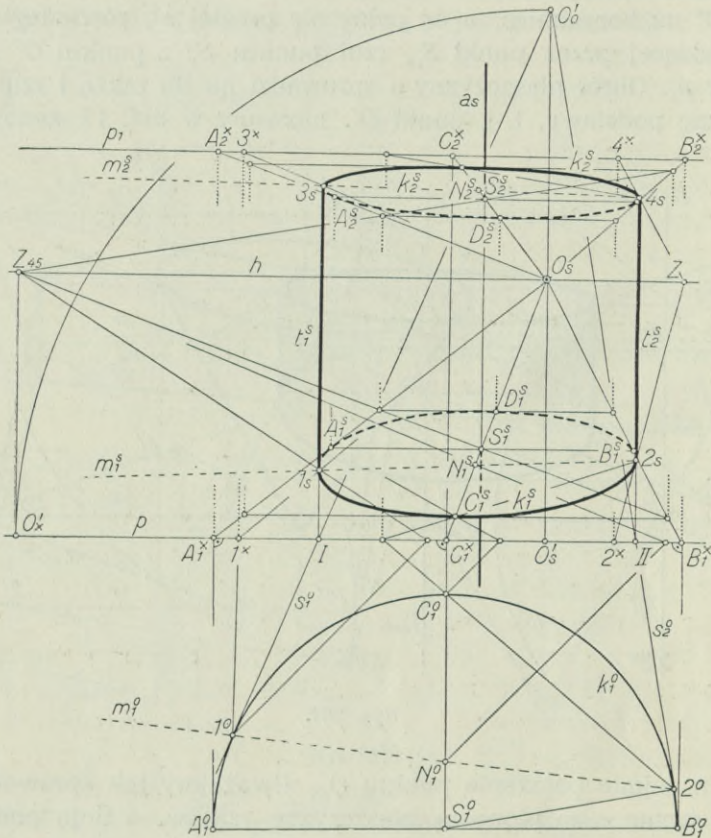
Aby otrzymać punkt  $M$ , przyjmujemy prostą  $h^1$ , równoległą do linii horyzontu i przecinającą ramiona kąta  $Z^{90}(O)A$  w obrębie rysunku. Łukiem koła, zakreślonym z otrzymanego punktu  $Z^1$ , jako środka, przeniesiemy punkt  $(O)$  na prostą  $h^1$ . Punkt  $Z^1$  uważać można za ślad zbiegu prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ , gdy tło zbliżymy do oka na odległość równą oddaleniu punktu  $(O)$  od prostej  $h^1$ . Punkt  $M^1$  jest wobec tego punktem mierzenia kierunku  $O-Z^1$  na przesunięciem do oka tła. Punkt  $M$ , w którym prosta  $(O)M^1$  przetnie linię horyzontu, jest punktem mierzenia dla kierunku  $OZ^{90}$ . Z punktu tego rzucimy punkt  $M_1^s$  na prostą  $p$  i odmierzymy  $\overline{M_1^m I^m} = \overline{M_1^m 2^m} = \overline{M^1 I^x}$ ; promienie  $M_1^m$  i  $M_2^m$  przetną prostą  $m_s$  w punktach  $1_s$  i  $2_s$ , które, połączone z punktem  $W_s$ , dopełniają konturu pozornego stożka. Punkty te są mianowicie punktami, w których styczne, wykreslone z punktu  $W_s$  do elipsy  $r_s$ , z krzywą tą się stykają.





prostopadłego w punkcie  $(O)$  do prostej  $(O)A$  z linią horyzontu, leżący poza obszarem płaszczyzny rysunkowej.

Aby znaleźć punkt mierzenia, odpowiadający śladowi zbiegu  $Z_{a^{90}}$ , weźmiemy pod uwagę siódmą część oddalenia i z punktu  $(O)^{1/7}$  poprowadzimy równoległą do promienia  $(O)Z_{a^{90}}$ . Na horyzoncie otrzymamy



Rys. 263.

częściowy ślad zbiegu  $Z_{90}^{1/7}$ , prostych prostopadłych do płaszczyzny  $a$ , który przypadkowo schodzi się w naszym rysunku z punktem  $O^0$ . Łuk koła, zakreślony z punktu  $Z_{90}^{1/7}$ , jako środka, promieniem  $(O)^{1/7}Z_{90}^{1/7}$ , przecnie horyzont w punkcie  $M^{1/7}$ . Odmierzmy  $O_s M$ , równe siedmiokrotnemu odcinkowi  $O_s M^{1/7}$ , otrzymując szukany punkt mierzenia  $M$ . Prócz tego znaleźliśmy punkt  $M$  jeszcze i sposobem, zastosowanym w rysunku 260.

Punkt  $M_1$ , w którym cięciwa  $m_1^x$  przecina linię podstawy  $p_1$ , rzucimy z punktu  $O^0$  na prostą  $a_s$  i otrzymany punkt  $M_1^s$  połączmy z punk-



tem  $Z_a^{90}$  prostą  $m_1^s$ . Połączenia tego dokonaliśmy za pośrednictwem poznanej w ust. 22 konstrukcji.

Punkt  $M_1^s$  rzucimy z punktu mierzenia  $M$  na  $p_1$  i odmierzymy  $\overline{M_1^m 1^m} = \overline{M_1^m 2^m} = \overline{M_1 1^x}$ . Promienie  $1^m - M$  i  $2^m - M$  przetną prostą  $m_1^s$  w punktach  $1_s$  i  $2_s$ , które są punktami styczności prostych  $t_1^s$  i  $t_2^s$  z elipsą  $k_1^s$ .

W odległości równej przyjętej wysokości walca wykreślimy równoległe do  $p_1$  prostą  $p_2$ , która jest śladem łowym płaszczyzny poziomej, ograniczającej walec. Wykreślenie trapezu, opisanego na elipsie  $k_2^s$ , a potem i samej elipsy nie następuje trudności.

Punkt  $M_1^m$  rzucimy prostopadłe na  $p_2$ , jako punkt  $M_2^m$ , i ten połączymy z punktem  $M$ , otrzymując na  $a_s$  punkt  $M_2^s$ , który łączymy ze śladem  $Z_a^{90}$  prostą  $m_2^s$ . Proste  $t_1^s$  i  $t_2^s$  przecinają  $m_2^s$  w punktach  $3_s$  i  $4_s$  styczności z elipsą  $k_2^s$ .

*Sposób drugi.* Wykonajmy kład płaszczyzny horyzontu i płaszczyzny podstawy, wraz ze znajdującym się na niej kołem  $k_1$  i stanowiskiem  $O'$ , na tło (rys. 263).

Koło  $k_1$  zajmie na tle położenie koła  $k_1^0$  o środku  $S_1^0$ , a punkt  $O'$  położenie punktu  $O'_0$ . Punkt  $O'_s$  jest rzutem prostokątnym stanowiska na tło; odległość  $O'_s - O'_0$  równa jest oddaleniu łowemu.

Styczne  $s_1^0$  i  $s_2^0$ , wykreślone z punktu  $O'_0$  do koła  $k_1^0$ , są śladami na płaszczyźnie podstawy płaszczyzn stycznych do walca a przechodzących przez oko, sprowadzonymi wskutek dokonanego kładu płaszczyzny podstawy na tło. Znajdziemy perspektywę  $1_s$  i  $2_s$  punktów  $1^0$  i  $2^0$ , a więc i perspektywę  $m_1^s$  cięciwy styczności  $m_1^0$ . Proste pionowe  $t_1^s$  i  $t_2^s$ , wykreślone przez punkty  $1_s$  i  $2_s$ , są stycznymi w tych punktach do elipsy  $k_1^s$  i należą do zarysu pozornego walca.

Odtworzenie konstrukcji perspektywy  $k_2^s$  koła  $k_2$ , stanowiącego górne ograniczenie walca, pozostawiamy czytelnikowi.

c) *Wykreślić perspektywę stożka obrotowego, którego oś  $a$ , wyznaczona śladami: łowym  $T_a$  i zbiegu  $Z_a$ , nachylona jest do tła pod dowolnym kątem. Punkt główny, oddalenie łowe, położenie środka  $S$  koła równoleżnikowego stożka, jego promień  $r$  i wysokość w stożka są dane.*

*Sposób pierwszy: użycie płaszczyzn stycznych* (rys. 264). W punkcie  $S$  prostej  $a$  poprowadzimy do niej płaszczyznę prostopadłą  $\alpha$  (patrz ust. 10, pkt. b), znajdując jej ślady  $z_a$  i  $t_a$ . Następnie wykonamy kład tej płaszczyzny na tło. Środek rzutów zajmie położenie punktu  $O^0$ , prosta  $c$ , krawędź płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varphi$ , zejdzie się ze śladem  $t_\varphi$ , a rzut  $S^0$  punktu  $S_s$ , z punktu  $O^0$  na  $c^0$ , będzie środkiem koła  $k_r^0$ , które zakreślimy danym promieniem  $r$ . Koło to jest kładem koła równoleżnikowego stożka, znajdującego się na płaszczyźnie  $\alpha$ .

Wyznaczenie punktów  $1_s$ ,  $2_s$ ,  $3_s$  i  $4_s$ , a więc i perspektywy kwadratu, opisanego na kole  $k_r^0$  nie następuje żadnych trudności, podobnie jak i wykreślenie elipsy  $k_r^s$ .



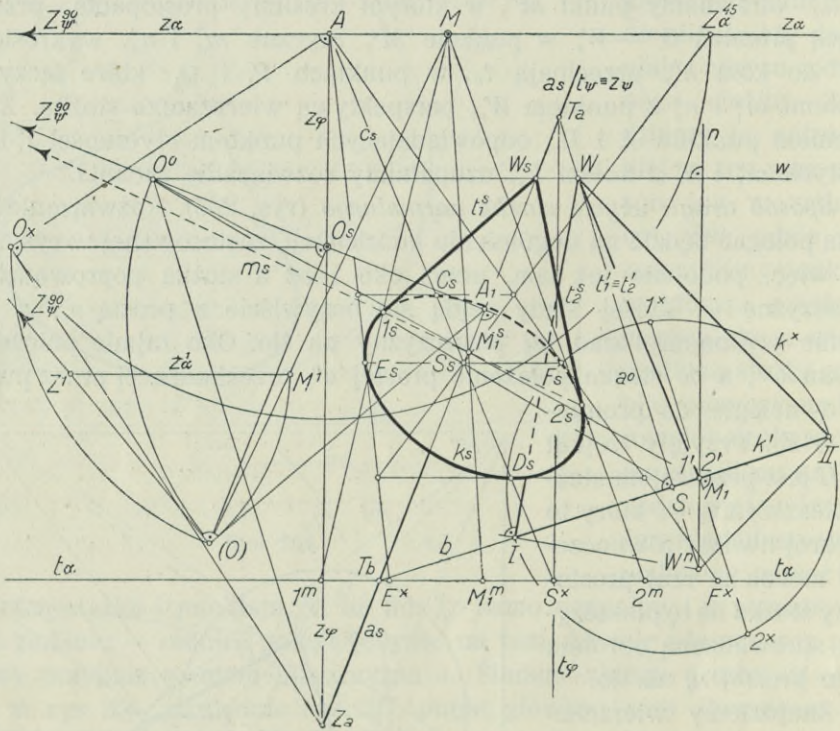








Rzut  $S_s$ , środka  $S$  odcinka  $\overline{I II}$ , na prostą  $a_s$  z punktu  $O^0$  jest perspektywą środka koła  $k_s$ , stanowiącego podstawę stożka. W celu wykreślenia perspektywy  $k_s$  koła  $k$  wyznaczmy płaszczyznę  $a$  tego koła, prostopadłą do osi  $a$  w punkcie  $S$ , znajdując jej ślady  $z_a$  i  $t_a$ . W tym celu połączmy ślad  $Z_a$  z punktem głównym prostą i wykreślmy do niej w tym punkcie prostopadłą, na której odmierzymy odcinek  $\overline{O_s O_x}$ , równy oddaleniu tłowemu. Punkt  $Z_a$  połączmy z punktem  $O_x$  i wykreślmy



Rys. 266.

w nim prostopadłą do  $O_x Z_a$ , która przecnie prostą  $O_s Z_a$  w punkcie  $A$ . Prosta  $z_a$ , poprowadzona przez punkt  $A$  prostopadłe do prostej  $A O_s Z_a$ , jest śladem zbiegu płaszczyzny  $a$ . Aby wyznaczyć ślad tłowy tej płaszczyzny, wykreślmy prostą  $c_s$ , łączącą punkty  $A$  i  $S_s$ , i uważaj ją będziemy za perspektywę prostej  $c$ , przecinającej prostą  $a$  w punkcie  $S$ , a leżącej na płaszczyźnie  $a$ . Śladami płaszczyzny, wyznaczonej prostymi  $a$  i  $c$ , są proste  $z_q$  i  $t_q$ . Ślad tłowy  $t_a$  płaszczyzny  $a$  przejdzie przez punkt przecięcia się prostej  $c_s$  z prostą  $t_q$  — który to punkt jest śladem tłowym prostej  $c$ . Oznaczony jest on na rysunku literą  $S^x$ . Ślad  $t_a$  przejdzie równocześnie przez punkt  $T_b$ , w którym prosta  $b$  przecina prostą  $a_s$ .



Koło, zakreślone z punktu  $A$ , jako środka, promieniem  $\overline{AO_x}$ , przetnie ślad  $z_a$  w punkcie  $Z_a^{45}$ , który jest, jak wiadomo, śladem zbiegu prostych, równoległych do płaszczyzny  $\alpha$ , względnie na niej leżących, a nachylnych do jej śladów pod kątem  $45^\circ$ .

Punkt  $S_s$  rzucimy z punktu  $A$  na  $t_a$ , odmierzmy  $\overline{S^x E^x} = \overline{S^x F^x} = \overline{S I}$ , równe promieniowi koła  $k$ , i punkty  $E^x$  i  $F^x$  rzucimy z punktu  $A$  na prostą poziomą, poprowadzoną przez punkt  $S_s$ . Otrzymamy tam punkty  $E_s$  i  $F_s$ , a pośrednictwo promienia  $S_s Z_a^{45}$  pozwoli wyznaczyć jeszcze średnicę  $\overline{C_s D_s}$  elipsy.

Rzut  $M_1^s$  punktu  $M_1$  z punktu  $O^0$  na prostą  $a_s$  jest perspektywą środka cięciwy styczności  $m$  tworzących zarysu istotnego stożka. Prosta  $m$  jest prostopadłą do płaszczyzny  $\psi$ , która przechodzi przez oko i oś  $a$  stożka, jej perspektywa  $m_s$  przejdzie więc przez ślad zbiegu  $Z_\psi^{90}$  prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\psi$ . Ślad ten leży poza obszarem rysunku i jest punktem przecięcia się prostej  $A_1 O_s O^0$  z promieniem, wykreślonym w punkcie  $(O)$  prostopadle do prostej  $(O) A_1$ .

Ponieważ płaszczyzna  $\psi$ , jako przechodząca przez oś stożka, jest prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ , więc promień, łączący oko ze śladem zbiegu  $Z_\psi^{90}$ , leży na płaszczyźnie zbiegu płaszczyzny  $\alpha$ , a co za tem idzie, punkt  $Z_\psi^{90}$  leżeć będzie na śladzie  $z_a$ . Wszystkie zresztą proste prostopadłe do płaszczyzny  $\psi$  są równoległe do płaszczyzny  $\alpha$ , a więc ich ślad zbiegu leżeć będzie na śladzie zbiegu  $z_a$  płaszczyzny  $\alpha$ .

Za pośrednictwem prostej poziomej  $z_a^1$ , przecinającej promień  $(O) Z_\psi^{90}$  w punkcie  $Z^1$ , znajdziemy punkt  $M^1$ , którego rzut  $M$  z punktu  $(O)$  na ślad  $z_a$  jest punktem mierzenia wszystkich prostych, prostopadłych do płaszczyzny  $\psi$ . Z punktu tego rzucimy punkt  $M_1^s$  na ślad  $t_a$ , odmierzmy  $\overline{M_1^m 1^m} = \overline{M_1^m 2^m} = \overline{M_1 1^x} = \overline{M_1 2^x}$  i punkty  $1^m$  i  $2^m$  połączymy z punktem  $M$ . Na prostej  $m_s$  otrzymamy punkty  $1_s$  i  $2_s$ , które ograniczają cięciwę styczności stycznych  $t_1^s$  i  $t_2^s$ , wykreślonych z punktu  $W_s$  do elipsy  $k_s$ .

#### 48. Perspektywa wewnątrz obrotowych walców i stożków.

Weźmy pod uwagę walec obrotowy o osi pionowej; wewnątrz niego przyjmijmy środek rzutów (oko) a następnie dowolnie w przestrzeni pionową płaszczyznę  $\tau_a$ . Płaszczyzny równoległe do płaszczyzny podstawy przecinać będą ten walec wzdłuż kół, płaszczyzny dowolnie położone przecinać go będą podług elips, a płaszczyzny pionowe — wzdłuż dwóch tworzących. Płaszczyzna zniknięcia przetnie każde przyjęte na walcu koło lub każdą elipsę w dwóch punktach — perspektywą więc tych linii krzywych będą wyłącznie hiperbole. Jedyne tworzące walca przejdą po odwzorowaniu perspektywicznym w pęk prostych równoległych, prostopadłych do linii horyzontu. Przykładami perspektyw wewnątrz walców obrotowych są rys. 215, 234, 239, 242 i 285.

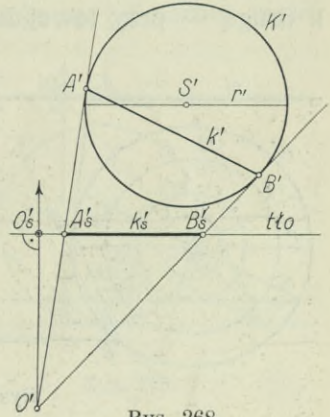




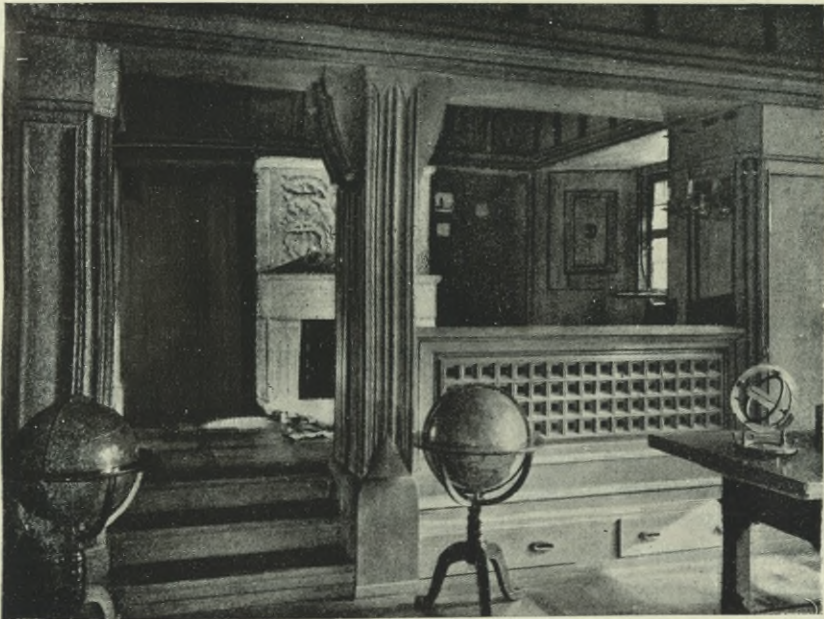


ności od położenia kuli względem płaszczyzny zniknięcia, płaszczyzna tła przetnie stożek widzenia kuli wzdłuż elipsy, hiperboli lub paraboli. Zarys pozorny kuli może więc być elipsą, hiperbolą lub parabolą.

W szczególności, jeżeli płaszczyzna zniknięcia nie przecina kuli, ani też nie jest do niej styczna, to przy takim położeniu kuli perspektywą jej jest elipsa. Rys. 268 objaśnia nam tę sprawę w widoku z góry (w rzucie poziomym). Koło  $K'$  jest rzutem poziomym kuli, punkt  $O'$  rzutem poziomym oka, odcinek  $A'B' = k'$  przedstawia rzut poziomy zarysu istotnego, a odcinek  $A_s'B_s' = k'_s$  rzut poziomy zarysu pozornego, t. j. rzut poziomy elipsy, podług której pionowa płaszczyzna obrazu (tła) przecina stożek widzenia kuli. Ponieważ płaszczyzna zniknięcia nie przecina kuli, więc nie przecina też żadnego koła, przyjętego na kuli — perspektywą zatem tych kół będą elipsy. Perspektywą koła południkowego  $r$ , którego płaszczyzna jest równoległa do tła, będzie koło. Jeżeli płaszczyzna zniknięcia nie przecina kuli, ani nie jest do niej styczną — a promień, łączący



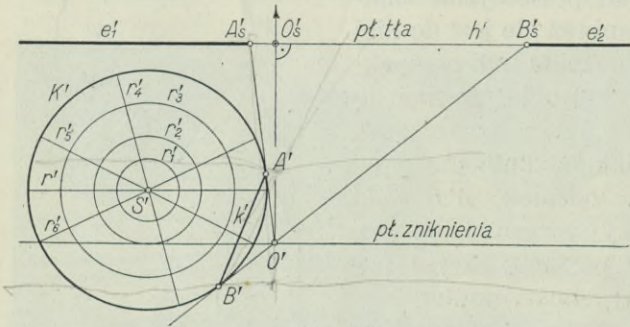
Rys. 268.



Rys. 269.

środek kuli z okiem, jest prostopadły do tła — to perspektywą kuli będzie koło.

Na rys. 269 widzimy perspektywę dwóch kul: jedną jest koło a drugą — przy lewej krawędzi obrazu — wyraźnie elipsa.

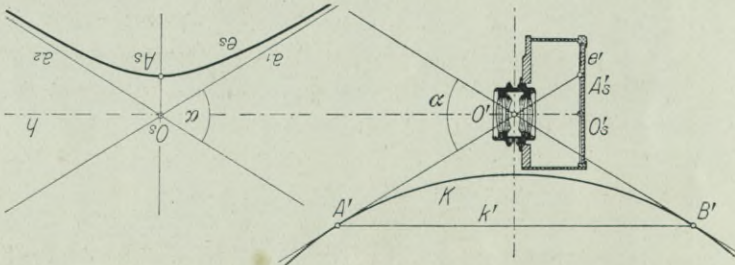


Rys. 270.

Jeżeli położenie kuli względem środka rzutów jest takie, że płaszczyzna zniknięcia kulę tę przecina — to wówczas jej zarysem pozornym jest hiperbola.

Rys. 270 uzmysławia nam sytuację w rzucie poziomym. Odcinek  $A'B' = k'$  jest rzutem

poziomym koła, stanowiącego zarys istotny kuli;  $e_1$  i  $e_2$  przedstawiają dwie gałęzie hiperboli  $k_s$ , leżące na pionowej płaszczyźnie tła. Gałąź  $e_2$  ma znaczenie jedynie geometryczne; praktycznie wchodzi w grę tylko gałąź  $e_1$ . Perspektywami kół, przyjętych na kuli  $K$ , będą w tym wypadku elipsy, parabole i hiperbole. Perspektywą koła południkowego  $r$ , równoległego do tła, będzie koło. Perspektywami kół, przyjętych na kuli, nie przeciętych płaszczyzną zniknięcia (np. koło równoleżni-



Rys. 271.

kowe  $r_1$ ), będą elipsy. Perspektywą równoleżnika  $r_3$  lub południka  $r_4$  będzie hiperbola, gdyż płaszczyzna zniknięcia przecina każde z tych kół w dwóch punktach. Odwzorowania perspektywiczne równoleżnika  $r_2$  lub południków  $r_5$  i  $r_6$  są parabolami; koła te są bowiem styczne do płaszczyzny zniknięcia.

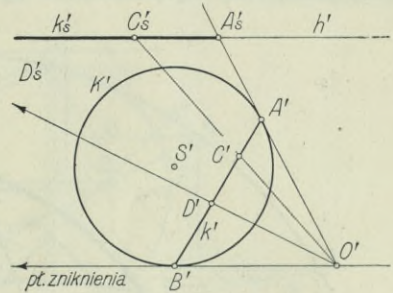
Hiperbola, jako zarys pozorny kuli, zdarza się w praktyce stosunkowo rzadko; wystąpi przy obserwacji lub jako fotogram kulistej kopuły albo kulistego budynku. Zdjęcie fotograficzne powierzchni morza, zro-



bione ze szczytu latarni morskiej lub z aeroplanu, względnie balonu — stanowi również przykład perspektywy kuli, jako hiperboli. Stożek widzenia kuli ziemskiej o wierzchołku, którym jest środek obiektywu, przecięty płaszczyzną kliszy fotograficznej, rysuje na jej górnej części odwrócony obraz jednej gałęzi hiperboli. Schematyczny rys. 271 tłumaczy sprawę wystarczająco jasno. Ową gałąź hiperboli  $e_s$  nazywać będziemy *horyzontem naturalnym*.

Jeżeli kula jest styczną do płaszczyzny zniknięcia, to perspektywą jej jest parabola (rys. 272).

*b) Przybliżona konstrukcja perspektywy kuli.* Polega ona na wykreśleniu zarysu pozornego kuli, jako obwiedni perspektywy jej równoleżników i południków.



Rys. 272.

Przykład, podany na rys. 273, odnosi się do kuli, która jest styczną do płaszczyzny podstawy w punkcie  $M$  i styczną do tła w punkcie  $P$ .

Punkt  $P$  rzucimy prostopadłe na linię podstawy  $p$ , a następnie promieniem równym odcinkowi  $PP'$  zakreślmy z punktu  $P$ , jako środka, koło  $k$ . Koło to uważać należy za rzut prostokątny kuli na tło. Weźmy pod uwagę równik  $r$  oraz równoleżniki  $r_1, r_2$  i  $r_3$  na kuli i znajdziemy ich perspektywę. W tym celu rzućmy je na płaszczyznę podstawy i opiszmy na nich kwadraty. Perspektywą tych kwadratów są trapezy  $A'B'C'D_s, 1'_s 2'_s 3'_s 4'_s$  i  $9'_s 10'_s 11'_s 12'_s$ ; ich wspólny środek  $M_s$  jest perspektywą punktu styczności kuli z płaszczyzną podstawy. Elipsa  $r'_s$ , wpisana w pierwszy trapez, jest perspektywą rzutu poziomego równika kuli, co jest równoznaczne z perspektywą rzutu poziomego samej kuli. Prosta  $a_s$ , wykreślona z punktu  $M_s$  prostopadłe do linii horyzontu, jest perspektywą osi kuli; punkt  $N_s$  jest perspektywą drugiego „bieguna“.

Perspektywą kwadratu, opisanego na równiku, jest trapez  $ABC_s D_s$ ; bok  $AB$  kwadratu leży na tle, punkt  $S_s$  jest perspektywą środka kuli. Elipsa  $r_s$ , wpisana w ten trapez, jest perspektywą równika kuli.

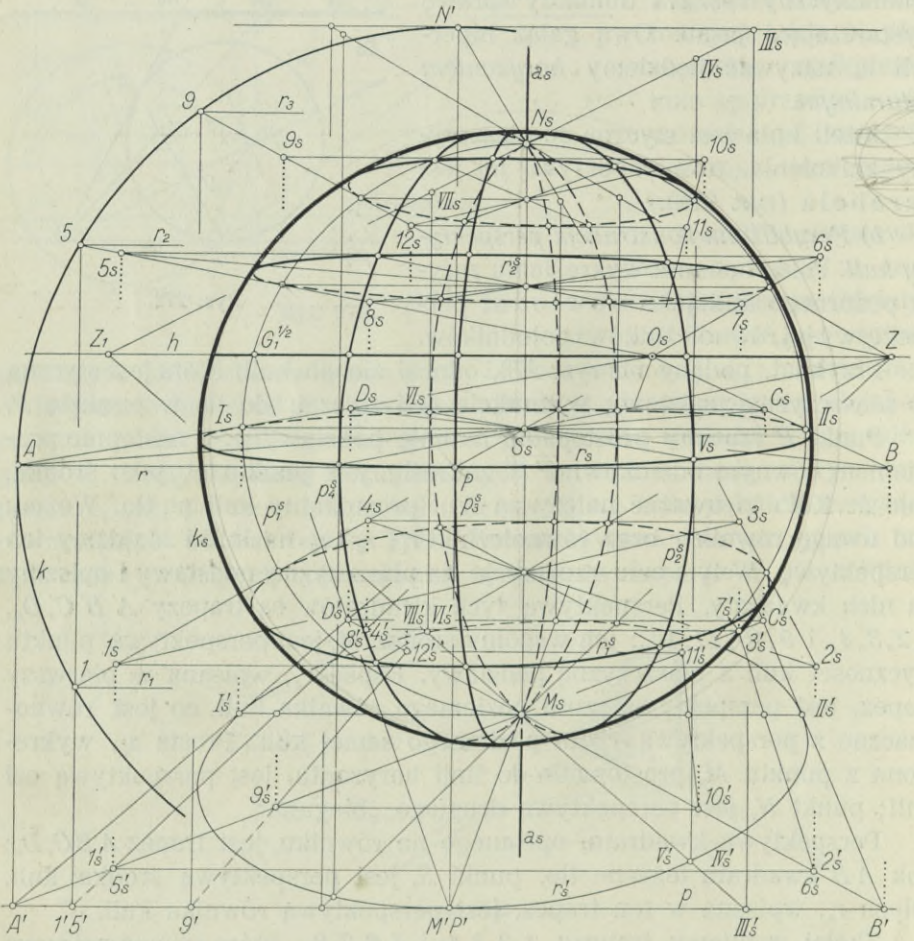
Zkolei rysujemy trapezy  $1_s 2_s 3_s 4_s$  i  $5_s 6_s 7_s 8_s$ , które są perspektywą kwadratów, opisanych na równoleżnikach  $r_1$  i  $r_2$ , poczem wysowujemy w nie elipsy  $r_1^s$  i  $r_2^s$ . Pierwsza leży pod, druga nad linią horyzontu. Trzeci równoleżnik wyrazi się perspektywicznie, jako elipsa, wpisana w trapez  $9_s 10_s 11_s 12_s$ .

Co się tyczy południków kuli, to przyjęliśmy ich cztery. Jako pierwszy, przyjęliśmy ten, którego płaszczyzna jest równoległa do tła; jego perspektywą jest koło  $p_1^s$ , zakreślone z punktu  $S_s$ , jako środka, promieniem, równym odcinkowi  $S_s I_s = S_s II_s = M_s I_s = M_s II_s = M_s S_s$ . Perspektywą



innych południków będą elipsy. Aby wykreślić je, postąpimy, jak z równo-  
leżnikami: wykreślimy trapezy, jako perspektywy kwadratów, opisanych  
na południkach, a następnie w trapezy te wpiszemy elipsy.

Przejdźmy konstrukcję, prowadzącą do wykreślenia elipsy  $p_2^s$ , która  
jest perspektywą południka  $p_2$ . Połączmy dowolny punkt  $Z_1$  linii hory-



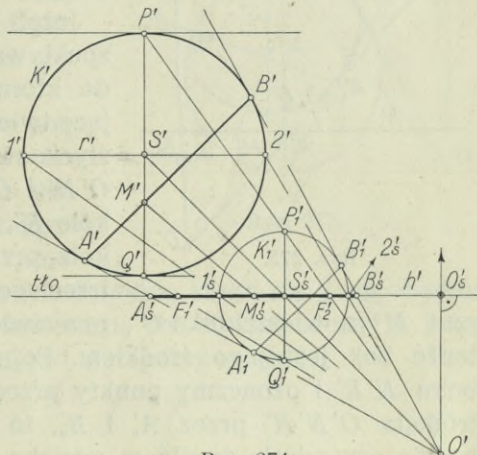
Rys. 273.

zontu z punktem  $M_s$ , aż do przecięcia się z linią podstawy  $p$  w punk-  
cie  $III_s$ . Kreślimy  $III_s III_s' = M'N'$  prostopadłe do  $p$  i punkt  $III_s$  łączymy  
z punktem  $Z_1$ . Prosta  $Z_1 III_s$  przecina elipsę  $r_s'$  w punktach  $IV_s'$  i  $VII_s'$ ,  
z których prowadzimy prostopadłe do linii horyzontu, aż do przecięcia  
się z promieniem  $Z_1 III_s$ . Trapez  $IV_s' IV_s' VII_s' VII_s'$  jest perspektywą kwa-  
dratu, opisanego na południku  $p_2$ ; elipsa  $p_2^s$ , wpisana w ten trapez, jest



perspektywą koła  $p_2$ . W analogiczny sposób znajdziemy elipsy  $p_3^s$  i  $p_4^s$ . Obwiednią wykreślonych elips  $r_s, r_1^s, r_2^s, r_3^s, p_2^s, p_3^s$  i  $p_4^s$  jest elipsa  $k_s$ , będąca zarysem pozornym, czyli perspektywą kuli.

**50. Dalsze konstrukcje perspektywy kuli.** a) Wiemy, że perspektywą kuli jest krzywa stożkowa, którą w zależności od położenia kuli względem płaszczyzny zniknięcia jest bądź elipsa, względnie koło, bądź hiperbola, bądź też parabola. W ustępie poprzednim wykreśliliśmy zarys pozorny kuli przy pomocy perspektywy jej równoleżników i południków. Metoda geometrycznie ścisła polega na wykreśleniu zarysu pozornego kuli drogą bezpośrednią. Rozwiązanie zadania oprzemy na następującym twierdzeniu: „Punkty styczności kul, wpisanych w stożek obrotowy, z płaszczyzną sieczną, są ogniskami elipsy (hiperboli), podług której płaszczyzna ta przecina stożek“ (Twierdzenie Dandelain'a<sup>1)</sup>). Przypomnijmy jeszcze, że miejscem geometrycznym ognisk elips, względnie hiperbol, które otrzymamy, tnąc stożek obrotowy płaszczyznami równoległymi, są dwie proste, przechodzące przez wierzchołek stożka, to wówczas zrozumieemy przebieg konstrukcji, odnoszących się do bezpośredniej perspektywy kuli.



Rys. 274.

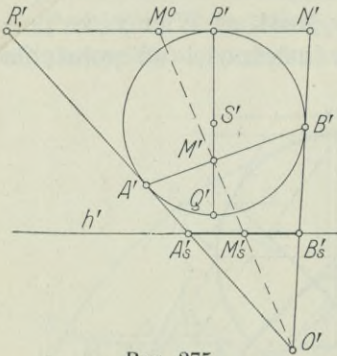
Rzućmy kulę  $K$ , o środku  $S$ , na pionową płaszczyznę  $t\lambda$  z punktu  $O$  (rys. 274), przyczem niechaj promień, łączący punkty  $S$  i  $O$ , ma położenie poziome.

Zarys istotny kuli jest kołem, którego rzut poziomy jest odcinkiem  $\overline{A'B'}$ ; zarysem pozornym kuli jest elipsa, przedstawiona na rys. 274, jako odcinek  $\overline{A_s'B_s'}$ . Niechaj punkty  $P'$  i  $Q'$  ograniczają średnicę koła  $K'$ , prostopadłą do  $t\lambda$ ; rzuty tych punktów z punktu  $O'$  na  $h'$ , t. j. punkty  $F_1'$  i  $F_2'$ , są rzutami poziomymi ognisk elipsy, będącej zarysem pozornym kuli  $K$ .

W stożek widzenia kuli  $K$ , t. j. w stożek obrotowy, opisany z oka na kuli  $K$ , wpisać można dowolną ilość kul, których środki leżą na osi stożka. Wszystkie one mają wspólny zarys pozorny. Weźmy pod uwagę tę kulę  $K_1$ , której środek leży na  $t\lambda$ , którą zatem  $t\lambda$  przecina wzdłuż koła południkowego. Istotnym zarysem tej kuli jest koło, którego rzut

<sup>1)</sup> Patrz autora „Geometria wykreslna“, wydanie II. ust. 163.

poziomy jest odcinkiem  $\overline{A_1B_1}$ ; odcinek ten jest równoległy do odcinka  $\overline{A'B'}$ , który jest, jak wiemy, rzutem poziomym zarysu istotnego kuli  $K$ . Zarys pozorny kuli  $K_1$  jest zatem identyczny z zarysem pozornym kuli  $K$ , z czego wynika, że perspektywę tej ostatniej znaleźć można, posługując się kulą  $K_1$ .

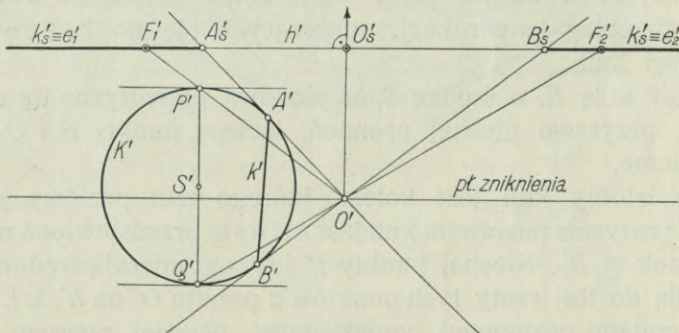


Rys. 275.

Jeżeli znamy ogniska elipsy, będącej perspektywą kuli, to znamy i środek elipsy, do którego odnieść także można następujące twierdzenie geometrii płaskiej: cięciwa stycznej  $\overline{A'B'}$  (rys. 275) dwóch boków  $O'N'$  i  $O'R'$  trójkąta  $O'N'R'$ , opisanego na kole  $K'$ , przecina się ze średnicą  $\overline{P'Q'}$  tego koła, przechodzącą przez punkt styczności  $P'$  trzeciego boku  $N'R'$ , w punkcie  $M'$ , którego

rzut  $M^0$  z wierzchołka  $O'$ , przeciwnego temu trzeciemu bokowi, na tenże bok jest jego środkiem. Poprowadźmy prostą  $h'$  równoległą do boku  $N'R'$  i oznaczmy punkty przecięcia się jej z pozostałymi bokami trójkąta  $O'N'R'$  przez  $A'_s$  i  $B'_s$ , to rzut  $M'_s$  środka  $M^0$  odcinka  $\overline{N'R'}$  będzie oczywiście środkiem odcinka  $\overline{A'_sB'_s}$ .

Porównanie rysunków 274 i 275 wykaże ich analogię: cięciwa stycznej  $\overline{A'B'}$  przecina średnicę  $\overline{P'Q'}$  w punkcie  $M'$ ; rzut  $M'_s$  tego punktu na prostą  $h'$  jest środkiem odcinka  $\overline{A'_sB'_s}$ , czyli rzutem poziomym środka elipsy, jako perspektywy kuli.



Rys. 276.

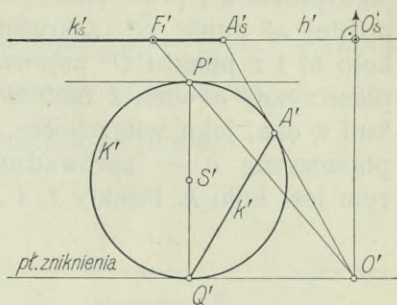
W przypadku, gdy płaszczyzna zniknięcia przecina kulę (rys. 276), perspektywą jej jest, jak wiemy, *hiperbola*. Zarys istotny kuli jest oczywiście kołem, które w rzucie poziomym wyraża się odcinkiem  $\overline{A'B'} \equiv k'$ . Płaszczyzny równoległe do tła stykają się z kulą w punktach  $P$  i  $Q$ ; rzut tych punktów z oka na tło daje ogniska  $F_1$  i  $F_2$  hiperboli  $k_s$ . Ga-



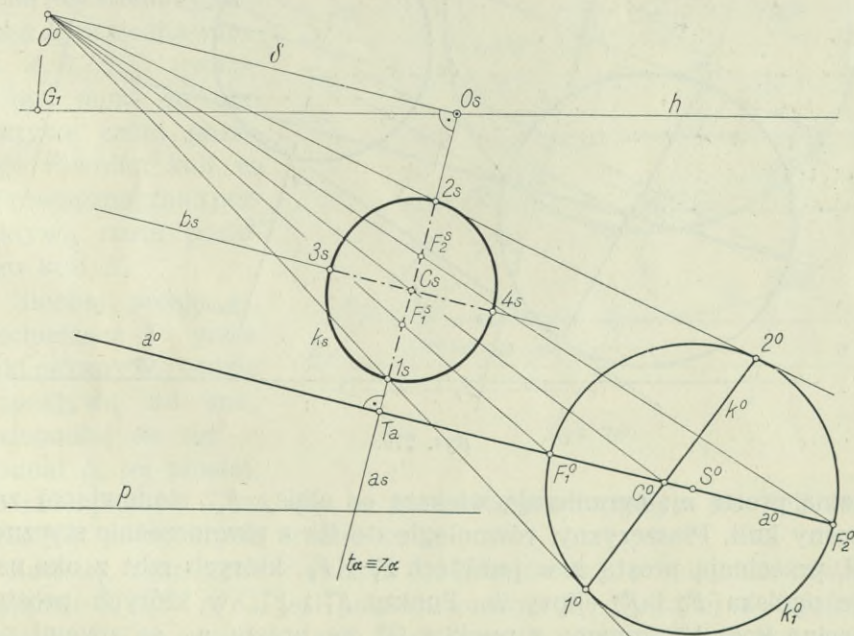
łąz  $e_2$  tej hiperboli ma znaczenie wyłącznie geometryczne; praktycznie wchodzi w grę jedynie część  $e_1$  hiperboli. Rys. 277 przedstawia w rzucie poziomym takie położenie kuli względem płaszczyzny zniknięcia, że perspektywą jej jest parabola; kula jest styczną do płaszczyzny zniknięcia. Rzut z oka na płaszczyznę  $\tau$ ła punktu  $P$ , w którym płaszczyzna równoległa do  $\tau$ ła styka się z kulą, jest ogniskiem paraboli.

b) Przystąpmy do zastosowania powyższych uwag.

Na prostej  $a$ , prostopadłej do  $\tau$ ła, przyjęliśmy punkt  $S$ , który uważajmy za środek kuli  $K$  o promieniu  $r$ . Stożek  $\Phi$ , opisany na kuli z oka, jako wierzchołka, styka się z nią wzdłuż koła  $k$ ; rzut tego koła z oka na płaszczyznę  $\tau$ ła, równoznaczny z przekrojem tego stożka płaszczyzną  $\tau$ ła, jest perspektywą kuli.



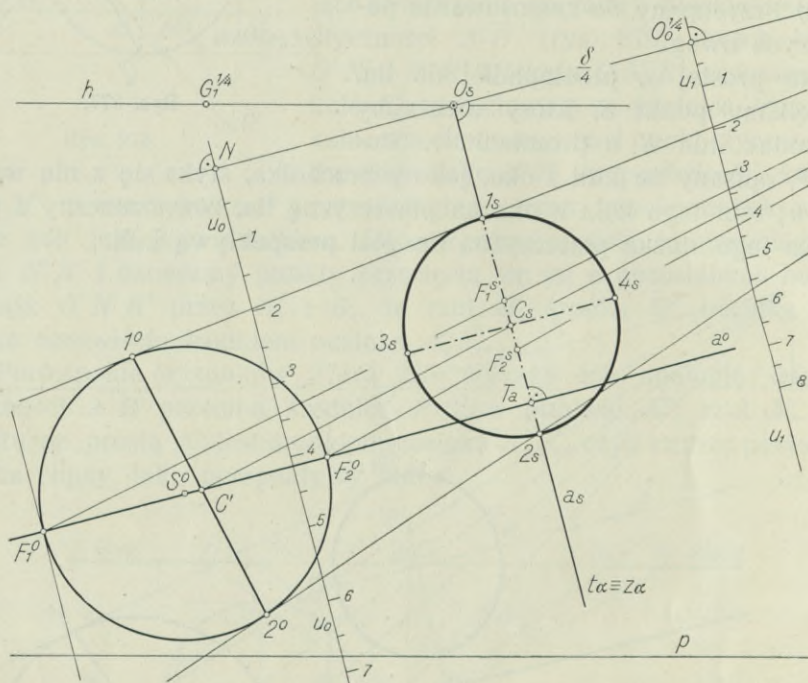
Rys. 277.



Rys. 278.

Poprowadźmy przez oko i prostą  $a$  płaszczyznę  $\alpha$ ; przetnie ona kulę w kole  $k_1$ , które uważać możemy za rzut na nią — kuli  $K$ . Wykonajmy kład płaszczyzny  $\alpha$  na  $\tau$ ło: oko zajmie położenie punktu  $O^o$

(rys. 278) na prostopadłej, wykreślonej w punkcie głównym  $O_s$  do prostej  $a_s$ , w odległości równej głębokości tłowej; prosta  $a$  padnie na tło, jako prosta  $a^0$ , prostopadła w punkcie  $T_a$  do prostej  $a_s$ . Przyjmijmy na prostej  $a^0$  punkt  $S^0$ , zakresmy z niego, jako środka, promieniem  $r$  koło  $k_1^0$  i z punktu  $O^0$  poprowadźmy doń styczne. Otrzymaliśmy kład płaszczyzny  $\alpha$  wraz z rzutem na niej kuli i stożka, opisanego na tej kuli z oka, jako wierzchołka. Cięciwa styczności  $1^0 2^0$  jest rzutem na płaszczyznę  $\alpha$  — sprowadzoną na tło — zarysu istotnego kuli, którym jest koło  $k$ . Punkty  $1_s$  i  $2_s$ , w których promienie  $O^0 - 1^0$  i  $O^0 - 2^0$



Rys. 279.

przetną prosta  $a_s$ , ograniczają większą oś elipsy  $k_s$ , stanowiącej zarys pozorny kuli. Płaszczyzny, równoległe do tła a równocześnie styczne do kuli, przecinają prosta  $a$  w punktach  $F_1$  i  $F_2$ , których rzut z oka na tło daje ogniska  $F_1^s$  i  $F_2^s$  elipsy  $k_s$ . Punkty  $F_1^0$  i  $F_2^0$ , w których prosta  $a^0$  przecina koło  $k_1^0$ , rzucone z punktu  $O^0$  na prosta  $a_s$ , są owymi ogniskami. Środek  $C_s$  odcinka  $1_s 2_s$  jest środkiem elipsy  $k_s$ , przez który wykreślimy prosta  $b_s$ , prostopadła do prostej  $a_s$ . Połową osi  $1_s 2_s$ , zakreslimy z jednego z ognisk łuki, aż do przecięcia się z prosta  $b_s$  w punktach  $3_s$  i  $4_s$ . Punkty te ograniczają drugą, krótszą, oś elipsy  $k_s$ , która tym sposobem jest wyznaczona.



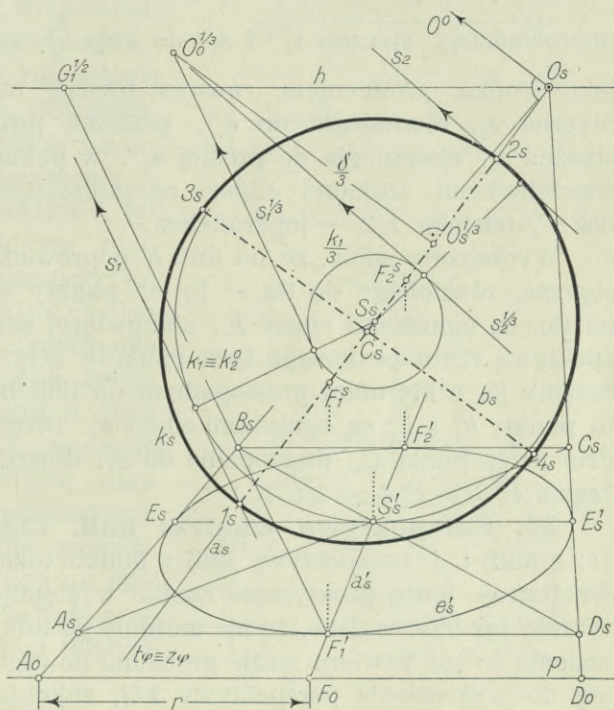
Jeżeli głębokość tłowa jest tak wielka, że kład  $O^0$  oka znajdzie się poza obrębem rysunku — to wówczas posłużymy się podziałką zbiegu, jak to uczyniliśmy na rys. 279. Gdybyśmy przyjęli, jako jednostkę podziałki, na prostej  $a_s$ , 8 mm, to jednostką podziałki  $u_1$  będzie  $a_1 = \frac{4-1}{4} \cdot 8 = 6$  mm. Podziałkę z prostej  $a_s$  przesunęliśmy równolegle w położenie  $u_0$  o odległość  $\overline{O_s N} = \overline{O_s O_0^{1/4}} = \frac{\delta}{4}$ ; jednostką jej będzie  $a_0 = 10$  mm.

e) To samo zadanie, rozwiązane w cośkolwiek odmienny sposób, podaje rys. 280.

Wykreślmy perspektywę  $A_s B_s C_s D_s$  kwadratu, leżącego na płaszczyźnie poziomej. Długość boku kwadratu równa jest średnicy kuli. Elipsa  $e'_s$ , wpisana w trapez  $A_s B_s C_s D_s$ , uważana być może za perspektywę rzutu poziomego równika kuli, co jest równoznaczne z perspektywą rzutu poziomego kuli  $K$ .

Niechaj prosta  $a_s$ , przechodząca przez punkt główny  $O_s$ , będzie perspektywą osi kuli, prostopadłej do tła — to punkt  $S_s$  tej prostej, jako rzut punktu  $S'_s$  na nią, w kierunku prostopadłym do linii horyzontu, jest perspektywą środka kuli.

Koło  $k_1$ , zakreślone z punktu  $S_s$ , jako środka, promieniem równym odcinkowi  $\overline{S'_s E_s} = \overline{S'_s E'_s}$ , jest południkiem kuli  $K_1$ , wpisanej w stożek widzenia kuli  $K$ , a mającej swój środek na tle. Południk ten jest — jak wiemy — zarazem perspektywą południka kuli  $K$ , równoległego do płaszczyzny tła (porównaj rys. 274 i związany z nim tekst). Wiemy, że perspektywa kuli  $K$  schodzi się z perspektywą kuli  $K_1$ . Wyobraźmy sobie, żeśmy przez oko i prostą  $a$  poprowadzili płaszczyznę  $\varphi$ , która przecięła kulę  $K_1$  w kole wielkiem  $k_2$ , a następnie wykonali kład tej płaszczyzny.



Rys. 280.



szczyzny na tło. Koło  $k_2$  zejdzie się, po dokonanych kładzie, z kołem  $k_1$ , promień główny będzie prostopadły do prostej  $a_s$ . Ponieważ głębokość tłowa jest znaczna, więc, uważając środek kuli za punkt stały, dokonamy redukcji całego układu, i to do  $1/3$  części. Operację tę wyobrazić sobie może czytelnik, jako skurczenie się wszystkich odcinków o  $2/3$  części ich długości. Punkt główny zajmie położenie  $O_s^{1/3}$  na promieniu  $a_s$ , przy czym  $\overline{S_s O_s^{1/3}}$  równe jest trzeciej części odcinka  $\overline{S_s O_s}$ . W punkcie  $O_s^{1/3}$  wykreślimy prostopadłą do prostej  $a_s$ , odmierzymy  $\overline{O_s^{1/3} O_0^{1/3}} = \frac{\delta}{3}$  i z punktu  $O_0^{1/3}$  poprowadzimy styczne  $s_1^{1/3}$  i  $s_2^{1/3}$  do koła  $\frac{k_1}{3}$ , zakreślonego z punktu  $S_s$ , jako środka, promieniem, równym trzeciej części promienia koła  $k_1$ . Styczna  $s_1$ , równoległa do  $s_1^{1/3}$ , przecina promień  $a_s$  w punkcie  $1_s$ ; styczna  $s_2$ , równoległa do prostej  $s_2^{1/3}$ , w punkcie  $2_s$ . Punkty  $1_s$  i  $2_s$  są wierzchołkami szukaney elipsy, ograniczającymi jej oś większą, środek  $C_s$  odcinka  $1_s 2_s$  — jej środkiem.

Wyobraźmy sobie, że do kuli  $K$  poprowadziliśmy dwie płaszczyzny styczne, równoległe do tła — to ich punkty styczności, rzucone z oka na tło, są ogniskami elipsy  $k_s$ , stanowiącej zarys pozorny kuli  $K$ . Perspektywą rzutu poziomego tych punktów styczności są punkty  $F_1'$  i  $F_2'$ ; rzućmy je, w kierunku prostopadłym do linii horyzontu, na prostą  $a_s$  — to punkty  $F_1^s$  i  $F_2^s$  są ogniskami elipsy  $k_s$ . Druga, krótsza oś elipsy przejdzie przez punkt  $C_s$ , prostopadle do  $a_s$ ; długość jej otrzymamy, odmierając  $\overline{F_1^s C_s} = \overline{F_2^s C_s} = \overline{1_s C_s}$ .

**51. Perspektywa wnętrza kuli.** Zadanie perspektywy wnętrza kuli, t. j. perspektywy kuli z punktu (oka), znajdującego się w jej wnętrzu — może praktycznie rzadko występujące — jest jednak teoretycznie tak interesujące, że nie możemy go tutaj pominąć. W istocie swej zadanie to nie zawiera wcale problemu nowego i praktycznie sprowadza się do wykreślenia perspektywy kół, zajmujących rozmaite położenia względem tła i płaszczyzny zniknięcia.

Miejscem geometrycznym rzutów perspektywicznych wszystkich punktów kuli z oka, znajdującego się wewnątrz tej kuli, jest płaszczyzna tła; punktom koła, podług którego płaszczyzna zniknięcia przecina kulę, odpowiedzą perspektywicznie punkty niewłaściwe płaszczyzny tła. Tak pojęta perspektywa kuli ma znaczenie czysto teoretyczne.

Aby zagadnieniu perspektywy wnętrza kuli nadać charakter mniej oderwany, przyjmijmy na wewnętrznej powierzchni kuli — pojętej materialnie — szereg równoleżników  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , których środki leżą na osi  $\overline{AB}$  kuli, oraz szereg południków  $e_1, e_2, \dots, e_7$  (rys. 281). Niechaj środek rzutów (oko)  $O$  znajduje się wewnątrz kuli na płaszczyźnie równoleżnika  $r_6$ . Rys. 281 przedstawia nam sprawę w rzutach prostokątnych na płaszczyznę poziomą i pionową. Jeżeli tę ostatnią płaszczyznę przyj-

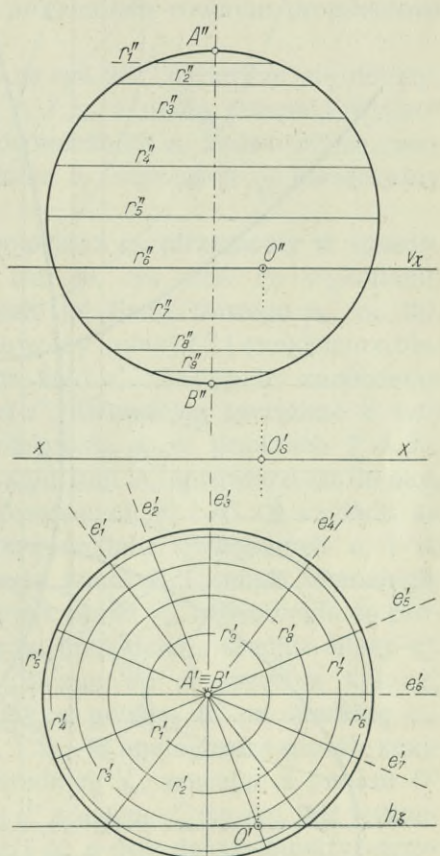


miemy, jako tło, to pozioma płaszczyzna  $\chi$ , poprowadzona przez oko, będzie płaszczyzną horyzontu, zaś równoległa do tła płaszczyzna  $\zeta$  — płaszczyzną zniknięcia.

Opierając się na wywodach, przeprowadzonych szczegółowo w rozdziale III, ust. 33, stwierdzimy z łatwością, że perspektywy równoleżników  $r_1, r_2, r_8$  i  $r_9$ , oraz południków  $e_5$  i  $e_7$  — jako nie posiadających punktów wspólnych z płaszczyzną zniknięcia — będą elipsami; perspektywa południka głównego  $e_6$ , którego płaszczyzna jest równoległa do tła, będzie kołem. Równoleżniki  $r_3$  i  $r_7$ , oraz południki  $e_1$  i  $e_4$  — styczne do płaszczyzny zniknięcia — przedstawiają się w perspektywie, jako parabole; perspektywy równoleżników  $r_4$  i  $r_5$  oraz perspektywa południka  $e_3$  będą hiperbolami, gdyż płaszczyzna zniknięcia przecina każde z tych kół w dwóch punktach. Linia horyzontu  $h$ , jako ślad tłowy płaszczyzny  $\chi$ , zawierać będzie w sobie perspektywę znajdującego się na tej płaszczyźnie równoleżnika  $r_6$ ; podobnie perspektywa południka  $e_2$ , leżącego na płaszczyźnie widzenia, będzie linią prostą, schodzącą się ze śladem tłowym tej płaszczyzny.

Przystąpmy do rozwiązania zadania. Zawłość konstrukcyj podyktowała nam podział zadania na dwie części: rysunek 282 przedstawia przebieg pierwszej części konstrukcji, rysunek 283 drugi etap rozwiązania. Rysunek 284 jest zsumowaniem wyników obu części i stanowi wynik ostateczny.

Przyjmijmy horyzont  $h$  i linię podstawy  $p$  (rys. 282). Zakreślmy z punktu  $U'$  koło  $r'_5$  i uważajmy je za rzut poziomy kuli, punkt zaś  $O'$ , obrany „wewnątrz“ koła  $r'_5$ , za rzut poziomy oka. Rzut prostokątny  $O_s$  punktu  $O'$  na linię horyzontu będzie punktem głównym, punkt  $O'_s$  rzutem poziomym punktu głównego na płaszczyznę podstawy, a odcinek  $O'O'_s$  — głębokością tłową. Płaszczyzna  $\zeta$ , poprowadzona przez



Rys. 281.





Przyjmijmy boczną płaszczyznę rzutów, prostopadłą do płaszczyzny tła i do płaszczyzny poziomej; rzućmy na nią prostokątnie kulę i oko i sprowadźmy tę płaszczyznę następnie na tło. Śladem tłowym tej płaszczyzny (a równocześnie „śladem bocznym“ tła) jest prosta  $k_{\pi}$ , prostopadła do linii horyzontu; punkt  $O'''$  jest rzutem bocznym oka, a koło  $e_3'''$ , zakreślone z punktu  $U'''$ , jako środka, promieniem równym promieniowi koła  $r_3'$ , rzutem bocznym kuli.

Zadanie, jakie postawiliśmy sobie na rys. 282, ogranicza się do wykreślenia perspektywy równoleżników  $r_3$  i  $r_8$ , a nadto perspektywy południka  $e_1$ . Wiemy, że perspektywa równoleżnika  $r_8$  będzie elipsą, perspektywy zaś równoleżnika  $r_3$  i południka  $e_1$ , stycznych do płaszczyzny zniknięcia — parabolami.

Elipsę  $r_8^s$ , jako perspektywę równoleżnika  $r_8$ , otrzymamy w sposób omówiony szczegółowo w rozdz. III, ust. 39, rys. 222. Po wykonaniu kładu płaszczyzny równoleżnika  $r_8$ , około jej śladu tłowego  $p_8$ , na tło, przyjmijmy na prostej zniknięcia  $n_8^0$  dowolny punkt  $C^0$  i znajdziemy biegunową  $c^0$  tego punktu ze względu na koło  $r_8^0$ . Następnie znajdziemy biegun sprężony  $D^0$  i jego biegunową  $d^0$ . Biegunowe sprężone  $c^0$  i  $d^0$ , przecinające się w punkcie  $S^0$ , przetną prostą  $p_8$  w punktach  $T_c$  i  $T_d$ . Obrót płaszczyzny horyzontu na tło, około linii  $h$ , sprowadzi na tło oko, jako punkt  $O^0$ . Parze biegunowych sprężonych  $c^0$  i  $d^0$  ze względu na koło  $r_8^0$ , odpowie perspektywiecznie para średnic sprężonych  $c_s$  i  $d_s$  elipsy  $r_8^s$ . Pierwsza z nich przejdzie przez punkt  $T_c$  i będzie równoległa do promienia  $O^0D^0$ , druga przejdzie przez punkt  $T_d$ , równoległe do prostej  $O^0C^0$ . Średnice  $c_s$  i  $d_s$  przetną się w punkcie  $S_s$ , środku elipsy  $r_8^s$ . Punkt ten leży na promieniu  $O^0S^0$ . Biegunowa  $c^0$  przecina koło  $r_8^0$  w punktach  $1^0$  i  $2^0$ ; punkty te rzucimy z punktu  $O^0$  na średnicę  $c_s$ , otrzymując ograniczające ją punkty  $1_s$  i  $2_s$ . W analogiczny sposób znajdziemy punkty  $3_s$  i  $4_s$ , ograniczające średnicę  $d_s$ , rzucając z punktu  $O^0$  punkty  $3^0$  i  $4^0$  przecięcia się biegunowej  $d^0$  z kołem  $r_8^0$ . Na rys. 282 wyznaczaliśmy w powyższy sposób punkty  $2_s$  i  $4_s$ , a dwa dalsze punkty otrzymaliśmy, odmierzając  $S_s1_s = S_s2_s$  i  $S_s3_s = S_s4_s$ .

Zkolei przystąpimy do wykreślenia paraboli, jako perspektywy równoleżnika  $r_3$ . W tym celu wykonamy kład płaszczyzny tego równoleżnika, około podstawy  $p_3$ , na tło. Po dokonanych kładzie równoleżnik  $r_3$ , styczny w punkcie  $N$  do śladu zniknięcia  $n_3$ , zajął położenie koła  $r_3^0$ , stycznego w punkcie  $N^0$  do prostej  $n_3^0$ . Oko — obrócone około linii horyzontu  $h$  — padło na tło w punkcie  $O^0$ . Promień  $O^0N^0$  określa — jak wiadomo z rozdz. III, ust. 33, pkt.  $d$  — punkt niewłaściwy  $N^\infty$  stożkowej, będącej perspektywą koła  $r_3$ . Punkt  $N^\infty$  nazywamy *środkiem* paraboli, zaś proste przez niego przechodzące, a więc równoległe, jej *średnicami*. Styczna paraboli, prostopadła do kierunku średnic, nazywa się *styczną*



*wierzchołkową*, a jej punkt styczności — *wierzchołkiem* paraboli. Średnica, przechodząca przez wierzchołek paraboli, jest jej *osią*.

Poprowadźmy z punktu  $O^0$  promień prostopadły do kierunku  $O^0 N^0$  średnic paraboli. Promień ten przetnie ślad zniknięcia  $n_3^0$  w punkcie  $L^0$ ; stycznej  $l^0$ , poprowadzonej z punktu  $L^0$  do koła  $r_3^0$ , odpowie, jako jej perspektywa, styczna do paraboli, równoległa do promienia  $O^0 L^0$ , a prostopadła do kierunku średnic — czyli styczna wierzchołkowa. Będzie nią prosta  $l_s$ , przechodząca przez ślad tłowy  $T_l$ , równoległe do kierunku  $O^0 L^0$ . Według podanych wyżej określeń, punkt styczności  $W_s$ , odpowiadający perspektywicznie punktowi styczności  $W^0$ , jest wierzchołkiem, a prosta  $W_s N^\infty$ , prostopadła do prostej  $l_s$ , osią paraboli.

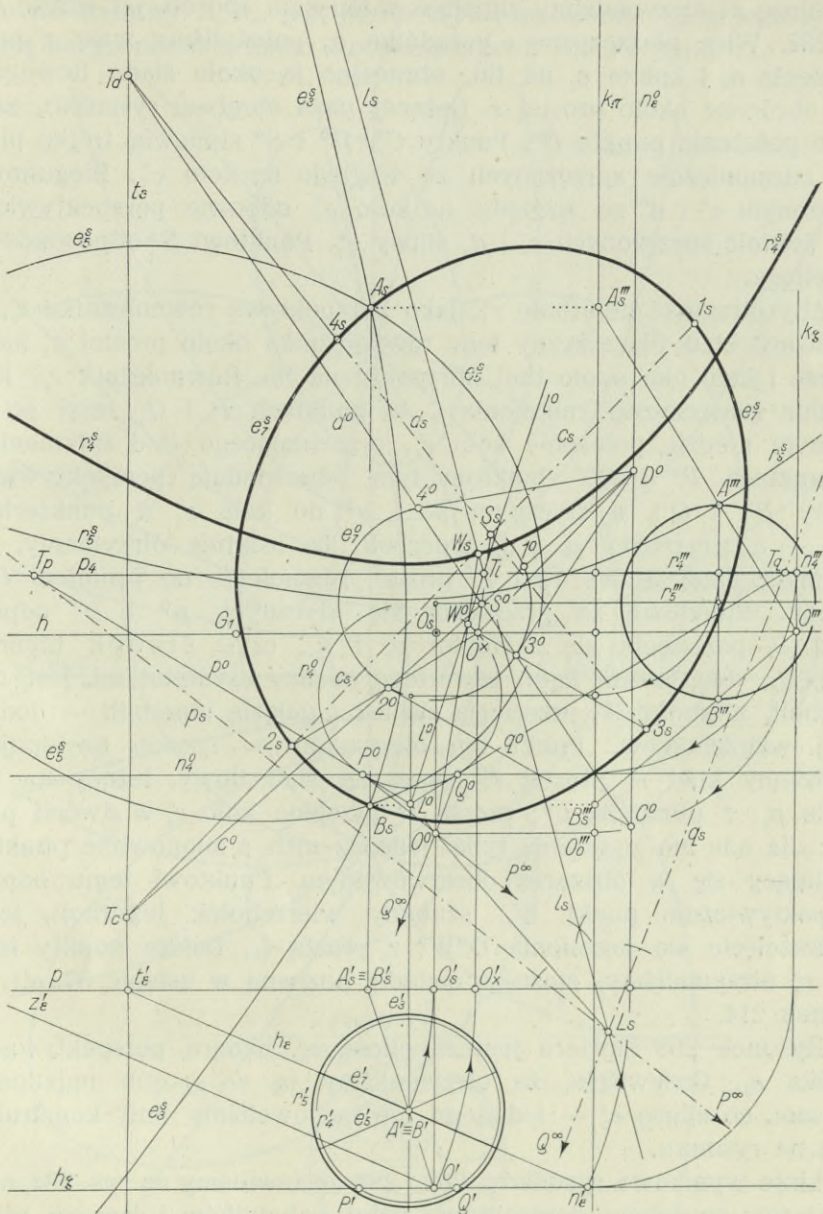
Do wyznaczenia paraboli potrzeba, prócz osi i wierzchołka, jednego jej punktu. Będzie nim perspektywa  $F_s$  dowolnego punktu  $F$  równoleżnika  $r_3$ . Znaleźliśmy ją, jako punkt przebicia się promienia widzenia  $OF$  z tłem  $\pi$ , w sposób elementarny, uwidoczony na rysunku. Przyjąwszy punkt  $F'$  na kole  $r_3'$ , znajdziemy  $F'''$ ; punkt  $F'$  rzucimy z punktu  $O'$  na prostą  $p$ , a punkt  $F'''$  z punktu  $O'''$  na prostą  $k_\pi$ . Punkt  $F_s$  będzie przecięciem się prostych odnoszących, wykreślonych prostopadle do prostych  $p$  i  $k_\pi$ .

Dalsze punkty paraboli znajdziemy w sposób, którego uzasadnienie znajdzie czytelnik w książce autora p. t. „Geometria wykreslna“, wyd. II, Lwów 1922, str. 247, rys. 379. Kreślimy mianowicie przez punkt  $F_s$  prostą, równoległą do osi paraboli, dzielimy odcinek, zawarty między punktami  $F_s$  i  $F_1^s$ , np. na cztery części i punkty podziału łączymy z wierzchołkiem  $W_s$  paraboli. Otrzymany na stycznej wierzchołkowej  $l_s$  odcinek  $W_s F_1^s$  dzielimy na tę samą, co poprzednio, ilość równych części — więc na cztery — i przez punkty podziału kreślimy równoległe do osi paraboli. Promienie pęku o wierzchołku  $W_s$  i pęku prostych równoległych przetną się w punktach paraboli  $r_3^s$ .

Perspektywą południka  $e_1$  będzie parabola  $e_1^s$ , której konstrukcja pokrywa się z przeprowadzoną wyżej. Płaszczyznę południka  $e_1$  obróciliśmy około jej śladu tłowego  $t_\varepsilon$  na tło. Południk  $e_1$  zajął położenie koła  $e_1^0$ , stycznego w punkcie  $N_1^0$  do prostej zniknięcia  $n_\varepsilon^0$ . Oko, obrócone około śladu zbiegu  $z_\varepsilon$ , padło na tło w punkcie  $O^\times$ . Promień, poprowadzony z punktu  $O^\times$  prostopadle do kierunku  $O^\times N_1^\infty$ , przecina ślad zniknięcia w punkcie  $L_1^0$ ; stycznej  $l_1^0$ , wykreślonej z punktu  $L_1^0$  do koła  $e_1^0$ , odpowie perspektywicznie styczna wierzchołkowa  $l_1^s$  paraboli, zaś punktowi styczności  $W_1^0$  — wierzchołek paraboli  $W_1^s$ . Prosta  $W_1^s N_1^\infty$  jest osią paraboli.

Na rys. 282 zamieściliśmy jeszcze elipsy  $r_1^s$ ,  $r_2^s$  i  $r_3^s$ , jako perspektywy odpowiednich równoleżników, jednak bez zachowania linii konstrukcyjnych.





Rys. 283.

Rys. 283 zawiera konstrukcję elipsy  $e_s^s$ , jako perspektywy południka  $e_7$ , i konstrukcję hiperboli  $r_s^s$ , jako perspektywy równoleżnika  $r_4$  kuli.

Elipsę  $e_7^s$  otrzymaliśmy zupełnie w ten sam sposób, jak elipsę  $r_8^s$  na rys. 282. Więc płaszczyznę  $\varepsilon$  południka  $e_7$  położyliśmy wraz z prostą zniknięcia  $n_\varepsilon$  i kołem  $e_7$  na tło, obracając ją około śladu tłowego  $t_\varepsilon$ . Oko, obrócone około prostej  $z_\varepsilon$  (leżącej poza obrębem rysunku), zajęło na tle położenie punktu  $O^\infty$ . Punkty  $C^0$ ,  $D^0$  i  $S^0$  stanowią trójkę biegunów harmonicznie sprzężonych ze względu na koło  $e_7^0$ . Biegunowym sprzężonym  $c^0$  i  $d^0$  ze względu na koło  $e_7^0$  odpowie perspektywicznie para średnic sprzężonych  $c_s$  i  $d_s$  elipsy  $e_7^s$ . Punktowi  $S^0$  odpowiada środek elipsy.

Aby otrzymać hiperbolę  $r_4^s$ , jako perspektywę równoleżnika  $r_4$ , wykonaliśmy kład płaszczyzny tego równoleżnika około prostej  $p_4$  na tło, a także i kład oka około linii horyzontu na tło. Równoleżnik  $r_4$ , który przecina płaszczyznę zniknięcia  $\zeta$  w punktach  $P$  i  $Q$ , zajął po dokonanych kładzie położenie koła  $r_4^0$ , przecinającego ślad zniknięcia  $n_4^0$  w punktach  $P^0$  i  $Q^0$ . Punktom tym odpowiadają perspektywicznie punkty  $P^\infty$  i  $Q^\infty$ , a stycznymi  $p^0$  i  $q^0$  do koła  $r_4^0$  w punktach  $P^0$  i  $Q^0$  — asymptoty  $p_s$  i  $q_s$  hiperboli. Te ostatnie otrzymamy, kreśląc przez ślady tłowe  $T_p$  i  $T_q$  proste, równoległe do promieni  $O^0P^0$  i  $O^0Q^0$ . Punktowi  $L^0$  przecięcia się stycznych  $p^0$  i  $q^0$  odpowie punkt  $L_s$  przecięcia się asymptot  $p_s$  i  $q_s$ , czyli środek hiperboli. Prosta  $l_s$ , dwusieczna kąta, zawartego między asymptotami, jest osią hiperboli, a punkt  $W_s$  przecięcia się osi z gałęzią hiperboli — jednym z jej wierzchołków. Punkt ten otrzymamy w sposób następujący: znajdziemy kład  $l^0$  prostej  $l$ , łącząc jej ślad tłowy, leżący na podstawie  $p_4$ , z punktem  $L^0$ ; prosta  $l^0$  przecina koło  $r_4^0$  w dwóch punktach; dla nas ma znaczenie tylko jeden z nich, a mianowicie punkt  $W^0$ , znajdujący się w obszarze obserwowanym. Punktowi temu odpowie perspektywicznie punkt  $W_s$ , szukany wierzchołek hiperboli, leżący na przecięciu się promienia  $O^0W^0$  z prostą  $l_s$ . Dalsze punkty hiperboli  $r_4^s$  otrzymaliśmy, stosując metodę, poznaną w ustępie 37, str. 155, rysunek 214.

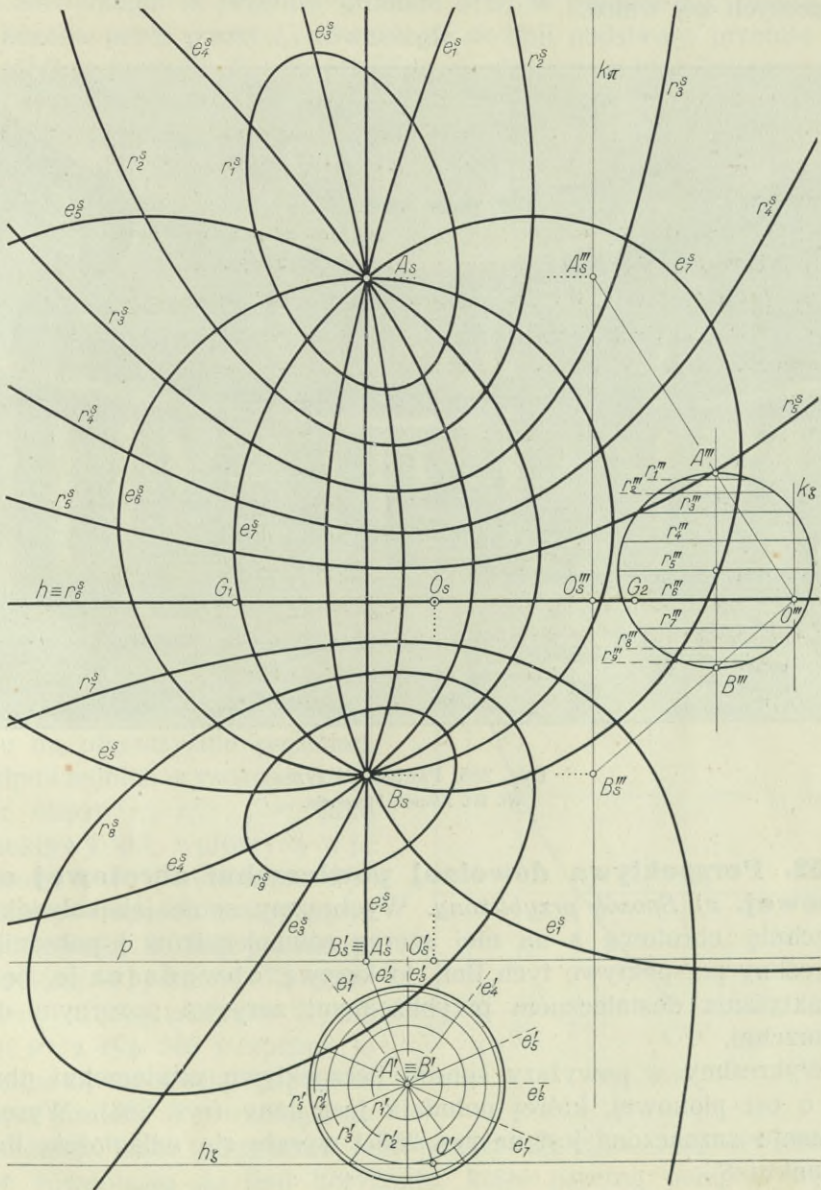
Rysunek 283 zawiera jeszcze elipsę  $e_5^s$ , będącą perspektywą południka  $e_5$ . Oczywiście, że otrzymaliśmy ją w sposób najzupełniej ten sam, co elipsę  $e_7^s$  — i dlatego nie zachowaliśmy linii konstrukcyjnych na rysunku.

Linje wynikowe rysunków 282 i 283 zestawiliśmy na rys. 284, otrzymując tym sposobem perspektywę pęku południków i szeregu równoleżników kuli z punktu, znajdującego się „wewnątrz“ kuli. Perspektywy  $A_s$  i  $B_s$  biegunów  $A$  i  $B$  kuli otrzymamy, jako punkty przebicia się promieni  $OA$  i  $OB$  z płaszczyzną tła  $\pi$ .

Odcinek  $A_sB_s$  jest perspektywą osi kuli a prosta  $A_sB_s$  perspektywą południka  $e_2$ , leżącego na płaszczyźnie widzenia  $OAB$ . Koło  $e_6^s$ , zakre-



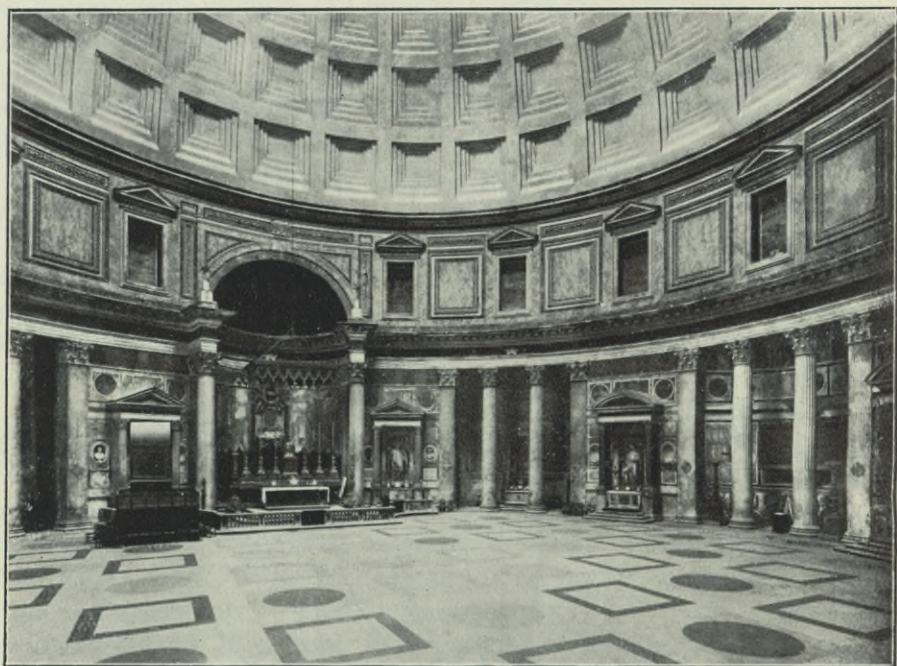
ślone na średnicy  $\overline{A_s B_s}$ , jest perspektywą południka głównego  $e_0$  kuli; z linią horyzontu  $h$  schodzi się perspektywa równoleżnika  $r_0$ .



Rys. 284.

Jako praktyczną ilustrację rozpatrzonego zagadnienia, przyjęc możemy z pewnem przybliżeniem fotogram rys. 285, przedstawiający wnę-

trze Panteonu w Rzymie. Dolna część wnętrza jest walcem. Na rysunku występują hiperbole, jako perspektywy równoleżników wnętrza kopuły i poziomych kół walca.



Rys. 285. Panteon, Rzym.

Wi. fot. Alinari, Florencia.

**52. Perspektywa dowolnej powierzchni obrotowej o osi pionowej.** *a) Sposób przybliżony.* Wyobraźmy sobie jakąkolwiek powierzchnię obrotową a na niej szereg równoleżników i południków. Wykreślmy perspektywę tych linii, to krzywa, obwodząca je, będzie, z praktycznie dostatecznym przybliżeniem, zarysem pozornym danej powierzchni.

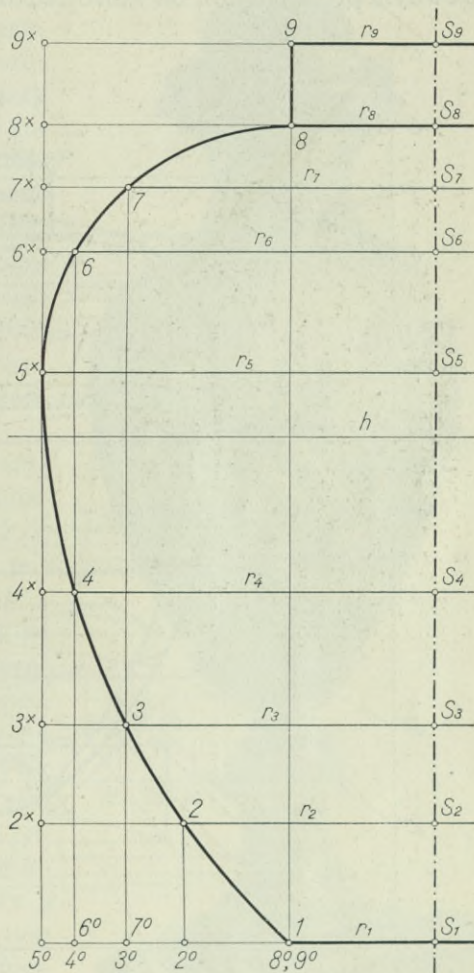
Wykreślmy w powyższy sposób perspektywę powierzchni obrotowej, o osi pionowej, której południk jest dany (rys. 286). Wysokość horyzontu zaznaczona jest na rys. 286 i wyraża się odległością linii  $h$  od punktu  $S_1$ .

Uwzględniając tę wysokość, wykreślmy proste  $p$  i  $h$  (rys. 287), a na tej ostatniej przyjmijmy punkt główny  $O_s$  i punkt połowy głębokości  $G_1^{1/2}$ . Obierzmy na linii podstawy  $p$  punkt  $S_1^0$ , odmierzmy  $S_1^0 1^0 = r_1$ ,  $S_1^0 2^0 = r_2$ , ...  $S_1^0 5^0 = r_5 = \bar{S}_1^0 5^0$  i połączmy punkty  $S_1^0$ ,  $1^0$ ,  $2^0$ , ...  $5^0$ ,  $\bar{5}^0$  z punktem  $O_s$ ,



a punkt  $I_s$ , przyjęty na promieniu  $S_1^0 O_s$ , z punktem  $G_1^{1/2}$ . Prosta  $I_s G_1^{1/2}$  przetnie promień  $5^0 O_s$  w punkcie  $B'_s$ , przez który wykreślimy równoległą do  $p$ . Równoległa ta przetnie promień  $5^0 O_s$  w punkcie  $C'_s$ ; prosta, poprowadzona przez punkt  $I_s$ , równoległe do linii podstawy, przetnie promień  $5^0 O_s$  w punkcie  $A'_s$ , zaś promień  $5^0 O_s$  w punkcie  $D'_s$ . Proste  $A'_s C'_s$  i  $B'_s D'_s$  przetną się w punkcie  $S_1^s$  promienia  $S_1^0 O_s$ . Punkt ten jest perspektywą środka koła  $r_1$ , stanowiącego podstawę powierzchni. Trapez  $A'_s B'_s C'_s D'_s$  jest perspektywą kwadratu, opisanego na kole równikowym  $r_5$ , rzuconem prostokątnie na płaszczyznę poziomą. Cztery dalsze współśrodkowe trapezy odnoszą się do równoleżników  $r_4$  i  $r_6$ ,  $r_3$  i  $r_7$ ,  $r_2$ ,  $r_1$  i  $r_8$  względnie  $r_9$ , rzuconych na płaszczyznę podstawy.

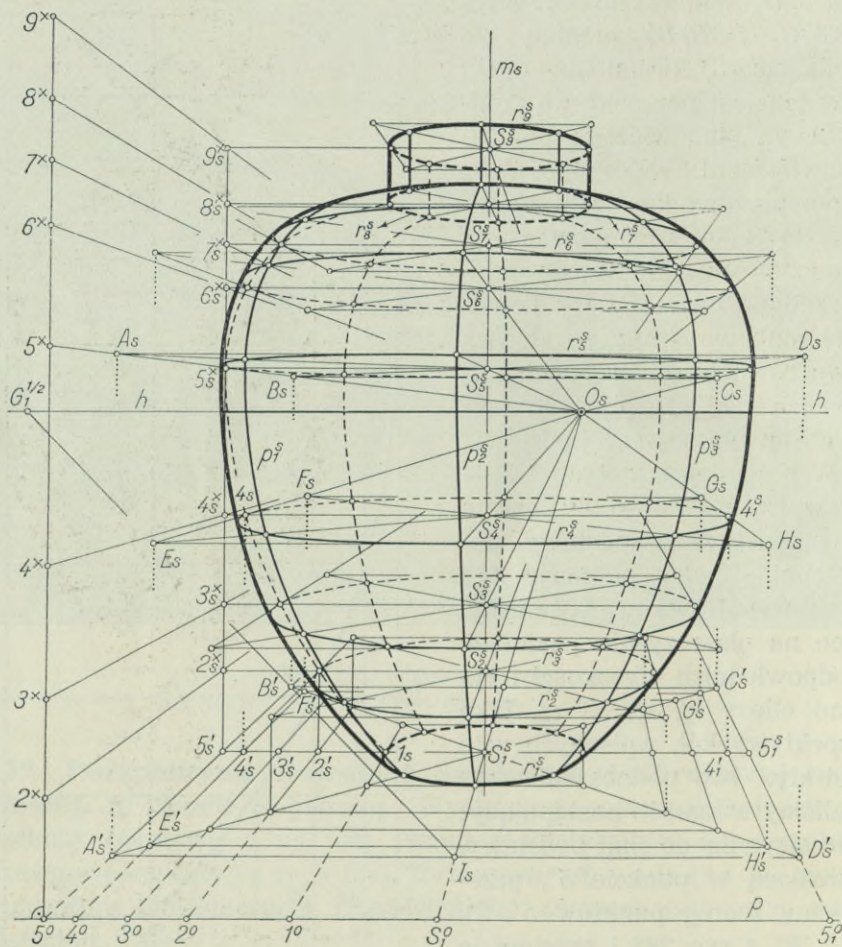
W najmniejszy z tych trapezów wpiszemy elipsę  $r_1^s$ ; będzie ona perspektywą podstawy powierzchni. Z kolei podnosić będziemy współśrodkowe kwadraty, leżące na płaszczyźnie poziomej, do odpowiednich wysokości i rysować elipsy  $r_2^s$ ,  $r_3^s$ , ...  $r_9^s$ , jako perspektywy kół, wpisanych w te kwadraty. Owo podnoszenie wykonaliśmy w sposób następujący: na prostopadłą do linii podstawy, wykreśloną w punkcie  $5^0$ , prznieśmy szereg punktów  $5^0$ ,  $2^x$ ,  $3^x$ , ...  $9^x$  z rys. 286 i rzucimy je z punktu  $O_s$  na prostą, poprowadzoną w punkcie  $5^s$  równoległe do poprzedniej. Przez otrzymane tam punkty  $2^s$ ,  $3^s$ , ...  $9^s$  wykreślimy proste równoległe do linii horyzontu, które przetną perspektywę  $m_s$  osi powierzchni w punktach  $S_2^s$ ,  $S_3^s$ , ...  $S_9^s$ . Punkty te, które są perspektywą środków kół równoleżnikowych, połączymy z punktem głównym  $O_s$ .



Rys. 286.

Omówmy konstrukcję perspektywy równoleżnika np.  $r_1^s$ ; perspek-

tywę innych otrzymamy w sposób analogiczny. Trapez  $E'_s F'_s G'_s H'_s$  jest perspektywą rzutu poziomego kwadratu, opisanego na kole  $r_4$ . Punkty  $4'_s$  i  $4_1$  rzucimy prostopadłe na prostą, przechodzącą przez punkt  $S_4^s$  równoległe do linii horyzontu. Otrzymane punkty  $4_s$  i  $4_1^s$  połączymy z punktem głównym promieniami, na które rzucimy punkty  $E'_s F'_s G'_s$  i  $H'_s$ . Otrzymamy



Rys. 287.

trapez  $E_s F_s G_s H_s$ , w który wrysujemy elipsę  $r_4^s$ . Podobnie otrzymamy elipsy  $r_2^s, r_3^s, \dots, r_9^s$ .

Płaszczyzny, przechodzące przez oś powierzchni, przecinają równoleżniki w punktach, których miejscami geometrycznymi są południki. Jeden z tych południków leży na płaszczyźnie równoległej do tła; jego perspektywą jest linia, przechodząca przez punkty  $1_s, 4_s$  i  $4_1^s$ , która jest



podobną, w znaczeniu geometrycznym, do południka powierzchni, danego na rysunku 286. Linja krzywa, opisana na otrzymanych równoleżnikach i południkach, czyli ich obwiednia, stanowi zarys pozorny powierzchni obrotowej.

b) Inny, ogólniejszy sposób rysowania perspektywy powierzchni obrotowej, geometrycznie poprawniejszy i ściślejszy, polega na wykreśleniu zarysu istotnego a następnie dopiero zarysu pozornego powierzchni. Zarys istotny, t. j. linję styczności stożka, opisanego na powierzchni obrotowej z oka, jako wierzchołka, otrzymamy, stosując metodę stożków normalnych. W istocie swej zadanie sprowadza się do kilkakrotnego powtórzenia zadania, przedstawionego na rys. 260.

Przyjmijmy linję horyzontu  $h$  (rysunek 290), linję podstawy  $p$ , punkt główny  $O_s$ , punkty głębokości  $G_1$  i  $G_2$  i prostą  $a_s$ , jako perspektywę osi powierzchni. Poprowadźmy przez oś  $a$  i oko płaszczyznę  $\varphi$  i wykonajmy jej kład na tło. Oko padnie, po przeprowadzonym kładzie, na linję horyzontu, jako punkt  $O^0$ . Uważajmy przyjęty na prostej  $a_s$  punkt  $C_2^s$  za perspektywę środka koła równoleżnikowego  $r$ , stanowiącego podstawę powierzchni, i połączmy go z punktem głównym promieniem, który przetnie linję podstawy  $p$  w punkcie  $C_2^0$ . Wykreślmy w tym punkcie prostopadłą  $b^0$  do linii podstawy. Po obrocie płaszczyzny horyzontu na tło oko zajmie położenie punktu  $O^x$ . Promień  $\overline{O^x C_2^s}$  przetnie prostą  $b^0$  w punkcie  $C_2^x$ ; łuk koła, zakreślony z punktu  $C_2^0$ , jako środka, promieniem  $\overline{C_2^0 C_2^x}$ , przetnie linję podstawy w punkcie  $C_2$ . Prosta  $a^0$ , prostopadła w punkcie  $C_2$  do linii podstawy, jest osią powierzchni obrotowej, sprowadzoną na tło wraz z płaszczyzną  $a$ .



Rys. 288.



Uważajmy prostą  $a^0$  za rzut pionowy osi powierzchni obrotowej i wykreślmy rzut pionowy  $e'$  tej powierzchni, t. j. rzut jej południka głównego. Punkt  $O^0$  będzie wierzchołkiem stożka widzenia powierzchni; wyznaczmy rzut pionowy  $l'$  linii stycznej tego stożka z powierzchnią. Rozpocznijemy od równoleżnika  $r_1$ , którego rzut pionowy jest odcinkiem  $r'_1$ , a którego płaszczyzna  $\alpha$  przecina tło wzdłuż prostej  $t_\alpha$ , zaś prostą  $v$ , poprowadzoną w punkcie  $O^0$  prostopadłe do linii horyzontu — w punkcie  $V_1$ . Koło  $r_1^x$  jest kładem równoleżnika  $r_1$  na tło, jako na pionową płaszczyznę rzutów. Z punktu  $V_1$  kreślimy styczną do koła  $r_1^x$  i punkt styczności  $1^x$  rzucamy prostopadłe na  $t_\alpha \equiv r'_1$ , gdzie otrzymamy punkt  $1'$ . Z punktem tym schodzi się i punkt  $2'$ , który jest rzutem pionowym, symetrycznie względem płaszczyzny tła położonego punktu 2.

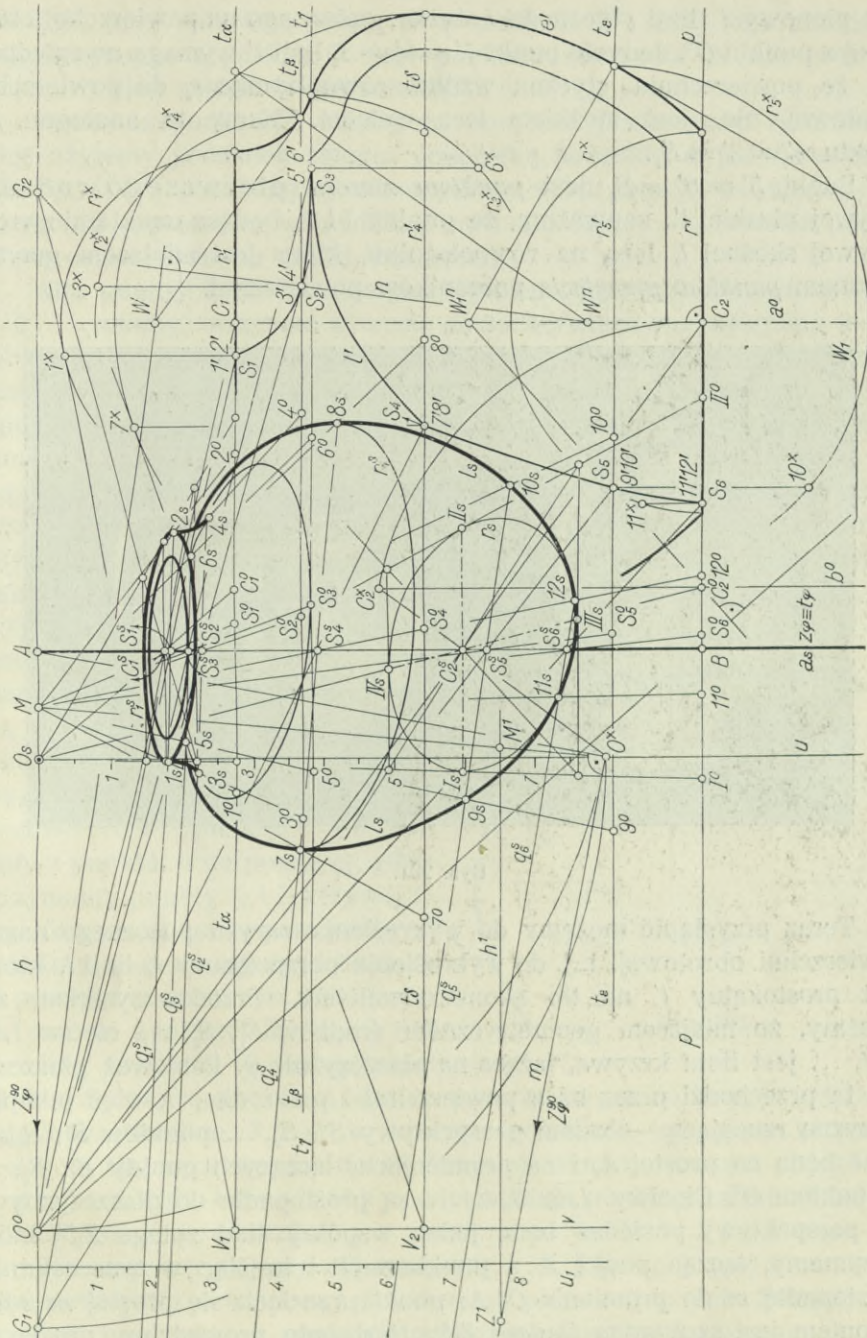


Rys. 289.

Zkolei bierzemy pod uwagę równoleżnik  $r_2$ , leżący na płaszczyźnie  $\beta$ , którego kład na tło jest kołem  $r_2^x$ . Szukamy wierzchołka  $W$  stożka obrotowego, stycznego do powierzchni obrotowej wzdłuż równoleżnika  $r_2$ , i wierzchołka  $W^n$  odpowiadającego mu stożka normalnego. Punkty  $O^0$  i  $W$  łączymy prostą; do niej kreślimy z punktu  $W^n$  prostopadłą  $n$ , przecinającą ślad  $t_\beta$  w punkcie, łączącym w sobie rzuty  $3'$  i  $4'$  oraz punkt  $S_2$ . Dwa pierwsze są rzutami punktów zarysu istotnego; punkt  $S_2$  jest środkiem cięciwy, ograniczonej punktami 3, 4, i leży na tle.

W analogiczny sposób znajdziemy punkt  $5' \equiv 6'$ , jako rzut prostokątny na tło punktów 5 i 6, leżących na równoleżniku  $r_3$ . Punkt  $S_3$  leży



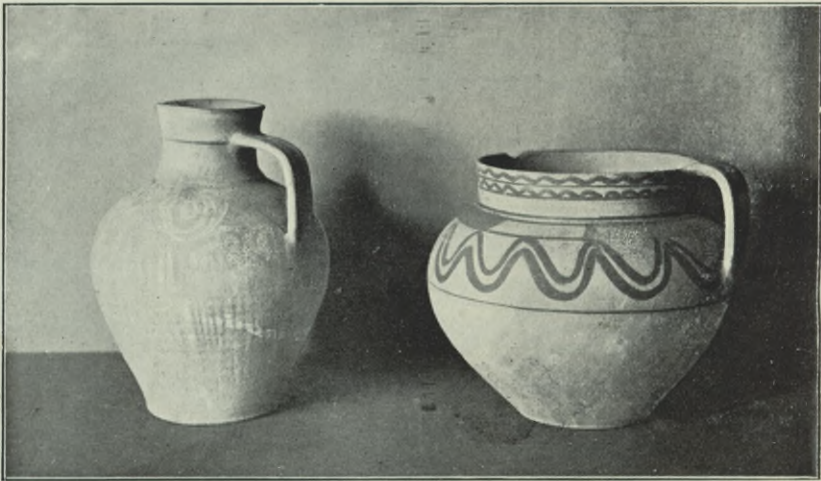


Rys. 290.

na tle i jest środkiem cięciwy 5, 6. W ten sposób, przy pomocy stożków normalnych, znajdziemy dalszą, dowolną ilość punktów, stanowiących

rzut pionowy  $l'$  linii styczności  $l$  stożka, opisanego na powierzchni obrotowej z punktu  $O^0$ . Jedynie punkt  $7' \equiv 8' \equiv S_4$  linii  $l'$  wymaga uwzględnienia, że powierzchnia styczna wzdłuż równoleżnika  $r_4$  do powierzchni obrotowej nie jest stożkiem lecz walcem. Mamy tu analogon do punktu  $1' \equiv 2' \equiv S_1$ .

Punkt  $5' \equiv 6' \equiv S_3$  jest *punktem zwrotu* pierwszego rodzaju krzywej płaskiej  $l'$ ; zauważmy, że punkty 5 i 6, będące punktami zwrotu krzywej skośnej  $l$ , leżą na równoleżniku, który jest miejscem geometrycznym *punktów przegięcia* południków powierzchni.



Rys. 291.

Teraz przystąpić możemy do wykreślenia zarysu pozornego naszej powierzchni obrotowej, t. j. do wykreślenia perspektywy  $l_s$  linii  $l$ , której rzut prostokątny  $l'$  na tło skonstruowaliśmy. Przedewszystkiem zauważmy, że miejscem geometrycznym środków  $S_1, S_2, \dots$  cięćw  $1, 2, 3, 4, \dots$  jest linia krzywa, leżąca na płaszczyźnie  $\varphi$ . Ponieważ płaszczyzna ta przechodzi przez oś  $a$  powierzchni i przez oko, a więc jest płaszczyzną rzucającą — zatem perspektywy  $S_1^s, S_2^s, \dots$  punktów  $S_1, S_2, \dots$  leżeć będą na prostej  $A_s$  i na promieniach, łączących punkty  $S_1, S_2, \dots$  z punktem  $O^0$ . Cięćw  $1, 2, 3, 4, \dots$  są prostopadłe do płaszczyzny  $\varphi$ , ich perspektywy posiadać będą jeden wspólny ślad zbiegu  $Z_\varphi^{90}$ , który otrzymamy, łącząc punkt  $A$  z punktem  $O^\times$  i kreśląc w tym ostatnim prostopadłą  $m$  do promienia  $O^\times A$ ; punkt przecięcia się prostej  $m$  z horyzontem jest szukanym śladem  $Z_\varphi^{90}$ . Następnie prowadzimy prostą  $h^1$ , równoległą do linii horyzontu, przecinającą prostą  $m$ , w obrębie rysunku, w punkcie  $Z^1$ . Z punktu tego, jako środka, zakreślimy, promieniem  $Z_1 O^\times$ ,



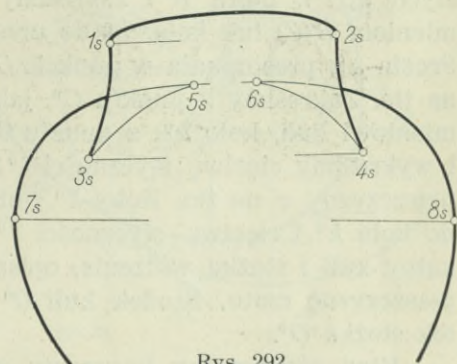
łuk koła, który przetnie prostą  $h^1$  w punkcie  $M^1$ ; rzut tego punktu na linię horyzontu z punktu  $O^x$  jest punktem mierzenia  $M$  dla prostych, mających ślad zbiegu w punkcie  $Z_q^{90}$ .

Ponieważ punkt  $Z_q^{60}$  leży poza obrębem płaszczyzny rysunkowej, więc użyjemy podziałek zbiegu. Jednostką podziałki  $u$  jest ósma część odcinka  $O_s O^x$ ; podziałkę  $u_1$  utworzyliśmy w ten sposób, że między linię horyzontu a prostą  $m$  wstawiliśmy odcinek, dający się również podzielić na osiem równych części, bez reszty.

Aby punkty  $1, 2, 3, \dots$  zarysu istotnego, których rzuty pionowe  $1', 2', 3', \dots$  znamy, otrzymać w rzucie perspektywicznym, postąpimy w sposób następujący: rzucimy punkt  $S_1$  z punktu  $O^0$  na prostą  $A_s$ ; otrzymany tam punkt  $S_1^s$  połączymy z punktem  $Z_q^{90}$  prostą  $q_1^s$ . Punkt  $S_1^s$  rzucimy z punktu mierzenia  $M$  na prostą  $t_a$ , gdzie odmierzymy  $\overline{S_1^1 I^0} = \overline{S_1^0 2^0} = \overline{S_1^1 I^x}$ ; punkty  $1^0$  i  $2^0$  połączymy z punktem  $M$  promieniami, które przetną prostą  $q_1^s$  w punktach  $1_s$  i  $2_s$ . Punkty te są perspektywą punktów  $1$  i  $2$  zarysu istotnego powierzchni obrotowej, a więc punktami zarysu pozornego. Powtarzając tę konstrukcję dla każdego punktu linii  $l'$ , otrzymamy punkty, których miejscem geometrycznym jest linja  $l_s$ . Tak np. punkty  $7_s$  i  $8_s$  krzywej  $l_s$  otrzymamy w sposób następujący: punkt  $S_4 \equiv 7' \equiv 8'$  rzucimy z punktu  $O^0$  na prostą  $a_s$  i otrzymany tam punkt  $S_4^s$  połączymy prostą  $q_4^s$  z punktem  $Z_q^{90}$ , a równocześnie rzucimy z punktu  $M$  na prostą  $t_b$ . Następnie odmierzymy  $\overline{S_4^0 7^0} = \overline{S_4^0 8^0} = \overline{S_4^x 7^x}$  i punkty  $7^0$  i  $8^0$  rzucimy z punktu  $M$  na prostą  $q_4^s$ , gdzie otrzymamy punkty  $7_s$  i  $8_s$  krzywej  $l_s$ .

Krzywa ta ma — począwszy od punktu  $1_s$  — przebieg, uwidoczniiony w powiększeniu na rys. 292. Posiada ona w punktach  $3_s, 4_s, 5_s$  i  $6_s$  punkty zwrotu. W szczególności punkty  $3_s$  i  $4_s$  są punktami zwrotu pierwszego rodzaju; odpowiadają one punktom  $3$  i  $4$ , w których promienie, rzucające krzywą  $l$  z oka na tło, są styczne do tej krzywej. Punkty zwrotu drugiego rodzaju  $5_s$  i  $6_s$ , t.zw. dzióby, odpowiadają punktom zwrotu  $5$  i  $6$  zarysu istotnego powierzchni.

Wreszcie narysujemy elipsy  $r_s, r_1^s, \dots$ , t. j. perspektywę równoleżników powierzchni. Opiszemy konstrukcję pierwszej z nich. Przyjęty poprzednio na prostej  $a_s$  punkt  $C_2^s$  połączymy z punktem głównym  $O_s$  promieniem, który przetnie ślad tłowy płaszczyzny równoleżnika  $r$  — w danym wypadku linię podstawy  $p$  — w punkcie  $C_2^0$ . Odmierzymy od-



Rys. 292.



cinki  $\overline{C_2^0 I^0} = \overline{C_2^0 II^0}$ , równe promieniowi koła  $r$ , i rzucimy punkty  $I^0$  i  $II^0$  z punktu  $O_s$  na prostą, poprowadzoną przez punkt  $C_2^s$ , równoległą do linii podstawy. Otrzymamy punkty  $I_s$  i  $II_s$ . Wykreślimy proste przekątne  $C_2^s G_1$  i  $C_2^s G_2$ , które przetną promienie  $I^0 O_s$  i  $II^0 O_s$  w czterech punktach, stanowiących wierzchołki trapezu, opisanego na elipsie  $r_s$ . W analogiczny sposób postąpimy przy wyznaczaniu elipsy  $r_1^s$  i dalszych.

Przykładami perspektyw powierzchni obrotowych o osiach pionowych, otrzymanych drogą fotograficzną, są rysunki 288, 289 i 291.

c) Opisany wyżej sposób otrzymania zarysu pozornego powierzchni obrotowej w rzucie środkowym zastosowaliśmy na rys. 293 do kuli.

Prosta  $a_s$  jest perspektywą pionowej osi kuli, punkt  $C_s$  perspektywą jej środka, a prosta  $t_a$ , równoległa do linii horyzontu, śladem łowym płaszczyzny równika. Przez oś  $a$  i oko poprowadzimy płaszczyznę  $\varphi$  i wykonamy jej kład na tło, a następnie punkt  $C_s$  rzucimy z punktu  $O^0$  na prostą  $t_a$ , gdzie otrzymamy punkt  $C^0$ .

Promień, łączący punkt główny  $O_s$  z punktem  $C_s$ , przecina prostą  $t_a$  w punkcie  $C^*$ , w którym kreślimy prostopadłą. Ta ostatnia przecina prostą  $(O)C_s$  w punkcie  $(C)$ . Oznaczmy punkt przecięcia się prostych  $a_s$  i  $t_a$  literą  $B$  i zakresmy z tego punktu, jako środka, promieniem  $B(C)$  łuk koła, aż do przecięcia się z prostą  $t_a$  w punkcie  $C^0$ . Prosta  $a^0$ , prostopadła w punkcie  $C^0$  do prostej  $t_a$ , jest kładem osi kuli na tło. Zakreśmy z punktu  $C^0$ , jako środka, promieniem, równym promieniowi kuli, koło  $k^0$ ; z punktu  $O^0$  poprowadźmy do tego koła styczne i wykreśmy cięciwę styczności  $\overline{I^0 2^0}$ . Tym sposobem dokonaliśmy kładu płaszczyzny  $\varphi$  na tło. Koło  $k^0$ , punkt  $O^0$ , styczne, wykreślone z niego, do koła  $k^0$  i cięciwę styczności  $\overline{I^0 2^0}$  uważać możemy za rzut prostokątny kuli i stożka widzenia, opisanego na niej, na płaszczyznę tła, jako płaszczyznę rzutu. Środek kuli  $C^0$  leży na tle, podobnie, jak wierzchołek stożka  $O^0$ .

Kład płaszczyzny horyzontu na tło sprowadzi na tło oko, które zajmie położenie punktu  $(O)$ , przyczem odcinek  $(O)O_s$ , prostopadły do linii horyzontu, równy jest głębokości łowej  $\delta$ . Połączmy punkt  $(O)$  z punktem  $A$  prostą i poprowadźmy do niej w punkcie  $(O)$  prostopadłą. Prostopadła ta przetnie linię horyzontu w punkcie  $Z^{90}$ , który jest śladem zbiegu prostych, prostopadłych do płaszczyzny  $\varphi$ . Dla dalszej konstrukcji potrzebny nam jest punkt mierzenia  $M$ , związany z punktem  $Z^{90}$ ; otrzymamy go, jako punkt przecięcia się łuku koła, zakreślonego z punktu  $Z^{90}$ , jako środka, promieniem  $\overline{Z^{90}(O)}$ , z linią horyzontu  $h$ . Ponieważ punkt  $Z^{90}$  leży poza obszarem rysunkowym, postąpiliśmy podobnie, jak na rys. 260: wykreśliliśmy prostą  $h' \parallel h$ , która przecięła prostą  $(O)Z^{90}$  w punkcie  $Z'$ ; z punktu tego zakresliliśmy łuk promieniem  $Z'(O)$





śladem  $Z^{90}$ . Otrzymane punkty  $3_s$  i  $4_s$  są punktami zarysu pozornego kuli. W ten sam sposób otrzymaliśmy punkty  $5_s$ ,  $6_s$ ,  $7_s$  i  $8_s$ . Punkty  $1_s$  i  $2_s$ , w których styczne do koła  $k^0$ , poprowadzone z punktu  $O^0$ , przecinają prostą  $a_s$ , są także punktami szukanego zarysu pozornego kuli w rzucie perspektywicznym. Miejszem geometrycznym wszystkich w ten sposób otrzymanych punktów jest elipsa  $e_s$ .

**53. Perspektywa powierzchni obrotowej o osi prostopadłej do tła.** a) Jeżeli oś powierzchni obrotowej jest prostopadła do tła, to zadanie wykreślenia jej perspektywy rozwiązać można w sposób, poznany przy kreśleniu zarysu pozornego powierzchni obrotowej, której oś ma położenie pionowe (ust. 52). Tak więc przez oko i oś powierzchni poprowadzimy płaszczyznę, którą następnie położymy, wraz z południkiem, na tło. Wyznamy rzut prostokątny linii styczności stożka, opisanego na powierzchni z oka, jako wierzchołka, a następnie linię tę znajdziemy w perspektywie.

Po wykonaniu kładu płaszczyzny  $\varphi$ , przechodzącej przez oko i daną oś  $a$  (rys. 294), oś ta zajmie położenie prostej  $a^0$ , prostopadłej do prostej  $a_s$  w punkcie  $T_a$ , śladzie tłowym prostej  $a$ . Operujemy trzecią częścią głębokości tłowej, a więc kładem  $O_0^{1/3}$  oka, zbliżonego do tła o dwie trzecie głębokości.

Uważamy południk, sprowadzony wskutek kładu płaszczyzny  $\varphi$  na tło, za rzut poziomy powierzchni, a punkt  $O^0$  za rzut poziomy oka, i wykreślimy rzut poziomy linii styczności stożka, opisanego na powierzchni z punktu  $O$ . Uwzględnić musimy dwa stożki: jeden opisany i drugi wpisany, inaczej mówiąc: jeden stykający się z powierzchnią od zewnątrz, drugi od wewnątrz.

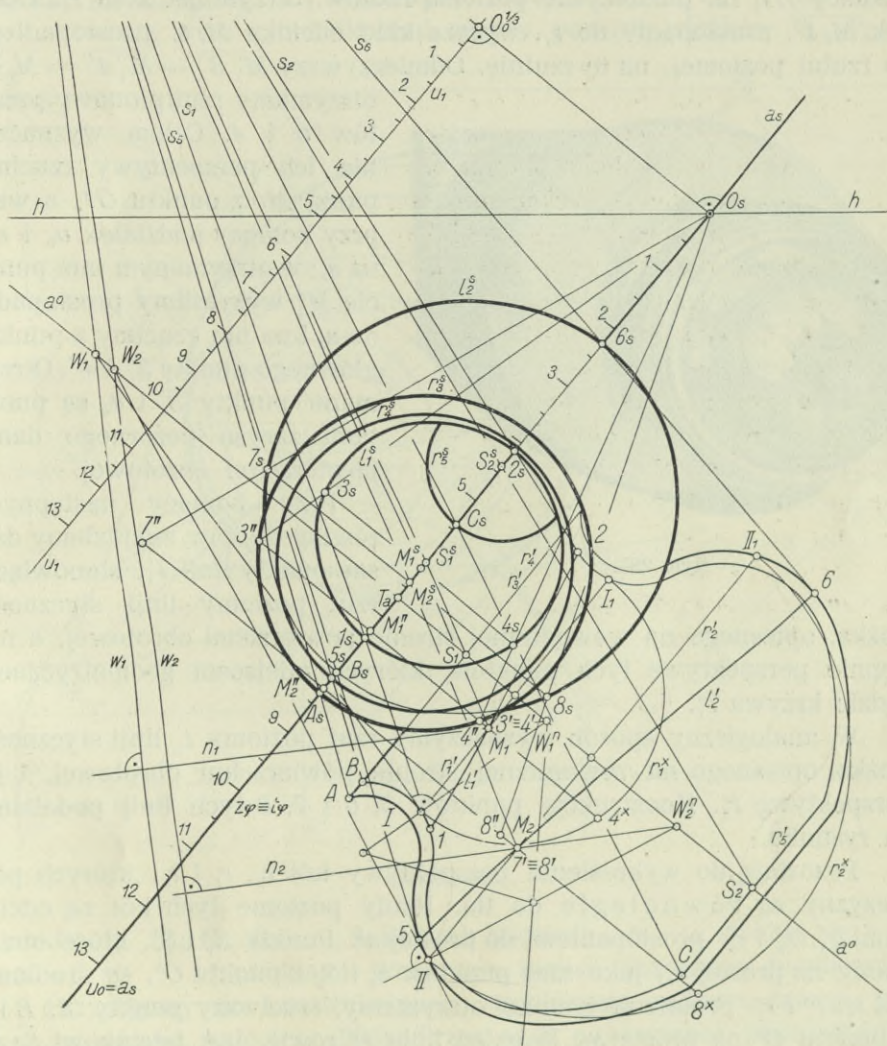
Ponieważ do konstrukcji użyć możemy tylko „zredukowanego“ oka, którego kładem jest punkt  $O_0^{1/3}$ , więc rozwiązanie zadania wymaga użycia podziałek zbiegu, a mianowicie  $u_0$  i  $u_1$ . Przyjąwszy jako jednostkę podziałki  $u_0$  10 mm, otrzymamy jednostkę podziałki  $u_1$  według równ. (2), ust. 23, str. 65:

$$a_1 = \frac{n-m}{n} \cdot a = \frac{3-1}{3} \cdot 10 = \frac{20}{3} = \sim 6.6 \text{ mm.}$$

Styczne  $s_1$  i  $s_2$ , wykreślone przy pomocy podziałek  $u_0$  i  $u_1$  z punktu  $O^0$  do południka wewnętrznego, stykają się z nim w punktach 1 i 2, których perspektywę  $1_s$  i  $2_s$  są punkty przecięcia się tych stycznych z prostą  $a_s$ . Weźmy pod uwagę równoleżnik  $r_1$ , którego rzutem poziomym, w wyżej założonym rozumieniu, jest odcinek  $\bar{I}, \bar{I}_1 = r_1'$ , to punkt  $W_1$ , w którym styczna do południka wewnętrznego w punkcie  $I$  przecina prostą  $a^0$ , jest rzutem poziomym wierzchołka stożka, stycznego do powierzchni obrotowej wzdłuż tego równoleżnika. Prostopadła, wykreślona w punkcie  $I$  do prostej  $I - W_1$ , przecina  $a^0$  w punkcie  $W_1^n$ ; punkt  $W_1^n$



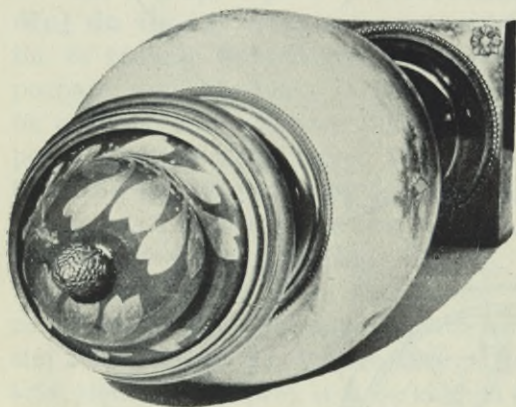
jest rzutem poziomym wierzchołka stożka normalnego, przy pomocy którego znajdziemy punkty zarysu powierzchni, leżące na równoleżniku  $r_1$ . Połączmy punkty  $O^0$  i  $W_1$  prostą  $w_1$ , a z punktu  $W_1^n$  wykreślmy do niej



Rys. 294.

prostopadłą  $n_1$ , która przetnie  $r'_1$  w punkcie  $M_1$ . Punkt ten oznaczyliśmy równocześnie liczbami  $3'$  i  $4'$ . W istocie bowiem, w punkcie tym schodzą się z punktem  $M_1$  rzuty poziome leżących na równoleżniku  $r_1$  punktów  $3$  i  $4$  zarysu istotnego powierzchni obrotowej; punkt  $M_1$  jest środkiem cięciwy  $3, 4$  i leży na tle, jako na poziomej płaszczyźnie rzutów.

Uważajmy tło za rzutnię pionową a prostą  $a_s$  za oś rzutów i znajdziemy rzut pionowy punktów  $M_1$ ,  $3$  i  $4$ . Punkt  $M_1'$  leżeć będzie na osi  $a_s$ , dla wyznaczenia zaś punktów  $3''$  i  $4''$  obrócimy równoleżnik  $r_1$  około jego średnicy  $I, I_1$  na płaszczyznę poziomą rzutów, otrzymując koło  $r_1^*$ . Odcinek  $\overline{M_1 4^*}$ , prostopadły do  $r_1'$ , wyraża kład odcinka  $\overline{M_1 4}$ , prostopadłego do rzutni poziomej, na tę rzutnię. Odmierzwszy  $\overline{M_1' 3''} = \overline{M_1' 4''} = \overline{M_1 4^*}$ ,



Rys. 295.

otrzymamy rzut pionowy punktów  $3$  i  $4$ . Celem wyznaczenia ich perspektywy rzucimy punkt  $M_1$  z punktu  $O^0$ , a więc przy pomocy podziałek  $u_0$  i  $u_1$ , na  $a_s$ ; w otrzymanym tam punkcie  $M_1^s$  wykreślimy prostopadłą do  $a_s$  i na nią rzucimy z punktu głównego punkty  $3''$  i  $4''$ . Otrzymane punkty  $3_s$  i  $4_s$  są punktami zarysu pozornego danej powierzchni obrotowej.

Przy pomocy następujących równoleżników znajdziemy dalsze punkty linii  $l_1'$ , stanowiącej rzut poziomy linii styczności

stożka, opisanego na wewnętrznej stronie powierzchni obrotowej, a następnie perspektywę tych punktów, których miejscem geometrycznym będzie krzywa  $l_1^s$ .

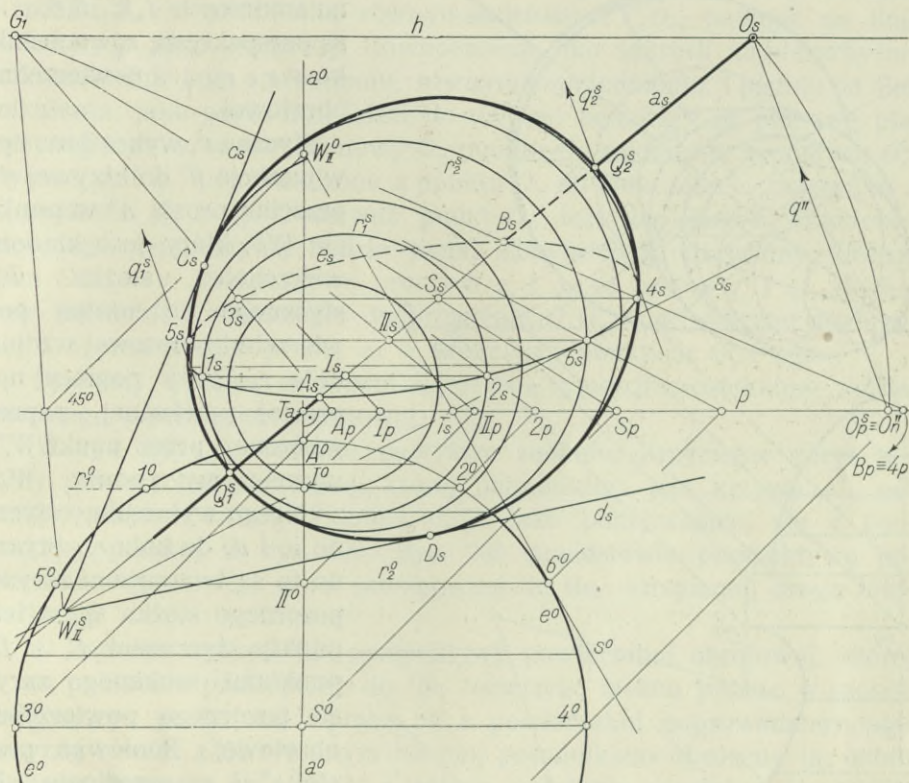
W analogiczny sposób wyznaczmy rzut poziomy  $l_2'$  linii styczności stożka, opisanego na zewnętrznej stronie powierzchni obrotowej, i jej perspektywę  $l_2^s$ . Konstrukcję punktów  $5, 6$  i  $7, 8$  tych linii podaliśmy na rysunku.

Pozostają do wykreślenia perspektywy kół  $r_3, r_4$  i  $r_5$ , których płaszczyzny są równoległe do tła. Rzuty poziome tych kół są odcinkami  $r_3', r_4'$  i  $r_5'$ , prostopadłymi do prostej  $a^0$ . Punkty  $S_1^s$  i  $S_2^s$ , które otrzymamy na prostej  $a_s$ , jako rzut punktów  $S_1$  i  $S_2$  z punktu  $O^0$ , są środkami kół  $r_3^s, r_4^s$  i  $r_5^s$ . Promienie tych kół otrzymamy, rzuciwszy punkty  $A, B$  i  $C$  z punktu  $O^0$  na prostą  $a_s$ . Promień koła  $r_3^s$  równy jest odcinkowi  $\overline{S_1^s A_s}$ , promień koła  $r_4^s$  równy odcinkowi  $\overline{S_1^s B_s}$ , a wreszcie promień koła  $r_5^s$  równy odcinkowi  $\overline{S_2^s C_s}$ .

b) Inny sposób otrzymania zarysu pozornego powierzchni obrotowej o osi prostopadłej do tła opiera się na następującem rozumowaniu: płaszczyzny równoleżnikowe są równoległe do tła, a więc perspektywy równoleżników będą kołami. Opiszmy wzdłuż tych równoleżników stożki  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ , styczne do powierzchni obrotowej. Wierzchołki  $W_1,$



$W_2, \dots$  tych stożków leżeć będą na osi  $a$  powierzchni obrotowej. Jeżeli wykreślimy perspektywy  $r_1^s, r_2^s, \dots$  równoleżników  $r_1, r_2, \dots$  i perspektywy  $W_1^s, W_2^s, \dots$  wierzchołków  $W_1, W_2, \dots$  stożków  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  — to styczne  $a_s, b_s; c_s, d_s; \dots$ , wykreślone z punktów  $W_1^s, W_2^s, \dots$  do kół  $r_1^s, r_2^s, \dots$  tworzą wraz z temi kołami zarysy pozorne stożków  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$



Rys. 296.

Punkty  $A_s, B_s; C_s, D_s; \dots$ , w których proste  $a, b, \dots$  stykają się z kołami  $r_1^s, r_2^s, \dots$  są punktami szukanego zarysu pozornego powierzchni.

Przystąpmy do konstrukcyjnego rozwiązania zadania, biorąc, jako jego przedmiot, kulę (rys. 296). Przez oś  $a$  powierzchni poprowadzimy płaszczyznę poziomą i wykonamy jej kład na tło, wraz z przyjętym na niej południkiem  $e$  (w naszym przykładzie kołem). Oś  $a$  zajmie położenie prostej  $a^0$ , prostopadłej w punkcie  $T_a$ , t. j. jej śladzie tłowym, do linii podstawy  $p$ ; kład południka  $e$  będzie kołem  $e^0$ .

Zkolei wykreślimy perspektywę  $e_s$  południka  $e$ , a to za pośrednictwem prostych, równoległych do linii podstawy a przecinających krzywą  $e^0$  w punktach  $1^0, 2^0; 3^0, 4^0; \dots$  Perspektywy tych prostych po-





poprowadzone z oka do tego południka, przetną os  $a$  w punktach  $Q_1$  i  $Q_2$ , a prostą  $a_s$  w szukanych punktach  $Q_1^s$  i  $Q_2^s$ . Obróćmy płaszczyznę  $q$ , wraz z promieniem głównym, okiem i południkiem  $e_1$ , około osi  $a$  powierzchni tak, aby zajęła położenie poziome, t. j. zeszyła się z płaszczyzną południka  $e$ . Podczas tego obrotu punkt główny zakreśli łuk koła o środku  $T_a$  i o promieniu, równym odcinkowi  $T_a O_s$ , padając na linię podstawy  $p$ , jako punkt  $O_p^s$ . Równocześnie oko zakreśli na płaszczyźnie zniknięcia łuk koła o promieniu, równym poprzedniemu, i padnie na ślad zniknięcia, jako punkt  $O_n$ . Jeżeli tło uważać będziemy za pionową płaszczyznę rzutów, to rzut pionowy  $O_n''$  punktu  $O_n$  zejdzie się z punktem  $O_p^s$ . Styczne  $q_1$  i  $q_2$ , poprowadzone z punktu  $O_n$  do południka  $e$ , przetną os  $a$  w punktach  $Q_1$  i  $Q_2$ . Ponieważ punkt  $O_n$  leży na śladzie zniknięcia, więc jego perspektywą będzie punkt niewłaściwy, określony kierunkiem  $OO_n = q$ . Perspektywą prostych  $q_1$  i  $q_2$  są proste  $q_1^s$  i  $q_2^s$ , równoległe do siebie i równoległe do promienia  $O_s O_n'' \equiv q''$ , styczne do krzywej  $e_s$  i przecinające prostą  $a_s$  w szukanych punktach  $Q_1^s$  i  $Q_2^s$ .

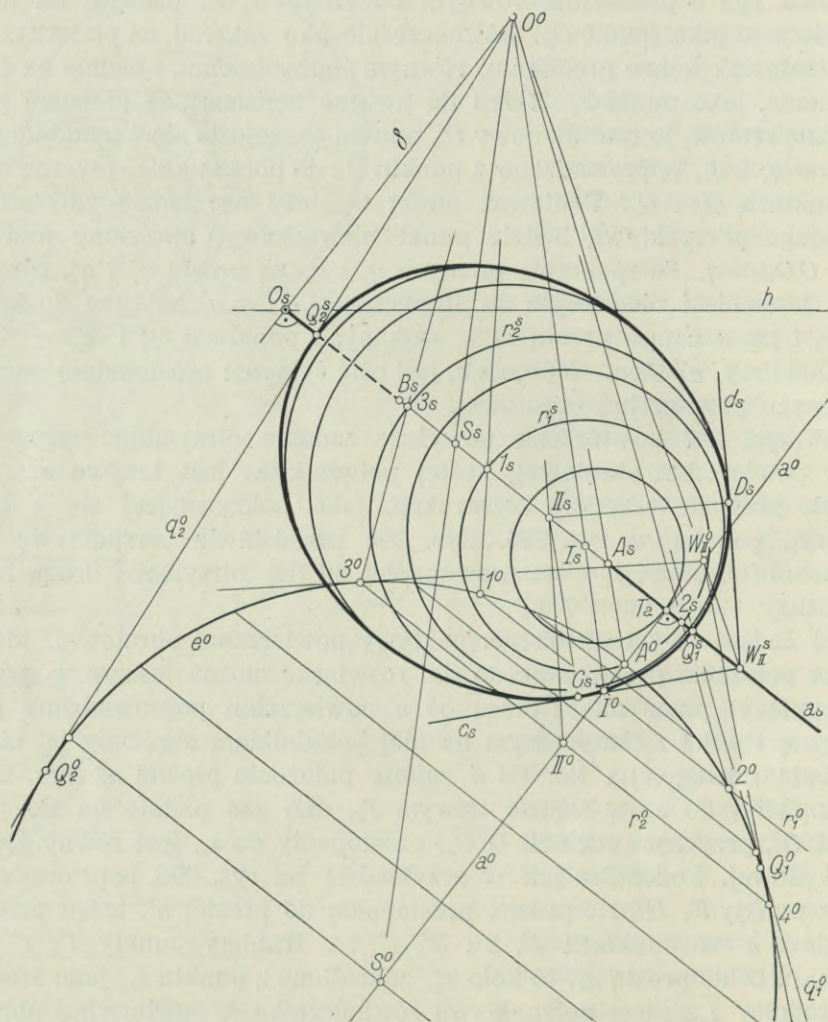
Dodajmy wkońcu, że prosta  $a_s$  jest osią symetrii prostokątnej zarysu pozornego powierzchni obrotowej.

W rys. 297 powtórzono powyższe zadanie, otrzymując zarys pozorny powierzchni obrotowej, której południkiem jest krzywa  $e^0$ ; pominięto przytem szczegóły konstrukcji, jako pokrywającej się z konstrukcją, podaną w rys. 296. Rys. 295 przedstawia perspektywę powierzchni obrotowej, o osi prostopadłej do tła, otrzymaną drogą fotograficzną.

c) Zadanie wykreślenia perspektywy powierzchni obrotowej, której os ma położenie prostopadłe do tła, rozwiązać można jeszcze w sposób następujący: przez oko i przez os  $a$  powierzchni poprowadzimy płaszczyznę i wraz z otrzymanym na niej południkiem obrócimy ją, około jej śladu tłowego, na tło. Os  $a$  zajmie położenie prostej  $a^0$  (rys. 298), prostopadłej do  $a_s$  w śladzie tłowym  $T_a$ , oko zaś padnie na tło, jako punkt  $O^0$ , przyczem odcinek  $O^0 O_s$ , prostopadły do  $a_s$ , jest równy głębokości tłowej. Podobnie, jak w przykładzie na rys. 296, poprowadzimy przez punkty  $I^0, II^0, \dots$  proste, prostopadłe do prostej  $a^0$ , które przetną południk  $e^0$  w punktach  $1^0, 2^0; 3^0, 4^0; \dots$ . Rzućmy punkty  $I^0, 1^0$  i  $2^0$  z punktu  $O^0$  na prostą  $a_s$ , to koło  $r_1^s$ , zakreślone z punktu  $I_s$ , jako środka, na średnicy  $I_s 2_s$ , jest perspektywą równoleżnika  $r_1$  powierzchni obrotowej. W ten sposób otrzymamy dowolną ilość równoleżników powierzchni, poczem wyznaczmy perspektywy wierzchołków stożków, opisanych na powierzchni obrotowej wzdłuż tych równoleżników. Tak np. styczne w punktach  $3^0$  i  $4^0$  do południka  $e^0$  przecinają się w punkcie  $W_{II}^0$  na prostej  $a^0$ . Punkt  $W_{II}^0$  rzucimy z punktu  $O^0$  na prostą  $a_s$ , otrzymując tam punkt  $W_{II}^s$ , z którego następnie kreślimy styczne  $c_s$  i  $d_s$  do koła  $r_2^s$ . Punkty

stycznosci  $C_s$  i  $D_s$  są punktami zarysu pozornego powierzchni obrotowej — w naszym przypadku kuli.

Punkty  $Q_1^s$  i  $Q_2^s$  linii zarysu, leżące na prostej  $a_s$ , otrzymamy, jako punkty przecięcia się prostej  $a_s$  ze stycznymi  $q_1^0$  i  $q_2^0$ , wykreślonymi z punktu  $O^0$  do krzywej  $e^0$ .



Rys. 298.

**54. Perspektywa powierzchni obrotowej, której oś ma dowolne położenie w przestrzeni.** a) Znamy perspektywę  $a_s$  osi i jej ślady  $T_a$  i  $Z_a$  (rys. 299); znamy położenie punktu głównego  $O_s$ , głęboko-





dotychczas. W szczególności zachodzi tu analogia z zadaniem, rozpatrzone w ustępie 52, rys. 290.

Przez oko i oś  $a$  powierzchni poprowadzimy płaszczyznę  $\psi$  i wykonamy jej kład na tło. Oko zajmie położenie punktu  $O^0$ , oś położenie prostej  $a^0$ , równoległej do promienia  $O^0Z_a$ , a południk  $k$  powierzchni, leżący na płaszczyźnie  $\psi$ , będzie krzywą  $k^0$ . Uważając krzywą tę za rzut prostokątny powierzchni obrotowej na płaszczyznę  $\psi$ , sprowadzoną za pomocą obrotu około śladu  $t_\psi$  na tło, wyznaczmy rzut prostokątny  $l'$  linii styczności  $l$  stożka, opisanego na powierzchni obrotowej, z punktu  $O^0$ , jako wierzchołka. Punkty tej linii otrzymamy przy pomocy stożków normalnych, podobnie, jak w przykładach poprzednich (rys. 290, 293).

Tak np. punkt  $W$  prostej  $a^0$  jest wierzchołkiem stożka, stycznego do powierzchni wzdłuż równoleżnika  $r_3$ , a punkt  $W''$  wierzchołkiem stożka normalnego; prosta  $n$ , wykreślona z  $W''$  prostopadłe do promienia, łączącego punkty  $O^0$  i  $W$ , przetnie prostą  $d'$  w punkcie  $5' \equiv 6'$  krzywej  $l'$ . Koło  $r_3^x$  jest równoleżnikiem  $r_3$ , sprowadzonym na tło przez obrót około prostej  $d'$ ; odcinek  $5^x5'$ , prostopadły do  $r_3^x$ , wyraża prawdziwą odległość punktu  $5$  od tła, równą takiejże odległości punktu  $6$ .

Przy wyznaczeniu punktu  $3' \equiv 4'$  krzywej  $l'$  uwzględnić musimy fakt, że odpowiadające mu punkty  $3$  i  $4$  leżą na kole szyjnym  $r_2$  i że wzdłuż tego koła styczny jest do powierzchni nie stożek lecz walec obrotowy. Prosta  $c'$  przecina promień  $O^0Z_a$  w punkcie  $R$ , z którego poprowadzimy do koła  $r_2^x$  styczną; punkt styczności  $3^x$  rzucimy następnie na prostą  $c'$ , gdzie otrzymamy punkt  $3' \equiv 4'$ .

Proste  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$  ... przecinają prostą  $a_s$  w punktach  $T_b$ ,  $T_c$ ,  $T_d$ , ... przez które przejdą ślady tłowe  $t_\beta$ ,  $t_\gamma$ ,  $t_\delta$  ... płaszczyzn równoleżnikowych, mających wspólny ślad zbiegu  $z_\beta \equiv z_\gamma \equiv z_\delta$ . Ślad ten znajdziemy w ten sposób, że punkt główny  $O_s$  połączymy z punktem  $Z_a$  i do promienia  $O_sZ_a$  poprowadzimy prostopadłą, na której odmierzymy  $O_sO^x = \delta$ . Punkt  $O^x$  połączymy z punktem  $Z_a$  promieniem, do którego poprowadzimy prostopadłą w punkcie  $O^x$ . Prostopadła ta przetnie prostą  $Z_aO_s$  w punkcie  $A$ , przez który przejdzie ślad zbiegu  $z_\beta \equiv z_\gamma \equiv z_\delta$ , równoległy do prostej  $O_sO^x$ .

Zkolei znajdziemy ślad zbiegu  $Z_\psi^{90}$  prostych, prostopadłych do płaszczyzny  $\psi$ . Ślad ten jest punktem przecięcia się promienia, wykreślonego w punkcie  $(O)$  prostopadłe do prostej  $A_1(O)$ , z prostą  $z_\beta$ . Punkt mierzenia  $M$ , związany z kierunkiem  $Z_\psi^{90}$ , znajdziemy podobnie, jak na rys. 289.

Teraz możemy przystąpić do znalezienia punktów  $1_s$ ,  $2_s$ ,  $3_s$ , ... linii  $l_s$ , t. j. punktów zarysu pozornego powierzchni. Opiszemy sposób otrzymania punktów  $5_s$  i  $6_s$ . Punkt  $S_3 \equiv 5' \equiv 6'$  rzucimy z punktu  $O^0$  na prostą  $a_s$  i otrzymany tam punkt  $S_3^s$  połączymy z punktem  $Z_\psi^{90}$  pro-





na tło, pokrywający się z kładem na tło południka, znajdującego się na płaszczyźnie  $\alpha$ . Przy pomocy stożków normalnych znajdziemy linię  $l'$ , t. j. rzut prostokątny linii styczności stożka, opisanego na powierzchni obrotowej, z punktu  $O^0$ . Krzywą  $l_s$ , t. j. zarys pozorny powierzchni obrotowej, otrzymamy podobnie, jak w przykładach na rys. 290, 293, 299. Więć np. punkt  $M_1 \equiv 1' \equiv 2'$  rzucimy z punktu  $O^0$  na prostą  $a_s$ ; przez otrzymany punkt  $M_1^s$  i przez punkt  $M_1$  prowadzimy proste, prostopadłe do prostej  $a_s$ . Na drugiej z nich odmierzymy  $M_1' 1'' = M_1'' 2'' = 1' 1'$  i punkty  $1''$  i  $2''$  rzucimy z punktu głównego  $O_s$  na pierwszą. Punkty  $1_s$  i  $2_s$  są punktami krzywej  $l_s$ . Punktom styczności  $3' \equiv 4'$  i  $7' \equiv 8'$  promieni, poprowadzonych z punktu  $O^0$  styczni do krzywej  $l'$ , odpowiedzą punkty zwrotu  $3_s, 4_s$  i  $7_s, 8_s$  linii  $l_s$ .

Równoleżniki powierzchni obrotowej leżą na płaszczyznach, prostopadłych do osi powierzchni. Ślad zbiegu  $z_\epsilon$  tych płaszczyzn znajdziemy w następujący sposób: z punktu  $O_0^{14}$  wykreślimy prostopadłe do prostej  $a^0$  promień (opuszczony na rysunku), który przetnie prostą  $a_s$  w pewnym punkcie. Oznaczmy odleganie tego punktu od punktu  $O_s$  literą  $n$  i odmierzymy  $O_s A = 4n$ ; ślad zbiegu  $z_\epsilon$  przejdzie przez punkt  $A$ , prostopadłe do prostej  $a_s$ . Konstrukcję trapezu, w który wpisana jest następnie elipsa  $r_5^s$ , jako

perspektywa równoleżnika  $r_5$ , odtworzy czytelnik bezpośrednio z rysunku.

Praktyczną ilustracją zagadnienia, rozpatrzonego w rys. 300, jest fotogram, przedstawiony na rys. 301.



Rys. 301.

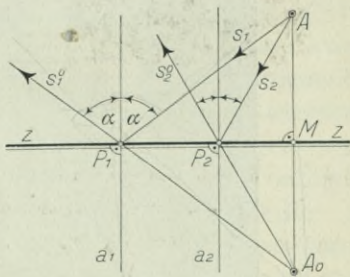




## Rozdział V.

### Perspektywa obrazów odbitych w zwierciadłach płaskich.

**55. Prawo odbicia.** Weźmy pod uwagę zwierciadło płaskie  $z$  i punkt  $A$ , leżący zewnątrz (rys. 303). Promień światła  $s_1$ , przechodzący przez punkt  $A$ , odbija się w punkcie  $P_1$  od zwierciadła i jako promień  $s_1^0$  dochodzi do naszego oka. Prosta  $a_1$ , prostopadła w punkcie  $P_1$  do płaszczyzny zwierciadła, czyli t. zw. prostopadła padania, tworzy, jak wiadomo, z promieniem padającym  $s_1$  i odbitym  $s_1^0$  równe kąty  $\alpha$ . Jeżeli kąt, jaki promień  $s_1$  tworzy z prostą  $a_1$ , nazwiemy kątem padania, a kąt, zawarty między promieniem odbitym  $s_1^0$  a prostopadłą padania, kątem odbicia, to podstawowe prawo odbicia wyrazi się zdaniem: kąt padania równy jest kątowi odbicia. Promień padający, prostopadła padania i promień odbity leżą na jednej płaszczyźnie, prostopadłej do płaszczyzny zwierciadła.



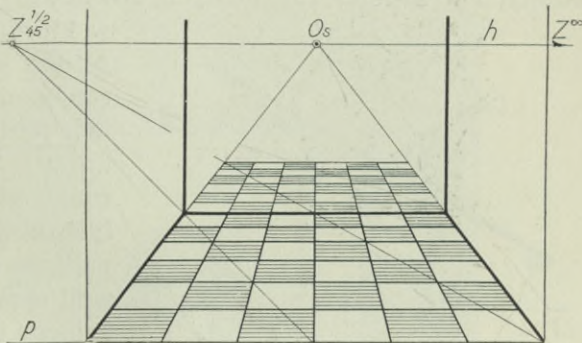
Rys. 303.





### 56. Przykłady odbić w zwierciadłach pionowych.

1. Wyznaczyć odbicie się parkietu podłogi w ścianie czołowej wnętrza pokoju, która jest zwierciadłem (rys. 306). Posłużymy się częściowym punktem oddalenia  $Z_{45}^{1/2}$  i przy jego pomocy wykreślimy perspektywę posadzki, złożonej z kwadratów. Odbity obraz w zwierciadle, przystający do ornamentu posadzki, przedstawi się w perspektywie, jako jej przedłużenie, oddalone bardziej od oka.



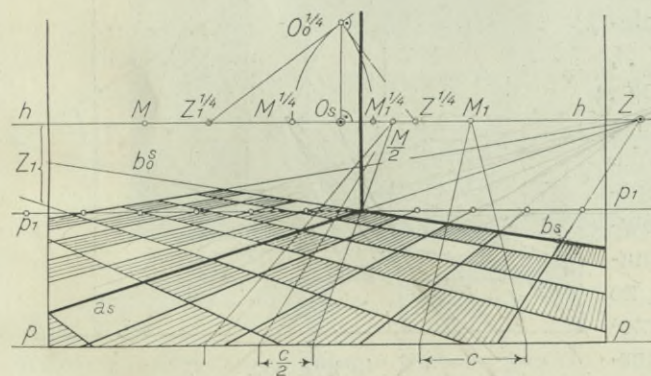
Rys. 306.

2. Wykreślić perspektywę odbicia się ornamentu podłogi w lewej ścianie lustrzanej wnętrza (rys. 307). Rozwiązanie zadania sprowadza się do wykreślenia przedłużonego ku śladowi zbiegu  $Z_1$  ornamentu podłogi.

3. Wykonać zadanie poprzednie, gdy boki kwadratów, stanowiących ornament, są równoległe względnie prostopadłe do tła (rys. 308 i 309).

Dla szybszego zorientowania się weźmy pod uwagę rzut poziomy całego układu (rys. 308).

Prosta  $p$  jest śladem tła na płaszczyźnie poziomej, proste  $a$  i  $b$  śladami ścian bocznych wnętrza, punkt  $O'$  rzutem poziomym oka, punkt  $O'_s$



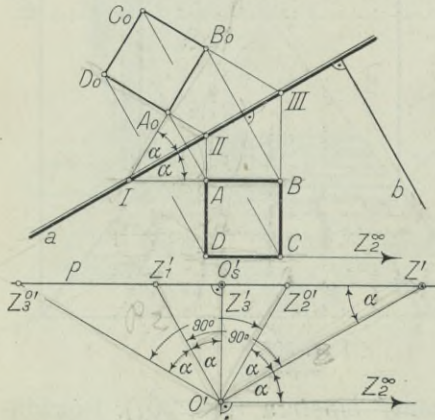
Rys. 307.

rzutem poziomym punktu głównego. Jeżeli  $A, B, C, D$  jest jednym kwadratem ornamentu podłogi, to kwadrat  $A_0 B_0 C_0 D_0$  jest jego obrazem, odbitym w zwierciadle  $a$ . Promień poziomy, wyprowadzony z oka równoległe do  $a$ , przebija tło w punkcie  $Z$ , który jest śladem

zbiegu poziomych promieni, równoległych do zwierciadła. Punkt  $Z_1$ , w którym promień, równoległy do prostej  $b$ , przebije tło, jest śladem zbiegu prostych, prostopadłych do kierunku  $a$ . Ślad zbiegu  $Z_2$ , prostych

równoległych do prostej  $p$ , jest punktem niewłaściwym horyzontu. Śladem zbiegu  $Z_3$  promieni prostopadłych do prostej  $p$  jest punkt główny  $O_s$ .

Promień, poprowadzony z oka równoległe do  $A_0 - B_0$ , wyraża kierunek odbitych w zwierciadle prostych, równoległych do prostej  $p$ . Punkt  $Z_2^0$ ,

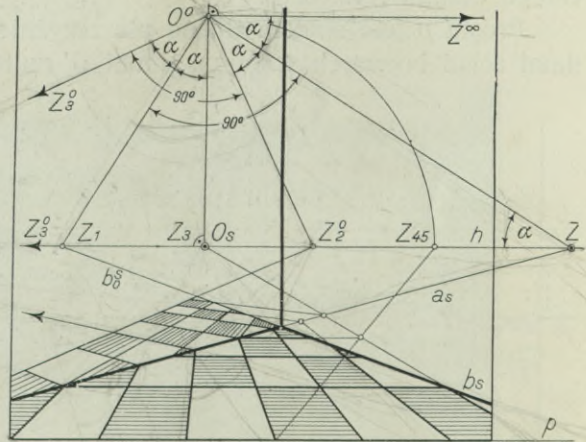


Rys. 308.

w którym promień ten przetnie horyzont, jest śladem zbiegu tego kierunku, a punkt  $Z_2^0$  — tego śladu rzutem poziomym. Promień prostopadły do  $O - Z_2^0$ , czyli równoległy do kierunku  $B_0 C_0$ , t. j. do kierunku odbitych w zwierciadle prostych, prostopadłych do prostej  $p$ , przetnie horyzont w punkcie  $Z_3^0$ , który jest śladem zbiegu wszystkich prostych o kierunku prostej  $B_0 C_0$ . Tak więc punkty  $Z_2^0$  i  $Z_3^0$  są śladami zbiegu odbitych w zwierciadle kierunków: pierwszy kierunku równoległego a drugi prostopadłego do linii podstawy  $p$ .

Perspektywiczne rozwiązanie naszego zadania podaje rys. 309. Wychodząc z danego punktu głównego  $O_s$  i śladu zbiegu  $Z$ , przy znanym oddaleniu tłowem, znajdziemy ślad zbiegu  $Z_1$  prostych, prostopadłych do

pierwszego kierunku, poczem, odmierzywszy kąt  $ZO^0Z_2^0 = \alpha$  i  $Z_1O_0Z_3^0 = \alpha$ , równe kątowi nachylenia do tła prostych, równoległych do kierunku  $OZ$ , otrzymamy ślady zbiegu  $Z_2^0$  i  $Z_3^0$ , które stanowią o rozwiązaniu zadania. Punkty, w których perspektywy prostych, równoległych do tła, przecinają prostą  $a_s$ , łączymy ze śladem  $Z_2^0$ , a punkty przecięcia się obrazów perspektywicznych prostych,



Rys. 309.

prostopadłych do tła, z prostą  $a_s$  — ze śladem  $Z_3^0$  — otrzymując perspektywy odbić tych prostych w zwierciadle.

4. Wyznaczyć perspektywę pionowego odcinka  $\overline{AB}$ , odbitego w zwierciadle, umieszczonem na ścianie czołowej (rys. 310). Ponieważ — jak wia-





Rys. 310.

Karol Larsson. W zwierciadle. Klisza F. Bruckmanna, Monachjum.

domo — odległość odbitego obrazu punktu od zwierciadła równa jest odległości punktu od tegoż zwierciadła, więc obraz odcinka  $\overline{AB}$  będzie odcinkiem pionowym, leżącym na płaszczyźnie  $\varphi$ , przechodzącej przez ten odcinek prostopadle do tła, a oddalony od płaszczyzny zwierciadła o odległość, równą oddaleniu odcinka  $\overline{AB}$  od płaszczyzny zwierciadła. Płaszczyzna  $\varphi$  przetnie płaszczyznę zwierciadła w prostej  $I_s - II_s$ ; z przy-







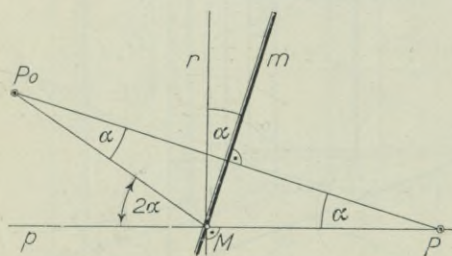
zonce ślad zbiegu  $Z_3^0$  prostych poziomych, prostopadłych do prostej  $b^0$ . Rzut poziomy tego punktu oznaczony jest na rys. 314 znakiem  $Z_3^0$ . Konstrukcyjnie sprowadza się rozwiązanie naszego zadania do wyznaczenia śladów zbiegu  $Z_2^0$  i  $Z_3^0$ .

Przystąpmy do rysunku perspektywicznego (rys. 315). Przy danym horyzoncie, punkcie głównym  $O_s$ , oddaleniu tłowem  $O_s - O^0$  i kącie  $\gamma$ , przyjmijmy ślad zbiegu  $Z$ , a wyznaczmy ślady  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_2^0$  i  $Z_3^0$ . Aby otrzymać perspektywę  $b_0^s$  prostej  $b_0$ , będącej odbiciem krawędzi  $b$ , połączymy punkt  $1_s$  ze śladem  $Z_1$  i odmierzymy perspektywicznie równe odcinki  $1_s I_s = I_s 1_0^s$ . W tym celu rzucimy punkt  $I_s$  z punktu mierzenia  $M_1$  na prostą  $p_1$ , równoległą do linii podstawy  $p$ , odniesiemy  $\overline{I_s I^s} = \overline{I^s I_0^s}$  i punkt  $I_0^s$  rzucimy z punktu  $M_1$  na promień  $1_s Z_1$ , jako punkt  $1_0^s$ . Ponieważ śladem zbiegu prostej  $b_0$  jest punkt  $Z_2^0$  (leżący w naszym przykładzie poza obszarem rysunkowym), więc łącząc go z punktem  $1_0^s$ , otrzymamy prostą  $b_0^s$ . Możemy nie korzystać z punktu  $Z_2^0$ , gdyż prosta  $b_0^s$  przechodzi przez punkt  $P_s$ . Prosta  $2_s - Z_1$  przetnie  $b_0^s$  w punkcie  $2_0^s$ ; sposób otrzymania punktów  $3_0^s$  i  $4_0^s$  odtworzymy wprost z rysunku.

Punktowi  $Z_3$ , jako śladowi zbiegu promieni, prostopadłych do lewej ściany wnętrza, odpowiada punkt  $Z_3^0$ , jako ślad zbiegu promieni, prostopadłych do odbitego w zwierciadle obrazu tej ściany. Łączymy punkty  $2_0^s$  i  $4_0^s$  ze śladem  $Z_3^0$  a punkty  $5_s$  i  $6_s$  ze śladem  $Z_1$ . Otrzymane tym sposobem punkty  $5_0^s$  i  $6_0^s$  dopełniają rozwiązania zadania.

### 57. Przykłady odbić w zwierciadłach nachylnych do ściany pionowej.

1. Wykreślić odbicie ornamentu podłogi w zwierciadle, którego płaszczyzna jest prostopadła do tła. Jeżeli punkt  $P_0$  (rys. 316) jest odbiciem punktu  $P$  w zwierciadle  $m$ , a  $r$  jest prostopadłe do  $p$ , to z uwagi na



Rys. 316.

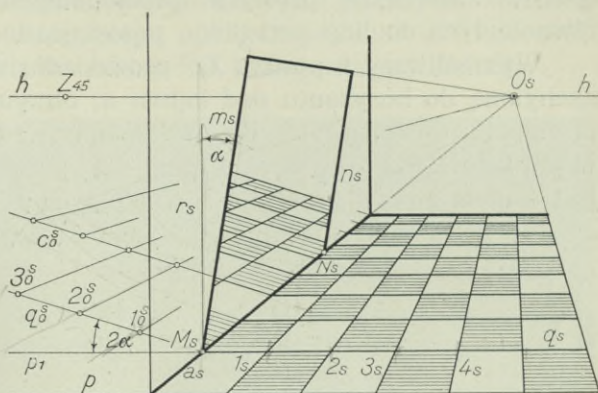
to, że także  $m$  jest prostopadłe do  $P - P_0$ , kąty, jakie tworzą proste  $m$  i  $r$  oraz prosta  $p$  z prostą  $P - P_0$ , są równe i równe kątowi  $\alpha$ . Wobec tego kąt, jaki tworzy prosta  $p$  z prostą  $M - P_0$ , równy jest — jako kąt zewnętrzny trójkąta  $PP_0M$  — kątowi  $2\alpha$ .

Kąt, jaki płaszczyzna zwierciadła tworzy z pionową ścianą boczną (rys. 317), prostopadłą do

tła, przedstawia się w prawdziwej wielkości, mianowicie równy jest kątowi  $\alpha$ , jaki prosta  $r_s$ , poprowadzona w punkcie  $M_s$  prostopadłe do horyzontu, zawiera z prostą  $m_s$ , stanowiącą perspektywę krawędzi zwierciadła. Krawędź ta jest równoległa do tła i leży wraz z prostą  $r$  na płaszczyźnie również do tła równoległej.



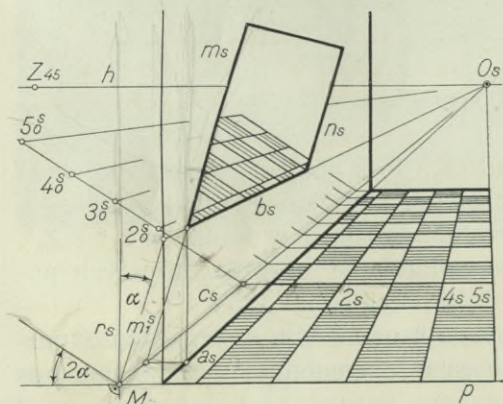
Wykreśliwszy z punktu  $M_s$  prostą  $q_0^s$  pod kątem  $2\alpha$  do linii podstawy  $p$ , względnie do prostej  $p_1$ , równoległej do poprzedniej, otrzymamy kierunek odbitych w zwierdle obrazów wszystkich prostych, równoległych do linii podstawy  $p$ , względnie do horyzontu  $h$ . Odmierzywszy  $M_s - 1_s = M_s - 1_0^s = 1_0^s - 2_0^s = 2_0^s - 3_0^s = \dots$  i połączymy punkty  $1_0^s, 2_0^s, 3_0^s, \dots$  z punktem głównym, dopełnimy rozwiązania zadania, gdyż obrazy odbite prostych, prostopadłych do tła, będą w tym wypadku również do tła prostopadłe, a ich perspektywy zbiegną się w punkcie głównym.



Rys. 317.

Jasnym jest, że gdyby kąt  $\alpha$  wynosił  $45^\circ$ , to obrazy prostych, równoległych do linii podstawy, byłyby pionowe.

Rys. 318 podaje to samo zadanie z tą różnicą, że krawędź przecięcia się płaszczyzny zwierciadła ze ścianą wnętrza, na której jest umieszczone, nie schodzi się z krawędzią  $a$ , jaką ściana ta tworzy z płaszczyzną podłogi.



Rys. 318.

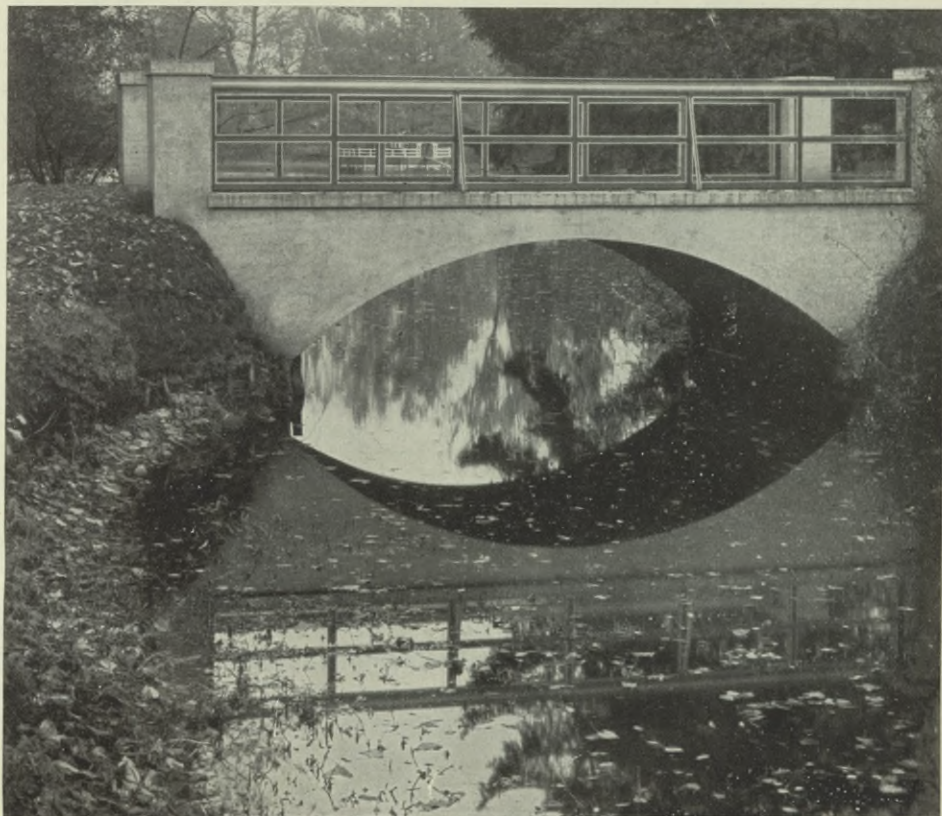
2. Wykreślić perspektywę odbicia ornamentu podłogi w zwierciadle, nachylonem do ściany czołowej a równoległym do horyzontu (rys. 319). Poprowadźmy przez oko główną płaszczyzną pionu  $\epsilon$  i wyznaczmy przecięcie się jej z płaszczyzną podstawy, z tłem i z płaszczyzną zwierciadła; następnie położmy ją, wraz z otrzymanymi na niej punktami i prostymi,

przez obrót około jej śladu tłowego  $t_\epsilon$ , na tło. Kład oka zejdzie się z punktem oddalenia  $Z_2^{45}$ . Jeżeli zwierciadło zawiera z płaszczyzną pionową kąt  $\alpha$ , to odchylenie od poziomu odbitych w zwierciadle promieni, prostopadłych do tła, wyniesie  $2\alpha$  (ust. 57, pkt. 1, rys. 316).





obrocie z punktem mierzenia  $M_1$ . W ten sam, co w rys. 319, sposób znajdziemy ślad zbiegu  $Z_3$  promieni prostopadłych do zwierciadła i ślad zbiegu  $Z_4$  prostych, równoległych do jego krawędzi bocznych. Wreszcie znajdziemy punkt  $Z_5$ , jako ślad zbiegu odbitych w zwierciadle obrazów linii prostych, prostopadłych do ściany, na której wisi zwierciadło.



Rys. 320.

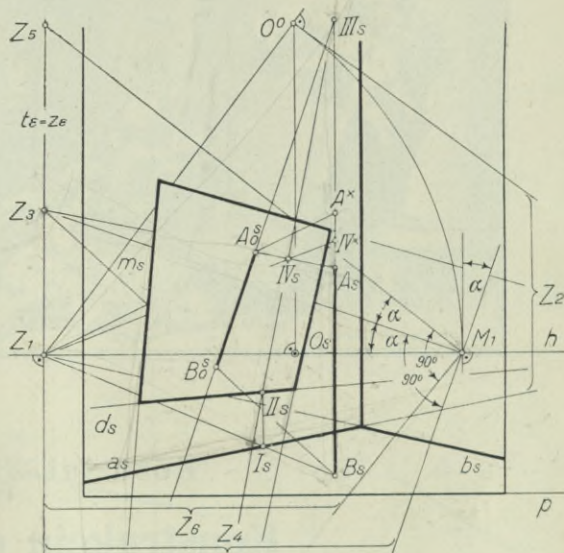
Kliska F. Bruckmanna, Monachjum

Niechaj prosta  $d_s$  będzie perspektywą krawędzi płaszczyzny zwierciadła z lewą ścianą wnętrza, to prosta  $D_s - E_s - Z_4$  stanowi perspektywę krawędzi, jaką tworzy płaszczyzna zwierciadła z drugą, prawą, ścianą wnętrza. Prosta  $e_s$ , łącząca ślad zbiegu  $Z_2$  z punktem  $E_s$ , jest perspektywą prostej przecięcia się płaszczyzny zwierciadła z płaszczyzną podstawy (podłogi). Prosta, łącząca punkt  $E_s$  ze śladem zbiegu  $Z_5$ , jest perspektywą odbitej w zwierciadle krawędzi  $b$ ; proste, łączące punkty  $I_s, II_s, III_s, \dots$  ze śladem  $Z_5$ , są perspektywami odbitych w zwierciadle prostych, równoległych do krawędzi  $b$ .





4. Wykreślić obraz pionowego odcinka  $\overline{AB}$ , odbity w zwierciadle, nachylnym do lewej ściany wnętrza pod kątem  $\alpha$  (rys. 323). Analogicznie do zadania poprzedniego znajdziemy ślady zbiegu  $Z_3$ ,  $Z_4$  i  $Z_5$ , potem wykreślimy perspektywę krawędzi płaszczyzny zwierciadła z płaszczyzną  $\varepsilon$ , poprowadzoną przez odcinek  $\overline{AB}$  prostopadłe do zwierciadła. Płaszczyzna  $\varepsilon$  przecina płaszczyznę podstawy wzdłuż krawędzi, której perspektywą jest prosta  $B_s - Z_1$ , płaszczyznę pionową wnętrza wzdłuż prostej, której obraz perspektywiczny określony jest punktami  $I_s$  i  $II_s$ , a płaszczyznę zwierciadła wzdłuż krawędzi, której perspektywa przechodzi przez punkt  $II_s$  i ślad zbiegu  $Z_4$ .

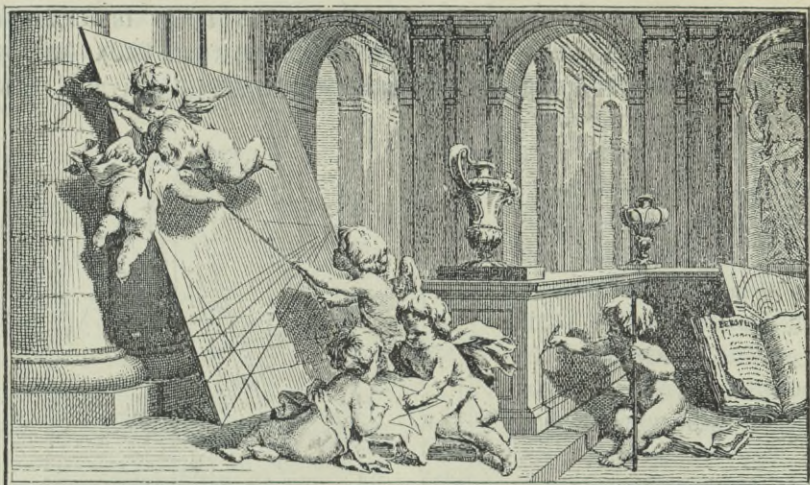


Rys. 323.

Prosta  $Z_4 - II_s$  przecina prostą  $A_s - B_s$  w punkcie  $III_s$ , a promień  $Z_3 - A_s$  w punkcie  $IV_s$ ; punkt  $IV_s$  jest perspektywą punktu przebiecia się promienia, wyprowadzonego z punktu  $A$  prostopadłe do płaszczyzny zwierciadła, z tą płaszczyzną. Oddalenie punktu odbitego  $A_0$  od punktu  $IV$  równe jest oddaleniu punktu  $A$  od punktu  $IV$ . Przyjmując ślad zbiegu  $Z_1$  za punkt dzielenia, rzucimy punkt  $IV_s$  na prostą  $III_s - A_s$ , odmierzymy  $IV^x - A^x = IV^x - A_s$  i punkt  $A^x$  połączymy z  $Z_1$ . Punkt  $A_0^s$  przecięcia się promieni  $Z_3 - A_s$  i  $Z_1 - A^x$  jest perspektywą odbitego w zwierciadle punktu  $A$ , prosta zaś  $III_s - A_0^s$  perspektywą odbitej w zwierciadle pionowej prostej  $III - B$ . Punkt  $B_s$ , połączony ze śladem zbiegu  $Z_3$ , wyznacza na promieniu  $III_s - A_0^s$  punkt  $B_0^s$ .

Punkt  $Z_5$  jest śladem zbiegu odbitych w zwierciadle obrazów linii prostych, prostopadłych do lewej ściany wnętrza, czyli równoległych do krawędzi  $b$ ; punkt  $Z_6$ , w którym prosta, poprowadzona w punkcie  $M_1$  prostopadłe do promienia  $Z_5 - M_1$ , przetnie ślad zbiegu  $z_\varepsilon$ , jest śladem zbiegu wszystkich prostych, stanowiących odbite obrazy prostych pionowych, t. j. prostopadłych do poprzedniego kierunku. Prosta  $III_s - A_0^s - B_0^s$  przejdzie więc przez ślad zbiegu  $Z_6$ , leżący w naszym przypadku poza obrębem rysunku.





## Rozdział VI.

### Konstrukcja cieni.

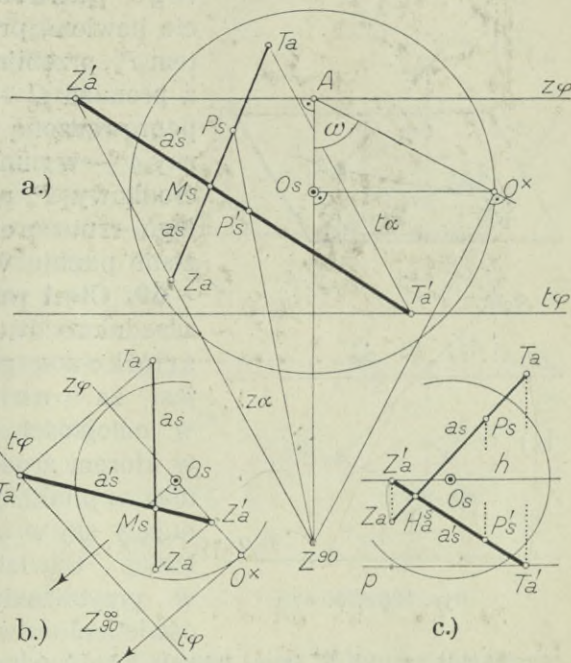
**58. Związek między perspektywą prostą a perspektywą jej rzutu prostokątnego na dowolną płaszczyznę.** Wiadomo, że rzutem prostokątnym prostej  $a$  na płaszczyznę  $\varphi$  jest prosta, podług której płaszczyzna, przechodząca przez prostą  $a$ , prostopadła do płaszczyzny  $\varphi$ , tę płaszczyznę przecina.

Płaszczyzny zbiegu płaszczyzn prostopadłych do płaszczyzny  $\varphi$  przejdą przez promień, prostopadły do płaszczyzny zbiegu płaszczyzny  $\varphi$  (a przechodzący przez oko), wobec czego ślady zbiegu tych płaszczyzn przejdą przez punkt  $Z^{90}$ , jako ślad tego prostopadłego promienia na tle.

Aby więc wykreślić perspektywę rzutu prostokątnego prostej  $a$ , wyznaczonej śladami  $T_a$  i  $Z_a$  (rys. 325 *a*), na płaszczyznę  $\varphi$ , której ślady  $t_\varphi$  i  $z_\varphi$  są dane, znajdziemy przedewszystkiem ślad zbiegu  $Z^{90}$  prostych, prostopadłych do tej płaszczyzny. Prosta  $z_a$ , łącząca ślad  $Z^{90}$  ze śladem zbiegu  $Z_a$  prostej  $a$ , jest śladem zbiegu płaszczyzny  $\alpha$ , przechodzącej przez tę prostą, prostopadłe do płaszczyzny  $\varphi$ ; ślad tłowy  $t_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  przejdzie oczywiście przez ślad tłowy  $T_a$  prostej  $a$ , równoległe do  $z_a$ . Krawędź płaszczyzn  $\varphi$  i  $\alpha$  jest rzutem prostokątnym prostej  $a$  na płaszczyznę  $\varphi$ . Obrazem perspektywnym tej krawędzi jest prosta  $a'$ , łącząca punkty  $Z'_a$  i  $T'_a$ .



Ślad zbiegu  $Z'_a$  rzutu prostokątnego  $a'$  prostej  $a$  na daną płaszczyznę  $\varphi$  leży więc zawsze na śladzie zbiegu tej płaszczyzny, a to jako punkt przecięcia się tego śladu z prostą, łączącą ślad zbiegu  $Z_a$  danej prostej ze śladem zbiegu  $Z^{90}$  płaszczyzny  $\varphi$ . Wynika stąd, że jeżeli płaszczyzna  $\varphi$  jest prostopadła do tła (rys. 325 b), to prosta, łącząca ślad zbiegu  $Z_a$  prostej  $a$  ze śladem zbiegu  $Z'_a$  jej rzutu prostokątnego  $a'$  na płaszczyznę  $\varphi$ , jest prostopadłą do śladów tej płaszczyzny. W szczególności, jeśli płaszczyzna  $\varphi$  jest płaszczyzną poziomą (rys. 325 c), to ślad zbiegu  $Z_a$  prostej  $a$  i ślad zbiegu  $Z'_a$  jej prostokątnego rzutu na tę płaszczyznę leżą na prostej, prostopadłej do horyzontu, względnie linii podstawy.



Rys. 325 a, b, c.

Ślad tłowy  $T'_a$  rzutu prostokątnego  $a'$  prostej  $a$  na płaszczyznę  $\varphi$ , leży zawsze na śladzie tłowym tej płaszczyzny, a to jako punkt przecięcia się tego śladu z prostą, przechodzącą przez ślad tłowy  $T_a$  prostej  $a$ , równoległą do promienia, łączącego jej ślad zbiegu ze śladem  $Z^{90}$  płaszczyzny  $\varphi$ . Gdy płaszczyzna  $\varphi$  jest poziomą, to prosta  $T_a - T'_a$ , równoległa do  $Z_a - Z'_a$ , jest prostopadłą do horyzontu.

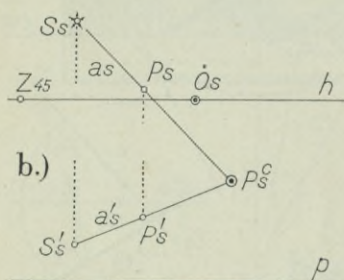
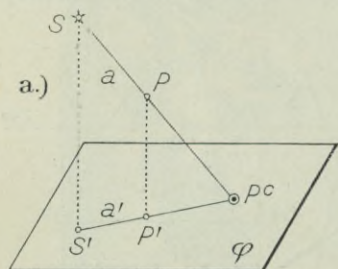
Z powyższego wynika też bezpośrednio, że przy danym śladzie tłowym i śladzie zbiegu prostej wyznaczona jest równocześnie perspektywa jej rzutu prostokątnego na dowolną płaszczyznę.

Punkt  $M_s$  (rys. 325 a i 325 b) przecięcia się prostych  $a$  i  $a'$  jest — jak to bezpośrednio widzimy — perspektywą punktu przebiecia się prostej  $a$  z płaszczyzną  $\varphi$ . W rys. 325 c prosta  $a$  przebija płaszczyznę podstawy w punkcie  $H_a$ , który nosi zazwyczaj miano jej śladu poziomego.

Punkt  $P_s$ , przyjęty na prostej  $a_s$  (rys. 325 a), jest perspektywą punktu  $P$  prostej  $a$ ; punkt  $P'_s$ , w którym promień  $P_s Z^{90}$  przecina prostą  $a'_s$ , jest perspektywą rzutu prostokątnego  $P'$  punktu  $P$  na płaszczy-



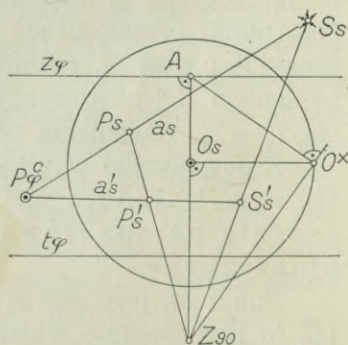
zną  $\varphi$ , nachyloną do tła pod kątem  $\omega$ . Rzut środkowy  $P_s$  punktu  $P$  i rzut środkowy  $P'_s$  jego rzutu prostokątnego na daną płaszczyznę  $\varphi$  wyznaczają położenie tego punktu w przestrzeni. W istocie bowiem, promień, łączący oko  $O$  z punktem  $P_s$ , przebija płaszczyznę  $\varphi$  w punkcie  $P'$ , a promień  $O - P_s$  przecina prostą — poprowadzoną w punkcie  $P'$  do płaszczyzny  $\varphi$  — w punkcie  $P$ . Oczywiście, także rzut środkowy  $P_s$  punktu  $P$  i rzut środkowy  $P'_s$  jego rzutu poziomego wyznaczają położenie punktu w przestrzeni (rys. 325 c).



Rys. 326 a, b.

Jeżeli punkt  $S$  (rys. 326 a) jest źródłem światła a punkt  $S'$  jego rzutem prostokątnym na daną płaszczyznę  $\varphi$ , to cień  $P^c$  punktu  $P$  na tę płaszczyznę, którego rzutem prostokątnym na nią jest punkt  $P'$ , otrzymamy, jako przecięcie się promienia  $a$  światła z rzutem poziomym  $a'$  tego promienia. W ten sposób otrzymany punkt  $P^c$  jest śladem promienia  $a$ , przechodzącego przez punkt  $P$ , z płaszczyzną  $\varphi$ .

Aby zadanie rozwiązać, w perspektywie musi być wyznaczone położenie punktu  $S$ , jako źródła światła, i punktu  $P$ , jako tego, który cień rzuca. Oba wyznaczymy ich perspektywami  $S_s$  i  $P_s$  (rys. 327) i perspektywami  $S'_s$  i  $P'_s$  ich rzutów prostokątnych na płaszczyznę  $\varphi$ . Prosta  $a_s$ , łącząca punkty  $S_s$  i  $P_s$ , jest perspektywą promienia  $a$ , rzucającego cień punktu  $P$  na płaszczyznę  $\varphi$ , a prosta  $a'_s$ , łącząca punkty  $S'_s$  i  $P'_s$ , perspektywą rzutu poziomego tego promienia. Punkt  $P^c$  przecięcia się promieni  $a_s$  i  $a'_s$  jest obrazem perspektywnym cienia  $P^c$



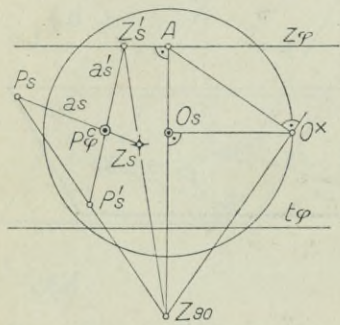
Rys. 327.







Prosta  $a_s$ , łącząca punkt słoneczny  $Z_s$  z punktem  $P_s$ , jest perspektywą promienia  $a$ , przechodzącego przez punkt  $P$ , prosta zaś  $a'_s$ , łącząca rzut  $Z'_s$  punktu słonecznego z punktem  $P'_s$ , jest perspektywą rzutu poziomego  $a'$  promienia  $a$ . Punkt  $P'_s$ , w którym przecinają się proste  $a_s$  i  $a'_s$ , jest obrazem perspektywnym cienia punktu  $P$  na płaszczyznę podstawy.



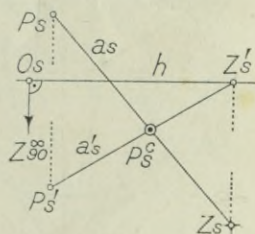
Rys. 330.

Rys. 329 podaje uogólnienie przeprowadzonego w rys. 328 *b* zadania, a mianowicie cień punktu  $P$  na płaszczyznę  $\varphi$ , nachyloną dowolnie do tła. Podobnie, jak tam, dany jest ślad tłowy  $T_r$  i ślad zbiegu  $Z_s$  kierunku światła, a położenie punktu  $P$  oznaczone jest jego perspektywą  $P_s$  i perspektywą  $P'_s$  jego rzutu prostokątnego na płaszczyznę  $\varphi$ .

Ślad zbiegu  $Z_{90}$  prostych, prostopadłych do płaszczyzny  $\varphi$ , połączymy z punktem słonecznym  $Z_s$ , otrzymując na śladzie zbiegu  $z_\varphi$  punkt  $Z'_s$ , nazwany rzutem punktu słonecznego. Równoległa do  $Z'_s - Z_{90}$ , wykreślona przez punkt  $T_r$ , przecina ślad tłowy  $t_\varphi$  w punkcie  $T'_r$ , który jest śladem tłowym rzutu prostokątnego  $r'_s$  prostej  $r$  na płaszczyznę  $\varphi$ . Perspektywą cienia punktu  $P$  na płaszczyznę  $\varphi$  jest punkt  $P'_s$  przecięcia się prostej  $a_s$ , przechodzącej przez punkty  $Z_s$  i  $P_s$ , z prostą  $a'_s$ , łączącą punkty  $P'_s$  i  $Z'_s$ .

Ponieważ kierunek prostej wyznaczony jest w perspektywie jej śladem zbiegu, więc kierunek równoległych promieni światła wyznaczony jest punktem słonecznym  $Z_s$ ; kierunek rzutu równoległych promieni na daną płaszczyznę wyznaczony jest rzutem  $Z'_s$  punktu słonecznego na ślad zbiegu tej płaszczyzny. Znajomość tedy śladu tłowego  $T_r$  promienia światła  $r$  jest dla wyznaczenia perspektywy cienia punktu zbędną, a, co za tem idzie, odpada potrzeba kreślenia prostych  $r_s$  i  $r'_s$ . Istotną konstrukcję cienia punktu  $P$  na płaszczyznę  $\varphi$  podaje rys. 330: dany punkt słoneczny  $Z_s$  łączymy z perspektywą  $P_s$  punktu  $P$ , a rzut  $Z'_s$  punktu słonecznego z punktem  $P'_s$ , t. j. z perspektywą rzutu prostokątnego punktu  $P$  na płaszczyznę  $\varphi$ . Punkt  $P'_s$ , w którym przecinają się proste  $a_s$  i  $a'_s$ , jest szukaną perspektywą cienia punktu  $P$  na płaszczyznę  $\varphi$ .

Co się tyczy położenia punktu słonecznego, to w odniesieniu do horyzontu zajmować on może trojakię położenie: może znajdować się pod horyzontem, nad horyzontem i wreszcie może być punktem niewłaściwym, oznaczonym kierunkiem.



Rys. 331.

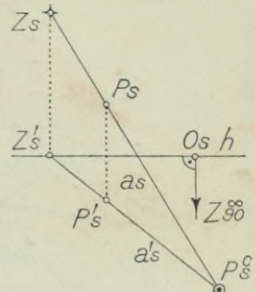


Jeżeli — jak w rys. 331 — punkt słoneczny leży pod horyzontem, to źródło światła znajduje się przed tłem, czyli za widzem obserwującym obraz, w następstwie czego cień oddala się od tła, a więc i od obserwatora.

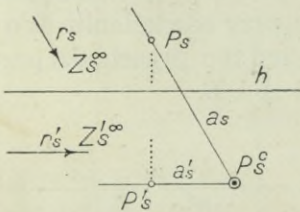
Jeżeli punkt słoneczny  $Z_s$  leży nad horyzontem (rys. 332), to dowodzi, że światło pada na twarz obserwatora, że zatem źródło światła znajduje się przed rysownikiem. Wtedy też cień punktu, znajdującego się za tłem, pada ku widzowi.

Jeżeli wreszcie założymy, że kierunek promieni światła jest równoległy do tła, to wówczas perspektywa rzutu poziomego tego kierunku jest równoległa do horyzontu, punkt słoneczny  $Z_s$  i jego rzut  $Z'_s$  są punktami niewłaściwymi tła, wyznaczonymi kierunkami  $r_s$  i  $r'_s // h$  (rys. 333).

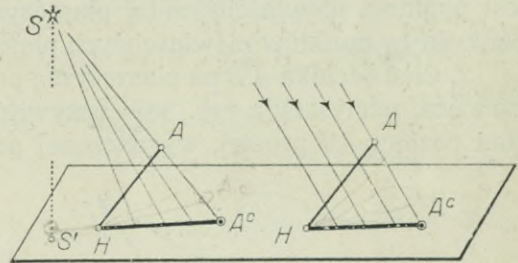
Gdyby punkt słoneczny leżał na horyzontie, wskazywałyoby to, że kierunek światła jest poziomy, że więc cień punktu znajduje się w odległości nieograniczonej dalekiej na płaszczyźnie podstawy. Perspektywa tego cienia leżałaby na horyzontie. Takie oświetlenie pozbawione jest praktycznego znaczenia.



Rys. 332.



Rys. 333.



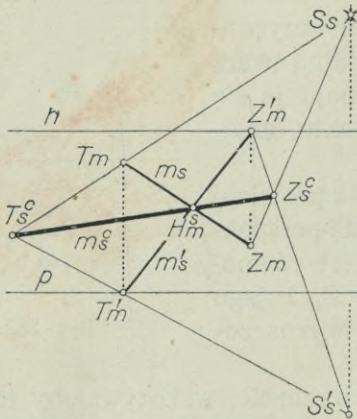
Rys. 334.

**60. Cienie prostych.** Promienie światła, przechodzące przez poszczególne punkty odcinka (rys. 334), tworzą płaszczyznę, której krawędź przecięcia z daną płaszczyzną jest cieniem odcinka na nią. Odnosi się to zarówno do oświetlenia środkowego, jak i równoległego.

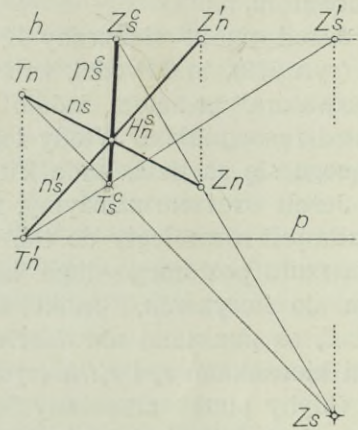
*A. Cienie prostych na płaszczyznę podstawy.*

1. Jeżeli prosta  $m$  (rys. 335), wyznaczona śladem tłowym  $T_m$  i śladem zbiegu  $Z_m$ , oświetlona jest środkowo, to, celem wyznaczenia jej cienia na płaszczyznę podstawy, znajdziemy najpierw perspektywę  $m'_s$  jej rzutu poziomego, a następnie cienie rzucone  $T_s^c$  i  $Z_s^c$  jej śladów. Prosta  $m^c$ , łącząca oba otrzymane punkty, jest perspektywą cienia prostej  $m$  na płaszczyznę podstawy i przechodzi przez punkt  $H_m^s$ , t. j. przez perspektywę śladu poziomego tej prostej.

Konstrukcję cienia prostej  $n$ , wyznaczonej śladami, oświetlonej jednak równolegle, podaje rys. 336. Wynika z niej, że perspektywa cienia punktu niewłaściwego prostej, t. j. punkt  $Z'_s$ , leży na horyzoncie. W istocie



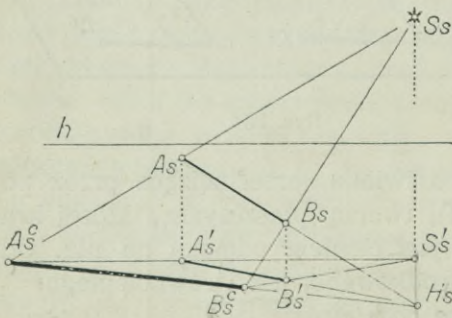
Rys. 335.



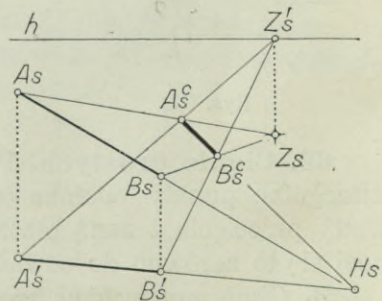
Rys. 336.

bowiem, cień punktu niewłaściwego prostej  $n$  na płaszczyznę podstawy jest punktem niewłaściwym tej płaszczyzny, a miejscem geometrycznym perspektyw punktów niewłaściwych płaszczyzny podstawy jest horyzont.

2. Cień odcinka  $\overline{AB}$  na płaszczyznę podstawy, przy oświetleniu środkowym, uzmysławia rys. 337; oczywiście, że cień ten przechodzi przez ślad poziomy  $H$  prostej, wyznaczonej punktami  $A$  i  $B$ .



Rys. 337.



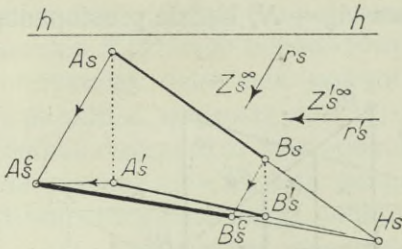
Rys. 338.

Konstrukcję cienia tego samego odcinka, przy oświetleniu równoległym, widzimy na rys. 338, a przy oświetleniu równoległym i równoległym do tła na rys. 339.

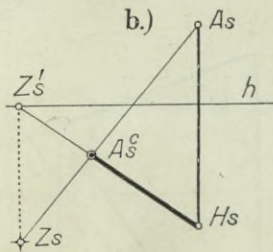
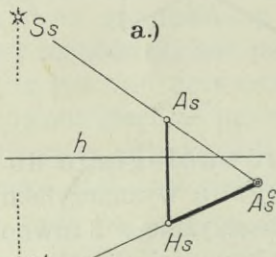
3. Konstrukcję cienia odcinka pionowego, przebijającego płaszczyznę podstawy w punkcie  $H$ , podają rys. 340  $b$  — pierwszy:



przy oświetleniu środkowym, drugi przy oświetleniu równoległym. Punkt  $H$  uważać tu należy za rzut poziomy punktu  $A$ .

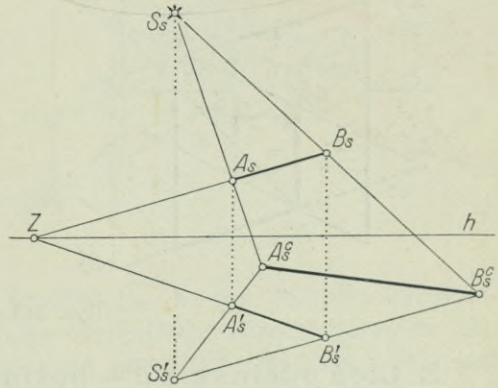


Rys. 339.

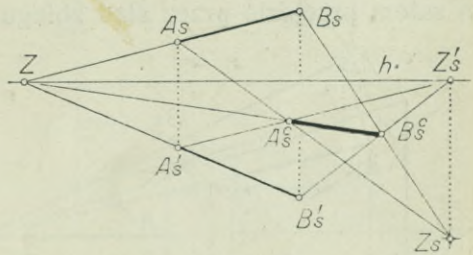


Rys. 340 a, b.

4. Cienie odcinka, równoległego do płaszczyzny podstawy, przedstawiają rys. 341 i 342.



Rys. 341.



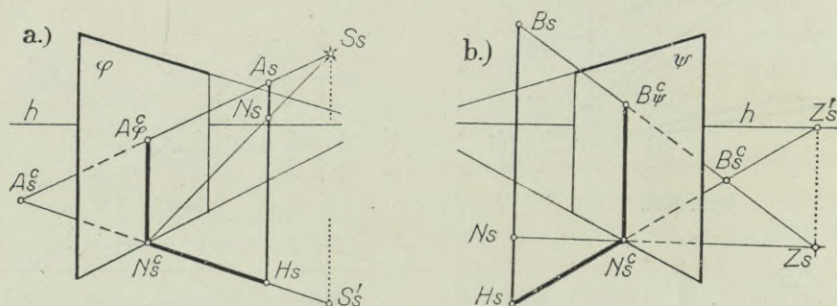
Rys. 342.

### B. Cienie prostych na płaszczyzny pionowe.

1. Cień odcinka pionowego  $\overline{AH}$  na płaszczyznę pionową  $\varphi$ , przy oświetleniu środkowym, podaje rys. 343 a; cień odcinka pionowego  $\overline{BH}$  na pionową płaszczyznę  $\psi$ , przy oświetleniu równoległym, widzimy na rys. 343 b.

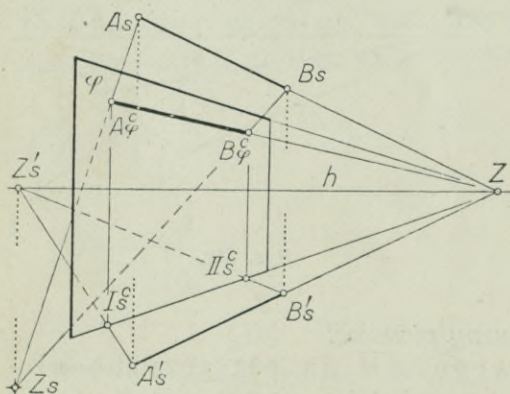
Płaszczyzna podstawy, płaszczyzna  $\varphi$  (rys. 343 a) i płaszczyzna światła, przechodząca przez odcinek  $\overline{AH}$ , przecinają się w punkcie, którego perspektywą jest punkt  $N_s^c$ , a który jest równocześnie cieniem punktu  $N$  tego odcinka na płaszczyznę podstawy. Perspektywą punktu  $N$  jest punkt  $N'$ , przecięcia się promienia  $N_s^c S_s$  z prostą  $A_s H_s$ .

Odcinek  $\overline{AH}$  jest równoległy do płaszczyzny  $\varphi$ , więc cień jego na tę płaszczyznę jest do niego równoległy, a ponieważ płaszczyzna  $\varphi$  i odcinek  $\overline{AH}$  są pionowe, więc i cień jego na płaszczyźnie  $\varphi$  będzie odcinkiem pionowym, którego perspektywa  $A_\varphi^c - N_s^c$  będzie prostopadłą do horyzontu.

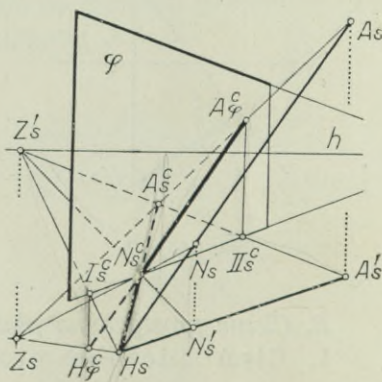


Rys. 343 a, b.

2. Cień odcinka  $\overline{AB}$  — poziomego i równoległego do pionowej płaszczyzny  $\varphi$  — na tę płaszczyznę wyznaczyliśmy na rys. 344. Oczywiście, że cień ten, leżący na płaszczyźnie  $\varphi$  i równoległy do płaszczyzny podstawy, będzie równoległy do krawędzi obu płaszczyzn, a zatem przejdzie przez ślad zbiegu  $Z$ .



Rys. 344.



Rys. 345.

3. Cień dowolnie w przestrzeni leżącego odcinka  $\overline{AH}$  na płaszczyznę pionową  $\varphi$  wykreśliliśmy na rys. 345. Odcinek, ograniczony punktem  $H_s$  i punktem  $A_s^c$ , t. j. cieniem punktu  $A$  na płaszczyznę podstawy, jest cieniem odcinka  $\overline{AH}$  na tę płaszczyznę. Wyznamy cienie  $A_\varphi^c$  i  $H_\varphi^c$  punktów  $A$  i  $H$  na płaszczyznę  $\varphi$ . Punkt  $N_s^c$ , w którym

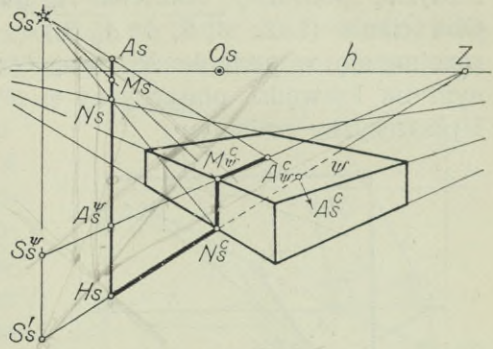


przecinają się proste  $A_s^c - H_s$ ,  $A_\varphi^c - H_\varphi^c$  i ślad poziomy płaszczyzny  $\varphi$ , jest punktem załamania się cienia, leżącego częściowo na płaszczyźnie podstawy a częściowo na płaszczyźnie  $\varphi$ . Punkt ten jest cieniem punktu  $N$ , którego perspektywę  $N_s$  otrzymamy, jako rzut punktu  $N_s^c$  z punktu  $Z_s$  na prostą  $A_s - H_s$ . Podobnie rzut punktu  $N_s^c$  z punktu  $Z'_s$  na prostą  $A'_s - H_s$  jest perspektywą rzutu poziomego punktu  $N$ .

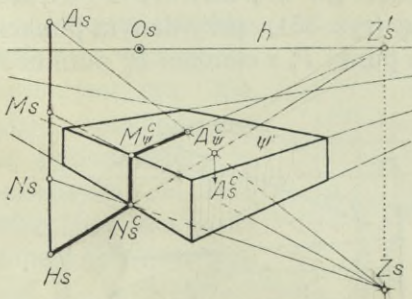
C. Cień prostej pionowej na płaszczyznę poziomą. Jako przykłady, wykreśliliśmy cień odcinka  $\overline{AH}$  na graniastosłup prosty, stojący na płaszczyźnie podstawy,

a to na rys. 346 przy oświetleniu środkowym, na rys. 347 przy oświetleniu równoległym, a na rys. 348 przy oświetleniu równoległym do tła.

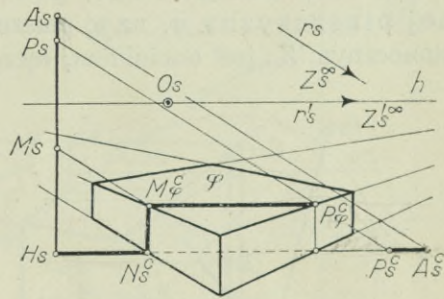
Cieniem odcinka  $\overline{AH}$  na płaszczyznę podstawy (rys. 346 i 347) jest odcinek  $A_s^c H_s$ . Od punktu  $N_s^c$  do  $M_\varphi^c$  cień leży na ścianie bocznej, poczem pada na poziomą płaszczyznę  $\varphi$ . Ponieważ ta ostatnia jest równo-



Rys. 346.



Rys. 347.



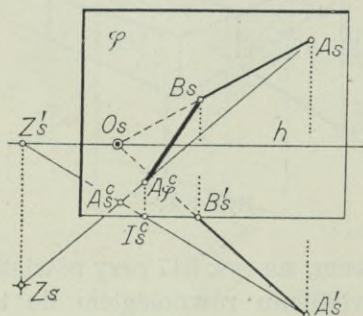
Rys. 348.

legła do płaszczyzny podstawy, więc cienie odcinka na te obie płaszczyzny są do siebie równoległe. Perspektywy ich posiadają zatem wspólny ślad zbiegu, którym, przy oświetleniu równoległym (rys. 347), jest rzut punktu słonecznego.

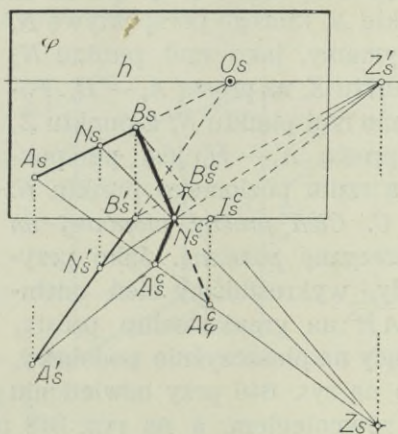
D. Cień prostej, prostopadłej do płaszczyzny czołowej.

1. Odcinek  $\overline{AB}$  rzuca cień tylko na płaszczyznę czołową (rys. 349). Jeżeli  $\overline{A_s B_s}$  jest perspektywą odcinka, prostopadłego do tła, a odcinek  $\overline{A'_s B'_s}$  perspektywą jego rzutu poziomego, to perspektywą cienia odcinka  $\overline{AB}$  na czołową płaszczyznę  $\varphi$  jest odcinek  $A_\varphi^c B_s$ , gdyż punkt  $B_s$  — według założenia — leży na płaszczyźnie  $\varphi$ .

2. Odcinek  $\overline{AB}$  rzuca cień częściowo i na płaszczyznę podstawy (rys. 350). Znajdziemy cienie  $A_s^c$  i  $B_s^c$  punktów  $A$  i  $B$  na płaszczyznę podstawy oraz cień  $A_\varphi^c$  punktu  $A$  na płaszczyznę czołową  $\varphi$ . Oba cienie (t. z.  $A_s^c B_s^c$  i  $A_\varphi^c B_s^c$ ) przetną się w punkcie  $N_s^c$ , leżącym na krawędzi płaszczyzny  $\varphi$  i płaszczyzny podstawy.



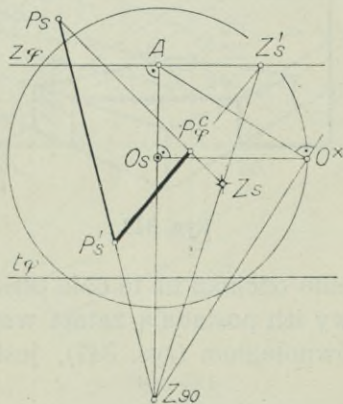
Rys. 349.



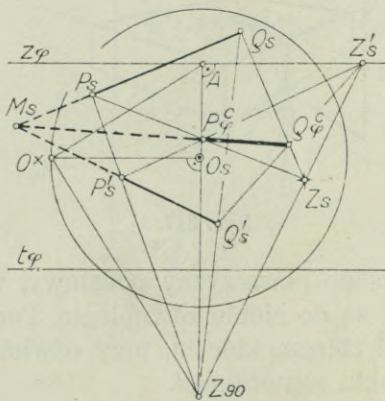
Rys. 350.

### E. Cień prostej na płaszczyznę dowolną.

1. Cień odcinka  $\overline{PP'}$ , prostokątnego w punkcie  $P'$  do danej płaszczyzny  $\varphi$ , na tę płaszczyznę (rys. 351), przy danym punkcie słonecznym  $Z_s$ , jest odcinkiem, łączącym punkt  $P_s'$  z cieniem  $P_\varphi^c$  punktu  $P$ .



Rys. 351.



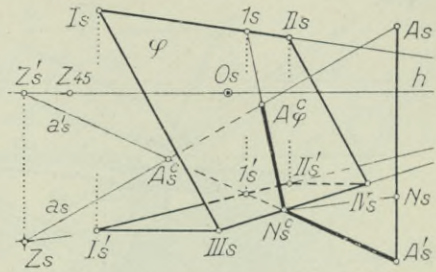
Rys. 352.

2. Cień dowolnie położonego odcinka na dowolną płaszczyznę  $\varphi$  (rys. 352). Położenie odcinka  $\overline{PQ}$  wyznaczone jest jego perspektywą  $\overline{P_s Q_s}$  i perspektywą  $\overline{P_s' Q_s'}$  jego rzutu prostokątnego na —



wyznaczoną śladami — płaszczyznę  $\varphi$ . Punkt  $M_s$  przecięcia się obu perspektyw jest obrazem punktu przebiecia się prostej  $PQ$  z płaszczyzną  $\varphi$ ; przez punkt ten przejdzie cień  $P_\varphi^c Q_\varphi^c$ .

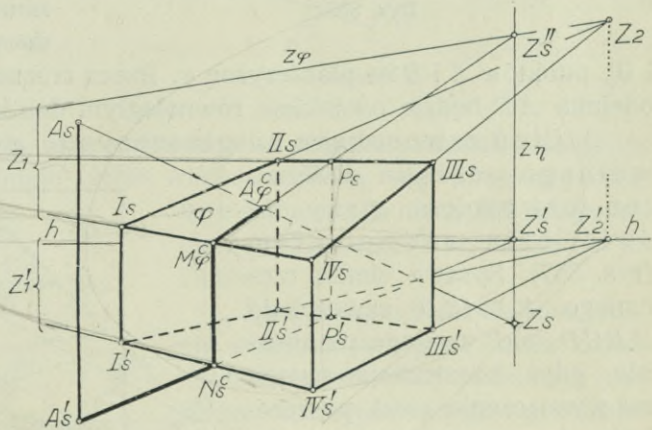
3. Cień odcinka pionowego  $\overline{AA'}$  na dowolnie położoną płaszczyznę  $\varphi$  (rys. 353). Płaszczyzna  $\varphi$  wyznaczona jest, jako równoległobok, którego perspektywa  $I_s II_s III_s IV_s$  i perspektywa rzutu poziomego są dane. Cieniem punktu  $A$  na płaszczyznę  $\varphi$  jest punkt przebiecia się promienia światła  $a$ , przechodzącego przez ten punkt, z tą płaszczyzną. Promień ten wyznaczony jest swą perspektywą  $a_s$  i perspektywą  $a'_s$  swego rzutu poziomego. Płaszczyzna pionowa  $\varrho$ , poprowadzona przez promień  $a$ , przetnie wielościan, ograniczony danym równoległobokiem i jego rzutem poziomym, w trójkącie  $1 - 1' - N$ .



Rys. 353.

Punkt  $A_\varphi^c$  przecięcia się krawędzi  $1_s N_s^c$  z promieniem  $a_s$  jest cieniem punktu  $A$  na płaszczyznę  $\varphi$ , a linia łamana  $A_\varphi^c - N_s^c - A'_s$  cieniem odcinka  $\overline{AA'}$ .

Drugim przykładem tego samego zadania jest rys. 354, gdzie posługujemy się śladem zbiegu  $z_\varphi$  płaszczyzny  $\varphi$ . Prosta  $z_\eta$ , łącząca punkt słoneczny  $Z_s$  i jego rzut  $Z'_s$ , jest śladem zbiegu płaszczyzny światła  $\eta$ , przechodzącej przez prostą pionową  $A - A'$  i przecinającej graniastosłup w czworokącie, którego perspektywą jest czworokąt  $M_\varphi^c P_s P'_s N_s^c$ . Punkt  $Z_s''$  jest śladem zbiegu krawędzi, jaką tworzy płaszczyzna  $\varphi$  z płaszczyzną  $\eta$ .

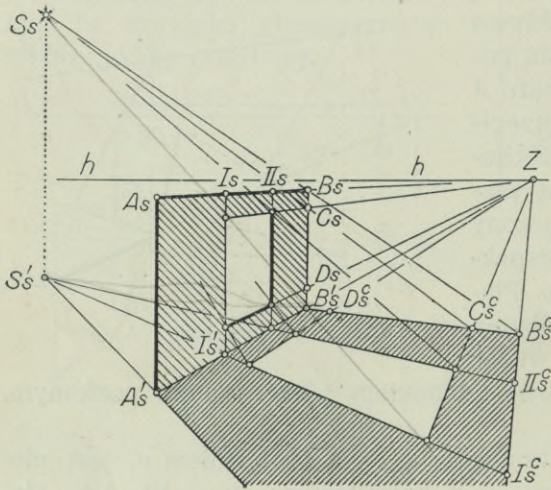


Rys. 354.

**61. Cienie wielokątów.** Płaszczyzny światła, przechodzące przez boki wielokąta, utworzą — przy oświetleniu środkowym — ostrosłup, a przy równoległym graniastosłup, którego przekrój płaszczyzną jest cieniem wielokąta na nią. Zadanie wyznaczenia cienia wielokąta na płaszczyznę  $\varphi$ .

szczyzną sprowadza się z reguły do wyznaczenia cienia poszczególnych jego wierzchołków, względnie boków.

1. Przykład cienia prostokąta na płaszczyznę podstawy, przy oświetleniu środkowym, podaje rys. 355, przedstawiający pionową ścianę z otworem.



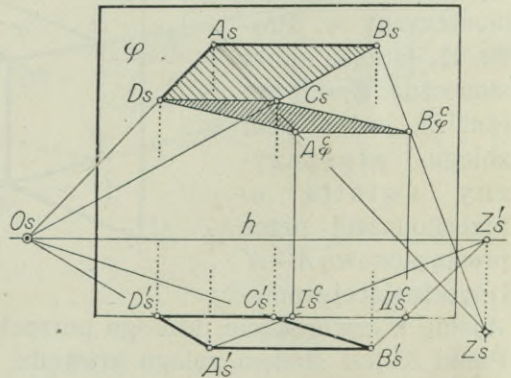
Rys. 355.

Konstrukcja nie wymaga bliższych wyjaśnień. Widoczna strona ściany odwrócona jest od światła, czyli znajduje się w cieniu własnym.

2. Cień poziomego prostokąta, którego bok leży na czołowej płaszczyźnie  $\varphi$  (rys. 356). Perspektywa  $A_s B_s C_s D_s$  prostokąta i perspektywa  $A'_s B'_s C'_s D'_s$  jego rzutu poziomego, podobnie, jak i punkt słoneczny  $Z_s$ , są dane. Rozwiązanie zadania sprowadza się do wyznaczenia cienia  $A_q^c - B_q^c$

i  $B_q^c$  punktów  $A$  i  $B$  na płaszczyznę  $\varphi$ . Rzecz zrozumiała, że cień  $A_q^c - B_q^c$  odcinka  $\overline{AB}$  będzie odcinkiem równoległym do  $A_s - B_s$ .

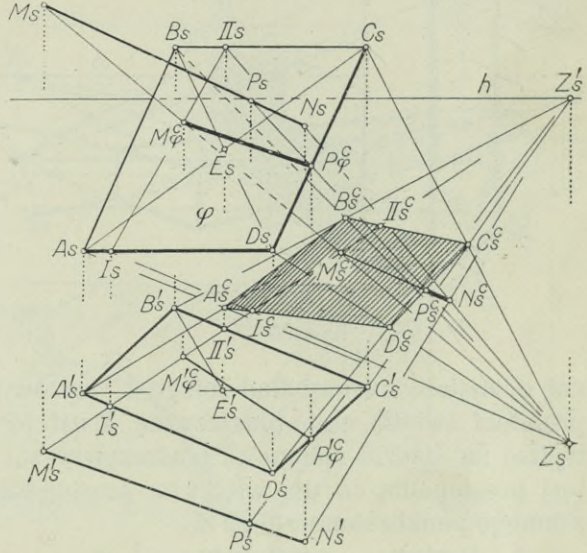
3. Cień czworokąta na płaszczyznę podstawy i cień dowolnego odcinka  $\overline{MN}$  na ten czworokąt, przy oświetleniu równoległym (rys. 357). Sprawa cienia rzuconego  $A_s^c B_s^c C_s^c D_s^c$  czworokąta  $ABCD$  nie wymaga omawiania, gdyż konstrukcja polega na wyznaczeniu cieni poszczególnych wierzchołków na płaszczyznę podstawy. Co się tyczy cienia odcinka  $\overline{MN}$ , rzuconego na płaszczyznę  $\varphi$  czworokąta, to znajdziemy go w sposób następujący: najpierw wykreślimy cień rzucony  $\overline{M_s^c N_s^c}$  tego odcinka na płaszczyznę podstawy. O ile cień ten leży w obrębie cienia rzuconego czworokąta, to odpowiadająca mu część odcinka rzuci cień na czworokąt. Część odcinka, której cie-



Rys. 356.



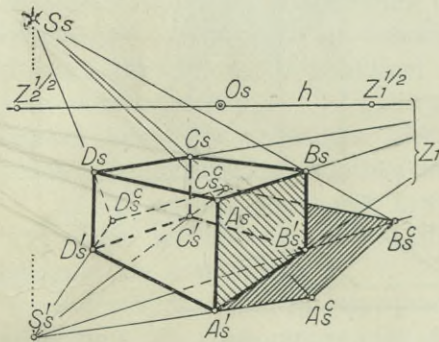
niem rzuconym jest odcinek  $\overline{P_s N_s^c}$ , rzuca cień poza obszar czworokąta. Odcinek  $I_s^c \overline{II_s^c}$  jest cieniem odcinka  $I \overline{II}$ , leżącego na płaszczyźnie  $\varphi$ , którego perspektywę  $\overline{I_s^c II_s^c}$  otrzymamy, rzucając punkty  $I_s^c$  i  $II_s^c$  z punktu słonecznego  $Z_s$  na odcinek  $\overline{A_s D_s}$ , względnie  $\overline{B_s C_s}$ . Punkt  $M_\varphi^c$ , w którym przecina się promień  $Z_s - M_s^c$  z odcinkiem  $\overline{I_s^c II_s^c}$ , jest perspektywą cienia punktu  $M$  na płaszczyznę  $\varphi$ . Perspektywa  $\overline{I_s^c II_s^c}$  rzutu poziomego odcinka  $I \overline{II}$  leży oczywiście na promieniu  $M_s' - Z_s'$ , który jest perspektywą śladu poziomej pionowej płaszczyzny, przechodzącej przez punkt  $M$ , a przecinającej płaszczyznę  $\varphi$  wzdłuż prostej  $I - II$ . Promień  $Z_s - P_s^c$  przetnie bok  $C_s D_s$  w punkcie  $P_\varphi^c$ , który wraz z punktem  $M_\varphi^c$  wyznacza perspektywę cienia odcinka  $\overline{MP}$  na płaszczyznę  $\varphi$ .



Rys. 357.

## 62. Cienie utworów przestrzennych, ograniczonych płaszczyznami.

Mamy tu na myśli przede wszystkim cienie wielościanów, a więc ich cienie własne i rzucone, a następnie wzajemne cienie rzucone tych utworów na siebie.



Rys. 358.

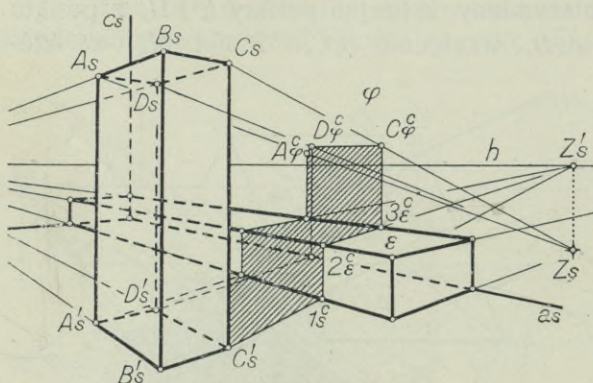
1. Rys. 358 przedstawia konstrukcję cienia własnego i cienia rzuconego na płaszczyznę podstawy, prostego, czworosciennego graniastoslupa, oświetlonego z punktu  $S$ . Ściany boczne  $AA'BB'$ ,  $BB'CC'$  i  $CC'DD'$  są w cieniu własnym, a że — jak wiadomo — cień granicy cienia własnego stanowi granicę cienia rzuconego, więc wielo-

kąt  $A_s^c A_s^c B_s^c C_s^c D_s^c D_s^c$  ogranicza cień rzucony graniastoslupa.

2. W rys. 359 czworoscienny graniastoslup prosty rzuca cień — przy oświetleniu równoległym — na graniastoslup, leżący ścianą boczną na



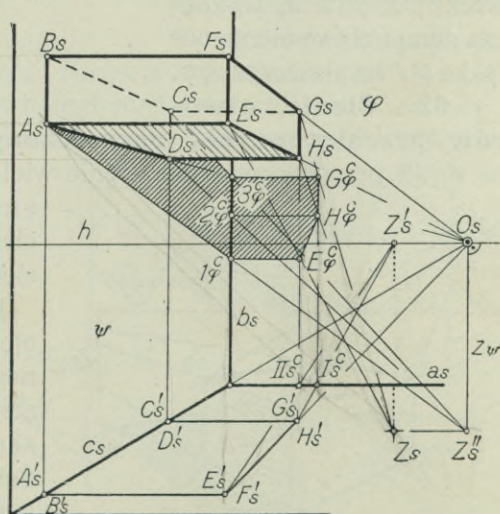
płaszczyźnie podstawy — a częściowo także i na pionową ścianę  $\varphi$ , do której ten graniastosłup przylega. Rysunek tłumaczy się dostatecznie



Rys. 359.

i nie wymaga omówienia. Z ust. 59 wiemy, że punkt ten leżeć będzie na śladzie zbiegu  $z_\varphi$  płaszczyzny  $\varphi$ , a ponieważ płaszczyzna ta jest prostopadłą do tła, więc i na prostopadłej do śladu  $z_\varphi$ , wykreślonej z danego punktu słonecznego  $Z_s$ .

4. Pozioma, prostokątna belka, równoległa do tła, rzuca cień na gzyms (rys. 361), biegnący w kierunku prostopadłym do tła. Znając położenie punktu słonecznego  $Z_s$ , znajdziemy ślad zbiegu  $Z''_s$  rzutów promieni światła na płaszczyznę pionową, prostopadłą do tła. Prosta  $A_s Z''_s$  jest cieniem krawędzi  $AG$  na płaszczyznę  $\varphi$ . W punkcie  $B_s^c$  cień ten załamie się i pójdzie równoległe do horyzontu, aż do punktu  $C_s^c$ . Dalsza jego część padnie na ukośną ścianę gzymsu. Aby znaleźć punkt  $D_s^c$ , rzucimy krawędź gzymsu, biegnącą od punktu  $IV$  prostopadłe do tła, na płaszczyznę  $\varphi$ . Perspektywą tego rzutu jest prosta  $IV'_s O_s$ , która przetnie prostą  $A_s Z''_s$ , leżącą również na płaszczyźnie  $\varphi$ , w punkcie  $D'_s$ . Pozioma, przeprowadzona przez punkt  $D'_s$ , przetnie prostą  $IV_s O_s$  w szukanym punkcie  $D_s^c$ , który łączymy z  $Z''_s$ ,

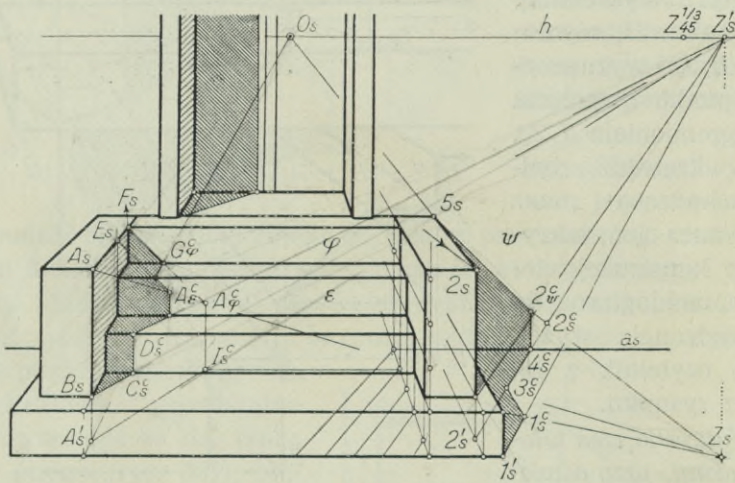


Rys. 360.





spektywą krawędzi płaszczyzny świetlnej, przechodzącej przez prostą  $AF$ , z płaszczyzną  $\varepsilon$ , a więc perspektywą cienia tej prostej na płaszczyznę  $\varepsilon$ . Punkt, w którym prosta  $E_s A_\varepsilon^c$  przetnie obraz najbliższej krawędzi, łączymy z punktem głównym, a punkt  $G_\varphi^c$  z punktem  $F_s$ . Łamana linia, łącząca punkt  $A_\varepsilon^c$  z punktem  $F_s$ , jest cieniem odcinka  $\overline{AF}$  na schody. Oczywiście, że odcinek  $\overline{F_s G_\varphi^c}$  jest równoległy do prostej  $E_s A_\varepsilon^c$ , gdyż płaszczyzna  $\varepsilon$  jest równoległa do płaszczyzny  $\varphi$ , a obie równoległe do tła przecięte są jedną płaszczyzną światła, poprowadzoną przez krawędź  $AF$ .



Rys. 362.

Linję  $F_s G_\varphi^c A_\varepsilon^c$  wyznaczyliśmy równocześnie i w inny sposób, a mianowicie znaleźliśmy cień  $A_\varphi^c$  punktu  $A$  na płaszczyznę czołową  $\varphi$ , połączyliśmy go z punktem  $F_s$ , a otrzymany tym sposobem punkt  $G_\varphi^c$  z punktem głównym  $O_s$ .

Cień rzucony płyty dolnej i płyty bocznej na płaszczyznę podstawy i ścianę czołową  $\psi$  wyznaczyliśmy w sposób, znany czytelnikowi z poprzednich zadań.

6. Rys. 363 przedstawia poprzedni zespół, jednak w położeniu bocznym, przekopjowany z rys. 362. Oświetlenie przyjęliśmy równoległe i równoległe do tła.

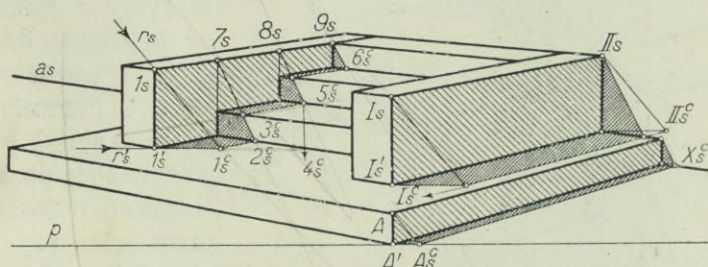
Krawędź pionowa  $1, 1'$  rzuca cień na poziomą płaszczyznę płyty; obrazem tego cienia jest odcinek  $\overline{1' I_s^c}$ . Cień poziomej krawędzi  $1, 9$  będzie linią łamaną, której części, leżące na płaszczyznach poziomych, są równoległe do tej krawędzi. Perspektywy ich posiadają więc wspólny ślad zbiegu. Części tej linii łamanej, leżące na ścianach pionowych stopni, otrzymamy podobnie, jak linię  $E_s A_\varepsilon^c$  w rys. 362.



Nie chcąc korzystać ze śladu zbiegu prostej  $I_s II_s$ , wyznaczyliśmy cień  $II_s^c$  punktu  $II$  na górnej, poziomej płaszczyźnie płyty, podobnie, jak cień  $I_s^c$  punktu  $I$ . Odcinek  $\overline{I_s^c II_s^c}$  jest cieniem odcinka  $\overline{III}$  na płycie.

7. Zespół, przedstawiony na rys. 364, oświetlony jest, podobnie, jak w zadaniu poprzednim, promieniami równoległymi, a równocześnie i równoległymi do ła.

Cień krawędzi  $AA'$  pada całkowicie na płaszczyznę podstawy. Cień krawędzi  $AB$  leży częściowo na płaszczyźnie podstawy, poczem załamuje się dwukrotnie, a cień  $B_s^c$  punktu  $B$  pada na płaszczyznę poziomą  $\sigma$ . Najpierw wyznaczymy cień  $B_s^c$  punktu  $B$  na płaszczyznę podstawy; odcinek  $\overline{A_s^c B_s^c}$  jest perspektywą cienia odcinka  $AB$  na tę płaszczyznę; do punktu  $I_a^c$  cień ten jest istotny. Ponieważ  $AB$  jest odcinkiem poziomym,



Rys. 363.

więc jego cień jest równoległy do tego odcinka, a zatem  $A_s^c B_s^c$  przejdzie przez ślad zbiegu  $Z_1$  prostej  $AB$ .

Płaszczyzna  $AA'B$  przecina płaszczyznę  $\rho$  wzdłuż krawędzi  $BB'$ , a że przez krawędź  $AB$  przechodzi płaszczyzna światła, więc przez punkt  $B$  przejść musi także i krawędź tej płaszczyzny światła z płaszczyzną  $\rho$ , bowiem trzy płaszczyzny przecinają się zawsze w jednym punkcie. Prosta  $B_s I_a^c$  jest perspektywą owej krawędzi płaszczyzny światła z płaszczyzną  $\rho$ , a odcinek  $\overline{I_a^c 2_b^c}$  cieniem części odcinka  $\overline{AB}$ , który pada na czołową ścianę  $\rho$  pierwszego stopnia.

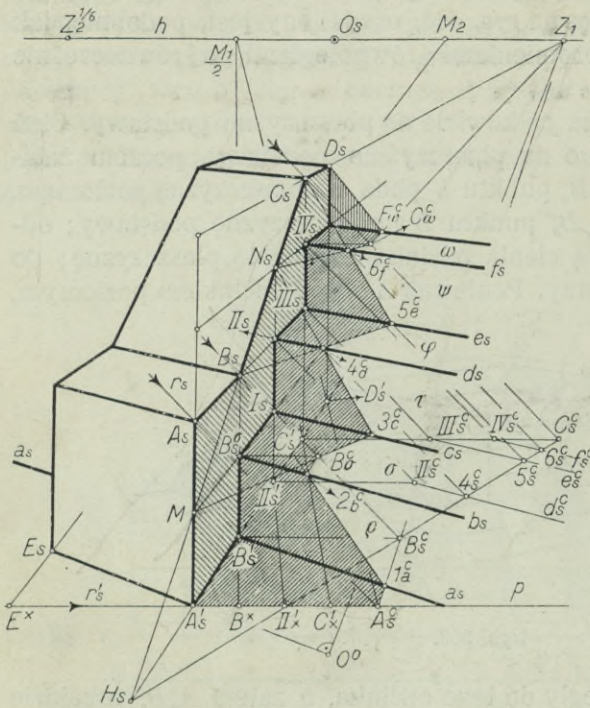
Promień  $2_b^c Z_1$  przecina promień  $B_s B_s^c$  w punkcie  $B_s^c$ , który jest cieniem punktu  $B'$  na poziomej płaszczyźnie  $\sigma$ . Oczywiście, że prosta, poprowadzona przez punkt  $B_s^c$ , równoległe do  $r_s'$ , przejdzie przez punkt  $B_s^c$ .

Teraz wyznaczymy cień rzucony krawędzi  $BC$ , a to dwoma, niezależnymi od siebie, sposobami: bezpośrednio i przy pomocy cienia rzuconego tej krawędzi na płaszczyznę podstawy.

Pozioma płaszczyzna  $\sigma$  przecina pionową płaszczyznę  $A'ABC$  wzdłuż prostej poziomej, której perspektywy dwóch punktów, a mianowicie punkty  $I_s$  i  $B_s^c$ , są znane. Płaszczyzna światła  $\delta$ , przechodząca przez krawędź  $BC$ , której śladem poziomym jest punkt  $H$ , przetnie tę prostą



poziomą w punkcie  $M$ , który przypadkowo leży także na prostej  $AA'$ . Faktycznie punkt  $M$  jest punktem przecięcia się prostej  $C_s H_s$  z prostą  $I_s B_s^c$ . Prosta  $MB_s^c$  jest perspektywą krawędzi



Rys. 364.

perspektywą krawędzi płaszczyzny światła  $\delta$  z płaszczyzną  $\sigma$ , czyli perspektywą cienia krawędzi  $BC$  na płaszczyznę  $\sigma$ . Łączymy punkt  $N_s$  z punktem  $3_c^c$  prostej  $c_s$ , otrzymując na prostej  $d_s$  punkt  $4_c^c$ . Punkt ten połączymy z punktem  $B_s$ , aż do przecięcia się z prostą  $e_s$  w punkcie  $5_c^c$ . Prosta  $5_c^c C_s$  przetnie prostą  $f_s$  w punkcie  $6_c^c$ . Cień  $C_s C_s^c$  punktu  $C$  na poziomą płaszczyznę  $\omega$  jest punktem przecięcia się promienia  $C_s C_s^c$ , równoległego do  $r_s$ , z promieniem poziomym, przechodzącym przez punkt  $IV_s$ .

Odcinek  $\overline{CD}$  rzuci cień częściowo na płaszczyznę

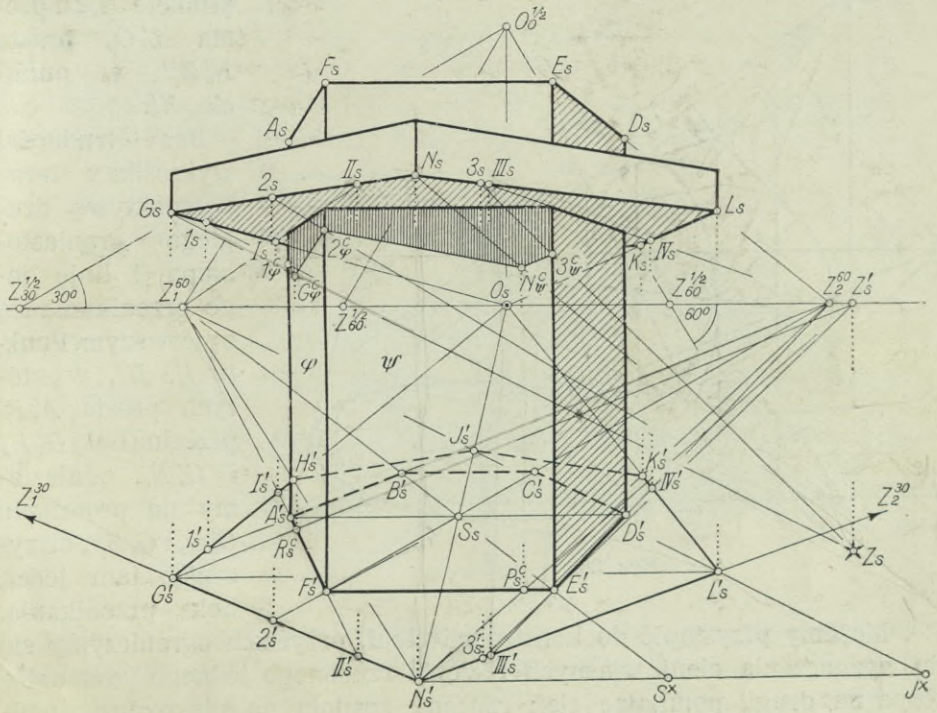
poziomą  $\omega$  a częściowo na płaszczyznę pionową. Pierwsza część cienia jest odcinkiem  $\overline{C_s^c F_s^c}$  na prostej, łączącej punkt  $C_s^c$  ze śladem zbiegu  $Z_1$ . Odcinek  $\overline{F_s^c D_s}$  dopełnia rozwiązania zadania.

Posługując się cieniem rzuconym  $H_s - B_s^c - C_s^c$  krawędzi  $H - B - C$  na płaszczyznę podstawy, znajdziemy cień odcinka  $\overline{BC}$ , rzucony na schody, w sposób następujący: przez punkty  $II_s^c$ ,  $III_s^c$  i  $IV_s^c$ , stanowiące perspektywy cieni rzuconych punktów  $II$ ,  $III$  i  $IV$  na płaszczyznę podstawy, poprowadzimy proste  $d_s^c$ ,  $e_s^c$  i  $f_s^c$ , zbiegające się w śladzie  $Z_2$ , a będące perspektywami cieni krawędzi  $d$ ,  $e$  i  $f$  na płaszczyznę podstawy. Punkty  $4_s^c$ ,  $5_s^c$  i  $6_s^c$ , rzucone w kierunku  $r_s$  na odnośne proste, są punktami  $4_c^c$ ,  $5_c^c$  i  $6_c^c$ , w których cień krawędzi  $BC$ , rzucony na schody, załamuje się.

8. Wykreślić cienie zespołu dwóch, sześciociennych, prostych graniastostupów (rys. 365). Kilka słów wyjaśnień wymaga najpierw konstrukcja perspektywy samego zespołu. Wychodząc z punktu głównego  $O_s$  i połowy oddalenia tłego, oznaczymy punkt  $O_0^{1/2}$ , jako kład



zredukowanego oka, poczem znajdziemy częściowe ślady zbiegu  $Z_{60}^{1/2}$  dla prostych, nachylonych do tła pod  $\sphericalangle 60^\circ$ . Otrzymawszy następnie właściwe ślady zbiegu  $Z_1^{60}$  i  $Z_2^{60}$ , połączymy je, jak też i punkt główny  $O_s$ , z przyjętym punktem  $S_s$ , t. j. z perspektywą środka umiarkowego sześciokąta, stanowiącego podstawę graniastostłupa. Na prostej, wykreślonej przez punkt  $S_s$  równoległe do horyzontu, obierzemy punkt  $A'_s$  i połączymy go ze śladami  $Z_1^{60}$  i  $Z_2^{60}$ , otrzymując na promieniu  $S_s Z_1^{60}$  punkt  $B'_s$  a na promieniu  $S_s Z_2^{60}$  punkt  $F'_s$ . Przez punkty  $B'_s$  i  $F'_s$  kre-



Rys. 365.

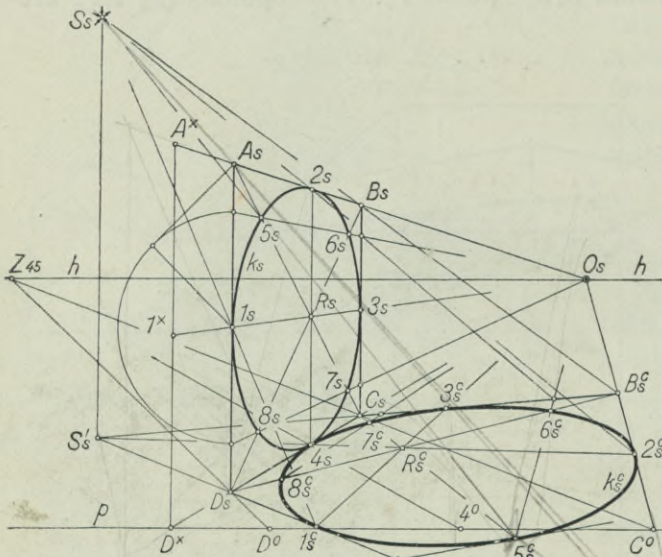
śląmy równoległe do horyzontu i otrzymujemy na promieniu  $F'_s Z_2^{60}$  punkt  $C'_s$ , zaś na prostej  $S_s Z_1^{60}$  punkt  $E'_s$ . Punkt  $C'_s$  łączymy ze śladem  $Z_1^{60}$  a punkt  $E'_s$  z  $Z_2^{60}$ ; obie proste przetną się na promieniu  $A'_s S_s$  w punkcie  $D'_s$ . Prawdziwa długość boku podstawy nie jest nam znana; otrzymać ją można przy pomocy punktu mierzenia. Wykreśliwszy perspektywę podstawy, dopełnimy z łatwością obrazu graniastostłupa, stanowiącego trzon zespołu.

Drugi graniastostłup ma być również prosty, o podstawie umiarkowego sześciokąta, lecz skrzyżony wobec pierwszego o  $30^\circ$ . Najpierw narzysujemy perspektywę jego rzutu poziomego. Punkt  $S_s$  jest perspektywą

wspólnego środka obu sześciokątów. Na promieniu  $O_s S_s$  przyjmiemy dowolnie punkt  $N'_s$  i połączymy go ze śladami zbiegu  $Z_1^{30}$  i  $Z_2^{30}$ . Uważając punkt  $Z_1^{60}$  za punkt dzielenia, znajdziemy perspektywę  $J'_s$  przeciwnego punktowii  $N$  wierzchołka  $J$ , a także i punkt  $L'_s$ , gdy punkt  $S_s$  rzucimy z punktu  $Z_1^{60}$  na poziomą, poprowadzoną przez punkt  $N'_s$ , odmierzymy  $\overline{S^x J^x} = \overline{N'_s S^x}$  i punkt  $J^x$  połączymy z  $Z_1^{60}$ . Pozioma, wykreślona z punktu  $L'_s$ , przetnie prostą  $N'_s Z_1^{30}$  w punkcie  $G'_s$ . Promień  $G'_s O_s$  przetnie

promień  $N'_s Z_1^{60}$  w punkcie  $H'_s$ , a prosta  $L'_s O_s$  prostą  $N'_s Z_2^{60}$  w punkcie  $K'_s$ .

Bez trudności wykreślimy teraz perspektywę drugiego graniastostupa i linię jego przenikania się z pierwszym. Punkty  $I'_s, II'_s$ , w których prosta  $A'_s F'_s$  przecina boki  $G'_s H'_s$  i  $G'_s N'_s$ , odniesiemy na promieniu  $G'_s O_s$  i  $G'_s Z_1^{30}$ , otrzymując tam jeden bok przenikania.



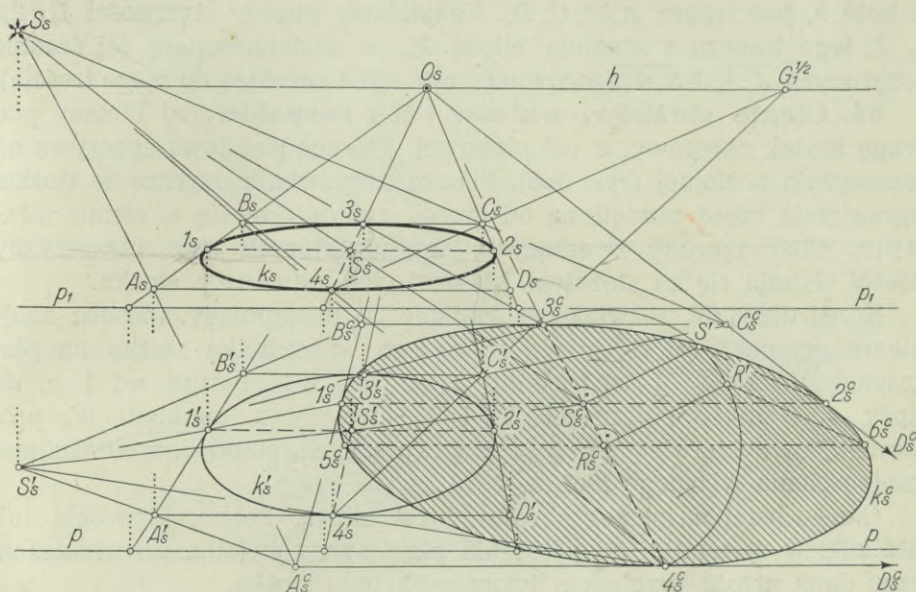
Rys. 366.

Możemy przystąpić do konstrukcji cieni, przyczem ograniczymy się do wyznaczenia cieni własnych i cienia rzuconego jednego graniastostupa na drugi, pomijając cień rzucony zespołu na płaszczyznę podstawy.

Punkt  $G$  rzuca cień na ścianę  $\varphi$ ; otrzymamy go w znany sposób, łącząc punkt  $G'_s$  z rzutem  $Z'_s$  punktu słonecznego i kreśląc w punkcie  $R'_c$  prostą pionową, która przetnie promień  $G_s Z_s$  w punkcie  $G'_c$ . Część krawędzi  $\overline{GH}$  rzuca cień na ścianę  $\varphi$ , załamując się na krawędzi  $AA'$  w punkcie, którego perspektywę oznaczyliśmy przez  $1^c$ . Aby punkt ten otrzymać, rzucimy punkt  $A'_s$  z  $Z'_s$  na  $G'_s H'_s$  i otrzymany tam punkt  $1'_s$  odniesiemy na prostą  $G_s O_s$ , jako punkt  $1_s$ . Promień  $1_s Z_s$  przetnie prostą  $A'_s A_s$  w szukanym punkcie  $1^c$ . W zupełnie ten sam sposób znajdziemy punkt  $2^c$ , w którym załamuje się cień prostej  $GN$ . Podobnie ma się sprawa z cieniem  $N'_c$  punktu  $N$ , rzuconym na ścianę  $\varphi$ , i cieniem  $3^c$  punktu  $3$  na krawędź  $EE'$ .



**63. O cieniach koła.** Cień koła przy oświetleniu równoległym jest elipsą albo kołem. W istocie bowiem promienie, przechodzące przez punkty koła, są tworzącymi walca eliptycznego, względnie walca obrotowego, który płaszczyzna przecięć może wzdłuż elipsy lub koła. Ponieważ perspektywą elipsy, względnie koła, jest elipsa, koło, hiperbola lub parabola, więc obraz perspektywiczny cienia koła może być każdą z tych krzywych stożkowych.



Rys. 367.

Cień koła przy oświetleniu środkowym jest kołem, elipsą, hiperbolą lub parabolą w zależności od położenia stożka światła względem płaszczyzny, na którą cień pada. Perspektywą cienia koła przy oświetleniu środkowym może być każda stożkowa, zależnie od położenia stożkowej, stanowiącej cień tego koła, względem płaszczyzny zniknięcia. Dla czytelnika, który zapoznał się z rozważaniami w rozdziale III, sprawa ta jest zrozumiałą sama przez się. Także i pod względem konstrukcyjnym rzecz nie nastęrcza trudności, jak nas o tem przekonują dwa podane niżej przykłady.

Rys. 366 przedstawia konstrukcję cienia koła  $k$  przy oświetleniu środkowym. Pionowa płaszczyzna koła, stycznego do płaszczyzny podstawy, jest prostopadłą do tła. Położenie źródła światła określone jest punktami  $S_s$  i  $S'_s$ . Elipsę  $k'_s$ , rozwiązującą zadanie, wyznaczyliśmy ośmioma punktami  $1_s, 2_s, \dots, 8_s$ , które są cieniami punktów  $1, 2, \dots, 8$  koła  $k$  i odpowiadają punktom  $1_s, 2_s, \dots, 8_s$  elipsy  $k_s$ . Trapezowi  $A_s B_s C_s D_s$ ,



opisanemu na elipsie  $k_s$  i stycznemu do niej w punktach  $1_s$ ,  $2_s$ ,  $3_s$  i  $4_s$ , odpowie na płaszczyźnie podstawy, jako cień, czworokąt, styczny do elipsy  $k_s^c$  w punktach  $1_s^c$ ,  $2_s^c$ ,  $3_s^c$  i  $4_s^c$ .

Rys. 367 podaje konstrukcję cienia koła  $k$ , którego płaszczyzna ma położenie poziome. Elipsa  $k_s$  jest perspektywą tego koła, a elipsa  $k_s^c$  perspektywą jego rzutu na płaszczyznę podstawy. Przyjęliśmy oświetlenie środkowe z punktu  $S$ . Perspektywą cienia kwadratu  $ABCD$ , opisanego na kole  $k$ , jest trapez  $A_s^c B_s^c C_s^c D_s^c$ . Znajdziemy punkty styczności  $1_s^c$ ,  $2_s^c$ ,  $3_s^c$ ,  $4_s^c$  tego trapezu z szukaną elipsą  $k_s^c$ , a następnie parę jej średnic sprzężonych  $3_s^c 4_s^c$  i  $5_s^c 6_s^c$  (porównaj z rys. 227 i należąca do niego treścią).

**64. Cienie stożków, walców i ich zespołów.** a) Weźmy pod uwagę stożek obrotowy, o osi pionowej, którego podstawa spoczywa na płaszczyźnie poziomej (rys. 368). Płaszczyzny światła, styczne do stożka, odgraniczają część oświetloną od części, znajdującej się w cieniu własnym. Cień rzucony tworzących, wzdłuż których owe płaszczyzny światła stykają się ze stożkiem, stanowi cień rzucony stożka.

Konstrukcyjnie rozwiążemy zadanie w następujący sposób: znajdziemy perspektywę  $W_s^c$  cienia rzuconego wierzchołka stożka na płaszczyznę podstawy i wykreślimy z punktu  $W_s^c$  styczne  $m_s^c$  i  $n_s^c$  do elipsy  $k_s$ . Punkty styczności  $M_s$  i  $N_s$  łączymy z punktem  $W_s$  prostymi  $m_s$  i  $n_s$ , które są perspektywą tworzących, stanowiących szukaną granicę cienia własnego stożka.

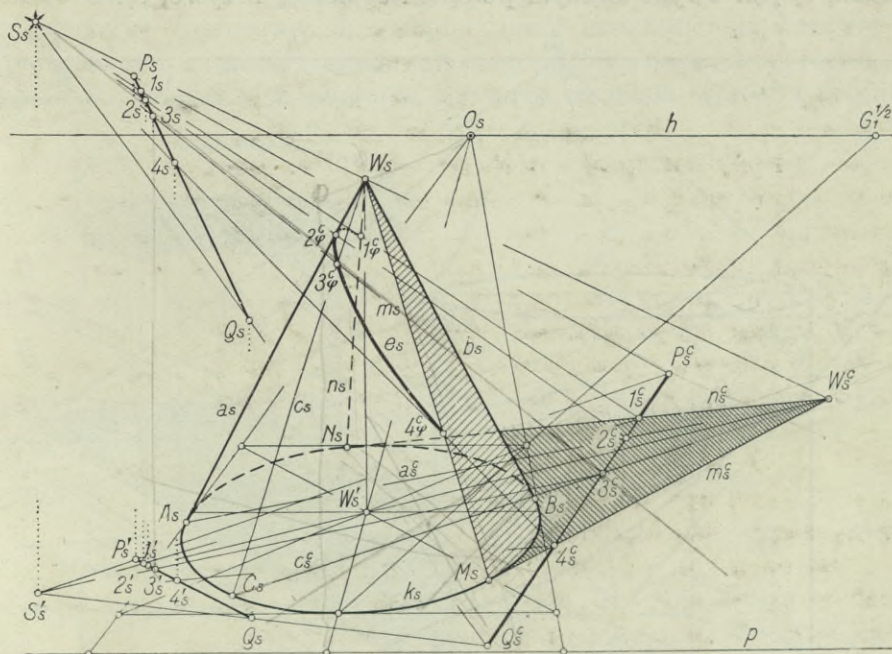
Cień prostej na stożek obrotowy jest elipsą, kołem, hiperbolą lub parabolą, w zależności od położenia płaszczyzny światła, przechodzącej przez daną prostą, względem tworzących tego stożka.

Aby znaleźć cień odcinka  $\overline{PQ}$  na stożek (rys. 368), wykreślimy najpierw perspektywę  $\overline{P_s^c Q_s^c}$  cienia rzuconego tego odcinka na płaszczyznę podstawy. Część odcinka  $\overline{P_s^c Q_s^c}$ , a mianowicie odcinek  $\overline{1_s^c 4_s^c}$ , leżący w granicach cienia rzuconego stożka, wskazuje na tę część odcinka  $\overline{PQ}$ , której cień padnie na stożek. Promienie, łączące punkty  $1_s^c$  i  $4_s^c$  z punktem  $S_s$ , przetną proste  $n_s$  i  $m_s$  w punktach  $1_q^c$  i  $4_q^c$ , a odcinek  $\overline{P_s Q_s}$  w punktach  $1_s$  i  $4_s$ ; punkty  $1_s^c$  i  $4_s^c$  są perspektywą rzutu poziomego punktów  $1$  i  $4$  odcinka  $\overline{PQ}$ . Punkty  $1_q^c$  i  $4_q^c$  są punktami elipsy  $e_s$ , stanowiącej cień odcinka  $\overline{PQ}$  na stożek; dalsze punkty tej elipsy znajdziemy tak, jak to wskażemy dla punktu  $3_q^c$ . Połączmy przyjęty na odcinku  $\overline{1_s^c 4_s^c}$  punkt  $3_s^c$  z punktem  $S_s$  promieniem i oznaczmy punkt przecięcia się tego promienia z prostą  $\overline{P_s Q_s}$  symbolem  $3_s$ . Prosta  $\overline{W_s^c 3_s^c} \equiv c_s^c$ , przecinająca elipsę  $k_s$  w punkcie  $C_s$ , jest perspektywą cienia tworzącej  $c$  stożka; perspektywą tej tworzącej jest prosta  $c_s \equiv C_s W_s$ . Punkt  $3_q^c$  przecięcia się prostej  $c_s$  z promieniem  $\overline{3_s^c S_s}$  jest cieniem punktu  $3$  odcinka  $\overline{PQ}$  na dany stożek obrotowy. Na rys. 368 wskazano konstrukcję punktu  $2_q^c$  elipsy  $e_s$ , leżącego na tworzącej  $a_s$  konturu pozornego. Pro-



sta  $a_s^c$ , łącząca punkt styczności  $A_s$  prostej  $a_s$  z punktem  $W_s^c$ , przecina prostą  $P_s^c Q_s^c$  w punkcie  $2_s^c$ ; promień  $2_s^c S_s$  przetnie prostą  $a_s$  w punkcie  $2_s^c$ .

b) Przykładem konstrukcji cienia własnego i rzuconego obrotowego walca, o osi pionowej, stojącego na płaszczyźnie podstawy, a nadto cienia prostej na ten walec (przy oświetleniu słonecznym), jest rys. 369.

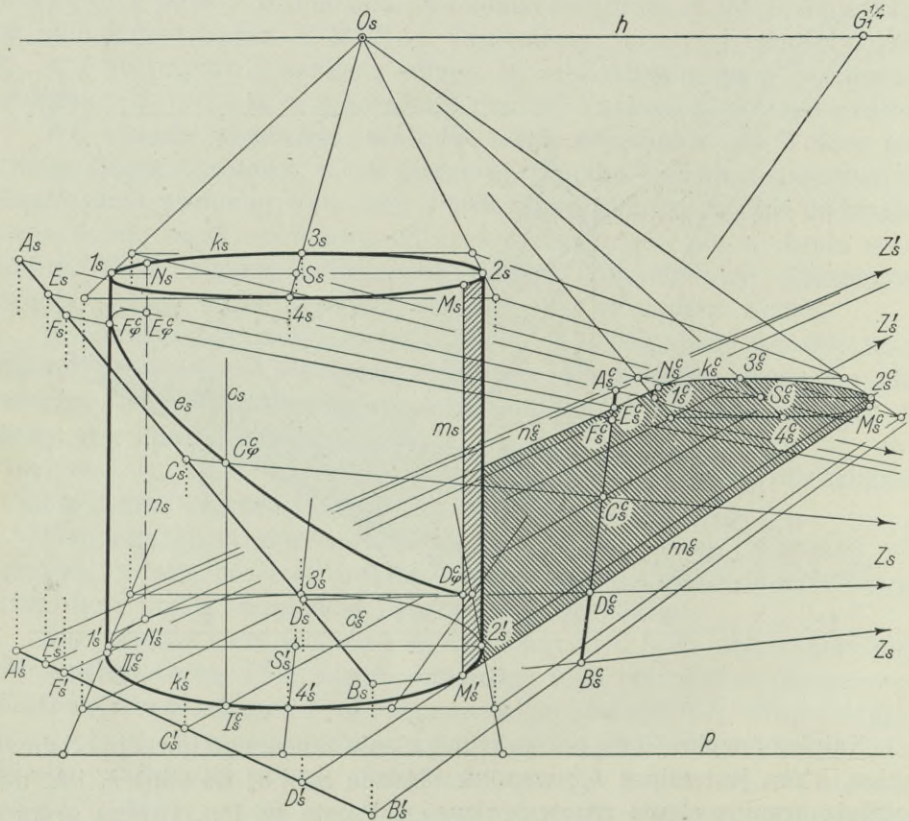


Rys. 368.

Najpierw wykreślmy perspektywę cienia rzuconego górnej podstawy walca, którą jest elipsa  $k_s^c$ ; wspólne styczne  $m_s^c$  i  $n_s^c$  do elips  $k_s'$  i  $k_s^c$  dopełniają granicy cienia rzuconego walca. Proste  $m_s$  i  $n_s$  tworzą granicę cienia własnego walca.

Teraz znajdziemy perspektywę  $\overline{A_s B_s^c}$  cienia rzuconego na płaszczyznę podstawy odcinka  $\overline{AB}$ . Część tego odcinka, a mianowicie odcinek  $\overline{DE}$ , rzuci cień na walec. W szczególności cień punktu  $D$  padnie na tworzącą  $m$  a cień punktu  $E$  na tworzącą  $n$  walca. Punkt  $D_s^c$  rzucimy z punktu słonecznego  $Z_s$  na prostą  $m_s$  — jako punkt  $D_s^c$  — a punkt  $E_s^c$  z tego samego punktu  $Z_s$  na prostą  $n_s$ , jako punkt  $E_s^c$ . Cień odcinka  $\overline{DE}$  na walec jest elipsą  $e$ , podług tej bowiem krzywej płaszczyzna światła, przechodząca przez odcinek  $\overline{AB}$ , przecina walec. Poszczególne punkty perspektywy elipsy  $e$ , którą będzie elipsa  $e_s$ , znajdziemy — podobnie, jak w zadaniu poprzednim. Wyżej omówiliśmy konstrukcję punktów  $D_s^c$

i  $E_\varphi^c$  elipsy  $e_s$ . Aby znaleźć jej punkt dowolny, np.  $C_\varphi^c$ , łączymy dowolny punkt  $C_s^c$  odcinka  $D_s^c E_s^c$  z punktami  $Z_s$  i  $Z_s'$  prostymi. Prosta  $Z_s' C_s^c \equiv c_s^c$  przetnie elipsę  $k_s^c$  w punkcie  $I_s^c$ , przez który przechodzi prosta  $c_s$ , perspektywa tworzącej walca, której cieniem rzuconym na płaszczyznę podstawy jest właśnie prosta  $c^c$ . Punkt  $C_\varphi^c$  przecięcia się promienia  $Z_s C_s^c$  z prostą  $c_s$  jest owym dalszym punktem szukanej krzywej  $e_s$ .

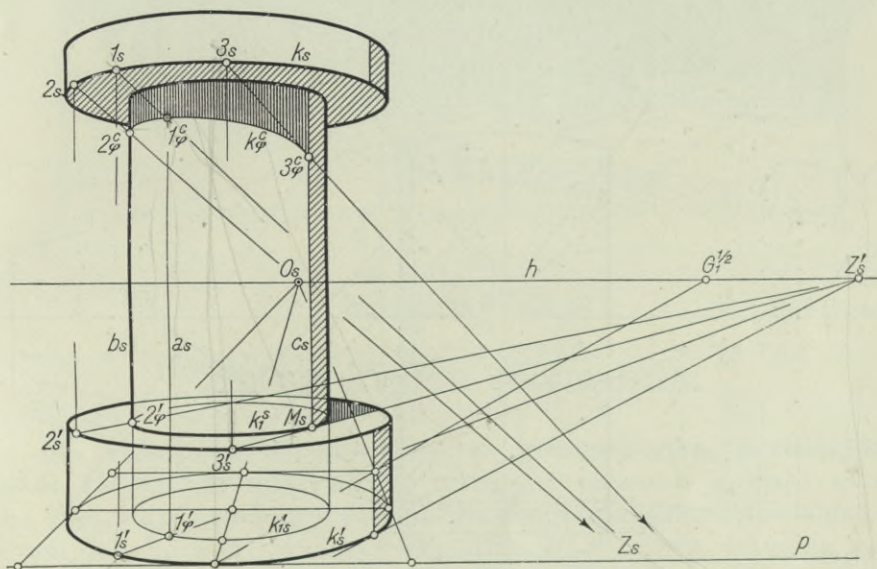


Rys. 369.

c) Rys. 370 jest przykładem cieni zespołu walców obrotowych, o wspólnej osi pionowej, przy oświetleniu równoległym. Punkt słoneczny  $Z_s$  leży poza obrębem rysunku. Konstrukcja granic cienia własnego walców nie wymaga objaśnień, podobnie, jak cień rzucony środkowego trzona na walec, stanowiący podstawę zespołu. Walec górny, albo ściślej, jego dolne koło  $k$ , rzuca cień na walec środkowy. Cieniem tym jest krzywa przenikania się dwóch walców, t. j. walca promieni, przechodzących przez koło  $k$ , i walca, stanowiącego środkową część zespołu. Na rysunku zaznaczyliśmy konstrukcję kilku punktów perspektywy  $k_\varphi^c$



tej krzywej. I tak: perspektywą cienia punktu  $1$ , koła  $k$ , jest punkt  $1^c$ . Otrzymamy go w ten sposób, że punkt  $1'_s$  połączymy z punktem  $Z'_s$  promieniem, który przetnie elipsę  $k'_s$  w punkcie  $1^c$ ; następnie wykreślimy perspektywę  $a_s$  tworzącej walca, która przetnie promień  $1_s Z_s$  w szukanym punkcie  $1^c$  krzywej  $k^c$ . Dwa punkty tej krzywej zasługują na szczególną uwagę, a mianowicie punkty  $2^c$  i  $3^c$ . Pierwszym jest punkt, leżący na tworzącej konturowej  $b_s$ , drugim punkt przecięcia się krzywej  $k^c$  z perspektywą  $c_s$  granicy cienia własnego. Wolno nam przypuszczać, że sposób otrzymania tych punktów odtworzy czytelnik wprost z rysunku.

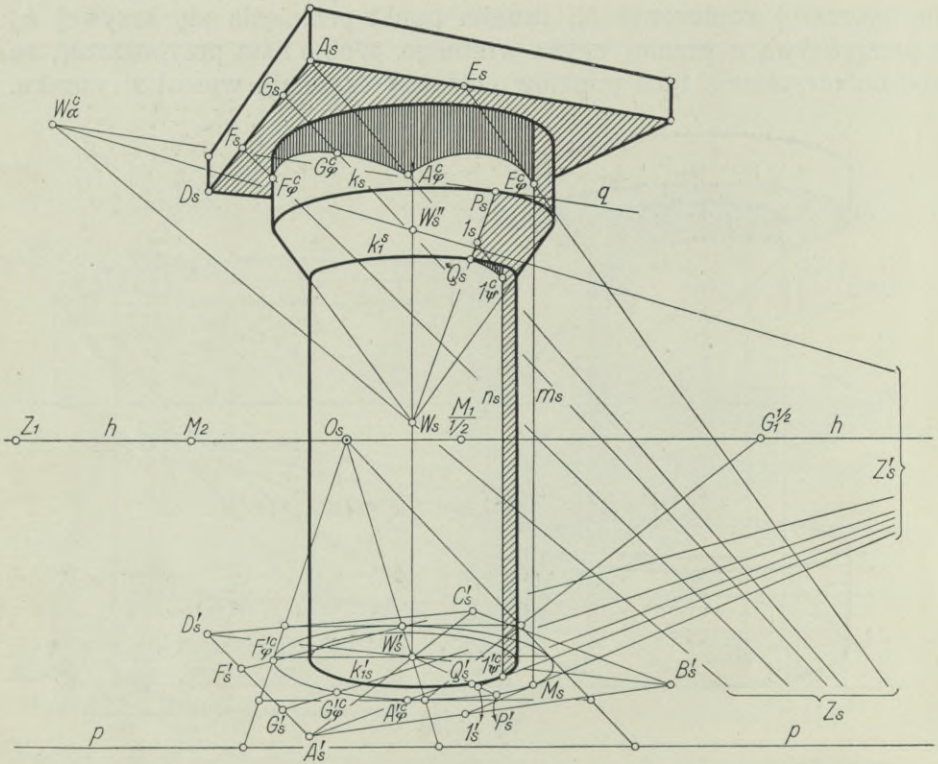


Rys. 370.

d) Rys. 371 przedstawia zespół dwóch obrotowych walców, obrotowego stożka i graniastopy, oświetlonych równolegle.

Konstrukcja granicy cienia własnego walców nie wymaga wyjaśnień, omówimy natomiast sprawę cienia własnego stożka. Punkt  $W_s$  jest perspektywą wierzchołka stożka, punkt  $W'_s$  perspektywą rzutu tego wierzchołka na płaszczyznę  $\alpha$ , t. j. na płaszczyznę koła  $k$ , stanowiącego linię przenikania się walca i stożka. Punkt  $W'_a$  przecięcia się promienia  $W_s Z_s$  z promieniem  $W'_s Z'_s$  jest cieniem rzuconym wierzchołka stożka  $W$  na płaszczyznę  $\alpha$ . Wykreślimy z punktu  $W'_a$  styczną  $q$  do elipsy  $k_s$ , to prosta, łącząca punkt styczności  $P_s$  z punktem  $W_s$ , jest perspektywą granicy cienia własnego stożka. W naszym zagadnieniu wchodzi w grę odcinek  $\overline{P_s Q_s}$  perspektywy tej granicy. Część odcinka  $\overline{PQ}$  rzuci cień na walec dolny. Cieniem tym będzie linia przecięcia się płaszczyzny, stycznej do

stożka wzdłuż tworzącej  $PW$ , z tym walcem, a więc elipsa. Na rysunku wyznaczyliśmy punkt  $1_{vp}^c$  przecięcia się perspektywy tej elipsy z prostą  $n_s$ , stanowiącą perspektywę granicy cienia własnego walca. Odcinek  $\overline{W'_s P'_s}$  jest perspektywą rzutu poziomego tworzącej  $WP$ ; styczna do elipsy  $k'_s$ , poprowadzona z punktu  $Z'_s$ , przecina odcinek  $\overline{W'_s P'_s}$  w punk-

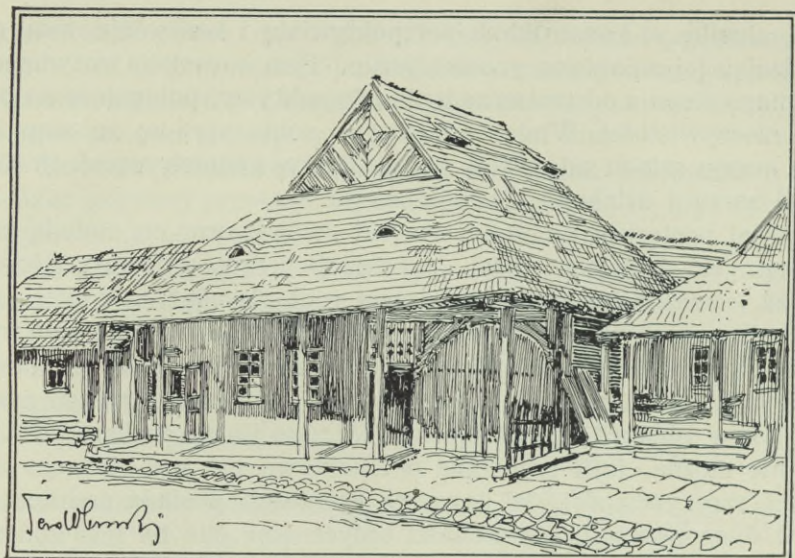


Rys. 371.

cie  $1'_s$ . Odnieśmy ten punkt prostopadłe do linii horyzontu na prostą  $P_s Q_s$  i połączmy otrzymany tam punkt  $1_s$  z punktem słonecznym  $Z_s$  promieniem, to promień ten przetnie prostą  $n_s$  w punkcie  $1_{vp}^c$ .

Płaszczyzny światła, przechodzące przez dolne krawędzie płyty, leżącej na słupie, przetną walec górny wzdłuż elips, które stanowią granicę cienia rzuconego tej płyty na słup. Czytelnik odtworzy przebieg konstrukcji potrzebnej ilości punktów tych elips bez trudu, wprost z rysunku.





## Rozdział VII.

# Perspektywa pośrednia.

### 65. Perspektywa malarzy a perspektywa architektów.

Każde zadanie perspektywiczne rozwiązać można w dwojaki sposób: bez pośrednictwa innych metod geometrycznego przedstawienia przestrzeni, albo przy ich pomocy, więc drogą pośrednią. O użyciu pierwszego sposobu, t. j. bezpośredniego, względnie sposobu drugiego, decyduje celowość danego zagadnienia perspektywicznego; pierwszym posługują się z reguły malarze, drugim architekci. Perspektywa malarzy nosi także nazwę wolnej; architekci posługują się perspektywą pośrednią.

Malarz ma przed sobą płaszczyznę rysunkową, na której przedstawić ma szereg przedmiotów o znanych mu kształtach i wielkościach. Przystępuje, powiedzmy, do narysowania wnętrza. Kreśli tedy perspektywę krawędzi, schodzących się w punktach zbiegu; szkicuje otwory w ścianach, zachowując proporcje między ich wymiarami a wysokością ubikacji, którą zapełnia meblami. Wszystko to robi w szkicu, pozwalającym na zmiany, przesunięcia, podnoszenia, obniżania, prostowania walących się ewentualnie ścian wnętrza, czy mebli, dostosowywania wymiarów i proporcji. Nareszcie wnętrze „stoi“. Teraz artysta przedzierzga



się na chwilę w konstruktora-perspektywistę i kontroluje swą pracę, sprawdzając jej znamiona geometryczne. Tym sposobem rozwiązuje on do pewnego stopnia odwrotne zadanie perspektywy, polegające na odtwarzaniu rzeczywistości. Winien on zdawać sobie sprawę ze stopnia odchylenia swego szkicu od ścisłej perspektywy geometrycznej, jeśli chce uniknąć zarzutu działania nieświadomego.

Inaczej postępuje architekt. Projekt swój tworzy on metodą rzutów prostokątnych. Najpierw tedy „rozwiązuje“ rzut poziomy, gdzie rozmieszcza poszczególne ubicacje, potem robi „fasadę“, a dopiero po jej wykonaniu przystępuje do narysowania perspektywy. Punktem wyjścia dla niej są gotowe plany budowli, wykonane według zasad geometrycznych rzutów prostokątnych w rozmaitych „widokach“ z góry, z przodu, z boku lub w różnych „przekrojach“. Niczego tu ani zmienić, ani przesunąć nie można, jeśli rysowana perspektywa ma być obrazem koncypowanej rzeczywistości. W pewnych granicach posiada architekt swobodę w dysponowaniu znamionami optycznymi, ale na tem kończy się jego wpływ na charakter obrazu perspektywicznego. Niekiedy i ta swoboda ścieśniona jest do granic warunków, w których obserwowaną być może, lub być ma, projektowana budowla. Warunki te domagają się, by obserwatorowi perspektywy projektu architektonicznego daną była możliwość oceny wrażeń, jakie odbierze później, obserwując rzeczywistość ze ściśle określonego stanowiska. Gdyby wrażenia te nie odpowiadały oczekiwaniom, istnieje jeszcze zawsze możliwość zmiany rozmiarów, proporcji i architektury projektowanej budowli. Sprawdzenia ten jest jednym z celów perspektywy architektów.

Niestety, celowość ta nie zawsze istnieje w świadomości twórców projektów architektonicznych. Często, może za często, perspektywa projektu narysowana jest przy zupełnem zapoznaniu warunków rzeczywistych, robiona dla „wzięcia“ laików, albo jeszcze częściej i nielaików, na sentyment obrazkowy. Gdyby warunki konkursów architektonicznych wymagały przedkładania perspektyw dla ściśle określonych znamion optycznych i gdyby jury konkursowe istnienie tych znamion w projektach faktycznie sprawdzało — uniknęlibyśmy wielu niespodzianek i rozczarowań po zdjęciu rusztowań z budowanych obiektów.

Byłoby błędem nie odróżniać perspektywy architekta od perspektywy malarza. Architekt nie jest malarzem architektury, a malarz architektury nie musi być architektem. Cele obu są różne. Dzieło malarza jest celem samym w sobie, perspektywa architekta tylko środkiem do celu, jakim jest uformowany z drzewa lub kamienia trójwymiarowy obiekt.

Można stworzyć doskonałe dzieło architektoniczne bez posiadania jego perspektywy, ale nikt nie namaluje dobrego obrazu architektury bez znajomości zasad perspektywy.



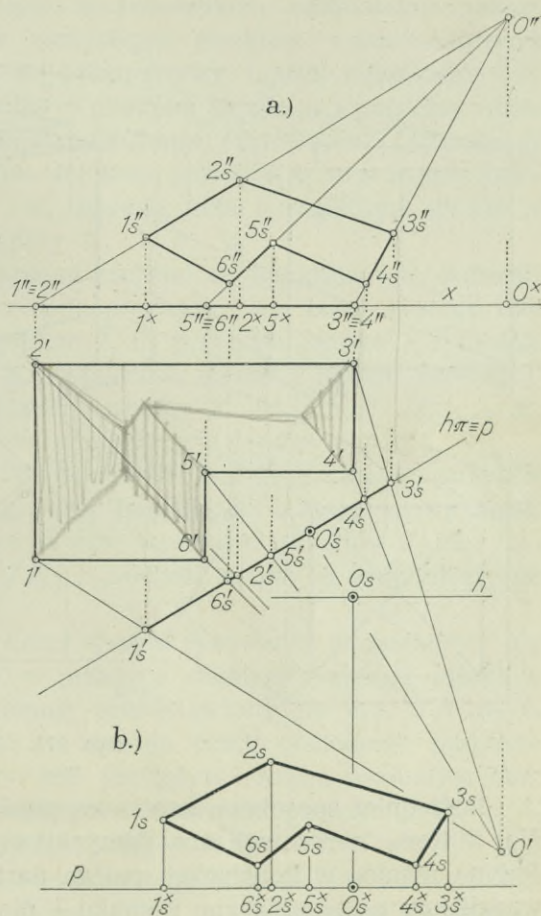
Rozpatrzenie pytań, czy i pod jakimi warunkami posiadamy możliwość odtwarzania (restrytucji) z rysunku perspektywicznego, względnie z fotogramu, wymiarów i kształtów przedstawionych niemi obiektów, będzie przedmiotem jednego z rozdziałów II-go tomu.

### 66. Metoda punktów przebicia promieni widzenia z tłem.

a) Jako pierwszy przykład, pozwalający zapoznać się z powyższą metodą, wykreślimy perspektywę sześciokąta, leżącego na płaszczyźnie poziomej. Rys. 373a przedstawia zadanie i jego rozwiązanie w dwóch rzutach prostokątnych, a mianowicie w rzucie poziomym i pionowym. Prosta  $h_\pi \equiv p$  wyznacza położenie pionowej płaszczyzny tła i jest jej śladem poziomym. Położenie oka określone jest jego rzutem poziomym  $O'$  i rzutem pionowym  $O''$ . Prostopadła do prostej  $h_\pi \equiv p$ , wykreślona z punktu  $O'$ , przecina ją w punkcie  $O'_s$ , który jest rzutem poziomym punktu głównego.

Promienie, łączące punkty  $1'$ ,  $2'$ , ...  $6'$  z punktem  $O'$ , przecinają prostą  $h_\pi \equiv p$  w punktach  $1'_s$ , ...  $6'_s$ ; odcinek  $1'_s 3'_s$  jest rzutem poziomym perspektywy danego sześciokąta. Rzutem pionowym tej perspektywy jest sześciokąt  $1''$ ,  $2''$ , ...  $6''$ , który otrzymamy, odnosząc punkty  $1'_s$ ,  $2'_s$ , ...  $6'_s$  na promienie, łączące punkty  $1''$ ,  $2''$ , ...  $6''$  z punktem  $O''$ .

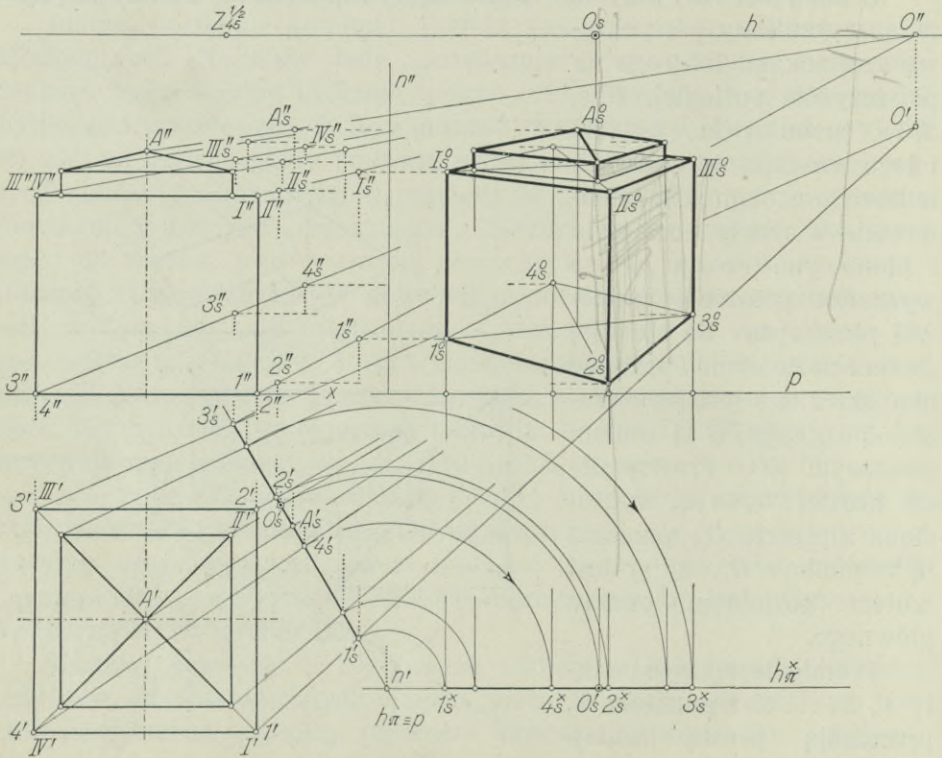
Jeżeli płaszczyznę tła  $\pi$  położymy na płaszczyznę rysunku, to otrzymamy perspektywę przyjętego na płaszczyźnie podstawy sześciokąta. Kład ten uskuteczniłmy w sposób następujący: szereg punktów  $1'_s$ ,  $6'_s$ , ...  $3'_s$ , prostej  $h_\pi \equiv p$ , przenieśliśmy na prostą  $p$  (rys. 373b), jako punkty  $1^x$ ,  $6^x$ , ...  $3^x$ ; w punktach tych wykreśliłmy do tej prostej prostopadłe i odmierzyliśmy na



Rys. 373 a, b.

nich wysokości punktów przebiecia się promieni widzenia z tłem. Wysokości te są równe oddaleniom punktów  $1''$ ,  $2''$ , ...  $6''$  od osi  $x$  na rys. 373 *a*. Tak tedy  $1^{\times}1_s = 1^{\times}1''$ ,  $2^{\times}2_s = 2^{\times}2''$ , i t. d.

Wysokość horyzontu równa jest wysokości oka, t. j. odcinkowi  $O''O^{\times} = O_s^{\times}O_s$ ; głębokość tła wyraża się odcinkiem  $O'O_s$ .



Rys. 374.

Pośrednim sposobem, zapomocą punktów przebiecia promieni widzenia z tłem, narysowaliśmy perspektywę wnętrza na rys. 180 *a—d*. Jedyną różnicą w konstrukcji polega na tem, że płaszczyznę tła sprowadziliśmy na płaszczyznę rysunku — nie, jak w rys. 373, zapomocą jej przeniesienia — ale przez obrócenie jej około śladu pionowego  $v_{\pi}$ .

b) Następnym przykładem omawianej metody pośredniej perspektywy będzie zadanie wykreślenia perspektywy utworu przestrzennego, którego dwa rzuty prostokątne są dane (rys. 374). Utwór ten składa się z sześcianu, na którym spoczywa płyta, zakończona prostym, czworosściennym ostrosłupem. Podobnie, jak w zadaniu przedstawionem na rys. 373 *a, b*, prosta  $h_{\pi} \equiv p$  oznacza ślad poziomy pionowej płaszczyzny



tła, punkty  $O'$  i  $O''$  rzuty prostokątne oka, a punkt  $O'_s$  rzut poziomy punktu głównego.

Połączmy punkt  $1'$  z punktem  $O'$  i  $1''$  z  $O''$ . Punkt  $1'_s$  przecięcia się promienia  $1'O'$  z prostą  $h_\pi \equiv p$  jest rzutem poziomym perspektywy punktu  $1$ , znajdującego się na płaszczyźnie poziomej. Prostopadły do osi  $x$  rzut  $1'_s$  punktu  $1'_s$  na promień  $1''O''$  jest rzutem pionowym perspektywy punktu  $1$ . Powtarzając tę konstrukcję, znajdziemy pokolei rzuty prostokątne perspektyw wszystkich punktów wierzchołkowych danego utworu. Rzut poziomy tej perspektywy będzie odcinkiem  $\overline{1'_s 3'_s}$ .

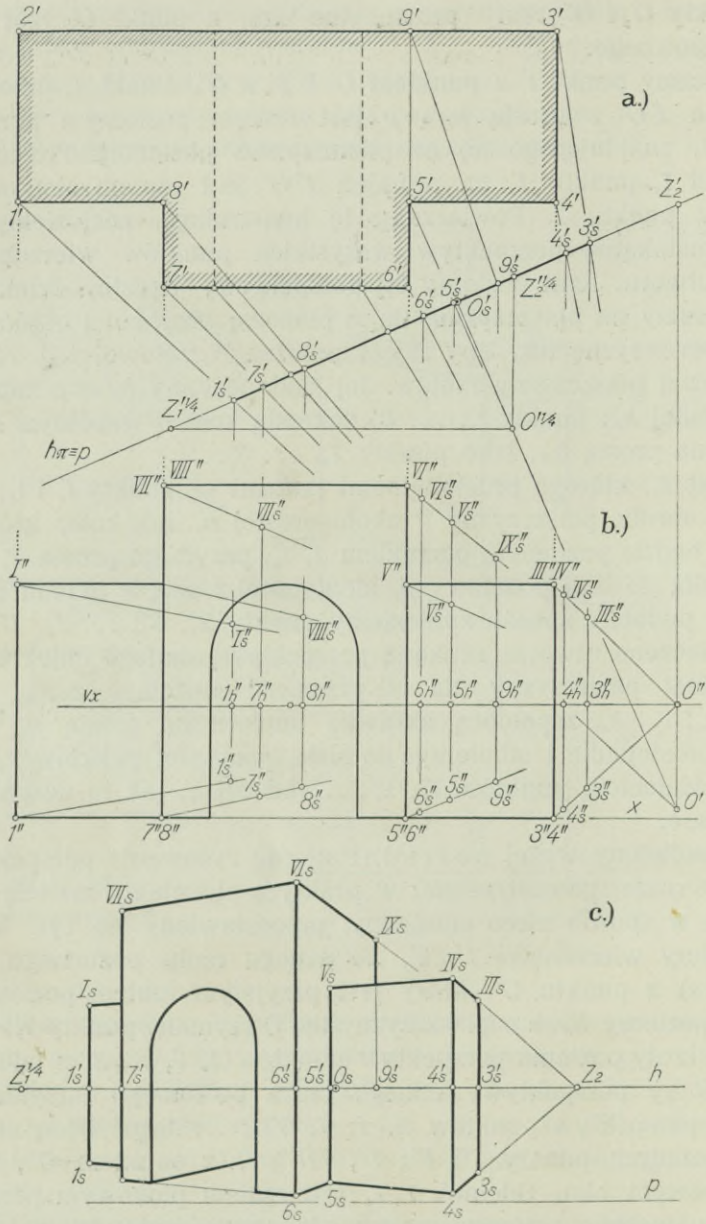
Obierzmy na płaszczyźnie tła  $\pi$  pionową prostą  $n$  i obróćmy około niej tę płaszczyznę tak, aby zajęła położenie czołowe, t. j. równoległe do pionowej płaszczyzny rzutów. Jej ślad poziomy  $h_\pi \equiv p$  zajmie położenie prostej  $h_\pi^x$ ; punkty  $1'_s, \dots, 3'_s$  zakreślą koła o wspólnym środku  $n'$  i padną na prostą  $h_\pi^x$ , jako punkty  $1_s^x, \dots, 3_s^x$ .

Punkt  $1_s$ , którego prostokątnymi rzutami są punkty  $1'_s$  i  $1''_s$ , zakreśli, podczas obrotu płaszczyzny  $\pi$  około prostej  $n$ , łuk koła, którego rzut pionowy będzie poziomym odcinkiem  $\overline{1''_s 1'_s}$ , przyczem prosta  $1_s^x 1_s^0$  będzie prostopadła do linii podstawy  $p$ , identycznej z osią  $x$  układu prostokątnego. W podobny sposób znajdziemy punkty  $2_s^0, 3_s^0, \dots, 1_s^0, 1_s^0, \dots, A_s^0$ , które połączone utworzą szukaną perspektywę danego obiektu.

Zamiast płaszczyzny tła  $\pi$  przenieść możemy szereg punktów  $1'_s, \dots, A'_s, \dots, 3'_s$  zapomocą skrawka papieru na prostą  $p$ , wykreślić w nich prostopadłe i odmierzyć na nich wysokości punktów  $1_s, 2_s, \dots$ , równe oddaleniom punktów  $1'_s, 2'_s, \dots$  od osi  $x$ , jak to uczyniliśmy na rys. 373 a, b.

c) Omówiony wyżej pośredni sposób rysowania perspektywy ma znaczenie raczej geometryczne; w praktyce stosujemy metodę punktów przebiecia w sposób nieco odmienny, przedstawiony na rys. 375 a—c.

Rzućmy wierzchołki  $1', 2', \dots$  danego rzutu poziomego budynku (rys. 375 a) z punktu  $O'$ , który jest przyjętym rzutem poziomym oka, na ślad poziomy  $h_\pi \equiv p$  płaszczyzny tła. Otrzymane punkty  $1'_s, 7'_s, \dots, 3'_s$  stanowią rzuty poziome perspektyw punktów  $1, 7, \dots, 3$ , a odcinek  $\overline{1'_s 3'_s}$  rzut poziomy perspektywy danego rzutu poziomego budynku. Rzuty pionowe perspektyw punktów  $1, 7, VII; \dots$  leżeć będą na promieniach, łączących punkty  $1'', 7''; 7'', VII''; \dots$  z punktem  $O''$ , t. j. rzutem pionowym oka. Odcinek  $\overline{1''_s 1'_s}$  jest rzutem pionowym perspektywy odcinka pionowego, którego rzutem pionowym jest odcinek  $\overline{1'' 1'}$ ; odcinek  $\overline{7''_s VII''_s}$  jest rzutem pionowym perspektywy pionowego odcinka, wyrażającego się w rzucie pionowym odcinkiem  $\overline{7'' VII''}$  i t. d. Wyznaczymy rzuty pionowe perspektyw krawędzi pionowych, przystąpimy do narysowania perspektywy budynku. W tym celu przeniesiemy szereg punktów  $1'_s, 7'_s, \dots, 3'_s, Z'_2$  prostej  $h_\pi \equiv p$  z rys. 375 a na horyzont  $h$



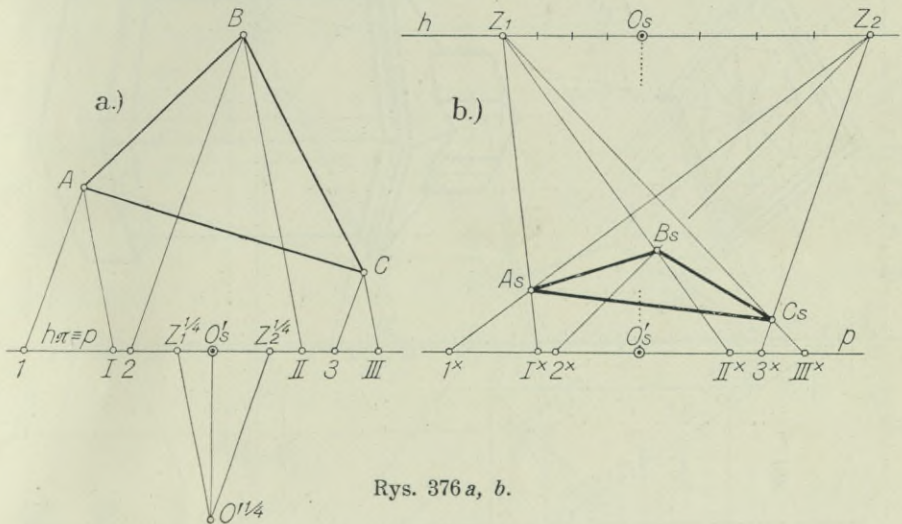
Rys. 375 a, b, c.

(rys. 375 c) i wykreślmy w nich prostopadłe do tego horyzontu. Następnie odmierzymy  $\bar{1}'_s \bar{1}_s = \bar{1}''_h \bar{1}''_s$ ,  $\bar{1}'_s \bar{I}_s = \bar{1}''_h \bar{I}''_s$  i t. d. Użycie śladu zbiegu  $Z_2$  ułatwi konstrukcję.



**67. Metoda dwóch śladów zbiegu.** a) Podstawą tej metody jest założenie, że każdy punkt uważać można za przecięcie się dwóch linii prostych.

Przyjmijmy na płaszczyźnie poziomej trójkąt  $ABC$  (rys. 376a), prostą  $h_{\pi} \equiv p$ , jako ślad poziomy pionowej płaszczyzny tła, i punkt  $O'^{1/4}$ , jako rzut poziomy oka, zbliżonego do tła o  $3/4$  głębokości tłowej. Wykreślmy z punktu  $O'^{1/4}$  dwie proste, w dwóch, dowolnych kierunkach i oznaczmy punkty przecięcia się ich z prostą  $h_{\pi} \equiv p$  przez  $Z_1^{1/4}$  i  $Z_2^{1/4}$ . Następnie poprowadźmy z każdego wierzchołka danego trójkąta promienie równoległe do kierunków  $O'^{1/4}Z_1^{1/4}$  i  $O'^{1/4}Z_2^{1/4}$ , które przetną prostą  $h_{\pi} \equiv p$  w szeregu punktów  $1, I, 2, II, 3, III$ . Punkty  $Z_1^{1/4}$  i  $Z_2^{1/4}$  są



Rys. 376 a, b.

rzutami poziomymi częściowych śladów zbiegu owych dwóch kierunków, a punkt  $O'_s$  — rzut prostokątny punktu  $O'^{1/4}$  na prostą  $h_{\pi} \equiv p$  — rzutem poziomym punktu głównego. Teraz możemy przystąpić do wykreślenia perspektywy trójkąta. W tym celu przeniesiemy szereg punktów prostej  $h_{\pi} \equiv p$  z rys. 376a na prostą  $p$  na rys. 376b, np. zapomocą skrawka papieru, oznaczając je jako  $1^x, I^x, 2^x, II^x, O'_s, 3^x, III^x$ . W odległości równej przyjętej wysokości horyzontu wykreślimy linię horyzontu  $h$ , na którą rzucimy prostopadłe punkt  $O'_s$ , jako punkt  $O_s$ . Odmierzmy czterokrotne odcinki  $O'_sZ_1^{1/4}$  i  $O'_sZ_2^{1/4}$ , otrzymując ślady zbiegu  $Z_1$  i  $Z_2$ . Pierwszy z nich łączymy z punktami  $I^x, II^x$  i  $III^x$ , drugi z punktami  $1^x, 2^x$  i  $3^x$ . Punkty  $A_s, B_s$  i  $C_s$  są perspektywami wierzchołków danego trójkąta.

b) Przykład praktyczny zastosowania metody dwóch śladów zbiegu podaje rys. 377 a—d.

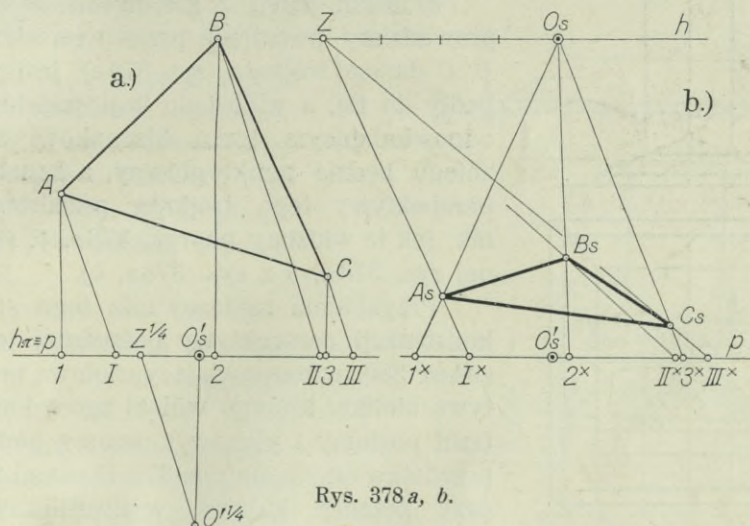




Aby nadać rysunkowi konieczną przejrzystość, narysowaliśmy najpierw (rys. 377c) perspektywę rzutu poziomego i to na podniesionej ponad płaszczyznę horyzontu płaszczyźnie poziomej. Taką perspektywę nazywać będziemy *rzutem sufitowym*.

Otrzymany już na prostej  $h_x \equiv p$  szereg punktów (rys. 377a) przeniesiemy na prostą  $p'$ , jako punkty  $IX^x, VIII^x, \dots 9^x$ , a punkt  $O_s'$  rzucimy prostopadłe na przyjęty horyzont  $h$ , jako punkt główny  $O_s$ .

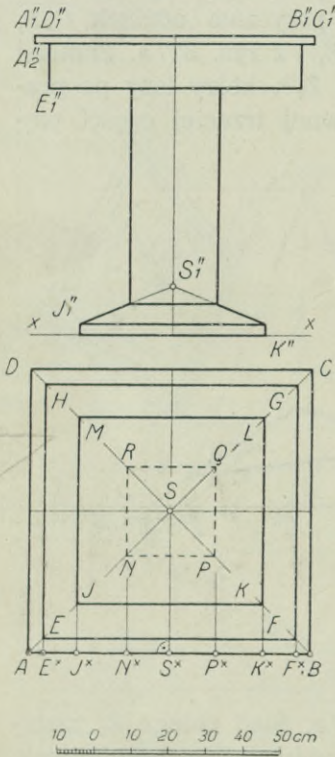
Ślad zbiegu  $Z_1$  leży w obrębie rysunku, przyczem odcinek  $\overline{O_s Z_1}$  równy jest pięciokrotnej długości odcinka  $\overline{O_s' Z_1^{1/5}}$  z rys. 377a. Zamiast częściowego śladu zbiegu  $Z_2^{1/5}$  użyjemy punktu  $Z_2^{1/5}$ , który leży po prawej stronie punktu głównego w odległości, równej trzeciej części pię-



Rys. 378 a, b.

ciokrotnej długości odcinka  $\overline{O_s' Z_2^{1/5}}$  na rys. 377a. Ślad zbiegu  $Z_2$  zastąpiony więc być może podziałką zbiegu. Dla podziałki  $w_0$  przyjmujemy, jako jednostkę, 6 mm, wobec czego jednostką podziałki  $w_1$  będą 4 mm (patrz ust. 23). Aby nie zmniejszać przejrzystości rysunku, przesunęliśmy podziałkę  $w_0$ , równolegle do jej położenia, na lewo, tak, aby jej jednostką była nieułamkowa ilość milimetrów, np. 7. Oczywiście, że równoimienne punkty podziałki wszystkich trzech podziałek, więc  $w_0$ ,  $w_1$  i nowej podziałki  $w_0'$ , będą leżały zawsze na jednym promieniu. Łącząc punkty  $1^x, 2^x, \dots 9^x$  prostej  $p'$  ze śladem  $Z_1$ , a punkty  $I^x, II^x, \dots IX^x$  — przy pomocy podziałek zbiegu — z punktem  $Z_2$ , otrzymamy perspektywę rzutu poziomego słupa. Teraz przystąpimy do narysowania jego perspektywy. W tym celu rzucimy punkty  $1^x, I^x, 9^x, IX^x$  i  $V^x$  prostej  $p'$  prostopadłe na przyjętą linię podstawy  $p$  i rzuty te połączymy ze śladami zbiegu  $Z_1$  i  $Z_2$ . Otrzymamy czworokąt, stanowiący perspektywę

kwadratu podstawy słupa. W punktach wierzchołkowych tego czworokąta poprowadzimy prostopadłe do horyzontu i taką samą prostopadłą w punkcie  $\vartheta^x$  linii podstawy  $p$ . Odmierzmy  $\vartheta^x A_1^x$ , równe wysokości punktu  $A_1$ , i punkt  $A_1^x$  połączmy ze śladem  $Z_1$ . Otrzymamy punkt  $A_1^s$ , który połączmy ze śladem zbiegu  $Z_2$ . Analogicznie postępować będziemy dalej, korzystając z perspektywy rzutu poziomego słupa. Konstrukcja nie zawiera nowych myśli, nie nastręczy czytelnikowi żadnych trudności przy odtwarzaniu jej z rysunku. Koło widzenia obrazu przechodzi przez punkt  $A_s$ ; kąt widzenia wynosi około  $31^\circ$ .



Rys. 379.

opiera się o tło, czyli niechaj najmniejsze oddalenie przedmiotowe, mierzone w rzucie poziomym, równe będzie oddaleniu tłowemu.

Rozpoczniemy od wykreślenia perspektywy rzutu poziomego stołika. Bok  $\overline{AB}$  kwadratu  $ABCD$  (rys. 379) odetniemy na linii podstawy (rys. 380) i jego środek  $S^x$  połączmy z punktem  $Z_{45}^{1/2}$  połowy głębokości. Punkt  $D_s$ , w którym prosta  $S^x Z_{45}^{1/2}$  przetnie prostą  $AO_s$ , jest perspektywą trzeciego wierzchołka kwadratu. Równoległa do  $p$ , wykreślona przez punkt  $D_s$ , przecina promień  $BO_s$  w punkcie  $C_s$ . Odcinki  $\overline{AC_s}$  i  $\overline{BD_s}$  są perspektywą przekątnych kwadratu, a ich punkt przecięcia się  $S_s$  perspektywą jego środka.

c) Jeżeli jeden z kierunków, w którym prowadzimy promienie przez wierzchołki  $A, B, C$  danego trójkąta (rys. 376 a), jest prostopadły do tła, a więc i do linii podstawy, to odpowiadającym temu kierunkowi śladem zbiegu będzie punkt główny, a konstrukcja perspektywy tego trójkąta przedstawi się tak, jak to widzimy na rys. 378 a, b. (Porównaj rys. 376 a, b z rys. 378 a, b).

Przykładem zastosowania tego sposobu konstrukcji perspektywy pośredniej jest rysunek 380, przedstawiający czołową perspektywę stolika, którego widoki z góry i z przodu (rzut poziomy i pionowy), wraz z podziałką, przedstawione są na rys. 379. Śladami zbiegu, przy pomocy których wykreśliliśmy perspektywę, są: punkt połowy oddalenia  $Z_{45}^{1/2}$  i punkt główny  $O_s$ .

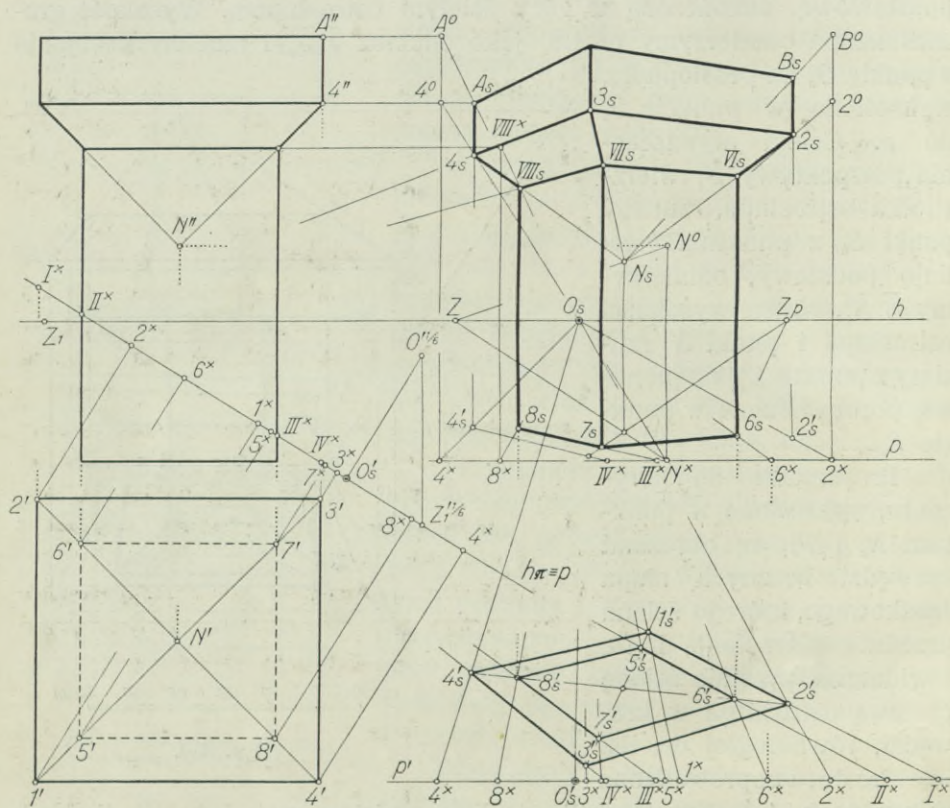
Przyjmijmy głębokość tłową, równą  $170\text{ cm}$  w podziałce rysunku, a wysokość horyzontu  $112,5\text{ cm}$ . Niechaj płyta stołu





głównym, otrzymując na prostopadłej, poprowadzonej w punkcie  $E_s$  do horyzontu, punkt  $E_s^1$ . Dopięnięcie rysunku nie wymaga dalszych wyjaśnień.

Przykład pośredniej perspektywy bocznej, wykonanej zastosowaniem metody dwóch śladów zbiegu, z których jednym jest punkt główny, stanowi rys. 381.



Rys. 381.

Punkty  $1', 2', \dots 6'$ , danego rzutu poziomego słupa rzucimy prostopadłe na przyjęty ślad poziomy  $h_\pi \equiv p$  płaszczyzny  $\pi$ , otrzymując tam szereg punktów  $1^x, 2^x, \dots 6^x$ . Punkt  $Z_1^{1/6}$  jest rzutem poziomym częściowego śladu zbiegu jednego z dwóch głównych kierunków, do siebie prostopadłych. Do konstrukcji użyjemy śladu zbiegu  $Z_1$ , który leży na przyjętym horyzoncie  $h$ , w oddaleniu od przyjętego punktu głównego  $O_s$ , równym sześciokrotnemu odcinkowi  $O_s Z_1^{1/6}$ .

Najpierw narysowaliśmy perspektywę rzutu poziomego słupa i to na płaszczyźnie, leżącej pod płaszczyzną podstawy. Perspektywa taka



nosi nazwę *rzutu piwnicznego*. Przenieśmy otrzymany na prostej  $h_{\pi} \equiv p$  szereg punktów  $2^{\times}, 6^{\times}, \dots O_s', \dots 4^{\times}$  wraz z punktami  $I^{\times}, II^{\times}, III^{\times}$  i  $IV^{\times}$ , w których boki kwadratów, stanowiących rzut poziomy słupa, przecinają prostą  $h_{\pi} \equiv p$ , na obniżoną linię podstawy  $p'$ . Rzućmy następnie punkt  $O_s'$  prostopadłe na przyjęty horyzont i znajdziemy ślad zbiegu  $Z_1$ , odmierając na lewo od otrzymanego punktu głównego  $O_s$  odcinek  $\overline{O_s'Z_1}$ , równy sześciokrotnej długości odcinka  $\overline{O_s'Z_1'^{1/6}}$ . Punkty  $I^{\times}, II^{\times}, III^{\times}$  i  $IV^{\times}$  połączymy ze śladem  $Z_1$ , a wszystkie pozostałe z punktem głównym. Wykreślone promienie przetną się w punktach  $1', 2'_s, 3'_s, \dots 8'_s$ , wyznaczających rzut piwniczny. Prosta  $3'_s 1'_s$  przetnie horyzont w śladzie przekątnym  $Z_p$ .

Teraz rzucimy punkty  $III^{\times}$  i  $6^{\times}$  prostej  $p'$  prostopadłe na przyjętą linię podstawy  $p$ . Pierwszy z nich połączymy ze śladem  $Z_1$ , drugi z punktem głównym  $O_s$  i na promieniu łączące rzucimy prostopadłe do horyzontu punkty  $6'_s, 7'_s$  i  $8'_s$ . Otrzymamy punkty  $6_s, 7_s, 8_s$ , a więc i perspektywę krawędzi podstawy, a także krawędzi bocznych trzona słupa. Chodzi o perspektywę wysokości. W punkcie  $8^{\times}$  prostej podstawy  $p$  wykreślimy do niej prostopadłą, odmierzymy  $8^{\times} VIII^{\times}$  równe wysokości trzona i punkt  $VIII^{\times}$  rzucimy z punktu  $O_s$  na perspektywę lewej krawędzi konturowej, jako punkt  $VIII_s$ . W analogiczny sposób znajdziemy punkty  $4_s, A_s, 2_s$  i  $B_s$ , a przez połączenie dwóch pierwszych ze śladem zbiegu  $Z_1$ , aż do przecięcia się z pionową prostą, przechodzącą przez punkt  $3'_s$ , i połączenie tych punktów przecięcia z punktami  $2_s$  i  $B_s$  dopełnimy rozwiązania zadania.

**68. Połączenie metody punktów przebicia z metodą dwóch śladów zbiegu.** Połączenie obu poznanych sposobów daje praktyczne korzyści, o czym przekonamy się na przykładzie rys. 382a—c.

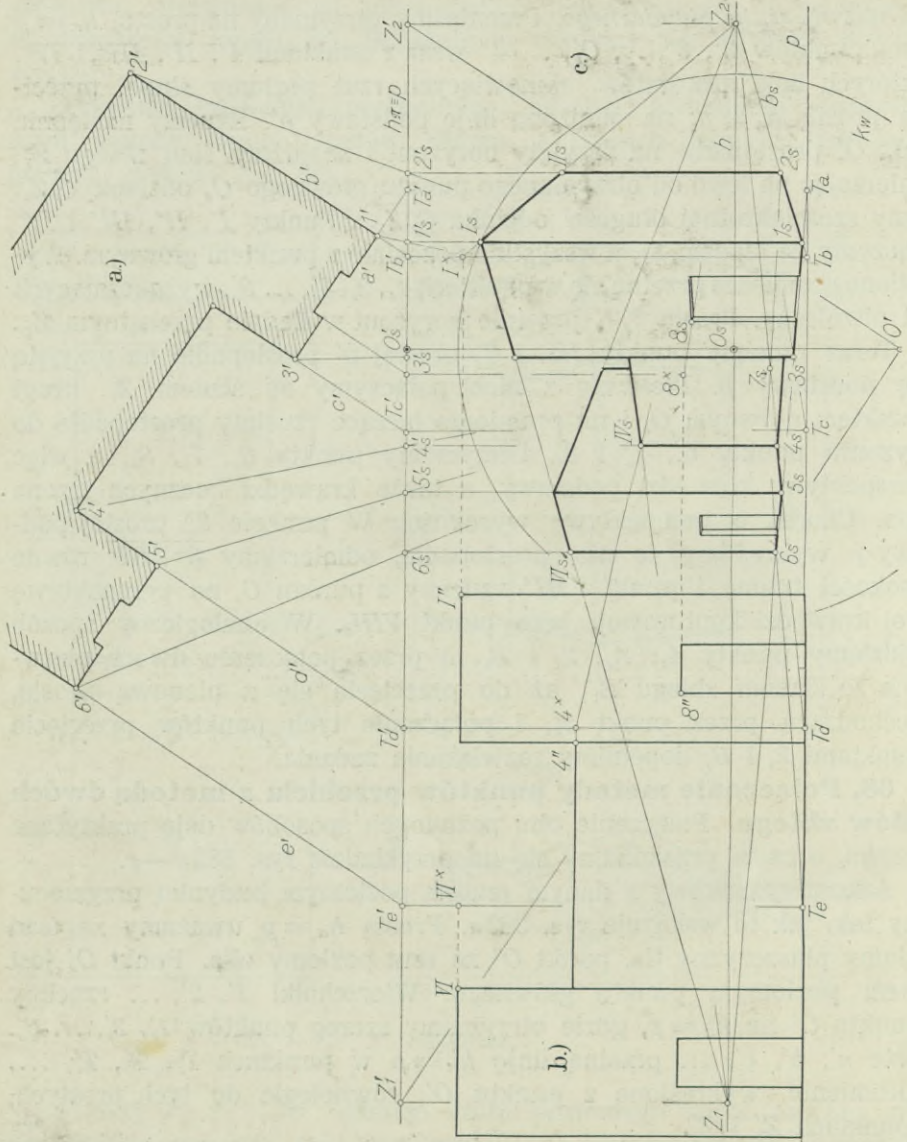
Arkuszy rysunkowy z danym rzutem poziomym budynku przymocujemy tak, jak to wskazuje rys. 382a. Prosta  $h_{\pi} \equiv p$  uważamy za ślad poziomy płaszczyzny tła, punkt  $O'$  za rzut poziomy oka. Punkt  $O'_s$  jest rzutem poziomym punktu głównego. Wierzchołki  $1', 2', \dots$  rzucimy z punktu  $O'$  na  $h_{\pi} \equiv p$ , gdzie otrzymamy szereg punktów  $1'_s, 2'_s, \dots 6'_s$ . Proste  $a', b', c', \dots$  przetną linię  $h_{\pi} \equiv p$  w punktach  $T'_a, T'_b, T'_c, \dots$ , a promienie, wykreślone z punktu  $O'$ , równoległe do tych prostych, w punktach  $Z'_1$  i  $Z'_2$ .

Rys. 382b jest rzutem pionowym budynku.

Punkty  $T'_a, T'_b, \dots T'_e$  rzucimy prostopadłe na linię podstawy  $p$ , a punkty  $Z'_1$  i  $Z'_2$  na przyjęty horyzont  $h$ . Ślady tłowe  $T_a, T_b, \dots T_e$  połączymy z odpowiednimi śladami zbiegu, a w punktach  $1'_s, 2'_s, \dots 6'_s$  wykreślimy prostopadłe do  $p$ , otrzymując na nich punkty  $1_s, 2_s, \dots 6_s$ .

Wyznaczenia punktów  $I_s, II_s, \dots$  dokonaliśmy w omawiany kilkakrotnie sposób i pozostawiamy czytelnikowi odtworzenie go z rysunku.

Kąt widzenia obrazu wynosi  $58^{\circ}$ .



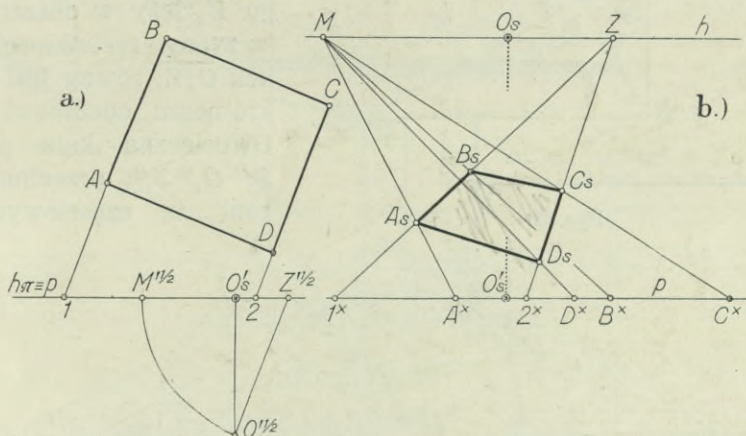
Rys. 382 a, b, c.

**69. Metoda śladów zbiegu i punktów mierzenia.** a) Na płaszczyźnie poziomej leży prostokąt  $ABCD$  (rys. 383 a). Pionowa płaszczyzna tła przecina płaszczyznę poziomą wzdłuż prostej  $h_n \equiv p$ . Punkt  $O'^{1/2}$  jest poziomym rzutem oka, zbliżonego do tła o połowę swego oddalenia. Punkt  $O_s$  jest rzutem poziomym punktu głównego a punkt  $Z'^{1/2}$  rzutem poziomym częściowego śladu zbiegu kierunku, równoległego do jednego boku prostokąta. Łuk koła, za-



kreślony z punktu  $Z'^{1/2}$ , jako środka, promieniem  $Z'^{1/2}O'^{1/2}$ , przetnie prostą  $h_x$  w punkcie  $M'^{1/2}$ .

Przyjawszy linię podstawy  $p$  (rys. 383 b), przenieśmy na nią z rysunku 383 a punkty 1,  $O'_s$  i 2, jako punkty  $1^x$ ,  $O'_s$  i  $2^x$ . Rzut prostokątny  $O_s$  punktu  $O'_s$  na obrany horyzont będzie punktem głównym. Znajdziemy punkt  $Z$ , odmierzając od punktu  $O_s$  dwukrotnie odcinek  $O'_sZ'^{1/2}$ . Podobnie otrzymamy punkt mierzenia  $M$ , odpowiadający punktowi  $Z$ , odnosząc  $O_sM$ , równe dwukrotnej długości odcinka  $O'_sM'^{1/2}$ . Punkty  $1^x$  i  $2^x$  połączymy ze śladem zbiegu  $Z$ , poczem odmierzmy  $1^xA^x = 1A$  i  $1^xB^x = 1B$ , a otrzymane na linii podstawy  $p$  punkty  $A^x$  i  $B^x$  połączymy z punktem mierzenia  $M$ . Na promieniu  $1^xZ$



Rys. 383 a, b.

otrzymamy punkty  $A_s$  i  $B_s$ . W analogiczny sposób otrzymamy punkty  $C_s$  i  $D_s$  na prostej  $2^xZ$ , odmierzając  $2^xC^x = 2C$  i  $2^xD^x = 2D$  i łącząc punkty  $C^x$  i  $D^x$  z punktem  $M$ .

Użycie częściowego punktu mierzenia zmieniałoby konstrukcję tylko o tyle, że na linię podstawy  $p$  przenieśliśmy nie odcinki  $1A$ ,  $1B$ ,  $2C$  i  $2D$  lecz ich części.

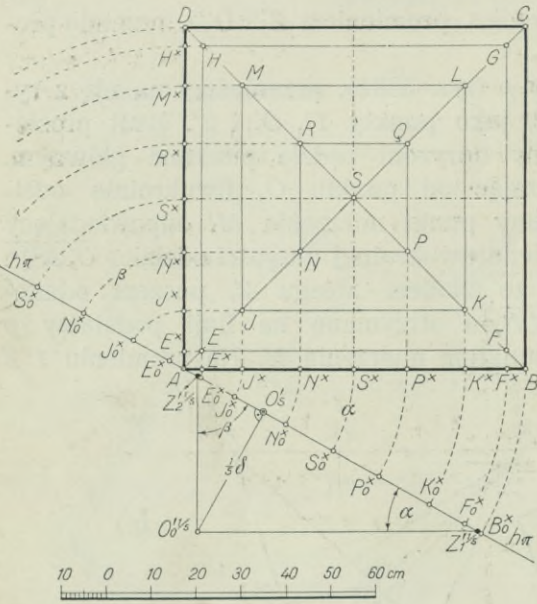
b) Praktyczny przykład zastosowania metody śladów zbiegu i punktów mierzenia przedstawia zadanie narysowania bocznej perspektywy stolika, rozwiązane na rys. 385.

Prostokątne rzuty tego stolika podał nam rys. 379. Niechaj płaszczyzna  $\pi$  przejdzie przez pionową krawędź  $A_1A_2$  górnej płyty stolika w sposób uzmysłowiony na rys. 384, który przedstawia sytuację stolika, płaszczyznę  $\pi$  i płaszczyznę horyzontu w rzucie poziomym (w widoku zgóry). Rysunek ten określa także położenie oka względem  $\pi$  i czę-

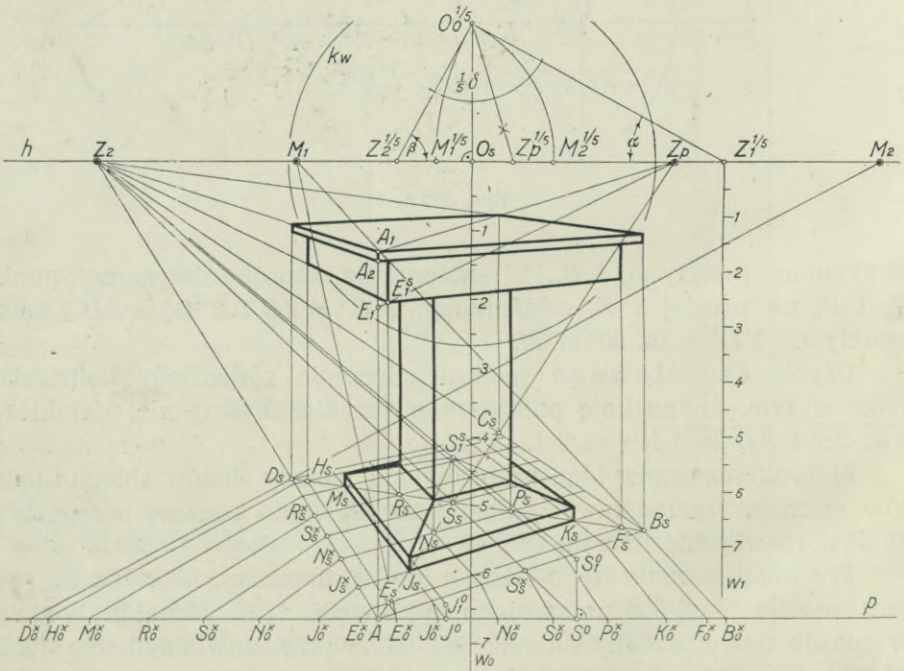
ściowych śladów zbiegu  $Z_1^{1/5}$  i  $Z_2^{1/5}$  dwóch kierunków wzajemnie prostopadłych, ale równoległych do poziomych krawędzi stolika.

Przyjmijmy horyzont  $h$  (rys. 385), na nim punkt główny  $O_s$  i wykreślmy trójkąt  $O_0^{1/5} Z_1^{1/5} Z_2^{1/5}$ , przystający do trójkąta  $O^{1/5} Z_1^{1/5} Z_2^{1/5}$  na rys. 384.

Przyjmijmy, że ślad zbiegu  $Z_2$  leży w obszarze płaszczyzny rysunkowej. Odcinek  $O_s Z_2$  równy jest pięciokrotnemu odcinkowi  $O_s Z_2^{1/5}$ . Dwusieczna kąta prostego  $Z_1^{1/5} O_0^{1/5} Z_2^{1/5}$  przecina horyzont w częściowym śla-



Rys. 384.

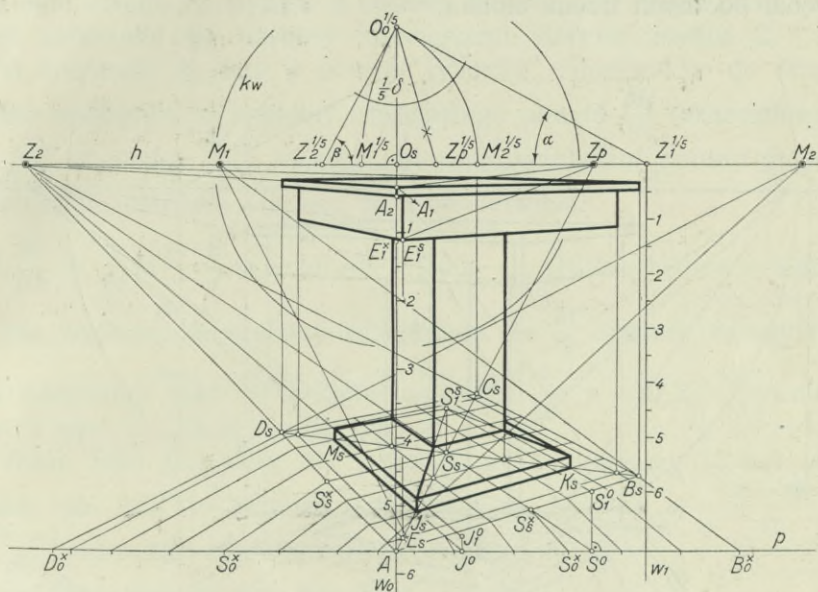


Rys. 385.



dzie  $Z_p^{1/5}$  przekątnych, których istotnym śladem zbiegu (punktem przekątnym) jest punkt  $Z_p$ , przyczem  $\overline{O_s Z_p} = 5 \cdot \overline{O_s Z_p^{1/5}}$ . Łuki kół, zakreślone z punktów  $Z_1^{1/5}$  i  $Z_2^{1/5}$ , jako środków, przetną horyzont w punktach  $M_1^{1/5}$  i  $M_2^{1/5}$ , które pozwolą wyznaczyć punkty mierzenia  $M_1$  i  $M_2$ ; pierwszy odnosi się do prostych, zbiegających się w śladzie  $Z_1$ , a drugi do promieni, których śladem zbiegu jest punkt  $Z_2$ .

Niedostępny ślad zbiegu  $Z_1$  zastąpimy podziałką zbiegu  $w_1$ , przyjmując, jako jednostkę dla podziałki  $w_0$ , 15 cm w podziałce rysunku



Rys. 386.

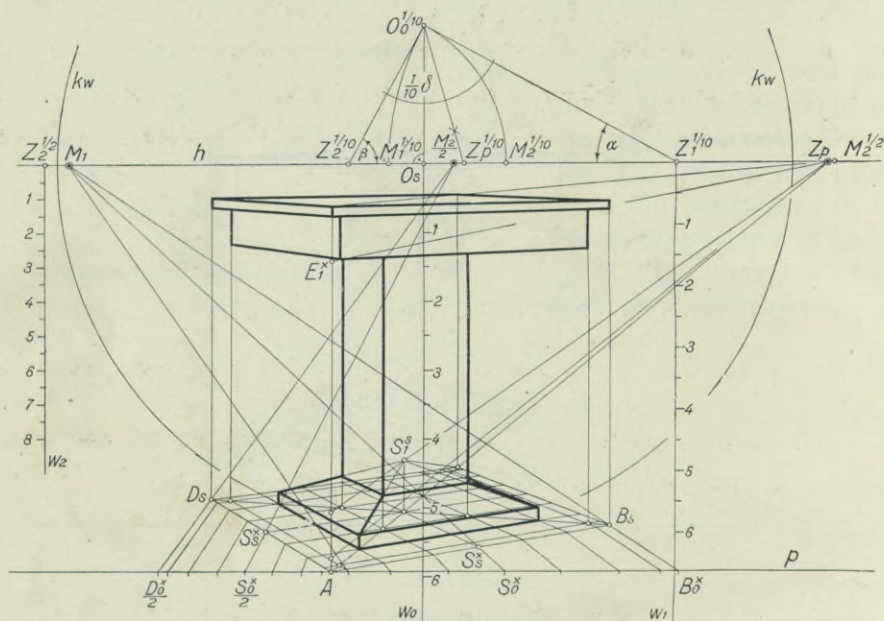
(patrz rys. 384), co wynosi 9·3 mm. Jednostka podziałki  $w_1$  wypadnie z równania (2), ust. 23, str. 65, 12 cm w podziałce rysunku, czyli około 7·5 mm.

Od punktu przecięcia się prostej  $w_0$  z prostą  $p$  odmierzymy na tej ostatniej, od ręki prawej ku lewej, odcinek  $O'_s A$  z rys. 384 i połączmy otrzymany punkt  $A$  ze śladami  $Z_1$  i  $Z_2$ . Następnie przeniesiemy na linię podstawy  $p$  szereg punktów  $E_0^x, J_0^x, N_0^x \dots B_0^x$ , leżący na prawo punktu  $A$  linii  $h_x$  i przystający do niego szereg  $E_0^x, J_0^x, \dots D_0^x$  po lewej stronie tego punktu. Otrzymane punkty rzucimy z punktów mierzenia  $M_1$  i  $M_2$  na proste  $AZ_1$  i  $AZ_2$ , a otrzymane tam szeregi  $A, \dots B_s$  i  $A, \dots D_s$  połączymy ze śladami zbiegu  $Z_1$  i  $Z_2$ . Tym sposobem dojdziemy do perspektywy rzutu poziomego stolika.

Zkolei wykreślimy w punktach  $J_s, K_s$  i  $M_s$  prostopadłe do hory-

zontu, a na pierwszej z nich odmierzymy perspektywicznie skrócony odcinek, równy wysokości płyty dolnej. W tym celu przedłużymy prostą  $Z_2 J_s$  do linii podstawowej  $p$ , wykreślimy  $J^0 J_1^0 \perp p$  i równe wysokości płyty i punkt  $J_1^0$  połączymy ze śladem  $Z_2$ . Dalsze krawędzie płyty wykreślimy bez trudności. Perspektywę  $S_1^s$  wierzchołka  $S_1$  znajdziemy, odmierząc na pionowej, przechodzącej przez punkt  $S_s$ , perspektywicznie skrócony odcinek  $S^0 S_1^0$ .

W punktach  $N_s$ ,  $P_s$  i  $R_s$  wykreślimy pionowe, które są obrazami krawędzi bocznych trzona stolika.



Rys. 387.

Na prostopadłej do  $p$ , wykreślonej w punkcie  $A$ , odmierzymy odcinek  $A A_1$ , równy wysokości stolika, i  $A_1 A_2$ , równy grubości płyty. Krawędź  $A_1 A_2$  leży, zgodnie z założeniem, na tle. Punkty  $A_1$  i  $A_2$  połączymy ze śladami  $Z_1$  i  $Z_2$ , a pierwszy nadto ze śladem  $Z_p$ , i otrzymamy perspektywę płyty. Pozostają wreszcie do wyznaczenia obrazy krawędzi ramy górnej. Odmierzmy jej wysokość na tle od punktu  $A_2$ , jako odcinek  $A_2 E_1$  na prostej  $A_1 A$ , połączymy punkt  $E_1$  ze śladem  $Z_p$ , aż do przecięcia się w punkcie  $E_1^s$ , z pionową, wykreśloną w punkcie  $E_s$ . Punkt  $E_1^s$  łączymy ze śladami  $Z_1$  i  $Z_2$ , znajdując następnie, bez trudu, pionowe krawędzie konturowe ramy.

Rys. 386 przedstawia perspektywę tego samego przedmiotu, z tą tylko różnicą, że zmniejszyliśmy wysokość horyzontu, a nadto



przesunęliśmy stół bardziej na prawo tak, że krawędź  $A_1 A_2$  płyty górnej, leżąc, jak poprzednio, na tle, znajduje się na głównej płaszczyźnie pionu;  $A_1 A_2$  na rys. 386 schodzi się zatem z prostą  $w_0$ . Inne warunki pozostały bez zmiany, a konstrukcję przeprowadzono w sposób identyczny z poprzednio opisanym.

Zachowując położenie przedmiotu względem głównej płaszczyzny pionu, jak w rys. 385, podwoiliśmy oddalenie i otrzymaliśmy perspektywę stolika, przedstawioną na rys. 387. Wskutek wzrostu oddalenia i ślad zbiegu  $Z_2$  wypadł z obszaru płaszczyzny rysunkowej, wobec czego zadowolić się musimy częściowymi śladami zbiegu  $Z_1^{1/10}$  i  $Z_2^{1/2}$ . Punkt mierzenia  $M_1$  leży w obrębie rysunku, natomiast co do drugiego punktu mierzenia, to użyjemy częściowego punktu  $\frac{M_2}{1/2}$  (oznaczonego na rys. 387 symbolem  $\frac{M_2}{2}$ ), którego położenie względem punktu głównego obliczymy z równania (4), ust. 28, a mianowicie:

$$O_s \frac{M}{r/s} = \frac{n}{m} \left[ a - \frac{r}{s} (a + b) \right] = \frac{10}{1} \left[ 10 \cdot 2 - \frac{1}{2} (10 \cdot 2 + 11) \right] = -4 \text{ mm.}$$

Dla wyjaśnienia dodamy raz jeszcze, że  $\frac{m}{n}$  oznacza tu użyty ułamek oddalenia, więc w naszym wypadku  $\frac{1}{10}$ ;  $a = O_s Z_2^{1/10}$ , oceniliśmy na  $10 \cdot 2 \text{ mm}$ ;  $b = O_s M_2^{1/10} = 11 \text{ mm}$ .

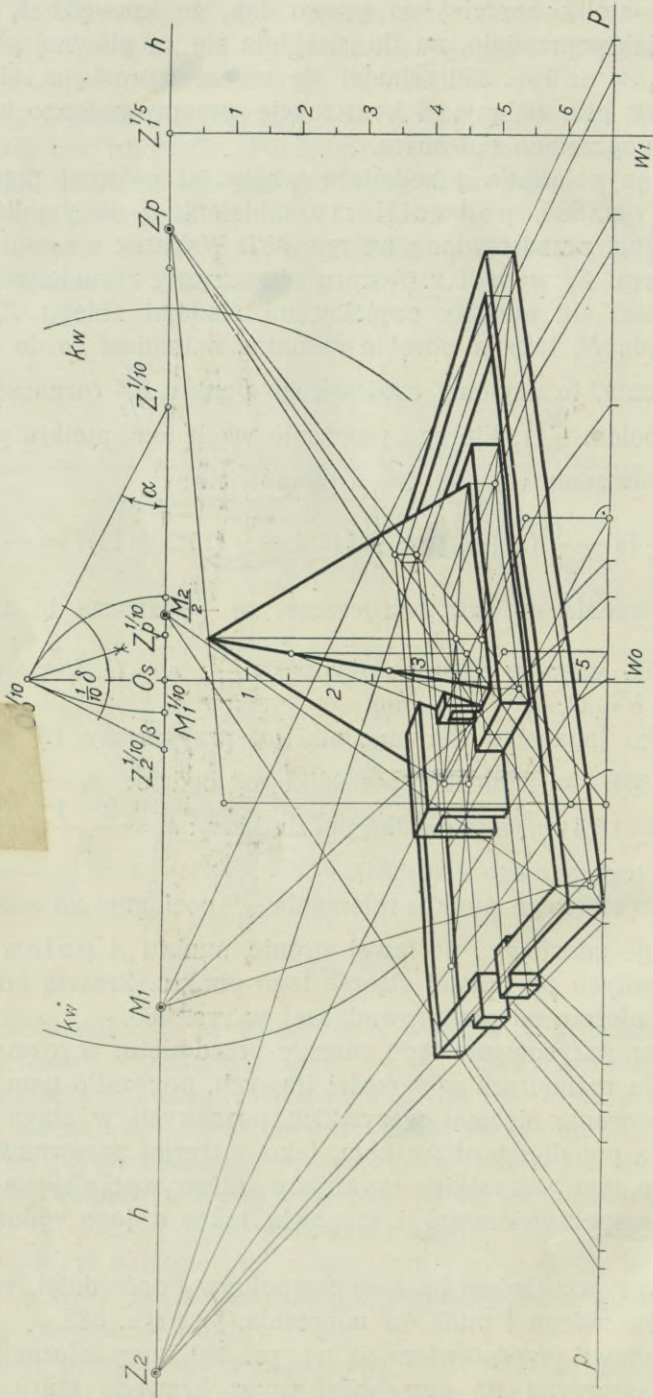
Jeżeli jako jednostkę dla podziałki  $w_0$  przyjmiemy  $15 \text{ cm}$  w podziałce rys. 384, to jednostką podziałki  $w_1$  będzie:  $a_1 = \frac{n-m}{n} a = \frac{10-1}{10} \cdot 15 = 13 \cdot 5 \text{ cm}$ , a jednostką podziałki  $w_2$ :  $a_2 = \frac{2-1}{2} \cdot 15 = 7 \cdot 5 \text{ cm}$  (w podziałce tego samego rys. 384).

Użycie częściowego punktu mierzenia  $\frac{M_2}{2}$  pociągnie za sobą odmierzenie na linii podstawy, po lewej stronie punktu  $A$  połowy odcinków, odmierzanych po prawej stronie tego punktu. Zresztą konstrukcja nie różni się niczem od przeprowadzonej w rys. 386.

Tylokrotne narysowanie tego samego przedmiotu, w rozmaitych położeniach i dla rozmaitych głębokości tłowych, pozwoliło nam na praktyczne zastosowanie nieomal wszystkich poznanych w ciągu wykładu konstrukcyj, a ponadto posłuży nam, jako materiał porównawczy przy rozpatrywaniu tych wszystkich czynników, które wpływają na charakter obrazu perspektywicznego i stanowią także o jego walorach estetycznych.

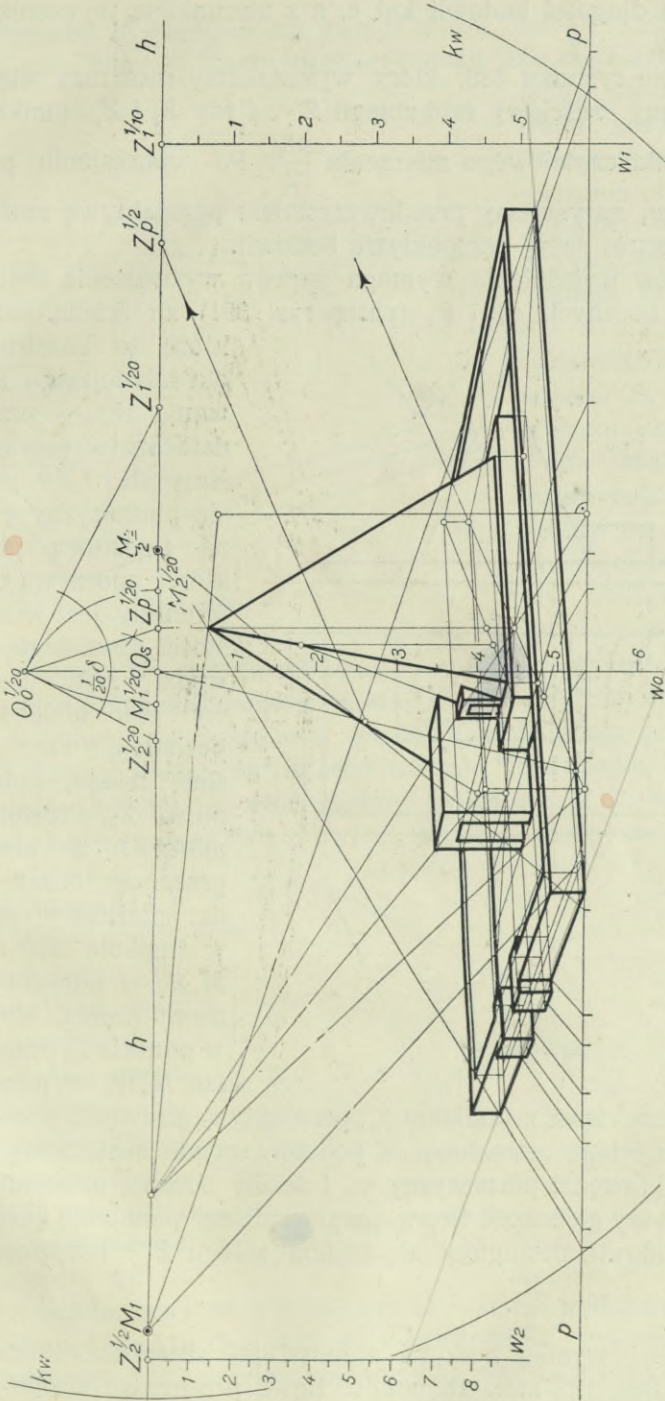
c) Dalszym przykładem bocznej perspektywy pośredniej, wykonanej metodą śladów zbiegu i punktów mierzenia, jest rys. 388.

Plany budowlı przedstawione są na rys. 390, który informuje nas ponadto, że płaszczyzna tła przechodzi przez krawędź muru i zawiera



Rys. 388.



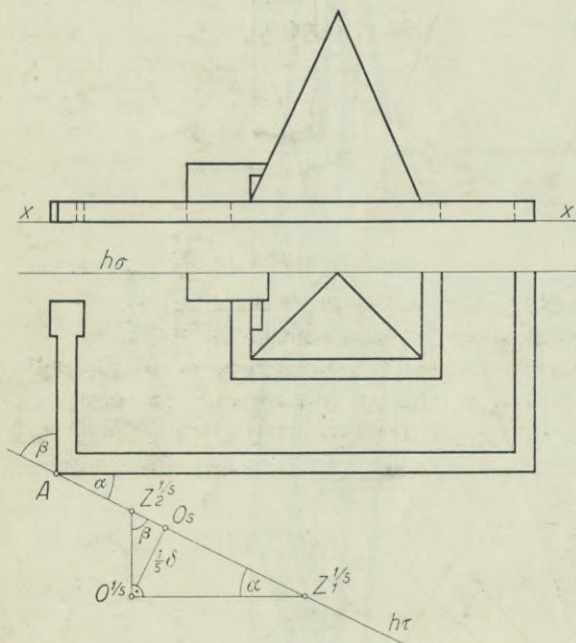


Rys. 389.

z kierunkiem długości budowli kąt  $\alpha$ , a z kierunkiem jej szerokości kąt  $(90^\circ - \alpha) = \beta$ .

W obrębie rysunku 388, który wykonaliśmy dwa razy większy od rys. 390, mamy częściowy ślad zbiegu  $Z_1^{1/5}$ , ślady  $Z_2$  i  $Z_p$ , punkt mierzenia  $M_1$  i punkt częściowego mierzenia  $\frac{M_2}{2}$ . Po wykreśleniu podziałek zbiegu  $w_0$  i  $w_1$  narysujemy przedewszystkiem perspektywę rzutu poziomego, a wreszcie samą perspektywę budowli.

Kilka słów wyjaśnienia wymaga sprawa wyznaczenia linii przenikania ścian bocznych  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  (patrz rys. 391) ze ścianą ostrosłupa,



Rys. 390.

którą to konstrukcję — dla łatwiejszego zorientowania się — przeprowadziliśmy w powiększeniu. Krawędź 1, 2 przecięcia się płaszczyzny  $\varphi_1$  z górną podstawą płyty, na której spoczywa ostrosłup piramidy, jest w rzeczywistości równoległą do krawędzi  $MN$ . Perspektywy obu tych krawędzi posiadają więc wspólny ślad zbiegu, którym jest punkt  $Z_1$ . Prosta, łącząca punkt  $1_s$  ze śladem  $Z_1$ , przecina obraz krawędzi podstawy ostrosłupa w punkcie  $2_s$ , a prostą  $M_s Z_p$  w punkcie  $I_s$ . Pionowa prosta, wykreślona w punkcie  $I_s$ , przecina prostą  $M_s W_s$  w punkcie  $II_s$ ,

który wyznacza, wraz z punktem  $2_s$ , perspektywę krawędzi przecięcia się ściany  $\varphi_1$  ze ścianą ostrosłupa. W podobny sposób znajdziemy perspektywę  $4_s IV_s$  krawędzi płaszczyzny  $\varphi_2$  i ściany bocznej ostrosłupa. Podwoiwszy głębokość tłowa, narysowaliśmy ponownie perspektywę tej samej budowli, posługując się śladami zbiegu  $Z_1^{1/10}$  i  $Z_2^{1/2}$  oraz punktami mierzenia  $M_1$  i  $\frac{M_2}{2}$ .

Największy wymiar budowli stanowi jej szerokość, która wynosi na rysunku 389, 122 mm. Głębokość tłowa przekracza w obu perspek-



tywach znacznie tę wielkość, bo wynosi w rys. 388 — 180 mm, a w rys. 389 — 360 mm. Promień koła widzenia rysunku 388, które przejdzie przez

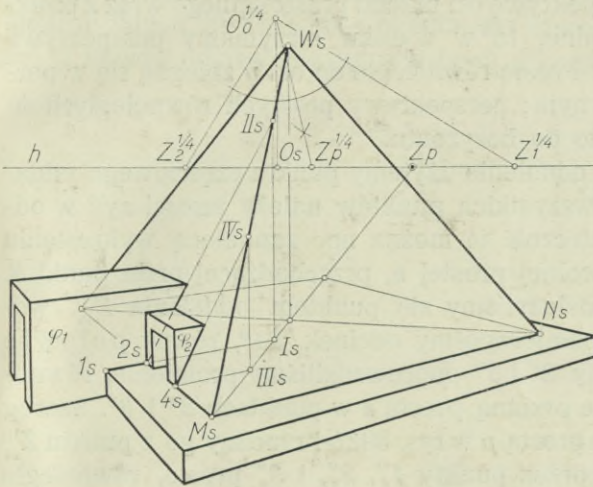
dolny wierzchołek prawego naroża, wynosi 74 mm, wobec czego kąt widzenia obrazu wynosi ponad 44°. Koła  $k_w$  w rys. 388 i 389 odpowiadają kątom widzenia 30°. Promień koła widzenia rysunku 389 wynosi 80 mm, a kąt widzenia 25°.

**70. Metoda spórzędnych.** a) Przyjmijmy na płaszczyźnie poziomej trójkąt 1, 2, 3 (rys. 392a), ślad poziomy  $h_\pi \equiv p$  płaszczyzny

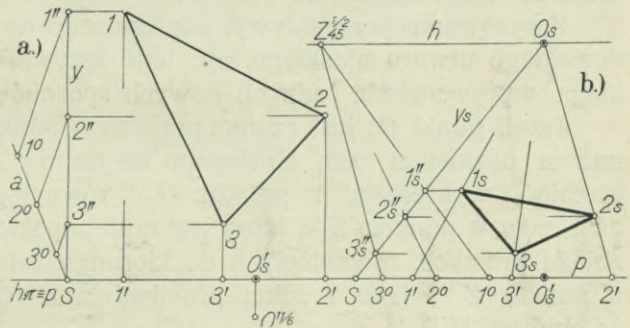
tła, rzut poziomy  $O'_s$  punktu głównego i rzut poziomy  $O'^{1/6}$  oka, zbliżonego do tła na odległość, równą szóstej części oddalenia tłowego. Wykreślmy w dowolnym punkcie  $S$  prostej  $h_\pi \equiv p$  prostą  $y$ , prostopadłą do niej, i rzucmy wierzchołki danego trójkąta prostopadle na proste  $h_\pi$  i  $y$ . Położenie każdego z wierzchołków trójkąta 1, 2, 3, w odniesieniu do prostokątnego układu osi  $h_\pi \equiv p$  i  $y$ , określone jest dwiema spórzędnymi. Są nimi, np. dla punktu 1, odcinki  $S1'$  i  $S1''$ . Pierwszy z nich nazywa się odciętą, drugi rzędną punktu 1.

Gdy znamy długości spórzędnych punktu, to jego położenie — w odniesieniu do danego układu osi  $h_\pi \equiv p$  i  $y$  — wyznaczymy w ten sposób, że na

osi  $h_\pi \equiv p$  odmierzymy od początku układu  $S$  odciętą  $\overline{S1'}$ , na osi  $y$  od tego samego punktu  $S$  rzędną  $\overline{S1''}$ . Prostopadła, wykreślona w punkcie  $1'$  do pierwszej osi, przetnie prostopadłą, poprowadzoną w punkcie  $1''$  do osi  $y$ , w punkcie 1. Widzimy, że każdemu punktowi płaszczyzny



Rys. 391.



Rys. 392 a, b.



odpowiadają — w odniesieniu do danego układu prostokątnego — dwie spółrzedne.

Jeżeli wykreśliśmy perspektywę osi układu prostokątnego wraz z punktami określającymi spółrzedne, to w wyniku otrzymamy perspektywę  $1_s 2_s 3_s$  trójkąta (rys. 392 b). Proste równoległe do osi  $y$  zbiegną się w perspektywie w punkcie głównym; perspektywy prostych równoległych do osi  $h_\pi \equiv p$  będą równoległe do horyzontu.

Jeżeli zamiast punktu oddalenia użyjemy punktu częściowego oddalenia, to wówczas rzędne wszystkich punktów należy zmniejszyć w odpowiednim stosunku. Uskutecznić to można np. zapomocą wykreślenia szeregu podobnego na dowolnej prostej  $a$ , przechodzącej przez punkt  $S$ . W naszym przykładzie posłużyliśmy się punktem oddalenia  $Z_{45}^{1/2}$ , wobec czego na prostej  $a$  odmierzyliśmy odcinek  $\overline{S1^0}$ , równy połowie rzędnej  $\overline{S1''}$ , a przez punkty  $2''$  i  $3''$  poprowadziliśmy promienie, równoległe do  $1'' 1^0$ . Promienie te przetną prostą  $a$  w punktach  $2^0$  i  $3^0$ . Szereg  $S, 3^0, 2^0, 1^0$  przeniesiemy na prostą  $p$  w rys. 392 b i rzucimy go z punktu  $Z_{45}^{1/2}$  na prostą  $y_s$ . Wykreślone przez punkty  $1''_s, 2''_s, i 3''_s$  proste, równoległe do linii podstawy  $p$ , przetną perspektywicznie równoległe promienie  $O_s 1', O_s 2' i O_s 3'$  w punktach  $1_s, 2_s i 3_s$ .

b) Jeżeli oś  $y$  układu odniesienia nie jest prostopadłą do osi  $h_\pi \equiv p$  (rys. 393 a), to wówczas układ odniesienia jest ukośnokątny. Położenie punktu, np. punktu  $1$  na rys. 393 a, w odniesieniu do tego układu, oznaczone jest — podobnie, jak w układzie prostokątnym — zapomocą dwóch spółrzednych: rzędnej  $\overline{S1''}$  i odciętej  $\overline{S1'}$ . Punkty  $1'$  i  $1''$  na osiach  $h_\pi \equiv p$  i  $y$  powstały przez przecięcie się tych osi z promieniami, wykreślonymi równoległe do nich przez punkt  $1$ .

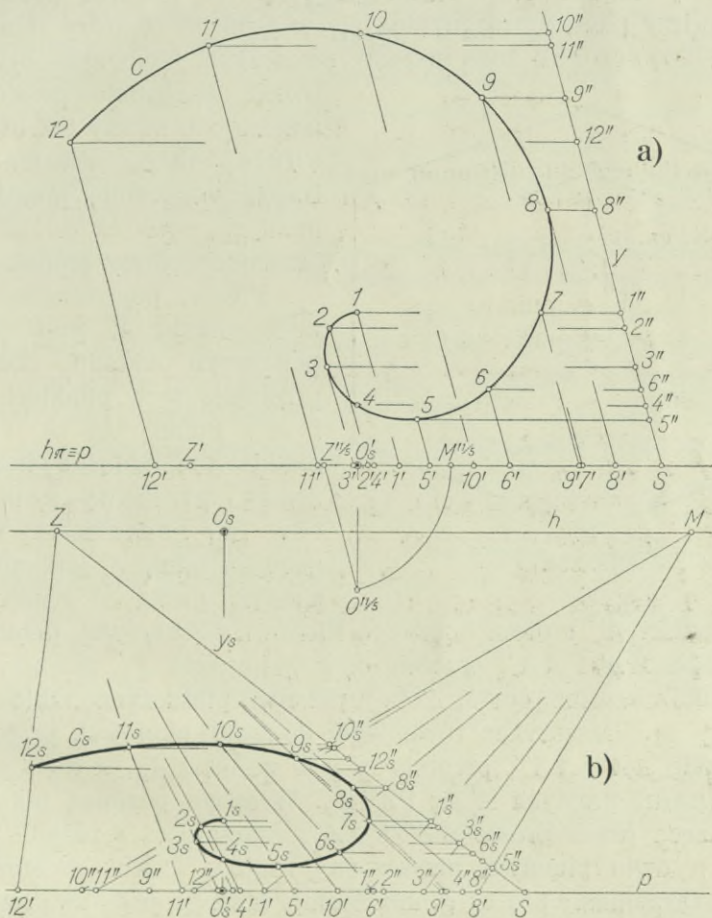
Narysowanie perspektywy, odniesionego do ukośnokątnego układu, dowolnego utworu płaskiego, np. linii krzywej  $C$  (rys. 393 a), nie wymaga wprowadzenia żadnych nowych sposobów konstrukcyjnych.

Jeżeli punkt  $O'_s$  jest rzutem poziomym punktu głównego, punkt  $O'^{1/2}$  rzutem poziomym oka, zbliżonego do tła o  $4/5$  głębokości tłowej, to promień, wykreślony z punktu  $O'^{1/2}$  równoległe do osi  $y$ , przetnie oś  $h_\pi \equiv p$  w punkcie  $Z'^{1/2}$ , który jest rzutem poziomym częściowego śladu zbiegu prostych, równoległych do kierunku osi  $y$ . Łuk koła, zakreślony z punktu  $Z'^{1/2}$ , jako środka, promieniem  $\overline{Z'^{1/2} O'^{1/2}}$ , przetnie oś  $h_\pi \equiv p$  w punkcie  $M'^{1/2}$ .

Przyjmijmy podstawę  $p$ , horyzont  $h$  (rys. 393 b), a na nim punkt główny  $O_s$ . Pięciokrotny odcinek  $\overline{Z'^{1/2} O'_s}$ , przeniesiony z rys. 393 a na horyzont, od punktu głównego na lewo, wyznacza tam ślad zbiegu  $Z$  promieni, równoległych do osi  $y$  układu odniesienia, a odcinek  $\overline{O'_s M'^{1/2}}$ , odniesiony pięciokrotnie na horyzoncie od punktu  $O_s$  na prawo, określa położenie punktu mierzenia  $M$  dla tego samego kierunku.



Oznaczmy prostokątny rzut punktu  $O_s$  na podstawę  $p$  symbolem  $O'_s$ , poczem przenieśmy szereg punktów  $S, 8', \dots 6', O'_s, \dots 12'$  z prostej  $h_{\pi} \equiv p$  rysunku 393 a na prostą  $p$  rysunku 393 b i połączmy te punkty ze śladem zbiegu  $Z$ . Następnie przenieśmy szereg punktów  $S, 5'', 4'' \dots 10''$  osi  $y$  układu odniesienia na podstawę  $p$  i punkty tego szeregu połączmy



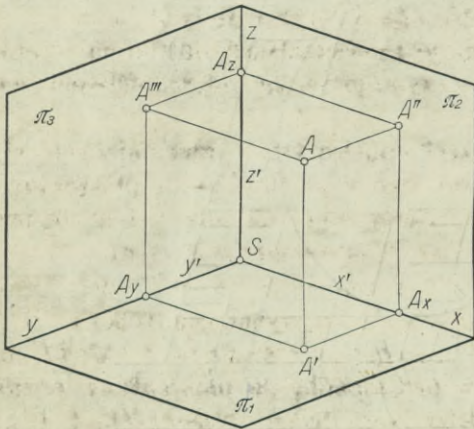
Rys. 393 a, b.

z punktem mierzenia  $M$ . Na prostej  $y_s$  otrzymamy szereg punktów:  $5'', 6'', \dots 10''$ , przez które wykreślimy równoległe do  $p$ .

Tym sposobem przenieśliśmy dany ukośnokątny układ odniesienia z rzutu poziomego do rzutu perspektywicznego. Odpowiadające sobie promienie przetną się w punktach  $1_s, 2_s, \dots 12_s$ , linii  $C_s$ , będącej perspektywą krzywej  $C$ .

### 71. Perspektywa aksonometryczna <sup>1)</sup>.

a) Położenie punktu w przestrzeni określić można, odnosząc go do układu trzech, wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, przecinających się parami wzdłuż trzech osi:  $x, y, z$ . Pozioma płaszczyzna  $\pi_1$  (rys. 394) przecina płaszczyznę pionową  $\pi_2$  układu wzdłuż osi  $x$ , a płaszczyznę boczną  $\pi_3$  wzdłuż osi  $y$ . Płaszczyzny  $\pi_2$  i  $\pi_3$  utworzą prostą  $z$ , zaś wszystkie trzy płaszczyzny przetną się w punkcie  $S$ , który stanowi początek lub środek tego układu płaszczyzn. Tym sposobem układ



Rys. 394.

trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, zwany też układem odniesienia, stwarza układ trzech wzajemnie prostopadłych prostych, zwanych osiami, które przechodzą przez środek  $S$ .

Proste, poprowadzone z danego punktu  $A$ , prostopadłe do płaszczyzn układu odniesienia, przebijają je w punktach  $A'$ ,  $A''$  i  $A'''$ . Punkty te są rzutami punktu  $A$  na odnośne płaszczyzny, zwane płaszczyznami rzutów lub rzutniami. W szczególności punkt  $A'$  jest rzutem poziomym, punkt  $A''$  rzutem pionowym, a punkt  $A'''$  rzutem bocznym. Pionowa płaszczyzna, przechodząca przez proste  $AA'$  i  $AA''$ , przetnie oś  $x$  w punkcie  $A_x$ , płaszczyznę poziomą rzutów wzdłuż prostej  $A'A_x$  a pionową płaszczyznę rzutów wzdłuż prostej  $A''A_x$ . Płaszczyzna równoległa do rzutni pionowej, przechodząca przez proste  $AA'$  i  $AA'''$ , przetnie oś  $y$  w punkcie  $A_y$ , a dwie pozostałe rzutnie wzdłuż prostych  $A'A_y$  i  $A'''A_y$ . Wreszcie pozioma płaszczyzna, przechodząca przez proste  $AA''$  i  $AA'''$ , przetnie oś  $z$  układu w punkcie  $A_z$ , a dwie pionowe płaszczyzny rzutów wzdłuż prostych  $A''A_z$  i  $A'''A_z$ . Otrzymamy prosty graniastosłup, którego podstawą jest prostokąt  $SA_xA'A_y$ , a którego trzy krawędzie schodzą się w punkcie  $S$ .

Odcinek  $AA'''$  wyraża odległość punktu  $A$  od rzutni bocznej  $\pi_3$ , czyli jego „szerokość“; odcinek  $AA''$  jest „głębokością“ punktu, t. j. jego odległością od rzutni pionowej  $\pi_2$ , a odcinek  $AA'$ , równy oddaleniu punktu  $A$  od rzutni poziomej  $\pi_1$ , stanowi jego „wysokość“. Widzimy z rysunku 394, że krawędzie  $SA_x$ ,  $SA_y$  i  $SA_z$  wspomnianego wyżej graniastosłupa, schodzące się z osiami układu odniesienia, równe są odpowiednim

Odcinek  $AA'''$  wyraża odległość punktu  $A$  od rzutni bocznej  $\pi_3$ , czyli jego „szerokość“; odcinek  $AA''$  jest „głębokością“ punktu, t. j. jego odległością od rzutni pionowej  $\pi_2$ , a odcinek  $AA'$ , równy oddaleniu punktu  $A$  od rzutni poziomej  $\pi_1$ , stanowi jego „wysokość“. Widzimy z rysunku 394, że krawędzie  $SA_x$ ,  $SA_y$  i  $SA_z$  wspomnianego wyżej graniastosłupa, schodzące się z osiami układu odniesienia, równe są odpowiednim

<sup>1)</sup> Patrz autora: „O pewnym zastosowaniu metody aksonometrii do perspektywy środkowej“. Czasopismo Techniczne. Lwów, 1909.



krawędziom tegoż graniastoslupa, przecinającym się w punkcie  $A$ . Odcinki  $\overline{SA_x}$ ,  $\overline{SA_y}$  i  $\overline{SA_z}$  nazywamy prostokątnymi spólrzędnymi danego punktu  $A$  i oznaczamy je literami odnośnych osi. Znajomość spólrzędnych punktu pozwala na wyznaczenie, w sposób jednoznaczny, jego położenia w przestrzeni. Istotnie bowiem, odciawszy na osi  $x$  spólrzędną  $\overline{SA_x} = x'$ , a następnie na prostopadłej, wykreślonej na płaszczyźnie poziomej w punkcie  $A_x$  do osi  $x$ , spólrzędną  $y' = \overline{SA_y} = \overline{A_x A'}$ , otrzymamy rzut poziomy  $A'$  punktu  $A$ . W punkcie  $A'$  prowadzimy prostą równoległą do osi  $z$  i odcinamy na niej spólrzędną  $z' = \overline{SA_z} = \overline{A' A}$ , dochodząc do punktu  $A$ , którego spólrzędne  $x'$ ,  $y'$  i  $z'$  były dane.

b) *Perspektywa aksonometryczna* jest perspektywą pośrednią, w której poszczególne punkty obrazu otrzymujemy za pośrednictwem ich spólrzędnych prostokątnych.

Niechaj prostokątny układ trzech płaszczyzn, przecinających się wzdłuż osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (układ odniesienia), będzie nachylony do płaszczyzny rysunku (tła) w ten sposób, że przekrój tego układu z tłem będzie trójkątem  $XYZ$  (rys. 395) (trójkąt śladów aksonometrycznych).

Prostokątny rzut środka układu, t. j. punktu  $S$ , na tło (środek aksonometryczny), będzie punktem  $S'$  przecięcia się wysokości trójkąta  $XYZ$ . W istocie bowiem płaszczyzna  $\varphi_3$ , przechodząca przez oś  $z$  układu odniesienia i przez promień  $SS'$ , jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej  $\pi_1$  i do tła a więc i do krawędzi tych dwóch płaszczyzn, t. j. do prostej  $XY$ . Ale prosta  $XY$ , jako prostopadła do płaszczyzny  $\varphi_3$ , jest prostopadłą do każdej prostej, znajdującej się na tej płaszczyźnie, a więc i do prostej  $ZP$ , która jest jej śladem na tle. Analogicznie prosta  $XZ$  jest prostopadła do  $YN$  a bok  $YZ$  prostopadły do  $XM$ . Proste  $x_s$ ,  $y_s$  i  $z_s$  są perspektywą prostokątnego układu osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , o środku  $S$ , czyli stanowią perspektywiczny układ odniesienia.

Obierzmy na promieniu  $SS'$ , rzucającym prostopadle środek  $S$  układu odniesienia na tło, oko  $O$ , w odległości  $\delta$  od punktu  $S_s \equiv S'$ . Rzut prostokątny  $O_s$  oka  $O$  na tło, t. j. punkt główny, schodzi się z punktem  $S'$ , który jest równocześnie perspektywą  $S_s$  punktu  $S$ .

Wykonajmy kład na tło płaszczyzn  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$ , t. j. tych, które przechodzą przez osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , prostokątnego układu odniesienia i przez promień główny  $OS_s S$ . Na płaszczyźnie  $\varphi_1$  znajduje się prostokątny trójkąt  $XSM$  i oko, leżące na promieniu, wyprowadzonym z punktu  $S$  prostopadle do przeciwprostokątnej  $XM$  tego trójkąta. Osią obrotu dla tego kładu jest prosta  $XM$ . Zakreślmy na odcinku  $\overline{XM}$ , jako na średnicy, półkoło i wykreślmy w punkcie  $S_s$  prostopadłą do tego odcinka, to punkt  $S'_s$  przecięcia się tej prostopadłej z półkołem będzie wierzchołkiem prostokątnego trójkąta  $X S'_s M$ , stanowiącego kład trójkąta  $XSM$  na tło. Przedłużenie odcinka  $O_s S'_s$  przetnie koło głębokości, zakreślone z punktu





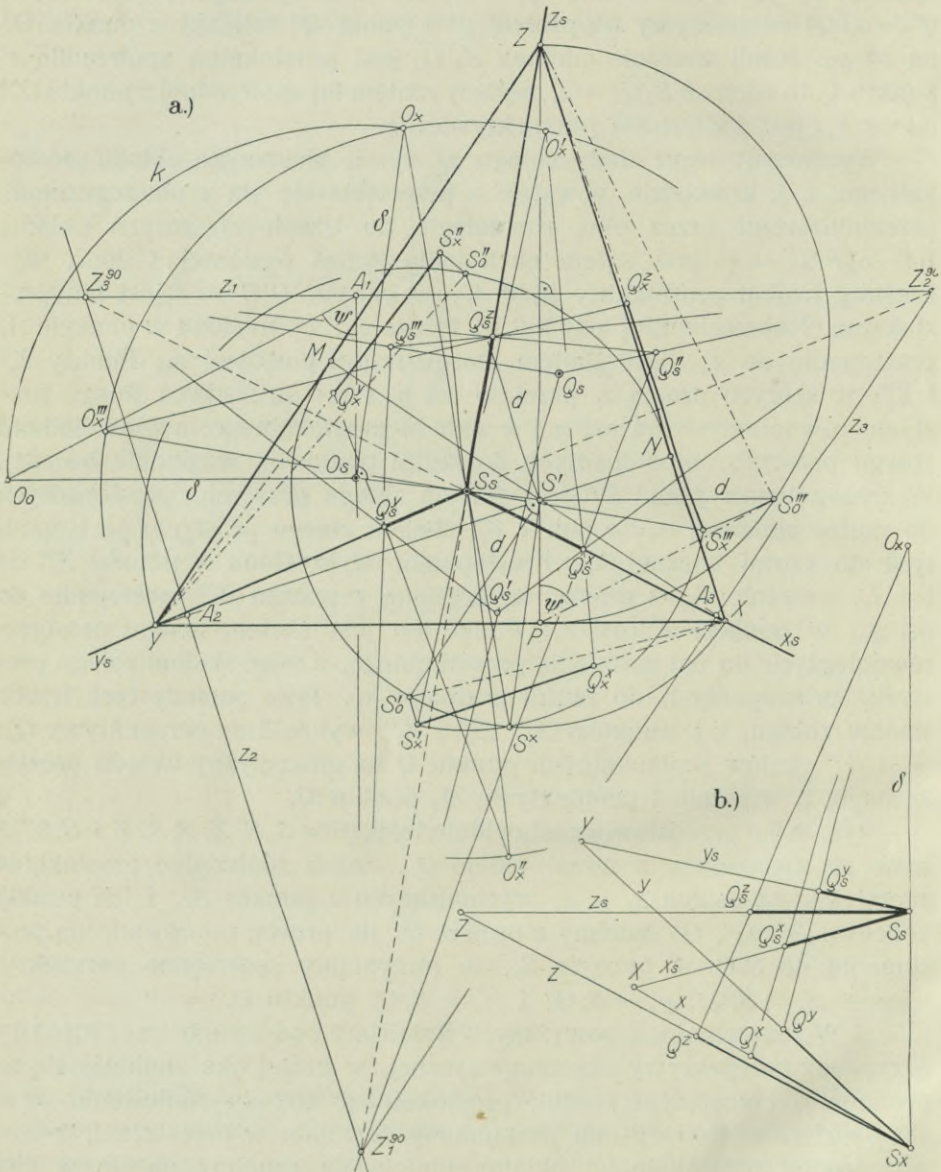
dący rzutem pierwszego na oś  $x_s$  z punktu  $O'_x$ , jest perspektywą tej spórzędnej, czyli spórzędną perspektywiczną  $x'_s$ . Podobnie otrzymamy spórzędną perspektywiczną  $y'_s = \overline{S_s Q_s^y}$ , jeśli spórzędną prostokątną  $y' = \overline{S''_x Q''_x}$  odmierzymy na prostej  $y^0$  i punkt  $Q''_x$  rzucimy z punktu  $O''_x$  na oś  $y_s$ . Jeżeli wreszcie odcinek  $\overline{S'''_x Q'''_x}$  jest prostokątną spórzędną  $z'$  punktu  $Q$ , to odcinek  $\overline{S_s Q_s^z} = z'_s$ , będący rzutem tej spórzędnej z punktu  $O''_x$  na oś  $z_s$ , jest spórzędną perspektywiczną.

Wyznamy teraz ślady zbiegu  $z_1, z_2, z_3$  płaszczyzn układu prostokątnego, t. j. krawędzie, powstałe z przecięcia się tła z płaszczyznami, przechodzącymi przez oko, równoległe do trzech płaszczyzn układu. Kąt  $S_s P S'''_x = \psi$  jest kątem nachylenia rzutni poziomej z tłem; wykreślimy trójkąt prostokątny  $O_s O^0 A_1$ , w którym  $\overline{O_s O^0} = \delta$  jest przyprostokątną. Naprzeciw niej leży kąt  $\psi$ . Prosta  $z_1$ , wykreślona w punkcie  $A_1$  prostopadłe do  $z_s$ , jest śladem zbiegu rzutni poziomej  $\pi_1$ . Punkty  $Z_2^{90}$  i  $Z_3^{90}$ , w których prosta  $z_1$  przetnie osi  $y_s$  i  $x_s$ , są śladami zbiegu prostych, równoległych do osi  $y$  i  $x$  układu prostokątnego, a więc śladami zbiegu prostych, prostopadłych do rzutni pionowej, względnie bocznej. W szczególności punkt  $Z_2^{90}$  jest śladem zbiegu prostych, prostopadłych do rzutni pionowej  $\pi_2$ , a punkt  $Z_3^{90}$  śladem zbiegu prostych, prostopadłych do rzutni bocznej  $\pi_3$ . Prostopadła, wykreślona z punktu  $Z_2^{90}$  do osi  $x_s$ , przetnie się z prostą, wykreśloną z punktu  $Z_3^{90}$  prostopadłe do osi  $y_s$ , w punkcie  $Z_1^{90}$  osi  $z_s$ . Punkt ten jest śladem zbiegu prostych, równoległych do osi  $z$  układu prostokątnego, a więc śladem zbiegu prostych, prostopadłych do rzutni poziomej  $\pi_1$ . Przy pomocy tych trzech śladów zbiegu, t. j. punktów  $Z_1^{90}, Z_2^{90}$  i  $Z_3^{90}$ , wykreślimy perspektywy  $Q'_s, Q''_s$  i  $Q'''_s$  rzutów prostokątnych punktu  $Q$  na płaszczyzny układu prostokątnego, a wreszcie i perspektywę  $Q_s$  punktu  $Q$ .

Rys. 395 b przedstawia zestawienie trójkątów  $S_s S'_x X, S_s S''_y Y$  i  $S_s S'''_z Z$  wraz ze związanem z nimi okiem  $O_x$ . Jeżeli spórzędne prostokątne odetniemy na osiach  $x, y, z$ , wychodzących z punktu  $S_x$ , i ich punkty końcowe  $Q^x, Q^y, Q^z$  rzucimy z punktu  $O_x$  na prostą, poprowadzoną prostopadłe do  $S_x O_x$  w punkcie  $S_s$ , to otrzymamy spórzędne perspektywiczne  $x'_s = \overline{S_s Q_s^x}, y'_s = \overline{S_s Q_s^y}$  i  $z'_s = \overline{S_s Q_s^z}$  punktu  $Q$ .

c) W rozważaniach powyższych wzięliśmy pod uwagę szczególny przypadek perspektywy aksonometrycznej, w której oko znajduje się na promieniu, rzucającym środek prostokątnego układu odniesienia prostopadłe na tło. Gdy oko przyjmiemy dowolnie w przestrzeni, a więc gdy środek prostokątnego układu odniesienia rzucimy na tło w kierunku dowolnym, to wówczas otrzymamy ogólny przykład perspektywy aksonometrycznej. Punkt główny  $O_s$  (rys. 396 a) nie zejdzie się w tym przypadku z rzutem środkowym  $S_s$  początku układu odniesienia.

Przyjęty na płaszczyźnie rysunku trójkąt  $XYZ$  jest trójkątem śladów płaszczyzn prostokątnego układu odniesienia, a dowolny punkt  $S_s$  —



Rys. 396 a, b.

rzutem środkowym początku  $S$  tego układu. Punkt  $S'$  przecięcia się wysokości trójkąta  $XYZ$  jest rzutem prostokątnym środka układu od-



niesienia na tło, a punkt  $O_s$ , przyjęty dowolnie na prostej  $S'S_s$ , rzutem prostokątnym oka na tło, t. j. punktem głównym.

Zakreślmy na odcinku  $ZP$ , jako na średnicy, koło, a w punkcie  $S'$  poprowadźmy do niej prostopadłą, to odcinek  $S'S''_0 = d$  równy jest oddaleniu początku układu odniesienia od tła. Poprowadźmy w punkcie końcowym  $S'$  odcinka  $S_sS'$  prostopadłą do niego, odmierzmy na niej odcinek  $S'S^x = S'S''_0 = d$  i otrzymany punkt  $S^x$  połączmy z punktem  $S_s$  prostą. Prosta ta przetnie prostopadłą, wykreśloną w punkcie  $O_s$  do prostej  $O_sS_sS'$ , w punkcie  $O_x$ . Otrzymane dwa podobne trójkąty  $S_sS'S^x$  i  $S_sO_sO_x$ , o wspólnym wierzchołku  $S_s$ , stanowią kład na tło płaszczyzny, prostopadłej do tła a przechodzącej przez oko  $O$  i początek  $S$  prostokątnego układu odniesienia. Odcinek  $O_sO_x = \delta$  równy jest głębokości tłowej. Jeżeli głębokość ta jest dana z góry, to wówczas nie możemy przyjąć — jak to uczyniliśmy w naszym przykładzie — punktu  $O_s$  dowolnie na promieniu  $S'S_s$ ; położenie jego będzie wynikiem konstrukcji. W odległości, równej danej głębokości tłowej, poprowadzimy mianowicie równoległą do prostej  $S'S_s$ , a punkt  $O_x$  przecięcia się tej równoległej z promieniem  $S^xS_s$  rzucimy prostopadłe na prostą  $S'S_s$ . Rzut ten będzie punktem  $O_s$ , t. j. prostokątnym rzutem oka na tło, czyli punktem głównym. Konstrukcja ta poucza nas, że gdy przyjęte są punkty  $S_s$  i  $O_s$ , to tem samem określona jest głębokość tłowa; gdy natomiast dany jest punkt  $S_s$  i głębokość tłowa  $\delta$ , to położenie punktu głównego  $O_s$  jest wyznaczone.

Przystąpmy teraz do wykreślenia perspektywy przyjętego w przestrzeni punktu  $Q$ , którego spólrzędne prostokątne  $x', y', z'$  są dane. Aby wyznaczyć perspektywę spólrzędnej  $x'$ , czyli spólrzędną perspektywiczną  $x'_s$ , połączmy trójkąt  $SS_sX$ , wraz z okiem, znajdującem się na przedłużeniu boku  $SS_s$ , na tło. Bok  $SS_s$  tego trójkąta jest równy odcinkowi  $S_sS^x = d$ ; drugi bok, równy odcinkowi  $S_sX$ , leży na tle, a trzeci bok  $SX$  znajdziemy, obracając prostokątny trójkąt  $XMS$ , około jego przeciwprostokątnej  $XM$ , na tło. W tym celu zakreślmy na średnicy  $XM$  koło i w punkcie  $S'$  poprowadźmy do niej prostopadłą, która przetnie to koło w punkcie  $S'_0$ . Odcinek  $S'_0X$  jest prawdziwą długością boku  $SX$ . Łuk koła, zakreślony z punktu  $X$  promieniem  $XS'_0$ , przetnie łuk koła, zakreślony z punktu  $S_s$  promieniem  $S_sS^x$ , w punkcie  $S'_x$ , który jest szukanym wierzchołkiem trójkąta  $S_sXS'_x$ . Na przedłużonym boku  $S'_xS_s$  tego trójkąta, w odległości równej odcinkowi  $S_sO_x$ , leżeć będzie punkt  $O'_x$ , t. j. oko, sprowadzone na tło obrotem płaszczyzny, przechodzącej przez oś  $x$  prostokątnego układu odniesienia i przez oko  $O$ . Odmierzmy  $S'_xQ^x = x'$  i połączmy punkt  $Q^x$  z punktem  $O'_x$ . Na osi  $x_s$  otrzymamy punkt  $Q^x_s$ , przyczem odcinek  $S_sQ^x_s$  jest spólrzędną perspektywiczną  $x'_s$ , t. j. perspektywą spólrzędnej prostokątnej  $x'$ .



W analogiczny sposób znajdziemy trójkąt  $YS_sS_x''$  wraz z punktem  $O_x''$ , leżącym na przedłużeniu boku  $S_x''S_s$  a wreszcie i trójkąt  $ZS_sS_x'''$  wraz ze związanym z jego bokiem  $S_x'''S_s$  punktem  $O_x'''$ . Rzut prostokątnej spółrzednej  $y' = \overline{S_x''Q_x''}$  z punktu  $O_x''$  na oś  $y_s$  jest spółrzedną perspektywiczną  $y'_s = \overline{S_sQ_s''}$ , a rzut spółrzednej  $z' = \overline{S_x'''Q_x'''}$  na oś  $z_s$  z punktu  $O_x'''$  — perspektywiczną spółrzedną  $z'_s = \overline{S_sQ_s'''}$ .

Z rysunku widzimy, że:

$$\overline{O_x'S_x'} = \overline{O_x''S_x''} = \overline{O_x'''S_x'''} \text{ a także } \overline{S_sS_x'} = \overline{S_sS_x''} = \overline{S_sS_x'''}$$

Pozwala to na zestawienie trójkątów  $S_sXS_x'$ ,  $S_sYS_x''$  i  $S_sZS_x'''$  w sposób, uwidoczniiony na rys. 396 b, gdzie  $\overline{O_xS_x} = \overline{O_x'S_x'}$  a  $\overline{S_sS_x} = \overline{S_sS_x'}$ . Rysunek ten stanowi podziałkę skróceń perspektywy aksonometrycznej w najogólniejszym przypadku. Jeżeli na osiach  $x$ ,  $y$ ,  $z$  odmierzymy prostokątne spółrzedne  $x' = \overline{S_xQ_x}$ ,  $y' = \overline{S_xQ_y}$ ,  $z' = \overline{S_xQ_z}$  i rzucimy je na osi  $x_s$ ,  $y_s$ ,  $z_s$ , to rzuty te, a mianowicie  $x'_s = \overline{S_sQ_s'}$ ,  $y'_s = \overline{S_sQ_s''}$  i  $z'_s = \overline{S_sQ_s'''}$  są spółrzednymi perspektywicznymi punktu  $Q$ .

Pozostaje nam jeszcze wyznaczenie śladów zbiegu  $Z_1^{90}$ ,  $Z_2^{90}$  i  $Z_3^{90}$  prostych, prostopadłych do płaszczyzn  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  i  $\pi_3$  układu odniesienia. Ślady te będą punktami przecięcia się osi  $x_s$ ,  $y_s$  i  $z_s$  ze śladami zbiegu tych płaszczyzn.

Ślad zbiegu  $z_1$  płaszczyzny poziomej jest krawędzią płaszczyzny, przechodzącej przez oko równoległe do rzutni poziomej, z tłem. Otrzymamy go podobnie, jak w rys. 396 a, a mianowicie: wykreślimy trójkąt prostokątny  $O_sA_1O_0$ , którego bok  $\overline{O_sA_1}$  jest równoległy do  $ZP$ , bok  $\overline{O_sO_0} = \overline{O_sO_x} = \delta$ , a przeciwległy temu bokowi kąt — równy kątowi  $\psi$ , jaki rzutnia pozioma zawiera z tłem, t. j. kątowi  $S'PS''$ . Ślad  $z_1$  przejdzie przez punkt  $A_1$  prostopadłe do  $ZP$  i wyznaczy na osiach  $y_s$  i  $x_s$  ślady  $Z_2^{90}$  i  $Z_3^{90}$ . Prostopadłą, wykreśloną z punktu  $Z_2^{90}$  do  $XM$ , przetnie prostopadłą, poprowadzoną do  $YN$  z punktu  $Z_3^{90}$ , w punkcie  $Z_1^{90}$ . Dopełnienie rysunku dla otrzymania perspektyw  $Q'_s$ ,  $Q''_s$  i  $Q'''_s$ , a także i perspektywy  $Q_s$ , nie nastęrczy żadnych trudności.

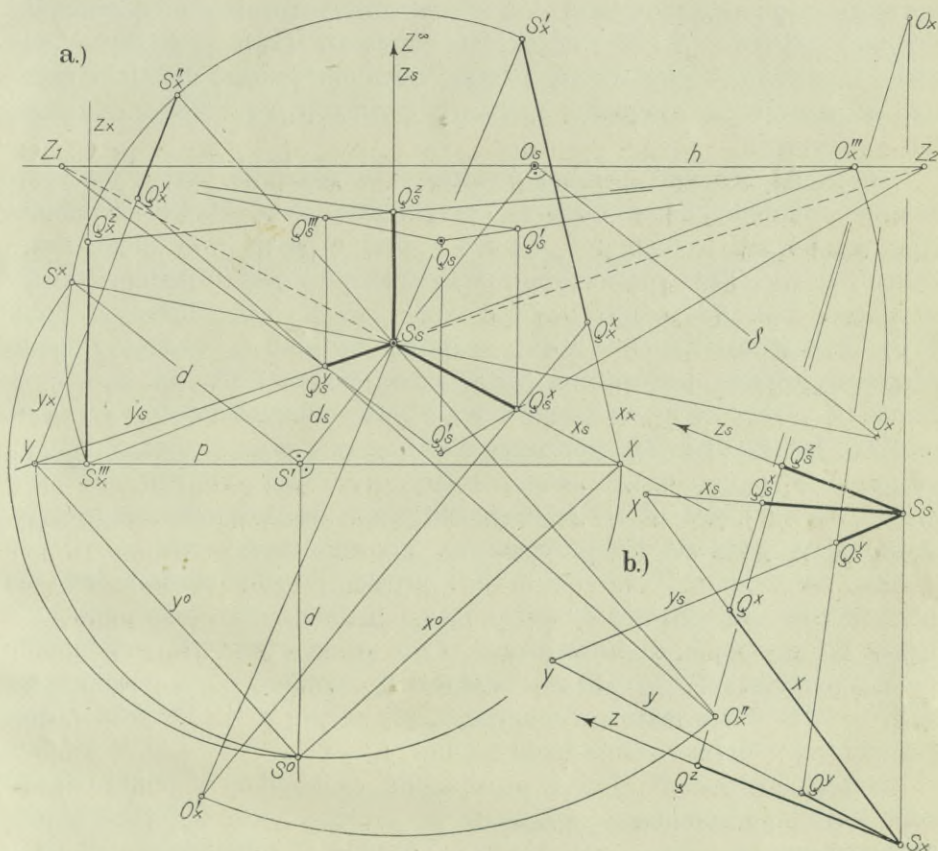
d) Jeżeli tło jest prostopadłe do płaszczyzny poziomej układu odniesienia, czyli jeśli perspektywa jest stosowana, to przemiana spółrzednych prostokątnych punktu na spółrzedne perspektywiczne odbywa się analogicznie, jak w ogólnym przykładzie perspektywy aksonometrycznej.

Wierzchołek  $Z$  trójkąta  $XYZ$  śladów aksonometrycznych jest w tym przypadku punktem niewłaściwym, leżącym w kierunku prostopadłym do boku  $XY$  tego trójkąta, a prostokątny rzut początku  $S$  układu odniesienia leży na boku  $XY$ , jako dowolnie przyjęty punkt  $S'$ . (Rys. 397 a).

Uważajmy dowolny punkt  $S_s$  za perspektywę punktu  $S$ , a przyjęty na promieniu  $S'S_s$  punkt  $O_s$  — za punkt główny. Zakreślmy na odcinku  $\overline{XY}$ , jako na średnicy, półkole i w punkcie  $S'$  wykreślimy prostopadłą do  $XY$ ,



która przetnie półkole w punkcie  $S^0$ . Połączmy ten punkt prostymi  $x^0$  i  $y^0$  z punktami  $X$  i  $Y$ . Prostokątny trójkąt  $XYS^0$  jest kładem na tło trójkąta, którego bokami są osi  $x$  i  $y$  układu odniesienia i krawędź  $XY$  rzutni poziomej z tłem. Odcinek  $S^0S' = d$  wyraża oddalenie początku układu odniesienia od tła. Perspektywą tego oddalenia jest odcinek  $S_sS' = d_s$ .



Rys. 397 a, b.

Wykonajmy kład na tło płaszczyzny  $\varepsilon$ , przechodzącej przez promień główny i początek  $S$  prostokątnego układu odniesienia. Płaszczyzna ta jest prostopadłą do tła i przecina go wzdłuż prostej, przechodzącej przez punkty  $S'$ ,  $S_s$  i  $O_s$ . Kład tej płaszczyzny sprowadzi na tło początek  $S$  układu odniesienia, promień główny i oko. Wykreślmy w punkcie  $S'$  odcinka  $d_s$  prostopadłą do niego, odmierzymy  $S'S^x = d$  i połączmy punkt  $S^x$  z punktem  $S_s$ . Trójkąt  $S_sS'S^x$  jest kładem trójkąta  $SS'S'$ , leżącego na płaszczyźnie  $\varepsilon$ . Prostopadła, wykreślona w punkcie  $O_s$  do prostej  $S'S_sO_s$ , przetnie prostą  $S^xS_s$  w punkcie  $O_x$ , który jest kładem

oka na tło. Przyprostokątna  $\overline{O_s O_x}$  trójkąta  $S_s O_s O_x$  jest głębokością tłową  $\delta$ . Z podobieństwa trójkątów  $S_s S' S^x$  i  $S_s O_s O_x$  wynika, że  $\delta = \frac{d \cdot \overline{O_s S_s}}{d_s}$ , t. zn. że głębokość tłowa, która, jak widzieliśmy, nie była przyjęta zgóry, ale wynikła z konstrukcji, zależy w prostym stosunku od oddalenia początku układu odniesienia od tła i od odległości perspektywy  $S_s$  tego początku od punktu głównego — a w odwrotnym stosunku od odcinka  $d_s$ . Przyjęcie punktów  $S_s$ ,  $S'$  i  $O_s$  określa głębokość tłową  $\delta$ ; gdyby  $\delta$  było dane, to wówczas moglibyśmy przyjąć dowolnie jeszcze dwa inne czynniki w powyższem równaniu, a czwarty pozostały wypadłby z rachunku lub konstrukcji.

Podziałki skróceń perspektywicznych w kierunku osi  $x$  i  $y$  znajdziemy podobnie, jak w ogólnym przykładzie perspektywy aksonometrycznej, kładąc trójkąty  $S S_s X$  i  $S S_s Y$  wraz z okiem  $O$  (z niemi związanem) na tło. Kład pierwszego z tych trójkątów jest trójkątem  $S_s X S'_x$ , w którym bok  $\overline{X S'_x} = \overline{X S^0}$ , a bok  $\overline{S_s S'_x} = d$ . Na przedłużonym boku  $S'_x S_s$ , w odległości  $\overline{S_s O'_x} = \overline{S_s O_x}$ , znajduje się kład  $O'_x$  oka  $O$ . Kładem drugiego trójkąta jest trójkąt  $S_s Y S''_y$ ; bok  $\overline{Y S''_y} = \overline{Y S^0}$ , bok  $\overline{S_s S''_y} = d$ . Punkt  $O''_y$ , leżący na przedłużeniu boku  $S''_y S_s$  w odległości  $\overline{S_s O''_y} = \overline{S_s O_y} = \overline{S_s O_x}$ , jest kładem oka. Podziałkę dla osi  $z$  otrzymamy, uwzględniając, że punkt  $Z$  trójkąta śladów aksonometrycznych jest punktem niewłaściwym, wobec czego oś  $z$  i jej perspektywa  $z_s$  są do siebie równoległe. Wykonajmy kład na tło płaszczyzny, przechodzącej przez oko i oś  $z$  układu odniesienia. Osią obrotu jest prosta  $z_s$ . Oko zakreśli koło na płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu i padnie na tło, jako punkt  $O'''_z$ , leżący na prostej  $h$ , poprowadzonej przez punkt główny  $O_s$  prostopadle do  $z_s$ , przyczem  $\overline{O'''_z S_s} = \overline{O_x S_s}$ . Wykreślmy promień  $\overline{O'''_z S_s}$ , odmierzymy  $\overline{S_s S'''_z} = \overline{S_s S^z}$  i z punktu  $S'''_z$  poprowadźmy prostą  $z_x // z_s$ . Prosta  $z_x$  jest kładem osi  $z$  układu odniesienia na tło.

Jeżeli odcinek  $\overline{S'_x Q'_x}$  jest prostokątną spórzędną  $x'$  punktu  $Q$ , to rzut  $\overline{S_s Q'_x}$  tego odcinka z punktu  $O'_x$  na prostą  $x_s$  jest spórzędną perspektywiczną  $x'_s$ . Jeżeli spórzędną  $y'$  punktu  $Q$  odmierzymy na prostej  $y_x$ , jako odcinek  $\overline{S''_y Q''_y}$ , i rzucimy punkt  $Q''_y$  z punktu  $O''_y$  na oś  $y_s$ , to odcinek  $\overline{S_s Q''_y}$  będzie spórzędną perspektywiczną  $y'_s$ . Spórzędną  $z' = \overline{S'''_z Q'_z}$ , odmierzoną na prostej  $z_x$ , rzucimy z punktu  $O'''_z$  na oś  $z_s$ , otrzymując spórzędną perspektywiczną  $z'_s = \overline{S_s Q'_z}$ .

Rys. 397 *b* przedstawia — podobnie, jak rys. 395 *b* i 396 *b* — zestawienie trójkątów  $S_s S'_x X$ ,  $S_s S''_y Y$  oraz prostych  $z_x // z_s$  wraz ze związanem z niemi okiem  $O_x$ . Stanowi on zatem podziałkę skróceń dla omówionego wyżej, szczególnego przypadku perspektywy aksonometrycznej.















BIBLIOTEKA GŁÓWNA

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-347802

PK 330/90 - 100 000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000231379