





Politechnika Krakowska  
Biblioteka Główna



100000196630



















DR KAZIMIERZ BARTEL  
PROF. SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE

# GEOMETRYA WYKREŚLNA



LWÓW MCMXIX

KSIĄŻNICA POLSKA TOW. NAUCZYCIELI SZKÓŁ  
WYŻSZYCH WE LWOWIE. WARSZAWA: GEBETHNER  
I WOLF. POZNAŃ: M. NIEMIERKIEWICZ



~~Czyt. 9t. B-59/16~~

II. 24904

KD 515(075.8)



CZCIONKAMI DRUKARNI „GRAFIA” WE LWOWIE.

Akc. Nr. D-3408 56.



Przeważna część tej książki — przeznaczonej dla początkujących — powstała w polu, podczas służby wojskowej, do której zmuszony byłem ogłoszoną dnia 1. sierpnia 1914 r. mobilizacją. Ostatnie arkusze pisałem w okresie walki o Lwów, w bardzo nielicznych godzinach wolnych od służby wojskowej.

Techniczne wykonanie rysunków zawdzięczam asystentom przy mojej katedrze pp. dr. Antoniemu Plamitzerowi i Mieczysławowi Teliczcze.

Niezwykle trudne warunki, wśród których powstała książka, są dostatecznym usprawiedliwieniem jej braków.

We Lwowie, dnia 24. grudnia 1918.

*Dr. Kazimierz Bartel*





## SPIS RZECZY

### WIADOMOŚCI WSTĘPNE

	Str.
1. Przedmiot geometrii wykreślnej . . . . .	1
2. Uwagi o rysunku geometrycznym . . . . .	2
3. Elementy przestrzeni. Oznaczenia . . . . .	6
4. Proste przecinające się i równoległe na płaszczyźnie . . . . .	6
5. } Proste skośne. Prosta i płaszczyzna . . . . .	8
6. }	
7. Płaszczyzny przecinające się i równoległe . . . . .	8
8. Pojęcie rzutu środkowego i równoległego . . . . .	10
9. O konstrukcjach geometrycznych . . . . .	11

### ROZDZIAŁ PIERWSZY

## GEOMETRYA WYKREŚLNA ELEMENTÓW PRZESTRZENI, UTWORÓW PŁASKICH I WIEŁOŚCIANÓW

### § 1. ZASADY RZUTÓW CECHOWANYCH

10. Określenie położenia punktu w przestrzeni . . . . .	14
11. Rzut cechowany prostą . . . . .	15
12. Podziałka rysunku . . . . .	16
13. Kład prosty . . . . .	17
14. Kąt nachylenia prostej z płaszczyzną rzutów. Ślad i nachylenie prostej	17
15. Podział odcinka . . . . .	18
16. Płaszczyzny równoległe i kład prostych na nie . . . . .	19
17. Stopniowanie i moduł prostej . . . . .	20
18. Dwie proste przecinające się . . . . .	22
19. Dwie proste skośne . . . . .	22
20. } Dwie proste równoległe. Zadanie . . . . .	23
21. }	
22. Wyznaczenie płaszczyzny . . . . .	23

## VI

	Str.
23. Prosta prostopadła do płaszczyzny . . . . .	25
24. Rzut kąta prostego . . . . .	26
25. Linia spadu płaszczyzny . . . . .	26
26. Zadania . . . . .	27
27. Przenikanie się dwóch płaszczyzn . . . . .	29
28. Punkt przebicia się prostej z płaszczyzną . . . . .	31
29. Zadania . . . . .	31
30. Płaszczyzny równoległe . . . . .	32
31. Zadania . . . . .	33
32. Prosta prostopadła do płaszczyzny . . . . .	34
33. Zadania . . . . .	35

## § 2. ZASADY RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA DWIE PŁASZCZYZNY

34. Rzuty punktów . . . . .	36
35. Różne położenia punktu w przestrzeni . . . . .	39
36. Rzuty i ślady prostej na dwie płaszczyzny . . . . .	42
37. Dwie proste . . . . .	46
38. O płaszczyźnie i jej śladach . . . . .	47
39. } Kład odcinka i jego podział. Zadanie . . . . .	50
40. }	

## § 3. ZADANIA ODNOSZĄCE SIĘ DO WZAJEMNYCH POŁOŻEŃ PUNKTÓW, PROSTYCH I PŁASZCZYZN

41. Proste i punkty na płaszczyźnie . . . . .	52
42. Płaszczyzny dwusieczne . . . . .	53
43. Proste i punkty na płaszczyznach, wyznaczonych śladami . . . . .	54
44. Zadania . . . . .	56
45. Ćwiczenia . . . . .	58
46. O płaszczyznach, przechodzących przez proste i punkty . . . . .	60
47. } Zadania. Ćwiczenie . . . . .	62
48. }	
49. O płaszczyznach przecinających się i równoległych . . . . .	63
50. Wyznaczenie punktu przebicia się prostej z płaszczyzną . . . . .	68
51. Dalsze przykłady wyznaczania krawędzi dwóch płaszczyzn . . . . .	70
52. Zadania . . . . .	73
53. O punktach „widocznych“ i „niewidocznych“ . . . . .	73
54. Zadania . . . . .	75
55. Ćwiczenia . . . . .	77
56. Proste równoległe do płaszczyzny . . . . .	78
57. Zadania . . . . .	79
58. Ćwiczenia . . . . .	80
59. Proste prostopadłe. Prosta prostopadła do płaszczyzny . . . . .	80
60. Płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny . . . . .	83
61. Zadania . . . . .	83
62. Ćwiczenia . . . . .	87



## § 4. WPROWADZENIE TRZECIEJ PŁASZCZYZNY RZUTÓW

63.	Rzutnia boczna. Rzuty boczne punktów . . . . .	88
64.	Rzuty i ślady boczne prostej . . . . .	93
65.	Ślady boczne płaszczyzn . . . . .	96
66.	Przykłady użycia rzutni bocznej do rozwiązania zadań . . . . .	98
67.	Ćwiczenia . . . . .	100

## § 5. OBROTY, KŁADY I ICH ZASTOSOWANIA

68. } 69. }	O metodzie obrotu. Obroty punktu . . . . .	104
70.	Obroty prostej . . . . .	106
71.	Obrót płaszczyzny . . . . .	107
72.	Kład płaszczyzny rzucającej . . . . .	108
73.	Kąty nachylenia prostej z płaszczyznami rzutów . . . . .	109
74.	Kąty nachylenia płaszczyzny z rzutniami . . . . .	111
75.	Kłady płaszczyzn dowolnie położonych w przestrzeni . . . . .	114
76.	Rzut na dowolną płaszczyznę . . . . .	117
77.	Podnoszenie płaszczyzn . . . . .	118
78.	Zadania . . . . .	120
79.	Kąt nachylenia dwóch prostych . . . . .	123
80.	Ćwiczenia . . . . .	124
81.	Kąt nachylenia prostej z płaszczyzną . . . . .	125
82.	Zadania . . . . .	127
83.	Ćwiczenia . . . . .	128
84.	Kąt nachylenia dwóch płaszczyzn . . . . .	128
85.	Zadania . . . . .	130
86.	Ćwiczenia . . . . .	135
87.	Rzuty wielościanów . . . . .	135
88.	Przykłady . . . . .	139
89.	Rzuty wielościanów umiarowych . . . . .	141

## § 6. RZUTY UKOŚNE

90.	Rzut ukośny punktu . . . . .	148
91.	O stosunkach skróceń . . . . .	150
92.	Zadania . . . . .	151

## § 7. POWINOWACTWO ŚRODKOWE. ELIPSA.

93.	Rzut ukośny układu płaskiego . . . . .	152
94.	Powinowactwo dwóch układów płaskich, złączonych na jednej płaszczyźnie . . . . .	154
95.	Rzuty prostokątne i ukośne a powinowactwo środkowe . . . . .	158
96.	Rzut ukośny koła. Elipsa . . . . .	160
97.	Konstrukcyje elips z danych średnic sprzężonych, względnie osi . . . . .	163
98.	Styczne do elipsy . . . . .	168
99.	Rzuty prostokątne koła . . . . .	170
100.	Elipsa jako krzywa powinowata z elipsą . . . . .	173

## § 8. PRZEKROJE I PRZENIKANIA WIEŁOŚCIANÓW

101.	Płaskie przekroje wielościanów . . . . .	173
102.	Przekroje płaskie graniastosłupów . . . . .	177
103.	Zadanie . . . . .	181
104.	Płaskie przekroje ostrosłupów . . . . .	183
105.	Zadanie . . . . .	185
106.	Punkty przebicia się prostej z wielościanem . . . . .	186
107.	Rozwinięcia wielościanów . . . . .	188
108.	Przenikanie się wielościanów w ogólności . . . . .	190
109.	Przenikanie się ostrosłupów . . . . .	191
110.	Przenikanie się graniastosłupów . . . . .	200
111.	Przenikanie się ostrosłupów z graniastosłupami . . . . .	205

## § 9. KOLINEACYA ŚRODKOWA UKŁADÓW PŁASKICH

112.	Rzut środkowy . . . . .	209
113.	Wyznaczenie położenia płaszczyzny metodą rzutu środkowego . . . . .	211
114.	Kolineacya środkowa . . . . .	212
115.	Rzuty układów środkowo kolineacyjnych . . . . .	213
116.	Przykłady . . . . .	215

## ROZDZIAŁ DRUGI

## LINIE KRZYWE I POWIERZCHNIE

## § 10. KRZYWE STOŻKOWE

117.	Pęki i szeregi jednokreślne . . . . .	219
118.	Pęki jednokreślne w kole . . . . .	222
119.	Twierdzenie Pascala . . . . .	222
120.	Kolineacya środkowa koła . . . . .	224
121.	Twierdzenie Pascala w zastosowaniu do elipsy, hiperboli i paraboli . . . . .	230
122.	Konstrukcyja stycznych do elipsy . . . . .	236
123.	O kolineacyi i powinowactwie krzywych stożkowych . . . . .	238

## § 11. O KRZYWYCH I POWIERZCHNIACH W OGÓLNOŚCI

124.	Określenie i podział linii krzywych . . . . .	239
125.	Określenie i podział powierzchni . . . . .	239
126.	O płaszczyznach stycznych do powierzchni . . . . .	240

## § 12. POWIERZCHNIE STOŻKOWE I WALCOWE

127.	Tworzenie i podział powierzchni stożkowych i walcowych . . . . .	241
128.	Płaszczyzny styczne do stożków i walców . . . . .	242
129.	Podział i rzuty powierzchni walcowych rzędu drugiego . . . . .	243
130.	O przekrojach walców rzędu drugiego w ogólności . . . . .	245
131.	Przykłady przekrojów walców . . . . .	247
132.	O punktach przebicia się prostej z walcem . . . . .	252



	Str.
133. Rzuty i podział powierzchni stożkowych rzędu drugiego . . .	254
134. Przekroje stożków płaszczyznami . . . . .	256
135. Przekroje powierzchni stożkowych wzdłuż dwóch tworzących . .	258
136. Punkty przebicia się prostej z powierzchnią stożkową . . . .	259
137. Przykłady płaszczyzn stycznych do powierzchni stożkowych i wal- cowych . . . . .	260
138. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdłuż elips . .	261
139. Kołowe przekroje stożka . . . . .	268
140. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdłuż hiperbol .	269
141. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdłuż parabol .	273
142. O rozwijaniu powierzchni stożkowych i walcowych na płasz- czyźnie . . . . .	275
143. O linii śrubowej . . . . .	278

### § 13. POWIERZCHNIE OBROTOWE

144. Tworzenie i podział powierzchni obrotowych . . . . .	279
145. Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowych . . . . .	282
146. O zarysach powierzchni obrotowych . . . . .	284
147. Przedstawienie powierzchni obrotowych w rzutach prostokątnych .	285
148. O kulach wpisanych w stożek i walec obrotowy . . . . .	286
149. Zadania . . . . .	288
150. Punkt na powierzchni obrotowej . . . . .	291
151. Płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej w danym punkcie .	292
152. Zadania . . . . .	293
153. Przekroje powierzchni obrotowych płaszczyznami . . . . .	297
154. Przekroje kuli . . . . .	301
155. Przykłady przekrojów walców i stożków obrotowych płaszczyznami .	303
156. O punktach przebicia się prostych z powierzchniami obrotowymi .	316
157. Płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, przechodzące przez dany punkt . . . . .	317
158. Płaszczyzny styczne do walca obrotowego, przechodzące przez dany punkt . . . . .	318
159. Płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, równoległe do danej prostej . . . . .	319
160. Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej, a równoległe do danej płaszczyzny $\alpha$ . . . . .	321
161. Wyznaczenie linii styczności walca, o tworzących równoległych do danego kierunku, z powierzchnią obrotową . . . . .	323
162. Zadanie . . . . .	327
163. O rzutach powierzchni obrotowych, których osi nie są prostopadłe do płaszczyzn rzutów . . . . .	327
164. O stożkach opisanych na powierzchniach obrotowych . . . . .	332
165. Zadania . . . . .	337

### § 14. POWIERZCHNIE TOPOGRAFICZNE

166. Plan warstwiczny . . . . .	340
167. Przekrój powierzchni topograficznej płaszczyzną rzucającą . .	342

	Str.
168. Uzupelnienie planu warstwicowego . . . . .	343
169. Przekrój powierzchni topograficznej dowolną płaszczyzną . . . .	343
170. Linie największych spadów powierzchni topograficznej . . . . .	344
171. Zadanie . . . . .	345

### § 15. PRZENIKANIE SIĘ POWIERZCHNI

172. O przenikaniu się wielościanów z powierzchniami . . . . .	346
173. O przenikaniu się powierzchni . . . . .	351
174. Przykłady przenikania się powierzchni . . . . .	352

## ROZDZIAŁ TRZECI

### O WYZNACZANIU CIENI

#### § 16. CIENIE PUNKTÓW, PROSTYCH, WIELOKĄTÓW I KOŁA

175. Uwagi wstępne . . . . .	361
176. Cień punktu . . . . .	361
177. Cień odcinka . . . . .	362
178. Cień koła . . . . .	364

#### § 17. CIENIE WIELOŚCIANÓW I POWIERZCHNI

179. Uwagi ogólne . . . . .	366
180. Cienie ostrosłupów i stożków . . . . .	368
181. Cienie graniastosłupów i walców . . . . .	373
182. Cienie punktów i linii na wielościany i powierzchnie . . . . .	374
183. O cieniach zespołów geometrycznych . . . . .	379
184. Ćwiczenia . . . . .	387
185. Cienie kuli . . . . .	387
186. Cień prostej na kulę . . . . .	390
187. Przykłady . . . . .	391
188. Cień powierzchni obrotowej . . . . .	391

## ROZDZIAŁ CZWARTY

### PERSPEKTYWA ŚRODKOWA

#### § 18. PERSPEKTYWA ELEMENTÓW ZASADNICZYCH

189. Uwagi ogólne . . . . .	394
190. Perspektywa prostych, leżących na płaszczyźnie podstawowej . . . .	395
191. Punkty i koło oddalenia . . . . .	397
192. Proste prostopadłe do tła . . . . .	398
193. Zadania . . . . .	398
194. Proste prostopadłe do płaszczyzny podstawy . . . . .	400
195. Proste, dowolnie położone w przestrzeni . . . . .	402
196. Perspektywa jako metoda pośrednia . . . . .	403

Uwaga : Rysunki<sup>1</sup> których liczby zaopatrzone są w gwiazdki \* ujęte są w tablice.



## DOSTRZEŻONE OMYŁKI W TEKŚCIE

Strona:		Zamiast:	Czytaj:
11.	7. wiersz od dołu	w wypadkach	w wypadkach
29.	15. " " góry	$A, B, C, D, E.$	$A B C D E.$
31.	7. " " "	$\varepsilon' \text{ i } \varphi.$	$\varepsilon \text{ i } \varphi.$
31.	19. " " "	$P'$	$P (P')$
73.	6. " " "	$(b' b')$	$(b' b'')$
78.	9. " " dołu	$(p_1' p_1')$	$(p_1' p_1'')$
79.	10. " " góry	$(p' p')$	$(p' p'')$
80.	1. " " dołu	$A'$	$M'$
80.	1. " " "	$A''$	$M''$
90.	8. " " góry	Rys. 176	Rys. 176*
94.	12. " " dołu	pionowy	boczny
95.	2. " " "	$z$	$- y$
96.	7. " " góry	$+ x$	$- y$
114.	1. " " "	$A'$	$A$
117.	10. " " "	prostoadlej	prostopadlej
133.	5. " " dołu	Rys. 225.	Rys. 255.
142.	1. " " "	$A B^0 C D^0$	$A B^0 C^0 D^0$
144.	1. " " "	przeciwprostokątną	drugą przyprostokątną
168.	21. " " "	stycznej	stycznej do
187.	18. " " "	$\varphi \equiv (m, l)$	$\varphi \equiv (m, p)$
269.	20. " " "	$(t' t'')$	$(t' t''')$
300.	7. " " góry	$H_0 (H_0' H_0'')$	$H_0 (H_0 H_0'')$
300.	14. " " "	$2 (2' 2')$	$2 (2' 2'')$
310.	8. " " "	$b_0$	$b^0$
347.	3. " " "	$G_0$	$G^0$
359.	3. " " dołu	$\pi \equiv (t, n)$	$\pi \equiv (t, u)$



## DOSTRZEŻONE OMYŁKI W RYSUNKACH

Str.	13.	Na Rys.	20.	oznaczyć przez $M$ punkt przecięcia się prostych $q_1$ i $m$ .
"	55.	"	"	101 b. zamiast $V_n$ ma być $V_n^z$ .
"	60.	"	"	113 b. prostą $V_a H_a^z$ oznaczyć należy przez $a''$ .
"	89.	"	"	176. ma być Rys. 176*.
"	109.	"	"	218*. kąt ( $H^0_p V_p H_p^x$ ) oznaczyć należy literą $\beta$ .
"	165.	"	"	290. elipsę oznaczyć należy literą $k$ .
"	211.	"	"	341. zamiast $m$ ma być $m_1$ .
"	262.	"	"	403. " $1_2$ " " $1_2'$ .
"	269.	"	"	" $1'$ i $2'$ " " $1$ i $2$ .
"	323.	"	"	471. oznaczyć należy prostą $H A_1'$ przez $k_1'$ .

---

## WIADOMOŚCI WSTĘPNE

**1. Przedmiot geometrii wykreslnej.** Podobnie jak mowa lub pismo, jest wszelki rysunek sposobem porozumiewawczym, służącym celom nauki, techniki lub sztuki.

Prawa rządzące mową lub pismem są przedmiotem nauki gramatyki, względnie ortografii; niezmiennie, a więc w dziedzinie nauk ścisłych leżące prawa, którym podlega każdy rysunek, są przedmiotem geometrii wykreslnej. Geometria wykreslna jest więc, nie ulegająca zmianom, gramatyką wszelkiego rysunku.

Odtworzenie przedmiotu przedstawionego rysunkiem wymaga współdziałania tej władzy naszego umysłu, którą określamy mianem *zmysłu przestrzeni*. Zdolność wyobrażania sobie ściśle określonych i określone położenie w przestrzeni zajmujących utworów przestrzennych, w najogólniejszym ich rozumieniu, nie jest właściwą w równym stopniu każdemu umysłowi. Są ludzie, którzy patrzą a nie widzą, w podwójnym znaczeniu tego wyrazu: nie umieją spostrzegać i nie posiadają zdolności należytego zapamiętania, względnie odtworzenia tego na co patrzą. Zdolność spostrzegania da się rozbudzić i wykształcić, podobnie jak i pamięć przestrzeni, a nauką, która pośrednio zadanie to spełnia, jest geometria wykreslna.

Geometria wykreslna podaje właściwe sposoby notowania, kreślenia tego, co spostrzegamy albo wyobrażamy sobie w przestrzeni, uczy wykresy te odczytywać, badać ich własności i wnosić na podstawie otrzymanych wyników o własnościach utworów przedstawionych rysunkiem. Umiejętność czytania rysunków polega przede wszystkim na zdolności wywoływania wyobrażeń, ćwiczenie się w tem czytaniu jest ćwiczeniem zmysłu przestrzeni.



A wreszcie, jak zapomocą praw gramatyki sprawdzamy poprawność z jaką wyraziliśmy myśl swoją pismem, tak geometryą wykreślną sprawdzamy poprawność każdego rysunku, który jest również jedynie wyrazem naszych wyobrażeń i pojęć.

**2. Uwagi o rysunku geometrycznym.** Znajomość geometrii wykreślnej łączy się ściśle z umiejętnością wykonania rysunku, który myśl geometryczną wyraża. Od najprostszych zadań poczynsz, winną być rysunkowi geometrycznemu poświęcona szczególna uwaga i stała dążność osiągnięcia jak największej w nim biegłości. Rysunek winien być zawsze dokładny i najstaranniej wykonany. W wielkim stopniu zależy osiągnięta dokładność rysunku od przyborów rysunkowych, które jednak ani w części nie zastąpią wprawy, nabytej ćwiczeniami.

*Ołówek* do rysunku musi być dostatecznie twardy i zawsze ostro, stożkowo zacięty; użycie ołówków w rodzaju „Penkala“ jest tu niemożliwe. Do zacinania ołówków używać należy scyzoryka; wszelkiego rodzaju maszynki nie odpowiadają celowi. Koniec ołówka musi być stale ostry jak rylec, co osiągnąć się da w doskonały, łatwy i szybki sposób tylko zapomocą małego, drobno siekanego, płaskiego pilnika; papier piaskowy, czy szklany, a także i kamień nie zastąpią pilnika. Używanie zbyt twardych ołówków z dwóch względów nie jest wskazane: Przedewszystkiem względ na oczy, które cierpią bardzo zmuszone do dłuższego, wytężającego wpatrywania się w zbyt cienkie, szarej barwy linie, a po drugie, niemożność usunięcia linii wykreślonych, albo raczej wyciśniętych, zbyt twardym ołówkiem.

*Papier* na rysunki może być bardzo rozmaity. Na ćwiczenia wykonywane tylko ołówkiem nadaje się zwykły papier do pisania, wycieranie linii jest tu jednak tylko wówczas możliwe, gdy do rysowania użyto ołówka średniej twardości, więc np. „Polonia“ Majewskiego Nr. *HB*. Początkujący, który używać będzie częściej gumy dla wytarcia swych nieudolnych prób rysunkowych, nie może posługiwać się papierem pisarskim i musi także do rysunków wykonanych tylko ołówkiem, użyć papieru rysunkowego. Jakość tych ostatnich, bardzo rozmaita, zależy od ceny i pochodzenia. Rysownik biegły zadowolony się papierem cienkim, dobrze gumowanym o powierzchni gładkiej; początkujący użyje z większą korzyścią papieru grubszego, dobrze gumowanego jednak o powierzchni mniej gładkiej, raczej



szorstkiej. Papier taki znosi bardzo cierpliwie zcieranie linii wykreślonych nie tylko ołówkiem ale i tuszem.

*Przybornik.* Zespół cyrkli i przyrządów do kreślenia tuszem t. zw. grafionów, stanowi przybornik. W handlu występują przyborniki od najtańszych i mało dokładnych aż do kosztownych szkatuł, wykonanych z nadzwyczajną dokładnością. Przybornik zawierać winien w każdym razie: cyrkiel z wkładką na ołówek i grafion, cyrkiel do kreślenia maleńkich kół t. zw. zerownik i grafion. Nóżki cyrkla powinny dawać się nastawiać prostopadle do płaszczyzny papieru. Grafion służący do kreślenia, a raczej pociągania, tuszem linii narysowanych ołówkiem, winien być zawsze dostatecznie ostry i po każdorazowym użyciu starannie oczyszczony, jednak nie papierem lub bibułą, tylko cienką szmatką, która należy do przyborów rysunkowych.

*Kierownica,* wykonana z drzewa nie powinna być krótszą od deski rysunkowej, a głowa jej musi być dobrze przymocowaną do lineatu. Używania kierownic, w których głowa nastawiać się da względem lineatu pod rozmaitymi kątami, zalecić nie można.

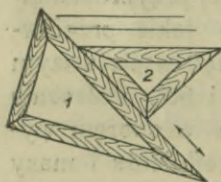
*Trójkątów,* które wykonywane bywają z drzewa, masy papierowej, celuloиду, twardej gumy, metalu a także i szkła, potrzebuje rysownik dwóch: prostokątny trójkąt równoramienny i prostokątny trójkąt, w którym stosunek jednej przyprostokątnej do przeciwprostokątnej wynosi 1:2. Kąty jakie przeciwprostokątna zawiera z przyprostokątnymi są więc w pierwszym trójkącie równe  $45^{\circ}$ , w drugim wynoszą  $30^{\circ}$  i  $60^{\circ}$ . Polecenia godne są przedewszystkiem trójkąty z drzewa w dobrym wykonaniu, a potem dopiero z twardej gumy, celuloиду i masy papierowej. Metal brudzi zbyt papier, szkło jest zbyt kruchym materiałem, chociaż ze wszystkich wymienianych da się najczęściej utrzymać. Trójkąty z drzewa odczyszczać można tylko gumą lub chlebem. Do kreślenia tuszem nadają się najlepiej trójkąty z drzewa, przy użyciu innych następuje łatwo zalewanie linii.

*Deska rysunkowa* służąca do przypinania zapomocą pluskiewek, względnie naklejania papieru, powinna być wykonana z zupełnie suchego drzewa lipowego, topolowego, jaworowego lub sosnowego, ujętego w dwie łaty z drzewa twardego. Sciany czołowe tych łat muszą być najdokładniej obrobione, po nich bowiem posuwa się kierownica.

*Guma do wycierania* śladów ołówka musi być miękka. Wytarcie linii wykreślonych tuszem osiągnąć się da tylko na papierze nie najgorszego gatunku, a na papierach dobrych jest zawsze możliwe, przy pomocy ostrej gumy i ewentualnie bardzo ostrego scyzoryka. Użycie scyzoryka wymaga wprawy i doświadczenia, początkujący posługiwać się nim nie powinien. Usunięcie tuszem błędnie wykreślonych linii, względnie większych plam z tuszu, łączy się z umiejętnością rysowania. Przy pewnej wprawie, a zawsze przy znacznej cierpliwości, wytarcie choćby całej siatki linii, lub dowolnie wielkich plam, bez pozostawienia znaczniejszych śladów, jest zawsze możliwe.

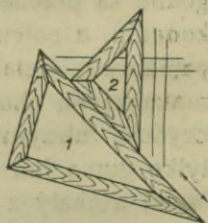
*Tusz* t. j. czarna farba służąca do pociągania linii wykreślonych ołówkiem, występuje w handlu w dwojakiej formie: płynny, a więc gotowy do użytku i stały w laseczkach, który rysownik przez rozłarcie z wodą na szkłe matowem lub w miseczce przygotowuje do użytku. Pierwszy, przy małej wprawie w posługiwaniu się grafionem „zalewa“, t. zn. spływa zbyt gwałtownie, zwłaszcza przy kreśleniu grubych linii. Tusz tarty wady tej nie posiada i jest zawsze znacznie czarniejszy.

Jeżeli rysunek wykonywamy na małych kartkach papieru, względnie w notatce, a więc bez posługiwania się deską rysunkową i kierownicą, to linie równoległe i prostopadłe do nich kreślimy przy pomocy dwóch trójkątów. Jeżeli trójkąt 1, (Rys. 1),



Rys. 1.

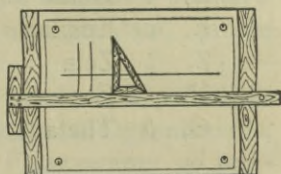
przytrzymamy lewą ręką, zaś trójkąt 2 oparty stałe o 1 posuwać będziemy prawą ręką w kierunkach oznaczonych strzałkami, to proste kreślone wzdłuż przeciwprostokątnej trójkąta 2 są do siebie równoległe. Przez obrót trójkąta 2, (Rys. 2.), przy zachowaniu położenia trójkąta 1 uzyskujemy możliwość kreślenia prostych prostopadłych do poprzednich. Jeżeli rysujemy na desce, to kierownica, której głowa posuwać się musi zawsze po lewej krawędzi deski, służy do rysowania prostych poziomych, użycie trójkąta umożliwi kreślenie prostych prostopadłych do pierwszych lub nachylonych do nich pod  $\approx 30^\circ, 45^\circ$  i  $60^\circ$  (Rys. 3.). Aby rysunek geometryczny, którego konstrukcja jest



Rys. 2.



niejednokrotnie zawiłą, uczynić przejrzystym i łatwo czytelnym, nadajemy liniom odpowiednie grubości. W szczególności odróżniamy linie pomocnicze, prowadzące do wyniku, od innych. W zadaniach początkowych wyróżniać będziemy trojakiemu rodzaju linie: dane, pomocnicze i wynikowe. Pierwsze wykreślać będziemy zawsze pełne, średniej grubości, drugie tak cienko, jak tylko pozwala grafion, a to albo jako linie ciągłe, albo jako złożone z punktów i kresek. Linie wynikowe kreślimy jako ciągłe, czyli jak mówimy pełne i znacznie od danych grubsze. W zadaniach odnoszących się do utworów przestrzennych, więc wielościanów i powierzchni, używać będziemy również trojakiemu rodzaju linii, jednak często w innym ich znaczeniu. Linie pomocnicze pozostaną jak poprzednio, liniami najgrubszymi wykreślamy nie tylko wynik, ale także i obrazy danego utworu przestrzennego, jeśli linie wynikowe leżą na tych utworach. Przykład najlepiej sprawę wyjaśni: zadanie wymaga wyznaczenia przecięcia kuli płaszczyzną. Obrazy kuli wraz z wyznaczonym przekrojem wykreślimy grubo, obraz płaszczyzny, która jest dana, średnią grubością, a resztę linii jako linie pomocnicze bardzo cienko i w rozmaity sposób poprzerywane. Linie pomocnicze wykreślać można tuszem barwnym, jednak tylko barwy niebieska i sepia są polecenia godne.



Rys. 3.

Ale najlepiej pod względem doboru linii wykonany rysunek geometryczny nie jest zupełny, dopóki nie jest opisany, t. j. dopóki punkty i linie nie otrzymają oznaczeń. Staranne opisanie rysunku należy do ważnych zadań rysownika, gdyż dopiero opisanie rysunku czyni go czytelnym.

Do opisywania używać należy pisma według niżej podanego wzoru (Rys. 4.), pismo t. zw. rondowe uważamy dla rysunków geometrycznych za nieodpowiednie.

*a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z*

*A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z*

*1 2 3 4 5 6 7 8 9 0*

Rys. 4.

## ALFABET GRECKI

A, α	Alpha	I, ι	Iota	Ρ, ρ	Rho
B, β	Beta	Κ, κ	Kappa	Σ, σ	Sigma
Γ, γ	Gamma	Λ, λ	Lambda	Τ, τ	Tau
Δ, δ	Delta	Μ, μ	My	Υ, υ	Ypsilon
Ε, ε	Epsilon	Ν, ν	Ny	Φ, φ	Phi
Ζ, ζ	Zeta	Ξ, ξ	Xi	Χ, χ	Chi
Η, η	Eta	Ο, ο	Omikron	Ψ, ψ	Psi
Θ, θ	Theta	Π, π	Pi	Ω, ω	Omega

**3. Elementy przestrzeni. Oznaczenia.** Przedmiotem rozważań geometrycznych wogóle jest przestrzeń, a w szczególności utwory geometryczne, powstające wskutek rozważań geometrycznych.

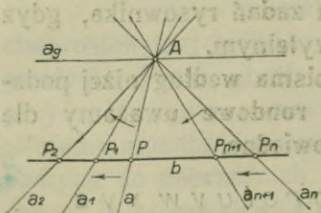
Najprostszymi utworami geometrycznymi, stanowiącymi punkt wyjścia dla naszych rozumowań, utworami zasadniczymi, które też zwiemy elementami przestrzeni są: punkt, linia prosta czyli krótko prosta i płaszczyzna. Dla jednostajności wykładu oznaczać będziemy stale: punkty dużymi literami alfabetu łacińskiego np.  $A, B, C$  w. względnie liczbami arabskimi, proste małymi literami tegoż alfabetu ( $a, b, c \dots$ ), płaszczyzny małymi literami alfabetu greckiego ( $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ).

**4. Proste przecinające się i równoległe na płaszczyźnie.**

Dwie proste posiadać mogą jeden punkt wspólny, czyli jak mówimy, przecinać się. Wtedy istnieje jedna płaszczyzna, prostemi temi wyznaczona, czyli przez owe proste „przechodząca“, albo jak też wyrażać się będziemy, na prostych owych leżąca.

Weźmy pod uwagę dwie proste  $a$  i  $b$  przecinające się w punkcie  $P$ , (Rys. 5.), a na prostej  $a$  punkt  $A$ . Jeżeli prosta  $a$  obraca się około punktu  $A$ , w kierunku wskazówki zegara, przyjmując położenia  $a_1, a_2, \dots, a_g, \dots, a_n$ , to punkt  $P$  posuwa się po prostej  $b$  od ręki prawej ku lewej,

oddalając się od pierwszego uważanego położenia  $P$  i przyjmując położenia  $P_1, P_2 \dots$  Przez dalszy obrót prostej  $a$ , ruchomy punkt  $P$ , znajdzie się po prawej stronie punktu  $P$ , zbliżając



Rys. 5.

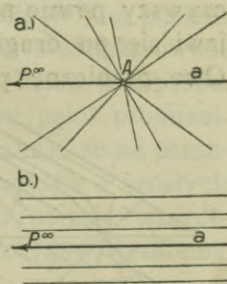


się do niego od ręki prawej ku lewej. Najwidoczniej prosta  $a$ , obracając się około punktu  $A$  i przecinając prostą  $b$  w punktach coraz dalej leżących od punktu  $P$ , osiągnęła pewne położenie graniczne  $a_g$ , po przekroczeniu którego, jej punkty przecięcia się  $P_n, P_{n+1}, \dots$  z prostą  $b$ , poczęły zbliżać się do punktu  $P$ . Owo graniczne położenie prostej  $a$  względem prostej  $b$  nazywamy położeniem równoległym, a prostą  $a_g$  prostą równoległą do  $b$ .

O punkcie przecięcia się prostej  $a$  z prostą  $b$  w położeniu granicznym mówimy, że leży w odległości nieograniczonej, albo nieskończenie dalekiej na prostej  $b$  i nazywamy go punktem niewłaściwym, w odróżnieniu od punktów właściwych, leżących w odległości skończonej na prostej. Dla oznaczenia punktów niewłaściwych używamy znaku  $\infty$ , pisząc go jako wskaźnik więc np.  $P_\infty$ , a położenie punktu niewłaściwego na płaszczyźnie oznaczamy linią opatrzoną strzałką czyli t. zw. kierunkiem.

Z powyższego widzimy, że przez punkt  $A$  przechodzi jedna prosta  $a_g$  równoległa do danej prostej  $b$  i, że nawzajem prosta  $b$  jest równoległą do prostej  $a_g$ , gdyż punkt niewłaściwy  $P_\infty$  jest punktem wspólnym obu prostych  $a_g$  i  $b$ . Dwie proste równoległe stanowią tedy szczególny przykład prostych przecinających się, gdzie punkt wspólny leży w odległości nieograniczonej dalekiej, czyli jest punktem niewłaściwym. Przeprowadzone rozumowanie poucza nas dalej, że prostą uważać możemy za zbiór (mnogość) nieograniczonej ilości, następujących po sobie, w sposób ciągły, punktów właściwych i jednego punktu niewłaściwego.

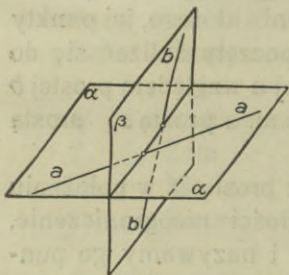
Przez każdy punkt  $A$ , prostej  $a$ , przechodzi dowolna, nieograniczona ilość prostych, których mnogość, wraz z prostą  $a$  nazywamy pękiem prostych, a punkt  $A$  wierzchołkiem tego pęku (Rys. 6a.). Przez punkt niewłaściwy  $P_\infty$  prostej  $a$  przechodzi również pęk prostych, który nazywamy pękiem prostych równoległych (Rys. 6b.).



Rys. 6.

Nieograniczona ilość punktów linii prostej stanowi t. zw. szereg punktów, dla którego prosta ta jest podstawą.

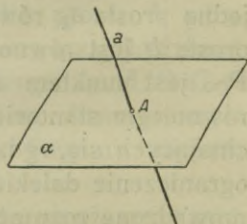
**5. Proste skośne.** Jeżeli dwie proste  $a$  i  $b$  znajdujące się w przestrzeni, nie posiadają punktu wspólnego ani właściwego ani niewłaściwego — to położenie ich określamy jako skośne lub wchrowate (Rys. 7).



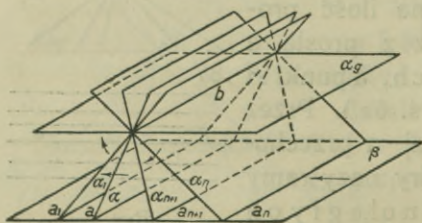
Rys. 7.

**6. Prosta i płaszczyzna.** Prosta posiadać może jeden punkt wspólny, właściwy z płaszczyzną, a wtedy ją przebija (Rys. 8.), albo jeden punkt wspólny leżący w odległości nieograniczonej dalej, czyli punkt niewłaściwy. Wtedy mówimy, że prosta jest do płaszczyzny równoległa.

**7. Płaszczyzny przecinające się i równoległe.** Przyjmijmy dwie płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  przecinające się w prostej  $a$  (Rys. 9.), a na płaszczyźnie  $\alpha$  dowolną prostą  $b$  równoległą do prostej  $a$ . Niechaj położenie prostej  $b$ , w odniesieniu do płaszczyzny  $\beta$  będzie niezmiennie i niechaj płaszczyzna  $\alpha$  obraca się około tej prostej jako osi i to np. w kierunku wskazówki zegara, przyjmując położenia  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_g, \alpha_n \dots$ . Prosta  $a$  posuwać się będzie na płaszczyźnie  $\beta$  od ręki prawej ku lewej, oddalając się od pierwszego uważanego położenia  $a$ , przyjmując położenie  $a_1, a_2 \dots$  aż przekroczywszy pewne położenie graniczne  $a_g$  pojawi się po drugiej stronie prostej  $a$ , zbliżając się do niej. Owo graniczne położenie płaszczyzny  $\alpha$ , nazywamy położeniem równoległym,



Rys. 8.



Rys. 9.

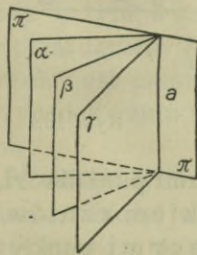
z blizną i nazywamy ją prostą niewłaściwą płaszczyzn  $\alpha_g$  i  $\beta$ . Podobnie, gdy w miejsce prostej  $b$  przyjmiemy

położenie równoległym, a płaszczyznę  $\alpha$ , która osiągnęła owo położenie, płaszczyznę równoległą do płaszczyzny  $\beta$ . O prostej przecięcia się płaszczyzn  $\alpha_g$  i  $\beta$  w położeniu granicznym mówimy, że leży w odległości nieograniczonej, albo nieskoń-

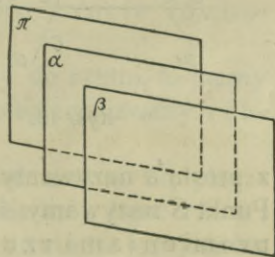


dowolny punkt  $B$ , dojdziemy do tegoż samego rezultatu i stwierdzimy, że przez punkt ten przechodzi dowolna ilość płaszczyzn przecinających płaszczyznę  $\beta$ , ale jedna tylko płaszczyzna do niej równoległa. Płaszczyzny  $\alpha_g$  i  $\beta$  są w tym przypadku wzajemnie równoległe, a prosta niewłaściwa  $a_\infty$  jest prostą wspólną obu płaszczyzn. Podobnie jak przy prostych równoległych — stanowią dwie płaszczyzny równoległe szczególny przykład płaszczyzn przecinających się, przy czem prosta przecięcia się leży w odległości nieograniczenie dalekiej i jest prostą niewłaściwą.

Przez każdą prostą  $a$  (Rys. 10.) na płaszczyźnie  $\pi$  przechodzi dowolna, nieograniczona ilość płaszczyzn, których zbiór wraz z płaszczyzną  $\pi$  tworzy t. zw. pęk płaszczyzn o osi  $a$ . Przez prostą niewłaściwą płaszczyzny  $\pi$  przechodzi również pęk płaszczyzn, który nazywamy pękiem płaszczyzn równoległych (Rys. 11.).



Rys. 10.



Rys. 11.

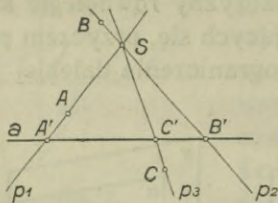
Dowolna płaszczyzna przecina pęk płaszczyzn w pęku promieni, którego wierzchołkiem jest punkt przecięcia się osi pęku z płaszczyzną sieczną. Gdy pęk płaszczyzn jest pękiem równoległym — otrzymany pęk promieni jest również równoległy, punkt bowiem przebicia się osi pęku, którą jest prosta niewłaściwa, jest niewłaściwym wierzchołkiem pęku promieni.

Z rozważań ustępu 4. i powyższego widzimy, że na płaszczyźnie znajduje się nieograniczona ilość punktów i prostych właściwych i jedna prosta niewłaściwa. Owo pojęcie wszystkich punktów względnie prostych danej płaszczyzny określamy mianem układu płaskiego.

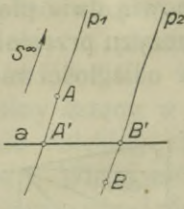
Zbiór nieograniczony prostych przechodzących przez jeden punkt w przestrzeni nazywamy wiązką promieni, a punkt ów środkiem albo wierzchołkiem tej wiązki. Jeżeli środek wiązki leży nieograniczenie daleko, to wiązka składa się z promieni równoległych.

### 8. Pojęcie rzutu środkowego i równoległego.

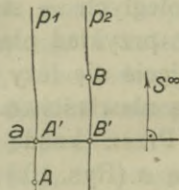
a) *Rzuty na prostą.* Przyjmijmy na pł. rysunku prostą  $a$  (Rys. 12.) i zewnątrz niej punkt  $S$ , a nadto dowolne punkty  $A, B, C, \dots$ . Wykreślmy proste  $p_1, p_2, p_3 \dots$  łączące punkt  $S$  z punktami  $A, B, C \dots$ , to punkty przecięcia się  $A', B', C' \dots$



Rys. 12.



Rys. 13.



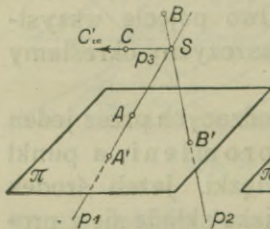
Rys. 14.

z prostą  $a$  nazywamy rzutami punktów  $A, B, C \dots$  na prostą  $a$ . Punkt  $S$  nazywamy środkiem rzutów, a proste  $p_1, p_2, p_3 \dots$  promieniami rzucającymi punkty  $A, B, C \dots$  na podstawę  $a$ .

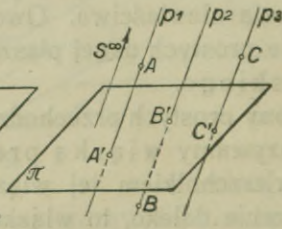
Jeżeli środek rzutów jest punktem niewłaściwym  $S^\infty$  płaszczyzny rysunkowej, a więc wyznaczony kierunkiem, to promienie rzutów są do danego kierunku równoległe (Rys. 13.).

Rzut  $A', B' \dots$  punktów  $A, B, \dots$  ze środka rzutów  $S$  (Rys. 12.), który jest punktem właściwym płaszczyzny rysunkowej, nazywamy rzutem środkowym; gdy środek rzutów jest punktem niewłaściwym, rzut nosi nazwę rzutu równoległego (Rys. 13.).

Szczególny, a dla nas bardzo ważny, przypadek rzutu równoległego stanowi rzut, którego kierunek jest prostopadły do podstawy  $a$ , a który nazywamy rzutem prostokątnym (Rys. 14.).



Rys. 15.



Rys. 16.

b) *Rzuty na płaszczyznę.* Przyjmijmy płaszczyznę  $\pi$  (Rys. 15.) i zewnątrz niej punkt  $S$ , to proste, łączące dane punkty  $A, B, \dots$  z punktem  $S$ , przebijają pł.  $\pi$  w punktach  $A', B' \dots$ ,



które nazywamy rzutami środkowymi punktów  $A, B, \dots$  na płaszczyznę  $\pi$ . Punkt  $S$  jest środkiem rzutów, pł.  $\pi$  pł. rzutów albo krótko rzutnią, a proste  $p_1, p_2, \dots$  promieniami rzucającymi. Jeśli położenie punktu  $C$  w przestrzeni jest tego rodzaju, że promień  $p_3$  rzucający go na pł.  $\pi$  jest do niej równoległy, to rzut punktu  $C$  jest punktem niewłaściwym, leży w odległości nieograniczonej wielkiej na pł.  $\pi$ .

Przyjmijmy, że środek rzutów jest punktem niewłaściwym  $S_\infty$  (Rys. 16.), to wówczas promienie rzutów tworzą pęk równoległy i równoległy do danego kierunku, zwanego kierunkiem rzutu. Mówimy w tym wypadku o rzucie równoległym punktów na płaszczyznę.

Jeżeli kierunek rzutu jest prostopadły do rzutni, to mamy szczególnie ważny przypadek rzutu równoległego, zwany rzutem prostokątnym.

Prócz punktów odosobnionych rzucać można na płaszczyznę całe ich skupienia, zbiory, w formie linii, figur i t. d.; poznanie sposobów kreślenia rzutów tych utworów jest jednym z zadań geometrii wykreślnej.

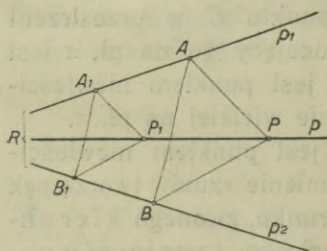
**9. O konstrukcjach geometrycznych.** Przy założeniu, że przyrządy rysunkowe, którymi się posługujemy, są dokładne, że ołówek jest ostro zacięty, a papier gładki, rysunek nasz nie będzie nigdy dokładny w znaczeniu matematycznym. Możemy tylko bardziej lub mniej zbliżyć się do tej idealnej dokładności, a stopień tego zbliżenia stanowi o stopniu dokładności rysunku. Rysujemy więc zawsze z pewnym błędem, a staraniem naszym popartym doświadczeniem i wprawą jest, by błędy rysunkowe nie przekraczały pewnych granic.

Jest rzeczą zrozumiałą, że np. linia prosta tem dokładniej wyznaczona jest na płaszczyźnie rysunkowej, im dalej leżą od siebie punkty, prostą tę wyznaczające, że punkt przecięcia się dwóch prostych tem dokładniej jest wyznaczony, im bardziej zbliża się do kąta prostego kąt, jakie proste te tworzą, i t. p. Pamiętając o tem, możemy w wypadkach, w których konstrukcja pozwala na pewną dowolność i pozostawia rysownikowi zastosowanie tej lub innej metody — użyć zawsze tej, która zabezpiecza osiągnięcie najdokładniejszego rezultatu.

Dalsze trudności wynikają z tego, że płaszczyzna rysunkowa jest ograniczona i że potrzebne nam do konstrukcji punkty i proste leżą poza jej obrębem. W tych wypadkach

stosować będziemy szczególne konstrukcje, z których najważniejsze poniżej podamy.

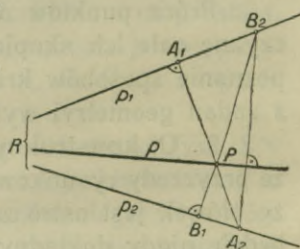
a) Przez dany punkt  $P$  i nie leżący w obrębie płaszczyzny rysunkowej punkt  $R$ , przecięcia się prostych  $p_1$  i  $p_2$ , wykreślić prostą (Rys. 17.).



Rys. 17.

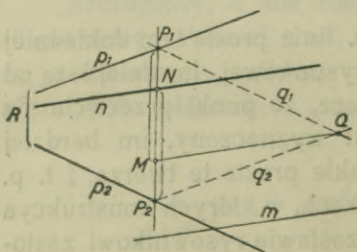
który jest punktem szukanej prostej  $PR$ , gdyż punkt  $R$  jest środkiem podobieństwa trójkątów  $ABP$  i  $A_1B_1P_1$ .

Drugi sposób. Z punktu  $P$  kreślimy  $PA_1 \perp p_1$  i  $PB_1 \perp p_2$  (Rys. 18.), to prostopadła wykreślona z punktu  $P$  do prostej  $A_2B_2$  rozwiązuje zadanie. W istocie proste  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  a także  $PR$  są wysokościami trójkąta  $RA_2B_2$ .



Rys. 18.

b) Przez niedostępny punkt  $R$ , przecięcia się prostych  $p_1$  i  $p_2$ , wykreślić równoległą do danej prostej  $m$  (Rys. 19.). Kreślimy dowolnie prostą  $P_1P_2$ , a przez punkty  $P_1$  i  $P_2$  równoległe do danych prostych ( $q_1 \parallel p_2$ ,  $q_2 \parallel p_1$ ). Z punktu  $Q$  prowadzimy równoległą  $QM$



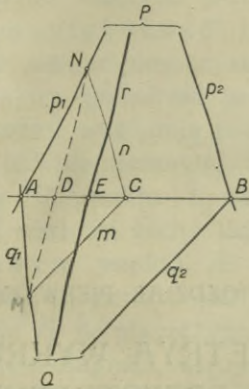
Rys. 19.

do  $m$ , a następnie odcinamy  $P_2N = P_1M$ . Prosta  $n$  wykreślona przez punkt  $N$ , równoległa do prostej  $m$ , rozwiązuje zadanie.

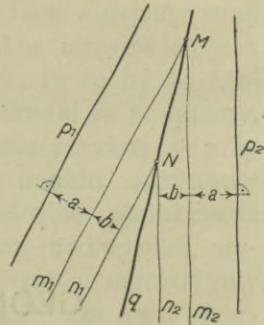
c) Wykreślić prostą przechodzącą przez dwa niedostępne punkty  $P$  i  $Q$  przecięcia się prostych  $p_1p_2$  i  $q_1q_2$ . Z dowolnego punktu  $C$  (Rys. 20.) prostej  $AB$  kreślimy  $n \parallel p_2$  i  $m \parallel q_2$ , to prosta  $MN$  jest równoległa do szukanej, której punkt  $E$  na prostej  $AB$  znajdziemy na podstawie proporcji  $AE : AD = AB : AC$ . Jeżeli punkt  $C$  jest środkiem odcinka  $AB$ , to wówczas  $AD = DE$ .



d) Znaleźć dwusieczną kąta, którego wierzchołek leży poza obrębem rysunku (Rys. 21.). Do prostej  $p_1$  kreślimy równoległe  $m_1$  i  $n_1$  a do prostej  $p_2$  w tych samych odległościach równoległe  $m_2$  i  $n_2$ . Prosta  $q$ , przechodząca przez otrzymane punkty  $M$  i  $N$  równo oddalone od ramion  $p_1$  i  $p_2$ , rozwiązuje zadanie.



Rys. 20.



Rys. 21.

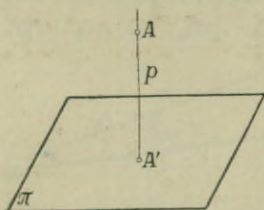
ROZDZIAŁ PIERWSZY

GEOMETRYA WYKREŚLNA  
ELEMENTÓW PRZESTRZENI, UTWORÓW  
PŁASKICH I WIEŁOŚCIANÓW

§ 1. ZASADY RZUTÓW CECHOWANYCH

10. Określenie położenia punktu w przestrzeni. Przyjmijmy dowolny punkt  $A$  i postanówmy stworzyć warunki, umożliwiające względne ustalenie położenia tego punktu w przestrzeni.

W tym celu przyjmijmy dowolną płaszczyznę  $\pi$  (Rys. 22.), z punktu  $A$  wyprowadzimy prostą  $p$ , prostopadłą do tej płaszczyzny i znajdziemy punkt przebiecia się  $A'$  tej prostopadłej z płaszczyzną  $\pi$ . Punkt  $A'$ , odcinek  $\overline{AA'}$  i zaznaczenie, po której stronie płaszczyzny  $\pi$  znajduje się punkt  $A$ , wyznaczają położenie tego punktu, w odniesieniu do płaszczyzny  $\pi$ . Płaszczyznę  $\pi$ , która z reguły jest płaszczyzną poziomą, nazywamy płaszczyzną rzutów, lub krócej rzutnią, prostą  $p$  zwiemy promieniem rzucającym lub krótko rzucającą, a punkt  $A'$  rzutem prostokątnym punktu  $A$ . Liczbę wyrażającą, w przyjętych jednostkach długości, odległość punktu  $A$  od jego rzutu  $A'$ , czyli długość odcinka  $\overline{AA'}$  nazywamy cechą lub znamieniem punktu  $A$ .



Rys. 22.

Odległość punktu, leżącego nad płaszczyzną rzutów od tejże płaszczyzny, nazywamy „wysokością“ tego punktu;

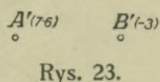


miarą odległości punktów leżących pod płaszczyzną rzutów od tej płaszczyzny jest „głębokość” tych punktów. Cechom punktów znajdujących się nad płaszczyzną rzutów dajemy znak dodatni, cecha wyrażająca głębokość punktu otrzymuje znak ujemny. Jeżeli w rysunku występują jedynie cechy ze znakami dodatnimi albo jedynie ujemnymi, to znaki te pomijamy.

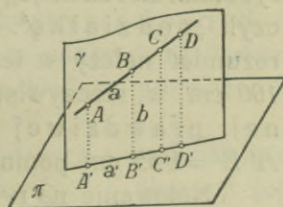
Rzut prostokątny  $A'$ , punktu  $A$ , na płaszczyznę  $\pi$ , przy znajomości względnej wartości cechy tego punktu, nazywamy rzutem cechowanym punktu  $A$ . Niechaj płaszczyzna rzutów jest płaszczyzną tej kartki; jeśli na prostopadłej, wyprowadzonej w punkcie  $A'$  do płaszczyzny rzutów, odmierzymy 6·7 przyjętych jednostek długości, więc np. 7·6 cm nad płaszczyzną kartki — to otrzymamy punkt  $A$  (Rys. 23.). Punkt  $B$ , którego rzut znajduje się w punkcie  $B'$  a cecha wynosi — 3 cm, leży o 3 cm pod płaszczyzną kartki. Punkt leżący na płaszczyźnie rzutów oznaczmy np. literą  $C$  bez kreski i bez cechy, która równa jest zeru. Aby zaznaczyć, że w danym wypadku chodzi o punkt np.  $A$ , którego rzut  $A'$  i cecha np. 7·6 cm są dane, używać będziemy następującego wyrażenia: Dany jest punkt  $A$  ( $A'$ , 7·6). Rzut prostokątny punktu na daną płaszczyznę wyznacza położenie tego punktu względem tej płaszczyzny, jeśli opatrzony jest cechą czyli znamieniem. Metoda geometrii wykreślnej posługująca się cechami, nazywa się metodą rzutów cechowanych i ona będzie przedmiotem naszych rozważań w następnych ustępach.

**11. Rzut cechowany prostej.** Przez rzut prostokątny prostej rozumiemy miejsce geometryczne rzutów prostokątnych dowolnej ilości punktów tej prostej.

Prosta  $a$  i promień  $b$  (Rys. 24.), rzucający dowolny jej punkt  $B$  na pł.  $\pi$ , wyznaczają (ust. 4.) płaszczyznę  $\gamma$ , która przecina pł.  $\pi$  w prostej  $a'$ . Ponieważ na pł. tej, którą nazywamy płaszczyzną rzucającą, leżą wszystkie promienie rzucające punkty prostej  $a$ , więc prosta  $a'$  jest miejscem geometrycznym rzutów wszystkich punktów prostej  $a$ , jest tedy rzutem prostej  $a$ . Widoczne stąd, że rzut linii prostej jest prostą.



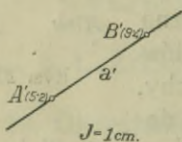
Rys. 23.



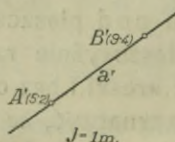
Rys. 24.

Prostą wyznaczają dwa punkty; znajomość więc rzutów dwóch punktów i ich cech określa jednoznacznie położenie prostej w przestrzeni, w odniesieniu do danej rzutni. Jeżeli np. płaszczyznę tej kartki uważamy za rzutnię, to w odniesieniu do niej określone jest jednoznacznie położenie prostej  $a$ , której rzuty cechowane dwóch punktów, a mianowicie  $A'$  i  $B'$  są dane, jeśli przytem podana jest jednostka miary w której cechy tych punktów wyrażamy. Napis „ $J=1\text{ cm}$ ” na Rys. 25. oznacza, że przyjętą dla tego rysunku jednostką długości jest centymetr.

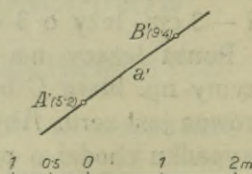
**12. Podziałka rysunku.** Odcinek  $\overline{A'B'}$  w Rys. 25. wyraża prawdziwą odległość rzutów punktów  $A'$  i  $B'$ ; rysunek wykonany jest w podziałce (wielkości) naturalnej, co zazna-



Rys. 25.



Rys. 26.



Rys. 27.

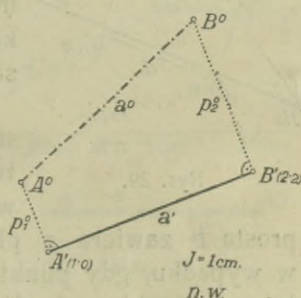
czamy na rysunku literami  $n. w$ . Jeżeli jednak jednostka długości w stosunku do płaszczyzny rysunku jest za wielka, to wówczas rysunek wykonać musimy — w stosunku do prawdziwych wymiarów — w pewnym pomniejszeniu, w pewnej podziałce pomniejszonej. W tym wypadku obok jednostki długości np.: „ $J=1\text{ m}$ ” (Rys. 26.) podać musimy na rysunku stosunek jego wymiarów do wymiarów naturalnych, czyli „podziałkę”. Napis „Podziałka: 1:100” (Rys. 26.) rozumieć należy w ten sposób, że  $1\text{ cm}$  na rysunku oznacza  $100\text{ cm}$  w rzeczywistości, że w celu otrzymania naturalnej, prawdziwej długości odcinka  $\overline{A'B'}$  należy odcinek  $\overline{A'B'}=1.55\text{ cm}$  pomnożyć sto razy.

Notowanie na rysunku rodzaju przyjętej jednostki długości i stosunku pomniejszenia zastępujemy zazwyczaj umieszczeniem na tymże rysunku pojedynczej lub podwójnej linii prostej, na której odmierzamy pewną ilość w żądanym stosunku pomniejszonych jednostek długości, pisząc obok ostatniej miano jednostki naturalnej.



W Rysunku 27. jednostkę długości metr wyraziliśmy również centymetrem, stosunek więc wymiarów rysunku do wymiarów rzeczywistych ma się tak, jak  $1:100$ . Rysunek ten wykonany jest w setnym pomniejszeniu, czyli w podziałce  $1:100$ .

**13. Kład prostej.** Rzuty cechowane  $A'(1\cdot0)$  i  $B'(2\cdot2)$  (Rys. 28.) określają położenie prostej  $a$ , wyznaczonej punktami  $A$  i  $B$ . Wyprowadziwszy bowiem w punktach  $A'$  i  $B'$  prostopadłe  $p_1$  i  $p_2$  do pł. rysunku i odmierzywszy na pierwszej z nich od punktu  $A'$  na d. pł. rysunku  $1\text{ cm}$ , zaś na drugiej  $2\cdot2\text{ cm}$  od punktu  $B'$  również na d. pł. rysunku — otrzymamy punkta  $A$  i  $B$ , a więc i prostą  $a$  punktami tymi wyznaczoną.



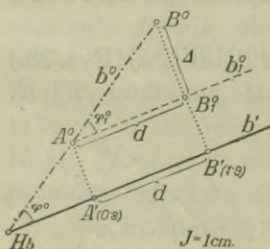
Rys. 28.

W celu wyznaczenia prawdziwej wielkości odcinka, którego rzut cechowany dwóch punktów jest znany, weźmy pod uwagę punkta  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  i  $B'$ , będące wierzchołkami trapezu, którego trzy boki i dwa kąty są znane. Bokami tymi są odcinki  $A'B'$ ,  $A'A$  i  $B'B$ ; kątami, kąty proste  $A'A'B'$  i  $B'B'A'$ . Przez wyrysowanie więc tego trapezu otrzymamy nieznaną bok  $AB$ . Na prostopadłych, wyprowadzonych w punktach  $A'$  i  $B'$  do prostej  $a'$  (Rys. 28.), odmierzymy  $A'A^0 = 1\cdot0\text{ cm}$ ,  $B'B^0 = 2\cdot2\text{ cm}$ ; otrzymamy odcinek  $A^0B^0$  równy jest prawdziwej długości odcinka  $AB$ . Przeprowadzenie konstrukcji trapezu  $A'B'A^0B^0$  nazywamy wykładaniem kąta odcinka  $AB$ . W istocie bowiem trapez  $A'B'A^0B^0$  powstaje, jeśli trapez  $AB A' B'$ , znajdujący się na płaszczyźnie poziomo-rzucającej, położymy około jego boku  $A'B'$  na pł. rysunku. Odcinek  $A^0B^0$  jest kądem odcinka  $AB$  i równy jego długości; odcinki  $A'A^0$  i  $B'B^0$  są kładami promieni rzucających  $AA'$  i  $BB'$ .

Jeśli rysunek wykonany jest w podziałce pomniejszającej, to długość odcinka  $AB$  równa jest ilorazowi z długości jego kąta  $A^0B^0$  i wykładnika stosunku pomniejszenia.

**14. Kąt nachylenia prostej z płaszczyzną rzutów. Ślad i nachylenie prostej.** Kąt  $\varphi$ , jaki prosta  $b$  tworzy ze swoim rzutem poziomym  $b'$ , nazywamy kątem nachylenia prostej  $b$  z płaszczyzną poziomą. Kąt ten otrzymamy przez wykonanie

kładu prostej, a więc układu dwóch jej punktów na pł. rysunku. Kąt bowiem  $\varphi^0$  (Rys. 29.) jaki zamyka prosta  $b^0$ , będąca kładem prostej  $b$ , z prostą  $b'$ , równy jest kątowi  $\varphi$ , bez względu na podziałkę w jakiej wykonany jest rysunek. W istocie bowiem gdy podziałka rysunku wynosi np.  $1:n$ , to boki  $\Delta B^0 H_b B'$  są proporcjonalne do boków trójkąta wyrażonego rysunkiem; oba trójkąty są więc podobne, a zatem kąty ich są równe.



Rys. 29.

Poprowadźmy przez punkt  $A^0$  prostą  $b_1^0$  równoległą do  $b'$ , to kąt  $\varphi_1^0$  jaki tworzą proste  $b^0$   $b_1^0$  równy jest oczywiście kątowi  $\varphi^0$ , a więc i kątowi  $\varphi$  jaki prosta  $b$  zawiera z pł. poziomą. Prostą  $b_1^0$  posłużymy się w wypadku, gdy punkt przecięcia się  $H_b$  prostych  $b'$  i  $b^0$  nie leży w obrębie rysunku.

Punkt  $H_b$ , którego wysokość (cecha) równą jest zeru, jest punktem przebicia się prostej  $b$  z pł. rzutów, a więc elementem wspólnym prostej  $b$  i rzutni i nazywa się śladem poziomym tej prostej.

Oznaczmy odcinek  $\overline{A'B'} = \overline{A^0B_1^0}$  literą  $d$ , zaś różnicę wysokości punktów  $A$  i  $B$  równą odcinkowi  $\overline{B^0B_1^0}$  literą  $\Delta$ , to stosunek:

$$\frac{\Delta}{d} = \operatorname{tg} \varphi = \nu \dots \dots \dots 1.$$

nazywamy nachyleniem prostej  $b$ .

Jeżeli cechy dwóch punktów wyznaczających prostą są równe, to cechy każdego dowolnego punktu tej prostej są równe, a prosta jest równoległą do płaszczyzny rzutów.

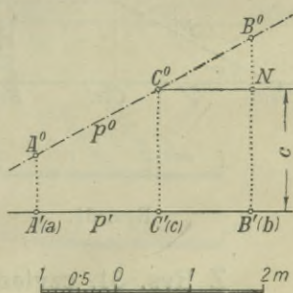
**15. Podział odcinka.** Obierzmy na danej prostej, wyznaczonej punktami  $A$  ( $A'$ ,  $a$ ) i  $B$  ( $B'$ ,  $b$ ) punkt  $C$ , którego cecha wynosiłaby  $c$  jednostek długości w podziałce rysunku. W tym celu (Rys. 30.) wykonamy kład  $\overline{A^0B^0}$  odcinka  $\overline{AB}$ , a następnie odmierzymy od punktu  $B'$ , w podziałce rysunku, odcinek  $\overline{B'N} = c$ . Prosta wykreślona z punktu  $N$ , równoległe do  $p'$ , przecina prostą  $p^0$  w punkcie  $C^0$ ; prostopadła z  $C^0$  do  $p'$  przecina tę ostatnią w punkcie  $C'$ , który jest szukanym rzutem punktu  $C$  o cesze  $c$ . Na Rys. 30., wykonanym w podziałce  $1:100$  przy przyjętej jednostce miary równej  $1\text{ m}$  ( $1\text{ cm}$  na



na rysunku wyraża 1 m w rzeczywistości) obrano:  $a=0.8m$ ,  $b=2.3m$ ,  $c=1.65m$ .

Ponieważ  $\overline{A^0 C^0} : \overline{C^0 B^0} = \overline{A' C'} : \overline{C' B'}$ , więc punkt  $C'$  dzieli odcinek  $\overline{A' B'}$  w tym samym stosunku, w jakim punkt  $C^0$  dzieli odcinek  $\overline{A^0 B^0}$ . A ponieważ odcinek  $\overline{A^0 B^0}$ , jako kład odcinka  $\overline{AB}$  leżącego w przestrzeni, wyraża jego prawdziwą wielkość i położenie względem swego rzutu, więc stosunek podziału odcinka w przestrzeni nie zmienia się wskutek rzutu tego odcinka.

Innymi słowy: podzieliwszy odcinek w przestrzeni w pewnym stosunku, a więc także na pewną ilość części i rzuciwszy punkty podziału na rzut tego odcinka, podzielimy ten rzut w tym samym stosunku, względnie na tę samą ilość części. W szczególności, punktowii połowiącemu odcinek w przestrzeni, odpowiada punkt połowiący rzut odcinka, jako rzut punktu połowiącego.



Rys. 30.

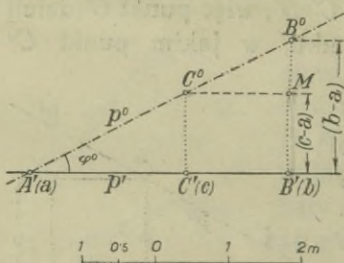
### 16. Płaszczyzny równoległe i kład prostych na nie.

Płaszczyzny równoległe do rzutni poziomej nazywamy płaszczyznami warstwowymi albo poziomymi. Przez wysokość płaszczyzny poziomej rozumiemy oddalenie jej od płaszczyzny rzutów, którą w odniesieniu do pierwszych nazywamy płaszczyzną porównawczą. Płaszczyzny warstwowe, których wysokości są liczbami całkowitymi, nazywamy głównymi, inne pośrednimi.

Jeżeli cechy końcowych punktów odcinka są duże, to wykonanie jego kładu, ze względu na ograniczoną pł. rysunku, natrafia na trudności, albo też jest nawet niewykonalne. W tych wypadkach kład odcinka wykonujemy na pł. warstwową, przechodzącą przez jeden z punktów końcowych, zazwyczaj przez punkt o cesze mniejszej.

Rys. 31. podaje konstrukcję kładu prostej  $[A(A', a=18), B(B', b=19.8)]$  na pł. warstwową, przechodzącą przez punkt  $A(A', 18)$ . Na prostopadłej wykreślonej w punkcie  $B'$  odmierzymy w podziałce rysunku odcinek  $B'B^0$ , równy różnicy wysokości punktów  $B$  i  $A$ , więc  $b - a = 1.8m$  i punkt  $B^0$  po-

łączymy z  $A'$ , otrzymując tym sposobem kład odcinka  $\overline{A'B}$  na głównej pł. warstwową o wysokości  $a=18\text{ m}$ . Oczywiście, że  $\sphericalangle B^0 A' B' = \varphi^0$  równy jest kątowi, jaki prosta  $(AB)$  zawiera z pł. porównawczą.



Rys. 31.

Rzut punktu  $C$ , któryby leżał na prostej  $(AB)$ , a miał żadaną cechę np.  $c=19.1\text{ m}$ , znajdziemy podobnie jak w ust. 15., odmierzając jednak na prostej  $B'B^0$  odcinek  $\overline{B'M}$ , równy różnicy wysokości punktów  $C$  i  $A$ , więc  $c-a=1.1\text{ m}$ .

Z Rys. 31. czytamy :

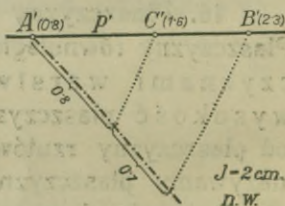
$$\overline{A'C'} : \overline{C'B'} = \overline{A'C^0} : \overline{C^0B^0} = \overline{B'M} : \overline{MB^0} = (c-a) : (b-a)$$

jeśli literami  $a, b, c$ , oznaczymy cechy punktów  $A, B$  i  $C$ .

Z równości powyższych wynika, że

$$\overline{A'C'} : \overline{C'B'} = (c-a) : (b-a) \dots \dots I.$$

co oznacza, że punkt  $C'$  dzieli odcinek  $\overline{A'B'}$  w stosunku  $(c-a) : (b-a)$ , albo, że wyznaczenie rzutu punktu  $C$  o żadanej cesze  $c$  na prostej, danej cechowanymi rzutami dwóch punktów  $A$  ( $A', a$ ) i  $B$  ( $B', b$ ), sprowadza się do znalezienia punktu  $C'$ , dzielącego odcinek  $\overline{A'B'}$  w stosunku  $(c-a) : (b-a)$ . W Rys. 32. przyjęliśmy  $a=0.8$ ,  $b=2.3$ ,  $c=1.6$  — odcinek tedy  $\overline{A'B'}$  podzielimy w stosunku  $(c-a) : (b-a) = 0.8 : 0.7$ , a otrzymany punkt  $C'$  rozwiązuje zadanie.



Rys. 32.

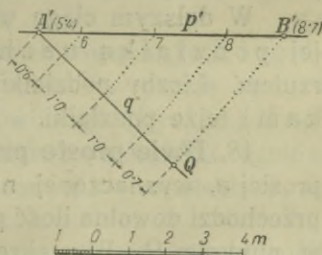
**17. Stopniowanie i moduł prostej.** Wyznaczenie rzutów tych punktów danej linii prostej, których cechy są liczbami całymi, nazywamy zestopniowaniem prostej, albo wyznaczeniem jej podziałki nachylenia.

Gdy cechy dwóch danych punktów prostej są liczbami całymi, to zestopniowanie prostej wykonać można zapomocą podziałki milimetrowej, dzieląc dany odcinek na części, których ilość równa jest różnicy cech.



Zestopniowanie prostej  $A$  ( $A'$ , 5·4),  $B$  ( $B'$ , 8·7) (Rys. 33.) wykonać można zapomocą jej kładu na pł. warstwową 5·4 — powtarzając zadanie w ustępie 16., albo dzieląc dany odcinek według proporcji (równanie I.), podobnie jak w Rys. 32.

W tym celu w punkcie  $A'(5·4)$  poprowadzimy dowolną prostą  $q$  (Rys. 33.) i odmierzymy na niej kolejno, od punktu  $A'$  począwszy, odcinki równe 0·6, 1·0, 1·0, 0·7 dowolnej jednostki długości, a przez punkta podziału wykreślimy równoległe do boku  $Q B'$ . Otrzymane punkty na prostej  $p'$  posiadają cechy 6, 7, 8 i tworzą podziałkę nachylenia.



Rys. 33.

Odległość rzutów poziomych dwóch punktów prostej, których różnica wysokości, a więc i różnica cech, równa jest jednostce, stanowi jednostkę podziałki nachylenia i nazywa się m o d u ł e m ( $\mu$ ) prostej. Modułem np. prostej ( $AB$ ), Rys. 34. jest odcinek  $C' D' = D' E' = \mu$ . Rys. ten poucza też nas bezpośrednio, że im większy jest kąt nachylenia prostej do rzutni, tem mniejszy jest jej moduł i odwrotnie.

Proste nachylone do pł. rzutów pod tym samym kątem, mają równe, moduły. Moduł prostej nachylonej pod  $45^\circ$  równy jest

przyjętej na rysunku jednostce długości.

Jeżeli w równaniu I. (str. 18.) wstawimy  $\Delta=1$ , to według określenia powyżej podanego  $d$  stanie się modułem  $\mu$  prostej, czyli:

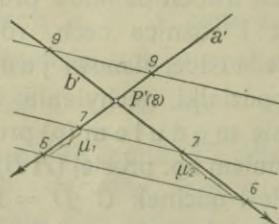
$$\frac{1}{d} = \nu = \frac{1}{\mu} \dots \dots \dots \text{II.}$$

co znaczy, że nachylenie i moduł prostej są liczbami odwrotnymi.

Położenie prostej w przestrzeni w odniesieniu do pł. rzutów jest w zupełności wyznaczone, gdy prócz jej rzutu i cechy jednego jej punktu, znany jest jej moduł i wskazany (strzałką) kierunek jej nachylenia, przez który rozumiemy kierunek następstwa punktów prostej, o cechach malejących.

W dalszym ciągu wyznaczać będziemy prostą przeważnie jej podziałką nachylenia czyli jej zestopniowanym rzutem. Liczby podziałki nachylenia nazywamy *wskaznikami* i tejsze podziałki.

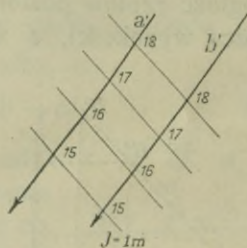
18. Dwie proste przecinające się. Przez każdy punkt  $P$  prostej  $a$ , wyznaczonej np. podziałką nachylenia o module  $\mu_1$ , przechodzi dowolna ilość prostych, które prostą  $a$  przecinają w punkcie  $P$ . Aby określić położenie jednej z nich, np.  $b$  (Rys. 35.), musimy dowolnie przyjętym modulem  $\mu_2$  zestopniować prostą  $b'$  przeprowadzoną dowolnie przez punkt  $P'(\delta)$ ,



$J=1\text{cm.}$

*n.w.*

Rys. 35.



$J=1\text{m}$

Podziałka 1:100.

Rys. 36.

który jest punktem wspólnym prostych  $a$  i  $b$ . Proste, łączące jednakowe wskaźniki prostych  $a'$  i  $b'$ , są do siebie równoległe i odwrotnie: jeżeli proste, łączące równowartościowe wskaźniki rzutów dwóch prostych, tworzą pęk równoległy — to rzuty owe wyrażają dwie proste przecinające się.

19. Dwie proste skośne. Jeżeli punkt przecięcia się  $M'$  rzutów  $a'$  i  $b'$  dwóch prostych, uważany za rzut punktu prostej  $b$ , ma inną cechę aniżeli uważany za rzut punktu prostej  $a$ , to proste  $a$  i  $b$  nie posiadają punktu wspólnego, nie przecinają się; ich wzajemne położenie określamy jako skośne lub wchrowate. Przez kąt nachylenia dwóch prostych skośnych rozumiemy kąt, jaki otrzymamy, jeśli przez dowolny punkt



w przestrzeni poprowadzimy proste równoległe do danych prostych skośnych.

**20. Dwie proste równoległe.** Rzuty prostych równoległych są prostymi równoległymi o zgodnych kierunkach nachylenia i o równych modułach, gdyż proste równoległe nachylone są do poziomu pod tym samym kątem.

Z równości modułów dwóch prostych równoległych i zgodności ich kierunków nachylenia wynika, że proste łączące punkty o jednakowych cechach są równoległe (Rys. 36.). I nawzajem: jeśli proste łączące jednakowe wskaźniki rzutów dwóch prostych  $a' \parallel b'$  tworzą pęk promieni równoległych, to owe dwie proste  $a$  i  $b$  są równoległe.

**21. Zadanie.** Wyznaczyć rzut prostej  $q$ , równoległej do danej prostej  $p$ , a przechodzącej przez dany punkt  $P$  ( $P'$ , 9·4) (Rys. 37.).

Rzut  $q'$  przejdzie przez punkt  $P'$  równoległe do  $p'$ . Kierunki nachylenia obu prostych są zgodne, moduły równe, należy tylko zestopniować, — w jeden z poznanych sposobów, (np. zapomocą podziałki) — prostą  $q'$ .

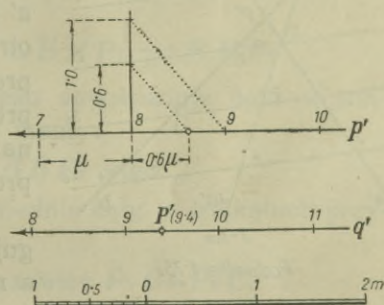
**22. Wyznaczenie płaszczyzny.** Położenie punktu w przestrzeni, w odniesieniu do pł. rzutów, wyznacza jego

rzut cechowany, a więc również punkt; względne położenie prostej w przestrzeni wyznacza jej zestopniowany rzut, czyli również prosta. Położenie trzeciego zasadniczego elementu geometrii t. j. płaszczyzny, wyznaczone jest położeniem dwóch prostych przecinających się lub równoległych, prostej i punktu, względnie trzech dowolnych punktów.

Mówimy, że dwie proste przecinające się, dwie proste równoległe, względnie trzy dowolne punkty wyznaczają płaszczyznę, w tem rozumieniu tego wyrażenia, że:

1) istnieje jedna jedyna płaszczyzna przechodząca równocześnie przez obie proste, względnie przez trzy punkty, że:

2) znając położenie dwóch prostych przecinających się



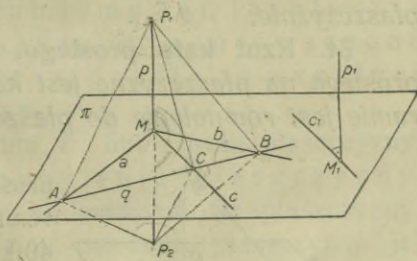
Rys. 37.





leżących na tej płaszczyźnie, która tym sposobem rzuca je w swój ślad.

**23. Prosta prostopadła do płaszczyzny.** Przyjmijmy na płaszczyźnie  $\pi$  (Rys. 39.) trzy proste  $a, b, c$  przechodzące przez punkt  $M$ , i w którym to punkcie wyprowadźmy prostą  $p$  prostopadłą zarówno do prostej  $a$  jak i  $b$ . Niechaj dowolnie na płaszczyźnie  $\pi$  przyjęta prosta  $q$  przecina proste  $a, b$  i  $c$  w punktach  $A, B$  i  $C$ . Obierzmy następnie na prostej  $p$  punkty  $P_1$  i  $P_2$ , przyczem niech  $\overline{P_1 M} = \overline{P_2 M}$  i połączmy je z punktami  $A, B$  i  $C$ . Z rysunku 39. czytamy:



Rys. 39.

$$\triangle AMP_1 \simeq \triangle AMP_2 \text{ i } \triangle BMP_1 \simeq \triangle BMP_2$$

więc  $\overline{P_1 A} = \overline{P_2 A}$ ,  $\overline{P_1 B} = \overline{P_2 B}$  jako odpowiednie boki w trójkątach przystających. Następnie mamy:

$$\triangle ABP_1 \simeq \triangle ABP_2 \text{ więc}$$

$\sphericalangle P_1 AB = \sphericalangle P_2 AB$  jako odpowiednie kąty w trójkątach przystających. Z kolei otrzymujemy:

$$\triangle ACP_1 \simeq \triangle ACP_2, \text{ a więc } \overline{P_1 C} = \overline{P_2 C}.$$

A wreszcie:

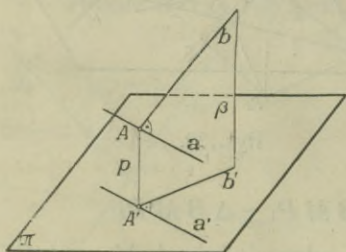
$$\triangle MCP_1 \simeq \triangle MCP_2, \text{ zatem}$$

$\sphericalangle CMP_1 = \sphericalangle CMP_2$ , a ponieważ kąty te są kątami przyległymi, więc skoro oba są równe, to każdy z nich musi być kątem prostym czyli:  $p \perp c$ . Tym sposobem dowiedliśmy następującego twierdzenia: *Jeżeli prosta  $p$ , przechodząca przez punkt przecięcia się dwóch prostych, jest do nich prostopadłą, to wówczas jest prostopadłą do każdej prostej przechodzącej przez ten punkt, a leżącej na płaszczyźnie  $\pi$  wyznaczonej przez owe dwie proste.* Mówimy, że prosta  $p$  jest prostopadłą albo normalną do płaszczyzny  $\pi$ . Innymi słowy: gdy prosta jest normalną do dwóch prostych w ich punkcie przecięcia się, to jest normalną do płaszczyzny temi prostymi wyznaczonej.

Przez dowolny punkt  $M_1$  płaszczyzny  $\pi$  (Rys. 39.) poprowadzimy proste  $c_1 \parallel c$  i  $p_1 \parallel p$ . Kąt, jaki zawierają proste

skośne  $p$  i  $c_1$ , równy kątowi jaki tworzą proste  $p_1$  i  $c_1$ , jest kątem prostym (ust. 19.), a ponieważ prosta  $p$  jest prostopadłą do każdej prostej przechodzącej przez punkt  $M$ , a leżącej na płaszczyźnie  $\pi$ , więc jest prostopadłą do każdej prostej płaszczyzny  $\pi$ . Czyli: *gdy prosta jest prostopadłą do płaszczyzny, to jest prostopadłą do wszystkich prostych, leżących na tej płaszczyźnie.*

**24. Rzut kąta prostego.** Twierdzenie: *Rzut kąta prostego na płaszczyznę jest kątem prostym, gdy jedno jego ramię jest równoległe do płaszczyzny rzutów.*



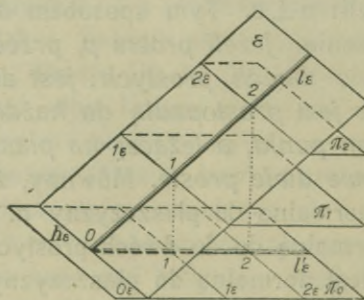
Rys. 40.

Przyjmijmy ramię  $a$  kąta prostego, jaki tworzą proste  $a$  i  $b$ , równoległe do pł. rzutów  $\pi$  (Rys. 40.), to rzut  $a'$  jest równoległy do prostej  $a$ . Ponieważ promień rzucający  $p$  jest  $\perp$  do prostej  $a$ , a ta znowu  $\perp$  do prostej  $b$ , zatem prosta  $a$  jest  $\perp$  równocześnie do prostych  $b$  i  $p$ , a więc prostopadła do płaszczyzny  $\beta$  prostymi temi wyzna-

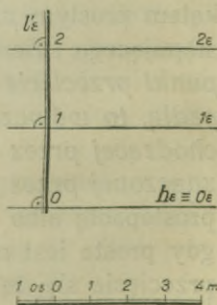
czonej. Ale z ustępu poprzedniego wiemy, że gdy prosta jest normalną do płaszczyzny, to jest normalną do każdej prostej, leżącej na tej płaszczyźnie; prosta tedy  $a$  jest prostopadłą do prostej  $b'$ , która leży na płaszczyźnie  $\beta \equiv (p, b)$  i jest rzutem prostej  $b$  na pł.  $\pi$ . Ponieważ wkońcu prosta  $a'$  jest równoległą do prostej  $a$ , więc i  $a'$  jest  $\perp$  do  $b'$  — co było do wykazania.

**25. Linia spadu płaszczyzny.** Prosta  $l_\varepsilon$ , leżąca na płaszczyźnie  $\varepsilon$  a prostopadła do jej linii warstwowych, nazywa się

linią największego spadku, lub krócej linią spadku tej płaszczyzny (Rys. 41.). Ponieważ linie warstwowe są równoległe do pł. porównawczej, więc na podstawie ustępu poprzedniego rzut  $l'_\varepsilon$  linii największego spadku



Rys. 41.



Rys. 42.



$l_\varepsilon$  jest prostopadły do warstwic płaszczyzny (Rys. 42.). Kąt nachylenia linii spadu pł.  $\varepsilon$  do płaszczyzny rzutów nazywamy kątem nachylenia pł.  $\varepsilon$  do pł. rzutów.

Prosta  $l_\varepsilon$  jest  $\perp$  do  $h_\varepsilon$  podobnie jak  $l'_\varepsilon \perp h_\varepsilon$  — a ponieważ  $h_\varepsilon$  jest prostą wspólną (przecięcia się) płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\pi_0$  — więc ogólnie powiedzieć możemy: przez kąt nachylenia dwóch płaszczyzn rozumiemy kąt, jaki tworzą dwie proste tych płaszczyzn, poprowadzone w dowolnym punkcie prostopadle do wspólnej prostej obu płaszczyzn.

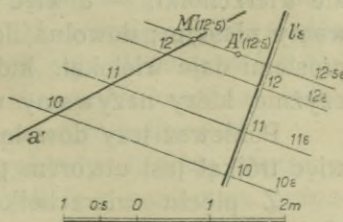
Podziałkę nachylenia rzutu  $l'_\varepsilon$ , linii spadu płaszczyzny, nazywamy podziałką nachylenia płaszczyzny, moduł linii spadu płaszczyzny — modułem tej płaszczyzny. Najczęściej wyznaczać będziemy położenie płaszczyzny jej podziałką nachylenia, którą rysujemy jako dwie blisko siebie leżące równoległe proste. Wskaźniki podziałki są oczywiście liczbami całymi, a odcinek ograniczony dwiema liczbami porządkowymi jest modułem płaszczyzny; odwrotną wartość modułu nazywamy nachyleniem płaszczyzny. Im większy jest więc moduł, tem mniejsze nachylenie płaszczyzny, czyli tem mniejszą jest styczna trygonometryczna kąta, jaki uważana płaszczyzna zamyka z płaszczyzną porównawczą (rzutów). W dalszym ciągu wykładu używać będziemy zwrotów: dana jest linia spadu, wykreślić linię spadu i t. p. rozumiejąc zawsze przez linię spadu jej rzut.

Płaszczyzna  $\perp$  do rzutni wyznaczona jest swoim śladem poziomym t. j. prostą przecięcia się z rzutnią; położenie płaszczyzny równoległej do rzutni wyznacza cecha jednego, dowolnego jej punktu.

**26. Zadania.** 1. Wykreślić podziałkę nachylenia płaszczyzny  $\varepsilon$ , wyznaczonej prostą  $a$  i punktem  $A$  (Rys. 43.).

Na prostej  $a$  szukamy punktu  $M$  o cecie punktu  $A$ . Prosta  $AM$  — jako równoległa do pł. porównawczej i leżąca na pł., której linii spadu szukamy, jest warstwicą tejże płaszczyzny. W ten sposób linia spadu i jej podziałka są wyznaczone.

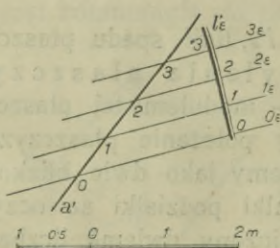
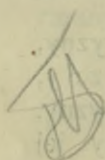
2. Wyznaczyć płaszczyznę,



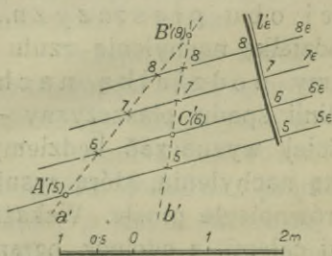
Rys. 43.

przechodzącą przez prostą  $a$ , której podziałka nachylenia  $a'$  jest dana (Rys. 44.).

Przez prostą przechodzi dowolna ilość płaszczyzn; proste równoległe  $0_\varepsilon, 1_\varepsilon, \dots$  przechodzące przez wskaźniki podziałki nachylenia  $a'$  są warstwicami jednej z tych płaszczyzn. Rzutem linii spadu tej płaszczyzny jest prosta  $l'_\varepsilon$  prostopadła do tych warstwic. Punkty przecięcia się linii  $l'_\varepsilon$  z warstwicami są wskaźnikami podziałki nachylenia płaszczyzny  $\varepsilon$ .



Rys. 44.



Rys. 45.

3. Wyznaczyć podziałkę nachylenia płaszczyzny  $\varepsilon$ , wyznaczonej trzema punktami  $A$  ( $A'$ , 5),  $B$  ( $B'$ , 9),  $C$  ( $C'$ , 6). (Rys. 45.).

Z trzech prostych, wyznaczonych danymi punktami, weźmy pod uwagę dwie n. p.  $a \equiv (AB)$  i  $b \equiv (BC)$ , które przecinają się w punkcie  $B$ . Zestopniujmy obie proste — to linie łączące równoliczbowe wskaźniki są warstwicami pł.  $\varepsilon$  i wyznaczają na prostopadłej  $l'_\varepsilon$  podziałkę nachylenia.

4. Wykreślić rzut pięciokąta płaskiego, leżącego dowolnie w przestrzeni.

Rozróżniamy wielokąt płaskie od przestrzennych, zwanych także skośnymi. Wielokąt, którego wszystkie wierzchołki, — a więc i boki, leżą na płaszczyźnie, nazywamy płaskim; dowolna ilość punktów przestrzeni połączona prostymi daje wielokąt, którego nie można położyć na płaszczyźnie, który nazywamy wielokątem skośnym.

Ponieważ trzy dowolne punkty wyznaczają płaszczyznę, więc trójkąt jest utworem płaskim.

Z pięciu wierzchołków żądanego wielokąta trzy, np.  $A$  ( $A'$ , 3),  $B$  ( $B'$ , 7) i  $C$  ( $C'$ , 9) (Rys. 46.), przyjmujemy do-



wolnie, dwa dalsze t. j.  $D$  i  $E$  obrać musimy na płaszczyźnie wyznaczonej trzema pierwszymi.

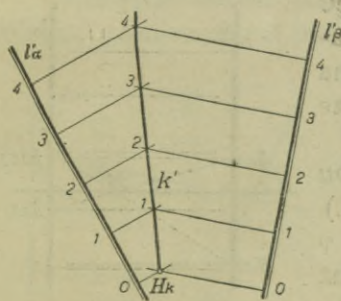
W tym celu zestopniujemy prostą  $A'B'$  i dwa dowolne wskaźniki np. 5 i 6 połączmy prostymi  $p'$  i  $q'$  z punktem  $C'$ .

Proste  $p$  i  $q$ , wyznaczone rzutami  $p'$  i  $q'$ , leżą na płaszczyźnie trójkąta  $ABC$ , gdyż mają z tą płaszczyzną po dwa punkty wspólne.

Zatem każdy punkt tych prostych np.  $D$  ( $D'$ , 4) i  $E$  ( $E'$ , 3) leżą na płaszczyźnie trójkąta, mogą więc być przyjęte za dalsze wierzchołki pięciokąta płaskiego  $A, B, C, D, E$ .

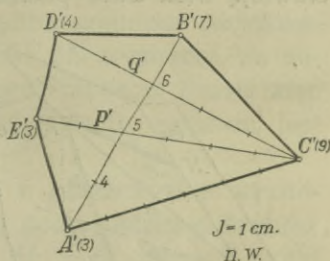
**27. Przenikanie się dwóch płaszczyzn.** Dwie płaszczyzny przenikają się w linii prostej, którą nazywamy krawędzią tych płaszczyzn. Ponieważ prostą wyznaczają dwa jej punkty, a krawędź jest prostą łączącą równocześnie na dwóch płaszczyznach — więc dwa punkty, leżące równocześnie na obu płaszczyznach, wyznaczają ich krawędź.

Dowolna płaszczyzna warstwowa przecina dwie płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  w dwóch warstwicach, których punkt przecięcia się leży równocześnie na obu płaszczyznach, a więc jest punktem szukanej krawędzi.



$J = 1 \text{ cm.}$   
n. w.

Rys. 47.



$J = 1 \text{ cm.}$   
n. w.

Rys. 46.

Krawędź dwóch płaszczyzn określić więc można jako miejsce geometryczne punktów przecięcia się linii warstwowych obu płaszczyzn, leżących w tych samych wysokościach, a więc na wspólnych płaszczyznach warstwowych (Rys. 47.). Punkt przecięcia się śladów poziomych obu płaszczyzn jest śladem poziomym  $Hk$  krawędzi, której rzut oznaczyliśmy literą  $k'$ .

**Przykłady. 1.** Obie płaszczyzny zamykają z poziomem jednokowe kąty. W tym przypadku rzut  $k'$  krawędzi jest dwusieczną kąta, jaki tworzą warstwicę danych

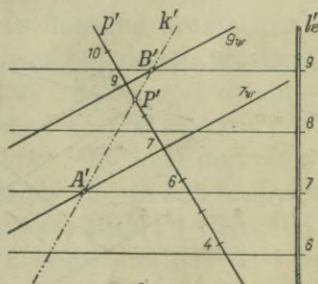




warstwic. Połączmy dwa punkty np.  $A_1'(1)$  i  $B_1'(2)$  prostej  $l'_\varepsilon$  z punktami  $A_2'$  i  $B_2'$  o tych samych cechach na prostej  $l'_\varphi$  — to, wskutek zachodzącej proporcjonalności odcinków, każda prosta, przechodząca przez punkt  $M$ , wyznacza na podziałkach  $l'_\varepsilon$  i  $l'_\varphi$  punkty o jednakowych cechach. Prosta więc  $k'$ , przechodząca przez punkt  $M$  i równoległa do warstwic, jest rzutem krawędzi płaszczyzn  $\varepsilon'$  i  $\varphi$ .

28. Punkt przebicia się prostej z płaszczyzną wyznaczamy w ten sposób, że przez prostą poprowadzimy dowolną płaszczyznę, znajdziemy krawędź tej pł. z pł. daną, a punkt przecięcia się tej krawędzi z daną prostą jest szukanym punktem.

Niechaj zestopniowana linia spadu  $l'_\varepsilon$  wyznacza pł.  $\varepsilon$ , a zestopniowana prosta  $p'$  prostą  $p$  (Rys. 50.). Dowolną płaszczyznę  $\psi$  przechodzącą przez prostą  $p$  wyznaczają dwie warstwie  $7_\psi$  i  $9_\psi$ . Prosta  $k' \equiv (A' B')$  jest rzutem krawędzi płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\psi$ , a punkt  $P'$  szukanym punktem przecięcia się prostej  $p$  z pł.  $\varepsilon$ .



J-1m.

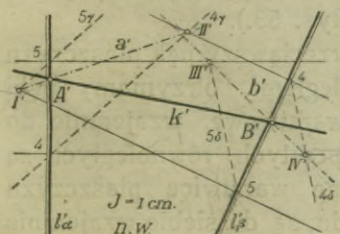
Podziałka 1:100.

Rys. 50.

29. Zadania. 1. Wyznaczyć rzut krawędzi dwóch płaszczyzn, których równoważnościowe warstwie przecinają się zewnątrz płaszczyzny rysunkowej.

Krawędź dwóch płaszczyzn określić także można jako miejsce geometryczne punktów przebicia się prostych jednej płaszczyzny z pł. drugą. Prosta więc, łącząca punkty przebicia się dwóch dowolnie obranych prostych na jednej pł. z pł. drugą, jest krawędzią owych płaszczyzn.

W naszym przykładzie (Rys. 51.), gdzie płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  wyznaczone są swojimi podziałkami nachylenia  $l'_\alpha$  i  $l'_\beta$ , znajdziemy rzut  $k'$  krawędzi, łącząc rzut  $A'$  punktu przebicia się linii  $l_\alpha$  z pł.  $\beta$  — z rzutem  $B'$  punktu przebicia się linii  $l_\beta$  z pł.  $\alpha$ .



J-1cm.

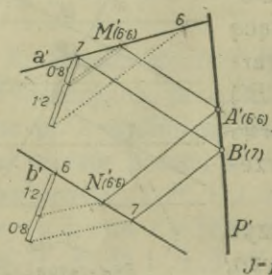
D.W.

Rys. 51.

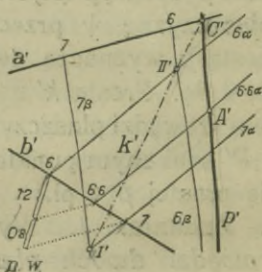
2. Wykreślić rzut prostej, przechodzącej przez punkt  $A$  ( $A'$ ,  $6'6$ ) i przecinającej dwie proste skośne  $a$  ( $a'$ ) i  $b$  ( $b'$ ).

Pierwszy sposób. Przez punkt  $A$  i prostą  $a$ , a następnie przez punkt  $A$  i prostą  $b$ , poprowadzimy płaszczyzny, których krawędź jest rozwiązaniem zadania.

Na prostych  $a'$  i  $b'$  (Rys. 52.) szukamy punktów  $M'$  i  $N'$  o cechach równych cesze punktu  $A$ , więc  $6'6$ . Prosta  $A'M'$  jest warstwicą pł. ( $A$ ,  $a$ ), prosta  $A'N'$  warstwicą pł. ( $A$ ,  $b$ ). Wyznaczymy punkt przecięcia się  $B'$  ( $7$ ) warstwic 7 obu płaszczyzn i połączymy go z punktem  $A'$  ( $6'6$ ) otrzymamy żądany rzut  $p'$  prostej  $p$ , przechodzącej przez dany punkt  $A$  i przecinającej dane proste  $a$  i  $b$ .



Rys. 52.



Rys. 53.

Drugi sposób. Przez punkt  $A$  i jedną z prostych poprowadzimy płaszczyznę  $\alpha$  i wyznaczmy punkt przebicia się drugiej prostej z tą pł., a prosta łącząca otrzymany punkt z punktem  $A$ , rozwiązuje zadanie (Rys. 53.).

30. **Płaszczyzny równoległe.** Przeciawszy pęk płaszczyzn warstwowych płaszczyznami równoległymi, otrzymamy pęk promieni równoległych, jako linie warstwowe, wzajemnie do siebie równoległe. Ponieważ rzuty prostych równoległych są do siebie równoległe, więc otrzymane warstwicę płaszczyzn równoległych, a więc i ich linie spadu, są do siebie wzajemnie równoległe. Z pojęcia płaszczyzn równoległych wynika, że ich moduły muszą być równe.

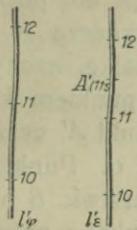
Stąd: równoległe, o zgodnym kierunku nachylenia i tym samym modułem zestopniowane linie spadu, wyznaczają płaszczyzny równoległe.



31. Zadania: 1. Wyznaczyć położenie pł.  $\varepsilon$ , przechodzącej przez punkt  $A(A', 11\cdot5)$ , a równoległej do pł.  $\varphi$ , której linia spadu  $l_\varphi$  jest dana (Rys. 54.).

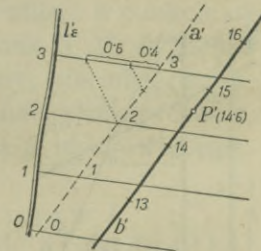
Linia  $l_\varepsilon \parallel l_\varphi$ , a poprowadzona przez punkt  $A'$ , zestopniowana modułem prostej  $l_\varphi$ , stanowi podziałkę nachylenia pł.  $\varepsilon$ , a więc płaszczyznę tę wyznacza.

2. Przez punkt  $P(P', 14\cdot6)$  poprowadzić prostą równoległą do pł.  $\varepsilon$ , wyznaczonej linią spadu  $l_\varepsilon$  (Rys. 55.).



J-1cm. n.w.

Rys. 54.

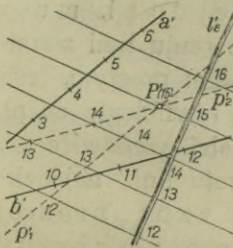


J-1cm n.w.

Rys. 55.

Na pł.  $\varepsilon$  przyjmijmy dowolną prostą  $a(a')$ , to  $b' \parallel a'$  zestopniowana modułem prostej  $a$ , jest rzutem prostej równoległej do prostej  $a$ , a więc także i do płaszczyzny  $\varepsilon$ .

3. Przez punkt  $P(P', 15)$  poprowadzić pł. równoległą do dwóch danych prostych skośnych  $a(a')$  i  $b(b')$  (Rys. 56.). Przez punkt  $P$  kreślimy proste  $p_1$  i  $p_2$  równoległe do  $a$  i  $b$ . Płaszczyzna, prostymi temi wyznaczona, jest równoległa do danych prostych;  $l_\varepsilon$  jest linią spadu tejże płaszczyzny.



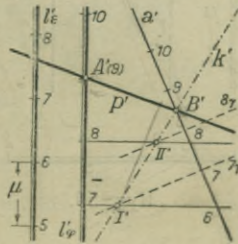
J-1cm. n.w.

Rys. 56.

4. Wyznaczyć prostą, przechodzącą przez dany punkt  $A(A', 9)$ , przecinającą daną prostą  $a(a')$  i równoległą do danej płaszczyzny  $\varepsilon$  ( $l_\varepsilon$ ).

1. Sposób. Szukana prosta łączy punkt  $A$  z punktem przecięcia się prostej  $a$  z płaszczyzną  $\varphi$ , przechodzącą przez punkt  $A$  równoległe do pł.  $\varepsilon$  (Rys. 57.). Prosta  $l_\varphi$ , wykreślona przez  $A'$  równoległe do  $l_\varepsilon$  i zestopniowana jej modułem  $\mu$ , wyznacza, jako podziałkę nachylenia, płaszczyznę  $\varphi$  równoległą do  $\varepsilon$  i przechodzącą przez punkt  $A$ . Punkt  $B'$  jest rzutem punktu przecięcia się prostej  $a$  z płaszczyzną  $\varphi$ ,

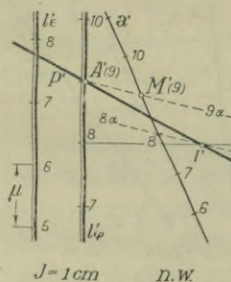
a prosta  $p' \equiv (A'B')$  rzutem prostej przechodzącej przez punkt  $A$ , przecinającej prostą  $a$  w punkcie  $B$  i równoległej do pł.  $\varepsilon$ .



J=1cm n.w.

Rys. 57.

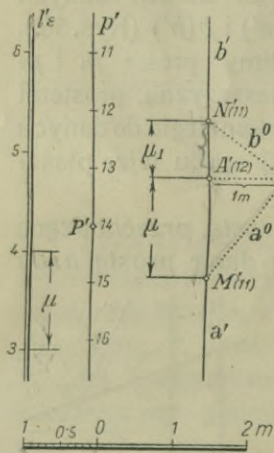
2. Sposób. Szukana prosta jest krawędzią płaszczyzny  $\alpha \equiv (A, a)$  i płaszczyzny  $\varphi$ , poprowadzonej przez punkt  $A$  równolegle do pł.  $\varepsilon$  (Rys. 58.). Płaszczyznę  $\varphi$  wyznacza — jak poprzednio — jej podziałka nachylenia  $l'_\varphi$ . Łącząc punkt  $A'$  z punktem  $M'$  prostej  $a'$  o tej samej co punkt  $A'$  cesze, otrzymamy warstwicę  $9\alpha$  pł.  $\alpha$ . Punkt  $A'$  i punkt przecięcia się warstwic  $8$  płaszczyzn  $\varphi$  i  $\alpha$  wyznaczają szukaną prostą  $p'$ .



Rys. 58.

32. Prosta prostopadła do płaszczyzny. Wiemy (ust. 23.), że prosta prostopadła do płaszczyzny jest prostopadłą do każdej prostej, leżącej na tej płaszczyźnie.

Ponieważ linie warstwowe płaszczyzny są równoległe do pł. rzutów, więc rzut prostej prostopadłej do pł. musi być prostopadły do warstwic (t. j. rzutu linii warstwowych), rzut kąta prostego jest bowiem kątem prostym, jeśli jedno jego ramię jest równoległe do pł. rzutów. Ponieważ dalej warstwicę pł. są prostopadłe do rzutu linii największego spadku, więc: rzut prostej prostopadłej do płaszczyzny jest równoległy do rzutu jej linii spadku.



Rys. 59.

Jeżeli podziałka nachylenia  $l'_\varepsilon$  (Rys. 59.) wyznacza położenie pł.  $\varepsilon$ , to prosta  $b'$ , przechodząca przez dany punkt  $A$  ( $A'$ , 12) równoległa do  $l'_\varepsilon$ , jest rzutem prostej  $b$ , prostopadłej do tej płaszczyzny. Jednak do wyznaczenia położenia prostej potrzebna jest znajomość jej modułu i kierunku nachylenia, które znajdziemy w sposób następujący. Wyobraźmy sobie, że prócz prostej  $b$ , poprowadziliśmy przez punkt  $A$  prostą  $a$ , równoległą do linii spadku pł.  $\varepsilon$ . Połóżmy następnie pł. poziomo-rzucającą, przechodzącą przez owe dwie, do siebie prostopadłe proste, wraz z temi prostymi na pł. warstwową w wysokości 11. W tym celu odmierzymy na prostopadłej w punkcie  $A'$  do prostej  $a'$



poprowadzonej jednostkę długości  $\overline{A'A^0} = 1\text{ m}$ , w podziałce rysunku. Jeżeli  $\overline{A'M'} = \mu$  jest modułem pł.  $\epsilon$ , to prosta  $A^0M'$  jest kładem  $a^0$  prostej  $a$ . Prostopadła  $b^0$ , wykreślona w punkcie  $A^0$  do  $a^0$ , jest kładem prostej  $b$ , przyczem odcinek  $\overline{A'N'}$  wyznacza jej moduł  $\mu_1$ . Jak z Rys. 59. wprost widzimy, kierunek nachylenia prostej  $b$  jest przeciwny kierunkowi nachylenia prostej  $a$ , a więc  $i$  przeciwny kierunkowi  $l_\epsilon$ , do której  $a$  jest równoległą.

Z trójkąta  $A^0N'M'$  czytamy:

$$\overline{A'A^0} : \mu = \mu_1 : \overline{A'A^0}, \text{ więc } \mu \cdot \mu_1 = 1$$

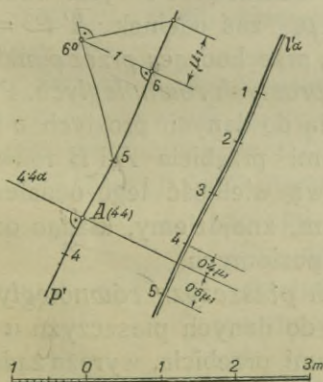
czyli  $\mu_1 = \frac{1}{\mu}$  t. zn., że: moduł prostej prostopadłej

do pł. jest odwrotnością modułu płaszczyny.

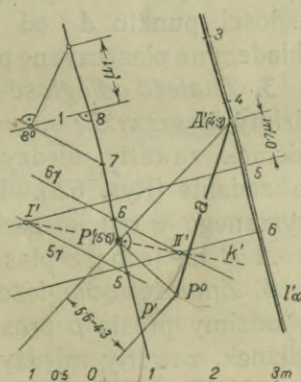
Tak tedy jeśli prosta jest  $\perp$  do pł. to:

1. jej rzut jest równoległy do rzutu linii spadu pł.,
2. jej kierunek nachylenia jest przeciwny kierunkowi nachylenia płaszczyny,
3. jej moduł jest odwrotnością modułu płaszczyny.

**33. Zadania:** 1. W punkcie  $A(A', 4'4)$  danej prostej  $p$  poprowadzić płaszczynę prostopadłą (Rys 60.). Znajdziemy moduł  $\mu_1$  szukanej płaszczyny  $\alpha$ , kreślimy prostą  $l'_\alpha \parallel p'$



Rys. 60.



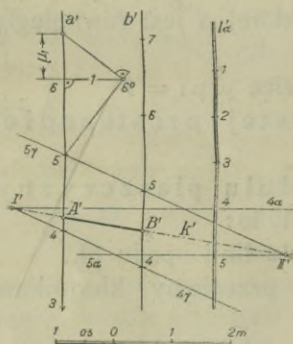
Rys. 61.

i warstwice  $4'4\alpha$  płaszczyny  $\alpha$ . Odmierzywszy  $0'4\mu_1$  i  $0'6\mu_1$ , jak to wskazuje Rys. 60., otrzymamy cechy 4 i 5 prostej  $l'_\alpha$ , a więc podziałkę nachylenia płaszczyny  $\alpha$ .

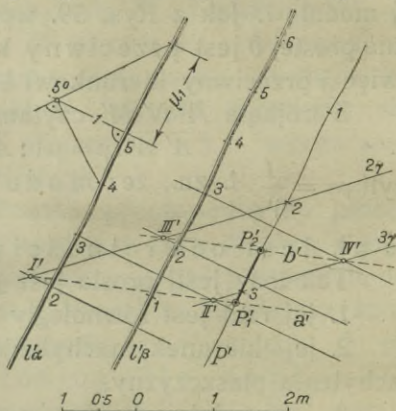
2. Wyznaczyć odległość punktu  $A(A', 4'3)$  od prostej  $p(p')$  (Rys. 61.). Przez punkt  $A$  poprowadzimy płaszczynę  $\alpha$

prostopadłą do prostej  $p$  i znajdziemy punkt przecięcia  $P$ . Odcinek  $\overline{AP}$  rozwiązuje zadanie.

Rzut  $l'_\alpha$ , linii spadu  $l_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , będzie równoległy do  $p'$ , a jego zestopniowanie przeprowadzimy jak w Rys. 60.



Rys. 62.



Rys. 63.

Prosta  $p$  przebija płaszczyznę  $\alpha$  w punkcie  $P$  ( $P'$ , 5·6), który otrzymaliśmy w znany sposób. Odcinek  $\overline{A'P'}$  jest rzutem odległości punktu  $A$  od prostej  $p$ , zaś odcinek  $\overline{A'P^0} = a$  jej kładem na płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez punkt  $A$ .

3. Znaleźć odległość dwóch prostych równoległych. Prowadzimy płaszczyznę  $\alpha$ , prostopadłą do danych prostych  $a$  i  $b$ , a odcinek zawarty między punktami przecięcia  $A$  i  $B$  rozwiązuje zadanie (Rys. 62.). Prawdziwą wielkość tego oddalenia, otrzymanego w rzucie cechowanym, znajdziemy, kładąc odcinek  $\overline{AB}$  na jedną z płaszczyzn poziomych.

4. Znaleźć odległość dwóch płaszczyzn równoległych. Prowadzimy prostą  $p$  prostopadłą do danych płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , a odcinek, zawarty między punktami przecięcia, wyraża żądaną odległość (Rys. 63.).

## § 2. ZASADY RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA DWIE PŁASZCZYZNY

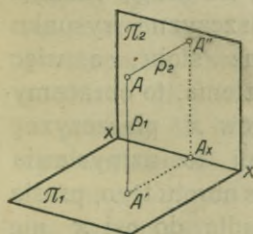
34. Rzuty punktów. Rozważania, przeprowadzone w § 1, opierały się na wyznaczeniu położenia punktu w przestrzeni zapomocą jego rzutu i cechy, t. j. liczby wyrażającej odległość danego punktu od rzutni. Rzutem towarzyszyły tam zawsze



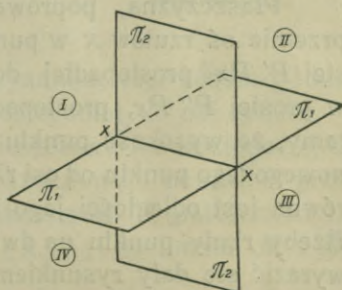
liczby, a przeprowadzenie zadań wymaga znajomości podziałki, w której rysunek jest wykonany. Od cechy punktu uwolnimy się, jeśli jego położenie ustalimy w odniesieniu do drugiej płaszczyzny rzutów, na której zaznaczymy w formie odcinka wysokość danego punktu. Tę nową płaszczyznę rzutów przyjmujemy z reguły prostopadle do pierwszej i nazywamy płaszczyzną pionową rzutów, albo krótko rzutnią pionową. Przez wprowadzenie drugiej płaszczyzny rzutów, otrzymaną metodę geometrii wykreślnej nazywać będziemy od jej twórcy metodą Monge'a. (Gaspard Monge, znakomity matematyk francuski, twórca geometrii wykreślnej, jako nauki, ur. 10. maja 1746, um. 28. lipca 1818 w Paryżu).

Rzutnia pionowa  $\pi_2$  przecina rzutnię poziomą  $\pi_1$  wzdłuż prostej  $x$ , którą zwiemy osią rzutów. Obie rzutnie dzielą przestrzeń na cztery obszary, których następstwo oznaczone jest liczbami I, II, III i IV na Rys. 64. Oś rzutów dzieli każdą z rzutni na dwie części. Mówić więc będziemy o rzutni poziomej przed i za osią  $x$ , o rzutni pionowej nad i pod osią  $x$ .

Przyjmijmy dowolny punkt  $A$ , leżący w pierwszej części przestrzeni i wyznaczmy rzut  $A'$  (czytaj  $\bar{A}$  z kreską) tego punktu na płaszczyznę  $\pi_1$  i rzut  $A''$



Rys. 65.



Rys. 64.

(czytaj  $\bar{A}$  z dwiema) na płaszczyznę  $\pi_2$  (Rys. 65.). Rzuty  $A'$  i  $A''$  wyznaczają w sposób jednoznaczny położenie punktu  $A$  w przestrzeni, na odwrót bowiem proste  $p_1$  i  $p_2$ , prostopadłe w punktach  $A'$  i  $A''$  do płaszczyzn  $\pi_1$  i  $\pi_2$ , przecinają się w punkcie  $A$ . Punkt  $A'$  nazywamy rzutem poziomym, punkt  $A''$  rzutem pionowym punktu  $A$ . Jeśli napiszemy:  $A(A'A'')$  to symbol ten

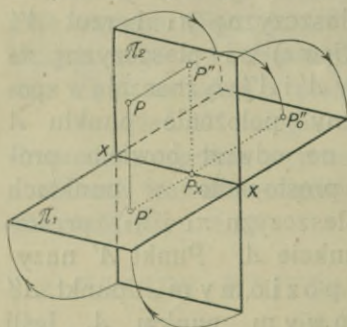
rozumieć należy w ten sposób, że punkt  $A$  wyznaczony jest swoim rzutem poziomym  $A'$  i pionowym  $A''$ .

Odległość punktu  $A$  od płaszczyzny poziomej rzutów, równą odcinkowi  $\overline{AA''}$ , nazwalimy *wysokością*, odległość

zaś od płaszczyzny pionowej, wyrażoną odcinkiem  $\overline{AA''}$ , nazwiemy *głębokością* punktu  $A$ .

Ażeby określić obszar przestrzeni, w której znajduje się punkt, zachodzi potrzeba względnego oznaczenia wysokości i głębokości punktu. Przyjmujemy więc, że wysokość wszystkich punktów, znajdujących się nad płaszczyzną poziomą rzutów, jest dodatna, zaś punktów, znajdujących się pod rzutnią poziomą — więc w części III i IV — jest ujemna. Głębokość punktów leżących przed rzutnią pionową, a więc w I i IV części przestrzeni, uważamy na dodatnią, punkty za rzutnią pionową, t. j. w obszarach II i III, mają głębokość ujemną. Przez uwzględnienie znaków przy odległościach punktów od rzutni, wyznaczamy położenie tych punktów w odpowiednich częściach przestrzeni.

Płaszczyzna, poprowadzona przez proste  $PP'$  i  $PP''$ , przetnie oś rzutów  $x$  w punkcie  $P_x$ , rzutnię poziomą  $\pi_1$  w prostej  $P'P_x$  prostopadłej do osi  $x$ , zaś rzutnię pionową  $\pi_2$  w prostej  $P''P_x$ , prostopadłej do tejże osi  $x$ . Z Rys. 66. czytamy, że wysokość punktu  $P$  równa się odległości rzutu pionowego tego punktu od osi rzutów, zaś głębokość tegoż punktu  $P$  równa jest odległości jego rzutu poziomego  $P'$  od osi rzutów  $x$ . Ażeby rzuty punktu na dwie prostopadłe do siebie płaszczyzny wyrazić się dały rysunkiem na jednej płaszczyźnie rysunkowej, więc na tablicy lub papierze, postępujemy w ten sposób, że jedną z tych płaszczyzn rzutów obracamy około osi  $x$  tak, aż padnie, wraz ze znajdującym się



Rys. 66.

na niej rzutem, na drugą rzutnię.

Jeżeli płaszczyznę rysunku jest płaszczyzna stołu, a więc płaszczyzna pozioma, to obracamy około osi rzutów  $x$  płaszczyznę pionową  $\pi_2$ , jak to uzmysławia Rys. 66. Podczas obrotu tego, prosta  $P''P_x$  prostopadła do osi  $x$  nie zmienia swego położenia na rzutni  $\pi_2$  — gdy więc rzutnia  $\pi_2$  padnie na rzutnię  $\pi_1$ , prosta

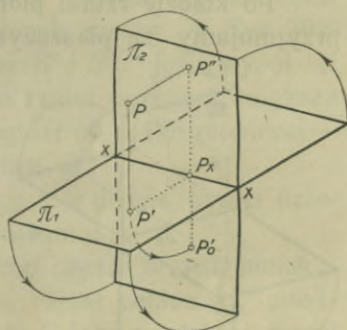
$P''_0P_x$  pozostanie prostopadłą do osi rzutów  $x$ . Ponieważ jednak prosta  $P'P_x$  jest również prostopadłą do osi rzutów —



po dokonanych więc obrocie rzutni  $\pi_2$  prosta  $P_0'' P_x$  zjedzie się z prostą  $P' P_x$ , stanowiąc jej przedłużenie.

Jeżeli płaszczyzną rysunku jest płaszczyzna tablicy, a więc płaszczyzna pionowa, to płaszczyznę tę pozostawiamy nieruchomą, obracamy zaś około osi rzutów  $x$  rzutnię poziomą  $\pi_1$  tak, aby jej część przednia padła na dolną część rzutni pionowej (Rys. 67.). Rzut poziomy  $P'$  punktu  $P$  zajmie położenie oznaczone literą  $P_0'$ , przy czym prosta  $P_0' P_x$  stanowić będzie przedłużenie prostej  $P' P_x$ , prostopadłej do osi rzutów  $x$ .

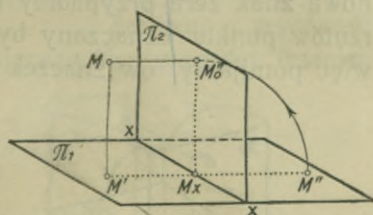
Rys. 67.



Tak więc po sprowadzeniu płaszczyzn rzutów do jednej płaszczyzny, będącej płaszczyzną rysunku, rzut poziomy i rzut pionowy punktu leżą na prostej prostopadłej do osi rzutów.

I odwrotnie: dwa punkty, umieszczone na prostopadłej do osi rzutów, są rzutami pewnego, oznaczonego punktu w przestrzeni. Jeżeli bowiem  $M'$  i  $M''$  są rzutami punktu, umieszczonymi na prostopadłej do osi rzutów  $x$  — to prosta  $M'' M_x$

(Rys. 68.), pozostając stale na płaszczyźnie prostopadłej w punkcie  $M_x$  do osi rzutów, zajmie, po podniesieniu płaszczyzny pionowej w jej pierwotne położenie, miejsce  $M_0'' M_x$ . Prostopadłe, poprowadzone w punktach  $M'$  i  $M_0''$ , przetną się w punkcie  $M$ , którego rzutami, sprowadzonymi na płaszczyznę



Rys. 68.

rysunku, są punkty  $M'$  i  $M''$ . Z powyższego wynika też wprost, że dwa punkty, nie leżące na jednej prostopadłej do osi rzutów, nie mogą być rzutami jednego punktu przestrzeni.

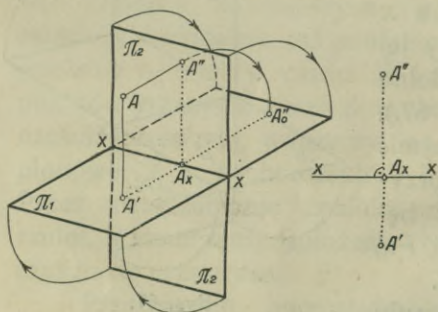
Każdą prostą prostopadłą do osi rzutów, łączącą dwa rzuty tego samego punktu, nazywać będziemy prostą odnoszącą albo wprost odnoszącą.

**35. Różne położenia punktu w przestrzeni.** Ponieważ dwie rzutnie dzielą przestrzeń na cztery części, więc mówić

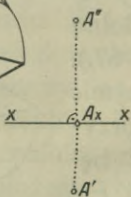
możemy o punkcie, znajdującym się w pierwszym, drugim, trzecim lub czwartym obszarze przestrzeni.

a) Punkt leży w pierwszym obszarze (Rys. 69a.).

Po kładzie rzutni pionowej na płaszczyznę poziomą, którą przyjmujemy za płaszczyznę rysunku, rzuty punktu  $A$  leżą



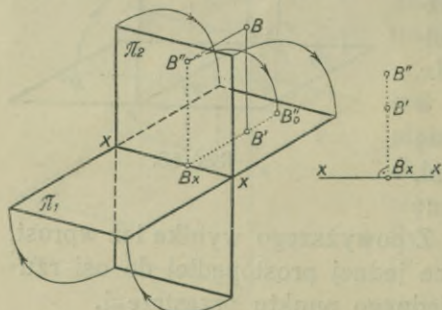
Rys. 69 a.



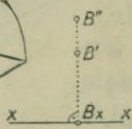
Rys. 69 b.

po obu stronach osi rzutów, w szczególności, rzut poziomy  $A'$  leży pod osią  $x$ , rzut pionowy  $A''$  nad osią  $x$  (Rys. 69 b.). Dotąd oznaczaliśmy rzuty punktu mianem tego punktu, więc dużą literą alfabetu i kreską umieszczoną u góry tej litery, gdy chodziło o rzut poziomy, dwiema kreskami, gdy wyraża-

liśmy rzut pionowy. Rzut punktu sprowadzony na rzutnię, będącą płaszczyzną rysunku, otrzymywał u dołu znak małego zera. (Rys. 66, 67, 68, 69 a.). Z tego też powodu winien być oznaczony rzut pionowy (Rys. 69 b.) punktu  $A$  znakiem  $A_0''$ . Jeśli jednak zauważymy, że przez kład rzutni poziomej na pionową znak zera przypadłby literze  $A'$  — że więc każdy z obu rzutów punktu oznaczony być może u dołu znacznikiem zera, więc pomijamy ów znaczek i oznaczamy rzuty punktu na



Rys. 70 a.



Rys. 70 b.

rysunku jedynie kreskami. Rzut poziomy otrzymuje jedną, rzut pionowy dwie kreski. Znak  $A'$ , czytany  $A$  z kreską, wyraża rzut poziomy, znak  $A''$ , czytany  $A$  z dwiema, określa rzut pionowy punktu  $A$ .

Odcinek  $A'' Ax$  (Rys. 69 a i b.) równy jest odległości punktu  $A$  od płaszczyzny poziomej, przed-

stawia więc wysokość tego punktu; odcinek  $A' Ax$  równy jest odległości punktu  $A$  od rzutni pionowej, jest więc jego głębokością.

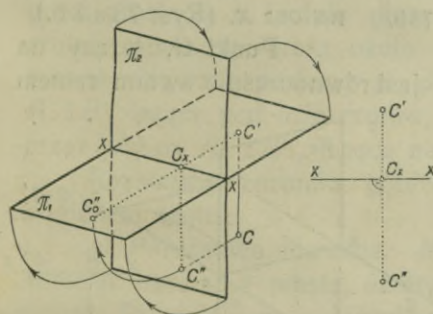


b) Punkt leży w drugim obszarze przestrzeni.

W tym wypadku rzut poziomy  $B'$  punktu  $B$  znajduje się na tylnej części rzutni poziomej; — po obróceniu rzutni pionowej oba rzuty  $B'$  i  $B_0''$  (Rys. 70 a.) znajdą się po jednej stronie osi rzutów, a mianowicie nad osią rzutów. W Rys. 70 b. rzuty punktu  $B$  oznaczyliśmy przez  $B'$  i  $B''$ . Jeśli wysokość punktu  $B$ , a więc jego odległość od rzutni poziomej, większa jest, aniżeli jego głębokość, czyli odległość od rzutni pionowej — to punkt  $B''$  leżeć będzie nad punktem  $B'$ .

Wysokość punktu znajdującego się w drugiej części przestrzeni jest dodatna, głębokość zaś ujemną.

c) Punkt znajduje się w trzeciej części przestrzeni.



Rys. 71 a.

Rys. 71 b.

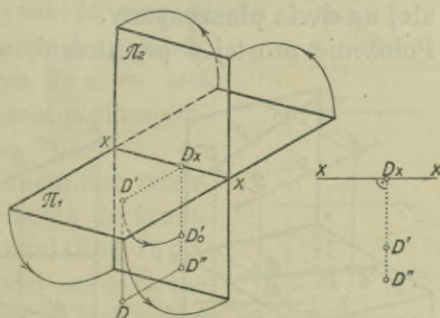
Rzut poziomy  $C'$  punktu  $C$  leży na tylnej części rzutni poziomej, rzut pionowy  $C''$  na dolnej części rzutni pionowej (Rys. 71 a.).

Po sprowadzeniu obu rzutni do jednej płaszczyzny, rzut poziomy leżeć będzie nad osią rzutów, rzut zaś pionowy pod osią rzutów  $x$  (Rys. 71 b.).

Zarówno wysokość jak i głębokość punktu, znajdującego się w części trzeciej, są ujemne.

d) Punkt przynależy do czwartego obszaru.

Rzut poziomy  $D'$  punktu  $D$  leży na przedniej części rzutni poziomej; rzut pionowy, podobnie jak w przypadku poprzednim, na dolnej części rzutni pionowej (Rys. 72 a.). Po sprowadzeniu obu rzutni do jednej płaszczyzny, oba rzuty leżeć będą pod osią  $x$  (Rys. 72 b.).



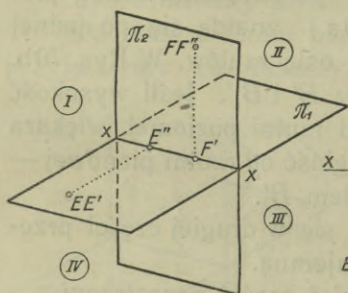
Rys. 72 a.

Rys. 72 b.

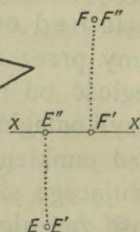
Wysokość punktu, znajdującego się w czwartej części przestrzeni, jest ujemna, jego głębokość natomiast dodatna.

## e) Punkty leżące na rzutniach.

Gdy punkt  $E$  leży na przedniej części rzutni poziomej, to z nim schodzi się równocześnie jego rzut poziomy  $E'$ , zaś rzut pionowy  $E''$  leży na osi rzutów (Rys. 73 a i b.).



Rys. 73 a.



Rys. 73 b.

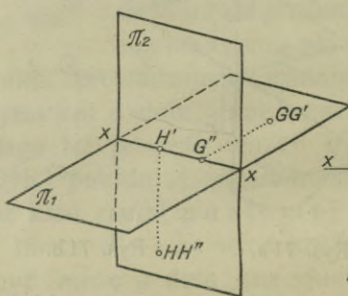
Rzut pionowy  $F''$  punktu  $F$ , leżącego na górnej części rzutni pionowej, schodzi się z punktem  $F$ , rzut zaś poziomy  $F'$  leży na osi  $x$ . (Rys. 73 a i b.).

Punkt  $G$ , leżący na tylnej części rzutni poziomej, jest równocześnie swoim rzutem poziomym; jego rzut pionowy znajduje się na osi  $x$  (Rys. 74 a i b.).

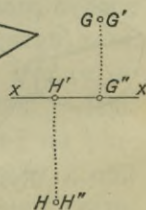
Punkt  $H$ , leżący na dolnej części rzutni pionowej, jest równocześnie swoim rzutem pionowym; jego rzut poziomy leży na osi rzutów (Rys. 74 a i b.).

## 36. Rzuty i ślady prostej na dwie płaszczyzny.

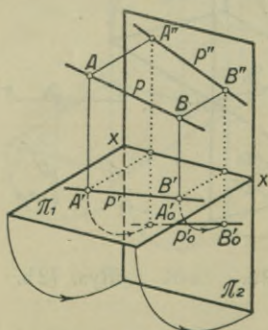
Położenie prostej w przestrzeni, w odniesieniu do dwóch płaszczyzn rzutów, wyznaczone jest rzutami tej prostej na te płaszczyzny, a jak z ust. 11. wiadomo, rzut prostej na płaszczyznę jest linią prostą. Jeżeli punkty  $A$  i  $B$  wyznaczają prostą  $p$  — (Rys. 75 a.), a punkty  $A'$  i  $B'$  są rzutami poziomymi tych punktów — to prosta  $p'$  (czytaj  $p$  z kreską), wyznaczona punktami  $A'$  i  $B'$  i leżąca na rzutni poziomej, jest rzutem poziomym prostej  $p$ .



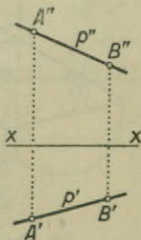
Rys. 74 a.



Rys. 74 b.



Rys. 75 a.



Rys. 75 b.



Prosta  $p''$  (czytaj  $p$  z dwiema), łącząca rzuty pionowe  $A''$  i  $B''$  punktów  $A$  i  $B$ , jest rzutem pionowym prostej  $p$ . Mając rzuty  $p'$  i  $p''$  prostej  $p$ , odtworzymy tę prostą w przestrzeni, jeśli przez prostą  $p'$  poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do rzutni poziomej t. zw. płaszczyznę poziomorzucającą (patrz ust. 11.), a przez prostą  $p''$  płaszczyznę prostopadłą do rzutni pionowej, czyli t. zw. płaszczyznę pionoworzucającą. Prosta przecięcia się obu płaszczyzn jest prostą  $p$ . Nawzajem: rzut poziomy  $p'$  prostej  $p$  określić można jako przecięcie się płaszczyzny poziomo rzucającej, poprowadzonej przez tę prostą, z rzutnią poziomą, a rzut pionowy  $p''$  jako prostą powstałą z przecięcia się płaszczyzny pionowo rzucającej, przechodzącej przez prostą  $p$ , z rzutnią pionową. — Po sprowadzeniu obu rzutni, zapomocą obrotu około osi rzutów  $x$ , do płaszczyzny rysunkowej, rzut poziomy  $p'$  prostej  $p$  łączyć będzie punkty  $A'$  i  $B'$ , leżące pod osią rzutów, a rzut pionowy  $p''$  przejdzie przez punkty  $A''$  i  $B''$ , leżące nad osią rzutów  $x$  — Rys. 75 b.

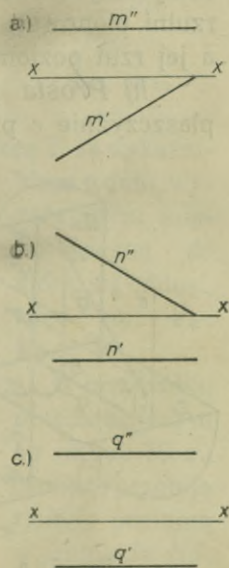
Rozważmy rozmaite położenia prostej względem rzutni.

a) *Położenie dowolne.* Mianem tem określać będziemy proste, nachylone do obu rzutni. Przy takim położeniu prostej oba jej rzuty przecinają oś  $x$ . (Rys. 75 a i b.)

b) *Prosta pozioma.* Tak nazywać będziemy prostą równoległą do rzutni poziomej, a nachyloną do pionowej. „Wysokość“ wszystkich punktów takiej prostej jest jednakowa, jej rzut pionowy  $m''$  — Rys. 76 a. — jest równoległy do osi rzutów, a rzut poziomy  $m'$  oś tę przecina.

c) *Prosta czołowa.* Mianem tem oznaczać będziemy prostą, równoległą do rzutni pionowej a nachyloną do poziomej (Rys. 76 b.). Wszystkie punkty takiej prostej mają tę samą „głębokość“; rzut poziomy  $n'$  jest wobec tego równoległy do osi  $x$ , a rzut pionowy przecina tę oś.

d) *Prosta równoległa do osi rzutów.* Oba jej rzuty są równoległe do osi rzutów  $x$  (Rys. 76 c.).

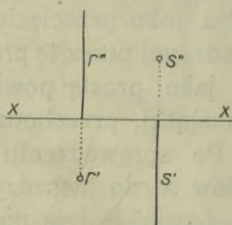


Ryc. 76 a—c.

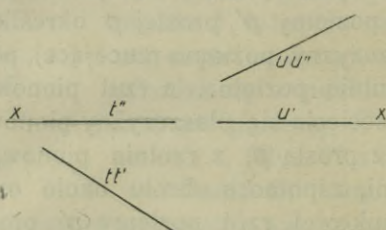
e) *Prosta pionowa*, czyli prostopadła do rzutni poziomej (Rys. 77 a.). Rzut poziomy takiej prostej jest punktem, rzut pionowy prostopadłą do osi rzutów.

f) *Prosta prostopadła do rzutni pionowej*. Rzut pionowy  $s''$  tak położonej prostej jest punktem — Rys. 77 a. — rzut poziomy  $s'$  prostopadłą do osi rzutów.

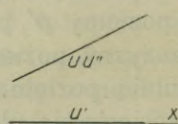
g) *Prosta leży na jednej z rzutni*. Rzut poziomy prostej  $t$ , leżącej na rzutni poziomej, schodzi się z tą prostą, rzut pio-



Rys. 77 a.



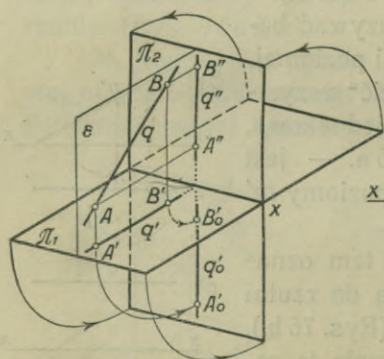
Rys. 77 b.



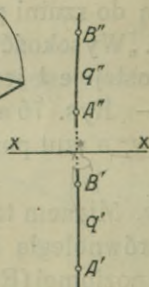
Rys. 77 c.

nowy leży na osi rzutów — Rys. 77 b. Gdy prosta  $u$  leży na rzutni pionowej, to schodzi się ze swoim rzutem pionowym, a jej rzut poziomy leży na osi  $x$  — Rys. 77 c.

h) *Prosta prostopadła do osi rzutów*, czyli leżąca na płaszczyźnie  $\varepsilon$  prostopadłej do osi rzutów — Rys. 78 a i b.



Rys. 78 a.



Rys. 78 b.

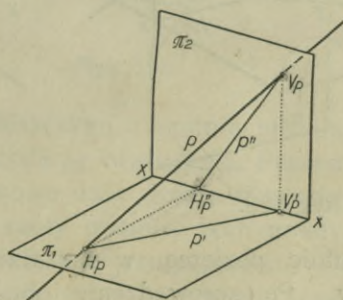
Rzuty  $q'$  i  $q''$  takiej prostej są prostopadłe do osi rzutów i nie wyznaczają położenia prostej  $q$  w przestrzeni; wszystkie bowiem proste, leżące na płaszczyźnie  $\varepsilon$ , mają te same rzuty, a mianowicie  $q'$  i  $q''$ . Do wyznaczenia położenia prostej prostopadłej do osi rzutów,

potrzebna jest znajomość rzutów dwóch punktów tej prostej. We wszystkich położeniach prostej dwa jej rzuty położenie to wyznaczają, z jedynym wyjątkiem prostej prostopadłej do osi rzutów, gdzie potrzebna jest znajomość rzutów

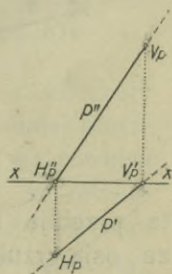


dwóch punktów prostej. Aby zaznaczyć, że wzięta pod uwagę prosta np.  $p$  wyznaczona jest, w odniesieniu do dwóch płaszczyzn rzutów, swoimi rzutami, używać będziemy symbolu:  $p(p' p'')$ , w odróżnieniu od przypadku, gdzie prostą wyznaczają dwa jej punkty, co wyrażamy znakiem tożsamości, pisząc np.  $m \equiv (A, B)$ .

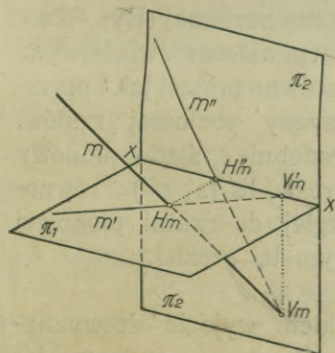
**Ślady prostej.** Wiadomo z ust. 14., że punkt leżący równocześnie na prostej i na rzutni, a więc punkt przecięcia się prostej z płaszczyzną rzutów, nazywa się śladem prostej. W odniesieniu do dwóch płaszczyzn rzutów, mówić będziemy o śladach poziomych i oznaczać je stale literą  $H$  ze wskaźnikami u dołu, wyrażającymi proste, do których się odnoszą, więc np.  $H_a, H_b \dots H_p$  i o śladach pionowych, t. j. punktach, w których proste przebijają rzutnię pionową. Te ostatnie oznaczamy literą  $V$  ze wskaźnikiem u dołu, wyrażającym miano prostej, do której się odnosi, więc np.  $V_a, V_b \dots V_p$ .



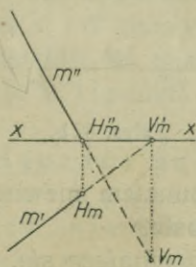
Rys. 79.a.



Rys. 79.b.



Rys. 80.a.



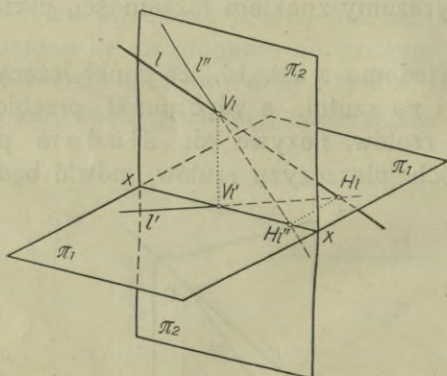
Rys. 80.b.

w punkcie  $V_p$ . Rzut pionowy  $H_p''$  śladu poziomego  $H_p$  leży na osi rzutów, podobnie jak rzut poziomy  $V_p'$  śladu pionowego  $V_p$ .

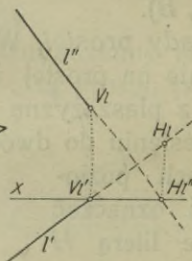
Rys 80 a. uzmysławia takie położenie prostej, w którym prosta przebija rzutnię pionową, leżącą poniżej osi rzutów  $x$ .

Ślad pionowy prostej  $m$  leży pod osią  $x$ , jego rzut poziomy na osi. Po sprowadzeniu obu rzutni do płaszczyzny rysunkowej otrzymamy Rys. 80 b.

Przy położeniu prostej  $l$ , podanem na Rys. 81 a., prosta

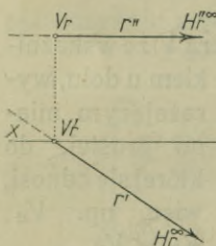


Rys. 81 a.

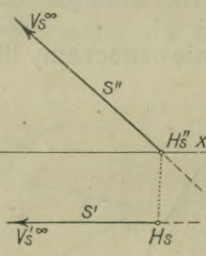


Rys. 81 b.

ta przebija rzutnię poziomą w obszarze, rozciągającym się za osią rzutów. Po sprowadzeniu obu rzutni do płaszczyzny rysunku, ślad poziomy  $H_l$  prostej  $l$  leży nad osią  $x$  (Rys. 81 b.).



Rys. 82 a.



Rys. 82 b.

Ślad poziomy prostej  $r$  ( $r'$   $r''$ ) równoległej do rzutni poziomej (Rys. 82 a.) jest punktem niewłaściwym zarówno prostej jak i płaszczyzny poziomej rzutów. Podobnie ślad pionowy prostej  $s$  ( $s'$   $s''$ ) równoległej do rzutni pionowej

(Rys. 82 b.) jest punktem niewłaściwym tej prostej.

### 37. Dwie proste.

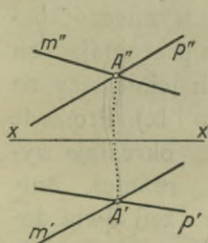
1. *Proste przecinające się.* Punktem wyjścia do wyznaczenia rzutów tych prostych jest pewnik, że proste te posiadają jeden punkt wspólny. Rysujemy rzuty  $m'$  i  $m''$  prostej  $m$ , na niej przyjmujemy dowolny punkt  $A$  ( $A'$ ,  $A''$ ), przez który prowadzimy prostą  $p$  ( $p'$   $p''$ ) przecinającą prostą  $m$  (Rys. 83 a.).

Jeżeli więc punkt przecięcia się rzutów poziomych dwóch prostych leży na wspólnej odnośnej z punktem przecięcia się

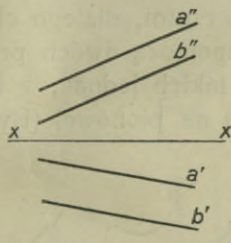


rzutów pionowych tychże samych prostych — to proste rzutami wyznaczone przecinają się.

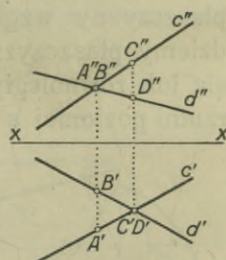
2. *Proste równoległe.* Ponieważ płaszczyzny, rzucające poziomo dwie proste równoległe, są równoległe, więc proste



Rys. 83 a.



Rys. 83 b.



Rys. 83 c.

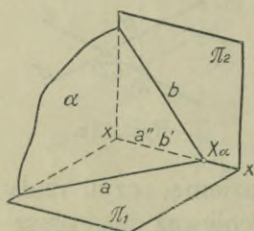
przecięcia się tych płaszczyzn z rzutnią poziomą, czyli rzuty poziome danych prostych są równoległe. Ponieważ dalej płaszczyzny, rzucające pionowo dwie proste równoległe, są również równoległe — więc i rzuty pionowe tych prostych są równoległe (Rys. 83 b.). Jeżeli tedy rzuty poziome i rzuty pionowe dwóch prostych są równoległe — to proste, rzutami tymi wyznaczone, są równoległe.

3. *Proste skośne.* Rzuty dwóch prostych skośnych podaje Rys. 83 c. W punkcie przecięcia się rzutów pionowych  $c''$  i  $d''$  prostych  $c$  i  $d$  schodzą się rzuty pionowe dwóch punktów: punktu  $A$  ( $A' A''$ ), leżącego na prostej  $c$  ( $c' c''$ ) i punktu  $B$  ( $B' B''$ ), leżącego na prostej  $d$  ( $d' d''$ ). Podobnie w punkcie przecięcia się rzutów poziomych  $c'$  i  $d'$  prostych  $c$  i  $d$  schodzą się rzuty poziome dwóch punktów, a mianowicie: punktu  $C$  ( $C' C''$ ), leżącego na prostej  $c$  ( $c' c''$ ) i punktu  $D$  ( $D' D''$ ), leżącego na prostej  $d$  ( $d' d''$ ).

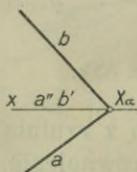
Jeżeli tedy prosta, łącząca punkt przecięcia się rzutów poziomych z punktem przecięcia się rzutów pionowych, nie jest prostopadłą do osi rzutów — to proste rzutami wyznaczone są skośne.

38. *O płaszczyźnie i jej śladach.* Wiadomo z ust. 22., że dwie proste przecinające się lub równoległe, prosta i punkt, względnie trzy punkty wyznaczają płaszczyznę. Znając więc rzuty tych elementów, przyjętych na płaszczyźnie, znamy położenie samej płaszczyzny, t. zn. potrafimy określić położenie

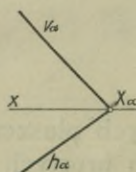
dowolnych dalszych punktów i prostych, leżących na tej płaszczyźnie. Ponieważ jednak rzuty trzech punktów, względnie dwóch dowolnie na płaszczyźnie przyjętych prostych, nie pozwalają na szybkie odtworzenie i uzmysłowienie położenia tej płaszczyzny względem rzutni, dlatego chętnie wyznaczać będziemy płaszczyzny zapomocą dwóch prostych przecinających się lub równoległych, takich jednak, z których jedna leży na rzutni poziomej a druga na pionowej (Rys. 84 a i b.). Proste te



Rys. 84 a.



Rys. 84 b.



Rys. 84 c.

określają wyraźniej, aniżeli dwie dowolne proste przecinające się lub równoległe, położenie płaszczyzny w przestrzeni i zwą

się jej śladami, gdyż uważać je można za proste przecięcia się (analogia ze „śladem“ prostej!) danej płaszczyzny z rzutniami.

Prostą  $a$  ( $a''$ ) — Rys. 84 a i b. — leżącą na rzutni poziomej, nazywamy śladem poziomym, prostą zaś  $b$  ( $b'$ ), leżąca na rzutni pionowej, śladem pionowym płaszczyzny  $\alpha$ , wyznaczonej temi prostymi. Dla uproszczenia, a raczej celem lepszego orientowania się w rysunku, oznaczać będziemy stale ślady poziome płaszczyzn — dla analogii ze śladami prostych — małą literą „ $h$ “ z grecką literą alfabetu, określającą płaszczyznę, jako wskaźnikiem u dołu. Ślady pionowe płaszczyzn oznaczane będą małą literą „ $v$ “ z odnośną literą alfabetu greckiego (Rys. 84 c.). Symbolem  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) zastępować będziemy zdanie: „płaszczyzna  $\alpha$ , której ślad poziomy  $h_\alpha$  i ślad pionowy  $v_\alpha$  są dane“. Punkt przecięcia się obu śladów, leżący na osi rzutów, oznaczamy literą „ $X$ “ ze wskaźnikiem, będącym mianem płaszczyzny, więc w przypadku przedstawionym na Rys. 84 c.  $X_\alpha$ .

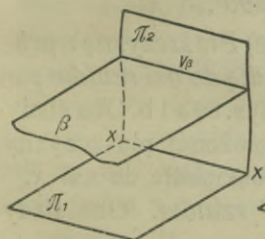
Omówimy z kolei rozmaite położenia płaszczyzn względem rzutni.

a) *Płaszczyzna dowolna.* Jeżeli płaszczyzna — jak to widzimy na Rys. 84 a, b, c., nachylona jest do obu rzutni — to

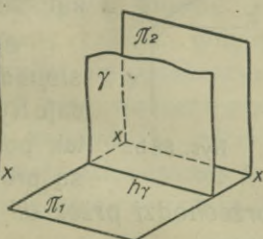


takie położenie określamy mianem „dowolne“. W tym przypadku oba ślady przecinają się na osi rzutów w punkcie właściwym i oba nachylone są pod kątami  $\geq 90^\circ$ .

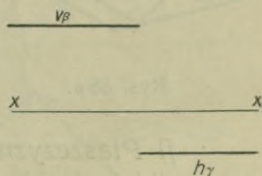
b) *Płaszczyzna równoległa do jednej z rzutni.* Ślad pionowy  $v_\beta$ , płaszczyzny  $\beta$  równoległej do rzutni poziomej, jest



Rys. 85 a.



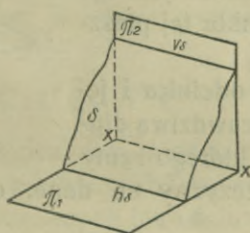
Rys. 85 b.



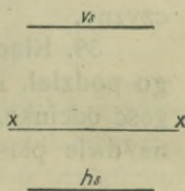
Rys. 85 c.

równoległy do osi  $x$ ; jej ślad poziomy jest prostą niewłaściwą (ust. 7.) rzutni poziomej (Rys. 85 a). Ślad poziomy  $h_\gamma$ , płaszczyzny  $\gamma$ , równoległej do rzutni pionowej, jest równoległy do osi  $x$ ; ślad pionowy leży w odległości nieograniczenie dalekiej.

c) *Płaszczyzna równoległa do osi rzutów* przecina obie rzutnie wzdłuż prostych, śladów, równoległych do tej osi. (Rys. 86 a i b).

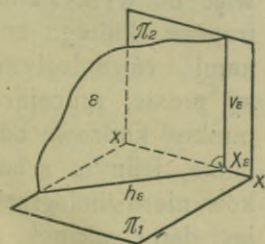


Rys. 86 a.

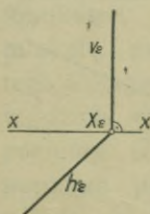


Rys. 86 b.

d) *Płaszczyzny rzucające.* Mianem tem określiliśmy (ust. 36.) płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzn rzutów. Ślad pionowy  $v_\epsilon$  płaszczyzny  $\epsilon$ , prostopadłej do rzutni poziomej, więc płaszczyzny poziomo rzucającej (Rys. 87 a i b), jest prostopadły, a ślad poziomy  $h_\epsilon$  nachylony do osi rzutów.

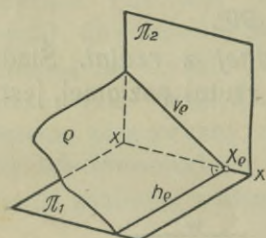


Rys. 87 a.

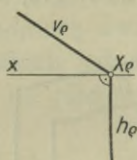


Rys. 87 b.

Rys. 88 a uzmysławia płaszczyznę pionowo rzucającą,



Rys. 88 a.

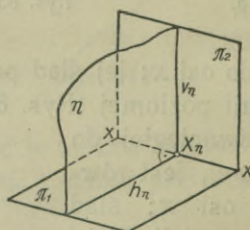


Rys. 88 b.

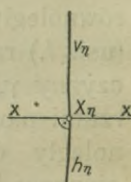
a Rys. 88 b podaje jej obraz w rzutach prostokątnych. Ślad poziomy jest prostopadły do osi  $x$ , ślad pionowy zawiera z nią kąt  $\geq 90^\circ$ .

e) Płaszczyznę  $\eta$  prostopadłą do osi rzutów podaje Rys. 89 a i b. Oba ślady tak położonej płaszczyzny są prostopadłe do osi  $x$ .

f) Płaszczyzna przechodzi przez oś rzutów. Oba ślady wszystkich płaszczyzn przechodzących przez oś  $x$ , schodzą się z tą osią. Do wyznaczenia położenia jednej z tych płaszczyzn, potrzebna jest znajomość jednego dowolnego punktu tej płaszczyzny.



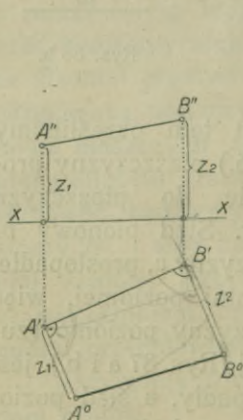
Rys. 89 a.



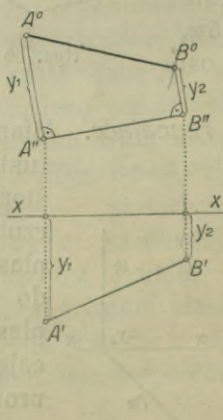
Rys. 89 b.

**39. Kład odcinka i jego podział.** Prawdziwą długość odcinka, którego rzuty na dwie płaszczyzny są dane, otrzymamy, wykonując kład

tego odcinka, podobnie, jak to uczyniliśmy w ust. 13., na jedną z rzutni. Zadanie sprowadza się więc do wykreślenia trapezu, którego bokami równoległymi są proste, rzucające punkty końcowe odcinka, jednym z boków nierównoległych jest dany odcinek, a drugim jego rzut.



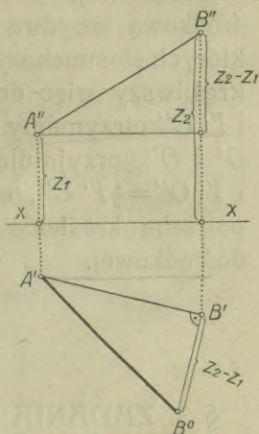
Rys. 90 a.



Rys. 90 b.



W Rys. 90 a wykonaliśmy kład odcinka  $\overline{AB}$  około jego rzutu  $\overline{A'B'}$  na rzutnię poziomą, otrzymując odcinek  $\overline{A^0B^0}$ ; Rys. 90 b podaje kład tego samego odcinka na rzutnię pionową. Wskaźniki „o“, umieszczone u dołu liter, oznaczają będą w ciągu całego wykładu punkty, względnie proste, po dokonaniu kładu. Zamiast na płaszczyznę rzutów, dokonać można kładu odcinka na płaszczyznę równoległą do rzutni, poprowadzoną przez jeden z punktów końcowych odcinka. W miejsce trapezu wchodzi wówczas trójkąt, jak o tym dostatecznie wyraźnie poucza Rys. 91.

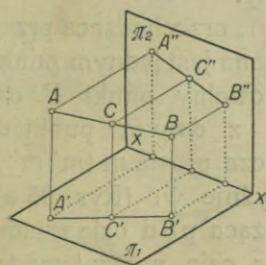


Rys. 91.

Wykazane w ust. 15. twierdzenie, odnoszące się do rzutu poziomego odcinka, a opiewające, że stosunek podziału odcinka w przestrzeni wskutek rzutu prostokątnego na płaszczyznę poziomą nie zmienia się, odnosi się oczywiście i do rzutu pionowego odcinka. W istocie bowiem czytamy bezpośrednio z Rys. 92.:

$$\overline{A'C''} : \overline{C'B''} = \overline{AC} : \overline{CB} = \overline{A''C''} : \overline{C''B''}$$

Podzieliwszy więc rzut poziomy danego odcinka w pewnym stosunku i odniósłszy punkty podziału na rzut pionowy, otrzymamy rzuty punktów, dzielących ten odcinek w przestrzeni w tym samym stosunku.

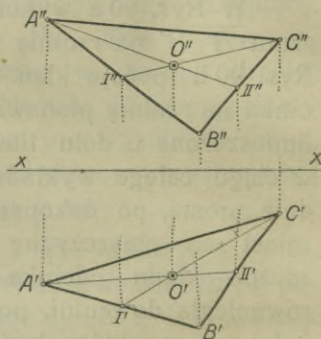


Rys. 92.

**40. Zadanie.** Dane są rzuty trójkąta  $ABC$ ; wyznaczyć rzuty jego środka ciężkości (Rys. 93.). Wiadomo, że proste, łączące środki boków trójkąta z jego wierzchołkami, czyli t. zw. dośrodkowe, przecinają się w jednym punkcie, zwanym środkiem ciężkości tego trójkąta. W myśl tego, cośmy powiedzieli w ustępie poprzednim, rzut poziomy  $O'$  środka ciężkości  $O$  jest punktem przecięcia się  $O'$  dośrodkowych

$I'C'$  i  $II'A'$  trójkąta  $A'B'C'$ , a rzut pionowy  $O''$  punktem, w którym przecinają się dośrodkowe  $I''C''$  i  $II''A''$

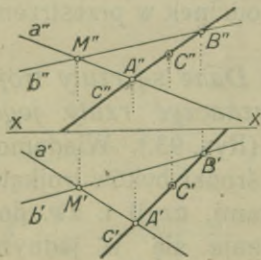
rzutu pionowego  $A'' B'' C''$  trójkąta  $ABC$ . Wiadomo, że środek ciężkości trójkąta dzieli każdą dośrodkową na dwa takie odcinki, których stosunek wynosi  $1:2$ . Wykreśliwszy więc dośrodkowe  $I' C'$  i  $I'' C''$  otrzymamy na nich punkty  $O'$  i  $O''$ , przyjmując  $I' O' = \frac{1}{3} I' C'$  i  $I'' O'' = \frac{1}{3} I'' C''$ , a wtedy odpada potrzeba kreślenia rzutów drugiej dośrodkowej.



Rys. 93.

### § 3. ZADANIA ODNOSZĄCE SIĘ DO WZAJEMNYCH POŁOŻEN PUNKTÓW, PROSTYCH I PŁASZCZYZN.

**41. Proste i punkty na płaszczyźnie.** Dwie przecinające się proste  $a$  ( $a' a''$ ) i  $b$  ( $b' b''$ ) wyznaczają płaszczyznę  $\varphi$ . Jeżeli punkt  $A$  ( $A' A''$ ) (Rys. 94.), obrany na prostej  $a$  ( $a' a''$ ), połączymy z punktem  $B$  ( $B' B''$ ), przyjętym na prostej  $b$  ( $b' b''$ ), to punktami  $A$  i  $B$  wyznaczona prosta  $c$  ( $c' c''$ ) leży na płaszczyźnie  $\varphi$ . Jeden z pewników geometrycznych powiada bowiem, że gdy prosta ma z płaszczyzną dwa punkty wspólne, to ma z nią wszystkie punkty wspólne, czyli, jak mówimy, na tej płaszczyźnie leży.



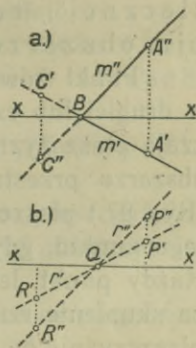
Rys. 94.

Płaszczyzna  $\psi_1$ , przechodząca przez oś rzutów, wyznaczona jest jednym punktem (ust. 38. f). Dowolny punkt  $B$  osi rzutów, połączony z danym punktem  $A$  ( $A' A''$ ), wyznacza prostą  $m$  ( $m' m''$ ), leżącą na płaszczyźnie  $\psi_1$  (Rys. 95 a). Część prostej  $m'$  leżąca pod osią rzutów i część prostej  $m''$  znajdująca się nad tą osią, są rzutami tej części prostej  $m$ , która leży na płaszczyźnie  $\psi_1$  w pierwszej części przestrzeni; część prostej  $m'$  leżąca nad osią  $x$  i część prostej  $m''$ , która leży pod osią rzutów, są rzutami tej części prostej  $m$ , która znajduje się na płaszczyźnie  $\psi_1$  w trzeciej części przestrzeni.



Punkt  $C$  ( $C' C''$ ) leży więc na płaszczyźnie  $\psi_1$ , wyznaczonej punktem  $A$  ( $A' A''$ ) i osią rzutów, w trzeciej części przestrzeni.

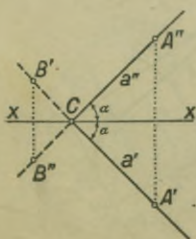
Między płaszczyznami, przechodzącymi przez oś rzutów, znajdują się i takie, które rozciągają się w drugiej i czwartej części przestrzeni. Podobnie jak w przypadku poprzednim, płaszczyzna taka wyznaczona jest przez punkt leżący, jednak nie w pierwszej lub trzeciej, ale w drugiej i czwartej części przestrzeni. Prosta  $r$  ( $r' r''$ ) (Rys. 95 b), łącząca dowolny punkt  $Q$  osi rzutów z przyjętym w drugiej części przestrzeni punktem  $P$  ( $P' P''$ ), leży na płaszczyźnie  $\psi_2$ , rozciągającej się w drugiej i czwartej części przestrzeni, a wyznaczonej osią rzutów i punktem  $P$  ( $P' P''$ ). Części prostych  $r'$  i  $r''$ , leżące nad osią  $x$ , są rzutami tej części prostej  $r$ , która znajduje się w drugim obszarze przestrzeni na płaszczyźnie  $\psi_2$ . Części prostych  $r'$  i  $r''$ , leżące pod osią rzutów, są rzutami części prostej  $r$ , znajdującej się w czwartym obszarze przestrzeni. Jeżeli na płaszczyźnie  $\psi_2$  wyznaczyć mamy punkt, leżący w czwartej części przestrzeni, to najpierw obieramy na płaszczyźnie  $\psi_2$  prostą  $r$  ( $r' r''$ ), a na niej dopiero punkt  $R$  ( $R' R''$ ), którego rzuty leżą pod osią  $x$ .



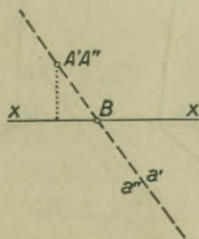
Rys. 95 a i b.

**42. Płaszczyzny dwusieczne.** Płaszczyzny  $\delta_I$  i  $\delta_{II}$  przechodzące przez oś rzutów, których punkty są równo oddalone od obu rzutów, nazywamy płaszczyznami dwusiecznymi.

Płaszczyzna  $\delta_I$ , przechodząca przez Ią i IIIą część przestrzeni, wyznaczona jest osią rzutów i punktem, którego „wysokość” równa jest „głębokości”, a który, jak np. punkt  $A$  ( $A' A''$ ) (Rys. 96.), leży w pierwszej, albo jak punkt  $B$  ( $B' B''$ ) w trzeciej



Rys. 96.



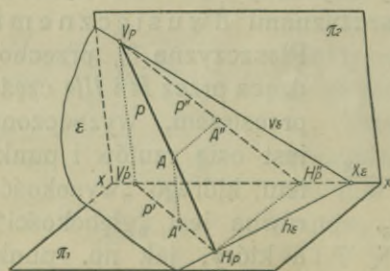
Rys. 97.

części przestrzeni. Przez połączenie dowolnego punktu  $C$  ( $C' C''$ ) osi rzutów z punktem  $A$  ( $A' A''$ ) lub  $B$  ( $B' B''$ ), otrzymamy prostą  $a$  ( $a' a''$ ), leżącą na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta_I$ . Oczywiście, że  $\sphericalangle a' x = \sphericalangle a'' x$ , więc: dwie proste,

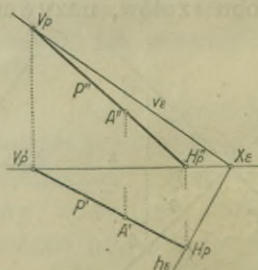
przecinające się na osi rzutów i zamykające z nią te same kąty, względnie dwie proste równoległe do osi rzutów i równo od niej oddalone, są rzutami prostej leżącej na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta_{II}$ , rozciągającej się w pierwszym i trzecim obszarze przestrzeni.

Punkt równo oddalony od obu rzutni, znajdujący się w drugiej lub czwartej części przestrzeni i oś rzutów, wyznaczają płaszczyznę  $\delta_{II}$ , rozciągającą się w drugim i czwartym obszarze przestrzeni. Rzut poziomy  $A'$  każdego punktu  $A$  (Rys. 97.) płaszczyzny  $\delta_{II}$  nakrywa się z rzutem pionowym  $A''$  tego punktu, gdyż jego „wysokość“ równa jest „głębokości“. Każdy punkt, leżący nad lub pod osią rzutów, uważać można za skupienie rzutu poziomego i pionowego punktu, leżącego na płaszczyźnie  $\delta_{II}$ . Rzuty  $a'$  i  $a''$  prostej  $a$ , leżącej na płaszczyźnie  $\delta_{II}$ , zejdą się na jednej prostej. Prosta, przecinająca oś rzutów albo do niej równoległa uważana być może zawsze za skupienie obu rzutów prostej, leżącej na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta_{II}$ , rozciągającej się w drugim i czwartym obszarze przestrzeni.

**43. Proste i punkty na płaszczyznach, wyznaczonych śladami.** Niechaj daną będzie płaszczyzna  $\varepsilon$ , wyznaczona swoimi śladami  $h_\varepsilon$  i  $v_\varepsilon$ , czyli jak piszemy, płaszczyzna  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ) (Rys. 98.). Punkt  $H_p$ , przyjęty na śladzie poziomym  $h_\varepsilon$ , leży



Rys. 98.



Rys. 99.

na płaszczyźnie  $\varepsilon$ , podobnie jak punkt  $V_p$  obrany na śladzie pionowym  $v_\varepsilon$ . Prosta  $p$ , łącząca punkty  $H_p$  i  $V_p$ , leży więc na płaszczyźnie  $\varepsilon$ .

Po sprowadzeniu płaszczyzn rzutów do jednej płaszczyzny (Rys. 99), otrzymamy rzuty  $p'$  i  $p''$  prostej  $p$ , leżącej na płasz-



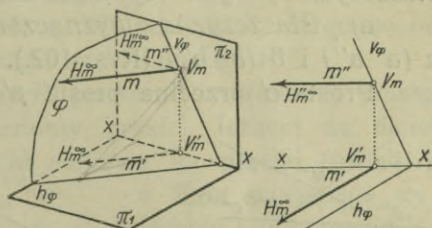
czyźnie  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ), łącząc odpowiednie rzuty punktów  $H_p$  i  $V_p$ . W szczególności rzut poziomy  $p'$  otrzymamy przez połączenie punktów  $H_p$  i  $V'_p$ , zaś rzut pionowy  $p''$  przez połączenie punktów  $H'_p$  i  $V_p$ . Punkty  $H_p$  i  $V_p$ , leżące na rzutniach i równocześnie na prostej  $p$ , są śladami tej prostej.

Zatem: gdy prosta leży na płaszczyźnie, to ślady tej prostej leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny.

Punkt  $A$  ( $A' A''$ ), obrany na prostej  $p$  ( $p' p''$ ) (Rys. 99), leży na płaszczyźnie  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon, v_\varepsilon$ ).

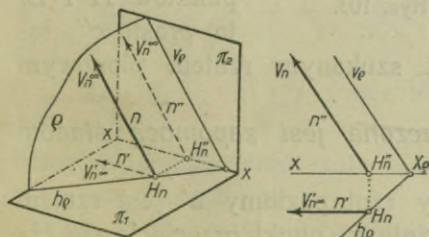
Jeśli chodzi o przyjęcie dowolnego punktu na płaszczyźnie, wyznaczonej zapomocą śladów, to obieramy na tej płaszczyźnie prostą, a na niej dopiero punkt.

**Proste tworzące.** Prosta  $m$  ( $m' m''$ ), leżąca na płaszczyźnie  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ) (Rys. 100 a i b), jest równoległą do rzutni poziomej, ślad tedy poziomy  $H_m$  tej prostej leży w odległości nieograniczonej na śladzie poziomym  $h_\varphi$  płaszczyzny  $\varphi$ , a co zatem idzie, rzut poziomy  $m'$  prostej  $m$  jest do śladu  $h_\varphi$  równoległy. Każda prosta, leżąca na płaszczyźnie, a równoległa do rzutni poziomej, jest równoległą do śladu poziomego danej płaszczyzny i nazywa się prostą poziomą tej płaszczyzny.



Rys. 100 a.

Rys. 100 b.



Rys. 101 a.

Rys. 101 b.

nie dalekiej na rzutni pionowej i na śladzie pionowym  $v_\rho$  płaszczyzny  $\rho$ , rzut tedy pionowy  $n''$  prostej  $n$  jest równoległy do śladu pionowego  $v_\rho$ .

Proste, leżące na płaszczyźnie i równoległe do rzutni pionowej, są równoległe do śladu pionowego danej płaszczyzny i zowią się prostami czołowymi tej płaszczyzny. Proste poziome i czołowe płaszczyzny określamy także mianem prostych tworzących tej płaszczyzny.

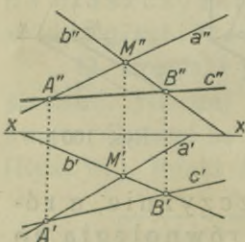
Przez ruch prostej  $m$  (Rys. 100 a), stałe równoległej do rzutni poziomej i do swego pierwotnego położenia, utworzy się płaszczyzna  $\varphi$ , jeżeli ślad pionowy  $V_m$  tej prostej porusza się po śladzie pionowym  $v_\varphi$  płaszczyzny  $\varphi$ .

Prosta  $n$ , poruszając się równoległe do swego pierwotnego położenia (Rys. 101.), zakreśli płaszczyznę  $\rho$ , jeśli ślad poziomy  $H_n$  prostej  $n$  przebiega ślad poziomy  $h_\rho$  płaszczyzny  $\rho$ .

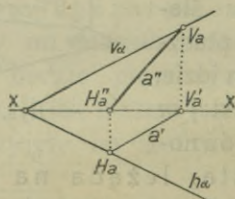
44. Zadania. 1. Dany jest jeden rzut prostej, leżącej na płaszczyźnie; wyznaczyć rzut drugi.

a) Płaszczyzna wyznaczona jest dwiema prostymi  $a$  ( $a'$   $a''$ ) i  $b$  ( $b'$   $b''$ ) (Rys. 102.).

Prosta  $c'$  przecina proste  $a'$  i  $b'$  w punktach  $A'$  i  $B'$ ,



Rys. 102.



Rys. 103.

które są rzutami poziomymi punktów, leżących równocześnie na prostej  $c$  i na pł. ( $a$ ,  $b$ ). Wyznamy rzuty pionowe  $A'$  i  $B'$  punktów  $A$  i  $B$ ,

to prosta  $c''$ , łącząca punkty  $A''$  i  $B''$ , jest szukany rzutem pionowym prostej  $c$ .

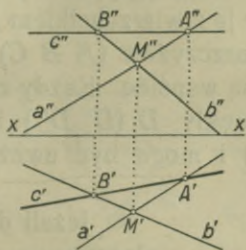
b) Płaszczyzna wyznaczona jest zapomocą śladów (Rys. 103.).

Przy założeniu, że dany rzut poziomy  $a'$  jest rzutem prostej  $a$ , leżącej na płaszczyźnie  $\alpha$ , punkt przecięcia się  $H_a$  rzutu  $a'$  ze śladem  $h_\alpha$  jest śladem poziomym prostej  $a$  — rzut pionowy  $H''_a$  tego śladu leży na osi rzutów. Punkt przecięcia się  $V'_a$  prostej  $a'$  z osią rzutów jest rzutem poziomym śladu pionowego tej prostej, który to ślad znajdziemy na śladzie  $v_\alpha$ . Przez połączenie punktów  $H''_a$  i  $V_a$  otrzymujemy żądany rzut pionowy  $a''$  prostej  $a$ .

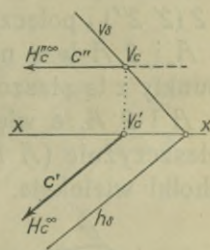


c) Dany rzut prostej jest rzutem pionowym  $c''$  i równoległym do osi  $x$ .

Gdy płaszczyznę wyznaczają dwie proste  $a$  ( $a'$   $a''$ ) i  $b$  ( $b'$   $b''$ ) (Rys. 104.), to prosta  $c'$ , łącząca punkty  $A'$  i  $B'$ , jest szukany rzutem. Prosta  $c$  ( $c'$   $c''$ ) jest poziomą płaszczyzny ( $a$ ,  $b$ ).



Rys. 104.



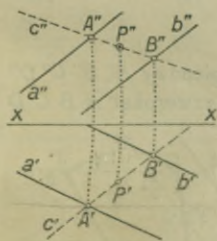
Rys. 105.

Gdy płaszczyzna  $\delta$  wyznaczona jest zapomocą śladów, to rzut poziomy  $c'$  przejdzie przez punkt  $V'_c$ , równoległe do do śladu poziomego  $h_\delta$  (Rys. 105.).

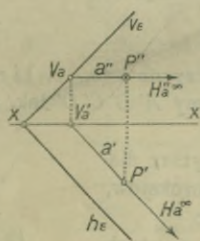
2. Znany jest rzut poziomy  $P'$  punktu  $P$ , leżącego na danej płaszczyźnie; wyznaczyć rzut pionowy  $P''$ .

Przez dany rzut poziomy  $P'$  punktu  $P$  prowadzimy prostą, którą uważamy za rzut poziomy prostej, leżącej na danej płaszczyźnie; wykreślmy rzut pionowy tej prostej (ust. 41.), a linia odnosząca wyznaczy rzut pionowy  $P''$  punktu  $P$ .

W Rys. 106. płaszczyzna wyznaczona jest zapomocą dwóch prostych równoległych  $a$  ( $a'$   $a''$ ) i  $b$  ( $b'$   $b''$ ), w Rys. 107. zapomocą śladów  $h_\epsilon$  i  $v_\epsilon$ . W tym drugim przypadku uży-



Rys. 106.



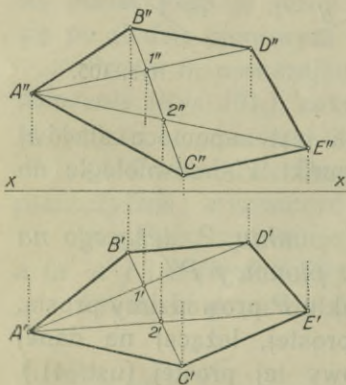
Rys. 107.

liśmy do wyznaczenia rzutu pionowego  $P''$  punktu  $P$  prostej poziomej płaszczyzny  $\epsilon$ .

3. Wyznaczyć rzuty pięciokąta płaskiego, leżącego dowolnie w przestrzeni.

Z pięciu wierzchołków żadanego wielokąta trzy np.  $A$  ( $A'$   $A''$ ),  $B$  ( $B'$   $B''$ ) i  $C$  ( $C'$   $C''$ ) przyjąć można dowolnie, trzy punkty bowiem wyznaczają płaszczyznę (ust. 22.). Dwa dalsze wierzchołki  $D$  i  $E$  obrać musimy na płaszczyźnie,

trzema pierwszymi wyznaczonej. W tym celu na jednym boku trójkąta np.  $\overline{B C}$  (Rys. 108.) przyjmujemy dwa punkty 1 ( $1' 1''$ ) i 2 ( $2' 2''$ ) i połączymy je z wierzchołkiem  $A$ . Otrzymane proste 1  $A$  i 2  $A$  leżą na płaszczyźnie ( $A B C$ ), gdyż mają po dwa punkty z tą płaszczyzną wspólne. Każdy zatem punkt prostych 1  $A$  i 2  $A$ , a więc punkty  $D$  ( $D' D''$ ) i  $E$  ( $E' E''$ ) leżą na płaszczyźnie ( $A B C$ ) i mogą być uważane za dalsze wierzchołki wielokąta.



Rys. 108.

#### 45. Ćwiczenia.

1. Dana jest dowolna płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) i rzut pionowy  $A'' B'' C'' D''$  czworokąta; wykreślić rzut poziomy  $A' B' C' D'$  tak, aby czworokąt  $A B C D$  leżał na płaszczyźnie  $\alpha$ .

2. Rozwiązać zadanie powyższe dla położenia płaszczyzn i rzutów czworokątów, określonych Rysunkami 110 a—l.

3. Dane są rzuty dwóch prostych  $l$  i  $m$ , przecinających się w punkcie  $A$ . Na płaszczyźnie  $\alpha \equiv (l, m)$  leży pięciokąt  $M N R S T$ ; wykreślić rzut pionowy tego pięciokąta, jeżeli rzut poziomy  $M' N' R' S' T'$  jest dany.

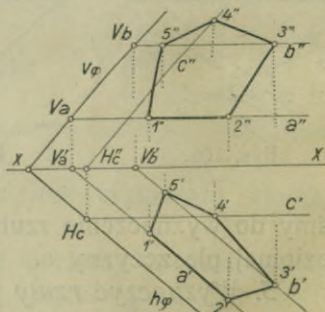
4. Rozwiązać zadanie poprzednie, jeżeli proste  $l$  i  $m$  mają położenie następujące:

- $l \parallel \pi_1, m$  dowolne;
- $l \parallel \pi_1, m \parallel \pi_2$ ;
- $l \parallel \pi_1, m \parallel x$ ;
- $l \parallel \pi_2, m$  dowolne;
- $l \parallel \pi_1, m \perp \pi_2$ .

5. Dane są rzuty prostych równoległych  $l$  i  $m$ , które wyznaczają

Jeżeli dane są ślady  $h_\varphi$  i  $v_\varphi$  płaszczyzny wielokąta, to rzuty jego wyznaczymy, kreśląc rzuty punktów leżących na rzutach prostych, przyjętych na tej płaszczyźnie.

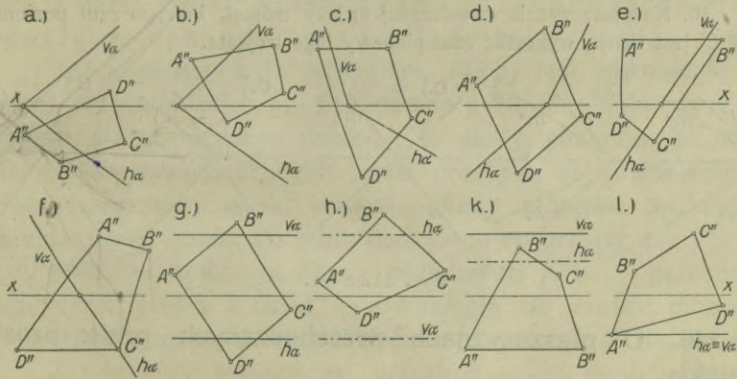
W Rys. 109. przyjęliśmy na płaszczyźnie  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ) dwie proste poziome  $a$  ( $a' a''$ ) i  $b$  ( $b' b''$ ) i jedną czołową  $c$  ( $c' c''$ ), za pośrednictwem których wyznaczyliśmy rzuty wierzchołków pięciokąta.



Rys. 109.

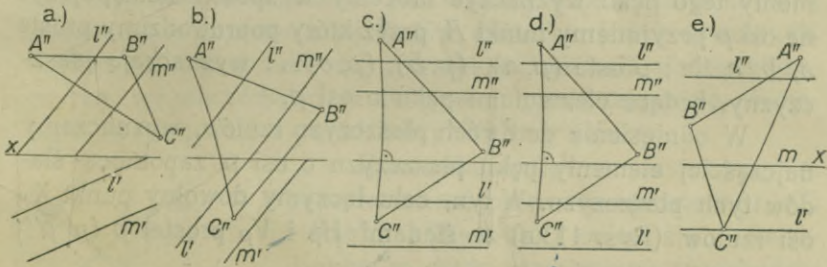


płaszczyznę  $\alpha$  i rzut pionowy  $A'' B'' C''$  trójkąta  $ABC$ , leżącego na tej płaszczynie; wyznaczyć rzut poziomy  $A' B' C'$  tego trójkąta.



Rys. 110 a—l.

6. Rozwiązać zadanie powyższe, jeżeli położenie danych elementów określone jest Rysunkami 111 a—e.



Rys. 111 a—e.

7. Na płaszczynie  $\alpha \equiv (l, A)$ , wyznaczona prostą  $l$  ( $l'$   $l''$ ) i punktem  $A$  ( $A'$   $A''$ ), leży czworokąt  $PQRS$ . Wykreślić rzut pionowy tego czworokąta, skoro jego rzut poziomy  $P'Q'R'S'$  jest dany.

8. Rozwiązać zadanie poprzednie, jeżeli prosta  $l$  zajmuje położenia:

a)  $l \parallel \pi_1$ ;

b)  $l \parallel \pi_2$ ;

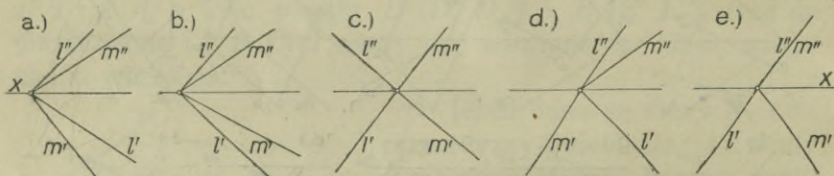
c)  $l \parallel x$ ;

d)  $l$  leży na pł. dwusiecznej  $\delta_I$ , względnie  $\delta_{II}$ , a dla każdego z tych położenia punkt  $A$  znajduje się w I., II., III. i IV. części przestrzeni.

9. Płaszczyzna  $\alpha$  wyznaczona jest dwiema prostymi przecinającymi się i  $m$ , których położenie określają Rysunki 112 a—e:

Wyznaczyć rzut pionowy trójkąta leżącego na płaszczyźnie  $\alpha$ , gdy jego rzut poziomy jest dany.

10. Na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta_l$  leży trójkąt, którego rzut poziomy  $A'B'C'$  jest dany; wykreślić rzut pionowy tego trójkąta.



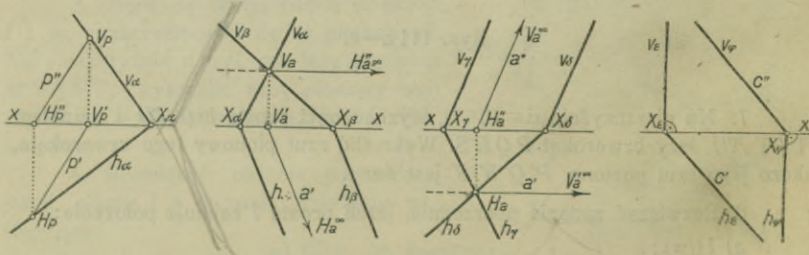
Rys. 112 a—e.

#### 46. O płaszczyznach przechodzących przez proste i punkty.

a) *Płaszczyzny przechodzące przez jedną prostą.* Wiadomo (ust. 7.), że przez jedną prostą poprowadzić można dowolną, nieograniczoną ilość płaszczyzn, stanowiących t. zw. pęk płaszczyzn, dla którego owa prosta jest osią.

Jeżeli oś pęku płaszczyzn jest dana, to poszczególne elementy tego pęku wyznaczyć możemy w sposób następujący: na osi  $p$  przyjmujemy punkt  $A$ , przez który poprowadzimy proste  $a, b, c, \dots$ ; proste  $(p, a), (p, b), (p, c) \dots$  wyznaczają płaszczyzny, będące elementami pęku o osi  $p$ .

W odniesieniu do dwóch płaszczyzn rzutów, wyznaczamy najczęściej elementy pęku płaszczyzn o osi  $p$  zapomocą śladów tych płaszczyzn. W tym celu łączymy dowolny punkt  $X_\alpha$  osi rzutów (Rys. 113 a) ze śladami  $H_p$  i  $V_p$  prostej  $p$  ( $p' p''$ )



Rys. 113 a—d.

i otrzymujemy ślady  $h_\alpha$  i  $v_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ . Proste bowiem  $h_\alpha$  i  $v_\alpha$ , jako dwie proste przecinające się w punkcie  $X_\alpha$ , wy-



znaczącą płaszczyznę  $\alpha$ ; prosta  $p$  leży na tej płaszczyźnie, ma bowiem z nią dwa punkty wspólne, a mianowicie punkt  $H_p$  ( $H_p H''_p$ ) i  $V_p$  ( $V_p V'_p$ ).

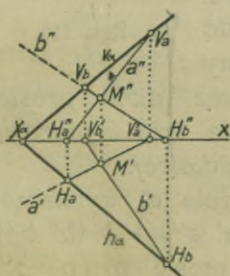
Zatem: ślady płaszczyzny przechodzącej przez prostą, przechodzą przez ślady tej prostej.

Jeżeli prosta  $a$  ( $a' a''$ ) (Rys. 113 b) jest równoległą do rzutni poziomej, więc jej ślad poziomy  $H_a$  znajduje się w odległości nieograniczenie dalekiej, to ślady poziome  $h_\alpha, h_\beta \dots$  płaszczyzn, przechodzących przez prostą  $a$ , są równoległe do rzutu poziomego  $a'$  tej prostej. Ślady pionowe  $v_\alpha, v_\beta \dots$  przejdą przez punkt  $V_a$  jako ślad pionowy prostej  $a$ .

Ślady pionowe  $v_\gamma, v_\delta \dots$  płaszczyzn  $\gamma, \delta \dots$  przesuniętych przez prostą  $a$  ( $a' a''$ ), równoległą do rzutni pionowej (Rys. 113 c), są równoległe do rzutu pionowego  $a''$  tej prostej.

Z pomiędzy płaszczyzn, przechodzących przez prostą  $c$ , wyróżnić należy płaszczyzny rzucające tę prostą (ust. 36.): płaszczyznę poziomo rzucającą  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ) i pionowo rzucającą  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ) (Rys. 113 d).

b) *Wykreślenie śladów płaszczyzny wyznaczonej zapomocą dwóch prostych lub trzech punktów.* W ustępie 38. zauważyliśmy, że położenie płaszczyzny w przestrzeni chętniej wyznaczamy zapomocą jej śladów, aniżeli prostych dowolnych. Bardzo też często zachodzi potrzeba wykreślenia śladów płaszczyzny, wyznaczonej przez dwie proste przecinające się, równoległe, przez prostą i punkt lub przez trzy punkty.

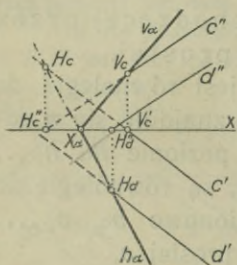


Rys. 114.

Konstrukcja śladów płaszczyzny  $\alpha$ , poprowadzonej przez dwie proste  $a$  ( $a' a''$ ) i  $b$  ( $b' b''$ ) (Rys. 114.), opiera się na twierdzeniu, że ślady płaszczyzny przechodzącej przez prostą, przechodzą przez ślady tej prostej (ust. 46 a.). Prosta więc  $h_\alpha$ , łącząca ślady poziome  $H_a$  i  $H_b$  prostych  $a$  i  $b$ , jest śladem poziomym płaszczyzny  $\alpha$ . Prosta  $v_\alpha$ , łącząca ślady pionowe  $V_a$  i  $V_b$  danych prostych, jest śladem pionowym płaszczyzny  $\alpha$ . Ślady  $h_\alpha$  i  $v_\alpha$  przetną się w punkcie  $X_\alpha$  na osi rzutów.

Gdy punkt  $X_\alpha$  leży w obrębie płaszczyzny rysunkowej, to nie zachodzi potrzeba wyznaczenia wszystkich czterech śladów prostych — trzy ślady wystarczą, czwarty zastąpiony będzie punktem  $X_\alpha$ .

W Rys. 115. wyznaczyliśmy ślady płaszczyzny  $\alpha$ , przechodzącej przez dwie proste równoległe  $c$  ( $c'$   $c''$ ) i  $d$  ( $d'$   $d''$ ). Ślad poziomy  $Hd$  połączyliśmy ze śladem  $Hc$ , leżącym w drugiej części przestrzeni, prostą  $h_\alpha$ , będącą śladem poziomym płaszczyzny  $\alpha$ . Otrzymany punkt  $X_\alpha$  i ślad  $Vc$  wyznaczają jej ślad pionowy  $v_\alpha$ .



Rys. 115.

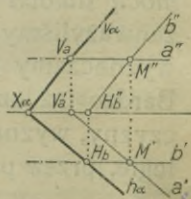
Jeżeli chodzi o wykreślenie śladów płaszczyzny, wyznaczonej zapomocą trzech punktów np.  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , to łączymy punkty  $A$  z  $B$  i np.  $A$  z  $C$ , otrzymując tym sposobem dwie proste przecinające się, których ślady wyznaczają ślady płaszczyzny.

Połączywszy punkt  $A$  z  $B$ , możemy przez punkt  $C$  poprowadzić prostą równoległą do poprzedniej i wykreślić ślady płaszczyzny, wyznaczonej przez dwie proste równoległe.

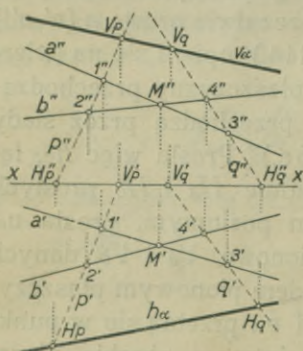
#### 47. Zadania.

1. Wykreślić ślady płaszczyzny wyznaczonej przez dwie proste przecinające się: poziomą  $a$  ( $a'$   $a''$ ) i czołową  $b$  ( $b'$   $b''$ ) (Rys. 116.).

Ślad poziomy  $h_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  jest równoległy do rzutu poziomego  $a'$  i przechodzi przez ślad  $Hb$ ; ślad pionowy  $v_\alpha$  jest równoległy do rzutu pionowego  $b''$  prostej  $b$  i przechodzi przez ślad  $Va$ .



Rys. 116.



Rys. 117.

2. Wykreślić ślady płaszczyzny wyznaczonej przez dwie proste, których ślady nie leżą w obrębie płaszczyzny rysunkowej.

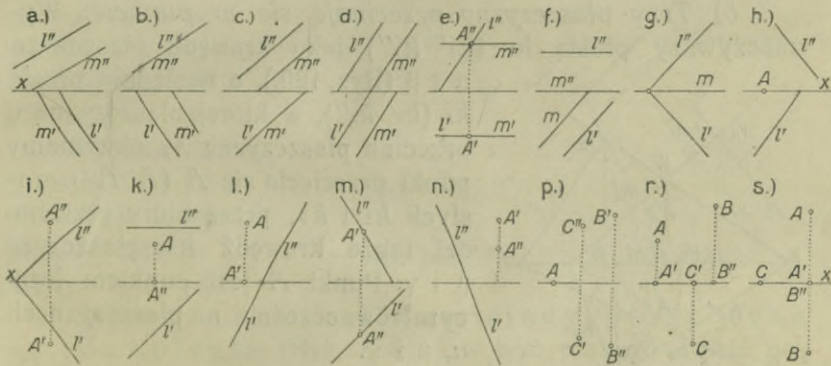
Na płaszczyźnie  $\alpha$ , wyznaczonej prostymi  $a$  ( $a'$   $a''$ ) i  $b$  ( $b'$   $b''$ ), obieramy dwie proste  $p$  ( $p'$   $p''$ ) i  $q$  ( $q'$   $q''$ ) (Rys. 117.), których ślady leżą w obrębie rysunku. Ślady poziome  $H_p$  i  $H_q$  tych prostych wyznaczają ślad poziomy  $h_\alpha$ , zaś ślady pionowe  $V_p$  i  $V_q$  określają położenie śladu pionowego  $v_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ .

położenie śladu pionowego  $v_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ .



## 48. Ćwiczenie.

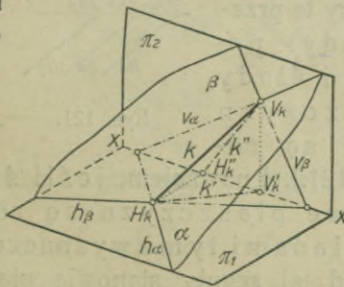
Wykreślić ślady płaszczyzny, wyznaczonej dwiema prostymi  $l, m$ , prostą  $l$  i punktem  $A$ , względnie trzema punktami  $A, B, C$  w przypadkach podanych na Rysunkach 118 a—s.



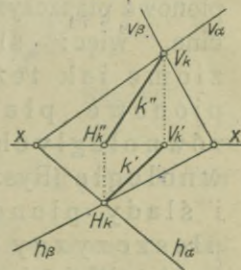
Rys. 118 a—s.

## 49. O płaszczyznach przecinających się i równoległych.

a) *Dwie płaszczyzny przecinające się.* Wiadomo, że gdy dwie płaszczyzny posiadają dwa punkty wspólne, to posiadają całą prostą wspólną, a mianowicie prostą, łączącą owe dwa punkty. Tę prostą wspólną obu płaszczyzn nazwaliśmy w ust. 27. ich krawędzią. Weźmy pod uwagę płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  nachylone do obu rzutni (Rys. 119 a), to prosta  $k$ , łącząca punkt przecięcia się  $H_k$  śladów poziomych  $h_\alpha$  i  $h_\beta$  obu pł. z punktem  $V_k$ , który powstał jako przecięcie się śladów pionowych  $v_\alpha$  i  $v_\beta$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , jest krawędzią tych płaszczyzn. Ponieważ punkt  $H_k$  jest śladem poziomym, a punkt  $V_k$  śladem pionowym prostej  $k$ , więc wykreślenie rzutów krawędzi dwóch płaszczyzn sprowadza się do wyznaczenia rzutów prostej, której ślady są dane. Rzut pionowy  $H''_k$  śladu poziomego (Rys. 119 b) łączymy ze śladem



Rys. 119 a.

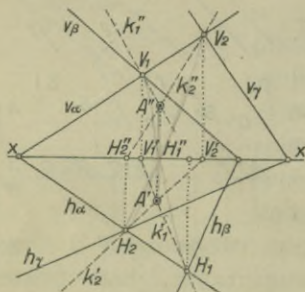


Rys. 119 b.

z punktem  $V''_k$  (rys. 119 b). Rzut pionowy  $H''_k$  śladu poziomego (Rys. 119 b) łączymy ze śladem

pionowym  $V_k$ , otrzymując rzut pionowy  $k''$  krawędzi  $k$ ; prosta  $k'$ , łącząca ślad poziomy  $H_k$  z rzutem poziomym  $V'_k$  śladu pionowego, jest rzutem poziomym krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\beta$ ) i  $\beta$  ( $h_\beta v_\beta$ ).

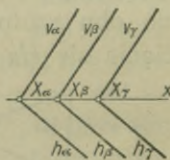
b) *Trzy płaszczyzny przecinają się w punkcie.* Wyznaczywszy prostą  $k_1$  ( $k_1' k_1''$ ) jako krawędź płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (Rys. 120.), a następnie prostą  $k_2$  ( $k_2' k_2''$ ), w której płaszczyzna  $\alpha$  przecina płaszczyznę  $\gamma$ , otrzymamy punkt przecięcia się  $A$  ( $A' A''$ ) prostych  $k_1$  i  $k_2$ , przez który przejdzie także krawędź  $k_3$  płaszczyzn  $\beta$  i  $\gamma$ . Punkt  $A$  jest punktem leżącym równocześnie na płaszczyznach  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ .



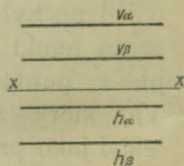
Rys. 120.

c) *Płaszczyzny równoległe.* Dwie płaszczyzny, nie mające żadnego wspólnego punktu właściwego, okre-

ślamy mianem płaszczyzn równoległych. Wiadomo, że dwie płaszczyzny równoległe przecięte trzecią, tworzą z nią krawędzie równoległe. Ponieważ ślady poziome  $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$  (Rys. 121.) płaszczyzn  $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$  są prostymi przecięcia się tych płaszczyzn z rzutnią poziomą, ślady zaś pionowe  $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma \dots$  są prostymi, w których rzutnia pionowa płaszczyzny te przecina, więc: ślady poziome jak też i ślady pionowe płaszczyzn równoległych, są równoległe (Rys. 121.). I nawzajem, jeśli ślady poziome i ślady pionowe płaszczyzn są równoległe, to płaszczyzny śladami tymi wyznaczone są równoległe. Wyjątek od tej reguły stanowią płaszczyzny równoległe do osi rzutów  $x$  (Rys. 122.), których ślady są zawsze równoległe, ale płaszczyzny przenikają się w ogólności podług prostej właściwej.



Rys. 121.



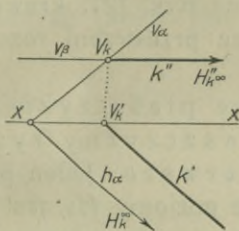
Rys. 122.

d) *Przykłady wyznaczania krawędzi dwóch płaszczyzn.*

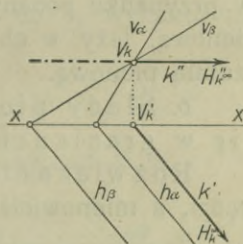
1. Płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) jest nachylona do obu rzutni, płaszczyzna  $\beta$  jest równoległą do



rzutni poziomej (Rys. 123.). Ślad poziomy płaszczyzny  $\beta$  jest prostą niewłaściwą na rzutni poziomej, ślad poziomy  $H_k^\infty$  szukanej krawędzi jest więc punktem niewłaściwym, leżącym na śladzie  $h_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ . Szukana krawędź jest zatem równoległa do rzutni poziomej, gdyż posiada na tej rzutni jeden punkt niewłaściwy.



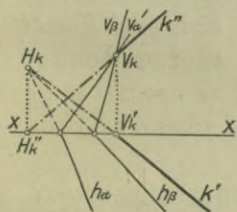
Rys. 123.



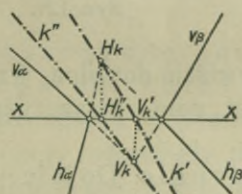
Rys. 124.

2. Dwa równoimienne ślady płaszczyzn są równoległe (Rys. 124.). I w tym przypadku ślad poziomy krawędzi jest jej punktem niewłaściwym, leżącym na rzutni poziomej, krawędź więc obu płaszczyzn jest równoległa do tej rzutni.

3. Położenie płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  określone jest Rys. 125. Ślad poziomy  $H_k$  krawędzi  $k$  ( $k' k''$ ) leży w tym



Rys. 125.



Rys. 126.



Rys. 127.

wypadku w obszarze przestrzeni, rozciągającym się poza rzutnię pionową.

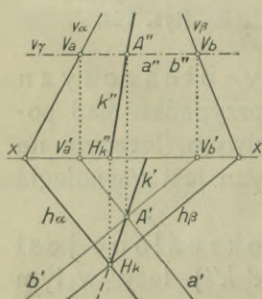
4. Ślady płaszczyzn nie przecinają się w pierwszej części przestrzeni (Rys. 126.). Ślady poziome  $h_\alpha$  i  $h_\beta$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , przecinają się na rzutni poziomej, leżącej poza rzutnię pionową. Ślady pionowe  $v_\alpha$  i  $v_\beta$  danych płaszczyzn przecinają się w punkcie  $V_k$ , który jest śladem pionowym szukanej krawędzi, a który leży pod płaszczyzną poziomą. Krawędź  $k$  ( $k' k''$ ) leży poza obszarem pierwszej części przestrzeni, jest więc niewidoczną, czemu daliśmy

wyraz kreśląc rzuty tej krawędzi liniami złożonymi z punktów i kresek.

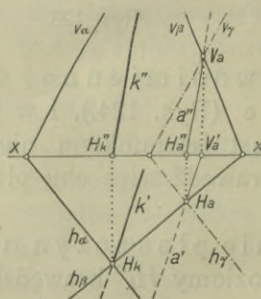
5. Dwie płaszczyzny poziomo rzucające. W przypadku podanym na Rys. 127. krawędź, będąca prostą pionową, leży w obszarze przestrzeni rozciągającym się za rzutnią pionową.

6. Ślady pionowe płaszczyzn nie przecinają się w granicach płaszczyzny rysunkowej.

Rozwiązanie pierwsze. Jeden punkt szukanej krawędzi, a mianowicie ślad poziomy  $H_k$ , jest znany (Rys. 128.).



Rys. 128.



Rys. 129.

Drugi punkt krawędzi otrzymamy przy pomocy trzeciej płaszczyzny  $\gamma$ , tnącej dwie dane wzdłuż prostych  $a(a'a')$  i  $b(b'b')$ . Punkt przecięcia się  $A$  prostych  $a$  i  $b$  leży na szukanej krawędzi. Płaszczyzna pomocnicza  $\gamma$  może być oczywiście dowolną, względ na uproszczenie konstrukcji podyktował nam płaszczyznę  $\gamma$  równoległą do rzutni poziomej.

Rozwiązanie drugie. Do jednej z danych płaszczyzn, np.  $\alpha$ , prowadzimy płaszczyznę równoległą  $\gamma$  ( $h_\gamma v_\gamma$ ) (Rys. 129.), wyznaczmy krawędź  $a(a'a')$  tej płaszczyzny z drugą daną płaszczyzną, otrzymując tym sposobem kierunek szukanej krawędzi.

7. Zarówno ślady poziome jak i pionowe nie przecinają się w granicach rysunku.

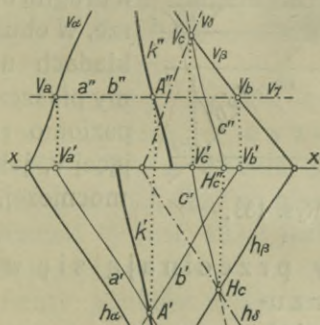
Zadanie rozwiązać możemy w dwojaki sposób:

10. Dwie dane płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  przecinamy dwiema płaszczyznami pomocniczymi  $\gamma$  i  $\delta$ . Płaszczyzny  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , przecinają się w punkcie  $A$ , płaszczyzny  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\delta$  w punkcie  $B$ . Prosta  $k$ , łącząca punkty  $A$  i  $B$ , jest krawędzią płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ .

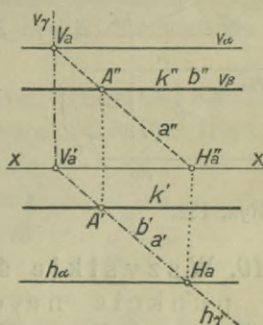
20. Dane płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  przecinamy płaszczyzną pomocniczą  $\gamma$  (Rys. 130.) i wyznaczamy punkt przecięcia się



$A (A' A'')$  tych trzech płaszczyzn. W miejsce drugiego punktu krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , znajdziemy kierunek tej krawędzi. W tym celu przeprowadzimy płaszczyznę  $\delta (h\delta v\delta)$ , równoległą do jednej z danych płaszczyzn, np. do  $\alpha$ , wyznaczmy



Rys. 130.



Rys. 131.

krawędź  $c (c' c'')$  płaszczyzny  $\delta$  z drugą daną płaszczyzną, a więc z  $\beta$ , a prosta  $k (k' k'')$ , przechodząca przez punkt  $A (A' A'')$  równoległe do prostej  $c (c' c'')$ , jest krawędzią płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ .

8. Jedna płaszczyzna jest równoległa do osi rzutów, druga do rzutni poziomej.

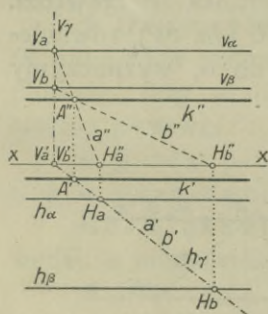
W tym wypadku chodzi o wyznaczenie jednego punktu krawędzi, której kierunek, równoległy do osi rzutów, jest znany.

Prowadzimy płaszczyznę pomocniczą  $\gamma$ , w naszym wypadku (Rys. 131.) poziomo rzucającą, która przecina płaszczyznę  $\alpha (h\alpha v\alpha)$  w prostej  $a (a' a'')$ , zaś płaszczyznę  $\beta$  wzdłuż prostej  $b (b' b'')$ . Punkt  $A (A' A'')$  przecięcia się tych prostych leży także na krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Rzuty  $k'$  i  $k''$  krawędzi  $k$ , przejdą przez rzuty  $A'$  i  $A''$  punktu  $A$ , równoległe do osi rzutów, przy czym rzut pionowy  $k''$  schodzi się ze śladem pionowym  $v\beta$  płaszczyzny  $\beta$ .

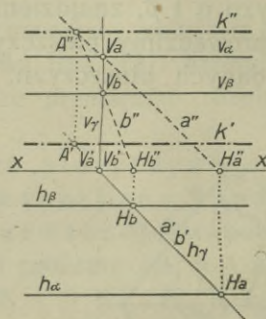
9. Obie płaszczyzny są równoległe do osi rzutów.

Krawędź będzie w tym wypadku także równoległą do osi rzutów — potrzebny do wyznaczenia krawędzi jeden punkt, znajdziemy, przecinając dane płaszczyzny trzecią płaszczyzną dowolną. Przykład, gdzie krawędź płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  znajduje się

w pierwszym obszarze, podaje Rys. 132. Położenie rzutów  $k'$  i  $k''$



Rys. 132.



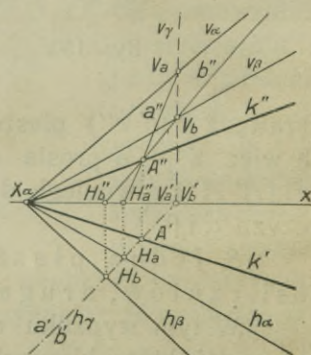
Rys. 133.

krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  w Rys. 133. dowodzi, że krawędź ta leży w drugim obszarze. W obu przypadkach użyliśmy płaszczyzny poziomo rzucającej  $\gamma$ , jako pomocniczej.

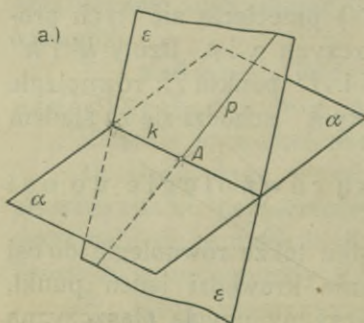
10. Wszystkie ślady przecinają się w jednym punkcie na osi rzutów (Rys. 134.). Punkt  $X_\alpha$  jest jedynym punktem szukanej krawędzi. Drugi punkt, a mianowicie punkt  $A$  ( $A' A''$ ), znaleźliśmy jako przecięcie się danych płaszczyzn, z płaszczyzną pomocniczą  $\gamma$  ( $h_\gamma v_\gamma$ ).

50. Wyznaczenie punktu przecięcia się prostej z płaszczyzną.

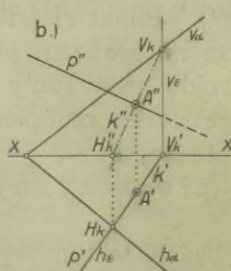
a) Prosta  $p$  (Rys. 135 a.), nachylona do płaszczyzny  $\alpha$ , przebija ją w punkcie  $A$ , który znajdziemy w ten sposób, że przez prostą  $p$  poprowadzimy dowolną płaszczyznę  $\varepsilon$  i wyznaczmy jej krawędź  $k$  z płaszczyzną  $\alpha$ . Punkt



Rys. 134.



Rys. 135 a.



Rys. 135 b.

przecięcia się  $A$  prostych  $p$  i  $k$  jest żądanym punktem. Zazwyczaj przyjmujemy płaszczyznę  $\varepsilon$  jako poziomo lub pionowo rzucającą, uzyskując za

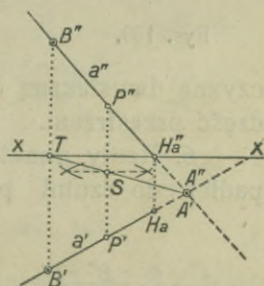


ich pośrednictwem najprostszą konstrukcją. Rozwiązanie zadania w rzutach prostokątnych podaje Rys. 135 b. Przez prostą  $p$  ( $p' p''$ ) poprowadziliśmy płaszczyznę poziomo rzucającą  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ), która przecięła daną płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) w prostej  $k$  ( $k' k''$ ). Prosta  $k''$  przecięła  $p''$  w punkcie  $A''$ , który jest rzutem pionowym szukanego punktu przebiccia się prostej  $p$  z płaszczyzną  $\alpha$ . Rzut poziomy  $A'$  otrzymamy na  $p'$ .

### b) Przykłady.

1. Punkty przebiccia się prostej  $a$  ( $a' a''$ ) z płaszczyznami dwusiecznymi  $\delta_I$  i  $\delta_{II}$  (Rys. 136.). Punkt  $A' \equiv A''$ , w którym przecinają się rzuty prostej  $a$ , leży na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta_{II}$  (ust. 42.) i jest jednym z szukanych punktów.

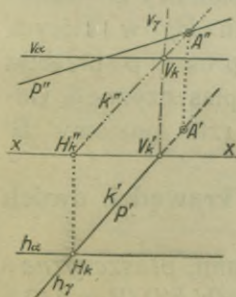
Rzuty punktów przebiccia się prostej  $a$  z płaszczyzną dwusieczną  $\delta_I$  znajdziemy w sposób następujący: Spółny odcinek  $P' P''$  (Rys. 136.) dowolnej prostej odnoszącej i jej środek  $S$  połączmy z  $A' \equiv A''$ . Przez punkt  $T$ , w którym prosta  $S A'$  przecina oś rzutów, poprowadzona prostopadła do osi  $x$  wyznacza na  $a'$  i  $a''$  punkty  $B'$  i  $B''$ , które są rzutami punktu przebiccia się  $B$  prostej  $a$  z płaszczyzną  $\delta_I$ . Gdyby



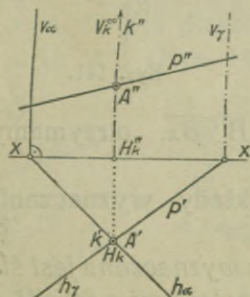
Rys. 136.

punkt  $T$  wypadł po prawej stronie punktu  $A' \equiv A''$ , to punkt  $B$  ( $B' B''$ ) leżałby na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta_I$  w trzeciej części przestrzeni.

2. Jeżeli płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) jest równoległą do osi rzutów, a prosta  $p$  ( $p' p''$ ) ma położenie jak na



Rys. 137.

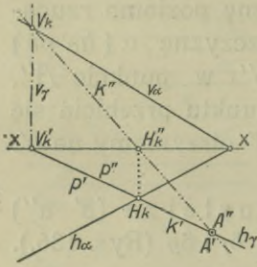


Rys. 138.

Rys. 137., to punkt przebiccia się  $A$  ( $A' A''$ ) prostej  $p$  ( $p' p''$ ) z płaszczyzną poziomo-rzucającą  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) wyobraża Rys. 138.

3. Punkt przebiccia się  $A$  ( $A' A''$ ) prostej  $p$  ( $p' p''$ ) z płaszczyzną poziomo-rzucającą  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) wyobraża Rys. 138.

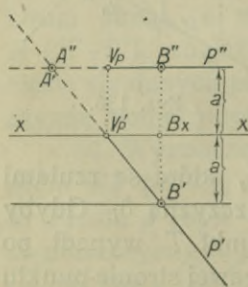
4. Przebiecie się prostej  $p$  ( $p' \equiv p''$ ), leżącej na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta_{II}$ , z płaszczyzną nachyloną do obu rzutni podaje Rys. 139. Punkt  $A$  ( $A' \equiv A''$ ) leży w czwartym obszarze przestrzeni.



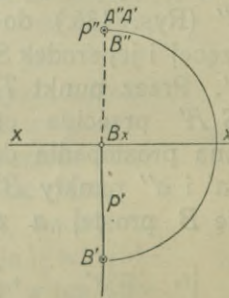
Rys. 139.

5. Rys. 140. przedstawia konstrukcję rzutów punktu przebiecia się prostej poziomej  $p$  ( $p' p''$ ) z płaszczyznami dwusiecznymi. Punkt przecięcia się  $A$  ( $A' \equiv A''$ ) obu rzutów prostej jest punktem przebiecia się prostej  $p$  z płaszczyzną dwusieczną  $\delta_{II}$ . Punkty  $B'$  i  $B''$ , tak obrane na prostych  $p'$  i  $p''$ , że  $\overline{B' B_x} = \overline{B'' B_x} = a$ , są rzutami punktu przebiecia się  $B$  prostej  $p$  z płaszczyzną dwusieczną  $\delta_I$ , przechodzącą przez pierwszą i trzecią część przestrzeni.

6. Rzuty punktów przebiecia się prostej  $p$  ( $p' p''$ ) prostopadłej do rzutni pionowej z płaszczyznami dwusiecznymi



Rys. 140.



Rys. 141.

wyznaczyliśmy na Rys. 141. W punkcie  $p''$  schodzą się oba rzuty  $A'$  i  $A''$  punktu przebiecia się prostej  $p$  z płaszczyzną  $\delta_{II}$  i rzut pionowy  $B''$  punktu  $B$ , w którym prosta  $p$  przebija płaszczyznę  $\delta_I$ . Od-

mierzwszy  $\overline{B' B_x} = \overline{B'' B_x}$ , otrzymamy rzut poziomy  $B'$  punktu  $B$ .

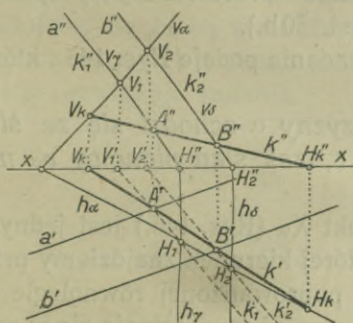
51. Dalsze przykłady wyznaczania krawędzi dwóch płaszczyzn.

1. Płaszczyzna  $\alpha$  wyznaczona jest śladami, płaszczyzna  $\beta$  dwiema prostymi równoległymi  $a$  ( $a' a''$ ) i  $b$  ( $b' b''$ ) (Rys. 142.). Ponieważ krawędź dwóch płaszczyzn określić można jako miejsce geometryczne punktów przebiecia się prostych jednej płaszczyzny z płaszczyzną drugą, więc prosta  $k$  ( $k' k''$ ), łącząca punkty przebiecia się  $A$  ( $A' A''$ ) i  $B$  ( $B' B''$ ) prostych  $a$  i  $b$  z płaszczyzną  $\alpha$ , jest szukaną krawędzią. Kontrolą dokładności

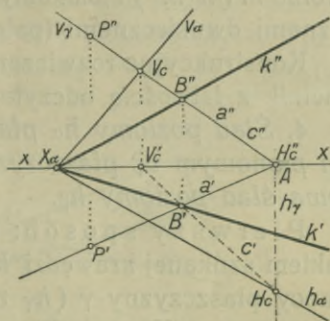


rysunku jest to, że ślady  $H_k$  i  $V_k$  leżą na śladach  $h_\alpha$  i  $v_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ .

2. Płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) ma położenie dowolne, płaszczyzna  $\beta$  przechodzi przez oś rzutów i przez punkt  $P$  ( $P' P''$ ) (Rys. 143.). Szukana krawędź przejdzie przez punkt  $X_\alpha$ , a zadanie nasze ogranicza się do wyznaczenia jeszcze jednego jej



Rys. 142.

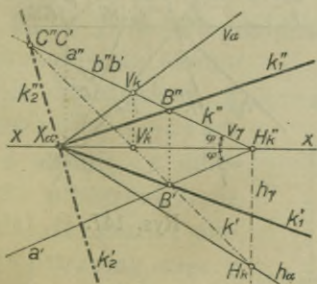


Rys. 143.

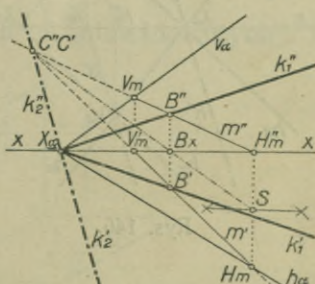
punktu. W tym celu połączmy dowolny punkt  $A$  osi  $x$  z punktem  $P$ , to prosta  $a$  ( $a' a''$ ) leży na płaszczyźnie  $\beta$ . Punkt przecięcia się  $B$  ( $B' B''$ ) prostej  $a$  z płaszczyzną  $\alpha$ , jest szukany punkt krawędzi  $k$  ( $k' k''$ ).

3. Wyznaczyć rzuty krawędzi płaszczyzny dowolnej  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) z płaszczyznami dwusiecznymi  $\delta_I$  i  $\delta_{II}$ .

Pierwszy sposób: Na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta_I$  przyjmujemy prostą  $a$  ( $a' a''$ ) (Rys. 144.), a punkt przecięcia



Rys. 144.



Rys. 145.

się tej prostej z płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) łączymy z punktem  $X_\alpha$ , otrzymując jedną z szukanych krawędzi, a mianowicie  $k_1$  ( $k_1' k_1''$ ).

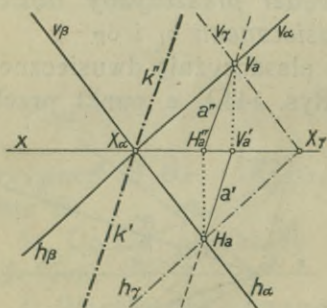
Uważajmy następnie prostą  $a''$  za złączenie rzutów  $b'$  i  $b''$  prostej  $b$ , przyjętej na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta_{II}$ . Punkt ( $C' \equiv C''$ ) jest skupieniem dwóch rzutów punktu przebiecia się prostej  $b$  z płaszczyzną  $\delta_{II}$ . Prosta ( $C' \equiv C''$ ,  $X_\alpha$ ) wyraża rzuty drugiej szukanej krawędzi  $k_2$  ( $k_2'$   $k_2''$ ).

Drugi sposób: Na płaszczyźnie  $\alpha$  przyjmujemy prostą dowolną  $m$  ( $m'$   $m''$ ) i szukamy punktów przebiecia się jej z płaszczyznami dwusiecznymi (patrz ust. 50 b.).

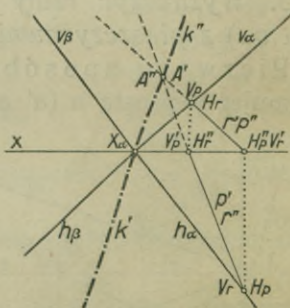
Konstrukcyjne rozwiązanie zadania podaje Rys. 145., który czytelnik z łatwością odczyta.

4. Ślad poziomy  $h_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  schodzi się ze śladem pionowym  $v_\beta$  płaszczyzny  $\beta$ , zaś ślad pionowy  $v_\alpha$  nakrywa ślad poziomy  $h_\beta$ .

Pierwszy sposób: Punkt  $X_\alpha$  (Rys. 146.) jest jednym punktem szukanej krawędzi  $k$ , której kierunek znajdziemy przy pomocy płaszczyzny  $\gamma$  ( $h_\gamma$   $v_\gamma$ ), poprowadzonej równolegle do płaszczyzny  $\beta$  ( $h_\beta$   $v_\beta$ ). Płaszczyzny  $\alpha$  i  $\gamma$  przecinają się w prostej  $a$  ( $a'$   $a''$ ), równoległej do krawędzi  $k$ . Ponieważ punkty  $X_\alpha$ ,  $V_a$ ,  $X_\gamma$  i  $H_a$  tworzą równoległobok, więc proste  $a'$  i  $a''$  są równoległe, a w następstwie tego rzuty  $k'$  i  $k''$  krawędzi  $k$  zejdą się na jednej prostej. Płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  przenikają się wobec tego w prostej, leżącej na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta$



Rys. 146.



Rys. 147.

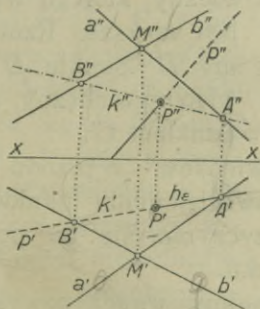
Drugi sposób: Obierzmy na płaszczyźnie  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ) prostą  $p$  ( $p'$   $p''$ ) (Rys. 147). Rzut poziomy  $p'$  oznaczony literą  $r'$  i rzut pionowy  $p''$  oznaczony literą  $r''$ , wyznaczają prostą  $r$ , leżącą na płaszczyźnie  $\beta$ , ślady bowiem prostej  $r$  leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny  $\beta$ . Proste  $p$  i  $r$  przecinają się



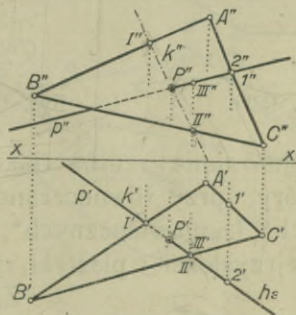
w punkcie  $A$  ( $A' \equiv A''$ ), który leżąc równocześnie na obu prostych jest punktem szukanej krawędzi  $k$ .

### 52. Zadania.

1. Znaleźć rzuty punktu przebiecia się prostej  $p$  ( $p' p''$ ) z płaszczyzną  $\alpha$ , wyznaczoną dwiema prostymi przecinającymi się  $a$  ( $a' a''$ ) i  $b$  ( $b' b''$ ) (Rys. 148.). Przez prostą  $p$  prowadzimy płaszczyznę  $\varepsilon$ , jak w naszym przykładzie, poziomo rzucającą. Szukamy krawędzi  $k$  ( $k' k''$ ) płaszczyzny  $\alpha \equiv (a, b)$  z płaszczyzną  $\varepsilon$ , a punkt przecięcia się  $P$  ( $P' P''$ ) prostych  $k$  i  $p$  rozwiązuje zadanie.



Rys. 148.

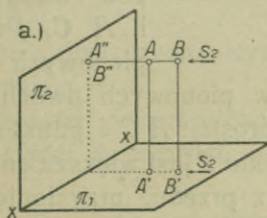


Rys. 149.

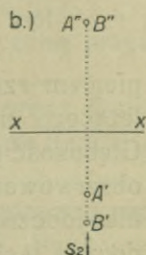
2. Znaleźć rzuty punktu przebiecia się prostej  $p$  ( $p' p''$ ) z płaszczyzną trójkąta  $A$  ( $A' A''$ ),  $B$  ( $B' B''$ ),  $C$  ( $C' C''$ ) (Rys. 149.). Szukamy punktu przebiecia się  $P$  ( $P' P''$ ) prostej  $p$  z płaszczyzną wyznaczoną dwiema prostymi  $AB$  i  $BC$ , które przecinają się punkcie  $B$  ( $B' B''$ ).

### 53. O punktach „widocznych“ i „niewidocznych“.

Kierunek rzutów jest równocześnie kierunkiem, w którym patrzymy na odnośną rzutnię, z odległości nieograniczenie dalekiej. Na rzutnię pionową patrzymy więc z przodu, w kierunku strzałki  $s_2$  (Rys. 150 a.), na rzutnię poziomą z góry, w kierunku strzałki  $s_1$  (Rys. 150c.). Przyjmijmy dwa punkty  $A$  i  $B$  (Rys. 150a i b.)



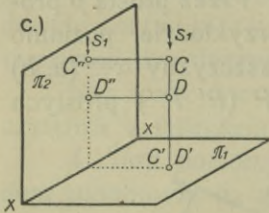
Rys. 150 a.



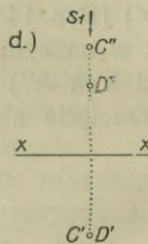
Rys. 150 b.

Przyjmijmy dwa punkty  $A$  i  $B$  (Rys. 150a i b.)

tak położone, aby ich rzuty pionowe  $A''$  i  $B''$  padły na siebie, to punkt  $B$ , którego głębokość jest większa od głębokości punktu  $A$ , uważać będziemy za widoczny, gdy patrzymy w kierunku rzutu pionowego. Rzut pionowy  $B''$  punktu  $B$  nakrywa rzut  $A''$  punktu  $A$ . Analogicznie: z dwóch punktów



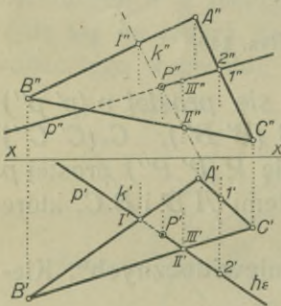
Rys. 150 c.



Rys. 150 d.

np.  $C$  i  $D$  (Rys. 150 c i d.), których rzuty poziome nakrywają się, ten uważać będziemy, w odniesieniu do rzutu poziomego za widoczny, którego wysokość jest większa. Rzut poziomy  $D'$  punktu  $D$  będzie więc niewidoczny, zakryty punktem  $C'$ .

Pojmowanie rzutów jako „widoków“ z przodu względnie z góry, przy równoczesnym uwzględnieniu punktów „widocznych“ i „niewidocznych“, przyczynia się do podniesienia przejrzystości i plastyki rysunku.



Rys. 151.

Zastosujmy uwagi powyższe do rozpatrywanego zadania (Rys. 151).

Przyjmijmy, że trójkąt  $ABC$  wykonany jest z materiału nieprzezroczystego, to w następstwie tego założenia, rzuty tego trójkąta nakryją częściowo rzuty prostej  $p$ . W celu wyznaczenia rzutów niewidocznej, płaszczyznę trójkąta zakrytej części prostej  $p$ , weźmy pod uwagę dwie proste skośne  $p$  i  $AC$ . Punkt przecięcia się rzutów pionowych tych prostych jest skupieniem rzutów pionowych dwóch punktów: punktu 1 ( $I' I''$ ) leżącego na prostej  $AC$  i punktu 2 ( $2' 2''$ ) prostej  $p$  ( $p' p''$ ). Głębokość punktu 2 jest większa niżeli punktu 1, zatem punkt 1 obserwowany z przodu, przysłonięty jest punktem 2, a więc niewidoczny. Skoro rzut pionowy  $2''$  jest widoczny, więc widoczną jest także prosta  $p''$  aż do punktu  $P''$ , leżąca przed płaszczyzną trójkąta.

W podobny sposób zbadamy, która część rzutu poziomego  $p'$  jest widoczna. Punkt przecięcia się prostych  $p'$  i  $C'B'$



jest złączeniem rzutów poziomych  $II'$  i  $III'$  dwóch punktów: punktu  $II$  leżącego na boku  $CB$  i punktu  $III$  przynależnego do prostej  $p$ . Ponieważ wysokość punktu  $III$  jest większa aniżeli punktu  $II$ , więc w widoku z góry punkt  $III$  jest widoczny, a zatem i prosta  $p$ , na której punkt  $III$  leży, jest w rzucie poziomym widoczna. W widoku z góry część prostej od punktu  $III$  do  $P$  leży nad trójkątem, więc odcinek  $III'P'$  jest widoczny.

#### 54. Zadania.

1. Wykreślić rzuty linii przenikania się płaszczyzny trójkąta  $A(A'A')$ ,  $B(B'B')$  i  $C(C'C')$  z płaszczyzną czworokąta  $I II III IV$  (Rys. 152.). Znajdziemy punkt przebiecia się  $P_1(P_1'P_1'')$  boku  $I II$  czworokąta z płaszczyzną trójkąta i punkt przebiecia się  $P_2(P_2'P_2'')$  boku  $BC$  trójkąta z płaszczyzną czworokąta, a odcinek  $P_1P_2$  rozwiąże zadanie. Części niewidoczne wyznaczymy sposobem podanym w ustępie poprzednim, co czytelnik niechaj przeprowadzi na Rys. 152.

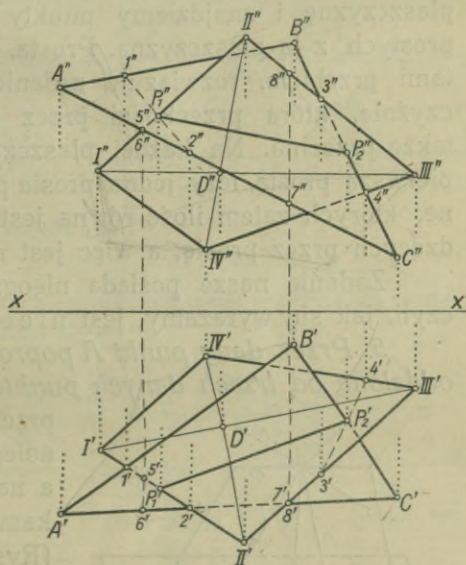
2. Wykreślić rzuty krawędzi dwóch płaszczyzn, z których jedną wyznaczają dwie proste równoległe, a drugą dwie proste przecinające się. Prosta, łącząca punkty przebiecia się jednej pary prostych z płaszczyzną wyznaczoną przez drugą parę, rozwiązuje zadanie.

3. Wyznaczyć rzuty prostej przechodzącej przez dany punkt  $P(P'P'')$ , a przecinającej dwie proste skośne  $a(a'a'')$  i  $b(b'b'')$ .

Pierwszy sposób: Bierzymy pod uwagę płaszczyznę wyznaczoną przez dany punkt i jedną z prostych, szukamy punktu przebiecia się  $M$  drugiej prostej z tą płaszczyzną i łączymy go z danym punktem  $P$ . Prosta  $MP$  rozwiązuje zadanie.

3. Wyznaczyć rzuty prostej przechodzącej przez dany punkt  $P(P'P'')$ , a przecinającej dwie proste skośne  $a(a'a'')$  i  $b(b'b'')$ .

Pierwszy sposób: Bierzymy pod uwagę płaszczyznę wyznaczoną przez dany punkt i jedną z prostych, szukamy punktu przebiecia się  $M$  drugiej prostej z tą płaszczyzną i łączymy go z danym punktem  $P$ . Prosta  $MP$  rozwiązuje zadanie.



Rys. 152.

Drugi sposób: Szukamy krawędzi płaszczyzn, wyznaczonych przez dany punkt i każdą z danych prostych.

#### 4. Wyznaczyć prostą przecinającą trzy proste skośne.

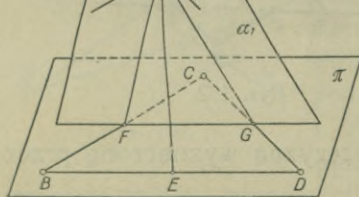
Pierwszy sposób: Na jednej z prostych obierzemy dowolny punkt i wyznaczymy prostą przechodzącą przez ten punkt, a przecinającą pozostałe dwie proste (patrz zadanie poprzednie). Ponieważ przez każdy punkt, przyjęty na pierwszej prostej, przechodzi prosta przecinająca dwie pozostałe, więc istnieje tyle prostych przecinających trzy skośne, ile punktów posiada prosta, więc nieograniczenie wiele.

Drugi sposób: Przez jedną z prostych poprowadzimy płaszczyznę i znajdziemy punkty przebicia się pozostałych prostych z tą płaszczyzną. Prosta, wyznaczona owymi punktami przebicia, rozwiązuje zadanie, leżąc bowiem na płaszczyźnie, która przechodzi przez pierwszą prostą, prostą tę także przecina. Na każdej płaszczyźnie, przechodzącej przez pierwszą prostą, leży jedna prosta przecinająca trzy dane skośne, których zatem ilość równa jest ilości płaszczyzn przechodzących przez prostą, a więc jest nieograniczona.

Zadanie nasze posiada nieograniczoną ilość rozwiązań, czyli, jak się wyrażamy, jest nieoznaczone.

#### 5. Przez dany punkt $A$ poprowadzić płaszczyznę równo oddaloną od trzech danych punktów $B, C, D$ .

Poprowadźmy przez punkt  $A$  proste  $m, n, p$ , równoległe do boków trójkąta  $BCD$ , a nadto połączmy go ze środkami  $E, F, G$  tychże boków (Rys. 153.).



Rys. 153.

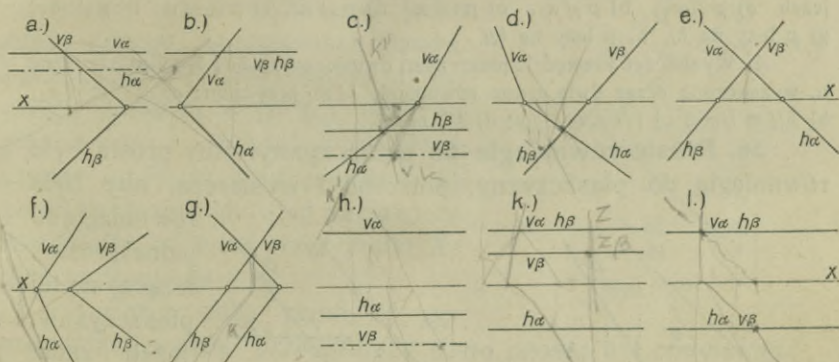
Ważmy pod uwagę płaszczyznę  $\alpha_1 \equiv (m, AF)$ , to ponieważ prosta  $m$  jest równoległą do  $BD$ , więc płaszczyzna ta jest równo oddalona od punktów  $B$  i  $D$ . Ponieważ jednak płaszczyzna  $\alpha_1$  przechodzi przez prostą  $AF$ , więc jest także równo oddalona od punktów  $B$  i  $C$ , a więc jest równo oddalona od trzech danych punktów. Prosta  $FG$ , łącząca środek dwóch boków trójkąta, jest równoległą do boku  $BD$ , a więc i do prostej  $m$ , czyli, że płaszczyzna  $\alpha_1 \equiv (m, AF)$  przechodzi też przez prostą  $AG$ . Jak to z rysunku z łatwością odczytamy, zadanie nasze posiada cztery



rozwiązania, a mianowicie: 1<sup>o</sup>. płaszczyzna  $\alpha_1 \equiv (m, AF, AG, FG)$ ; 2<sup>o</sup>. płaszczyzna  $\alpha_2 \equiv (n, AE, AG, EG)$ ; 3<sup>o</sup>. płaszczyzna  $\alpha_3 \equiv (p, AF, AE, FE)$  i 4<sup>o</sup>. płaszczyzna  $\alpha_4 \equiv (m, n, p)$ .

### 55. Ćwiczenia.

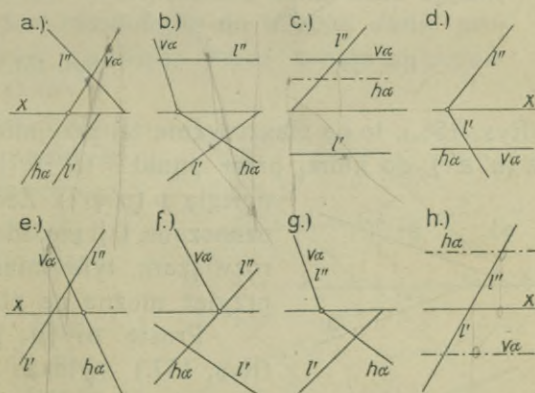
1. Wyznaczyć proste przecięcia się płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  w następujących przypadkach (Rys. 154 a–l).



Rys. 154 a–l.

2. Wyznaczyć w następujących przykładach punkt przebicia się prostej  $l$  ( $l'$ ) z płaszczyzną  $\alpha$  ( $h\alpha$   $v\alpha$ ) (Rys. 155 a–h).

3. Wyznaczyć krawędź płaszczyzny  $\alpha$  ( $h\alpha$   $v\alpha$ ), równoległą do osi rzutów  $x$  z płaszczyzną  $\beta$ , która wyznaczona jest: a) osią  $x$  i dowolnym punktem  $A$  ( $A'$   $A''$ ), b) dwiema prostymi równoległymi, c) dwiema prostymi przecinającymi się na osi rzutów, d) trzema dowolnie przyjętymi punktami w przestrzeni, e) trzema punktami, z których jeden leży na rzutni poziomej, drugi



Rys. 155 a–h.

na pionowej, a trzeci na płaszczyźnie dwusiecznej  $\delta_I$ , względnie  $\delta_{II}$ .

4. Wykreślić rzuty krawędzi płaszczyzn dwusiecznych  $\delta_I$  i  $\delta_{II}$  z płaszczyzną  $\alpha$  ( $h\alpha$   $v\alpha$ ), która ma następujące położenia: a) jest równoległą do osi rzutów, b) jest równoległą do rzutni poziomej, c) jest równoległą do rzutni pionowej.

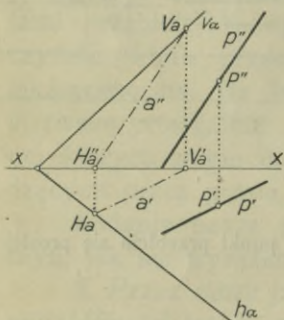
5. Wyznaczyć punkt przecięcia się prostej  $p$  ( $p'$   $p''$ ) z płaszczyzną  $\alpha$ , wyznaczoną przez dwie proste równoległe  $a$  i  $b$ , bez posługiwania się śladami płaszczyzny, w następujących przypadkach: a)  $a \parallel b \parallel x$ ,  $p$  dowolnie; b)  $a \parallel b \parallel x$ ,  $p \parallel \pi_1$ ; c)  $a \parallel b \parallel \pi_1$ ,  $p \parallel \pi_2$ ; d)  $a \parallel b \parallel \pi_2$ ,  $p \parallel \pi_1$ ; e)  $a \parallel b \parallel \pi_2$ ,  $p \perp \pi_2$ ; f)  $a \parallel b \parallel \pi_1$ ,  $p$  leży na  $\delta_I$ , względnie  $\delta_{II}$ .

6. Płaszczyzna  $\alpha$  przechodzi przez trzy punkty  $A$  ( $A'$   $A''$ ),  $B$  ( $B'$   $B''$ ) i  $C$  ( $C'$   $C''$ ); wyznaczyć punkt przecięcia się prostej  $p$  ( $p'$   $p''$ ) z tą płaszczyzną, jeżeli a)  $p \parallel \pi_1$ , b)  $p \parallel \pi_2$ , c)  $p \equiv x$ , d)  $p \parallel x$ , e)  $p \perp \pi_1$ , f)  $p \perp \pi_2$ , g)  $p$  leży na  $\delta_I$ , h)  $p$  leży na  $\delta_{II}$ .

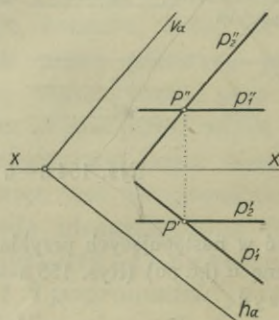
7. Wyznaczyć krawędzie płaszczyzn dwusiecznych  $\delta_I$  i  $\delta_{II}$  z płaszczyzną  $\alpha$ , wyznaczoną przez dwie proste równoległe  $l$  i  $m$ , przyczem: a)  $l \parallel m \parallel \pi_1$ , b)  $l \parallel m \parallel \pi_2$ , c)  $l \parallel x$ ,  $m \equiv x$ ; d)  $l \parallel m \parallel x$ .

**56. Proste równoległe do płaszczyzny.** Aby prosta była równoległą do płaszczyzny, potrzeba i wystarcza, aby była

równoległą do jednej prostej, leżącej na tej płaszczyźnie. Jeżeli zadaniem naszym jest poprowadzenie przez dany punkt  $P$  ( $P'$   $P''$ ) prostej równoległej do pł.  $\alpha$  ( $h_\alpha, v_\alpha$ ) —

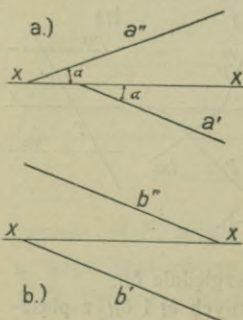


Rys. 156.



Rys. 157.

(Rys. 156.), to na płaszczyźnie tej przyjmiemy dowolnie prostą  $a$  ( $a'$   $a''$ ), do której przez punkt  $P$  ( $P'$   $P''$ ) poprowadzimy równoległą  $p$  ( $p'$   $p''$ ). Zadanie nasze jest nieoznaczone, t. j. posiada nieograniczoną ilość rozwiązań, tyle mianowicie, ile prostych przyjąć można na płaszczyźnie  $\alpha$ .



Rys. 158 a i b.

Proste  $p_1$  ( $p_1'$   $p_1''$ ) i  $p_2$  ( $p_2'$   $p_2''$ ) (Rys. 157.) są także równoległe do płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha, v_\alpha$ ); pierwsza jednak jest równoległą do śladu poziomego, a druga do śladu pionowego tej płaszczyzny.

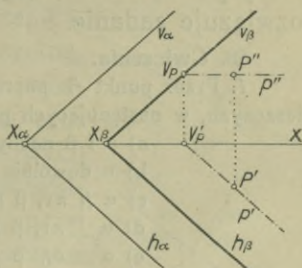
Rzuty prostych równoległych do płaszczyzn dwusiecznych  $\delta_I$  i  $\delta_{II}$ , muszą zawierać z osią rzutów te same kąty (ust. 42.).

W szczególności prosta  $a$  ( $a'$   $a''$ ) (Rys. 158 a.) jest równoległą



do płaszczyzny  $\delta_I$ , zaś prosta  $b$  ( $b' b''$ ) (Rys. 158 b.) równoległą do płaszczyzny dwusiecznej  $\delta_{II}$ .

**57. Zadania. 1.** Wykreślić ślady płaszczyzny  $\beta$ , przechodzącej przez dany punkt  $P$  ( $P' P''$ ) i równoległej do danej płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) (Rys. 159). Równoleżnicze ślady obu płaszczyzn będą równoległe (ust. 49.), wystarczy zatem wyznaczyć jeden punkt któregoś ze szukanych śladów. Przez punkt  $P$  ( $P' P''$ ) poprowadzimy prostą poziomą  $p$  ( $p' p''$ ) szukanej płaszczyzny  $\beta$  a równoległą do płaszczyzny  $\alpha$ . Przez ślad pionowy  $V_p$  prostej  $p$ , przechodzi ślad pionowy  $v_\beta$  równoległy do  $v_\alpha$ , a przez punkt  $X_\beta$  ślad poziomy  $h_\beta \parallel h_\alpha$ .

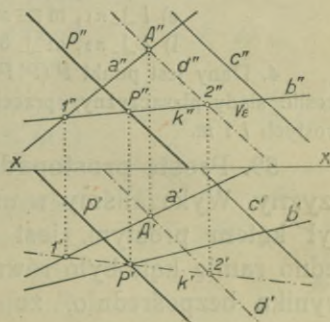


Rys. 159.

**2.** Przez dany punkt  $A$  poprowadzić prostą, przecinającą daną prostą  $a$  i równoległą do danej płaszczyzny  $\alpha$ . Przez punkt  $A$  poprowadzimy płaszczyznę  $\varepsilon$  równoległą do  $\alpha$ , znajdziemy punkt przecięcia się prostej  $a$  z płaszczyzną  $\varepsilon$  i punkt ten połączymy z danym punktem  $A$ .

**3.** Wyznaczyć prostą, która przecina dwie dane skośne  $a$  ( $a' a''$ ),  $b$  ( $b' b''$ ) i jest równoległą do trzeciej danej prostej  $c$  ( $c' c''$ ). Pierwszy sposób: Przez prostą  $a$  prowadzimy płaszczyznę  $\alpha$  równoległą do prostej  $c$  (Rys. 160.), szukamy punktu przecięcia się  $P$  prostej  $b$  z tą płaszczyzną i przez ten punkt prowadzimy prostą  $p$  równoległą do  $c$ , rozwiązującą zadanie.

Dla wyznaczenia płaszczyzny  $\alpha$  równoległej do prostej  $c$ , obraliśmy na prostej  $a$  punkt  $A$  ( $A' A''$ ) i poprowadziliśmy prostą  $d$  ( $d' d''$ )  $\parallel c$  ( $c' c''$ ). Płaszczyzna  $\alpha \equiv (a, d)$  jest równoległą do prostej  $c$  i przecina prostą  $b$  ( $b' b''$ ) w punkcie  $P$  ( $P' P''$ ).



Rys. 160.

Drugi sposób: Przez prostą  $a$ , a następnie  $b$ , popro-

wadzymy płaszczyznę równoległą do prostej  $c$ ; krawędź tych obu płaszczyzn spełnia żądany warunek.

4. Przez jedną z dwóch danych prostych skośnych poprowadzić płaszczyznę równoległą do drugiej prostej. Na jednej prostej, np.  $a$ , obierzemy punkt, przez który poprowadzimy prostą  $c$  równoległą do prostej  $b$ . Płaszczyzna  $\varepsilon \equiv (a, c)$  rozwiązuje zadanie.

#### 58. Ćwiczenia.

1. Przez punkt  $A$  poprowadzić prostą równoległą do dwóch danych płaszczyzn, w następujących przypadkach:

- $\alpha$  i  $\beta$  nachylone do obu rzutni,
- $\alpha$  dowolnie położona,  $\beta \parallel \pi_1$ ,
- $\alpha \parallel \pi_1$ ,  $\beta \parallel x$ ,
- $\alpha \perp \pi_1$ ,  $\beta \parallel x$ ,
- $\alpha \equiv \delta_I$ ,  $\beta \parallel x$ ,
- $\alpha \equiv \delta_{II}$ ,  $\beta$  dowolnie położona.

U w a g a: Szukana prosta jest równoległą do krawędzi obu płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ .

2. Przez dany punkt  $A$  poprowadzić taką płaszczyznę  $\alpha$ , równoległą do danej prostej  $p$ , aby:

- $\alpha$  była równoległą do osi rzutów  $x$ ,
- $\alpha$  była równoległą do  $\pi_1$ ,
- $\alpha$  była prostopadłą do  $\pi_2$ .

3. Dane są proste skośne  $l$  ( $l' l''$ ) i  $m$  ( $m' m''$ ); przez prostą  $m$  poprowadzić płaszczyznę równoległą do prostej  $l$  i wyznaczyć ślady tej płaszczyzny skoro:

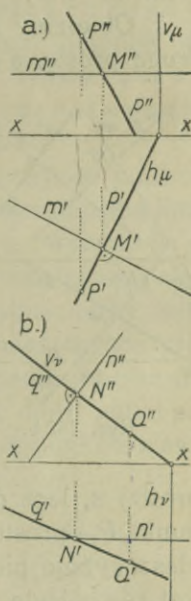
- $l \parallel \pi_1$ ,  $m$  nachylona do obu rzutni,
- $l \parallel \pi_2$ ,  $m \parallel \pi_1$ ,
- $l \parallel \delta_{II}$ ,  $m$  nachylona do obu rzutni,
- $l \parallel \delta_I$ ,  $m \parallel x$ ,
- $l \perp \pi_1$ ,  $m \equiv x$ ,
- $l \perp \pi_2$ ,  $m \perp \delta_{II}$ .

4. Dany jest punkt  $P$  ( $P' P''$ ) i proste skośne  $l$  ( $l' l''$ ) i  $m$  ( $m' m''$ ); wykreślić ślady płaszczyzny, przechodzącej przez punkt  $P$ , a równoległej do prostych  $l$  i  $m$ .

**59. Proste prostopadłe. Prosta prostopadła do płaszczyzny.** Wykazaliśmy w ustępie 24., że aby rzut kąta prostego był kątem prostym, jest koniecznym i wystarczającym, by jedno ramię kąta było równoległe do płaszczyzny rzutów. Stąd wynika bezpośrednio, że prosta jest prostopadłą do prostej poziomej (czołowej), skoro rzuty poziome (pionowe) obu prostych tworzą kąt prosty. Aby z punktu  $P$  ( $P' P''$ ) (Rys. 161 a.) poprowadzić prostą prostopadłą i przecinającą daną prostą  $m$  ( $m' m''$ ), wykreślimy  $p' \perp m'$ , odniesiemy punkt  $A'$  na prostą  $m''$ , a punkt  $A''$  połą-

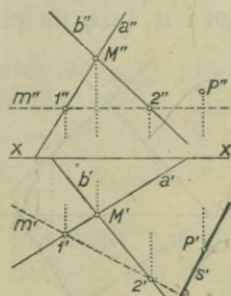


czymy z punktem  $P''$ , otrzymując rzut pionowy  $p''$  szukanej prostej  $p$  ( $p' p''$ ). Podobnie (Rys. 161 b.), prosta  $q$  ( $q' q''$ ) przechodzi przez dany punkt  $Q$  ( $Q' Q''$ ), jest prostopadłą do prostej czołowej  $n$  ( $n' n''$ ) i przecina ją w punkcie  $N$  ( $N' N''$ ). Ale prócz prostej  $p$  ( $p' p''$ ), prostopadłej do prostej  $m$  ( $m' m''$ ) i prostą tę przecinającą, poprowadzić można z punktu  $P$  dowolną, nieograniczoną ilość dalszych prostych również prostopadłych do prostej  $p$ , jednak prostych tej nieprzecinających, a więc prostych skośnych. Miejscem geometrycznym wszystkich tych prostych jest płaszczyzna prostopadła do prostej  $m$ , a przechodząca przez punkt  $P$ . Rzut poziomy wszystkich tych prostych w przypadku, gdy prosta  $m$  jest pozioma, musi być prostopadły do  $m'$ , a więc schodzić się z prostą  $p'$ . Płaszczyzna  $\mu$  ( $h_\mu v_\mu$ ), przechodząca przez punkt  $P$  i prostopadła do prostej poziomej  $m$ , jest więc płaszczyzną poziomo rzucającą, podobnie jak płaszczyzna  $\nu$  ( $h_\nu v_\nu$ ), przechodząca przez punkt  $Q$  i prostopadła do prostej czołowej  $n$ , jest płaszczyzną pionowo rzucającą.



Rys. 161 a—b.

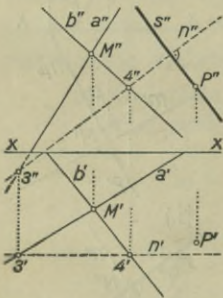
Niechaj daną będzie płaszczyzna  $\alpha$ , wyznaczona prostymi  $a$  ( $a' a''$ ) i  $b$  ( $b' b''$ ); wykreślmy rzuty prostej, przechodzącej przez dany punkt  $P$  ( $P' P''$ ) a prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha$ . Przyjmijmy na płaszczyźnie  $\alpha$  prostą poziomą  $m$  ( $m' m''$ ) i z punktu  $P'$  wykreślmy prostą  $s' \perp m'$  (Rys. 162 a.). Prosta  $s'$  jest rzutem poziomym nie tylko pewnej określonej prostej  $s$ , lecz dowolnej, nieograniczonej ilości prostych, przechodzących przez punkt  $P$ , prostopadłych do prostej  $m$ , a leżących na płaszczyźnie poziomo rzucającej  $\mu$ , prostopadłej do prostej  $m$ . W istocie bowiem rzut kątów prostych, jakie prosta pozioma  $m$  tworzy z prostymi leżącymi na



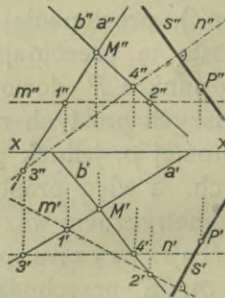
Rys. 162 a.

płaszczyźnie  $\mu$ , jest kątem prostym i to zawartym między prostymi  $m'$  i  $s'$ .

Obierzmy następnie na tej samej płaszczyźnie  $\alpha \equiv (a, b)$  drugą prostą, a mianowicie prostą czołową  $n$  ( $n'$   $n''$ ), przyczem



Rys. 162 b.

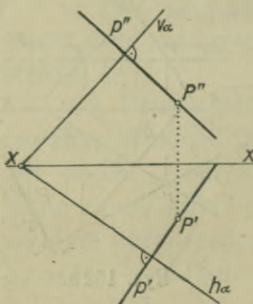


Rys. 162 c.

dla łatwiejszej orientacji przeprowadzimy konstrukcję na drugim rysunku (Rys. 162 b.), będącym kopią pierwszego.

Z punktu  $P''$  poprowadzimy prostą  $s''$  prostopadłą do  $n''$ , to prostą tę uważać możemy za rzut pionowy nie tylko jednej

prostej  $s$ , lecz dowolnej ilości prostych, przechodzących przez punkt  $P$ , prostopadłych do prostej  $n$ , a leżących na jednej płaszczyźnie pionowo rzucającej. Wynika to stąd, że prosta  $n$  jest równoległą do rzutni pionowej, a zatem rzut kątów prostych, jakie ona tworzy z prostymi, przechodzącymi przez punkt  $P$ , jest kątem prostym i to zawartym między prostymi  $n''$  i  $s''$ . Połączmy teraz Rysunki 162 a i 162 b w jeden Rys. 163 c., to proste  $s'$  i  $s''$  są rzutami jednej prostej, prostopadłej jednak zarówno do prostej  $m$ , jak i  $n$ , a więc prostopadłej do płaszczyzny prostymi temi wyznaczonej. A ponieważ proste  $m$  i  $n$  leżą na płaszczyźnie  $\alpha \equiv (a, b)$ , więc prosta  $s$  ( $s'$   $s''$ ) jest do tej płaszczyzny prostopadłą i rozwiązuje zadanie.



Rys. 163.

Rozwiążmy to samo zasadnicze i bardzo ważne zadanie, t. zn. wykreślmy rzuty prostej prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha$ , która jednak wyznaczona jest swoimi śladami  $h_\alpha$  i  $v_\alpha$ . Prosta  $m'$  (Rys. 162 c.), jako rzut poziomy prostej poziomej przyjętej na płaszczyźnie  $\alpha$ , jest równoległą do śladu poziomego tej płaszczyzny, podobnie jak prosta  $n''$ , będąca rzutem pionowym prostej czołowej na płaszczyźnie  $\alpha$ , jest równoległą do śladu pionowego tej płaszczyzny.

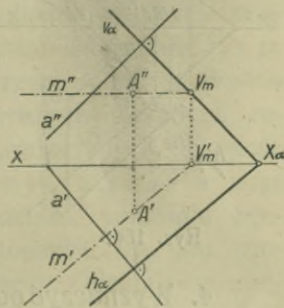


Zatem: rzuty prostej prostopadłej do płaszczyzny są prostopadłe do śladów tej płaszczyzny, a to rzut poziomy do śladu poziomego, a rzut pionowy do śladu pionowego (Rys. 163.). I wzajemnie: ślady płaszczyzny prostopadłej do prostej są prostopadłe do odpowiednich rzutów tej prostej.

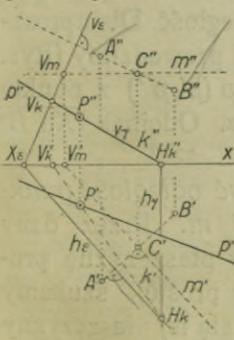
**60. Płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny.** W punkcie płaszczyzny poprowadzić można dowolną, nieograniczoną ilość płaszczyzn prostopadłych do tej płaszczyzny. Wszystkie te płaszczyzny tworzą pęk, którego osią jest prosta prostopadła, poprowadzona w danym punkcie do płaszczyzny. Aby więc w danym punkcie płaszczyzny poprowadzić płaszczyznę prostopadłą, wyprowadzimy w nim prostą prostopadłą a przez nią poprowadzimy płaszczyznę. Możemy też przez dany punkt poprowadzić prostą leżącą na płaszczyźnie, a w tym punkcie płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.

### 61. Zadania.

**1. Wykreślić ślady płaszczyzny prostopadłej do prostej  $a$  ( $a' a''$ ), a przechodzącej przez punkt  $A$  ( $A' A''$ ) (Rys. 164.).** Przez punkt  $A$  ( $A' A''$ ) prowadzimy prostą poziomą  $m$  ( $m' m''$ ) prostopadłą do danej prostej  $a$  ( $a' a''$ ). Przez ślad pionowy  $V_m$  prostej  $m$  kreślimy ślad pionowy  $v_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  prostopadłe do  $a''$ , a przez punkt  $X_\alpha$  ślad poziomy  $h_\alpha \perp a'$ . Płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ )



Rys. 164.



Rys. 165.

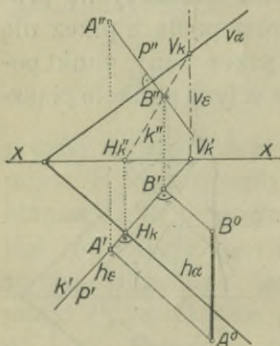
jest prostopadłą do prostej  $a$  ( $a' a''$ ), gdyż ślady jej są prostopadłe do rzutów prostej, a przechodzi przez punkt  $A$  ( $A' A''$ ), gdyż zawiera prostą  $m$  ( $m' m''$ ), poprowadzoną przez ten punkt.

**2. Na prostej  $p$  ( $p' p''$ ) znaleźć punkt równo oddalony od danych punktów  $A$  ( $A' A''$ ) i  $B$  ( $B' B''$ ) (Rys. 165.).** Przez środek  $C$  odcinka  $AB$  poprowadziona płaszczyzna prostopadła, przecina prostą  $p$  w punkcie  $P$  ( $P' P''$ ), rozwiązującym zadanie. Znalazszy środek  $C$  ( $C' C''$ ), wykreśliliśmy prostą poziomą  $m$  ( $m' m''$ ), przy czym  $m' \perp A' B'$ , wyznaczyliśmy

ślad  $V_m$ , a następnie ślady  $v_\varepsilon$  i  $h_\varepsilon$  płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $C$  i prostopadłej do odcinka  $\overline{AB}$ . Przy pomocy pionowo rzucającej płaszczyzny  $\gamma$  ( $h_\gamma v_\gamma$ ), poprowadzonej przez prostą  $p$ , otrzymaliśmy punkt  $P$  ( $P' P''$ ).

3. Wyznaczyć odległość punktu  $A$  ( $A' A''$ ) od płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ). Z punktu  $A$  prowadzimy prostą  $p$  prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ , a odcinek zawarty między punktem  $A$  a punktem przebiecia się  $B$ , prostej  $p$  z płaszczyzną  $\alpha$ , wyraża odległość punktu  $A$  od płaszczyzny  $\alpha$ .

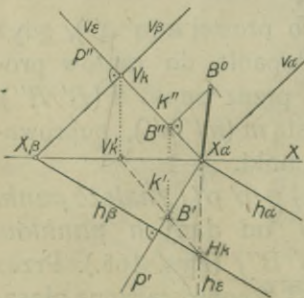
a) Płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) nachylona jest do obu rzutni (Rys. 166.). Prostopadła  $p$  ( $p' p''$ ) przechodząca przez punkt  $A$  ( $A' A''$ ), przebija płaszczyznę  $\alpha$  w punkcie  $B$  ( $B' B''$ ). Odcinek  $\overline{A^0 B^0}$  jest kładem odcinka  $\overline{AB}$  na płaszczyźnie poziomej rzutów i wyraża prawdziwą odległość punktu  $A$  od płaszczyzny  $\alpha$ .



Rys. 166.

b) Płaszczyzna  $\alpha$  jest wyznaczona dwiema prostymi równoległymi. W sposób podany w ust. 59. wykreślimy z punktu  $A$  prostopadłą do płaszczyzny, znajdziemy jej punkt przebiecia i kład odcinka podobnie jak w zadaniu powyższem.

4. Wyznaczyć odległość dwóch płaszczyzn równoległych. Prowadzimy prostą prostopadłą do obu płaszczyzn, a odcinek zawarty między punktami przebiecia wyraża żadaną odległość. Dla uproszczenia konstrukcji prowadzimy (Rys. 167.) prostopadłą  $p$  ( $p' p''$ ) z punktu  $X_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ . Odcinek  $\overline{X_\alpha B^0}$  rozwiązuje zadanie.



Rys. 167.

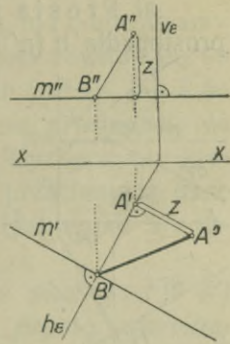
5. Wyznaczyć odległość punktu  $A$  od prostej  $m$ . Przez dany punkt prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do danej prostej, szukamy punktu przecięcia się tej płaszczyzny z tą prostą, a odcinek zawarty między otrzymanym a danym punktem rozwiązuje zadanie.

dzdy otrzymanym a danym punktem rozwiązuje zadanie.

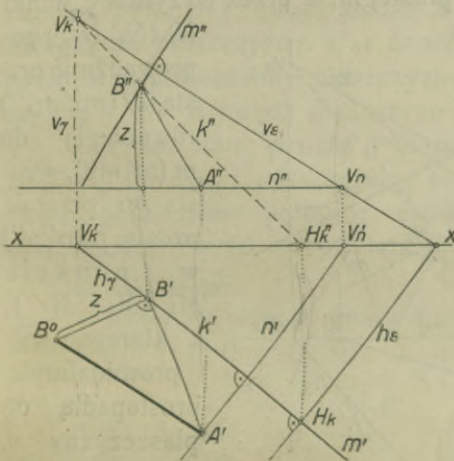


W Rys. 168. prosta  $m$  ( $m' m''$ ) jest poziomą. Płaszczyzna  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ), przechodząca przez punkt  $A$  ( $A' A''$ ) prostopadłe do prostej  $m$ , jest poziomo rzucającą i przecina prostą  $m$  w punkcie  $B$  ( $B' B''$ ). Odcinek  $\overline{AB}$  położony na płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez prostą  $m$  daje odcinek  $\overline{B' A^0}$  rozwiązujący zadanie.

Odległość punktu  $A$  ( $A' A''$ ) od prostej  $m$  ( $m' m''$ ), mającej dowolne położenie w przestrzeni, wyznaczaliśmy na Rys. 169. Odcinek  $\overline{AB}$  położyliśmy na płaszczyźnie poziomej, przechodzącej przez punkt  $A$ , otrzymując odcinek  $\overline{A' B^0}$ , wyrażający prawdziwą odległość



Rys. 168.

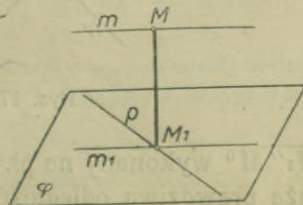


Rys. 169.

punktu  $A$  od prostej  $m$ .

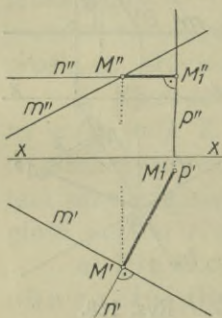
6. Wyznaczyć odległość dwóch prostych skośnych  $m$  i  $p$ . Przez odległość dwóch prostych skośnych rozumiemy ich odległość najkrótszą, a więc odcinek wspólnie prostopadły do obu prostych. Odcinek ten znajdziemy w ogólnym przypadku w następujący sposób: Przez prostą  $p$  (Rys. 170.), poprowadzimy płaszczyznę  $\varphi$ , równoległą do prostej  $m$ ,

a następnie rzucimy prostą  $m$  w kierunku prostopadłym na tę płaszczyznę. Rzut  $m_1$  przetnie prostą  $p$  w punkcie  $M_1$ , w którym wyprowadzona prostopadła  $n$  do do płaszczyzny  $\varphi$ , przetnie prostą  $m$  w punkcie  $M$ . Odcinek  $\overline{MM_1}$  jest wspólnie prostopadły do prostych  $m$  i  $p$  i wyraża ich najkrótszą odległość.



Rys. 170.

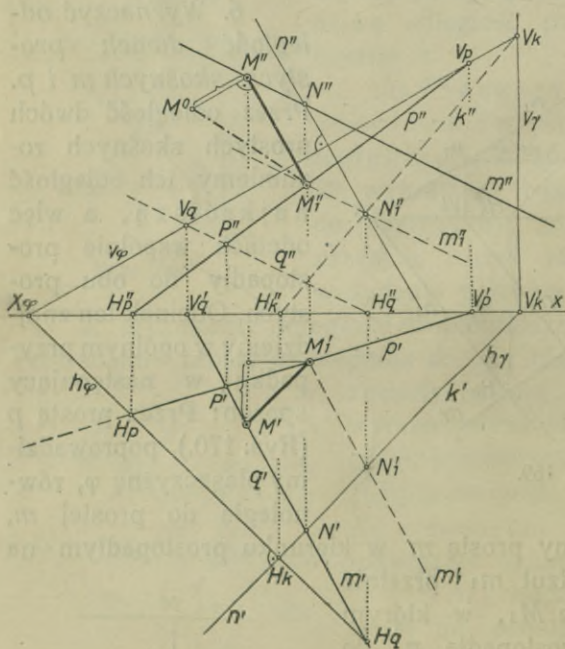
a) Prosta  $p(p'p'')$  jest pionową (Rys. 171.). Wspólna prostopadła  $n(n'n'')$  jest poziomą, jej rzut poziomy  $n'$  jest prostopadły do  $m'$ . Odcinek  $M'M_1'$  wyraża wprost odległość prostych skośnych  $m$  i  $p$ .



Rys. 171.

b) Obie proste  $m$  i  $p$  mają dowolne położenie w przestrzeni (Rys. 172.). Na prostej  $p(p'p'')$  przyjmiemy dowolny punkt  $P(P'P'')$ , przez który prowadzimy prostą  $q(q'q'')$ , równoległą do prostej  $m(m'm'')$ . Proste  $q$  i  $p$  wyznaczają płaszczyznę  $\varphi(h_\varphi v_\varphi)$ , równoległą do prostej  $m$ .

Rzucimy prostopadłe na płaszczyznę  $\varphi$  dowolny punkt  $N(N'N'')$  prostej  $m$ , a przez otrzymany punkt  $N_1(N_1'N_1'')$  poprowadzimy prostą  $m_1(m_1'm_1'')$  równoległą do  $m(m'm'')$ . Prosta  $m_1$  przecina prostą  $p(p'p'')$  w punkcie  $M_1(M_1'M_1'')$ , z którego wyprowadzimy prostopadłą do płaszczyzny  $\varphi$ .



Rys. 172.

Prosta ta przecina prostą  $m$  w punkcie  $M(M'M'')$ . Odcinek  $M_1M$  jest wspólnie prostopadły do obu prostych skośnych, jego kład

$M_1''M^0$  wykonany na pł. pionową przechodzącą przez  $M_1$ , wyraża prawdziwą odległość tych prostych.

Inny sposób wyznaczenia wspólnej prosto-



padłej do dwóch prostych skośnych  $m$  i  $p$  otrzymamy zważywszy, że owa wspólna prostopadła jest równoległą do każdej płaszczyzny prostopadłej zarówno do jednej, jak i do drugiej prostej. Prowadzimy więc płaszczyznę prostopadłą do prostej  $m$  i drugą prostopadłą do prostej  $p$ . Wyznamy krawędź  $k$  obu płaszczyzn, a następnie prostą, przecinającą dane proste skośne i równoległą do krawędzi  $k$  (patrz ust. 57. zadanie 3.).

7. Dane są: punkt  $A (A' A'')$  i dwie skośne  $l (l' l'')$  i  $m (m' m'')$ ; przez punkt  $A$  poprowadzić prostą przecinającą prostą  $l$ , a prostopadłą do prostej  $m$ . Przez punkt  $A$  poprowadzimy płaszczyznę  $\alpha$ , prostopadłą do prostej  $m$ , a krawędź tej płaszczyzny z płaszczyzną  $\beta \equiv (A, l)$  rozwiąże zadanie.

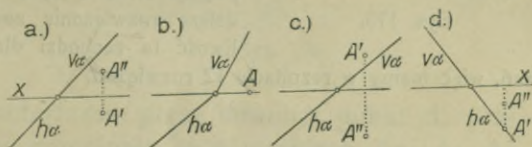
8. Dane są: punkt  $A (A' A'')$ , prosta  $l (l' l'')$  i płaszczyzna  $\alpha (h\alpha, v\alpha)$ ; przez punkt  $A$  poprowadzić prostą równoległą do płaszczyzny  $\alpha$ , a prostopadłą do prostej  $l$ . Przez punkt  $A$  poprowadzimy płaszczyznę  $\beta \parallel \alpha$ , a następnie płaszczyznę  $\gamma \perp l$ . Krawędź płaszczyzn  $\beta$  i  $\gamma$  rozwiąże zadanie.

9. Przez daną prostą  $p$  poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do danej płaszczyzny  $\varphi$ . Z dowolnego punktu prostej  $p$  prowadzimy prostą  $q$ , prostopadłą do płaszczyzny  $\varphi$ ; płaszczyzna  $\psi \equiv (p, q)$  rozwiązuje zadanie.

### 62. Ćwiczenia.

1. Wyznaczyć odległość punktu  $A (A' A'')$  od płaszczyzny  $\alpha (h\alpha, v\alpha)$ , w następujących przypadkach (Rys. 173 a, b, c, d.).

2. Wyznaczyć rzut prostokątny odcinka  $AB$  na płaszczyznę  $\alpha (h\alpha, v\alpha)$  w następujących przypadkach:

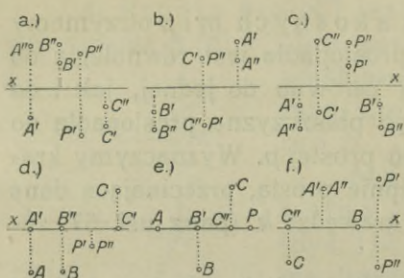


Rys. 173 a—d.

- $\alpha$  nachylona do obu rzutni,
- $\alpha \parallel x$ ,
- $\alpha \equiv \delta I$ ,
- $\alpha \equiv \delta II$ .

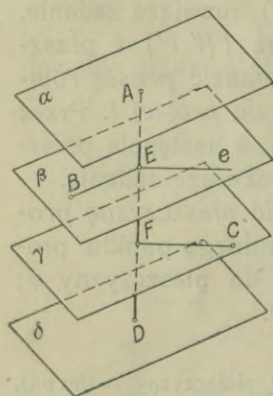
3. Przez daną prostą  $l (l' l'')$  poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do danej płaszczyzny  $\alpha (h\alpha, v\alpha)$  i wyznaczyć jej ślady w następujących przypadkach:

- $l \parallel \pi_1$ ,  $\alpha$  dowolnie położona,
- $l \perp \pi_1$ ,  $\alpha$  „ „
- $l$  leży na  $\delta I$ ,  $\alpha$  dowolnie położona,
- $l$  „ „  $\delta II$ ,  $\alpha$  „ „
- $l \equiv x$ ,  $\alpha$  „ „



Rys. 174 a—f.

go na trzy równe części.



Rys. 175.

zań, więc mamy w rezultacie 12 rozwiązań.

4. Wyznaczyć odległość punktu  $P$  ( $P'$   $P''$ ) od płaszczyzny, przechodzącej przez punkty  $A, B, C$  w przypadkach podanych na Rys. 174 a—f.

5. Przez każdy z czterech dowolnie w przestrzeni leżących punktów  $A, B, C$  i  $D$ , poprowadzić płaszczyznę tak, aby wszystkie były do siebie równoległe i równo od siebie oddalone.

**Rozwiązanie:** Weźmy pod uwagę odcinek  $AD$  (Rys. 175.) i wyznaczmy punkty  $E$  i  $F$  dzielące

Połączmy punkt  $B$  z punktem  $E$ , a przez ten ostatni poprowadźmy prostą  $e$ , równoległą do  $FC$ . Płaszczyzna  $\beta \equiv (e, EB)$  i płaszczyzny  $\alpha, \gamma$  i  $\delta$ , przechodzące przez punkty  $A, F$  i  $D$  równoległe do płaszczyzny  $\beta$ , rozwiązują zadanie. Dalsze rozwiązanie otrzymamy łącząc punkty  $A$  z  $B, A$  z  $C, B$  z  $C, B$  z  $D$  i  $C$  z  $D$  i powtarzając tę samą konstrukcję. Otrzymamy w ten sposób dalszych pięć rozwiązań. Ale zważmy jeszcze, odnośnie do pierwszego rozwiązania, że punkt  $B$  połączyć można z punktem  $F$ , a zaś punkt  $C$  z punktem  $E$  a prostą  $e$  poprowadzić równoległe do  $CE$ . Wówczas płaszczyzna  $\beta$ , wyznaczona przez proste  $e$  i  $BF$  i płaszczyzny przechodzące przez punkty  $A, C$  i  $D$ , równoległe do  $\beta$ , stanowią dalsze rozwiązanie zadania, a ponieważ możliwość ta zachodzi dla dalszych pięciu rozwią-

## § 4. WPROWADZENIE TRZECIEJ PŁASZCZYZNY RZUTÓW

**63. Rzutnia boczna. Rzuty boczne punktów.** Zauważyliśmy, że w pewnych przypadkach (prosta prostopadła do osi rzutów, płaszczyzna przechodząca przez oś) położenie prostej w przestrzeni nie da się określić jej rzutami, a położenie płaszczyzny jej śladami i że w tych przypadkach uciekać się musimy do pośrednictwa poszczególnych punktów przyjętych na prostej, względnie na płaszczyźnie. Względ na korzyści wynikające z wyznaczania położenia prostej jej rzutami, a płaszczyzny jej śladami, ale przedewszystkiem względ na możli-





Odległość punktu od rzutni bocznej nazywać będziemy krótko „szerokością“ punktu. Jeżeli punkt znajduje się po prawej stronie rzutni bocznej, więc w *I*, *II*, *III* lub *IV* części przestrzeni — to szerokość jego określamy jako dodatnią, szerokość punktów leżących po lewej stronie rzutni bocznej uważamy za ujemną.

Szerokość  $\overline{AA''}$  punktu *A*, równa jest — jak czytamy z Rys. 176. — odległości rzutu poziomego *A'* od osi *y*, równa odległości rzutu pionowego *A''* od osi *z* i równa spórzędnej  $x = \overline{OA_x}$ .

Ażeby spórzędne punktu wyrazić mogły także i część przestrzeni, w której dany punkt się znajduje, nadajemy osiom rzutów, a przez to i spórzędnym znaki + lub —.

W szczególności, część osi *x* rozciągającą się na prawo od początku *O*, otrzymuje znak +, część osi *x* leżącą na lewo od punktu *O* oznaczmy znakiem —. Część osi *y*, znajdująca się przed rzutnią pionową i część osi *z* nad rzutnią poziomą otrzymują znaki +; część osi *y* rozciągającą się za rzutnią pionową i część osi *z* leżącą pod rzutnią poziomą oznaczamy znakami — (Rys. 176.).

W ten sposób wszystkie trzy spórzędne punktów znajdujących się w *I*. części przestrzeni są dodatnie, w części *II*:  $x = +$ ,  $y = -$ ,  $z = +$ ; w części *III*:  $x = +$ ,  $y = -$ ,  $z = -$ ; w *IV*:  $x = +$ ,  $y = +$ ,  $z = -$ ; w *V*:  $x = -$ ,  $y = +$ ,  $z = +$ ; w *VI*:  $x = -$ ,  $y = -$ ,  $z = +$ ; w *VII*:  $x = -$ ,  $y = -$ ,  $z = -$ ; w *VIII*:  $x = -$ ,  $y = +$ ,  $z = -$ .

Przystępując do sprowadzenia płaszczyzn rzutów na jedną płaszczyznę rysunkową, zauważmy, że rzutnię boczną położyć można na poziomą, albo też pionową, a następnie te dwie rzutnie — w poznany już sposób — (ust. 34.), sprowadzić do jednej płaszczyzny.

Obrotu płaszczyzny bocznej rzutów na rzutnię pionową dokonywamy około osi *z*, i to dla punktów leżących w częściach przestrzeni na prawo rzutni  $\pi_3$ , zgodnie z ruchem wskazówki zegara, leżącego na płaszczyźnie poziomej, dla punktów leżących w częściach *V*, *VI*, *VII* i *VIII* w kierunku przeciwnym.

Obrót rzutni bocznej na poziomą wykonywamy około osi *y*, a mianowicie dla punktów znajdujących się w pierwszych czterech ósemkach, w kierunku przeciwnym ruchowi wska-

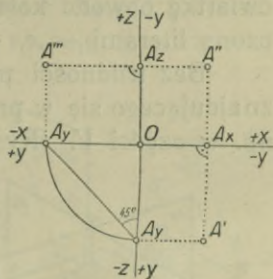


zówki zegara, przytwierdzonego na płaszczyźnie pionowej, dla punktów znajdujących się w innych ósemkach, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówki tego zegara.

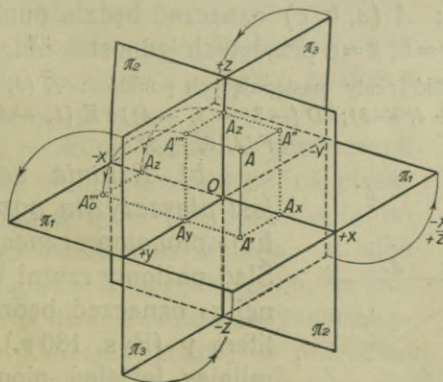
Przyjmijmy punkt  $A$  w pierwszej części przestrzeni, a po wyznaczeniu jego rzutów  $A'$   $A''$   $A'''$  (Rys. 177.), obróćmy rzutnię boczną około osi  $z$ , aby padła na pionową, a następnie rzutnię pionową połóżmy na poziomą.

Oś rzutów  $y$  leży równocześnie na rzutni poziomej i bocznej; po kładzie płaszczyzny bocznej na pionową, znakiem  $+$  oznaczona część osi  $y$  padnie na ujemną część osi  $x$ , a równocześnie oś  $-y$  zleje się z osią  $+x$ . Po sprowadzeniu płaszczyzny pionowej na rzutnię poziomą, oś  $-z$  nakryje się osią  $+y$ , zaś oś  $+z$  padnie na oś  $-y$  (Rys. 177.).

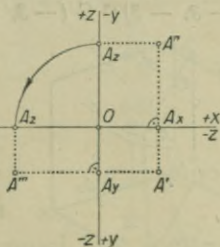
Punkt  $A_y$  po zakreśleniu ćwiartki obwodu koła na płaszczyźnie poziomej, padnie na oś oznaczoną literami  $-x$ ,  $+y$ , po lewej stronie początku układu  $O$ . Rzut boczny  $A'''$  po sprowadzeniu płaszczyzny bocznej na pionową, oznaczyliśmy na Rys. 176. literą  $A_0'''$ , aby w ten sposób wskazać nowe położenie tego punktu. W Rys. 177. znak  $o$  przy  $A'''$  opuściliśmy jako zbędny.



Rys. 177.



Rys. 178 a.



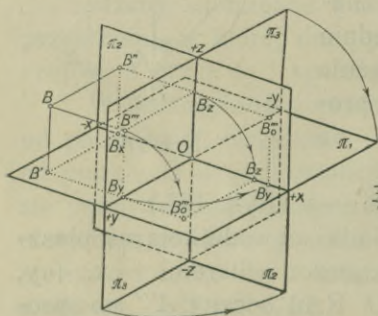
Rys. 178 b.

Z Rys. 178 a. odczytamy z łatwością przebieg kładu rzutni bocznej na poziomą, dokonanego dokoła osi  $y$ . Znakiem  $+$

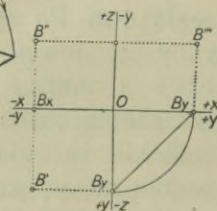
oznaczona część osi  $z$  padnie na oś  $-x$ , a zaś  $-z$  zjedzie się z osią  $+x$ .

Ponieważ oś  $z$  leży na rzutni bocznej i na pionowej, więc po sprowadzeniu płaszczyzny pionowej na poziomą oś  $+z$  zleje się z osią  $-y$ , a oś  $-z$  z osią  $+y$ . Punkt  $A_z$  zakreśli ćwiartkę obwodu koła na rzutni pionowej i padnie na oś, oznaczoną literami  $-x, +z$  (Rys. 178 b.).

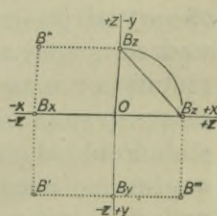
Bez trudności potrafimy wyznaczyć teraz rzuty punktu znajdującego się w przestrzeni na lewo od rzutni bocznej, więc np. w części V. (Rys. 179 a.). Jak w przypadku poprzednim,



Rys. 179 a.



Rys. 179 b.

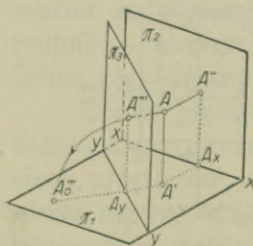


Rys. 179 c.

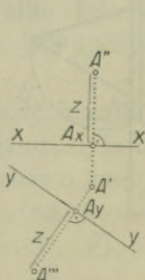
kład rzutni bocznej wykonać możemy na rzutnię pionową (Rys. 179 b.), albo poziomą (Rys. 179 c.).

U w a g a. Symbol:  $A(a, b, c)$  oznaczać będzie punkt  $A$  o współrzędnych  $x = a, y = b, z = c$  przyjętych jednostek długości.

Cwiczenie. Wykreślić rzuty następujących punktów:  $A(4, 5, 4)$ ;  $B(4, -3, -3)$ ;  $C(-3, +4, +3)$ ;  $D(-3, -3, -4)$ ;  $E(1, -4 + 3)$ ;  $F(4, 6, -5)$ .



Rys. 180 a.



Rys. 180 b.

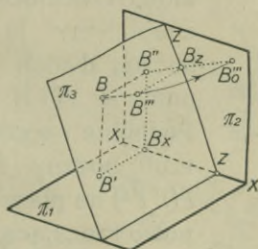
b) Rzutnia boczna jest płaszczyzną poziomą lub pionowo rzucającą. Ślad poziomy rzutni bocznej  $\pi_3$  oznaczać będziemy literą  $y$  (Rys. 180 a.), pomijając jej ślad pionowy, który dla konstrukcji przeważnie nie ma znaczenia. Punkt  $A'''$  jest rzutem bocz-

nym punktu  $A$ . Gdy płaszczyzna  $\pi_3$  padnie na rzutnię poziomą,

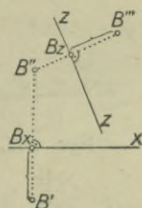


punkt  $A'''$  zajmie położenie  $A_0'''$ , na prostopadłej wyprowadzonej z punktu  $A'$  do osi  $y$ . Po sprowadzeniu trzech rzutów do płaszczyzny rysunku, otrzymamy Rys. 180 b., w którym jednak rzut boczny oznaczyliśmy literą  $A'''$ , pomijając jako zbędny znak  $o$  u dołu. Gdy dana jest oś  $y$  i rzuty  $A'$  i  $A''$ , znajdziemy rzut  $A'''$ , uwzględniając, że:  $\overline{AA'} = \overline{A''A_x} = \overline{A'''A_y} = z$ .

Ślad pionowy płaszczyzny pionowo rzucającej, uważanej za rzutnię boczną, oznaczamy literą  $z$ . Z korzyścią będzie dla czytelnika, gdy sprawę rzutu punktu  $B$  na płaszczyznę pionowo rzucającą  $\pi_3$  odtworzy bezpośrednio z Rys. 181 a i b., bez wszelkich z naszej strony wyjaśnień.



Rys. 181 a.



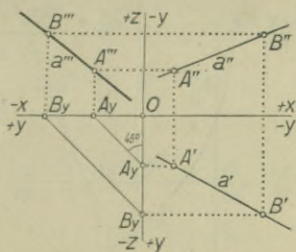
Rys. 181 b.

#### 64. Rzuty i ślady boczne prostej. Z dwóch

danych rzutów  $a'$  i  $a''$  prostej  $a$ , znajdziemy rzut trzeci  $a'''$  (Rys. 182.), jeśli wyznaczmy trzecie rzuty dwóch dowolnych punktów  $A$  i  $B$  tej prostej.

Przy tej sposobności zauważyć należy, że łuki, którymi przenosimy punkty z jednej osi na drugą, zastępujemy chętnie prostymi, jak to uwidocznione jest na Rys. 182.

W ogólnym wypadku dwa rzuty prostej (poziomy i pionowy, poziomy i boczny, pionowy i boczny) wyznaczają położenie prostej w przestrzeni. Jeżeli jednak prosta leży na płaszczyźnie  $\varphi$ , która jest prostopadłą do którejkolwiek z osi rzutów, a więc prostopadłą do dwóch rzutni, to jednym z dwóch rzutów, wyznaczających położenie prostej w przestrzeni, musi być rzut na tę rzutnię, do której płaszczyzna  $\varphi$  nie jest prostopadłą.



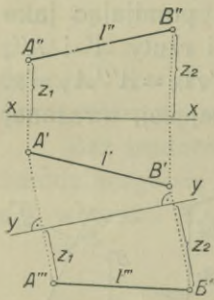
Rys. 182.

Gdy rzutnia boczna jest prostopadłą do osi rzutów  $x$ , to prosta równoległa do tej płaszczyzny wyznaczona jest rzutem bocznym i jednym z dwóch dalszych rzutów; położenie prostej, równoległej do płaszczyzny poziomej

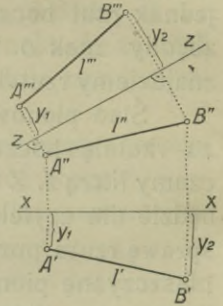
wyznaczone jest rzutem poziomym i rzutem pionowym lub bocznym; prosta równoległa do rzutni pionowej

wyznaczona jest rzutem pionowym i jednym z dwóch dalszych rzutów.

Rzut boczny  $l'''$  prostej  $l$  na płaszczyznę poziomo rzucającą (Rys. 183.) znajdziemy, łącząc rzuty boczne dwóch dowolnych punktów  $A$  i  $B$  tej prostej. Podobnie wyznaczyliśmy rzut boczny  $l'''$  prostej  $l$  ( $l'$ ) na płaszczyznę pionowo rzucającą (Rys. 184.).

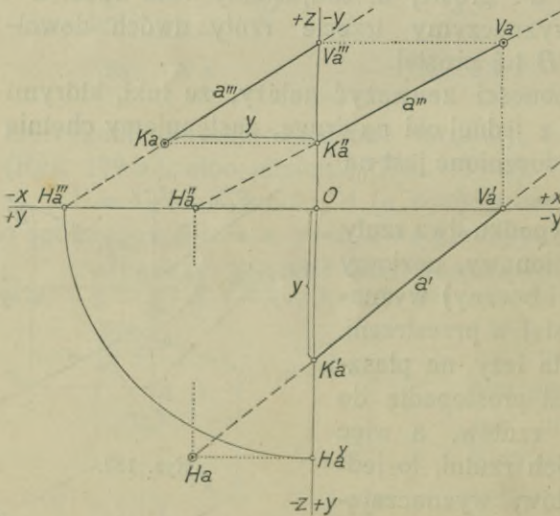


Rys. 183.



Rys. 184.

Rozważmy z kolei sprawę śladów prostej  $a$  ( $a'$   $a''$   $a'''$ ) (Rys. 185.), odniesionej do układu trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn rzutów. Ślad pionowy  $V_a$  leży, jak widzimy,



Rys. 185.

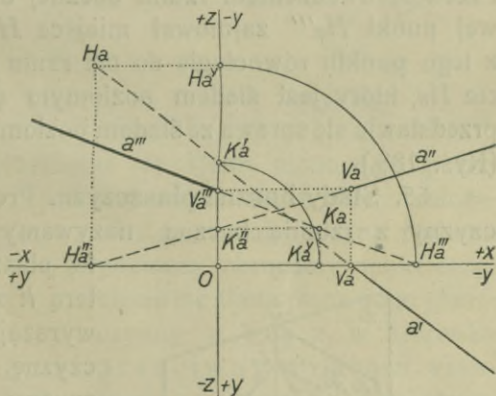
nad osią rzutów  $x$ , jego rzut poziomy  $V_a'$  leżąc będzie oczywiście na osi  $x$ , a w szczególności na tej jej części, którą oznaczyliśmy znakiem  $+$ . Rzut pionowy  $V_a'''$  śladu pionowego leży na osi  $+z$ . Ślad poziomy  $H_a$  prostej  $a$  leży na obszarze rzutni poziomej, rozciągającym się

przed rzutnią pionową, a po lewej stronie rzutni bocznej, czyli uważać go można za należący do  $V$ . lub  $VIII$ . części przestrzeni. Rzut pionowy  $H_a'''$  śladu poziomego leżąc będzie na osi  $-x$  i oczywiście na  $a''$ ; rzut boczny  $H_a'''$  leży na osi



+y i na rzucie  $a'''$ . Aby otrzymać punkt  $H_a'''$ , rzucimy punkt  $H_a$  na oś (+y - z) i otrzymany punkt  $H_a^y$  odniesiemy na oś +y, leżącą na rzutni bocznej. Ślad boczny  $K_a$  leży przed rzutnią pionową i nad poziomą, a wyznaczenie go tłómaczy wyraźnie Rys. 185.

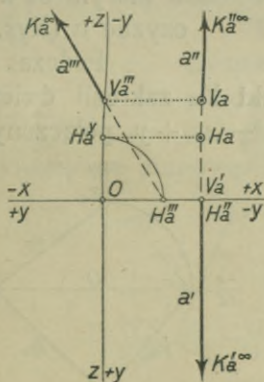
Rys. 186. przedstawia rozwiązanie zadania następującego: daną jest prosta  $a(a'a')$ , wyznaczyć jej rzut boczny za pośrednictwem jej śladów. Szukana prosta  $a'''$  przejdzie przez wyszukane się mające punkty  $H_a'''$  i  $V_a'''$ . Wyznaczenie śladu pionowego  $V_a$  i jego rzutu poziomego  $V_a^y$  i boczno  $V_a'''$  nie wymaga wyjaśnienia. Ślad poziomy  $H_a$  leży w obszarze przestrzeni rozciągającym się za rzutnią



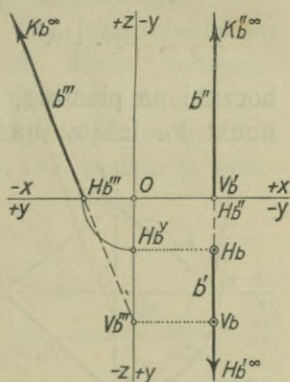
Rys. 186.

pionową i po lewej stronie bocznej. Ślad boczny  $K_a$  leży nad rzutnią poziomą a za pionową; najpierw otrzymamy jego rzut pionowy  $K_a^y$ , a na przecięciu się równoległej do osi x z prostą  $a'''$ , ślad  $K_a$ .

Ponieważ rzut poziomy, śladu boczno, leżeć musi na rzucie poziomym



Rys. 187.



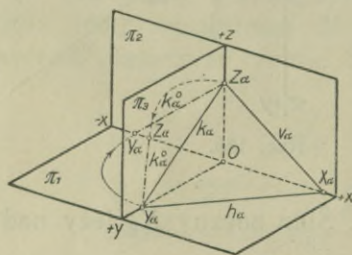
Rys. 188.

prostą  $a$ , więc będzie to punkt przecięcia się  $K'a$  prostych  $a'$  i  $z$ . Podczas obrotu rzutni bocznej około osi  $z$ , punkt  $K'a$  zakreśli na rzutni poziomej w II. obszarze przestrzeni łuk

koła i znajdzie się w punkcie  $K_a^y$ . Odcinek  $\overline{K_a K_a^y}$  po obrocie zajmie położenie  $K_a^y K_a \perp x$ .

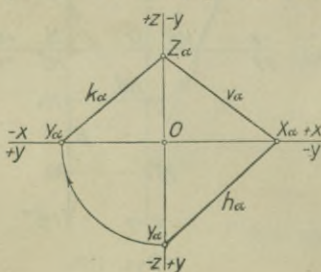
Wyznaczenie śladów prostych, równoległych do rzutni bocznej przeprowadziliśmy na Rys. 187. i 188. Ślady boczne a więc i ich rzuty są punktami niewłaściwymi. Ślady pionowe i ich rzuty wyznaczmy bez trudności. Rzut boczny  $H_a'''$  śladu poziomego, jest punktem przecięcia się prostych  $a'''$  i  $+x$ . Przed sprowadzeniem rzutni bocznej do płaszczyzny rysunkowej punkt  $H_a'''$  zajmował miejsce  $H_a^y$ ; prosta wykreślona z tego punktu równoległe do osi rzutu  $x$ , przecina  $a'$  w punkcie  $H_a$ , który jest śladem poziomym prostej  $a$ . Analogicznie przedstawia się sprawa ze śladem poziomym prostej  $b$  ( $b'$ ,  $b''$ ,  $b'''$ ) (Rys. 188.).

65. Ślady boczne płaszczyzn. Prosta przecięcia się płaszczyzny z rzutnią boczna nazywamy śladem bocznym tej płaszczyzny i oznaczamy literą  $k$  ze wskaźnikiem u dołu, wyrażającym uważaną płaszczyznę. Ślad boczny  $k_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  wyznaczony jest dwoma punktami, a mianowicie punktem przebiecia się  $Y_\alpha$  osi  $y$  z tą płaszczyzną i punktem  $Z_\alpha$ , w którym oś  $z$  przebija płaszczyznę  $\alpha$  (Rys. 189.)

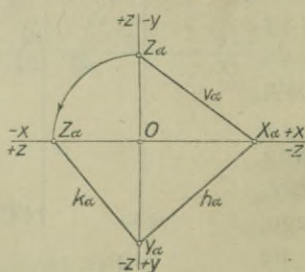


Rys. 189.

Podczas obrotu rzutni bocznej na pionową, punkt  $Y_\alpha$  zakreśli ćwierć obwodu koła, punkt  $Y_\alpha$  leżący na osi  $-x$ ,  $+y$  połączony z punktem  $Z_\alpha$ ,



Rys. 190 a.

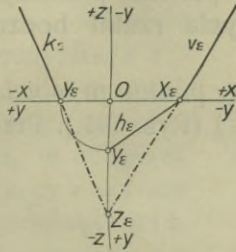


Rys. 190 b.

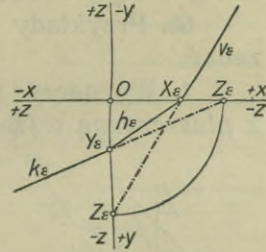
wyznacza ślad boczny  $k_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  (Rys. 190 a.). — Gdy rzutnię boczna obrócimy na poziomą, to ślad boczny będzie prostą łączącą punkt  $Y_\alpha$  z punktem  $Z_\alpha$ , leżącym na osi  $-x$ ,  $+y$  (Rys. 190 b.).



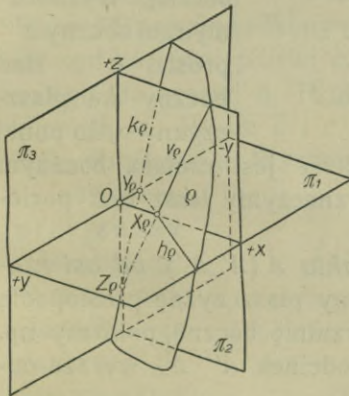
Aby znaleźć ślad boczny płaszczyzny przy założeniu, że rzutnia boczna pada na pionową, należy punkt przecięcia się śladu poziomego płaszczyzny z osią  $y$  przenieść w kierunku zgodnym z ruchem wskazówki zegarowej na oś  $x$  i punkt ten połączyć z punktem przecięcia się śladu pionowego płaszczyzny z osią  $z$ . Przy założeniu, że rzutnia boczna pada na poziomą, obracamy punkt przecięcia się śladu pionowego płaszczyzny z osią  $z$  w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówki zegarowej na oś  $x$  i otrzymany punkt łączymy z punktem przecięcia się śladu poziomego płaszczyzny z osią  $y$ , otrzymując ślad boczny.



Rys. 191.



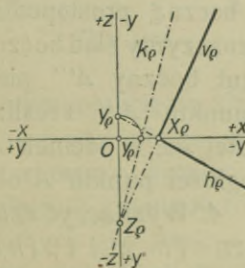
Rys. 192.



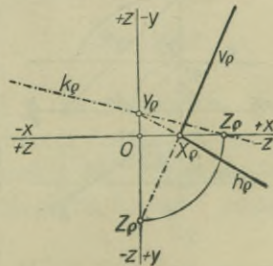
Rys. 193.

nię boczną położyliśmy na pionową. Rys. 192. podaje to samo zadanie, z tą różnicą, że rzutnię boczną obrócić na poziomą.

Wyznaczenie śladu bocznego płaszczyzny  $\rho$ , która przebija oś  $z$  pod rzutnią poziomą w punkcie  $Z_\rho$ , zaś oś  $y$  za rzutnią pionową w punkcie  $Y_\rho$ , podają Rysunki 193. i 194 a–b.



Rys. 194 a.

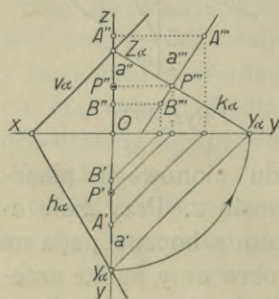


Rys. 194 b.

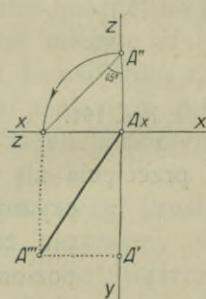
Obrót rzutni bocznej w Rys. 194 a. wykonaliśmy na pionową, w Rys. 194 b. na poziomą płaszczyznę rzutów.

**66. Przykłady użycia rzutni bocznej do rozwiązywania zadań.**

1. Wyznaczyć rzuty punktu przebiecia się prostej  $a$  ( $a' a''$ ) z płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) (Rys. 195.). Przez prostą  $a$ , wyznaczoną dwoma punktami  $A$  ( $A' A''$ ) i  $B$  ( $B' B''$ ), poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do osi rzutów  $x$  i uważajmy ją za rzutnię boczną. Wyznamy rzut boczny  $a'''$  prostej  $a$  i ślad boczny  $k_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , to punkt



Rys. 195.

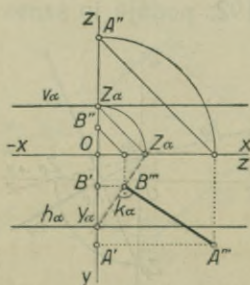


Rys. 196.

przecięcia się  $P'''$  prostych  $a'''$  i  $k_\alpha$  jest rzutem bocznym szukanego punktu. Z łatwością wyznaczmy teraz rzut poziomy  $P'$  i pionowy  $P''$ .

2. Wyznaczyć odległość punktu  $A$  ( $A' A''$ ) od osi rzutów  $x$ . Przez punkt  $A$  poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do osi rzutów  $x$ , a uważając ją za rzutnię boczną, połączmy np. na rzutnię poziomą (Rys. 196.), to odcinek  $\overline{A''' A_x}$  wyraża odległość punktu  $A$  do osi  $x$ .

3. Wyznaczyć odległość punktu  $A$  ( $A' A''$ ) od płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), równoległej do osi rzutów  $x$ . Przez punkt  $A$  prowadzimy rzutnię boczną prostopadłą do osi rzutów  $x$ , wyznaczmy ślad boczny  $k_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  i rzut boczny  $A'''$  punktu  $A$  (Rys 197.). Z punktu  $A'''$  kreślimy prostopadłą do prostej  $k_\alpha$ , a odcinek  $\overline{A''' B'''}$  równy jest odległości punktu  $A$  od płaszczyzny  $\alpha$ .



Rys. 197.

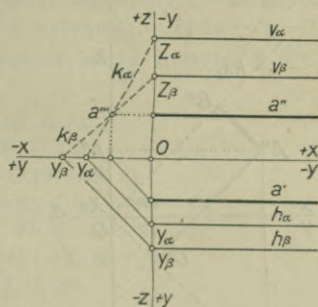
4. Wyznaczyć rzuty krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) i  $\beta$  ( $h_\beta v_\beta$ ), równoległych do osi rzutów  $x$ . Przyjawszy rzutnię boczną prostopadłą do osi  $x$ , wyznaczmy ślady boczne  $k_\alpha$  i  $k_\beta$  danych płaszczyzn (Rys. 198.)



i otrzymamy rzut boczny  $a'''$ , a także i dwa dalsze rzuty  $a''$  i  $a'$  szukanej krawędzi.

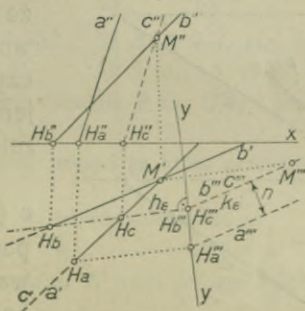
5. Wyznaczyć odległość dwóch prostych skośnych  $a(a'a'')$  i  $b(b'b'')$ . Jeżeli przez prostą  $b$  poprowadzimy płaszczyznę  $\varepsilon$  równoległą do prostej  $a$ , to odległość prostej  $a$  od płaszczyzny  $\varepsilon$  wyraża odległość prostych skośnych  $a$  i  $b$ .

Niechaj punkt przecięcia się  $M'$  rzutów poziomych  $a'$  i  $b'$  danych prostych (Rys. 199.) będzie rzutem poziomym punktu  $M$ , leżącego na prostej  $b$ . Oznaczywszy rzut pionowy punktu  $M$  literą  $M''$ , poprowadzimy przez ten punkt prostą  $c''$ , którą uważamy za rzut pionowy prostej  $c$ , przechodzącej przez punkt  $M$  równoległe do prostej  $a$ . Rzut poziomy  $c'$  prostej  $c$  schodzi się z prostą  $a'$ . Proste  $b$  i  $c$  wyznaczają płaszczyznę  $\varepsilon$ , równoległą do prostej  $a$ . Wyznamy ślad poziomy  $h_\varepsilon$  płaszczyzny  $\varepsilon$ , a następnie,

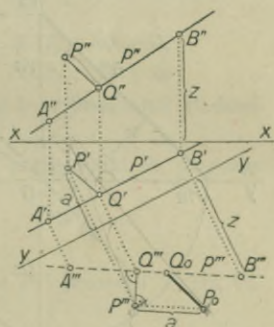


Rys. 198.

przyjawszy płaszczyznę rzutów prostopadłą do poziomej i do płaszczyzny  $\varepsilon$ , wyznaczmy ślad boczny  $k_\varepsilon$  tej ostatniej, a to łącząc rzut boczny  $M'''$



Rys. 199.

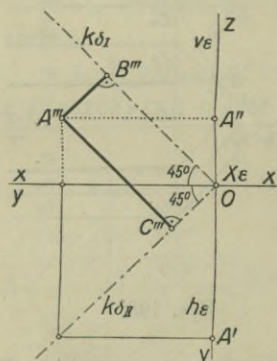


Rys. 200.\*

punktu  $M$  z punktem przecięcia się osi  $y$  ze śladem  $h_\varepsilon$ . Ponieważ prosta  $a$  jest równoległą do płaszczyzny  $\varepsilon$ , więc jej rzut boczny  $a'''$  otrzymamy, kreśląc z punktu  $H_a'''$  prostą równoległą do  $k_\varepsilon$ . Odległość prostych równoległych  $k_\varepsilon$  i  $a'''$  równa jest odległości prostych skośnych  $a$  i  $b$ .

6. Wyznaczyć odległość punktu  $P(P'P'')$  od prostej  $p(p'p'')$  (Rys. 200.\*). Wyznamy rzut boczny  $p'''$  prostej  $p$  i rzut boczny  $P'''$  punktu  $P$  na płaszczyznę poziomo rzuca-

jąca, a zarazem równoległą do prostej  $p$ . Odcinek  $\overline{P'''Q'''}$ , prostopadły do  $p'''$ , jest rzutem bocznym odcinka prostopadłego do prostej  $p$ , rzut boczny



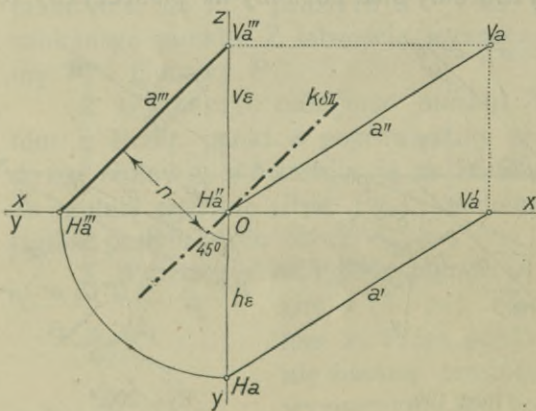
Rys. 201.

bowiem kąta prostego  $\overline{AQP}$  będzie w tym wypadku kątem prostym, gdyż ramię  $\overline{AQ}$  jest równoległe do rzutni bocznej. Wyznaczymy punkty  $Q'$  i  $Q''$  otrzymamy rzuty poziomy i pionowy odcinka, wyrażającego odległość punktu  $P$  od prostej  $p$ . Prawdziwą wielkość odcinka  $\overline{PQ}$  znajdziemy, wykonując jego kład  $P_0Q_0$  na rzutnię boczna.

7. Wyznaczyć odległość punktu  $A$  ( $A'$   $A''$ ) od płaszczyzn dwusiecznych  $\delta_I$  i  $\delta_{II}$ . Odcinki  $\overline{A'''B'''}$  i  $\overline{A'''C'''}$

(Rys. 201) rozwiązują zadanie.

8. Wyznaczyć odległość prostej  $a$  ( $a'$   $a''$ ), równoległej do płaszczyzny dwusiecznej  $\delta_{II}$  od tejże płaszczyzny (Rys. 202).



Rys. 202.

Wiadomo (ust. 56), że rzuty prostej równoległej do płaszczyzny  $\delta_{II}$  są wzajemnie równoległe, zatem  $a' \parallel a''$ .

Płaszczyznę  $\epsilon$  ( $h_{\epsilon}$   $v_{\epsilon}$ ) prostopadłą do osi  $x$  uważamy za rzutnię boczną, wyznaczmy rzut boczny  $a'''$  prostej  $a$ , wykreśliśmy ślad boczny

$k_{\delta_{II}}$  płaszczyzny  $\delta_{II}$ , a odległość  $n$  tych dwóch równoległych prostych rozwiązuje zadanie.

### 67. Ćwiczenia.

1. Wyznaczyć rzuty i ślady prostych, które przechodzą przez punkty

- $A(1, 2, 3)$  i  $B(-2, 4, -5)$ ,
- $C(0, -3, 4)$  i  $D(4, -2, +2)$ ,
- $E(2, -2, -3)$  i  $F(-2, +2, +3)$ ,
- $G(-5, 3, -3)$  i  $H(2, -5, 2)$ .



2. Dane są rzuty prostej  $l$ , przechodzącej przez punkty  $A(0, 5, 3)$  i  $B(7, -3, 1)$ ; wyznaczyć rzuty punktów, leżących na prostej  $l$ , a mających głębokość równą  $4; 3; 0; -4$  i rzuty punktów o wysokości  $4; 2; 0; -2; -3$ .

3. Wyznaczyć rzuty i ślady poszczególnych boków trójkąta  $ABC$ , którego wierzchołkami są punkty:

- a)  $A(4, 5, 4), B(7, 2, 8), C(10, 2, 1)$ ,
- b)  $A(1, 7, 3), B(6, 2, 3), C(9, 3, 1)$ ,
- c)  $A(1, -4, 7), B(6, -5, 3), C(9, -8, 3)$ ,
- d)  $A(1, -5, -1), B(4, -1, -8), C(8, -9, -4)$ ,
- e)  $A(7, -3, -6), B(-3, -6, 7), C(-6, 7, -3)$ ,
- f)  $A(6, 3, -4), B(3, -4, 6), C(-4, 6, 3)$ ,
- g)  $A(0, 4, 0), B(5, 1, 0), C(3, 0, 6)$ .

4. Wykreślić rzuty równoległoboku  $ABCD$ , którego trzy wierzchołki są dane:

- a)  $A(2, 5, 3), B(7, 2, 8), C(13, 5, 2)$ ,
- b)  $A(1, 4, 3), B(5, 8, 3), C(11, 3, 7)$ ,
- c)  $A(1, -2, 4), B(6, 5, -10), C(9, -5, 10)$ ,
- d)  $A(4, -1, -8), B(-1, -8, 4), C(-8, 4, -1)$ .

5. Dane są rzuty punktu  $A(5, 4, 6)$ . Wyznaczyć rzuty oraz ślady prostej, która przechodzi przez punkt  $A$  i jest:

- a)  $\parallel$  do  $\pi_1$ ,    b)  $\parallel$  do  $\pi_2$ ,    c)  $\parallel$  do osi  $x$ ,    d)  $\perp$  do  $\pi_1$ ,    e)  $\perp$  do  $\pi_2$ ,

6. Rozwiązać powyższe zadania, skoro położenie punktu  $A$  jest następujące:

- a)  $A(0, -5, 4)$ ,    b)  $A(0, -4, 4)$ ,    c)  $A(0, -4, -5)$ ,
- d)  $A(0, 0, 5)$ ,    e)  $A(0, -5, 0)$ ,    f)  $A(0, -3, +3)$ .

7. Dane są rzuty punktu  $P(5, 1, 4)$  i prostej  $l$ , wyznaczonej śladami  $H(3, 8, 0)$  i  $V(10, 0, 8)$ .

Wyznaczyć rzuty prostej  $m$ , która przechodzi przez punkt  $P$ , przecina prostą  $l$  i jest:

- a) równoległa do  $\pi_1$ ,
- b) „ do  $\pi_2$ .

8. Rozwiązać zadanie 7, jeżeli położenie punktu  $P$  i prostej  $l \equiv (H, V)$  określają:

- a)  $P(2, 7, 5), H(8, 9, 0), V(1, 0, 9)$ ,
- b)  $P(6, -7, 4), H(3, -4, 0), V(13, 0, 6)$ ,
- c)  $P(7, 1, -4), H(2, 10, 0), V(5, 0, -8)$ .

9. Dane są rzuty dwóch prostych  $l$  i  $m$ , przecinających się w punkcie  $A(3, 5, 4)$ .

Skonstruować ślady płaszczyzny  $\alpha$ , wyznaczonej prostymi  $l$  i  $m$ , przyczem:

- a)  $l \parallel \pi_1, m$  dowolna,    g)  $l \perp \pi_1, m \parallel \pi_2$ ,
- b)  $l \parallel \pi_1, m \parallel \pi_2$ ,    h)  $l \perp \pi_1, m \parallel$  do osi  $x$ ,
- c)  $l \parallel \pi_1, m \parallel$  do osi  $x$ ,    k)  $l \parallel \pi_1, m \perp \pi_2$ ,
- d)  $l \perp \pi_1, m$  dowolna,    l)  $l \parallel \pi_2, m \perp \pi_2$ ,
- e)  $l \perp \pi_1, m \parallel \pi_1$ ,    m)  $l \parallel$  do osi  $x, m \perp \pi_2$ ,
- f)  $l \parallel \pi_2, m \parallel$  do osi  $x$ ,    n)  $l \perp \pi_1, m \perp \pi_2$ .

10. Rozwiązać zadanie 9. w przypadkach a)... n), jeżeli położenie punktu  $A$  będzie następujące:

- a)  $A(3, -4, 6)$ , d)  $A(3, 4, -6)$ ,  
 b)  $A(3, -4, -5)$ , e)  $A(3, 4, -4)$ ,  
 c)  $A(3, -4, 4)$ , f)  $A(3, 0, -4)$ ,  
 g)  $A(3, 0, 5)$ .

11. Dane są rzuty prostej  $l$  i punktu  $A$ , nie leżącego na tej prostej; wykreślić ślady płaszczyzny  $\alpha$  ( $h\alpha$   $v\alpha$ ), wyznaczonej elementami  $l$  i  $A$ , które zajmują następujące położenia w przestrzeni:

- a)  $l \parallel \pi_1, A(0, 3, -5)$ , f)  $l \parallel$  do osi  $x, A(3, 3, -3)$ ,  
 b)  $l \parallel \pi_1, A(0, -4, -4)$ , g)  $l \perp \pi_1, A(4, -5, 2)$ ,  
 c)  $l \parallel \pi_1, A(6, -5, +2)$ , h)  $l \perp \pi_2, A(2, -3, -5)$ ,  
 d)  $l \parallel \pi_2, A(3, 2, -4)$ , j)  $l \parallel \pi_1, A(3, 0, 3)$ ,  
 e)  $l \parallel \pi_2, A(3, -3, -3)$ , k)  $l \parallel \pi_2, A(3, -3, 0)$ .

12. Dane są rzuty dwóch trójkątów  $ABC$  i  $MNP$ ; nie posługując się śladami płaszczyzn tych trójkątów, wyznaczyć przenikanie się tych trójkątów, jeżeli:

- a)  $A(2, 2, 4), B(12, 5, 5), C(8, 9, 9); M(3, 5, 9), N(10, 3, 1), P(12, 9, 7)$ .  
 b)  $A(2, 4, 2), B(10, 2, 10), C(6, 10, -3); M(4, 6, 1), N(5, -3, 3), P(10, 5, 10)$ .  
 c)  $A(0, 2, -4), B(8, 0, 0), C(3, -4, 4); M(0, -3, 0), N(2, 4, 2), P(6, -3, 6)$ .

13. Dane są rzuty punktu  $P$  ( $P'$   $P''$ ) i ślady płaszczyzny  $\alpha$  ( $h\alpha$   $v\alpha$ ). Przez punkt  $P$  poprowadzić płaszczyznę  $\beta \parallel$  do  $\alpha$ , skoro:

- a)  $\alpha \parallel \pi_1, P(0, 6, -6)$ ,  
 b)  $\alpha \parallel$  do osi  $x, P(0, -4, 6)$ ,  
 c)  $\alpha \parallel \pi_2, P(5, -4, -4)$ .

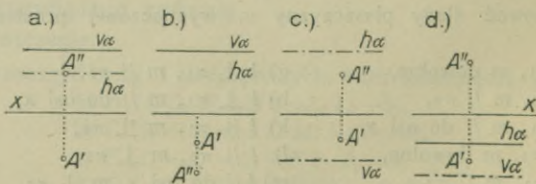
14. Wykreślić ślady płaszczyzny  $\alpha \perp$  do prostej  $a$  ( $a'$   $a''$ ), a przechodzącej przez punkt  $A$  ( $A'$   $A''$ ), gdy:

- a)  $a \parallel \pi_1, A(0, 5, 6)$ ,  
 b)  $a \parallel \pi_1, A(0, -5, -6)$ ,  
 c)  $a \parallel \pi_2, A(0, -5, 5)$ ,  
 d)  $a \parallel \pi_2, A(0, 4, -6)$ .

15. Dane są rzuty  $A'B'$  i  $A''B''$  odcinka  $AB$ . Wyznaczyć rzeczywistą wielkość tego odcinka, jeżeli położenie punktów  $A$  i  $B$  jest następujące:

- a)  $A(0, -3, 6), B(8, 3, 3)$ ,  
 b)  $A(2, -3, 3), B(10, -6, -2)$ ,  
 c)  $A(3, -3, 3), B(12, 6, -6)$ ,  
 d)  $A(0, 3, -7), B(7, 4, -2)$ ,  
 e)  $A(0, 3, -3), B(10, -5, 5)$ .

16. Wyznaczyć odległość punktu  $A$  ( $A'$   $A''$ ) od płaszczyzny  $\alpha$  ( $h\alpha$   $v\alpha$ ) w przypadkach określonych Rysunkami 203 a—d.



Rys. 203 a—d.



17. Wyznaczyć rzeczywistą odległość punktu  $A$  ( $A'$   $A''$ ) od płaszczyzn dwusiecznych  $\delta_I$  i  $\delta_{II}$ , jeżeli położenie punktu  $A$  jest określone:

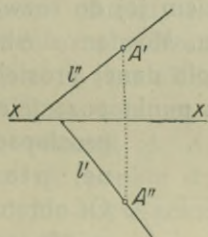
- a)  $A(0, 6, 0)$ ,                      c)  $A(4, -8, 2)$ ,  
 b)  $A(5, 0, 8)$ ,                      d)  $A(3, -8, -2)$ ,  
 e)  $A(0, 3, -10)$ .

18. Wyznaczyć odległość punktu  $A$  ( $A'$   $A''$ ) od płaszczyzny  $\alpha$ , wyznaczonej przez proste przecinające lub równoległe  $l$  i  $m$ :

- a)  $l \parallel \pi_1, m \parallel \pi_2$ ,  
 b)  $l \parallel \pi_1, m \parallel$  osi  $x$ ,  
 c)  $l \parallel$  osi  $x, m$  dowolne,  
 d)  $l \parallel m \parallel$  do osi  $x$ .

19. Wyznaczyć odległość punktu  $A$  ( $A'$   $A''$ ) od prostej  $l$  ( $l'$   $l''$ ), jeżeli położenie tych elementów jest następujące:

- a)  $A(0, 5, -5)$ ,  $l$  dowolne,  
 b)  $A(0, 4, -8)$ ,  $l \parallel \pi_1$ ,  
 c)  $A(3, -6, 2)$ ,  $l \parallel \pi_2$ ,  
 d)  $A(3, -3, -3)$ ,  $l \parallel$  do osi rzutów  $x$ .  
 e)  $A(3, 8, 2)$ ,  $l$  leży na  $\delta_I$ ,  
 f)  $A(4, 2, 6)$ ,  $l$  leży na  $\delta_{II}$ ,  
 g)  $A(4, 4, 4)$ ,  $l$  leży na  $\pi_1$ ,  
 h)  $A(3, 6, -6)$ ,  $l$  leży na  $\pi_2$ ,  
 i)  $A(2, -4, -6)$ ,  $l \equiv x$ ,  
 k)



Rys. 204.

20. Wykreślić ślady płaszczyzny przechodzącej przez daną prostą  $l$  ( $l'$   $l''$ ) prostopadłe do danej płaszczyzny  $\alpha$  ( $h\alpha$   $v\alpha$ ), w następujących przypadkach:

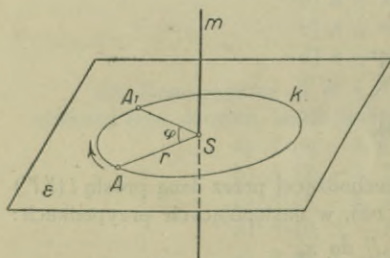
- a)  $l$  dowolna,  $\alpha \parallel$  do  $x$ ,  
 b)  $l \parallel \pi_1$ ,  $\alpha$  dowolna,  
 c)  $l \parallel \pi_2$ ,  $\alpha \equiv (x, A)$ ,  
 d)  $l \perp \pi_1$ ,  $\alpha$  dowolna,  
 e)  $l \perp \pi_2$ ,  $\alpha \equiv \delta_I$ ,  
 f)  $l \perp \pi_3$ ,  $\alpha$  dowolna,  
 g)  $l \parallel x$ ,  $\alpha \equiv \delta_{II}$ ,  
 h)  $l$  leży na  $\delta_I$ ,  $\alpha \parallel x$ ,  
 i)  $l$  leży na  $\delta_{II}$ ,  $\alpha$  dowolna,  
 k)  $l \equiv x$ ,  $\alpha \equiv (x, A)$ .

## § 5. OBROTY, KŁADY I ICH ZASTOSOWANIA

**68. O metodzie obrotu.** W dotychczasowych rozważaniach naszych istnieje luka, uniemożliwiająca rozwiązanie zadań, zwłaszcza natury miarowej, t. j. takich, gdzie w rezultacie chodzi o poznanie wielkości odcinków i kątów. Przykład najlepiej rzecz wyjaśni. Niechaj zadaniem naszym będzie wyznaczenie prawdziwej wielkości kąta, którego rzuty ramion są dane. Wiadomościami, któremi dotąd rozporządzamy, zadania tego rozwiązać nie potrafimy, nie znane nam są bowiem sposoby, którymi nadałby można ramionom kąta położenie równoległe do rzutni, lub też wprost ramiona te, bez zmiany zawartego między nimi kąta, na tę rzutnię położyć. Istota rozwiązania omawianego zadania polega na zmianie położenia ramion kąta w przestrzeni, przy zachowaniu danego odchylenia tych ramion. Owóż, zmiana położenia ramion kąta dokonuje się przy pomocy pewnej metody konstrukcyjnej, zwanej *metodą obrotów*.

Najpierw zajmiemy się poznaniem metody jako takiej, a następnie zastosowaniem jej do rozwiązywania zadań.

**69. Obroty punktu.** Mówiąc o obrocie punktu, mamy na myśli jego obrót około danej prostej, zwanej osią obrotu i o dany kąt, przyczem punkt pozostaje stale na płaszczyźnie



Rys. 205.

prostopadłej do osi obrotu, zwanej *płaszczyzną obrotu*. Oś obrotu  $m$  przebija płaszczyznę obrotu  $\varepsilon$  (Rys. 205.) w punkcie  $S$ , który jest *środkiem obrotu*. Odcinek  $r$ , łączący punkt  $A$  z punktem  $S$ , nazywamy *promieniem obrotu*. Punkt  $A$  zakreśli podczas obrotu około osi  $m$  na płaszczyźnie  $\varepsilon$  łuk

koła, równy danemu kątowi  $\varphi$  i zajmie położenie  $A_1$ .

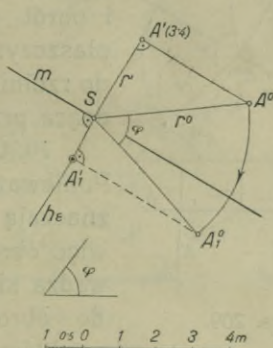
Przeprowadzimy zadanie powyższe w rzutach cechowanych, przyczem niechaj oś  $m$  leży na płaszczyźnie porównawczej, a punkt  $A$ , który obrócić mamy o  $\ast \varphi$ , niechaj ma cechę  $\mathcal{F}4$  danych jednostek (Rys. 206.).

Płaszczyzna obrotu, przechodząca przez punkt  $A \perp m$ , przecina rzutnię wzdłuż śladu  $h_\varepsilon \perp m$ . Punkt  $S$  jest *środkiem*

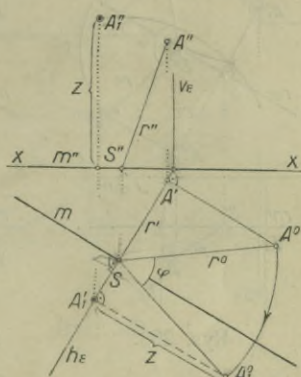


obrotu, a odcinek  $\overline{SA'} = r'$  rzutem promienia obrotu. Aby móc dokonać obrotu punktu  $A$  około osi  $m$ , wykonajmy kład płaszczyzny  $\varepsilon$  około jej śladu  $h_\varepsilon$  na płaszczyznę rysunku, czyli w naszym przypadku na rzutnię. Kład ten ujawni się

kładem promienia  $r$  na płaszczyznę poziomą i wyznaczy jego prawdziwą wielkość  $r^0$ . Następnie zakreślmy ze środka  $S$  promieniem  $r^0$  łuk koła w żądanym kierunku, obra-



Rys. 206.



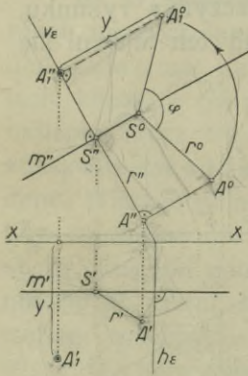
Rys. 207.

cając tym sposobem punkt w kładzie o dany kąt  $\varphi$  aż do położenia  $A_1^0$ . Z kolei wrócić musimy z punktem  $A_1$  na płaszczyznę obrotu w jej pierwotnym położeniu, t. j. niejako płaszczyznę tę wraz z punktem  $A_1$  podnieść, albo raczej obrócić około śladu  $h_\varepsilon$  o  $90^\circ$ . W tym celu rzucimy punkt  $A_1^0$  prostopadłe na prostą  $h_\varepsilon$ , a odcinek  $\overline{A_1^0 A_1'}$  wyraża w przyjętej jednostce długości wysokość punktu  $A_1$  po obrocie, a więc jego cechę. — Konstrukcyjne rozwiązanie tego zadania w rzutach Monge'a podaje Rys. 207.

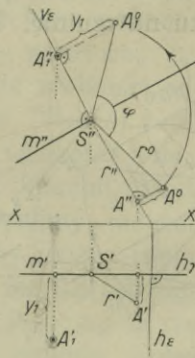
Poziomo rzucająca płaszczyzna obrotu wyznaczona jest śladem  $h_\varepsilon$  i  $v_\varepsilon$ ; środek obrotu  $S$  ( $S'$   $S''$ ), połączony z danym punktem  $A$  ( $A'$   $A''$ ), daje promień obrotu  $r$  ( $r'$   $r''$ ). Dokonamy obrotu, a rzut pionowy  $A_1''$  punktu po obrocie znajdziemy, odmierzając od osi  $x$  na prostej odnoszącej otrzymaną wysokość  $z = \overline{A_1' A_1^0}$ .

Jeżeli oś obrotu jest równoległą do rzutni np. pionowej (Rys. 208.), to obrót dowolnego punktu o dany kąt wykonamy zupełnie analogicznie: kreślimy ślady  $h_\varepsilon$  i  $v_\varepsilon$  płaszczyzny obrotu prostopadłej do osi obrotu  $m$  ( $m'$   $m''$ ), wyznaczymy środek obrotu  $S$  ( $S'$   $S''$ ), promień obrotu  $r$  ( $r'$   $r''$ ), wykonamy kład płaszczyzny obrotu i otrzymanym promieniem  $r^0$  obrócimy punkt  $A^0$  o dany kąt  $\varphi$ . Po podniesieniu płaszczyzny

obrotu w jej pierwotne położenie, otrzymamy rzuty  $A_1''$  i  $A_1'$  punktu  $A_1$ , po dokonanych obrocie.



Rys. 208.



Rys. 209.

nej mierze, jeśli, jak to widzimy na Rys. 209., kład płaszczyzny obrotu i obrót wykonamy na płaszczyznę równoległą do rzutni  $\pi_2$ , a przechodzącą przez oś  $m$ .

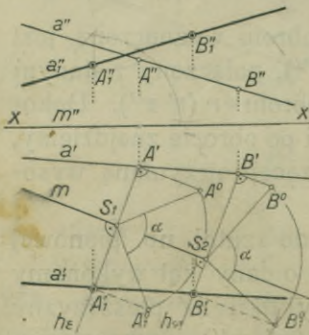
### 70. Obroty prostej.

Ponieważ prostą wyznaczają dwa punkty, więc obrót prostej sprowadza się w ogólności do obrotu dwóch jej punktów, o ten sam kąt

i w tym samym kierunku. Jeżeli oś obrotu i prosta przecinają się, a punkt przecięcia się  $M$  leży w granicach rysunku, to wówczas obrócimy jeden punkt prostej i łączymy go po obrocie z punktem  $M$ , który jako leżący na osi obrotu, położenia swego nie zmienia. Gdy prosta jest równoległą do osi obrotu, to i wówczas obrócimy tylko jeden jej punkt o dany kąt i w żądanym kierunku, po obrocie prosta pozostanie bowiem do osi obrotu równoległą.

#### Przykłady.

a) Obrócić prostą  $a$  ( $a'$   $a''$ ) około osi  $m$ , leżącej na rzutni poziomej, o dany kąt  $\alpha$  (Rys. 210.).



Rys. 210.

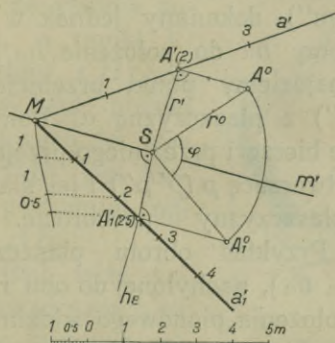
Obróciliśmy punkty  $A'$  ( $A' A''$ ) i  $B$  ( $B' B''$ ) prostej  $a$  około osi  $m$  o  $\alpha$ , a otrzymane punkty  $A_1$  ( $A_1' A_1''$ ) i  $B_1$  ( $B_1' B_1''$ ) wyznaczają prostą  $a_1$  ( $a_1' a_1''$ ) po obrocie.

b) Około osi  $m$ , leżącej na rzutni poziomej, obrócić prostą  $a$ , przecinającą oś w punkcie  $M$ , o dany kąt  $\varphi$  (Rys. 211.). Zadanie wykonaliśmy w rzutach cechowanych. Punkt  $A$  ( $A'$ , (2)), przyjęty na prostej  $a$ , obróciliśmy około  $m$  o  $\varphi$ , a otrzy-

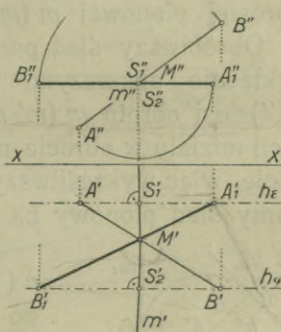
many punkt  $A_1'$  połączyli ze stałym punktem  $M$ . Wysokość



punktu  $A_1$  równa jest długości odcinka  $\overline{A_1' A_1^0}$  i równa w naszym rysunku 2·5 przyjętych jednostek. Zestopniowanie prostej  $a_1$  przeprowadziliśmy według ust. 17.



Rys. 211.

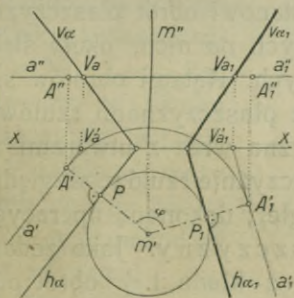


Rys. 212.

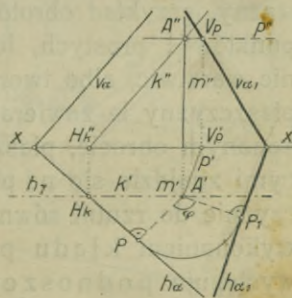
c) Odcinkowi  $\overline{AB}$ , mającemu dowolne położenie, nadać położenie równoległe do rzutni poziomej (Rys. 212.). Przyjmujemy oś  $m$ , przecinającą odcinek  $\overline{AB}$  w punkcie  $M$  i obrócimy około niej punkt np.  $A$  tak, aż znajdzie się na wysokości punktu  $M$ .

**71. Obrót płaszczyzny.** W najogólniejszym przypadku obrót płaszczyzny sprowadza się do obrotu dwóch prostych, przyjętych na

tej płaszczyźnie. Jeżeli prosta  $m$  ( $m'$   $m''$ ) (Rys. 213.) jest osią, około której obrócić mamy płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ) o  $\neq \varphi$ , to płaszczyznę obro-



Rys. 213.

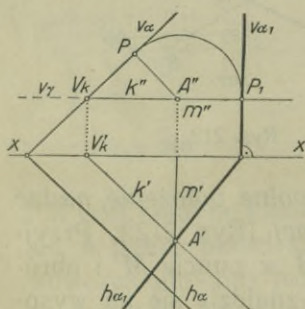


Rys. 214.

tu dla śladu poziomego  $h_\alpha$  jest rzutnia pozioma. Styczna  $h_{\alpha_1}$  w punkcie  $P_1$  do koła, zakreślonego z punktu  $m'$  promieniem  $\overline{m' P_1}$ , jest śladem poziomym płaszczyzny po obrocie. Tworząca  $a$  ( $a'$   $a''$ ) płaszczyzny  $\alpha$ , obrócona około  $m$ , o  $\neq \varphi$ , zajmie położenie  $a_1$  ( $a_1'$   $a_1''$ ), a jej ślad pionowy  $V_\alpha$  położenie  $V_{\alpha_1}$  ( $V_{\alpha_1}'$   $V_{\alpha_1}''$ ).

Ślad pionowy  $v_{\alpha_1}$  płaszczyzny  $\alpha$  po obrocie jest tym sposobem także wyznaczony.

Rys. 214. przedstawia również obrót płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_{\alpha} v_{\alpha}$ ) około prostej pionowej  $m$  ( $m' m''$ ), dokonany jednak w inny sposób. Obróciwszy ślad poziomy  $h_{\alpha}$  do położenia  $h_{\alpha_1}$ , jak w przykładzie pierwszym, znajdziemy punkt przebiecia się  $A$  ( $A' A''$ ) osi obrotu  $m$  ( $m' m''$ ) z płaszczyzną  $\alpha$ . Ponieważ punkt ten udziału w obrocie nie bierze i przez niego przejdzie  $\alpha$  po obrocie, więc wykreśliwszy tworzącą  $p$  ( $p' p''$ ) i jej ślad  $V_p$ , otrzymamy ślad pionowy  $v_{\alpha_1}$  płaszczyzny  $\alpha$  po obrocie.



Rys. 215.

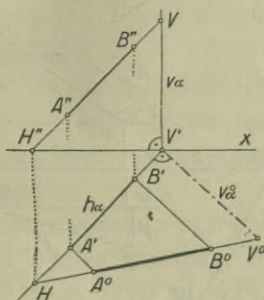
Przykład obrotu płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_{\alpha} v_{\alpha}$ ), nachylonej do obu rzutni, do położenia pionowego widzimy na Rys. 215. Przyjmijmy oś obrotu  $m$  ( $m' m''$ ) prostopadłą do rzutni pionowej i około niej obrócimy ślad pionowy  $v_{\alpha}$  tak, aż zajmie położenie  $v_{\alpha_1}$ , prostopadłe do  $x$ . Ślad poziomy  $h_{\alpha_1}$  przejdzie przez rzut poziomy  $A'$  punktu przebiecia się  $A$  osi obrotu z płaszczyzną  $\alpha$ .

**72. Kład płaszczyzny rzucającej.** Szczególny, a dla dalszych rozważań naszych bardzo ważny, przykład obrotów stanowi obrót płaszczyzn, względnie punktów i prostych, leżących na nich, około śladów względnie warstwic, albo tworzących. Kątami obrotów są kąty, jakie płaszczyzny te zawierają z płaszczyznami rzutów. Po tak dokonanych obrocie, płaszczyzna wraz z utworami na niej leżącymi znajdzie się na płaszczyźnie rzutów, względnie na płaszczyźnie do rzutni równoległej; dokonaną operację nazywamy wykonaniem kładu płaszczyzny. Jako zadanie odwrotne występuje podnoszenie z kładu, t. j. obrót punktów, prostych, czy też linii leżących na płaszczyznach rzutów lub na płaszczyznach do rzutni równoległych, około odnośnych śladów, względnie warstwic o taki kąt, że po obrocie utwory te znajdą się na danej płaszczyźnie.

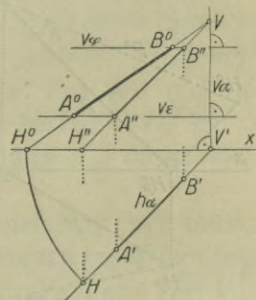
Z kładem płaszczyzn rzucających zapoznaliśmy się przy sposobności wyznaczenia prawdziwej wielkości odcinka (ust. 13. i 39.). W istocie bowiem wyznaczenie długości odcinka jest kładem płaszczyzny rzucającej ten odcinek na rzutnię poziomą względ-



nie pionową. Wyznamy ślady  $H$  i  $V$  prostej  $(A, B)$  (Rys. 216.), a także ślad pionowy płaszczyzny poziomo rzucającej, przechodzącej przez nią, to prosta  $v_{\alpha}^0$  będzie kładem śladu pionowego na rzutnię poziomą, a punkt  $V^0$  połączony z  $H$  wyznaczy kład prostej w granicach jej śladów.  $\overline{A^0 B^0}$  jest kładem poziomym odcinka  $\overline{AB}$ .



Rys. 216.



Rys. 217.

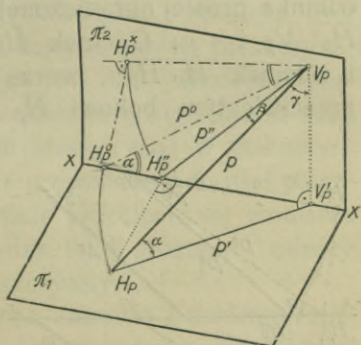
Kład tejże samej płaszczyzny  $\alpha$  na rzutnię pionową widzimy na Rys. 217.

Ślad poziomy  $H$  zakreśli na rzutni poziomej łuk koła o środku  $V'$ , a punkty  $A$  i  $B$  obróćą się na płaszczyznach poziomych, jako płaszczyznach obrotu prostopadłych do osi obrotu  $v_{\alpha}$ .

### 73. Kąty nachylenia prostej z płaszczyznami rzutów.

Kątem nachylenia prostej z płaszczyzną nazywamy kąt, jaki prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę (ust. 14.). Jeżeli  $p'$  (Rys.

218.\*) jest rzutem poziomym prostej  $p$ , a  $p''$  rzutem pionowym tej prostej, to jak z rysunku widzimy:  $\alpha + \gamma = 90^\circ$ . Lecz kąt, jaki prosta tworzy ze swoim rzutem na płaszczyznę, jest najmniejszy, jaki zawierać może z prostymi, leżącymi na płaszczyźnie rzutów, a przechodzącymi przez jej ślad; zatem  $\beta < \gamma$ , a więc  $\alpha + \beta < 90^\circ$ , czyli: *suma kątów nachylenia prostej z obu*

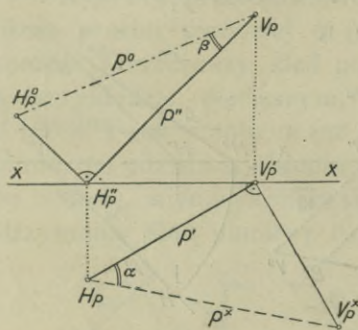


Rys. 218.\*

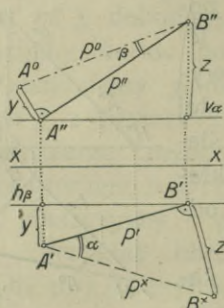
*rzutniami jest mniejsza od kąta prostego.*

Przez wykonanie kładu  $p^x$  prostej  $p$  (Rys. 219.) na rzutnię poziomą, otrzymamy kąt  $\alpha$ , jaki prosta zawiera z rzutnią poziomą; kład  $p^0$  prostej  $p$  na rzutnię pionową wyznacza kąt  $\beta$  tej prostej z rzutnią pionową. O ile ślady prostej nie leżą

w obrębie płaszczyzny rysunkowej, to kłady wykonamy na płaszczyzny równoległe do rzutni, jak to widzimy na Rys. 220.



Rys. 219.



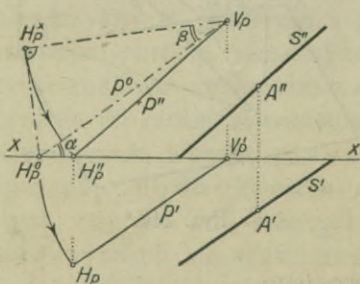
Rys. 220.

Niechaj zadaniem naszym będzie wykreślenie rzutów prostej, przechodzącej przez dany punkt  $A(A'A'')$ , a zawierającej z rzutniami dane kąty  $\alpha$  i  $\beta$ .

Najpierw znaj-

dziemy dowolną prostą, tworzącą z rzutniami żądane kąty, a następnie przez punkt  $A$  poprowadzimy do niej równoległą.

Przypuśćmy, że prosta  $p$  (Rys. 218.\*) jest szukaną prostą i przeprowadźmy rozbiór konstrukcyi. Aby otrzymać  $\alpha$ , jaki prosta  $p$  tworzy z rzutnią poziomą, obróćmy ją około osi  $(V_p, V_p')$  na rzutnię pionową. Otrzymamy prawdziwą wielkość odcinka prostej ograniczonej śladami  $H_p$  i  $V_p$ , równą odcinkowi  $\overline{H_p^0 V_p}$  i  $\alpha$ . Odcinek  $\overline{H_p V_p}$ , jego rzut pionowy  $\overline{H_p'' V_p}$  i odcinek  $\overline{H_p H_p''}$  tworzą trójkąt prostokątny z kątem  $\beta$  przeciwległym bokowi  $\overline{H_p H_p''}$  i z kątem prostym w wierzchołku  $H_p''$ . Znając  $\beta$  i odcinek  $\overline{H_p^0 V_p}$ , wykreślimy trójkąt prostokątny  $H_p^0 H_p^x V_p$ , przystający do trójkąta  $H_p H_p'' V_p$  a przy jego pomocy rzuty żądanej prostej w sposób następujący. Przez dowolnie na osi  $x$  przyjęty punkt  $H_p^0$  (Rys. 221.) kreślimy prostą  $p^0$  pod kątem  $\alpha$  do osi  $x$  i dowolny punkt  $V_p$  uważamy za jej ślad pionowy.



Rys. 221.

Kreślimy trójkąt  $H_p^0 H_p^x V_p$  o kącie prostym przy  $H_p^x$  a kącie  $\beta$  przy  $V_p$ . Bok  $\overline{H_p^x V_p}$  równy jest długości rzutu pionowego szukanej prostej  $p$ , a ponieważ punkt  $V_p$  jest jej śladem pionowym, więc zakreśliwszy pro-

szukaną prostą  $p$  (Rys. 218.\*) jest szukaną prostą i przeprowadźmy rozbiór konstrukcyi. Aby otrzymać  $\alpha$ , jaki prosta  $p$  tworzy z rzutnią poziomą, obróćmy ją około osi  $(V_p, V_p')$  na rzutnię pionową. Otrzymamy prawdziwą wielkość odcinka prostej ograniczonej śladami  $H_p$  i  $V_p$ , równą odcinkowi  $\overline{H_p^0 V_p}$  i  $\alpha$ . Odcinek  $\overline{H_p V_p}$ , jego rzut pionowy  $\overline{H_p'' V_p}$  i odcinek  $\overline{H_p H_p''}$  tworzą trójkąt prostokątny z kątem  $\beta$  przeciwległym bokowi  $\overline{H_p H_p''}$  i z kątem prostym w wierzchołku  $H_p''$ . Znając  $\beta$  i odcinek  $\overline{H_p^0 V_p}$ , wykreślimy trójkąt prostokątny  $H_p^0 H_p^x V_p$ , przystający do trójkąta  $H_p H_p'' V_p$  a przy jego pomocy rzuty żądanej prostej w sposób następujący. Przez dowolnie na osi  $x$  przyjęty punkt  $H_p^0$  (Rys. 221.) kreślimy prostą  $p^0$  pod kątem  $\alpha$  do osi  $x$  i dowolny punkt  $V_p$  uważamy za jej ślad pionowy.

Kreślimy trójkąt  $H_p^0 H_p^x V_p$  o

kącie prostym przy  $H_p^x$  a kącie  $\beta$  przy  $V_p$ . Bok  $\overline{H_p^x V_p}$  równy jest długości rzutu pionowego szukanej prostej  $p$ , a ponieważ punkt  $V_p$  jest jej śladem pionowym, więc zakreśliwszy pro-



mieniem  $V_p H_p^x$ , z punktu  $V_p$  jako środka, łuk koła aż do przecięcia się z osią  $x$ , otrzymamy rzut pionowy  $H_p'$  śladu poziomego prostej  $p$ , a więc i jej rzut pionowy  $H_p' V_p \equiv p''$ . Łuk koła o środku  $V_p'$  a o promieniu  $V_p' H_p^o$  przetnie prostopadłą, wykreśloną w punkcie  $H_p'$  do osi  $x$ , w punkcie  $H_p$ , który jest śladem poziomym prostej  $p$ . Prosta  $(H_p, V_p')$  jest rzutem poziomym  $p'$  prostej  $p$ , przyczem oczywiście  $\overline{H_p H_p'} = \overline{H_p^o H_p^x}$ . Przez  $A (A' A'')$  poprowadzona równoległa  $s (s' s'')$  do prostej  $p (p' p'')$  rozwiązuje zadanie.

Rozważmy jeszcze warunek, który spełniony być musi, aby rozwiązanie zadania było możliwe. Przedewszystkiem łuk  $\overline{H_p^x H_p'}$  musi przeciąć oś  $x$ , czyli musi być:  $\overline{V_p V_p'} \leq \overline{H_p^x V_p}$  albo (patrz Rys. 218.\*)  $\overline{H_p V_p} \sin \alpha \leq \overline{H_p V_p} \cos \beta$  czyli:  $\sin \alpha \leq \sin (90 - \beta)$ , albo ponieważ kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są ostre

$$\alpha \leq 90^\circ - \beta \text{ czyli}$$

$$\alpha + \beta \leq 90^\circ$$

wykazaliśmy już, że powyższy warunek jest konieczny, widzimy teraz, że jest on też wystarczający.

**74. Kąty nachylenia płaszczyzny z rzutniami.** W ust. 25. określiliśmy kąt dwóch płaszczyzn jako kąt zawarty między dwiema prostymi, leżącymi na tych płaszczyznach, a prostopadłymi w dowolnym punkcie ich krawędzi. Ponieważ owe proste są prostopadłe do krawędzi danych dwóch płaszczyzn, więc płaszczyzna nimi wyznaczona jest do tej krawędzi prostopadłą. Stąd wynika następujący sposób postępowania przy wyznaczaniu kąta nachylenia dwóch płaszczyzn: W dowolnym punkcie krawędzi dwóch płaszczyzn prowadzimy do niej płaszczyznę prostopadłą, wyznaczamy proste przecięcia się z obiema płaszczyznami, a kąt zawarty między temi prostymi, mierzy kąt, jaki tworzą dwie uważane płaszczyzny.

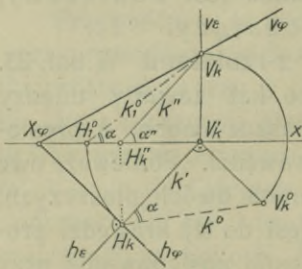
*Suma kątów, jakie płaszczyzna zawiera z dwiema rzutniami, leży w granicach między jednym i dwoma kątami prostymi.* Suma ta osiąga swą granicę dolną, kąt prosty, gdy płaszczyzna jest równoległą do osi  $x$ , kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są w tym wypadku uzupełniające. Suma kątów  $\alpha$  i  $\beta$  osiąga granicę górną, dwa kąty proste, gdy płaszczyzna jest prostopadłą do osi  $x$ . Dla wszystkich innych położeń płaszczyzny, suma kątów z płaszczyznami rzutów jest większą od kąta prostego, a mniejszą od dwóch kątów prostych. W istocie, dwie nieprostopadłe płaszczyzny tworzą jeden kąt ostry i jeden roz-

warty, spełniające się do dwóch kątów prostych; kąt ostry jest wedle umowy kątem, który mierzy nachylenie dwóch płaszczyzn, w następstwie czego musi być  $\alpha + \beta < 180^\circ$ . Zresztą mamy także:  $\alpha + \beta + 90^\circ > 180^\circ$ , ponieważ suma trzech kątów naroża trójściennego jest większą od dwóch kątów prostych, więc istotnie:

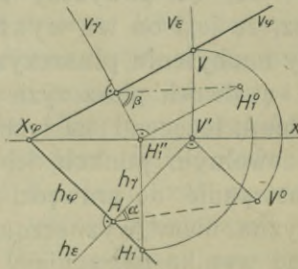
$$\alpha + \beta > 90^\circ.$$

Celem wyznaczenia kąta, jaki płaszczyzna  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ) (Rys. 222.) zawiera z rzutnią poziomą, poprowadzimy, zgodnie z podanym wyżej tokiem postępowania, płaszczyznę  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ) prostopadłą do krawędzi obu płaszczyzn, t. j. do śladu poziomego  $h_\varphi$  i znajdziemy krawędź  $k$  ( $k' k''$ ) tej płaszczyzny z płaszczyzną  $\varphi$ . Kąt  $\alpha$ , zawarty między tą krawędzią a śladem poziomym  $h_\varepsilon$ , rozwiązuje zadanie.

Ale z ust. 25. wiemy, że krawędź  $k$  jest linią największego spadu płaszczyzny  $\varphi$  w odniesieniu do rzutni poziomej, t. z. taką



Rys. 222.



Rys. 223.

prostą płaszczyzny  $\varphi$ , która ze swoim rzutem tworzy najmniejszy kąt. Powiemy więc: **kąt nachylenia**

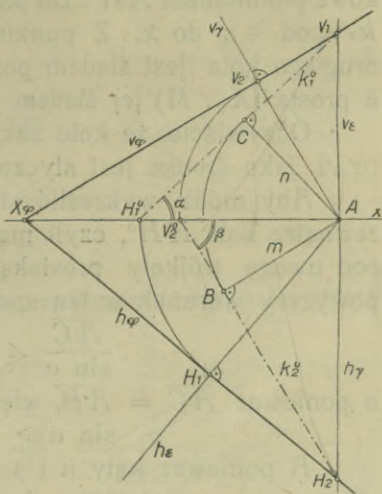
danej płaszczyzny z rzutnią poziomą lub pionową wyraża się kątem nachylenia linii największego spadu tej płaszczyzny w odniesieniu do rzutni poziomej lub pionowej.

Rzut poziomy kąta  $\alpha$  równy jest zero, gdyż  $k'$  i  $h_\varepsilon$  nakrywają się; rzut pionowy kąta  $\alpha$  oznaczyliśmy na Rys. 222. przez  $\alpha''$ . Wykonawszy kład  $k^0$  krawędzi  $k$  na rzutnię poziomą lub na pionową ( $k_1^0$ ), otrzymamy prawdziwą wielkość tego kąta. Na Rys. 223. podaliśmy ponadto konstrukcję kąta nachylenia  $\beta$  płaszczyzny  $\varphi$  z rzutnią pionową.

Przyjmijmy płaszczyznę  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ) nachyloną do obu rzutni (Rys. 224.). Poprowadźmy przez punkt  $A$ , obrany na osi  $x$ , płaszczyznę  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ) prostopadłą do  $h_\varphi$  i płaszczyznę  $\gamma$  ( $h_\gamma v_\gamma$ )  $\perp v_\varphi$ . Krawędź  $k_1$  płaszczyzn  $\varphi$  i  $\varepsilon$  obróćmy



około  $v_\varepsilon$  na rzutnię pionową, a krawędź  $k_2$  płaszczyzn  $\varphi$  i  $\gamma$  około  $h_\gamma$  na rzutnię poziomą. Kąt  $\alpha$ , jaki  $k_1^0$  utworzy z osią  $x$ , jest kątem nachylenia płaszczyzny  $\varphi$  z rzutnią poziomą, a kąt  $\beta = \angle V_2^0 H_2$  jest kątem nachylenia płaszczyzny  $\varphi$  z rzutnią pionową. Wykreślmy z punktu  $A$  prostopadłe  $m$  i  $n$  do  $k_2^0$  i  $k_1^0$ , to  $\overline{AB} = \overline{AC}$ , gdyż każdy z tych dwóch odcinków wyraża odległość punktu  $A$  od płaszczyzny  $\varphi$ . W istocie, prostopadła wyprowadzona z punktu  $A$  do płaszczyzny  $\varphi$  jest krawędzią płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\gamma$ , prostopadłą do linii największego spadku  $k_1$  i  $k_2$  tych płaszczyzn. Po wykonaniu kładów płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\gamma$ , a więc i prostych  $k_1$  i  $k_2$ , odcinki  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  są kładami tej samej prostopadłej.

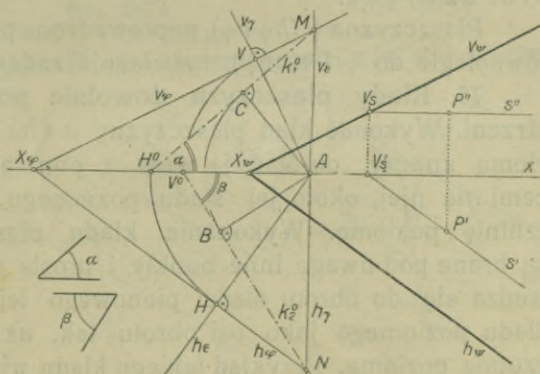


Rys. 224.

Przeprowadzone rozumowanie umożliwi rozwiązanie następującego zadania: *Przez dany punkt  $P$  poprowadzić płaszczyznę zawierającą z rzutniami dane kąty  $\alpha$  i  $\beta$ .*

Wiemy, że musi być:  $\alpha < 90^\circ$ ,  $\beta < 90^\circ$  a  $\alpha + \beta > 90^\circ$ .

Najpierw poprowadzimy płaszczyznę  $\varphi$  nieprzechodzącą przez punkt  $P$ , a następnie przez ten punkt płaszczyznę  $\psi$  równoległą do płaszczyzny  $\varphi$ . Na prostopadłej wykreślonej w punkcie  $A$  do osi  $x$  (Rys. 225.\*) obierzmy dowolnie punkt  $M$ , z którego wyprowadzimy prostą  $k_1^0$  zawierającą z osią  $x$  kąt  $\alpha$ . Odcinek  $\overline{AC} = n$ , prostopadły do  $k_1^0$ , równy jest odległości



Rys. 225.\*

W punkcie  $A$  do osi  $x$  (Rys. 225.\*) obierzmy dowolnie punkt  $M$ , z którego wyprowadzimy prostą  $k_1^0$  zawierającą z osią  $x$  kąt  $\alpha$ . Odcinek  $\overline{AC} = n$ , prostopadły do  $k_1^0$ , równy jest odległości

punktu  $A$  od szukanej płaszczyzny. Zakreślmy z punktu  $A'$  jako środka, promieniem  $\overline{AC}$  koło i drugie z niem współśrodkowe promieniem  $\overline{AH^0}$ . Do pierwszego koła wykreślmy styczną  $k_2^0$  pod  $\approx \beta$  do  $x$ . Z punktu  $N$  wykreślona styczna  $h_\varphi$  do drugiego koła jest śladem poziomym szukanej płaszczyzny  $\varphi$ , a prosta  $(X_\varphi, M)$  jej śladem pionowym.

Oczywiście, że koło zakreślone promieniem  $\overline{AV^0}$  z punktu  $A$  jako środka jest styczne do śladu  $v_\varphi$ .

Aby módz wykreślić styczną  $h_\varphi$ , musi punkt  $N$  leżeć zewnątrz koła  $HH^0$ , czyli musi być  $\overline{AH^0} \leq \overline{AN}$ , albo biorąc pod uwagę trójkąty prostokątne  $\overline{ACH^0}$  i  $\overline{ABN}$ , wyrazimy powyższy warunek w ten sposób:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} \leq \frac{\overline{AB}}{\sin (90^\circ - \beta)}$$

a ponieważ  $\overline{AC} = \overline{AB}$ , więc mamy:

$$\sin \alpha \geq \sin (90^\circ - \beta).$$

A ponieważ kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są z założenia ostre, więc

$$\alpha \geq (90^\circ - \beta) \text{ czyli } (\alpha + \beta) \geq 90^\circ.$$

Wykazaliśmy już poprzednio, że dwa warunki są konieczne, aby rozwiązanie zadania było wogóle możliwe:

$$1) (\alpha + \beta) \leq 180^\circ \text{ i } 2) (\alpha + \beta) \geq 90^\circ.$$

Z powyższego widzimy, że warunki te są zarazem wystarczające.

Płaszczyzna  $\psi$  ( $h_\psi v_\psi$ ), poprowadzona przez punkt  $P$  ( $P' P''$ ) równoległe do  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ), rozwiązuje zadanie.

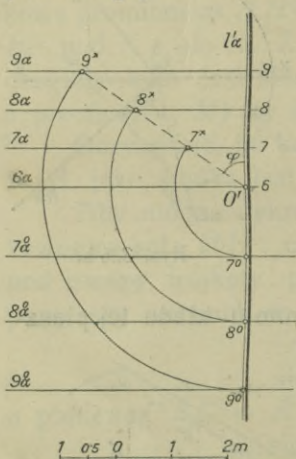
**75. Klady płaszczyzn dowolnie położonych w przestrzeni.** Wykonać kład płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) na rzutnię poziomą znaczy, obrócić ją wraz z punktami i prostymi leżącymi na niej, około jej śladu poziomego tak, aż padnie na rzutnię poziomą. Wykonanie kładu płaszczyzny, o ile nie są brane pod uwagę inne punkty i proste na niej leżące, sprowadza się do obrotu śladu pionowego tej płaszczyzny około śladu poziomego jako osi obrotu tak, aż ślad ten padnie na rzutnię poziomą. Przykład takiego kładu widzimy na Rys. 226 a. Punkt  $A$ , obrany na śladzie  $v_\alpha$ , obróciliśmy około  $h_\alpha$  o kąt  $180^\circ - \psi$ , jaki płaszczyzna  $\alpha$  zawiera z rzutnią poziomą. Prosta  $v_{\alpha^0}$ , łącząca punkty  $A^0$  i  $X_\alpha$ , jest kładem śladu pionowego płaszczyzny  $\alpha$ .

Odcinek  $\overline{X_\alpha A^0}$  równy jest odcinkowi  $\overline{X_\alpha A}$ , wobec czego zakreśliwszy ze środka  $X_\alpha$  (Rys. 226 b.) promieniem  $\overline{X_\alpha A}$  łuk,





Przykłady kładów płaszczyzny na płaszczyznę warstwową (równoległą do rzutni poziomej) widzimy na Rys. 228 a i b.



Rys.229.

stając z tego uprościmy konstrukcję zadania, postępując tak, jak na Rys. 228 b.

Kład płaszczyzny  $\alpha$  na płaszczyznę warstwową  $\pi_6$ , wykonany w rzutach cechowanych, przedstawia Rys. 229. — Płaszczyznę obrotu poprowadziliśmy przez linię największego spadku, na warstwie  $9\alpha$  odmierzyli  $9\ 9^x = 3\ m$  w podziałce rysunku. Odcinek  $9^x\ 0'$  jest kładem linii największego spadku i tworzy z  $l\alpha'$  kąt  $\varphi$ , równy kątowi, jaki płaszczyzna  $\alpha$  zawiera z poziomem.  $7\alpha^0, 8\alpha^0, 9\alpha^0 \dots$  są to kłady warstwic płaszczyzny  $\alpha$  na płaszczyznę warstwową  $\pi_6$ .

Ćwiczenie.

Wyznaczyć prawdziwą wielkość trójkąta, którego rzut cechowany, względnie rzuty Monge'a są dane.

a) Rzut cechowany (Rys. 230 a).

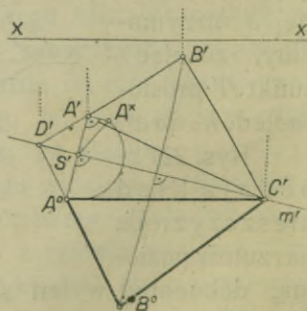
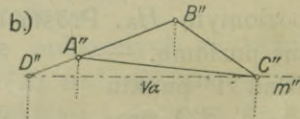
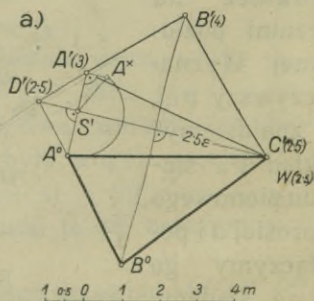
Wykonamy kład trójkąta na płaszczyznę warstwową, przechodzącą przez jeden

Oś obrotu jest w tym przypadku dana warstwicą (prosta tworząca)  $w\ (w'\ w'')$  płaszczyzny  $\alpha$ . Dowolnie obrany punkt  $A$  śladu pionowego  $v\alpha$  obróciliśmy około  $w\ (w'\ w'')$ , aż padł na płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez  $w$ . Prosta łącząca punkt  $A^0$  z  $V'$  jest kładem śladu pionowego; prostopadła do  $w'$  wykreślona z  $X\alpha$  przetnie  $v\alpha^0$  w punkcie  $X\alpha^0$ , przez który przechodzi, równoległe do  $w'$ , kład  $h\alpha^0$  śladu poziomego płaszczyzny  $\alpha$ . Po-

nieważ

$$\overline{AV} = \overline{A^0V'}$$

więckorzy-



Rys. 230 a i b.



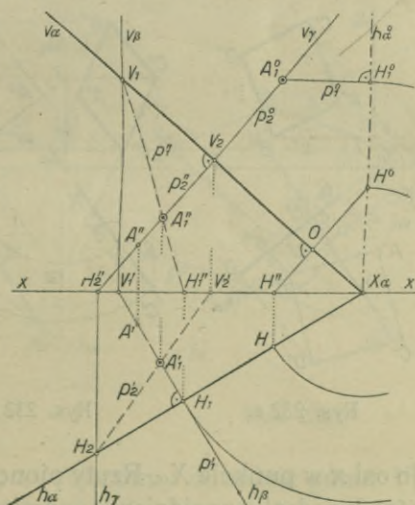
z jego wierzchołków, np.  $C (C' [2\cdot5])$ . Wyznaczywszy na prostej  $\overline{A'B'}$  punkt  $D'$  o cesze  $2\cdot5$  i połączymy go z punktem  $C'$ , otrzymamy warstwicę  $2\cdot5\epsilon$  płaszczyzny trójkąta. Punkt  $A$  obróciliśmy około tej warstwicę, aż padł na płaszczyzną warstwową  $\pi_{2\cdot5}$  i punkt  $A^0$  połączyli z  $D'$  i  $C'$ ; kład  $B^0$  trzeciego wierzchołka leży na prostej  $(D', A^0)$ .

b) Rzut y Monge'a (Rys. 230b.). Kład trójkąta wykonaliśmy na płaszczyźnie poziomą  $\alpha$ , przeprowadzając przez punkt  $C (C' C'')$ . Punkt  $A (A' A'')$  obróciliśmy więc około krawędzi  $m (m' m'')$  płaszczyzny trójkąta i płaszczyzny  $\alpha$ , na tę ostatnią. Punkt  $A^0$  łączymy z  $D'$  i  $C'$  i otrzymamy punkt  $B^0$ , który leżeć będzie wraz z punktem  $B'$  na prostodadłej do  $m'$ .

**76. Rzut na dowolną płaszczyznę.** W § 4. rozpatrywaliśmy wprowadzenie trzeciej płaszczyzny rzutów i zastosowanie jej do rozwiązywania zadań. Owa trzecia rzutnia była z reguły prostopadłą do osi  $x$ , albo do jednej z dwóch rzutni. W pewnych przypadkach chodzić nam będzie (patrz ust. 89.) o wyznaczenie rzutu utworu geometrycznego na płaszczyznę dowolnie położoną; rozpatrzmy więc przedewszystkiem rzut prostokątny punktu na taką płaszczyznę.

Zasadniczo postąpićby można — wyszedłszy z pojęcia rzutu — w sposób następujący: z danego punktu  $A$  poprowadzić prostopadłą do danej płaszczyzny rzutów  $\alpha$ , znaleźć jej punkt przebicia, a następnie wykonać kład płaszczyzny  $\alpha$  na jedną z rzutni. Sprawa da się jednak znacznie uprościć. Wyobraźmy sobie, że przez dany punkt  $A$  poprowadziliśmy dwie płaszczyzny prostopadłe do  $\alpha$ , przyczem jedną poziomo, a drugą pionowo rzucającą. Każda z nich przecina płaszczyznę  $\alpha$  w linii największego spadku, a więc w prostych prostopadłych do śladów  $h_\alpha$  i  $v_\alpha$ . Przez wykonanie kładu płaszczyzny  $\alpha$  wraz z owymi liniami największego spadku  $p_1$  i  $p_2$  na jedną z rzutni, otrzymamy jako punkt przecięcia się owych linii żądany kład  $A_1^0$  rzutu  $A_1$  punktu  $A$  na płaszczyznę  $\alpha$ .

Konstrukcję zadania podaje Rys. 231. Przez punkt  $A (A' A'')$  poprowadziliśmy płaszczyzny  $\beta (h_\beta v_\beta)$  i  $\gamma (h_\gamma v_\gamma)$

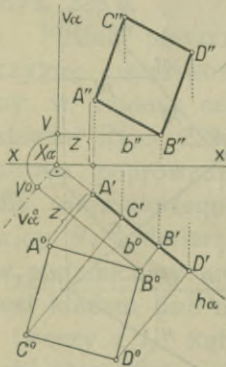


Rys. 231.

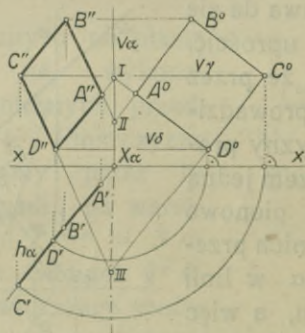
prostopadłe: pierwszą do śladu  $h_\alpha$ , drugą do śladu  $v_\alpha$  danej płaszczyzny  $\alpha$ . Następnie wykonaliśmy kład  $h_\alpha$  śladu poziomego  $h_\alpha$  na rzutnię pionową, a wraz z nim i kład  $H_1^0$  punktu  $H_1$ . Prostopadła  $p_1^0$ , wykreślona do  $h_\alpha^0$  w  $H_1^0$ , jest kładem linii największego spadu  $p_1$  płaszczyzny  $\alpha$  w odniesieniu do rzutni poziomej. Kład  $p_2^0$  linii największego spadu  $p_2$  ( $p_2'$   $p_2''$ ) płaszczyzny  $\alpha$ , w odniesieniu do rzutni pionowej, schodzi się z  $p_2''$ . Punkt  $A_1^0$ , będący przecięciem się prostych  $p_1^0$  i  $p_2^0$ , rozwiązuje zadanie.

**77. Podnoszenie płaszczyzn.** Jako zadanie odwrotne kładu płaszczyzny występuje t. zw. podnoszenie płaszczyzny, przez które rozumiemy także obrót punktów i prostych, względnie wielokątów albo dowolnych linii, leżących na płaszczyznach rzutów około śladów danych płaszczyzn tak, aż padną na te płaszczyzny. Kilka przykładów rzecz najlepiej wyjaśni.

a. Przypuśćmy, że dany jest kład poziomo rzucającej płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ) wraz z kwadratem, który na niej leży (Rys. 232 a.). Tak więc ślad poziomy  $h_\alpha$ , prosta  $v_\alpha^0 \perp h_\alpha$  jako kład śladu pionowego  $v_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , a wreszcie kwadrat  $A^0 B^0 C^0 D^0$  są dane. Podnieść płaszczyznę  $\alpha$  z kładu w jej



Rys. 232 a.



Rys. 232 b.

pierwotne położenie oznacza to samo, co wykreślić rzuty kwadratu, leżącego na tej płaszczyźnie. Rzut poziomy kwadratu leży na śladzie poziomym  $h_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ . Ślad pionowy  $v_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  jest prostopadły do osi  $x$  w punkcie  $X_\alpha$ . Rzuty pionowe  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$  wierzchołków kwadratu znajdziemy, odmierzając na promieniach odnoszących od osi  $x$  ich wysokości. I tak np. wysokość punktu  $A$  równa jest odcinkowi  $\overline{A^0 A'}$ , wysokość punktu  $B$  odcinkowi  $\overline{B^0 B'}$  i t. d.

Wysokości poszczególnych punktów przenieść można

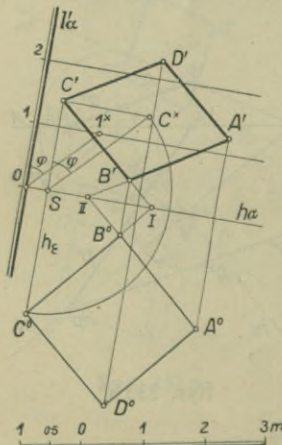




był kład  $p^0$  prostej leżącej na płaszczyźnie  $\alpha$ , to wyznaczenie rzutów tej prostej, czyli podniesienie jej w przestrzeń w pierwotne położenie przeprowadzimy w sposób następujący: Punkt  $H_p$  (Rys. 233 a.) jest śladem poziomym prostej  $p$ , którego rzut pionowy  $H_p''$  leży na osi  $x$ . Punkt  $V_p^0$  jest kładem śladu pionowego prostej  $p$ ; znajdziemy  $V_p'$  i  $V_p$  i tym sposobem otrzymamy  $p'$  i  $p''$ . Gdyby punkt  $A^0$  na  $p^0$  był dany, to rzut poziomy  $A'$  leżeć będzie na prostopadłej do  $h_\alpha$ .

c. Niechaj dana jest płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) a na rzutni poziomej prosta  $p^0$ ; obróćmy prostą  $p$  około  $h_\alpha$  tak, aż padnie na płaszczyznę  $\alpha$ . Postąpić możemy w dwojaki sposób: albo wykonamy kład śladu pionowego  $v_\alpha$  i zadanie sprowadzimy do poprzedniego, albo jak w Rys. 233b.\* obrócimy dowolny punkt prostej  $p$  około  $h_\alpha$  o kąt, jaki płaszczyzna  $\alpha$  zawiera z rzutnią poziomą. W tym celu przy pomocy poziomo rzucającej płaszczyzny  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ )  $\perp \alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) wyznaczmy kąt  $\varphi$  płaszczyzny  $\alpha$  z rzutnią poziomą, a następnie podniesiemy punkt  $A$  na płaszczyznę  $\alpha$ , otrzymując jego rzuty  $A'$  i  $A''$ ; ( $A', H_p$ )  $\equiv p'$ , a ( $A'', H_p''$ )  $\equiv p''$ .

78. Zadania. 1. Wykreślić rzut cechowany kwadratu, leżącego na danej płaszczyźnie  $\alpha$  (Rys. 234.). Położenie płaszczyzny  $\alpha$  określone jest zestopniowaną



Rys. 234.

linią największego spadku  $l_\alpha'$ , kąt  $l \ 0 \ 1^x = \varphi$  jest kątem nachylenia tej płaszczyzny. Na płaszczyźnie porównawczej przyjęliśmy kwadrat  $A^0 B^0 C^0 D^0$ , który obrócimy około śladu  $h_\alpha$  o kąt  $\varphi$  i który tym sposobem padnie na płaszczyznę  $\alpha$ . Płaszczyzny obrotów przejdą przez poszczególne punkty przyjętego kwadratu prostopadle do osi obrotu  $h_\alpha$ . Obróćmy punkt  $C^0$ ; ze środka obrotu  $S$  wykreśliśmy prostą równoległą do  $0 \ 1^x$  i zakreśliśmy łuk promieniem  $SC^0$ . Otrzymany punkt  $C^x$  rzucimy w kierunku  $\perp$  do  $l_\alpha'$  i otrzymamy rzut  $C'$  punktu  $C$ , leżącego na płaszczyźnie  $\alpha$ . Prosta ( $B^0, C^0$ ) przecina oś obrotu  $h_\alpha$  w punkcie  $I$ , który łączymy z  $C'$  i otrzymamy punkt  $B'$ . Przy pomocy punktu  $II$  na  $h_\alpha$  otrzymamy punkt  $A'$ , a ponieważ rzuty prostych równoległych są równo-



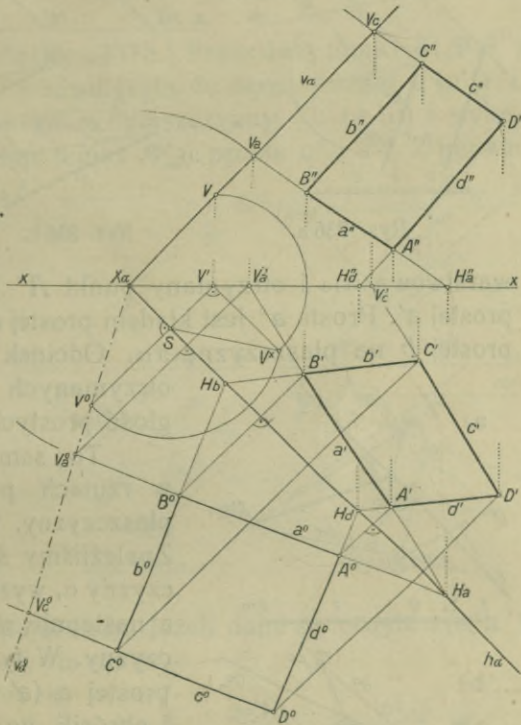
ległe, więc rzut kwadratu będzie równoległobokiem. Dwa brakujące boki otrzymamy, kreśląc  $C'D' \parallel B'A'$  i  $A'D' \parallel B'C'$ .

2. Wykreślić rzuty kwadratu, leżącego na danej płaszczyźnie  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) (Rys. 235.). Punkt  $V$ , obrany na śladzie pionowym  $v_\alpha$ , obrócimy około  $h_\alpha$  jako osi na rzutnię poziomą i otrzymany punkt  $V^0$  połączymy z  $X_\alpha$  prostą  $v_\alpha^0$ , będącą kładem śladu pionowego płaszczyzny  $\alpha$ .

Boki  $a^0$  i  $c^0$  kwadratu  $A^0 B^0 C^0 D^0$  przecinają prostą  $v_\alpha^0$  w punktach  $V_{a^0}$  i  $V_{c^0}$ ,

które podniesione padną na ślad  $v_\alpha$  jako punkty  $V_a$  i  $V_c$ . Punkt  $H_a$  jest śladem poziomym prostej  $a$ , której rzut poziomy  $a'$  przechodzi przez ten punkt i przez rzut poziomy  $V_{a'}$  śladu pionowego  $V_a$ . Ślady poziome płaszczyzn obrotu, przechodzące przez punkty  $A^0$  i  $B^0$  prostopadłe do  $h_\alpha$ , przecinają prostą  $a'$  w punktach  $A'$  i  $B'$ , które odniesione na prostą  $(V_a, H_{a'}) \equiv a''$  wyznaczają na niej

rzuty pionowe  $A''$  i  $B''$  wierzchołków  $A$  i  $B$  kwadratu. Punkt  $H_b$ , ślad poziomy prostej  $b$ , łączymy z  $B'$ , otrzymując rzut poziomy  $b'$ , a na nim punkt  $C'$ ; podobnie za pośrednictwem punktu  $H_d$  otrzymamy bok  $d'$  i punkt  $D'$ . W ten sposób rzut poziomy  $A'B'C'D'$  kwadratu, który będzie równoległobokiem, jest wykreślony. Punkt  $H_{d''}$  łączymy z  $A''$ , a na otrzymaną prostą odniesiemy punkt  $D'$ , otrzymując punkt  $D''$ ;  $c''$  będzie równoległe do  $a''$  i przejdzie przez punkt  $V_c$ , oczywiście, że  $b''$  będzie równoległe do  $d''$ .



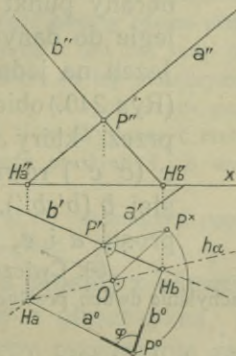
Rys. 235.



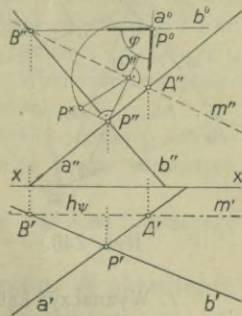


tak, aż padł na płaszczyznę warstwową  $\pi_5$ , a w ten sposób otrzymaliśmy kład  $a^0$  prostej  $a$ . Z punktu  $A'$  wykreśliśmy prostopadłą do  $a^0$ , którą następnie podniesiemy na płaszczyznę  $\alpha$ . W tym celu rzucimy punkt  $P^0$  w kierunku prostopadłym do  $5\alpha$  na prostą  $a'$  i otrzymany punkt  $P'$  połączymy z  $A'$ . Odcinek  $\overline{A'P'}$  jest rzutem odcinka prostopadłego do prostej  $a$ . Odcinek  $\overline{A'P^0}$  wyraża odległość punktu  $A$  od prostej  $a$ .

b. Rzuty Monge'a (Rys. 237 b.). Przez dany punkt  $A(A'A'')$  kreślimy prostą  $c(c'c'')$  równoległą do danej prostej  $a(a'a'')$ . Szukamy śladu pionowego  $v_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha \equiv (a, c)$  i wykonamy jej kład, otrzymując punkt  $A^0$  i proste  $c^0$  i  $a^0$ . Z punktu  $A^0$  kreślimy prostopadłą do  $a^0$ , a odcinek  $\overline{A^0P^0}$  równy jest odległości punktu  $A$  od prostej  $a$ . Prostopadła wykreślona z  $P^0$  do  $v_\alpha$  przecina  $a''$  w punkcie  $P''$ , który odniesiemy na  $a'$  jako  $P'$ . Odcinek  $\overline{AP}$  ( $\overline{A'P'}$ ,  $\overline{A''P''}$ ) rozwiązuje zadanie.



Rys. 238 a.

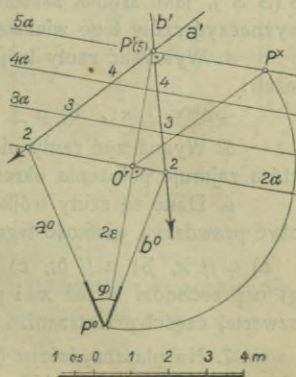


Rys. 238 b.

### 79. Kąt nachylenia dwóch prostych.

a) *Proste przecinające się.* Jeżeli dane są proste  $a(a'a'')$  i  $b(b'b'')$  (Rys. 238 a.), to po wykonaniu kładu płaszczyzny  $\alpha$ , wyznaczonej temi prostymi, na jedną z rzutni, albo na płaszczyznę równoległą do rzutni, otrzymamy prawdziwą wielkość kątów, jakie proste te tworzą. Wyznaczywszy ślad poziomy  $h_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , obrócimy około niego punkt  $P(P'P'')$  aż padnie na rzutnię poziomą. Proste  $a^0$  i  $b^0$ , łączące punkt  $P^0$  ze śladami  $H_a$  i  $H_b$ , tworzą kąt  $\varphi$  rozwiązujący zadanie.

W Rys. 238 b. wykonaliśmy kład prostych  $a$  i  $b$  na płaszczyznę  $\psi$ ,



Rys. 239.





8. Na płaszczyźnie  $\alpha$  ( $h\alpha v\alpha$ ), nachylonej do obu rzutni, leży trójkąt  $ABC$ , którego rzut poziomy jest dany. Wykreślić rzut pionowy i rzuty punktów osobliwych tego trójkąta.

Uwaga. Punkt przecięcia się wysokości, środek ciężkości i środek koła opisanego leżą na jednej prostej.

9. Wyznaczyć kąt nachylecia dwóch prostych przecinających się  $l$  i  $m$  i rzuty dwusiecznych tych kątów, jeżeli:

- $l \parallel \pi_1$ ,  $m$  dowolna;
- $l \parallel \pi_1$ ,  $m \parallel \pi_2$ ;
- $l \parallel \pi_1$ ,  $m \parallel x$ ;
- $l \parallel \pi_2$ ,  $m \parallel x$ .

10. Rozwiązać zadanie poprzednie, jeżeli punkt przecięcia się  $l$  i  $m$  leży w II, III i IV części przestrzeni, a także gdy leży na  $\delta I$ ,  $\delta II$  i na osi  $x$ .

11. Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  ( $h\alpha v\alpha$ ) i płaszczyzna  $\beta \equiv (l, m)$ ; na krawędzi obu płaszczyzn wyznaczyć punkty równo oddalone od prostych  $l$  i  $m$ .

12. Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  ( $h\alpha v\alpha$ ) oraz trzy punkty:  $A$  ( $A' A''$ ),  $B$  ( $B' B''$ ) i  $C$  ( $C' C''$ ), nie leżące na tej płaszczyźnie. Wyznaczyć na płaszczyźnie  $\alpha$  punkt równo oddalony od tych trzech punktów.

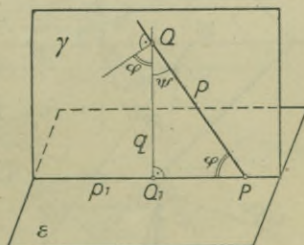
13. Dane dwie proste  $l \parallel m$ . Wyznaczyć rzuty takiej prostej  $p$  równoległej do danych, aby odległość prostych  $l$  i  $p$  wynosiła 5 cm, a prostych  $m$  i  $p$  3 cm.

14. Na danej prostej  $l$  ( $l' l''$ ) wyznaczyć punkty oddalone od danego punktu  $A$  ( $A' A''$ ) o daną odległość.

**81. Kąt nachylecia prostej z płaszczyzną.** W określeniu kąta nachylecia prostej z płaszczyzną, podanym w ust. 14, mieszczą się dwa sposoby rozwiązania zadania.

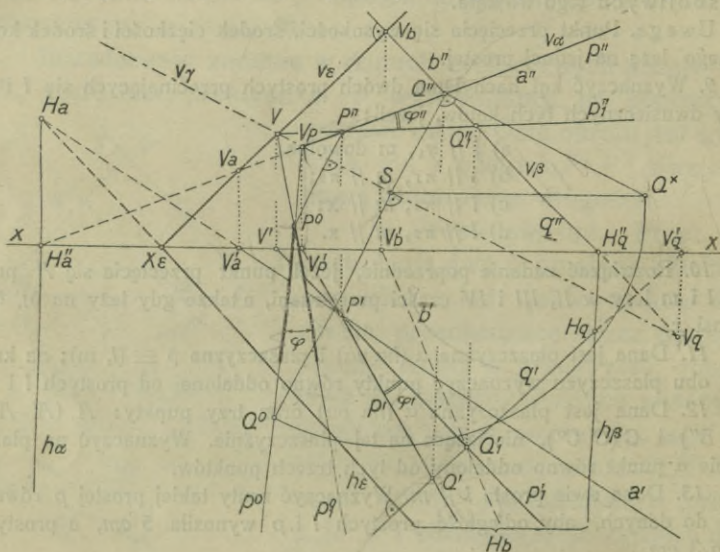
1. Sposób. Wyznamy kąt  $\varphi$ , jaki prosta  $p$  zawiera ze swoim rzutem  $p_1$  na daną płaszczyznę  $\varepsilon$ . W tym celu wyznaczymy punkt przebicia się  $P$  (Rys.

241.) prostej  $p$  z  $\varepsilon$ , a następnie rzut prostokątny  $Q_1$  dowolnego punktu  $Q$  na płaszczyznę  $\varepsilon$ . Prosta  $p_1$ , łącząca punkty  $P$  i  $Q_1$ , jest rzutem prostokątnym prostej  $p$  na płaszczyznę  $\varepsilon$  i tworzy z nią kąt  $\varphi$ , który nazywamy kątem nachylecia prostej  $p$  z płaszczyzną  $\varepsilon$ . Rozwiązanie zadania w rzutach prostokątnych na dwie płaszczyzny podaje Rys. 242. Prosta  $p$  ( $p' p''$ ) przebija płaszczyznę  $\varepsilon$  ( $h\varepsilon v\varepsilon$ ) w punkcie  $P$  ( $P' P''$ ), który znaleźliśmy przy pomocy płaszczyzny pionowo rzucającej  $\alpha$  ( $h\alpha v\alpha$ ). Z punktu  $Q$  ( $Q' Q''$ ) prostej  $p$  wyprowadziliśmy prostopadłą  $q$  ( $q' q''$ ) do



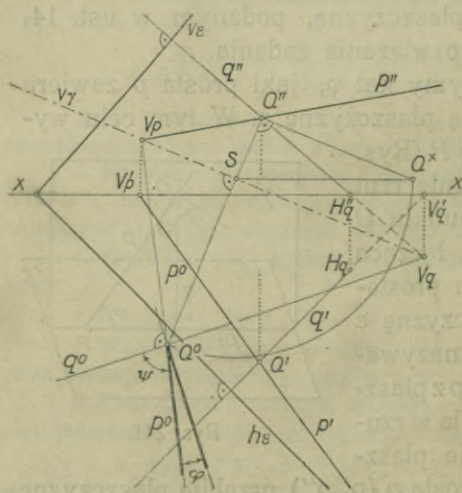
Rys. 241.

płaszczyzny  $\varepsilon$  i znaleźli jej punkt przecięcia się  $Q_1$  ( $Q_1' Q_1''$ ). Prosta  $p_1$  ( $p_1' p_1''$ ), łącząca punkty  $P$  i  $Q_1$ , jest rzutem prostej  $p$



Rys. 242.

na płaszczyznę  $\varepsilon$ . Około śladu pionowego  $v_\gamma$  płaszczyzny  $\gamma$ , wyznaczonej prostymi  $p$  i  $q$ , dokonaliśmy kładu tej płaszczyzny, a w szczególności kładu prostych  $p$  i  $p_1$ . Kąt  $\varphi$ , zawarty między  $p^0$  i  $p_1^0$ , rozwiązuje zadanie.



Rys. 243.

2. Sposób. Z dowolnego punktu  $Q$  prostej  $p$  (Rys. 243) prowadzimy prostą  $q$  prostopadłą do płaszczyzny  $\varepsilon$ , a kąt  $\varphi$ , uzupełniający kąt  $\psi$  zawarty między prostymi  $p$  i  $q$ , jest szukanym kątem. — W Rys. 243. wykonaliśmy kład płaszczyzny  $\gamma$ , przechodzącej przez proste  $p$  i  $q$ , na rzutnię pionową, a otrzymany kąt  $\psi$  uzupełniliśmy do  $90^\circ$ , otrzymując kąt  $\varphi$ .

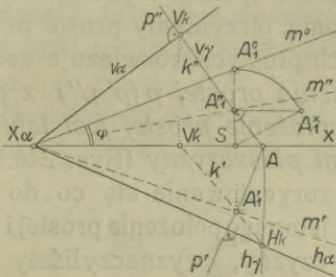
W Rys. 243. wykonaliśmy kład płaszczyzny  $\gamma$ , przechodzącej przez proste  $p$  i  $q$ , na rzutnię pionową, a otrzymany kąt  $\psi$  uzupełniliśmy do  $90^\circ$ , otrzymując kąt  $\varphi$ .



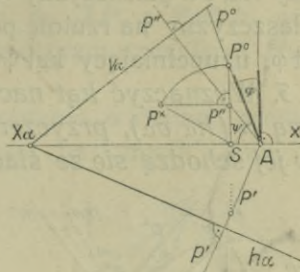
## 82. Zadania.

1. Wyznaczyć kąt, jaki pł.  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) zawiera z osią  $x$ .

1. S p o s ó b. Dowolny punkt  $A$  osi  $x$  (Rys. 244 a.) rzuciemy prostopadłe na płaszczyznę  $\alpha$ , a otrzymany punkt  $A_1$  ( $A_1' A_1''$ )



Rys. 244 a.

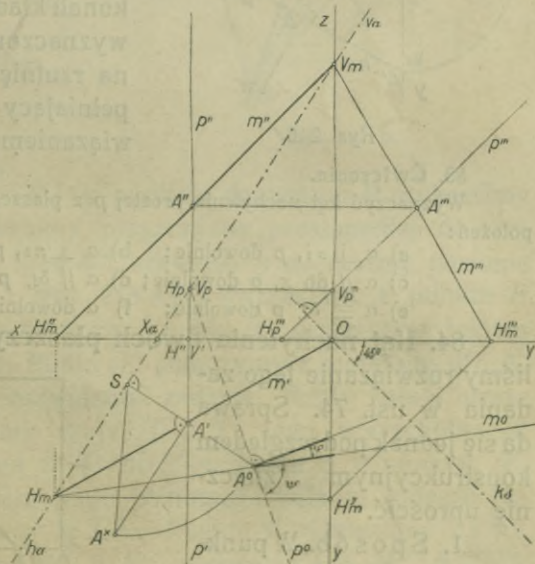


Rys. 244 b.

połączmy z punktem  $X_\alpha$  prostą  $m$  ( $m' m''$ ). Prosta ta jest rzutem osi  $x$  na płaszczyznę  $\alpha$ , a kąt, jaki tworzy z tą osią, rozwiązuje zadanie. Celem wyznaczenia prawdziwej wielkości tego kąta, wykonaliśmy kład  $m^0$  prostej  $m$  około  $x$  na rzutnię pionową, otrzymując  $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle m_0 x$ .

2. S p o s ó b.

Z dowolnego punktu  $A$  osi rzutów prowadzimy prostopadłą  $p$  ( $p' p''$ ) do płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) (Rys. 244 b.) i znajdziemy kąt, jaki ona zawiera z osią rzutów. W tym celu obrócimy dowolny punkt  $P$  prostej  $p$  około osi  $x$  na rzutnię pionową. Kąt  $\varphi$ , uzupełniający do



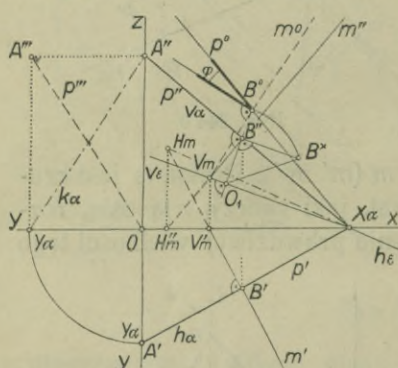
Rys. 245.

$90^\circ$  otrzymany kąt  $\psi$ , jest szukanym kątem.

2. Wyznaczyć kąt, jaki dowolna prosta  $m$  ( $m' m''$ ) zawiera z płaszczyzną dwusieczną  $\delta_{II}$ . Wyznamy rzut boczny  $m'''$  danej prostej (Rys. 245.) a także ślad boczny  $k_\delta$  płasz-

czynny dwusiecznej. Z dowolnego punktu  $A$  ( $A'$   $A''$   $A'''$ ) prostej  $m$  poprowadźmy prostopadłą  $p$  ( $p'$   $p''$   $p'''$ ) do płaszczyzny  $\delta_{II}$  i znajdziemy kąt, jaki prosta ta tworzy z prostą  $m$ . W tym celu wyznacziliśmy ślady poziome  $H_m$  i  $H_p$  obu prostych, i ślady  $h_\alpha, v_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , na której leżą. Wykonawszy kład tej płaszczyzny na rzutnię pionową, otrzymamy proste  $m_0$  i  $p_0$ , a kąt  $\varphi$ , uzupełniający kąt  $\psi$  tych prostych, rozwiązuje zadanie.

3. Wyznaczyć kąt nachylenia prostej  $p$  ( $p'$   $p''$ ) z płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ), przyczem położenie prostej jest takie, że rzuty jej schodzą się ze śladami płaszczyzny (Rys. 246.). Dla



Rys. 246.

zorientowania się co do wzajemnego położenia prostej i płaszczyzny, wyznaczaliśmy rzut boczny  $p'''$  prostej  $p$  i ślad boczny  $k_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ . Następnie z punktu  $B$  ( $B'$   $B''$ ) prostej  $p$  ( $p'$   $p''$ ) poprowadziliśmy prostopadłą  $m$  ( $m'$   $m''$ ) do  $\alpha$  i wykonaliśmy kład płaszczyzny  $\epsilon$  ( $h_\epsilon$   $v_\epsilon$ ), wyznaczonej prostymi  $p$  i  $m$ , na rzutnię pionową. Kąt  $\varphi$ , uzupełniający kąt  $m^0$   $p^0$ , jest rozwiązaniem zadania.

### 83. Ćwiczenia.

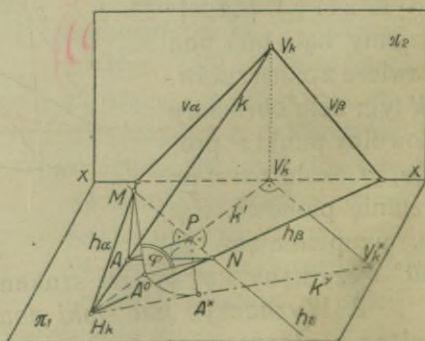
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej  $p$  z płaszczyzną  $\alpha$  dla następujących położeń:

- a)  $\alpha \perp \pi_1$ ,  $p$  dowolnie;    b)  $\alpha \perp \pi_2$ ,  $p \parallel \pi_1$ ;  
 c)  $\alpha \parallel$  do  $x$ ,  $p$  dowolnie;    d)  $\alpha \parallel \delta_I$ ,  $p \parallel \pi_2$ ;  
 e)  $\alpha \equiv \delta_I$ ,  $p$  dowolnie;    f)  $\alpha$  dowolnie,  $p \parallel x$ .

### 84. Kąt nachylenia dwóch płaszczyzn. Ogólnie omówi-

liśmy rozwiązanie tego zadania w ust. 74. Sprawa da się jednak pod względem konstrukcyjnym znacznie uprościć.

1. Sposób. W punkcie  $A$ , krawędzi  $k$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (Rys. 247.), poprowadzona płaszczyzna prostopadła  $\epsilon$ , przecina płaszczyznę  $\alpha$  w prostej ( $A, M$ ), zaś płaszczyznę  $\beta$

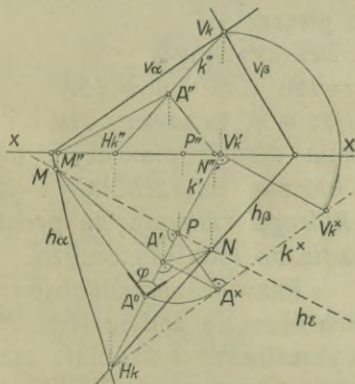


Rys. 247.

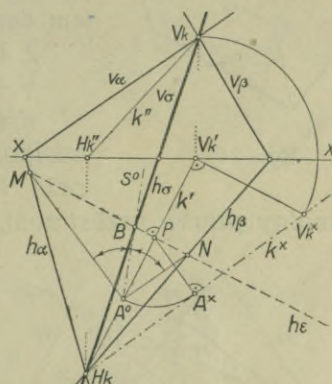


w prostej  $AN$ , przyczem ślad poziomy  $h_\varepsilon$  tej płaszczyzny jest prostopadły do rzutu  $k'$  krawędzi  $k$  i przecina go w punkcie  $P$ . Kąt  $MAN$  jest szukanim kątem. Prosta  $AP$ , leżąca na płaszczyźnie poziomo rzucającej  $H_k AP$  i na płaszczyźnie  $\varepsilon$ , jest prostopadłą do krawędzi  $k$  i do śladu  $h_\varepsilon$ ; w istocie  $k$ , jako prostopadła do  $\varepsilon$ , jest prostopadłą do  $AP$ , a ślad  $h_\varepsilon$  prostopadły do  $k'$  jest prostopadły do płaszczyzny rzucającej  $H_k AP$ , a więc i do prostej  $AP$ .

Przystąpmy do rozwiązania zadania w rzutach prostokątnych (Rys. 248 a.). Wyznamy rzut poziomy  $k'$  krawędzi  $k$



Rys. 248 a.



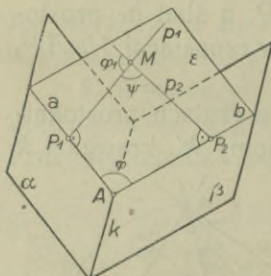
Rys. 248 b.

danych płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  w punkcie dowolnym  $P$  wykreślmy  $h_\varepsilon \perp k'$ , jako ślad poziomy płaszczyzny prostopadłej do krawędzi  $k$ . Wykonajmy kład  $k^\times$  krawędzi  $k$  na rzutnię poziomą (porównaj Rys. 247. z Rys. 248 a.) i wykreślmy z punktu  $P$  prostą  $(P, A^\times) \perp k^\times$ , a otrzymany punkt  $A^\times$  przenieśmy łukiem koła o środku  $P$  na  $k'$ . Punkt  $A^o$  połączmy z punktami  $M$  i  $N$ , a kąt  $MA^oN = \varphi$  rozwiązuje zadanie. Rzuty kąta  $\varphi$  otrzymamy, gdy znajdziemy rzuty  $A'$  i  $A''$  jego wierzchołka  $A$ . Prostopadła wykreślona z  $A^\times$  do  $k'$  przecina ją w punkcie  $A'$ , który jest wierzchołkiem rzutu poziomego kąta  $\varphi$ , którego ramiona przechodzą przez  $M$  i  $N$ . Punkt  $A'$  odniesiony na  $k''$  i połączony z punktami  $M''$  i  $N''$  wyznacza kąt  $M''A''N''$ , będący rzutem pionowym kąta  $\varphi$ , jaki tworzą płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$ .

Wykreślmy dwusieczną  $s^o$  kąta  $\varphi$  (Rys. 248 b.) i połączmy punkt przecięcia się  $B \equiv (s^o, h_\varepsilon)$  z punktem  $H_k$ . Otrzymana

prosta  $h_\sigma$  jest śladem poziomym płaszczyzny dwusiecznej  $\sigma$ , której ślad pionowy przejdzie przez punkt  $V_k$ .

2. Sposób. Z dowolnego punktu  $M$  prowadzimy prostopadłe  $p_1$  i  $p_2$  do danych płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (Rys. 249.). Proste te wyznaczają płaszczyznę  $\varepsilon$  prostopadłą do obu danych, a więc i prostopadłą do ich krawędzi  $k$ . Oznaczmy proste przecięcia się płaszczyzny  $\varepsilon$  z  $\alpha$  i  $\beta$  przez  $a$  i  $b$ , to kąt  $\varphi$ , jaki tworzą te proste, przecinające się w punkcie  $A$ , jest kątem danych płaszczyzn.



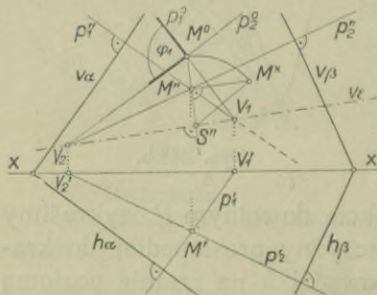
Rys. 249.

Z Rys. 249. czytamy:

$$\varphi + \psi = 180^\circ \text{ i } \varphi_1 + \psi = 180^\circ$$

a stąd  $\varphi_1 = \varphi$ , to znaczy, że

wielkość kąta dwóch płaszczyzn wyraża kąt, którego wierzchołkiem jest dowolny punkt przestrzeni, a którego ramiona są prostopadłe do tych płaszczyzn.



Rys. 250.

Rozwiązanie zadania w rzutach Monge'a podaje Rys. 250. Wykreśliwszy z dowolnie przyjętego punktu  $M$  ( $M'$   $M''$ ) prostopadłe  $p_1$  ( $p_1'$   $p_1''$ ) i  $p_2$  ( $p_2'$   $p_2''$ ) do płaszczyzn  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ) i  $\beta$  ( $h_\beta$   $v_\beta$ ), wykonaliśmy kład płaszczyzny  $\varepsilon \equiv (p_1, p_2)$  około jej śladu pionowego  $v_\varepsilon$  na rzutnię pionową, otrzymując szukany kąt  $\varphi_1 = \varphi$ .

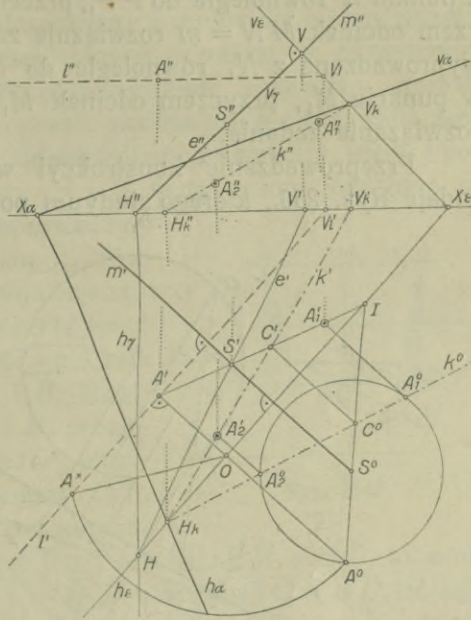
### 85. Zadania.

1. Obrócić dany punkt  $A$  ( $A'$   $A''$ ) około osi  $m$  ( $m'$   $m''$ ) tak, aby padł na daną płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ). Poprowadźmy przez punkt  $A$  (Rys. 251.) płaszczyznę  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon$   $v_\varepsilon$ ) prostopadłą do prostej  $m$  i wyznaczmy punkt przebiecia się  $S$  ( $S'$   $S''$ ) tej prostej z  $\varepsilon$ , a także krawędź  $k$  ( $k'$   $k''$ ) płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varepsilon$ . Jeżeli promieniem  $\overline{S A}$  ze środka obrotu  $S$  zakreslimy koło, to punkty przecięcia się  $A_1$  i  $A_2$  tego koła z krawędzią  $k$  rozwiązują zadanie. W celu otrzymania tych punktów wykonaliśmy kład płaszczyzny  $\varepsilon$  wraz z punktami  $A$ ,  $S$  i prostą  $k$  na rzutnię poziomą, gdzie promieniem  $\overline{S^0 A^0}$  zakresliliśmy koło, które



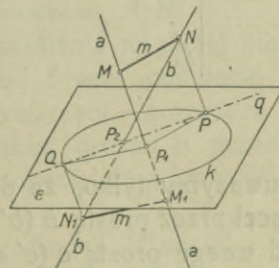
przecięto prostą  $k^0$  w punktach  $A_1^0$  i  $A_2^0$ . Punkty te odniesione na prostą  $k$  ( $k' k''$ ) dają rzuty  $A_1'$  i  $A_1''$ ,  $A_2'$  i  $A_2''$  punktów  $A_1$  i  $A_2$ , spełniających żądany warunek. (Rys. 251. należy poprawić o tyle, żeby punkt  $A_1'$  leżał na  $k'$ , a punkt  $A_1''$  na  $k''$  jako rzut otrzymanego punktu  $A_1'$ ).

Zadanie posiada dwa rozwiązania, jedno lub żadne, zależnie od tego, czy prosta  $k$  przecina koło, jest doń styczną lub nie przecina go w żadnym punkcie rzeczywistym.



Rys. 251.

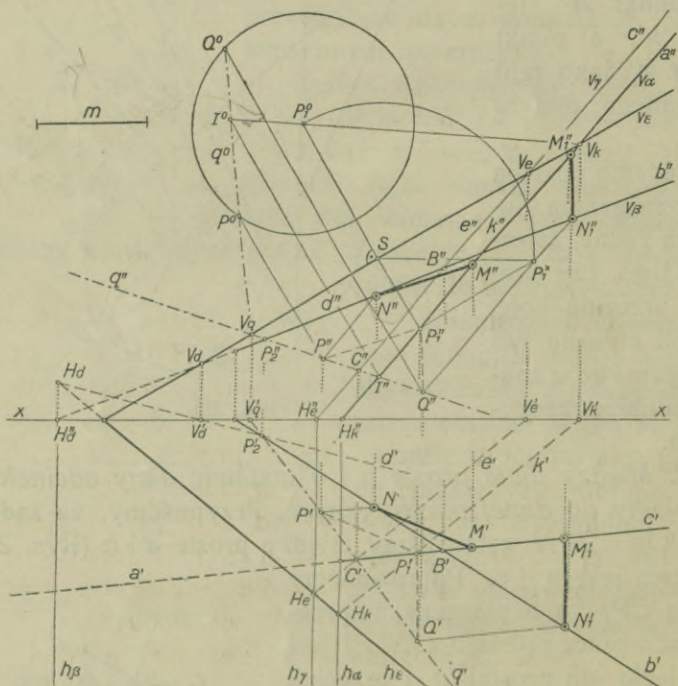
2. Między dwie proste  $a$  i  $b$  wstawić dany odcinek  $m$ , równoległy do danej płaszczyzny  $\varepsilon$ . Przypuśćmy, że żądany odcinek  $m = \overline{MN}$  wstawiliśmy między proste  $a$  i  $b$  (Rys. 252.) przyczem jest  $m \parallel \varepsilon$ . Poprowadźmy prostą  $(N, P) \parallel a$ , to płaszczyzna przechodząca przez proste  $b$  i  $(N, P)$  jest równoległą do prostej  $a$  i przecina daną płaszczyznę  $\varepsilon$  w prostej  $q$ . Oczywiście, że  $\overline{PP_1} = \overline{MN} = m$ . Zadanie rozwiążemy więc w sposób następujący: Wyznaczywszy punkt przebicia się  $P_1$  prostej  $a$  z płaszczyzną  $\varepsilon$ , zakreslimy z niego jako środka, promieniem równym danemu odcinkowi  $m$ , koło, a przez prostą  $b$  poprowadzimy płaszczyznę równoległą do  $a$ . Płaszczyzna ta przetnie płaszczyznę  $\varepsilon$  w prostej  $q$ , a ta znowu koło w punktach  $P$  i  $Q$ . Równoległe do  $a$ , wyprowadzone z punktów  $P$  i  $Q$ ,



Rys. 252.

przetną prostą  $b$  w punktach  $N$  i  $N_1$ . Prosta, wyprowadzona z punktu  $N$  równolegle do  $\overline{P P_1}$ , przecina  $a$  w punkcie  $M$ , przyczem odcinek  $\overline{M N} = m$  rozwiązuje zadanie. Podobnie prosta, wyprowadzona z  $N_1$  równolegle do  $\overline{P_1 Q}$ , przecina prostą  $a$  w punkcie  $M_1$ , przyczem odcinek  $\overline{M_1 N_1} = m$  stanowi drugie rozwiązanie zadania.

Przeprowadzenie konstrukcyi w rzutach prostokątnych podaje Rys. 253., którego studyum pozostawiamy czytelnikowi.



Rys. 253.

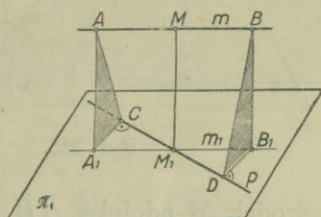
Zauważymy tylko, że dla wyznaczenia płaszczyzny, przechodzącej przez prostą  $b$  ( $b' b''$ ) równoległe do  $a$  ( $a' a''$ ), wzięliśmy pod uwagę prostą  $c$  ( $c' c''$ )  $\parallel a$  ( $a' a''$ ) a przecinającą  $b$  ( $b' b''$ ) w punkcie  $B$  ( $B' B''$ ), przyczem przyjęliśmy  $c' \equiv a'$ . Prosta  $c$  przebija płaszczyznę  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ) w punkcie  $C$  ( $C' C''$ ), a prostą  $b$  w punkcie  $P_2$  ( $P_2' P_2''$ ). Punkty te wyznaczają prostą  $q$  ( $q' q''$ ).

Jeżeli prosta  $q$  nie przecina koła zakreślonego z punktu  $P_1$  promieniem  $m$ , to zadanie nie ma rozwiązań rzeczywistych,



odcinek  $m$  jest za krótki. Jeżeli prosta  $q$  jest styczną do koła, to wówczas otrzymamy tylko jedno rozwiązanie.

3. Przez punkt  $P$  płaszczyzny  $\pi$  wykreślić na niej prostą, równo oddaloną od dwóch danych punktów w przestrzeni, a mianowicie  $A$  i  $B$ . Przedewszystkiem rozważmy sprawę następującą: Przyjawszy proste skośne  $m$  i  $p$  (Rys. 254.), a na pierwszej punkty  $A$  i  $B$ , odpowiedzmy na pytanie, kiedy i pod jakimi warunkami punkty  $A$  i  $B$  będą równo oddalone od prostej  $p$ . W tym celu poprowadźmy przez prostą  $p$  płaszczyznę  $\pi_1$ , równoległą do prostej  $m$  i znajdziemy rzut prostokątny  $m_1$  prostej  $m$  na tę płaszczyznę, a to przez wyznaczenie rzutów  $A_1$  i  $B_1$  punktów  $A$  i  $B$ . Rzućmy jeszcze punkty  $A$  i  $B$  prostopadłe na prostą  $p$  i połączmy otrzymane punkty  $C$  i  $D$ , pierwszy z  $A_1$ , drugi z  $B_1$ . Niechaj  $\overline{MM_1}$  jest wspólną



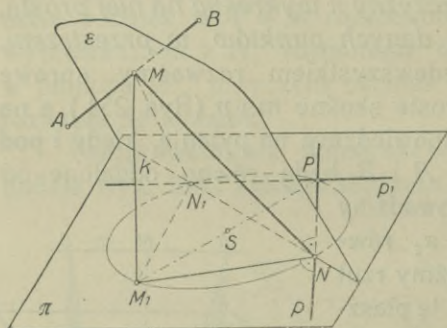
Rys. 254.

prostopadłą do prostych  $m$  i  $p$  i niechaj  $\overline{AM} = \overline{MB}$ , to wówczas  $\overline{A_1M_1} = \overline{M_1B_1}$ ,  $\overline{A_1C} = \overline{B_1D}$  a także  $\overline{AC} = \overline{BD}$ , trójkąty bowiem  $\triangle AA_1C$  i  $\triangle BB_1D$  będą przystające. Ponieważ odcinki  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  są oddaleniami punktów  $A$  i  $B$  od prostej  $p$ , więc widzimy, że: aby dwa punkty  $A$  i  $B$ , prostej  $m$ , były równo oddalone od innej prostej  $p$ , to potrzeba i wystarcza, aby punkty te były równo oddalone od wspólnej prostopadłej obu prostych. I na wzajem, skoro dwa punkty prostej  $m$  są równo oddalone od prostej  $p$ , to wspólna prostopadła tych prostych przecina prostą  $m$  w środku  $M$  odcinka  $\overline{AB}$ .

W ten sposób zadanie nasze wykreślenia na danej płaszczyźnie  $\pi$ , przez dany punkt  $P$ , prostej równo oddalonych od dwóch danych punktów  $A$  i  $B$  w przestrzeni, sprowadza się do wyznaczenia na płaszczyźnie  $\pi$  takiej prostej  $p$  przechodzącej przez punkt  $P$ , aby wspólna prostopadła do  $p$  i  $m \equiv (A, B)$  przeszła przez środek odcinka  $\overline{AB}$ .

W tym celu poprowadźmy przez środek  $M$  odcinka  $\overline{AB}$  (Rys. 225.) płaszczyznę  $\varepsilon$  prostopadłą do niego i wyznaczmy krawędź  $k$  płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\pi$ . Rzućmy następnie punkt  $M$  prostopadłe na płaszczyznę  $\pi$ , a na średnicy  $\overline{M_1P}$  zakreślmy koło. Proste  $p$  i  $p_1$ , łączące punkt  $P$  z punktami przecięcia się  $N$  i  $N_1$  krawędzi  $k$  z tym kołem, spełniają żądany warunek

i rozwiązują zadanie. W istocie bowiem prosta  $(M, N)$ , jako leżąca na płaszczyźnie  $\varepsilon$ , ( $\varepsilon \perp \overline{AB}$ ), jest prostopadłą do  $\overline{AB}$ ;



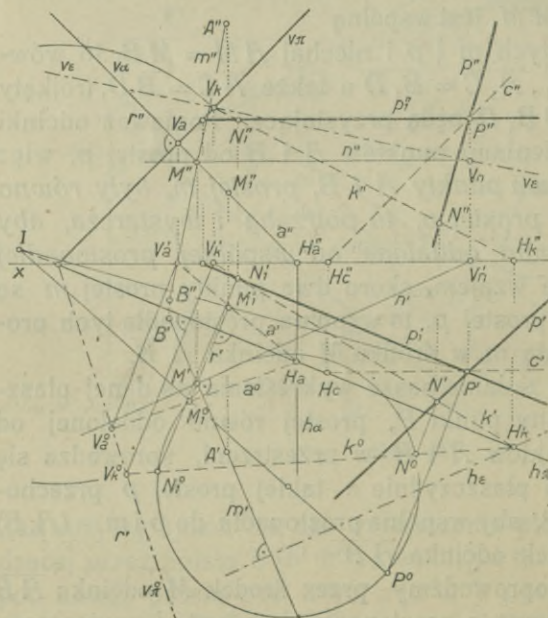
Rys. 255.

następnie prosta  $p$  jest prostopadłą do  $\overline{NM}_1$ , gdyż  $\sphericalangle PNM_1$  wspiera się na średnicy, a nadto  $p$  jest prostopadłą do  $\overline{MM}_1$ , gdyż  $\overline{MM}_1$  jest prostopadłą do  $\pi$ .

Wobec tego prosta  $p$  jest prostopadłą do płaszczyzny  $MM_1N$ , a zatem i do prostej  $MN$ . Ta ostatnia jest wspólną prostopadłą do prostych  $(A, B)$  i  $p$ , a ponieważ przechodzi przez

środek  $M$  odcinka  $\overline{AB}$ , więc prosta  $p$  jest równo oddaloną od punktów  $A$  i  $B$  i rozwiązuje zadanie. Z tych samych powodów prosta  $p_1$  czyni również zadość

postawionemu warunkowi.



Rys. 256.

Jeżeli prosta  $k$  byłaby styczną do koła, to zadanie posiadałoby tylko jedno rozwiązanie; gdyby krawędź  $k$  nie przecięła koła, zakreślonego na średnicy  $\overline{PM}_1$ , to zadanie nie posiada żadnego rozwiązania rzeczywistego. Jeżeli odcinek  $\overline{AB}$  jest równoległy do płaszczyzny  $\pi$ , to punkt  $M$ , pada na prostą  $k$ , a wówczas

otrzymamy zawsze dwie proste rozwiązujące zadanie; jedna przejdzie przez punkt  $M$ , a druga będzie do niej prostopadłą.



Rozwiązanie omawianego zadania w rzutach prostokątnych podaje Rys. 256., gdzie punkt  $B$  ( $B' B''$ ) przyjęliśmy w czwartej części przestrzeni.

### 86. Ćwiczenia.

1. Obrócić punkt  $A$  około danej prostej  $m$  tak, aby po obrocie padł na daną płaszczyznę  $\alpha$ . Prosta  $m$  i płaszczyzna  $\alpha$  mają następujące położenia:

- |   |  |
|---|--|
| a) $m \perp \pi_1, \alpha \perp \pi_1$ ;      | g) $m \perp \pi_1, \alpha // x$ ;                    |
| b) $m \perp \pi_1, \alpha \perp \pi_2$ ;      | h) $m$ na $\pi_1, \alpha \equiv \delta_I$ ;          |
| c) $m \perp \pi_1, \alpha // \pi_2$ ;         | i) $m$ na $\delta_{II}, \alpha \equiv \delta_{II}$ ; |
| d) $m \perp \pi_2, \alpha // \pi_1$ ;         | j) $m$ na $\delta_{II}, \alpha // \delta_I$ ;        |
| e) $m \perp \pi_2, \alpha$ dowolnie położona; | k) $m // \delta_I, \alpha \equiv \delta_I$ ;         |
| f) $m \perp \pi_1, \alpha$ „ „ „ „            | l) $m // \delta_I, \alpha \equiv \delta_{II}$ .      |

2. Wyznaczyć kąt nachylenia płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  w następujących przypadkach:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\alpha \perp \pi_1, \beta \perp \pi_2$ ;     | f) $\alpha \perp \pi_1, \beta \equiv \delta_{II}$ ; |
| b) $\alpha$ dowolna, $\beta \perp \pi_1$ ;       | g) $\alpha \perp \pi_2, \beta \equiv \delta_{II}$ ; |
| c) $\alpha // x, \beta$ dowolna;                 | h) $\alpha \perp \pi_2, \beta // \pi_3$ ;           |
| d) $\alpha // x, \beta \perp \pi_1$ ;            | i) $\alpha \equiv \delta_I, \beta$ dowolna;         |
| e) $\alpha \perp \pi_1, \beta \equiv \delta_I$ ; | k) $\alpha \equiv \delta_{II}, \beta$ dowolna.      |

3. Dane są dwie płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  i prosta  $p$ ; wyznaczyć na tej prostej punkt równo oddalony od obu płaszczyzn.

4. Dane są dwie płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  i trzy punkty  $A, B, C$ ; wyznaczyć punkt równo oddalony od obu płaszczyzn i od danych punktów. (W środku koła opisanego na trójkącie  $ABC$  poprowadzimy prostopadłą do płaszczyzny trójkąta i znajdziemy punkty przebicia się z płaszczyznami dwusiecznymi).

5. Dane są dwie proste równoległe  $a$  i  $b$  i trzecia prosta  $c$  skośna względem dwóch pierwszych; wyznaczyć prostą, która przecina wszystkie trzy dane, a jest równoległą do rzutni poziomej. (Przez punkt przebicia się  $P$  prostej  $c$  z płaszczyzną  $\alpha \equiv (a, b)$  poprowadzimy płaszczyznę poziomą  $\pi$ ; krawędź płaszczyzn  $\alpha$  i  $\pi$  rozwiązuje zadanie).

6. Znaleźć prostą równo oddaloną od trzech danych równoległych.

7. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, które są równo oddalone od obu śladów danej płaszczyzny  $\alpha$ , od tej płaszczyzny i od rzutni poziomej. (Wyznamy dwusieczną  $d$  kąta, jaki tworzą ślady płaszczyzny  $\alpha$ , a przez nią poprowadzimy płaszczyznę  $\beta$  prostopadłą do  $\alpha$ . Płaszczyzna dwusieczna kąta, jaki dana płaszczyzna  $\alpha$  tworzy z rzutnią poziomą, przecina płaszczyznę  $\beta$  w prostej, rozwiązującej zadanie).

8. Dana jest prosta  $a$  i trzy punkty  $A, B, C$ ; obrócić punkt  $A$  około prostej  $a$  tak, aż będzie równo oddalony od  $B$  i  $C$ . (Przez  $A$  poprowadzimy płaszczyznę  $\alpha$  prostopadłą do  $a$  i wyznaczmy punkt przebicia się  $S$ . Promieniem  $\overline{SA}$  zakreślmy na  $\alpha$  koło i znajdziemy krawędź płaszczyzny  $\alpha$  z płaszczyzną symetrii odcinka  $\overline{BC}$ . Punkty przecięcia się tej krawędzi z kołem rozwiązują zadanie).

**87. Rzuty wielościanów.** Poznanie metody obrotów i kładów umożliwi nam zajęcie się pewną grupą utworów przestrzennych, jakimi są, znane nam z nauki stereometrii,

wielościany. Wiadomo, że przestrzeń ograniczoną ze wszech stron płaszczyznami, stanowi wielościan. Prostą przecięcia się dwóch płaszczyzn ograniczających wielościan, nazywamy krawędzią tego wielościanu. Krawędzie te tworzą wielokąt, ograniczające wielościan i tworzące jego ściany. Do najprostszych wielościanów należą ostrosłupy i graniastosłupy.

Wielościan ograniczony dowolnym wielokątem i trójkątami, mającymi jeden wierzchołek wspólny, nazywamy ostrosłupem. Ow wielokąt nazywa się podstawą, a boki tego wielokąta krawędziami podstawy. Wspomniane wyżej trójkąty stanowią ściany boczne ostrosłupa, a ich boki, z wyjątkiem tych, które stanowią krawędzie podstawy, nazywamy krawędziami bocznymi. Wszystkie krawędzie boczne schodzą się w punkcie, który nazywamy wierzchołkiem ostrosłupa. Odległość wierzchołka od podstawy nazywamy wysokością ostrosłupa. Ostrosłup, którego wszystkie krawędzie boczne są równej długości, określać będziemy mianem prosty, w odróżnieniu od ukośnego, który warunku tego nie spełnia. Ilość ścian bocznych ostrosłupa nadaje mu miano; mówimy tedy o ostrosłupie trójściennym, czworościennym i t. d., zależnie od tego, czy trójkąt, czworokąt, czy też inny wielokąt stanowi jego podstawę. Podstawa i wierzchołek wyznaczają ostrosłup, stwarzają bowiem warunki, umożliwiające wyznaczenie brakujących krawędzi i ścian bocznych.

Wielościan ograniczony dwoma przystającymi wielokątami i równoległobokami, których ilość równa jest ilości boków wielokąta, nosi nazwę graniastostłupa. Owe dwa przystające wielokąty stanowią podstawy, a równoległoboki ściany boczne graniastostłupa. Boki wielokątów podstawowych nazywamy krawędziami podstawy, a boki równoległoboków, nie schodzące się z bokami podstaw, krawędziami bocznymi graniastostłupa. Odległość płaszczyzn podstawowych nazywamy wysokością graniastostłupa. Graniastostłup, którego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, określać będziemy jako prosty; inaczej graniastostłup jest ukośny. Ściany boczne graniastostłupa prostego są prostokątami, graniastostłupa ukośnego równoległobokami. Zależnie od ilości ścian bocznych, mówimy o graniastostłupie trójściennym, czworościennym i t. d. Z określenia graniastostłupa wynika, że jedna podstawa i jedna krawędź boczna, wyznaczają go w zupełności. Graniastostłup,



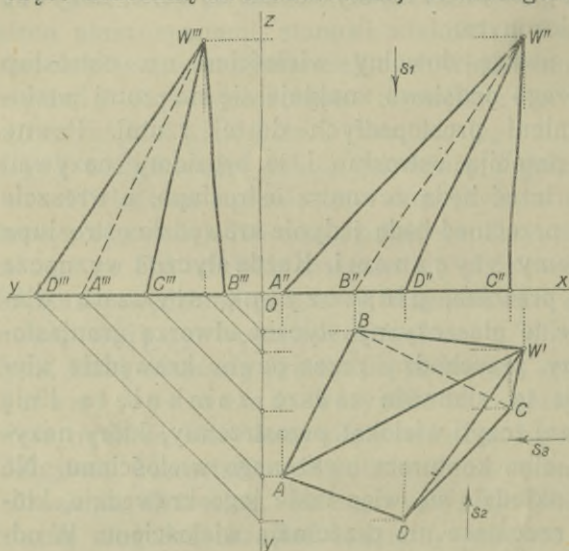
którego jedna tylko podstawa i ściany boczne są dane, nazywać będziemy nieograniczonym.

Weźmy pod uwagę dowolny wielościan, np. ostrosłup czworościenny, którego podstawa znajduje się na rzutni poziomej i wiązkę promieni prostopadłych do tej rzutni. Pewne promienie wiązki przebiją ostrosłup i te będziemy nazywali siecznymi, inne leżeć będą zewnątrz ostrosłupa, a wreszcie będą i takie, które przecinać będą jedynie krawędzie ostrosłupa i te nazywać będziemy stycznymi. Każda styczna wyznacza z krawędzią, którą przecina, płaszczyznę styczną wielościanu. Wszystkie te płaszczyzny styczne utworzą graniastosłup, którego ściany przechodzą przez pewne krawędzie wielościanu. Krawędzie te stanowią zawsze zamkniętą linię łamaną w przestrzeni, czyli wielokąt przestrzenny, który nazywamy zarysem albo konturem uważanego wielościanu. Na zarys wielościanu składają się więc takie jego krawędzie, których płaszczyzny rzucające nie przecinają wielościanu. W odniesieniu do rzutni pionowej otrzymamy drugi kontur wielościanu, podobnie jak w odniesieniu do rzutni bocznej. Wiadomo (ust. 53.), że rzut poziomy jest widokiem z góry z odległości nieograniczenie dalekiej, że rzut pionowy jest obrazem przedmiotu, na który patrzymy w kierunku prostopadłym do rzutni pionowej z odległości nieograniczenie dalekiej, czyli, jak mówimy z przodu. Wreszcie rzut boczny jest równoznaczny z widokiem z boku, w kierunku prostopadłym do rzutni bocznej, zawsze z odległości nieograniczenie dalekiej. Przy założeniu, że wielościan nie jest przezroczysty, kontur jego oddziela, w odniesieniu do każdej rzutni, część widoczną od niewidocznej.

Rzut wielościanu na daną rzutnię otrzymamy, znajdując rzuty wszystkich jego krawędzi, a więc także i jego zarysu. Rzuty krawędzi widocznych, do których należą zawsze krawędzie konturowe, wykreślać będziemy liniami pełnymi, w odróżnieniu od rzutów krawędzi niewidocznych, rysowanych zawsze liniami kreskowanymi.

Zastosujmy te uwagi do przyjętego już wyżej ostrosłupa ukośnego, którego podstawa  $ABCD$  spoczywa na rzutni poziomej (Rys. 257). Jeżeli  $W$  ( $W'$   $W''$   $W'''$ ) jest wierzchołkiem ostrosłupa, to konturem jego w odniesieniu do rzutni poziomej będzie wielokąt przestrzenny  $WBADCW$ , odgraniczający

część widoczną od niewidocznej. W szczególności ściany  $WBA$ ,

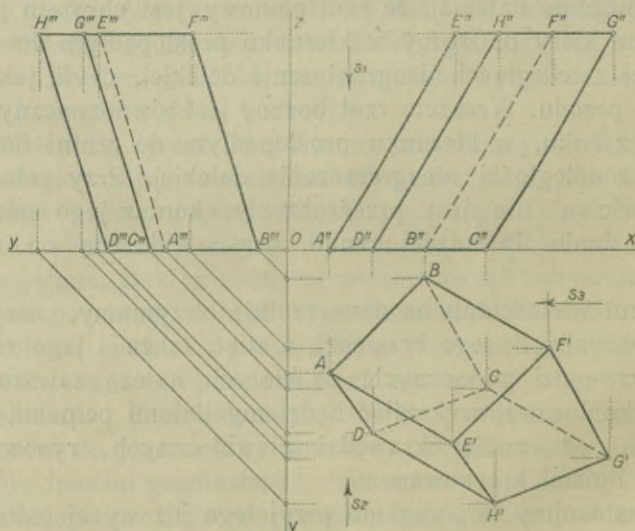


Rys. 257.

$WAD$  i  $WDC$  są w rzucie poziomym widoczne, zaś ściana  $WBC$  i podstawa ostrosłupa są niewidoczne.

Krawędź  $\overline{BC}$ , jako należąca do dwóch ścian niewidocznych, jest niewidoczną i dlatego wykreskowana. Zarys dla rzutu pionowego jest linią łamaną  $WADCW$ . Krawędź  $\overline{WB}$

jest w tym rzucie niewidoczną. W rzucie bocznym, na który



Rys. 258.

patrzemy w kierunku  $s_3$ , nie jest widoczną krawędź boczna  $\overline{WA}$ .

Rys. 258. przedstawia rzuty czworościennego graniasto-



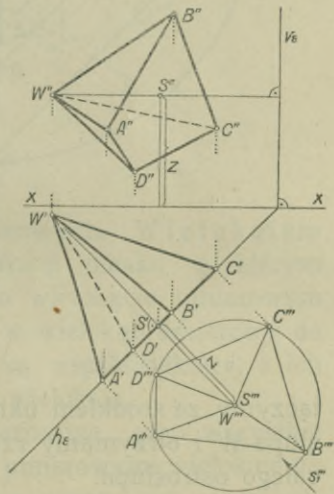
słupa ukośnego, którego podstawa  $A B C D$  leży na rzutni poziomej.

### 88. Przykłady.

1. Wyznaczymy rzuty prostego ostrosłupa, którego podstawa, dowolny czworokąt, spoczywa na płaszczyźnie poziomo rzucającej, a którego wysokość jest dana.

Wiadomo, że krawędzie boczne ostrosłupa prostego są równej długości, a ponieważ wszystkie przechodzą przez jeden punkt, wierzchołek, więc rzuty tych krawędzi na płaszczyznę podstawy będą odcinkami równej długości. Aby warunek ten mógł być spełniony, wielokąt podstawy musi być wpisany w koło, a rzut wierzchołka ostrosłupa schodzić się ze środkiem tego koła.

Jeżeli  $\varepsilon (h_\varepsilon v_\varepsilon)$  jest płaszczyzną podstawy (Rys. 259.), to czworokąt  $A''' B''' C''' D'''$  wpisany w koło wraz z bokami  $S''' A'''$ ,  $S''' B'''$ ,  $S''' C'''$  i  $S''' D'''$  jest kładem rzutu ostrosłupa na płaszczyznę  $\varepsilon$ , dokonany na rzutnię poziomą. Kład ten uważać można za trzeci (boczny) rzut ostrosłupa. Podniesiemy podstawę wraz ze środkiem  $S$  koła na płaszczyznę  $\varepsilon$ ; w punkcie  $S (S' S'')$  wyprowadzimy prostopadłą do  $\varepsilon$  i odmierzymy na niej odcinek  $\overline{S W}$  równy danej wysokości. Skonstruowany w ten sposób wierzchołek  $W (W' W'')$  połączymy z wierzchołkami czworokąta podstawy, otrzymując rzuty ostrosłupa. Z łatwością zauważymy, że w rzucie poziomym krawędź  $\overline{D W}$ , a w rzucie pionowym krawędź  $\overline{C W}$  są niewidoczne.

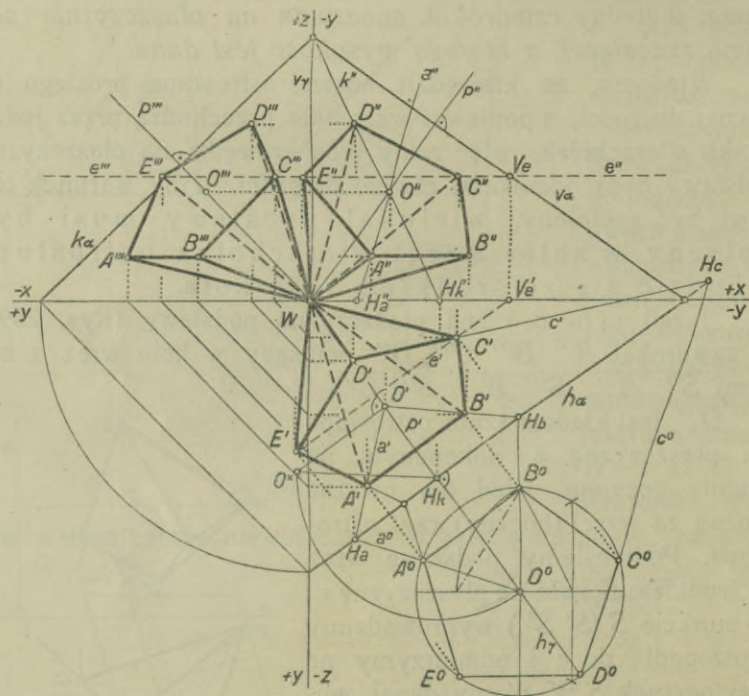


Rys. 259.

2. Wykreślić rzuty prostego ostrosłupa, którego wierzchołek znajduje się w środku układu, a podstawa, będąca umiarem pięciokątem, leży na danej płaszczyźnie  $\alpha (h_\alpha v_\alpha k_\alpha)$  (Rys. 260.).

Znajdziemy punkt przecięcia się  $O (O' O'' O''')$  prostej  $p (p' p'' p''')$ , wyprowadzonej ze środka układu prostopadłe do płaszczyzny  $\alpha$ . Po wykonaniu kładu płaszczyzny  $\alpha$  wraz

z punktem  $O$  na rzutnię poziomą, wykreślimy pięciokąt  $A^0 \dots E^0$  i podniesiemy go na tę płaszczyznę, kreśląc jego rzut poziomy, pionowy i boczny. Rzuty wierzchołków pięciokąta podstawy



Rys. 260.

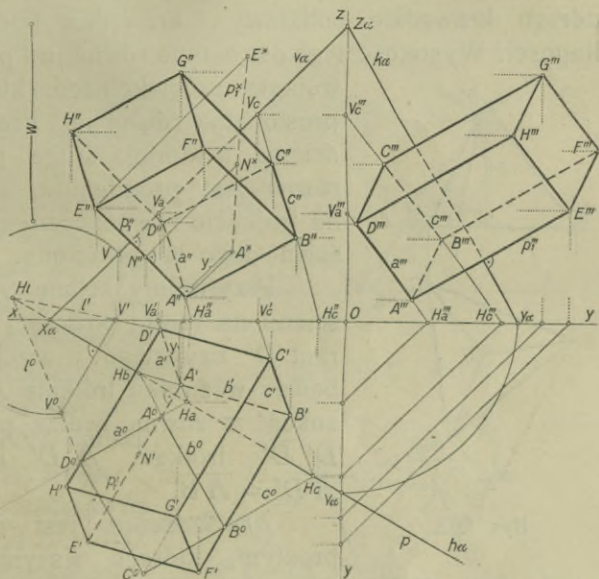
łączmy ze środkiem układu, w którym leży wierzchołek ostrosłupa  $W$  i otrzymamy rzuty krawędzi bocznych, a więc i rzuty całego ostrosłupa.

3. Wykreślić rzuty prostego graniastostupa o danej wysokości  $w$ , którego podstawa (prostokąt) leży na płaszczyźnie  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) (Rys. 261).

Prostokąt  $A^0 B^0 C^0 D^0$  przyjęty na rzutni poziomej podnieśliśmy około śladu  $h_\alpha$  na płaszczyznę  $\alpha$ , otrzymując najpierw rzut poziomy  $A' B' C' D'$ , a następnie rzut pionowy  $A'' B'' C'' D''$ . Na prostopadłych, wyprowadzonych w wierzchołkach podstawy do płaszczyzny  $\alpha$ , należy odmierzyć długość krawędzi bocznych.



W tym celu obraliśmy na jednej z nich, a mianowicie na  $p_1$  ( $p_1' p_1''$ ) punkt  $N$  ( $N' N''$ ) i wykonali jej kład  $p_1^x$  na rzutnię pionową. Odmierzywszy  $\overline{A^x E^x} = w$ , wróciliśmy z punktem  $E^x$  na prostą  $p_1$  otrzymując jego rzuty  $E'$  i  $E''$ . Ponieważ rzuty prostych równoległych są równoległe, więc rzuty krawędzi podstawy górnej będą równoległe do rzutów odpowiednich krawędzi podstawy dolnej.

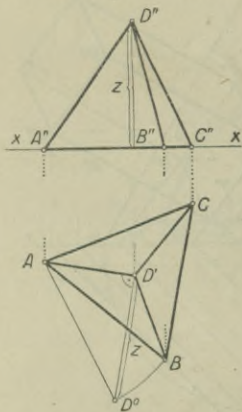


Rys. 261.

**89. Rzuty wielościanów umiarowych.** Wielokątem umiarowym nazywamy taki wielokąt płaski, w którym wszystkie boki i kąty są równe. Na wielokącie umiarowym opisać można koło, podobnie jak w wielokąt umiarowy da się zawsze wpisać koło. Oba koła są współśrodkowe, a ich wspólny środek nazywamy środkiem wielokąta.

Wielościan nazywamy *umiarowym*, gdy wszystkie jego ściany boczne są przystającymi umiarowymi wielokątami, którego kąty dwuścienne są równe, a naroża są wierzchołkami wielościennych, umiarowych i przystających kątów bryłowych. W każdy wielościan i na każdym z nich da się wpisać i opisać kula. Obie kule są współśrodkowe, który to środek nazywamy środkiem wielościanu. W zakres naszych rozważań wciągniemy wielościany umiarowe rodzaju pierwszego, czyli t. zw. ciała Platona, których jest pięć, a mianowicie: czworościan, sześćcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan.

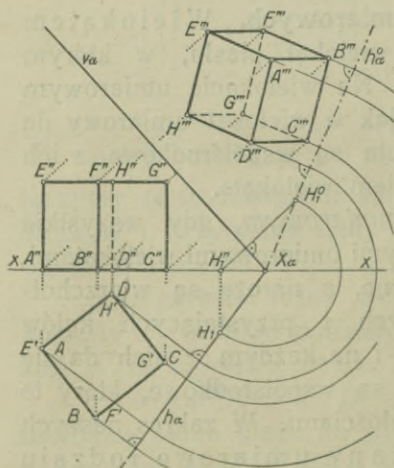
a) Czworoscian ograniczony jest czterema przystającymi trójkątami równobocznymi i stanowi trójścienny ostrosłup prosty, którego krawędzie podstawy i krawędzie boczne są równej długości. Wysokość tego ostrosłupa równa jest przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna równa jest krawędzi czworoscianu, a którego druga przyprostokątna równa jest promieniowi koła, opisanego na trójkącie równobocznym, stanowiącym ścianę tego czworoscianu.



Rys. 262.

Przyjmijmy ścianę  $ABC$  czworoscianu na rzutni poziomej (Rys. 262.), to rzut  $D'$  czwartego wierzchołka  $D$  leżeć będzie w środku trójkąta  $ABC$ , zaś wysokość  $z$  równa będzie przyprostokątnej  $D'D^0$  trójkąta  $AD'D^0$ , przyczem  $AD^0 = AB$ .

b) Sześciąt jest graniastostupem prostym, którego wszystkie ściany są kwadratami. W Rys. 263. wykonaliśmy prócz rzutu poziomego i pionowego, rzut na płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), w sposób omówiony w ust. 76.



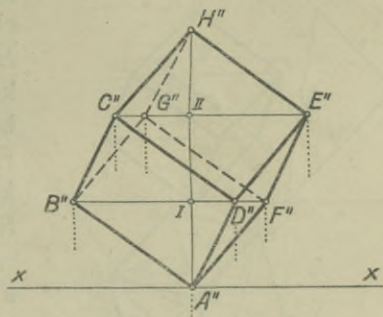
Rys. 263.

Wykreślmy rzuty sześciatu, którego długość krawędzi jest dana, a którego przekątna główna, t. j. odcinek łączący dwa przeciwległe wierzchołki sześciatu, ma położenie pionowe. Obrawszy punkt  $A$  na rzutni poziomej (Rys. 264.), wykreślmy trzy kwadraty:  $AB^0C^0D^0$ ,  $AD^0E^0F^0$  i  $AF^0G^0B^0$ , a to w ten sposób, aby kąty, jakie tworzą dwie sąsiednie krawędzie kwadratów, przechodzące przez punkt  $A$ , wynosiły  $30^\circ$ . Kwadraty owe uważajmy za rozwinięcie prostokątnego naroża trój-

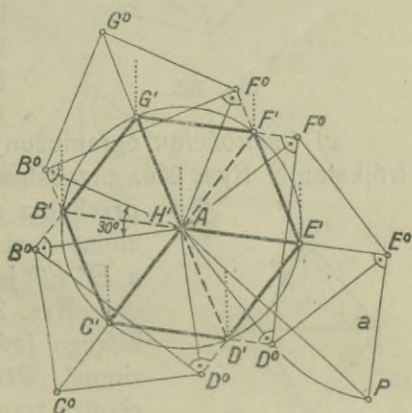
ściennego o wierzchołku  $A$  na rzutnię poziomą. Wyobraźmy sobie, że kwadrat  $AB^0C^0D^0$  obracamy około osi, przechodzącej



przez  $A$  równoległe do przekątnej  $\overline{B^0 D^0}$ , a zaś kwadrat  $A D^0 E^0 F^0$  około osi, przechodzącej również przez punkt  $A$  równoległe do przekątnej  $\overline{D^0 F^0}$ . W pewnym momencie obrotu wierzchołki, oznaczone literą  $D^0$  w obu kwadratach, zejdą się w punkcie  $D (D' D'')$ , a odcinek  $D' \bar{A}$  będzie rzutem poziomym krawędzi sześcianu. Punkt  $D'$  będzie przecięciem się prostych, wykreślonych z obu punktów  $D^0$  prostopadłe do kierunków osi obrotów, a więc do  $\overline{B^0 D^0}$  i  $\overline{D^0 F^0}$ . W ten sam sposób otrzymamy punkty  $F'$  i  $B'$ , a więc zarys



$B' C' D' E' F' G'$  sześcianu na rzutni poziomej.  $\overline{A B'}$ ,  $\overline{A D'}$  i  $\overline{A F'}$  są rzutami niewidocznych krawędzi sześcianu, a  $\overline{A C'}$ ,  $\overline{A E'}$  i  $\overline{A G'}$  rzutami pozostałych trzech krawędzi widocznych. Długość przekątnej sześcianu wynosi  $a\sqrt{3}$ , które to wyrażenie, algebraicznie niewymierne, otrzymamy jako przeciwprostokątną  $\overline{A P}$

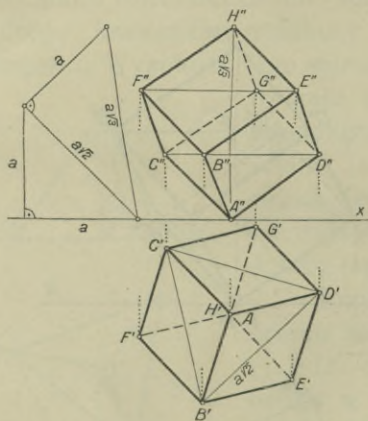


Rys. 264.

trójkąta prostokątnego o bokach  $\overline{A E^0} = a\sqrt{2}$ , i  $\overline{E^0 P} = a$ . Punkty  $B, D$  i  $F$  leżą w tej samej wysokości, a więc na płaszczyźnie poziomej, podobnie jak punkty  $C, E, G$ , których wysokość jest również wspólna. Nachylenie krawędzi  $\overline{C H}$ ,  $\overline{C D}$  i  $\overline{A D}$  do przekątnej głównej  $\overline{A H}$  jest jednakowe, gdyż krawędź  $\overline{C D}$  jest równoległa do  $\overline{H E}$ .

Wskutek tego, gdy punkt  $A$  leży na rzutni poziomej, odległość tej rzutni od płaszczyzny  $B D F$  i tej ostatniej od płaszczyzny poziomej  $C E G$ , a tej znowu od punktu  $H$ , są równe. Podzieliwszy więc przekątną  $\overline{A'' H''}$  na trzy równe części i poprowadziwszy przez punkty podziału  $I$  i  $II$  poziome, otrzymamy na nich szukane rzuty wierzchołków.

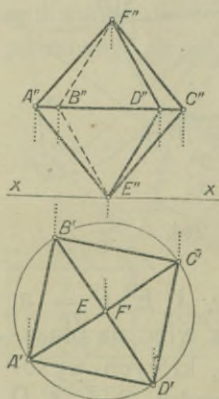
Pamiętając o tem, że rzut poziomy sześcianu w omawianym położeniu jest umiarywym sześciokątem i że odcinek,



Rys. 265.

łączący dwa nieprzyległe wierzchołki tego sześciokąta, więc np.  $\overline{B'D'}$  (Rys. 264.) jest przekątną kwadratu, stanowiącego ścianę boczną, wyznaczmy z łatwością rzut poziomy i bez podnoszenia kwadratów, jak to widzimy na Rys. 265. Wykreśliwszy długość przekątnej głównej równą  $a\sqrt{3} = \overline{A'H'}$ , podzielimy ją na trzy równe części, a na proste poziome, poprowadzone przez punkty podziału, odniesiemy odpowiednie punkty z rzutu poziomego.

c) *Ośmiościan* ograniczony jest ośmioma równobocznymi trójkątami. Rys. 266. przedstawia rzuty ośmiościanu, którego przekątna główna jest pionową. Rzut poziomy jest w tem położeniu kwadratem, a  $\overline{E'F'}$  jego przekątną.



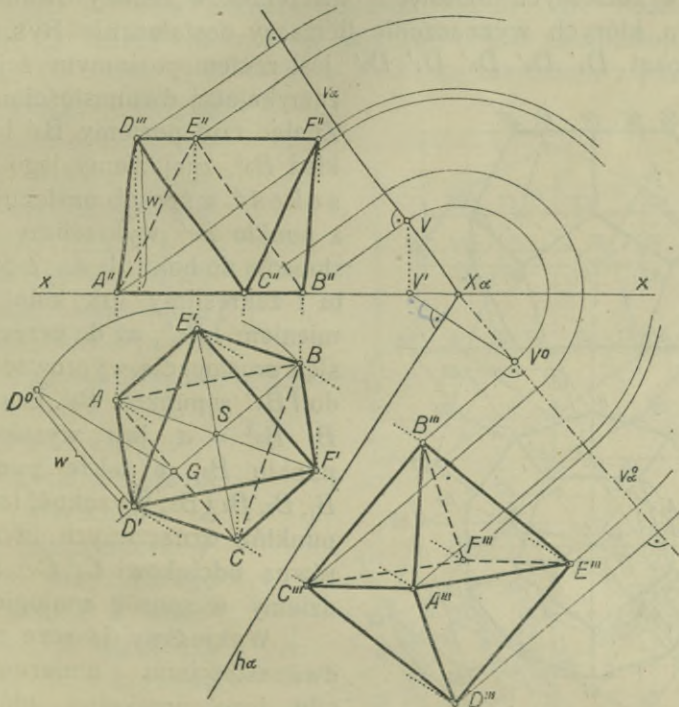
Rys. 266.

Rys. 267. podaje rzuty ośmiościanu, którego jedna ściana leży na rzutni poziomej. Przez boki trójkąta  $ABC$  przechodzą trzy dalsze trójkąty, których wierzchołki  $E, D, F$  w rzucie poziomym leżą na prostych, łączących środek  $S$  trójkąta  $ABC$  z jego wierzchołkami. Ponieważ płaszczyzny tych trzech trójkątów są jednakowo nachylone do poziomu, więc wierzchołki  $D, E, F$  są równo oddalone od  $S$  i od rzutni poziomej. Trójkąt  $D'E'F'$  jest więc równoboczny, równoległy do poziomej i tworzy

jeden bok ośmiościanu. Przez połączenie wierzchołków obu trójkątów równobocznych otrzymamy rzut poziomy dalszych krawędzi, a zarys ośmiościanu na rzutni poziomej będzie umiarywym sześciokątem. Odległość płaszczyzny trójkąta  $DEF$  od rzutni poziomej równa jest przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną jest wysokość jednego z trój-



kątów, stanowiących rzut ściany bocznej np.  $A' C' D'$ , a przeciwprostokątną prawdziwa jego wysokość, równa wysokości trój-



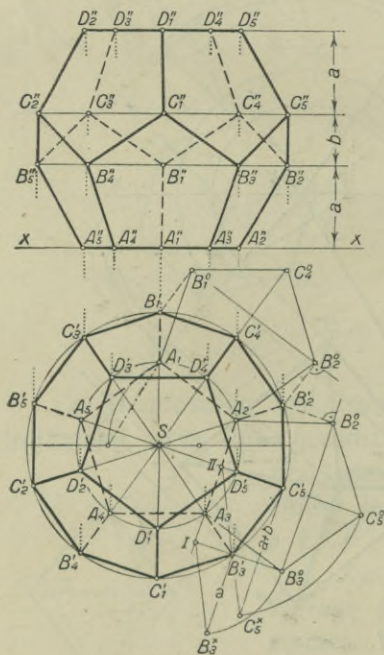
Rys. 267.

kąta  $A B C$ . Wykreśliwszy trójkąt  $D' G D^0$ , otrzymamy szukaną wysokość  $w$ , równą odcinkowi  $D' D^0$ . Na Rys. 267. wykonaliśmy także kład rzutu ośmiościanu na płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ).

d) Dwunastościan ograniczony jest umiłowymi pięciokątami, których w każdym narożu schodzi się trzy (Rys. 268.).

Pięciokąt  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ , leżący na rzutni poziomej, niechaj stanowi podstawę dwunastościanu. Dwa dalsze pięciokąty  $A_1 A_2 B_1^0 C_1^0 B_2^0$  i  $A_2 A_3 B_3^0 C_5^0 B_2^0$  niechaj wyobrażają kład dwóch ścian naszego wielościanu, dokonany przez obrót około krawędzi  $A_1 A_2$  i  $A_2 A_3$ . Podnieśmy równocześnie oba te pięciokąty w ich właściwe położenie, to boki ich  $A_2 B_2^0$  zejdą się i utworzą krawędź dwunastościanu. Prostopadłe, wykreślone z punktów  $B_2^0$  do boków  $A_1 A_2$  i  $A_2 A_3$ , stanowiących osi obrotu, przetną się w punkcie  $B_2'$ , który połączony z  $A_2$

daje rzut krawędzi bocznej dwunastościanu. Koło zakreślone ze środka  $S$ , przez punkt  $B_2'$ , jest miejscem geometrycznym rzutów poziomych dziesięciu wierzchołków naroży dwunastościanu, których wyznaczenie tłómaczy dostatecznie Rys. 268. Pięciokąt  $D_1' D_2' D_3' D_4' D_5'$  jest rzutem poziomym ściany, zamykającej dwunastościan. —



Rys. 268.

Znając rzut poziomy  $B_3'$  i jego kład  $B_3^0$ , znajdziemy jego wysokość w sposób następujący: z punktu  $B_3'$  wykreślimy prostopadłą do boku  $A_2 A_3$ . Z punktu  $I$  zakreślimy łuk koła promieniem  $IB_3^0$ , aż do przecięcia się z prostopadłą, wyprowadzoną do  $IB_3^0$  w punkcie  $B_3''$ . Odcinek  $B_3' B_3'' = a$  jest wysokością punktu  $B_3$ , a także punktów  $B_1, B_2, B_4$  i  $B_5$ . Wysokość  $(a+b)$ , punktów oznaczonych literą  $C$ , równą odcinkowi  $C_5' C_5''$  znajdziemy w sposób analogiczny.

Wykreślimy jeszcze rzuty dwunastościanu umiarowego, gdy jego przekątna główna, a więc przechodząca przez środek i łącząca dwa przeciwległe wierzchołki, jest prostopadłą do

rzutni poziomej (Rys. 269). Płaszczyzny trzech pięciokątów, tworzących naroże o wierzchołku  $A$ , nachylone są do rzutni poziomej pod tym samym kątem. Wykreślimy kład tych trzech pięciokątów, przy zachowaniu wspólności wierzchołka  $A$ , a następnie podnieśmy je tak, ażeby pary sąsiednich krawędzi zeszły się. Osiami obrotów będą proste, przechodzące przez punkt  $A$  a równoległe do boków  $C_1^0 C_2^0$ ,  $C_3^0 C_4^0$  i  $C_5^0 C_6^0$ . Prosta wykreślona z punktu  $B_3^0$ , prostopadłe do  $m \parallel C_3^0 C_4^0$ , a więc prosta  $B_3^0 I$ , przetnie prostą, wykreśloną z drugiego punktu  $B_3^0$  prostopadłe do  $C_5^0 C_6^0$ , w punkcie  $B_3'$ , który jest rzutem wierzchołka  $B_3$ . Na płaszczyźnie poziomej, przechodzącej przez  $B_3$ , leżą jeszcze punkty  $B_1$  i  $B_2$ , których rzut poziomy leży na kole, zakreślonym z punktu  $A$ , jako środka,



promieniem  $\overline{AB_3'}$ . Wykreślmy ze środka obrotu  $I$  łuk koła, a z punktu  $B_3'$  poprowadźmy równoległą do  $m$ , to odcinek  $B_3' B_3^X = a$  jest wysokością punktów  $B_1, B_2$  i  $B_3$ . Podnieśmy punkt  $C_4^0$  około osi  $m$  o ten sam kąt, o jaki podniesiony jest punkt  $B_3^0$  (więc  $\parallel C_4^X \parallel I B_3^X$ ), to koło zakreślone z punktu  $A$  promieniem  $\overline{AC_1'}$  jest

miejszem geometrycznym rzutów poziomych punktów, oznaczonych literą  $C$ , a mających tę samą wysokość, równą odcinkowi  $C_4' C_4^X = (a + b)$ .

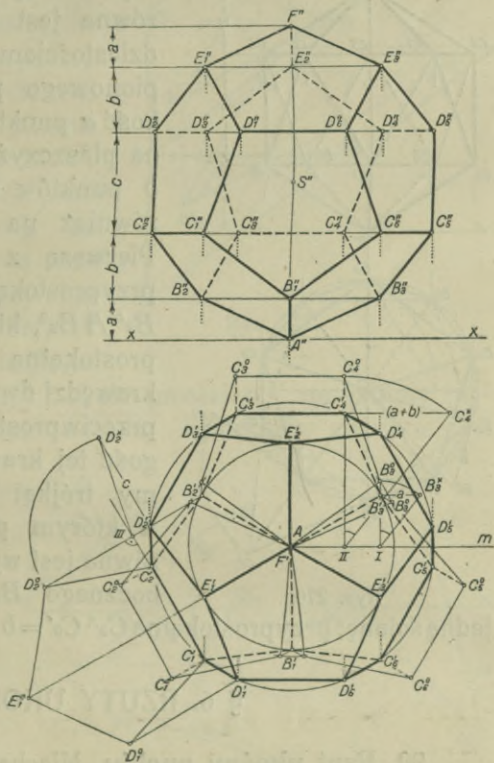
W ten sposób otrzymamy punkty  $C_1 (C_1' C_1'')$ ,

$C_2 (C_2' C_2'')$ , ...

$C_6 (C_6' C_6'')$ . Naprzeciw wierzchołka  $A$  leży wierzchołek  $F$  naroża, przystającego do naroża o wierzchołku  $A$ . Rzut poziomy jego krawędzi jest linią łamaną  $D_1' E_1' D_2' D_3' E_2' D_4' D_5' E_3' D_6' D_1'$  wraz

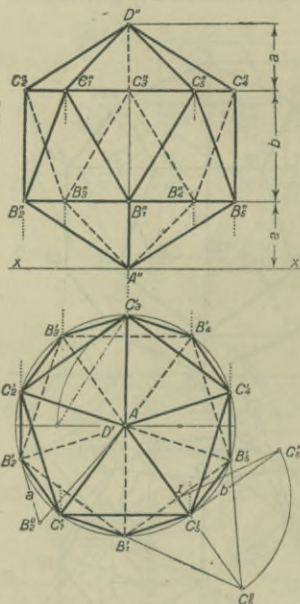
z prostymi  $F' E_1'$ ,  $F' E_2'$  i  $F' E_3'$ . Na boku  $C_1' C_2'$  wykreślony pięciokąt  $C_1' C_2' D_1^0 E_1^0 D_2^0$  uważajmy

za kład ściany  $C_1 C_2 D_1 E_1 D_2$  na płaszczyznę poziomą  $\pi$ , przechodzącą przez punkty  $C_1, C_2 \dots C_6$ , a więc leżącą w wysokości  $(a + b)$  nad rzutnią poziomą. Uważając prostą  $(C_1', C_2')$  za rzut poziomy osi obrotu i znając rzut poziomy  $D_2'$  punktu  $D_2$  po obrocie, otrzymamy odległość  $c$  punktu  $D_2$  od płaszczyzny  $\pi$ , równą odcinkowi  $D_2' D_2^X$ . Tym sposobem wyznaczone są wszystkie wielkości, potrzebne do wykreślenia obu rzutów dwunastościanu, którego długość krawędzi jest dana.



Rys. 269.

e) Dwudziestościan ograniczony jest równobocznymi trójkątami, z których pięć schodzi się w każdym narożu. Wykreślenie rzutu poziomego nie następuje żadnych trudności. Rys. 270. Łączy rzecz w sposób wystarczający. Długość boku pięciokąta  $B_1' B_2' \dots B_5'$ , czy też pięciokąta  $C_1' C_2' \dots C_5'$ , równa jest krawędzi bocznej dwudziestościanu. Dla otrzymania rzutu pionowego poznać musimy wysokość  $a$  punktów  $B_1, B_2, \dots B_5$ , leżących na płaszczyźnie poziomej i wysokość  $b$  punktów  $C_1, C_2, \dots C_5$ , leżących również na płaszczyźnie poziomej. Pierwszą z nich otrzymamy jako przyprostokątną  $B_2' A B_2^0$  trójkąta  $B_2' A B_2^0$ , którego drugą znaną przyprostokątną  $B_2' A$  jest rzut poziomy krawędzi dwudziestościanu, a którego przeciwprostokątną  $A B_2^0$  jest długość tej krawędzi. Z kolei wykreślimy trójkąt prostokątny  $C_5' C_5^X I$ , w którym przeciwprostokątną  $C_5^X I$  równa jest wysokości trójkąta równobocznego  $B_1' B_5' C_5^0$ , stanowiącego jedną ścianę; przyprostokątną  $C_5^X C_5' = b$  jest szukaną wysokością.



Rys. 270.

Wysokość boku pięciokąta  $B_1' B_2' \dots B_5'$ , czy też pięciokąta  $C_1' C_2' \dots C_5'$ , równa jest krawędzi bocznej dwudziestościanu. Dla otrzymania rzutu pionowego poznać musimy wysokość  $a$  punktów  $B_1, B_2, \dots B_5$ , leżących na płaszczyźnie poziomej i wysokość  $b$  punktów  $C_1, C_2, \dots C_5$ , leżących również na płaszczyźnie poziomej. Pierwszą z nich otrzymamy jako przyprostokątną  $B_2' A B_2^0$  trójkąta  $B_2' A B_2^0$ , którego drugą znaną przyprostokątną  $B_2' A$  jest rzut poziomy krawędzi dwudziestościanu, a którego przeciwprostokątną  $A B_2^0$  jest długość tej krawędzi. Z kolei wykreślimy trójkąt prostokątny  $C_5' C_5^X I$ , w którym przeciwprostokątną  $C_5^X I$  równa jest wysokości trójkąta równobocznego  $B_1' B_5' C_5^0$ , stanowiącego jedną ścianę; przyprostokątną  $C_5^X C_5' = b$  jest szukaną wysokością.

## § 6. RZUTY UKOŚNE

90. Rzut ukośny punktu. Niechaj dowolny punkt  $A$  wyznaczony jest, w odniesieniu do przyjętych rzutni  $\pi_1$  i  $\pi_2$ , rzutem poziomym  $A'$  i rzutem pionowym  $A''$  (Rys. 271.). Rzućmy punkty  $A$  i  $A'$ , w przyjętym kierunku  $p$ , na rzutnię pionową  $\pi_2$ . Otrzymany punkt  $A_u$  jest rzutem ukośnym punktu  $A$ , a punkt  $A'_u$  rzutem ukośnym rzutu poziomego tego punktu. Punkt  $A'_u$  nazywać będziemy rzutem ukośnym poziomym. Położenie promienia  $p$ , rzucającego punkt  $A$ , jak i promienia  $p_1 \parallel p$ , a rzucającego punkt  $A'$  na płaszczyznę pionową  $\pi_2$ , wyznaczone jest kątem  $\alpha$ , jaki promienie te zawierają z płaszczyzną rzutów ukośnych  $\pi_2$  i kątem  $\varphi$ , jaki rzut pionowy  $p''$ , promienia  $p$ , zawiera z kierunkiem osi rzutów  $x$ .



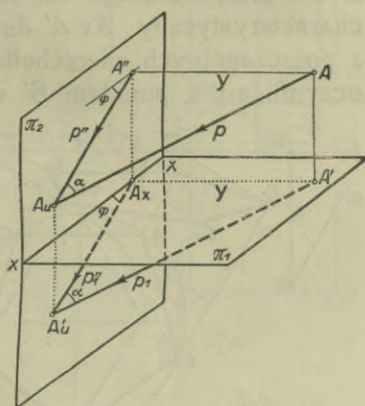
Znając oba te kąty wyznaczmy z łatwością rzut ukośny i rzut ukośny poziomy dowolnego punktu, którego rzuty prostokątne na dwie płaszczyzny są dane.

W istocie bowiem, wykreśliwszy przez punkt  $A_x$  (Rys. 272 a.) promień  $p_1''$ , zawierający z osią rzutów  $x$  dany  $\neq \varphi$ , a następnie odmierzywszy na prostopadłej poprowadzonej w punkcie  $A_x$  do  $p_1''$  „głębokość“  $y$  punktu  $A$  ( $A' A''$ ), otrzymamy punkt  $A_0'$ . Wykreślimy z punktu  $A_0'$ , jako wierzchołka, kąt  $(90 - \alpha)$ , to otrzymamy punkt  $A_{u'}$  a następnie punkt  $A_u$ , leżący na promieniu  $p'' \parallel p_1''$ . Trójkąt  $A_x A_{u'} A_0'$  jest kładem trójkąta

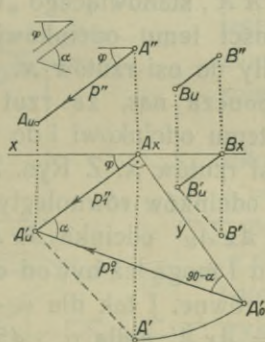
$A_x A_{u'} A'$  (patrz Rys. 271.) około prostej  $p_1''$  na rzutnię pionową, przy czem kierunek  $A_0' A_{u'}$  opatrzony strzałką jest kładem kierunku rzutu ukośnego, a kierunek  $A_x A_{u'}$ , podobnie jak  $A'' A_u$ , rzutem pionowym kierunku rzutu ukośnego.

W Rys. 272 b. wyznaczyliśmy rzut ukośny poziomy punktu  $A$  ( $A' A''$ ) dla  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ , przy czem kierunek rzutów jest przeciwny do poprzednio przyjętego.

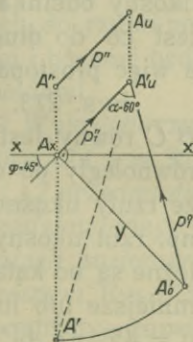
Połączmy w Rys. 272 a. lub 272 b. punkt  $A'$  z  $A_{u'}$ , to trójkąt  $A' A_{u'} A_x$  jest charakterystyczny dla określonego przez się rzutu ukośnego. W istocie, znając ten trójkąt znajdziemy rzut ukośny i rzut ukośny poziomy dowolnego punktu  $B$  ( $B' B''$ ) (Rys. 272 a.) jeśli przez punkt  $B_x$  poprowadzimy równoległą do  $A_x A_{u'}$ , przez punkt  $B'$  równoległą do  $A' A_{u'}$ , a otrzymany punkt  $B_{u'}$  odniesiemy na prostą, wykreśloną przez punkt  $B''$  równoległą do  $B_x B_{u'}$ .



Rys. 271.

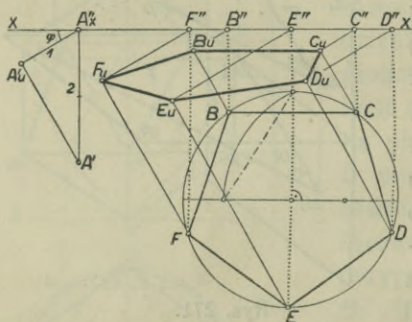


Rys. 272 a.



Rys. 272 b.

91. O stosunkach skróceń. Niechaj zadaniem naszym będzie wykreślenie rzutu ukośnego pięciokąta umiadowego  $BCDEF$ , leżącego na rzutni poziomej, przyczem trójkąt charakterystyczny  $A_x A' A_u'$  jest dany (Rys. 273.). Z każdym z poszczególnych wierzchołków pięciokąta postąpimy tak, jak uczyniliśmy z punktem  $B'$  w Rys. 272 a., szukając jego rzutu



Rys. 273.

ukośnego poziomego. Z punktów więc  $B, C, D, E$  i  $F$  wykreślimy równoległe do boku  $A' A_u'$  trójkąta charakterystycznego, a z punktów  $B', C', D', E'$  i  $F'$  równoległe do boku  $A_x A_u'$  tego trójkąta. Otrzymany pięciokąt  $A_u B_u C_u D_u E_u F_u$  jest rzutem ukośnym danego pięciokąta, (leżącego na rzutni poziomej) na rzutnię pionową.

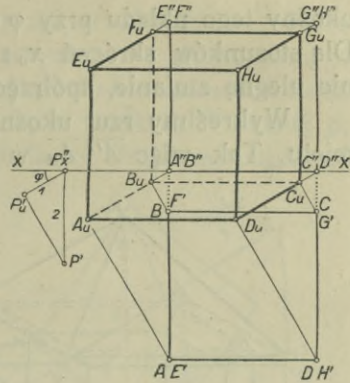
Z Rys. 271. widzimy wprost, że  $A_u A_u' = A A'$  czyli, że rzut ukośny odcinka  $A A'$ , stanowiącego „wysokość“ punktu, równy jest co do długości temu odcinkowi i do niego równoległy, a więc prostopadły do osi rzutów  $x$ .

Rys. 273. poucza nas, że rzut ukośny  $B_u C_u$  odcinka  $B C$  równy jest temu odcinkowi i do niego równoległy, a więc równoległy do osi rzutów  $x$ . Z Rys. 272. i 273. widoczne jest, że rzuty ukośne odcinków równoległych do osi rzutów  $y$ , więc np. rzut ukośny  $A_x A_u'$  odcinka  $A_x A'$  =  $y$  w Rys. 272., zależne są od kąta  $\alpha$  i mogą też być od danych odcinków większe, mniejsze lub im równe. I tak dla  $\alpha < 45^\circ$   $A_x A_u' > A_x A'$ , dla  $\alpha = 45^\circ$   $A_x A_u' = A_x A'$ , a dla  $\alpha > 45^\circ$   $A_x A_u' < A_x A'$ , a więc: rzuty ukośne odcinków, prostopadłych do rzutni poziomej i równoległych do osi  $x$ , są równe tym odcinkom i do nich równoległe; rzuty ukośne odcinków prostopadłych do rzutni pionowej doznają wydłużenia, skrócenia lub są tym odcinkom równe, zależnie od tego, czy kąt nachylenia  $\alpha$  promieni rzutów do płaszczyzny rzutów jest mniejszy, większy lub równy  $45^\circ$ . Kierunki rzutów odcinków prostopadłych do rzutni pionowej są równoległe do przyjętego kierunku, tworzącego z osią rzutów  $x$  kąt  $\varphi$ . Oznaczmy stosunek  $A_x A_u' : A_x A_0' = \lambda$  (Rys. 272 a.), to zazwyczaj przyjmujemy  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$  albo



$\lambda = \frac{1}{3}$ , a stosunek ten nosi nazwę stosunku skrócenia. Kąt  $\varphi$  obieramy  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  lub  $60^\circ$ .

92. Zadania. 1. Dane są rzuty prostokątne sześcianu, stojącego na rzutni poziomej; wykreślić jego rzut ukośny dla  $\varphi = 30^\circ$  i  $\lambda = 1:2$  (Rys. 274.). Wyznaczymy rzut ukośny  $A_u B_u C_u D_u$  podstawy sześcianu, a na prostopadłych wykreślonych w wierzchołkach otrzymanego romboidu odmierzymy długość krawędzi bocznej sześcianu. Ściany równoległe do rzutni pionowej pozostaną



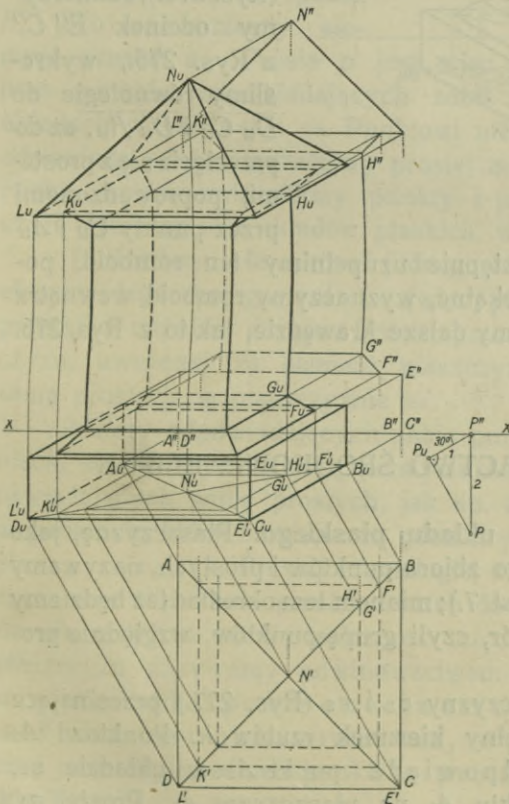
Rys. 274.

kwadratami nie zmienionymi co do długości boku, rzuty ukośne ścian równoległych do rzutni poziomej i bocznej będą romboidami.

2. Wykreślić rzut ukośny dla  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\lambda = 1:2$  przedmiotu, przedstawionego w rzutach poziomym i pionowym. Rys. 275. Wykonaliśmy zupełnie w ten sam sposób, jak poprzedni.

Z rzutów prostokątnych otrzymamy rzut ukośny także w inny sposób. Przyjmijmy mianowicie w punkcie  $A''$  (Rys. 275.)

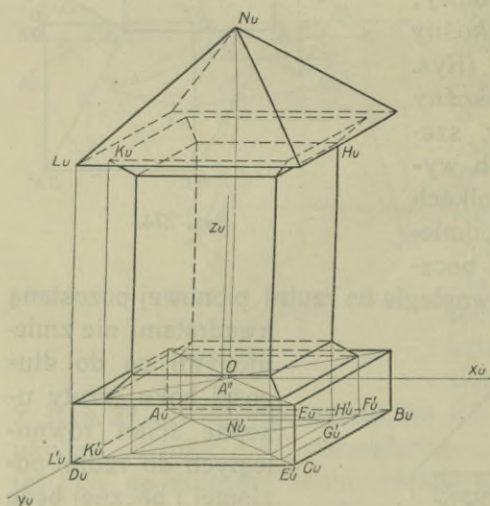
początek układu trzech wzajemnie do siebie prostopadłych osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Rzut



Rys. 275.

ukośny tego układu przy  $\varphi = 30^\circ$  będzie  $x_u, y_u, z_u$ , (Rys. 276.). Dla stosunków skróceń  $x_u : y_u : z_u = 1 : \frac{1}{2} : 1$ , spórzędne  $x$  i  $z$  nie ulegną zmianie, spórzędne  $y$  skrócą się do połowy.

Wykreślmy rzut ukośny rzutu poziomego naszego przedmiotu. Tak więc  $A'' A_u$  w Rys. 276. równe jest połowie od-



Rys. 276.

równoległe do  $z_u$ . Następnie uzupełnimy ten romboid, poprowadzimy w nim przekątne, wyznaczymy romboid wewnątrz niego, poczem wykreślmy dalsze krawędzie, jak to z Rys. 276. z łatwością odczytamy.

cinka  $A'' A$  z Rys. 275. Odcinek  $A_u D_u$  (Rys. 276.) równy jest połowie długości odcinka  $AD$  w Rys. 275.  $A_u B_u$  (Rys. 276.) równe jest  $AB$  w Rys. 275. Na prostej, wykreślonej w punkcie  $D_u$  równoległe do  $z_u$  (Rys. 276.), odmierzymy odcinek  $E'' C''$  z Rys. 275., wykreślmy równoległe do  $D_u C_u$  i  $D_u A_u$ , aż do przecięcia się z prostymi, poprowadzonymi przez punkty  $C_u$  i  $A_u$

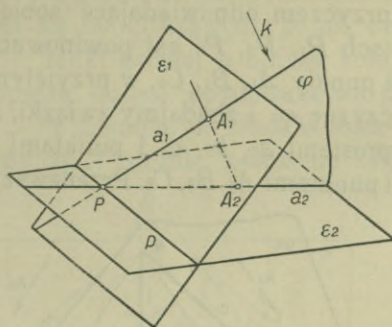
## § 7. POWINOWACTWO ŚRODKOWE. ELIPSA

**93. Rzut ukośny układu płaskiego.** Płaszczyznę, jako pojęcie nieograniczonego zbioru punktów i prostych, nazywamy **układem płaskim** (ust. 7.); mianem tem określać też będziemy często ograniczony zbiór, czyli grupę punktów, względnie prostych, na płaszczyźnie.

Przyjmijmy płaszczyzny  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  (Rys. 277.) przecinające się w prostej  $p$  i dowolny kierunek rzutów  $k$ . Punkтови  $A_1$  na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$  odpowiada punkt  $A_2$  w układzie  $\varepsilon_2$ , jako rzut ukośny punktu  $A_1$  na płaszczyznę  $\varepsilon_2$ . Prostej  $a_1$ ,



należącej do układu  $\varepsilon_1$ , odpowie prosta w układzie  $\varepsilon_2$ , którą otrzymamy jako przecięcie się płaszczyzny  $\varepsilon_2$  z płaszczyzną  $\varphi$ , przechodzącą przez prostą  $a_1$  równoległe do kierunku rzutów  $k$ . Płaszczyzny  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\varphi$  przecinają się w punkcie  $P$  prostej  $p$ , przez który przechodzi szukana prosta  $a_2$ . Każdemu punktowi prostej  $a_1$  odpowiada jeden punkt prostej  $a_2$  i odwrotnie, każdemu punktowi prostej  $a_2$  odpowiada jeden jedyny punkt prostej  $a_1$ , przyczem para odpowiednich punktów leży zawsze na promieniu rzutów, równoległym do przyjętego kierunku  $k$ . Punktowi  $P$ , uważanemu za element prostej  $a_1$ , odpowiada tenże sam punkt  $P$ , jako równoczesny element prostej  $a_2$ . Prosta  $p$  jest więc miejscem geometrycznym punktów odpowiadających sobie równocześnie w obu układach płaskich  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . Punktowi niewłaściwemu prostej  $a_1$  odpowiada punkt niewłaściwy prostej  $a_2$ . Przez przyjęcie kierunku rzutów związaliśmy punkty i proste obu płaszczyzn, czyli elementy obu układów płaskich, w ten sposób, że:

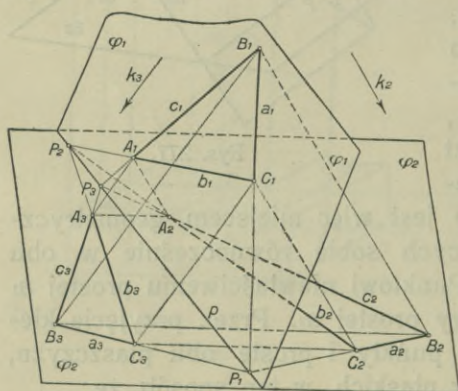


Rys. 277.

1. Każdemu elementowi jednego układu odpowiada jeden element tego samego rodzaju (więc punktowi punkt, prostej prosta) w układzie drugim. Prostej przecięcia się  $p$  obu płaszczyzn, uważanej za element płaszczyzny  $\varepsilon_1$ , odpowiada też sama prosta  $p$  na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$ .

2. Pary odpowiadających sobie punktów leżą na promieniach, stanowiących wiązkę prostych równoległych, a pary odpowiadających sobie prostych, jak np.  $a_1$  i  $a_2$ , przecinają się w punktach, których miejscem geometrycznym jest krawędź  $p$  płaszczyzn  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . Prostej równoległej do krawędzi  $p$  na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$  odpowiada prosta również do  $p$  równoległa, a leżąca na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$ . Tę zależność między elementami dwóch płaszczyzn nazywamy powinowactwem w położeniu środkowym, albo krótko: powinowactwem środkowym. Prosta  $p$  nosi miano osi powinowactwa, a promienie, na których leżą pary odpowiednich punktów, promieniami powinowactwa.

**94. Powinowactwo dwóch układów płaskich złączonych na jednej płaszczyźnie.** Przyjmijmy dwa układy płaskie  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  środkowo powinowate o kierunku  $k_2$  (Rys. 278.). Prosty  $a_1, b_1, c_1$  jakoteż punktom  $A_1, B_1, C_1$  na płaszczyźnie  $\varphi_1$ , odpowiadają na płaszczyźnie  $\varphi_2$  proste  $a_2, b_2, c_2$  i punkty  $A_2, B_2, C_2$ , przyczem odpowiadające sobie proste przecinają się w punktach  $P_1, P_2, P_3$  osi powinowactwa  $p$ . Rzućmy proste  $a_1, b_1, c_1$  i punkty  $A_1, B_1, C_1$ , w przyjętym nowym kierunku  $k_3$ , na płaszczyznę  $\varphi_2$  i zbadajmy związki, zachodzące między otrzymanymi prostymi  $a_3, b_3, c_3$  i punktami  $A_3, B_3, C_3$ , a prostymi  $a_2, b_2, c_2$  i punktami  $A_2, B_2, C_2$ . Przedewszystkiem widzimy, że: 1) każdemu



Rys. 278.

punktowi  $A_2, B_2 \dots$  odpowiada jednoznacznie punkt  $A_3, B_3 \dots$ ; 2) każdej prostej jak np.  $a_2 \dots$  odpowiada jedyna prosta  $a_3 \dots$ , przyczem obie posiadają punkt wspólny  $P_1$  na prostej  $p$ . Z łatwością zauważymy, że płaszczyzny  $A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3, C_1 C_2 C_3$  są do siebie równoległe, że zatem: 3) punkty odpowiednie, jak  $A_2$  i  $A_3, B_2$  i  $B_3, C_2$  i  $C_3$ , leżą na prostych do siebie

równoległych. Związki wymienione pod 1) 2) i 3) znamionują, jak wiemy z ustępu poprzedniego, powinowactwo środkowe, a zatem; między układem płaskim  $\varphi_2$  a rzutem układu  $\varphi_1$  w kierunku  $k_3$  na płaszczyznę  $\varphi_2$ , zachodzi powinowactwo środkowe. Oznaczmy rzut układu  $\varphi_1$  w kierunku  $k_3$  na płaszczyznę  $\varphi_2$  symbolem  $\varphi_3$ , to na podstawie powyższych wywodów stwierdzamy między układami  $\varphi_1, \varphi_2$  i  $\varphi_3$  istnienie następujących związków:

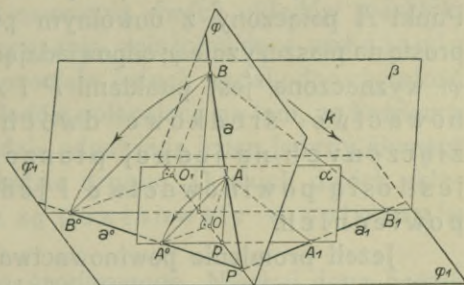
- a) układ  $\varphi_1$  i układ  $\varphi_2$  są powinowate,
- b) układ  $\varphi_1$  i układ  $\varphi_3$  są powinowate,
- c) układ  $\varphi_2$  i układ  $\varphi_3$  są powinowate.

Widzimy stąd, że: dwa układy płaskie, powinowate z trzecim, są między sobą powinowate. O układach takich jak  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$ , leżących na jednej płaszczyźnie, mówimy, że są złączone na jednej płaszczyźnie, w odróżnieniu od



dwóch układów płaskich, leżących na dwóch różnych płaszczyznach.

Weźmy pod uwagę (Rys. 279.) płaszczyzny  $\varphi$  i  $\varphi_1$ , które niech będą środkowo powinowate; kierunkiem powinowactwa niech będzie kierunek  $k$ , a osią krawędź  $p$  obu płaszczyzn. Prostej  $a$  na płaszczyźnie  $\varphi$  odpowie prosta  $a_1$  na płaszczyźnie  $\varphi_1$ . Niechaj płaszczyzna  $\varphi$  obróci się około krawędzi  $p$  tak, aż padnie na płaszczyznę  $\varphi_1$ ; każdy punkt prostej  $a$  opisze koło, którego płaszczyzna jest prostopadłą do osi powinowactwa  $p$  i przecina ją w punktach  $O, O_1 \dots$ . Po dokonaniu kładzie płaszczyzny  $\varphi$  na płaszczyznę  $\varphi_1$ , punkt  $A$  zajmie położenie  $A_0$ , punkt  $B$  położenie  $B_0$ , zaś prosta  $a$  położenie  $a_0$ . Rozważmy pytanie, czy między układami  $\varphi$  i  $\varphi_1$ , złączonymi zapomocą dokonanego obrotu na płaszczyźnie  $\varphi_1$ , zachodzi związek powinowactwa środkowego. Punkty  $A, A_1, A_0$  wyznaczają płaszczyznę, którą oznaczmy literą  $\alpha$ , punkty



Rys. 279.

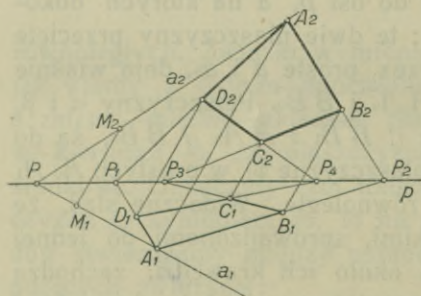
$B, B_1, B_0$  leżą na płaszczyźnie  $\beta$ . Proste  $\overline{AA_0}$  i  $\overline{BB_0}$  są równoległe, gdyż obie leżą na równoległych płaszczyznach  $AA_0O$  i  $BB_0O_1$ , które są prostopadłe do osi  $p$ , a na których dokonuje się obrót punktów  $A$  i  $B$ ; te dwie płaszczyzny przecięte płaszczyzną poprowadzoną przez proste  $a$  i  $a_0$ , dają właśnie owe dwie proste równoległe  $\overline{AA_0}$  i  $\overline{BB_0}$ . Płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$ , jako przechodzące przez  $\overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1}$  i  $\overline{AA_0} \parallel \overline{BB_0}$ , są do siebie równoległe i przecinają płaszczyznę  $\varphi_1$  w prostych  $\overline{A_0A_1}$  i  $\overline{B_0B_1}$ , które są wzajemnie równoległe. Widoczne stąd, że między dwoma układami płaskimi, sprowadzonymi do jednej płaszczyzny zapomocą obrotu około ich krawędzi, zachodzą te same związki, które zauważyliśmy między elementami układów  $\varphi$  i  $\varphi_1$  w położeniu przed dokonaniem obrotu. Istotnie bowiem punktom  $A_1, B_1 \dots$  jednego układu odpowiadają jednoznacznie punkty  $A_0, B_0 \dots$  w układzie drugim, przyczem punkty odpowiednie, więc np.  $A_1$  i  $A_0, B_1$  i  $B_0 \dots$ , leżą na promieniach do siebie równoległych; każdej prostej np.  $a_1$ , będącej elementem jednego układu, odpowiada jedna prosta, więc  $a_0$  w układzie

drugim, przyczem obie przecinają się w punkcie, leżącym na osi powinowactwa. Punktem niewłaściwym jednego układu odpowiadają punkty niewłaściwe w układzie drugim.

Z rozważań ustępu tego wynika, że skoro raz dane są dwa układy płaskie i kierunek rzutów (powinowactwa), to stworzona tym sposobem zależność między elementami obu układów pozostaje niezmienną dla każdego położenia płaszczyzn, obracających się około wspólnej prostej  $p$ , a także i wówczas, gdy oba te układy złączą się skutkiem rzutu lub obrotu na jednej płaszczyźnie. Gdy dana jest płaszczyzna  $\varphi_1$ , to płaszczyznę  $\varphi$  wyznacza prosta  $p$  i jeden dowolny jej punkt np.  $A$ . Punkt  $A$  połączony z dowolnym punktem  $P$  prostej  $p$  daje prostą na płaszczyźnie  $\varphi$ ; odpowiadająca jej prosta na płaszczyźnie  $\varphi_1$  wyznaczona jest punktami  $P$  i  $A_1$ . Stąd także powinowactwo środkowe dwóch układów płaskich, złączonych na jednej płaszczyźnie, wyznaczone jest osią powinowactwa i jedną parą punktów odpowiednich.

Jeżeli promienie powinowactwa są prostopadłe do osi, to powinowactwo nazywamy prostokątnem, w odróżnieniu od ukośnego, gdzie promienie tworzą z osią kąt różny od prostego.

Niechaj dane będą dwa układy środkowo powinowate  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , złączone na płaszczyźnie rysunku, a wyznaczone osią  $p$



Rys. 280.

i parą punktów odpowiednich  $M_1$  i  $M_2$  (Rys. 280.). W układzie  $\varphi_1$  dany jest czworokąt  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ; zadaniem naszym jest wyznaczyć czworokąt, odpowiadający w układzie  $\varphi_2$  czworokątowi danemu. Prostej  $a_1$ , łączącej punkty  $A_1$  i  $M_1$ , odpowiada w układzie  $\varphi_2$  prosta  $a_2$ , przechodząca przez punkty  $P$  i  $M_2$ .

Rzućmy punkt  $A_1$  w kierunku powinowactwa  $\overline{M_1 M_2}$  na prostą  $a_2$ , to otrzymany punkt  $A_2$  jest powinowaty z punktem  $A_1$ . Prosta  $A_1 D_1$  przecina oś powinowactwa w punkcie  $P_1$ , przez który przejdzie prosta  $A_2 D_2$ , odpowiadająca pierwszej. W ten



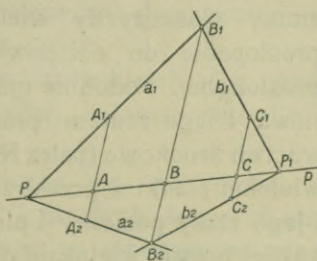
sposób przy pomocy punktów  $P_2$  i  $P_3$  względnie  $P_4$  otrzymamy dalsze wierzchołki szukanego czworokąta.

Dokonajmy teraz wzajemnego przesunięcia, połączonego z obrotem, tych dwóch czworokątów środkowo powinowatych. Punktowi  $M_1$  odpowie wówczas, podobnie jak przed wzajemnym przesunięciem, punkt  $M_2$ , punktom  $A_1, B_1, C_1 \dots$  odpowiedzą punkty  $A_2, B_2, C_2 \dots$  jednak odpowiednie punkty, jakimi są  $A_1$  i  $A_2, B_1$  i  $B_2, C_1$  i  $C_2 \dots$  nie będą leżały na promieniach do siebie równoległych a odpowiednie proste, więc  $a_1$  i  $a_2, A_1 D_1$  i  $A_2 D_2, A_1 B_1$  i  $A_2 B_2, B_1 C_1$  i  $B_2 C_2 \dots$ , nie będą przecinały się w punktach, leżących na jednej prostej. Zapomocą wzajemnego, dowolnego przesunięcia dwóch układów płaskich, złączonych na jednej płaszczyźnie, zniszczyliśmy położenie środkowe tych układów, pozostała jednak nadal odpowiedniość między elementami obu układów polegająca na tem, że każdemu elementowi w jednym układzie odpowiada jeden jedyny element tego samego rodzaju w układzie drugim. O takich dwóch układach płaskich mówimy, że są powinowate w położeniu ogólnem albo dowolnem.

*Cecha powinowactwa środkowego.* Niechaj dana będzie oś powinowactwa  $p$  (Rys. 281.) i para punktów odpowiednich  $A_1$  i  $A_2$  w dwóch układach powinowatych, złączonych na płaszczyźnie rysunku. Prostej  $a_1$ , przecinającej oś  $p$  w punkcie  $P$ , odpowiada w drugim układzie prosta  $a_2$ , przechodząca również przez punkt  $P$ . Punktowi  $B_1$ , przyjętemu na prostej  $a_1$ , odpowie punkt  $B_2$  na prostej  $a_2$ , który otrzymamy, kreśląc przez  $B_1$  promień powinowactwa, równoległy do kierunku  $A_1 A_2$ . Podobnie prostej  $b_1$  odpowie prosta  $b_2$ , przechodząca przez punkty  $P_1$  i  $B_2$ , a punktowi  $C_1$  punkt  $C_2$ . Z Rys. 281. czytamy:

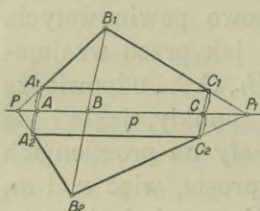
$$\frac{A A_1}{A A_2} = \frac{B B_1}{B B_2} = \frac{C C_1}{C C_2} = \text{constans} = \Delta$$

co oznacza, że gdy dwa układy płaskie są środkowo powinowate, to stosunek odcinków, ograniczonych punktami odpowiednimi i punktem leżącym na osi, dla każdej pary punktów, jest stały. Wykładnik  $\Delta$  tego stosunku charakteryzuje powinowactwo środkowe i zwie się jego *cechą*.

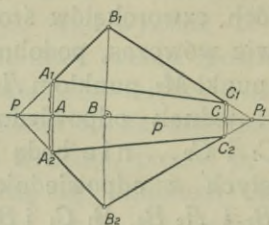


Rys. 281.

Jeżeli jedna para odcinków np.  $\overline{AA_1}$  i  $\overline{AA_2}$  (Rys. 282a.) jest równa, to wówczas wszystkie pary są równe, a powinowactwo nosi nazwę symetrii osiowej.



Rys. 282 a.



Rys. 282 b.

W szczególnym przypadku, gdy promienie powinowactwa stanowiącego symetrię, są prostopadłe do osi (Rys. 282 b.), to symetria osiowa nosi nazwę symetrii prostokątnej.

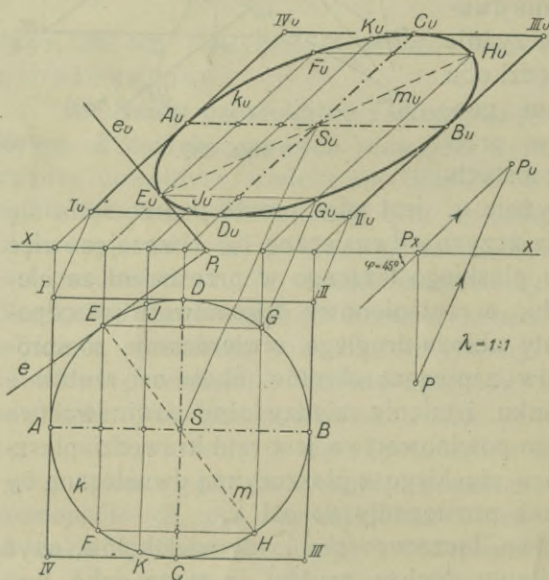
**95. Rzuty prostokątne i ukośne a powinowactwo środkowe.** Z dotychczasowych rozważań wynika bezpośrednio, że między dowolnym wielokątem płaskim a jego rzutem poziomym, tak samo, jak między tym wielokątem a jego rzutem pionowym, zachodzi powinowactwo środkowe, którego kierunek jest kierunkiem rzutów, a osią ślad poziomy, względnie pionowy płaszczyzny tego wielokąta. Przez wykonanie kładu płaszczyzny wielokąta na rzutnię poziomą, otrzymamy na niej dwa układy środkowo powinowate, którymi będą ów kład i rzut poziomy wielokąta. Ośią powinowactwa, a więc prostą, na której leżeć będą punkty przecięcia się odpowiednich boków, jest ślad poziomy płaszczyzny wielokąta; promienie powinowactwa są prostopadłe do osi powinowactwa, które tym sposobem jest prostokątne. Podobnie między kładem wielokąta na rzutnię pionową i jego rzutem pionowym zachodzi prostokątne powinowactwo środkowe (patrz Rys. 232b.). Weźmy pod uwagę dowolny wielokąt płaski w przestrzeni, np. czworokąt  $ABCD$  (Rys. 283.) i jego rzuty poziomy i pionowy. Każdemu punktowi, względnie każdej prostej wielokąta odpowiada jeden punkt, względnie jedna prosta na rzutni poziomej i jeden punkt, względnie prosta na rzutni pionowej. Czworokąt  $ABCD$  jest więc powinowaty ze swoim rzutem poziomym  $A'B'C'D'$  i rzutem pionowym  $A''B''C''D''$ . Ale wykazaliśmy w ustępie poprzednim, że dwa układy powinowate z trzecim są między sobą powinowate, wobec czego rzut poziomy wielokąta i jego rzut pionowy są powinowate. Sprowadźmy obie rzutnie zapomocą obrotu około





**96. Rzut ukośny koła. Elipsa.** Rzut ukośny koła, przyjętego na rzutni poziomej, na rzutnię pionową będzie linią nie posiadającą, podobnie jak koło, żadnych punktów niewłaściwych, czyli t. zw. linią zamkniętą, gdyż rzuty ukośne punktów właściwych są punktami właściwymi, a koło punktów niewłaściwych nie posiada.

Opiszmy na kole  $k$  (Rys. 284.) kwadrat  $I III III IV$ , styczny doń w punktach  $A, B, C, D$  i znajźmy jego rzut ukośny  $I_u II_u III_u IV_u$ , to punkty  $A_u, B_u, C_u, D_u$  są punktami linii, będącej rzutem ukośnym koła. Wierzchołki rzutu ukośnego kwadratu  $E F G H$  wpisanego w koło, są dalszymi punktami rzutu



Rys. 284.

koła. Rzuty ukośne dalszych punktów koła otrzymamy w ten sposób, że obierać będziemy proste przecinające koło i szukać rzutów otrzymanych punktów przecięcia się. (Patrz Rys. 284. proste  $m, m_u$ , i punkty  $I, K$  i  $I_u, K_u$ ). Dostateczna ilość w ten sposób otrzymanych punktów, połączona linią ciągłą, daje rzut ukośny koła, leżącego na płaszczyźnie poziomej rzutów, na rzutnię pionową. Z konstrukcyi wynika, że otrzymana linia posiada następujące własności wspólne z kołem: 1) nie posiada żadnych punktów niewłaściwych, 2) dowolna prosta przecina ją w dwóch punktach i 3) z dowolnego punktu poprowadzić do niej można dwie styczne. Ale z ustępu poprzedniego wynika, że między kołem  $k$  a linią  $k_u$ , będącą jego rzutem ukośnym, zachodzi powinowactwo środkowe, którego osią jest oś  $x$ , a kierunkiem kierunku  $\overline{P P_u}$ . Linię  $k_u$  powinna być z kołem, a mającą z niem wymienione wyżej własności



wspólne, określamy mianem elipsy. Rzut ukośny koła jest więc elipsą.

Z Rys. 284. odczytamy wprost cały szereg dalszych własności elipsy. I tak: średnicom  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{EH}$  koła odpowiadają w elipsie cięciwy  $\overline{A_u B_u}$ ,  $\overline{C_u D_u}$ ,  $\overline{E_u H_u}$ , które jak z konstrukcyi wynika — podobnie jak u koła — połowią się. Cięciwy te, przechodzące przez punkt  $S_u$ , który jest rzutem ukośnym środka koła, nazywamy średnicami elipsy.

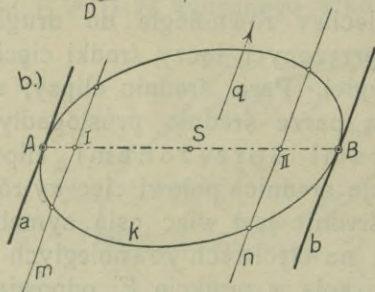
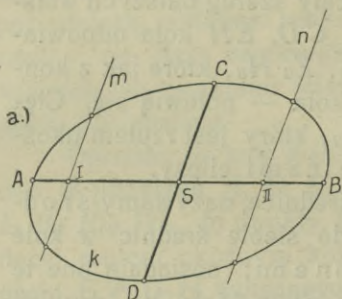
Punkt  $S_u$ , połowiący wszystkie średnice, nazywamy środkiem elipsy. Parę prostopadłych do siebie średnic w kole nazywamy średnicami sprzężonymi; posiadają one tę własność, że jedna połowi cięciwy równoległe do drugiej, czyli każda z dwóch średnic sprzężonych łączy środki cięciw, równoległych do średnicy drugiej. Parę średnic elipsy, np.  $\overline{A_u B_u}$  i  $\overline{C_u D_u}$ , odpowiadającą parze średnic prostopadłych w kole, nazywamy średnicami sprzężonymi elipsy. Jak to z Rys. 284. widzimy, jedna średnica połowi cięciwy równoległe do drugiej; każda ze średnic jest więc osią symetrii ukośnej dla punktów, leżących na cięciwach równoległych do drugiej średnicy. Stycznej  $e$  do koła w punkcie  $E$ , odpowiada styczna  $e_u$  do elipsy w punkcie  $E_u$ , przyczem obie przecinają się w punkcie  $P_1$  na osi powinowactwa  $x$ .

Stycznym do koła w punktach końcowych  $A$  i  $B$  średnicy, odpowiadają styczne do elipsy w punktach  $A_u, B_u$ , ograniczających średnicę  $\overline{A_u B_u}$ ; styczne te są  $\parallel$  do średnicy  $\overline{C_u D_u}$ , a więc do cięciw do tej średnicy, równoległych. Kwadratowi  $I II III IV$ , opisanemu na kole i stycznemu doń w punktach  $A, B, C, D$ , odpowiada równoległobok  $I_u II_u III_u IV_u$ , opisany na elipsie i styczny do niej w punktach  $A_u, B_u, C_u$  i  $D_u$ . Boki tego równoległoboku są równoległe do średnic sprzężonych  $\overline{A_u B_u}$  i  $\overline{C_u D_u}$  elipsy, a więc i do cięciw równoległych do tych średnic.

Na podstawie wykazanej własności średnic sprzężonych elipsy, a mianowicie tej, że jedna połowi cięciwy równoległe do drugiej, potrafimy rozwiązać następujące zadania:

- a) Dana jest elipsa, wyznaczyć średnicę i środek.
- b) Dana jest elipsa, wyznaczyć parę średnic sprzężonych.
- c) Do danej elipsy wykreślić styczne, równoległe do danego kierunku.

Ad a) Kreślimy dwie sieczne  $m \parallel n$  (Rys. 285 a.), prosta, łącząca środki  $I$  i  $II$  cięciw, jest średnicą, a środek  $S$ , odcinka  $\overline{AB}$ , środkiem elipsy.

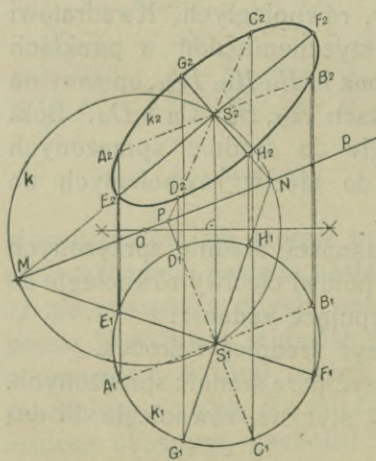


Rys. 285 a i b.

Ad b) Wyznamy średnicę  $\overline{AB}$ , a przez środek  $S$  elipsy poprowadzona równoległa  $\overline{CD}$  do siecznej  $m$ , jest średnicą, sprzężoną z  $\overline{AB}$  (Rys. 285 a.).

Ad c) Kreślimy sieczne  $m$  i  $n$  (Rys. 285 b.), równoległe do danego kierunku  $q$ , łączymy środki  $I$  i  $II$  cięciw i otrzymamy średnicę  $\overline{AB}$ . Proste  $a$  i  $b$ , wykreślone przez punkty  $A$  i  $B$  równoległe do kierunku  $q$ , rozwiązują zadanie. O średnicy  $\overline{AB}$  mówimy, że jest sprzężoną z kierunkiem  $q$ . Średnica sprzężona ze średnicą  $\overline{AB}$  przejdzie przez środek  $S$  równoległo do  $q$ .

Ponieważ koło posiada dowolną, nieograniczoną ilość par średnic sprzężonych, więc to samo odnosi się do elipsy, jako linii powinowatej z kołem.



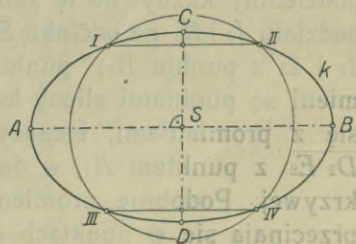
Rys. 286.

Przyjmijmy koło  $k_1$ , oś powinowactwa  $p$  (Rys. 286.) i punkt  $S_2$ , odpowiadający w układzie elipsy środkowi  $S_1$  koła. Parze średnic sprzężonych  $\overline{A_1 B_1}$  i  $\overline{C_1 D_1}$  w kole, odpowiada para średnic sprzężonych  $\overline{A_2 B_2}$  i  $\overline{C_2 D_2}$  w elipsie  $k_2$ . Przez punkty  $S_1$  i  $S_2$  poprowadzimy takie koło  $k$ , którego środek  $O$  leży na osi  $p$ , a punkty  $M$  i  $N$ , w których koło  $k$  przecina prostą  $p$ , połączmy z punktem  $S_1$ . Średnicom sprzężonym  $\overline{E_1 F_1}$  i  $\overline{G_1 H_1}$  w kole odpowiedzą średnice



sprzężone  $\overline{E_2 F_2}$  i  $\overline{G_2 H_2}$  w elipsie  $k_2$ . Ponieważ jednak kąty  $M S_1 N$  i  $M S_2 N$  wspierają się na średnicach, więc otrzymane średnice sprzężone elipsy są do siebie prostopadłe. Dowiedliśmy tym sposobem istnienia, między średnicami sprzężonymi elipsy, jednej pary średnic sprzężonych wzajemnie prostopadłych, którą określamy mianem osi elipsy. Punkty końcowe osi nazywamy wierzchołkami elipsy. Własności, które posiadają średnice sprzężone, są oczywiście także własnościami osi, a zatem: każda oś połowi cięciwy prostopadłe do niej, a więc równoległe do drugiej osi. Wskutek tego osi elipsy są osiami symetrii prostokątnej tej krzywej (Rys. 287.).

Jeżeli elipsa jest narysowana i jej środek  $S$  dany, to osi elipsy znajdziemy zapomocą koła, zakreślonego ze środka  $S$  i przecinającego krzywą w czterech punktach. Prosta, łącząca środki cięciw  $III$  i  $III IV$ , jest jedną, a prosta poprowadzona przez środek  $S$  równoległe do tych cięciw, drugą osią elipsy.



Rys. 287.

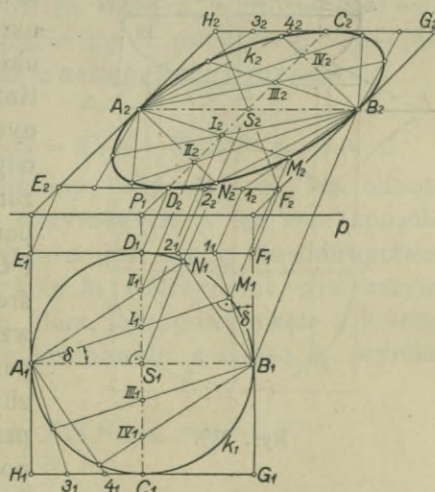
### 97. Konstrukcye elips z danych średnic sprzężonych, względnie osi.

a) Niechaj dane jest koło  $k_1$ , oś powinowactwa  $p$  i punkt  $S_2$ , odpowiadający środkowi koła w układzie elipsy  $k_2$ , czyli jej środek (Rys 288\*).

Opiszmy na kole kwadrat  $E_1 F_1 G_1 H_1$  styczny doń w punktach  $A_1, B_1, C_1$  i  $D_1$  i znajźmy odpowiadający mu równoległobok  $E_2 F_2 G_2 H_2$  w układzie elipsy. Odcinki  $\overline{A_2 B_2}$  i  $\overline{C_2 D_2}$

stanowią parę średnic sprzężonych elipsy  $k_2$ . Podzielmy promień koła  $\overline{D_1 S_1}$

np. na trzy równe części i na tyleż części bok  $\overline{D_1 F_1}$ . Połączmy



Rys. 288\*.

punkty  $h$  i  $h_1$ , pierwszy z punktem  $A_1$ , drugi z punktem  $B_1$ , to:

$$\triangle A_1 h S_1 \simeq \triangle B_1 h_1 F_1, \text{ a więc}$$

$$\sphericalangle h_1 B_1 F_1 = \sphericalangle h A_1 S_1 = \delta,$$

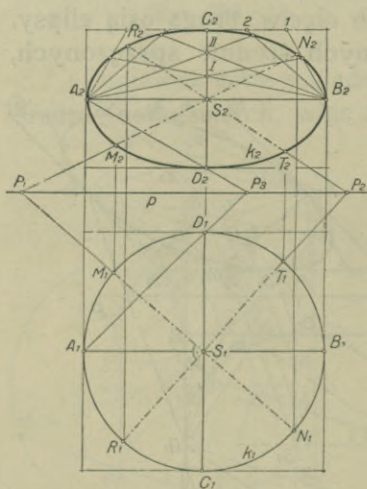
a ponieważ ramię  $B_1 F_1$  jest prostopadłe do  $A_1 S_1$ , więc i ramię  $h A_1$  musi być prostopadłe do ramienia  $h_1 B_1$ , a w takim razie punkt  $M_1$  musi być punktem koła, gdyż kąty, wspierające się na średnicy w kole, są proste. Ponieważ stosunki zachodzące między odcinkami prostych, po przeniesieniu ich w układ powinowaty, nie ulegają zmianie, więc poszczególne punkty elipsy znajdziemy w sposób następujący: Odcinki  $S_2 D_2$ ,  $D_2 E_2$  i  $D_2 F_2$  podzielimy każdy na tę samą ilość równych części; punkty podziału  $I_2$  i  $II_2$  na odcinku  $S_2 D_2$  rzucmy z punktu  $A_2$  a punkty  $I_2$  i  $2_2$  z punktu  $B_2$ ; punkty przecięcia się  $M_2$  i  $N_2$  tych promieni są punktami elipsy  $k_2$ . Promienie  $B_2 I_2$ ,  $B_2 II_2$  przecinają się z promieniami, łączącymi punkty podziału na odcinku  $D_2 E_2$  z punktem  $A_2$ , w dalszych dwóch punktach szukanej krzywej. Podobnie promienie  $A_2 J_2$ ,  $A_2 K_2$  i  $B_2 III_2$ ,  $B_2 IV_2$  przecinają się w punktach elipsy  $k_2$ .

b) Jeżeli powinowactwo środkowe dwóch układów płaskich, złączonych na płaszczyźnie rysunku, jest prostokątne,

t. zn. jeśli promienie powinowactwa są prostopadłe do osi, to oczywiście koło  $k_1$  w jednym układzie odpowie elipsa  $k_2$  w układzie drugim (Rys. 289.). Każdej parze średnic sprzężonych w kole  $k_1$ , np.  $M_1 N_1$ ,  $R_1 T_1$  odpowiada para średnic sprzężonych  $M_2 N_2$ ,  $R_2 T_2$  w elipsie  $k_2$ ; para średnic sprzężonych  $A_1 B_1$  i  $C_1 D_1$  w kole odpowie para średnic sprzężonych  $A_2 B_2$  i  $C_2 D_2$  wzajemnie prostopadłych, a więc para osi. Poszczególne punkty elipsy, znając jej osi, znajdziemy przez zastosowanie poznanej pod a) konstrukcji, o czym

zresztą poucza nas dostatecznie wyraźnie rysunek.

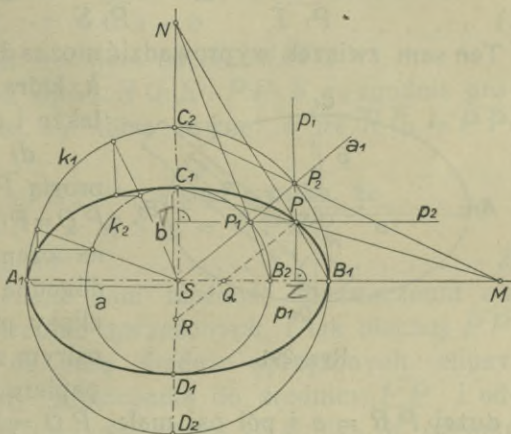
c) Zakreślmy na danych osiach  $A_1 B_1 = 2a$  i  $C_1 D_1 = 2b$  elipsy (Rys. 290.), jako na średnicach, koła  $k_1$  i  $k_2$ . Każde z nich



Rys. 289.



uważać można za powinowate z elipsą  $k$ , wyznaczoną parą osi  $\overline{A_1 B_1}$  i  $\overline{C_1 D_1}$ . Przy powinowactwie między kołem  $k_1$  a elipsą  $k$ , osią powinowactwa jest  $\overline{A_1 B_1}$ , a punkty  $C_1, C_2$  i  $D_1, D_2$  stanowią pary punktów odpowiednich; jeśli bierzemy pod uwagę powinowactwo, zachodzące między  $k_2$  i  $k$ , to osią jego jest prosta wyznaczona punktami  $C_1$  i  $D_1$ , a kierunkiem, kierunek do tej osi prostopadły. Punkty  $B_1$  i  $B_2$  stanowią więc w tym wypadku parę punktów odpowiednich.



Rys. 290.

Wykreślmy przez środek  $S$  dowolną prostą  $a_1$ , a przez otrzymane na kołach  $k_1$  i  $k_2$  punkty  $P_1$  i  $P_2$  proste  $p_1 \parallel \overline{C_1 D_1}$  i  $p_2 \parallel \overline{A_1 B_1}$ . Uzupełniając Rys. 290. oznaczmy punkt przecięcia się prostej  $p_1$  z osią  $\overline{A_1 B_1}$  literą  $Z$ , a prostą  $p_2$  z osią  $\overline{C_1 D_1}$  literą  $T$ . Punkt przecięcia się  $P$ , prostych  $p_1$  i  $p_2$ , jest punktem elipsy  $k$ , co wynika z następującego rozważania.

Z Rys. 290. czytamy:

$$\overline{P_2 Z} : \overline{P Z} = \overline{P_2 S} : \overline{P_1 S} = \overline{C_2 S} : \overline{C_1 S} = a : b = \Delta$$

Ponieważ promień  $a_1$  jest dowolny, więc związek ten odnosi się do wszystkich punktów, otrzymanych w ten sam sposób, jak punkt  $P$ . Stosunek  $a : b = \Delta$  jest cechą powinowactwa, łączącego wszystkie punkty koła  $k_2$  i otrzymane powyższym sposobem punkty krzywej  $k$ , która, jako powinowata z kołem, jest elipsą. Że i koło  $k_2$  jest powinowate z elipsą  $k$ , wynika z następującej relacji:

$$\Delta P P_1 P_2 \sim \Delta T S P_1, \text{ a zatem:}$$

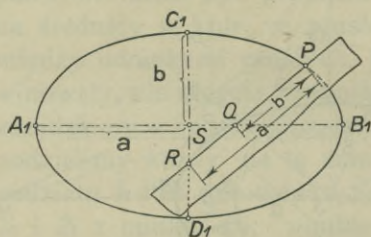
$$\frac{\overline{P P_1}}{\overline{P_1 T}} = \frac{\overline{P_1 P_2}}{\overline{P_1 S}}$$

a ponieważ, jak wiadomo, w każdej proporcji suma lub różnica wyrazów pierwszego stosunku ma się tak do wyrazu pierwszego

(lub drugiego), jak się ma suma lub różnica wyrazów drugiego stosunku do wyrazu trzeciego (lub czwartego) więc:

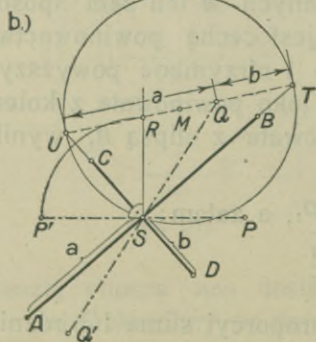
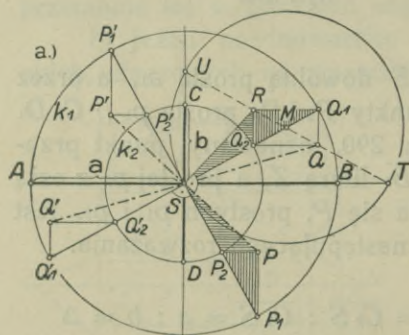
$$\frac{P P_1 + P_1 T}{P_1 T} = \frac{P_1 P_2 + P_1 S}{P_1 S} = \frac{B_1 S}{B_2 S} = \frac{a}{b} = \Delta$$

Ten sam związek wyprowadzić można dla każdego punktu elipsy  $k$ , która jest więc powinowatą także i z kołem  $k_2$ .



Rys. 291.

dużej  $PR = a$  i pół osi małej  $PQ = b$  (Rys. 291.); następnie



Rys. 292 a i b.

d) Wykreślmy (Rys. 290.) prostą  $PR \parallel P_2 S$  to:

$PQ = P_1 S = b$ , i  $PR = P_2 S = a$ , na czym oprzemy szczególnie dogodną konstrukcję punktów elipsy przy danych osiach. Na ostrym, nożem odciętym skrawku papieru, odmierzymy połowę osi dużej  $PR = a$  i pół osi małej  $PQ = b$  (Rys. 291.); następnie przykładamy ów skrawek papieru tak, aby punkt  $R$  leżał zawsze na osi małej, zaś punkt  $Q$  na osi dużej, to punkt  $P$ , który zaznaczymy ołówkiem, jest przy każdorazowym położeniu skrawka papieru punktem elipsy.

e) Na danych osiach  $2a$  i  $2b$  (Rys. 292 a.), jako na średnicach, zakreślmy koła  $k_1$  i  $k_2$ , a następnie obrawszy parę prostopadłych średnic  $P_1 P_1'$  i  $Q_1 Q_1'$  w kole większym, znajdziemy odpowiadającą im w układzie elipsy parę średnic sprzężonych  $P P'$  i  $Q Q'$ . Przez punkty  $Q_1$  i  $Q_2$  wykreślmy równoległe do osi elipsy i otrzymany punkt  $R$  połączmy z  $Q$ . Oznaczmy punkty przecięcia się prostej  $RQ$  z osiami elipsy, literami  $T$  i  $U$ , a środek prostokąta  $RQ_1Q_2$  literą  $M$  i połączmy punkty  $R$  i  $S$  prostą.



Z Rysunku czytamy:

$$\triangle R Q_1 Q_2 \simeq \triangle P P_1 P_2 \text{ a dalej}$$

$$\overline{S Q_2} = \overline{Q T} = b; \overline{U R} = \overline{S Q_2} = b; \overline{U Q} = \overline{S Q_1} = a,$$

więc:  $\overline{U T} = \overline{Q T} + \overline{U Q} = a + b \dots\dots\dots 1)$

przyczem punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $\overline{U T}$ .

Ponieważ ramiona kątów  $R Q_1 S$  i  $P P_1 S$  są zgodnie prostopadłe, więc kąty te są sobie równe, a że  $\overline{R Q_1} = \overline{P P_1}$  i  $\overline{S Q_1} = \overline{S P_1}$ , więc:

$$\triangle S R Q_1 \simeq \triangle S P P_1, \text{ a stąd wynika, że}$$

$$\overline{S R} = \overline{S P} \text{ i } \sphericalangle R S Q_1 = \sphericalangle P S P_1$$

a dalej, że:  $\overline{S R} \perp \overline{S P} \dots\dots\dots 2)$

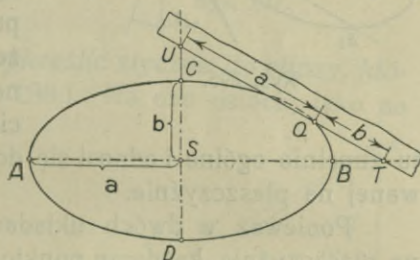
Relacje 1) i 2) dają nam możliwość wyznaczenia osi elipsy z danej pary średnic sprzężonych. I tak niechaj  $\overline{P P'}$  i  $\overline{Q Q'}$  (Rys. 292 b.) są parą średnic sprzężonych elipsy. W środku  $S$  wykreślmy prostopadłą do średnicy  $\overline{P P'}$  i odmierzymy  $\overline{S R} = \overline{S P}$ ;  $R$  łączymy z  $Q$ , a ze środka  $M$  odcinka  $\overline{R Q}$  zakreślmy koło, przechodzące przez środek  $S$ . Łączymy punkty  $T$  i  $U$  ze środkiem

$S$  i odmierzamy

$$\overline{U Q} = a = \overline{A S} = \overline{S B}$$

$$\text{ i } \overline{Q T} = b = \overline{C S} = \overline{S D}.$$

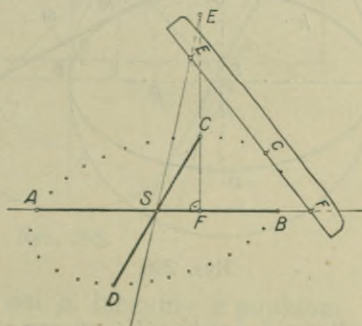
f) Ponieważ punkt  $Q$  (patrz Rys. 292 a.) jest dowolnym punktem elipsy, więc na podstawie równości 1) otrzymamy dowolną ilość punktów elipsy z danych osi



Rys. 293.

w sposób następujący: Na skrawku papieru (Rys. 293.) odmierzymy odcinek  $a + b$ , a następnie poruszać będziemy tym skrawkiem papieru tak, aby punkty końcowe  $U$  i  $T$  pozostawały przy każdorazowym położeniu na osiach, względnie ich przedłużeniach; punkty  $Q$  będą punktami elipsy.

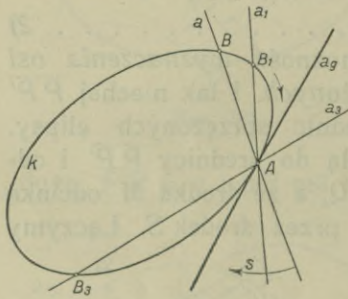
g) Zanotujemy tu jeszcze, jednak bez podania uzasadnienia, bardzo praktyczną konstrukcję punktów elipsy przy pomocy



Rys. 294.

skrawka papieru, z danej pary średnic sprzężonych  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  (Rys. 294.). Z punktu  $C$  kreślimy  $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ , odmierzmy  $\overline{CE} = \overline{AS}$  i łączymy  $E$  z  $S$ . Na skrawku papieru odmierzmy odcinek  $\overline{ECF}$ , a następnie ustawiać będziemy skrawek papieru tak, aby punkt  $E$  leżał zawsze na prostej  $ES$ , a punkt  $F$  na  $AB$ . Punkty  $C$  będą punktami elipsy.

**98. Styczne do elipsy.** Weźmy pod uwagę elipsę  $k$  i sieczną  $a$ , przecinającą ją w dwóch punktach  $A$  i  $B$  (Rys. 295.).



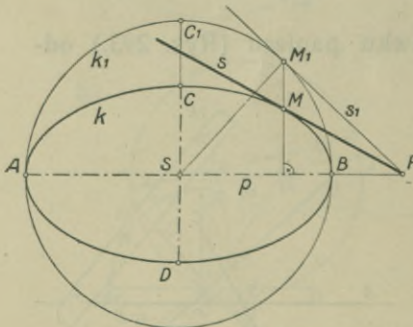
Rys. 295.

Przyjmijmy, że sieczna obraca się około punktu  $A$ , to wówczas punkt  $B$  porusza się po krzywej, zbliżając się do punktu stałego  $A$ . W pewnej chwili sieczna zajmie położenie graniczne  $a_g$ , po przekroczeniu którego, poruszający się punkt  $B$  znajdzie się po drugiej stronie punktu  $A$ . Owo graniczne położenie siecznej, określamy mianem stycznej krzywej w punkcie  $A$ . Określenie stycznej jest

tu zupełnie ogólne i odnosi się do każdej linii krzywej, narysowanej na płaszczyźnie.

Ponieważ w dwóch układach powinowatych złączonych na płaszczyźnie, każdemu punktowi odpowiada punkt, a prostej

prosta, więc siecznej koła, które spowinowacone jest z elipsą, odpowie sieczna tej elipsy, a stycznej do koła w pewnym punkcie, odpowiada styczna do elipsy, w punkcie odpowiadającym punktowi koła. Każda para odpowiadających sobie stycznych w dwóch układach powinowatych przetnie się oczywiście w punkcie na osi powinowactwa.



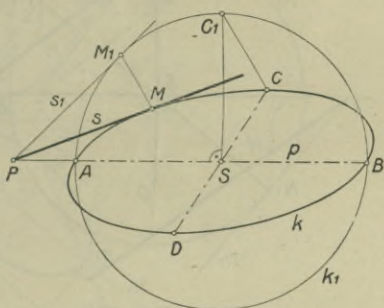
Rys. 296.

a) W danym punkcie  $M$  elipsy  $k$  wykreślić styczną. Jeżeli osi elipsy  $k$  są dane (Rys. 296.), to koło  $k_1$ , zakreślone na osi  $\overline{AB}$  ze środka  $S$ , jest



powinowate z elipsą. Kierunek tego powinowactwa jest prostopadły do  $\overline{AB}$ . Danemu punktowi  $M$  elipsy odpowiada na kole  $k_1$  punkt  $M_1$ ; styczna  $s_1$  w punkcie  $M_1$  do  $k_1$  przecina oś powinowactwa  $p$  w punkcie  $P$ . Prosta  $(P, M) \equiv s$  jest szukaną styczną w punkcie  $M$  do elipsy  $k$ .

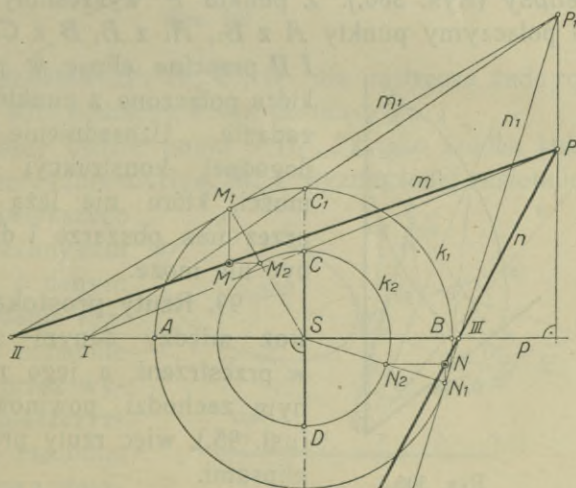
Jeżeli znane są średnice elipsy  $k$  (Rys. 297.), to koło  $k_1$ , zakreślone na średnicy  $\overline{AB}$ , jest w powinowactwie ukośnym z tą elipsą. Prostopadła wykreślona w środku  $S$  do  $\overline{AB}$  przecina  $k_1$  w punkcie  $C_1$ , który odpowiada punktowi  $C$  elipsy  $k$ .  $\overline{CC_1}$  jest kierunkiem powinowactwa. Przez dany punkt  $M$  elipsy  $k$  poprowadzimy równoległą do  $\overline{CC_1}$ , a w punkcie  $M_1$  wykreślimy styczną  $s_1$ . Prosta  $PM \equiv s$  rozwiązuje zadanie.



Rys. 297.

b) Z danego punktu  $P$  wykreślić styczne do elipsy, której para osi jest dana (Rys. 298.). Na obu osiach, jako na średnicach, zakreślimy koła, powinowate, jak wiadomo, z elipsą. Prostej  $PCI$  w układzie elipsy odpowiada prosta  $IC_1P_1$  w układzie koła, przyczem punkt  $P_1$  leży na promieniu prostopadłym do osi powinowactwa  $p$ .

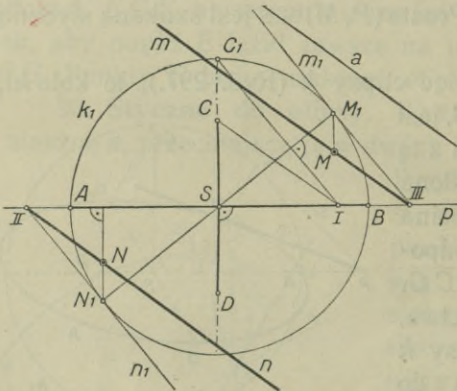
Z punktu  $P_1$  kreślimy styczne  $m_1$  i  $n_1$  do



Rys. 298.

koła  $k_1$ , a punkty  $II$  i  $III$ , leżące na osi  $p$ , łączymy z punktem  $P$ . Proste  $m$  i  $n$  rozwiązują zadanie; punkty  $M$  i  $N$  są ich punktami styczności z elipsą.

c) Równoległe do danego kierunku „a” wykreślić styczne do elipsy, której para osi jest dana (Rys. 299.). Przez wierzchołek C elipsy kreślimy równoległą do prostej a i punkt I

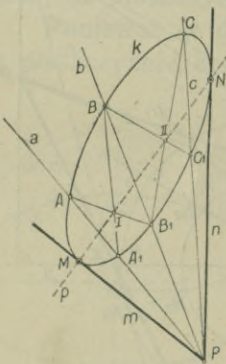


Rys. 299.

łączymy z punktem  $C_1$ . Styczne  $m_1$  i  $n_1$  do koła  $k_1$ , równoległe do prostej  $C_1I$ , przecinają oś powinowactwa w punktach II i III. Proste  $m$  i  $n$ , równoległe do  $a$ , wykreślone przez punkty II i III rozwiązują zadanie, są bowiem prostymi powinowatymi z  $m_1$  i  $n_1$ . Prostopadłe, poprowadzone z punktów styczności  $M_1$  i  $N_1$  do osi  $p$ ,

wyznaczają na prostych  $m$  i  $n$  punkty  $M$  i  $N$ , w których proste te dotykają elipsy.

c) Z danego punktu  $P$  wykreślić styczną do danej elipsy (Rys. 300.). Z punktu  $P$  wykreślimy sieczne  $a, b, c$  i połączymy punkty  $A$  z  $B_1, A_1$  z  $B, B$  z  $C_1, C$  z  $B_1$ . Prosta  $I II$  przecina elipsę w punktach  $M$  i  $N$ , które połączone z punktem  $P$  rozwiązują zadanie. Uzasadnienie tej niezwykle dogodnej konstrukcji wymaga wiadomości, które nie leżą w zakreślonym przez nas obszarze i dlatego podane tu być nie może.



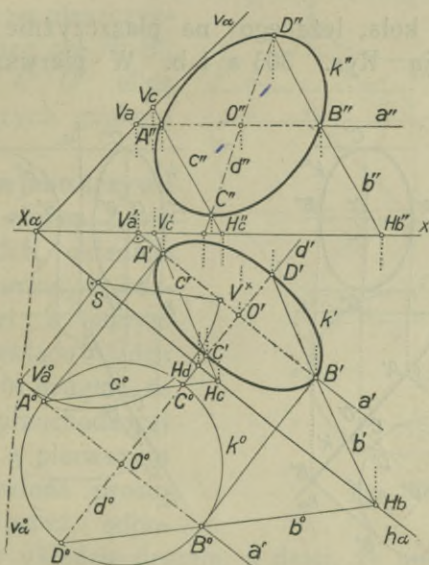
Rys. 300.

99. Rzuty prostokątne koła. Ponieważ między danym układem płaskim w przestrzeni, a jego rzutem prostokątnym zachodzi powinowactwo środkowe (ust. 95.), więc rzuty prostokątne koła są elipsami.

a) Gdy dana jest płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) a na niej punkt  $O$  ( $O' O''$ ) jako środek koła (Rys. 301.), to rzuty koła, o danym promieniu  $r$ , wyznaczmy w sposób następujący: Po wykonaniu kładu płaszczyzny  $\alpha$  na rzutnię poziomą, zakreślimy z punktu  $O^0$ , jako środka, koło o promie-



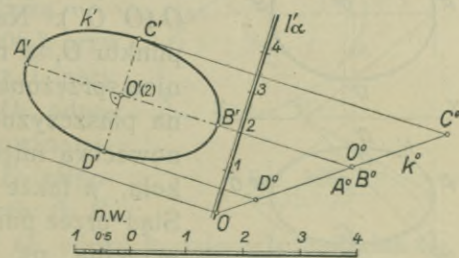
niu  $r$ . Parze średnic sprzężonych  $\overline{A^0 B^0}$  i  $\overline{C^0 D^0}$  w kole, odpowie para osi  $\overline{A' B'}$  i  $\overline{C' D'}$ , względnie średnic sprzężonych  $\overline{A'' B''}$  i  $\overline{D'' C''}$  w elipsach, stanowiących rzuty koła. Podnie-



Rys. 301.

sienie z kładu punktów  $A^0, B^0, C^0, D^0$  nie nastęrcza żadnych trudności. Rys. 301. tłómaczy rzecz dostatecznie.

b) Niech dany będzie punkt  $O$  ( $O', 2$ ) jako środek koła, leżącego na płaszczyźnie  $\alpha$  (Rys. 302.), wyznaczonej zestopnioną linią największego spadu  $l'_\alpha$ ; wykreślmy rzut cechowany koła o danym promieniu  $r$ . Zadanie rozwiązaćby można podobnie jak poprzednie, przez wykonanie kładu płaszczyzny  $\alpha$  na rzutnię poziomą, względnie na jedną z płaszczyzn warstwowych.

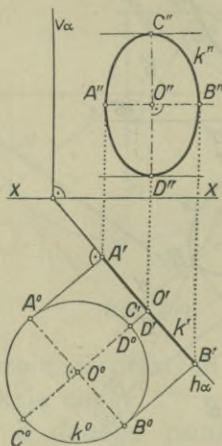


Rys. 302.

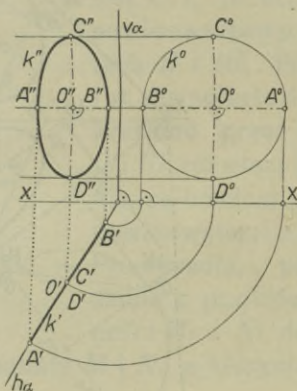
W Rys. 302. zastosowaliśmy jednak inną metodę, dającą się także użyć w przypadku rzutów na dwie płaszczyzny, a mianowicie użyliśmy płaszczyzny  $\varphi$  prostopadłej do warstwic.

Prosta  $k^0$  jest kładem krawędzi płaszczyzny  $\alpha$  i płaszczyzny  $\varphi$  na rzutnię poziomą, a odcinek  $\overline{C^0 D^0}$  kładem rzutu koła na płaszczyznę  $\varphi$ . Oś  $\overline{A^0 B^0}$  równa jest średnicy koła, drugą osią jest odcinek  $\overline{C^0 D^0}$ .

c) Rzuty koła, leżącego na płaszczyźnie poziomo rzucającej, podają Rys. 303 a i b. W pierwszym, podnieś-

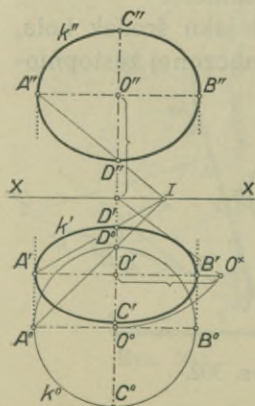


Rys. 303 a.



Rys. 303 b.

liśmy koło z rzutni poziomej, w drugim, z rzutni pionowej.



Rys. 304.

d) Rys. 304. podaje konstrukcję rzutów koła, leżącego na płaszczyźnie  $\varphi$ , przechodzącej przez oś rzutów  $x$  i punkt  $O$  ( $O^0 O''$ ). Najpierw wykonano kład  $O^0$  punktu  $O$ , a następnie podniesiono średnice sprzężone  $\overline{A^0 B^0}$  i  $\overline{C^0 D^0}$  około osi  $x$  na płaszczyznę  $\varphi$ . Oś  $x$  jest osią powinowactwa między kładem  $k^0$  i rzutem  $k'$  koła, a także między rzutami  $k'$  i  $k''$ . Stąd przez punkt  $I$ , w którym prosta  $\overline{A^0 D^0}$  przecina oś  $x$ , przejdą proste  $\overline{A' D'}$  i  $\overline{A'' D''}$ .

e) Rzuty prosłokątne koła  $k$ , przyjętego na płaszczyźnie  $\alpha \parallel x$  przedstawia Rys. 305. Na płaszczyźnie  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) przyjęliśmy prostą  $a$  ( $a' a''$ ) a na niej punkt  $S$  ( $S' S''$ ), jako środek

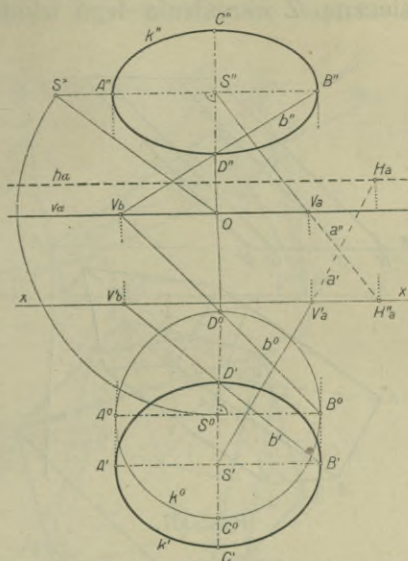


koła  $k$ . Wykonawszy kład  $S^0$  punktu  $S$  na rzutnię pionową, zakreśliłyśmy koło  $k^0$ , a następnie podniesiemy średnice  $\overline{A^0 B^0}$  i  $\overline{C^0 D^0}$  około śladu  $v_\alpha$ , jako osi obrotu na płaszczyznę  $\alpha$ , otrzymując osi  $\overline{A' B'}$ ,  $\overline{C' D'}$  i  $\overline{A'' B''}$ ,  $\overline{C'' D''}$  elips  $k'$  i  $k''$ , będących rzutami koła  $k$ .

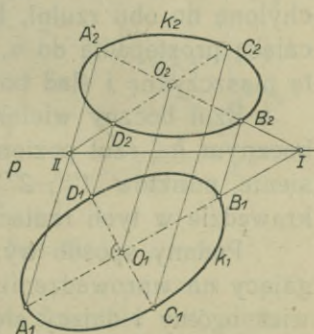
**100. Elipsa jako krzywa powinowata z elipsą.** Z faktu, że w dwóch układach środkowo powinowatych każdemu punktowi w jednym układzie odpowiada jeden punkt w układzie drugim, że każdej prostej przechodzącej przez ten punkt w pierwszym układzie, odpowiada prosta przechodząca przez odpowiadni punkt w układzie drugim, a dalej, że punktom właściwym w jednym układzie odpowiadają punkty właściwe w układzie drugim — wynika, że elipsie, przyjętej w jednym układzie, odpowie w układzie drugim także elipsa. Innymi słowy, elipsa może być spowinowacaną albo z kołem (ust. 95.) albo z elipsą.

Elipsie więc  $k_1$  (Rys. 306.), przy danej osi powinowactwa  $p$  i pary punktów odpowiednich  $O_1$  i  $O_2$ , odpowie elipsa  $k_2$  w układzie powinowatym. Parze osi  $\overline{A_1 B_1}$  i  $\overline{C_1 D_1}$  odpowie para średnic sprzężonych  $\overline{A_2 B_2}$  i  $\overline{C_2 D_2}$  elipsy  $k_2$ . Środkowi  $O_1$ , elipsy  $k_1$ , odpowiada środek  $O_2$ , w elipsie  $k_2$ .

Elipsie więc  $k_1$  (Rys. 306.), przy danej osi powinowactwa  $p$  i pary punktów odpowiednich  $O_1$  i  $O_2$ , odpowie elipsa  $k_2$  w układzie powinowatym. Parze osi  $\overline{A_1 B_1}$  i  $\overline{C_1 D_1}$  odpowie para średnic sprzężonych  $\overline{A_2 B_2}$  i  $\overline{C_2 D_2}$  elipsy  $k_2$ . Środkowi  $O_1$ , elipsy  $k_1$ , odpowiada środek  $O_2$ , w elipsie  $k_2$ .



Rys. 305.

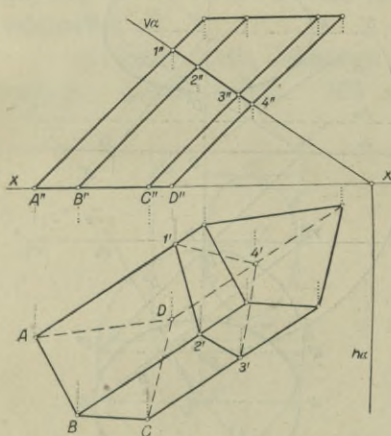


Rys. 306.

## § 8. PRZEKROJE I PRZENIKANIA WIEŁOŚCIANÓW

**101. Płaskie przekroje wielościanów.** Wyznaczenie przekroju wielościanu płaszczyzną, sprowadza się do wyznaczenia

punktów przecięcia się krawędzi wielościanu z płaszczyzną sieczną. Z określenia tego wynika, że położenie płaszczyzny



Rys. 307.

siecznej wpływa na przebieg konstrukcyi, która w przypadku, gdy płaszczyzna ta jest rzucającą, przedstawia się najprościej i sprowadza się — jak to widzimy na Rys. 307. — do odniesienia punktów, leżących na śladzie płaszczyzny, na odpowiednie krawędzie w drugim rzucie.

Przez wprowadzenie trzeciej płaszczyzny rzutów, prostopadłej do płaszczyzny siecznej i do jednej z dwóch rzutni, sprowadzić się da przypadek, w którym płaszczyzna sieczna

ma położenie dowolne, do powyższego. W Rys. 308. chodzi o wyznaczenie przekroju umiarowego ośmiościanu, leżącego jedną ścianą na rzutni poziomej, z płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_{\alpha} v_{\alpha}$ ), nachyloną do obu rzutni. Przyjąwszy płaszczyznę poziomo rzucającą prostopadłą do  $\alpha$ , wyznaczyliśmy rzut ośmiościanu na tę płaszczyznę i ślad boczny  $k_{\alpha}$  płaszczyzny  $\alpha$ .

Rzut boczny wielokąta przekroju schodzi się ze śladem bocznym  $k_{\alpha}$ , rzut poziomy i pionowy otrzymamy przez odniesienie punktów  $1'''$ ,  $2'''$ ,  $3'''$ ,  $4'''$ ,  $5'''$  i  $6'''$  na odpowiednie krawędzie w tych rzutach.

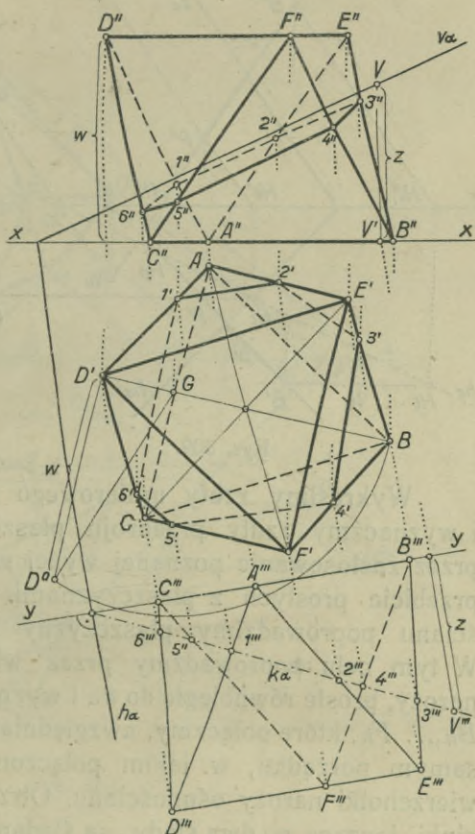
Podany sposób wyznaczenia przekroju wielościanu, polegający na wprowadzeniu trzeciej płaszczyzny rzutów, jakkolwiek ogólny i dający się zastosować do każdego wielościanu, bez względu na jego położenie, nie jest wystarczający. Zauważmy bowiem, że odniesienie punktu z rzutu bocznego na poziomy odbywa się z tem mniejszą dokładnością, im bardziej odnośny rzut krawędzi, na którą punkt przenieść mamy, zbliża się do położenia prostopadłego do osi  $y$ , a w przypadku, gdy krawędź ta jest prostopadłą do tej osi, możliwość przeniesienia punktu na nią nawet zupełnie upada. W Rys. 308. widzimy, że odnosząca punkt  $6'''$  na prostą  $CD'$  przecina ją pod kątem zbyt ostrym, aby dokładność położenia punktu  $6'$  nie mogła



być wątpliwą. Z tego powodu osiąść musimy drugi sposób wyznaczenia przekroju wielościanu płaszczyzną, aby zastosować go w przypadku, gdy pierwszy zawiedzie, względnie nie jest dość dokładny. Wprawdzie posiadamy zawsze możliwość wyznaczenia punktów przebiecia poszczególnych krawędzi z płaszczyzną sieczną, ale i ten sposób — jak to zauważyć można przy punkcie 6 ( $6'$   $6''$ ) — nie da wyniku dokładnego, a następnie chodziłoby o metodę, która z góry wskaże krawędzie, przebijające płaszczyznę sieczną i zaoszczędzi szukania.

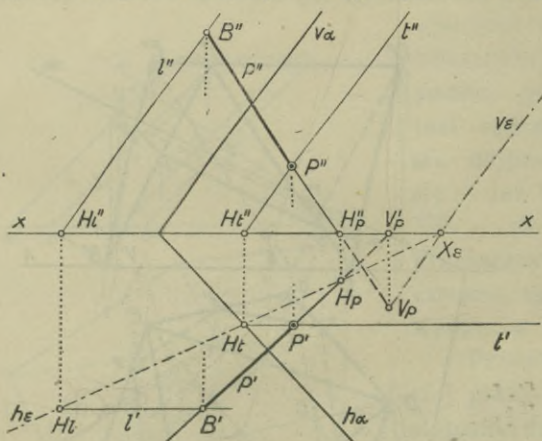
Niechaj daną będzie płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ) i prosta  $p$  ( $p'$   $p''$ ) (Rys. 309). Obierzmy na prostej  $p$  dowolny punkt

$B$  ( $B'$   $B''$ ) i poprowadźmy przez ten punkt, równoległą do dowolnie na płaszczyźnie  $\alpha$  przyjętej prostej. Aby sprawę możliwie uprościć, niechaj prosta  $l$  ( $l'$   $l''$ ), przechodząca przez punkt  $B$ , będzie prostą czołową, a więc równoległą do  $v_\alpha$ . Proste  $p$  i  $l$  wyznaczają płaszczyznę  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon$   $v_\varepsilon$ ), która przecina płaszczyznę  $\alpha$  w prostej  $t$  ( $t'$   $t''$ ). Ponieważ płaszczyzna  $\varepsilon$  jest równoległą do śladu  $v_\alpha$ , więc i prosta  $t$  ( $t'$   $t''$ ) jest do śladu tego równoległą. Punkt przecięcia się prostych  $t$  ( $t'$   $t''$ ) i  $p$  ( $p'$   $p''$ ) jest punktem przebiecia się tej ostatniej z  $\alpha$ . Otrzymaliśmy sposób szukania punktu przebiecia się prostej z płaszc-



Rys. 308.

czynną za pośrednictwem płaszczyzny równoległej do śladu pionowego danej płaszczyzny. Metodę tę zastosujemy do



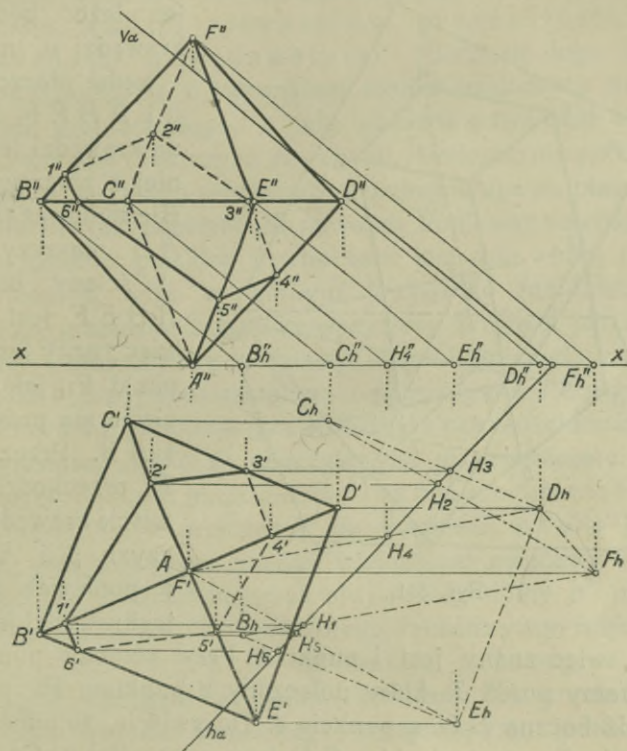
Rys. 309.

wyznaczania przekrojów wielościanów i wtedy też poznamy jej celowość i zalety. W tym miejscu zauważmy tylko, że kreślenie śladu pionowego  $v_\alpha$  jest zbędne, a prostej  $l''$  tylko wówczas potrzebne, gdyby odnosząca punkt  $P'$  przecinała  $p''$  pod zbyt ostrym kątem.

Wykreślmy rzuty umiarowego ośmiościanu (Rys. 310.) i wyznaczmy rzuty przekroju płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), a to przez zastosowanie poznanej wyżej metody szukania punktów przebiecia prostych z płaszczyznami. Przez krawędzie wielościanu poprowadzimy płaszczyzny równoległe do śladu  $v_\alpha$ . W tym celu poprowadźmy przez wierzchołki  $B, C, D, E, F$  naroży, proste równoległe do  $v_\alpha$  i wyznaczmy ich ślady poziome  $B_h, \dots, F_h$ , które połączmy, uwzględniając także punkt  $A$ , w tym samym porządku, w jakim połączone są odpowiadające im wierzchołki naroży ośmiościanu. Otrzymane w ten sposób odcinki, łączące po dwa ślady, są śladami poziomymi płaszczyzn, przechodzących przez odnośne krawędzie ośmiościanu równoległe do śladu  $v_\alpha$  płaszczyzny siecznej. Przedewszystkiem zauważymy bezpośrednio, które krawędzie ośmiościanu przebijają płaszczyznę  $\alpha$ , a które leżą zewnątrz niej; jeżeli bowiem odcinki, jak np.  $\overline{D_h E_h}$  lub  $\overline{D_h F_h}$  nie przecinają śladu  $h_\alpha$ , to odnośne krawędzie a więc  $\overline{DE}$  i  $\overline{DF}$  nie przebijają płaszczyzny  $\alpha$ . Natomiast odcinki  $\overline{F_h B_h}, \overline{F_h C_h}, \overline{C_h D_h}, \overline{D_h A}, \overline{E_h A}$  i  $\overline{E_h B_h}$  przecinają ślad  $h_\alpha$  w punktach  $H_1 \dots H_6$ , które są śladami poziomymi prostych przecięcia się płaszczyzn, przechodzących przez krawędzie ośmiościanu równoległe do prostej  $v_\alpha$ , z płaszczyzną  $\alpha$ . Proste te są równoległe do  $v_\alpha$ , ich rzuty poziome są równoległe do osi  $x$  i wyznaczają na odnoś-



nych krawędziach punkty  $1', 2', 3', 4', 5'$  i  $6'$ , których rzut pionowy otrzymamy zapomocą odnoszących, albo, o ile dokładność



Rys. 310.

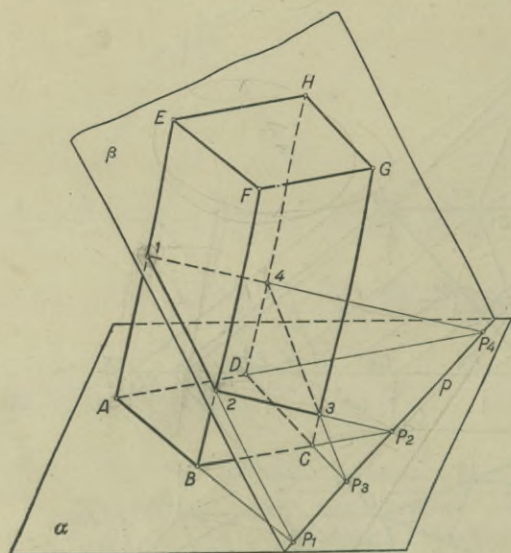
rysunku tego się domaga, zapomocą prostych równoległych do  $v_\alpha$ , jak to uczyniliśmy dla punktu  $4''$ .

### 102. Przekroje płaskie graniastosłupów.

a) Prócz poznanych dwóch metod wyznaczania przekrojów, zastosować się da do graniastosłupów metoda odmienna, oparta o pewne związki, zachodzące między jego dwoma przekrojami, względnie między podstawą a przekrojem.

Przyjmijmy graniastosłup, którego podstawa  $ABCD$  spoczywa na płaszczyźnie  $\alpha$  (Rys. 311.), a nadto płaszczyznę  $\beta$ , przecinającą ten graniastosłup. Przypuśćmy, że znany nam jest punkt  $1$ , w którym krawędź  $\overline{AE}$  przebija płaszczyznę  $\beta$ ; znajdziemy punkty  $2, 3$  i  $4$ , w których dalsze krawędzie boczne

przebijają płaszczyznę sieczną  $\beta$ . Wyznaczywszy krawędź  $p$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , znajdziemy punkt przecięcia się płaszczyzn



Rys. 311.

$\alpha$ ,  $\beta$  i  $ABEF$ . Punkt ten leżeć będzie na krawędzi  $p$ , na krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $ABEF$ , a także na krawędzi tej ostatniej z płaszczyzną  $\beta$ . Ale ponieważ krawędź  $AB$  płaszczyzn  $\alpha$  i ściany bocznej  $ABEF$  jest znana, więc znany jest także punkt  $P_1$ , jako przecięcie się prostych  $p$  i  $AB$ . Przez punkt  $P_1$  przechodzi oczywiście krawędź płaszczyzn  $\beta$  i  $ABEF$ , a ponieważ punkt 1 tej krawędzi jest także

znany, więc znany jest i punkt 2. Przy pomocy punktu  $P_2$  otrzymamy punkt 3, który połączony z punktem  $P_3$  przecina krawędź boczną  $DH$  w punkcie 4. Oczywiście, że punkt przecięcia się  $P_4$  prostych  $14$  i  $AD$  leży na prostej  $p$ . Czworokąt podstawy  $ABCD$  uważać można za przekrój graniastostupa płaszczyzną  $\alpha$ , a zatem między dwoma przekrojami graniastostupa stwierdzamy, w skutku powyższego rozumowania, następujące związki:

- 1) Punkty  $A$  i  $1$ ,  $B$  i  $2$ ,  $C$  i  $3$ ,  $D$  i  $4$  leżą na prostych do siebie równoległych (krawędziach bocznych graniastostupa).
- 2) Proste  $AB$  i  $12$ ,  $BC$  i  $23$ ,  $CD$  i  $34$ ,  $AD$  i  $14$  przecinają się w punktach prostej  $p$ , która jest krawędzią obu płaszczyzn siecznych.

Jeżeli punkty  $A$  i  $1$ ,  $B$  i  $2$ ... i proste  $AB$  i  $12$ ,  $BC$  i  $2, 3$ ... określimy jako pary punktów, względnie prostych odpowiednich, to w takim razie między dwoma przekrojami graniastostupa stwierdzamy istnienie powinowactwa środkowego, którego osią jest prosta  $p$ , a kierunkiem, kierunek krawędzi bocznych



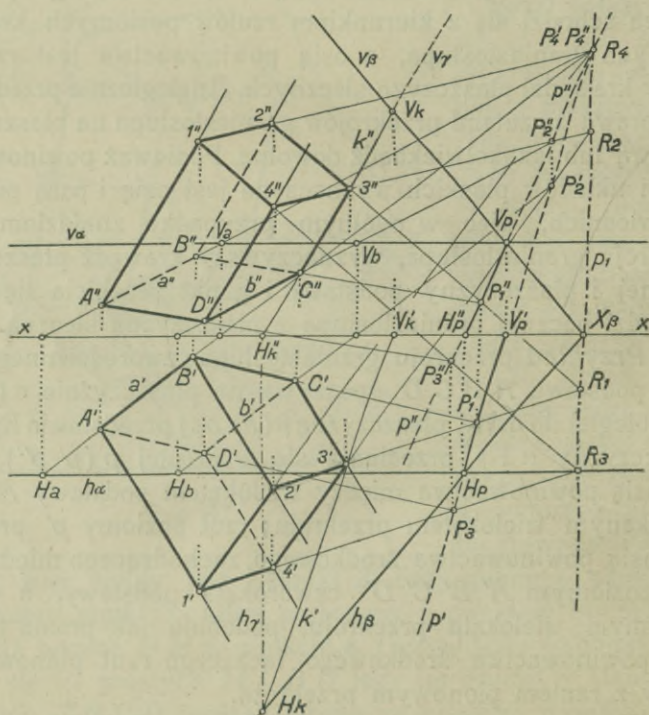
graniastosłupa. Wiemy z ust. 94., że rzuty dwóch układów powinowatych na dowolną płaszczyznę tworzą dwa układy powinowate, złączone na tej płaszczyźnie — a więc rzuty poziome dwóch przekrojów graniastosłupa są wielokątami powinowatymi. Kierunek tego powinowactwa schodzi się z kierunkiem rzutów poziomych krawędzi bocznych graniastosłupa, a osią powinowactwa jest rzut poziomy krawędzi płaszczyzn siecznych. Analogicznie przedstawia się sprawa z rzutami przekrojów graniastosłupa na płaszczyznę pionową lub jakąkolwiek bądź dowolną. Ponieważ powinowactwo dwóch układów płaskich wyznaczone jest osią i parą punktów odpowiednich, więc w ogólnym przypadku znajdziemy rzut przekroju graniastosłupa, wyznaczywszy krawędź płaszczyzny siecznej i płaszczyznę podstawy i punkt przebicia się jednej krawędzi bocznej graniastosłupa z płaszczyzną sieczną.

*Przykład* przekroju graniastosłupa czworościennego, którego podstawa  $ABCD$  spoczywa na płaszczyźnie  $\alpha (h_\alpha v_\alpha)$  równoległej do osi  $x$ , płaszczyznę  $\beta (h_\beta v_\beta)$  przedstawia Rys. 312. Płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  przecinają się w prostej  $p (p' p'')$ , która jest osią powinowactwa między wielokątem podstawy  $ABCD$  i szukanym wielokątem przekroju; rzut poziomy  $p'$  prostej  $p$  jest osią powinowactwa środkowego, zachodzącego między rzutem poziomym  $A' B' C' D'$  czworokąta podstawy, a rzutem poziomym wielokąta przekroju, podobnie jak prosta  $p''$  jest osią powinowactwa środkowego, łączącego rzut pionowy podstawy z rzutem pionowym przekroju.

Wyznamy punkt przebicia się  $3 (3' 3'')$  krawędzi bocznej, przechodzącej przez punkt  $C (C' C'')$  z  $\beta$ , to dalsze punkty wielokąta przekroju znajdziemy na zasadzie związku, łączącego wielokąty podstawy i przekroju, a polegającego na tem, że odpowiednie ich boki przedłużone przecinają się na osi powinowactwa. Otrzymawszy więc punkt  $P_1'$ , jako przecięcie się boku  $B' C'$  z osią  $p'$ , łączymy go z punktem  $3'$  i otrzymujemy punkt  $2'$ , względnie bok  $2' 3'$ . Przy pomocy punktów  $P_2'$  i  $P_3'$  otrzymamy punkty  $4'$  i  $1'$ , a więc rzut poziomy czworokąta przekroju.

W ten sam sposób przy pomocy punktów  $P_1'', P_2'', P_3''$  i  $P_4''$  wychodząc z punktu  $3''$ , otrzymamy punkty  $2''$ ,  $4''$  i  $1''$ . Kontrolą dokładności konstrukcyi będzie stwierdzenie, że odpowiednie punkty w obu rzutach leżą na prostych odnoszących.

Między obu rzutami czworokąta przekroju zachodzi powinowactwo środkowe (ust. 95.), którego oś przechodzi przez punkt  $X_\beta$  i jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się  $R_1, R_2, R_3$  i  $R_4$  rzutów boków czworokąta przekroju. Znając



Rys. 312.

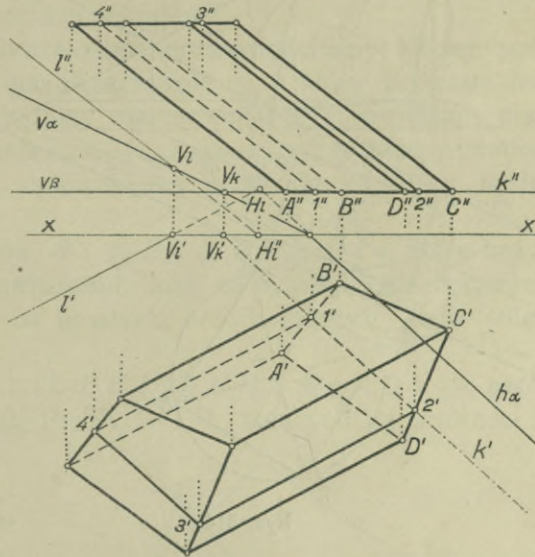
więc np. bok  $\overline{34}$  ( $\overline{3'4'}$ ,  $\overline{3''4''}$ ) a przez to i punkt  $R_2$ , a więc i oś powinowactwa  $p_1$ , możemy i przy jej pomocy wyznaczyć dalsze dwa punkty czworokąta przekroju. Odpowiednie bowiem boki, jak  $1'2'$  i  $1''2''$ ,  $2'3'$  i  $2''3''$ ,  $1'4'$  i  $1''4''$ , przecinają się w punktach  $R_4$ ,  $R_1$  i  $R_3$  na prostej  $p_1$ , wyznaczonej punktami  $X_\beta$  i  $R_2$ . Na Rys. 312. punkty  $P_4'$  i  $P_4''$  nakryły się, wobec czego i punkt  $R_4$  zeszedł się z poprzednimi, gdyż w tym przypadku punkt  $P_4 \equiv R_4$  jest punktem przecięcia się płaszczyzn  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta_{II}$  i ściany bocznej  $AB12$  graniastostupa.

b) Płaszczyzna równoległa do krawędzi bocznych graniastostupa przecina go w równoległoboku, jeżeli krawędź



płaszczyzny siecznej z płaszczyzną podstawy przecina wielokąt podstawowy.

Przykład takiego przekroju podaje Rys. 313. Przez przyjętą, równoległą do krawędzi bocznych graniastostupa, prostą  $l$  ( $l'$ ) poprowadziliśmy płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), której krawędź  $k$  ( $k'$ ) z płaszczyzną podstawy  $\beta$  przecina czworokąt podstawy w punktach 1 ( $1'$ ) i 2 ( $2'$ ).



Rys. 313.

Przez punkty te poprowadzone proste, równoległe do krawędzi bocznych, są liniami przecięcia się odnośnych ścian bocznych z płaszczyzną sieczną, a odcinek  $\overline{34}$  ( $3' 4'$ ,  $3'' 4''$ ) stanowi czwarty bok szukanego równoległoboku.

**103. Zadanie.** Prosty graniastostup, którego podstawą jest równoległobok, przeciąć taką płaszczyzną, aby przekrój był kwadratem (Rys. 314.). Rzut poziomy  $A' B' C' D'$  kwadratu schodzi się z podstawą graniastostupa, której przekątne są przekątnymi kwadratu. Elipsa, wyznaczona średnicami sprzężonymi  $\overline{A' C'}$  i  $\overline{B' D'}$ , jest rzutem poziomym koła, opisanego na kwadracie.

Wyznaczmy w znany sposób (ust. 97 e.) osi tej elipsy, to oś wielka  $\overline{I' II'}$  jest poziomą, a więc równoległą do śladu poziomego szukanej płaszczyzny i równą średnicy koła. Oś mała  $\overline{III' IV'}$  wyznacza kierunek linii największego spadku (ust. 25.) płaszczyzny siecznej.

Ponieważ pęk płaszczyzn równoległych przecina graniastostup w wielobokach przystających, więc istnieje pęk płaszczyzn równoległych, przecinających dany graniastostup w kwa-





### 104. Płaskie przekroje ostrosłupów.

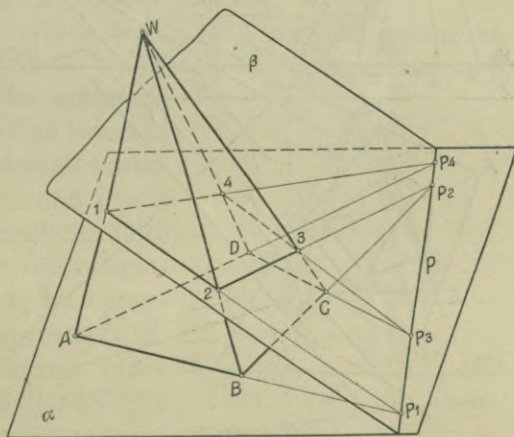
a) Podobnie jak do graniastosłupów, zastosować się dać, gdy chodzi o przekroje płaskie i do ostrosłupów, prócz metod ogólnych, poznanych w ust. 101., pewne proste związki, zachodzące między podstawą a przekrojem, względnie ogólnie mówiąc, między dwoma przekrojami.

Rys. 315. wyobraża ostrosłup czworościenny, którego podstawa znajduje się na płaszczyźnie  $\alpha$ , a który przecięty jest płaszczyzną  $\beta$ . Powtarzając rozumowanie przeprowadzone przy sposobności omawiania Rys. 311., zauważymy, że między czworokątem podstawy a czworokątem przekroju zachodzą następujące związki:

1. Pary punktów  $A$  i  $1$ ,  $B$  i  $2$ ,  $C$  i  $3$ ,  $D$  i  $4$ , które nazywać będziemy odpowiednimi, leżą na krawędziach bocznych ostrosłupa, a więc na prostych, przechodzących przez jeden punkt  $i$

2. Proste  $AB$  i  $12$ ,  $BC$  i  $23$ ,  $CD$  i  $34$ ,  $AD$  i  $14$  przecinają się w punktach  $P_1, P_2, P_3$  i  $P_4$ , leżących na krawędzi  $p$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ .

Jeżeli między dwoma układami płaskimi zachodzą powyższe związki, to mówimy, że układy te są środkowo kolineacyjne, a związki owe określamy mianem kolineacji środkowej. Prosta przecięcia się dwóch płaszczyzn, a więc w naszym przypadku prostą  $p$ , nazywamy osią kolineacji, pro-

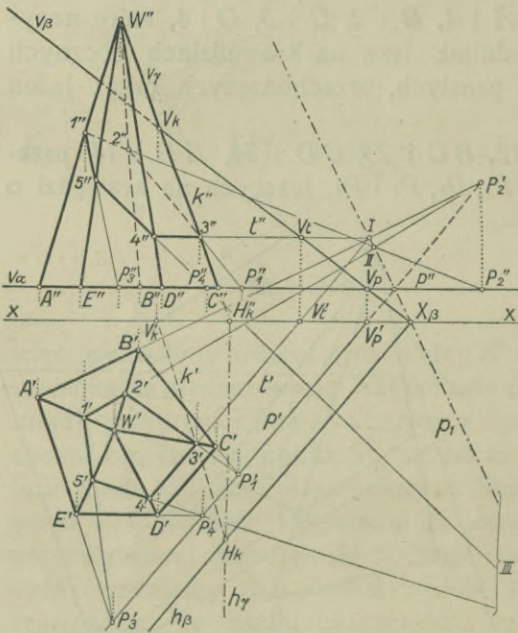


Rys. 315.

ste łączące odpowiednie punkty, więc krawędzie boczne ostrosłupa, promieniami kolineacji, a wreszcie punkt, przez który przechodzą te promienie (punkt  $W$  w Rys. 315.) środkiem kolineacji. Szczegółowiej zajmiemy się kolineacją środkową w § 9., tu zauważymy tylko, że podobnie jak rzuty układów powinowatych są powinowate, tak i przez rzut dwóch utworów

środkowo kolineacyjnych związki, charakteryzujące kolineację środkową, zostają zachowane. Stąd powiedzieć możemy, że między rzutem poziomym podstawy a rzutem poziomym przekroju ostrosłupa zachodzi kolineacja środkowa, której środkiem jest rzut poziomy wierzchołka, a osią rzut poziomy krawędzi płaszczyzny podstawy i płaszczyzny siecznej. To samo odnosi się do rzutu pionowego podstawy graniastoslupa, do rzutu pionowego jego przekroju, wierzchołka i krawędzi płaszczyzny podstawy i płaszczyzny siecznej.

**Przykłady. 1.** Pięciosienny ostrosłup ukośny, którego podstawa leży na płaszczyźnie poziomej  $\alpha$ , przecięty jest płaszczyzną  $\beta$  (Rys. 316.).



Rys. 316.

Celem wykreślenia rzutów przekroju wyznaczyliśmy rzuty punktu przecięcia się  $3(3' 3'')$  krawędzi  $\overline{CW}$  z płaszczyzną  $\beta$ , a to przy pomocy pionowo rzucającej płaszczyzny  $\gamma$  ( $h_\gamma v_\gamma$ ). Wyznaczwszy krawędź  $p(p' p'')$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , znajdziemy dalsze wierzchołki pięciokąta przekroju, korzystając ze związków kolineacji środkowej, zachodzącej między rzutami podstawy i rzutami przekroju. I tak np. bok  $BC$  przecina oś kolineacji

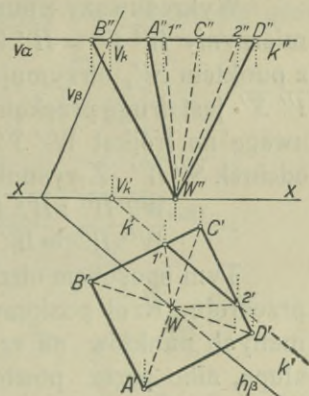
w punkcie  $P_1(P_1' P_1'')$ , który połączony z punktem  $3(3' 3'')$  wyznaczy na krawędzi bocznej  $\overline{BW}$  punkt  $2(2' 2'')$ .

Z kolei wyznaczmy przy pomocy punktu  $P_2(P_2' P_2'')$  na osi kolineacji  $p$  punkt  $1(1' 1'')$ , następnie punkt  $P_3(P_3' P_3'')$ , w którym krawędź  $\overline{AE}$  przecina oś kolineacji, umożliwi wyznaczenie punktu  $5(5' 5'')$ , który połączony z punktem  $P_4(P_4' P_4'')$  przecina krawędź boczną  $\overline{DW}$  ostrosłupa w punkcie



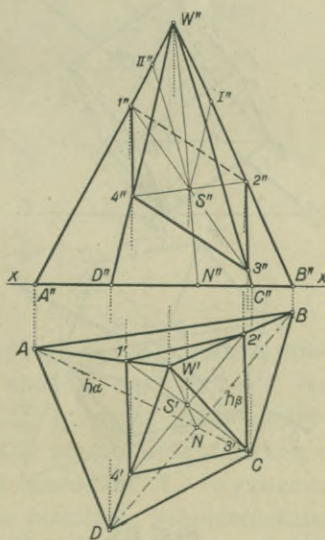
4 (4' 4''). Oś  $p_1$  powinowactwa, jakie zachodzi między pięciokątami  $1' 2' 3' 4' 5'$  i  $1'' 2'' 3'' 4'' 5''$ , przechodzi przez punkt  $X_\beta$  i jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się  $I, II, III...$  odpowiednich boków obu pięciokątów.

2. Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek ostrosłupa przecina go w trójkącie, jeżeli krawędź płaszczyzny siecznej z płaszczyzną podstawy przecina podstawę. Jako przykład takiego przekroju niech posłuży Rys. 317., który przedstawia przekrój czworosłopiennego, prostego ostrosłupa płaszczyzną  $\beta$  ( $h_\beta v_\beta$ ), przechodzącą przez wierzchołek  $W$  ( $W' W''$ ). Płaszczyzna podstawy  $\alpha$  przecina  $\beta$  w prostej  $k$  ( $k' k''$ ), a punkty  $1$  ( $1' 1''$ ) i  $2$  ( $2' 2''$ ) połączone z wierzchołkiem rozwiązują zadanie.



Rys. 317.

105. Zadanie. Dany ostrosłup czworosłopienny przeciąć w równoległoboku. Proste  $AC$  i  $BD$  (Rys. 318.) uważać można za ślady poziome płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , przechodzących przez pary przeciwległych krawędzi bocznych ostrosłupa, a prostą  $NW$  za krawędź tych płaszczyzn. Płaszczyzna szukanego równoległoboku przetnie płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  wzdłuż prostych, które będą przekątnymi tegoż równoległoboku. Punkt przecięcia się tych przekątnych leżeć będzie na prostej  $NW$ . Niechaj płaszczyzna sieczna przechodzi przez dowolny punkt  $S$  ( $S' S''$ ) prostej  $NW$ , to rozwiązanie zadania sprowadza się do wykreślenia w jednym rzucie np. pionowym takich odcinków  $1'' 3''$  i  $2'' 4''$ , dla których punkt  $S''$  byłby środkiem; wiadomo bowiem, że rzut równoległoboku jest równoległobokiem.



Rys. 318.

Wykreślmy przez punkt  $S'$  równoległą do  $W'' D''$  i odmierzymy na prostej  $W'' B''$  odcinek  $I'' 2'' = I'' W''$ . Punkt  $2''$  połączmy z  $S''$  a otrzymamy prze-

kątną równoległoboku, którego środkiem jest punkt  $S''$ . W istocie bowiem, gdy weźmiemy pod uwagę trójkąt  $W'' 2'' 4''$  i prostą  $l'' S'' \parallel W'' 4''$ , to otrzymamy proporcję:

$$\overline{W'' I''} : \overline{I'' 2''} = \overline{4'' S''} : \overline{S'' 2''}, \text{ a ponieważ}$$

$$\overline{W'' I''} = \overline{I'' 2''}, \text{ więc } \overline{4'' S''} = \overline{S'' 2''}.$$

Wykreśliwszy z punktu  $S''$  równoległą do boku  $\overline{W'' C''}$ , odmierzymy  $\overline{II'' I''} = \overline{II'' W''}$  i połączmy otrzymany punkt  $I''$  z punktem  $S''$ , otrzymując na prostej  $W'' C''$  punkt  $3''$ . Odcinek  $\overline{I'' 3''}$  jest drugą przekątną szukanego równoległoboku. Zwróćmy uwagę na trójkąt  $W'' 3'' I''$  i równoległy do jego boku  $\overline{W'' 3''}$  odcinek  $\overline{S'' II''}$ . Z rysunku czytamy:

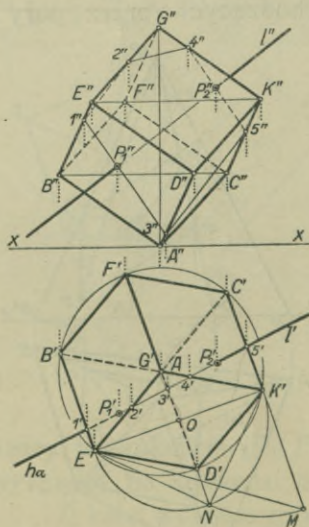
$$\overline{W'' II''} : \overline{II'' I''} = \overline{3'' S''} : \overline{S'' I''}, \text{ a że}$$

$$\overline{W'' II''} = \overline{II'' I''}, \text{ więc też: } \overline{3'' S''} = \overline{S'' I''}.$$

Tym sposobem otrzymaliśmy rzut pionowy równoległoboku przekroju. Rzut poziomy znajdziemy przez odniesienie otrzymanych punktów na rzut poziomy krawędzi bocznych ostrosłupa, albo przez powtórzenie przeprowadzonych konstrukcji dla rzutu poziomego.

106. Punkty przebicia się prostej z wielościanem znajdziemy w ten sposób, że przez daną prostą poprowadzimy

płaszczyznę, wyznaczmy jej przekrój z wielościanem, a punkty przecięcia się wielokąta przekroju z prostą rozwiązują zadanie. Co do wyboru płaszczyzny, poprowadzonej przez prostą, to baczmy zawsze, aby wyznaczenie przekroju jej z wielościanem skutecznie się dało możliwie najprościej, przy użyciu najmniejszej ilości linii. Stąd używamy najchętniej płaszczyzn rzucających, a odnośnie do graniastosłupów i ostrosłupów także takich, które przecinają pierwsze w równoległobokach a drugie w trójkątach.



Rys. 319.

*Przykłady. 1.* Punkty przebicia się  $P_1 (P_1' P_1'')$  i  $P_2 (P_2' P_2'')$  prostej  $l (l' l'')$  ze sześcianem, którego przekątna główna jest pionowa (Rys. 319.), wyznaczyliśmy przy pomocy płaszczyzny poziomo rzucającej  $\alpha$ , przechodzącej przez

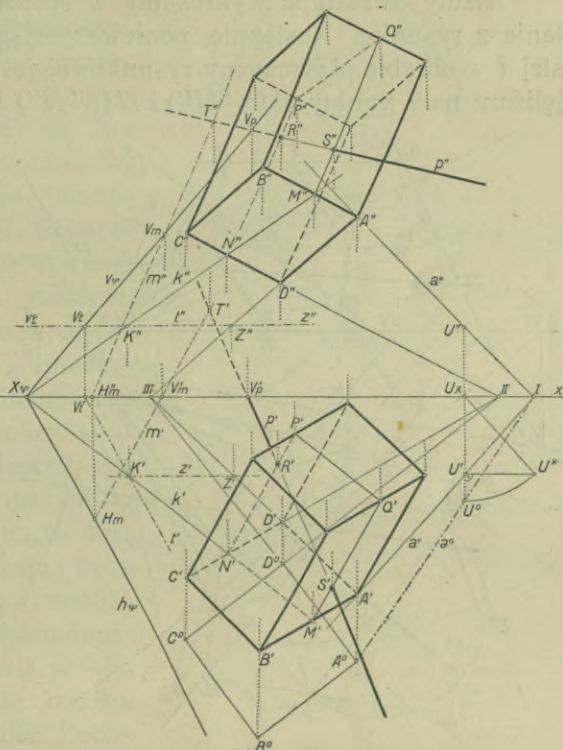


prostą  $l$ , a przecinającej ten sześciąt w pięciokącie  $12345$ . Rzut poziomy tego pięciokąta schodzi się ze śladem poziomym  $h_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , a rzut pionowy otrzymaliśmy, odnosząc poszczególne punkty na rzuty pionowe odpowiednich krawędzi.

2. Na płaszczyźnie, przechodzącej przez oś  $x$  i punkt  $U$  ( $U' U''$ ), przyjęliśmy kwadrat  $ABCD$ , jako podstawę graniastostupa ukośnego, którego rzuty przedstawia Rys. 320. Zadaniem jest wyznaczyć punkty przebiccia się prostej  $p$  ( $p' p''$ ) z tym graniastostupem.

Przez punkt  $T$  ( $T' T''$ ), obrany na prostej  $p$  ( $p' p''$ ), poprowadziliśmy prostą  $m$  ( $m' m''$ ) równoległą do krawędzi bocznych.

Płaszczyzna  $\varphi \equiv (m, l)$ , której ślady  $h_\varphi$  i  $v_\varphi$  wykreśliśmy, jest równoległą do krawędzi bocznych graniastostupa i przecina płaszczyznę podstawy w prostej  $k$  ( $k' k''$ ), która



Rys. 320.

przejdzie przez punkt  $X_\varphi$ , a której jeszcze jeden punkt, a mianowicie  $K$  ( $K' K''$ ) znaleźliśmy w sposób następujący: Na prostej  $AD$  przyjęliśmy punkt  $Z$  ( $Z' Z''$ ), przez który poprowadziliśmy prostą  $z$  ( $z' z''$ )  $\parallel x$ ; prosta ta przebija płaszczyznę  $\varphi$  w punkcie  $K$  ( $K' K''$ ), który wraz z punktem  $X_\varphi$  wyznacza prostą  $k$  ( $k' k''$ ). Ta ostatnia przecina podstawę graniastostupa w punktach  $M$  i  $N$ , a równoległobok  $MNPQ$  jest tym, w którym płaszczyzna  $\varphi$  przecina graniastostup. Prosta  $p$  ( $p' p''$ ) przecina ten równoległobok w punktach  $R$  ( $R' R''$ ) i  $S$  ( $S' S''$ ),

które są szukanyimi punktami przebiecia się prostej  $p$  z graniastostupem.

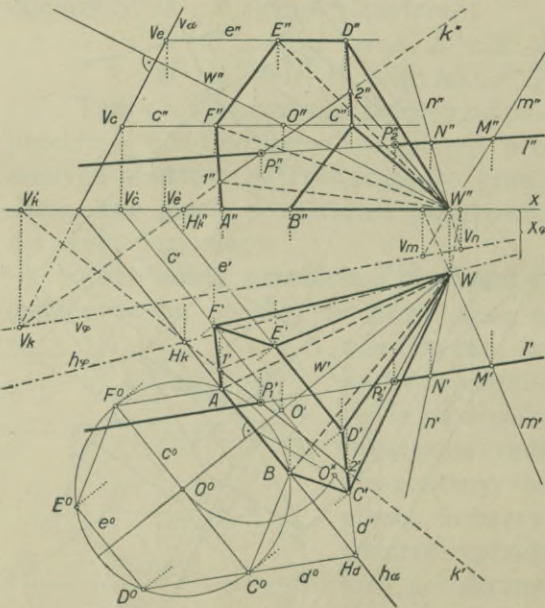
3. Niechaj zadaniem naszym jest wyznaczenie punktu przebiecia się prostej  $l$  ( $l' l''$ ) (Rys. 321.) z ostrostupem, o podstawie umiarowego sześciokąta, leżącym jedną ścianą boczną na rzutni poziomej.

Rzuty ostrostupa wykreśliły w sposób łatwy do odczytania z rysunku. Następnie, ponieważ osiągnięcie śladów prostej  $l$  w obrębie płaszczyzny rysunkowej jest niemożliwe, przyjęliśmy na  $l$  punkty  $M$  ( $M' M''$ ) i  $N$  ( $N' N''$ ) i połączyli z wierzchołkiem ostrostupa  $W$  prostymi  $m$  ( $m' m''$ ) i  $n$  ( $n' n''$ ). Płaszczyzna  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ), wyznaczona temi dwiema prostymi, przecina płaszczyznę podstawy  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ )

w prostej  $k$  ( $k' k''$ ), a ostrosłup w trójkącie  $1 2 W$ . Punkty  $P_1$  ( $P_1' P_1''$ ) i  $P_2$  ( $P_2' P_2''$ ) są punktami, w których prosta  $l$  przebija ostrosłup.

107. Rozwinięcia wielościanów. Przez rozwinięcie wielościanu, albo t. zw. siatkę, rozumiemy wykreślenie na płaszczyźnie wszystkich ścian danego wielościanu w takim ich zestawieniu, że, po wycięciu tego wykresu np. z papieru, odтворzenie wielościanu jest możliwe.

1. *Siatka ostrostupa.* Ostrosłup czworosścienny, ukośny, stoi podstawą na rzutni poziomej (Rys. 322.); prawdziwe długości jego krawędzi bocznych otrzymamy przez wykonanie kładu ścian około krawędzi podstawowych na rzutnię poziomą, jak to uczyniliśmy ze ścianą  $BCW$ , albo przez sprowadzenie



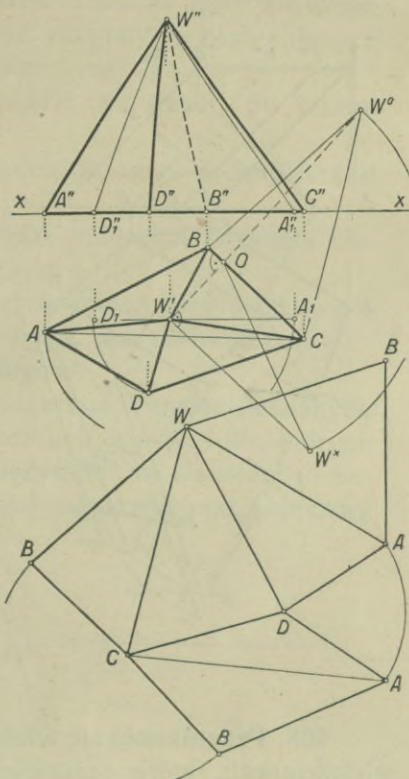
Rys. 321.



tych krawędzi zapomocą obrotu do położenia równoległego względem rzutni pionowej, jak to uczyniliśmy z krawędziami  $\overline{AW}$  i  $\overline{DW}$ . Zestawienie trójkątów, stanowiących ściany boczne, z podstawą  $ABCD$ , wobec znajomości wszystkich elementów nie nastęca żadnych dalszych trudności.

2. *Siatka graniastostupa.* Rozwinięcie graniastostupa prostego, którego podstawa znajduje się na rzutni poziomej, sprowadza się do wykreślenia prostokątów o znanych bokach, stanowiących ściany boczne, i do wykreślenia podstaw.

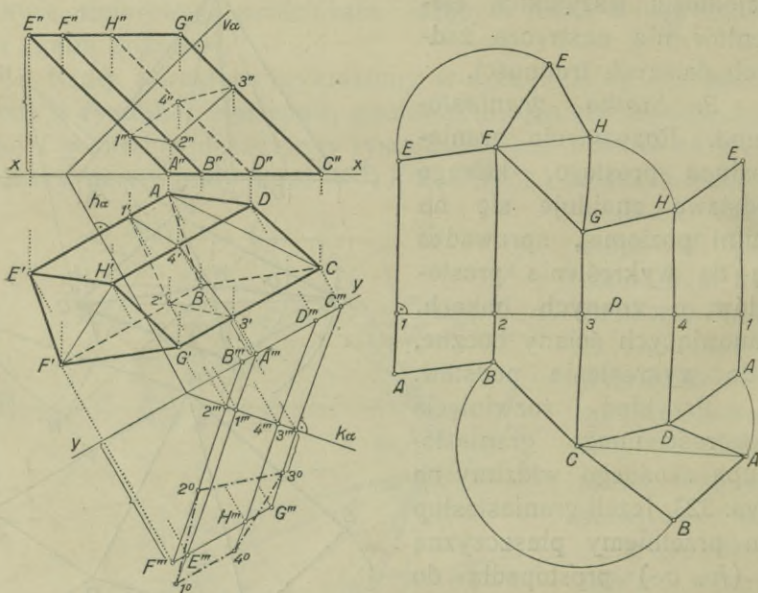
Przykład rozwinięcia czworościennego graniastostupa ukośnego widzimy na Rys. 323. Jeżeli graniastostup ten przetniemy płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ) prostopadłą do krawędzi bocznych, to boki czworokąta przekroju będą prostopadłe do tych krawędzi, a po rozwinięciu ścian bocznych, przejdą w linię prostą, do której krawędzie boczne pozostaną prostopadłe. Zada-



Rys. 322.

nie sprowadza się tym sposobem niejako do rozwinięcia dwóch graniastostupów prostych o wspólnej podstawie, powstałej z przecięcia graniastostupa płaszczyzną  $\alpha$ , a ograniczonych podstawami graniastostupa ukośnego. Wykreśliwszy rzut boczny graniastostupa na płaszczyznę prostopadłą do  $\alpha$  i rzuty czworokąta przekroju  $1234$ , wykonajmy jego kład  $1^0 2^0 3^0 4^0$  na rzutnię boczną i rozwińmy go na prostą  $p$ . Otrzymamy:  $12 = 1^0 2^0$ ,  $23 = 2^0 3^0$ ,  $34 = 3^0 4^0$  i  $41 = 4^0 1^0$ . Na prostopadłych, wykreślonych w punktach  $1, 2, 3, 4$  i  $1$ , odmierzymy prawdziwe długości krawędzi obydwu graniastostupów prostych,

kórych wspólną podstawą jest czworokąt  $1(1' 1'') \dots 4(4' 4'')$ . Będzie więc  $1\bar{A} = 1''' \bar{A}'''$ ,  $2\bar{B} = 2''' \bar{B}'''$ ,  $3\bar{C} = 3''' \bar{C}'''$  i  $4\bar{D} = 4''' \bar{D}'''$ , a wreszcie  $\bar{A}E = \bar{B}F = \dots = \bar{D}H = \bar{A}'''E''' = \bar{B}'''F''' \dots$



Rys. 323.

**108. Przenikania się wielościanów w ogólności.** O dwóch wielościanach, które częściowo zajmują tę samą przestrzeń, mówimy, że się przenikają, względnie wzajemnie przecinają. Przestrzeń, należąca równocześnie do obu wielościanów, ograniczona jest w ogólności wielokątem przestrzennym (skośnym). Jego wierzchołki są punktami przebicia się krawędzi jednego wielościanu ze ścianami wielościanu drugiego, a jego boki są prostymi przecięcia się ścian przenikających się wielościanów. Jeżeli wszystkie krawędzie jednego wielościanu przebijają ściany wielościanu drugiego, to wielokąt przenikania składa się z dwóch części, a przenikanie nazywa się zupełnym. Jeżeli jedna lub więcej krawędzi zarówno jednego jak i drugiego wielościanu leży poza obrębem przenikania, to wielokąt przenikania jest jednolity, a przenikanie nazywa się niezupełnym lub częściowym.



Sprawa wyznaczenia wielokąta przenikania dwóch wielościanów polega w zasadzie na zastosowaniu zadania wyznaczenia punktu przebiecia się prostej z płaszczyzną względnie z wielościanem. Co do wierzchołków i boków tego wielokąta, względnie ich rzutów, to pamiętać musimy o następujących punktach, które rozumieją się same przez się:

a) Punkt przebiecia się krawędzi widocznej ze ścianą widoczną, jest widoczny,

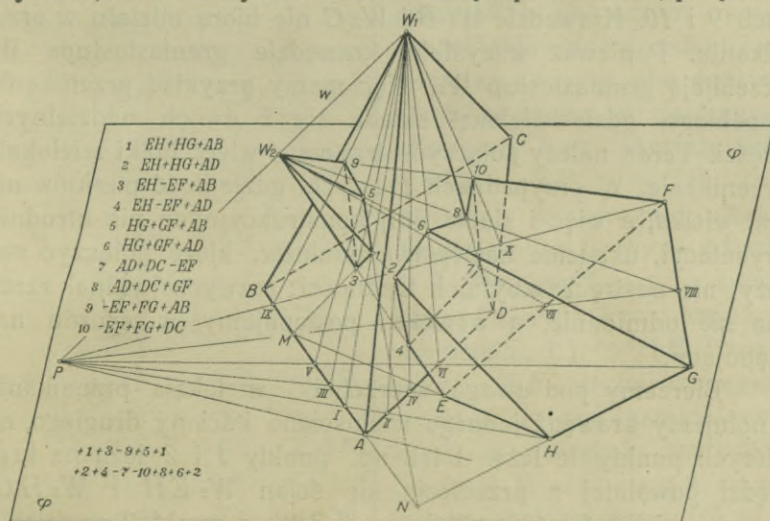
b) Prosta przecięcia się dwóch ścian widocznych jest widoczną,

c) Punkt przebiecia się krawędzi widocznej ze ścianą niewidoczną jest punktem niewidocznym i

d) Krawędź ściany widocznej ze ścianą niewidoczną, podobnie jak dwóch ścian niewidocznych, jest niewidoczną.

### 109. Przenikanie się ostrosłupów.

a) Niechaj dane będą, przedstawione w rzutach ukośnych (Rys. 324.\*), dwa ostrosłupy o wierzchołkach  $W_1$  i  $W_2$ , których podstawy  $ABCD$  i  $EFGH$  spoczywają na wspólnej płaszczyźnie  $\varphi$ . Celem wyznaczenia wielokąta przenikania, połączmy



Rys. 324.\*

oba wierzchołki prostą  $w$ , która przebiega  $\varphi$  w punkcie  $P$ . Aby wyznaczyć punkty przebiecia się krawędzi jednego ostrosłupa ze ścianami ostrosłupa drugiego, poprowadźmy przez prostą  $w$

i tę krawędź płaszczyzny, która przetnie drugi graniastostup w trójkącie. Punkty przecięcia się boków tego trójkąta z krawędzią są szukanymi punktami. Krawędź płaszczyzny, przechodzącej przez krawędź ostrostupa, z płaszczyzną  $\varphi$  przejdzie przez punkt  $P$  i wierzchołek wielokąta podstawy, z którego wychodzi krawędź boczna. Ten sposób szukania wierzchołków wielokąta przenikania wskazuje od razu, które krawędzie biorą udział w przenikaniu, a które leżą po za nim. I tak, jeżeli prosta  $PA$  jest prostą przecięcia się płaszczyzny poprowadzonej przez krawędź  $W_1 A$  z płaszczyzną  $\varphi$ , to ponieważ prosta ta nie przecina podstawy ostrostupa  $W_2$ , więc i krawędź  $W_1 A$  nie przebija tego ostrostupa. Inaczej jest z płaszczyzną przechodzącą przez krawędź  $W_2 H$ . Przecina ona bowiem ostrostup  $W_1$  w trójkącie  $W_1 III$ , co oznacza, że krawędź  $W_2 H$  przebija ten ostrostup w dwóch punktach, oznaczonych liczbami 1 i 2. Podobnie krawędź  $W_2 E$  przebija ostrostup  $W_1$  w punktach 3 i 4, krawędź  $W_2 G$  w punktach 5 i 6. Krawędź  $W_1 D$  ostrostupa  $W_1$  przebija ostrostup  $W_2$  w punktach 7 i 8, a wreszcie krawędź  $W_2 F$  ostrostupa  $W_2$  przebija ostrostup  $W_1$  w punktach 9 i 10. Krawędzie  $W_2 B$  i  $W_2 C$  nie biorą udziału w przenikaniu. Ponieważ wszystkie krawędzie graniastostupa  $W_1$  przebijają graniastostup  $W_2$ , więc mamy przykład przenikania zupełnego, gdzie wielokąt składa się z dwóch oddzielnych części. Teraz należy połączyć otrzymane wierzchołki wielokąta przenikania. W przypadkach prostych, gdzie ilość punktów nie jest wielka, a więc i siatka linii konstrukcyjnych nie utrudnia orientacji, ustalenie następstwa punktów, które połączyć należy, nie nastęrcza zbyt trudności; zazwyczaj jednak rzecz ma się odmiennie, a wówczas postępujemy w sposób następujący:

Bierzemy pod uwagę wierzchołki wielokąta przenikania i notujemy krawędź jednego wielościanu i ściany drugiego, na których punkty te leżą. I tak np. punkty 1 i 2 leżą na krawędzi powstałej z przecięcia się ścian  $W_2 EH$  i  $W_2 HG$ , a nadto punkt 1 leży na ścianie  $AB W_1$ , a punkt 2 na ścianie  $AD W_1$ . Do oznaczenia ścian bocznych wystarczą krawędzie u podstawy, które te ściany dostatecznie określają. Jeżeli ściana jest widoczna, to jej krawędzi podstawowej damy znak dodatni (+), inaczej znak ujemny (—). Notatkę naszą, odnoszącą się do punktów 1 i 2, wyrazimy następującym symbolem:



1.  $+ EH, + HG, + AB,$   
 2.  $+ EH, + HG, + AD.$

Przetłómaczone na słowa, symbole te brzmią: Punkt 1 leży na krawędzi, powstałej z przecięcia się widocznych (+) ścian  $EH$  i  $HG$  ostrosłupa  $W_2$  i na ścianie widocznej  $AB$  ostrosłupa  $W_1$ ; punkt 2 leży na krawędzi ścian widocznych  $EH$  i  $HG$  ostrosłupa  $W_2$  i na widocznej ścianie  $AD$  ostrosłupa  $W_1$ .

Dla punktów 3 i 4 otrzymamy:

3.  $+ EH, - EF, + AB,$   
 4.  $+ EH, - EF, + AD,$

przyczem znak  $-$  przy ścianie  $EF$  oznacza, że ściana ta jest niewidoczna. Jeżeli to samo przeprowadzimy dla wszystkich dziesięciu punktów, to otrzymamy następującą tablicę, którą zestawiliśmy także na Rys. 324.\*

1	$+ EH$	$+ HG$	$+ AB$
2	$+ EH$	$+ HG$	$+ AB$
3	$+ EH$	$- EF$	$+ AB$
4	$+ EH$	$- EF$	$+ AD$
5	$+ HG$	$+ FG$	$+ AB$
6	$+ HG$	$+ FG$	$+ AD$
7	$+ AD$	$+ CD$	$- EF$
8	$+ AD$	$+ CD$	$+ FG$
9	$+ FG$	$- EF$	$+ AB$
10	$+ FG$	$- EF$	$+ CD$

Aby otrzymać porządek, w jakim otrzymane punkty należy połączyć, postępujemy w sposób następujący: Wyszedłszy z punktu 1, niechaj czytelnik przekreśli w pierwszym szeregu naszej tablicy wiersz ostatni i np. pierwszy, a więc oba dodatnie i niechaj szuka w następnych szeregach tych samych liter, a więc  $+ AB$  i  $+ EH$ . Znalazłszy je w szeregu 3, niechaj zanotuje obok liczby  $+ 1$  liczbę  $+ 3$ . Przekreśliwszy w tymże samym szeregu 3 ponownie wyraz ostatni, t. j.  $+ AB$  i pozostały  $- EF$ , niechaj szuka tych wyrażeń z tymi samymi znakami w dalszych szeregach. Znajdzie je w szeregu 9, co zanotuje obok poprzedniej  $+ 3$ , jednak ze znakiem ujemnym,

a to dlatego, że jeden z wyrazów ( $- EF$ ) jest ujemny, z czego wynika, że punkt 9 jako leżący na ścianie  $- EF$  może być niewidoczny. Przekreśliwszy wyrazy  $+ AB$  i  $+ FG$  znajdziemy je powtórnie w szeregu 5, a pozostałą tam parę wy-

razów  $+AB$  i  $HG$  w szeregu pierwszym. Tym sposobem łańcuch, którego pierwszym ogniwem był punkt  $+1$ , a który przedstawia się w ten sposób:

$$+1, +3, -9, +5, +1,$$

zamknął się. Otrzymany szereg liczb wskazuje nam bezpośrednio porządek łączenia punktów, stanowiących jeden z dwóch wielokątów przenikania, a ponadto poucza, które krawędzie tego wielokąta są niewidoczne. I tak, jeżeli dwie następujące po sobie liczby są dodatnie, to krawędź przenikania tymi punktami określona jest widoczną (np. krawędź  $1+3$ ). Jeżeli punkt dodatni połączyć mamy z ujemnym, to oznacza to, że odnośna krawędź przenikania jest niewidoczną (krawędź  $3-9$ ). Punkt  $-9$  połączony z  $5$  daje krawędź widoczną, a  $5$  połączony z  $1$  zamyka wielokąt przenikania również krawędzią widoczną.

Dla pozostałych szeregów naszej tabeli przeprowadzimy, wychodząc z punktu  $2$ , to samo i otrzymamy szereg:

$$+2, +4, -7, -10, +8, +6, +2,$$

a więc drugi wielokąt przenikania.

Otrzymanie z tablicy szeregu liczb wskazujących, z wykluczeniem pomyłek zarówno co do następstwa punktów, które należy połączyć, jak i co do „widoczności“ i „niewidoczności“ krawędzi wielokąta przenikania, polega na następującym rozumowaniu: Przekreślając w pierwszym szeregu tablicy wyrazy  $+AB$  i  $+EH$ , zaznaczamy tem, że punkt  $1$  leży na ścianach  $ABW_1$  i  $EHW_2$ ; szukając wyrazów  $AB$  i  $EH$  w dalszych szeregach tabeli, szukamy punktu leżącego na tychże samych ścianach obu ostrosłupów, a więc punktu, który połączony z pierwszym, wyznacza krawędź obu tych ścian. Przekreślając poraz drugi w szeregu  $3$  wyraz ostatni  $AB$  i pozostały  $-EF$  szukamy krawędzi ściany  $EFW_2$  i ściany  $ABW_1$ , która to krawędź wyjść musi z punktu  $3$ , gdyż płaszczyzny  $ABW_1$ ,  $EHW_2$  i  $EFW_2$  przecinają się właśnie w punkcie  $3$ . Ściana ostrosłupa, na której leży wierzchołek wielokąta przenikania, musi więc być dwukrotnie przekreślona w tablicy, gdyż uważany wierzchołek jest punktem wyjścia dla dwóch krawędzi wielokąta przenikania, leżących na jednej ścianie. Ściana więc np.  $AB$ , na której leżą punkty  $1, 3, 9$  i  $5$  wystąpi w tabeli cztery razy, ale będzie ośm razy przekreślona; na ścianie  $FG$  leży tylko punkt  $8$ , więc w tabeli naszej wy-

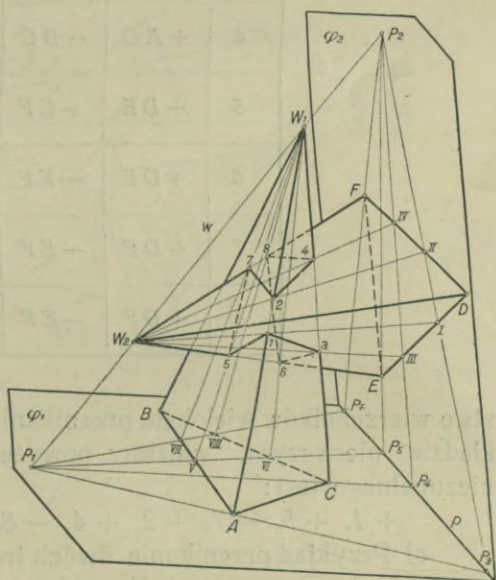


stąpi tylko raz jeden wyraz  $FG$ , jednak dwukrotnie przekreślony.

Prosta  $AB$  przecina się z krawędzią  $EH$  w punkcie  $M$ , który jest punktem przecięcia się płaszczyzn  $ABW_1$ ,  $EHW_2$  i  $\varphi$ , prosta więc  $1 + 3$  przechodzić musi przez punkt  $M$ . Podobnie prosta  $1 + 5$  przechodzi przez punkt  $N$ , w którym przecinają się płaszczyzny  $ABW_1$ ,  $HGW_2$  i  $\varphi$ . To samo odnosi się do wszystkich boków wielokąta przenikania.

b) Rys. 325. podaje przykład niezupełnego przenikania się dwóch ostrosłupów  $W_1$  i  $W_2$ , których podstawy  $ABC$  i  $DEF$  leżą na dwóch płaszczyznach, a mianowicie  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Zasadniczo zadanie rozwiążemy w ten sam sposób, jak poprzednie: więc przez wierzchołki obu ostrosłupów i przez ich poszczególne krawędzie prowadzimy płaszczyzny, przy pomocy których znajdziemy punkty przecięcia się krawędzi jednego ostrosłupa ze ścianami ostrosłupa drugiego.

Jeżeli punkty przecięcia się prostej  $w$ , łączącej wierzchołki obu ostrosłupów, z płaszczyznami  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  oznaczymy przez  $P_1$  i  $P_2$ , to prosta  $P_1A$  jest krawędzią płaszczyzny  $\varphi_1$  i płaszczyzny  $\alpha$ , przechodzącej przez prostą  $w$  i krawędź  $AW_1$ . Krawędź ta przecina prostą przecięcia się  $p$  płaszczyzn  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  w punkcie  $P_3$ , który wraz z punktem  $P_2$  wyznacza krawędź płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varphi_2$ . Krawędź ta przecina podstawę ostrosłupa  $W_2$  w punktach  $I$  i  $II$ , a proste  $IW_2$  i  $IIW_2$  są temi, w których płaszczyzna  $\alpha$  przecina ostrosłup  $W_2$ . Punkty przecięcia się  $1$  i  $2$  tych prostych z krawędzią  $AW_1$  są punktami, w których krawędź ta przebija ostrosłup  $W_2$ . W ten sposób znajdziemy



Rys. 325.

punkty przebicia się 3 i 4 krawędzi  $CW_1$  z ostrosłupem  $W_2$ , punkty przebicia się 5 i 6 krawędzi  $EW_2$  z ostrosłupem  $W_1$  i punkty 7 i 8, w których krawędź  $FW_2$  przebija ten sam ostrosłup  $W_1$ . Tablicę, na podstawie której otrzymamy następ-

1	+ AB	+ AC	+ DE
2	+ AB	+ AC	+ DF
3	+ AC	- BC	+ DE
4	+ AC	- BC	+ DF
5	+ DE	- EF	+ AB
6	+ DE	- EF	- BC
7	+ DF	- EF	+ AB
8	+ DF	- EF	- BC

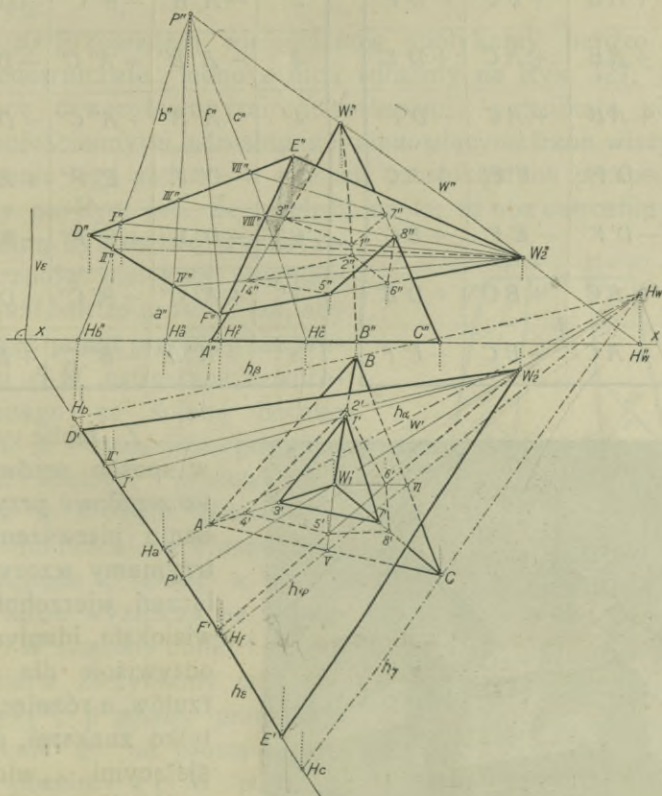
stwo wierzchołków wielokąta przenikania, zestawioną jak w przykładzie pierwszym, widzimy powyżej. Wielokąt przenikania niezupełnego jest:

$$+ 1, + 5, - 7, + 2, + 4, - 8, - 6, - 3, + 1.$$

c) Przykład przenikania dwóch trójściennych ostrosłupów, przeprowadzony w rzutach Monge'a, podaje Rys. 326\*. Ostrosłup  $W_1$  stoi na rzutni poziomej, podstawa ostrosłupa  $W_2$  znajduje się na płaszczyźnie poziomo rzucającej  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ). Prosta  $w$  ( $w' w''$ ), łącząca wierzchołki obu ostrosłupów, przebija  $\varepsilon$  w punkcie  $P$  ( $P' P''$ ), a rzutnię poziomą w punkcie  $H_w$  ( $H_w H_w''$ ). Poprowadźmy przez prostą  $w$  i krawędź boczną  $BW_1$  ostrosłupa  $W_1$  płaszczyznę  $\beta$ , to jej ślad poziomy  $h_\beta$  przejdzie przez punkty  $H_w$  i  $B$ ; rzut pionowy krawędzi płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\beta$  łączy punkty  $P''$  i  $H_b''$  i przecina trójkąt  $D'' E'' F''$  w punktach  $I''$  i  $II''$ , które odrzucone na ślad  $h_\varepsilon$  dają punkty  $I$  i  $II$ .



Punkty  $I (I' I'')$  i  $II (II' II'')$  połączone z wierzchołkiem  $W_2 (W_2' W_2'')$  dają proste, w których płaszczyzna  $\beta$  przecina ostrosłup  $W_2$ . Punkty  $1 (1' 1'')$  i  $2 (2' 2'')$ , w których krawędź  $B W_1$  przecina proste  $I W_2$  i  $II W_2$ , są punktami przebiecia się



Rys. 326.\*

tej krawędzi z ostrosłupem  $W_2$ . W ten sam sposób znajdziemy punkty przebiecia się  $3 (3' 3'')$  i  $4 (4' 4'')$  krawędzi  $A W_1$  z ostrosłupem  $W_2$ , a to przy pomocy płaszczyzny  $\alpha$ , przechodzącej przez tę krawędź i przez prostą  $w$ . Z kolei wyznaczymy przy pomocy płaszczyzny  $\varphi$  punkty  $5 (5' 5'')$  i  $6 (6' 6'')$ , w których krawędź  $F W_2$  przebija ostrosłup  $W_1$ , a w końcu punkty przebiecia się  $7 (7' 7'')$  i  $8 (8' 8'')$  krawędzi  $C W_1$  z ostrosłupem  $W_2$ .

Zestawmy otrzymane punkty i ściany, na których punkty te leżą, osobno dla każdego rzutu, w tablice.

1'	+ AB	+ BC	+ D' E'
2'	+ AB	+ BC	- D' F'
3'	+ AB	+ AC	+ D' E'
4'	+ AB	+ AC	- D' F'
5'	- D' F'	- E' F'	+ AC
6'	- D' F'	- E' F'	+ BC
7'	+ AC	+ BC	+ D' E'
8'	+ AC	+ BC	- E' F'

1''	- A'' B''	- B'' C''	- D'' E''
2''	- A'' B''	- B'' C''	- D'' F''
3''	- A'' B''	+ A'' C''	- D'' E''
4''	- A'' B''	+ A'' C''	- D'' F''
5''	- D'' F''	+ E'' F''	+ A'' C''
6''	- D'' F''	+ E'' F''	- B'' C''
7''	+ A'' C''	- B'' C''	- D'' E''
8''	+ A'' C''	- B'' C''	+ E'' F''



Rys. 327. Cerkiew św. Trójcy w Żółtkwi  
(Zdjęcie fotograficzne prof. dr. Jana Sas Zubrzyckiego)

Z tablic tych, w sposób omówiony szczegółowo przy zadaniu pierwszym, otrzymamy wzory połączeń wierzchołków wielokąta, identyczne oczywiście dla obu rzutów, a różniące się tylko znakami, określającymi „widoczność“ i „niewidoczność“ poszczególnych krawędzi, a mianowicie:

Dla rzutu poziomego mamy:

$$+1', +3', +7', +1', \text{ i} \\ -2', -4', -5', \\ -8', -6', -2';$$

Rzut pionowy wielokątów wyrazi się:



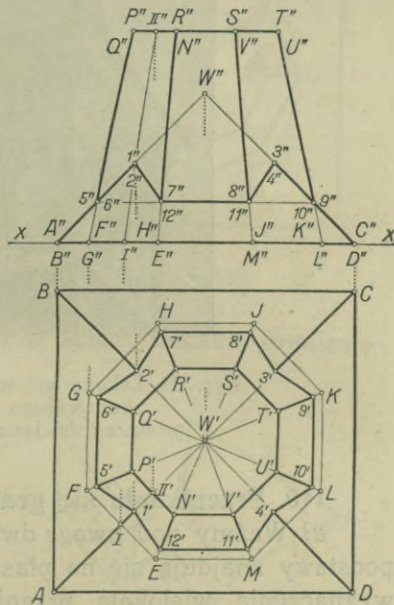
$- 1'', - 3'', - 7'', - 1''$  i  
 $- 2'', - 4'', - 5'', + 8'', - 6'', - 2''.$

Zazwyczaj zestawiamy tylko tabelę dla jednego rzutu i z niego po wykreśleniu orientujemy się, które krawędzie wielokąta przenikania w drugim rzucie są widoczne, a które zakryte.

d) Przenikania wielościanów spotykamy bardzo często w budownictwie; jedno z nich widzimy na Rys. 327. Dachy, będące czworościennymi ostrosłupami, przenikają się tam z ośmiościennymi ostrosłupami, stanowiącymi trzon wieży. Rozwiązanie tego zadania w rzutach prostokątnych przeprowadziliśmy na Rys. 328. Ze względu na to, że oba ostrosłupy mają wspólną oś pionową, wyznaczenie rzutów wielokąta przenikania jest bardzo proste. I tak, aby znaleźć punkt przebicia się krawędzi  $AW$  ostrosłupa czworościennego ze ścianą boczną  $EFPN$  ośmiościennego ostrosłupa ściętego, poprowadźmy przez tę krawędź płaszczyznę poziomo rzucającą. Płaszczyzna ta przetnie tę ścianę w prostej  $III$ , która wyznacza na krawędzi  $AW$  szukany punkt  $1(1' 1'')$ . Najpierw otrzymamy rzut pionowy  $1''$ , a potem, przez odniesienie go na prostą  $AW'$ , rzut poziomy  $1'$ . W podobny sposób otrzymamy punkty  $2(2' 2'')$ ,  $3(3' 3'')$  i  $4(4' 4'')$ .

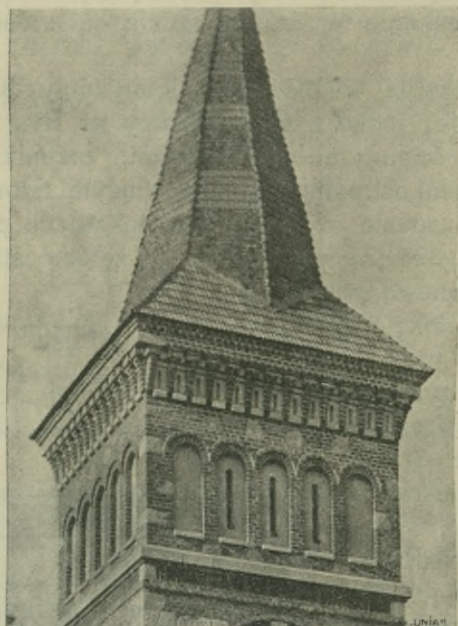
Sciana  $FGPQ$  przecina ścianę  $ABW$  w krawędzi  $5 6$ , która jest prostopadłą do rzutni pionowej. Krawędzie ścian  $HIRS$  i  $BCW$ , ścian  $KLTU$  i  $CDW$ , a wreszcie  $EMNV$  i  $ADW$  leżą na tej samej płaszczyźnie poziomej, wraz z krawędzią  $5 6$ . Łącząc punkty  $5$  i  $12$  z punktem  $1$ , punkty  $6$  i  $7$  z  $2$ ,  $8$  i  $9$  z  $3$ , a  $10$  i  $11$  z  $4$ , otrzymamy szukany wielokąt przenikania.

e) Rys. 329. jest dalszym przykładem stosowanych w bu-



Rys. 328.

downictwie przenikań wielościanów. Mamy tu również przenikanie ostrosłupa czworościennego z ośmiościanem, którego konstrukcyjne rozwiązanie przeprowadziliśmy na Rys. 330.



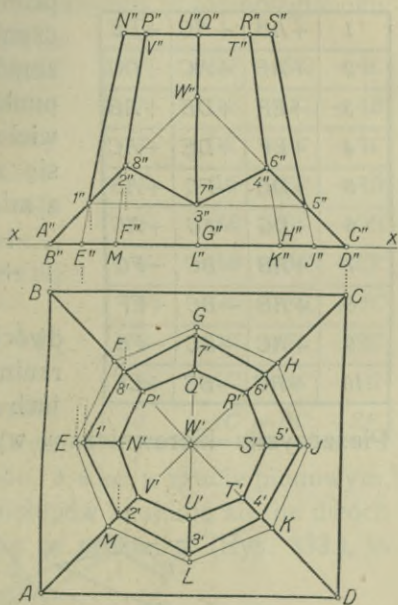
Rys. 329. Zakończenie wieży kościoła w Bruśniku, zbudowanego według projektu profesora dr. Jana Sas Zubrzyckiego

### 110. Przenikania się graniastosłupów.

a) Weźmy pod uwagę dwa graniastosłupy  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ , których podstawy znajdują się na płaszczyźnie  $\varphi$  (Rys. 331.). W celu wyznaczenia wielokąta przenikania, więc punktów przebicia się krawędzi jednego graniastosłupa z drugim, obierzmy dowolny punkt  $P$  w przestrzeni i poprowadźmy przezeń prostą  $p_1$  równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa  $\Gamma_1$  i prostą  $p_2$  równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa  $\Gamma_2$ . Prosta  $p$ , łącząca punkty przebicia się  $P_1$  i  $P_2$  prostych  $p_1$  i  $p_2$  z płaszczyzną  $\varphi$ , jest śladem płaszczyzny równoległej do krawędzi bocznych obu graniastosłupów, zwanej płaszczyzną kierowniczą. Płaszczyzny, przechodzące przez krawędzie boczne jednego graniastosłupa, równoległe do płaszczyzny kierowni-



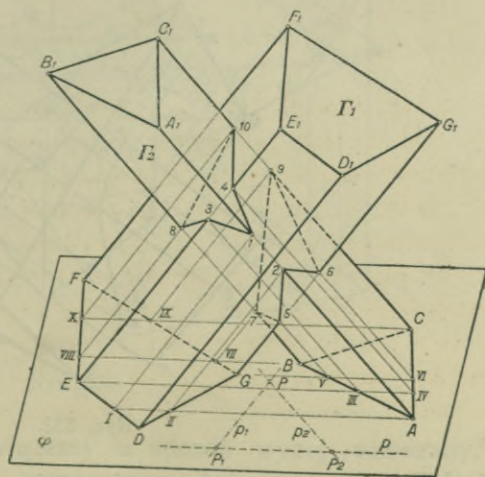
czej, przecinają drugi graniastosłup w równoległoboku. W szczególności płaszczyzna przechodząca przez krawędź boczną  $AA_1$  graniastosłupa  $\Gamma_2$  przecina płaszczyznę  $\varphi$  w prostej, przechodzącej przez punkt  $A$  równoległej do prostej  $p$  i przecinającej podstawę graniastosłupa  $\Gamma_1$  w punktach  $I$  i  $II$ . Równoległe, wykreślone do krawędzi bocznych graniastosłupa  $\Gamma_1$  przez punkty  $I$  i  $II$ , przecinają krawędź  $AA_1$  w punktach  $1$  i  $2$ , które są punktami przebicia się tej krawędzi z  $\Gamma_1$ . W analogiczny sposób znajdziemy punkty przebicia się  $3$  i  $4$  krawędzi  $EE_1$  graniastosłupa  $\Gamma_1$  z  $\Gamma_2$ , dalej punkty  $5$  i  $6$ , w których krawędź  $GG_1$  przebija  $\Gamma_2$ , punkty  $7$  i  $8$  a w końcu  $9$  i  $10$ . Układamy tablicę, jak to czyniliśmy przy przenikaniu się ostrosłupów, oznaczając w niej ściany boczne graniastosłupów literami od



Rys. 330.

nośnych krawędzi podstawowych. Tak np. punkty  $1$  i  $2$  leżą na krawędzi widocznych ścian bocznych  $ABA_1B_1$  i  $ACA_1C_1$ , a ponadto punkt  $1$  leży na widocznej ścianie  $EDE_1D_1$  a punkt  $2$  na widocznej ścianie  $DGD_1G_1$ . Wyrazimy to więc symbolicznie w następujący sposób:

1.  $+AB, +AC, +DE;$
2.  $+AB, +AC, +DG.$



Rys. 331.

Zestawienie dla wszystkich punktów podaje tablica. Zu-

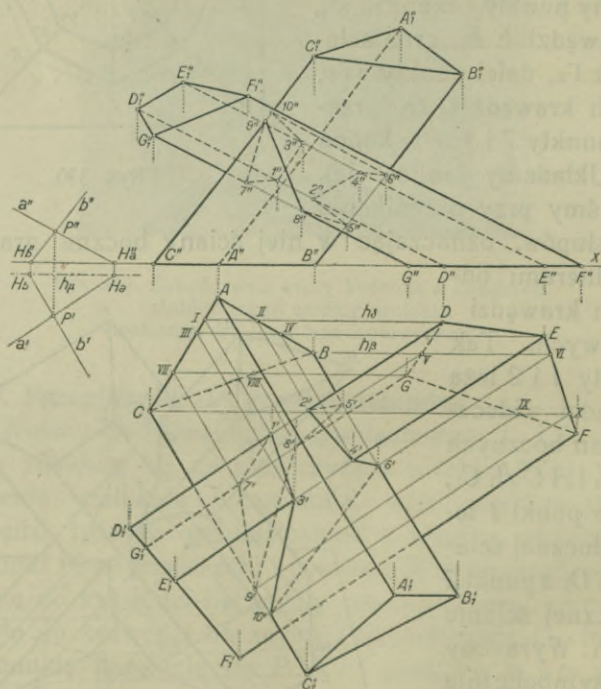
1	+AB	+AC	+DE
2	+AB	+AC	+DG
3	+EF	+DE	+AB
4	+EF	+DE	+AC
5	+DG	-FG	+AB
6	+DG	-FG	+AC
7	+AB	-BC	-FG
8	+AB	-BC	+EF
9	+AC	-BC	-FG
10	+AC	-BC	+EF

pełnie w ten sam sposób, jak to czyniliśmy przy przenikaniu się ostrosłupów, wyznaczmy następstwo punktów stanowiących wierzchołki wielokąta przenikania, który składa się z dwóch pięciokątów skośnych, a mianowicie:

$$+1, +3, +8, -10, +4, +1 \text{ i} \\ +2, +5, -7, -9, -6, +2.$$

b) Przenikanie się niezupełne dwóch graniastosłupów, stojących na rzutni poziomej, przedstawione w rzutach Monge'a, widzimy na Rys. 332.

Płaszczyzna kierownicza  $\mu$  wyznaczona jest prostymi  $a(a'a'')$



Rys. 332.

i  $b(b'b'')$ , poprowadzonymi przez dowolnie przyjęty punkt  $P(P'P'')$  w przestrzeni równoległe do krawędzi bocznych



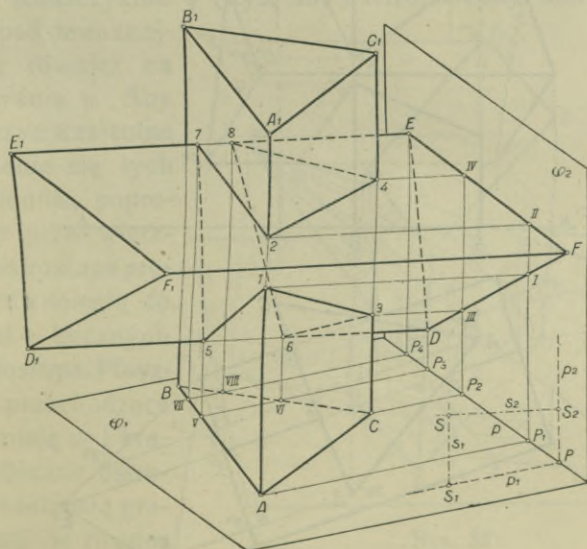
graniastosłupów. Płaszczyzna  $\delta // \mu$  a przechodząca przez krawędź  $DD_1$  przecina drugi graniastosłup w równoległoboku, a ten krawędź  $DD_1$  w punktach  $1(1' 1'')$  i  $2(2' 2'')$ , które są punktami przebicia się tej krawędzi z graniastosłupem. Tą drogą otrzymamy wszystkie dziesięć punktów przenikania, których rozmieszczenie dla rzutu poziomego ujmijemy w tabelę. Wielokąt przenikania otrzymany z tej tabeli jest:

$+1', +3', +10', -6', +4', +2', -5', -8', -9', -7', -1'$ .

Bez trudności odróżnimy z rzutu poziomego krawędzie widoczne od niewidocznych w widoku z przodu, a więc w rzucie pionowym.

c) Jeżeli podstawy graniastosłupów znajdują się na dwóch płaszczyznach przecinających się w prostej  $p$  (Rys. 333.), to

1'	+DE	-DG	+AC
2'	+DE	-DG	+AB
3'	+DE	+EF	+AC
4'	+DE	+EF	+AB
5'	+AB	-BC	-DG
6'	+AB	-BC	+EF
7'	-DG	-FG	+AC
8'	-DG	-FG	-BC
9'	+AC	-BC	-FG
10'	+AC	-BC	+EF



Rys. 333.

i wówczas zadanie rozwiążemy w sposób wyżej wskazany. Płaszczyzna kierownicza wyznaczona jest prostymi  $s_1$  i  $s_2$ , poprowadzonymi przez dowolnie w przestrzeni obrany punkt  $S$ .

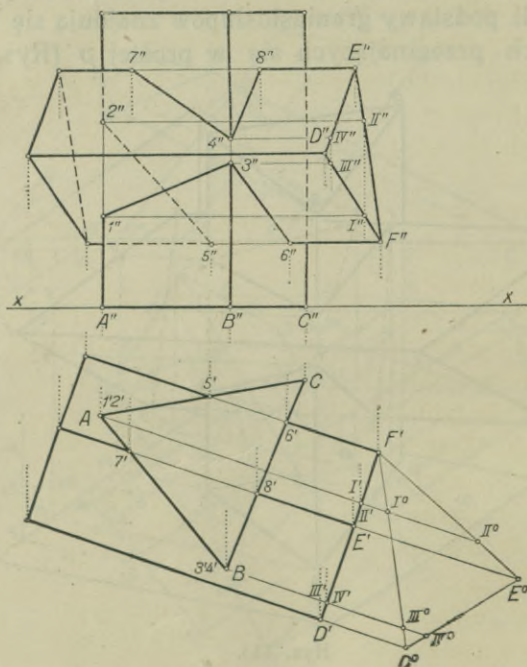
Przyjmijmy, że płaszczyzna kierownicza przecina płaszczyzny  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  w prostych  $p_1$  i  $p_2$ , to proste te wyznaczają kierunki

1	+AB	+AC	+DF
2	+AB	+AC	+EF
3	+AC	-BC	+DF
4	+AC	-BC	+EF
5	-ED	+DF	+AB
6	-ED	+DF	-BC
7	+EF	-ED	+AB
8	+EF	-ED	-BC

krawędzi płaszczyzn, poprowadzonych przez krawędzie boczne graniastosłupów, z płaszczyznami  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Krawędź  $AA_1$  przebija drugi graniastosłup, w punktach 1 i 2, a krawędź  $CC_1$  w punktach 3 i 4; krawędzie boczne  $DD_1$  i  $EE_1$  przebijają graniastosłup o podstawie  $ABC$  w punktach 5, 6 i 7, 8. Zestawimy tablicę, a z niej następstwo wierzchołków wielokąta przenikania:

+ 1, + 5, - 7, + 2, + 4, - 8, - 6, - 3 + 1.

d) Przykład przenikania dwóch graniastosłupów prostych, których krawędzie boczne są prostopadłe, widzimy na Rys. 334.



Rys. 334.

Rzut poziomy wielokąta przenikania schodzi się z rzutem poziomym graniastosłupa, którego krawędzie boczne są pionowe.



Celem dokładnego wyznaczenia rzutu pionowego punktów 1, 2, 3 i 4, w których te pionowe krawędzie przebijają drugi graniastosłup, wykonaliśmy kład podstawy  $DEF$  na płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez punkt  $F$ , aby móc wyznaczyć wysokości punktów I, II, III i IV, a względnie punktów 1, 2, 3 i 4.

Rzuty pionowe punktów przenikania zestawimy w tabelce, a z niej otrzymamy rzut pionowy wielokąta przenikania, a mianowicie:

1	+AB	-AC	+DF
2	+AB	-AC	-EF
3	+AB	+BC	+DF
4	+AB	+BC	+EF
5	+DF	-EF	-AC
6	+DF	-EF	+BC
7	+DE	-EF	+AB
8	+DE	-EF	+BC

+1, +3, +6, -8, +4, +7, -2, -5, -1.

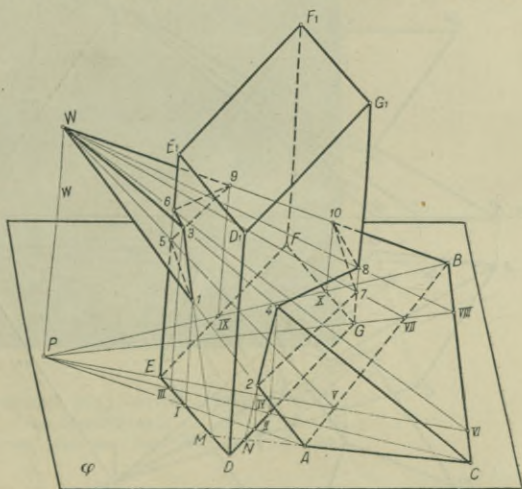
Czytelnik zechce uzupełnić rysunek wykreśleniem kreślonych odcinków:

$1'' 5'$ ,  $2'' 7''$  i  $6'' 8''$ .

### 111. Przenikanie się ostrosłupów z graniastosłupami.

a) Weźmy pod uwagę graniastosłup czworosieczny, stojący na płaszczyźnie  $\varphi$  (Rys. 335.) i trójścienny ostrosłup  $W$ ,

k którego podstawa znajduje się również na płaszczyźnie  $\varphi$ . Aby wyznaczyć wzajemne przenikanie się tych wielościanów, poprowadźmy przez wierzchołek ostrosłupa prostą  $w$ , równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa. Płaszczyzny, przechodzące przez prostą  $w$  i krawędzie boczne ostrosłupa, przecinają graniastosłup w równoległobokach, a płaszczyzny, przechodzące przez prostą  $w$  i krawędzie boczne graniastosłupa, przecinają ostrosłup w trójkątach. Niechaj punkt  $P$  jest śladem prostej  $w$  na płaszczyźnie  $\varphi$ , to proste, łączące ten punkt z wierzchołkami wielokątów podstawy ostrosłupa i gra-



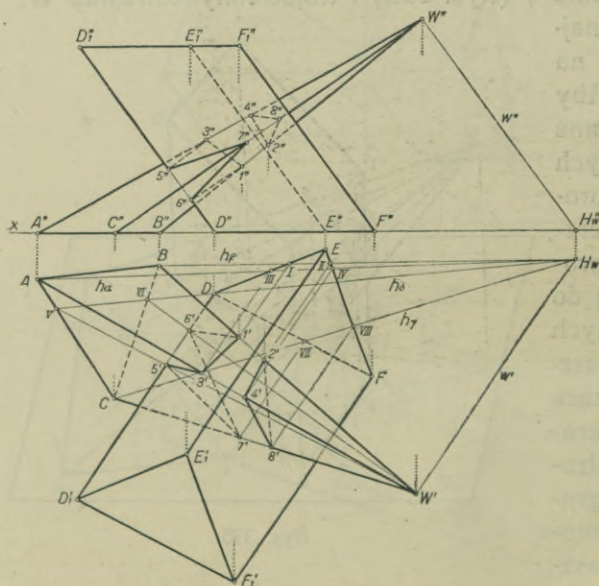
Rys. 335.

nianostłupa, są śladami płaszczyzn, przechodzących przez odpowiednie krawędzie boczne tych wielościanów, na płaszczyźnie  $\varphi$ . I tak płaszczyzna, poprowadzona przez prostą  $w$  i krawędź  $AW$ , przecina podstawę graniastostłupa w punktach  $I$  i  $II$ , a ściany boczne graniastostłupa w prostych równoległych do krawędzi bocznych, wychodzących z punktów  $I$  i  $II$ . Tym sposobem otrzymamy punkty przenikania  $1$  i  $2$ , a następnie dalsze aż do  $9$  i  $10$ , które zestawimy, jak w poprzednich przykładach w tablicę, a z niej zestawimy wielokąty przenikania zupełnego:

1	+AC	-AB	+DE
2	+AC	-AB	+DG
3	+AC	+BC	+DE
4	+AC	+BC	+DG
5	+DE	-EF	-AB
6	+DE	-EF	+BC
7	+DG	-FG	-AB
8	+DG	-FG	+BC
9	+BC	-AB	-EF
10	+BC	-AB	-FG

+1, +3, +6, -9, -5, -1 i  
+2, +4, +8, -10, -7, -2.

b) Rys. 336. przedstawia, w rzutach prostokątnych na dwie płaszczyzny, przenikanie zupełne trójściennego ukośnego ostrostłupa z takimże graniastostłupem. Zadanie rozwiązane jest w sposób omówiony powyżej; czytelnikowi pozostawiono zestawienie tablicy, a z niej wielokątów przenikania dla obu rzutów.



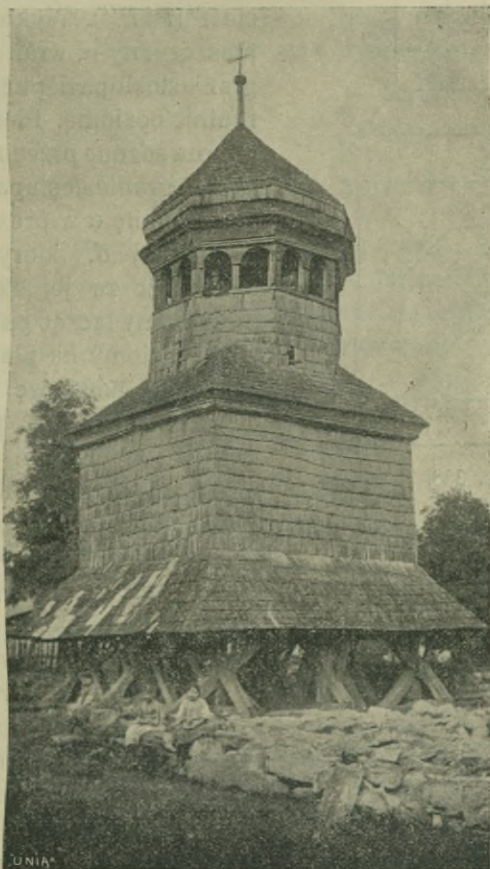
Rys. 336.

c) Przykład przenikania ostrostłupa z graniastostłupem, wzięty z budownictwa, podaje Rys. 337. Dach, kształt cieżwo-

rościennego ostrostłupa, przenika się z trzonem wieży, będącym prostym ośmiościanem graniastostłupa.



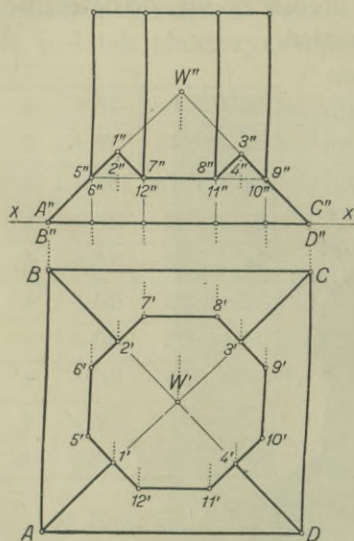
Rozwiązanie tego zadania w rzutach Monge'a przeprowadziliśmy na Rys. 338., który sam tłumaczy się dostatecznie jasno i nie wymaga słownych wyjaśnień.



Rys. 337. Dzwonnica przy cerkwi Uśpienia M. B.  
w Czortkowie  
(Zdjęcie fotograficzne prof. dr. Jana Sas Zubrzyckiego)

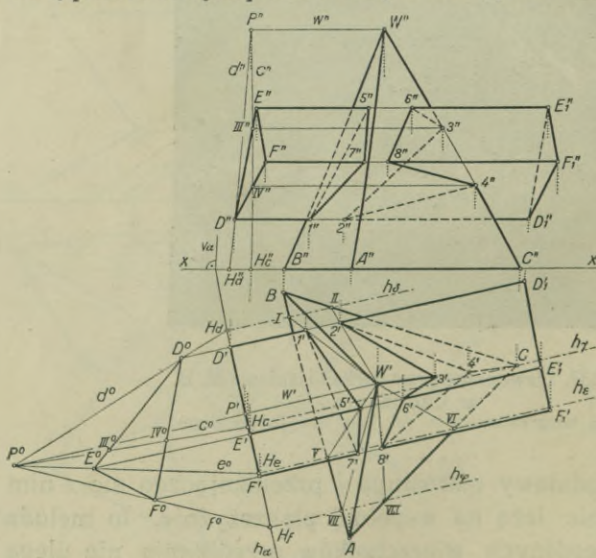
d) Jeżeli podstawy ostrosłupa i przenikającego się z nim graniastosłupa nie leżą na wspólnej płaszczyźnie, to metoda szukania poszczególnych wierzchołków przenikania nie ulega zmianie. Przykład takiego przenikania podaje Rys. 339. Podstawa  $ABC$  ostrosłupa leży na rzutni poziomej, podstawa  $DEF$  prostego graniastosłupa znajduje się na płaszczyźnie

poziomo rzucającej  $\alpha$ . Prosta  $w$  ( $w'$   $w''$ ), poprowadzona przez wierzchołek równoległe do krawędzi bocznych graniastostupa, przebija płaszczyznę  $\alpha$  w punkcie  $P$  ( $P'$   $P''$ ). Wykonajmy kład płaszczyzny  $\alpha$ , wraz z podstawą graniastostupa i punktem  $P$ , na rzutnię poziomą. Płaszczyzna  $\delta$ , poprowadzona przez  $w$  i krawędź  $DD_1$  graniastostupa, przecina płaszczyznę  $\alpha$  w prostej  $d$ . Kład  $d^0$  prostej  $d$ , który uważany być może za jej rzut boczny, otrzymamy łącząc punkt  $P_0$  z  $D_0$ .



Rys. 338.

Ślad poziomy  $h\delta$  płaszczyzny  $\delta$  przecina podstawę ostrosłupa w punktach  $I$  i  $II$ ; proste  $I W'$  i  $II W'$  są rzutami poziomymi prostych, w których płaszczyzna  $\delta$ , przechodząca przez krawędź  $DD_1$ , przecina ostrosłup. Punk-



Rys. 339.

ty  $I$  ( $I'$   $I''$ ) i  $II$  ( $II'$   $II''$ ) są punktami przebicia się krawędzi  $DD_1$  z ostrosłupem. Przy pomocy płaszczyzny  $\gamma$ , której ślad poziomy  $h\gamma$  przechodzi przez punkt  $C$ , a która poprowadzona jest przez krawędź boczną  $WC$  ostrosłupa, otrzymamy punkty

przebicia się  $3$  ( $3'$   $3''$ ) i  $4$  ( $4'$   $4''$ ) tej krawędzi z graniastostupem.



Płaszczyzny  $\varepsilon$  i  $\varphi$ , przechodzące przez krawędzie boczne  $EE_1$  i  $FF_1$  graniastostupa, a przecinające płaszczyznę  $\alpha$  w prostych  $e$  i  $f$ , umożliwią wyznaczenie punktów przenikania 5, 6 i 7, 8. Zestawiwszy otrzymane punkty i ściany, na których one leżą, w tablicę, otrzymamy następnie wzór połączeń, wykazujący dwa wielokąty przenikania, które tym sposobem jest przenikaniem zupełnym.

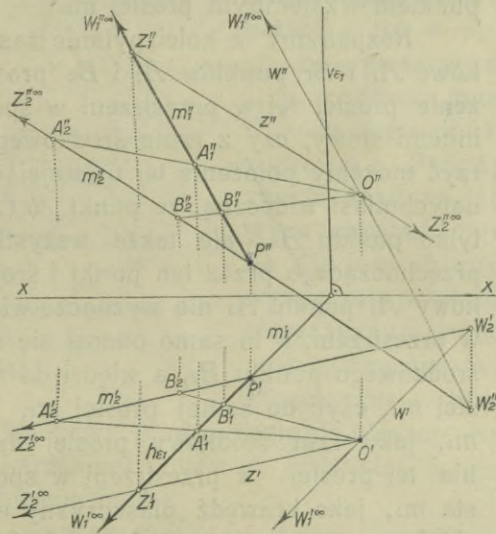
## § 9. KOLINEACYA ŚRODKOWA UKŁADÓW PŁASKICH

**112. Rzut środkowy.** Z pojęciem rzutu środkowego na prostą i płaszczyznę zapoznaliśmy się w ust. 8. W tym i w następnych ustępach zajmiemy się bliżej tą metodą rzutów, jednak rozważania nasze ograniczymy do wykazania jedynie pewnych związków, które znajdą następnie zastosowanie w metodzie rzutów prostokątnych.

Przyjmijmy płaszczyznę poziomo rzucającą  $\varepsilon_1$  ( $h_{\varepsilon_1} v_{\varepsilon_1}$ ) (Rys. 340.) i uwzględnijmy ją za płaszczyznę rzutów, czyli jak w metodzie rzutów środkowych mówimy, płaszczyznę obrazu albo tło. Dowlonie w przestrzeni przyjęty punkt

$O$  ( $O'$   $O''$ ) niechaj będzie środkiem

rzutów, a więc punktem, przez który przechodzą wszystkie promienie rzutów. Weźmy pod uwagę dowolną prostą  $m_2$  ( $m_2'$   $m_2''$ ) w przestrzeni i znajdziemy jej rzut środkowy na płaszczyznę  $\varepsilon_1$ . W tym celu obierzmy na prostej  $m_2$  dwa punkty  $A_2$  ( $A_2'$   $A_2''$ ) i  $B_2$  ( $B_2'$   $B_2''$ ), połączmy je ze środkiem rzutów  $O$  ( $O'$   $O''$ ) i wyznaczmy punkty przecięcia się  $A_1$  ( $A_1'$   $A_1''$ ) i  $B_1$  ( $B_1'$   $B_1''$ )



Rys. 340.

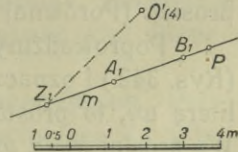
tych promieni rzutów z płaszczyzną  $\varepsilon_1$ . Punkt  $A_1$  jest rzutem środkowym punktu  $A_2$  na płaszczyznę  $\varepsilon_1$ , punkt  $B_1$  rzutem środkowym punktu  $B_2$ . Prostą  $m_1$  ( $m_1' m_1''$ ), wyznaczoną punktami  $A_1$  ( $A_1' A_1''$ ) i  $B_1$  ( $B_1' B_1''$ ), będącą zarazem prostą przecięcia się płaszczyzny, przechodzącej przez prostą  $m_2$  i punkt  $O$ , nazywamy rzutem środkowym prostej  $m_2$  na płaszczyznę  $\varepsilon_1$ .

Rzut środkowy  $Z_1$  ( $Z_1' Z_1''$ ) punktu niewłaściwego  $Z_2^\infty$  ( $Z_2'^\infty Z_2''^\infty$ ) prostej  $m_2$  ( $m_2' m_2''$ ) otrzymamy jako punkt przecięcia się promienia  $z$  ( $z' z''$ ), przechodzącego przez środek rzutów równoległe do prostej  $m_2$ , z płaszczyzną obrazu  $\varepsilon_1$ . Punkt  $Z_1$  nazywać będziemy śladem zbiegu, albo punktem wzajemnym prostej  $m_2$ . Prosta  $w$  ( $w' w''$ ), wyprowadzona przez środek rzutów równoległe do prostej  $m_1$  ( $m_1' m_1''$ ), przetnie prostą  $m_2$  w punkcie  $W_2$  ( $W_2' W_2''$ ), który nazywamy punktem wzajemnym prostej  $m_1$ .

Rozpatrzmy z kolei pytanie zasadnicze, czy rzuty środkowe  $A_1$  i  $B_1$  punktów  $A_2$  i  $B_2$  prostej  $m_2$ , wyznaczają położenie prostej tej w przestrzeni w sposób jednoznaczny, czyli innymi słowy, czy z rzutu środkowego  $m_1$  prostej  $m_2$  odtworzyć możemy położenie tej ostatniej w przestrzeni. Jest rzeczą natychmiast widoczną, że punkt  $A_1$  ( $A_1' A_1''$ ) jest rzutem nie tylko punktu  $A_2$ , ale także wszystkich punktów promienia, przechodzącego przez ten punkt i środek rzutów  $O$ . Rzut środkowy  $A_1$  punktu  $A_2$  nie wyznacza więc położenia tego punktu w przestrzeni, a to samo odnosi się do punktu  $B_1$ , jako rzutu środkowego punktu  $B_2$ , a więc i do wszystkich punktów prostej  $m_1$ , czyli do samej prostej  $m_1$ . Widoczne stąd, że prosta  $m_1$ , jako rzut środkowy prostej  $m_2$ , nie wyznacza położenia tej prostej w przestrzeni w sposób jednoznaczny; prosta  $m_1$ , jako krawędź płaszczyzny  $\varepsilon_1$  z płaszczyzną  $\varphi$ , przechodzącą przez prostą  $m_2$  i środek  $O$ , jest równocześnie rzutem wszystkich prostych, leżących na płaszczyźnie  $\varphi$ . Między punktami prostej  $m_1$  znajdują się jednak dwa takie, które wyznaczają położenie prostej  $m_2$  w przestrzeni w sposób jednoznaczny. Punktami tymi są: ślad  $P$  ( $P' P''$ ) prostej  $m_2$  na płaszczyźnie obrazu zwany śladem tłowym i punkt wzajemny  $Z_1$  ( $Z_1' Z_1''$ ). W istocie znając bowiem oba te punkty, znamy położenie prostej  $m_2$ , która przejdzie przez punkt  $P$  równoległe do promienia  $OZ_1$ .

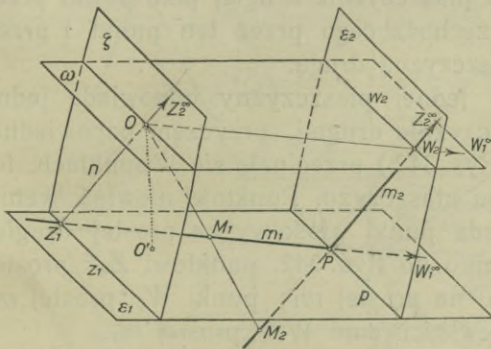


Jeżeli płaszczyzna rysunku będzie tłem, punkt  $O$  ( $O'$ , 4) środkiem rzutów (Rys. 341.), punkt  $P$  śladem tłowym, a punkt  $Z_1$  śladem zbiegu prostej  $m_2$ , to położenie tej prostej w przestrzeni wyznaczone jest w sposób jednoznaczny. Wyprowadźmy bowiem w punkcie  $O'$  prostopadłą i odmierzymy na niej od płaszczyzny rysunku cztery jednostki długości, a otrzymany środek rzutów  $O$  połączmy z punktem  $Z_1$ , to prosta, przechodząca przez punkt  $P$  równoległe do promienia  $OZ_1$ , jest prostą  $m_2$ .



Rys. 341.

**113. Wyznaczenie położenia płaszczyzny metodą rzutu środkowego.** Przyjmijmy płaszczyznę  $\varepsilon_1$  (Rys. 342.) jako płaszczyznę rzutów, tło, a punkt  $O$  jako środek rzutów. Do-

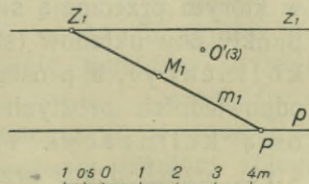


Rys. 342.

wolna płaszczyzna  $\varepsilon_2$  przecina tło w prostej  $p$ , a płaszczyzna  $\zeta$ , przechodząca przez  $O$  równoległe do  $\varepsilon_2$ , w prostej  $z_1$ . Prosta  $p$ , zwana śladem tłowym i prosta  $z_1$ , zwana śladem zbiegu, wyznaczają położenie płaszczyzny  $\varepsilon_2$  w sposób jednoznaczny.

Płaszczyzna  $\varepsilon_2$  prze-

chodzi bowiem przez ślad tłowy  $p$ , równoległe do płaszczyzny, wyznaczonej prostą  $z_1$  i środkiem rzutów  $O$ . Jeżeli płaszczyzna tej kartki jest tłem, a położenie środka rzutów względem niej wyznaczone jest rzutem cechowanym  $O'$  (3) (Rys. 343.), to znając ślad tłowy  $p$  i ślad zbiegu  $z_1$  płaszczyzny  $\varepsilon_2$ , odtworzymy położenie jej w sprzestrzeni w sposób następujący: przez środek rzutów  $O$  i przez prostą  $z_1$  wyobraźmy sobie przechodzącą płaszczyznę  $\zeta$ ; płaszczyzna poprowadzona przez prostą  $p$ , równoległe do  $\zeta$ , jest płaszczyzną  $\varepsilon_2$ .



Rys. 343.

Jeżeli prosta  $m_2$  (Rys. 342.) leży na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$ , to jej ślad tłowy  $P$  leży na śladzie tłowym  $p$ , a ślad zbiegu  $Z_1$  na śladzie zbiegu  $z_1$  tej płaszczyzny. Jeżeli punkt  $M_2$  leży na prostej  $m_2$ , to jego rzut środkowy  $M_1$  leży na rzucie  $m_1$  tej prostej. (Porównaj Rys. 342. z Rys. 343.).

Poprowadźmy przez środek rzutów  $O$  płaszczyznę  $\omega // \varepsilon_1$  (Rys. 342.) i oznaczmy prostą przecięcia się jej z płaszczyzną  $\varepsilon_2$  literą  $w_2$ , to prosta, łącząca punkt  $O$  z punktem przecięcia się  $W_2$  prostej  $m_2$  z  $w_2$ , jest równoległą do  $m_1$ .

**114. Kolineacya środkowa.** Rozważania powyższe naprowadzają nas na istnienie pewnych związków między punktami i prostymi płaszczyzn  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ , które to związki dadzą się ująć w następujące zdania:

a) Każdemu punktowi jednej płaszczyzny odpowiada jeden jedyny punkt na płaszczyźnie drugiej jako punkt przecięcia się promienia, przechodzącego przez ten punkt i przez środek rzutów  $O$  z płaszczyzną drugą.

b) Każdej prostej jednej płaszczyzny odpowiada jedna jedyna prosta na płaszczyźnie drugiej, przyczem odpowiednie proste (np.  $m_1$  i  $m_2$  w Rys. 342.) przecinają się w punktach, leżących na krawędzi obu płaszczyzn. Punktowi niewłaściwemu jednej prostej odpowiada punkt właściwy na prostej drugiej i odwrotnie. W odniesieniu do Rys. 342. punktowi  $Z_2^\infty$  prostej  $m_2$  odpowiada punkt  $Z_1$  na prostej  $m_1$ ; punkt  $W_2$  prostej  $m_2$  odpowiada punktowi niewłaściwemu  $W_1^\infty$  prostej  $m_1$ .

Jeżeli między układami punktów i prostych na dwóch płaszczyznach zachodzą wymienione pod a) i b) związki, to mówimy, że układy te są środkowo kolineacyjne, a związki same nazywamy kolineacyą środkową. Punkt  $O$ , w którym przecinają się proste, łączące odpowiadające sobie punkty obu układów (środek rzutów), nazywamy środkiem kolineacyi, a prostą  $p$ , na której leżą punkty przecięcia się odpowiednich prostych (krawędź płaszczyzn  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ ), zwiemy osią kolineacyi. Proste  $z_1$  i  $w_2$ , w których płaszczyzny  $\zeta$  i  $\omega$ , przechodzące przez środek kolineacyi  $O$  równoległe do  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ , te ostatnie przecinają, nazywać będziemy osiami wzajemnymi. Punkty, leżące na osiach wzajemnych, odpowiadają punktom niewłaściwym odnośnych płaszczyzn.

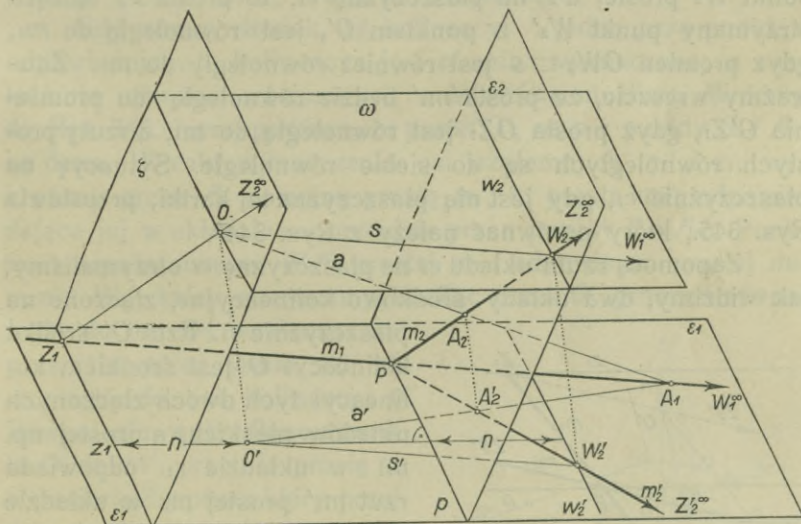
Z Rys. 342. czytamy: odległość środka kolineacyi od osi wzajemnej  $z_1$  równa jest odległości osi wzajemnej  $w_2$  od osi



kolineacyi  $p$ , a odległość środka kolineacyi od osi wzajemnej  $w_2$  równa jest odległości osi wzajemnej  $z_1$  od osi kolineacyi.

Podkreślić wkońcu należy, że słowem „kolineacya“ wyrażamy jedynie pewną grupę związków, właściwą metodzie rzutów środkowych, że w równej mierze możemy, zaniechając wprowadzenia nazwy „kolineacya“, posługiwać się mianem „rzutu środkowego“.

**115. Rzuty układów środkowo kolineacyjnych.** Przyjmijmy płaszczyzny  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  (Rys. 344.\*), przecinające się w prostej  $p$  i punkt  $O$ , który uważajmy za środek kolineacyi (rzutów). Prostej  $m_2$  na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$  odpowie na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$



Rys. 344.\*

prosta  $m_1$ , a punktowi  $A_2$  prostej  $m_2$  punkt  $A_1$  prostej  $m_1$ , przyczem oba punkty leżą na promieniu kolineacyi (rzutu), przechodzącym przez środek  $O$ . Płaszczyzna  $\zeta$ , przechodząca przez środek  $O$  równoległa do  $\varepsilon_2$ , przecina  $\varepsilon_1$  w prostej  $z_1$ , która jest jedną osią wzajemną kolineacyi (śladem zbiegu płaszczyzny  $\varepsilon_2$ ); płaszczyzna  $\omega$ , równoległa do  $\varepsilon_1$  a przechodząca przez środek  $O$ , przecina płaszczyznę  $\varepsilon_2$  w prostej  $w_2$ , będącej drugą osią wzajemną kolineacyi (śladem zbiegu płaszczyzny  $\varepsilon_1$ ). Prosta  $m_1$  łączy swój ślad tłowy  $P$  ze śladem zbiegu  $Z_1$  i jest równoległą do promienia  $OW_2$ .



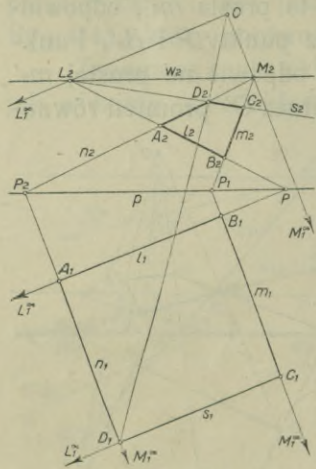




Prostą  $a_1$ , łączącą punkty  $A_1$  i  $B_1$ , odpowie w układzie  $\varepsilon_2$  prosta  $a_2$ , przechodząca przez punkty  $A_2$  i  $P$ . Promień kolineacji  $B_1 O$  przecina prostą  $a_2$  w punkcie  $B_2$ . Punkt  $P_1$ , w którym prosta  $B_1 C_1$  przecina oś kolineacji, połączymy z  $B_2$ , a na przecięciu się otrzymanej prostej z promieniem kolineacji  $O C_1$  leży punkt  $C_2$ . Podobnie przy pomocy punktu  $P_2$  otrzymamy punkt  $E_2$ , a punkt  $P_3$  umożliwi wyznaczenie punktu  $D_2$ . Czworokąt  $B_2 C_2 D_2 E_2$  odpowiada w układzie  $\varepsilon_2$  kwadratowi  $B_1 C_1 D_1 E_1$ , przyjętemu w układzie  $\varepsilon_1$ .

2. Dane są dwa układy środkowo kolineacyjne, złączone na płaszczyźnie rysunku, a wyznaczone środkiem, osią kolineacji i osią wzajemną  $w_2$ . W układzie  $\varepsilon_1$  leży kwadrat  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ; znaleźć odpowiadający mu kolineacyjnie czworokąt w układzie  $\varepsilon_2$  (Rys. 347.)

Przez punkt przecięcia się  $P$  prostej  $l_1$  z osią  $p$  przejdzie prosta  $l_2$ . Punktowi niewłaściwemu  $L_1^\infty$  prostej  $l_1$  odpowie punkt  $L_2$  na osi  $w_2$ , który otrzymamy, kreśląc przez środek  $O$  promień równoległy do  $l_1$ . Wyznaczywszy w ten sam sposób punkt  $M_2$ , odpowiadający kolineacyjnie punktowi  $M_1^\infty$  prostej  $m_1$ , połączymy go z punktem  $P_1$ , otrzymując prostą  $m_2$ . Punkt  $L_2$  odpowiada równocześnie punktowi niewłaściwemu prostej  $s_1$ , która jest równoległą do  $l_1$ , podobnie jak punkt  $M_2$  odpowiada punktowi niewłaściwemu prostej  $n_1$ . Sposób otrzymania wierzchołków  $A_2, B_2, C_2$  i  $D_2$  szukanego czworokąta tłómaczy zresztą Rys. 347.



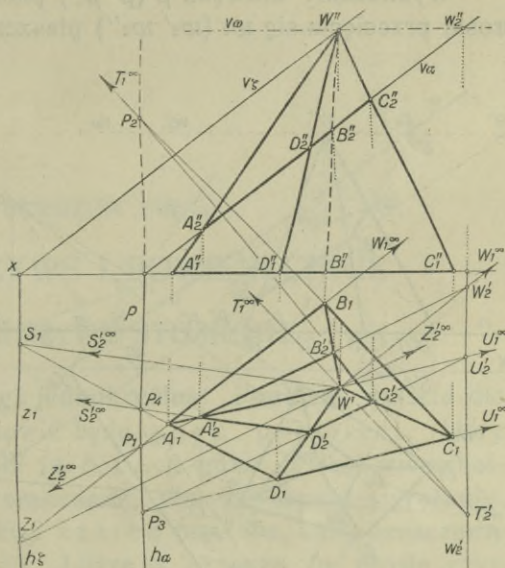
Rys. 347.

3. Dane są rzuty czworoszczennego ostrosłupa ukośnego, którego podstawa leży na rzutni poziomej, a nadto dana jest płaszczyzna pionowo rzucająca  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), przecinająca ten ostrosłup (Rys. 348.).

Jest rzeczą natychmiast widoczną, że czworokąt przekroju ostrosłupa jest rzutem środkowym czworokąta podstawy na płaszczyznę sieczną  $\alpha$ , czyli innymi słowy, że między podstawą a przekrojem ostrosłupa zachodzi kolineacja środkowa. Środkiem tej kolineacji jest wierzchołek  $W$  ostrosłupa, osią



kolineacji  $p$  ślad poziomy  $h_\alpha$  płaszczyzny siecznej  $\alpha$ , osią wzajemną  $z_1$  ślad poziomy  $h_\zeta$  płaszczyzny  $\zeta$ , poprowadzonej przez wierzchołek ostrosłupa równoległe do płaszczyzny  $\alpha$ . Drugą osią wzajemną, więc  $w_2$ , jest krawędź płaszczyzny siecznej z płaszczyzną poziomą  $\omega$ , przechodząca przez wierzchołek ostrosłupa. Ponieważ rzuty dwóch układów środkowo kolineacyjnych są również środkowo kolineacyjne, więc między rzutem poziomym podstawy a rzutem poziomym czworokąta przekroju zachodzi kolineacja środkowa.



Rys. 348.

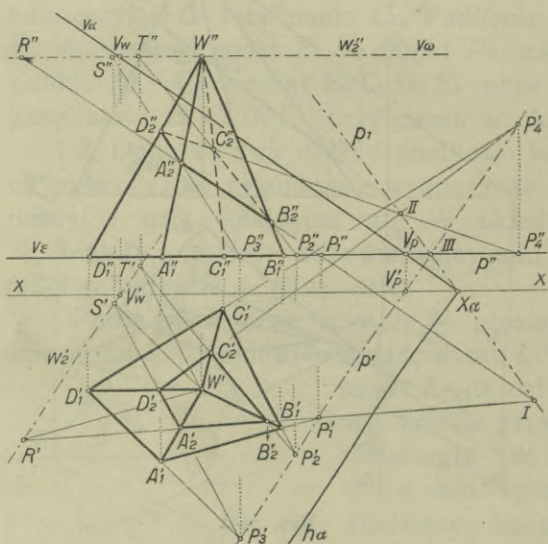
Punkt  $W'$  jest środkiem, ślad  $h_\alpha$  osią kolineacji, ślad  $h_\zeta \equiv z_1$  jedną, a rzut poziomy  $w_2'$  krawędzi  $w_2$  drugą osią wzajemną.

Bok  $A_1 B_1$  przecina oś kolineacji w punkcie  $P_1$ ; punktowi niewłaściwemu prostej  $P_1 B_1$  odpowiada punkt  $W_2'$  na osi  $w_2'$ , który otrzymamy, kreśląc ze środka  $W'$  równoległą do  $P_1 B_1$ . Prosta  $P_1 W_2'$  odpowiada prostej  $P_1 B_1$ , a punkty  $A_2'$  i  $B_2'$  punktom  $A_1$  i  $B_1$ . Połączmy punkt  $Z_1$ , przecięcia się prostej  $P_1 B_1$  z osią wzajemną  $z_1$ , ze środkiem kolineacji  $W'$ , to otrzymana prosta jest równoległą do prostej  $A_2' B_2'$ , gdyż punktowi  $Z_1$  odpowiada punkt niewłaściwy prostej  $A_2' B_2'$ . W ten sam sposób, przy pomocy punktów  $P_2, P_3, P_4, U_2'$  i  $S_1$ , znajdziemy dalsze boki, względnie wierzchołki czworokąta przekroju. Oczywiście, że znając punkty  $A_2'$  i  $B_2'$ , wyznaczyć możemy dalsze, jedynie przy pomocy punktów  $P_2, P_3$  i  $P_4$ , użycie osi wzajemnych wskazane jest jednak względem na dokładność konstrukcji.

4. Jako dalszy przykład zastosowania kolineacji środkowej, wyznaczmy rzuty przekroju ostrosłupa ukośnego, którego

podstawa znajduje się na płaszczyźnie  $\varepsilon$  równoległej do rzutni poziomej, z płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) (Rys. 349).

Wyznamy krawędź  $p$  ( $p' p''$ ) płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varepsilon$ , a także prostą przecięcia się  $w_2$  ( $w_2' w_2''$ ) płaszczyzny  $\alpha$  i płaszczyzny



Rys. 349.

poziomej  $\omega$ , przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa. Na rzutni poziomej otrzymamy złączoną kolineację dwóch układów płaskich, wyznaczoną: środkiem  $W'$ , osią  $p'$  i osią wzajemną  $w_2'$ . W zupełnie analogiczny sposób jak w zadaniu poprzednim — jednak bez pośrednictwa osi wzajemnej  $z_1$  —

wyznamy punkty  $A_2', B_2', C_2'$  i  $D_2'$ , odpowiadające kolineacyjnie punktom  $A_1', B_1', C_1'$  i  $D_1'$ . I tak np. równoległa do  $A_1' B_1'$ , wykreślona przez punkt  $W'$ , przecina oś wzajemną  $w_2'$  w punkcie  $R'$ , który połączony z punktem  $P_1$  daje bok  $A_2' B_2'$  rzutu poziomego czworokąta przekroju. Rzut pionowy  $A_2'' B_2'' C_2'' D_2''$  czworokąta przekroju otrzymać możemy — uwzględniając, że czworokąt leży na płaszczyźnie  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) — zapomocą tworzących tej płaszczyzny. W Rys. 349. otrzymaliśmy żądane punkty, przy pomocy rzutów pionowych prostych  $P_1 R, P_2 T$  i  $P_3 S$ .



## ROZDZIAŁ DRUGI

### LINIE KRZYWE I POWIERZCHNIE

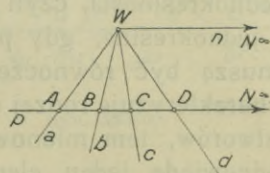
#### § 10. KRZYWE STOŻKOWE

117. **Pęk i szeregi jednokreślne.** Punktem wyjścia dla naszych rozważań stanowiąc będą: pęk promieni, który oznaczamy symbolem  $W(a, b, c, \dots)$ , gdzie  $W$  jest wierzchołkiem, zaś  $a, b, c, \dots$  promieniami, albo, jak się też wyrażamy, elementami tego pęku i szereg punktów, który oznaczamy symbolem  $p(A, B, C, \dots)$ . Litera  $p$  oznacza tu prostą czyli t. zw. podstawę, a litery w nawiasie są punktami tej prostej, stanowiącymi elementy szeregu. Pęki promieni i szeregi punktów nazywamy utworami zasadniczymi.

Między elementami pęku  $W(a, b, c, d, \dots, n)$  i szeregu  $p(A, B, C, D, \dots, N^\infty)$ , powstałego z przecięcia pęku prostą  $p$  (Rys. 350.), zachodzi ten prosty związek, że każdemu elementowi w pęku, odpowiada jeden jedyny element w szeregu i odwrotnie.

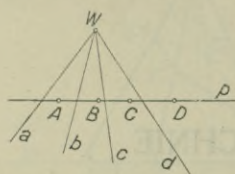
Punkty szeregu leżą na odpowiadających im promieniach pęku, a promienie pęku przechodzą przez odpowiadające im elementy szeregu. Promień  $n$ , odpowiadający punktowi niewłaściwemu  $N^\infty$  podstawy  $p$ , jest do niej równoległy.

Mówimy, że pęk  $W(a, b, c, \dots)$  jest jednokreślny i perspektywiczny z szeregiem  $p(A, B, C, \dots)$  i wzajemnie, szereg  $p(A, B, C, \dots)$  jest jednokreślny i perspektywiczny z pękiem  $W(a, b, c, \dots)$ . Słowo „jednokreślny“ wyraża jedno — jednoznaczność odpowiedniość między



Rys. 350.

elementami pęku i szeregu, a słowo „perspektywiczny“ określa wzajemne ich położenie, to mianowicie, że elementy szeregu leżą na odpowiadających im elementach pęku, względnie, że promienie pęku przechodzą przez odpowiadające im punkty szeregu. Jeśli, zachowując rozmieszczenie punktów na podstawie  $p$  i wzajemne położenie elementów pęku  $W(a, b, c\dots)$ , utwory te rozdzielimy, np. przez przesunięcie na płaszczyźnie (Rys. 351.), to i wówczas każdemu elementowi jednego utworu odpowie jeden jedyny element w utworze drugim, jednak nie leżący na nim, ani przezeń nie przechodzący. Zmieniliśmy wzajemne położenie obu utworów, nie znosząc jednak odpowiedniości jedno jednoznacznej, zachodzącej między ich elementami. Mówimy



Rys. 351.

wówczas, że pęk  $W(a, b, c\dots)$  jest „jednokreślny“ z szeregiem  $p(A, B, C\dots)$ , pomijając określenie „perspektywiczny“, jako w tym wypadku nie zachodzące.

Na oznaczenie związku jednokreślności wraz z perspektywicznością używamy znaku  $\bar{\wedge}$ , na określenie zaś jednokreślności znaku  $\bar{\wedge}$ . Rys. 350. przedstawia więc:

$$W(a, b, c\dots) \bar{\wedge} p(A, B, C\dots)$$

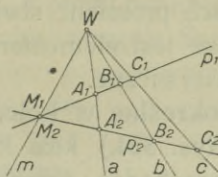
(czytaj: pęk o wierzchołku  $W$  i elementach  $a, b, c\dots$  perspektywiczny z szeregiem o podstawie  $p$  a o elementach  $A, B, C\dots$ ). Rys. 351. wyraża pęk promieni jednokreślny z szeregiem punktów, czyli symbolicznie:  $W(a, b, c\dots) \bar{\wedge} p(A, B, C\dots)$ .

Pojęcie perspektywiczności mieści w sobie już pojęcie jednokreślności, czyli dwa utwory perspektywiczne są zawsze i jednokreślne, gdy przeciwnie, dwa utwory jednokreślne nie muszą być równocześnie perspektywiczne. „Jednokreślność“ charakteryzuje rodzaj odpowiedniości między elementami dwóch utworów, tem mianowicie, że elementowi w jednym utworze odpowiada jeden element w utworze drugim. Perspektywiczność charakteryzuje natomiast wzajemne położenie elementów w dwóch utworach jednokreślnych.

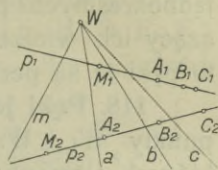
Związki perspektywiczności, względnie jednokreślności, założyc się dadzą także między utworami zasadniczymi tego samego rodzaju. I tak dwa szeregi, powstałe z przecięcia pęku promieni  $W(a, b, c\dots)$  prostymi  $p_1$  i  $p_2$  (Rys. 352 a.), są szeregami jednokreślnymi z tytułu odpowiedniości swoich elemen-



tów. Z racji swego wzajemnego położenia, gdzie odpowiadające sobie punkty leżą na promieniach pęku, szeregi owe są równocześnie perspektywiczne. Ponieważ każdej z tych dwóch szeregów jest perspektywiczny, a więc i jednokreślny z pękiem promieni  $W$  ( $a, b, c, \dots$ ), więc otrzymamy następujący łańcuch utworów:



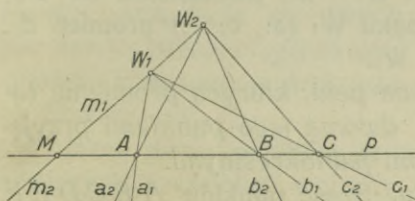
Rys. 352 a.



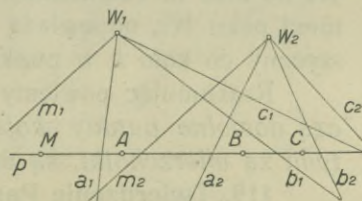
Rys. 352 b.

$W(a, b, c, \dots) \bar{\wedge} p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$ . Punkt przecięcia się prostych  $p_1$  i  $p_2$  jest elementem wspólnym obu szeregów. Przez wzajemne przesunięcie podstaw  $p_1$  i  $p_2$  (Rys. 352 b.) zniszczymy położenie perspektywiczne; otrzymane szeregi będą jednokreślne, a ich punkt przecięcia się nie będzie wspólnym elementem obu szeregów. Jeżeli punkt przecięcia się podstaw dwóch jednokreślnych szeregów jest elementem wspólnym obu szeregów, to szeregi te są perspektywiczne, a wówczas proste łączące ich odpowiednie punkty są elementami jednego pęku promieni.

Dwa pęki  $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$  i  $W_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$  (Rys. 353 a.), powstałe z połączenia punktów  $W_1$  i  $W_2$  z elementami szeregu



Rys. 353 a.



Rys. 353 b.

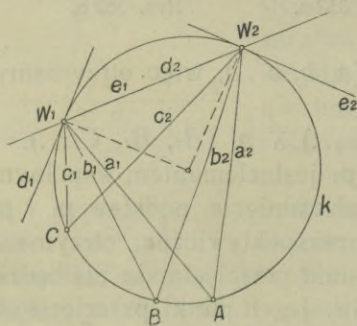
$p(A, B, C, \dots)$ , są pękami jednokreślnymi, a z tytułu swego wzajemnego położenia także i perspektywicznymi. Mamy łańcuch utworów perspektywicznych, a mianowicie:

$p(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} W_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} W_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$ .

Promień, łączący wierzchołki obu pęków, jest elementem wspólnym obu pęków, a przestanie nim być, gdy oba te pęki wzajemnie przesuniemy (Rys. 353 b.). W tym drugim wypadku oba

pęki będą tylko jednokreślne. I nawzajem, jeżeli w dwóch jednokreślnych pękach promieni stwierdzimy, że promień łączący ich wierzchołki jest elementem wspólnym obu pęków, to pęki te są perspektywiczne.

**118. Pęki jednokreślne w kole.** Uważajmy dwa dowolne punkty  $W_1$  i  $W_2$  (Rys. 354.) koła  $k$  za wierzchołki pęków, których elementy przechodzą przez punkty  $A, B, C \dots$  tego koła. Pośrednictwo koła stwarza



Rys. 354.

między elementami pęków  $W_1 (a_1, b_1, c_1 \dots)$  i  $W_2 (a_2, b_2, c_2 \dots)$  tego rodzaju zależność, że każdemu promieniowi w jednym pęku odpowiada jeden promień w pęku drugim. Ale taką zależność między elementami dwóch pęków określiliśmy mianem jednokreślności, powiemy więc, że pęki  $W_1 (a_1, b_1, c_1 \dots)$  i

$W_2 (a_2, b_2, c_2 \dots)$  są jednokreślne.

Pęki te nie są jednakże perspektywiczne, gdyż promień łączący wierzchołki  $W_1$  i  $W_2$  nie jest elementem wspólnym obu pęków. Promieniowi temu, uważanemu za element  $e_1$  pęku  $W_1 (a_1, b_1 \dots)$ , odpowie promień  $e_2$  w pęku  $W_2 (a_2, b_2 \dots)$  styczny w punkcie  $W_2$  do koła  $k$ . Promieniowi  $W_1 W_2 \equiv d_2$ , uważanemu za element pęku  $W_2$ , odpowiada w pęku  $W_1 (a_1, b_1 \dots)$  promień  $d_1$ , styczny do koła  $k$  w punkcie  $W_1$ .

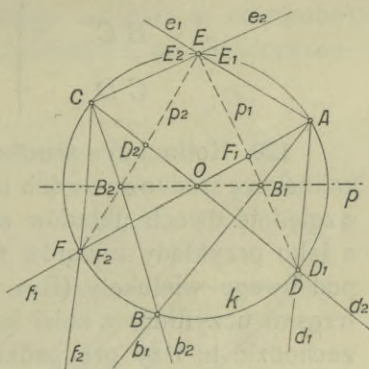
Reasumując powiemy: *dwa pęki, których promienie łączą dowolne punkty koła z dwoma jego punktami przyjętymi za wierzchołki, są pękami jednokreślnymi.*

**119. Twierdzenie Pascala.** Sześć punktów  $A B C D E F$ , dowolnie przyjętych na kole, tworzy sześciokąt wpisany w tę krzywą. Bez względu na wzajemne rozmieszczenie tych punktów nazywać będziemy boki  $AB$  i  $DE$ ,  $BC$  i  $EF$ ,  $CD$  i  $AF$  bokami przeciwległymi sześciokąta.

Uważajmy punkty  $A$  i  $C$  w sześciokącie  $A B C D E F$ , wpisanym w koło  $k$  (Rys. 355.), za wierzchołki dwóch pęków, których promienie przechodzą przez dalsze cztery punkty. Na podstawie tego, cośmy powiedzieli w ustępie poprzednim, otrzymane pęki  $A (b_1, d_1, e_1, f_1)$  i  $C (b_2, d_2, e_2, f_2)$  są jednokreślne.



Proste  $ED \equiv p_1$  i  $EF \equiv p_2$  przecinają oba te pęki w dwóch szeregach jednokreślnych, a punkt przecięcia się tych prostych jest elementem wspólnym obu szeregów. Szeregi  $p_1 (B_1, D_1, E_1, F_1)$  i  $p_2 (B_2, D_2, E_2, F_2)$  są więc perspektywiczne. Ale wiadomo z ust. 117. (Rys. 352 a.), że dwa szeregi perspektywiczne powstają z przecięcia jednego pęku, czyli, że proste, łączące odpowiednie punkty dwóch szeregów perspektywicznych, przechodzą przez jeden punkt. Punktem tym będzie punkt przecięcia się  $O$  promieni  $B_1 B_2$ ,  $D_1 D_2$  i  $F_1 F_2$ .

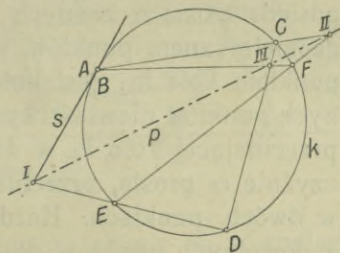


Rys. 355.

Weźmy raz jeszcze pod uwagę sześciokąt  $ABCDEF$  i wyznaczmy punkty przecięcia się jego boków przeciwnych.

Boki  $AB$  i  $DE$  przecinają się w punkcie  $B_1$ , boki  $BC$  i  $EF$  w punkcie  $B_2$ , a wreszcie para boków  $CD$  i  $AF$  w punkcie  $O$ . Ale wiemy z rozważania poprzedniego, że punkty  $B_1, B_2$  i  $O$  leżą na jednej prostej, a tym sposobem dowiedliśmy następującego twierdzenia, znanego pod nazwą twierdzenia Pascala: *Punkty przecięcia się trzech par boków przeciwnych sześciokąta wpisanego w koło leżą na linii prostej.*

Jeżeli dwa z punktów stanowiących sześciokąt wpisany w koło schodzi się, np. punkty  $A$  i  $B$  w Rys. 356., to prosta łącząca je jest styczną do koła w tym punkcie. Punkty przecięcia się  $I, II$  i  $III$  boków przeciwnych tego sześciokąta leżą i w tym przypadku na jednej prostej  $p$ .



Rys. 356.

Wzór połączeń boków przeciwnych sześciokąta  $ABCDEF$ , przecinających się w trzech punktach  $I, II$  i  $III$  prostej  $p$  przedstawić można w sposób następujący:

$\widehat{ABC}$	$\widehat{DEF}$	
$AB$	$DE... I$	} $p.$
$BC$	$EF... II$	
$CD$	$AF... III$	

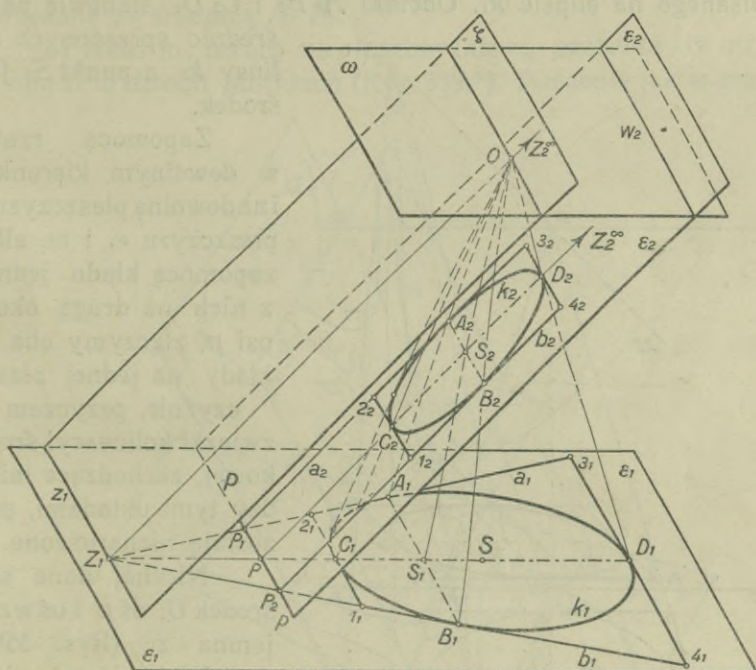
**120. Kolineacja środkowa koła.** W ust. 115. rozważyliśmy kolineację środkową dwóch układów płaskich  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  w przestrzeni, względnie dwóch układów złączonych na jednej płaszczyźnie, a jako przykłady utworów środkowo kolineacyjnych braliśmy pod uwagę wielokąty (Rys. 346.). Przedmiotem naszych rozważań uczynimy z kolei kolineację środkową koła, a mogące zachodzić tu trzy przypadki rozpatrzmy każdy z osobna.

a) *Koło  $k_1$ , leżące na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$ , nie przecina osi wzajemnej  $z_1$*  (Rys. 357.). Każdemu punktowi koła odpowie na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$  jeden punkt, jako punkt przebiecia się promienia, przechodzącego przez ten punkt koła i środek kolineacji (promień kolineacji) z płaszczyzną  $\varepsilon_2$ . Ponieważ tylko punktom leżącym na osi wzajemnej  $z_1$  odpowiadają na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$  punkty niewłaściwe, a koło  $k_1$ , wedle założenia, nie posiada z osią  $z_1$  żadnych punktów wspólnych, więc miejscem geometrycznym punktów, odpowiadających na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$  punktom koła  $k_1$ , jest linia krzywa  $k_2$ , nie posiadająca żadnych punktów niewłaściwych. Każdej prostej na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$ , przecinającej koło  $k_1$  w dwóch punktach, odpowiada na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$  prosta, przecinająca leżącą tam linię  $k_2$  również w dwóch punktach. Każdej parze stycznych, wykreślonych z dowolnych punktów do koła  $k_1$ , odpowie w układzie  $\varepsilon_2$  para stycznych, poprowadzonych do linii  $k_2$  z punktów odpowiadających poprzednim. Krzywą nie posiadającą żadnych punktów niewłaściwych, którą prosta przecina w dwóch punktach, a do której z dowolnego punktu poprowadzić można dwie styczne, nazwaliśmy w ust. 96. elipsą. Stąd dochodzimy do twierdzenia, że kołu, należącemu do układu  $\varepsilon_1$  i nie mającemu żadnego punktu wspólnego z osią wzajemną  $z_1$ , odpowiada w układzie  $\varepsilon_2$  elipsa,



czyli innymi słowy, że rzut środkowy koła, które nie przecina śladu zbiegu  $z_1$ , jest elipsą.

Celem wyznaczenia pary średnic sprzężonych elipsy  $k_2$  opiszemy na kole  $k_1$  taki czworobok, którego rzut środkowy na płaszczyznę  $\varepsilon_2$  będzie równoległobokiem, opisanym na elipsie  $k_2$ . Punkty styczności opisanego na kole  $k_1$  czworoboku, rzucone z punktu  $O$ , jako środka kolineacji, na płaszczyznę  $\varepsilon_2$



Rys. 357.\*

dadzą punkty styczności opisanego na elipsie  $k_2$  równoległoboku, które połączone stanowią parę średnic sprzężonych (ust. 96.). Czworobok (trapez) opisany na kole  $k_1$ , którego rzut środkowy na płaszczyznę  $\varepsilon_2$  jest równoległobokiem, znajdziemy w sposób następujący: Przez środek  $S$  koła  $k_1$  poprowadzimy prostopadłą do osi wzajemnej  $z_1$ , a z punktu  $Z_1$  styczne  $a_1$  i  $b_1$  do koła. W punktach  $C_1$  i  $D_1$  wykreślone styczne będą równoległe do  $z_1 \parallel p$  i utworzą wraz ze stycznymi  $a_1$ ,  $b_1$  trapez równoramienny  $1_1 2_1 3_1 4_1$ , opisany na kole i styczny do niego w punktach  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Rzuty środkowe  $a_2$  i  $b_2$

stycznych  $a_1$  i  $b_1$  przejdą przez punkty  $P_1$  i  $P_2$  równoległe do prostej  $OZ_1$ , a rzuty  $1_2 2_2$  i  $3_2 4_2$  prostych  $1_1 2_1$  i  $3_1 4_1$  będą do siebie równoległe i równoległe do osi kolineacji  $p$ . Tym sposobem otrzymamy równoległobok  $1_2 2_2 3_2 4_2$  opisany na elipsie, jako rzut środkowy trapezu  $1_1 2_1 3_1 4_1$ . Punktom styczności  $A_1, B_1, C_1, D_1$  czworoboku opisanego na kole  $k_1$ , odpowiedzą punkty styczności  $A_2, B_2, C_2, D_2$  boków równoległoboku opisanego na elipsie  $k_2$ . Odcinki  $A_2 B_2$  i  $C_2 D_2$  stanowią parę

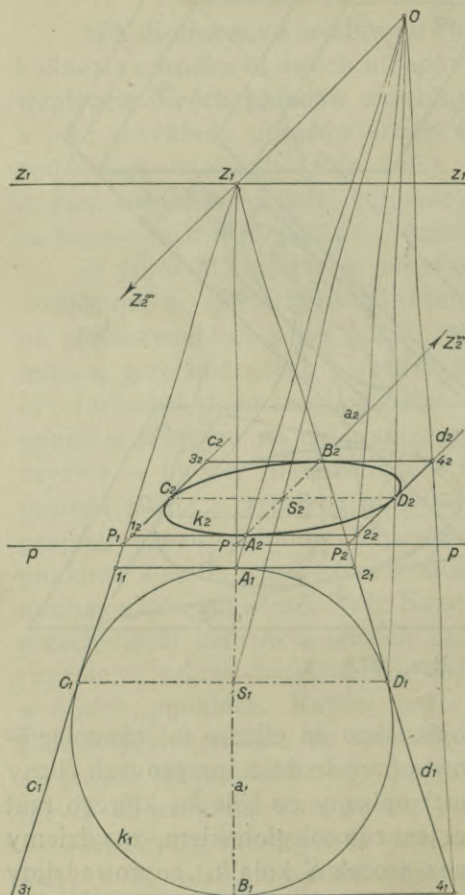
średnic sprzężonych elipsy  $k_2$ , a punkt  $S_2$  jej środek.

Zapomocą rzutu w dowolnym kierunku i nadowolną płaszczyznę płaszczyzn  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ , albo zapomocą układu jednej z nich na drugą około osi  $p$ , złączymy oba układy na jednej płaszczyźnie, przyczem

związki kolineacji środkowej, zachodzące między tymi układami, pozostają nienaruszone. Niechaj dane są: środek  $O$ , oś  $p$  i oś wzajemna  $Z_1$  (Rys. 358.) dwóch układów środkowo kolineacyjnych, złączonych na płaszczyźnie rysunku. Wyznamy parę średnic sprzężonych elipsy, odpowiadającej kolineacyjnie kołu  $k_1$ , należącemu do układu  $\varepsilon_1$ .

Idąc śladem przeprowadzonego wyżej rozumowania, wykreślmy przez środek

koła  $k_1$  prostą  $a_1 \perp Z_1$  i wyznaczmy trapez równoramienny  $1_1 2_1 3_1 4_1$ , opisany na



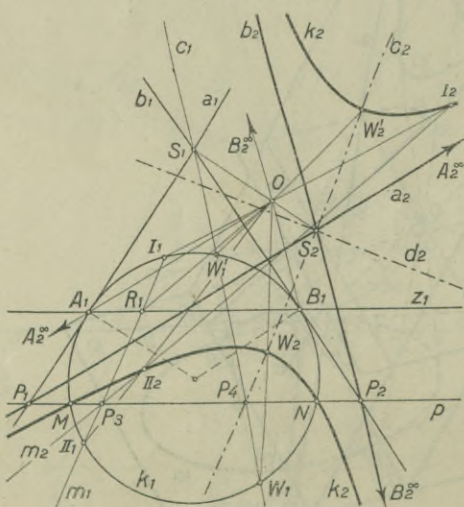
Rys. 358.





tach właściwych. Krzywa tedy  $k_2$ , będąca rzutem koła, posiada w tym wypadku dwa punkty niewłaściwe, składa się z dwóch gałęzi i zwie się *hiperbolą*. Podobnie jak elipsę, przecina dowolna prosta hiperbolę w dwóch punktach, a z dowolnego punktu wykreślić do niej można dwie styczne. Każdej stycznej do koła  $k_1$  odpowie styczna do hiperboli  $k_2$ ; stycznymi  $a_1$  i  $b_1$  do koła w punktach  $A_1$  i  $B_1$ , odpowiedzą stycznymi  $a_2$  i  $b_2$ , w punktach niewłaściwych hiperboli, zwane jej asymptotami. Punkt przecięcia się  $S_2$  asymptot, odpowiadający punktowi przecięcia się  $S_1$  stycznych  $a_1$  i  $b_1$ , nazywamy *środkiem hiperboli*.

Niech daną jest kolineacja środkowa dwóch układów płaskich  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ , złączonych na płaszczyźnie rysunku, wyznaczona środkiem  $O$ , osią  $p$  i osią wzajemną  $z_1$  (Rys. 360.).



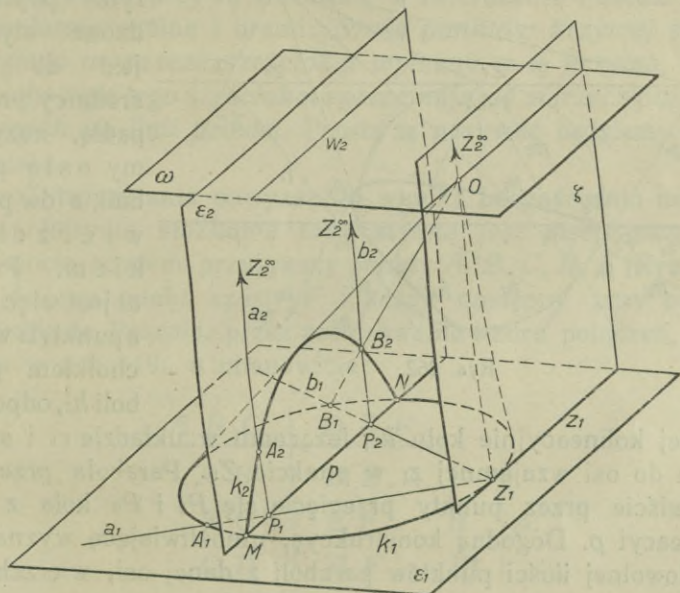
Rys. 360.

Kołu  $k_1$ , przyjętemu w układzie  $\varepsilon_1$ , a przecinającemu oś  $z_1$  w punktach  $A_1$  i  $B_1$ , odpowie w układzie  $\varepsilon_2$  hiperbola. Stycznymi  $a_1$  i  $b_1$  w punktach  $A_1$  i  $B_1$  odpowiedzą asymptoty  $a_2$  i  $b_2$ , równoległe do promienia  $OA_1$  i  $OB_1$ , a przechodzące przez punkty  $P_1$  i  $P_2$ . Punktowi  $S_1$  odpowie środek  $S_2$  hiperboli, która przejdzie przez punkty  $M$  i  $N$ , w których oś kolineacji  $p$  przecina

koło. Poszczególne punkty hiperboli znaleźć możemy przy pomocy prostych, przecinających koło w dwóch punktach. I tak np. prostej  $m_1$  odpowiada  $m_2$ , równoległa do  $OR_1$  i przechodząca przez punkt  $P_3$ , a punktom  $I_1$  i  $II_1$  koła, punkty  $I_2$  i  $II_2$  hiperboli. Dwusieczne  $c_2$  i  $d_2$  kątów, jakie tworzą asymptoty, są osiami symetrii prostokątnej hiperboli i zwą się jej osiami. Punkty przecięcia się dwusiecznej  $c_2$  z hiperbolą tworzą jej wierzchołki.



c) Koło  $k_1$ , leżące na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$ , jest styczne do osi wzajemnej  $z_1$  (Rys. 361.\*). Ponieważ prostej  $z_1$  odpowiada na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$  prosta niewłaściwa, więc krzywa, odpowiadająca kolineacyjnie kołu jest styczną do prostej niewłaściwej płaszczyzny  $\varepsilon_2$  i zwie się *parabolą*. Punktowi styczności  $Z_1$



Rys. 361.\*

koła  $k_1$  z osią wzajemną  $z_1$ , odpowiada punkt niewłaściwy  $Z_2^\infty$  paraboli, który jest jej punktem styczności z prostą niewłaściwą płaszczyzny  $\varepsilon_2$ . Pękowi promieni  $Z_1(a_1, b_1 \dots)$  odpowiada na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$  pęk prostych równoległych  $a_2, b_2 \dots$ , a punktom  $A_1, B_1 \dots$  koła  $k_1$ , punkty  $A_2, B_2 \dots$  paraboli  $k_2$ .

Rozpatrzmy jeszcze kolineację koła z parabolą w przypadku, gdy oba układy złączone są na jednej płaszczyźnie (Rys. 362.). Prostej  $m_1$  odpowiada prosta  $m_2$ , równoległa do promienia  $OZ_1$ , punktowi  $M_1$  koła  $k_1$  punkt  $M_2$  paraboli, a stycznej  $s_1$  do koła w punkcie  $M_1$  styczna  $s_2$  do paraboli w punkcie  $M_2$ . Styczna  $s_2$  będzie równoległa do promienia  $r$ , łączącego środek kolineacji  $O$  z punktem przecięcia się  $S_1$  stycznej  $s_1$  z osią wzajemną  $z_1$ . Z Rys. 362 widzimy, że:

$$\ast s_2 m_2 = \ast r n = \alpha.$$



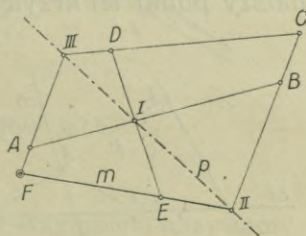


w koło, leżące na płaszczyźnie  $\epsilon_1$ , odpowie w układzie drugim sześciokąt, wpisany w tę krzywą stożkową  $c^2$ , która odpowiada kolineacyjnie kołu. W ten sposób własności sześciokąta wpisanego w koło przechodzą na własności sześciokąta wpisanego w każdą krzywą stożkową, a twierdzenie Pascala przyjmuje formę ogólną i brzmi: *Sześć punktów krzywej stopnia drugiego wyznacza sześciokąt wpisany w tę krzywą, a boki przeciwległe tego sześciokąta przecinają się w trzech punktach, leżących na linii prostej.* Prosta tę nazywać będziemy prostą Pascala.

Z twierdzenia powyższego wynika bezpośrednio następujące: *krzywa stożkowa wyznaczona jest pięciu punktami.* W istocie bowiem przyjąwszy punkty  $A, B, C, D, E$  (Rys. 363.), znajdziemy punkt szósty  $F$  i każdy następny przy pomocy twierdzenia Pascala, przez zastosowanie wzoru połączeń, podanego w ust. 119., a mianowicie:

$A B C$	$D E F$	
$A B$	$D E \dots I$	} $p.$
$B C$	$E F \dots II$	
$C D$	$A F \dots III$	

Boki  $AB$  i  $DE$  sześciokąta, którego pięć punktów jest znanych, przecinają się w punkcie  $I$ . Z drugiej pary boków wyznaczony jest bok  $BC$ , co zaś do boku  $EF$ , to zauważmy, że jeżeli przez punkt  $E$  krzywej  $c^2$  poprowadzimy dowolną prostą, to prosta ta przecina tę krzywą jeszcze w jednym punkcie. Punkt ten, na razie nie wyznaczony, niechaj będzie właśnie szukany punktem  $F$ . Bok  $EF$  będzie więc dowolną prostą  $m$ , wykreśloną przez punkt  $E$ , a przecinającą bok  $BC$  w punkcie  $II$ . Punkty  $I$  i  $II$  wyznaczają prostą Pascala  $p$ , którą bok  $CD$  przecina w punkcie  $III$ , i przez który to punkt przejść musi, zgodnie z twierdzeniem Pascala, bok  $AF$ . Punkt przecięcia się więc prostej  $m$  z prostą  $AIII$  jest szukany punktem  $F$ . W ten sposób wykazaliśmy, że znając pięć punk-



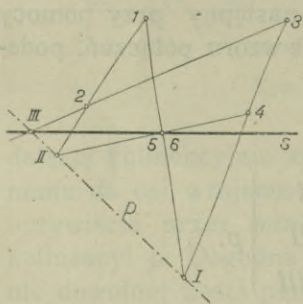
Rys. 363.

tów krzywej  $c^2$ , znaleźć możemy każdą dowolną ilość dalszych jej punktów, czyli innymi słowy, że pięć punktów wyznacza krzywą stopnia drugiego.

Twierdzenie Pascala pozostaje w mocy, gdy jeden albo i dwa wierzchołki sześciokąta są punktami niewłaściwymi, stosuje się więc zarówno do paraboli jak i hiperboli. To samo odnosi się do przypadku, gdy dwa wierzchołki sześciokąta wpisanego w  $c^2$  schodzą się, t. j. gdy jeden lub więcej boków przejdzie w położenie graniczne i stanie się stycznymi stożkowej.

Kilka zadań sprawę najlepiej wyjaśni.

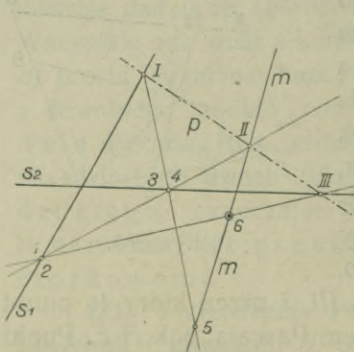
a) Danych jest pięć punktów krzywej  $c^2$ ; wykreślić w punkcie 5 styczną (Rys. 364.). Styczna w punkcie 5 zawiera także i punkt 6, łączy bowiem dwa, bezpośrednio po sobie następujące, punkty krzywej. Wyznamy punkty I i II prostej Pascala  $p$ , a punkt przecięcia się III tej prostej z bokiem 2 3 połączymy z punktem 5. Prosta  $s$  rozwiązuje zadanie.



Rys. 364.

1, 2, 3	4, 5, 6
1, 2	4, 5... II
2, 3	5, 6... III
3, 4	6, 1... I

b) Stożkowa  $c^2$  wyznaczona jest dwiema stycznymi  $s_1$  i  $s_2$  wraz z punktami styczności 1 i 3 i punktem 5; wyznaczyć dalszy punkt tej krzywej (Rys. 365.). Z punktem 1 schodzi się punkt 2, a z punktem 3 punkt 4. Styczna  $s_1$  stanowi bok 1 2, styczna  $s_2$  bok 3 4. Stosując wzór połączeń niżej przedstawiony, otrzymamy punkt 6 na prostej  $m$ , wykreślonej dowolnie przez punkt 5.

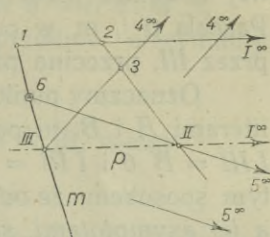


Rys. 365.

1, 2, 3	4, 5, 6
1, 2	4, 5... I
2, 3	5, 6... II
3, 4	6, 1... III



c) Stożkowa  $c^2$  wyznaczona jest punktami właściwymi 1, 2, 3 i punktami niewłaściwymi  $4^\infty$  i  $5^\infty$ ; znaleźć dalszy punkt tej krzywej (Rys. 366.). Punkty  $4^\infty$  i  $5^\infty$  wyznaczone są kierunkami; bok  $4^\infty 5^\infty$  jest prostą niewłaściwą płaszczyzny rysunkowej, punkt I prostej Pascala jest więc punktem niewłaściwym prostej 1, 2. Dowolna prosta, wykreślona równoległe do kierunku  $5^\infty$ , uważana za prostą  $5^\infty 6$  przecina bok 2 3 w punkcie II. Prosta Pascala p jest więc równoległą do prostej 1 2. Prosta  $3 4^\infty$  przecina prostą p w punkcie III który połączony z punktem I daje prostą m. Ta ostatnia przetnie prostą, przechodzącą przez punkty II i  $5^\infty$ , w szukanym punkcie 6 hiperboli.

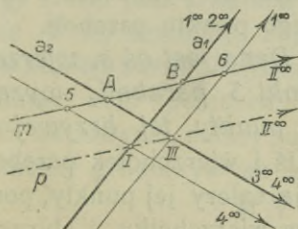


Rys. 366.

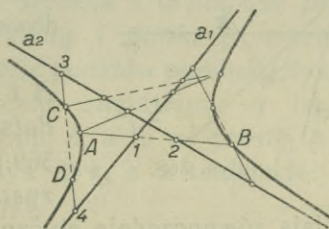
1, 2, 3	$4^\infty, 5^\infty, 6$
1, 2	$4^\infty, 5^\infty \dots I^\infty$
2, 3	$5^\infty, 6 \dots II$
3, $4^\infty$	$1, 6 \dots III$

} p.

d) Dane są asymptoty  $a_1, a_2$  i punkt 5 hiperboli; wy-



Rys. 367 a.



Rys. 367 b.

znaczyć dalsze jej punkty (Rys. 367 a.). Asymptotą nazywamy styczną do hiperboli w jej punkcie niewłaściwym.

Każda z asymptot wyznacza więc dwa punkty hiperboli. Ułożmy znany nam wzór połączeń. Punkt I

$1^\infty, 2^\infty, 3^\infty$	$4^\infty, 5, 6$
$1^\infty, 2^\infty$	$4^\infty, 5 \dots I$
$2^\infty, 3^\infty$	$5, 6 \dots II^\infty$
$3^\infty, 4^\infty$	$1^\infty, 6 \dots III$

} p.





czytamy:  $\frac{M 6}{N III} = \frac{M A}{N A}$ ;  $\frac{II III}{M A} = \frac{II 6}{M 6}$ , czyli

$$\overline{M 6} \cdot \overline{N A} = \overline{M A} \cdot \overline{N III}; \overline{II III} \cdot \overline{M 6} = \overline{II 6} \cdot \overline{M A},$$

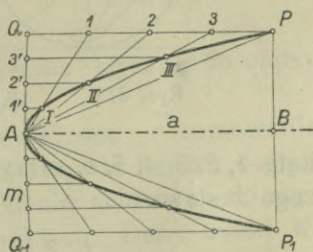
a dzieląc ostatnie równanie przez poprzednie otrzymamy:

$$\frac{\overline{II III}}{\overline{N A}} = \frac{\overline{II 6}}{\overline{N III}}.$$

Uwzględniając, że  $\overline{M N} = \overline{II III}$  i  $\overline{M II} = \overline{N III}$ , mamy

$$\frac{\overline{M N}}{\overline{N A}} = \frac{\overline{II 6}}{\overline{M II}}.$$

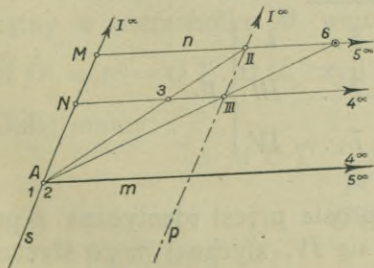
Na tym ostatnim związku opiera się następująca konstrukcja punktów paraboli, której oś  $a$ , wierzchołek  $A$  i jeden punkt  $P$  są dane (Rys. 370.). W wierzchołku  $A$  paraboli kreślimy styczną  $m$ , a następnie prostokąt  $P Q P_1 Q_1$ . Boki  $A Q$  i  $P Q$  dzielimy na tę samą ilość równych części. Przez punkty  $1', 2', 3' \dots$  kreślimy równoległe do osi  $a$ , a punkty podziału na boku  $P Q$  łączymy z wierzchołkiem paraboli. Punkty przecięcia się  $I, II, III \dots$  prostych, poprowadzonych przez równomienne punkty, są punktami paraboli.



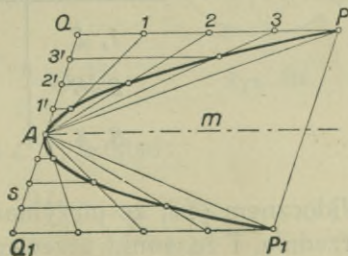
Rys. 370.

g) Dana jest średnica  $m$ , styczna  $s$  w punkcie przecięcia się  $A$  tej średnicy z parabolą i punkt 3; wyznaczyć dalsze punkty paraboli. Mamy pięć punktów paraboli (Rys. 371.), a stosując wzór połączeń Pascala, znajdziemy w ten sam sposób, co powyżej, dalszy punkt np. 6, a to na prostej  $n \parallel m$ . Otrzymamy proporcje jak w Rys. 369., a w rezultacie:

$$\frac{\overline{M N}}{\overline{N A}} = \frac{\overline{II 6}}{\overline{M II}}.$$



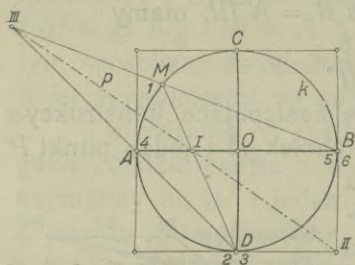
Rys. 371.



Rys. 372.

Na tej podstawie otrzymamy punkty paraboli, gdy dana jest średnica  $m$ , styczna  $s$  w punkcie  $A$  i punkt np.  $P$ , przeprowadzając konstrukcję podaną na Rys. 372. Czytelnika uderzy oczywistość powinowactwo między Rys. 370. a Rys. 372.

**122. Konstrukcja stycznych do elipsy.** Na kole  $k$  (Rys. 373.) opiszmy kwadrat, styczny w punktach  $A, B, C, D$



Rys. 373.

i weźmy pod uwagę dowolny punkt  $M$  tego koła. Oznaczmy punkt  $M$  liczbą 1, punktem  $D$ , w którym dana jest styczna do koła, określone są punkty 2 i 3, punkt  $A$  nazwijmy 4, a punkt  $B$  niechaj skupia w sobie punkty 5 i 6. Punkty 5 i 6 połączone dają bok kwadratu styczny do koła w punkcie  $B$ . Stosując

twierdzenie Pascala do sześciokąta 1, 2, 3, 4, 5, 6, otrzymamy prostą Pascala  $p$  z następującego zestawienia:

1, 2, 3	4, 5, 6	
1, 2	4, 5... I	}
2, 3	5, 6... II	
3, 4	1, 6... III	

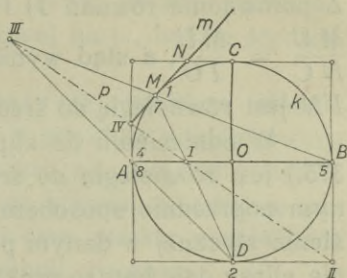
Wykreślmy w punkcie  $M$  styczną  $m$  do koła, a oznaczmy punkty  $A, B, D$  i  $M$  liczbami tak, jak to wskazuje Rys. 374, znajdziemy prostą Pascala  $p$  dla sześciokąta 1, 2, 8, 4, 5, 7.

1, 2, 8	4, 5, 7	
1, 2	4, 5... I	}
2, 8	5, 7... III	
8, 4	1, 7... IV	

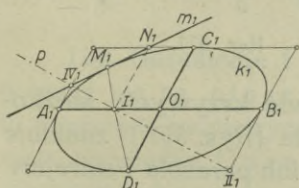
Widocznym jest, że otrzymana prosta  $p$  jest identyczną z poprzednią, i że punkt przecięcia się  $IV$ , stycznej  $m$  ze styczną do koła w punkcie  $A$ , leży na tej prostej.



Jeżeli koło  $k$ , wraz z opisanym na nim kwadratem i styczną  $m$ , rzucimy w dowolnym kierunku na dowolną płaszczyznę, to otrzymamy rysunek powinowaty z pierwszym. Kołu  $k$  odpowie elipsa  $k_1$ , średnicom  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  średnic sprężone  $\overline{A_1 B_1}$  i  $\overline{C_1 D_1}$  tej elipsy. Styczna  $m$  w punkcie  $M$  do koła będzie, po dokonany rzucie, styczną  $m_1$  w punkcie  $M_1$  elipsy. Prosta  $M_1 D_1$  przetnie średnicę  $\overline{A_1 B_1}$  w punkcie  $I_1$ , który połączony z punktem  $II_1$  daje prostą  $p$ . Prosta ta przejdzie przez punkt  $IV_1$ , w którym styczna  $m_1$  przecina styczną do elipsy w punkcie  $A_1$ .



Rys. 374.



Rys. 375.

$IV_1$ , a ten wraz z danym punktem  $M_1$  żadaną styczną  $m_1$ .

Styczna  $m$  (Rys. 376.) przecina średnicę  $\overline{CD}$  koła  $k$  w punkcie  $T$ , a bok kwadratu, styczny w punkcie  $C$  do koła, w punkcie  $N$ . Prostopadła wykreślona z punktu  $M$  do średnicy  $\overline{CD}$  przecina ją w punkcie  $U$ .

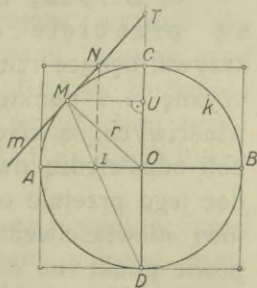
Ponieważ trójkąt  $TOM$  jest prostokątny w wierzchołku  $M$ , więc:

$$\overline{MO}^2 = r^2 = \overline{OT} \cdot \overline{OU}, \text{ czyli } \overline{OT} = \frac{r^2}{\overline{OU}}$$

Dalej mamy:

$$\triangle MUT \sim \triangle NCT, \text{ a stąd:}$$

$$\frac{\overline{MU}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{TU}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{OT} - \overline{OU}}{\overline{OT} - r} = \frac{\frac{r^2}{\overline{OU}} - \overline{OU}}{\frac{r^2}{\overline{OU}} - r} = \frac{r^2 - \overline{OU}^2}{r(r - \overline{OU})} = \frac{r + \overline{OU}}{r} \cdot 1).$$



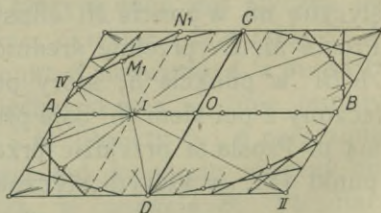
Rys. 376.

Z trójkątów podobnych  $MUD$  i  $IOD$  otrzymamy proporcję:  $\frac{MU}{IO} = \frac{UD}{OD} = \frac{r + OU}{r} \dots \dots \dots 2).$

Z porównania równań 1) i 2) widzimy, że:

$\frac{MU}{NC} = \frac{MU}{IO}$ , a stąd wynika, że  $\overline{NC} = \overline{IO}$ , czyli że prosta  $IN$  jest równoległą do średnicy  $CD$ .

W odniesieniu do elipsy znaczy to, że prosta  $IN_1$  (Rys. 375.) jest równoległą do średnicy  $CD$ , co w łączności z podanym poprzednio sposobem kreślenia stycznej w danym punkcie elipsy daje bardzo praktyczny sposób wyznaczenia dowolnej ilości stycznych i ich punktów styczności, gdy dana jest para średnic sprzężonych, względnie osi elipsy, jak to widzimy na Rys. 377.



Rys. 377.

**123. O kolineacji i powinowactwie krzywych stożkowych.** Przypuśćmy, że w miejsce koła (Rys. 357.) znajduje się na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$  elipsa, hiperbola lub parabola i starajmy się dać odpowiedź na pytanie, jakie krzywe odpowiadają tym liniom na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$ . Podobnie jak przy kole, zachodzić tu będą trzy przypadki:

a) Elipsa, hiperbola względnie parabola nie są przecięte osią wzajemną  $z_1$ . W tym wypadku krzywe, będące rzutem elipsy, hiperboli czy paraboli na płaszczyznę  $\varepsilon_2$  z punktu  $O$ , nie posiadają żadnych punktów niewłaściwych, są więc elipsami. Punktem niewłaściwym hiperboli odpowiadają dwa punkty na osi wzajemnej  $w_2$ , która wobec tego przetnie otrzymaną elipsę w dwóch punktach. Punktom niewłaściwym paraboli, leżącej na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$ , odpowie punkt na osi  $w_2$ ; elipsa jako krzywa, kolineacyjnie związana z parabolą, będzie styczną do osi wzajemnej  $w_2$ .

b) Elipsa, hiperbola i parabola przecięte są osią wzajemną  $z_1$ . Punktem, leżącym na osi  $z_1$ , odpowiadają punkty niewłaściwe na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$ , a krzywymi, leżącymi na  $\varepsilon_1$ , hiperbole.

c) Jeżeli elipsa, hiperbola lub parabola są styczne do osi  $z_1$ , to krzywe, odpowiadające im kolineacyj-



nie na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$ , posiadać będą jeden punkt niewłaściwy, albo ściślej się wyrażając, będą styczne do prostej niewłaściwej płaszczyzny  $\varepsilon_2$ , będą więc parabolami. Parabola, odpowiadająca hiperboli, przetnie oś  $w_2$  w dwóch punktach, parabola, odpowiadająca paraboli leżącej na  $\varepsilon_1$ , będzie styczną do osi wzajemnej  $w_2$ .

W dwóch układach powinowatych punktom właściwym odpowiadają punkty właściwe, a punktom niewłaściwym punkty niewłaściwe. Krzywej stożkowej, nie mającej punktów niewłaściwych (elipsie), odpowie także krzywa w układzie powinowatym; stożkowej, posiadającej dwa punkty niewłaściwe (hiperboli), odpowie hiperbola, a paraboli, parabola.

## § 11. O KRZYWYCH I POWIERZCHNIACH W OGÓLNOŚCI

**124. Określenie i podział linii krzywych.** Jeżeli punkt porusza się na płaszczyźnie, według określonego prawa, to miejscem geometrycznym położenia tego punktu jest w ogólnym przypadku linia krzywa płaska, czyli jak się krótko wyrażamy, krzywa płaska. Jeżeli prawo ruchu punktu jest nieokreślone, to krzywa nosi nazwę krzywej graficznej, w odróżnieniu od krzywej, powstałej według pewnego prawa, zwanej krzywą matematyczną. Prawo powstawania krzywych matematycznych, a więc i same krzywe, wyrazić się zawsze dadzą równaniami matematycznymi, krzywe graficzne wyrażają się wyłącznie rysunkiem. Krzywe stożkowe, więc koło, elipsa, hiperbola i parabola, są przykładami krzywych matematycznych, linia wyrażająca kształt, np. liścia kasztanu, jest linią graficzną.

Jeżeli punkt porusza się w przestrzeni według określonego prawa, to miejscem geometrycznym położenia tego punktu jest linia krzywa przestrzenna, zwana także krzywą skośną. Podobnie, jak krzywe płaskie, rozróżniamy krzywe skośne matematyczne od graficznych.

**125. Określenie i podział powierzchni.** Niechaj krzywa płaska lub skośna, nie zmieniając swego kształtu, albo zmieniając go w określony sposób, porusza się według pewnego prawa w przestrzeni, to miejsce geometryczne położenia tej

krzywej określamy mianem powierzchni. Poruszając się krzywą nazywamy tworzącą powierzchni. Jeżeli powierzchnia powstała w wyżej określony sposób, utworzyć się da także ruchem linii prostej, to nazywamy ją powierzchnią prostoliniową albo prostokreślną, w odróżnieniu od powierzchni krzywoliniowej, czyli krzywokreślnej, która nie da się utworzyć ruchem linii prostej. Przykładem pierwszego rodzaju powierzchni jest np. stożek, który powstaje gdy koło, zmieniając swój promień, porusza się równolegle do swego położenia, a jego środek opisuje linię prostą. Ale stożek powstać może i w ten sposób, że prosta obróci się około drugiej prostej, która ją przecina. W pierwszym przypadku, poruszające się i zmieniające swój promień koło, w drugim poruszająca się prosta, są tworzącymi stożka. Przykładem powierzchni krzywoliniowej jest np. kula.

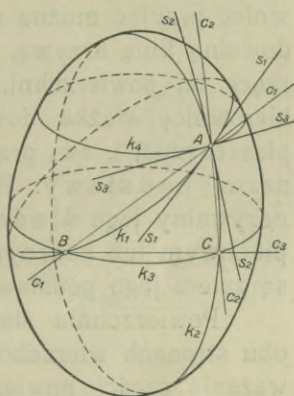
W zakres naszych elementarnych rozważań włączymy tylko bardzo ograniczoną grupę powierzchni, a środki badania, którymi rozporządzamy, nie pozwalają nawet na bardziej szczegółową systematykę powierzchni.

Powierzchnie prostoliniowe, dające się rozwinąć na płaszczyźnie, a także i odwrotnie, mogące powstać ze zwinęcia płaszczyzny, bez jej rozdarcia, zagięcia lub załamania, określamy mianem powierzchni rozwijalnych. Powierzchnie, nie dające się rozwinąć na płaszczyźnie, nazywamy powierzchniami nierozwijalnymi, albo skośnymi.

**126. O płaszczyznach stycznych do powierzchni.** Styczną w punkcie krzywej, leżącej na powierzchni, określamy jako styczną do powierzchni w tym punkcie. Weźmy pod uwagę dowolną powierzchnię (Rys. 378.), a przez jeden z jej punktów np.  $A$ , nakreślmy na niej dwie linie krzywe  $k_1$  i  $k_2$ . Obierzmy następnie na powierzchni trzecią krzywą  $k_3$ , przecinającą pierwsze w punktach  $B$  i  $C$ . Uważajmy krzywe  $k_1$  i  $k_2$  za kierownice, a krzywą  $k_3$  za tworzącą, która, poruszając się po  $k_1$  i  $k_2$  i zmieniając odpowiednio swój kształt, opisuje naszą powierzchnię. Proste  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$ , łączące punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$ , są siecznymi krzywych  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$ , a więc i siecznymi powierzchni i leżą na jednej płaszczyźnie  $\delta$ . Podczas ruchu krzywej  $k_3$ , punkt  $B$  porusza się po krzywej  $k_1$ , zbliżając się do punktu  $A$ , gdy równocześnie punkt  $C$  posuwa się po krzywej  $k_2$ , zbliżając się również do punktu  $A$ , przyczem sieczne  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$  pozostają



stałe na jednej płaszczyźnie  $\sigma$ . W położeniu granicznym krzywa  $k_3$  zajmie położenie  $k_4$ , sieczna  $c_1$  przejdzie w styczną  $s_1$ , sieczna  $c_2$  w styczną  $s_2$ , a sieczna  $c_3$  w styczną  $s_3$ . Płaszczyzna  $\sigma$  zajmie również położenie graniczne  $\sigma_1$  i zawierać będzie styczne  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$ . Płaszczyznę  $\sigma$ , w owym położeniu granicznym, nazywamy płaszczyzną styczną powierzchni w punkcie  $A$ . Obrabwszy w miejsce krzywej  $k_3$  inną krzywą jako tworzącą, wykazemy w ten sam sposób jak poprzednio, że styczna, poprowadzona do tej krzywej w punkcie  $A$ , nie identyczna zresztą ze styczną  $s_3$ , leży również na płaszczyźnie stycznej  $\sigma_1$ . Widoczne stąd, że styczne, poprowadzone do powierzchni w jednym jej punkcie, leżą na jednej płaszczyźnie, która jest płaszczyzną styczną do powierzchni w tym punkcie. I wzajemnie: płaszczyzna styczna do powierzchni w jej punkcie jest miejscem geometrycznym stycznych, poprowadzonych w tym punkcie do krzywych, przechodzących przez ten punkt, a leżących na powierzchni.



Rys. 378.

Z określenia powyższego wynika bezpośrednio, że 1) dla wyznaczenia płaszczyzny stycznej do powierzchni w danym jej punkcie, wystarczy wyznaczyć styczne do dwóch linii krzywych, poprowadzonych przez ten punkt na tej powierzchni; 2) jeżeli powierzchnia jest prostoliniową, to płaszczyzna styczna w danym punkcie zawiera prostą tworzącą, przechodzącą przez ten punkt, gdyż styczna w tym punkcie do uważanej tworzącej jest właśnie nią samą.

Prosta prostopadła do płaszczyzny stycznej powierzchni w punkcie styczności, nazywa się prostą normalną powierzchni w danym punkcie. Płaszczyzny, przechodzące przez prostą normalną, zwiemy płaszczyznami normalnymi danego punktu powierzchni.

## § 12. POWIERZCHNIE STOŻKOWE i WALCOWE

**127. Tworzenie i podział powierzchni stożkowych i walcowych.** Jeżeli prosta, przechodząca przez punkt, po-

rusza się w ten sposób w przestrzeni, że przecina stałe daną linię krzywą płaską lub skośną, to powstała w ten sposób powierzchnia nazywa się powierzchnią stożkową. Poruszając się prostą, w każdym jej położeniu, nazywamy tworzącą powierzchni stożkowej; punkt, przez który przechodzi tworząca, jest wierzchołkiem, a krzywa, którą przecina tworząca, kierownicą powierzchni stożkowej. Jako kierownicę przyjąć można na danej powierzchni stożkowej każdą dowolną linię krzywą, byleby tylko przecinała wszystkie tworzące tej powierzchni. W szczególności przyjąć można jako kierownicę stożka dowolny przekrój powierzchni stożkowej płaszczyzną, t. zw. przekrój płaski, a wtedy kierownica nosi nazwę podstawy. Przekroje stożka płaszczyznami rzutów, nazywamy jego śladami. Mówimy tedy o śladzie poziomym, pionowym lub bocznym powierzchni stożkowej. Ślady stożka są zatem jego podstawami, leżącymi na rzutniach.

Powierzchnia stożkowa rozciąga się nieograniczenie po obu stronach wierzchołka; zazwyczaj ograniczamy się do rozważania części powierzchni, zawartej między wierzchołkiem a przekrojem płaskim (podstawą) i taką ograniczoną część powierzchni nazywamy stożkiem. Odległość wierzchołka od płaszczyzny podstawy, nazywamy wysokością stożka.

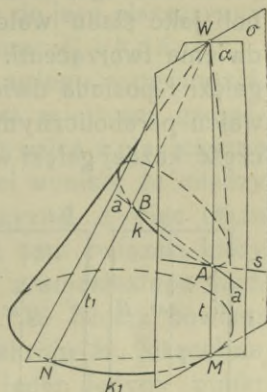
Jeżeli wierzchołek powierzchni stożkowej jest punktem niewłaściwym przestrzeni, czyli leży nieograniczenie daleko w danym kierunku, to powierzchnia nazywa się walcową. Tworzące powierzchni walcowej są do siebie równoległe i równoległe do danego kierunku. Część powierzchni walcowej, leżącej między dwoma równoległymi przekrojami płaskimi, nazywamy walcem, a krzywe przekroju jego podstawami. W tym samym znaczeniu, co przy stożkach, mówimy i tu o śladach walca, rozumiejąc przez nie przekroje powierzchni walcowej płaszczyznami rzutów. Odległość obu podstaw nazywamy wysokością walca.

Przedmiotem naszych rozważań uczynimy te powierzchnie stożkowe i walcowe, których kierownicami, a więc także podstawami, są krzywe stożkowe, więc: koło, elipsa, hiperbola i parabola. Powierzchnie te określamy wspólnym mianem powierzchni stożkowych i walcowych rzędu drugiego.

128. Płaszczyzny styczne do stożków i walców. Na tworzącej  $t$  powierzchni stożkowej obierzmy punkt  $A$  (Rys. 379.),



przez który poprowadźmy krzywą  $k$ , leżącą na tej powierzchni. W myśl określenia płaszczyzny stycznej, podanem w ust. 126., tworząca  $t$  i styczna  $s$  w punkcie  $A$  do krzywej  $k$  wyznaczają płaszczyznę styczną  $\sigma$  do stożka w punkcie  $A$ . Obierzmy na krzywej  $k$  punkt  $B$  i połączmy go z punktem  $A$ , to sieczna  $a \equiv (A, B)$  wraz z tworzącą  $t$  wyznaczają płaszczyznę  $\alpha$ , która przecina powierzchnię stożkową wzdłuż tworzących  $t$  i  $t_1$ . Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna  $\varphi$  obraca się około tworzącej  $t$ , to punkt  $B$  zbliża się do punktu  $A$ , a w położeniu granicznym, gdy punkt  $B$  zejdzie się z punktem  $A$ , sieczna  $a$  przejdzie w styczną  $s$  do krzywej  $k$  w punkcie  $A$ , a płaszczyzna  $\alpha$ , w płaszczyznę styczną  $\sigma$ . W ten sposób określić można płaszczyznę styczną do powierzchni stożkowej, względnie walcowej, jako



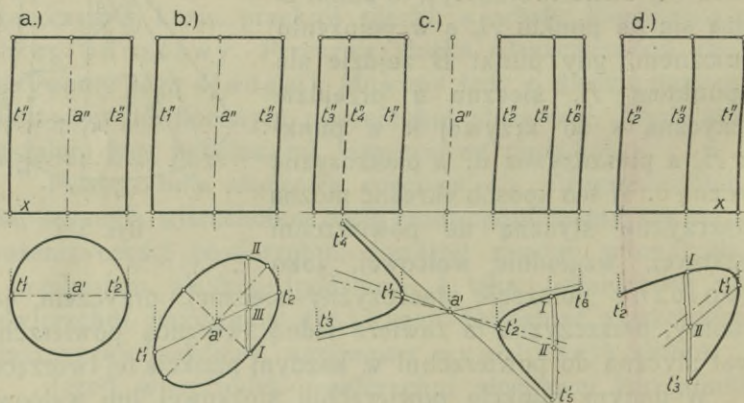
Rys. 379.

graniczne położenie płaszczyzny siecznej, przyczem, jak widzimy, płaszczyzna ta zawiera jedną tworzącą powierzchni i jest styczną do powierzchni w każdym punkcie tej tworzącej.

W danym punkcie powierzchni stożkowej lub walcowej wyznaczmy więc płaszczyznę styczną w sposób następujący: Powierzchnię przetniemy płaszczyzną, przechodzącą przez dany punkt i poprowadzimy w tym punkcie styczną do linii przekroju. Styczna ta, wraz z tworzącą stożka, przechodzącą przez dany punkt, wyznaczają płaszczyznę styczną do powierzchni w każdym punkcie tworzącej, a więc i w punkcie danym.

**129. Podział i rzuty powierzchni walcowych rzędu drugiego.** Biorąc pod uwagę takie położenia powierzchni walcowych rzędu drugiego, przy których tworzące ich są pionowe, otrzymamy jako ślady poziome tych powierzchni koło, elipsę, hiperbolę i parabolę. Rodzaj krzywej stożkowej, występującej jako ślad poziomy powierzchni walcowej, której tworzące są pionowe, charakteryzuje tę powierzchnię. W przypadku, gdy śladem tym jest koło, walec nazywać będziemy walcem obrotowym (Rys. 380 a), gdy śladem jest elipsa, hiperbola lub parabola, mówimy o walcu eliptycznym

(Rys. 380 b), hiperbolicznym (Rys. 380 c) i parabolicznym (Rys. 380 d). Walec paraboliczny — ponieważ parabola posiada jeden punkt niewłaściwy — ma jedną tworzącą niewłaściwą. W praktycznym przedstawianiu rysunkiem walca parabolicznego, bierzemy pod uwagę ograniczoną część paraboli jako śladu walca, który wskutek tego ograniczony jest dwiema tworzącymi. Walec hiperboliczny składa się z dwóch gałęzi i posiada dwie tworzące niewłaściwe. Podobnie, jak przy walcu parabolicznym, bierzemy pod uwagę tylko ograniczoną część każdej gałęzi walca hiperbolicznego, a to jego tworzącymi.



Rys. 380 a—d.

Prosta  $a$  ( $a'$   $a''$ ), poprowadzona przez środek podstawy (śladu) walca, nazywa się jego osią. Płaszczyzny poziomo rzucające, poprowadzone przez asymptoty hiperboli, jako podstawy walca, noszą nazwę płaszczyzn asymptotycznych.

Płaszczyzny styczne do walca i prostopadłe do rzutni pionowej, dzielą każdą powierzchnię walcową na dwie części, których granicami są tworzące styczne do walca z tymi płaszczyznami. Tworzące te, oznaczone literami  $t_1$  i  $t_2$  na Rys. 380 a—d, stanowią zarys walca, a ich rzut pionowy, identyczny ze śladami pionowymi płaszczyzn stycznych, jest zarysem, czyli rzutem walca na rzutnię pionową.

Każda płaszczyzna, przechodząca przez oś walca obrotowego, jest jego płaszczyzną symetrii prostokątnej. Walec eliptyczny i hiperboliczny posiadają po dwie takie płaszczyzny symetrii, którymi są płaszczyzny, przechodzące przez oś walca

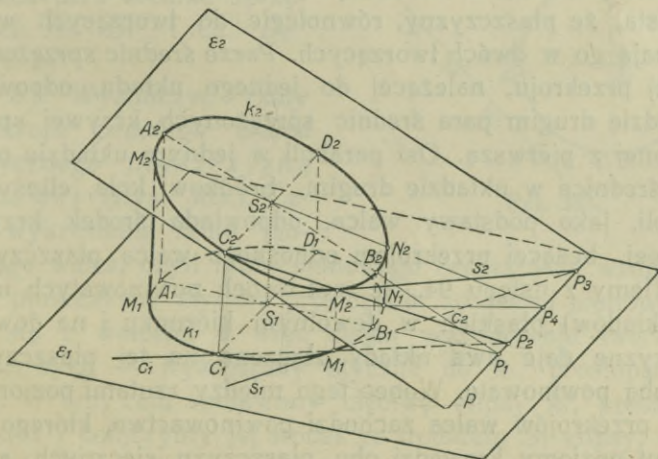


i osi elipsy, względnie hiperboli, stanowiących podstawy. Walec paraboliczny ma tylko jedną płaszczyznę symetrii. Ilość płaszczyzn symetrii znamionuje i wyróżnia walce rzędu drugiego między sobą. W szczególności ważną jest ta charakterystyka przy odróżnianiu walca obrotowego od eliptycznego.

Jeżeli tworzące walca są prostopadłe do jego płaszczyzny podstawy, to walec nazywamy prosty, inaczej ukośny.

### 130. O przekrojach walców rzędu drugiego w ogólności.

Linia przekroju walca z płaszczyzną jest miejscem geometrycznym punktów przebicia się tworzących walca z płaszczyzną sieczną. Z określenia powierzchni walcowej wynika, że między jej śladem i przekrojem dowolną płaszczyzną, a więc także między dwoma przekrojami, zachodzi ten sam związek, który wykazaliśmy między dwoma przekrojami graniastostupa (ust. 102.), t. j. powinowactwo środkowe. W istocie bowiem każdemu punktowi  $A_1, B_1, C_1 \dots$  linii przekroju  $k_1$ , leżącej na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$  (Rys. 381.), odpowiada jeden jedyny punkt



Rys. 381.

$A_2, B_2, C_2 \dots$  drugiej linii przekroju  $k_2$ , leżącej na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$ , przyczem odpowiadające sobie punkty leżą na tworzących walca, stanowiących promienie powinowactwa. Każdej prostej np.  $c_1$ , leżącej na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$  i przecinającej krzywą  $k_1$  w punktach  $C_1$  i  $M_1$ , odpowiada na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$  prosta  $c_2$ , przecinająca krzywą  $k_2$  w punktach  $C_2$  i  $M_2$ . Każdej stycznej, np.  $s_1$

do  $k_1$  w punkcie  $M_1$ , odpowiada na płaszczyźnie  $\varepsilon_2$  prosta  $s_2$ , styczna do krzywej  $k_2$  w punkcie  $M_2$ , leżącym wraz z punktem  $M_1$  na jednej tworzącej. Miejszem geometrycznym punktów przecięcia się, odpowiadających sobie prostych na obu płaszczyznach, jest krawędź  $p$  tych płaszczyzn, stanowiąca oś powinowactwa.

Jeżeli płaszczyzny  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  są równoległe, to oś powinowactwa leży nieograniczenie daleko, a między obu układami płaskimi zachodzi przystawanie. Płaszczyzny równoległe przecinają więc walec w krzywych przystających.

Wiadomo, że kołu, leżącemu na płaszczyźnie  $\varepsilon_1$ , odpowiada w układzie powinowatym  $\varepsilon_2$  elipsa, dalej, że elipsa spowinowaconą jest z elipsą, parabola z parabolą, a hiperbola z hiperbolą (ust. 123.). Stąd wynika wprost, że walec obrotowy przeciąć można zawsze wzdłuż elipsy, walec eliptyczny wzdłuż elipsy, a jak to później zauważymy, także i wzdłuż koła (ust. 131., Rys. 384.), że przekrój walca parabolicznego może być tylko parabolą, a walca hiperbolicznego hiperbolą. Rzecz oczywista, że płaszczyzny, równoległe do tworzących walca, przecinają go w dwóch tworzących. Parze średnic sprzężonych krzywej przekroju, należącej do jednego układu, odpowiada w układzie drugim para średnic sprzężonych krzywej spowinowaconej z pierwszą. Osi paraboli w jednym układzie odpowiada średnica w układzie drugim. Środkowi koła, elipsy lub hiperboli, jako podstawy walca, odpowiada środek krzywej stożkowej, będącej przekrojem odnośnego walca płaszczyzną.

Wiemy z ustępu 94., że rzut dwóch powinowatych utworów (układów) płaskich w dowolnym kierunku i na dowolną płaszczyznę daje dwa układy złączone na tej płaszczyźnie i ze sobą powinowate. Wobec tego między rzutami poziomymi dwóch przekrojów walca zachodzi powinowactwo, którego osią jest rzut poziomy krawędzi obu płaszczyzn siecznych, a kierunkiem, kierunek rzutu poziomego tworzących walca. Podobnie między rzutami pionowymi dwóch przekrojów walca zachodzi powinowactwo o kierunku równoległym do rzutu pionowego tworzących tego walca, a osią, którą jest rzut pionowy krawędzi płaszczyzn siecznych. Gdy jednym z dwóch uważanych przekrojów walca jest jego ślad, to osią powinowactwa jest odpowiedni ślad pozostałej płaszczyzny siecznej.

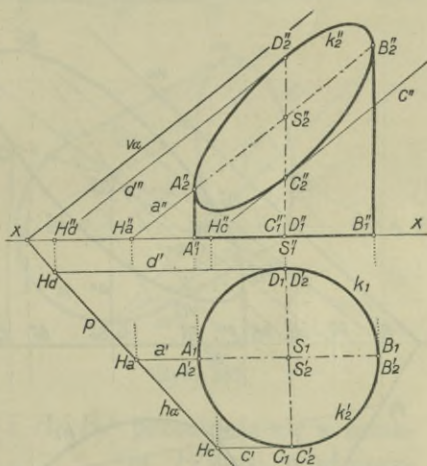


Gdy oba przekroje walca są jego śladami, a więc leżą na rzutniach, to osią powinowactwa jest oś rzutów  $x$ .

Zadanie: „Wyznaczyć przekrój walca płaszczyzną  $\alpha$ “, polegać będzie na wykreśleniu rzutów krzywej przekroju, względnie na wyznaczeniu średnic sprzężonych lub osi tej krzywej.

### 131. Przykłady przekrojów walców.

a) Wyznaczyć przekrój walca obrotowego płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) (Rys. 382.). Krzywą przekroju jest elipsa  $k_2$ , której rzut poziomy  $k_2'$  schodzi się z podstawą  $k_1$  walca. Rzut pionowy  $k_2''$  krzywej przekroju będzie elipsą, a ponieważ między rzutem poziomym i pionowym zachodzi powinowactwo (ust. 95.), więc parze średnic sprzężonych  $\overline{A_2'B_2'}$ ,  $\overline{C_2'D_2'}$  koła  $k_2'$  odpowiada para średnic sprzężonych  $\overline{A_2''B_2''}$  i  $\overline{C_2''D_2''}$  elipsy  $k_2''$ .



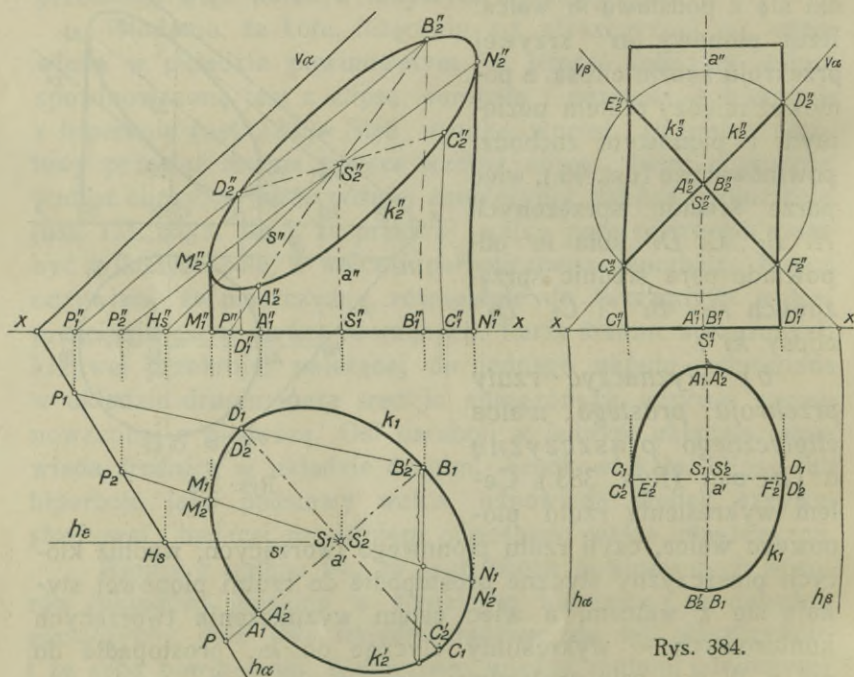
Rys. 382.

b) Wyznaczyć rzuty przekroju prostego walca eliptycznego płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) (Rys. 383.).

Celem wykreślenia rzutu pionowego walca, czyli rzutu pionowego tworzących, wzdłuż których płaszczyzny styczne prostopadłe do rzutni pionowej stykają się z walcem, a więc celem wyznaczenia tworzących konturowych — wykreślimy styczne do  $k_1$ , prostopadłe do osi  $x$ . W tym celu społowimy cięciwę elipsy  $k_1$ , prostopadłą do osi  $x$  i połączymy jej środek ze środkiem  $S_1$  elipsy. Otrzymana średnica elipsy przecina ją w punktach  $M_1$  i  $N_1$ , które są rzutami poziomymi tworzących konturowych.

Krzywa przekroju jest elipsą, której rzut poziomy  $k_2'$  schodzi się z podstawą  $k_1$ . Osi  $\overline{A_2'B_2'}$  i  $\overline{C_2'D_2'}$  elipsy  $k_1'$  schodzą się z osiami  $\overline{A_1B_1}$  i  $\overline{C_1D_1}$  podstawy  $k_1$ . Przy pomocy prostej  $s$  ( $s'$   $s''$ ) znajdziemy punkt  $S_2''$ , t. j. rzut pionowy środka elipsy  $k_2''$ , a przy pomocy dalszych prostych przyjętych na płaszczyźnie  $\alpha$ , średnice sprzężone  $\overline{A_2''B_2''}$  i  $\overline{C_2''D_2''}$  tejże elipsy.

c) Wyznaczyć kierunek płaszczyzn, tnących walec eliptyczny wzdłuż kół. Nadajmy walcowi takie położenie, aby oś jego  $a$  ( $a'$ ,  $a''$ ) była pionowa (Rys. 384.), a płaszczyzna przechodząca przez tę oś i przez małą oś elipsy była płaszczyzną czołową (równoległą do rzutni pionowej). Z dowolnego punktu  $S_2''$  prostej  $a''$  zakresłmy koło promieniem równym dużej półosi elipsy  $k_1$ , a otrzymane punkty  $C_2''$ ,  $D_2''$  i  $E_2''$ ,  $F_2''$  połączmy ze sobą. Niechaj  $(C_2''$ ,  $D_2''$ )  $\equiv v_\alpha$  będzie śladem pio-



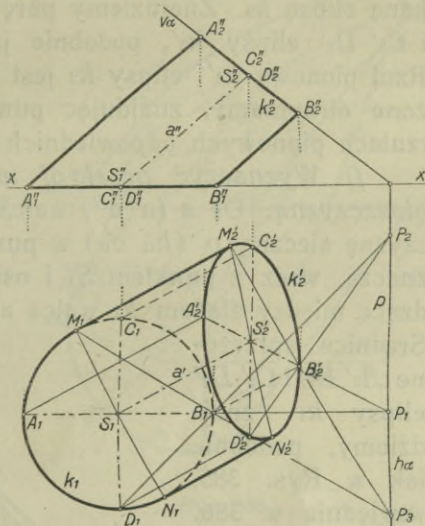
Rys. 383.

nowym pionowo rzucającej płaszczyzny siecznej  $\alpha$ , to odcinek  $\overline{A_2 B_2}$ , przechodzący przez punkt  $S_2$  i prostopadły do rzutni pionowej, jest jedną, a odcinek  $\overline{C_2 D_2}$  prostopadły do  $\overline{A_2 B_2}$ , drugą osią linii przekroju, powinowatej z elipsą  $k_1$ . Osi te są równej długości, a więc krzywa, niemi wyznaczona, jest kołem. Z tych samych względów płaszczyzna pionowo rzucająca  $\beta$  ( $h_\beta v_\beta$ ) przecina walec eliptyczny również wzdłuż koła. Płaszczyzny równoległe do płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  przecinają

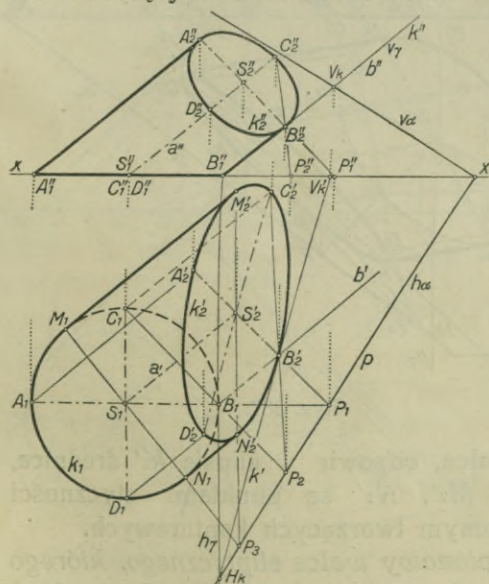


nasz walec wzdłuż kół, a stąd wynika, że na powierzchni walcowej eliptycznej istnieją dwa układy kół.

d) Wyznaczyć przekrój walca eliptycznego, którego ślad poziomy jest kołem, pionowo rzucającą płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ). Przekrój walca będzie elipsą  $k_2$ , której rzut pionowy schodzi się ze śladem  $v_\alpha$  (Rys. 385). Parze średnic sprzężonych  $A_1 B_1$  i  $C_1 D_1$  w kole  $k_1$  odpowiada para średnic sprzężonych  $A_2 B_2$  i  $C_2 D_2$  w elipsie  $k_2$ , powinowatej z kołem  $k_1$ . Oś powinowactwa jest ślad  $h_\alpha$  płaszczyzny siecznej, kierunkiem, kierunek tworzących walca. Punkty  $A_2', B_2', C_2'$  i  $D_2'$  otrzymamy, odnosząc punkty  $A_2'', B_2'', C_2''$  i  $D_2''$  na rzuty poziome odpowiednich tworzących. Proste  $A_1 B_1$  i  $A_2' B_2'$  przecinają się w punkcie  $P_1$  osi powinowactwa  $h_\alpha$ , podobnie jak i inne proste łączące pary odpowiadających sobie punktów koła  $k_1$  i spowinowaczonej z nim elipsy  $k_2$ . Punktom  $M_1$  i  $N_1$  odpowiedzą punkty styczności  $M_2'$  i  $N_2'$  elipsy  $k_2'$  z rzutami tworzących konturowych walca.



Rys. 385.

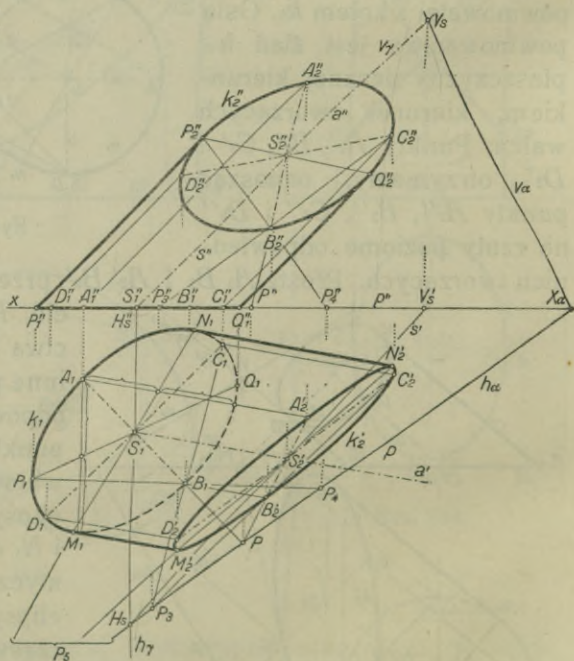


Rys. 386.

e) Wyznaczyć przekrój walca eliptycznego, którego ślad poziomy jest kołem, płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) — (Rys. 386). Wyzna-

czyimy punkt przecięcia się  $B_2$  ( $B_2'$   $B_2''$ ) tworzącej konturowej  $b$  ( $b'$   $b''$ ) z płaszczyzną  $\alpha$ . Punkt ten wraz z osią  $h_\alpha$  wyznaczają powinowactwo, jakie zachodzi między kołem  $k_1$  a szukaną elipsą  $k_2$ . Znajdziemy parę średnic sprzężonych  $\overline{A_2'} B_2'}$  i  $\overline{C_2'} D_2'}$  elipsy  $k_2'$ , podobnie jak w zadaniu poprzednim. Rzut pionowy  $k_2''$  elipsy  $k_2$  jest elipsą, której średnice sprzężone otrzymamy, znajdując punkty  $A_2''$ ,  $B_2''$ ,  $C_2''$  i  $D_2''$  na rzutach pionowych odpowiednich tworzących walca.

f) Wyznaczyć przekrój walca eliptycznego dowolną płaszczyzną. Oś  $a$  ( $a'$   $a''$ ) walca (Rys. 387.) przebija płaszczyznę sieczną  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ) w punkcie  $S_2$  ( $S_2'$   $S_2''$ ), który wyznacza, wraz z punktem  $S_1$  i osią  $h_\alpha$ , powinowactwo zachodzące między śladem  $k_1$  walca a jego przekrojem  $k_2$  ( $k_2'$   $k_2''$ ). Średnice sprzężone  $\overline{A_2'} B_2'}$  i  $\overline{C_2'} D_2'}$  elipsy  $k_2'$  znajdziemy, podobnie jak w Rys. 385. względnie w 386. Średnicy  $\overline{P_1 Q_1}$ , sprzężonej z kierunkiem prostopadłym do osi  $x$ , odpowiada na płaszczyźnie  $\alpha$  średnica  $\overline{P_2 Q_2}$ , przyczem punkty  $P_2''$  i  $Q_2''$  są punktami styczności elipsy  $k_2''$  z rzutem pionowym tworzących konturowych. Średnicy  $\overline{M_1 N_1}$ , sprzężonej z kierunkiem równoległym do rzutu



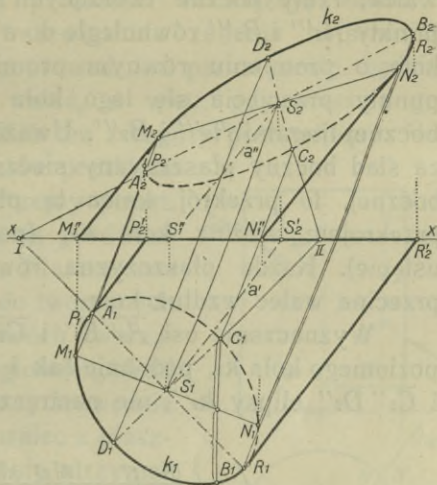
Rys. 387.

poziomego tworzących walca, odpowie w elipsie  $k_2'$  średnica, której punkty końcowe  $M_2'$ ,  $N_2'$  są punktami styczności elipsy  $k_2'$  z rzutem poziomym tworzących konturowych.

g) Wykreślić ślad pionowy walca eliptycznego, którego ślad poziomy  $k_1$  i rzuty tworzących konturowych są dane



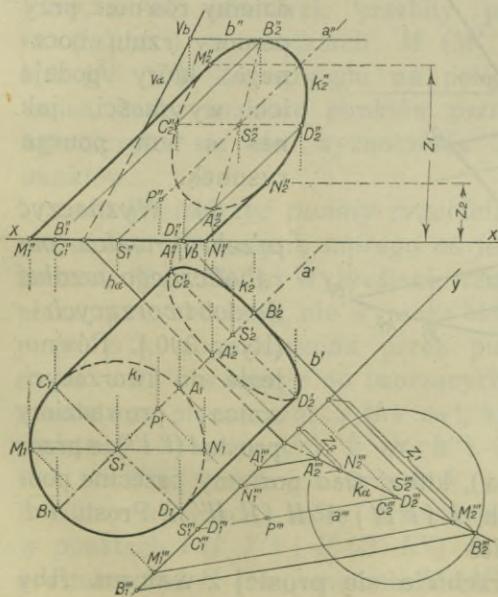
(Rys. 388.). Między obu śladami walca zachodzi powinowactwo, którego osią jest oś rzutów  $x$ , jako krawędź płaszczyzn siecznych. Prosta, łącząca ślad pionowy  $S_2$  osi  $a$  ( $a'$   $a''$ ) walca ze środkiem  $S_1$  elipsy  $k_1$ , jest kierunkiem powinowactwa. Punkty  $I$  i  $II$ , w których osi elipsy  $k_1$  przecinają oś powinowactwa  $x$ , łączymy z punktem  $S_2$ , a na otrzymane proste rzucimy w kierunku powinowactwa wierzchołki  $A_1, B_1, C_1$  i  $D_1$ . Tym sposobem otrzymamy parę średnic sprzężonych  $A_2 B_2$  i  $C_2 D_2$  szukanego śladu pionowego  $k_2$  walca.



Rys. 388.

Punktom  $M_1$  i  $N_1$ , w których średnica elipsy  $k_1$ , sprzężona z kierunkiem prostopadłym do osi  $x$ , elipsę tę przecina, odpowiedzą na rzutni pionowej punkty styczności  $M_2$  i  $N_2$  elipsy  $k_2$  z rzutem pionowym tworzących konturowych.

h) Dane są rzuty walca eliptycznego, którego ślad poziomy jest kołem  $k_1$  (Rys. 389.). Wyznaczyć rzuty przekroju tego walca wzdłuż koła, należącego do drugiego układu kół. Przyjmijmy trzecią płaszczyznę rzutów, prostopadłą do rzutni poziomej i równoległą do tworzących walca. Ślad poziomy tej nowej rzutni oznaczyliśmy literą  $y$ .

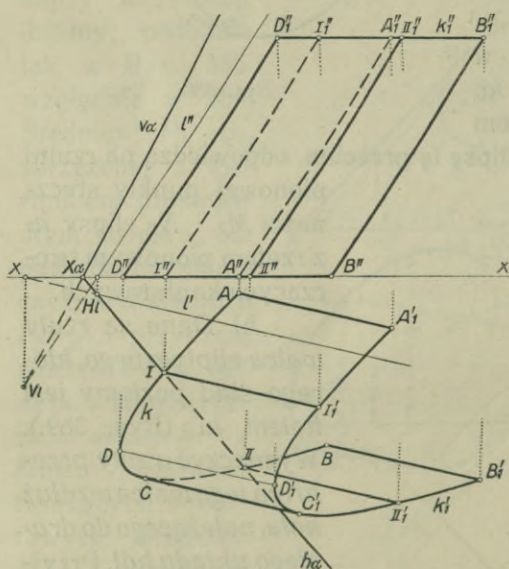


Rys. 389.

h) Dane są rzuty walca eliptycznego, którego ślad poziomy jest kołem  $k_1$  (Rys. 389.). Wyznaczyć rzuty przekroju tego walca wzdłuż koła, należącego do drugiego układu kół. Przyjmijmy trzecią płaszczyznę rzutów, prostopadłą do rzutni poziomej i równoległą do tworzących walca. Ślad poziomy tej nowej rzutni oznaczyliśmy literą  $y$ .

Przyjawszy na osi walca punkt  $S_2$  ( $S_2' S_2''$ ), wyznaczmy jego rzut boczny  $S_2'''$ . Prosta  $\overline{S_1''' S_2'''}$  jest rzutem bocznym osi walca; rzuty boczne tworzących konturowych przejdą przez punkty  $A_1'''$  i  $B_1'''$  równoległe do  $a'''$ . Zakreślmy z punktu  $S_2'''$  koło o promieniu równym promieniowi koła  $k_1$  i oznaczmy punkty przecięcia się tego koła z zarysem walca na rzutni bocznej literami  $A_2'''$  i  $B_2'''$ . Uważajmy prostą  $k_\alpha \equiv (A_2''' B_2''')$  za ślad boczny płaszczyzny siecznej  $\alpha$ , prostopadłej do rzutni bocznej, to przekrój walca tą płaszczyzną będzie żądanym przekrojem wzdłuż koła  $k_2$ , (porównaj zadanie c w tym ustępie). Każda płaszczyzna równoległa do płaszczyzny  $\alpha$  przecina walec wzdłuż koła.

Wyznaczenie osi  $\overline{A_2' B_2'}$  i  $\overline{C_2' D_2'}$  elipsy  $k_2'$ , jako rzutu poziomego koła  $k_2$ , podobnie jak i średnic sprzężonych  $\overline{A_2'' B_2''}$  i  $\overline{C_2'' D_2''}$  elipsy  $k_2''$ , nie nastrocza żadnych trudności i sprowadza się do odniesienia odpowiednich punktów z rzutu bocznego na poziomy i pionowy. Punkty styczności  $M_2''$  i  $N_2''$  znajdziemy również przy pomocy rzutu bocznego, który podaje ich wysokości, jak nas o tem poucza rysunek.



Rys. 390.

nią płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), której ślad poziomy przecina podstawę walca w punktach I ( $I I'$ ) i II ( $II II'$ ). Proste  $\overline{I I}$  i  $\overline{II II}$  rozwiązują zadanie.

132. O punktach przebicia się prostej z walcem. Aby wyznaczyć punkty, w których prosta przebija powierzchnię

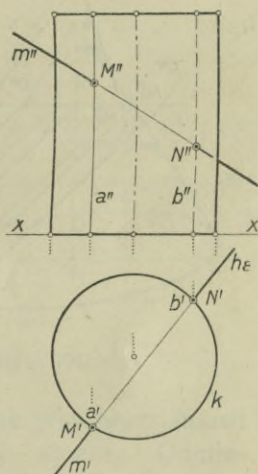
i) Wyznaczyć przekrój walca parabolicznego wzdłuż dwóch tworzących — (Rys. 390.). Równoległe do tworzących walca, prowadzimy prostą  $l$  ( $l' l''$ ), a przez



walcową, poprowadzimy przez tę prostą płaszczyznę, wyznaczmy przekrój walca tą płaszczyzną, a punkty przecięcia się prostej z otrzymaną linią przekroju rozwiążą zadanie. Rysunkowo przedstawi się rozwiązanie zadania najprościej wówczas, gdy płaszczyzna, poprowadzona przez prostą, będzie równoległą do tworzących walca, a więc, gdy przetnie go wzdłuż dwóch tworzących. Tak też z reguły postępujemy. Na danej prostej  $m$ , której punktów przebicia się z walcem szukamy, obierzemy punkt, przez który prowadzimy prostą  $p$  równoległą do tworzących walca. Płaszczyzna  $\varphi \equiv (m, p)$ , jako równoległa do tworzących walca, przetnie go wzdłuż dwóch tworzących, względnie w równoległoboku, jeśli bierzemy pod uwagę także krawędzie płaszczyzn ograniczających walec z płaszczyzną  $\varphi$ . Punkty przecięcia się otrzymanego przekroju walca z prostą  $m$  stanowią rozwiązanie zadania.

#### Przykłady.

a) Rys. 391. przedstawia walec obrotowy, o osi pionowej, przebity prostą  $m$  ( $m' m''$ ) w punktach  $M$  ( $M' M''$ ) i  $N$  ( $N' N''$ ). Ze względu na położenie walca, rzuty poziome punktów przebicia są znane; zadanie ograniczyło się do wyznaczenia rzutów pionowych tych punktów.



Rys. 391.

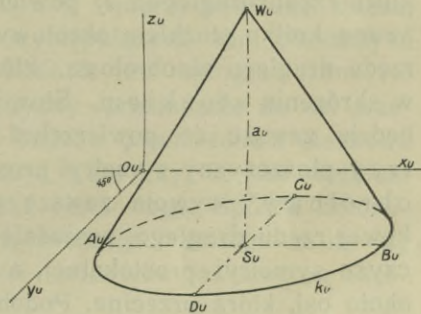
b) Wyznaczyć punkty przebicia się prostej  $m$  ( $m' m''$ ) z walcem obrotowym, którego oś jest równoległa do rzutni bocznej (Rys. 392.). Wykreślenie rzutów walca, przy użyciu płaszczyzny bocznej, nie wymaga bliższych wyjaśnień. Prosta  $p$  ( $p' p''$ ), poprowadzona przez punkt  $P$  ( $P' P''$ ) prostej  $m$  ( $m' m''$ ) równoległe do tworzących walca, wyznacza wraz z prostą  $m$  płaszczyznę  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ), która przecina płaszczyznę podstawy  $\alpha$  w prostej  $k$  ( $k' k''$ ). Przez punkty 1 ( $1' 1''$ ) i 2 ( $2' 2''$ ), w których prosta  $k$  przecina podstawę walca, kreślimy tworzące, które przecinają drugą podstawę walca w punktach I ( $I' I''$ ) i II ( $II' II''$ ). Prosta  $m$  ( $m' m''$ ) przecina prostokąt 1 2 II I w punktach M ( $M' M''$ ) i N ( $N' N''$ ), które są szukanyimi punktami przebicia się jej z walcem.





przechodząca przez oś, jest płaszczyzną symetrii tej powierzchni stożkowej. W dwóch położeniach, a mianowicie  $t_1$  ( $t'_1 t''_1$ ) i  $t_2$  ( $t'_2 t''_2$ ) poruszająca się tworząca jest równoległą do rzutni pionowej, a płaszczyzna  $\varepsilon \equiv (t_1, t_2)$  dzieli powierzchnię stożkową na dwie części. Część powierzchni, leżąca przed płaszczyzną  $\varepsilon$ , jest widoczna, część pozostała, niewidoczną; proste  $t_1$  i  $t_2$  stanowią więc zarys stożka dla widza, patrzącego z punktu niewłaściwego na rzutnię pionową. Proste  $t'_1$  i  $t'_2$  są zarysem stożka na rzutni pionowej, czyli jego rzutem pionowym.

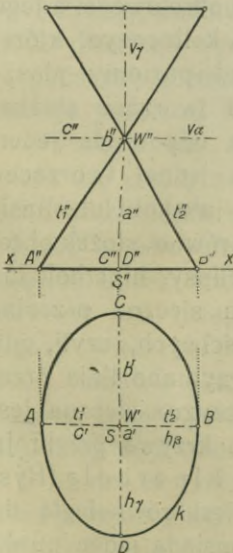
Rzut ukośny stożka obrotowego dla  $\varphi = 45^\circ$ , a stosunków skróceń  $1 : 1/2 : 1$ , przedstawia Rys. 394. Przyjmąwszy punkt  $S_u$  jako rzut ukośny środka koła, poprowadzimy proste równoległą do  $x_u$  i drugą równoległą do  $y_u$ . Odmierzmy następnie  $\overline{A_u S_u} = \overline{B_u S_u} = r$ , jeśli  $r$  równe jest promieniowi



Rys. 394.

koła, jako podstawy stożka. Odmierzwszy  $\overline{C_u S_u} = \overline{D_u S_u} = \frac{r}{2}$ , otrzymamy średnicę elipsy, sprzężoną ze średnicą  $\overline{A_u B_u}$ . Z punktu  $S_u$  wykreślimy równoległą do osi  $z_u$  i odmierzymy  $\overline{S_u W_u}$  równe wysokości stożka. Styczne, wykreślone z punktu  $W_u$  do elipsy  $k_u$ , stanowią rzut ukośny tworzących konturowych stożka.

b) W środku  $S$  elipsy  $k$  (Rys. 395.), uważanej za kierownicę powierzchni stożkowej, poprowadzimy prostą pionową  $a$  ( $a' a''$ ) i obierzemy na niej dowolny punkt  $W$  ( $W' W''$ ). Proste, łączące punkt  $W$  z wszystkimi punktami elipsy, utworzą powierzchnię stożkową, która posiada trzy płaszczyzny symetrii prostokątnej, a mianowicie: płaszczyznę przechodzącą



Rys. 395.

przez prostą  $a$  i małą oś elipsy, płaszczyznę przechodzącą przez prostą  $a$  i dużą oś elipsy, i wreszcie płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez wierzchołek  $W$ . Prosta  $a$  jest jedną z trzech osi stożka, dwie dalsze przechodzą przez  $W$  równoległe do osi  $AB$  i  $CD$  elipsy  $k$ . Tworzące  $t_1$  i  $t_2$ , leżące na płaszczyźnie czołowej, są tworzącymi konturowymi powierzchni stożkowej, proste  $t_1''$  i  $t_2''$  stanowią zarys powierzchni na rzutni pionowej.

c) Tak więc rozróżnić będziemy dwie powierzchnie stożkowe rzędu drugiego: 1) powierzchnię stożkową obrotową, zwaną krótko stożkiem obrotowym i 2) powierzchnię stożkową rzędu drugiego nieobrotową, którą nazywać będziemy zawsze w skrótowaniu stożkiem. Słowo „stożek“ odnosić się więc będzie zawsze do powierzchni rzędu drugiego, posiadającej trzy płaszczyzny symetrii prostokątnej (Rys. 395.); „stożek obrotowy“ wywoła zawsze wyobrażenie powierzchni stożkowej rzędu drugiego, posiadającej nieograniczoną ilość płaszczyzn symetrii prostokątnej, a powstałej przez obrót prostej około osi, którą przecina. Podobnie, jak dla powierzchni walcowych rzędu drugiego, jest ta różnica w ilości płaszczyzn symetrii charakterystyczną także i dla powierzchni stożkowych rzędu drugiego.

**134. Przekroje stożków płaszczyznami.** Między śladem poziomym (podstawą) stożka, czy też stożka obrotowego, a jego przekrojem dowolną płaszczyzną zachodzi kolineacja, której środkiem jest wierzchołek stożka, osią ślad poziomy płaszczyzny siecznej, a promieniami kolineacji tworzące stożka. Każdemu punktowi śladu poziomego stożka odpowiada jeden punkt krzywej przekroju, leżący z nim na jednej tworzącej. Ponieważ liniami, odpowiadającymi kolineacyjnie kołu lub elipsie są: elipsa, hiperbola lub parabola, więc zarówno stożek obrotowy jak i stożek przeciąć można wzdłuż elipsy, hiperboli lub paraboli. W szczególności gdy płaszczyzna sieczna przecina wszystkie tworzące stożka w punktach właściwych, czyli, gdy nie jest równoległą do żadnej z nich, to otrzymana linia przekroju jest elipsą (Rys. 357.\*); gdy płaszczyzna sieczna jest równoległą do dwóch tworzących stożka, to krzywa przekroju posiada dwa punkty niewłaściwe, a więc jest hiperbolą (Rys. 359.\*); gdy wreszcie płaszczyzna sieczna jest równoległą do jednej tworzącej stożka, to linia przekroju posiada jeden punkt niewłaściwy i jest parabolą (Rys. 361.\*).



Z powyższego wynika też wprost, że zależnie od położenia stożka obrotowego, czy też stożka, względem płaszczyzn rzutów, ślady ich mogą być elipsami, hiperbolami lub parabolami, że zatem krzywa, będąca śladem, podstawą, względnie kierownicą stożka, powierzchni tej bynajmniej nie określa i nie charakteryzuje. Elipsa może być śladem poziomym zarówno stożka jak i stożka obrotowego, podobnie jak koło, elipsa i parabola. O tem, czy mamy przed sobą stożek obrotowy, czy też stożek, stanowi nie rodzaj krzywej, będącej podstawą stożka, ale jedynie i wyłącznie ilość występujących tam płaszczyzn symetrii prostokątnej. Jeżeli ilość ta jest nieograniczona, to stożek jest obrotowy, a płaszczyzny prostopadłe do osi przecinają go wzdłuż kół. Jeżeli badana powierzchnia stożkowa posiada tych płaszczyzn symetrii tylko trzy, to jest stożkiem w znaczeniu odrębnem od stożka obrotowego. Sposób umożliwiający rozpoznanie stożka obrotowego, którego rzuty są dane, poznamy przy sposobności omawiania powierzchni obrotowych (ust. 148.).

Jeżeli prosta, łącząca środek elipsy lub hiperboli, które stanowią podstawę stożka, z wierzchołkiem tego stożka, jest prostopadłą do płaszczyzny podstawy, to stożek nosi nazwę prostego, w odróżnieniu od ukośnego.

Z tego, cośmy dotąd powiedzieli o powierzchni stożkowej rzędu drugiego wynika, że stożek ten może być prosty, mając za podstawę zarówno elipsę jak i hiperbolę. Stożek prosty, którego podstawą jest koło, jest stożkiem obrotowym.

Płaszczyzny, przechodzące przez wierzchołek stożka, podzielić się dadzą na trzy grupy. Do jednej należą te, które prócz wierzchołka nie posiadają ze stożkiem żadnych punktów ani linii wspólnych; drugą grupę stanowią płaszczyzny przecinające stożek wzdłuż dwóch tworzących, względnie — o ile bierzemy pod uwagę część powierzchni stożkowej, zawartej między wierzchołkiem a podstawą — w trójkącie. Trzecią grupę stanowią płaszczyzny, leżące na granicy obu wymienionych grup i posiadające po jednej tworzącej wspólnej ze stożkiem, czyli płaszczyzny styczne (ust. 128.).

Ponieważ rzut dwóch utworów (układów) płaskich środkowo kolineacyjnych, na dowolną płaszczyznę i w dowolnym kierunku, daje dwa układy środkowo kolineacyjne, złączone na tej płaszczyźnie rzutów (ust. 115.), więc między rzutami

poziomymi dwóch przekrojów stożka zachodzi kolineacja, której środkiem jest rzut poziomy wierzchołka stożka, a osią rzut poziomy krawędzi obu płaszczyzn siecznych. To samo odnosi się do rzutu pionowego tych dwóch przekrojów stożka; osią kolineacji jest rzut pionowy krawędzi obu płaszczyzn siecznych, a środkiem rzut pionowy wierzchołka stożka. Między śladem poziomym i pionowym stożka zachodzi kolineacja, której osią jest oś rzutów  $x$ , a środkiem wierzchołek stożka.

Podobnie jak przy walcu, polega wyznaczenie przekroju stożka daną płaszczyzną na wykreśleniu rzutów krzywej przekroju i na wyznaczeniu punktów styczności otrzymanych krzywych z zarysami stożka na obu rzutniach.

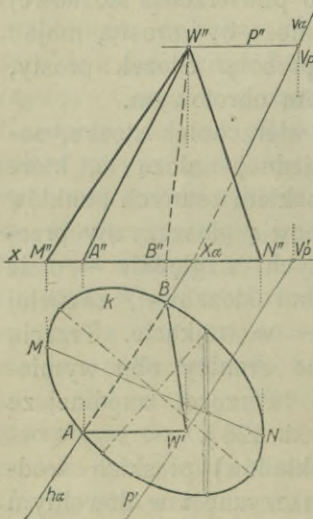
**135. Przekroje powierzchni stożkowych wzdłuż dwóch tworzących.** Wiadomo z poprzedniego ustępu, że pewna grupa płaszczyzn, przechodzących przez wierzchołek stożka, przecina go wzdłuż dwóch tworzących. Każda z tych płaszczyzn przetnie ślad, względnie podstawę stożka, w dwóch punktach, które połączone z wierzchołkiem dają owe dwie tworzące przekroju.

Tok rozwiązania zadania jest więc następujący: przez wierzchołek stożka prowadzimy prostą, a przez nią płaszczyznę, taką jednak, której krawędź z płaszczyzną podstawy przecina podstawę (ślad) w dwóch punktach. Proste, łączące te punkty z wierzchołkiem stożka, rozwiązują zadanie.

#### Przykłady.

a) Stożek, którego ślad poziomy jest elipsą (Rys. 396.), przecięliśmy płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), przechodzącą przez prostą  $p$  ( $p' p''$ ), którą to prostą poprowadziliśmy przez wierzchołek  $W$  ( $W' W''$ ). Proste  $AW$  i  $BW$  są tworzącymi, wzdłuż których płaszczyzna  $\alpha$  przecina stożek.

b) Weźmy pod uwagę stożek obrotowy, którego wierzchołek leży na rzutni poziomej (Rys. 397.). Płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), przechodząca przez wierzchołek, przecina płaszczyznę



Rys. 396.



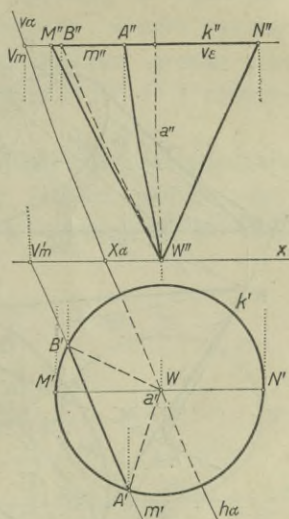
podstawy stożka w prostej  $m$  ( $m' m''$ ), a koło  $k$  ( $k' k''$ ) w punktach  $A$  ( $A' A''$ ) i  $B$  ( $B' B''$ ). Proste  $AW$  i  $BW$  rozwiązują zadanie.

136. Punkty przebicia się prostej z powierzchnią stożkową znajdziemy, podobnie jak punkty przebicia się prostej z walcem (ust. 132.), więc za pośrednictwem płaszczyzny, przechodzącej przez prostą i przecinającej powierzchnię stożkową — o ile możliwości — wzdłuż tworzących. Postąpimy więc w sposób następujący: Przez daną prostą i wierzchołek powierzchni poprowadzimy płaszczyznę, wyznaczmy tworzące, wzdłuż których płaszczyzna ta przecina powierzchnię stożkową, a punkty przecięcia się tych tworzących z prostą są szukanymi punktami.

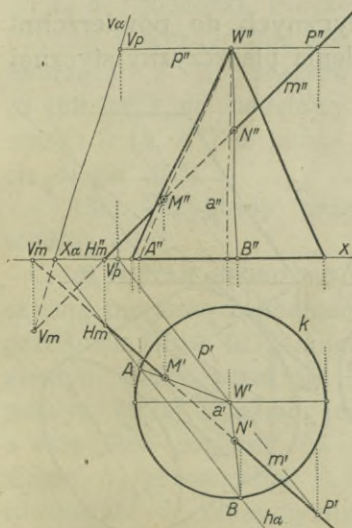
Przykłady.

a) Wyznaczyć punkty przebicia się prostej  $m$  ( $m' m''$ ) ze stożkiem obrotowym' (Rys. 398.). Pozioma prosta  $p$  ( $p' p''$ ), przechodząca przez wierzchołek stożka i przecinająca daną prostą  $m$  ( $m' m''$ ) w punkcie  $P$  ( $P' P''$ ), wyznacza z tą ostatnią płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), która przecina stożek wzdłuż tworzących  $AW$  i  $BW$ . Punkty  $M$  ( $M' M''$ ) i  $N$  ( $N' N''$ ) rozwiązują zadanie.

b) Wyznaczyć punkty przebicia się prostej  $m$  ( $m' m''$ ) ze stożkiem, który styka się wzdłuż jednej tworzącej z rzutnią poziomą (Rys. 399.). Podstawa stożka, elipsa  $k$  ( $k' k''$ ), przyjęta jest na płaszczyźnie  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) i styka się ze śladem  $h_\alpha$  w punkcie  $C$ . Przez

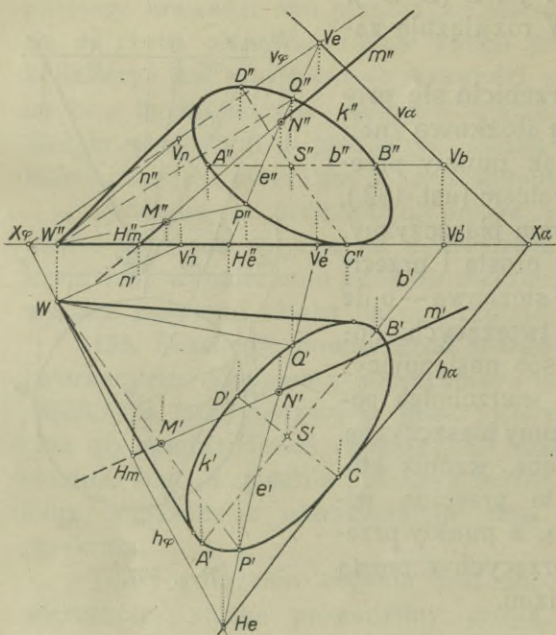


Rys. 397.



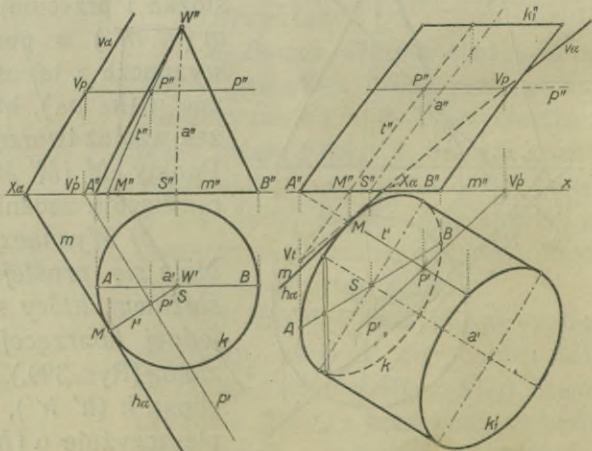
Rys. 398.

wierzchołek stożka poprowadziliśmy prostą  $n$  ( $n'$   $n''$ ), równoległą do prostej  $m$  ( $m'$   $m''$ ) i wyznaczyliśmy ślady płaszczyzny  $\varphi \equiv (m, n)$ . Krawędź  $e$  ( $e'$   $e''$ ) płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varphi$  przecina elipsę  $k$  ( $k'$   $k''$ ) w punktach  $P$  ( $P'$   $P''$ ) i  $Q$  ( $Q'$   $Q''$ ), które wraz z wierzchołkiem  $W$  wyznaczają przekrój stożka płaszczyzną  $\varphi$ . Boki  $PW$  i  $PQ$ , trójkąta  $PQW$ , przecinają się z prostą  $m$  w punktach  $M$  ( $M'$   $M''$ ) i  $N$  ( $N'$   $N''$ ), stanowiących rozwiązanie zadania.



Rys. 399.

137. Przykłady płaszczyzn stycznych do powierzchni stożkowych i walcowych. Z określenia płaszczyzny stycznej do stożka, podanego w ust. 128., wynika, że płaszczyzna styczna w punkcie  $P$  ( $P'$   $P''$ ) do stożka obrotowego (Rys. 400.) jest styczną w każdym punkcie tworzącej  $t$  ( $t'$   $t''$ ), na której leży punkt  $P$ . Styczna  $m$  ( $m'$   $m''$ )



Rys. 400.

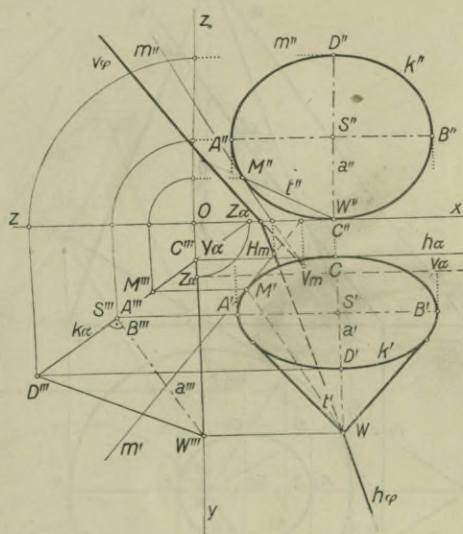
401.



w punkcie  $M$  śladu poziomego  $k$  stożka obrotowego, wyznacza wraz z tworzącą  $t$  żadaną płaszczyznę styczną  $\alpha$ . Ślad poziomy tej płaszczyzny schodzi się z prostą  $m$ ; w celu wyznaczenia śladu pionowego, użyliśmy pośrednictwa prostej poziomej  $p$  ( $p' p''$ ), przechodzącej przez punkt  $P$  ( $P' P''$ ) równoległe do prostej  $m$ .

Rys. 401. przedstawia rzuty walca eliptycznego i zupełnie z poprzednią analogiczną konstrukcją śladów płaszczyzny stycznej do walca w punkcie  $P$  ( $P' P''$ ), przyjętym na tworzącej  $t$  ( $t' t''$ ).

Przy pomocy rzutni bocznej, obróconej około osi  $y$  na rzutnię poziomą (Rys. 402.), wykreśliśmy rzuty stożka obrotowego, stykającego się z rzutnią poziomą wzdłuż tworzącej prostopadłej do osi  $x$ . Na stożku tym obraliśmy tworzącą  $t$  ( $t' t''$ ) i przez nią poprowadziliśmy płaszczyznę styczną  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ) do stożka. Płaszczyzna  $\varphi$  wyznaczona jest tworzącą  $t$  i styczną  $m$  ( $m' m''$ ) do podstawy stożka  $k$  ( $k' k''$ ) w punkcie  $M$  ( $M' M''$ ).

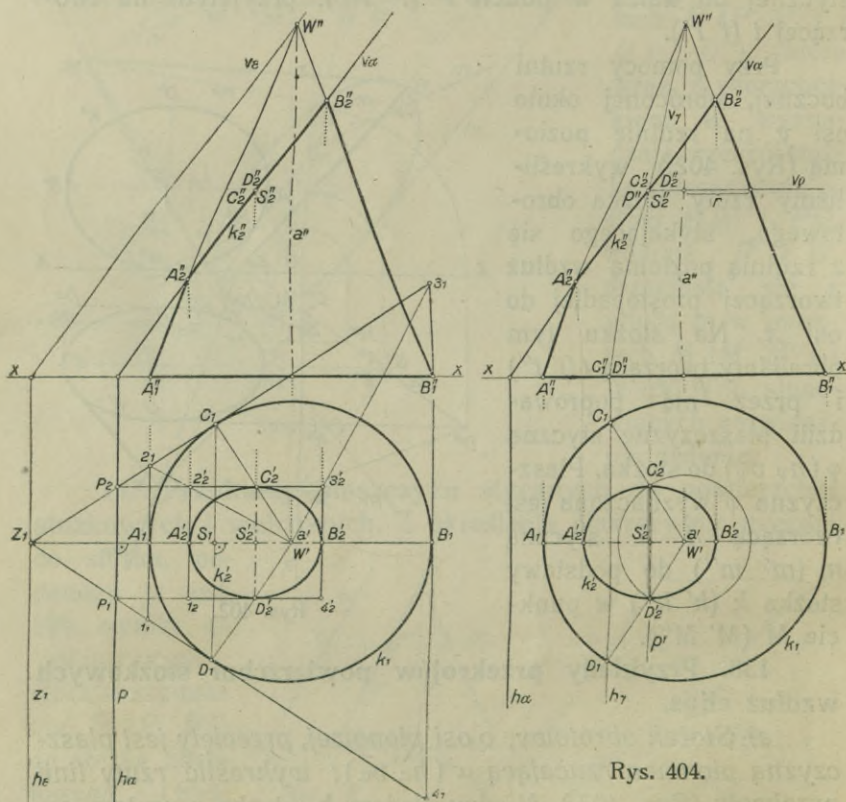


Rys. 402.

138. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdłuż elips.

a) *Stożek obrotowy, o osi pionowej, przecięty jest płaszczyzną pionowo rzucającą  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ); wykreślić rzuty linii przekroju* (Rys. 403.). Między śladem  $k_1$  stożka a rzutem poziomym elipsy przekroju  $k_2$  zachodzi — jak wiemy — kolineacja, której środkiem jest rzut poziomy wierzchołka stożka, a osią ślad poziomy  $h_\alpha$  płaszczyzny siecznej  $\alpha$ . Ślad poziomy  $h_\varepsilon$  płaszczyzny  $\varepsilon$ , poprowadzonej przez wierzchołek równoległe do płaszczyzny siecznej, jest osią wzajemną  $z_1$ . Osi  $A_2' B_2' \perp C_2' D_2'$  elipsy  $k_2'$  znajdziemy w sposób, omówiony szczegółowo w ust. 120. pt. a). Rys. 357\*. Więc:

z punktu  $W'$  kreślimy prostopadłą do  $z_1$ , a z punktu  $Z_1$  styczne do  $k_1$ . Trapezowi równoramiennemu  $1_1 2_1 3_1 4_1$ , opisanemu na kole  $k_1$ , odpowiada w układzie elipsy  $k_2$  prostokąt  $1_2' 2_2' 3_2' 4_2'$ , który otrzymamy, prowadząc przez punkty  $P_1$  i  $P_2$  proste równoległe do  $Z_1 B_1$  i rzucając na nie z punktu  $W'$  wierzchołki trapezu. Punktom  $A_1, B_1, C_1$  i  $D_1$  odpowiedzą wierzchołki  $A_2', B_2', C_2'$  i  $D_2'$  elipsy  $k_2'$ . Rzut pionowy  $k_2''$  elipsy przekroju leży na śladzie pionowym płaszczyzny siecznej.



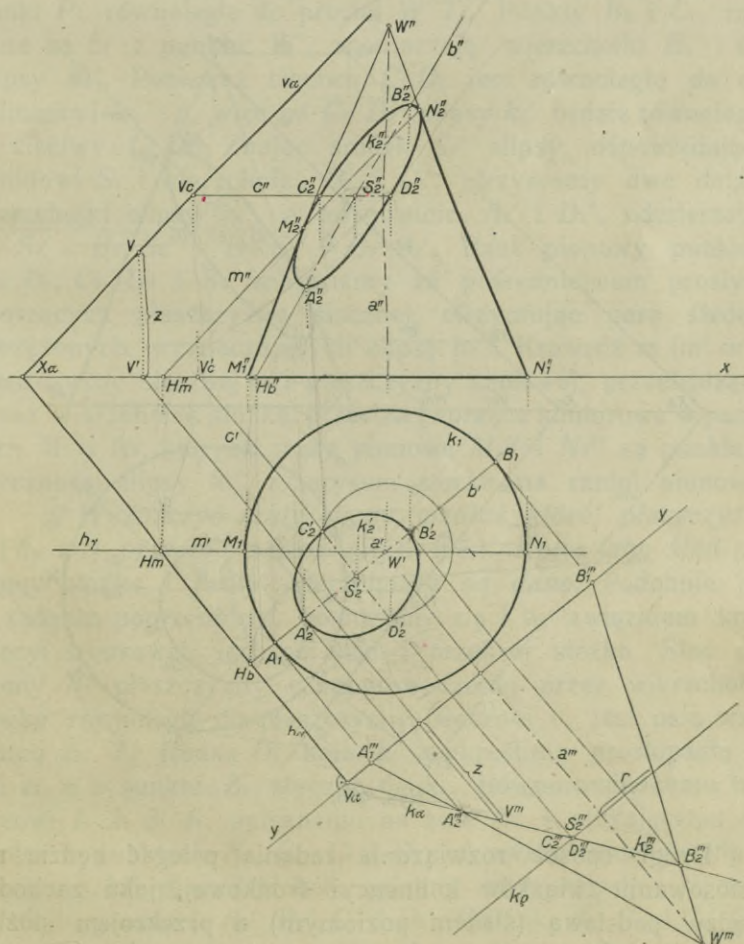
Rys. 403.

Rys. 404.

Inne rozwiązanie tego samego zadania podaje Rys. 404. Dużą oś  $A_2' B_2'$  elipsy  $k_2'$  otrzymamy wprost z rzutu pionowego. Aby wyznaczyć oś małą tej elipsy, poprowadźmy przez środek  $S_2$  ( $S_2' S_2''$ ) odcinka  $A_2 B_2$ , a więc przez środek  $S_2$  elipsy  $k_2$ , prostopadłą  $p$  ( $p' p''$ ) do rzutni pionowej i wyznaczmy

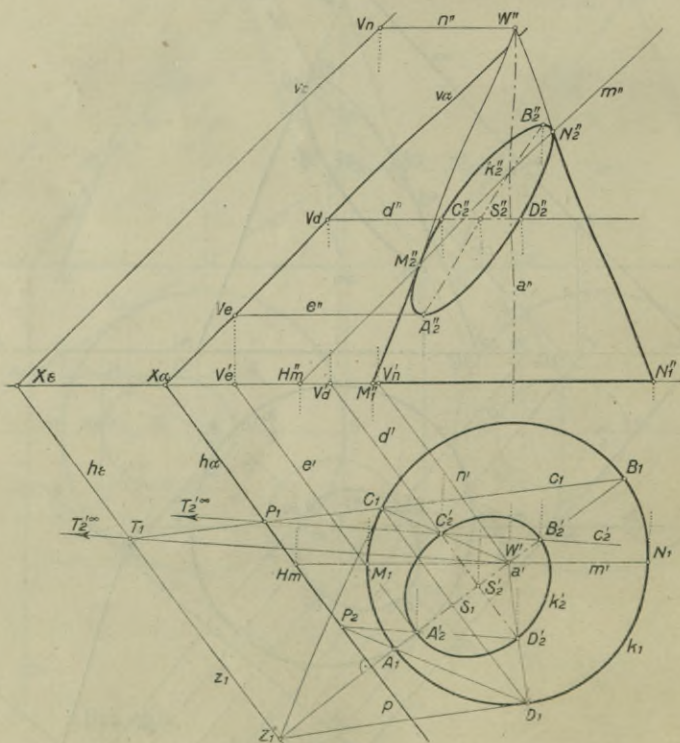


punkty przebicia się jej ze stożkiem. Punkty te, stanowiące dwa dalsze wierzchołki elipsy, znajdziemy w sposób następujący: Przez prostą  $p$  i wierzchołek  $W$  stożka poprowadzimy płaszczyznę  $\gamma$  ( $h_\gamma v_\gamma$ ), która przetnie stożek wzdłuż dwóch tworzących, a mianowicie  $C_1 W$  i  $D_1 W$ . Tworzące te przetną prostą  $p$  w szukanych punktach  $C_2$  ( $C_2' C_2''$ ) i  $D_2$  ( $D_2' D_2''$ ). Do tego samego wyniku dojdziemy, prowadząc przez prostą  $p$  płaszczyznę poziomą  $\rho$ , która przetnie stożek wzdłuż koła o promieniu  $r$ . Punkty przecięcia się tego koła z prostą  $p$  są punktami  $C_2$  ( $C_2' C_2''$ ) i  $D_2$  ( $D_2' D_2''$ ).



Rys. 405.

b) Stożek obrotowy o osi pionowej przecięć dowolną płaszczyzną  $\alpha$ . Przez przyjęcie trzeciej płaszczyzny rzutów, prostopadłej do płaszczyzny siecznej (Rys. 406.) i wyznaczenie trzeciego rzutu stożka, sprowadzimy zadanie do poprzedniego. Rzut pionowy elipsy przekroju  $k_2$  jest elipsą  $k_2''$ , której para średnic sprzężonych  $\overline{A_2'' B_2''}$  i  $\overline{C_2'' D_2''}$  odpowiada osiom  $\overline{A_2' B_2'}$  i  $\overline{C_2' D_2'}$  elipsy  $k_2'$ . Przechodząca przez oś stożka czołowa płaszczyzna  $\gamma$  przecina płaszczyznę  $\alpha$  w prostej  $m$  ( $m' m''$ ). Punkty przecięcia się  $M_2''$  i  $N_2''$ , prostej  $m''$  z rzutem pionowym stożka, są punktami styczności elipsy  $k_2''$  z tworzącymi konturowymi na rzutni pionowej.



Rys. 406.

Drugi sposób rozwiązania zadania polegać będzie na zastosowaniu związków kolineacji środkowej, jaka zachodzi między podstawą (śladem poziomym) a przekrojem stożka (Rys. 406.). Ślad poziomy  $h_\alpha$  płaszczyzny siecznej jest osią



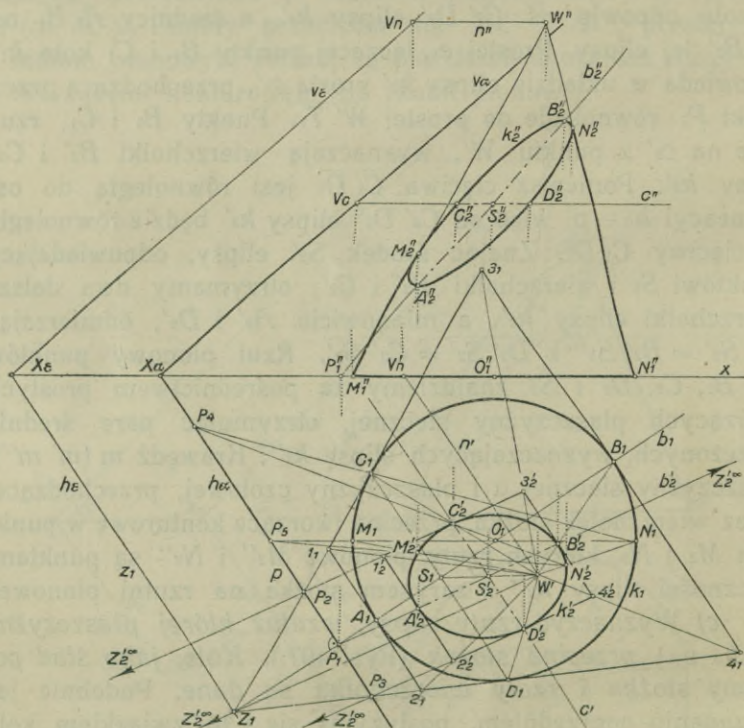
kolineacyi, a ślad poziomy  $h_\varepsilon$  płaszczyzny, poprowadzonej przez wierzchołek  $W$  równoległe do płaszczyzny siecznej, osią wzajemną  $z_1$ , kolineacyi środkowej dwóch układów płaskich, złączonych zapomocą rzutu prostokątnego na płaszczyźnie poziomej rzutów. Punkt  $W'$  jest środkiem tej kolineacyi. Rozwiązanie zadania nie nastęrczy zresztą żadnych nowych trudności. Z punktu  $W'$  wykreślimy prostopadłą do  $z_1$ , a z punktu  $Z_1$  styczne do koła  $k_1$ . Cięciwie styczności  $C_1 D_1$  w kole odpowie oś  $C_2' D_2'$  elipsy  $k_2'$ , a średnicy  $A_1 B_1$  oś  $A_2' B_2'$  tej elipsy. Prostej  $c_1$ , łączącej punkty  $B_1$  i  $C_1$  koła  $k_1$ , odpowiada w układzie elipsy  $k_2'$  prosta  $c_2'$ , przechodząca przez punkt  $P_1$  równoległe do prostej  $W' T_1$ . Punkty  $B_1$  i  $C_1$ , rzuczone na  $c_2'$  z punktu  $W'$ , wyznaczają wierzchołki  $B_2'$  i  $C_2'$  elipsy  $k_2'$ . Ponieważ cięciwa  $C_1 D_1$  jest równoległą do osi kolineacyi  $h_\alpha \equiv p$ , więc oś  $C_2' D_2'$  elipsy  $k_2'$  będzie równoległą do cięciwy  $C_1 D_1$ . Znając środek  $S_2'$  elipsy, odpowiadający punktowi  $S_1$  i wierzchołki  $B_2'$  i  $C_2'$ , otrzymamy dwa dalsze wierzchołki elipsy  $k_2'$ , a mianowicie  $A_2'$  i  $D_2'$ , odmierzając  $A_2' S_2' = B_2' S_2'$  i  $D_2' S_2' = C_2' S_2'$ . Rzut pionowy punktów  $A_2, B_2, C_2, D_2$  i  $S_2$  znajdziemy za pośrednictwem prostych tworzących płaszczyzny siecznej, otrzymując parę średnic sprzężonych, wyznaczających elipsę  $k_2''$ . Krawędź  $m$  ( $m' m''$ ), płaszczyzny siecznej  $\alpha$  i płaszczyzny czołowej, przechodzącej przez wierzchołek stożka, przecina tworzące konturowe w punktach  $M_2$  i  $N_2$ , których rzuty pionowe  $M_2''$  i  $N_2''$  są punktami styczności elipsy  $k_2''$  z zarysem stożka na rzutni pionowej.

c) Wyznaczyć rzuty elipsy, wzdłuż której płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) przecina stożek (Rys. 407.). Koło, jako ślad poziomy stożka i rzuty wierzchołka są dane. Podobnie jak w zadaniu poprzednim, posłużymy się i tu związkami kolineacyi środkowej, łączącej ślad i przekrój stożka. Ślad poziomy  $h_\varepsilon$  płaszczyzny  $\varepsilon$ , poprowadzonej przez wierzchołek stożka równoległe do płaszczyzny siecznej  $\alpha$ , jest osią wzajemną  $z_1$ . Ze środka  $O_1$  koła  $k_1$  wykreślimy prostopadłą do osi  $z_1$ , a z punktu  $Z_1$  styczne do  $k_1$ . Równoramiennemu trapezowi  $1_1 2_1 3_1 4_1$ , opisanemu na kole  $k_1$  i stykającemu się z nim w punktach  $A_1, B_1, C_1$  i  $D_1$ , odpowie w układzie elipsy przekroju  $k_2'$  równoległobok, opisany na tej elipsie i styczny do niej w punktach  $A_2', B_2', C_2'$  i  $D_2'$ . Odcinki  $A_2' B_2'$  i  $C_2' D_2'$ ,

odpowiadające średnicy  $\overline{A_1 B_1}$  i cięciwie styczności  $\overline{C_1 D_1}$ , stanowią parę średnic sprzężonych elipsy  $k_2'$ .

Rzut pionowy elipsy  $k_2$  jest elipsą  $k_2''$ , której średnice  $\overline{A_2'' B_2''}$  i  $\overline{C_2'' D_2''}$  są rzutami pionowymi średnic sprzężonych elipsy  $k_2'$ .

Punkty  $M_2''$  i  $N_2''$ , w których elipsa  $k_2''$  styka się z rzutem pionowym tworzących konturowych, znajdziemy w sposób



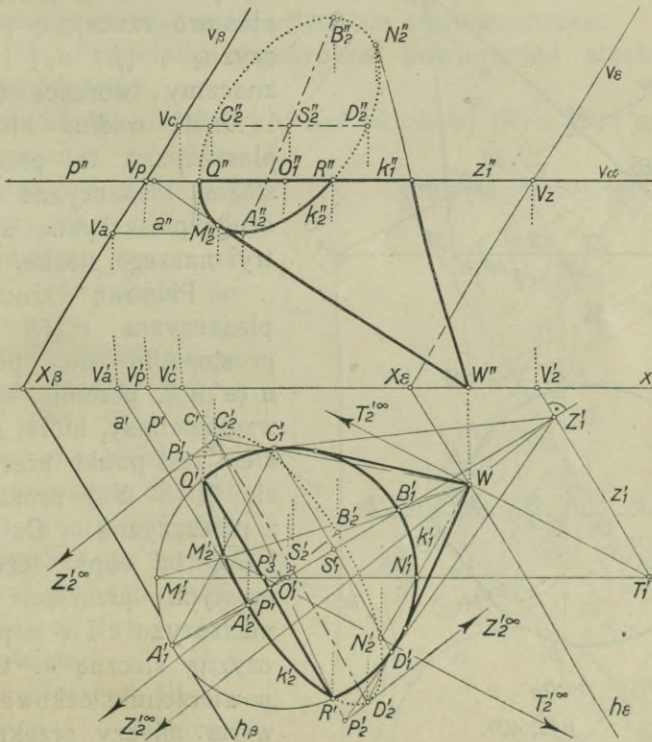
Rys. 407.

następujący: Wykreśliwszy proste  $M_1 W'$  i  $N_1 W'$ , t. j. rzuty poziome tworzących konturowych, znajdziemy punkty  $M_2'$  i  $N_2'$ , odpowiadające kolineacyjnie punktom  $M_1$  i  $N_1$ , a będące punktami elipsy  $k_2'$ . W Rys. 407. postąpiliśmy w ten sposób, że połączywszy punkt  $N_1$  z  $C_1$ , znaleźliśmy tę prostą w układzie elipsy, jako prostą  $P_4 C_2'$ , a na niej szukany punkt  $N_2'$ . Prostej  $M_1 N_1$  odpowiada w układzie elipsy prosta  $P_5 N_2'$ , przecinająca promień  $M_1 W'$  w drugim szukanim punkcie, t. j.  $M_2'$ . Proste



odnoszące wyznaczą na rzucie pionowym stożka żądane punkty  $M_2''$  i  $N_2''$ .

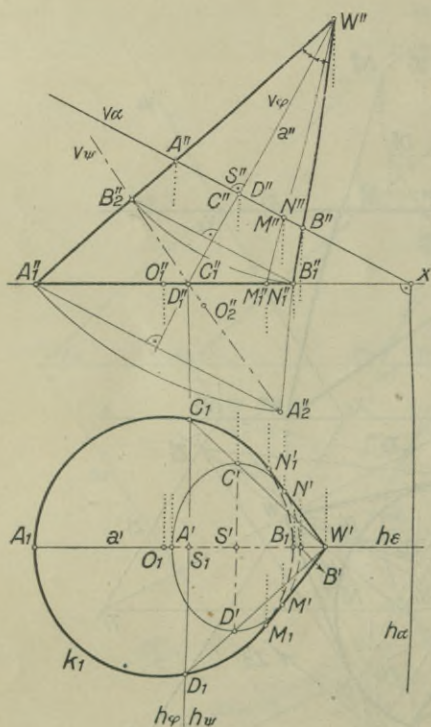
d) Wykreślić rzuty elipsy, wzdłuż której płaszczyzna  $\beta$  ( $h_\beta v_\beta$ ) przecina stożek, którego podstawa (koło) leży na płaszczyźnie poziomej  $\alpha$  (Rys. 408.), a wierzchołek na rzutni poziomej. Krawędź  $p$  ( $p' p''$ ) płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  jest osią, a krawędź  $z_1$  ( $z_1' z_1''$ ) płaszczyzn  $\alpha$  i płaszczyzny  $\varepsilon$ , przechodzącej



Rys. 408.

przez wierzchołek  $W$  równoległe do płaszczyzny  $\beta$ , osią wzajemną kolineacji, jaka zachodzi między kołem  $k_1$  ( $k_1' k_1''$ ) jako podstawą, a elipsą  $k_2$  ( $k_2' k_2''$ ) jako przekrojem stożka. Średnice sprzężone  $\overline{A_2' B_2'}$  i  $\overline{C_2' D_2'}$  elipsy  $k_2'$  i średnice sprzężone  $\overline{A_2'' B_2''}$  i  $\overline{C_2'' D_2''}$  elipsy  $k_2''$ , a także i punkt  $M_2''$  znajdziemy w ten sam sposób, jak w Rys. 407.

139. **Kołowe przekroje stożka.** Koło  $k_1$  o środku  $O_1$  (Rys. 409.) uważajmy za ślad poziomy, a punkt  $W$  ( $W' W''$ ) za wierzchołek stożka, przyczem niechaj prosta  $O_1 W$  jest równoległą do rzutni pionowej. Czołowa płaszczyzna  $\varepsilon$ , przechodząca przez prostą  $O_1 W$ , dzieli stożek na dwie części, symetryczne względem tej płaszczyzny i przecina go wzdłuż tworzących konturowych  $W A_1$  i  $W B_1$ . Wykreślmy dwusieczną



Rys. 409.

$a$  ( $a' a''$ ) tych tworzących i poprowadźmy przez nią pionowo-rzucającą płaszczyznę  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ) i wyznaczmy tworzące  $C_1 W$  i  $D_1 W$ , wzdłuż których płaszczyzna ta przecina stożek. Płaszczyzna  $\varphi$  jest drugą płaszczyzną symetrii naszego stożka.

Pionowo - rzucającą płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), prostopadłą do prostej  $a$  ( $a' a''$ ), przetnie stożek wzdłuż elipsy, której środkiem jest punkt przecięcia się  $S$  ( $S' S''$ ) prostej  $a$  z płaszczyzną  $\alpha$ . Osi  $AB$  i  $CD$  tej elipsy leżą na prostych przecięcia się płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$  z płaszczyzną sieczną  $\alpha$ . Część powierzchni stożkowej, zawarta między przekrojem płaszczyzną  $\alpha$  a wierz-

chołkiem, jest stożkiem prostym (ust. 134.). Wykreślmy z punktów  $A_1''$  i  $B_1''$  prostopadłe do prostej  $a''$  i oznaczmy punkty przecięcia się ich z prostymi  $W'' B_1''$ , względnie  $W'' A_1''$  literami  $A_2''$  i  $B_2''$ . Połączmy punkty  $A_2''$  i  $B_2''$  prostą, a przez nią poprowadźmy pionowo-rzucającą płaszczyznę  $\psi$  ( $h_\psi v_\psi$ ). Przekrój stożka tą płaszczyzną będzie linią przystającą do śladu poziomego stożka, gdyż między obu tymi przekrojami zachodzi symetria prostokątna ze względu na płaszczyznę  $\varphi$ ,

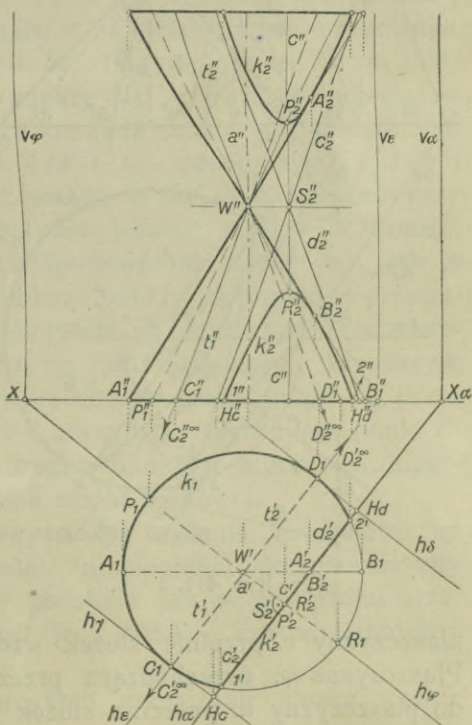


jako płaszczyznę symetrii. Przekrój więc stożka płaszczyzną  $\psi$  jest kołem. Każda płaszczyzna równoległa do  $\psi$  przecina stożek wzdłuż koła, podobnie jak płaszczyzny poziome. W ten sposób wykazaliśmy, że powierzchnię stożkową przeciąć można dwoma układami płaszczyzn równoległych wzdłuż kół.

Fakt istnienia dwóch układów kół na powierzchni stożkowej rzędu drugiego, wyróżnia ją od stożka obrotowego, na którym znajduje się tylko jeden układ kół, a to mianowicie na płaszczyznach prostopadłych do osi tego stożka.

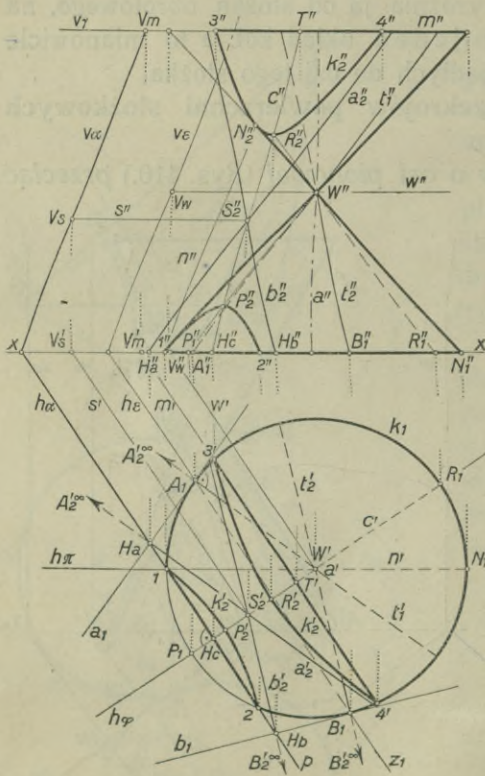
#### 140. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdłuż hiperbol.

a) Stożek obrotowy o osi pionowej (Rys. 410.) przeciąć płaszczyzną poziomą rzucającą  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ). Płaszczyzna  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ), przechodząca przez oś stożka równoległe do płaszczyzny siecznej, przecina go wzdłuż tworzących  $t_1$  ( $t_1' t_1''$ ) i  $t_2$  ( $t_2' t_2''$ ). Stąd więc, płaszczyzna sieczna  $\alpha$ , jako równoległa do tych dwóch tworzących stożka, przecina go wzdłuż krzywej rzędu drugiego, posiadającej dwa punkty niewłaściwe, a więc wzdłuż hiperboli. Płaszczyzna  $\varphi \perp \alpha$  przecina tę ostatnią w prostej  $c$  ( $c' c''$ ), a stożek wzdłuż tworzących  $P_1 W$  i  $R_1 W$ . Punkty przecięcia się  $P_2$  ( $P_2' P_2''$ ) i  $R_2$  ( $R_2' R_2''$ ) tych tworzących z prostą  $c$  są punktami przecięcia się tej prostej ze stożkiem, a zarazem wierzchołkami hiperboli  $k_2$  ( $k_2' k_2''$ ). Srodek  $S_2$  odcinka  $\overline{P_2 R_2}$  jest środkiem



Rys. 410.

hiperboli  $k_2$ , środek  $S_2''$  odcinka  $\overline{P_2'' R_2''}$  jest więc wierzchołkiem hiperboli  $k_2''$ . Płaszczyzny  $\gamma$  i  $\delta$ , styczne do stożka wzdłuż tworzących  $t_1$  i  $t_2$ , przecinają płaszczyznę  $\alpha$  w prostych  $c_2$  ( $c_2' c_2''$ ) i  $d_2$  ( $d_2' d_2''$ ), które są równoległe do tworzących  $t_1$  i  $t_2$ , przechodzą przez punkt  $S_2$  i są asymptotami hiperboli  $k_2$ . Punkty przecięcia się 1 i 2 śladu  $h_\alpha$  z kołem  $k_1$  są punktami hiperboli  $k_2$ , których dalsze punkty znajdziemy



Rys. 411.

płaszczyzny  $\varepsilon$ , przetnie stożek wzdłuż hiperboli  $k_2$  ( $k_2' k_2''$ ). Płaszczyzna  $\varphi$ , przechodząca przez oś stożka i prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$ , przecina stożek wzdłuż tworzących  $P_1 W$  i  $R_1 W$ , a płaszczyznę  $\alpha$  w prostej  $c$  ( $c' c''$ ), która jest, podobnie jak w Rys. 410., osią symetrii krzywej przekroju. W szczególności rzut poziomy  $c'$  jest osią symetrii prostokątnej, a więc osią hiperboli  $k_2'$ , prosta zaś  $c''$  osią symetrii

w sposób poznany w ust. 121. pkt. d. Płaszczyzna  $\alpha$  przecina pł. czołową, przechodzącą przez oś stożka, w prostej pionowej, która wyznacza na tworzących konturowych punkty  $A_2$  ( $A_2' A_2''$ ) i  $B_2$  ( $B_2' B_2''$ ). W punktach tych styka się hiperbola z tworzącami konturowymi stożka.

b) Stożek obrotowy o osi pionowej przecięć wzdłuż hiperboli płaszczyzną, nachyloną do obu rzutni (Rys. 411.) Przez wierzchołek stożka poprowadzona płaszczyzna  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ) przecina go wzdłuż tworzących  $t_1$  ( $t_1' t_1''$ ) i  $t_2$  ( $t_2' t_2''$ ); płaszczyzna  $\alpha$ , równoległa do



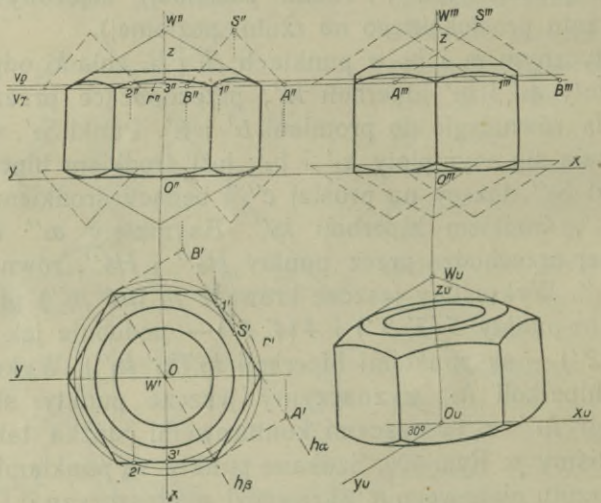
ukośnej hiperboli  $k_2''$ . Kierunek tej symetrii ukośnej jest równoległy do osi rzutów  $x$ . Punkty przecięcia się  $P_2$  ( $P_2' P_2''$ ) i  $R_2$  ( $R_2' R_2''$ ) prostej  $c$  ( $c' c''$ ) z tworzącymi  $WP_1$  i  $WR_1$ , są punktami hiperboli  $k_2$ , przyczem punkty  $P_2'$  i  $R_2'$  są wierzchołkami hiperboli  $k_2'$ . Asymptoty hiperboli  $k_2$  ( $k_2' k_2''$ ) znajdziemy przy pomocy związków kolineacji, zachodzących między śladem poziomym  $k_1$  stożka, a jego przekrojem płaszczyzną  $\alpha$ . Ślad  $h_\alpha$  jest osią kolineacji, ślad  $h_\varepsilon$  osią wzajemną  $z_1$  (porównaj Rys. 359.\*), a punkt  $W'$  środkiem kolineacji dwóch układów płaskich (pł.  $\alpha$  i rzutni poziomej), złączonych zapomożą rzutu prostokątnego na rzutni poziomej).

Stycznym  $a_1$  i  $b_1$  w punktach  $A_1$  i  $B_1$  koła  $k_1$  odpowiedzą asymptoty  $a_2'$  i  $b_2'$  hiperboli  $k_2'$ , przechodzące przez punkty  $H_a$  i  $H_b$  równoległe do promieni  $t_1'$  i  $t_2'$ . Punkt  $S_2'$ , w którym przecinają się asymptoty  $a_2'$  i  $b_2'$ , jest środkiem hiperboli  $k_2'$ , a punkt  $S_2''$ , leżący na prostej  $c''$  i będący środkiem odcinka  $P_2'' R_2''$ , środkiem hiperboli  $k_2''$ . Asymptoty  $a_2''$  i  $b_2''$  tej ostatniej przechodzą przez punkty  $H_a''$  i  $H_b''$ , równoległe do  $t_1''$  i  $t_2''$ . Wykreślmy jeszcze krawędź  $m$  ( $m' m''$ ) płaszczyzn  $\alpha$  i  $\gamma$ , to punkty 3 ( $3' 3''$ ) i 4 ( $4' 4''$ ) — podobnie jak 1 ( $1' 1''$ ) i 2 ( $2' 2''$ ) — są punktami hiperboli  $k_2$  ( $k_2' k_2''$ ). Wykreśliwszy rzuty hiperboli  $k_2$ , wyznaczymy jeszcze punkty styczności hiperboli  $k_2''$  z tworzącymi konturowemi stożka tak, jak to uczyniliśmy w Rys. 406. Szukane punkty są punktami przecięcia się rzutu pionowego  $n''$ , krawędzi  $n$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\pi$ , z tworzącymi konturowemi stożka na rzutni pionowej. W naszym przykładzie płaszczyzna  $\pi$  przechodzi przez punkt 1, przez który to punkt przejdzie też i krawędź  $n$ . Wobec tego punkt  $I''$  jest jednym, a punkt  $N_2''$  drugim punktem styczności hiperboli  $k_2''$  z zarysem stożka na rzutni pionowej.

Inne rozwiązanie powyższego zadania polegałoby na wprowadzeniu trzeciej rzutni, prostopadłej do płaszczyzny rzutni siecznej. Tym sposobem — podobnie jak w przypadku przekroju stożka wzdłuż elipsy (Rys. 405.) — sprowadzilibyśmy zadanie do poprzedniego.

c) *Naśrubek*. Jako przykład przekrojów stożka wzdłuż hiperbol posłużyć może znany powszechnie element maszynowy, naśrubek (Rys. 412.), który spotykamy wykonany z żelaza, mosiądzu lub niklu. Geometrycznie wyobrazić sobie możemy powstanie naśrubka w ten sposób, że dwa stożki

obrotowe o wspólnej kierownicy i o kątach wierzchołkowych, równych  $120^\circ$ , przecięte są sześcioma płaszczyznami równoległymi do osi stożka, a tworzącymi umiarowy graniastosłup sześciościenny. Następnie stożki te ograniczono dwiema płaszczyznami prostopadłymi do osi. Na Rys. 412, którego odczytanie i odtworzenie przebiegu konstrukcji pozostawiamy czytelnikowi, narysowaliśmy też rzut ukośny naśrubka, a to dla  $\varphi = 30^\circ$ , a dla stosunków skręceń  $x:y:z = 1:1/2:1$ .

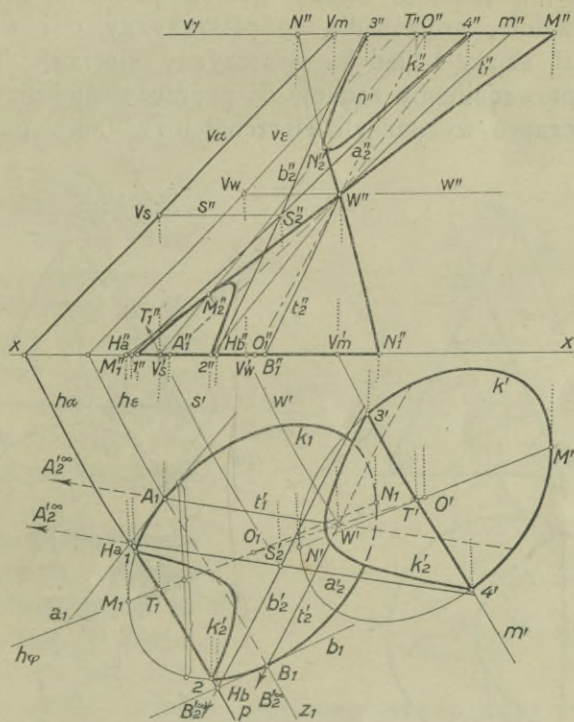


Rys. 412.

d) Stożek, którego ślad poziomy  $k_1$  jest elipsą, a który ograniczony jest ponadto przekrojem poziomą płaszczyzną  $\gamma$ , przecięć wzdłuż hiperboli (Rys. 413.). Zadanie rozwiązaliśmy przy pomocy związków kolineacji środkowej tak, jak Rys. 411. Stycznym  $a_1$  i  $b_1$  do elipsy  $k_1$  w punktach  $A_1$  i  $B_1$ , w której oś wzajemna  $z_1 \equiv h_2$  elipsę tę przecięła, odpowiadają asymptoty  $a_2$  ( $a_2'$   $a_2''$ ) i  $b_2$  ( $b_2'$   $b_2''$ ) hiperboli przekroju  $k_2$  ( $k_2'$   $k_2''$ ). Wyznaczymy średnicę  $\overline{M_1 N_1}$  elipsy  $k_1$ , sprzężoną z kierunkiem prostopadłym do osi  $x$  i średnicę  $\overline{M' N'}$  elipsy  $k_1$ , sprzężoną z tym samym kierunkiem, to prosta  $TT_1 \equiv n$  jest krawędzią płaszczyzny siecznej  $\alpha$  i płaszczyzny, przechodzącej przez średnicę  $\overline{M N}$  i  $\overline{M_1 N_1}$ . Punkty  $M_2''$  i  $N_2''$ , w których prosta  $n''$



przecina proste  $M_1'' M''$  i  $N_1'' N''$ , są punktami styczności hiperboli  $k_2''$  z zarysem stożka na rzutni pionowej.

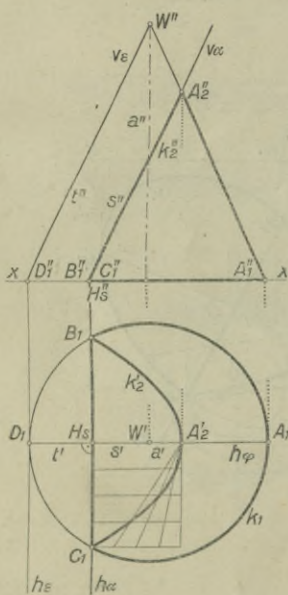


Rys. 413.

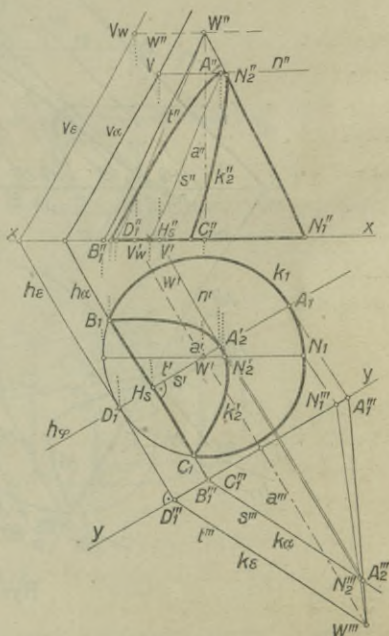
### 141. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdluż parabol.

a) Stożek obrotowy przecięć wzdluż paraboli płaszczyzną rzucającą. Płaszczyzna sieczna musi być równoległą do jednej tworzącej stożka, a mianowicie do jednej z dwóch tworzących konturowych. W przypadku, przedstawionym na Rys. 414., poprowadziliśmy płaszczyznę sieczną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) równoległą do tworzącej  $t$  ( $t' t''$ ). Punkt  $A_2$  ( $A_2' A_2''$ ) jest wierzchołkiem, a punkty  $B_1$  ( $B_1 B_1''$ ) i  $C_1$  ( $C_1 C_1''$ ) punktami paraboli  $k_2$  ( $k_2' k_2''$ ). Oś  $s'$  paraboli  $k_2'$  schodzi się z prostą  $t'$ , a dalsze punkty znajdziemy przy pomocy konstrukcyi, poznanej w ust. 121. pkt. *f*.

b) Dany stożek obrotowy przecięć wzdłuż paraboli (Rys. 415). Na stożku obierzemy tworzącą  $t$  ( $t' t''$ ) i wzdłuż niej poprowadzimy płaszczyznę styczną  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ). Płaszczyzna  $\alpha \parallel \varepsilon$  przetnie stożek wzdłuż paraboli. Przyjmijmy trzecią rzutnię, prostopadłą do płaszczyzny  $\varepsilon$  i wykreślmy trzeci rzut stożka i ślad  $k_\alpha$  płaszczyzny siecznej. Tym sposobem sprowadziliśmy zadanie do poprzedniego i przy pomocy rzutu bocznego wyznaczyli wierzchołek  $A_2'$  i oś  $s'$  paraboli  $k_2'$ .



Rys. 414.



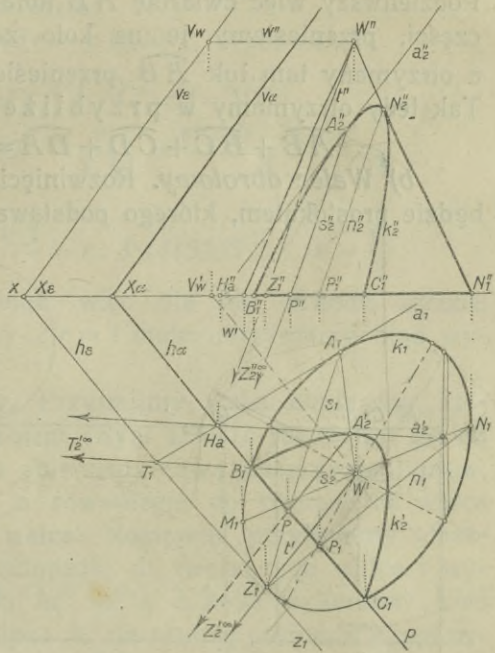
Rys. 415.

Przy pomocy prostej  $n$  ( $n' n''$ ), obranej na płaszczyźnie  $\alpha$ , otrzymamy punkt  $A_2''$  (Rys. 415. należy uzupełnić, dopisując u dołu litery  $A''$  liczbę 2), który połączony z  $Hs''$  daje prostą  $s''$ , będącą średnicą paraboli. Punkty  $C_1''$  i  $D_1''$  paraboli są znane, dalsze jej punkty otrzymamy przez zastosowanie konstrukcji, poznanej w ust. 121. Rys. 372. — uwzględniając, że prosta  $n''$  jest styczną do paraboli w punkcie  $A_2''$ .

c) Wyznaczyć przekrój stożka, którego ślad poziomy jest elipsą, wzdłuż paraboli (Rys. 416.). Zadanie rozwiązaliśmy przez zastosowanie kolineacji środkowej, jaka łączy ślad stożka



z jego przekrojem. Najpierw przez przyjętą tworzącą  $t(t' t'')$  stożka poprowadziliśmy do niego płaszczyznę styczną  $\varepsilon (h_\varepsilon v_\varepsilon)$ , a do niej płaszczyznę równoległą  $\alpha (h_\alpha v_\alpha)$ . Ślad  $h_\alpha$  jest osią kolineacji, ślad  $h_\varepsilon$  osią wzajemną, a punkt  $W'$  środkiem kolineacji. Stycznej  $a_1$  do elipsy  $k_1$  w punkcie  $A_1$  odpowiada styczna  $a_2'$  do paraboli  $k_2'$  w punkcie  $A_2'$ . Dowolnej ilości punktów elipsy  $k_1$  podporządkujemy punkty paraboli  $k_2'$ , a te, przeniesione na rzutnię pionową, są punktami paraboli  $k_2''$ .



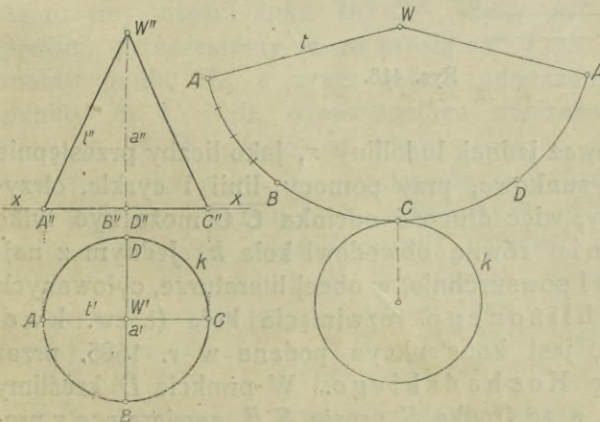
Rys. 416.

**142. O rozwijaniu powierzchni stożkowych i walcowych na płaszczyźnie.** Wspomnieliśmy w ust. 125.,

że powierzchnie stożkowe i walcowe należą do grupy powierzchni rozwijalnych na płaszczyźnie. W tym miejscu zajmiemy się konstrukcyjnym rozwiązaniem tego zadania, przyczem odnośnie

do powierzchni stożkowych, ograniczymy się jedynie do stożka obrotowego.

**a) Stożek obrotowy.** Rozwinięcie stożka obrotowego (Rys. 417.) jest wycinkiem koła, zakreślonego promieniem

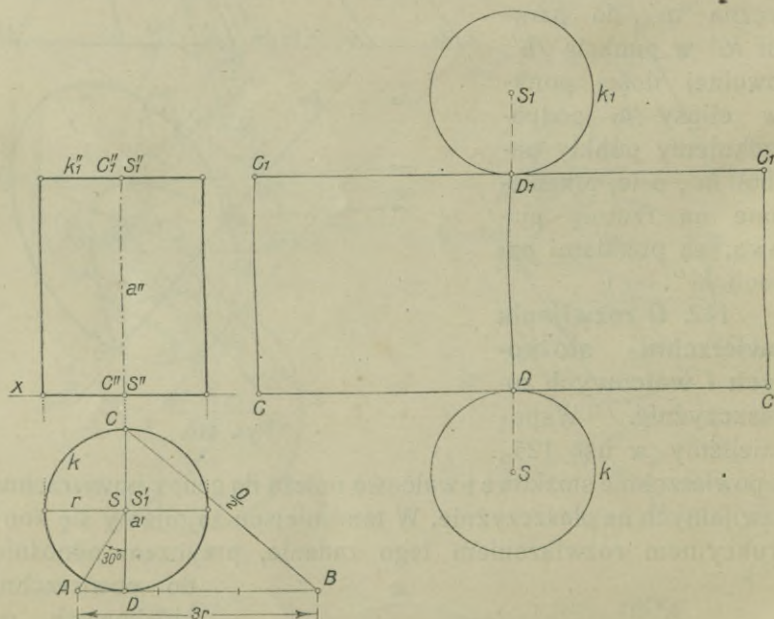


Rys. 417.

równym długości tworzącej stożka. Długość łuku koła równa jest długości obwodu koła  $k$ , które stanowi podstawę stożka. Podzieliwszy więc ćwiartkę  $AB$  koła  $k$  np. na cztery równe części, przeniesiemy je na koło zakreślone promieniem  $t$ , a otrzymany tam łuk  $\widehat{AB}$  przeniesiemy jeszcze trzykrotnie. Tak tedy otrzymamy w przybliżeniu

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = \widehat{AA} = 2t\pi.$$

b) *Walec obrotowy*. Rozwinięcie tego walca (Rys. 418.) będzie prostokątem, którego podstawa  $\overline{CC}$  równa jest obwo-



Rys. 418.

dowi koła. Ponieważ jednak ludolfiny  $\pi$ , jako liczby przestępnie niewymiernej, rysunkowo, przy pomocy linii i cyrkla, otrzymać nie możemy, więc długość odcinka  $\overline{CC}$  może być tylko w przybliżeniu równą obwodowi koła  $k$ . Jednym z najbardziej znanych i powszechnie, w obcej literaturze, cytowanych sposobów przybliżonego rozwinięcia koła (t. zw. kwadratury koła), jest konstrukcja podana w r. 1685. przez polskiego jezuitę Kochańskiego. W punkcie  $D$  kreślimy styczną do koła, a ze środka  $S$  prostą  $SA$ , zawierającą z pro-



mieniem  $SD$  kąt  $30^\circ$ . Od punktu  $A$  odmierzymy odcinek  $\overline{AB} = 3r$ , to odcinek  $\overline{BC}$  równy jest w przybliżeniu połowie obwodu koła. W istocie bowiem:

$$CB^2 = CD^2 + (3r - r \operatorname{tg} 30^\circ)^2, \text{ a ponieważ}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ a } \overline{CD} = 2r, \text{ więc:}$$

$$\overline{CB}^2 = 4r^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{r^2(40 - 6\sqrt{3})}{3}$$

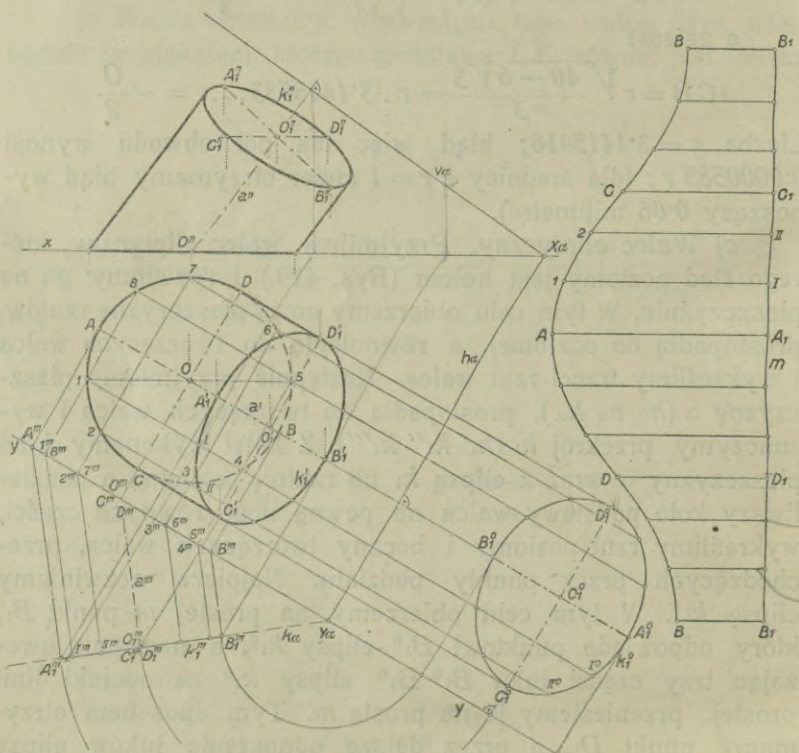
a zatem:

$$\overline{CB} = r \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} = r \cdot 3.1415333 \dots = \sim \frac{0}{2}$$

Liczba  $\pi = 3.1415916$ ; błąd więc dla pół obwodu wynosi  $0.0000583 r$ ; (dla średnicy  $2r = 1$  meter otrzymamy błąd wynoszący  $0.06$  milimetra).

c) *Walec eliptyczny.* Przyjmijmy walec eliptyczny, którego ślad poziomy jest kołem (Rys. 419.) i rozwińmy go na płaszczyźnie. W tym celu obierzemy nową płaszczyznę rzutów, prostopadłą do poziomej, a równoległą do tworzących walca i wykreślimy trzeci rzut walca. Następnie przyjmiemy płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$   $k_\alpha$ ), prostopadłą do tworzących walca i wyznaczmy przekrój  $k_1$  ( $k_1'$   $k_1''$   $k_1'''$ ). Z kolei wykonamy kład płaszczyzny  $\alpha$  wraz z elipsą  $k_1$  na rzutnię poziomą, a podzieliwszy koło podstawy walca na pewną ilość równych części, wykreślimy rzut poziomy i boczny tworzących walca, przechodzących przez punkty podziału. Najpierw rozwiniemy elipsę  $k_1^0$ . W tym celu obierzemy na prostej  $m$  punkt  $B_1$ , który odpowiada punktowi  $B_1^0$  elipsy  $k_1^0$ , a następnie uważając trzy części łuku  $B_1^0 D_1^0$  elipsy  $k_1^0$  za odcinki linii prostej, przeniesiemy je na prostą  $m$ . Tym sposobem otrzymamy punkt  $D_1$ , a przez dalsze odnoszenie łuków elipsy punkty  $A_1$ ,  $C_1$  i  $B_1$ , odpowiadające wierzchołkom elipsy  $k_1^0$ . Odcinek  $\overline{B_1 B_1}$  prostej  $m$  równy jest w przybliżeniu obwodowi elipsy  $k_1^0$ . Na prostopadłych, wykreślonych w punktach podziału odcinka  $\overline{B_1 B_1}$ , odmierzymy długości tworzących walca, zawartych między rzutnią poziomą a płaszczyzną  $\alpha$ . Prawdziwe długości tych tworzących występują w rzucie bocznym i w tym jedynie celu rzut ten wykreśliliśmy. Odmierzmy więc  $\overline{B_1''' B_1'''} = \overline{B B_1}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{D_1''' D_1'''} = \overline{D D_1}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{A_1''' A_1'''} = \overline{A A_1}$ ,  $\overline{I_1''' I_1'''} = \overline{I I_1}$ ,  $\overline{2_1''' 2_1'''} = \overline{2 2_1}$ ,  $\overline{C_1''' C_1'''} = \overline{C C_1}$ ,  $\dots$  i  $\overline{B_1''' B_1'''} = \overline{B B_1}$ . Otrzymane tym sposobem punkty połączymy linią

ciągłą, która jest przekształconą koła, stanowiącego podstawę walca, a której długość równa jest w przybliżeniu obwodowi tego koła. Część płaszczyzny, ograniczonej odcinkami  $\overline{BB_1}$ ,  $\overline{B_1B_1}$ ,  $\overline{BB_1}$  i linią krzywą  $\overline{BDACB}$ , stanowi rozwinięcie walca, ograniczonego przekrojem normalnym płaszczyzną  $\alpha$  i jego śladem na rzutni poziomej.



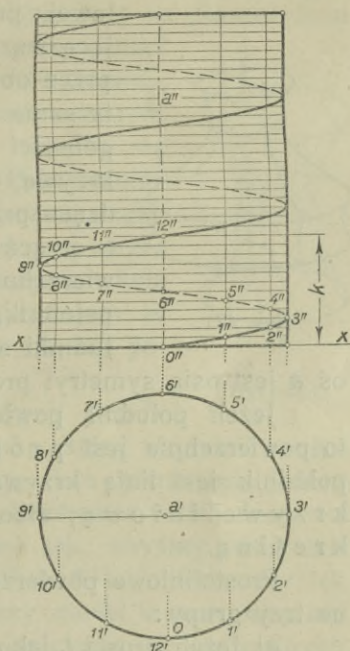
Rys. 419.

143. O linii śrubowej. Przyjmijmy walec obrotowy o osi pionowej (Rys. 420.), a na nim dowolną tworzącą. Wyobraźmy sobie, że tworząca ta obraca się około osi walca ruchem jednostajnym, a równocześnie przyjęty na tej tworzącej punkt porusza się po niej również ruchem jednostajnym. Aby wykreślić drogę wypadkową poruszającego się punktu, podzielmy podstawę walca na dwanaście równych części. Punkty podziału oznaczać będą rzuty poziome poszczególnych położenia poru-



szającej się tworzącej, która w jednostce czasu obróciła się o  $\frac{1}{12}$  część kąta pełnego. Równocześnie poruszający się na tworzącej punkt odbył w jednostce czasu drogę i zajął położenie 1 ( $1' 1''$ ). W następnych jednostkach czasu punkt poruszający się ruchem jednostajnym na tworzącej, obracającej się około osi  $a$ , zajmie położenie 2 ( $2' 2''$ ), 3 ( $3' 3''$ )..... 12 ( $12' 12''$ ). Tworząca wróciła w położenie, z którego wyszła, punkt wznosił się o odległość  $k$  od rzutni poziomej i zakreślił na walcu linię, którą nazywamy linią śrubową. Wysokość  $k$  nazywamy krokiem linii śrubowej.

Kąt, jaki zawiera styczna w pewnym punkcie linii śrubowej z płaszczyzną poziomą, nazywamy nachyleniem tej linii. Z określenia linii śrubowej wynika, że nachylenie jej jest stałe, t. zn., że styczne we wszystkich jej punktach zawierają z płaszczyzną poziomą ten sam kąt. Jest rzeczą zrozumiałą, że im większy jest krok linii śrubowej, przy stałej średnicy walca, tem większe jest jej nachylenie.

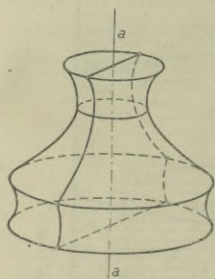


Rys. 420.

### § 13. POWIERZCHNIE OBROTOWE

144. Tworzenie i podział powierzchni obrotowych. Jeżeli linia płaska lub skośna obraca się około stałej prostej  $a$ , to powstała w ten sposób powierzchnia nazywa się powierzchnią obrotową. Linia, przez obrót której powstała powierzchnia, jest tworzącą tej powierzchni, zaś prosta  $a$  jej osią (Rys. 421.). Każdy punkt tworzącej opisuje podczas obrotu koło, którego środek leży na osi  $a$ , a którego płaszczyzna jest do tej osi prostopadłą. Koło takie nazywamy

równoleżnikiem powierzchni obrotowej. Największy równoleżnik nazywa się równikiem, najmniejszy kołem szynem. Jeżeli w miejsce danej tworzącej powierzchni obrotowej, przyjmiemy inną krzywą, przecinającą wszystkie równoleżniki powierzchni, to przez obrót tej nowej tworzącej powstanie ta sama powierzchnia obrotowa. W szczególności przyjąć można, jako tworzącą, krzywą, wzdłuż której płaszczyzna przechodząca przez oś, przecina powierzchnię. Taką tworzącą nazywamy południkiem powierzchni, a płaszczyznę, na której leży południk, pł. południkową. Wszystkie południki są liniami przystającymi, dla których



Rys. 421.

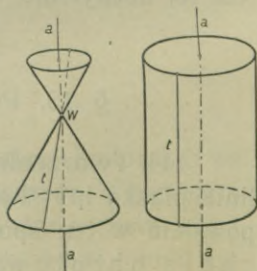
oś  $a$  jest osią symetrii prostokątnej.

Jeżeli południk powierzchni obrotowej jest linią prostą, to powierzchnia jest prostoliniową (prostokreślną); gdy południk jest linią krzywą, to otrzymana powierzchnia jest krzywoliniową, albo, jak ją też nazywamy, krzywokreślną.

Prostoliniowe powierzchnie obrotowe dadzą się podzielić na trzy grupy:

a) Jeżeli prosta  $t$ , jako tworząca powierzchnię, przecina oś, to otrzymujemy poznany już w ust. 125. stożek obrotowy (Rys. 422 a). Punkt  $W$ , w którym tworząca przecina oś  $a$ , nazywamy wierzchołkiem stożka. Każda płaszczyzna, przechodząca przez oś stożka (pł. południkowa), przecina go wzdłuż dwóch prostych, stanowiących południk stożka. Kąt, jaki tworzą ze sobą te dwie proste, nazywamy kątem wierzchołkowym stożka.

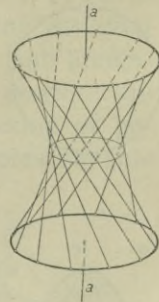
b) Jeżeli linia prosta  $t$ , będąca tworzącą powierzchni obrotowej, jest równoległą do osi  $a$  (Rys. 422 b), to otrzymujemy walec obrotowy. Podobnie jak przy stożku obrotowym, każdy punkt tworzącej walca obrotowego opisuje koło na płaszczyźnie prostopadłej do osi, a walec rozciąga się — tak jak stożek — nieograniczenie daleko.



Rys. 422 a—b.

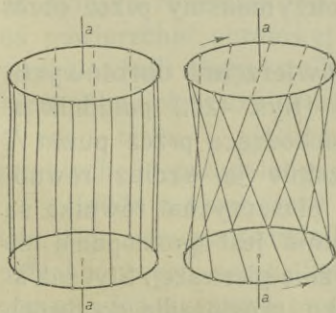


c) Jeżeli prosta tworząca i oś powierzchni obrotowej mają położenie skośne, to otrzymana powierzchnia nosi nazwę skośnej hiperboloidy obrotowej (Rys. 423.). Każdy punkt poruszającej się tworzącej opisuje koło na płaszczyźnie prostopadłej do osi. Koło, opisane przez punkt tworzącej, którego odległość od osi jest najmniejszą, czyli koło zakreślone promieniem równym odległości osi i prostej tworzącej, nazywa się kołem szyjnym hiperboloidy. Hiperboloida obrotowa jest powierzchnią symetryczną względem każdej płaszczyzny, przechodzącej przez jej oś, a nadto względem płaszczyzny koła szyjnego, którego promień jest najmniejszy ze wszystkich promieni kół, leżących na tej powierzchni.



Rys. 423.

Powstanie hiperboloidy obrotowej przedstawić sobie można zapomocą modelu, który czytelnik z łatwością wykona. Weźmy pod uwagę dwa pierścienie jednakowej wielkości, a wywierciwszy w każdym z nich jednakową ilość otworów, połączmy je nitkami tak, abyśmy otrzymali pęk tworzących walca obrotowego (Rys. 424 a.).

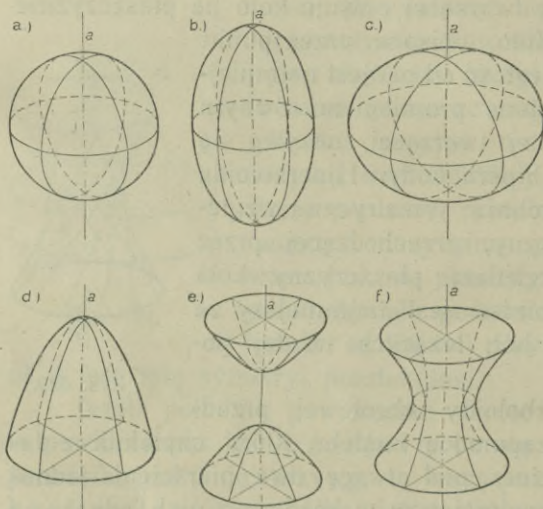


Rys. 424 a—b.

Wziąwszy tak wykonany model w ręce, skręćmy oba pierścienie w odwrotnych kierunkach, zachowując równoległość ich położenia (Rys. 424 b.). Tworzące walca przejdą w tworzące hiperboloidy, a im bardziej skręcać będziemy pierścienie, tem mniejszem będzie koło szyjne, aż w przypadku granicznym, gdy odległość tworzących od osi  $a$  stanie się równą zero, koło szyjne zredukuje się do punktu, a hiperboloida przejdzie w stożek obrotowy.

Powierzchnie obrotowe, które nie dadzą się utworzyć przez obrót linii prostej około osi, należą do grupy powierzchni krzywoliniowych (krzywokreślnych). Przykłady takich powierzchni widzimy na Rys. 425. W szczególności przez obrót koła około średnicy, jako osi, powstaje kula (Rys. 425 a.); elipsa, obracająca się około osi większej, zakreśla elipsoidę

wydłużoną (Rys. 425 b.), obrót elipsy około osi małej daje elipsoidę obrotową spłaszczoną, zwaną też sferoidą (Rys. 425 c.).



Rys. 425 a—f.

Parabola, obracająca się około osi, zakreśla paraboloidę obrotową (Rys. 425 d.); hiperbola, obracająca się około osi, która ją przecina (t. zw. osi „rzeczywistej“), stwarza hiperboloidę dwupowłokową (Rys. 425 e.). Jeżeli hiperbola obraca się około swej drugiej osi, t. zw. osi „urojonej“, to otrzymujemy

hiperboloidę obrotową jednopowłokową (Rys. 425 f.), identyczną z tą, którą otrzymaliśmy przez obrót prostej skośnej względem osi.

#### 145. Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowych.

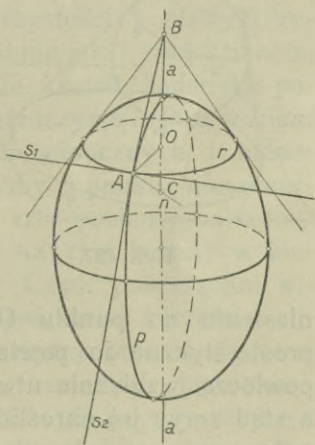
Obierzmy na powierzchni obrotowej (Rys. 426.) południk  $p$ , a na nim punkt  $A$ . Płaszczyzna, przechodząca przez punkt  $A$  prostopadle do osi powierzchni, przetnie ją wzdłuż równoleżnika  $r$ . Płaszczyzna południka i płaszczyzna równika są do siebie prostopadłe, gdyż ta ostatnia jest prostopadłą do osi  $a$  powierzchni, leżącej na płaszczyźnie pierwszej. Styczna  $s_1$  w punkcie  $A$  do równoleżnika  $r$ , jako prostopadła do dwóch prostych, leżących na płaszczyźnie południka, a mianowicie do prostej  $OA$  i  $a$ , jest prostopadłą do płaszczyzny tego południka. W następstwie tego każda płaszczyzna, przechodząca przez prostą  $s_1$ , jest prostopadłą do płaszczyzny południka  $p$ . Poprowadźmy w punkcie  $A$  styczną  $s_2$  do południka  $p$ , to płaszczyznę wyznaczoną prostymi  $s_1$  i  $s_2$  określamy mianem płaszczyzny stycznej do powierzchni obrotowej w punkcie  $A$ , (porównaj ust. 126.). Ponieważ każda płaszczyzna, przechodząca



przez prostą  $s_1$ , jest prostopadłą do płaszczyzny południka, więc także i płaszczyzna styczna  $\sigma \equiv (s_1, s_2)$  jest prostopadłą do tego południka.

Poprowadźmy w punkcie  $A$  normalną do powierzchni (ust. 126.), to ponieważ, według określenia, normalna w pewnym punkcie powierzchni jest prostopadłą do płaszczyzny stycznej w jej punkcie styczności, a płaszczyzna styczna jest prostopadłą do płaszczyzny południka, więc normalna do powierzchni obrotowej leży na płaszczyźnie południka i przecina oś powierzchni. Oczywiście, że styczna  $s_2$ , leżąca na płaszczyźnie południka, przecina oś powierzchni w punkcie, a punkt ten oznaczyliśmy literą  $B$ . Gdy punkt  $A$  opisuje koło równoleżnikowe, to styczna  $s_2$  tworzy stożek obrotowy, o wierzchołku  $B$ , czyli: styczne, poprowadzone do południków w punktach tego samego równoleżnika, przecinają oś w jednym punkcie. Stąd wynika bezpośrednio, że płaszczyzny styczne, poprowadzone w punktach, które leżą na jednym równoleżniku, przecinają oś powierzchni obrotowej w jednym punkcie. Jeśli równoleżnik jest równikiem albo kołem szyjnym, to styczne, a więc także i płaszczyzny styczne, poprowadzone w ich punktach do południków, są równoległe do osi.

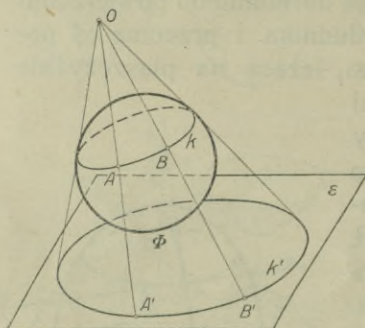
Każda z płaszczyzn stycznych do powierzchni, w punktach tego samego południka, zawiera styczną do równoleżnika, przechodzącego przez każdy z tych punktów, podobnie jak płaszczyzna styczna w punkcie  $A$  (Rys. 426.) zawiera styczną  $s_1$ . Każda z tych stycznych jest prostopadłą do płaszczyzny południka, podobnie jak płaszczyzny styczne do powierzchni, przechodzące przez owe styczne. Wszystkie te proste styczne (prosta  $s_1$  w Rys. 426.) są tworzącymi walca opisanego na powierzchni obrotowej wzdłuż południka. A zatem: płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej w punktach tego samego południka, powińcżą walec opisany na tej powierzchni. Tworzące tego



Rys. 426.

walca są prostopadłe do płaszczyzny południka. I odwrotnie: walec, którego tworzące są prostopadłe w punktach południka do płaszczyzny tego południka, styka się z powierzchnią obrotową wzdłuż tego południka.

**146. O zarysach powierzchni obrotowych.** Przyjmijmy dowolną powierzchnię obrotową  $\Phi$  i zewnątrz niej punkt  $O$  (Rys. 427.), który uważajmy za środek rzutów (ust. 8.).

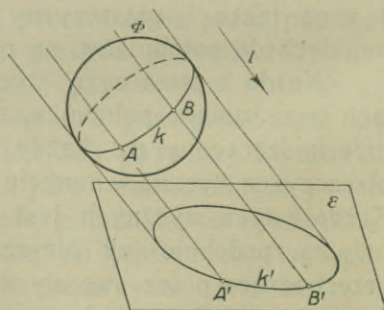


Rys. 427.

Miejscem geometrycznym punktów styczności płaszczyzn, względnie prostych stycznych, poprowadzonych do danej powierzchni przez punkt  $O$ , jest linia  $k$ , stanowiąca granicę części widocznej i niewidocznej naszej powierzchni, jeśli w środku rzutów wyobrazimy sobie umieszczone oko obserwatora. Linia  $k$  stanowi t. zw. zarys albo kontur istotny powierzchni obrotowej, w od-

niesieniu do punktu  $O$ . Wszystkie płaszczyzny, względnie proste styczne do powierzchni, przechodzące przez punkt  $O$ , powłóczą, względnie utworzą, stożek opisany na powierzchni, a stąd zarys jej określić można jako linię styczności  $k$  stożka opisanego na powierzchni z danego punktu, który jest środkiem rzutu, a zarazem wierzchołkiem stożka.

Zarys powierzchni zmienia się ze stanowiskiem obserwatora. Jeżeli oko jego znajduje się nieograniczenie daleko, to promienie widzenia są do siebie równoległe, a stożek opisany na powierzchni przejdzie w walec (Rys. 428.), którego tworzące są równoległe do danego kierunku  $l$ .



Rys. 428.

Przekrój stożka, względnie walca, opisanego na powierzchni i stykającego się z nią wzdłuż zarysu istotnego — dowolną płaszczyzną, nazywamy zarysem tej powierzchni na owej

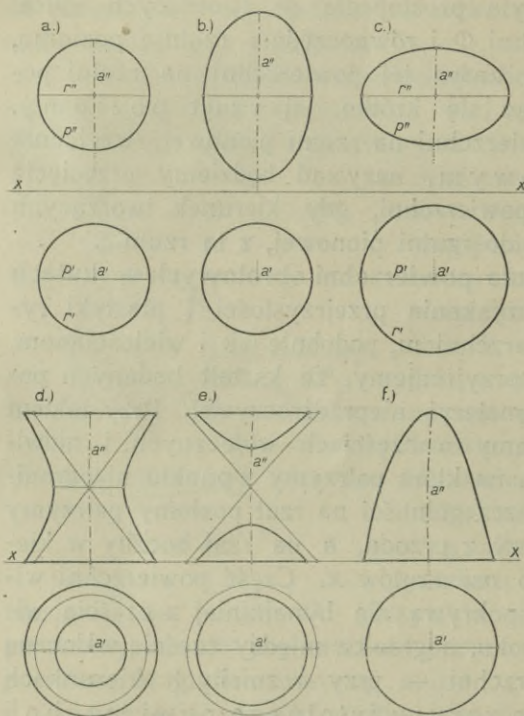


płaszczyźnie. Tak więc krzywa  $k'$  w Rys. 427. i 428. jest zarysem powierzchni  $\Phi$  na płaszczyźnie  $\varepsilon$ . Jeżeliby płaszczyzna  $\varepsilon$  była prostopadłą do tworzących walca, opisanego na powierzchni  $\Phi$  i równocześnie rzutnią poziomą, to linia  $k'$  stanowiłaby zarys tej powierzchni na rzutni poziomej, czyli wyrażając się krótko, jej rzut poziomy. Podobnie zarysem powierzchni na rzutni pionowej, względnie jej rzutem pionowym, nazywać będziemy przecięcie walca opisanego na powierzchni, gdy kierunek tworzących walca jest prostopadły do rzutni pionowej, z tą rzutnią.

**147. Przedstawienie powierzchni obrotowych w rzutach prostokątnych.** Dla uzyskania przejrzystości i plastyki rysunku, nadajemy powierzchniom, podobnie jak i wielościanom, podkład materyalny i przyjmujemy, że kształt badanych powierzchni nadaliśmy materii nieprzeźroczystej. Przy takim założeniu mówić możemy o częściach widocznych i niewidocznych powierzchni, na które patrzymy z punktu nieograniczenie dalekiego. W szczególności na rzut poziomy patrzymy z góry, na rzut pionowy z przodu, a na rzut boczny w kierunku równoległym do osi rzutów  $x$ . Część powierzchni widzianej z przodu nie pokrywa się bynajmniej z częścią widzianą z góry lub z boku, a granica między częścią widoczną a niewidoczną powierzchni — przy rozmaitych kierunkach patrzenia — nosi nazwę zarysu istotnego powierzchni. Linia zarysu powierzchni zależna jest od kierunku rzutów (kierunku patrzenia, względnie stanowiska obserwatora), względnie od położenia powierzchni.

Rzut cechowany, względnie rzuty prostokątne na dwie płaszczyzny, osi i tworzącej powierzchni obrotowej, wyznaczają w sposób jednoznaczny położenie tej powierzchni i ją samą. Z reguły wyznaczamy jednak powierzchnie obrotowe zapomocą jej zarysów na każdej z płaszczyzn rzutów, a taki sposób przedstawiania powierzchni pozwala określić na pierwszy rzut oka jej rodzaj i ułatwia działania konstrukcyjne. Zarys powierzchni obrotowej o osi pionowej na rzutni pionowej jest rzutem pionowym jej południka, którego płaszczyzna jest równoległą do rzutni pionowej. Południk ten nazywamy *południkiem głównym*. Zarys powierzchni obrotowej o osi pionowej na rzutni poziomej jest kołem, względnie pękiem kół współśrodkowych. Największe z tych kół jest rzutem po-

ziomym równika, najmniejsze, rzutem poziomym koła szczytowego, a pozostałe rzutami charakterystycznych równoleżników.

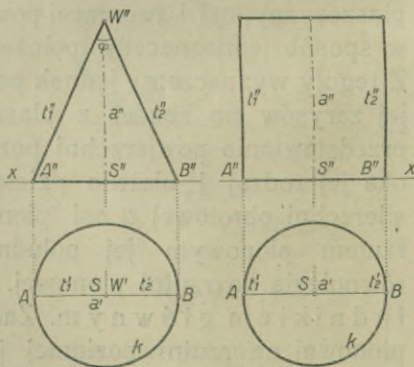


Rys. 429 a—f.

Rys. 429 a—f. podaje rzuty prostokątne a) kuli, b) elipsoidy wydłużonej, c) słuźszczonej, d) hiperboloidy jednopowłokowej (skośnej), e) hiperboloidy dwupowłokowej i f) paraboloidy obrotowej. Dla całości powtarzamy w tym miejscu rzuty stożka i walca obrotowego o osiach pionowych (Rys. 430 a—b). Tworzące  $t_1$  ( $t_1'$   $t_1''$ ) i  $t_2$  ( $t_2'$   $t_2''$ ) stanowią południk główny tych powierzchni.

148. O kulach wpisanych w stożek i walec obrotowy. Weźmy pod uwagę stożek obrotowy, o osi

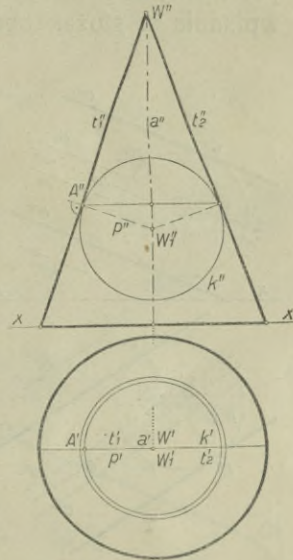
pionowej  $a$  ( $a'$   $a''$ ) i wierzchołku  $W$  ( $W'$   $W''$ ) — Rys. 431. — i poprowadźmy w dowolnie przyjętym punkcie  $A$  ( $A'$   $A''$ ) tworzącej  $t_1$  ( $t_1'$   $t_1''$ ), prostą prostopadłą do niej, a przecinającą oś stożka w punkcie  $W_1$  ( $W_1'$   $W_1''$ ). Obierzmy na prostej  $a''$  dowolny punkt  $W_1''$  i zakreślmy koło  $k''$  styczne do prostych  $t_1''$  i  $t_2''$ . Wyobraźmy sobie, że prosta  $p$  ( $p'$   $p''$ ) i koło  $k$  ( $k'$   $k''$ ) obróćą się około osi stożka. Prosta  $p$  zakreśli stożek obrotowy o wierzchołku  $W_1$  ( $W_1'$   $W_1''$ ),



Rys. 430 a—b.

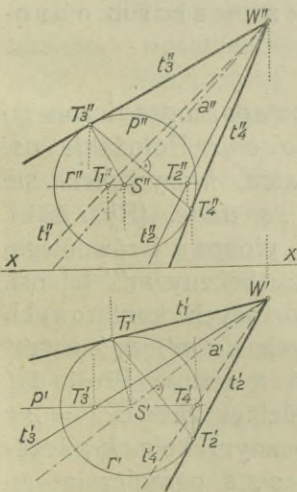


a koło  $k$  kulę o środku  $W_1$  ( $W_1' W_1''$ ). Punkt  $A$  ( $A' A''$ ) opisze podczas tego obrotu koło, będące równoleżnikiem obu stożków i kuli. Stożek o wierzchołku  $W_1$ , którego każda tworząca jest prostopadłą do odpowiedniej tworzącej stożka o wierzchołku  $W$ , nazywać będziemy stożkiem normalnym. W ten sposób każdy stożek obrotowy ma dowolną ilość stożków normalnych i dowolną ilość kul wpisanych w siebie. Wynika stąd dalej, że z dowolnego punktu opisać można na danej kuli jeden stożek obrotowy, który posiada z kulą jedno koło wspólne. Środek kuli, połączony z wierzchołkiem stożka, jest osią tego stożka. Z punktu niewłaściwego przestrzeni, a więc równoległe do danego kierunku, opisać można na danej kuli walec, mający z kulą jedno koło wspólne. Walec ten jest walcem obrotowym, o osi przechodzącej przez środek kuli.



Rys. 431.

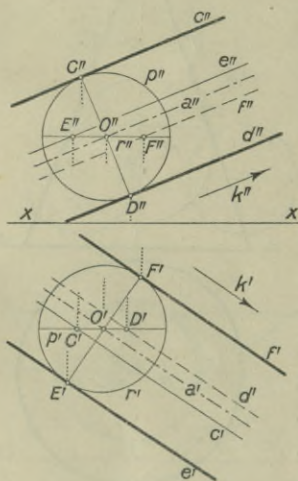
Rozumowanie powyższe umożliwi wykreślenie rzutów stożka obrotowego i walca obrotowego, których osi mają dowolne położenie w przestrzeni. Jeżeli oś  $a$  ( $a' a''$ ) stożka i jego wierzchołek  $W$  ( $W' W''$ ) są dane (Rys. 432.), to na osi przyjmujemy dowolny punkt  $S$  ( $S' S''$ ), który uważać będziemy za środek kuli. Wykreśliwszy rzuty tej kuli, poprowadzimy styczne  $t_1'$ ,  $t_2'$  do koła  $r'$  i styczne  $t_3''$ ,  $t_4''$  do koła  $p''$ . Styczne te stanowią rzuty stożka obrotowego, opisanego na przyjętej kuli z punktu  $W$ . Styczne do rzutów kuli, równoległe do danego kierunku (Rys. 433.), wyznaczają zarysy walca obrotowego na płaszczyznach rzutów.



Rys. 432.

Jak każda powierzchnia obrotowa, posiada i stożek obrotowy dowolną, nieograniczoną ilość płaszczyzn sy-

metryi prostokątnej, przechodzących przez oś tej powierzchni, w odróżnieniu od powierzchni stożkowej rzędu drugiego, która posiada tych płaszczyzn symetrii tylko trzy (ust. 133.). Możliwość wpisania w stożek obrotowy dowolnej ilości kul, których środki



Rys. 433.

leżą na osi tego stożka, stanowi dalszą właściwość stożka obrotowego, wyróżniającą go od ogólnej powierzchni stożkowej rzędu drugiego. Możemy więc przyjąć następujące określenie: powierzchnia stożkowa rzędu drugiego, w którą wpisać można kulę, jest stożkiem obrotowym.

Walec obrotowy posiada również nieograniczoną ilość płaszczyzn symetrii prostokątnej, przechodzących przez jego oś, a to właśnie wyróżnia go od walca eliptycznego, hiperbolicznego i parabolicznego. Walce bowiem eliptyczne i hiperboliczne posiadają po dwie płaszczyzny symetrii prostokątnej, a walec para-

boliczny tylko jedną. Zresztą podobnie jak dla stożka obrotowego — powierzchnia walcowa rzędu drugiego, w którą wpisać można kulę, jest walcem obrotowym.

#### 149. Zadania.

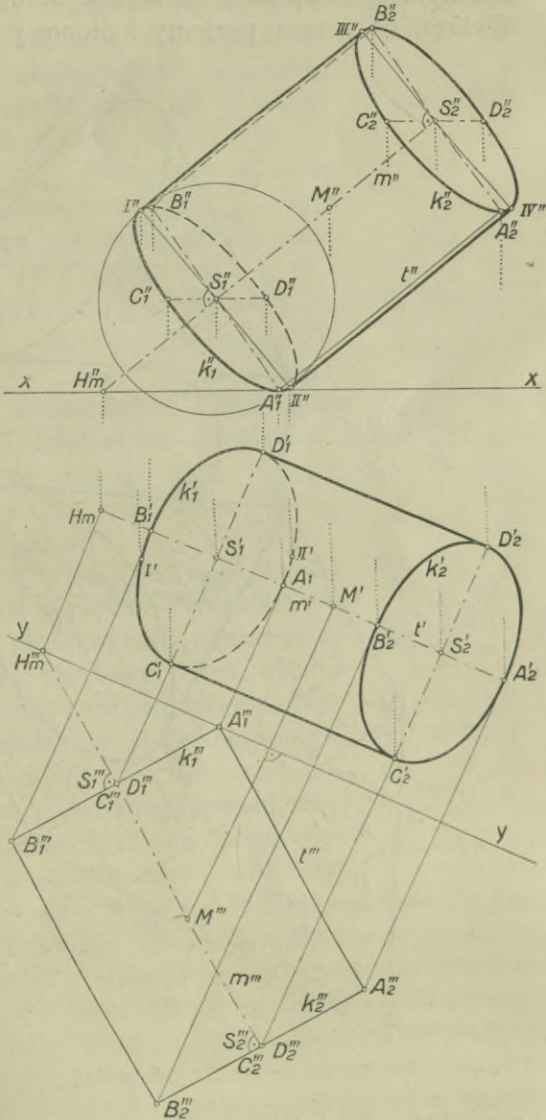
a) Wykreślić rzuty walca obrotowego, ograniczonego dwoma przekrojami prostopadłymi do osi. Położenie osi  $m$  ( $m' m''$ ), promień  $r$  i wysokość walca, który opiera się jednym punktem o rzutnię poziomą, są dane. (Rys. 434.). Przyjąwszy trzecią płaszczyznę rzutów, pionową i równoległą do danej osi  $m$  ( $m' m''$ ), wyznaczmy rzut boczny  $m'''$  tej osi. Rzuty poziome, pionowe i boczne tworzących konturowych walca tworzą pary prostych równoległych do  $m'$ ,  $m''$  i  $m'''$  i oddalonych od nich o dany promień  $r$  walca. Prosta  $l'''$  przecina oś  $y - y$  w punkcie  $A_1'''$ . Odcinek  $\overline{A_1''' B_1'''} = 2r$  i prostopadły do  $m'''$  jest rzutem bocznym koła  $k_1$ , leżącego na płaszczyźnie prostopadłej do osi, a ograniczającego walec.



Wyznaczenie rzutu poziomego  $k_1'$  i pionowego  $k_1''$  koła  $k_1$  nie wymaga żadnych szczególnych wyjaśnień, podobnie jak wyznaczenie rzutów drugiego koła przekroju  $k_2$  ( $k_2'$   $k_2''$   $k_2'''$ ), znajdującego się w danej odległości od przekroju  $k_1$ .

Podobnie jak w rzucie poziomym, odcinek  $C_1' D_1' \perp m'$  jest osią elipsy  $k_1'$ , a jego punkty końcowe są punktami styczności rzutów poziomych tworzących konturowych walca — tak odcinek  $I'' II'' \perp m''$  jest osią elipsy  $k_1''$ , a punkty  $I''$  i  $II''$  punktami styczności rzutów pionowych tworzących konturowych.

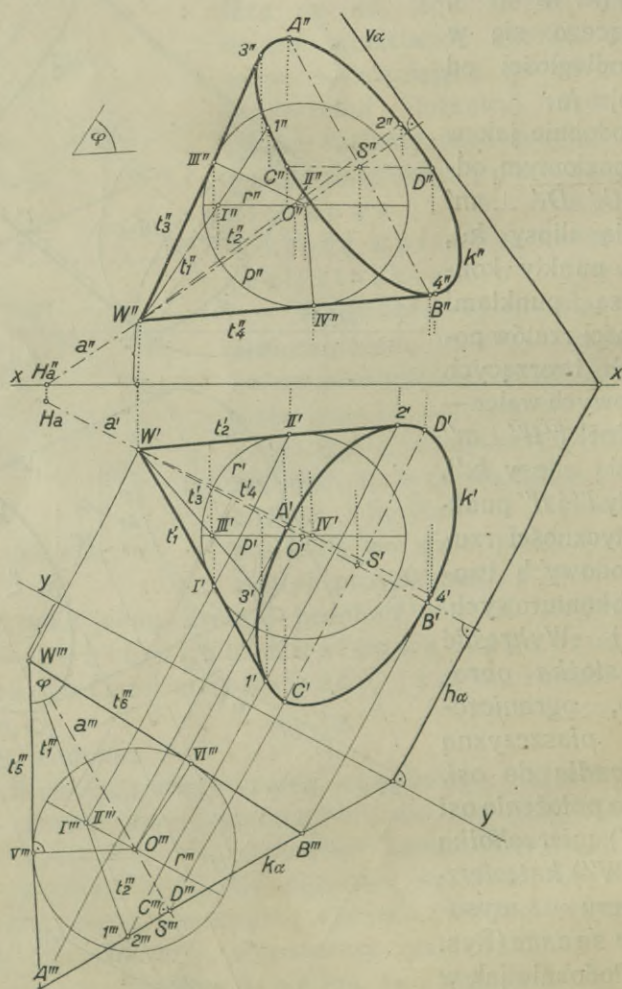
b) Wykreślić rzuty stożka obrotowego, ograniczonego płaszczyzną prostopadłą do osi, którego położenie osi  $a(a' a'')$ , wierzchołka  $W(W' W'')$ , kąt wierzchołkowy  $\varphi$  i wysokość  $w$  są dane (Rys. 435.). Podobnie jak w zadaniu poprzednim, przyjmijemy trzecią rzutnię, równoległą do osi stożka, a wyznaczysz rzut  $a'''$  tej osi, wykreślimy rzut boczny  $W''' A''' B'''$  stożka, przyczem  $\sphericalangle A''' W''' B''' = \sphericalangle \varphi$ , a  $\frac{W''' S'''}{W''' A'''} = w$



Rys. 434.

stożka, przyczem  $\sphericalangle A''' W''' B''' = \sphericalangle \varphi$ , a  $\frac{W''' S'''}{W''' A'''} = w$

Koło, którego środek  $O'''$  przyjęliśmy dowolnie na  $a'''$ , styczne w punktach  $V'''$  i  $VI'''$  do prostych  $t_5'''$  i  $t_6'''$ , jest rzutem bocznym kuli wpisanej w stożek obrotowy o wierzchołku  $W$ . Wykreśliwszy rzut poziomy i pionowy tej kuli, a następnie



Rys. 435.

z punktów  $W'$  i  $W'''$  styczne  $t_1'$  i  $t_2'$ ,  $t_3'$  i  $t_4'$  do tych rzutów, otrzymamy rzuty tworzących konturowych naszego stożka. Z kolei wykreślimy rzuty  $k'$  i  $k''$ , a wreszcie wyznaczymy punkty styczności  $1'$ ,  $2'$  i  $3'$ ,  $4'$  prostych  $t_1'$ ,  $t_2'$  i  $t_3'$ ,  $t_4'$



z otrzymanymi elipsami. Punkty te otrzymamy w sposób podany w ust. 98., albo — jak na rys. 435. — w sposób następujący: Wykreślmy rzut boczny  $r'''$  równika kuli i rzuty boczne  $I''' \equiv II'''$  punktów styczności  $I$  i  $II$ . Prosta  $W''' I''' \equiv W''' II'''$  jest rzutem bocznym tworzących  $t_1$  i  $t_2$  stożka, a punkt  $I''' \equiv II'''$  przecięcia się jej z prostą  $A''' B'''$  jest rzutem bocznym punktów  $I$  i  $II$ , których rzuty poziome  $I'$  i  $II'$  szukamy. W analogiczny sposób znajdziemy punkty  $3'$  i  $4'$ . Na rzucie poziomym  $p'$ , południka  $p$  kuli, znajdziemy punkty  $III'$  i  $IV'$ , łączymy je z  $W'$ , a punkty  $3'$  i  $4'$ , w których otrzymane proste  $t_3'$  i  $t_4'$  przecinają elipsę  $k'$ , odniesiemy na elipsę  $k''$ , jako punkty  $3''$  i  $4''$ .

### 150. Punkt na powierzchni obrotowej.

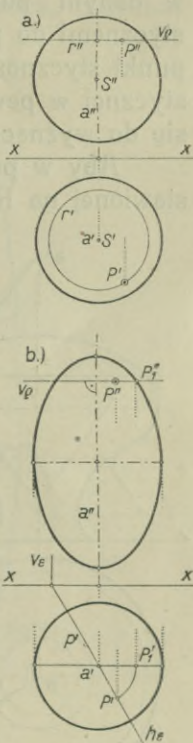
Aby obrać punkt na powierzchni obrotowej, obieramy na niej jakąś linię, a punkt na tej ostatniej przyjęty leży na powierzchni. Kilka przykładów sprawę wyjaśni.

a) Punkt  $P$  ( $P' P''$ ) na kuli (Rys. 436 a.) obraliśmy, przyjąwszy poprzednio równoleżnik  $r$  ( $r' r''$ ), leżący na płaszczyźnie poziomej  $\rho$ .

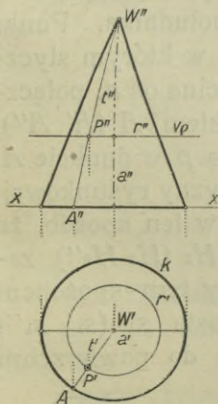
b) Na elipsoidzie obrotowej (Rys. 436 b.) obraliśmy  $P$  za pośrednictwem południka  $p$ . Wykreśliwszy rzut poziomy  $p'$  tego południka, przyjęliśmy na nim punkt  $P'$ , jako rzut poziomy szukanego punktu.

Aby uniknąć kreślenia rzutu pionowego południka, obrócimy go wraz z punktem  $P$  około osi powierzchni, aż zejdzie się z południkiem głównym. Punkt  $P$  zajmie po tym obrocie położenie  $P_1$  ( $P_1' P_1''$ ). Wróćmy następnie z południkiem na płaszczyznę  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ), to punkt  $P_1$  obróci się około osi  $a$  elipsoidy na płaszczyźnie równoleżnikowej  $\rho$ . Punkt  $P''$ , w którym prosta odnosząca punkt  $P'$  przetnie ślad  $v_\rho$ , jest rzutem pionowym punktu  $P$ .

c) Punkt na stożku obrotowym (Rys. 437.) obrać można bądź to za pośrednictwem



Rys. 436 a—b.

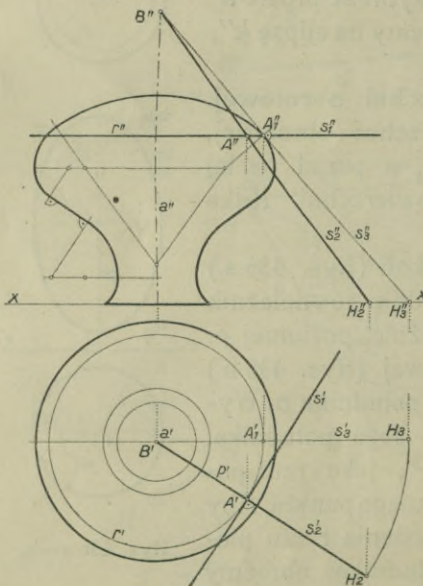


Rys. 437.

przyjętej na nim tworzącej  $t (t' t'')$ , bądź też zapomocą obraznego na nim równoleżnika  $r (r' r'')$ .

151. **Płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej w danym punkcie.** Wiemy z ust. 145., że płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni obrotowej jest wyznaczoną stycznymi do południka i równoleżnika, które przechodzą przez punkt styczności. Sprawa zatem przeprowadzenia płaszczyzny stycznej w pewnym punkcie powierzchni obrotowej sprowadza się do wyznaczenia owych dwóch stycznych.

Aby w punkcie  $A (A' A'')$  powierzchni obrotowej, przedstawionej na Rys. 438., poprowadzić płaszczyznę styczną, wykreślmy w tym punkcie styczną  $s_1 (s_1' s_1'')$  do równoleżnika  $r (r' r'')$ , a następnie styczną  $s_2 (s_2' s_2'')$  do południka  $p$ , przechodzącego przez ten punkt.



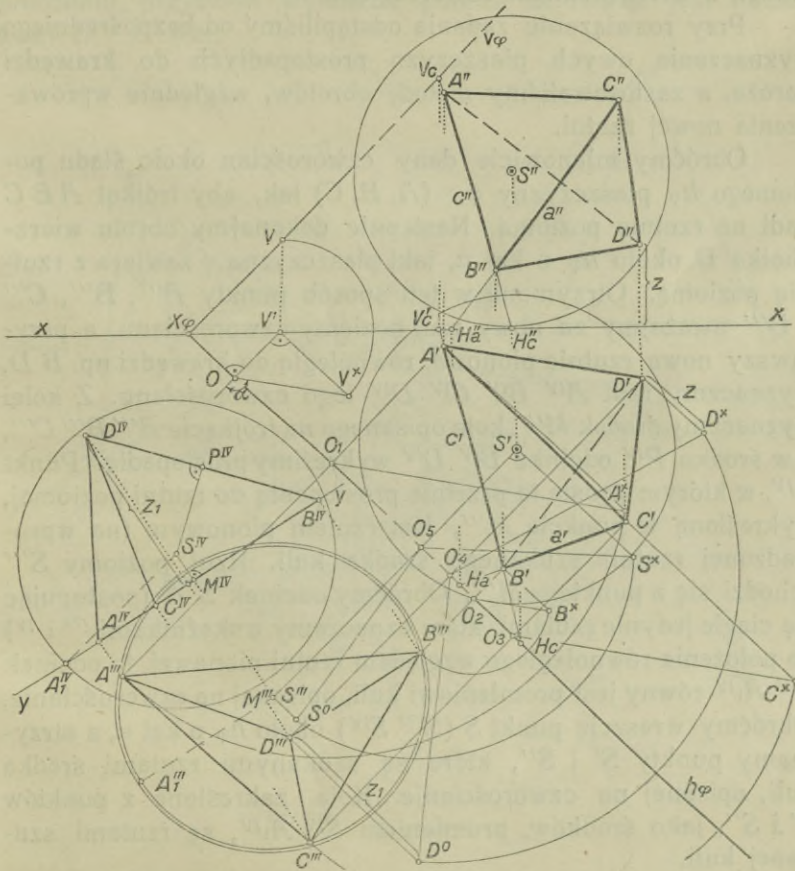
Rys. 438.

Rzut poziomy  $s_2'$  stycznej  $s_2$  schodzi się z rzutem poziomym tego południka; rzut pionowy  $s_2''$  znajdziemy w sposób następujący: Punkt  $A$  obrócimy około osi  $a (a' a'')$  na południk główny i w otrzymanym tam punkcie  $A_1 (A_1' A_1'')$  poprowadzimy styczną  $s_3 (s_3' s_3'')$  do tego południka. Punkt  $B (B' B'')$ , w którym styczna  $s_3$  przecina oś  $a$ , połączmy z punktem  $A (A' A'')$ ,

to prosta  $s_2 (s_2' s_2'')$  jest styczną do południka  $p$  w punkcie  $A$ . Gdyby punkt  $B''$  nie leżał w obrębie płaszczyzny rysunkowej, to obrotu wstecznego prostej  $s_3$  dokonamy w ten sposób, że jej ślad poziomy  $H_3$  obrócimy w położenie  $H_2 (H_2 H_2'')$ , zakreślając łuk promieniem  $a' H_3$  i otrzymany tym sposobem punkt  $H_2''$  połączmy z punktem  $A''$ . Proste  $s_1 (s_1' s_1'')$  i  $s_2 (s_2' s_2'')$  wyznaczają płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej w punkcie  $A (A' A'')$ .



Uważając punkt  $B$  ( $B'$   $B''$ ) za wierzchołek, a równoleżnik  $r$  ( $r'$   $r''$ ) za kierownicę stożka obrotowego, widzimy, że płaszczyzna styczna w punkcie  $A$  do powierzchni obrotowej, jest równocześnie płaszczyzną styczną do stożka obrotowego, opisanego na tej powierzchni wzdłuż jej równoleżnika, przechodzącego przez ten punkt.



Rys. 439.\*

## 152. Zadania.

a) Na danym czworoscianie  $ABCD$  opisać kulę (Rys. 439\*).

Sześć płaszczyzn prostopadłych w punktach środkowych sześciu krawędzi czworoscianu przecina się w jednym

punkcie, który jest równo oddalony od czterech wierzchołków tego czworościanu, a więc jest środkiem kuli opisanej na nim. Celem wyznaczenia tego środka wystarczy poprowadzić płaszczyzny prostopadłe do trzech krawędzi, schodzących się w jednym wierzchołku i wyznaczyć ich punkt przecięcia się. Promień kuli równy jest odcinkowi, łączącemu otrzymany środek z wierzchołkiem czworościanu.

Przy rozwiązaniu zadania odstąpiliśmy od bezpośredniego wyznaczenia owych płaszczyzn prostopadłych do krawędzi naroża, a zastosowaliśmy metodę obrotów, względnie wprowadzenia nowej rzutni.

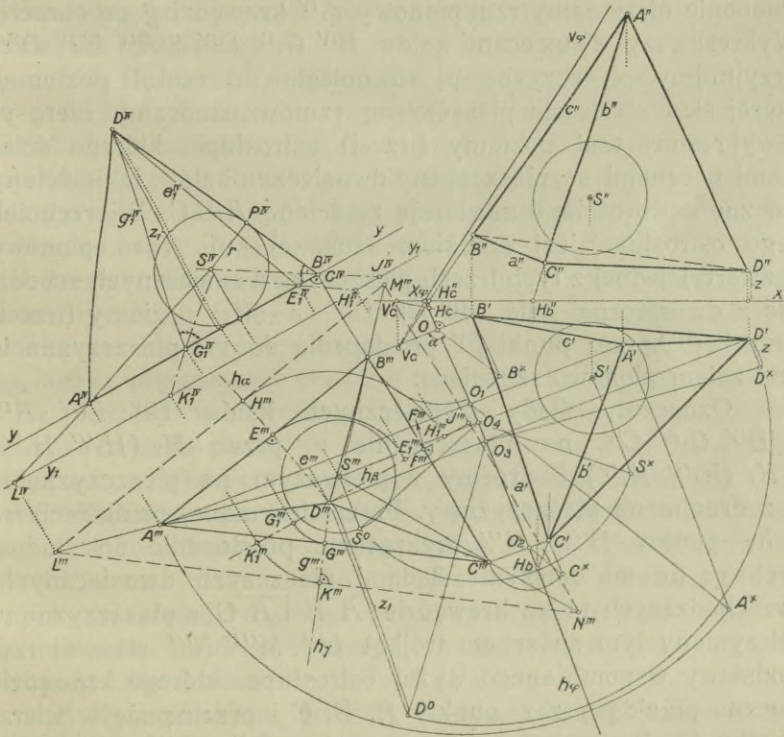
Obróćmy mianowicie dany czworościan około śladu poziomego  $h_\varphi$  płaszczyzny  $\varphi \equiv (A, B, C)$  tak, aby trójkąt  $ABC$  padł na rzutnię poziomą. Następnie dokonajmy obrotu wierzchołka  $D$  około  $h_\varphi$  o kąt  $\alpha$ , jaki płaszczyzna  $\varphi$  zawiera z rzutnią poziomą. Otrzymane w ten sposób punkty  $A'''$ ,  $B'''$ ,  $C'''$  i  $D'''$  uważajmy za nowy rzut poziomy czworościanu, a przyjmąwszy nową rzutnię pionową, równoległą do krawędzi np.  $\overline{BD}$ , wyznaczmy rzut  $A^{IV}$   $B^{IV}$   $C^{IV}$   $D^{IV}$  tego czworościanu. Z kolei wyznaczmy środek  $M'''$ , koła opisanego na trójkącie  $A'''B'''C'''$ , a w środku  $P^{IV}$  odcinka  $\overline{B^{IV}D^{IV}}$  wykreślmy prostopadłą. Punkt  $S^{IV}$ , w którym prosta ta przetnie prostopadłą do rzutni poziomej, wykreśloną w punkcie  $M'''$ , jest rzutem pionowym (na wprowadzonej rzutni) szukanego środka kuli. Rzut poziomy  $S'''$  schodzi się z punktem  $M'''$ . Obróćmy odcinek  $\overline{S'A}$  (posługując się ciągle jedynie rzutami, które oznaczamy wskaźnikami  $'''$  i  $^{IV}$ ) do położenia równoległego względem rzutni pionowej, to odcinek  $\overline{S^{IV}A^{IV}}$  równy jest promieniowi kuli, opisanej na czworościanie. Obróćmy wreszcie punkt  $S$  ( $S'''S^{IV}$ ) około  $h_\varphi$  o kąt  $\alpha$ , a otrzymamy punkty  $S'$  i  $S''$ , które są szukanymi rzutami środka kuli, opisanej na czworościanie. Koła, zakreślone z punktów  $S'$  i  $S''$ , jako środków, promieniem  $\overline{S^{IV}A^{IV}}$ , są rzutami szukaney kuli.

*b) W dany czworościan  $ABCD$  wpisać kulę (Rys. 440\*.).*

Środek kuli, wpisanej w czworościan, jest punktem przecięcia się sześciu dwusiecznych płaszczyzn, poprowadzonych przez krawędzie czworościanu. Aby zadanie możliwie uprościć pod względem konstrukcyjnym, postąpimy podobnie jak w zadaniu poprzednim, t. zn. obrócimy czworościan około śladu poziomego  $h_\varphi$  płaszczyzny  $\varphi$ , przechodzącej przez jedną ze



ścian tak, by ściana ta padła na rzutnię poziomą. Otrzymamy tym sposobem trzeci rzut  $A''' B''' C''' D'''$  czworościanu, przyczem obrót punktu  $D$  wykonać musimy o kąt, jaki płaszczyzna  $\varphi \equiv (ABC)$  zawiera z poziomem. Przyjawszy nową oś rzutów  $y - y$ , prostopadłą do jednej z krawędzi podstawy, np.  $B''' C'''$ , wyznaczmy drugi rzut czworościanu w jego nowym położeniu, przyczem wysokość punktu  $D$  równa jest odcinkowi  $\overline{D''' D^0} = z_1$ .



Rys. 440\*.

W celu wyznaczenia kątów, jakie ściany boczne tworzą z podstawą  $ABC$ , poprowadźmy przez punkt  $D$  ( $D''' D^{IV}$ ) płaszczyzny  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ , prostopadłe do krawędzi podstawowych i wyznaczmy punkty przebicia się  $E, F, G$  tych krawędzi z płaszczyznami  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ , a także krawędzie  $e, f$  i  $g$ , jakie płaszczyzny te utworzą ze ścianami bocznymi czworościanu. Kąt, jaki ściana  $BCD$  zawiera z podstawą, wyraża się

w czwartym rzucie w naturalnej wielkości i równy jest ką-  
towi  $A^{IV} B^{IV} D^{IV}$ . Płaszczyzna dwusieczna ścian  $ABC$  i  $BCD$   
jest pionowo rzucającą, a jej ślad pionowy jest dwusieczną  
kąta  $A^{IV} B^{IV} D^{IV}$ . Celem wyznaczenia dwusiecznych kątów,  
jako proste  $e$  i  $g$  zawierają ze ścianą  $ABC$  czworościanu,  
obrócmy te proste do położenia równoległego względem czwartej  
rzutni. Punkt  $E'''$  zajmie położenie  $E_1'''$ ; trzeci rzut krawędzi  $e$   
zejdzie się ze śladem  $h_\beta$ , a rzut czwarty oznaczyliśmy przez  $e_1^{IV}$ .  
Podobnie otrzymamy rzut pionowy  $g_1^{IV}$  krawędzi  $g$  po obrocie.  
Wykreśliwszy dwusieczne kątów  $B^{IV} G_1^{IV} D^{IV}$  i  $A^{IV} E_1^{IV} D^{IV}$ ,  
przyjmijmy płaszczyznę  $\mu$ , równoległą do rzutni poziomej,  
której ślad z czwartą płaszczyzną rzutów oznaczmy literą  $y_1$   
i wykreślmy rzut poziomy (trzeci) ostrosłupa, którego ścia-  
nami bocznymi są płaszczyzny dwusieczne kątów, jakie ściany  
boczne czworościanu zawierają ze ścianą  $ABC$ . Wierzchołek  
tego ostrosłupa jest środkiem szukanej kuli. Ślad pionowy  
(czwarty) jednej z tych trzech płaszczyzn dwusiecznych schodzi  
się z dwusieczną kąta  $A^{IV} B^{IV} D^{IV}$ , a ślad poziomy (trzeci)  
przechodzi przez punkt  $J^{IV}$  prostopadłe do  $y_1$ ; płaszczyzna ta  
jest zatem pionowo rzucającą.

Oznaczmy ślady dwusiecznych kątów  $D^{IV} E_1^{IV} A^{IV}$   
i  $D^{IV} G_1^{IV} C^{IV}$  na płaszczyźnie  $\mu$  przez  $H$  ( $H_1''' H_1^{IV}$ )  
i  $K_1$  ( $K_1''' K_1^{IV}$ ) i wróćmy z pierwszym na płaszczyznę  $\alpha$ ,  
a z drugim na płaszczyznę  $\gamma$ . Przez otrzymane, na śladach  $h_\alpha$   
i  $h_\gamma$ , punkty  $H'''$  i  $K'''$  wykreślone prostopadłe do śladów  
tych, są dwoma dalszymi śladami płaszczyzn dwusiecznych,  
przechodzących przez krawędzie  $AB$  i  $AC$  z płaszczyzną  $\mu$ .  
Otrzymany tym sposobem trójkąt  $L''' M''' N'''$  stanowi rzut  
podstawy wspomnianego wyżej ostrosłupa, którego krawędzie  
boczne przejdą przez punkty  $A, B, C$  i przetną się w wierz-  
chołku  $S$ . Przez połączenie punktów  $A'''$  i  $L'''$ ,  $B'''$  i  $M'''$ ,  
 $C'''$  i  $N'''$  otrzymaliśmy punkt  $S'''$ , a przecięcie się prostej  
 $A^{IV} L^{IV}$  z prostą  $B^{IV} J^{IV}$  jest punktem  $S^{IV}$ . Obróćmy punkt  
 $S$  ( $S''' S^{IV}$ ) około śladu  $h_\varphi$  w przestrzeń o kąt, jaki płasz-  
czyzna  $\varphi$  zawiera z poziomem, otrzymamy rzuty  $S'$  i  $S''$   
środku kuli wpisanej w dany czworościan, a koła zakreślone  
z punktów  $S^{IV}$ ,  $S'''$ ,  $S''$  i  $S'$ , promieniem równym odcinkowi  
 $S^{IV} P^{IV} \perp C^{IV} D^{IV}$ , są rzutami tej kuli.

W ogólności istnieje osiem kul stycznych do czterech  
danych płaszczyzn. I tak: jedna kula t. zw. wpisana, jest



styczną do ścian czworościanu, utworzonego przez owe cztery płaszczyzny; cztery kule są t. zw. z a w p i s a n e, t. j. styczne do jednej ściany czworościanu i do przedłużeń trzech ścian pozostałych, a wreszcie trzy kule styczne, znajdujące się w s z c z y t a c h. Szczytem nazywamy przestrzeń ograniczoną przedłużeniami czterech ścian nad jedną krawędzią, którą zwiemy grzbietem szczytu. Szczytów takich jest sześć, t. j. tyle, ile krawędzi posiada czworościan; jednak istnieje tylko jedna kula styczna do szczytów dwóch przeciwnych krawędzi (grzbietów).

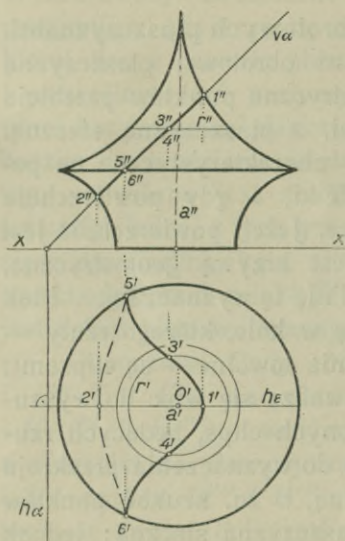
### 153. Przekroje powierzchni obrotowych płaszczyznami.

1. Linię przekroju powierzchni obrotowej płaszczyzną określić można jako miejsce geometryczne punktów przebicia się linii, przyjętych na powierzchni, z płaszczyzną sieczną. Z reguły bierzemy pod uwagę linie charakterystyczne na powierzchni, więc równoleżniki, południki, a gdy powierzchnia jest prostokreślną jej proste tworzące. Jeżeli powierzchnia jest geometryczną, to linia przekroju jest krzywą geometryczną, a wówczas wyszukujemy elementy, linię tę wyznaczające. I tak np. każda płaszczyzna przecina kulę w kole, którego rzuty — o ile płaszczyzna sieczna ma położenie dowolne — są elipsami; wyznaczenie przekroju kuli sprowadza się więc do wyszukania osi, względnie średnic sprzężonych elips, będących rzutami koła przekroju. Oczywiście, że do wyznaczenia przekroju kuli zastosować można metodę ogólną, t. zn. szukać punktów przebicia np. równoleżników z płaszczyzną sieczną; jednak użycie tej metody byłoby w tym przypadku pod względem rysunkowym nieekonomiczne, a z punktu widzenia geometrycznego niewłaściwe i nie dość ściśle.

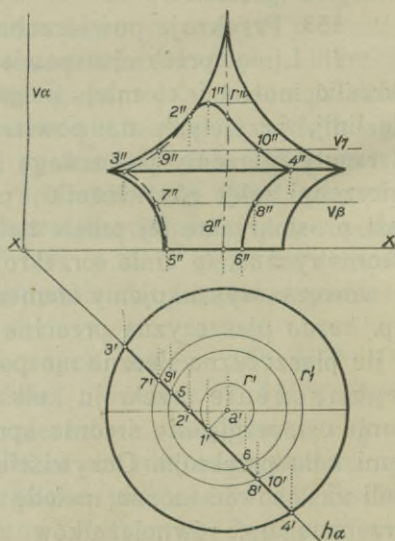
2. Rysunkowo najprościej przedstawia się wyznaczenie przekroju powierzchni obrotowej płaszczyzną rzucającą. Niechaj zadaniem naszym jest wyznaczenie przekroju powierzchni obrotowej (Rys. 441.) płaszczyzną pionowo rzucającą  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ). Rzut pionowy linii przekroju schodzi się ze śladem pionowym  $v_\alpha$  płaszczyzny siecznej. Południk główny przebija płaszczyznę  $\alpha$  w punktach 1 ( $1' 1''$ ) i 2 ( $2' 2''$ ). Krawędź płaszczyzny  $\alpha$  z płaszczyzną równoleżnika  $r$  ( $r' r''$ ) przecina ten ostatni w punktach 3 ( $3' 3''$ ) i 4 ( $4' 4''$ ), które są punktami szukanej linii przekroju. W podobny sposób, przez przyjęcie dalszych równoleżników, wyznaczymy żadaną ilość

punktów linii przekroju. Na Rys. 441. oznaczyliśmy jeszcze punkty 5 ( $5' 5''$ ) i 6 ( $6' 6''$ ), w których równik przebija płaszczyznę  $\alpha$ .

Punkty linii przekroju są symetrycznie położone względem płaszczyzny  $\varepsilon$ , przechodzącej przez oś prostopadle do płaszczyzny siecznej, czyli w naszym przypadku do płaszczyzny południka głównego. Ślad poziomy  $h_\varepsilon$  tej płaszczyzny jest osią symetrii prostokątnej rzutu poziomego krzywej przekroju.



Rys. 441.



Rys. 442.

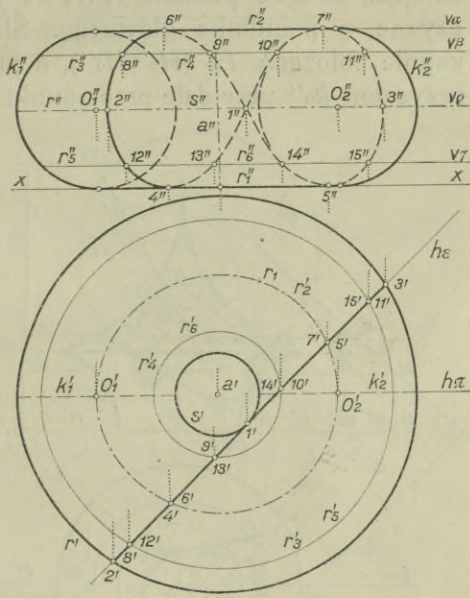
3. Rys. 442. przedstawia przekrój tej samej powierzchni obrotowej płaszczyzną poziomo rzucającą. Wyznaczenie linii przekroju rozpoczęliśmy od wynalezienia jej punktu „najwyższego“ 1 ( $1' 1''$ ), który leży na równoleżniku  $r$  ( $r' r''$ ), stycznym do płaszczyzny siecznej  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ). Z kolei wyznaczyliśmy punkt 2 ( $2' 2''$ ), leżący na południku głównym, którego rzut poziomy  $2'$  jest znany. Następną parę punktów linii przekroju znaleźliśmy na równiku, a dalsze na równoleżnikach.

4. Powierzchnia obrotowa, której rzuty Monge'a podane są na Rys. 443., nosi nazwę powierzchni pierścieniowej. Powstanie ona w ten sposób, że koło, którego płaszczyzna



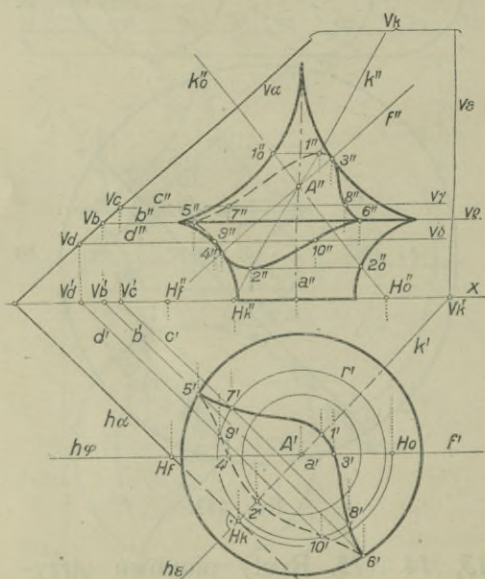
przechodzi przez pionową prostą  $a$  ( $a'$   $a''$ ), obróci się około tej prostej. Południk główny powierzchni pierścieniowej składa się z kół  $k_1$  ( $k_1'$   $k_1''$ ) i  $k_2$  ( $k_2'$   $k_2''$ ), a równik z kół współśrodkowych  $r$  ( $r'$   $r''$ ) i  $s$  ( $s'$   $s''$ ). Poziomo rzucającą płaszczyznę sieczną  $\varepsilon$  przyjęliśmy tak, że w punkcie  $1$  ( $1'$   $1''$ ) jest ona styczną do powierzchni. Wyznaczenie poszczególnych punktów linii przekroju widoczne jest bezpośrednio z rysunku. Punkty  $2$  ( $2'$   $2''$ ) i  $3$  ( $3'$   $3''$ ) leżą na równiku; punkty  $4$  ( $4'$   $4''$ ),  $5$  ( $5'$   $5''$ ),  $6$  ( $6'$   $6''$ ) i  $7$  ( $7'$   $7''$ ) na równoleżniku  $r_1$  ( $r_1'$   $r_1''$ ) względnie  $r_2$  ( $r_2'$   $r_2''$ ). Płaszczyzna pozioma  $\beta$  przecina powierzchnię wzdłuż kół równoleżnikowych  $r_3$  ( $r_3'$   $r_3''$ ) i  $r_4$  ( $r_4'$   $r_4''$ ), na których leżą punkty  $8, 9, 10$  i  $11$  linii przenikania. Na równoleżnikach  $r_5$  i  $r_6$  wyznaczyliśmy punkty  $12, 13, 14$  i  $15$ . Rzuty pionowe otrzymanych punktów, połączone linią ciągłą, dają rzut pionowy krzywej, wzdłuż której płaszczyzna  $\varepsilon$ , styczna w punkcie  $1$  do powierzchni pierścieniowej, powierzchnię tę przecina.

5. Przykład przekroju powierzchni obrotowej, płaszczyzną dowolnie nachyloną do obu rzutni, podaje Rys. 444. Przewszystkiem znaleźliśmy punkt „najwyższy“  $1$  ( $1'$   $1''$ ) i „najniższy“  $2$  ( $2'$   $2''$ ) linii przekroju. Miano punktu najwyższego nadajemy temu punktowi krzywej przekroju, którego wysokość jest największa; punktem najniższym nazywamy punkt linii przekroju, którego wysokość jest najmniejsza. Oba te punkty leżą na krawędzi  $k$  ( $k'$   $k''$ ) płaszczyzny siecznej  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ) i płaszczyzny  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon$   $v_\varepsilon$ ), przechodzącej przez oś  $a$  powierzchni prostopadle do pierwszej. Krawędź ta jest osią symetrii prostokątnej dla linii przekroju. Jej rzut poziomy  $k' \equiv h_\varepsilon$  jest



Rys. 443.

osią symetrii prostokątnej rzutu poziomego linii przekroju, a rzut pionowy  $k''$  osią symetrii ukośnej, o kierunku równoległym do osi  $x$ , rzutu pionowego krzywej przekroju. Celem wyznaczenia punktów 1 i 2, obróćmy krawędź  $k$  ( $k' k''$ ), przecinającą oś  $a$  w punkcie  $A$  ( $A' A''$ ), około tej osi na płaszczyznę  $\varphi$  południka głównego. Ślad poziomy  $H_k$  prostej  $k$  zajmie położenie  $H_0$  ( $H_0' H_0''$ ), a prosta położenie  $k_0$  ( $h_\varphi k_0''$ ), przyczem  $k_0''$  przejdzie przez punkt  $A''$ . Prosta  $k_0$  przecina południk główny w punktach  $1_0$  i  $2_0$ , które obrotem wstecznym przeniesiemy na krawędź  $k$ , otrzymując punkty 1 ( $1' 1''$ ) i 2 ( $2' 2''$ ). Ponieważ osią tego obrotu jest oś  $a$  powierzchni, więc punkty  $1_0''$  i  $1''$ , a także  $2_0''$  i  $2''$  leżeć muszą na prostopadłej do tej osi.



Rys. 444.

Z kolei wyznaczyliśmy punkty 3 ( $3' 3''$ ) i 4 ( $4' 4''$ ) linii przekroju, leżące na południku głównym, a więc także na krawędzi  $f$  ( $f' f''$ ) płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varphi$ . Punkty  $3''$  i  $4''$  są punktami styczności rzutu pionowego linii przekroju z zarysem powierzchni na rzutni pionowej i stanowią zarazem granicę części widocznej i niewidocznej tego zarysu. Dalsze punkty linii przekroju znajdziemy jak w dwóch pierwszych przykładach, jako punkty przecięcia się przyjętych na powierzchni równoleżników z płaszczyzną sieczną. Płaszczyzna  $\rho$  równika przecina płaszczyznę  $\alpha$  w prostej  $b$  ( $b' b''$ ), która wyznacza na równiku powierzchni punkty 5 ( $5' 5''$ ) i 6 ( $6' 6''$ ) krzywej przekroju. Punkty te leżą na granicy części widocznej i niewidocznej rzutu poziomego krzywej przekroju.

Przy wyznaczaniu przekrojów wielościanów płaszczyznami dowolnie położonymi zauważyliśmy, że przez przyjęcie trzeciej

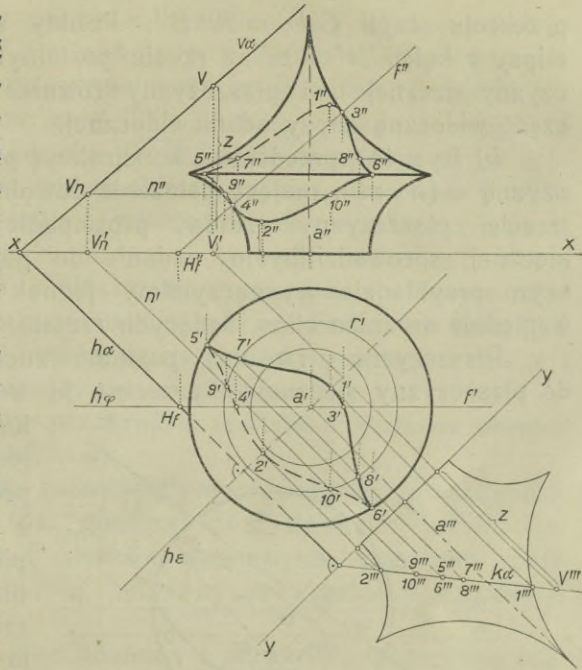


rzutni dało się zadanie sprowadzić zawsze do przypadku, gdzie płaszczyzna sieczna jest rzucającą, a więc znacznie uprościć. Tę samą metodę zastosować można i do powierzchni obrotowych, a przykładem tego jest Rys. 445.

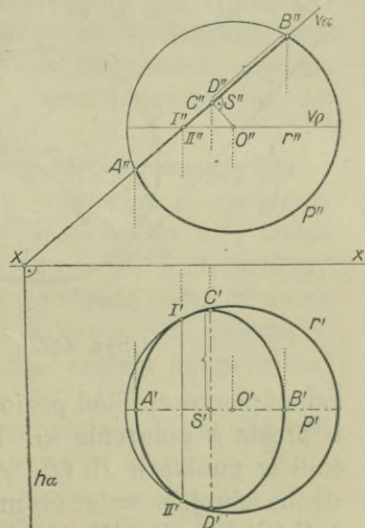
Przyjąwszy trzecią pł. rzutów, poziomą rzucającą i prostopadłą do pł. siecznej  $\alpha$ , wykreśliśmy trzeci rzut powierzchni i ślad  $k_\alpha$  pł. siecznej.

Przeniesienia punktów krzywej przekroju na rzut pionowy można zapomocą równoleżników, tworzących płaszczyznę  $\alpha$ , albo też wprost uwzględniając wysokości poszczególnych punktów, znane w trzecim rzucie.

**154. Przekroje kuli.** a) Każdy przekrój kuli jest kołem. Jeżeli, jak w rys. 446., płaszczyzna sieczna jest pionowo rzucającą, to rzut pionowy koła przekroju leży na śladzie pionowym płaszczyzny siecznej, a rzut poziomy jest elipsą. Osiami tej elipsy są odcinki  $\overline{A'B'}$  i  $\overline{C'D'}$ , przyczem ta ostatnia, jako prostopadła do rzutni pionowej, równa jest średnicy koła



Rys. 445.



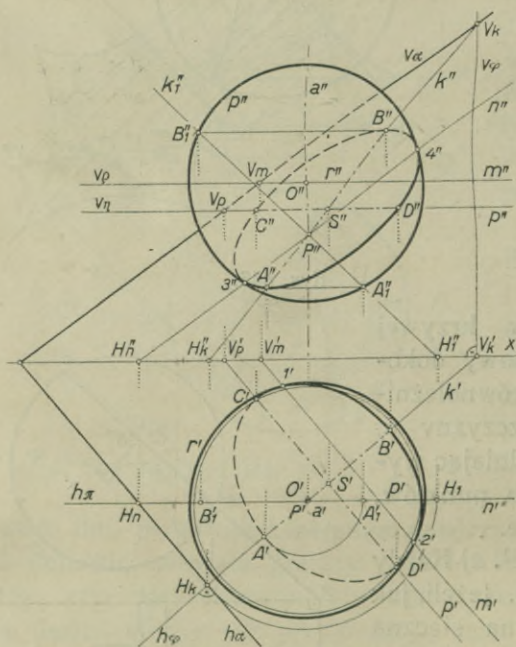
Rys. 446.

przekroju, czyli  $\overline{C'D'} = \overline{A''B''}$ . Punkty styczności  $I'$  i  $II'$  elipsy z kołem  $r'$  leżą na rzucie poziomym krawędzi płaszczyzny siecznej  $\alpha$  i płaszczyzny równika  $\rho$  i odgraniczają część widoczną elipsy od niewidocznej.

b) Rys. 447. przedstawia konstrukcję przekroju kuli płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), mającą położenie dowolne. Przez przyjęcie trzeciej płaszczyzny rzutów, prostopadłej do płaszczyzny siecznej, sprowadzilibyśmy zadanie do poprzedniego. W naszym przykładzie wyznaczyliśmy jednak bezpośrednio osi, względnie średnice elips, będących rzutami koła przekroju.

Płaszczyzna  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ), poziomo rzucająca i prostopadła do płaszczyzny siecznej  $\alpha$ , przecina ją w prostej  $k$  ( $k' k''$ ),

której rzut poziomy  $k'$  jest osią symetrii prostokątnej elipsy, a więc jej osią. Rzut pionowy  $k''$  jest średnicą elipsy, będącej rzutem pionowym koła przekroju. Punkty  $A(A'A'')$  i  $B(B'B'')$ , ograniczające oś w rzucie poziomym (wierzchołki), a średnicę elipsy w rzucie pionowym, znajdziemy jako punkty przecięcia się prostej  $k$  ( $k' k''$ ) z kulą, a to w sposób następujący: Obróćmy prostą  $k$  około osi  $a$  kuli do położenia równoległego względem



Rys. 447.

rzutni pionowej. Ślad poziomy  $H_k$  zajmie położenie  $H_1$  ( $H_1 H_1''$ ), a prosta  $k$  położenie  $k_1$ . Prosta  $k_1$  przecina południk główny kuli w punktach  $A_1$  ( $A_1' A_1''$ ) i  $B_1$  ( $B_1' B_1''$ ), które, sprowadzone obrotem wstecznym na prostą  $k$ , dają punkty  $A$  ( $A' A''$ ) i  $B$  ( $B' B''$ ). Środek  $S$  odcinka  $\overline{AB}$  jest środkiem koła przekroju, a jego rzuty  $S'$  i  $S''$  środkami elips. Płaszczyzna  $\eta$ ,



przechodząca przez punkt  $S$ , przecina kulę w równoleżniku, a płaszczyznę  $\alpha$  w prostej  $p$  ( $p' p''$ ). Punkty  $C$  i  $D$ , w których prosta ta przecina ów równoleżnik, są punktami przebicia się prostej  $p$  z kulą. Odcinek  $\overline{C' D'}$  stanowi wielką oś elipsy na rzutni poziomej, a odcinek  $\overline{C'' D''}$  średnicę sprzężoną ze średnicą  $\overline{A'' B''}$ . W ten sposób obie elipsy są wyznaczone. Punkty styczności  $1'$  i  $2'$  rzutu poziomego koła przekroju z rzutem równika leżą na rzucie poziomym krawędzi  $m$  ( $m' m''$ ) płaszczyzny siecznej  $\alpha$  i płaszczyzny równika  $\rho$ . Punkty styczności  $3'$  i  $4'$  rzutu pionowego koła przekroju z zarysem kuli na rzutni pionowej, leżą na rzucie pionowym krawędzi  $n$  ( $n' n''$ ) płaszczyzny  $\alpha$  i płaszczyzny południka  $\pi$ .

### 155. Przykłady przekrojów walców i stożków obrotowych płaszczyznami.

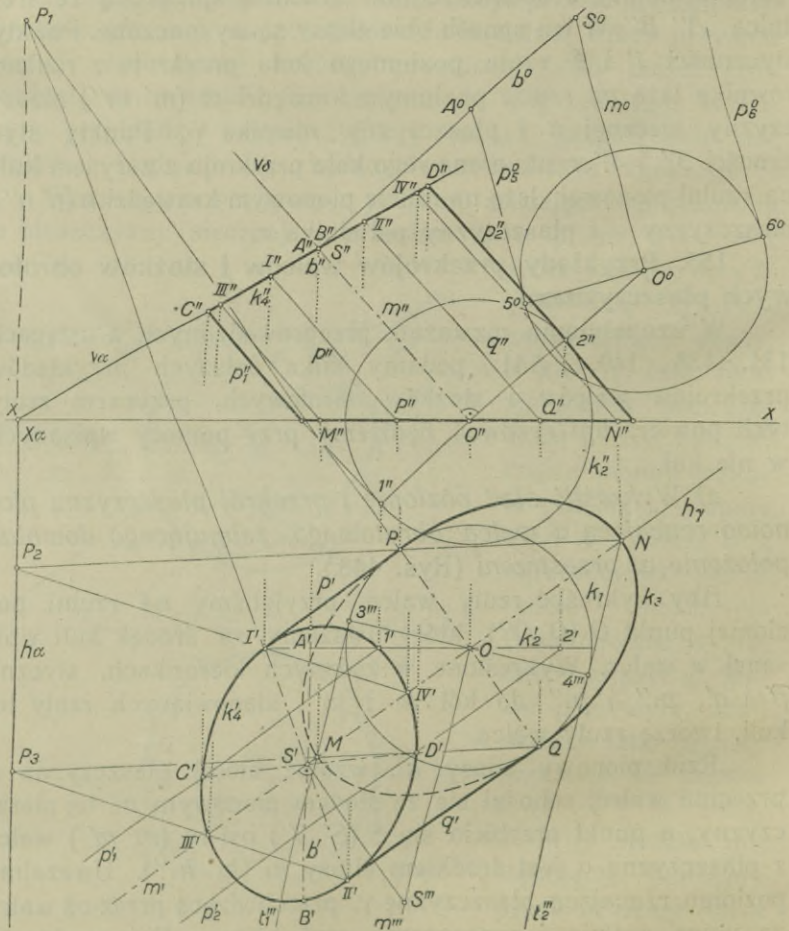
W uzupełnieniu rozważań, przeprowadzonych w ustępach 131., 138., 140. i 141., podamy kilka dalszych przykładów przekrojów walców i stożków obrotowych, przy czym rzuty tych powierzchni rysować będziemy przy pomocy wpisanych w nie kul.

a) Wykreślić ślad poziomy i przekrój płaszczyzną pionowo rzucającą  $\alpha$  walca obrotowego, zajmującego dowolne położenie w przestrzeni (Rys. 448.).

Aby wykreślić rzuty walca, przyjęliśmy na rzutni poziomej punkt  $O$  ( $O O''$ ), który uważamy za środek kuli wpisanej w walec. Wykreślone w żądanych kierunkach, styczne  $p'$  i  $q'$ ,  $p_1''$  i  $p_2''$  do kół  $k_1$  i  $k_2''$ , stanowiących rzuty tej kuli, tworzą rzuty walca.

Rzut pionowy elipsy  $k_4$ , wzdłuż której płaszczyzna  $\alpha$  przecina walec, schodzi się ze śladem pionowym  $v_\alpha$  tej płaszczyzny, a punkt przebicia się  $S$  ( $S' S''$ ) osi  $m$  ( $m' m''$ ) walca z płaszczyzną  $\alpha$  jest środkiem elipsy  $k_4$  ( $k_4' k_4''$ ). Uważajmy poziomo rzucającą płaszczyznę  $\gamma$ , przechodzącą przez oś walca za nową rzutnię i wyznaczmy rzut boczny  $S'''$  punktu  $S$ . Prosta  $m'''$ , łącząca punkt  $O$  z  $S'''$ , jest rzutem bocznym osi walca na płaszczyznę  $\gamma$ , a styczne  $t_1'''$  i  $t_2'''$  do koła  $k_1$  i równoległe do  $m'''$  stanowią trzeci rzut walca. Punkty  $M$  i  $N$ , w których proste  $t_1'''$  i  $t_2'''$  przecinają prostą  $m' \equiv h_\gamma$ , ograniczają oś elipsy  $k_3$ , będącej śladem poziomym walca. Punkt  $O$  jest środkiem tej elipsy, a odcinek  $\overline{PQ} \perp \overline{MN}$  jej drugą osią. Ponieważ między dwoma przekrojami walca zachodzi powinno-

wactwo środkowe, którego osią jest krawędź obu płaszczyzn siecznych, więc łącząc punkt  $P_1$ , w którym przedłużenie osi  $\overline{PQ}$  przecina oś powinowactwa  $h_\alpha$ , z punktem  $S'$  — otrzymamy średnicę  $\overline{I'II'}$  elipsy  $k_4'$ . Prostej  $NP P_2$  odpowiada



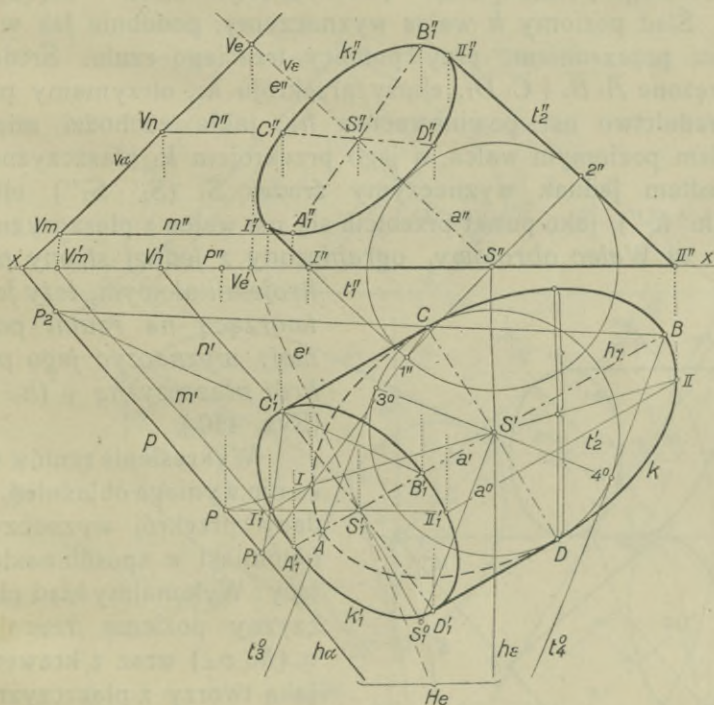
Rys. 448.

w układzie elipsy  $k_4'$  prosta  $P_2 I' IV'$ , prostej zaś  $Q M P_3$ , prosta  $P_3 II' III'$ . Odcinek  $\overline{III' IV'}$  stanowi średnicę elipsy  $k_4'$  sprzężoną ze średnicą  $\overline{I' II'}$ . W ten sposób zadanie jest rozwiązane. Jeżeli oś powinowactwa  $h_\alpha$  nie leży w obrębie rysunku, to wówczas nie opierając się na związkach powinowactwa, które są w tym przypadku nieważne, można



wactwa, otrzymamy punkty  $I'$ ,  $II'$ ,  $III'$  i  $IV'$  wprost z rzutu pionowego, przenosząc je na rzut poziomy odpowiednich tworzących.

Aby wyznaczyć rzut poziomy  $k_4'$  przekroju walca płaszczyną  $\alpha \perp \pi_2$ , nie posługując się jego śladem poziomym  $k_3$ , postąpimy w sposób następujący: Prosta  $b$  ( $b'$   $b''$ ), przechodząca przez punkt  $S$  ( $S'$   $S''$ ) prostopadłe do rzutni pionowej,



Rys. 449.

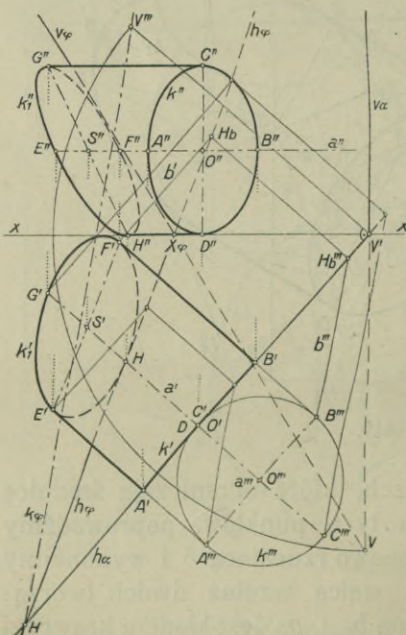
przebiega walec w dwóch punktach, które ograniczają średnicę elipsy  $k_4$ . W celu wyznaczenia tych punktów, poprowadźmy przez oś walca płaszczyznę pionowo rzucającą  $\delta$  i wykonajmy około śladu  $v_8$  kład, przekroju walca wzdłuż dwóch tworzących, na rzutnię pionową. Prosta  $b_0 \perp v_8$  jest kładem krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\delta$ , a odcinek  $\overline{A^0 B^0}$  długością średnicy elipsy  $k_4$ . Odmierzmy  $\overline{S' A'} = \overline{S' B'} = \overline{S^0 A^0} = \overline{S^0 B^0}$  i przystąpmy do wyznaczenia średnicy sprzężonej z otrzymaną. Jej rzut pionowy  $\overline{C'' D''}$  jest znany. Znalazłszy rzuty poziome  $1'$  i  $2'$  punktów

1 i 2, których rzutami pionowymi są punkty  $1''$  i  $2''$ , wykreślmy proste  $p_1'$  i  $p_2'$ , równoległe do  $m'$ , na których leżą szukane punkty  $C'$  i  $D'$ . Punkty styczności  $I'$  i  $II'$  prostych  $p'$  i  $q'$  z elipsą  $k'_4$  znajdziemy, wykreśliwszy poprzednio proste  $p''$  i  $q''$  i odniósłszy otrzymane na nich punkty  $I''$  i  $II''$  na rzutnię poziomą.

b) Wykreślić ślad poziomy i rzuty przekroju walca obrotowego płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), (Rys. 449).

Ślad poziomy  $k$  walca wyznaczmy, podobnie jak w zadaniu poprzednim, przy pomocy trzeciego rzutu. Średnice sprzężone  $\overline{A_1 B_1}$  i  $\overline{C_1 D_1}$ , elipsy przekroju  $k_1$ , otrzymamy przez pośrednictwo osi powinowactwa  $h_\alpha$ , jakie zachodzi między śladem poziomym walca, a jego przekrojem  $k_1$  płaszczyzną  $\alpha$ . Przedtem jednak wyznaczmy środek  $S_1$  ( $S_1' S_1''$ ) elipsy  $k_1$  ( $k_1' k_1''$ ), jako punkt przecięcia się osi walca z płaszczyzną  $\alpha$ .

c) Walec obrotowy, ograniczony z jednej strony przekrojem kołowym, leży jedną tworzącą na rzutni poziomej; wyznaczyć jego przekrój płaszczyzną  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ), (Rys. 450).



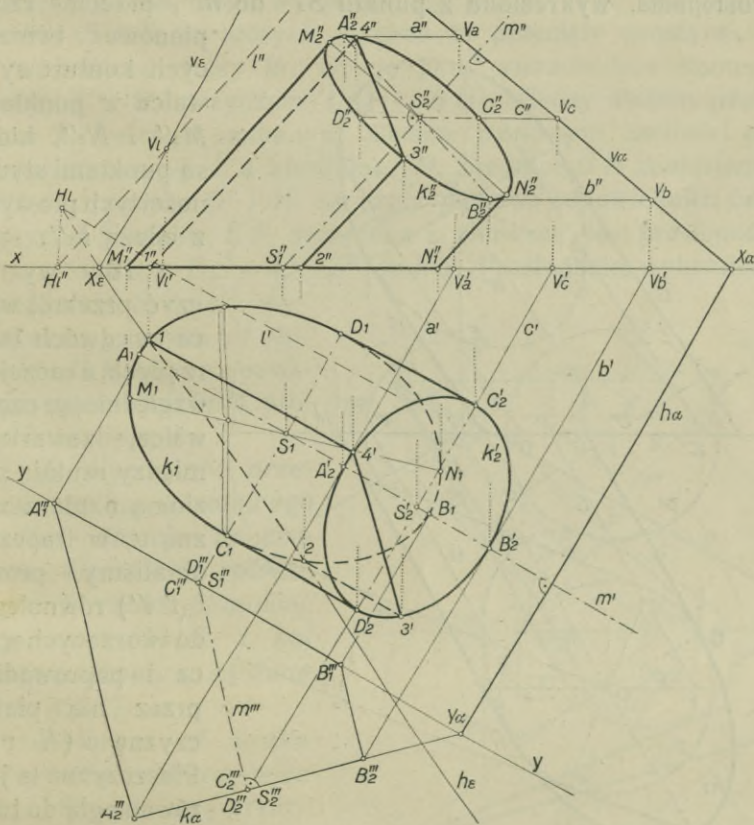
Rys. 450.

Wykreślenie rzutów walca nie wymaga objaśnień. Żądany przekrój wyznaczmy natomiast w sposób następujący: Wykonajmy kład płaszczyzny poziomo rzucającej  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) wraz z krawędzią, jaką tworzy z płaszczyzną  $\varphi$ , i kołem  $k$  na rzutnię poziomą. Uważając ślad  $h_\alpha$  za nową oś rzutów, sprowadziliśmy zadanie do rozpatrzonego w ust. 131. a). Kład  $k_\varphi$  krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varphi$  jest nowym (trzecim) śladem płaszczyzny siecznej. Trzeci rzut krzywej przekroju  $k_1$

schodzi się z kołem  $k'''$ , a średnice sprzężone  $\overline{A''' B'''}$  i  $\overline{C''' D'''}$  są równocześnie trzecim rzutem pary średnic sprzężonych



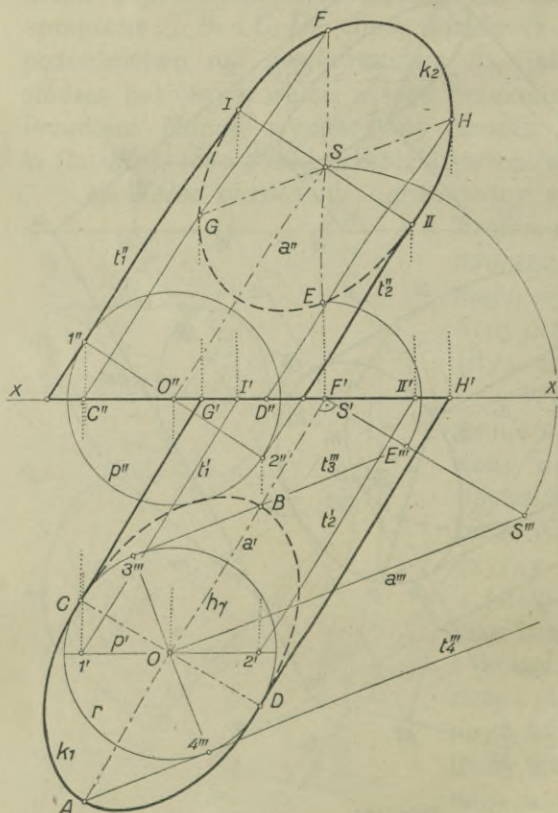
elipsy  $k_1$ . Przy pomocy prostych równoległych do płaszczyzny  $\alpha$ , których rzuty boczne przechodzą przez punkty  $A'''$ ,  $B'''$  i  $C'''$  równoległe do  $k_\varphi$ , otrzymamy punkty  $E'$ ,  $F'$  i  $G'$ . Punkt  $H$ , t. j. czwarty szukany punkt, leżący na rzutni poziomej, jest punktem przecięcia się śladu  $h_\alpha$  z  $a'$ . Wyznaczenie średnic sprzężonych  $\overline{E'F'}$  i  $\overline{G'H'}$  polega na odniesieniu punktów  $E'$ ,  $F'$ ,  $G'$  i  $H$  na rzuty pionowe odpowiednich tworzących.



Rys. 451.

d) Wykreślić rzuty walca obrotowego, którego oś  $m$  ( $m'$   $m''$ ) jest daną, wyznaczyć jego przekrój wzdłuż koła, ślad poziomy i przekrój wzdłuż dwóch tworzących, (Rys. 451.).

Przyjąwszy nową płaszczyznę rzutów równoległą do osi  $m$ , wykreślmy trzeci rzut walca, a także ślady  $k_\alpha$ ,  $h_\alpha$ ,  $v_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , prostopadłej do osi i tnącej walec wzdłuż koła  $k_2$ . Przy pomocy trzeciego rzutu wyznaczmy osi  $\overline{A_1 B_1}$  i  $\overline{C_1 D_1}$  elipsy  $k_1$ , jako śladu poziomego walca, a także osi  $\overline{A_2' B_2'}$  i  $\overline{C_2' D_2'}$  elipsy  $k_2'$ , będącej rzutem poziomym koła  $k_2$ . Średnice sprzężone  $\overline{A_2'' B_2''}$  i  $\overline{C_2'' D_2''}$  elipsy  $k_2''$  otrzymamy przy pomocy prostych poziomo tworzących płaszczyzny siecznej  $\alpha$ . Prostopadła, wykreślona z punktu  $S_2''$  do  $m''$ , przecina rzuty



Rys. 452.

pięć punktów 1 i 2, a walec w tworzących, przechodzących przez te punkty. Odcinek, łączący punkty 3 ( $3' 3''$ ) i 4 ( $4' 4''$ ), tworzy czwarty bok  $3'' 4''$  szukanego trapezu.

prostopadła tworzących konturowych walca w punktach  $M_2''$  i  $N_2''$ , które są punktami styczności tych prostych z elipsą  $k_2''$ .

Aby wyznaczyć przekrój walca w dwóch tworzących, a raczej uwzględniając część walca, zawartego między rzutnią poziomą a płaszczyzną  $\alpha$ , w trapezie, obraliśmy prostą  $l$  ( $l' l''$ ) równoległą do tworzących walca i poprowadziliśmy przez nią płaszczyznę  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ). Płaszczyzna ta jest równoległą do tworzących walca i przecina jego ślad

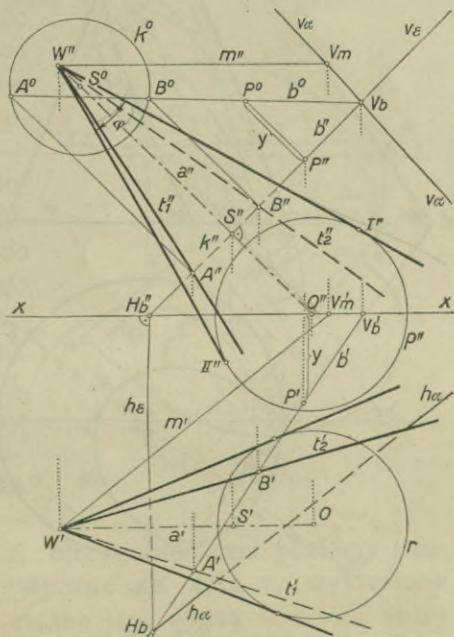


e) Wyznaczyć ślad poziomy i pionowy walca obrotowego, którego oś  $a$  ( $a'$   $a''$ ) jest dowolnie nachylona do obu rzutni (Rys. 452.).

Rzuty walca wyznaczyliśmy przy pomocy kuli o środku  $O$ , przyjętym na rzutni poziomej. Wyznaczywszy ślad pionowy  $S$  osi walca, przyjęliśmy poziomo rzucającą płaszczyznę  $\gamma$ , przechodzącą przez tę oś za nową (trzecią) rzutnię i wyznaczyli trzeci rzut walca. W tym celu wykonaliśmy kład  $a'''$  osi  $a$  i równoległe do niego wykreślili styczne  $t_3'''$  i  $t_4'''$  do koła  $r$ . Punkty  $A$  i  $B$ , w których styczne te przecięły prostą  $a'$ , są wierzchołkami elipsy  $k_1$ . Drugą parę wierzchołków stanowią punkty  $C$  i  $D$ , przy czym  $CD \perp AB$ . Między śladem poziomym  $k_1$  walca, a szukanym śladem pionowym zachodzi powinowactwo o osi  $x$ , a kierunku  $SO$ . Średnicę  $\overline{GH}$  znajdziemy, odnosząc punkty  $G'$  i  $H'$  na rzuty pionowe odpowiednich tworzących. Średnica  $\overline{EF}$ , sprzężona z pierwszą, jest prostopadłą do  $x$ , przy czym  $\overline{ES} = \overline{E''S''} = \overline{FS}$ . Prostopadła, wykreślona przez punkt  $S$  do  $a''$ , wyznacza na prostych  $t_1''$  i  $t_2''$  punkty  $I$  i  $II$ , które są punktami styczności tych prostych z elipsą  $k_2$ .

f) Wyznaczyć przekrój stożka obrotowego wzdłuż dwóch tworzących. Oś stożka, równoległa do rzutni pionowej, jego wierzchołek i kąt wierzchołkowy  $\varphi$  są dane (Rys. 453.\*).

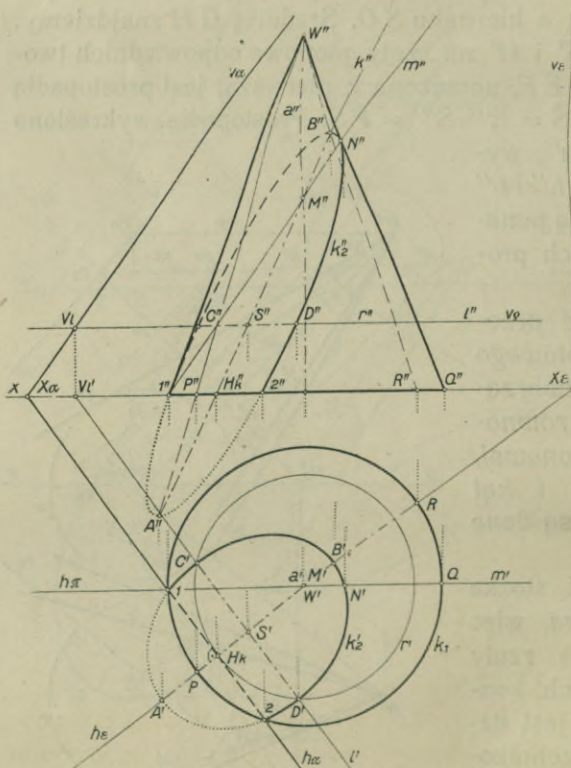
Ponieważ oś stożka jest prostą czołową, więc kąt, jaki utworzą rzuty pionowe tworzących konturowych, równy jest danemu kątowi wierzchołkowemu  $\varphi$ . Uważajmy ślad poziomy  $O$  osi  $a$  stożka za środek kuli wpisanej w stożek, to koło  $r$ , zakreślone ze środka  $O$  promieniem  $\overline{O''I''}$ ,



Rys. 453.\*

jest rzutem poziomym tej kuli, a styczne, wykreślone z punktu  $W'$  do  $r$ , stanowią zarys stożka na rzutni poziomej.

Następnie przez wierzchołek stożka poprowadziliśmy prostą poziomą  $m$  ( $m' m''$ ), a przez nią płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ). Z kolei przecięliśmy stożek płaszczyzną  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ), prostopadłą do jego osi i wykonali kład tej płaszczyzny na rzutnię pionową wraz z uzyskanym przekrojem kołowym i krawędzią  $b$  ( $b' b''$ ) płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varepsilon$ . Prosta  $b_0$  przecięła koło  $k^0$  w punktach  $A^0$  i  $B^0$ , które rzucone prostopadłe na prostą  $b''$ , dają punkty  $A''$  i  $B''$ . Odnieśmy te punkty na prostą  $b'$ , a otrzymane tam punkty  $A'$  i  $B'$  połączmy z  $W'$ , to proste  $t_1'$  i  $t_2'$  są rzutami poziomymi tworzących, wzdłuż których płaszczyzna  $\alpha$  przecina



Rys. 454.

stożek. Proste  $W'' A'' \equiv t_1''$  i  $W'' B'' \equiv t_2''$  są rzutami pionowymi tworzących przekroju.

Gdyby oś stożka miała położenie dowolne w przestrzeni, to przez wprowadzenie trzeciej rzutni, równoległej do osi stożka, sprowadzimy zadanie do poprzedniego.

g) Wyznaczyć przekrój stożka obrotowego, o osi pionowej, dowolną płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) (Rys. 454.).

Przy pomocy związków kolineacji środkowej, zachodzących między podstawą a przekrojem stożka, rozwiązaliśmy



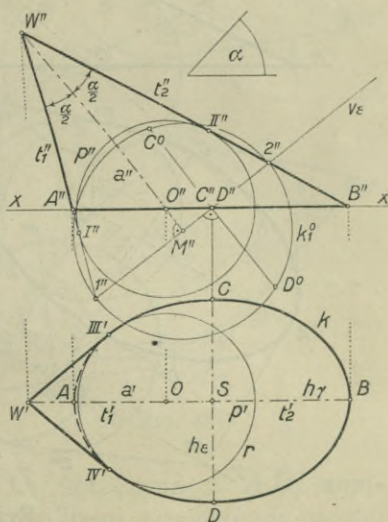
powyższe zadanie w ust. 138. W tem miejscu rozwiążemy powyższe zadanie, stosując ogólną metodę wyznaczania przekroju powierzchni obrotowej, poznaną w ust. 153.

Przy pomocy płaszczyzny  $\varepsilon$ , przechodzącej przez oś a stożka i prostopadłej do płaszczyzny siecznej  $\alpha$ , znajdziemy oś  $A'B'$  elipsy  $k_2'$  i średnicę  $\overline{A'B'}$  elipsy  $k_2''$ . Ślad poziomy  $H_k$ , krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varepsilon$ , jest znany; wyznajdźmy, przy pomocy czołowej płaszczyzny  $\pi$ , przechodzącej przez oś stożka, punkt przebicia się  $M$  ( $M' M''$ ) tej osi z płaszczyzną  $\alpha$ , to prosta  $H_k'' M''$  jest rzutem pionowym krawędzi  $k$ . Wykreśliwszy rzuty pionowe tworzących, wzdłuż których płaszczyzna  $\varepsilon$  przecina stożek, otrzymamy jako przecięcie się ich z prostą  $k''$  punkty  $A''$  i  $B''$ , ograniczające średnicę. Oś  $C'D'$ , względnie średnicę  $\overline{C'D'}$  znajdziemy przy pomocy przekroju stożka płaszczyzną poziomą  $\rho$ , przechodzącą przez środek  $S$  ( $S' S''$ ).

Ślad poziomy  $h_\alpha$  płaszczyzny siecznej przecina podstawę stożka w punktach 1 i 2; elipsa  $k_2'$  leży częściowo pod rzutnią poziomą, a taki przekrój stożka nazywamy niezupełnym.

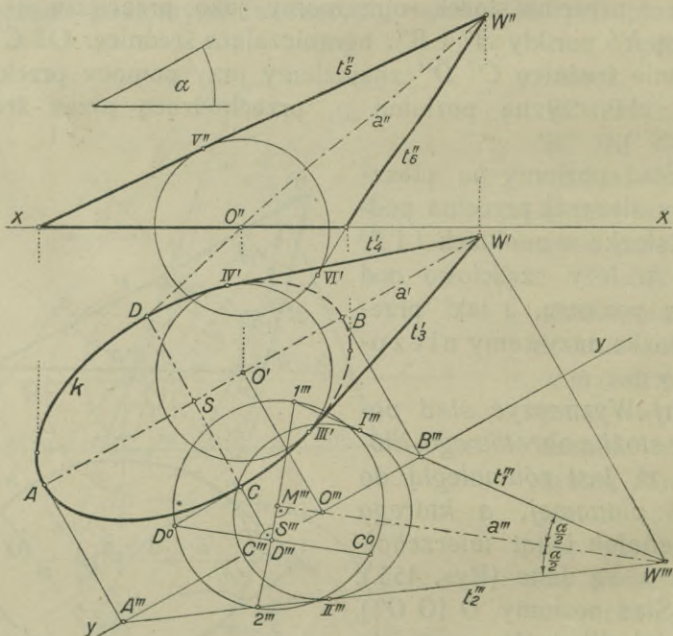
h) Wyznaczyć ślad poziomy stożka obrotowego, którego oś jest równoległą do rzutni pionowej, a którego wierzchołek i kąt wierzchołkowy  $\alpha$  są dane (Rys. 455).

Ślad poziomy  $O$  ( $O O'$ ), osi  $a$  ( $a' a''$ ) stożka, uważajmy za środek kuli wpisanej w stożek, to wyznaczywszy promień tej kuli  $\overline{O'' I''} = \overline{O'' II''}$  i wykreśliwszy jej rzuty  $p''$  i  $r$ , otrzymamy rzut poziomy tworzących konturowych, jako styczne do koła  $r$ , wykreślone z punktu  $W'$ . Ślad poziomy stożka jest elipsą  $k$  o osi dużej  $\overline{AB}$  i o środku  $S$ . Płaszczyzna  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ), przechodząca przez środek elipsy prostopadłe do osi stożka, przecina stożek wzdłuż koła o promieniu  $\overline{M'' I''} = \overline{M'' 2''}$ , a punkty przecięcia się śladu



Rys. 455.

poziomego  $h_\varepsilon$  z tym kołem ograniczają małą oś elipsy. Celem otrzymania długości tej osi, wykonajmy kład płaszczyzny  $\varepsilon$  na płaszczyznę czołową  $\gamma$ , przechodzącą przez oś stożka. Koło  $k_1^0$ , zakreślone z punktu  $M''$  jako środka promieniem  $\overline{M'' I''}$ , jest kładem przekroju stożka płaszczyzną  $\varepsilon$ . Cięciwa  $\overline{C^0 D^0}$  koła  $k_1^0$ , równoległa do  $a''$ , jest kładem małej osi elipsy  $k$ . Odmierzwszy  $\overline{CS} = \overline{DS} = \overline{C^0 C''}$ , otrzymamy drugą oś elipsy, będącą śladem poziomym stożka. Punkty styczności  $III'$  i  $IV'$  rzutu poziomego tworzących konturowych z kołem  $r$ , są punktami styczności śladu poziomego stożka (elipsy  $k$ ) z temi prostymi.



Rys. 456.

i) Wyznaczyć ślad poziomy stożka obrotowego, którego dana os  $a$  ( $a'$   $a''$ ) jest nachylona do obu rzutni, a którego wierzchołek  $W$  ( $W'$   $W''$ ) i kąt wierzchołkowy  $\alpha$  są również dane (Rys. 456.).

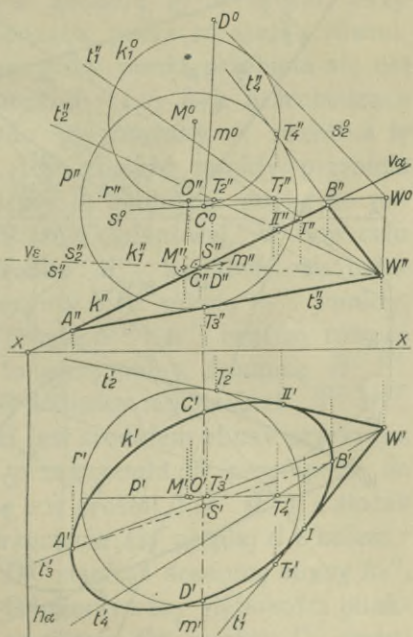
Przez przyjęcie trzeciej rzutni, równoległej do osi stożka, a prostopadłej do rzutni poziomej i wyznaczenie trzeciego rzutu stożka, sprowadzimy zadanie do poprzedniego.



j) Wykreślić rzuty stożka obrotowego, leżącego dowolnie w przestrzeni i wyznaczyć jego przekrój pionowo rzucającą płaszczyzną  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), (Rys. 457).

Ponieważ stożek nie jest bliżej określony, więc przyjmujemy dowolnie w przestrzeni jego wierzchołek  $W$  ( $W' W''$ ) i kulę o środku  $O$  ( $O' O''$ ), a promieniu dowolnym. Styczne  $t_1'$  i  $t_2'$ , do rzutu poziomego  $r'$  kuli z punktu  $W'$ , stanowią rzut poziomy tworzących konturowych, a styczne  $t_3''$  i  $t_4''$  do rzutu pionowego  $p''$  kuli, wykreślone z punktu  $W''$ , są rzutem pionowym tworzących konturowych stożka.

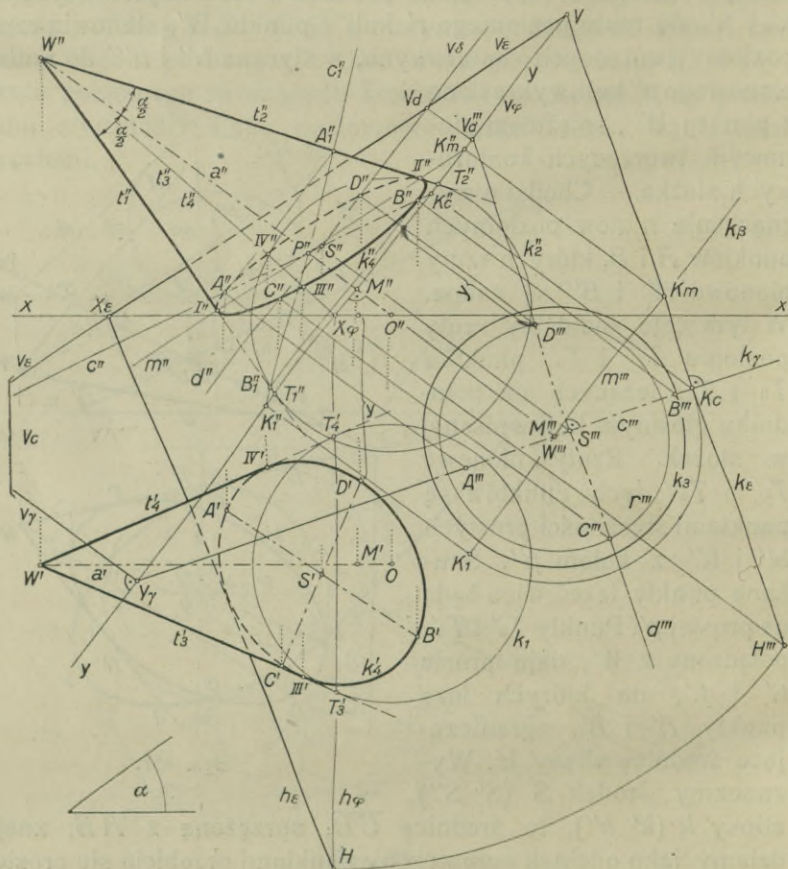
— Chodzi o wyznaczenie rzutów poziomych punktów  $A$  i  $B$ , których rzuty pionowe  $A''$  i  $B''$  są znane. W tym celu znajdziemy rzuty poziome  $T_3'$  i  $T_4'$  punktów  $T_3$  i  $T_4$ , leżących na południku głównym kuli wpisanej w stożek. Rzuty pionowe  $T_3''$  i  $T_4''$  tych punktów są punktami styczności prostych  $t_3''$  i  $t_4''$  z kołem  $p''$ . Szukane punkty leżeć więc będą na prostej  $p'$ . Punkty  $T_3'$  i  $T_4'$ , połączone z  $W'$ , dają proste  $t_3'$  i  $t_4'$ , na których leżą punkty  $A'$  i  $B'$ , ograniczające średnicę elipsy  $k'$ . Wyznaczymy środek  $S$  ( $S' S''$ ) elipsy  $k$  ( $k' k''$ ), to średnicę  $\overline{CD}$ , sprzężoną z  $\overline{AB}$ , znajdziemy jako odcinek ograniczony punktami przecięcia się prostej  $m$  ( $m' m''$ ), przechodzącej przez środek  $S$  elipsy  $k$  prostopadłe do rzutni pionowej, ze stożkiem. Punkty te znajdziemy przy pomocy przekroju stożka płaszczyzną  $\varepsilon$ , przechodzącą przez wierzchołek  $W$  i prostą  $m$ . Płaszczyzna ta przecina kulę w kole  $k_1$  o środku  $M$  ( $M' M''$ ), a stożek wzdłuż tworzących  $s_1$  i  $s_2$ . Wykonajmy kład płaszczyzny  $\varepsilon$  wraz z kołem  $k_1$ , tworzącymi  $s_1$ ,  $s_2$  i prostą  $m$ , to odcinek  $\overline{C^0 D^0}$  jest kładem szukanej średnicy  $\overline{CD}$ . Wyznaczymy rzuty pionowe punktów  $T_1$  i  $T_2$



Rys. 457.

i prostych  $t_1$ ,  $t_2$ , otrzymamy na śladzie  $v_\alpha$  punkty  $I''$  i  $II''$ , które odniesione na rzut poziomy są punktami styczności prostych  $t_1'$  i  $t_2'$  z elipsą  $k'$ .

k) Wykreślić rzuty stożka obrotowego, którego oś  $a$  ( $a'$   $a''$ ), równoległa do rzutni pionowej, wierzchołek i kąt



Rys. 458.

wierzchołkowy  $\alpha$  są dane, a następnie wyznaczyć przekrój tego stożka płaszczyzną  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ), (Rys. 458).

Wykreśliwszy rzuty stożka, przy pomocy kuli o środku  $O$ , (jak w przykładzie  $h$ , Rys. 455.) poprowadźmy przez punkty styczności  $T_1$  i  $T_2$  płaszczyznę  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ) prostopadłą do osi stożka, a uważając ją za nową rzutnię, wykonajmy jej kład

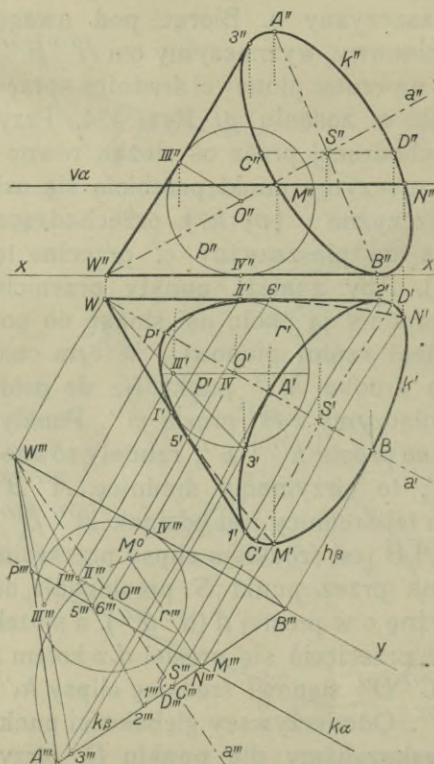


około śladu  $v_\varphi$ , jako nowej osi rzutów  $y$  na rzutnię pionową. Jeżeli oś stożka przebija płaszczyznę  $\varphi$  w punkcie  $M$  ( $M' M''$ ), to znalazłszy kład  $M'''$  tego punktu i zakreśliwszy z niego, jako środka, koło  $k_3$  o promieniu  $T_1'' M''$  — otrzymamy trzeci rzut stożka. Kład krawędzi płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$  na rzutnię pionową jest śladem bocznym  $k_\varepsilon$  płaszczyzny  $\varepsilon$ . Biorąc pod uwagę nowy rzut stożka i jego rzut pionowy, wyznaczmy osi  $\overline{A''' B'''}$ ,  $\overline{C''' D'''}$  i odpowiadające im na rzutni pionowej średnice sprzężone elipsy  $k_4''$ , podobnie jak w zadaniu g) Rys. 454. Przy pomocy płaszczyzny  $\beta$ , przechodzącej przez oś stożka równoległe do rzutni pionowej, wyznaczmy punkt przebicia się osi stożka z płaszczyzną  $\varepsilon$ . Płaszczyzna  $\gamma$  ( $v_\gamma k_\gamma$ ), przechodząca przez oś stożka i prostopadła do płaszczyzny  $\varepsilon$ , przecina tę ostatnią w prostej  $c$  ( $c' c''$ ). Aby znaleźć punkty przebicia się prostej  $c$  ze stożkiem, obróćmy ją około osi stożka do położenia równoległego względem rzutni pionowej. W tym celu przeniesiemy łukiem koła o środku  $M'''$  punkt  $K_c$  do położenia  $K_1$  ( $K_1 K_1''$ ) i  $K_1''$  połączmy z  $P''$  prostą  $c_1''$ . Punkty, w których prosta  $c_1''$  przecina proste  $h''$  i  $h_2''$ , rzucmy równoległe do osi  $y$  na prostą  $c''$ , to otrzymamy średnicę  $\overline{A'' B''}$  elipsy  $k_4''$ . Rzutem bocznym tej średnicy jest odcinek  $\overline{A''' B'''}$ . Środek  $S$  ( $S'' S'''$ ) odcinka  $\overline{AB}$  jest środkiem elipsy przekroju. Płaszczyzna  $\delta$ , poprowadzona przez punkt  $S$  prostopadłe do osi stożka, przecina płaszczyznę  $\varepsilon$  w prostej  $d$  ( $d'' d'''$ ), a stożek w kole  $r$ . Oznaczmy punkty przecięcia się prostej  $d$  z kołem  $r$  literami  $C$  i  $D$ , to odcinek  $\overline{C'' D''}$  stanowi średnicę elipsy  $k_4''$ , sprzężoną ze średnicą  $\overline{A'' B''}$ . Odmierzwszy głębokości punktów  $A, B, C$  i  $D$ , jak to wskazaliśmy dla punktu  $D$ , otrzymamy ich rzuty poziome, a więc parę średnic sprzężonych  $\overline{A' B'}$  i  $\overline{C' D'}$  elipsy  $k_4'$ .

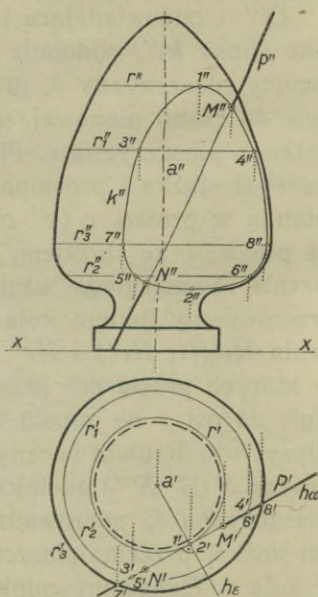
1) Dane są oś i wysokość stożka obrotowego, który styka się wzdłuż tworzącej z rzutnią poziomą; wyznaczyć przekrój tego stożka poziomą płaszczyzną  $\alpha$ , (Rys. 459.).

Przyjmijmy trzecią rzutnię, równoległą do osi stożka a przecinającą rzutnię poziomą w prostej  $y$  i wykreślmy najpierw rzut boczny żądanego stożka. Następnie przy pomocy kuli o środku  $O$  ( $O' O'' O'''$ ), wpisanej w stożek, wykreślmy rzuty tworzących konturowych i ich punkty styczności  $1', 2'$  i  $3'$  z elipsami  $k'$  i  $k''$ . Linia przekroju stożka płaszczyzną  $\alpha$  jest parabolą, gdyż płaszczyzna sieczna jest równoległą do jednej

tworzącej stożka. Rzut boczny  $P'''$  wierzchołka stożka, jak również i punkty  $M'''$  i  $N'''$ , odniesiemy na rzut poziomy, otrzymując wierzchołek  $P'$  i dwa punkty paraboli, będącej rzutem poziomym krzywej przekroju. Osią tej paraboli jest prosta  $a'$ .



Rys. 459.



Rys. 460.

### 156. O punktach przebicia się prostych z powierzchniami obrotowymi.

Punkt przebicia się prostej z powierzchnią obrotową znajdziemy za pośrednictwem przekroju tej powierzchni płaszczyzną, poprowadzoną przez tę prostą, z reguły prostopadłe do jednej z rzutni. Punkty przecięcia się danej prostej z linią przekroju rozwiązują zadanie.

#### Przykłady.

a) Wyznaczyć punkty przebicia się prostej  $p$  ( $p'$   $p''$ ) z powierzchnią obrotową (Rys. 460.). Przez prostą  $p$  popro-



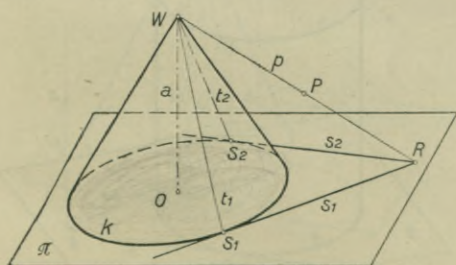
wadziliśmy poziomo rzucającą płaszczyznę  $\alpha$  i wyznaczyliśmy jej przekrój z daną powierzchnią. Punkty  $M$  ( $M' M''$ ) i  $N$  ( $N' N''$ ) przecięcia się krzywej przekroju z prostą  $p$  rozwiązują zadanie.

b) Wyznaczyć punkty przebicia się prostej  $m$  ( $m' m''$ ) z kulą (Rys. 461.). Poziomo rzucająca płaszczyzna  $\alpha$  przecina kulę wzdłuż koła o środku  $S$  ( $S' S''$ ).

Wykonajmy kład płaszczyzny  $\alpha$  wraz z kołem przekroju i prostą  $m$ , około śladu  $h_\alpha$  na rzutnię poziomą, to punkty  $A^0$  i  $B^0$ , rzucone prostopadle na  $m'$ , a stąd na  $m''$ , rozwiązują zadanie.

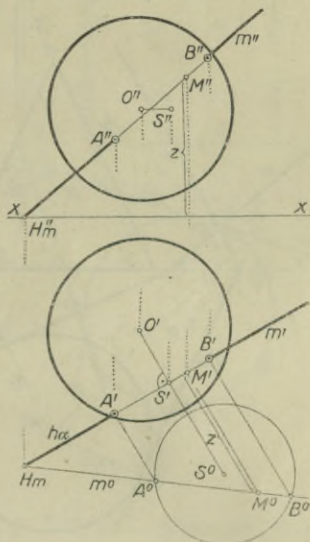
157. Płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, przechodzące przez dany punkt. Płaszczyzna styczna do stożka, przechodząca przez dany punkt  $P$ , przechodzi przez wierzchołek  $W$ , a więc zawiera prostą, łączącą punkt  $P$  z wierzchołkiem stożka.

Aby więc przez dany punkt  $P$  poprowadzić płaszczyznę styczną do stożka (Rys. 462.), połączmy ten punkt z wierzchołkiem, wyznaczmy ślad  $R$  prostej  $p$  na płaszczyźnie kierownicy (podstawy, śladu) i z otrzymanego punktu wykreślmy styczne  $s_1$  i  $s_2$  do kierownicy  $k$  stożka. Styczne te wraz z prostą  $p$  wyznaczają



Rys. 462.

rozwiązujące zadanie. Jeżeli punkt  $R$  jest punktem krzywej  $k$ , to punkt  $P$  leży na stożku, a wówczas istnieje jedna płasz-



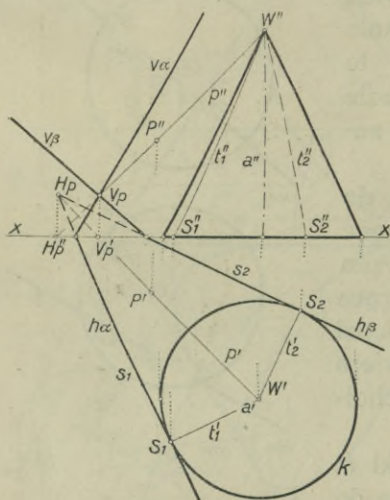
Rys. 461.

żądane płaszczyzny  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Tworzące  $t_1$  i  $t_2$ , przechodzące przez punkty styczności  $S_1$  i  $S_2$  prostych  $s_1$  i  $s_2$ , są temi, wzdłuż których płaszczyzny  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  stykają się ze stożkiem. Jeżeli z punktu  $R$  poprowadzić można dwie styczne do podstawy  $k$  stożka, to istnieją dwie płaszczyzny,

czynna, rozwiązująca zadanie, styczna do stożka wzdłuż tworzącej  $W P R$ . Jeżeli wreszcie z punktu  $R$  nie można wykreślić żadnej stycznej do kierownicy  $k$ , to zadanie nie posiada żadnego rzeczywistego rozwiązania.

**Zadanie.**

*Przez punkt  $P$  ( $P' P''$ ) poprowadzić płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, o osi pionowej (Rys. 463.).* Łączymy  $W$  z  $P$ , szukamy śladów  $H_p$  i  $V_p$  prostej  $p$  ( $p' p''$ ), a przez punkt  $H_p$  kreślimy styczne  $s_1$  i  $s_2$  do koła  $k$ . Styczne te są śladami poziomymi szukanych płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , których ślady pionowe przejdą przez punkt  $V_p$ .



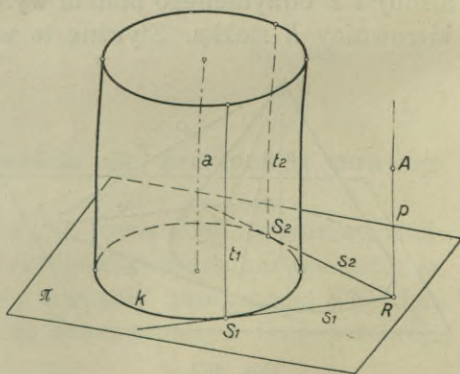
Rys. 463.

Wykreślenie tworzących stycznychności  $t_1$  ( $t_1' t_1''$ ) i  $t_2$  ( $t_2' t_2''$ ), dopełnia rozwiązanie zadania.

**158. Płaszczyzny styczne do walca obrotowego, przechodzące przez dany punkt.**

Uważając walec obrotowy za stożek obrotowy, którego wierzchołek leży nieograniczenie

daleko w kierunku tworzących walca, otrzymamy rozwiązanie zadania takie same, jak dla stożka. Przez dany punkt  $A$  (Rys. 464.) prowadzimy prostą  $p$  równoległą do tworzących walca. Z punktu  $R$ , w którym prosta  $p$  przebija płaszczyznę podstawy walca, kreślimy styczne  $s_1$  i  $s_2$  do podstawy, a płaszczyzny  $\alpha \equiv (p, s_1)$  i  $\beta \equiv (p, s_2)$  rozwiązują zadanie. Tworzące  $t_1$  i  $t_2$  walca, przechodzące przez punkty  $S_1$  i  $S_2$ , są temi, wzdłuż których płaszczyzny styczne  $\alpha$  i  $\beta$  stykają się z walcem.



Rys. 464.



Jeżeli podstawa walca leży na rzutni poziomej (Rys. 465.), to płaszczyzny styczne, przechodzące przez punkt  $A$  ( $A' A''$ ), są poziomo rzucające. Ilość rozwiązań, podobnie jak przy stożku, zależy od położenia punktu  $A$  i może wynosić dwa, jeden lub zero.

### 159. Płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, równoległe do danej prostej.

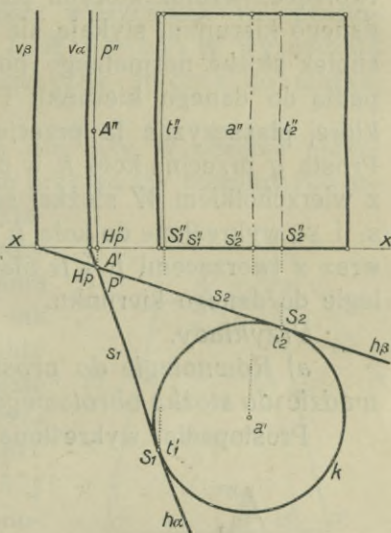
Przez wierzchołek stożka poprowadzimy prostą  $c$ , (Rys. 466.) równoległą do danej prostej  $m$ , a przez nią płaszczyzny styczne do stożka. Zadanie sprowadza się tym sposobem do rozważanego w ust. 157.

Uważajmy podstawę  $k$  stożka za kierownicę stożka normalnego (ust. 148.) i wyznaczmy jego wierzchołek  $W_1$ .

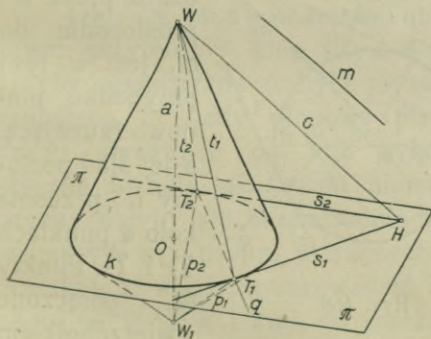
Jeżeli  $t_1$  i  $t_2$  są tworzącymi, wzdłuż których płaszczyzny styczne, przechodzące przez prostą  $c // m$ , dotykają stożka, a proste  $s_1$  i  $s_2$  są śladami tych płaszczyzn na płaszczyźnie  $\pi$ ,

to prosta  $s_1$  jest prostopadła do pł.  $W T_1 W_1$ , gdyż  $W W_1$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\pi$ . Z tego samego powodu prosta  $s_2$  jest prostopadła do płaszczyzny  $W T_2 W_1$ , a co zatem idzie,  $p_1$  jest prostopadła do  $s_1$ , a  $p_2 \perp s_2$ . Ale prosta  $p_1$ , jako tworząca stożka normalnego, jest prostopadła do  $t_1$ , a więc jest prostopadłą do

płaszczyzny stycznej  $\sigma_1 \equiv (t_1, s_1)$ . Analogicznie prosta  $p_2$  jest prostopadłą do płaszczyzny stycznej  $\sigma_2 \equiv (t_2, s_2)$ . Stąd wynika dalej, że płaszczyzna  $\psi \equiv (p_1, p_2)$ , jako prostopadła do płasz-



Rys. 465.



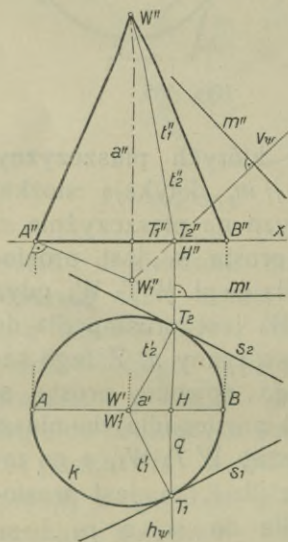
Rys. 466.

czyzn stycznych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , jest prostopadłą do ich krawędzi  $c$ . Znając więc wierzchołek stożka normalnego, wyznaczymy tworzące, wzdłuż których płaszczyzny styczne, równoległe do danego kierunku, stykają się ze stożkiem, jeśli przez wierzchołek stożka normalnego poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do danego kierunku i wyznaczymy prostą  $q$ , wzdłuż której płaszczyzna ta przecina płaszczyznę podstawy stożka. Prosta  $q$  przecina koło  $k$  w punktach  $T_1$  i  $T_2$ , które połączone z wierzchołkiem  $W$  stożka, są szukanymi tworzącymi. Styczne  $s_1$  i  $s_2$ , wykreślone do koła  $k$  w punktach  $T_1$  i  $T_2$ , wyznaczają wraz z tworzącymi  $t_1$  i  $t_2$  płaszczyzny styczne  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , równoległe do danego kierunku.

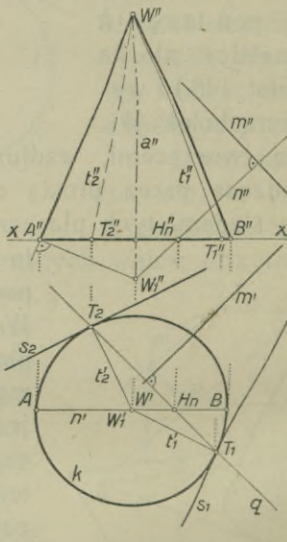
### Przykłady.

a) Równoległe do prostej czołowej  $m$  ( $m'$   $m''$ ) poprowadzić do stożka obrotowego (Rys. 467.) płaszczyzny styczne.

Prostopadła, wykreślona w punkcie  $A''$  do prostej  $A''W''$ ,



Rys. 467.



Rys. 468.

przecina  $a''$  w punkcie  $W_1''$ , który jest rzutem pionowym wierzchołka stożka normalnego. Płaszczyzna  $\psi$ , przechodząca przez  $W_1''$  prostopadle do  $m$ , jest w tym przypadku pionowo rzucającą, a jej ślad poziomy  $h_{\psi}$  przecina koło w punktach  $T_1$  i  $T_2$ . Punkty te, połączone z wierzchołkiem

stożka, dają tworzące  $t_1$  i  $t_2$ , wzdłuż których płaszczyzny styczne  $\sigma_1 \equiv (t_1, s_1)$  i  $\sigma_2 \equiv (t_2, s_2)$ , równoległe do kierunku  $m$ , dotykają stożka.

b) Wyznaczyć płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, równoległe do prostej  $m$  ( $m'$   $m''$ ), (Rys. 468.).

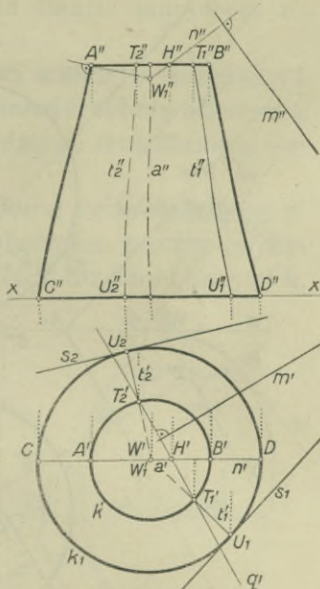


Przez wierzchołek  $W_1$  stożka normalnego poprowadziliśmy  $n$  ( $n'$   $n''$ ) prostopadłą do  $m$ , a przez jej ślad poziomy  $H_n$  wykreśliliśmy prostą  $q \perp m'$ . Prosta  $q$  jest śladem poziomym płaszczyzny  $\psi$ , przechodzącej przez wierzchołek  $W_1$ , prostopadłe do kierunku  $m$ . Proste  $t_1 \equiv T_1 W$  i  $t_2 \equiv T_2 W$  wyznaczają wraz ze stycznymi  $s_1$  i  $s_2$  płaszczyzny styczne do stożka, równoległe do prostej  $m$ .

c) Jeżeli wierzchołek stożka nie leży w obrębie płaszczyzny rysunkowej (Rys. 469.), to przyjmąwszy dowolny równoleżnik stożka (w naszym przykładzie ograniczający stożek), uważamy jego płaszczyznę za rzutnię poziomą i przeprowadzimy konstrukcję jak w Rys. 467., znajdując punkty  $T_1$  ( $T_1'$   $T_1''$ ) i  $T_2$  ( $T_2'$   $T_2''$ ). Proste  $t_1' \equiv (W', T_1')$  i  $t_2' \equiv (W', T_2')$  przecinają podstawę  $k_1$  stożka w punktach  $U_1$  i  $U_2$ , a proste  $t_1'' \equiv (T_1'', U_1'')$  i  $t_2'' \equiv (T_2'', U_2'')$  są rzutami pionowymi tworzącymi, wzdłuż których płaszczyzny  $\sigma_1 \equiv (t_1, s_1)$  i  $\sigma_2 \equiv (t_2, s_2)$  stykają się ze stożkiem.

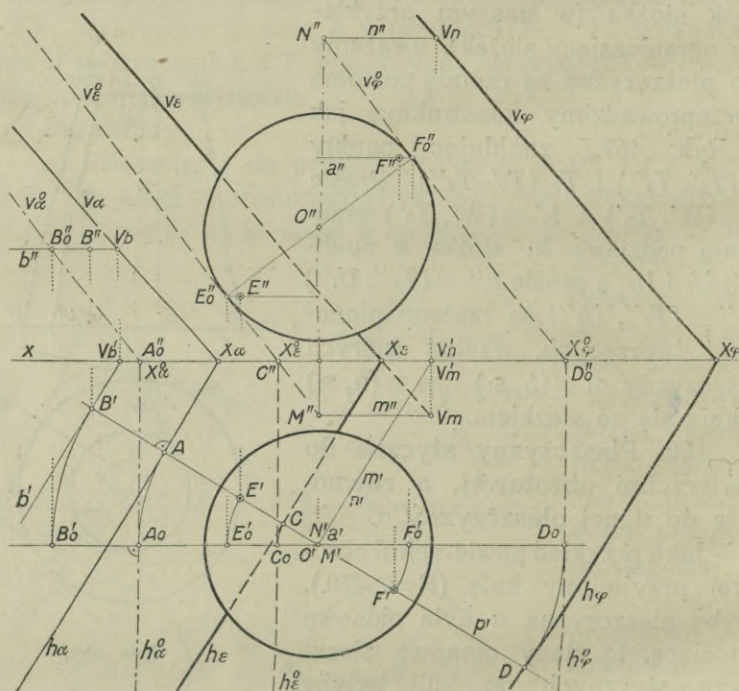
**160. Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej, a równoległe do danej płaszczyzny  $\alpha$ .**

Jako przykład powierzchni obrotowej przyjmijmy kulę (Rys. 470.). Gdyby płaszczyzna  $\alpha$  była pionowo rzucającą, to ślady pionowe płaszczyzn stycznych do kuli byłyby styczne do koła jako rzutu pionowego kuli, a żądane płaszczyzny dałyby się bezpośrednio wyznaczyć. Jeżeli jednak, jak w naszym przypadku, płaszczyzna  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) ma położenie dowolne, to najpierw sprowadzić ją musimy, zapomocą obrotu około osi  $a$  ( $a'$   $a''$ ) kuli, do położenia prostopadłego względem rzutni pionowej. Następnie poprowadzimy płaszczyzny styczne do kuli, a równoległe do płaszczyzny  $\alpha$  w jej nowym położeniu, a tak otrzymane płaszczyzny obrócimy, aby były równoległe do płaszczyzny  $\alpha$  w jej położeniu pierwotnym.



Rys. 469.

Obrotu płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ) dokonaliśmy, obracając jej ślad poziomy  $h_\alpha$  w położenie  $h_\alpha^0$ . Przyjęta na płaszczyźnie  $\alpha$  tworząca  $b$  ( $b' b''$ ) zajmie, po dokonanych obrocie płaszczyzny, położenie prostopadłe do rzutni pionowej. Prostopadła  $p'$ , wykreślona z punktu  $O'$  do  $h_\alpha$ , a więc i  $b'$ , przecina je w punktach  $A$  i  $B'$ . Odcinki  $\overline{O'A}$  i  $\overline{O'B'}$  są rzutami poziomymi promieni obrotów. Po dokonanych obrocie punkty  $A$  i  $B$  zajmą położenie  $A_0$  ( $A_0' A_0''$ ) i  $B_0$  ( $B_0' B_0''$ ), a płaszczyzna  $\alpha$



Rys. 470.

położenie  $\alpha^0$  ( $h_\alpha^0 v_\alpha^0$ ). Płaszczyzny  $\varepsilon^0$  ( $h_\varepsilon^0 v_\varepsilon^0$ ) i  $\varphi^0$  ( $h_\varphi^0 v_\varphi^0$ ), równoległe do płaszczyzny  $\alpha^0$  i styczne do kuli, pierwsza w punkcie  $E_0$  ( $E_0' E_0''$ ), druga w punkcie  $F_0$  ( $F_0' F_0''$ ), musimy obrócić około osi kuli do położenia równoległego względem płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ). W tym celu przeniesiemy łukami kół, zakreślonymi z punktu  $O'$  jako środka, punkty  $C_0$  i  $D_0$  na prostą  $p'$  i wykreślimy przez punkty  $C$  i  $D$  równoległe do  $h_\alpha$ , otrzymując ślady poziome  $h_\varepsilon$  i  $h_\varphi$  szukanych płaszczyzn.



Równoległe do  $v_\alpha$ , wykreślone z punktów  $X_\varepsilon$  i  $X_\varphi$ , stanowią ślady pionowe tych płaszczyzn. Podobnie zapomocą obrotów wstecznych punktów  $E_0$  i  $F_0$  otrzymamy punkty styczności  $E$  ( $E' E''$ ) i  $F$  ( $F' F''$ ) płaszczyzn  $\varepsilon$  i  $\varphi$  z kulą.

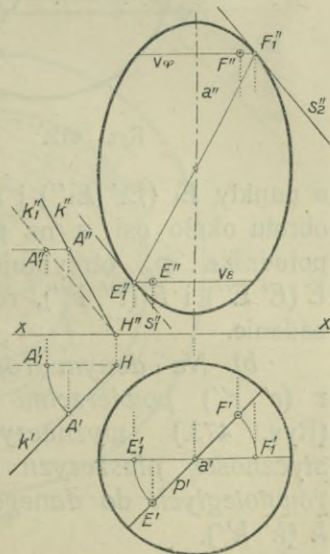
Płaszczyzny  $\varepsilon^0$  i  $\varphi^0$  przecinają oś  $a$  kuli, pierwsza w punkcie  $M$  ( $M' M''$ ), druga w  $N$  ( $N' N''$ ). Przez punkty te przejść muszą płaszczyzny  $\varepsilon$  i  $\varphi$ , co służyć może do sprawdzenia dokładności rysunku. Ślad pionowy  $v_\varepsilon$  przejdzie przez ślad  $V_m$  poziomo tworzącej prostej  $m$  ( $m' m''$ ), a ślad pionowy  $V_n$  prostej  $n // m$  leżeć będzie na śladzie pionowym  $v_\varphi$  płaszczyzny  $\varphi$ .

**161. Wyznaczenie linii styczności walca, o tworzących równoległych do danego kierunku, z powierzchnią obrotową.**

Rozwiązanie tego zadania poprzedzimy rozważaniem następujących tematów:

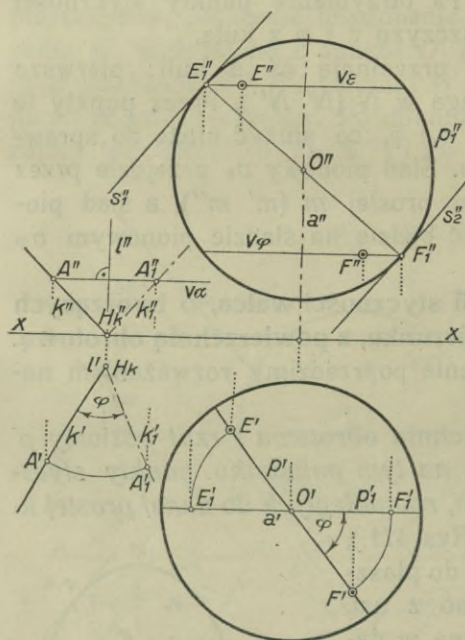
a) *Dana jest powierzchnia obrotowa i rzut poziomy  $p'$  jej południka; wyznaczyć na tym południku punkty styczności płaszczyzn stycznych, równoległych do danej prostej  $k$ .*

Przyjmijmy najpierw (Rys. 471.), że prosta  $k$  jest równoległą do płaszczyzny południka. Wiadomo z ust. 145., że płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni obrotowej jest prostopadłą do płaszczyzny południka, który przechodzi przez ten punkt i że krawędź płaszczyzny tego południka z płaszczyzną styczną jest styczną do południka w uważanym punkcie i przecina oś powierzchni. Aby uniknąć kreślenia rzutu pionowego południka  $p$ , obróćmy go około osi powierzchni tak, aby zeszedł się z południkiem głównym. Równocześnie obróćmy prostą  $k$  ( $k' k''$ ) tak, aby zajęła położenie  $k_1$  równoległe do rzutni pionowej. Styczne  $s_1''$  i  $s_2''$  do zarysu powierzchni obrotowej na rzutni pionowej, równoległe do  $k_1''$ , stykają się z tym zarysem w punktach  $E_1$  ( $E_1' E_1''$ ) i  $F_1$  ( $F_1' F_1''$ ). Wróćmy z tymi punktami na południk  $p$  — a zadanie będzie rozwiązane.



Rys. 471.

Łuki kół, zakreślone z punktu  $a'$  promieniami  $a'E_1'$  i  $a'F_1'$ , przecinają prostą  $p'$  w punktach  $E'$  i  $F'$ , których rzuty pionowe leżeć będą na śladach pionowych  $v_\varepsilon$  i  $v_\varphi$  płaszczyzn obrotów, przechodzących przez punkty  $E_1$  i  $F_1$  prostopadle do osi  $a$  powierzchni.



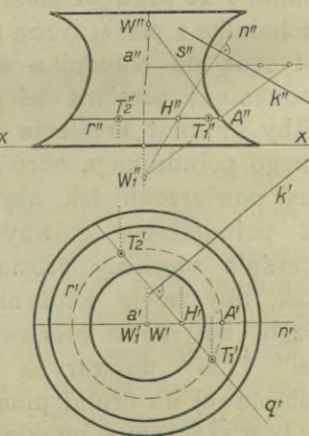
Rys. 472.

a punkty  $E_1$  ( $E_1'$   $E_1''$ ) i  $F_1$  ( $F_1'$   $F_1''$ ) obrotem około osi  $a$  na płaszczyznę południka  $p$ , otrzymując punkty  $E$  ( $E'$   $E''$ ) i  $F$  ( $F'$   $F''$ ), rozwiązujące zadanie.

b) Na danym równoleżniku  $r$  ( $r'$   $r''$ ) powierzchni obrotowej (Rys. 473.) wyznaczyć punkty styczności płaszczyzn stycznych, równoległych do danego kierunku  $k$  ( $k'$   $k''$ ).

Szukane płaszczyzny są styczne do stożka opisanego na powierzchni wzdłuż danego równoleżnika, a wyznaczenie owych płaszczyzn stycznych do stożka, równoległych do

Jeżeli prosta  $k$  ( $k'$   $k''$ ) nie jest równoległą do płaszczyzny południka (Rys. 472.), to południk dany obrócimy około osi  $a$  ( $a'$   $a''$ ) powierzchni aż padnie na południk główny, a prostą  $k$  ( $k'$   $k''$ ) obrócimy około prostej  $l//a$  o kąt  $\varphi$ , równy kątowi, jaki płaszczyzna południka  $p$  zawiera z płaszczyzną południka głównego. Wykreślimy styczne  $s_1''$  i  $s_2''$  równoległe do  $k_1''$ ,

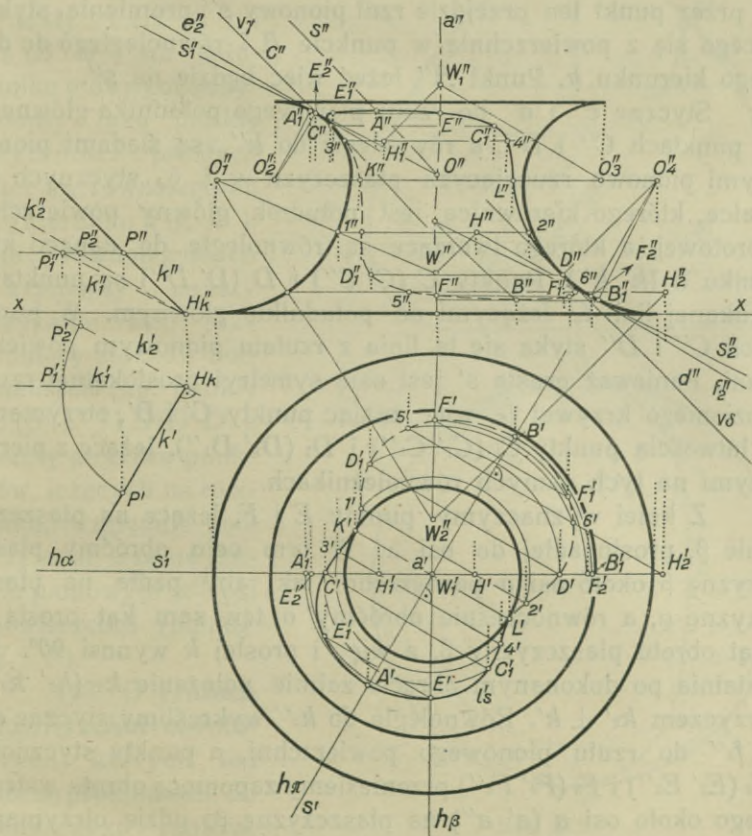


Rys. 473.



danego kierunku, skutecznym przy pomocy stożka normalnego (ust. 159).

W punkcie  $A''$  wykreślmy styczną  $s''$  do krzywej, będącej rzutem pionowym powierzchni obrotowej, a następnie normalną  $A''W_1''$ . Prostopadła  $n''$ , wykreślona z  $W_1''$  do  $k''$ , przecina  $r''$  w punkcie  $H''$ , który rzucimy na prostą  $n'$ , otrzymując punkt  $H'$ . Przez ten punkt wykreślona prosta  $q' \perp k'$  przecina koło  $r'$  w punktach  $T_1'$  i  $T_2'$ , które są rzutami poziomymi szukanych punktów  $T_1$  ( $T_1' T_1''$ ) i  $T_2$  ( $T_2' T_2''$ ).



Rys. 474.\*

Teraz przystąpić możemy do wyznaczenia linii styczności  $l_s$  walca opisanego na powierzchni obrotowej (Rys. 474.\*), a zadanie nasze polegać będzie na złączeniu obu wyżej prze-

prowadzonych. Więc wzięwszy pod uwagę południk, leżący na płaszczyźnie  $\pi$ , równoległej do danego kierunku  $k$  ( $k'$   $k''$ ), wyznaczmy na nim punkty styczności  $A$  ( $A'$   $A''$ ) i  $B$  ( $B'$   $B''$ ) tworzących walca, równoległych do kierunku  $k$ . W tym celu obrócimy prostą  $k$  do położenia  $k_1$  ( $k_1'$   $k_1''$ ), równoległego do rzutni pionowej i wykreślmy styczne  $s_1''$  i  $s_2''$  do zarysu powierzchni na rzutni pionowej. Otrzymane punkty styczności  $A_1$  ( $A_1'$   $A_1''$ ) i  $B_1$  ( $B_1'$   $B_1''$ ) obrócimy około osi powierzchni na płaszczyznę  $\pi$ , otrzymując szukane punkty  $A$  i  $B$ . Jeżeli punkt przecięcia się prostej  $s_1''$  z prostą  $a''$  oznaczymy literą  $O''$ , to przez punkt ten przejdzie rzut pionowy  $s''$  promienia, stykającego się z powierzchnią w punkcie  $A$  i równoległego do danego kierunku  $k$ . Punkt  $A''$  leżeć więc będzie na  $s''$ .

Styczne  $c''$  i  $d''$  do rzutu pionowego południka głównego w punktach  $C''$  i  $D''$ , a równoległe do  $k''$ , są śladami pionowymi pionowo rzucających płaszczyzn  $\gamma$  i  $\delta$ , stycznych do walca, którego kierownicą jest południk główny powierzchni obrotowej, a którego tworzące są równoległe do danego kierunku  $k$  ( $k'$   $k''$ ). Punkty  $C$  ( $C'$   $C''$ ) i  $D$  ( $D'$   $D''$ ) są punktami szukanej linii  $l_s$ , leżącymi na południku głównym. W punktach  $C''$  i  $D''$  styka się ta linia z rzutem pionowym powierzchni. Ponieważ prosta  $s'$  jest osią symetrii prostokątnej rzutu poziomego krzywej  $l_s$ , więc znając punkty  $C'$  i  $D'$ , otrzymamy z łatwością punkty  $C_1$  ( $C_1'$   $C_1''$ ) i  $D_1$  ( $D_1'$   $D_1''$ ), leżące z pierwszymi na tych samych równoleżnikach.

Z kolei wyznaczmy punkty  $E$  i  $F$ , leżące na płaszczyźnie  $\beta$ , prostopadłej do osi  $x$ . W tym celu obrócimy płaszczyznę  $\beta$  około osi  $a$  powierzchni tak, aby padła na płaszczyznę  $\alpha$ , a równocześnie obrócimy o ten sam kąt prostą  $k$ . Kąt obrotu płaszczyzny  $\beta$ , a więc i prostej  $k$  wynosi  $90^\circ$ . Ta ostatnia po dokonanych obrotach zajmie położenie  $k_2$  ( $k_2'$   $k_2''$ ), przyczem  $k_2' \perp k'$ . Równoległe do  $k_2''$  wykreślmy styczne  $e_2''$  i  $f_2''$  do rzutu pionowego powierzchni, a punkty styczności  $E_2$  ( $E_2'$   $E_2''$ ) i  $F_2$  ( $F_2'$   $F_2''$ ) przeniesiemy zapomocą obrotu wstecznego około osi  $a$  ( $a'$   $a''$ ) na płaszczyznę  $\beta$ , gdzie otrzymamy punkty  $E$  ( $E'$   $E''$ ) i  $F$  ( $F'$   $F''$ ) krzywej  $l_s$ . Symetrycznie do nich rozmieszczone są punkty  $E_1$  ( $E_1'$   $E_1''$ ) i  $F_1$  ( $F_1'$   $F_1''$ ).

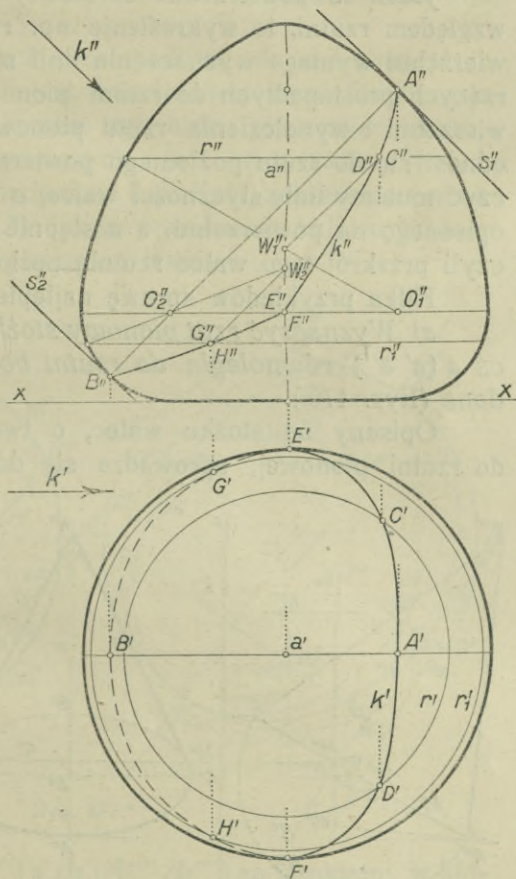
Następnie obierać będziemy na powierzchni równoleżniki, na których, przy pomocy stożków normalnych, znajdziemy po dwa punkty, podobnie jak w Rys. 473.



Punkty  $K (K' K'')$  i  $L (L' L'')$  na kole szyjnym znajdziemy, kreśląc średnicę  $\overline{K' L'} \perp s'$  i odnosząc punkty  $K'$  i  $L'$  na rzut pionowy tego koła.

### 162. Zadanie.

Wyznaczyć linię styczności walca opisanego na powierzchni obrotowej, gdy kierunek tworzących walca jest równoległy do rzutni pionowej (Rys. 475.). Zadanie to stanowi szczególny przykład, omówionego w ustępie poprzednim. Punkty  $A (A' A'')$  i  $B (B' B'')$  na południku głównym otrzymamy jako punkty styczności prostych  $s_1$  i  $s_2$ , równoległych do kierunku  $k (k' k'')$ . Na równoleżnikach otrzymamy punkty szukanej linii przy pomocy stozków normalnych (np. punkty  $C (C' C'')$  i  $D (D' D'')$ ). Rzuty pionowe punktów, leżących na równiku, względnie kole szyjnym, leżą na rzucie pionowym  $a''$  osi powierzchni (punkty  $E$  i  $F$ ).



Rys. 475.

163. O rzutach powierzchni obrotowych, których osi nie są prostopadłe do płaszczyzn rzutów.

Zarys powierzchni obrotowej na rzutni pionowej jest rzutem prostokątnym zarysu istotnego powierzchni, albo innymi słowy, jest przekrojem walca opisanego na powierzchni, którego tworzące są prostopadłe do rzutni pionowej, z tą rzutnią. Podobnie rzut

poziomy powierzchni jest przekrojem walca o tworzących pionowych, opisanego na tej powierzchni, z rzutnią poziomą.

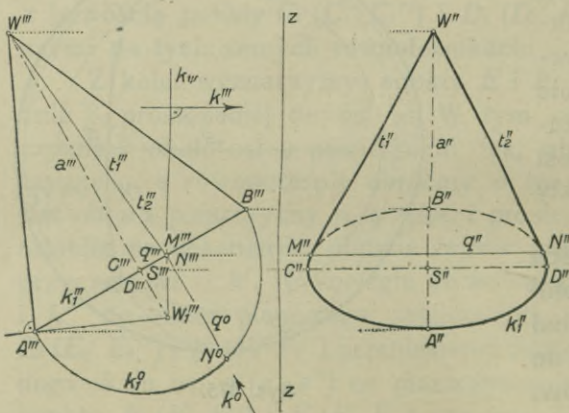
Gdy oś powierzchni jest pionowa, to linia styczności walca opisanego na powierzchni, prostopadłe do rzutni pionowej, jest południkiem głównym. Rzut pionowy tego południka, albo innymi słowy przekrój walca opisanego na powierzchni, jest linią przystającą do południka głównego.

Jeżeli oś powierzchni obrotowej ma położenie dowolne względem rzutni, to wykreślenie np. rzutu pionowego tej powierzchni wymaga wyznaczenia linii styczności walca, o tworzących prostopadłych do rzutni pionowej, opisanego na powierzchni i wynalezienia rzutu pionowego tej linii. To samo odnosi się do rzutu poziomego powierzchni. Najpierw wyznaczyć musimy linię styczności walca, o tworzących pionowych, opisanego na powierzchni, a następnie rzut poziomy tej linii, czyli przekrój tego walca rzutnią poziomą.

Kilka przykładów sprawę najlepiej wyjaśni.

a) Wyznaczyć rzut pionowy stożka obrotowego, którego oś  $a$  ( $a'$   $a''$ ) równoległa do rzutni bocznej i rzut boczny są dane (Rys. 476.).

Opisany na stożku walec, o tworzących prostopadłych do rzutni pionowej, sprowadza się do dwóch pionowo rzucających płaszczyzn, stycznych do stożka



Rys. 476.

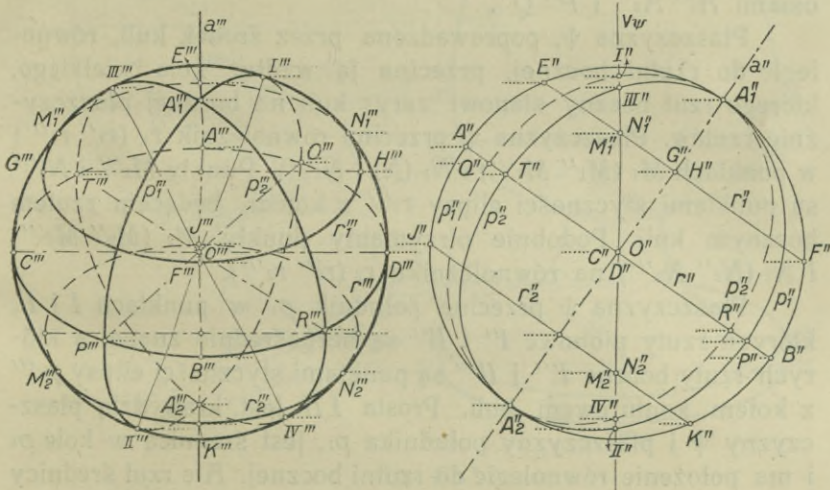
wzdłuż tworzących  $t_1$  i  $t_2$ . Tworzące te znajdziemy przy pomocy stożka normalnego, kreśląc z jego wierzchołka  $W_1$  płaszczyznę  $\psi$ , prostopadłą do kierunku rzutów, a więc równoległą do rzutni pionowej. Płaszczyzna  $\psi$  przetnie płaszczyznę postawy stożka w prostej  $q$  ( $q''$   $q'''$ ), a koło  $k_1$  ( $k_1''$   $k_1'''$ ) w punktach  $M$  ( $M''$   $M'''$ ) i  $N$  ( $N''$   $N'''$ ). Wykonajmy kład  $k_1^0$  koła  $k_1$



około jego średnicy  $\overline{AB}$  na płaszczyznę, przechodzącą przez oś stożka, a równoległą do rzutni bocznej, to podwójna długość odcinka  $N^0 N'''$  równa jest cięciwie  $\overline{M'' N''}$  elipsy  $k_1''$ . Punkty  $M''$  i  $N''$  są punktami styczności prostych  $t''$  i  $t_2''$  z elipsą  $k_1''$ .

b) Wykreślić rzut pionowy i boczny kuli wraz z jej równikiem, dwoma równoleżnikami i dwoma południkami. Rzuty osi  $a$  ( $a'' a'''$ ) i środka  $O$  ( $O'' O'''$ ) kuli, a także i jej promień są dane.

Walec, o tworzących prostopadłych do dowolnej płaszczyzny, opisany na kuli, jest walcem obrotowym. Rzut prostokątny kuli, będący przekrojem tego walca płaszczyzną rzutów, prostopadłą do jego tworzących, jest więc zawsze kołem, o promieniu, równym promieniowi kuli. Koła, zakreślone z punktów  $O''$  i  $O'''$  (Rys. 477.\*) danym promieniem kuli, są rzutami tej kuli na płaszczyznę pionową i boczną.



Rys. 477.\*

Punkty  $A_1$  ( $A_1'' A_1'''$ ) i  $A_2$  ( $A_2'' A_2'''$ ) są punktami, w których oś  $a$  ( $a'' a'''$ ) przebija kulę. Średnica  $\overline{A'' B''} \perp \overline{A_1'' A_2''}$  jest rzutem pionowym równika  $r$ , a równoległe do niej cięciwy  $\overline{E'' F''}$  i  $\overline{J'' K''}$  są rzutami pionowymi równoleżników  $r_1$  i  $r_2$ . Wyznaczenie rzutu bocznego  $r'''$  równika i rzutów bocznych  $r_1'''$  i  $r_2'''$  równoleżników nie nastęrcza żadnych trudności. Mała oś elipsy  $r'''$  jest rzutem prostokątnym średnicy  $\overline{A'' B''}$

na prostą  $a'''$ , oś duża równa jest średnicy  $\overline{C''' D'''}$  koła. Mała oś elipsy  $r_1'''$ , będącej rzutem bocznym równoleżnika  $r_1$ , jest rzutem prostokątnym  $\overline{E''' F'''}$  cięciwy  $\overline{E'' F''}$  na  $a'''$ ; długość osi wielkiej  $\overline{G''' H'''}$  tej elipsy jest równą długości cięciwy  $\overline{E'' F''}$ .

Każda płaszczyzna, przechodząca przez oś kuli, przecina ją wzdłuż koła wielkiego (południka), a płaszczyznę równika wzdłuż prostej, która przechodzi przez środek kuli. Każda średnica koła równikowego i oś  $\overline{A_1 B_1}$  kuli stanowią parę wzajemnie prostopadłych średnic jednego południka. Rzut tej pary średnic koła południkowego na płaszczyznę boczną stanowi parę średnic sprzężonych elipsy, będącej rzutem bocznym południka. Elipsa  $p_1'''$ , wyznaczona parą średnic sprzężonych  $\overline{A_1''' A_2'''}$  i  $\overline{P''' Q'''}$ , przyczem ta ostatnia jest dowolnie przyjętą średnicą elipsy  $r_1'''$ , jest rzutem bocznym południka  $p_1$ . Rzut pionowy tego południka jest elipsą  $p_1''$ , wyznaczoną osiami  $\overline{A_1'' A_2''}$  i  $\overline{P'' Q''}$ .

Płaszczyzna  $\psi$ , poprowadzona przez środek kuli, równoległe do rzutni bocznej, przecina ją wzdłuż koła wielkiego, którego rzut boczny stanowi zarys kuli na bocznej płaszczyźnie rzutów. Płaszczyzna  $\psi$  przecina równoleżnik  $r_1$  ( $r_1'' r_1'''$ ) w punktach  $M_1$  ( $M_1'' M_1'''$ ) i  $N_1$  ( $N_1'' N_1'''$ ). Punkty  $M_1'''$  i  $N_1'''$  są punktami styczności elipsy  $r_1'''$  z kołem, będącem rzutem bocznym kuli. Podobnie otrzymamy punkty  $M_2$  ( $M_2'' M_2'''$ ) i  $N_2$  ( $N_2'' N_2'''$ ) na równoleżniku  $r_2$  ( $r_2'' r_2'''$ ).

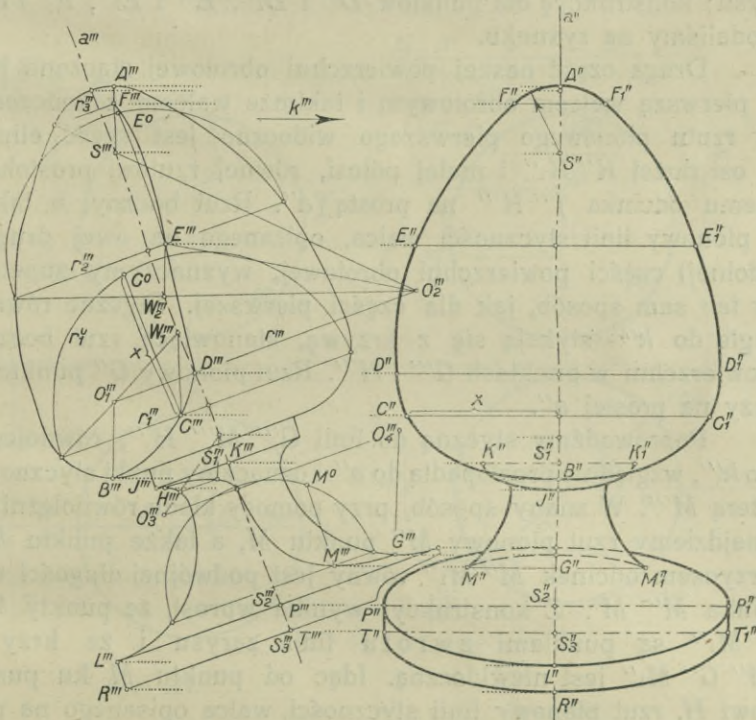
Płaszczyzna  $\psi$  przecina południk  $p_1$  w punktach  $I$  i  $II$ , których rzuty pionowe  $I''$  i  $II''$  są bezpośrednio znane, a których rzuty boczne  $I'''$  i  $II'''$  są punktami styczności elipsy  $p_1'''$  z kołem konturowem kuli. Prosta  $\overline{I II}$  jest krawędzią płaszczyzny  $\psi$  i płaszczyzny południka  $p_1$ , jest średnicą w kole  $p_1$  i ma położenie równoległe do rzutni bocznej. Ale rzut średnicy koła, równoległej do płaszczyzny rzutów, jest osią elipsy, będącej rzutem tego koła (patrz przykłady w ust. 99.). Średnica  $\overline{I''' II'''}$  jest więc osią elipsy  $p_1'''$ , którą też otrzymać można, bez pośrednictwa rzutu pionowego, ze średnic sprzężonych  $\overline{A_1''' A_2'''}$  i  $\overline{P''' Q'''}$ , przez zastosowanie poznanej w ust. 97. Rys. 292 b. konstrukcji.

c) Wykreślić rzut pionowy powierzchni obrotowej, której oś — równoległa do rzutni bocznej — i rzut boczny są dane (Rys. 478.\*).



Rzut pionowy naszej powierzchni jest śladem pionowym walca, o tworzących prostopadłych do rzutni pionowej, opisanego na tej powierzchni, albo innymi słowy, jest to rzut pionowy linii styczności walca, którego tworzące, styczne do powierzchni, są prostopadłe do rzutni pionowej.

Biorąc pod uwagę rzut boczny i poziomy, wyznaczmy — podobnie jak w Rys. 475. — linię styczności walca, opisanego na powierzchni obrotowej, uwzględniając kierunek



Rys. 478.\*

jego tworzących, równoległe do osi  $y$ . Więc styczne, równoległe do  $k'''$ , dotykają zarysu powierzchni w rzucie bocznym w punktach  $A'''$  i  $B'''$  szukanej linii. Z kolei szukać będziemy punktów tej linii na równoleżnikach powierzchni, aby zaś uniknąć kreślenia rzutu poziomego, wykonywać będziemy kłady tych równoleżników na płaszczyznę, przechodzącą przez oś powierzchni równoległe do rzutni bocznej. I tak np. rzut boczny równoleżnika  $r_1$  jest odcinkiem  $r_1'''$ , a kład jego na

wspomnianą wyżej płaszczyznę kołem  $r_1^0$ . Z punktu  $W_1'''$ , który jest rzutem bocznym wierzchołka stożka normalnego, wykreślimy prostopadłą do kierunku  $k'''$ , otrzymując na  $r_1'''$  punkt  $C'''$ . Z punktu tego wykreślimy prostopadłą do rzutu pionowego  $a''$  osi powierzchni i odmierzymy po obu stronach prostej  $a''$  odcinek  $x = \overline{C''' C^0}$ . Otrzymamy punkty  $C''$  i  $C_1''$  szukanego zarysu powierzchni na rzutni pionowej. W podobny sposób znajdziemy dowolną ilość dalszych punktów tego zarysu; konstrukcję dla punktów  $D''$  i  $D_1''$ ,  $E''$  i  $E_1''$ ,  $F''$  i  $F_1''$  podaliśmy na rysunku.

Druga część naszej powierzchni obrotowej złączona jest z pierwszą walcem obrotowym i takimże walcem zakończona. Z rzutu pionowego pierwszego widoczna jest część elipsy o osi dużej  $\overline{K'' K_1''}$  i małej półosi, równej rzutowi prostokątnemu odcinka  $\overline{J''' K'''}$  na prostą  $a''$ . Rzut boczny, a także i pionowy linii styczności walca, opisanego na owej drugiej (dolnej) części powierzchni obrotowej, wyznaczmy zupełnie w ten sam sposób, jak dla części pierwszej. Styczne równoległe do  $k'''$  stykają się z krzywą, stanowiącą rzut boczny powierzchni w punktach  $G'''$  i  $H'''$ . Rzut pionowy  $G''$  punktu  $G$  leży na prostej  $a''$ .

Poprowadźmy styczną do linii  $G''' M''' H'''$ , równoległą do  $k'''$ , względnie prostopadłą do  $a''$  i oznaczmy punkt styczności literą  $M'''$ . W znany sposób, przy pomocy układu równoleżnika, znajdziemy rzut pionowy  $M''$  punktu  $M$ , a także punktu  $M_1$ , przyczem odcinek  $\overline{M'' M_1''}$  równy jest podwójnej długości odcinka  $\overline{M''' M^0}$ . Z konstrukcyi wynika wprost, że punkty  $M''$  i  $M_1''$  są punktami zwrotu linii zarysu i że krzywa  $M'' G'' M_1''$  jest niewidoczną. Idąc od punktu  $M$  ku punktowi  $H$ , rzut pionowy linii styczności, walca opisanego na powierzchni, jest widoczny.

**164. O stożkach opisanych na powierzchniach obrotowych.**

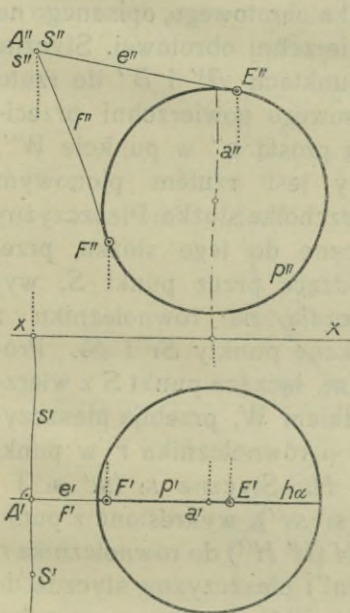
1. Niechaj zadaniem naszym będzie wyznaczenie na południku głównym danej powierzchni obrotowej, np. kuli, punktów styczności płaszczyzn stycznych do tej powierzchni, a przechodzących przez dany punkt  $S$  ( $S' S''$ ).

Poprowadźmy w tym celu z punktu  $S$  prostopadłą  $s$  (Rys. 479.) do płaszczyzny południka głównego  $\alpha$  i oznaczmy punkt przecięcia się tej prostej z płaszczyzną  $\alpha$  literą  $A$ .

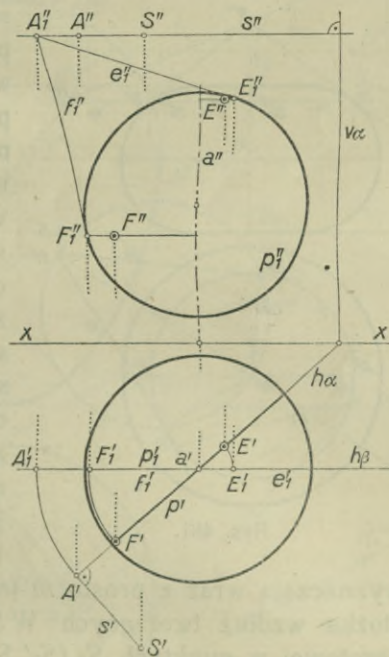


Poprowadźmy następnie z punktu  $A$  ( $A' A''$ ) styczne  $e$  ( $e' e''$ ) i  $f$  ( $f' f''$ ) do południka głównego  $p$  ( $p' p''$ ), to płaszczyzny  $\varepsilon \equiv (s, e)$  i  $\varphi \equiv (s, f)$  stykają się z powierzchnią obrotową w szukanych punktach  $E$  ( $E' E''$ ) i  $F$  ( $F' F''$ ), leżących na południku  $p$  ( $p' p''$ ).

Gdybyśmy w miejsce południka głównego przyjęli południk dowolny, leżący na płaszczyźnie  $\alpha$  (Rys. 480.), to zadanie powyższe rozwiążemy w sposób następujący: Z danego



Rys. 479.

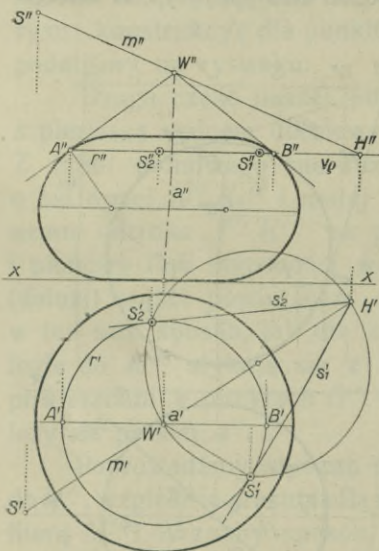


Rys. 480.

punktu  $S$  ( $S' S''$ ) poprowadzimy prostą  $s$  ( $s' s''$ ) do płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha v_\alpha$ ), a następnie obrócimy tę płaszczyznę wraz z punktem  $A$  ( $A' A''$ ), około osi powierzchni, do położenia płaszczyzny południka głównego  $\beta$ . Styczne  $e_1$  ( $e'_1 e''_1$ ) i  $f_1$  ( $f'_1 f''_1$ ), wykreślone z punktu  $A_1$  ( $A'_1 A''_1$ ) do południka głównego, stykają się z nim w punktach  $E_1$  ( $E'_1 E''_1$ ) i  $F_1$  ( $F'_1 F''_1$ ). Zapomocą obrotu wstecznego około osi  $a$  ( $a' a''$ ), wrócimy z tymi punktami na płaszczyznę  $\alpha$ , otrzymując na danym południku  $p$  ( $p' p''$ ) punkty  $E$  ( $E' E''$ ) i  $F$  ( $F' F''$ ), w których

płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej, przechodzące przez punkt  $S$ , dotykają tej powierzchni.

2. Przyjmijmy powierzchnię obrotową (Rys. 481.), a na niej równoleżnik  $r$  ( $r'$   $r''$ ), zaś zewnątrz powierzchni dowolny punkt  $S$  ( $S'$   $S''$ ). Wyznaczmy na tym równoleżniku punkty styczności płaszczyzn stycznych do powierzchni, a przechodzących przez punkt  $S$ .



Rys. 481.

W tym celu uważajmy równoleżnik  $r$  za równoleżnik stożka obrotowego, opisanego na powierzchni obrotowej. Styczne w punktach  $A'$  i  $B''$  do rzutu pionowego powierzchni przecinają prostą  $a''$  w punkcie  $W''$ , który jest rzutem pionowym wierzchołka stożka. Płaszczyzny styczne do tego stożka, przechodzące przez punkt  $S$ , wyznaczają na równoleżniku  $r$  szukane punkty  $S_1$  i  $S_2$ . Prosta  $m$ , łącząca punkt  $S$  z wierzchołkiem  $W$ , przebija płaszczyznę  $\rho$  równoleżnika  $r$  w punkcie  $H$ . Styczne  $s_1$  ( $s_1'$   $s_1''$ ) i  $s_2$  ( $s_2'$   $s_2''$ ), wykreślone z punktu  $H$  ( $H'$   $H''$ ) do równoleżnika  $r$ ,

wyznaczają wraz z prostą  $m$  ( $m'$   $m''$ ) płaszczyzny styczne do stożka wzdłuż tworzących  $WS_1$  i  $WS_2$ , a do powierzchni obrotowej w punktach  $S_1$  ( $S_1'$   $S_1''$ ) i  $S_2$  ( $S_2'$   $S_2''$ ).

3. Przystąpmy wreszcie do wyznaczenia linii styczności stożka opisanego na danej powierzchni obrotowej z dowolnego punktu  $S$  (Rys. 482.\*).

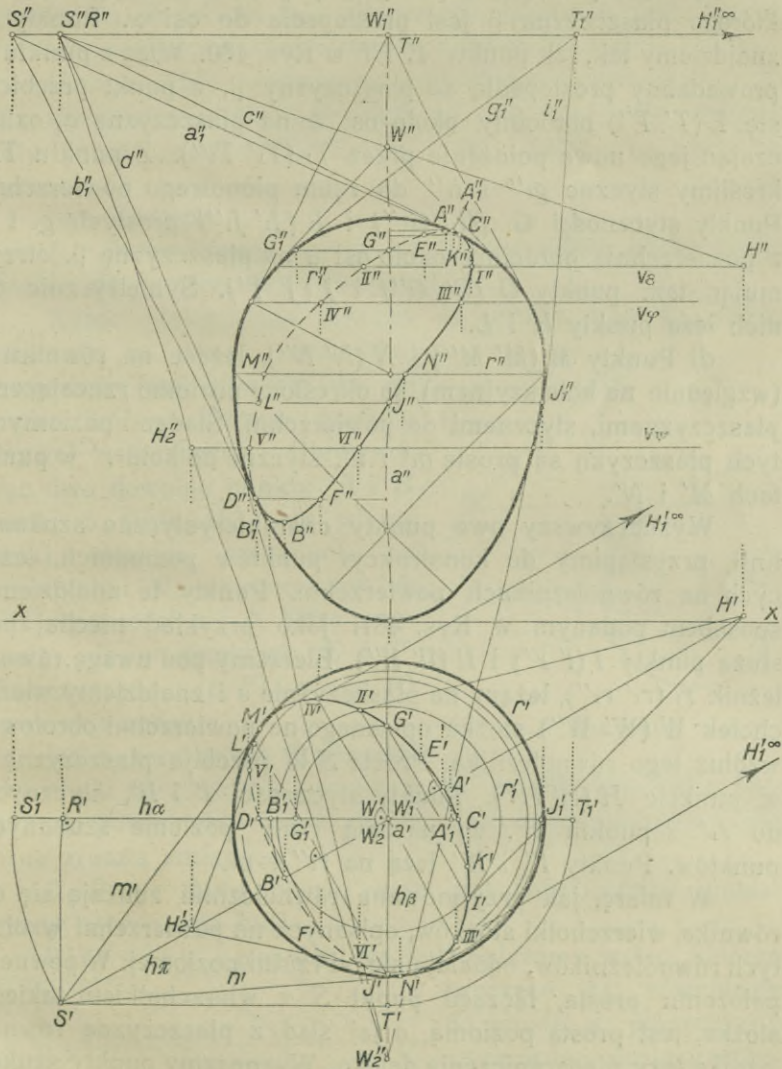
Przedewszystkiem wyznaczmy punkty charakterystyczne szukanej linii, którymi są:

a) Punkty  $A$  ( $A'$   $A''$ ) i  $B$  ( $B'$   $B''$ ), leżące na południku, którego płaszczyzna  $\pi$  przechodzi przez punkt  $S$ , a które znajdziemy jak w Rys. 480. Punkt  $A$  ( $A'$   $A''$ ) jest punktem najwyższym, a punkt  $B$  ( $B'$   $B''$ ) najniższym szukanej linii.

b) Punkty  $C$  ( $C'$   $C''$ ) i  $D$  ( $D'$   $D''$ ), leżące na południku głównym, a będące punktami styczności płaszczyzn pionowo



rzucających z powierzchnią i przechodzących przez punkt  $S$ . Rzuty pionowe tych punktów są punktami styczności styczn-



Rys. 482.\*

nych  $c''$  i  $d''$ , wykreślonych z punktu  $S'' \equiv R''$  do rzutu pionowego powierzchni. Na południku, zawierającym z płaszczyzną  $\pi$  ten sam kąt, jaki ta ostatnia tworzy z południkiem głównym,

leżą punkty  $E (E' E'')$  i  $F (F' F'')$ , przyczem ich rzuty poziome są symetrycznie położone względem prostej  $h_{\pi}$ .

c) Punkty  $G (G' G'')$  i  $J (J' J'')$  leżące na południku, którego płaszczyzna  $\beta$  jest prostopadła do osi  $x$ . Punkty te znajdziemy tak, jak punkty  $E$  i  $F$  w Rys. 480. Więc z punktu  $S$  prowadzimy prostopadłą do płaszczyzny  $\beta$ , a punkt przebicia się  $T (T' T'')$  obrócimy około osi  $a$  na płaszczyznę  $\alpha$ , oznaczając jego nowe położenie przez  $T_1 (T_1' T_1'')$ . Z punktu  $T_1''$  kreślimy styczne  $g_1''$  i  $i_1''$  do rzutu pionowego powierzchni. Punkty styczności  $G_1 (G_1' G_1'')$  i  $J_1 (J_1' J_1'')$  prostych  $g_1$  i  $i_1$  z powierzchnią obrócimy około osi  $a$  na płaszczyznę  $\beta$ , otrzymując tam punkty  $G (G' G'')$  i  $J (J' J'')$ . Symetrycznie do nich leżą punkty  $K$  i  $L$ .

d) Punkty  $M (M' M'')$  i  $N (N' N'')$ , leżące na równiku  $r$  (względnie na kole szyjnym), są określone poziomo rzucającymi płaszczyznami, stycznymi do powierzchni. Śladami poziomymi tych płaszczyzn są proste  $m'$  i  $n'$ , styczne do koła  $r'$  w punktach  $M'$  i  $N'$ .

Wyznaczywszy owe punkty charakterystyczne szukanej linii, przystąpimy do konstrukcyi punktów pośrednich, leżących na równoleżnikach powierzchni. Punkty te znajdziemy sposobem podanym w Rys. 481. Jako przykład niechaj posłużą punkty  $I (I' I'')$  i  $II (II' II'')$ . Bierzemy pod uwagę równoleżnik  $r_1 (r_1' r_1'')$ , leżący na płaszczyźnie  $\varepsilon$  i znajdziemy wierzchołek  $W (W' W'')$  stożka opisanego na powierzchni obrotowej wzdłuż tego równoleżnika. Prosta  $SW$  przebija płaszczyznę  $\varepsilon$  w punkcie  $H (H' H'')$ . Punkty styczności  $I'$  i  $II'$ , stycznych do  $r_1'$  z punktu  $H'$ , wyznaczają rzuty poziome szukanych punktów. Punkty  $I''$  i  $II''$  leżą na  $r_1'' \equiv v_{\varepsilon}$ .

W miarę, jak przyjmowane równoleżniki zbliżają się do równika, wierzchołki stożków, opisanych na powierzchni wzdłuż tych równoleżników, oddalają się od rzutni poziomej. W pewnym położeniu prosta, łącząca punkt  $S$  z wierzchołkiem takiego stożka, jest prostą poziomą, a jej ślad z płaszczyzną równoleżnika leży nieograniczenie daleko. Wyznamy punkty szukanej linii styczności, leżące na takim równoleżniku. Z punktu  $S''$  poprowadzimy prostą równoległą do osi rzutów  $x$ , a punkt przecięcia się  $W_1''$  tej prostej z prostą  $a''$  jest właśnie rzutem pionowym wierzchołka stożka, o który chodzi. Z punktu  $W_1''$  wykreślimy styczne do rzutu pionowego powierzchni, a cięciwa



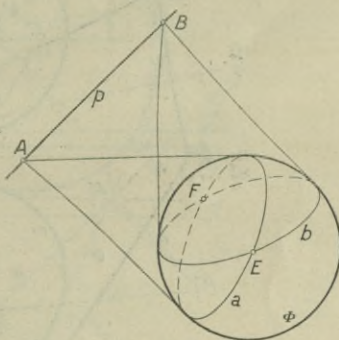
stycznosci jest śladem pionowym  $v_\varphi$  płaszczyzny równoleżnika, wzdłuż którego stożek styka się z powierzchnią. Wykreśliwszy rzut poziomy tego równoleżnika, poprowadzimy przez punkt  $W_1'$  prostą prostopadłą do prostej  $h_\pi$  i otrzymamy, jako przecięcie się jej z rzutem poziomym równoleżnika, punkty  $III'$  i  $IV'$ .

*Uwaga.* Gdy powierzchnią obrotową będzie kula, to linią stycznosci stożka opisanego na niej jest koło, którego rzuty, przez wprowadzenie trzeciej rzutni, dadzą się z łatwością wyznaczyć.

### 165. Zadania.

1. Przez daną prostą  $p$  poprowadzić płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej.

Każda płaszczyzna styczna do stożka albo do walca, opisanego na danej powierzchni obrotowej, jest styczną do tej powierzchni w jednym punkcie krzywej stycznosci. Obrawszy więc dwa dowolne punkty  $A$  i  $B$  prostej  $p$  (Rys. 483.) za wierzchołki stożków, opisanych na powierzchni  $\Phi$ , wyznaczmy ich linie stycznosci  $a$  i  $b$ , które przecinają się w punktach  $E$  i  $F$ . Płaszczyzny  $\varepsilon \equiv (p, E)$  i  $\varphi \equiv (p, F)$  rozwiązują zadanie.



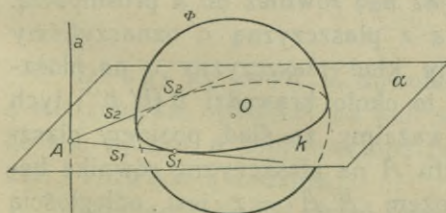
Rys. 483.

Jeślibyśmy punkt  $B$  przyjęli jako punkt niewłaściwy prostej  $p$ , to otrzymamy walec opisany na powierzchni obrotowej  $\Phi$ , a rozwiązanie zadania nie dozna zresztą zmiany.

2. Przez daną prostą  $a$  ( $a'$   $a''$ ) poprowadzić płaszczyzny styczne do kuli.

Pierwszy sposób. Na kuli opiszemy walec, którego

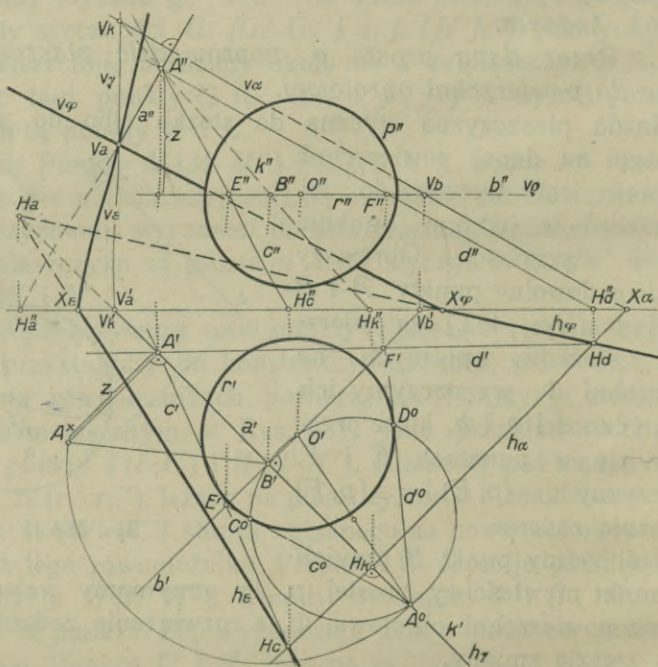
tworzące są równoległe do prostej  $a$ ; płaszczyzny styczne do walca, a przechodzące przez prostą  $a$ , rozwiązują zadanie. Aby mógł poprowadzić płaszczyzny styczne do walca, bez poprzedniego wyznaczenia



Rys. 484.

jego śladu, poprowadzimy przez środek kuli płaszczyznę  $\alpha$  prostopadłą do prostej  $a$  (Rys. 484.), a przez punkt przecięcia się  $A$  tej prostej z płaszczyzną  $\alpha$  styczne  $s_1$  i  $s_2$  do koła  $k$ . Płaszczyzny przechodzące przez prostą  $a$  i styczne  $s_1$  i  $s_2$  rozwiązują zadanie, które, jak widzimy, posiada dwa rozwiązania.

Niechaj punkt  $O$  ( $O'$   $O''$ ) jest środkiem kuli, a prosta  $a$  ( $a'$   $a''$ ) daną prostą (Rys. 485.). Przez środek kuli poprowadziliśmy prostą poziomą  $b$  ( $b'$   $b''$ ) prostopadłą do  $a$  ( $a'$   $a''$ ),

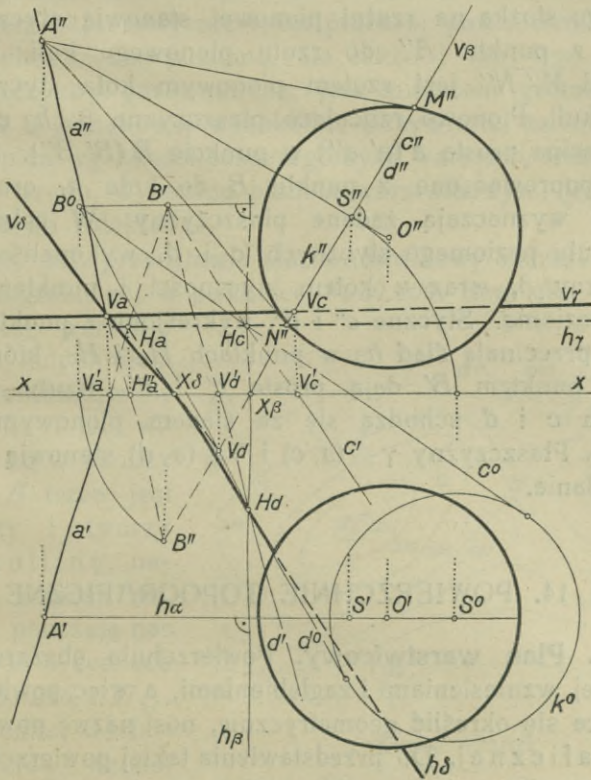


Rys. 485.

a przez nią płaszczyznę  $\alpha$  ( $h_\alpha$   $v_\alpha$ ) również do  $a$  prostopadłą. Punkt przecięcia się prostej  $a$  z płaszczyzną  $\alpha$  oznaczyliśmy literą  $A$  ( $A'$   $A''$ ). Wykonajmy kład płaszczyzny  $\alpha$  na płaszczyznę  $\rho$  równika  $r$  kuli, a to około krawędzi  $b$  ( $b'$   $b''$ ) tych obu płaszczyzn. Prostą  $a'$  uważajmy za ślad poziomy płaszczyzny obrotu, to kład punktu  $A$  na płaszczyznę równika będzie w punkcie  $A^x$ , przyczem  $\overline{A'A^x} = z$  jest odległością punktu  $A'$  od prostej  $b'$ , równą odległości punktu  $A$  od



płaszczyzny  $\rho$ . Po dokonanych obrocie punkt  $A$  zajmie położenie  $A^0$ . Styczne  $c^0$  i  $d^0$ , wykreślone z punktu  $A^0$  do koła  $r'$ , przecinają prostą  $b$  ( $b' b''$ ) w punktach  $E$  ( $E' E''$ ) i  $F$  ( $F' F''$ ), które połączone z punktem  $A$  ( $A' A''$ ) dają proste  $c$  ( $c' c''$ ) i  $d$  ( $d' d''$ ). Płaszczyzna  $\varepsilon$  ( $h_\varepsilon v_\varepsilon$ ), wyznaczona prostymi  $a$  ( $a' a''$ ) i  $c$  ( $c' c''$ ) i płaszczyzna  $\varphi$  ( $h_\varphi v_\varphi$ ), przechodząca przez proste  $a$  ( $a' a''$ ) i  $d$  ( $d' d''$ ), rozwiązują zadanie.



Rys. 486.

Drugi sposób. Z dowolnego punktu prostej  $a$ , jako z wierzchołka, opiszemy na kuli stożek. Płaszczyzny styczne do tego stożka, a poprowadzone przez prostą  $a$ , są styczne do kuli i rozwiązują zadanie.

Najdogodniej jest obracać punkt na prostej  $a$  tak, aby oś stożka była równoległą do jednej z rzutni, gdyż wówczas rzut

koła styczności stożka z kulą na płaszczyznę równoległą do osi jest linią prostą.

Niechaj punkt  $O$  ( $O' O''$ ) jest środkiem kuli, a prosta  $a$  ( $a' a''$ ) tą prostą, przez którą poprowadzić mamy płaszczyznę styczną do kuli (Rys. 486.). Poprowadźmy przez środek kuli czołową płaszczyznę  $\alpha$  i wyznaczmy punkt  $A$  ( $A' A''$ ), w którym  $\alpha$  przecina prostą  $a$  ( $a' a''$ ). Uważajmy punkt  $A$  za wierzchołek, a prostą czołową  $AO$  za oś stożka opisanego na kuli. Zarys tego stożka na rzutni pionowej stanowią styczne, wykreślone z punktu  $A''$  do rzutu pionowego kuli. Cięciwa styczności  $\overline{M'' N''}$  jest rzutem pionowym koła styczności  $k$  stożka i kuli. Pionowo rzucająca płaszczyzna  $\beta$  ( $h_\beta v_\beta$ ) tego koła, przecina prostą  $a$  ( $a' a''$ ) w punkcie  $B$  ( $B' B''$ ). Styczne  $c$  i  $d$ , poprowadzone z punktu  $B$  do koła  $k$ , oraz dana prosta  $a$  wyznaczają żądane płaszczyzny. W celu otrzymania rzutu poziomego stycznych  $c$  i  $d$ , wykonaliśmy kład płaszczyzny  $\beta$ , wraz z kołem styczności i punktem  $B$ , na rzutnię poziomą. Styczne  $c^0$  i  $d^0$ , wykreślone z punktu  $B^0$  do koła  $k^0$ , przecinają ślad  $h_\beta$  w punktach  $H_c$  i  $H_d$ , które połączone z punktem  $B'$  dają proste  $c'$  i  $d'$ . Rzuty pionowe stycznych  $c$  i  $d$  schodzą się ze śladem pionowym płaszczyzny  $\beta$ . Płaszczyzny  $\gamma \equiv (a, c)$  i  $\delta \equiv (a, d)$  stanowią rozwiązanie zadania.

## § 14. POWIERZCHNIE TOPOGRAFICZNE

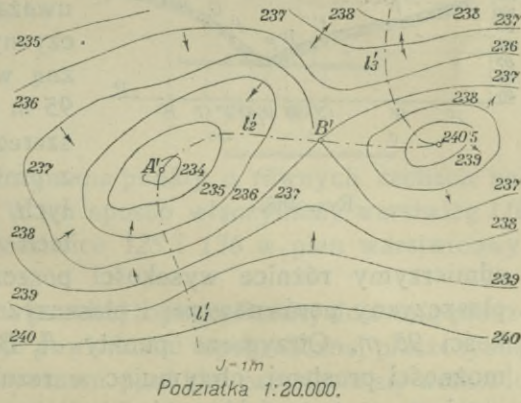
**166. Plan warstwicowy.** Powierzchnia obszaru ziemi wraz z jej wzniesieniami i zagłębieniami, a więc powierzchnia nie dająca się określić geometrycznie, nosi nazwę powierzchni topograficznej. Do przedstawienia takiej powierzchni używamy z reguły metody rzutów cechowanych; zarówno metoda Monge'a, jak i rzut ukośny nie byłyby tu celowe i stąd nie wchodzi w rachubę.

Celem otrzymania geometrycznego obszaru powierzchni topograficznej, weźmy pod uwagę obszar ziemi, znajdujący się nad morzem. Przybrzeżną część spokojnego zwierciadła morza uważajmy za płaszczyznę, którą przyjmijmy za płaszczyznę porównawczą (rzutów). Płaszczyzny warstwowe, przyjęte w pewnych równych odstępach od płaszczyzny porównawczej,



przetną uważany obszar ziemi wzdłuż linii ciągłych, które nazywamy warstwicami powierzchni topograficznej. Oznaczmy każdą z warstw liczbą, wyrażającą odległość płaszczyzny, na której leży, od płaszczyzny porównawczej w metrach i rzućmy je wszystkie prostopadle na płaszczyznę porównawczą, to otrzymane tam linie krzywe, zaopatrzone w cechy, tworzą t. zw. plan warstwicowy, charakteryzujący dany obszar powierzchni topograficznej. Każda z warstw, któremu to mianem określamy nie tylko przekrój powierzchni topograficznej płaszczyzną poziomą, ale także i rzut tego przekroju na płaszczyznę porównawczą, jest miejscem geometrycznym punktów o jednakowej wysokości. Oczywiście, że im mniejszą jest różnica wysokości poszczególnych warstw, tem charakterystyka terenu, wyrażona planem warstwicowym, jest bardziej szczegółowa i dokładna.

Rys. 487. przedstawia plan warstwicowy obszaru powierzchni topograficznej w podziałce 1:20.000. Rzut oka na cechy i przebieg warstw pozwala natychmiast na zorientowanie się w terenie. I tak widzimy, że w okolicy punktu *A* teren jest najniższy i tworzy t. zw. kotlinę, następnie wznosi się, o czym pouczają nas warstwicę o cechach 234, 235, 236, 237...



Rys. 487.

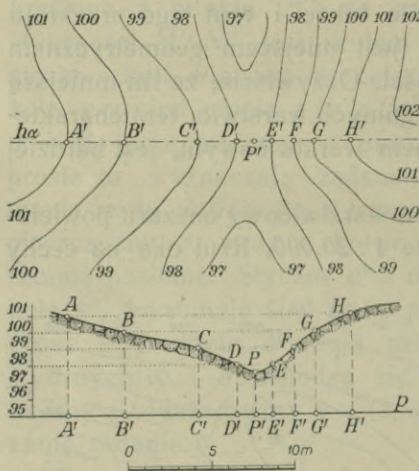
W kierunku wschodnim teren wznosi się dalej i tworzy szczyt o wysokości 240.5 m; podobnie podnosi się teren ku południowi, a zaś ku północy spada.

Wysokość warstw, t. j. odległość dwóch uważanych płaszczyzn warstwowych, przyjmujemy zależnie od podziałki rysunku i celu, jakiemu rysunek ma służyć.

Kształt obszaru powierzchni topograficznej, zawarty między dwiema warstwicami nie jest bliżej określony. Przyjmujemy

jednak, że w tym obszarze powierzchnia nie zawiera żadnych szczególności i że stanowi taką powierzchnię prostoliniową, której tworzące są w przybliżeniu prostopadłe równocześnie do obu warstw.

**167. Przekrój powierzchni topograficznej płaszczyzną rzucającą.** Weźmy pod uwagę powierzchnię topograficzną (Rys. 488.) i przetnijmy ją poziomo rzucającą płaszczyzną  $\alpha$ . Ponieważ rzut poziomy linii przekroju schodzi się ze śladem



Rys. 488.

poziomym  $h_\alpha$  płaszczyzny siecznej, więc wykonać musimy kład tej płaszczyzny, wraz z linią przekroju, na jedną z płaszczyzn warstwowych i (aby przejrzystości rysunku nie zaciemniać), przenosimy ten kład w inne miejsce na płaszczyźnie rysunkowej. Przyjętą prostą  $p$  uważajmy za krawędź płaszczyzny siecznej z płaszczyzną warstwową o wysokości 95 m i przenieśmy na nią szereg punktów  $A', B', C', \dots$  z prostej  $h_\alpha$ . Na prostopadłych, wykreślonych w punktach  $A', B', C', \dots$  prostej  $p$ , odmierzymy różnice wysokości poszczególnych punktów od płaszczyzny porównawczej i płaszczyzny warstwowej o wysokości 95 m. Otrzymane punkty  $A, B, C, \dots$  łączymy o ile możliwości prostymi, otrzymując w rezultacie linię ciągłą, stanowiącą w przybliżeniu żądany przekrój, czyli, jak go w odniesieniu do powierzchni topograficznej nazywamy, profil poprzeczny.

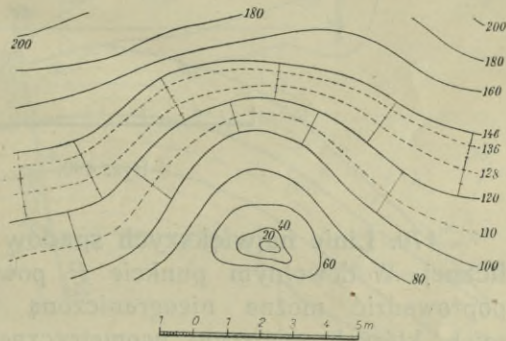
Jest rzeczą oczywistą, że im gęściej występują warstwy i im mniejszą jest ich różnica wysokości, tem dokładniejszą i bardziej do prawdy zbliżoną będzie otrzymana linia przekroju (profilu). Między punktami  $D$  i  $E$  kształt powierzchni nie jest znany, to jednak pewne, że między obu tymi punktami znajduje się punkt najniższy linii przekroju, od którego począwszy linia ta, a więc i teren, zaczyna się wznosić ku



punktowi  $E$ . Punkt  $P'$  przyjmujemy w środku odcinka  $C'D'$ , a wysokość punktu  $P$ , a więc i jego cechę, znajdziemy również tylko w przybliżeniu z profilu poprzecznego, przy założeniu, że od punktu  $C$  ku punktowi  $P$  teren spada w tym samym stosunku, w jakim następnie podnosi się ku punktowi  $D$ .

**168. Uzupełnienie planu warstwicowego.** Wrysowanie warstwic pośrednich w dany plan warstwicowy nazywamy uzupełnieniem tego planu. Zadanie polega na wyznaczeniu rzutów punktów o równych, żądanych cechach, leżących na powierzchni topograficznej, między dwiema płaszczyznami warstwowymi.

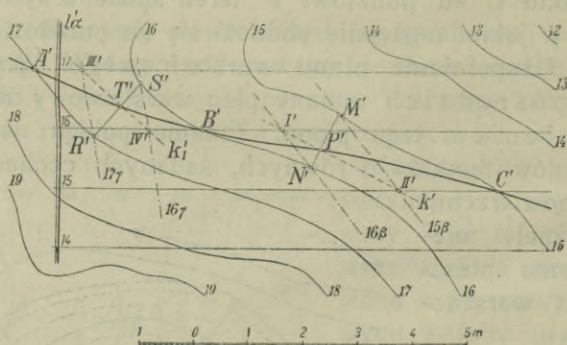
Uwzględniając końcową uwagę w ust. 166., nakreślimy w pewnych odstępach rzuty tworzących powierzchni topograficznej, ograniczonej dwiema warstwicami, podzielimy je w żądanym stosunku, a otrzymane punkty o równych cechach połączymy linią ciągłą. W ten sposób włączyliśmy warstwicę 110 między 100 i 120 i warstwicę 128 i 136 w plan warstwicowy, podany na Rys. 489.



Rys. 489.

**169. Przekrój powierzchni topograficznej dowolną płaszczyzną.** Linia przekroju powierzchni topograficznej płaszczyzną jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się warstwic tej powierzchni z warstwicami płaszczyzny siecznej o tych samych cechach. Tym sposobem otrzymaliśmy punkty  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  w Rys. 490. Chcąc otrzymać punkty pośrednie, określające dokładniej przebieg linii przekroju powierzchni płaszczyzną  $\alpha$ , obieramy na powierzchni proste, prostopadłe w przybliżeniu do dwóch sąsiednich warstwic i szukamy punktów, w których proste te przebijają płaszczyznę sieczną. Tak np. prosta  $MN$  przebija płaszczyznę  $\alpha$  w punkcie  $P$ , prosta  $RS$  w punkcie  $T$ .

Punkt przecięcia się prostej z powierzchnią topograficzną znajdziemy przy pomocy przekroju powierzchni dowolną płaszczyzną, przechodzącą przez daną prostą.



Rys. 490.

**170. Linie największych spadów powierzchni topograficznej.** W dowolnym punkcie  $P$  powierzchni topograficznej poprowadzić można nieograniczoną ilość prostych stycznych, których miejscem geometrycznym jest płaszczyzna  $\pi$ , styczna w punkcie  $P$  do powierzchni (patrz ust. 126.). Nachyleniem płaszczyzny  $\pi$ , a więc nachyleniem jej linii największego spadu  $l_\pi$ , określamy nachylenie powierzchni topograficznej w punkcie  $P$ . Linia  $l_\pi$  posiada największe nachylenie ze wszystkich stycznych, poprowadzonych do powierzchni w punkcie  $P$ .

Linie skośne, leżące na powierzchni topograficznej, których nachylenie w każdym punkcie jest większe, aniżeli nachylenie każdej innej linii, przechodzącej przez ten punkt, nazywamy linią największego spadku, lub krócej linią spadku tej powierzchni. Dodajmy, że nachyleniem linii krzywej w pewnym punkcie nazywamy nachylenie stycznej, poprowadzonej w tym punkcie do tej krzywej. Idąc więc od pewnego punktu powierzchni topograficznej w kierunku najbardziej stromej stycznej do punktu sąsiedniego, z tego punktu znowu w kierunku najbardziej stromej stycznej do punktu sąsiedniego i t. d., przebiegniemy linią największego spadku powierzchni. Linia ta jest prostopadłą do warstwicy, przechodzących przez jej punkty. Na Rys. 487. podaliśmy rzuty trzech linii naj-

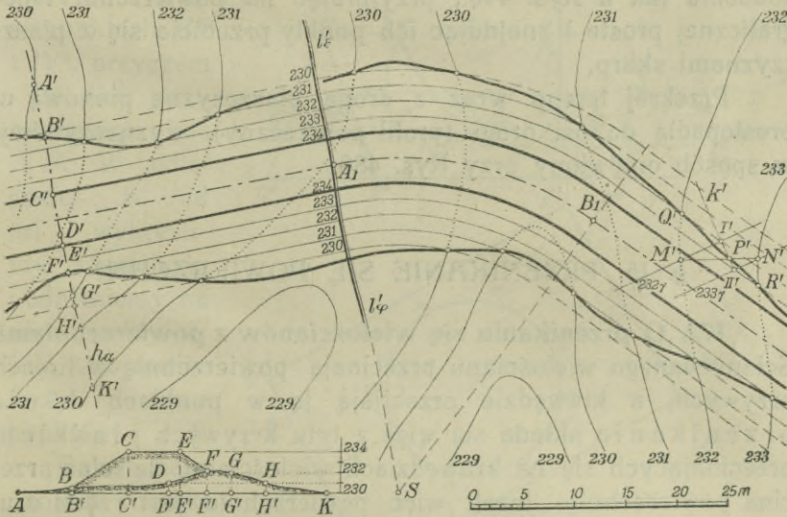


większego spadku, a mianowicie  $l'_1$ ,  $l'_2$  i  $l'_3$ , które określają także kierunek ścieku wody po terenie.

### 171. Zadanie.

Dany jest plan warstwiczny terenu, przez który przebiegać ma poziomo droga w wysokości 234 m. Oś drogi i jej szerokość są dane; wyznaczyć przecięcie się skarp bocznych drogi z terenem i jeden profil poprzeczny.

Z Rys. 491. widzimy, że oś drogi do punktu  $A_1$  jest linią prostą, następnie łukiem koła o środku  $S$  aż do punktu  $B_1$ ,



Rys. 491.

a dalej znowu prostą. Uwzględniając szerokość drogi równą 5 m, wykreślimy proste ograniczające jej koronę i przystąpimy do wyznaczenia płaszczyzn skarp bocznych. Ponieważ korona drogi leżeć ma w wysokości 234 m, a więc wyżej, aniżeli punkty terenu, więc droga wraz ze skarpami zbudowana być musi z ziemi nawiezionej, czyli jak technik się wyrazi: „droga leżeć będzie w nasypie“. Skarpy, którym damy nachylenie  $v = 2 : 3$ , są dla części drogi biegnących prosto płaszczyznami, zaś dla części drogi leżącej w łuku stożkami obrotowymi, których tworzące mają nachylenie  $2 : 3$ , a których rzuty wierzchołków leżą w punkcie  $S$ .

Przyjąwszy linie spadów  $l_e'$  i  $l_q'$  płaszczyzn skarp, zestopniujemy je modułem  $3/2$  i wykreślimy warstwicę, a także warstwicę stożków skarpowych i łączących się z nimi dalszych warstw płaszczyzn skarpowych. Warstwicę stożków utworzą pęk łuków kół o wspólnym środku  $S$ . Warstwicę terenu przecinają się z równowartościowymi warstwicami płaszczyzn, względnie stożków skarpowych w punktach, których miejscem geometrycznym są szukane linie przekroju skarp z terenem. Potrzebne punkty pośrednie tych linii przekroju znajdziemy, podobnie jak w Rys. 490., przyjmując na powierzchni topograficznej proste i znajdując ich punkty przebicia się z płaszczyznami skarp.

Przekrój terenu wraz z drogą płaszczyzną pionową  $\alpha$ , prostopadłą do osi drogi (profil poprzeczny), wyznaczaliśmy w sposób omówiony przy Rys. 488.

## § 15. PRZENIKANIE SIĘ POWIERZCHNI

### 172. O przenikaniu się wielościanów z powierzchniami.

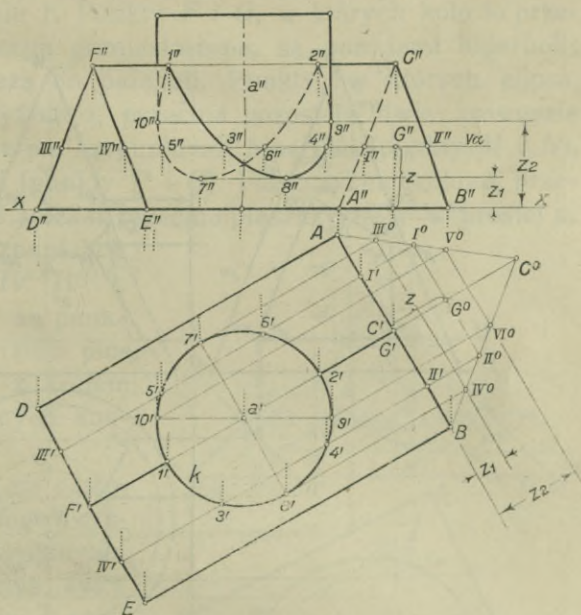
Ściany danego wielościanu przecinają powierzchnię w liniach krzywych, a krawędzie przebijają ją w punktach. Linia przenikania składa się więc z tylu krzywych płaskich, przecinających się na krawędziach wielościanu, ile ścian przecina powierzchnię. Jeżeli więc powierzchnia jest rzędu drugiego, to na przenikanie się jej z jakimkolwiek bądź wielościanem składa się szereg krzywych rzędu drugiego. Będą to zazwyczaj tylko łuki, części tych krzywych.

*Przykład przenikania się walca obrotowego z prostym trójściennym graniastostupem* podaje Rys. 492. Rzut poziomy linii przenikania schodzi się ze śladem poziomym walca. Ściana boczna  $BCE F$ , podobnie jak ściana  $ACDF$ , przecina walec w części elipsy. W celu wyznaczenia rzutu pionowego tych części elips, znajdziemy przedewszystkiem punkty  $1''$  i  $2''$ , odnosząc punkty  $1'$  i  $2'$  na prostą  $C''F''$ . Następnie weźmy pod uwagę poziomą płaszczyznę  $\alpha$ , która przetnie graniastostup w prostokącie  $II III IV$ . Punkty  $3'$ ,  $4'$ ,  $5'$  i  $6'$  odniesiemy na  $v_\alpha$ , otrzymując rzuty pionowe  $3''$ ,  $4''$ ,  $5''$  i  $6''$  czterech punktów linii przenikania. Jeżeli kąt, jaki prosta  $AB$  zawiera z osią rzutów, zbliża się do kąta prostego, to dokładne otrzy-



manie punktów  $I'$  i  $II'$ , nie jest możliwe. W tym wypadku wykonamy kład  $ABC^0$  ściany  $ABC$  na rzutnię poziomą, odmierzymy wysokość z płaszczyzny  $\alpha$  i przez punkt  $G_0$  poprowadzimy prostą  $I^0 II^0$  równoległą do  $AB$ . Prostopadłe, wykreślone przez punkty  $I^0$  i  $II^0$  do  $AB$ , przecinają ją w punktach  $I'$  i  $II'$ . Najniższymi położonymi punktami linii przenikania są punkty 7 i 8, których rzuty poziome są punktami styczności stycznych do koła  $k$ , a równoległych do  $C'F'$ . Styczne te przecinają boki  $AC^0$  i  $BC^0$  w punktach  $III^0$  i  $IV^0$ , przyczem  $III^0 IV^0$  jest równoległe do  $AB$ . W odległości  $Z_1$  od osi  $x$  wykreślimy równoległą i odniesiemy na nią punkty 7' i 8', otrzymując rzuty pionowe punktów 7 i 8.

Dalszą parę punktów charakterystycznych szukanych linii stanowią ich punkty styczności z tworzącymi konturowymi walca. Jeżeli przez  $a'$  poprowadzimy równoległą do osi  $x$ , to punkty 9' i 10', w których prosta ta przecina koło  $k$ , są rzutami poziomymi szukanych punktów. Ich wysokość  $Z_2$ , a więc i rzuty pionowe, znajdziemy przy pomocy rzutu bocznego, względnie kładu ściany  $ABC^0$ .

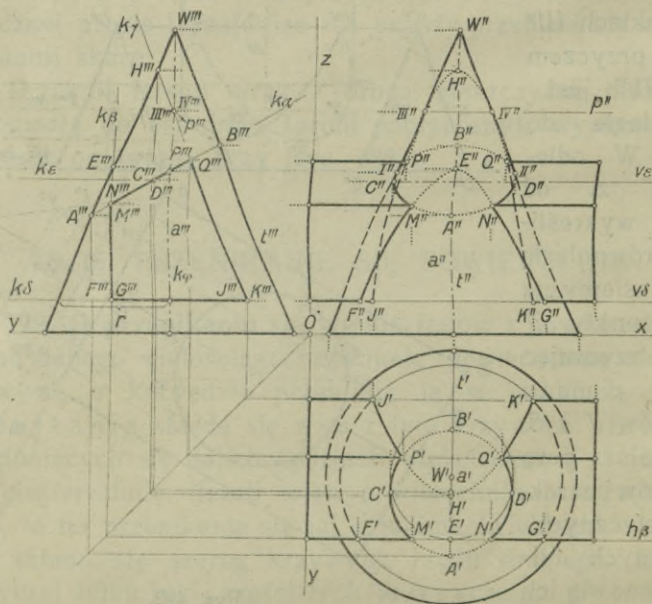


Rys. 492.

Dalszą parę punktów charakterystycznych szukanych linii stanowią ich punkty styczności z tworzącymi konturowymi walca. Jeżeli przez  $a'$  poprowadzimy równoległą do osi  $x$ , to punkty 9' i 10', w których prosta ta przecina koło  $k$ , są rzutami poziomymi szukanych punktów. Ich wysokość  $Z_2$ , a więc i rzuty pionowe, znajdziemy przy pomocy rzutu bocznego, względnie kładu ściany  $ABC^0$ .

*Przenikanie się prostego, czworościennego graniastostupa ze stożkiem obrotowym przedstawia Rys. 493. Krawędzie boczne graniastostupa są równoległe do osi  $x$ , a jego ściany, których płaszczyzny oznaczyliśmy literami  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$  są tak dobrane, że pierwsza ( $\alpha$ ) jest równoległa do osi  $x$*

i przecina wszystkie tworzące stożka, druga ( $\beta$ ) jest płaszczyzną czołową, a więc równoległą do dwóch tworzących stożka, płaszczyzna  $\gamma$  jest równoległą do tworzącej  $t$  ( $t'$   $t''$   $t'''$ ) stożka, a wreszcie płaszczyzna  $\delta$  jest poziomą i prostopadłą do osi stożka. Linia przenikania graniastostupa ze stożkiem składać się więc będzie z czterech krzywych stożkowych, a mianowicie: z elipsy, która powstanie z przekroju stożka płaszczyzną  $\alpha$ , z hiperboli, wzdłuż której płaszczyzna  $\beta$  przecina stożek, z paraboli, która leżeć będzie na płaszczyźnie  $\gamma$



Rys. 493.

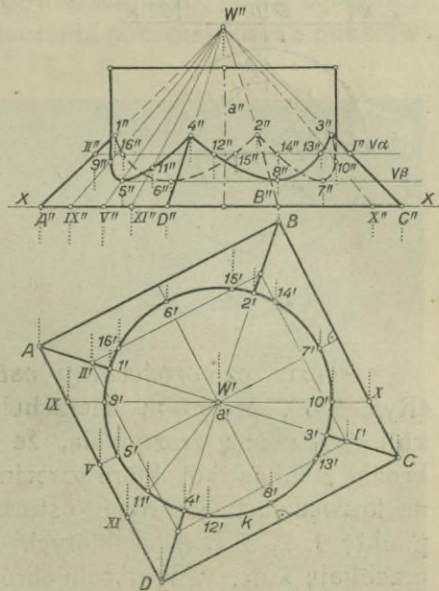
i z koła, wzdłuż którego płaszczyzna  $\delta$  przecina stożek. Linie te przecinają się w punktach, leżących na krawędziach bocznych graniastostupa.

Przez bezpośrednie odniesienie punktów  $A'''$  i  $B'''$  na rzutnię poziomą i pionową otrzymamy oś  $\overline{A'B'}$  i oś  $\overline{A''B''}$  elipsy, będących rzutami elipsy, wzdłuż której płaszczyzna  $\alpha$  przecina stożek. Drugie osi tych elips otrzymamy, jeśli przez środek odcinka  $\overline{AB}$  poprowadzimy płaszczyznę poziomą  $\varepsilon$  i wyznaczmy koło przekroju stożka tą płaszczyzną. W rzucie



poziomym, otrzymamy punkty  $C'$  i  $D'$ , ograniczające drugą oś w rzucie poziomym. Punkty  $C''$  i  $D''$  są wierzchołkami elipsy w rzucie pionowym. Płaszczyzna  $\beta$ , jako równoległa do dwóch tworzących stożka, przecina go wzdłuż hiperboli o wierzchołku  $E$  ( $E'$   $E''$   $E'''$ ). Rzut pionowy tej hiperboli przedstawi ją w prawdziwym kształcie i wielkości, a rzut pionowy tworzących konturowych stanowi jej asymptoty. Płaszczyzna  $\gamma$ , równoległa do tworzącej  $t$  stożka, przecina go wzdłuż paraboli o wierzchołku  $H$  ( $H'$   $H''$   $H'''$ ), a wreszcie płaszczyzna  $\delta$  przetnie stożek w kole o promieniu  $r$ . Punkty  $F$  i  $G$ , w których koło to przecina krawędź boczną graniastostupa, są punktami hiperboli; punkty  $I$  i  $K$  należą do paraboli. Punkty, w których elipsa, leżąca na płaszczyźnie  $\alpha$ , przecina pozostałe dwie krawędzie boczne graniastostupa, są punktami hiperboli (punkty  $M$  i  $N$ ), względnie paraboli (punkty  $P$  i  $Q$ ). Płaszczyzna czołowa, przechodząca przez oś stożka, przecina płaszczyznę  $\gamma$  w prostej  $p$ , a parabolę w punktach  $III$  ( $III''$   $III'''$ ) i  $IV$  ( $IV''$   $IV'''$ ). Punkty  $III''$  i  $IV''$  są punktami styczności rzutu pionowego paraboli z rzutem pionowym tworzących konturowych stożka.

*Przenikanie się czworobocznego, prostego ostrostupa z walcem obrotowym, o osi pionowej (Rys. 494.), składać się będzie z czterech łuków elips, przecinających się w punktach 1 ( $1'$   $1''$ ), 2 ( $2'$   $2''$ ), 3 ( $3'$   $3''$ ) i 4 ( $4'$   $4''$ ), leżących na krawędziach bocznych ostrostupa. Nie wyznaczaliśmy osi, ani też średnic sprzężonych tych elips, lecz poszczególne ich punkty. W tym*

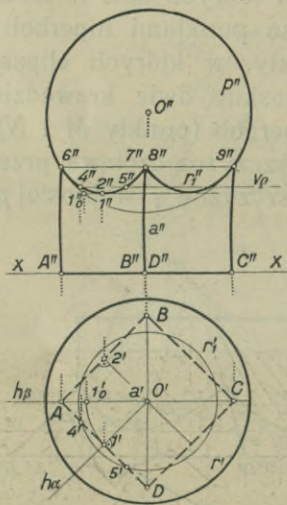


Rys. 494.

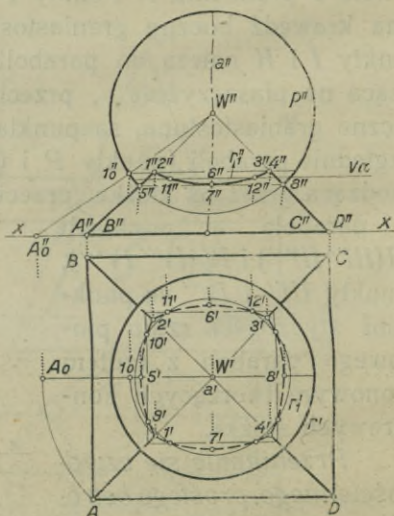
celu obieraliśmy na ścianach ostrostupa proste, przechodzące przez wierzchołek  $W$  ( $W'$   $W''$ ) i szukali ich punktów przebicia się z walcem. Ponieważ walec jest obrotowy i rzuca w swój

ślad poziomy wszystkie znajdujące się na nim punkty, więc zadanie przedstawia się rysunkowo bardzo prosto.

Przenikanie się czworościennego, prostego graniastostupa z kulą widzimy na Rys. 495. Linia przenikania składa się z czterech przystających części kół, leżących na płaszczyznach poziomo rzucających i przecinających się na krawędziach bocznych graniastostupa. Sposób wyznaczenia rzutu pionowego poszczególnych punktów tych kół tłómaczy dostatecznie wyraźnie rysunek.



Rys. 495.



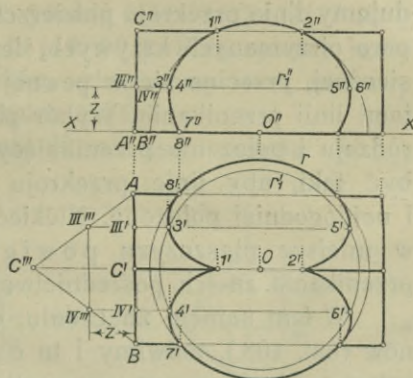
Rys. 496.

Prosty czworościenny ostrosłup przenika się z kulą (Rys. 496.), przyczem wierzchołek ostrosłupa leży w środku kuli. Jest rzeczą zrozumiałą, że linia przenikania składać się będzie z łuków kół, które przecinają się w punktach, leżących na krawędziach bocznych ostrosłupa. Najpierw wyznaczmy punkty 1, 2, 3 i 4, w których krawędzie boczne ostrosłupa przebijają kulę. W tym celu obrócimy krawędź  $\overline{AW}$  około osi pionowej, przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa, do położenia równoległego względem rzutni pionowej. Prosta  $\overline{A_0W}$  przebija kulę w punkcie  $1_0$  ( $1_0' 1_0''$ ), z którym wrócimy na krawędź  $\overline{AW}$ , otrzymując szukany punkt 1 ( $1' 1''$ ). Punkty 2, 3 i 4 mają tę samą wysokość, co punkt 1. Z kolei otrzy-



mamy punkty 5, 6, 7 i 8. Punkty pośrednie linii przenikania otrzymamy przy pomocy przekrojów kuli i ostrosłupa płaszczycznymi poziomymi.

Rys. 497. podaje przenikanie się prostego graniastostupa trójściennego z półkulą, leżącą wzdłuż równika na rzutni poziomej. Linia przenikania składa się z łuków dwóch kół przecinających się w punktach 1 (1' 1'') i 2 (2' 2''). Do wyznaczenia punktów linii przenikania użyto rzutu bocznego.



Rys. 497.

173. O przenikaniu się powierzchni. Linia przenikania się dwóch powierzchni, t. j. miejsce geometryczne punktów, leżących równocześnie na obu powierzchniach, jest w ogólności krzywą skośną. Celem wyznaczenia poszczególnych punktów



Rys. 498. Relektarz w klasztorze Benedyktynck w Sandomierzu

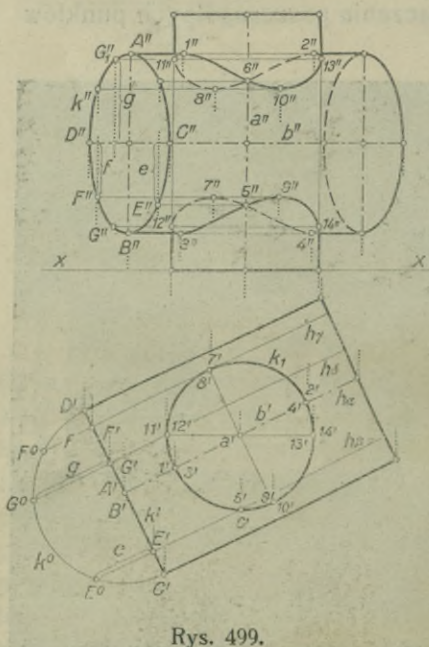
(Ze zbiorów prof. dr. Jana Sas Zubrzyckiego)

tej linii, przecinamy obie powierzchnie płaszczyznami i znajdujemy linie przekroju powierzchni temi płaszczyznami. Każda para otrzymanych krzywych, leżących na jednej płaszczyźnie siecznej, przecina się w pewnej ilości punktów, które są punktami linii przenikania. Wybór płaszczyzn siecznych zależy od rodzaju i położenia przenikających się powierzchni i winien być taki, aby linie przekroju były rysunkowo najprostsze i najdogodniej położone. Niekiedy okaże się korzystniej użycie w miejsce płaszczyzn powierzchni i wyznaczenie linii przenikania za ich pośrednictwem.

W tem samym znaczeniu, co przy przenikaniu wielościannów (ust. 108.), mówimy i tu o przenikaniu częściowem i zupełnem. W pierwszym przypadku linia przenikania jest krzywą ciągłą, w drugim składa się z części (gałęzi).

#### 174. Przykłady przenikania się powierzchni.

a) *Przenikanie się dwóch walców obrotowych przedstawia Rys. 499.* Rzut poziomy linii przenikania schodzi się



Rys. 499.

z kołem  $k_1$ . Poziomo rzucająca płaszczyzna  $\alpha$ , przechodząca przez osi obu walców, przecina każdy z nich wzdłuż dwóch tworzących, względnie w prostokącie. Punkty 1 ( $1' 1''$ ), 2 ( $2' 2''$ ), 3 ( $3' 3''$ ) i 4 ( $4' 4''$ ), w których tworzące te przecinają się, są punktami linii przenikania. Płaszczyzna  $\beta // \alpha$  przecina walec o osi poziomej  $b$  ( $b' b''$ ) wzdłuż dwóch tworzących, których rzut pionowy oddalony jest o odcinek  $e$  od prostej  $b''$ . Tworzące te przecinają jedną z dwóch prostych, wzdłuż których płaszczyzna  $\beta$  przecina walec, w punktach 5 ( $5' 5''$ ) i 6 ( $6' 6''$ ) linii przenikania.

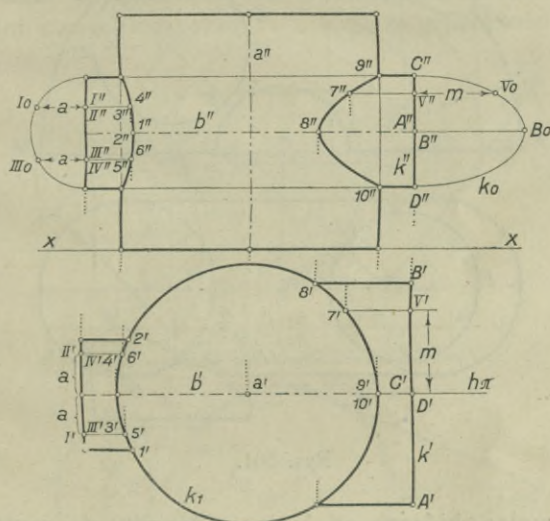
Przy pomocy płaszczyzny  $\gamma // \alpha$ , a stycznej do walca o osi  $a$ , otrzymaliśmy punkty 7 ( $7' 7''$ ) i 8 ( $8' 8''$ ). Wyznaczywszy



symetrycznie względem poprzednich położone punkty  $9(9' 9'')$  i  $10(10' 10'')$ , znaleźliśmy jeszcze punkty  $11(11' 11'')$  i  $12(12' 12'')$ , a także punkty  $13(13' 13'')$  i  $14(14' 14'')$ . Połączywszy rzuty pionowe wyznaczonych punktów, otrzymamy rzut pionowy linii przenikania, złożonej z dwóch części.

b) Dalszy przykład przenikania się walców podaje Rys. 500., gdzie

walec obrotowy o osi pionowej przenika się z jednej strony z walcem obrotowym, a z drugiej z walcem eliptycznym. Linie przenikania wyznaczono przy pomocy przekrojów walców płaszczyznami poziomymi, o czym dostatecznie jasno poucza nas rysunek. Przykłady przenikań walców w budownictwie stanowią sklepienia. Zdjęcia fotograficzne dwóch z nich podają rysunki 498. i 505.

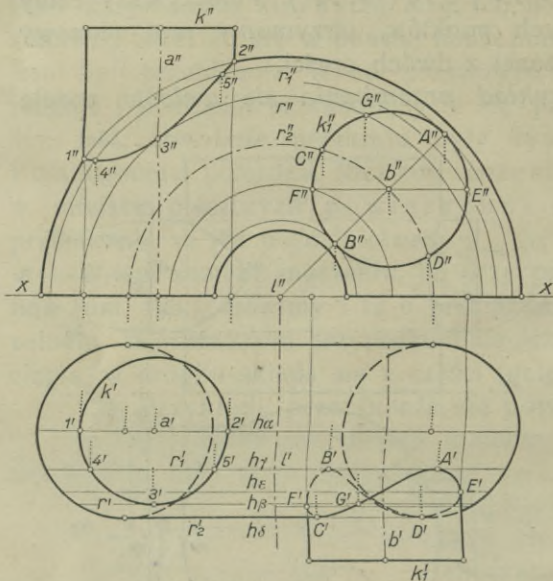


Rys. 500.

c) Przenikanie się powierzchni pierścieniowej z walcami obrotowymi widzimy na Rys. 501. Oś powierzchni pierścieniowej leży na rzutni poziomej i jest prostopadłą do rzutni pionowej. Płaszczyzna równikowa  $\alpha$  jest płaszczyzną czołową i zawiera oś  $a(a' a'')$  jednego z walców. Poszczególne punkty linii przenikania wyznaczaliśmy przy pomocy przekrojów przenikających się powierzchni płaszczyznami czołowymi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  i  $\epsilon$ .

W szczególności płaszczyzna równikowa  $\alpha$  przecina walec wzdłuż tworzących konturowych, a te przecinają równik w punktach  $1(1' 1'')$  i  $2(2' 2'')$  szukanej linii przenikania. Płaszczyzna czołowa  $\beta$ , styczna do walca, przecina pierścień wzdłuż koła  $r(r' r'')$ . Punkt  $3(3' 3'')$  jest dalszym punktem linii prze-

nikania. Płaszczyzna  $\gamma$ , przecinająca pierścień wzdłuż koła  $r_1''$  ( $r_1'$   $r_1''$ ), umożliwia wyznaczenie punktów 4 ( $4'$   $4''$ ) i 5 ( $5'$   $5''$ ).



Rys. 501.

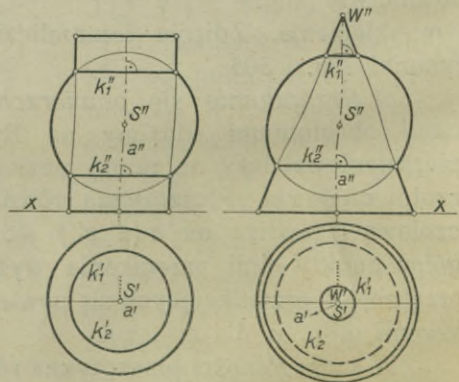
walca, którego oś jest prostopadłą do rzutni pionowej, z pierścieniem jest kołem  $k_1''$ . Poszczególne punkty  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ... rzutu poziomego krzywej przenikania znaleźliśmy za pośrednictwem równoleżników pierścienia, leżących na płaszczyznach  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ...

d) Przenikania się kuli z walcem i ze stożkiem przedstawiliśmy na Rys. 502 a i b. Oś  $a$  walca obrotowego przechodzi przez środek kuli, linia przenikania składa się z koł  $k_1$  ( $k_1'$   $k_1''$ ) i  $k_2$  ( $k_2'$   $k_2''$ ).

Podobnie ma się sprawa z przenikaniem się stożka obrotowego z kulą, przyczem oś stożka przechodzi przez środek

Linia przenikania jest krzywą symetrycznie położoną względem płaszczyzny czołowej  $\alpha$ ; punkty 1, 2, 3, 4 i 5 odnoszą się do części, znajdującej się przed tą płaszczyzną. Rzut pionowy części krzywej przenikania, leżącej z a płaszczyzną  $\alpha$ , schodzi się z linią, wyznaczoną punktami  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$  i  $5''$ .

Rzut pionowy linii przenikania

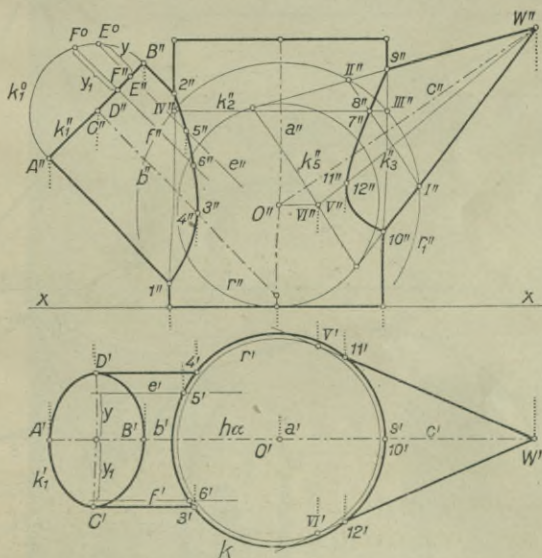


Rys. 502 a i b.



kuli. Na linię przenikania składają się dwa koła, a mianowicie koła  $k_1$  i  $k_2$ .

e) *Przykład przenikania się walca obrotowego ze stożkiem obrotowym*, przyczeim osi obu powierzchni przecinają się w punkcie  $O$  ( $O' O''$ ), widzimy na Rys. 503. Do wyznaczenia poszczególnych punktów linii przenikania użyto pośrednictwa kul. Punkt  $O$  uważamy za środek kul, a rzut pionowy jednej z nich oznaczmy przez  $r_1''$ . Kula ta przeniknie się z walcem w kole  $k_2$ , a ze stożkiem w kole  $k_3$ . Rzuty pionowe obu tych kół są odcinkami  $k_2'' \equiv III'' IV''$  i  $k_3'' \equiv I'' II''$ . Koła  $k_2$  i  $k_3$  przetną się w punktach 7 i 8, które są dwoma punktami linii przenikania. Rzuty pionowe  $7''$  i  $8''$  tych punktów schodzą się w punkcie przecięcia się odcinków  $k_2''$  i  $k_3''$ . Tym sposobem, przy użyciu dalszych kul, otrzymamy żadaną ilość punktów linii przenikania obu powierzchni. Na uwagę zasługują jeszcze punkty 11 i 12, leżące na tworzących  $VW$  i  $VIW$  stożka.



Rys. 503.

Na Rys. 503. podaliśmy ponadto przenikanie się walca obrotowego, o osi pionowej  $a$ , z walcem obrotowym o osi  $b$ , przecinającej pierwszą, a równoległą do rzutni pionowej. Linię przenikania wyznaczyliśmy, jak nas o tem poucza rysunek, przy pomocy płaszczyzn pionowo rzucających, a równoległych do osi  $b$ .

f) *Wyznaczenie linii przenikania dwóch powierzchni stożkowych rzędu drugiego* przeprowadziliśmy na Rys. 504. Ślad poziomy stożka o wierzchołku  $W_1$  jest kołem  $k_1$ ; ślad poziomy stożka o wierzchołku  $W_2$ , znajdującym się w czwartej





cina stożek  $W_1$  wzdłuż tworzących  $III W_1$ ,  $IV W_1$  i styka się ze stożkiem  $W_2$  wzdłuż tworzącej  $B W_2$ . Tworzące te przecinają się w punktach 3 ( $3' 3''$ ) i 4 ( $4' 4''$ ) szukanej linii przenikania. Z kolei weźmy pod uwagę płaszczyznę  $\gamma$ , której ślad poziomy  $h_\gamma$  przechodzi przez punkt  $C$ , w którym wspólna styczna do kół  $k_2$  i  $k_3'$  styka się z kołem  $k_2$ . Na tworzącej  $C W_2$  otrzymamy punkty 5 i 6 linii przenikania. Płaszczyzna  $\delta$  przecina każdą powierzchnię stożkową wzdłuż dwóch tworzących, a te przecinają się w punktach 7, 8, 9 i 10, które należą do linii przenikania. W ten sposób, postępując dalej, otrzymamy żadaną ilość punktów, które połączone na obu rzutniach, dają rzuty linii przenikania.

g) *Przenikanie się powierzchni stożkowej*

*rzędu drugiego z walcem eliptycznym*, którego ślad poziomy jest kołem  $k_1$ , przedstawia Rys. 506. Przez wierzchołek  $W$  ( $W' W''$ ) stożka prowadzimy prostą  $w$  ( $w' w''$ ), równoległą do tworzących walca, a przez nią płaszczyzny tnące równocześnie obie powierzchnie. Liniami przekroju będą tworzące powierzchni, a punkty przecięcia się tworzących, które leżą

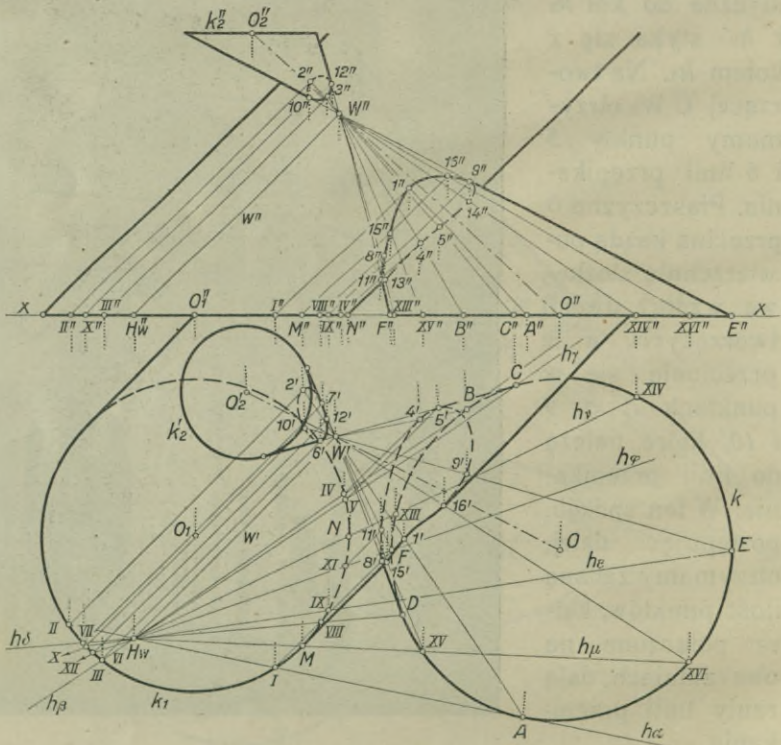


Rys. 505. Krużganek w klasztorze Benedyktynie w Sandomierzu

(Ze zbiorów prof. dr. Jana Sas Zubrzyckiego)

na poszczególnych płaszczyznach siecznych, są punktami linii przenikania.

Płaszczyzna  $\alpha$ , której ślad poziomy  $h_\alpha$  jest styczny do śladu poziomego  $k$  stożka, dotyka się stożka wzdłuż tworzącej  $AW$ , a walec przecina wzdłuż tworzących, przechodzących przez punkty  $I$  i  $II$  koła  $k_1$ . Tworzące te przecinają się w punk-



Rys. 506.

tach 1 ( $1' 1''$ ) i 2 ( $2' 2''$ ) linii przenikania. Podobnie płaszczyzna  $\beta$  styka się ze stożkiem wzdłuż tworzącej  $BW$ , a walec przecina wzdłuż prostych, wychodzących z punktów  $III$  i  $IV$  koła  $k_1$ . Tworząca styczności i tworzące przekroju przecinają się w punktach 3 ( $3' 3''$ ) i 4 ( $4' 4''$ ) linii przenikania. Przy pomocy płaszczyzn  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $\phi$ ,  $\mu$ ..., przechodzących przez prostą  $w$ , otrzymamy dalsze punkty linii przenikania, która





z kołem  $k$  w punkcie  $A$ , jest styczną do walca o osi  $b$ , a przecina drugi walec wzdłuż dwóch tworzących, których śladami poziomymi są punkty  $I$  i  $II$ . Tworząca styczności przecina owe dwie tworzące w punktach  $1$  ( $1' 1''$ ) i  $2$  ( $2' 2''$ ) linii przenikania. Płaszczyzna  $\beta$ , styczna do walca o osi  $b$ , przecina drugi walec wzdłuż dwóch tworzących, które przecinają tworzącą styczności w punktach  $3$  ( $3' 3''$ ) i  $4$  ( $4' 4''$ ). Każda z płaszczyzn  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  i  $\varphi$ , równoległych do płaszczyzny  $\pi$ , przecina walce w dwóch tworzących, a te wyznaczają po cztery punkty linii przenikania. Tym sposobem otrzymaliśmy potrzebną ilość punktów linii przenikania, które, jak widzimy, jest przenikaniem zupełnym.

(Rzut pionowy linii przekroju walca o podstawie  $k_1$  płaszczyzną  $\rho$  jest widoczny, winien więc być wykreślony linią pełną, a nie kreskowaną, jak to przez pomyłkę zrobiono na Rys. 507.).

---



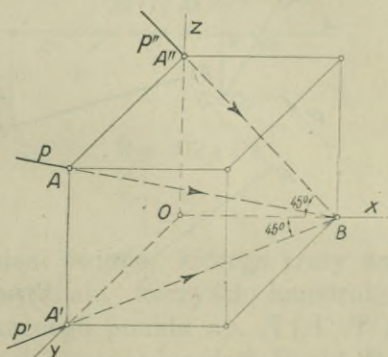
## ROZDZIAŁ TRZECI

### O WYZNACZANIU CIENI

#### § 16. CIENIE PUNKTÓW, PROSTYCH, WIELOKĄTÓW I KOŁA

**175. Uwagi wstępne.** Nauka o geometrycznym wyznaczeniu cieni rozróżnia zasadniczo dwa przypadki: 1) źródło światła pojęte jest jako punkt geometryczny, leżący w odległości skończonej (oświetlenie *środkowe*) i 2) źródło światła leży w odległości tak dalekiej, że promienie, które wysyła, uważać można za równoległe (oświetlenie *równoległe*).

Przedmiotem naszych rozważań będą wyłącznie konstrukcje cieni przy oświetleniu równoległym, przyczem kierunek promieni przyjmujemy zazwyczaj w ten sposób, że promienie światła są równoległe do przekątnej  $p$  sześcianu (Rys. 508.), którego krawędzie są równoległe do osi układu prostokątnego. W dalszej konsekwencji tego założenia rzut poziomy promieni zawierać będzie z osią  $x$  — jako równo-



Rys. 508.

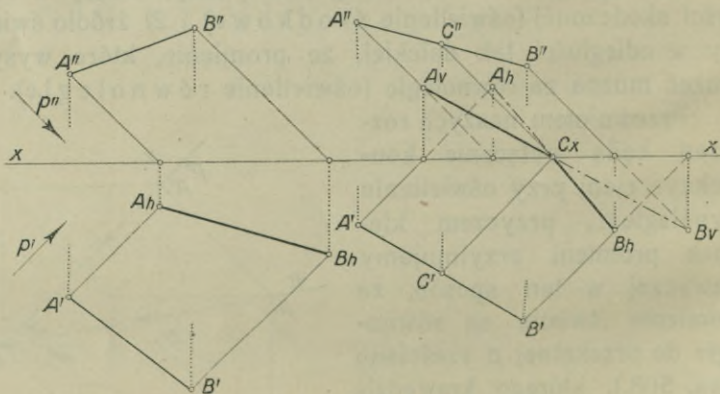
legły do rzutu poziomego  $p'$  przekątnej  $p$  sześcianu — kąt  $45^\circ$ ; to samo odnosi się do rzutu pionowego promieni światła.

**176. Cień punktu** określamy jako ślad promienia, przechodzącego przez ten punkt, z rzutnią albo z płaszczyzną, na

którą cień punktu pada. Dla danego kierunku  $p$  ( $p'$   $p''$ ) promieni (Rys. 509.), punkt  $A$  ( $A'$   $A''$ ) rzuca cień na płaszczyznę poziomą, a jest nim mianowicie punkt  $A_h$ . Cień punktu  $B$  ( $B'$   $B''$ ) znajduje się na płaszczyźnie pionowej, jako punkt  $B_v$ . Punkt  $A_v$ , będący śladem pionowym promienia  $a$  ( $a'$   $a''$ ), nazywać będziemy cieniem nieistotnym punktu  $A$ , podobnie jak punkt  $B_h$ , który jest śladem poziomym promienia  $b$  ( $b'$   $b''$ ), przechodzącego przez punkt  $B$  ( $B'$   $B''$ ).

Rys. 509.

177. **Cień odcinka.** Promienie, przechodzące przez punkty danego odcinka, leżą na jednej płaszczyźnie, zwanej płaszczyzną światła, której przecięcie się z rzutniami stanowi cień odcinka.



Rys. 510 a i b.

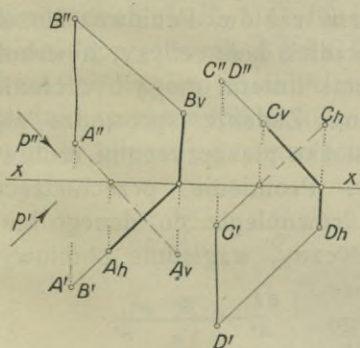
W przypadku, podanym na Rys. 510 a, odcinek rzuca cień tylko na rzutnię poziomą, ślady bowiem obu promieni, przechodzących przez punkty  $A$  i  $B$ , ograniczające odcinek, są śladami poziomymi. Rys. 510 b. przedstawia cień odcinka  $\overline{AB}$ , który pada częściowo na obie rzutnie. Punkt  $A$  rzuca cień na rzutnię pionową, punkt  $B$  na poziomą. Wyznaczywszy cień nieistotny  $A_h$  punktu  $A$  i połączywszy go ze śladem  $B_h$ , otrzy-



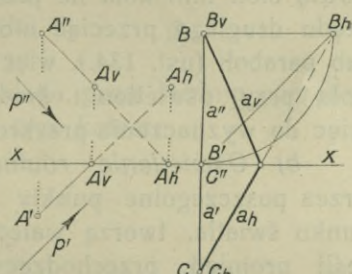
mamy cień odcinka  $\overline{AB}$  na rzutnię poziomą. Część tego cienia, a mianowicie  $\overline{Ah C_x}$ , leży na rzutni poziomej, rozciągającej się za rzutnię pionową, stanowi więc cień nieistotny. Druga jego część  $\overline{C_x B_h}$  jest częścią istotną cienia, jaki odcinek rzuca na rzutnię poziomą. Odcinek  $\overline{A_v C_x}$  jest cieniem istotnym odcinka, leżącym na rzutni pionowej, a odcinek  $\overline{C_x B_h}$ , częścią nieistotną tego cienia.

Punkt  $C_x$  jest punktem przecięcia się trzech płaszczyzn, a mianowicie: dwóch rzutni i płaszczyzny światła, przechodzącej przez odcinek  $\overline{AB}$ . Rzuty  $C'$  i  $C''$  punktu  $C$ , którego cień  $C_x$  leży na osi rzutów, otrzymamy jako punkty przecięcia się rzutów odcinka z rzutami promienia, przechodzącego przez punkt  $C_x$ .

Rys. 511 a. przedstawia cień odcinka  $\overline{AB}$  prostopadłego do rzutni poziomej, Rys. 511 b. podaje cień odcinka  $\overline{CD}$ , który jest prostopadły do rzutni pionowej.



Rys. 511 a i b.

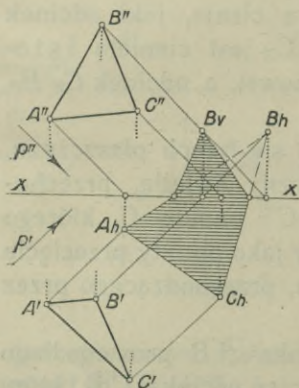


Rys. 512 a i b.

Z przyjęcia kierunku promieni światła, którego rzuty są nachylone do osi  $x$  pod  $45^\circ$ , wynikają korzyści konstrukcyjne, skoro się zważy, że dla każdego punktu np.  $A$  ( $A' A''$ ) Rys. 512 a., punkty  $A_v, A_v', A_h$  i  $A_h'$  tworzą kwadrat. Punkt  $A_h$  otrzymamy więc, kreśląc przez  $A_v$  równoległą do osi  $x$  i odmierając na niej  $\overline{A_v A_h} = \overline{A_v A_v'}$ .

Przykład zastosowania tej konstrukcyi podaje Rys. 512 b., gdzie wyznaczono cień odcinka  $\overline{BC}$ , prostopadłego do osi  $x$ , przyczem punkt  $B$  leży na rzutni pionowej, a punkt  $C$  na poziomej.

*Cień wielokąta* sprowadza się do wyznaczenia cieni jego boków, jak to bezpośrednio widzimy na Rys. 513. Bok  $AC$  trójkąta  $ABC$  rzuca cień na płaszczyznę poziomą, dwa pozostałe także częściowo i na rzutnię pionową.



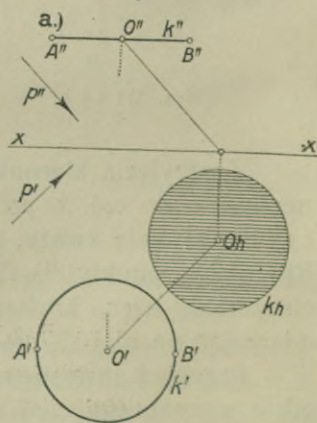
Rys. 513.

### 178. Cień koła.

a) *Oświetlenie środkowe.* Promienie, łączące dany punkt świetlny  $S$  z punktami koła, tworzą powierzchnię stożkową rzędu drugiego, która w przypadku, gdy promień, łączący punkt  $S$  ze środkiem koła, jest prostopadły do płaszczyzny koła, jest stożkiem obrotowym. Miejsce geometryczne punktów przecięcia się tworzących tego stożka promieni z rzutniami, czyli ślady tego stożka, stanowią cień linii koła na płaszczyźnie rzutów.

Ponieważ stożek rzędu drugiego przeciąć można wzdłuż koła, elipsy, hiperboli lub paraboli (ust. 134.), więc takimi liniami mogą być cienie koła przy oświetleniu środkowym. Zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia przekrojów stożka płaszczyznami rzutów.

b) *Oświetlenie równoległe.* Promienie, przechodzące przez poszczególne punkty koła, równoległe do danego kierunku światła, tworzą walec eliptyczny, względnie obrotowy, jeśli promień, przechodzący przez środek koła, jest prostopadły do jego płaszczyzny. Ślad otrzymanego walca promieni stanowi cień koła. Tak tedy wyznaczenie cienia koła sprowadza się do wykreślenia śladu, względnie śladów walca, którego kierownicą jest to koło, a kierunkiem tworzących, kierunek promieni światła. Między kierownicą tego walca (kołem) a jego śladem (cieniem) zachodzi powinowactwo środkowe lub przystawanie; cień więc koła na płaszczyźnie rzutów może być elipsą lub kołem.



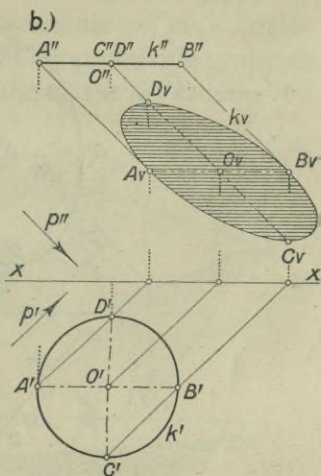
Rys. 514 a.



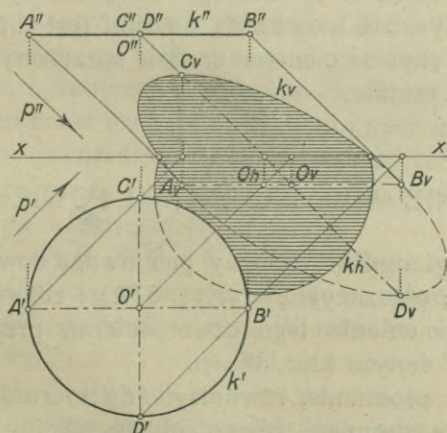
Kilka przykładów sprawę dostatecznie wyjaśni.

Koło  $k$  ( $k' k''$ ) (Rys. 514 a.) rzuca cień tylko na rzutnię poziomą. Cień ten jest kołem  $kh$  o środku  $O_h$ , który to punkt jest śladem poziomym promienia, przechodzącego przez środek  $O$  ( $O' O''$ ) koła  $k$ . Promień koła  $kh$  równy jest promieniowi koła  $k$ . W istocie bowiem, ponieważ płaszczyzna koła jest równoległą do rzutni poziomej, więc przekrój walca o kierownicy  $k$ , a o tworzących równoległych do danego kierunku  $p$  ( $p' p''$ ), płaszczyzną poziomą rzutów jest linią przystającą do tej kierownicy.

Koło  $k$  ( $k' k''$ ) (Rys. 514 b.) rzuca cień tylko na rzutnię pionową i to w kształcie elipsy, której parą średnic sprzężonych  $A_v B_v$  i  $C_v D_v$  jest cień średnic sprzężonych  $AB$  i  $CD$  koła  $k$ . Wiadomo bowiem z ust. 96., że parze średnic sprzężonych w kole odpowiada para średnic sprzężonych w elipsie, spowinowacanej z tym kołem.



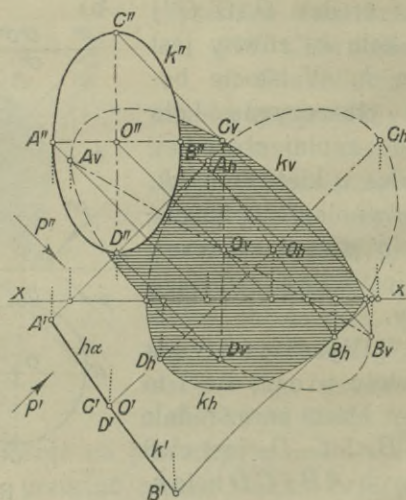
Rys. 514 b.



Rys. 515.

Koło  $k$  ( $k' k''$ ) (Rys. 515.) rzuca cień w części na rzutnię poziomą, a w części na pionową. Cień na rzutnię poziomą

jest kołem o środku  $O_h$ , jak w Rys. 514 a., a cień na rzutnię pionową jest elipsą o środku  $O_v$ . Średnice sprzężone tej elipsy znajdziemy, jak w Rys. 514 b.



Rys. 516.

Cień koła  $k$  ( $k'$   $k''$ ), leżącego na płaszczyźnie poziomo rzucającej  $\alpha$  (Rys. 516.), na każdą z rzutni jest elipsą. Średnice sprzężone tych elips są cieniami średnic sprzężonych  $AB$  i  $CD$  koła  $k$  na obie rzutnie.

## § 17. CIENIE WIEŁOŚCIANÓW I POWIERZCHNI

179. Uwagi ogólne. Weźmy pod uwagę dowolny czworościan  $ABCD$ , płaszczyznę  $\pi$  (Rys. 517.) i rozważmy sprawę oświetlenia i ocienienia tego czworościanu, przy oświetleniu równoległym, o danym kierunku  $p$ .

Wszystkie promienie, równoległe do kierunku  $p$ , tworzą t. zw. wiązkę promieni równoległych, wśród których wyróżnić możemy trzy grupy:

- promienie przebijające jedynie płaszczyznę  $\pi$ ,
- promienie odbijające się od ścian czworościanu i nie dochodzące do płaszczyzny  $\pi$ , i



c) promienie przechodzące przez krawędzie wielościanu i tworzące t. zw. płaszczyzny świetlne, które przecinają płaszczyznę  $\pi$ .

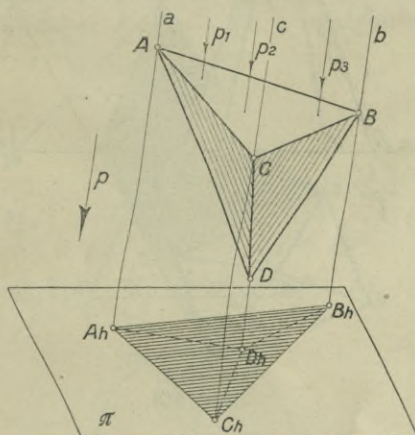
Wyłączmy z wiązki promieni równoległych grupę a) i weźmy pod uwagę dwie pozostałe. Promienie  $p_1, p_2, \dots$ , należące do grupy b), oświetlają ścianę  $ABC$ , a promienie grupy c) odgraniczają część wielościanu, znajdującą się w świetle, od tej, do której promienie nie dochodzą i która jest w cieniu własnym. Z Rys. 517. widzimy, że płaszczyzny światła, przechodzące przez boki trójkąta  $ABC$ , tworzą graniastosłup trójścienny i odgraniczają ściany  $ACD$ ,  $ABD$  i  $BCD$ , znajdujące się w cieniu własnym.

Jeżeli punkty przebicia się promieni a, b i c, przechodzących przez punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , oznaczymy literami  $A_h$ ,  $B_h$  i  $C_h$ , to trójkąt  $A_h B_h C_h$  jest przekrojem graniasto-

słupa, którego ściany przechodzą przez boki trójkąta  $ABC$ , równoległe do danego kierunku  $p$ , z płaszczyzną  $\pi$ . Obszar płaszczyzny  $\pi$ , ograniczony trójkątem  $A_h B_h C_h$ , jest obszarem nieoświetlonym przez grupę b) promieni i nosi nazwę cienia rzucanego czworościanu. W granicach cienia rzucanego mieszczą się cienie wszystkich punktów i prostych, dających się pomyśleć na wielościanie.

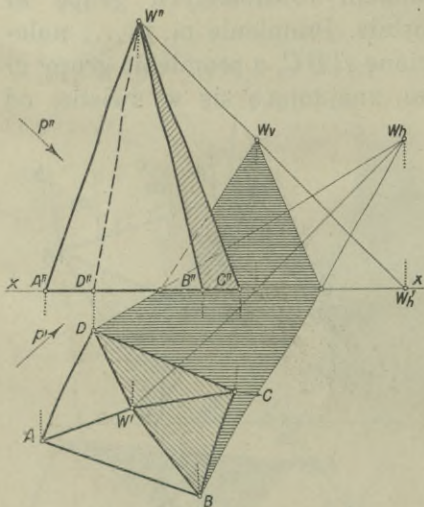
Krawędzie  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$  wielościanu, odgraniczające jego część oświetloną od leżącej w cieniu, stanowią granicę cienia własnego tego wielościanu. Widocznym jest, że cień  $A_h B_h C_h$ , granicy cienia własnego wielościanu, jest granicą jego cienia rzucanego. I na odwrót, z granic cienia rzucanego wielościanu odtworzyć możemy wprost granice cienia własnego.

Z rozważań powyższych widocznym też jest bezpośrednio, że cień rzucany wielościanu uważać można za rzut ukośny tego wielościanu na daną płaszczyznę i w danym kierunku.



Rys. 517.

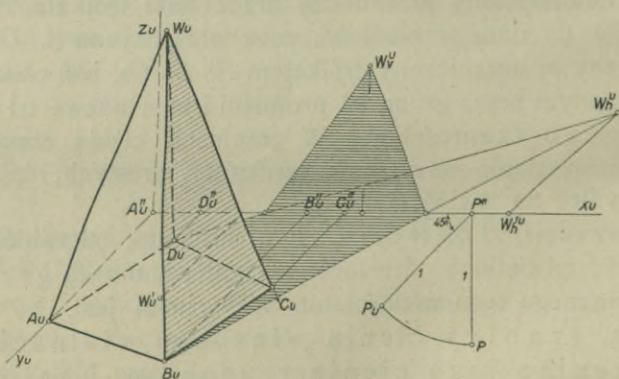
180. Cienie ostrosłupów i stożków. Wyznaczyć cień jakiegokolwiek bądź utworu przestrzennego znaczy wykreślić granice jego cienia własnego i granice cienia rzuconego.



Rys. 518.

Jeżeli dany jest ostrosłup, którego podstawa spoczywa na rzutni poziomej (Rys. 518.), to wyznaczenie jego cienia rozpoczniemy od wykreślenia cienia jego wierzchołka i to zarówno istotnego  $W_v$ , jak i nieistotnego  $W_h$ . Następnie wykreślimy z punktu  $W_h$  dwie takie proste  $W_h B$  i  $W_h D$ , przechodzące przez wierzchołki podstawy, w obrębie których mieszczą się pozostałe wierzchołki. Proste  $W_h B$  i  $W_h D$  są cieniami krawędzi bocznych  $WB$  i  $WD$  ostrosłupa, a więc

śladami poziomymi płaszczyzn świetlnych, przechodzących przez te krawędzie, które stanowią więc granicę cienia



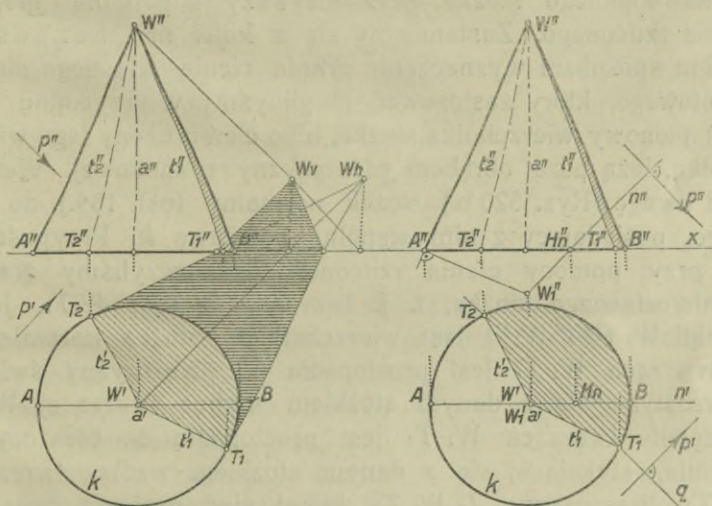
Rys. 519.

snego ostrosłupa. Obszar rzutni poziomej, ograniczony wielokątem  $BCD W_h B$ , jest cieniem rzuconym ostrosłupa na rzutnię poziomą. Część tego cienia, leżąca nad osią rzutów,



leży w drugim obszarze przestrzeni i jest cieniem nieistotnym. Wierzchołek ostrosłupa rzuca cień istotny  $W_b$  na rzutnię pionową; odcinki, łączące punkt  $W_b$  z punktami przecięcia się odcinków  $W_h B$  i  $W_h D$  z osią rzutów, ograniczają obszar cienia rzuconego ostrosłupa na płaszczyznę pionową rzutów i są śladami pionowymi płaszczyzn świetlnych.

Rys. 519. jest przeprowadzeniem poprzedniego zadania w rzutach ukośnych. Poprowadziwszy płaszczyznę boczną przez punkt  $A$ , przyjmiemy układ osi  $x_u, y_u$  i  $z_u$ , a następnie



Rys. 520 a.

Rys. 520 b.

spółrzędne poszczególnych punktów, przy czem stosunki skróceń  $x : y : z = 1 : 1 : 1$ .

Wyznaczenie cienia własnego i rzuconego powierzchni stożkowej sprowadzić się da do wyszukania płaszczyzn stycznych do tej powierzchni, a równoległych do danego kierunku światła (porównaj ust. 159.). Przez wierzchołek stożka (Rys. 520 a.) poprowadzimy promień, równoległy do danego kierunku  $p$  ( $p' p''$ ) i wyznaczmy jego ślady  $W_h$  i  $W_b$ . Styczne, wykreślone z punktu  $W_h$  do podstawy  $k$  stożka, są śladami poziomymi płaszczyzn stycznych do stożka i równoległych do kierunku  $p$ , a więc płaszczyzn świetlnych. Proste  $t$  ( $t' t''$ ) i  $t_2$  ( $t_2' t_2''$ ), łączące wierzchołek stożka z punktami  $T_1$  i  $T_2$ , są tworzącymi, wzdłuż których płaszczyzny świetlne dotykają

stożka. Tworzące te stanowią więc granicę cienia własnego. Ponieważ, jak to z rozważań ustępu poprzedniego widoczne jest, cień rzucony granicy cienia własnego stanowi granicę cienia rzuconego, więc cień rzucony tworzących  $t_1$  i  $t_2$  zakreśli granicę cienia rzuconego stożka. W naszym przypadku, ponieważ punkt  $W_h$  jest cieniem nieistotnym wierzchołka stożka na rzutni poziomej, więc stożek rzuci częściowo cień na rzutnię pionową.

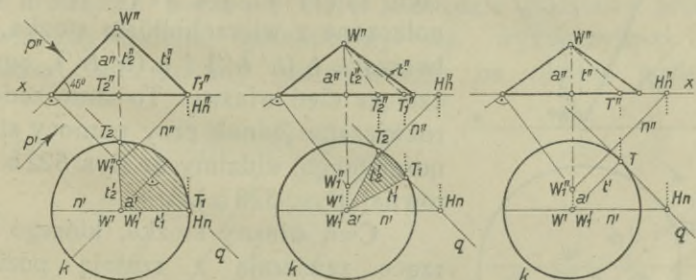
Przy podanym toku konstrukcyi dochodzimy do granicy cienia własnego stożka, wyznaczywszy poprzednio granicę cienia rzuconego. Zastanówmy się z kolei nad bezpośrednim sposobem wyznaczenia granic cienia własnego stożka obrotowego, który zastosować moglibyśmy w przypadku, gdy rzut pionowy wierzchołka stożka, albo cień rzucony tego wierzchołka, leżą poza obrębem płaszczyzny rysunkowej. Weźmy pod uwagę (Rys. 520 b.) stożek normalny (ust. 159.) do danego, posiadający z nim wspólną podstawę  $k$ . Przypuśćmy, że przy pomocy cienia rzuconego wyznaczyliśmy granicę cienia własnego stożka, t. j. tworzące  $WT_1$  i  $WT_2$ . Jeżeli punkt  $W_1$  ( $W_1'$   $W_1''$ ) jest wierzchołkiem stożka normalnego, to tworząca  $W_1 T_1$  jest prostopadła do płaszczyzny światła, która styka się z danym stożkiem wzdłuż tworzącej  $WT_1$ . Podobnie tworząca  $W_1 T_2$  jest prostopadłą do płaszczyzny światła, stykającej się z danym stożkiem wzdłuż tworzącej  $WT_2$ . Płaszczyzna  $T_1 W_1 T_2$ , której ślad poziomy oznaczyliśmy literą  $q$ , jako prostopadła równocześnie do obu płaszczyzn światła, stykających się z danym stożkiem, jest prostopadłą do krawędzi tych płaszczyzn, a więc do danego kierunku światła  $p$  ( $p'$   $p''$ ).

Na podstawie tego rozumowania wyznaczymy granicę cienia własnego stożka obrotowego w sposób następujący: Znalazłszy wierzchołek stożka normalnego, poprowadzimy przezeń płaszczyznę prostopadłą do danego kierunku światła, wyznaczymy jej ślad na płaszczyźnie podstawy stożka, a punkty przecięcia się tego śladu z podstawą, połączone z jego wierzchołkiem, stanowią szukaną granicę cienia własnego. Aby zaś przez punkt  $W_1$  poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do prostej  $p$  (ust. 59. i 60.), poprowadziliśmy przez ten punkt prostą czołową  $n$  ( $n'$   $n''$ ) prostopadłą do kierunku światła  $p$  ( $p'$   $p''$ ) i znaleźli jej ślad poziomy  $H_n$ . Prosta  $q \perp p'$  jest śladem po-



ziomym szukanej płaszczyzny, a punkty  $T_1$  i  $T_2$ , w których ślad ten przecina podstawę  $k$  stożka, połączone z wierzchołkiem  $W$ , dają tworzące  $t_1$  ( $t'_1 t''_1$ ) i  $t_2$  ( $t'_2 t''_2$ ), ograniczające cień własny.

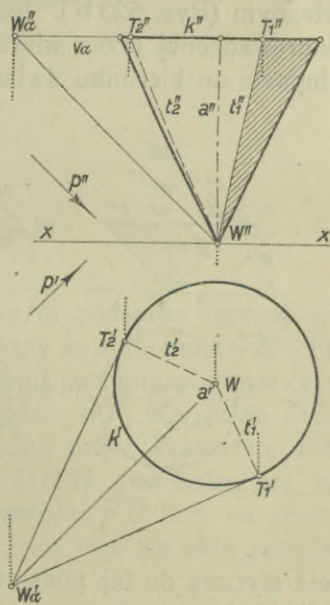
Cień własny stożka obrotowego, którego tworzące nachylone są do rzutni poziomej pod  $45^\circ$ , wyznaczyliśmy przy po-



Rys. 521 a—c.

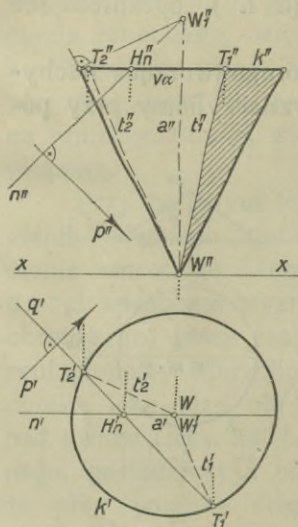
mocy stożka normalnego na Rys. 521 a. Rzut poziomy tego cienia — przy założeniu, że rzuty promieni światła nachylone są do osi  $x$  pod  $45^\circ$  — obejmuje wycinek koła  $k$ , równy czwartej części jego powierzchni. Jeżeli kąt, jaki zawierają tworzące stożka z rzutnią poziomą, maleje, to maleje też część stożka, znajdująca się w cieniu własnym (Rys. 521 b.). W przypadku, gdy prosta  $q \perp p'$  jest styczną do koła  $k$  (Rys. 521 c.), istnieje tylko jedna płaszczyzna światła, styczna do stożka wzdłuż tworzącej  $t$  ( $t' t''$ ). Od tego stożka począwszy, następne, których tworzące zawierają z rzutnią poziomą kąt mniejszy, znajdują się całe w świetle i nie rzucają cieni na płaszczyznę rzutów.

Konstrukcję cienia stożka obrotowego o osi pionowej, którego wierzchołek leży na rzutni



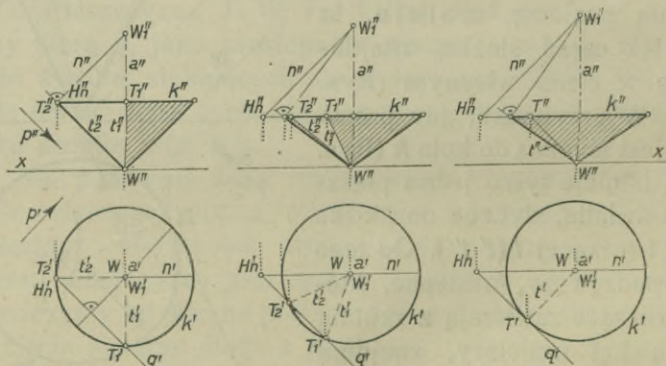
Rys. 522 a.

poziomej, podają Rys. 522 a. i b. Podobnie, jak w Rys. 520 a., poprowadzimy przez wierzchołek promień, równoległy do danego kierunku  $p$  ( $p'$   $p''$ ) i znajdziemy jego ślad  $W_\alpha$  ( $W_\alpha'$   $W_\alpha''$ ) z płaszczyzną podstawy  $\alpha$ . Styczne wykreślone z punktu  $W_\alpha$  do koła  $k$  ( $k'$   $k''$ ) stykają się z nim w punktach  $T_1$  ( $T_1'$   $T_1''$ ) i  $T_2$  ( $T_2'$   $T_2''$ ), które połączone z wierzchołkiem stożka, dają tworzące  $t_1$  ( $t_1'$   $t_1''$ ) i  $t_2$  ( $t_2'$   $t_2''$ ), ograniczające cień własny. To samo zadanie, rozwiązane jednak przy pomocy stożka normalnego, widzimy na Rys. 522 b. (porównaj Rys. 520 b.).



Rys. 522 b.

Cień własny stożka, którego tworzące zawierają z rzutnią poziomą kąt  $45^\circ$ , wyznaczyliśmy przy pomocy stożka normalnego na Rys. 523 a. Im bardziej maleje kąt, jaki tworzące stożka zawierają z rzutnią poziomą, tem większa część stożka znajduje się w cieniu własnym (Rys. 523 b.). Jeżeli krawędź  $q$  ( $q'$   $q''$ ) płaszczyzny, poprowadzonej przez wierzchołek  $W_1$  stożka normalnego, prostopadłe do kierunku światła, z płaszczyzną podstawy stożka



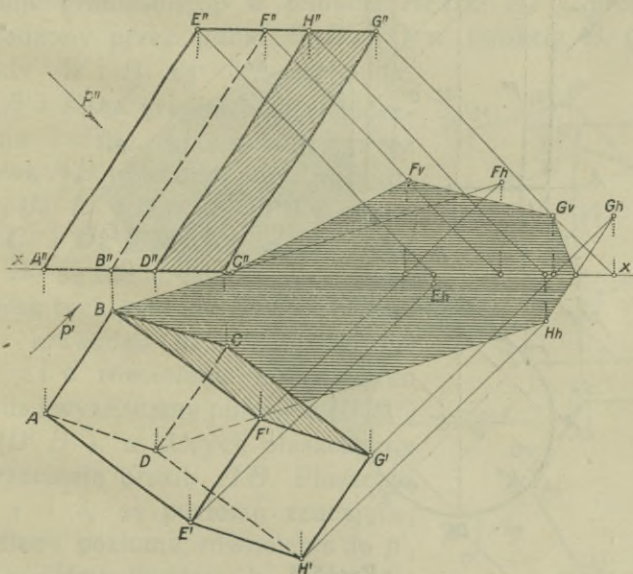
Rys. 523 a—c.

jest styczną do tej podstawy (Rys. 523 c.), to wówczas istnieje tylko jedna płaszczyzna światła, styczna do stożka wzdłuż tworzącej  $t$  ( $t'$   $t''$ ). Stożek taki i stożki, których tworzące zawierają



z rzutnią poziomą kąty mniejsze, znajdują się (z wyjątkiem podstawy) w cieniu własnym.

181. Cienie graniastosełupów i walców. Krawędzie graniastosełupa, przez które przechodzą płaszczyzny światła, odgraniczają część oświetloną od części znajdującej się w cieniu własnym, czyli stanowią granicę tego cienia (Rys. 524.). Przez które krawędzie boczne i które krawędzie podstawy przejdą płaszczyzny światła, przekonamy się, wyznaczwszy poprzednio cień rzucony graniastosełupa na rzutnię poziomą.

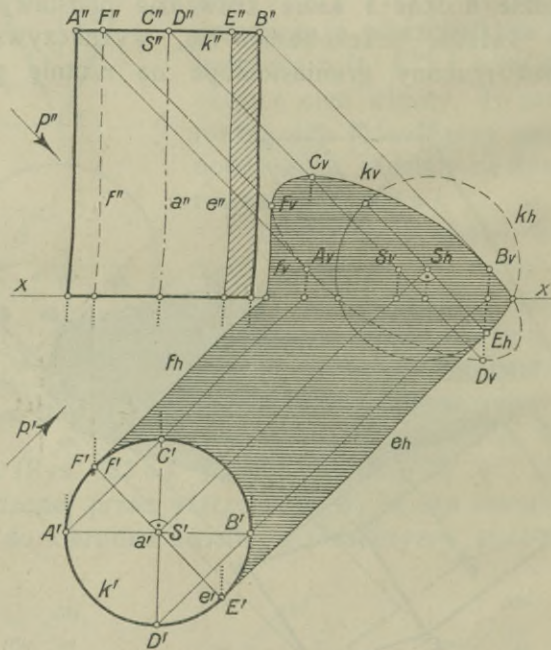


Rys. 524.

Najpierw wyszukamy cień  $E_h F_h G_h H_h$  podstawy górnej na rzutnię poziomą, a następnie połączymy ze sobą punkty  $B$  i  $F_h$ ,  $D$  i  $H_h$ . Proste  $B F_h$  i  $D H_h$  są śladami poziomymi płaszczyzn światła, przechodzących przez krawędzie  $B F$ , względnie  $D H$ . Dalsze płaszczyzny światła przechodzą przez krawędzie  $F G$  i  $G H$ . Ściany więc  $B C F G$  i  $C D G H$  graniastosełupa są w cieniu własnym. Cień istotny krawędzi  $F G$  leży na rzutni pionowej, krawędź  $G H$  rzuca częściowo cień na obie rzutnie, podobnie jak krawędź  $B F$ .

Cienie walca obrotowego, o osi pionowej, podaje Rys. 525. Poziomo rzucające płaszczyzny światła stykają się z walcem

wzdłuż tworzących  $e$  ( $e' e''$ ) i  $f$  ( $f' f''$ ), które stanowią granicę cienia własnego. Na cień rzucony walca składać się będzie cień koła  $k$  ( $k' k''$ ) i cień tworzących  $e$  i  $f$ . Koło  $k$  rzuca cień częściowo na obie rzutnie (porównaj Rys. 515.), podobnie jak tworząca  $f$  (patrz Rys. 511 a.).



Rys. 525.

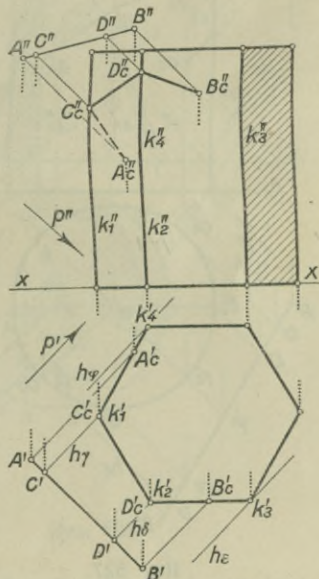
**182. Cienie punktów i linii na wielościanach i powierzchniach.** Cień punktu na dowolny utwór przestrzenny uważać możemy za punkt przebicia się promienia, przechodzącego przez dany punkt, z tym utworem. Cień prostej na wielościan lub powierzchnię jest przekrojem płaszczyzny światła, przechodzącej przez tę prostą, z danym wielościanem, względnie powierzchnią. Oczywiście, że cień ten jest miejscem geometrycznym cieni punktów prostej na dany utwór przestrzenny i da się sprowadzić pod względem konstrukcyjnym zawsze do tego zasadniczego zadania. Cień dowolnej linii płaskiej lub skośnej na powierzchnię, względnie wielościan, jest linią przenikania się walca światła z daną powierzchnią, względnie



wielościanem. Tworzące tego walca są równoległe do danego kierunku światła i przechodzą przez punkty linii rzucającej cień. O ile chodzi o oświetlenie środkowe, to w miejsce walca światła występuje stożek, którego wierzchołkiem jest punkt świetlny, a którego tworzące przechodzą przez daną linię.

Kilka niżej podanych przykładów sprawę dostatecznie wyjaśni.

a) Wyznaczyć cień odcinka  $\overline{AB}$  na graniastosłup (Rys. 526.). Promień światła, przechodzący przez punkt  $A$  ( $A' A''$ ), przebija graniastosłup w punkcie  $A_c$  ( $A'_c A''_c$ ), promień poprowadzony przez punkt  $B$  ( $B' B''$ ) w punkcie  $B_c$  ( $B'_c B''_c$ ). Punkty  $A_c$  i  $B_c$  są cieniami punktów  $A$  i  $B$  na graniastosłup. Płaszczyzna światła, przechodząca przez odcinek  $\overline{AB}$ , przecina krawędzie boczne  $k_1$  ( $k'_1 k''_1$ ) i  $k_2$  ( $k'_2 k''_2$ ) w punktach  $C_c$  i  $D_c$ , których rzuty poziome  $C'_c$  i  $D'_c$  są znane. Aby znaleźć rzuty pionowe tych punktów, poprowadźmy przez krawędzie  $k_1$  i  $k_2$  płaszczyzny  $\gamma$  i  $\delta$  równoległe do kierunku światła i wyznaczmy punkty  $C$  ( $C' C''$ ) i  $D$  ( $D' D''$ ), w których płaszczyzny te przecinają prostą  $AB$ . Płaszczyzny  $\gamma$  i  $\delta$ , są poziomo rzucające; ich ślady poziome, równoległe do  $p'$ , oznaczyliśmy literami  $h_\gamma$  i  $h_\delta$ . Na płaszczyznach tych leżą promienie światła, które, przechodząc przez punkty  $C$  i  $D$ , przecinają krawędzie  $k_1$  i  $k_2$  w szukanych punktach  $C_c$  i  $D_c$ .

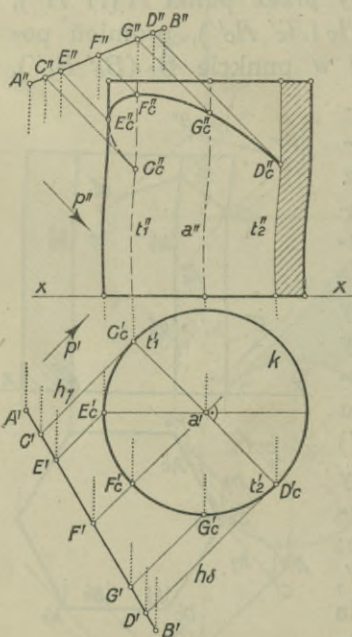


Rys. 526.

Proste, wykreślone z punktów  $C''$  i  $D''$  równoległe do  $p''$ , przecinają proste  $k_1''$  i  $k_2''$  w punktach  $C''_c$ , względnie  $D''_c$ . Linia łamana  $A''_c C''_c D''_c B''_c$  jest rzutem pionowym cienia odcinka  $\overline{AB}$  na graniastosłup. Część tego cienia, a mianowicie  $\overline{A''_c C''_c}$ , jest w rzucie pionowym niewidoczna.

Poziomo rzucające płaszczyzny światła  $\varepsilon$  i  $\varphi$ , przechodzące przez krawędzie  $k_3$  i  $k_4$ , odgraniczają część oświetloną graniastosłupa od części, znajdującej się w cieniu własnym.

b) Wyznaczyć cień rzucony odcinka  $\overline{AB}$  na walec obrotowy (Rys. 527.). Tworzące  $t_1 (t'_1 t''_1)$  i  $t_2 (t'_2 t''_2)$ , wzdłuż których płaszczyzny  $\gamma$  i  $\delta$ , równoległe do kierunku światła  $p (p' p'')$ , stykają się z walcem, stanowią granice jego cienia własnego. Punkty  $C (C' C'')$  i  $D (D' D'')$ , w których prosta  $\overline{AB}$  przebija płaszczyzny  $\gamma$  i  $\delta$ , ograniczają odcinek, którego cień pada na walec. Cienie  $C_c (C'_c C''_c)$  i  $D_c (D'_c D''_c)$  punktów  $C$  i  $D$  leżą na tworzących  $t_1 (t'_1 t''_1)$  i  $t_2 (t'_2 t''_2)$ , a znajdziemy



Rys. 527.

je w ten sam sposób, jak cienie punktów  $C$  i  $D$  w Rys. 526. Płaszczyzna światła, przechodząca przez odcinek  $\overline{AB}$ , przecina walec wzdłuż elipsy, której część, zawarta między punktami  $C_c$  i  $D_c$ , jest cieniem odcinka  $\overline{CD}$  na walec. Cień dowolnego punktu  $F (F' F'')$  odcinka  $\overline{CD}$  na walec znajdziemy jako punkt przecięcia się promienia światła, przechodzącego przez ten punkt, z walcem. Aby wyznaczyć punkt odcinka  $\overline{CD}$ , który rzuca cień na tworzącą konturową, zauważmy, że rzut poziomy tego cienia, a mianowicie punkt  $E_c'$ , jest znany. Punkt ten rzucimy w kierunku  $p'$  na  $\overline{A'B'}$ , a otrzymany tam punkt  $E'$  odniesiemy na  $\overline{A''B''}$ . Tym sposobem otrzymaliśmy rzuty punktu  $E (E' E'')$ , którego rzut poziomy cienia jest punktem  $E_c'$ . Promień, wykreślony przez punkt  $E''$  równoległe do  $p''$ , przecina rzut pionowy tworzącej konturowej w punkcie  $E_c''$ .

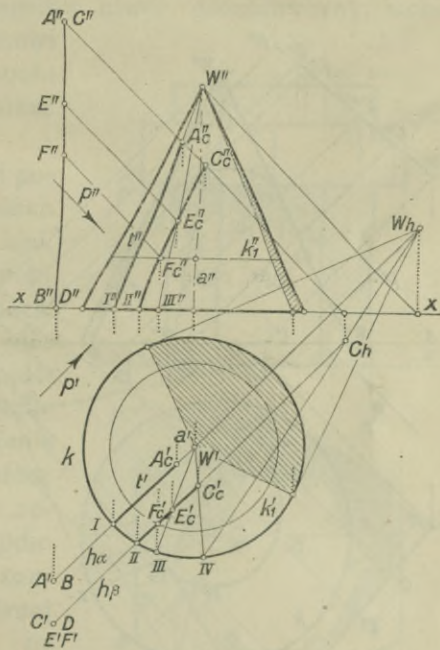
c) Wyznaczyć cień odcinków  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  na stożek obrotowy (Rys. 528.). Pionowy odcinek  $\overline{AB}$  obraliśmy tak, że przechodząca przez niego płaszczyzna światła  $\alpha$  przechodzi przez oś stożka, a więc przecina go wzdłuż tworzących. Promień, poprowadzony przez punkt  $A (A' A'')$ , przebija stożek w punkcie  $A_c (A'_c A''_c)$ , który jest cieniem punktu  $A$  na stożek. Część tworzącej  $t (t' t'')$  stożka, ograniczonej punk-



tami  $A_c$  i  $I$ , jest cieniem części odcinka  $\overline{AB}$  na stożek. Odcinek  $\overline{IB}$  jest cieniem pozostałej części odcinka  $\overline{AB}$  na rzutnię poziomą.

Płaszczyzna światła  $\beta$ , przechodząca przez odcinek  $\overline{CD}$ , przecina stożek wzdłuż hiperboli, taką więc krzywą jest cień rzucony odcinka  $\overline{AB}$  na stożek. Wyznamy cień  $W_h$  wierzchołka stożka na rzutnię poziomą i cień  $C_h$  punktu  $C$ . Prosta

$W_h C_h$ , która jest śladem poziomym płaszczyzny  $\varphi$ , przechodzącej przez punkty  $W$  i  $C$  równoległe do kierunku światła, przecina koło  $k$  w punkcie  $IV$ . Prosta  $WIV$  jest tworzącą, wzdłuż której płaszczyzna  $\varphi$  przecina stożek, a punkt  $C_c$  ( $C'_c C''_c$ ) punktem przebiecia się promienia światła, przechodzącego przez punkt  $C$  ( $C' C''$ ), ze stożkiem, a więc cieniem tego ostatniego na stożek. Ponieważ rzut poziomy cienia odcinka  $\overline{CD}$  na stożek jest odcinkiem, więc wyznaczenie rzutu pionowego tego cienia (hiperboli) sprowadza się do

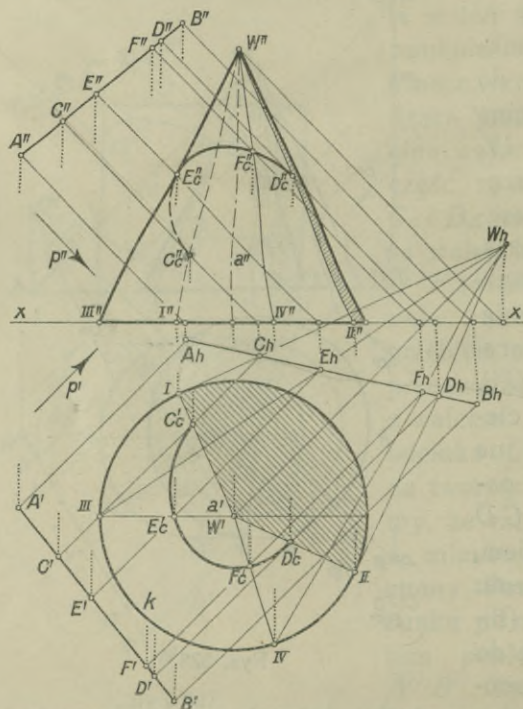


Rys. 528.

wynalezienia rzutu pionowego punktów, leżących na stożku, których rzut poziomy jest znany. Punkt  $E_c''$  wyznaczyliśmy przy pomocy tworzącej  $WIII$  stożka, a punkt  $F_c''$  przy pomocy koła (równoleżnika)  $k_1$ , którego rzut poziomy  $k_1'$  przechodzi przez punkt  $F_c'$ .

d) Wyznaczyć cień odcinka  $\overline{AB}$  na stożek (Rys. 529.). Płaszczyzna światła, przechodząca przez odcinek  $\overline{AB}$ , przecina stożek wzdłuż elipsy; szukany cień będzie więc częścią tej krzywej. Wykreśliwszy cień rzucony stożka na rzutnię poziomą, otrzymamy granice jego cienia własnego, którymi są tworzące  $WI$  i  $WII$ . Ślady poziome  $W_h I$  i  $W_h II$  płaszczyzn światła  $\gamma$  i  $\delta$ , stycznych do stożka wzdłuż tworzących  $WI$

i  $WII$ , przecinają cień  $\overline{A_h B_h}$ , odcinka  $\overline{AB}$ , na rzutnię poziomą, w punktach  $C_h$  i  $D_h$ . Punkt  $C_h$  jest cieniem punktu  $C$  ( $C' C''$ ), a punkt  $D_h$  cieniem punktu  $D$  ( $D' D''$ ) na rzutnię poziomą. Ponieważ tworząca  $WI$ , promień  $CC_h$  i prosta  $W_h I$  leżą na płaszczyźnie światła  $\gamma$ , więc punkt  $C$  ( $C' C''$ ) jest punktem przecięcia się odcinka  $\overline{AB}$  z tą płaszczyzną, a punkt  $C_c$  ( $C' C''$ ) punktem styczności promienia  $CC_h$  ze stożkiem,



Rys. 529.

a więc cieniem punktu  $C$  ( $C' C''$ ) na stożek. Z tych samych powodów punkt  $D_c$  ( $D' D''$ ) jest cieniem punktu  $D$  ( $D' D''$ ) na stożek. Punkty odcinków  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  nie rzucą cienia na stożek, gdyż promienie, przez nie przechodzące, nie przebija go. Jako punkty graniczne, przez które przechodzące promienie nie przebijają ale stykają się ze stożkiem, występują punkty  $C$  i  $D$ . Dalsze punkty cienia odcinka  $\overline{CD}$  na stożek znajdziemy podobnie jak

punktów  $C$  i  $D$ . I tak obrawszy punkt  $E_h$  na odcinku  $\overline{A_h B_h}$  znajdziemy jego rzuty  $E'$  i  $E''$ , poczem łączymy punkt  $W_h$  z  $E_h$  prostą aż do przecięcia się z kołem  $k$  w punkcie  $III$ . Odcinek  $\overline{W' III}$  przecina promień  $E' E_h$  w szukanym punkcie  $E_c'$ . Punkt  $E_c''$  leży na rzucie pionowym tworzącej  $W III$ , która w tym przypadku jest tworzącą konturową. Punkt  $E_c$  ( $E' E_c'$ ) jest punktem przecięcia się promienia światła, przechodzącego przez punkt  $E$  ( $E' E''$ ), ze stożkiem. Prosta  $W_h III$  jest śladem



poziomym płaszczyzny, przechodzącej przez ten promień i przez wierzchołek stożka, a odcinek  $W$  III tworzącą, wzdłuż której płaszczyzna ta przecina stożek.

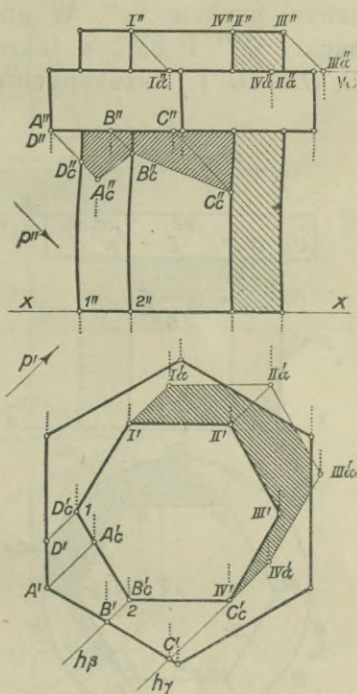
**183. O cieniach zespołów geometrycznych.** Złączenie przynajmniej dwóch utworów geometrycznych nazywać będziemy krótko zespołem. Tak więc dwa wielościany, dwie powierzchnie, wielościan i powierzchnia stanowią zespół geometryczny. Każdy poszczególny utwór geometryczny, wchodzący w skład zespołu, stanowi element. Elementy zespołu mogą się wzajemnie przenikać lub też nie.

Zadaniem naszym jest poznanie na kilku przykładach sposobów wyznaczania cieni, jakie jeden element zespołu rzuca na drugi. W zadaniach naszych uwzględnimy jedynie widoczne części cieni, a pominiemy zupełnie — ochraniając przejrzystość rysunków — cienie rzucone na płaszczyzny rzutów.

a) Wyznaczyć cienie zespołu dwóch graniastostupów (Rys. 530.). Najpierw wyznaczmy cień podstawy górnej graniastostupa, stojącego na rzutni poziomej, na górną podstawę drugiego graniastostupa. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia punktów przebicia się  $I_\alpha$ ,  $II_\alpha$ ,  $III_\alpha$  i  $IV_\alpha$  promieni

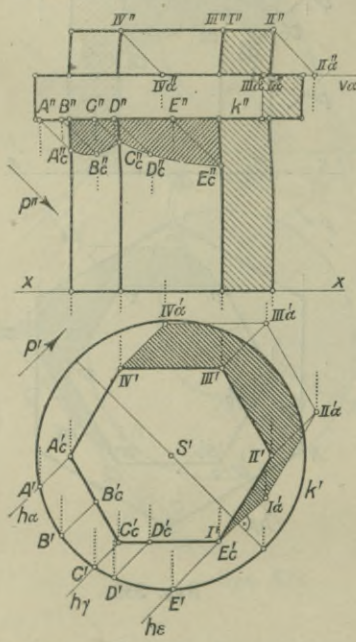
światła, które przechodzą przez punkty  $I$ ,  $II$ ,  $III$  i  $IV$ , z płaszczyzną poziomą  $\alpha$ . Następnie wyznaczmy w sposób omówiony w ust. 182. pkt. a) cień odcinków  $\overline{AC}$  i  $\overline{AD}$  na graniastostup, otrzymując linię łamaną  $Dc A_c Bc Cc$ .

b) Wyznaczyć cienie zespołu graniastostupa i walca (Rys. 531.). Wykreślenie cienia górnej podstawy graniastostupa na walec nie wymaga bliższych wyjaśnień. Cień walca na graniastostup jest linią przenikania walca światła, przechodzą-

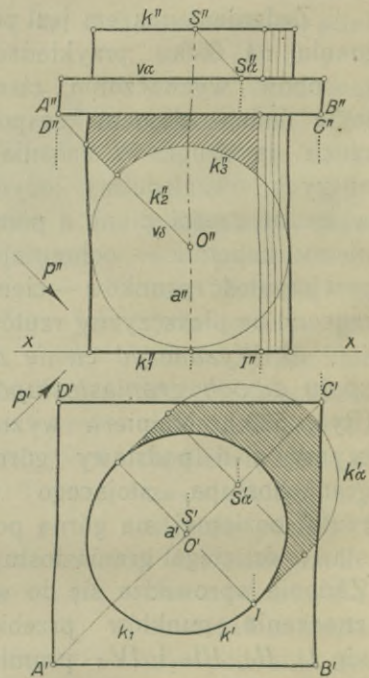


Rys. 530.

cego przez koło  $k$  ( $k' k''$ ), z bocznymi ścianami graniastostupa. Część tej linii, widocznej w rzucie pionowym, składa się z dwóch łuków elips, leżących na płaszczyznach poziomo rzucających. Rzut poziomy cienia koła  $k$  na graniastostup jest więc linią łamaną  $A_c' C_c' E_c'$ . Poziomo rzucająca płaszczyzna  $\alpha$ , przechodząca przez konturową krawędź boczną graniastostupa, przecina koło  $k$  ( $k' k''$ ) w punkcie  $A$  ( $A' A''$ ); promień wykreślony przez punkt  $A''$ , równoległy do kierunku  $p''$ , przecina rzut pionowy krawędzi konturowej w szukanym punkcie  $A_c''$ . W analogiczny sposób wyznaczyliśmy punkty  $C_c''$  i  $E_c''$ , a także punkty pośrednie  $B_c$  ( $B_c' B_c''$ ),  $D_c$  ( $D_c' D_c''$ )... szukanых elips.



Rys. 531.



Rys. 532.

c) Wyznaczyć wzajemne cienie rzucone walca obrotowego, złączonego z kwadratową płytą (Rys. 532.). Cień koła  $k$  ( $k' k''$ ) na płytę jest kołem  $k_\alpha$ , którego środek  $S_\alpha$  jest cieniem środka  $S$ , a którego promień równy jest promieniowi koła  $k$ . Cień punktu  $A$  ( $A' A''$ ) na walec jest punktem prze-

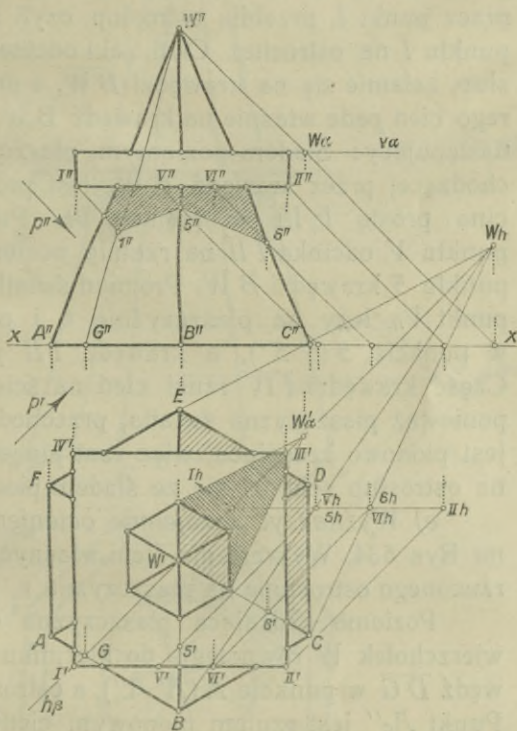


bicia się promienia światła, przechodzącego przez punkt  $A$ , z walcem. Płaszczyzna  $\delta$ , przechodząca przez krawędź  $\overline{AD}$ , jest pionowo rzucającą; jej przekrój z walcem jest elipsą  $k_2$ , której rzut pionowy  $k_2''$  schodzi się ze śladem  $v_\delta$ . Płaszczyzna światła, przechodząca przez krawędź  $\overline{AB}$ , jest równoległą do osi rzutów  $x$  i przecina walec wzdłuż elipsy  $k_3$ , której środkiem jest punkt  $O$  ( $O' O''$ ). Ponieważ rzuty promieni światła nachylone są do osi  $x$  pod  $45^\circ$ , więc pł.  $\delta$ , a temsamem i pł. światła, przechodząca przez krawędź  $\overline{AB}$ , zawiera z rzutniami kąt  $45^\circ$ , a co zatem idzie, rzut pionowy elipsy  $k_3$  jest kołem  $k_3''$ , zakreślonym z punktu  $O''$  stycznie do rzutu pionowego tworzących konturowych walca.

d) Wyznaczyć wzajemne oświetlenie zespołu, przedstawionego Rys. 533.

Ostrosłup rzuca cień na płaszczyznę  $\alpha$  podstawy górnej graniastopu, a krawędź  $\overline{I II}$  tego ostatniego na ostrosłup. Aby wykreślić cień tej krawędzi, znajdziemy cień rzucony ostrosłupa na rzutnię poziomą i cień rzucony  $\overline{I_h II_h}$  odcinka  $\overline{I II}$  na rzutnię poziomą. Punkt  $VI_h$  jest cieniem punktu  $VI$  odcinka  $\overline{I II}$  na rzutnię poziomą. Prosta, wykreślona przez punkt  $VI_h$  równoległe do  $p'$ , przecina odcinek  $\overline{I' II'}$  w punkcie  $VI'$ , który odniesiemy na prostą  $\overline{I'' II''}$  jako punkt  $VI''$ .

Promień, poprowadzony przez rzut punktu  $VI_h$  na oś  $x$ , równoległe do  $p''$ , przecina odcinek  $\overline{I' II'}$  w punkcie  $VI'$ .



Rys. 533.

Promień światła, przechodzący przez punkt  $VI$  ( $VI' VI''$ ), leży wraz z krawędzią  $\overline{WC}$  ostrosłupa na jednej płaszczyźnie, której śladem poziomym jest prosta  $Wh C$ . Punkt  $6$  ( $6' 6''$ ) jest punktem przecięcia się promienia światła  $VI VI_h$  z krawędzią  $\overline{WC}$ , a więc cieniem punktu  $VI$  na ostrosłup. Płaszczyzna światła, przechodząca przez punkty  $I$  ( $I' I''$ ) i  $W$  ( $W' W''$ ), jest w naszym przypadku poziomo rzucającą i przecina ścianę  $ABW$  ostrosłupa wzdłuż prostej  $\overline{GW}$ . Punkt  $I''$  jest rzutem pionowym punktu, w którym promień światła, przechodzący przez punkt  $I$ , przebija ostrosłup, czyli jest cieniem rzuconym punktu  $I$  na ostrosłup. Cień, jaki odcinek  $\overline{VI}$  rzuca na ostrosłup, załamie się na krawędzi  $\overline{BW}$ , a punkt odcinka  $\overline{VI}$ , którego cień pada właśnie na krawędź  $\overline{BW}$ , znajdziemy w sposób następujący: Śladem poziomym płaszczyzny światła  $\varepsilon$ , przechodzącej przez krawędź  $\overline{BW}$ , jest prosta  $BWh$ , która przecina prostą  $Ih Ih_h$  w punkcie  $V_h$ . Punkt ten jest cieniem punktu  $V$  odcinka  $\overline{III}$  na rzutnię poziomą i takimże cieniem punktu  $5$  krawędzi  $\overline{BW}$ . Promień światła, poprowadzony przez punkt  $V_h$ , leży na płaszczyźnie  $\varepsilon$  i przecina krawędź  $\overline{BW}$  w punkcie  $5$  ( $5' 5''$ ), a krawędź  $\overline{III}$  w punkcie  $V$  ( $V' V''$ ). Część krawędzi  $\overline{IV}$  rzuci cień na ścianę  $ABW$  ostrosłupa; ponieważ płaszczyzna światła, przechodząca przez tę krawędź, jest pionowo rzucająca, więc rzut pionowy cienia tej krawędzi na ostrosłup schodzi się ze śladem pionowym tej płaszczyzny.

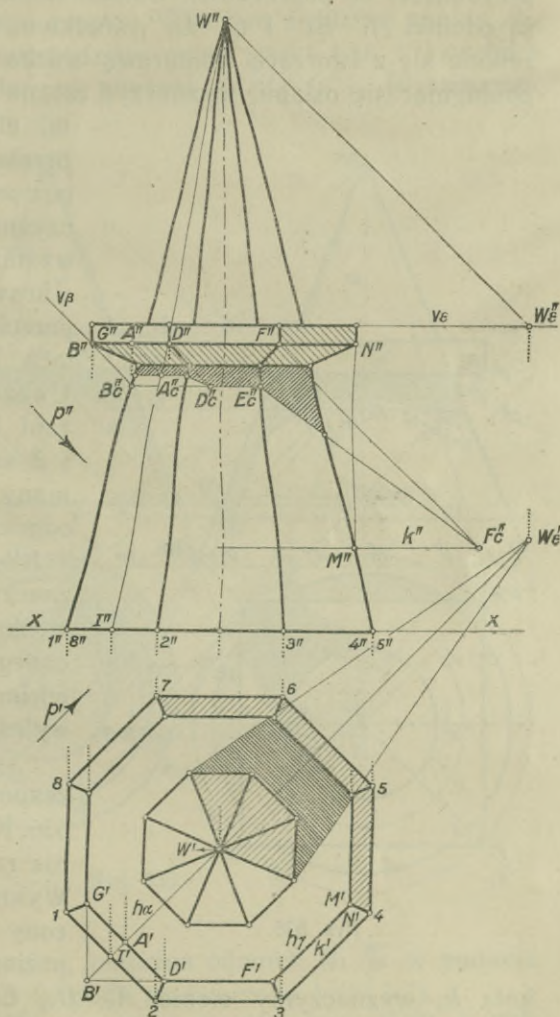
e) Wyznaczyć wzajemne ocienienie zespołu, podanego na Rys. 534. Wykreślenie cieni własnych, podobnie jak i cienia rzuconego ostrosłupa na płaszczyznę  $\varepsilon$ , nie wymaga wyjaśnień.

Poziomo rzucająca płaszczyzna  $\alpha$ , przechodząca przez wierzchołek  $W$  równoległe do kierunku światła, przecina krawędź  $\overline{DG}$  w punkcie  $A$  ( $A' A''$ ), a ostrosłup wzdłuż prostej  $\overline{IW}$ . Punkt  $Ac''$  jest rzutem pionowym cienia punktu  $A$  na ostrosłup. Równoległa do  $\overline{D' G'}$ , wykreślona przez  $Ac''$ , jest rzutem pionowym cienia, jaki część odcinka  $\overline{DG}$  rzuca na ścianę  $1W2$ . Ślad pionowy  $v_\beta$ , pionowo rzucającej płaszczyzny  $\beta$ , przechodzącej przez punkt  $B$  ( $B' B''$ ), przecina bok  $\overline{I' W'}$  w punkcie  $Bc''$ . Prosta, wykreślona z tego punktu, równoległe do  $v_\varepsilon$ , jest rzutem pionowym krawędzi, jaką tworzy płaszczyzna światła  $\delta$ , przechodząca przez bok  $\overline{DF}$  z płaszczyzną ściany  $2W3$ . Wyznaczywszy punkt  $Dc''$ , otrzymamy załamanie się cienia, jaki krawędź  $\overline{DG}$  rzuca na ostrosłup. Płaszczyzna



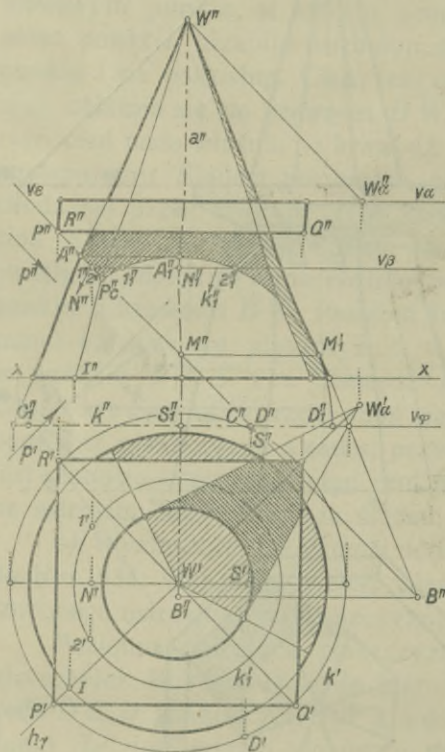
światła  $\delta$  przecina ścianę  $3W4$  ostrosłupa wzdłuż prostej, którą musimy wykreślić, a która dopełni granicę cienia rzucanego przez płytę na ostrosłup. Płaszczyzna światła  $\gamma$ , która przechodzi przez krawędź  $F'N'$ , jest poziomo rzucająca i przecina płaszczyznę ściany bocznej  $3W4$  w prostej  $k(k'k'')$ . Promień światła przechodzący przez punkt  $F(F'F'')$ , leżący na płaszczyźnie  $\gamma$ , przecina krawędź  $k$  w punkcie  $F_c$ , którego tylko rzut pionowy  $F_c''$  oznaczyliśmy na rysunku. Prosta  $E_c''F_c''$  jest rzutem pionowym krawędzi, jaką płaszczyzna światła  $\delta$  tworzy ze ścianą  $3W4$  ostrosłupa.  $F_c$  jest bowiem punktem przecięcia się płaszczyzn  $\gamma$ ,  $\delta$  i płaszczyzny  $3W4$ .

f) Wykreślić cienie zespołu, przedstawionego na Rys. 535. Promień światła, poprowadzony przez pkt.  $P(P'P'')$ , przebija stożek w punkcie  $P_c$ , którego rzut pionowy  $P_c''$  oznaczyliśmy na rysunku. Pionowo rzucająca płaszczyzna światła  $\varepsilon$ , przechodząca przez krawędź  $\overline{PR}$ , przecina stożek



Rys. 534.

wzdłuż elipsy, której rzut pionowy jest odcinkiem  $\overline{A''B''}$ , a której środkiem jest punkt  $S(S'S'')$ . Płaszczyzna światła, przechodząca przez krawędź  $\overline{PQ}$ , przecina stożek wzdłuż elipsy, przystającej do poprzedniej. Osiami rzutu pionowego tej elipsy są odcinki  $\overline{A_1''B_1''}$  i  $\overline{C_1''D_1''}$ , środkiem punkt  $S_1''$ . Elipsa ta zetknie się z tworzącą konturową stożka w punkcie  $M_1$ . Nie posługując się osiami, wyznaczyć można poszczególne punkty



Rys. 535.

tej elipsy przy pomocy przekrojów płaszczyznami poziomymi. I tak płaszczyzna  $\beta$  przecina stożek wzdłuż koła  $k_1(k_1' k_1'')$ , a krawędź płaszczyzn  $\beta$  i  $\varepsilon$  przecina to koło w punktach 1 ( $1' 1''$ ) i 2 ( $2' 2''$ ). Uważając punkty te za rzut boczny punktów 1<sub>1</sub> i 2<sub>1</sub> szukanej elipsy, otrzymamy ich rzut pionowy, odmierzając  $1' N' = 2' N' = 1'' N_1'' = 2'' N_1''$ . Wyznaczenie cienia własnego stożka i jego cienia rzuconego na płaszczyznę górną płyty nie wymagają wyjaśnień.

g) Wykreślić cienie zespołu, podanego na Rys. 536. Koło  $k(k' k'')$  pierścienia rzuca cień na stożek. Wykreśliwszy cień rzucony stożka na rzutnię poziomą i takież cień  $kh$

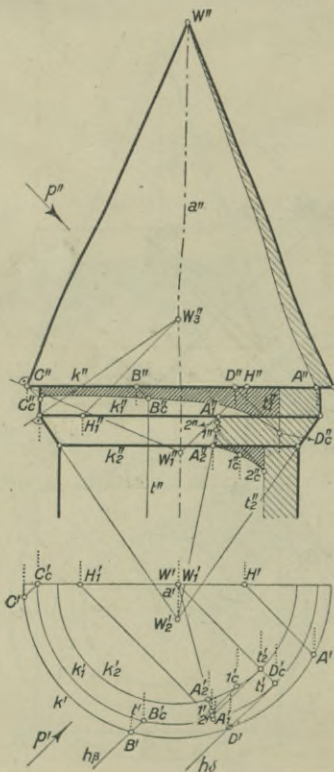
koła  $k$ , wyznaczmy cienie  $A_c, B_c, C_c, \dots$  poszczególnych punktów koła  $k$  na stożek, podobnie jak cienie punktów prostej  $\overline{AB}$  na stożek w Rys. 529.

h) Wykreślić cienie zespołu, przedstawionego Rys. 537. Cień rzucony koła  $k(k' k'')$  na walec, znajdziemy jako miejsce geometryczne punktów przebicia się promieni światła, poprowadzonych przez poszczególne punkty  $B(B' B'')$ ,  $C(C' C'')$ ...

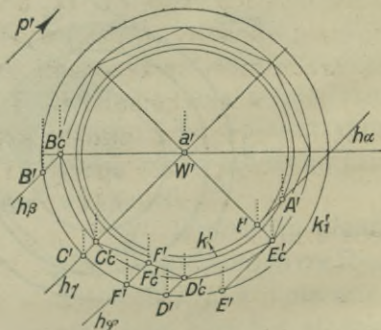
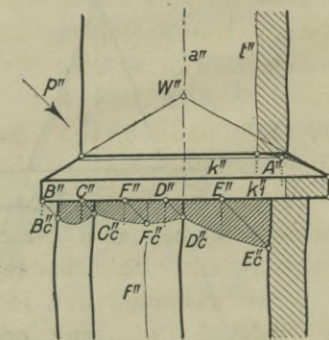




Walec świetlny, przechodzący przez koło  $k_1$  ( $k_1'$   $k_1''$ ), przenika się ze ścianami bocznymi graniastostłupa, a linie przenikania się (elipsy) stanowią granicę cienia rzuconego przez to koło na graniastostłup. Poszczególne punkty tych elips znajdziemy przy pomocy płaszczyzn świetlnych  $\beta, \gamma, \dots$ , które poprowadzimy przez krawędzie graniastostłupa, względnie do tych krawędzi równoległe (np. płaszczyzna  $\varphi$ ).



Rys. 537.



Rys. 538.

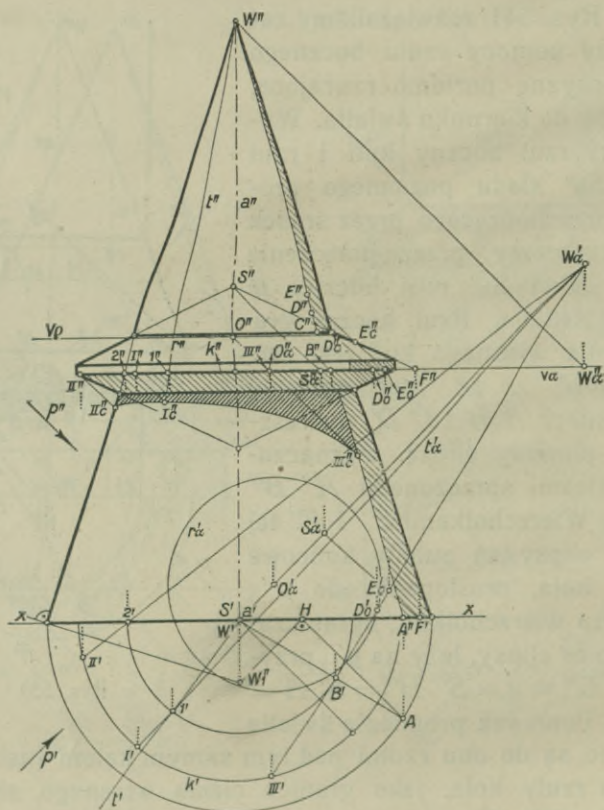
Tworząca  $t$  ( $t'$   $t''$ ), stanowiąca granicę cienia własnego górnego walca, rzuci cień na stożek. Cień ten będzie łukiem hiperboli, gdyż płaszczyzna światła, przechodząca przez tworzącą  $t$ , jest poziomo rzucająca, a więc równoległa do dwóch tworzących stożka. Punkt  $A$  ( $A'$   $A''$ ) tej hiperboli wyznaczylimy przy pomocy koła równoleżnikowego  $k$  ( $k'$   $k''$ ) stożka.





elips schodzą się z kierunkami  $p'$  i  $p''$  i równe są odcinkowi  $\overline{A h^0 B h^0}$ . Osi małe obu elips równe są średnicy kuli.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie jedynie cienia własnego kuli, to na podstawie konstrukcji Rys. 541. postąpimy w sposób następujący: kreślimy  $C'D' \perp p'$  (Rys. 542.) i wpiszemy w koło kwadrat, którego boki wyznaczają na poziomej średnicy



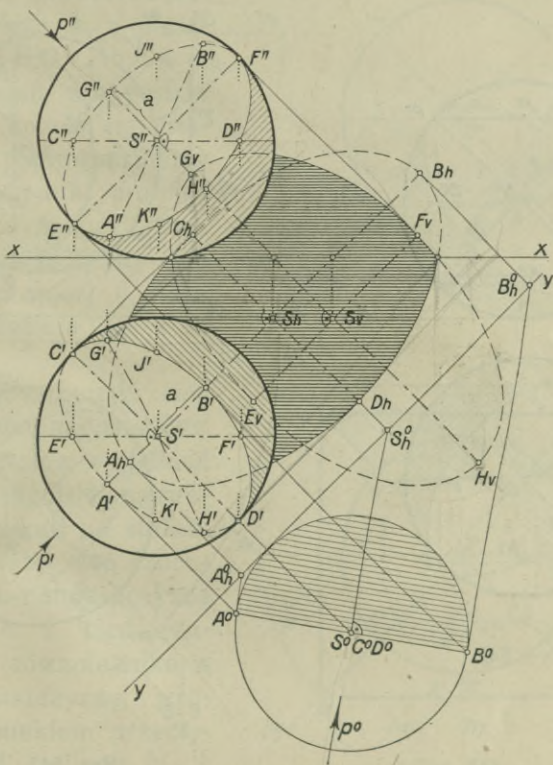
Rys. 540.

koła punkty  $E'$ ,  $F'$ , a na pionowej punkty  $J'$  i  $K'$ . Szukana elipsa jest prostokątnie powinowata z kołem, przyczem osią tego powinowactwa jest prosta  $C'D'$ . Kreślimy  $\overline{E'E_2} \parallel \overline{C'D'}$  i łączymy  $E_2$  z  $S'$ , a przez punkt  $E'$  prowadzimy równoległą do  $p'$ , otrzymując punkt  $E_1$ . Odcinek  $\overline{E_1 S'} = \overline{A' S'} = \overline{B' S'} = a$  równy jest małej osi szukanej elipsy (por. ust. 97., Rys. 290.).



Wyznaczenie rzutu pionowego granicy cienia własnego kuli nie wymaga wyjaśnień.

Na Rys. 543. wyznaczyliśmy cień własny kuli, stosując metodę poznaną w ust. 161. Promień światła  $p$  ( $p'$   $p''$ ), poprowadzony przez środek  $O$  ( $O'$   $O''$ ) kuli, obrócimy do położenia  $p_1$ , równoległego względem rzutni pionowej, a to około prostej pionowej  $m$  ( $m'$   $m''$ ), która przechodzi przez ślad poziomy  $H_p$



Rys. 541.

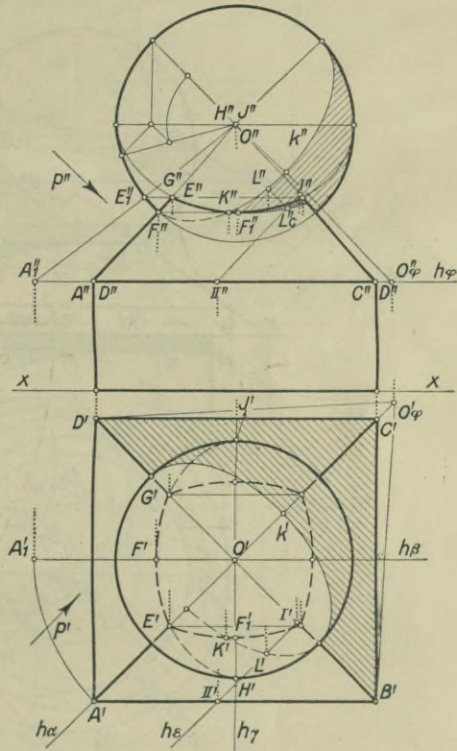
promienia  $p$ . Tworzące walca, równoległe do kierunku  $p_1$ , stykają się z południkiem głównym kuli w punktach  $A_1$  ( $A_1'$   $A_1''$ ) i  $A_2$  ( $A_2'$   $A_2''$ ). Z punktami tymi wróciliśmy na płaszczyznę światła, przechodzącą przez środek kuli, oznaczając je jako  $A$  ( $A'$   $A''$ ) i  $B$  ( $B'$   $B''$ ). Odcinki  $\overline{A'B'}$  i  $\overline{C'D'}$  stanowią parę osi elipsy, będącej rzutem poziomym granicy cienia własnego kuli; odcinki  $\overline{A''B''}$  i  $\overline{C''D''}$  są parą średnic sprzężonych





## 187. Przykłady.

a) Wyznaczyć cień zespołu, przedstawionego na Rys. 544. Linia przenikania kuli z ostrosłupem składa się z łuków czterech kół, których rzuty są elipsami. Wyznacząwszy cień własny  $k(k'k'')$  kuli, przystąpimy do wykreślenia cienia, jaki kula rzuca na ścianę  $ABO$  ostrosłupa. Linia tego cienia rzuconego jest łukiem elipsy, jaka powstanie z przecięcia walca świetlnego, przechodzącego przez koło  $k$ , z płaszczyzną  $ABO$ . Aby wyznaczyć cień np. punktu  $L(L'L'')$  koła  $k$  na ścianę  $ABO$ , poprowadziliśmy przez ten punkt promień światła i wyznaczyli, przy pomocy płaszczyzny poziomo rzucającej  $\varepsilon$ , jego punkt przebiecia  $L_c$  z tą ścianą.

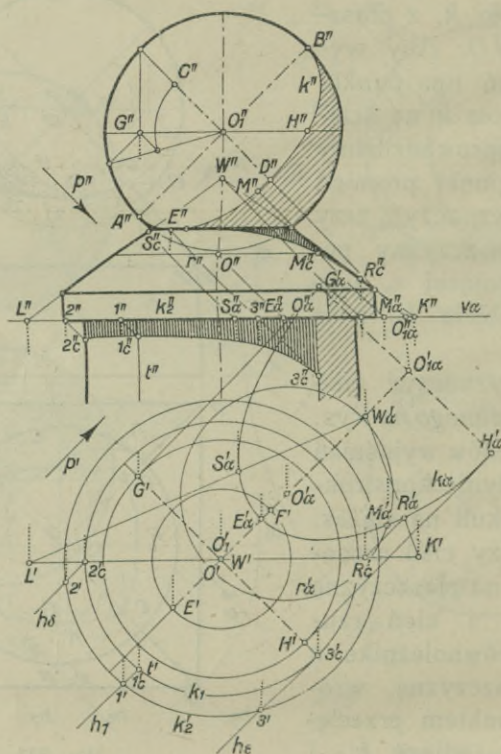


Rys. 544.

b) Wyznaczyć cień zespołu, podanego na Rys. 545. Kilka słów wyjaśnienia wymaga jedynie konstrukcja cienia kuli na stożek. Wykreśliwszy cień rzucony  $k'_\alpha$  kuli na płaszczyznę poziomą  $\alpha$  i cień rzucony  $r_\alpha'$  równoleżnika  $r$  na tę płaszczyznę, wrócimy z punktem przecięcia się  $M'_\alpha$  elipsy  $k'_\alpha$  i koła  $r_\alpha'$  na równoleżnik  $r$ , otrzymując punkt  $M_{c''}$ . Przy pomocy cienia rzucanego  $W'_\alpha K'$ , tworzącej  $WK$  stożka, który przecina elipsę  $k'_\alpha$  w punkcie  $R'_\alpha$ , otrzymamy punkt  $R_c$  ( $R_c' R_{c''}$ ) cienia, który leży na tworzącej konturowej stożka.

188. Cień powierzchni obrotowej. Cień własny powierzchni obrotowej jest linią stycznej walca promieni, opisanego na tej powierzchni. Na Rys. 546. powtórzyliśmy więc konstrukcję, opisaną szczegółowo w ust. 161. (por. Rys. 474.).

Jednak, prócz cienia własnego, posiada powierzchnia cień, jaki na nią rzuca koło  $k$  ( $k' k''$ ). Aby wyznaczyć cień punktu  $N$  ( $N' N''$ ) na powierzchnię, obrócimy go wraz z promieniem, który przez niego przechodzi, na płaszczyznę południka głównego  $\beta$ . Punkt  $N_1$  ( $N_1' N_1''$ ) rzuci cień  $N_{1c}$  na południk główny. Cień ten sprowadzimy zapomocą obrotu około osi powierzchni na płaszczyznę południka  $\alpha$ , otrzymując tam punkt  $N_c$  ( $N_c' N_c''$ ).

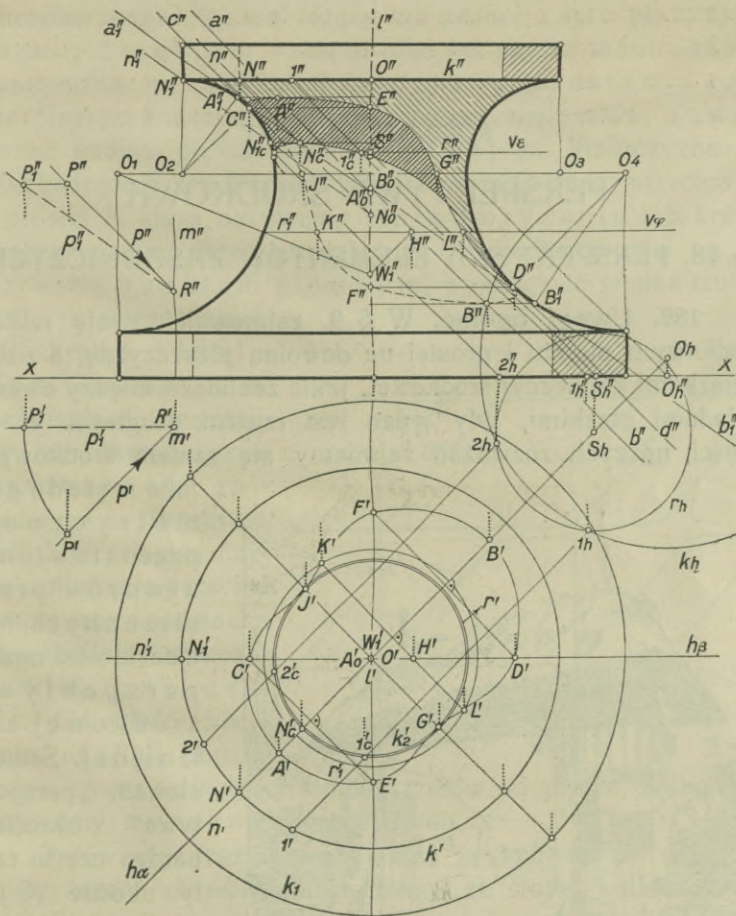


Rys. 545.

Dalsze punkty cienia koła  $k$  ( $k' k''$ ) na powierzchnię znajdziemy (podobnie jak cień linii na stożek) przy pomocy cienia rzuconego. Cień koła  $k$  na rzutnię poziomą jest kołem  $k_h$ , cień równoleżnika  $r$  ( $r' r''$ ) kołem  $r_h$ . Koła te przecinają się w punktach  $1_h$  i  $2_h$ . Te ostatnie są cieniami punktów  $1$  ( $1' 1''$ ) i  $2$  ( $2' 2''$ ) koła  $k$  ( $k' k''$ ) na rzutnię poziomą. Promienie światła, przechodzące przez punkty  $1$  ( $1' 1''$ ) i  $2$  ( $2' 2''$ ), przecinają



równoleżnik  $r$  ( $r'$   $r''$ ) w punktach  $1c$  ( $1c'$   $1c''$ ) i  $2c$  ( $2c'$   $2c''$ ), które są cieniami pierwszych na powierzchni. Tym sposobem, obie-



Rys. 546.

rajac dalsze równoleżniki, otrzymamy żadaną ilość punktów krzywej, będącej cieniem koła  $k$  na powierzchni.

## ROZDZIAŁ CZWARTY

### PERSPEKTYWA ŚRODKOWA

#### § 18. PERSPEKTYWA ELEMENTÓW ZASADNICZYCH

189. Uwagi ogólne. W § 9. zajmowaliśmy się rzutem środkowym punktu i prostej na dowolną płaszczyznę, a nadto związkami kolineacyi środkowej, jakie zachodzą między dwoma układami płaskimi, gdy jeden jest rzutem drugiego. W tej części naszych rozważań zajmiemy się rzutem środkowym,

jako metodą geometrycznego przedstawiania utworów przestrzennych. Metoda ta nosi nazwę perspektywy środkowej albo liniowej. Samem słowem „perspektywa“ określają bardzo często rzuty ukośne (§ 6.), a więc metodę rzutów równoległych; dlatego, aby uniknąć nieporozumień, dodajemy przymiotnik „środkowa“. Określenie



Rys. 547. Bramka do plebanii w Krasiejowie  
koło Monasterzysk  
(Rysunek prof. dr. Tad. Obmińskiego)

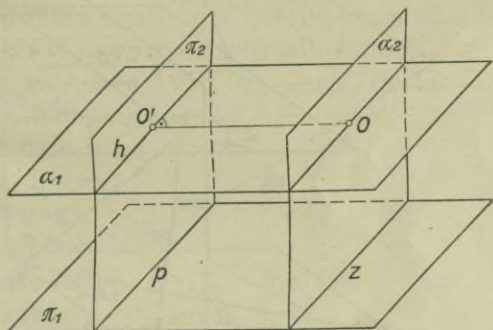
perspektywy środkowej mianem „liniowej“ ma za zadanie podkreślić czysto geometryczny charakter tej metody w przeciwstawieniu do perspektywy malarskiej, gdzie uwzględniane



są ponadto momenty natury estetycznej, a także wpływ powietrza, barwy i oddalenia.

Przyjmijmy płaszczyznę poziomą  $\pi_1$ , pionową  $\pi_2$  (Rys. 548.) i dowolny punkt  $O$ , nie leżący na żadnej z tych płaszczyzn, a będący środkiem rzutu, albo jak się też mówi okiem. Płaszczyzna  $\pi_1$ , zwana płaszczyzną podstawy, przecina płaszczyznę  $\pi_2$ , stanowiącą płaszczyznę rzutów, a zwaną tłem, wzdłuż prostej podstawowej  $p$ . Płaszczyzna  $\alpha_1$ , przechodząca przez środek rzutów równoległe do  $\pi_1$ , przecina tło w prostej  $h$ , którą nazywamy linią horyzontu lub krótko horyzontem. Rzut prostokątny  $O'$  środka rzutów na tło, nazywamy punktem głównym, a odległość środka rzutów od tła, a więc odcinek

$\overline{OO'}$ , krótko oddalenie m. Płaszczyzna  $\alpha_2$ , równoległa do płaszczyzny  $\pi_2$ , nosi nazwę płaszczyzny zniknięcia. Prosta  $z$ , wzdłuż której płaszczyzna zniknięcia przecina płaszczyznę podstawową, określamy mianem prostej zniknięcia. Odległość horyzontu od linii podstawowej, równą odległości środka rzutów od prostej zniknięcia, nazywamy wysokością horyzontu.

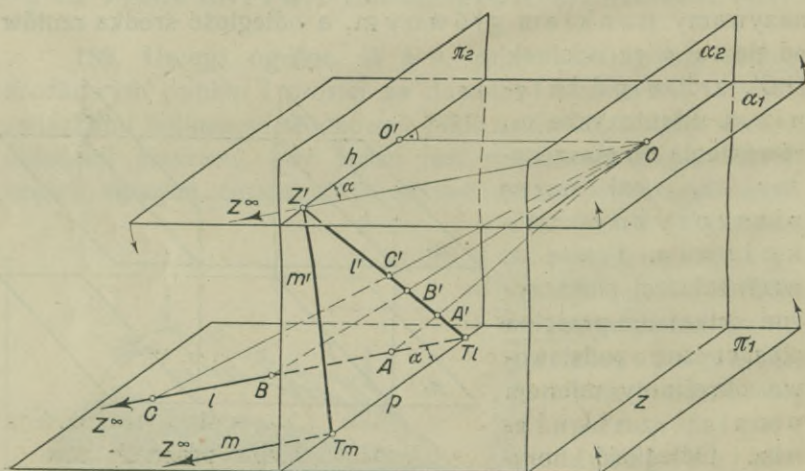


Rys. 548.

Porównując rozważania nasze o kolineacji (ust. 113.) z powyższymi określeniami, widzimy, że środek kolineacji odpowiada środkowi rzutów, oś kolineacji prostej podstawowej, oś wzajemna  $w_2$  horyzontowi  $h$ , a oś wzajemna  $z_1$ , prostej zniknięcia  $z$ .

**190. Perspektywa prostych, leżących na płaszczyźnie podstawowej.** Rzut środkowy (perspektywiczny) prostej  $l$ , przyjętej na płaszczyźnie  $\pi_1$ , jest krawędzią  $l'$  płaszczyzny, przechodzącej przez tę prostą i środek rzutów  $O$ , z tłem  $\pi_2$  (Rys. 549.). Połączmy dowolny punkt  $A$  prostej  $l$  ze środkiem rzutów  $O$ , to punkt  $A'$ , w którym promień  $OA$  przebija tło, leży na prostej  $l'$  i jest rzutem środkowym punktu  $A$ . Prosta  $l'$

określić więc można jako miejsce geometryczne rzutów środkowych wszystkich punktów prostej  $l$ . Perspektywę punktu niewłaściwego  $Z^\infty$  prostej  $l$  otrzymamy, prowadząc przez środek rzutów promień równoległy do prostej  $l$  i znajdując punkt przecięcia tego promienia z tłem. Punkt ten, oznaczony na Rys. 549. literą  $Z'$ , leży na horyzoncie i nosi nazwę śladu zbiegu prostej  $l$ . Promień  $OZ'$  nazywać będziemy promieniem zbiegu prostej  $l$ . Przez punkt  $T_l$ , w którym prosta  $l$  przebija tło, przechodzi perspektywa  $l'$  tej prostej, a punkt ten nazywamy śladem tłowym prostej  $l$ .



Rys. 549.

Jakkolwiek dwa dowolne punkty np.  $A'$  i  $B'$  wyznaczają prostą  $l'$  na tle, a więc także i prostą  $l$  na płaszczyźnie podstawowej, to jednak z reguły posługiwać się będziemy przy wyznaczaniu obrazów perspektywicznych prostych, a więc i położenia tych prostych w przestrzeni, ich śladami tłowymi i śladami zbiegów.

Przyjmijmy na płaszczyźnie  $\pi_1$  prostą  $m \parallel l$  i oznaczmy jej ślad tłowy literą  $T_m$ . Rzut środkowy punktu niewłaściwego  $Z^\infty$  prostej  $m$ , jest punktem  $Z'$ . Proste równoległe, leżące na płaszczyźnie podstawowej, mają wspólny ślad zbiegu na horyzoncie. Ślady tłowe tych prostych leżą na linii podstawowej.

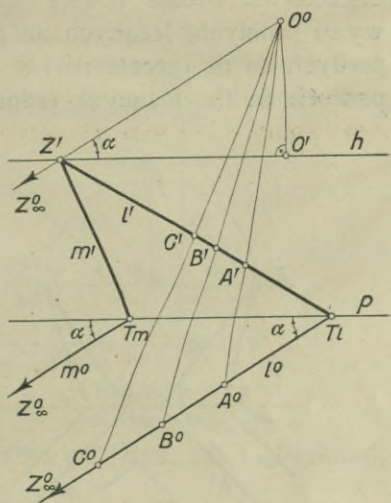


Obróćmy płaszczyznę  $\alpha_1$  około horyzontu  $h$ , a płaszczyznę  $\pi_1$  około prostej  $p$  w kierunku wskazanym strzałkami tak, aby padły na tło ( $\pi_2$ ), to wówczas otrzymamy obraz przedstawiony na Rys. 550., jeśli płaszczyznę tego rysunku przyjmiemy za tło. Punkt  $O^0$  jest kładem środka rzutów na tło,  $O^0 Z'$  kładem promienia zbiegu, a proste  $l^0$  i  $m^0$  kładem prostych  $l$  i  $m$  na tło. Proste  $l'$  i  $m'$  są rzutami środkowymi (perspektywami) prostych  $l$  i  $m$ . Jeżeli punkty  $A^0, B^0, \dots$  przyjęte na prostej  $l^0$  rzucimy z punktu  $O^0$  na prostą  $l'$ , to otrzymane tam punkty  $A', B', \dots$  są perspektywami punktów  $A, B, \dots$  prostej  $l$  (porównaj Rys. 549.).

Z Rysunków 549. i 550. widoczne jest, że kąt nachylenia promienia zbiegu z linią horyzontu, równy jest kątowi, jaki prosta  $l$ , względnie proste do niej równoległe, a leżące na płaszczyźnie podstawy, zawierają z linią podstawową albo z tłem.

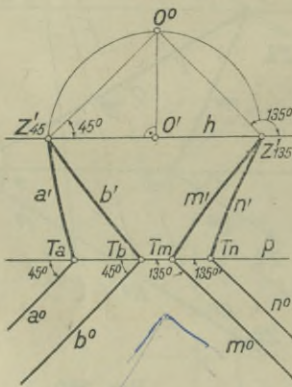
Oczywiście też jest, że każdy punkt horyzontu jest śladem zbiegu prostych równoległych, a nachylonych do tła pod kątem równym kątowi nachylenia promienia zbiegu z tłem, względnie równym kątowi, jaki kład promienia zbiegu zawiera z horyzontem.

**191. Punkty i koło oddalenia.** Na szczególną uwagę zasługują ślady zbiegu  $Z'_{45}$  i  $Z'_{135}$  prostych, leżących na płaszczyźnie podstawy, nachylonych do tła pod  $45^\circ$  i  $135^\circ$ . Ślady te, leżące na horyzoncie (Rys. 551.), nazywamy punktami oddalenia. Ponieważ prostokątny trójkąt  $O' O^0 Z'_{45}$  jest trójkątem równoramiennym i przystającym do trójkąta  $O' O^0 Z'_{135}$ , więc  $O' Z'_{45} = O' Z'_{135} = O' O^0 = d$ , czyli, że odległość punktu głównego od każdego z dwóch punktów oddalenia, równa jest odległości środka rzutów od tła. Koło, zakreślone promieniem  $d$ , przechodzące więc przez punkty oddalenia, zwie się kołem oddalenia.

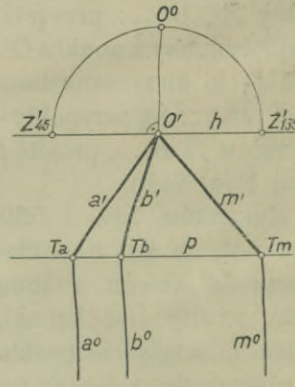


Rys. 550.

192. Proste prostopadłe do tła. Z pojęcia śladów zbiegu wynika wprost, że ślad zbiegu prostych, leżących na płaszczyźnie podstawy, a prostopadłych do tła, jest punktem głównym. Proste  $a'$ ,  $b'$  i  $m'$  (Rys. 552.) są rzutami środkowymi prostych  $a$ ,  $b$  i  $m$ , prostopadłych do tła, a leżących na płaszczyźnie  $\pi_1$ . Proste  $l'$  i  $m'$  na Rys. 553. są rzutami środkowymi prostych, leżących na płaszczyźnie podstawy, a prostopadłych do tła, proste  $n'$  i  $s'$  perspektywami prostych prostopadłych do tła, leżących jednak dowolnie w przestrzeni.



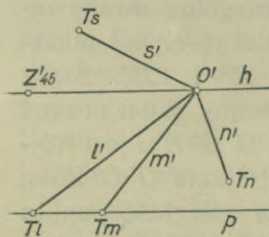
Rys. 551.



Rys. 552.

### 193. Zadania.

1) Wykreślić rzut środkowy kwadratu, leżącego na płaszczyźnie podstawowej, której kład na płaszczyznę rysunku jest dany.



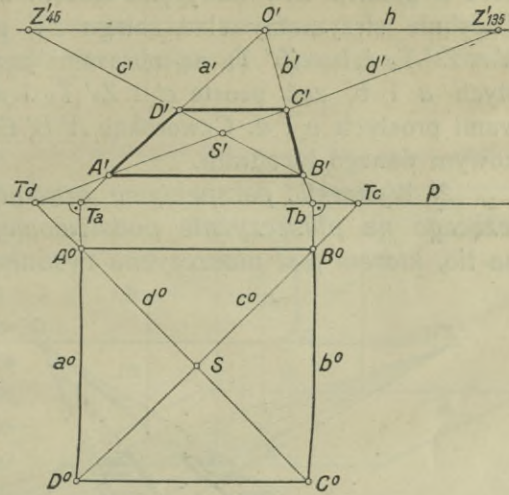
Rys. 553.

a) Para boków kwadratu jest prostopadła do linii podstawowej (Rys. 554). Ślady tłowe  $T_a$  i  $T_b$  prostych  $a$  i  $b$  łączymy z punktem głównym i otrzymujemy rzuty środkowe tych prostych. Ślady tłowe  $T_c$  i  $T_d$  przekątnych kwadratu połączone, pierwszy z punktem oddalenia  $Z'_{45}$ , drugi z punktem oddalenia  $Z'_{135}$ , dają perspektywy prostych  $c$ ,  $d$  i przecinają

dwie poprzednio otrzymane proste w punktach  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  i  $D'$ , które są perspektywami wierzchołków kwadratu. Boki  $\overline{A'B'}$

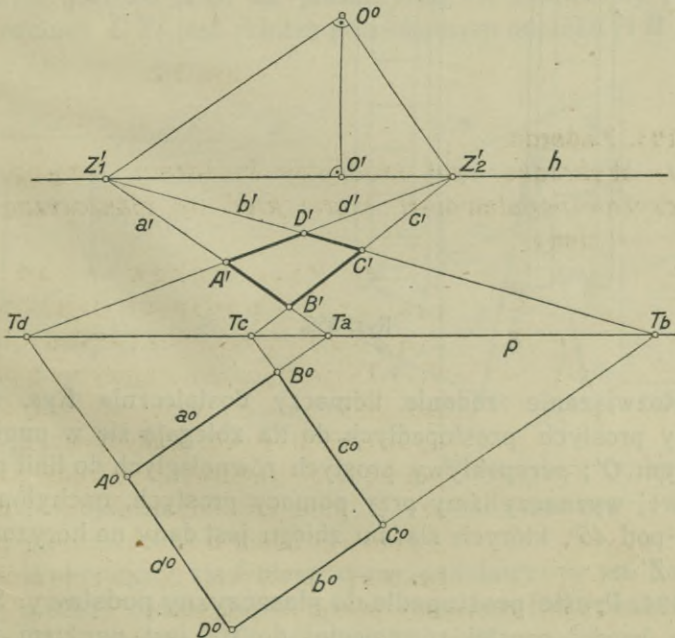


i  $\overline{C'D'}$  otrzymanego czworokąta są równoległe do linii  $p$ , ślady łowe bowiem prostych  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  są punktami niewłaściwymi prostej  $p$ , a jak wiadomo, przez ślady te przejść muszą proste  $\overline{A'B'}$  i  $\overline{C'D'}$ . Rzut środkowy kwadratu jest więc w tym przypadku trapezem. Wynika też stąd, że wykreśliwszy proste  $a'$ ,  $b'$  i  $c'$ , otrzymamy punkty  $C'$  i  $D'$ , kreśląc przez  $B'$  i  $D'$  równoległe do  $p$ .



Rys. 554.

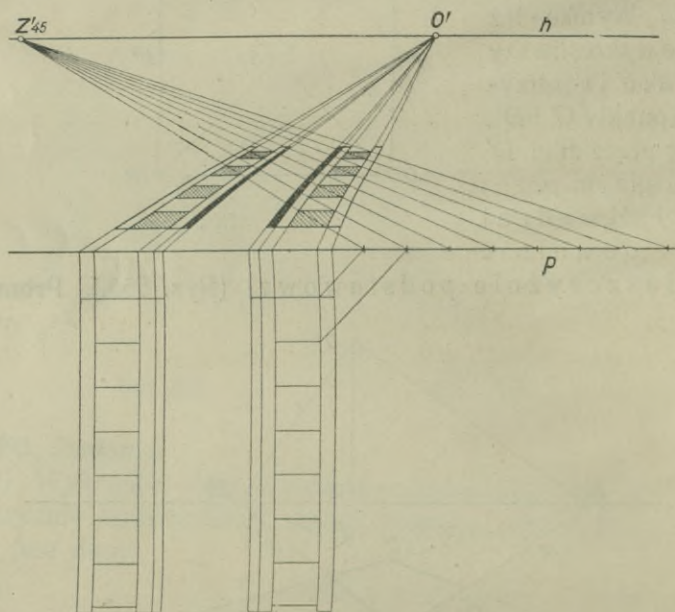
b) Kwadrat leży dowolnie na płaszczyźnie podstawowej (Rys. 555.). Promień,



Rys. 555.

wykreślony z punktu  $O^0$  równoległe do  $a^0 // b^0$  przecina horyzont w punkcie  $Z_1'$ , który jest śladem zbiegu prostych  $a$  i  $b$ . Podobnie otrzymamy ślad zbiegu  $Z_2'$  prostych  $c$  i  $d$ . Proste  $a' \equiv Z_1' T_a$  i  $b' \equiv Z_1' T_b$  są obrazami perspektywicznymi prostych  $a$  i  $b$ , zaś proste  $c' \equiv Z_2' T_c$  i  $d' \equiv Z_2' T_d$  perspektywami prostych  $c$  i  $d$ . Czworokąt  $A' B' C' D'$  jest rzutem środkowym danego kwadratu.

2) Wykreślić perspektywę ornamentu geometrycznego, leżącego na płaszczyźnie podstawowej. Kład tej ostatniej na tło, którym jest płaszczyzna rysunku, jest dany.



Rys. 556.

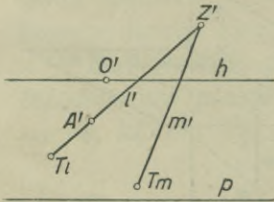
Rozwiązanie zadania tłumaczy dostatecznie Rys. 556. Obrazy prostych prostopadłych do tła zbiegają się w punkcie głównym  $O'$ ; perspektywy prostych równoległych do linii podstawowej wyznaczyliśmy przy pomocy prostych, nachylonych do tła pod  $45^\circ$ , których śladem zbiegu jest dany na horyzoncie punkt  $Z'_{45}$ .

194. Proste prostopadłe do płaszczyzny podstawy. Ślad zbiegu każdej prostej równoległej do tła jest punktem nie-





odcinkiem  $\overline{T_1 C}$ . Przez punkt  $A^0$  kreślimy prostą  $n^0$ , pod  $45^\circ$  do linii podstawowej  $p$ . Rzut środkowy  $n'$  prostej  $n^0$  jest prostą, łączącą ślad tłowy  $T_n$  z danym śladem zbiegu  $Z'_{45}$ . Proste  $l'$  i  $n'$  wyznaczają szukany punkt  $A'$ . Punkt  $B'$  leży na promieniu  $C O'$ , przyczem  $\overline{A' B'}$  jest równoległe do  $\overline{C T_1}$ .



Rys. 560.

Odcinek  $\overline{A' B'}$  jest rzutem środkowym odcinka  $\overline{A B}$ , prostopadłego do płaszczyzny podstawy.

195. Proste dowolnie położone w przestrzeni. Ślady tłowe i ślady zbiegu takich prostych leżą poza obrębem linii podstawy i horyzontu (Rys. 559.).

Rys. 560. jest obrazem perspektywicznym dwóch prostych równoległych, nie leżących na płaszczyźnie podstawy i dowolnie nachylnych do tła. Punkt  $A'$  jest rzutem środkowym punktu, który leży na prostej  $l$ .

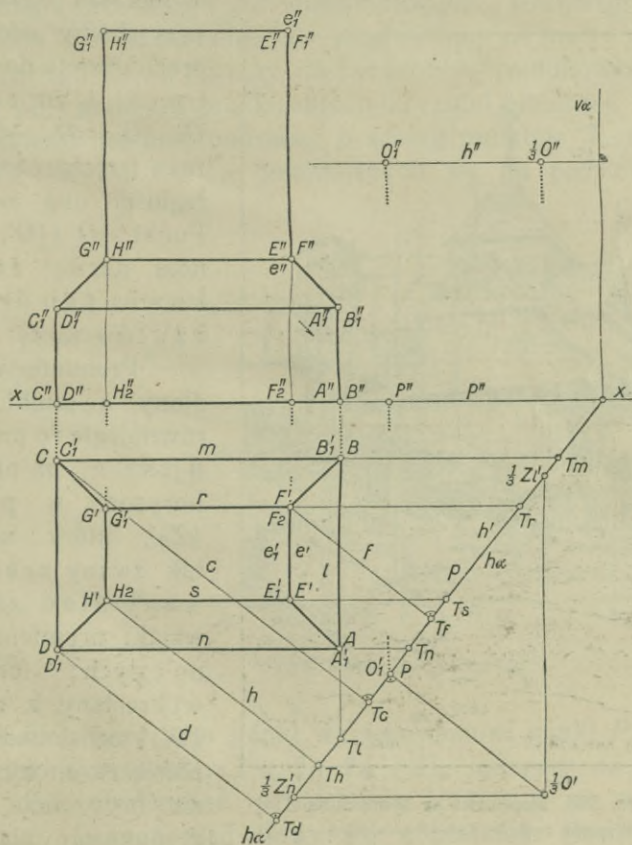


Rys. 561. Wschodnia ściana rynku w Pruchniku koło Jaroslavia

(Rysunek prof. dr. Tad. Obmińskiego)



196. **Perspektywa jako metoda pośrednia.** Wykreślenie rzutu środkowego, z danych rzutów prostokątnych, stanowi ważne zadanie geometryczne, które na jednym przykładzie rozpatrzmy. W przeciwstawieniu do rozważań poprzednich metoda zadania naszego, którego podstawą są dane rzuty prostokątne, jest metodą pośrednią.



Rys. 562.

Rys. 562. przedstawia zespół geometryczny dwóch graniastosłupów i jednego ostrosłupa. Poziomo rzucająca płaszczyzna  $\alpha$  jest tłem, prosta  $h$  ( $h'$   $h''$ ) horyzontem, a punkt  $O_1$  ( $O_1'$   $O_1''$ ) punktem głównym. Środek rzutów leży na prostopadłej, wyprowadzonej w punkcie  $O_1$  do płaszczyzny  $\alpha$ . Aby rysunek perspektywiczny robił właściwe wrażenie, musimy

oddalenie oka od tła przyjąć dostatecznie wielkie. Zasadą praktyczną jest, aby oddalenie to nie było mniejsze od półtora-krotnego największego wymiaru przedstawionego rysunkiem przedmiotu. Względ na ograniczoną płaszczyznę rysunku nie pozwala zazwyczaj na oznaczenie rzutów oka, posługujemy się więc zazwyczaj t. zw. zredukowanym oddaleniem oka.

W naszym przykładzie przyjęliśmy oddalenie zredukowane do jednej trzeciej, t. zn. odcinek  $O_1$ ,  $\frac{1}{3}O = O_1'$ ,  $\frac{1}{3}O'$  wyraża trzecią część odległości oka od tła. Punkt  $\frac{1}{3}O$  ( $\frac{1}{3}O'$ ,  $\frac{1}{3}O''$ ) nosi nazwę zredukowanego środka rzutów (oka).

Promień, wykreślony z punktu  $\frac{1}{3}O'$ , równoległe do prostych  $n \parallel s \parallel r \parallel m$ , przetnie horyzont w punkcie  $\frac{1}{3}Zn'$ , który stanowi tak zwany zredukowany ślad zbiegu wiązki promieni równoległych; promień wykreślony z punktu  $\frac{1}{3}O'$ , prostopadle do pierwszego, wyznacza na horyzoncie drugi zredukowany ślad zbiegu  $\frac{1}{3}Zl$ , a mianowicie

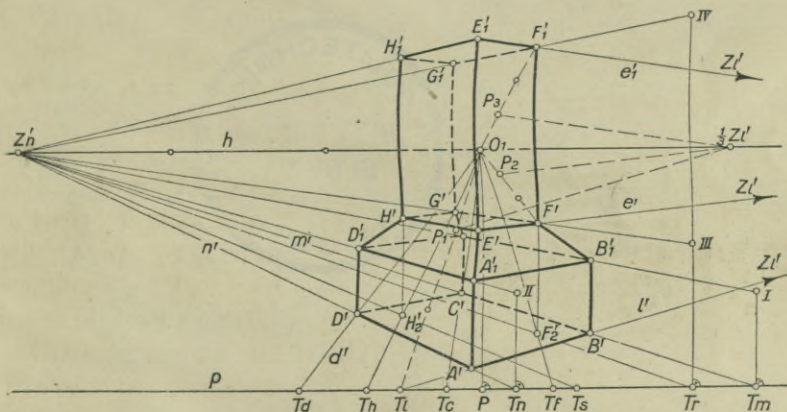


Rys. 563. Kapliczka w Worochcie  
(Rysunek prof. dr Tał. Obmińskiego)

dla wiązki promieni o kierunku prostopadłym do pierwszej. Przedłużmy proste  $m$ ,  $n$ ,  $r$ ,  $s$  aż do przecięcia się ze śladem  $h_\alpha$  i oznaczmy punkty przecięcia literami  $T_m$ ,  $T_n$ ,  $T_r$ ,  $T_s$ . Prosta  $l$  przecina ślad  $h_\alpha$  w punkcie  $T_l$ , a prostopadłe  $c$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $f$  wykreślone do  $h_\alpha$  wyznaczają na niej punkty  $T_c$ ,  $T_d$ ,  $T_h$ ,  $T_f$ . Przygotowawszy tak Rys. 562., przystąpić możemy do wykreślenia rzutu środkowego.



Przyjmiemy więc linię podstawy  $p$  i linię horyzontu  $h$  (Rys. 564.), uwzględniając wysokość horyzontu, równą odległości prostych równoległych  $p''$  i  $h''$ . Na horyzoncie przyjmujemy punkt główny  $O_1$ , a jego rzut prostokątny na linię podstawy  $p$  oznaczmy literą  $P$  (porównaj Rys. 562.). Odcinek  $O_1T_1$ ,  $\frac{1}{3}Z_1'$  przenieśmy trzykrotnie od punktu  $O_1$  na lewo, otrzymując ślad zbiegu  $Z_1'$  wiązki prostych, równoległych do osi rzutów  $x$ . Odcinek  $O_1T_1$ ,  $\frac{1}{3}Z_1'$ , przeniesiony na prawo od punktu głównego  $O_1$ , wyznaczy na horyzoncie zredukowany ślad zbiegu  $\frac{1}{3}Z_1'$  prostych prostopadłych do rzutni pionowej. Z kolei przenieśmy na linię podstawy  $p$  szereg punktów  $T_c, T_l, T_h, T_d$  i  $T_n, T_f, T_s, T_r, T_m$ , znajdujących się na podstawie  $h\alpha$



Rys. 564.

w Rys. 562., przyczem punkt wyjścia stanowi punkt  $P$ . Ślady łowe, jakimi są punkty  $T_m, T_r, T_s$ , i  $T_n$ , łączymy ze śladem zbiegu  $Z_1'$ , otrzymując perspektywy prostych  $m, n, r, s$ . Prosta  $d'$ , łącząca ślad łowy  $T_d$  z punktem głównym  $O_1$ , jest rzutem środkowym prostej  $d$ , poprowadzonej z punktu  $D$  ( $D D''$ ) prostopadle do tła. Proste  $n'$  i  $d'$  przecinają się w punkcie  $D'$ , który jest rzutem środkowym punktu  $D$ ; prosta  $T_c O_1$  przecina prostą  $m'$  w punkcie  $C'$ . Odcinek  $C' D'$  jest perspektywą krawędzi  $CD$ . Połączmy punkt  $T_l$  z punktem  $O_1$ , a odcinek  $O_1 T_l$  podzielmy na trzy równe części. Punkt podziału  $P_1$  połączmy ze śladem zbiegu  $\frac{1}{3}Z_1'$ , a przez punkt  $T_l$  poprowadźmy równoległą  $l'$  do prostej  $P_1, \frac{1}{3}Z_1'$ .

Prosta  $l'$  jest perspektywą prostej  $l$  (patrz Rys. 562.), a odcinek  $\overline{A'B'}$  rzutem środkowym boku  $\overline{AB}$ . W istocie bowiem:

$$\Delta O_1 T_1 Z_1' \sim \Delta O_1 P_1 \frac{1}{3} Z_1'.$$

W punktach  $A', B', C', T_m$  i  $T_n$  wykreślimy prostopadłe do prostej  $p$ , odmierzymy  $\overline{T_m I} = \overline{T_n II} = \overline{B'' B_1''}$ , a punkty  $I$  i  $II$  połączymy ze śladem zbiegu  $Z_n'$ . Tym sposobem otrzymamy perspektywę  $A_1' B_1' C_1' D_1'$  prostokąta  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . W analogiczny sposób wyznaczymy punkty  $F_2'$  i  $H_2'$ , następnie czworokąt  $E' F' G' H'$ , a wreszcie  $E_1' F_1' G_1' H_1'$ .













S. 04

S. 85

S. 06



1841

337/56

40

2









POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
BIBLIOTEKA GŁÓWNA

~~471~~  
L. inw.

24904

Zam. 480/55 20.000

S. 68

Politechnika Krakowska  
Biblioteka Główna



100000196630