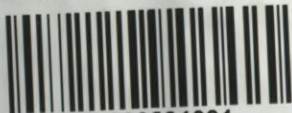


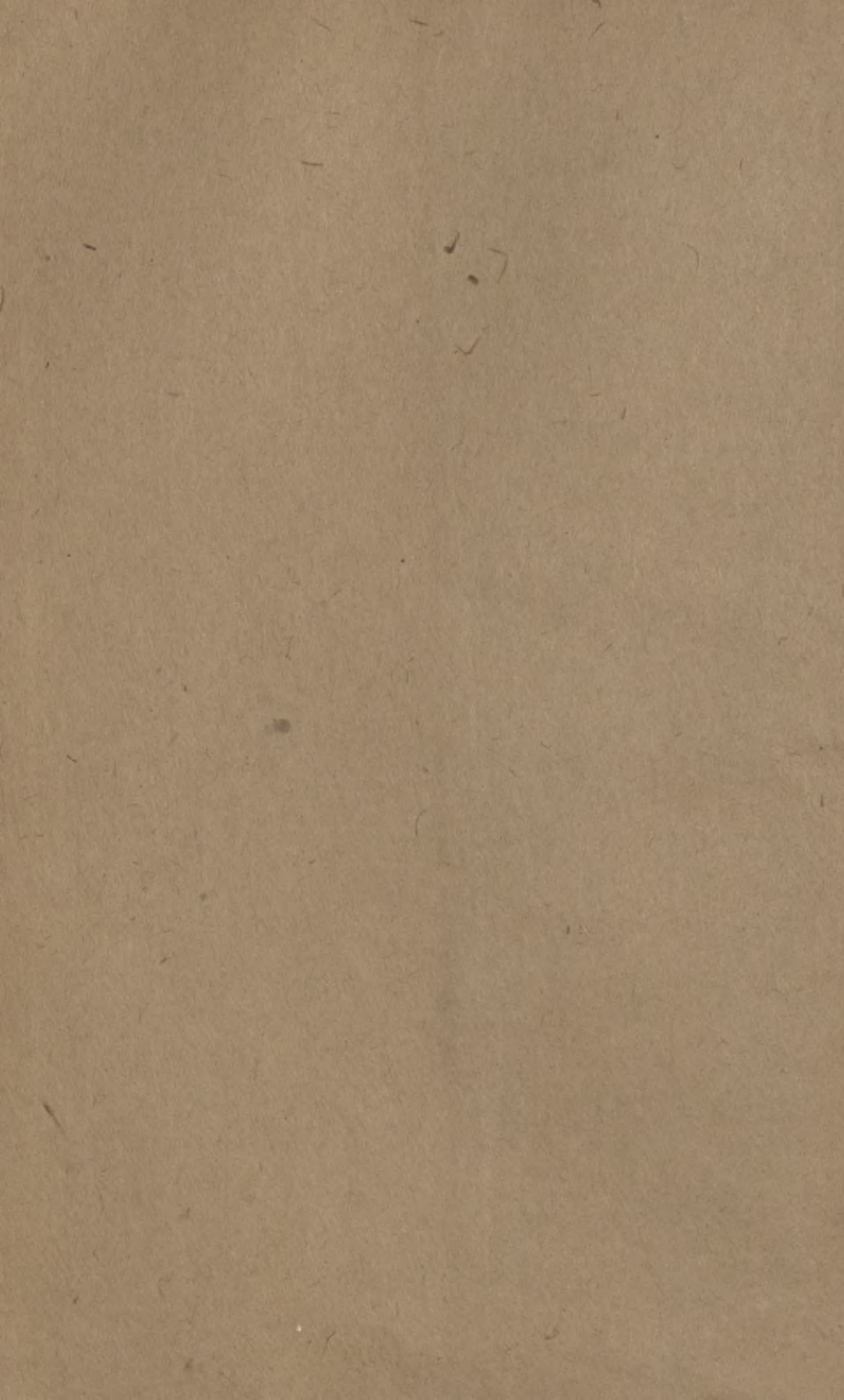
3835110

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000231331





PODRĘCZNIK STATYKI BUDOWLI

DLA

INŻYNIERÓW, ARCHITEKTÓW I STUDENTÓW POLITECHNIKI

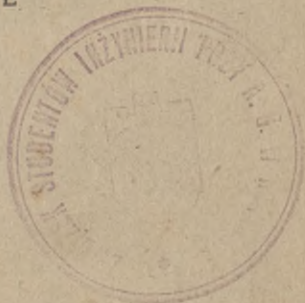
Z 461 RYSUNKAMI W TEKŚCIE I 6 TABLICAMI

OPRACOWAŁ

Dr. MAKSYMILJAN THULLIE

PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

WYDANIE CZWARTE



Nr. 112

LWÓW—WARSZAWA—KRAKÓW

WYDAWNICTWO ZAKŁADU NARODOWEGO IMIENIA OSSOLIŃSKICH

WARSZAWA, KSIĘGARNIA WŁASNA, UL. NOWY ŚWIAT L. 69
KRAKÓW, FILJA WYDAWNICTWA, ULICA ŚW. ANNY L. 11
POZNAŃ, SKŁAD GŁÓWNY: KSIĘGARNIA ŚW. WOJCIECHA
WILNO, KSIĘGARNIA J. ZAWADZKIEGO, UL. WIELKA L. 27.



II 6167

Przedmowa do czwartego wydania.

Wydanie trzecie wyczerpane jest już od roku. W niniejszem czwartem wydaniu poczyniłem niektóre zmiany i uzupełnienia, wynikające z postępu nauki. Opuściłem tablice liczbowe, które należą raczej do podręcznika inżynierskiego.

P. Dr. Adamowi Kurylle, memu asystentowi, dziękuję za pomoc przy wydawnictwie, opracowanie niektórych przykładów i rysunków.

We Lwowie w listopadzie 1921 r.

Dr. Maksymilian Thullie.

Druk ukończono w marcu 1923 r.



Nr. 112



SPIS RZECZY.

Wstęp	Str. 1
-----------------	--------

A. Wiadomości wstępne ze statyki wykreślnej.

I. Składanie sił.

§ 1. Siły, przecinające się w jednym punkcie	3
§ 2. Siły działające w płaszczyźnie na układ punktów stale połączonych. Wielobok sznurowy	6
§ 3. Siły równoległe	7
§ 4. Moment statyczny	9
§ 5. Składanie ilukolwiek sił	10
§ 6. Dalsze własności wieloboku sznurowego	12
§ 7. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego	14

II. Belka prosta.

§ 8. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla obciążenia ciężarami skupionymi	16
§ 9. Analityczne wyznaczenie sił poprzecznych i momentów	20
§ 10. Dowolne obciążenie ciągle	22
§ 11. Jednostajne obciążenie zupełne	25
§ 12. Jednostajne obciążenie częściowe	27
§ 13. Obciążenie ciągle i ciężarami skupionymi	29
§ 14. Belka jednym końcem utwierdzona	30
§ 15. Belka wystająca	32

B. Wytrzymałość zeskładów drewnianych i żelaznych.

III. Wytrzymałość na wyciąganie i ściskanie.

§ 16. Ogólne pojęcia	34
§ 17. Spółczynniki sprężystości	38
§ 18. Spółczynniki wytrzymałości na wyciąganie i ściskanie	44
§ 19. Wpływ kształtu ciała, ciepłoty, wilgotności i ciężaru gatunkowego na wytrzymałość	50

	Str.
§ 20. Zjawiska przy przerwaniu	53
§ 21. Własności ciał, zależne od krzywej odkształceń, zwężenia i przedłużenia	56
§ 22. Pewność i naprężenie dopuszczalne	60
§ 23. Doświadczenia Wöhlera i Bauschingera	71
§ 24. Wyznaczenie wymiarów według Winklera	73
§ 25. Wyznaczenie wymiarów według Launhardta i Weyrauch'a	78
§ 26. Naprężenie dopuszczalne dla drzewa	81
§ 27. Pręty o stałym przekroju	83
§ 28. Pręty o stałym naprężeniu	84
§ 29. Liny konopne i druczane, łańcuchy	86

IV. Wytrzymałość na ścinanie.

§ 30. Spółczynnik wytrzymałości i naprężenie dopuszczalne	90
§ 31. Nitowanie pojedyncze	95
§ 32. Nitowanie podwójne	102
§ 33. Nitowanie wstęg i kształtówek	105
§ 34. Połączenie przegibne	108
§ 35. Obliczenie śrub	110
§ 36. Połączenia belek drewnianych	111

V. Wytrzymałość na zginanie.

§ 37. Związek między siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi	115
§ 38. Moment bezwładności	119
§ 39. Wyznaczenie momentu bezwładności ze względu na oś równoległą do danej	128
§ 40. Przestrzenne przedstawienie momentu bezwładności	129
§ 41. Promień i elipsa bezwładności	130
§ 42. Elipsa bezwładności ze względu na osie ukośne	138
§ 43. Koło bezwładności	140
§ 44. Punkty stałe przekroju	141
§ 45. Analityczne wyznaczenie momentu bezwładności dla figur nieregularnych	142
§ 46. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności	145
§ 47. Linia całkowita	148
§ 48. Przykład. Moment bezwładności szyny kolejowej	150
§ 49. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności powierzchni sposobem Nehlsa	152
§ 50. Obliczenie siły ścinającej poziomej	155
§ 51. Naprężenia ścinające pionowe	156
§ 52. Naprężenia w kierunkach ukośnych. Linje największych naprężeń	160
§ 53. Naprężenia główne	163
§ 54. Wykreślne wyznaczenie siły ścinającej poziomej	167
§ 55. Obliczenie przekroju kształtówek <i>I</i> , pracujących na zginanie	169
§ 56. Inne kształtówki	172
§ 57. Dźwigary blaszane	197

	Str.
§ 58. Obliczenie przekroju belki blaszanej	198
§ 59. Obliczenie grubości ścianki belki blaszanej	202
§ 60. Obliczenie nitów belki blaszanej	204
§ 61. Obliczenie belek drewnianych	206
§ 62. Obliczenie belek stropu mieszanego	208
§ 63. Naprężenia zginające po przekroczeniu granicy sprężystości	211
§ 64. Naprężenia przy złamaniu belek drewnianych	213
§ 65. Naprężenia przy złamaniu belek z żelaza spawanego, zlewne go i stali	215
§ 66. Naprężenia zginające w belkach z żelaza lanego, kamienia i betonu. Prawo Bacha	219
§ 67. Naprężenie w belkach, gdy siły nie działają w płaszczyźnie osi głów- nych	224
§ 68. Dźwigary drewniane złożone	229
§ 69. Naprężenie dopuszczalne	232
§ 70. Obliczenie przekroju dźwigaru złożonego	237
§ 71. Obliczenie klinów	240
§ 72. Obliczenie śrub	246
§ 73. Belki z różnego materiału	248
§ 74. Równanie linii ugięcia i ugięcie belki	250
§ 75. Ugięcie belki jednym końcem utwierdzonej	256
§ 76. Belka jednym końcem wmurowana, a w drugim podparta	258
§ 77. Belka obu końcami poziomo utwierdzona	261
§ 78. Wykreślne wyznaczenie ugięcia belki	267
§ 79. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych belki jednym końcem pod- partej, drugim utwierdzonej	269
§ 80. Belka obu końcami utwierdzonej	271
§ 81. Belka obu końcami ukośnie utwierdzonej	273
§ 82. Belka ciągła	275
§ 83. Belka ciągła dwu- i trzyprzęsłowa	277
§ 84. Obciążenie różne w obu przęsłach	278
§ 85. Belka ciągła o równych przęsłach	280
§ 86. Momenty i oddziaływania belki ciągłej dwu- i trzyprzęsłowej	281

VI. Wytrzymałość złożona na zginanie i ciągnięcie lub zginanie i ciśnienie.

§ 87. Bryła naprężeń i oś obojętna	284
§ 88. Jądro przekroju	289
§ 89. Największe naprężenie	293
§ 90. Wyznaczenie największych naprężeń zapomocą jądra	293

VII. Wytrzymałość na wyboczenie.

§ 91. Wzory zasadnicze Eulera i Rankina	296
§ 92. Wyznaczenie długości wolnej	303
§ 93. Wzory Tetmajera	308
§ 93. Przekroje złożone	314

	Str.
§ 94. Obliczenie wymiarów	318
§ 95. Przykłady obliczenia wymiarów	326
§ 96. Wytrzymałość słupów żelaznych w razie pożaru	329
§ 97. Słupy obciążone mimośrodkowo	330
§ 98. Naprężenie dopuszczalne	332
§ 99. Przykłady	335

VIII. Wytrzymałość na skręcanie.

§ 100. Wzory zasadnicze	340
§ 101. Wał pełny i wydrążony	343
§ 102. Przekrój kwadratowy	344

IX. Dźwigary kratowe i więzary dachowe.

§ 103. Uwagi ogólne	345
§ 104. Warunki wyznaczalności wewnętrznej	346
§ 105. Warunki wyznaczalności ze względu na łożyska	348
§ 106. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych za pomocą metody wielobokowej	350
§ 107. Metoda przecięć	351
§ 108. Belka wzmocniona	354
§ 109. Obciążenie dachów	355
§ 110. Ogólne warunki równowagi dachu	366
§ 111. Wyznaczenie sił wewnętrznych dla obciążenia pionowego	367
§ 112. Parcie wiatru	371
§ 113. Obliczenie więzaru Polonceau złożonego jako przykład	375
§ 114. Belka pochyło leżąca	379
§ 115. Drewniany pojedynczy dach krokwiowy	381
§ 116. Dach płatwowy z podwójnym więzarem i kolanem	384
§ 117. Dach rozporowy	385
§ 118. Wieszar łukowy trójprzegubowy	386
§ 119. Dachy baniaste	388
§ 120. Obciążenie bani ciężarem własnym	389
§ 121. Obciążenie bani śniegiem i wiatrem	391
§ 122. Obliczenie dokładniejsze sposobem Müllera Breslaua	393
§ 123. Płaskie dachy namiotowe	395
§ 124. Dachy wieżowe czworoboczne	397
§ 125. Dachy wieżowe ośmioboczne	399
§ 126. Części składowe i rodzaje belek kratowych	404
§ 127. Analityczne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej	405
§ 128. Wykreślne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej	406
§ 129. Krata wielokrotna	407
§ 130. Belka kratowa Howe'a	407

C. Wytrzymałość zeskładów kamiennych.

X. Sklepienia kolebkowe.

§ 131. Łuki i sklepienia	408
§ 132. Siła podłużna i momenty jędrne	409
§ 133. Warunki równowagi sklepienia	413
§ 134. Obciążenie sklepienia	417
§ 135. Linja ciśnienia	418
§ 136. Grubość sklepienia	420
§ 137. Związek między linią ciśnienia a linią obciążenia	423
§ 138. Przybliżone wyznaczenie linii ciśnienia w sklepieniu symetrycznym	426
§ 139. Sklepienie niesymetrycznie obciążone	428
§ 140. Siły zewnętrzne	430
§ 141. Odkształcenie łuku	432
§ 142. Wyznaczenie trzech warunków	434
§ 143. Wyznaczenie prawdziwej linii ciśnienia	437
§ 144. Położenie powierzchni momentów	442
§ 145. Ciśnienie sklepienia na krążyny	443

XI. Sklepienia krzyżowe i baniaste.

§ 146. Sklepienie krzyżowe nad kwadratem	451
§ 147. Sklepienie krzyżowe nad prostokątem	453
§ 148. Sklepienie krzyżowe w jedlinkę	454
§ 149. Sklepienie baniaste	455
§ 150. Bania kulista	457
§ 151. Wykreślne wyznaczenie naprężeń w bani	458
§ 152. Sklepienie klasztorne	461

XII. Przyczółki, filary i kominy.

§ 153. Linja ciśnienia	462
§ 154. Wmurowanie belki wspornikowej	464
§ 155. Linje wyznacznice przekroju prostokątnego	467
§ 156. Przekrój nieregularny. Siła działa w osi głównej	472
§ 157. Przekrój nieregularny. Siła działa nie w osi głównej	474
§ 158. Kominy fabryczne	475

XIII. Ramy.

§ 159. Rodzaje ram	480
§ 160. Ogólny sposób obliczenia ramy dwusłupowej dwuprzegubowej, o rozporze poziomej	481
§ 161. Rama dwusłupowa o dowolnym kształcie	484
§ 162. Rama o rozporze prostej, obciążenie pionowe	485
§ 163. Rama o rozporze prostej, obciążenie poziome	487
§ 164. Rama bezprzegubowa o rozporze prostej, obciążenie pionowe	488
§ 165. Rama bezprzegubowa o rozporze prostej, obciążenie poziome	490

D. Budowle ziemne.

XIV. Równowaga stoków.

§ 166. Zasady	492
§ 167. Równowaga ziemi niespoistej	492
§ 168. Równowaga ziemi spoistej	493
§ 169. Naziom płaski i nieobciążony	495
§ 170. Stok pionowy	497
§ 171. Wyznaczenie wykreślne spójności, wysokości stoku i stoczystości	498
§ 172. Parabola spójności	500
§ 173. Wyznaczenie stoku naturalnego, spójności i ciężaru gatunkowego	501
§ 174. Naziom załamany	503
§ 175. Równowaga ziemi jednostajnej obciążonej	503
§ 176. Wykreślne wyznaczenie stoku ziemi jednostajnie obciążonej	505
§ 177. Naziom dowolny częściowo obciążony	506
§ 178. Stok zakrzywiony	507

XV. Parcie ziemi, obliczone sposobem analitycznym.

§ 179. Ogólne zasady	507
§ 180. Ogólne wyznaczenie powierzchni odłamu i parcia ziemi	509
§ 181. Ogólne wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi	511
§ 182. Wyznaczenie parcia ziemi, gdy naziom jest płaszczyzną, nachyloną do poziomu pod kątem β	512
§ 183. Parcie ziemi dla naziomu poziomego	515
§ 184. Parcie ziemi na mur pionowy	516
§ 185. Wyznaczenie parcia ziemi dla naziomu pochylego, zakończonego płaszczyzną poziomą	517
§ 186. Wysokość punktu zaczepienia parcia ziemi dla naziomu płaskiego, zakończonego płaszczyzną poziomą	520
§ 187. Uwzględnienie ciężaru ruchomego	520

XVI. Parcie ziemi, wyznaczone wykreślnie.

§ 188. Zasady	523
§ 189. Parcie ziemi na mur płaski, dla naziomu płaskiego	526
§ 190. Parcie ziemi na mur płaski, gdy naziom tworzą dwie płaszczyzny	530
§ 191. Parcie ziemi o naziomie dowolnego kształtu na mur płaski	532
§ 192. Wyznaczenie parcia ziemi sposobem Färbera	533
§ 193. Naziom obciążony	536
§ 194. Wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi	538
§ 195. Parcie ziemi na mur krzywy lub załamany	542
§ 196. Odpór ziemi	544

XVII. Inne teorie parcia ziemi.

§ 197. Poprawka dla równowagi w spoczynku	546
§ 198. Poszczególne wypadki	548
§ 199. Wyznaczenie płaszczyzny odłamu	550

	Str.
§ 200. Wyznaczenie analityczne parcia geostatycznego dla ściany pionowej i naziomu poziomego	552
§ 201. Nowsze teorie	553

XVIII. Parcie ziemi na sklepienie. Inne parcia.

§ 202. Sklepienie owalne	555
§ 203. Sklepienie tunelowe	556
§ 204. Uwzględnienie spójności	557
§ 205. Ciśnienie ciał sypkich	558

E. Mury oporowe.

XIX. Stałość murów oporowych.

§ 206. Ogólne zasady	561
§ 207. Ogólne wyznaczenie grubości muru oporowego	562
§ 208. Analityczne wyznaczenie grubości muru dla szwów pochyłych	564
§ 209. Analityczne wyznaczenie grubości muru dla szwów poziomych	566
§ 210. Wykreślne wyznaczenie grubości muru oporowego	568
§ 211. Parcie geostatyczne przy wyznaczeniu grubości muru oporowego	571
§ 212. Mury oporowe z przyporami	572
§ 213. Korzystny przekrój muru oporowego	573
§ 214. Parcie ziemi na przyczółek	575

I. Dodatek: Literatura	577
----------------------------------	-----

II. Dodatek: Tablice obciążeń stropów	585
---	-----

WSTĘP.

Statyka budowli lub zastosowana, zwana także mechaniką budowniczą (n. *Baumechanik*, *Statik der Bauconstructionen*, fr. *mécanique appliquée*, an. *statics applied*, r. строительная механика), jestto nauka o warunkach równowagi i o wytrzymałości zespołów budowlanych, zastosowana do obliczenia ich wymiarów i kształtów. Oczywiście nie możemy tu mówić o teorii wszystkich zespołów budowlanych, lecz omówimy tylko teorię najważniejszych zespołów, gdyż obliczenie mniej ważnych zespołów i szczegółów najlepiej daje się połączyć z opisem ich ustroju, który jest przedmiotem odrębnych nauk, jak n. p. budownictwa wodnego, budowy mostów i t. d. Pominiemy tu także obliczenie mostów, ponieważ odmienny sposób obciążenia robi obliczenie ich tak zawilem, że jest ono przedmiotem osobnej nauki, tak zwanej teorii mostów (n. *Theorie der Brücken*), również teorię zeskładów żelbetowych, którą opracowałem osobno*).

Przedmiot nasz podzielimy według tego, czy materiał użyty do zespołu jest mniej lub więcej sprężysty. A więc będziemy mówili naprzód o wytrzymałości materiałów sprężystych drzewa i żelaza, potem bardzo mało sprężystego kamienia, a nakoniec o wytrzymałości materiału niesprężystego ziemi.

Jak wiadomo, dwa są główne sposoby rozwiązywania zagadnień mechaniki, sposób analityczny i wykreślny. Będziemy używali jednego i drugiego sposobu naprzemian według tego, który w danym razie prędzej prowadzi do celu; często zaś podamy obliczenie według obydwu sposobów, których wyniki służą wtedy do wzajemnego sprawdzenia.

Naukę o równowadze sił, wyłożoną sposobem wykreślnym, nazywamy statyką wykreślną (n. *graphische Statik*, fr. *statique graphique*, an. *graphic statics*). W dalszym ciągu przypuszczac

*) Thullie. Teorja żelbetu, Lwów 1915.

będziemy znajomość głównych zasad mechaniki rozumowej. Dla związku i przypomnienia ich czytelnikom wyłożymy je jednak w poszczególnych rozdziałach, ale jak najkrócej i tylko o tyle, o ile one służą za podstawę dalszych praw i twierdzeń, wchodzących w zakres statyki zastosowanej. Główniejsze zasady zaś statyki wykreślnej wyłożymy w pierwszym rozdziale.

Stąd wynika następujący podział przedmiotu:

- A. Wiadomości wstępne ze statyki wykreślnej.
- B. Wytrzymałość zespołów drewnianych i żelaznych.
- C. Wytrzymałość zespołów kamiennych.
- D. Budowle ziemne.
- E. Mury oporowe.

Jako dodatek:

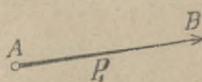
Literatura.

A. WIADOMOŚCI WSTĘPNE ZE STATYKI WYKREŚLNEJ.

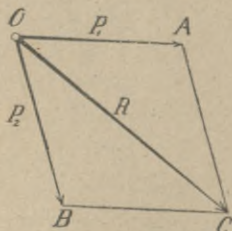
I. Składanie sił.

§ 1. Siły, przecinające się w jednym punkcie.

Do oznaczenia siły (n. *Kraft*, fr. *force*, an. *force*, cz. *sila*, w. *forza*, r. *сила*) potrzebne są trzy znamiona: jej wielkość (n. *Grösse*, fr. *grandeur*, *intensité*, an. *magnitude*, cz. *velikost*, r. *величина*), kierunek (n. *Richtung*, fr. *direction*, *ligne d'action*, an. *direction*, *line of action*, cz. *směr*, r. *направление*) i punkt zaczepienia lub przyłożenia (n. *Angriffspunkt*, fr. *point d'application*, an. *point of action*, *of application*). Ponieważ punkt zaczepienia w kierunku siły możemy dowolnie przelożyć, wystarczy do oznaczenia siły zamiast punktu zaczepienia położenie siły (n. *Lage*, fr. *position*, an. *position*, r. *положение*), t. j. jeden punkt, przez który kierunek siły przechodzi. Wszystkie te znamiona da-



rys. 1.



rys. 2.

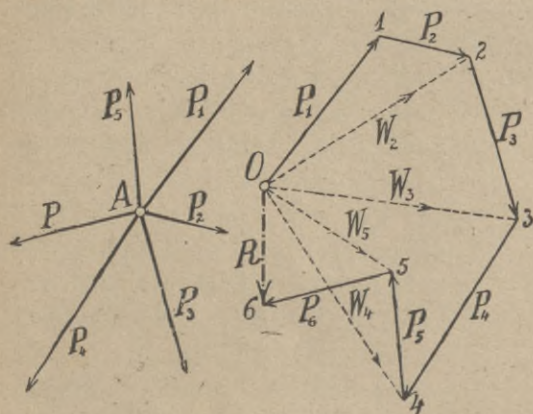
dzą się łatwo przedstawić wykreślnie zapomocą linii prostej, której długość zawiera tyle jednostek długości, ile jednostek siły zawiera siła i której kierunek i położenie przedstawia kierunek i położenie siły. Po tej samej linii prostej może siła działać w dwu przeciwnych kierunkach; aby więc określić dokładnie, w którym kierunku działa dana siła, czyli jaki jest jej tok (lot) (fr. *sens*), dodajemy strzałkę w odpowiednim kierunku (rys. 1.). Nazywamy siłę albo jedną literą $P_1, P_2 \dots$, lub też dwiema literami n. p. AB , przyczem porządek liter oznacza tok siły.

Jeżeli dwie siły P_1 i P_2 (rys 2.) przecinają się w punkcie O , to możemy je zastąpić jedną siłą R , którą nazywamy wypadkową (n. *Resultierende*, fr. *resultante*,

an. *resultant*, cz. *výslednice*, r. *равнобыйствующая сила*), a siły P_1 i P_2 składowemi (n. *Componente*, fr. *composante*, r. *составная сила*).

Wiemy, że jeżeli dwie siły działają na punkt materjalny, to drogi, które punkt pod działaniem tych sił w jednostce czasu przebiegnie, są proporcjonalne do ich wielkości, a zatem do OA i OB . Jeżeli siły P_1 i P_2 równocześnie działają na punkt O , to ten punkt przy końcu jednostki czasu znajdzie się w punkcie C , gdyż droga spowodowana siłą P_1 jest OA , a siłą P_2 jest AC , względnie OB . Długość OC przedstawia więc siłę, która jeżeli działa na punkt O , poruszy AB w jednostce czasu także do punktu C , a zatem siłę, zastępującą działanie sił P_1 i P_2 , czyli wypadkową. Z tego wynika następne prawidło składania dwu sił przecinających się: wykreślamy siłę $P_1 = OA$, z punktu A wykreślamy $AC \parallel OB = P_2$ i łączymy punkt O z punktem C ; prosta OC jest wypadkową. Do punktu C dojdziemy jednak także, wykreśliwszy $P_2 = OB$, a z punktu B $BC \parallel OA = P_1$. A zatem porządek, w którym składamy siły, jest obojętny.

Mając złożyć kilka sił, przecinających się w jednym punkcie (rys. 3.), postępujemy w ten sposób, że składamy naprzód dwie



rys. 3.

siły P_1 i P_2 , z których wypadkową W_2 składamy następnie siłę $P_3 = 23$; wypadkową otrzymaną W_3 składamy z siłą $P_4 = 34$, te siły dają znowu wypadkową W_4 , którą składamy z siłą P_5 itd. ... P_n składamy wreszcie z wypadkową W_{n-1} i otrzymujemy wypadkową wszystkich sił R . Wykreślanie

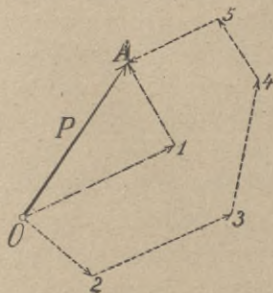
prostych W_2, W_3 itd. możemy opuścić, a zatem chcąc znaleźć wypadkową sił P_1, P_2, \dots, P_n , kreślimy wielobok, którego boki są równoległe do wszystkich sił po porządku. Prosta, łącząca po-

czątek wieloboku O z końcem jego n (tu 6), daje wielkość i kierunek wypadkowej R .

Wielobok ten nazywamy wielobokiem sił (*n. Kraftpolygon, fr. polygon de forces, an. force polygon, cz. čara složek, r. многоугольникъ силъ*), a może on być płaskim lub przestrzennym, według tego, czy wszystkie siły składowe działają w jednej płaszczyźnie, czy nie. Z rys. 3. wynika, że rzut wypadkowej na jakąkolwiek prostą jest równy algebraicznej sumie rzutów składowych. Porządek, w jakim siły składamy, jest tu obojętny; dla dwu sił udowodniliśmy to powyżej, dla więcej sił zaś, zmieniając porządek dwu po sobie następujących sił, możemy uzyskać dowolny porządek.

Dla równowagi (*n. Gleichgewicht, fr. équilibre, an. equilibrium, r. равновісіе*), tj., aby punkt, na który siły działają, pozostał w spoczynku, wypadkowa R wszystkich sił musi być równą zeru czyli ostatni punkt wieloboku musi przypaść na początkowy punkt wieloboku O , a zatem wielobok musi być zamkniętym. Dla wieloboku w płaszczyźnie musi więc być dla równowagi suma rzutów składowych na dwie przecinające się proste równa zeru.

Rozkładanie (*fr. décomposition*) siły na składowe jest bardzo łatwe. Chcąc rozłożyć siłę P (rys. 4.) na składowe, czynimy ją wypadkową dowolnych sił 01 i $1A$, lub też 02 , 23 , 34 , 45 , $5A$. Widzimy, że można znaleźć nieskończoną ilość składowych, dających jako wypadkową siłę P . Aby więc zadanie było oznaczone, muszą być dane pewne warunki. Jeżeli *n. p.* rozkładamy siłę P na dwie składowe, mogą być dane wielkość i kierunek jednej siły składowej, lub też wielkości albo kierunki obu składowych. Rozwiązywanie podobnych



rys. 4.

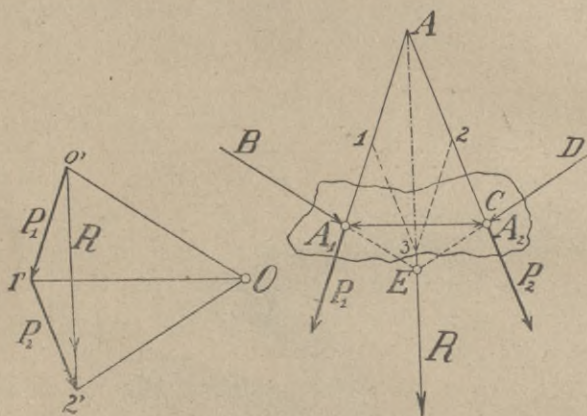
zadań sprowadzamy zatem do wykresnego rozwiązywania trójkąta z trzech danych elementów.

Kierunek wypadkowej wyznacza nam przytem kierunki sił składowych, jeżeli pamiętać będziemy, że tok sił składowych w wieloboku sił jest przeciwny tokowi wypadkowej, czyli, że wy-

padkowa jest równa i wprost przeciwna sile, którą dodaćby trzeba, aby wielobok był zamknięty.

§ 2. Siły, działające w płaszczyźnie na układ punktów stale połączonych. Wielobok sznurowy.

Niechaj siły P_1 i P_2 działają na dwa punkty stale połączone A_1 i A_2 (rys. 5.). Przedłużmy kierunki obu sił aż do przecięcia się w punkcie A , to możemy te siły złożyć, jak wyżej. Jeżeli



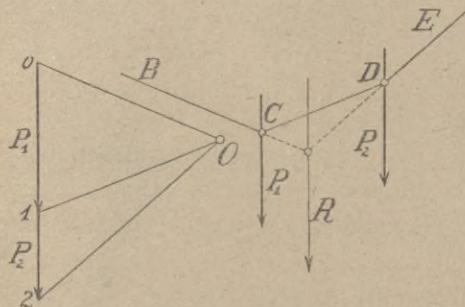
rys. 5.

$A_1 = P_1$ a $A_2 = P_2$, to wykreślmy $A_1B \parallel P_1$, a otrzymamy $A_1C = R$, a zatem położenie, kierunek i wielkość wypadkowej. Tego sposobu składania sił nie możemy jednak użyć w wypadku, gdy siły składowe są równoległe, bo punkt A leży w takim razie w nieskończoności i jakkolwiek z wieloboku sił otrzymalibyśmy wielkość i kierunek wypadkowej, to jej położenie byłoby nam nieznanem. Będziemy się zatem starali znaleźć inny ogólny sposób składania sił, któryby i w tym wypadku dał się zastosować. Rozłożmy siłę P_1 na dwie dowolne składowe A_1B i A_1C , których wielkość otrzymamy z wieloboku sił $O'O$ i $O'O'$. Również rozłożmy siłę P_2 na dwie składowe, z których jedna niech będzie równa i wprost przeciwna sile $A_1C = O'O'$. Z wieloboku sił otrzymamy kierunek i wielkość drugiej składowej $O'O''$, wykreślamy więc $O'O'' \parallel O'O'$. Zamiast sił P_1 i P_2 mamy więc teraz cztery siły, z których dwie jednak A_1C i CA_1 się znoszą tak, że zostają tylko

dwie BA_1 i DC . Przez ich punkt przecięcia się E przechodzi więc wypadkowa $R \neq O'2'$. Kierunki sił A_1B i A_1C obraliśmy dowolnie, siły te przecinają się w O . Jeżeli teraz przyjmujemy inne kierunki sił składowych, przecinające się w innym punkcie O' , to ponieważ punkty O i $1'$ w wieloboku sił są stałe, punkt przecięcia się kierunków sił składowych O' określa dokładnie ich kierunki. Możemy więc zamiast tych dowolnych kierunków obrać dowolnie punkt O przecięcia się tych dwu sił w wieloboku sił. Punkt ten nazywamy biegunem (n. *Pol*, fr. *pôle*, an. *pole*, r. полюсь), wielobok BA_1CD wielobokiem sznurowym (n. *Seilpolygon*, fr. *polygone funiculaire*, an. *funicular*, *cord or link polygon*, w. *poligono funicolare*, r. верёвочный многоугольник), bo gdy w miejsce linii matematycznych tego wieloboku pomyślimy sobie sznury, zaś w B i D zaczepimy siły równe OO' i $O'2'$, to system ten będzie w równowadze, a proste OO' $O1'$ i $O'2'$ będą przedstawiały ciągnięcia (względnie ciśnienia) sznurów. Linie, łączące biegun z wierzchołkami wieloboku sił, nazywamy promieniami (n. *Strahl*, fr. *rayon polaire*, an. *ray*, r. радіусь).

§ 3. Siły równoległe.

Mając złożyć dwie siły równoległe (n. *parallel*, fr. *parallèle*, cz. *rovnoběžné*, r. параллельный), (rys. 6.) P_1 i P_2 , wy-



rys. 6.

kreślamy wielobok sił 012, który tu staje się jedną linią prostą, równoległą do kierunku sił. Wypadkowa R równa się w tym wypadku algebraicznej sumie składowych, więc $R = O2$. Aby otrzymać położenie wypadkowej R , obieramy dowolnie biegun O , kreślimy promienie, a do nich równoległe boki wieloboku sznurowego. Przecięcie się jego boków skrajnych wyznacza wedle poprzedniego paragrafu położenie wypadkowej, równoległej do składowych.

Wypadałoby tu stąd, że wypadkowa R jest równa sumie sił P_1 i P_2 . Aby otrzymać położenie wypadkowej R , obieramy dowolnie biegun O , kreślimy promienie, a do nich równoległe boki wieloboku sznurowego. Przecięcie się jego boków skrajnych wyznacza wedle poprzedniego paragrafu położenie wypadkowej, równoległej do składowych.

Jeżeli mamy złożyć dwie siły P_1 i P_2 (rys. 7.) równoległe, ale działające w przeciwnych kierunkach, postępujemy w ten sam sposób. Wypadkowa jest tu różnica sił składowych i ma kierunek siły większej. Punkt przecięcia się boków skrajnych C wyznacza położenie wypadkowej.

Z rysunku widzimy, że trójkąty $O12$ i DAE są podobne, a stąd $AE:AB = P_2:OO$, zatem

$$AE \cdot OO = P_2 \cdot AB; \dots \dots \dots 1)$$

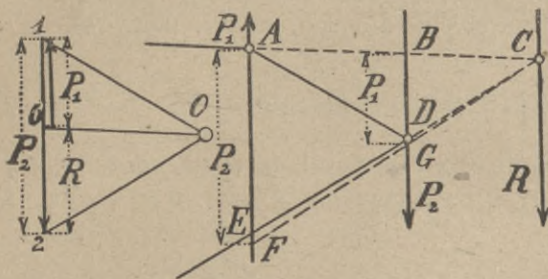
dalej są także trójkąty ABD i $O01$ podobne, więc

$$BD:AB = P_1:OO, \text{ a stąd}$$

$$BD \cdot OO = P_1 \cdot AB \dots \dots \dots 2)$$

Podzieliwszy rów. 2) przez rów. 1), otrzymamy

$$\frac{BD}{AE} = \frac{P_1}{P_2} \dots \dots \dots 3)$$



rys. 7.

A zatem jeżeli na kierunkach sił P_1 i P_2 odtniemy $AF = P_2$ i $BG = P_1$, to prosta FG musi przechodzić także przez C .

A więc dla dwu sił równoległych, ale działających w przeciwnych kierunkach, możemy wyznaczyć położenie wypadkowej, jeżeli wielkość siły P_1 odtniemy na kierunku siły P_2 i na odwrót i końce tych długości połączymy. Linje, łączące końce tych długości, AB i FG przetną się na kierunku wypadkowej.

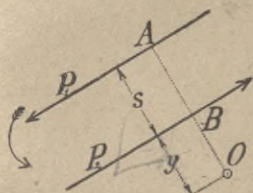
Jeśli jednak dwie siły równoległe, działające w przeciwnych kierunkach, są sobie równe, wtedy wypadkowa $R = 0$, a punkt zaczepienia jej C usuwa się w nieskończoność, bo wtedy bok pierwszy i ostatni są równoległe, a więc wypadkowa takich sił jest nieskończenie małą i działa w oddaleniu nieskończenie wielkiem. Dwie siły takie nazywamy parą sił (n. *Kräftepaar*, fr. *couple*, cz. *dvojica sil*). Ponieważ wypadkowa pary sił jest równa zero,

Jeśli jednak dwie siły równoległe, działające w przeciwnych kierunkach, są sobie równe, wtedy wypadkowa $R = 0$, a punkt zaczepienia jej C usuwa się w nieskończoność, bo wtedy bok pierwszy i ostatni są równoległe, a więc wypadkowa takich sił jest nieskończenie małą i działa w oddaleniu nieskończenie wielkiem. Dwie siły takie nazywamy parą sił (n. *Kräftepaar*, fr. *couple*, cz. *dvojica sil*). Ponieważ wypadkowa pary sił jest równa zero,

więc działając na system punktów, stale połączonych, nie wywołuje ruchu postępowego, lecz ruch tylko obrotowy w kierunku, wskazanym strzałką (rys. 8.).

§ 4. Moment statyczny.

Para sił nie mierzy się wielkością wypadkowej, bo ta równa się zeru, lecz działaniem jej obrotowym, które wyznaczamy momentem statycznym, (n. *statisches Moment*, *Drehungsmoment*, fr. *moment*, an. *moment*, cz. *statyczny moment*, r. *статический моментъ*). Moment danej siły ze względu na prostą, około której ruch ma nastąpić, czyli ze względu na oś momentu (n. *Drehungsaxe*, fr. *axe du moment*, r. *ось*), jestto iloczyn siły przez ramię momentu (n. *Hebelarm*, fr. *bras de levier*, an. *lever arm*) czyli odległość siły od osi momentu. Jeżeli przez ramię momentu i siłę położymy płaszczyznę, to przecina ona oś w środku momentu (n. *Momentpunkt*, fr. *centre du moment*, an. *centre of moment*). Jeżeli więc siły działają w płaszczyźnie, to spuściwszy prostopadłą na kierunek danej siły z środka momentu, otrzymamy jej ramię momentu. Moment, którego kierunek obrotu jest zgodny z obrotem wskazówki na zegarze, będziemy nazywać dodatnim (n. *positiv*, fr. *positif*, an. *positive*, r. *положительный*), zaś moment, działający w przeciwnym kierunku, ujemnym (n. *negativ*, fr. *negatif*, an. *negative*, r. *отрицательный*). Moment pary sił ze względu na dowolny środek momentu *O* (rys. 8.) nazwijmy M_1 , tedy $P_1 = P_2$,



rys. 8.

$M_1 = -P_1 \cdot OA + P_2 \cdot OB = -P_1(s + y) + P_2y = -P_1s$.

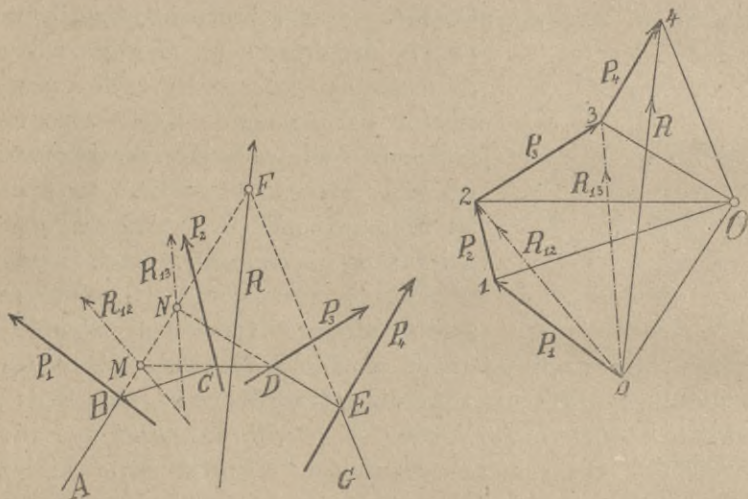
Ponieważ y znika z rachunku, więc moment pary sił zostaje ten sam dla jakiegokolwiek środka momentu i równy jest jednej sile, pomnożonej przez odstęp obu sił, czyli prostopadłą, spuszczoną z jakiegokolwiek punktu jednej siły na drugą.

Jeżelibyśmy obie siły pary sił złożyli, otrzymalibyśmy według § 3. wypadkową nieskończenie małą, działającą w oddaleniu nieskończenie wielkiem; moment jej będzie więc $0 \cdot \infty$.

Dwie pary sił, złożone z sił nierównych, ale mające równy moment statyczny, są równe tak, że możemy jedną zastąpić drugą.

§ 5. Składanie ilukolwiek sił.

Mając złożyć kilka sił P_1, P_2, P_3, P_4 , (rys. 9.), składamy naprzód dwie siły P_1 i P_2 , a mianowicie kreślimy wielobok sił 012, obieramy dowolnie punkt O , kreślimy promienie OO_1, OO_2 i równoległe do nich wielobok sznurowy $ABCD$. Przez M , punkt przecięcia się boków AB i CD , przechodzi R_{12} wypadkowa tych dwóch sił P_1 i P_2 , wielkość jej jest $O2$. Z tą wypadkową R_{12} złożymy teraz siłę P_3 . Uskutecznimy to, jeżeli w wieloboku sił wykreślimy $23 \parallel P_3$, poprowadzimy z tego samego bieguna O promień $O3$ i wykreślimy wielobok sznurowy. Pierwszym bokiem, równoległym do OO_1 , niech będzie prosta AM , drugim $MD \parallel O2$,



rys. 9.

trzecim będzie $DE \parallel O3$. R_{13} , wypadkowa sił R_{12} i P_3 , czyli P_1, P_2 i P_3 , będzie więc równa $O3$ i przechodzić przez punkt N przecięcia się boków skrajnych AB i DE . Z siłą R_{13} złożymy dalej siłę P_4 i otrzymamy w ten sam sposób wypadkową wszystkich sił $R = O4$. Przechodzić ona będzie przez punkt F , przecięcia się boków skrajnych AB i EG .

Łatwo pojmujemy, że jeżeli przy składaniu sił chodzi nam tylko o ostateczną wypadkową R , to możemy tok konstrukcji uprościć, opuszczając wyznaczenie sił R_{12}, R_{13} itd. A więc wystarczy, jeżeli dla danych sił P_1, P_2, P_3 i P_4 wykreślimy wielobok

sił, obierzemy dowolnie biegun O , poprowadzimy promienie i wykreślimy równoległe do tych promieni wielobok sznurowy $ABCDEF$. Wypadkowa $R = 04$ przechodzi przez punkt F przecięcia się boków skrajnych wieloboku sznurowego, jakieżś to powyżej udowodnili.

Wielobok sił i wielobok sznurowy są figurami odwrotnemi (*n. reciprok*), gdyż, jak widzimy z rys. 9., każdemu bokowi wieloboku sił czyli każdej sile odpowiada wierzchołek kąta w wieloboku sznurowym i odwrotnie. Przy tem samym położeniu bieguna odchylają się dwa po sobie następujące boki wieloboku sznurowego n. p. AB i BC tem więcej, im większa jest odnośna siła P_1 , a więc kąt ABC jest tem większy, im większa jest siła P_1 . Gdyby $P_1 = 0$, toby i kąt $ABC = 0$, t. j. linje AB i BC tworzyłyby jedną prostą. Kąt wieloboku sznurowego pozwala także wnioskować o kierunku siły, dwa boki jego bowiem nachylone są zawsze w kierunku strzałki. Każdy bok wieloboku sznurowego jest równoległy do promienia wieloboku sił, łączącego biegun z punktem przecięcia się dwóch sił, między którymi bok ten leży. Tak n. p. BC jest równoległym do $O1$, a 1 jest punktem przecięcia się sił P_1 i P_2 w wieloboku sił, między którymi BC leży.

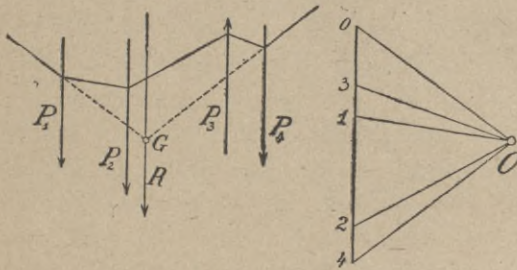
Gdy dodamy do sił P_1, P_2, P_3 i P_4 siłę — R , równą R , mającą to samo położenie, lecz działającą w kierunku przeciwnym, wtedy nastąpi równowaga, to jest dany układ punktów pozostanie w spoczynku. Widzimy więc, że dla równowagi musi się zamknąć nie tylko wielobok sił, ale i wielobok sznurowy, gdyż pierwszy i ostatni jego bok muszą się przecinać na kierunku ostatniej siły.

Gdy wielobok sił się zamyka, a wielobok sznurowy nie, wtedy złożony wszystkie siły składowe prócz jednej P_n , otrzymamy wypadkową R_1 i P_n , które muszą być sobie równe i wprost przeciwnie, bo z powodu, że wielobok sił się zamyka, $R = R_1 + P_n = 0$, czyli $R_1 = -P_n$, z powodu zaś, że wielobok sznurowy się nie zamyka, położenie R_1 będzie inne, niż P_n ; a zatem po złożeniu wszystkich sił otrzymamy dwie siły równoległe, równe a wprost przeciwnie, czyli parę sił, której działanie mierzymy momentem. Układ punktów nie będzie wtedy miał wprawdzie ruchu postępowego (bo $R = 0$), lecz będzie miał ruch obrotowy. Analitycznie możemy wyrazić powyższe twierdzenie w ten sposób:

Jeżeli rozłożymy wszystkie siły na składowe, działające w dwu przecinających się kierunkach, to dla równowagi musi być

suma składowych wszystkich sił w obydwu kierunkach równa zero (wielobok sił zamknięty) i suma momentów równa zero (wielobok sznurowy zamknięty).

Wszystko cośmy powyżej mówili o składaniu sił wogóle, da się zastosować do sił równoległych (rys. 10).



rys. 10.

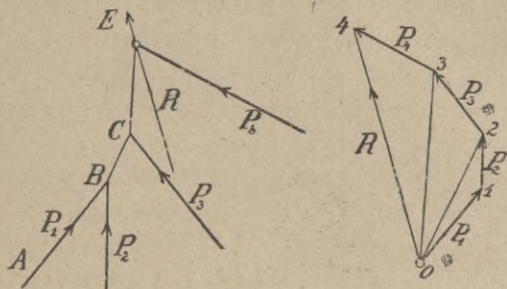
Chcąc złożyć siły równoległe P_1, P_2, P_3 i P_4 , kreślimy wielobok sił, który tu przedstawia jedna linja prosta, kreślimy dalej wielobok sznurowy, którego boki skrajne przedłużone przecinają się w punkcie G , wyznaczającym po-

łożenie wypadkowej R . Jej wielkość ($R=04$) i kierunek otrzymujemy z wieloboku sił. Składania sił równoległych zapomocą wieloboku sznurowego używamy przy wyznaczeniu środka ciężkości powierzchni, złożonych z prostokątów lub trójkątów.

§ 6. Dalsze własności wieloboku sznurowego.

Z poprzedniego widzimy, że przecięcie się dwu skrajnych boków wieloboku sznurowego wyznacza położenie wypadkowej, co odnosi się nietylko do dwóch, ale i do więcej sił. Ponieważ wypadkowa musi przechodzić także przez punkt przecięcia się sił P_1 i P_2 , więc położenie jej jest AE_1 (rys. 11.), przyczem AE_1 musi być równoległe do 02 . Ale proste 02 i AE_1 są szóstymi bokami dwu czworoboków zupełnych (czworoboków wraz z obiema przekątniami) O_1012 i $AA_1E_1B_1$, których pięć boków jest nawzajem równoległych. Zewnętrzne boki czworoboków nawzajem równoległe następują po sobie w obu czworobokach w przeciwnym kierunku. Stwierdza się tu przeto twierdzenie geometryczne, że jeżeli w obu czworobokach zupełnych mamy pięć boków, kolejno w przeciwnym kierunku licząc, nawzajem równoległych, to i szóste boki muszą być równoległe. Jeżeli biegun zmienimy i zamiast punktu O_1 obierzemy punkt O_2 , to otrzymamy inny wielobok sznurowy $C_2A_2B_2D_2$.

Przypuśćmy teraz, że mamy złożyć siły P_1, P_2, P_3 i P_4 (rys. 12.) i że przyjmiemy biegun w 0, w początku pierwszej siły P_1 i wykreślimy wielobok sznurowy $ABCDE$, to widzimy, że promienie wieloboku sił przedstawiają wtedy wielkość i kierunek wypadkowych, n. p. 03 przedstawia wypadkową sił P_1, P_2 i P_3 ,



rys. 12.

a boki wieloboku sznurowego, równoległe do tych promieni, wyznaczają położenie tych wypadkowych. A zatem, jeżeli przyjmiemy w początku pierwszej siły wieloboku sił, to boki wieloboku sznurowego wyznaczają

położenie wypadkowych wszystkich sił od pierwszej aż do bok ten poprzedzającej, promienie zaś przedstawiają wielkości tych sił. Wielobok sznurowy staje się wtedy wielobokiem wypadkowych (n. *Mittelkrafteck*, cz. *čára vřslednic*).

§ 7. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego.

Mając wyznaczyć sumę momentów statycznych kilku sił P_1, P_2, P_3 i P_4 ze względu na punkt dany A (rys. 13.), składamy te siły w wypadkową R i wyznaczamy moment wypadkowej, który równa się algebraicznej sumie momentów sił składowych, gdyż wypadkowa, zastępując w działaniu wszystkie siły składowe, sprawić musi taki sam moment, jak wszystkie składowe. Jeżeli prostopadłą, spuszczoną z środka momentu A na wypadkową R , nazwiemy r , to suma momentów sił P_1, P_2, P_3 i P_4 , równa momentowi wypadkowej:

$$M = Rr \dots \dots \dots 4)$$

Wykreślnie możemy moment przedstawić powierzchnią prostokąta o podstawie R a wysokości r lub też podwójną powierzchnią trójkąta o podstawie R , a wysokości r .

Możemy też moment przedstawić linią prostą w następujący sposób:

Poprowadźmy przez punkt A równoległą MN do wypadkowej i nazwijmy odcinek MN tej prostej między bokami skrajnymi y , to otrzymamy dwa trójkąty podobne, a mianowicie $EMN \sim O40$, bo wszystkie ich boki są nawzajem równoległe. Stąd wynika, że podstawy obu trójkątów mają się do siebie, jak wysokości, więc $y : r = R : b$, a stąd $Rr = by$.

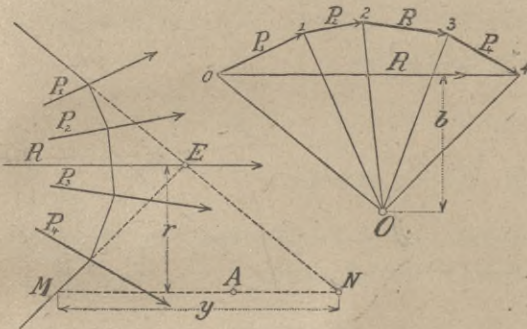
Wstawivszy wreszcie z rów. 4) $M = Rr$, otrzymamy:

$$M = by \dots \dots \dots 5)$$

Odległość bieguna od wypadkowej, czyli długość b prostopadłej, spuszczonej z bieguna na wypadkową R , nazywamy odległością biegunową (n. *Poldistanz*, fr. *distance polaire*, an.

pole distance, cz. *vzdalenost polárná*). Możemy więc rów. 5) wyrazić w następujących słowach:

Moment statyczny sił $P_1, P_2, P_3 \dots$ jest równy iloczynowi odcinka y między bokami skrajnymi wieloboku



rys. 13.

sznurowego równoległej do wypadkowej, przechodzącej przez środek momentu, przez odległość biegunową.

Odległość biegunową możemy uważać też jako siłę, a mianowicie jako składową, prostopadłą do wypadkowej sił, wyrażonych skrajnymi promieniami OO i $O4$. Ponieważ według rów. 5) otrzymujemy moment, mnożąc odcinek y odległością biegunową b , więc dobrze będzie, jeżeli biegun O przyjmiemy tak, aby odległość biegunowa dała się wyrazić według podziałki sił jakąś liczbą całą n. p. 1, 2, 4, 5, 10, 50; to nam ułatwi odczytanie momentu na podziałce.

Moment jest, jak wiemy, iloczynem siły przez długość. Mierzmy więc moment jednostką, powstałą z pomnożenia jednostki siły przez jednostkę długości. Jeżeli zatem np. mierzymy siły kilogramami, a długości metrami, to jednostkę, którą mierzymy moment, nazywamy kilogrammetrem (kgm). Jeżeli odcinek y mierzymy jednostką

długości, to musimy wtedy odległość biegunową uważać za siłę i mierzyć jednostką sił i na odwrót.

Chcąc uniknąć mnożenia, możemy wykreślić podziałkę, na której odczytany odcinek y da nam wprost moment w kgm . Aby wyznaczyć tę podziałkę, dość będzie pamiętać o tem, że chcąc odczytać daną długością liczbę b razy większą, musimy jednostkę podziałki przyjąć b razy mniejszą. A więc odczytujemy naprzód b na podziałce sił i robimy jednostkę długości b razy mniejszą, a uzyskamy podziałkę dla momentów.

Ponieważ moment jest równy iloczynowi odcinka y przez odległość biegunową, więc im większą przyjmemy odległość biegunową, tem mniejszy odcinek otrzymamy dla momentu i odwrotnie. Chcąc otrzymać wyraźny rysunek, musimy przyjąć zatem odpowiednio małą odległość biegunową.

II. Belka prosta.

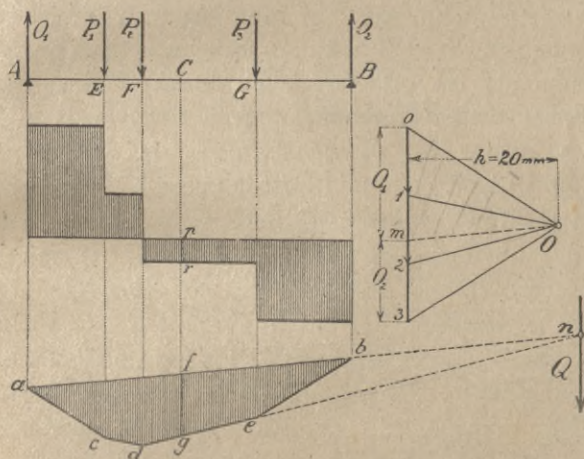
§ 8. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla obciążenia ciężarami skupionemi.

Dotychczas zajmowaliśmy się składaniem sił w płaszczyźnie w ogólności; teraz będziemy mówić o działaniu ich na belkę.

Dźwigarem (n. *Träger*, fr. *poutre*, an. *girder*; *truss*, w. *travatura*, cz. *trám*, r. балка), nazywamy część budowli, służącą do przeniesienia sił na podpory. Linję, łączącą środki ciężkości poszczególnych przekrojów, nazywamy osią dźwigaru (n. *Axe*, fr. *axe*, an. *axis*, w. *asse*, cz. *osa*, r. ось). Na dźwigar AB (rys. 14.), podparty w dwu punktach, działają pionowe siły P_1 , P_2 i P_3 . Gdyby dźwigar nie był podpartym, nastąpiłby ruch w kierunku wypadkowej; jeżeli zaś dźwigar jest podpartym, to powstają w punktach podparcia czyli podporach (n. *Auflager*, fr. *appui*, an. *support*, r. опора) A i B siły, utrzymujące cały układ w równowadze. Siły te O_1 i O_2 nazywamy oddziaływaniami podpor, podporami (n. *Pfeilerdruck*, *Auflagerdruck*, fr. *réaction des appuis*, an. *supporting force*, *reacting force*, *reaction*, cz. reakce podporové, r. отпоръ).

Naszem zadaniem jest teraz wyznaczenie oddziaływań, które, jak już wspomnieliśmy, muszą utrzymywać dźwigar w równowadze.

Kierunek oddziaływań zależy od kształtu i rodzaju łożysk (n. Lager, fr. support, coussinet, an. support, bearing, r. подушка, подшипникъ), części budowli, na których bezpośrednio dźwigar spoczywa. Jeżeli oddziaływania są pionowe, dźwigar nazywamy wtedy belką prostą (n. gerader Träger, Balkenträger, Balken, fr. poutre droite, an. straight girder, beam, cz. trám prostý, r. прямая балка) i o takich tylko dźwigarach, których oś zresztą jest zazwyczaj prosta, będziemy mówić w tym rozdziale. Chcąc wyznaczyć wielkość oddziaływań O_1 i O_2 , wykreślamy wielobok sił, robiąc $01 = P_1$, $12 = P_2$, $23 = P_3$. Wiemy, że dla równowagi wielobok musi się zamknąć, więc $O_1 + O_2 = 30$. Znamy zatem sumę obu oddziaływań; aby zaś wyznaczyć wielkość każdego oddziaływania z osobna,



rys. 14.

skrajnych boków z kierunkami oddziaływań, a więc tu z pionowymi przez A i B.

Prostą ab nazywamy z tego powodu linią zamykającą albo zamykającą (n. Schlusslinie, fr. ligne de fermeture, an. closing line, cz. základna strana, r. замыкающая). Poprowadziwszy odnośny promień $Om \parallel ab$, otrzymamy punkt m , który podzieli długość 03 na dwie części, $3m = O_2$ i $m0 = O_1$, odpowiadające wierzchołkom a i b wieloboku sznurowego. Teraz bowiem siły P_1 , P_2 , P_3 , O_2 i O_1 są w równowadze, bo wielobok sił i wielobok sznurowy się zamykają.

Ażeby wyznaczyć moment wszystkich sił, po lewej stronie punktu C leżących, ze względu na punkt C postępujemy, jak to wskazano w poprzednim paragrafie. Na rys. 14. mamy wykreślony odnośny wielobok sznurowy. Ponieważ wypadkowa jest pionową, więc spuszczyliśmy z punktu C pionową, a odcinek $y=fg$ między bokami skrajnymi ab i de , pomnożony przez odległość biegunową h , da moment $M=hy$. Zamiast mnożyć odcinek przez odległość biegunową h , możemy zmienić dla momentów podziałkę długości w stosunku $1:h$, a więc jeżeli stosunek podziałki długości jest $\frac{1\text{ cm}}{a\text{ m}}$, t. j. jeżeli cm w rysunku przedstawia a metrów w naturze, a odległość biegunowa h , jako siła uważana, równa się h tonnom, to stosunek podziałki, wedle której y odczytujemy wprost jako moment, będzie $\frac{1\text{ cm}}{ah\text{ tm.}}$, t. j. 1 centymetr na rysunku będzie przedstawiał ah tonmetrów. Widzimy więc, że przy użyciu tej podziałki wszystkie odcinki pionowe w wieloboku sznurowym $acdgeb$ przedstawiają wprost momenty w odnośnych punktach belki. Powierzchnię, utworzoną temi odcinkami, $acdgeb$ nazywamy powierzchnią momentów (n. *Momentenfläche*, fr. *surface représentative des moments*, r. *площадь моментовъ*), gdyż ona okazuje wielkość momentów wzdłuż całej belki przy danem obciążeniu. Ponieważ siły, po lewej stronie przekroju C działające (wraz z oddziaływaniem), starają się belkę tem bardziej zgiąć, im większy ich moment ze względu na punkt C , przeto nazywamy w tym wypadku moment statyczny tych sił także momentem zginającym, gnącym (n. *Biegunungsmoment*, fr. *moment fléchissant*, an. *bending moment*, cz. *moment ohybu*, r. *моментъ изгиба*).

Jeżeli dla punktu C utworzymy wypadkową wszystkich sił, po lewej stronie przekroju działających, (wraz z oddziaływaniem) i rozłożymy ją na dwie składowe, jedną prostopadłą do osi w punkcie C , a drugą, działającą w kierunku osi, to składową, prostopadłą do osi w punkcie C , nazywamy siłą poprzeczną (n. *Querkraft*, *Scherkraft*, fr. *effort tranchant*, an. *shearing force*, cz. *siła pŕičná, posouvajica*, r. *поперечная сила*), bo ona stara się ściąć belkę w kierunku poprzecznym t. j. prostopadłym do osi. Dla belki prostej poziomej i obciążenia pionowego siłą poprzeczną jest suma wszystkich sił, po lewej stronie przekroju działających. Siłę poprzeczną nazywamy dodatnią (n. *positiv*, fr. *positif*, an. *positive*), jeżeli

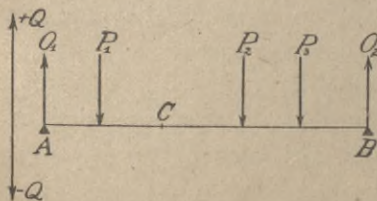
działa w kierunku z dołu do góry na lewą część dźwigaru, w przeciwnym zaś razie ujemną (n. *negativ*, fr. *negatif*, an. *negative*). Oznaczając Q siłę poprzeczną w punkcie C , otrzymamy $Q = O_1 - P_1 - P_2$, a więc $Q = m0 - 01 - 12 = m2$. Punkty te m i 2 możemy też otrzymać, poprowadziwszy z biegunu O Om i $O2$, równoległe do przeciętych boków wieloboku sznurowego ab i de . A zatem dla otrzymania siły poprzecznej w danym punkcie C , kreślimy promienie równoległe do boków wieloboku sznurowego, przeciętych pionową przez C , a odcinek $m2$ na wieloboku sił przedstawia siłę poprzeczną. Poprowadziwszy linie poziome z punktów m i 2 , otrzymamy $pr = m2 = Q$.

Jeżeli to samo uczynimy dla innych punktów, t. j. poprowadzimy z punktu m i z punktów $0, 1, 2$ i 3 poziome, otrzymamy linią schodkową, z której widzimy, że siła poprzeczna zmienia się tylko w punkcie, gdzie działa jakaś siła, a między dwiema siłami jest stałą.

Z rysunku widzimy, że siła poprzeczna zmienia swój znak, a więc tutaj staje się ujemną, pod ciężarem, w obrębie którego leży punkt m . A zatem chcąc wyznaczyć ciężar, pod którym siła poprzeczna zmienia swój znak, należy wykreślić promień Om równoległy do zamykającej. Ciężar, który w wieloboku sił przetnie ten promień, jest ciężarem szukanym. Położenie siły poprzecznej znajdziemy, przedłużając przecięty bok wieloboku sznurowego i zamykającą, w punkcie n .

Przykład. Rysunek 14. przedstawia belkę prostą AB o rozpiętości $21,3$ m, na którą działają siły $P_1 = 9t$, $P_2 = 9t$, $P_3 = 7,5t$ w punktach E, F i G . Przyjęliśmy przytem następane podziałki: dla długości $1 : 500$ czyli $\frac{1 \text{ mm}}{0,5 \text{ m}}$, dla sił $\frac{1 \text{ mm}}{1 \text{ t}} = \frac{1 \text{ cm}}{10 \text{ t}}$. Od-

ległość biegunowa $h = 20 \text{ mm}$, więc jako siła uważana, oznacza 20 t ; podziałkę dla momentów, wyrażonych odcinkami y , znajdziemy teraz, zmniejszając podziałkę długości w stosunku $1 : 20$, więc $\frac{1 \text{ mm}}{0,5 \times 20 \text{ tm}} = \frac{1 \text{ mm}}{10 \text{ tm}}$. Dla punktu C otrzymamy z rysunku jako moment $fg = 8 \text{ mm}$ czyli według podziałki momentów 80 tm . Siłę poprzeczną w C przedstawia rzędna pr , więc $Q = -3 \text{ t}$.



rys. 15.

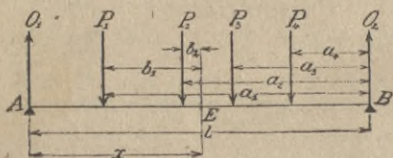
Jeżeli wszystkie siły, działające po lewej stronie danego przekroju C (rys. 15.), złożymy w wypadkową Q , to wypadkowa

wszystkich sił po prawej stronie przekroju musi być $-Q$, bo wedle § 5. suma wszystkich sił pionowych musi być równą zero. Siła poprzeczna w punkcie C , jest zatem równa wypadkowej wszystkich sił, po lewej stronie przekroju działających, lub też wypadkowej wszystkich sił, po prawej stronie działających, z odmiennym znakiem. Czasem, jeśli n. p. po prawej stronie mamy tylko jedną siłę, korzystamy z tego ostatniego twierdzenia.

Ponieważ siły O_1 , P_1 , P_2 , P_3 i O_2 są w równowadze, a zatem i siły Q muszą mieć to samo położenie.

§ 9. Analityczne wyznaczenie sił poprzecznych i momentów.

Jeżeli siły P_1 , P_2 , P_3 i P_4 działają na belkę AB (rys. 16.), a ich odległości od podpory B nazwiemy a_1 , a_2 , a_3 i a_4 , to otrzymamy oddziaływanie O_1 , wyznaczając sumę momentów około punktu B , która dla równowagi ma być równą zero.



rys. 16.

Gdyby bowiem suma momentów wszystkich sił, działających na belkę, nie była równa zero, to wypadkowy moment sprawiłby obrót belki, co się sprzeciwia założeniu. A zatem:

$$O_1 l - P_1 a_1 - P_2 a_2 - P_3 a_3 - P_4 a_4 = 0,$$

$$\text{a stąd } O_1 = P_1 \frac{a_1}{l} + P_2 \frac{a_2}{l} + P_3 \frac{a_3}{l} + P_4 \frac{a_4}{l} \dots \dots \dots 6)$$

a że suma sił pionowych według § 5. ma być równą zero, więc

$$O_2 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - O_1 \dots \dots \dots 7)$$

Siłę poprzeczną Q w punkcie E otrzymamy, tworząc sumę sił, po lewej stronie punktu E działających, więc:

$$Q = O_1 - P_1 - P_2 \dots \dots \dots 8)$$

Nareszcie moment zginający uzyskamy, tworząc sumę momentów ze względu na punkt E sił, działających po lewej jego stronie. Zatem:

$$M = O_1 x - P_1 b_1 - P_2 b_2 \dots \dots \dots 9)$$

Przykład. Niechaj siły 11, 10,9 i 9 t działają na belkę o rozpiętości 10 m w punktach, oznaczonych na rys. 17. (podziałka 1:200).

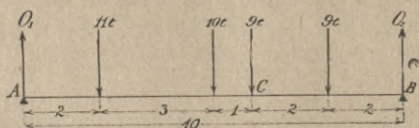
Według równania 6) mamy:

$$O_1 = \frac{1}{10} (11 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 2) = 19,2 \text{ t.}$$

$$O_2 = (11+10+9+9) - 19,2 = 39 - 19,2 = 19,8 \text{ t.}$$

Siła poprzeczna według równania 8) w punkcie *C* po lewej stronie punktu zaczepienia siły 9 jest:

$$Q = 19,2 - 11 - 10 = -1,8 \text{ t.}$$



rys. 17.

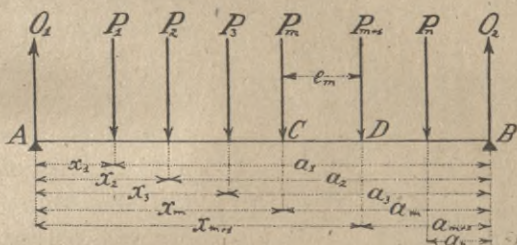
po prawej stronie punktu zaczepienia siły 9 mamy:

$$Q = 19,2 - 11 - 10 - 9 = -10,8 \text{ t.}$$

A zatem siła poprzeczna zmienia się w punkcie *C* o 9 t. — Nareszcie otrzymamy moment w punkcie *C* według równania 9):

$$M = 19,2 \times 6 - 11 \times 4 - 10 \times 1 = 115,2 - 54 = 61,2 \text{ tm.}$$

Jeżeli na belkę *AB* (rys. 18.) działają siły $P_1, P_2, P_3, P_m, P_{m+1}, P_n$, to momenty w punktach zaczepienia sił dadzą się jeszcze wyznaczyć w inny sposób, wskazany przez *Pelletreau* *).



rys. 18.

Wedle rów. 6) $O_1 = \frac{1}{l} \sum Pa$, a moment w punkcie *C*

$$M_m = O_1 x_m - \sum_m^1 P(a - a_m).$$

Podobnie otrzymamy dla punktu *D*

$$M_{m+1} = O_1 x_{m+1} - \sum_m^1 P(a - a_{m+1}).$$

A stąd $M_{m+1} - M_m = O_1 (x_{m+1} - x_m) - (a_m - a_{m+1}) \sum_m^1 P$

$$\text{albo } \Delta M = M_{m+1} - M_m = e_m (O_1 - \sum_m^1 P)$$

a że $O_1 - \sum_m^1 P = Q_m$, więc $\Delta M = e_m Q_m \dots \dots \dots 10)$

A zatem różnica momentów w dwu po sobie następujących punktach zaczepienia sił równa się od-

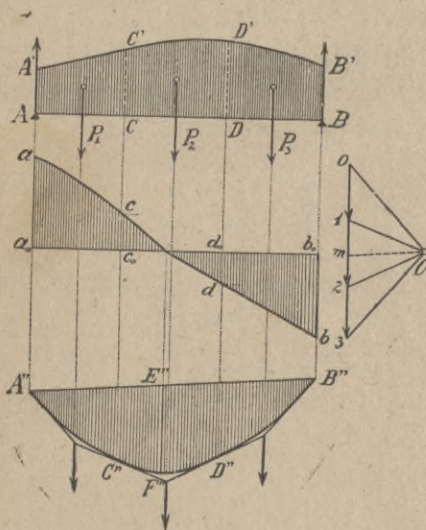
*) *Ann. des ponts et chaus.* 1887.

stępowi tych sił, pomnożonemu przez siłę poprzeczną.

Przykład. Chcąc wyznaczyć moment w punkcie D (rys. 17.), otrzymamy $\Delta M = 2 \times -10,8 = -21,6 \text{ tm}$, a że w C moment $M = 61,2 \text{ tm}$, więc w D $M_1 = 61,2 - 21,6 = 39,6 \text{ tm}$. Moment w D możemy jeszcze inaczej wyznaczyć, mianowicie $M_1 = O_2 \cdot 2 = 19,8 \times 2 = 39,6 \text{ tm}$.

§ 10. Dowolne obciążenie ciągłe.

Na belkę AB , podpartą w dwu punktach, (rys. 19.) działa ciężar proporcjonalny do powierzchni kreskowanej. Ciężar taki nie działający w jednym punkcie, lecz rozłożony na części belki lub też na całej belce, nazywamy obciążeniem ciągłym (n. *stetige Belastung*, fr. *charge répartie, continue*. an. *distributed load*, cz. *obciążenie spojite*, r. *распределённый груз*).



rys. 19.

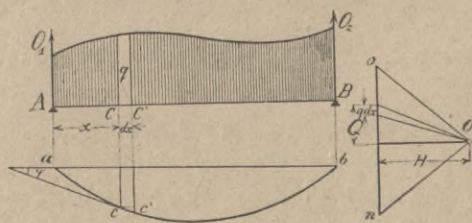
Powierzchnię $AA'B'B$ nazywamy powierzchnią obciążenia (n. *Belastungsfläche*, fr. *surface représentative de charge*). Rzędna jakakolwiek n. p. CC' , pomnożona przez dx , przedstawia wtedy ciężar na długości dx albo, gdy w myśli przyjmujemy ciężar na jednostce długości stały i taki sam, jak w punkcie C , przedstawia rzędna CC' ciężar na jednostkę długości czyli ciężar jednostkowy (n. *Belastung für die Längeneinheit*, cz. *pomiarne obciążenie*).

Gdybyśmy podzielili powierzchnię obciążenia na niezliczoną ilość pasków, to moglibyśmy uważać je jako ciężary skupione (n. *Einzellast, konzentrierte Last*, fr. *poids concentré*, r. *концентрированный груз*), działające w środkach ciężkości pasków. Postępując dalej w znany sposób, otrzymalibyśmy wielobok sznurowy o bokach nieskończenie małych, a zatem widzimy, że wielobok

snurowy zamienia się tu na krzywą sznurową (n. *Seilkurve*, fr. *courbe funiculaire*). Ponieważ jednak nie możemy działać nieskończoną ilością sił, więc podzielmy powierzchnię obciążenia na mniejszą ilość pasków, tu n. p. na trzy paski, pionowemi CC' i DD' , oznaczymy powierzchnie tych pasków i proporcjonalne do nich ciężary P_1, P_2 i P_3 , które zaczepiają w środku ciężkości pasków. Mamy więc tu trzy siły, dla których wykreślamy wielobok sił i wielobok sznurowy w znany sposób. Przedłużenia stycznych krzywej sznurowej w dwu punktach przecinają się, jak wiemy, w prostej, wyznaczającej kierunek wypadkowej, a więc styczne punktów linii sznurowej, odpowiadających punktom podziału A, C, D, B , przecinają się w pionowych, poprowadzonych przez środki ciężkości odnośnych pasków. Widzimy więc, że boki wieloboku sznurowego są stycznymi do linii sznurowej i że punkty styczności znajdują się w pionowych, przechodzących przez linje podziału. Otrzymawszy w ten sposób dostateczną ilość stycznych i punktów styczności, możemy wykreślić linię sznurową $A''C''D''B''$.

Podobnie otrzymamy i siły poprzeczne. W punkcie A siła poprzeczna równa się oddziaływaniu $O_1 = a_0 a$, w punkcie C $Q = O_1 - P_1 = m_0 - 0_1 = m_1 = c_0 c$. W podobny sposób otrzymamy punkty d i b , a wszystkie łączymy linią krzywą. Im więcej tych punktów wyznaczymy, tem dokładniej możemy wykreślić linię sił poprzecznych.

Równanie linii sznurowej da się w następujący sposób wyznaczyć.



rys. 20.

W punkcie C (rys. 20.) nazwijmy rzędną linii sznurowej y , to styczna do linii sznurowej w tym punkcie nachylona jest do

poziomu pod kątem φ , a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}.$$

Dalej mamy $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = d\left(\frac{Q}{H}\right) = \frac{dQ}{H}$,

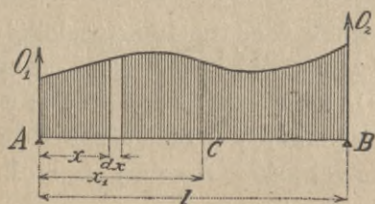
bo H jest stałym, a $dQ = -q dx$, więc

$$H d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -q dx, \text{ czyli}$$

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = -q \dots \dots \dots 11)$$

Jest to równanie różniczkowe linii sznurowej.

Dla obciążenia ciągłego dowolnego da się także analitycznie



rys. 21.

dowieść ważne twierdzenie, podane przez Schwedlera. Dla dowolnego obciążenia ciągłego belki AB (rys. 21.) wyznaczmy w powyższy sposób, lub też analitycznie, oddziaływania. Jeżeli

$q = f(x)$ oznacza ciężar jednostkowy, to oddziaływanie O_1 otrzymamy według 6), uważając element $q dx$ jako siłę skupioną,

$$O_1 = \frac{1}{l} \int_0^l q(l-x) dx \dots \dots \dots 12)$$

Wyznaczmy teraz dla punktu C w odległości x_1 od lewej podpory siłę poprzeczną i moment według 8) i 9), a otrzymamy

$$Q = O_1 - \int_0^{x_1} q dx, \dots \dots \dots 13)$$

zaś

$$M = O_1 x_1 - \int_0^{x_1} q(x_1 - x) dx,$$

a stąd dla zmiennej x_1 pochodną:

$$\frac{dM}{dx_1} = O_1 - \int_0^{x_1} q dx = Q \dots \dots \dots 14)$$

Widzimy zatem, że dla dowolnego obciążenia ciągłego siła poprzeczna w każdym punkcie belki jest pochodną momentu. Z tego wynika bezpośrednio, że naj-

większość (maximum) momentów jest w tym punkcie, gdzie $Q=0$ (rys. 19.).

Z rów. 13) wynika dalej

$$\frac{dQ}{dx} = -q,$$

a zatem

$$q = -\frac{dQ}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2} \dots \dots \dots 15)$$

Stąd widzimy, że obciążenie jednostkowe jest pierwszą pochodną siły poprzecznej a drugą pochodną momentu.

§ 11. Obciążenie jednostajne zupełne.

Gdy ciężar jednostkowy jest stały, wtedy mamy obciążenie jednostajne (n. *gleichmässige Belastung*, fr. *charge uniformément répartie*, an. *uniform load*, cz. *obtižení rovnoměrné*, r. *равномерная нагрузка*).

Gdy ciężar jednostkowy jest między granicami x' i x_1 stały $=q_1$, to dla tej długości mamy z rów. 13)

$$Q = O_1 - q_1 x_1 + C \text{ i } M = O_1 x_1 + C x_1 - \frac{q_1 x_1^2}{2} + C_1 \dots \dots 16)$$

jeżeli C i C_1 oznaczają ilości stałe.

Z rów. 16) widzimy, że jeżeli belka jest na pewnej długości obciążoną jednostajnie, to na tej długości linja sił poprzecznych jest prostą a momentów parabolą.

Jeżeli w rów. 11) q jest stałym, to

$$H \frac{dy}{dx} = -qx + C_1, \text{ a } Hy = -q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

zatem krzywa sznurowa jest na tej długości parabolą.

Jeżeli w równaniu 16) zrobimy $q_1=0$, to $Q_1=O_1+C$, $M=O_1 x_1 + C x_1 + C_1$, a zatem jeżeli belka na pewnej długości nie jest wcale obciążoną, to na tej długości linja sił poprzecznych jest równoległą do osi, a linja momentów prostą.

Jeżeli przytem cała belka jest obciążoną, wtedy obciążenie nazywamy jednostajnym zupełnym (n. *totale gleichmässige Belastung*, an. *total uniform load*, r. *полная равномерная нагрузка*) i wtedy poprzednie wzory bardzo się upraszczają.

a) Liczebnie. Ponieważ przy obciążeniu jednostajnym zupełnym belka jest symetrycznie obciążona (rys. 22.), więc dla obciążenia jednostkowego g

$$O_1 = O_2 = \frac{1}{2} gl \dots \dots \dots 17)$$

Siłę poprzeczną Q dla dowolnego punktu C otrzymamy:

$$Q - O_1 - gx = \frac{1}{2} gl - gx = \frac{1}{2} g(l - 2x) \dots \dots \dots 18)$$

Moment w punkcie C będzie:

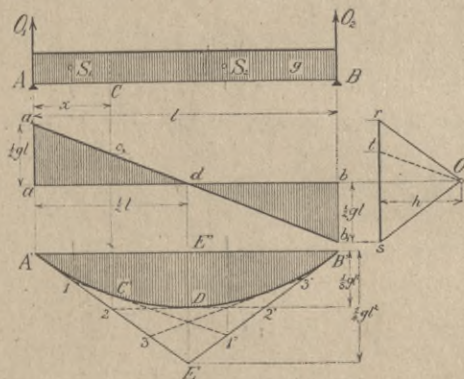
$$M = O_1 x - gx \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} glx - \frac{1}{2} gx^2 = \frac{1}{2} gx(l - x) \dots \dots \dots 19)$$

Równanie 18) jest równaniem linii prostej, a mianowicie otrzymamy: dla $x=0$ $Q = \frac{1}{2} gl$,

„ $x = \frac{1}{2} l$ $Q = 0$,

„ $x = l$ $Q = -\frac{1}{2} gl$.

Linję sił poprzecznych otrzymamy więc, wykreśliwszy $aa_1 = bb_1 = \frac{1}{2} gl$ i połączywszy punkty a_1 i b_1 . Prosta ta przecina oś w połowie rozpiętości.



rys. 22.

Równanie 19) dla momentów jest drugiego stopnia i przedstawia parabolę o osi pionowej, przechodzącej przez środek belki. Z równania tego otrzymamy dla $x=0$ $M=0$, dla $x=l$ $M=0$. Chcąc wyznaczyć największy moment, szukajmy, dla którego punktu będzie $Q=0$.

Z rów. 18) widzimy, że $Q=0$ dla $x = \frac{1}{2} l$, a stąd odcinek, dla którego moment jest największością, jest

$$x = \frac{1}{2} l, \text{ a najw } M = \frac{1}{8} gl^2 \dots \dots \dots 20)$$

b) Wykreślnie. Możemy tu postępować według ogólnej metody; jednak wiedząc, że linja sił poprzecznych jest prostą, a linja momentów parabolą, możemy obie te linie bardzo łatwo wykreślić w inny sposób. O linji sił poprzecznych mówiliśmy już powyżej; aby wykreślić linję momentów, kreślimy wielobok sił, robiąc $rs=gl$ i prowadzimy promienie skrajne. Chcąc wykreślić wielobok sznurowy, prowadzimy równoległe do tych promieni $A'E \parallel rO$ i $B'E \parallel Os$. Są to styczne paraboli, którą wyznaczymy najłatwiej następnym znanym sposobem. Dzielimy obie styczne na równą ilość części (tu na 4) i łączymy punkty podziału, równomiernie oznaczone liczbami. Proste te są stycznymi do paraboli, a punkty styczności mają odcinki dwa razy większe, niż lewy punkt podziału.

Konstrukcja ta da się zresztą łatwo uzasadnić. Pomyślimy bowiem, żeśmy całe obciążenie belki podzielili na dwie części linją pionową, poprowadzoną przez punkt C . Chcąc wykreślić wielobok sznurowy, styczny do linji sznurowej, szukamy środków ciężkości. Widzimy na rysunku, że jeżeli punktowi C odpowiada punkt podziału 2, to środkowi ciężkości S_1 powierzchni obciążenia na długości AC punkt 1, a odnośnemu punktowi S_2 dla długości CB punkt 1'. Styczny wielobok sznurowy będzie wtedy $A'11'B'$, bo w czworoboku tym znamy już z poprzedniego boku $A'1$, $1'B'$, $B'A'$. Czwarty bok ma być równoległy do Ot i przecinać się z bokami sąsiednimi na pionowych przez S_1 i S_2 , musi to więc być prosta $11'$. A zatem prosta $11'$ jest styczną do paraboli w punkcie C' .

Parabolę momentów możemy jednak wykreślić nawet bez wieloboku sił, gdyż opierając się na znanej własności paraboli i rów. 20), wiemy, że $EE' = 2E'D = 2\frac{1}{8}gl^2 = \frac{1}{4}gl^2$. Zrobiwszy więc $EE' = \frac{1}{8}gl^2$, mamy punkt E , kreślimy styczne $A'E$ i $B'E$ i postępujemy dalej, jak wyżej.

Przykład. Obliczyć najw. M i najw. Q dla belek stropowych ($l=4m$), umieszczonych w odstępach $1\cdot10m$, o obciążeniu 500 kg/m^2 .

Obciążenie 1 mb będzie $g=1\cdot10 \times 1\cdot00 \times 500 = 550\text{ kg}$. Według rów. 20): Najw. $M = \frac{1}{8} 550 \times 400^2 = 11000000\text{ kgcm}$. Według równania 18): Najwięk. $Q = \frac{1}{2} 550 \times 400 = 110000\text{ kg}$.

§ 12. Jednostajne obciążenie częściowe.

Jeżeli belka AB obciążoną jest jednostajnie tylko na długości $AC=x$ (rys. 23.), postępujemy według metody ogólnej i za

pomocą wieloboku sił i wieloboku sznurowego otrzymujemy dwie styczne ad' i $d'b$. Na długości $AC=x$ otrzymujemy parabolę adc , a na długości nieobciążonej linia momentów cb jest prostą.

Liczebnie otrzymamy z równania 6) dla ciężaru jednostkowego p

$$O_1 = \frac{1}{l} px \left(l - \frac{x}{2} \right) = \frac{px(2l-x)}{2l},$$

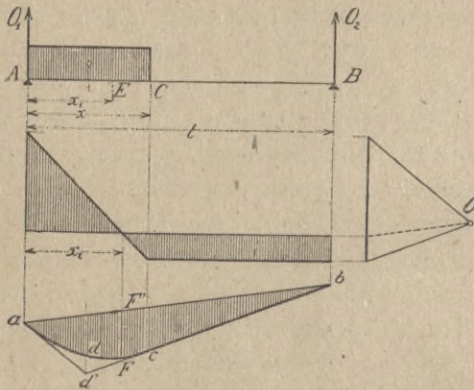
dalej dla dowolnego punktu E między A i C

$$Q = O_1 - px_1 \dots \dots \dots 21)$$

$$M = O_1 x_1 - \frac{1}{2} px_1^2 \dots \dots \dots 22)$$

Równanie 21.) dla sił poprzecznych na długości obciążo-

nej jest równaniem prostej, a rów. 22.) dla momentów równaniem paraboli. Z rów. 21.) i 22.) widzimy też, że kąt nachylenia prostej sił poprzecznych i parametr paraboli zależne są tylko od ciężaru jednostkowego p ; dla tego samego ciężaru jednostkowego p bę-



rys. 23.

dzie więc prosta sił poprzecznych tak samo do poziomu nachyloną i parametr paraboli będzie ten sam.

Dla punktu C jest $x_1=x$, więc z równania 21.) wynika, że

$$Q = \frac{px(2l-x)}{2l} - px = -\frac{px^2}{2l} \dots \dots \dots 23)$$

Największy moment jest w tem miejscu, gdzie $Q=0$; nazwijmy odnośny odcinek x_2 , to $\frac{px(2l-x)}{2l} - px_2 = 0$, a stąd $x_2 = \frac{x(2l-x)}{2l}$. Wstawiając to w równanie 22.), otrzymamy

$$\text{najw } M = \frac{px(2l-x)}{2l} \cdot \frac{x(2l-x)}{2l} - \frac{1}{2} p \frac{x^2(2l-x)^2}{4l^2}, \text{ czyli}$$

$$\text{najw } M = \frac{px^2(2l-x)^2}{8l^2} \dots \dots \dots 24)$$

Na rysunku 24. przedstawiliśmy momenty i siły poprzeczne dla przypadku, gdy długość CB jest jednostajnie obciążoną.

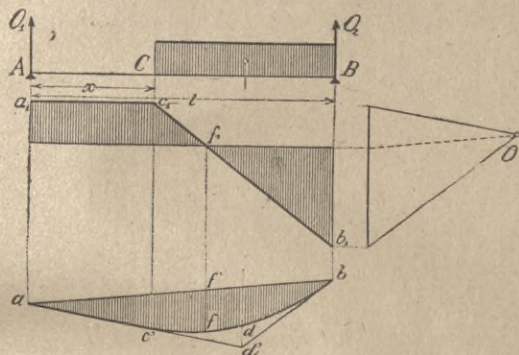
Otrzymamy wtedy liczebnie w zupełnie ten sam sposób, co pierwszej, siłę poprzeczną w punkcie C

$$Q = + \frac{p(l-x)^2}{2l} \dots \dots \dots 25)$$

Największy moment ff' otrzymamy z rów. 24), wstawivszy $l-x$ zamiast x , a więc

$$\text{najw } M = \frac{p}{8l^2} (l-x)^2 (l+x)^2 = \frac{p(l^2-x^2)^2}{8l^2} \dots \dots 26)$$

Wartości, które otrzymujemy w punkcie C dla siły poprzecznej z równań



rys. 24.

przecznęj z równań 23) i 25) przy obciążeniu częściowem są większe, niż wartość, którą otrzymamy z równania 18) dla obciążenia zupełnego, jeżeli przytem przypuścimy $p=g$. Przeciwnie momenty w każdym punkcie są największe dla obciążenia

zupełnego, jak to widzimy z porównania równań 19) i 24).

Przykład. Obliczyć najw. M i najw. Q dla belek stropowych o rozpiętości 5 m a odstępach 1,20 m, obciążeniu jednostajnem na długości 2 m od lewej podpory 450 kg/m² (rys. 23). Obciążenie na 1 mb będzie:

$$p = 1,20 \times 1,00 \times 450 = 540 \text{ kg/m} = 0,54 \text{ t/m.}$$

Według równania (24):

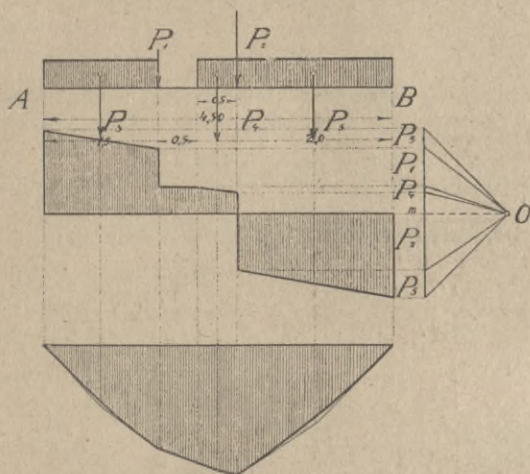
$$\text{najw } M = \frac{0,54 \times 2^2 (2 \cdot 5 - 2)^2}{8 \times 5^2} = -0,691 \text{ tm,}$$

$$\text{najw } Q = \frac{-0,54 \cdot 2^2}{2 \cdot 5} = -0,216 \text{ t.}$$

§ 13. Obciążenie ciągłe i ciężarami skupionemi.

Jeżeli na belce znajdują się oprócz obciążenia ciągłego także ciężary skupione (rys. 25.), postępujemy wedle sposobu ogólnego. Zaczepiamy w środkach ciężkości powierzchni obciążenia ciągłego siły P_3, P_4 i P_5 , kreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy, w który wkreślamy krzywą sznurową, pamiętając, że części po-

szczególne krzywej są tu parabolami, a punkty podziału są punktami styczności. Liczebnie wyznaczenie oddziaływań nastąpi wedle



rys. 25.

równania 6) i 7), momentów i sił poprzecznych wedle równania 9) i 8) z uwzględnieniem tej okoliczności, że P_3 , P_4 i P_6 są wypadkowymi obciążenia ciągłego.

Przykład. Na belkę o rozpiętości 4,50 m działają następujące siły. Obciążenie jednostajne 300 kg/m na długości 1,5 m od lewej podpory i na długości 2,5 m od prawej podpory. Siły

skupione $P_1=1$ w odstępnie 1,5 m od lewej podpory i $P_2=2$ t w odstępnie 2 m od prawej podpory. Wyznaczyć najw. M i najw. Q . Tu jest $P_3=0,45$ t, $P_4=0,15$ t, $P_5=0,6$ t.

Oddziaływanie wyznaczmy z równań:

$$O_1 = (0,45 \cdot 3,75 + 1 \cdot 3 + 0,15 \cdot 2,25 + 2 \cdot 2 + 0,6 \cdot 1) : 4,5 = 2,14 \text{ t.}$$

Siła poprzeczna będzie w odstępnie $x=1,5$ $Q=2,14-0,46=1,68$ t

po prawej stronie P_1 $Q=1,68-1=0,68$ t

dla $x=2$ m $Q=0,68$ t

dla $x=2,5$ m $Q=0,68-0,15=0,53$ t

po prawej stronie P_2 $Q=0,53-2=-1,49$

na prawej podporze $Q=-1,49-0,6=-2,09$

Największy moment jest tam, gdzie $Q=0$, a więc w punkcie zaczepienia siły P_2

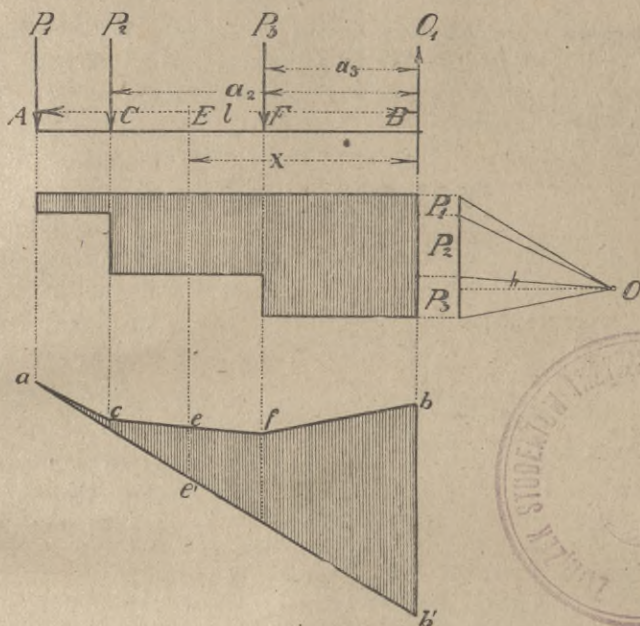
$$\text{najw } M = 2,14 \times 2,5 - 0,45 \cdot 1,75 - 1 \cdot 1 - 0,15 \cdot 0,25 = 3,19 \text{ tm,}$$

Na rysunku otrzymujemy dla podziałek $\frac{1}{m}$ i $\frac{1}{2t}$, $O_1=2,18$, odległość biegunowa $b=2,05$ t, najw $M=3,47$ tm.

§ 14. Belka jednym końcem utwierdzona.

Belka AB (rys. 26.), jednym końcem utwierdzona (osadzona), obciążoną jest ciężarami skupionymi P_1 , P_2 i P_3 . Chcąc wyznaczyć momenty i siły poprzeczne, wykreślamy jak zwykle, wielo-

bok sił i wielobok sznurowy $acfb$. Aby otrzymać powierzchnię momentów musimy na zasadzie § 7. przedłużyć pierwszy i ostatni bok wieloboku sznurowego aż do pionowej przez B . Tu więc



rys. 26.

nie mamy zamykającej w tem znaczeniu, co dla belki w dwu punktach podpartej. Moment w punkcie E przedstawia wtedy odcinek ee' między przedłużeniem pierwszego boku ab' a wielobokiem sznurowym, pomnożony przez odległość biegunową h . Największy moment otrzymamy dla punktu B .

W rysunku przyjęliśmy stosunek podziałek $\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$ i $\frac{1 \text{ mm}}{2 \text{ t}}$, dalej $P_1 = 5 \text{ t}$, $P_2 = 16 \text{ t}$, $P_3 = 11 \text{ t}$; $l = 5 \text{ m}$, $a_2 = 4 \text{ m}$, $a_3 = 2 \text{ m}$, $h = 40 \text{ t}$.

Z konstrukcji otrzymaliśmy $bb' = 2,8 \text{ m}$, więc
 najw $M = -bb' \cdot h = -2,8 \cdot 40 = -112 \text{ tm}$.

Zamiast mnożyć przez h moglibyśmy wyznaczyć podziałkę momentów, mianowicie $\frac{1 \text{ cm}}{1,40 \text{ tm}} = \frac{1 \text{ mm}}{4 \text{ tm}}$. Wedle tej podziałki odczytamy moment w B $M = -112 \text{ tm}$.

Liczebnie otrzymamy:

$$O_1 = P_1 + P_2 + P_3, \dots \dots \dots 27)$$

dalej dla punktu E

$$Q = -P_1 - P_2, \dots \dots \dots 28)$$

$$M = -P_1(1-x) - P_2(a_2-x) \dots \dots \dots 29)$$

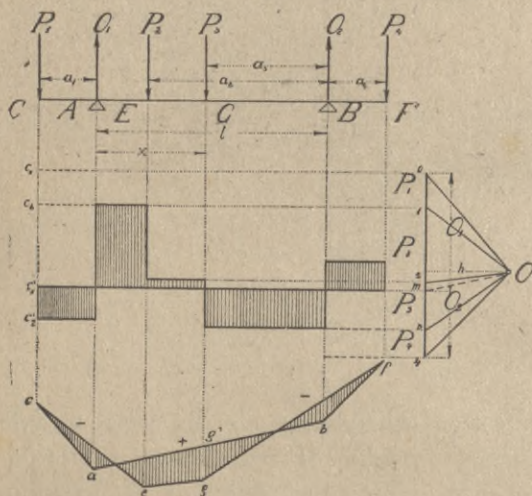
Dla $x=0$, więc dla punktu B , otrzymamy

$$\text{najw } M = -P_1l - P_2a_2 - P_3a_3 \dots \dots \dots 30)$$

Wstawiwszy wartości wyżej podane w równanie 30), otrzymamy *najw* $M = -(5 \times 5 + 16 \times 4 + 11 \times 2) = -111 \text{ tm}$. Wynik, któryśmy otrzymali sposobem wykreślnym, różni się o 1 *tm*, czyli w podzielnicy momentu o $\frac{1}{4} \text{ mm}$, co wynika z niedokładności konstrukcji.

§ 15. Belka wystająca.

Jeżeli belka CF (rys. 27.) podpartą jest nie na obu końcach, lecz w dwu punktach A i B między końcami, to nazywamy ją belką wystającą, przewieszoną (n. *überhängender Träger*, fr. *poutre reposant en deux points d'appui intermédiaires*). Chcąc wyznaczyć siły poprzeczne, oddziaływania i momenty, postępujemy, jak poprzednio; kreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy $acgfb$, boki pierwszy ac i ostatni bf przedłużamy aż do przecięcia się z pionowami podporowemi i punkty



rys. 27.

przecięcia się a i b łączymy prostą zamykającą ab . Promień $Om \parallel ab$ dzieli długość $0a$ na dwie części i otrzymujemy $4m = O_2$, $m0 = O_1$.

Na rysunku przyjęliśmy stosunek podziałek $\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$ i $\frac{1 \text{ mm}}{1 \text{ t}}$, dalej $l=3 \text{ m}$, $a_1=0,75 \text{ m}$, $a_2=2,35 \text{ m}$, $a_3=1,60 \text{ m}$, $a_4=0,75 \text{ m}$, $P_1=4,5 \text{ t}$, $P_2=8 \text{ t}$, $P_3=6 \text{ t}$, $P_4=3,66 \text{ t}$, $h=11 \text{ t}$. Otrzymaliśmy $O_1=14,2 \text{ t}$, a moment w G $M=gg' \cdot h = =0,45 \times 11 = 4,95 \text{ tm}$.

Siły poprzeczne wykreślimy, jak poprzednio, tworząc wykreślnie sumę wszystkich sił po lewej stronie przekroju. Chcąc sprowadzić wszystkie siły poprzeczne do jednej osi, zrobimy

$c'_1c'_2=c_1c_2$ i zamiast linii kreskowanej poprowadzimy z c'_2 poziomą.

Liczebnie wyznaczmy oddziaływanie O_1 , robiąc sumę momentów około punktu B równą zeru, więc

$$-P_1(a_1+l)+O_1l-P_2a_2-P_3a_3+P_4a_4=0,$$

$$\text{zatem } O_1 = \frac{1}{l} [P_1(a_1+l)+P_2a_2+P_3a_3-P_4a_4] \dots 31)$$

Znając oddziaływanie, łatwo obliczymy siły poprzeczne i momenty.

Dla naszego przykładu otrzymamy po wstawieniu wartości

$$O_1 = \frac{1}{8} [4,5(0,75+3)+8 \times 2,35+6 \times 1,60-3,66 \times 0,75] = 14,18 \text{ t.}$$

Dla punktu G otrzymamy teraz

$$Q = -P_1+O_1-P_2 = -4,5+14,18-8 = +1,68 \text{ t,}$$

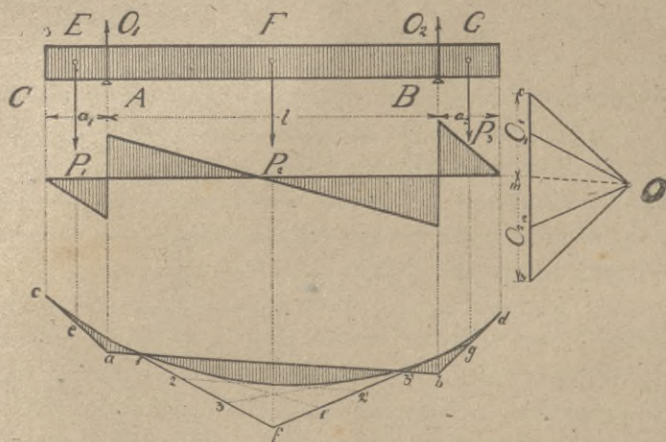
albo, gdy przyjmiemy, że P_3 działa po lewej stronie przekroju,

$$Q = -P_1+O_1-P_2-P_3 = -4,32 \text{ t.}$$

Dalej mamy w punkcie G

$$M = -4,5(0,75+1,4)+14,18 \times 1,4-8 \times (2,35-1,60) = 4,48 \text{ t.}$$

Jeżeli belka wystająca obciążoną jest ciężarem ciągłym jednostajnym, postępujemy w ten sam sposób. Dzielimy powierzchnię obciążenia na paski, z ich środków ciężkości spuszcza my pionowe



rys. 28.

(rys. 28.), kreśli my wielobok sił i wielobok sznurowy $cefgd$. Styczne końcowe w c i d , równoległe do promieni skrajnych, przedłużamy aż do pionowych podporowych, punkty przecięcia się a i b łączymy zamykającą. Wykreśliwszy teraz z danych stycznych

linię sznurową, która, jak wiemy, jest dla obciążenia jednostajnego parabolą, otrzymujemy powierzchnię momentów w części dodatnią, a w części ujemną. Wykreśliwszy $Om \parallel ab$, otrzymamy oddziaływania $3m = O_2$ i $m0 = O_1$, a stąd łatwo siły poprzeczne.

Liczebnie wyznaczmy oddziaływania, robiąc sumę momentów około punktu B równą zeru. A więc dla obciążenia jednostkowego g

$$-ga_1 \left(l + \frac{a_1}{2} \right) + O_1 l - \frac{1}{2} gl^2 + \frac{1}{2} ga_2^2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$O_1 = ga_1 \left(1 + \frac{a_1}{2l} \right) + \frac{1}{2} gl - \frac{1}{2} ga_2 \frac{a_2}{l} \quad . . . \quad 32)$$

Znając oddziaływania, obliczymy łatwo momenty i siły poprzeczne w zwykły sposób.

B. WYTRZYMAŁOŚĆ ZESKŁADÓW DREWNIANYCH I ŻELAZNYCH.

III. Wytrzymałość na wyciąganie i ściskanie.

§ 16. Ogólne pojęcia.

Dotychczas mówiliśmy o siłach zewnętrznych, działających na dźwigar, teraz zaś mówić będziemy o wpływie tych sił na dźwigar i siłach wewnętrznych, które w dźwigarze wywołują. Każde ciało wyobrażamy sobie jako zbiór nieskończenie małych cząstek t. z. drobin, oddzielonych jedne od drugich nieskończenie małymi odstępami, utrzymujących się w tych odległościach pod działaniem sił, równoważących się wzajemnie, tak zwanych sił międzycząstkowych (n. *Molekularkraft*, fr. *force moléculaire*, an, *molecular force*, r. молекулярная сила). Dla ciał stałych są siły przyciągające tak wielkie, że potrzeba znaczniejszej siły dla zmiany położenia cząstek. Wypadkowa tych sił, działających w danym przekroju, sprzeciwiająca się przesunięciu drobin, zależną jest od materiału. Własność tę ciał stałych nazywamy spójnością (n. *Cohäsion*, fr. *cohésion*).

Siły zewnętrzne, działające na belkę, sprawiają zmianę kształtu i wymiarów belki czyli odkształcenie (n. *Formänderung*, *Deformation*, fr. *déformation*, r. деформация), które po

ustaniu działania sił zewnętrznych znika całkowicie lub częściowo. Tę własność ciała, która sprawia, że drobiny wracają do pierwotnego położenia po ustaniu działania sił zewnętrznych, nazywamy sprężystością (n. *Elasticität*, fr. *élasticité*, an. *elasticity*, r. упругость).

Wszystkie ciała stałe są mniej lub więcej sprężyste; u drzewa odkształcenia są stosunkowo większe, u kruszców zaś bardzo małe. Jeżeli po ustaniu działania sił zewnętrznych ciało przybiera zupełnie pierwotny kształt, to nazywamy je zupełnie sprężystem (n. *vollkommen elastisch*, fr. *parfaitement élastique*, an. *perfectly elastic*), jeżeli zaś odkształcenie nie znika zupełnie, nazywamy je niezupełnie sprężystem (n. *unvollkommen elastisch*, fr. *semi-élastique*). Wszystkie ciała są dla małych obciążeń aż do pewnej granicy zupełnie sprężyste, dla większych obciążeń stają się te ciała niezupełnie sprężystemi. Granicę tę nazywamy granicą sprężystości (n. *Elasticitätsgrenze*, fr. *limite de l'élasticité*, an. *elastic limit*, *limit of elasticity*, cz. *mez uměrnosti*, r. пределы упругости).

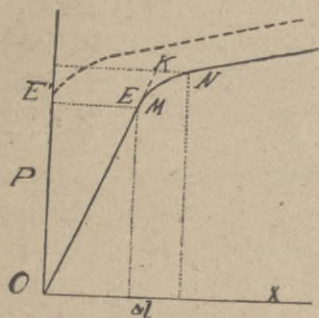
Po jej przekroczeniu ciała te są niezupełnie sprężystemi; część odkształcenia, nazwana odkształceniem sprężystem (n. *elastische Formänderung*, fr. *deformation élastique*) znika po ustaniu sił zewnętrznych, reszta zaś, odkształcenie trwałe (n. *bleibende Formänderung*, fr. *déformation permanente*, an. *permanent set*), pozostaje. Powstają bowiem wtedy zmiany w ustroju wewnętrznym ciała, przesunięcia drobin, powstają między drobinami bardzo małe pęknięcia. Są też ciała, które nawet pod wpływem małych sił okazują tylko odkształcenie trwałe, nazywają się one wtedy plastycznymi (n. *plastisch*, *bildsam*, fr. *plastique*, an. *plastic*, r. пластичный).

Granica sprężystości wedle powyższego określenia byłaby jednak bardzo nieoznaczoną, bo dokładniejsze przyrządy, zwłaszcza Bauschingera i Martensa przyrząd zwierciadlany, pozwalający odczytywać 0'0001 mm, udowodniły, że prawie wszystkie materiały wykazują przy miernych nawet obciążeniach już odkształcenie trwałe, chociaż nadzwyczaj małe. W przyrodzie niema ciał ani zupełnie sprężystych ani zupełnie plastycznych. Ale doświadczenia te wykazały też, że odkształcenia przy niektórych ważnych technicznie materiałach, jak żelazo spawane i zlewne, stal, drzewo i innych, są do pewnej granicy proporcjonalne do obciążeń (rys. 29.).

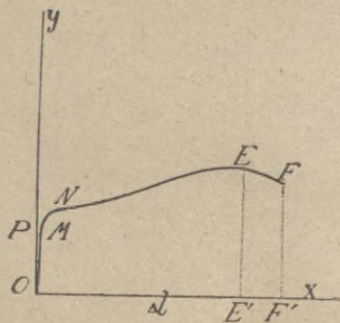
Granicę tę nazywamy granicą proporcjonalności (n. *Proportionalitätsgrenze*, fr. *limite de proportionalité*, cz. *mez uměrnosti*, r. *предѣлъ пропорциональности*).

Na rys. 29. odcinamy na osi OX przedłużenie względne Δl , wywołane obciążeniami P , które odcinamy na osi OY . Do punktu M , który tu jest granicą proporcjonalności, otrzymujemy wtedy linię prostą. Gdy obciążenie przekracza tę granicę, odkształcenia przestają być proporcjonalne do obciążeń, rosną mianowicie daleko szybciej, niż obciążenia, linja MN jest przytem styczną do OM . Odcinając także odkształcenia trwałe, otrzymamy drugą krzywą kreskowaną, która się zacznie w E' . Ponieważ dla obciążeń poniżej granicy proporcjonalności odkształcenia trwałe są tak małe, że je w praktyce uważamy za nieistniejące, różnica między E i M jest bardzo małą, więc też zwykle przyjmujemy, że granica proporcjonalności spada z granicą sprężystości.

Po nagłym usunięciu sił zewnętrznych ciało powraca nagle do swego pierwotnego kształtu, ale wskutek bezwładności od-



rys 29.



rys. 30.

kształca się potem w przeciwną stronę i dopiero po kilku drganiach przechodzi w stan spoczynku. Każde nagłe działanie siły lub uderzenie wywołuje takie drgania.

Jeżeli siły zewnętrzne będą po przekroczeniu granicy sprężystości ciągle wzrastały, to po przekroczeniu pewnej granicy (punkt N wykresu) u niektórych materiałów odkształcenia nagle bardzo wzrastają i drobiny przedstawiają już mały opór przesunięciu, jak przy ciałach ciastowatych; bardzo małym obciążeniom odpowiadają wielkie przedłużenia. Granicę tę nazywamy granicą ciastowatości (n. *Fliessgrenze*, *Streckgrenze*, fr. *limite appa-*

rante d'élasticité, de ductibilité, an. *yield point*, cz. *poątek prężności*, r. *начало течения*). Przy dalszem wzrastaniu sił zewnętrznych nareszcie przewyciężą one spójność i nastąpi tak wielka zmiana położeń drobin, że siły międzycząsteczkowe przestają działać, nastąpi więc rozdzielenie drobin i pojedynczych części ciała, a więc przerwanie, zgniecenie lub złamanie, (n. *Bruch*, fr. *rupture*, an. *failure*) ciała. Całą spójność w tej chwili się objawiającą, a więc cały opór, jaki spójność stawia zmianie położenia drobin, nazywamy wytrzymałością (n. *Festigkeit*, fr. *résistance des matériaux*, an. *resistance, tenacity*, r. *сопротивление*).

Na rys. 30. przyjęliśmy dla Δl znacznie mniejszą podziałkę, niż w rys. 29., dlatego też prosta OM spada prawie z osią OY . Punkt N oznacza granicę ciastowatości, EE' przedstawia siłę, która sprawia już przerwanie, chociaż następuje ono nieco później przy FF' . Przy ciśnieniu występują odkształcenia, tu skrócenia, zupełnie tak samo, jak przy ciągnięciu. Krzywa odkształceń ONE aż do punktu E ma podobny kształt. Jednak tu następuje zgniecenie a zarazem zniszczenie ciała tylko przy materiałach kruchych jak żelazo lane, kamień, beton, przy innych materiałach ciągliwych jak żelazo zlewne, miedź i t. d. nie następuje tu zniszczenie ciała, lecz powstają dalsze jeszcze wielkie odkształcenia, wyrzuczenia i spłaszczenia.

Ponieważ siły zewnętrzne działają w rozmaity sposób na dźwigar, więc też i wytrzymałość rozmaicie się objawia. Według tego rozróżniamy następane rodzaje wytrzymałości:

a) wytrzymałość na wyciąganie (n. *Zugfestigkeit*, fr. *résistance à la traction*, an. *resistance to stretching*, r. *сопротивление на растяжение*), jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działa w kierunku osi dźwigaru, starając się przekroje prostopadłe do osi jedne od drugich oddalić;

b) wytrzymałość na ściskanie, (n. *Druckfestigkeit*, fr. *résistance à la compression*, an. *resistance to compression*, r. *сопротивление сжатию*), jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działa w kierunku osi dźwigaru, starając się przekroje prostopadłe do osi zbliżyć jedne do drugich.

Oba te rodzaje wytrzymałości nazywamy wytrzymałością bezwzględną (n. *absolute Festigkeit*). Dalsze rodzaje wytrzymałości są:

c) wytrzymałość na ścinanie (n. *Schubfestigkeit*, fr. *résistance à cisaillement*, an. *resistance to shearing*, r. сопро- тивление скалыванию), jeżeli wypadkowe sił zewnętrznych działających w płaszczyźnie, przez oś położonej, po jednej i po drugiej stronie idealnego przekroju, prostopadłego do osi, starają się przesunąć przekroje prostopadle do osi, niezmieniając ich oddalenia;

d) wytrzymałość na zginanie (n. *Biegungsfestigkeit*, fr. *résistance à la flexion*, an. *resistance of flexure*, r. сопро- тивление изгибу), jeżeli na dźwigar działają siły prostopadle do osi, starając się go wygiąć, i przekroje prostopadle do osi tak obrócić, że ich odstęp w rozmaitych punktach jest różny;

e) wytrzymałość na wyboczenie (n. *Knickfestigkeit*, fr. *résistance au flambage*, an. *resistance of crippling*), jeżeli ciało o stosunkowo długiej osi pracuje na ściskanie, a przytem okazuje się wygięcie osi;

f) wytrzymałość na skręcanie (n. *Drehungsfestigkeit*, *Torsionsfestigkeit*, fr. *résistance à torsion*, r. сопро- тивление скручиванию), jeżeli siły zewnętrzne sprowadzają się do pary sił, działającej w przekroju prostopadłym do osi i dwa przekroje tak jeden względem drugiego skręcają, że ich odległość pozostaje niezmienną.

Często siły działają tak, że równocześnie pracuje belka w rozmaity sposób n. p. na ściskanie i zginanie, na zginanie i ścinanie. Opór, jaki wtedy stawia ciało rozdzieleniu drobin, nazywamy wytrzymałością złożoną (n. *zusammengesetzte Festigkeit*, fr. *résistance composée*).

W tym rozdziale będziemy mówić tylko o wytrzymałości na wyciąganie i ściskanie.

§ 17. Spółczynniki sprężystości.

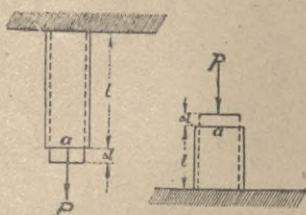
Jeżeli na graniastosłup o długości l a przekroju F działa siła P (rys. 31.) w kierunku osi, to długość pierwotna l zmienia się o Δl , a mianowicie skraca się, jeżeli siła ciśnie, a przedłuża się, jeżeli siła ciągnie graniastosłup. Oprócz tego zmieniają się długości innych krawędzi graniastosłupa, a mianowicie krawędzi a i prostopadłej do rysunku b , i to, jeżeli l przedłuża się o Δl , tedy a i b skracają się o Δa i Δb i na odwrót.

Przedłużenie w kierunku osi nazywamy podłużnem (n. *longitudinal*), a w kierunku prostopadłym do osi poprzecznem (n. *transversal*).

Doświadczenia wykazały, że przedłużenia Δl , Δa i Δb są aż do granicy sprężystości wprost proporcjonalne do długości l , a i b i do siły P , a odwrotnie do przekroju F . Możemy więc napisać:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF} \cdot \dots \dots \dots 33)$$

Tu E oznacza liczbę stałą, zależną od materiału, którą nazwiemy współczynnikiem sprężystości (n. *Elasticitätsmodul*, *Elasticitätskoeffizient*, fr. *coefficient d'élasticité*, an. *modulus of elasticity*, r. коэффициент упругости, cz. *modul prużnosti*). Jest to tak zwane prawo *Hooka* *).



rys. 31.

Iloraz $\frac{\Delta l}{l}$, przedstawiający przedłużenie lub skrócenie na jednostkę długości, nazywamy przedłużeniem lub skróceniem jednostkowym (n. *relative Längenänderung*, *Dehnung*,

fr. *allongement*, an. *unit strain*). Iloraz $\frac{P}{F} = \nu$ oznacza siłę, działającą na jednostkę powierzchni czyli naprężenie (n. *Spannung*, fr. *effort*, an. *stress on unit of area*, r. *напряженіе*, cz. *napětí*), jeżeli więc siłę mierzymy w kg , powierzchnię w cm^2 , to naprężenie wyrażać będziemy w kilogramach na centymetr kwadratowy, co oznaczamy kg/cm^2 (czytaj kg na cm^2).

Jeżeli naprężenie stara się drobiny ciała jedne od drugich oddalić, wtedy nazywamy je ciągnięciem (n. *Zug*, fr. *traction*, an. *tension*, r. *напряженіе на разрывъ*) i oznaczamy znakiem $+$. Jeżeli zaś naprężenie stara się zbliżyć drobiny jedne do drugich, to nazywamy je ciśnieniem (n. *Druck*, fr. *compression*, an. *compression*, r. *напряженіе на сжатіе*) i oznaczamy znakiem $-$.

*) Doświadczenia wiedeńskie z belkami żelaznemi okazały, że odkształcenia sprężyste podlegały temu prawu i po za granicą sprężystości, p. *Zeit. d. öst. Ing. u. Arch. Vereines* 1891.

Równanie 33) możemy więc inaczej napisać

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\nu}{E}, \dots \dots \dots 34)$$

a zatem przedłużenie jednostkowe jest proporcjonalne do naprężenia. Jeżeli w równaniu 34 zrobimy $\nu=1$, to $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} = \alpha$, a zatem współczynnik sprężystości jest odwrotną wartością przedłużenia jednostkowego dla naprężenia równego jednościci. To przedłużenie jednostkowe α nazywamy współczynnikiem wydłużenia (n. *Dehnungskoeffizient* fr. *coefficient d'allongement*, an. *coefficient of extension*, r. коефіцієнт удлянення).

Analogicznie do 34) możemy napisać

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\nu}{E_1}, \quad \frac{\Delta b}{b} = \frac{\nu}{E_2} \dots \dots \dots 35)$$

Współczynniki E_1 i E_2 nazywamy współczynnikami sprężystości poprzecznej (n. *Koeffizient für Transversalelasticität*, fr. *coefficient d'élasticité transversale*).

Współczynnik sprężystości E jest tylko dla ciał równokierunkowych, których struktura jest zupełnie jednorodna (n. *isotrop*, fr. *isotrope*), we wszystkich kierunkach stałym. Takim ciałem jest n. p. żelazo lane, podczas gdy żelazo spawane, zlewne i stal mają tę własność tylko w przybliżeniu. Drzewo jest nierównokierunkowe, dlatego musimy tu E wyznaczyć osobno w kierunku prostopadłym do włókien.

Współczynniki sprężystości poprzecznej są w ciałach równokierunkowych równe, przyczem $E_1 = E_2 = \frac{1}{m} E$. Ilość m nazywamy stałą Poissona (n. *Poissonsche Konstante*). Dla ciał równokierunkowych jest $m=4$, dla żelaza spawanego i stali $m=3$ do 4.

Współczynniki sprężystości są dla każdego materiału inne. Wyznaczono je, poddając ciało badane działaniu pewnej znanej siły P i mierząc przedłużenia lub skrócenia Δl . Jednak i dla tego samego materiału nawet współczynnik sprężystości ma wartości bardzo różne n. p. dla żelaza walcowanego otrzymał Bender wartości od 1110 000 do 2800 000 $\frac{kg}{cm^2}$, a nawet dla żelaza z tej samej fabryki otrzymano według doświadczeń towarzystwa Cincinnati Southern Railway w Ameryce wartości 1350 000 do

2 430 000 $\frac{kg}{cm^2}$, dlatego też wartości, które podajemy poniżej dla rozmaitych materiałów, uważać można tylko jako liczby przeciętne z wielu doświadczeń uzyskane. Różnice wartości współczynnika sprężystości powstają także wskutek niezupełnie jednostajnego materiału.

W tablicy I zestawiliśmy przeciętne wartości współczynników sprężystości dla materiałów, najbardziej w budownictwie używanych, jakoteż i naprężenia przy granicy sprężystości, przyczem podnieść musimy raz jeszcze wielką niepewność granicy sprężystości. Linja *OM* (rys. 29.) nie jest zupełnie prostą, a wyznaczenie punktu styczności *M* zależy od dokładności przyrządów.

Tablica I.

Materiał	Współczynnik sprężystości <i>E</i> w kg/cm^2		Naprężenie przy granicy sprężystości <i>M</i> w kg/cm^2		Naprężenie przy granicy ciastowatości <i>N</i> w kg/cm^2
	rozciąganie	ściskanie	rozciąganie	ściskanie	rozciąganie
Aluminium (glin)	675 000	675 000	—	—	—
Bazalt i porfir	—	50 000	—	—	—
Beton	260 000	200 000	20	50	—
Cement	260 000	250 000	30	60	—
Cynk	950 000	950 000	300	—	—
Cyna	400 000	—	—	—	—
Drzewo miękkie w kierunku włókien	112 000	100 000	600	150	—
Drzewo miękkie prostopadle do włókien	1 100	1 000	—	—	—
Drzewo dębowe w kierunku włókien	115 000	100 000	100	150	—
Drzewo dębowe prostopadle do włókien	1 300	1 300	—	—	—
Granit	150 000	300 000	—	—	—
Konopne liny	10 000	—	—	—	—
Miedź	1 100 000	1 100 000	400	—	—
„ drut	1 200 000	—	1 200	—	—
Mur ciosowy	—	250 000	—	—	—
„ ceglany	—	50 000	—	—	—
Mosiądz	640 000	640 000	480	—	—
„ drut	987 000	—	1 330	—	—
Ołów	60 000	60 000	100	—	—
Platyna	1 600 000	1 600 000	2 660	—	—
Piaskowiec	—	175 000	—	—	—
Rzemień nowy	1 250	—	—	—	—
„ używany	2 250	—	—	—	—

Materiał	Spółczynnik sprężystości E w kg/cm^2		Napężenie przy granicy sprężystości M w kg/cm^2		Napężenie przy granicy ciastowatości N w kg/cm^2
	rozciąganie	ściskanie	rozciąganie	ściskanie	rozciąganie
Stal zlewna	2 200 000	2 200 000	2 500 do	2 500 do	2 800
„ lana	2 150 000	2 150 000	6 000 2 000	6 000 2 000	i wyżej 2 100
„ niklowa	2 100 000	2 100 000	i więcej 3 000	i więcej 3 000	i więcej 3 500
Żelazo spawane	2 000 000	2 000 000	1 600	1 600	2 250
„ zlewne	2 150 000	2 150 000	2 200	2 200	2 600
„ lane (żeliwo)	900 000	95 000	—	—	—
„ blacha	1 900 000	—	—	1 500	—
„ drut	2 000 000	—	—	2 200	—

Considère zaproponował, aby oznaczyć jako granicę sprężystości ten punkt linii odkształceń, a właściwie to napężenie, dla którego przedłużenie jest dwa razy tak wielkie, jakieby było gdyby było proporcjonalne do naprężeń. W naszym przykładzie byłby to punkt N , a zatem granica sprężystości spadałaby prawie z granicą płynności. W praktyce wyznaczenie granicy płynności jest daleko łatwiejsze i nie wymaga tak doskonałych przyrządów. Z tych więc powodów we Francji przyjęto regułę Considère'a i dlatego w dziełach francuskich znajdujemy znacznie wyższe wartości podane dla granicy sprężystości, niż w niemieckich i angielskich. My tu trzymać się będziemy naszego określenia granicy sprężystości, pierwiej podanego zgodnie z Bauschingerem.

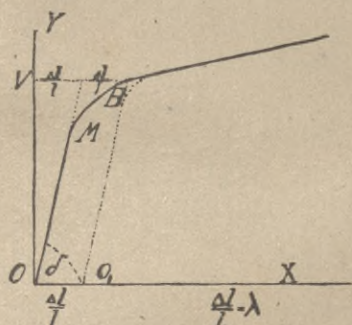
Jeżeli niepewnymi są wartości, podane powyżej dla współczynników sprężystości, to tem trudniej da się dokładnie wyznaczyć granicę sprężystości jeszcze z następnego powodu. Doświadczenia*), robione z żelazem spawanem, okazały, że jeżeli granica sprężystości jest przy naprężeniu \varkappa , a wyciągniemy ciało aż do $\nu_1 > \varkappa$, to otrzymamy przedłużenie Δl , które się będzie składać z Δl_1 przedłużenia sprężystego i Δl_2 przedłużenia trwałego; to znaczy, że po ustaniu działania siły Δl_1 zniknie, a Δl_2 zostanie (rys. 32.). Drobiny nie zajmą więc pierwotnego położenia, a zatem mamy właściwie do czynienia z nowym ciałem. Jeżeli teraz

*) P. rozprawkę p. Wehage: „Spannung in verbogenen Körpern w Civilingenieur 1880“.

będziemy wyciągać ciało aż do naprężenia ν_1 , to otrzymamy tylko przedłużenie sprężyste tak, że ν_1 będzie teraz granicą sprężystości. Widzimy więc, że granica sprężystości żelaza spawanego powiększa się jednorazowem jej przekroczeniem. — Dla żelaza lanego niema właściwie żadnej granicy sprężystości, pierwsze naprężenie pozostawiało bowiem przy doświadczeniach przedłużenie trwałe, poczem aż do tego naprężenia zachowywało się żelazo lane, jak sprężyste; granica sprężystości dała się jednak jednorazowem większem naprężeniem przesunąć wyżej.

Bauschinger badał też wpływ, jaki na granicę sprężystości wywierają zmiany w naprężeniu badanego ciała i doszedł do następujących wyników:

a) Przez liczne zmiany naprężeń między naprężeniem równem zeru a największem naprężeniem, spadającym z granicą sprężystości albo nieco nad nią wyższem, podnosi się pierwotną granicę sprężystości aż do pewnej granicy;



rys. 32.

b) Zmiany naprężeń w kierunku przeciwnym raz na ściskanie, drugi raz na wyciąganie, które nie wiele przekraczają granicę sprężystości, zniżają granicę sprężystości aż do zera;

c) Powoli wzrastające naprężenia dodatnie i ujemne zniżają granicę sprężystości dopiero wtedy, gdy przekraczają pierwotną granicę sprężystości;

d) Granica ta może być znowu podniesioną naprężeniami zmiennymi, powoli wzrastającymi, jednak tylko do pewnej granicy, która może leżeć znacznie poniżej pierwotnej granicy sprężystości. Granicę tę nazywa Bauschinger naturalną (*n. natürliche*).

Przykład. Pręt z żelaza spawanego 5 m długi o przekroju prostokątnym, którego podstawa $b=2$ cm, wysokość $h=20$ cm, jest ciągniony siłą $P=25$ t; jakie jest przedłużenie pręta Δl ?

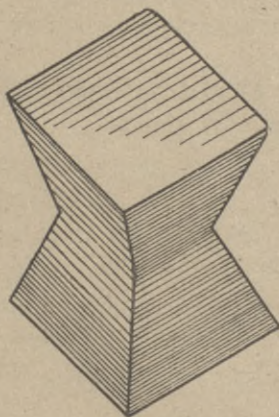
$$\text{Wedle rów. 33) } \Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} = \frac{25000 \cdot 500}{2000000 \cdot 2 \cdot 20} = 0.156 \text{ cm.}$$

$$\text{Naprężenie } \nu = \frac{25000}{2 \cdot 20} = 625 \text{ kg/cm}^2.$$

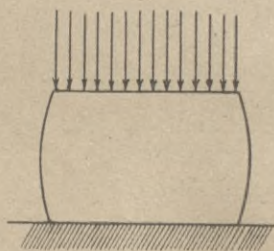
Z rów. 34) $\lambda = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\nu}{E}$ otrzymamy $E = \frac{\nu}{\lambda}$. Z rys. 32) widzimy, że $st\theta = \frac{\nu}{\lambda} = E$. Widzimy więc, że współczynnik sprężystości przedstawia w wykresie odkształceń styczne kąta nachylenia z początku prostej OM a potem stycznej geometrycznej do linii odkształceń. Po przekroczeniu granicy sprężystości współczynnik sprężystości maleje.

§ 18. Współczynniki wytrzymałości na wyciąganie i ściskanie.

Gdy naprężenie przekroczy granicę sprężystości, przedłużenia nie są już wtedy proporcjonalne do naprężeń, lecz wzrastają daleko prędzej. Jeżeli naprężenia odetniemy na osi odcinków (rys. 30.), a odnośne przedłużenia lub skrócenia jako rzędne, to



rys. 33.



rys. 34.

punkty, wyznaczone temi rzędnymi wyznaczają linią $OMNEF$, która na długości OM t. j. w granicach sprężystości jest prostą. Między M i N linia się zakrzywia, a po za punktem N linia staje się płaską, aż nareszcie naprężenia dochodzą do pewnej największości EE' , poczem przy dalszem nagłym przedłużeniu się, naprężenie się zmniejsza do FF_1 , a ciało się przerywa. Naprężenie to największe EE' nazywamy współczynnikiem wytrzymałości

(n. *Festigkeitsmodul*, *Bruchmodul*, fr. *effort de rupture*, cz. *pevnost*, an. *ultimate straining*, r. коэффициент прочности). Spółczynnik ten możemy wyznaczyć, poddając ciało badane naprężeniu tak wielkiemu, aż ciało się przerwie. Podobną zupełnie linię odkształceń otrzymamy dla ciśnienia. Zgniecenie następuje tu przez przesunięcie cząstek ciała badanego na bok, a to w dwojaki sposób. Przy ciałach twardych odłupują się cząstki materiału w ten sposób, że zostają dwa ostrosłupy wierzchołkiem do siebie zwrócone (rys. 33.), albo też przy ciałach miększych n. p. ołowiu, następuje wybrzuszenie (rys. 34.). Gdy stosunek wysokości do najmniejszego wymiaru przekroju dosięga pewnej granicy (około 4 do 5 dla metali, 8 dla drzewa), ciało się wygina na bok i łamie. Występuje wtedy wytrzymałość na wyboczenie, o której będziemy mówić później. I tu otrzymujemy jednakże dla tych samych materiałów bardzo różne wartości z powodu rozmaitej ich jakości tak, że podane poniżej wartości musimy uważać tylko jako przeciętne, otrzymane z wielu doświadczeń.

Tyczy się to w największym stopniu kamieni, bo jeżeli różnice wartości współczynnika wytrzymałości dla kruszców wahają się o kilka lub kilkanaście procent, to dla kamieni dochodzą do 100 i więcej procent. I tak n. p. współczynnik wytrzymałości dla piaskowca szarowakowego wynosi 1270 kg/cm^2 węglowego 500 do 1200, pstrego 250 do 1300, kajprowego 150 do 1000, jurajskiego 300 do 800, kredowego 100 do 700, zielonego 200 do 400, karpackiego 120 do 650, molasowego 500 do 1500 kg/cm^2 . Średnia wartość 300 kg/cm^2 , podana dla piaskowca w tabliczce, różni się bardzo od wartości największych i najmniejszych.

I tu okazały doświadczenia, że gdy ciało badane przerwało się przy pierwszej próbie przy naprężeniu μ , to, gdy pozostałe części ciała poddano powtórnej próbie, ciało przerwało się dopiero przy większym naprężeniu μ' . Nie wynika jednak z tego, że kilkakrotnem wyciąganiem ciała aż do przerywania można wytrzymałość powiększyć. Doświadczenia te dowodzą raczej tylko niejednostajności ciał. Przy pierwszej próbie przerywa się ciało w miejscu najsłabszym już przy naprężeniu μ , przy drugiej niema już tego słabego miejsca, więc wytrzymałe większe jeszcze naprężenie aż do μ' .

Tablica II.

Materiał	Ciężar gatunkowy	Spółczynnik wytrzymałości μ	
		wyciągnięcie	ściskanie
	$\frac{kg}{cm^3}$	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$
Bazalt	3 000	80	1 200
Beton	2 200	20	150
Cegła zwykła	1 500	—	60
„ zendrówka	1 800	15	300
„ niewypalana	—	—	25
Cement	1 400	30	200
Cyna lana	7 200	350	1 000
„ drut	7 300	400	—
Cynk lany	7 290	2 300	—
„ blacha	7 200	2 000	—
Dolomit	2 900	20	800
Drzewo bukowe równoległe do włókien	800	1 000	400
„ „ prostopadle „ „	800	70	120
„ dębowe równoległe „ „	1 000	960	400
„ „ prostopadle „ „	1 000	50	120
„ szpilkowe równoległe „ „	730	750	300
„ „ prostopadle „ „	730	48	40
Granit	2 750	40	1 200
Gnejs	2 550	30	500
Glin	2 600	2 030	—
Konopne liny	900	650	—
Kwarcyt	2 650	—	700
Łupek	2 800	—	600
Marmur	2 700	—	350
Miedź lana	8 790	1 340	4 500
„ kuta	8 900	2 400	5 000
„ blacha	8 900	2 200	—
„ drut	8 800	5 000	—
Mosiądz lany	8 400	1 500	750
„ drut	8 540	3 600	—
Mur ceglany na cemencie	1 800	—	100
„ „ „ wapnie	1 800	—	50
„ z cegieł niewypalanych	—	—	9
Nikiel	8 800	—	—
Ołów	11 400	125	500
Piaskowiec	2 400	10	300
Platyna kuta	21 300	3 400	—
Porfir	2 600	—	1 200
Rzemień	—	300	—
Spiż	8 300	2 000	—
Srebro	10 500	2 900	—
Syenit	2 750	—	1 100
Stal bardzo miękka	7 860	4 400	5 000
„ miękka	7 860	5 400	5 800
„ twarda	7 860	6 400	7 000
„ bardzo twarda	7 866	7 400	8 000
„ drut	7 860	11 000	—

Materiał	Ciężar gatunkowy	Spółczynnik wy- trzymałości μ	
		wyciąganie	ściskanie
	$\frac{kg}{cm^3}$	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$
Stal niklowa miękka	7 860	5 000	5 000
„ „ średnia	7 860	7 000	7 000
Szkło lane	2 890	210	1 300
„ dęte	2 640	375	—
Wapień	2 700	27	600
Zaprawa wapienna	1 900	2	30
„ cementowa	1 700	20	150
Żelazo lane	7 500	1 400	7 000
„ spawane	7 800	3 600	3 200
„ zlewne	7 850	4 000	4 000
„ blacha	7 800	3 400	—
„ drut	7 800	6 500	—
Złoto	19 350	2 700	—

Tablica III.

Tymczasowe przepisy budowy i utrzymania mostów drogowych, rozp. polskiego min. robót publicznych z r. 1920.

a) Ciężar jednostkowy

Materiał	Ciężar kg/m^3	Materiał	Ciężar kg/m^2
Żelazo spawane	7 800	Mur ciosowy	2 400
„ zlewne	7 850	do	
Stal	7 900	„ z kam. łaman. (wap.) .	2 400
Żelazo lane (żeliwo)	7 300	„ „ „ „ (piask.)	2 200
Ołów	11 400	„ z cegieł zwykłych na zaprawie wapiennej . . .	1 600
Drzewo miękkie mokre (odkr.)	900	Mur z cegieł zwykłych na kamieniu	1 700
Drzewo miękkie suche (zakr.)	800	Mur z klinkierów	1 900
Drzewo twarde mokre (odkr.)	1 000	Beton stwardniały z tłucznia lub żwiru	2 200
Drzewo twarde suche (zakr.)	900	Beton mokry, będący je- szcze na deskowaniu . . .	2 400
Bruk drewniany	1 100	Beton wzmocniony żelazem, już stwardniały	2 400
Piasek	1 600	Beton wzmocniony żelazem, ale mokry, będący jeszcze na deskowaniu	2 600
Żwir lub tłuczeń na jezdnii mostowej	1 900		
Ziemia, glina	2 800		
	2 400		
Bruk kamienny	do		
	2 800		
Asfalt lany	1 200		

b) Wytrzymałość

Materiał	kg/cm ²	
	wyciągan.	ściskanie
Stal na łożyska	6 000	6 000
Żelazo lane	1 200	5 000
Beton przy 500 kg cem. na 1 m ³	—	160
„ „ 300 „ „ „ „	—	120
„ „ 100 „ „ „ „	—	60
Cement po 7 dniach	15	150
„ „ 28 „	25	250
Żelazo zlewne	3 700	—

Tablica IV.

Rozporządzenie minister. austr. z r. 1911, dotyczące zakładów żelbetowych, przepisuje następujące ciężary właściwe.

Materiał	Ciężar kg/m ³	Materiał	Ciężar kg/m ³
Żelazo spawane	7 800	Zaprawa wapienna	1 520
„ zlewne	7 850	„ cementowa	1 700
„ lane (żeliwo)	7 300	Beton ubijany	2 200
Stal	7 900	Żelbet	2 400
Ołów	11 400	Mur ceglany z tynkiem z zwykłych cegieł:	
Miedź walcowana	9 000	a) na wapie	1 600
Drzewo dębowe suche	800	b) „ cemente	1 700
„ bukowe „	750	z cegieł maszynowych:	
„ modrzew „	650	a) na wapie	1 700
„ sosnowe, jodło- we, świerkowe suche	600	b) „ cemente	1 800
Bruk kostkowy	1 100	z zendrówek na zaprawie cementowej	1 950
Szkoło	2 600	z cegieł pustych na wa- pnie	1 400
Żwir	1 900	z cegieł porowatych na wapnie	1 200
Piasek	1 600	Mur z kamieni łamanych, z piaskowca lub wa- pienia	2 000—2 500
Gruz	1 400	z granitu, bazaltu itd.	2 700
Żużel z wielkiego pieca	850	Mur ciosowy z piaskowca lub wapienia	2 100—2 600
Popiół węglowy	750	z granitu, bazaltu	2 800
Asfalt lany	1 200		
„ „ żwirowy	2 100		
„ „ ubijany	2 040		
Terazzo	2 200		
Płyty zendrówkowe	2 300		
Bruk kamienny	2 000—2 500		
„ „ granitowy	2 700		
Dyle gipsowe	1 000		
Beton żużlowy	1 000—1 300		
Korek	330		

Tablica V.

Rozp. austr. min. kolei żelaznych dla mostów z 1904 nakazuje przyjmować:

Dla 1 m ³	Ton
Żelaza spawanego	7·80
„ zlewnego	7·85
„ surowego lanego	7·30
Stali	7·90
Ołowiu	11·40
Drzewa (świerkowego, modrzewiowego, jodłowego, sosnowego)	0·90
„ dębowego i bukowego	1·00
Bruku drewnianego	1·10
Piasku	1·60
Żwiru	1·90
Gliny, ziemi	1·80
Bruku kamiennego wedle gatunku kamienia	2·50—3·00
Asfaltu lanego	1·20
Muru z kamienia ciosowego	2·60
„ „ „ łamanego i to z wapienia	2·40
„ „ „ „ z piaskowca	2·20
„ z cegieł	1·60
„ z zendrówek	1·90
„ z betonu	2·00—2·50

Tablica VI.

Rozporządzenie ministerstwa pruskiego z r. 1919.

Materiał	Ciężar kg/m ³	Materiał	Ciężar kg/m ³
Ziemia, piasek, glina mokra	2 100	z tufu, pumeksu i luźnego	
„ „ „ sucha	1 600	wapienia	1 400
Żwir mokry	2 000	z łupku	2 700
„ suchy	1 700	Mur z kamienia łamanego:	
Popiół koksowy	700	z granitu	2 700
Piasek pumeksowy	700	z wapienia, piaskowca	2 500
Mur ciosowy:		Mur:	
z granitu, syenitu, porfiru	2 800	z zendrówek	1 900
z bazaltu	3 000	z cegieł	1 800
z lawy bazalt. zbitej	2 800	z porowatych cegieł	1 100
„ „ porowatej	1 800	z pustych cegieł	1 300
z marmuru	2 800	z porowat. pustych cegieł	1 000
z wapienia zbitego	2 500	z korku	600
„ „ porowatego	2 000	z piaskowca wapiennego	1 800
z piaskowca ciężkiego	2 700	„ „ sztucznego	2 100
z piaskowca lekkiego	2 400	zaprawa cementowa	2 100
z tufu, porfiru i zbitego wapienia	2 000		

Materiał	Ciężar kg/m ³	Materiał	Ciężar kg/m ³
zaprawa cement-wapienna	1 900	ze szkła	2 600
„ wapienna	1 700	Drzewo jodłowe suche	600
„ trasowa	2 000	„ sosnowe „	650
gips (lany)	1 000	„ dębowe	900
beton, żwir, granit itd.	2 200	„ świerkowe	550
żelbet	2 400	„ bukowe	750
beton z cegieł	1 800	Żelazo lane	7 250
„ z żużla	1 000	„ spawane	7 800
„ z żwiru pumeksow.	1 000	„ zlewne	7 850
Pokrycie podłogi:		Stal zlewna	7 860
z cementu	2 200	Ołów	11 400
z gipsu	2 100	Bronz	8 600
z terazzo	2 000	Miedź walcowana	8 900
asfaltu lanego	1 400	Cynk lany	6 900
linoleum	1 200	„ walcowany	7 200
plyt korkowych	300	Cyna walcowana	7 400

Postanowienie rosyj. ministerstwa komunikacji z 1905 r.:
Zatwierdza się normy ciężaru właściwego dla:

żelaza zlewnego 7·85
„ spawanego 7·77.

Rozporządzenie bawarskie:

mur z cegieł na wapie 1 600 kg/m³
„ „ „ „ zaprawie wap. cem. 1 700 „
„ „ „ „ cement. 1 750 „
„ „ zendrówek 1 750 „
„ „ wap. i piaskowca 1 900 „

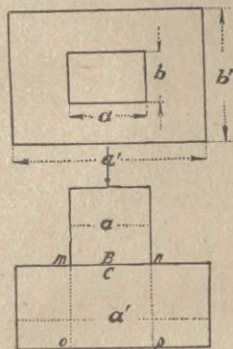
§ 19. Wpływ kształtu ciała, ciepłoty, wilgoci i ciężaru gatunkowego na wytrzymałość.

Mówiliśmy w § 17., że siła, działająca w osi ciała, sprawia oprócz odkształceń podłużnych także poprzeczne. Dla tych ostatnich nie jest jednak obojętnym kształt ciała, bo włókna wyciągane nie mogą każde z osobna zmniejszać swego przekroju, lecz są z innymi połączone i oddziałują na siebie nawzajem. Oddziaływanie to jest jednak różne przy różnych kształtach przekroju, co ma wpływ na wytrzymałość ciała.

I rzeczywiście doświadczenia Kirkaldeggo, Bauschingera i Bacha dowiodły dla ciągnięcia małe zmniejszenie się wytrzymałości przy zwiększającej się szerokości żelaza płaskiego,

a dla ciśnienia zwiększenie się wytrzymałości przy zwiększeniu się przekroju.

Jeżeli w ogóle w jakikolwiek sposób przeszkadzamy odkształceniu poprzecznemu, zwiększamy przez to współczynnik wytrzymałości. Jeżeli więc ciało *B* (rys. 35.) o mniejszym przekroju ciśnie na ciało *C* o większym przekroju, to ciśnienie przenosi się na graniastosłup *m n o p*, lecz otaczający ten graniastosłup materiał przeszkadza odkształceniu poprzecznemu, dlatego też do zgniecenia potrzebna jest siła nie $P' = \mu a b$, lecz wedle doświadczeń, które Durand-Claye wykonał z kamieniami, a przy których było $a=b$ i $a'=b'$



rys. 35.

$$P = \mu a a' \dots \dots \dots 36)$$

Ogólnie możnaby napisać:

$$P = \mu \sqrt{aa' bb'} \dots \dots \dots 37)$$

Bauschinger otrzymał na podstawie swych doświadczeń nieco odmienny wzór, mianowicie

$$P = \mu a b \sqrt[3]{\frac{a' b'}{a b}} \dots \dots \dots 38)$$

Wielki wpływ na wytrzymałość metali ma ciepłota ciała badanego. Żelazo przy bardzo wysokiej ciepłocie 1000° zbliża się do stanu płynnego i współczynnik wytrzymałości spada prawie do zera.

M. Kollman robił w r. 1878 doświadczenia w tym względzie z żelazem spawanem i otrzymał następane wyniki, jeżeli współczynnik wytrzymałości na wyciąganie nazwiemy μ ,

Tablica VII.

ciepl.	0	50	100	150	250	350	450	550	650	750	1000°	C
μ	= 3750,	3750	3730	3650	3500	3200	2280	860	690	490	150	kg/cm ²
w pro- centach}	100	100	100	97	93	85	61	23	19	13	4%	

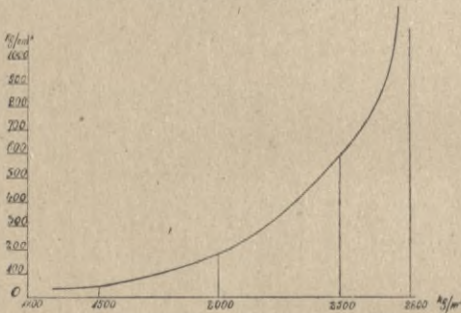
Widzimy więc, że do 200° C wytrzymałość żelaza bardzo mało się zmniejsza, szybciej już od 400 do 500°, potem jednak spada nagle, a przy 1000° wynosi tylko 4%.

*) Por. także doświadczenia Genela (Bet. u. Eisen 1910, str. 174).

Bardzo niska ciepłota ma też wpływ na wytrzymałość, jak to okazały doświadczenia Dewara i Steinera*). Wytrzymałość metali była przy bardzo niskiej ciepłocie większą, i tak wynosiła wytrzymałość na wyciąganie

	przy $+ 150^{\circ} \text{C}$	przy $- 182^{\circ} \text{C}$
stali miękkiej	3900	6500 kg/cm^2
żelaza	3000	6200 „
miedzi	1900	2800 „

Na wytrzymałość drzew szpilkowych ma także wielki wpływ wilgoć. Bauschinger mierzył wilgoć, susząc dane kawałki drzewa, dopóki ciężar ich się zmniejszył i uważał ubytek wagi, wyrażony w odsetkach, jako miarę wilgoci.



rys. 36.

Otrzymał on n. p. dla modrzewia

dla wilgoci	$w=29.0$	25.3	14.3	8.1	7.7	$\%$
wytrzym. na ściskanie	$\mu=294$	374	532	818	884	kg/cm^2
dla świerku	$w=28.7$	23.5	14.9	13.4	7.6	$\%$
	$\mu=295$	324	443	568	718	kg/cm^2

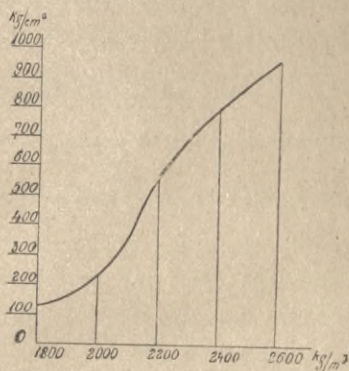
Wilgoć $w=15\%$ odpowiada drzewu suszonemu w otwartej szopie. Dla tej wilgoci znalazł Bauschinger, że wytrzymałość zmienia się wraz z ciężarem gatunkowym i to w przybliżeniu wedle prawa linii prostej tak, że możemy napisać

$$\mu = 1000 \gamma - 100 \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 39)$$

Z powyższego wynika, że drzewo mokre ma znacznie mniejszą wytrzymałość od suchego i że przez wysuszenie go w otwartej szopie zwiększyć możemy wytrzymałość jego w dwójnasób.

*) Por. Schweiz. Bauzeitung 1895, str. 137.

Co do wytrzymałości wapieni i piaskowców okazały doświadczenia M. Michelota wielką ich zależność od ciężaru gatunkowego. I tak dla wapieni przedstawiają rzędne na rys. 36. współczynniki wytrzymałości a odcinki ciężary gatunkowe. Linia krzywa, przedstawiająca zawisłość współczynnika wytrzymałości od ciężaru



rys. 37.

gatunkowego, jest wedle doświadczeń Michelota hyperbolą. Podobnie przedstawia rys. 37. tę zawisłość dla piaskowców.

Wytrzymałość muru na wyciąganie jest mniejszą, niż jego części składowych, a to z powodu, że przyczepność jest mniejszą od spójności, czasem kamienie są źle oczyszczone, dalej kamienie wapniste wciągają wodę z zaprawy, przez co wytrzymałość jej się zmniejsza, wreszcie mróz działa w ten sam sposób. Wy-

trzymałość muru na ściskanie jest mniejszą niż kamienia, a większą niż zaprawy i ma się odwrotnie od grubości szwów. Jeśli niema wcale zaprawy, a kamienie się dokładnie stykają, wytrzymałość jest większą *).

§ 20. Zjawiska przy przerwaniu.

Jeżeli naprężenie ciała wyciąganego przekroczy granicę płynności N (rys. 30.), to przedłużenia wzrastają bardzo prędko, a przekrój pręta się zmniejsza odpowiednio, aż nareszcie przy pewnym naprężeniu EE_1 , które zależy od natury ciała, występuje nowe zjawisko (rys. 38.). W pewnym miejscu MT , zmiennem dla rozmaitych prętów, następuje znaczne zmniejszenie przekroju, które nazywamy *zwężeniem* (n. *Kontraktion*, *Einschnürung* fr. *striction* cz. *zuženi*), a które się wzmaga, aż nareszcie następuje w części najwęższej mn przerwanie ciała. Zwężeniu temu towarzyszy miejscowe przedłużenie, które osiąga w całości wielkości OF' (rys. 30.).

*) Porów. autora „Mosty kamienne“, wyd. II., str. 11.

Zwężenie to występuje najbardziej w niektórych metalach ciągliwych (n. *zähe, dehnbar*, fr. *ductile*, a. *ductile*), jak ołów, cyna, miedź, mniej wyraźnie w żelazie i stali miękkiej, prawie wcale nie w drzewie, żelazie lanem i stali twardej.

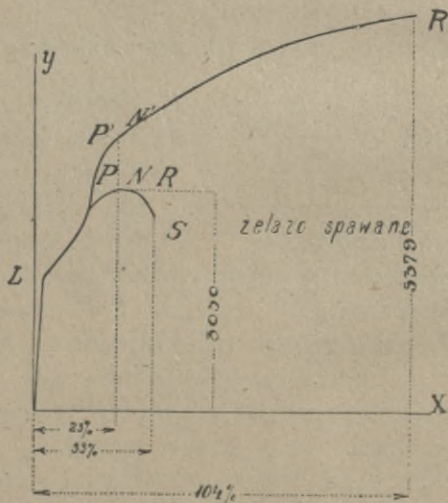


rys. 38.

Jeżeli siła, działająca w kierunku osi pręta, była P , a przekrój pierwotny F , to współczynnik wytrzymałości $\mu = \frac{P}{F} = EE_1$. Gdy następuje zwężenie, siła P zmniejsza się i otrzymujemy dla przerwania $\mu' = \frac{P'}{F} = FF_1$, a że $P' < P$, więc

i $\mu' < \mu$, co wydawałoby się sprzecznem i wymaga wyjaśnienia, dlaczego ciało nie przerywa się dla μ , lecz dla mniejszego μ' . Powód tego zjawiska leży w zwężeniu, a więc w mniejszym przekroju, który w chwili przerwania wynosi F' ; właściwe więc naprężenie przy przerwaniu czyli współczynnik wytrzymałości w zwężeniu $\mu'' = \frac{P'}{F'} > \mu$. To samo odnosi się zresztą i do

innych naprężeń i aby otrzymać prawdziwą krzywą odkształceń, należałoby uwzględnić rzeczywistą powierzchnię przekroju zmniejszoną. Także i co do przedłużenia musimy różnić przedłużenie (n. *Verlängerung*, fr. *allongement*, a. *elongation*, r. удлиннение cz. *roztażeni*) pręta całkowite między znaczkami, umieszczonymi w pewnym oznaczonym odstępnie, a przedłużeniem w zwężeniu. Przy próbach materiałów mierzy się zwykle przedłużenie całkowite i to uważa się jako znamię ciągliwości, chociaż



rys. 39.

właściwie należałoby jako takie znamię uważać przedłużenie w zwężeniu.

Na ryc. 39. przedstawiliśmy krzywą odkształceń (n. *Formänderungslinie* a. *stress strain line*) dla żelaza spawanego wedle Considère'a. Krzywa *OLPNS* jest zwykłą krzywą odkształceń, wyznaczoną ze względu na pierwotną powierzchnię przekroju, *OLP'N'R'* zaś prawdziwą krzywą odkształceń, wyznaczoną z uwzględnieniem zmniejszenia się przekroju, zwężenia i przedłużenia w zwężeniu.

Poniżej podajemy tabliczkę, odnoszącą się do tego doświadczenia, przy czem nadmieniamy, że odstęp znaczków wynosił 200 mm.

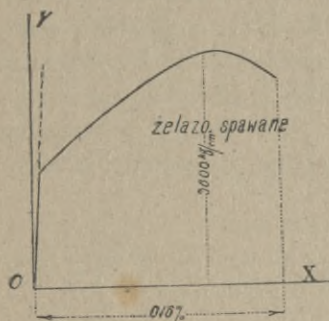
Tablica VIII.

Siła wyciągająca S	Przedłużenie między znaczkami w stosunku do 1m $a:l$	Średnica prętu a	Najmniejsza powierzchnia przekroju F'	Naprężenie w najmniejszym przekroju ν	Przedłużenie w odsetkach w zwężeniu $a_1:l_1$	U w a g a
kg	%	mm	mm ²	$\frac{kg}{cm^2}$	%	
400	0 010	16 0	200·97	199	0·010	
800	0·020	—	200·95	398	0·020	
1 200	0·030	—	200·93	597	0·030	
1 600	0·040	—	200·91	796	0·040	
2 000	0·050	—	200·89	995	0·050	
2 400	0·060	—	200·87	1 194	0·060	
2 800	0·075	—	200·84	1 394	0·075	
3 200	0·090	—	200·81	1 593	0·090	
3 600	1·110	—	200·77	1 793	0·110	} granica sprężystości
4 000	3·800	—	193·64	2 064	3·800	
4 400	4·800	—	191·79	2 294	4 800	
4 800	6 250	—	189·17	2 537	6 250	
5 200	8 250	—	185·68	2 800	8 250	
5 600	11·120	—	180 88	3 095	11·120	
6 000	16·600	—	172·38	3 480	16·600	} początek zwężenia
6 100	23·250	14·2	158·36	3 851	27·000	
5 900	27·600	13·3	138·92	4 247	44 000	
5 700	30·250	12·5	122·71	4 641	63·000	
5 500	32·000	11·8	109·45	5 025	84·000	
5 300	33·000	11·2	98·52	5 379	104·000	przerwanie

Granica sprężystości leży tu między 1800 a 2000 kg/cm^2 , współczynnik wytrzymałości $\mu = \frac{6100}{2\cdot01} = 3034 \text{ } kg/cm^2$.

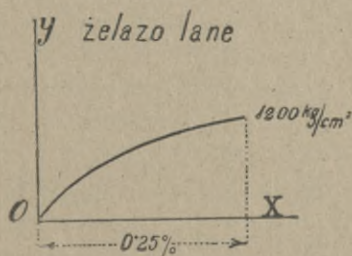
Przedłużenie między znaczkami $\lambda=33\%$.

W rzeczywistości wskutek zwężenia, a więc zmniejszenia przekroju, przerywa się pręt dopiero przy naprężeniu 5379 kg/cm^2 , widzimy więc, że materiał zdoła miejscowo pracować znacznie więcej, niż to współczynnik wytrzymałości wskazuje, ale w praktyce nie możemy przewidzieć dokładnie, o ile przy przerwaniu przekrój się zmniejszy i wyznaczamy współczynnik wytrzymałości μ ze względu na przekrój pierwotny i przedłużenie całkowite λ . Dlatego też następnie będziemy brali pod uwagę tylko zwykłą krzywą odkształceń.

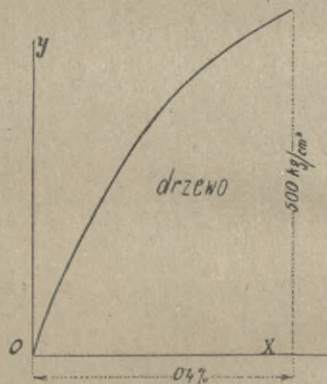


rys. 40.

ceń dla żelaza spawanego (rys. 40.), żelaza lanego (rys. 41.) i drzewa (rys. 42.).



rys. 41.



rys. 42.

§ 21. Własności ciał, zależne od krzywej odkształceń, zwężenia i przedłużenia.

Zwykle na zeskłady działają nietylko siły stałe, lecz zarazem narażone są one na uderzenia i wstrząśnienia, których siła żywa musi być zniweczona pracą wewnętrzną materiału, proporcjonalną do iloczynu naprężeń przez przedłużenia.

Jeżeli na osi OX (rys. 43.) odetniemy przedłużenia na cm długości, a na osi OY naprężenia v , to praca przy przedłużeniu prętu o przekroju F jest

$Pdl = Fvdl$, więc dla przedłużenia od 0 do Δl

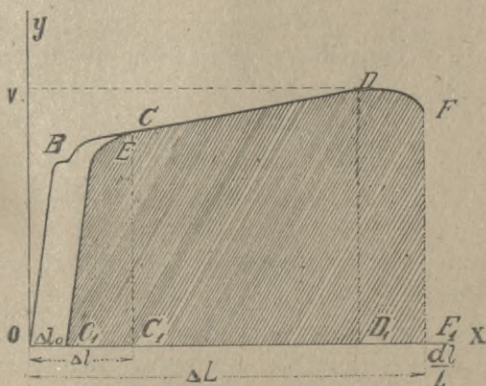
$$L = F \int_0^{\Delta l} v dl,$$

a praca jednostkowa na 1 cm długości prętu i 1 cm^2 powierzchni

$$L_1 = \int_0^{\Delta l} v \frac{dl}{2} \dots \dots \dots 40)$$

Na rysunku 43. przedstawia więc L_1 przy przedłużeniu Δl powierzchnię $OBCC_1$, pracę zaś, którą pręt wykonywa przy przedłużeniu się o Δl aż do przerwania, przedstawia więc dla $F=1$ pow. $OBDF_1$.

Im większą ta powierzchnia, tem większą jest wytrzymałość prętu na wstrząśnienia i uderzenia, którą nazywamy odpornością materiału (n. *Arbeitskapazität*, fr. *résistance vive de rupture*).

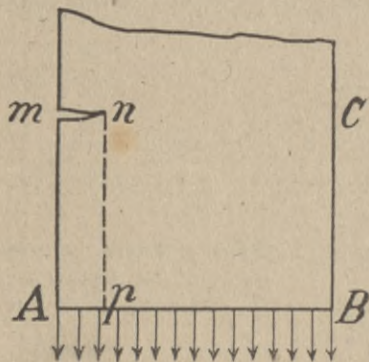


rys. 43.

Jeżeli przekroczy my granicę sprężystości, to po ustaniu siły otrzymamy odkształcenie trwałe OO_1 , przychem $O_1E \parallel OB$, powierzchnia kreskowana jest jednak teraz mniejszą od całej powierzchni $OBDF_1$, a zatem przez przekroczenie granicy sprężystości zmniejszamy odporność.

Wstrząśnienia działają nagle na zeskład w ten sposób, że w pewnych częściach zeskładu wywołują znaczniejsze miejscowe odkształcenia. Przytem chodzi o to, aby odkształcenia takie nie pociągały za sobą w tem miejscu przerwania. Zależy to od przedłużenia w zwężeniu. Im ciało jakieś przy przerwaniu wykazuje większe zwężenie i przedłużenie, a zatem im bardziej jest ciągłym, tem lepiej wytrzyma je wstrząśnienia, tem mniej jest kruchem (n. *spröde*, fr. *fragile*).

Podobnie rzecz się ma, jeżeli pręt pracujący na wyciąganie jest nadpęknięty (rys. 44.). Wszystkie włókna od pn do BC wydłużają się wskutek siły zewnętrznej R , w pasku zaś $Apmm$ wydłużenie takie nie jest możliwym z powodu pęknięcia mn . Siły, działające na Ap , muszą się więc przenieść przez nieuszkodzone włókno pn , a stąd powstaje w n miejscowe odkształcenie większe, niż innych włókien. Jeżeli materiał nie jest ciągliwym i niezdolnym do większych odkształceń, to w n naprężenie dosięgnie współczynnika wytrzymałości i pęknięcie się przedłuży, poczem to samo zjawisko się powtarza aż do zupełnego przerwania prętu. Jeżeli zaś materiał jest ciągliwym, to możliwym jest większe odkształcenie miejscowe w n bez przerwania i pręt się nie przerwie.



rys. 44.

Z tego widać, że w ciałach kruchych każde najmniejsze nawet pęknięcie może doprowadzić do przerwania ciała.

Z poprzedniego widzimy, że tak przebieg linii odkształcenia, jak i zwężenie i przedłużenie wpływają na jakość materiału. Z tego powodu próby materiału nie ograniczamy na wyznaczeniu współczynnika wytrzymałości, lecz staramy się wyznaczyć także zwężenie i przedłużenie. Zwężenie i przedłużenie wyrażamy w odsetkach pierwotnego przekroju i pierwotnej długości między znakami, którą przyjmujemy 20 cm . Warunki dostawcze żelaza i stali zawierają zatem przepisy nie tylko co do najmniejszej wytrzymałości, ale także co do najmniejszego zwężenia i przedłużenia.

Tymczasowe przepisy budowy i utrzymania mostów drogowych polskiego min. rob. publ. z r. 1920.

§ 38. 4. Stal na łożyska powinna mieć wytrzymałość na ciągnięcie najmniej 6000 kg/cm^2 przy wydłużeniu jednostkowym najmniej 10% , stal walcowana 12% , żelazo lane najmniej 1200 kg/cm^2 na ciągnięcie a 5000 kg/cm^2 na ciśnienie“.

C. Żelazo budowlane. A. § 7. 4. Wydłużenie, jednostkowe należy mierzyć na długości, równej drugiemu pierwiastkowi z 80-krotnej powierzchni przekroju w środku długości próbki. 6. Wytrzymałość na rozzerwanie winna być: dla żelaza zlewonego równa lub większa niż 3700 kg , a mniejsza lub najwyżej równa

4500 kg/cm^2 , przyczem wydłużenie musi być tak wielkie, ażeby iloczyn z wytrzymałości (w t/cm^2) i wydłużenia w procentach dla próbek, wyciętych w kierunku walcowania, wynosił co najmniej 100, dla próbek, wyciętych prostopadłe do kierunku walcowania, najmniej 90.

B. Żelazo wzmacniające w zespołach betonowych § 15. 4. Wytrzymałość na rozerwanie powinna wynosić a) por. § 7. ust. 6.; b) dla stali zlewnej najmniej 4500 kg/cm^2 przy wydłużeniu jednostkowym najmniej 25%; c) granica ciastowatości powinna wynosić co najmniej dla żelaza zlewne 2250 kg/cm^2 , dla stali zlewnej 3000 kg/cm^2 .

Rozporządzenie austr. min. kolei żel. z r. 1904., dotyczące budowy mostów. § 10.

A. Żelazo spawane.

2. Żelazo spawane przy wytrzymałości na wyciąganie, wynoszącej 3·6 t/cm^2 i wyżej w kierunku walcowania musi posiadać ciągliwość nie mniejszą, niż 12%. Przy mniejszej wytrzymałości na wyciąganie musi być stosunkowo większa ciągliwość, która przy dozwolonej jeszcze najniższej wytrzymałości na wyciąganie, wynoszącej 3·3 t/cm^2 , musi wynosić co najmniej 20%.

3. Gatunki walcowane, które jako przyszłe części dźwigaru mają opierać się siłom, działającym w kilku kierunkach, muszą w kierunku poprzecznym do kierunku walcowania mieć wytrzymałość na wyciąganie, wynoszącą co najmniej 3·0 t/cm^2 i ciągliwość nie mniejszą niż 5%.

4. Żelazo, na nity i śruby, użyć się mające, musi przy najmniejszej dozwolonej wytrzymałości na wyciąganie, wynoszącej 3·6 t/cm^2 , posiadać ciągliwość co najmniej 18%:

B. Żelazo zlewne.

5. Wytrzymałość na wyciąganie żelaza zlewne, na dźwigar mostowy użyć się mającego, nie może wynosić mniej, niż 3·6 t/cm^2 , a przy żelazie zlewne, wyrabianem w piecu płomiennym, nie więcej, niż 4·5, zaś przy żelazie zlewne innego sposobu wyrobu nie więcej, niż 4·2 t/cm^2 .

6. Ciągliwość żelaza zlewne musi być tak wielką, ażeby wytrzymałość (w t/cm^2) pomnożona przez ciągliwość (w procentach) dała jako iloczyn przy próbach rozerwania w kierunku walcowania najmniej liczbę 100, a przy takich próbach prostopadłe do kierunku walcowania najmniej liczbę 90.

7. Wytrzymałość na wyciąganie żelaza, użyć się mającego na nity i śruby, wynosić musi 3·5 do 4·0 ton, ciągliwość zaś musi ono mieć taką, ażeby wytrzymałość (w t/cm^2), pomnożona przez ciągliwość (w procentach), dała jako iloczyn najmniej liczbę 110.

C. Żelazo lane i stal lana.

8. Wytrzymałość na wyciąganie lanego żelaza wynosić musi najmniej 1·2 t/cm^2 , a na ściskanie najmniej 5·0 t/cm^2 .

9. Wytrzymałość na wyciąganie lanej stali dla części łożyskowych mostu wynosić powinna najmniej 5·7 t/cm^2 , a jej ciągliwość nie mniej, niż 10%.

§ 11. 9. Ciągliwość mierzyć należy na przecie próbnym o długości wymierzalnej $\sqrt{80 F}$. F oznacza powierzchnię przekroju poprzecznego prętu, która nie może wynosić więcej, niż 6 cm^2 .

Ponieważ, jak widzieliśmy, nie tylko współczynnik wytrzymałości $\mu = DD_1$ (rys. 43.) i przedłużenie ΔL mają wpływ na zachowanie się materiału względem wstrząśnień, ale i wielkość pow. $OBDF_1$, więc też Tetmajer uważa tę powierzchnię $F' = OBDF_1$ jako znamię dobroci materiału. Możemy przytem wogóle napisać

$$F' = \eta \mu \Delta L \quad (41)$$

Współczynnik η , który nazywamy pełnością wykresu (n. *Völligkeitsgrad*) jest dla pewnych materiałów prawie stały, a wtedy jest praca możliwa materiału wprost proporcjonalna do iloczynu ze współczynnika wytrzymałości przez przedłużenie.

Doświadczenia Steinera wykazały, że przy niskiej ciepłocie maleje ciągliwość. I tak n. p. wynosiło przedłużenie przy przerwaniu:

dla	żelaza	spawanego	stali Martina	stali Tomasa
przy norm. ciepłocie	18.5		30.5	30.5%
w ciepłocie — 110 do — 50°	15.0		17	17%

A zatem wytrzymałość wprawdzie wzrasta przy bardzo niskiej ciepłocie, ale ciało staje się kruchem. Zwłaszcza uszkodzone żelazo zlewne i niektóre gatunki spawanego stają się przy bardzo niskiej ciepłocie kruche, jak szkło; nieuszkodzone zachowuje się znacznie lepiej.

§ 22. Pewność i naprężenie dopuszczalne.

Ponieważ, jak wiemy, współczynnik wytrzymałości nie da się dokładnie wyznaczyć, lecz jest tylko przeciętną wartością współczynników, w praktyce się trafiających, ponieważ wiele pobocznych lub przypadkowych wpływów, działających niekorzystnie na ciało badane, nie da się obliczyć, ponieważ wreszcie wszystkie materiały z wyjątkiem chyba kruszców szlachetnych, podlegają niszczeniu zwłaszcza pod wpływem wilgoci i powietrza, a więc materiał staje się gorszym lub też przekrój mniejszym wskutek rdzewienia, ponieważ możliwe są błędy w materiale, których nie można uniknąć ani spostrzec, więc z tych powodów nie dozwalamy nigdy w zeskładach budowlanych wzrosnąć naprężeniu aż blisko współczynnika wytrzymałości, lecz obliczamy przekroje w ten sposób, aby naprężenie było $\frac{1}{n}$ wytrzymałości i nazywamy to naprężenie τ naprężeniem dopuszczalnym (n. *zulässige Spannung*,

fr. *effort de sécurité*, an. *safe stress, strain*, r. допускаемое напряжение), a liczbę n współczynnikiem pewności (n. *Sicherheitsgrad*, fr. *coefficient de sécurité*, an. *factor of safety*, r. коэффициент прочности, запаса), a zatem $\tau = \frac{\mu}{n}$. . . 42)

Spółczynnik pewności n obieramy tem większy, im większym wstrząśnieniom ulega zeskład, im dłużej ma trwać i im mniej dokładnie możemy wyznaczyć siły działające i wytrzymałość materiału. Obieramy przytem taki współczynnik pewności, aby $\tau = \frac{\mu}{n}$ nie przekraczało granicy sprężystości, gdyż po za tą granicą następuje już zmiana układu drobin, a ze względu na nadzwyczaj małe pęknięcia ciało jest mniej wytrzymałem na kwasy, na parę wodną. Uwzględniając te wszystkie okoliczności obieramy zwykle w praktyce dla współczynnika pewności n następane wartości:

Tablica IX.

Materiał	Spółczynnik pewności n				
	budowle tymczasowe	zwykle zeskłady w budownictwie	mosty i dachy	maszyny (wielkie wstrząśnienia)	
Drzewo	} rozciąganie	6	7	8	10
		} sciskanie	4	5	6
Kamień, cegła, mur	—		20	25	30
Beton	—	5	6	7	
Liny	4	5	6	7	
Szkło	—	4	—	—	
Żelazo spawane lub zlewne, blacha i stal	3 do 4	4	5 do 6	7 do 8	
Żelazo-lane	—	7	8	10	

Francuzi w inny sposób wyznaczają naprężenie dopuszczalne. Sądzą oni słusznie, że w najniekorzystniejszych warunkach nie powinno naprężenie przekraczać granicy sprężystości, którą przyjmują równą granicy ciastowatości*), bo po jej przekroczeniu wy-

*) Doświadczenia Gonjula okazały, że granica ciastowatości na ciśnienie waha się mocno przy tej samej granicy ciastowatości na ciągnięcie. Por. Gen. Civ. LXXI (str. 101).

Tablica X.

Napreżenie dopuszczalne w kg/cm^2

Materiał	budowle tymczasowe		zwykłe zeszkłady budowlane		mosty i dachy		maszyny (wielkie wstrząśnienia)	
	wyciąganie	ściskanie	wyciąganie	ściskanie	wyciąganie	ściskanie	wyciąganie	ściskanie
Bazalt	—	200	4	60	—	—	—	—
Beton	—	—	3	30	2	20	—	—
Cegła (wypalona)	—	—	—	8	—	—	—	—
Cement	—	—	4	30	—	—	—	—
Cynk, blacha	—	—	200	—	—	—	—	—
Dolomit	—	—	2	40	2	35	—	—
Drzewo bukowe równoleg. do włókien	140	100	130	80	120	70	70	45
„ „ prostop. „ „	30	50	28	45	25	40	20	30
„ „ debowe równoleg. „ „	140	90	130	80	120	70	70	45
„ „ prostop. „ „	26	50	23	45	20	40	16	30
„ „ szpilek. równoleg. „ „	125	80	115	70	110	60	60	40
„ „ prostop. „ „	25	20	22	16	18	13	15	11
Granit	—	—	5	60	4	40	—	—
Gneis	—	—	5	35	4	30	—	—
Glin	—	—	400	—	—	—	—	—
Konopne liny	100	—	—	—	—	—	—	—
Kwarcyt	—	—	—	35	—	30	—	—
Łupek	—	—	—	35	—	30	—	—
Marmur	—	—	3	20	—	—	—	—

stępują znaczne odkształcenia trwałe, zmiana układu wzajemnego drobin, która, gdyby się częściej powtarzała, mogłaby doprowadzić do przerwania ciała. Dlatego też przyjmują Francuzi naprężenie dopuszczalne τ równe m tej części naprężenia przy granicy sprężystości α , a więc $\tau = \frac{\alpha}{m}$ 43)

i nazywają m współczynnikiem pewności, przyjmując $m = \frac{5}{3}$, 2 lub 3.

Zarzuć jednak musimy temu sposobowi wyznaczania naprężenia dopuszczalnego, że są ciała, nie mające wcale granicy sprężystości. Dlatego też lepiej przyjmować jako naprężenie dopuszczalne n tą część współczynnika wytrzymałości, przytem jednak trzeba dobierać takie n , aby to naprężenie leżało znacznie niżej granicy sprężystości.

Co do kamieni zwrócić tu musimy uwagę, że na ciśnienie inaczej się zachowują monolity, a inaczej kamienie w murze lub w sklepieniu. Gdy dla monolitów z kamienia bardzo twardego przyjmują nieraz $n=7$, z miększego $n=10$, to dla muru zwykle przyjmuje się $n=20$, a dla sklepień nawet $n=40$ do 60.

Znając μ i n obliczymy łatwo z równania 42) współczynniki sprężystości, które powyżej podaliśmy dla najważniejszych materiałów, zaokrągliwszy je według tego, jak je zwykle w praktyce obieramy.

Wyższe liczby dla mostów oznaczają naprężenie dopuszczalne dla dźwigarów głównych, a niższe dla pokładu i pomostu.

Chcąc według poprzedniego obliczyć potrzebny przekrój części zeskładu, szukamy największej siły P , która działa na tę część zeskładu w najniekorzystniejszym wypadku i otrzymujemy dla naprężenia dopuszczalnego τ przekrój

$$F = \frac{najw. P}{\tau} \dots \dots \dots 44)$$

Tymczasowe przepisy budowy i utrzymania mostów drogowych polskiego min. rob. publ. 1920.

§ 30. 3.

Natężenie drzewa na

Natężenie dopuszczalne w kg/cm^2
dla drzewa miękk. tward.

ciągnięcie 110 120

§ 51. 3. Naprężenia w żelazie zlewnem, obliczone bez uwzględnienia parcia wiatru, nie powinny przekraczać granic, zakreślonych następującem zestawieniem

rodzaj natężenia	natęż. dopuszczalne w kg/cm^2
ciśnienie lub ciągnienie dla pokładu żelaznego,	
podłużnie i poprzecznie	800
ciśnienie lub ciągnienie dla dźwigarów głównych	$870+3L$

§ 78. 1. Natężenia dopuszczalne w betonie (najwyżej 1150) powinny odpowiedzieć wytrzymałości betonu po 28-dniowym normalnym tężeniu, a natężenia w żelazie granicy płynności względnie wytrzymałości żelaza.

2. Natężenia dopuszczalne należy w obliczeniach statycznych przyjmować równe wytrzymałości materiału, mnożonej przez następujące współczynniki zmniejszające:

T a b l i c a X I.

Materiał	Rodzaj natężenia	Spółczyn. zmniejszający	Najwyższa granica dla natężeń dopuszczalnych kg/cm^2
Żelazo	ciągnienie lub ciśnienie	0,25	1200
Beton	ciśnienie		
	a) w dźwigarach prostych zginanych, w dźwigarach łukowych i ramowych, w słupach obciążonych mimośrodkowo	0,28	55
	b) w słupach i filarach przy osiowym obciążeniu	0,22	36
Beton niezbroj.	ciągnienie	0,05	8

Normy, wypracowane przez austr. tow. inżynierów i architektów w r. 1902, zawierają następane naprężenia dopuszczalne:

T a b l i c a X I I.

A) Żelazo, drzewo i szkło.		Wyciąganie kg/cm^2	Ściskanie kg/cm^2
1.	Żelazo spawane i miękkie żelazo zlewne	1 000	1 000
2.	„ lane	200	600
3.	Drzewo dębowe i bukowe	100	70
4.	„ sosnowe, świerkowe, jodłowe, modrzewiowe	80	60
5.	Szkło: a) lane	—	70
	b) dęte	—	70

B) Ciosy i filary ciosowe.		Ściskanie w kg/cm^2			
Materiał	klasa muru	I	II a	II b	II c
1.	Granit i porfir	100	60	50	25
2.	Kamienie twarde	70	40	30	—
3.	„ średnio twarde	50	30	25	—
4.	„ miękkie	35	20	15	—
5.	„ bardzo miękkie	15	10	—	—

- Klasa Pojedyncze kostki albo płyty dla 15-krotnej pewności,
 „ II a Filary i słupy, których najmniejszy wymiar poprzeczny wynosi naj-
 mniej $\frac{1}{4}$ do $\frac{1}{8}$ wysokości,
 „ II b Ciosy, wystawione na zewnątrz, słupy i cieńsze filary obciążone,
 najmniejszy wymiar poprzeczny wynosi $\frac{1}{8}$ do $\frac{1}{12}$ wysokości,
 „ II c Całkiem cienkie słupy i filary obciążone, których średnica lub najmn.
 wymiar poprzeczny wynosi mniej, niż $\frac{1}{12}$ wysokości.

C) Mur ceglany i kamienny. Ściskanie dopuszczalne w kg/cm^2

Rodzaj muru	Klasa muru	a)	b)	c)	kol. państwowe
1. Mur ceglany na wapnie	5	2.5	—	—	7
2. „ „ „ cemencie romańskim	7.5	5	—	—	—
3. „ „ „ „ portlandzkim	10	7.5	5	—	12
4. „ kamienny albo mieszany na wapnie	4	—	—	—	5
5. „ „ „ „ „ cemencie romańskim	5	—	—	—	—
6. „ mieszany albo mur z kam. warstw. na cem. portl.	8	—	—	—	9
7. „ kamienny z silnego obrob. kamienia na cemencie portlandzkim	10	—	—	—	12
8. „ z cegieł szlamowanych lub filarowych na cem. portlandzkim	12	8	6	—	14
9. „ zendrówek na cem. portl.	20	15	10	—	20
10. Ławy fundamentowe z betonu (1:5)	5	—	—	—	—
11. Mury betonowe z cem. portl. o grub. ≥ 45 cm w stosunku mieszanki :					
a) 500 kg na 1 m ³ żwiru i piasku (1:3)	18	—	—	—	30
b) 325 „ „ „ „ „ (1:4)	12	—	—	—	—
c) 225 „ „ „ „ „ (1:8)	8	—	—	—	—
d) 175 „ „ „ „ „ (1:10)	6	—	—	—	—
a) Mury o grubości ≥ 45 cm jakoteż filary, których najmniejszy wymiar poprzeczny wynosi $\frac{1}{4}$ wysokości.					
b) Mury poniżej 45 cm grubości, jakoteż filary o stosunku wymiaru $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$.					
c) Filary o najmniejszym wymiarze przekroju ≥ 30 cm a stosunku $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}$ wysokości.					
12. Mur z kamieni łamanych na cemencie	—	—	—	—	18
13. „ ciosowy	—	—	—	—	40
14. Ciosy oporowe	—	—	—	—	60

D) Schody kamienne.

Przy schodach kamiennych wynosi naprężenie dopuszczalne $\frac{1}{6}$ spólczynnika na zginanie.

E) Sklepienie ceglane, betonowe i ciosowe.

R o d z a j m u r u	Dopuszczalne w kg/cm^2	
	ściskanie	wyciąganie
1. Sklepienie ceglane na wapnie	5	0
2. „ „ „ „ cemencie romańskim	7.5	0
3. „ „ „ „ „ portlandzkim	10	1
4. „ z cegieł szlamowanych lub filarowych na cem. portlandzkim	12	1
5. „ z zendrówek na cem. portlandzkim	20	—
6. „ betonowe z cemen. portl. (1:3) (500 kg na 1 m^3)	18	3
7. „ betonowe z cem portl. z wkładkami żelaz- nemi (1:3)	21	8
8. „ betonowe z cem. portl. (1:5, 325 kg na 1 m^3)	12	2
9. „ z ciosów lepszego gatunku na cemencie portlandzkim	30	1

U w a g a. Przy 1, 2 może być użyty czysty ostry droбноziarnisty piasek kopany, przy 3, 4, 5 i 9 tylko takż piasek rzeczny. Żwir do betonu czysty o wielkości ziaren < 4 cm średnicy.

F) Grunt budowlany.

	Ściskanie dopuszczalne kg/cm^2
1. Glina i il bardzo wilgotny, mialki piasek w war- stwie 1 m grubości, jeżeli zapobieże się bocznemu wysunięciu do	1.5
2. Glina i il średniej zwięzłości, piasek miernie wil- gotny, albo ilasty suchy piasek do	2.0
3. Opoka, il zbity, piasek suchy nie ilasty do	4.0
4. Zbity gruboziarnisty piasek lub żwir do	6.0
5. Pulchna ziemia wodnista, fundamentowanie przy użyciu pali na cm^2 przekroju pala do	25

Berlińskie prezydjum policji (1881) przyjmuje następane naprężenia dopuszczalne.

Tablica XIII.

M a t e r i a ł	Naprężenie dopuszczalne w kg/cm^2	
	wyciąganie	ściskanie
Żelazo spawane	750	750
„ lane	250	500
Błacha falista żelazna	500	500

M a t e r i a ł	Napężenie dopuszczalne w kg/cm^2	
	wyciąganie	ściskanie
Błacha cynkowa	200	200
Drut żelazny	1 200	—
Drzewo dębowe i bukowe	100	80
„ „ „ bud. tymczasowe	120	90
„ sosnowe	100	60
„ „ bud. tymczasowe	120	70
Granit	—	45
Piaskowiec wedle twardości	—	15 do 30
Wapień Rüdersdorfski w ciosach	—	25
Mur z wapiennych kamieni na wapnie	—	5
Zwykły mur ceglany	—	7
Mur ceglany na cemencie	—	11
Najlepszy mur z zendrówek na cemencie	—	12 do 14
Mur z wapieni porowatych	—	3 „ 6
Dobry grunt budowlany	—	2.5 „ 5

Rozporządzenie min. pruskiego robót publicznych z r. 1919:

Tablica XIV.

M a t e r i a ł	Napężenie dopuszczalne w kg/cm^2	
	wyciąganie	ściskanie
1. Żelazo zlewne w dźwigarach stropowych i schodowych. Rozpiętość l , odległość między środkami łożysk	1 200	1 200
2. Żelazo zlewne w słupach	1 200	1 200
3. „ „ „ przy dokładnem obliczeniu dla najniekorzystniejszych warunków	1 400	1 400
4. Żelazo zlewne w dachach, ścianach, podciągach przy uwzględnieniu ciężaru własnego, zmiennego i śniegu	1 200	1 200
5. Detto przy równoczesnem najniekorzystniejszem działaniu ciężaru własnego, zmiennego, śniegu i wiatru $150 kg/cm^2$	1 400	1 400
6. Wyjątkowo dla dachów, gdy zabodzie pewność najściślejszym wymaganiom odpowiadającego obliczenia konstrukcji i wykonania w warunkach ad 5	1 600	1 600
7. Żelazo zlewne w kotwach	800	—

M a t e r i a ł	Napężenie dopuszczalne w kg/cm^2	
	wyciąganie	ściskanie
8. Dla żelaza spawanego należy wartości obniżyć o 10 ⁰ /. Jeszcze bardziej należy obniżyć przy starym materiale.		
9. Żelazo lane w płytach, łożyskach	—	1 000
10. „ „ w słupach	—	500
11. Stal kuta	1 400	1 400
12. Drzewo dębowe	100	80
13. „ sosnowe	100	60
14. a) Granit w ciosach łożyskowych	—	60
b) „ w filarach i sklepieniach	—	45
c) „ w bardzo smukłych filarach i słupach	—	25
15. a) Piaskowiec w ciosach łożyskowych	—	30
b) „ w filarach i sklepieniach	—	25
c) „ w bardzo smukłych filarach i słupach	—	15
16. a) Wapień i marmur w ciosach łożyskowych	—	30
b) Wapień i marmur w filarach i sklepieniach	—	20
c) Wapień i marmur w bardzo smukłych filarach i słupach	—	12
17. Mur z cegieł I klasy na zaprawie wapiennej 1:3 o wytrzymałości 150 kg/cm^2	—	10
18. Mur z cegieł I kl. na zapr. wapien. cement. 2 cz. wapna 1 cementu 8 piasku	—	14
19. Mur z cegieł II kl.	—	7
20. „ „ twarzo wypalonych w zaprawie wap. cement.	—	18
21. Mur z zendrówek na zapr. hydraulicznej 1:2:7	—	15
22. „ z zendrówek na cemencie (1:3)	—	35
23. „ z cegieł dziurkowatych	—	3—6
24. „ z piaskowca sztucznego na zapr. wapiennej	—	10
25. Mur z piaskowca sztucznego na zapr. hydraulicznej	—	14
26. Mur z kamienia łamanego na zaprawie wapiennej	—	do 5
27. a) Ławy fundamentów z betonu nasypanego	—	6—8
b) Ławy fundamentów z betonu ubijanego	—	10—15
28. Dobry grunt budowlany	—	3—4

U w a g a. Cyfry wyższe przy l. 23 do 28 odnoszą się do przypadków, w których przeprowadzono ściśle obliczenie statyczne przy przyjęciu możliwie niekorzystnych obciążeń i warunków.

Rozporządzenie min. austriackiego dla mostów kolejowych z r. 1904. § 8. c. 12. przepisuje następane naprężenia dopuszczalne.

Tablica XV.

Rodzaj muru i betonu	Największe naprężenie dopuszczalne kg/cm^2
<i>Mur na zaprawie ze sztucznego cementu portlandzkiego.</i>	
1. Mur z kamienia ciosowego (z uwzględnieniem postanowień ograniczających następującego ustępu a)	30
2. Ciosy łożyskowe (z uwzględnieniem postanowień ograniczających następujących ustępów a) i b)	50
3. Mur warstwowy	15
4. Mur z kamienia łamanego (czysty albo obłożony, przy wielkich wysokościach, zaopatrzony także w ciągłe warstwy muru z kamienia ciosowego lub warstwowego)	10
5. Mur z cegieł szlamowanych najlepszego gatunku, z tak zwanych cegieł podwójnie szlamowanych lub cegieł filarowych	12
6. Mur z zendrówek najlepszego gatunku	20
7. Beton mieszany w stosunku 500 kg cementu na $1 m^3$ piasku i żwiru (objętościowy stosunek mieszania 1:3)	18
8. Beton mieszany w stosunku 500 kg cementu na $1 m^3$ piasku i żwiru (objętościowy stosunek mieszania 1:5)	12
9. Beton mieszany w stosunku 225 kg cementu na $1 m^3$ piasku i żwiru (objętościowy stosunek mieszania 1:8)	8
10. Beton mieszany w stosunku 175 kg cementu na $1 m^3$ piasku i żwiru (objętościowy stosunek mieszania 1:10)	6

Do tabeli powyższej postanawia się:

a) Ciśnienie na mur z kamienia ciosowego i na ciosy łożyskowe nie może w żadnym razie wynosić więcej, niż $\frac{1}{20}$ część wytrzymałości na ciśnienie odnośnego materiału kamiennego;

b) przy ciosach łożyskowych należy dopuszczalne ściskanie oznaczyć ze względu na powierzchnię płyty łożyskowej dźwigaru.

Przepisy dla budownictwa austr. kolei państw.

Tablica XVI.

Naprężenie dopuszczalne w kg/cm^2

Rodzaj naprężenia	Żelazo			Stal lana	Drzewo	
	spaw.	zlewn.	lane		mięk.	twarde
Wyciąganie	1000	1200	200	1200	60	80
Ściskanie	1000	1200	700	1200	80	80

Rozporządzenie bawarskie.

Żelazo lane na wyciąganie 250 kg/cm^2

„ „ „ ściskanie 1000 „

przy uwzględnieniu wszystkich obciążeń wraz z wiatrem można podnieść naprężenie o $\frac{1}{4}$.

Drzewo miękkie na wyciąganie 100 kg/cm^2

„ „ „ ściskanie 70 „

Przykłady. 1. Jaką średnicę dać należy prętowi okrągłemu żelaznemu wiązania dachowego, jeżeli największa siła ciągnąca $P = 6 t$?

Według tablicy X przyjmujemy $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$, a zatem wedle 44)

$$F = \frac{6000}{800} = 7,5 \text{ cm}^2, \text{ a stąd } d = \sqrt{\frac{4 \cdot 7,5}{\pi}} = 3,09 \text{ cm.}$$

Przyjmujemy więc $d = 31 \text{ mm}$.

2. Niski słup drewniany o przekroju kwadratowym niesie 15 t; wyznaczyć wymiary, jeżeli budowla jest tymczasową a drzewo miękkie.

Według tablicy X przyjmujemy $\tau = 80 \text{ kg/cm}^2$, a zatem wedle 44)

$$F = \frac{15000}{80} = 187,5 \text{ cm}^2, \text{ stąd bok } b = 13,7 \text{ cm, zamiast czego przyjmujemy } b = 14 \text{ cm.}$$

3. Długość boku fundamentu kwadratowego słupa murowanego wynosi 1 m; jaki ciężar może on przenieść na grunt, dla którego $\tau = 2,5 \text{ kg/cm}^2$?

$$P = 100 \cdot 100 \cdot 2,5 = 250000 \text{ kg} = 25 \text{ t.}$$

§ 23. Doświadczenia Wöhlera i Bauschingera.

Badania nad wytrzymałością materiałów, a mianowicie liczne doświadczenia Wöhlera, urządzone z polecenia pruskiego ministerstwa w latach 1859 do 1870, i późniejsze Bauschingera i Tetmajera okazały, że jeżeli ciało łamie się przy jednorazowym obciążeniu przy naprężeniu μ , to gdy ciało to obciążać będziemy bardzo często, złamie się już przy mniejszem naprężeniu. Dalej wykazały doświadczenia, że ciało łamie się tem prędzej, im większą jest różnica między największem i najmniejszym naprężeniem i im większą jest największość naprężenia. Z tego wynika, że przy obliczaniu przekroju musimy uwzględnić nietylko najw. P , ale i najmn. P , zwłaszcza jeżeli między temi wartościami jest znaczna różnica i obciążenie często się zmienia. Ten wypadek zachodzi szczególnie przy mostach, gdy przeciwnie w zespołach zwykłych w budownictwie w mniejszym występuje stopniu i wystarcza tam zwykle zachowanie dawnego sposobu uwzględniania tylko najw. P .

Ponieważ jednak czasami, zwłaszcza przy obliczaniu dachów, mamy do czynienia z obciążeniem zmiennem, więc zastanowimy

się tu w krótkości nad doświadczeniami Wöhlera, które wykazały następujące prawidła:

1. Gdy w pręcie powstają wiele razy naprężenia, wywołane obciążeniem zmiennem, przerwanie następuje już przy mniejszym naprężeniu, niż gdyby naprężenie było niezmiennem.

2. Jeżeli naprężenie zmienia się między pewnymi granicami, najmniejszością i największością, to potrzebną jest tem większa ilość zmian naprężenia do przzerwania prętu, im mniejszą jest największość naprężenia.

N. p. przy pewnym szeregu doświadczeń zmieniało się naprężenie osi żelaznej od 0 do ν , a ilość zmian naprężenia potrzebna do przzerwania była n .

Doświadczenie wykazało, że

$$\begin{array}{cccc} \text{dla } \nu = & 4\,500 & 3\,500 & 2\,500 & 2\,200 \text{ kg/cm}^2 \\ n = & 170\,000 & 450\,000 & 1\,500\,000 & n > 4\,820\,000 \end{array}$$

3. Jeżeli największość naprężenia pozostaje niezmienną, to tem większej potrzeba ilości zmian naprężenia do przzerwania prętu, im większą jest najmniejszość naprężenia.

Niechaj n . p. ν_0 będzie najmniejsze naprężenie, ν_1 największe naprężenie a n liczba zmian naprężenia potrzebna, aby się pręt przerwał, to doświadczenia okazały dla stali, że

$$\begin{array}{cccc} \text{dla } \nu_0 = & 1\,210 & 2\,430 & 3\,660 & 4\,820 \text{ kg/cm}^2, \\ \text{a } \nu_1 = & 7\,300 & 7\,300 & 7\,300 & 7\,300 \text{ „ „} \\ \text{potrzeba, aby } n = & 0,06 & 0,15 & 0,40 & n > 19,67 \text{ milionów.} \end{array}$$

4. Jeżeli największość naprężenia przy stałej najmniejszości nie dosięga pewnej granicy, to ciało się nie przerywa, choćby ilość zmian naprężenia była jak największą.

To naprężenie graniczne nazywamy współczynnikiem wytrzymałości ustawicznej (*n. Arbeitsfestigkeitskoeffizient, fr. limite de non-rupture, an. working stress*), bo nawet dla ustawicznych zmian naprężenia pręt przy tem naprężeniu się nie przerwie.

5. Wytrzymałość ustawiczna jest tem większą, im większą jest najmniejszość naprężenia.

Nazwawszy α_m najmniejszość naprężenia a α współczynnik wytrzymałości ustawicznej, otrzymano z doświadczeń z żelazem spawanem

$$\begin{array}{cccc} \text{dla } \alpha_m = & -1\,700 & 0 & +1\,750 & +3\,290 \text{ kg/cm}^2 \\ \alpha = & +1\,700 & +2\,340 & +3\,200 & +3\,290 \text{ „} \end{array}$$

Na podstawie tych doświadczeń ustawili uczeni niemieccy wzory, wedle których można dokładnie wyznaczyć wytrzymałość ustawiczną, a przyjmując tą pewność także naprężenie dopuszczalne z uwzględnieniem największości i najmniejszości naprężenia.

Inżynierowie francuscy nie przyjęli tych wzorów, lecz zarzucają im, że doświadczenia Wöhlera nie były tak liczne, aby można ustawić na ich podstawie tak dokładne wzory, że zresztą zmiany w naprężeniu następowały zbyt szybko tak, że drobiny nie miały czasu jeszcze wrócić do pierwotnego położenia, a już nastąpiła nowa zmiana naprężenia.

Profesor monachijski Bauschinger robił w tym względzie dalsze doświadczenia z żelazem spawanem i na ich podstawie doszedł do następnego wniosku.

Zmiany naprężenia między naprężeniem równem zeru a naprężeniem przy granicy sprężystości nie sprowadzają nigdy przerywania, jeśli materiał nie posiada błędów i jeżeli granica sprężystości nie została sztucznie podwyższoną.

Wynik ten doświadczeń Bauschingera dostarczył inżynierom francuskim nowego argumentu przeciwko uwzględnianiu przy obliczaniu przekroju nie tylko najw. P ale i najmn. P . Wychodząc z zasady, że naprężenie dopuszczalne ma być m tą częścią naprężenia przy granicy sprężystości, twierdzą oni, że to, co się dzieje poza granicą sprężystości, niema wpływu na naprężenie dopuszczalne. A że zmiany w naprężeniu mają wpływ na wytrzymałość dopiero wtedy, gdy największe naprężenie przekracza granicę sprężystości, więc zdaniem Francuzów nie trzeba ich uwzględniać.

Uważając po części zarzuty inżynierów francuskich za słuszne, pomimo tego wyznaczając naprężenie dopuszczalne wedle wzoru 42) $\tau = \frac{\mu}{n}$ a nie wedle wzoru 43) $\tau = \frac{z}{m}$, uwzględniać powinniśmy zmiany w naprężeniu na podstawie doświadczeń Wöhlera i Bauschingera.

§ 24. Wyznaczenie wymiarów według Winklera.

Stosunek współczynnika wytrzymałości ustawicznej do najmniejszości naprężenia α_m możemy przedstawić wykreślnie. Wykreślimy jako rzędne współczynniki wytrzymałości ustawicznej α

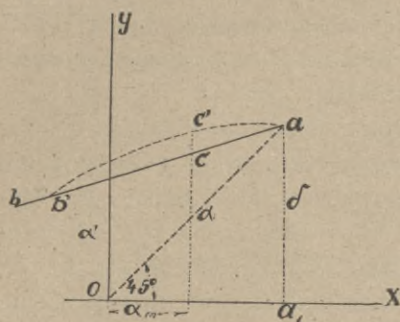
(rys. 45), jako odcinki najmniejszości naprężenia α_m , to dla rozmaitych wartości α_m i α otrzymamy rozmaite punkty. Punkty te wszystkie połączone dają linię krzywą, zamiast której przyjmuje Winkler w celu uproszczenia wzorów prostą ab , nachyloną do osi OX . Chociaż prosta ab mało różni się od krzywej $ac'b'$, jednak zawsze wyniki, otrzymane na podstawie prostej ab , musimy uważać tylko jako przybliżone.

Równanie prostej ab będzie

$$\alpha = \alpha' + c \alpha_m \dots \dots \dots 45)$$

jeżeli α' i c oznaczać będą ilości stałe, które na podstawie doświadczeń wyznaczymy. Jeżeli w tem równaniu przyjmiemy $\alpha_m = 0$, to $\alpha = \alpha'$; naprężenie to nazywamy współczynnikiem wytrzymałości pierwotnej (n. *Ursprungsfestigkeitskoeffizient*, an. *primitive safe stress*), bo przyjmujemy, że przed działaniem sił zewnętrznych naprężenie pierwotne było równe zeru.

Poprowadźmy z punktu O prostą pod 45° do osi OX , to otrzymamy punkt przecięcia się a tej prostej z prostą ab . Z tego punktu spuścimy prostopadłą aa_1 , to będzie $aa_1 = \delta = Oa_1$, a więc dla $\alpha_m = \delta$ jest $\alpha = Oa_1 = \delta$. Naprężenie δ nazywamy współczynnikiem wytrzymałości spoczynkowej (n. *Tragfestigkeitskoeffizient*, an. *statical breaking*



rys. 45.

strain). Jest to naprężenie, przy którym ciało łamie się przy stałym niezmiennym obciążeniu.

Jeżeli za α i α_m podstawimy δ w rów. 45), otrzymamy $\delta = \alpha' + c \delta$ czyli $\alpha' = \delta (1 - c)$. Podstawmy teraz tę wartość za α' w rów. 45), a otrzymamy $\alpha = \delta (1 - c) + c \alpha_m \dots \dots \dots 46)$

Z doświadczeń otrzymano dla żelaza $c = 0,45$, dla stali $c = 0,56$, możemy więc napisać dla żelaza:

$$\alpha = 0,55 \delta + 0,45 \alpha_m \dots \dots \dots 47)$$

Wszystko to odnosi się do wytrzymałości na wyciąganie; dla ściskania otrzymamy podobną linię na dole pod osią OX i równanie podobne jak 45), stałe α' i c będą tylko inne.

Przypuśćmy teraz, że chcemy wyznaczyć przekrój belki, przyjmując n -tą pewność. Jeżeli α jest współczynnikiem wytrzymałości ustawicznej, to według rów. 42) i 44) $\alpha = n \frac{najw. P}{F}$, gdzie F oznacza przekrój, P siłę, działającą w osi. Również możemy napisać $\alpha_m = n \frac{najmn. P}{F}$, jeżeli α_m oznacza najmniejszość naprężenia, δ jest współczynnikiem wytrzymałości jednorazowej, więc dla n -tej pewności $\frac{\delta}{n} = \tau$. Podstawmy te wartości w rów. 46), a otrzymamy $\alpha = n \frac{najw. P}{F} = n\tau(1-c) + c n \frac{najmn. P}{F}$.

Pomnożmy całe równanie przez F , a podzielmy przez $n\tau(1-c)$, to otrzymamy:

$$F = \frac{najw. P}{\tau(1-c)} - c \frac{najmn. P}{\tau(1-c)}.$$

Zastosujmy to do obciążenia zmiennego i nazwijmy siłę, wywołaną ciężarem stałym P_0 , a ciężarem zmiennym P_1 , to $najw. P = P_0 + P_1$, a $najmn. P = P_0$, więc

$$F = \frac{P_0}{\tau} + \frac{P_1}{\tau(1-c)}.$$

Jeżeli naprężenie zmienne jest raz dodatnie, drugi raz ujemne i jeśli nazwiemy P_2 największą ujemną siłę, wywołaną ciężarem zmiennym, bez względu na znak, to wtedy $najw. P = P_0 + P_1$, zaś $najmn. P = P_0 - P_2$, zatem $najw. P - c najmn. P = P_0 + P_1 - c P_0 + c P_2$,

$$\text{więc } F = \frac{P_0}{\tau} + \frac{P_1}{\tau(1-c)} + \frac{c P_2}{\tau(1-c)}.$$

Nazwijmy $\tau = \tau_0$, a $\tau(1-c) = \tau_1$, to $F = \frac{P_0}{\tau_0} + \frac{P_1}{\tau_1}$, gdy naprężenie nie zmienia znaku, zaś, gdy jest dodatnie i ujemne, to $F = \frac{P_0}{\tau_0} + \frac{P_1}{\tau_1} + \frac{P_2}{\tau_2}$, przyczem $\tau_2 = \frac{\tau(1-c)}{c}$. P_0 jest dodatniem, jeżeli ma znak ten sam, co P_1 ; P_2 zaś jest dodatniem, jeżeli ma znak przeciwny.

Wstawmy wartość za c i τ , to otrzymamy dla żelaza, jeżeli przeważa wyciąganie:

$$\left. \begin{aligned} &F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{770} + \frac{P_2}{1700} \text{ cm}^2, \\ \text{zaś jeżeli przeważa ściskanie:} \\ &F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{720} + \frac{P_2}{1800} \text{ " } \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 48)$$

Wzorów tych możemy używać w budownictwie, dla mostów zaś trzeba uwzględnić jeszcze wstrząśnienia, sprawione ciężarem ruchomym, a to robimy w ten sposób, że ciężar ruchomy mnożymy współczynnikiem większym od jedności: 1,3 dla mostów kolejowych, 1,2 dla drogowych a 1,1 dla kładek. Wtedy otrzymamy dla mostów kolejowych żelaznych, jeżeli przeważa wyciąganie :

$$\left. \begin{aligned} &F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{720} + \frac{P_2}{1800} \text{ cm}^2, \\ \text{jeżeli zaś przeważa ściskanie:} \\ &F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{550} + \frac{P_2}{1380} \text{ " } \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 49)$$

dla mostów drogowych żelaznych:

$$\left. \begin{aligned} &\text{jeżeli przeważa wyciąganie:} \\ &F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{640} + \frac{P_2}{1400} \text{ cm}^2, \\ \text{zaś jeżeli przeważa ściskanie:} \\ &F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{600} + \frac{P_2}{1500} \text{ " } \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 50)$$

dla kładek żelaznych:

$$\left. \begin{aligned} &\text{jeżeli przeważa wyciąganie:} \\ &F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{1550} \text{ cm}^2, \\ \text{zaś jeżeli ściskanie:} \\ &F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{650} + \frac{P_2}{1640} \text{ " } \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 51)$$

W Austrii obowiązuje rozporządzenie ministerjalne z r. 1904 dla mostów żelaznych, którego § 8, odnoszący się do mostów kolejowych, brzmi:

Dopuszczalne naprężenie materiałów budowlanych i gruntu w fundamencie.

A. Żelazo i stal.

1. Przy mostach kolejowych największe naprężenia żelaza i stali w kg/cm^2 przekroju użytecznego, t. j. pozostającego po odtrąceniu dziur na nity i części

niewspółdziałających, nie mogą przekraczać wartości granicznych, podanych w następującej tablicy.

T a b l i c a X V I I .

Oznaczenie obciążenia i rodzaj naprężenia	Dopuszczalne najwyższe naprężenie <i>kg/cm²</i>	
	Żelazo spawane	Żelazo zlewne
a) Przyjmując obciążenia określone w § 7 dla mostów kolejowych z wyłączeniem działań, wywołanych przez wiatr, boczne wachania, boczne ciśnienia i hamowanie.		
1. Naprężenie przy wyciąganiu lub ściskaniu: przy rozpiętościach od 0 m do 10 m według wzoru	700+2l	750+5l
" " " 10 " " 20 " " "	700+2l	760+4l
" " " 20 " " 40 " " "	700+2l	800+2l
" " " 40 " " 80 " " "	720+1,5l	840+l
" " " 80 " " 120 " " "	770+l	840+l
" " " 120 " " i wyżej " " "	820+0,5l	840+l
do najwyższej " "	900	1000
b) Przyjmując wszystkie obciążenia, określone w § 7 dla mostów kolei żelaznych.		
5. Naprężenie przy wyciąganiu lub ściskaniu . .	1000	1200

2. Przy mostach na gościńcach, na drogach, przy kładkach, dalej przy zeskładach chodnikowych mostów kolejowych największe naprężenia żelaza i stali w *kg/cm²* przekroju użytecznego, t. j. pozostającego po odtrąceniu dziur na nity i części niewspółdziałających, nie mogą przekraczać wartości skrajnych, podanych w następującej tablicy.

T a b l i c a X V I I I .

Oznaczenie obciążenia i rodzaj naprężenia	Dopuszczalne najwyższe naprężenie <i>kg/cm²</i>	
	Żelazo spawane	Żelazo zlewne
a) Przyjmując obciążenia, określone w § 7 dla mostów drogowych, tudzież dla zeskładów i chodników z wyłączeniem działań, wywołanych przez wiatr.		
1. Naprężenie przy wyciąganiu i ściskaniu do	750+2l	800+3l
najwyżej	900	1050
b) Przyjmując wszystkie obciążenia, określone w § 7 dla mostów drogowych.		
5. Naprężenie przy wyciąganiu lub ściskaniu . .	1000	1200

Metoda Winklera zaleca się wielką prostotą, nie jest jednak zupełnie ścisłą, jak już to wspomnieliśmy. Dlatego też podajemy poniżej metodę dokładniejszą.

§ 25. Wyznaczenie wymiarów według Launhardta i Weyraucha.

Launhardt przyjmuje jako równanie linii $ac'b'$ (rys. 45).

$$\alpha - \alpha_m = \frac{\delta - \alpha}{\delta - \alpha'} \alpha \dots \dots \dots 52)$$

stąd widzimy, że różnica naprężenia (*n. Spannungsdifferenz*) $\alpha - \alpha_m$ jest funkcją drugiego stopnia wytrzymałości ustawicznej α .

Podstawmy w równ. 52) $\alpha_m = 0$, to otrzymamy $\alpha = \alpha'$, dla $\alpha_m = \alpha$ jest $\alpha = \delta$. Dla tych dwóch wartości α_m otrzymujemy więc e same punkty, co w poprzednim paragrafie; dla innych wartości linia krzywa, wyrażona równ. 52), zgadza się dostatecznie z doświadczeniami Wöhlera.

Równanie to możemy inaczej napisać: $\alpha(\delta - \alpha') - \alpha_m(\delta - \alpha') = \alpha(\delta - \alpha)$, albo $\alpha\alpha' = \alpha_m(\delta - \alpha') + \alpha^2$, lub nareszcie

$$\alpha = \alpha' + \frac{\alpha_m}{\alpha}(\delta - \alpha') + \alpha' \left(1 + \frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} \frac{\alpha_m}{\alpha} \right) \dots \dots \dots 53)$$

Jeżeli teraz chcemy obliczyć wymiary belki, na którą działa w kierunku osi siła, zmieniająca się między granicami *najmn. P.* i *nojw. P.*, a przypuszczamy *n_{iq}* pewność, to gdy

$$\frac{\alpha_m}{\alpha} = \frac{n. najmn. P.}{n. najw. P.} = \zeta, \dots \dots \dots 54)$$

$$a F = \frac{n. najw. P.}{\alpha} = \frac{najw. P.}{\tau}, \dots \dots \dots 55)$$

równanie 51) możemy napisać: $\alpha = \alpha' \left(1 + \frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} \zeta \right)$.

Doświadczenia Wöhlera okazały, że dla żelaza spawanego $\delta = 3290 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha' = 2190 \text{ kg/cm}^2$, więc $\frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} = \frac{3290 - 2190}{2190} = \frac{1}{2}$, a zatem $\alpha = \alpha' \left(1 + \frac{1}{2} \zeta \right)$, a gdy $\alpha = n\tau$, $\alpha' = n\tau'$, to

$$\tau = \tau' \left(1 + \frac{1}{2} \zeta \right).$$

Dla $n=3$ otrzymamy stąd $\tau = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \zeta \right) \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 56)$

Dla stali miękkiej i bardzo miękkiej możemy przyjąć $\delta = 4500 \text{ kg/cm}^2$, a $\alpha' = 2700 \text{ kg/cm}^2$, więc $\frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} =$

$$= \frac{4500 - 2700}{2700} = \frac{2}{3}, \text{ a zatem dla } n=3 \text{ otrzymamy}$$

$$\tau = 900 \left(1 + \frac{2}{3}\zeta\right) \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 57)$$

Dla stali średniotwardej możemy przyjąć

$$\delta = 6000 \text{ kg/cm}^2, \alpha' = 3000 \text{ kg/cm}^2, \text{ więc } \frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} = \frac{6000 - 3000}{3000} = 1,$$

zatem dla $n = 3$ $\tau = 1000 (1 - \zeta) \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 58)$

Wzory poprzednie są tylko wtedy ważne, gdy *najw. P* i *najmn. P* mają te same znaki. W przeciwnym razie musimy uwzględnić dalsze doświadczenia Wöhlera nad wytrzymałością dwustronną α_1 (n. *Schwingungsfestigkeit*, an. *vibration safe strength*), tj. wytrzymałością ustawiczną, dla której najmn. naprężenie równe jest największości naprężenia, lecz ma znak przeciwny.

Jeżeli naprężenie jest naprzemian dodatniem i ujemnem i waha się między wartościami α'' i α , przyczem α'' ma znak przeciwny znakowi α , a bez względu na znak $\alpha > \alpha''$, to analogicznie do rów. 52) da się tu według Weyrauch'a ustawić następnę równanie, zgadzające się dostatecznie z wynikami doświadczeń:

$$\alpha = \frac{\alpha' - \alpha}{2\alpha' - \alpha_1 - \alpha} (\alpha + \alpha''), \dots \dots \dots 59)$$

przyczem wszystkie wartości brać należy bez względu na znak.

Jeżeli w tem równaniu podstawimy $\alpha'' = 0$, to $\alpha = \alpha'$,

a dla $\alpha'' = \alpha$ jest $\alpha = \alpha_1$.

Z rów. 59) otrzymamy

$$\alpha = \alpha' + (\alpha_1 - \alpha') \frac{\alpha''}{\alpha} = \alpha' \left(1 - \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} \frac{\alpha''}{\alpha}\right),$$

a ponieważ $\frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{\text{najmn. } P}{\text{najw. } P} = \zeta$, to

$$\alpha = \alpha' \left(1 - \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} \zeta\right) \dots \dots \dots 60)$$

Dla żelaza spawanego otrzymał Wöhler

$$\alpha_1 = 1170 \text{ kg/cm}^2, \text{ więc } \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \frac{2190 - 1170}{2190} = \frac{1}{2},$$

a zatem dla $n=3$:

$$\tau = 700 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\text{najmn. } P}{\text{najw. } P} \right) = 700 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta' \right) \text{ kg/cm}^2 \quad . \quad . \quad 61)$$

Dla stali miękkiej i bardzo miękkiej możemy przyjąć $\alpha_1 = 1350 \text{ kg/cm}^2$, więc $\frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \frac{2700 - 1350}{2700} = \frac{1}{2}$, zatem dla

$$n=3 \quad \tau = 900 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta' \right) \text{ kg/cm}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62)$$

Dla stali średnio twardej możemy przyjąć

$\alpha_1 = 1500 \text{ kg/cm}^2$, więc $\frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \frac{3000 - 1500}{3000} = \frac{1}{2}$, zatem dla

$$n=3 \quad \text{otrzymamy } \tau = 1000 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta' \right) \text{ kg/cm}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63)$$

Wstrząśnienia możemy uwzględnić, jak w poprzednim paragrafie, mnożąc dla wyznaczenia *najmn. P* i *najw. P* ciężar współczynnikami 1,3, 1,2 lub 1,1.

Przykłady.

1. Na pręt żelazny działa w osi siła ciągnąca $P_0 = 1 \text{ t}$, spowodowana własnym ciężarem zeskładu, ciężar zmienny wywołuje siłę $P_1 = 15 \text{ t}$. Jaką powierzchnię przekroju trzeba nadać temu prętowi?

Według metody Winklera otrzymamy z rów. (48):

$$F = \frac{1000}{1400} + \frac{15000}{770} = 0,71 + 19,48 = 20,2 \text{ cm}^2,$$

a według Weyraucha otrzymamy z rów. (56):

$$\tau = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1+15} \right) = 722 \text{ kg/cm}^2,$$

a z rów. (55)

$$F = \frac{16000}{722} = 22,2 \text{ cm}^2,$$

2. Ciężar stały sprawia w danym pręcie żelaznym ciągnięcie 2,8 t, ciężar zmienny zaś *najw. P* = + 10 t, *najmn. P* = - 5 t. Jak wielki przekrój musi mieć ten pręt?

Według Winklera otrzymamy z rów. (48):

$$F = \frac{2800}{1400} + \frac{10000}{770} + \frac{5000}{1700} = 17,9 \text{ cm}^2,$$

a według Weyraucha z rów. (56):

$$\tau = 700 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{5000 - 2800}{10000 + 2800} \right) = 640 \text{ kg/cm}^2,$$

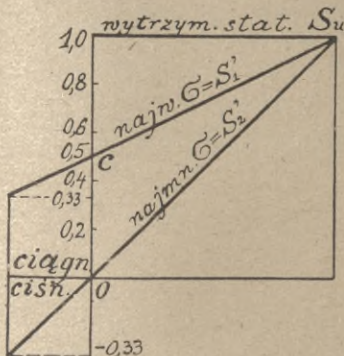
a z rów. (55)

$$F = \frac{12800}{640} = 20 \text{ cm}^2.$$

Z obu tych przykładów widzimy, że wymiary, otrzymane według wzorów Weyraucha, są większe, że więc Weyrauch, uwzględ-

niając zmienność naprężenia przyjmuje mniejsze naprężenia dopuszczalne, niż Winkler. Że wzory Weyraucha odpowiadają lepiej doświadczeniom Wöhlera, mówiliśmy już poprzednio.

Prócz tego Tetmajer ustawił inne równania, odcinając ζ jako odcinki, a α jako rzędne i przyjmując, że krzywa α jest parabolą. Wpływ wyrazu z ζ^2 jest jednak tak małym*), że wystarczy używać dwu wyrazów, a wtedy otrzymujemy wzory Weyraucha.



rys. 46.

W Ameryce Goodman podał następujący wykres (rys. 46), któremu odpowiada wzór

$$S_1' = \frac{\frac{1}{2}S_u}{1 - \frac{1}{2}\frac{S_2'}{S_1'}} \dots \dots \dots 64)$$

S_1' oznacza najw. naprężenie, przy którym ciało łamie się przy bardzo wielkiej ilości zmian w naprężeniu, S_2' odnośnie najmniejsze naprężenie, S_u współczynnik

wytrzymałości spoczynkowej. Naprężenie dopuszczalne jest n tą częścią S_1' .

§ 26. Naprężenie dopuszczalne dla drzewa.

Doświadczenia Wöhlera ograniczały się tylko do żelaza i stali. Drzewa nie badano w ten sposób, jednak analogicznie przypuszczać możemy, że zmiany w naprężeniu i tu będą miały podobny wpływ na wytrzymałość. Przy drzewie uwzględniać będziemy jednak wpływ ciężaru ruchomego dla mostów, w budownictwie obliczać będziemy wymiary według dawnego sposobu.

Dla mostów uwzględniamy wedle Winklera wstrząśnienia i zmiany w naprężeniu w ten sposób, że mnożymy ciężar ruchomy, który jest przyczyną wstrząśnień i zmian w naprężeniu, pewnym współczynnikiem większym od jednośc, a mianowicie:

*) Porów. II. wydanie str. 70.

	przy obciążeniu pośrednim bezpośrednio	
dla kładek	$\eta=1,1$	1,2
dla mostów drogowych i kolejowych dru- gorzędnych	$\eta=1,2$	1,3
„ mostów kolei głównych	$\eta=1,3$	1,4

Nazwijmy P_0 siłę, działającą wskutek ciężaru stałego, a P_1 wskutek ciężaru ruchomego, to otrzymamy przekrój:

$$F = \frac{P_0 + \eta P_1}{\tau_1} \dots \dots \dots 65)$$

Zamiast tego możemy obliczać wymiary w zwykły sposób, jeśli odpowiednio przyjmiemy naprężenie dopuszczalne τ , więc

$$F = \frac{P_0 + P_1}{\tau} = \frac{P_0 + \eta P_1}{\tau_1}, \text{ a stąd:}$$

$$\tau = \tau_1 \frac{1 + \frac{P_0}{P_1}}{\eta + \frac{P_0}{P_1}} \dots \dots \dots 66)$$

Naprężenie τ_1 możemy przyjąć według następującej tabliczki:

Tablica XIX.

Rodzaj naprężenia	mosty stałe		mosty tymczasowe	
	naprężenie τ_1 dla drzewa			
	miękkiego	twardego	miękkiego	twardego
	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$
Wyciąganie	105	120	120	140
Ściskanie	70	80	80	95

Tymczasowe przepisy budowy i utrzymania mostów drogowych polsk. min. rob. publ. z r. 1920. § 30. 3.

	w kg/cm^2 dla drzewa	
	miękk.	twardego
Natężenie drzewa na ciągnięcie	110	120
Ciśnienie równoległe do włókien	60	70
„ prostopadle „ „	12	24

Przy obciążeniach wyjątkowych (według 1. § 15. ust. 2.) można dopuścić natężenie większe o 40%, zaś przy obciążeniu samochodami większe o 20% od podanych w powyższej tablicy. Przy obliczaniu mostów tymczasowych, budowanych

Przykład. 1. Jaką średnicę d ma mieć żelazne ścięgno okrągłe 16 m długie dla ciągnięcia $P=3,2 t$, naprężenia dopuszczalnego

$$\tau=800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \text{ a } \gamma=7,8 \frac{t}{\text{m}^3}=7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}=0,0078 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} ?$$

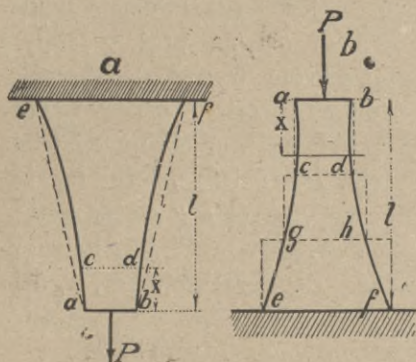
Według rów. (68.) mamy;

$$F=\frac{d^2\pi}{4}=\frac{3200}{800-0,0078\cdot 1600}=\frac{3200}{800-12,48}=\frac{3200}{787,5}=4,0 \text{ cm}^2, \text{ a stąd:}$$

$$d=\sqrt{\frac{4,0 \times 4}{\pi}}=2,26 \text{ cm}=23 \text{ mm.}$$

§ 28. Pręty o stałym naprężeniu.

Jak to widzieliśmy poprzednio, naprężenie w pręcie o stałym przekroju jest najmniejszym u końca, w którym zaczepia siła, a największym u drugiego końca. Jeżeli więc naprężenie największe jest równe naprężeniu dopuszczalnemu, to naprężenie w innych przekrojach jest mniejszem, a więc materiał nie został należycie wykorzystany. Chcąc materiał lepiej wykorzystać,



rys. 48.

szukać będziemy takiego kształtu, ażeby naprężenie było wszędzie równe naprężeniu dopuszczalnemu. Jeżeli na taką belkę działa w kierunku osi siła P (rys. 48), to w przekroju cd jest, jak wiemy, $F'=P+C$, jeżeli C oznacza ciężar prętu $abcd$ na długości x a naprężenie $\frac{F'}{F}=\tau$ według założenia, a zatem $F\tau=P+C$.

Różniczkując to równanie, otrzymamy $\tau dF=dC$, a ponieważ $dC=\gamma F dx$, jeżeli γ oznacza ciężar jednostki sześciennego materiału, więc $\tau dF=F\gamma dx$, a stąd $dx=\frac{\tau}{\gamma} \frac{dF}{F}$.

Zcałkowawszy to równanie, otrzymamy:

$$x=\frac{\tau}{\gamma} \int_0^x \frac{dF}{F}=\frac{\tau}{\gamma} \log \text{ nat. } F \Big|_0^x,$$

a więc $x = \frac{\tau}{\gamma} (\log \text{nat. } F - \log \text{nat. } F_0)$, jeżeli F_0 oznacza przekrój dla $x=0$. Inaczej możemy to napisać:

$$x = \log \text{nat. } \frac{F}{F_0},$$

a stąd otrzymamy:

$$\frac{F}{F_0} = e^{\frac{\gamma x}{\tau}}, \dots \dots \dots 70)$$

gdy e jest zasadą logarytmów naturalnych.

Ponieważ $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} \dots$, więc

$$F = F_0 \left(1 + \frac{\gamma x}{\tau} + \frac{\gamma^2 x^2}{2\tau^2} + \dots \right) \dots \dots \dots 71)$$

Przekrój ab wyznaczmy zaś według rów. 44), więc

$$F_0 = \frac{P}{\tau} \dots \dots \dots 72)$$

Dla wyznaczenia przekroju F wstawimy wartość z rów. 72) w rów. 70) i otrzymamy

$$\log F = \log \frac{P}{\tau} + 0,434\,294\,5 \frac{\gamma x}{\tau} \dots \dots \dots 73)$$

albo na podstawie równań 71) i 72)

$$F = \frac{P}{\tau} \left(1 + \frac{\gamma x}{\tau} + \frac{\gamma^2 x^2}{1\tau^2} + \dots \right) \dots \dots \dots 74)$$

Według tego, czy przekroje są kołami, prostokątami, czy też innymi figurami, zmienia się zarys prętu, zawsze jednak pręt taki ograniczony jest powierzchniami krzywymi. Ponieważ w praktyce ciągła zmiana przekroju napotykałaby często na trudności, więc zamiast powierzchni krzywych przyjmujemy często płaszczyzny np. zamiast ace na rys. 48. przyjmujemy ae albo składamy pręt taki z kilku części graniastosłupowych (rys. 48 b), których przekrój równa się największemu przekrojowi gh prętu o stałym naprężeniu w danej części.

Przykład. Na filar murowany (rys. 49) działa P w kierunku osi. Obliczyć mamy przekrój u podstawy filaru tak, aby naprężenie w P_0 i P_1 było równe τ . Według rów. 72) mamy $P = \tau F_0$, siła, działająca na P_1 , jest w przybliżeniu

$$P' = P + \gamma h \frac{F_0 + F_1}{2},$$

a według założenia ma być $P' = \tau F_1$; więc

$$\tau F_1 = \tau F_0 + \gamma h \frac{F_0 + F_1}{2},$$

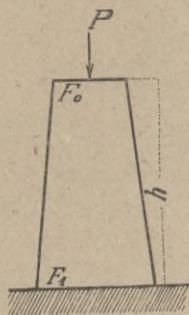
a stąd

$$F_1 = F_0 \frac{2\tau + \gamma h}{2\tau - \gamma h} \dots \dots \dots 75)$$

Jeżeli mamy dane następujące wartości: $\gamma = 2,2 \text{ t/m}^3$,
 $P = 300 \text{ t}$, $\tau = 6 \text{ kg/cm}^2 = 60\,000 \text{ kg/cm}^2 = 60 \text{ t/m}^2$, $h = 9 \text{ m}$,

to $F_0 = \frac{300}{60} = 5 \text{ m}^2$,

$$F_1 = 5 \frac{2 \times 60 + 2,2 \times 9}{2 \times 60 - 2,2 \times 9} = 6,98 \text{ m}^2.$$



rys. 49.

Zwykle jednak ze względów konstrukcyjnych górny przekrój filaru przyjmujemy większy, a przynajmniej 2 m szeroki, wtedy naprężenie jest w górnej części filaru mniejsze niż τ . W praktyce inżynierskiej zwykle nie spotykamy się z prętami lub filarami o stałym naprężeniu i mamy do czynienia tu tylko z kształtami przybliżonymi.

§ 29. Liny konopne i druczane łańcuchy.

Chociaż poprzednie wywody o wytrzymałości na wyciąganie zastosować się dadzą także do lin i łańcuchów, jednak zrobimy tu w tym względzie jeszcze kilka uwag szczegółowych.

a) Liny konopne (n. *Hanfseil*) składają się z włókien konopi europejskich lub też manilijskich. Pewna ilość włókien skręca się i tworzy wiązkę (n. *Litze*), kilka wiązek skręca się potem w linę, jądro liny nazywa się duszą (n. *Seilseele*). Lina może być albo nieskręcaną albo też skręcaną. Przez skręcanie jednak samo powstają już naprężenia w wiązkach; doświadczenia*) okazały, że należy tylko o tyle liny skręcać, aby się skróciły o $\frac{1}{4}$ długości, gdyż dalsze skręcanie zniżyłoby za bardzo wytrzymałość liny. Liny mokre lub omazione są także mniej wytrzymałe od suchych, a to w stosunku 3:4. Wilgoć bowiem wsiąkając w linę, zgrubia i zarazem skraca włókna, wskutek czego powstają naprężenia, zmniejszające wytrzymałość liny.

Spółczynnik wytrzymałości $\mu = 500$ do 800 kg/cm^2 , możemy więc przyjąć naprężenie dopuszczalne $\tau = 100 \text{ kg/cm}^2$. Jednak uwzględnić musimy także tę okoliczność, że wiązki w przekroju

*) Tetmajera ogłoszone w „Schw. Eisenbahn“ 1881, t. XV, N. 4.

nie wypełniają całej powierzchni koła opisanego, lecz w przybliżeniu tylko 0,9 powierzchni koła, więc możemy napisać:

$$P = F \tau = 0,9 \frac{d^2 \pi}{4} \tau = 0,7 d^2 \tau \dots \dots \dots 76)$$

jeżeli d oznacza średnicę liny, a P siłę, wyciągającą linę. Stąd wynika

$$d = \sqrt{\frac{4P}{0,9\tau\pi}} = 1,19 \sqrt{\frac{P}{\tau}} \dots \dots \dots 77)$$

Jeżeli w rów. 76) i 77) wstawimy $\tau = 100 \text{ kg/cm}^2$, to otrzymamy

$$P = 70 d^2 \text{ kg} \text{ i } d = 0,119 \sqrt{P} \dots \dots \dots 78)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ciężar własny liny suchej wynosi } g = 0,065 d^2 \text{ kg/m} \\ \text{a mokrej } g = 0,078 d^2 \text{ „} \end{array} \right\} 79)$$

jeżeli d wyrazimy w cm .

Najmniejszy promień tarczy linowej przyjmujemy $r = 4d$.

Przykład. Jeżeli $P = 900 \text{ kg}$, obliczyć grubość liny.

Z rów. 78) otrzymamy:

$$d = 0,119 \sqrt{900} = 3,57 \text{ cm}, \text{ a ciężar tej liny } g = 0,078 \times 3,6^2 = 1,0 \text{ kg/m}.$$

b) Liny druciane (n. *Dratseil*, fr. *cable en fil de fer*, a. *cable of iron wire*, r. *проволочный ланатъ*) są albo skręcane albo nieskręcane. Skręcane używają się wszędzie tam, gdzie przechodzą przez krążki, gdyż przy nieskręcanych zewnętrzne wiązki muszą się więcej przedłużać od wewnętrznych, więc pracują od nich więcej na wyciąganie, bo przy skręcanych każda wiązka jest raz na zewnętrznej, drugi raz na wewnętrznej stronie, a zatem wyciąganie rozdziela się jednostajnie na wszystkie wiązki. Nieskręcanych (n. *Bündelseil*) używamy tylko wtedy, jeżeli nie przechodzą przez krążki, a więc n. p. przy mostach wiszących. Jeżeli n. p. przyjmiemy dla drutu żelaznego $\tau = 1500 \text{ kg/cm}^2$ i nazwiemy n ilość drutów, z których się lina składa, a średnicę drutu d_1 , to

$$P = \frac{nd_1\pi^2}{4} \tau = \frac{nd_1^2\pi}{4} \cdot 1500, \text{ a stąd } d_1 = 0,029 \sqrt{\frac{P}{n}} \text{ cm} \dots \dots \dots 80)$$

Znając ilość i grubość drutów, możemy obliczyć średnicę liny w przybliżeniu z równania $d = 1,3d_1 \sqrt{n}$. Wstawivszy w to równanie wartość z 80), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} d &= 0,0378\sqrt{P} \text{ cm,} \\ P &= 696 d^2 \text{ kg} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 81)$$

a stąd Przy skręcanych linach, które przechodzą przez krążki, uwzględnic musimy oprócz ciągnięcia podłużnego także naprężenie, wywołane wskutek zginania przy przejściu przez krążek, a naprężenie to, zależne od promienia krążka, jest często bardzo znaczne.

W przybliżeniu możemy obliczać liny druciane, przyjąwszy z powodu przejścia przez krążki tylko naprężenie dopuszczalne mniejsze, więc $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$, a zatem

$$\left. \begin{aligned} P &= 800 n \frac{d_1^3 \pi}{4} = 628 n d_1^3 \\ a \text{ stąd} \quad d_1 &= 0,04 \sqrt[3]{\frac{P}{n}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 82)$$

a że średnica liny da się obliczyć w przybliżeniu z równania $d = 1,59 d_1 \sqrt{n}$, więc wstawiwszy tę wartość w równanie 82), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} P &= 247 d^2 \\ d &= 0,0636\sqrt{P} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 83)$$

Jako ciężar własny liny drucianej możemy przyjąć:

$$g = 0,8 n d_1^2 \text{ kg/m} \dots \dots \dots 84)$$

jeżeli d_1 wyrazimy w *cm*.

Przykład. Z szybu 150 m głębokiego mamy wyciągnąć ciężar 1000 kg. Ciężar własny przyrządu do wyciągania oprócz liny waży 700 kg. Jak grube mają być druty, jeżeli $n=90$?

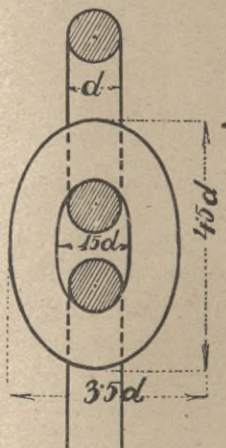
Jeżeli ciężar własny liny wynosi na 1 m $0,8 n d_1^2$, to na 150 m wynosić będzie $120 n d_1^2 \text{ kg}$, a zatem cały ciężar $P = 1000 + 700 + 120 \times 90 d_1^2 = 1700 + 10800 d_1^2$, zaś według równania 82) $F = 628 n d_1^3 = 628 \times 90 d_1^3 = 56520 d_1^3$. A więc $1700 + 10800 d_1^2 = 56520 d_1^3$, a stąd $d_1 = 0,193 \text{ cm}$, zaś $d = 1,59 \cdot 0,193 \sqrt{90} = 2,9 \text{ cm} = 29 \text{ mm}$.

Ponieważ zmiany w naprężeniu lin są znaczne, usprawiedliwionem jest tu zastosowanie doświadczeń Wöhlera *).

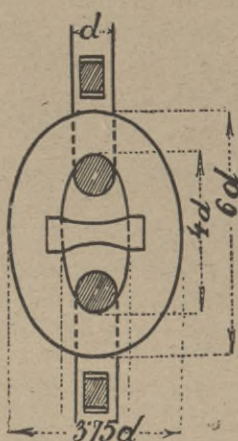
c) Łańcuchy (n. *Kette*, fr. *chaîne*, a. *chain*, r. *цѣпъ*).
Rozmaite rodzaje łańcuchów są w używaniu, my tu mówić będziemy jednak tylko o łańcuchu najbardziej używanym t. j. angielskim, którego kształt i wymiary przedstawia rys. 50. Jak widzimy, łańcuch pracuje tu nietylko na wyciąganie, lecz i na zgi-

*) P. Herman Emil, Berechnung der Förderseile. Zeits. d. öster. Ing. u. Arch.-Verein. 1880 str. 22 i II wydanie Statyki str. 79.

nanie eliptycznych ogniwi. Oprócz tego zależna jest wytrzymałość łańcucha od dobrego spawania ogniwi. Zamiast jednak obliczać wytrzymałość łańcucha na zginanie, możemy obliczać go tylko na wyciąganie, korzystając z doświadczeń admiralicji angielskiej, z któ-



rys. 50.



rys. 51.

rych się okazało, że wytrzymałość łańcucha ma się do wytrzymałości żelaza okrągłego o tej samej średnicy d nie jak 2 : 1, lecz tylko, właśnie wskutek zginania, jak 11 : 9. Przyjąwszy więc $\tau = 1\,000\text{ kg/cm}^2$, otrzymamy

$$P = \frac{11}{9} 1\,000 \frac{d^2 \pi}{4} = 960 d^2 \text{ kg} \quad \left. \begin{array}{l} \text{a stąd} \\ \end{array} \right\} \dots \dots 85)$$

$$d = 0,032 \sqrt{P} \text{ cm.}$$

Ciężar łańcucha możemy przyjąć w przybliżeniu

$$g = 2,33 d^3 \text{ kg/m}, \dots \dots \dots 86)$$

jeżeli d wyrażone w cm . Jeżeli ogniwa wzmocnimy szczeblem (rys. 51), to otrzymamy łańcuch szczeblowy (n. *Stegkette*) nieco wytrzymalszy. Doświadczenia admiralicji angielskiej wykazały, że wytrzymałość łańcucha szczeblowego jest $\frac{9}{7}$ razy większą, otrzymamy zatem

$$P = \frac{9}{7} 960 d^2 = 1234 d^2 \text{ kg} \quad \left. \begin{array}{l} \text{a stąd} \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots 87)$$

$$d = 0,0285 \sqrt{P} \text{ cm}$$

Nowsze doświadczenia Tetmajera wykazały, że wytrzymałość

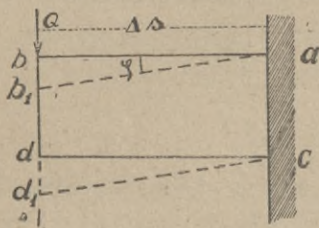
łańcuchów jest jeszcze mniejszą. Należałoby więc przyjąć siłę P o 10%₀ mniejszą, a zatem otrzymamy zamiast 85)

$$\left. \begin{aligned} P &= 874 d^2 \text{ kg} \\ \text{a stąd } d &= 0,033 \sqrt{P} \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 88)$$

IV. Wytrzymałość na ścinanie.

§ 30. Spółczynnik wytrzymałości i naprężenie dopuszczalne.

Ciało pracuje na ścinanie, jeżeli wypadkowe sił zewnętrznych, działających w płaszczyźnie, przez oś położonej, po jednej i drugiej stronie idealnego przekroju prostopadłego do osi, starają się przesunąć drobiny w płaszczyźnie przekroju.



rys. 52.

Siła Q , działająca w odstępnie Δs od przekroju, ac (rys. 52), sprawia przesunięcie przekroju $b d$ względem ab .

Przesunięcie to bb_1 zależne jest od momentu $Q \Delta \sigma$ i od przekroju F . Możemy napisać

$$bb_1 = \frac{Q \Delta \sigma}{F \cdot E_1} = \frac{v_1 \Delta \sigma}{E_1} \dots \dots 89)$$

$v_1 = \frac{Q}{F}$ jest wtedy naprężeniem na ścinanie. Mamy więc

$$\frac{bb_1}{\Delta \sigma} = \frac{v_1}{E_1} \dots \dots \dots 90)$$

analogicznie do równ. 35) przy wyciąganiu i ściskaniu.

$\frac{bb_1}{\Delta \sigma} = \text{st } \varphi$ jest to przesunięcie jednostkowe poprzeczne (n. *spezifische Querverschiebung*), zaś E_1 jest współczynnik sprężystości poprzecznej, o którym już mówiliśmy*). Bach nazywa $\alpha_1 = \frac{1}{E_1}$ współczynnikiem przesunięcia (n. *Schubkoeffizient*).

*) Por. str. 40.

Jeżeli w przekroju działa wyłącznie siła poprzeczna, a niema sił podłużnych ani zginających, to wtedy

$$\nu_1 = \frac{Q}{F} \dots \dots \dots 91)$$

W praktyce wypadek taki zachodzi przy ścinaniu nitów i sworzni, zresztą prawie nigdy; zawsze występuje równocześnie i zginanie, a wtedy naprężenie ν_1 jest większem, jak o tem później będziemy mówić.

Przesunięcie jednostkowe poprzeczne jest aż do granicy sprężystości tak, jak wyciąganie, proporcjonalne do naprężenia ścinającego, czyli E_1 jest stałem. Jeżeli nazwiemy Q siłę zewnętrzną, działającą prostopadle do osi, μ_1 współczynnik wytrzymałości na ścinanie a F powierzchnię przekroju, to możemy napisać

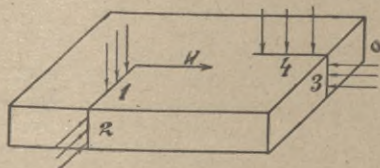
$$P = F\mu_2 \dots \dots \dots 92)$$

Teoretycznie da się udowodnić dla ciał jednorodnych, że μ_1 wynosi $\frac{4}{5}$ współczynnika wytrzymałości na ciągnięcie (μ^*), ogólnie możemy więc napisać

$$\mu_1 = \alpha\mu \dots \dots \dots 93)$$

Doświadczenia wykazały, że dla kruszców możemy rzeczywiście w przecięciu przyjąć $\mu_1 = \frac{3}{4}\mu$, więc $\alpha = 0,75$, przy kruszczach jednak kutyh, walcowanych i blachach jednorodność nie jest zupełną i musimy uwzględnić tu także kierunek włókien i walcowania. I tak np. dla pewnego żelaza spawanego, którego kierunek włókien oznacza strzałka W (rys. 53), była wytrzymałość na ścinanie w kierunku

1	2	3	4	
$\mu_1 = 3440$	3590	3060	2836	$kg/cm^2,$



rys. 53.

Przeciętnie możemy przyjąć następujące wartości dla α : żelazo lane 0,625, spawane 0,8, zlewne 0,86, stal twarda 0,7, miękka 0,77, bardzo miękka 0,8, blacha w kierunku 3 i 4: 0,70, 1 i 2: 0,85. Dla drzewa jest wytrzymałość na ścinanie w kierunku włókien bardzo mała, $\mu_1 = 0,24\mu'$, gdy μ' oznacza

*) Kluger. Wykład wytrzymałości materiałów str. 296.

wytrzymałość na ściskanie, a nawet i mniejsza, w kierunku prostopadłym do włókien jest wytrzymałość około 4 razy większa.

I tu, jak w poprzednim rozdziale, przyjmujemy przy obliczaniu wymiarów jakiś współczynnik pewności, mianowicie dla kruszców 5, dla drzewa 7 do 10, dla kamieni 20, a stąd otrzymamy naprężenie dopuszczalne na ścinanie τ_1 . Poniżej podajemy wartości μ_1 i τ_1 dla materiałów najbardziej używanych w budownictwie.

Tablica XX.

M a t e r i a ł	Spółczynnik wytrzymałości	Naprężenie dopuszczalne
	μ_1	τ_1
na ścinanie w kg/cm^2		
Beton	25	4,5
Cegła	20	1
Drzewo bukowe równoległe do włókien	80	15
„ „ prostopadłe	300	40
„ dębowe równoległe	75	15
„ „ prostopadłe	250	40
„ miękkie równoległe	50	8
„ „ prostopadłe	260	30
Granit	90	3
Miedź lana	1000	200
„ kuta	1900	380
„ blacha	1700	340
Mosiądz	950	190
Mur ceglany na cemencie	4	0,2
„ „ „ zaprawie wapiennej	0,5	—
Ółów	100	20
Piaskowiec	20	1
Platyna	2700	540
Spiż	2000	400
Stal bardzo miękka	3500	700
„ miękka	4100	820
„ twarda	4700	940
Wapień	40	2
Żelazo lane	1000	200
„ spawane nitowe	3000	600
„ zlewne	3300	700
„ blacha w kierunku walcowania	2400	500
„ „ prostopadłe do kierunku walcowania	2900	600

Przekrój wyznaczamy dla stałego naprężenia według wzoru

$$F = \frac{P}{\tau_1} \dots \dots \dots 94)$$

Dla zmiennego naprężenia możemy obliczać wymiary, uwzględniając doświadczenia Wöhlera, chociaż odnośnych osobnych doświadczeń na ścinanie nie robiono. Ze względu na to, że wytrzymałość na ścinanie dla metali jest równa $\frac{1}{3}$ wytrzymałości na ciągnięcie, otrzymamy:

a) jeżeli naprężenie nie zmienia znaku, dla żelaza $\tau_1 = \frac{4}{5} \tau (1 + \frac{1}{2} \zeta)$, a wstawivszy $\tau = 700 \text{ kg/cm}^2$, jak w rów. 56)

$$\tau_1 = 560 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\text{najmn. P}}{\text{najw. P}} \right) \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 95)$$

Dla stali zaś otrzymamy z rów. 57)

$$\tau_1 = 720 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\text{najmn. P}}{\text{najw. P}} \right) \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 96)$$

b) Jeżeli naprężenie zmienia znak, otrzymamy podobnie z równania 61) dla żelaza

$$\tau_1 = 560 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\text{najmn. P}'}{\text{najw. P}} \right) \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 97)$$

a dla stali z równania 62)

$$\tau_1 = 720 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\text{najmn. P}'}{\text{najw. P}} \right) \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 98)$$

Tymczasowe przepisy budowy i utrzymania mostów drogowych pol. min. rob. publ. r. 1920.

§ 30. Statycznie obliczone natężenia nie mogą przekraczać następujących granic (dla drzewa):

	mięk.	tward.
Ścinanie równoległe do włókien	12	20
„ „ „ „ „ „	30	40

Przy obciążeniach wyjątkowych (według § 15. ust. 2.) można dopuścić natężenie większe o 40%, zaś przy obciążeniu automobilami większe o 20% od podanych w tablicy. Przy obliczaniu mostów tymczasowych, budowanych na najwyżej dwuletni okres trwania, można dopuścić natężenie o 20% wyżej od podanych... i nie uwzględniać obciążeń wyjątkowych.

	w kg/cm^2
§ 51. 3. Dla żelaza zlewne natężenie dopuszczalne	
ściananie blach i prętów	700
„ nitów i sworzni śrub w jednym kierunku	800
„ „ w różnych kierunkach	700
ciśnienie na ściankę dziury	1600

Przy uwzględnianiu parcia wiatru o 200 kg/cm^2 więcej.

4. Żelazo spawane, jakiego wolno używać tylko wyjątkowo, otrzymać może natężenia o 10% niższe od dopuszczalnych dla żelaza zlewne.

§ 78. Natężenie dopuszczalne betonu na ścinanie może wynosić 0,025 wytrzymałości kostkowej, najwyżej 5 kg/cm^2 .

Rozporządzenie ministerjalne austriackie, dotyczące się budowy mostów z r. 1904 § 8. A. ust. 1:

a) Przyjmując obciążenie pionowe, z wyłączeniem działań, wywołanych przez wiatr, boczne wahanie itd.:

	Naprężenie dopuszczalne	
	kg/cm^2	
	żelazo spawane	żelazo zlewne
2. Naprężenie przy ścinaniu, wyjąwszy nity	500	600
3. „ nitów przy ścinaniu:		
α) tylko w jednym kierunku	600	700
β) we więcej kierunkach	500	600
b) Przyjmując wszystkie obciążenia, określone w § 7 dla mostów kolei żelaznych		
7. Naprężenie przy ścinaniu, wyjąwszy nity	600	700
8. „ nitów przy ścinaniu	700	800

Przy mostach drogowych przepisano takie same natężenia dopuszczalne. B. Drzewo ust. 8:

10 kg/cm^2 przy ścinaniu równoległym do kierunku włókien, a prostopadłe do kierunku włókien 20 kg/cm^2 . Przy działaniu wszystkich obciążeń (a więc także i sił poziomych) dopuszcza się powiększenie tych wartości aż do 15 i 30 kg/cm^2 .

10. Dla mostów drewnianych tymczasowych jako dopuszczalne najwyższe naprężenie przy ścinaniu równoległym lub prostopadłym do kierunku włókien przyjąć należy — w obydwu przypadkach trwania używania — 15 kg/cm^2 , względnie 30 kg/cm^2 .

Normy, wypracowane przez austr. tow. inżynierów i architektów w r. 1902:

	napr. dopuszcz. τ_1	
	kg/cm^2	
	do włók. \perp	do włók.
Żelazo spawane i zlewne	800	
„ lane	200	
Drzewo dębowe	15	30
„ bukowe	15	30
„ miękkie	10	20

Normy pruskiego ministerstwa z 1910:

	napr. dopuszcz. τ_1	ciśnienie τ_2 na ściankę dziury
	kg/cm^2	
		do włók. \perp do włók.
Żelazo zlewne	1000	2000
„ lane	200	—
Drzewo dębowe	15—20	80—90
„ sosnowe	10—15	60—70

Dla budowli tymczasowych można podwyższyć te liczby o 50%.

Rozporządz. minist. pruskiego dla mostów z 1910:

Jako naprężenie dopuszczalne dla nitów należy najwyżej przyjąć naprężenie na rozciąganie, przepisane dla żelaza spawanego bez uwzględnienia wiatru.

Przepisy dla budownictwa kolei austr. państw.

	żel. spaw.	żel. zlew.	stal lana	drzewo mięk.	tward.
ściananie	700	800	850		10
„ nitów	750	850		⊥	20
ciśnienie na ściankę dziury	1600	1800			30

Rozporządzenie bawarskie przyjmuje dla żelaza lanego $\tau_1=500$ kg/cm^2 .

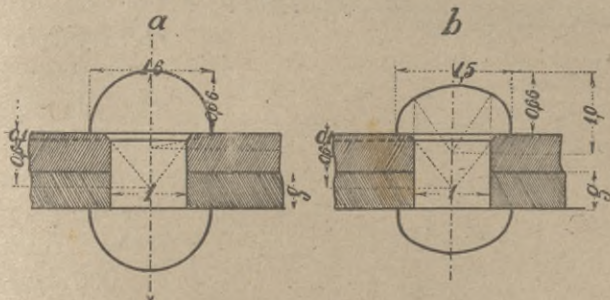
Przepisy min. pruskiego z r. 1919 przyjmują:

dla żelaza zlewego $\tau_1=1000$ kg/cm^2

„ „ lanego $\tau_1=2000$ „

§ 31. Nitowanie pojedyncze.

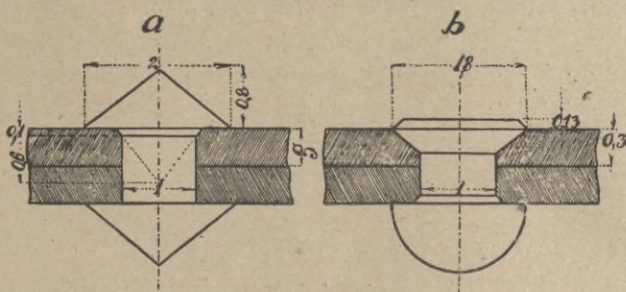
Nity (n. *Niet*, fr. *rivet*, a. *rivet*, r. *заклѣпка*) służą do połączenia stałego blach i kształtówek i składają się ze sworznia (n. *Bolzen*, *Schaft*, fr. *tige*, a. *rivet bar*, *spindle*, r. *шворен*),



rys. 54.

główek (n. *Setzkopf*, fr. *tête de rivet*, a. *rivet head*) (rys. 54) gotowej przed użyciem nitu, i nakówki (n. *Schliesskopf*, fr. *rivure*), która powstaje z występującej części sworznia przez naklepanie i ma kształt sferoidalny (rys. 54 b) lub też stożkowy (55 a); ten ostatni jednak jest niepraktyczny z powodu za małej wytrzymałości brzegów, dlatego też zupełnie prawie go zaniebano. Rysunek 55 b przedstawia nit wpuszczony (n. *versenkt*), którego się używa tam, gdzie niema miejsca na nakówkę. Dla utworzenia nakówki trzeba, aby nit był rozżarzony. Tylko bardzo cien-

kie, mniej niż 10 mm grubo nity, wstawia się na zimno. Po ostygnięciu ściąga się sworzeń, a wskutek tego ściska blachy i wywołuje silne tarcie. Jeżeli więc siła P ma (rys. 56) połączenie ro-

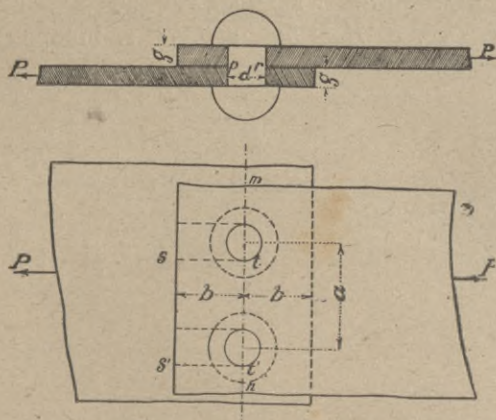


rys. 55.

zerwać, to musi przewyciężyć najprzód tarcie, a potem wytrzymałość nitu na ścinanie. Ponieważ jednak tarcie i wytrzymałość nie działają równocześnie, lecz wytrzymałość działa dopiero, gdy

tarcie zostanie przewyciężonem, bo sworzeń po ostygnięciu nie wypełnia zupełnie dziury, więc na tarcie liczyć nie możemy przy obliczaniu wytrzymałości połączenia nitami. Considère przyjmuje tarcie, wynoszące 800 do 1000 kg/cm² przekroju*).

Jak wiadomo wytrzymałość na ścinanie jest mniejszą od wytrzymałości na wyciąganie w stosunku 4 : 5, więc $\tau_1 = 0,8 \tau$. Wielu jednak autorów przyjmuje przy obliczeniu nitów τ większe, a to z powodu, że do



rys. 56.

*) Doświadczenia nad wytrzymałością nitów bardzo ciekawe wykonał znany inżynier francuski M. Dupuy z polecenia rządu francuskiego. Autor opisał te doświadczenia w *Annales des ponts et chaussées* (1895 str. 1). Gdy naprężenie pręta żelaznego przekroczy granicę sprężystości, powstaje oprócz

*) Doświadczenia nad wytrzymałością nitów bardzo ciekawe wykonał znany inżynier francuski M. Dupuy z polecenia rządu francuskiego. Autor opisał te doświadczenia w *Annales des ponts et chaussées* (1895 str. 1). Gdy naprężenie pręta żelaznego przekroczy granicę sprężystości, powstaje oprócz

nitów używamy najlepszego żelaza, którego wytrzymałość na ciągnięcie jest 1,1 lub więcej razy większa od wytrzymałości żelaza zwykłego, więc $\tau_1 = 0,88$ do $0,96 \tau$. Jednak ze względu na to, że siła nie rozdziela się zupełnie jednostajnie na nity i niektóre nity pracują wskutek tego daleko więcej, niż z obliczeń wypada, lepiej jest przyjąć naprężenie niższe, to jest zostawić $\tau_1 = 0,8 \tau^*$). Dziury na nity możemy robić w dwojaki sposób, albo przebijaniem (n. *Stanzen*, fr. *poinçonnage*, a. *punching*, r. пробивка), albo wierceniem (n. *Bohren*, fr. *perforation*, a. *drilling*, r. сверлить). Przebijanie dziur pozostawia naprężenie w blasze, które zniżają wytrzymałość do $20\%_{/0}^{**}$). Jednak zaradzić się da temu przez wyżarzenie lub wywiercenie cienkiego pierścienia (a. *annealing*), przez co możemy znowu przywrócić pierwotną wytrzymałość ***).

odkształcenia sprężystego także odkształcenie trwałe. Pręt taki nazywamy wyciągniętym (fr. *étiré*). Doświadczenia okazały, że granica sprężystości prętu wyciągniętego zgadza się prawie z naprężeniem, które wywołało wyciągnięcie. Nity są to pręty wyciągnięte, pracujące powyżej pierwotnej granicy sprężystości. Nie wypełniają one zupełnie dziur, ale ściskają mocno blachy, przez co wywołują bardzo znaczne tarcie. Tarcie to jest tem większem, im wyższą jest granica sprężystości nitu. Tarcie to jest bardzo zmiennem i zależy od ciepłoty wkładania nitu, ciepłoty przy końcu wkładania i sposobu nitowania. Można jednak liczyć na następujące tarcia: nity żelazne, granica sprężystości (według sposobu oznaczania francuskiego) 1800 kg/cm^2 , nitowanie ręczne, tarcie 400 kg/cm^2 ; gr. sprężystości 2100 kg/cm^2 , tarcie 470 kg/cm^2 . Dla nitowania maszynowego a gr. spręż. 1800 kg/cm^2 tarcie 500 kg/cm^2 , gr. spręż. 2100 kg/cm^2 tarcie 580 kg/cm^2 . Nity stalowe przy nitowaniu ręcznym gr. spręż. 2100 kg/cm^2 , tarcie 450 kg/cm^2 ; gr. spręż. 2300 kg/cm^2 tarcie 660 kg/cm^2 . Jeżeli naprężenie jest mniejszem od tarcia, to nity nie pracują wcale na ścinanie; w chwili, gdy tarcie zostanie przewyciężone, blachy się przesuwają, poczem nit pracuje na ścinanie. Następnie dziury na nity stają się owalne, a w końcu połączenie zostaje przerwane w szwie.

*) Naprężenie dopuszczalne przepisane w Polsce, Austrii i Prusiech podaliśmy w poprzednim paragrafie.

***) Według doświadczeń Tetmajera (Mittheilungen IV. zeszyt 1890) wynosiła n. p. wytrzymałość dla dziur:

	wierconych	przebijanych
żelaza zlewne . . .	4460 do 4780	3280 do 3740 kg/cm^2
„ spawanego . . .	3190 do 3340	2720 do 2880 „

****) Przepisy budowy i utrzymania mostów drogowych pol. min. rob. publ. z 1920. § 41. 2. Otwory na nity i śruby mają być wiercone lub przebijane, lecz w tym drugim przypadku średnica dziury po przebicciu dziury powinna być o 3 mm mniejszą od projektowanej a następnie rozwiercona.

Rozporz. austr. min. kolei z 1911 § 12. c. ust. 8 brzmi: Wszystkie dziury na nity i śruby muszą być wiercone.

Rysunek 56. przedstawia tak zwane nitowanie pojedyncze (n. *einfache Nietung*, fr. *simple rivure*, an. *single riveting*, r. *одиначное склёпывание*), przy którym nity urządzone są w jednym rzędzie. Jeżeli średnica nitu wynosi d , to obliczamy w ten sposób odstęp a i b , aby materiał jak najwięcej wyzyskać, a zatem, aby była jednakowa pewność przeciw przerwaniu blachy w linii mn , przeciw ścięciu nitów w płaszczyźnie pr i wyrwaniu blachy przed nitami w prostych st i $s't'$. Musimy także uważać, aby ciśnienie nitu na ściankę dziury w blasze nie przechodziło dozwolonej granicy. Możemy więc napisać następujące równania, jeżeli grubość blachy nazwiemy g :

dla n -tej pewności przeciw przerwaniu blachy w linii mn , licząc tak siłę P , jak i wytrzymałość, na szerokość a ,

$$P = (a-d) g \tau; \dots \dots \dots \alpha)$$

przeciw ścięciu nitu

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \tau_1, \dots \dots \dots \beta)$$

przeciw wyrwaniu blachy przed nitami

$$P = 2 b g \frac{2}{3} \tau = \frac{4}{3} b g \tau \dots \dots \dots \gamma)$$

Z porównania równań $\alpha)$ i $\beta)$ otrzymamy:

$$(a-d) \tau = \frac{\pi d^2}{4} \tau_1, \text{ a stąd}$$

$$\frac{a}{g} = \frac{\pi \tau}{4 \tau} \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} \dots \dots \dots 99)$$

Dla $\tau_1 = \frac{2}{3} \tau$ otrzymamy stąd

$$\frac{a}{g} = \frac{\pi}{5} \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} = 0,63 \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} \dots \dots \dots 100)$$

Z doświadczeń Kennedy'ego wynikałoby $\frac{a}{g}$ nieco mniejsze, bo otrzymał on zamiast współczynnika 0,63 tylko 0,56.

Z równań $\beta)$ i $\gamma)$ otrzymamy dalej:

$$\frac{\pi d^2}{4} \tau_1 = \frac{4}{3} b g \tau, \text{ a stąd}$$

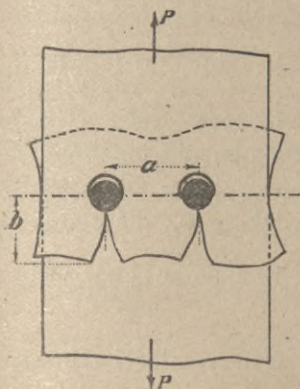
$$\frac{b}{g} = 0,49 \frac{\tau_1}{\tau} \left(\frac{d}{g} \right)^2 \dots \dots \dots 101)$$

Dla $\tau_1 = \frac{2}{3} \tau$ otrzymamy:

$$\frac{b}{g} = 0,39 \left(\frac{d}{g} \right)^2 \dots \dots \dots 102)$$

Wartości dla b , obliczone z równania 102), okazują się jednak w praktyce za małe, zwłaszcza ze względu na robienie dziur.

Tetmajer wykazuje, że w praktyce następuje przerwanie w sposób, wskazany w rys. 57., wobec tego należałoby w rów. γ) opuścić współczynnik 2 i otrzymalibyśmy $P = \frac{4}{5} b g \tau$, a więc



rys. 57.

$$\frac{4}{5} g b \tau = \frac{\pi d^2}{4} \tau_1, \text{ a stąd}$$

$$\frac{b}{g} = 0,982 \frac{\tau_1}{\tau} \left(\frac{d}{g} \right)^2 \dots 103)$$

Zamiast tego przyjmujemy z Tetmajerem b wedle wzoru praktycznego

$$b = 1,9 d \dots 104)$$

Jeżeli nazwiemy współczynnik mocy (*f. module de force du rivetage*)

t. j. stosunek wytrzymałości w szwie do wytrzymałości pełnej blachy v , to wytrzymałości te na wyciąganie mają się jak przekroje, więc

$$v = \frac{(a-d)g}{ag} = \frac{a-d}{a},$$

a wstawiając wartość za a z równania 100)

$$v = \frac{\frac{\pi d^2}{d g}}{\frac{\pi d^2}{5 g} + d} = \frac{1}{1 + \frac{5g}{\pi d}} \dots 105)$$

Z równań 100) i 105) obliczyliśmy dla wartości $\frac{d}{g} = 1$ aż do 3 następującą tabliczkę:

Tablica XVII.

$\frac{d}{g} = 1$	1,5	2	2,5	3
$\frac{a}{g} = 1,63$	2,91	4,51	6,42	8,65
$v = 0,39$	0,49	0,56	0,61	0,65

Widzimy więc, że im większych używamy nitów w stosunku do grubości blachy, tem większą jest wytrzymałość połączenia, a zarazem nity są tem bardziej oddalone, a przez to połączenie

jest tem mniej szczelnem. Stosunek $\frac{d}{g}$ obieramy więc wedle tego, jaki cel ma połączenie.

Jeżeli chodzi przedewszystkiem o szczelność połączenia n. p. dla zbiorników, kadzi, okrętów, wtedy obieramy $\frac{d}{g} = 1$ lub $1,5$, aby nity były gęste i nazywamy takie połączenie nitowaniem szczelnem (n. *Dichtungsnetung*); o tem obecnie nie będziemy dalej mówić. W budownictwie chodzi nam zwykle o jak najmniejsze osłabienie blachy, a więc o jak największe v , dlatego obieramy $\frac{d}{g} = 2,5$ lub 3 i nazywamy to połączenie nitowaniem mocnem (n. *Kraftnetung*).

Tam, gdzie potrzeba obok wielkiej wytrzymałości także połączenia szczelnego n. p. przy kotłach parowych, obieramy dla $\frac{d}{g}$ średnią wartość 2 i nazywamy połączenie nitowaniem szczelnem i mocnem (szczelnomocnem, n. *kombinierte Kraftnetung*).

Ze względu na wykonanie nie możemy używać za grubych nitów, dlatego najw. d przyjmiemy równe 28 mm , zwykle $d = 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 26\text{ mm}$, a w praktyce zwykle wedle Tetmajera dla grubości blachy

$$\left. \begin{array}{l} g < 12\text{ mm} \\ d = g + 10 \text{ „} \end{array} \right\} \begin{array}{l} g > 12\text{ mm} \\ d = 0,5 g + 16 \text{ „} \end{array} \quad \cdot \cdot \cdot 106)$$

Grubość blachy wynosi w budownictwie zwykle 5 do 12 mm , w budowie mostów 8 do 20 mm . Rzadko używamy blach jeszcze grubszych, gdyż w grubych blachach częstsze są błędy w materiale, powstałe z bąbli, które w grubych blachach zostają pomimo walcowania.

Zastanowić się tu także musimy nad ciśnieniem, jakie nit wywiera na ściankę dziury. Dopóki nit nie jest rozchełtanym, niema ciśnienia na ściankę dziury, bo tarcie wystarcza do przeniesienia siły, ale musimy liczyć także na wypadek, gdy się rozchełta, wtedy ciśnienie on na ściankę dziury*). Gerber i Tetmajer robili w tym względzie doświadczenia, Gerber doszedł do wyniku, że ciśnienie τ_2 na ściankę dziury nie powinno w żadnym wypadku przekraczać dwukrotnego naprężenia dopu-

*) Por. *Considère Ann. des ponts et chauss.* 1886.

szczalnego τ na ciągnienie. Tetmajer sądzi, że ciśnienie to może wzrosnąć bez szkody aż do granicy ciastowatości, a więc około 2200 kg/cm^2 dla żelaza spawanego a 2500 kg/cm^2 dla zlewnego. Unwin dochodzi do wniosku, że *najw.* $\tau_2 < 2,8 \tau$. Mehrrens przyjmuje $\tau_2 = 2 \tau$.

Ze względu na to, że należy przyjąć choćby mały współczynnik pewności, to naprężenie dopuszczalne τ_2 musi być znacznie niższem, a zwłaszcza nie powinno dosięgać granicy sprężystości. Obliczmy τ_2 , ciśnienie na ściankę dziury, a otrzymamy

$$P = d g \tau_2 \dots \dots \dots 107)$$

Porównawszy to równanie z równaniem β), otrzymamy:

$$\frac{\pi}{4} d^2 \tau_1 = d g \tau_2,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a stąd} \\ \text{a dla} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tau_2 = \frac{\pi}{4} \frac{d}{g} \tau_1 \\ \tau_1 = \frac{4}{5} \tau, \quad \tau_2 = \frac{\pi}{5} \frac{d}{g} \tau \end{array} \dots \dots \dots 108)$$

Z równania tego otrzymamy dla:

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{g} = 2 & 2,5 & 3 \\ \frac{\tau_2}{\tau} = 1,26 & 1,57 & 1,88 \end{array}$$

Widzimy stąd, że $\tau_2 = 2 \tau$ dopiero przy $\frac{d}{g} = 3,2$, jednak lepiej jest nie dopuszczać do tak wielkiego ciśnienia i przyjmować najwięcej $\frac{d}{g} = 2,5$, wtedy $\tau_1 = 1,57 \tau$, które to naprężenie dopuścić możemy jeszcze bez szkody materiału.

Dla większego $\frac{d}{g}$ mamy wedle równań a) i 107):

$$P = (a - d) g \tau = d g \tau_2, \text{ a stąd:} \\ \mathbf{a = d \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau} \right) \dots \dots \dots 109)}$$

n. p. dla $\tau_2 = 1600$, $\tau = 1000 \text{ kg/cm}^2$, otrzymamy $a = 2,6 d$.

Obliczywszy a z rów. 100) i 109), przyjmujemy zawsze mniejszą wartość.

Tymczasowe przepisy budowy i utrzymania mostów drogowych polskiego ministerstwa z r. 1920 przyjmują ciśnienie na ściankę

dziury 1600 kg/cm^2 przy dokładnem uwzględnieniu wszystkich sił o 200 kg/cm^2 więcej.

Rozporządzenie austr. ministerstwa handlu z r. 1904 § 8, ust. 1. Przyjmując obciążenia z wyłączeniem działań, wywołanych przez wiatr i t. d.:

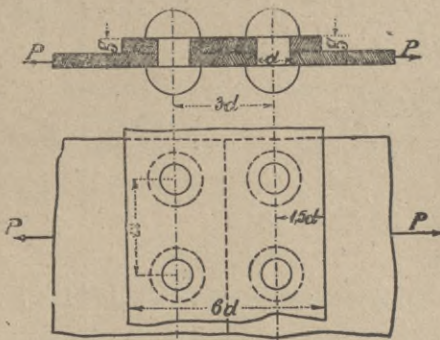
	Napężenie dopuszczalne kg/cm^2	
	zel. spawane	zel. zlewne
4. Ciężnienie na ściankę dziury nitów (średnica nitu pomnożona przez grubość blach)	1 400	1 600
Przyjmując wszystkie obciążenia:		
8. Ciężnienie na ściankę dziury nitów	1 600	1 800
Rozporządzenie pruskiego min. rob. publicz. z r. 1919 przyjmuje $\tau_2 = 2000 \text{ kg/cm}^2$.		

Zupełnie tak samo, jak nitowanie pojedyncze, obliczamy także nitowanie z przykładką (n. *einfache Laschennietung*,

fr. *couvre-joint*, an. *rivetted butt joint*, r. склепывание съ накладкой) (rys. 58).

Nitowanie pojedyncze ma tę niedogodność, że siły P nie działają w jednej płaszczyźnie (rys. 56), wskutek czego powstaje moment $M = Pg$, który działa niekorzystnie na blachę i nity, zginając blachy. Według doświadczeń Tetmajera zmniejsza się wskutek tego

wytrzymałość połączenia około 80%. Ponieważ moment Pg rośnie z grubością blachy, więc używamy nitowania pojedynczego tylko dla blach cienkich ($g < 10 \text{ mm}$).

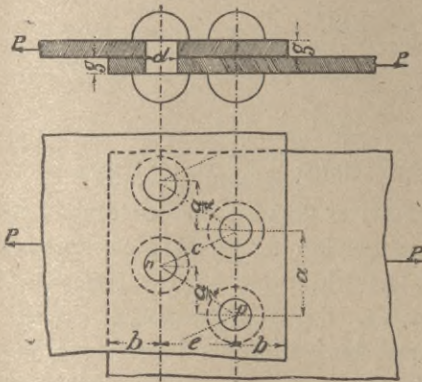


rys. 58.

§ 32. Nitowanie podwójne.

Przy nitowaniu pojedynczem użyteczny przekrój n. *nutzbarer Querschnitt*, fr. *section utile*) blachy t. j. przekrój po odciągnięciu dziur na nity jest bardzo małym, v wynosi, jak wiemy, najwięcej 0,65. Chcąc uzyskać większy użyteczny przekrój, używamy nitowania podwójnego (n. *doppelte oder Ketten-*

nietung, fr. *duple rivure*, an. *double rivetted joint*, r. двойное скле-
пывание), urządzając dwa rzędy nitów (rys. 59) i przestawiając



rys. 59.

nity tak, aby nit w jednym rzędzie przypadł na środek między nitami drugiego rzędu. Jeżeli nazwiemy odstęp nitów jednego rzędu a , średnicę nitu d a grubość blachy g , to z doświadczeń okazuje się, że odstęp skrajnego szwu nitów (*n. Nietennath*) od krawędzi blachy powinien być $b=1,5d$, odstęp nitów dwu rzędów $a=3d$, a Kennedy znalazł, że największą jest wy-

trzymałość połączenia, jeżeli

$$c = \frac{2}{3} a + \frac{d}{3}, \text{ a wtedy } e \leq \frac{a}{2}.$$

Chcąc mieć tę samą pewność przeciw przerwaniu blachy i przeciw ścięciu nitów, możemy napisać:

$$P = 2 \frac{\pi}{4} d^2 \tau_1 \dots \dots \dots \alpha)$$

przeciw ścięciu nitów i

$$P = (a-d) g \tau \dots \dots \dots \beta)$$

przeciw przerwaniu blachy w szwie, a więc:

$$\frac{2}{4} \pi a^2 \tau_1 = (a-d) g \tau, \text{ a stąd:}$$

$$\frac{a}{g} = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_1}{\tau} \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} \dots \dots \dots 110)$$

$$\text{dla } \tau_1 = \frac{4}{5} \tau \quad \frac{a}{g} = \frac{2\pi}{5} \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} \dots \dots \dots 111)$$

Stosunek wytrzymałości szwu do wytrzymałości blachy pełnej jest podobnie, jak pierwiej, dla $\tau_1 = \frac{4}{5} \tau$

$$v = \frac{a-d}{a} = \frac{1}{1 + \frac{5g}{2\pi d}} \dots \dots \dots 112)$$

Jeżeli porównamy tę wartość z wartością dla v wedle równania 105), poznamy, że tu v jest większem, niż przy nitowaniu

pojedynczem, co zresztą także widzimy z następnej tabliczki, obliczonej na podstawie równań 110 i 112).

T a b l i c a XXI.

$\frac{d}{g}=1$	1,5	2	2,5	3
$\frac{a}{g}=2,26$	4,32	7,02	10,35	14,3
$v=0,56$	0,65	0,72	0,76	0,80.

Chociaż linia zygzakowata np jest dłuższą od odstępów a , to przecież doświadczenia okazały, że zwykle blacha się nie przerywa w szwie, lecz po linii zygzakowatej; widocznie więc wytrzymałość w płaszczyźnie ukośnej jest mniejszą, niż w prostopadłej do kierunku walcowania. Moberly robił doświadczenia i przekonał się, że złom był zygzakowaty, dopóki powierzchnia zygzakowata była $\leq 1,33$ razy powierzchni w linii prostej. Stąd wynika, że długość $2c$ powinna być $\frac{2}{3}$ razy większą niż a , zatem $c = \frac{2}{3}a$, skąd można

obliczyć najmn. $e = \sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}} = 0,44 a$.

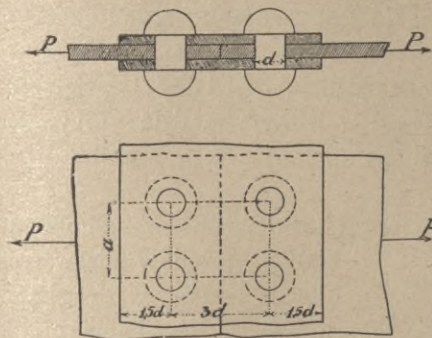
Gdybyśmy urządzili więcej rzędów nitów, mielibyśmy wedle ilości rzędów nitowanie potrójne, poczwórne i t. d., a stosunek v byłby coraz korzystniejszym. Jednak potrzebowałibyśmy także coraz więcej nitów i tracilibyśmy też coraz więcej blachy na zakładkę (11. *Überplattung*, fr. *recouvrement*, a. *lap*), t. j. część blachy, zachodzącą na drugą blachę. Przy większej ilości rzędów nitów siła nie rozdziela się też równo na wszystkie nity, a mianowicie nity w skrajnych rzędach będą więcej naprężone, niż nity w średnich rzędach.

Dlatego też w praktyce rzadko używamy więcej rzędów, niż dwu, i my więc nie będziemy mówić o nitowaniu potrójnem itd., a zresztą w danym razie moglibyśmy zupełnie w podobny sposób, jak dla dwu rzędów, obliczyć wytrzymałość nitowania i odstępów nitów.

Tak samo też obliczać będziemy nitowanie pojedyncze z dwiema przykładkami (n. *einfache Nietung mit Doppelaschen*, fr. *rivetage à double couvre joint*, a. *butt joint with cover plates*) (rys. 60). Nazwawszy, jak dawniej, grubość nitu d , blachy g , a odstęp nitów a , otrzymamy przeciw przerwaniu blachy w szwie $P = (a - d) g v$. Dla przerwania połączenia przez ścięcie nitów mu-

siałyby być nity ścięte w dwu płaszczyznach, więc otrzymamy przeciw ścięciu $P=2 \frac{\pi d^2}{4} \tau_1$.

Widzimy tu, że dwa te równania są zupełnie takie same, jak dla nitowania podwójnego, otrzymamy więc te same wartości dla a i v , co w równaniach 110) i 112).



rys. 60.

Nity, jak już wspomnieliśmy, są tu narażone na ścięcie w dwu płaszczyznach, dlatego nazywamy je dwuciętymi (n. *doppelschnittig*, fr. *rivet à double coupe*, a. *rivet in double shear*), w przeciwieństwie do nitów raz ciętych (n. *einschnittig*, fr. *rivet à simple coupe*, a. *rivet in single shear*).

Nitowanie pojedyncze z dwiema przykładkami ma tę główną korzyść, że tu siły przenoszą się w tej samej płaszczyźnie i że niema żadnego momentu, któryby działał szkodliwie na blachę i nity.

Grubość przykładek może być wedle teorii równą połowie grubości blachy, zwykle jednak robimy je nieco grubsze ze względów praktycznych, a czasem nawet dajemy im grubość równą grubości blachy.

Jeżeli blachy, które mamy nitować, pracują na ściskanie, to przy nitowaniu na zakładkę urządzamy nity w ten sam sposób, co pierwiej. Gdy blachy stykają się bezpośrednio w jednej płaszczyźnie, to właściwie nie potrzeba nitowania, bo siły przenoszą się wprost, jednak ze względu na przypadkowe przesunięcie blach dajemy przykładki i urządzamy nity, jak dla blach wyciąganych.

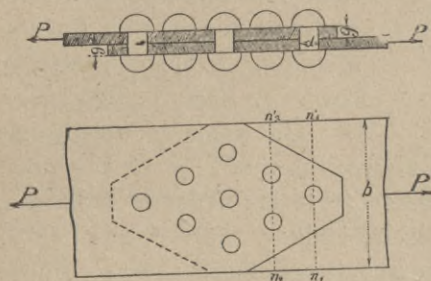
§ 33. Nitowanie wstęp i kształtówek.

Wstępem czyli żelazo płaskie (n. *Flacheisen*, fr. *fer plat*, *fer méplat*, a. *flat iron*, r. *плоское желѣзо*) jest to blacha wąska a długa o przekroju prostokątnym, kształtówka (n. *Fasoneisen*, fr. *fer special*, a. *special iron*, r. *фигурное желѣзо*) zaś

jestto żelazo walcowane o przekroju wielobocznym lub złożonym n. p. w kształcie liter T, I, krzyża i t. p.

Przy nitowaniu wstęg i kształtówek obliczamy połączenie znów tak, aby wytrzymałość przeciw przerwaniu i ścięciu była równą. Wszystkich potrzebnych nitów nie umieszczamy w jednym rzędzie, boby to wstęgę lub kształtówkę zanadto osłabiło; dlatego chodzi nam o zbadanie, jakie jest najlepsze rozmieszczenie nitów. Wiemy już najprzód, że tem jednostajniej siła rozłoży się na nity, im mniej rzędów nitów urządzimy, będziemy się więc starać, jak najwięcej nitów umieszczać w jednym rzędzie, przyczem jednak uważać będziemy musieli na to, aby wstęgę i kształtówkę zanadto nie osłabiać.

Rys. 61. przedstawia dwie wstęgi, połączone nitami na zakładkę.



rys. 61.

Jeżeli w pierwszym rzędzie jest n_1 , w drugim n_2 nitów, to, jeśli ciągnięcie w pierwszym szwie $n_1 n_1'$ ma być τ , to

$$P = \tau (F - n_1 dg),$$

przyczem F oznacza przekrój wstęgi, d średnicę nitu, a g grubość blachy.

Jeżeli wstęga ma się przerwać w drugim szwie $n_2 n_2'$ i połączenie ma się

rozerwać, to muszą być równocześnie ścięte nity w pierwszym rzędzie, więc

$$P = \tau (F - n_2 dg) + \tau' n_1 \frac{d^2 \pi}{4}.$$

Dla jednakowej pewności przeciw przerwaniu w pierwszym drugim szwie musi być $P = P'$, zatem

$$\tau (F - n_1 dg) = \tau (F - n_2 dg) + \frac{\pi d^2 \tau' n_1}{4}, \text{ a stąd}$$

$$= n_2 \frac{dg + \frac{d^2 \pi \tau'}{4\tau}}{dg} = n_1 \left(1 + \frac{\pi d \tau'}{4g\tau} \right) \dots \dots \dots 113)$$

Dla stosunków $\frac{d}{g}$, używanych w budownictwie, otrzymamy,

gdy $\frac{\tau'}{\tau} = 0,8$ dla

$$\frac{d}{g} = 2 \quad 2,5 \quad 3$$

$$\frac{n_2}{n_1} = 2,2 \quad 2,6 \quad 2,9,$$

a więc $3 > \frac{n_2}{n_1} > 2$.

Jeżeli zatem chcemy, aby pewność w dalszych rzędach nie była mniejszą, niż w pierwszym, to liczba nitów w następnym rzędzie może być dwa razy większą, niż w poprzednim, ale gdybyśmy liczbę nitów potroili, to pewność byłaby już mniejszą. Jeżeli więc $n_2 < 2 n_1$, to przekrój niebezpieczny t. j. ten, w którym przerwanie najłatwiej może nastąpić, jest w pierwszym rzędzie i według niego obliczamy wymiary, a więc

$$F = n_1 d g = \frac{P}{\tau} \dots \dots \dots 114)$$

Chcąc jak najmniej osłabić przekrój, dajemy w pierwszym rzędzie mało nitów, a mianowicie jeden lub dwa nity najwięcej.

Dla wyznaczenia ilości wszystkich nitów potrzebnych n , mamy równanie dla nitów raz ciętych

$$P = n \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1, \dots \dots \dots 115)$$

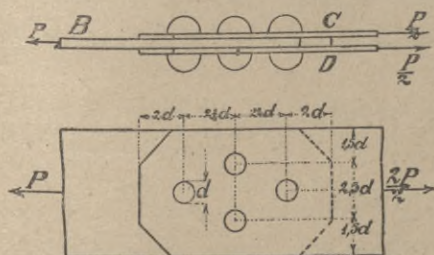
dla nitów dwuciętych $P = 2 n \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1, \dots \dots \dots 116)$

z których to równań obliczamy n . Przy nitach dwuciętych musi być też

$$P < n d g \tau_2 \dots \dots \dots 117)$$

Odstęp nitów jednego rzędu od nitów drugiego robimy najmniej $2,5 d$ do $3 d$.

Przykład. Wstęgę B należy połączyć nitami z dwiema wstęgami C i D (rys. 62). Niech będzie siła $P=16 t$. Jeżeli grubość wstęgi B jest $g=12 mm$ a średnica nitu $d=20 mm$, dalej $\tau=960 kg/cm^2$, $\tau_1=800 kg/cm^2$, to ilość potrzebną nitów otrzy-



rys. 62.

mamy z rów. 116) $\frac{2n \cdot 2^2 \pi}{4} 800 = 16000$, zatem $n = \frac{16000}{2\pi \cdot 800} = 3,2$, zamiast czego przyjmiemy $n=4$.

Jeżeli jeden nit znajdować się będzie w pierwszym rzędzie, to według (114) $F - 1 \cdot 2 \cdot 1,2 = \frac{16000}{960}$, a stąd $F = 16,67 + 2,4 = 19,1 \text{ cm}^2$, zatem gdy $g = 1,2 \text{ cm}$, $b = 15,9 \text{ cm}$, zamiast czego przyjmiemy $b = 160 \text{ mm}$. Zbadajmy jeszcze ciśnienie na ściankę dziury nitu. Otrzymamy wtedy:

$$4 \cdot 2 \cdot 1,2 v_2 = 16000, \text{ zatem } v_2 = \frac{16000}{9,6} = 1668 \text{ kg/cm}^2,$$

a zatem większe niż dopuszczalne. Należałoby więc powiększyć grubość nitów na 21 mm.

§ 34. Połączenia przegibne.

Żelazne części budowli dadzą się połączyć nie tylko nitowaniem, lecz także w inny sposób, a mianowicie za pomocą połączeń przegibnych czyli sworzniowych (n. *Gelenkverbindung*, *Bolzenverbindung*, fr. *construction articulée*) lub za pomocą śrub. Naprzód będziemy mówić o połączeniach przegibnych i obliczymy niektóre wymiary oka przy połączeniu przegibnem dwu prętów, z których jeden jest podwójnym (rys. 63).

Jeżeli siła P działa w kierunku osi prętu, to, jak wiemy,

$$P = \tau F, \dots \dots \dots \alpha)$$

jeżeli F oznacza przekrój prętu n. p. przy przekroju prostokątnym $F = b c$, zatem $P = \tau bc$.

Jeżeli sworzeń (n. *Bolzen*, fr. *tige*, an. *bar pin*, r. *шпиндель*) jest, jak tutaj, dwa razy cięty, otrzymamy dla ścięcia jego

$$P = \tau_1 \frac{2 d^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{2} d^2 \tau_1, \dots \dots \dots \beta)$$

$$\text{a jeżeli } \tau_1 = \frac{4}{5} \tau, P = \frac{2\pi}{5} d^2 \tau,$$

przyczem d oznacza średnicę przekroju sworznia. Z równań $\alpha)$ i $\beta)$ otrzymamy:

$$P = \frac{\pi}{2} d^2 \tau_1 = \tau F, \text{ a stąd } d = \sqrt{\frac{2P}{\pi \tau_1}} = 0,798 \sqrt{\frac{P}{\tau_1}} \dots \dots \dots 118)$$

Jeżeli $\tau_1 = \frac{4}{5} \tau$, to $d^2 = \frac{5}{2\pi} F$, a więc:

$$d = 0,893 \sqrt{F} \dots \dots \dots 119)$$

Ze względu na występujące tu naprężenia zginające zaleca się przyjąć τ_1 o 15% niższe.

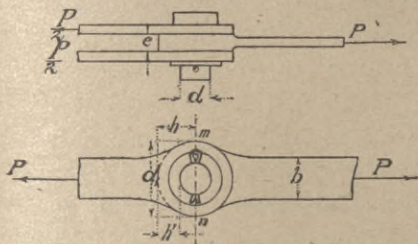
Dla sworznia raz ciętego otrzymamy zamiast rów. β)

$$P = \tau_1 \frac{d^2 v}{4} = \frac{\pi}{5} d^2 \tau, \text{ więc}$$

$$\frac{\pi}{5} d^2 \tau = \tau F, \text{ a stąd } d = 1,26 \sqrt{F} \dots \dots \dots 120)$$

jeżeli sworzeń i pręt są z jednego materiału. Jeżeli zaś pręt jest żelazny a sworzeń stalowy, wtedy wzory te się zmieniają, gdyż za τ' musimy inną wartość podstawić.

Aby oko nie przerwało się w linii mn , musi być $F_1 = F$, jeżeli F_1 oznacza użyteczny przekrój prętu w przekroju mn . Abyśmy jednak w miejscu, gdzie siła zaczepia, t. j. w oku, mieli większą pewność,



rys. 63.

a także ze względu na naprężenia zginające, przyjmujemy, opierając się na doświadczeniach amerykańskich*) większą jeszcze powierzchnię przekroju, niż teoretycznie potrzebna, a mianowicie:

Tablica XXII.

dla $\frac{d}{c} = < 1$	1	1,15	1,5	1,75	2
$\frac{F_1}{F} = 1,4$	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75

Inne wymiary oka przyjmujemy zwykle następane

$$e > c, d = 0,5 b, d_1 = \frac{8}{9} b + d, h = \frac{1}{2} b + \frac{5}{8} d.$$

Rozumie się, że i tu musimy się starać, aby ciśnienie na ściankę dziury nie było za wielkiem, a więc ponieważ

$$\tau_2 = \frac{P}{de} = \frac{F}{de} \tau, \text{ zatem } e = \frac{P}{d\tau_2} \dots \dots \dots 121)$$

*) P. Steiner. *Über Brückenbauten in den Vereinigten Staaten von Nordamerika* 1878 str. 85, artykuł p. Leko w *Allg. Bauzeitung* 1882, Jay du Bois. *The strains in framed structures* 1883 i Fidler *A treatise on bridge construction* 1893.

Wymiary gwintów są używane powszechnie prawie według systemu Witwortha, według którego krok śruby (n. *Schraubengängehöhe*, fr. *pas de vis*, a. *pitch*, r. шагъ винта).

$$\left. \begin{aligned} s &= 0,08 d + 0,1 \text{ cm} \\ d_1 &= 0,872 d - 0,16 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 125)$$

Śruby grubsze niż 4 cm używane przy mostach i dachach, mają gwinty płaskie, dla tych jest:

$$\left. \begin{aligned} s &= 0,9 d + 0,2 \text{ cm} \\ d &= 1,1 d_1 + 0,22 \text{ cm} \\ h_1 &= 1,5 d \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 126)$$

Jeżeli śruba pracuje na wyciąganie, a P jest siłą, działającą w kierunku osi, to

$$P = \frac{d_1 \pi}{4} \tau, \text{ a stąd } d = 1,128 \sqrt{\frac{P}{\tau}} \dots \dots \dots 127)$$

Naprężenie dopuszczalne τ przyjąć należy mniejsze ze względu na skręcenie przy naciąganiu naśrubka, a więc dla żelaza zlewne-
nego $\tau = 600 \text{ kg/cm}$, dla stali $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$. Francuzi przyjmują nawet jeszcze mniejsze naprężenie $\tau = 400 \text{ kg/cm}^2$ *).

Z rów. 125) i 128) otrzymamy:

$$d = 1,29 \sqrt{\frac{P}{\tau}} + 0,18 \text{ cm} \dots \dots \dots 128)$$

Jeżeli płyty kruszcowe lub kształtówki łączymy śrubami tak, że śruby narażone są na ścięcie, to obliczamy je zupełnie tak samo, jak przy połączeniu nitowem lub sworzniowem.

Przykład. W moście drewnianym układu Howe'a siła, działająca w słupie wiszącym, składającym się z dwu śrub, jest 29,5 t. Jakie wymiary mamy śrubom, jeżeli naprężenie dopuszczalne $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$. Wedle założenia na jedną

śrubę wypada $P = \frac{29,5}{2} = 14,75 \text{ t}$.

Z rów. 127) otrzymamy:

$$d_1 = 1,128 \sqrt{\frac{14750}{800}} = 4,94 \text{ cm} = 50 \text{ mm}.$$

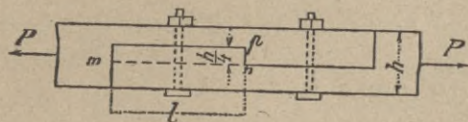
§ 36. Połączenia belek drewnianych.

W poprzednich paragrafach poznaliśmy obliczenie niektórych połączeń blach i kształtówek żelaznych, tu przejdziemy kilka przykładów, jak się oblicza połączenia belek drewnianych.

*) P. Résal J. *Constructions métalliques*, str. 624.

1. Zamek prosty (n. *das gerade Hackenblatt*, fr. *entement à double patte*, an. *tabled scarf*, r. *прямой замок*).

Jeżeli h i b oznaczają wysokość i szerokość dwu belek drewnianych (rys. 65.), połączonych zamkiem prostym i jeżeli siła P ,



rys. 65.

działająca w osi, stara się to połączenie rozzerwać, to w płaszczyźnie np powstaje ciśnienie, które nie powinno być większem, niż τ . Połączenie może być także rozzer-

wane, gdy belka zostanie ścięta w płaszczyźnie mn . Ażeby pewność przeciw ścięciu i zgnieceniu była jednakową, musi być

$$b \frac{h}{4} \tau = bl \tau'$$

jeżeli τ' oznacza naprężenie dopuszczalne na ścinanie, a stąd:

$$l = \frac{h}{4} \frac{\tau}{\tau'}$$

Wstawiawszy $\tau = 60 \text{ kg/cm}^2$ i $\tau_2 = 12 \text{ kg/cm}^2$, otrzymamy:

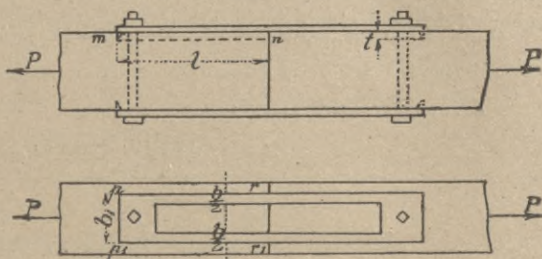
$$l = \frac{h}{4} \frac{60}{12} = 1,25 h \dots \dots \dots 129)$$

Rozumie się, że przytem musi być

$$P < \frac{bh\tau}{4} = 15 bh$$

2. Zetknięcie proste z łubkami (n. *Verlaschung*, fr. *éclissage*, *écliment*, an. *fishing*, r. *связь*).

Jeżeli większe siły działają w kierunku osi, wtedy używamy do połączenia belek drewnianych płyt żelaznych, tak zwanych łubków (n. *Laschenplatte*, fr. *éclisse*, an. *fish-plate*)



rys. 66.

(rys. 66). Jeżeli siła P , działająca w osi, stara się połączenie rozzerwać, to najprzód, aby łubki się nie przerwały, musi być

$$P = 2bg \tau,$$

jeżeli g oznacza grubość łubków, a τ naprężenie dopuszczalne na ciągnięcie dla żelaza. Jeżeli przyjmiemy

$$\tau = 1000 \frac{kg}{cm^2}, \text{ to } P = 2000 bg, \text{ więc } bg = \frac{P}{2000} \dots 130)$$

Widzimy dalej, że siła P spowoduje ciśnienie drzewa na zębra, wbite do głębokości t , i że nareszcie połączenie może być zniszczonem przez ścięcie drzewa w płaszczyznach mn , pr i p_1r_1 . A więc mamy najprzód:

$$\text{dla ściskania } P = 2 \tau' b_1 t,$$

$$\text{a dla ścinania } P = 2 \tau_1 l (b_1 + 2 t),$$

jeżeli τ' i τ_1 oznaczają naprężenia dopuszczalne dla drzewa na ściskanie i ścinanie. Przyjmijmy:

$$\tau' = 60 \frac{kg}{cm^2}, \tau_1 = 12 \frac{kg}{cm^2}, \text{ to } b_1 = \frac{P}{120 t} \dots 131)$$

$$\text{a } l = \frac{P}{24 (b_1 + 2 t)} \dots 132)$$

w cm i kg .

Przykład. Niech będzie $P = 4000 kg$, $g = 0,5 cm$, to otrzymamy z równania 130) $b = \frac{4000}{2000 \times 0,5} = 4 cm$, więc $\frac{b}{2} = 2 cm$. Dla $t = 2 cm$ otrzymamy dalej z rów-

$$131) b_1 = \frac{4000}{120 \times 2} = 16,7 cm, \text{ a z równania 132)}$$

$$l = \frac{4000}{24 (16,7 + 4)} = 8,1 cm.$$

3. Połączenie czopowe (n. *Verzapfung*.)

Dwie belki prostopadłe A i B (rys. 67.) łączymy zapomocą czopa (n. *Zapfen*, fr. *tenon*, an. *tenon*, r. *шипъ*). Siła P stara się ściąć czop w płaszczyźnie mn , więc dla naprężenia dopuszczalnego τ_1 $P = a h \tau_1$.

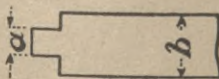
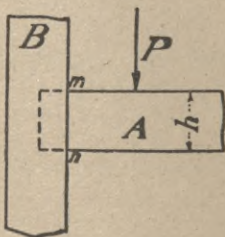
Dla drzewa prostopadłe do włókien przyjmujemy $\tau = 30 kg/cm^2$, więc

$$a = \frac{P}{30 h} \dots 133)$$

w kg i cm .

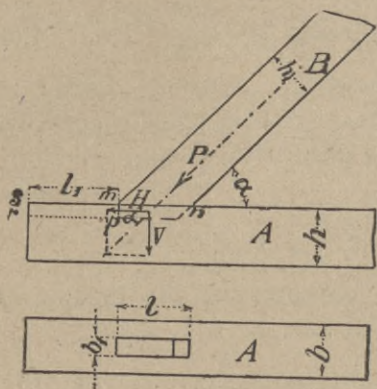
4. Czop ukośny (n. *schiefer Zapfen*, *Schrägzapfen*, fr. *tenon biais*, an. *sloped tenon*).

Jeżeli dwie belki mamy połączyć pod kątem ostrym (rys. 68), a przytem belka B wywiera znaczne ciśnienie P , używamy wtedy



rys. 67.

czopa ukośnego. Ciśnioną belkę ukośną B nazywamy zastrza-
łem (n. *Strebe*, fr. *contrefiche*, an. *strut*, r. *подкосъ*). Siła P da
się rozłożyć na dwie składowe: H w kierunku poziomym i w
kierunku pionowym. Z rysunku
widzimy, że



rys. 68.

$H = P \text{ dost } \alpha$, $V = P \text{ wst } \alpha$,
 $h_1 = l \text{ wst } \alpha$, więc $l = \frac{h_1}{\text{wst } \alpha}$. Siła
 H usiłuje ściskać czop w płaszczy-
źnie mn , więc $H + l b_1 \tau_2 = 20 l b_1$,
jeżeli $\tau_2 = 20 \text{ kg/cm}^2$ jest naprężen-
iem dopuszczalnym na ścinanie
ukośnie do włókien. Czop usiłuje
dalej wysunąć część drzewa
przed czopem $mprs$, więc $H =$

$= l_1 (b_1 + 2t) \tau_1$, jeżeli τ_1 jest naprężeniem dopuszczalnym na ści-
nianie w kierunku równoległym do włókien.

Porównawszy oba te równania i przyjąwszy $\tau_1 = 12 \text{ kg/cm}^2$,
otrzymamy $20 b_1 l = 12 l_1 (b_1 + 2t)$, a stąd

$$l_1 = \frac{5 b_1 l}{3 (b_1 + 2t)} \dots \dots \dots 134$$

Szerokość czopa b_1 możemy obliczyć z równania

$$b_1 = \frac{H}{20l} \dots \dots \dots 135)$$

Zwykle przyjmujemy $t = \frac{h}{3}$, zaś najmniejsze $b_1 = \frac{b}{3}$, dlatych
wartości będzie:

$$\frac{\frac{5}{3} b l}{3 \left(\frac{b}{3} + \frac{2}{3} h \right)} = \frac{5 b l}{3(b + 2h)} \dots \dots \dots 136)$$

Dla $b_1 = b$ byłoby

$$l_1 = \frac{5 b l}{3 \left(b + \frac{2}{3} h \right)} = \frac{5 b l}{3b + 2b} \dots \dots \dots 137)$$

Przykład. Przyjmijmy $P = 10 \text{ t}$, $\alpha = 30^\circ$, $b = 20 \text{ cm}$, $h = 20 \text{ cm}$, $h_1 = 20 \text{ cm}$
wtedy $l = \frac{20}{\text{wst } \alpha} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40 \text{ cm}$, dalej $H = P \text{ dost } \alpha = 10 \times 0.866 \text{ t}$. Z rów. 135)
otrzymamy $b_1 = \frac{8660}{20 \times 40} = 10.8 \text{ cm}$, przyjmiemy więc $b_1 = 12 \text{ cm}$, a wtedy

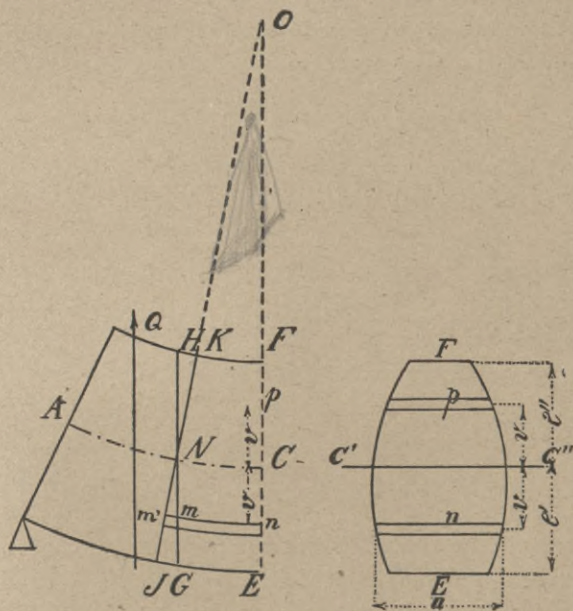
z równania 134) otrzymamy dla $t = \frac{h}{3} = 7 \text{ cm}$:

$$l_1 = \frac{5 \times 12 \times 40}{3(12 + 2 \times 7)} = \frac{2400}{78} = 30,8 \text{ cm} = 32 \text{ cm}.$$

V. Wytrzymałość na zginanie.

§ 37. Związek między siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi.

Jeżeli na belkę o osi prostej działają prostopadle do osi siły zewnętrzne, będące między sobą w równowadze, i jeżeli one leżą wszystkie w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś, wtedy siły wyginają belkę t. j. skracają włókna między dwoma pierwotnie



rys. 69.

równoległymi przekrojami EF i GH (rys. 69) po stronie wklęsłej, a przedłużają je po stronie wypukłej. Rozumie się, że między włóknami przedłużonemi a skróconemi leżeć musi warstwa NC włókien, które zachowały swą pierwotną długość. Warstwę tę nazywamy warstwą obojętną (n. *neutrale Faserschichte*, fr. *ligne des fibres neutres*), jej przecięcie się $C'C''$ z płaszczyzną przekroju,

prostopadłą do osi, nazywamy osią obojętną (n. *neutrale Achse*, fr. *axe neutre*, an. *neutral axis*, r. неіттральная ось), a przecięcie się AC z płaszczyzną, w której działają siły zewnętrzne, linią ugięcia lub sprężystą (n. *elastische Linie*, fr. *ligne élastique*, an. *elastic line*, r. линия изгиба).

Chcąc wyznaczyć naprężenia, powstałe w innych włóknach wskutek zginania, musimy zrobić niektóre przypuszczenia:

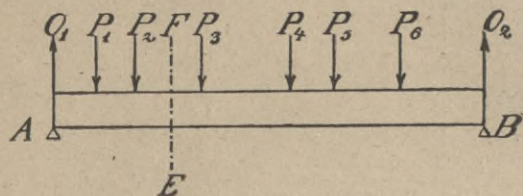
1. że zginanie jest tak małe, że naprężenia pozostają w granicach sprężystości,

2. że przekroje EF i GH pozostają po ugięciu płaskimi i prostopadłymi do ugiętej osi,

3. że włókna, równoległe do pierwotnej prostej osi belki, pozostają i nadal równoległymi do ugiętej osi.

Wyniki, uzyskane na podstawie tych przypuszczeń, są zgodne z doświadczeniami, więc możemy oprzeć dalszą teorię (podaną przez Naviera) na tych przypuszczeniach.

Jeżeli na belkę AB (rys. 70), działają siły prostopadłe do osi, a belkę tę przetniemy płaszczyzną EF , prostopadłą do osi, i prawą część belki odejmiemy, to, ażeby lewa część została i nadal w równowadze,



rys. 70.

musimy przyłożyć do przekroju EF siły, równające się siłom wewnętrznym, działającym w EF , czyli oddziaływania prawej części belki na EF .

Siły te wewnętrzne będą rozdzielone na całym przekroju i będą w części wypukłej dodatnie czyli ciągnięcia, w części wklęsłej ujemne, czyli ciśnienia. One to sprawiają przedłużenia lub skrócenia włókien, a stąd wynika bezpośrednio, że naprężenie w warstwie obojętnej jest równe zeru.

Jeżeli przekroje po ugięciu belki pozostają płaskimi, to przekrój GH (rys. 69) przejdzie w położenie JK , czyli obróci się około osi obojętnej o kąt JNG . Widzimy więc, że przedłużenia i skrócenia włókien, a zatem w granicach proporcjonalności i naprężenia, będą proporcjonalne do odległości ich od osi obojętnej.

Nazwijmy v odległość włókna $mn=s$ od osi obojętnej, które po ugięciu belki przedłuży się o $mm'=ds$, naprężenie zaś tego włókna niech będzie ν . Nazwijmy dalej ν' i ν'' naprężenia włókien skrajnych E i F , a ich odległość od osi obojętnej e' i e'' , to możemy napisać:

$$\frac{\nu}{v} = \frac{\nu'}{e'} = \frac{\nu''}{e''} = \zeta \quad \dots \quad (138)$$

ζ jest to więc naprężenie w warstwie, odległej o jednostkę długości od osi obojętnej.

Siła, działająca na pasek mn powierzchni $=dF$, równoległy do osi obojętnej, będzie więc νdF , a więc suma wszystkich cią-

$$\text{nień } \int_0^{e'} \nu dF, \text{ a ciśnienie } - \int_0^{e''} \nu' dF,$$

jeżeli — ν' oznacza ciśnienie. Ponieważ przypuściliśmy, że na belkę działają tylko ciężary pionowe, więc dla równowagi musi być

$$\int_0^{e'} \nu dF - \int_0^{e''} \nu' dF = 0, \text{ albo}$$

$$\zeta \left[\int_0^{e'} \nu dF - \int_0^{e''} \nu' dF \right] = 0 \quad \dots \quad (139)$$

$\int_0^{e'} \nu dF$ jest momentem statycznym powierzchni przekroju poni-

żej osi obojętnej, $\int_0^{e''} \nu' dF$ zaś powyżej osi obojętnej, więc $\int_0^{e'}$

$\nu dF - \int_0^{e''} \nu' dF$ jest momentem całego przekroju ze względu na oś obojętną.

Według równania 139) ma być ten moment statyczny równy zeru, bo ζ nie jest równe zeru, więc oś obojętna musi przechodzić przez środek ciężkości belki, bo tylko dla środka ciężkości jest moment statyczny przekroju równy zeru.

Jeżeli odcięta część belki AC jest w równowadze, to suma momentów ze względu na punkt C musi być równą zeru. Jeżeli M oznacza moment sił zewnętrznych, to bez względu na znak możemy napisać:

$$M = \int_{e'}^{e''} \nu dF \quad \nu = \zeta \int_{e'}^{e''} \nu^2 dF,$$

lub nareszcie:
$$\mathbf{M} = \frac{\nu}{\mathbf{v}} \int_{e'}^{e''} \mathbf{v}^2 d\mathbf{F} \quad \dots \quad (140)$$

Nazwijmy całkę $\int_{e'}^{e''} \nu^2 dF$ t. j. sumę iloczynów elementów

powierzchni przez kwadraty ich odstępów do osi obojętnej, całkę, którą spotykamy także przy ruchu obrotowym, momentem bezwładności (n. *Trägheitsmoment*, fr. *moment d'inertie*, an. *moment of inertia*, cz. *moment setrvačnosti*, r. *момент инерции*) i oznaczmy ją I , to możemy napisać:

$$M = \frac{v I}{v}, \text{ albo } v I = M v \dots \dots \dots 141)$$

Jeżeli za v wstawimy wartość e' i e'' i chcemy, aby we włóknach skrajnych były naprężenia dopuszczalne τ' i τ'' , to otrzymamy:

$$\tau' I = M e' \text{ i } \tau'' I = M e'' \dots \dots \dots 142)$$

Opuściwszy znaczki, możemy ogólnie napisać:

$$\tau I = M e \dots \dots \dots 143)$$

Piszemy tutaj τ , bo wymiary belki tak obliczamy, aby naprężenie we włóknie skrajnem było równe naprężeniu dopuszczalnemu. Ażeby naprężenie było równocześnie w obu włóknach skrajnych równe naprężeniom dopuszczalnym, musi być według 142)

$$\frac{\tau'}{e'} = \frac{\tau''}{e''} \dots \dots \dots 144)$$

jeżeli τ' i τ'' oznaczają naprężenia dopuszczalne na wyciąganie i ściskanie. Jeżeli $\tau' = \tau''$, to powinno być $e' = e''$ i odwrotnie,

$$\text{jeżeli } \tau' > \tau'', \text{ „ „ „ } e' > e''.$$

Dla drzewa, żelaza spawanego i zlewego i stali jest $\tau' = \tau''$, będziemy więc obierali takie przekroje, aby środek ciężkości był w połowie wysokości przekroju; dla żelaza lanego zaś, gdzie $\tau'' > \tau'$ obierać będziemy przekroje niesymetryczne, aby równ. 144) było choć w przybliżeniu wypełnione.

Z równ. 141) wynika, że naprężenie v włókien jest tem mniejsze, im mniejsze jest v , a więc im bliżej leżą one osi obojętnej. Stąd wynika dalej, że chcąc materiał jak najbardziej wyzyskać, będziemy obierali takie przekroje belek, aby jak najwięcej materiału było jak najdalej od osi obojętnej.

Z rys. 69. widzimy, że $Nmm' \propto ONC$, więc $ds : v = NC : NO$. Nazwijmy r promień krzywizny linii ugięcia, to $OC = r$, a ponieważ $NC = mn = s$, więc $ds : v = s : r$, a stąd $r = v \frac{s}{ds}$. Według równania 34) jest $\frac{ds}{s} = \frac{v}{E}$, więc $r = v \frac{E}{v}$, a ponieważ według równ.

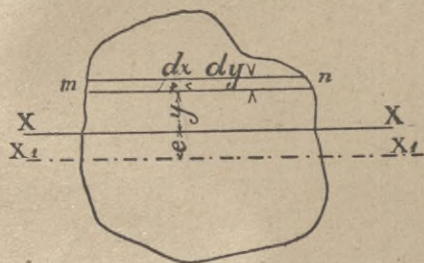
141) $\frac{v}{\nu} = \frac{l}{M}$, więc $r = \frac{IE}{M}$, a zatem:

$E I = Mr$ 145)

Wszystkie te wzory ważne są tylko na mocy założenia do granicy sprężystości. O naprężeniach zginających po przekroczeniu granicy sprężystości powiemy później.

§ 38. Moment bezwładności.

W równaniach zasadniczych 141) i 145) widzimy moment bezwładności I powierzchni przekroju belki ze względu na środek ciężkości. Moment bezwładności powierzchni jest, jak wiemy całką iloczynów elementów powierzchni przez kwadraty ich odległości od danej osi.



rys. 71.

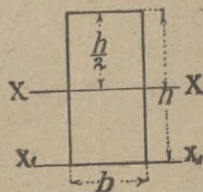
Elementem powierzchni niech będzie prostokąt o powierzchni $d^2F = dx dy$ (rys. 71), odległość jego od osi XX' , przechodzącej przez środek ciężkości S jest y , to

$$I = \iint d^2F y^2 = \iint dx dy y^2 \dots \dots \dots 146)$$

Jako przykład wyznaczmy moment bezwładności prostokąta (rys. 72). Wstawiwszy granice w równ. 146), otrzymamy:

$$I = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy, \text{ a stąd: } I = \frac{bh^3}{12} \dots \dots \dots 147)$$

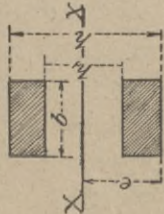
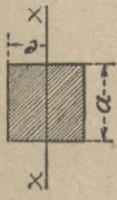
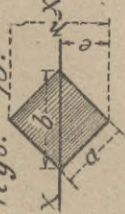
Podobnie wyznacza się w mechanice rozumowej analitycznie według równ. 146. momenty bezwładności rozmaitych figur geometrycznych. Tu ograniczymy się więc tylko na podaniu wyników i wspomnimy, że dla wyznaczenia momentu bezwładności figur złożonych używamy twierdzenia, wynikającego z równ. 146., że moment bezwładności powierzchni dla danej osi równy jest sumie momentów bezwładności jej części ze względu na tę

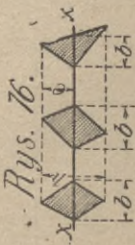






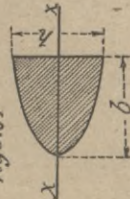

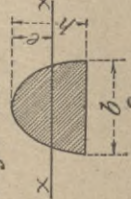
rys. 72.

jest sumie momentów bezwładności jej części ze względu na tę

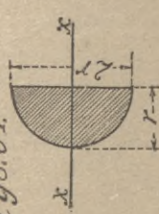



Tablica XXIII.

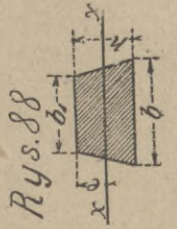
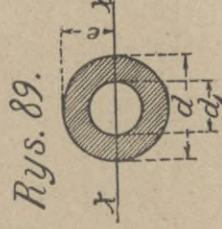

L. porzą.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	F powierz- chnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładności
1	Dwa prostokąty	<p><i>Rys. 73.</i></p> 	$\frac{h}{2}$	$b(h-h_1)$	$\frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3)$ $\frac{b \cdot h^2}{12}$	$\frac{1}{6} \frac{b}{h} (h^3 - h_1^3)$ $\frac{b \cdot h^2}{6}$	$\sqrt{\frac{h^2 + h h_1 + h_1^2}{12}}$
2	Kwadrat o podstawie poziomej	<p><i>Rys. 74.</i></p> 	$\frac{1}{2} a$	a^2	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{a}{\sqrt{12}} = 0,2889 a$
3	Kwadrat, jeżeli oś jest przekątną	<p><i>Rys. 75.</i></p> 	$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{h}{2}$	$\frac{b h}{a^2} = \frac{2}{2}$	$\frac{a^4}{12} = \frac{b h^3}{48}$	$0,1178 a^3 = \frac{b h^3}{24}$	$0,2889 a$

4	Romb, romboid, trójkąt		$\frac{h}{2}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{48}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{h}{\sqrt{24}}=0,204 h$
5	Elipsa		$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi bh}{4}$	$\frac{\pi bh^3}{64}=0,0491 bh^3$	$\frac{\pi bh^2}{32}=0,0982 bh^2$	$\frac{h}{4}$
6	Koło		$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}=0,0491 d^4$	$\frac{\pi d^3}{32}=0,0982 d^3$	$\frac{d}{4}$
7	Trójkąt ze względu na os równoległą do podstawy		$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{h}{\sqrt{18}}=0,2357 h$
8	Odcinek paraboliczny stojący		$\frac{3}{5} h$	$\frac{2}{3} bh$	$\frac{8}{175} bh^3=0,04576 h^3$	$\frac{8}{105} bh^2=0,0762 bh^2$	$0,2619 h$

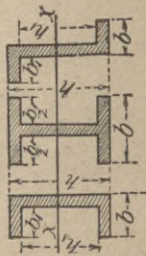
L. porząd.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	F powierzchnia przekroju	I moment bezwładności	$W = \frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładności
9	Odcinek paraboliczny leżący	<p><i>Rys. 81</i></p> 	$\frac{h}{2}$	$\frac{2}{3}bh$	$\frac{1}{30}bh^3$	$\frac{1}{15}bh^2$	$\frac{h}{\sqrt{5}} = 0,2236h$
10	Odcinek koła	<p><i>Rys. 82</i></p> 	$\frac{h}{2} = r \text{ wst } \frac{\gamma}{2}$	$\frac{1}{2}r^2 (\gamma - \text{wst } \gamma)$	$\frac{r^4}{64} (16\gamma - 8 \text{ wst } \gamma + \text{wst } 2\gamma)$	$\frac{r^3}{64} (16\gamma - 8 \text{ wst } \gamma + \text{wst } 2\gamma) \frac{1}{\text{wst } \frac{\gamma}{2}}$	—
11	Połowa elipsy	<p><i>Rys. 83</i></p> 	0,5756 h	$\frac{\pi}{4}bh$	0,0549 bh ³	0,0955 bh ²	0,2647 h

*) $b = r \left(1 - \text{dost. } \frac{\gamma}{2} \right)$.

12	Półkole stojące	<i>Rys. 84.</i> 	r	$\frac{r^2\pi}{2}$	$0,3927 r^4$	$0,3927 r^3$	$0,458 r$
13	Półkole leżące	<i>Rys. 85.</i> 	$0,5756 r$	$\frac{r^2\pi}{2}$	$0,1098 r^4$	$0,1908 r^3$	$0,2647 r$
14	Sześciobok w koło wpi-sany o dwóch bokach poziomych	<i>Rys. 86.</i> 	$0,886 r$	$2,5981 r^2$	$0,5413 r^4$	$0,625 r^3$	$0,4564 r$
15	Sześciobok w koło wpi-sany o dwóch bokach pionowych	<i>Rys. 87.</i> 	r	$2,5981 r^2$	$0,5413 r^4$	$0,5413 r^3$	$0,4564 r$

L. porząd.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	F powierzchnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładności
16	Trapez	 <p><i>Rys. 88</i></p>	$\frac{2b+b_1}{b+b_1} \frac{h}{3}$	$\frac{b^2+4bb_1+b_1^2}{b+b_1} \frac{h^3}{36}$	$\frac{1}{12} \frac{b^3+4b_1^2+b_1^3}{2b+b_1} h^2$	$\frac{h}{b+b_1} \sqrt{\frac{b^2+2bb_1+b_1^2}{18}}$	
17	Pierścień kołowy	 <p><i>Rys. 89.</i></p>	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4} (d^2-d_1^2)$	$\frac{\pi}{32} \frac{d^4-d_1^4}{d} = 0,0982 \frac{d^4-d_1^4}{d}$	$\frac{1}{4} \sqrt{d^2+d_1^2}$	
18	Pierścień eliptyczny	 <p><i>Rys. 90.</i></p>	$\frac{h}{2}$	$0,0491 (bh^3-b_1h_1^3)$	$\frac{\pi}{32} (bh^2-b_1h_1^2) = 0,0982 (bh^2-b_1h_1^2)$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{bh^3-b_1h_1^3}{bh-b_1h_1}}$	

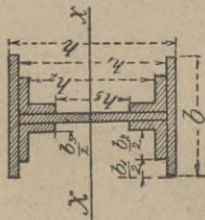
Rys. 91.



Przekroje
U, I, Z

19

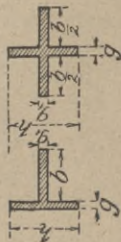
Rys. 92.



Przekrój
złożony
belki
blaszanej

20

Rys. 93.



Leżąca
tówka i
przekrój
krzyżowy

21

$$0,289 \sqrt{\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{bh - b_1 h_1}}$$

$$\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{6h}$$

$$\frac{1}{12} (bh^3 - b_1 h_1^3)$$

$$bh - b_1 h_1$$

$$\frac{h}{2}$$

$$\frac{bh^3 - b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 - b_3 h_3^3}{6h}$$

$$\frac{1}{12} (bh^3 +$$

$$- b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 +$$

$$- b_3 h_3^3)$$

$$bh - b_1 h_1 +$$

$$- b_2 h_2 - b_3 h_3$$

$$\frac{h}{2}$$

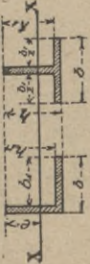
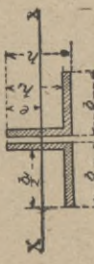

$$0,289 \sqrt{\frac{gh^3 + bg_1^3}{gh + bg_1}}$$

$$\frac{1}{6} \frac{gh^3 + bg_1^3}{h}$$


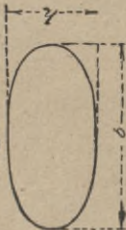
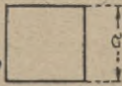
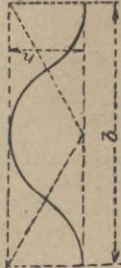
$$\frac{1}{12} (gh^3 + bg_1^3)$$

$$gh + bg_1$$

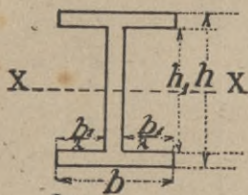
$$\frac{h}{2}$$

L. porządk.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	F powierzchnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładności
22	Przekrój T lub kątownika	 <p style="text-align: center;">Rys. 94</p>	$\frac{1}{2} \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{bh - b_1 h_1}$	$bh - b_1 h_1$	$\frac{1}{3} (bh^3 - b_1 h_1^3) + \frac{1}{4} \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2}{bh - b_1 h_1}$	$\frac{2}{3} \frac{(bh^3 - b_1 h_1^3)(bh - b_1 h_1)}{bh^2 - b_1 h_1^2} - \frac{1}{2} (bh^2 - b_1 h_1^2)$	—
23	Kątownika równoramienna bh		$\frac{h}{4} + 0,366$	$b^2 - b_1^2$	$F e_1^2 (1 + 3,3 \alpha) \frac{h - h_1}{b}$ $\alpha = 0,143 - \frac{1}{2} (b^3 - b_1^3)$	$\frac{2}{3} \frac{(b^3 - b_1^3)(b^2 - b_1^2)}{b^3 - b_1^3} + \frac{1}{2} (b^3 - b_1^3)$	—
24	Przekrój falisty	 <p style="text-align: center;">Rys. 95</p>	$\frac{d}{h + 2}$	$2 h (d - d_1) + \frac{(d^2 - d_1^2) \pi}{4}$	$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) + \frac{h^2 \pi}{4} (d^2 - d_1^2) + \frac{h}{3} (d^3 - d_1^3) + \frac{2}{3} (d - d_1) h^3$	$\frac{1}{h + 2} \left[\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) + \frac{h^2 \pi}{4} (d^2 - d_1^2) + \frac{h}{3} (d^3 - d_1^3) + \frac{2}{3} (d - d_1) h^3 \right]$	—

Wzory przybliżone do przekrojów próżnych o bardzo małej grubości ścian g

25	Koło	<i>Rys. 96.</i> 	$\frac{a}{2}$	$\pi d g$	$\frac{\pi d^3 g}{8}$	$\frac{\pi d^3}{4} g$	$\frac{d}{\sqrt{8}} = 0,3536d$
26	Elipsa	<i>Rys. 97.</i> 	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{2} \pi (b+h) g$	$\frac{1}{32} \pi h^2 g (3b+h)$	$\frac{\pi}{16} h g (3b+h)$	$\frac{h}{4} \sqrt{\frac{3b+h}{b+h}}$
27	Kwadrat	<i>Rys. 98.</i> 	$\frac{a}{2}$	$4 a g$	$\frac{2}{2} a^2 g$	$\frac{4}{3} a^2 g$	$\frac{a}{\sqrt{6}} = 0,4083a$
28	Przekrój falisty	<i>Rys. 99.</i> 	$\frac{h}{2}$	$1,5 \left(h + \frac{b}{2} \right) g$	$\frac{h^3 g}{20} (3b+2h)$	$\frac{h^2 g}{10} (3b+2h)$	—

samą oś. Momenty bezwładności poniżej podane są wszystkie obliczone ze względu na oś poziomą, przechodzącą przez środek ciężkości przekroju.



rys. 100.

Przykład. Moment bezwładności przekroju wykreślonego na rys. 100 ze względu na oś XX będzie

$$I = \frac{1}{12}bh^3 - 2\frac{1}{12}\frac{b_1}{2}h_1^3 = \frac{1}{12}(bh^3 - b_1h_1^3).$$

§ 39. Wyznaczenie momentu bezwładności ze względu na oś równoległą do danej.

Znając moment bezwładności I ze względu na oś, przez środek ciężkości powierzchni przechodzącą, możemy łatwo znaleźć moment bezwładności I_1 ze względu na oś X_1X_1 (rys. 71) równoległą do osi XX w następujący sposób: Nazwawszy moment bezwładności elementu powierzchni d^2I , ze względu na oś XX , względnie d^2I_1 ze względu na oś X_1X_1 , otrzymamy:

$$d^2I = d^2Fy^2,$$

$$d^2I_1 = d^2F(y+e)^2 = d^2Fy^2 + 2d^2Fey + d^2Fe^2, \text{ a stąd}$$

$$I_1 = I + 2e \iint d^2Fy + e^2 \iint d^2F.$$

Jeżeli wykonamy jedno całkowanie, naznaczone w drugim wyrazie $2e \iint d^2Fy$, między granicami m i n , to otrzymamy pa-

sek mn o powierzchni $\int_m^n d^2F = dF$, a więc drugi wyraz będzie

równy $2e \int dFy$. Ale dFy jest momentem statycznym paska mn

ze względu na oś XX , a więc $\iint d^2Fy$ jest momentem sta-

tycznym powierzchni przekroju, który jest ze względu na środek ciężkości $= 0$. W trzecim wyrazie jest $\iint d^2F = F$, więc

$$I_1 = I + Fe^2 \dots \dots \dots 148)$$

A zatem moment bezwładności powierzchni F ze względu na oś, odległą o długość e od środka ciężkości, jest równy momentowi bezwładności ze względu na oś, równoległą do osi danej, a przechodzącą przez środek ciężkości, więcej iloczynowi powierzchni przez kwadrat odległości e .

Przykłady. Według 143) jest moment bezwładności prostokąta ze względu na oś, przez środek ciężkości przechodzącą, $I = \frac{1}{12} bh^3$. Moment bezwładności ze względu na oś X_1X_1 (rys. 72), przechodzącą przez podstawę, będzie:

$$I_1 = \frac{1}{12} bh^3 + bh \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} bh^3 \dots \dots \dots 149)$$

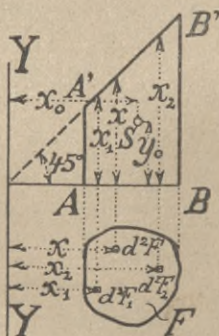
Dla trójkąta mamy $I = \frac{1}{36} bh^3$, a ze względu na oś X_1X_1 (rys. 79), przechodzącą przez podstawę,

$$I_1 = \frac{1}{36} bh^3 + \frac{1}{2} bh \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} bh^3 \dots \dots \dots 150)$$

§ 40. Przestrzenne przedstawienie momentu bezwładności.

Należy wyznaczyć moment bezwładności dowolnej powierzchni F ze względu na oś YY (rys. 101). Zauważmy cząsteczkę powierzchni d^2F , odległą od osi YY o x i wykreślmy od podstawy AB rzędną pionową równą x , to $d^2F \cdot x$ oznacza element objętości graniastosłupa ściętego $AA'B'B'$. Element momentu bezwładności $d^2F x^2 = (d^2F x) \cdot x$ będzie równy momentowi statycznemu elementu objętości graniastosłupa ze względu na YY . Zrobmy to samo dla innych elementów powierzchni d^2F_1 , d^2F_2 i zcałkujemy te elementy, a zobaczymy,

że moment bezwładności powierzchni F ze względu na oś YY równy jest momentowi statycznemu graniastosłupa $AA'B'B'$ ze względu na YY . Jeżeli więc S jest środkiem ciężkości graniastosłupa, którego górna płaszczyzna nachylona jest pod kątem 45°



rys. 101.

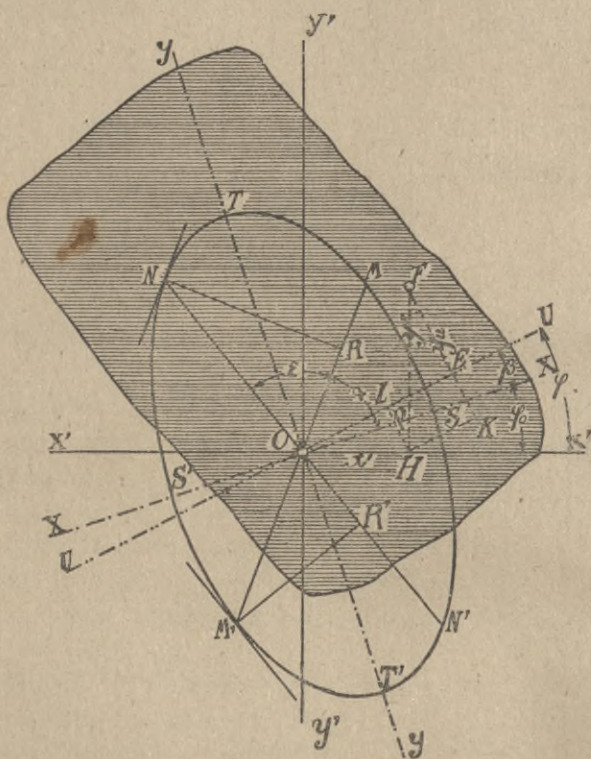
do podstawy, a odstęp tego punktu od YY jest y_0 , to

$$I_y = V y_0 \dots \dots \dots 151)$$

jeżeli V oznacza objętość graniastosłupa.

§ 41. Promień i elipsa bezwładności.

Znając moment bezwładności ze względu na dwie prostopadłe osie $X'X'$ i $Y'Y'$ (rys. 102), przecinające się w punkcie O , możemy znaleźć moment bezwładności danej powierzchni ze względu na oś UU , nachyloną do $X'X'$ pod kątem φ .



rys. 102.

Niech będzie moment bezwładności danej powierzchni I_x ze względu na oś $X'X'$, I_y ze względu na oś $Y'Y'$ a I_u ze względu na oś UU . Zauważmy element powierzchni d^2F w punkcie F , którego rzędne niech będą x' i y' . Spuśćmy z punktu F prostopadłą na UU i nazwijmy ją $FE=y_u$, to widzimy z rysunku, że $y_u=FK-EK=y'$ dost φ — $HL=y'$ dost φ — x' wst φ .

Wiemy, że $I_u = \iint d^2F y_u^2$, więc

$$I_u = \iint (y' \operatorname{dost} \varphi - x' \operatorname{wst} \varphi)^2 d^2 F = \iint y'^2 \operatorname{dost}^2 \varphi d^2 F + \\ + \iint x'^2 \operatorname{wst}^2 \varphi d^2 F - \iint 2x'y' \operatorname{dost} \varphi \operatorname{wst} \varphi d^2 F,$$

czyli nareszcie:

$$I_u = I_x \operatorname{dost}^2 \varphi + I_y \operatorname{wst}^2 \varphi - \operatorname{wst} 2 \varphi \iint x' y' d^2 F \quad . \quad 152)$$

Nazwijmy I_z moment bezwładności ze względu na oś, nachyloną do osi $X'X'$ pod 45° , to $\varphi = 45^\circ$, a więc z równ. 152) otrzymamy:

$$I_z = I_x \operatorname{dost}^2 45^\circ + I_y \operatorname{wst}^2 45^\circ - \operatorname{wst} 90^\circ \iint x' y' d^2 F, \text{ a stąd}$$

$$\mathbf{K} = \iint x' y' d^2 F = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_x + \mathbf{I}_y) - \mathbf{I}_z, \quad . \quad . \quad . \quad 153)$$

jeżeli wyraz $\iint x' y' d^2 F$ oznaczymy literą K . Wyraz ten nazywamy iloczynem bezwładności lub momentem zбочzenia (n. *Zentrifugalmoment*, *Deviationsmoment*, fr. *produit d'inertie*, *moment rectangulaire*, an. *product of inertia*).

Moment zбочzenia możemy analogicznie do § 40 przedstawić przestrzennie. Jeżeli utworzymy sumę momentów statycznych elementów $d^2 F x$ (rys. 101) ze względu na podstawę AB , to

$$\text{otrzymamy } \mathbf{K} = \iint x' y' d^2 F = \iint (d^2 F x) \cdot y = \mathbf{V} y_0 \quad . \quad . \quad 154)$$

Aby wynaleźć najmniejszość i największość I_u (rys. 102) i odnośny kąt $\varphi = \varphi_0$, musimy zróżniczkować równanie 152) i zrobić pochodną równą zeru. Otrzymamy więc:

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = -2I_x \operatorname{dost} \varphi \operatorname{wst} \varphi + 2I_y \operatorname{wst} \varphi \operatorname{dost} \varphi - 2 \operatorname{dost} 2 \varphi K = 0, \text{ czyli}$$

$$\operatorname{wst} 2 \varphi (I_y - I_x) - 2 \operatorname{dost} 2 \varphi K = 0, \text{ a stąd}$$

$$\operatorname{st} 2 \varphi_0 = \frac{2K}{I_y - I_x} \quad . \quad . \quad . \quad 155)$$

Temu wyrazowi odpowiadają dwie wartości φ_0 , różniące się o 90° , a więc φ_0 i $\varphi_0 + 90^\circ$. Różniczkując raz jeszcze, łatwo się możemy przekonać, że raz otrzymamy drugą pochodną dodatnią, drugi raz ujemną, a więc kąty φ_0 i $\varphi_0 + 90^\circ$ wyznaczają osie, dla których I_u jest największem i najmniejszym. Osie te, stojące jedna

na drugiej prostopadle, nazywamy osiami głównymi bezwładności (n. *Hauptträgheitsaxe*, fr. *axe principal d'inertie*, an. *principal axis of inertia*).

Przyjęte dowolnie osie $X'X'$ i $Y'Y'$ stają się osiami głównymi, gdy $\varphi_0 = 0$, a więc gdy

$$K = 0 \dots \dots \dots 156)$$

Jeżeli oś $Y'Y'$ (rys. 103) jest osią symetrii przekroju, to chcąc obliczyć $K = \iint x' y' d^2 F$ i całkując naprzód w pasku mn ,

którego środkiem ciężkości jest p , możemy wyłączyć y' , jako stałą,

a $\int x' d^2 F$ równa się momentowi

statycznemu powierzchni tego paska ze względu na jego środek ciężkości, zatem $= 0$. To samo

zrobiwszy dla innych pasków, zobaczymy, że $K = 0$, a zatem ze względu na 156) możemy powiedzieć, że

gdy przez O może być położoną oś symetrii, oś ta jest zarazem osią główną bezwładności,

oś zaś prostopadła do niej jest drugą osią główną.

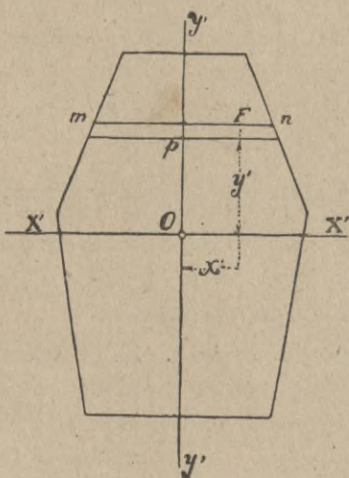
Jeżeli przez dany punkt nie da się poprowadzić osi symetrii, to moment zbieżności K należy wyznaczyć z rów. 153).

Czasem łatwiej jednak wyznaczymy K w następujący sposób, podany przez Müllera Breslaua.

Przypuśćmy, że chcemy wyznaczyć moment zbieżności przekroju ze względu na osie OX i OY , równoległe do osi O_1X_1 i O_1Y_1 , przechodzących przez środek ciężkości przekroju O_1 (rys. 104).

Wedle 154)
$$K = \iint (x_1 + x_0) (y_1 + y_0) d^2 F$$

albo
$$K = \iint x_1 y_1 d^2 F + x_0 \iint y_1 d^2 F + y_0 \iint x_1 d^2 F + x_0 y_0 \iint d^2 F$$



rys. 103.

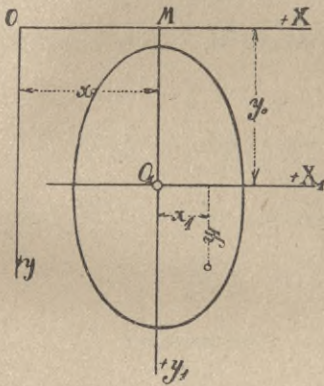
Nazwijmy K_1 moment zbroczenia ze względu na osie $O_1 X_1$ i $O_1 Y_1$, to $K_1 = \iint x_1 y_1 d^2 F$. Dalej mamy ze względu, że O_1 jest środkiem ciężkości $x_0 \iint y_1 d^2 F = 0$ i $y_0 \iint x_1 d^2 F = 0$, zatem

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{F} \dots \dots \dots 157)$$

Jeżeli osie $O_1 X_1$ i $O_1 Y_1$ są osiami głównymi bezwładności, to $K_1 = 0$, więc

$$\mathbf{K} = \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{F} \dots \dots \dots 158)$$

przyczem uwzględnić zawsze należy znak rzędnych x_0 i y_0 .



rys. 104.

Jeżeli nazwiemy I moment bezwładności ze względu na oś główną XX (rys. 102), a I_1 na oś główną YY , β kąt nachylenia osi UU do osi głównej XX , to ze względu na rów. 152) i 153) możemy napisać, ponieważ tu $K=0$, $I_u = I \text{dost}^2 \beta + I_1 \text{wst}^2 \beta \dots \dots \dots 159)$

Dla $\beta = 45^\circ$ otrzymamy

$$I_{45} = \frac{1}{2} (I + I_1)$$

$$I_1 = 2 I_{45} - I \dots \dots \dots 160)$$

Możemy także napisać, wstawiając w 159) $\beta = -\varphi_0$,

$$I_x = I \text{dost}^2 (-\varphi_0) + I_1 \text{wst}^2 (-\varphi_0) = I \text{dost}^2 \varphi_0 + I_1 \text{wst}^2 \varphi_0,$$

$$I_y = I \text{wst}^2 \varphi_0 + I_1 \text{dost}^2 \varphi_0, \text{ a zatem}$$

$$I = \frac{I_x}{\text{dost}^2 \varphi_0} - I_1 \text{st}^2 \varphi_0, \text{ więc } I_y = I_x \text{st}^2 \varphi_0 - I_1 \text{wst}^2 \varphi_0 \text{st}^2 \varphi_0 + I_1$$

$\text{dost}^2 \varphi_0$, czyli

$$I_y \text{dost}^2 \varphi_0 - I_x \text{wst}^2 \varphi_0 = I_1 \text{dost}^2 \varphi_0 - I_1 (1 - \text{dost}^2 \varphi_0)^2 = I_1 (2 \text{dost}^2 \varphi_0 - 1),$$

$$I_1 = \frac{I_y \text{dost}^2 \varphi_0 - I_x \text{wst}^2 \varphi_0}{2 \text{dost}^2 \varphi_0 - 1} \dots \dots \dots 161)$$

Dodawszy wartości I_x i I_y , otrzymamy

$$I_x + I_y = I (\text{dost}^2 \varphi_0 + \text{wst}^2 \varphi_0) + I_1 (\text{wst}^2 \varphi_0 + \text{dost}^2 \varphi_0) = I + I_1, \dots \dots \dots 162)$$

$$\text{a więc } I = (I_x + I_y) - I_1 \dots \dots \dots 163)$$

Moment bezwładności wogóle możemy inaczej jeszcze wyrazić, mianowicie równaniem $I = \mathbf{F} \mathbf{a}^2, \dots \dots \dots 164)$

którebyśmy otrzymali, skupiwszy całą powierzchnię F w jednym punkcie i umieściwszy ją w oddaleniu a od osi. Iloczyn Fa^2 równałby się momentowi bezwładności I . Długość a nazywamy promieniem bezwładności (n. *Trägheitsradius*, fr. *rayon de gyration*, an. *radius of gyration*, cz. *połomer setrvačnosti*).

Pomyślmy, żeśmy obliczyli dla dowolnej ilości osi, przez O przechodzących, momenty bezwładności i odetnijmy na każdej z tych osi długość odwrotnie proporcjonalną do pierwiastku momentu bezwładności (rys. 102) tak, że n. p. $OM = \frac{c}{\sqrt{I_m}}$, gdy c jest dowolną ilością stałą, a I_m momentem bezwładności ze względu na OM , to $I_m = \frac{c^2}{OM^2}$. Jeżeli rzędne punktu M , odniesione do osi głównych, są $OP = x$ i $PM = y$, to

dost $\alpha = \frac{x}{OM}$, a wst $\alpha = \frac{y}{OM}$, a więc ze względu na 159)

$I_m = I \frac{x^2}{OM^2} + I_1 \frac{y^2}{OM^2}$. Wstawivszy wartości za OM , otrzymamy $I_m = II_m \frac{x^2}{c^2} + I_1 I_m \frac{y^2}{c^2}$, a więc $c^2 = Ix^2 + I_1 y^2$.

Wstawmy teraz $I = Fa^2$ i $I_1 = Fa_1^2$, a otrzymamy $c^2 = Fa^2 x^2 + Fa_1^2 y^2$, albo

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{c^2}{Fa^2 a_1^2} \dots \dots \dots 165)$$

Jest to równanie elipsy, którą nazywamy elipsą bezwładności (n. *Trägheitsellipse*, fr. *ellipse d'inertie*, an. *ellipse of inertia*). Jeżeli przytem przyjmiemy $c^2 = Fa^2 a_1^2$, to rów. 165) możemy napisać

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \dots \dots \dots 166)$$

Jestto równanie elipsy bezwładności, której połowy osi głównych są a i a_1 , promieniami bezwładności głównych momentów bezwładności. W tym wypadku jest

$$OM^2 = \frac{c^2}{I_m} = \frac{Fa^2 a_1^2}{Fa_m^2}, \text{ więc } a_m = \frac{aa_1}{OM}$$

Jeżeli MM' i NN' są osiami sprzężonymi elipsy bezwładności, a kąt między nimi zawarty ε , to na mocy znanej własności elipsy jest

chodzącej przez punkt O . Poprowadźmy styczną do elipsy, równoległą do NN' , a odległość obu linii $MR' = a_n$ jest promieniem bezwładności, więc $I_n = Fa_n^2$.

Z równ. 159) wynika, że jeżeli $I = I_1$, to $I_m = I$ (dost² $\beta + +$ wst² β) = I , a więc, gdy momenty bezwładności dla osi głównych są równe, to także i moment ze względu na jakąkolwiek oś, przechodzącą przez środek ciężkości jest równy momentowi ze względu na oś główną, czyli wszystkie momenty bezwładności, ze względu na osie, przechodzące przez punkt O , są równe; elipsa bezwładności staje się kołem.

Przykłady.

1. Wyznaczyć elipsę środkową przybliżonego przekroju austr. *I l.* 28, wykreślonego na rys. 105. Przekrój jest symetryczny, więc oś symetrii YY jest jedną osią główną, drugą zaś oś $XX \perp YY$, przechodząca przez środek ciężkości.

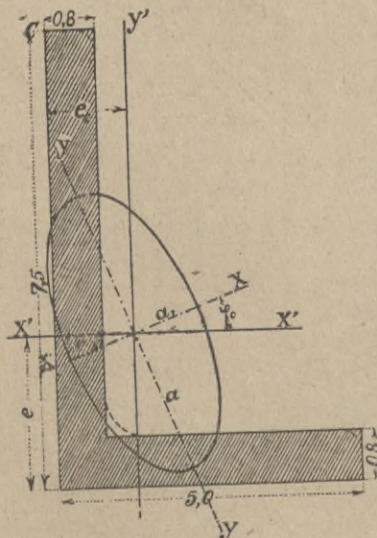
Obliczmy najprzód I i I_1 , a otrzymamy

$$I = \frac{1}{12} (12 \times 28^3 - (12 - 1,1) (28 - 3,4)^3) = \frac{1}{12} (263\,424 - 162\,266) = 8\,429,8 \text{ cm}^4,$$

$$I_1 = \frac{1}{12} (2 \times 1,7 \times 12^3 + (28 - 3,4) 1,1^3) = \frac{1}{12} (5\,865,2 - 32,7) = 486,0 \text{ cm}^4.$$

Powierzchnia przekroju $F = 2 \times 12 \times 1,7 + (28 - 3,4) 1,1 = 67,86 \text{ cm}^2$, więc połowy osi głównych elipsy środkowej będą

$$a = \sqrt{\frac{8\,429,8}{67,86}} = 11,15 \text{ cm}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{486,0}{67,86}} = 2,68 \text{ cm}.$$



rys. 106.

2. Dla przybliżonego przekroju kątowniki $\frac{50,75}{8}$ o wymiarach, podanych na rys. 106, obliczyć wielkość i położenie osi głównych środkowej elipsy bezwładności.

Musimy najprzód znaleźć spólrzędne środka ciężkości O . W tym celu korzystając będziemy z równania $S = fe$, gdy S oznacza moment statyczny powierzchni przekroju ze względu na dolną podstawę, F powierzchnię przekroju, a e odległość środka ciężkości O od prostej AB . Możemy więc napisać

$$e = \frac{S}{F} \dots \dots \dots 167)$$

Wstawiając wartości otrzymamy

$$e = \frac{7,5 \cdot 0,8 \cdot 3,75 + (5 - 0,8) 0,4}{7,5 \cdot 0,8 + (5 - 0,8) 0,8} = \frac{23,844}{9,36} = 2,55 \text{ cm}.$$

Jeżeli S_1 i e_1 oznaczać będą moment statyczny ze względu na pionową BC , względnie odległość środka ciężko-

ści O od BC , to

$$e_1 = \frac{S_1}{F} = \frac{5,0 \cdot 0,8 \cdot 2,5 + (7,5 - 0,8) \cdot 0,4}{9,36} = \frac{12,14}{9,36} = 1,30 \text{ cm.}$$

Teraz obliczamy moment bezwładności I_x ze względu na oś $X'X'$ i I_y ze względu na oś $Y'Y'$. Dla wyznaczenia tych momentów rozłożymy przekroje na prostokąty i korzystać będziemy z wzorów 147) i 149). Nazwawszy b i h podstawę i wysokość prostokąta, mamy mianowicie momenty bezwładności ze względu na podstawę $I_1 = \frac{1}{3} bh^3$. Nazwawszy dalej I_c moment bezwładności ze względu na oś BC , I_a ze względu na BA , otrzymamy

$$I_c = \frac{1}{3} (0,8 \cdot 5^3 + (7,5 - 0,8) 0,8^3) = 34,48 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_c - Fe_1^2 = 34,48 - 9,36 \cdot 1,30^2 = 18,66 \text{ cm}^4.$$

$$\text{Dalej mamy } I_a = \frac{1}{3} (0,8 \cdot 7,5^3 + (5 - 0,8) 0,8^3) = 113,224 \text{ cm}^4.$$

$$I_x = I_a - Fe^2 = 113,22 - 9,36 \cdot 2,55^2 = 52,36 \text{ cm}^4.$$

Teraz obliczymy moment zbieżności K wedle równ. 158) i otrzymamy

$$K = -(1,30 - 0,4) (3,75 - 2,55) 7,5 \cdot 0,8 - (2,5 - 1,3) (2,55 - 0,4) (5 - 0,8) 0,8$$

$$K = -6,48 - 8,67 = -15,15 \text{ cm}^4,$$

a ze względu na równanie 155)

$$\text{st } 2\varphi_0 = \frac{2(-15,15)}{18,66 - 52,36} = \frac{30,30}{-33,70} = -0,8991$$

$$\text{a stąd } 2\varphi_0 = 41^\circ 57' 28'' \quad \varphi_0 = 20^\circ 58' 34''.$$

Teraz obliczymy I na podstawie równania 152)

$$I = I_x \text{ dost}^2 \varphi_0 + I_y \text{ wst}^2 \varphi_0 - \text{wst } 2\varphi \cdot K$$

$$\text{albo } I = 52,36 \text{ dost}^2 \varphi + 18,66 \text{ wst}^2 \varphi + \text{wst}^2 \varphi 15,15 = 45,65 + 2,39 + 10,13$$

$$I = 58,17 \text{ cm}^4,$$

$$\text{a dalej wedle 163) } I_1 = 18,36 + 52,36 - 58,17 = 12,85 \text{ cm}^4.$$

I_1 mogliśmy też obliczyć z rów. 161)

$$I_1 = \frac{18,66 \text{ dost}^2 \varphi_0 - 52,36 \text{ wst}^2 \varphi_0}{2 \text{ dost}^2 \varphi_0 - 1} = 12,85 \text{ cm}^4.$$

Długości połówek osi głównych elipsy środkowej są więc:

$$a = \sqrt{\frac{58,17}{9,36}} = 2,493 \text{ cm}, a_1 = \sqrt{\frac{12,85}{9,36}} = 1,172 \text{ cm.}$$

3. Wyznaczyć elipsę bezwładności dla zetówki austrij. l. 10 (rys. 107).

Ze względu na oś poziomą X_1X_1 otrzymamy

$$I_x = \frac{1}{12} 0,65 \cdot 10^3 + \frac{1}{12} (5 - 0,65) (10 - 2 \cdot 0,95)^3$$

$$I_x = 54,17 + 169,82 = 223,99 \text{ cm}^4.$$

Ze względu na oś pionową Y_1Y_1 mamy

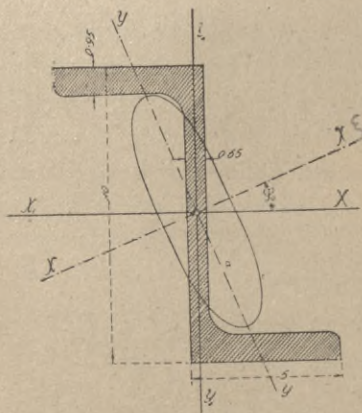
$$I_y = \frac{1}{12} (10 - 0,95) 0,65^3 + \frac{1}{12} (0,95 (5 + 5 - 0,65))^3$$

$$I_y = 0,16 + 64,71 = 64,87 \text{ cm}^4.$$

Dalej mamy moment zbieżności

$$K = 0 - 2 \cdot 5 \cdot 0,95 (5 - 0,475) \times (2,5 - 0,325)$$

$$K = -93,50 \text{ cm}^4.$$



rys. 107.

Wedle rów. 155) mamy teraz

$$\text{st } 2\varphi = \frac{-2 \cdot 93,5}{64,87 - 223,99} = 1,1745,$$

$$\text{stad } 2\varphi_0 = 49^{\circ}35'17'' \text{ a } \varphi_0 = 24^{\circ}47'38''.$$

Teraz obliczymy I na podstawie rów. 152)

$$I = 223,99 \text{ dost}^2\varphi + 64,87 \text{ wst}^2\varphi + \text{wst } 2\varphi \cdot 93,5 = 184,60 + 11,41 + 71,19$$

$$I = 267,20 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = 64,97 + 223,99 - 267,20 = 21,66 \text{ cm}^4.$$

Długość połówek osi głównych elipsy bezwładności otrzymamy

$$a = \sqrt{\frac{267,2}{14,77}} = 4,25 \text{ cm}, \quad b = \sqrt{\frac{21,66}{14,77}} = 1,21 \text{ cm}.$$

4. Przekrój eliptyczny.

Moment bezwładności ze względu na oś poziomą XX jest

$$I = \frac{\pi}{64} b h^3.$$

Nazwijmy połowy osi elipsy a' i b' , to

$$a' = \frac{h}{2}, \quad b' = \frac{b}{2}, \quad \text{mamy więc } I = \frac{\pi}{4} b' a'^3,$$

a stad połowa osi głównej elipsy środkowej

$$a = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{4} b' a'^3}{a' b' \pi}} = \frac{1}{2} a'.$$

Podobnie otrzymamy $b = \frac{1}{2} b'$

Elipsa środkowa jest więc podobną do danej elipsy, a jej osie równają się połowom osi danej elipsy. To samo odnosi się do koła.

§ 42. Elipsa bezwładności ze względu na osie ukośne.

Jeżeli istnieje w przekroju oś symetrii tylko ze względu na osie ukośne, to w takim razie możemy użyć tych osi do wykreślenia elipsy bezwładności. Przyjmijmy w O (rys. 108) parę osi ukośnych $X'X'$ i $Y'Y'$, z których ostatnia jest zarazem ukośną osią symetrii. Niech ukośne rzędne punktu danego F będą y' i x' , odstęp punktu F od dowolnej osi UU , nachylonej do $X'X'$ pod kątem φ , niech będzie

$$EF = y_u = y' \text{ dost } \gamma - x' \text{ wst } \varphi.$$

Moment bezwładności przekroju ze względu na oś UU będzie

$$I_u \iint (y' \text{ dost } \gamma - x' \text{ wst } \varphi)^2 d^2F = \text{dost}^2\gamma \iint y'^2 d^2F + \\ + \text{wst}^2\varphi \iint x'^2 d^2F - 2 \text{ dost } \gamma \text{ wst } \varphi \iint x'y' d^2F.$$

Ponieważ wedle założenia $\iint x'y' d^2F = 0$ z powodu symetrii,

więc $I_u = \text{dost}^2 \gamma \iint y'^2 d^2 F + \text{wst}^2 \varphi \iint x'^2 d^2 F \dots 168)$

Z rysunku widzimy, że $FL = y' \text{wst} \beta$ i $FD = x' \text{wst} \beta$, więc

$$I_x = \text{wst} \beta \iint y'^2 d^2 F, \quad I_y = \text{wst}^2 \beta \iint x'^2 d^2 F.$$

Wstawivszy to w rów. 168), otrzymamy

$$I_u = \frac{\text{dost}^2 \gamma}{\text{wst}^2 \beta} \cdot I_x + \frac{\text{wst}^2 \varphi}{\text{dost}^2 \beta} I_y \dots 169)$$

Wstawmy teraz w rów. 169)

$$I_x = F \cdot a'^2, \quad I_y = F \cdot a_1'^2, \quad I_u = F a_u^2$$

to $a_u^2 = \frac{\text{dost}^2 \gamma}{\text{wst}^2 \beta} a'^2 + \frac{\text{wst}^2 \varphi}{\text{wst}^2 \beta} a_1'^2$.

Poprowadźmy $MN \parallel OU$ i nazwijmy odcinki na osiach $OM = p$, $ON = q$, to

$$\text{dost} \gamma = \frac{OR}{q} \text{wst} \varphi = \frac{OR}{p}, \text{ więc}$$

$$a_u^2 = \frac{OR^2 a^2}{\text{wst}^2 \beta q^2} + \frac{OR^2 a_1'^2}{\text{wst}^2 \beta p^2}.$$

Jeżeli poprowadzimy MN w takim oddaleniu, aby $OR = a_u$

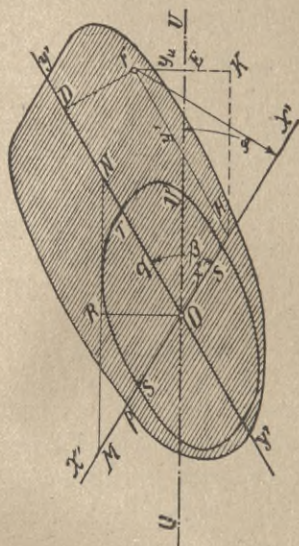
$$\text{to } 1 = \frac{a'^2}{\text{wst}^2 \beta q^2} + \frac{a_1'^2}{\text{wst}^2 \beta p^2} \dots 170)$$

Jestto równanie elipsy ze względu na odcinki stycznych q i p i da się wyznaczyć w znany sposób*) równanie obwiednej stycznych MN

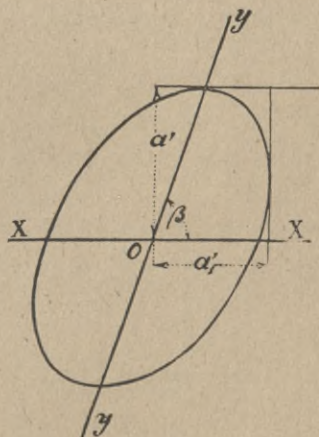
$$\frac{x'^2 \text{wst}^2 \beta}{a'^2} + \frac{y'^2 \text{wst}^2 \beta}{a_1'^2} = 1 \dots 171)$$

równanie elipsy ze względu na sprzężone osie OX i OY (rys. 109).

A zatem każda para osi, ze względu na którą $\iint xy d^2 F$ jest zerem, czyli każda para osi, z których jedna jest osią u



rys. 108.

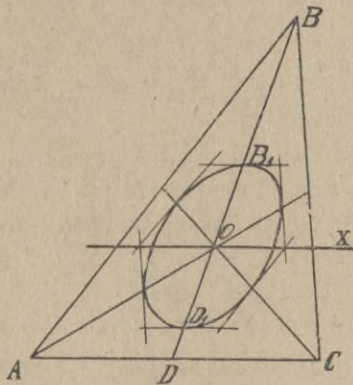


rys. 109.

*) P. Keck. Vorträge über Elastizitätslehre, str. 28.

kośną symetrii, jest zarazem parą osi sprzężonych elipsy bezwładności.

Przykład. W trójkącie ABC (rys. 110) zróbmy $AD=DC$, to DB jest ukośną osią symetrii, a zatem BD i OX osiami sprzężonymi elipsy.



rys. 110.

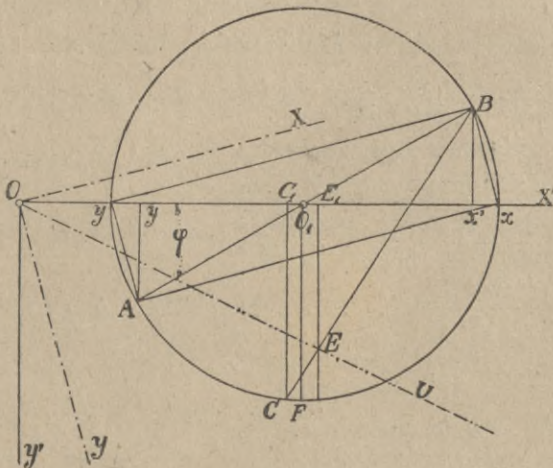
Wiemy, że $I_x = \frac{1}{36} bh^3$, $F = \frac{1}{2} bh$,

więc $a^2 = \frac{1}{18} h^3$, $a = 0,236 h$. Zróbmy więc $D_1O = OB_1 = 0,236 BD$, to D_1 i B_1 są to punkty elipsy bezwładności, w których styczne są poziome. To samo zrobić możemy ze względu na drugie dwa boki trójkąta AB i BC .

43. Koło bezwładności.

Zmiana momentu bezwładności przekroju dla osi, przechodzących przez ten sam punkt a rozmaicie nachylonych, da się jeszcze inaczej przedstawić według Müllera-Breslaua.

Niechaj $Ox' = I_x$ (rys. 111) a $Oy' = I_y$, przyczem przypuścmy



rys. 111.

że $I_x > I_y$. Wystawmy w x' i y' prostopadłe na OX' , mianowicie $Bx' = -K$ i $Ay' = +K$. Zatoczmy teraz na średnicy AB koło, to

posłuży nam ono do wyznaczenia momentu bezwładności ze względu na dowolną oś.

I tak dla dowolnej osi OU , nachylonej do OX' pod kątem φ , wykreślmy $BE \perp OU$, przedłużmy BE do C , wykreślmy $CC_1 \perp OX'$, to

$$OC_1 = OE_1 - E_1C_1 = OE \text{ dost } \varphi - EC \text{ wst } \varphi,$$

$$OE = I_x' \text{ dost } \varphi - K \text{ wst } \varphi, EC = K \text{ dost } \varphi - I_y' \text{ wst } \varphi, \text{ więc}$$

$$OC_1 = (I_x' \text{ dost } \varphi - K \text{ wst } \varphi) \text{ dost } \varphi - (K \text{ dost } \varphi - I_y' \text{ wst } \varphi) \text{ wst } \varphi.$$

$$OC_1 = I_x' \text{ dost}^2 \varphi + I_y' \text{ wst}^2 \varphi - 2 \text{ wst } \varphi \text{ dost } \varphi K = I_u.$$

A zatem OC_1 przedstawia dla osi OU moment bezwładności.

Jeśli kąt φ będziemy zmieniać, to punkt C porusza się będzie po obwodzie koła, a rzut jego C_1 na prostej. Widzimy stąd, że najmn. $I = Oy = I_1$, najw. $I = Ox = I$.

Dla najmn. $I = I_1$ oś OY musi być \perp do By , a więc być równoległą do yA , zaś $OX \perp Bx$ czyli $OX \parallel Ax$. W ten sposób wyznaczyliśmy osie główne bezwładności.

Z rysunku wynika, że $CC_1 = K'$ jest momentem zboczenia dla osi OU . Moment zboczenia jest zerem dla osi głównych i rośnie do pewnej największości OF . Z rysunku też widzimy, że $I_x' + I_y' = I + I_1$, co zgadza się z rów. 162).

§ 44. Punkty stałe przekroju.

Na rys. 105 wykreśliliśmy elipsę bezwładności środkową, a więc $I = Fa^2$, $I_1 = Fa_1^2$, a ze względu na oś U będzie $I_u = I \text{ dost}^2 \varphi + I_1 \text{ wst}^2 \varphi = I(1 - \text{wst}^2 \varphi) + I_1 \text{ wst}^2 \varphi = F[a^2 - (a^2 + a_1^2) \text{ wst}^2 \varphi]$. Moment bezwładności ze względu na oś WW , odległą o $d = OL$ od UU , będzie $I_w = F[a^2 - (a^2 - (a^2 - a_1^2) \text{ wst}^2 \varphi + d^2)]$.

Zróbmy według Mohra $OF = OF' = \sqrt{a^2 - a_1^2} =$ odległości ogniska elipsy od środka O , to otrzymamy $d^2 - (a^2 - a_1^2) \text{ wst}^2 \varphi = \overline{OL}^2 - \overline{OF}^2 \text{ wst}^2 \varphi = \overline{OL}^2 - \overline{OM}^2 = (OL + OM) \times (OL - OM) = = FE \cdot F'E' = e_1 e_2$, a więc:

$$I_w = F[a^2 + e_1 e_2] \dots \dots \dots 172)$$

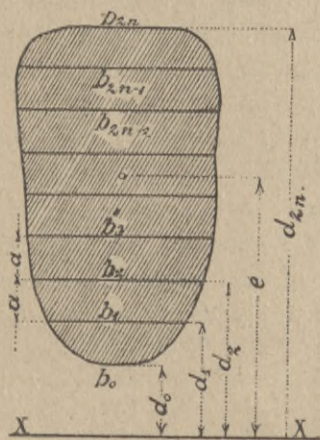
Na mocy tego równania możemy wyznaczyć moment bezwładności ze względu na dowolną oś, jeżeli znamy elipsę środkową przekroju, albo przynajmniej a i punkty F i F' .

Jeżeli dana oś przechodzi przez punkt F lub F' , to e_1 lub e_2 staje się równem zeru, wtedy moment bezwładności równa się

stałej ilości $F a^2$. Ze względu na tę własność nazywamy punkty F i F' punktami stałymi (n. *Fixpunkte*). Elipsy bezwładności są dla tych punktów kołami. Jeżeli $a = a_1$, to punkty stałe przypadają na punkt O .

§ 45. Liczebne wyznaczenie momentu bezwładności dla figur nieregularnych.

Dla figur nieregularnych wyznaczamy moment bezwładności liczebnie najlepiej za pomocą znanej metody Simpsona, której udowodnienie należy do mechaniki rozumowej.



rys. 112.

W celu wyznaczenia momentu bezwładności przekroju nieregularnego (rys. 112) ze względu na oś XX dzielimy przekrój prostami równoległymi do XX na parzystą ilość równo grubych pasków. Nazwawszy długości tych prostych $b_0, b_1, b_2 \dots b_{2n}$, ich odstępów od XX $d_0, d_1, d_2 \dots d_{2n}$, a grubość pasków a , otrzymamy moment bezwładności ze względu na XX :

$$I_1 = \frac{a}{3} [b_0 d_0^2 + b_{2n} d_{2n}^2 + 4 (b_1 d_1^2 + b_3 d_3^2 + \dots + b_{2n-1} d_{2n-1}^2) + 2 (b_2 d_2^2 + b_4 d_4^2 + \dots + b_{2n-2} d_{2n-2}^2)] \dots \dots \dots 173)$$

Znając I_1 możemy wyznaczyć moment bezwładności ze względu na środek ciężkości według znanego równania $I = I_1 + -F e^2$.

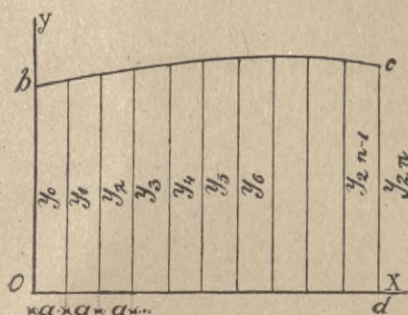
Długość e otrzymamy z równania 167) $e = \frac{S}{F}$, przyczem moment statyczny S powierzchni przekroju ze względu na XX jest według Simpsona:

$$S = \frac{a}{3} [b_0 d_0 + b_{2n} d_{2n} + 4 (b_1 d_1 + b_3 d_3 + \dots + b_{2n-1} d_{2n-1}) + 2 (b_2 d_2 + b_4 d_4 + \dots + b_{2n-2} d_{2n-2})] \dots \dots \dots 174)$$

a powierzchnia:

$$F = \frac{a}{3} [b_0 + b_{2n} + 4(b_1 + b_3 + \dots + b_{n-1}) + 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{n-2})]. \quad 175)$$

Wzór 173) jest jednak niedogodnym w praktyce, bo musimy wykonać $2n-1$ mnożeń, dlatego też używamy innych wzorów, które zaraz podamy.



rys. 113.

Jeżeli mamy wyznaczyć moment bezwładności powierzchni $Obcd$ (rys. 113) ze względu na oś OX i OY , to otrzymamy według Simpsona, podzieliwszy powierzchnię znów na parzystą ilość pasków o grubości a , ze względu na oś OX :

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \frac{a}{9} [y_0^3 + 4y_1^3 + 2y_2^3 + 4y_3^3 + 2y_4^3 + \dots + 4y_{2n-1}^3 + y_{2n}^3], \\ \text{a ze względu na oś } OY: \\ I_y &= \frac{a^3}{3} [0^2 y_0 + 1^2 \cdot 4y_1 + 2^2 \cdot 2y_2 + 3^2 \cdot 4y_3 + \dots + (2n-1)^2 4y_{2n-1} + (2n)^2 y_{2n}] \end{aligned} \right\} \dots 176)$$

Podobnie otrzymamy powierzchnię:

$$F = \frac{a}{3} [y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})] \quad 177)$$

i moment statyczny ze względu na oś OX :

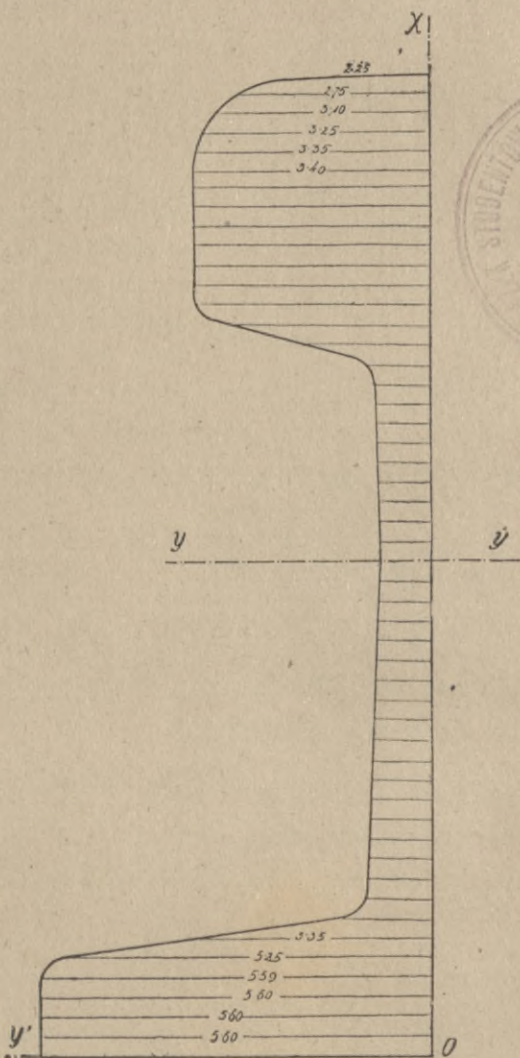
$$S_x = \frac{a}{6} [y_0^2 + y_{2n}^2 + 4(y_1^2 + y_3^2 + \dots + y_{2n-1}^2) + 2(y_2^2 + y_4^2 + \dots + y_{2n-2}^2)] \dots 178)$$

zaś ze względu na oś OY :

$$S_y = \frac{a^2}{3} [0 \cdot y_0 + 2ny_{2n} + 4(1 \cdot y_1 + 3y_3 + \dots + (2n-1)y_{2n-1}) + 2(2y_2 + 4y_4 + \dots + (2n-2)y_{2n-2})] \dots 179)$$

Wzory te są o tyle dla praktyki korzystniejsze, że kwadraty i sześciiany możemy wziąć z tablic, a przez to znacznie sobie ułatwić rachunek.

Przykład. Obliczyć moment bezwładności szyny austriackich kolei pierwszorzędnych (rys. 114). Z powodu symetrii liczymy moment dla połowy szyny i dzielimy ją na 50 pasków o grubości 0,28 cm.



rys. 114.

Z wzorów 176) otrzymujemy:

$$\frac{I_x}{2} = \frac{0,28}{9} [5,6^3 + 4 \times 5,6^3 + 2 \times 5,6^3 + 4 \times 5,6^3 + 2 \times 5,59^3 + \dots + 4 \times 2,75^3 + 2,25^3]$$

$$I_x = 272,94 \text{ cm}^4.$$

długościami, obierzmy dowolny biegun O , wykreślmy zeń promienie i wielobok sznurowy pmb .

Punkt D przecięcia się przedłużeń boków skrajnych wyznacza położenie wypadkowej R . Przedłużmy boki pm i mn wieloboku sznurowego do osi XX , to otrzymamy trójkąt $mfd \sim 012$, a stąd $fd : y_2 = 12 : a$. Długość $12 = P_2$, więc

$$fd = \frac{P_2 y_2}{a} \dots \dots \dots 180)$$

A więc moment statyczny dowolnej siły jest proporcjonalnym do długości fd , odciętej przedłużeniami odnośnych boków wieloboku sznurowego, co zresztą wynika wprost z § 7. Jeżeli to samo zrobimy ze wszystkimi siłami, to

$$CB = \sum \frac{P y_2}{a} = \frac{S_1}{a}, \dots \dots \dots 181)$$

a stąd moment statyczny $S_1 = a \cdot CB$.

Uważajmy teraz odcinki fd jako siły, to CB będzie wielobokiem sił. Przyjmijmy drugi biegun O_1 , poprowadźmy promienie i wykreślmy drugi wielobok sznurowy $wu C_1$. Wtedy otrzymamy:

$$ud_1 f_1 \sim O_1 fd, \text{ a stąd } d_1 f_1 = \frac{fd \cdot y_2}{b}.$$

Wstawiając za fd wartość z równ. 180), otrzymamy: $d_1 f_1 = \frac{P_2 y_2^2}{ab}$, a zatem $C_1 B_1 = \sum \frac{P y_2}{ab} = \frac{I_1}{ab}$, więc

$$I_1 = C_1 B_1 a b, \dots \dots \dots 182)$$

jeżeli I_1 oznacza moment bezwładności sił P_1, P_2, P_3, P_4 ze względu na oś XX .

Sposób ten wyznaczania momentu bezwładności podał Culmann. Według niego więc prosta $C_1 B_1$, odcięta na osi przedłużeniem boków skrajnych drugiego wieloboku sznurowego, jest proporcjonalną do momentu bezwładności. $C_1 B_1$ odczytujemy w podziałce sił, odległości biegunowe a i b w podziałce długości.

Możemy jednak i w inny sposób wyznaczyć moment bezwładności. Według równ. 180) $fd = \frac{P_2 y_2}{a}$, a więc $P_2 y_2 = a \cdot fd$, a stąd:

$$P_2 y_2^2 = a \cdot fd \cdot y_2 = 2 a \Delta fmd.$$

Jeżeli to samo zrobimy dla innych sił, to powierzchnia

$$C_p B = \frac{\Sigma P y_2}{2a}, \text{ a stąd:}$$

$$I_1 = 2 a \text{ pow. } C_p B. \dots \dots \dots 183)$$

A więc moment bezwładności według tego sposobu, podanego przez Mohra, jest równy powierzchni ograniczonej osią, wielobokiem sznurowym i przedłużeniami boków skrajnych, pomnożonych przez podwójną odległość biegunową a , wyrażoną w podziałce sił.

Gdy mamy obliczyć moment bezwładności powierzchni nieregularnej, dzielimy ją na paski prostymi równoległymi do danej osi, szukamy środków ciężkości tych pasków i uważamy powierzchnie tych pasków jako siły równoległe, zaczepiające w środkach ciężkości pasków. Dalszy tok konstrukcji jest zupełnie ten sam, co dla sił P_1, P_2, P_3, P_4 , tylko że zamiast sił wchodzi tu w rachunek powierzchnie. Powierzchnie pasków wyznaczyć możemy w rozmaity sposób, a mianowicie zamieniając je na powierzchnie czworoboków o danej podstawie lub też za pomocą linii całkowej. Zawsze otrzymamy powierzchnie jako iloczyn dwóch długości, a mianowicie długości $01, 12$ i t. d., pomnożonej przez pewną długość c , wspólną wszystkim paskom. Zamiast odczytywać długość CB lub a w podziałce powierzchni, możemy więc odczytywać je w podziałce długości i pomnożyć przez c . Otrzymamy zatem z równ. 182) według Culmanna:

$$I_1 = C_2 B_1 a \cdot b \cdot c \dots \dots \dots 184)$$

a z równ. 183) według Mohra:

$$I_1 = 2 a \cdot c \text{ pow. } C_p B. \dots \dots \dots 185)$$

Chcąc wyznaczyć I , moment bezwładności sił P_1, P_2, P_3, P_4 ze względu na oś, położoną przez punkt D w kierunku wypadkowej R , otrzymamy z równ. 181): $CB = \frac{S_1}{a} = \frac{Re}{a}$, gdy e oznacza

odstęp wypadkowej od osi XX . Dalej otrzymamy $\Delta CDB = \frac{Re^2}{2a}$,

a więc: $Re^2 = 2a \Delta CDB$.

Wiemy, że $I = I_1 - Re^2 = 2a F - 2a \cdot \Delta CDB$, jeżeli $F = \text{pow. } C_p B$, stąd:

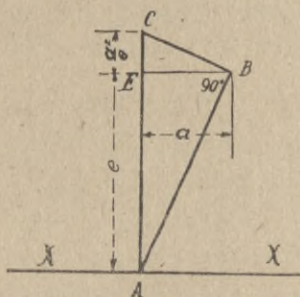
$$I = 2a (F - \Delta CDB) = 2a F_0, \dots \dots \dots 186)$$

jeżeli $F_0 = \text{pow. } D_{pmn} B$.

Analogicznie otrzymamy dla momentu bezwładności powierzchni ze względu na oś ciężkości:

$$I = 2 a \cdot c \cdot F_0 \dots \dots \dots 187)$$

Licząc dokładniej sposobem Culmanna, musimy uwzględnić tę okoliczność, że moment bezwładności danego paska jest według równ. 148) ze względu na daną oś XX , odległą od środka ciężkości paska o długość e (rys. 116) $I_1 = I + Fe^2$, podczas gdyśmy dotychczas przyjmowali w przybliżeniu $I_1 = Fe^2$.



rys. 116.

Jeżeli paski są dość wąskie, moment bezwładności I paska ze względu na jego środek ciężkości jest mały i możemy go opuścić.

Jeżeli zaś paski są większe i chcemy dokładniej wyznaczyć moment bezwładności; to przesuwamy, rysując drugi wielobok sznurowy, kierunki sił (t. j. tu momentów statycznych S). Mamy bowiem $I_1 =$

$$= I + Fe^2 = F(a^2 + e^2), \text{ jeżeli } a = \sqrt{\frac{I}{F}} \text{ oznacza promień bezwładności.}$$

Moment statyczny $S = Fe$, więc

$$\frac{I_1}{S} = \frac{a^2 + e^2}{e} = e + \frac{a^2}{e} = e_1.$$

Robimy więc poprawkę, przyjmując zamiast długości e długość e_1 , a zatem oddalając punkt zaczepienia momentu statycznego S

dla drugiego wieloboku o $(e_1 - e) = \frac{a^2}{e}$. Długość $\frac{a^2}{e}$ znajdujemy łat-

wo wykreślić, kreśląc prostopadle do ramienia e $EB = a$, promieniowi bezwładności*), łącząc punkt A w osi XX z punktem B i kreśląc $BC \perp AB$. Wtedy $EC \cdot AE = a^2$, więc $EC = \frac{a^2}{e}$, zatem

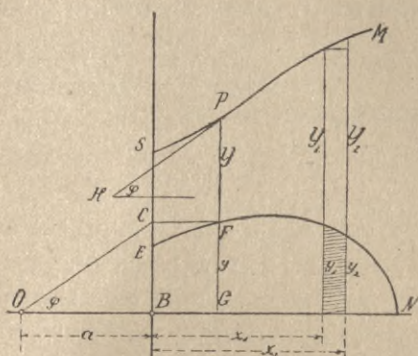
C jest punktem zaczepienia momentu statycznego.

§ 47. Linia całkowa.

Mówiliśmy, że powierzchnie pasków możemy wyznaczyć za pomocą linii całkowej otóż zastanowimy się teraz nieco nad istotą linii całkowej i nad sposobem jej wykreślenia.

*) Dla prostokąta $a = 0,288 h$, jeżeli h wysokość paska.

Rzędne linii całkowej *SPM* (rys. 117) są funkcjami rzędnych danej linii *EFN*, wyrażonych równaniem $y=f(x)$.



rys. 117.

Dla linii całkowej będzie

$$Y = \int \frac{f(x)}{a} dx + C,$$

gdzie a i C są ilościami stałymi. Linie *EFN* nazywamy wtedy ze względu na linie *SPM* liniami różniczkową.

Zrózniczkowawszy poprzednie równanie, otrzymamy:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{f(x)}{a} = \text{st } \varphi,$$

jeżeli φ jest kątem nachylenia stycznej *PH* linii całkowej w *P*

do poziomu. Poprowadźmy $FC \parallel NB$, a $CO \parallel PH$, to $\sphericalangle COB = \varphi$,

a więc $\text{st } \varphi = \frac{f(x)}{a} = \frac{y}{OB}$, a stąd $OB = a$.

Długość a nazywamy odległością biegunową a O biegunem.

Chcąc wyznaczyć powierzchnię, zawartą między linią różniczkową, osią i rzędnymi y_1 i y_2 , mamy:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = (Y_2 - C) a - (Y_1 - C) a = (Y_2 - Y_1) a, \dots 188$$

a więc powierzchnia ta równa się różnicy rzędnych linii całkowej, pomnożonej przez odległość biegunową a .

Aby dla danej linii różniczkowej wykreślić linię całkową, postępujemy w następujący sposób: Dzielimy linię różniczkową, *bcfg* (rys. 118) na części tak krótkie, że je uważać możemy jako proste. Z punktów podziału b, c, d, e, f, g , kreślimy równoległe do osi OX aż do OY i łączymy punkty $b'', c'', d'', e'', f'', g''$, z biegunem B . Promienie $Bb'', Bc'', Bd'' \dots$ będą równoległe do stycznych linii całkowej w odnośnych punktach b', c', d', e', f', g' . Jeżeli $bc, cd, de \dots$ są proste, to odnośne części linii całkowej będą liniami drugiego rzędu, a mianowicie parabolami. Jeżeli zaś $b'c'$ jest parabolą, to styczne w b' i c' przecinają się w m , jak wiemy z matematyki, w połowie szerokości pasków. Ta własność paraboli posłuży nam do wykreślenia linii całkowej.

poprzedniego paragrafu linię całkową. Gdy odległość biegunową przyjmujemy wielką, to linia całkową będzie płaską i na odwrót; tu przyjęliśmy odległość biegunową od podstawy $c=7$ cm. Z punktów przecięcia się prostych podziałowych z zarysem szyny spuszczone prostopadłe na podstawę n. p. pp' i łączymy spodki tych prostopadłych z biegunem O . Promienie te n. p. Op' są równoległe do stycznych linii całkowej, które kreśliłyśmy po kolei do prostych, połowiących szerokości pasków. W ten sposób otrzymamy linię całkową a 1", 2", 3" ... za pomocą której wyznaczymy powierzchnię połowy szyny, kreśląc z O i 23 poziome do przecięcia się z linią całkową w a i 23' i kreśląc pionową przez a . Odcinek $a' 23'$, pomnożony przez odległość biegunową OO daje nam powierzchnię połowy szyny. Tu otrzymaliśmy powierzchnię połowy szyny $16,2.7=113,4$ cm², całej szyny $226,8$ cm², a że szyna wykreślona w podziałce 2:1, więc $F=226,8:4=56,7$ cm².

W celu wyznaczenia momentu bezwładności rozkładamy znowu powierzchnię przekroju szyny na paski, które teraz mogą być trochę szersze, jednak tylko o tyle, aby wielobok sznurowy nie wiele się różnił od linii sznurowej, którą właściwie dla powierzchni powinniśmy otrzymać. Na rysunku podzieliłszy szynę na 23 pasków, wąskich w głowie i nóżce, a szerszych w ścianie szyny, bo tu przekrój mniej się zmienia. Mamy wyznaczyć powierzchnie tych pasków i wykreślić wielobok sił (czyli właściwie powierzchni). Czynimy to za pomocą linii całkowej, przedłużając linie podziałowe do linii całkowej, np. $O a$ do a , 11" do 1", i kreśląc z punktów przecięcia się a , 1", 2" ... prostopadłe na poziomą $a' 1' 2' ... 23'$. Odcinki w ten sposób uzyskane, pomnożone przez odległość biegunową $c=7$ cm, przedstawiają powierzchnie pasków, a więc $O' 23'$ jest wielobokiem sił, względnie powierzchni. Jeżeli zamiast linii całkowej krzywej wykreśliłyśmy tylko szereg stycznych, to trzeba, aby punkty 1" 2" 3" ... przypadały na punkty styczności, a więc dobrze jest zachować te same linie podziału, co pierwiej. Gdybyśmy przyjęli inne linie podziału, to punkty te nie wypadłyby na punktach styczności, a wtedy należałoby do konstrukcji użyć linii całkowej krzywej, a nie stycznych.

Następnie wyznaczamy środki ciężkości poszczególnych pasków i zaczepiamy w nich siły równoległe poziome, względnie powierzchnie pasków. Dalej przyjmujemy biegun O' w odległości $a_1=8$ cm od prostej $a' 23'$ i kreśliśmy promienie. Równoległe do tych promieni dają pierwszy wielobok sznurowy $s 9 l$. Skrajne boki wieloboku sznurowego przedłużone przecinają się w punkcie D , przez który przechodzi wypadkowa. Pozioma D przecina oś szyny w środku ciężkości S . Przedłużony boki wieloboku sznurowego aż do osi, przechodzącej przez środek ciężkości, otrzymamy punkty, oznaczone cyframi od 1...23. Jestto drugi wielobok sił względnie powierzchni, dla którego oieramy biegun O' w odległości $b=10$ cm i kreśliśmy promienie. Następnie prowadzimy równoległe do tych promieni drugi wielobok sznurowy mwz . Skrajne boki wieloboku przedłużamy aż do przecięcia się z osią ciężkości w punktach B i C . Długość $BC=20,6$ cm jest według Culmanna proporcjonalną do momentu bezwładności, który otrzymamy według równ. 184), gdy pomnożymy BC przez a , b i c . Jeżeli zauważymy, że $\overline{BC} \cdot a, b, c$ przedstawia moment bezwładności połowy szyny, to chcąc otrzymać moment całego przekroju szyny, musimy pomnożyć wynik przez

2. Ponieważ szynę wykreśliśmy w podwójnej podziałce (2:1), więc wszystkie długości są dwa razy większe, a zatem, aby otrzymać moment bezwładności rzeczywistego przekroju, musimy wynik podzielić przez $2^4=16$. A więc

$$I_2 = \frac{20,6 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{16} = 1442 \text{ cm}^4.$$

Według Mohra zaś otrzymamy, splanimetrowawszy powierzchnię $s \ 9 \ ID = 103,6 \text{ cm}^2$,

$$I_2 = \frac{103,6 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{16} = 1450 \text{ cm}^4.$$

Jako ostateczny wynik przyjmiemy średnią arytmetyczną:

$$I_x = \frac{1442 + 1450}{2} = 1446 \text{ cm}^4.$$

Jeżeli chcemy wyznaczyć teraz promień bezwładności wykreślnie, to możemy to zrobić wedle Müllera Breslaua w następujący sposób:

Dla połowy szyny jest wedle Culmanna, gdy odcinek BC nazwiemy z , $I = a_1 b c z$, $F = n c$, więc

$$a^2 = \frac{I}{F} = \frac{a_1 b c z}{n c} = \frac{a_1 b z}{n}.$$

Odetnijmy $23'$ $G=b$ i zróbmy $GH \parallel O''23'$, to $HL=b$. Z podobieństw trójkątów mamy $b:n = O''E:a_1$, więc $O''E = \frac{a_1 b}{n}$, zatem $a^2 = O''E \cdot z$. Zróbmy $O''K=z$, zatoczmy półkole na EK , to

$$\overline{O''F^2} = O''E \cdot z = a^2, \text{ zatem } a = O''F.$$

Dla całej szyny niech będzie moment bezwładności I' , powierzchnia F' , to $I' = 2I$, $F' = 2F$, stąd

$$a'^2 = \frac{I'}{F'} = \frac{2I}{2F} = \frac{I}{F} = a^2, \text{ zatem } a' = a.$$

Promień bezwładności jest więc dla całej szyny ten sam, co dla połowy.

§ 49. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności powierzchni sposobem Nehlsa.

Aby wyznaczyć wykreślnie moment bezwładności powierzchni danej $cm_1 d_1 b = F$ (rys. 119) ze względu na oś OX , kreślimy najprzód prostą $pr \parallel OX$ w odległości dowolnej a . Badajmy teraz element powierzchni, t. j. prostą mm_1 o grubości nieskończenie małej dy , zróbmy $m_1 m' \parallel mO$, połączmy O z m' , przedłużmy tę prostą do m_2 , to otrzymamy $Om : mm_2 = a : pm'$, a stąd, ponieważ $pm' = mm_1$, będziemy mieli $y : mm_2 = a : mm_1$, więc

$$mm_2 = \frac{mm_1}{a} y.$$

Zróbmy to samo z innymi elementami, a otrzymamy

$$\int mm_2 dx = \text{pow. } bcm_2 d_2 = F_1 = \int \frac{mm_1 y dx}{a} = \frac{S}{a}, \quad (189)$$

przyczem wyraz

$\int mm_1 y dx = S$ przedstawia moment statyczny powierzchni F ze względu na OX .

Zróbmy teraz $m_2 m'' // mO$ i wykreślmy Om'' aż do m_2 , a otrzymamy podobnie $pm'' : a = mm_2 : y$, a zważywszy, że $pm'' = mm_2$,

$$mm_3 = \frac{mm_2 y}{a}, \quad \text{stad}$$

$$mm_3 dx = \frac{mm_2 y dx}{a} =$$

$$= \frac{mm_1 y^2 dx}{a^2}, \quad \text{a zatem}$$

$$\int mm_3 dx = \int \frac{mm_1 y^2 dx}{a^2} = \text{pow. } bcm_3 d_3 = F_2, \quad \text{wiec}$$

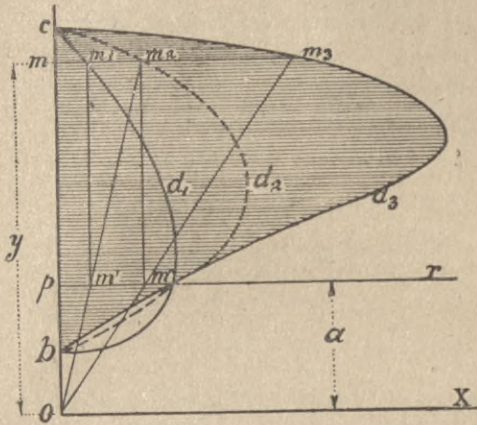
$$F_2 = \frac{I}{a^2}, \quad \dots \dots \dots (190)$$

przyczem wyraz $\int mm_1 y^2 dx = I$ przedstawia moment bezwładności powierzchni F ze względu na oś OX^*).

Po prawej stronie rysunku na tablicy I wyznaczyliśmy według tego sposobu, podanego przez Nehlsa, moment bezwładności szyny ze względu na oś pionową i to osobno dla górnej części szyny, a osobno dla dolnej. Długość a przyjęliśmy dla górnej części szyny 5 cm, dla dolnej większą $a_1 = 6$ cm, aby rysunek nie wypadł za papier. Splanimetrowawszy F_N , otrzymaliśmy dla górnej części $F_N'' = 29,2 \text{ cm}^2$, a dla dolnej $F_N' = 35,2 \text{ cm}^2$, a więc

$$I' = (F_N'' a^2 + F_N' a_1^2) \frac{2}{16} = (29,2 \cdot 5^2 + 35,2 \cdot 6^2) \frac{2}{16} = 249,6 \text{ cm}^4.$$

*) Dr. A. Denizot podał w Zeits. d. Ver. Deutsch. Ing. (1913 str. 1028) sposób wykreślny wyznaczenia momentu bezwładności i momentu zbieżności, który jest kombinacją sposobów Nehlsa i Cullmanna.



rys. 119.

Nareszcie otrzymamy promienie bezwładności

$$a = \sqrt{\frac{I_x}{F}} = \sqrt{\frac{1446}{56,7}} = 5,05 \text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{249,6}{56,7}} = 2,10 \text{ cm.}$$

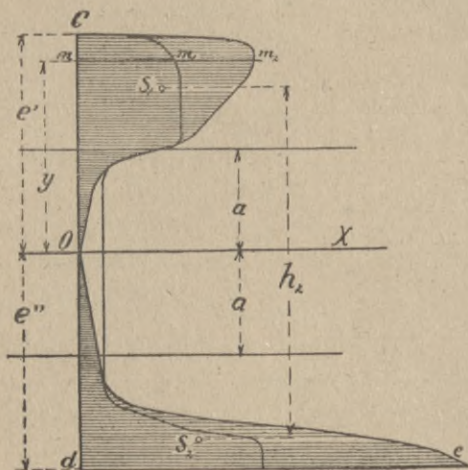
Możemy teraz wykreślić elipsę bezwładności, znając promienie bezwładności dla obu osi głównych.

Zrobić tu jeszcze musimy uwagę, że jeżeliśmy do wykreślenia linii $cm_3 d_3 b$ z linii $cm_2 d_2 b$ użyli nie prostej pr (rys. 119)

w odległości a , lecz innej prostej w odległości n. p. a' to zamiast równ. 190) otrzymalibyśmy $F_2 = \frac{I}{aa'}$, jak tego łatwo

dowieść można.

Moment bezwładności powierzchni możemy także wyznaczyć za pomocą bardzo zmyślnego przyrządu, mianowicie planimetru Amslera, którego teorię i opis podał Dr. Winkler w czasopiśmie Austrjackiego Towarzystwa Inżynierów



rys. 120.

i Architektów w r. 1870*).

Powierzchnia F_1 (rys. 119), wyrażająca moment statyczny powierzchni, ma jeszcze inne znaczenie, które zaraz wyjaśnimy.

Według rów. 138)

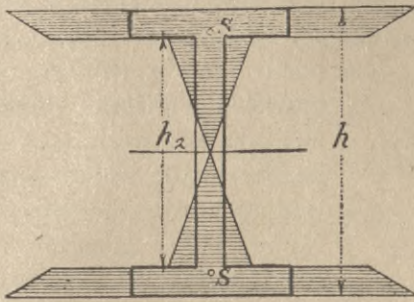
$\frac{v}{v} = \zeta$. Jeżeli oś OX przyjmiemy w środku ciężkości przekroju, to $v = y$, więc $v = \zeta y$ (rys. 120).

Na pasek powierzchni $mm_1 dy$ działa siła $mm_1 dy v = mm_1 dy \zeta y = mm_2 a \zeta dy$. Jeżeli scałkujemy siły, działające w przekroju powyżej osi obojętnej, to otrzymamy

$$C' = \int_0^{e'} mm_2 dy a \zeta = a \zeta F_1$$

*) P. także Ott: *Vorträge über Baumechanik. II. Theil.* str. 124 i nast.

jeżeli $F_1 = \text{pow. } Ocm_2$, a podobnie wypadkowa naprężeń poniżej osi obojętnej $C'' = a\zeta F_2$, jeżeli $F_3 = \text{pow. } Oed$, przyczem $C' = C''$. Siły normalne, działające w paskach powierzchni przekroju są



rys. 121.

proporcjonalne do mm_2 , powierzchnie zatem kreskowane F_1 i F_2 przedstawiają rozkład naprężeń normalnych w przekroju i nazywają się dla tego sprowadzonymi powierzchniami przekroju (n. *reducirte Querschnittsfläche*). Jeżeli wyznaczmy środki ciężkości powierzchni F_1 i F_2 S_1 i S_2 , to punkty te są punktami

zaczepienia ciśnienia i ciągnięcia, nazywamy je więc środkiem ciśnienia względnie ciągnięcia. Odstęp pionowy środków ciśnienia i ciągnięcia niech będzie h_2 , to

$$C \cdot h_2 = M \dots \dots \dots 191)$$

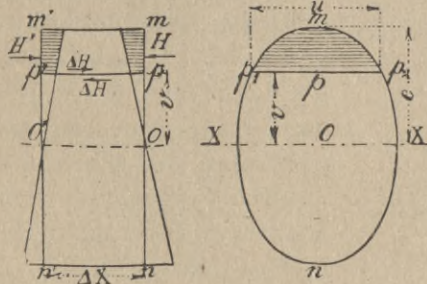
Na rys. 121 widzimy powierzchnię sprowadzoną przekroju I i środki ciśnienia i ciągnięcia. Widzimy, że tu odstęp środków naprężenia h_2 jest nie o wiele mniejszy od h , w przybliżeniu możemy przyjąć $h_2 = 0,9 h$.

§ 50. Obliczenie siły ścinającej poziomej.

Siły, zginające belkę, działają w kierunku prostopadłym do osi belki, więc wywołują oprócz naprężeń zginających także naprężenia ścinające. Dla belki o osi prostej jest siła poprzeczna wypadkową wszystkich sił, działających po lewej stronie danego przekroju, naprężenia ścinające pionowe w każdym przekroju muszą więc być równe w stanie równowagi sile poprzecznej Q .

Oprócz naprężeń ścinających pionowych powstają jednak w belce, pracującej na zginanie, naprężenia także w innych kierunkach. Najprzód zastanawiać się będziemy nad naprężeniami ścinającymi poziomymi (n. *horizontale Schubspannung*, fr. *effort rasant*, *force de glissement longitudinal*, an. *horizontal shearing stress*).

W celu wyznaczenia tych naprężeń wytnijmy z danej belki część jej o długości Δx (rys. 122) płaszczyznami prostopadłymi do osi i dla równowagi zaczepmy naprężenia, które przed przecięciem w belce istniały. Zbadajmy teraz siły, działające w warstwie pp' , równoległej do osi, a odległej od niej o v . Na części



rys. 122.

belki $mm'p'p$ działają po prawej i po lewej stronie naprężenia normalne, które, jak wiadomo, zmieniają się według prawa linii prostej. Naprężenia te dadzą się złożyć na siły H i H' , które z powodu, że Δx jest bardzo małe, możemy obie przyjąć jako poziome. Dadzą one wypadkową $\Delta H =$

$= H' - H$, działającą w kierunku siły większej. Siły, działające na część belki $pp'n'n$, muszą dać jako wypadkową także ΔH , lecz działającą w kierunku przeciwnym, bo warstwa pp' jest w równowadze.

Według równ. 141) jest $v = \frac{M}{I}v$, a więc siła, działająca na pasek p_1p_2 o długości u a grubości dv , jest $\frac{M}{I}v u dv$, a stąd

$$H = \int_v u dv = \frac{M}{I} \int_v u v dv.$$

Podobnie otrzymamy $H' = \frac{M'}{I} \int_v u v dv$, jeżeli przekrój belki pozostał ten sam; a więc

$$\Delta H = H' - H = \frac{M' - M}{I} \int_v u v dv = \frac{\Delta M}{I} \int_v u v dv.$$

Jeżeli przekroje obierzemy bardzo blisko, to możemy napisać

$$dH = \frac{dM}{I} \int_v u v dv.$$

Siła ścinająca pozioma dH działa na długości dx , na jednostkę długości wypada więc

$$\sigma = \frac{dH}{dx} = \frac{dM}{dx \cdot I} \int_v u v dv.$$

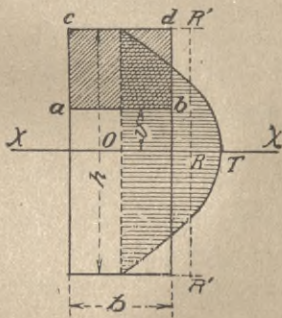
Z równania 14) wiemy, że $\frac{dM}{dx} = Q$ t. j. sile poprzecznej,

całkazaś $\int_v^e uv dv$ wyraża moment statyczny powierzchni p_1mp_2 ze względu na środek ciężkości przekroju O , nazwijmy go S , to $S = \int_v^e uv dv$, a więc $\sigma = \frac{QS}{I}$ 192)

Naprężenie ścinające poziome σ_1 na jednostkę powierzchni będzie

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{u} = \frac{QS}{Iu} \dots \dots \dots 193)$$

Z równania 192) widzimy, że ponieważ Q i I są dla danego przekroju i obciążenia stałe, więc σ zmienia się proporcjonalnie do S , a zatem siła ścinająca jest największą w osi, a w warstwie skrajnej równą zero, bo tam $S=0$. Dla przekroju prostokątnego (rys. 123) mamy



rys. 123.

$$S = \left(\frac{h}{2} - v\right) b \frac{\frac{h}{2} + v}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - v^2\right),$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Qb}{2 \cdot \frac{1}{2} bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - v^2\right) = \\ &= \frac{6Q}{h} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{v}{h}\right)^2\right] \dots \dots 194) \end{aligned}$$

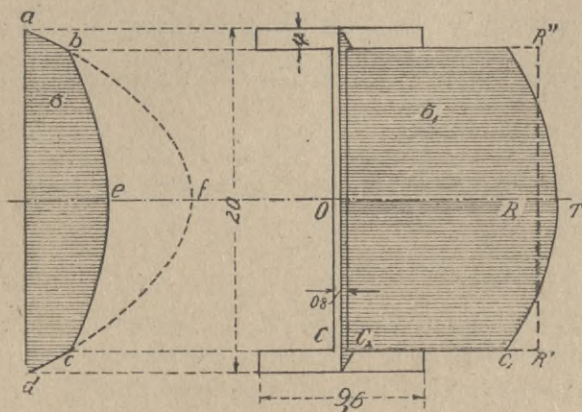
Największe v będzie w osi dla $v=0$

$$\text{najw } \sigma = \frac{3}{2} \frac{Q}{h} \dots \dots 195)$$

Widzimy więc, że dla zmiennej v siła ścinająca σ i naprężenie ścinające poziome σ_1 zmieniają się w przekroju prostokątnym wedle paraboli. W przekroju I (rys. 124) zmienia się siła ścinająca σ wedle paraboli ab i cd w stopie i głowie, zaś według innej paraboli bec w ścianie.

Z równania 193) widzimy, że naprężenie ścinające poziome σ_1 zmienia się proporcjonalnie do $\frac{S}{u}$. Jeżeli więc szerokość przekroju u nagle się zmienia, to i σ_1 zmienia się nagle odwrotnie proporcjonalnie do u .

Przy przejściu więc ze ścianki w stopę w C następuje nagła zmiana naprężenia ścinającego. Z rysunku 124. widzimy, że naprężenia ścinające są bardzo małe w stopie i głowie, możemy więc je pominąć, a przenoszą się prawie w całości na ściankę. Na odwrót wedle rysunku 121. naprężenia normalne w belkach o przekroju I działają przeważnie



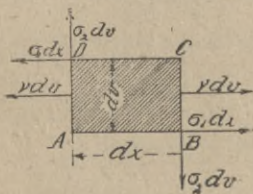
rys. 124.

w stopie i głowie, a mało co w ściance.

§ 51. Naprężenia ścinające pionowe.

Wiemy już z poprzedniego, że suma naprężeń ścinających pionowych (fr. *effort tranchant*) w każdym przekroju pionowym belki o osi prostej równą jest sile poprzecznej Q . Zachodzi teraz pytanie, jak siła poprzeczna rozdziela się w przekroju.

Wytnijmy z belki (rys. 125) dwiema płaszczyznami poziomymi w odstępnie dv i dwiema płaszczyznami pionowymi w odstępnie dx graniastosłup o podstawie $ABCD$ a wysokości $=1$, to w płaszczyznach DC i AB działają siły ścinające poziome $\sigma_1 dx$, w płaszczyznach zaś pionowych siły $\sigma_2 dv$, a oprócz tego równoległe do osi działają siły νdv , które się znoszą.



rys. 125.

Mamy tu więc dwie pary sił, dla równowagi musi być suma ich momentów równa zero, więc

$$-\sigma_1 dx \cdot dv + \sigma_2 dv \cdot dx = 0, \text{ a zatem}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \dots \dots \dots 196)$$

Widzimy więc, że naprężenia ścinające pionowe σ_2 są w każdym punkcie przekroju poprzecznego równe naprężeniom ścinającym poziomym σ_1 , w tym punkcie działającym.

Ze względu na równanie 193) możemy więc napisać

$$\sigma_2 = \frac{QS}{Iu}$$

a zatem naprężenia ścinające pionowe zmieniają się proporcjonalnie do $\frac{S}{u}$.

Jeżeli siła poprzeczna Q działa na przekrój F , to gdyby naprężenia rozdzielały się na przekrój jednostajnie (prosta $R'R'$ w rys 123), toby największe naprężenie było $\sigma = \frac{Q}{F}$.

Dla przekroju prostokątnego jest największe naprężenie wedle 193) i 196) dla $\nu=0$ $OT = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} = \frac{3}{2} OR$. . . 197)

Największe naprężenie na ścinanie jest więc dla przekroju prostokątnego $\frac{3}{2}$ razy większem, niż przeciętne dla równego rozdzielenia siły.

Dla przekroju $I OT$ będzie także nieco większem niż OR (rys. 124), jeżeli jednak siłę Q rozdzielimy tylko na ściankę równo, to będzie się mało co różniło od OR .

Przykład. Dla kształtówki I wykreślonej na rys. 124. niech będzie $Q=20t$. Dla przekroju tego jest $I=2429 \text{ cm}^3$, wysokość ścianki $h'=20-2 \cdot 1 \cdot 2=17,6$ więc przeciętne naprężenie ścinające w 8 mm grubej ściance $\sigma_0 = \frac{20000}{0,8 \times 17,6} = 1421 \text{ kg/cm}^2$.

Obliczymy teraz OT . W tym celu wyznaczamy najprzód S dla $\nu=0$, zatem $S=9,6 \times 1,2 \times 9,4 + 0,8 \times 8,8 \times 4,4 = 139,28 \text{ cm}^3$, więc wedle 193) i 196) $OT = \frac{20000 \times 139,28}{2429 \times 0,8} = 1434 \text{ kg/cm}^2$. Wartość ta tak mało się różni od wartości poprzedniej, że często w praktyce liczymy tylko naprężenie ścinające średnie

$$\sigma_0 = \frac{Q}{b'h'} \dots \dots \dots 198)$$

jeżeli b' oznacza grubość a h' wysokość ścianki.

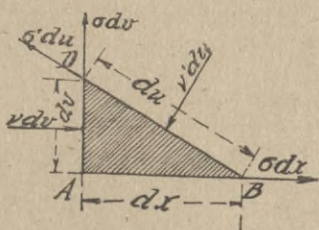
Obliczmy jeszcze naprężenie ścinające w C , a otrzymamy

$$S=9,6 \times 1,2 \times 9,4 = 108,3 \text{ cm}^3, \text{ więc } CC' = \frac{20000 \times 108,3}{2429 \times 0,8} = 1115 \text{ kg/cm}^2 \text{ a } CC'' = \frac{2000 \times 108,3}{2429 \times 9,6} = 93 \text{ kg/cm}^2.$$

§ 52. Naprężenia w kierunkach ukośnych. Linie największych naprężeń.

Na graniastosłup, którego podstawa jest prostokątem (rys. 125) działa w stanie równowagi sześć sił, jeżeli zaś przetniemy go według przekątnej DB (rys. 126) to w stanie równowagi działa 5 sił na ten element, mianowicie νdv , σdv , σdx , $\nu' du$, σ, du . Stosunek tych sił się nie zmieni, jeżeli wszystkie podzielimy przez dv , wtedy otrzymamy siły (rys. 126).

$$\nu, \sigma, \sigma \frac{dx}{dv}, \nu' \frac{du}{dv}, \sigma' \frac{du}{dv}$$



rys. 126.

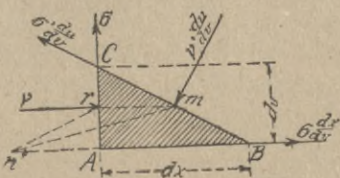
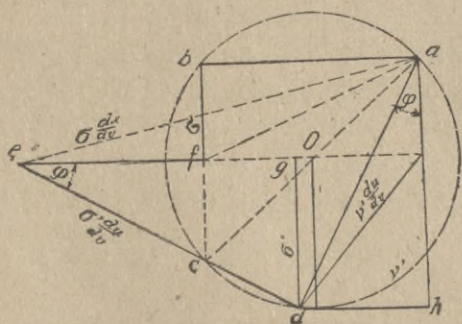
Jeżeli siły te są w równowadze, to wielobok sił i sznurowy muszą się zamknąć. Co do wielkości i kierunku znamy tylko ν i σ , co do kierunku resztę sił. Przypuśćmy, że $abfeda$ (rys. 127) jest wielobokiem sił i że biegun obierzemy w punkcie a . Wykreślmy promień, a równoległe do nich wielobok sznurowy. Pierwszy promień aa^{∞} jest tu zerem, drugi, ad kreślimy więc równoległą do ad przez punkt m do siły $\sigma' \frac{du}{dv}$, przyczem $Cm = mB$.

Dalej kreślimy $mn \parallel ae$, $nr \parallel af$, $rm \parallel ab$ aż do punktu m , ponieważ wielobok sznurowy musi się zamknąć. Z rysunku widzimy, że $ae \parallel mn$, więc $mr : Ar = ef : bf$, czyli

$$\frac{1}{2} dx : \frac{1}{2} dv = ef : \sigma, \text{ stąd}$$

$$ef = \sigma \frac{dx}{dv}. \text{ Dalej widzimy, że}$$

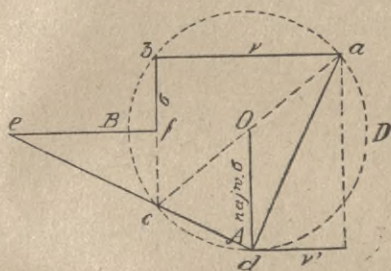
$$efc \propto ABC, \text{ więc } \sigma \frac{dx}{dv} : fc = dx : dv, \text{ a stąd}$$



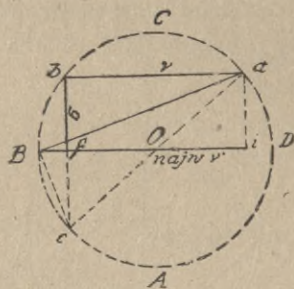
rys. 127.

$$fc = \sigma \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \sigma = bf.$$

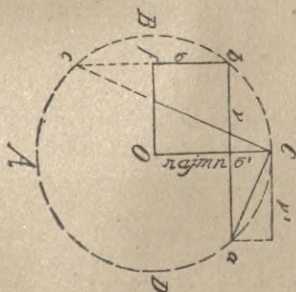
Ponieważ z rysunku także wynika, że $\sphericalangle abc = \sphericalangle adc = 90^\circ$, więc punkty a, b, c i d leżą na okręgu koła. Na tej podstawie możemy teraz wielobok sił łatwo wykreślić w następujący sposób: kreślimy $v = ab$, $bf = \sigma$ i przedłużamy tę prostą do c tak, aby $fc = bf$. Zataczamy koło przez a, b, c , prowadzimy $ad \parallel v'$ czyli $ad \perp BD$ i dc przedłużamy aż do poziomej przez f .



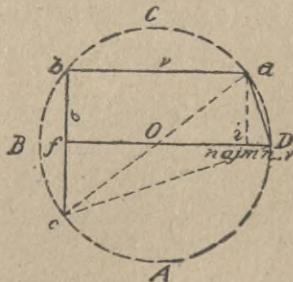
rys. 128.



rys. 129.



rys. 130.



rys. 131.

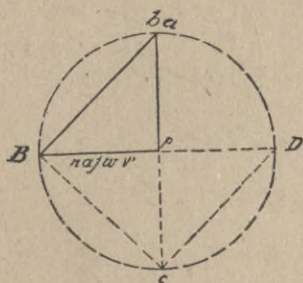
z trójkątów $egd \sim ABC$ mamy $\sigma' \frac{du}{dv} : dg = du : dv$, a stąd $dg = \sigma'$. Podobnie otrzymamy z trójkątów $adh \sim ABC$

$$v' \frac{du}{dv} : dh = du : dv, \text{ więc } dh = v'.$$

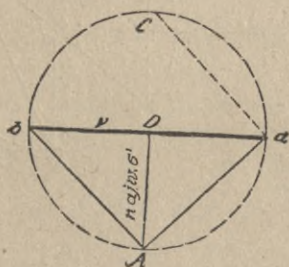
Łatwo możemy teraz znaleźć kierunki sił v' i σ' , dla których v' i σ' przybierają największe i najmniejsze wartości. Dla największego σ' musi być płaszczyzna, w której działa σ' , równoległą do Ac (rys. 128), a v' działać w prostej aA , przyczem punkt

d wpada na punkt A , znajdujący się w pionowej pod O . Jeżeli płaszczyznę tę obrócimy o 45° , kierunki te zmieniają się na cB i aB (rys. 129), wtedy $\sigma' = 0$, a ν' jest największym. Po dalszym obrocie o 45° zmieniają się te kierunki na cC i aC (rys. 128), a wtedy σ' dosięga swej najmniejszości. Gdy nareście jeszcze obrócimy te płaszczyzny o 45° (rys. 131), to otrzymamy kierunki cD i aD , a wtedy ν' jest najmniejszością, a $\sigma = 0$.

Widzimy więc, że płaszczyzny, dla których σ' jest najmniejszością i największością stoją na sobie prostopadle, a płaszczyzny, dla których ν' jest najmniejszością i największością stoją także na sobie prostopadle i tworzą z powyższymi płaszczyznami kąty 45° .



rys. 132.



rys. 133.

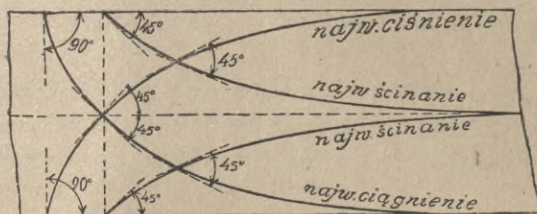
Dla osi obojętnej jest, jak wiadomo, $\nu = 0$, więc płaszczyzny dla największych i najmniejszych ν' , cB i cD są nachylone pod 45° do osi belki (rys. 132), a dla największych i najmniejszych σ' równoległe do osi (rys. 133).

Dla włókna skrajnego jest, jak wiadomo, $\sigma = 0$, więc płaszczyzny dla których ν' jest największe i najmniejsze, są równoległe i prostopadłe, do osi, zaś płaszczyzny, dla których σ' jest najmniejszością i największością aA i aC (rys. 133), nachylone są pod kątem 45° do osi.

Jeżeli w pewnym punkcie belki wyznaczymy kierunki płaszczyzn dla największych i najmniejszych ν' lub σ' , potem w punktach sąsiednich, leżących w tych kierunkach, wyznaczymy znów kierunki płaszczyzn dla największości i najmniejszości ν' lub σ' i tak dalej postępować będziemy, to otrzymamy linie krzywe, których styczne wyznaczają w danym punkcie kierunki wyżej wspomnianych płaszczyzn. Linie te największych naprężeń (n. *Spannungstrajektorie*, an. *tractory*) wykreśliliśmy na rysunku

134 na podstawie powyższych twierdzeń dla belki o stałej szerokości.

Widzimy, że linie największego ciągnięcia i ciśnienia wychodzą pionowo z włókien skrajnych, są nachylone do pionu pod kątem 45° w osi i kończą się stycznie do włókien skrajnych.



rys. 134.

nachylone pod 45°, stają się coraz więcej płaskie i kończą się stycznie do osi.

§ 53. Naprężenia główne.

Z rysunku 127 możemy otrzymać dwa równania, jeżeli utworzymy sumy składowych wszystkich sił w kierunkach ad i ed i zrobimy je równe zeru ze względu na to, że siły te są w równowadze.

Tworząc sumę najprzód w kierunku ad , otrzymamy:

$$v \frac{du}{dv} = v \operatorname{wst} \varphi + 2 \sigma \operatorname{dost} \varphi, \text{ albo, ponieważ}$$

$$\frac{dv}{du} = \operatorname{wst} \varphi, \quad v' = v \operatorname{wst}^2 \varphi + 2 \sigma \operatorname{wst} \varphi \operatorname{dost} \varphi,$$

lub nareście $v' = \frac{v}{2} (1 - \operatorname{dost} 2 \varphi) + \sigma \operatorname{wst} 2 \varphi \dots \dots \dots 199)$

Tworząc zaś sumę składowych w kierunku ed , otrzymamy

$$\sigma' \frac{du}{dv} = v \operatorname{dost} \varphi - \sigma \operatorname{wst} \varphi + \sigma \frac{dx}{dv} \operatorname{dost} \varphi, \text{ lub ponieważ } \frac{dx}{dv} = \operatorname{dot} \varphi, \sigma' = \\ = v \operatorname{wst} \varphi \operatorname{dost} \varphi + \sigma (\operatorname{dost}^2 \varphi - \operatorname{wst}^2 \varphi), \text{ albo wręście}$$

$$\sigma' = \frac{v}{2} \operatorname{wst} 2 \varphi + \sigma \operatorname{dost} 2 \varphi \dots \dots \dots 200)$$

Naprężenia v' i σ' dadzą się złożyć w wypadkowe naprężenie ζ' , działające ukośnie na element BC .

Jeżeli przez dany punkt poprowadzimy we wszystkich kierunkach proste i odetniemy na nich odnośne naprężenia ζ' we

właściwych kierunkach, to końce tych prostych leżeć będą na elipsie, jak się tego dowodzi w mechanice rozumowej. Elipsę tę nazywamy elipsą naprężeń (n. *Spannungsellipse*). Osie główne tej elipsy są to naprężenia, stojące prostopadle na odpólnych elementach, a więc *najw.* i *najmn.* ν' , gdyż wtedy $\sigma' = 0$ (rys. 130 i 132).

Aby wyznaleść *najw.* i *najmn.* ν' , a więc osie główne elipsy naprężeń, możemy postępować analitycznie na podstawie równań 199 i 200), albo też możemy użyć do tego wyników, do których doszliśmy wykreślnie.

Z rys. 128 i 130 widzimy, że jeżeli nazwiemy $OA = OB = OC = OD = r$, to **najw.** $\pm \sigma' = \pm r = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 + 4\sigma^2}$. . . 201)

Również widzimy z rys, 129 i 131, że

$$\mathbf{najw.} \pm \nu' = i O \pm r = \frac{\nu}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 + 4\sigma^2} \quad 202)$$

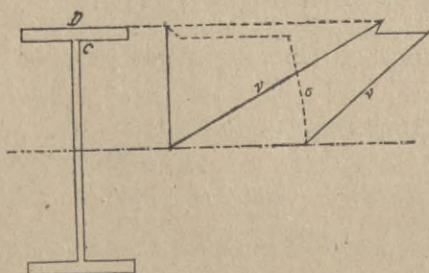
Z rys. 128 i 130 widzimy też, że dla położenia płaszczyzny elementu, dla którego otrzymujemy *najw* $\pm \sigma'$,

$$\nu' = \frac{\nu}{2} \quad 203)$$

Wartości *najw* $\pm \nu'$ nazywamy naprężeniami głównymi normalnemi (n. *Hauptspannung*, an. *maximum stress*) a wartości *najw* $\pm \sigma'$ naprężeniami głównymi ścinającymi (n. *Hauptschubspannung*).

Przy obliczaniu wymiarów musimy uważać, aby naprężenie główne normalne i naprężenie główne ścinające w żadnym punkcie belki nie przekraczały dozwolonej granicy.

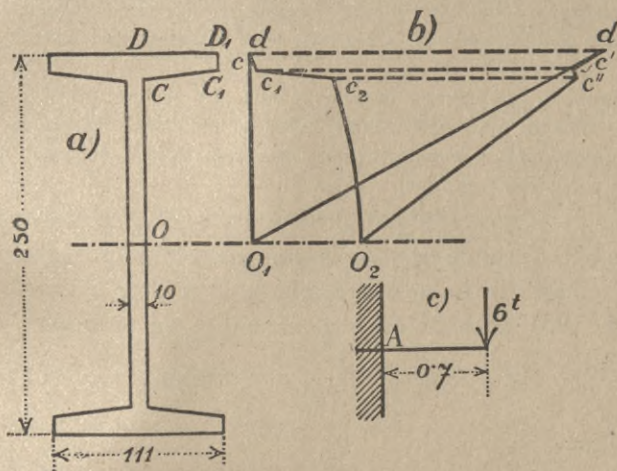
Powiedzieliśmy wyżej, że *najw* ($\pm \nu$) jest zawsze w warstwie skrajnej, tam zaś jest $\sigma = 0$. Jeżeli wstawimy w równ. 202) $\sigma = 0$, to otrzymamy *najw* $\pm \nu' = \nu$. Dlatego przy obliczaniu wymiarów na podstawie wzoru 143) $\tau I = Me$ uwzględniamy tylko naprężenie podłużne ν warstwy skrajnej, robiąc je równem naprężeniu dopuszczalnemu τ .



rys. 135.

Jeżeli szerokość przekroju zmienia się nagle, jak n. p. w kształtówce I (rysunek 135), to w C , gdzie kształtówka przechodzi w ściankę, jest naprężenie normalne ν a także i naprężenie ścinające σ dość wielkiem, naprężenie w ęc główne normalne ν' może być większem od naprężenia w włóknie skrajnem D . Aby temu zapobiedz zaokrągła się przekrój w C i pochyła stopki, przezco zmniejsza się naprężenie główne.

Przykład. Niechaj siła $6 t$ działa na końcu belki jednym końcem wmurowanej $0,7 m$ długiej. Jakie będzie naprężenie główne w przekroju przy ściance w C , jeżeli belka ma przekrój wedle rys 136?



rys. 136.

Moment największy wynosi $6 \times 0,7 = 4,2 tm = 420000 kg/cm$. Dla kształtówki I jest $F = 25 \times 1 + 2 \times (11,1 - 1) 1,5 = 55,3 cm^2$

$$I = \frac{1}{12} (11,1 \times 25^3 - 10,1 \times 22^3) = 5491 cm^4 *).$$

Naprężenie normalne w włóknie skrajnem D

$$\nu = \frac{420000 \times 12,5}{5491} = 957 kg/cm^2$$

$$\text{w } C \quad \nu = \frac{957 \cdot 10,7}{12,5} = 819 kg/cm^2,$$

$$\text{w } C_1 \quad \nu = \frac{957 \cdot 11,3}{12,5} = 865 kg/cm^2.$$

*) Z uwzględnieniem zaokrągłań i pochyłości stopki F i I są nieco większe. My tu przeprowadziliśmy obliczenia bez uwzględnienia zaokrągłań.

Naprężenie ścinające otrzymamy w włóknie skrajnym $\sigma=0$, w C_1 $\sigma = \frac{QS}{Iu}$
 $= \frac{6000 \cdot (11,1 \cdot 1,2 \cdot 11,9)}{5491 u} = \frac{172,8}{u}$, w C $\sigma = \frac{6000 \cdot (158,5 + 40,3)}{5491 u} = \frac{217}{u}$

w C_1 jest $u=1,1$, więc $\sigma = \frac{172,8}{11,1} = 15,6 \text{ kg/cm}^2$,

w C jest $u=1$, więc $\sigma = \frac{217}{1} = 217 \text{ kg/cm}^2$.

Zatem naprężenie główne normalne w warstwie skrajnej:

$$\nu' = \nu = 957 \text{ kg/cm}^2$$

w C_1 $\nu' = \frac{865}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{865^2 + 4 \cdot 15,6^2} = 865,3 \text{ kg/cm}^2$, analogicznie w $C = 873 \text{ kg/cm}^2$.

Tu więc jest jeszcze naprężenie główne w C mniejsze niż w warstwie skrajnej, lecz gdyby przy tej samej sile długość 0,7 się zmniejszyła, zmniejszyłby się moment, a stąd ν , podczas gdy σ pozostałoby to samo i możliwymby było, że $cc'' > dd''$.

Z przykładu powyższego widzimy jednak, że wypadek taki byłby zupełnie wyjątkowy i zdarzyć się może wogóle tylko tam, gdzie i naprężenia normalne i ścinające są wielkie, że zwykle jednak dostatecznym jest obliczenie naprężenia normalnego w warstwie skrajnej.

Jeżeli $\nu=0$, to według 201) $najw \pm \sigma' = \pm \sigma$. Przekrój belki więc w dwu punktach podpartej obliczamy na podporze (gdzie $M=0$) według σ . Jeżeli belka jest drewnianą o przekroju prostokątnym, to według 195) otrzymamy siłę ścinającą na jednostkę długości dla $\nu=0$ tj. w osi obojętnej $\frac{3Q}{2h}$, a naprężenie na jednostkę po-

wierzchni $\sigma = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}$.

Jeżeli belka jest jednostajnie obciążoną, to według rów 18)

$Q = \frac{1}{2} ql$, więc $\sigma = \frac{3 ql}{4bh}$. Największy zaś moment w środku jest

według 20) $M = \frac{1}{8} ql^2$, więc największe naprężenie normalne:

$$\nu = \frac{Me}{I} + \frac{\frac{1}{8} ql^2 \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} bh^3} = \frac{3}{4} \frac{ql^2}{bh^2}$$

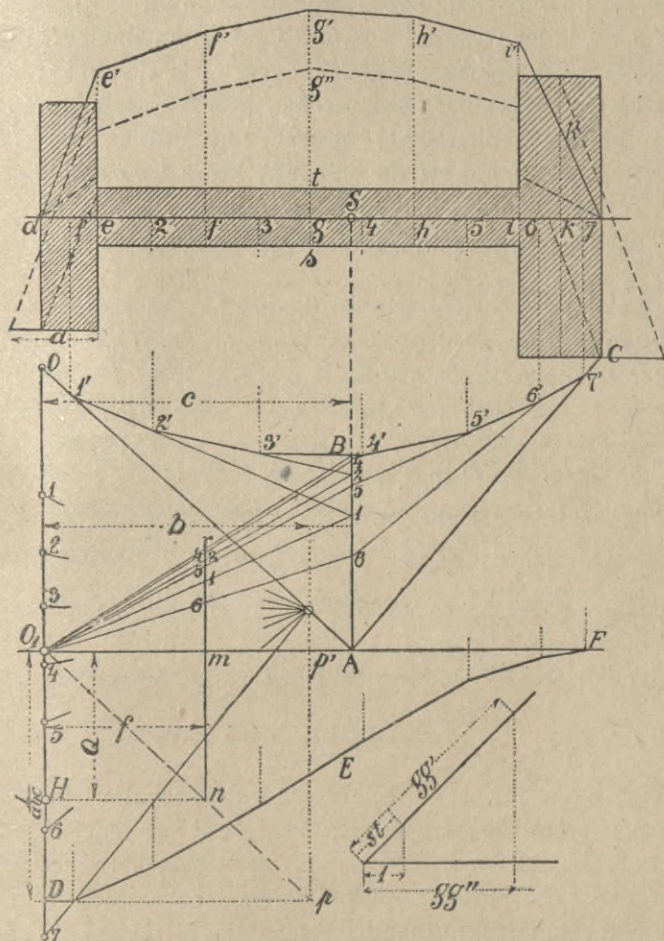
Jeżeli dla drzewa miękkiego przyjmiemy $\tau' = 12 \text{ kg/cm}^2$, $\tau = 100 \text{ kg/cm}^2$ i obliczymy wymiary tak, że $\nu = \tau$, to

$$\sigma : \tau = \frac{3 ql}{4bh} : \frac{3 ql^2}{4bh^2} = h : l, \text{ więc } \sigma = \tau \cdot \frac{h}{l} = \frac{100 h}{l}$$

Jeżeli więc $\sigma \leq \tau'$, to $\frac{100 h}{l} \leq 12$, czyli

$$h \leq 0,12 l \dots \dots \dots 204)$$

Belki drewniane bardzo wysokie, dla których $h < 0,12 l$, trzeba więc obliczać ze względu na siłę poprzeczną Q z powodu niebezpieczeństwa ścinania pionowego na podporach, zwykle jednak $h < 0,12 l$, a wtedy obliczamy je według największego momentu.



rys. 137.

§ 54. Wykreślne wyznaczenie siły ścinającej poziomej.

Siłę ścinającą σ możemy wyznaczyć także wykreślnie, jak to okażemy według Culmanna na przykładzie (rys. 137) dla prze-

kroju I . Dzielimy najprzód przekrój na pewną ilość pasków (tu na 7), wyznaczamy środki ciężkości tych pasków i zaczepiamy w nich siły proporcjonalne do powierzchni pasków. W tym celu sprowadzamy wszystkie prostokąty do wspólnej podstawy a , przeto wysokości, uzyskanych w ten sposób, prostokątów będą proporcjonalne do powierzchni. Kreślimy teraz wielobok sił 0, 1, 2, ... 7, odcinając po kolei wysokości czworoboków, przyjmujemy punkt O w odległości b , kreślimy promienie i pierwszy wielobok sznurowy OBC . Dalej przedłużamy boki skrajne, które przecinają się w A , kreślimy przez A pionową i otrzymujemy środek ciężkości S . Przedłużamy resztę boków do linii AB , którą uważamy za wielobok sił, obieramy drugi biegun O_1 w odległości c na prostej O_1O , prowadzimy promienie i kreślimy drugi wielobok sznurowy DEF .

Jak wiemy, będzie więc $O_1D = \frac{I}{abc}$.

Poprowadźmy z pierwszego bieguna $Op \parallel O_1D$ i połączmy O_1 z p , odetnijmy dalej $O_1H = Q$ i poprowadźmy $Hn \parallel O_1F$ i pionową nm , to $mn = Q$, a $O_1nm \sim O_1p'p$, więc $pp' : b = mn : O_1m$, a zatem, gdy $O_1m = f$, $\frac{I}{abc} : b = Q : f$, a stąd $f = \frac{bQabc}{I} = \frac{ab^2cQ}{I}$.

Długość AB przedstawia moment statyczny powierzchni pierwszych trzech pasków ze względu na środek ciężkości przekroju, więc $AB = \frac{S_{1,3}}{ab}$. Przedłużmy mn aż do r , to $mr : f = \frac{S_{1,3}}{ab} : c$, a stąd $mr = \frac{S_{1,3}f}{abc}$, a wstawivszy wartość za f ,

$$mr = \frac{S_{1,3} Q ab^2 c}{I abc} = \sigma_{1,3} \cdot b \dots \dots \dots 205)$$

Widzimy więc, że odcinek mr proporcjonalny jest do siły ścinającej w warstwie g . Wykreślmy $gg' = 2mr$, dalej $ee' = 2 \cdot m1$, $ff' = 2 \cdot m2$, $hh' = 2 \cdot m4$, $ii' = 2 \cdot m5$, $kk' = 2 \cdot m6$, to rzędne te podzielone przez $2b$ przedstawiają siłę ścinającą w tych warstwach. Wierzchołki tych rzędnych połączone dają linię sił ścinających, (an. *curve of shearing stress*).

Jeżeli chcemy mieć naprężenie ścinające σ_1 , czyli siłę ścinającą na jednostkę powierzchni, to musimy siłę ścinającą σ w każdej warstwie np. g podzielić przez szerokość warstwy st . Na rysunku zrobiliśmy to zapomocą kąta proporcjonalnego i połączyli końce odnośnych rzędnych linią kreskowaną. W warstwach, gdzie

szerokość przekroju nagle się zmienia, zmienia się też nagle i naprężenie ścinające.

§ 55. Obliczenie przekroju kształtówek I , pracujących na zginanie.

Kształtówki w kształcie I używamy często jako belki, pracującej na zginanie. Znając moment sił zewnętrznych, działających na belkę, obliczamy jej wymiary według równania $\tau I = Me$, a stąd:

$$\frac{M}{\tau} = \frac{I}{e} \dots \dots \dots 206)$$

Wyraz $\frac{I}{e} = W$ zależny tylko od przekroju belki nazywamy momentem oporu (n. *Widerstandmoment*, fr. *module de flexion, de section*).

Austrjackie Towarzystwo inżynierów i architektów w Wiedniu wyznaczyło wymiary dla pewnej ilości kształtówek I , które fabryki żelaza wyrabiają na zapas i których zatem każdego czasu można dostać. Wymiary te, ciężar kształtówek na jednostkę długości i moment oporu zestawiliśmy w tabliczce XXIV.

Znając M i τ , wyznaczamy iloraz $\frac{M}{\tau}$, który ma być równy momentowi oporu kształtówki. Szukamy więc z tabliczki w kolumnie $\frac{I}{e} = I: \frac{h}{2}$ wartości najbardziej zbliżonej, a nie mniejszej od $\frac{M}{e}$ i obieramy odnośną liczbę kształtówek.

Tablica XXIV.

Kształtówki I (n. I Eisen, fr. *fer en I*, a. *I-iron*, r. *двутавровое желѣзо*),

zestawione wedle norm austriackiego Towarzystwa inżynierów i architektów z r. 1915, obliczone dokładnie z uwzględnieniem zaokrągleń i nachyleń (rys. 138 a).

Normalne:

dla $h \leq 160$ mm: $b = 0,4 h + 20$ mm

$$d = 0,03 h + 1,6$$
 mm, $d_1 = 1,5 d$

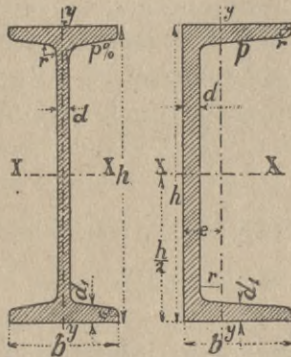
dla $h > 160$ mm: $b = 0,3 h + 36$ mm

$$d = 0,4 h, d_1 = 1,5 d$$

$$r = 1,2 d, r_1 = 0,6 d, \text{ciężar gatunkowy } \gamma = 7,85$$

pochyłość wewnętrzna boków stopy i głowy $p\% = 0,02 h + 7$, h w mm .

Wyjątki co do b przy kształtkach szerokostopowych l. 18 a, 22 a, 24 a i 28 a.



a rys. 138. b

Przykłady. 1. Na belkach żelaznych spoczywają sklepienia płaskie jako powała. Belki żelazne o rozpiętości 5,5 m kładziemy w odstępach 1,2 m. Ciężar własny powały wraz z obciążeniem tłumem ludzi jest 750 kg/cm. Jakie mają być wymiary kształtówki I?

Na jeden metr bieżący kształtówki przypada powierzchnia powały 1,2 m², a więc ciężar na 1 cm bieżący $q = \frac{1,2 \cdot 750}{100} = 9$ kg/cm. Moment największy dla obciążenia zupełnego jest w środku belki $M = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} 9 \cdot 550^2 = 340312$ kgcm.

Jeżeli więc przyjmiemy $\tau = 1000$ kg/cm², to $\frac{M}{\tau} = 340,3$ cm³, a więc obieramy kształtówkę l. 23, dla której $\frac{I}{e}$ równa się 356,4 cm³.

2. Balkon, wystający na 1,2 m, podparty jest kształtówkami I w odstępach 1,25 m. Ciężar własny balkonu równo rozdzielony wynosi 390 kg/m², ciężar ruchomy stanowi tłum ludzi, który przyjmujemy 500 kg/m², ciężar poręczy wynosi 300 kg/m.

Każdy ze średnich dźwigarów jest obciążony ciężarem jednostajnie rozdzielonym (390 + 500) 1,25 = 1112,5 kg/m i skupionym, działającym na końcu, 300 × 1,25 = 375 kg, zatem wedle 30) najw. $M = -ql \cdot \frac{1}{2} l - P \cdot l = -\frac{1}{2} q l^2 - Pl = -\frac{1}{2} 1.113 \cdot 1,2^2 - 0,375 \cdot 1,2 = -0,801 - 0,450 = -1,251$ tm, a dla $\tau = 1000$ kg/cm² $\frac{M}{\tau} = \frac{125100}{1000} = 125,1 = \frac{I}{e}$.

T a b l i c a XXIV.
Kształtówki I. (przekr. norm. austr.).

Liczba kształtówki	Wymiary w milimetrach						nachylenie wnętrza boków stopy p o/o	przekrój F	ciężar g	ze względu na oś XX			ze względu na oś YY		
	h	b	d	d_1	r_1	r				moment bezwładności J_x	moment oporu $J_x : 2$	promień bezwładności a	moment bezwładności J_y	moment oporu $J_y : 2$	promień bezwładności a_1
							cm^3	kg/m	cm^4	cm^3	cm^4	cm	cm^4	cm^3	cm
8	80	52	4,0	6,0	2,4	4,8	9,08	7,13	97,1	24,3	3,27	12,7	4,90	1,18	
10	100	60	4,5	7,0	2,7	5,4	12,42	9,75	207,9	41,6	4,09	22,8	7,59	1,35	
12	120	68	5,0	8,0	3,1	6,2	16,28	12,78	392,7	65,4	4,91	37,8	11,1	1,52	
13	130	72	5,5	8,5	3,3	6,6	18,68	14,66	524,0	80,6	5,30	47,6	13,2	1,60	
14	140	76	6,0	8,5	3,5	7,0	20,55	16,13	659,5	94,2	5,67	55,6	14,6	1,64	
15	150	80	6,0	9,0	3,6	7,2	22,58	17,73	840,3	112,0	6,10	68,5	17,1	1,74	
16	160	84	6,5	9,5	3,9	7,8	25,43	19,96	1068	133,5	6,48	83,6	19,9	1,81	
18	180	90	7,0	11,0	4,2	8,4	31,21	24,50	1663	184,7	7,30	119,7	26,6	1,96	
18 ^a	180	135	7,0	11,0	4,2	8,4	41,11	32,27	2364	262,6	7,58	380,7	56,4	3,04	
20	200	96	8,0	12,0	4,8	9,6	37,58	29,50	2429	242,9	8,04	158,3	33,0	2,05	
21	210	99	8,5	12,5	5,1	10,2	40,99	32,18	2899	276,1	8,41	180,8	36,5	2,10	
22	220	102	9,0	13,0	5,4	10,8	44,55	34,79	3434	312,2	8,78	205,5	40,3	2,15	
22 ^a	220	135	9,0	13,0	5,4	10,8	53,13	41,71	4346	395,1	9,04	457,8	67,8	2,94	
23	230	105	9,0	14,0	5,5	11,0	48,17	37,81	4099	356,4	9,22	242,1	46,1	2,24	
24	240	108	9,5	14,5	5,7	11,4	52,00	40,82	4785	398,8	9,59	272,9	50,5	2,29	
24 ^a	240	135	9,5	14,5	5,7	11,4	59,83	46,97	5774	481,2	9,82	517,0	76,6	2,94	
25	250	111	10,0	15,0	6,0	12,0	56,00	43,96	5556	444,5	9,96	306,1	55,2	2,34	
26	260	114	10,5	15,5	6,3	12,6	60,15	47,22	6117	493,6	10,33	342,6	60,1	2,39	
28	280	120	11,0	17,0	6,6	13,2	68,70	53,93	8527	609,1	11,14	439,0	73,2	2,53	
28 ^a	280	150	11,0	17,0	6,6	13,2	78,90	61,94	10279	734,2	11,41	831,2	110,8	3,25	
30	300	126	12,0	18,0	7,2	14,4	78,02	61,25	11002	733,5	11,88	537,2	85,3	2,62	
32	320	132	13,0	19,0	7,8	15,6	87,96	69,05	13982	873,1	12,61	650,9	98,6	2,72	
35	350	141	14,0	21,0	8,4	16,8	103,64	81,36	19693	1125,3	13,79	876,8	124,4	2,91	
40	400	156	16,0	24,0	9,6	19,2	132,86	104,30	32709	1635,5	15,69	1354	173,6	3,19	
45	450	171	18,0	27,0	10,8	22,6	165,67	130,05	51284	2279,3	17,59	2001	234,0	3,48	
(50)	500	186	20,0	30,0	12,8	24,0	199,60	155,70	75912	3036,5	19,50	5248	349,2	4,03	

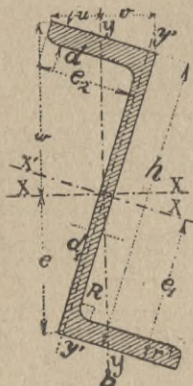
A zatem przyjmijmy kształtówkę $l. 16$, dla której $\frac{I}{e} = 133,5 \text{ cm}^3$.

Dźwigary skrajne niosą ciężar jednostajnie rozdzielony $\frac{1}{2}(300 + 500) \times \frac{1,25}{2} + 300 = 856 \text{ kg/m}$ i skupiony na końcu $300 \times \frac{1,25}{2} = 188 \text{ kg}$, zatem $M = -\frac{1}{2}856 \cdot 1,2 + -0,188 \cdot 1,2 = -0,617 - 0,225 = -0,842 \text{ tm}$.

$$\text{Zatem } \frac{M}{\tau} = \frac{I}{e} \frac{84200}{1000} = 84,2 \text{ cm}^3.$$

Moglibyśmy więc przyjąć dla dźwigarów skrajnych kształtówki $l. 14$.

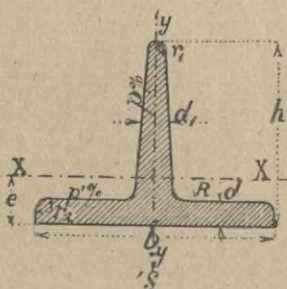
Poniżej podajemy też tablicę XXV. według norm niemieckich, wedle których długości normalne 4–12 m, długości od 4 do 9 m co 20 cm i od 9 do 12 m co 25 cm, najw. długość 14 m, $r=d$, $r_1=0,6 d$, pochylenie stopek $p=14\%$, ($\gamma=7,8$), jakoteż tabl. XXVI i XXVII dla kształtówek szerokostopowych.



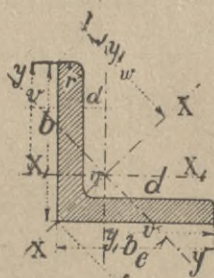
rys. 139.

§ 56. Inne kształtówki.

Towarzystwo inżynierów i architektów w Wiedniu ustanowiło pewne wymiary także dla innych kształtówek, które poniżej podajemy zestawione w tablicach wraz z odległościami środka



rys. 140.



rys. 141.

ciężkości od podstawy i momentami i promieniami bezwładności. Ciężar gatunkowy dla żelaza zlewne przyjęty $\gamma=7,85$.

Tablica XXV.

Kształtówki I (przekr. norm. niemieckie).

Liczba	Wymiary w milimetrach						Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
	h	b	d	d ₁	F	g	I _x	W _x	a	I _y	W _y	a ₁
							cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
8	80	42	3,9	5,9	7,58	5,95	77,8	19,5	3,21	6,29	3,00	0,91
9	90	46	4,2	6,3	8,99	7,07	117	26,0	3,61	8,78	3,82	0,99
10	100	50	4,5	6,8	10,6	8,32	171	34,2	4,02	12,2	4,88	1,07
11	110	54	4,8	7,2	12,3	9,66	230	43,5	4,32	16,2	6,00	1,15
12	120	58	5,1	7,7	14,2	11,15	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
13	130	62	5,4	8,1	16,1	12,64	436	67,1	5,20	27,5	8,87	1,31
14	140	66	5,7	8,6	18,2	14,37	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,39
15	150	70	6,0	9,0	20,4	16,01	735	98,0	6,00	43,9	12,5	1,47
16	160	74	6,3	9,5	22,8	17,90	935	117	6,40	54,7	14,8	1,54
17	170	78	6,6	9,9	25,2	19,78	1166	137	6,80	66,6	17,1	1,62
18	180	82	6,9	10,4	27,9	21,80	1446	161	7,20	81,3	19,8	1,71
19	190	86	7,2	10,8	30,5	24,02	1763	186	7,60	97,4	22,7	1,79
20	200	90	7,5	11,3	33,4	26,30	2142	214	8,01	117	26,0	1,87
21	210	94	7,8	11,7	36,3	28,57	2563	244	8,40	138	29,4	1,95
22	220	98	8,1	12,2	39,5	31,09	3060	278	8,80	162	33,1	2,02
23	230	102	8,4	12,6	42,6	33,52	3607	314	9,20	189	37,1	2,12
24	240	106	8,7	13,1	46,1	36,10	4246	354	9,60	221	41,7	2,19
25	250	110	9,0	13,6	49,7	39,01	4966	397	10,00	256	46,5	2,27
26	260	113	9,4	14,1	53,3	41,92	5744	442	10,38	288	51,0	2,32
27	270	116	9,7	14,7	57,1	44,90	6626	491	10,77	326	56,2	2,39
28	280	119	10,1	15,2	61,0	47,96	7587	542	11,15	364	61,2	2,44
29	290	122	10,4	15,7	64,8	50,95	8636	596	11,54	406	66,6	2,50
30	300	125	10,8	16,2	69,0	54,24	9800	693	11,90	451	72,2	2,56
32	320	131	11,5	17,3	77,7	61,07	12510	782	12,69	555	84,7	2,67
34	340	137	12,2	18,3	86,7	68,14	15695	923	13,45	674	98,4	2,79
36	360	143	13,0	19,5	97,0	76,22	19605	1089	14,22	818	114	2,91
38	380	149	13,7	20,5	107	84,00	24012	1264	14,98	975	131	2,99
40	400	155	14,4	21,6	118	92,63	29213	1461	15,73	1158	149	3,13
42,5	425	163	15,3	23,0	132	103,62	36973	1740	16,73	1437	176	3,29
45	450	170	16,2	24,3	147	115,40	45852	2037	17,66	1725	203	3,43
47,5	475	178	17,1	25,6	163	127,96	56481	2378	18,61	2088	235	3,58
50	500	185	18,0	27,0	179	141,30	68738	2750	19,59	2478	268	3,72
55	550	200	19,0	30,0	213	167,21	99184	3607	21,42	3488	349	4,02
60	600	215	21,6	32,4	254	199,40	138957	4622	23,40	4668	434	4,30

Tablica XXVI.

Kształtówki I szerokostopowe Greya, kształtówki B.

wyrabiane przez tow. niemiecko-luksemburskie (Differdingen)
 pochyłość stopki $p=9\%$, $r=d$, $r_1=0,6 d$. Normalna długość 4 do 12, największa
 17 do 20. W zapasie 4 do 12 m co 50 w cm .

Liczba	h	b	d	d_1	F	G	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
							I_x	W	a	I_y	W_y	a_1
					cm^3	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
14 B	140	140	7,4	13,9	39,8	31,2	1388	198	5,90	438	63	3,32
16 B	160	160	8,0	15,4	49,6	38,9	2278	285	6,78	705	88	3,77
18 B	180	180	8,5	16,7	59,9	47,0	3512	390	7,66	1073	119	4,23
20 B	200	200	8,5	18,1	70,4	55,3	5171	517	8,57	1568	157	4,72
22 B	220	220	9	19,5	82,6	64,8	7379	671	9,45	2216	201	5,18
24 B	240	240	10	20,8	96,8	76,0	10260	855	10,30	3043	254	5,61
25 B	250	250	10,5	21,7	105,1	82,5	12066	965	10,71	3575	286	5,83
26 B	260	260	11	22,9	115,6	90,7	14352	1104	11,14	4261	328	6,07
27 B	270	270	11,3	23,6	123,2	96,7	16529	1224	11,58	4920	365	6,32
28 B	280	280	11,5	24,4	131,8	103,4	19052	1361	12,02	5671	405	6,56
29 B	290	290	12	25,2	141,1	110,8	21866	1508	12,45	6417	443	6,74
30 B	300	300	12,5	26,3	152,1	119,4	25201	1680	12,85	7494	500	7,02
32 B	320	300	13	27,0	160,7	126,2	30119	1882	13,69	7867	524	7,08
34 B	340	300	13,4	27,5	167,4	131,4	35241	2073	14,51	8097	540	7,00
36 B	360	300	14,2	29,0	181,5	142,5	42479	2360	15,30	8793	586	6,96
38 B	380	300	14,8	29,8	191,2	150,1	49496	2605	16,07	9175	612	6,93
40 B	400	300	15,5	31,0	203,6	159,8	57834	2892	16,85	9721	648	6,91
42½ B	425	300	16	31,8	213,9	167,0	68249	3212	17,86	10078	672	6,86
45 B	450	300	17	33,0	229,3	180,0	80887	3595	18,78	10668	711	6,82
47½ B	475	300	17,6	34,0	242,0	190,0	94811	3992	19,79	11142	743	6,78
50 B	500	300	19,4	35,2	261,8	205,5	111283	4451	20,62	11718	781	6,69
55 B	550	300	20,6	37,0	288,0	226,1	145957	5308	22,51	12582	839	6,61
60 B	600	300	20,8	37,2	300,6	236,0	179303	5977	24,43	12672	845	6,49
65 B	650	300	21,1	37,5	314,5	246,9	217402	6690	26,29	12814	854	6,38
70 B	700	300	21,1	37,5	325,2	255,3	258106	7374	28,17	12818	854	6,28
75 B	750	300	21,1	37,5	335,7	263,4	302560	8068	30,02	12823	855	6,18
80 B	800	300	21,5	38,5	354,9	278,6	360486	9012	31,86	13269	885	6,11
85 B	850	300	21,5	38,5	365,6	287,0	414887	9762	33,68	13274	885	6,02
90 B	900	300	21,5	38,5	376,4	295,5	473964	10533	35,48	13279	885	5,94
95 B	950	300	21,9	39,5	396,2	311,0	550974	11600	37,29	13727	915	5,89
100 B	1000	300	21,9	39,5	407,2	319,7	621287	12425	39,06	13732	915	5,81

Tablica XXVII.

Kształtówki I szerokostopowe z Pienia (Hann).

$p=0$ na długość 21—40 cm $p=0,1$, $r=d$, $r=2\text{mm}$.

Liczba	h	b	d	d_1	F	G	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
							I_x	W	a	I_y	W_y	a^1
	mm				cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
P 16	160	160	7,5	10,4	45,0	35,3	2094	262	6,82	712	89	3,98
P 18	180	180	8	12,6	59,3	46,6	3522	391	7,70	1228	136	4,55
P 20	200	200	8	13,5	69,9	54,7	5179	518	9,72	1804	180	5,74
P 22	220	220	9	14,3	82,4	64,7	7394	672	9,04	2544	231	5,57
P 24	240	240	9,6	15,3	96,3	75,6	10309	859	10,35	3533	294	6,06
P 25	250	250	10	15,9	104,2	81,8	12110	969	10,78	4150	332	6,31
P 26	260	260	10,5	16,9	114,8	90,1	14411	1109	11,20	4962	382	6,57
P 27	270	270	11	17,3	122,7	96,3	16588	1229	11,63	5688	421	6,81
P 28	280	280	11	17,9	130,8	102,6	19101	1364	12,13	6564	469	7,08
P 29.	290	290	11,5	18,4	139,7	109,7	21870	1508	12,51	7496	517	7,33
P 30	300	300	12	19,2	150,8	118,4	25222	1681	12,93	8659	577	7,58
P _a 32	320	300	12,5	20,0	159,3	125,1	30139	1884	13,75	9021	601	7,52
P _a 34	340	300	13	20,5	166,2	130,5	35273	2075	14,57	9247	616	7,46
P _a 36	360	300	13,5	22,1	179,7	141,1	42518	2362	15,38	9968	665	7,45
P _a 38	380	300	14	23,0	189,3	148,6	49598	2610	16,19	10375	692	7,40
P _a 40	400	300	15	24,1	202,1	158,6	58000	2900	16,94	10873	725	7,33
P _a 42½	425	300	15,5	24,9	212,4	166,7	68321	3215	17,93	11235	749	7,27
P _a 45	450	300	16	26,2	225,7	177,2	80931	3597	18,51	11823	788	7,15
P _a 47½	475	300	16,5	27,5	239,3	187,9	95031	4001	19,93	12410	827	7,20
P _a 50	500	300	18	28,8	258,8	203,1	111539	4462	20,76	13003	867	7,09

Liczba	h	b	d	d ₁	F	G	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
							I _x	W	a	I _y	W _y	a ₁
	mm				cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
P _a 55	550	300	18	31,1	279,7	219,6	146237	5318	22·87	14040	936	7·09
P _a 60	600	300	19	31,1	294,3	231,0	179649	5988	24·71	14048	937	6·91
P _a 65	650	300	19	31,5	306,1	240,3	217574	6695	26·66	14231	949	6·82
P _a 70	700	300	20	31,5	322,2	252,9	260107	7432	28·41	14241	949	6·65
P _a 75	750	300	20	31,5	332,2	260,8	304781	8128	30·29	14245	959	6·55
P _a 80	800	300	20	31,8	343,9	269,9	355875	8897	32·17	14383	959	6·47
P _a 85	850	300	20	31,8	353,9	277,8	409293	9631	34·01	14386	959	6·38
P _a 90	900	300	20	31,8	363,9	285,6	467145	10381	35·83	14390	959	6·29
P _a 95	950	300	20	31,8	373,9	293,5	529539	11148	37·63	14393	960	6·20
P _a 100	1000	300	20	31,8	383,9	301,3	596607	11932	39·42	14396	960	6·12
P _b 32	320	320	12,5	20,0	167,3	131,3	31942	1996	13·82	10943	684	8·08
P _b 34	340	340	13	20,5	182,7	143,4	39464	2321	14·70	13451	791	8·58
P _b 36	360	360	13,5	22,1	206,2	161,9	50099	2783	15·57	17208	956	9·13
P _b 38	380	380	14	23,0	226,1	177,5	61340	3228	16·47	21059	1108	9·65
P _b 40	400	380	15	24,1	240,6	188,9	71640	3582	17·26	22068	1161	9·58
P _b 42 ¹ / ₂	425	380	15,5	24,9	252,2	198,0	84286	3966	18·28	22802	1200	9·51
P _b 45	450	380	16	26,2	267,6	210,1	99778	4435	19·31	23994	1263	9·47
P _b 47 ¹ / ₂	475	380	16,5	27,5	283,3	222,4	117087	4930	20·34	25185	1326	9·43
P _b 50	500	380	18	28,8	304,8	239,3	137149	5486	21·21	26381	1388	9·30
P _b 55	550	380	18	31,1	29,5	258,6	179772	6537	23·35	28487	1499	9·30
P _b 60	600	380	19	31,1	344,1	270,1	219951	7323	25·28	28495	1500	9·10
P _b 65	650	380	19	31,1	356,5	279,8	265806	8179	27·31	28864	1519	9·00
P _b 70	700	380	20	31,5	372,6	292,5	316457	9042	29·14	28874	1520	8·80
P _b 75	750	380	20	31,5	382,6	300,3	369870	9863	31·09	28878	1520	8·69
P _b 80	800	380	20	31,8	394,8	309,9	430983	10775	33·04	29155	1534	8·59
P _b 85	850	380	20	31,8	404,8	317,7	494496	11637	34·95	29159	1535	8·49
P _b 90	900	380	20	31,8	414,8	325,6	563068	12513	36·81	29162	1535	8·38
P _b 95	950	380	20	31,8	424,8	333,4	636824	13407	38·72	29165	1535	8·29
P _b 100	1000	380	20	31,8	434,8	341,3	675890	14318	39·43	29169	1535	8·19

Таблица XXVIII.

I. Kształtówka U (n. U-Eisen, fr. fer à U, an. U-iron, r. коробчатое желѣзо) (rys. 138 b) (przek. norm. austr.).

Dla przekroi normalnych jest $b=0,25 h + 25 mm$ (zaokrąglone na 5 mm)
 $d=0,025 h + 4 mm$ (zaokrąglone na 0,5 mm)
 $d_1=1,5 d,$
 $r_1=0,6 d,$
 $r=1,5 d,$
 $p=(0,01 h + 7)\%$

Liczba kształtówki	Wymiary w milimetrach							Nachylenie wewn. boków p %	Przekrój F	Ciężar g	Odstęp środka ciężkości e	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
	h	b	d	d_1	r_1	r	moment					pro-mień bez-władności a	moment		pro-mień bez-władności a_1		
							bez-władności J_x						oporu $J_x \cdot \frac{h}{2}$	bez-władności J_y		oporu $J_y \cdot (b-e)$	
	cm^4	cm^3	cm^4	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm^4	cm^3	cm					
6	60	40	5,5	8,0	3,3	8,0	7,6	9,01	7,07	1,44	48,0	16,0	2,31	13,0	5,1	1,20	
8	80	45	6,0	9,0	3,6	9,0	7,8	12,06	9,47	1,54	116,1	29,0	3,10	21,9	7,4	1,35	
10	100	50	6,5	9,5	3,9	9,5	8,0	15,03	11,80	1,62	227,1	45,4	3,89	33,3	9,8	1,49	
12	120	55	7,0	10,5	4,2	10,5	8,2	18,81	14,77	1,74	409,7	68,3	4,67	50,1	13,3	1,63	
13	130	60	7,0	10,5	4,2	10,5	8,3	20,56	16,14	1,87	533,4	82,1	5,09	65,3	15,8	1,78	
14	140	60	7,5	11,0	4,5	11,0	8,4	22,40	17,58	1,82	662,2	94,6	5,44	69,9	16,7	1,77	
16	160	65	8,0	12,0	4,8	12,0	8,6	26,90	21,12	1,95	1038	129,8	6,21	98,2	21,5	1,91	
18	180	70	8,5	12,5	5,1	12,5	8,8	31,13	24,44	2,03	1514	168,2	6,97	130	26,1	2,04	
20	200	75	9,0	13,5	5,4	13,5	9,0	36,35	28,54	2,16	2182	218,2	7,75	173	32,5	2,18	
22	220	80	9,5	14,0	5,7	14,5	9,2	41,21	32,35	2,25	2979	270,9	8,50	221	38,4	2,32	
24	240	85	10,0	15,0	6,0	15,0	9,4	47,15	37,01	2,38	4058	338,2	9,28	285	46,5	2,46	
26	260	90	10,5	15,5	6,3	15,5	9,6	52,63	41,32	2,47	5294	407,3	10,03	352	53,8	2,59	
28	280	95	11,0	16,5	6,6	16,5	9,8	59,30	46,55	2,60	6920	494,3	10,80	441	63,9	2,73	
30	300	100	11,5	17,0	6,9	17,0	10,0	65,41	51,35	2,69	8727	581,8	11,55	533	72,8	2,85	

II. Kształtówki Z, Zetówki (n. Z Eisen, fr. fer en E, a. Z-iron, r. Z-образное желѣзо) (rys. 139)
(przek. norm. austr.)

$$R = d, \quad r = 0,4d, \quad p = 0^0/0$$

Liczba kształtówki	Wymiary w milimetrach							Przekrój F	Ciężar jednostkowy g	Odstęp środka ciężkości w mm			Ze względu na oś			Ze względu na oś główną							
	h	b	d ₁	d	r	R	X'X'			Y'Y'		I _x	I _y	st. z.	Odstępy osi w mm			XX'		YY			
							moment bezwładności			moment bezwładności	u				v	w	e	I	a		I	a ₁	
8	80	55	7.0	9.0	4.0	9.0	14.5	11.40	40.0	51.5	142	80.5	0.7002	19.2	25.8	62.3	30.8	200	32.2	3.71	21.8	8.4	1.22
10	100	75	7.5	8.0	6.5	3.5	18.2	14.16	50.5	71.2	289	184	0.7517	26.9	33.0	82.8	37.7	425	51.3	4.84	48.4	14.7	1.63
10	100	50	6.5	9.5	3.9	9.5	15.1	11.84	50.0	46.7	229	63.7	0.4503	22.1	23.5	64.8	44.3	271	41.8	4.23	21.7	8.8	1.20
15*)	150	75	10.0	10.0	7.0	11.0	29.8	23.4	78.5	73.8	1000	304	0.4507	34.0	34.0	102.3	70.8	1190	116	6.32	114	31.7	1.95
		90					31.2	24.6	71.5	81.1			0.4630	43.6	38.1	99.0	61.1	1190	120			25.0	
18	180	70	8.5	12.5	5.1	12.5	39.6	24.52	90.0	65.7	1524	233	0.3136	35.8	31.0	105.5	84.6	1665	158	7.30	92.7	24.2	1.72
22	220	80	9.0	13.5	5.7	13.5	39.6	31.40	110.0	75.5	2900	381	0.2869	42.2	34.8	126.8	104.5	3126	247	8.88	15.5	34.8	1.98

*) Przekrój niesymetryczny { wyższe cyfry odnoszą się do wyższego ramienia, niższe cyfry odnoszą się do niższego ramienia. }

III. Kształtówki T, Tówki (n. T Eisen, fr. fer en T; a. T-iron, r. T-образное желѣзо) (rys. 140)
(przek. norm. austr.)

Dla przekroji normalnych jest $r_1=0,25 d$, $r_2=0,5 d$, $R=d$,

dla przekroji wysokościennych $p=p'=2\%$

Liczba kształtówki	Wymiary w milimetrach				Prze-krój F	Ciężkość Odkł. w. s. g.	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY			
	b	h	d ₁	d			promienie zaokrągleń		moment		moment		promień bezwładności a ₁
							r ₁	r ₂	bezwładności J _x	oporu J _x : (h-e)	bezwładności J _y	oporu J _y : 2	
cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	cm ³	cm ⁴	cm ³	cm	cm ³		
1. Przekroje normalne.													
4/3	40	30	5,5	5,5	3,56	2,79	7,98	2,31	1,05	0,81	2,82	1,41	0,89
6/3	60	30	5,5	5,5	4,65	3,65	6,75	2,57	1,10	0,74	9,41	3,14	1,42
7/35	70	35	6,0	6,0	5,94	4,66	7,68	4,48	1,64	0,87	16,3	4,66	1,66
8/4	80	40	7,0	7,0	7,91	6,21	8,85	7,78	2,50	0,99	28,4	7,10	1,89
6/4,5	60	45	7,5	7,5	7,32	5,74	11,6	10,8	3,22	1,21	12,9	4,31	1,33
8/6	80	60	10,0	10,0	13,0	10,21	15,5	34,0	7,64	1,62	40,9	10,2	1,77
13/6,5	130	65	10,5	10,5	19,3	15,18	14,0	50,4	9,89	1,62	182,4	28,1	3,07
10/7,5	100	75	12,0	12,0	19,5	15,35	19,1	80,0	14,3	2,02	95,7	19,1	2,21
12/9	120	90	14,5	14,5	28,3	22,25	23,0	167	24,9	2,43	200	33,3	2,66
16/12	160	120	19,0	19,0	49,6	38,90	30,5	519	58,0	3,24	621	77,6	3,54
2. Przekroje wysokościenne.													
3/3	30	30	4,0	4,0	2,26	1,77	8,53	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62
3,5/3,5	35	35	4,5	4,5	2,97	2,33	9,88	3,08	1,23	1,02	1,55	0,89	0,72
4/4	40	40	5,0	5,0	3,77	2,96	11,2	5,13	1,78	1,17	2,57	1,28	0,82
4,5/4,5	45	45	5,5	5,5	4,67	3,67	12,6	8,05	2,48	1,32	4,02	1,79	0,98
5/5	50	50	6,0	6,0	5,67	4,45	13,9	12,1	3,35	1,46	6,01	2,40	1,03
6/6	60	60	7,0	7,0	7,94	6,24	16,6	24,4	5,63	1,75	12,1	4,04	1,23
7/7	70	70	8,0	8,0	10,60	8,32	19,3	44,1	8,76	2,05	22,0	6,27	1,44
8/8	80	80	9,0	9,0	13,60	10,71	22,6	74,6	12,9	2,34	36,9	9,21	1,64

IV. Kątówki (n. *Winkelleisen*, fr. *cornière*,

A. Równoramienne

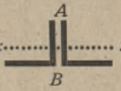
$$r=d, r_1=0,5 d$$

Liczba kątówki	Wymiary w mm				Prze- krój <i>F</i>	Ciężar <i>g</i>	Położenie osi głównych i środka ciężkości			Moment bez- władności ze względem na podstawę <i>I_{ab}</i>
	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>r₁</i>	<i>r</i>			<i>w</i>	<i>e</i>	<i>v</i>	
					cm ²	kg/m	cm			cm ⁴
45×45	45	5	6,0	3,0	4,29	3,37	3,18	1,82	3,21	15,0
	45	6	6,0	3,0	5,08	3,99	3,18	1,88	3,17	18,2
	45	7	6,0	3,0	5,85	4,59	3,18	1,92	3,14	21,4
50×50	50	5	6,0	3,0	4,79	3,76	3,54	1,99	3,59	20,6
	50	6	6,0	3,0	5,68	4,46	3,54	2,05	3,55	24,9
	50	7	6,0	3,0	6,55	5,14	3,54	2,11	3,51	29,2
55×55	55	6	7,0	3,5	6,29	4,94	3,89	2,26	3,93	32,9
	55	7	7,0	3,5	7,26	5,70	3,89	2,28	3,89	38,7
	55	8	7,0	3,5	8,21	6,44	3,89	2,33	3,85	44,5
60×60	60	6	7,5	3,7	6,90	5,42	4,24	2,39	4,31	42,6
	60	7	7,5	3,7	7,97	6,26	4,24	2,45	4,27	50,1
	60	8	7,5	3,7	9,02	7,08	4,24	2,50	4,23	57,6
	60	9	7,5	3,7	10,05	7,89	4,24	2,56	4,19	65,1
65×65	65	6	8,0	4,0	7,51	5,90	4,60	2,57	4,68	53,9
	65	7	8,0	4,0	8,68	6,81	4,60	2,62	4,65	63,3
	65	8	8,0	4,0	9,83	7,72	4,60	2,67	4,60	72,8
	65	9	8,0	4,0	10,96	8,60	4,60	2,73	4,57	82,4
	65	10	8,0	4,0	12,07	9,47	4,60	2,77	4,54	92,1
70×70	70	7	8,5	4,2	9,39	7,37	4,95	2,80	5,02	79,1
	70	8	8,5	4,2	10,64	8,35	4,95	2,84	4,99	90,9
	70	9	8,5	4,2	11,87	9,32	4,95	2,90	4,95	102,7
	70	10	8,5	4,2	13,08	10,27	4,95	2,97	4,90	114,6
75×75	75	8	10,0	5,0	11,47	9,00	5,30	3,01	5,37	110,9
	75	9	10,0	5,0	12,80	10,05	5,30	3,07	5,33	125,5

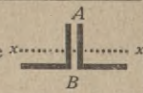
an. *angle iron*, r. угловое железо) (przechr. norm. austr.)

(n. *gleichschenkelig*, fr. *à branches égales*) (rys. 141).

$p = 0\%$.

Ze względu na oś $X_1 X_1$			Ze względu na oś główną XX			Ze względu na oś główną YY			Dwie znitowane kątówki 			
moment		promień bezwładności a_0	moment		promień bezwładności a	moment		promień bezwładności a_1	ze względu na oś AB		ze względu na oś XX	
bezwładności I_{x_1}	oporu $I_{x_1} : v$		bezwładności I_x	oporu $I_x : w$		bezwładności I_y	oporu $I_y : e$		moment	promień	moment	promień
bezwładności			bezwładności			bezwładności			bezwładności		bezwładności	
cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	$2 I_{ab}$	a_{ab}	$2 I_{xx}$	a_{xx}
7,86	2,45	1,35	12,5	3,94	1,71	3,19	1,75	0,86	30,0	1,87	15,7	1,35
9,17	2,89	1,34	14,6	4,59	1,69	3,75	1,99	0,86	36,3	1,89	19,3	1,34
10,54	3,36	1,34	16,5	5,20	1,68	4,56	2,38	0,88	42,7	1,91	21,1	1,34
11,2	3,11	1,53	17,5	4,95	1,91	4,84	2,43	1,01	41,1	2,07	22,3	1,53
12,9	3,64	1,51	20,5	5,78	1,90	5,41	2,64	0,98	49,8	2,09	25,9	1,51
14,7	4,20	1,50	23,2	6,56	1,88	6,14	2,91	0,97	58,5	2,11	29,4	1,50
17,4	4,43	1,66	27,6	7,09	2,09	7,21	3,19	1,07	65,8	2,29	34,8	1,66
19,9	5,11	1,65	31,4	8,07	2,08	8,31	3,64	1,07	77,3	2,31	39,7	1,65
22,1	5,75	1,64	35,0	9,00	2,07	9,27	3,98	1,05	89,0	2,33	44,3	1,64
22,9	5,31	1,82	36,3	8,56	2,29	9,54	3,99	1,18	85,2	2,48	45,8	1,82
26,2	6,14	1,81	41,4	9,77	2,28	11,0	4,49	1,17	100,1	2,51	52,4	1,81
29,3	6,93	1,80	46,3	10,9	2,27	12,3	4,93	1,17	115,1	2,53	58,6	1,80
32,2	7,69	1,79	50,9	12,0	2,25	13,6	5,29	1,16	130,3	2,55	64,4	1,79
29,0	6,20	1,97	46,6	10,1	2,49	11,4	4,44	1,23	107,8	2,68	58,0	1,97
33,6	7,23	1,97	53,3	11,6	2,48	13,9	5,31	1,27	127,7	2,70	67,2	1,97
37,3	8,11	1,95	59,7	13,0	2,46	14,9	5,58	1,23	145,7	2,72	74,6	1,95
41,6	9,10	1,95	65,7	14,3	2,45	17,5	6,41	1,26	164,8	2,74	83,2	1,95
45,7	10,07	1,95	71,5	15,5	2,43	19,9	7,18	1,28	184,1	2,76	91,4	1,95
42,3	8,42	2,12	67,3	13,6	2,68	17,3	6,18	1,36	158,2	2,90	84,6	2,12
47,9	9,60	2,12	75,5	15,2	2,66	20,3	7,12	1,38	181,7	2,92	95,8	2,12
52,8	10,7	2,11	83,3	16,8	2,65	22,3	7,69	1,37	205,4	2,94	105,6	2,11
56,9	11,6	2,09	90,7	18,3	2,63	23,1	7,78	1,33	229,2	2,96	113,8	2,09
58,9	11,0	2,27	93,3	17,6	2,85	24,5	8,14	1,46	221,8	3,11	117,8	2,27
65,2	12,0	2,26	103,2	19,5	2,84	27,2	8,86	1,46	250,9	3,13	130,4	2,26

Liczba kątówki	Wymiary w mm				Prze- krój <i>F</i>	Ciężar <i>g</i>	Położenie osi głównych i środka ciężkości			Moment bez- władności ze względem na podstawę <i>I_{ab}</i>
	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>r₁</i>	<i>r</i>			<i>w</i>	<i>e</i>	<i>v</i>	
					cm ²	kg/m	cm			cm ⁴
75×75	75	10	10,0	5,0	14,11	11,08	5,30	3,13	5,29	140,1
	75	11	10,0	5,0	15,40	12,09	5,30	3,18	5,24	154,9
	75	12	10,0	5,0	16,77	13,09	5,30	3,24	5,21	169,9
80×80	80	8	10,0	5,0	12,27	9,63	5,66	3,18	5,75	134,6
	80	9	10,0	5,0	13,70	10,75	5,66	3,24	5,71	152,2
	80	10	10,0	5,0	15,11	11,86	5,66	3,31	5,66	169,9
	80	11	10,0	5,0	16,50	12,95	5,66	3,35	5,63	187,8
	80	12	10,0	5,0	17,87	14,03	5,66	3,41	5,59	205,9
90×90	90	9	11,5	5,5	15,52	12,18	6,36	3,59	6,46	215,9
	90	10	11,5	5,5	17,13	13,45	6,36	3,65	6,42	240,9
	90	11	11,5	5,5	18,72	14,70	6,36	3,70	6,38	266,1
	90	12	11,5	5,5	20,29	15,93	6,36	3,76	6,34	291,4
	90	13	11,5	5,5	21,84	17,14	6,36	3,80	6,31	316,9
100×100	100	10	12,0	6,0	19,16	15,04	7,07	3,99	7,18	327,0
	100	11	12,0	6,0	20,95	16,45	7,07	4,04	7,14	361,3
	100	12	12,0	6,0	22,72	17,84	7,07	4,10	7,10	395,8
	100	13	12,0	6,0	24,47	19,21	7,07	4,17	7,05	430,5
	100	14	12,0	6,0	26,40	20,72	7,07	4,20	7,03	465,3
120×120	120	11	13,0	6,5	25,37	19,92	8,49	4,74	8,64	626,3
	120	12	13,0	6,5	27,54	21,62	8,49	4,79	8,61	684,3
	120	13	13,0	6,5	29,69	23,31	8,49	4,86	8,56	744,7
	120	14	13,0	6,5	31,82	24,98	8,49	4,90	8,53	804,2
	120	15	13,0	6,5	33,93	26,64	8,49	4,96	8,49	864,0
140×140	140	13	14,5	7,2	34,93	27,39	9,90	5,57	10,06	1178
	140	14	14,5	7,2	37,46	29,41	9,90	5,61	10,03	1272
	140	15	14,5	7,2	39,97	31,38	9,90	5,66	10,00	1366
	140	16	14,5	7,2	42,46	33,33	9,90	5,73	9,95	1460
160×160	160	15	16,5	8,2	46,04	36,14	11,31	6,35	11,51	2030
	160	16	16,5	8,2	48,93	38,44	11,31	6,41	11,47	2170
	160	17	16,5	8,2	51,80	40,66	11,31	6,48	11,42	2310
	160	18	16,5	8,2	54,65	42,90	11,31	6,52	11,39	2451

Ze względu na oś $X_1 X_1$			Ze względu na oś główną XX			Ze względu na oś główną YY			Dwie znitowane kątowniki 			
moment		promień bezwładności a_0	moment		promień bezwładności a	moment		promień bezwładności a_1	ze względu na oś AB		ze względu na oś XX	
bezwładności I_{x_1}	oporu $I_{x_1} : v$		bezwładności I_x	oporu $I_x : w$		bezwładności I_y	oporu $I_y : e$		moment	promień	moment	promień
cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	bezwładności	bezwładności	bezwładności	
									$2 I_{ab}$	a_{ab}	$2 I_{xx}$	a_{xx}
cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm	cm^4	cm
71,8	13,6	2,26	112,5	21,2	2,82	31,1	9,94	1,48	280,3	3,15	143,6	2,26
76,9	14,7	2,23	121,7	22,9	2,81	32,1	10,1	1,44	309,8	3,17	153,8	2,23
82,5	15,8	2,22	130,3	24,6	2,80	34,7	10,7	1,44	339,8	3,19	165,0	2,22
72,5	12,6	2,43	114,6	20,2	3,06	30,4	9,56	1,57	269,2	3,31	145,0	2,48
80,4	14,1	2,42	126,9	22,4	3,04	33,9	10,5	1,57	304,5	3,33	160,8	2,42
87,2	15,4	2,40	138,6	24,5	3,03	35,8	10,8	1,54	339,9	3,35	174,4	2,40
95,1	16,9	2,40	149,9	26,5	3,01	40,3	12,0	1,56	375,5	3,37	190,2	2,40
102,1	18,3	2,39	160,7	28,4	3,00	43,5	12,7	1,56	411,7	3,39	204,2	2,39
115,8	17,9	2,73	183,8	28,9	3,44	47,8	13,3	1,75	431,7	3,73	231,6	2,73
126,9	19,8	2,72	201,2	31,6	3,43	52,6	14,4	1,75	481,8	3,75	253,8	2,72
137,6	20,6	2,71	218,1	34,3	3,41	57,1	15,4	1,75	532,2	3,77	275,2	2,71
147,8	23,3	2,70	234,3	36,8	3,40	61,3	16,3	1,74	582,9	3,79	295,6	2,70
158,9	25,2	2,70	250,0	39,3	3,38	67,8	17,8	1,76	633,9	3,81	318,8	2,70
174,6	24,3	3,02	280,3	39,0	3,83	68,9	17,3	1,90	654,1	4,13	349,2	3,02
189,9	26,6	3,01	304,3	43,0	3,81	75,5	18,7	1,90	722,7	4,15	379,8	3,01
204,7	28,8	3,00	327,6	46,3	3,80	81,8	19,9	1,90	791,6	4,17	409,4	3,00
217,6	30,9	2,98	350,1	49,5	3,78	85,1	20,0	1,87	860,9	4,19	435,2	2,98
232,4	33,1	2,97	371,8	52,6	3,75	93,0	22,2	1,88	930,6	4,20	464,8	2,97
339,9	39,3	3,66	547,1	64,4	4,64	132,7	28,0	2,28	1253	4,97	679,8	3,66
367,8	42,7	3,65	589,7	69,5	4,63	145,9	30,5	2,30	1369	4,99	735,6	3,65
393,4	46,0	3,64	631,3	74,4	4,61	155,5	32,0	2,29	1489	5,01	786,8	3,64
421,1	49,4	3,64	671,6	79,1	4,59	170,6	34,8	2,32	1608	5,03	842,2	3,64
446,0	52,5	3,62	710,8	83,7	4,58	181,2	36,5	2,31	1728	5,05	892,0	3,62
636	63,2	4,27	1015	102,6	5,39	256	46,0	2,71	2356	5,81	1271	4,27
681	67,9	4,26	1083	109,4	5,38	280	49,9	2,74	2544	5,83	1363	4,26
726	72,6	4,26	1149	116,1	5,36	303	53,5	2,75	2732	5,85	1453	4,26
764	76,8	4,24	1214	122,6	5,35	314	54,8	2,72	2921	5,87	1528	4,24
1102	95,7	4,89	1747	154,3	6,15	457	72,0	3,15	4060	6,64	2203	4,89
1166	101,6	4,88	1848	163,4	6,14	484	75,5	3,15	4340	6,66	2332	4,88
1224	107,2	4,86	1947	172,2	6,13	501	77,3	3,11	4621	6,68	2448	4,86
1291	113,3	4,86	2044	180,7	6,12	538	82,5	3,14	4903	6,77	2582	4,86

B. Nierównoramienne (n. ungleich-
r = d,

Liczba przekroju	Wymiary w milimetrach					Powierzchnia przekroju F cm^2	Ciężar jednostkowy g kg/m	Odstęp środka ciężkości w cm		Polożenie osi głównej YY $st \alpha$	Odstępy od osi głównych cm w centymetrach			
	b	b_1	d	r	r_1			e	e_1		w	s	r	t
50×75	50	75	7	7,5	3,7	8,32	6,53	2,47	1,24	0,430	5,11	3,76	2,62	2,12
	50	75	8	7,5	3,7	9,42	7,39	2,52	1,29	0,428	5,08	3,78	2,60	2,18
60×90	60	90	8	9,0	4,5	11,45	9,00	2,96	1,50	0,431	6,14	4,51	3,13	2,55
	60	90	9	9,0	4,5	12,78	10,03	3,00	1,52	0,430	6,11	4,53	3,12	2,58
	60	90	10	9,0	4,5	14,09	11,06	3,04	1,55	0,428	6,09	4,54	3,12	2,62
70×105	70	105	9	10,0	5,0	15,05	11,81	3,44	1,71	0,436	7,16	5,27	3,66	2,94
	70	105	10	10,0	5,0	16,61	13,04	3,48	1,75	0,433	7,14	5,28	3,66	2,99
	70	105	11	10,0	5,0	18,15	14,25	3,59	1,79	0,430	7,12	5,29	3,65	3,04
80×120	80	120	10	11,0	5,5	19,13	15,02	3,92	1,95	0,435	8,19	6,01	4,24	3,35
	80	120	11	11,0	5,5	20,92	16,42	3,96	1,99	0,432	8,17	6,02	4,23	3,40
	80	120	12	11,0	5,5	22,69	17,81	4,00	2,02	0,430	8,15	6,03	4,21	3,44
90×135	90	135	11	12,0	6,0	23,70	18,60	4,40	2,18	0,435	9,21	6,76	4,77	3,75
	90	135	12	12,0	6,0	25,72	20,19	4,44	2,22	0,433	9,20	6,77	4,77	3,80
	90	135	13	12,0	6,0	27,72	21,76	4,48	2,26	0,431	9,18	6,78	4,76	3,85
100×150	100	150	12	13,0	6,5	28,72	22,56	4,89	2,42	0,436	10,22	7,51	5,26	4,18
	100	150	13	13,0	6,5	30,99	24,33	4,93	2,46	0,435	10,21	7,53	5,27	4,22
	100	150	14	13,0	6,5	33,22	26,08	4,97	2,50	0,434	10,20	7,55	5,27	4,27
110×165	110	165	13	14,0	7,0	34,27	26,90	5,38	2,66	0,437	11,25	8,26	5,81	4,59
	110	165	14	14,0	7,0	36,75	28,85	5,41	2,69	0,435	11,24	8,28	5,82	4,63
	110	165	15	14,0	7,0	39,21	30,79	5,45	2,73	0,433	11,23	8,29	5,82	4,68
60×80	60	80	7	8,0	4,0	9,38	7,36	2,51	1,53	0,545	5,55	4,34	2,92	2,55
	60	80	8	8,0	4,0	10,63	8,34	2,55	1,56	0,544	5,54	4,36	2,93	2,59
	60	80	9	8,0	4,0	11,86	9,31	2,59	1,60	0,542	5,52	4,38	2,93	2,64
80×100	80	100	8	10,0	5,0	13,87	10,88	3,03	2,04	0,626	6,99	5,72	3,69	3,34
	80	100	9	10,0	5,0	15,50	12,17	3,07	2,08	0,621	6,98	5,73	3,69	3,39
	80	100	10	10,0	5,0	17,11	13,43	3,11	2,12	0,622	6,97	5,74	3,69	3,44
	80	100	11	10,0	5,0	18,70	14,68	3,15	2,16	0,620	6,96	5,75	3,70	3,49
90×120	90	120	10	11,0	5,5	20,13	15,80	3,75	2,27	0,547	8,32	6,52	4,40	3,79
	90	120	11	11,0	5,5	22,02	17,29	3,79	2,31	0,545	8,31	6,53	4,40	3,84
	90	120	12	11,0	5,5	23,89	18,75	3,83	2,35	0,543	8,30	6,54	4,40	3,89
90×130	90	130	11	12,0	6,0	23,15	18,17	4,20	2,22	0,469	8,91	6,68	4,64	3,79
	90	130	12	12,0	6,0	25,11	19,71	4,24	2,26	0,467	8,89	6,69	4,64	3,84
	90	130	13	12,0	6,0	27,07	21,25	4,27	2,29	0,464	8,88	6,70	4,65	3,88
100×120	100	120	12	12,0	6,0	23,15	18,17	3,63	2,64	0,679	8,41	7,14	4,43	4,22
	100	120	13	12,0	6,0	25,11	19,71	3,67	2,68	0,677	8,40	7,15	4,44	4,28
	100	120	14	12,0	6,0	27,07	21,25	3,71	2,72	0,676	8,39	7,15	4,45	4,33
100×140	100	140	12	13,0	6,5	27,54	21,62	4,47	2,50	0,496	9,65	7,34	5,07	4,22
	100	140	13	13,0	6,5	29,69	23,31	4,51	2,54	0,495	9,63	7,36	5,07	4,25
	100	140	14	13,0	6,5	31,82	24,98	4,55	2,57	0,494	9,61	7,37	5,07	4,28

schenkelig, fr. à branches inégales) (rys. 142) (przekr. norm. austr.).
 $r_1 = \frac{1}{2} d$.

Moment bezwładności w cm^4 ze względu na krawędź zewn.		Ze względu na oś							
		$X_1 X_1$		$Y_1 Y_1$		XX		YY	
krótkiego ramienia	długiego ramienia	I'	a'	I_1'	a_1'	I	a	I_1	a_1
I_0	I_0'	cm^4	cm	cm^4	cm	cm^4	cm	cm^4	cm
97,4	29,3	46,6	2,37	16,5	1,41	53,4	2,53	9,7	1,08
111,7	33,9	51,9	2,35	18,2	1,39	59,5	2,51	10,6	1,06
192,0	57,6	91,7	2,83	31,9	1,67	105,3	3,03	18,3	1,28
216,7	65,4	101,7	2,82	35,7	1,68	116,7	3,02	20,7	1,27
241,4	73,4	111,2	2,81	39,5	1,67	127,5	3,01	23,2	1,27
343,1	102,9	165,0	3,32	58,9	1,98	189,9	3,55	34,0	1,50
382,3	115,2	181,1	3,31	64,3	1,97	208,0	3,54	37,4	1,50
421,6	127,7	196,7	3,29	69,5	1,96	225,6	3,53	40,6	1,50
569,5	170,6	275,5	3,80	97,9	2,26	317,0	4,07	56,8	1,72
627,9	188,9	299,8	3,79	106,1	2,25	344,2	4,05	61,7	1,72
686,4	207,4	323,4	3,78	114,8	2,25	368,0	4,03	67,5	1,72
892,2	267,2	433,4	4,28	154,6	2,55	498,4	4,58	89,6	1,94
975,3	293,1	468,4	4,26	166,3	2,54	538,0	4,57	96,7	1,94
1058,5	319,3	502,2	4,25	177,6	2,53	576,2	4,56	103,5	1,93
1335,7	399,9	648,5	4,75	231,5	2,84	747,0	5,10	134,0	2,16
1449,6	435,3	696,5	4,74	247,8	2,83	801,0	5,08	143,4	2,15
1563,7	471,1	743,2	4,73	263,5	2,82	854,0	5,07	153,0	2,15
1926,3	576,3	934,5	5,22	333,7	3,12	1076,3	5,60	191,9	2,37
2077,8	623,5	1002,1	5,22	357,4	3,12	1152,4	5,60	207,1	2,37
2229,7	671,1	1065,2	5,21	379,0	3,11	1223,8	5,59	220,3	2,37
118,0	50,1	58,9	2,51	28,2	1,73	71,9	2,77	15,2	1,27
135,3	57,7	66,2	2,50	31,9	1,73	80,8	2,76	17,3	1,27
152,8	65,4	73,2	2,48	35,0	1,72	89,2	2,74	19,1	1,27
262,8	134,9	135,5	3,13	77,2	2,36	172,9	3,53	39,7	1,69
296,6	152,8	150,6	3,12	85,6	2,35	192,0	3,52	44,2	1,69
330,7	170,6	165,2	3,11	93,8	2,34	210,4	3,51	48,6	1,68
364,7	188,7	179,2	3,10	101,4	2,33	227,9	3,49	52,7	1,68
569,9	241,9	286,9	3,78	138,2	2,62	350,4	4,17	74,7	1,93
628,5	267,0	312,3	3,77	149,9	2,61	380,9	4,16	81,3	1,92
687,3	293,1	336,8	3,75	161,2	2,60	410,4	4,14	87,6	1,91
796,7	267,0	388,3	4,10	152,9	2,57	454,6	4,43	86,6	1,92
871,0	292,8	419,5	4,09	164,5	2,56	491,0	4,42	93,5	1,93
945,5	319,0	452,0	4,09	177,2	2,56	527,4	4,41	101,8	1,94
627,1	364,4	322,0	3,73	203,0	2,96	423,6	4,28	101,4	2,09
685,9	399,2	347,7	3,72	218,9	2,95	456,8	4,27	109,8	2,09
744,9	434,3	372,4	3,71	234,0	2,94	488,8	4,25	117,6	2,08
1085,9	399,2	535,7	4,41	227,1	2,87	636,2	4,81	126,6	2,14
1178,7	434,5	574,8	4,40	243,0	2,86	681,2	4,79	136,0	2,14
1271,8	470,2	613,1	4,39	260,2	2,86	727,1	4,78	146,3	2,14

V. Zoresówki czyli złobkówki (n. Belageisen) (rys. 143), (przekr. norm. austr.) $r = g$.

Liczba porządk.	Wymiary w milimetrach										Ciężar jednostkowy g	Odstęp środka ciężkości od		Moment bezwładności ze względu na powierzchnię I_1	Ze względu na oś poziomą XX		Ze względu na oś pionową YY		
	Przekrój F		d_1	d	b_1	b	h	e	podstawy e_1	głowy e_1		moment bezwładności I	pro-mień bezwł. a		moment bezwładności I'	pro-mień bezwł. a'			
	b'	d'																	
10	100	64	36	18	30	5	4	3	5,30	4,16	1,76	1,84	25,6	9,13	4,97	1,31	45,3	9,06	2,92
16	160	100	55	30	45	6	5	4	10,84	8,51	2,67	2,83	122,2	45,6	16,1	2,05	231	28,9	4,61
18	180	112	63	34	50	7	4	4	13,90	10,91	3,09	3,21	210,6	78,7	24,5	2,38	366	40,6	5,13
21	210	135	75	37,5	60	8,5	7,5	5	19,32	15,17	3,71	3,79	418,0	152	40,2	2,81	715	68,1	6,08
24	240	156	87	42	69	10	9	5,5	25,39	19,93	4,33	4,36	748,0	271	62,1	3,27	122,2	103	6,97
26	260	170	95	45	75	11	10	6	30,20	23,71	4,76	4,74	1067,	383	80,5	3,56	172,0	132	7,55
26a	260	147	125	45	70	10	10	6	31,30	24,54	6,14	6,36	1874	694	109	4,71	185,1	142	7,69

VI. Ćwiercokółki (n. Viertelkreiseisen, Quadranteisen) (rys. 147), (przekr. norm. austr.).

Liczba kształtków.	Wymiary w milimetrach										Dwa przekroje znitowane ze względu na XX				Cztery kształtkówki dla osi AB				Cztery kształtkówki dla osi CC'						
	średnica średnia		zewn.	wewn.	żebra		Wysokość		Zaokrąglenie		Przekrój F	Odstęp środka ciężkości		Moment bezwładności ze względu na oś		I_x	I_x / e_3	I	I / h_1	a	I'	I' / h_2	a'		
	D	R			R'	b	d	d_1	h_1	h_3		r_1	r_3	e_1	e_3									AB	I_1
10	100	52	48	39	6	4	87	64,5	3	6	7,34	5,76	3,44	5,26	143,2	56,5	112,9	21,5	2,74	572,7	65,8	4,42	572,7	88,8	4,42
15	150	78	72	46	8	6	118	87,0	5	9	13,47	10,57	4,93	6,87	511,4	184,0	367,9	53,6	3,70	2046	173,4	6,09	2046	235,1	6,09
20	200	104	96	53	10	8	149	109,9	6	11	21,57	16,93	6,46	8,45	1359	459,8	917,0	108,9	4,62	5434	364,7	7,94	5434	494,3	7,94
25	250	130	120	60	12	10	180	132,9	7	13	31,64	24,84	8,00	10,01	2993	971,0	1942	194,1	5,54	11973	665,2	9,73	11973	901,1	9,73
30	300	156	144	67	14	12	211	155,8	8	15	43,67	34,28	9,54	11,56	5803	1825	3650	315,1	6,46	23213	1100	11,5	23213	1490	11,5

I a Kształtówki U (przechr. norm. niemieckie).

Długości normalne 4 do 10 m najw. długość 16 m.
w zapasie długości od 4—9 m w 20 cm. i od 9—10 m co 25 cm.

$$r = d_1, r_1 = \frac{d_1}{2} \text{ pochylenie stopki } 8\% (1 : 12,5).$$

Liczba	Wymiary w mm				F cm ²	G kg/m	Odstęp środkła ciężko- ści e mm	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
	h	b	d	d ₁				I _x cm ⁴	W _x cm ³	a cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	a ₁ cm
3	30	33	5	7	5,44	4,27	13,1	6,39	4,26	1,08	5,33	2,68	0,99
4	40	35	5	7	6,21	4,87	13,3	14,1	7,05	1,50	6,68	3,08	1,04
5	50	38	5	7	7,12	5,59	13,7	26,4	10,6	1,92	9,12	3,75	1,13
6 ^{1/2}	65	42	5,5	7,5	9,03	7,09	14,2	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25
8	80	45	6	8	11,0	8,64	14,5	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33
10	100	50	6	8,5	13,5	10,6	15,5	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47
12	120	55	7	9	17,0	13,35	16,0	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59
14	140	60	7	10	20,4	16,01	17,5	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75
16	160	65	7,5	10,5	24,0	18,84	18,4	925	116	6,21	85,3	18,8	1,88
18	180	70	8	11	28,0	21,98	19,2	1354	150	6,95	114	22,4	2,02
20	200	75	8,5	11,5	32,2	25,28	20,1	1911	191	7,70	148	27,0	2,14
22	220	80	9	12,5	37,4	29,36	21,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,26
24	240	85	9,5	13	42,3	33,21	22,3	3598	300	9,22	248	39,6	2,42
26	260	90	10	14	48,3	37,92	23,6	4823	371	9,98	317	47,7	2,56
28	280	95	10	15	53,3	41,84	25,3	6276	448	10,85	399	57,2	2,74
30	300	100	10	16	58,8	46,16	27,0	8026	535	11,69	495	67,8	2,90

II a Kształtówki Z (przepr. norm. niemieckie).

Długość normalna 4 do 10 m, najw. długość 12—16 m w zapasie długości od 4 do m co 25 cm

$$r = d, \quad r_1 = \frac{d}{2}.$$

Liczba	Wymiary w mm				F cm ²	G kg/m	Ze względu na oś			Polożenie osi głównej st α	Ze względu na oś główną				
	h	b	d ₁	d			I _x	Y'Y'	I _y		XX		YY		
											I	W	a	I ₁	W ₁
					cm ⁴			cm ³		cm					
3	30	38	4	4,5	4,32	3,39	5,96	13,7	1,655	18,1	4,69	2,05	1,54	1,11	0,60
4	40	40	4,5	5	5,43	4,23	13,5	17,6	1,181	28,0	6,72	2,27	3,05	1,83	0,75
5	50	43	5	5,5	6,77	5,28	26,3	23,8	0,939	44,9	9,76	2,58	5,23	2,76	0,88
6	60	45	5	6	7,91	6,17	44,7	30,1	0,779	67,2	13,5	2,91	7,60	3,73	0,98
8	80	50	6	7	11,1	8,67	109	47,4	0,588	142	24,4	3,58	14,7	6,44	1,15
10	100	55	6,5	8	14,5	11,3	222	72,4	0,492	270	39,8	4,31	24,6	9,26	1,30
12	120	60	7	9	18,2	14,2	402	106	0,433	470	60,6	5,08	37,7	12,5	1,44
14	140	65	8	10	22,9	17,4	676	148	0,385	768	88,0	5,79	56,4	16,6	1,57
16	160	70	8,5	11	27,5	21,5	1053	211	0,357	1184	121	6,56	79,5	21,4	1,70
18	180	75	9,5	12	33,3	26,0	1599	270	0,329	1759	164	7,27	110	27,0	1,82
20	200	80	10	13	38,7	30,2	2299	357	0,313	2509	213	8,05	147	33,4	1,95

III a Kształtówki T (przek. norm. niemieckie).

Długości normalne 4 do 12 m, najw. długości 16 m.
w zapasie długości do 12 m co 25 cm.

I. Przekroje normalne $h = \frac{b}{2}$, $R = d = d_1$, $r_2 = \frac{R}{2}$, $r_1 = \frac{R}{4}$
 $p = 4\text{‰}$, $p' = 2\text{‰}$

II. Przekroje wysokościenne $h = b$, $R = d = d_1$, $r_2 = \frac{R}{2}$, $r_1 = \frac{R}{4}$
 $p = 2\text{‰}$, $p' = 2\text{‰}$.

Liczba	Wymiary w mm			Przekrój F cm^2	Ciężar g kg/m	Odstęp środka ciężkości e cm	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
	b	h	d = d ₁				I cm^4	W cm^3	a cm	I ₁ cm^4	W ₁ cm^3	a ₁ cm
I. Przekroje normalne.												
6/3	60	30	5,5	4,64	3,64	0,67	2,58	1,11	0,75	8,62	2,87	1,36
7 3/4	70	35	6	5,94	4,66	0,77	4,49	1,65	0,87	15,1	4,32	1,59
8/4	80	40	7	7,91	6,21	0,88	7,81	2,50	0,99	28,5	7,13	1,90
9 1/4	90	45	8	10,2	8,01	1,00	12,7	3,63	1,24	46,1	10,2	4,52
10/5	100	50	8,5	12,0	9,42	1,09	18,7	4,78	1,56	67,7	13,5	5,64
12/6	120	60	10	17,0	13,35	1,30	38,0	8,09	2,24	137	22,8	8,06
14/7	140	70	11,5	22,8	17,90	1,51	68,9	12,6	3,02	258	36,9	11,3
16/8	160	80	13	29,5	23,16	1,72	117	18,6	3,97	422	52,8	14,3
18/9	180	90	14,5	37,0	29,05	1,93	185	26,1	5,00	670	74,4	18,1
20/10	200	100	16	45,4	35,64	2,14	277	35,3	6,10	1000	100	22,0
II. Przekroje wysokościenne.												
2/2	20	20	3	1,12	0,88	0,58	0,38	0,27	0,34	0,20	0,20	0,18
2 1/2 / 2 1/2	25	25	3,5	1,64	1,29	0,73	0,87	0,49	0,53	0,43	0,34	0,26
3/3	30	30	4	2,26	1,77	0,85	1,72	0,80	0,76	0,87	0,58	0,38
3 1/2 / 3 1/2	35	35	4,5	2,97	2,33	0,99	3,10	1,23	1,04	1,57	0,90	0,53
4/4	40	40	5	3,77	2,96	1,12	5,28	1,84	1,40	2,58	1,29	0,68
4 1/2 / 4 1/2	45	45	5,5	4,67	3,67	1,26	8,13	2,51	1,78	4,01	1,78	0,86
5/5	50	50	6	5,66	4,44	1,39	12,1	3,36	2,14	6,32	2,42	1,07
6/6	60	60	7	7,94	6,23	1,66	23,8	5,48	3,00	12,2	4,07	1,54
7/7	70	70	8	10,6	8,32	1,94	44,5	8,79	4,20	22,1	6,32	2,08
8/8	80	80	9	13,6	10,68	2,22	73,3	12,8	5,42	37,0	9,25	2,72
9/9	90	90	10	17,1	13,42	2,48	119	18,2	6,96	58,5	13,0	3,42
10/10	100	100	11	20,9	16,41	2,74	179	24,6	8,57	88,3	17,7	4,23
12/12	120	120	13	29,6	23,24	3,28	366	42,0	12,36	178	29,7	6,01
14/14	140	140	15	39,9	31,32	3,80	660	64,7	16,54	330	47,2	8,27

IV a Kątówki (przepr. norm. niemieckie).

A. Równoramienne.

Długości normalne 4 do 12 m, najw. długość 16 m
 W zapasie długości co 20 cm między 4 a 9 m i co 25 cm między 9 a 16 m,

$$r_1 = 0,5 \text{ (najw } d + \text{ najmn } d), r = \frac{1}{2}r_1, b-v = \frac{1}{4}b + 0,36 d.$$

Liczba	Wymiary w mm		F cm ²	g kg/m	b-v cm	I _{ab} cm ⁴	Z e w z g l ę d u n a o ś						Dwie znit. kątówki					
	b	d					X ₁ X ₁			YY			ze wzgl. na AB		ze wzgl. na X ₁ X ₁				
							I _{x₁}	W _{x₁}	a _{x₁}	I	W	a	I ₁	W ₁	a ₁	2 I _{ab} cm ⁴	aab cm	2 I _{xx} cm ⁴	a _{xx} cm
4 ^{1/2}	5	5	4,30	3,38	12,8	14,9	7,85	2,43	1,35	12,4	3,91	1,71	3,25	1,80	0,90	29,9	1,87	15,7	1,35
	7	7	5,86	4,60	13,6	21,2	10,4	3,31	1,34	16,4	5,16	1,68	4,39	2,28	0,88	42,5	1,91	20,9	1,34
	9	9	7,34	5,76	14,4	27,8	12,6	4,12	1,31	19,8	6,24	1,64	5,40	2,65	0,86	55,6	1,95	25,2	1,31
5	5	5	4,80	3,77	14,0	20,4	11,0	3,05	1,53	17,4	4,91	1,91	4,59	2,32	0,98	40,9	2,07	22,1	1,53
	7	7	6,56	5,15	14,9	29,0	14,5	4,15	1,50	23,1	6,53	1,88	6,02	2,85	0,96	58,1	2,11	29,0	1,50
	9	9	8,24	6,47	15,6	38,0	17,9	5,19	1,44	28,1	7,94	1,85	7,67	3,47	0,97	76,0	2,14	35,8	1,44
5 ^{1/2}	6	6	6,31	4,95	15,6	32,8	17,3	4,39	1,66	27,4	7,04	2,09	7,24	3,27	1,07	65,7	2,29	34,7	1,66
	8	8	8,23	6,46	16,4	44,2	22,1	5,7	1,64	34,8	8,96	2,07	9,35	4,03	1,05	88,5	2,33	44,3	1,64
	10	10	10,07	7,90	17,2	56,0	26,3	6,9	1,62	41,4	10,64	2,03	11,27	4,64	1,06	112,0	2,37	52,6	1,62
6	6	6	6,91	5,42	16,9	42,5	22,7	5,3	1,82	36,1	8,51	2,29	9,43	3,95	1,18	85,1	2,48	45,5	1,82
	8	8	9,03	7,09	17,7	57,5	29,2	6,9	1,80	46,1	10,9	2,27	12,1	4,85	1,17	115,1	2,53	58,5	1,80
	10	10	11,07	8,69	18,5	72,8	34,8	8,4	1,77	55,1	13,0	2,24	14,6	5,58	1,20	145,6	2,56	69,8	1,77

Liczba	Wymiary w mm		F cm ³	g kg/m	b-v cm	I _{ab} cm ⁴	Ze względu na oś				Dwie znit. kątowniki		ze wzgl. na X ₁ X ₁ a _{xx} cm					
	b	d					X ₁ X ₁		XX		YY			ze wzgl. na AB a _{ab} cm	ze wzgl. na X ₁ X ₁ 2 I _{xx} cm ⁴			
							I _{x₁}	W _{x₁}	a _{x₁}	I	W	a				I ₁	W ₁	a ¹
6 ^{1/2}	7	8,7	6,83	18,5	63	33,4	7,2	1,97	53,0	11,5	2,48	13,8	5,25	1,27	126	2,70	66,9	1,97
	9	11,0	8,62	19,3	82	41,3	9,0	1,95	65,4	14,2	2,45	17,2	6,31	1,26	164	2,74	82,7	1,95
	11	13,2	10,34	20,0	101	48,7	10,8	1,91	76,8	16,7	2,41	20,7	7,30	1,25	202	2,77	97,4	1,91
7	7	9,4	7,38	19,7	79	42,3	8,4	2,12	67,1	13,6	2,68	17,6	6,29	1,36	158	2,90	84,6	2,12
	9	11,9	9,34	20,5	102	52,5	10,6	2,11	83,1	16,8	2,65	22,0	7,57	1,37	205	2,94	105	2,11
	11	14,3	11,23	21,3	126	62,0	12,7	2,08	97,6	19,7	2,61	26,0	8,65	1,35	256	2,99	124	2,08
7 ^{1/2}	8	11,5	9,03	21,3	111	59,0	10,9	2,27	93,3	17,6	2,85	24,4	8,11	1,46	222	3,11	118	2,27
	10	14,1	11,07	22,1	140	71,0	13,4	2,26	113	21,3	2,82	29,8	9,54	1,48	280	3,15	143	2,26
	12	16,9	13,11	22,9	170	82,5	15,8	2,22	130	24,6	2,80	34,7	10,71	1,44	340	3,19	165	2,22
8	8	12,3	9,66	22,6	135	72,0	12,5	2,43	115	20,3	3,06	29,6	9,25	1,57	270	3,31	145	2,43
	10	15,1	11,86	23,4	170	87,5	15,4	2,40	139	24,5	3,03	35,9	10,8	1,54	340	3,35	175	2,40
	12	17,9	14,05	24,1	206	102	18,2	2,39	161	28,4	3,00	43,0	12,6	1,56	412	3,39	204	2,39
9	9	15,5	12,17	25,4	216	116	17,9	2,73	184	28,9	3,44	47,8	13,3	1,75	432	3,73	232	2,73
	11	18,7	14,68	26,2	266	138	21,5	2,71	218	34,3	3,41	57,1	15,4	1,75	532	3,77	275	2,71
	13	21,8	17,11	27,0	317	158	25,0	2,70	250	39,3	3,38	65,9	17,3	1,76	634	3,81	317	2,70
10	10	19,2	15,07	28,2	329	177	24,6	3,02	280	39,7	3,83	73,3	18,4	1,90	658	4,13	354	3,02
	12	22,7	17,82	29,0	398	207	29,1	3,00	328	46,3	3,80	86,2	21,0	1,90	796	4,17	414	3,00
	14	26,2	20,57	29,8	468	235	33,5	2,97	372	52,6	3,75	98,3	23,4	1,88	936	4,20	470	2,97

11	110	10	21,2	16,64	30,7	438	239	30,1	3,36	379	48,7	4,23	98,6	22,7	2,16	876	4,54	478	3,36
		12	25,1	19,70	31,5	529	280	35,7	3,34	444	57,1	4,21	116	26,1	2,15	1058	4,59	560	3,34
		14	29,0	22,75	32,1	621	319	40,9	3,32	505	64,8	4,17	133	29,2	2,14	1242	4,63	638	3,32
		15	33,9	26,61	35,1	864	445	52,5	3,62	705	83,2	4,58	186	37,5	2,31	1728	5,05	891	3,62
12	120	11	25,4	19,94	33,6	626	340	39,4	3,66	541	63,8	4,64	140	29,4	2,28	1252	4,97	680	3,66
		13	29,7	23,31	34,4	745	393	46,0	3,64	625	73,7	4,61	162	33,4	2,29	1490	5,01	787	3,64
		15	33,9	26,61	35,1	864	445	52,5	3,62	705	83,2	4,58	186	37,5	2,31	1728	5,05	891	3,62
		16	39,3	30,85	38,0	1171	604	65,5	3,92	959	104	4,94	251	46,7	2,53	2342	5,46	1208	3,92
13	130	12	30,0	23,55	36,4	869	472	50,5	3,97	750	81,6	5,00	194	37,8	2,54	1738	5,38	944	3,97
		14	34,7	27,24	37,2	1020	540	58,0	3,95	657	93,3	4,97	223	42,4	2,54	2040	5,41	1080	3,95
		16	39,3	30,85	38,0	1171	604	65,5	3,92	959	104	4,94	251	46,7	2,53	2342	5,46	1208	3,92
		17	45,0	35,33	40,8	1554	805	81,0	4,23	1276	129	5,33	334	58,0	2,72	3108	5,88	1610	4,23
14	140	13	35,0	27,48	39,2	1175	638	63,5	4,27	1014	102	5,39	262	47,3	2,71	2350	5,81	1276	4,27
		15	40,0	31,40	40,0	1363	723	72,5	4,26	1148	116	5,36	298	52,6	2,75	2726	5,85	1446	4,26
		17	45,0	35,33	40,8	1554	805	81,0	4,23	1276	129	5,33	334	58,0	2,72	3108	5,88	1610	4,23
		18	51,0	40,04	44	2039	1052	99,0	4,52	1665	157	5,71	438	71,1	2,93	4078	6,30	2104	4,52
15	150	14	40,3	31,64	42	1556	845	78,5	4,58	1343	127	5,77	347	58,3	2,93	3112	6,22	1690	4,58
		16	45,7	35,87	43	1790	949	88,5	4,56	1507	142	5,74	391	64,4	2,92	3580	6,26	1898	4,56
		18	51,0	40,04	44	2039	1052	99,0	4,52	1665	157	5,71	438	71,1	2,93	4078	6,30	2104	4,52
		19	57,5	45,14	46	2590	1348	118,5	4,84	2137	189	6,10	558	84,8	3,11	5180	6,71	2696	4,84
16	160	15	46,1	36,19	45	2027	1099	95,5	4,89	1745	154	6,15	453	71,3	3,15	4154	6,64	2198	4,89
		17	51,8	40,66	46	2308	1225	107	4,86	1945	172	6,13	506	78,4	3,11	4616	6,68	2450	4,86
		19	57,5	45,14	46	2590	1348	118,5	4,84	2137	189	6,10	558	84,8	3,11	5180	6,71	2696	4,84
		20	64,0	50,00	47	3000	1500	130,0	5,00	2500	200	6,00	600	100,0	3,00	6000	7,00	3000	5,00

B. Nierównoramienne.

Długości normalne 4 do 12 m, najw. długość 16 m.

W zapasie długości do 14 m co 25 cm.

$$r = 0,5 \text{ (najw. } d + \text{ najmn. } d), r_1 = \frac{1}{2} r.$$

Liczba przekr.	Wymiary w mm		F cm ²	g kg/m	Odstęp środka ciężkości		Polożenie osi YY st α	Ze względu na oś							
	b	b ₁			d	X ₁ X ₁		Y ₁ Y ₁		XX		YY			
						f'		a'	f' ₁	a' ₁	I _x	a _x	I _y	a _y	
4/6	40	60	5	3,76	19,5	9,7	0,432	17,3	1,90	6,20	1,14	19,8	2,03	3,66	0,88
			7	5,14	20,4	10,5	0,428	22,8	1,87	7,99	1,11	26,3	2,00	4,63	0,84
5/7 ^{1/2}	50	75	7	8,33	24,7	12,4	0,430	46,3	2,37	16,4	1,41	53,1	2,53	9,58	1,08
			9	8,24	25,6	13,2	0,427	57,2	2,33	20,1	1,41	65,4	2,50	11,9	1,06
6 ^{1/2} /10	65	100	9	11,15	33,1	15,9	0,410	140	3,14	46,6	1,81	160	3,36	26,8	1,37
			14	13,42	34,0	16,7	0,407	167	3,12	55,3	1,80	189	3,32	32,9	1,37
8/12	80	120	10	14,99	39,2	19,5	0,435	276	3,80	97,9	2,26	317	4,07	56,8	1,72
			12	17,82	40,0	20,2	0,430	323	3,78	115	2,25	370	4,03	67,5	1,72

Stosunek ramion 2:3

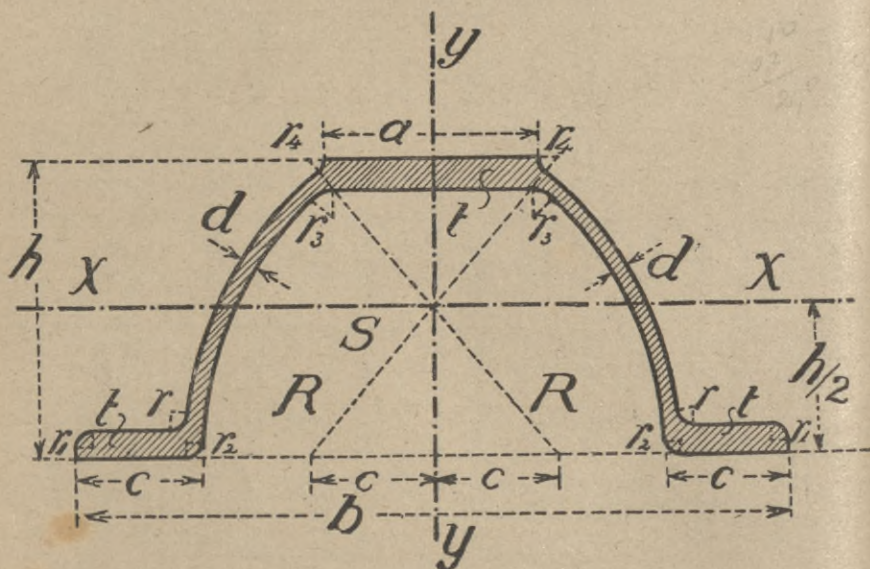
Stosunek ramion 1:2															
10/15	100	150	28,7	22,53	43,9	24,2	0,436	649	4,75	232	2,84	747	5,10	134	2,16
	100	150	33,2	26,06	49,7	25,0	0,434	744	4,73	263	2,82	854	5,07	153	2,15
3/6	30	60	4,29	3,37	21,5	6,8	0,254	15,6	1,91	2,61	0,78	16,5	1,96	1,71	0,63
	30	60	5,85	4,59	22,4	7,6	0,248	20,6	1,88	3,42	0,76	21,8	1,93	2,28	0,62
4/8	40	80	6,89	5,41	28,5	8,8	0,257	44,9	2,55	7,66	1,05	47,6	2,63	4,99	0,85
	40	80	9,01	7,07	29,4	9,6	0,252	57,5	2,53	9,62	1,04	60,8	2,60	6,41	0,84
5/10	50	100	11,5	9,03	35,9	11,2	0,267	116	3,18	19,6	1,31	123	3,27	12,8	1,04
	50	100	14,1	11,07	36,7	12,0	0,266	141	3,16	23,5	1,29	150	3,27	14,6	1,02
6 1/2/13	65	130	18,6	14,6	46,5	14,5	0,257	320	4,15	54,4	1,71	339	4,27	35,4	1,35
	65	130	22,1	17,35	47,5	15,3	0,255	374	4,11	62,8	1,69	395	4,23	41,3	1,37
8/16	80	160	27,5	21,59	57,2	17,7	0,269	719	5,11	122	2,11	762	5,26	79,4	1,70
	80	160	31,8	24,96	58,1	18,5	0,268	822	5,08	139	2,09	875	5,25	86,0	1,64
10/20	100	200	40,3	31,64	71,2	21,8	0,261	1654	6,40	282	2,65	1754	6,60	182	2,13
	100	200	45,7	35,87	72,0	22,6	0,259	1863	6,38	315	2,63	1973	6,57	205	2,12

V a Zoresówki (przechr. norm. niemieckie), (rys. 145).

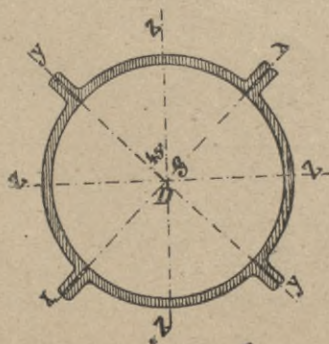
Długości normalne 4—8 m, najw. długość 16 m, w zapasie
długości do 12 m co 25 cm.

$$r_1 = d, r_2 = d - 0,5, r_3 = t, r_4 = 0,6 d + 1,3.$$

Liczba przekroju	Wymiary w mm						F cm ²	g kg/m	I _x cm ⁴	W _x cm ³	I _y cm ⁴	W _y cm ³
	h	b	a	c	d	t						
5	50	120	33	21	3	5	6,71	5,29	23,3	9,27	86,4	14,4
6	60	140	38	24	3,5	6	9,34	7,32	47,2	15,7	164	23,4
7 ^{1/2}	75	170	45,5	28,5	4	7	13,2	10,36	105	28,0	347	40,8
9	90	200	53	33	4,5	8	17,9	14,05	206	46,0	651	65,1
11	110	240	63	39	5	9	24,1	19,00	421	76,5	1272	106



rys. 145.



rys. 146.

VI. a Ćwierćkołowki (przechr. norm. niemieckie), (rys. 146).
 Długości normalne 4 do 8 m, najw. długość 12 m.
 $r_1 = 0,03 D$, $r_2 = 0,06 D$.

Liczba przekroju	Wymiary w mm				Dla 4 ćwierćkołówek, więc pełnej rury				
	D średnica rury	b	d_1	d	F cm^2	g kg/m	I cm^4	$W_x=W_y$ cm^3	W_z cm^3
5	100	35	4	6	29,8	23,39	576	66,2	89,3
			8	8	48,0	37,68	906	102	135
7 $\frac{1}{2}$	150	40	6	8	54,9	43,10	2068	175	237
			10	10	80,2	62,96	2982	248	331
10	200	45	8	10	88,1	69,16	5511	370	501
			12	12	120	94,20	7478	495	663
2 $\frac{1}{4}$	250	50	10	12	129	101,27	12161	676	917
			14	14	169	132,67	15788	867	1165
15	300	35	12	14	179	140,52	23637	1120	1515
			18	17	249	195,47	32738	1530	2051

§ 57. Dźwigary blaszane.

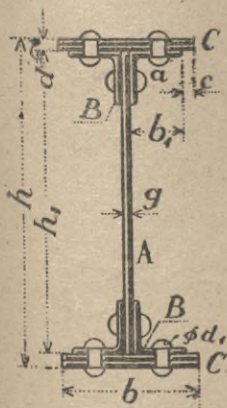
Dla większych rozpiętości lub ciężarów, gdy największe kształtówki I nie wystarczają, używamy dźwigarów blaszanych (n. *Blechträger*, fr. *poutre en tôle*, an. *wrought-iron girder*, cz. *nosnik plechowy*).

Belka blaszana (rys. 147) składa się ze ścianki A (n. *Blechwand*, *Stehblech*, fr. *âme*, a. *web*, cz. *stoina*), czterech kątovek B i nakładek C (n. *Lamelle*, *Deckplatte*, fr. *plate-bande*, a. *flange-plate*, cz. *pásnica*, r. *накладка*). Zwykle przyjmujemy wymiary ścianki, kątovek i szerokości b nakładek, a obliczamy

grubość ich d . Grubość ścianki przyjmujemy zwykle w budownictwie 7 do 8 mm, przy mostach większą, a mianowicie w przybliżeniu $g = 8,5 + 0,15l$ mm . . . 207)

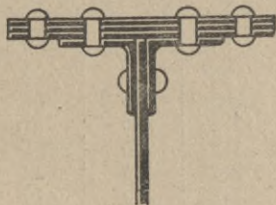
jeżeli l oznacza rozpiętość w m. Szerokość kątovek możemy przyjąć w budownictwie według wzoru $b_1 = 0,21 + 5$ cm }
 a nakładki $b = 0,41 + 16$ cm }
 przy mostach zaś $b_1 = 0,41 + 6$ cm } 208)
 a nakładki $b = 0,81 + 18$ cm }
 jeżeli l oznacza rozpiętość w m.

Wysokość belek h obieramy zwykle w budownictwie równą $\frac{1}{13}$ do $\frac{1}{16}$ rozpiętości, w budowie mostów $\frac{1}{8}$ do $\frac{1}{12}$ rozpiętości.



rys. 147.

Wzory te podaliśmy tylko jako wskazówkę, jakie mniej więcej mamy obierać wymiary ścianki, kątownek i szerokości nakładek, ale ściśle trzymać się ich nie potrzebujemy, bo jeśli przyjmiemy mniejsze wymiary kątownek lub węższe nakładki, to za to wypadną nam nakładki grubsze i na odwrót. Wszystkie te części



rys. 148.

składowe belki łączymy nitami w jedną całość, przyczem rozróżniamy nity poziome i pionowe. Ostatnie urządzamy w dwu rzędach. Jeżeli nakładki wystają o długość $c > 6,5 \text{ cm}$, (rys. 147) wtedy musimy połączyć nakładki jeszcze dwoma rzędami nitów skrajnych (n. *Randnieten*), (rys. 148).

Średnicę nitów przyjmujemy zwykle 16 18 20 do 24 mm dla szerokości kątownek do 60 70 80 i wyżej mm.

§ 58. Obliczenie przekroju belki blaszanej.

Belki blaszane obliczamy także według równ. 143) $\tau I = Me$. Moment bezwładności I rozłożymy tu na dwie części tak, że

$$I = I_1 + I_2, \dots \dots \dots 209)$$

przyczem I_1 jest momentem bezwładności kątownek i ścianki, który zaraz możemy obliczyć z danych wymiarów, zaś I_2 momentem bezwładności nakładek. Z poprzedniego widzimy, że (rys. 147)

$$I_2 = \frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3) \dots \dots \dots 210)$$

Z rysunku zaś widzimy, że $h = h_1 + 2d$. Wstawmy tę wartość i po odciągnięciu dziur na nity pionowe $b' = b - d$ zamiast b , otrzymamy $I_2 = \frac{1}{12} b' (h_1^3 - 6h_1^2 d + 12d^2 h_1 + 8d^3 - h_1^3)$.

Ponieważ d w stosunku do h_1 jest bardzo małym, więc możemy wyraz $8d^3$ wobec wyrazu $6h_1^2 d$ opuścić, a wtedy:

$$I_2 = \frac{b' h_1 d}{2} (h_1 + 2d).$$

Wstawmy tę wartość za I_2 i $e = \frac{h_1 + 2d}{2}$ w równ. 209)

i 143), a otrzymamy:

$$\tau I_1 + \frac{b' h_1 d \tau}{2} (h_1 + 2d) = M \frac{1}{2} (h_1 + 2d), \text{ a stąd:}$$

$$d = \frac{M}{b' h_1 \tau} - \frac{2 I_1}{b' h_1 (h_1 + 2d)} \dots \dots \dots 211)$$

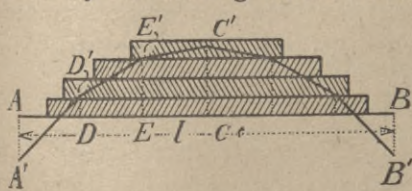
W drugim wyrazie tego równania po prawej stronie widzimy jednak w mianowniku ilość d , której nie znamy. Musimy więc obliczyć d najprzód w przybliżeniu, wstawivszy w równ. 211) $d=0$. Tak otrzymamy przybliżoną wartość dla d

$$d = \frac{M}{b' h_1 \tau} - \frac{2 I_1}{b' h_1^2} \dots \dots \dots 212)$$

Wartość tę wstawiamy w równ. 211) po prawej stronie i otrzymujemy dokładną wartość d .

W równania te wchodzi M , które się zmienia według położenia przekroju. Dlatego obliczamy najprzód przekrój, dla którego M jest największem, n. p. w belce, w dwu punktach podpartej, jednostajnie obciążonej, dla $x = \frac{l}{2}$. Grubość d rozdzielamy w danym razie na kilka nakładek, przyjmując grubość pojedynczej nakładki 8 do 15 mm.

Potem obliczamy dla innych punktów belki odnośne d według tych samych równań, wstawiając tylko odpowiednie wartości za M . Długość nakładek wyznaczamy najlepiej wykreślnie (rys. 149). Obliczmy grubość nakładki d w środku belki i zrobmy $d=CC'$. Dla punktów A i B jest $M=0$, więc z równ. 211) wynika, że grubość d będzie tu ujemną, równą $AA'=BB'$. Wykreśliwszy odnośne grubości także w kilku punktach pośrednich



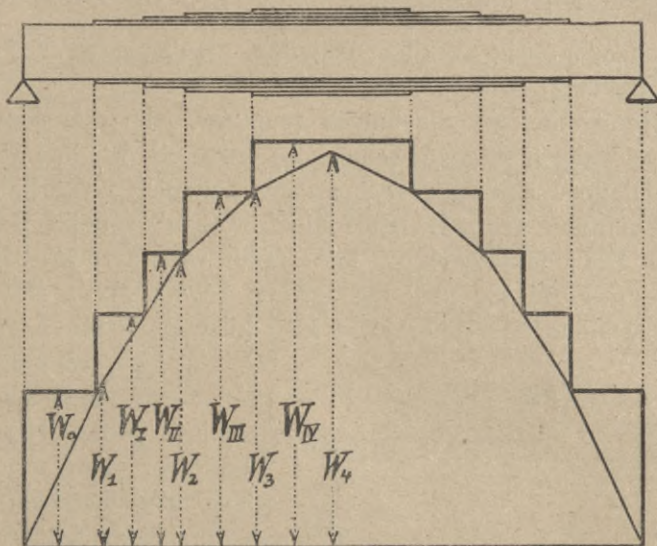
rys. 149.

D i E , łączymy punkty A' D' E' C' ... linią krzywą, lub, jeśli punkty te są dość bliskie, prostymi, a powierzchnia między tą linią a osią AB przedstawia teoretyczną grubość nakładki. CC' dzielimy na odpowiednią ilość

nakładek i kreślimy poziome, których przecięcia się z linią $A'C'B'$ wyznaczają końce nakładek. W rysunku 149. mamy w środku belki cztery nakładki, potem trzy, dwie, jedną, a nareszcie widzimy, że niedaleko podpór nie potrzeba wcale nakładek. Ze względów ustrojowych przedłużamy nieco nakładki poza linię $A'D'E'C'$, jak uwidoczniło na rysunku.

Długość nakładek możemy też wyznaczyć w inny sposób. Z wzoru 148) mamy $\frac{l}{e} = W = \frac{M}{\tau}$. Jeżeli znamy najw. M i przyj-

miemy τ , to możemy w każdym punkcie belki wyznaczyć potrzebny moment oporu i wykreślić go jako rzędne. Końce tych rzędnych W_1, W_2, W_3 , przedstawiają (rys. 150) linię potrzebnych momentów oporu (n. *Kurve der erforderlichen Widerstandsmomente*). Teraz obliczamy z $W = \frac{I}{e}$ momenty oporu dla przyjętej ścianki z kątownikami W_0 , dla ścianki z kątownikami i z jedną, później z dwiema, trzema nakładkami, odcinamy rzędne (W_I, W_{II}, W_{III}) i kreślimy poziome. Przecięcie się tych poziomych z linią potrzebnych momentów oporu wyznaczy nam potrzebną długość nakładek, którą ze względów ustrojowych nieco powiększamy.



rys. 150.

Przy obliczeniu momentu bezwładności I_1 trzeba ewentualnie uwzględnić osłabienie przekroju przez nitowanie. Ścianka osłabia się wskutek spajania przykładkami, gdy bowiem długość jednej blachy nie wystarcza, musimy dwie lub więcej blach spajać.

Jeśli przy spajaniu uwzględnimy nity (ϕd) w odległości pionowej a i nazwiemy $v = \frac{a-d_1}{a}$, to osłabienie ścianki uwzględnimy biorąc w rachunek zamiast grubości ścianki g grubość vg . W przybliżeniu możemy przyjąć $v = 0,77$, więc przyjmiemy zamiast g tylko

0,77 g do 0,8 g. Przykładki dajemy zawsze z obu stron ścianki, grubość ich mogłaby być połową grubości ścianki, nie używamy jednak cieńszych przykładek niż 6 mm.

Co do obliczenia odległości nitów w przykładce, to dla przekrojów niedaleko podpór, gdzie siła poprzeczna Q jest wielka, możemy ją obliczać w następujący sposób. Siła poprzeczna, jak wiemy z § 50., nie rozdziela się jednostajnie w przekroju, lecz jest w osi obojętnej największą, a mianowicie wynosi według 192)

na jednostkę długości $\sigma = \frac{QS}{I}$, a więc na długości a , równej od-

stępowi nitów, działa $a \frac{QS}{I}$. Dla warstwy obojętnej możemy w przy-

bliżeniu przyjąć $S = \frac{F}{2} \cdot \frac{h_2}{2}$ zaś $I = 2 \frac{F}{2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2$,

jeżeli $\frac{h_2}{2}$ oznacza odstęp środka ciężkości połowy przekroju od

osi obojętnej. Na długości a działa więc siła $a \frac{Q \frac{F}{2} \cdot \frac{h_2}{2}}{2 \frac{F}{2} \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2} = a \frac{Q}{h_2}$.

Przyjmijmy $h_2 = 0,9 h$, to $a \frac{Q}{0,9 h} = 2 \frac{\pi d^2}{4} x_1$, a stąd

$$a = \frac{9 \pi d^2 h x_1}{20 Q} \mathbf{1,41} \frac{d^2 h x_1}{Q} \dots \dots \dots 213)$$

Równanie to jest ważnem wtedy, gdy po obu stronach szwu przytwierdzimy przykładki jednym rzędem nitów. Jeżeli jak zwykle, znajduje się po dwa rzędy nitów, to

$$a = \frac{18 \pi d^2 h x_1}{20 Q} = \mathbf{2,83} \frac{d^2 h x_1}{Q} \dots \dots \dots 214)$$

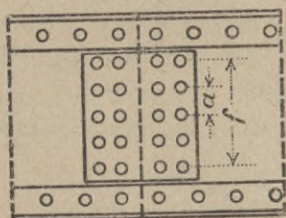
W pobliżu środka belki jest Q bardzo małym, a że tu moment wielki, więc obliczamy nity przykładek ze względu na moment.

Niechaj f oznacza odstęp skrajnych nitów a S siłę, działającą we wszystkich nitach. Moment M da się rozdzielić na M' , działający na ściankę i M'' na kątowniki i nakładki. Jeżeli nazwiemy odnośne momenty bezwładności I i I'' , to $M' : M'' = I : I''$ i $M' + M'' = M$, a stąd:

$$M' = \frac{MI'}{I + I''} = \frac{MI'}{I}$$

M' przenieść się musi przez nity, więc

$$M' = \frac{1}{2} S \times \frac{2}{3} f = \frac{Sf}{3}, \text{ zatem } S = \frac{3M'}{f} \text{ (rys. 151).}$$



rys. 151.

Jeżeli siła, działająca w nicie odległym o a od osi obojętnej, jest P , to w drugim rzędzie będzie $2P$, w n -tym rzędzie nP , a więc, gdy mamy dwa rzędy nitów po obu stronach zetknięcia będzie:

$$\frac{1}{2} S = 2(P + 2P + \dots + nP) = P(1+n)n,$$

$$\text{zatem } P = \frac{S}{2n(1+n)}, \text{ a więc siła w ni-}$$

cie najwyższego rzędu $nP = \frac{3M'}{2f(1+n)}$, a że z rysunku mamy $f = 2na$, więc

$$nP = \frac{3M'}{2f\left(1 + \frac{f}{2a}\right)} = \frac{d\pi}{4} \tau_1, \text{ a stąd: } a = \frac{d^2 \pi \tau_1 f^2}{6M' - 2d\pi \tau_1 f} \quad \dots \quad 215)$$

Ze względu na ciśnienie na ściankę dziury jest:

$$\frac{3M'}{2f\left(1 + \frac{f}{2a}\right)} = dg \tau_2, \text{ a stąd: } a = \frac{dg \tau_2 f^2}{3M' - 2dg \tau_2 f} \quad \dots \quad 216)$$

Z tych dwu równań przyjmujemy a mniejsze.

§ 59. Obliczenie grubości ścianki belki blaszanej.

Wiemy, że siła ścinająca w osi ciężkości jest największą, że tę więc wyznaczyć musimy dla obliczenia grubości ścianki belki blaszanej. Jeżeli siłę ścinającą poziomą nazwiemy σ , to wiemy, że według równ. 192) $\sigma = \frac{QS}{I}$.

Wyrazy S i I obliczamy w przybliżeniu, jak w poprzednim paragrafie; dla warstwy przez środek przechodzącej będzie więc

$$\sigma = \frac{Q \frac{F}{2} \cdot \frac{h_2}{2}}{2 \frac{F}{2} \left(\frac{h_2}{2}\right)}.$$

A więc na jednostkę długości działa siła $\sigma = \frac{Q}{h_2}$ na ściankę,

jeżeli zatem naprężenie dopuszczalne na ścinanie blachy jest $\tau = \frac{5}{8} \tau$, a powierzchnia ścięcia $1. g = g$ (rys. 145), to $g \frac{5}{8} \tau = \frac{Q}{h_2}$,

a stąd $g = \frac{8}{5} \frac{Q}{\tau h_2}$.

W przybliżeniu przyjmujemy według Weyrauch'a, jak pierwszej, $h_2 = 0,9 h$, więc

$$g = \frac{10 \cdot 8 Q}{9 \cdot 5 \tau h} = \frac{16 Q}{9 \tau h} = 1,8 \frac{Q}{\tau h} \dots \dots \dots 217)$$

Wzór ten nie uwzględnia jednak naprężeń ukośnych, które w belce blaszanej mogą być większe, niż $\sigma = \frac{Q}{h_2}$. Dla warstwy

obojętnej jest wprawdzie $\nu = 0$, lecz w tym miejscu przekroju, gdzie przekrój się nagle rozszerza, t. j. w punkcie *a*, gdzie się znajdują poziome ramiona kątówek, naprężenia ukośne mogą być, jak wiemy z § 53, większe. Tu bowiem naprężenie ścinające nie jest o wiele mniejsze, niż w środku, a i naprężenie ν jest tu prawie $+\tau$. Jeżelibyśmy przyjęli $\nu = \sigma$, to według równ. 202)

$$\text{najw. } \nu' = \frac{\nu}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\nu + 4 \sigma} = \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{1 + 4} = \frac{\sigma}{2} (1 + \sqrt{5}).$$

Jeżeli więc chcemy, aby

$$\text{najw. } \nu' = \tau, \text{ to } \tau = \frac{1 + 2,23}{2} \sigma = 1,625 \sigma, \text{ więc } \sigma = \frac{\tau}{1,62}.$$

Ze względu jednak na mniejszą wytrzymałość blachy na ścinanie w kierunku włókien przyjmujemy $\sigma = \frac{\tau}{1,8}$. Zatem będzie

$$\frac{\tau}{1,8} g = \frac{Q}{h_2} = \frac{10 Q}{9 h}, \text{ a stąd}$$

$$g = \frac{10 Q}{9 h} \cdot \frac{1,8}{\tau} = 2,0 \frac{Q}{\tau h} \dots \dots \dots 218)$$

Dla belek zwykłych, w budownictwie używanych, otrzymujemy często z wzoru tego bardzo małą grubość *g*, w praktyce więc przyjmujemy najmniej $g = 6$ do 8 mm . Dla belek mostowych, gdzie siły są większe, da się wzór ten z pożytkiem użyć.

Przykład. Dla helki głównej mostu blaszanego o rozpiętości 10 m niech będzie obciążenie $q = 5,5 \text{ t/m}$, zatem na podporze

$$\text{najw. } Q = \frac{1}{2} q l = \frac{1}{2} 5,5 \times 10 = 27,5 \text{ t.}$$

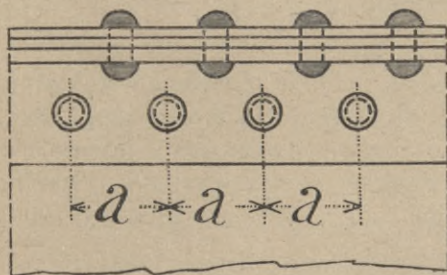
Niech będzie dalej $h=100\text{ cm}$, $\tau=720\text{ kg/cm}^2$, to $g=2 \cdot \frac{27500}{720 \cdot 100} = 0,76\text{ cm}$.
Przyjmijmy więc $g=8\text{ mm}$.

§ 60. Obliczenie nitów belki blaszanej.

a) Obliczenie nitów poziomych.

Nity, łączące belkę blaszaną w jedną całość, narażone są na ściecie wskutek siły ścinającej poziomej, której wielkość na jednostkę długości jest σ , a zatem, jeżeli nity urządzimy w odstępach a (rys. 152), na długość a siła ta wynosi σa . Ponieważ nity poziome są dwucięte, więc

rys. 152.



$$\sigma a = 2 \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1 = \frac{QS}{I} a$$

a stąd

$$a = \frac{\pi \tau_1 d^2 I}{2 QS} \quad . \quad 219)$$

gdzie S oznacza moment statyczny powierzchni przekroju nakładek i kątowników ze względu na oś obojętną, a d średnicę nitu.

Z równ. 219) widzimy, że im większą jest siła Q , tem mniejsze muszą być odstępki nitów a i odwrotnie. A zatem ponieważ siła Q przy podporach jest największą, więc tam muszą być nity najgęściej umieszczone, w środku zaś belki, gdzie siła poprzeczna jest bardzo małą, nity mogą być rzadsze.

rys. 153.

Zbadajmy także ciśnienie na ściankę dziury. Jeżeli ciśnienie to nazwiemy ν_3 , będzie $\sigma a = dg \nu_3$, przyczem g oznacza grubość ścianki; a więc

$$dg \nu = 2 \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1, \text{ a stąd } \nu_2 = \frac{\pi}{2} \frac{d}{g} \tau_1 \dots \dots \dots 220)$$

Tablica XXIX.

Stąd otrzymamy

dla $\frac{d}{g} = 1$	1,5	2	2,5
$\frac{\nu_2}{\tau_1} = 1,57$	2,35	3,14	3,92

Widzimy, że naprężenia ν_2 są bardzo wielkie; według wzoru 219) licząc dla $\frac{d}{g} = 1,5$, otrzymamy dla $\tau_2 = 800$, $\nu_2 = 2,35 \times 800 = 1880 \text{ kg/cm}^2$. Jeżeli $\frac{d}{g} > 1,5$, to nie możemy już liczyć wedle wzoru 219), ale nazwawszy τ_2 ciśnienie dopuszczalne na ściankę dziury, otrzymamy $dg \tau_2 = \frac{QS}{l} a$, więc

$$a = \frac{dg \tau_2 l}{QS} \dots \dots \dots 221)$$

przyczem możemy przyjąć $\tau_2 = 1600 \text{ kg/cm}^2$.

b) Nity pionowe umieszczamy zwykle oba w jednym rzędzie (rys. 153).

Nazwijmy odstęp nitów a_1 , to otrzymamy

$$a_1 \sigma = a_1 \frac{QS_1}{l} = 2 \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1,$$

przyczem uwzględnimy, że nity są raz cięte, ale na długości a_1 muszą być ścięte dwa nity. Z powyższego równania otrzymamy

$$a_1 = \frac{\pi \tau_1 d^2 l}{2 QS_1} \dots \dots \dots 222)$$

gdzie S_1 oznacza moment statyczny nakładek ze względu na środek ciężkości przekroju. Oczywista rzecz, że $S > S_1$, więc z równ. 219 i 222) wynika, że zawsze $a < a_1$. Jeżeli nity poziome obliczamy według 221), to a jest tem bardziej mniejszem niż a_1 . Ale ponieważ nity pionowe umieszczamy w środku między nitami poziomymi, więc przyjąć musimy $a_1 = a$, obliczamy zatem tylko odległość nitów poziomych i w tej samej odległości przyjmujemy też nity pionowe.

Często otrzymujemy z tych równań, gdzie Q jest bardzo małe, odstęp nitów a bardzo wielki, ze względów konstrukcyjnych więc przyjmujemy

$$\text{najw } a = 6 d \dots \dots \dots 223)$$

§ 61. Obliczenie belek drewnianych.

Belki drewniane obliczamy także według równ. 143) $\tau I = Me$, jeżeli $h \leq 0,13 l$, gdy l oznacza rozpiętość belki w dwu punktach podpartej (p. § 52).

Dla przekroju prostokątnego (rys. 154) mamy $\tau \frac{1}{12} bh^3 =$
 $= M \frac{h}{2}$, a stąd $bh^2 = \frac{6M}{\tau} \dots \dots \dots 224)$

Przyjąwszy $b = nh$, otrzymamy $nh^3 = \frac{6M}{\tau}$, a stąd

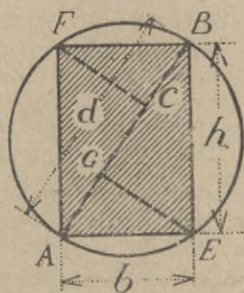
$$h = \sqrt[3]{\frac{6M}{n\tau}} \dots \dots \dots 225)$$

Jeżeli przyjmiemy pewną wartość dla b , to

$$h = \sqrt[3]{\frac{6M}{b\tau}} \dots \dots \dots 226)$$

Wysokie przekroje są korzystniejsze, bo z 224) wynika $bh = F = \frac{6M}{\tau h}$, zatem przekrój będzie tem mniejszym, im większa wysokość.

Byłoby jeszcze do rozwiązania pytanie, jaki jest pod wzglę-



rys. 154.

dem wytrzymałości najkorzystniejszy przekrój belki, wyciosanej z pnia okrągłego. Z równ. 224) widzimy, że M będzie tem większym, a zatem belka tem więcej uniesie, im większym jest wyraz bh^2 . Nazwijmy $bh^2 = u$, to otrzymamy najprzód z rysunku 154, jeżeli d jest średnicą pnia $h^2 = d^2 - b^2$, a więc $u = bh^2 = b(d^2 - b^2)$.

Szukać teraz będziemy wartości b , dla której u będzie największym,

a więc musi być

$$\frac{du}{db} = 0 = d^2 - 3b^2, \text{ a stąd } b^2 = \frac{d^2}{3}, \text{ zatem:}$$

$$b = d\sqrt{\frac{1}{3}} \quad 227)$$

Z rysunku widzimy, że $h^2 = d^2 - b^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2}{3} d^2$, więc

$$h = d\sqrt{\frac{2}{3}} \quad 228)$$

Porównawszy równ. 227) i 228), otrzymamy $b : h = 1 : \sqrt{2}$, czyli $b : h = 1 : 1,41$, albo w przybliżeniu

$$b : h = 5 : 7. \quad 229)$$

Jest to najkorzystniejszy stosunek podstawy do wysokości belki, z pnia okrągłego wyciosanej. Jeżeli z punktu E spuścimy prostopadłą na średnicę AB , to

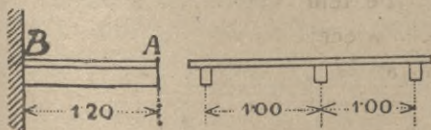
$$b^2 = AB \cdot AC, \text{ a } h^2 = AB \cdot BC,$$

$$AB \cdot AC = \frac{d^2}{3}, \text{ } AB \cdot BC = \frac{2}{3}d^2, \text{ a więc } AC = \frac{1}{3}d, \text{ a } BC = \frac{2}{3}d.$$

Na tem polega konstrukcja najkorzystniejszego przekroju. Dzielimy średnicę na trzy części, w punktach C i G wystawiamy prostopadłe i w ten sposób otrzymujemy punkty E i F , wierzchołki prostokąta.

Zauważyc tu jednak musimy, że równ. 229) odnosi się tylko do belki z jednego pnia wyciosanej i to bez względu na koszt ociosywania. Dla tego nie potrzebujemy go się ściśle trzymać, a tylko pamiętać, że ze względów wytrzymałości wysokość h powinna być większa od szerokości b mniej więcej w stosunku 4:3. W praktyce musimy się też stosować do wymiarów belek, które można dostać w handlu.

Przykład. Ganek drewniany szeroki 1,2 m spoczywa na belkach drewnianych jednym końcem wmurowanych czyli wspornikach, oddalonych jeden od drugiego 1 m (rys. 152). Obliczyć wymiary belek, jeżeli ciężar własny i ebcążenie tłumem ludzi wynoszą 400 kg/m².



rys. 155.

Ponieważ odstęp belek jest 1 m, więc na metr bieżący belki wypada 1 m² ganku, a zatem 400 kg/m² = 4 kg/cm. Największy moment jest, jak wiadomo z § 14. w B , a mianowicie $M = ql \times \frac{1}{2}$ $l = \frac{1}{2} ql^2$, tu

więc, ponieważ $l = 1,2$, $M = \frac{1}{2} 4 \times 120^2 = 28800$ kg/cm. Jeżeli więc $\tau = 180$ kg/cm², to według równ. 224)

$$bh^2 = \frac{6M}{\tau} = \frac{6 \times 28800}{180} = 1728 \text{ cm}^3;$$

a więc: dla $b=10$, $h^2=173$, $h=13,2$ cm
 „ $b=12$, $h^2=144$, $h=12,0$ cm.

Jako najbardziej odpowiadające równ. 229) wybieramy więc wymiary $b=10$ cm, $h=14$ cm.

§ 62. Obliczenie belek stropu mieszanego.

Jako przykład obliczenia belek drewnianych i blaszanych podajemy obliczenie belek stropu mieszanego (tabl. II).

Niechaj strop mieszany składa się z belek żelaznych B , umieszczonych w odstępach $l_2=4,5$ m i belek drewnianych K , spoczywających na belkach żelaznych, umieszczonych w odstępach $a < 1$ m. Rozpiętość belek żelaznych w świetle wynosi 11 m; ponieważ wmurowanie jest za małe, aby można belki przyjąć jako poziomo wmurowane, więc obliczamy je jako w dwu punktach podparte. Teoretyczne punkty podparcia przyjmujemy 15 cm odległe od krawędzi muru, więc rozpiętość teoretyczna $l_1=l+0,3$ m = 11,3 m. Ciężar własny powały i podłóg wynosi 300 kg/m², obciążenie tłumem ludzi przyjmujemy także 300 kg/m². Ciężar własny belki drewnianej przyjmiemy tymczasowo $g_1=40$ kg/m, belki żelaznej $g_2=70+15$ l kg/m, dalej dla drzewa ze względu na możliwość butwienia zakrytych belek $\tau=80$ kg/cm², dla żelaza $\tau=1000$ kg/cm².

Najprzód musimy ustalić odstęp a belek drewnianych. Ponieważ przy murze umieszczamy po jednej belce drewnianej, więc jeżeli przyjmiemy n pól, a szerokość belki b , to $l=na+b$, a wstawiając wartość za l i przyjmawszy tym-

$$\text{czasowo } b=0,2 \text{ m, } 11=na+0,2, \text{ a stąd } a=\frac{10,8}{n}.$$

n musi być liczbą całą, zaś $a < 1$ m, przyjmujemy więc $n=11$, a więc $a=\frac{10,8}{11}=0,982$ m. Belkę drewnianą K możemy teraz obliczyć według równ. 224)

$bh^2=\frac{6M}{\tau}$. Pierwej jednak musimy wyznaczyć najw. moment M , który dla obciążenia jednostajnego zupełnego będzie dla połowy rozpiętości belki według 20) $M=\frac{1}{8}ql_2^2$, przyczem q jest obciążenie na jednostkę długości. Ponieważ 1 m belki K niesie a m² powały, a obciążenie na m² wynosi $300+300=600$ kg, więc obciążenie belki drewnianej przy uwzględnieniu ciężaru własnego równa się $a \cdot 600+40=0,982 \cdot 600+40$ kg/m, a więc:

$$g=\frac{0,982 \cdot 600+40}{100}=6,292 \text{ kg/cm.}$$

Rozpiętość l_2 wynosi $4,5$ m = 450 cm, więc $M=\frac{1}{8}6,292 \times 450^2=159266$ kg/cm. Wstawmy teraz wartość w równ. 224), a otrzymamy $bh^2=\frac{6}{80}159266=11945$ cm³, więc dla $b=20$ cm, $h=24,4$ cm. Ponieważ stosunek podstawy do wysokości jest stosowny, więc zatrzymujemy jako wymiary belki drewnianej $b=20$ cm, $h=25$ cm. W przeciwnym razie przyjęlibyśmy b większe lub mniejsze, według tego, czy wymiar h był za wielki czy za mały.

Znając wymiary, obliczyć możemy ciężar belki drewnianej na m biejący. Przyjawszy ciężar gatunkowy suchego drzewa 0,7, wiemy, że ciężar 1 dm³ drzewa jest 0,7 kg, stąd m biejący belki waży $2 \cdot 2,5 \cdot 10 \cdot 0,7=35$ kg, a więc trochę mniej, niżesmy pierwotnie przyjęli, przez co jednak nie potrzebujemy zmieniać obliczenia belki.

Teraz przystępujemy do obliczenia belki blaszanej. Ciężar powały i obciążenie tłumem ludzi przenosi się na belkę żelazną w punktach *E* i *F*. Nazwijmy odnośne siły *G* i *G'*, to punkt *E* dźwiga $a l_2 m^2$ powały i l_2 m. b. belki drewnianej, więc $G = 0,982 \cdot 4,5 \cdot 600 + 4,5 \cdot 35 = 2808,9 \text{ kg} = 2,8 \text{ t}$.

Siła *G'*, działająca w punkcie *K*, jest mniejszą, gdyż szerokość paska powały, ciężącego na tym punkcie jest mniejszą, a mianowicie:

$$G' : G = \frac{a+b}{2} : a, \text{ a więc } G' = G \frac{a+b}{2a} = 2,8 \frac{0,982+0,2}{2 \cdot 0,982} = 1,68 \text{ t}.$$

Obliczywszy siły, działające na belkę blaszaną, wykreślamy wielobok sił, przyjmujemy biegun *O* tak, że odległość biegunowa wedle podziałki sił wynosi 0 *t*, kreślimy wielobok sznurowy, zamykającą, wyznaczamy oddziaływanie i siły poprzeczne wedle § 8. Aby wykreślić podziałkę momentów, zastanówmy się, że w rysunku na tabl. II 1 *cm* w podziałce momentów równa się według podziałki długości 0,5 *m*, pomnożonemu przez odległość biegunową, więc przez 20 *t*, a zatem według podziałki momentów 1 *cm* równa się $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ tm}$. Możemy więc wykreślić teraz podziałkę momentów.

Dalej uwzględnic jeszcze musimy ciężar własny belki żelaznej g_2 , który możemy przyjąć na 1 *m* bieżący 70+15 *l*, a więc $g_2 = 70+15 \cdot 11 = 235 \text{ kg/m} = 0,235 \text{ t/m}$. Zatem moment w środku $M_w = \frac{1}{2} g_2 l_1^2 = \frac{1}{2} 0,235 \cdot 11,3^2 = 3,74 \text{ tm}$. Moment ten wykreślamy według podziałki momentów i kreślimy w znany sposób parabolę, jako linię momentów.

Obliczymy jeszcze moment M_b dla punktu *K* w następnym sposobie: Oddziaływanie O_1 równa się połowie wszystkich ciężarów,

$$\text{więc: } O_1 = \frac{2G' + 10G}{2} = \frac{2 \times 1,68 + 10 \times 2,8}{2} = 15,68 \text{ t},$$

a moment w punkcie *K* $M_6 = 15,68 \times 5,16 - 1,68 \times 4,9 - 5 \cdot 2,8 \times 2 \times 0,972 = 80,91 - 8,23 - 27,50 = 45,18 \text{ tm}$.

Podobnie otrzymamy momenty i dla innych punktów dla obciążenia ciężarem powały i tłumem ludzi: do tego musimy jeszcze dodać momenty z ciężaru własnego według wzoru 19) $M = \frac{1}{2} g x (l-x)$. W ten sposób obliczyliśmy:

dla $x =$	0	0,25	1,23	2,21	3,20	4,18	5,16	<i>m</i>
M' dla obciążenia ciężarem powały i tłumem ludzi	} = 0	3,92	17,65	28,60	36,99	42,46	45,18	<i>tm</i>
M'' dla ciężaru własnego belki		0,32	1,45	2,36	3,03	3,50	3,72	„
Razem $M = 0$	4,24	19,10	30,96	40,02	45,96	48,90	<i>tm</i>	

Podobną tabliczkę otrzymamy dla sił poprzecznych, licząc według równań 8) i 18):

$x =$	0	0,25	1,23	2,21	3,20	4,18	5,16	<i>m</i>
$Q' =$	15,68	14,0	11,2	8,4	5,6	2,8	0	<i>t</i>
$Q'' =$	1,33	1,27	1,04	0,81	0,58	0,24	0,11	<i>t</i>
$Q =$	17,01	$\begin{cases} 16,95 \\ 15,27 \end{cases}$	$\begin{cases} 15,04 \\ 12,24 \end{cases}$	$\begin{cases} 12,01 \\ 9,21 \end{cases}$	$\begin{cases} 8,98 \\ 6,18 \end{cases}$	$\begin{cases} 5,84 \\ 3,04 \end{cases}$	$\begin{cases} 2,91 \\ 0,11 \end{cases}$	<i>t</i>

Teraz możemy przytąpić do obliczenia przekroju belki blaszanej. Przyjmujemy wysokość ścianki, zależną od wysokości, jaką dla stropu mamy do rozporządzenia, $h_1=60\text{ cm}$, kątowniki wedle równania 208) 70 mm szerokie a 8 mm grube; grubość ścianki byłaby według 218) $g=2\frac{17,010}{1,000 \cdot 60}=0,6\text{ cm}$, zamiast tego przyjmujemy 8 mm . Dalej niech będzie szerokość nakładki według 208) 21 cm , a nity o średnicy 20 mm . Po odciągnięciu dziur będzie więc użyteczna szerokość nakładki $b_1=21-2 \cdot 2,0=17,8\text{ cm}$.

Uwzględnivszy dziury na nity i osłabienie ścianki o 25% otrzymamy

$$I_1 = \frac{1}{12} [(14,8-4,0)60^3 - (12,4-4,0)58,4^3 - 1,6 \cdot 46^3 - 0,25 \cdot 0,8 \cdot 60^3],$$

$$I_1 = \frac{1}{12} (2332800 - 1673084 - 155738 - 43200) = 38400\text{ cm}^4.$$

Wedle równania 212) mamy w przybliżeniu grubość nakładki

$$d = \frac{M}{b_1 h_1 \tau} - \frac{2I_1}{b_1 h_1^2},$$

więc dla $x=5,16$, wstawivszy wartości w cm i kg ,

$$d_6 = \frac{4890000}{17 \times 60 \times 1000} - \frac{2 \times 38400}{17 \cdot 60^2} = 3,54\text{ cm},$$

a teraz dokładnie według równania 211)

$$d_6 = \frac{4890000}{17 \times 60 \times 1000} - \frac{2 \times 38400}{17 \times 60(60 + 2 \times 3,54)} = 3,4\text{ cm}.$$

Dla $x=0$ otrzymamy z równania 212):

$$d_0 = -\frac{2 \times 38400}{17 \times 60^2} = -1,26\text{ cm} = 1,3\text{ cm}.$$

Podobnie otrzymamy i dla innych punktów grubości nakładek, a mianowicie będziemy mieli:

$$\begin{array}{ccccccccc} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & & \\ -13 & -8 & +6 & +18 & +27 & +33 & +34 & \text{mm.} & \end{array}$$

Grubość nakładek w poszczególnych punktach wykreśliśmy na rysunku i końce rzędnych połączyliśmy prostymi. W ten sposób otrzymaliśmy teoretyczną grubość nakładek. Według poprzedniego mamy największą grubość $d_6=34\text{ mm}$, przyjmujemy więc trzy nakładki, z których pierwsza 12 mm gruba, a dwie górne po 11 mm i wyznaczamy wykreślnie długości nakładek.

Teraz obliczamy jeszcze odstępy nitów, przyjąwszy według 223) jako największy odstęp $6a=6 \cdot 2,0=12\text{ cm}$. Obliczamy więc najprzód odstęp nitów poziomych dla $0,25 > x > 0$. Ponieważ tu średnica nitu d' jest 2 razy większa od grubości kątowniki, więc musimy liczyć według równania 221)

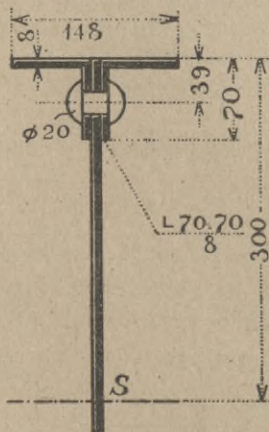
$$a = \frac{d' g \tau_2 l}{QS}. \text{ Wstawiamy tedy wartości } \tau_2=1600\text{ kg/cm},$$

$$I=I_1, \text{ bo tu niema żadnej nakładki, } d'=1,6,$$

$$Q=17,01\text{ t}=17010\text{ kg}, S=(14,8 \cdot 0,8)29,6 +$$

$$+ 2 \cdot 6,2 \cdot 0,8 \cdot 26,1=609,4 \text{ (rys. 156),}$$

$$\text{więc } \frac{2 \times 0,8 \times 1600 \times 38400}{17010 \times 609,4} = 9,48\text{ cm}.$$



rys. 156.

Gdybyśmy użyli wzoru 219), otrzymalibyśmy:

$$a = \frac{\pi 800 \cdot 2^3 \cdot 38400}{2 \cdot 17010 \cdot 609 \cdot 4} = 18,6 \text{ cm,}$$

zatrzymujemy więc wynik pierwszy mniejszy.

Dla długości od $x=0,25 \text{ m}$ do początku pierwszej nakładki otrzymamy:

$$a = \frac{2 \times 0,8 \times 1600 \times 38400}{15270 \times 609 \cdot 4} = 10,1.$$

Od początku pierwszej nakładki do $x=1,23 \text{ m}$ mamy:

$$I = I_1 + \frac{1}{2} 21 (62,4^3 - 60^3) = 38400 + 47 198 = 85598$$

$$S = 609 \cdot 4 + 21 \times 1,2 \times 30,6 = 1 380,5 \text{ więc:}$$

$$a = \frac{2 \times 0,8 \times 1 600 \times 85598}{15270 \times 1380,5} = 10 \cdot 6 \text{ cm.}$$

Dla długości od $x=1,23 \text{ m}$ do początku drugiej nakładki mamy:

$$a = \frac{2 \times 0,8 \times 1 600 \times 85518}{12240 \times 1380 \cdot 5} = 13 \cdot 0 \text{ cm.}$$

Podobnie otrzymamy dla długości od początku drugiej nakładki do $x=2,21 \text{ m}$, $a=12 \text{ cm}$:

dla długości od $x=2,91 \text{ m}$ do $x=3,20 \text{ m}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ nakładki, } a=17 \cdot 4 \text{ cm,} \\ 3 \text{ nakładki, } a=17 \cdot 7 \text{ cm,} \\ 3 \text{ nakładki, } a=26 \cdot 3 \text{ cm,} \\ 3 \text{ nakładki, } a=53 \cdot 6 \text{ cm,} \end{array} \right.$
„ „ „ $x=3,20 \text{ m}$ do $x=4,18 \text{ m}$	
„ „ „ $x=4,18 \text{ m}$ do $x=5,16 \text{ m}$	
zamiast tego jednak przyjmujemy $a=22 \text{ cm}$.	

Odstępy a nitów stosować się muszą ze względów konstrukcyjnych także do długości pól, która musi być wielokrotną długości a , przyczem jednak a nie może być większem od wartości obliczonej.

§ 63. Naprężenia zginające po przekroczeniu granicy sprężystości.

Wiemy z § 37, że wzór 141) $\nu I = M v$ ważnym jest tylko do granicy sprężystości.

Gdy obciążenie wzrasta i granica sprężystości zostanie przekroczoną, wzór ten nie jest ważnym, zwykle jednak w braku innego, obliczamy naprężenie wedle niego. Rozumie się jednak, że tak obliczone naprężenia różnią się od rzeczywistych. Jeżeli ciało obciążamy aż do złamania i obliczamy z wzoru naprężenie, w tej chwili powstające, to otrzymamy współczynnik wytrzymałości na złamanie. Przy zginaniu występują jednak naprężenia na ściskanie i wyciąganie, belka łamie się w ten sposób, że albo ciągnięte włókna się przerywają albo ciśnione zgniatają. Gdyby wzór 141) był ważnym aż do złamania, toby musiał współczynnik wytrzymałości μ_2 na złamanie być równy mniejszemu ze współczynników

wytrzymałości na ciągnięcie μ lub ciśnienie μ_1 . Ponieważ jednak wzór ten nie jest ważnym do złamania, więc okazuje się, że dla μ_2 otrzymujemy inną wartość.

Doświadczenia okazały np. że dla belek drewnianych o przekroju prostokątnym współczynnik wytrzymałości na złamanie μ_2 ma przeciętnie następujące wartości w kg/cm^2 : dla drzewa jodłowego 410, świerkowego 430, modrzewiowego 540, dębowego 600, bukowego 700.

Jeżeli te wartości porównamy z wartościami dla μ i μ_1 w § 18, to okazuje się, że dla drzewa μ_2 ma wartość średnią między μ a μ_2 , a w przybliżeniu $\mu_2 = 0,65 \mu$.

Dla stali otrzymał Bauschinger następujące wyniki:

Tablica XXX.

zawartość węglą w ‰	spółcz. wytrzymałości		$\frac{\mu_2}{\mu}$
	wyciąganie μ kg/cm^2	złamanie μ_2 kg/cm^2	
0,14	4430	> 7920	> 1,78
0,19	4785	> 8600	> 1,79
0,46	5330	8340	1,56
0,55	5656	8825	1,58
0,66	6295	8600	1,36
0,80	7230	7645	1,06
0,96	8305	8480	1,02

Dla żelaza łanego wyprowadza Bach z doświadczeń następujące prawidła:

Spółczynnik wytrzymałości na zginanie przewyższa współczynnik wytrzymałości na wyciąganie tem bardziej, im bardziej skupiony jest materiał około osi obojętnej. Bach wyraża tę względność następującym równaniem: $\mu_2 = c \sqrt{\frac{e}{e_0}} \mu, 230$

przyczem współczynnik c leży między $\frac{6}{5}$ a $\frac{4}{3}$, e i e_0 oznaczają odstęp skrajnego włókna wyciąganego od osi obojętnej i od środka ciężkości wyciąganej części przekroju.

I tak gdy w pewnym wypadku było $\mu = 1369 kg/cm^2$, otrzymał on:

a) dla przekroju kwadratowego, którego przekątnia leży w płaszczyźnie obciążenia	μ_2 kg/cm ²	$\frac{\mu_2}{\mu}$
b) dla przekroju H	3218 do 3323	2,44
c) „ „ okrągłego	2929 „ 3153	2,22
d) „ „ kwadratowego	2905 „ 2986	2,16
e) „ „ I	2572 „ 2238	1,77
	1979 „ 2111	1,49

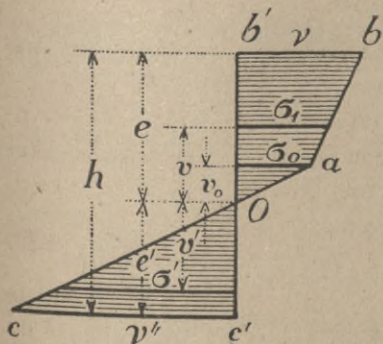
Considère otrzymał stosunek $\frac{\mu_2}{\mu}$

	dla żelaza lanego	
	miękkiego	twardego
	($\mu=1130$)	($\mu=2230$)
dla przekroju I	1,40	1,15
„ „ prostokątnego	1,82	1,57
„ „ okrągłego	2,21	1,84

Widzimy z poprzedniego, że naprężenia zginające po przekroczeniu granicy sprężystości są różne dla różnych materiałów, a przyczyną tego są rozmaite kształty linii odkształceń dla rozmaitych materiałów. Zastanawiać się więc teraz będziemy osobno nad belkami drewnianymi, żelaznymi i betonowymi.

§ 64. Naprężenia przy złamaniu belek drewnianych.

Jeżeli belkę drewnianą o przekroju prostokątnym obciążymy aż do złamania, to z powodu, że granica sprężystości dla ciągnięcia leży bardzo blisko spółoścownika wytrzymałości, naprężenia na wyciąganie σ' (rys. 157) będą



rys. 157.

proporcjonalne do odstępów v' od osi obojętnej, dadzą się więc przedstawić prostą Oc . Inaczej rzecz się jednak będzie miała z naprężeniami na ściskanie. Otrzymamy tam prostą Oa do granicy sprężystości i krzywą, zamiast której możemy przyjąć prostą ab . Dla tego założenia jest dla ściskanej części przekroju aż

$$\sigma = a v$$

do granicy sprężystości:

a poza tą granicą:

$$\sigma_1 = \alpha [v_0 + \alpha_1 (v - v_0)] = \alpha v_0 (1 - \alpha_1) + \alpha \alpha_1 v$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 (1 - \alpha_1) + \alpha \alpha_1 v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \text{Dla części wyciąganej jest } \sigma' &= \alpha v' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned} \right\} \quad 231)$$

Suma naprężeń dodatnich i ujemnych musi być równą zeru, więc gdy szerokość belki b jest stałą

$$-\frac{\nu' e'}{2} + \frac{\sigma_0 v_0}{2} + \frac{\sigma_0 + \nu}{2} (e - v_0) = 0$$

a stąd:
$$e' = \frac{\sigma_0}{\nu'} v_0 + \frac{\sigma_0 + \nu}{\nu'} (e - v_0) \quad . \quad . \quad . \quad 232)$$

Jeżeli przypuścimy, że równocześnie przerywają się włókna wyciągane i zgniatają ściskane, to możemy napisać ze względu na to, że dla drzewa szpilkowego współczynnik wytrzymałości na wyciąganie jest dwa razy tak wielki, jak na ściskanie*),

$$\nu = \mu = \frac{1}{2} \nu' = \frac{1}{2} \mu',$$

dalej
$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \nu = \frac{1}{4} \nu' = \frac{1}{4} \mu' \text{ zatem } e' = \frac{1}{4} v_0 + \frac{3}{4} (e - v_0).$$

Wstawmy dalej: $e = h - e'$ i $v_0 = \frac{\sigma_0}{\alpha} = \frac{\sigma_0}{\sigma'} \nu' = \frac{\sigma_0}{\nu'} e' = \frac{1}{4} e'$, to:

$$e' = \frac{1}{16} e' + \frac{3}{4} \left(h - e' - \frac{1}{4} e' \right), \text{ a stąd: } e' = 0,4 h \quad . \quad . \quad 233)$$

Oś obojętna leży więc w chwili złamania poniżej osi belki w odległości $0,1 h$.

Moment sił zewnętrznych M musi być równy momentowi sił wewnętrznych, więc gdy μ_2 nazwiemy naprężenie przy złamaniu, obliczone z wzoru 141), to:

$$M = \frac{bh^2}{6} \mu_2 = b \left[\frac{\mu' e'^2}{6} + \frac{\sigma_0 v_0^2}{6} + \frac{\sigma_0 + \mu}{2} (e - v_0) \left(v_0 + \frac{2\sigma_0 + \mu}{\sigma_0 + \mu} \cdot \frac{e - v_0}{3} \right) \right].$$

Po wstawieniu powyższych wartości za ν , σ_0 , v_0 , e' otrzymamy:
$$h^2 \mu_2 = \left[\mu' e'^2 + \frac{1}{64} \mu' e'^2 = \frac{9\mu'}{8} h \left(v_0 + \frac{3}{4} \frac{e - v_0}{3} \right) \right]$$

$$h^2 \mu_2 = \frac{65}{64} \mu' \cdot 0,16 h^2 = \frac{9}{8} \mu' h \left(0,1 h + \frac{2}{9} h \right) = 0,725 \mu' h^2$$

zatem:
$$\mu_2 = 0,725 \mu' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 234)$$

*) Porów. § 18.

W poprzednim paragrafie widzieliśmy, że doświadczenia okazały, że $\mu_2 = 0,65 \mu$, wynik więc doświadczeń jest bardzo zbliżony do teoretycznego i teraz poznajemy prawdziwą przyczynę tego zjawiska.

Przepisy budowy mostów drogowych minist. polskiego z r. 1920 przyjmują na zginanie

- dla drzewa miękkiego . . . 100 kg/cm²
- „ „ twardego . . . 110 „

Przy obciążeniach wyjątkowych można dopuścić natężenia większe o 40%, zaś przy obciążeniach samochodami większe o 20% od podanych.

Przy obliczeniu mostów tymczasowych, budowanych na najwyżej dwuletni okres trwania, można dopuścić natężenie o 20% wyżej podanych.

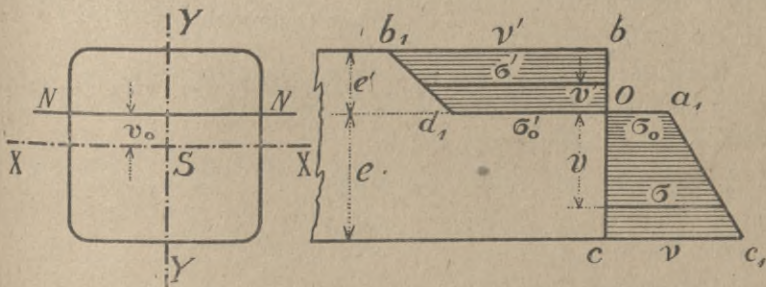
Rozporządzenie bawarskie dopuszcza dla drzewa miękkiego 90 kg/cm².

Wedle zestawienia tow. austr. inżyn. i archit. z r. 1902

- dla drzewa miękkiego . . . 80 kg/cm²
- „ „ twardego . . . 100 „

§ 65. Naprężenie przy złamaniu belek z żelaza spawanego, zlewnego i stali.

Podobnie jak z belkami drewnianymi ma się rzecz także z belkami z żelaza spawanego, zlewnego i stali. Tu jednak odpowiednio do kształtu krzywej odkształceń, wykazanego w § 20., linja naprężeń będzie dla wyciągania jak i ściskania krzywą, zamiast czego możemy podobnie jak dla drzewa przyjąć dwie pro-



rys. 158.

ste, (rys. 158), więc dla wyciągania Oa_1 i $a_1 c_1$, dla ściskania Od_1 i $d_1 b_1$. Linie Oa_1 i Od_1 spadają w tej fazie obciążenia prawie z osią, możemy więc napisać:

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \sigma_0' + \alpha' v' \\ \sigma &= \sigma_0 + \alpha v \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 235)$$

Dla równowagi musi być suma naprężeń równa zero, więc $\int_0^e \sigma dF - \int_0^{e'} \sigma' dF = 0$, a wstawivszy wartość za σ i σ' , otrzymamy: $\sigma_0 \int_0^e dF + \alpha \int_0^e v dF - \sigma'_0 \int_0^{e'} dF - \alpha' \int_0^{e'} v' dF = 0$.

Nazwijmy $\int_0^e dF = F_1$ powierzchnię części przekroju poniżej osi obojętnej, $\int_0^e v dF = S_1$ moment statyczny tej powierzchni ze względu na oś obojętną, względnie $\int_0^{e'} dF = F_2$ i $\int_0^{e'} v' dF = S_2$ powierzchnię i moment statyczny części przekroju poniżej osi obojętnej, to: $\sigma_0 F_1 + \alpha S_1 - \sigma'_0 F_2 - \alpha' S_2 = 0$.

Dla żelaza zlewneego i stali możemy w przybliżeniu przyjąć $\sigma_0 = \sigma'_0$ i $\alpha = c\alpha'$, więc: $\sigma_0 (F_1 - F_2) + \alpha(S_1 - c S_2) = 0$. . . 236)

Wstawmy wartość za α z równ. 235), to:

$$\alpha = \frac{\sigma - \sigma_0}{v} \text{ albo } \frac{v - \sigma_0}{e}, \text{ więc}$$

$$\sigma_0 (F_1 - F_2) + \frac{v - \sigma_0}{e} (S_1 - c S_2) = 0. 237)$$

Wedle doświadczeń Considère'a*) można przyjąć w poprzednim równaniu dla stali miękkiej, $\sigma_0 = 3000 \text{ kg/cm}^2$, $c = 3$. Dla żelaza spawanego możemy przyjąć $\sigma_0 = 2000 \text{ kg/cm}^2$, c nie znamy z doświadczeń, w braku ich mogliibyśmy tymczasowo przyjąć także $c = 3$.

Jeżeli kształt przekroju jest dany, to możemy F_1 , F_2 , S_1 i S_2 wyrazić jako funkcyę oddalenia osi obojętnej od osi ciężkości i na podstawie rów. 237) wyznaczyć v .

Drugi warunek równowagi brzmi:

$$M = \int_0^{e'} \sigma v dF = \int_0^{e'} \sigma' v' dF.$$

Wstawivszy wartość za σ i σ' z 235), otrzymamy:

$$M = \sigma_0 \int_0^e v dF + \alpha \int_0^e v^2 dF + \sigma'_0 \int_0^{e'} v' dF + \alpha' \int_0^{e'} v_2 dF.$$

Nazwijmy moment bezwładności powierzchni przekroju poni-

*) P. Ann. des ponts et chaussées 1885, str. 574 i nast.

żej osi obojętnej ze względu na oś obojętną I_1 , powierzchni zaś powyżej osi obojętnej I_2 , to możemy napisać:

$$M = \sigma_0 S_1 + \alpha I_1 + \sigma'_0 S_2 + \alpha' I_2, \text{ albo:}$$

$$M = \sigma_0 (S_1 + S_2) + \alpha (I_1 + c I_2)$$

wreszcie:
$$M = \sigma_0 (S_1 + S_2) + \frac{\nu - \sigma_0}{e} (I_1 + c I_2) \dots 238)$$

Jeżeli zastosujemy ten wzór do prób wytrzymałości na złamanie, to wstawimy $\nu = \mu$. Spółczynnik wytrzymałości na złamanie w zwykłym rozumieniu będzie:

$$\mu_2 = \frac{Me}{I}$$

Z rów. 238) otrzymamy dla $\mu = \nu$

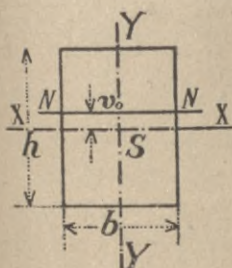
$$Me = (\mu - \sigma_0) (I_1 + c I_2) + \sigma_0 e (S_1 - S_2), \text{ zatem:}$$

$$\frac{\mu_2}{\mu} = \frac{I_1 + c I_2}{I} + \frac{\sigma_0 e (S_1 + S_2) - (I_1 + c I_2)}{I} \dots 239)$$

Widzimy więc, że współczynnik zwiększający (fr. *coefficient de majoration*) $k = \frac{\mu_2}{\mu}$ zależny jest od kształtu przekroju, bo jest tem większym, im większe jest $\frac{e (S_1 + S_2)}{I}$.

Zastosujmy wzory powyższe do przekrojów prostokątnego i okrągłego.

Dla prostokąta mamy $F_1 = b \left(\frac{h}{2} + v_0 \right)$ (rys. 159)



rys. 159.

$$F_2 = b \left(\frac{h}{2} - v_0 \right), \text{ a więc } F_1 - F_2 = 2 b v_0,$$

$$S_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} + v_0 \right)^2 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} + h v_0 + v_0^2 \right),$$

$$S_2 = \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - v_0 \right)^2 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{2} - h v_0 + v_0^2 \right),$$

$$\text{więc } S_1 - 3 S_2 = \frac{b}{2} \left(-\frac{h^2}{2} + 4 h v_0 - 2 v_0^2 \right),$$

wreszcie $e = \frac{h}{2} + v_0.$

Wstawwszy to w równ. 237), otrzymamy:

$$2 \sigma_0 b v_0 + \frac{\mu - \sigma_0}{\frac{h}{2} + v_0} \frac{b}{2} \left(-\frac{h^2}{2} + 4 h v_0 - 2 v_0^2 \right) = 0,$$

albo:
$$2\sigma_0 v_0 = \frac{\mu - \sigma_0}{h + 2v_0} \left(\frac{h^2}{2} - 4hv_0 + 2v_0^2 \right) \dots 240)$$

Wstawmy n. p. dla stali $\sigma_0 = 3000$, $\mu = 7000 \text{ kg/cm}^2$, to otrzymamy $6000 v_0 = \frac{4000}{h + 2v_0} \left(\frac{h^2}{2} - 4hv_0 + 2v_0^2 \right)$.

Stąd otrzymamy: $v_0 = 0,09 h$.

Obliczmy teraz M wedle wzoru 238), a otrzymamy:

$$S_1 + S_2 = b \left(\frac{h^2}{4} + v^2 \right) = b \left(\frac{h^2}{4} + 0,0081 h^2 \right)$$

$$S_1 + S_2 = 0,2581 bh^2$$

$$I_1 + c I_2 = \frac{b}{3} \left[\left(\frac{h}{2} - v_0 \right)^3 + c \left(\frac{h}{2} + v_0 \right)^3 \right] = \frac{bh^3}{3} (0,205 + 3 \times 0,0689) = 0,137 bh^3$$

więc $M = 3000 \cdot 0,2581 bh^2 + \frac{4000}{0,59 h} 0,137 bh^3$

$$M = bh^2(774,3 + 930) = 1704 bh^2.$$

Moment obliczony wedle zwykłego wzoru jest:

$$M_0 = \frac{bh^2}{6} \cdot 7000 = 1167 bh^2,$$

zatem: $\frac{M}{M_0} = \frac{1704}{1161} = 1,46.$

Dla koła otrzymamy rys. 160):

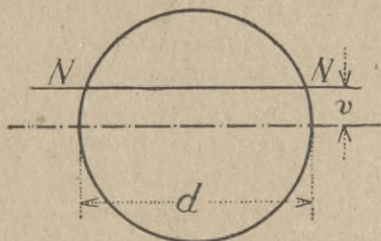
$$F_1 = \frac{d^2 \pi}{8} + dv_0, \quad F_2 = \frac{d^2 \pi}{8} - dv_0,$$

$$S_1 = \frac{d^2 \pi}{8} (v_0 + 0,21 d) + \frac{dv_0^2}{2}$$

$$S_2 = \frac{d^2 \pi}{8} (0,21 - v_0) - \frac{dv_0^2}{2},$$

stąd $F_1 - F_2 = 2 dv_0$

$$S_1 - 3S_2 = \frac{d^2 \pi}{8} (4v_0 - 0,42d) - 2dv_0^2,$$



Rys. 160.

Z równ. 237) otrzymamy:

$$2 dv_0 \sigma_0 + \frac{\mu - \sigma_0}{\frac{d}{2} + v_0} \left(\frac{d^2 \pi}{8} (4v_0 - 0,42 d) - 2 dv_0^2 \right) = 0,$$

albo:
$$2\sigma_0 v_0 = \frac{\mu - \sigma_0}{d + 2v_0} \left(4v_0^2 - \frac{d\pi}{4} (4v_0 - 0,42 d) \right) \dots 241)$$

Wstawmy znów do stali $\sigma_0 = 3000$, $\mu = 7000 \text{ kg/cm}^2$, to otrzymamy:

$$6000 v_0 = \frac{4000}{d + 2v_0} \left(4v_0^2 - \frac{d\pi}{4} (4v_0 - 0,42 d) \right)$$

a stąd otrzymamy: $v_0 = 0,08 d$.

Obliczmy teraz M wedle wzoru 232, a otrzymamy:

$$S_1 + S_2 = \frac{d^2 \pi}{8} (v_0 + 0,21 d) + \frac{dv^2}{2} + \frac{d^2 \pi}{8} (0,21 d - v_0) + \frac{dv^2}{2} = 0,164 d^3$$

$$I_1 = 0,00686 d^4 + \frac{d^2 \pi}{8} (0,2122 d + v_0^3) + \frac{1}{3} d v_0^3$$

$$I_1 = 0,00686 d^4 + 0,03353 d^4 + 0,000171 d^4 = 0,04056 d^4,$$

$$I_2 = 0,00686 d^4 + \frac{d^2 \alpha}{8} (0,2122 d - 0,08 d)^2 - \frac{1}{3} d v^3,$$

$$I_2 = 0,00686 d^4 + 0,00686 d^4 - 0,000171 d^4 = 0,01355 d^4,$$

$$I_1 + c I_2 = (0,04056 + 3 \cdot 0,01355) d^4 = 0,0812 d^4,$$

więc: $M = 3000, 0,164 d^3 + \frac{4000}{0,58 d} 0,0812 d^4 = (492 + 560) d^3$

$$M = 1052 d^3.$$

Moment obliczony wedle zwykłego wzoru jest:

$$M_0 = \frac{\pi d^3}{32} \cdot 7000 = 0,0982 \cdot 7000 d^3 = 687,4 d^3,$$

zatem: $\frac{M}{M_0} = \frac{1052}{687,4} = 1,53.$

A zatem dla koła, przy którym materiał jest więcej skupionym, niż dla prostokąta, otrzymujemy $\frac{M}{M_0}$, a zarazem $k = \frac{\mu_2}{\mu}$ większe, niż dla prostokąta. Powyższy wynik stwierdziły też doświadczenia z żelazem lanem, przytoczone w § 63.

Spółczynnik k zależny jest wedle równ. 239) także od współczynników σ_0 , μ , c , zmienia się więc z jakością materiału. Doświadczenia Bauschingera, przytoczone w § 63. wykazują, że współczynnik k jest tem większy, im stal jest miększa.

§ 66. Naprężenia zginające w belkach z żelaza lanego, kamienia i betonu. Prawo Bacha.

Już w § 17. stwierdziliśmy, że dla żelaza lanego niema właściwie żadnej granicy sprężystości, a z rys. 41 widać, że linja odkształceń dla żelaza lanego nie jest wcale prostą, lecz krzywą. Podobnie rzecz się ma z kamieniem, betonem, cementem, a w mniejszym nieco stopniu i z drzewem (rys. 42). Otóż prawo Hooke'a (§ 16, r. 29) ściśle rzecz biorąc do tych materiałów właściwie się nie stosuje. Pomimo tego obliczamy belki z tych materiałów wedle zwykłych wzorów i otrzymujemy dziwny wynik, że wytrzymałość na złamanie jest znacznie większą, niż wytrzymałość na ciągnięcie. O drzewie mówiliśmy już w § 64, teraz będziemy mówić o innych, powyżej przytoczonych materiałach.

Prof. Bach wyznaczył na podstawie doświadczeń równanie krzywej odkształceń w ogólnym kształcie:

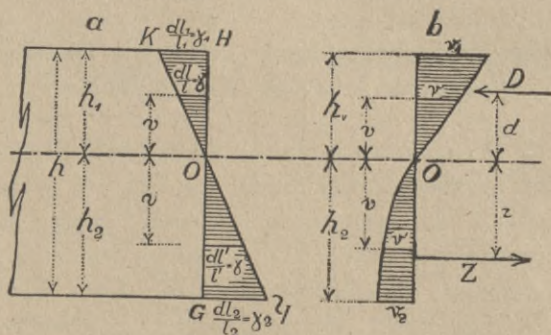
$$\frac{dl}{l} = \frac{\nu^m}{E} = \alpha \nu^m,$$

które przechodzi w równanie Hooke'a (r. 33) dla $m=1$. Wartość współczynnika m rozmaita dla różnych materiałów, nie wiele się różni od jedności; podajemy ją w następującej tabliczce:

Tablica XXXI.

Materiał	Wyciąganie		Ściskanie	
	\bar{E}	m	$\frac{E}{kg/cm^2}$	m
1) żelazo lane:				
przedtem nie obciążone	1338000	1,083	1180000	1,052
obciążone przedtem silnie	1150000	1.1	1170000	1,05
2) cementowa zaprawa:				
1 cz. cementu $1\frac{1}{2}$ cz. piasku	—	—	356000	1,11
1 " " $3\frac{1}{2}$ " "	—	—	315000	1,15
1 " " $4\frac{1}{2}$ " "	—	—	230000	1,17
3) beton:				
1 cz. cementu $2\frac{1}{2}$ cz. piasku 5 cz. żwiru	—	—	298000	1,145
1 " " 5 " " 6 " "	—	—	280000	1,137
1 " " 5 " " 10 " "	—	—	217000	1,157
1 " " $2\frac{1}{2}$ " " 5 " "	—	—	457000	1,157
1 " " 3 " " 6 " "	—	—	380000	1,164
1 " " 5 " " 10 " "	—	—	367000	1,207

Przyjmujemy tutaj także, jak w § 37, że przekroje po ugięciu belki pozostają płaskimi, że więc przekrój GH przejdzie w po-



rys. 161.

łożenie YK (rys. 161 a) czyli obróci się około osi obojętnej o kąt YOG . Widzimy więc, że przedłużenia i skrócenia włókien będą proporcjonalne do ich odległości od osi obojętnej, zatem

$$\frac{dl}{l} = \gamma = \frac{\nu^m}{E} = \alpha \nu^m, \text{ przyczem } \alpha = \frac{1}{E}.$$

Spółczynnik α nazwalimy za Bachem współczynnikiem wydłużenia (n. *Dehnungskoeffizient*, fr. *coefficient d'allongement*, a. *coefficient of extension*, r. коэффициент деформации).

$$\left. \begin{aligned} \text{Z rysunku wynika wtedy: } \frac{dl}{l} = \gamma = \gamma_1 \frac{v}{h_1} \\ \frac{dl'}{l'} = \gamma' = \gamma_2 \frac{v'}{h_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 242)$$

W ogólności są współczynniki sprężystości dla wyciągania i ściskania różne więc: $\gamma = \alpha_1 \nu^{m_1}, \gamma' = \alpha_2 \nu^{m_2}, \dots \dots 243)$

$$\left. \begin{aligned} \text{a stąd: } \gamma_1 = \alpha_1 \nu_1^{m_1} \\ \gamma_2 = \alpha_2 \nu_2^{m_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 244)$$

$$\text{a z rysunku wynika: } \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{h_1}{h_2} \dots \dots \dots 245)$$

$$\text{Z równ. 243) i 244) wynika: } \nu^{m_1} = \frac{\gamma}{\alpha_1} \nu^{m_1} = \frac{v}{h_1} \nu^{m_1},$$

$$\left. \begin{aligned} \text{zatem: } \nu = \nu_1 \sqrt[m_1]{\frac{v}{h_1}} \\ \nu' = \nu_2 \sqrt[m_2]{\frac{v'}{h_2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 246)$$

i analogicznie

Jeżeli złożymy ciśnienie w wypadkową D a ciągnienie w wypadkową Z , to dla równowagi:

$$D = Z \text{ i } Dd + Zz = M.$$

Otóż mamy dla szerokości $b = 1 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{h_1} \nu \, dv = \nu_1 \int_0^{h_1} \sqrt[m_1]{\frac{v}{h_1}} \, dv = \nu_1 \sqrt[m_1]{\frac{1}{h_1}} \frac{v^{\frac{1}{m_1}+1}}{\frac{1}{m_1}+1} \Big|_0^{h_1} = \\ &= \nu_1 \sqrt[m_1]{\frac{1}{h_1}} \sqrt[m_1]{h_1^{m_1+1}} \frac{m_1}{m_1+1} = \frac{m_1}{m_2+1} \nu_1 h_1 \dots \dots 247) \end{aligned}$$

Podobnie otrzymamy:

$$Z = \int_0^{h_2} \nu' \, dv = \frac{m_2}{m_2+1} \nu_2 h_2 \dots \dots 248)$$

$$Dd = \int_0^{h_1} \nu \, v \, dv = \nu_1 \int_0^{h_1} \sqrt[m_1]{\frac{v}{h_1}} \, v \, dv = \frac{m_1}{2m_1+1} \nu_1 h_1^2 \dots 249)$$

$$Zz = \int_0^{h_2} \nu' \, v' \, dv = \nu_2 \int_0^{h_2} \sqrt[m_2]{\frac{v'}{h_2}} \, v' \, dv = \frac{m_2}{2m_2+1} \nu_2 h_2^2 \dots 250)$$

$$\text{a stąd: } \frac{m_1}{2m_1+1} \nu_1 h_1^2 + \frac{m_2}{2m_2+1} \nu_2 h_2^2 = M \dots \dots 251)$$

i
$$\frac{m_1}{m_1 + 1} \nu_1 h_1 = \frac{m^2}{m^2 + 1} \nu_2 h_2 \dots \dots \dots 252)$$

Z równ. 244) i 245 wynika:

$$\frac{\alpha_1 \nu^{m_1}}{\alpha_2 \nu^{m_2}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{h_1}{h_2} \dots \dots \dots 253)$$

Nareszcie jest: $h = h_1 + h_2 \dots \dots \dots 254)$

Jeżeli znamy m_1, m_2, α_1 i α_2 , to z czterech równań 251), 252), 253) i 254) dadzą się obliczyć cztery nieznanne h_1, h_2, ν_1 i ν_2 .

Geusen przyjmuje pewne skrócenie w obliczeniu. W materiałach, o których tu mowa, jest współczynnik wytrzymałości na wyciąganie $\mu' < \mu$ współczynnika wytrzymałości na ściskanie. Jeżeli przyjmiemy n -tą pewność, to $\tau' = \frac{\mu'}{n}$ jest naprężenie dopuszczalne na wyciąganie.

Zróbmy w 252) $\tau' = \nu_2$, to $\nu_1 = \frac{m_2}{m_2 + 1} \frac{m_1 + 1}{m_1} \frac{h_2}{h_1} \tau'$.

Nazwijmy
$$\frac{m_2}{m_2 + 1} \frac{m_1 + 1}{m_1} = \varphi \dots \dots \dots 255)$$

to $\nu_1 = \varphi \tau' \frac{h_2}{h_1} \dots \dots \dots 256)$

Z równ. 252) mamy $\nu_2 h_2 = \frac{\nu_1 h_1}{\varphi}$.

Równ. 251) możemy więc napisać:

$$\nu_1 h_1 \left(\frac{h_1 m_1}{2 m_1 + 1} + \frac{m_2}{2 m_2 + 1} \frac{h_2}{\varphi} \right) = M,$$

albo $\varphi \tau' h_2 \left(h_1 \frac{m_1}{2 m_1 + 1} + \frac{h_2}{\varphi} \frac{m_2}{2 m_2 + 1} \right) = M \dots \dots 257)$

a że $h_1 = h - h_2$, więc z tych dwu równań możemy obliczyć h_2 .

Współczynniki m podane powyżej nie są zupełnie dokładne i zmieniają się wedle jakości materiału. Przyjmijmy w przybliżeniu z Bachem dla żelaza lanego $m_1 = 1,04, m_2 = 1,10$, to

$$\varphi = \frac{1,10 \cdot 2,04}{1,04 \cdot 2,10} = 1,027$$

$$\frac{m_1}{2 m_1 + 1} = \frac{1,04}{3,08} = 0,3377, \quad \frac{1}{\varphi} \frac{m_2}{2 m_2 + 1} = \frac{1}{1,027} \frac{1,10}{3,20} = 0,3346.$$

Dla granitu jest $m_1 = 1,12, m_2 = 1,40$

$$\varphi = \frac{1,40}{1,12} \cdot \frac{2,12}{2,40} = 1,10, \quad \frac{m_1}{2m_1 + 1} = \frac{1,12}{3,24} = 0,35.$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{m_2}{2m_2 + 1} = \frac{1}{1,10} \frac{1,40}{3,80} = 0,34.$$

Z tego widzimy, że w przybliżeniu dla obu materiałów:

$$\frac{m_1}{2m_1 + 1} = \frac{1}{\varphi} \frac{m_2}{2m_2 + 1} = \frac{1}{3} \dots \dots \dots 258)$$

Jeżeli to wstawimy w równ. 257), to

$$\frac{\varphi \tau' h_2}{3} (h_1 + h_2) = M, \text{ zatem}$$

$$h_2 = \frac{3M}{\varphi \tau' h} \dots \dots \dots 259)$$

Mamy zatem z 256):

$$v_1 - \varphi \tau' \frac{h_2}{h_1} = \frac{3M}{hh_1} \dots \dots \dots 260)$$

Dla złamania możemy wstawić μ' zamiast τ' , więc

$$h_2 = \frac{3M}{\varphi \mu' h}$$

Nazwijmy $h_2 = \alpha h$, to $\mu' = \frac{3M}{\alpha \varphi h^2}$, a że dla szerokości 1 cm

$$W = \frac{h^2}{6}, \text{ więc:}$$

$$\mu' = \frac{1}{2\alpha\varphi} \frac{M}{W} \dots \dots \dots 261)$$

Ponieważ $\alpha\varphi$ jest dla granitu i żelaza łanego prawie równe jednostce, więc:

$$\mu' = \frac{1}{2} \frac{M}{W} \dots \dots \dots 262)$$

Rzeczywista wytrzymałość na ciągnięcie żelaza łanego i granitu, jest więc prawie równa połowie wytrzymałości, otrzymanej z doświadczeń na złamanie, a obliczonej zwykłym sposobem wedle hipotezy Naviera (proporcjonalność wydłużeń i naprężeń), co zgadza się z doświadczeniem. Dla betonu znalazł Carling*) ten stosunek 2,2.

Przepisy budowy mostów drogowych polskiego ministerstwa z r. 1920. § 51. 5.

*) Por. Zeitschr. des österr. Ing. Arch. Ver. 1897 str. 11.

Jest to równanie osi obojętnej, które da się napisać też:

$$y = -\frac{I}{I_1} x \operatorname{st} \alpha 264)$$

Jest to równanie linii prostej, zatem oś obojętka jest linią prostą i przechodzi przez środek ciężkości O , bo dla $x=0$ $y=0$.

Niech prosta NN będzie osią obojętną. Dla punktu jej U jest $UU_1=y$, $OU_1=-x$, więc $\operatorname{st} \varphi = \frac{UU_1}{OU_1} = -\frac{y}{x}$, albo po wstawieniu wartości z 264):

$$\operatorname{st} \varphi = \frac{I}{I_1} \operatorname{st} \alpha 265)$$

A więc położenie osi obojętnej niezależnym jest od wielkości obciążenia ani momentu, lecz tylko od przekroju i położenia płaszczyzny obciążenia.

Jeżeli mamy wykreśloną elipsę bezwładności, to równanie jej wedle 166) jest: $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1$, stąd:

$$\frac{2x_1 dx_1}{a_1^2} + \frac{2y_1 dy_1}{a^2} = 0, \text{ zatem: } \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x_1 a^2}{y_1 a_1^2}.$$

Jeżeli zastosujemy to równanie do punktu D , to

$$\operatorname{st} \beta = -\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 a^2}{y_1 a_1^2} = \frac{a^2}{a_1^2} \operatorname{st} \alpha = \frac{Fa^2}{Fa_1^2} \operatorname{st} \alpha = \frac{I}{I_1} \operatorname{st} \alpha = \operatorname{st} \varphi,$$

a stąd: $\beta = \varphi 266)$

A zatem oś obojętka jest osią sprzężoną osi ZZ , w której działają siły.

Naprężenia ν są, jak wiadomo proporcjonalne do odstępów od osi obojętnej, więc największe naprężenia są w E i F , które to punkty otrzymamy, poprowadziwszy styczne do obwodu przekroju, równoległe do osi obojętnej.

Z równ. 263) wynikają dla punktu F wartości $x=x'$, $y=y'$

$$\operatorname{najw} \nu = \frac{M \operatorname{dost} a \cdot y'}{I} + \frac{M \operatorname{wst} a \cdot x'}{I_1} 267)$$

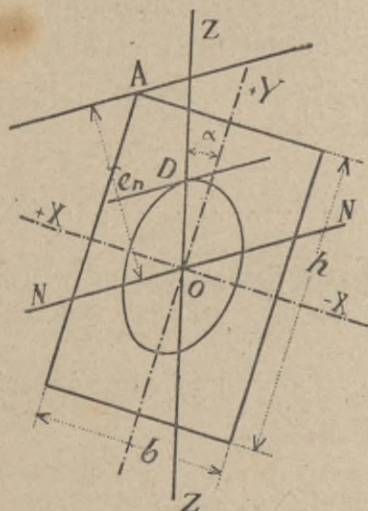
Dla przekroi symetrycznych, których obwód jest prostokątny, więc prostokąta (rys. 163) kształtówki I , U największe naprężenie jest w rogu A , tu więc:

$$y' = e = \frac{h}{2}, \quad x' = e_1 = \frac{b}{2}$$

zatem z równ. 267):

$$najw v = \frac{M \text{ dost } \alpha e}{I} + \frac{M \text{ wst } \alpha e_1}{I_1}$$

albo gdy nazwiemy:



rys. 163.

$$M \text{ dost } \alpha = M_1, \quad M \text{ wst } \alpha = M_2,$$

$$\frac{I}{e} = W_1, \quad \frac{I_1}{e_1} = W_2,$$

$$najw v = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} \dots 268)$$

Jeżeli chcemy obliczyć przekrój dla danego M , to zrobimy $najw v = \tau$. Nazwijmy dalej:

$$W_1 = c W_2 \dots \dots \dots 269)$$

to: $\tau = \frac{M_1}{W_1} + \frac{c M_2}{W_1}$, a stąd:

$$W_1 = \frac{M_1 + c M_2}{\tau} \dots \dots \dots 270)$$

Jeżeli dla danego przekroju znamy c , to dla danego momentu możemy z 270) obliczyć wprost moment oporu, a stąd liczbę

kształtówki lub wymiary prostokąta.

Dla prostokąta $W_1 = \frac{bh^2}{6}$, $W_2 = \frac{hb^2}{6}$, więc:

$$c = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{6}{b^2h} = \frac{h}{b} \dots \dots \dots 271)$$

Wartości c dla kształtówek I i U podajemy w następujących tabliczkach.

Tablica XXXIII.

Kształtówki I (norm. austr.).

liczba	c	l.	c	l.	c	l.	c	l.	c
8	4,96	15	6,59	21	7,66	24a	6,28	30	8,60
10	5,48	16	6,71	22	7,75	25	8,05	32	8,86
12	5,90	18	6,94	22a	5,83	26	8,21	35	9,04
13	6,11	18a	4,66	23	7,73	28	8,32	40	9,45
14	6,50	20	7,39	24	7,90	28a	6,63	45	9,70
								50	8,70

Kształtówki *U* (norm. austr.).

liczba	c	l.	c	l.	c	l.	c	l.	c
6	3,14	12	5,03	16	6,04	22	7,05	28	7,74
8	3,92	13	5,13	18	6,47	24	7,27	30	7,99
10	4,63	14	5,70	20	6,71	26	7,59		

Kształtówki *I* (norm. niem.).

liczba	c	l.	c	l.	c	l.	c	l.	c
8	6,50	15	7,83	22	8,42	29	8,99	40	9,76
9	6,80	16	7,92	23	8,50	30	9,07	42 $\frac{1}{2}$	9,89
10	7,01	17	8,02	24	8,50	32	9,23	45	10,1
11	7,23	18	8,10	25	8,54	34	9,40	47 $\frac{1}{2}$	10,1
12	7,38	19	8,20	26	8,72	36	9,53	50	10,3
13	7,57	20	8,26	27	8,76	38	9,67	55	10,3
14	7,65	21	7,31	28	8,91			60	10,7

Kształtówki *I* szerokostopowe B (Differdinger).

liczba	c	l.	e	l.	c	l.	c	l.	c
14 B	3,14	27 B	3,35	34 B	3,84	47 $\frac{1}{2}$ B	5,37	75 B	9,44
16 B	3,24	28 B	3,36	36 B	4,03	50 B	5,70	80 B	10,2
18 B	3,28	29 B	3,40	38 B	4,26	55 B	6,33	85 B	11,0
20 B	3,29	30 B	3,60	40 B	4,46	60 B	7,07	90 B	11,8
22 B	3,34	32 B	3,59	42 $\frac{1}{2}$ B	4,78	65 B	7,83	95 B	12,7
24 B	3,37			45 B	5,06	70 B	8,63	100 B	13,6
25 B	3,37								
26 B	3,37								

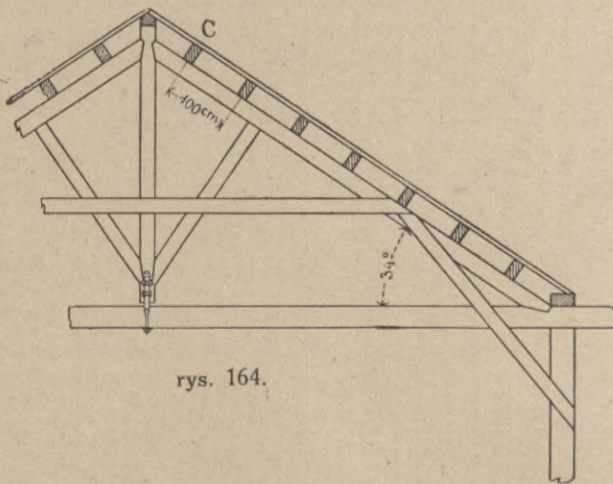
Kształtówki *I* szerokostopowe z Pienia.

liczba	c	l.	c	l.	c	l.	c	l.	c
P 16	2,94	P 30	2,91	Pa 55	5,68	Pb 32	2,92	Pb 60	4,88
P 18	2,87	Pa 32	3,13	Pa 60	6,39	Pb 34	2,93	Pb 65	5,38
P 20	2,88	Pa 34	3,22	Pa 65	7,05	Pb 36	2,91	Pb 70	5,90
P 22	2,91	Pa 36	3,55	Pa 70	7,83	Pb 38	2,92	Pb 75	6,49
P 24	2,92	Pa 38	3,77	Pa 75	8,56	Pb 40	3,08	Pb 80	7,02
P 25	2,92	Pa 40	4,00	Pa 80	9,28	Pb 42 $\frac{1}{2}$	3,30	Pb 85	7,58
P 26	2,91	Pa 42 $\frac{1}{2}$	4,29	Pa 85	10,4	Pb 45	3,51	Pb 90	8,15
P 27	2,92	Pa 45	4,56	Pa 90	10,8	Pb 47 $\frac{1}{2}$	3,72	Pb 95	8,73
P 28	2,96	Pa 47 $\frac{1}{2}$	4,90	Pa 95	11,6	Pb 50	3,95	Pb 100	9,03
P 29	2,92	Pa 50	5,15	Pa 100	12,4	Pb 55	4,36		

Kształtówki U (norm. niem.).

liczba	c	l.	c	l.	c	l.	c	l.	c
3	1,59	8	4,16	14	5,85	20	7,09	26	7,76
4	2,31	10	4,84	16	6,32	22	7,28	28	7,88
5	2,82	12	5,48	18	6,73	24	7,57	30	7,90
$6\frac{1}{2}$	3,50								

Przykład. 1. W punkcie C leży na krokwi nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha=34^\circ$ (rys. 162) płatw drewniana. Odstęp więzarów wynosi 7 m, ciężar pionowy na m^2 dachu pochyłego 120 kg, odstęp płatwi 1 m.



rys. 164.

Wyznaczyć wymiary płatwi dla $\tau=80 \text{ kg/cm}^2$. Siła, działająca na m. b. krokwi, jest $q=120 \text{ kg/m}$, więc moment największy

$$M = \frac{1}{8} 0,12 \cdot 7^2 = 0,735 \text{ tm} = 73500 \text{ kgcm.}$$

Kąt $\alpha=34^\circ$, więc $M_1=M \text{ dost } 34^\circ=73500 \times 0,829=60931 \text{ kgcm}$

$$M_2=M \text{ wst } 34^\circ=73500 \times 0,559=41088 \text{ kgcm.}$$

Przyjmijmy $\frac{h}{b}=2$, to wedle 271) $c=2$, a wedle 270):

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{M_1+2M_2}{80} = \frac{60931+2 \cdot 41088}{80},$$

$$bh^2 = \frac{6 \cdot 143107}{80} = 10733, \text{ a że } \frac{h}{b}=2, \text{ więc } h^3=20766, h=27,5.$$

Przyjmiemy więc $b=14 \text{ cm}$, $h=28 \text{ cm}$,

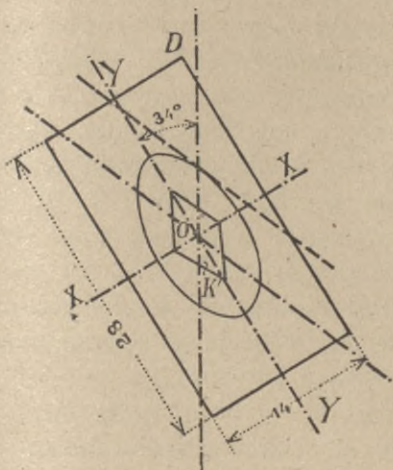
Zbadajmy teraz dla próby, jakie jest największe naprężenie w przekroju. Wedle równ. 268) otrzymamy naprężenie w punkcie D (rys. 165.)

$$v = \frac{60931 \cdot 14}{12 \cdot 14 \cdot 28^3} + \frac{41088 \cdot 7}{12 \cdot 28 \cdot 14^3} = 77,51 \text{ kg/cm}^2,$$

zatem mniejsze, niż 80 kg/cm^2 , bośmy wymiary zaokrąglili w górę.

2. Obliczyć płatek z kształtówki l , utwierdzonej do krokwi, nachylonej pod kątem α , przycem $\text{st } \alpha = 0,6$. Długość płatwi niech będzie 6 m , ciężar jednostajnie rozdzielony na całą długość $1,550 \text{ t}$, więc moment największy

$$M = \frac{1}{8} 1,550 \cdot 6 = 1,1625 \text{ tm} = 116250 \text{ kgcm}.$$



rys. 165.

Wedle 270) jest $W_1 = \frac{M_1 + cM_2}{\tau}$.

Dalej mamy $\text{st } \alpha = 0,6$, $\log \text{st } \alpha = 9,77815$, $\alpha = 30^\circ 57' 50''$

$$\log M = 5,06540 \quad \log M = 5,06540$$

$$\log \text{dost } \alpha = 9,93323 \quad \log \text{wst } \alpha = 9,71139$$

$$\log M_1 = 4,99863 \quad \log M_2 = 4,77679$$

$$M_1 = 99685 \quad M_2 = 59812$$

Przyjmijmy $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$, a tymczasowo $c = 8$, to:

$$W_1 = \frac{99685 + 8 \cdot 59812}{800} = 722,7 \text{ cm}^3.$$

Z tabl. XXIII. znajdujemy dla kształtówki l. 30, $W_1 = 733,5 \text{ cm}^3$.

Przeliczmy teraz dokładniej. Dla l. 30 jest dokładnie $c = 8,60$,

$$\text{więc } W_1 = \frac{99685 + 8,60 \cdot 59812}{800} =$$

$$= 709 \text{ cm}^3,$$

a że dla l. 30 jest $W_1 = 733,5 \text{ cm}^3$, więc kształtówka l. 30 jest wystarczająca. Kształtówka l. 28 jest stanowczo za mała, bo $W_1 = 609,1$, aie szeroko-stopowa kształtówka l. 28 a jest także wystarczająca, bo $W_1 = 734,2$, a $c = 6,63$, więc potrzebne:

$$W_1 = \frac{99685 + 6,63 \times 59812}{800} = 20,3 \text{ cm}^3,$$

a zatem kształtówka ta jest aż nadto silną. Ponieważ kształtówka ta waży jednak $61,94 \text{ kg/m}$ a l. 30 $61,25 \text{ kg/m}$, więc korzystniejszą jest kształtówka l. 30.

§ 68. Dźwigary drewniane złożone.

Jeżeli obciążenie jest tak wielkie, że wytrzymałość jednej belki drewnianej o zwykłych wymiarach nie wystarcza, to kładziemy kilka belek jedna na drugiej (rys. 166 a).

Łatwo zrozumiemy, że belki te położone jedna na drugiej uniosą sumę ciężarów, któreby uniosła każda belka z osobna.

Jeżeli na belkę AB , podpartą w dwu punktach, działają siły, wtedy każda belka z osobna się ugnie tak, że przekroje, znajdujące się przed ugięciem w linii cc_1 , przesuną się po ugięciu (rys. 166 *b*). Jeżeli przesunięciu temu przeszkodzimy przez to, że wytniemy w belkach zęby (n. *Zahn*, fr. *dent*, an. *tooth*, r. зубъ) albo wetkniemy kliny, zaporki (n. *Dübel*, fr. *la clef d' assemblage*, an. *key*, r. клинъ) w odpowiednie wycięcia, wtedy belki wszystkie razem wygną się, jak gdyby były jedną belką (rys. 166 *c*). Belki takie nazywamy dźwigarami złożonymi

(n. *zusammengesetzter, gekuppelter Balken*, fr. *poutre composé, a. built beam*, r. сложная балка). Jeżeli zważymy, że M jest w prostym stosunku do bh^2 , (równ. 224), to w pierwszym wypadku, gdy kilka belek o wysokościach $h_1, h_2, h_3 \dots$ położymy jedną na drugiej bez połączenia, belki stawiają opór momentowi M_1 , a przytem:

$$M_1 : M = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) : h_1^2,$$

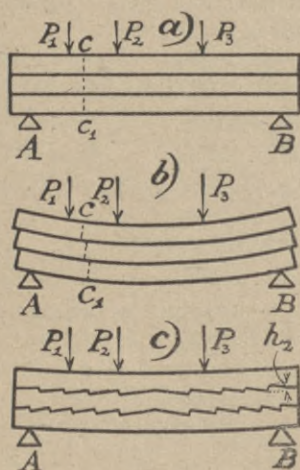
jeżeli M oznacza moment, odnoszący się do belki o wysokości h_1 . Jeżeli te belki połączymy klinami, wtedy w przybliżeniu:

$$M_2 : M = (h_1 + h_2 + h_3)^2 : h_1^2,$$

więc M_2 jest o wiele większem od M_1 , a dźwigary złożone mogą o wiele więcej unieść, niż belki jedna na drugiej położone bez połączenia.

Ponieważ jednak połączenie dźwigarów nie może być w praktyce tak dokładnem, aby dźwigary tworzyły jedną belkę, bo już ściśliwość drzewa i wżeranie się między włókna drzewa czelnego sprawia nadzwyczaj małe przesunięcie poziome, więc, aby uwzględnić zmniejszoną przez to wytrzymałość dźwigaru złożonego, należy przyjąć mniejsze naprężenie dopuszczalne, o czem poniżej mówić będziemy szczegółowo.

Możemy połączyć belki przez zazębienie albo zaklinowanie. Rozróżniamy więc dźwigary złożone zazębione (n. *verzahnter Balken*, fr. *poutre entaillée à redaus*, an. *indented beam* (rys. 166 *c*) lub klinowane (n. *verdübelter Balken*, fr. *la poutre à crémaille-*

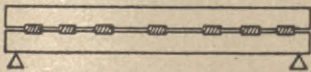


rys. 166.

res, an. built beam with keys) (rys. 167). Jeżeli odstęp belek dźwigaru jest znaczny, nazywamy dźwigary klockowymi (n. Klötzlträger) (rys. 168).

Często wyginają dźwigary zazębione przy wycinaniu zębów w górę, aby powiększyć wytrzymałość. Wskutek sztucznego wygięcia bowiem powstaje w górnych włóknach ciągnienie, a w dolnych ciśnienie, wskutek zaś obciążenia przeciwnie w dolnych włóknach ciągnienie, a w górnych ciśnienie, a stąd napężenie jest mniejszem, niż w belkach pierwotnie prostych; tego jednak w obliczeniach nie uwzględniamy.

rys. 167.

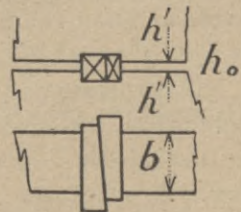


rys. 168.

Przy dźwigarach zazębionych muszą być zęby bardzo dokładnie wycięte, aby zęby jednej belki wypełniały zupełnie wycięcia drugiej belki, gdyż

inaczej możliwem jest małe przesunięcie belek w kierunku poziomym, a wtedy belki nie działają już jako całość, jako dźwigar złożony, lecz każda belka osobno, przez co wytrzymałość znacznie się zmniejsza.

Jednak chociaż zęby są zupełnie dokładnie wykonane, to później wskutek zsuchania i wżerania się drzewa nie zupełnie przystają. Przy dźwigarach klinowanych nie mamy tych niedogodności, kliny bowiem składają się z dwu części (rys. 169) i dadzą się wbić tak daleko, że szczelnie wypełniają dziury, a w razie zeschnięcia się drzewa możemy je pobić tak, że znów będą przystawały. Z drugiej strony jednak, jeżeli dźwigar podlega wielkim wstrząśnieniom, kliny się rozchełtują. Niedogodność tę możemy jednak usunąć w ten sposób, że zabijamy po dokładnem spojeniu belek gwoździe na cieńszych końcach klinów.



rys. 169.

Wiemy, że moment oporu belki jest proporcjonalnym do bh^2 , a więc w kwadratowym stosunku do wysokości; ta zatem belka ma większy moment oporu, której wysokość jest większą. Ponieważ zaś przy dźwigarze zazębionym tracimy na wysokości przez wycięcie zębów, a przy dźwigarze klinowanym przeciwnie zyskujemy na wysokości wskutek odstępu między belkami, zatem

korzystniej jest i z tego względu używać dźwigarów klinowanych.

§ 69. Naprężenie dopuszczalne.

Wspominaliśmy już, że dźwigaru złożonego nie jesteśmy w stanie tak wykonać, aby belki nieco się nie przesunęły jedna względem drugiej, wskutek czego dźwigar złożony nie jest tak wytrzymałym, jak jednolity. Aby tę okoliczność uwzględnić, musimy więc przy obliczaniu przekroju dźwigaru złożonego przyjąć mniejsze naprężenie dopuszczalne, niż dla belki jednolitej. Zachodzi teraz pytanie, o ile należy to naprężenie dopuszczalne zmniejszyć.

W r. 1891 ogłosił major inżynierzy Maurycy Bock sprawozdanie *) o licznych doświadczeniach, robiony z drewnianymi dźwigarami złożonymi, które dały następujące wyniki.

Doświadczenia rozpoczęto z dźwigarem złożonym z trzech belek i tylko ześrubowanym. Po obciążeniu nastąpiło jednak natychmiast przesunięcie belek i tak wielkie ugięcie, że okazało się, że śruby wcale nie przyczyniły się do powiększenia wytrzymałości; przy obciążeniu bowiem belki ściskają się i wysokość ich zmniejsza się w ten sposób, że naprężenie w śrubach spada do zera. Pomimo, że śruby były tak silnie naciągnięte, że wcisnęły się w drzewo o 5 mm, po obciążeniu stały się w środkowej zwłaszcza części dźwigaru nietylko zupełnie luźne, ale można było jeszcze między podkładką a naśrubkiem wstawić blaszkę 5 do 10 mm grubą. A zatem na tarcie, wywołane naciągnięciem śrub, nie możemy wcale liczyć przy dźwigarach złożonych.

Doświadczenia dalsze robione z dźwigarami klinowanymi, ząbionymi i klockowymi wykazały, że dźwigary łamały się już przy naprężeniu 141 do 239 kg/cm^2 , obliczonym z wzoru $\nu J = Me$, który, jak wiadomo, ważnym jest jednak tylko do granicy sprężystości.

Dla porównania robiono próby z belkami pojedynczemi, przy czem okazały one wytrzymałość 440 kg/cm^2 , a więc około 2 razy większą.

*) Por. Wochenschrift des österr. Ing. u. Arch. Ver. 1891, str. 21.

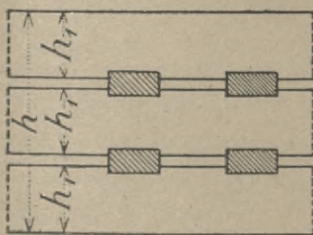
Na podstawie tych doświadczeń ogłosił prof. Melan*) te-
orję złożonych dźwigarów drewnianych, którą tu wyłożymy.

Ponieważ przecięte dla klinów lub zębów włókna skracają się wskutek ciśnienia podobnie, jak i kliny, a to proporcjonalnie do ciśnienia, i ponieważ wykonanie nie może być zupełnie dokładne, następuje małe przesunięcie włókien dwu belek sąsiednich, co spowoduje różnicę naprężeń w tych włóknach $\Delta\sigma$. Naprężenia w danym przekroju dźwigaru złożonego rozłożą się wtedy w sposób, wskazany na rys. 170.

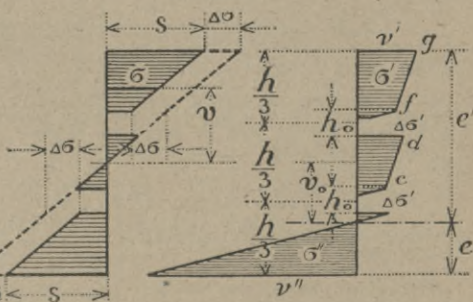
Naprężenie w odstępzie v od osi obojętnej jest wtedy:

$$\left. \begin{array}{l} \text{w środkowej belce } \sigma = \alpha v \\ \text{w skrajnych } \sigma_1 = \alpha v - \Delta\sigma \end{array} \right\} \dots \dots \dots 272)$$

gdzie v oznacza odstęp włókna danego od osi obojętnej, a α współczynnik, przedstawiający naprężenie w odstępzie $v=1$.



rys. 170.



rys. 171.

Suma momentów sił zewnętrznych musi być równą sumie momentów sił wewnętrznych**), a więc moment

$$M = 2 \int_0^{1/6 h} \sigma v dF + 2 \int_{1/6 h}^{1/2 h} \sigma_1 v dF, \text{ jeżeli}$$

$dF = b dv$ oznacza element powierzchni. Wstawiwszy wartość za v z rów. 272), otrzymamy:

$$M = 2ab \int_0^{1/2 h} v^2 dv - 2b \int_{1/6 h}^{1/2 h} v \Delta\sigma dv, \text{ czyli}$$

$$M = 2ab \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} - 2b \Delta\sigma \frac{h^2}{9} = \frac{1}{12} abh^3 - \frac{2}{9} \Delta\sigma bh^2 \quad . \quad 273)$$

*) Por. Wochenschrift des österr. Ing. u. Arch. Ver. 1891, str. 46.

**) Por. § 37.

Nazwijmy teraz naprężenie włókna skrajnego belki skrajnej s , to z drugiego równania 272) otrzymamy dla $v = \frac{h}{2}$

$$s = \frac{\alpha h}{2} - \Delta\sigma, \text{ a stąd } \alpha = \frac{2(s + \Delta\sigma)}{h},$$

co wstawiając w 273), będziemy mieli:

$$M = (s + \Delta\sigma) \frac{bh^2}{6} - \frac{2}{9} \Delta\sigma bh^2 = \frac{bh^2}{18} (3s - \Delta\sigma).$$

Jeżeli nazwiemy s_0 największe naprężenie, obliczone wedle sposobu zwykłego, $s_0 = \frac{6M}{bh^2}$ (równ. 224), to $bh^2 = \frac{6M}{s_0}$, co wstawiając w poprzednie równanie, otrzymamy:

$$M = \frac{6M}{18s_0} (3s - \Delta\sigma), \text{ a stąd } s_0 = s - \frac{1}{3} \Delta\sigma \dots 274)$$

Jeżeli dźwigar złożony składa się z dwóch belek, otrzymamy w ten sam sposób: $s_0 = s - \frac{1}{4} \Delta\sigma \dots 275)$

Ogólnie możemy więc napisać: $s_0 = s - \delta \Delta\sigma, \dots 276)$ przy czym $\delta = \frac{1}{4}$ lub $\frac{1}{3}$ według tego, czy dźwigar składa się z 2 lub 3 belek.

Dalej przypuszcza Melan, że różnica naprężenia $\Delta\sigma$ jest proporcjonalną do ciśnienia z na kliny lub zęby, a zatem

$$\Delta\sigma = \beta z, \dots 277)$$

co jednakże tylko w przybliżeniu jest ważnem, bo przesunięcia, powstałe wskutek niedokładnego wykonania nie są proporcjonalnymi do ciśnienia tak, że właściwie powinniśmy napisać $\Delta\sigma = \beta_0 + \beta z$, gdzie β_0 i β są ilości stałe. Ale że trudno ocenić, jak wielkie w praktyce może być β_0 , więc przypuściwszy bardzo staranną robotę, założymy $\beta_0 = 0$, więc $\Delta\sigma = \beta z$.

Możemy więc napisać zamiast równ. 276):

$$s_0 = s - \beta \delta z \dots 278)$$

A więc wedle Melana obliczać możemy dźwigary złożone jako dźwigary jednolite według zwykłych wzorów, jeżeli zamiast naprężenia dopuszczalnego s przyjmiemy naprężenie dopuszczalne mniejsze, s_0 wedle 278).

Na podstawie doświadczeń Bocka wyznaczył Melan dla rozmaitych dźwigarów złożonych współczynniki β , gdyż w każdym wypadku znanem było w chwili złamania s_0 , s , δ i z .

Melan otrzymał dla belek klinowanych $\beta=7,2$ }
 „ „ zazębionych $\beta=4,6$ } . 279)
 „ „ klockowych $\beta=3,7$ }

Ale powyższe wartości β Melana nie były uzasadnione, bo gdyby były one prawdziwe, otrzymalibyśmy tak małe naprężenie dopuszczalne, że użycie dźwigarów złożonych nie byłoby możliwe w praktyce, co się nie zgadza z rzeczywistością. Przyczyną tego jest, że równ. 278) odnosi się do chwili złamania, a nie może być wprost zastosowane do naprężenia dopuszczalnego. Jeżeli naprężenie dopuszczalne dla belek pojedynczych nazwiemy τ , a dla złożonych dźwigarów τ_0 , ciśnienie dopuszczalne na ząb τ' a współczynnik pewności dla wyciągania n , względnie dla ściskania n' , to

$$\tau_0 = \frac{s_0}{n}, \tau = \frac{s}{n}, \tau' = \frac{z}{n'}, \text{ a z równ. 278)}$$

$$n\tau_0 = n\tau - \beta \delta n' \tau', \text{ zatem } \tau_0 = \tau - \beta \delta \frac{n'}{n} \tau' \quad . . . \quad 280)$$

Oprócz tego zwrócić należy uwagę, że Melan wyznaczył β z doświadczeń na złamanie na podstawie wzoru zwykłego, ważnego jednak tylko do granicy sprężystości. Po przekroczeniu tej granicy rozdzielają się naprężenia w przekroju wedle zupełnie innego prawa. Jeżeli więc chcemy korzystać z doświadczeń na złamanie, musimy wyznaczyć naprężenia, które powstają w chwili złamania i na tej podstawie wyznaczyć współczynnik β .

Granica sprężystości drzewa dla wyciągania leży bardzo wysoko tak, że spada prawie ze współczynnikiem wytrzymałości μ , granica sprężystości zaś dla ściskania leży przy 130 do 150 kg/cm^2 . Jeżeli to uwzględnimy, jakoteż i różnice w naprężeniu $\Delta\sigma$ włókien sąsiednich dwu belek, to naprężenia rozłożą się w chwili złamania w dźwigarze złożonym wedle rys. 171.

Linja naprężeń będzie tu kilka razy łamaną. Linje naprężeń poza granicą sprężystości cd i fg są naturalnie stromsze, niż inne. Ponieważ przekroje zostały osłabione przez wcięcie na kliny, więc musimy to także uwzględnić i nie przyjmujemy w tych częściach przekroju żadnych naprężeń.

Z warunku, że suma naprężeń dodatnich i ujemnych musi być równą zeru, da się udowodnić*), że oś obojętna po prze-

*) P. art. autora: „Przegląd Techniczny“ 1891, str. 20.

kroczeniu granicy sprężystości znacznie się zniża (poniżej czwartej części wysokości). Z drugiego warunku, że moment sił zewnętrznych musi być równy momentowi sił wewnętrznych w przekroju, otrzymaliśmy w przybliżeniu s_0 , z którego wynika

dla dźwigarów klinowanych, zazębionych, klockowych

$$\beta = 2.1 \quad 1.5 \quad 1.1$$

Ponieważ to wyznaczenie nie było zupełnie dokładnem, przyjmijmy dla pewności:

dla dźwigarów klinowanych, zazębionych, klockowych

$$\beta = 3 \quad 2.2 \quad 1.6$$

Teraz trzeba jeszcze zbadać, jak wielkie możemy przyjąć τ i τ' , względnie jaką przyjmujemy wartość dla n i n' . Podobnie jak dla nitów przyjmowaliśmy większe ciśnienia dopuszczalne na ściankę dziury*), niż w ogóle ciśnienie w pręcie, tak i tu możemy przyjąć mniejszy współczynnik pewności dla ściskania klinów, więc gdy n. p. $n=4$, możemy przyjąć $n'=1,7$, zatem $\frac{n'}{n} = 0,425$.

Ogólnie mamy: $n' = \frac{z}{\tau'}$, $n = \frac{s}{\tau}$, więc $\frac{n'}{n} = \frac{z}{s} \frac{\tau}{\tau'}$, a zatem

$$\tau_0 = \tau - \beta \delta \frac{z}{s} \frac{\tau}{\tau'} \tau', \text{ czyli } \tau_0 = \tau \left(1 - \beta \delta \cdot \frac{z}{s} \right) \dots \dots \dots 281)$$

Dla dźwigarów klinowanych możemy przyjąć $s=450 \text{ kg/cm}^2$, $z=120 \text{ kg/cm}^2$ prostopadle do włókien, $\beta=3$, więc $\tau_0 = \tau (1 - 0,80\delta)$.

Dla dwu belek więc $\tau_0 = 0,80 \tau$, dla trzech $\tau_0 = 0,73 \tau$. 282)

Dla dźwigarów zazębionych przyjmujemy:

$s=450 \text{ kg/cm}^2$, $z=300 \text{ kg/cm}^2$, $\beta=2,2$, więc $\tau_0 = \tau (1 - 1,46 \delta)$.

Dla dwu belek więc $\tau_0 = 0,64 \tau$, dla trzech $\tau_0 = 0,51 \tau$. 283)

Dla belek klockowych jest: $s=450 \text{ kg/cm}^2$, $z=300 \text{ kg/cm}^2$, $\beta=1,6$, więc $\tau_0 = \tau (1 - 1,06 \delta)$; zatem:

dla dwu belek będzie $\tau_0 = 0,74 \tau$, dla trzech $\tau_0 = 0,65 \tau$ 284)

Widzieliśmy, że $\tau' = \frac{n}{n'} \frac{z}{s} \tau = \frac{4}{1,7} \frac{z}{s} \tau$, $\tau' = 2,35 \frac{z}{s} \tau$, więc dla

dźwigarów klinowanych $\tau' = 0,61 \tau$, dla dźwigarów zazębionych i klockowych podłużnych wypadaloby $\tau' = 1,54 \tau$, przyjmujemy jednak znacznie mniej, zwykle $\tau' = 0,8 \tau$, przyczem τ przyjmujemy wedle § 64.

*) Por. § 31.

Z powyższego widzimy, że dźwigary złożone musimy obliczać dla naprężeń dopuszczalnych znacznie niższych, mianowicie niższych dla 2 belek o 20 do 36%, dla trzech belek o 17 do 49 % tak, że korzyść z użycia dźwigarów złożonych, zwiększająca się w stosunku kwadratowym do wysokości, staje się znów z tego powodu coraz mniejszą, im więcej belek dla dźwigaru używamy.

Tymczas. przepisy budowy mostów drogowych polskiego min. rob. publ. z 1920 r.

§ 30. 4. Przy obliczaniu dźwigarów złożonych (zazębionych itd.) należy uwzględnić nieściskość działania i obliczenia tych belek w ten sposób, że w miejsce momentu wytrzymałości $W = \frac{I}{e}$ całkowitego przekroju dźwigarów przyjmuje się tylko część tegoż, wyrażona w procentach według następującej tablicy, pozostawiając powyżej przepisane natężenie dopuszczalne.

Tablica XXXIV.

Ilość belek	Dźwigar		
	zazębiony	klinowany	klockowy
2	64%	80%	70%
3	51%	73%	60%

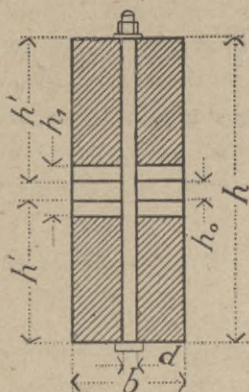
Rozporządzenie austr. min. kolei z r. 1904 § 8, 9. Przy dźwigarach z drzewa, złożonych z dwu lub więcej belek (dźwigary klinowane lub zazębione) oblicza się moment oporu całego przekroju poprzecznego dźwigaru:

przy 2 belkach zazębionych tylko na 80%
 „ 3 „ „ „ „ 60%
 „ 2 „ klinowanych „ „ 70%
 „ 3 „ „ „ „ 50%

§ 70. Obliczenie przekroju dźwigaru złożonego.

1. Dwie belki.

Nazwijmy wysokość całego dźwigaru (rys. 172) h , wysokość i szerokość jednej belki h' i b , średnicę śruby d , wysokość klinów i klocków h_1 , zębów h_2 , odstęp między belkami h_0 , to możemy napisać:



Rys. 172.

a) dla dźwigaru klinowanego:

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{12}(b-d)(h^3 - h_1^3) \\ \tau I &= \frac{1}{2}hM \end{aligned} \right\} \quad 285)$$

Przyjmijmy $h_0 = 0,1 h'$, to $h = 2 h' + h_0 = 2,1 h'$, a stąd $h' = 0,476 h$.

Przyjmijmy dalej tymczasowo: $b = 0,75 h'$, $h_1 = 0,3 h'$, $d = 0,1 b$, to wstawivszy te wartości w równ. 285), otrzymamy: $I =$

$$= \frac{1}{12} 0,9 b [h^3 - (0,3 \times 0,476 h)^3], \text{ a dalej}$$

$$\tau \cdot \frac{3}{4} \frac{0,75}{2,1} h (h^3 - 0,0029 h^3) = \frac{1}{2} h M, \text{ nareszcie:}$$

$$\mathbf{h = 2,66 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}} \quad 286)$$

Jest to jednak tylko wartość przybliżona; po dokładnem obliczeniu klinów i śrub i wstawieniu dokładnych wartości w równ. 285) otrzymamy dokładną wartość h .

Jeżeli przyjmiemy wszystkie wartości jak poprzednio, tylko $b = h'$, otrzymamy: $\mathbf{h = 2,42 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}}$ 287)

Wogóle, jeżeli przyjmiemy szerokość b k razy większą, to wysokość h otrzymamy $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ mniejszą.

b) Dźwigar zazębiony. Tutaj mamy $h = 2 h' - h_2$ (rys. 166 c). Przyjąwszy $h_2 = 0,2 h'$, otrzymamy $h = 1,8 h'$, a stąd $h' = 0,556 h$, dalej gdy $h = \frac{3}{4} h'$ a $d = 0,1 b$, otrzymamy zupełnie w ten sam sposób:

$$\mathbf{h = 2,52 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}} \quad 288)$$

Dla $b = h'$ otrzymamy podobnie: $\mathbf{h = 2,29 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}}$ 289)

c) Dźwigar klockowy. Tutaj znów $h = 2 h' + h_0$. Przyjmijmy $h_0 = 0,4 h'$, to $h = 2,4 h'$, więc $h' = 0,417 h$. Przyjmijmy dalej $b = 0,75 h'$, $h_1 = 0,8 h'$, $d = 0,1 b$, to otrzymamy: $I =$

$$= \frac{1}{12} 0,9 \times 0,75 h' [h^3 - (0,8 \times 0,417 h)^3] = 0,02205 h^4, \text{ więc}$$

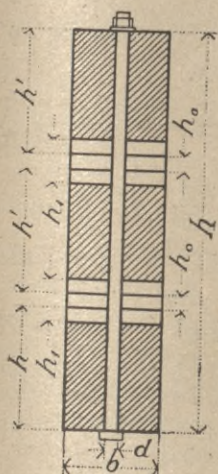
$$\tau \cdot 0,02205 h = \frac{1}{2} h M, \text{ a stąd: } \mathbf{h = 2,83 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}} \quad 290)$$

Dla $b = h'$ otrzymamy podobnie:

$$\mathbf{h = 2,57 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}} \quad 291)$$

2. Trzy belki:

a) Dźwigar klinowany. Jeżeli wymiary dźwigarów klinowanych (rys. 173) oznaczymy w ten sam sposób, co pierwej, otrzymamy podobnie:



$$I = \frac{1}{12}(b-d)[h^3 - (h' + h_0 + h_1)^3 + (h' + h_0 - h_1)^3] \dots 292)$$

$$\tau I = \frac{1}{2} h M \dots 293)$$

Przyjąwszy tymczasowo, jak pierwej, $b = 0,75 h'$, $h_0 = 0,1 h'$, otrzymamy $h = 3 h' + 2 h_0 = 3,2 h'$, a stąd $h' = 0,313 h$.

Wstawiawszy te wartości w równanie 292) i 293), otrzymamy $I = 0,01650 h^4$,

$$\text{a stąd: } h = 3,12 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots 294)$$

Dla $b = h'$ otrzymamy podobnie: $h =$

$$= 2,83 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots 295)$$

b) Dźwigar zazębiony. Podobnie

otrzymamy dla dźwigarów zazębionych dla tych samych przypuszczeń, co dla dwu belek, $h = 3 h' - 2 h_2 = 2,6 h'$, stąd $h' = 0,385$,

$$h_2 = 0,2 h' = 0,077 h, I = 0,02166 h^4, \text{ a więc: } h = 2,85 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots 296)$$

$$\text{Dla } b = h' \text{ otrzymamy podobnie: } h = 2,59 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots 297)$$

c) Dźwigar klockowy. Przyjmijmy, jak pierwej, $h_0 = 0,4 h'$, $h_1 = 0,8 h'$, to $h = 3 h' + 2 h_0 = 3,8 h'$, a stąd $h' = 0,263 h$.

$$\text{Wtedy otrzymamy dla } b = 0,75 h', d = 0,1 b, I = 0,01198 h^4, \text{ zaś } h = 3,47 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots 298)$$

$$\text{Dla } b = h' \text{ otrzymamy: } h = 3,15 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots 299)$$

Wzorów dla dźwigarów, składających się z czterech belek, nie podajemy, bo przy wielkich wysokościach lepiej użyć belki kratowej, o której będziemy mówić poniżej. Dlatego też w praktyce nie używamy dźwigarów złożonych z więcej belek, niż trzy.

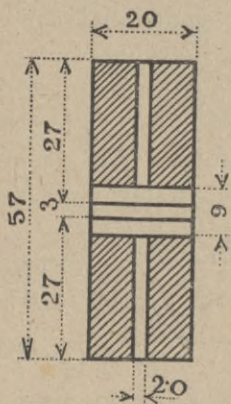
Przykład. Obliczyć przekrój dźwigaru złożonego dla mostu tymczasowego kolei głównej, dla którego najw. $M = 7,636 \text{ tm}$.

Jeżeli dźwigar ma być klinowany, to przyjmujemy wedle § 69 dla dźwigaru dwubelkowego $\tau_0 = 0,8 \cdot 100 = 80 \text{ kg/cm}^2$. Otrzymamy zatem dla $b = \frac{3}{4} h'$

$$\text{z równ. 286) } h = 2,66 \sqrt[3]{\frac{763600}{80}} = 56,39 \text{ cm, a stąd } h' =$$

$$= 0,476 \times 56,39 = 26,84 = 27,$$

zaś $b = \frac{3}{4} \cdot 27 = 20 \text{ cm}$. Przekrój ten przedstawiliśmy na rys. 174.



rys. 174.

$$\text{Dokładnie otrzymamy: } I = \frac{1}{12} (57^3 - 9^3) (21 +$$

$$- 2,0) = 276696 \text{ cm}^4, e = 28,5 \text{ cm,}$$

$$\text{więc } v = \frac{763600 \cdot 28,5}{322320} = 78,7 \text{ kg/cm}^2,$$

a więc prawie tyle, cośmy założyli.

Jeżeli dźwigar ma być ząbiony, a $M = 7tm$, to przyjmujemy dla dźwigaru dwubelkowego $\tau_0 = 0,64 \cdot 100 = 64 \text{ kg/cm}^2$. Otrzymamy zatem dla $b = \frac{3}{4} h'$ z równ. 288) $h = 2,52 \sqrt[3]{\frac{700000}{64}} = 55,94 \text{ cm, a}$

$$\text{stąd } h' = 0,566 \times 55,94 = 32 \text{ cm, } b' = \frac{3}{4} \cdot 32 = 22 \text{ cm.}$$

$$\text{Dokładnie otrzymamy (rys. 175): } I = \frac{1}{12} (24 - 2,3) 56^3 = 331580 \text{ cm}^4, v =$$

$$= \frac{700000 \cdot 28}{331580} = 60 \text{ kg/cm}^2, \text{ zatem prawie tyle, cośmy}$$

$$\text{założyli.}$$

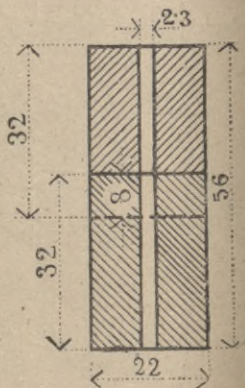
§ 71. Obliczenie klinów.

Kliny obliczamy wedle wzoru 192) $\sigma = \frac{QS}{I}$, gdzie σ oznacza siłę ścinającą poziomą w warstwie pp' (rys. 122), S moment statyczny powierzchni $p_1 p_2 m$ ze względu na środek ciężkości przekroju O , a I moment bezwładności przekroju.

Dla prostokąta otrzymaliśmy równ. 194), mianowicie siłę ścinającą poziomą w warstwie o v odległej od środka ciężkości (rys. 123)

$$\sigma = \frac{QS}{I} = 6 \frac{Q}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{v^2}{h^2} \right).$$

Jeżeli przekrój składa się z dwu belek, to obliczyć mamy



rys. 175.

siłę ścinającą w środku wysokości, więc dla $v=0$, jeżeli z trzech belek, dla $v = \frac{h}{6}$, co wstawivszy w równ. 194), otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{dla } v=0, \quad \sigma &= \frac{3}{2} \frac{Q}{h}, \\ \text{dla } v = \frac{h}{6}, \quad \sigma &= \frac{4}{3} \frac{Q}{h}. \end{aligned}$$

Ogólnie możemy napisać $\sigma = \mu \cdot \frac{Q}{h}$, 300)

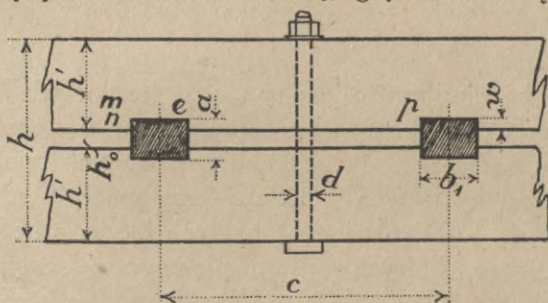
przyczem μ oznacza pewien współczynnik, a to dla dźwigaru złożonego z dwu belek $\frac{3}{2}$, z trzech belek $\frac{4}{3}$. Liczby te nie są dla dźwigarów klinowanych i klockowych zupełnie dokładne, ponieważ nie uwzględniliśmy tu odstępów h_0 . Po dokładniejszym obliczeniu otrzymamy następane wartości dla μ :

Tablica XXXV.

	2 belki	3 belki
dźwigar zazębiony . . .	$\mu = 1,5$	1,333
„ klinowany . . .	$\mu = 1,497$	1,319
„ klockowy . . .	$\mu = 1,460$	1,396

a) Odstęp klinów.

Nazwijmy szerokość klinów b_1 , głębokość wcięcia w , odle-



rys. 176.

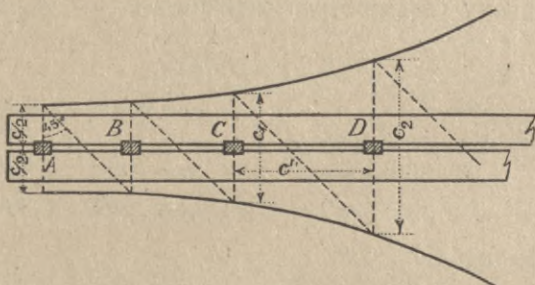
głość klinów od środka do środka c , szerokość i wysokość belek b i h' (rys. 176), to σc siła ścinająca pozioma, działająca na długości c , wywołuje ciśnienie na powierzchnię mn wcięcia na klin, a zatem, gdy τ' oznacza naprężenie dopuszczalne na ściskanie na kliny prostopadle do włókien, to $\sigma c = \mu \frac{Q}{h} c = b w \tau'$, a stąd

$$c = \frac{b h w \tau'}{\mu Q} \dots \dots \dots 301)$$

Belka bowiem, starając się przesunąć po drugiej, ciśnię na powierzchnię mn , a ściskanie to nie powinno wywołać większego naprężenia, niż ciśnienie dopuszczalne τ' .

Tarcia, wywołanego naciągnięciem śrub, nie uwzględniliśmy tu wcale na podstawie doświadczeń Bocka. Ponieważ jednak przy małych ugięciach tarcie jeszcze działa, więc śruby dajemy tem gęstsze i grubsze, im większa siła poprzeczna Q , a więc niedaleko podpór, zaś rzadsze i cieńsze w pobliżu środka dźwigaru.

Z równ. 301) wynika, że jeżeli wcięcie w jest wszędzie jednakowem (zwykle $w = 0,1 h'$) to c jest zmiennem, a mianowicie odwrotnie proporcjonalnem do siły poprzecznej Q , a więc przy



rys. 177.

podporach c będzie bardzo małym, a w środku wielkiem. Aby wyznaczyć położenie klinów, postępujemy w następujący sposób. Obliczamy odległość c z rów. 301), dla rozmaitych punktów belki (rys. 177), kreślimy w tych punktach prostopadłe i odcinamy do góry i na dół po $\frac{1}{2} c$. Końce prostopadłych łączymy i otrzymujemy dwie linie krzywe, których odstęp pionowy w każdym punkcie jest równy obliczonej odległości c . Nazwijmy c' odstęp klinów C i D , to jeżeliby $c' = c_1$, to byłoby $c' < c_2$ i na odwrót, bierzemy więc $c_1 < c' < c_2$ i wyznaczamy wykreślnie odstępów klinów za pomocą przekątnej pod 45° i pionowych.

Jeżeliby przy podporach kliny wypadły zanadto blisko siebie, to przyjmujemy w równaniu 301) nieco większe w , przez co c się powiększy, w środku belki zaś zmniejszamy w , aby c tak bardzo się nie zmieniło.

Równanie 301) da się jeszcze inaczej napisać. Jeżeli wstawimy wartość dla $h = C \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}$, czyli $h^3 = \frac{C^3 M}{\tau}$, $h = \frac{C^3 M}{\tau h^2}$ w równ.

301), to otrzymamy $c = \frac{bw \tau' C^3 M}{\mu Q \tau h^2}$, a gdy $b = kh'$, $h' = mh$. 302)

$$c = \frac{C^3 m^2 k \tau' w M}{\mu \tau h' Q} = C_1 \frac{\tau' w M}{\tau h' Q}, \dots 303)$$

jeśli $C_1 = \frac{C^3 m^2 k}{\mu}$.

Wedle poprzedniego możemy przyjąć następane wartości:

Tablica XXXVI.

	dźwigar	k	C	m	μ	C_1	$\frac{\tau'}{\tau}$	$C_2 \frac{\tau'}{\tau}$	C_3
2 belki	klino- wany	$3/4$	2,66						1,69
		1	2,42	0,476	1,497	2,14	0,78	1,67	1,86
	zazę- biony	$3/4$	2,52						1,77
		1	2,29	0,556	1,5	2,47	1,16	2,86	1,94
	kloc- kowy	$3/4$	2,83						1,71
		1	2,57	0,417	1,460	2,02	1,00	2,02	1,89
3 belki	klino- wany	$3/4$	3,12						1,73
		1	2,83	0,313	1,319	1,67	0,85	1,42	1,90
	zazę- biony	$3/4$	2,85						1,76
		1	2,59	0,385	1,333	1,93	1,45	2,80	1,94
	kloc- kowy	$3/4$	3,47						1,70
		1	3,15	0,263	1,396	1,55	1,14	1,77	1,87.

We wzorze 303) oznacza M największy moment, wedle którego oblicza się przekrój dźwigaru, Q zaś jest zmiennem.

Jeżelibyśmy przyjęli stałe $\frac{w}{h'}$, mianowicie 0,1 dla dźwigarów klinowanych a 0,2 dla zazębionych klockowych, tobyśmy otrzymali:

Tablica XXXVII.

	belki			3 belki		
	klin.	zazęb.	klock.	klin.	zazęb.	klock.
$c = 0,167$		0,572	0,404	0,142	0,560	$1,354 \frac{M}{Q}$

Z powyższej tablicy widzimy, że odstęp klinów jest mniejszy, niż połowa odstępów klocków, który znów jest mniejszy od odstępów zębów.

b) Szerokość klinów.

Połączenie belek może być zniweczone także przez ścięcie klinów. Siła pozioma, działająca na klin, jest $\sigma c = bw \tau'$. Jeżeli nazwiemy naprężenie dopuszczalne klina na ścinanie równoległe do

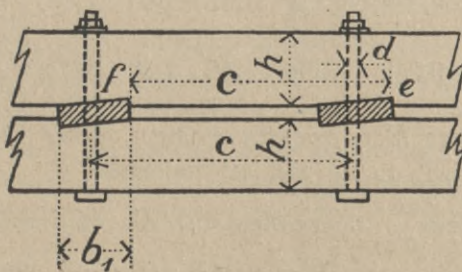
włókien τ_2 , to $\sigma c = bw \tau' = bb_1 \tau_2$, a stąd $b_1 = \frac{\tau'}{\tau_2} w \dots 304)$

Jeśli przyjmiemy naprężenie na ścinanie dla klinów z drzewa twardego $\tau_2 = 20 \text{ kb cm}^2$, to gdy $\tau' = 50$, względnie 60 kg/cm^2 , $b_1 = 2,5 w$ lub $3 w$.

Szerokość klocków b_1 obliczamy według tego samego równania ze względu na wywrót, zwykle jednak b_1 musimy przyjąć w ększe.

c) Najmniejszy odstęp klinów lub zębów. Siła ścinająca pozioma może zniszczyć połączenie belek także, ścinając dźwigar w płaszczyźnie ep (rys. 174), jeżeli kliny lub zęby zbyt gęsto umieścimy. Aby to nie nastąpiło, musi być dla klinów pionowych $\sigma c = bw \tau' < \tau_2 (c - b_1) b$, a stąd

$$c > \frac{\tau'}{\tau_2} w + b_1 \dots \dots \dots 305)$$



rys. 178.

Podobnie otrzymamy dla klinów pochyłych (rys. 178) i zębów z powodu, że tu chodzi o ścinanie na długości $fe = c \sigma c = bw \tau' < \tau_2 cb$, a stąd:

$$c > \frac{\tau'}{\tau_2} w \dots \dots \dots 306)$$

Jeżeli przyjmiemy naprężenie dopuszczalne na ścinanie dla drzewa miękkiego równoległe do włókien $\tau_2 = 12 \text{ kg/cm}^2$, to gdy $\tau' = 50 \text{ kg/cm}^2$, $b_1 = 4,2 w$, otrzymamy więc dla klinów pionowych najmn $c = 6,6 w$ do $7,2 w$, dla zębów i klinów pochyłych $c = 2,5 w$ do $3 w$.

Jeśli z równ. 301) lub 303) wypadło c mniejsze, niż tego wymaga równ. 305), to albo należałoby b_1 zmniejszyć, a aby za-

pobiec ścięciu klinów, uzbroić kliny blaszkami żelaznemi 2 do 4 mm grubemi albo też użyć klinów ukośnych lub zębów, w którymto razie znajduje zastosowanie równ. 306). Ale cóż się stanie, gdy odstęp c , obliczony z równ. 301) lub 303), będzie jeszcze mniejszym od *najmn. c* wedle 306)? Wtedy naprężenie na ścinanie, będzie większem od dopuszczalnego, co nie jest dozwolonem.

Zachodzi więc teraz pytanie, kiedy możemy zadość uczynić obu równaniom 303) i 306). Z obu tych równań otrzymamy:

$$C_1 \frac{\tau'}{\tau} \frac{w}{h'} \frac{M}{Q} > \frac{\tau'}{\tau_2} w, \text{ a stąd } \frac{\tau}{\tau_2} < \frac{C_1 M}{h' Q} \dots \dots \dots 307)$$

A zatem, aby można było tak urządzić kliny lub zęby, aby naprężenia na ściskanie i ścinanie nie przekraczały dozwolonej granicy, musi być $\frac{M C_1}{Q h'} > \frac{\tau}{\tau_2}$, a więc gdy np. $\tau = 50$, $\tau_2 = 12$, większe niż $\frac{\tau}{\tau_2} = 4,2$.

Wstawivszy w równ. 307) $h' = mh = mC\sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}$ i wartość za C_1 , otrzymamy:

$$\frac{\tau}{\tau_2} < \frac{C^2 km}{\mu} \sqrt[3]{\frac{M^2 \tau}{Q^3}} = C_2 \sqrt[3]{\frac{M^2 \tau}{Q^3}} \dots \dots \dots 308)$$

Spółczynnik C_2 obliczyliśmy i zestawiliśmy w tabliczce XXXVI.

Dla danego obciążenia jest $\sqrt[3]{\frac{M^2 \tau}{Q^3}}$ stałem, C_2 zależy od ustroju dźwigaru złożonego. A więc gdy C_2 jest za małym, to trzeba się starać przez zmianę ustroju uzyskać C_2 większe, więc użyć dźwigarów zazębionych raczej, niż klocekowych lub klinowanych. Dla dźwigarów trzybelkowych jest C_2 prawie takie samo, jak dla dwubelkowych, dla belek klinowanych trochę większe, dla klocekowych nieco mniejsze. Wysokość wcięcia lub zęba w nie wchodzi wcale do równ. 307) lub 308), jest więc w tym względzie obojętną.

Jeżeli przyjmiemy obciążenie jednostajne ciągle, to *najw.*

$$M = \frac{1}{8} ql^2, \text{ najw. } Q = \frac{1}{2} ql, \text{ więc: } \frac{\tau}{\tau_2} < C_2 \sqrt[3]{\frac{l\tau}{8q}} \dots \dots \dots 309)$$

Z równania tego widzimy, że niemożność pogodzenia równ. 303) i 306) zdarzyć się może, gdy l i τ są małe a q wielkie,

a więc dla małych rozpiętości i małych naprężeń dopuszczalnych a dla wielkich obciążeń na m. bieżący dźwigaru.

Wartości C_2 dla dźwigarów klockowych są właściwie za małe, bo obliczone dla przypuszczenia $b_1=0$, co dla klocków nie jest możliwym.

Przykład. Dla dźwigara obliczonego w § 70 niech będzie na podporze $Q=3,5 t$; obliczyć odstęp klinów c , szerokość b_1 .

Wedle równ. 301) mamy $c = \frac{bhw\tau'}{\tau Q}$. Tutaj jest $b=20 \text{ cm}$, $h=57 \text{ cm}$,
 $w=3 \text{ cm}$, $\tau=50 \text{ kg/cm}^2$, $\mu=1,497$, $Q=3500$, więc $c = \frac{20 \cdot 57 \cdot 3 \cdot 50}{1,497 \cdot 3500} = 32,6 \text{ cm}$.

Szerokość klina b_1 otrzymamy z 304)₁ $b = \frac{\tau}{20} w = \frac{50}{20} \cdot 3 = 7,5 \text{ cm}$.

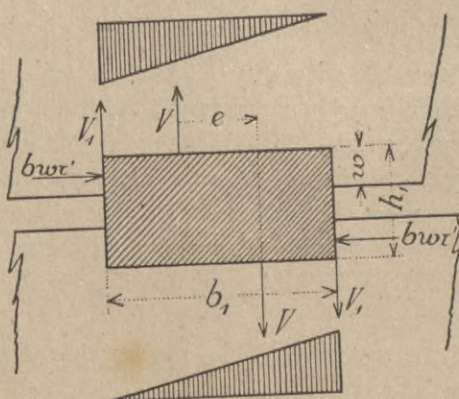
Najmniejszy odstęp klinów wypada z równ. 305):

$$c \geq \frac{\tau'}{\tau_2} \cdot w + b_1 = \frac{50}{12} \cdot 3 + 7,5 = 20 \text{ cm}.$$

Gdybyśmy byli otrzymali odstęp mniejszy niż 20 cm , należałoby w tem miejscu użyć klinu pochyłego, dla którego *najmn.* $c \geq \frac{50}{12} \cdot 3 = 12,5 \text{ cm}$.

§ 72. Obliczenie śrub.

Na klin (rys. 179) działają ciśnienia $\sigma c = bw \tau'$, które tworzą moment $bw \tau' (h_1 - w)$ i wzbudzają oddziaływanie pionowe V i V_1 ,



rys. 179.

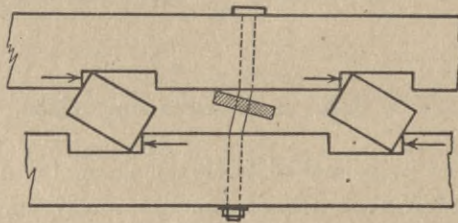
działające w odstępie e . Dla równowagi musi być $bw \tau' (h_1 - w) = Ve$, a stąd:

$$V = \frac{bw \tau'}{e} (h_1 - w) \dots \dots \dots 310)$$

Odstęp e zależy od punktów zaczepienia sił V , a te od rozkładu ciśnienia na górną i dolną podstawę klocka. Jeżeli powierzchnia naprężenia ma kształt trójkąta o podstawie b , to $e = \frac{1}{3}b_1$, a wtedy

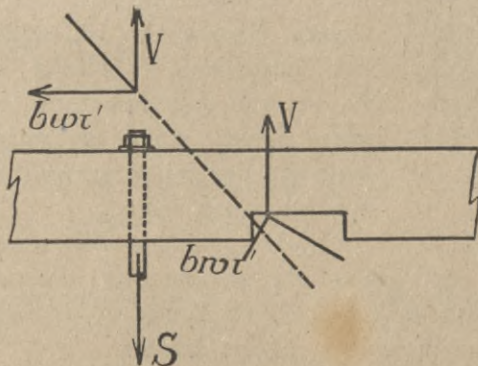
$$V = \frac{3bw \tau'}{b_1} (h_1 - w) \dots \dots \dots 311)$$

Z równ. 311) widzimy, że jeżeli V maleje, to e musi wzrastać i odwrotnie, a zatem, gdyby śruby nie były dostatecznie naciągnięte, to e może się powiększyć, przyczem *najw.* $e = b_1$. Tej skrajnej wartości nie może jednak przybrać e , bo wtedy



rys. 180.

działałyby siły V_1 w krawędziach klina, co wywołałoby w tych krawędziach nieskończenie wielkie naprężenia, a wskutek tego zgniecenie krawędzi.



rys. 181.

Gdyby śrub nie było, belki przesunęłyby się poziomo, a klinyby się odwróciły, jak to uwidoczniło na rys. 180. Temu za-

mierzonemu ruchowi mają przeszkadzać śruby. Widzimy z rys. 181, że jeżeli na jeden klin przypada jedna śruba, to ciągnięcie $S=V=$
 $= \frac{bw \tau'}{e}(h_1-w)$. Ponieważ nie chcemy dopuścić zbyt wielkich ci-
 śnień na kliny ani ich obrotu, więc przyjmiemy $e=\frac{1}{3}b$, zatem
 $S = \frac{3bw \tau'}{b_1}(h_1-w) = \tau_1 \cdot \frac{d^2 \pi}{4}$, jeżeli τ_1 oznacza naprężenie dopu-
 szczalne na wyciąganie, a d średnicę śruby. A więc $\frac{d^2 \pi}{4} =$

$$= \frac{3bw \tau'}{b_1 \cdot \tau_1} (h_1-w),$$

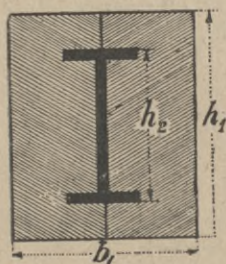
a

$$d = 1,954 \sqrt{\frac{bw \tau'}{b_1 \tau_1} (h_1-w)}. \dots \dots \dots 312)$$

§ 73. Belki z różnego materiału.

W praktyce inżynierskiej zdarzają się nietylko wypadki uży-
 cia dźwigarów złożonych z tego samego materiału, lecz także zes-
 kłady z kilku dźwigarów z różnych materiałów, połączonych
 w ten sposób, że ugięcie ich jest takie samo. Przykładem takiego

ustroju są dźwigary żelbetowe, których jed-
 nak obliczenie jest przedmiotem odrębnego
 podręcznika „Teoria żelbetu“*). Prócz tego
 mamy czasem zeskłady złożone z drzewa
 i żelaza. Na rysunku 182 widzimy np. dwie
 belki drewniane i żelazną kształtówkę I.
 Nie są one tak połączone, aby stanowiły
 jedną całość, mogą się mianowicie jedna
 względem drugiej przesuwać, ale ugięcie ich
 musi być takie samo.



rys. 182.

Jeżeli moment sił zewnętrznych na-
 zwiemy M , to rozdziela on się na obie belki drewniane, (które tu
 będziemy uważać za jedną) i na żelazną. Z momentu tego niech
 przypada M_1 na drewnianą, M_2 na żelazną.

Z powodu, że promień krzywizny linii ugięcia r jest ten sam,

*) Lwów, 1915.

możemy napisać wedle równ. 145 dla belki drewnianej $E_1 I_1 = M_1 r$, dla belki żelaznej $E_2 I_2 = M_2 r$.

Z równań tych wynika z uwzględnieniem, że $M = M_1 + M_2$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M, \\ M_2 &= \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 313)$$

Belkę drewnianą obliczamy teraz w zwykły sposób wedle momentu M_1 , żelazną wedle momentu M_2 . Jeżeli materiał ma być wyzyskanym, to powinno równocześnie w belce drewnianej być naprężenie dopuszczalne τ_1 , w belce żelaznej τ_2 . A że $\tau_1 I_1 = M_1 e_1$

i $\tau_2 I_2 = M_2 e_2$, więc $\tau_1 = \frac{M_1 e_1}{I_1}$, $\tau_2 = \frac{M_2 e_2}{I_2}$, stąd

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{M_1 e_1 I_2}{M_1 e_2 I_1}, \text{ a wedle 313) } \frac{M_1}{M_2} = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}, \text{ więc } \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{E_1 I_1 e_1 I_2}{E_2 I_2 e_2 I_1} = \frac{E_1 e_1}{E_2 e_2},$$

$$\text{zatem } \frac{e_1}{e_2} = \frac{\tau_1 E_2}{\tau_2 E_1} \dots \dots \dots 314)$$

Jeżeli przekroje są symetryczne, to $e_1 = \frac{h_1}{2}$, $e_2 = \frac{h_2}{2}$ więc:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{E_2 \tau_1}{E_1 \tau_2}.$$

Dla żelaza możemy przyjąć $E_2 = 2150000 \text{ kg/cm}^2$, dla drzewa $E_1 = 110000 \text{ kg/cm}^2$, to powinno być $\frac{h_1}{h_2} = \frac{2150000}{110000} \frac{\tau_1}{\tau_2} = 19,5 \frac{\tau_1}{\tau_2}$.

Jeżeli przyjmiemy np. $\tau_1 = 80 \text{ kg/cm}^2$, $\tau_2 = 1000 \text{ kg/cm}^2$, to

$$\frac{h_1}{h_2} = 1,56,$$

a więc wysokość belki drewnianej ma być 1,56 razy większą, niż żelaznej. Jeżeli stosunek wysokości jest inny, to jedna z belek nie będzie wyzyskana i będzie pracować poniżej naprężenia dopuszczalnego.

Przykład. Niech będzie $h_1 = 28 \text{ cm}$, $b_1 = 24 \text{ cm}$, $h_2 = 19 \text{ cm}$ (rys. 179) $l = 7,7 \text{ m}$. Wyznaczyć wielkość obciążenia na jednostkę długości, jeżeli $\tau_1 = 80$, $\tau_2 = 1000 \text{ kg/cm}^2$.

Tu jest $\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{19} = 1,47$, więc wysokość belki drewnianej jest nieco za mała, belka drewniana nie będzie więc zupełnie wyzyskana.

Tu jest $I_1 = \frac{1}{12} 24 \cdot 28^3 = 43904 \text{ cm}^4$, $I_2 = 1763 \text{ cm}^4$, więc wedle 313)

$$M_1 = \frac{110000 \cdot 43904}{110000 \cdot 43904 + 2150000 \cdot 1763} M = \frac{482944}{861989} M = 0,56 M.$$

$$M_2 = 0,44 M.$$

Dalej mamy $M = \frac{1}{8} q 7,7^2 = 7,412 q \text{ tm} = 74113 q \text{ kgcm}$. Więc $M_1 = 0,56 \cdot 74113 q = 41503 q$, $M_2 = 32610 q \text{ kgcm}$. Zatem $80 \cdot 43904 = 41503 q \cdot \frac{28}{2}$, stąd $q = 605 \text{ kg/m. b.}$

Wedle belki żelaznej licząc, otrzymalibyśmy $1000 \cdot 185,6 = 33610 q$, stąd $q = 554 \text{ kg/m. b.}$

Z tych dwu wartości zatrzymujemy mniejszą, belka drewniana nie będzie więc zupełnie wyzyskana, mianowicie będzie: $v = \frac{554}{605} \cdot 80 = 73,3 \text{ kg/cm}^2$.

To samo otrzymamy z wzoru: $v \cdot \frac{1}{12} \cdot 24 \cdot 28^3 = 41503 \times 5,54 \times 14$,

$$v = \frac{41503 \cdot 5,54 \cdot 14 \cdot 12}{24 \cdot 28^3} = 73,3 \text{ kg/cm}^2.$$

§ 74. Równanie linji ugięcia i ugięcie belki.

Linją ugięcia (n. *Biegungslinie*, fr. *ligne élastique*, a. *elastic line*, r. линия изгиба) nazywamy ugiętą oś belki, jak to wiemy z § 37. Równanie jej otrzymać możemy łatwo z równania 145) $EI = Mr$, które jednak ważne jest tylko do granicy sprężystości.

Promień krzywizny dowolnej krzywej da się, jak wiemy, wy-

razić równaniem
$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

W praktyce belki uginają się bardzo mało, linia ugięcia jest więc bardzo płaską, ak że $\frac{dy}{dx} = st \psi$ jest bardzo małe, więc $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ w stosunku do 1 jest tak małą liczbą, że możemy ją opuścić; otrzymamy więc $r = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, albo gdy będziemy liczyć $+y$ w kierunku

z góry na dół, $r = -\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Wstawiwszy to w równanie 145), otrzymamy

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}, \dots \dots \dots 315)$$

równanie różniczkowe linii ugięcia, w którym moment zginający M wyrazić musimy jako funkcję x .

Równanie to możemy napisać $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \dots \dots \dots 316)$

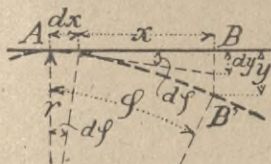
Różniczkując to równanie otrzymamy:

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{dM}{dx} = -Q, \dots \dots \dots 317)$$

a potem

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{dQ}{dx} = p \dots \dots \dots 318)$$

Niech ugięcie belki (rys. 183) w punkcie B będzie $Y = BB'$. Jeżeli weźmiemy na uwagę element sprężysty dx w odstępnie x od punktu B , to odpowiadające temu elementowi ugięcie dy , mierzone na BB' , będzie



rys. 183.

$$dy = x \sin \varphi \dots \dots \dots 319)$$

Dalej mamy $dx = r d\varphi$, więc

$$d\varphi = \frac{dx}{r} = \frac{dx}{EI} M = \sin \varphi dx, \text{ zatem}$$

$$\varphi = \frac{1}{EI} \int_A^B M dx \dots \dots \dots 320)$$

Wstawiwszy w równanie 319) wartość za $d\varphi$, otrzymamy

$$dy = \frac{xM dx}{EI}, \text{ a}$$

$$y = \frac{1}{EI} \int_A^B Mx dx = \frac{1}{EI} F_m x_0, \dots \dots \dots 321)$$

przyczem F_m oznacza powierzchnię momentów, a x_0 odstęp jej środka ciężkości od punktu B . Zatem ugięcie belki w badanym przekroju B równe jest momentowi statycznemu powierzchni momentów względem punktu B , podzielonemu przez EI .

Niech na belkę AB (rys. 184) o stałym przekroju działa w E siła P , to według równania 6) $O_1 = \frac{Pb}{l}$, $O_2 = \frac{Pa}{l}$. Moment w punkcie F dla $x < a$ będzie $M = O_1 x = \frac{Pbx}{l}$, zatem na mocy

równania 315)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pbx}{EI l}, \text{ a stąd:}$$

$$\frac{dy}{db} = \text{st } \varphi = -\frac{Pb}{EI l} \int x dx + C = -\frac{Pbx^2}{2EI l} + C.$$

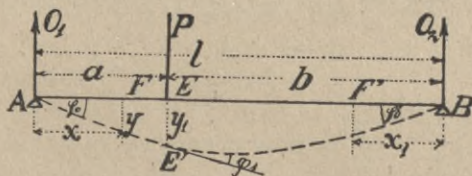
Dla $x=0$ otrzymamy $\text{st } \varphi_0 = C$, więc

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{Pbx^2}{2EI l} + \text{st } \varphi_0 \\ \text{Analogicznie mamy dla części belki } EB & \end{aligned} \right\} a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx_1} &= -\frac{Pax_1^2}{2EI l} + \text{st } \varphi'_0. \end{aligned} \right\}$$

Całkujemy oba równania raz jeszcze, a otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \text{dla części } AE & \quad y = -\frac{Pbx^3}{6EI l} + x \text{st } \varphi_0 \\ \text{„ „ } EB & \quad y = -\frac{Pax_1^3}{6EI l} + x_1 \text{st } \varphi'_0 \end{aligned} \right\} b)$$



rys. 184.

Nie dodajemy tu ilości stałej C_1 , bo dla $x=0$ i $x_1=0$ jest $y=0$, więc $C_1=0$.

Rzędną y linii ugięcia nazywamy ugięciem (n. *Durchbiegung* a. *deflection*).

W celu wyznaczenia niewiadomych $\text{st } \varphi_0$ i $\text{st } \varphi'_0$ ustawmy równania a) i b) dla punktu E. Otrzymamy wtedy

$$\text{st } \varphi_1 = -\frac{Pba^2}{2EI l} + \text{st } \varphi_0 = -\left(-\frac{Pab^2}{2EI l} + \text{st } \varphi'_0\right),$$

$$EE' = y_1 = -\frac{Pba^3}{6EI l} + a \text{st } \varphi_0 = -\frac{Pab^3}{6EI l} + b \text{st } \varphi'_0.$$

Z obu tych równań otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \text{st } \varphi_0 &= \frac{Pab}{6EI l}(a + 2b) \text{ i } \text{st } \varphi'_0 = \frac{Pab}{6EI l}(2a + b) \end{aligned} \right\} c)$$

Wstawivszy te wartości w b), otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } AE \quad y = \frac{Pbx}{6EI} [a(a+2b) - x^2] \\ \text{„ } EB \quad y = \frac{Pax_1}{6EI} [b(2a+b) - x_1^2] \end{array} \right\} \dots 322)$$

Dla punktu E otrzymamy dla $x=a$, względnie $x_1=b$

$$y_1 = \frac{Pa^2b^2}{3EI} \dots \dots \dots 323)$$

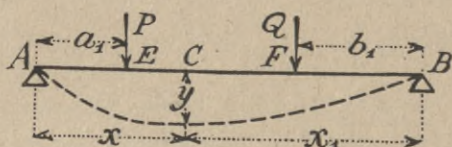
Nie jest to jednak największa rzędna. Największa jest tam, gdzie styczna pozioma.

Jeżeli $a=b$, więc gdy siła P działa w środku, będzie największe ugięcie y czyli strzałka ugięcia (n. *Biegungspfeil*, fr. *flèche de flexion*, r. *стрѣлка*).

$$f = \frac{Pl^3}{48EI} = 0,0208 \frac{Pl^3}{EI} \dots \dots \dots 324)$$

Jeżeli belka AB obciążoną jest dwoma ciężarami P i Q (rys. 185), to wedle (322) ugięcie w punkcie C

$$y \cdot 6EI = Pa_1x(a(l_1+l-a_1) - x_1^2 + Qb_1x(b-b_1)(l-b_1+2b_1) - x^2$$



rys. 185.

$$y \cdot 6EI = x [Pa_1(a_1^2 + la_1 - x_1^2) + Qb_1(l^2 - b_1^2 - x^2)] \dots \dots 325)$$

Jeżeli $P=Q_1$, $a_1=b_1$

$$y \cdot 6EI = x \left[\frac{Pa_1 l^2}{2} (a_1 + \frac{l}{2}) \right] \dots \dots 326)$$

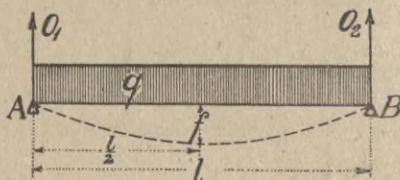
Jeżeli belka jest obciążona na całej długości ciężarem jednostajnie rozłożonym (rys. 186), to według równ. 19)

$$M = \frac{1}{2} qx(l-x), \text{ więc } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{1}{2} qx(l-x)}{EI} = -\frac{q}{2EI} x(l-x).$$

Zcałkujmy to równanie, a otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C \right),$$

a po drugim scałkowaniu



rys. 186.

$$y = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} + Cx + C' \right),$$

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C'=0$; dla $x=l$ jest $y=0$, więc

$$\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12} + Cl = 0, \text{ a stąd}$$

$$C = -\frac{l^3}{12}, \text{ zatem}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2EI} \left(-\frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{l^3}{12} \right) \dots \dots \dots 327)$$

$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6} + \frac{l^3x}{12} \right) = \frac{qx}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3) \dots \dots 328)$$

Ponieważ obciążenie jest symetryczne, więc najw. $y=f$ będzie w środku belki, tam też styczna będzie poziomą. Wstawmy $x = \frac{l}{2}$, a otrzymamy $f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \dots \dots \dots 329)$

Ponieważ dla $x = \frac{l}{2}$ wedle 143) $\tau I = Me = \frac{ql^2}{8} e$, to gdy

$$e = \frac{h}{2}, \quad \frac{ql^2}{8} = \frac{2\tau I}{h}, \text{ więc}$$

$$f = \frac{5}{384} \frac{16\tau I l^2}{h EI} = \frac{5}{24} \frac{\tau l^2}{Eh} \dots \dots \dots 330)$$

Jeżeli l będziemy liczyć w m a resztę w cm , to

$$f = \frac{50000}{24} \frac{\tau l^2}{Eh}, \text{ a gdy dla żelaza } E=2150000,$$

$$f = 0,00097 \frac{\tau l}{h} \dots \dots \dots 331)$$

przyczem f i h liczyć należy w cm , τ w kg/cm^2 , l w m .

Przykład. Niech będzie $l=6 m$, $q=500 kg/m$, $\tau=1000 kg/cm^2$, to $M = \frac{1}{8} 0,5 \cdot 6^2 = 2,25 tm = 225000 kgcm$, więc:

$$\frac{M}{\tau} = 225. \text{ Zatem przyjmujemy kształtówkę I 20, dla której } \frac{I}{e} = 243.$$

$$\text{Wedle 329) } f = \frac{5}{384} \times \frac{5 \cdot 600^4}{2150000 \cdot 2429} = 1,62 cm = 16,2 mm.$$

$$\text{Wedle 331) } f = 0,00097 \frac{1000 \cdot 36}{20} = 1,74 cm = 17,4 mm.$$

Różnica powstała stąd, że dla kształtówki 20 jest τ mniejsze, niż 1000.

Wzory powyższe stosują się do belek o przekroju stałym. Jeżeli przekrój jest zmiennym, a przypuścimy, że moment bezwładności zmienia się wedle paraboli, to

$$I_x = \frac{4 I_1 x(l-x)}{l^2}, \dots \dots \dots 332)$$

jeżeli I_1 oznacza moment bezwładności w środku belki.

$$\text{Zatem } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{1}{2} qx(l-x)}{EI} = -\frac{qx(l-x)l^2}{8EI_1x(l-x)} = -\frac{ql^2}{8EI_1}.$$

$$\text{Stąd otrzymamy } \frac{dy}{dx} = -\frac{ql^2}{8EI_1}x + C.$$

$$\text{Dla } x = \frac{l}{2}, \frac{dy}{dx} = 0 = -\frac{ql^2}{8EI_1} \frac{l}{2} + C, \text{ a stąd}$$

$$C = \frac{ql^3}{16EI_1}, \text{ więc}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ql^2}{8EI_1}x + \frac{ql^3}{16EI_1} = \frac{ql^2}{8EI_1} \left(\frac{l}{2} - x \right) \dots \dots 333)$$

Scałkowawszy raz jeszcze, otrzymamy $y = \frac{ql^2}{8EI_1} \left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$.

$$\text{Dla } x=0, y=0, \text{ więc } C_1=0, \text{ zatem } y = \frac{ql^2}{16EI_1}x(l-x) \quad 334)$$

$$\text{Stąd dla } x = \frac{l}{2}, f = \frac{ql^2}{16EI_1} \frac{l^2}{4} = \frac{ql^4}{64EI_1} = 0,0156 \frac{ql^4}{EI_1} \dots \dots 335)$$

W rzeczywistości przekrój nie zmienia się tak bardzo, zatem ugięcie będzie miało wartość między

$$\frac{5}{384} = \frac{1}{76,8} = 0,013 \text{ a } \frac{1}{64} = 0,0156 \frac{ql^4}{EI_1}.$$

Dla belek blaszanych lub kratowych równoległych możemy zatem przyjąć w przybliżeniu

$$f = \frac{1}{70EI_1} ql^4 = 0,0143 \frac{ql^4}{EI_1} \dots \dots \dots 336)$$

Podobnie otrzymamy, gdy P działa w środku belki, dla przekroju stałego wedle 324) $f = 0,0208 \frac{Pl^3}{EI}$; dla przekroju zmiennego zaś, jeżeli naprężenie dopuszczalne τ i wysokość h są stałe*)

$$f = 0,0312 \frac{Pl^3}{EI_1}, \dots \dots \dots 337)$$

*) P. Résal: Constructions métalliques, str. 554.

a gdy przytem i wysokość jest zmienna

$$f = 0,0416 \frac{Pl^3}{EI_1} \dots \dots \dots 338)$$

§ 75. Ugięcie belki jednym końcem utwierdzonej.

Belka jest wtedy utwierdzoną wtedy, gdy obciążona nie może się wcale na podporze obrócić, gdy styczna do osi na podporze się nie zmienia. Zupełne utwierdzenie wymaga zupełnie niesprężystego materiału. W praktyce niema zupełnego utwierdzenia, bo wszystkie materiały są sprężyste.

Wiemy, że moment M w punkcie C (rys. 187) belki o stałym przekroju jednym końcem utwierdzonej, a na drugim ciężarem P obciążonej, da się wyrazić według równ. 29)

$$M = -P(l-x).$$

A więc według równ. 315) będzie $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(l-x)}{EI}$, a stąd otrzymamy

$$\text{mamy } \frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI} \left(lx - \frac{x^2}{2} + C \right),$$

$$\text{a wreszcie } y = \frac{P}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + Cx + C_1 \right) \dots \dots 339)$$

Ponieważ dla $x=0$ jest $y=0$ i $\frac{dy}{dx}=0$, więc $C_1=0$ i $C=0$,

$$\text{a zatem } y = \frac{P}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) = \frac{Px^2}{6EI} (3l-x) \dots \dots \dots 340)$$

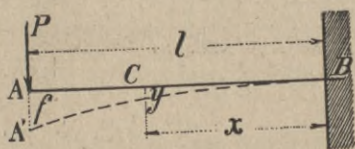
Ponieważ y rośnie wraz z x , więc najw. $y=f$ będzie dla $x=l$, a mianowicie $f = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI} = 0,333 \frac{Pl^3}{EI} \dots \dots \dots 341)$

Dla przekroju zmiennego o stałej wysokości otrzymamy według Résala $f = 0,5 \frac{Pl^3}{EI_1} \dots \dots \dots 342)$

jeśli I_1 oznacza moment bezwładności w B

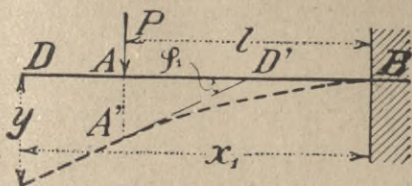
$$\text{a dla zmiennej wysokości } f = 0,667 \frac{Pl^3}{EI_1} \dots \dots \dots 343)$$

Jeżeli utwierdzenie nie jest zupełnem i kąt stycznej do osi na podporze zmienia się o $d\varphi$, to y wzrośnie o $yd\varphi$.



rys. 187.

Jeżeli chodzi o ugięcie punktu D poza punktem A (rys. 188), to $A'D'$ będzie prostą i styczną do linii ugięcia w A' . Z poprzedniego mamy dla $x=l$



rys. 188.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI} \left(l^2 - \frac{l^2}{2} \right) = \frac{Pl^2}{2EI} = \text{st } \varphi_1.$$

$$AA' = \frac{P}{EI} \left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} \right) = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$a \quad y = AA' + (x_1 - l) \text{ st } \varphi_1 = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl^2}{2EI} (x_1 - l) =$$

$$= \frac{Pl^2}{6EI} (3x_1 - l) \dots \dots \dots 344)$$

Jeżeli belka AB (rys. 189) obciążona jest zupełnie ciężarem jednostajnym q , to moment w punkcie C będzie $M = -\frac{1}{2} q (l-x)^2$, więc według 315) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EI} (l-x)^2$,



rys. 189.

a stąd otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2EI} \left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} + C \right), \text{ a wreszcie}$$

$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} + Cx + C_1 \right).$$

Dla $x=0$ jest $y=0$ i $\frac{dx}{dy}=0$, więc $C=C_1=0$,

a zatem
$$y = \frac{qx^2}{24EI} (6l^2 - 4lx + x^2) \dots \dots \dots 345)$$

Ponieważ y wzrasta wraz z x , więc *najw.* $y=f$ będzie dla

$x=l$, a zatem
$$f = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI} \dots \dots \dots 346)$$

Dla przekroju zmiennego o stałej wysokości otrzymamy według Résala

$$f = \frac{1}{4} \frac{ql^4}{EI_1} \dots \dots \dots 347)$$

jeśli I , oznacza moment bezwładności w B ,

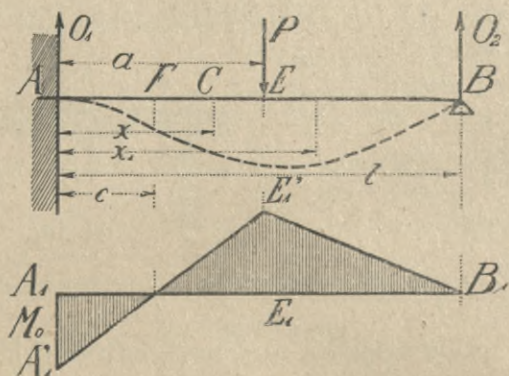
a dla zmiennej wysokości
$$f = \frac{1}{2} \frac{ql^4}{EI_1} \dots \dots \dots 348)$$

Jako belki jednym końcem utwierdzone obliczamy schody, wsporniki, mosty obrotowe i t. d.

§ 76. Belka jednym końcem wmurowana, a w drugim podparta.

Tam, gdzie prawidła statyki nie wystarczają do wyznaczenia oddziaływań, n. p. przy belce jednym końcem utwierdzonej a w drugim podpartej (n. *der an einem Ende eingespannte, am anderen frei aufliegende Träger*, fr. *poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre*, a. *beam fixed at one end, supported at the other*) używamy równania linii ugięcia do wyznaczenia oddziaływań, jak to zaraz okażemy.

Na belkę taką AB (rys. 190) działa ciężar P w odległości a od A . Zastanówmy się najprzód nad częścią belki AE . Na-



ryc. 190.

zwijmy M_0 moment w punkcie A , gdzie belka jest utwierdzoną, to dla punktu C będzie $M = M_0 + O_1 x$, a więc według równ. 315)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_0 + O_1 x}{EI}, \text{ a stąd}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{EI} \left(M_0 x + \frac{O_1 x^2}{2} + C \right), \text{ nareszcie}$$

$$y = - \frac{1}{EI} \left(M_0 \frac{x^2}{2} + \frac{O_1 x^3}{6} + Cx + C' \right).$$

Dla długości EB , t. j., gdy $x > a$, otrzymamy

$$M = M_0 + O_1 x - P(x - a) = M_0 + (O_1 - P)x + Pa,$$

a więc $\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{1}{EI} [M_0 + (O_1 - P)x + Pa]$, a stąd

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} [M_0 x + (O_1 - P) \frac{x^2}{2} + P a x + C_1],$$

nareszcie $y = -\frac{1}{EI} [M_0 + P a] \frac{x^2}{2} + (O_1 - P) \frac{x^3}{6} + C_1 x + C'_1].$

Dalej mamy $y=0$ dla $x=0$ i $x=l$, $\frac{dy}{dx}=0$ dla $x=0$. Ugięcie w punkcie E i styczną, więc $\frac{dy}{dx}$, otrzymać musimy z obu równań

dla y i $\frac{dy}{dx}$ te same; ze względu na ogólne warunki równowagi musi być też $P=O_1+O_2$ i $O_1 l + M_0 - P(l-a)=0$. Mamy więc 7 równań, z których wyznaczymy 4 stałe ilości C, C', C_1 i C'_1 i 3 niewiadome M_0, O_1 i O_2 . Ostatecznie otrzymamy

$$C=0, C'=0, C_1 = -\frac{Pa^2}{2}, C'_1 = \frac{Pa^3}{6},$$

$$O_1 = P \frac{2l^3 - a^2(3l-a)}{2l^3}, O_2 = P \frac{a^2(3l-a)}{2l^3},$$

$$M_0 = -Pa \frac{2l^2 - a(3l-a)}{2l^2} \dots \dots \dots 349)$$

Jeżeli te wartości wstawimy w równaniu dla y , otrzymamy dla długości AE

$$y = \frac{Px^2}{12EI l^2} \left[3al(2l^2 - a(3l-a)) - x(2l^3 - a^2(3l-a)) \right]$$

dla długości EB 350)

$$y = \frac{Pa^2}{12EI l^3} \left[(3l-a)x^3 - 3l(3l-a)x^2 + 6l^2 \cdot x - 2al^3 \right]$$

Największe ugięcie znajdziemy, gdzie $\frac{dy}{dx}=0$, to jest dla

$$x_1 = l \left(1 - \sqrt{\frac{l-a}{3l-a}} \right), \dots \dots \dots 351)$$

a wstawivszy tę wartość w równ. 350), otrzymamy

$$f = \frac{Pa^2}{6EI} (l-a) \sqrt{\frac{l-a}{3l-a}} \dots \dots \dots 352)$$

Moment w punkcie E będzie

$$M_1 = M_0 + O_1 a = Pa^2 \frac{(3l-a)(l-a)}{2l^3} \dots \dots \dots 353)$$

W punkcie F , gdzie $M=0$, linja ugięcia ma punkt zwrotny, bo $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Ponieważ $M=M_0+O_1 x$, więc $M_0+O_1 c=0$, a stąd

$$c = -\frac{M_0}{O_1} = \frac{2l^2 - a(3l - a)}{2l^3 - a^2(3l - a)} al \dots \dots \dots 354)$$

Gdy ciężar jest w środku, więc $a = \frac{l}{2}$, otrzymamy

$$O_1 = \frac{11}{16} P, \quad O_2 = \frac{5}{16} P, \quad M_0 = -\frac{3}{16} Pl, \dots \dots \dots 355)$$

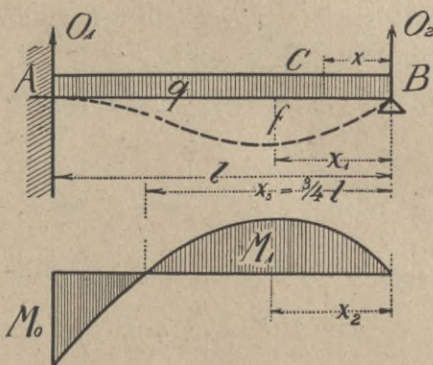
a moment w E $M_1 = +\frac{5}{32} Pl \dots \dots \dots 356)$

Największe ugięcie dla $x_1 = l \left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right) = 0,553 l$ jest

$$f = \frac{1}{48\sqrt{5}} \frac{Pl^3}{EI} = \frac{1}{107,3} \frac{Pl^3}{EI}, \quad = 0,00932 \frac{Pl^3}{EI} \dots \dots \dots 357)$$

a punkt zwrotny F dla $c = \frac{3}{11} l \dots \dots \dots 358)$

Jeżeli zaś belka AB jest obciążona zupełnie ciężarem jednostajnym q (rys. 191), to otrzymamy moment M w punkcie C $M = O_2 x - \frac{1}{2} qx^2$,



rys. 191.

więc według równ. 315) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} (O_2 x - \frac{1}{2} qx^2)$,

a więc $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{O_2 x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C \right)$,

a nareszcie $y = -\frac{1}{EI} \left(\frac{O_2 x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + Cx + C_1 \right)$.

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C_1=0$,

„ $x=l$ „ $y=0$, więc $\frac{O_2 l^3}{6} = \frac{ql^4}{24} + Cl=0$, zatem

$$C = -\frac{4 O_2 l^2 - ql^3}{24}.$$

Dalej mamy dla $x=l$, $\frac{dy}{dx} = 0$, więc $\frac{O_2 l^2}{2} - \frac{ql^3}{6} + C = 0$, a wsta-

wiwszy wartość za C , otrzymamy $O_2 = \frac{3}{8} ql$ 359)

a $C = -\frac{ql^3}{48}$. Możemy więc napisać

$$y = \frac{6}{6EI} \left(qx^4 + \frac{ql^3 x}{8} - \frac{3 qlx^3}{8} \right) = \frac{qx}{48EI} (2x^3 + l^3 - 3 lx^2) . \quad 360)$$

Największe ugięcie będzie dla x_1 , dla którego $\frac{dy}{dx} = 0$, więc

dla $x_1 = 0,4686 l$ 361)

Wstawiając tę wartość w 360) otrzymamy

$$f = 0,00534 \frac{ql^4}{EI} 362)$$

Momenty otrzymamy z równania

$$M = O_2 x - \frac{1}{2} qx^2 = \frac{3}{8} qlx - \frac{1}{2} qx^2 = \frac{1}{8} qx (3l - 4x) . . . 363)$$

więc dla $x=l$ $M_0 = -\frac{1}{8} ql^2$ 364)

Największy moment dodatni jest dla x_2 , gdzie $\frac{dM}{dx} = 0$, więc

$\frac{3}{8} ql - qx_2 = 0$, zatem $x_2 = \frac{3}{8} l$, a wstawiając to w 363), otrzymamy

$$\text{najw. } +M = \frac{9}{128} ql^2 365)$$

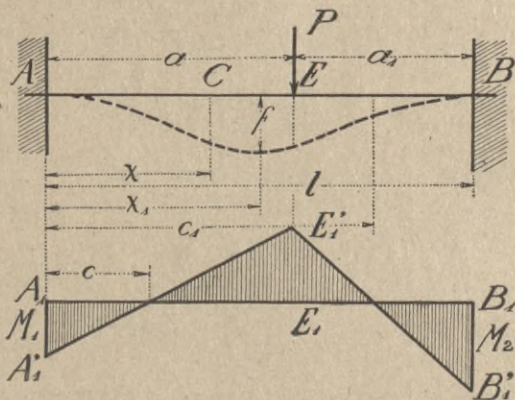
Punkt zwrotny jest dla $M=0$, więc

$$x_3 = \frac{3}{4} l 366)$$

§ 77. Belka obu końcami poziomo utwierdzona.

Gdy na belkę o stałym przekroju obu końcami poziomo utwierdzoną (n. *dcr an beiden Enden eingespannte Träger*, fr. *poutre encastree aux deux extremités*, a. *beam fixed at both*

ends) AB (rys. 192) działa ciężar P w punkcie E , powstają w A i B momenty, które nazwijmy M_1 i M_2 . W dowolnym punkcie C bę-



rys. 192.

dzie moment M , przyczem, jeżeli $x < a$,

$$M = M_1 + O_1 x, \text{ jeżeli } x > a, \quad M = M_1 + O_1 x - P(x - a).$$

A zatem otrzymamy według równ. 315) dla $x < a$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}(M_1 + O_1 x), \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}(M_1 x + \frac{O_1 x^2}{2} + C),$$

$$\text{dla } x > a \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}(M_1 + O_1 x - P(x - a)),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}(M_1 x + \frac{O_1 x^2}{2} - \frac{Px^2}{2} + P a x + C_1).$$

Dla $x = 0$ jest $\frac{dy}{dx} = 0$, więc $C = 0$; dla $x = a$ jest $\frac{dy}{dx}$ w obu równaniach to samo, więc

$$M_1 a + \frac{O_1 a^2}{2} = M_1 a + \frac{O_1 a^2}{2} - \frac{Pa^2}{2} + P a^2 + C_1, \text{ a stąd } C_1 = -\frac{Pa^2}{2}.$$

$$\text{Dla } x = l \quad \frac{dy}{dx} = 0, \text{ więc}$$

$$2 M_1 l = Pa^2 - 2 P a l + P l^2 - O_1 l^2. \dots \dots \dots 367)$$

Wstawiając wartość za C i C_1 , całkujemy jeszcze równanie

$$\text{dla } \frac{dy}{dx}, \text{ a otrzymamy dla } x < a, \quad y = -\frac{1}{EI}\left(\frac{M_1 x^2}{2} + \frac{O_1 x^3}{6} + C'\right).$$

$$\text{dla } x > a, \quad y = -\frac{1}{EI} \left(\frac{M_1 x^2}{2} + \frac{O_1 x^3}{6} - \frac{Px^3}{6} + \frac{Pax_2}{2} - \frac{Pa^2 x}{2} + C'_1 \right)$$

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C'=0$; dla $x=a$ jest y to samo w obu równaniach, więc $C'_1 = \frac{Pa^3}{6}$; nareszcie dla $x=l$ jest $y=0$, więc

$$3 M_1 l^2 = 3 Pa^2 l - 3 Pal^2 + Pl^3 - O_1 l^3 - Pa^3 \quad \dots \quad 368)$$

W równaniach 367) i 368) mamy dwie niewiadome M_1 i O_1 , które możemy obliczyć. Otrzymamy więc

$$O_1 = \frac{Pl^3 - 3 Pa^2 l + 2 Pa^3}{l^3} = \frac{Pa_1^2 (1 + 2a)}{l^3} \quad \dots \quad 369)$$

a analogicznie otrzymamy

$$O_2 = \frac{Pa^2(l + 2a_1)}{l^3} \quad \dots \quad 370)$$

Wstawiając wartość za O_1 w 367), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{Pa a_1^2}{l^2} \\ M_2 &= -\frac{Pa^2 a_1}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 371)$$

a analogicznie

Podstawiając te wartości w równanie dla y , otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } x < a, \quad y &= \frac{Pa_1^2 x^2}{6 EI l^3} (3al - (l + 2a)x), \\ \text{dla } x > a, \quad y &= \frac{Px^2}{6 EI l^3} \left[-(l + 2a) a_1^2 x + \right. \\ &\quad \left. + 3aa_1^2 l + xl^3 - 3al^3 + \frac{3a^2 l^3}{x} - \frac{a^3 l^3}{x^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 372)$$

Największe ugięcie będzie dla x_1 , gdzie $\frac{dy}{dx} = 0$, więc

$$x_1 = \frac{2al}{l + 2a}, \quad \text{a stąd } f_1 = \frac{2Pa_1^2 a^3}{3EI(l + 2a)^2} \quad \dots \quad 373)$$

Momenty otrzymamy według równań

$$\begin{aligned} &\text{dla } x < a \\ M &= -\frac{Pa a_1^2}{l^2} + \frac{Pa_1^2 (l + 2a)x}{l^3} = \frac{Pa_1^2}{l^3} [(l + 2a)x - al] \quad \dots \quad 374) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{dla } x > a \\ M &= -\frac{Pa a_1^2}{l^2} + \frac{Pa_1^2 (l + 2a)x}{l^3} - P(x - a) = \end{aligned}$$

$$= \frac{P}{l^3} \{ (l+2a)a_1^2 x - a a_1^2 l - l^3 x + a l^3 \} \dots 375)$$

Największy moment dodatni otrzymamy dla $x=a$, a więc

$$\text{najw (+M)} = \frac{2 P a^2 a_1^2}{l^3} \dots 376)$$

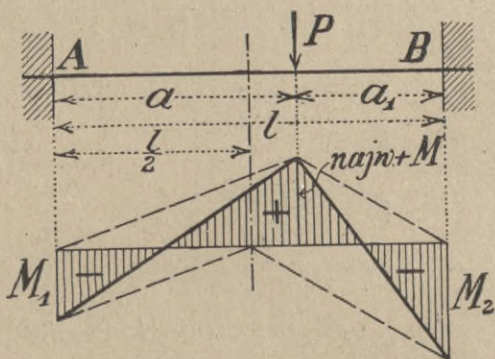
Z równania 371) i 376) wynika, że $M_1 : (\text{najw} + M) =$

$$= \frac{P a a_1^2}{l^2} : \frac{2 P a^2 a_1^2}{l^3} = \frac{l}{2} : a,$$

a podobnie

$$M_2 : (\text{najw} + M) = \frac{l}{2} : a_1.$$

Stąd wynika konstrukcja, podana w rys. 192 a.



rys. 192 a.

Punkty zwrotne otrzymamy dla $x=c$ i $x=c_1$, gdzie

$$M=0, \text{ więc } c = \frac{al}{l+2a}, \quad c_1 = \frac{a+2a_1l}{a+3a_1} \dots 377)$$

Gdy ciężar P działa w środku, więc $a = \frac{l}{2} = a_1$, o-

$$\text{trzymamy z równania 372) } y = \frac{P x^2}{48 EI} (3l - 4x) \dots 378)$$

Największe ugięcie będzie dla $x = \frac{l}{2}$, więc

$$f = \frac{1}{192} \frac{P l^3}{EI} = 0,0052 \frac{P l^3}{EI} \dots 379)$$

Dla przekroju zmiennego a stałego τ i h otrzymamy we-

$$\text{dle Résala } f = 0,0078 \frac{P l^3}{E I_1} \dots 380)$$

dla zmiennego zaś $h \quad f=0,0104 \frac{Pl^3}{EI_1} \dots \dots \dots 381)$

Dalej otrzymamy z równania 371)

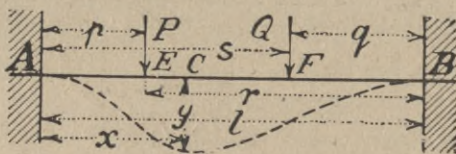
$$M_1 = -\frac{Pl}{8} = M_2 \dots \dots \dots 382)$$

a z równania 375) $M = \frac{P}{8}(4x-l) \dots \dots \dots 383)$

Największy moment jest dla $x = \frac{l}{2}$, więc

$$\text{najw } M = +\frac{Pl}{8} \dots \dots \dots 384)$$

Punkt zwrotny jest w punkcie, gdzie $M=0$, więc dla $c = \frac{l}{4}$.



rys. 193.

Jeśli na belkę działają dwie siły P i Q (rys. 193) to

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{Pp r^2 + Qq^2 s}{l^2} \\ M_2 &= -\frac{Pp^2 r + Qqs^2}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 385)$$

Z równ. 372) otrzymamy

$$Y = \frac{1}{6EI l^3} (Pp^2(l-x)^2(3rl - (l+2r)(l-x)) + Qq^2 x^2(3sl - (l+2s)x)) \dots \dots \dots 386)$$

Dla $P=Q, p=q$

$$M_1 = \frac{Pp(l-p)}{l} = M_2 \dots \dots \dots 387)$$

$$y = \frac{Pp^2}{6EI l^3} [3rl(x^2 + (l-x)^2) - (l+2r)(x^3 + (l-x)^3)] \dots \dots \dots 388)$$

Jeżeli belka AB (rys. 194) jest obciążoną zupełnie ciężarem jednostkowym q , to z powodu symetrii będzie

$O_1 = O_2 = \frac{ql}{2}$, a moment w punkcie C będzie

$$M = M_1 + \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

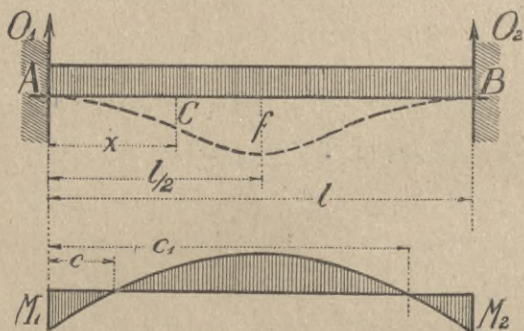
Więc według równ. 315) będzie $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \left(M_1 + \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right)$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \left(M_1 x + \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C \right)$$

Dla $x=0$ jest $\frac{dy}{dx} = 0$, więc $C=0$, dalej dla $x=l$ jest

$$\frac{dy}{dx} = 0, \text{ więc } M_1 l + \frac{ql^3}{4} - \frac{ql^3}{6} = 0, \text{ a stąd}$$

$$M_1 = -\frac{1}{12} ql^2 = M_2 \dots \dots \dots 389)$$



rys. 194.

Wstawiając wartości, otrzymamy więc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{12} ql^2 x + \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right), \text{ a stąd}$$

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql^2 x^2}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} \right) = \frac{qx^2}{24EI} (l^2 - 2lx + x^2) = \frac{qx^2(l-x)^2}{24EI} \quad 390)$$

Największe ugięcie jest dla $x = \frac{l}{2}$, więc

$$f = \frac{ql^4}{384EI} = 0,0026 \frac{ql^4}{EI} \dots \dots \dots 391)$$

Dla zmiennego przekroju a stałego τ i h otrzymamy podobnie

$$f = 0,0054 \frac{ql^4}{EI_1} \dots \dots \dots 392)$$

a dla zmiennego h

$$f = 0,0090 \frac{ql^4}{EI_1} \dots \dots \dots 393)$$

Moment otrzymamy z równania

$$M = -\frac{1}{12} q l^2 + \frac{q l x}{2} - \frac{q x^2}{2} = \frac{q}{12} (6 l x - 6 x^2 - l^2),$$

a więc *najw.* M jest dla $x = \frac{l}{2}$, stąd

$$\text{najw. } M = +\frac{1}{24} q l^2 \quad \dots \quad 394)$$

Punkty zwrotne są dla $M=0$, więc dla $c=0,2113 l$ i $c_1 = 0,7887 l$. Jeżeli przekrój wzrasta ku podporom, to zmniejsza się przez to moment w środku, a wzrasta na podporach *).

I tak, jeżeli $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{8}$, to *najw.* $M = 0,0279 q l^2 = \frac{q l^2}{35,8}$, zaś

$$M_1 = -\frac{q l^2}{10,5} = -0,0979 q l^2 \quad \dots \quad 395)$$

Jako belki obu końcami utwierdzone możemy obliczać tylko takie belki, u których przy obciążeniu styczne linii sprężystej na podporach zupełnie się nie zmieniają, co możemy przypuścić tylko wtedy, gdy belkę głęboko wmurujemy (na półtorej wysokości belki) i gdy naprężenia muru nie są przez to za wielkie, lub też, gdy końce belki w jakikolwiek sposób przytrzymamy np. śrubami. W przeciwnym razie liczymy belkę taką, jako w dwu punktach podpartą.

§ 78. Wykreślne wyznaczenie ugięcia belki.

Dla dowolnego obciążenia belki AB wprowadziliśmy w § 10 równanie krzywej sznurowej (rów. 11)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{a}, \quad \dots \quad 396)$$

gdzie a oznacza odległość biegunową.

Jeśli równanie to porównamy z równ. 315), licząc y w kierunku z dołu do góry, więc zmieniawszy znak, otrzymamy

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{i}$$

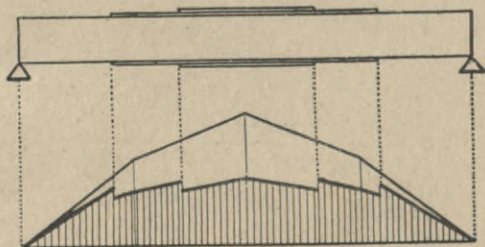
widzimy, że oba równania są identyczne, jeżeli $M=q$ a $EI=a$.

*) Por. artykuł Rittera w *Armierter Beton* 1909, str. 171.

Przyjmiemy zatem kształtówkę 11.25, przyczem $I = 5556 \text{ cm}^4$. Zatem $EI = 2000000 \cdot 5556 \text{ kgcm}^2 = 1111,2 \text{ tm}^2$. Przyjawszy więc $EI = 1111,2 \text{ tm}^2$, otrzymalibyśmy ugięcie w podziale 1:100, zatem za małe. Jeśli chcemy mieć je w naturalnej wielkości, to przyjmiemy EI 100 razy mniejsze, więc $EI = 11,1 \text{ tm}^2$. Wykreśliwszy na tej podstawie wielobok, a w nim styczną krzywą sznurową, otrzymamy ugięcie w naturalnej wielkości, tu więc najw. $y = f = 14 \text{ mm}$.

Jeżeli przyjmiemy, że przekrój jest zmiennym i np. na długości AC $I_1 = \frac{1}{2} I$, na CE $I_2 = I$, na EB $I_3 = \frac{1}{3} I$, to konstrukcja zmienia się tylko o tyle, że dla kreślenia linii ugięcia na długości AC przyjmiemy $a_1 = \frac{1}{2} a$, na CE $a_2 = a$, na EB $a_3 = \frac{1}{3} a$, a stąd otrzymujemy $c_1 a_1'$ zamiast $c_1 a_1$ i $e_1 b_1'$ zamiast $e_1 b_1$, f' też znacznie większe, bo $17,5 \text{ mm}$.

Możemy też zatrzymać przy kreśleniu drugiego wieloboku sznurowego tę samą odległość biegunową, ale zmienić powierzchnię momentów w stosunku odwrotnym momentów bezwładności. Na



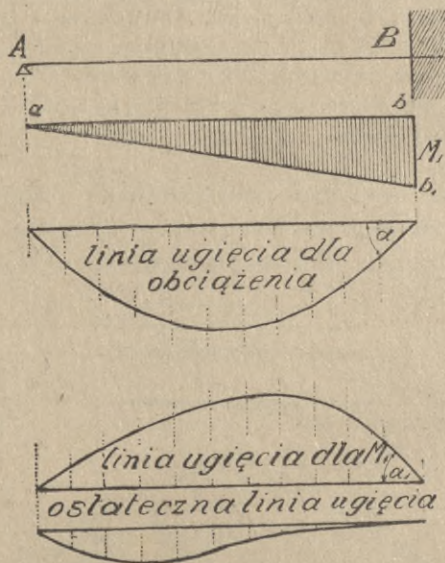
rys. 196.

rys. 196 przedstawia powierzchnia kreskowana powierzchnię wprowadzoną momentów, rzędne przedstawiają $\frac{M}{I}$. Zastosowujemy to n. p. przy wyznaczeniu ugięcia belki blaszanej.

§ 79. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych belki jednym końcem podpartej, drugim utwierdzonej.

Zapomocą poprzedniej konstrukcji możemy też wyznaczyć moment podporowy belki jednym końcem podpartej, drugim utwierdzonej. Wyznaczamy mianowicie najprzód linię ugięcia belki, uważając ją jako w dwu punktach podpartą. Oprócz tego w B

(rys 197) mamy moment M_1 . Przypuszczamy teraz, że na belkę działa tylko moment podporowy M_1 . Linję momentów przedstawia wtedy prosta ab_1 . Wprawdzie wysokość bb_1 nie jest nam znana, ale tymczasowo przyjmijmy $M_1=1$, wyznaczamy linię ugięcia



rys. 197.

w tym wypadku dla $M_1=1$ i sumujemy ugięcia algebraicznie. Wedle założenia musi być ugięcie w $B=0$ i styczna pozioma, a zatem obie linie ugięcia w b muszą mieć styczne nachylone pod tym samym kątem α tylko o przeciwnym znaku. Z tego warunku możemy wyznaczyć wielkość momentu M_1 , zmieniając wartość dla M_1 tak, aby $\alpha_1=\alpha$.

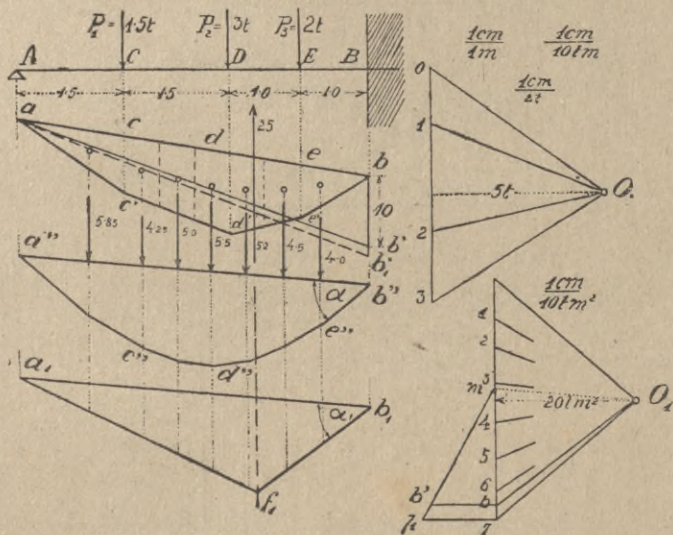
Przykład. Belka AB , podparta w A a utwierdzona w B , (rys. 198) obciążona jest ciężarami $P_1=1,5 t$, $P_2=3 t$ i $P_3=2 t$. Chodzi o wyznaczenie momentów, a przede wszystkim momentu podporowego M_1 w B .

W tym celu kreślimy naprzód linię momentów $ac'd'e'b$ dla belki w dwu punktach podpartej. Powierzchnię tę momentów uważamy jako powierzchnię obciążenia i dla dowolnie przyjętej odległości biegunowej $20 tm^2$ kreślimy drugi wielobok sznurowy czyli linię ugięcia $a''c''d''e''b''$.

Ale w B powstaje nieznaną nam jeszcze moment podporowy M_1 . Przyjmujemy dowolnie $M_1=10 tm$, odcinamy $bb'=10 tm$ i otrzymujemy powierzchnię momentów abb' . Dla tej powierzchni momentów, jako powierzchni obciążenia

trzeba wyznaczyć teraz linię ugięcia. Ale ponieważ potrzeba nam tylko stycznej linii ugięcia na podporze, stycznej podporowej, więc nie dzielimy tę powierzchnię na paski, lecz w $\frac{1}{3}l$ zaczepiamy całą powierzchnię momentów $\frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ tm}^2$.

Dla tej samej odległości biegunowej 20 tm^2 otrzymamy drugi wielobok sznurowy $a_1 f_1 b_1$. Możemy się jednak nawet obejść bez kreślenia tego wieloboku, bo wiemy, że oddziaływanie w A przy powierzchni obciążenia abb' będzie $\frac{1}{3}abb' =$



rys. 198.

$=\frac{1}{3}25=8\frac{1}{3} \text{ tm}^2$, w B_2 zaś $16\frac{2}{3} \text{ tm}^2$, zatem jeżeli od punktu m odetniemy $mb=16\frac{2}{3} \text{ tm}^2$, otrzymamy $\alpha_1=m O_1 b$, gdy $\alpha=m O_1 7$. Widzimy, że tu $\alpha > \alpha_1$, musimy więc te kąty zrównać, zatem zrobić $\alpha_1=m O_1 7$, a w tym celu powiększyć M_1 w stosunku $mb : m 7$. Zrobisz to wykreślenie, otrzymujemy $bb'=77$, jako szukany moment podporowy. Odetniemy 77 od rzędnej zwykłej powierzchni momentów w b , otrzymamy punkt b_1' . Linja, zamykająca ab_1' jest tu kreskowana.

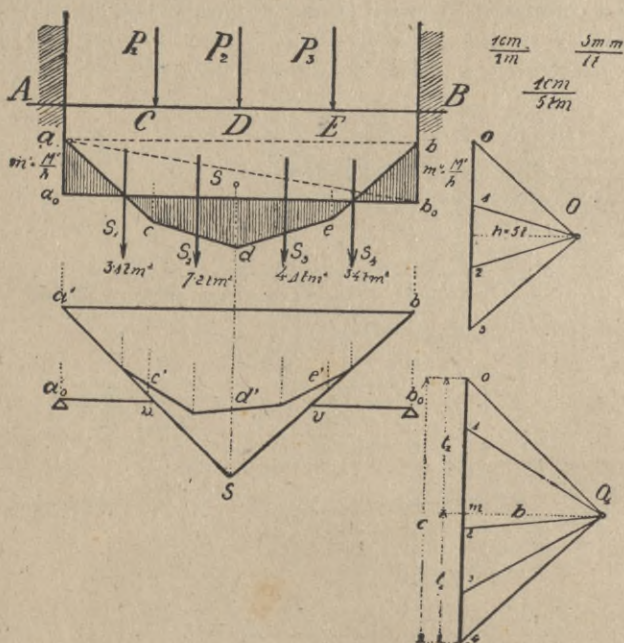
Moment w B jest więc wedle rysunku $M_1=10,9 \text{ tm}$.

§ 80. Belka obu końcami utwierdzona.

Belka AB (rys. 199) obciążona jest ciężarami P_1, P_2, P_3 . Najprzód wykreśliliśmy pierwszy wielobok sznurowy $acdeb$, jak dla belki w dwu punktach podpartej. Niechaj dla belki obu końcami utwierdzonej będzie $a_0 b_0$ zamykająca, to powierzchnia momentu kreskowana

$$aa_0cdebb_0 = acdeb - aa_0b_0 - abb_0 = a(c - t_1 - t_2),$$

jeżeli a oznacza wspólną podstawę, ac zwykłą powierzchnią momentów $acdeb$, $at_1 = aa_0b_0$, $at_2 = abb_0$.



rys. 199.

$$\text{Z rysunku mamy } at_1 = \frac{l}{2} \cdot aa_0 = \frac{IM'}{2h}, \quad at_2 = \frac{l}{2} \cdot bb_0 = \frac{IM'}{2h}$$

nareszcie $ac = \frac{\mathfrak{M}l}{h}$, jeżeli \mathfrak{M} oznacza średni moment belki w dwu punktach podporowej.

Kreślmy teraz drugi wielobok sznurowy. Dla zwykłej powierzchni momentów otrzymamy linię ugięcia $a'c'd'e'b'$. Jeżeli jednak chodzi tylko o styczne podporowe, to nie potrzebujemy całego wieloboku kreślić, wystarczają proste $a's$ i $s'b'$, równoległe do promieni skrajnych O_10 i O_14 . Chcąc uwzględnić też powierzchnie at_1 i at_2 , odcinamy w wieloboku sił $m0 = t_1$ i $4m = t_2$. Wtedy ua'_0 i vb'_0 przedstawiają styczne podporowe belki obu końcami utwierdzonej. Ponieważ wedle założenia styczne te są poziome, więc $a_0u // vb_0 // O_1m$, a stąd

$$t_1 + t_2 = c, \quad aa_0 b_0 + ab_0 b = acdeb,$$

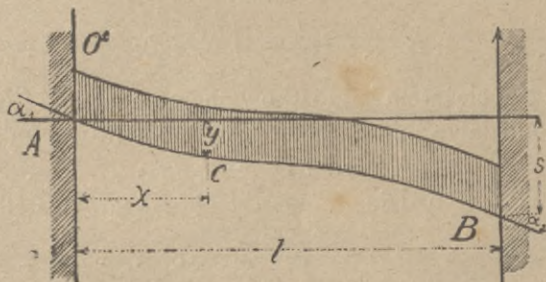
nakoniec $aa_0 b_0 bedc = 0$.

Widzimy więc, że dla belki obu końcami poziomo utwierdzonej linja zamykająca wyrównywa powierzchnię momentów, czyli powierzchnie ujemne momentów równają się powierzchni dodatniej momentów.

Z dalszego warunku $m' : m'' = t_1 : t_2$ możemy wyznaczyć długość aa_0 i bb_0 , przyczem $\frac{aa_0 + bb_0}{2} = \mathfrak{M}$.

§ 81. Belka obu końcami ukośnie utwierdzona.

Niech AB (rys. 200) przedstawia linję ugięcia belki, obu końcami ukośnie utwierdzonej i obciążonej jednostajnie; kąty nachylenia osi belki w A i B niech będą α_1 i α_2 . Nazwijmy dalej $\alpha_1 = \tau_1$, $\alpha_2 = \tau_2$, a wysokość punktu A nad B niech będzie s .



rys. 200.

Według równania 315) możemy napisać: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$, a stąd

$$EI \frac{dy}{dx} = -\int M dx + C.$$

Dla $x=0$ jest $\frac{dy}{dx} = \tau_1$, więc $EI \tau_1 = C$;

dla $x=l$ jest $\frac{dy}{dx} = \tau_2$, więc $EI \tau_2 = -\int_0^l M dx + C$, a stąd:

$$EI(\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l M dx. \quad \dots \quad 397)$$

Całkując raz jeszcze, otrzymamy

$$Ely = - \int \int M dx^2 + Cx + C_1.$$

Wyraz $\int \int M dx \cdot dx$ możemy inaczej napisać, całkując częściowo, a mianowicie

$$\int \int M dx \cdot dx = x \int M dx - \int M x dx, \text{ więc}$$

$$Ely = -x \int M dx + \int M x dx + Cx + C_1 = x \left(- \int M dx + C \right) + \int M x dx + C_1,$$

$$EIy = EIx \frac{dy}{dx} + \int M x dx + C_1.$$

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C_1=0$;

dla $x=l$ będzie $EIs = EI l \tau_2 + \int_0^l M x dx$, a stąd

$$EI(s - l \tau_2) = \int_0^l M x dx \quad \dots \quad 398)$$

Jeżeli q jest ciężarem jednostkowym, moment w A i B nazwiemy M' i M'' a oddziaływania O' i O'' , to moment w punkcie C będzie

$$M = M' + O' x - \frac{1}{2} q x^2 \quad \dots \quad 399)$$

Dla punktu B będzie $M'' = M' + O' l - \frac{1}{2} q l^2$, a stąd

$$O' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{1}{2} q l \quad \dots \quad 400)$$

Wstawiając to w równanie 399), otrzymamy

$$\begin{aligned} M &= M' + \frac{M'' - M'}{l} x + \frac{1}{2} q l x - \frac{1}{2} q x^2 = \\ &= \frac{M' (l - x) + M'' x}{l} + \frac{1}{2} q x (l - x) \quad \dots \quad 401) \end{aligned}$$

Wartość tę podstawimy w 397) i 398) i otrzymamy

$$\begin{aligned} EI(\tau_1 - \tau_2) &= \int_0^l \frac{M' (l - x) + M'' x}{l} dx + \frac{1}{2} q \int_0^l x (l - x) dx = \\ &= (M' + M'') \frac{l}{2} + \frac{1}{12} q l^3 \end{aligned}$$

$$EI(s - l \tau_2) = \int_0^l \frac{M' (l - x) + M'' x}{l} x dx + \frac{1}{2} q \int_0^l x^2 (l - x) dx =$$

$$= (M' + 2M'') \frac{l^2}{6} + \frac{1}{24} q l^4.$$

Rozwiązawszy te równania, otrzymamy

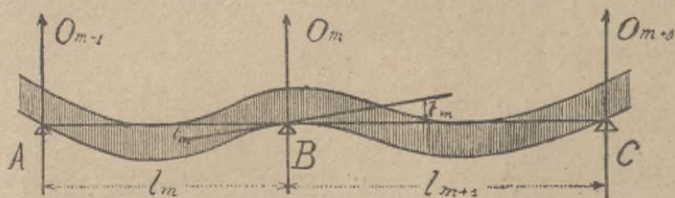
$$\left. \begin{aligned} M' &= -\frac{1}{12} q l^2 + 2EI \frac{l(2\tau_1 + \tau_2) - 3s}{l_2} \\ M'' &= -\frac{1}{12} q l^2 - 2EI \frac{l(\tau_1 + 2\tau_2) - 3s}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots 402)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{względnie } \tau_1 &= \frac{l}{6EI} (2M' + M'' + \frac{1}{4} q l^2) + \frac{s}{l} \\ \tau_2 &= -\frac{l}{6EI} (M' + 2M'' + \frac{1}{4} q l^2) + \frac{s}{l} \end{aligned} \right\} \dots 403)$$

§ 82. Belka ciągła.

Belką ciągłą albo wieloprzesłową (n. *kontinuierlicher Träger*, fr. *poutre continue*, an. *continuous beam*, cz. *trám spojity* r. неразрѣзная балка) nazywamy belkę prostą, spoczywającą na kilku podporach.

Tu zastanowimy się bliżej tylko nad najprostszym przypadkiem, gdy belka jest jednostajnie zupełnie obciążoną ciężarem jednostkowym q , gdy podpory są równo wysokie a przekrój stały.



rys. 201.

Niech ABC (rys. 201) będzie m -te i $m+1$ -sze przęsło belki ciągłej o równo wysokich podporach, to oba te przęsła możemy uważać jako belki ukośnie utwierdzone; otrzymamy więc z równania 403), zważywszy, że $s=0$, dla przęsła m -tego styczną kąta nachylenia linii ugięcia w B $\tau_m = -\frac{l_m}{6EI} (M_{m-1} + 2M_m + \frac{1}{4} q l_m^2)$, zaś dla przęsła $m+1$ -go styczną kąta nachylenia linii ugięcia w B także

$$\tau_m = +\frac{l_{m+1}}{6EI} (M_m + M_{m+1} + \frac{1}{4} q l_{m+1}^2).$$

Moment w *C* będzie

$$M = M' + Q'x - \frac{1}{2}qx^2, \text{ a wstawiwszy wartość z 406) za } Q'$$

$$M = \frac{1}{2}qx(1-x) + M' \frac{1-x}{1} + M'' \frac{x}{1} \dots \dots \dots 408)$$

Równanie to przedstawia parabolę o osi pionowej.

§ 83. Belka ciągła dwu i trzyprzęsłowa.

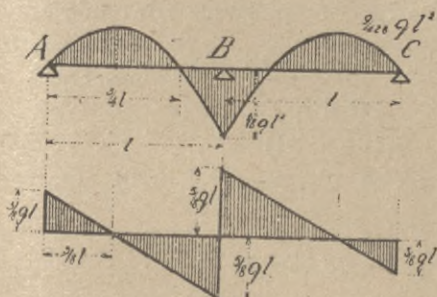
Zastosujemy teraz wzory poprzednie dla belek dwu i trzyprzęsłowych.

Dla belki dwu-przęsłowej (rys. 204) przypuścimy, że $l_1 = l_2 = l$. Tu otrzymamy tylko jedno równanie momentu podporowego

$$2M_1(l+l) = -\frac{1}{8}q(l^3 + l^3), \text{ więc}$$

$$M_1 = -\frac{1}{8}ql \dots 409)$$

W pierwszym przęśle jest $M' = 0, M'' = M_1 =$



rys. 204.

$= -\frac{1}{8}ql^2$, więc według równania 408)

$$M = -\frac{1}{8}qlx + \frac{1}{2}qx(t-x) = \frac{1}{8}qx(3l-4x) \dots 410$$

Najw. *M* jest dla x_1 , dla którego $\frac{dM}{dx} = 0$, więc $\frac{3}{8}ql - qx_1 = 0$,

zatem $x_1 = \frac{3}{8}l = 0,375l$,

tak, że najw. $(+M) = \frac{1}{8}q \cdot \frac{3}{8}l(3l - \frac{3}{8}l) = \frac{9}{128}ql^2 = 0,07032ql^2, 411)$

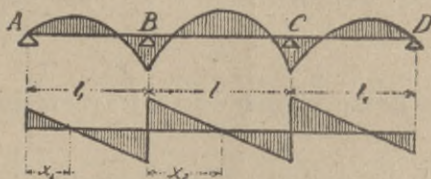
zaś $M=0$ dla $3l=4x'$, więc $x' = \frac{3}{4}l = 0,75l$.

Według 406) będzie dla pierwszego przęśla

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{2}ql - \frac{1}{8}ql = +\frac{3}{8}ql \\ Q'' &= -\frac{1}{2}ql - \frac{1}{8}ql = -\frac{5}{8}ql \\ \text{zaś } Q &= \frac{3}{8}ql - qx = \frac{1}{8}q(3l - 8x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 412)$$

Parabolę wyrażoną równaniem 410) i prostą, wyrażoną równaniem 412) wykreśliliśmy na rysunku 205.

Dla belki trzyprzęsłowej (rys. 205) przypuszczamy, że przęsła skrajne są równe l_1 , średnie zaś przęsło ma długość l .



rys. 205.

Tu $M_0 = M_4 = 0$, $M_1 = M_3$, więc dwa pierwsze równania Clapeyrona dają jedno równanie $2 M_1 (l_1 + l) + M_1 l = -\frac{q}{4} (l_1^3 + l^3)$,

a stąd
$$M_1 = M_2 = -\frac{q (l^3 + l_1^3)}{4(2l_1 + 3l)} \dots \dots \dots 413)$$

Momenty w pierwszym przęśle otrzymamy z 408) wstawiając $M' = 0$, $M'' = M_1$,

$$M = M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} qx (l_1 - x) \dots \dots \dots 414)$$

Największy moment będzie dla x_1 , gdy $\frac{dM}{dx} = 0$, więc

$$\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} ql_1 - qx_1 = 0, \text{ a stąd } x_1 = \frac{M_1}{ql_1} + \frac{l_1}{2} \dots \dots \dots 415)$$

W drugim przęśle będzie $M' = M'' = M_1$, więc

$$M = M_1 + \frac{1}{2} qx (l - x) \dots \dots \dots 416)$$

Największy moment będzie dla x_2 , gdy $\frac{dM}{dx} = 0$, więc

$$\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2} ql - qx_2 = 0, \text{ a stąd } x_2 = \frac{1}{2} l, \text{ zatem najw. } M = M_1 + \frac{1}{8} ql^2 \dots \dots \dots 417)$$

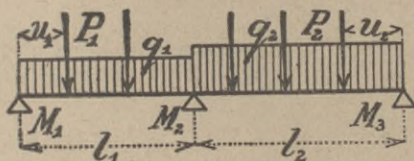
§ 84. Obciążenie różne w obu przęsłach.

Jeżeli oba przęsła (rys. 206) mają różne rozpiętości l_1 i l_2 i są obciążone ciężarem jednostajnym q_1 i q_2 i siłami skupionymi, to analogicznie do równania (404)*) otrzymamy równanie momen-

*) Por. „Podręcznik Teorii Mostów“, cz. I, t. II, str. 25.

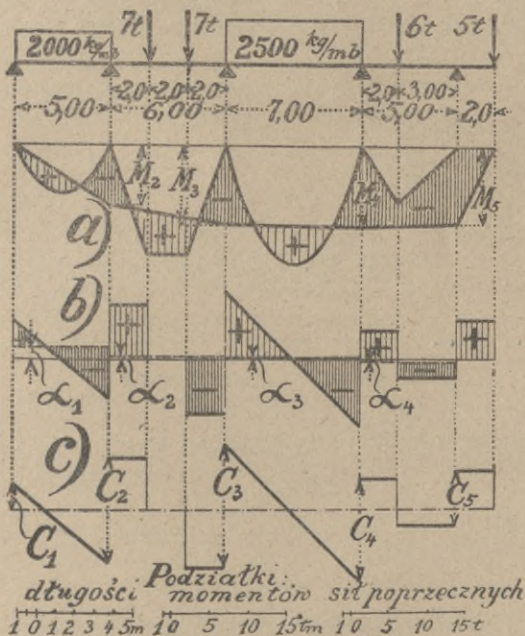
tów podporowych

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -\frac{1}{4} (q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3) - \Sigma P_1 u_1 \frac{(l_1^2 - u_1^2)}{l_1} - \Sigma P_2 u_2 \frac{(l_2^2 - u_2^2)}{l_2} \dots \dots \dots 418)$$



rys. 206.

Wyznaczywszy w poszczególnych przęsłach zwykle powierzchnie momentów, odcinamy od podstawy powierzchni momentów na pionowych podporowych odcinki M_1, M_2, M_3 , a łącząc ich końce otrzymamy zamykającą.



rys. 207.

Przykład. Wyznaczyć momenty, siły poprzeczne i oddziaływania dla belki, przedstawionej w rys. 207.

Według równania (418) mamy dla przęsła pierwszego i drugiego $M_1 \cdot 5,0 + 2 M_2 (5,0 + 6,0) + M_3 \cdot 6,0 = -\frac{1}{4} 2000 \cdot 5,0^3 - \left(7000 \cdot 2,0 \frac{6,0^2 - 2,0^2}{6} + 7000 \cdot 4,0 \frac{6,0^3 - 4,0^3}{6} \right)$.

Dla przęsła drugiego i trzeciego

$$M_2 \cdot 6,0 + 2 M_3 (6,0 + 7,0) + M_4 \cdot 7,0 = -\frac{1}{4} 2500 \cdot 7,0^3 - \left(7000 \cdot 2,0 \frac{6,0^2 - 2,0^2}{6} + 7000 \cdot 4,0 \frac{6,0^3 - 4,0^3}{6} \right)$$

Dla przęsła trzeciego i czwartego

$$M_3 \cdot 7,0 + 2 M_4 (7,0 + 5,0) + M_5 \cdot 5,0 = -\frac{1}{4} 2500 \cdot 7,0^3 - 6000 \cdot 3,0 \frac{5,0^2 - 3,0^2}{5}$$

Ponieważ $M_1 = 0$, a $M_5 = -5000 \cdot 2 = -10000$ *kgm*, otrzymamy równania

$$22 M_2 = 6 M_3 = -230499$$

$$6 M_2 + 26 M_3 + 7 M_4 = -382374$$

$$7 M_3 + 24 M_4 = -321975, \text{ a stąd wartości zaokrąglone:}$$

$$M_2 = -7730 \text{ kgm}, M_3 = -10100 \text{ kgm}, M_4 = -10480 \text{ kgm}.$$

Wyznaczwszy naprzód w każdym przęśle momenty jak dla belki wolno podpartej, odcinamy na podporach momenty ujemne M_2, M_3, M_4 i M_5 , a łącząc końce odcinków, przedstawiających wartości momentów ujemnych, otrzymamy zamykające (rys. 207 a).

W celu wyznaczenia sił poprzecznych obliczymy, stosownie do określenia siły poprzecznej równaniem (406), wartości $\frac{M'' - M'}{l}$.

Otrzymamy zatem:

$$\text{dla przęsła I. } \frac{M_2}{l_1} = -\frac{7730}{5} = -1546 \text{ kg} = \alpha_1,$$

$$\text{dla przęsła II. } \frac{M_3 - M_2}{l_2} = \frac{-10100 + 7730}{6} = -395 \text{ kg} = \alpha_2,$$

$$\text{dla przęsła III. } \frac{M_4 - M_3}{l_3} = \frac{-10480 + 10100}{7} = -54 \text{ kg} = \alpha_3,$$

$$\text{dla przęsła IV. } \frac{M_5 - M_4}{l_4} = \frac{-10000 + 10480}{5} = +96 \text{ kg} = \alpha_4.$$

Wykreśliwszy w każdym przęśle siły poprzeczne jak dla belki wolno podpartej, odcinamy wartości α i otrzymujemy wykres rzeczywistych sił poprzecznych (rys. 207 b).

W rys. 207 c zestawiono wartości oddziaływań.

§ 85. Belka ciągła o równych przęsłach.

Dla obciążenia zupełnego jednostajnego upraszczają się bardzo wszystkie wzory, jeżeli wszystkie przęsła są równe. Podajemy tu tylko wyniki, zestawione w następnym tabliczce.

Tablica XXXVII.

Liczba porządkowa	Ilość przęseł równych	Oddziaływania	Największe momenty	
			w punkcie	wynoszą
1	2	$O_0 = O_2 = \frac{3}{8} ql,$ $O_1 = \frac{10}{8} ql$	B (druga podpora) $x = \frac{3}{8} l$ (pierwsze przęsło)	$-\frac{1}{8} ql^2 = -0,125 ql^2$ $+\frac{9}{128} ql^2 = +0,0703 ql^2$
2	3	$O_0 = O_3 = 0,4 ql,$ $O_1 = O_2 = 1,1 ql$	B, C (średnie podpory) $x = 0,4 l$ (pierwsze i trzecie przęsło) $x = 0,5 l$ (drugie przęsło)	$-0,1 ql^2$ $+0,08 ql^2$ $+0,025 ql^2$
3	4	$O_0 = O_4 = \frac{11}{28} ql =$ $= 0,3929 ql$ $O_1 = O_3 = \frac{32}{28} ql =$ $= 1,1428 ql,$ $O_2 = \frac{26}{28} ql =$ $= 0,9286 ql$	B, D (druga i czwarta podpora) $x = 0,393$ (pierwsze i czwarte przęsło)	$-\frac{3}{28} ql^2 = -0,1071 ql^2$ $+0,0772 ql^2$
4	5	$O_0 = O_5 = \frac{15}{38} ql =$ $= 0,3947 ql$ $O_1 = O_4 = \frac{43}{38} ql$ $= 1,1317 ql$ $O_2 = O_3 = \frac{37}{38} ql$ $= 0,9736 ql$	B, E (druga i piąta podpora) $x = 0,395 l$ (pierwsze i piąte przęsło)	$-\frac{4}{38} ql^2 = -0,1053 ql^2$ $+0,0779 ql^2$

§ 86. Momenty i oddziaływania belki ciągłej dwu i trzyprzęsłowej.

Poniżej zestawiliśmy momenty podporowe, największe i oddziaływania dla belki dwuprzęsłowej o przęsłach l_1 i l_2 i trójprzęsłowej, gdy rozpiętość przęseł skrajnych jest l_1 , a średniego l_2 *).

*) Por. Haberkalt i Postuvanschitz: „Die Berechnung der Tragwerke aus Eisenbeton“, tablica 17 i 18.

Tablica XXXVIII.

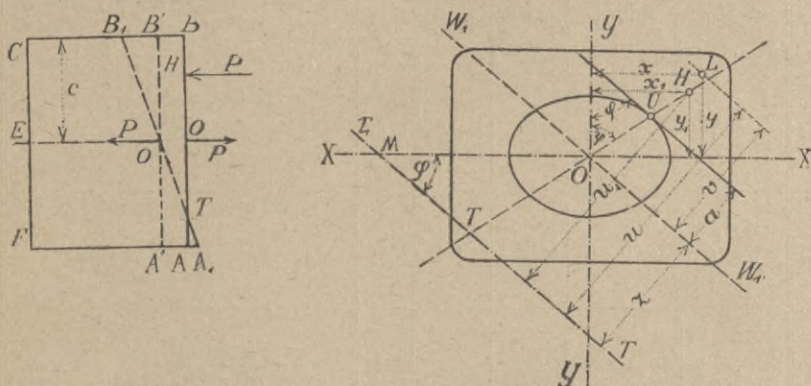
Lp.	Ilość przęseł	Obciążenie przęsła			Największe momenty		Oddziaływanania
		pierwsz.	drug.	trzec.	w punkcie	wynoszą	
1	2 $l_1=l_2$	całk. g	całk. g	—	B (druga podpora) $x=\frac{3}{8}l$	$-\frac{1}{8}gl^2$ $+0.0703gl^2$	$O_0=O_1=\frac{3}{8}gl$ $O_1=\frac{10}{8}gl$
2	2 $l_1=l_2$	całk. p	0	—	B (druga podpora) $x=\frac{7}{16}l$	$-\frac{1}{16}pl^2$ $+0.0957pl^2$	$O_0=\frac{7}{16}pl$ $O_1=\frac{5}{8}pl$ $O_2=\frac{1}{16}px$
3	2 $l_1=l_2$	cięż. P w odst. x	0	—	B	$-\frac{(l^2-x^2)}{4l^2}Px$	
4	2 $n=\frac{l_1}{l_2}$	całk. g	całk. g	—	B	$-\frac{1+n^3}{8n^2(1+n)}gl_1^2$	
5	2 $n=\frac{l_1}{l_2}$	całk. p	0	—	B	$-\frac{n}{8(1+n)}pl_1^2$	
6	2 $n=\frac{l_1}{l_2}$	cięż. P w odst. x	0	—	B	$-\frac{n(l_1^2-x^2)}{2(l+n)l_1^2}Px$	
7	3 $l_1=l_2=l$	całk. g	całk. g	całk. g	B i C (druga i trzecia podpora) 1 prz. $x=0.4l$ 2 „ $x=0.5l$	$-\frac{1}{10}gl^2$ $+0.08gl^2$ $+0.025gl^2$	$O_0=O_3=0.4 gl$ $O_1=O_2=1.1 gl$
8	3 $l_1=l_2=l$	całk. p	0	całk. p	B i C 1 prz $x=0.45l$	$-\frac{1}{20}pl^2$ $+0.1013pl^2$	$O_0=O_3=0.05 pl$ $O_1=O_2=0.55 pl$
9	3 $l_1=l_2=l$	0	całk. p	0	B i C 2 prz. $x=0.5l$	$-\frac{1}{20}pl^2$ $+0.075pl^2$	$O_0=O_3=0.05 pl$ $O_1=O_2=0.55 pl$
10	3 $l_1=l_2=l$	całk. p	całk. p	0	B C 1p. $x=0.3833l$ 1p $x=0.4167l$	$-\frac{7}{60}pl^2$ $-\frac{1}{30}pl^2$ $+0.0735pl^2$ $+0.0534pl^2$	$O_0=0.3833pl$ $O_1=1.2pl$ $O_2=0.45pl$ $O_3=0.33pl$
11	3 $l_1=l_2=l$	cięż. P w odst. x	0	0	B C	$\frac{4(l^2-x^2)}{15l^2}Px$ $\frac{l^2-x^2}{15l^2}Px$	

Lp.	Ilość przęseł	Obciążenie przęsła			w punkcie	Największe momenty wynoszą
		pierwsz.	drug.	trzec.		
12	3 $l_1=l_2$	0	cięż. P w od. x	0	B C	$-\frac{(l-x)(7l-5x)}{15l_2}Px$ $-\frac{(l-x)(2l+5x)}{15l_2}Px$
13	3 $n=\frac{l_1}{l_2}$	całk. g	całk. g	całk. g	B i C	$-\frac{1+n^3}{4(3+2n)}gl_2^2$
14	3 $n=\frac{l_1}{l_2}$	całk. p	0	całk. p	B i C	$-\frac{n}{4(3+2n)}pl_2^2$
15	3 $n=\frac{l_1}{l_2}$	0	całk. p	0	B i C	$-\frac{n}{4(3+2n)}pl_2^2$
16	3 $n=\frac{l_1}{l_2}$	cięż. P w odst. x	0	0	B C	$-\frac{2(1+n)(l_1^2-x^2)}{n(1+2n)(3+2n)l_2^2}Px$ $+\frac{l_1^2-x^2}{n(1+2n)(3+2n)l_1^2}Px$
17	3 $n=\frac{l_1}{l_2}$	całk. p	całk. p	0	B C	$-\frac{2(1+n)(1+n^3)l}{4(1+2n)(3+2n)}pl_2^2$ $-\frac{1+2n-n^3}{4(1+2n)(3+2n)}pl_2^2$
18	3 $n=\frac{l_1}{l_2}$	0	cięż. P w od. x	0	B C	$-\frac{(l_2-x)[(3+4n)l_2-(3+2n)x]}{(1+2n)(3+2n)l_2^2}Px$ $-\frac{(l_2-x)[2nl_2+(3+2n)x]}{(1+2n)(3+2n)l_2^2}Px$

VI. Wytrzymałość złożona na zginanie i ciągnięcie lub zginanie i ciśnienie.

§ 87. Bryła natężeń i oś obojętna.

Jeżeli na przekrój belki działa siła doń prostopadła P w dowolnym punkcie przekroju H (rys. 208), to nie zmieniając równowagi możemy umieścić w środku ciężkości O dwie siły równe P



rys. 208.

i równoległe do P , ale działające w kierunkach wprost przeciwnych. Mamy wtedy siłę P , działającą w osi, i moment $M_w = P \cdot HO$. Siła P w osi sprawia w całym przekroju ciągnięcie lub, jak tutaj, ciśnienie, wszystkie włókna skrócą się o OO' , przekrój więc AB zajmie położenie $A'B'$. Moment zaś M wywołuje naprężenia zginające, przekrój obróci się o pewien kąt około O' i zajmie położenie A_1B_1 . Dwa te działania dodają się algebraicznie, a więc także znoszą się po części. Z rysunku widzimy, że w T odkształcenie, a więc i naprężenie jest równe zero. Przez T będzie więc przechodzić oś obojętna (p. § 67) T_1T_1 , równoległa do W_1W_1 t. j. do osi obojętnej dla samego zginania.

Wiemy, że naprężenia zginające są proporcjonalne do odległości od osi obojętnej, a więc naprężenie ν w dowolnym punkcie L będzie $\nu = \alpha u$. Suma algebraiczna wszystkich naprężeń równa się sile P , więc

$$P = \iint \nu d^2 F = \alpha \iint u d^2 F \quad \dots \quad (419)$$

Naprężenie w punkcie L możemy jeszcze inaczej wyrazić; naprężenie to składa się z ciśnienia $\nu_1 = \frac{P}{F}$ i naprężenia zginającego $\nu_2 = \frac{M_w v}{I_w}$, a więc

$$\nu = \frac{P}{F} + \frac{M_w v}{I_w} \quad \dots \quad 420)$$

Jeżeli w każdym punkcie przekroju wystawimy prostopadłą na przekrój, której długość i kierunek odpowiada wielkości i kierunkowi naprężenia ν , to prostopadłe te utworzą bryłę naprężeń, której objętość według 419) równa się sile P .

Nazwijmy naprężenie w środku ciężkości przekroju ν_0 , to objętość bryły naprężeń, która jest walcem ukośnie ściętym, równa się $P = F \nu_0 = \alpha z F$, więc

$$\nu_0 = \alpha z = \frac{P}{F} \quad \dots \quad 421)$$

Ponieważ P jest wypadkową wszystkich naprężeń ν , więc musi być także suma momentów naprężeń względem dowolnej osi równa momentowi siły P , a więc $P u_1 = \iint u \nu d^2 F$, a stąd

$$u_1 = \frac{\iint u \nu d^2 F}{P} = \frac{\alpha}{P} \iint u^2 d^2 F = \frac{\alpha I_1}{P} \quad \dots \quad 422)$$

jeżeli I_1 oznacza moment bezwładności ze względu na $T_1 T_1$.

Siła P zaczepia więc w środku ciężkości bryły naprężeń, dlatego też punkt ten H nazywamy środkiem naprężenia (ciśnienia lub ciągnienia) (n. *Mittelpunkt der Spannung*).

Przyjąwszy osie główne elipsy bezwładności jako osie współrzędnych, możemy napisać (por. § 41).

$$\begin{aligned} v &= x \operatorname{wst} \varphi + y \operatorname{dost} \varphi, \text{ a więc} \\ \nu &= \alpha (z + x \operatorname{wst} \varphi + y \operatorname{dost} \varphi). \end{aligned}$$

Jeżeli utworzymy moment siły P ze względu na oś YY i XX , to będzie

$$\begin{aligned} P x_1 &= \iint x \nu d^2 F \text{ i } P y_1 = \iint y \nu d^2 F, \text{ albo inaczej} \\ P x_1 &= \iint x \alpha (z + x \operatorname{wst} \varphi + y \operatorname{dost} \varphi) d^2 F = \alpha z \iint x d^2 F + \\ &+ \alpha \operatorname{wst} \varphi \iint x^2 d^2 F + \alpha \operatorname{dost} \varphi \iint x y d^2 F. \end{aligned}$$

Dla osi głównych, przechodzących przez środek ciężkości jest $\iint x d^2 F = 0$ i $\iint x y d^2 F = 0$ (§ 41), więc

$$\left. \begin{array}{l} P_{x_1} = \alpha \text{ wst } \varphi I_1 \\ \text{i podobnie } P_{y_1} = \alpha \text{ dost } \varphi I \end{array} \right\} \dots \dots \dots 423)$$

Z wzoru tego otrzymamy

$$\text{wst } \varphi = \frac{P_{x_1}}{\alpha I_1}, \text{ dost } \varphi = \frac{P_{y_1}}{\alpha I}, \text{ więc}$$

$$\nu = \alpha \left(z + \frac{P_{xx_1}}{\alpha I_1} + \frac{P_{yy_1}}{\alpha I} \right) = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{a^2} \right) \dots \dots 424)$$

Naprężenie ν wywołuje siła P , działająca w osi, t. zw. siła podłużna (n. *Axialkraft*) i moment $P \cdot HO$. Wiemy z § 67, że dla momentu HO , którego płaszczyzna różni się od płaszczyzny osi głównych, powstaje oś obojętna $W_1 W_1$, która jest osią sprzężoną z osią HO , w której działają siły. Wskutek działania siły P oś obojętna przesuwa się równolegle o z , zatem promień OH , łączący środek ciężkości przekroju z środkiem ciśnienia, i równoległa do osi obojętnej $T_1 T_1$, poprowadzona przez środek ciężkości są osiami sprzężonymi elipsy środkowej bezwładności.

Jeżeli $\psi = 0$, to także $\varphi = 0$; więc gdy środek ciśnienia pada na oś główną, oś obojętna jest prostopadła do niej.

Odległość osi obojętnej od środka ciężkości przekroju O jest wedle 421)

$$z = \frac{P}{\alpha F}, \text{ a że wedle 423) } \alpha = \frac{P_{y_1}}{I \text{ dost } \varphi}, \text{ więc}$$

$$z = \frac{P I}{F P_{y_1}} \text{ dost } \varphi = \frac{a^2}{y_1} \text{ dost } \varphi \dots \dots \dots 425)$$

W razie, gdy środek ciśnienia pada na oś główną, więc

$$\psi = \varphi = 0, \quad z = \frac{a^2}{y_1} \dots \dots \dots 426)$$

Odstęp u_1 da się obliczyć także na podstawie rów. 421) i 422). Możemy mianowicie napisać

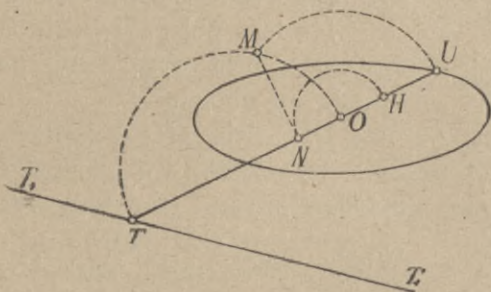
$$u_1 = \frac{\alpha I_t}{P} = \frac{I_t}{Fz} = \frac{I_w + Fz^2}{Fz} = \frac{Fa'^2 + Fz^2}{Fz} = \frac{a'^2}{z} + z.$$

Mamy więc
$$v_1 = u_1 - z = \frac{a'^2}{z},$$

jeżeli a' oznacza promień bezwładności dla osi $W_1 W_1$, a stąd

$$OH \cdot OT = OU^2 \dots \dots \dots 427)$$

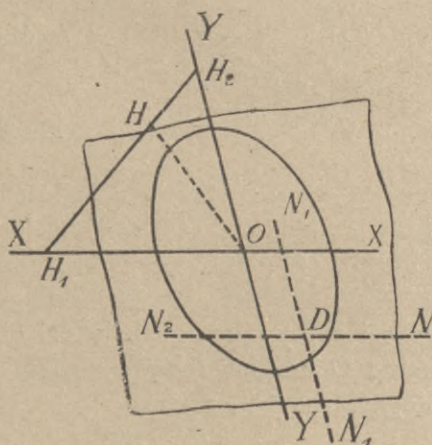
jest v_1 i odwrotnie. Jeżeli oś obojętna porusza się równolegle, to środek ciśnienia H porusza się po osi sprzężonej z kierunkiem osi obojętnej i odwrotnie.



rys. 211.

odwrot. Dlatego nazywamy punkt H biegunem (n. *Pol*, an. *pole*), równoległą do $T_1 T_1$ po drugiej stronie O w tej samej odległości, co $T_1 T_1$, leżącą, nazywamy biegunową (n. *Polare*, an. *polar*), a prostą $T_1 T_1$ przeciwbiegunową (n. *Antipolare*, an. *antipolar*) i naodwrot H nazywamy przeciwbiegunem (n. *Antipol*, an. *antipole*) prostej $T_1 T_1$.

Jeżeli OX i OY są osiami sprzężonymi środkowej elipsy bezwładności (rys. 212), a H jest środkiem ciśnienia, w którym działa siła P , to da ona się rozłożyć na dwie siły P_1 i P_2 , działające w punktach osi H_1 i H_2 , przyczem przypuszczamy, że $H_1 H_2$ jest równoległe do WW_1 osi sprzężonej do OH . Dla siły P_1 w H_1 otrzymamy oś obojętną $N_1 N_1$, dla siły P_2 w H_2 otrzymamy oś obojętną $N_2 N_2$.



rys. 212.

Gdy obie siły działają, w punkcie D będzie naprężenie równe zero, więc przez D przechodzi oś obojętna.

Ponieważ $v_1 z = a'^2$, więc gdybyśmy wartości v_1 i z pomniejali, a więc gdybyśmy środek ciśnienia przyjęli w T , to oś obojętna przechodziłaby przez H i byłaby równoległą do $T_1 T_1$. Widzimy więc, że każdej prostej $T_1 T_1$, odpowiada pewien punkt H i na

Gdy siła P poruszać się będzie po $H_1 H_2$, to oś obojętna będzie miała różne położenia, ale zawsze przechodzić będzie przez D , więc gdy H porusza się po prostej, oś obojętna obraca się około punktu D .

Na mocy poprzedniego stwierdzamy dalej, że gdy w D jest środek ciśnienia, to oś obojętna przechodzi przez H i ma kierunek $H_1 H_2$. A więc ogólnie orzec możemy: Jeżeli oś obojętna obraca się około pewnego punktu, środek ciśnienia porusza się po linii prostej, która byłaby linią obojętną, gdyby środek ciśnienia był w D .

§ 88. Jądro przekroju.

Jeżeli oś obojętna porusza się stycznie do obwodu przekroju tak, że go nigdzie nie przecina, to środek ciśnienia opisuje linię zamkniętą, ojędrną, będącą obwodem powierzchni, którą nazywamy jądrem (n. *Kern*, fr. *noyau central*, an. *core heart*, cz. *jądro piűesowe*, r. *ядро*).

Jeżeli środek naprężenia leży w jądrze, to oś obojętna leży po za przekrojem, więc w całym przekroju panuje to samo naprężenie, ciśnienie lub ciągnienie. Gdy środek ciśnienia wpada na linię jędrną, linja obojętna jest styczną do przekroju, w całym przekroju panuje to samo naprężenie, ciśnienie lub ciągnienie, a w punkcie styczności naprężenie to jest równe zeru. Gdy zaś środek ciśnienia wyjdzie z jądra, oś obojętna przecina przekrój; po jednej stronie osi obojętnej jest więc ciśnienie, po drugiej ciągnienie.

W celu wyznaczenia ojędrej wyznaczamy poszczególne jej punkty, punkty jędrne (n. *Kernpunt*, cz. *krajny bod jadrowy*) w sposób w poprzednim paragrafie wskazany, wykreślnie lub liczebnie, na podstawie równ. 427). Przytem korzystać będziemy z prawideł tamże wyłożonych, z których wynika, że linii prostej w obwodzie przekroju odpowiada jeden punkt, a każdemu wierzchołkowi, około którego obraca się linja obojętna, linja prosta w ojędrej. Można udowodnić*), że łukowi koła w obwodzie odpowiada linja jędrna paraboliczna, linii obwodu zaś eliptycznej ojędrna hyperpoliczna.

*) Por. A. Meyerhofa rozprawka w *Zeitschr. d. Ver. deut. Ing.* (1898, str. 212).

Odstęp punktu jędrnego od środka przekroju nazywamy promieniem jędrnym (n. *Kernweite*). Jeżeli oznaczymy go przez i , to wedle 427)

$$i = \frac{a^2}{e} = \frac{F a^2}{F e} = \frac{W}{F} \dots \dots \dots 428)$$

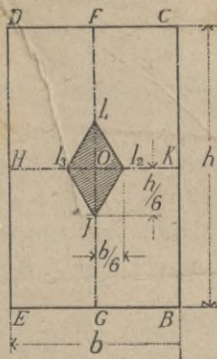
Przykłady. 1. Prostokąt (rys. 213). Tu najłatwiej wyznaczmy ojedną liczebnie. Gdy oś obojętna będzie DC , to musimy w równ. 428) podstawić dla osi HK $W = \frac{bh^3}{6}$, $F = bh$, więc $OI = i_1 = \frac{bh^2}{6} : bh = \frac{h}{6}$. Z powodu symetrii jest $OI_1 = OI$.

Jeżeli oś obojętna ma położenie

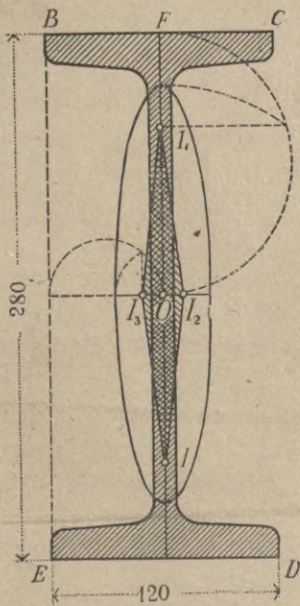
$$DE, \text{ to dla osi } FG, W = \frac{hb^3}{6} : bh,$$

$$\text{więc } OI_2 = \frac{hb^2}{6} : bh = \frac{b}{6}.$$

Ponieważ dalej wierzchołkom B , C , D , E odpowiadają proste, więc ojedną otrzymamy łącząc I_1 , I_2 , I i I_3 prostymi.



rys. 213.



rys. 214.

2. Przekrój I (rys. 214). Przyjęliśmy tu ten sam przekrój, co w rys. 105 i wykreśliliśmy elipsę środkową bezwładności. Gdy teraz oś obojętna ma położenie BC , otrzymamy za pomocą konstrukcji, naznaczonej na rysunku, a opisanej w poprzednim paragrafie, punkt jędrny I , przyczem $OI = OI_1$. Gdy oś obojętna jest BE , punkt jędrny jest I_2 a $OI_2 = OI_3$. Punktom obwodu B , C , D , E odpowiadają linje proste, więc I , I_3 , I_1 , I_2 będzie ojedną.

Liczebnie otrzymamy

$$i_1 = OI = \frac{W}{F} = \frac{609,1}{68,7} = 8,87 \text{ cm},$$

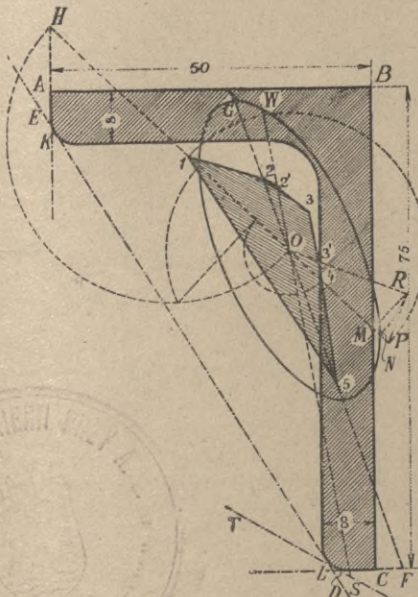
$$i_2 = OI_2 = \frac{W_1}{F} = \frac{73,2}{68,7} = 1,07 \text{ cm}.$$

W ten sposób obliczyliśmy dla kształtówek I wedle norm austriackich następującą tabliczkę:

Tablica XXXIX.

L. kształt.	i_1	i_2	L. kształt.	i_1	i_2	L. kształt.	i_1	i_2
8	2,68	0,540	20	6,46	0,878	28	8,87	1,07
10	3,34	0,620	21	6,74	0,890	28 _a	9,31	1,40
12	4,02	0,680	22	7,01	0,905	30	9,40	1,10
13	4,32	0,711	22 _a	7,44	1,28	32	9,93	1,12
14	4,59	0,710	23	7,40	0,957	35	10,86	1,20
15	4,96	0,757	24	7,67	0,971	40	12,31	1,31
16	5,24	0,783	24 _a	8,04	1,28	45	13,76	1,41
18	5,92	0,852	25	7,94	0,986	(50)	15,21	1,75
18 _a	6,39	1,31	26	8,27	1,00			

3 Kątówka (rys. 215). Przyjęliśmy tę samą kątówkę nierównoramienną, co w rys. 106 i wykreśliliśmy elipsę środkową bezwładności.

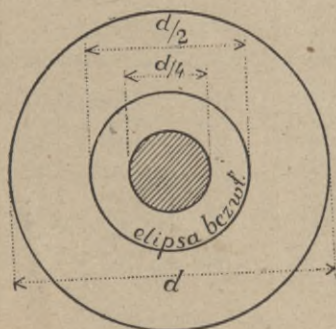


rys. 215.

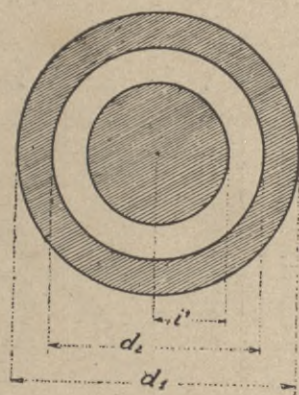
Dla położenia BC osi obrotnej wyszukujemy kierunek sprzężony HP . Z punktu N elipsy zataczamy łuk promieniem ON aż do przecięcia się z prostą, wystawioną w M , potem robimy $RP \perp OR$, to $\overline{ON}^2 = \overline{OR}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OP}$. Jeżeli więc $OI = OP$, to I jest punktem jędrnym. Gdy oś obrotowa ma położenie CD , to kierunek do niej sprzężony jest FG , a odnośny punkt jędrny 2. Dla położenia KL otrzymamy podobnie punkt 3, dla EA punkt 4, dla AB punkt 5. Gdy punkty te połączymy prostymi, otrzymamy oś jędrną. Zakrzywienie w L uwzględnimy, kreśląc dla pośredniego położenia stycznej oś sprzężoną WS . Po przeprowadzeniu konstrukcji znajdziemy punkt 2' i zamiast prostej 23, otrzymamy łuk paraboli 23 i analogicznie dla zakrzywienia w K łuk paraboli 34.

4. Koło. Tu $a = \frac{d}{4}$, (rys. 216), $e = \frac{d}{2}$, więc $i = \frac{a^2}{e} = \frac{d^2}{16} : \frac{d}{2} = \frac{d}{8}$.

Dla koła więc elipsa bezwładności jest kołem o średnicy o połowę mniejszej, a jądro przekroju także kołem lecz o średnicy $\frac{d}{4}$.



rys. 216.



rys. 217.

5. Koło wydrążone, pierścień (rys. 217). Tu

$$a = \frac{1}{4} \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \quad e = \frac{d_1}{2}$$

Zatem $i' = \frac{d_1^2 + d_2^2}{16} : \frac{d_1}{2} = \frac{1}{8} \left(d_1 + \frac{d_2^2}{d_1} \right)$. Dla $d_2 = 0$ otrzymujemy $i' = \frac{d_1}{8}$, jak pierwej.

Jeżeli porównamy jądra koła pełnego i pierścienia o tej samej powierzchni, to otrzymamy $\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2)$, $d_2 = \sqrt{d_1^2 - d^2}$. Nazwijmy $d_1 : d = x$,

to $i' = \frac{1}{8} \left(d_1 + \frac{d_1^2 - d^2}{d_1} \right)$, zatem

$$\frac{i'}{i} = \left(d_1 + \frac{d_1^2 - d^2}{d_1} \right) : d = \left(2 d_1 - \frac{d^2}{d_1} \right) : d = 2x - \frac{1}{x} \dots \dots \dots 429)$$

Stąd otrzymamy dla

$x = 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6$

$\frac{i'}{i} = 2,33 \quad 3,50 \quad 4,80 \quad 5,67 \quad 6,71 \quad 7,75 \quad 8,78 \quad 9,80 \quad 10,82 \quad 11,83$

Widzimy więc, że promień jądry pierścienia jest znacznie większy, niż koła o tym samym przekroju.

§. 89. Największe naprężenie.

Naprężenia w dowolnym punkcie L (rys. 208) obliczyć możemy według wzoru 424)

$$\nu = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{a^2} \right).$$

Jeżeli siła P działa w osi głównej np. w osi OY , to $x_1=0$, więc

$$\nu = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{yy_1}{a^2} \right) = \frac{P}{F} + \frac{Py_1y}{Fa^2} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{F}} + \frac{\mathbf{M}y}{\mathbf{I}} \dots \dots \dots 430)$$

bo $M=Py_1$.

Największe ν , które wystąpi dla *najw.* $y=e$, powinno się równać τ , więc

$$\tau = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{F}} + \frac{\mathbf{M}e}{\mathbf{I}} \dots \dots \dots 431)$$

Jeżeli $M_1=Px_1$, to możemy równ. 424) także inaczej napisać:

$$\nu = \frac{P}{F} + \frac{M_1x}{I_1} + \frac{My}{I} \dots \dots \dots 432)$$

Widzimy więc, że moment $M_w = P \cdot \overline{HO}$ możemy rozłożyć na momenty $M=Py_1$ i $M_1=Px_1$, działające ze względu na osie główne, oraz że możemy naprężenia, wywołane przez oba momenty i siłę P , dodać.

§ 90. Wyznaczenie największych naprężeń zapomocą jądra.

Niechaj w H (rys. 218) działa siła P prostopadle do przekroju, to wedle poprzedniego oś obojętna T_1T_1 będzie równoległą do osi sprzężonej z kierunkiem OH t. j. do W_1W_1 .

Moment $M=P \cdot HO$ da się rozłożyć na prostopadły i równoległy do W_1W_1 . Tylko składowy moment prostopadły do W_1W_1 wywołuje naprężenia i obrót około T_1T_1 . Moment ten nazwijmy

$$M' = P \cdot HE = P \cdot OH \text{ wst } \alpha = M \text{ wst } \alpha.$$

A więc naprężenie największe w I wedle 420)

$$\text{najw. } \nu = \frac{P}{F} + \frac{M \text{ wst } \alpha \cdot IF}{I_w},$$

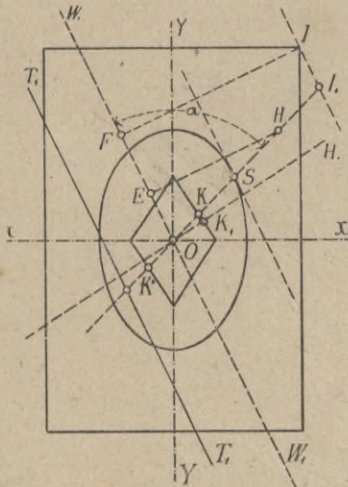
$$\begin{aligned} I_w = F \cdot (OS \text{ wst } \alpha)^2, \text{ więc } \nu &= \frac{P}{F} + \frac{M \cdot \text{wst } \alpha \cdot OI_1 \text{ wst } \alpha}{F \cdot OS^2 \text{ wst}^2 \alpha} = \\ &= \frac{P}{F} + \frac{M \cdot OI}{F \cdot OS^2}. \end{aligned}$$

Wedle 427) mamy dalej $OK' \cdot OI_1 = OS^2$, wstawmy to w poprzednie równanie, a otrzymamy

$$\text{najw. } \nu = \frac{P}{F} + \frac{M \cdot OI_1}{F \cdot OK' \cdot OI_1} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{F}} + \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{F} \cdot \mathbf{OK}'} \dots \dots 433)$$

Dalej mamy:

$$\text{najw. } \nu = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot HO}{F \cdot OK'} = \frac{P \cdot OK' + HO}{F \cdot OK'} = \frac{P}{F} \cdot \frac{K'H}{OK'} \dots 434)$$



rys. 218.

A więc największe naprężenie w warstwie skrajnej równa się ilorazowi $\frac{P}{F}$ (naprężeniu średniemu) więcej momentowi M , podzielonemu przez iloczyn powierzchni F przez promień jądry OK' , mierzony po przeciwnej stronie środka ciężkości.

W razie, jeżeli P i M pozostają te same, a zmienia się tylko położenie linii HO , naprężenie największe jest tem większem, im mniejszy jest promień jądry OK' , a więc największe naprężenie będzie dla kierunku H_1O , bo OK_1 jest najmniejszym.

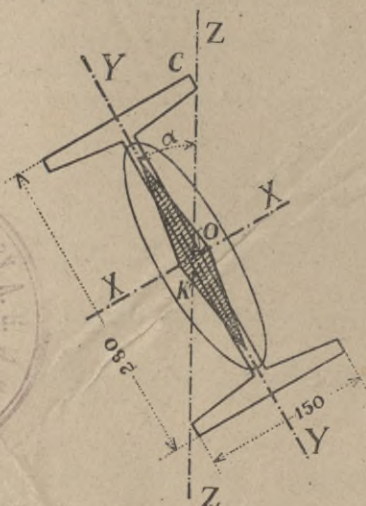
Jeżeli siła P jest równa zero, a w przekroju działa tylko moment M w płaszczyźnie OH , to z równ. 433) otrzymamy

$$\text{najw. } \nu = \frac{M}{F \cdot OK'} \dots 435)$$

Rozwiązanie zagadnienia wyznaczenia naprężeń w belkach, gdy siły nie działają w płaszczyźnie osi głównych, omawianego w § 67., jest przy użyciu jądra przekroju daleko prostszem.

Przykłady. 1. Kształtówka l. 28a użyta jest jako płatów nachylona do pionu pod kątem α , przyczem $st \alpha = 0,6$. Długość płatwi niech będzie 5 m, ciężar

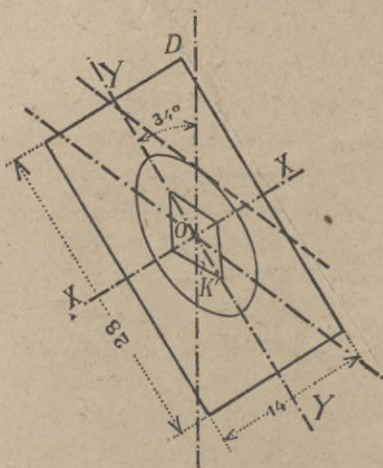
jednostajnie rozdzielony na całą długość 1,55 t, więc moment największy $M=116250 \text{ kgcm}$ (por. § 67).



rys. 219.

Na rysunku 219 wykreśliśmy jądro przekroju. Mamy $F=78,9$ $OK'=2,4 \text{ cm}$, więc wedle 435) w C

$$\text{najw. } v = \frac{116250}{78,9 \cdot 2,4} = 614,3 \text{ kg/cm}^2.$$



rys. 220.

2. Zróbmy ten sam przykład, co w § 67. Obliczyć należy napężenie największe płatwi (rys. 216), przyczem $M=73500 \text{ kgcm}$. Wedle rysunku

$$F=14 \cdot 28=392 \text{ cm}^2, OK'=2,5 \text{ cm, więc}$$

$$\text{najw. } \nu = \frac{73500}{392 \cdot 2,5} = 75 \text{ kg/cm}^2.$$

W § 67 otrzymaliśmy $\nu=77,47 \text{ kg/cm}^2$, a więc wynik nie o wiele się różniący. Naturalną jest rzeczą, że wynik będzie tem dokładniejszy, im dokładniej odczytamy OK' . Należałoby więc jądro wykreślić w naturalnej wielkości.

VII. Wytrzymałość na wyboczenie.

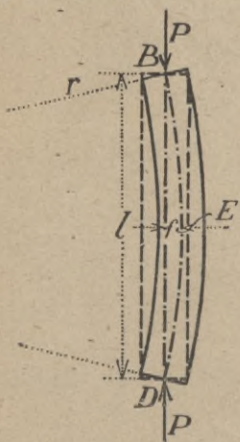
§ 91. Wzory zasadnicze Eulera i Rankina.

Jeżeli na pręt prosty BD działa siła P (rys. 221) w osi, to według równania 44)

$$P = F \tau \dots \dots \dots 436)$$

gdy F oznaaza przekrój, a τ naprężenie dopuszczalne na ciśnienie.

Powyzsze równanie ważnem jest jednak tylko do pewnej granicy. Jeżeli wysokość pręta jest większą, niż pięciokrotny najmniejszy jego wymiar, to pręt, który wtedy nazywamy słupem (n. *Säule*, an. *column*, fr. *poteau*, r. *стойка*), wyboczy się pod działaniem siły P , jak doświadczenie okazuje, i przybierze kształt BED , a zniszczenie słupa nastąpi nie przez zgniecenie, lecz przez złamanie. Wytrzymałość słupa w tym wypadku nazywamy wytrzymałością na wyboczenie (n. *Knickfestigkeit*, fr. *resistance au flambage*, an. *resistance buckling*, r. *сопротивление продольному изгибу*). Gdyby siła P działała zupełnie środkowo, t. j. gdyby jej kierunek wpadał z matematyczną dokładnością w oś i gdyby materiał słupa był zupełnie jednorodnym, nie byłoby żadnej przy-



rys. 221.

czynny wygięcia osi raczej w kierunku BED , niż w innym. Ponieważ jednak w praktyce nie możemy przypuścić zupełnie jednorodnego i równo gęstego materiału, i że siła zaczepia zupełnie dokładnie w środku ciężkości przekroju, zatem oprócz ciśnienia powstaje

w słupie także pewien moment, który sprawia, że słup się wybacza.

Przypuśćmy naprzód, że siła P działa w odstępnie g (rys. 222) od osi, przyczem to g jest tak małym, że możemy je w stosunku do y opuścić, to słup BD , którego oba końce mogą się obracać około stałych punktów B i D , wyboczy się. Nazwijmy r promień krzywizny linii ugięcia w punkcie C , to według 315) otrzymamy

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

Moment sił zewnętrznych w punkcie C jest $M = Py$, widzimy więc, że tu linja momentów jest identyczną z linją ugięcia. Dalej mamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{EI} \quad \text{Nazwijmy } v = \frac{dy}{dx}, \text{ to}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = -\frac{Py}{EI}, \quad \text{a więc } v \frac{dv}{dy} = -\frac{P}{EI}y.$$

$$\int v dv = -\frac{P}{EI} \int y dy, \quad \text{a stąd}$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{P}{EI} \frac{y^2}{2} + C, \quad \text{więc}$$

$$v = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2C - \frac{Py^2}{EI}}$$

Rozdzieliwszy niewiadome, otrzymamy

$$\frac{dy}{\sqrt{2C - \frac{Py^2}{EI}}} = dx, \quad \text{a więc}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2CEI}{P} - y^2}} = \sqrt{\frac{P}{EI}} \int dx.$$

Wykonawszy całkowanie, otrzymamy

$$\text{łuk wst} \left(y \sqrt{\frac{P}{2CEI}} \right) = x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_1, \quad \text{więc}$$

$$y \sqrt{\frac{P}{2CEI}} = \text{wst} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_1 \right), \quad \text{czyli}$$



rys. 222.

$$y = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{wst} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_1 \right) \dots \dots \dots 437)$$

Jestto równanie sinusoidy.

Ponieważ z powodu symetrii łuk BE jest przystający do łuku ED , więc musi być

$$\text{wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = \text{wst} \left(C_1 - x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \text{ więc}$$

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \text{ lub } \frac{3\pi}{2} \text{ i t. d., a zatem}$$

$$\text{wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = \text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \text{ wreszcie}$$

$$y = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \dots \dots \dots 438)$$

$$\text{Dla } x = \frac{l}{2} \text{ będzie } g = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right),$$

$$\text{a więc ze względu na 438) } y = g \frac{\text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} \dots \dots \dots 439)$$

Dla $x=0$ otrzymamy we środku pręta

$$f = \frac{g}{\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}, \text{ a zatem}$$

$$y = f \text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \dots \dots \dots 440)$$

Jeżeli teraz przypuścimy, że siła działa w osi, więc $g=0$, to według 439) byłoby $y=0$, gdyby $\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$ nie było także $=0$. Wyboczenie może więc wtedy tylko nastąpić, gdy $\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = 0$, a więc, gdy $\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3\pi}{2}$ i t. d., ogólnie $\frac{m\pi}{2}$, gdy m jest nieparzystą liczbą całą.

Stąd wynika

$$\frac{P}{EI} = \frac{m^2 \pi^2}{l^2}, \text{ więc } P = \frac{E I m^2 \pi^2}{l^2}$$

Dla $m=1$ otrzymamy najmniejszą siłę P , zdolną sprawić wybo-
czenie, mianowicie

$$P = \frac{E \pi^2 I}{l^2} \dots \dots \dots 441)$$

Dla $g=0$ otrzymamy $f = \frac{0}{0}$, więc nieoznaczone, pręt zatem
będzie w równowadze, jakkolwiek będzie strzałka f^*).

Ponieważ nie znamy strzałki f , więc i największego mo-
mentu $M=Pf$, zatem, aby moment ten nie wywołał za wielkich
naprężeń, nie możemy wcale dopuścić wybożenia; a więc musi
być

$$P < \frac{E I \pi^2}{l^2},$$

a przyjmąwszy n^{ta} pewność

$$P < \frac{\pi^2 E I}{n l^2} \dots \dots \dots 442)$$

Wzór ten ustawił pierwszy Euler, dlatego nazywamy go
wzorem Eulera.

W pewnych wypadkach możemy zadość uczynić obu rów-
naniom 436) i 442). Z równania 436) obliczymy przekrój $F = \frac{P}{\sigma}$,
a potem staramy się taki nadać kształt przekrojowi, aby I było
wielkiem i aby zadość uczynić równaniu 442).

Widzimy, że $I > \frac{n}{\pi^2} \frac{P l^2}{E} \dots \dots \dots 443)$

Jeżeli przyjmiemy dla żelaza zlewego $E = 2100000$

„ „ lanego $n = 2, E = 1000000$

„ drzewa $n = 9, E = 110000$

i jeżeli wstawimy P w t a l w m ; to otrzymamy:

dla żelaza zlewego dla $n=5$	$I > \frac{5 \cdot 10^7}{9,87 \cdot 2100000} P l^2$	$> 2,38 P l^2$	}	444)
„ „ „ „ $n=4$	$I > 1,90 P l^2$			
„ „ lanego	$I > 8,1 P l^2$			
„ drzewa	$I > 83 P l^2$			

*) Według dokładniejszej teorii Obrębowicza każdej sile $P_1 > P$ odpo-
wiada inny stan równowagi i inna strzałka f . (Obrębowicz: O wytrzymałości
prętów na wybożenie 1885). Stwierdzają to i doświadczenia Bauschingera
(p. Mittheil. 1887).

Słup dany nie powinien się wyboczyć w żadnym kierunku; jeżeli więc długości nie podparte i momenty bezwładności w innych kierunkach są inne, to musimy i dla tych innych kierunków tak samo liczyć. Przytem chodzi nam, jak zawsze, tak i tu o to, aby pewność we wszystkich kierunkach była równa.

Badając ugięcie pręta przypuszczaliśmy przekrój stały. Przekrój jednak w ten sposób obliczony potrzebnym jest właściwie tylko we środku pręta, u stopy i głowy może być przekrój $F_0 = \frac{P}{\tau}$. W takim wypadku jednak wzory się nieco zmieniają, Kayzer *) przypuszcza, że wysokość przekroju zmienia się wedle paraboli i oblicza wpływ zmienności dla przekroju kwadratowego, okrągłego, rurowego i kratowego. Wpływ zmiany przekroju jest dość znaczny. Jeżeli nazwiemy ψ współczynnik zmniejszający siłę wybaczącą l (rów. 442) $x = \frac{h_0}{h_1}$ stosunek h_0 wysokości przekroju w końcach prętu do wysokości h_1 w środku jego, to otrzymuje on następujące wartości dla ψ .

Tablica XL.

Przekrój	$x =$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Koło, kwadrat.		0	0.502	0.686	0.814	0.914	1.0
Rura, prostokąt leżący	}	0	0.655	0.774	0.863	0.936	1.0
Prostokąt stojący		0.863	0.903	0.928	0.958	0.980	1.0
2 ułki, połączone krata	}	0	0.787	0.857	0.909	0.955	1.0

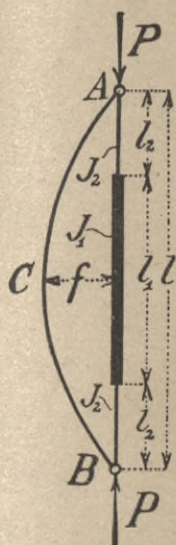
Zamiast używać współczynnika ψ można też wyznaczyć położenie przekroju miarodajnego, dla którego $l = \psi I$, Kayzer otrzymuje odległość przekroju miarodajnego od końca prętu x .

Tablica XLI.

Przekrój	dla $x =$	0.2	0.5	0.8	l
Koło, kwadrat.		0.278	0.315	0.334	l
Rura, prostokąt leżący		0.297	0.322	0.335	l
Prostokąt stojący		0.326	0.334	0.339	l
2 ułki połączone krata		0.314	0.327	0.331	l

*) P. Der Eisenbau 1916 str. 1.

Jak widzimy przekrój miarodajny znajduje się mniej więcej w $\frac{1}{3}$ długości pręta.



rys. 223.

Jeżeli przekrój słupa jest zmiennym wedle (rys. 223), to Andréé otrzymuje, przyjmując ACB jako parabolę*) wzór przybliżony

$$P = \frac{E I_1 l^2}{4 l_2^3 \left(\frac{l}{3} - \frac{l_2}{4} \right) \frac{I_1}{I_2} + \left(\frac{5 l^4}{192 l_2^3} - \frac{l}{3} - \frac{l^2}{4} \right)} \quad (445)$$

Profesor Kayzer dochodzi do innego wzoru

$$P = k \frac{\pi^2 E I_1}{l^2} \quad (446)$$

$$\text{przyczem } k = \frac{1}{\left(1 - \frac{l_1}{l}\right) \left(\frac{I_1}{I_2} - 1\right) + 1} \quad (447)$$

$$\text{dla } \frac{I_1}{I_2} = 2, \frac{l_1}{l} = 0.5, \quad k = 0.889$$

$$\text{dla } \frac{I_1}{I_2} = 3, \frac{l_1}{l} = 0.2, \quad k = 0.493$$

$$\text{dla } \frac{I_1}{I_2} = 4, \frac{l_1}{l} = 0.9, \quad k = 0.497$$

Ogólny sposób obliczania słupów z dowolnie zmiennym przekrojem podaje Elwitz (Zent. d. Bauverw. 1917 str. 517 i 1918 str. 222).

Wzory powyższe polegają na przypuszczeniu, że siła P działa zupełnie środkowo, co w praktyce rzadko tylko możemy urzeczywistnić. Zresztą wzory te ważne są tylko do granicy sprężystości. Po za nią E nie jest ilością stałą, lecz jest funkcją naprężenia. Tymczasem z wzoru Eulera nie możemy wcale naprężenia wyznaczyć i to jest dalszą jego niedogodnością.

Nazwijmy ν naprężenie pręta wyobczonego (rys. 217) w punkcie E , gdzie największe ugięcie f . Wyrazić je możemy według równ. 431)

$$\nu = \frac{P}{F} + \frac{P f e}{I} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{e f}{a^2} \right)$$

*) P. Eisenbau 1915, str. 305.

gdzie e oznacza oddalenie skrajnej warstwy przekroju od osi
a $I = Fa^2$.

Jeżeli w przybliżeniu przypuścimy, że ugięta oś BED jest
łukiem kołowym, to $f = \frac{l^2}{8r}$.

Dalej mamy wedle 143) i 145) $\tau I = Me$, i $E I = Mr$, a stąd

$$r = E \frac{I}{M} = E \frac{e}{\tau}, \text{ więc } f = \frac{l^2 \tau}{8 E e}, \text{ zatem}$$

$$\nu = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{l^2 \tau}{8 E a^2} \right) = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{\tau}{8 E} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \right).$$

Jeżeli nazwiemy teraz $\alpha = \frac{\tau}{8 E}$, to $\nu = \frac{P}{F} \left(1 + \alpha \frac{l^2}{a^2} \right)$,

jeżeli zaś zamiast ν wstawimy τ , otrzymamy

$$\tau = \frac{P}{F} \left(1 + \alpha \frac{l^2}{a^2} \right) \dots \dots \dots 448)$$

a stąd

$$F = \frac{P}{\tau} \left(1 + \alpha \frac{l^2}{a^2} \right) = \frac{P}{\tau} \left(1 + \alpha \frac{F l^2}{I} \right) = F_0 \zeta \dots \dots 449)$$

jeżeli $\frac{P}{\tau} = F_0$.

Wzór ten ustawił najprzód Rankine na podstawie doświadczeń Hodkisona. Spółczynnik wyboczenia (n. *Knickungskoeffizient*) α możemy przyjąć w przybliżeniu dla żelaza spawanego $\alpha = 0,000044$, dla zlewne go $\alpha = 0,000077$, dla żelaza lanego $\alpha = 0,00016$, jeżeli leizna jest jednostajna, a dziura w słupach o przekroju rurowych jest zupełnie w środku. Dla większych słupów lanych leżących, w których zatem leizna nie jest równo gęstą, możemy przyjąć $\alpha = 0,00068$.

Dla drzewa jest spółczynnik wyboczenia $\alpha = 0,00015$.

Z wzoru 446) widzimy, że ponieważ ζ jest zawsze większym niż jedność, więc $F > F_0$. Spółczynnik ζ nazywamy więc spółczynnikiem zwiększającym.

Widzimy więc, że gdy licząc wedle wzoru Eulera może być $F = F_0$, jeżeli tylko zadość uczynimy rów. 442), tu musi być zawsze $F > F_0$.

Stosunek $\frac{l}{a} = s$ nazywa Huber smukłością (n. *Schlankheitsgrad*) słupa.

Bawarskie rozporządzenie nakazuje użycie wzoru Rankina
i dla żelaza zlewnego $a=0.00013$
„ „ „ lanego $\alpha=0.0006$

§ 92. Wyznaczenie długości wolnej.

Poprzednie wzory są ważne tylko wtedy, gdy oba końce słupa są wolne, to jest mogą się obracać około środków ciężkości przekrojów końcowych. Jeżeli jeden lub oba końce są przytrzymane lub utwierdzone, wtedy wzory się zmieniają. Możemy jednak poprzednich wzorów z małą odmiianą i tutaj użyć, jak to zaraz wyłożymy.



rys. 224.

1) Jeden koniec utwierdzoj, drugi wolny. Tu słup AB (rys. 224) wygina się tak, jak połowa BE (rys. 217) słupa w poprzednim wypadku, więc możemy zatrzymać te same wzory, rów. 442) lub 446), wstawivszy tylko w nie $l=2l_1$. Druga strona równania 442) będzie więc cztery razy mniejszą, niż w przypadku, opisanym w poprzednim paragrafie, wytrzymałość słupa o tym samym przekroju jest więc cztery razy mniejszą.

2) Jeden koniec utwierdzony, drugi przytrzymany. Przekrój B (rys. 225) jest przytrzymany, jeżeli może się wprawdzie obracać około swego środka ciężkości, lecz punkt ten zostać musi na prostej DB .

Ponieważ belka jest w B przytrzymana, więc powstaje tu oddziaływanie poziome N , a więc moment w punkcie C jest $M=Py-N(l_1-x)$. Według równ. 315) będzie więc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v_1 = -\frac{M}{EI} = -\frac{N}{EI}(l_1-x) - \frac{P}{EI}y.$$

Różniczkujmy to równanie, a otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= -\frac{N}{EI} - \frac{P}{EI} \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2v_1}{dx^2} &= -\frac{P}{EI} \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}v_1 \quad \dots \quad 447) \end{aligned}$$

Równanie to jest analogiczne do równania



rys. 225.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}y,$$

któreśmy mieli w poprzednim paragrafie; otrzymamy więc podobnie, jak tam (równ. 437)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{ wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \text{ albo}$$

$$\frac{N}{EI}(l_1 - x) - \frac{P}{EI}y = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{ wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \text{ a stąd}$$

$$y = \frac{EI}{P} \left[\frac{N}{EI}(l_1 - x) - \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{ wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \right]. \quad 450)$$

Dalej mamy $\frac{dy}{dx} = -\frac{N}{P} - \frac{EI\sqrt{2C}}{P} \text{ dost} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$.

Dla $x=0$ jest $\frac{dy}{dx} = 0$, więc $N = -EI\sqrt{2C}$ dost C_1 ,

dla $x=0$ jest $y=0$, więc $\frac{Nl_1}{EI} = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{ wst} C_1$, a zatem

$$\text{st} C_1 = -l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} \dots \dots \dots 451)$$

Dla $x=l_1$ jest $y=0$, więc $\sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{ wst} \left(C_1 + l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = 0$

Ponieważ $C > 0$, gdyż $N > 0$, a zatem

$$\text{wst} \left(C_1 + l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = 0, \text{ więc } C_1 + l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pi \text{ lub } 2\pi \text{ i t. d.}$$

Stąd zaś wynika, że $\text{st} l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} = -\text{st} C_1$, a ze względu na 451)

$$\text{st} l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} = l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Najmniejsza wartość, dla której $\text{st} \varphi = \varphi$, jest $\varphi = 0$, druga wartość $\varphi^0 = 257^\circ 27'$, przyczem $\text{st} \varphi = \varphi = 4,493$. Pierwsza jest niemożliwą, bo P nie jest $= 0$, więc

$$l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} = 4,493, \text{ a stąd}$$

$$P = \frac{4,493^2 EI}{l_1^2} = \frac{2,04\pi^2 EI}{l_1^2} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \text{ gdy}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}} l_1 = 0,707 l_1$$

dokładniej $l = \frac{1}{\sqrt{2,04}} l_1 = 0,71 l_1 \dots \dots \dots 452)$

A więc możemy użyć poprzednich wzorów 442 i 445), jeżeli zamiast l wstawimy odpowiednią długość wedle równania 450). Długość ta, którą trzeba wstawić we wzory 442) i 445) zamiast l , aby obliczyć wytrzymałość słupów jednym lub oboma końcami utwierdzonych lub przytrzymanych, nazywa się długością wolną, swobodną (n. *freie Länge*, f. *longueur de sinusité*).

W tym wypadku $l = \frac{1}{\sqrt{2}} l_1$, zatem ze względu na równanie 442) wytrzymałość jest dwa razy większą, niż w przypadku, opisanym w poprzednim paragrafie.

3) Oba końce utwierdzone (rys. 226). Tu w punktach B i D powstają momenty z powodu symetrii równe, które nazwiemy M_1 , a więc w punkcie C będzie moment $M = M_1 + Py$, zatem na podstawie równania 315) będzie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M_1 + Py}{EI},$$

a stąd podobnie, jak w § 91, gdy

$$v = \frac{dy}{dx}, \quad v \, dv = \frac{d^2y}{dx^2} dy = - \frac{M_1 + Py}{EI} dy.$$

Gdy równanie to zcałkujemy, otrzymamy

$$\frac{v^2}{2} = - \frac{M_1}{EI} y - \frac{Py^2}{2EI} + C, \text{ nareszcie}$$

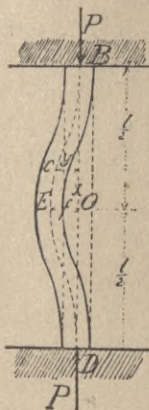
$$v = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2C - \frac{2M_1}{EI} y - \frac{Py^2}{EI}}.$$

Dalej będziemy mieli

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2CEI}{P} - \frac{2M_1}{P} y - y^2}} = \int \sqrt{\frac{P}{EI}} dx = x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_1.$$

Zcałkowawszy wyraz pierwszy, otrzymamy

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2CEI}{P} - \frac{2M_1 y}{P} - y^2}} = \text{łuk wst} \sqrt{\frac{8CEI}{P} + \frac{4M_1^2}{P^2}} = x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_1,$$



rys. 226.

a stąd $y = -\frac{M_1}{P} \pm \sqrt{\frac{2CEI}{P} + \frac{M_1^2}{P^2}}$ wst $\left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$.

Ponieważ część linii ugięcia EB jest przystająca do części ED , więc

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \text{ lub } \frac{3\pi}{2} \text{ i t. d., a zatem}$$

$$y = -\frac{M_1}{P} \pm \sqrt{\frac{2CEI}{P} + \frac{M_1^2}{P^2}} \text{ dost } \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right).$$

Dla $x = \frac{l_1}{2}$ jest $y = 0$, więc

$$0 = -\frac{M_1}{P} \pm \sqrt{\frac{2CEI}{P} + \frac{M_1^2}{P^2}} \text{ dost } \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \text{ a zatem}$$

$$y = -\frac{M_1}{P} + \frac{M_1}{P} \frac{\text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} = \frac{M_1}{P} \left[\frac{\text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} - 1 \right] \quad 453)$$

Dla $x = 0$ jest $y = f$, więc $f = \frac{M_1}{P} \left[\frac{1}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} - 1 \right]$, zatem

$$y = -\frac{M_1}{P} + \left(f + \frac{M_1}{P} \right) \text{ dost } \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right).$$

Dalej otrzymamy z równania 453)

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{M_1}{P} \frac{\text{wst} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}.$$

Dla $x = \frac{l_1}{2}$ jest $\frac{dy}{dx} = 0$, więc albo $\frac{M_1}{P} = 0$, co nie może być,

lub też

$$\frac{\text{wst} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} = \text{st} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = 0.$$

A więc $\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pi$ lub 2π itd., ogólnie $m\pi$. Stąd otrzymamy

$$P = \frac{4m^2\pi^2 EI}{l_1^2}.$$

Najmniejsza siła P , która sprawia wyboczenie, jest dla $m=1$

$$P = \frac{4 \pi^2 EI}{l_1^2} \dots \dots \dots 454)$$

Wzór ten przeistoczy się we wzór 441) jeżeli podstawimy

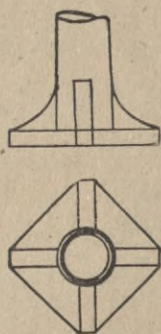
$$l = \frac{l_1}{2} \dots \dots \dots 455)$$

Długość wolna jest więc tu równa połowie długości słupa.

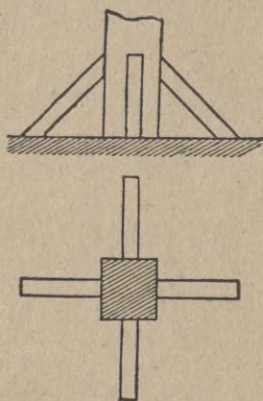
4) Oba końce i środek słupa przytrzymane (rys. 227). Tu obie połowy słupa BE i ED odkształcają się tak, jak słup BED (rys. 227), więc długość wolna $l = \frac{l_1}{2}$, a zatem wytrzymałość na wyboczenie jest cztery razy większą, niż w przypadku, opisanym w poprzednim paragrafie.



rys. 227.



rys. 228.



rys. 229.

Zrobić tu musimy jeszcze uwagę, że koniec słupa wtedy tylko możemy uważać za utwierdzony, jeżeli tam styczna linii ugięcia nie zmienia się podczas wyboczenia, a więc gdy przyporami (rys. 228) lub zastrzałami (rys. 229) zabezpieczymy niezmienną styczną. W braku przypór lub zastrzałów musimy uważać koniec belki tylko jako przytrzymamy.

Pręt wybacza się prostopadle do tego kierunku, dla którego $\frac{l}{a}$ jest największem. Jeżeliby wyboczenie w tym kierunku (n. p. dla osi pod 45°) pociągało za sobą skręcenie nitowanych końców pręta, to wtedy należy uważać te końce jako utwierdzone.

§ 93. Wzory Tetmajera.

Powiedzieliśmy powyżej, że wzór Eulera może być ważnym tylko do granicy sprężystości. Obok niego wyprowadziliśmy wzór Rankina. Doświadczenie musiało rozstrzygnąć, wedle którego wzoru należy w praktyce obliczać. Doświadczenia takie robili między innymi Bauschinger w Monachium, Tetmajer w Zurychu i Kirsch we Wiedniu. Do granicy sprężystości wedle Eulera mamy, jeżeli nazwiemy siłę, która wybacza pręt B , wedle

$$441) B = F \mu_w = \frac{E \pi^2 I}{l^2} \text{ więc } \mu_w = \frac{E \pi^2 I}{F l^2} = E \pi^2 \left(\frac{a}{l}\right)^2, \text{ albo}$$

$$\mu_w \left(\frac{l}{a}\right)^2 = E \pi^2 = C \dots \dots \dots 456)$$

Jest to równanie hyperboli cde (rys. 230).



rys. 230.

Z doświadczeń pokazało się, że w rzeczywistości wzór Eulera daje wyniki zgodne z prawdą, ale tylko dla prętów wysmukłych, dla wielkich wartości $\frac{l}{a}$ i tak np. dla żelaza zlewne dla $\frac{l}{a} > 105$, dla których przy wyboczeniu naprężenie nie przekracza jeszcze granicy sprężystości. Dla prętów o mniejszych wartościach $\frac{l}{a}$ przy wyboczeniu niesprężystym nie da się również zastosować wprost wzór Rankina, bo współczynnik wyboczenia α nie jest

ilością stałą ani nawet funkcją $\frac{l}{a}$, ale wogóle współczynnik zwiększający ζ jest funkcją $\frac{l^*}{a}$. Tetmajer na podstawie doświadczeń przyjął, że μ_w jest funkcją prostolinijną dla mniejszych $\frac{l}{a}$ (prosta *dg*). Zamiast współczynnika zwiększającego można wprowadzić w rachunek jego odwrotność $\zeta' = \frac{1}{\zeta}$, współczynnik zmniejszający (n. *Abminderungscoefficient*), a zatem

$$F = \frac{F_0}{\zeta}, \quad r_w = \frac{F}{F \zeta} = r \zeta' \quad \dots \quad (457)$$

Ogólnie jest $\zeta' = 1 - \alpha \frac{l}{a}$, $r_w = r \left(1 - \alpha \frac{l}{a} \right) = r - \alpha r \frac{l}{a}$.

Jeżeli przez n pomnożymy obie strony równania, to

$$\mu_w = \mu - \alpha \cdot \mu \frac{l}{a} = \mu - C_1 \frac{l}{a} \quad \dots \quad (458)$$

We wzorze powyższym μ oznacza granicę ciastowatości na ciśnienie.

Tetmajer otrzymał: a) dla drzewa dla $n=3.5$

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } 5 < \frac{l}{a} < 100, \quad \zeta' = 1,047 - 0,00693 \frac{l}{a} \\ \text{„ } 100 < \frac{l}{a}, \quad \dots \quad \zeta' = 3525 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (459)$$

Na tej podstawie obliczyliśmy następującą tabliczkę:

Tablica XLII.

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
10	0,979	60	0,632	110	0,293	160	0,136
15	0,943	65	0,596	115	0,268	165	0,129
20	0,907	70	0,561	120	0,246	170	0,121
25	0,871	75	0,525	125	0,225	175	0,114
30	0,839	80	0,493	130	0,207	180	0,107
35	0,804	85	0,457	135	0,193	185	0,104
40	0,771	90	0,421	140	0,179	190	0,096
45	0,736	95	0,387	145	0,168	195	0,093
50	0,700	100	0,353	150	0,157	200	0,089
55	0,664	105	0,321	155	0,146		

*) Engesser przyjmuje dla naprężeń poza granicą sprężystości we wzorze Eulera zamiast współczynnika sprężystości E współczynnik wyboczenia (n. *Knickmodul*) T .

b) Żelazo lane (żeliwo) dla $n=8$

dla $5 < \frac{l}{a} < 80$,

$$\zeta' = 0,97 + 0,0000663 \left(\frac{l}{a} \right)^2 = 0,0151 \frac{l}{a} \quad \left. \vphantom{\zeta'} \right\} \quad 460)$$

„ $80 < \frac{l}{a}$, $\zeta' = 1234 \left(\frac{a}{l} \right)^2$.

Stąd obliczyliśmy następującą tabliczkę:

Tablica XLIII.

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
10	0,827	50	0,386	90	0,152	130	0,073
15	0,760	55	0,345	95	0,137	135	0,068
20	0,697	60	0,309	100	0,123	140	0,063
25	0,636	65	0,275	105	0,112	145	0,059
30	0,580	70	0,245	110	0,102	150	0,055
35	0,526	75	0,218	115	0,093	160	0,048
40	0,476	80	0,194	120	0,086	170	0,043
45	0,429	85	0,171	125	0,070	200	0,031

c) Żelazo zlewne z wytrzymał. na rozciąganie
 $< 4000 \text{ kg/cm}^2$ dla $n=3,8$

$$\left. \begin{aligned} 10 < \frac{l}{a} < 105 \quad \zeta' = 0,816 - 0,003 \frac{l}{a} \\ 105 < \frac{l}{a} \quad \zeta' = 5584 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 461)$$

Stąd obliczono następującą tabliczkę:

Tablica XLIV.

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
10	0,786	60	0,636	110	0,462	160	0,218
15	0,771	65	0,621	115	0,423	165	0,206
20	0,756	70	0,606	120	0,389	170	0,194
25	0,741	75	0,591	125	0,358	175	0,183
30	0,726	80	0,576	130	0,332	180	0,173
35	0,711	85	0,561	135	0,307	185	0,164
40	0,696	90	0,546	140	0,286	190	0,155
45	0,681	95	0,531	145	0,266	195	0,147
50	0,666	100	0,516	150	0,249	200	0,140
55	0,651	105	0,501	155	0,233	210	0,127

a) Stal zlewna b. miękka ($\mu > 4000$):

$$\left. \begin{array}{l} 10 < \frac{l}{a} < 105 \quad \zeta' = 0,713 - 0,00259 \frac{l}{a} \\ 105 < \frac{l}{a} \quad \zeta' = 4934 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \end{array} \right\} \dots 462)$$

Stąd obliczyliśmy następną tabliczkę:

Tablica XLV.

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
10	0,687	50	0,584	90	0,480	150	0,219
15	0,674	55	0,571	95	0,467	160	0,193
20	0,661	60	0,558	100	0,454	170	0,171
25	0,648	65	0,545	105	0,441	180	0,152
30	0,635	70	0,532	110	0,412	190	0,137
35	0,622	75	0,519	120	0,343	200	0,123
40	0,609	80	0,506	130	0,242	210	0,112
45	0,596	85	0,493	140	0,252		

c) Stal niklowa. Mayer na podstawie dotychczasowych doświadczeń oblicza dla stali o zawartości niklu 2·0—3·7% wzory ($\mu = 6000 \text{ kg/cm}^2$)

$$\left. \begin{array}{l} 10 < \frac{l}{a} < 81 \quad \zeta' = 0,75 - 0,0034 \frac{l}{a} \\ 81 < \frac{l}{a} \quad \zeta' = 3300 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \end{array} \right\} \dots 462 a)$$

Rozp. polskiego minist. robót publicznych z r. 1920 poleca przyjmować współczynniki zmniejszające dla drzewa wedle t. XLII. Dla innych materiałów wedle wzorów Jasińskiego, a mianowicie:

Tablica XLVI.

a) Żelazo zlewne.

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
5	0,872	55	0,677	105	0,482	155	0,233
10	0,852	60	0,657	110	0,462	160	0,218
15	0,833	65	0,638	115	0,423	165	0,206
20	0,813	70	0,618	120	0,389	170	0,194
25	0,794	75	0,549	125	0,358	175	0,183
30	0,774	80	0,579	130	0,331	180	0,173
35	0,775	85	0,559	135	0,307	185	0,164
40	0,735	90	0,540	140	0,286	190	0,155
45	0,715	95	0,521	145	0,266	195	0,147
50	0,694	100	0,501	150	0,249	200	0,140

b) Żelazo spawane.

5	0,945	55	0,710	105	0,474	155	0,235
10	0,927	60	0,686	110	0,451	160	0,220
15	0,898	65	0,662	115	0,427	165	0,207
20	0,875	70	0,634	120	0,392	170	0,195
25	0,851	76	0,616	125	0,361	175	0,184
30	0,827	80	0,592	130	0,334	180	0,174
35	0,404	85	0,569	135	0,309	185	0,165
40	0,781	90	0,545	140	0,288	190	0,156
45	0,757	95	0,521	145	0,268	195	0,148
50	0,733	100	0,498	150	0,251	200	0,141

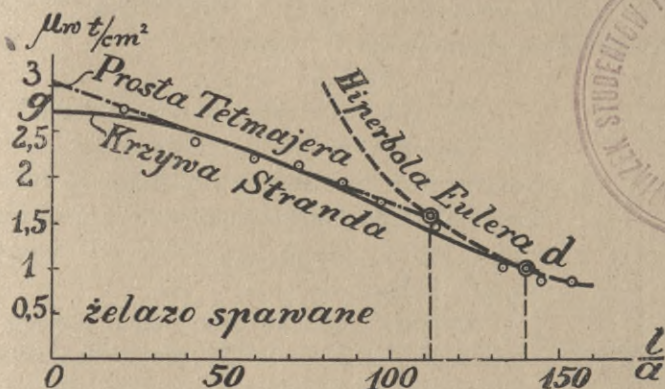
c) Żeliwo (żelazo lane).

5	0,897	55	0,345	105	0,112	155	0,051
10	0,827	60	0,309	110	0,102	160	0,048
15	0,760	65	0,275	115	0,097	165	0,045
20	0,697	70	0,245	120	0,086	170	0,043
25	0,636	75	0,218	125	0,074	175	0,040
30	0,580	80	0,194	130	0,073	180	0,038
35	0,526	85	0,171	135	0,068	185	0,036
40	0,476	90	0,152	140	0,063	190	0,034
45	0,429	95	0,137	145	0,059	195	0,032
50	0,386	100	0,123	150	0,055	200	0,031

Emperger ustawił wzór empiryczny dla słupów o końcach płaskich dla żelaza zlewne

$$\mu_w = 3.1 - 0.0081 \frac{l}{a} \text{ t/m}^2 \dots \dots \dots 463)$$

Doświadczenia Kármána stwierdziły, że granica wyboczenia leży powyżej prostej Tetmajera *gd* (rys. 230), a Strand wyznaczył wzory, wedle których linja *gd* nie jest prostą, lecz krzywa styczna w *d* (rys. 230 a), która bardzo dobrze zgadza się z doświadczeniami Tetmajera.



rys. 230 a.

Strand otrzymuje

$$\mu_w = \frac{D}{\left(\frac{e}{am}\right)^n} \text{ w t/cm}^2 \dots 62 a)$$

przyczem *D* oznacza granicę zgniecenia, *e* podstawę log. nat. *m* i *n* stałe wedle następnjej tabliczki:

Tablica XLVI a.

Materiał	stałe wzoru	Stranda		ważne do
	<i>D</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	$\frac{l}{a}$
Żelazo spawane	2.75	140	2	140
„ zlewne	3.00	140	2	140
Stal lana	4.30	120	2	120
Drzewo	0.265	101	2	101
Żeliwo	8.50	48	1	96

Wzory Stranda, chociaż lepsze od Tetmajera nie nadają się jednak tak dobrze do praktycznego użytku jak Tetmajera.

§ 93. Przekroje złożone.

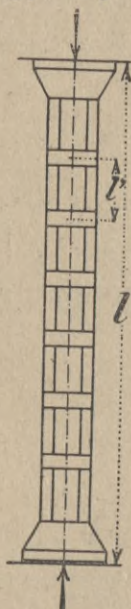
Słupy, składające się z kilku kształtówek, musimy połączyć w pewnych odstępach, aby przekrój można było uważać za całość (rys. 231). Przedewszystkiem należałoby żądać, aby części słupa na długości l się nie wyboczyły, a więc wedle 443) $I_1 \geq 2,38 Pl^2$, albo podzieliwszy przez F , $a_1^2 \geq 2,38 v_0 l^2$. Jeżeli v_0 przyjmiemy $1 t/cm^2$ i wstawimy l w cm , to

$$l \leq 65 a_1 \dots \dots \dots 464)$$

W praktyce dajemy tu odstęp jednak mniejszy, najwyżej $l = 50 a_1$, częściej jeszcze mniej. Emperger twierdzi na podstawie doświadczeń, że tylko wtedy można słup jako całość obliczać, jeśli l jest o połowę mniejszem od obliczonego, więc $l < 33 a_1$.

Zwrócić też przytem należy uwagę na tę okoliczność, że z powodów nie dość dokładnego wykonania siła działająca na słup nie rozdziela się zupełnie jednostajnie na jego części. Możemy przyjąć, że jeśli słup składa się z dwu części a siła jest P_1 , to na jedną część działa $P = 0,7 P_1$, jeśli z czterech, to $P = 0,35 P_1$. Krohn przyjmuje, że na pas o przekroju F_1 przypada

$$P = P_1 \frac{F_1}{F} \frac{272}{272 - \frac{l}{h}}, \text{ gdzie } h \text{ oznacza wysokość}$$



rys. 231. przekroju.

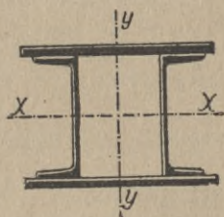
Profesor Saliger*) wychodzi z wzoru Tetmajera, który

*) „Über den Knickwiderstand gegliederter Stäbe“. *Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Verein.* 1912, str. 5. Porównaj także „Zur Knickfestigkeit gegliederter Stäbe von Mayer-Mita“ *Z. d. österr. I. A. V.* 1914, str. 246, Nitsche: Die Berechnung eiserner Tragwerkteile auf Knickung *Wochen. f. d. öffentl. Baud.* 1916 str. 101, Krohn: Beitrag zur Untersuchung der Knickfestigkeit gegliederter Stäbe *Zentr. d. Bauw.* 1902, str. 559, Mathieu: Note sur le flambage des pièces à treillis *Gen. Civ.* 1915, II, str. 408.

ogólnie brzmi wedle 456) $\mu_w = \mu - C \frac{l}{a}$, przyczem μ oznacza granicę ciastowatości. Dla żelaza zlewnego otrzymamy $\mu_w = 3,1 - 0,0114 \frac{l}{a} t/cm^2$.

W rys. 232. mamy przekrój słupa, złożonego z dwu uwek, łączonych w odstępach l' wstęgami. Wtedy ze względu na oś XX obliczamy słup jako całość, ze względu na oś YY musi być też

$$\mu_{w1} = \mu - C_1 \frac{l'}{a_1} \dots \dots \dots 465)$$



rys. 232.

Wytrzymałość całego pręta jest więc wyczerpaną, jeżeli naprężenie największe będzie μ_{w1} . Możemy więc uważać, że μ_{w1} jest wytrzymałością materiału dla osi Y i napisać: naprężenie wybaczące dla osi Y będzie $\mu_y = \mu_{w1} - C_1 \frac{l_y}{a_y}$. Jak wielkie jest C_1 ? We wzorze 456) wyraz C oznacza naprężenie wskutek wygięcia pręta. Jeżeli pręt nieobciążony, wygięcia niema, więc $C=0$, jeżeli się wybacza, mamy całe $C \frac{l}{a}$. Saliger więc przyjmuje $C : C_1 = \mu : \mu_{w1}$,

$$\text{stad } C_1 = \frac{\mu_w}{\mu} C = \frac{\mu - C \frac{l_1}{a_1}}{\mu} C = C \left(1 - \frac{C}{\mu} \frac{l_1}{a_1} \right), \text{ więc}$$

$$\mu_y = \mu - C \frac{l_1}{a_1} - C \left(1 - \frac{C}{\mu} \frac{l_1}{a} \right) \frac{l_y}{a_y} = \mu - C \left(\frac{l_y}{a_y} + \frac{l_1}{a_1} - \frac{C}{\mu} \frac{l_y}{a_y} \frac{l_1}{a_1} \right) \quad 466)$$

Dla żelaza zlewnego otrzymamy:

$$\mu_y = 3,1 - 0,0114 \left(\frac{l_y}{a_y} + \frac{l_1}{a_1} \right) + 0,000042 \frac{l_y}{a_y} \frac{l_1}{a_1} \dots \dots 467)$$

Jeżeli to samo zastosujemy do wzorów Eulera, otrzymamy dla większego $\frac{l_y}{a_y}$

$$\mu_y = \left(1 - \frac{C}{\mu} \frac{l_y}{a_y} \frac{l_1}{a_1} \right) \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{a} \right)^2} \dots \dots \dots 468)$$

Wzory te można jeszcze inaczej napisać.

Jeżeli współczynnik zmniejszający dla całego pręta jest ζ' , dla części pręta ζ'_1 to $\mu_y = \mu \zeta' \zeta'_1 \dots \dots \dots 469)$

Więc współczynnik wytrzymałości na wybočenje otrzymamy mnożąc μ przez współczynnik zmniejszający dla całego pręta i przez współczynnik zmniejszający dla części pręta między stężeniami.

Koleje austrjackackie przyjmują

$$\tau_w = 1226 \zeta' \zeta_1.$$

Lossier ustawił następane równanie

$$P_w = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(\frac{\alpha}{1 + \frac{I + 2I_1}{2 \cdot 5 n_1^2 I_1} \alpha} \right) = \frac{\pi^2 EI}{l^2} k \dots \dots \dots 470)$$

przyczem I_1 oznacza moment bezwładności jednej części pręta (jednego pasu), I moment bezwładności całości, $n_1 = \frac{l}{l_1}$ ilość przedziałów, α jest pewien współczynnik, a to

dla $n_1 =$	2	3	4	5	6	7	8	∞
$\alpha =$	1.62	1.22	1.11	1.07	1.05	1.04	1.03	1.00

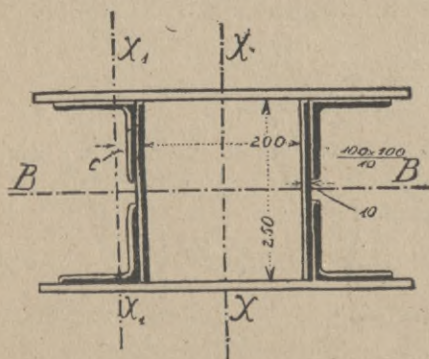
Poprzeczki należy obliczać podług Krohna wedle największej

siły poprzecznej
$$Q = \frac{F}{28} \dots \dots \dots 471)$$

gdzie F oznacza całkowity przekrój słupa w cm^2 , Q w t .

1. **Przykład.** Obliczyć obciążenie dopuszczalne słupa o przekroju, podanym w rys. 233, który połączony jest co 50 cm poprzeczkami. Długość wolna

w obu kierunkach $6m = 600 cm$. Przekrój $F = 2(25 \cdot + 2 \cdot 19,16) = = 126,8 cm^2$, moment bezwładności ze względu na oś XX



rys. 233.

$$I = \frac{1}{12} 25 (22^3 - 20^3) =$$

$$+ 4[174,6 + 19,16 (10 + 2,82)^2] = = 5517 + 13468 = 18985 cm^4,$$

więc $a = \sqrt{\frac{18985}{126,8}} = 12,23 cm,$

zatem $\frac{l}{a} = \frac{600}{12,23} = 49,1$

stąd $\zeta' = 0,669.$

Dla połowy przekroju $I_1 = = 63,4 cm^2$, odstęp środka ciężkości połowy przekroju otrzymamy

$$c = \frac{S}{F_1} = \frac{2 \cdot 19,16 \cdot 2,82 - 1 \cdot 25}{63,4} = 1,31 cm, \quad I_1 = 2[174,6 + 19,16 (2,82 - 1,31)^2] + \frac{1}{12} 25 \cdot 1^3 + 25 \cdot 2,31^2 = 353 cm^4, \quad \text{więc}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{353}{63,4}} = 2,36 cm, \quad \text{zatem} \quad \frac{l_1}{a} = \frac{50}{2,36} = 21,4, \quad \text{więc} \quad \zeta'_1 = 0,752.$$

Wedle 466) dla $\tau=800 \text{ kg/cm}^2$, $\tau_w=800 \cdot 0,669 \cdot 0,752=402 \text{ kg/cm}^2$.

Jeżeli przekrój użyteczny jest $126,8-4 \cdot 2 \cdot 2=110,8 \text{ cm}^2$, to $P=110,8 \times 402=44542 \text{ kg}$.

Ze względu na oś BB obciążenie mogłoby być większem.

2. Przykład. Obliczyć obciążenie dopuszczalne słupa, złożonego z czterech kątownek, $l=6,5 \text{ m}$, poprzeczki co $0,850 \text{ m}$. Kątowniki $\frac{60 \cdot 60}{8}$, więc $F_1=9,02$, 2 kątowniki $F_2=18,04$, 4 kątowniki $F_4=36,08 \text{ cm}^2$. Najmn. $I_1=12,3$, $I_2=58,6$, $I_4=$
 $=4(29,3+9,02 \cdot 2,06^2)=1351 \text{ cm}^4$, $a_4=\sqrt{\frac{1351}{36,08}}=6,12 \text{ cm}$, $\frac{l}{a_4}=\frac{650}{6,12}=106 > 105$,

stąd $\zeta'=0,478$. Dla połowy przekroju $a_2=\sqrt{\frac{58,6}{18,04}}=1,79$, $\frac{l_2}{a_2}=\frac{85}{1,79}=4,75$,

więc $\zeta'_2=0,706$. Dla $\tau=800 \text{ kg/cm}^2$, $\tau_w=800 \cdot 0,478 \cdot 0,706=270 \text{ kg/cm}^2$

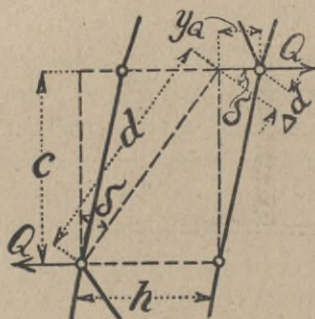
Jeżeli przekrój użyteczny jest $36,08-4 \cdot 1,8 \cdot 0,8=31,32 \text{ cm}^2$, to $P=31,32 \times 270=8459 \text{ kg}=8,46 \text{ t}$.

Jeżeli oba pasy słupa połączymy kratą, to w ogólności siła wybacząca będzie mniejszą, niż dla słupa o przekroju pełnym.

Możemy wogóle napisać $P_w=\alpha \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, a gdy przekroji moment bezwładności jednego pasa nazwiemy F_p i $I_p \cong F_p \frac{h^2}{2}$, to

$$P_w=\alpha \frac{\pi^2 E F_p h^2}{2 l^2}, \quad \dots \quad 470 \text{ a)}$$

jeżeli α oznacza pewien współczynnik, mniejszy niż 1.



rys. 234.

W celu wyznaczenia go zauważmy z Engesserem, część słupa

w rys. 234 otrzymamy $\Delta d = \frac{Dd}{EF_d}$, zaś $y_p = \frac{\Delta d}{\text{wst } \delta} = \frac{Dd}{EF_d \text{wst } \delta}$.

Na jednostkę długości słupa $\frac{dy_p}{dx} = \frac{y_q}{c} = \frac{Dd}{EF_d c \text{ wst } \delta}$.

A że $\text{wst } \delta = \frac{h}{d}$, a $D = \frac{b}{\text{wst } \delta} = Q \frac{d}{h}$, więc $\frac{dy_q}{dx} = \frac{Q d^3}{EF_d c h^2}$.

Przesunięcie wskutek siły poprzecznej możemy przyjąć wedle Mayera *) $y_q = (1 - \alpha) y$ a $Q = P_w \frac{dy}{dx}$, zatem $\frac{dy_q}{dx} = (1 - \alpha) \frac{dy}{dx} =$

$$= P_w \frac{dy}{dx} \frac{d^3}{EF_d c h^2}$$

stąd $\alpha = 1 - \frac{P_w d^3}{EF_d c h^2}$, więc

$$P_w = \left(1 - \frac{P_w d^3}{EF_d c h^2}\right) \frac{\pi^2 EF_p h^2}{1 l^2}, \text{ zatem}$$

$$P_w = \frac{\pi^2 EF_d h^2}{2 l^2} : \left(1 + \frac{\pi^2 F_p d^3}{2 F_d l^2 c}\right) \quad . \quad . \quad 471 a)$$

Jest to siła potrzebna do wyboczenia przy przegibnem połączeniu prętów. Przy stałem połączeniu zwiększa się ta siła jeszcze o siłę potrzebną do wyboczenia obu pasów dla długości l , więc o $P_p = 2\pi^2 \frac{EF}{l^2}$.

§ 94. Obliczenie wymiarów.

Przy użyciu równań 442) lub 458) zachodzi ta okoliczność, że dla obliczenia szukanego przekroju potrzebnym jest nieznan jeszcze promień bezwładności tegoż przekroju. Musimy sobie tedy przy obliczeniach radzić w rozmaity sposób.

Najprzód wyjaśnić musimy kwestję, czy przy obliczeniu wymiarów na wyboczenie należy odciągać dziury na nity, wogóle osłabienie przekroju, czy nie. Otóż rozumie się, że przekrój F , który wypada z wzoru 457) lub 449), oznacza przekrój użyteczny, to jest przekrój po odciągnięciu dziur na nity lub innych osłabień, ale przy wyznaczeniu promienia bezwładności a nie uwzględniamy osłabienia przekroju, ale liczymy dla przekroju pełnego, bo na wyboczenie, a zatem i na kształt linii ugięcia, mają większy

*) Knickfestigkeit str. 343.

wpływ przekroje pełne, niż w pewnych tylko punktach osłabione. Stwierdził to doświadczalnie Foeppl*).

Mając P i τ , otrzymujemy $F_0 = \frac{P}{\tau}$. Wiemy, że $F > F_0$ z dwu powodów, mianowicie z powodu dziur, a dalej z powodu wybożenia. Można by więc tymczasowo przyjąć F , obliczyć dla tego przyjętego F promień bezwładności a , a znając $\frac{l}{a}$ obliczyć F . Pokazałoby się wtedy prawdopodobnie, że to obliczone F jest inne od przyjętego, trzeba by drugi raz, a może trzeci raz jeszcze liczyć.

Aby to obliczenie żmudne ułatwić, będziemy się starali ustawić pewne wzory dla a dla rozmaitych przekrojów. Mając takie wzory, możemy już z większą dokładnością od razu przyjąć stosunek $\frac{l}{a}$ i obliczenie znacznie skrócić.

W § 56. podaliśmy wzory i wartości dla promieni bezwładności dla rozmaitych przekroi. Dla rachunku najwygodniej jest jednak, jeśli wyrazimy promień bezwładności a jako funkcję powierzchni F . Postaramy się ustawić takie wzory dla przekroi, najczęściej w praktyce się zdarzających**).

$$\text{Ogólnie przyjmijmy } I = k \cdot F^2 \quad \dots \dots \dots 472)$$

$$\text{to } k = \frac{I}{F^2} \quad \dots \dots \dots 473)$$

$$\text{a } a = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{k \cdot F} = \sqrt{k} \cdot \sqrt{F} \quad \dots \dots \dots 474)$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Kwadrat. } I &= \frac{1}{12} a^4, \quad F = a^2, \quad k = \frac{1}{12}, \quad \sqrt{k} = 0,2887, \text{ więc} \\ &a = 0,2887 \sqrt{F}. \quad \dots \dots \dots 475) \end{aligned}$$

Podobnie otrzymamy

$$2. \text{ Prostokąt o podstawie } b \quad a = 0,2887 \frac{F}{b} \quad \dots \dots \dots 476)$$

$$3. \text{ Sześciobok } a = 0,283 \sqrt{F} \quad \dots \dots \dots 477)$$

*) P. p. Zapiski doświadczalne mechaniczno-techn. 1897, zeszyt 25.

**) Por. także Feyl. „Zur Ermittlung der Querschnitte“ Zeit. d. österr. Ing. u. Arch. Verein, 1908, str. 536.

4. Elipsa (rys. 77), której połowa osi wielkiej a' , połowa małej b'

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{F}{2\pi b'}, a_1 = \frac{F}{2\pi a'}, \text{ albo } a = \frac{h}{4}, \\ \text{a że } F &= \frac{\pi b h}{4}, \text{ więc } a = \frac{F}{\pi b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 478)$$

5. Koło (rys. 78)

$$a = \frac{d}{4} = 0,282\sqrt{F} \dots \dots \dots 479)$$

6. Pierścień kołowy (rys. 89)

$$a = \frac{1}{4}\sqrt{d^2 + d_1^2}.$$

Jeżeli wstawimy $d_1 = nd$, to

$$a = \frac{d}{4}\sqrt{1+n^2} = 0,282\sqrt{F\frac{1+n^2}{1-n^2}} \dots \dots \dots 480)$$

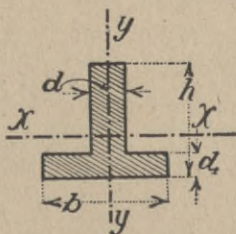
7. Kątówka równoramienna*) (rys. 141).

Ze względu na oś poziomą $a = 1,4 + 0,07 F \dots \dots \dots 481)$

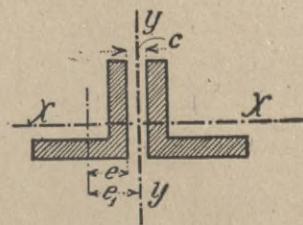
„ „ „ „ „ główną najmn. $a = 0,9 + 0,044 F \dots \dots \dots 482)$

8. Kątówka nierównoramienna (rys. 142).

$$\left. \begin{aligned} \text{Ze względu na oś } X_1 X_1 & a = 1,3 + 0,11 F \\ \text{„ „ „ „ } Y_1 Y_1 & a' = 1,3 + 0,55 F \\ \text{„ „ „ „ „ główną najmn. } & a = 0,9 + 0,042 F \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 483)$$



rys. 235.



rys. 236.

9. Dla przekroju teowego (rys. 235) nazwijmy

$$m = \frac{h}{b}, n = \frac{d}{d_1}, p = \frac{h}{d_1},$$

*) Por. wyprowadzenie tych wzorów w rozprawce autora: „Weiterer Beitrag zur Berechnung der Stäbe auf Knickfestigkeit“. Z. d. österr. Ing. u. Arch. Ver., 1892. H. 50 i 51.

to dla osi XX

$$a = 0,2887 \frac{h}{1 + mn} \sqrt{mn(4 - mn)} \dots 484)$$

dla osi YY jest

$$a' = 0,2887 b \sqrt{\frac{1}{1 + mn}} \dots 485)$$

Dla kształtówek **L** według normalij austrijskich otrzymamy:

$$a = a' = 0,65 + 0,085 F \dots 486)$$

Dla kształtówek wysokościennych otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} a &= 0,55 + 0,15 F \\ a' &= 0,4 + 0,102 F \end{aligned} \right\} \dots 487)$$

10. Jeżeli przekrój składa się z dwu kątówek (rys. 236) i nazwiemy I_1 , F_1 i a_1 moment bezwładności, przekrój i promień bezwładności jednej kątówki, to

$$a^2 = \frac{I}{F} = \frac{2 I_1}{2 F_1} = \frac{I_1}{F_1} = a_1^2,$$

a zatem $a = a_1 = 1,4 + 0,07 F_1 \dots 488)$

Dla osi YY jest

$$a'^2 = \frac{I'}{F} = \frac{2(I_1 + F_1 e^2)}{2 F_1} = a_1^2 + e_1^2.$$

Dalej mamy $e_1 = e + \frac{c}{2}$. Obliczywszy e_1 dla kątówek rozmaitych i dla $c = 0, 1, 2 \text{ cm}$, napisać możemy:

$$a'^2 = (0,45 + 0,033 c) F + 1,8 c - 1,7 \dots 489)$$

11. Przyjmijmy teraz przekrój złożony z blachy stojącej i dwu kątówek, (rys. 237) i nazwijmy powierzchnię jednej kątówki F_1 , blachy stojącej $F_2 = n F_1$, to $F = (2 + n) F_1$.

Wtedy otrzymamy:

$$a^2 = \frac{2}{2 + n} a_1^2 + \frac{nh^2 + 6 e^2 - 3(2 + n) e_1^2}{3 + 2n}.$$

Jeżeli $n = 1$, $h = 6 e$, to

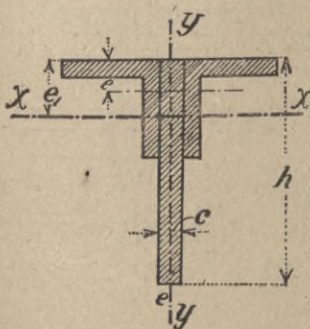
$$a = 0,206 F - 1,13 \dots 490)$$

Jeżeli $n = 3$ do 4, to średnio

$$a^2 = 0,25 + 0,032 F + 0,182 h^2 \dots 491)$$

Dla osi YY otrzymamy ogólnie

$$a'^2 = \frac{2}{2 + n} a_1^2 + \frac{0,7 n - 0,6}{3 + 2n} h^2.$$



rys. 237.

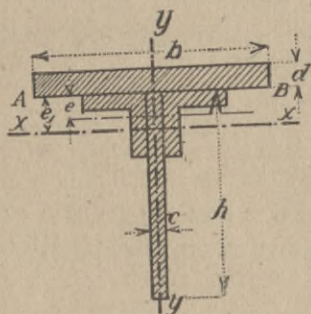
Dla $n = 1$, $c = 1 \text{ cm}$

$$a'^2 = 0,217 F - 0,11 \dots \dots \dots 492)$$

Dla $n=3$ do 4, $c=2\text{ cm}$

$$a'^2 = 0,076 F + 0,72 \dots \dots \dots 493)$$

12. Przyjmijmy przekrój złożony z blachy stojącej, dwu kątowników i nakładki (rys. 238) i nazwijmy przekrój jednej kątowniki F_1 , blachy stojącej $F_2 = n F_1$, nakładki $F_3 = n_1 F_1$, to $F = (2 + n + n_1) F_1$.



rys. 238.

Dla osi XX otrzymamy wtedy

$$a^2 = \frac{2}{2 + n + n_1} a_1^2 + \frac{6 e^2 + n h^2 + n_1 d^2}{3 (2 + n + n_1)} - e_1^2.$$

Dla $n=3$, $n_1=4$ i $n=4$, $n_1=10$ otrzymamy średnio

$$a^2 = 0,008 F + 0,076 h^2 \dots \dots \dots 494)$$

Dla osi YY dla $c=2\text{ cm}$, n i n_1 , jak pierwej,

$$a'^2 = 0,017 F + 0,044 b^2 \dots \dots \dots 495)$$

13. Dla U wtek (rys. 138) otrzymamy ze względu na oś XX

$$\left. \begin{aligned} a &= 2,2 + 0,147 F \\ \text{dla osi } YY \ a' &= 1,0 + 0,03 F \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 496)$$

14. Jeżeli przekrój składa się z dwu uwek (rys. 239) a przekrój, moment i promień bezwładności jednej uwiki nazwiemy F_1 , I_1 i a_1 , to ze względu na oś XX :

$$a^2 = \frac{I}{F} = \frac{2 I_1}{2 F_1} = a_1^2, \text{ więc} \\ a = a_1 = 2,2 + 0,147 F \dots \dots \dots 497)$$

Dla osi YY jest

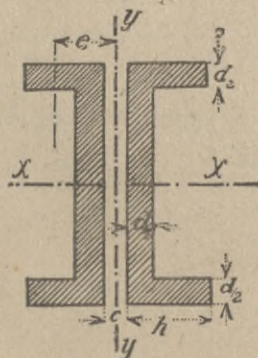
$$a'^2 = \frac{2 (I_1 + F_1 e_1^2)}{2 F_1} = a_1'^2 + e_1^2.$$

Wstawiwszy wartość za e_1^2 , otrzymamy w przybliżeniu

$$\left. \begin{aligned} a'^2 &= 0,0002 F^2 + 0,043 F + 2,3 + \\ &+ c (0,013 F + 1,8) \end{aligned} \right\} 498)$$

15. Dla czterech ćwierćkołówek otrzymamy:

$$a = 3,7 + 0,0173 F \dots \dots \dots 499)$$

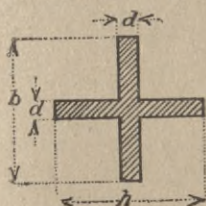


rys. 239.

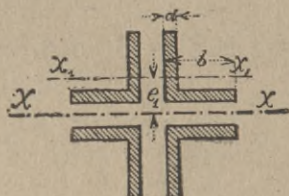
16. Dla przekroju krzyżowego (rys. 240) otrzymamy dla osi poziomej:

$$a = 0,2887 b \sqrt{\frac{1}{1 + mn}} \dots \dots \dots 500)$$

jak 485) dla przekroju teowego.



rys. 240.



rys. 241.

Jeżeli $b=h$, $d=d_1$, $a=0,2045 b=0,1022 \frac{F}{d}$ 501)

Dla osi pionowej otrzymamy analogicznie

$$a' = 0,2887 h \sqrt{\frac{mn}{1 + mn}} \dots \dots \dots 502)$$

a dla $m=n=1$, jak pierwej, $a' = 0,1022 \frac{F}{d}$ 503)

16. Jeżeli przekrój krzyżowy składa się z 4 kątówek (rys. 241) i jeśli nazwiemy przekrój, moment i promień bezwładności jednej kątówki F_1 , I_1 , a_1 , to

$$a^2 = \frac{I}{F} = \frac{4(I_1 + F_1 e_1^2)}{4F_1} = a_1^2 + e_1^2 \dots \dots \dots 504)$$

Po wstawieniu wartości za e_1^2 otrzymamy w przybliżeniu dla $c=0$ do 2 cm

$$a^2 = (0,225 + 0,017 c) F + 1,8 c - 1,7 \dots \dots \dots 505)$$

17. Jeżeli przekrój składa się z 4 kątówek i dwu wstęp (rys. 242) i jeżeli nazwiemy przekrój 4 kątówek, ich moment i promień bezwładności F_4 , I_4 i a_4 a krzyża z wstępem F_5 , I_5 , a_5 , to

$$a^2 = \frac{I}{F} = \frac{I_4 + I_5}{F_4 + F_5}$$

Jeżeli $F_5 = F_4$, to

$$a^2 = \frac{a_4^2 + ma_5^2}{1 + m}, \dots \dots \dots 506)$$

przyczem a_4 i a_5 należy obliczać ze wzorów 505) i 503).

18. Jeżeli przekrój składa się z 4 kątówek i wstęgi (rys. 243) i jeżeli nazwiemy przekrój, moment i promień bezwładności jednej kątówki F_1 , I_1 i a_1 , a przekrój wstęgi $F_2 = n F_1$, to

$$F = 4 F_1 + F_2 = (4 + n) F_1,$$

a ze względu na oś XX

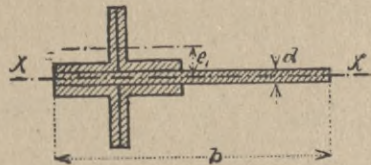
$$a^2 = \frac{4}{4+n} (a_1^2 + e_1^2). \quad \dots \quad 507)$$

Dla $d = 2 \text{ cm}$ i $n = 3$ do 4 otrzymamy

$$a^2 = 0,075 F + 1,0 \quad \dots \quad 508)$$



rys. 242.



rys. 243.

Jeżeli zamiast 4 użyjemy 6 kątówek, to otrzymamy

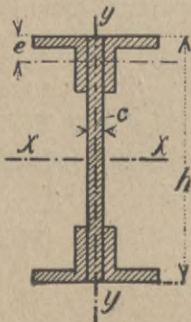
$$a^2 = \frac{6}{6+n} = a_1^2 + e_1^2 \quad \dots \quad 509)$$

a dla $d = 2 \text{ cm}$ i $n = 3$ do 4

$$a^2 = 0,075 F + 1,2 \quad \dots \quad 510)$$

19. Dla kształtówek I otrzymamy w przybliżeniu

$$\left. \begin{aligned} a &= 3,9 + 0,107 F \\ a' &= 1,4 + 0,018 F \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 511)$$



rys. 244.

20. Dla przekroju I , składającego się ze ścianki i czterech kątówek (rys. 244) otrzymamy, gdy znów wartość dla jednej kątówki oznaczymy znacznikiem 1,

$$F = (4 + n) F_1,$$

$$a^2 = \frac{4}{4+n} a_1^2 + \frac{(9,72 + n) h^2}{12(4+n)} \quad \dots \quad 512)$$

Dla $n = 1,5$ do 3 otrzymamy średnio

$$a^2 = -0,453 + 0,308 F + 0,129 h^2 \quad 513)$$

Dla osi YY możemy użyć wzoru 507). Jeżeli wstawimy $n = 1,5$ do 3 i $d = 1 \text{ cm}$, otrzymamy

$$a'^2 = 0,106 F - 0,1 \quad \dots \quad 514)$$

21. Dla przekroju, składającego się z 4 kątownek, połączonych krata, otrzymamy a^2 z 512), wstawiając $n=0$, więc

$$a^2 = a_1^2 + 0,2025 h^2 = -0,7 + 0,119 F + 0,2025 h^2 \quad . \quad . \quad 515)$$

Dla osi YY możemy użyć wzorów 503) i 504).

22. Jeżeli przekrój ijowy składa się z 4 kątownek i 2 nakładek (rys. 245), to $F = 2(2+n)F_1$.

Dla osi XX jest

$$a^2 = \frac{3,708 F_1 + (1,6+n) h^2 - 5,6}{4(2+n)} \quad . \quad . \quad . \quad 516)$$

W praktyce jest $n=1,2$ do 2, więc w przecięciu

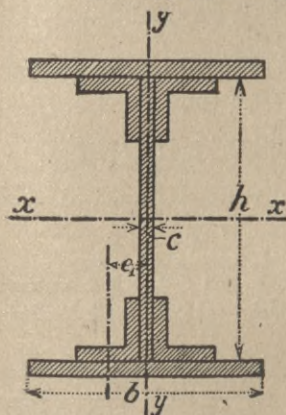
$$a^2 = 0,036 F + 0,21 h^2 - 0,4 \quad . \quad . \quad . \quad 517)$$

Dla osi YY jest

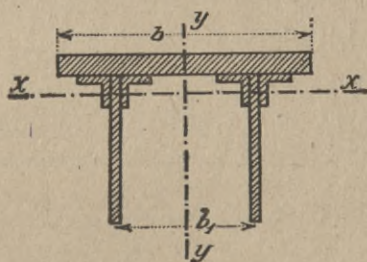
$$a'^2 = \frac{2}{2+n} (a_1^2 + e_1^2) + \frac{nb^2}{12(2+n)} \quad . \quad . \quad . \quad 518)$$

albo po wstawieniu wartości za e_1 ,

$$a'^2 = 0,071 F - 1,2 + 0,036 b^2 + (0,006 F + 1,13) c \quad . \quad . \quad 519)$$



rys. 245.



rys. 246.

23. Dla przekroju dwuteowego (rys. 246) niech będzie a_5 promień bezwładności połowy przekroju ze względu na oś XX , który obliczyć należy wedle wzoru 473), to $F = 2 F_5$, $I = 2 I_5$, więc

$$a^2 = \frac{2 I_5}{2 F_5} a_1^2, \text{ stąd } a = a_1 \quad . \quad . \quad . \quad 520)$$

Ze względu na YY , chcąc wyznaczyć a' , otrzymamy

$$F = (4 + 2n + n_1) F_1,$$

$$a'^2 = \frac{4}{4 + 2n + n_1} (0,476 F_1 - 0,7 + \frac{2+n}{2(4 + 2n + n_1)} b_1^2 +$$

$$+ \frac{n_1}{12(4+2n+n_1)} b^2 \dots \dots \dots 521)$$

W praktyce jest $n=2$ do 7, $n_1=0$ do 15, średnio możemy napisać

$$a'^2 = 0,004 F - 0,1 + 0,178 b_1^2 + 0,04 b_1 \dots \dots 522)$$

§ 95. Przykłady obliczenia wymiarów.

1. Słup drewniany o przekroju kwadratowym obciążony jest w kierunku osi siłą $P=3,6$ t. Długość wolna wynosi 3 m. Naprężenie dopuszczalne na ściskanie należy przyjąć 70 kg/cm^2 i wyznaczyć wymiary przekroju słupa.

Bez względu na wyboczenie mamy $F_0 = \frac{3600}{70} = 51,4 \text{ cm}^2$. Przekrój F musi być większym, przyjmiemy więc jako pierwsze przybliżenie $F=81 \text{ cm}^2$, $b=9 \text{ cm}$. Wedle 475) jest $a = 0,2887\sqrt{81} = 0,2887 \cdot 9 = 2,60 \text{ cm}$.

Wtedy $\frac{l}{a} = \frac{300}{2,60} = 115$, zatem $\zeta = 0,268$, a więc

$$F = F_0 : \zeta = 51,4 : 0,268 = 192 \text{ cm}^2.$$

Widzimy, że F wypadło znacznie większe, niż przyjęte; jako drugie przybliżenie przyjmujemy więc $F=144 \text{ cm}^2$, $b = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$, wtedy:

$a = 0,2887 \times 12 = 3,46$, więc $\frac{l}{a} = \frac{300}{3,46} = 87$, zatem $\zeta = 0,443$, stąd:

$F = 51,4 : 0,443 = 116$, $b = \sqrt{116} = 10,8 \text{ cm}$. Przyjmijmy więc $b=11 \text{ cm}$, $F=121 \text{ cm}^2$,

wtedy $a = 0,2887 \times 11 = 3,18 \text{ cm}$, więc $\frac{l}{a} = \frac{300}{3,18} = 94$, zatem

$\zeta = 0,394$, $F = 51,4 : 0,394 = 130 \text{ cm}^2$, stąd $b = 11,4 \text{ cm}$. Zatem $b=11$ jest za małe, $b=12$ wprawdzie za wielkie, musimy jednak zatrzymać $b=12 \text{ cm}$, bo b zaokrąglaamy na całe centymetry.

2. Jak gruby ma być słup drewniany kwadratowy, obciążony siłą osiową $P=21000 \text{ kg}$, przyczem dolny koniec jest wpuszczony w cokół kamienny a górny zapomocą kleszczy ochroniony przed wygięciem. Wysokość słupa wynosi $l_1=3,75 \text{ m}$.

Tu wedle 452) $l=0,7 \times 3,75$. Ze względu, że może utwierdzenie nie jest zupełnem, przyjmujemy dla bezpieczeństwa $l=0,8 \cdot 3,75 = 3,0 \text{ m}$. Dalej mamy $F_0 = \frac{21000}{70} = 300 \text{ cm}^2$, a stąd byłoby $b = \sqrt{300} = 17,3$. Ze względu na wyboczenie przyjmujemy $b=20$, stąd $a = 0,2887 \times 20 = 5,774 \text{ cm}$. Więc

$\frac{l}{a} = \frac{300}{5,77} = 52$ a $\zeta = 0,786$, więc $F = 300 : 0,786 = 382$, $b = 193 \text{ cm}$, więc wystarczy przyjąć $b=20 \text{ cm}$.

3. Obliczyć wymiary słupa z żeliwa o przekroju kołowym pełnym, gdy $P=30000 \text{ kg}$, wysokość $l_1=4 \text{ m}$, oba końce są utwierdzone, a $\tau=800 \text{ kg/m}^2$.

Wedle 455) $l = \frac{400}{2} = 200 \text{ cm}$. Dalej mamy

$F_0 = \frac{30000}{800} = 37,5 \text{ cm}^2$, stąd $d = 6,91 \text{ cm}$. Przyjmijmy jako pierwsze przybliżenie

$d = 9 \text{ cm}$, to wedle 479) $a = \frac{2}{3} = 2,25$, stąd $\frac{l}{a} = \frac{200}{2,25} = 89$, stąd

$\zeta = 0,154$, $F = 37,5 : 0,154 = 243$, $d = 17,6 \text{ cm}$. Musimy więc przyjąć d większe; przyjmijmy $d = 15 \text{ cm}$, to

$a = \frac{15}{4} = 3,75$, $\frac{l}{a} = \frac{200}{3,75} = 53$, $\zeta = 0,361$, więc $F = 37,5 : 0,361 = 104 \text{ cm}^2$, $d = 11,5 \text{ cm}$,

Wystarczy więc d mniejsze, przyjmijmy $d = 13 \text{ cm}$, więc $a = \frac{13}{4} = 3,25$, $\frac{l}{a} = \frac{200}{3,25} =$

$= 61,5$, $\zeta = 0,299$, więc $F = 37,5 : 0,299 = 126 \text{ cm}^2$, $d = 12,5 \text{ cm}$. Wartość ta tak już bliską jest przyjętej, że możnaby zatrzymać $d = 13 \text{ cm}$. Dokładniej możnaby

przyjąć $d = 12,8 \text{ cm}$, zatem $a = 3,2$, $\frac{l}{a} = \frac{200}{3,2} = 62,5$, $\zeta = 0,292$, zatem $F = 37,5 : 0,292 = 128,4 \text{ cm}^2$, $d = 12,9$. Zatrzymujemy więc $d = 12,9 \text{ mm}$.

4. Dla tego samego wypadku obliczyć słup z żelaza lanego, którego grubość ścian wynosi $\frac{1}{10} d$.

Wtedy wewnętrzna średnica $d_1 = d - 0,2 a = 0,8 d$, przekrój

$$F = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2) = 0,283 d^2, \text{ a według 480) } a = \frac{1}{4} \sqrt{d^2 + 0,8^2 d^2} = 0,32 d.$$

Ponieważ słup wydrążony musi być grubszy, więc przyjmijmy odrazu

$d = 16 \text{ cm}$, to $a = 0,32 \cdot 16 = 5,12 \text{ cm}$, zatem $\frac{l}{a} = \frac{200}{5,12} = 39$, $\zeta = 0,486$. Dalej mamy

$F_0 = \frac{30000}{800} = 37,5 \text{ cm}^2$ więc $F = 37,5 : 0,486 = 77,3 \text{ cm}^2$, stąd

$$d = \sqrt{\frac{77,3}{0,283}} = 16,5 \text{ cm}.$$

Różnica jest mała, przyjmijmy jeszcze $d = 16,3 \text{ cm}$, to $a = 0,32 \cdot 16,3 = 5,22$,

zatem $\frac{l}{a} = \frac{200}{5,22} = 38$, $\zeta = 0,496$, więc $F = 37,5 : 0,496 = 75,6$,

a stąd $d = \sqrt{\frac{75,6}{0,283}} = 16,4$, trzeba więc przyjąć $d = 16,4 \text{ mm}$, grubość ścian po

16 mm , więc $d_1 = 132 \text{ mm}$.

Porównując wyniki dla przekroju pełnego i wydrążonego, widzimy, że dla słupa pełnego przekrój wynosi 131 cm^2 , dla wydrążonego $74,4 \text{ cm}^2$.

5. Zastrzał mostu kratowego, ściskany siłą 25 t , ma długość wolną $4,5 \text{ m}$. Przyjmijmy dwie uwki połączone kratą. Stosunek wysokości pręta w węźle do wysokości w środku niech będzie $0,6$. Przyjawszy naprężenie dopuszczalne 850 kg/cm^2 , mamy

$F_0 = \frac{25000}{850} = 29,4 \text{ cm}^2$. Przyjmujemy 2 uwki $l = 12$, więc

$F = 2 \cdot 18,81 - 4 \cdot 0,7 \cdot 1,8 = 32,6 \text{ cm}^2$, $h_0 = 15 \text{ cm}$, $h_1 = 15 : 0,6 = 25 \text{ cm}$.

Wtedy wedle tab. XL. $\psi = 0,909$.

$I = 2 (50,1 + 18,81 (12,5 - 1,74)^2) - 4456 \text{ cm}^4$, $a = \sqrt{\frac{4456}{2,1881}} = 10,9 \text{ cm}$.

$$\frac{l}{a} = 450 : 10 \cdot 9 = 41 \cdot 3, \text{ więc } \zeta' = 0 \cdot 730. \text{ Więc}$$

$$F = \frac{29 \cdot 4}{0 \cdot 73 \cdot 0 \cdot 909} = 44 \cdot 3 \text{ cm}^2. \text{ Przekrój przyjęty za mały. Przyjmijmy 2 ukwi 1. 16.}$$

$$F = 2 \cdot 26 \cdot 90 - 4 \cdot 08 \cdot 18 = 48 \cdot 0 \text{ cm}^2, \quad l = 2(98 \cdot 2 + 26 \cdot 9(12 \cdot 5 - 1 \cdot 95)^2) = 6186 \text{ cm}^2, \quad a =$$

$$= \sqrt{\frac{6186}{2 \cdot 26 \cdot 9}} = 10 \cdot 7, \quad \frac{l}{a} = 450 : 10 \cdot 7 = 42 \cdot 0, \text{ więc } \zeta' = 0 \cdot 727, \text{ zatem}$$

$$F = \frac{29 \cdot 4}{0 \cdot 727 \cdot 0 \cdot 909} = 44 \cdot 5 \text{ cm}^2, \text{ więc przekrój wystarcza.}$$

Jeżeli dla wyboczenia w płaszczyźnie prostopadłej także $l = 4 \cdot 5$, to, $a = 6 \cdot 21$ więc $\frac{l}{a} = 450 : 6 \cdot 21 = 72 \cdot 5$, $\zeta' = 0 \cdot 609$, stąd $F = \frac{29 \cdot 4}{0 \cdot 609} = 48 \cdot 3$, więc przekrój nieco za mały. Ze względu na bardzo małą różnicę możemy jednak zostawić 2 ukwi 1. 16.

6. Wyznaczyć numera kształtówek słupa z żelaza zlewne, złożonego z czterech kątowników (rys. 241) należycie znitowanych, jeżeli długość wolna wynosi 4 m a odstęp kątowników 1,5 cm. Siła, działająca w osi słupa, jest $P = 42 \text{ t}$ a naprężenie dopuszczalne $\tau = 750 \text{ kg/cm}^2$. Bez względu na wyboczenie otrzymamy

$$F_0 = \frac{42000}{750} = 56,8 \text{ cm}^2. \text{ Ze względu na 2 dziury na nity około } 4 \text{ cm}^2 \text{ i wy-}$$

boczenie przyjmijmy $F = 80 \text{ cm}^2$, zatem przekrój jednej kątowniki 20 cm^2 . Przyj-

mijmy kątowniki $\frac{100 \cdot 100}{11}$ o przekroju 20,95 cm^2 $v = 7,14$, więc $e = 2,86$, $e_1 = 2,86 +$

$$+ 0,75 = 3,61 \text{ cm, zatem wedle 504) } a^2 = a_1^2 + e_1^2 = 3,01^2 + 3,61^2 = 9,06 + 13,0 =$$

$$= 22,56 \text{ cm}^2, \quad a = 4,7 \text{ cm. A więc } \frac{l}{a} = \frac{400}{4,7} = 86 \cdot 1, \text{ stąd } \zeta = 0,555, \text{ więc } F = 56,8 :$$

$$0,55 = 103 \text{ cm}^2. \text{ Przyjęte kątowniki zatem nie wystarczają, przyjąć należy większe.}$$

Dla $F = 90 \text{ cm}^2$ otrzymamy $F = 22,5 \text{ cm}^2$, przyjmijmy zatem $\frac{100 \cdot 100}{12}$. Tu $v =$

$$= 7,01, \text{ więc } e = 2,99, \quad e_1 = 2,99 + 0,25 = 3,24 \text{ cm, zatem } a^2 = 3,00^2 + 3,74^2 = 9 + 13,99 =$$

$$= 22,99, \quad a = 4,8 \text{ cm. A więc } \frac{l}{a} = \frac{400}{4,8} = 83, \text{ stąd } \zeta = 0,567, \text{ więc } F = 56,8 : 0,567 =$$

$$= 100 \text{ cm}^2.$$

Wymiary jeszcze są za małe. Przyjmijmy większy numer kątowniki $\frac{120 \cdot 120}{11}$.

Tu jest $v = 8,64$, $e = 3,36$, $e_1 = 3,36 + 0,75 = 4,11$, więc

$$a^2 = 3,66^2 + 4,11^2 = 13,40 + 16,89 = 30,29, \quad a = 5,5 \text{ cm,}$$

$$\text{więc } \frac{l}{a} = \frac{400}{5,5} = 73, \quad \zeta = 0,607, \quad F = 56,8 : 0,607 = 93 \cdot 6 \text{ cm}^2.$$

Cztery kątowniki $\frac{120 \cdot 120}{11}$ mają przekrój $4 \times 25,37 = 101,5 \text{ cm}^2$, od tego dwie

dziury na nity $2 \times 2 \times 1,2 = 4,8$, zatem $F = 101,5 - 4,8 = 96,7 \text{ cm}^2$. Przekrój zatem

jest zupełnie wystarczający, zatrzymujemy kątowniki $\frac{120 \cdot 120}{11}$.

7. Jaki ciężar unieść może bezpiecznie słup, złożony z 4 ćwierćkołówek $l = 20$, 6 m wysoki, w obu końcach wolny, jeżeli naprężenie dopuszczalne przyjmujemy 1000 kg/cm^2 ?

Dla 4 ćwierćkołówek l . 20 jest według tab. 28. VI. $\alpha=7,94$, zatem $\frac{l}{a}=\frac{600}{7,94}=75,5$, stąd $\zeta=0,597$.

Wedle 457) jest $P=F\tau\zeta'=4 \cdot 21,57 \cdot 0,597=51525 \text{ kg}$.

Jeżelibyśmy przyjęli $\tau=800 \text{ kg/cm}^2$, toby było

$$P=4 \cdot 21,57 \cdot 800 \cdot 597=41220 \text{ kg}.$$

§ 96. Wytrzymałość słupów żelaznych w razie pożaru.

Wiadomo nam z § 19, że żelazo pod wpływem wysokiej ciepłoty ma mniejszą wytrzymałość, a do tego podczas pożaru słupy żelazne są niejednostajnie ogrzane, bo od strony pożaru ciepłota dochodzi do 600° , a ze strony przeciwnej trafia je struga zimnej wody z sikawki straży pożarnej. Wskutek tego oś słupa pierwotnie prosta wygina się i naprężenia z tego powodu wzrastają.

Dlatego też, jeżeli obliczamy słupy żelazne w budynkach, które mogą być narażone na pożar, słupy nie osłonięte murem lub betonem, to musimy przyjąć takie wymiary, aby słupy te i podczas pożaru nie okazały się za słabe.

Pod tym względem badali słupy żelazne doświadczalnie Bauschinger, a także M. Möller i R. Lühmann. Möller dochodzi na podstawie tych doświadczeń do wniosku, że słupy żelazne będą bezpieczne i podczas pożaru, jeśli je obliczać będziemy wedle wzoru Rankina, jednak przyjmując większy współczynnik wyboczenia.

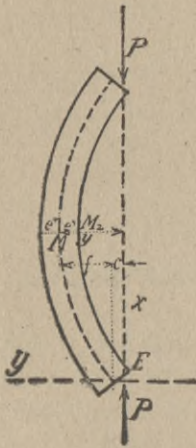
Möller proponuje przyjmować

$$\text{dla żelaza lanego} \quad F = \frac{P}{1200} \left(1 + 0,0004 \frac{l^2}{a^2} \right) \quad . \quad 523)$$

$$\text{„ „ spawanego} \quad F = \frac{P}{1000} \left(1 + 0,0004 \frac{l^2}{a^2} \right) \quad . \quad 524)$$

Obliczywszy słupy żelazne wedle tych wzorów, mamy jeszcze niejaką pewność, bo słupy w ogniu łamią się wedle doświadczeń dopiero dla żelaza lanego przy $\mu=1500 \text{ kg/cm}^2$ a dla żelaza spawanego przy $\mu=1200 \text{ kg/cm}^2$ dla rur a 1400 kg/cm^2 dla prętów pełnych.

§ 97. Słupy obciążone mimośrodowo.



rys. 247.

Jeżeli na słup działają siły P w kierunku równoległym do osi, przyczem kierunek ten odległy jest od osi o c (rys. 247), to mamy do czynienia z obciążeniem mimośrodowym.

Przypuśćmy najprzód, że siła P działa w osi głównej, tak, że wygięcie nastąpi w płaszczyźnie drugiej osi głównej. Jeżeli przez E położymy osie spólrzędnych i nazwiemy rzędne punktu M osi x i y , to możemy wyrazić naprężenie w punkcie M_1

$$\left. \begin{aligned} v'' &= \frac{P}{F} + \frac{Pye''}{I} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{rye''}{I} \right) \\ \text{naprężenie w punkcie } M_2 & \\ v'' &= -\frac{P}{F} \left(\frac{Fye'}{I} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots 525)$$

W środku ciężkości M jest średnie ciśnienie $\frac{P}{F}$, oś obrotowa leży oddalona od osi ciężkości o z , przyczem wedle 426)

$$z = \frac{a^2}{y} = \frac{l}{Fy}, \text{ zatem } zy = a^2.$$

Jeżeli f jest ugięcie słupa w środku, to najw $y = f + c$, więc największe naprężenie

$$\left. \begin{aligned} v'' &= \frac{P}{F} \left(\frac{F(f+c)e''}{I} + 1 \right) = \frac{P}{F} \left(\frac{f+c}{i_1} + 1 \right) \\ v'' &= \frac{P}{F} \left(\frac{F(f+c)e'}{I} - 1 \right) = \frac{P}{F} \left(\frac{f+c}{i_2} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots 526)$$

Strzałkę $f+c$ mamy teraz obliczyć. Analogicznie do § 91 mamy i tu $\frac{d^2y}{d^2x} = -\frac{Py}{EI}$, a stąd, podobnie jak tam (równ. 441), otrzymamy dla $x=0$ w środku pręta

$$f+c = \frac{c}{\text{dost } \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} \dots \dots 527)$$

Zamiast dost $\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$ możemy zazwyczaj z dostateczną dokładnością podstawić pierwsze dwa wyrazy szeregu dostawy

$$\text{dost} \left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)^2 = 1 - \frac{l^2 P}{8 EI} \text{ więc}$$

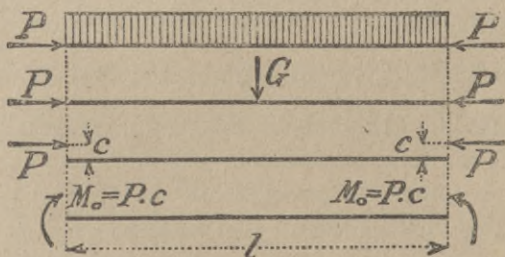
$$f + c = \frac{c}{1 - \frac{l^2 P}{8 EI}} \dots \dots \dots 528)$$

Równ. 526) możemy z uwzględnieniem 528) napisać

$$v'' = \frac{P}{F} \left(\frac{c F e''}{\left(1 - \frac{l^2 P}{8 EI}\right) I} + 1 \right), \text{ a stąd } P = \frac{F \tau l}{1 + \frac{c F e''}{\left(1 - \frac{l^2 P}{8 EI}\right)}} \dots 529)$$

We wzorze tym jednak znajduje się P także po prawej stronie, więc nie można z wzoru tego obliczyć wprost P , tylko przyjąć je należy, a potem poprawiać to założenie. Podobnie jeśli znamy P , a szukamy przekroju, rozwiązać można zadanie tylko próbami. Z równ. 529) otrzymamy

$$F = \frac{P}{\tau} \left(1 + \frac{c e''}{a^2 \left(1 - \frac{l^2 P}{8 EI}\right)} \right) = \frac{P}{\tau} \left(1 + \frac{c e''}{a^2 \text{dost} \left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)} \right) \dots 530)$$



rys. 248.

Podobny wypadek mamy, gdy słup obciążony osiowo siłą P , a oprócz tego symetrycznie prostopadłe do osi jakąś siłą czy to ciężarem ciągłym czy skupionym (rys. 248).

Jeżeli f_0 oznacza ugięcie belki, wywołane tem prostopadłem

do osi obciążeniem, to z równ. 442) otrzymamy $n = \frac{\pi^2 EI}{l^2 P}$, więc zamiast (527) możemy napisać

$$f + c = \frac{c}{\text{dost } \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}$$

Dr. Ellerbeck*) udowadnia, że wtedy w przybliżeniu otrzymamy

$$f = \frac{n}{n-1} f_0 \dots \dots \dots 531)$$

a $M = M_0 + Pf$, stąd dla obciążenia zupełnego

$$M = \frac{n}{n-1} M_0 \dots \dots \dots 532)$$

a dla jednej siły G

$$M = \frac{n-0.18}{n-1} M_0.$$

§ 96. Naprężenie dopuszczalne.

Z wzoru 528) wynika dla $c=0$ $f=0$, a gdy to wstawimy w równ. 526), otrzymamy $\nu'' = \nu' = \frac{P}{F}$, a zatem dla zwykłego ciśnienia bez uwzględnienia wybożenia. Ponieważ skutek wybożenia przy $c=0$ t. j. przy obciążeniu środkowym dla wielkiego $\frac{l}{a}$ wzrasta znacznie F , więc mogłoby się zdarzyć, że obliczając wedle 526) przy obciążeniu mimośrodkowym, otrzymalibyśmy mniejsze wymiary, niż przy obciążeniu środkowym, co jest wprost sprzecznym z prawdą. Dlatego też już z powodów teoretycznych, a także na mocy doświadczeń Tetmajera należy przyjmować dopuszczalne naprężenie nie tylko mniejsze ze względu na mimośród c , ale także i na stosunek $\frac{l}{a}$.

Z wzoru 526) otrzymamy, wstawiwszy

$$\nu'' = t_w, \frac{P}{F} = \tau_0, \frac{F e''}{I} = \frac{F e''}{F a^2} = \frac{1}{i}, \text{ więc}$$

*) Erläuterungen zu den preuss. Hochbaubelastungsvorschriften 1919.

$$\tau_0 = \frac{P}{F} = \frac{\tau_w}{1 + \frac{f+c}{i}} \dots \dots \dots 533)$$

Tetmajer na mocy doświadczeń przyjmuje zamiast wzoru 533) wzór

$$\tau_0 = \frac{P}{F} = \frac{\tau_w}{1 + \vartheta \frac{f+c}{i}} \dots \dots \dots 534)$$

przyczem ϑ oznacza pewien współczynnik, zależny od materiału i od $\frac{l}{a}$, wyznaczony doświadczalnie, a τ_w naprężenie dopuszczalne na wyboczenie, wyznaczone wedle 457)

Tetmajer podaje następujące współczynniki ϑ

1. Drzewo

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } \frac{l}{a} < 90 \quad \vartheta = 0,00039 \left(\frac{l}{a}\right)^2 - 1,0115 \frac{l}{a} + 0,93 \\ \text{„ } \frac{l}{a} > 90 \quad \vartheta = 2,058 \left(\frac{a}{l}\right)^2 - 4 \left(\frac{a}{l}\right) \end{array} \right\} \dots 535)$$

Z tego otrzymamy następującą tabliczkę:

Tablica XLVII.

$\frac{l}{a} =$	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
$\vartheta =$	0,65	0,62	0,58	0,54	0,50	0,46	0,43	0,40	0,36	0,33	0,31
$\frac{l}{a} =$	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125
$\vartheta =$	0,28	0,26	0,24	0,22	0,20	0,18	0,16	0,15	0,14	0,13	0,12
$\frac{l}{a} =$	130	135	140	145	150						
$\vartheta =$	0,11	0,10	0,10	0,09	0,09						

2. Dla żelaza lanego otrzymał Tetmajer

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } \frac{l}{a} < 100 \quad \vartheta = 0,0001437 \left(\frac{l}{a}\right)^2 - 0,03174 \frac{l}{a} + 2,077 \\ \text{„ } \frac{l}{a} > 100 \quad \vartheta = 3537 \left(\frac{l}{a}\right)^2 - 1,370 \frac{a}{l} \end{array} \right\} \dots 536)$$

Stąd otrzymujemy następującą tabliczkę:

Tablica XLVIII.

$\frac{l}{a} =$	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$\vartheta =$	1,5	1,37	1,25	1,14	1,04	0,94	0,85	0,77	0,69
$\frac{l}{a} =$	65	70	75	80	85	90	95	100	105
$\vartheta =$	0,62	0,56	0,51	0,46	0,42	0,38	0,36	0,34	0,31
$\frac{l}{a} =$	110	115	120	125	130	135	140	145	150
$\vartheta =$	0,28	0,26	0,24	0,22	0,20	0,18	0,17	0,16	0,15

3. Dla żelaza spawanego i zlewnego mamy:

Tablica XLIX.

$\frac{l}{a} < 70 =$	70	75	80	85	90	95	100	105		
$\vartheta =$	1,00	1,00	0,93	0,86	0,80	0,75	0,70	0,65	0,61	
$\frac{l}{a} =$	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155
$\vartheta =$	0,57	0,53	0,50	0,46	0,43	0,40	0,38	0,38	0,33	0,31
$\frac{l}{a} =$	160	165	170	175	180	185	190	195	200	
$\vartheta =$	0,29	0,27	0,26	0,24	0,22	0,20	0,18	0,17	0,16	

Krohn*) wychodzi z wzoru 431) $\tau_{>F} = \frac{P}{F} + \frac{Me}{I}$, który jednak nie uwzględnia wybożenia. Aby je uwzględnić zwiększa się w tem równaniu pierwszy wyraz w stosunku $\tau : \tau_w$ i otrzymuje

$$\tau_{>F} = \frac{P}{F} \frac{\tau}{\tau_w} + \frac{Me}{I} \dots \dots \dots 537)$$

Rozporząd. min. pruskiego z r. 1919. W szczególnie ważnych wypadkach można żądać, by obliczono przy wyznaczeniu naprężeń, powstających wskutek mimośrodowego albo ukośnego kierunku siły wielkość ugięcia, które wprowadzić należy jako ramię siły podłużnej lub które dodać należy do mimośrodu albo by zamiast tego powiększyć moment zgięcia o $\frac{Pl}{200}$, gdy P oznacza siłę podłużną.

Tymczasowe przepisy polskie dla mostów drogowych z r. 1920. § 76. 16. Jeżeli słupy są sztywnie połączone z belkami, należy przy obli-

*) Zent. d. Bauverw. 1917 str. 441.

czeniu stopniowo uwzględnić wpływ momentów, wywołanych sztywnym połączeniem.

Gdy długość słupa żelbetowego l jest większa, niż 20-krotny najmniejszy wymiar przekroju, to należy moment wywołany siłą zginającą, zwiększyć o wartość $0,005 Pl$, która przedstawia działanie siły ścisającej P na ramieniu, powstałym wskutek wygięcia słupa.

§ 99. Przykłady.

1. Słup drewniany o długości 4 m i przekroju kwadratowym $20 \times 20\text{ cm}$ jest obciążony z obu stron siłami 10 t , które zaczepiają w odstępach $c=11\text{ cm}$ od środka, a więc w środku krawędzi. Jakie naprężenie powstaje w słupie?

$$\begin{aligned} \text{Tu jest } \sqrt{\frac{P}{EI}} &= \sqrt{\frac{10000 \cdot 12}{120000 \cdot 20^4}} = \frac{1}{400}, \text{ dost } \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \text{dost } \frac{200}{401} = \text{dost } 0,5 \\ &= \text{dost } \frac{0,5 \cdot 180}{\pi} = \text{dost } 28,4^\circ = 0,879. \end{aligned}$$

W przybliżony sposób otrzymalibyśmy

$$1 - \frac{400^2}{8} \cdot \frac{10000 \cdot 12}{120000 \cdot 20^4} = 1 - \frac{1}{8} = 0,875.$$

A więc wedle 527)

$$f+10 = \frac{10}{0,879} = 11,38, \text{ stąd } f = 1,38\text{ cm}.$$

Wedle 534) otrzymamy $\tau_w = \frac{P}{F} \left(1 + \delta \frac{f+c}{8} \right)$.

Tu $a = 0,2887 \cdot 20 = 5,774$, $\frac{l}{a} = \frac{400}{5,77} = 69$, więc $\delta = 0,31$, $i = \frac{20}{6} = 3,33$, stąd

$$\tau_w = \frac{10000}{400} \left(1 + 0,31 \frac{11,38}{3,33} \right) = 25 (1 + 1,06) = 51,5\text{ kg/cm}^2.$$

Wedle 457) $\tau_w = \tau \zeta'$, stąd $\tau = \frac{\tau_w}{\zeta'}$. Dla $\frac{l}{a} = 69$ jest $\zeta' = 0,568$, więc

$$\tau = \frac{51,5}{0,568} = 91\text{ kg/cm}^2.$$

Wedle wzoru teoretycznego 526) otrzymamy jednak

$$\begin{aligned} \nu'' &= \frac{10000}{400} \left(\frac{400 \cdot 11,38 \cdot 10 \cdot 12}{20^4} + 1 \right) = 25(3,414 + 1) = 110,4\text{ kg/cm}^2, \\ \nu' &= -25(3,414 - 1) = -70,5\text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Z obu tych wzorów zatrzymamy wyniki większe. Widzimy w obu wypadkach, że wymiary są za małe.

Przyjawszy $23 \times 23\text{ cm}$, otrzymamy

$$\sqrt{\frac{10000 \cdot 12}{12000 \cdot 23^4}} = \frac{1}{529}, \text{ dost } \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \text{dost } \frac{200}{529} = \text{dost } 0,378.$$

$$\text{Więc dost } \frac{0,378 \cdot 180}{\pi} = \text{dost } 12,66^\circ = 0,919.$$



A więc $f+10=\frac{10}{0,919}=10,76$, zatem $f=0,76$ cm.

Wedle 326) mamy

$$v'' = \frac{10000}{529} \left(\frac{529 \cdot 10,76 \cdot 10 \cdot 12}{23^4} + 1 \right) = 18,9 (2,441 + 1) = 65 \text{ kg/cm}^2,$$

$$v' = -18,9 (2,441 - 1) = -27,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle 534) otrzymamy, ponieważ tu $\alpha=0,2887 \cdot 23=6,64$,

$$\frac{l}{a} = \frac{400}{6,64} = 60, \text{ więc } \delta = 0,36, i = \frac{23}{6} = 3,83, \text{ stąd}$$

$$\tau_w = \frac{10000}{529} \left(1 + 0,36 \frac{10,76}{3,83} \right) = 18,9 (1 + 1,01) = 38 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle 457) jest $\tau = \frac{\tau_w}{\zeta}$, a że dla $\frac{l}{a} = 60$, jest $\zeta' = 0,636$, więc

$$\tau = \frac{38}{0,636} = 60 \text{ kg/cm}^2.$$

Tu, jak widzimy, wyniki obu wzorów teoretycznego i doświadczalnego nie wiele się różnią.

Zostawimy tu wymiar 23×23 cm.

2. Jaką siłę wytrzyma słupek o przekroju I l. 20, obciążony mimośrodkowo w odstępnie 5 cm od osi ścianki, dla długości wolnej 3 m. Naprężenie dopuszczalne niech będzie 1000 kg/cm^2 .

Przyjąwszy tymczasowo $f=0$, otrzymamy z 526) $P = \frac{F v''}{\frac{F c e''}{I} + 1}$.

Przypuśćmy tymczasowo ze względu na założenie $f=0$

$$v'' = 800 \text{ kg/cm}^2, \text{ to } P = \frac{37,58 \cdot 800}{\frac{37,58 \cdot 5 \cdot 4,8}{158,3} + 1} = 4390 \text{ kg}.$$

Szukajmy teraz dla $P=4390 \text{ kg}$ v'' , to otrzymamy z 528)

$$f+5 = \frac{5}{1 - \frac{300^2}{8 \cdot 210000 \cdot 158,3}} = \frac{5}{0,8514} = 5,87 \text{ cm}.$$

Więc wedle 526)

$$v'' = \frac{4390}{37,58} \left(\frac{37,58 \cdot 5,87 \cdot 4,8}{158,3} + 1 \right) = 116,8 (6,69 + 1) = 898 \text{ kg/cm}^2.$$

Należy więc przyjąć siłę nieco większą. Gdyby v'' były wprost proporcjonalne do P , to należałoby P powiększyć o $\frac{1}{9}$, blisko o 500 kg, P jednak przychodzi też w mianowniku 527), więc zwiększymy P tylko o 310 i przyjmiemy $P=4700 \text{ kg}$.

Z równ. 528) otrzymamy

$$f+5 = \frac{5}{1 - \frac{300^2}{8 \cdot 2100000 \cdot 158,3}} = \frac{5}{0,841} = 5,946 \text{ cm}.$$

Więc wedle 526)

$$v'' = \frac{4700}{37,58} \left(\frac{37,58 \cdot 5,946 \cdot 4,8}{158,3} + 1 \right) = 125 (6,775 + 1) = 972 \text{ kg/cm}^2.$$

Możemy zatem zatrzymać siłę 4700 kg. Gdyby różnica była większa, trzeba by siłę jeszcze odpowiednio zmienić i rachować raz jeszcze.

Spróbujemy jeszcze obliczyć naprężenie wedle Tetmajera. Tu wedle tablicy II.

$$a=2,05, \frac{l}{a} = \frac{300}{2,05} = 146, \text{ więc } \zeta = 37, i = 0,878, \text{ więc}$$

$$\tau_w = \frac{4700}{37,58} \left(1 + 0,37 \cdot \frac{5,946}{0,878} \right) = 125 (1 + 2,706) = 463,3$$

$$\text{Dla } \frac{l}{a} = 146 \text{ jest } \zeta = 0,263, \text{ więc } \tau = \frac{463,3}{0,263} = 1762 \text{ kg/cm}^2.$$

Naprężenie więc jest o wiele za wielkie, musimy siłę odpowiednio zmniejszyć. Przyjmijmy $P = 3000 \text{ kg}$, to z 528)

$$f+5 = \frac{5}{1 - \frac{300^2}{8 \cdot 2100000 \cdot 158,3}} = \frac{5}{0,8985} = 5,566 \text{ cm},$$

$$\tau_w = \frac{3000}{37,58} \left(1 + 0,37 \cdot \frac{5,566}{0,878} \right) = 79,8 (1 + 2,345) = 266,9,$$

$$\tau = \frac{266,9}{0,263} = 1015 \text{ kg/cm}^2.$$

Naprężenie jest prawie takie, jak dopuszczalne, możemy zostawić $P = 3000 \text{ kg}$, lub też o 1,5% obniżyć, więc $P \doteq 2955 \text{ kg}$.

3. Obliczmy znowu siłę, jaką wytrzyma słup o przekroju tym samym i tym samym mimośrodzie dla długości wolnej 4 m. Naprężenie dopuszczalne niech i tu będzie 1000 kg/cm^2 .

Przyjąwszy tymczasowo $f=0$, a v'' ze względu na to przyjęcie i wielkie l tu tylko 700 kg/cm^2 , otrzymamy

$$P = \frac{37,58 \cdot 700}{\frac{37,58 \cdot 5 \cdot 4,8}{158,3} + 1} = 3929 \text{ kg},$$

zamiast czego przyjmijmy okrągło $P = 3930 \text{ kg}$. Z równ. 528) otrzymamy

$$f+5 = \frac{5}{1 - \frac{400^2}{8 \cdot 2100000 \cdot 158,3}} = \frac{5}{1 - 0,2364} = 6,55 \text{ cm}.$$

Więc wedle 526)

$$v'' = \frac{3930}{37,58} \left(\frac{37,58 \cdot 6,55 \cdot 4,8}{158,3} + 1 \right) = 104,6 (7,80 + 1) = 920 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle Tetmajera otrzymamy, ponieważ tu

$$a = 2,05, \frac{l}{a} = \frac{400}{2,05} = 195, \text{ więc } \zeta = 0,17, \zeta' = 0,147, i = 0,878, \text{ więc}$$

$$\tau_w = \frac{3930}{37,58} \left(1 + 0,17 \cdot \frac{6,55}{0,878} \right) = 104,6 (1 + 1,268) = 237 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{a dalej } \tau = \frac{237}{0,147} = 1612 \text{ kg/cm}^2.$$

Stąd widzimy więc, że tu naprężenie z uwzględnieniem wybożenia jest prawie dwa razy większem. Musimy tu przyjąć P znacznie mniejsze. Ponieważ we wzorze 534) F i i są stałe, a $f+c$ wedle 528) dla mniejszego P jest mniejszem, zatem P jest większem, więc

$$P > 3930 \cdot \frac{1000}{1612} = 2438 \text{ kg.}$$

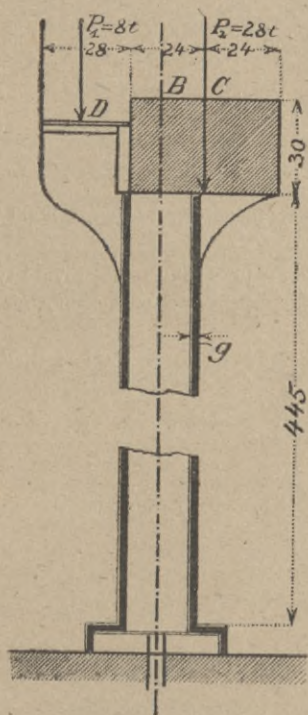
Przyjmijmy $P = 2500 \text{ kg}$, to

$$f + 5 = \frac{5}{1 - \frac{400^2}{8 \cdot 2100000 \cdot 158,3}} = \frac{5}{1 - 0,150} = \frac{5}{0,850} = 5,883 \text{ cm,}$$

$$\text{zatem } \tau_{\text{to}} = \frac{2500}{37,58} \left(1 + 0,17 \frac{5,883}{0,878} \right) = 68,07 (1 + 1,139) = 142 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{a stąd } \tau = \frac{142}{0,147} = 966 \text{ kg/cm}^2.$$

Siłę możemy więc przyjąć $2500 \cdot \frac{1000}{966} = 2588 \text{ kg}$, równo 2590 kg .



rys. 249.

4. Słup z żelaza łanego niesie na lewym wsporniku ciężar 8 t , na prawym równocześnie 28 t ; jakie wymiary ma mieć ten słup, jeżeli naprężenie dopuszczalne przyjmijmy 1000 kg/cm^2 , $l = 4,45 \text{ m}^2$ (rys. 249).

Wypadkowa 36 t leży w odstępnie od D o $\frac{28 \cdot (14 + 24)}{8 + 28} = 29,5 \text{ cm}$, zatem od B o $3,5 \text{ cm}$ na prawo.

Przypuśćmy ze względu na wyboczenie i mimośród $\tau_0 = 250 \text{ kg/cm}^2$. Wtedy

$$F = \frac{36000}{250} = 144 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2).$$

Jeżeli $d_1 = 0,8 d$, to

$$F = \frac{\pi d^2}{4} (1 - 0,64) = 0,09 \pi d^2, \text{ stąd } d = \sqrt{\frac{144}{0,09 \pi}} = 22,57 \text{ cm,}$$

zamiast czego przyjmijmy $d = 23 \text{ cm}$, $g = 23 \text{ mm}$. Dalej mamy

$$I = 0,0491 (23^4 - 18,4^4), \quad F = 415,5 - 265,9 = 149,6 \text{ cm}^2,$$

$$a = \frac{1}{4} \sqrt{23^2 + 18,4^2} = 7,36 \text{ cm,}$$

$$i = \frac{2a^2}{d} = \frac{54,17}{11,5} = 4,71 \text{ cm, } \frac{l}{a} = \frac{445}{7,36} = 60,5, \\ = 0,68.$$

Wedle 528) mamy

$$f + c = \frac{3,5}{1 - \frac{445^2}{8 \cdot 1000000 \cdot 0,0491 (23^4 - 18,4^4)}} = \frac{3,5}{1 - 0,11} = 3,93 \text{ cm.}$$

Zatem wedle 526)

$$v'' = \frac{36000}{149,6} \left(1 + \frac{3,93}{4,71} \right) = 235,16 \cdot 1,835 = 431 \text{ kg/cm}^2.$$

Dalej otrzymamy $\nu = 235,16 (0,835 - 1) = -38,8 \text{ kg/cm}^2$.

Jeżeli jednak obliczymy wedle wzoru Tetmajera 534), to dla

$$\frac{l}{a} = 60,5, \quad \vartheta = 0,68 \quad \text{a} \quad \zeta' = 0,306,$$

$$\tau = \frac{\tau_{\omega}}{0,306}, \quad \text{a} \quad \text{więc} \quad \text{według} \quad 534)$$

$$\tau = \frac{1}{0,306} \frac{36000}{149,6} \left(1 + 0,68 \frac{3,93}{4,71} \right) = \frac{369}{0,314} = 1322 \text{ kg/cm}^2.$$

Tu więc wzór teoretyczny daje stanowczo za mały wynik, wedle wzoru Tetmajera τ jest za wielkie, musimy przyjąć d większe.

Przyjmie my $d = 25 \text{ cm}$, $g = 2,5$ $d_1 = 29 \text{ cm}$, to $F = 176,7$,

$$a = \frac{1}{4} \sqrt{25^2 + 20^2} = 8,0 \text{ cm},$$

$$i = \frac{64}{12,5} = 5,02 \text{ cm}, \quad \frac{l}{a} = \frac{445}{8} = 55,6.$$

Wedle 528) mamy

$$f + c = \frac{3,5}{1 - \frac{445^2}{8 \cdot 1000000 \cdot 0,0491 (25^4 - 20^4)}} = \frac{3,5}{1 - 0,09} = 3,80.$$

Dla $\frac{l}{a} = 55,6$ mamy $\vartheta = 0,76$, $\zeta' = 0,341$, więc

$$\tau_{\omega} = \frac{36000}{176,7} \left(1 + 0,76 \frac{3,80}{5,02} \right) = 203,7 \times 1,573 = 320 \text{ kg/cm}^2, \quad \text{a} \quad \text{dalej}$$

$$\tau = \frac{320}{0,341} = 940 \text{ kg/cm}^2.$$

Ponieważ dla $a = 24 \text{ cm}$ τ byłoby prawdopodobnie większe, niż 1000 kg/cm^2 , więc zatrzymamy $a = 25$, $g = 25 \text{ cm}$.

Właściwie wskutek zwiększenia d zmniejszy się także c i τ będzie jeszcze mniejszem.

5. Na słup wysokości $6,79 \text{ m}$ działa siła $P = 33 \text{ t}$ z mimośrodem 10 cm i w poziomie wysokości siła pozioma $P_1 = 1,7 \text{ t}$. Naprężenie dopuszczalne 1200 kg/cm^2 .

Przypuśćmy ze względu na wyboczenie, siłę P_1 i mimośród $\tau = 250 \text{ kg/cm}^2$,

to $F = \frac{33000}{250} = 132 \text{ cm}^2$. Przypuśćmy 4 ćwierćkolówki l. 25, więc $I = 4 \cdot 31,64 =$

$= 137,56 \text{ cm}^2$, $I = 11973 \text{ cm}^4$. $W = 665,2 \text{ cm}^3$, $a = 9,73$. Mamy $\frac{l}{a} = \frac{679}{9,73} = 69,8$, więc

$\zeta' = 0,605$.

Z równ. 518 mamy

$$f + c = \frac{10}{1 - \frac{679^2}{8 \cdot 210000 \cdot 11973}} = \frac{10}{1 - 0,076} = 10,82$$

$$f_0 = \frac{1700 \cdot 679^2}{24 \cdot 210000 \cdot 11973} = 0,882 \text{ cm}, \quad \text{więc}$$

$$f + c + f_0 = 10,82 + 0,88 = 11,70 \text{ cm}. \quad \text{Z równ. 526.}$$

$$\nu = \frac{33000}{136,56} \left(\frac{11,7 \cdot 136,56}{665,2} + 1 \right) = 242 \left(2,404 + 1 \right) = 824 \text{ kg/cm}^2.$$

Nie uwzględniono tu jednak jeszcze wyboczenia. Wedle 533) należy przyjąć

$$\tau_w = \frac{824}{0.625} = 1362 \text{ kg/cm}^2.$$

Przyjmujemy więc 4 ćwierćkołówki l. 30, więc $F = 4 \cdot 43 \cdot 64 = 174.7 \text{ cm}^2$,
 $I = 23213 \text{ cm}^4$, $W = 1100 \text{ cm}^3$, $a = 11.5 \text{ cm}$. Wtedy $\frac{l}{a} = \frac{679}{11.5} = 59$
 więc $\zeta' = 0.673$. Dalej mamy

$$f + c = \frac{10}{1 - \frac{679^2}{8 \cdot 2100000 \cdot 23213}} = \frac{10}{1 - 0.039} = 10.40 \text{ cm}$$

$$f_0 = \frac{1700 \cdot 679^3}{24 \cdot 2100000 \cdot 23213} = 0.455 \text{ cm}, \text{ więc } f + c + f_0 = 10.855$$

$$\tau_w = \frac{1}{0.673} \frac{33000}{174.7} \left(\frac{10.855 \cdot 174.7}{1100} + 1 \right) = 607 \text{ kg/cm}^2.$$

Naprężenie jest wprawdzie za małe, ale ponieważ mniejszy numer kształtówek okazał się za słabym, więc musimy zatrzymać ćwierćkołówki l. 30.

Z powyższych przykładów widzimy, że właściwie należałoby obliczać wedle obu wzorów, teoretycznego 526) i Tetmajera 534) i przyjmować naprężenie większe, otrzymane z obu wzorów.

Wzory Tetmajera dają większe wyniki dla naprężenia, jeśli $\frac{l}{a}$ jest wielkiem, a także dla lanego żelaza wogóle z powodu stosunkowo małego ζ' .

VIII. Wytrzymałość na skręcanie.

§ 100. Wzory zasadnicze.

Jeżeli siły, działające na ciało, sprowadzić się dadzą dla pewnego przekroju do pary sił, której płaszczyzna jest równoległa do tego przekroju, a więc prostopadła do osi, to ciało to pracuje na skręcanie.

Na ciało $BCEB_1C_1$ działa w płaszczyźnie $B_1C_1F_1$ (rys. 250) moment Pc . Wskutek tego nastąpi przesunięcie punktów tego i innych przekrojów i tak punkt F_1 przesunie się do K_1 , F do K i t. d. Przesunięcia te są różne, w pewnym włóknie jednak DD_1 są zerem, a włókno to nazywamy osią skręcania.

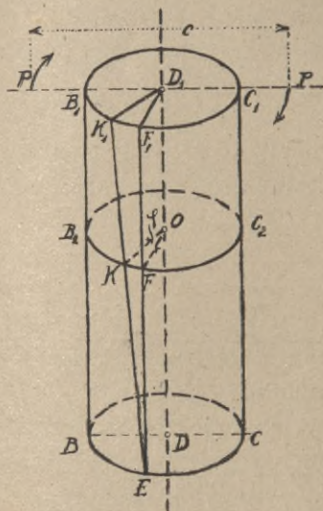
Zauważmy punkt N w przekroju B_2C_2F , a zrozumiemy, że przesunięcie punktu N będzie $NN' = \overline{ON} \varphi = r \varphi$, a przesunięciu

temu będzie odpowiadać naprężenie ścinające σ , a więc $\sigma = m \cdot r \varphi$, gdy m jest ilością stałą.

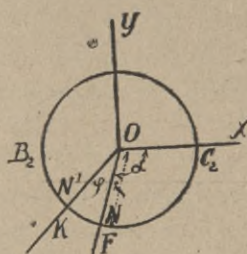
Jeżeli naprężenie to rozłożymy na składowe σ_x i σ_y , działające w kierunku osi OX i OY , to $\sigma_x = \sigma \text{ wst } \alpha$, a $\sigma_y = \sigma \text{ dost } \alpha$.

Dla równowagi musi być

$$\int \sigma_x d^2 F = 0 \text{ i } \int \sigma_y d^2 F = 0,$$



rys. 250.



rys. 251.

a gdy wstawimy wartości,

$$\int \sigma \text{ wst } \alpha d^2 F = m \varphi \int r \text{ wst } \alpha d^2 F = m \varphi \int x d^2 F = 0$$

$$\text{ i } \int \sigma \text{ dost } \alpha d^2 F = \varphi \int r \text{ dost } \alpha d^2 F = m \varphi \int y d^2 F = 0,$$

$$\text{ a więc } \int x d^2 F = 0 \text{ i } \int y d^2 F = 0. \quad \dots \quad 538)$$

Równania te wypełniają się wtedy, gdy początek spólrzędnych, gdzie przesunięcie = 0, przyjmiemy w środku ciężkości przekroju, a więc oś skręcenia jest zarazem osią geometryczną ciała.

Dla równowagi musi być także suma momentów w przekroju $B_2 C_2 F$ równa zeru, więc $\int \sigma r d^2 F + M = 0$, gdy $M = Pc$, czyli $m \varphi \int r^2 d^2 F + M = 0$, więc

$$m \varphi = - \frac{M}{\int r^2 d^2 F} = \frac{M}{I_0}$$

Wyraz $\int r^2 d^2 F = I_0$ nazywamy biegunowym momentem bezwładności (n. *das polare Trägheitsmoment*, fr. *moment d'inertie polaire*).

Wstawmy w to równanie

$$m \varphi = \frac{\sigma}{r} I_0 = \int r^2 d^2 F = \int (x^2 + y^2) d^2 F = \int x^2 d^2 F + \int y^2 d^2 F + 2 \int xy d^2 F = I_1 + I_1 + 2 K^*),$$

a jeżeli osie OX i OY są osiami głównymi, to według równ. 156) $K=0$, więc $I_0 = I + I_1$. Dla przekroju kołowego, kwadratu i wieloboków regularnych jest $I = I_1$, więc $I_0 = 2 I$.

Możemy zatem napisać

$$\sigma = \frac{Mr}{I + I_1} = \frac{Mr}{I_0} = \frac{M}{W_0} \dots \dots \dots 539)$$

Z równania tego wynika, że największe naprężenie σ jest dla *najw.* r , a więc dla najdalszych punktów obwodu.

Kąt φ nie jest stałym dla wszystkich przekrojów, lecz zmienia się od przekroju do przekroju. Niechaj zmiana kąta φ na jednostkę długości będzie $\Delta\varphi$, to możemy w przybliżeniu przypuścić, że kąt φ jest proporcjonalnym do długości z , więc $\varphi = G z$.

Przesunięcie punktu N , jest, jak wiemy, równe $r\varphi$, dla przekroju o dz oddalonego będzie zaś $r(\varphi + d\varphi)$, przesunięcie więc względne $\frac{r d\varphi}{dz} = Gr$; współczynnik G nazywamy współczynnikiem sprężystości na skręcenie (n. *Gleitmodul*, fr. *coefficient d'élasticité de torsion*).

Jeżeli m oznacza stosunek $\frac{1}{E} : \frac{1}{E_1}$, gdy E_1 jest współczynnikiem sprężystości poprzecznej, to wedle prawideł mechaniki rozumowej $G = \frac{m}{2(m+1)} E$, a dla $m = \frac{10}{3}$, $G = 0,385 E$.

Dalej mamy $\sigma = E_1 Gr$, a zatem ze względu na 539)

$$G = \frac{M}{E_1 I_0} \dots \dots \dots 540)$$

Teoria ta opiera się na przypuszczeniu, że przekrój poprzeczny pozostaje płaskim po skręceniu i że naprężenia są prostopadłe do promieni wodzących danych punktów. Przypuszczenia

*) Por. równ. 153.

te sprawdzają się jednak tylko przy przekroju kołowym. Dla innych przekrojów wzory powyższe są tylko przybliżone.

Podajemy tu w końcu wartości dla W_0 (równ. 539) dla rozmaitych przekroi:

Tablica L.

przekrój	rys.	W
koło	(78)	$\frac{\pi}{16} d^3$
pierścień	(89)	$\frac{\pi}{16} \frac{d^4 - d_1^4}{d}$
elipsa	(77)	$\frac{\pi}{16} b^2 h$
elipsa wydrążona		$\frac{\pi}{16} \frac{b^2 h - b_1^2 h_1}{6}$
prostokąt		$\frac{2}{9} b^3 h$
kwadrat		$\frac{2}{9} a^3$
przekrój ilowy (91)		$\frac{2}{9} (b - b_1)^2 (h + 2 b_1)$
„ krzyżowy (93)		$\frac{2}{9} g^2 (h + b)$

§ 101. Wał pełny i wydrążony.

Dla przekroju kołowego (rys. 251) możemy napisać na podstawie równ. 539) bez względu na znak

$$M = \frac{I_0 \sigma}{r} = \frac{(I + I_1) \sigma}{r}.$$

Ponieważ dla koła jest

$$I = I_1 = \frac{\pi}{64} d^4, \text{ więc } I_0 = \frac{\pi}{32} d^4, \text{ a } r = \frac{d}{2}.$$

Jeżeli więc chcemy dopuścić naprężenie ścinające τ_1 , to

$$M = \frac{\pi}{16} d^3 \tau_1, \text{ a stąd}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M}{\pi \tau_1}} \doteq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau_1}} \dots \dots \dots 540)$$

Dla przekroju rurowego (rys. 89) jest

$$I_0 = I + I_1 = 2I = 2 \frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4), \text{ a stąd}$$

$$M = \frac{\pi (d^4 - d_1^4) \tau_1}{32 \frac{1}{2} d} = \frac{\pi d^4 - d_1^4}{16 d} \cdot \tau_1 = 0,196 \frac{d^4 - d_1^4}{d} \tau_1, \text{ więc}$$

$$d_1 = \sqrt[4]{4^4 - 5,102 \frac{M d}{\tau_1}} \dots \dots \dots 541)$$

Dla przyjętego d da się więc d_1 łatwo obliczyć.

Nazwawszy $\frac{d_1}{d} = n$, otrzymamy $M = 0,196 (1 - n^4) d^3 \tau_1$, a stąd

$$d = \sqrt[3]{5,102 \frac{M}{\tau_1 (1 - n^4)}} = 1,721 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau_1 (1 - n^4)}} \dots \dots \dots 542)$$

§ 102. Przekrój kwadratowy.

Jeżeli bok kwadratu jest a , to możemy, w przybliżeniu licząc, zastosować także wzór 539). Tu jest

$$I_0 = 2 \cdot \frac{1}{12} a^4 = \frac{1}{6} a^4,$$

więc bez względu na znak będzie

$$\text{najw. } \sigma = \frac{Mr}{\frac{1}{6} a^4} = \frac{M \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}}{\frac{1}{6} a^4} = \frac{3\sqrt{2} M}{a^3}.$$

Jeżeli naprężenie dopuszczalne jest τ_1 , to $\tau_1 a^3 = 3\sqrt{2} M = 4,243 M$, więc

$$a = \sqrt[3]{\frac{4,243 M}{\tau_1}} = 1,62 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau_1}} \dots \dots \dots 543)$$

Według dokładniejszej teorii (p. Kluger: Wykład wytrzymałości materiałów str. 328) otrzymamy

$$\text{najw } \sigma = 4,5 \frac{M}{a^3},$$

a stąd wstawiwszy τ_1 za najw σ_1 będziemy mieli

$$a = \sqrt[3]{\frac{4,5 M}{\tau_1}} = 1,65 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau_1}} \dots \dots \dots 544)$$

IX. Dźwigary kratowe i więzary dachowe.

§ 103. Uwagi ogólne.

Wyłożywszy wszystkie rodzaje wytrzymałości, przystępujemy teraz do zespołów, które obliczamy według zasad, poznanych w poprzednich rozdziałach.

Według równania 143) $\frac{M}{r} = \frac{I}{e} = W$

zatem moment oporu belki, a więc i obciążenie, które belka unieść może, jest tem większe, im większy jest moment bezwładności. Ponieważ $I = \iint d^2 Fy^2$,

więc moment bezwładności jest tem większym, im większe są y . Najkorzystniejszy rozkład materiału byłby więc w przekroju o wielkiej wysokości, w którym materiał byłby skupiony w warstwach skrajnych. Belka o takim przekroju składa się z dwu oddzielnych podłużnych części t. z. pasów (n. *Gurt*, *Gurtung*, fr. *semelle*, *plate-bande*, an. *chord*, *boom*, r. *поясъ*), które musimy o tyle połączyć, aby tworzyły całość. W dźwigarze blaszanym ścianka łączy oba pasy; jeżeli zamiast ścianką łączymy pasy dla oszczędności materiału prętami ułożonymi w kratę, wtedy dźwigar ten nazywamy dźwigarem kratowym (n. *Gitterträger*, fr. *poutre en treillis*, an. *trellis girder*, *frame*, cz. *nosnik pŕihradovy*, r. *рѣшетчатая балка*).

Dźwigar kratowy składa się więc z pasu górnego (n. *Obergurt*, fr. *semelle*, *membrure superieure*, an. *top-chord*, *upper-boom*, cz. *pas horni*, r. *верхний поясъ*), pasu dolnego (n. *Untergurt*, fr. *semelle*, *membrure inférieure*, an. *bottom-chord*, *lower boom*, cz. *pas spodni*, r. *нижний поясъ*) i części łączących oba pasy czyli kraty (n. *Gitterwerk*, fr. *treillis*, an. *trellis work*, *web*, cz. *pruty vypluvaci*, r. *рѣшѣтка*). W każdym przekroju pracuje jeden pas na wyciąganie, drugi na ściskanie, jeden zatem stara się przedłużyć się, drugi skrócić. W obu pasach działają zatem siły wprost przeciwne, które przenoszą się przez kratę i znoszą, jeżeli oba pasy mają tworzyć jeden dźwigar. Aby siły te przemieścić z jednego pasu na drugi, musimy je rozłożyć w dwu kierunkach, łączymy zatem pasy dwoma rzędami pod rozmaitymi kątami nachylonych prętów, ułożonych w kratę. Pręty te nazywamy

krzyżulcami (n. *Gitterstäbe*, fr. *barre de remplissage*, *étrésillon*, an. *brace*).

Przy obliczeniu dźwigaru kratowego przypuszczamy najprzód, że krzyżulce z pasami i części pasów nawzajem połączone są w węzłach (n. *Knoten*, fr. *noeud*, an. *knot*, *apex*; cz. *styčnik*, r. *узелъ*) przegibnie i spółśrodkowo, wskutek czego mogą w krzyżulcach i pasach działać tylko siły podłużne w kierunku osi pręta. Każda inna siła, działająca nie w kierunku osi pręta, musiałaby sprawić obrót pręta około sworznia. Jeżeli więc istnieje równowaga, siły działają w kierunku osi pręta.

Dalszem przypuszczeniem jest, że siły zewnętrzne działają tylko w węzłach, a krzyżulce przedstawiamy sobie tymczasowo bez ciężkości.

Nareszcie przypuszczamy, że krzyżulce są proste, a wskutek tego i wskutek działania siły w kierunku osi pręta powstaje we wszystkich przekrojach jednego pręta naprężenie jednakowe. Przekroje prętów obliczamy zatem tak, aby naprężenie było równe naprężeniu dopuszczalnemu. Widzimy stąd, że przy dźwigarach kratowych wyzyskujemy materiał zupełnie, bo we wszystkich częściach dźwigaru mamy jednakową pewność, gdy tymczasem w dźwigarze blaszanym naprężenie w warstwach skrajnych jest wielkiem, a blisko osi ciężkości bardzo małym; materiał więc nie jest zupełnie wyzyskanym.

§ 104. Warunki wyznaczalności wewnętrznej.

Przy obliczeniu dźwigarów kratowych chodzi o wyznaczenie sił wewnętrznych, działających w krzyżulcach i częściach pasów w kierunku ich osi. Dla każdego węzła z osobna muszą być siły zewnętrzne, działające na ten węzeł i siły wewnętrzne prętów, wychodzących zeń, w równowadze, więc możemy dla każdego węzła ustawić dwa równania na tej podstawie, że suma składowych poziomych i suma składowych pionowych tych sił jest równą zeru; dla m węzłów otrzymamy więc $2m$ równań. W tych równaniach zawarte są jednak trzy równania, którebyśmy mogli ustawić dla sił zewnętrznych. Siły zewnętrzne bowiem muszą być między sobą w równowadze, gdyż inaczej cały dźwigar musiałby się poruszyć, a więc sumy składowych sił zewnętrznych pionowych, po-

ziomych i momentów muszą być równe zeru. Z tego wynika, że nie możemy dowolnie przyjąć wszystkich sił zewnętrznych, lecz że muszą one zadość uczynić trzem warunkom. Z tych $2m$ równań, któreśmy otrzymali, dadzą się ustawić trzy równania, określające warunki równowagi sił zewnętrznych. Reszty $2m-3$ równań możemy użyć do wyznaczenia nieznanych sił wewnętrznych. Jeżeli tedy n oznacza ilość krzyżulców i części pasów, to mamy n niewiadomych sił wewnętrznych, do których wyznaczenia potrzebujemy n równań.

Jeżeli $2m-3=n$, 545)

to wtedy mamy właśnie dostateczną ilość równań do wyznaczenia sił wewnętrznych; dźwigar taki nazywamy dźwigarem kratowym statycznie wyznaczalnym (n. *statisch bestimmt*, fr. *stricte, indéformable*, cz. *prihradovina tuha*, r. *статически определенным*). Jeżeli $2m-3 > n$, wtenczas mamy więcej równań, niż niewiadomych, a więc równania te określają jeszcze $2m-3-n$ warunków, które dla równowagi muszą być spełnione. Ponieważ przy zmianie obciążenia takiego dźwigaru musi on zmienić swój kształt, aby dopełnić warunków równowagi, więc dźwigar taki nazywamy chwiejnym lub niesamoistnym (n. *labil, unselbstständig*, fr. *insuffisant, déformable*, cz. *netuhá, vratká staticky přeurčitá*). Przykładem dźwigaru kratowego chwiejnego są dźwigary mostów wiszących.

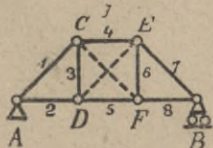
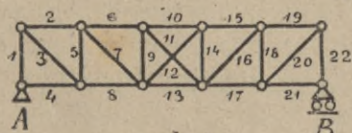
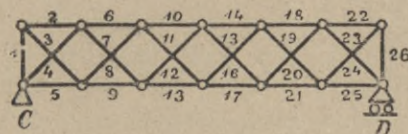
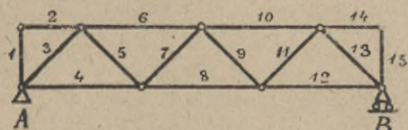
Jeżeli nakoniec $2m-3 < n$, wtenczas nie możemy wyznaczyć statycznie wszystkich niewiadomych, dźwigar taki jest statycznie niewyznaczalnym (n. *statisch unbestimmt*, fr. *statiquement indéterminé*, an. *not statically determined*, cz. *staticky neurčitý*, r. *статически неопределённым*). Jeżeli $2m-3-n=1$, to dźwigar kratowy jest niewyznaczalnym 1-go rzędu, jeżeli brakuje do wyznaczenia niewiadomych 2 równań, to dźwigar kratowy jest niewyznaczalnym 2-go rzędu i t. d. Chcąc wyznaczyć siły wewnętrzne dźwigaru statycznie niezwychnego, musimy ustawić jeszcze $n-2m+3$ równań, a to albo czynić pewne przypuszczenia lub też badać odkształcenia dźwigaru według prawideł sprężystości.

Jeżeli do dźwigaru kratowego statycznie wyznaczalnego dodamy nowy węzeł, łącząc go z dźwigarem dwoma prętami, to w równaniu 545) wstawiamy $m+1$ zamiast m a $n+2$ zamiast n i otrzymamy

$2(m+1)-3=n+2$, czyli $2m-3=n$, jak pierwiej,

a więc przez dodanie jednego węzła i dwu prętów belka pozostaje nadal statycznie wyznaczalna. Jeżeli belka składa się z samych trójkątów, to zachodzi właśnie ten wypadek i belka taka będzie statycznie wyznaczalna.

Dla belki kratowej *AB* (rys. 252) jest $n=15$, $m=9$, więc $2m-3=15=n$. Belka ta jest zatem statycznie wyznaczalna.



rys. 252—255.

Dla belki *CD* (rys. 253) mamy $n=26$, $m=14$, $2m-3=28-3=25 < n$. Belka ta jest więc statycznie niewyznaczalna 1-go rzędu, bo $n-2m+3=1$.

Dla belki *AB* (rys. 254) mamy $n=22$, $m=12$, $2m-3=24-3=21 < n$, więc belka jest niewyznaczalna pierwszego rzędu. Możemy z niej jednak łatwo otrzymać statycznie wyznaczalną, opuściwszy jeden krzyżulec np. 12, gdyż wtedy będzie $2m-3=n$.

Dla belki *AB* (rys. 255) jest $n=8$, $m=6$, więc $2m-3=12-3=9 > 8$. Belka ta jest zatem niesamoistną pierwszego rzędu. Chcąc zrobić z niej belkę kratową statycznie wyznaczalną, musielibyśmy dodać jeszcze jeden krzyżulec np. *ED*, aby $2m-3=n$. Gdybyśmy dodali jeszcze drugi krzyżulec *CF*, to wtedy $2m-n$ byłoby $>n$, otrzymalibyśmy więc

belkę kratową niewyznaczalną 1-go rzędu.

§ 105. Warunki wyznaczalności ze względu na łożyska.

Dotychczas przypuszczaliśmy, że siły zewnętrzne, a zatem i oddziaływania, są już wyznaczone. Belka może być jednak także statycznie niewyznaczalną ze względu na rodzaj podparcia; zależy to od ustroju łożysk. Łożyska dzielimy wogóle na stałe (n. *festes Lager*, fr. *support fixe*, an. *fixed support*, cz. *pevná*, r. неподвижная подушка) i ruchome (n. *beweglich*), które pozwalają na przesunięcie końca dźwigaru. Łożysko ruchome może być albo przesuwowe (n. *Gleitlager*, fr. *glissière*, an. *slide bolster*,

cz. *posouvateľna*, r. плоская подвижная подушка), przy którym ruch końca belki następuje po przewyciężeniu tarcia posuwistego i wałkowe (n. *Rollenlager*, fr. *support en rouleaux*, an. *roller-bearing*, r. подушка на катках), ułatwiające przesuwanie podłużne przez użycie wałków po przewyciężeniu tarcia potoczystego. Jeżeli łożysko jest wałkowym, to jeżeli nie będziemy uwzględniać małego bardzo tarcia potoczystego, dla równowagi oddziaływanie może być tylko prostopadłe do podstawy, na której leżą wałki, bo gdyby było ukośnem, to składowa równoległa do podstawy wywołałaby obrót wałków. Jeżeli łożysko składa się z dwu części, połączonych za pomocą sworznia, więc przegibnie, to kierunek oddziaływania musi przechodzić przez sworzeń. Łożysko takie nazywamy kołyskowym (n. *Kipplager*).

Jeżeli urządzimy łożysko kołyskowe i wałkowe zarazem, to znamy punkt zaczepienia i kierunek oddziaływania, pozostaje tylko jedna niewiadoma, wielkość oddziaływania.

Jeżeli łożysko jest tylko kołyskowe, to znamy punkt zaczepienia oddziaływania, ale nie znamy kierunku i wielkości oddziaływania, są tu więc dwie niewiadome. Wreszcie, gdy łożysko jest stałem, to nie znamy ani punktu zaczepienia ani kierunku ani wielkości oddziaływania. Mamy tu trzy niewiadome.

Ponieważ do określenia obu oddziaływań belki prostej w dwu punktach podpartej mamy tylko 3 równania równowagi sił zewnętrznych, przeto suma niewiadomych podporowych nie może być większą, niż trzy. Warunek ten spełni się, gdy urządzimy jedno łożysko stałe kołyskowe (2 niewiadome) a drugie ruchome kołyskowe i wałkowe (1 niewiadoma).

W ogóle jeżeli mamy a niewiadomych podporowych, to trzy z nich dadzą się wyznaczyć z 3 równań, wyrażających równowagę sił zewnętrznych, zatem pozostaje $(a - 3)$ niewiadomych. Z uwzględnieniem niewiadomych podporowych możemy zatem napisać zamiast 545) jako warunek wyznaczalności belki

$$2m - 3 = n + (a - 3), \text{ zatem} \\ 2m = n + a. \dots \dots \dots 546)$$

Jeżeli nazwiemy ilość łożysk stałych kołyskowych s , ilość wałkowych kołyskowych w , to $a = 2s + w$, więc

$$2m = 2s + w + n. \dots \dots \dots 547)$$

Dla belki kratowej AB (rys. 252) jest $n = 15$, $m = 9$, $s = 1$, $w = 1$, więc $2m = 18$, $2s + w + n = 2 + 1 + 15 = 18$. Zatem belka jest statycznie wyznaczalną.

Gdyby w B było także łożysko stałe kołyskowe, toby było $s=2$, więc $2s + n + n = 4 + 15 = 19$, belka byłaby z powodu łożysk statycznie niewyznaczalną.

§ 106. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych za pomocą metody wielobokowej.

Dla równowagi sił zewnętrznych powinien, jak wiemy (§ 5), zamknąć się wielobok sił i wielobok sznurowy. Oprócz tego muszą być dla każdego węzła siły zewnętrzne i wewnętrzne w równowadze, a więc dla każdego węzła musi się odnośny wielobok sił zamknąć. Jeżeli zaczniemy od węzła, w którym schodzą się dwa pręty, to kierunki i wielkości wszystkich sił z wyjątkiem wielkości dwu sił wewnętrznych przeciętych prętów są wiadome, możemy więc wykreślić wielobok sił i wyznaczyć niewiadome. Idziemy teraz do następnego węzła, w którym schodzą się trzy pręty, z tych jeden, dla którego wyznaczyliśmy już siłę wewnętrzną. Mamy więc znów tylko dwie niewiadome i postępujemy, jak pierwej. W ten sposób dalej postępując, możemy wyznaczyć wszystkie siły wewnętrzne. Ułatwimy sobie przytem wykreślenie, jeżeli wieloboków sił dla poszczególnych węzłów nie będziemy kreślić osobno, lecz wszystkie na jednym rysunku.

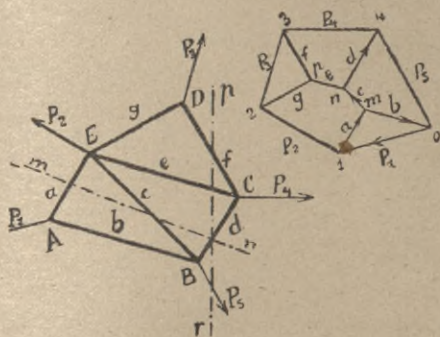
Na rysunku 256. widzimy belkę kratową, na którą działają siły. Dla równowagi dają one zamknięty wielobok sił, a także wielobok sznurowy dla jakiegokolwiek bieguna musi się zamknąć (na rysunku opuściliśmy wielobok sznurowy). Wykreślimy teraz wielobok sił dla węzła A , gdzie schodzą się tylko dwa pręty, w których siły działające nazwijmy a i b . W wieloboku sił 01 przedstawia siłę P_1 , poprowadźmy $1m \parallel AE$ i $0m \parallel AB$, to te dwie proste przetną się w punkcie m , a proste $0m$ i $1m$ przedstawiają kierunki i wielkości sił wewnętrznych a i b . Z kierunku strzałek w wieloboku $01m$ poznamy, że siły a i b działają w kierunku od węzła A , a więc przedstawiają ciągnienia. Idziemy teraz do węzła B . Tu znamy P_6 i b , niewiadome są c i d , które otrzymamy, kreśląc w podobny sposób wielobok sił dla węzła B $40mn$, a więc $mn=c$, $n4=d$. I tu obie siły są dodatnie t. j. przedstawiają ciągnienia. Gdyby kierunek strzałki był odwrotny, do węzła i wskazywał, że siła działa do przekroju, wtedy byłoby tam ciśnienie. W podobny sposób postępując dalej, otrzymamy wykreślne

siły wewnętrzne, działające we wszystkich częściach belki, czyli tak zwany plan sił (n. *Kräfteplan*, fr. *épure*, an. *force diagram*).

Metodę tę podał najpierw Maxwell^{*)} w roku 1864, a Cremona^{**)} w roku 1872. Nazywają ją metodą Cremony, chociaż

raczej należałoby ją nazwać metodą Maxwella lub metodą wielobokową (n. *Polygonalmethode*).

Z rys. 256 widzimy, że plan sił łączy się ściśle z wielobokiem sił. Nim więc przystąpimy do wykreślenia planu sił, musimy najprzód mieć wykreślony wielobok sił i wyznaczone wielkości oddzia-



rys. 256.

ływać. Boki planu sił są na mocy konstrukcji równoległe do prętów belki kratowej.

§ 107. Metoda przecięć.

a) Analityczna.

Druga metoda wyznaczania sił wewnętrznych belki kratowej jest metoda przecięć (n. *Schnittmethode*, a. *method of sections*). Analitycznie zastosował pierwszy tę metodę Ritter (1861), dlatego nazywamy ją metodą Rittera.

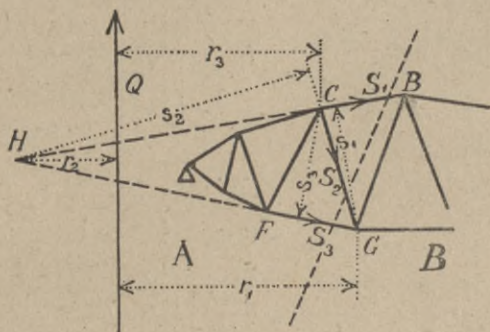
Jeżeli belkę kratową przetniemy na dwie części A i B, to jeżeli chcemy, aby część A pozostała w równowadze, musimy przyłożyć siły wewnętrzne przeciętych prętów w punktach, gdzieśmy je przecięli. Jeżeli przetniemy trzy pręty, nieprzecinające się w jednym punkcie, to dadzą się siły wewnętrzne tych prętów wyznaczyć, gdyż dla równowagi możemy trzy równania ustawić. Niech CB, CG i FG (rys. 257) będą trzy przecięte pręty, to gdy prawą część belki odejmiemy, dla równowagi zaczepiamy dotychczas nieznanne siły wewnętrzne prętów S_1 , S_2 , S_3 . Wypadkową sił zewnętrznych, czyli dla belki prostej siłą poprzeczną niech będzie

^{*)} *On reciprocal figures and diagrams of forces*. 1864.

^{**)} *Le figure reciproche nella statica grafica*. Milano 1872.

Q. Chcąc wyznaczyć wprost S_1 , obieramy jako punkt obrotu dla momentów punkt przecięcia się G dwu drugich sił S_2 i S_3 , których moment zatem jest równy zeru. Mamy więc $Qr_1 + S_1s_1 = 0$, a stąd

$$S_1 = -\frac{Qr_1}{s_1} = -\frac{M_1}{s_1}, \dots \dots \dots 548)$$



rys. 257.

jeżeli r_1 i s_1 nazwiemy prostokątne, spuszczone z G na kierunki sił Q i S_1 , a M_1 oznacza moment sił zewnętrznych z względu na G .

Znak (—) w równ. 548) oznacza, że kierunek siły będzie przeciwny, niżesmy pierwotnie przyjęli, a więc do węzła, zatem siła S_1 jest ciśnieniem.

Dla wyznaczenia siły S_2 ustawiamy równanie momentów ze względu na punkt H i otrzymamy — $Qr_1 = S_2s_2 = 0$, stąd $S_2 = \frac{Qr_2}{s_2} = \frac{M_2}{s_2}$, jeżeli M_2 oznacza moment zgięcia ze względu na H .

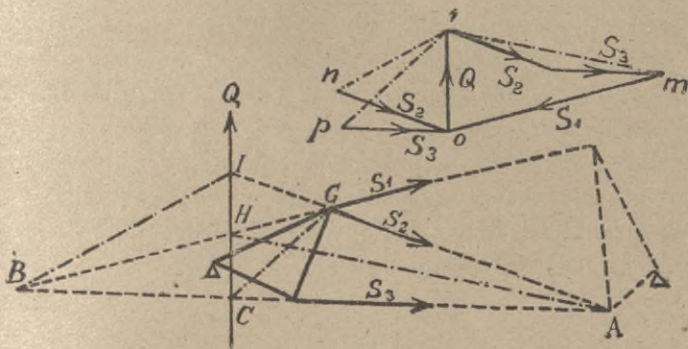
A ze względu na punkt C $Qr_3 - S_3s_3 = 0$, więc $S_3 = \frac{Qr_3}{s_3} = \frac{M_3}{s_3}$, przyczem M_3 oznacza moment zgięcia ze względu na C .

b) Wykreślna.

Podobnie możemy metodą przecięć wyznaczyć siły wewnętrzne wykreślnie, jak to pierwszy uczynił Culman (1864).

Przeciąwszy trzy pręty belki kratowej (rys. 258), mamy, jak pierwiej, cztery siły Q , S_1 , S_2 , S_3 , które muszą być w równowadze. Gdybyśmy złożyli siły S_2 i S_3 , to wypadkowa ich przechodziłaby przez punkt A ; kierunku jednak jej ani wielkości nie znamy, gdyż nie znamy wielkości sił S_2 i S_3 . Gdybyśmy następnie złożyli siły S_1 i Q , to wypadkowa tych sił przechodziłaby przez punkt H . Ponieważ jednak wszystkie te cztery siły są w równowadze, więc obie te wypadkowe muszą się równoważyć, a więc działać w jednej i tej samej prostej, ale w przeciwnych kierunkach i muszą być sobie równe, a zatem AH będzie kierunkiem

wypadkowej S_2 i S_1 . Niech $01 = Q$, to gdy poprowadzimy $1m \parallel HA$ a $0m \parallel S_1$, $01m$ będzie wielobokiem sił zamkniętym, $1m$ wypadkową z sił S_2 i S_3 a $0m = S_1$.



rys. 258.

Podobnie otrzymamy $0n = S_2$, zrobiwszy $1n \parallel IB$ a $0n \parallel S_2$ i $0p = S_3$, zrobiwszy $1p \parallel GC$ a $0p \parallel S_3$. Siły S_2 i S_3 możemy też inaczej wyznaczyć, znamy bowiem ich wypadkową $1m$. Rozkładamy więc ją według znanych kierunków CA i GA , robimy $1r \parallel GA$ i $mr \parallel AC$ i otrzymujemy $S_2 = 1r$ i $S_3 = rm$. Tok sił S_1 , S_2 i S_3 wyznaczamy, jak poprzednio, z wieloboku sił; widzimy więc, że siły S_2 i S_3 działają od przekroju, więc sprawiają ciągnięcie, S_1 ciśnienie.

Metodę przecięć możemy zastosować także przy wykonaniu planu sił, który kreślimy, przecinając po kolei belkę w ten sposób, aby przeciąć zawsze tylko dwa pręty, których sił wewnętrznych nie znamy. Wtedy wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie przekroju i siły wewnętrzne, działające w przeciętych prętach, muszą dać zamknięty wielobok sił. Ze względu na to, że wielkość tylko dwu sił jest nieznaną, wielobok ten da się wykreślić. Postępując tak dalej, otrzymujemy plan sił.

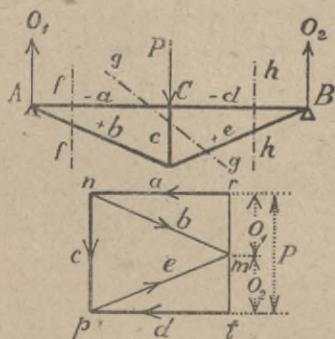
W rys. 256 przecinamy naprzód siły a i b i wykreślamy wielobok sił P_1 , a i b . Teraz tniemy wedle linii mn , przecinamy więc znaną nam siłę a , dalej c i d . Siły P_1 , P_3 , a , c i d muszą być w równowadze. Mamy wykreślone $P_3 = 40$, $P_1 = 01$, $\alpha = 1m$. Z m wykreślamy $mn \parallel c$ a $4n \parallel d$. Linje te przecinają się w n , mamy więc $mn = c$, $4n = d$. Tok sił w wieloboku sił jest P_5 . P_1 , a , c , d , więc c i d są ciągnięcia.

Dalej przecinamy belkę wedle linii pr , d jest tu znane, nieznajome c i f , itd.

Chcąc porównać obie metody, wielobokową i metodę przecięć, zauważyć musimy, że przy metodzie wielobokowej otrzymujemy, wykreśliwszy plan sił, siły wewnętrzne we wszystkich prętach, podczas gdy przy metodzie przecięć musimy dla każdej trójki sił robić osobny rysunek. Jeśli zatem mamy dla danego obciążenia belki wyznaczyć siły wewnętrzne wszystkich części belki, to użyjemy z korzyścią metody wielobokowej. Jeśli zaś dla pewnego obciążenia mamy wyznaczyć siłę wewnętrzną tylko jednego lub dwu prętów, używamy metody przecięć Rittera lub Culmanna, gdyż nią prędzej dojdziemy do celu.

§ 106. Belka wzmocniona.

Jako przykład metody wielobokowej wyznaczmy w przybliżeniu siły wewnętrzne belki wzmocnionej (n. *armierter Träger*, fr. *poutre armée à un seul poinçon*, an. *triangular truss*) (rys. 259), przypuszczając, że połączenia w węzłach są przegibne, i że działa na nią siła P w punkcie C . Stąd wynika, że $O_1 = O_2 = \frac{P}{2}$, a prosta $rtmr$ jest wielobokiem sił zewnętrznych. Chcąc



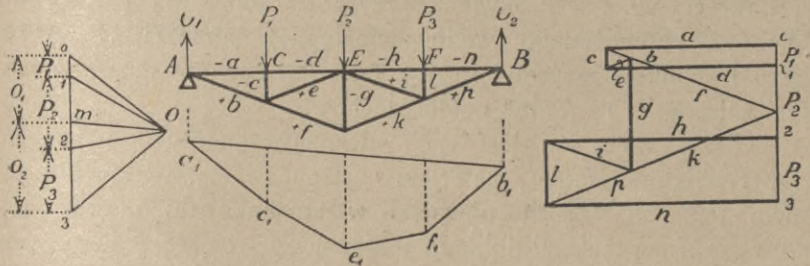
rys. 259.

wykreślić plan sił, przecinamy belkę naprzód w prostej ff , kreślimy $rn \parallel AC$, $mn \parallel AE$. Proste te przecinają się w punkcie n , więc $rn = a$, $mn = b$. Kierunek sił w wieloboku, oznaczony strzałkami, jest mnm , a więc w a jest do przekroju, zatem siła ta sprawia ciśnienie, w b od przekroju, więc ciągnienie. Teraz tniemy belkę w prostej gg i kreślimy wielobok sił: $O_1 = mr$, $a = rn$, dalej $np \parallel CE$. Nie znając wiel-

kości tej siły, musimy kreślić teraz w przeciwnym kierunku, więc $mp \parallel BE$. Proste te przecinają się w punkcie p , więc $np = c$, $mp = e$. Nakoniec tniemy belkę w prostej hh i kreślimy wielobok

sił, więc $O_1 = mr$, $P = rt$, dalej $tp \parallel CB$. Ponieważ wielobok sił musi się zamknąć, więc prosta $tp \parallel CB$ musi przechodzić przez punkt p , a $tp = d$, co stanowi zarazem próbę dokładności rysunku.

Na rysunku 260 widzimy belkę podwójnie wzmocnioną (fr. *poutre à trois poinçons*, an. *compound triangular truss*), na którą działają w węzłach C, E i F siły P_1, P_2 i P_3 . Naprzód musimy w znany sposób wyznaczyć oddziaływania O_1 i O_2 . W tym



rys. 260.

celu wykreślamy wielobok sił, przyjmujemy biegun O , kreślimy wielobok sznurowy, zamykającą $a_1 b_1$ i równoległy do niej promień Om , wtedy mamy $O_1 = m0$ i $O_2 = 3m$. Teraz mamy wszystkie siły zewnętrzne i kreślimy osobno wielobok sił $0123m$ i plan sił podobnie, jak powyżej.

Powyżej przypuściliśmy, że połączenia węzłowe są przegibne, a obciążenie działa tylko w węzłach. Często przypuszczenia te w praktyce się nie stwierdzają.

Jeżeli obciążenie działa na pasie górnym belki, wtedy części pasu górnego pracują jako belki drugorzędne na zginanie i przenoszą siły na węzły. Pas górny jest więc nie tylko ciśnionym, ale i zginanym. Obliczać go zatem należy dla wytrzymałości złożonej.

§ 109. Obciążenie dachów.

Według metody wielobokowej wyznaczamy też siły wewnętrzne, działające w więzarach dachowych.

Więzarem dachowym czyli wiązaniem pełnym (n. *Dachbinder*, *Bundgespärre*, fr. *ferme*, an *roof framing*, *roof*

truss, r. φερμα) nazywamy parę krokwi, wzmocnionych odpowiednim wiązaniem i działających jako belka kratowa, niosąca cały ciężar stały zeskładu dachu, jakoteż i obciążenia śniegiem i wiatrem. Dla obliczenia więzarów dachowych musimy więc przedewszystkiem znać obciążenie dachów, które składa się z ciężaru własnego, z ciężaru śniegu i parcia wiatru. Ciężar własny składa się z ciężaru: *a*) pokrycia wraz z krokwiemi, *β*) ciężaru płatwi i tężników, *γ*) ciężaru więzarów. Ciężar pokrycia wraz z krokwiemi przyjęc możemy dla pierwszego obliczenia przybliżonego według następcnej tabliczki LI., ciężar płatwi i tężników możemy przyjęc tak dla dachów drewnianych, jak i żelaznych, 15 kg/m² połaci dachów.

Ciężar więzarów jest nam nieznanym, należy go przyjęc w przybliżeniu wedle materiału ustroju i wykonanych budowli, jest on zresztą niewielki w stosunku do innych ciężarów; później należy dokładnie wyznaczyć ciężar i liczyć raz jeszcze.

Tablica LI.

Rodzaj pokrycia dach	Ciężar własny pokrycia i krokwi w kg na 1 m ² dachu pochyłego bez ciężaru więzarów głównych
cement drzewny z 10 cm żwirówką	210
dachówka zakładkowa	100
beton żużlowy, płyta żelbetowa	150
łupek naturalny	50
blacha płaska	40
blacha falista na kątówkach	20
tektura	40
gonty podwójnie	40
„ pojedynczo	35
szkło drutowe do 6 mm	25
„ „ „ 8 „	35
strzecha	65
asfalt, lupek abestowy	40
ruberoid	40

Ciężar więzarów głównych możemy przyjęc, jak następuje:

Tablica LII.

a) Wiązary drewniane na 1 m² dachu pochyłego:

Ustrój	rozp. m	cięż. kg/m ²
o stolec stojącym lub leżącym	7,5—15	7—13
wiszące pojedyncze	10 —18	12—18

Ustrój	rozp. m.	cięż. kg/m ²
wiszące złożone lub rozporowe	20 —	20— 24
„ niepodparte dla rozpiętości	10 —18	20— 30
b) Więzary żelazne na 1 m ² rzutu poziomego:		
lekkie	—	15— 20
cięższe	—	20— 30
dla wielkich rozpiętości 30—60 m	—	40—100

Nachylenie dachu zależnem jest od materiału pokrycia. W przecięciu możemy przyjąć nachylenie według następnjej tabliczki, jeżeli kąt nachylenia dachu do poziomu (rys. 261) nazwiemy α , wysokość h a rozpiętość l , zatem $\alpha = \frac{2h}{l}$. Nachylenie może być jednak także większem.

Tablica LIII.



rys. 261.

Rodzaj pokrycia	st $\alpha = \frac{2h}{l}$	
	najmn.	średnie
Strzecha	1:1	1:0,9
Gonty	1:2,25	1:1,5
Dachówka zakładowa	1:1,5	1:1
Łupek naturalny	1:2,25	1:1,5
„ eternit	1:2,25	1:1,5
Błacha płaska	1:7	1:4
„ falista	1:3	1:2
Szkoło	1:3	1:2
Tektura	1:10	1:6
Cement drzewny	1:12	1:10

Warstwa śniegu, która się osadza na dachach w naszych okolicach, nie jest zwykle grubszą, niż 0,60 m. Wysoko w górach warstwa ta jest jednak znacznie większą, dosięga nawet 2m wysokości. Przyjawszy wysokość warstwy 0,65 m i zważywszy, że śnieg jest około 8 razy lżejszy od wody otrzymamy ciężar śniegu na m² rzutu $s = 0,65 \frac{1000}{8} = 81,5 \text{ kg}$, okrągło

$$s = 80 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \dots \dots \dots 549)$$

Odnosi się to tylko do okolic w nizinach, w górach należy przyjąć więcej. Zwłaszcza śnieg zlodowaciały waży znacznie więcej, Schaller*) robił doświadczenia co do ciężaru gatun-

*) Por. „Beton u. Eisen“ 1909, str. 284 i 1907, str. 136.

kowego śniegu, a zarazem badał grubość jego warstw i przychodzi do wniosku, że jest ona zależną od wysokości nad poziom morza, mianowicie $g = 70 \left(1 + \frac{500}{h}\right)$, jeżeli g w *cm* a h w *m* oznacza wysokość nad poziom morza. Radzi on podzielić kraj warstwicami na 3 części.

Tablica LIV.

Strefa	h	s w kg/m^2
pierwsza	0—200 <i>m</i>	75
druga	200—500 „	120
trzecia	>500 <i>m</i>	340

Zwykle przyjmujemy, że obciążenie śniegu jest równe na całej powierzchni dachu; możliwem jest jednak, że wskutek wiatru jedna połać jest obciążoną śniegiem, druga prawie wcale nie. Czasem może to sprawić w niektórych prętach większe naprężenie, w takim razie należałoby to uwzględnić.

Koehlin i Landsberg przyjmują więc, że śnieg może być tylko na jednej połaci, Breymann jednak twierdzi słusznie, że na drugiej połaci należy przynajmniej przyjąć połowę obciążenia.

Na stromej połaci śnieg nie może się utrzymać, dlatego liczymy powyższe obciążenie tylko do $\alpha = 35^\circ$, przy $\alpha = 40^\circ$ przyjmujemy tylko połowę obciążenia, a przy $\alpha = 45^\circ$ nie przyjmujemy wcale żadnego obciążenia śniegiem.

Dalszą siłą, działającą na dachy, jest parcie wiatru (n. *Winddruck*, fr. *pression du vent* an. *wind pressure*, r. давление ветра). Z mechaniki rozumowej wiemy, że ciśnienie wiatru na płaszczyznę prostopadłą do kierunku wiatru jest

$$w = \frac{\gamma}{g} F v^2 \dots \dots \dots 550)$$

Jeżeli wstawimy $g = 9,81$ *m* i ciężar 1 *m*³ powietrza o normalnej gęstości $\gamma = 1,293$, to otrzymamy:

$$w = 0,13 F v^2 \text{ } kg/m^2 \dots \dots \dots 551)$$

gdy v oznacza chyżość wiatru na sekundę w metrach.

Chyżości wiatru i odpowiednie parcia są następujące:

Tablica LVI.

Moc wiatru	v w m/s	w w kg/m^2
silny wiatr	15	29
bardzo silny wiatr	20	52
lekka burza	25	82
silna burza	30	117
silny wichur	40	208
najsilniejszy wichur	50	326

W naszych okolicach v rzadko kiedy bywa większem, niż 30 m , którąto wartość po zaokrągleniu zwykle przyjmujemy przy obliczaniu dachów, $w=125 kg/m^2$. Szczególniej w miastach, gdzie dachy są po części zasłonięte innymi budynkami, powyższa wartość jest zupełnie wystarczającą; w miejscach jednak wolnych niezasłoniętych, zwłaszcza wysoko położonych i wystawionych na działanie wiatrów dla wież, kominów wysokich powinniśmy przyjąć większe parcie, a mianowicie do 250 kg/m^2 , gdyż stwierdzono doświadczalnie, że parcie wiatru w górze jest znacznie większem, niż przy ziemi, gdzie zmniejsza się chyżość wiatru. Zresztą trudno przypuszczać, aby największy wichur wywierał parcie na dach równocześnie z największem obciążeniem śniegu. Nie potrzebujemy zatem liczyć na wyjątkowe, może raz w kilkanaście lat zdarzające się wichry zwłaszcza, iż przy obliczaniu przekroju przypuszczamy jakąś pewność, a materiał wytrzymać może takie kilkakrotne nadzwyczajne naprężenia.

Rozporządzenie pruskie z r. 1919 przyjmuje parcie wiatru.

aż do 15 m wysokości	100 kg/m^2
od 15 do 25 m „	125 „
wyżej 25 m „	150 „

Przy wybrzeżach i w górach należy zwiększyć te cyfry o 25 do 50%, W Stanach Zjednoczonych P. A. przyjmują parcie $w=0.004V^2$.

gdy w w $\frac{t}{stop^2}$, V w $\frac{mil.}{godz.}$. Stąd otrzymano.

Tablica LIV a.

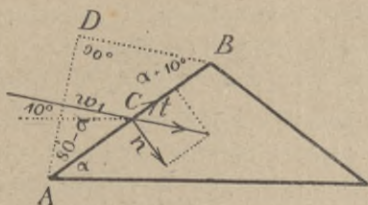
Moc wiatru	v w m/s	w w kg/m^2
b. wielki wiatr	(18	32
	(20	41
burza	22	50

Moc wiatru	v w m/s	w w kg/m^2
silna burza	{ 26	72
	{ 31	98
orkan	{ 35	128
	{ 40	200

Rozporządzenia nakazują przypuszczać w zawsze mniej niż $170 kg/m^2$, najczęściej $w=148 kg/m^2$, na wieżę najwyżej $195 kg/m^2$.

Najczęściej kierunek wiatru jest do poziomu nachylony pod kątem 10^0 (rys 262), tak też go zawsze przyjmować będziemy. Powodem tego jest tarcie przy ziemi, które zmniejsza chyżość wiatru i nachyla jego kierunek. Jeżeli w oznacza ciśnienie na $1 m^2$

płaszczyzny prostopadłej do kierunku wiatru, to ciśnienie na połącz AB o szerokości $1 m$ otrzymamy, spuściwszy z A prostopadłą na kierunek wiatru, a z B na AD , a zatem parcie wiatru na m^2 dachu pochyłego



rys. 262.

$$w_1 = w \frac{AD}{AB}$$

Z rysunku widzimy, że jeżeli kąt nachylenia dachu do poziomu jest α ,

$$\frac{AD}{AB} = \text{wst}(\alpha + 10),$$

więc

$$w_1 = w \text{wst}(\alpha + 10). \quad \dots \dots \dots 552)$$

Rozłożmy parcie w_1 na siłę prostopadłą do dachu n i równoległą t . Z rysunku widzimy, że

$$n = w_1 \text{wst}(\alpha + 10) = w_1 \text{wst}^2(\alpha + 10), \text{ a } t = w_1 \text{dost}(\alpha + 10).$$

Siła t posuwa prąd powietrza wzdłuż połącz. Ponieważ tarcie wiatru o dach jest stosunkowo małym, więc zwykle nie uwzględniamy go wcale, tylko siłę składową prostopadłą do połącz n .

Jednak doświadczenia Loessla udowodniły, że parcie n jest większem i wzrasta nie w stosunku do kwadratu, lecz do pierwszej potęgi $\text{wst}(\alpha + 10)$.

Będziemy więc używać nadal wzoru

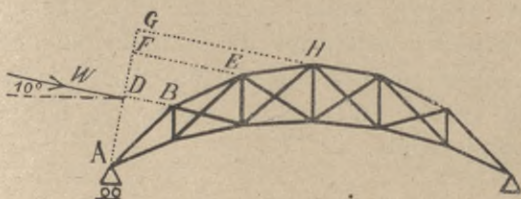
$$n = w \text{wst}(\alpha + 10), \quad \dots \dots \dots 553)$$

a zatem wzoru identycznego z wzorem 552)

Przy dachach wielobocznych nachylenie dachu zmienia się ciągle, musimy zatem dla każdego nachylenia obliczać parcie według 553). Możemy to zrobić także wykreślnie.

Równ. 553) możemy także inaczej napisać, zważywszy że $wst(\alpha+10) = \frac{AD}{AB}$, zatem $n = w \frac{AD}{AB}$, więc $N = wAD$. Parcie prostopadłe do połaci na 1 m szerokości jest więc równe w razy rzut połaci na kierunek wiatru. Jeżeli odstęp ciężarów jest a , to musimy jeszcze przez a pomnożyć.

Dla dachu wielobocznego (rys. 262) wynika z tego łatwa konstrukcja. Z A prowadzimy AG prostopadłe do kierunku wiatru i rzucamy na nie punkty załamania powierzchni dachu B, E, H , równoległe do kierunku wiatru. Parcia są wtedy proporcjonalne do AD, DF, FG . Aby otrzymać całkowite parcie połaciowe, pomnożyć należy te długości przez wa .



rys. 263.

Jeżeli przedmiot, o który wiatr uderza, ma powierzchnię krzywą, to parcie wiatru jest mniejszem, niż na powierzchnię płaską o tym samym rzucie pionowym, więc $W = \delta Fw$. . . : : 554) jeżeli δ jest współczynnik, w parcie wiatru na jednostkę kwadratową a F rzut pionowy powierzchni.

Jeżeli wiatr działa na walec o przekroju koła (rys. 264), uważamy dwa elementy symetryczne do kierunku wiatru, których styczną nachylną jest do tego kierunku pod kątem β . Parcie na element $ds dw = w ds wst \beta$. Rozłożmy je na równoległą do WO i prostopadłą, a otrzymamy $dw_x = dw wst \beta = w ds wst^2 \beta$.

więc
$$W = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} dw_x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} ds wst^2 \beta = 2wr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} wst^2 \beta d\varphi$$

$$W = 2rw \left[\text{dost } \beta wst \beta + \beta \right] \frac{\pi}{4} = 2rw \frac{\pi}{4} = 0.785dw, \text{ więc } \delta = 0.785.$$

Jeżeli obliczenie parcia oprzemy wtedy na wzorze Loes-
sła 552), to otrzymamy wedle Mayera

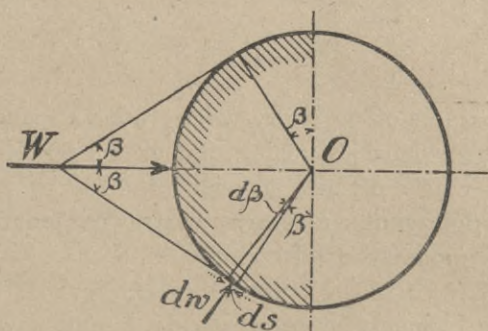
dla walca (przekrój koło) . . . $\delta = 0,848$

„ graniastosłupa („ ośmiokąt) . . . $\delta = 0,890$

Wzory te zastosujemy przy obliczaniu parcia wiatru na
kominy.

Brune oblicza parcie na stożek i półkulę i otrzymuje dla
stożka $\delta = \frac{1}{2}$ dost a , jeżeli a jest kątem nachylenia boków stożka
do osi, a dla półkuli $\delta = 0,207$.

Doświadczenia Eiffla, wykonane w r. 1913*) wykazały że
parcie wiatru rozkłada się na całą ścianę, narażoną na
wiatr i na część dachu, parcie to maleje i przechodzi w ssanie,
które stwierdzono na całej odwrotnej stronie budynku (rys. 265).
Jeżeli wiatr działa prostopadłe do osi budynku (rys. 265 a).
średnie parcie na ścianę przednią wynosi około 80 kg/m^2 , naj-
większe ssanie u góry dachu dochodzi do tej samej wielkości.
Jeżeli kierunek wiatru nachylony do osi budynku pod kątem 60° ,
(rys. 265 b), parcie na przednią ścianę się zmniejsza, ale ssanie
powiększa się aż do 160 kg/m^2 , ssanie na ścianę tylną jest
większe, niż na przednią.

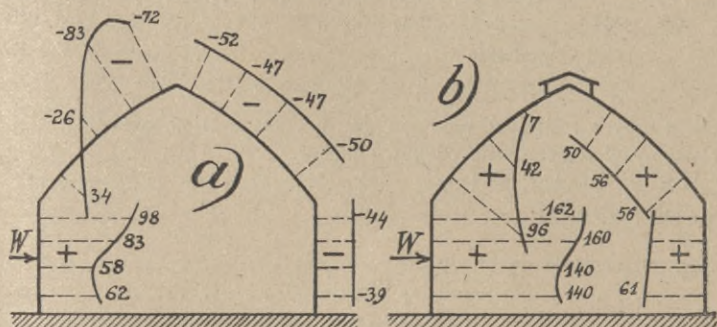


rys. 264.

Jeżeli dach zaopatrzony jest w latarnię otwartą (rys. 266),
powstaje parcie większe na ścianie przedniej i dachu przednim,
a także parcie na ścianę i połąć dachu tylną. Jeżeli wiatr uderza pro-
stopadłe do osi budynku parcie średnie na ścianę przednią

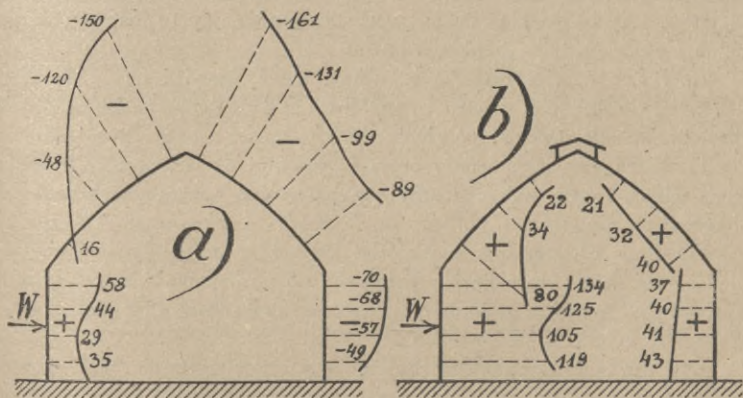
*) P. Génie Civil 1915 str. 265.

wynosi 150 kg/m^2 (rys. 266 a) a na tylną 60 kg/m^2 . Jeżeli wiatr nachylony pod kątem 60° do osi budynku, to parcie na ścianę przednią



rys. 265.

(rys. 266 b) wynosi średnio 120 kg/m^2 , na tylną 40 kg/m^2 . W razie otwartej latarni niema więc obawy zerwania dachu przez ssanie.



rys. 266.

Rozporządzenie ministr. austr. z r. 1911 dla zeskładów żelbetowych §. 4. ust. 5. Ciężar własny pokrycia dachu włącznie z opierzeniem, latami i krokiewiami, jednak bez ciężarów, należy przyjmować na 1 m^2 pochyłej powierzchni dachu w kg , jak następuje:

Tablica LV.

dachówka pojedyncza	100
„ podwójna	125
„ zakładkowa	64

łupek pojedynczo	73
„ podwójnie	82
„ sztuczny na tekturze	41
tektura pojedynczo bez piasku	32
„ podwójna	35
cement drzewny z 8 cm grubą warstwą żwiru	200

Dla innych rodzajów pokrycia (n. p. dla metalu, szkła i t. d.) należy ciężar własny w danym razie osobno obliczyć.

Ust. 9. Ciężar śniegu. Ciężar śniegu należy w kg/m^2 rzutu dachu przyjąć, jak następuje:

przy nachyleniu dachu do 40°	75
„ „ „ między 40° do 60°	40
„ „ „ nad 60° nie należy wcale uwzględniać ciężaru	

śniegu.

Dla okolic, położonych na południu (Austrii), dowodnie ubogich w śnieg, można przyznać w danym wypadku zmniejszenie powyższych obciążeń. Dla okolic z dowodnie wielkim opadem śniegu należy przyjąć ciężar śniegu według miejscowego położenia większy, a mianowicie przy nachyleniach do 40° aż do $200 kg$, dla nachyleń między 40° a 60° aż do $110 kg/m^2$ rzutu. Ciężar śniegu należy przyjmować przy obliczeniu albo na wszystkich, albo gdy to jest niekorzystniejszym na niektórych tylko połaciach dachu.

10. Parcie wiatru. Parcie wiatru należy przyjąć na m^2 powierzchni prostopadłej do kierunku wiatru w ogólności $w=150 kg$, w nadzwyczajnych wypadkach wedle miejscowego położenia do $250 kg$.

11. Kierunek wiatru należy przyjąć poziomy; dla powierzchni, które z kierunkiem wiatru tworzą kąt α , należy przyjąć parcie wiatru prostopadle do tej powierzchni $w_1=w \sin^2 \alpha$.

12. Przy otwartych wiatkach, daszkach i t. d. należy w danym razie przyjąć parcie wiatru, działające prostopadle do powierzchni dachu z wewnątrz na zewnątrz $60 kg/m^2$, a w nadzwyczajnych wypadkach według położenia miejscowego $100 kg/m^2$.

13. Przy budowlach, które znajdują się w miejscu, stale od wiatru osłoniętem, można dopuścić zmniejszenie parcia wiatru aż do $75 kg/m^2$.

Normy przyjęte przez austr. towarzystwo inżynierów i architektów.

Kierunek parcia wiatru przyjmuje się poziomy. Parcie wiatru na płaszczyznę prostopadłą do kierunku wiatru $200 kg/m^2$.

Ciężar śniegu na płaszczyznę poziomą $75 kg/m^2$.

Przepisy dla budowli c. k. kolei państwowych austriackich.

Ciężar śniegu należy przyjąć $75 kg/m^2$ rzutu. Przy nachyleniach dachu wyżej 40° należy przyjąć z tego połowę, wyżej 60° wcale nie uwzględniać ciężaru śniegu.

W okolicach z dowodnie bardzo małym opadem śniegu można wpływu jego całkiem nie uwzględniać.

Parcie wiatru prostopadle do połaci dachu należy obliczać wedle wzoru $w=150\text{wst}^2 (\alpha+10) \text{ kg/m}^2$, przyczem α oznacza kąt nachylenia dachu. W okolicach z bardzo wielkimi wichrami (bora) należy przyjąć 250 kg/m^2 zamiast 150 kg/m^2 . Dla otwartych wiat i dachów peronowych należy przyjmować wiatr, działający z wewnątrz na zewnątrz 60 kg/m^2 , w okolicach z silnymi wiatrami (bora) 100 kg/m^2 dachu. Przy budowlach w dowodnie osłoniętem położeniu można powyższe cyfry odpowiednio zniżyć.

Należy zawsze uwzględnić najniekorzystniejsze działanie wiatru i ciężar śniegu.

Rozporządzenie minist. pruskiego z 1919.

T a b l i c a L V I.

Ciężary własne kg/m^2 :

Dach kryty dachówką pojedynczo z łątami i krokwiami	75 kg/m^2
Dtto ustrój czeski (w zaprawie)	85 "
Dach kryty dachówką podwójnie z łątami i krokwiami	95 "
Dtto ustrój czeski (w zaprawie)	115 "
Dach kryty podwójnemi dachówkami z łątami i krokwiami	105 "
Dtto ustrój czeski (w zaprawie)	130 "
Dach kryty dachówką holenderską na łątach z małych dachówek	80 "
Dtto z wielkich dachówek	85 "
Dach z dachówek holenderskich na opierzeniu zakładaniem	100 "
Dach z dachówek zakładkowych	65 "
Dach kryty gąsiorkówką z łątami i krokwiami	100 "
Dtto pokrycie czeskie	115 "
Angielski dach łąpkowy na łątach z łątami i krokwiami	45 "
Angielski dach łąpkowy na opierzeniu z opierzeniem i krokwiami	55 "
Niemiecki dach łąpkowy na opierzeniu i z podkładką tekturową	65 "
Dtto z mniejszych dachówek (20×15 cm)	60 "
Dach cynkowy na listwach	40 "
Dach miedziany z podwójnemi zakładkami i opierzeniem	40 "
Pojedynczy dach tekturowy z opierzeniem i krokwiami	35 "
Podwójny dach z żwirem, opierzeniem i krokwiami	55 "
Dach z cementu drzewnego z warstwą żwiru 7 cm	180 "
Dach z cementu drzewnego na sklepieniach i warstwą żwiru 7 cm	520 "
Dach szklany na żelaznych listwach dla szkła 4 cm	22 "
Dtto dla szkła 5—6 mm albo z drutami	30 "
Ciężar śniegu na 1 m powierzchni połaci	75 "
(Jeżeli $\alpha > 50^\circ$ nie uwzględnia się wcale ciężaru śniegu).	
Parcie wiatru na 1 m ² powierzchni prostopadłej (dla obliczenia części ścian, ram, więzarów)	125* "

*) Dla wysokich budowli na małej powierzchni nie mogą być przekroczone wyższe granice naprężeń dopuszczalnych przy $w=150 \text{ kg/m}^2$.

Całkowite obciążenie dachów

złożone z ciężaru własnego, śniegu i parcia wiatru na 1 m² poziomego rzutu:

Tablica LVII.

Dach szklany przy nachyleniu 10°	125 kg
Dtto przy nachyleniu 25°	150 „
Dach łupkowy przy nachyleniu 25°	150 „
Dtto przy nachyleniu 45°	250 „
Dach dachówkowy przy nachyleniu 30°	250 „
Dach dachówkowy przy nachyleniu 45°	300 „
Dach z cementu drzewnego na drewnianych krokwiach	275 „
Strome dachy mansardowe z pokryciem łupkiem lub dachówką przy nachyleniu 45°	300 „
Dtto przy nachyleniu 70°	700 „

Dla poziomych lub słabo nachylonych 1:20 dachów, które służą jako miejsce zabawy i wypoczynku, obciążenie = 250 kg/m² (rozp. berliń. policji).

§ 110 Ogólne warunki równowagi dachu.

Najprzód uważać będziemy dach jako całość i badać go, czy siły, działające nań, nie potrafią go wyrzucić albo przesunąć (rys. 267), co zwłaszcza możliwem jest przy dachach wysokich.

Składowa wiatru prostopadła do połaci N usiłuje dach obrócić około krawędzi B . Moment, tu występujący, dla głębokości = 1 jest $M = N \cdot BE = N(A'E - A'B) = nl \left(\frac{l}{2} - b \text{ dost } \alpha \right)$, a że $\frac{b}{2} = l \text{ dost } \alpha$, więc $M = nl \left(\frac{l}{2} - \frac{b^2}{2l} \right) = \frac{n}{2} (l^2 - b^2)$. Ciężar własny dachu,

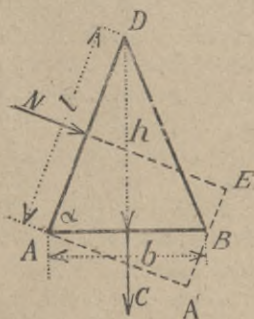
który niech wynosi $g \text{ kg/m}^2$ powierzchni pochyłej, jest całkowity $C = g \cdot 2l$, zatem moment jego ze względu na punkt B

$$M' = -2gl \cdot \frac{b}{2} = gbl.$$

Dla równowagi musi więc być

$$bgl \geq (l^2 - b^2), \text{ stąd}$$

$$g \geq \frac{n}{2bl} (l^2 - b^2) \dots 555$$



rys. 267:

Przesunąć w kierunku poziomym dach usiłuje N wst α , składowa pozioma siły N , czemu sprzeciwia się tarcie, wywołane

ciężarem $2gl$ i składową pionową parcia wiatru N dost α . Jeżeli współczynnik tarcia nazwiemy f , to $f(2gl + nl \text{ dost } \alpha) =$
 $= nl \text{ wst } \alpha$. Wstawmy dost $\alpha = \frac{b}{2l}$, wst $\alpha = \frac{h}{l}$, to $2g + \frac{nb}{2l} = \frac{nh}{lf}$, a stąd

$$g > \frac{n}{4fl} (2h - fb) \dots \dots \dots 556).$$

Jeżeliby g było mniejszem, niż wypada z równ. 555 i 556), to musielibyśmy więzary zakotwić, aby przeszkodzić czy to przesunięciu czy to przewrotowi.

§ 111. Wyznaczenie sił wewnętrznych dla obciążenia pionowego.

Dach musi być nietylko jako całość w równowadze, lecz także naprężenie we wszystkich prętach nie powinno przekraczać naprężenia dopuszczalnego. Będziemy się więc starali wyznaczyć siły wewnętrzne, działające w prętach i to najprzód wykreślnie.

Siły wewnętrzne więzarów dachu wyznaczamy najlepiej według metody wielobokowej. Dla danego obciążenia wyznaczamy najprzód oddziaływania, a potem wykreślamy plan sił, jak to na przykładzie zaraz zobaczymy. Możemy przytem albo obliczać siły wewnętrzne dla obciążenia równoczesnego śniegiem i wiatrem, albo osobno wyznaczyć siły wewnętrzne dla obciążenia ciężarem własnym i śniegiem, a osobno dla parcia wiatru.

Ten drugi sposób jest z tego względu lepszym, że dla niektórych prętów otrzymamy największe naprężenie dla obciążenia śniegiem, albo tylko wiatrem. Dlatego lepiej badać osobno wpływ ciężaru własnego i śniegu a osobno wiatru, a dopiero potem siły wewnętrzne kombinować w ten sposób, aby dały największe naprężenia.

Najprzód więc wyznaczmy siły wewnętrzne dla obciążenia pionowego. Przedewszystkiem musimy wyznaczyć ciężary węzłowe, to jest ciężary, działające w węzłach. Obciążenie przenosi się na więzary główne albo za pomocą płatew w węzłach, albo też rzadziej i między węzłami. W tym ostatnim wypadku obliczamy przecież więzar tak, jakby ciężary działały w węzłach, a tylko pas górny więzaru obliczamy nietylko na ściskanie, ale i na zginanie, wywołane momentem obciążenia, działającego między węzłami.

Jeżeli a oznacza odstęp więzarów, g ciężar własny na m^2 powierzchni pochyłej i s ciężar śniegu na m^2 rzutu, to na długość krokwi l_1 działa ciężar $G = g a l_1 + s a l_1$ dost a :

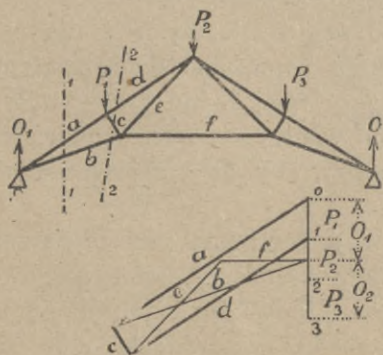
Jeżeli odstęp węzłów jest równy, to na jeden węzeł przypada długość l_1 , równa odstępowi węzłów, na pierwszy węzeł połowa tej długości. Przy dachach w kształcie ostrosłupa więzary nie są równoległe, wtedy obciążenie na m b. więzaru jest zmienne, a to wedle powierzchni dachu, która na odpowiednie części więzaru przypada.

Ciężary węzłowe mogą działać także w pasie dolnym. Przy większych dachach już ciężar samego dźwigaru należy rozłożyć na pas górny zwykle w większej części np. $\frac{2}{3}$ i na pas dolny $\frac{1}{3}$ ciężaru. Oprócz tego często zawieszono są na dachu ciężary stropowe, czasem podesty schodów i świeczniki, a nawet w budynkach fabrycznych tory dla żórawi.

Znając ciężary węzłowe, wyznaczamy najprzód oddziaływania. Jeśli więzar i obciążenie jego są symetryczne, to $O_1 = O_2 =$ połowie obciążenia; jeżeli niema symetrii, to wyznaczamy oddziaływania wykreślnie zapomocą wieloboku sznurowego. Musi się wtedy zamknąć wielobok sił i wielobok sznurowy. Teraz możemy przystąpić do wykreślenia planu sił wedle §. 106.

Podajemy tu kilka planów sił dla obciążenia pionowego już bez dalszych objaśnień, przyjmąwszy obciążenie symetryczne, w którymto razie $O_1 = O_2 =$

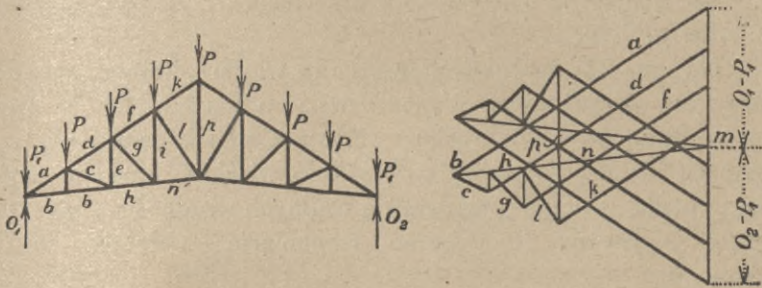
połowie obciążenia. Z powodu symetrii jest tu górna połowa planu sił zupełnie przystająca do dolnej, dlatego też kreślimy zwykle tylko połowę planu sił. Rysunek 268, przedstawia więzar francuski układu Polonceau (n. *der französische oder Polonceau Dachstuhl*, fr. *ferme système Polonceau*, an. *french roof truss*), 269 więzar angielski (n. *englisher Dachbinder*, an. *english roof*), rys. 270 więzar mansardowy (fr. *comble à la Mansard*, an. *mansard roof*), Czasem, jak w rysunku na tabl. III., przedstawiającym złożony więzar Polonceau,



rys. 268.

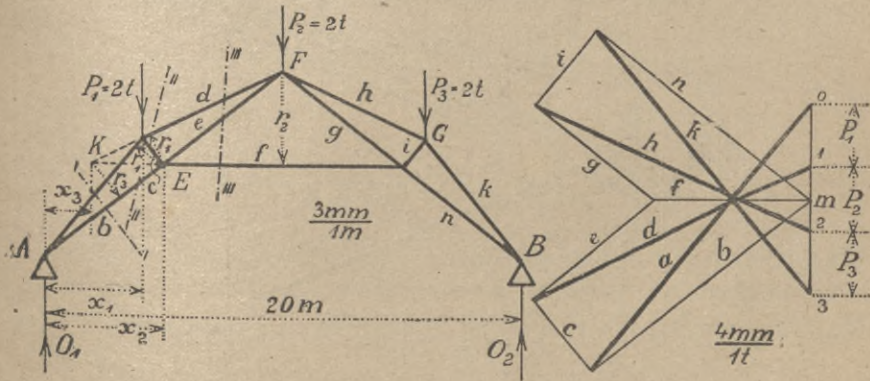
269 więzar angielski (n. *englisher Dachbinder*, an. *english roof*), rys. 270 więzar mansardowy (fr. *comble à la Mansard*, an. *mansard roof*), Czasem, jak w rysunku na tabl. III., przedstawiającym złożony więzar Polonceau,

nie możemy znaleźć przekroju, dla którego byłyby tylko dwie siły niewiadome. W zwykły sposób wyznaczyć tu możemy siły wewnętrzne $g_1, g_2, d_1, d_2, a_1, a_2$, ale teraz, czy przetniemy w kierunku II , czy $II II$, zawsze mamy trzy niewiadome, nie możemy więc ich wykreślić wyznaczyć.



rys. 269.

Musimy zatem tu poradzić sobie inaczej, przeciąć więzar płaszczyzną $III III$ i wyznaczyć sposobem Rittera siłę d_3 . Znając ją, możemy kreślić dalej plan sił, zaczynając od sił d_3 ,

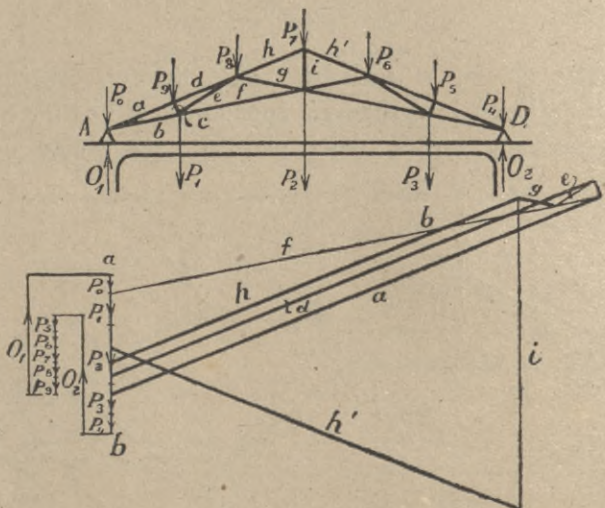


rys. 270.

g_4 i a_7 i kreśląc dalej siły g_3, a_6, a_5, a_4, a_3 . Możemy też poradzić sobie w inny sposób i to metodą Culmanna. Przetnijmy więzar po linii $IV IV$. Siły wewnętrzne g_3, a_6, a_5, a_4, a_7' i g_4 i zewnętrzne P_4 i P_5 są w równowadze. Złożmy P_4 i P_5 w zwykły sposób

w wypadkową R' , to ponieważ $P_4 = P_5$, więc wypadkowa działa w środku odległości między P_4 i P_5 . Jeżelibyśmy złożyli R' z a_6 , to wypadkowa musiałaby iść przez S , wypadkowa R'' zaś reszty sił g_3 , a_4 , a'_7 i g'_4 musi przechodzić przez F . Dla równowagi muszą kierunki obu wypadkowych wpadać na siebie, więc kierunek R'' jest SF . Poprowadźmy w wieloboku sił $33' \parallel a_6$ $53' \parallel SF$, to $33' = a_6$. Znając a_6 , możemy dla przecięcia II II wyznaczyć nieznane g_3 i a_3 .

Na rys. 271 widzimy plan sił dla więzaru, którego pas dolny także jest obciążonym. Wyznaczywszy oddziaływanie w zwykły sposób (tutaj $O_1 = O_2$), kreślimy wielobok sił rozsunięty dla przejrzystości, kreśląc po porządku naokoło więzaru; poczem wykreślenie planu sił nie przedstawia żadnych trudności, jeśli tylko baczyć będziemy, że pomimo rozsunięcia wielobok sił leży w linii ab .



rys. 271.

Liczebnie wyznaczamy siły wewnętrzne za pomocą sposobu Rittera (§ 107). Jako przykład obliczymy siły wewnętrzne więzaru mansardowego (rys. 270). Niech będzie $l = 20\text{ m}$, $P_1 = 2\text{ t}$, $P_2 = 2\text{ t}$, $P_3 = 2\text{ t}$, więc $O_1 = 3\text{ t}$. Otrzymamy najprzód dla przecięcia II ze względu na punkt C :

$$O_1 x_1 - b CE = 0. \text{ stąd } b = O_1 \frac{x_1}{CE} = 3 \frac{4,1}{1,45} = 8,2\text{ t},$$

Ze względu na punkt E mamy

$$O_1 x_2 - ar_1 = 0, \text{ stąd } a = -\frac{O_1 x_2}{r_1} = -3 \frac{5}{1,5} = -10,3 \text{ t.}$$

Przetnijmy teraz więzar w kierunku $II II$, a otrzymamy ze względu na punkt F :

$$O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) - c \cdot EF = 0, \text{ a stąd}$$

$$c = \frac{O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)}{EF} = \frac{3 \times 10 - 2 \times 5,9}{6,4} = 2,85 \text{ t.}$$

a ze względu na punkt E

$$O_1 x_2 - P_1 (x_2 - x_1) + d \cdot r_1 = 0, \text{ a stąd}$$

$$d = \frac{P_1 (x_2 - x_1) - O_1 x_2}{r_1} = \frac{2(5 - 4,1) - 3,5}{1,5} = -8,8 \text{ t.}$$

Przetnijmy nakoniec więzar w kierunku $III III$, a otrzymamy ze względu na punkt F

$$O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) - f r_2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$f = \frac{O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)}{r_2} = \frac{3 \cdot 10 - 2(10 - 4,1)}{4} = 4,55 \text{ t.}$$

Dalej ze względu na punkt K przecięcia się d i f mamy:

$$O_1 x_3 + P_1 (x_1 - x_3) - e r_3 = 0, \text{ a zatem}$$

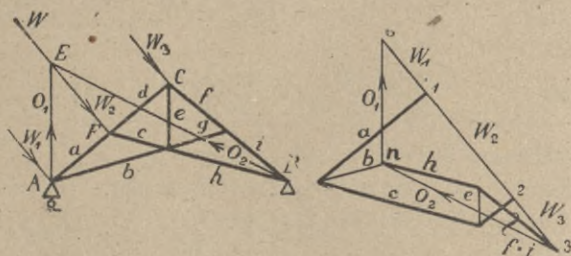
$$e = \frac{O_1 x_3 + P_1 (x_1 - x_3)}{r_3} = \frac{3 \times 1,5 + 2(4,1 - 1,5)}{2} = 4,85 \text{ t.}$$

§ 112. Parcie wiatru.

Zastanówmy się teraz nad wpływem parcia wiatru na więzar, a najprzód wyznaczmy oddziaływania. Musimy tu przytem różnić dwa wypadki, gdy jedno łożysko jest wałkowe lub też oba są przesuwowe.

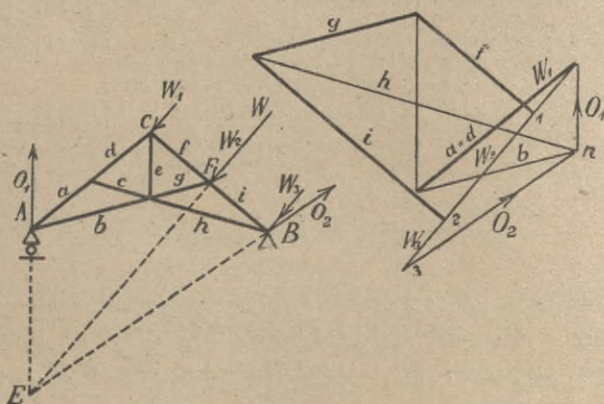
Jeżeli bowiem jedno łożysko jest wałkowe, a tor wałków poziomy, to oddziaływanie na tej podporze może być tylko pionowe, oddziaływanie zaś na drugiej podporze wyznaczyć łatwo możemy wykreślnie z wieloboku sił. Niechaj na więzar ABC (rys. 272) działa wiatr z lewej strony prostopadłe do AC . Wypadkowa parcia na połącz AC działa w punkcie F . Jeżeli w A jest łożysko wałkowe, to oddziaływanie O_1 jest pionowym. Od-

działywanie O_2 w punkcie B musi wraz z O_1 równoważyć parcie wiatru W , mieć więc kierunek BE , bo te trzy siły muszą się przecinać w jednym punkcie. Jeżeli $O_3 = W = W_1 + W_2 + W_3$, a zrobimy $3n \parallel BE$ i $0n \parallel AE$, to otrzymamy oddziaływania. Znając oddziaływania, możemy w zwykły sposób wykreślić plan sił.



rys. 272.

Jeżeli wiatr wieje z prawej strony (rys. 273), to oddziaływanie w A pionowe przecina się z wypadkową parcia W w E , zatem oddziaływanie O_2 ma kierunek EB . Wykreślamy zatem



rys. 273.

$W=O_3$, dalej $3n \parallel EB$ i $0n \parallel O_1$, to $n0 = O_1$, $3n = O_2$. Po wyznaczeniu oddziaływań łatwym jest dalsze wykreślenie planu sił.

Jeżeli więzar jest symetryczny, to parcie na połąć lewą W_l będzie równe parciu na połąć prawą W_p (rys. 274). Równą też i wprost przeciwną jest ich składowa pozioma H , działająca

na łożyska stałe. Wobec tego, gdy oddziaływania pionowe wykreśliśmy w jednej linii, wszystkie oddziaływania zamknięte będą w prostokącie $abcd$. Jeżeliśmy wedle rys. 272 wyznaczyli oddziaływanie O_{1l} i O_{2p} , to z rys. 274 możemy wyznaczyć wielkość i kierunek oddziaływań O_{1l} i O_{2p} , co może nam się przydać wtedy, gdy punkt E na rys. 273 wypada poza papier.

Jeżeli oba łożyska są płaskie i niema łożyska wałkowego, to właściwie oddziaływania nie są statycznie wyznaczalne.

Przypuśćmy, że więzar spoczywa na płytach żelaznych i że przesunięciu sprzeciwia się tylko tarcie. W takim wypadku tarcie jest proporcjonalnem do ciśnienia pionowego. Niech będzie ciśnienie na jednej podporze bc (rys. 275), na drugiej bc_1 , to tarcia proporcjonalne do ciśnień będą ab i a_1b , zatem oddziaływania ac i a_1c muszą być równoległe, Ponieważ muszą one równoważyć się z parciem W , więc muszą być równoległe do kierunku wiatru. Wielkość oddziaływania wyznaczymy wtedy łatwo (rys. 276), wypadek ten sprowadzając do wypadku belki w dwu punktach podpartej. Jeżeli $O_3 = W$, to obieramy dowolnie biegun O , kreślimy promienie, a do nich równoległe wielobok sznurowy $EIFG$. EG jest zamykającą, więc, gdy $Om \parallel EG$, będzie $mO = O_1$ a $3m = O_2$.

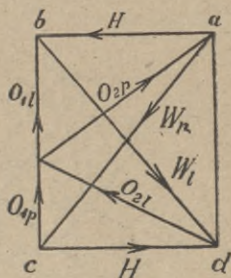
Wykreślenie planu sił nie przedstawia teraz żadnych trudności.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie oddziaływań rachunkiem, to postępować będziemy w następnym sposobie.

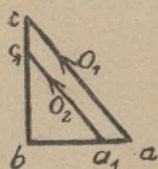
Jeżeli w F zaczepia parcie wiatru W (rys. 277), to rozkłada się ono na $H = W \text{ wst } \alpha$ i $V = W \text{ dost } \alpha$, oddziaływanie O_2 w B rozkłada się także na H i V_2 . Dla równowagi mamy $W \text{ wst } \alpha - H = 0$, $O_1 + V_2 - W \text{ dost } \alpha = 0$, i ze względu na A

$V_2 \cdot 2l \text{ dost } \alpha - W \frac{l}{2} = 0$, a stąd mamy:

$$H = W \text{ wst } \alpha \dots \dots \dots 557)$$



rys. 274.

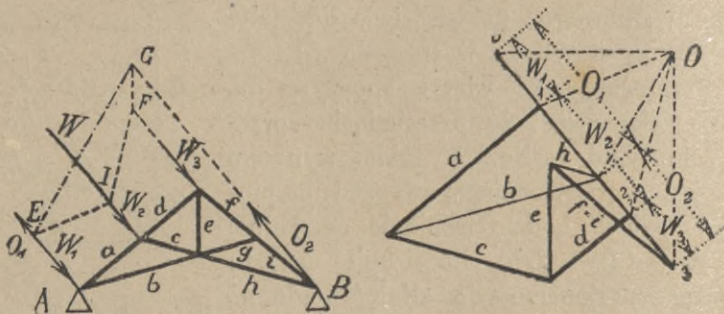


rys. 275.

$$V_2 = \frac{W}{4 \operatorname{dost} \alpha} \dots \dots \dots 558)$$

$$O_1 = W \operatorname{dost} \alpha - \frac{W}{4 \operatorname{dost} \alpha} = \frac{W}{4} \operatorname{dost} \alpha \left(4 - \frac{1}{\operatorname{dost}^2 \alpha} \right)$$

$$O_1 = \frac{W}{4} \operatorname{dost} \alpha (3 - \operatorname{st}^2 \alpha). \dots \dots \dots 559)$$



rys. 276.

Jeżeli wiatr działa z prawej (rys. 278), to mamy

$$W \operatorname{wst} \alpha - H = 0.$$

$$O_1 + V_2 - W \operatorname{dost} \alpha = 0 \text{ i ze względu na } B$$

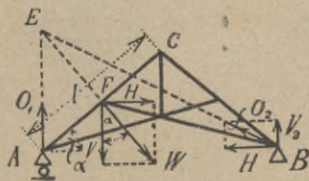
$$O_1 2l \operatorname{dost} \alpha - W \frac{l}{2} = 0.$$

Stąd otrzymamy :

$$H = W \operatorname{st} \alpha \dots \dots \dots 560)$$

$$O_1 = \frac{W}{4 \operatorname{dost} \alpha} \dots \dots \dots 561)$$

$$V_2 = \frac{W}{4} \operatorname{dost} \alpha (3 - \operatorname{st}^2 \alpha) \dots \dots \dots 561,a)$$



rys. 277.

Widzimy więc, że H zmienia swój tok, a O_1 i V_2 zamieniają swe wartości.

Jeżeli wreszcie oba łożyska są stałe i oddziaływanią O_1 i O_2 są równoległe do W (rys. 279), to dla równowagi

$$W \operatorname{wst} \alpha - H_1 - H_2 = 0, V_1 + V_2 - W \operatorname{dost} \alpha = 0 \text{ i ze względu na } A$$

$$V_2 2l \operatorname{dost} \alpha - W \cdot \frac{l}{2} = 0, \text{ a wreszcie ze względu na założenie}$$

$$H_1 : H_2 = V_1 : V_2.$$

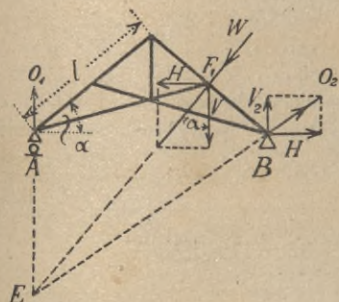
Z tych równań otrzymamy

$$V_2 = \frac{W}{4 \operatorname{dost} \alpha} \dots \dots \dots 562)$$

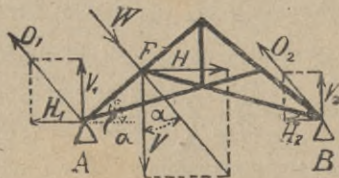
$$V_1 = \frac{W}{4} \operatorname{dost} \alpha (3 - \operatorname{st}^2 \alpha) \dots \dots \dots 563)$$

$$H_2 = \frac{W \operatorname{wst} \alpha}{1 + 3 \operatorname{dost}^2 \alpha - \operatorname{wst}^2 \alpha} \dots \dots \dots 564)$$

$$H_1 = \frac{W \operatorname{wst} \alpha (3 \operatorname{dost}^2 \alpha - \operatorname{wst}^2 \alpha)}{1 + 3 \operatorname{dost}^2 \alpha - \operatorname{wst}^2 \alpha} \dots \dots \dots 565)$$



rys. 278.



rys. 279.

Jeżeli dach jest wielobocznym, należy wyznaczyć za pomocą wieloboku sznurowego lub rachunkiem wielkość, kierunek i położenie wypadkowej parcia wiatru, przyczem można użyć powyższych sposobów wyznaczenia oddziaływań.

§ 113. Obliczenie więzaru Polonceau złożonego jako przykład.

Jako przykład obliczymy siły wewnętrzne i przekroje wszystkich prętów więzaru żelaznego systemu złożonego Polonceau (tabl. III.) Rozpiętość podporowa wynosi 18 m, odległość wiązań pełnych 5 m. Dach ma być kryty blachą płaską na opierzeniu, dla pokrycia blachą przyjmujemy $\frac{h}{l} = \frac{1}{6}$ więc $h = 3,0 m$, tak że kąt nachylenia połaci do poziomu $\alpha = 18^{\circ}25'$, $\operatorname{wst} \alpha = 0,316$, $\operatorname{dost} \alpha = 0,948$. Łożysko wałkowe na lewej podporze. Naprężenie dopuszczalne dla drzewa 80 kg/cm^2 , dla żelaza 1000 kg/cm^2 .

1. Obciążenie.

Pokrycie blachą na opierzeniu; i krokwie drewn. na 1 m² połaci 40 kg
 Ciężar własny płatwi i tężników połaciowych „ 1 „ „ (10+5) 15 „
 „ więzarów dachowych na 1 m² rzutu poziomego 20 „
 Obciążenie śniegiem na 1 m² połaci s₁=80 . dost α=80 . dost 18°25' . 76 „
 Parcie wiatru na 1 m² połaci do niej prostopadłe 74 „
 $w = 150 \cdot \text{wst}(\alpha + 10) = \text{wst} 28^{\circ}25'$ 74 „
 Przy równoczesnym działaniu śniegu i wiatru przyjmujemy, że ciężar śniegu wynosi $\frac{2}{3}$ powyżej podanej wartości.

2. Krokwie drewniane $l = 2,37$ m,

kładzione w odstępach po 1 m. Składowa ciężaru pokrycia wraz krokwiemi oraz śniegu prostopadła do połaci:

$$g_1 = (40 + \frac{2}{3} \cdot 76) \cdot \text{dost } \alpha = 91 \times 0,948 = \dots \dots \dots 86 \text{ kg/cm. b.}$$

Składowa równoległa do połaci

$$g_2 = (40 + \frac{2}{3} \cdot 76) \cdot \text{wst } \alpha = 91 \times 0,316 = \dots \dots \dots 29 \text{ „ „}$$

$$\text{Parcie wiatru, jak wyżej, } w = \dots \dots \dots 74 \text{ „ „}$$

Najprościej postąpimy, przyjmując wymiary krokwi n. p. 12/10 cm i sprawdzając, czy naprężenie normalne, wywoływane powyższem obciążeniem nie przekroczy dopuszczalnego $\tau = 80 \text{ kg/cm}^2$, mianowicie ze wzoru $v = \frac{G_2}{F} + \frac{M}{W}$.

$$\text{Dla } G_2 = g_2 \cdot l = 29 \times 2,37 = 70 \text{ kg,}$$

$$M = \frac{1}{8} (g_1 + w) l^2 = \frac{1}{8} (86 + 74) \times 2,37^2 = 11240 \text{ kg/cm}$$

i przyjętego przekroju 12/10 cm, mamy:

$$v = \frac{70}{120} + \frac{11240}{240} = 47 \text{ kg/cm}^2$$

3. Płatwie rozp. $l = 5,00$ m

przenoszą w kierunku pionowym

$$p = (40 + 10 + \frac{2}{3} \cdot 76) \cdot 2,37 = 238 \text{ kg/m. b., zatem } M = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} 238 \times 5^2 = 74370 \text{ kgm,}$$

a w kierunku prostopadłym do połaci

$$w = 74 \times 2,37 = 175 \text{ kg/m. b., zatem } M_w = \frac{1}{8} w l^2 = \frac{1}{8} 175 \cdot 5^2 = 54438 \text{ kgm,}$$

Wedle oznaczeń w § 67 mamy

$$M_1 = M \text{ dost } \alpha + M_w = 74370 \cdot 0,948 + 54438 = \dots \dots \dots 114940 \text{ kgcm}$$

$$M_2 = M \text{ wst } \alpha = \dots \dots \dots 74370 \cdot 0,316 = \dots \dots \dots 23500 \text{ „}$$

Przyjmujemy podobnie, jak powyżej, kształtówkę I. l. 18 a i sprawdzimy naprężenia. Wedle tabl. XXII na str. 226 mamy dla tego numeru $c = 4,66 \text{ cm}$, zatem potrzebny moment oporu ze wzorem 270)

$$W_1 = \frac{M_1 + c M_2}{\tau} = \frac{114940 + 4,66 \times 23500}{1000} = 224,45,$$

podczas gdy kształtówka I. l. 18 a ma $W_x = 261,53 \text{ cm}^3$.

4 Więzary główne rozp. $l = 18,00 \text{ cm}$.

Obliczamy siły węzłowe, a siły wewnętrzne w poszczególnych prętach wyznaczmy wykreślnie.

Nasamprzód uwzględnimy obciążenie pionowe. Na węzeł C przenosi się połowa ciężaru z pola AC i połowa z CE , zatem $P_2 = [(40+15 + \frac{2}{3} 76) \times 2,37 + 20 \times 2,25] 5 = 1480$ kg. Ponieważ płatwie są na dachu w równych odstępach rozmieszczone, przeto $P_2 = P_3 = \dots = P_2'$. Natomiast we węzłach skrajnych, jeżeli krokwie mają wystawać o 50 cm poza teoretyczny punkt podparcia,

$$P_1 = P_1' = 1480 \times \frac{1,185 + 0,50}{2,37} = 1480 \times 0,72 = 1070 \text{ kg.}$$

Dla tego obciążenia pionowego kreślimy wielobok sił, a ponieważ więzar i jego obciążenie są symetryczne, więc kreślimy tylko połowę wieloboku i planu sił. Dla wyznaczenia siły wewnętrznej a_5 użyliśmy konstrukcji pomocniczej, opisanej w § 111. Dla kontroli obliczymy jeszcze siłę wewnętrzną d_3 w następujący sposób. Przecinamy więzar po linii $III III$ i ze względu na F ustawiamy równanie momentów:

$$(O_1 - P_1) \cdot 9 - 3P_2 \times 4,5 - d_3 \times 2,5 = 0, \text{ czyli}$$

$$(6,25 - 1,07) 9 - 3 \times 1,48 \times 4,5 = d_3 \times 2,5, \text{ a stąd}$$

$$d_3 = 10,70 \text{ t,}$$

który to wynik zgodny jest z wynikiem, uzyskanym sposobem wykresnym. Następnie uwzględniamy parcie wiatru z lewej strony. We węźle C działają $W_2 = 74 \times 2,37 \times 5 = 0,88$ t i znowu jak poprzednio $W_2 = W_3 = W_4$. We węźle F $W_5 = 0,44$ t, zaś we węźle skrajnym A $W_1 = (1,185 + 0,5) \times 5 = 0,63$ t. Wypadkowa parcia wiatru na lewej (wałkowej) podporze musi mieć kierunek pionowy; wyznaczmy zatem kierunek oddziaływania $O_2 l$ na drugiej (stałej) podporze, łącząc punkt X przecięcia się oddziaływania $O_2 l$ i wypadkowej parcia wiatru z podporą B . Ponieważ punkt X wypada poza obrębem rysunku, użyjemy dla wyznaczenia kierunku $O_2 l$ konstrukcji pomocniczej, podanej na schemacie więzara. W tym celu dzielimy odcinki AB i Ap w dowolnym, ale tym samym stosunku zapomocą punktów m i n tak $ab = Am : An = Ap : AB$, z punktu m kreślimy $mo \parallel W_1$ aż do przecięcia z kierunkiem O_1 w punkcie o_1 , wówczas on wyznaczy kierunek $O_2 l$. Kreślimy teraz w zwykły sposób plan sił, wyznaczwszy znów a_5 zapomocą konstrukcji pomocniczej. Przekonywujemy się, że w tym wypadku $g_1 = g_2 = g_3 = g_4$, $g'_1 = g'_2 = g'_3 = g'_4$, $a'_1 = a'_2 = a'_3 = a'_5 = a'_6 = 0$, oraz $a'_4 = a'_7$.

Nakoniec uwzględnimy parcie wiatru z prawej strony. Wypadkowe parcie zaczepia w punkcie K . Znowu wyznaczmy kierunek oddziaływania na stałej podporze w ten sposób, że połączymy punkt przecięcia się oddziaływania O_1 , (które musi być pionowe) i wypadkowej parcia wiatru z podporą B , używając podanej wyżej konstrukcji pomocniczej, którą na rysunku opuściliśmy. Kreślimy teraz w zwykły sposób plan sił, przyczem znów w znany sposób wyznaczamy a_5 .

Wyniki, tą drogą otrzymane, ułożyliśmy w tabliczce, umieszczonej na tabl. III.

Do siły wewnętrznej, wywołanej ciężarem własnym i obciążeniem śniegiem, dodajemy siłę wewnętrzną, wywołaną wiatrem z lewej lub z prawej strony tak, abyśmy otrzymali największą siłę.

5. Przekroje prętów.

a) Pas górny wykonamy z 2 kątownek $\frac{100 \cdot 100}{10}$ i blachy stojącej $160/15$.

Wprawdzie siła wewnętrzna w pojedynczych prętach pasu górnego jest zmienna w granicach od $-31,68 t$ do $-33,38 t$, przecież ze względów ustrojowych przyjmujemy dla wszystkich prętów przekrój jednakowy, obliczając go wedle najw. siły $P = -33,38 t$.

Przekrój powyżej opisany ma względem osi pionowej mniejszy moment bezwładności, aniżeli względem osi poziomej tak że obliczymy go na wyoboczenie w kierunku tej ostatniej osi t. j. w kierunku prostopadłym do płaszczyzny więzara. Długość pręta $l = 237 \text{ cm}$. Przyjęto, że pręt na obu końcach jest tylko przytrzymany przez płatwie, więc długość wolna $l_1 = l = 237 \text{ cm}$.

2 kątowniki $\frac{100 \cdot 100}{10}$ i blacha stojąca $160/15$ mają po uwzględnieniu dziury na nit $\Phi 20 \text{ mm}$ przekrój użyteczny

$$F_0 = 2 \times 19,16 + 16 \times 1,5 - 2 \times 3,5 = 55,32 \text{ cm}^2.$$

Względem osi pionowej

$$I' = \frac{1}{12} 16 \times 1,5^3 + 2(174,16 + 19,16 \cdot 4,74^2) = 1215 \text{ cm}^4$$

$$F = 2 \times 19,16 + 16 \times 1,5 = 62,32 \text{ cm}^2,$$

zatem promień bezwładności

$$a' = \sqrt{\frac{I'}{F}} = \sqrt{\frac{1215}{62,32}} = 4,41 \text{ cm}.$$

Dla stosunku $\frac{l}{a'} = \frac{237}{4,41} = 53,7$ mamy wedle tabl. LIV.

$$c' = 0,651 + \frac{0,015}{5} \cdot 1,3 = 0,655$$

Na wyoboczenie potrzeba $F = \frac{P}{\epsilon' c'} = \frac{33380}{1000 \cdot 0,655} = 51,0 \text{ cm}^2$ tak, że przekrój przyjęty jest wystarczający.

b) Pręty pasu dolnego d_1, d_2, d'_2 i d'_1 obliczamy wedle najw $P = 32,89 t$, więc potrzebna powierzchnia $F = \frac{32840}{1000} = 32,89 \text{ cm}^2$.

2 kątowniki $\frac{100 \cdot 100}{10}$ mają po uwzględnieniu dziury na nit $\Phi 20 \text{ mm}$

$$F_0 = 2 \times 19,16 - 2 \times 1 \times 2 = 34,32 \text{ cm}^2, \text{ zatem przekrój odpowiedni.}$$

Pręt środkowy d_3 przenosi najw $P = +14,22 t$.

2 kątowniki $\frac{80 \cdot 80}{80}$ mają po uwzględnieniu dziury na nit $\Phi 20 \text{ mm}$

$$F_0 = 2 \times 12,27 - 2 \times 0,8 \times 2 = 21,34 \text{ cm}^2. \text{ Przekrój jest za wielki, bo po-}$$

trzeba tylko $14,1 \text{ cm}^2$. Przyjmujemy 2 kątowniki $\frac{70 \cdot 70}{7}$. Wtedy $F_0 = 22,89 + -2,0 \cdot 7,2 = 1,70 \text{ m}^2$. Przyjęty przekrój więc zostawiamy.

c) Krata.

1. Ściągna a_2, a_5, a'_2 i a'_5 wykonamy z 2 kątownek $\frac{45 \times 45}{5}$, które dla nitów $\Phi 12 \text{ mm}$ mają przekrój użyteczny

$k_0 = 2 \times 4,29 \cdot 2 \times 0,5 \times 1,2 = 7,38 \text{ cm}^2$. Przekrój F tu potrzebny tylko $5,21 \text{ cm}^2$, lecz ze względów ustrojowych mniejszych kątownek już nie przyjmujemy.

2. Ściągną a_4, a_7, a'_4, v'_7 z 2 kątownek $\frac{80 \times 80}{8}$. Tu $F_0 = 2 \cdot 12 \cdot 27 = 2 \times \times 0,8 \cdot 2 = 21,34 \text{ cm}^2$, więc nieco za wielki, bo potrzebny tylko $19,05 \text{ cm}^2$. Przyjmujemy więc $\frac{2 \times 70 \cdot 70}{9}$ i mamy $k_0 = 2 \cdot 11 \cdot 87 = 2 \cdot 0,9 \cdot 2 = 20,14 \text{ cm}^2$.

3. Zastrzały a_1, a_6, a'_6 i a'_1 przenoszą najw $P = 2,28 \text{ t}$.

Użyjemy przekroju krzyżowego z 2 kątownek $\frac{45 \cdot 45}{5}$, rostawionych na odstęp $1,5 \text{ cm}$, które mają, jak powyżej, $F_0 = 7,38 \text{ cm}^2$.

Obliczymy promień bezwładności dla obu kątownek, mianowicie,

$$I = 2(7,86 + 4,29(1,82 + 0,75)) = 2 \cdot 36,17$$

$$F = 2 \cdot 4,29, \frac{I}{F} = 8,431, \text{ zatem } a = \sqrt{\frac{I}{F}} = 2,9 \text{ cm}.$$

Dla $\frac{l}{a} = \frac{52,5}{2,8} = 18,1$, mamy wedle tabl. XLIV $\zeta' = 0,762$. Ponieważ pręt jest złożony z dwu części, wiąż obliczamy jeszcze ζ'' dla odstępów połączeń $26,25 \text{ cm}$. Wtedy $I = 7,86, F = 4,29$, więc $\frac{l}{a} = \frac{7,86}{4,29}$. Dla tak małego $\frac{l}{a}$ nie uwzględniamy wyboczenia czyli przyjmujemy $\zeta'' = 1$.

Zatem na wyboczenie trzeba tylko

$$F = \frac{2288}{1000 \cdot 0,762} = 3,00 \text{ cm}^2. \text{ Przekrój aż nadto wystarczający.}$$

4. Zastrzały a_3 i a'_3 mają $l_1 = l = 105 \text{ cm}$. Używając tego samego przekroju, co poprzednio, mamy dla $\frac{l}{a} = \frac{105}{2,9} = 36,2$ $\zeta' = 0,707$ tak, że na wyboczenie potrzeba

$$F = 4560 : 707 = 6,45 \text{ cm}^2.$$

§ 114. Belka pochyło leżąca.

Przy obliczeniach więzarów dachowych drewnianych uważać musimy na oddziaływania jednej części więzara na drugą, które zależne są od sposobu połączenia tych części.

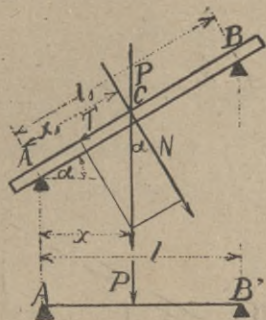
Dla lepszego zrozumienia rzeczy zastanówmy się nad najprostszym przypadkiem, gdy belka pochyła AB podparta jest w dwu punktach (rys. 280). Siła P , działają pionowo, rozdziela się na N i T . Siła $N = P$ dost a działa prostopadle na belkę i wywołuje moment

$$M = \frac{N x_1 (l_1 - x_1)}{l_1} = \frac{P \text{ dost } a \frac{x}{\text{dost } a} \left(\frac{\text{dost } a}{l-x} \right)}{\frac{l}{\text{dost } a}} = \frac{P x (l-x)}{l}$$

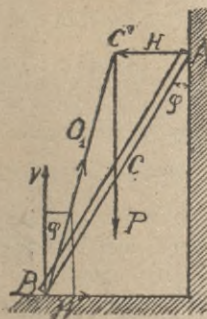
a więc taki sam, jak gdyby siła P działała na rzut belki AB .

Oprócz tego działa jednak siła $T = P \text{ wst } a$ i wywołuje w AC ciśnienie, w CB ciągnienie. Przekrój obliczamy wtedy wedle wzoru $\tau = \frac{T}{F} + \frac{Me}{I}$.

Jeżeli belka oparta jest o ziemię i o mur pionowy (rys 281) i jeżeli przyjmiemy w A oddziaływanie normalne, a więc



rys. 280.



rys. 281.

poziome, to dla równowagi muszą się siły O_1 , P i H przecinać w jednym punkcie C' , a zatem w B musi powstać oprócz oddziaływania pionowego $V_1 = P$ także poziome H , przyczem

$$H = P \text{ st } \varphi \quad 566)$$

Siła H powstaje w B wskutek tarcia. Kąt φ , a więc siła H , jest tem większy, im niżej jest punkt A , największe może być $H = P f = P \text{ st } \varrho$, gdy f nazwiemy współczynnikiem a ϱ kątem tarcia (n. *Reibungswinkel*, fr. *angle du frottement*, an. *angle of friction*, r. *уголь трения*).

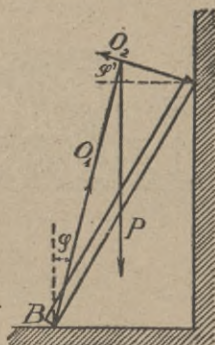
Ale i w punkcie A może powstać tarcie i wtedy oddziaływanie w A nie będzie poziome, lecz w ogóle pochyłe (rys. 282), nachylone do poziomemu pod kątem φ' .

Granicą równowagi będzie położenie AB , dla którego kąt $\varphi = \varphi' = \varrho$.

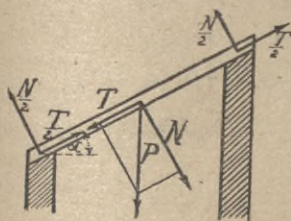
Jakże się zachowują części składowe dachu drewnianego? Zależy to wszystko od rodzaju podparcia. Gdy położymy krokiew na dwu murach w płaszczyznach pochyłych (rys. 283), belka zachowa się, jak w rys. 280.

Oddziaływania $\frac{T}{2}$ mogą powstać tylko wskutek tarcia. Ustrój ten możliwymby był więc tylko dla małej siły T , więc dla małego α . Przy większem nachyleniu należałoby zakotwić belkę, aby przeszkodzić przesunięciu.

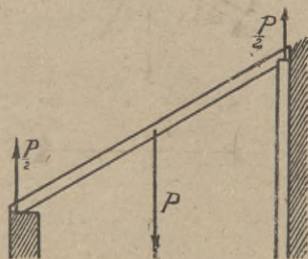
Jeżeli ta sama belka oparta jest na murze i słupie płaszczyznami poziomymi (rys. 284), to oddziaływania będą tylko pionowe i obliczaćby należało momenty, jak dla rzutu tej belki. Widzimy więc, ile zależy przy belkach i więzarach drewnianych od sposobu połączenia i podparcia.



rys. 282.



rys. 283.

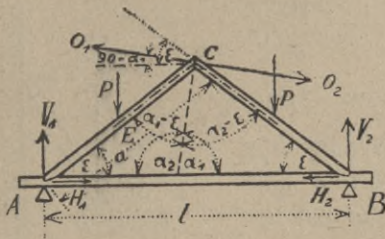


rys. 284.

§ 115. Drewniany pojedynczy dach krokwiowy.

Najprostszy dach drewniany składa się z więzarów, złożonych z dwu krokwi, połączonych jętą, i nazywa się pojedynczym dachem krokwiowym (n. *einfaches Sparrendach*) (rys. 285). Przypuśćmy, że obciążenie działa tylko pionowo. Przy obliczeniu dachów drewnianych zwykle bowiem uwzględniamy tylko składową pionową parcia wiatru, bo i tak obliczenie nie może być z powodu połączeń zupełnie dokładnem. Dokładniejsze obliczenie sił, wywołanych wiatrem, nie przedstawiałoby zresztą

poważnych trudności. Ciężary, działające na krokwie, składają się w siły wypadkowe, działające w środku krokwi.



rys. 285.

Niech będzie wypadkowa ciężarów na lewej połaci P , na prawej P' . Krokwie opierają się na jedna na drugiej w C , wywierają więc wzajemne ciśnienie na siebie O_1 i O_2 , przyczem $O_1 = O_2$ i ma ten sam kierunek. Jeżeli teraz odejmiemy BC , to zamiast tej krokwi musimy zaczepić siłę

O_1 i otrzymamy dla równowagi krokwi AC ze względu na punkt A ,

$$O_1 a \operatorname{dost} (\alpha_1 - \varepsilon) = P \frac{a}{2} \operatorname{dost} \varepsilon \quad \dots \quad 567)$$

Podobnie otrzymamy dla krokwi BC ze względu na punkt B

$$O_2 a \operatorname{dost} (\alpha_2 - \varepsilon) = P' \frac{a}{2} \operatorname{dost} \varepsilon,$$

a że $O_1 = O_2$, więc $\frac{P}{\operatorname{dost} (\alpha_1 - \varepsilon)} = \frac{P'}{\operatorname{dost} (\alpha_2 - \varepsilon)}$,

a gdy $\alpha_2 = 180 - \alpha_1$, więc $-P \operatorname{dost} (\alpha_1 + \varepsilon) = P' \operatorname{dost} (\alpha_1 - \varepsilon)$ a stąd

$$\operatorname{st} \alpha_1 = \frac{P + P'}{(P - P') \operatorname{st} \varepsilon} \quad \dots \quad 568)$$

Oddziaływania w A i B są ukośne, rozkładamy je na V_1 i H_1 , jakoteż V_2 i H_2 .

Dla równowagi mamy dalej

$$H_1 = H_2 = O_1 \operatorname{wst} \alpha_1 \quad \dots \quad 569)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 - P + O_1 \operatorname{dost} \alpha_1 &= 0, \text{ więc } V_1 = P - O_1 \operatorname{dost} \alpha_1 \\ V_1 &= P' + O_1 \operatorname{dost} \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad 570)$$

Z równ 567 otrzymamy dalej

$$O_1 = \frac{P \operatorname{dost} \varepsilon}{2 \operatorname{dost} (\alpha_1 - \varepsilon)} = \frac{P}{2 (\operatorname{dost} \alpha_1 + \operatorname{st} \varepsilon) \operatorname{wst} \alpha_1},$$

a po wstawieniu wartości za $\operatorname{dost} \alpha_1$ z 568

$$O_1 = = \frac{P + P'}{4 \operatorname{wst} \alpha_2 \operatorname{st} \varepsilon} \quad \dots \quad 571)$$

Wstawiliśmy to w równ. 569) i 570), otrzymamy

$$H_1 = H_2 = H = \frac{P + P'}{4 \operatorname{st} \varepsilon} \dots \dots \dots 572)$$

$$\left. \begin{aligned} V = P &= \frac{P + P'}{4 \operatorname{st} \alpha_1 \operatorname{st} \varepsilon} = P - \frac{P - P'}{4} = \frac{3P + P'}{4} \\ V_2 = P' + O_1 \operatorname{dost} \alpha_1 &= P' + \frac{P - P'}{4} = \frac{3P' + P}{4} \end{aligned} \right\} \dots 573)$$

Dla obciążenia symetrycznego jest $P = P'$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$,

$$\text{więc } O_1 = \frac{2 \operatorname{st} \varepsilon}{P}, V_1 = V_2 = P, H = \frac{P}{2} \operatorname{dost} \varepsilon \dots 574)$$

Jeżeli chcemy znaleźć siłę wewnętrzną T w AC , to zauważmy węzeł A . Siły H, T i V_1 zmniejszone o $\frac{P}{2}$, bo P rozdziela się po połowie na A i C , muszą dać zamknięty wielobok sił, więc

$$T = \left(V_1 - \frac{P}{2} \right) \operatorname{dosiecz} \varepsilon = \left(\frac{3P + P'}{4} - \frac{P}{2} \right) \operatorname{dosiecz} \varepsilon = \frac{P + P'}{4 \operatorname{wst} \varepsilon} \dots 575)$$

Przy obliczaniu krokwi zważyć jeszcze musimy, że jest ona obciążoną na całej długości ciężarem jednostkowym $\frac{P}{a}$. Ciężar ten działa pionowo, a więc prostopadle do krokwi składają $\frac{P}{a} \operatorname{dost} \varepsilon$, a w kierunku osi $\frac{P}{a} \operatorname{wst} \varepsilon$. Ponieważ oprócz tego działa tu ciśnienie T , więc przekrój obliczać będziemy według wzoru

$$\begin{aligned} v &= \frac{T + \frac{P}{a} \operatorname{wst} \varepsilon}{F} + \frac{Me}{I} = \frac{T + \frac{P}{a} \operatorname{wst} \varepsilon}{bh} + \frac{\frac{1}{8} \frac{P}{a} a^2 \operatorname{dost} \varepsilon \frac{1}{2} h}{\frac{1}{12} bh} = \\ &= \frac{P + P'}{4 \operatorname{wst} \varepsilon} + \frac{P}{a} \operatorname{wst} \varepsilon + \frac{3 Pa \operatorname{dost} \varepsilon}{4 bh^2}, \dots \dots 576) \end{aligned}$$

przyczem należy jeszcze v zniżyć ze względu na wyboczenie. Belka AB pracuje na ciągnienie $H = \frac{P + P'}{4 \operatorname{st} \varepsilon}$, a ewentualnie obciążona być może jeszcze ciężarem jednostajnie rozłożonym.

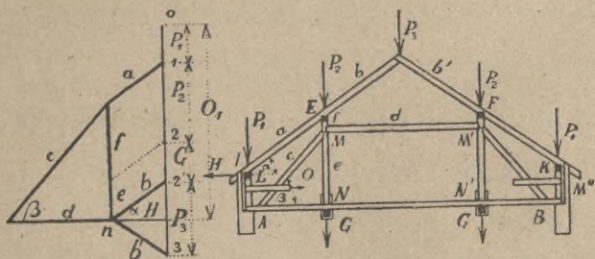
§ 116. Dach płatwowy z podwójnym więzarem i kolanem.

Nie możemy tu zastanawiać się nad wszystkimi rodzajami więzarów, wyznaczymy tylko jeszcze dla przykładu siły wewnętrzne kilku więzarów, a najprzód dla dachu płatwowego z podwójnym wieszarem i kolanem (n. *Pfettendach mit doppeltem Hängewerk und Kniestock*) (rys 286).

Zaczynając od wierzchołka, rozkładamy siłę P_3 na dwie składowe b i b' wykreślnie, robiąc $2'3 = P_3$ i kreśląc $2'n \parallel CE$ i $3n \parallel CE$. Analitycznie mamy

$$b = \frac{P_3}{2 \operatorname{wst} \alpha} \dots \dots \dots 577)$$

Od połączenia w E zależy, czy siła ta przynosi się na EI , czy też przyjmuje ją płatew E . Przy małym zacięciu na nakładkę



rys. 286.

możemy przyjąć, że siła b przenosi się cała na EI , więc $a_1 = b$, zaś siła P_2 przenosi się cała na płatew E i słup pod nią stojący. W części słupa EM powstaje więc siła zewnętrzna $f = P_2$, a gdy wskutek obciążenia belki AB działają w N i N' ciężary G , więc MN pracuje na ciągnienie $e = G$. Na węzeł M rozpornicy działa więc siła $G + P_2$, która rozkłada się na c i d , przyczem

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{G + P_2}{\operatorname{wst} \beta} \\ d &= (G + P_2) \operatorname{dot} \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 578)$$

Siła H , działająca w I , jest

$$H = \frac{P_3}{2} \operatorname{dost} \alpha \dots \dots \dots 579)$$

Siła ta wywróciłaby słup AI , gdyby nie kleszcze L , w których

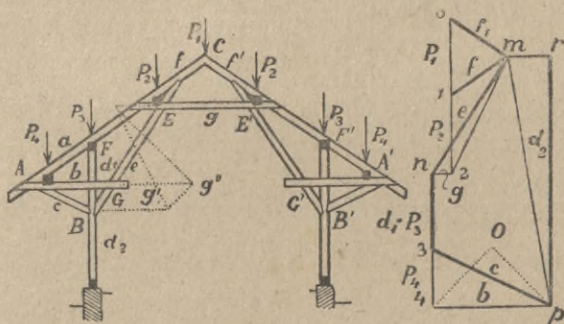
powstaje siła O , równoważąca siłę H , a więc tworząc moment ze względu na punkt A , otrzymamy

$$H \cdot AI = O \cdot AL, \text{ zatem } O = H \cdot \frac{AI}{AL} \dots 580)$$

Gdyby połączenie w E było silne, to siła b działałaby wprost na płatwę E i rozpornicę, w punkcie I nie byłoby zaś wcale parcia poziomego H . Widzimy więc, że przy obliczeniu dachów drewnianych musimy bardzo uważać na rodzaj połączeń pojedynczych części dachu.

W obliczeniu tem zrobiliśmy przypuszczenie, że dach jest symetrycznie obciążony. Często w ten sposób postępujemy przy obliczeniu więzarów drewnianych, przyjmując składową pionową wiatru na obu połaciach, aby otrzymać symetryczne obciążenie.

Zwrócić tu musimy uwagę, że przy obliczaniu przekrojów uważać należy na to, czy pręt dany pracuje tylko na ciśnienie lub ciągnienie, jak EM i MN , czy też także na złamanie, jak IL lub AM . Naprężenia zginające mogą także powstać z połączeń mimośrodkowych, jak w AM i MM' ; moment zginający jest wtedy równy sile przez mimośród i może znacznie powiększyć naprężenia. Dla zmniejszenia naprężeń zginających należałoby umieścić punkt L jak najbliżej punktu I .



rys. 287.

§ 117. Dach rozporowy.

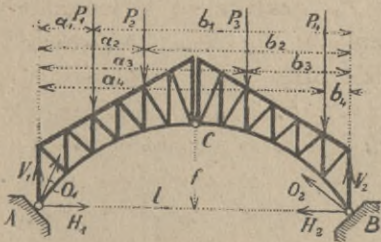
Tu podparte są płatwie w E i E' (rys. 287) rozpornicą, w F F' słupem, w A i A' poziomymi belkami AG , $A'G'$ i zastrzałami AB i $A'B'$.

Zacznijmy od C i rozłóżmy P_1 na f i f_1 , a otrzymamy $f_1 = 0 m$, $f = 1 m$. Siła P_2 przenosi się na rozporę EE' i zastrzał BE , a gdy ten jest oprócz tego połączony z krokwią, więc i siła f przenosi się w E . Złóżmy więc f i P_2 , a wypadkową m 2 rozłóżmy na siły e i g , a otrzymamy $mn = e$, $2n = g$.

Przechodząc teraz do F mamy $d_1 = P_3$. W A ciężar P_4 spoczywa znów na prętach AG i AB . Rozłóżmy więc P_4 na b i c , a otrzymamy $4p = b$, $p3 = c$, b jest ciągnienie, c ciśnienie. W B schodzą się siły c , d_1 i e_1 , złożony je, otrzymamy mp . A zatem $d_2 = pr$, a oprócz tego działa w B parcie poziome rm . Siła b zaczepia w G i wywołuje moment w punkcie G zastrzału AE . Zapomocą wieloboku sznurowego wyznaczaliśmy jego wielkość $g' g''$.

§ 118. Więzár łukowy trójprzegubowy.

Jeżeli urządzimy oba łożyska stałe ale przegibne, to oddziaływania nawet dla obciążenia pionowego będą ukośne, a więzár staje się łukowym. Aby był on statycznie wyznaczalnym, musimy jeszcze urządzić trzeci przegub (n. *Gelenke*, an. *joint*, *hinge*, r. шарнеръ), zapomocą którego łączymy obie połowy więzaru w ten sposób, że mogą się około przegubu obracać. Zwykle pas górny jest prosty, dolny zakrzywiony (rys. 288). Mogą jednak i oba pasy być zakrzywione.



rys. 288.

Jeżeli na dźwigar taki działają siły pionowe P_1, P_2, P_3, P_4 , to powstające ukośne oddziaływania O_1, O_2 dadzą się rozłożyć na V_1 i H_1, V_2 i H_2 . Dla równowagi musi być

$$H_1 = H_2 = H \dots \dots \dots 581)$$

W przegubach A, B i C momenty muszą być dla równowagi równe zero, więc ze względu na punkt A napiszemy

$$\sum Pa + V_2 l = 0, \text{ stąd } V_2 = \frac{\sum Pa}{l} \dots \dots \dots 582)$$

Analogicznie otrzymamy $V_1 = \frac{\Sigma P b}{l}$ 583)

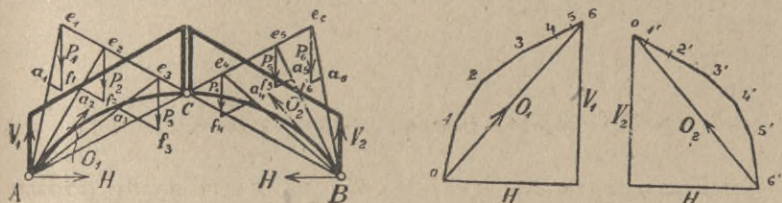
W punkcie C jest moment równy zero, więc

$$V_1 \frac{l}{2} - Hf - P_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) - P_2 \left(\frac{l}{2} - a_2 \right) = 0, \text{ stąd}$$

$$H = \frac{1}{f} \left((V_1 - P_1 - P_2) \frac{l}{2} + P_1 a_1 + P_2 a_2 \right),$$

$$H = \frac{1}{2f} (P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 b_3 + P_4 b_4) \text{ 584)}$$

A więc składowe pionowe oddziaływania są takie same, jak oddziaływania belki prostej, parcie poziome H da się obliczyć z równ. 584).



rys. 289.

Wykreślnie możemy łatwo wyznaczyć oddziaływania (rys. 289), rozkładając każdą siłę z osobna. Siła P_1 rozkłada się w kierunku Ae_1 i e_1B , bo z powodu, że momenty w A , B i C są równe zero, oddziaływania muszą przechodzić przez A , C i B . Siła P_1 daje więc oddziaływania $e_1 a_1$ i $a_1 f_1$, siła P_2 $a_2 e_2$ i $a_2 f_2$ i t. d.

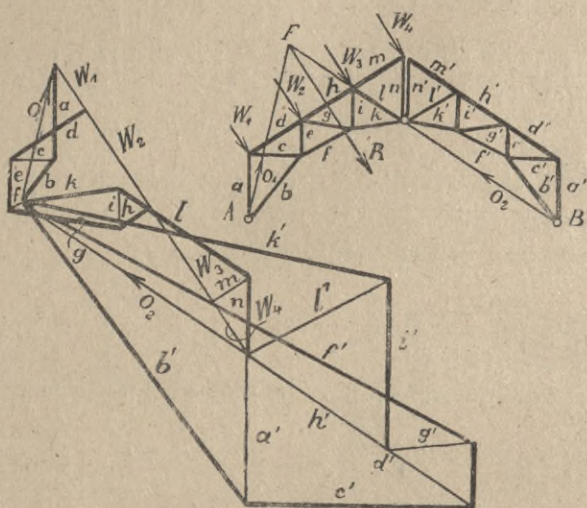
Teraz składowy oddziaływania w A i w B za pomocą wieloboku sił i otrzymujemy $O_1 = 06$ i $O_2 = 6'C'$. Zamiast wyznaczenia oddziaływania dla każdej siły z osobna możemy złożyć naprzód siły lewej połowy a osobno siły prawej połowy więzaru i dopiero wyznaczać oddziaływania.

Zupełnie w ten sam sposób wyznaczamy oddziaływania parcia wiatru.

W rys. 290 wyznaczyliśmy w ten sposób oddziaływania, że złożyliśmy parcia W_1, W_2, W_3, W_4 w wypadkową R , poczem wyznaczamy kierunki oddziaływań BC i AF .

W wieloboku sił wyznaczamy wedle tego wielkość $O_1 = 00$ i $O_2 = 40$. Znając oddziaływania, możemy teraz w zwykły sposób wyznaczyć plan sił dla lewej połowy, postępując z lewej ku prawej, a dla prawej, postępując z prawej ku lewej.

Zupełne obciążenie śniegiem nie jest tu najniekorzystniejsze, lecz da się dla każdego pręta wyznaczyć pewne najniekorzystniejsze obciążenie częściowe. Nie sądzimy jednak, aby przy dachach



rys. 290.

było potrzebnem takie badanie, wystarczy tylko, gdy przyjmiemy obciążenie śniegiem raz całkowite, drugi raz tylko dla jednej połaci i dla każdego pręta zatrzymamy wyniki niekorzystniejsze.

§ 119. Dache baniaste.

Dach baniasty (n. *das Kuppeldach*, fr. *toit en coupole*, an. *cupola roof*, r. сферическая крыша) ma powierzchnię dachową, powstałą wskutek obrotu krzywej płaskiej około osi pionowej. Dźwigające części zeskładu, składają się tu głównie z krokwi, które urządzamy pod różnymi kątami środkowymi w południkach, a które połączone są poziomymi pierścieniami w równoleżnikach. W trapezach, w ten sposób powstałych, urząda się podwójne przekątnie gibkie (rys. 291). Zwykle górny pierścień obciążony jest latarnią.

Obliczenie baniadał pierwszy Schwedler (1866), dokładniejsze Foeppl i Müller Breslau (1892).

Siły H są wypadkowami ciśnień, względnie ciągnięć pierścieniowych R , które ze względu na symetrię są równe. Znając siłę H , łatwo teraz rozłożyć ją wykreślnie na dwie siły R , działające w pierścieniu, nachylone do H pod kątami β . Zrobiliśmy to na rysunku.

Uwaga. Na rys. 292. siły poziome $H_1 H_2 H_3 \dots H$ są wszystkie rysowane cienkimi linjami, gdyż H_3, H_4 i H pada na H_2 , nie można więc było uwidocznic ciśnień i ciągnięć.

Analitycznie wyznaczyć możemy siły wewnętrzne, ustawiając równania równowagi dla rozmaitych węzłów. I tak otrzymamy dla B

$$\frac{P_1}{n} + S_1 \text{ wst } \alpha_1 = 0, \text{ stąd } S_1 = -\frac{P_1}{n \text{ wst } \alpha_1},$$

Dla punktu C mamy $\frac{P_2}{n} + S_2 \text{ wst } \alpha - S_1 \text{ wst } \alpha_1 = 0$, stąd

$$S_2 = S_1 \frac{\text{wst } \alpha_1}{\text{wst } \alpha_2} - \frac{P_2}{n \text{ wst } \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \text{ wst } \alpha_2}$$

ogólnie
$$S_m = -\frac{P_1 + P_2 + \dots + P_m}{n \text{ wst } \alpha_m} \dots \dots \dots 586)$$

Dla punktu B mamy dalej

$$S_1 \text{ dost } \alpha_1 - H_1 = 0, \text{ stąd } H_1 = S_1 \text{ dost } \alpha_1 = -\frac{P}{n} \text{ dost } \alpha_1.$$

$$\text{A że } H_1 = 2 R_1 \text{ dost } \beta, \text{ więc } R_1 = -\frac{P \text{ dost } \alpha_1}{2n \text{ dost } \beta}.$$

Dla C otrzymamy

$S_2 \text{ dost } \alpha_2 - S_1 \text{ dost } \alpha_1 - H_2 = 0$, a gdy $H_2 = 2R_2 \text{ dost } \beta$,

$$R_2 = -\frac{(P_1 + P_2) \text{ dost } \alpha_2 + P_1 \text{ dost } \alpha_1}{2n \text{ dost } \beta}$$

ogólnie

$$R_m = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1}) \text{ dost } \alpha_{m-1} - (P_1 + \dots + P_m) \text{ dost } \alpha_m}{2n \text{ dost } \beta} \dots \dots \dots 587)$$

Z rysunku widzimy, że $2\beta + \frac{360}{n} = 180$, więc

$$\beta = 90 - \frac{180}{n}, \text{ dost } \beta = \text{wst } \frac{180}{n}, \text{ zatem}$$

$$R_m = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1}) \text{ dost } \alpha_{m-1} - (P_1 + P_2 + \dots + P_m) \text{ dost } \alpha_m}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}} \dots \dots \dots 588)$$

Dla najniższego punktu A mamy

S_4 dost $\alpha_4 + H = 0$, więc

$$R_5 = \frac{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \text{ dot } \alpha_4}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}} \dots \dots \dots 589)$$

§ 121. Obciążenie bani śniegiem i wiatrem.

Tu przypuścimy, że bania jest tak płaską, że w ogóle wiatr ma mały wpływ na siły wewnętrzne. W przybliżeniu obliczamy więc parcie wiatru dla średniego nachylenia jako we wszystkich częściach bani stałe i uwzględniamy tylko składową pionową parcia, którą dodajemy do ciężaru śniegu.

Niech ciężar śniegu i wiatru na jednej strefie nazywa się Q z odpowiednim znacznikiem, to ponieważ wedle 586) S_m siła wewnętrzna z krokwi jest największą dla obciążenia zupełnego, więc otrzymamy

$$\text{najw } S'_m = - \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m}{n \text{ wst } \alpha_m} \dots \dots \dots 590)$$

Jeżeli chcemy zbadać najniekorzystniejsze obciążenie pierścieni, to widzimy z 588), że wielkość, a nawet i znak R_m zależy jest od wielkości obu wyrazów w liczniku. I tak w m -tym pierścieniu będzie *najw.* ciśnienie, jeżeli w równ. 588) będzie licznik ujemny, a że $a_m > a_{m-1}$, więc licznik będzie ujemny, gdy $P_1 + P_2 + P_{m-1}$ będą jak najmniejsze, a więc równe zero, zaś P_m jak największe. A więc n. p. w trzecim pierścieniu mają być dla *najw.* ciśnienia I. i II. strefa nieobciążone, a trzeci pierścień obciążony. Obciążenie dalszych pierścieni jest obojętnem. Przeciwnie dla *najw.* ciągnięcia muszą być strefy wewnątrz pierścienia obciążone, dany pierścień zaś nie.

Wobec tego otrzymamy największe siły wewnętrzne w pierścieniach.

najw. ciśnienie:

pierścień latarniowy $\text{najw } (-R_1) = -\frac{Q_1 \text{ dost } \alpha_1}{2 n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

„ drugi $\text{najw } (-R_2) = -\frac{Q_2 \text{ dost } \alpha_2}{2 n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

„ trzeci $\text{najw } (-R_3) = -\frac{Q_3 \text{ dost } \alpha_3}{2 n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

„ murowy $\text{najw } (-R_4) = 0$

najw. ciągnienie:

pierścień latarn. $\text{najw } R_1 = 0$

„ drugi $\text{najw } R_2 = \frac{Q_1 (\text{dot } \alpha_1 - \text{dot } \alpha_2)}{2 n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

„ trzeci $\text{najw } R_3 = \frac{(Q_1 + Q_2) (\text{dot } \alpha_2 - \text{dot } \alpha_3)}{2 n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

„ murowy $\text{najw } R_m = \frac{(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{m-1}) \text{dot } \alpha_{m-1}}{2 n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

591)

Chcąc wyznaczyć największe siły w przekątniach, pomyślny, że przez środek przecinających się przekątni położymy płaszczyznę południkową. Niechaj jedna połowa bani będzie obciążona tylko ciężarem własnym, druga zaś połowa ciężarem własnym i ruchomym, to ponieważ wtedy będzie największa różnica w siłach wewnętrznych krokwi obu połów, zatem i siły wewnętrzne w przekątniach będą wtedy największe.

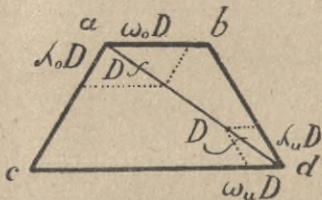
Gdyby cała bania była obciążona tylko ciężarem własnym, to w pierwszej strefie byłoby $S_1 = -\frac{P}{n \text{ wst } \alpha_1}$, dla obciążenia zupełnego ciężarem własnym i ruchomym $S'_1 = \frac{P_1 + Q_1}{n \text{ wst } \alpha_1}$, różnica zatem wynosiłaby $\Delta S = \frac{Q}{n \text{ wst } \alpha}$. W rzeczywistości, gdy jedna połowa jest obciążona ciężarem ruchomym, a druga nie, różnica

będzie mniejsza, lecz aby uniknąć zawiłych obliczeń, przyjmujemy niekorzystniej, niż w rzeczywistości, $\Delta S = \frac{Q}{n \operatorname{wst} \alpha}$. Gdy tedy kąt między przekątnią a więcej obciążoną krokwią jest γ , to siła wewnętrzna największa w przekątni będzie

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{Q_1}{n \operatorname{wst} \alpha_1 \operatorname{dost} \gamma_1} \\ a \text{ podobnie w innych strefach} \\ D_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{n \operatorname{wst} \alpha_2 \operatorname{dost} \gamma_1} \\ D_3 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{n \operatorname{wst} \alpha_3 \operatorname{dost} \gamma_3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 592)$$

§ 122. Obliczenie dokładniejsze sposobem Müllera Breslaua.

Poprzedni sposób Schwedlera jest tylko przybliżonym, dokładniejszy podał Müller Breslau w r. 1892.



rys. 293.

Wspominaliśmy, że w każdym trapezie (rys. 293) powstałym z dwu krokwi i dwu części pierścienia znajdują się dwie przekątne gibkie. Jako gibkie nie mogą być one ciśnione i w razie, gdyby w jednej z nich powstało ciśnienie, wygięłaby się ona i przestałaby działać, natomiast druga byłaby ciągnioną. Obliczamy więc je w ten

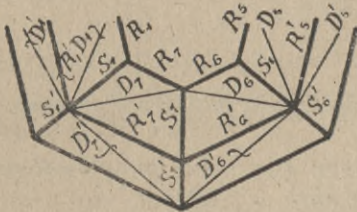
sposób, że przyjmujemy zawsze tylko jedną przekątnię w trapezie i to ciągnioną. Gdyby wypadło z rachunku ciśnienie, trzeba by rachunek powtórzyć dla drugiej przekątnej.

Siła wewnętrzna D , działająca w przekątnej ad , rozkłada się w a na $\omega_0 D$ i $\lambda_0 D$, w d na $\omega_u D$ i $\lambda_u D$. Wartości $\omega_0, \lambda_0, \omega_u, \lambda_u$, dadzą się dla każdego trapezu obliczyć lub wyznaczyć łatwo wykreślić. Jeżeli więc uwzględnimy siły $\omega_0 D, \lambda_0 D, \omega_u D$ i $\lambda_u D$, to możemy teraz w dalszem badaniu przekątne opuścić i pozostają nam tylko krokwie i pierścienie.

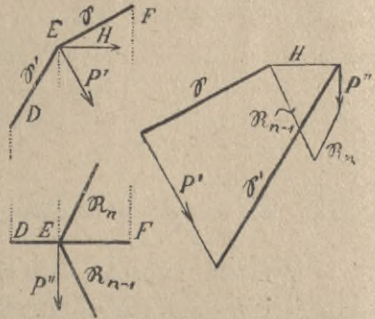
Jeżeli oznaczymy sumy sił wewnętrznych w krokwiach i pierścieniach \mathcal{S} i \mathcal{R} , to z rys. 294 otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_7 &= S_7 + \lambda_0 D_7 + \lambda_0 D_6 \\ \mathfrak{S}'_7 &= S'_7 + \lambda'_u D'_7 + \lambda'_u D'_6 \\ \mathfrak{R}_7 &= R_7 + \omega_0 D_7 \\ \mathfrak{R}'_7 &= R'_7 + \omega_u D_7 + \omega'_0 D'_7 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 593)$$

Zauważmy teraz węzeł E przedstawiony na rys. 295 w obu rzutach. Siłę P , działającą w E , rozłożmy na siłę P' , działającą w płaszczyźnie krokwi i P'' , działającą prostopadłe do tej płaszczyzny.



rys. 294.



rys. 295.

Jeżeli znamy siłę P' i siłę wewnętrzną \mathfrak{S} , to dla sił \mathfrak{S} , \mathfrak{S}' , P' i H da się wykreślić zamknięty wielobok sił i da się wyznaczyć siłę H , która jest znów wypadkową sił P' , \mathfrak{R}_n i \mathfrak{R}_{n-1} . Jeżeliśmy wyznaczyli H , a znamy też P' , to znów z wieloboku sił, znajdującego się w innej, ale wykreślonego w tej samej płaszczyźnie, dadzą się wyznaczyć \mathfrak{R}_n i \mathfrak{R}_{n-1} .

Widzimy więc, że jeśli znamy oprócz siły P także i jedną siłę wewnętrzną \mathfrak{S} , inne siły wewnętrzne dadzą się wyznaczyć. Otóż zaczynając od pierścienia latarniowego, mamy $\mathfrak{S}=0$, a więc wyznaczymy wszystkie siły wewnętrzne dla tego węzła. Dla węzła pierścienia drugiego znamy już \mathfrak{S} .

Po wyznaczeniu sił \mathfrak{S} , \mathfrak{R} i stosunków λ i ω możemy wyznaczyć też na podstawie równ. 593) siły D , R i S . Przedtem należy dla węzłów bez przekątni wyznaczyć R i S i tak uzyskać pewną ilość znanych ilości, które wprowadzić należy do równ. 573) dla wyznaczenia nieznanymi*).

*) Landsberg podaje w swej „Statik der Hochbauconstructionen“ IV. wyd., str. 300 przykład dokładnego obliczenia bani według powyższego sposobu.

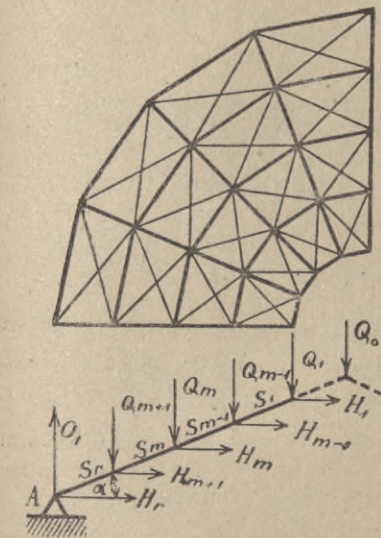
§ 123. Płaskie dachy namiotowe.

Dachy namiotowe mają kształt ostrosłupa, najczęściej regularnego. Mogą się one składać z pewnej ilości więzarów głównych, ułożonych w kierunku promieni, wtedy oblicza się je jak zwykle więzary dachowe wedle obciążenia, które na każdy więzaz przypada. W nowszych czasach jednak często nie daje się wcale więzarów, lecz krokwie łączą się krata, zwłaszcza przy dachach płaskich, wszystkie więc części dźwigające zeskładu leżą w powierzchni ostrosłupa tak, jak w bani w powierzchni obrotowej.

I tu więc otrzymujemy krokwie, pierścienie i przekątnie, jak w bani, a obliczenie jest zupełnie podobne jak bani.

Chociaż rozmaita pochyłość powierzchni dachu nie stanowi różnicy w ustroju, to przecież będziemy osobno mówić o dachach płaskich, a osobno o stromych z powodu, że przy płaskich uwzględnia się ciężar śniegu, przy stromych zaś parcie wiatru.

Płaskie dachy namiotowe, używane nad teatrem, cyrkiem, panoramą itd. możemy uważać za dachy baniaste, w których linja rodząca jest prostą. Wzory, otrzymane dla bani, możemy tu



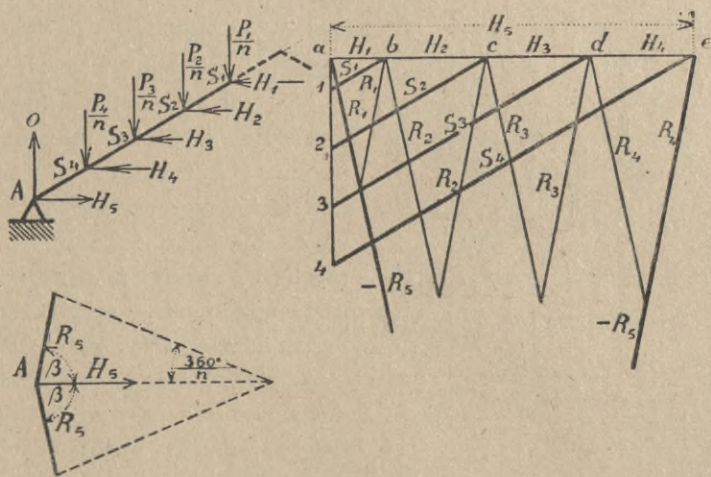
Pierścienie. Z równ. 588) i 591) otrzymamy, wstawiając $\alpha_m = \alpha_{m-1} = \alpha$,

$$R_m = \frac{P_m + Q_m}{2n \operatorname{wst} \frac{180}{n}} \operatorname{dot} \alpha \dots \dots \dots 595)$$

Dla pierścienia murowego zaś otrzymamy:

$$\text{najw. } R_r = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_{r-1} + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{r-1}}{2n \operatorname{dost} \frac{180}{n}} \operatorname{dot} \alpha \dots \dots 596)$$

Krata. Największe siły wewnętrzne w przekątniach otrzymamy z równ. 592), jeśli w niem wstawimy $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \dots$, a zatem w pierwszym pierścieniu



rys. 297.

a w innych pierścieniach

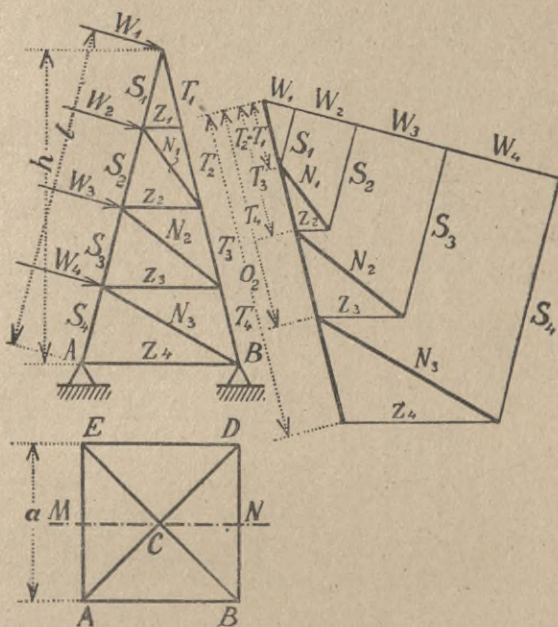
$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{Q_1}{n \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dost} \gamma_1} \\ D_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{n \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dost} \gamma_2} \\ D_3 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{n \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dost} \gamma_3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 597)$$

Wykreślnie wyznaczamy siły wewnętrzne zupełnie tak, jak w bani (rys. 297).

Zróbmy $\frac{P_1}{n} = a_1, \frac{P_2}{n} = 12$, itd. i potem kreślmy dla poszczególnych węzłów wieloboki sił, to otrzymamy $1 b = S_1, 2 c = S_2, 3 d = S_3$ i t. d., dalej $ab = H_1, bc = H_2, cd = H_3, de = H_4$, wreszcie $ae = H_5$. Siły H rozkładamy potem w zwykły sposób na siły R .

§ 124. Dachy wieżowe czworoboczne.

Tutaj wprowadzamy jako obciążenie pionowe tylko ciężar własny, bo śnieg nie może się na wieży utrzymać. Siły wewnętrzne



rys. 298.

w prętach dachu wskutek ciężaru własnego dadzą się obliczyć zupełnie w ten sam sposób, jak to wyłożono w poprzednim paragrafie. Tu więc tylko będziemy mówić o siłach, powstałych z powodu parcia wiatru, które tu gra wielką rolę.

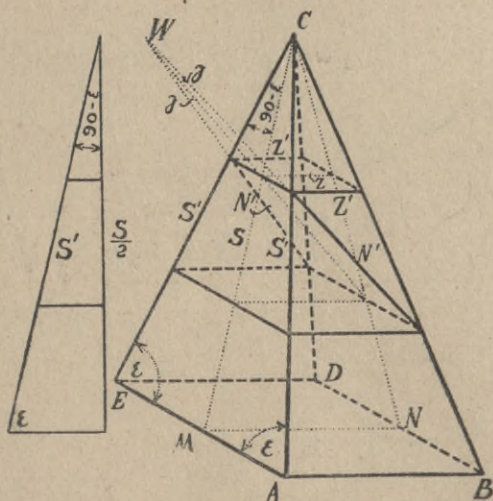
Przypuśćmy, że mamy obliczyć dach wieżowy, ostrosłupowy czterościenny, gdy wiatr działa na płaszczyznę AEC (rys. 298). Aby wyznaczyć siły wewnętrzne w płaszczyznach ABC i EDC , pomyślny sobie w płaszczyźnie symetrii MN urojony więzær pio-

rowy, którego rzut pionowy jest przystającym do rzutu pionowego boków EDC i ABC i obciążmy go siłami W_1, W_2, W_3 i W_4 , których wielkość da się wyznaczyć proporcjonalnie do powierzchni, wystawionej na wiatr.

Wykreślnie wyznaczyliśmy w znany sposób zapomocą planu sił siły wewnętrzne, liczebnie możnaby to samo zrobić zapomocą sposobu momentów Rittera. Są to jednak siły, działające w więzarze urojonym, teraz z nich musimy obliczyć siły, rzeczywiste, działające w ABC (rys. 299).

I tak zamiast siły S otrzymamy dwie siły S' , przyczem $2 S'$ dost $(90-\epsilon)=S$, stąd

$$S' = \frac{S}{2 \text{ wst } \epsilon} \dots \dots \dots 598)$$



rys. 299.

Dalej otrzymamy

$$Z' = \frac{1}{2} Z, \dots \dots \dots 599)$$

a wreszcie $2 N'$ dost $\gamma=N$, stąd

$$N' = \frac{N}{2 \text{ dost } \gamma} \dots \dots \dots 600)$$

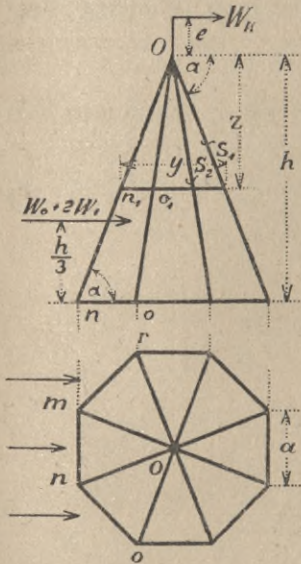
Sprowadzenie sił więzaru urojonego na siły więzaru rzeczywistego można wykonać i wykreślnie przez proste rozkładanie sił we wskazany wyżej sposób.

§ 125. Dachy wieżowe ośmioboczne.

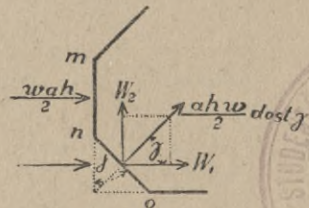
Dla uproszczenia rachunku przyjmijmy tu poziomy kierunek wiatru i będziemy obliczać tak, jakby połacie dachu były pionowe. Ponieważ dachy takie są strome, więc błąd, który przytem popełniamy, nie jest wielkim.

Jeśli bok ośmiokąta nazwiemy a , wysokość ostrosłupa h , parcie wiatru na m^2 w , to parcie na płaszczyznę mn O (rys. 300) jest $W_0 = \frac{ah}{2}w$.

Płaszczyzna no O nachylona jest do kierunku wiatru pod kątem $90-\gamma$ (rys. 301), więc parcie prostopadłe do niej jest $\frac{ahw}{2} \text{ wst } (90-\gamma) = \frac{ahw}{2} \text{ dost } \gamma$,



rys. 300.



rys. 301.

które rozkłada się na W_1 i W_2 . Parcie W_2 znosi się z takimże parciem, pochodzącym z płaszczyzny mr O , parcia zaś $W_1 = \frac{ahw}{2} \text{ dost } \gamma$ dodają się. Całe więc parcie na dach wynosi $W = W_0 + 2W_1 = \frac{ahw}{2} (1 + 2 \text{ dost } \gamma)$, a że tu $\gamma = 45^\circ$, więc

$$W = \frac{ahw}{2} (1 + 2 \text{ dost } 45^\circ) = ahw. \dots \dots 601)$$

Parcie to zaczepia w jednej trzeciej wysokości dachu. Dla części ostrosłupa o wysokości z (r. 296) nazwijmy x długość boku n_1 o_1 , to

$$W_z = xzw, \dots \dots 602)$$

a że $\frac{x}{z} = \frac{a}{h}$, więc $x = \frac{a}{h}z$,

stąd
$$W_z = w \frac{a}{h} z^2 \dots \dots \dots 603)$$

Dokładne obliczenie sił wewnętrznych jest trudnem, bo zeskład jest statycznie niewyznaczalnym. W przybliżeniu możemy jednak obliczyć je w następujący sposób. Niechaj oprócz W_z działa jeszcze na krzyż na wieży parcie W_k w wysokości e nad szczytem, wtedy moment ze względu na płaszczyznę $m_1 n_1 o_1$ będzie:

$$M_z = W_z \cdot \frac{z}{3} + W_k (e + z) \dots \dots \dots 604)$$

Moment ten musi być równy momentowi sił wewnętrznych w krokwiach, nachylonych do poziomu pod kątem α , którego siły przyjmujemy proporcjonalne do odstępów od osi obojętnej. Więc

$$M_z = 4 S_1 \frac{y}{2} \text{wst } \alpha + 4 S_2 \frac{x}{2} \text{wst } \alpha. \text{ Przypuściliśmy, że}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{y}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{y}{x}, \text{ więc } S_2 = S_1 \frac{x}{y},$$

$$\text{stąd } M_z = 2 S_1 \text{wst } \alpha \left(y + \frac{x^2}{y} \right) = \frac{2 S_1 \text{wst } \alpha}{y} (x^2 + y^2),$$

$$\text{a więc } S_1 = \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \text{wst } \alpha} \dots \dots \dots 605)$$

$$\text{a } S_2 = \frac{M_z x}{2 (x^2 + y^2) \text{wst } \alpha} \dots \dots \dots 606)$$

Jeżeli ośmiobok jest regularny, to $y = x + 2x$ dost $45^\circ = 2,414 x$, S_1 jest więc zawsze większe, niż S_2 , a że wiatr może wiać z każdej strony, więc w każdej krokwi S_1 może być dodatniem lub ujemnem. Największa więc siła wewnętrzna we wszystkich krokwiach jest:

$$\text{najw } S = \pm \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \text{wst } \alpha} \dots \dots \dots 607)$$

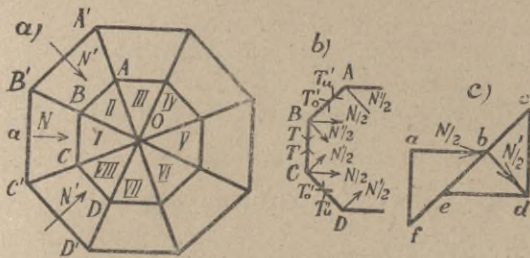
a dla wieloboku regularnego, wstawiwszy $y = 2,414 x$, otrzymamy

$$\text{najw } S = \pm 0,427 \frac{M_z}{y \text{wst } \alpha} \dots \dots \dots 608)$$

Jeżeli teraz chcemy zbadać siły wewnętrzne w pierścieniach i kracie, to przypuścimy, że na pewną część powierzchni boku ostrosłupa $B' C' O$ (rys. 302) działa parcie wiatru N , na odnośne części boku $A' B' O$ i $C' D' O N'$.

Wedle poprzedniego $N' = N \text{ dost } 45^\circ = \frac{N}{\sqrt{2}}$. W B działają siły $\frac{N}{2}$ i $\frac{N'}{2}$. Jeśli ich wypadkową rozłożymy w kierunku płaszczyzn boków, to otrzymamy siły T i T'_0 .

Z rys. 302 c widzimy, że



rys. 302.

$$T = af + cd = \frac{N}{2} + \sqrt{2 \frac{N'^2}{4}} = \frac{N}{2} + \frac{N'}{\sqrt{2}} = N.$$

Dalej mamy w płaszczyźnie $OB'A'$

$$T'_0 = bc + bf = \frac{N'}{2} + \sqrt{2 \frac{N^2}{4}} = \frac{N'}{2\sqrt{2}} + \frac{N}{\sqrt{2}} = \frac{3N'}{2\sqrt{2}} = 1,06N' \quad \left. \vphantom{\frac{3N'}{2\sqrt{2}}} \right\} \cdot 609)$$

$$\text{zaś } T'_u + be = \frac{N'}{2} = \frac{N'}{2\sqrt{2}} = 0,354N'.$$

W płaszczyźnie $OB'C'$ działają z obu stron siły T i znoszą się, przekątnie więc wcale nie pracują. Inaczej rzecz się ma z płaszczyzną $OB'A'$. Tu działa z jednej strony siła T'_0 , z drugiej T'_u , pierwsza trzy razy większa od drugiej. Siły te muszą być przeniesione na punkty podparcia $A'B'$. Belka kratowa więc w płaszczyźnie $OB'A'$ musi te siły przenieść i działa jako belka jednym końcem utwierdzona.

Obciążenie ze strony krawędzi OB jakoteż OA' zmienia się wedle powierzchni obciążenia trójkątnej. A więc na powierzchni I od szczytu aż do wysokości z

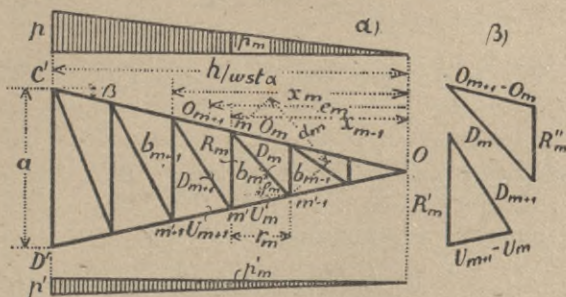
$$N_z = wx \frac{x}{2}, \text{ a gdy } x = \frac{a}{h} z, N_z = \frac{wa}{2h} z^2.$$

Zatem obciążenie belki kratowej II do wysokości z jest

$$\left. \begin{array}{l} \text{z jednej strony} \quad T'_{oz} = 1,06 \frac{aw}{2h} z^2. \\ \text{z drugiej} \quad \quad \quad T'_{uz} = 0,354 \frac{aw}{2h} z^2. \end{array} \right\} \dots \dots \dots 610)$$

W rys. 303 wykreśliłiśmy dźwigar $C'D'O$ jako jednym końcem utwierdzony, obciążony on jest u góry obciążeniem dodatniem, u dołu ujemnem.

Obciążenie jednostkowe obliczymy dla $z = h$, a więc na długość $\frac{h}{\text{wst } \alpha}$ w następnym sposobie z 610): $T'_0 = 1,06 \frac{awh}{2} = \frac{ph}{2\text{wst } \alpha}$,
 stąd $p = 1,06 aw \text{wst } \alpha$ }
 podobnie ma my $p' = 0,354 aw \text{wst } \alpha$ } \dots \dots \dots 611)



rys. 303.

Dla m -tego węzła pasu górnego otrzymamy:

$$D_m \text{ dost } \varphi_m = O_{m+1} \text{ dost } \beta - O_m \text{ dost } \beta.$$

Jeśli M_m i M_{m+1} oznaczają momenty ze względu na węzły m' i $m' - 1$, to

$$O_{m+1} \text{ dost } \beta = \frac{M_m}{b_m}, \quad O_m \text{ dost } \beta = \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}},$$

$$\text{więc } D_m \text{ dost } \varphi_m = \frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}}.$$

Dalej mamy $d_m \text{ dost } \varphi_m = r_m$, więc

$$D_m = \frac{d_m}{r_m} \left(\frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \right),$$

Następnie jest:

$$M_m = \frac{x_m}{2} \cdot \frac{x_m}{3} (p_m - p'_m) = (p_m - p'_m) \frac{x_m^2}{6},$$

$$p_m : x_m = p : \frac{h}{\text{wst } \alpha}, \text{ więc } p_m = \frac{x_m p}{h} \text{ wst } \alpha,$$

$$\text{zatem } M_m = \frac{p - p'}{h} \frac{x_m^3}{6} \text{ wst } \alpha, M_{m-1} = \frac{p - p'}{h} \frac{x_{m-1}^3}{6} \text{ wst } \alpha.$$

$$\text{Dalej jest } b_m : a = x_m : \frac{h}{\text{wst } \alpha}, \text{ więc } b_m = \frac{ax_m}{h} \text{ wst } \alpha,$$

$$\text{stąd } \frac{M_m}{b_m} = \frac{p - p'}{6a} x_m^2, \text{ zatem}$$

$$D_m = \frac{d_m}{r_m} \frac{p - p'}{6a} (x_m^2 - x_{m-1}^2), \text{ a że } r_m = x_m - x_{m-1},$$

$$\text{a } e_m = \frac{x_m + x_{m-1}}{2}, \text{ więc } D_m = \frac{e_m d_m}{3a} (p - p').$$

Jeżeli teraz wstawimy wartości za p i p' z 611), to $p - p' = 0,706 a \text{ wst } \alpha$, stąd $D_m = 0,235 e_m d_m \text{ w wst } \alpha$. . . 613)

Aby wyznaczyć siłę wewnętrzną w pierścieniu b_m , wykreślmy wielobok sił dla węzła m' , przypuszczając, że $p' = 0$ i nazwijmy w tym wypadku siłę w rozporze R'_m .

Z podobieństwa trójkątów w rys. 299 α i β widzimy, że

$$\frac{R'_m}{D_{m+1}} = \frac{b_{m+1}}{d_{m+1}}$$

Wedle 612) jest dla $p = 0$ $D_{m+1} = \frac{e_{m+1} d_{m+1} p}{3a}$, więc

$$R'_m = - \frac{e_{m+1} b_{m+1} p}{3a}.$$

Jeżeli teraz przyjmijemy $p = 0$, to dla węzła m otrzymamy po wykreśleniu wieloboku sił podobnie

$$\frac{R''_m}{D_m} = \frac{b_{m+1}}{d_m}, \text{ a z rów. 612) } D_m = - \frac{e_m d_m p'_m}{3a}, \text{ więc}$$

$$- R''_m = - \frac{e_m b_{m+1} p'_m}{3a}$$

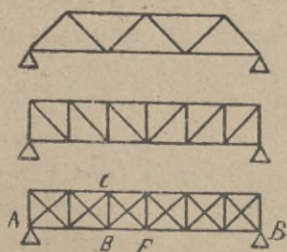
Zatem, jeśli p i p' działają równocześnie,

$$R_m = - \frac{1}{3a} (b_{m+1} e_{m+1} p - b_{m+1} e_m p') \quad \dots \quad 614)$$

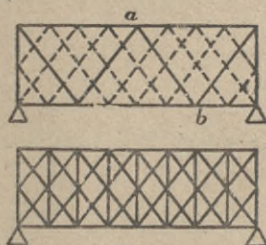
Do tych sił, wywołanych parciem wiatru, należy dodać siły wskutek ciężaru własnego, które wyznaczyć możemy łatwo wedle § 123.

§ 126. Części składowe i rodzaje belek kratowych.

Belka kratowa, jak wiemy z § 103., składa się z dwu pasów, górnego i dolnego, i z kraty, powstałej z krzyżulców. Według układu krzyżulców rozróżniamy rozmaite rodzaje kraty. A mianowicie, jeżeli krata składa się z dwu rzędów krzyżulców (rys. 304 i 305) nazywamy ją kratą pojedynczą (n. *einfaches Gitterwerk*, fr. *treillis simple*). Jeżeli mamy trzy rzędy krzyżulców (rys. 306), to nazywamy kratę złożoną (n. *kombiniertes Gitterwerk*). Kratę, powstałą z kilku równych krat pojedynczych, przesuniętych o pewną część odległości dwu węzłów, (rys. 307), nazywamy kratą wielokrotną (n. *mehrtheiliges Gitterwerk*, fr. *treillis multiple*, an. *multiple system*, cz. *soustava násobna*). Liczbę, oznaczającą ilość krat składowych, a zatem także ilość części, na które podzielony został jeden krzyżulec (np. *ab* na cztery części), nazy-



rys. 304 i 306.



rys. 307 i 308

wamy liczbą podziału (n. *Theilungszahl*). Jeżeli liczba podziału jest 2, 3 i t. d., to nazywamy kratę dwukrotną, trzykrotną itd. (n. *zweiteilig*, *dreitheilig*, fr. *double*, *triple*). Rysunek 308 przedstawia kratę dwukrotną złożoną, tu więc chcąc wyznaczyć liczbę podziału, patrzymy, na ile części zostały podzielone krzyżulce pionowe.

Według nachylenia krzyżulców rozróżniamy następujące rodzaje krat: kratę równoramienną (n. *Netzwerk*, fr. *systeme triangulaire*, an. *triangular system*, cz. *soustava kosouhla*, rys. 304),

składającą się z samych trójkątów równoramiennych i kratę prostokątną lub przedziałową (n. *Fachwerk*, fr. *système quadrangulaire* an. *quadrangular system*, cz. *soustava pravouhla* r. фахверковая балка) (rys. 305), składającą się z trójkątów prostokątnych.

Krzyżulce dzieli się według nachylenia na pionowe (n. *Verticale*, fr. *montant*, an. *upright*, *vertical brace*, r. стойка) i przekątne (n. *Diagonalen*, fr. *diagonale*, an. *diagonal brace*, cz. *příčka*, r. диагональ), według rodzaju naprężenia na krzyżulce ciągnione (n. *Zugstäbe*, fr. *tirant*, an. *tie*, r. затяжка) i ciśnione (n. *Druckstäbe*, an. *strut*).

Chcąc oznaczyć równocześnie nachylenie i rodzaj naprężenia krzyżulców, używamy następnych nazw. Nazywamy krzyżulec ciągniony pionowy słupem wiszącym (n. *Hängesäule*, fr. *tirant*, *poignon*, an. *suspension post*, r. подвѣска), krzyżulec ciągniony nachylony ścięgnem (n. *Zugband*, fr. *braçon*, *contrefiche*, an. *tie*, cz. *táhlo*), krzyżulec ciśniony pionowy słupem (n. *Säule* fr. *poteau*, *montant vertical* an. *post*, cz. *sloupec*, r. стойка) krzyżulec ciśniony nachylony zastrzałem (n. *Strebe*, fr. *montant*, an. *standant*, *strut*, cz. *vzpěra*, r. подкосъ.)

Belki kratowe rozróżniamy według kształtu pasów na belki równoległe (n. *Parallelträger*, fr. *poutre en semelles paralleles*,



rys. 309.

an. *parallel boomed girder*, cz. *nosník přímopasowý*, r. параллельная балка) o pasach równoległych i na belki wieloboczne (n. *Träger mit polygonalen Gurten*, an. *girder with inclined flanges*, cz. *nosník křivopasový*, r. многоугольная балка) (rys. 309)

o pasach w kształcie wieloboku lub krzywej. Te ostatnie belki nazywamy rozmaicie według kształtu pasów; belki takie, używane prawie wyłącznie jako belki mostowe, są przedmiotem teorii mostów.

§ 127. Analityczne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej.

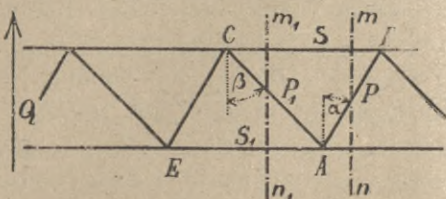
Dla belek kratowych równoległych o kracie pojedynczej da się metoda przecięć znacznie uprościć. Aby wyznaczyć siłę S , działającą w pasie górnym, przecinamy belkę w kierunku

mn (rys. 310) i ustawiamy równanie momentów ze względu na przeciwległy węzeł A . Nazwawszy M moment sił zewnętrznych ze względu na punkt A a h wysokość belki, otrzymamy $M + Sh = 0$, a stąd:

$$S = -\frac{M}{h} \quad . \quad . \quad 615)$$

Podobnie otrzymamy siłę, działającą w pasie dolnym AE ,

$$S' = +\frac{M'}{h} \quad . \quad . \quad 616)$$



rys. 310.

M' jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt C . Widzimy więc, że siły, działające w pasach belki kratowej równoległej, są proporcjonalne do momentów sił zewnętrznych, przyczem dla momentu dodatniego w pasie górnym powstaje ciśnienie, a w pasie dolnym ciągnienie.

W celu wyznaczenia sił zewnętrznych w krzyżulcach korzystamy z prawidła, że dla równowagi suma pionowych składowych musi być równą zero, więc $Q + P \text{dost } \alpha = 0$. stąd

$$P = -Q \text{ siecz } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad 617)$$

Podobnie otrzymamy dla przecięcia $m_1 n_1$

$$R - P_1 \text{ dost } \beta = 0, \text{ a stąd}$$

$$P_1 = Q_1 \text{ siecz } \beta, \quad . \quad . \quad . \quad 618)$$

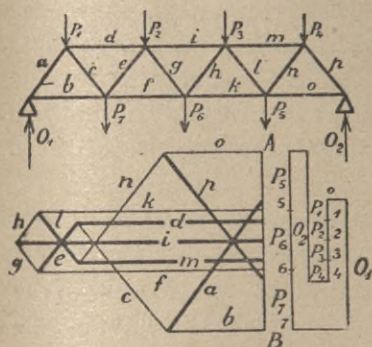
jeżeli Q i Q_1 są siły poprzeczne dla przecięcia mn i $m_1 n_1$. Możemy więc napisać, że siły działające w krzyżulcach belki kratowej równoległej, są proporcjonalne do siły poprzecznej i zależne od kąta nachylenia krzyżulca.

§ 127. Wykreślne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej.

Dla wyznaczenia wykreślnego sił, działających w belkach równoległych, używamy metody wielobokowej. Wielobok sił zewnętrznych jest tu linią prostą pionową. Na rys. 311 przedstawiliśmy użycie tej metody, przyczem dla przejrzystości rozsunęliśmy wielobok sił AB , aby uwidocznic wszystkie siły zewne-

trzne. które kreślimy za porządkiem, idąc w kierunku pasów naokoło belki.

Przedtem należy jednak wyznaczyć w znany sposób oddziaływanie O_1 i O_2 . Wykreślenie planu sił nie przedstawia teraz najmniejszej trudności.



rys. 311.

§ 129. Krata wielokrotna.

Belkę kratową o kracie n krotnej (rys. 312) rozkładamy na n układów, w tym więc przypadku na dwa układy, przy czem każda część pasu wchodzi do wszystkich układów, lecz tylko

o przekroju równym $\frac{1}{2}$ części przekroju rzeczywistego, krzyżulce

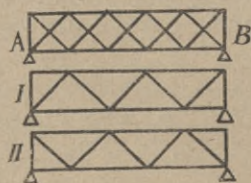
zaś wchodzi zawsze tylko do jednego układu. Obliczamy teraz poszczególne układy w znany sposób, przyjmując

tylko $\frac{1}{n}$ część obciążenia na jeden

układ, a więc także $\frac{Q}{n}$ i $\frac{M}{n}$. Dla

krzyżulców otrzymujemy w ten sposób odrazu siły wewnętrzne, dla pasów zaś

dobajemy siły wewnętrzne, otrzymane dla każdego układu z osobna.



rys. 312.

§ 130. Belka kratowa Howe'a.

Belka Howe'a (rys. 302) jest to belka drewniana, mająca kratę złożoną ze sztucznem naprężeniem, które sprawiamy, naciągając żelazne słupy wiszące, zakończone śrubami. Ciągnięcie to sztuczne wywołuje w przekątniach CD i CF ciśnienia równe z powodu symetrii. Ciśnienia te robimy tak wielkie, aby zrównoważyły największości ciągnięcia, wywołanego obciążeniem w krzyżulcach ciągniętych; naprężenie tych krzyżulców dla obciążonej belki będzie więc równe zero. Łatwo pojmujemy, że przeto wzrosną

siły wewnętrzne krzyżulców ciśnionych w dwójnasób, bo do ciśnienia, wywołanego obciążeniem, dodaje się jeszcze ciśnienie sztuczne. Zastrzały *DC*, które wskutek obciążenia są ciśnione, a więc te, które byłyby zastrzałami, gdyby sztucznego naprężenia nie było, nazywamy zastrzałami głównymi (n. *Hauptstrebe*, an. *main brace*), krzyżulce zaś, ciągnięte wskutek obciążenia a ciśnione sztucznie, nazywamy zastrzałami drugorzędnymi, odporami, odstrzałami (n. *Gegenstrebe*, fr. *contrelieen*, an. *conterstrut*, r. противуподкосъ).

Ponieważ w zastrzałach drugorzędnych dla belki obciążonej niema wcale żadnego naprężenia, więc w przybliżeniu możemy belkę Howe'a obliczać tak, jakby zastrzałów drugorzędnych nie było. Największa zaś siła wewnętrzna zastrzałów drugorzędnych jest dla belki nieobciążonej równą połowie siły wewnętrznej zastrzałów głównych, bo, jak wspomnieliśmy, siła wewnętrzna P , wywołana naprężeniem sztucznym, równa się sile wewnętrznej P' , wywołanej obciążeniem, a zatem siła, działająca w zastrzałach głównych, jest $2P$, a w zastrzałach drugorzędnych równa tylko sile P , wywołanej naprężeniem sztucznym.

C. WYTRZYMAŁOŚĆ ZESPOŁÓW KAMIENNYCH.

X. Sklepienia kolebkowe.

§ 131. Łuki i sklepienia.

Dotychczas mówiliśmy o belkach prostych, które cisną na podpory tylko w kierunku pionowym; tu będziemy zastanawiać się nad dźwigarami, działającymi nawet przy obciążeniu pionowym na podpory w kierunku ukośnym i dążącymi do ich oddalenia (rys. 314). Dźwigary takie nazywamy w ogóle dźwigarami rozpórowymi lub rozpornicami (n. *Sprengswerksträger*,



rys. 313.

fr. *poutre à jambettes*, an. *strud framed girder*, r. распорная балка). Jeżeli dźwigar jest ciągle krzywym, nazywamy go dźwigarem łukowym lub łukiem (n. *Bogenträger*, fr. *poutre en arc*, an. *arched girder*, r. дугообразная балка), a jeżeli materiałem tej

belki jest cegła lub kamień, nazywamy ją sklepieniem (n. *Ge-*

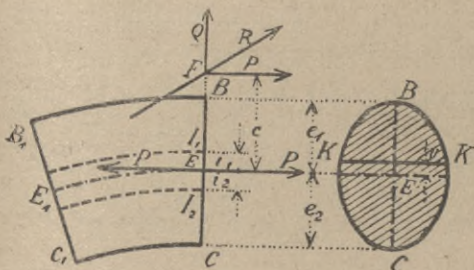
wölbe, fr. voûte, an. vault, r. сводъ). Powierzchnię wewnętrzną wklęsłą sklepienia nazywamy podniebieniem (n. *Gewölbsleitung*, fr. *intrados*, an. *soffit* r. небо свода), powierzchnię zewnętrzną wypukłą nazywamy grzbietem (n. *Gewölbsrücken*, fr. *extrados*, an. *extrados*, *back of the vault*, r. верхняя поверхность свода).

Gdy podniebienie sklepienia jest częścią powierzchni walca, sklepienie nazywamy kolebkowem (n. *Tonnengewölbe*, fr. *voûte cylindrique*, en *berceau*, an. *barrel-vault*, r. цилиндрический сводъ). W tym rozdziale będziemy mówić tylko o takich sklepieniach, później dopiero zastanawiać się będziemy także nad innymi rodzajami sklepień.

§ 132. Siła podłużna i momenty jędrne.

Sklepienie, jak widzimy, różni się od łuku tylko materiałem i odpowiednim mu przekrojem. Teoria sklepień da się więc wyprowadzić z ogólnej teorii łuków, o której więc teraz mówić będziemy.

Nazwijmy linię, łączącą środki ciężkości wszystkich przekrojów łuku, osią łuku (n. *Axe des Bogens*, fr. *axe de l'arc*, an. *axis of the arch*) i przypuśćmy, że belkę łukową przecięliśmy prostopadłe do osi EE_1 (rys. 314) płaszczyzną BC i że R jest



rys. 314.

wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, działających na lewą część łuku. Wypadkowa R wszystkich sił po lewej stronie przekroju nie będzie tu pionową, jak w belce prostej wskutek odpowiednio urządzonych podpór.

Tu oddziaływania dla łuku są ukośne, a dźwigar działa na podpory rozpierająco, co jest główną cechą dźwigarów łukowych.

Przypuśćmy, że wypadkowa R na sklepienie o szerokości $b=1$ przecina płaszczyznę przekroju BO w F . Siłę R rozkładamy

na dwie składowe P i Q , z których pierwsza P działa w kierunku prostopadłym do przekroju, a więc równoległe do osi, a druga Q działa w kierunku prostopadłym do osi i nazywa się siłą poprzeczną. Te siły zewnętrzne muszą być w równowadze z siłami wewnętrznymi, działającymi w tym przekroju. Wszystkie te siły wewnętrzne możemy rozłożyć na siły prostopadłe do przekroju, wywołujące naprężenie normalne i siły, działające w płaszczyźnie przekroju, wywołujące naprężenia ściskające.

Umieścimy w punkcie E dwie siły równe sile P i działające wprost przeciwnie a równoległe do osi. Przez to nie naruszymy równowagi układu sił i otrzymamy:

1) siłę P , zaczepioną w środku ciężkości przekroju E , zwaną siłą podłużną (n. *Axialkraft, Längskraft, fr. composante tangentielle*).

2) parę sił, czyli moment $M = Pc$.

3) siłę poprzeczną Q .

Siła podłużna P rozkłada się jednostajnie w całym przekroju, gdyż zaczepia w środku ciężkości przekroju, więc naprężenie wskutek siły podłużnej

$$\nu' = \frac{P}{F} \dots \dots \dots 619)$$

jeżeli F oznacza przekrój. To naprężenie jest tu ciśnieniem, które oznaczamy znakiem $+$.

Chcąc wyznaczyć naprężenie ν'' , powstałe z działania momentu M , musielibyśmy uwzględnić także promień krzywizny osi $= r$. Jednak gdy promień krzywizny jest dość wielki w stosunku do wysokości dźwigaru, — wtedy w przybliżeniu można użyć tych samych wzorów, co dla belki prostej. Możemy więc napisać, nazwawszy ν_v'' naprężenie we włóknie kk_1 , odległym o v od osi ciężkości, powstałe wskutek działania momentu, wedle 141)

$$\nu_v'' = \frac{Mv}{I}, \dots \dots \dots 620)$$

jeżeli I oznacza moment bezwładności.

Naprężenie więc całkowite w odległości v od osi ciężkości będzie podobnie, jak według równania 430)

$$\nu_v = \nu' + \nu_v'' = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{I} \dots \dots \dots 621)$$

Müller Breslau otrzymał po długim wywodzie, uwzględniając krzywiznę osi, dla ν_v dokładniejszą wartość:

$$\nu_v = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{I} + \frac{M}{Fr} \dots \dots \dots 622)$$

a Šolin jeszcze dokładniej

$$\nu_v = \frac{P}{F} + \frac{Mr}{B} \frac{v}{r+v} + \frac{M}{Fr} \dots \dots \dots 623)$$

przyczem $B = \iint \frac{rv^2}{r+v} d^2 F \dots \dots \dots 624)$

Weyrauch obliczył B i I dla rozmaitych przekrojów i otrzymał $\frac{I}{B}$

Tablica LVIII.

dla $\frac{r}{h}$	koło lub elipsa	kwadrat lub prostokąt	przekrój I
1	1,1452	1,1833	1,2614
5	1,0050	1,0060	1,0082
10	1,0012	1,0015	1,0021
20	1,0003	1,0004	1,0005
40	1,0000	1,0001	1,0001.

Widzimy więc, że już dla $r=20 h$ możemy śmiało przyjąć $I=B$, a gdy v jest w stosunku do r małym, to wzór 623) przechodzi w 662).

Zważywszy jednak, że gdy r jest wielkiem, to $\frac{M}{Fr}$ jest bardzo małym, możemy w praktyce wyraz ten opuścić, przez co otrzymamy równanie 621).

W przekroju BC naprężenie jest największem dla najbardziej oddalonych włókien, otrzymujemy więc dla $v=e_1$

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{P}{F} + \frac{Me_1}{I} \\ \nu_2 &= \frac{P}{F} - \frac{Me_2}{I} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 625)$$

a dla $v=-e_2$

Niech będzie a promieniem bezwładności, to $I=Fa^2$. Wstawiając tę wartość i $Pc=M$ w równanie 625), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{Pe_1(a^2 + c)}{Fa^2 e_1} = \frac{Pe_1(a^2 + c)}{I} \\ \nu_2 &= \frac{Pe_2(a^2 - c)}{Fa^2 e_2} = \frac{Pe_2(a^2 - c)}{I} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 626)$$

Wiemy z § 88 równ. 428), że

$$\frac{a^2}{e_1} = i_2 = EI_2 \text{ i } \frac{a^2}{e_2} = i_1 = EI_1.$$

Długości i_1 i i_2 są to promienie jędrne. Możemy więc napisać

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{Pe_1}{I} (i_2 + c) \\ \nu_2 &= \frac{Pe_2}{I} (i_1 - c) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 627)$$

Wypadkowa R musi przecinać przekrój w jądrze t. j. między punktami jędrnymi I_1 i I_2 , jeżeli cały przekrój ma pracować na ściskanie. Linia, łącząca punkty I poszczególnych przekrojów, nazywa się linią jędrną (n. *Kernlinie*).

Linia, łącząca punkty zaczepienia wypadkowej R czyli środki ciśnienia poszczególnych przekrojów, nazywa się linią ciśnienia (n. *Stützlinie*, fr. *courbe de pressions*, an. *line of resistance*, cz. *čara tlakowa*), wykreślił ją pierwszy Méry (1842). Możemy więc powiedzieć:

Naprężenia normalne w przekroju mają wszystkie ten sam znak, jeżeli linia ciśnienia nie wychodzi z jądra.

Jeżeliby $P < 0$, wtedy w całym przekroju byłoby ciągnienie. Przy mostach i sklepieniach, gdy obciążenie jest tylko pionowem z góry na dół, P jest zawsze > 0 , a więc gdy linia ciśnienia nie wychodzi z jądra, w całym przekroju panuje ściskanie; jeżeli zaś linia ciśnienia wychodzi z jądra, to w tym przekroju naprężenia są dodatnie i ujemne.

Równ. 627) możemy jeszcze napisać

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{Pe_1(i_2 + c)}{Fa^2} = \frac{P}{F} \frac{i_2 + c}{i_2} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{c}{i_2}\right) \\ \nu_2 &= \frac{Pe_2(i_1 - c)}{Fa^2} = \frac{P}{F} \frac{i_1 - c}{i_1} = \frac{P}{F} \left(1 - \frac{c}{i_1}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 628)$$

Nazwijmy M_2 , moment sił zewnętrznych ze względu na punkt rdzenny I_2 , momentem jędrnym dolnym (*unteres Kernmo-*

ment), to $M_2 = P(c + i_2)$ }
 Odpowiedni moment jędrny $M_1 = P(c - i_1)$ } . 629)
 górny (n. oberes Kernmoment) będzie

Wtedy otrzymamy z równania 627)

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{Pe_1(i_2 + c)}{I} = \frac{M_2 e_1}{I} \\ v_2 &= \frac{Pe_2(i_1 - c)}{I} = \frac{M_1 e_2}{I} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 630)$$

a więc wzory takie same, jak dla belki prostej, jeżeli tylko zamiast momentów zwykłych wstawimy momenty jędrne.

Z równ. 627) i 630) otrzymamy dalej

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{M_2}{F i_2} = v_0 \left(1 + \frac{c}{i_2} \right) \\ v_2 &= \frac{M_1}{F i_1} = v_0 \left(1 - \frac{c}{i_1} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 631)$$

$$\text{jeżeli } \frac{P}{F} = v_0 \dots \dots \dots 632)$$

Sklepienia mają zwykle przekrój poprzeczny prostokątny, a wiemy z § 88, że dla przekroju prostokątnego jest

$$i_1 = \frac{a^2}{e^2} = \frac{1}{6} h, \quad i_2 = \frac{a^2}{e_1^2} = \frac{1}{6} h \quad \dots \dots \dots 633)$$

$$\text{więc } i_1 + i_2 = \frac{1}{3} h \dots \dots \dots 634)$$

Widzimy zatem, że w sklepieniu o przekroju prostokątnym, średnia trzecia część przekroju, poprowadzonego pionowo przez oś, stanowi jądro, poza które nie powinna wychodzić linia ciśnienia, jeżeli całe sklepienie ma pracować na ściskanie.

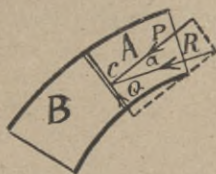
§ 133. Warunki równowagi sklepienia.

Mamy trzy warunki równowagi sklepienia:

1) Środek ciśnienia (fr. *centre de pression*) czyli punkt zaczepienia wypadkowej, na szew działającej, powinien leżeć w przekroju, aby nie nastąpił wywrót i załamanie się sklepienia. Jeżeli jednak sklepienie składa się z kłińców, połączonych zaprawą, to ponieważ na wytrzymałość zaprawy na rozciąganie nie możemy na pewne liczyć, więc w sklepieniu takim i w ogóle w budowlach murowanych nie dopuszczamy

wcale ciągnięcia. W takim razie środek ciśnienia powinien leżeć w jądrze t. j. w średniej trzeciej części przekroju. A że odnosi się to wszystkich szwów, więc cała linja ciśnienia powinna leżeć w średniej trzeciej części sklepienia.

Warunek ten nie odnosi się do sklepień litych, betonowych albo żelbetowych, u których możemy pewne ciągnięcie dopuścić. Tam więc linja ciśnienia może wyjść z jądra, a nawet z przekroju.



rys. 315.

2) Wypadkowa nie powinna być odchylną od prostopadłej na szew więcej, niż wynosi kąt tarcia, aby nie nastąpiło przesunięcie klinców. Wypadkowa R (rys. 315) rozkłada się na dwie siły F i Q . Składowa Q , działająca w płaszczyźnie szwu, stara się przesunąć kliniec A po klincu B , przeciw czemu działa tarcie

$T = P \cdot f = P \operatorname{st} \varphi$, jeżeli f jest współczynnikiem tarcia i gdy przyjmiemy $f = \operatorname{st} \varphi$, a φ jest kątem tarcia. Dla równowagi musi być $T \geq Q$, jeżeli pominiemy zupełnie wytrzymałość zaprawy, a więc $P \operatorname{st} \varphi \geq P \operatorname{st} \alpha$, jeżeli α jest kątem nachylenia wypadkowej na szew, a stąd nareszcie

$$\varphi \geq \alpha \dots \dots \dots 635)$$

Jako współczynnik tarcia między kamieniem i kamieniem możemy przyjąć z Ponceletem $f = 0,58$ czyli $\varphi = 30^\circ$ bez zaprawy a $f = 0,7$, więc $\varphi = 35^\circ$ z zaprawą starą. Dla świeżej zaprawy jest f bardzo małe. Średnio więc możemy przyjąć $f = 0,4$, $\varphi = 22^\circ$.

3) Trzecim warunkiem równowagi jest, że naprężenie nie powinno przekraczać współczynnika wytrzymałości. Jeśli przyjmiemy stosowną pewność, to naprężenie nie powinno być większem, niż dopuszczalne.

Największe naprężenie w danym szwie znajdziemy z równania 631), wstawivszy dla przekroju prostokątnego odnośne wartości, a mianowicie dla szerokości b , $i_1 = i_2 = \frac{h}{6}$.

W ten sposób otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6c}{h} \right) \\ \text{i podobnie } v_2 &= \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{6c}{h} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 636)$$

Jeżeli siła P obliczona jest na jeden metr szerokości sklepienia, to $b=1\text{ m}=100\text{ cm}$. Wyraziwszy P w kg , a h i c w cm , otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{P}{100h} \left(1 + \frac{6c}{h} \right) \\ \nu_2 &= \frac{P}{100h} \left(1 - \frac{6c}{h} \right) \end{aligned} \right\} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots \dots \dots 637)$$

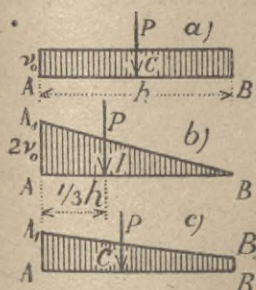
Dla $c=0$, t. j. gdy wypadkowa działa w osi,

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{P}{bh} = \nu_0 \dots \dots \dots 638)$$

Jeżeli $c = \frac{1}{6} h$, t. j. jeżeli wypadkowa działa w punkcie jędrnym górnym, to

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{2P}{bh} = 2\nu_0 \\ \nu_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 639)$$

Widzimy więc, że gdy wypadkowa działa w punkcie jędrnym, to naprężenie w krawędzi bliższej tego punktu wzrasta do podwójnej wielkości, w krawędzi zaś dalszej spada do zera.



rys. 316.

Jeżeli naprężenie w każdym przekroju przedstawimy rzędnymi, to dla naprężenia jednostajnego (rys. 316 a) powierzchnia naprężeń, którą tu otrzymujemy, jako przekrój bryły naprężeń (§ 87), przedstawia prostokąt. Wypadkowa P działa według tegoż paragrafu w środku ciężkości prostokąta.

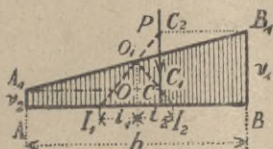
Jeżeli P działa w punkcie jędrnym I (rys. 316 b), to według równ. 639) w punkcie A naprężenie jest dwa razy większe,

niż poprzednio, więc $AA_1 = \frac{2P}{bh} = 2\nu_0$, w punkcie B zaś równe

zeru, a że przytem środek ciężkości powierzchni naprężeń leży w jednej trzeciej wysokości, więc powierzchnia ta będzie trójkątem. Wogóle, działa siła P , jak wiemy, w C (rys. 316 c) w rzucie środka ciężkości powierzchni naprężeń, które zmieniają się

wedle linii prostej. W środku ciężkości przekroju O naprężenie jest zawsze $\nu_0 = \frac{P}{F}$. Na tem i na równ:

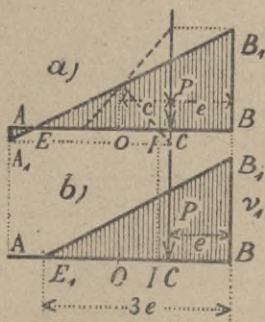
631) polega następna konstrukcja. Zróbmy $OO_1 = \nu_0$ (rys. 317). Połączmy O_1 z I_1 i I_2 aż do przecięcia się z kierunkiem siły P i wykreślmy $C_2 B_1$ i $C_1 A_1 // AB$, to $AA_1 = \nu_1$, $BB_1 = \nu_2$, bo



rys. 317.

$CC_2 : \nu_0 = (i_2 - c) : i_2$, $CC_1 = AA_1 = \nu_0 \frac{i_2 - c}{i_2}$, a ze względu, że tu C jest ujemne, $AA_1 = \nu_2$. Dalej mamy $CC_1 : \nu_0 = (i_1 + c) : i_1$, stąd $CC_1 = \nu_0 \frac{i_1 + c}{i_1} = \nu_1$.

Jeżeli środek ciśnienia C wyjdzie poza jądro, to ciśnienie w B wzrasta, a w A powstaje ciągnienie (rys. 318 a). Jeżeli nie zważamy na bardzo małą zresztą wytrzymałość zaprawy na wyciąganie, to ponieważ na długości AE ciągnienie powstać nie może (rys. 318 b), więc tam szew się otworzy, a cała siła P rozkłada się na długości $BE_1 = 3e$, otrzymamy więc naprężenie w B



rys. 318.

$$\nu_1 = \frac{2P}{b \cdot 3e} = \frac{2P}{3be} \quad \dots \quad 640)$$

Naprężenie w środku ciężkości nie będzie już w tym wypadku ν_0 , bo nie cały przekrój współdziała.

Najkorzystniej byłoby dla sklepienia i w ogóle dla zeskładów murywanych, gdyby wszędzie $c=0$, t. j. gdyby linja ciśnienia wpadała na oś, bo wtedy w każdym przekroju naprężenie rozdzielałoby się równo na przekrój, byłoby więc stosunkowo najmniejszym. W ten sposób wyznaczamy najkorzystniejszy kształt sklepienia. Pamiętać jednak musimy, że choćby dla pewnego obciążenia linja ciśnienia wpadła na oś, to dla innego obciążenia linja ciśnienia zmieni swój kształt.

Dla sklepień betonowych możemy dopuścić małe ciągnienie do 3 kg/cm^2 . Wobec tego może linja ciśnienia wyjść nieco z jądra, ale tylko o tyle, aby naprężenie nie przekroczyło dozwolonej granicy.

$$y = \frac{P}{\gamma_m} \dots \dots \dots 641)$$

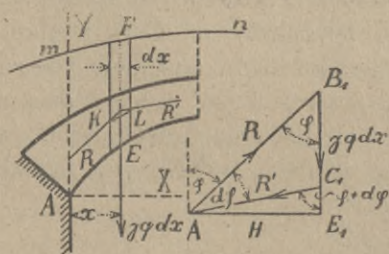
Obciążenie p możemy przyjąć z tabliczki, dołączonej na końcu książki. W nowszych czasach często nie wyznacza się zupełnie linii sprowadzonej obciążenia, lecz wyznacza się ciężar paszków wprost z rysunku, dodając ciężary odpowiednie sklepienia, nadmurowania, nadsypki i obciążenia.

§ 135. Linja ciśnienia.

Linja ciśnienia jest to, jak wiemy, linja, łącząca środki ciśnienia wszystkich szwów sklepienia i musi leżeć w średniej trzeciej części sklepienia, jeżeli chcemy uniknąć ciągnięcia. Kierunek szwów w sklepieniu mały ma wpływ na linię ciśnienia, ważny on jest tylko ze względu na warunek, aby kąt między prostopadłą na szew a wypadkową nie był większym, niż kąt tarcia. Najlepiej więc byłoby, gdyby szwy były prostopadłe do linii ciśnienia, ponieważ jednak trudno to urzeczywistnić, dlatego robimy je zwykle prostopadłymi do osi sklepienia lub do podniebienia. Gdy na razie zważać nie będziemy na ten warunek, możemy przyjąć dowolny kierunek szwów. Przyjmiemy tu pionowy kierunek, wzajemne zaś oddalenie szwów bardzo małe. Jeżeli sklepienie jest płaskie i mało obciążone, to różnica z powodu odmiennego kierunku szwów może być większą i wtedy lepiej kreślić szwy prostopadłe do osi.

Jeżeli przekroje są dość bliskie, to w praktyce różnica między linią ciśnienia a wielobokiem sznurowym dla przekrojów pionowych jest tak małą, że następnie uważać będziemy te dwie linie jako identyczne.

Niech mn (rys. 320) będzie sprowadzoną linią obciążenia, a KL częścią linii ciśnienia. Wy-



rys. 320.

tnijmy w odległości x od podpory A pasek o grubości dx płaszczyznami pionowymi i nazwijmy średnią wysokość paska $EF = q$, to powierzchnia jego jest $q dx$ a ciężar $\gamma q dx$. Aby pasek ten utrzymać w równowadze, musimy zastąpić ciśnienia obu stron sklepie-

nia wypadkowemi R i R' , działającemi w K i L . Trzy te siły muszą być w równowadze i tworzyć zamknięty wielobok sił. Siły R i R' mają równą i wprost przeciwną składową poziomą H , którą nazywamy parciem poziomem (n. *Horizontalschub*, fr. *poussée horizontale*, an. *horizontal thrust*), a zatem parcie poziome nie zmienia się i jest stałem dla jakiegokolwiek przekroju. Z rysunku widzimy, że $R = \frac{H}{\text{wst } \varphi}$ a $R' = \frac{H}{\text{wst}(\varphi + d\varphi)}$, jeżeli φ jest kątem nachylenia siły R do pionowej, dalej R dost $\varphi = \gamma q dx +$
 $+ R'$ dost $(\varphi + d\varphi)$, a stąd

$$H \text{ dot } \varphi = H \text{ dot } (\varphi + d\varphi) + \gamma q dx, \text{ a więc}$$

$$H [\text{dot } (\varphi + d\varphi) - \text{dot } \varphi] = -\gamma q dx, \text{ albo}$$

$$H d \text{ dot } \varphi = -\gamma q dx \text{ i } \frac{d \text{ dot } \varphi}{dx} = -\frac{\gamma q}{H}$$

A że $\text{dot } \varphi = \frac{dy}{dx}$, gdy y jest rzędną linii ciśnienia, więc

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\gamma q}{H} \dots \dots \dots 642)$$

Jest to równanie różniczkowe linii ciśnienia. Całkując je, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \text{dot } \varphi = -\frac{\gamma}{H} \int q dx + C, \text{ a stąd}$$

$$y = -\frac{\gamma}{H} \int dx \int q dx + Cx + C_1 \dots \dots \dots 643)$$

Jest to równanie linii ciśnienia, z którego widzimy, że dla danego q mamy tu jeszcze trzy niewiadome H , C i C_1 . Sklepienie jest więc zeskładem statycznie niewyznaczalnym rzędu trzeciego. Trzy te niewiadome możemy albo wyznaczyć na podstawie prawideł sprężystości, albo licząc w przybliżeniu, odpowiednio przyjąć. Jeżeli promień krzywizny linii ciśnienia nazwiemy r , to wiemy z matematyki, że

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

a wstawiwszy wartość z 642), otrzymamy

$$r = -\frac{(1 + \text{dot}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} H}{\gamma q} = -\frac{H}{\gamma q \text{ wst}^3 \varphi} \dots \dots \dots 644)$$

Promień krzywizny r będzie najmniejszym, gdy $\gamma q \text{ wst}^3 \varphi$ będzie największym, więc dla $\varphi = 90^\circ$, gdzie linja ciśnienia jest pozioma. Jeżeli przyjmiemy w przybliżeniu, że linja ciśnienia wpada na oś, to będzie ona wtedy miała poziomą styczną w kluczu. Nazwijmy r_0 odnośny promień krzywizny linii ciśnienia, a więc według przypuszczenia i osi sklepienia, a q_0 wysokość obciążenia w kluczu, to z równania 644) otrzymamy

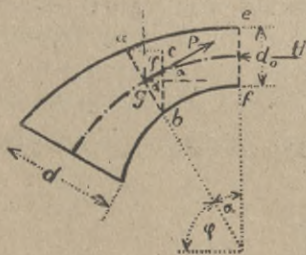
$$r_0 = \frac{H}{\gamma q_0}, \text{ a stąd}$$

$$H = -\gamma r_0 q_0. \quad \dots \dots \dots 645)$$

A więc, jeżeli linja ciśnienia wpada na oś, parcie poziome równa się iloczynowi z promienia krzywizny osi w kluczu przez obciążenie jednostkowe tamże. Ponieważ przypuszczenie to rzadko się sprawdza dokładnie, więc wartość dla H , otrzymaną z równ. 645), można uważać tylko jako wartość przybliżoną, która różni się mniej lub więcej od wartości prawdziwej.

§ 136. Grubość sklepienia.

Z poprzedniego paragrafu wiemy, że $R = \frac{\text{wst } \varphi}{H}$, jeżeli φ oznacza kąt nachylenia do pionu stycznej do linii ciśnienia w danym szwie ab (rys. 321), prostopadłym do osi. Jeżeli przy-



rys. 321.

puścimy znowu, że linja ciśnienia wpada na oś, to kąt φ będzie kątem nachylenia stycznej do osi w punkcie g . Jeżeli chcemy, aby naprężenie było w całym sklepieniu jednakowe, to nazwawszy d_0 i d grubości sklepienia w kluczu i w danym szwie ab , możemy ustawić proporcję $d_0 : d = H : R$, gdy na ab działa wypadkowa R , a na ef , gdzie według założenia linja ciśnienia jest pozioma, tylko parcie poziome H . Obie siły działają w środkach ciężkości przekrojów, więc ciśnienia rozdzielają się równo na przekrój, aby więc ciśnienia były równe, grubości

sklepień muszą być proporcjonalne do sił, działających na przekroje. Wstawivszy wartość za R , otrzymamy

$$d_0 : d = H : \frac{H}{\text{wst } \varphi}, \text{ a stąd}$$

$$d = \frac{d_0}{\text{wst } \varphi} = \frac{d_0}{\text{dost } \alpha} = d_0 \text{ siecz } \alpha, \dots \dots \dots 646)$$

gdyż $\alpha = 90 - \varphi$.

Poprowadźmy z b pionową, a z a poziomą, to otrzymamy

$$cb = ab \text{ dost } \alpha, \text{ czyli } cb = d \text{ dost } \alpha = d_0.$$

Widzimy więc, że jeżeli linja ciśnienia wpada na oś, rzuty pionowe wszystkich szwów powinny być równe grubości sklepienia w kluczu, gdy chcemy, aby naprężenia były jednakowe. Ponieważ jednak linja ciśnienia rzadko kiedy wpada zupełnie na oś, więc do prawidła tego należy się tylko w przybliżeniu stosować.

W praktyce możemy to prawidło zresztą zastosować tylko do pewnych granic. Dla $\alpha = 60^\circ$ otrzymamy już bowiem $d = d_0 \text{ siecz } 60^\circ = 2d$, a dla większego α wzrastałoby d bardzo znacznie. Tymczasem w praktyce nie robimy grubości d' na podporze większej, niż $2d_0$.

Jeżeli grubość sklepienia wzrasta według równania 646), a linja ciśnienia wpada na oś, to naprężenie ν jest wszędzie jednakowe, a mianowicie

$$\nu = \frac{H}{d_0}, \dots \dots \dots 647)$$

jeżeli H wyznaczymy na długość sklepienia równą jednościi, a stąd

$$d_0 = \frac{H}{\tau} = \frac{\gamma r_0 q_0}{\tau} \dots \dots \dots 648)$$

jeżeli zamiast ν wstawimy naprężenie dopuszczalne na ściskanie τ .

Jeżeli łuk jest kołowy, to w przybliżeniu $r_0 = \frac{l^2}{8f} = 0,125 \frac{l^2}{f}$,

przyczem f oznacza strzałkę łuku. Wtedy mamy $d_0 = 0,125 \frac{l^2}{f} \gamma q_0$.

Ponieważ tu jednak przyjęliśmy najkorzystniejsze warunki, które często w praktyce nie zachodzą, więc należy H , a stąd i d_0 , przyjąć nieco większe.

Tolkmitt przyjmuje

$$H = 0,15 \gamma \frac{l^2}{f} \left(q_0 + \frac{f}{10} \right) = d_0 \tau \quad \dots \quad 649)$$

Wysokość do linii obciążenia $q_0 = d_0 + z + p$, jeżeli z oznacza wysokość sprowadzoną nadsypki a p ciężaru ruchomego. Ponieważ sklepienie może być raz obciążone ($p = p$), drugi raz nie ($p = 0$), więc przyjmujemy średnie obciążenie $\frac{p}{2}$, zatem $q_0 =$

$= d_0 + z + \frac{p}{2}$. Jeżeli wszystkie wartości przyjmiemy w m i t tylko τ w kg/cm^2 , to zamiast τ musimy wstawić 10τ , zatem $d_0 10 \tau = 0,15 \gamma \frac{l^2}{f} \left(d_0 + z + \frac{p}{2} + \frac{f}{10} \right)$, stąd

$$d_0 = \frac{0,15 \gamma \frac{l^2}{f} \left(z + \frac{p}{2} + \frac{f}{10} \right)}{10 \tau - 0,15 \gamma \frac{l^2}{f}} \quad \dots \quad 650)$$

Wzór ten nie uwzględnia obciążenia jednostronnego sklepienia i daje w praktyce za małe wartości dla sklepień w budownictwie lądowym. Z tego powodu przyjmujemy zwykle d_0 i d_1 (na podporze) według wzorów praktycznych, a potem, kreśląc linię ciśnienia, badamy, czy w sklepieniu istnieje równowaga i czy naprężenie nie jest za wielkiem.

Podajemy tu kilka wzorów praktycznych i tak:

Lesguiller przyjmuje $d_0 = 0,2 \sqrt{l} + 0,1 m$, gdy l oznacza rozpiętość w m ;

Perronet $d_0 = 0,33 + 0,36 l m$;

Fontenay dla sklepień bardzo obciążonych $d_0 = 0,7 r + 0,32 m$,
gdzie r oznacza promień krzywizny;

Rondelet przyjmuje dla sklepień ceglanych:

1. dla półkola przy nadmurowaniu do szczytów . . . $d_0 = \frac{l}{48}$

2. przy nadmurowaniu poziomem do połowy wysokości $d_0 = \frac{l}{36}$

3. „ „ „ „ „ „

a następnie zbieżnem do szczytu $d_0 = \frac{l}{48}$

Dla sklepień z kamienia łamanego należy wartości powyższe 1,5 do 1,6 razy powiększyć.

Dla sklepień ciosowych:

1. dla silnie obciążonych (mosty) $d_0 = 0,04 l + 0,32 m$
2. „ średnio „ . . . $d_0 = 0,02 l + 0,16 m$
3. „ nieobciążonych $d_0 = 0,01 l + 0,08 m$

W budownictwie przyjmuje się zwykle grubość sklepienia w kluczu dla sklepień w murach:

rozpiętość	sklep. półkoliste	odcinkowe $f > \frac{l}{6}$
do 2 m	0,30	0,45 m
„ 3 m	0,45	0,45 do 0,60 m
„ 6 m	0,60	0,60 „ 0,75 m
„ 8 m	0,75	0,75 „ 0,90 m

Wzory te *), jak widzimy, różnią się bardzo, co łatwo zrozumiemy, bacząc na to, że grubość sklepienia nie zależy tylko od rozpiętości, ale od obciążenia i kształtu sklepienia. Dlatego wzory te mogą służyć tylko jako wskazówki przy tymczasowem przyjęciu grubości sklepienia. Dokładnie wyznaczyć możemy grubość sklepienia dopiero po wyznaczeniu sił wewnętrznych, działających w sklepieniu.

Grubość sklepień betonowych może być mniejszą, niż sklepień kamiennych lub ceglanych, bo dla betonu możemy dopuścić choć małe ciągnięcie, więc linja ciśnienia może tu nieco wychodzić z jądra o tyle, aby ciągnięcie nie przekraczało 2 do 3 kg/cm^2 .

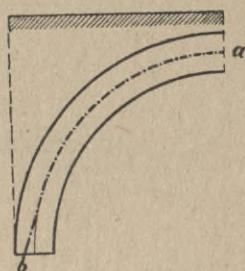
Jeżeli beton wzmocnimy siatką drucianą, to możemy przyjąć jeszcze mniejsze wymiary, ale tylko ze względu na ciężar ruchomy. Wkładka żelazna wspomaga bowiem beton skutecznie zwłaszcza, gdy występuje ciągnięcie, dla ciśnienia mniej jest potrzebną.

§ 137. Związek między linją ciśnienia a linją obciążenia.

Zastanówmy się teraz nad tem, jaki związek zachodzi między linją ciśnienia a linją obciążenia.

*) Wzory Croizett-Desnoyers'a i inne, por. Mosty kamienne wyd. II. str. 49.

Z równ. 651) otrzymamy dla $\alpha = 90^\circ$ siecz $\alpha = \infty$, więc $q = \infty$, a zatem w sklepieniu półkolistym musiałoby być obciążenie na podporach nieskończenie wielkiem, aby linja ciśnienia wpadła na oś. Dla zwykłych obciążeń będzie więc linja ciśnienia w sklepieniu półkolistym na podporach znacznie zbaczać od osi (rys. 324). Wynika z tego, że sklepienia półkolistie nie są korzystne pod względem rozkładu naprężeń i że korzystniejsze są sklepienia odcinkowe, gdzie największe α (rys. 323) wynosi 40° do 50° , a najwięcej 70° .



rys. 324.

Przy sklepieniach półkolistych trzeba, jeśli to możliwe, skupić na podporze wielkie ciężary. Np. przy



rys. 325.

mostach dadzą się z korzyścią urządzić w tych miejscach wieżyczki, posągi i t. d.

W razie, gdy sklepienie jest obciążone ciężarem skupionym w kluczu, to w tym punkcie linja ciśnienia załamuje się, wtedy obieramy dla sklepienia kształt ostrołuku (rys. 325).

Zbadamy jeszcze linję obciążenia dla sklepienia eliptycznego (rys. 326). Jeżeli w kluczu przyjmujemy początek współrzędnych, to

$$b - y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \dots \dots \dots 652)$$

a więc $\frac{dy}{dx} = + \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, wreszcie $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Jeżeli z tego równania wartość za $\frac{d^2y}{dx^2}$ wstawimy w równ.

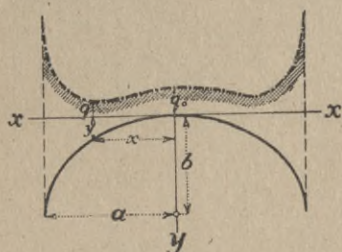
642), to otrzymamy $\frac{ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{\gamma b}{H}$, stąd bez

względem na znak $q = \frac{abH}{\gamma(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$,

a więc ze względu na 652):

$$q = \frac{b^2 H}{\gamma (a^2 - x^2)(b - y)} = \frac{b^4 H}{\gamma a^2 (b - y)^3} \quad \dots \quad 653)$$

A więc dla klucza, gdy $y = 0$, $q_0 = \frac{bH}{\gamma a^2}$, a stąd;



rys. 326.

$$H = \frac{a^2 q_0 \gamma}{b} \quad \dots \quad 654)$$

Dla $a = b = r_0$ przychodzi to równanie w równ. 645). Jeżeli wartość za H wstawimy w 653), to

$$q = \frac{b^3 q_0}{(b - y)^2} = q \left(\frac{b}{b - y} \right)^3 \quad 655)$$

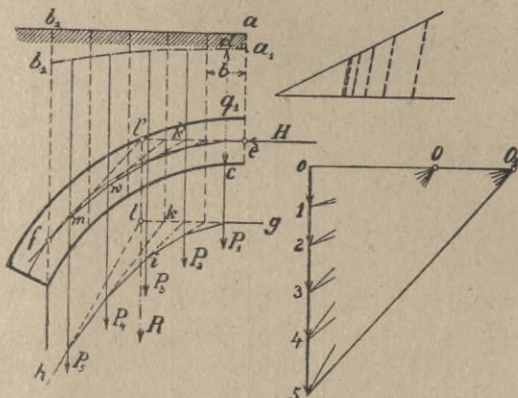
Jest to równanie linii obciążenia sklepienia eliptycznego. Z powyższego równania otrzymamy dla $b = y$, to jest dla węgłowa, $z = \infty$, podobnie jak dla sklepienia kolistego.

§ 138. Przybliżone wyznaczenie linii ciśnienia w sklepieniu symetrycznym.

Przybliżony sposób wyznaczenia linii ciśnienia najlepiej poznamy na przykładzie. Rys. 327. przedstawia połowę sklepienia symetrycznego i symetrycznie obciążonego, ab jest linią obciążenia, $a_1 b_1$ sprowadzoną linią obciążenia, do której wykreślenia możemy użyć kąta proporcjonalnego. Sklepienie wraz z obciążeniem dzielimy na pewną ilość (na rysunku 5) równo grubych pasków. Dla sklepień płaskich przyjmuje się zwykle szerokość poziomą pasków stałą, dla silnie zakrzywionej osi dzieli się oś na równe części.

Środki ciężkości pasków, możemy bez wielkiego błędu przyjąć w połowie ich grubości; w pionowych połowiących działają więc ciężary pasków P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , proporcjonalne do długości tych pionowych cd . Szerokość sklepienia przyjmujemy zwykle w kierunku, prostopadłym do płaszczyzny rysunku, równą 1 m, a więc $P_1 = q_1 b \cdot \gamma = c q_1$, $P_2 = q_2 \cdot b_1 \gamma = c_1 q_2$ itd. Kreślimy

teraz wielobok sił; wielkości sił $P_1 P_2 \dots$ kreślimy w tonach wedle przyjętej podziałki, wyznaczyszy ciężary pasków. Ponieważ sklepienie jest symetryczne, więc linja ciśnienia będzie miała w kluczu styczną poziomą.



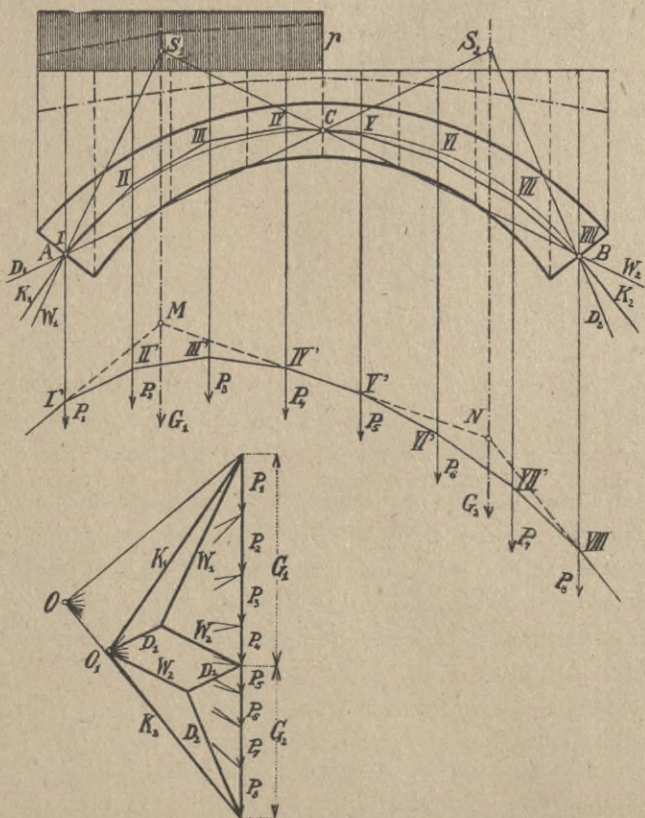
rys. 327.

Jak wiadomo, linja ciśnienia jest statycznie niewyznaczalną. Licząc w przybliżeniu, robimy więc pewne przypuszczenia, mianowicie przyjmujemy jeszcze dwa punkty linii ciśnienia, punkty e i f w środku szwów w kluczu i na podporze, gdyż, jak to później udowodnimy, prawdziwa linja ciśnienia zbliża się jak najwięcej do osi.

W punkcie e działa zatem tylko siła pozioma H . Wielkości jej nie znamy, przyjmujemy więc tymczasowo dowolnie lub według równ. 648) lub 649) $H=0$. Prowadzimy z O promienie i osobno wykreślamy wielobok sznurowy gih . Jeżelibyśmy wielobok ten zaczęli kreślić w e , punkt h nie wpadłby na f , gdyż H nie wyznaczyliśmy statycznie, lecz przyjęliśmy dowolnie. Musimy więc zmienić H tak, aby linja ciśnienia przechodziła przez e i f .

W tym celu przedłużamy boki skrajne wieloboku sznurowego aż do przecięcia się w punkcie l i wiemy, że w pionowej przez l działa wypadkowa R wszystkich ciężarów, działających na połowę sklepienia. Pierwszy bok szukanej połowy linii ciśnienia jest H , który przecina się z wypadkową w l , więc jeżeli ostatni bok linii ciśnienia ma przechodzić przez f , to kierunek jego musi być fl' . Kierunek wypadkowej sił P_1, P_2, P_3, P_4 , jest $k'k$, drugi

bok więc będzie mk' , ważny do w . W ten sam sposób możemy i resztę boków wykreślić. Parcie poziome możemy teraz łatwo wyznaczyć. Zróbmy $5 O_1 // f l'$, to $O_1 0$ jest parciem poziomem. Z O_1 wykreślmy promienie, to kreśląc wielobok sznurowy równoległy



ryc. 328.

do tych promieni z punktu e , przyjść musimy do punktu f , a $ewmf$ jest linią ciśnienia.

§ 139. Sklepienie niesymetrycznie obciążone.

Przypuśćmy teraz, że sklepienie ACB (rys. 328) jest do połowy obciążone ciężarem ruchomym. Chodzi o wykreślenie linii

ciśnienia dla przypuszczenia, że linja ciśnienia przechodzi przez A , C i B . W tym celu kreślimy wielobok sił, przyjmujemy dowolnie biegun O , kreślimy promienie, a równoległe do nich wielobok sznurowy I' , II' ... $VIII'$. Przypuśćmy na chwilę, że tylko lewa strona sklepienia AC jest obciążoną, prawa zaś wcale nie (nawet ciężarem własnym), to linja ciśnienia po prawej stronie będzie prostą, a że musi przechodzić przez C i B , więc prostą BC . Wypadkowa G_1 ciężarów P_1 , P_2 , P_3 i P_4 przechodzi przez M , na pionowej MS_1 przecinają się więc skrajne boki wieloboku sznurowego, zatem ostatni bok musi być AS_1 . Z tego wynika, że dla tego obciążenia powstanie oddziaływanie W_1 i W_2 , które łatwo w wieloboku sił wyznaczymy.

Przypuśćmy teraz, że tylko prawa strona sklepienia CB jest obciążoną, linja ciśnienia po lewej stronie będzie prosta AC , wypadkowa G_2 ciężarów P_5 , P_6 , P_7 , P_8 będzie NS_2 , ostatni bok wieloboku sznurowego jest CS_2 , oddziaływania dla tego obciążenia D_1 i D_2 .

Jeżeli teraz równocześnie obciążoną jest prawa i lewa strona sklepienia, to w A działają równocześnie D_1 i W_1 w B D_2 i W_2 , czyli K_1 w A , K_2 w B , które łatwo z wieloboku sił wyznaczyć. K_1 i K_2 przecinają się w O_1 , tj. w prawdziwym biegunie. Wykreśliwszy z O_1 promienie, a równoległe do nich wielobok sznurowy, otrzymamy linję, ciśnienia przechodzącą przez A , C i B .

Zupełnie tak samo postępujemy, jeśli samo sklepienie jest niesymetryczne.

Z rysunku widzimy, że linja ciśnienia jest po stronie obciążonej nad osią, po stronie nieobciążonej pod osią. Później wykazemy, że prawdziwa linja ciśnienia nie może mieć takiego kształtu, i że punkty dowolnie przyjęte ACB trzeba by przyjąć inaczej, mianowicie punkt A nieco niżej na lewo zaś punkt B nieco wyżej na prawo.

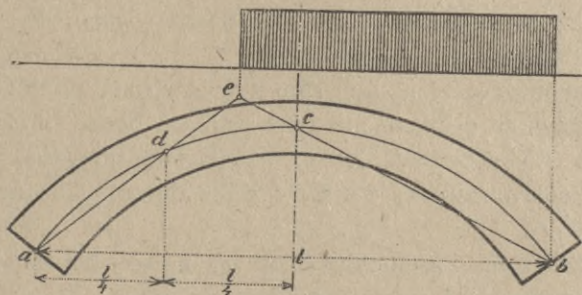
Zwrócić tu musimy też uwagę, że obciążenie sklepienia do połowy nie jest najniekorzystniejsze, lecz poza połowę. W przybliżeniu możemy punkt e (rys. 329) znaleźć zapomocą konstrukcji, oznaczonej na rysunku, której uzasadnienie i bliższy wywód podaliśmy w „Teorji Mostów“^{*)}. Wyznaczenie linji ciśnienia mo-

*) Część II. Łuki i wiszary.

żemy i w tym wypadku wykonać, jak poprzednio, przyjmąwszy trzy punkty linii ciśnienia a , c , b .

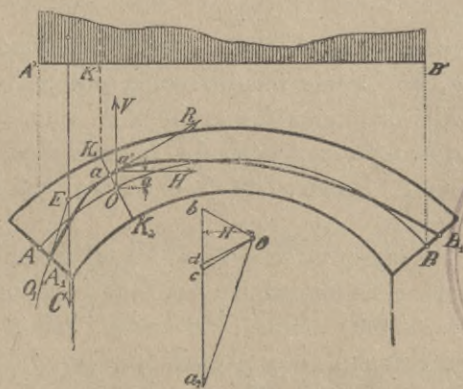
§ 140. Siły zewnętrzne.

W poprzednich paragrafach zrobiliśmy pewne dowolne przypuszczenia; aby tego uniknąć i wyznaczyć prawdziwą linię ciśnienia, musimy bliżej zbadać naprężenia w sklepieniu i wynikające



rys. 329.

stąd odkształcenia. Ponieważ sklepienie jest tylko szczegółowym wypadkiem łuku, więc cała dalsza teoria w celu wyznaczenia prawdziwej linii ciśnienia odnosi się wogóle do łuku.



rys. 330.

Niech A_1 a B_1 będzie linią ciśnienia dla danego obciążenia (rys. 330). Wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych R przecina



przekrój $K_1 K_2$ w punkcie a i jeżeli aa' jest małym, można przyjąć, że jest styczną w punkcie a' na pionowej przez O do linii sznurowej, której odległością biegunową jest składowa pozioma H . Wypadkową R otrzymamy, składając oddziaływanie O_1 z obciążeniem na długości $A'K'=C$, z czego wynika, że siły O_1 , C i R przecinają się w jednym punkcie E . Moment sił zewnętrznych ze względu na punkt O jest równy momentowi wypadkowej R albo sumie momentów jej składowych H i V ; możemy więc napisać: $M=H\eta$, gdy $Oa'=\eta$, bo V , przechodząc przez O , nie daje żadnego momentu. Widzimy więc, że odstęp pionowy między osią a linią ciśnienia jest proporcjonalnym do momentu sił zewnętrznych, czyli innymi słowy: oś łuku jest zamykającą linią ciśnienia (twierdzenie Winklera). Jeżeli chodzi tylko o wielkość momentów, a nie o środki ciśnienia, to chcąc uzyskać momenty w n razy większej podziałce, przyjmiemy odległość biegunową n razy mniejszą. Odstęp środków ciśnienia od osi jest wtedy n razy większy, niż w rzeczywistości. Otrzymamy wtedy wyraźny wykres momentów, którego ograniczenie nie będzie już linią ciśnienia.

Jeżeli w odnośnym wieloboku sił poprowadzimy $Oc//R$, a $Od//$ do stycznej do osi w punkcie O , wtedy $Oc=R$, $Od=P$, siłę podłużną, $ca=Q$, siłę poprzeczną.

Jeżeli więc znamy w łuku linię ciśnienia, to możemy wyznaczyć wszystkie siły zewnętrzne. Zadaniem naszym będzie teraz wykreślić dla każdego danego obciążenia odpowiednią linię ciśnienia.

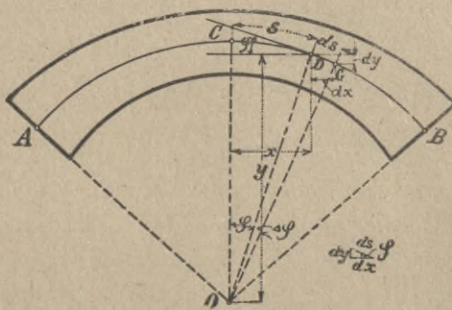
Wiemy z § 135, że dla określenia linii ciśnienia potrzeba wyznaczenia trzech niewiadomych. W tym celu albo uciekamy się do prawideł sprężystości i badamy odkształcenie łuku, lub też budujemy łuk w ten sposób, aby trzem danym warunkom uczynić zadość, urządzając przeguby (n. *Gelenk*, fr. *charnière*, an. *joint*, cz. *kloub*, r. *петля*), wprowadzone w użycie naprzód przez Gerbera. Są to połączenia przegibne dwóch zupełnie odrębnych części, na które dźwigar został podzielonym, (nie zaś dwóch prętów tej samej belki).

Jeżeli w któremkolwiek miejscu łuku urządzimy przegub, obie części dźwigaru mogą być tylko wtedy w równowadze, jeżeli w miejscu przegubu jest moment $=0$, gdyż inaczej musiałaby się część jedna około osi przegubu obrócić. Jeżeli zaś $M=H\eta=0$, to $\eta=0$, więc linia ciśnienia musi przechodzić przez przegub.

Urządziwszy więc n przegubów, otrzymujemy dla równowagi jeszcze n równań, wyrażających, że momenty sił zewnętrznych dla tych punktów są równe zeru. A że, jakto przedtem udowodni-
 liśmy, dla łuku brak nam trzech równań, więc urządziwszy trzy przeguby w łuku, możemy siły zewnętrzne zupełnie dokładnie wyznaczyć. W praktyce spotykamy łuki żelazne i kamienne o trzech, o dwóch przegubach i bez przegubu. Łuk trójprzegubowy (n. *Bogenträger mit drei Gelenken*, fr. *arc à trois articulations*, an. *three-hinged arch*, cz. *oblouk o trech kloubech*) jest statycznie wyznaczalnym. Dla łuków i sklepień dwuprzegubowych (n. *Bogenträger mit Kämpfergelenken*, fr. *arc avec deux charnières*, an. *arch with hinged ends*, cz. *oblouk o dvou kloubach*) i bezprzegubowych (n. *Bogenträger ohne Gelenke*, fr. *arc sans articulations*, an. *hingeless arch*, cz. *oblouk bez kloubu*), musimy się uciec do prawideł sprężystości, jak to wyżej wspomnieliśmy.

§ 141. Odkształcenie łuku.

Niech będzie ACB (rys. 331) osią łuku, którego długość od przekroju C nazwijmy $s = CD$, zaś kąt nachylenia stycznej w punk-



rys. 331.

cie D do poziomu niech będzie φ . Wskutek obciążenia lub zmiany ciepłoty ilości φ i s zmieniają się o $\Delta\varphi$ i Δs .

Nim je wyznaczymy, określimy zależność ilości s i φ , mianowicie otrzymamy, jeżeli s wzrośnie o $ds = D\dot{G}$

$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \operatorname{dost} \varphi \\ dy &= -ds \operatorname{wst} \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 656)$$

Przy odkształceniu zmieniają się te wszystkie długości, gdy więc Δs nazwalimy zmianę długości s , to nazwiemy Δds zmianę długości ds . Różniczkując równanie 656), otrzymamy:

$$\Delta dx = -\Delta ds \operatorname{dost} \varphi - ds \Delta \varphi \operatorname{wst} \varphi,$$

$$\Delta dy = \Delta ds \operatorname{wst} \varphi - ds \Delta \varphi \operatorname{dost} \varphi,$$

a wstawivszy za $\operatorname{dost} \varphi$ i $\operatorname{wst} \varphi$ wartość z równ. 656), otrzymamy:

$$\Delta dx = \frac{\Delta ds}{ds} ds + \Delta \varphi dy = d \Delta x,$$

$$\Delta dy = \frac{\Delta ds}{ds} dy - \Delta \varphi dx = d \Delta y,$$

gdyż z powodu, że odkształcenia te są bardzo małe, możemy przyjąć $\Delta dx = d \Delta x$ i $\Delta dy = d \Delta y$. Całkujemy teraz te równania, to

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \int_0^x \frac{\Delta ds}{ds} dx + \int_0^x \Delta \varphi dy \\ \Delta y &= \int_0^x \frac{\Delta ds}{ds} dy - \int_0^x \Delta \varphi dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 657)$$

Δds jest to zmiana długości nieskończenie małej cząstki łuku ds , a iloczyn $\frac{\Delta ds}{ds}$ jest więc względną zmianą długości łuku, możemy zatem napisać wedle równ. 34) i dla zmiany ciepłoty o $t^\circ\text{C}$, gdy α oznacza współczynnik rozszerzalności,

$$\frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{P}{EF} + \alpha t = -\frac{\nu'}{E} + \alpha t. \dots \dots \dots 658)$$

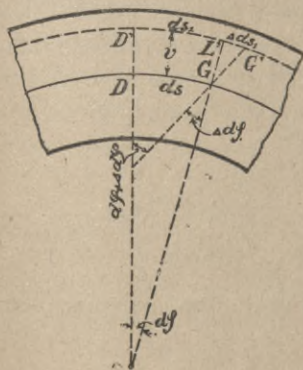
Dajemy znak $-$, bo P , oznaczając ściskanie, skraca łuk. Dla wyznaczenia $\Delta \varphi$ musimy wyznaczyć działanie momentu M .

Wskutek działania momentu M zmienia się kąt $d\varphi$ o $\Delta d\varphi$ (rys. 332). Z tego wynika, że $D'L' = ds_1$ przedłuża się o Δds_1 , a przedłużenie to możemy wyrazić analogicznie do

$$\text{równ. 34)} \quad \frac{\Delta ds}{ds_1} = -\frac{\nu_v''}{E}, \text{ gdy } \nu_v''$$

oznacza naprężenie wskutek działania momentu M w warstwie odległej o ν od osi obojętnej. Wstawivszy wartość za ν_v'' z równ. 620) otrzymamy:

$$\Delta ds_1 = -\frac{M\nu}{EI} ds_1. \dots \dots \dots 659)$$



rys. 332.

Z rysunku widzimy, że $\Delta ds_1 = v \Delta d\varphi$, więc $\Delta d\varphi = \frac{\Delta ds_1}{v} = -\frac{M}{EI} ds_1$,

a stąd:

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI} \dots \dots \dots 660)$$

ponieważ $ds_1 = ds$.

Z uwzględnieniem krzywizny osi otrzymał Weyrauch:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \alpha t - \left(P + \frac{M}{r}\right) \frac{1}{EF} \dots \dots \dots 661)$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI} \left(P + \frac{M}{r}\right) \frac{1}{EF r} \dots \dots \dots 662)$$

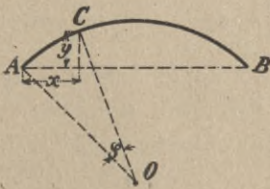
Całkujemy teraz równania 658) i 660) i otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= - \int_0^x \frac{P}{EF} ds \\ \Delta \varphi &= - \int_0^x \frac{M}{EI} ds \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 663)$$

Gdy kształt łuku jest dany, wtedy znana jest zależność między zmiennymi x, y, s i φ i zapomocą powyższych równań możemy wyznaczyć odkształcenie łuku.

§ 142. Wyznaczenie trzech warunków.

Łuk bezprzegubowy jest to łuk, którego oba końce są tak utwierdzone, że styczne podporowe się nie zmieniają. Ponieważ w łuku takim obie podpory są stałe, więc dla $x=l$ możemy napisać dla punktu B (rys. 333) trzy następujące równania:



rys. 333.

$$\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta \varphi = 0 \dots 664)$$

Jeżeli podpory nie są zupełnie stałe, to mogą powstać pewne odkształcenia $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta \varphi_1$, które albo wprost znamy, albo też je zakładamy. W każdym razie te trzy równania wystarczą do wyznaczenia sił zewnętrznych, jak to udowodniliśmy wyżej.

Niech ACB przedstawia oś łuku, to pierwsze równanie możemy ze względu na równ. 657) napisać, założywszy, że mamy dane $\Delta x_1, \Delta x_1 = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} dx + \int_A^B \Delta \varphi dy$, albo całkując częściowo $\Delta x_1 = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} ds + \left(\Delta \varphi \cdot y\right)_A^B - \int_A^B y \frac{d\Delta \varphi}{ds} ds$.

Dla A i B jest $y = 0$, więc drugi wyraz odpada i możemy napisać:

$$\Delta x_1 = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} dx - \int_A^B y \frac{d\Delta\varphi}{ds} ds.$$

Wstawmy teraz wartości z równ. 658) i 660), a otrzymamy

$$\Delta x_1 = - \int_A^B \frac{P}{EF} dx + \int_A^B \frac{My}{EI} ds. \dots \dots \dots 665)$$

E jest liczbą stałą, a dla przekroju stałego możemy I i F także wyłączyć przed znak i napisać, gdy $\Delta x_1 = 0$,

$$\int_A^B My ds - \frac{I}{F} \int_A^B P dx = 0. \dots \dots \dots 666)$$

Z uwzględnieniem krzywizny otrzymuje Müller Breslau

$$\int_A^B \frac{My ds}{EI} + \int_A^B \frac{P}{EF} \left(y \frac{ds}{r} - ds \right) = \Delta x_1 \dots \dots \dots 667)$$

Gdy promień łuku jest wielki, a $\Delta x_1 = 0$, równ. 667) przechodzi w równ. 666).

Keck liczy jeszcze dokładniej i otrzymuje, jeżeli Δx_1 liczymy od pewnego punktu osi, dla którego rzędne są x_1 i y_1

$$\int_A^B \frac{M(y_1 - y) ds}{EI} + \int_A^B \frac{M dx}{EFr} + \int_A^B \frac{P}{EF} \left(\frac{y_1 - y}{r} ds + dx \right) = -\Delta x_1 \quad 668)$$

Dla $y_1 = 0$ i r wielkiego przechodzi to równanie w równ. 667).

Dla łuków nie bardzo grubych, gdy I jest małym, drugi wyraz równ. 666) daje stosunkowo tak małe wartości, że możemy wpływ siły podłużnej P opuścić i w przybliżeniu napisać

$$\int_A^B My ds = 0. \dots \dots \dots 669)$$

Jeżeli zaś przyjmiemy nie I stałe, lecz $I' = I \frac{dx}{ds} = I \cos \alpha$, to

znaczy, jeśli przyjmiemy, że moment bezwładności, a więc i grubość łuku ku podporom, się zwiększa, to z równ. 667) otrzymamy dla $\Delta x_1 = 0$ po opuszczeniu wpływu siły podłużnej

$$\int_B^A My dx = 0 \dots \dots \dots 670)$$

W ten sam sposób postępując, otrzymamy z drugiego równania 664) dla $\Delta x_1 = 0$

$$\int_A^B Mx ds + \frac{1}{F} \int_A^B Pdy = 0. \quad \dots \quad 671)$$

Z uwzględnieniem krzywizny jest wedle Müllera Breslaua ogólnie:

$$\int_B^A \frac{Mx ds}{EI} + \int_B^A \frac{P}{EF} \left(x \frac{ds}{r} + dy \right) = \Delta y_1, \quad \dots \quad 672)$$

które to równanie dla wielkiego r i stałego E, I, F i $\Delta y_1 = 0$ przechodzi w równ. 671).

Keck otrzymuje dokładniej:

$$- \int_A^B \frac{M(x_1 - x) ds}{EI} + \int_A^B \frac{M dy}{EFr} + \int_A^B \frac{P}{EF} \left(dy - \frac{x_1 - x}{r} ds \right) = \Delta y_1 \quad 673)$$

Dla $x_1 = 0$ a r wielkiego przechodzi to równanie w równ. 672).

Jeśli opuścimy wpływ siły podłużnej, to otrzymamy

z równ. 671)
$$\int_A^B \mathbf{M}x ds = 0 \quad \dots \quad 674)$$

względnie dla stałego I'
$$\int_A^B \mathbf{M}x dx = 0. \quad \dots \quad 675)$$

Trzecie równanie brzmi $\Delta \varphi_1 = 0$; według równania 663)

$$0 = \Delta \varphi_1 = - \int_A^B \frac{M}{EI} ds, \quad \dots \quad 676)$$

dla przekroju stałego
$$\int_A^B \mathbf{M} ds = 0, \quad \dots \quad 677)$$

a dla stałego I'
$$\int_A^B \mathbf{M} dx = 0. \quad \dots \quad 678)$$

Wedle Müllera Breslaua otrzymamy z uwzględnieniem krzywizny

$$\int_A^B \frac{M ds}{EI} + \frac{P}{EFr} ds = \Delta \varphi_1, \quad \dots \quad 679)$$

Keck otrzymuje dokładniej

$$\int_A^B \frac{M ds}{EI} + \int \frac{P}{EFr} + \int \frac{P}{Er^2 F} = \Delta \varphi_1 \quad \dots \quad 680)$$

które to równanie przechodzi dla wielkiego r i stałego I w rów. 677).

Na trzech zasadniczych równaniach (666), (671) i (676), względnie przybliżonych bez uwzględnienia krzywizny i siły podłużnej (670), (674) i (678), polega cała dalsza teoria belek łukowych, a więc i sklepień.

§ 142. Wyznaczenie prawdziwej linii ciśnienia.

Ta linia ciśnienia jest prawdziwą, która wypełnia wszystkie trzy powyżej podane warunki, a że brakowały nam tylko trzy równania, więc teraz mamy tyle równań, ile niewiadomych, a zatem niewiadome dadzą się ściśle wyznaczyć. Linia ciśnienia jest więc zupełnie wyznaczalna temi równaniami.

Będziemy teraz szukać tej prawdziwej linii ciśnienia, odpowiadającej trzem warunkom, a to w ten sposób, że najprzód wyśzukamy linię ciśnienia, odpowiadającą pierwszemu warunkowi, potem zmienimy ją tak, aby nie przestając odpowiadać pierwszemu warunkowi, odpowiadała i drugiemu, a nareszcie i trzeciemu.

Każdy wielobok uważać możemy jako wielobok sznurowy dla pewnego obciążenia, a więc i oś ACB (tabl. IV.) niech będzie wielobokiem sznurowym dla pewnego obciążenia i parcia poziomego. Przypuśćmy dalej, że LK jest linią zamykającą dla belki prostej, obu końcami utwierdzonej, to wtedy odstęp pionowy między LK a osią będą dla pewnego parcia poziomego równe momentom M , a na mocy równania (678), które tu także

jest ważnem $\int_A^B M_b dx = 0$. Równ. (678) bowiem powstało z warunku $\Delta\varphi_1 = 0$, który i tu musi być wypełnionym (por. §. 142)

Niech będzie $a' a'_1 a'_2 \dots a'_{11}$ prawdziwą linią ciśnienia i przypuśćmy na chwilę, że linia ta jest także wielobokiem sznurowym dla tej samej belki prostej obu końcami utwierdzonej i tego samego parcia poziomego, co wielobok b , ale dla danego rzeczywistego obciążenia, i że linia LK jest znów linią zamykającą. Wtedy odstęp między linią zamykającą a wielobokiem a będą równe momentom M_a i tu będzie także:

$$\int_A^B M_a dx = 0.$$

Wiemy, że dla łuku linią zamykającą jest oś łuku, więc momenty dla łuku będą:

$$M = M_a - M_b \dots \dots \dots 681)$$

jak to z rysunku widzimy.

Pomnożywszy to równanie przez $x dx$, otrzymamy

$$Mx dx = M_a x dx - M_b x dx.$$

Zcałkujmy to równanie, to

$$\int Mx dx = \int M_a x dx - \int M_b x dx = 0$$

według równania 675)., a zatem:

$$\int M_a x dx = \int M_b x dx \dots \dots \dots 682).$$

Analogicznie możemy napisać na podstawie równań 669 i 678)

$$\int M_a y dx = \int M_b y dx \dots \dots \dots 683)$$

$$\text{i } \int M_a dx = \int M_b dx \dots \dots \dots 684)$$

Te trzy równania posłużą nam do wyznaczenia prawdziwej linii ciśnienia*), a mianowicie w równ. 682) i 684) zrobimy obie strony równania = 0, przez co będą też sobie równe. W tym celu dzielimy najprzód rozpiętość na równą liczbę części (na rysunku na 10 części); rozpiętość jest tu $l = 16 m$, strzałka $f = 3 m$,

$d_0 = 1 m$, $d_1 = 1,8 m$, nadsypka $1 m$, ciężar ruchomy $1200 \frac{kg}{m^2}$. Jeśli

ciężar kamienia jest $2,4 \frac{t}{m^2}$, nadsypki $1,6 \frac{t}{m^2}$, to $h_0 = \frac{1200}{1600} = 0,75 m$.

Widzimy, że tu pasek szósty nie jest cały, lecz tylko do połowy, obciążonym. Możemy albo przyjąć, że obciążony jest on całkowicie na całej długości połową ciężaru, albo licząc dokładnie, podzielimy pasek piąty na dwie części 6_a i 6_b , co do których będziemy pamiętać, że szerokość ich jest o połowę mniejszą, a więc w rachunku zawsze przyjmować będziemy tylko połowę rzędnych tych pasków, albo też jedną rzędną średnio arytmetyczną.

*) Porów, *Burr. Suspension bridges arch ribs and cantilevers*, Nowy York 1913, str. 284.

Ciężar stały jednego paska i ciężar ruchomy działają w praktyce dość dokładnie w pionowej, połowiącej ten pasek, wyjąwszy pasek 6, który jest tylko do połowy obciążony ciężarem ruchomym, tak że ciężar lewej połowy paska

$$P_l = 2,4 \times 0,8 \times 2,17 = 3,73 \text{ t, „ prawej „ „ „}$$

$$P_p = 2,4 \times 0,8 \times 1,70 = 2,92 \text{ t. a wypadkowa } P_6 = 6,65 \text{ t}$$

dzieli szerokość paska w stosunku $x = \frac{\frac{1}{4}P_l + \frac{3}{4}P_p}{P_6} = 0,47$. Odstępy więc

ciężaru P_6 od sąsiednich kierunków, mierzone po prostopadłej do nich, wynoszą $(0,47 + 0,5) \cdot 1,60 = 155 \text{ cm}$ i $(0,53 + 0,5) \cdot 1,60 = 165 \text{ cm}$.

Otóż wykreślamy te kierunki sił działających $P_1, P_2 \dots P_{10}$ oraz wielobok sił dla danego obciążenia. Tu przypuściliśmy, że obciążoną jest ciężarem ruchomym lewa część sklepienia na długości $0,55 \text{ l} = 8,80 \text{ m}$, wykreślamy więc według § 134 sprowadzoną linię obciążenia i wyznaczamy ciężary pasków. N. p. ciężar paska pierwszego jest $2,4 \times 1,6 \times 1 \times 4,6 = 17,66 \text{ t}$. Reszta ciężarów będzie proporcjonalną do średnich wysokości pasków.

Przyjąwszy tymczasowo biegun w punkcie D , kreślimy promienie i w zwykły sposób wielobok sznurowy ENF . Teraz szukamy linii zamykającej, któraby zadość uczyniła równaniu

$$\int_A^B M_a dx = 0,$$

co znaczy, że powierzchnia między linią zamykającą a wielobokiem sznurowym a ma być $= 0$, oczywiście, gdy uwzględnimy znaki rzędnych.

Jeżeli l' jest zmiennem, to według 665) mamy zamiast M wyraz $\frac{M}{l'}$ we wszystkich następnych wzorach, więc $\frac{M}{l'} dx$ zamiast $\frac{M}{l'} ds$.

Wykreślimy teraz najprzód prostą $L_3 K_3$, równoległą do EF , oceniwszy na oko, że powierzchnia między $L_3 K_3$ a $ENF = 0$. Dobrze także użyć w tym celu linii prostej, wykreślonej na kalce, którą przesuwamy równoległe do linii EF , aż powierzchnie po obu stronach linii będą równe. Gdyby linia ciśnienia była parabolą, to $L_3 K_3$ przechodziłaby w $\frac{2}{3}$ wysokości w środku.

Teraz sprawdzimy, czy rzeczywiście $\int_A^B M_a dx = 0$.

Jeżeli nazwiemy odcinki pionowe między wielobokiem a a zamykającą v , to powierzchnia momentów

$$F = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \frac{e}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2} e + \dots + \frac{v_4 + v_5}{2} \cdot e + \frac{v_5 + v_6}{2} \cdot 0,97 e +$$

$$+ \frac{v_6 + v_7}{2} \cdot 1,03 e + \frac{v_7 + v_8}{2} e + \dots + \frac{v_9 + v_{10}}{2} \cdot e + \frac{v_{10} + v_{11}}{2} \cdot \frac{e}{2},$$

$$F = e \left[v_1 + v_2 + \dots + v_9 + v_{10} + \frac{v_0 - v_1 + v_{11} - v_{10}}{4} = \right.$$

$$\left. + 0,015 (v_7 - v_5) \right] = e \cdot m \dots \dots \dots 685)$$

Dodawanie rzędnych v możemy uskutecznić cyrklem, przy-
czem rzędne nad zamykającą uważamy jako dodatnie, pod zamy-
kającą jako ujemne i w ten sposób otrzymamy

$$F = e \left(16,2 - \frac{22,2}{4} - 0,15 \cdot 4,0 \right) = e \cdot 10,59 \dots$$

Ponieważ powierzchnia nie jest $= 0$, posuniemy prostą $L_3 K_3$
do góry tj. zmniejszamy powierzchnię dodatnią o długość

$$\Delta a = \frac{f}{l} \frac{e \cdot m}{e} = \frac{m}{n} \dots \dots \dots 686)$$

W naszym wypadku przesuwając $L_3 K_3$ o $\Delta a = \frac{10,59}{10} =$
 $= 1,06 \text{ mm}$ w górę, otrzymamy prostą $L_2 K_2$, a powierzchnia
będzie teraz dokładnie $= 0$.

Chodzi teraz o to, aby $\int M_o x dx = 0$, tj. aby moment staty-
czny tej powierzchni ze względu na AE był $= 0$. Obliczmy mo-
ment statyczny tej powierzchni, rozkładając ją na trapezy i przy-
puszczając że środek ciężkości trapezu jest w połowie szerokości.
Otrzymamy więc:

$$S = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{e}{4} + \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot e \cdot 1 e + \frac{v_2 + v_3}{2} \cdot e \cdot 2 e + \dots +$$

$$+ \frac{v_4 + v_5}{2} \cdot e \cdot 4 e + \frac{v_5 + v_6}{2} \cdot 0,097 e \cdot 4,985 e + \frac{v_6 + v_7}{2} \cdot 1,03 e \cdot 5,985 e +$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{v_7 + v_8}{2} \cdot e \cdot 7e + \dots + \frac{v_9 + v_{10}}{2} e \cdot 9e + \frac{v_{10} + v_{11}}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot 9,75e = \\
 &+ \frac{e^2}{2} \left[\frac{v_0}{8} + \frac{9v_1}{8} + (1+2)v_2 + (2+3)v_3 + (3+4)v_4 + (4+4,84)v_5 + \right. \\
 &\quad + (4,84 + 6,16)v_6 + (6,16 + 7)v_7 + (7 + 8)v_8 + (8+9)a_9 + \\
 &\quad \left. + \left(9 + \frac{9,75}{2} \right) v_{10} + \frac{9,75}{2} v_{11} \right].
 \end{aligned}$$

po wstawieniu wartości za v będzie w mm^3 :

$$\begin{aligned}
 S = \frac{e^2}{2} &\left(-\frac{33}{8} - \frac{9}{8} \times 22 - 3 \times 6,2 + 5 \times 4,8 + 7 \times 11,4 + 8,84 \times 14,8 + \right. \\
 &+ 11,0 \times 14,5 + 13,16 \times 11,0 + 14 \times 4,9 - 17 \times 6,0 - 13,875 \times 21 + \\
 &\left. - 4,875 \times 31,9 \right) = \frac{e^2}{2} (-596,36 + 612,39) = + 8,02e^2.
 \end{aligned}$$

Musimy więc moment statyczny powierzchni pomniejszyć o $S = 8,02 e^2 mm^3$ przez to, że prostą $L_2 K_2$ obrócimy około punktu I o pewien kąt odwrotnie do ruchu wskazówek na zegarze, aż przyjdzie w położenie $L_1 K_1$.

Moment statyczny, jaki przez to powstanie, ma być:

$$\begin{aligned}
 -S &= + IL_1 L_2 \frac{1}{6} l - IK_1 K_2 \frac{5}{6} l = -\frac{2}{3} l \cdot IL_1 L_2 = \\
 &= \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{2} l L_1 L_2 \cdot \frac{1}{2} l = + \frac{l^2}{6} L_1 L_2, \text{ a stąd}
 \end{aligned}$$

$$L_1 L_2 = \frac{6S}{l^2} \dots \dots \dots 687)$$

Tu otrzymamy $L_1 L_2 = \frac{6 \cdot 8,02 e^2}{(10 e)^2} = 0,48 mm$. A że $IK_1 K_2 = IL_1 L_2$ więc warunek pierwszy nie został naruszony. Linja zamykająca $L_1 K_1$ odpowiada więc teraz dwóm pierwszym warunkom.

Aby znaleźć zamykającą, któreby czyniła zadość warunkom $M_a dx = 0$ i $M_{a,x} dx = 0$, można postąpić również w sposób następujący, podany przez konstruktora Brzozowskiego (tabl. IV rys. B).

Obliczamy powierzchnię, $E a_1 a_2 \dots F$, objętą wielobokiem sznurowym i dzielimy ją przez rozpiętość l . Otrzymany w ten sposób odcinek, nanosimy od prostej EF w połowie rozpiętości sklepienia. W naszym przykładzie mamy pow. $E a_1 a_2 \dots F = 5180 mm^2$; zatem odcinek w połowie rozpiętości będzie miał $\frac{5180}{160} = 32,4 mm$.

Wyznaczamy następnie pionową, przechodzącą przez środek ciężkości powierzchni $Ea_1 a_2 \dots F$, np. dzieląc moment statyczny tej powierzchni względem pionowej przez lewą podporę przez jej wielkość, więc tu odstęp od lewej podpory będzie $\frac{406000}{5180} = 78,4mm$.

Dalsza konstrukcja jest identyczna z wyznaczeniem prostej, ograniczającej rozkład naprężeń w przekroju sklepienia (rys. 317). I tu i tam chodzi bowiem o wyznaczenie sił względnie powierzchni-momentów które czynią zadość dwu warunków, suma ma być równą zeru i warunek statyczny sił jest równy zeru. Dzielimy zatem rozpiętość l , a więc i prostą EF na trzy równe części, otrzymane punkty podziału łączymy z końcem odcinka, naniesionego od EF w połowie rozpiętości, a punkty przecięcia z pionową przez środek ciężkości powierzchni $Ea_1 a_2 \dots F$, rzutujemy, kreśląc równoległe do EF , na pionowe podporowe i otrzymujemy szukaną zamykającą $L_1 K_1$, która oczywiście musi przechodzić przez koniec odcinka, naniesionego w połowie rozpiętości.

Teraz szukamy linii zamykającej dla osi łuku jako wieloboku sznurowego i podobnie znajdziemy LK , równoległe do AB , bo jeżeli suma powierzchni momentów jest równa zeru, to z powodu symetrii drugi warunek będzie już przez to także wypełniony. Środek ciężkości bowiem tak ujemnej części powierzchni, jak i dodatniej, leży w prostej CD , a że te powierzchnie są równe, więc momenty statyczne muszą być równe z przeciwnym znakiem,

$$\text{a zatem } \int_A^B M_b x dx = 0.$$

Chodzi jeszcze o wypełnienie trzeciego warunku;

$$\int_A^B M_a y dx = \int_A^B M_b y dx.$$

Rzędne ac wyobrażają nam, jak wiemy, momenty M_a . Uważajmy M_a jako siły, działające poziomo w odpowiednich punktach osi b , oddalonych od linii AB o y np. $a_1 c_1$ w b_1 , $a_2 c_2$ w b_2 itd., wtedy otrzymamy łatwo $\int_A^B M_a y dx$, wykreślając na dowolnej poziomej wielobok sił $f_0 f_1 \dots f_0 f_1$, a potem wielobok sznurowy. Powierzchnie przedstawiają się tu jako trapezy i trójkąty. Środki ciężkości znajdują się w jednej trzeciej lub w przybliżeniu w połowie podstaw. Zatem od f_0 odcinamy $f_0 f_1 = \frac{1}{3}u_1$.

$f_1 f_2 = u_2$, $f_2 f_3 = u_3$, $f_3 f_4$ w przeciwnym kierunku $= u_4$ itd., a ponieważ powierzchnia momentów powinna być równa zeru, więc ostatni punkt wieloboku f_{11} zejdzie się z punktem f_0 .

Przyjmijmy odległość biegunową dowolnie równą h_1 i połączmy biegun S_1 z wszystkimi punktami wieloboku sił, z punktów k_1, k_2 itd. ponad środkami ciężkości trapezów poprowadźmy poziome i wykreślmy wielobok sznurowy URW . Z §. 7. wiemy, że odcinek UW prostej równoległej do wypadkowej między skrajnymi bokami wieloboku sznurowego URW , pomnożony przez odległość biegunową h_1 , równy jest sumie momentów statycznych sił M_a , więc według równań 4) i 181)

$$UW = \frac{1}{h_1} \int_A^B M_a y dx \quad 688)$$

To samo robimy, chcąc wyznaczyć $\int_A^B M_b y dx$.

Tu M_b są równe rzędnym między osią łuku a linią zamykającą LK . Wykreślmy w ten sposób wielobok sznurowy czyli raczej z powodu symetrii tylko połowę wieloboku, a otrzymamy

$$RT = \frac{1}{2h_1} \int_A^B M_b y dx \quad 689)$$

Aby zadość uczynić równaniu 683) musiałyby być:

$$\int_A^B M_a y dx = \int_A^B M_b y dx \text{ czyli } 2 h_1 RT = h_1 \cdot UW, \text{ albo}$$

$$2 RT = UW \quad 690)$$

Rzeczywiście jednak $2 RT > UW$, więc aby uzyskać równ. 690) musimy, ponieważ $2 RT$ jest dla danego kształtu łuku stałym, zmienić tak UW , aby $UW = 2 RT$.

W naszym przykładzie jest $2 RT < UW$, a mianowicie ponieważ $2 RT = \frac{1}{n} UW$, więc UW trzeba n razy zmniejszyć. Po-

nieważ $UW = \frac{1}{h_1} \int_A^B M_a y dx$, więc UW będzie n razy mniejsze,

jeżeli M_a czyli rzędne wieloboku sznurowego a zmniejszymy n razy. Rzędne zaś wieloboku tego będą n razy mniejsze, jeżeli do wykreślenia go użyjemy odległości biegunowej n razy większej,

a zatem $b' = n b = b \cdot \frac{2 RT}{UW}$

Teraz dwojaki jest sposób wykreślenia prawdziwej linii ciśnienia, albo mnożymy wszystkie rzędne wieloboku a przez $\frac{1}{n} = \frac{UW}{2RT}$ i wykreślamy je według znaku powyżej lub poniżej linii LK , albo wyznaczywszy prawdziwą odległość biegunową, szukamy takiego bieguna, aby linie zamykające obu wieloboków zeszły się razem i aby można jeden na drugi położyć. Wykreślimy dowolny kąt POP' , zrobimy $OP = UW$, $OP' = 2RT$, odetnijmy potem odległość biegunową b na OP' do punktu D' i wykreślimy $D'D''$ równoległe do PP' , a będziemy mogli napisać:

$$OD'' = OD' \cdot \frac{OP}{OP'} = OD' \cdot \frac{UW}{2RT} = n \cdot b.$$

Prawdziwą odległością biegunową jest więc $OD'' = b'$.

Według pierwszego sposobu mamy pomniejszyć wszystkie rzędne M_a w stosunku $OP:OP'$, co zrobić możemy zapomocą kąta proporcjonalnego POP' . Sposób ten jest łatwy i dokładny; jako próbę użyć możemy drugiego sposobu, a to jak następuje: Kreślimy DF_1 równoległe do L_1K_1 , przez co otrzymujemy $OF_1 = V_1$ i $F_1 10 = V_2$, oddziaływania pionowe belki prostej. Z punktu F_1 kreślimy poziomą F_1D_1 , równoległą do zamykającej LK , gdyż L_1K_1 musi być poziomą, jeżeli chcemy położyć wielobok a na wielobok b i uzyskać $M = M_a - M_b$ i robimy $F_1D_1 = OD''$. D_1 jest wtedy prawdziwym biegunem, gdyż odległość biegunowa $F_1D_1 = OD'' = b'$, a równoległa do nowej zamykającej LK dzieli wielobok sił na V_1 i V_2 . Teraz kreślimy promienie i linię ciśnienia. Punkt początkowy a' , a może i więcej punktów, jako kontrolę, wyznaczymy według poprzedniego sposobu.

Drugą próbą rzetelności konstrukcji jest ta okoliczność, że punkty m i n przecięcia się wieloboku a z linią zamykającą leżą w pionowych punktach przecięcia się linii ciśnienia z $LK - m'$ i n' . Dalej boki skrajne wieloboku sznurowego muszą się przecinać w pionowej przez środek ciężkości wszystkich ciężarów GG' , a nakoniec sumy powierzchni powyżej osi i poniżej osi muszą być sobie równe.

Otrzymawszy tak prawdziwą linię ciśnienia, mamy momenty ze względu na oś $M = bz$, jeżeli z oznacza pionowy odstęp między osią a linią ciśnienia.

Chodzi jeszcze o największe naprężenie, które obliczymy

według równ. 637) $\nu_1 = \frac{P}{100h} \left(1 + \frac{6c}{h} \right)$. Widzimy, że ν_1 może być największe dla największego P lub największego c . Na tablicy są P i c największe na podporze A . Dla szwu gl , prostopadłego do osi w A , znajdziemy P , robiąc $or \parallel gl$, a $D_1 r \parallel$ do stycznej do osi w A , to $P = D_1 r = 84,0t = 84000 \text{ kg}$. Dalej mamy $c = Aa' = 0,18 \text{ m} = 18 \text{ cm}$, $h = 1,7 \text{ m} = 170 \text{ cm}$, więc

$$\text{najw. } \nu = \frac{84000}{100 \cdot 170} \left(1 + \frac{6 \cdot 18}{170} \right) = 8,0 \text{ kg/cm}^2,$$

a więc dla muru kamiennego naprężenie stosowne. To samo zrobiliśmy wykreślnie. Gdybyśmy chcieli otrzymać wynik dokładniejszy, to otrzymalibyśmy dla stałego I' z wzorów 670), 674)

i 678), wstawiając $I' = I \frac{ds}{dx}$ i $F' = F \frac{ds}{dx}$,

$$\left. \begin{aligned} \int_A^B M dx &= 0 \\ \int_A^B M x dx + \int_A^B P dy &= 0 \\ \int_A^B M y dx - \int_A^B P dx &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 691)$$

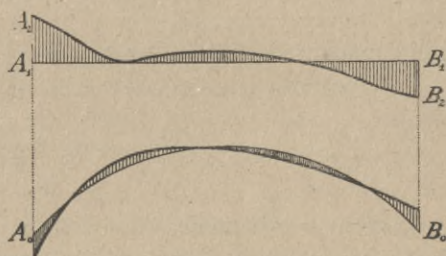
Z tego widzimy, że pierwszy warunek $\int_A^B M_a dx - \int_A^B M_b dx = 0$ jest dokładny, żadnej zmiany tu nie trzeba.

W drugim równ.

691) wstawmy $P = [Q] \frac{ds}{dy}$,

jeżeli $[Q]$ oznacza siłę poprzeczną, a otrzymamy

$$\int_A^B M x dx - a'^2 \int_A^B [Q] ds = 0 \text{ albo w przybliżeniu}$$



rys. 334.



$$\int_A^B Mx dx = a'^2 \int_A^B [Q] dx \quad 692)$$

Jeżeli więc w zwykły sposób wyznaczymy powierzchnie momentów a i b , to jeszcze należy w każdym punkcie a siłę poprzeczną $[Q]$ odciąć pionowo od pewnej poziomej $A_1 B_1$ (rys. 334). Końce tych rzędnych połączone dadzą w ogólności linię krzywą

$$A_2 B_2, \text{ a } \int_A^B [Q] dx = \text{pow. } A_1 A_2 B_2 B_1. \text{ Dla obciążenia zupeł-$$

nego jest ta powierzchnia dla łuku parabolicznego równa zeru, a zwykle bardzo małą.

Jeżeli łuk jest symetryczny, to $\int_A^B M_b x dx = 0$, więc

$$\int_A^B M_a x dx = -\text{pow } [Q] \quad 693)$$

a nie jest równe zeru, jak to pierwiej robiliśmy. Z uwzględnieniem tego robimy obrót $L_2 K_2$ w położenie $L_1 K_1$.

Trzecie równanie 691) możemy napisać zważywszy, że

$$P = H \frac{ds}{dx}, \quad \int_A^B My dx - a'^2 H \int_A^B ds = 0, \text{ albo}$$

$$\int_A^B My dx = a'^2 H l \quad 692)$$

jeżeli l oznacza długość łuku.

Otrzymamy więc z 688) i 692) $h_1 UD - a'^2 H l = h_1 2 Ct$, więc

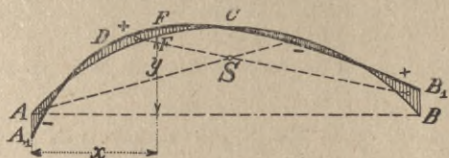
$$UD = 2 Ct + \frac{a' H l}{h_1} \quad 693)$$

Jeżeli to równanie się nie ziszcza, to należy UD , zatem odległość biegunową odpowiednio zmienić, aby zadość uczynić temu równaniu.

Różnica w wielkości parcia poziomego przy zastosowaniu tych poprawek jest jednak zwykle tak małą, że w zwyczajnych wypadkach nie potrzeba uwzględniać wpływu siły podłużnej P .

§ 144. Położenie powierzchni momentów.

Niech będzie ACB (rys. 335) osią łuku, $A_1 D B_1$ prawdziwą linią ciśnienia, to rzędne między temi dwiema linjami będą, jak



rys. 335.

wiemy, proporcjonalne do momentów. Pierwszy warunek

$$\int_A^B Mx \, dx = 0$$

oznacza, że suma powierzchni dodatnich jest równa sumie powierzchni

ujemnych tj. poniżej osi leżących. Drugi i trzeci warunek brzmią:

$$\int_A^B Mx \, dx = 0 \text{ i } \int_A^B My \, dx = 0,$$

co da się słowami tak wyrazić: moment statyczny powierzchni ujemnych musi być równy momentowi statycznemu powierzchni dodatnich tak ze względu na oś odcinków, jak i rzędnych. $\int_A^B My \, dx$ nie oznacza

wprawdzie momentu statycznego powierzchni momentów ze względu na AB , bo y oznacza odstęp punktu osi od AB . Ale różnica

jest bardzo małą tak, że możemy $\int_A^B My \, dx$ uważać w przybliżeniu

za moment statyczny. Wiemy, że moment statyczny jest iloczynem z powierzchni przez odległość środka ciężkości od danej linii, a więc gdy powierzchnie dodatnie i ujemne i ich momenty statyczne są równe, to i odległość środka ciężkości powierzchni ujemnych i dodatnich od obu osi musi być równą, czyli innymi słowy: środek ciężkości części ujemnych musi wpadać na środek ciężkości części dodatnich.

Aby tego ostatniego warunku dopełnić, musi linja ciśnienia przecinać oś najmniej w trzech punktach, bo jeżeliby przecinała tylko w dwóch punktach, to otrzymalibyśmy dwie części tego samego znaku, a wyżej lub niżej jedną część przeciwnego tak, że środki ciężkości nie mogłyby się schodzić.

Powyższa ulepszona metoda Burra wyznaczenia prawdziwej

linji ciśnienia zaleca się zwłaszcza tem, że jest bardzo przejrzystą i jasną, a nadewszystko ogólną.

Jeżeli uwzględnimy skrócenie osi wskutek siły podłużnej, to otrzymamy wedle *Kecka* *) dla sklepienia parabolicznego podniesienie się linji ciśnienia w kluczu o c , a zniżenie na podporach o $2c$, przyczem

$$c = \frac{1}{3} \frac{d^2}{f}, \dots \dots \dots 694)$$

jeśli d oznacza grubość a f strzałkę sklepienia.

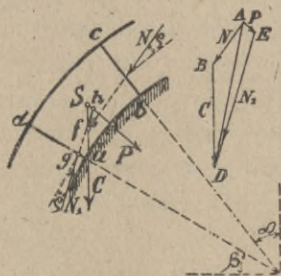
§ 145. Ciśnienie sklepienia na krążyny.

Przy budowie sklepień używamy osobnego rodzaju ruszto-
wań, które mają podpierać niedokończzone jeszcze sklepienie, do-
póki nie założymy klucza, poczem już sklepienie nie potrzebuje
podparcia. Rusztowania te nazywamy krążynami (*Lehrgerüst*,
fr. *cintre*, r. *кружало*).

Aby obliczyć wymiary krążyn, musimy poznać ciśnienie, jakie
wywiera sklepienie podczas budowy na krążyny.

Wszystkie klince nachylone pod kątem mniejszym do poziomu,
niż kąt tarcia wynosi, nie cisną wcale na krążyny, dopiero gdy
 $\beta > \varrho$ (rys. 332), kliniec cisnie na krążyny i wywołuje oddziaływa-
nie P prostopadłe do podniebienia. Zastanówmy się nad równo-
wagą klinca takiego $abcd$. Ciężar jego C działa w środku cięż-
kości S , klince leżące na danym klincu, wywierają ciśnienie N ,
działające także pod kątem tarcia. Siły N , N_1 , C i P muszą być
w równowadze i dać się złożyć w zamknięty wielobok sił. Jeżeli

N jest danem, C obliczamy, kreślimy
 $AB=N$ i $BD=C$, wypadkowa tych
dwóch sił jest AD , z punktu ich prze-
cięcia się f kreślimy $fh \parallel AD$ do prze-
cięcia się z siłą P , którą z poprzę-
dniemi składamy. Kierunek wypadkowej
 N_1 znamy, bo działa ona pod kątem
tarcia ϱ do prostopadłej na ad , kre-
ślimy więc $DE \parallel gh$ i otrzymujemy w
wieloboku sił $DE=N_1$ i $AE=P$. Zna-
jąc teraz N_1 , możemy wyznaczyć w ten



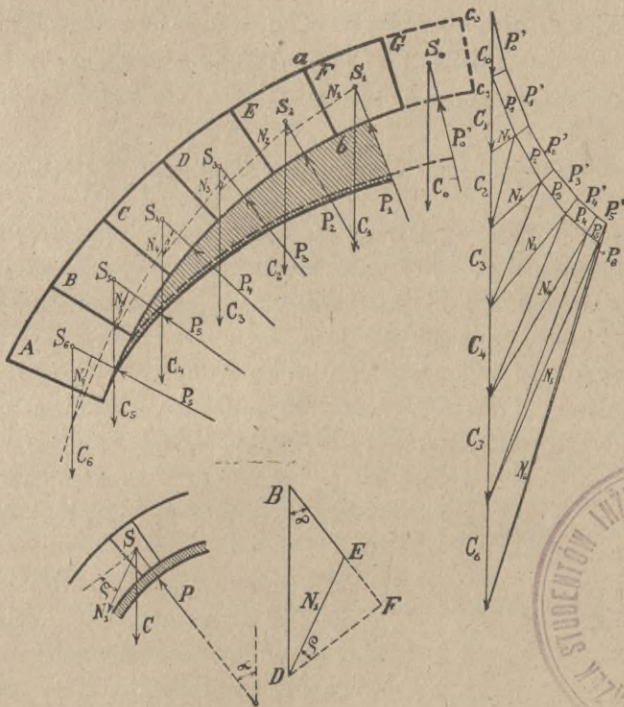
rys. 336.

sam sposób ciśnienie następnego klinca na krążynę.

*) *Keck*: *Elastizitätslehre*, str. 338.

Jeżeli punkt g wypada zewnątrz przekroju, to konstrukcja ta nie jest ważną. Wtedy musimy przypuścić mniejszy kąt tarcia, niż ϱ , — albo, co na jedno wychodzi, obrać punkt g blisko krawędzi a . Możemy przyjąć $ag=2$ do 5 cm.

W rys. 337 zrobiliśmy tę konstrukcję dla sześciu klinców A, B, C, D, E i F . Zaczynamy od najwyższego klinca F . Tu, rozumie się, $N=O$, a siły P_1 i C_1 przecinają w S_1 , skąd prowadzimy N_1 pod kątem ϱ do prostopadłej na szew ab . Przeprowadzimy tak konstrukcję dla wszystkich 6 klinców, otrzymamy w wieloboku sił P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i P_6 . Z rysunku widzimy, że proste, przedstawiające ciśnienia N , są zbieżne, a ciśnienie P ku



rys. 337 i 338.

dołowi coraz mniejsze. Dodajmy jeszcze jeden kliniec G ; którego ciężar jest C_0 , to z powodu zbieżności prostych, przedstawiających ciśnienia N , otrzymamy odnośne ciśnienia na krążyny P mniejsze, niż w pierwszym przypadku. A więc największe ci-

śnienie na krążyny pod pewnym kliniec powstaje zawsze wtedy, gdy jest on najwyższym kliniec. Ciśnienia te największe wstają ku kluczowi. Z rysunku widzimy, że przez dodanie klinca G ciśnienia, wywarte przez poprzednie klince, maleją, a kliniec A nie wywiera już wcale ciśnienia na krążyny, $P' = 0$.

Najw. P możemy łatwo wyznaczyć liczebnie, gdyż wtedy $N=0$ (rys. 338), $BF = C \text{ wst } \alpha$, więc

$$DE = N_1 = \frac{DF}{\text{dost } \varrho} = \frac{C \text{ wst } \alpha}{\text{dost } \varrho}.$$

Dalej mamy

$$P = BE = C \text{ dost } \alpha - DF \text{ st } \varrho = C \text{ dost } \alpha - C \text{ wst } \alpha \text{ st } \varrho, \text{ albo}$$

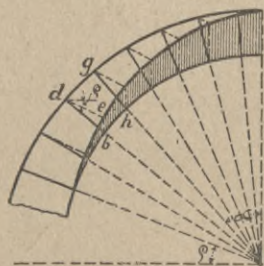
$$P = C (\text{dost } \alpha - \text{wst } \alpha \text{ st } \varrho) = C (\text{dost } \alpha - f \text{ wst } \alpha), \quad . \quad 695)$$

jeżeli f jest współczynnikiem tarcia.

$$\text{Dla } \alpha = 90 - \varrho \text{ jest } P = C \left(\text{wst } \varrho - \text{dost } \varrho \frac{\text{wst } \varrho}{\text{dos } \varrho} \right) = 0. \text{ Kąt } \varrho$$

jest według § 133 w przecięciu dla ciosów bez zaprawy 30° , z zaprawą starą 35° , świeżą zaś bardzo mały, co najwyżej przyjąć więc możemy $\varrho = 22^\circ$, $f = 0,4$. Dla cegły jest średnio $\varrho = 46^\circ$, dla pewności przyjąć możemy $\varrho = 35^\circ$.

Konstrukcja linii najw. P wynika z poprzedniego. Jeżeli chodzi o ciśnienie klinca $dbgh$ (rys. 334) bardzo wąskiego, to ciężar jego będzie proporcjonalnym do grubości sklepienia db , mianowicie $C = db \cdot b_1 \cdot 1 \cdot \gamma$, jeżeli b_1 jest szerokością klinca. Przyjmijmy $b_1 = 1$, to $C = \gamma \cdot db$.



rys. 339.

Jeżeli w rys. 339 zrobimy $db = C$, jeżeli z d poprowadzimy poziomą i de pod kątem ϱ do poziomej, a z b pionową be , to $dbe = BDE$ (w rys. 338), bo wszystkie kąty równe, a $db = BD$, więc $be = BE = P$. Zrobmy to samo dla innych szwów i połączmy odnośne punkty, a otrzymamy linią największych

P . Powierzchnię kreskowaną przyjąć możemy, obliczając wytrzymałość krążyn, jako powierzchnię obciążenia, pomnożywszy ją

przez γ . Będzie to wprawdzie obciążenie trochę za wielkie, bo ciśnienia największe nie wystąpią nigdy równocześnie, ale przypuszczenie to jest na korzyść pewności.

XI. Sklepienia krzyżowe i baniaste.

§ 146. Sklepienie krzyżowe nad kwadratem.

Sklepienie, powstające z przecięcia się dwóch sklepień kolebkowych o równej strzałce, których podniebienia w linii przecięcia się tworzą kąt wypukły, nazywamy sklepieniem krzyżowym (n. *Kreuzgewölbe*, fr. *voûte des arêtes*, an. *crossvaulting*, r. крестовый сводъ) (tabl. V.). Linje, powstające na podniebieniu z przecięcia się dwu sklepień *AE* i *CF*, nazywamy żyłami, linjami żebrowymi (n. *Grathbogen*, fr. *nervure*, an. *nerve*), pas zaś, wystający z żyły dla wzmocnienia lub ozdoby, żebrem (n. *Grath*, *Rippe*, fr. *arêtier de voûte*, *ogive*, an. *groin rib*).

Przypuśćmy najprostszy przypadek, że sklepienie krzyżowe powstaje z dwu sklepień kolebkowych o jednakim przekroju, przecinających się pod kątem prostym. Podzielmy oba te sklepienia płaszczyznami pionowymi, prostopadłymi do osi, na równą ilość pasków, które możemy uważać jako sklepienia kolebkowe i wykreślmy w każdym w znany sposób linią ciśnienia (przekrój *AC*). Jeżeli następne paski ku środkowi sklepienia położone np. *ef* mają tę samą grubość, to przekrój ich tworzy część przekroju skrajnego paska *AC*, linii ciśnienia nie potrzebujemy więc osobno szukać, lecz jest ona częścią linii ciśnienia paska *AC*. Wszystkie te paski wywierają pewne ciśnienia ukośne np. w *ef* R_e na żebra, które da się rozłożyć na parcie poziome H_e i ciśnienie pionowe V_e . Łatwo zrozumiemy, że jeżeli sklepienie ma stałą grubość i jest jednostajnie obciążone, parcie poziome H_e będzie dla wszystkich jednakowo grubych pasków to samo $=H_1$, a więc także i w pasku *eg*. Dwie te siły H_1 dają wypadkową poziomą w płaszczyźnie żebra $H=H_1\sqrt{2}=ei$. Siły pionowe V_e zaś dodają się, a więc $V=2V_e$.

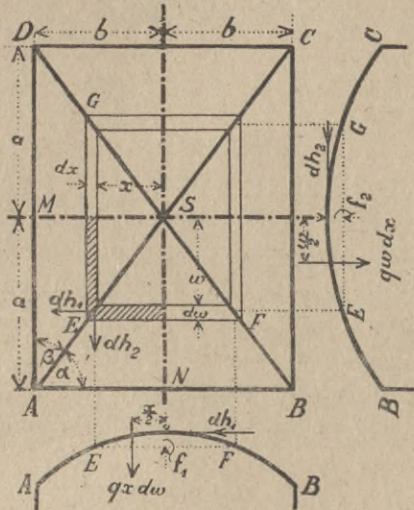
Teraz przystępujemy do sprawdzenia równowagi żebra, które dzielimy na części, odpowiadające podziałowi pasków sklepienia. Na każdy kliniec żebra działają oprócz ciężaru własnego żebra siły V i H , które to wszystkie siły dają w każdym punkcie ukośną wypadkową R_1, R_2 itd., a które wyznaczamy z wieloboku sił. W naszym przykładzie żebro wystaje na dół o 15 cm , tu więc siły H działają w połowie grubości sklepienia, a nie żebra, więc w punktach odległych od grzbietu o 15 cm . Szukamy teraz parcia poziomego, przypuszczając, że linja ciśnienia przechodzi przez środek szwów w węzłowie i w kluczu, a gdy obciążenie jest symetryczne, linja ciśnienia w kluczu jest poziomą.

Aby wykreślić linję ciśnienia, przyjmujemy podobnie, jak przy sklepieniu kolebkowem, mO_1 tymczasowo jako parcie poziome, prowadzimy promień i kreślimy wielobok sznurowy suw , wychodząc ze środka szwu w kluczu. Wielobok ten sznurowy w ogólności nie zejdzie się z przyjętym punktem t w węzłowie, bo parcie poziome przyjęliśmy dowolnie, musimy je więc odpowiednio zmienić. Przez punkt p przecięcia się boków skrajnych wieloboku przechodzi wypadkowa wszystkich sił, działających na połowę sklepienia, jeżeli więc linja ciśnienia ma przechodzić przez t , to ostatni bok musi mieć kierunek pt . Bok ten wykreślimy aż do przecięcia się z R_7 w n . Wypadkowa sił $V_0, R_1, R_2, R_3, R_4 \dots R_6$ przechodzi przez punkt y , który łączymy z n i otrzymujemy w ten sposób ny . Postępując tak dalej, wykreślimy całą linję ciśnienia $tnzs$. Parcie poziome wyznaczmy łatwo, zrobiwszy lO równoległą do pt . O jest więc biegunem, z którego poprowadziwszy promień, możemy kreślić przez s wielobok sznurowy, równoległy do tych promieni, a który przechodzić będzie przez t .

Widzimy, że w tym wypadku linja ciśnienia wychodzi w czwartym i piątym pasku z jądra, równowaga więc nie byłaby zapewnioną; wiemy jednak także, że prawdziwa linja ciśnienia leży powyżej i poniżej osi, podczas gdy tu cała linja ciśnienia leży poniżej osi. To wskazuje nam, że linja ciśnienia w kluczu leży powyżej środka szwu, należy więc całą linję ciśnienia przesunąć w górę tak, aby powierzchnia momentów była równa zeru i otrzymamy linję xu_1t .

§ 147. Sklepienie krzyżowe nad prostokątem.

Przypuśćmy, że w prostokącie $ABCD$ (rys. 340) wykonamy sklepienie krzyżowe i dla uproszczenia przyjmijmy, że ciężar jest jednostajny $q \text{ kg/m}^2$. Wytnijmy, jak poprzednio, płaszczyznami równoległymi do AB i AD paski EF i EG o grubości dw i dx , nazwijmy strzałki odnośnych łuków f_1 i f_2 a parcia poziome dh_1 i dh_2 , to dla równowagi ze względu na punkt E będzie



rys. 340.

$$\frac{x}{2} \cdot qxdw = f_1 dh_1,$$

$$\text{a stąd } dh_1 = \frac{qx^2 dw}{2 f_1}, \dots \dots \dots 696)$$

a analogicznie

$$dh_2 = \frac{qw^2 dx}{2 f_2} \dots \dots \dots 697)$$

W punkcie E działają więc oba parcia poziome dh_1 i dh_2 jakoteż i składowe pionowe parcia $qwdx$ i $qx dw$. A zatem wypadkowa pionowa będzie $v = q(xdw + wdx) \dots \dots \dots 698)$ a więc równa połowie ciężaru przyległych pasków.

Parcia poziome dh_1 i dh_2 składają się w wypadkową dh (rys. 341). Siły dh_1 i dh_2 dadzą się rozłożyć na składowe w kie-

runku przekątni dh''_1 i dh''_2 i siły prostopadle do przekątni dh'_2 i dh'_1 .

Z rysunku mamy $dh'_1 = dh_1 \text{ wst } \alpha$, $dh''_1 = dh_1 \text{ dost } \alpha$, $dh'_2 = dh_2 \text{ dost } \alpha$, $dh''_2 = dh_2 \text{ wst } \alpha$, a więc

$$dh = dh''_1 + dh''_2 = dh_1 \text{ dost } \alpha + dh_2 \text{ wst } \alpha.$$

Jeżeli więc wypadkowa ma mieć kierunek żebra, to składowe prostopadle doń muszą się znosić

$$dh'_1 = dh_1 \text{ wst } \alpha = dh'_2 = dh_2 \text{ dost } \alpha,$$

a stąd

$$\text{st } \alpha = \frac{dh_2}{dh_1} = \frac{qw^2 dx}{2 f_2 qx^2 dw} = \frac{w^2 dx f_1}{x^2 dw \cdot f_2},$$

a że $w = x \text{ st } \alpha$, $dw = \text{st } \alpha \cdot dx$, więc

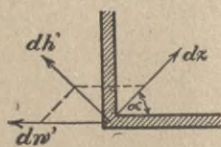
$$\text{st } \alpha = \frac{x^2 \text{st}^2 \alpha dx \cdot f_1}{x^2 \text{st } \alpha dx \cdot f_2} = \text{st } \alpha \cdot \frac{f_1}{f_2}, \text{ stąd } f_1 = f_2.$$

A zatem jeżeli wypadkowa parć poziomych ma być w płaszczyźnie przekątni, to dla obu przyległych pasków muszą być strzałki takie same.

Jeżeli linje szczytów, NS i MS (rys. 340) są poziome, to musi być $f_1 = f_2$. Ale nawet gdyby były one linjami krzywymi, to wskazanem jest, aby przynajmniej przyległe paski miały tę samą strzałkę.

Jeżeli siły dh'_1 i dh'_2 się nie znoszą, lecz $dh'_1 - dh'_2 = dh'$, to siła ta rozkłada się (rys. 342) na dw' i dz .

Siła $dw' = \frac{dh'}{\text{wst } \alpha}$ działa na łęk czołowy, siła zaś $dz = dh' \text{ dot } \alpha$ na żebro*).



rys. 342.

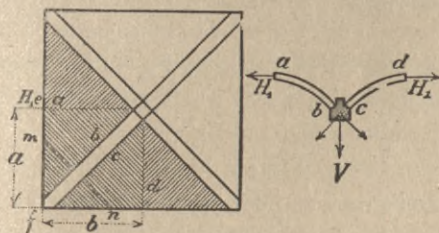
§ 148. Sklepienie krzyżowe w jedlinkę.

Dotychczas przypuszczaliśmy, że paski, na które podzieliśmy sklepienie, działają jako sklepienia kolebkowe i nie przenoszą na sąsiednie paski żadnych naprężeń ścinających.

Jeżeli jednak sklepiemy warstwami ukośnemi czyli w jedlinkę (rys. 343), to wtedy inny jest rozkład sił, na co pierwszy

* Por. Landsberg: Die Statik der Hochbaukonstruktionen, IV wyd. 1909, str. 349.

zwrócił uwagę Wittmann. Sklepienie dzielimy znów na paski w kierunku szwów. Jeden taki pasek ab opiera się w a na drugim pasku, w b na żebrze. Szukamy najprzód dla tego paska linii ciśnienia w znany sposób. Parcie poziome w a dwóch pasków symetrycznych daje wypadkową siłę poziomą H_1 , działającą w osi sklepienia na mur przyczółkowy w punkcie e . Także wszędzie na długości ef inne paski, n. p. mn , wywierają ukośne ciśnienie na mur przyczółkowy. Ciśnienia na żebro zaś składają się jako symetryczne na ciśnienie pionowe V , które działa jako obciążenie żebra. Żebra,



rys. 343.

jako sklepienia kolebkowe, badamy w znany sposób, a wykreślenie linii ciśnienia nie przedstawia tu najmniejszej trudności.

Widzimy z poprzedniego, że przy sklepieniu w jedlinkę nad kwadratem mury przyczółkowe wystawione są na ciśnienie poziome prostopadle do muru a żebra na ciśnienie pionowe.

Jeżeli sklepienie zbudowane jest nad prostokątem, to da się podobnie, jak w poprzednim paragrafie, dowieść, że ciśnienie na żebro tylko wtedy jest pionowem, jeśli

$$\frac{f_2}{f_1} = \operatorname{st}^4 \alpha = \frac{\alpha^4}{b^4} \dots \dots \dots 699)$$

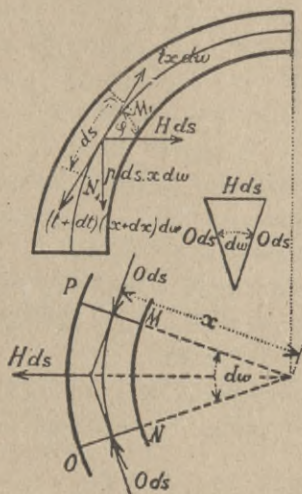
Jeśli stosunek jest inny, to stan równowagi będzie pośredni, ciśnienie na żebro będzie ukośnem, a oprócz tego pewne parcie poziome działa na mury czołowe. Zaprawa, spajająca poszczególne paski, przyczynia się w znacznej mierze do wytworzenia rozkładu ciśnienia, którego dokładne wyznaczenie nie jest możliwem. Obciążenie żebra pionowe będzie wzrastało od klucza ku podporom wedle linii prostej.

§ 149. Sklepienie baniaste.

Sklepienie, którego podniebienie jest powierzchnią obrotową, utworzoną ruchem krzywej wypukłej około osi pionowej, nazy-

*) Por. Landsberg: Die Statik der Hochbau-Konstruktionen, str. 355.

wamy sklepieniem baniastem, banią lub kopułą (n. *Kuppelgewölbe*, fr. *voûte en dôme, coupole*, an. *spherical vault, domical vault*, r. купольный сводъ). Wyznaczenie sił wewnętrznych w bani jest trudnem; dla uproszczenia więc przyjmijmy, że obciążenie jest stałem i tak rozdzielonem na poszczególne pierścienie, że albo cały pierścień jest obciążonym, albo też wcale nieobciążonym. Dalej przypuszczamy na razie, że powierzchnia ciśnienia wpada na średnią powierzchnię bani, to jest powierzchnię, przechodzącą przez oś każdego przekroju południkowego.



rys. 344.

Ciężar własny bani, a względnie obciążenie, sprawiają odkształcenie, pierścienie poszczególne zwążają się skutkiem ciśnień, powstałych w pierścieniach w kierunku obwodu koła, które nazywamy z tego powodu ciśnieniami obwodowemi (n. *Ringspannung*) (rys. 344). Tu więc mamy oprócz ciśnień w kierunku południka, jak przy sklepieniu kolebkowem, także ciśnienia obwodowe.

Początek spółrzędnych przyjmijmy w kluczu bani *S* (rys. 345) a oś pionową bani za oś *Y*, prostopadłą do niej *SX* za oś *X*.

Zbadajmy teraz wycinek kuli *MNOP* (rys. 339). Jeżeli naprężenie styczne w kierunku południka nazwiemy *t*, to gdy długość łuku wynosi $ds = xdw$, siła na *PMNO* wynosi $txdw$.

Na *PM* i *ON* działają ciśnienia obwodowe na jednostkę *o*, więc na *ds* ods . Oprócz tego działa obciążenie $pds \cdot x \cdot dw$. Z rysunku widzimy, że

$$Hds = 2 ods \operatorname{wst} \frac{dw}{2},$$

a że *w* jest bardzo małym, więc

$$\operatorname{wst} \frac{dw}{2} = \frac{dw}{2},$$

zatem

$$Hds = ods \cdot dw.$$



rys. 345.

Dla półkuli jest na równiku $\varphi = \frac{\pi}{2}$, więc

$$t_{\frac{\pi}{2}} = -pr, \quad o_{\frac{\pi}{2}} = +pr. \quad \dots \dots \dots 705)$$

Zatem na równiku jest ciśnienie południkowe dwa razy większem, niż w kluczu, zaś naprężenie obwodowe jest dodatnie, rozciąganie, co do wielkości równe naprężeniu południkowemu.

Dla pewnego kąta φ_1 staje się $o=0$. Z równ. 703) otrzymamy $0 = -pr \frac{\text{dost } 2 \varphi_1 + \text{dost}^3 \varphi_1}{1 + \text{dost } \varphi_1^3}$, a stąd $\text{dost } \varphi_1 = 0,618$

$$\varphi_1 = 51^{\circ}50' \dots \dots \dots 706)$$

A zatem dla kątów φ mniejszych, niż φ_1 , powstają ciśnienia obwodowe, dla większych, niż φ_1 , ciągnięcia.

Powyższe wyniki dadzą się więc zastosować tylko wtedy, gdy ciągnięcia tak wielkie są możliwe. Jeżeli mamy do czynienia z banią murowaną z kamienia lub cegły, nie możemy dopuścić wcale ciągnięcia, zatem albo ciągnięcie musimy znieść pierścieniem żelaznym albo też pogrubić przekrój bani tak, aby linja ciśnienia w dolnej części, nie wpadając wprawdzie w oś, jednak nie wychodziła z jądra przekroju.

§ 151. Wykreślne wyznaczenie naprężeń w bani.

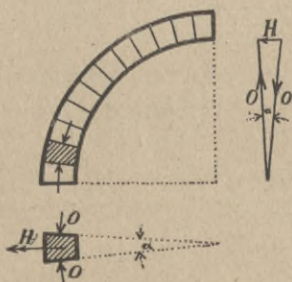
Na powyższej podstawie wyznaczmy teraz wykreślnie linję ciśnienia i naprężenie obwodowe w bani.

Jeżeli wytniemy z bani wycinek płaszczyznami pionowymi, przechodzącymi przez oś bani, a odchyłonymi o bardzo mały kąt α , to siły obwodowe O (rys. 346), działające z obu stron, dają wypadkową H . Wielkość jej otrzymamy z wieloboku sił, z którego widzimy, że

$$H = 2 O \text{ wst } \frac{\alpha}{2} \dots \dots 707)$$

Z równania tego wyznaczmy α , dla którego $H=O$, a mianowicie

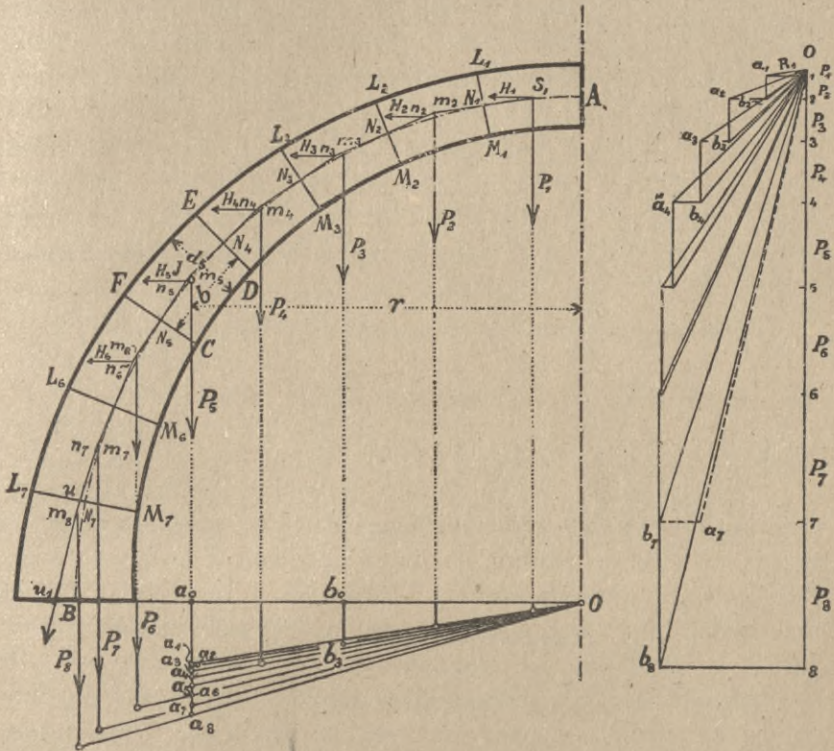
$$2 \text{ wst } \frac{\alpha}{2} = 1, \text{ a stąd } \alpha = 60^{\circ}.$$



rys. 346.

Jeżeli więc obliczać będziemy ciężary wycinka dla $\frac{1}{8}$ okręgu koła, to H , które z konstrukcji otrzymamy, będzie równem O , ciśnieniu obwodowemu.

Na rysunku 346 wykreśliśmy w przybliżeniu linię ciśnienia w następujący sposób. Szwami, stojącymi prostopadle na linii środ-



rys. 346.

kowej, a których oddalenia b , mierzone na tej linii, są równe podzieliśmy najprzód połowę przekroju bani na 8 części. Objętość pierścienia, utworzonego ruchem obrotowym powierzchni $CDEF$ około osi AO , jest według twierdzenia Guldina równą powierzchni $CDEF$, pomnożonej przez drogę środka ciężkości J , a więc, gdy grubość pierścienia $=d$, a odległość punktu J od osi $=r$, to objętość równa się $bd2r\pi$.

Ciężar $\frac{1}{8}$ pierścienia będzie więc:

$$P_5 = \frac{1}{6} \gamma b d 2 r \pi = \frac{\gamma b d r \pi}{3}, \dots \dots 708)$$

jeżeli γ jest ciężarem jednostki sześcienniej.

Podobnie możemy obliczyć wszystkie inne ciężary, albo możemy też resztę ciężarów wyznaczyć wykreślnie w następujący sposób. Z równania 708) widzimy, że ciężary P są proporcjonalne dla stałego b do d i r . Przyjmijmy taką podziałkę sił, ażeby $d_5 = a_0 a_5 = P_5$ i odetnijmy od a_0 wszystkie długości d na prostej $a_0 a_5$. Tak otrzymane punkty połączymy z O , to punkty przecięcia się z pionowemi, poprowadzonymi ze środków ciężkości odnośnych powierzchni, wyznaczają nam ciężary P . Np. dla wyznaczenia P_3 odcinamy $a_0 a_3$, równe grubości trzeciego pierścienia, spuszczaemy ze środka ciężkości pionową, łączymy a_3 z O , a długość b b_3 przedstawia ciężar P_3 . Z konstrukcji bowiem wypada, że $a_0 a_3 : b_0 b_3 = O a_0 : O b_0$, więc

$$b_0 b_3 = a_0 a_3 \frac{O b_0}{O a_0} = \frac{d_3 r_3}{r_6}, \text{ a że } d_3 r_3 : d_5 r_5 = P_3 : P_5, \text{ więc}$$

$$d_3 = \frac{d_5 r_5 P_3}{r_3 P_5}, \text{ a zatem } b_0 b_3 = \frac{d_5 r_5 P_3}{r_3 P_5} \cdot \frac{r_3}{r_6} = \frac{d_5 P_3}{P_5}.$$

Jeżeli więc zrobimy $d_5 = P_5$, to $b_0 b_3 = P_3$.

Wyznaczywszy w ten sposób wszystkie ciężary P , wykreślamy wielobok sił i kreślimy linię ciśnienia, przypuszczając, że wpada, o ile to możliwem, na linię środkową. Wypadkowa z ciężaru i ciśnień obwodowych w pierwszym pierścieniu ma więc przechodzić przez środek szwu $L_1 M_1$, a więc mieć kierunek $S_1 N_1$. Jeżeli w wieloboku sił zrobimy $O a_1$, równoległe do $S_1 N_1$, to $a_1 1 = H_1$. Prosta $S_1 N_1$ przecina P_2 w punkcie m_2 , do siły R_1 przychodzi tu siła P_2 , wypadkowa tych sił jest $O b_2$. Z punktu m_2 kreślimy więc $m_2 n_2 // O b_2$ aż do przecięcia się z siłą H_2 , która musi być tak wielką, aby wypadkowa wszystkich sił przechodziła przez N_2 , a więc miała kierunek $n_2 N_2$. Wykreśliwszy $O a // n_2 N_2$, otrzymamy wielkość tej wypadkowej, przyczem $H_2 = b_2 a_2$. Podobnie postępujemy dalej, $n_2 N_2$ przedłużamy do siły P_3 do punktu m_3 , kreślimy $m_3 n_3 // O b_3$ i rysujemy $n_3 N_3$ aż do m_4 . W wieloboku sił robimy $O a_3 // n_3 N_3$ a $H_3 = b_3 a_3$. W ten sam sposób postępujemy dopóty, aż z konstrukcji wypadłaby siła H ujemna, jak na przykład tu $H_7 = -b_7 a_7$. Ponieważ jednak, jeżeli na wytrzymałość zaprawy zważać nie będziemy, mur nie może pracować na ciągnięcie, więc przypuszczamy, że w tym pierścieniu $H_7 = 0$, a zatem,

że niema tu żadnych ciśnień obwodowych. Wskutek tego jednak wypadkowa $R_7 = Ob_7$, a nie Oa_7 , zaś linja ciśnienia oddala się od linii środkowej, gdyż zrobiwszy $m_7u // Ob_7$, nie przetniemy szwu L_7M_7 we środku, lecz w punkcie u obok środka N_7 . Prosta m_7u przedłużamy aż do m_8 , punktu przecięcia się z P_8 . I tu także ciśnienie obwodowe przypuszczamy równe zeru, a stąd otrzymujemy $R_8 = Ob_8$, a ostatni bok wieloboku sznurowego $m_8u_1 // Ob_8$. Jeżeli u_1 leży w średniej trzeciej części sklepienia, jeżeli wypadkowa na jakikolwiek szew nie jest więcej odchyloną od prostopadłej na szew, niż kąt tarcia wynosi, a ciśnienie nie przekracza dozwolonej granicy, wtedy równowaga jest zapewnioną i w całej bani panuje tylko ciśnienie. Jeżeli zaś linja ciśnienia wychodziła ze średniej trzeciej części przekroju, to albo musielibyśmy pogubić banię w tem miejscu lub też obręczami żelaznemi znieść ciągnienie obwodowe, któreby w dowolnej części bani powstało, gdyby linja ciśnienia i tam nie zbaczała od osi. Jeżeli ciężary obliczaliśmy wedle 708, to otrzymane H dają nam wprost O , ciśnienia obwodowe.

W rysunku 342 przyjęliśmy grubość bani, wzrastającą ku dołowi, gdybyśmy przyjęli ją równą, linja ciśnienia wypadłaby o wiele niekorzystniej, a punkt, w którym ciśnienia obwodowe stają się równe zeru, wypadłby wyżej. Dlatego należy przyjmować grubość sklepienia w kluczu małą i zwiększać ją ku dołowi.

§ 152. Sklepienie klasztorne.

Sklepienie, powstające z przecięcia się dwóch sklepień kołbkowych o równej strzałce, których podniebienia w żyle tworzą kąt wklęsły, nazywamy sklepieniem klasztorne (n. *Klostergewölbe*, fr. *voûte cloisonée*, *voûte en arc de cloiture*, an. *crored vault*).

Obliczenie dokładne sklepienia takiego jest bardzo trudnem i dotychczas zadanie to pozostało nierozwiązaniem. Podamy tu według Foeppla tylko niektóre wskazówki, jakby można w przybliżony sposób wykreślić linję ciśnienia w sklepieniu klasztorne. Przypuściwszy sklepienie założone na wieloboku regularnym, symetryczne i symetrycznie obciążone, dojdziemy do wniosku, że z powodu symetrii w płaszczyznach żył powstają tylko naprężenia

normalne, więc ponieważ płaszczyzny te są pionowe, naprężenia będą poziome. Ciśnienia te, które działają poziomo na części sklepienia klasztornego w żyłach, nazywamy ciśnieniami żyłowemi (n. *Gratspannung*). Ciśnienia te, działające na jedną część sklepienia klasztornego, ograniczoną dwiema żyłami, składają się, a wypadkowa działa w płaszczyźnie, ją połówiącej.

Widzimy więc, że teoria sklepień klasztornych podobną jest do teorji sklepień baniastych i rzeczywiście bania jest właściwie sklepieniem klasztornem, założonem na wieloboku o nieskończonej ilości boków czyli na kole. Ciśnienia żyłowe odpowiadają ciśnieniom obwodowym w bani, ta tylko zachodzi tu różnica, że gdy tam ciśnienia obwodowe były w tym samym pierścieniu stałe, tu nie wiemy dokładnie, jak się ciśnienia żyłowe rozdzielają w kierunku poziomym.

W płaszczyźnie, połówiącej części sklepienia, zawarte między dwiema żyłami, kreślimy więc zupełnie w ten sam sposób, jak dla bani, linją ciśnienia, przyjmując z początku, że linja ciśnienia wpada w oś, potem, aby uniknąć ciągnięcia, odступujemy od tego przypuszczenia i przyjmujemy naprężenia żyłowe, równe zeru.

Ta linja ciśnienia nie powinna wychodzić z jądra i czynić zadość i drugim dwom warunkom równowagi.

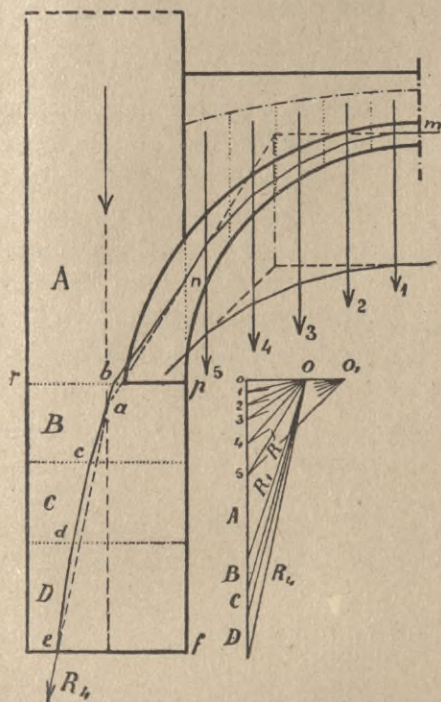
XII. Przyczółki, filary i kominy.

§ 153. Linja ciśnienia.

Budowlę, na której opiera się sklepienie lub jakakolwiek inna belka, nazywamy w budowie mostów przyczółkiem (n. *Widerlager*, fr. *culée*, *abutement*, an. *land pier*, r. *береговой устой*). Jeżeli na budowli takiej opierają się z dwóch stron sklepienia lub inne belki, nazywamy ją filarem (n. *Pfeiler*, fr. *pilier*, *pile*, an. *pier*, r. *столбъ*). W budownictwie często opiera się sklepienie o ścianę murowaną, która tu zastępuje miejsce przyczółka. Warunki równowagi przyczółka, filaru kamiennego lub ściany są te same, co sklepienia; dla zbadania więc równowagi najlepiej wykreślić linję ciśnienia.

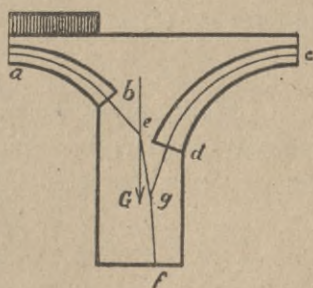
Na rysunku 347 wykreśliliśmy linię ciśnienia w ścianie w następujący sposób. Najprzód wyznaczaliśmy w zwykły sposób przybliżony linię ciśnienia mn w sklepieniu i otrzymaliśmy parcie ukośne R , działające w punkcie n na ścianę. Następnie podzieliśmy ścianę na warstwy poziome i obliczyli ciężary warstw A, B, C i D . Parcie R przecina się z kierunkiem ciężaru A w punkcie a i daje wypadkową R_1 , która przecina szew pr w punkcie b . Z siłą R_1 składamy teraz ciężar B , otrzymujemy R_2 , którą to siła działa na następny szew w c . Podobnie otrzymujemy siły R_3 i R_4 , działające w punktach d i e . Punkty te połączone dają linię ciśnienia bcd , która jak widzimy, w tym wypadku wychodzi z trzeciej części przekroju, w kraweść dzi f powstanie więc ciągnienie. Chcąc temu zapobiec, musielibyśmy powiększyć grubość ściany u podstawy.

Podobnie postępujemy w celu wykreślenia linii ciśnienia w filarze (rys. 348). Jeżeli oba sklepienia, opierające się na filarze, są równe i równo obciążone, to parcie ukośne, składając się, dają wypadkową pionową, filar wtedy obciążonym jest tylko pionowo. Jeżeli zaś sklepienia są nierówne, leżą nie w tej samej wysokości, lub są nareszcie nierówno obciążone, jak tu, to musimy wykreślić dla obu sklepień osobno linje ciśnienia ab i cd , mur podzielić na warstwy po-



rys. 347.

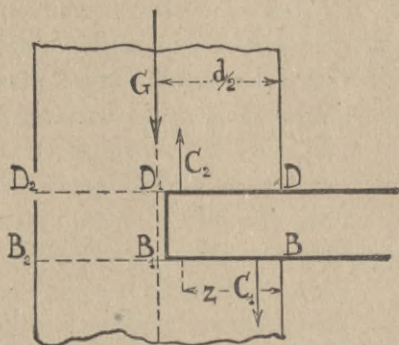
śnienia w filarze (rys. 348). Jeżeli oba sklepienia, opierające się na filarze, są równe i równo obciążone, to parcie ukośne, składając się, dają wypadkową pionową, filar wtedy obciążonym jest tylko pionowo. Jeżeli zaś sklepienia są nierówne, leżą nie w tej samej wysokości, lub są nareszcie nierówno obciążone, jak tu, to musimy wykreślić dla obu sklepień osobno linje ciśnienia ab i cd , mur podzielić na warstwy po-



rys. 348.

ziome i składać ciśnienia ukośne z ciężarami warstw muru, jak poprzednio. W ten sposób otrzymalibyśmy linią ciśnienia *be*, która, jak widzimy, nie wychodzi tutaj z jądra przekroju.

§ 154. Wmurowanie belki wspornikowej.

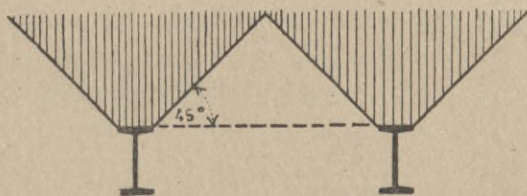


rys. 349.

Jeżeli belka jest jednym końcem utwierdzoną w ścianie, to moment utwierdzenia M_0 w punkcie *B* (rys. 349) obliczamy wedle § 14. Aby utwierdzenie zupełne belki w murze było możliwem, musi być moment muru nad belką *G* ze względu na *B* większym, niż $C_2 z$

$$\text{a więc } G \frac{d}{2} > C_2 z, \quad (709)$$

jeżeli *d* oznacza grubość muru. Ciężar muru, działającego na belkę *G*, obliczamy, nie uwzględniając spójności muru i przyjmując rozdział ciśnienia pod 45° (rys. 350).



rys. 350.

Jeżeli koniec wmurowany belki jest dostatecznie sztywny, możemy przyjąć, że ciśnienia belki na mur i odwrotnie rozdzielają się wedle linii prostej. Otrzymamy więc (rys 351)

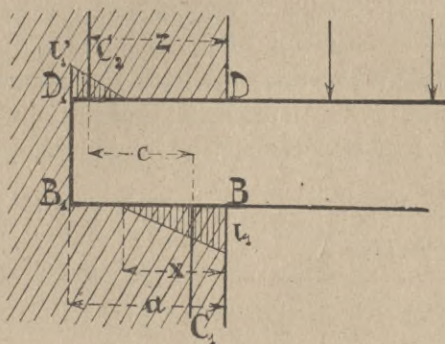
$$C_1 = C_2 + Q, \text{ albo } b \frac{\tau_2 x}{2} = b \frac{\tau_1 (a-x)}{2} + Q \quad (710)$$

jeżeli *Q* oznacza siłę poprzeczną *DB*, równą sumie wszystkich ciężarów na belce, a *b* szerokość belki. Podobnie

$$M_0 + b \frac{\tau_2 x^2}{6} = b \frac{\tau_1 (a-x)}{2} \left(\frac{2}{3} (a-x) + x \right) = \frac{b \tau_1 (a-x)}{6} (2a + x)$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{a-x}{x}$$

Wreszcie otrzymamy (rys. 335)



rys. 351.

$$M_0 = C_2 c = \frac{2}{3} C_2 a, \text{ więc } C_2 = \frac{3 M_0}{2 a} \dots \dots \dots 711)$$

Z równ. 710) otrzymamy

$$\frac{\tau_2 x}{\tau_1 (a-x)} = 1 + \frac{2 Q}{b \tau_1 (a-x)} = \frac{x^2}{(a-x)^2}, \text{ a stąd}$$

$$\frac{x^2}{(a-x)^2} = 1 + \frac{2 a Q}{3 M_0}$$

$$\text{Nazwijmy } m = \sqrt{1 + \frac{2 a Q}{3 M_0}}, \dots \dots \dots 712)$$

to otrzymamy

$$x = \frac{a m}{1+m} \dots \dots \dots 713)$$

Dalej otrzymamy

$$\tau_2 = \frac{2 C_1}{b x} = \frac{2}{b x} \left(\frac{3 M_0}{2 a} + Q \right) \dots \dots \dots 714)$$

$$\tau_1 = \frac{2 C_2}{b (a-x)} = \frac{3 M_0}{a b (a-x)}$$

Müller*) dochodzi do następujących wzorów, jeżeli $M_0 = Q \xi$

*) Über das elastische Verhalten eingespannter Stäbe in der Einspannungsstrecke Öst. Woch. f. d. offen. Band 1918, str. 226.

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{2Q}{a^2} (2a + 3\xi) \\ \tau_1 &= \frac{2Q}{a^2} (a + 3\xi), \quad x = \frac{a}{3} \frac{2a + 3\xi}{a + 2\xi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 715)$$

$$a = \frac{2Q}{\tau_2} + \sqrt{\frac{2Q}{\tau_2} \left(\frac{2Q}{\tau_2} + 3\xi \right)} \dots \dots \dots 716)$$

Jeżeli pręt jest gibki, a a wielkie, to rozkład ciśnienia jest inny. Müller podaje sposób obliczenia naprężeń, nieprzydatny zresztą do praktyki z powodu nieznamości współczynników.

To są jednak tylko naprężenia wskutek utwierdzenia belki. Oprócz tego powstają jeszcze naprężenia wskutek siły G (rys. 349).

Na przekrój BB_2 działa siła G i C_2 czyli moment $C_2 \left(\frac{d}{2} - z \right) = M'$ i siła podłużna $N' = G - C_2$.

$$\text{Mamy dalej } z = x + \frac{2}{3}(a - x) = \frac{x + 2a}{3},$$

$$M' = \frac{3M_0}{2a} \left(\frac{d}{2} - \frac{x + 2a}{3} \right) = \frac{M_0}{4a} (3d - 4a - 2x) \dots 717)$$

$$N' = G - \frac{3M_0}{2a} \dots \dots \dots 718)$$

a naprężenia włókien skrajnych w B_2 i B

$$\left. \begin{aligned} \text{w } B \quad \tau' &= \frac{N'}{bd} - \frac{6M'}{bd^2} \\ \text{w } B_2 \quad \tau'' &= \frac{N'}{bd} + \frac{6M'}{bd^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 719)$$

Największe ciśnienie będzie w B , mianowicie

$$\tau = \tau_2 + \tau'' \dots \dots \dots 720)$$

Gdyby to ciśnienie było na mur za wielkiem, trzeba by użyć podkładek żelaznych, któreby je rozłożyły na większą szerokość b_1 .

Przykład. Przypuśćmy, że obliczyliśmy w danym wypadku moment w B i że $M_0 = 1,2 \text{ tm}$, $Q = 1,5 \text{ t}$ a ciężar muru, nad belką spoczywającego, $G = 10 \text{ t}$. Jeżeli grubość muru wynosi 60 cm , a belka sięga przez połowę grubości, to wedle 711)

$$C_2 = \frac{3 \cdot 120000}{2 \cdot 30} = 6000 \text{ kg,}$$

a $C_1 = C_2 + Q = 60000 + 1500 = 7500 \text{ kg}$. Z równ. 713) otrzymamy dla

$$m = \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30 \cdot 1500}{3 \cdot 120000}} = 1,118, \quad x = \frac{30 \cdot 1,118}{1 + 1,118} = 15,8 \text{ cm,}$$

$$\text{a wreszcie } z = \frac{15 \cdot 8 + 2 \cdot 30}{3} = 25 \cdot 3 \text{ cm.}$$

Jeżeli przyjmiemy dla muru ceglanego na cemencie $\tau = 12 \text{ kg/cm}^2$, to we dle 639)

$$b = \frac{2 \cdot 7500}{12 \cdot 15 \cdot 8} = 79 \cdot 1 \text{ cm.}$$

Widzimy, że szerokość byłaby tu za wielką, aby ją zmniejszyć, przyjmijmy, że belka sięga przez całą grubość muru, a wtedy $b = 60 \text{ cm}$. $C_2 = 3000 \text{ kg}$
 $C_1 = 4500 \text{ kg}$, $m = 1 \cdot 225$, $x = 33 \text{ cm}$, $z = 51 \text{ m}$

$$b = \frac{2 \cdot 4500}{12 \cdot 33} = 22 \cdot 8, \text{ zamiast czego przyjmiemy } b = 30 \text{ cm.}$$

Naprężenia przeto z powodu utwierdzenia wynoszą

$$\text{w } B \quad \tau_2 = \frac{2 \cdot 4500}{30 \cdot 33} = 9,5 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{a w } D_1 \quad \tau_1 = \frac{2 \cdot 3000}{30 \cdot 27} = 7,4 \text{ kg/cm}^2.$$

Zbadać jeszcze wypada, czy zamurowanie obejdzie się bez zakotwienia.

Wedle równ. 709) winno być $G \frac{d}{2} > C_3 z$. Jakoż w naszym przypadku $10 \cdot 0,30 + 3 \cdot 0,51 = 1,47 \text{ tm}$. Ta wartość jest dodatnia i przedstawia dostateczną pewność, że mur nie zostanie wyrwany.

Do naprężeń, z powodu utwierdzenia powstałych, trzeba dodać pochodzące od sił G i C_2 . Wedle równ. 717)

$$M' = 3000 (30 - 51) = -63000 \text{ kgcm},$$

siła podłużna $N' = G - C_2 = 10000 - 3000 = 7000 \text{ kg}$, a wreszcie naprężenie włókien skrajnych wedle równ. 719)

$$\text{w } B \dots \tau' = \frac{7000}{30 \cdot 60} - \frac{6 \cdot 63000}{30 \cdot 60^2} = 3,9 - 3,5 = 0,4 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{w } B_2 \dots \tau'' = 3,9 + 3,5 = 7,4 \text{ kg/cm}^2.$$

Jeśli te wartości dodamy do powyższych, z powodu utwierdzenia samego wywołanych, otrzymamy naprężenie sumaryczne

$$\text{w } B \dots \tau_B = \tau_2 + \tau' = 9,5 + 0,4 = 9,9 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{zaś w } B_2 \dots \tau_{B_2} = \tau_2 + \tau'' = 7,4 + 7,4 = 14,8 \text{ kg/cm}^2.$$

Cisnienie w B_2 wypadło za duże. Z tego wynika, że trzeba użyć szerszego ciosu, a więc $b = 40 \text{ cm}$.

$$\text{Jakoż wtedy } \tau_B = 14 \cdot 8 \cdot \frac{30}{40} = 11,1 \text{ kg/cm}^2.$$

§ 155. Linje wyznacznice przekroju prostokątnego.

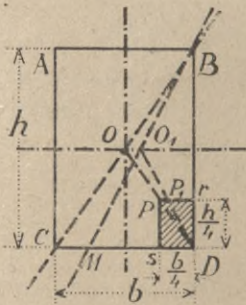
Gdy na przyczółek lub filar działa siła ukośna (§ 153), środek ciśnienia, jak wiemy, oddala się od środka przekroju: zastosować tu więc musimy prawidła wytrzymałości złożonej, o której

naprężeń. Przekroje pionowe bryły naprężeń równoległe do MN są prostokątami, środek ich ciężkości leży w środku, więc P leżąc musi na środkującej OD . Przekroje pionowe równoległe do MD i ND są trójkątami, środek ciężkości leży w jednej trzeciej wysokości, a więc dla danego punktu p jako środka ciśnienia otrzymamy oś obojętną, kreśląc pm i pn , robiąc $pm=2t$ i $pn=2u$ i łącząc m i n . Odwrotnie jeżeli mamy oś obojętną MN , a chodzi o wyznaczenie środka ciśnienia, to zróbmy $M_1D=\frac{1}{3}MD$ i połączmy M_1 z N . Na linii M_1N leżą środki ciężkości przekrojów równoległych do MD . Środek ciśnienia leży więc w p na przecięciu się prostych NM_1 i OD . Możemy też udowodnić, że $Op=$
 $=pD$, bo $Dp=\sqrt{u^2+t^2}$, a $Op=\frac{pR}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2t)^2+(2u)^2}=\sqrt{u^2+t^2}=$
 $=Dp$. Z powodu, że $Opn\sim ODN$, jest $DN:2u=OD:Op$, więc

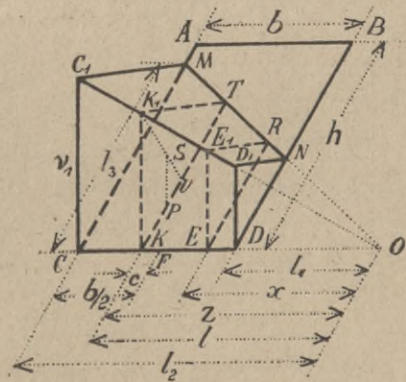
$$DN=\frac{2u \cdot OD}{Op}=4u,$$

podobnie mamy też $MD=4t$.

Środek ciężkości trójkąta MND leży w S w prostej OD w odległości $\frac{OD}{3}$ od MN , nazwijmy v_0 naprężenie w środku ciężkości, to według równania 421)



rys. 353.



rys. 354.

$$v_0 = \frac{P}{\frac{1}{2} 4u \cdot 4t} = \frac{P}{8ut}, \text{ a więc naprężenie w } D$$

$$v_1 = \frac{3P}{8ut} \dots \dots \dots 721)$$

Chcąc wyznaczyć linje wyznacznice dla tego przypadku, za-
stanowimy się nad wypadkiem granicznym, gdy obojętna ma po-
łożenie CB (rys. 353). Łatwo znajdziemy odnośny środek ciśnie-
nia w punkcie p , robiąc $Op = pD$. Jeżeli obojętna obraca się
około B i przyjdzie w położenie BM , to p_1 znajdziemy, poło-
wiąc MB , a potem połowiąc O_1D . Z konstrukcji tej wynika, że
gdy obojętna obraca się koło B z położenia BC aż do
 BD , to środek ciśnienia porusza się po linii $pr \parallel CD$, przyczem
 $Dr = \frac{h}{4}$. Jeżeli podobnie obojętna obraca się około C , to p
porusza się na $ps \parallel BD$. Takie same prostokąty otrzymamy we
wszystkich rogach przekroju, w jednym z nich leżeć musi środek
ciśnienia, jeśli obojętna ma odcinać trójkąt.

2. Oś obojętna odcina czworobok (rys. 354).

Tu bryła naprężeń jest ostrosłupem ściętym, którego wierz-
chołkiem jest punkt O . Przetnijmy ją płaszczyzną pionową ró-
wnoległą do AC w odległości x od O , otrzymamy trójkąt EE_1R ,
którego powierzchnia

$$F = \frac{1}{2} EE_1 \cdot ER = \frac{1}{2} \frac{\nu_1 x}{l_2} \cdot \frac{l_3 x}{l_2} = \frac{\nu_1 l_3 x^2}{2 l_2^2}.$$

Objętość ostrosłupa ściętego jest więc

$$P = \frac{\nu_1 l_3}{2 l_2^2} \int_{l_1}^{l_2} x^2 dx = \frac{\nu_1 l_3 (l_2^3 - l_1^3)}{6 l_2^2}.$$

a stąd

$$\nu_1 = \frac{6 P l_2^2}{l_3 (l_2^3 - l_1^3)} \dots \dots \dots 722)$$

Jeżeli przez środek ciężkości bryły naprężeń S poprowadzimy
płaszczyznę pionową, równoległą do AC , to możemy napisać

$$\frac{l \nu_1 l_3 (l_2^3 - l_1^3)}{6 l^2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\nu_1 l_3 x^3}{2 l_2^2} dx, \text{ a stąd}$$

$$= \frac{3}{4} \frac{l_2^4 - l_1^4}{l_2^3 - l_1^3} \dots \dots \dots 723)$$

Długość KP łatwo wyznaczymy, gdyż $KU = \frac{1}{2} KT$, a $UP =$
 $= \frac{1}{3} KU$, więc

$$KP = \frac{KT}{3} = \frac{l_3 l}{3 l_2} \dots \dots \dots 724)$$

Dla danej obojętnej MN mamy też dane l_1 , l_2 i l_3 , mo-
żemy więc łatwo wyznaczyć środek ciśnienia P . W odwrotnym

wypadku, t. j. gdy dany środek ciśnienia P , więc i długość $KF = c$, najlepiej będzie przyjąć dowolnie O , a więc l_1 i l_2 , a stąd obliczyć według równ. 723) l . Po niewielu próbach znajdziemy prawdziwy punkt O , dla którego l odpowiada danemu punktowi P . Długość l_3 obliczamy potem z równ. 724), a v_1 z równ. 722). Można też punkt O wprost wyznaczyć:

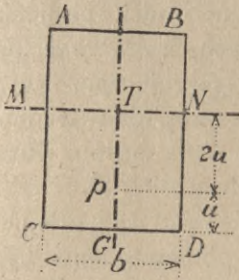
Barkhausen otrzymuje wzór następujący

$$z = \frac{b}{12c} (b + b\sqrt{b^2 - 12c}) \dots 725)$$

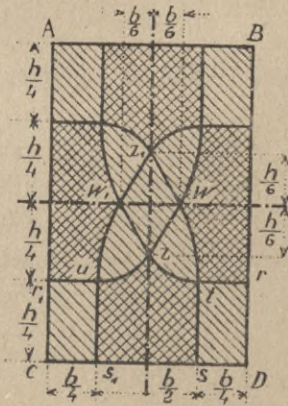
Gdy $c = 0$, tj. gdy P leży w osi głównej (rys. 355), $z = \infty$, a więc obojętna jest równoległa do CD , a według 724)

$GP = \frac{1}{3} GT$, wtedy największe naprężenie w $CD = v_1$. Bryła naprężeń jest wtedy graniastosłupem trójkątnym, więc $P = v_1 b \cdot \frac{1}{3} GT = \frac{v_1 3_1 u b}{2}$; stąd

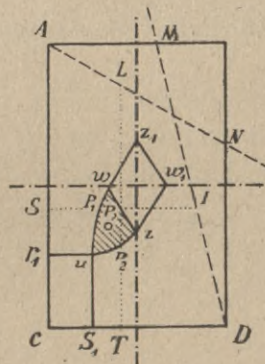
$$v_1 = \frac{2P}{3ub} \dots \dots \dots 726)$$



rys. 355.



rys. 356.



rys. 357.

Widzimy więc, że w tym wypadku najw. ciśnienie v_1 jest dwa razy tak wielkie, niżby było gdyby P się rozdzieliło równo na powierzchnię $MNDC = 3ub$.

Linie wyznacznice, które możemy wyznaczyć podobnie, jak poprzednio, są w tym wypadku krzywe uz i zt i proste ts , ss_1

i $s_1 u$ (rys. 356), pięcioboków takich krzywoliniowych otrzymamy cztery przy wszystkich bokach przekroju. Krzywe uz i zt są styczne do poziomych $r_1 u$, względnie rt i linii jędrnych $w_1 z$, względnie wz .

3. Oś obojętna odcina pięciobok. Środek ciśnienia znajduje się wtedy w trójkątach krzywoliniowych uwz , tzw itd. (rys. 357), które nam jeszcze z całego przekroju pozostały. Dokładne wyznaczenie naprężeń jest w tym wypadku trudne, w przybliżeniu jednak licząc, postępujemy w ten sposób. Rozkładamy siłę P , działającą w punkcie P na dwie siły P_1 i P_2 , działające w liniach wyznacznych, przyczem $P_1 P_2 \parallel wz$. Ponieważ P_1 leży na linii wyznacznej, więc oś obojętna musi być w położeniu granicznym między przypadkiem, gdy odcina czworobok lub pięciobok, a więc przechodzi przez wierzchołek D . Zastosowując wyniki otrzymane w poprzednim przypadku (równ. 724), zrobimy $P_1 I \parallel CD$ i $SI = 3SP_1$, więc DM jest osią obojętną dla siły P_2 . Największe naprężenie będzie tu oczywiście w wierzchołku C , obliczamy je dla siły P_1 i P_2 osobno według równania 722) i dodajemy wyniki. Dokładniej wyznaczyć możemy naprężenia sposobem ogólnym, który później podamy.

§ 156. Przekrój nieregularny. Siła działa w osi głównej.

Przypuśćmy, że siła działa w osi głównej XX (rys. 358) w E , to oś obojętna MN będzie prostopadłą do osi. Wtedy mamy analogicznie do równ. 419 i 422) $P = \iint \nu d^2 F = \alpha \iint u d^2 F = \alpha S_t$ i $Pu_1 = \alpha I$, gdy S_t i I_t oznaczają moment statyczny i bezwładności skutecznej (tu ciśnionej) powierzchni przekroju ze względu na oś obojętną.

Stąd wynika
$$u_1 = \frac{I_t}{S_t} \dots \dots \dots 727)$$

Z rysunku widzimy, że dla danego c możemy wyznaczyć odstęp osi obojętnej $b_1 = c + u_1 = c + \frac{I_t}{S_t}$.

Jeżeli jednak przekrój jest nieregularnym, to wyznaczenie I_t i S_t jako całek przedstawia znaczne trudności i zwykle uciekamy się wtedy do sposobu wykreślnego.

Przypuśćmy, że mamy dane położenie osi obojętnej MN . Podzielmy powierzchnię skuteczną (tu kreskowaną) na paski, oznaczmy powierzchnie ich, wykreślmy wielobok sił i dla dowolnego bieguna O wielobok sznurowy. Jeżeli przedłużymy prawy bok skrajny do pionowej przez MN , to wedle równ. 5) moment statyczny powierzchni skutecznej ze względu na MN jest

$$S_t = m \cdot h = F_1 \cdot z \dots 728)$$

zaś moment bezwładności

$$I_t = 2 h \text{ pow. } G 9,8 \dots 1 L = 2 h \cdot F_1 \dots 729)$$

Wstawmy w równ. 727) wartości za I_t i S_t , to otrzymamy

$$u_1 = \frac{2 h F_1}{m h} = \frac{2 F_1}{m}$$

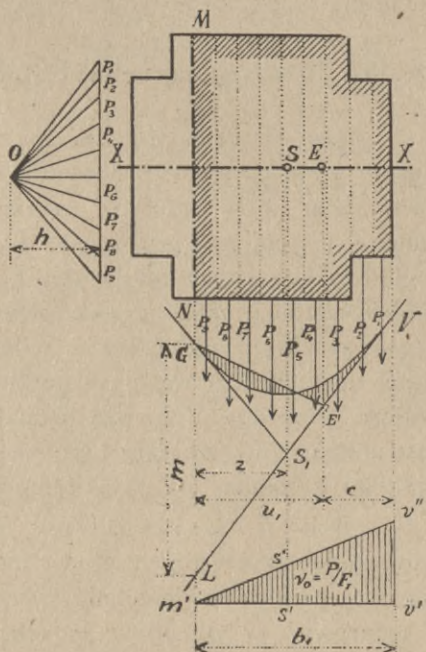
a stąd

$$F_1 = \frac{1}{2} m u_1 \dots 730)$$

Ale z rysunku widzimy) że $GE'L = \frac{1}{2} m u_1$, więc, $GE'L = F_1 = \text{pow. } G, 9,8, 7 \dots 1 L$. A zatem powierzchnia między wielobokiem sznurowym a prostymi GE' i $E'V$ jest równa zero. Jeżeli więc chcemy znaleźć środek ciśnienia E , to kreślimy taką prostą GE' , aby powierzchnia rzeczona, tu kreskowana, była równa zero czyli, żeby powierzchnie kreskowane poniżej i powyżej GG' były sobie równe.

Odwrotnie, jeżeli dany jest środek ciśnienia, a szukamy osi obojętnej, to dzielimy cały przekrój na paski i kreślimy wielobok sznurowy. Przedłużamy teraz prawy bok skrajny, znajdujemy E' na przecięciu się z pionową przez E i kreślimy z E' teraz taką prostą $E'G$, która wyrównywa powierzchnie. Pionowa przez G oznacza położenie osi obojętnej.

Naprężenie teraz łatwo wyznaczyć. Punkt S_1 przecięcia



rys. 358.

się boków skrajnych wyznacza położenie środka ciężkości powierzchni skutecznej. Naprężenie w S jest wedle 421) $\nu_0 = \frac{P}{F_t} = s's''$. Połączmy s'' z m' , a otrzymamy linię naprężenia i największe naprężenie $v'v''$.

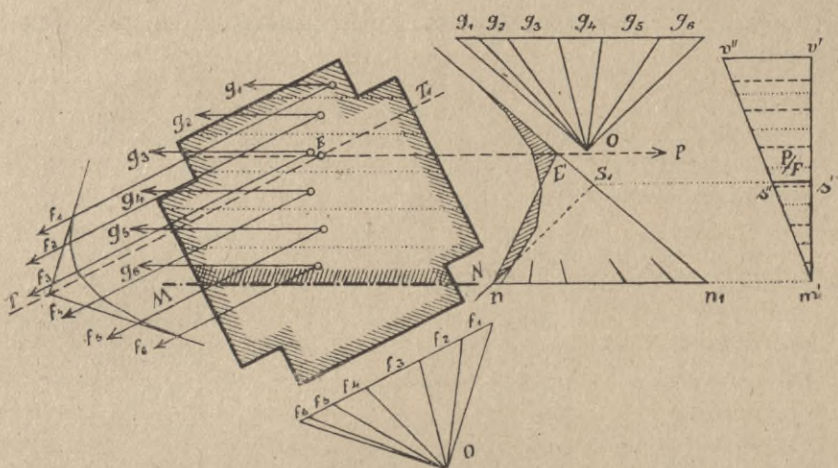
§ 157. Przekrój nieregularny, siła działa nie w osi głównej.

Jeżeli środek ciśnienia nie leży w osi głównej bezwładności, wyznaczenie osi obojętnej i naprężeń staje się trudniejszym. Jeżeli cały przekrój pracuje, to jak wiemy z § 66., kierunek osi obojętnej jest znany. Oś obojętą jest wtedy równoległą do osi elipsy środkowej bezwładności, sprzężonej do osi, poprowadzonej przez środek przekroju i środek ciśnienia. Gdy część przekroju nie pracuje, należałoby dla powierzchni skutecznej narysować nową elipsę środkową i do niej zastosować powyższe правило. Ponieważ jednak położenie osi obojętnej nie jest znanem, nie możemy tego uczynić. Tu więc nieznanym jest nie tylko kierunek, ale i położenie osi obojętnej.

Jeżeli oś obojętą MN jest daną (rys. 359), to powierzchnię skuteczną dzielimy na paski, w środkach ciężkości ich zaczepiamy powierzchnie $g_1, g_2 \dots g_n$, kreślimy wielobok sił i sznurowy i w podobny sposób, jak poprzednio, wyznaczamy przez wyrównanie powierzchni momentów punkt E' ; na prostej EE' , równoległej do osi obojętnej, leży więc środek ciśnienia E . Aby wyznaczyć dokładnie położenie punktu E , zauważmy, że $m'v''$ przedstawia linię naprężeń. Jeżeli więc każde g pomnożymy przez odnośne naprężenia, lub gdy boki pierwszego wieloboku przedłużymy do przecięcia się z kierunkiem MN , to odcinki przedstawiają nam siły f (na prostej nn_1). Możemy je też w dowolnej podziałce narysować. Gdy je wreszcie zapomocą wieloboku sznurowego złożymy, to otrzymamy, rozumie się, ten sam kierunek wypadkowej EE' . Jeżeli jednak zmienimy kierunek sił na równoległy do boków, to wielobok sił odnośny wyznaczy kierunek wypadkowej TT_1 , a punkt przecięcia się tych dwu kierunków środek ciśnienia E .

Jeżeli przeciwnie dany jest środek ciśnienia, a szukamy osi obojętnej, to możemy to zrobić tylko przez próby.

Przyjmujemy więc naprzód kierunek MN dowolnie, może równo-
egły do osi sprzężonych elipsy bezwładności środkowej całego
przekroju, dzielimy cały przekrój na paski i wyrównujemy
powierzchnię momentów, jak w poprzednim paragrafie. W ten
sposób znajdujemy położenie osi obojętnej MN . Teraz musimy
z badać, czy kierunek był dobrze obrany, kreślimy więc wie-
lobok sił i sznurowy f . Punkt przecięcia się boków skrajnych
wyznacza nam położenie wypadkowej TT_1 . Jeżeli kierunek MN
był dobrze dobrany, to TT_1 przechodzi przez E , jeśli zaś nie
przechodzi przez środek ciśnienia E , trzeba ten kierunek odpo-
wiednio zmienić. Po kilku próbach albo zapomocą konstrukcji



rys. 359.

podanej przez H ü p p n e r a *) dojdziemy do tego, że TT_1
przechodzi przez środek ciśnienia. Największe naprężenie jest
wtedy $v' v''$.

§ 158. Komin y fabryczne.

Powyższe wywody znajdują zastosowanie przy obliczeniu
wytrzymałości kominów fabrycznych.

Uwzględnić należy przy takim obliczeniu ciężar własny
i parcie wiatru. Ciężar własny C da się dla danego komin a

*) *Civilingenieur* 1885 str. 39. Patrz także Schepp: „Zur Ermittlung
den Druckvertheilung in Mauerwerksschnitten. *Centr. d. Bauverw.* 1889.

łatwo wyznaczyć, potrzeba tylko w obliczeniu uwzględnić dokładnie ciężar gatunkowy danego muru.

Przy stałej grubości g (rys. 360) dla piątra o wysokości h możemy wyznaczyć ciężar wedle średnich wymiarów D_s i d_s . Dla kominów okrągłych otrzymamy

$$C = \gamma \cdot \frac{\pi h}{4} (D_s^2 - d_s^2) = 0,7854 \gamma h (D_s^2 - d_s^2) \quad . \quad 731)$$

Dla kominów ośmiobocznych będzie

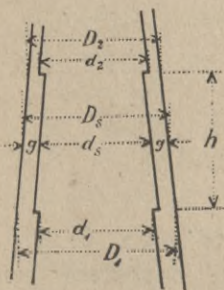
$$C = 0,8284 \gamma h (D^2 - d^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 732)$$

jeżeli D i d oznaczają średnice kół wpisanych dla przekroju średniego.

Ciążar właściwy γ należy przyjąć wedle rozporządzenia austr. min. handlu z r. 1902 dla muru z zwykłych cegieł nie więcej niż 1600 kg/m^3 , dla muru z zendrówek 1800 kg/m^3 . Większy ciężar można przyjąć tylko po zważeniu próbnem denego materiału.

Parcie wiatru należy tu przyjąć większe, niż przy zwykłych budowlach, z powodu wysokości, a także ze względu na powiększenie naprężeń z powodu wahań sprężystych i możliwego skrzywienia osi kominu. W Niemczech przyjmują zwykle $w = 125 \text{ kg/m}^2$, co jest za mało, w Austrii 150 kg/m^2 . Jednak z powyższych powodów radzi Göbel*) przyjmować parcie wiatru $w = 200 \text{ kg/m}^2$ w kierunku poziomym.

Z powodu, że powierzchnia kominu jest krzywą, parcie jest mniejsze, niżby wypadło na rzut pionowy kominu, a mianowicie współczynnik δ , którym pomnożyć mamy rzut, wynosi, jak o tem mówiliśmy w § 109., dla przekroju kołowego 0,848, dla ośmioboku 0,890, dla sześcioboku około 0,790.



rys. 360.

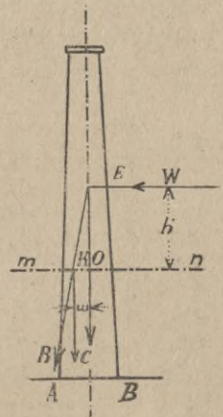
*) P. Göbel: *Standfestigkeit der Schornsteine. Zeitschrift des Vereines deutsch. Ingenieure.* 1898 str. 180.

Dla danego przekroju mn (rys. 361) należy wyznaczyć C, W i punkt zaczepienia parcia wiatru E , który leży w środku ciężkości przekroju pionowego, będącego trapezem. Gdy dwie te siły złożymy, otrzymamy wypadkową R , przecinającą przekrój w K . Tu uwzględniamy tylko składową pionową wypadkowej C , a gdy długość $OK = w$, otrzymamy

$$w = \frac{W}{C} h \dots \dots \dots 733)$$

Znając środek ciśnienia K i siłę C możemy wyznaczyć teraz naprężenie w przekroju mn . Badanie to przeprowadzić należy przede wszystkim dla wszystkich pięter, zaczynając od góry aż do podstawy AB , bo chociaż dla wyższych przekrojów siła W się zmniejsza, to zmniejsza się też i C a także i grubość ścian, mogą być więc czasem wyżej naprężenia większe.

Dla tak wielkiego parcia wiatru, jakie rzadko kiedy się może przytrafić, nie możemy żądać, aby linja ciśnienia nie wychodziła z jądra, z drugiej znów strony nie wystarcza też aby nie wychodziła z przekroju. Należy więc dopuścić wyjście jej z jądra, ale ciśnienie nie powinno przekraczać dozwolonej granicy, na ciągnięcie zaś wcale nie liczymy, przypuszczając, że szew się otworzy. Mamy więc wtedy wypadek, o którym mówiliśmy w dwu poprzednich paragrafach.



rys. 361.

Rozporz. austr. min. handlu z r. 1902
 przepisuje naprężenia dopuszczalne na ściskanie
 dla muru z cegieł zwykłych 8kg/cm²
 " " " zendrówek 12 kg/cm²
 jednakże przy użyciu zaprawy wapienno-cementowej, złożonej z 1 części
 cementu, 4 części wapna i 10 części ostrego piasku.

Naprężenie dopuszczalne na rozciąganie wynosić może
 dla komina do 30 m wysokości $\tau = 1,2 \text{ kg/cm}^2$
 " " o wysokości $H > 30 \text{ m}$ $\tau = 1,2 - 0,05(H - 30) \text{ kg/cm}^2$
 Oprócz tego należy wykazać dwukrotną pewność na wywrót komina.

Zająć tu mogą trzy przypadki. Przekrój może być a) okrągły, b) wieloboczny z dwiema osiami symetrii, c) całkiem nieregularny.

W wypadku b) postępować należy wedle § 156, w c) wedle § 157, dla wypadku a) K e c k*) obliczył tablice, które wyznaczenie naprężeń znacznie ułatwiają.

Rys. 362. przedstawia przekrój komina okrągłego, którego powierzch-

nia $F = (r^2 - r_1^2) \pi$ a $u_1 = \frac{I}{S}$

według 727). Jeżeli nazwiemy największe naprężenie w B ν , a średnie

$$\frac{C}{F} = \frac{C}{(r^2 - r_1^2) \pi} = \nu', \text{ to możemy}$$

napisać

$$\nu = \nu \cdot \nu' \dots \dots \dots 734)$$

a wartość współczynnika ν da się obliczyć.

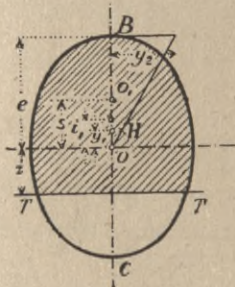
Goebel podaje dla współczynnika ν następną tabliczkę:

Tablica XLIX.

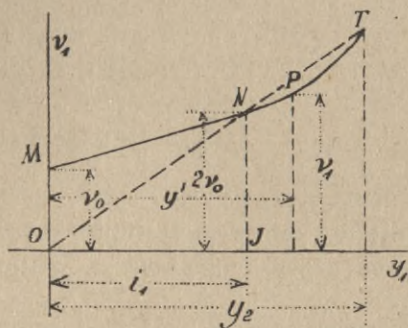
$\frac{w}{r}$	$\frac{r_1}{r}$						
	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	1,0	1,0	1,0	1,00	1,00	1,00	1,00
0,05	1,2	1,16	1,15	1,13	1,12	1,11	1,10
0,10	1,4	1,32	1,29	1,27	1,24	1,24	1,20
0,15	1,6	1,48	1,44	1,40	1,37	1,33	1,30
0,20	1,8	1,64	1,59	1,54	1,49	1,44	1,40
0,25	2,0	1,80	1,73	1,67	1,61	1,55	1,50
0,30	2,23	1,96	1,88	1,81	1,73	1,66	1,60
0,35	2,48	2,12	2,04	1,94	1,85	1,77	1,70
0,40	2,76	2,29	2,20	2,07	1,98	1,88	1,80
0,45	3,11	2,51	2,39	2,23	2,10	1,99	1,90
0,50	3,55	2,80	2,61	2,42	2,26	2,10	2,00
0,55	4,15	3,14	2,89	2,67	2,42	2,26	2,17
0,60	4,96	3,58	3,24	2,92	2,64	2,42	2,26
0,65	6,00	4,34	3,80	3,30	2,92	2,64	2,42
0,70	7,48	5,40	4,65	3,86	3,33	2,95	2,64
0,75	9,93	7,26	5,97	4,81	3,93	3,33	2,89
0,80	13,87	10,05	8,80	6,53	4,93	3,96	3,27
0,85	21,08	15,55	13,32	10,43	7,16	4,50	3,77
0,90	38,25	30,80	25,80	19,85	14,60	7,13	4,71
0,95	96,10	72,20	62,20	50,20	34,60	19,80	6,72
1,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

*) P. Keck: *Excentrische Druckbehandlung cylind. Mauerkörper. Zeit d. hann Ing. u. Arch. Verein.* 1882 str. 627.

Jäcker podaje też przybliżony sposób wyznaczenia wykreślnego największego ciśnienia*). Jeżeli siła P (rys. 363) zaczepia w H jeszcze w jądrze, to wedle 430) gdy i_1 nazwiemy promień jądrny, naprężenie w B



rys. 363.



rys. 364

$$\nu_1 = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_1}{F i_1} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_1}{i_1} \right) = \nu_0 \left(1 + \frac{y_1}{i_2} \right),$$

zaś w C

$$\nu_2 = \nu_0 \left(1 - \frac{y_1}{i_2} \right) \quad \dots \quad 735)$$

Wobec tego ν_1 wzrasta proporcjonalnie do y_1 i da się przedstawić linią prostą MN (rys. 364). Po przekroczeniu linii jądrnej ciśnienie wzrasta dalej wedle linii krzywej, zamiast której Jäcker przyjmuje parabolę. Wyznacza on jeden punkt ten krzywej T , leżący na linii ON dla $y = y_2$, przyczem, jak autor udowadnia,

$$\frac{y_2}{i} = \frac{e}{s} \quad \dots \quad 736)$$

jeżeli s oznacza odstęp środka ciężkości O_1 połowy przekroju od osi przez środek ciężkości O . Jeżeli więc dla odciętej i , zrobimy rzędną równą s , to dla e otrzymamy y_2 .

Z rys. 364. widać że jeżeli środek ciśnienia wyjdzie z jądra, to z początku ν nie bardzo wzrasta, później jednak po przekroczeniu n. p. punktu P , dla którego $y = y'$, naprężenie wzrasta niepomniernie: dlatego należałoby nie dopuszczać przekroczenia środka ciśnienia poza punkt P .

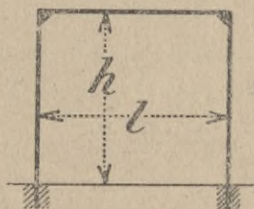
*) P. Oest. Wochensch. für d. öff. Baudienst. 1902 str. 271.

Rozp. pruskiego min. handlu z r. 1902 przepisuje, że dla parcia wiatru 125 kg/m^2 rzutu komina okrągłego przynajmniej połowa przekroju powinna być ciśnioną czyli oś obojętna co najwyżej może przechodzić przez środek przekroju O .

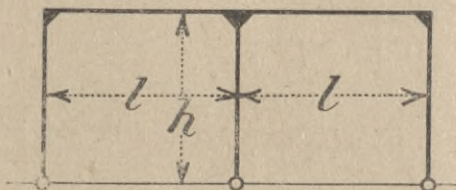
XIII. RAMY.

§ 159. Rodzaje ram.

Rozpornica (§ 131), której pewne części są pionowe, a więc mająca dwa lub więcej słupów nazywa się ramą (n. *Rahmen*, fr. *charpente*, a. *framework*, r. *рабочая система*). Wedle ilości

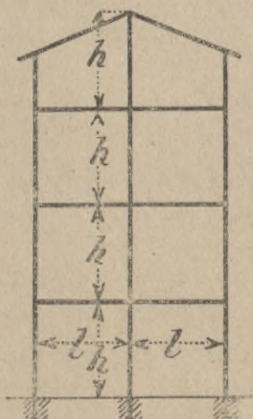


rys. 365.



rys. 366.

słupów nazywamy ramę dwusłupową (n. *zweistielig*) (rys. 365), trzysłupową (n. *dreistielig*) (rys. 366) lub wielosłupową (n. *mehrstielig*).



rys. 367.

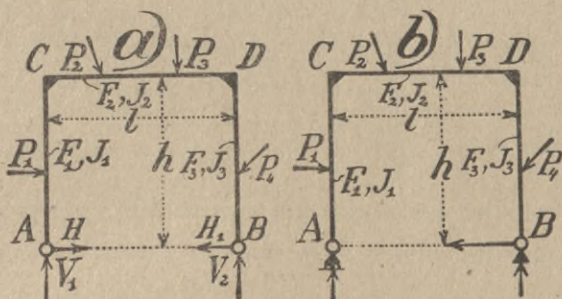
Słupy mogą być utwierdzone (rys. 365) lub też oparte przegibnie (rys. 366), co zmienia sposób obliczenia. Oprócz tego mogą być też ramy wielopiętrowe (n. *mehrgeschossig*) (rys. 367). Wszystkie ramy są mniej lub więcej statycznie niewyznaczalne. My ograniczymy się tylko do rozpatrywania ram najprostszych dwusłupowych dwuprzegubowych i bezprzegubowych.

§. 160. Ogólny sposób obliczenia ramy dwusłupowej dwuprzegubowej, o rozporze poziomej.

Rama $ABCD$ (rys. 368 *a*) dwusłupowa dwuprzegubowa o rozporze poziomej jest statycznie niewyznaczalną pierwszego rzędu. Na podstawie prawa pracy przygotowanej, znanego z mechaniki rozumowej*), możemy napisać równanie

$$L = \int_A^B \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} ds + \int_A^B \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial H} ds + \int_A^B \alpha \Delta t \frac{\partial N}{\partial H} ds \quad (737)$$

Jeżeli $L = H \Delta l$, Δl oznacza przesunięcie względne poziome punktów A i B , M moment zginający, N siłę podłużną, α współczynnik rozszerzalności, Δt różnicę ciepłoty w stopniach Celsjusza.



rys. 368.

Jeżeli A i B są stałe, to $\Delta l = 0$, a na razie też $\Delta t = 0$, to

$$\int_A^B \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} ds + \int_A^B \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial H} ds = 0 \dots \dots (738)$$

Zróbmy ramę statycznie wyznaczalną, więc np. dajmy w A łożysko wałkowe (rys. 368 *b*) i nazwijmy momenty i siły poprzeczne dla tej drugiej ramy tak samo obciążonej \mathfrak{M} i \mathfrak{N} , to w ramie statycznie niewyznaczalnej (rys. 368 *a*)

*) Por. także autora: „Podręcznik Teorii Mostów, Część I t. II, wyd. II, str. 104 i 129.

w słupie AC $M = \mathfrak{M}_0 - Hy, \frac{\partial M}{\partial H} = -y$

$$N = V_1, ds = dy, \frac{\partial N}{\partial H} = 0,$$

w rozporze CD $M = \mathfrak{M}_1 - Hh, \frac{\partial M}{\partial H} = -h,$

$$N = -H, ds = dx, \frac{\partial N}{\partial H} = -1,$$

w słupie BD $M = \mathfrak{M}_2 - Hy, \frac{\partial M}{\partial H} = -y,$

$$N = V_2 - Hy, \frac{\partial N}{\partial H} = 0.$$

Wstawmy te wartości w równanie 738), a otrzymamy

$$-\int_0^h \frac{(\mathfrak{M}_0 - Hy)y dy}{EI_1} - \int_0^l \frac{(\mathfrak{M}_1 - Hh)h dx}{EI_2} - \int_0^h \frac{(\mathfrak{M}_2 - Hy)y dy}{EI_3} +$$

$$+ \int_0^l \frac{H dx}{EF_2} = 0.$$

Jeżeli obie strony pomnożymy przez EI_2 i przyjmiemy $I_1 = I_3$ to po uporządkowaniu i zcałkowaniu otrzymamy

$$H = \frac{\frac{I_2}{I_1} \int_0^h \mathfrak{M}_0 y dy + h \int_0^l \mathfrak{M}_1 h dx + \frac{I_2}{I_1} \int_0^h \mathfrak{M}_2 y dy}{\frac{I_2}{I_1} \frac{2}{3} h^3 + h^2 l + \frac{I_2}{F_2} l}. \quad 739)$$

Niechaj ciężar sprężysty w słupach będzie $\frac{I_2}{I_1} dy$, to

$2 \int_0^h \left(\frac{I_2}{I_1} dy \right) y^2 = \frac{I_2}{I_1} \frac{2}{3} h^3$ jest momentem bezwładności obu słupów ze względu na AB .

$h^2 l = \int_0^l \left(\frac{I_2}{I_2} dx \right) h^2$ jest momentem bezwładności rozporzy CD ze względu na AB .

Trzeci wyraz mianownika $\frac{I_2}{F_2} l$ oznacza wpływ siły podłużnej.

A więc mianownik zależy tylko od kształtu ramy i jej wymiarów i ma stałą wartość, niezależnie od obciążenia ramy.

Oznaczmy przez T_a moment bezwładności całej ramy dla ciężarów sprężystych $\frac{I_2}{I_1} dy$ ze względu na AB , to

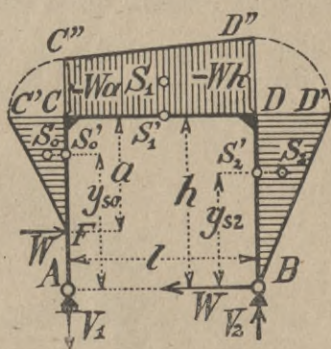
$$T_a = \frac{I_2}{I_1} \frac{2}{3} h^3 + h^2 l \dots \dots \dots 740)$$

Przypatrmy się teraz, jakie znaczenie ma licznik równania 739). Przypuśćmy, dla uproszczenia, że na ramę statycznie wyznaczalną działa siła pozioma W (rys. 360), to wywołuje ona momenty zaznaczone na rysunku, w $C \mathfrak{M} = -W a$, w $D \mathfrak{M} = -W h$.

Pierwszy wyraz licznika

$\int_0^h \left(\mathfrak{M}_0 \frac{I_2}{I_1} dy \right) y$ oznacza moment statyczny powierzchni $FC'C$ ze względu na AB , więc równy

$$\frac{I_2}{I_1} f_0 y_{s_0}$$



rys. 369.

Podobnie $\int_0^l \left(\mathfrak{M}_1 \frac{I_2}{I_2} dx \right) h = \frac{I_2}{I_2} f_1 h$ jest momentem statycznym powierzchni momentów $CC'D'D$, skupionej w rzucie środka ciężkości S_1' . Wreszcie $\int_0^h \left(\mathfrak{M}_2 \frac{I_2}{I_1} dy \right) y = \frac{I_2}{I_1} f_2 h y_{s_2}$ jest momentem statycznym powierzchni momentów $BDD'D$, skupionej w S_2' .

Jeżeli nazwiemy sumę momentów statycznych ciężarów sprężystych $\left(\frac{I_2}{I_1} f \right)$ ze względu na AB S_a , to równanie 739) możemy napisać

$$H = \frac{S_a}{T_a + \frac{I_2}{F_2} l} \dots \dots \dots 741)$$

Wyraz $\frac{I_2}{F_2} l$, pochodzący z uwzględnienia siły podłużnej, jest

w stosunku do T_a bardzo mały, zazwyczaj więc go opuszczamy i otrzymujemy równanie

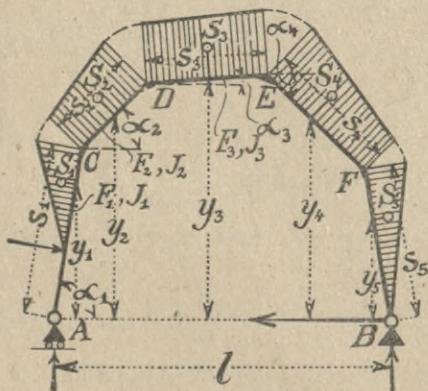
$$H = \frac{S_a}{T_a} \dots \dots \dots 742)$$

A więc parcie poziome H równa się ilorazowi S_a , sumy momentów statycznych ciężarów sprężystych $\left(\frac{I_2}{I_1} f\right)$ ze względu na AB , przez

T_a moment bezwładności ramy dla ciężarów sprężystych $\left(\frac{I_2}{I_1} dy\right)$.

§ 161. Rama dwusłupowa o dowolnym kształcie.

I tu przypuszczamy na razie, że w A jest łożysko wałkowe (rys. 370). Dla ramy statycznie wyznaczalnej obliczamy i kreślimy momenty. Wtedy dla ramy statycznie niewyznaczalnej $\mathfrak{M} = Hy$,



rys. 370.

$\frac{\partial M}{\partial H} = -y$, $N = -H \text{ dost } \alpha$, $\frac{\partial N}{\partial H} = -\text{dost } \alpha$. Wstawmy to w równ. 738), a otrzymamy, jeżeli długość pręta nazwiemy s

$$-\int_A^B \frac{\mathfrak{M} y ds}{EI} + H \int_A^B \frac{y^2 ds}{EI} = H \int_A^B \frac{\text{dost}^2 \alpha ds}{EF} = 0.$$

Jeżeli średni moment bezwładności nazwiemy I_s , to otrzymamy

$$H = \frac{\int_A^B \mathfrak{M} \left(\frac{I_s}{I} ds\right) y}{\int_A^B \left(\frac{I_s}{I} ds\right) y^2} = \frac{\int_A^B \text{dost}^2 \alpha \frac{I_s}{F} ds}{\int_A^B \text{dost}^2 \alpha \frac{I_s}{F} ds}$$

I tu mamy $\int_A^B \left(\frac{I_s}{I} ds \right) y^2 = T_a$ moment bezwładności ramy ze względu na AB .

$\int_A^B \mathfrak{M} \left(\frac{I_s}{I} ds \right) y = S_a$ sumie momentów statycznych ciężarów $\left(\frac{I_s}{I} f \right)$ ze względu na AB , tj. $S_a = \frac{I_s}{I_1} f_1 y_1 + \frac{I_s}{I_2} f_2 y_2 + \dots$

$$\int_A^B \text{dost}^2 \alpha \frac{I_s}{F} ds = \frac{I_s}{F_1} s_1 \text{dost}^2 \alpha_1 + \frac{I_s}{F_2} \text{dost}^2 \alpha_2 + \dots$$

Możemy więc napisać

$$H = \frac{S_a}{T_a + \sum \frac{I_s}{F} \text{dost}^2 \alpha}, \dots \dots \dots 743)$$

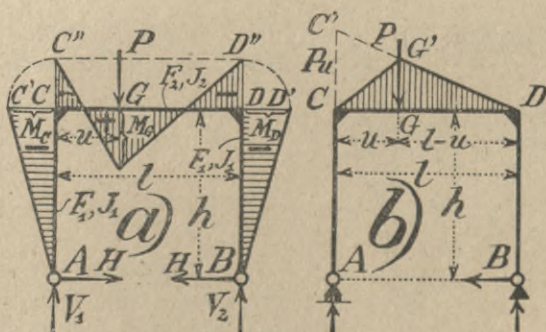
a w przybliżeniu nie uwzględniając wpływu siły podłużnej

$$H = \frac{S_a}{T_a}, \dots \dots \dots 744)$$

jak równanie 742).

§ 162. Rama o rozporze prostej, obciążenie pionowe.

Zastanowimy się teraz nad ramą dwusłupową o rozporze prostej. Przypuścimy, że na ramę $ACDB$ (rys. 371) działa ciężar P



rys. 371.

w odstępnie u od C (rys. 371 a). Jeżeli w A mamy łożysko wałkowe (rys. 317 b), to

$$M_G = P \frac{u(l-u)}{l} = GG', \text{ więc } f = \frac{Pu(l-u)}{l} \cdot \frac{l}{2},$$

$$S_a = hf = \frac{Phu(l-u)}{2}, \text{ zaś } T_a = \frac{I_2}{I_1} \frac{2}{3} h^3 + h^2 l, \text{ więc}$$

$$H = \frac{Ph \frac{u(l-u)}{2}}{\frac{I_2}{I_1} \frac{2}{3} h^3 + h^2 l + \frac{I_2}{F_2} l}, \text{ a wstawiawszy}$$

$$\frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l} = k \dots \dots \dots 745)$$

$$H = \frac{3Pu(l-u)}{2hl \left(3 + 2k + \frac{3I_2}{F_2 h^2} \right)} \dots \dots \dots 746)$$

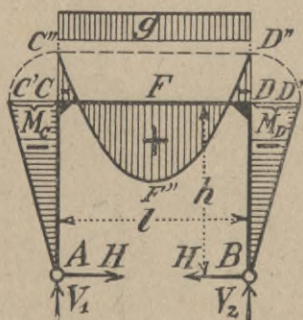
Ostatni wyraz w mianowniku jest bardzo mały. Opuściwszy więc wpływ siły podłużnej, mamy

$$H = \frac{3Pu(l-u)}{2hl(2k+3)} \dots \dots \dots 747)$$

Teraz otrzymamy

$$M_C = M_D = -Hh = -\frac{2}{3} \cdot \frac{Pu(l-u)}{(2k+3)l} \dots \dots \dots 748)$$

$$M_G = M_C + \frac{Pu(l-u)}{l} = + \frac{4k+3}{2k+3} \cdot \frac{uPl-u}{2l} \dots \dots 749)$$



rys. 372.

Na tej podstawie wykreśli-
liśmy linię momentów na rys. 371 a.

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{(Pl-u)}{l}, \\ V_2 &= \frac{Pu}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots 750)$$

Zupełnie w ten sam sposób
otrzymamy dla obciążenia zu-
pełnego ciężarem jednostkowym
g (rys. 372).

$$H = \frac{gl^2}{4h(2k+3)}, \dots \dots \dots 751)$$

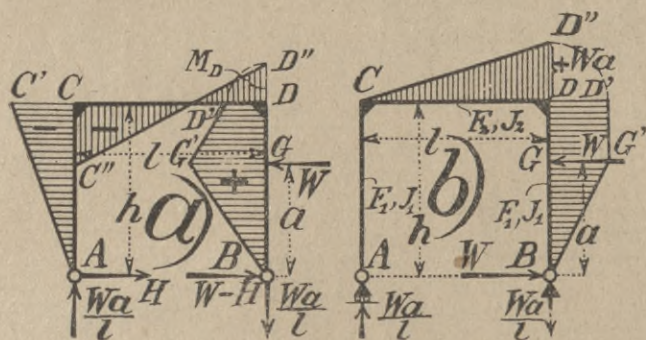
$$M_C = M_D = - \frac{gl^2}{4(2k+3)}, \dots \dots \dots 752)$$

$$+ M_{max} = + \frac{2k+1}{2k+3} \cdot \frac{gl^2}{8}, \dots \dots \dots 753)$$

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{2}gl. \dots \dots \dots 754)$$

§ 163. Rama o rozporze prostej, obciążenie poziome.

Na ramę $ABDB$ (rys. 373 a) działa siła pozioma W w wysokości a . Przyjmijmy w A łożysko wałkowe (rys. 373 b), aby uzyskać ramę statycznie wyznaczalną. Wtedy otrzymamy momenty, zaznaczone na rysunku, więc



rys. 373.

$$S_a = \frac{Wal}{2} \cdot h + \frac{I_2}{I_1} \left[\frac{Wa \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} a + Wa(h-a) \left(a + \frac{h-a}{2} \right) \right]$$

$$S_a = \frac{Walh}{2} + \frac{I_2}{I_1} \left[\frac{Wa^3}{3} + \frac{Wa}{2} (h^2 - a^2) \right].$$

T_a zostaje, jak poprzednio, więc

$$H = \frac{Wa}{2} \cdot \frac{3h^2 + k(3h^2 - a^2)}{h^2(2k+3)} \dots \dots \dots 755)$$

$$M_C = -H \cdot h = - \frac{Wa}{2} \cdot \frac{3h^2 + k(3h^2 - a^2)}{h^2(2k+3)}, \dots \dots \dots 756)$$

$$V_1 = -V_2 = \frac{W a}{l}, \dots \dots \dots 757)$$

$$M_D = -H h + \frac{W a}{l} \cdot l = W a \frac{3 h^2 + k (h^2 + a^2)}{2 h^2 (2 k + 3)} \dots \dots 758)$$

$$M_C = (W - H) a = W a \frac{k (4 h^3 + a^3 - 3 a h^2) + 6 h^3 - 3 a h^2}{2 h^3 (2 k + 3)} \dots \dots 759)$$

W podobny sposób wyznaczyć możemy momenty, jeżeli działa na słup parcie poziome jednostajnie rozłożone w (rys 374).

$$H = \frac{w h}{8} \cdot \frac{5 k + 6}{2 k + 3} \dots \dots 760)$$

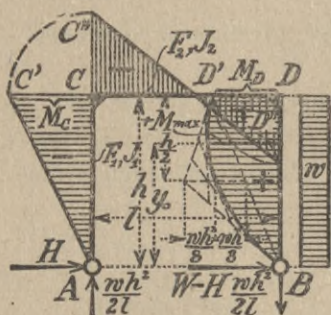
$$V_1 = V_2 = \frac{w h^2}{2 l} \dots \dots 761)$$

$$M_C = -\frac{w h^2}{8} \cdot \frac{5 k + 6}{2 k + 3} \dots \dots 762)$$

$$M_D = + \frac{3 w h^2}{8} \cdot \frac{k + 2}{2 k + 3}, \dots \dots \dots 763)$$

$$+ M_{max} = \frac{w h^2}{128} \left(\frac{11 k + 18}{2 k + 3} \right)^2 \dots \dots \dots 764)$$

$$\text{dla } y_0 = \frac{h}{8} \cdot \frac{11 k + 18}{2 k + 3} \dots \dots \dots 765)$$



rys. 374.

§ 164. Rama bezprzegubowa o rozporze prostej, obciążenie pionowe.

Rama dwusłupowa bezprzegubowa jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalną. Obliczenie takiej ramy zajęłoby wiele miejsca w niniejszym podręczniku. Czytelnika odsyłam do specjalnych dzieł o ramach*). Tu podam tylko wyniki.

Jeżeli ciężar *P* działa w punkcie *G* (rys. 375) w odstępnie *u*. wtedy

*) Por. autora: „Ramy dwusłupowe“, pod prasą.

$$H = \frac{3Pu(l-u)}{2hl(2+k)}, \dots \dots \dots 766$$

$$M_A = \frac{Pu(l-u)}{2l} \cdot \frac{5k-1+2\delta(2+k)}{(2+k)(1+6k)}, \dots \dots \dots 767$$

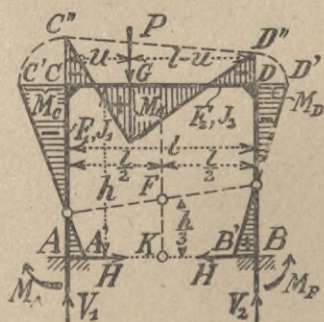
jeżeli $\delta = \frac{u}{l}, k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}.$

$$V_1 = \frac{P(l-u)}{l} \cdot \frac{1+6k+\delta-2\delta^2}{1+6k} \dots \dots \dots 768$$

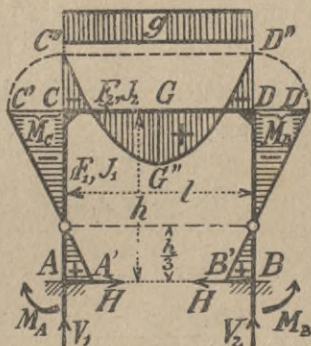
$$V_2 = \frac{Pu}{l} \cdot \frac{6k+3\delta-2\delta^2}{1+6k}, \dots \dots \dots 769$$

$$M_C = M_A - H \cdot h = -\frac{Pu(l-u)}{2l} \left(\frac{2}{2+k} + \frac{1-2\delta}{6k+1} \right) \dots \dots 770$$

$$M_G = M_A - H \cdot h + V_1 \cdot u = \frac{Pl(1-\delta)}{2} \left[\frac{1}{2} + \delta - \delta \left(\frac{2}{2+k} + \frac{1-2\delta^2}{1+6k} \right) \right], \dots \dots \dots 771$$



rys. 375.



rys. 376.

$$M_D = M_B - H \cdot h = -\frac{(P\delta(1-\delta)l)}{2} \cdot \left(\frac{2}{2+k} + \frac{1-2\delta}{1+6k} \right), \dots \dots 772$$

$$M = \frac{Pu(l-u)}{2l} \cdot \frac{3+7k-2\delta(2+k)}{(2+k)(1+6k)} \dots \dots \dots 773$$

W punktach E i E' są momenty równe zeru. Prosta EE' przeciwna pionową w połowie rozpiętości w trzeciej części

$$KF = \frac{h}{3}.$$

Jeżeli rama obciążona jest jednostajnie zupełnie ciężarem g (rys. 376), to

$$H = \frac{gl^2}{4h(2+k)}, \quad \dots \dots \dots 774)$$

$$M_A = M_B = \frac{gl^2}{12(2+k)}, \quad \dots \dots \dots 775)$$

$$M_C = M_D = -\frac{gl^2}{6(2+k)}, \quad \dots \dots \dots 776)$$

$$+ M_{G_{max}} = \frac{gl^2}{24} \cdot \frac{2+3k}{2+k}, \quad \dots \dots \dots 777)$$

$$V_1 = V_2 = \frac{gl}{2}. \quad \dots \dots \dots 778)$$

§ 165. Rama bezprzegubowa o rozporze prostej, obciążenie poziome.

Jeżeli na ramę działa ciśnienie poziome W (rys. 377), to otrzymamy

$$H = \frac{W\delta^2}{2(2+k)} \left[3(1+k) - \delta(2k+1) \right], \text{ przyczem}$$

$$\delta = \frac{a}{h} \quad \dots \dots \dots 779)$$

$$M_A = \frac{Wa\delta}{2} \left[\frac{3+2k-\delta(1+k)}{2+k} - \frac{3k}{1+6k} \right], \quad \dots \dots \dots 780)$$

$$M_C = M_A - H \cdot h = \frac{Wa\delta}{2} \left[\frac{k(\delta-1)}{2+k} - \frac{3k}{1+6k} \right], \quad \dots \dots \dots 781)$$

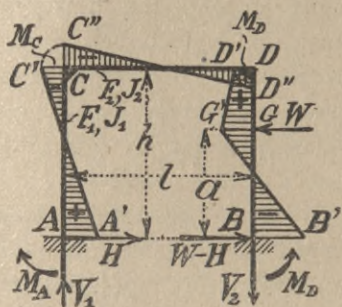
$$M_D = M_B - (W-H)h + Wa = \frac{Wak\delta}{2} \left[\frac{3}{1+6k} + \frac{\delta-1}{2+k} \right], \quad 782)$$

gdzie $M_B = -\frac{Wa\delta}{2} \left[\frac{2}{\delta} - \frac{3+2k-\delta(1+k)}{2+k} - \frac{3k}{1+6k} \right], \quad 783)$

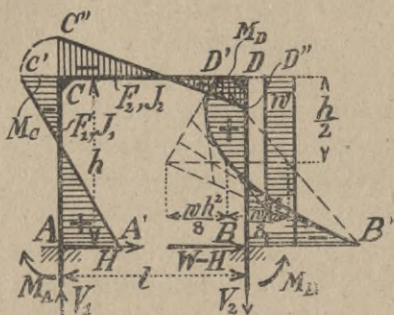
$$M_G = M_B + (W - H)a = 2Wak\delta \frac{3k + 1}{(1 + 6k)(1 + 2k)} -$$

$$- \frac{W a \delta}{2(2 + k)} \left[3(1 + k) - \delta(2k + 1) \right] \left(\delta - \frac{1 + 2k}{1 + k} \right), \quad \dots \quad 784)$$

$$V_1 = V_2 = \frac{3W a \delta k}{l(1 + 6k)} \quad \dots \quad 785)$$



rys. 377.



rys. 378.

Jeżeli na ramę działa jednostajne parcie poziome w (rys. 378), otrzymamy

$$H = \frac{wh}{8} \cdot \frac{3 + 2k}{2 + k}, \quad \dots \quad 786)$$

$$M_A = \frac{wh^2}{24} \left(\frac{9 + 5k}{2 + k} - \frac{12k}{1 + 6k} \right), \quad \dots \quad 787)$$

$$M_B = -\frac{wh^2}{24} \left(\frac{15 + 7k}{2 + k} - \frac{12k}{1 + 6k} \right), \quad \dots \quad 788)$$

$$M_C = -\frac{wh^2 k}{24} \left(\frac{1}{2 + k} + \frac{12}{1 + 6k} \right), \quad \dots \quad 789)$$

$$M_D = \frac{wh^2 k}{24} \left(\frac{12}{1 + 6k} - \frac{1}{2 + k} \right), \quad \dots \quad 790)$$

$$V_1 = V_2 = \frac{wh^2 k}{l(1 + 6k)} \quad \dots \quad 791)$$

D. BUDOWLE ZIEMNE.

XIV. Równowaga stoków.

§ 166. Zasady.

Będziemy teraz badali prawa równowagi budowli takich, których materiałem jest ziemia, a więc n. p. wałów, rowów, przekopów. Przypuszczamy przytem, że ziemia jest ciałem jednorodnem i niesprężystem o małej spójności. Tu więc nie będziemy mogli zastosować prawideł o wytrzymałości, wyłożonych w poprzednich rozdziałach, lecz zato uwzględnić będziemy także tarcie, tj. opór, jaki powstaje przy ruchu względnym dwóch ciał lub dwóch części tego samego ciała, przylegających jedna do drugiej.

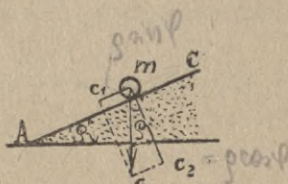
Z mechaniki wiemy, że tarcie jest wprost proporcjonalnem do ciśnienia prostopadłego na płaszczyznę zetknięcia obu ciał a niezależnem od wielkości powierzchni zetknięcia; spójność zaś jest niezależną od ciśnienia prostopadłego, a proporcjonalną do powierzchni przekroju. Chcąc przesunąć cząstki ziemi, musimy przewyciężyć obie te siły.

Powierzchnię ziemi nachyloną ku poziomowi, nazywamy stokiem (n. *Böschung*, fr. *talus*, an. *slope*, *talus*, r. *откосъ*, *наклонъ*) a styczną kąta nachylenia stoku do poziomu czyli stosunek wysokości do rzutu pionowego stoku (n. 1:1, 1:2) stoczystością (*Neigung der Böschung*, fr. *pente*, an. *sloping*). Zastanawiać się będziemy głównie nad stokami, których stoczystość w każdym punkcie jest ta sama, czyli nad stokami płaskimi, a ilekroćbyśmy mieli rozpatrywać stoki o zmiennej stoczystości, osobno to zaznamy.

§ 167. Równowaga ziemi niespoistej.

Wiemy, że powierzchnia wody w stanie równowagi jest poziomą. Piasek, żwir i ziemia sypka, których spójność jest bardzo małą, utrzymuje się w równowadze, chociaż ich powierzchnia jest nachyloną, ale tylko do pewnej granicy, gdy kąt nachylenia stoku nie przekroczy pewnej wartości ϱ (rys. 379).

Dla tego największego kąta ϱ niech się znajduje punkt materialny m na powierzchni AC właśnie w stanie równowagi tak, że najmniejsze powiększenie kąta ϱ jużby wywołało stoczenie się punktu m . Ciężar tego punktu c rozdziela się na c_1 i c_2 , przyczem $c_1 = c \text{ wst } \varrho$, $c_2 = c \text{ dost } \varrho$. Siła c_1 stara się poruszyć punkt w kierunku CA , c_2 zaś przyciska go do płaszczyzny i wywołuje tarcie. Jeśli współczynnik tarcia nazwiemy f , to dla równowagi musi być $c_1 = fc_2$, czyli $c \text{ wst } \varrho = fc \text{ dost } \varrho$, a stąd



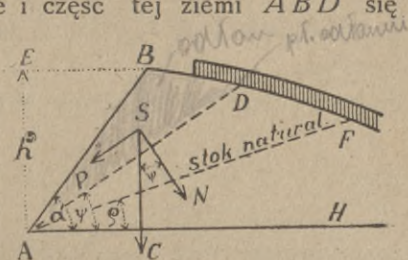
ryz. 379.

$$f = \text{st } \varrho \quad \dots \dots \dots 792)$$

Ponieważ kąt ϱ zależnym jest tylko od współczynnika tarcia, dlatego nazywamy go kątem tarcia (n. *Reibungswinkel*, fr. *angle de frottement*, an. *angle of friction*, r. угол трения) (p. § 133). Stok, dla którego ziemia sypka utrzymuje się w równowadze, a więc nachylony pod kątem tarcia do poziomu nazywamy stokiem naturalnym, stokiem usypu (n. *natürliche Böschung*, fr. *talus naturel*, an. *plane of repos*, r. отность насыпи). Stok naturalny i kąt tarcia ziemi niespoistej wyznaczyć można, sypiąc ziemię i podgartując ją pod górę. Ziemia ułoży się wtedy w stoku naturalnym.

§ 168. Równowaga ziemi spoistej.

Jeżeli stok AB (rys. 380) jest za stromy, wtedy ziemia nie może utrzymać się w równowadze i część tej ziemi ABD się usuwa. Tę część ziemi nazywamy odłamem, a powierzchnia AD , jak doświadczenia Forchheimera i Leygue'a okazują, mało się co różni od płaszczyzny. Przyjmować więc ją będziemy nadal jako płaszczyznę i nazywać płaszczyzną odłamu (n. *Bruchfläche*, *Gleitebene*, fr. *plan de rupture*, *plan de séparation*, *plan de glissement*, an. *plane of rupture*). Gdyby spójności nie było, to kąt α , pod



rys. 380.

którym stok AB jest nachylony do poziomu, nie mógłby być dla równowagi większym, niż ϱ . Z powodu działania spójności kąt ten będzie większym, a zadaniem naszym będzie teraz wyznaczenie jego wielkości.

Zauważmy bryłę ziemi, której długość w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunkowej niech będzie równą jedności, nazwijmy l prostą AD , c spójność na jednostkę powierzchni, f współczynnik tarcia między ziemią a ziemią, a ϱ odnośny kąt tarcia i zaczepmy w środku ciężkości odłamu S ciężar jego C , to da on się rozłożyć na siłę N prostopadłą do AD i P równoległą do AD . Wtedy będzie

$$N = C \cos \psi, \quad P = C \sin \psi, \quad \dots \dots \dots 793)$$

jeżeli ψ jest kątem nachylenia płaszczyzny odłamu do poziomu. Siła P usiłuje poruszyć odłam w kierunku DA , czemu sprzeciwia się siła Q , powstająca wskutek tarcia i spójności ziemi w płaszczyźnie odłamu.

Stąd otrzymamy

$$Q = f N + cl = Cf \cos \psi + cl. \quad \dots \dots \dots 794)$$

Usunięcie powstać może tylko w jednej z tych płaszczyzn, przechodzących przez A , dla której $P > Q$, t. j. $\frac{P}{Q} > 1$. Wnosić zaś można, że powstanie ono rzeczywiście w tej płaszczyźnie w której stosunek $\frac{P}{Q}$ jest największością t. j. przybiera wartość najdalej od tej, która potrzebną jest do równowagi t. j. $\frac{P}{Q} = 1$: Jeżeli przeto w jakimkolwiek danym przypadku wyznaczmy stosunek $\frac{P}{Q}$ dla każdej płaszczyzny pęku płaszczyzn, przechodzących przez A , to płaszczyzna, dla której $\frac{P}{Q}$ będzie naj-

większością, będzie tą płaszczyzną, w której nastąpi usunięcie, gdy największość ta przekracza wartość = 1. Warunkiem równowagi będzie więc, by najw. $P \leq Q$, bo wtedy $\frac{P}{Q}$ dla innych płaszczyzn będzie tem bardziej < 1 . My zajmować się będziemy wypadkiem granicznym i badać, jak wielkie może być α , aby stok był jeszcze w równowadze, zatem

$$\text{najw. } \frac{P}{Q} = 1. \quad \dots \dots \dots 795)$$

Dla tego wypadku musi być pochodna funkcji $\frac{P}{Q}$ równą zeru

czyli $\frac{d\left(\frac{P}{Q}\right)}{d\psi} = 0$, a więc $\frac{QdP - PdQ}{Q^2d\psi} = 0$, stąd $QdP +$
 $-PdQ = 0$, a nareszcie uwzględnivszy równ. 775), otrzymamy

$$1 = \text{najw. } \frac{P}{Q} = \frac{dP}{dQ} \quad \dots \dots \dots 796)$$

Na podstawie tych równań możemy w każdym szczegółowym przypadku wyznaczyć kąt ψ .

Z równ. 776) i 777) wynika $C \text{ wst } \psi = C f \text{ dost } \psi + c l$, a więc

$$c = \frac{C}{l} (\text{wst } \psi - \text{st } \varrho \text{ dost } \psi) = \frac{C}{I} \frac{\text{wst } (\psi - \sigma)}{\text{dost } \varrho} \quad \dots \dots 797).$$

§ 169. Naziom płaski i nieobciążony.

Jeżeli powierzchnia ziemi BD , którą nazywamy naziomem (o stoczystości mniejszej niż stok naturalny, powierzchnię o stoczystości większej zowiemy stokiem) (rys. 381) jest płaszczyzną nachyloną pod kątem β do poziomu, wtedy ciężar odłamu możemy wyznaczyć, nazwawszy γ ciężar gatunkowy ziemi w następnym sposób:

$$C = \gamma \triangle ABD = \frac{1}{2} \gamma AB \cdot AD \cdot \text{wst}(\alpha - \psi),$$

a wstawivszy za AD wartośc l

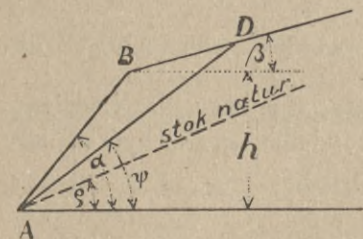
$$\text{a } AB = \frac{h}{\text{wst } \alpha}, \text{ otrzymamy}$$

$$C = \frac{1}{2} \gamma h l \frac{\text{wst}(\alpha - \psi)}{\text{wst } \alpha}.$$

Według równań 794), 795) i 796) mamy

$$\frac{P}{Q} = \frac{C \text{wst } \psi}{C f \text{dost } \psi + c l} = 1,$$

a stąd, wstawivszy wartośc za C



rys. 381.

i $f = \text{st } \sigma$, otrzymamy:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\gamma h l \text{wst } \psi \text{wst}(\alpha - \psi)}{\gamma h l \text{wst}(\alpha - \psi) \text{dost } \psi \text{st } \sigma + 2 c l \text{wst } \alpha} = 1. \quad \dots \quad 798)$$

Różniczkujemy osobno licznik, a osobno mianownik tego wyrazu, a otrzymamy wedle 796)

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dQ} &= \frac{-\text{wst } \psi \text{dost}(\alpha - \psi) + \text{dost } \psi \text{wst}(\alpha - \psi)}{[\text{wst}(\alpha - \psi) \text{wst } \psi + \text{dost}(\alpha - \psi) \text{dost } \psi] \text{st } \sigma} = \\ &= \frac{\text{wst}(2\psi - \alpha)}{\text{dost}(2\psi - \alpha) \text{st } \sigma} = \frac{\text{st}(2\psi - \alpha)}{\text{st } \sigma} = 1, \end{aligned}$$

$$\text{stąd } 2\psi - \alpha = \sigma, \text{ zatem } \psi = \frac{\sigma + \alpha}{2} \quad \dots \quad : \quad \dots \quad 799)$$

A więc płaszczyzna odłamu połowi kąt, zawarty między stokiem rzeczywistym a naturalnym.

Równanie 798) możemy inaczej napisać

$$\gamma h \text{wst } \psi \text{wst}(\alpha - \psi) = \gamma h \text{wst}(\alpha - \psi) \text{dost } \psi \text{st } \sigma + 2 c \text{wst } \alpha, \text{ a stąd}$$

$$h = \frac{2 c \text{wst } \alpha}{\gamma \text{wst}(\alpha - \psi) [\text{wst } \psi - \text{dost } \psi \text{st } \sigma]} = \frac{2 c \text{wst } \alpha \text{dost } \sigma}{\gamma \text{wst}(\alpha - \psi) \text{wst}(\psi - \sigma)}.$$

Oba kąty w mianowniku możemy inaczej wyrazić, a mianowicie:

$$\alpha - \psi = \alpha - \frac{\sigma + \alpha}{2} = \frac{\alpha - \sigma}{2}, \text{ zaś } \psi - \sigma = -\sigma = \frac{\sigma + \alpha}{2} - \sigma = \frac{\alpha - \sigma}{2},$$

a więc

$$h = \frac{2 c \text{dost } \sigma \text{wst } \alpha}{\gamma \text{wst}^2 \frac{\alpha - \sigma}{2}} \quad \dots \quad 800)$$

Z tego wzoru możemy obliczyć wysokość stoku, dla której się stok jeszcze może przy spójności c utrzymać; kąt β , jak widzimy, w tym wypadku zupełnie nie wchodzi w rachubę, a więc tu jest h od stoczystości naziomu niezależnem.

§ 170. Stok pionowy.

Dla stoku pionowego $\alpha = 90^\circ$; nazwijmy odnośną wysokość stoku h_0 (n. *Standhöhe*), to z równania 780) otrzymamy

$$h_0 = \frac{2c \operatorname{dost} \varrho}{\gamma \operatorname{wst}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{2c \left(\operatorname{dost}^2 \frac{\varrho}{2} - \operatorname{wst}^2 \frac{\varrho}{2}\right)}{\gamma \left(\operatorname{wst} 45^\circ \operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} - \operatorname{dost} 45^\circ \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{4c \left(\operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} + \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)}{\gamma \left(\operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} - \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{4c \left(1 + \operatorname{st} \frac{\varrho}{2}\right)}{\gamma \left(1 - \operatorname{st} \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{4c}{\gamma} \operatorname{st} \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right) \quad 801)$$

Znając odwrotnie h_0 , możemy obliczyć c , a mianowicie

$$c = \frac{\gamma h_0}{4} \operatorname{dot} \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right) \dots \dots \dots 802)$$

Wstawivszy tę wartość w równanie 781), otrzymamy

$$h = \frac{h_0 \operatorname{dost} \varrho \operatorname{wst} \alpha}{2 \operatorname{wst} \frac{\alpha - \varrho}{2} \operatorname{st} \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right)} \dots \dots \dots 803)$$

Z pierwszej wartości h_0 otrzymamy też

$$c = \frac{\gamma h_0}{2} \frac{\operatorname{wst}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right)}{\operatorname{dost} \varrho}, \dots \dots \dots 804)$$

a wstawivszy to w 781),
$$h = h_0 \frac{\operatorname{wst}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right) \operatorname{wst} \alpha}{\operatorname{wst}^2 \frac{\alpha - \varrho}{2}} \dots \dots \dots 805)$$

Wzory te służą do obliczenia wysokości stoku pochyłego dla jakiegokolwiek kąta α . Ott obliczył z równań 803) i 805) następną tabliczkę dla wartości $\frac{h}{h_0}$:

Tablica L.

$\frac{h}{h_0} =$		Wartości dla dot ρ						
		1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
Wartość dla dot α	0,20	1,71	1,64	1,59	1,55	1,52	1,49	1,47
	0,25	1,99	1,89	1,82	1,75	1,70	1,66	1,63
	0,30	2,35	2,19	2,08	1,99	1,91	1,86	1,81
	0,35	2,79	2,56	2,39	2,27	2,17	2,08	2,02
	0,40	3,36	3,02	2,78	2,60	2,46	2,35	2,26
	0,45	4,11	3,60	3,24	3,00	2,81	2,66	2,54
	0,50	5,11	4,34	3,84	3,48	3,22	3,02	2,87
	0,55	6,47	5,31	4,58	4,08	3,72	3,45	3,24
	0,60	8,41	6,63	5,53	4,83	4,33	3,97	3,69
	0,65	11,28	8,40	6,77	5,76	5,08	4,58	4,22
	0,70	15,77	10,90	8,42	6,96	6,00	5,33	4,84
	0,75	23,26	14,63	10,69	8,52	7,16	6,25	5,60
	0,80	37,41	20,47	13,92	10,61	8,65	7,39	6,51
	0,85	68,21	30,26	18,67	13,46	10,59	8,82	7,63
	0,90	157,39	48,55	26,65	17,51	13,18	10,65	9,01
	0,95	645,69	86,59	38,61	23,50	16,73	13,03	10,79
	1,00	∞	204,69	61,95	32,86	21,77	16,21	12,98
1,05	—	840,78	113,03	48,60	29,21	20,57	15,88	
1,10	—	∞	260,64	79,01	40,81	26,73	19,74	
1,15	—	—	1072,65	142,23	60,35	35,87	25,04	
1,20	—	—	∞	328,14	95,93	50,09	32,53	

Przykład: Mamy wykopać rów głęboki 9 m w ziemi, dla której $\rho = 32^\circ$, więc dot $\rho = 1,6$ a $h_0 = 1$ m. Jaka może być stoczystość?

Tu mamy $h = 9$, $h_0 = 1$, więc $\frac{h}{h_0} = 9$, liczby tej szukamy w ostatniej kolumnie i znajdujemy 9,01, co odpowia dot $\alpha = 0,90$, a więc $\alpha = 48^\circ$.

§ 171. Wyznaczenie wykreślne spójności, wysokości stoku i stoczystości.

Na podstawie powyższych równań możemy wykreślne wyznaczyć stoczystość, stok pionowy lub spójność, jeżeli znanym jest kąt tarcia.

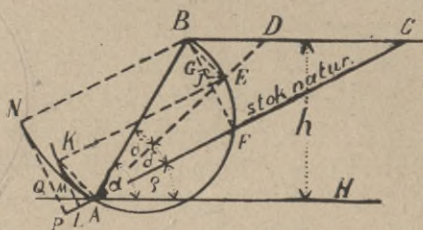
1. Dane są α , h i ρ , wyznaczyć należy c (rys. 382),

Z równ. 800) wynika $c = \frac{\gamma h \operatorname{wst}^2 \frac{\alpha - \rho}{2}}{2 \operatorname{dost} \rho \operatorname{wst} \alpha}$, albo gdy nazwiemy:

$$AB = l = \frac{h}{\operatorname{wst} \alpha}, \quad c = \gamma l \frac{\operatorname{wst}^2 \frac{\alpha - \rho}{2}}{2 \operatorname{dost} \rho}$$

a gdy $\alpha - \varrho = 2\delta$, więc $c = \frac{\gamma l \text{wst}^2 \delta}{2 \text{dost } \varrho}$ 806)

Spółowiwszy kąt $\alpha - \varrho$, otrzymamy kąt δ . Z B kreślimy prostopadłe na AD i AC , a wtedy B, E, F i A muszą leżeć na półkolu.



rys. 382.

Z E kreślimy poziomą EG , a wtedy $c = \frac{\gamma \cdot EG}{2}$. Aby się

o tem przekonać, zrobimy $EI \parallel AC$, to

$$EG = \frac{EI}{\text{dost } \varrho} = \frac{BE \text{wst } \delta}{\text{dost } \varrho} = \frac{l \cdot \text{wst}^2 \delta}{\text{dost } \varrho},$$

zatem ze względu na 806) $EG = \frac{2c}{\gamma}$ 807)

Udowodniliśmy, że półkole, założone na AB , przechodzi przez F i E . Poprowadźmy styczną do koła $KL \parallel BF$, to $AKL \cong BEI$, bo $AK = BE$, a boki równoległe. Stąd łatwo udowodnić, że

$$AM = EG = \frac{2c}{\gamma} \quad 808)$$

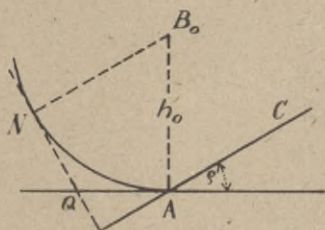
Nareszcie jeżeli z B zatoczmy łuk promieniem BA i wykreślimy styczną $NP \parallel BF$, to $AQ = 2AM$, jak to się da łatwo udowodnić z podobieństwa trójkątów, zatem

$$AQ = \frac{4c}{\gamma} \quad 809)$$

2. Dane α, c i ϱ , szukana wysokość h . Połowimy kąt CAB i kreślimy $AN \perp BD$, odcinamy teraz $AQ = \frac{Ac}{\gamma}$ i przez punkt Q kreślimy QN prostopadłą do AC . Z punktu N kreślimy NB równoległe do AC i w ten sposób otrzymujemy punkt B , a zatem i wysokość stoku.

3. Dane są c , h i ϱ , szukane α .

Odcinamy $AQ = \frac{4c}{\gamma}$, kreślimy $QN \perp AC$ i szukamy na poziomej w wysokości h punktu, z którego możemy poprowadzić koło styczne do QN , a przechodzące przez A .



rys. 383.

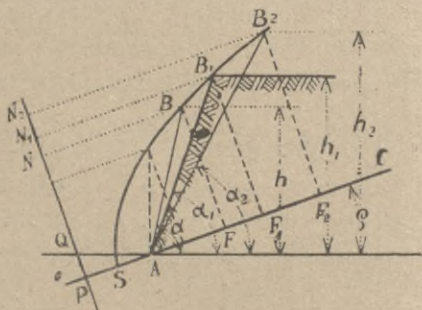
4. Dane h_0 , h i ϱ , szukane α (rys. 383). Dla danego h_0 możemy c obliczyć z równania 802) albo też wyznaczyć wykreślnie wedle 1. Zaczniemy z B_0 łuk promieniem h_0 i wykreślimy styczną $QN \perp AC$, to $AQ = \frac{4c}{\gamma}$. Dalsza konstrukcja, jak

poprzednio, wedle 3.

§ 172. Parabola spójności.

Jeżeli dla rozmaitych h będziemy szukać wedle poprzedniego paragrafu kątów α , a zatem odnośnych punktów B (rys. 384), to da się łatwo udowodnić, że punkty te leżą na paraboli. Na mocy konstrukcji bowiem jest $AB_1 = B_1 N_1$, a to jest właśnie cechą punktów paraboli, której osią jest stok naturalny, punkt A ogniskiem, a parametrem $2AP = \frac{8c \operatorname{dost} \varrho}{\gamma}$.

Nazywamy ją parabolą spójności (n. *Kohäsionsparabel*), kreślimy poziomą $AQ = \frac{4c}{\gamma}$ i $QP \perp AC$.



rys. 384.

Jeżeli wykreślimy z punktów B prostopadłe do AC , to $PF_1 = N_1 B_1 = AB_1$. Na tem polega prosty sposób wykreślenia paraboli spójności. Z punktu A zakreślamy łuk dowolną długością AB_1 , robimy $PF_1 = AB_1$ i wstawiamy w F_1 prostopadłą do przecięcia się z łukiem w B_1 .

§ 173. Wyznaczenie stoku naturalnego, spójności i ciężaru gatunkowego.

Mówiliśmy poprzednio, jak się wyznacza stok naturalny dla ziem niespoistych. Dla ziem spoistych najlepiej wyznaczać h_0 i ϱ z doświadczeń; w tym celu trzeba ziemię skopywać pionowo. Wykop musi być dość długi o zmiennej głębokości, należy go zostawić najlepiej przez cały rok, aby się przekonać, o ile wpływy atmosferyczne zmniejszają spójność. Największa wysokość, przy której stok pionowy się utrzyma, będzie h_0 . To samo możemy zrobić dla innych kątów α i otrzymamy odnośne h . Z tych wartości możemy wtedy wyznaczyć c i ϱ na podstawie równań 783) i 784). Na podstawie doświadczeń Kavena możemy przyjąć dla ziem zbitych $c=225 \text{ kg/m}^2$, a że należy uwzględnić współczynnik pewności 1,5, więc przyjmujemy zwykle

$$c = 150 \text{ kg/m}^2 \dots\dots\dots 810)$$

W tym samym stosunku zmniejszamy też i kąt tarcia.

Możemy dalej przyjąć:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla zwykłej ziemi zbitej} \quad h_0 = 1 \text{ do } 3 \text{ m} \\ \text{dla zbitego łu lub gliny} \quad h_0 = 2 \text{ do } 5 \text{ m} \end{array} \right\} \dots\dots 811)$$

Dla bezpieczeństwa lepiej przy obliczeniu przyjmować mniejsze wartości t. j. 1 względnie 2 m. Na wielkość tarcia i spójności ma znaczny wpływ atmosfera. Ważną okolicznością pod tym względem jest ilość wody, znajdującej się w ziemi, zwłaszcza gliniastej. Gdy glina jest tylko zwilżoną, spójność jest wielka, gdy jest suchą zupełnie, mała, a gdy przesiąknie wodą, prawie żadna; kąt ϱ schodzi czasem do 10° . Dlatego też przy budowlach ziemnych bardzo ważną rzeczą jest odpowiednie odwodnienie.

W tabl. LI podaliśmy według Rebhanna i Otta kąt tarcia ϱ , ciężar metra sześciennego γ i spójność c dla rozmaitych ziem. Nie potrzebujemy dodawać, że są to tylko wartości przeciętne. Przy większych budowlach ziemnych dobrze jest robić, jeśli czas na to pozwala, z daną ziemią osobne doświadczenia dla wyznaczenia c i ϱ .

TABLICA LI.

Materiał	kąt tarcia ρ	ciężar gatu- kowy γ kg/m^3	spój- ność c kg/m^2	st ρ	dot ρ
Ziemia roślinna sypka sucha	35°	1420	250	0,700	1,428
" " " wilgotna	40°	1580	250	0,839	1,192
" " nasyciona wodą	30°	1800	—	0,577	1,732
" " sucha ubita	42°	1680	500	0,900	1,111
" " wilgotna ubita	65°	1880	—	2,145	1,466
Glina sypka sucha	40°	1500	600	0,838	0,192
" " wilgotna	45°	1550	930	1,000	1,000
" " nasyciona wodą	20°	2000	400	0,364	2,747
" ubita sucha	42°	1790	—	0,900	1,111
" " naturalnie wilgotna	70°	1850	—	2,748	0,364
Piasek suchy miałki	35°	1500	10	0,700	1,428
" " gruby	35°	1640	20	0,700	1,428
" wilgotny	40°	1770	100	0,839	1,192
" nasycony wodą	30°	1950	60	0,577	1,732
Żwir graniasty (tłuczony)	45°	1800	1500	1,000	1,000
" okrągły (rzeczny)	30°	1800	1500	0,577	1,732
Zboże	25°	759	—	0,466	2,145
Śrut	30°	6800	—	0,424	2,356

Müller Breslau podaje następną krótką tabliczkę:
Tablica LII.

Rodzaj ziemi	γ kg/m^3	ρ
Ziemia rodzinna sucha	1400	35°—40°
" " wilgotna	1600	45°
" " nasyciona wodą	1800	30°—35°
Glina sucha	1500	40°—45°
" mokra	1900	20°—25°
Piasek nasycony wodą	2000	25°
" wilgotny	1800	40°
" suchy	1580—1650	30°—35°
" " średnio	1600	33 $\frac{1}{2}$ °
Żwir tłuczony (tłuczeń)	1800	35°—40°
" rzeczny	1800	30°

Keck podaje następujące wartości:

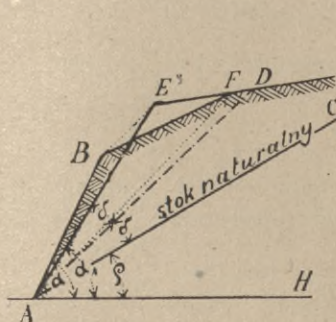
Tablica LIII.

Rodzaj ziemi	γ kg/m^3	ρ
Il suchy	1500	40°—46°
" mokry	1900	20°—25°
Glina sucha	1600	40°—50°
" mokra	1950	20°—25°
Ziemia roślinna mokra	1650	30°—35°
Piasek, żwir rzeczny	1600—1860	30°
Żwir tłuczony	1600	35°—40°

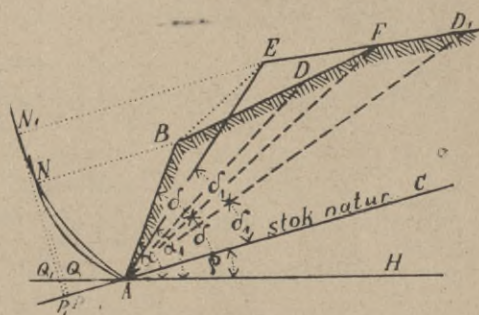
§ 174. Naziom załamany.

Jeżeli naziom nie jest płaskim, lecz składa się z dwu płaszczyzn (rys. 385), a jeżeli AD jest płaszczyzną odłamu, to czworobok $ABFD$ musimy zamienić na trójkąt AED , aby można poprzednie wzory zastosować. Kreślimy więc $BE \parallel AF$ i dalej wykreślamy tak, jak gdybyśmy mieli stok AE i naziom płaski. Płaszczyzna odłamu położy wtedy kąt EAC , a dalsza konstrukcja pozostaje ta sama.

Jeżeli jednak przy tej przemianie, punkt D wypadłby przed F , to w takim razie stok się zachowuje, jak gdyby był płaskim.



rys. 385.



rys. 386.

Jeżeli odległość punktu załamania wzrasta, wtedy może się zdarzyć, że gdy bez przemiany podzielimy na połowę kąt $\alpha - \varphi$ (rys. 386), punkt D może wypaść przed punktem załamania F . Jeżeli zaś przeprowadzimy przemianę, to wypadła nam płaszczyzna odłamu AD_1 . Któraż z nich jest prawdziwą? Ta, dla której potrzeba większej spójności. Jeżeli więc zatoczmy z B koło promieniem BA , z E promieniem EA i wykreślimy styczne $\perp AC$, to zatrzymujemy tę płaszczyznę odłamu, dla której AQ jest większem. Tu $AQ_1 > AQ$, więc prawdziwą linią odłamu jest AD .

§ 175. Równowaga ziemi jednostajnie obciążonej.

Jeżeli ziemia jest jednostajnie obciążona ciężarem q na m^2 , to licząc na długość równą $1 m$ w kierunku prostopadłym do rysunku, otrzymamy (rys. 387) $C = \gamma \cdot ABD + BD \cdot q$.

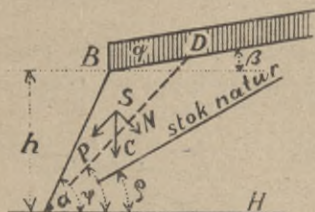
Powierzchnię trójkąta ABD wyznaczyliśmy już w § 169, a mianowicie, gdy $AD=l$, $ABD = \frac{1}{2} hl \frac{\text{wst}(\alpha-\psi)}{\text{wst} \alpha}$, dla wyznaczenia BD zaś ustawimy proporcję:

$$BD : l = \text{wst}(\alpha-\psi) : \text{wst}(180-\alpha+\beta),$$

więc $BD = \frac{l \text{wst}(\alpha-\psi)}{\text{wst}(\alpha-\beta)}$. Wstawivszy te wartości w równanie dla

C , otrzymamy

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \gamma hl \frac{\text{wst}(\alpha-\psi)}{\text{wst} \alpha} + \\ &+ \frac{ql \text{wst}(\alpha-\psi)}{\text{wst}(\alpha-\beta)} = \\ &= l \text{wst}(\alpha-\psi) \left(\frac{\frac{1}{2} \gamma h}{\text{wst} \alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\text{wst}(\alpha-\beta)} \right). \end{aligned}$$



rys. 387.

Wzór otrzymany jest podobny do wzoru dla ziemi nieobciążonej (§ 169), tylko tutaj zamiast γh musimy podstawić wyraz $\gamma h + \frac{2q \text{wst} \alpha}{\text{wst}(\alpha-\beta)}$.

Ponieważ wyraz ten jest niezależnym od kąta ψ , więc kąt ψ będzie taki sam, jak poprzednio, tj. $\psi = \frac{\alpha+\varrho}{2}$, a więc i tu płaszczyzna odłamu połowi kąt między stokiem naturalnym a rzeczywistym.

Dla ziemi nieobciążonej mieliśmy według 754)

$$\gamma h = \gamma h_0 \frac{\text{wst} \alpha \text{ dost } \varrho}{2 \text{st}\left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right) \text{wst}^2 \frac{\alpha-\varrho}{2}},$$

dla ziemi obciążonej otrzymamy podobny wzór, podstawivszy tylko zamiast γh wyraz powyżej wspomniany, więc

$$\gamma h + \frac{2q \text{wst} \alpha}{\text{wst}(\alpha-\beta)} = \gamma h_0 \frac{\text{wst} \alpha \text{ dost } \varrho}{2 \text{st}\left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right) \text{wst}^2 \frac{\alpha-\varrho}{2}}, \text{ a stąd}$$

$$h = h_0 \frac{\text{wst} \alpha \text{ dost } \varrho}{2 \text{st}\left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right) \text{wst}^2 \frac{\alpha-\varrho}{2}} - \frac{2q \text{wst} \alpha}{\gamma \text{wst}(\alpha-\beta)}.$$

Według 784) pierwszy wyraz równa się h_1 wysokości stoku ziemi nieobciążonej, więc

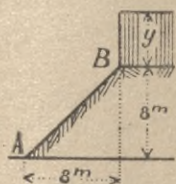
$$h = h_1 - \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma \operatorname{wst}(\alpha - \beta)} \quad \dots \quad 812)$$

Dla naziomu poziomego $\beta = 0$, więc

$$h = h_1 - \frac{2q}{\gamma} \quad \dots \quad 813)$$

A zatem dla naziomu poziomego obciążenie na wysokości h_1 ma ten skutek, jak gdyby stok był o $\frac{2q}{\gamma}$ wyższym. Pochodzi to stąd, że obciążenie powiększa wprawdzie tarcie, ale nie powiększa spójności, gdy przy stoku wyższym obie siły wzrastają.

Przykład. Na poziomym naziemie stoku wysokiego 8 m (rys. 388) mamy złożyć kamienie; jak wysoką może być warstwa tych kamieni bez narażenia stoku na usunięcie?



rys. 388.

Mamy dane st $\alpha = 1$, $h_0 = 1$, ciężar gatunkowy ziemi $\gamma = 1600 \text{ kg/m}^3$, ciężar gatunkowy kamienia, uwzględniając próżnię między kamieniami, $\gamma_1 = 2000 \text{ kg/m}^3$, kąt tarcia $\rho = 35^\circ$. Tu obciążenie na m^2 będzie $q = \gamma y = 2000 y$, jeżeli y oznacza wysokość kamieni. Dla st $\alpha = 1,0$ otrzymamy, $\operatorname{wst} \alpha = 0,707$, $\alpha = 45^\circ$, dalej będzie

$$\frac{\alpha - \rho}{2} = \frac{10}{2} = 5^\circ, 45 - \frac{\rho}{2} = 27,5^\circ, \operatorname{wst}^2 27,5^\circ = 0,2134,$$

$$\operatorname{wst} \frac{\alpha - \rho}{2} = 0,087, \operatorname{wst}^2 \frac{\alpha - \rho}{2} = 0,00757. \text{ Więc wedle 805) } h_1 =$$

$$= 1 \cdot \frac{0,2134 \times 0,707}{0,00757} = 19,93 \text{ m, zatem wedle 793) } h = 19,93 - \frac{2 \times 2000 y}{1600} = 19,93$$

$$- 2,5 y = 8 \text{ m, stąd } y = 4,77 \text{ m.}$$

§ 176. Wykreślne wyznaczenie stoku ziemi jednostajnie obciążonej.

Jeżeli w równowadze utrzymuje się stok AB obciążony ciężarem q (rys. 389), to ciężar ten q zamieniamy, jak wiadomo, na warstwę ziemi o wysokości $h_1 = \frac{q}{\gamma}$. Z poprzedniego paragrafu wiemy, że płaszczyzna odłamu pozostaje ta sama, co do stoku nieobciążonego, otrzymujemy ją przez społowienie kąta BAC . Odłam więc stanowi powierzchnia $ABIFD$, którą zamieniamy na trójkąt, robiąc ze względu na 813) $I_1 I = IB = h_1$, $I_1 B_1 \parallel BD$ i prze-

dłużając AB aż do B_1 . Dalsza konstrukcja pozostaje ta sama, $AQ = \frac{4c}{\gamma}$. PN jest kierownicą, A ogniskiem a punkt B_1 jest punktem paraboli spójności.

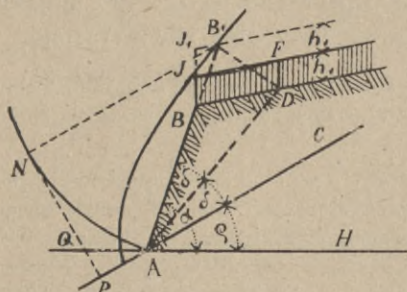
§ 177. Naziom dowolny częściowo obciążony.

Jeżeli naziom dowolnie zakrzywiony jest częściowo obciążony (rys. 390), to właściwie płaszczyzna odłamu nie pozostaje ta sama,

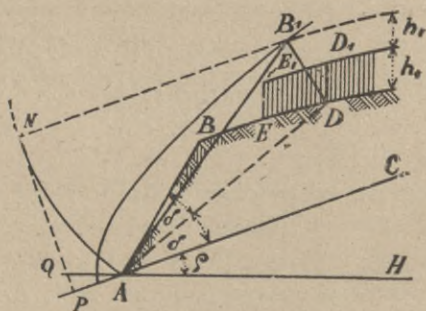
co dla ziemi nieobciążonej, mało się jednak od niej różni. Przyjąwszy znów płaszczyznę tę samą, połowiąc kąt BAC , zamieniamy $ABEE_1D_1$ na trójkąt AB_1D , którego wierzchołek leży w odstępnie $2h_1$ od ED .

Dalsza konstrukcja pozostaje ta sama, zatem $AQ =$

$= \frac{4c}{\gamma}$. W ten sposób możemy wyznaczyć c , spójność potrzebną



rys. 389.

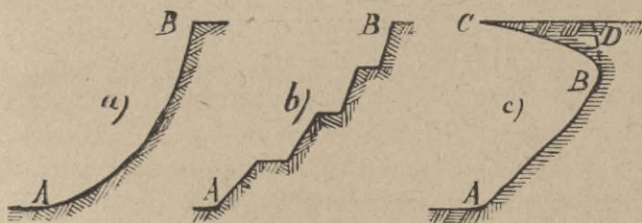


rys. 390.

do równowagi stałej. Jeżeli rzeczywista spójność jest c' , to $\frac{c'}{c} = n$ jest stosunkiem pewności.

§ 178. Stok zakrzywiony.

Z paraboli spójności (rys. 384) widzimy, że im większym jest h , tem większym jest α . Dla wyższych części stoku, dla których h jest mniejszym, może więc być stoczystość większą. Jeżeli byśmy więc nasyp (rys. 391 a) w myśli podzielili na warstwy poziome i dla każdej z nich wyznaczyli kąt nachylenia stoku, to otrzymalibyśmy stok krzywy AB u dołu mniej, u góry więcej stromy. Przy większych nasypach urządzamy rzeczywiście w praktyce stok krzywy, lub też jako przybliżony kształt stok z ławczkami (rys. 391 b).



rys. 391.

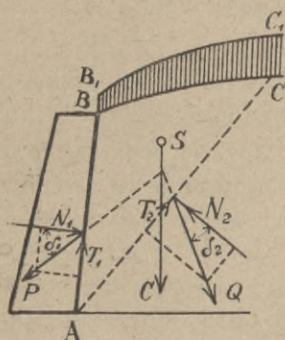
Winkler wyznacza równanie krzywej AB (rys. 391 a), z którego się okazuje, że krzywa ta ma właściwie kształt ABC (rys. 391 c), kształt, jak widzimy, nieprawdopodobny, gdyż przytem nie uwzględniono tej okoliczności, że ziemia złamałaby się pod własnym ciężarem w linii BD ; w rzeczywistości więc ziemia usuwa się w linii ABD *).

XV. Parcie ziemi, obliczone sposobem analitycznym.

§ 179. Ogólne zasady.

Jeżeli stoczystość jest tak wielką, że stok spójnością i tarciem nie może się utrzymać, wtedy, aby zapobiec usunięciu się

*) Bliższe szczegóły z teorii stoków znajdzie czytelnik w wybornem dziele A. v. Kavena „*Theorie der Böschungen*“, 1885.



rys. 392.

ziemi, budujemy ścianę drewnianą lub murowaną AB (rys. 392), przypierającą do stoku. Jeżeli ściana jest murowaną, to nazywamy ją murem oporowym (n. *Stützmauer*, fr. *mur de soutènement*, an. *retaining wall*, h. *muro de sostenimiento*, r. *подпорная стѣна*). Zadaniem naszym jest teraz obliczyć parcie, które ziemia wywiera na mur, a które nazywamy parciem ziemi (n. *Erd-druck*, fr. *poussée des terres*, an. *pressure of earth*, r. *давление земли*). Wyłożymy tu najpierw teorię parcia ziemi,

tak zwaną dawniejszą według Coulomba i Ponceleta, a potem wspomnimy także o innych teoriach.

Gdyby ściana AB miała się poddać, to ziemiaby się usunęła w płaszczyźnie odłamu AC , a więc parcie odłamu ABC na ścianę AB musiałoby przewyciężyć tarcie wzdłuż AB i AC i spójność w płaszczyźnie AC . Ponieważ jednak spójność ziemi nasypanej jest bardzo małą i bardzo zmienną według stopnia wilgoci i ponieważ spójność i tarcie nie działają równocześnie, lecz tarcie występuje dopiero wtedy, gdy spójność zostanie zniweczona, więc zwykle w praktyce nie uwzględniamy jej w obliczeniu dla większej pewności. Gdyby nawet spójność w rzeczywistości równocześnie działała z tarcie, to działałaby tylko korzystnie i zmniejszałaby parcie ziemi; nie uwzględniając jej więc, przypuszczamy warunki niekorzystniejsze.

Później podamy sposoby uwzględnienia spójności, którego zachodzi potrzeba w niektórych wypadkach. Obecnie pozostaje zatem do uwzględnienia tylko tarcie, które klin (n. *Druckkeil*, fr. *coin de poussée*) ABC wraz z obciążeniem ma pokonać przy usunięciu się podczas ruchu po płaszczyznach AB i AC i ciężar klina wraz z obciążeniem C , działający w środku ciężkości S odłamu ABB_1C_1C . Ciężar C wywołuje oddziaływania N_1 i N_2 , prostopadłe do AB i AC lub ukośne ze względu na tarcie. Podczas ruchu nazwijmy tarcie T_1 i T_2 . Jeżeli kąt tarcia między ziemią a murem nazwiemy φ_1 , a między ziemią a ziemią φ_2 , to $T_1 = N_1 \operatorname{tg} \varphi_1$, $T_2 = N_2 \operatorname{tg} \varphi_2$. Nazwijmy P wypadkową z T_1 i N_1 , a Q z T_2 i N_2 , to

$\frac{1}{\cos \varphi} = 8$

$$P = \sqrt{N_1^2 + N_2^2 \operatorname{tg}^2 \varrho_1} = N_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varrho_1}$$

$$= N_1 \operatorname{sech} \varrho_1 = \frac{N_1}{\operatorname{dost} \varrho_1}$$

$$\text{a } Q = \frac{N_2}{\operatorname{dost} \varrho_2} \quad \dots \dots \dots 814)$$

Jeżeli kąt nachylenia między P i N_1 nazwiemy δ_1 , a δ_2 między Q i N_2 , to $P = \frac{N_1}{\operatorname{dost} \delta_1}$, $Q = \frac{N_2}{\operatorname{dost} \delta_2}$, $\dots \dots \dots 815)$

a więc ze względu na równ. 814) $\varrho_1 = \delta_1$, $\varrho_2 = \delta_2$. $\dots \dots \dots 816)$

Widzimy więc, że podczas ruchu klina ABC odłam wywierać musi parcia na ścianę AC i płaszczyznę odłamu, które są nachylone do AB i AC pod odnośnymi kątami tarcia. Dla równowagi muszą też siły P , Q i C przecinać się w jednym punkcie. Nad tym ostatnim warunkiem zastanowimy się później.

§ 180. Ogólne wyznaczenie powierzchni odłamu i parcia ziemi.

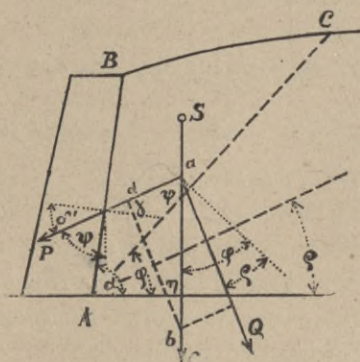
Kąt tarcia ϱ_1 między murem a ziemią jest zwykle większym, niż kąt tarcia ϱ_2 między ziemią a ziemią. Zresztą, choćby on był mniejszym, w naszej jest mocy uczynić ścianę AB więcej szorstką i zwiększyć tarcie tak, że możemy prawie zawsze przyjąć, że kąt tarcia $\varrho_1 > \varrho_2$. W takim razie przy usunięciu się ziemi, zostaje przy murze bardzo cienka warstwa ziemi, w ziemi tworzy się szczelina, a przy usunięciu odbywa się ruch ziemi po ziemi, musimy zatem uwzględnić współczynnik tarcia między ziemią a ziemią, a więc ten sam kąt tarcia ϱ_2 . Tak twierdzi Winkler, z którym zgadzają się Haeseler i Engesser. Jednak nie można zaprzeczyć, że może się zdarzyć też, że $\varrho_1 < \varrho_2$, zwłaszcza jeśli woda dostanie się poza mur. Dlatego Möller radzi przyjmować $\delta_1 = \frac{2}{3}\varrho_2$ przy zwykłych stosunkach, zaś $\delta_1 = \frac{1}{2}\varrho_2$ przy wąskich i gładkich ścianach, np. przy drzewie heblowanem i okrągłych palach. Müller Bresa u stwierdza na mocy doświadczeń, że $\delta_1 < \varrho_2$ zależnie od powierzchni ściany, a przeważnie przyjmuje $\delta_1 = \frac{3}{4}\varrho_2$.

Nadal więc przyjmować będziemy na razie kąt δ_1 , bliżej nieokreślony, aby można zbadać, jaki wpływ wywierają różne założenia co do wielkości tego kąta. Z rys. 393 otrzymamy, rozłożywszy siłę C na składowe P i Q , $P : C = ad : ab = \operatorname{wst} \eta : \operatorname{wst} \gamma$. Dalej mamy $\eta = \varphi - \varrho$, $\gamma = 180 - \eta - \psi = 180 - (\varphi - \varrho + \psi)$, więc

$$P : C = \text{wst}(\varphi - \varrho) : \text{wst}(\varphi - \varrho + \psi), \text{ stąd } P = \frac{C \text{wst}(\varphi - \varrho)}{\text{wst}(\varphi - \varrho + \psi)} \quad 817)$$

P więc zależnem jest od kąta φ , którego jeszcze nie znamy.

Łatwo jednak zrozumiemy, że ziemia usunie się w tej płaszczyźnie, a więc dla takiego kąta φ , dla którego P jest największem. Szukać zatem będziemy teraz wartości kąta φ , dla którego P jest największem, przyczem jednak musimy także ciężar C wyrazić jako funkcję φ , jak to pokażemy poniżej w szczegółowych przypadkach.



rys. 393.

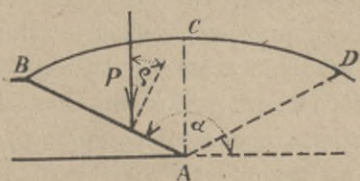
Z rysunku widzimy, że $\psi = 180 - \alpha - \delta'$, więc równ. 797) możemy inaczej napisać

$$P = \frac{C \text{wst}(\varphi - \varrho)}{\text{wst}(\alpha - \varphi + \varrho + \delta_1)} \quad 818)$$

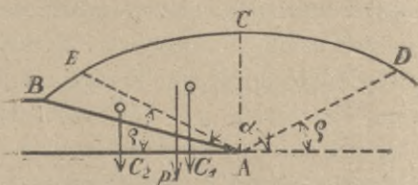
Gdy $\alpha = 180 - \varrho$ (rys. 394), otrzymamy z równ. 818)

$$P = \frac{C \text{wst}(\varphi - \varrho)}{\text{wst}(\varphi - \delta_1)}$$

Jeżeli przyjmiemy $\delta_1 = \varrho_1$, to $P = C$ 819)



rys. 394.



rys. 395.

I rzeczywiście, jeżeli naziom jest symetryczny do pionowej AC , to łatwo zrozumiemy, że ponieważ płaszczyzna AB jest zupełnie symetryczną do AD t. j. do stoku naturalnego, więc płaszczyzna odłamu musi być pionową, a parcie ziemi w tym wypadku pionowe równa się ciężarowi ziemi ABC , nad murem leżącej.

Gdy $\alpha > 180 - \varrho$, wtedy ciśnienie P jest także pionowe, (rys. 395) i równe ciężarowi ziemi nad murem leżącej, bo wtedy ziemia nie może się usuwać w płaszczyźnie AB , lecz w razie pod-

dania się muru utworzy się w powierzchni AE , nachylonej pod kątem ϱ do poziomu, szczelina i na tej płaszczyźnie ziemia będzie się usuwała. Rozłożyć więc możemy wtedy ABC na AEC i ABE , a z poprzedniego wiemy, że, jeżeli naziom jest symetryczny do AC , to C_1 parcie na AE jest pionowe i równe ciężarowi klina AEC , gdyż klin ten, nie usuwając się, działa tylko na mur swym ciężarem, a więc wypadkowe parcie P będzie pionowe i równe ciężarowi klina ABC , czyli ziemi nad murem leżącej i zaczepiać będzie w jego środku ciężkości.

Twierdzenie to ważnem jest także dla $\alpha = 180^\circ$ czyli dla muru poziomego, na który parcie ziemi jest pionowe i równe ciężarowi ziemi nad murem leżącej, w przybliżeniu nawet wtedy, gdyby naziom nie był nawet symetryczny do AC .

Aby się przekonać o rzetelności równania 817, zastosujemy ten wzór do parcia wody, a przyjąwszy $\varrho = 0$ i $\delta_1 = 0$, musimy otrzymać znane wzory dla parcia wody (rys. 396).

Nie znając kąta φ , przyjmijmy go z początku dowolnie, niech więc będzie AC płaszczyzną odłamu, to otrzymamy z równania 817).

$$P = \frac{C \operatorname{wst} \varphi}{\operatorname{wst}(\varphi + \psi)} = \frac{G \operatorname{wst} \varphi}{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi)},$$

ciężar zaś odłamu będzie:

$$\begin{aligned} C &= \gamma_w ABC = \gamma_w \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} \gamma_w h (EC - EB) = \\ &= \frac{1}{2} \gamma_w h (h \operatorname{dot} \varphi - h \operatorname{dot} \alpha) = \frac{1}{2} \gamma_w h^2 \frac{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{wst} \alpha \operatorname{wst} \varphi}. \end{aligned}$$

Wstawiwszy wartość za C w równanie dla P , otrzymamy

$$P = \frac{1}{2} \gamma_w h^2 \frac{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{wst} \alpha \operatorname{wst} \varphi} \cdot \frac{\operatorname{wst} \psi}{\operatorname{wst}(\varphi + \psi)} = \frac{1}{2} \gamma_w \frac{h^2}{\operatorname{wst} \alpha} \dots \quad 820)$$

znany wzór hydrostatyczny.



rys. 396.

§ 181. Ogólne wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi.

Nazwijmy p parcie ziemi na część muru BC (rys 397) przyczem rzut pionowy długości BC niech się nazywa x . Jeżeli x wzrośnie o dx , to p wzrośnie o dp , parcie na część muru CC' , Całe parcie P na mur AB będzie $P = \int_0^h dp$.

Moment siły dp ze względu na punkt B jest $dp \cdot Bs =$
 $= dp \cdot BC \text{dost } \varrho = dp \cdot \frac{x}{\text{wst } \alpha} \text{dost } \varrho$. Mo-



rys. 397.

ment siły wypadkowej P będzie więc

$$P \cdot Br = P \cdot BE \text{dost } \varrho = P \frac{e_1}{\text{wst } \alpha} \text{dost } \varrho =$$

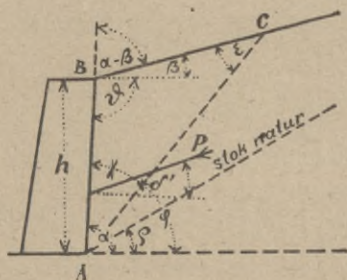
$$= \frac{\text{dost } \varrho}{\text{wst } \alpha} \int_0^h x dp, \text{ a stąd}$$

$$e_1 = \frac{1}{P} \int_0^h x dp \quad \dots \quad 821)$$

W szczególnych wypadkach wyznaczamy dp , wstawiamy w równanie 821) i otrzymujemy w ten sposób e_1 , a stąd $e = h - e_1$.

§ 182. Wyznaczenie parcia ziemi, gdy naziom jest płaszczyzną, nachyloną do poziomu pod kątem β .

Przypuszczamy, że naziom nachylony jest do poziomu pod kątem β (rys. 398) mniejszym od ϱ .



rys. 398.

$$\text{stąd } AC = \frac{AB \text{wst } (\alpha - \beta)}{\text{wst } (\varphi - \beta)}$$

Parcie ziemi wyznaczamy według równania 817). W tym celu jednak musimy wprzód obliczyć ciężar odłamu C . Z rysunku otrzymamy

$$C = \gamma \cdot ABC = \frac{1}{2} \gamma \cdot AB \cdot AC \text{wst } (\alpha - \varphi),$$

Z trójkąta ABC mamy

$$AB : AC = \text{wst } \varepsilon : \text{wst } (\vartheta + \beta),$$

przyczem

$$\varepsilon = 180 - \alpha + \varphi - \vartheta - \beta = 180 - \alpha +$$

$$+ \varphi - (180 - \alpha + \beta) = \varphi - \beta, \text{ a więc}$$

$$AB : AC = \text{wst } (\varphi - \beta) : \text{wst } (\alpha - \beta),$$

Z rysunku mamy dalej $AB = \frac{h}{\text{wst } \alpha}$. Wstawiawszy wartości

$$\text{za } AB \text{ i } AC, \text{ otrzymamy } C = \frac{\gamma}{2} \frac{h^2 \text{wst } (\alpha - \beta) \text{wst } (\alpha - \varphi)}{\text{wst}^2 \alpha \text{wst } (\varphi - \beta)}$$

Wstawmy tę wartość w 817), a otrzymamy

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \beta) \text{wst}(\alpha - \varphi) \text{wst}(\varphi - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst}(\varphi - \beta) \text{wst}(\alpha - \varphi + \varrho + \delta')}.$$

Z rysunku widzimy, że $\chi = \alpha - \varphi$, więc

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \beta) \text{wst} \chi \text{wst}(\alpha - \varrho - \chi)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst}(\alpha - \beta - \chi) \text{wst}(\varrho + \delta' + \chi)}.$$

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \beta) \text{wst} \chi [\text{wst}(\alpha - \varrho) \text{dost} \chi - \text{dost}(\alpha - \varrho) \text{wst} \chi]}{2 \text{wst}^2 \alpha [\text{wst}(\alpha - \beta) \text{dost} \chi - \text{dost}(\alpha - \beta) \text{wst} \chi] (\text{wst} 2(\varrho - \delta') \text{dost} \chi + \text{dost}(\varrho + \delta') \text{wst} \chi)}.$$

Podzielmy licznik i mianownik przez $\text{wst}(\alpha - \beta) \text{wst}^2 \chi$, a otrzymamy:

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \varrho) [\text{dot} \chi - \text{dot}(\alpha - \varrho)]}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst}(\varrho + \delta') \text{dot} \chi - \text{dot}(\alpha - \beta) \text{dot} \chi + \text{dot}(\varrho + \delta')}$$

Nazwijmy $x = \text{dot} \chi$, to

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst}(\varrho + \delta')} \frac{x - \text{dot}(\alpha - \varrho)}{(x + \text{dot}(\varrho + \delta'))(x - \text{dot}(\alpha - \beta))},$$

czyli:
$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst}(\varrho + \delta')} \cdot U, \quad \dots \quad 822)$$

gdy
$$U = \frac{x - \text{dot}(\alpha - \varrho)}{(x + \text{dot}(\varrho + \delta')) [x - \text{dot}(\alpha - \beta)]} \quad \dots \quad 823)$$

czyli
$$U = \frac{x - \text{dot}(\alpha - \varrho)}{x^2 + x [\text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)] - \text{dot}(\varrho + \delta') \text{dot}(\alpha - \beta)}.$$

P będzie największem, gdy U będzie największem, więc

gdy $\frac{dU}{dx} = 0$. Różniczkując funkcję U , otrzymamy

$$x^2 + x [\text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)] - \text{dot}(\alpha - \beta) \text{dot}(\varrho + \delta') + \frac{-[x - \text{dot}(\alpha - \varrho)] [2x + \text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)]}{x^2 + x [\text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)] - \text{dot}(\alpha - \beta) (\varrho - \delta')^2} = 0.$$

Aby wyraz lewy równał się zeru, musi być albo licznik równym zeru albo mianownik równym ∞ . W tym ostatnim wypadku miałyby być $x = \text{dot} \chi = \infty$, a więc $\chi = 0$, co jest niemożliwem. A zatem musi być licznik $= 0$, więc

$$x^2 - 2x \text{dot}(\alpha - \varrho) = \\ = \text{dot}(\alpha - \varrho) \text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta) [\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot} 2(\varrho + \delta')], \text{ a stąd}$$

$$x = \text{dot}(\alpha - \varrho) +$$

$$\pm \sqrt{\text{dot}^2(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\alpha - \varrho)\text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)[\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')]}$$

czyli

$$x = \text{dot} \psi =$$

$$= \text{dot}(\alpha - \varrho) \pm \sqrt{[\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')][\text{dot}(\alpha - \varrho) - \text{dot}(\alpha - \beta)]}.$$

Ponieważ kąt χ jest ostry, więc $\text{dot} \chi > 0$, dlatego przyjmujemy tylko znak górny, zatem

$$\text{dot} \chi = x = \text{dot}(\alpha - \varrho) +$$

$$+ \sqrt{[\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')][\text{dot}(\alpha - \varrho) - \text{dot}(\alpha - \beta)]}. \quad 824)$$

Wprowadziwszy tę wartość za x w równanie 803), otrzymalibyśmy *najw* U . Lecz wzór byłby za zawily, postąpimy więc inaczej. Niech będzie:

$$U = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x - \text{dot}(\alpha - \varrho)}{x^2 + x[\text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)] - \text{dot}(\varrho + \delta')\text{dot}(\alpha - \beta)},$$

to

$$\frac{dU}{dx} = \frac{F_1(x)f(x) - f_1(x)F(x)}{f(x)^2} = 0,$$

jeżeli $F_1(x)$ i $f_1(x)$ nazwiemy pochodne funkcyj $F(x)$, względnie $f(x)$.

Ponieważ $f(x)$ nie jest $=\infty$, więc licznik musi być $=0$, zatem $f(x)F_1(x) = f_1(x)F(x)$, a stąd

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \text{najw } U. \quad \dots \dots \dots 825)$$

Wykonajmy naznaczone działanie, a otrzymamy

$$\text{najw } U = \frac{1}{2x + \text{dot}(\varrho - \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)}.$$

Podstawivszy w to równanie wartość z równania 824), otrzymamy:

$$\text{najw } U = \frac{1}{\sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')} + \sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) - \text{dot}(\alpha - \beta)^2}}$$

a wstawiwszy tę wartość w równanie 802), otrzymamy nareszcie

$$P = \frac{\gamma \mathbf{h}^2 \mathbf{wst}(\alpha - \varrho)}{2 \mathbf{wst}^3 \alpha \mathbf{wst}(\varrho - \delta') [\sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')} + \sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) - \text{dot}(\alpha - \beta)^2}]^2}$$

Chcąc wyznaczyć położenie punktu zaczepienia parcia ziemi, zastosujemy tu ogólne równanie 821).

Równanie 826) możemy napisać $P = ah^2$, gdzie α jest pewnym współczynnikiem, zależnym od α , β , ϱ i δ' , ale niezależnym od h .

Analogicznie możemy wyrazić parcie na część muru od wierzchołka aż do głębokości x $p = ax^2$, a więc $\frac{dp}{dx} = 2ax$. Wstawwszy to w równanie 821), otrzymamy:

$$e_1 = \frac{1}{P} \int_0^h x dp = \frac{1}{h^2} \int_0^h 2ax^2 dx = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{2}{3} h, \text{ a więc}$$

$$e = h - \frac{2}{3} h = \frac{1}{3} h \dots \dots \dots 827)$$

Punkt zaczepienia parcia ziemi leży więc dla naziomu płaskiego w jednej trzeciej części wysokości stoku.

§ 183. Parcie ziemi dla naziomu poziomego.

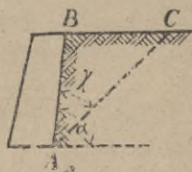
Dla poziomego naziomu (rys. 399) jest $\beta = 0$, więc otrzymamy z równania 826)

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \varrho)}{2\text{wst}^2 \alpha \text{wst}(\varrho + \delta') [\sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')} + \sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) - \text{dot} \alpha}]^2}$$

Podstawmy $\text{dot} \alpha = a$, $\text{dot} \varrho = r$,
 $\text{dot} \delta' = d$

$$\text{a więc } \text{dot}(\varrho + \delta') = \frac{dr-1}{d+r}, \text{dot}(\alpha - \varrho) = \frac{ar+1}{r+a},$$

a będziemy mieli



rys. 399.

$$P = \frac{\gamma h^2 (\text{wst} \alpha \text{dost} \varrho - \text{dost} \alpha \text{wst} \varrho)}{2\text{wst}^2 \alpha (\text{wst} \varrho \text{dost} \delta' + \text{dost} \varrho \text{wst} \delta') \left[\sqrt{\frac{ar+1}{r-a} + \frac{dr-1}{d+r}} + \sqrt{\frac{ar+1}{r-a} - a} \right]^2},$$

a podzieliwszy licznik i mianownik przez $\text{wst}^2 \alpha \text{wst} \varrho \text{dost} \delta'$,

$$P = \frac{\gamma h^2 (r-a)^2 \sqrt{1+a^2} (1+d^2)}{2[\sqrt{1+r^2} (a-d) + \sqrt{(d+r)(1+a^2)}]^2} \dots 828)$$

Na podstawie tego równania obliczyliśmy następną tabliczkę dla $\delta' = \frac{3}{4} \varrho$.

Tablica LIV.

$\frac{P}{\gamma h^2} =$	Wartości dla $\alpha = \text{dot } \alpha$													
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	
Wartości dla $r = \text{dot } \rho$	1,0	0,043	0,051	0,054	0,060	0,064	0,067	0,082	0,095	0,103	0,108	0,119	0,127	0,141
	1,1	0,051	0,058	0,063	0,069	0,073	0,076	0,092	0,109	0,113	0,119	0,129	0,138	0,151
	1,2	0,059	0,067	0,071	0,078	0,083	0,086	0,101	0,119	0,123	0,129	0,139	0,148	0,161
	1,3	0,068	0,075	0,080	0,087	0,092	0,095	0,111	0,129	0,133	0,138	0,149	0,157	0,171
	1,4	0,076	0,084	0,089	0,091	0,101	0,104	0,120	0,138	0,142	0,148	0,158	0,167	0,180
	1,5	0,084	0,092	0,098	0,105	0,109	0,112	0,129	0,147	0,151	0,157	0,167	0,176	0,189
	1,6	0,092	0,100	0,106	0,113	0,118	0,121	0,137	0,155	1,159	0,165	0,176	0,184	0,197
	1,7	0,101	0,109	0,114	0,121	0,126	0,129	0,146	0,164	0,168	0,174	0,184	0,192	0,206
	1,8	0,108	0,116	0,122	0,129	0,134	0,137	0,154	0,172	0,176	0,182	0,192	0,200	0,214
	1,9	0,116	0,124	0,130	0,137	0,141	0,145	1,161	0,180	0,184	0,190	0,199	0,208	0,221
	2,0	0,123	0,131	0,137	0,145	0,149	0,152	0,169	0,187	0,190	0,197	0,207	0,215	0,228

§ 184. Parcie ziemi na mur pionowy.

Gdy mur jest pionowy (rys. 400), to $\alpha = 90^\circ$. Wstawiwszy to w równanie 826), otrzymamy

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{dost } \varrho}{2 \text{wst } (\varrho + \delta') [\sqrt{\text{st } \varrho + \text{dot } (\varrho + \delta')} + \sqrt{\text{st } \varrho - \text{st } \beta}]^2} =$$

$$= \frac{\gamma h^2}{2 (\text{st } \varrho \text{dost } \delta' + \text{wst } \delta') \left[\sqrt{\text{st } \varrho + \frac{1 - \text{st } \varrho \text{st } \delta'}{\text{st } \varrho + \text{st } \delta'}} + \sqrt{\text{st } \varrho - \text{st } \beta} \right]^2}$$

albo
$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \text{st}^2 \delta'}}{2 [\sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho} + \sqrt{(\text{st } \varrho + \text{st } \delta') \text{st } \varrho - \text{st } \beta}]^2} \dots 829)$$

Na podstawie tego wzoru podajemy obliczoną tabliczkę dla założenia, że, $\delta' = \frac{3}{4} \varrho$:

Tablica LV.

$\frac{P}{\gamma h^2} =$		Wartości dla $\text{st } \beta$										
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Wartości dla $\text{st } \varrho$	1,0	0,081	0,085	0,091	0,095	0,102	0,110	0,119	0,132	0,150	0,179	0,297
	0,9	0,092	0,098	0,104	0,116	0,119	0,129	0,143	0,162	0,194	0,322	—
	0,8	0,106	0,115	0,120	0,129	0,141	0,155	0,174	0,210	0,348	—	—
	0,7	0,122	0,135	0,140	0,153	0,168	0,191	0,227	0,374	—	—	—
	0,6	0,143	0,153	0,167	0,184	0,207	0,244	0,401	—	—	—	—
	0,5	0,169	0,185	0,201	0,226	0,267	0,425	—	—	—	—	—
	0,4	0,202	0,222	0,261	0,290	0,449	—	—	—	—	—	—
	0,3	0,243	0,271	0,314	0,465	—	—	—	—	—	—	—

Jeżeli oprócz tego naziom jest poziomy, czyli $\beta=0$, wtedy

$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \text{st}^2 \delta'}}{2[\sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho} + \sqrt{(\text{st} \varrho + \text{st} \delta') \text{st} \varrho}]^2},$$

a wstawwszy $r = \text{dot } \varrho$ a $d = \text{dot } \delta'$, otrzymamy

$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \frac{1}{d^2}}}{\left[\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} + \sqrt{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d}\right) \frac{1}{r}} \right]^2} = \frac{\gamma h^2 r^2 \sqrt{1 + d^2}}{2[\sqrt{(1+r^2)d} + \sqrt{d+r}]^2} \cdot 830)$$

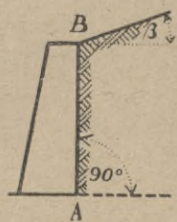
To samo otrzymamy z równania 828), wtawiwszy $\alpha = 90^\circ$, więc $\text{dot } \alpha = a = 0$.

Jeżeli wstawimy w równ. 830) $\delta' = 0$, $d = \infty$, otrzymamy:

$$P = \frac{\gamma h^2 r^2}{2[\sqrt{1+r^2} + 1]^2} = \frac{\gamma h^2 \text{dot}^2 \varrho}{2[1 + \text{dosiecz } \varrho]} = \frac{\gamma h^2}{2} \text{st}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right). \quad 831)$$

Gdy naziom jest równoległy do stoku naturalnego, to $\beta = \varrho$, a więc z 829 otrzymujemy:

$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \text{st}^2 \delta'}}{2[\sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho}]^2} = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \text{st}^2 \delta'}}{2(1 + \text{st}^2 \varrho)} = \frac{\gamma h^2 \text{dost}^2 \varrho}{2 \text{dost } \delta} \dots \dots \dots 832)$$



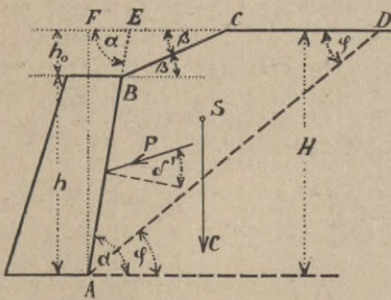
rys. 400.

§ 185. Wyznaczenie parcia ziemi dla naziomu pochyłego, zakończonego płaszczyzną poziomą.

Gdy naziom wznosi się pod kątem β aż do pewnej wysokości h_0 , a potem zakończony jest płaszczyzną poziomą (rys. 401) to ciężar odłamu $C = \gamma(AED - BEC)$.

Dalej mamy

$$AED = \frac{1}{2} H \cdot H (FD - EF) = \frac{1}{2} H^2 (\text{dot } \varphi - \text{dot } \alpha)$$



rys. 401.

$$BEC = \frac{1}{2} h_0^2 (\text{dot } \beta - \text{dot } \alpha), \text{ więc}$$

$$C = \frac{1}{2} \gamma H^2 (\text{dot } \varphi - \text{dot } \alpha) + \\ - \frac{1}{2} \gamma h_0^2 (\text{dot } \beta - \text{dot } \alpha),$$

$$\text{albo } C = \gamma \frac{H^2}{2} \left[(\text{dot } \varphi - \text{dot } \alpha) + \right. \\ \left. - \left(\frac{h_0}{H} \right)^2 (\text{dot } \beta - \text{dot } \alpha) \right] = \\ = \frac{\gamma H^2}{2} (\text{dot } \varphi - k), \dots 833)$$

$$\text{gd}y \quad k = \text{dot } \alpha + \left(\frac{h_0}{H} \right)^2 (\text{dot } \beta - \text{dot } \alpha). \dots 834)$$

który to wyraz jest od φ niezależnym.

Podstawivszy w równanie 818) wartość za C , otrzymamy

$$P = \frac{\gamma H^2}{2} (\text{dot } \varphi - h) \frac{\text{wst } (\varphi - \varrho)}{\text{wst } (\alpha + \varrho + \delta' - \varphi)}, \text{ czyli}$$

$$P = \frac{\gamma H^2 (\text{dot } \varphi - k) (\text{wst } \varphi \text{ dost } \varrho - \text{wst } \varrho \text{ dost } \varphi)}{2 [\text{wst } (\alpha + \varrho + \delta') \text{ dot } \varphi - \text{dost } (\alpha + \varrho + \delta') \text{ wst } \varphi]}$$

a podzieliwszy przez $\text{wst } \varphi$ licznik i mianownik

$$P = \frac{\gamma H^2 (\text{dot } \varphi - k) (\text{dost } \delta - \text{wst } \delta \text{ dot } \varphi)}{2 [\text{wst } (\alpha + \varrho + \delta') \text{ dot } \varphi - \text{dost } (\alpha + \varrho + \delta')]} = \\ = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho (\text{dot } \varphi - k) (\text{dot } \varrho - \text{dot } \varphi)}{2 \text{wst } (\alpha + \varrho + \delta') [\text{dot } \varphi - \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta')]}$$

$$\text{a gd}y \quad x = \text{dot } \varphi, \quad P = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho (x - k) (\text{dot } \varrho - x)}{2 \text{wst } (\alpha + \varrho + \delta') [x - \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta')]} \\ = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho}{2 \text{wst } (\alpha + \varrho + \delta')} \cdot U, \quad \dots 835)$$

$$\text{gd}y \quad U = \frac{(x - k) (\text{dot } \varrho - x)}{x - \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta')}.$$

Jeżeli U , a więc i P , ma być największem to $\frac{dU}{dx} = 0$, więc

$$\frac{dU}{dx} = \frac{[x - \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta')] (\text{dot } \varrho - 2x + k) - (x - k) (\text{dot } \varrho - x)}{[x - \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta')]^2} = 0.$$

Ponieważ ani $x = \text{dot } \varrho$, ani $\text{dot } (\alpha + \varrho + \delta')$ nie mogą być równe ∞ , więc musi być $[x - \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') (\text{dot } \varrho - 2x + k) - (x - k) (\text{dot } \varrho - x) = 0$, czyli $x (\text{dot } \varrho + k) - 2x^2 + 2x \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') + -x (\text{dot } \varrho + k) + x^2 = \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') (\text{dot } \varrho + k) - k \text{dot } \varrho$, stąd $x^2 + -2x \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') = \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') \text{dot } \varrho + k (\text{dot } \varrho - \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta'))]$

a więc
$$x = \frac{\text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') + \pm \sqrt{\text{dot}^2 (\alpha + \varrho + \delta') - \text{dot} (\alpha + \varrho + \delta') \text{dot } \varrho + k (\text{dot } \varrho - \text{dot} (\alpha + \varrho + \delta'))}}{2}$$
, albo

$$x = \frac{\text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') + \pm \sqrt{\text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') [\text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') - \text{dot } \varrho] + k [\text{dot } \varrho - \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta')]}}{2}$$

wreszcie
$$x = \frac{\text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') + \pm \sqrt{[k - \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta')] [\text{dot } \varrho - \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta')]}}{2}$$
.

Dla *najw* U przyjmujemy tylko znak górny, więc

$$x = \text{dot } \varphi = \frac{\text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') + \sqrt{[k - \text{dot} (\alpha + \varrho + \delta')] [\text{dot } \varrho - \text{dot} (\alpha + \varrho + \delta')]}}{2} \quad 836)$$

Według równ. 825) otrzymamy, przyjmawszy $U = \frac{F(x)}{f(x)}$,

$$\text{najw } U = \frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{\text{dot } \varrho - 2x + k}{2} = \text{dot } \varrho - 2x + k, \text{ więc}$$

$$\text{najw } U = \frac{\text{dot } \varrho + k - 2 \text{dot } (\alpha + \varrho + \delta') + \sqrt{2 \sqrt{k - \text{dot} (\alpha + \varrho + \delta')] [\text{dot } \varrho - \text{dot} (\alpha + \varrho + \delta')]}}{2}$$

stąd $\text{najw } U = \frac{[\sqrt{k - \text{dot} (\alpha + \varrho + \delta')} - \sqrt{[\text{dot } \varrho - \text{dot} (\alpha + \varrho + \delta')]^2}]}{2}$.

Wstawiwszy tę wartość w 835), otrzymamy

$$P = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho}{2 \text{wst} (\alpha + \varrho + \delta')} \left[\sqrt{k - \text{dot} (\alpha + \varrho + \delta')} - \sqrt{[\text{dot } \varrho - \text{dot} (\alpha + \varrho + \delta')]^2} \right] \quad 837)$$

Jeżeli przytem mur jest pionowy, to $\alpha = 90^\circ$, $\text{dot } 90^\circ = 0$,

więc według równania 834) $k = \left(\frac{h_1}{H} \right)^2 \text{dot } \beta$.

Wstawiwszy to w równ. 837), otrzymamy dla muru pionowego

$$P = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho}{2 \text{dost } (\varrho + \delta')} \left[\sqrt{\frac{h_1^2 \text{dot } \beta}{H^2} + \text{st} (\varrho + \delta')} - \sqrt{\text{dot } \varrho + \text{st} (\varrho + \delta')} \right] \quad 838)$$

Dla $\varrho = 33^\circ$, $\delta = \frac{1}{4} \varrho = 24^\circ 45'$ i $\beta = \varrho$ otrzymamy z równ. 838) następną tabliczkę:

Wpływ obciążenia możemy też inaczej uwzględnić, a mianowicie podobnie, jak w § 175, wstawiając we wzory, wyznaczające ciężar odłamu C dla naziomu płaskiego, zamiast γh wyraz

$$\gamma h = \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\operatorname{wst}(\alpha - \beta)} =$$

$$\gamma h = \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst}(\alpha - \beta)}\right) = \gamma hc,$$

jeżeli $c = 1 + \frac{2q \operatorname{wst}(\alpha - \beta)}{\gamma h \operatorname{wst}(\alpha - \beta)}$, przyczem

$l = AD$ zostawiamy niezmiennione.

Otrzymamy więc ciężar odłamu z uwzględnieniem obciążenia $C' = Cc$, jeżeli C oznacza ciężar odłamu bez uwzględnienia obciążenia. Dalej otrzymamy:

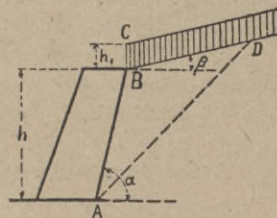
$$P' = Pc = P \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst}(\alpha - \beta)}\right), \quad \dots \dots \dots 840$$

a dla naziomu poziomego, ponieważ $\beta = 0$,

$$P' = P \left(1 + \frac{2q}{\gamma h}\right) \quad \dots \dots \dots 841$$

Dla dróg przyjmujemy zwykle jako największe obciążenie tłum ludzi lub wozów, dla tłumy ludzi $q = 400$ do $500 \frac{kg}{m^2}$. Obciążenie wozami lub wałkiem jest zwykle większe; należy rozdzielić ciężar wozu lub wałka równo na podstawę powiększoną ze wszystkich stron o grubość żwirówki. Podobnie postępujemy dla kolei przy obciążaniu parowozami. Dokładniej licząc trzeba rozdzielić ciężar osi, znajdujących się na długości BD , równomiernie, uwzględniając rozdzielenie się ciśnienia przez żwir i nasyp pod $\sphericalangle 45^\circ$. Twierdzenia te odnoszą się do wypadków, gdy ciężar jest w przybliżeniu równo rozdzielonym. Jeżeliby jednak poza punktem D był jakiś wielki ciężar, to należałoby spróbować, czy uwzględniając także ten ciężar po za D nie otrzymamy innej płaszczyzny odłamu, mamy bowiem wtedy stok sprowadzony już nie płaski, lecz załamany. Wtedy najlepiej wykreślić wyznaczyć parcie jakto poniżej podamy.

Buchwald podaje (Zeit. f. Bauw. 1916 str. 563), co następuje. Wysokość warstwy ziemi równoważnej z ciężarem ruchomym ($\gamma = 1,65$).



rys. 402.

Tablica LVII.

Tłum ludzi, zwykła droga	0:30 m
droga, wielkie ciężary	0:60 „
kolej drogowa \perp do muru (przyczółek 2 m wys.)	0:60 „
„ „ // do muru (tor obok)	1:40 „
najwyższy wałek parowy	1:50 „
parowozy kolejek na szerokość 2.5 m \perp do muru	0:60 — 0.8
„ „ „ „ // do muru	1:20 — 1:50
„ kolei drugorzęd. na szer. 3 m \perp do muru	0:8 — 1:00
„ „ „ „ // „ „	1:50 — 1:80
„ „ pierwszorzęd. \perp albo na // „ „	2:30 — 2:70

Wskutek obciążenia zmienia się punkt zaczepienia parcia ziemi, a mianowicie, ponieważ obciążenie działa u góry, punkt zaczepienia podniesie się. Postępując według ogólnej metody (§ 181), otrzymamy z równania 840):

$$P = Pc = c_1 h^2 \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst} (\alpha - \beta)} \right)$$

dla naziomu płaskiego, bo wtedy parcie P jest proporcjonalne do h^2 , przyczem c_1 oznacza liczbę stałą. Możemy wtedy też napisać:

$$P' = c_1 h \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma \operatorname{wst} (\alpha - \beta)} \right) = c_1 h (h + c_2),$$

a stąd dla wysokości x (rys. 404)

$$p' = c_1 x (x + c_2), \text{ a dalej } dp' = 2c_1 x dx + c_1 c_2 dx.$$

Według metody ogólnej (równ. 821) mamy

$$e'_1 = \frac{1}{P} \int_0^h x dp' = \frac{1}{c_1 h (h + c_2)} \left[\int_0^h 2c_1 x^2 dx + \int_0^h c_1 c_2 x dx \right],$$

a zcałkowawszy otrzymamy:

$$e'_1 = \frac{1}{h(h+c)} \left(\frac{2h^2}{3} + \frac{h^2}{2} \right), \text{ a więc}$$

$$e' = h - e_1' = \frac{6h^2(h+c_2) - 4h^3 - 3h^2c_2}{6h(h+c_2)}$$

czyli

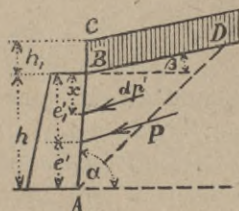
$$e' = \frac{2h^2 + 3hc_2}{6h(h+c_2)} = \frac{h}{3} \frac{h + \frac{2}{3}c_2}{h + c_2}, \quad \cdot \quad 842)$$

przyczem $c_2 = \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma \operatorname{wst}(\alpha - \beta)} \dots \dots \dots 843)$

Z równania 842) widzimy, że e' jest zawsze większem, niż $\frac{h}{3}$, a mianowicie otrzymamy granice:

dla $q = 0 \quad c_2 = 0$, więc $e' = \frac{h}{3}$

„ $q = \infty \quad c_2 = \infty$, „ $e' = \frac{h}{2}$



rys. 402.

Zatem punkt zaczepienia parcia ziemi obciążonej leży między granicami $0,33h$ a $0,5h$. Jeżeli $\beta = 0$, więc gdy naziom jest poziomy, mamy $c'_2 = \frac{2q}{\gamma}$, więc

$$e' = \frac{\frac{h}{3} + \frac{3q}{\gamma}}{h + \frac{2q}{\gamma}} \dots \dots \dots 844)$$

XVI. Parcie ziemi wyznaczone wykreślnie.

§ 188. Zasady.

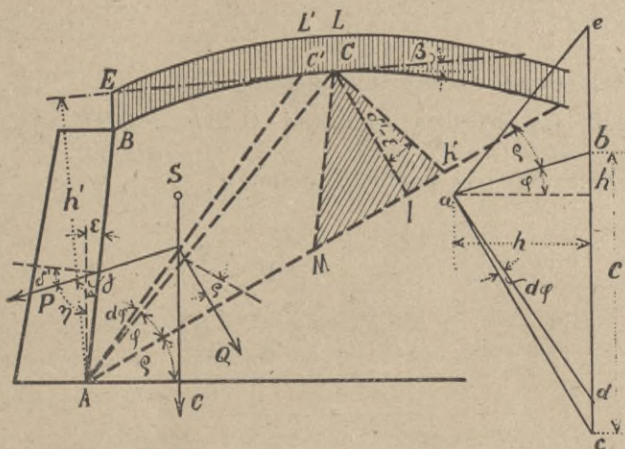
Przypuśćmy, że prosta AC (rys. 405) jest przecięciem się płaszczyzny odłamu z płaszczyzną rysunku. Ciężar odłamu C rozkłada się, jak wiadomo, na siły P i Q , nachylone pod kątami δ' i q do prostopadłych na proste AB i AC . Rozłóżmy siłę C wykreślnie, a mianowicie zróbmy $C = bc$, poprowadźmy $ba \parallel P$ i $ca \parallel Q$, a wtedy $ab = F$ a $ac = Q$.

Jeżeli teraz prostą AC odchylimy od $d\varphi$ tak, że przyjdzie w położenie AC' , to o ten sam kąt $d\varphi$ odchyli się siła Q , co musimy uwzględnić także w wieloboku sił, robiąc $\sphericalangle cad = d\varphi$. Jeżeli więc bc przedstawia ciężar $C = \gamma ACLER = \gamma F$, licząc na długość $1 m$ w kierunku prostopadłym do rysunku, to długość dc przedstawia ciężar $dC = ACL'L'R = \gamma dF$, przyczem γ oznacza

ciężar gatunkowy ziemi. A więc $F:dF = bc:dc$, a pomnożywszy drugą stronę proporcji przez $\frac{1}{2} ah$, otrzymamy

$$F:dF = abc:adc \dots \dots \dots 845)$$

Wielobok sił możemy w jakiegokolwiek podziałce wykreślić, możemy więc także wybrać taką, aby $ac = AC$, a wtedy $ACC' = adc$, bo z powodu, że kąt $d\varphi$ jest nieskończenie małym, możemy przyjąć $ad = ac$, również $AC = AC'$; mamy więc dwa



rys. 405.

boki i kąt między nimi zawarty równe, dalej mamy $dC = cd = = \gamma(ACC' + h_1 CC' \text{ dost } \beta)$, jeżeli $h_1 = CL$ oznacza sprowadzoną wysokość obciążenia a β kąt nachylenia prostej CC' do poziomu. Możemy teraz napisać

$$dC = \gamma dF = \gamma ACC' \left(1 + \frac{h_1 CC' \text{ dost } \beta}{ACC'} \right) = \gamma adc \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'} \right),$$

jeżeli wstawimy $aac = ACC'$ i $\frac{h'}{2} = \frac{ACC'}{CC'}$,

a stąd wynika $dF = adc \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'} \right)$.

Według równ. 845) mamy $F = dF \cdot \frac{abc}{adc}$, a wstawiwszy wartość za dF

$$F = adc \left(1 + \frac{2 h_1 \text{ dost } \beta}{h'} \right) \frac{abc}{adc} = abc \left(1 + \frac{2 h_1 \text{ dot } \beta}{h'} \right). \quad 846)$$

Zróbmy $ae \parallel AC$, to $\sphericalangle cae = 90 + \varrho$, ale także $\sphericalangle cae = \sphericalangle cah + hae = \sphericalangle cah + \varrho + \varphi$, a stąd $\sphericalangle cah = 90 - \varphi$, a więc $\sphericalangle ach = 90 - cah = \varphi$.

Poprowadźmy teraz $CI \perp AD$, to $ACI \cong ach$, bo $AC = ac$, $\varphi = \sphericalangle ach$, a drugi kąt jest prostym, więc $IC = ah$. Z rysunku widzimy, że $\eta = \gamma + \varepsilon = 90 - \delta' + \varepsilon$, jeżeli ε oznacza kąt nachylenia ściany do pionu. Dalej mamy $\sphericalangle bah = 90 - \eta$, bo $ab \parallel P$, a ah poziomą. Wstawiliśmy wartość za η otrzymamy $\sphericalangle bah = \delta_1 - \varepsilon$. Poprowadźmy CK pod kątem $\delta_1 - \varepsilon$ do CI , to otrzymamy $ACK \cong abc$, bo wszystkie boki są równoległe, a $CI = ah$. Stąd wynika ze względu na równanie 840)

$$F = ACK \left(1 + \frac{2h \text{ dost } \beta}{h'} \right) \quad \dots \quad 847)$$

Dla $p = 0$ jest $h_1 = 0$, więc $F = ACK$, a zatem dla ziemi nieobciążonej prosta AC połowi powierzchnię $ABCK$. Jest to prawo Rebhanna.

Chcąc wyznaczyć parcie P , ustawimy proporcję $P:C = ab:bc = CK:AK$. Zróbmy $KM = KC$, to otrzymamy $P:C = KM:AK$, a pomnożywszy drugą stronę równania przez $\frac{1}{2} CI$, otrzymamy $P:C = KMC:AKC$, Ponieważ zaś $C = \gamma F = \gamma ACK \left(1 + \frac{2h_1}{h} \text{ dost } \beta \right)$, więc

$$P = C \frac{KMC}{AKC} = \gamma KMC \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'} \right) \quad \dots \quad 848)$$

Ciężar graniastosłupa o podstawie KMC a wysokości równej jedności jest więc proporcjonalnym do parcia ziemi P na mur AB . Graniastosłup MKC nazywamy dlatego graniastosłupem parcia (n. *Druckprisma*) Dla $p = 0$ jest $h_1 = 0$, więc

$$P = \gamma_1 KMC, \quad \dots \quad 849)$$

a zatem dla ziemi nieobciążonej ciężar graniastosłupa parcia równa się parciu ziemi na ścianę AB .

§ 189. Parcie ziemi na mur płaski dla naziomu płaskiego.

Według równania 827) mamy

$$F = ACK \left(1 + \frac{2 h_1 \text{dost } \beta}{h} \right),$$

z rysunku zaś 406) widzimy, że $F = ABC = h_1 BC \text{dost } \beta$; a więc

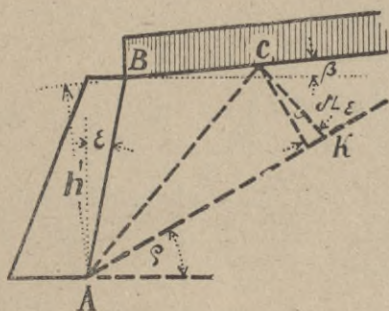
$$F = ABC \left(1 + \frac{h_1 BC \text{dost } \beta}{\frac{1}{2} BC \cdot h'} \right) = ABC \left(1 + \frac{2 h_1 \text{dost } \beta}{h'} \right),$$

zatem porównawszy z równ. 847), otrzymamy

$$ABC = ACK \dots \dots \dots 850)$$

A zatem, jeżeli naziom jest płaskim, a ziemia jednostajnie obciążoną, to położenie płaszczyzny odłamu jest niezależne od obciążenia, ponieważ i tu prosta AC połowi powierzchnię $FBCK$.

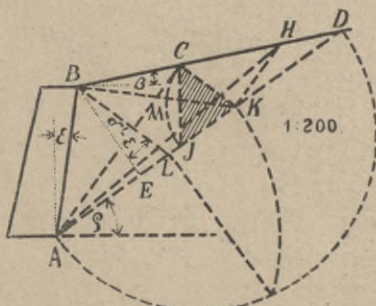
W dalszym ciągu będziemy więc wyznaczać zawsze płaszczyznę odłamu bez względu na obciążenie, które dopiero uwzględnimy, mnożąc graniastosłup parcia czynnikiem $(1 + \frac{2 h_1}{h'} \text{dost } \beta)$. W przy-



rys. 406.

bliżeniu licząc, postępować tak będziemy także wtedy, gdy naziom jest krzywym.

Jeżeli więc ziemia jest nieobciążoną, to $ABC = ACK$ (rys. 407), a stąd $BM = MK$. Można by zatem wyznaczyć położenie prostej AC próbując tak, aby BM było równe MK , przyczem CK ma być nachylone do prostopadłej na AD pod kątem $\delta' - \epsilon$. Spuścimy z punktu B prostopadłą BE na AD i wykreślmy BL pod kątem $\delta' - \epsilon$, to prosta BL będzie równoległą do CK i nazywa się kierującą (n. *Orientierungslinie*), bo wskazuje kierunek prostej CK .



rys. 407.

W tym wypadku mamy $\sphericalangle BAL = 90^\circ - \varrho - \varepsilon$, a więc kąt $ABE = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle BAL = \varrho + \varepsilon$, zatem $\sphericalangle ABL = \sphericalangle ABE + \delta' - \varepsilon$ lub $\sphericalangle ABL = \varrho + \delta$, 851)

A więc kierująca nachyloną jest pod kątem $\varrho + \delta'$ do ściany BA i to dla naziomu o dowolnym kształcie, bo przy udowodnieniu tego twierdzenia nie potrzebowaliśmy przypuszczać, że naziom jest płaski.

Płaszczyznę odłamu możemy też wprost wyznaczyć łatwą konstrukcją, którą zaraz uzasadnimy. Z rys. 407 wynika, że jeżeli zrobimy

$KH \parallel AC$, będzie $ACD \sim KHD$, a stąd $AK:AD = CH:CD$.

Ponieważ $KH \parallel AC$, więc $ACK = ACH$, a że także $ACK = ABC$, więc $ABC = ACH$, a stąd $BC = CH$.

Wstawmy tę wartość za CH w poprzednią proporcję, a otrzymamy

$$AK:AD = BC:CD, \text{ a z trójkątów } BLD \sim CKD$$

$$BC:CD = LK:KD, \text{ a więc } AK:AD = LK:KD, \text{ lub}$$

$$AK:AD = (AK - AL):(AD - AK).$$

Pomnożywszy wyrazy skrajne i średnie, otrzymamy

$$AK \cdot AD - AK^2 = AK \cdot AD - AD \cdot AL, \text{ więc}$$

$$AK^2 = AD \cdot AL,$$

a zatem AK jest średnio geometrycznie proporcjonalną między długościami AD i AL .

Stąd wypływa łatwa konstrukcja wyznaczenia punktu K , podana przez Ponceleta. Zatoczmy nad AD półkole, wykreślmy kierującą BL , zróbmy $LN \perp AD$, wyznaczmy N , punkt przecięcia się LN z kołem, zróbmy $AN = AK$, to AN a więc i AK , będzie średnio geometrycznie proporcjonalną między AD i AL , a więc, jeżeli zrobimy $KC \parallel BL$, prosta AC będzie śladem płaszczyzny odłamu.

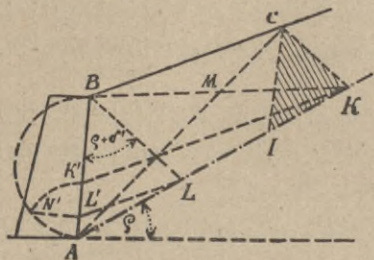
Przykład. Na rysunku 407 jest $\varepsilon = 8^\circ 45'$, $\alpha = 90^\circ - \varepsilon = 81^\circ 05'$, $\rho = 35^\circ$, $\text{st } \rho = 0,2$, $\beta = 11^\circ 18'$, $h = 3,8 \text{ m}$. Wykreślnie otrzymujemy dla $\gamma = 1,8$ $P = \gamma \cdot CIK = \gamma \frac{1}{2} \cdot 1,80 \times 1,7 = 2,75 \text{ t}$. Analitycznie otrzymamy (z równ. 826)

$$P = \frac{1,8 \cdot 3,8^2 \text{ wst } (46^\circ 15')}{2 \text{ wst }^2 81^\circ 15' \text{ wst } 61^\circ 15' \left[\sqrt{\frac{\text{dot } 46^\circ 15' \text{ dot } 61^\circ 15'}{\text{dot } 46^\circ 15' - \text{dot } 69^\circ 57'}} \right]^2} = 2,79 \text{ t}.$$

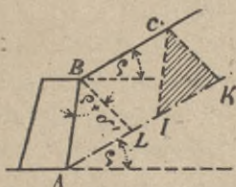
W uwzględnieniu małej podziałki zgodność jest zupełnie dostateczną.

Jeżeli punkt D wypada poza papier, wtedy użyjemy następnej konstrukcji pomocniczej. Wyznaczmy jak, zwykle, kierującą BL (rys 408) poprowadźmy $LL' \parallel BD$. Zatoczmy nad AB półkole,

wystawmy $L' N' \perp AB$ i zróbmy $AK' = AN'$, to AK' będzie średnią geometrycznie proporcjonalną między AL' i AB . Poprowadźmy teraz $K'K \parallel BD^*$), to widzimy, że pęk promieni AB i AD przecięty jest trzema prostymi równoległymi, które dzielą prostą AD w ten sam sposób, co AB , a więc AK jest średnio geometrycznie proporcjonalną między AL i AD . Jeżeli zatem $KC \parallel BL$, to AC jest płaszczyzną odłamu.



rys. 408.



rys. 409.

Jako próby możemy użyć znanej własności prostej CA , że dzieli ona prostą BK na dwie równe części, a więc, że $BM = MK$.

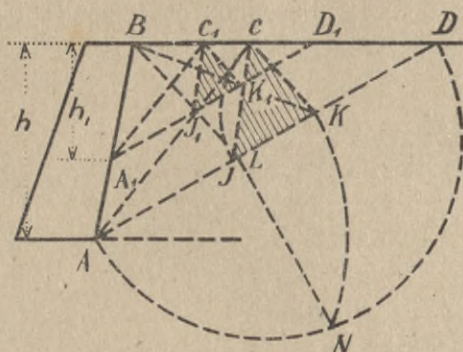
Konstrukcja ta jest ważną dla jakiegokolwiek kąta β , a więc i dla $\beta = 0$ i dla $\beta < 0$. Dla $\beta = \varrho$ (rys. 409) punkt D leży w nieskończonej odległości, tam też leży także punkt K , a więc płaszczyzna odłamu wpada na stok naturalny. Z powodu jednak, że $AK \parallel BC$, trójkąt CKI będzie miał tę samą powierzchnię, gdziekolwiek przyjmiemy punkt C . Przyjmujemy więc punkt C dowolnie i postępujemy dalej według ogólnego sposobu.

Chcąc zbadać, czy konstrukcja ta ważna jest dla jakiegokolwiek kąta nachylenia ściany AB , przyjmijmy najpierw ścianę AB pionową (rys. 410) i wyznaczmy w powyższy sposób powierzchnię odłamu AC . Niechaj ściana AB obróci się teraz około A na lewo, to ε staje się ujemnym, a punkt B przybierze kolejno położenie B_1 i B_2 . Wyznaczmy w ten sam sposób dla położenia ściany AB_1 powierzchnię odłamu, a otrzymamy punkt C_1 , dla położenia zaś ściany AB_2 , gdy $-\varepsilon = 90 - \varrho - \delta'$, kierująca wpada na linię naziomu $B_2 D$, punkt L_2 na B , konstrukcja nasza płaszczyzny odłamu staje się wprawdzie wtedy niemożliwą, ale zarazem i niepotrzebną, bo i punkt K_2 wpada wtedy na D . Chcąc otrzymać C_2 , społo-

*) W rys. 408 punkt D przecięcia się AK i BC wypada po za rysunek.

sposób K_1 . Punkt ten jednak leżeć musi w prostej BK , bo pęk promieni, wychodzący z punktu B , dzieli dwie równoległe $A_1 D_1$ i AD w tym samym stosunku. Więc otrzymamy

$$AB : A_1 B = BK : BK_1,$$



rys. 411.

a ponieważ

$$KC \parallel K_1 C_1 \parallel BL,$$

więc $BK : BK_1 = BC : BC_1$, a stąd $BA : BA_1 = BC : BC_1$.

A zatem proste FC i $F_1 C_1$ są równoległe, a punkt C_1 otrzymamy, robiąc $F_1 C_1 \parallel FC$.

Widzimy więc, że dla płaskiego naziomu powierzchnie odłamu są równoległe.

Jeżeli nazwiemy P parcie ziemi na ścianę AB , a P_1 na ścianę $A_1 B$, to dla ziemi nieobciążonej

$$P : P = CIK : C_1 I_1 K_1,$$

zaś

$$CIK : C_1 I_1 K_1 = \overline{CK}^2 : \overline{C_1 K_1}^2,$$

$$\overline{CK}^2 : \overline{C_1 K_1}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{A_1 B}^2,$$

$$\overline{AB}^2 : \overline{A_1 B}^2 = h^2 : h_1^2, \text{ więc } P : P_1 = h^2 : h_1^2.$$

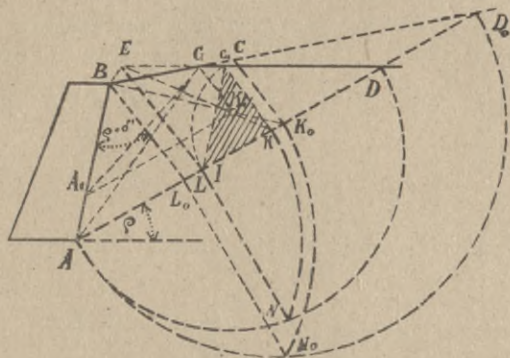
A zatem parcie ziemi nieobciążonej wzrasta dla naziomu płaskiego w stosunku kwadratowym wysokości muru.

§ 190. Parcie ziemi na mur płaski, gdy naziom tworzą dwie płaszczyzny.

Jeżeli naziom tworzą dwie płaszczyzny BG i GD (rys. 412), to, jeżeli AC jest płaszczyzną odłamu, powierzchnia odłamu jest

odłamu $A_1 G$, do której będą równoległe wszystkie płaszczyzny odłamu po lewej stronie $A_1 G$.

Chcąc otrzymać parcie dla całej wysokości AB , kreślimy AG , dalej $BE \parallel AG$, $EL \parallel BL_0$ i w zwykły sposób wyznaczamy punkt K . Gdyby punkt E był stałym, toby EK było miejscem



rys. 413.

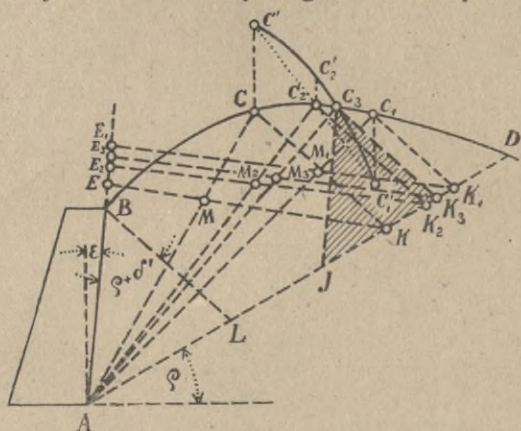
geometrycznym punktów K . Ponieważ jednak dla punktów, wyżej A leżących, linja AG , więc i BE , pochyla się i punkt E posuwa się na prawo, a z nim i prosta EK , więc widzimy, że punkty K będą leżeć na krzywej, której dwa punkty K i K_1 i styczną EK znamy; możemy więc ją łatwo wykreślić.

Znając punkty K łatwo możemy wyznaczyć dla jakiegokolwiek wysokości ściany parcie ziemi, które dla części ściany AA_1 nie będzie proporcjonalnem do kwadratu wysokości. Płaszczyzny odłamu po prawej stronie $A_1 G$ nie będą też równoległymi, ale zbieżnemi ku górze.

§ 191. Parcie ziemi o naziemie dowolnego kształtu na mur płaski.

Jeżeli ziemia jest ograniczona dowolną krzywą powierzchnią BCD (rys. 414), wyszukujemy płaszczyznę odłamu zapomocą próbowania. Obieramy mianowicie dowolnie punkt C , kreślimy CK równoległe do kierującej BL , zamieniamy powierzchnię ABC na trójkąt AEC , łączymy E z K , a jeżeli AC jest płaszczyzną odłamu, EM powinno być równe MK . Prawdopodobnie pokaże się, że

tak nie jest, tu np. jest $MK > EM$. Wykreślamy teraz w C pionową i robimy $MK - EM = CC'$, wtedy CC' oznacza wielkość błędu dla przyjętej linii odłamu AC . Obieramy teraz punkt C_1 na prawo od C t. j. w stronie większego odcinka prostej EK i po-



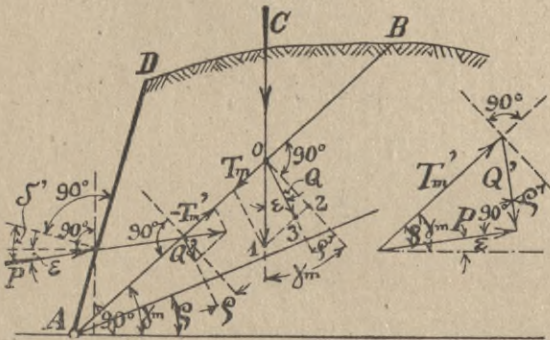
rys. 414.

wtarzamy konstrukcją. Tu pokazuje się, że $E_1 M_1 > M_1 K_1$. Znow więc robimy $C_1 C'_1 = -(M_1 K_1 - E_1 M_1)$ i otrzymujemy drugi punkt linii błędu. Gdyby linja błędu $C' C'_1$ była prostą, toby błąd w C_2 był równy zeru. Dla tego punktu powtórzywszy konstrukcję, otrzymaliśmy $C_2 C'_2 = M_2 K_2 - M_2 E_2$. Mamy więc trzy punkty krzywej błędu $C' C'_2 C'_1$, która przecina naziom w C_3 . Jeżeli dla tego punktu powtórzymy konstrukcję, otrzymamy oba odcinki równe. Dalej wykreślamy trójkąt parcia ziemi zupełnie tak samo, jak w poprzednich ustępach.

§ 192. Wyznaczenie parcia ziemi sposobem Färbera.

Ciężar C klina ziemi ABD (rys. 415) da się rozłożyć na dwie składowe, z których jedna T działa w płaszczyźnie odłamu, a druga Q jest odchylona od prostopadłej do niej pod kątem tarcia φ . Składowa Q niema żadnego wpływu na wywołanie ruchu wzdłuż płaszczyzny odłamu, tak, że jedynie czynną siłą jest składowa T . Gdy obrócimy płaszczyznę odłamu tak, że utworzy z poziomem kąt $\gamma = \varphi$, to $T = 0$; wtedy wzdłuż tej płaszczyzny, zwanej stokiem naturalnym, nie może nastąpić żaden ruch. Gdy

płaszczyznę odłamu obracamy ku górze, czyli zwiększamy kąt γ_m , to stopniowo ciężar klina C maleje, a gdy płaszczyzna ta spada ze ścianą podpierającą, ciężar C znika, więc znowu składowa $T=0$. Między temi dwoma skrajnemi położeniami jest jedno takie, dla którego składowa wzdłuż płaszczyzny odłamu jest największością T_m . Wzdłuż tej płaszczyzny pod kątem γ_m usunąłby się po odjęciu ściany AD klin ziemi ABD . Opór ściany P ma utrzymywać równowagę. Oddziaływanie P daje również dwie składowe T'_m i Q' , przyczem musi być $-T'_m=T_m$, o ile równowaga ma być utrzymana.



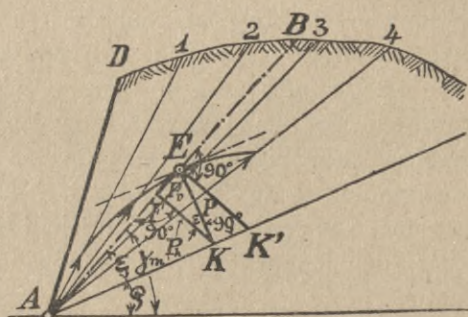
rys. 415.

Na tem polega zasadnicza różnica między teorią Ponceleta a Färbera, że Poncelet rozważa ruch całego klina, gdy Färber bada tylko równowagę w płaszczyźnie odłamu, po której ruch się może odbywać. Moglibyśmy ją osiągnąć dla rozmaitych kątów ϵ , przyczem P zmieniłoby swą wartość. Najmniejsze P otrzymamy, jeżeli jego kierunek będzie prostopadłym do kierunku Q' .

Mniejszy opór ściany P nie byłby w stanie powstrzymać ruchu klina ABD wzdłuż płaszczyzny odłamu, natomiast inaczej skierowane P musiałyby być większe, niezależnie od tego, czy pochylenie to byłoby stromsze, czy łagodniejsze. Tym sposobem potrzebny opór P jest tu wyznaczony jako minimum. Rozkład siły P daje zarazem ϵ , o jaki oddziaływanie P odchylone jest od poziomu. Według planu sił jest on zawsze równy różnicy kątów γ_m i ϱ . Zatem parcie ziemi P oznaczone jest tak co do wielkości jak i kierunku.

Stąd wynika następujący niezwykle prosty sposób wyznaczenia wielkości i kierunku parcia ziemi. Kreślimy szereg promieni

z punktu A : A_1 , A_2 , A_3 i t. d. (rys. 416). Ciężary klinów $AD_1=C_1$, $AD_2=C_2$, $AD_3=C_3$ i t. d. odcinamy w przyjętej podziałce na odnośnych promieniach od punktu A . Punkty końcowe łączymy krzywą. Styczna do tej krzywej, równoległa do stoku naturalnego, daje punkt E . Łącząc punkt A z E otrzymamy płaszczyznę odłamu AB ; prosta EK , prostopadła do stoku naturalnego, daje (w podziałce ciężarów klinów C) wielkość parcia ziemi P , prosta KF , prostopadła do płaszczyzny odłamu składową po-



rys. 416.

ziomą parcia ziemi P_h , a EF składową pionową P_v . P_h i P_v zamykają z sobą kąt ε , o jaki parcie ziemi odchyła się od poziomu.

Uzasadnienie tej konstrukcji da się przeprowadzić w następujący sposób (rys. 415).

Z trójkąta sił mamy:

$$\frac{P}{T'_m} = \text{dost } \varrho; \quad P = T'_m \text{ dost } \varrho \quad 853)$$

Następnie:

$$\text{wst } \gamma_m = \frac{12}{C}, \quad \text{wst } (\gamma_m - \varepsilon) = \text{wst } \varrho = \frac{23}{Q}.$$

$$T'_m = T_m = 12 - 23, \quad \text{czyli:}$$

$$T_m = C \text{ wst } \gamma_m - Q \text{ wst } \varrho \quad 854)$$

Z równań 853) i 854) mamy:

$$P = (C \text{ wst } \gamma_m - Q \text{ wst } \varrho) \text{ dost } \varrho \quad 855)$$

Ponieważ dost $\gamma_m = \frac{02}{C}$, dost $\varrho = \frac{02}{Q}$, więc dost $\gamma_m = \text{dost } \varrho \frac{Q}{C}$,

czyli :

$$Q = \frac{\text{dost } \gamma_m C}{\text{dost } \gamma} \dots \dots \dots 856)$$

Wstawivszy wartość Q w równanie 855) otrzymamy :

$P = C (\text{wst } \gamma_m \text{ dost } \varrho - \text{wst } \gamma_m \text{ dost } \varrho)$, a ostatecznie :

$P = C \text{wst } (\gamma_m - \varrho) = C \text{wst } \varepsilon$.

Związek ten da się odczytać wprost z trójkąta $A E K$ w rys. 416.

Wspomnieliśmy wyżej, że wyznaczone w ten sposób parcie P jest najmniejszym z innych możliwych, których składowa równa się T_m . Jeżeliby dla tego największego parcia wypadł kąt δ' za wielki n. p. $\delta' > \varrho$, a więc niemożliwy, to musielibyśmy przyjąć P większe. Należałoby to zrobić próbując. Większe P otrzymamy, gdy zamiast prostopadłej na stok naturalny $E K$ wykreślimy inną prostą $E K$, odchyloną o ϱ . Wtedy też P' odchyli się o γ i od prostopadłej będzie odchylone o $\delta' - \varrho$, które powinno być równem lub mniejszem niż ϱ .

§ 193. Naziom obciążony.

Jeżeli naziom jest obciążonym, to w myśli odejmiemy na-przód ścianę i przyłożymy dla równowagi parcie dla naziomu nie-obciążonego, a szukać będziemy dodatkowego parcia P' z po-wodu obciążenia. Teraz tworzą się nowe płaszczyzny usuwowe, a dla jednej z nich będzie siła T'_m największa.

Punkt zaczepienia siły P' będzie (zgodnie z dotychczasową teorią i doświadczeniami Müllera-Breslaua) w środku wysoko-ści stoku.

Konstrukcja dla wyznaczenia wielkości P' będzie analogiczna, jak poprzednio dla naziomu nieobciążonego. Kreślimy znowu sze-reg promieni $A 1, A 2, A 3$ itd. (rys. 417). Na promieniach tych odcinamy od punktu A siły V , których wielkość równa się sumie ciężarów poszczególnych klinów ziemi i obciążenia, pomniejszonej o składową pionową parcia ziemi, wyznaczonego dla naziomu nie-obciążonego. I tak $V_1 = C_1^*) + C_1' - P_v, V_2 = C_2 + C_1' + C_2' - P_v$ itd.

*) C_1, C_2, \dots wyznaczono poprzednio dla naziomu nieobciążonego.

żenie takie może być niekorzystniejsze od jednostajnego, zwłaszcza gdy wielkie ciężary stoją tuż za tylną płaszczyzną muru, jak to zresztą wykazują zarazem doświadczenia Müllera - Breslaua. W praktyce zająć może ten wypadek obciążenia dla mostów drogowych, gdy naziom w bezpośredniej bliskości przyczółka obciążymy wałkiem parowym i uwzględnimy nieobciążony odstęp między osiami przedniego i tylnego koła.

§ 194. Wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi.

W poprzednich ustępach otrzymywaliśmy jako wynik konstrukcji trójkąt, który jest proporcjonalny do parcia ziemi. Chcąc trójkąty te, otrzymane dla różnych wysokości muru porównać, musimy je sprowadzić do jednej wspólnej podstawy (rys. 418)



rys. 418.

dowolnie przyjętej $KS=2a$. Zrobimy to, wykreśliwszy $IT \parallel CS$ i otrzymamy $KST = CIK = a \cdot TW$. W ten sposób otrzymamy dla każdej wysokości muru dla tej samej podstawy $2a$ pewną prostą TW , proporcjonalną do parcia ziemi. Wyznaczając parcie ziemi sposobem Färbera otrzymujemy wprost długość proporcjonalną do parcia ziemi. Jeżeli wysokości muru uważać będziemy jako odcinki, a długości, proporcjonalne do parcia, wykreślimy jako rzędne

(rys. 419), to wierzchołki rzędnych połączone dadzą linię krzywą DB , która wskazuje, w jaki sposób parcie ziemi wzrasta z wysokością muru. Z rys. 419 widzimy, że parcie ziemi na część muru $\overline{EE_1}$ równa się $U_1 E_1 - UE = U_1 W = dy$. Moment tego parcia ze względu na punkt A jest $(h-x)$ dost τdy . Jeżeli moment parć na dx scałkujemy od 0 do h , to otrzymamy moment siły wypadkowej P , więc

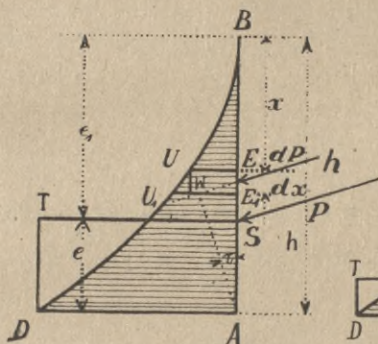
$$Pe \text{ dost } \tau = \int_0^h (h-x) \text{ dost } \tau dy = (h-x) \text{ dost } \tau y \Big|_0^h - \int_0^h y (-dx) \text{ dost } \tau.$$

Wstawiwszy granice 0 i h , otrzymamy pierwszy wyraz równy zeru, a więc podzieliwszy obie strony równania przez $\text{dost } \tau$, będziemy mieli $Pe = \int_0^h y dx = F$, jeżeli $F = \text{pow. } BAD$,

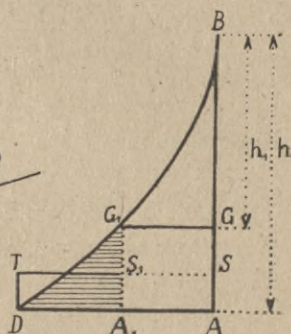
a stąd:
$$e = \frac{F}{P} \dots \dots \dots 857)$$

Ponieważ $P=AD$, więc $F=AD \cdot c \dots \dots \dots 858)$

a stąd wypływa konstrukcja następująca: Zamieniamy płaszczyznę ABD w jakikolwiek sposób na prostokąt o podstawie AD , a wysokość jego $AS=e$ na mocy równ. 858.



rys. 419.

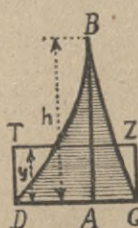


rys. 420

Ponieważ dla wysokości h parcie $P=DA$, zaś dla wysokości h_1 (rys. 420) $P_1=GG_1$, więc parcie na część muru $GA P'=P-P_1=AD-GG_1=A_1D$. Punkt zaczepienia parcia ziemi P' da się w zupełności ten sam sposób wyznaczyć, jeżeli powierzchnię DA_1G_1 zamienimy na prostokąt A_1S_1TD o podstawie DA_1 , to A_1S_1 wyznacza wysokość punktu zaczepienia S nad podstawą.

Dla ziemi obciążonej musimy parcie ziemi P i p , a zatem i każdą rzędną y , pomnożyć według równania 848) przez $(1 + \frac{2 h_1 \text{ dost } \beta}{h'})$, albo dodać do każdej rzędnej $y' = y \frac{2 h_1 \text{ dost } \beta}{h'}$ (rys. 421). Dla $x=0$ jest $y'=0$, a dla $x=h$ jest

$$y' = AC = AD \cdot \frac{2 h_1 \text{ dost } \beta}{h'}$$



rys. 421.



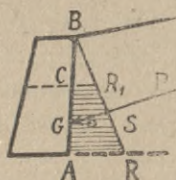
rys. 422.

Tu więc dodać musimy do pow. ABD jeszcze powierzchnię ABC , a zresztą postępujemy, jak pierwiej. Robimy więc $CDTZ = CBD$, a wysokość $CZ=e'$.

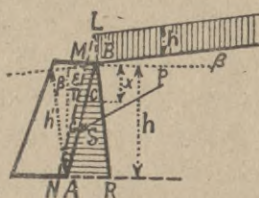
Jeżeli naziom jest płaskim, to wiemy, że dla ziemi nieobciążonej $P=bh^2$ (równ. 826), a więc $y=bx^2$,

Z poprzedniego wynika też, że $A_1 R_1 RA = ABR - A_1 BR_1 = P - P_1$, a więc równa się parciu na część ściany AA_1 . Podobnie otrzymamy parcie na dowolną część ściany $A_1 A_2$ równe powierzchni $A_1 A_2 R_2 R_1$. Widzimy więc, że parcie w każdym punkcie ściany AB wyraża się odnośną rzędną prostej BR , jeżeli BA przyjmiemy jako oś odcinków. Wypadkowa tych wszystkich sił zaczepiać więc musi w środku ciężkości odnośnej powierzchni, a więc dla całej wysokości AB w $\frac{1}{3}$ wysokości tej linii, bo ABR jest trójkątem.

Jeżeli mamy wyznaczyć punkt zaczepienia parcia ziemi na część muru AC (rys. 424), to wyszukujemy środek ciężkości S trapezu $ACR_1 R$, skąd prowadzimy poziomą SG , a punkt G jest punktem zaczepienia parcia ziemi na część ściany AC .



rys. 424.



rys. 425.

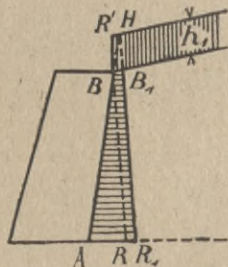
Jeżeli chcemy uwzględnić wpływ obciążenia ziemi, to musimy w razie, jeżeli naziom jest płaskim, dodać do trójkąta ABR (rys. 425) równoległobok $ABMN$. Wiem bowiem, że $P_1 = P + P'$, przy czym $P' = \frac{2bh_1hx \text{ dost } \beta}{h_1'}$, a więc wzrasta w prostym stosunku do x . Warunkowi temu odpowiada dla wysokości x powierzchnia równoległoboku $MBCT = CT \cdot x = \frac{P'}{\gamma}$, a stąd $CT = NA = \frac{2bh_1h \text{ dost } \beta}{\gamma h_1'}$.

Zważywszy, że $P = bh^2 = \gamma \cdot ABR = \gamma \cdot \frac{1}{2} AR \cdot h$, a stąd $bh = \gamma \cdot \frac{AR}{2}$, to wstawiając tę wartość w równanie dla NA , otrzymamy:

$$NA = AR \frac{h_1 \text{ dost } \beta}{h_1'} \dots \dots \dots 860)$$

Trapez $NMBR$ nazywamy trapezem parcia (n. *Drucktrapez*). Punkt zaczepienia parcia G wyznaczymy, jak pierwej, poprowadziwszy ze środka ciężkości trapezu S poziomą SG .

Trapez parcia możemy otrzymać też wykreślić w następujący sposób. Jeżeli obciążenie przedstawimy warstwą ziemi h_1 (rys. 426), to przedłużamy AB aż do przecięcia się z $R'H$ w H . Dla ściany AH wyznaczmy w zwykły sposób trójkąt parcia AHR_1 . Dla ściany



rys. 426.

BH będzie wtedy parcie BB_1H , a zatem parcie na AB przedstawia trapez BB_1R_1A . Ponieważ parcie na mur nieobciążony AB jest ABR , przyczem $BR \parallel HR_1$, jeżeli jakość ziemi jest na całej wysokości ta sama, więc możemy postępować odwrotnie, wyznaczyć trójkąt parcia ABR dla ziemi nieobciążonej, przedłużyć AB do H , a z H wykreślić HR , równoległe do RR , wtedy BB_1R_1A jest trapezem parcia.

Jeżeli naziom nie jest płaskim, to otrzymalibyśmy zamiast trójkąta i trapezu figury, ograniczone linjami krzywymi, których wykreślenie byłoby za żmudne, dlatego stosujemy wtedy pierwszy sposób wyznaczenia punktu zaczepienia (rys. 421).

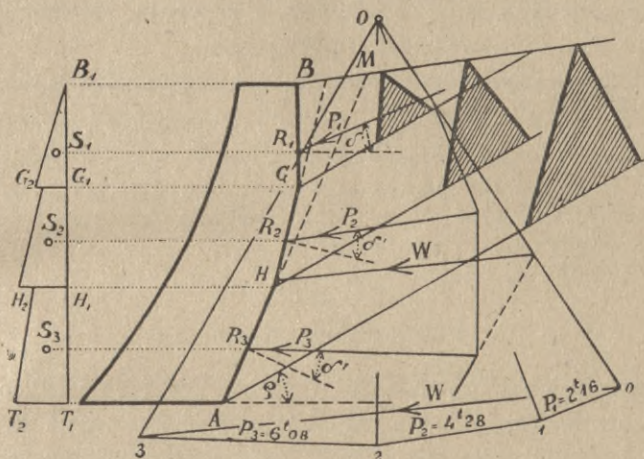
§ 195. Parcie ziemi na mur krzywy lub załamany.

Chcąc wyznaczyć parcie ziemi na mur krzywy AB (rys. 427) dzielimy krzywą AB na pewną ilość części tak, aby pojedyncze części AH , HG itd. można uważać jako proste. Zwykle mamy do czynienia nie z murem krzywym, lecz wprost z murem, ograniczonym linią łamaną $AHGB$. Dla każdej części muru płaskiej obliczamy lub wykreślamy parcie ziemi na tę część ściany, a więc np. AH różnicę parcia na ścianę AM i HM . Dla wyznaczenia punktu zaczepienia parcia na część muru AH najlepiej wykreślić, jeżeli naziom jest płaski, trapez parcia $T_1T_2H_2H_1$ według poprzedniego paragrafu, wyznaczyć środek ciężkości trapezu S_3 i wykreślić poziomą S_3R_3 . R_3 jest wtedy punktem zaczepienia parcia ziemi na AH . To samo robimy i z innymi częściami ściany i otrzymamy punkty zaczepienia R_1 , R_2 i R_3 , w których odnośne parcia P_1 , P_2 i P_3 działają pod kątami δ do prostopadłej na kierunek tej części muru.

Gdy naziom nie jest płaskim, wtedy tok konstrukcji pozostaje

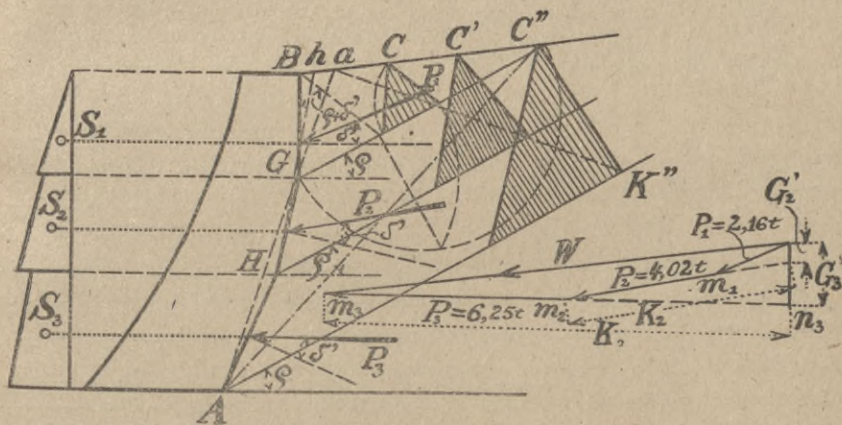
staje ten sam, tylko punkty zaczepienia wyznaczmy według pierwszej metody.

Obliczenie parcia w sposób powyższy nie jest zupełnie do-



rys. 427.

kładnem, bo przyjmujemy ścianę idealną AM , gdy w rzeczywistości jest po lewej stronie HM nie ściana, lecz ziemia, która wywiera



rys. 428.

pevne parcie czynne. Müller Breslau wyznacza dokładnie po kolei parcie P_1, P_2 i P_3 (rys. 428). Najłatwiej zrobić na tej zasadzie, że powierzchnia

$$AHGB C'' = AC'' K'' \dots \dots \dots 861)$$

Jeżeli znamy już P_1 i P_2 i kierunek P_3 , to z tego otrzymujemy $m_3 n_3$. Na mocy równania 861) wyznaczymy C'' , zamieniając wprzód $AHGB C''$ na trójkąt, w zwykły sposób, a stąd otrzymamy trójkąt, a wreszcie trapez parcia.

Wobec wielkiej niepewności co do wszystkich danych γ , ϱ , δ' wystarczy jednak w praktyce używać sposobu przybliżonego *).

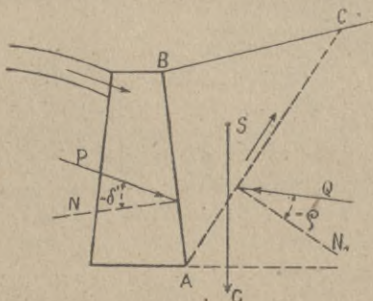
Przykład. Dla muru, przedstawionego na rys. 428, otrzymujemy dla $\gamma=1,8 t/m^2$ wedle sposobu przybliżonego $P_1=2,16 t$, $P_2=4,28 t$, $P_3=6,08 t$. Wedle sposobu dokładniejszego (rys. 428), a mianowicie, zamieniając pięciobok $AHGB C''$ na trójkąt $A a C''$, otrzymamy K_3 , a $P_3=K_3-m_3 n_3=m_3 m_2$, a więc $P_1=2,16 t$, $P_2=4,02 t$, $P_3=6,25 t$.

§ 196. Odpór ziemi.

Jeżeli ciśnienie prostopadłe N ściany AB (rys. 429) na ziemię jest równe składowej prostopadłej na ścianę parcia ziemi N , to ściana i ziemia pozostają w równowadze. Przypuśćmy teraz, że ciśnienie N wzrasta, to w takim razie, aby równowaga nie została zniweczona, musi wzrastać też ciśnienie ziemi. Dziać się to może jednak tylko do pewnej granicy, gdy bowiem N przekroczy tę granicę, część ziemi się usunie, a odłam ABC poruszy się w kierunku AC .

Ciśnienie ziemi więc, które zostaje wzbudzone ciśnieniem zewnętrznym, nazywamy odporem ziemi (n. *passiver Erddruck*, *Erdschub*, fr. *butée des terres*) w przeciwstawieniu do parcia ziemi (n. *aktiver Erddruck*, fr. *poussée des terres*), o którym dotąd mówiliśmy.

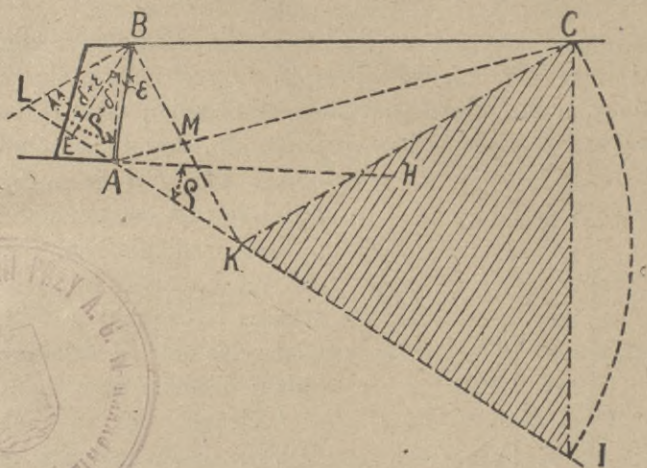
Ponieważ ruch ten nastąpi w kierunku AC , a nie CA , więc tarcie, które jest zawsze przeciwne kierunkowi ruchu, działać będzie w kierunku przeciwnym. Rozumując w ten sam sposób, co pierwszej, otrzymamy więc odnośne wzory, jeżeli zamiast kąta tarcia ϱ przyjmiemy kąt $(-\varrho)$, a zamiast δ' kąt $(-\delta')$.



rys. 429.

*) Por. także artykuły Buchwalda w Zentralblatt d. Bauverw. 1917 i 1918.

Przy wykreślnem wyznaczeniu oporu ziemi mamy więc tylko dwie zmiany, a mianowicie stok naturalny AK (rys. 430) wykreślamy pod kątem ϱ poniżej osi, a kierującą prowadzimy nie pod kątem $\delta' - \varepsilon$, lecz $-\delta' - \varepsilon = -(\delta' + \varepsilon)$, a więc pod kątem



rys. 430.

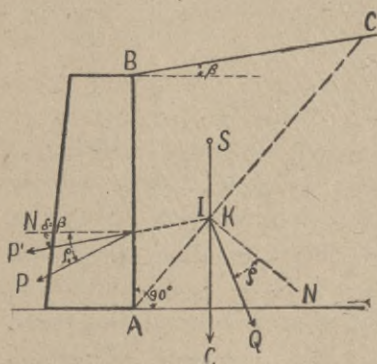
$(\delta' + \varepsilon)$ po lewej stronie prostopadłej BE na stok naturalny, a więc BL . Kąt ABL równa się wtedy $\varrho + \delta'$. Przyjmujemy teraz punkt C tak, aby gdy poprowadzimy $CK \parallel BL$ i połączymy A z C a B z K , było $BM = MK$. Jeżeliby $BM > MK$, to obieramy inny punkt C , aż dopóki nie znajdziemy punktu, który temu warunkowi zadość czyni. Zrobiwszy $KI = KC$, otrzymamy wreszcie trójkąt odporu.

Odpór w ten sposób wyznaczony, nie działa jednak od razu. Gdy siła N (rys. 429) ciśnie ziemię, to z powodu ściśliwości ziemi nastąpi najpierw mały ruch ściany AB , potem dopiero po ściśnięciu ziemi zaczyna działać odpór. Dlatego też w wypadkach, gdzie nie chcemy dopuścić do takiego ruchu muru, n. p. przy sklepieniach, nie liczymy na odpór tylko na parcie ziemi.

XVII. Inne teorie parcia ziemi.

§ 197. Poprawka dla równowagi w spoczynku.

Wspominaliśmy już w § 179, że dla równowagi klinu ABC (rys. 431) trzy siły nań działające C , Q i P muszą się przecinać w jednym punkcie. Jeżeli naziom jest płaskim, wiemy, że parcie na ścianę AB wzrasta w stosunku kwadratowym, a punkt zaczepienia siły P leży w $\frac{1}{3}$ wysokości ściany, w punkcie E . Po-



rys. 431.

nieważ ciśnienie na płaszczyznę AC musi analogicznie także wzrastać w stosunku kwadratowym, więc ciśnienie Q działa także w jednej trzeciej prostej AC , więc w I . Jeżeli teraz wykreślimy siły Q i P , działające pod kątami ϱ i δ' na płaszczyznach AB i AC , to trzy te siły C , Q i P nie przetną się w ogólności w jednym punkcie, z czego wynika, że trzy te siły nie równoważą się, lecz

jako wypadkową dają parę sił. Pochodzi to stąd, że za wiele ilości przyjęliśmy jako znane, gdy tymczasem równanie momentów tych sił, nie zużytkowane dotychczas, określa jedną z tych ilości.

Oto jeden zarzut, jaki słusznie robią dawnej teorii parcia ziemi, która dotychczas ogólnie używana, dawała wyniki dość zgodne z praktyką.

Drugi zarzut dotyczy się założenia, że powierzchnia odłamu jest płaszczyzną, co niezupełnie zgadza się z doświadczeniami a także i z warunkami równowagi*). Co do tego ostatniego zarzutu zauważyć możemy, że wedle doświadczeń powierzchnia odłamu bardzo mało różni się od płaszczyzny, że tylko to założenie umożliwia obliczenie parcia ziemi, że przy belkach zginanych przyjmujemy także płaskie przekroje po ugięciu, gdy bliższe rozwa-

*) Porów. także Z. Jacoby: *Zur Erddrucklehre Zentr. der Bauverw.* 1918, str. 182, który usiłuje wytłumaczyć tę sprzeczność, twierdząc, że wskutek tarcia parcie na AC nie rozkłada się wedle trójkąta.

żania okazują nieprawdziwość tego założenia. Wogóle wszystkie nasze obliczenia w statyce budowli są tylko przybliżone, chodzi tylko o to, aby niedokładność nie przekraczała granic dopuszczalnych w praktyce.

Widząc sprzeczność, jaka się mieści w dawnej teorii, próbowało wielu uczonych utworzyć inne teorie, wychodzące z równowagi w masie ziemi nieograniczonej, które w przeciwieństwie do dawniejszych teorii nazywamy *nowszymi*.

Zanim jednak zastanawiać się będziemy nad zasadami nowszej teorii, pokażemy, jak zapomocą stosownej poprawki możemy zadość uczynić koniecznemu warunkowi przecinania się trzech sił C , P i Q w jednym punkcie.

Dawna teoria zapomina, że tarcie jest siłą bierną, która działa tylko o tyle, o ile tego potrzeba do przeszkodzenia ruchowi, a więc do równowagi w spoczynku. Jeśli siła zaczepiająca wzrasta, to wzrasta i tarcie do pewnej granicy, przy której jest równe $f_1 N_1$ i $f_2 N_2$. Jeśli więc przyjmujemy tarcia $f_1 N_1$ i $f_2 N_2$, to jest to słusznem tylko wtedy, gdy siła zaczepna (parcie) jest tak wielką, że przewycięża tarcie, a więc podczas ruchu odłamu. Wtedy jednak niema równowagi i dla tego wypadku trzy siły C , E i Q nie muszą się przecinać w jednym punkcie.

Widzimy więc, że przypuszczając ruch ściany lub ziemi, możemy używać wprost dawnej teorii parcia ziemi i że w stanie spoczynku parcie działa inaczej, niżby z dawnej teorii wypadało.

Jeżeli zauważymy odłam ABC , to zobaczymy, że wywiera on parcie na AB tylko wtedy i o tyle, o ileby przy usunięciu ściany AB odłam się usunął. Jeżeli np. $\alpha = \varrho$, to nie potrzeba wcale ściany. Stąd można wnioskować, że nim na ścianę AB odłam wywrze parcie, musi być całe tarcie na AC wyzyskanem, a więc możemy przyjąć, że parcie Q działa w każdym razie pod kątem ϱ do prostopadłej na AC .

Przeciwnie działa podczas równowagi, a więc w stanie spoczynku, tarcie na AB tylko o tyle, o ile potrzeba go do zachowania równowagi. W ogólności więc działa zamiast siły P siła P' pod kątem $\delta < \varrho_1$ do prostopadłej. Aby się zastosować do wyników doświadczeń, myśmy założenie to zrobili już przy wyznacze-

niu parcia, przyjmowaliśmy w przybliżeniu $\delta' = \frac{3}{4} \rho$. Tu dla parcia w spoczynku wyznaczmy δ z warunku, aby siły P' , C i Q dla równowagi przecinały się w jednym punkcie.

Jeżeliśmy w jakikolwiek sposób wyznaczyli kierunek płaszczyny odłamu, to przez to jest wyznaczony kierunek siły Q . Położenie siły ciężkości C jest także znane, chodzi więc jeszcze tylko o punkty zaczepienia sił P' i Q i kierunek siły P' .

Otóż wiadomo, że przy naziomie płaskim punkt zaczepienia parcia ziemi P lub P' leży w jednej trzeciej wysokości ściany. Doświadczenia Gobina potwierdziły pośrednio to twierdzenie, gdyż wykazały, że parcie wzrasta w przybliżeniu w stosunku kwadratu wysokości, z czego łatwo można wywnioskować, że punkt zaczepienia parcia leży w $\frac{1}{3}$ wysokości ściany*). Analogicznie musimy przyjąć, że siła Q zaczepia w $\frac{1}{3}$ wysokości płaszczyny odłamu, bo niema powodu, aby odłam, znajdujący się między dwiema płaszczynami, działał według innego prawa na jedną płaszczynę, niż na drugą.

Przyjmujemy więc, że parcie zaczepia w E , przyczem $AE = \frac{1}{3} AB$, a siła Q w I , przyczem $AI = \frac{1}{3} AC$. Kierunek parcia P' jest wtedy wyznaczony warunkiem, że trzy siły P' , Q i C przecinają się w jednym punkcie K . Gdy więc połączymy punkt przecięcia się sił C i Q z E , otrzymamy kierunek parcia ziemi w stanie spoczynku, które to parcie nazwiemy geostatycznym (a. *earth pressure at rest*) w przeciwieństwie do geodynamicznego w stanie ruchu.

§ 198. Poszczególne wypadki.

Podaliśmy powyżej ogólną regułę dla wyznaczenia parcia geostatycznego, której jednak w niektórych wypadkach nie można użyć. Teraz zrobimy pewne szczegółowe założenia co do kierunku ściany i naziomu.

*) Doświadczenia Müllera Breslaua wykazały dla nieobciążonej ziemi wysokości punktu zaczepienia

dla $\beta =$	$-\rho$	$-\frac{1}{2}\rho$	0	$+\frac{1}{2}\rho$
$AE =$	0,31	0,33	0,36	0,375 AB

Wyniki te wymagają jeszcze potwierdzenia przez inne doświadczenia.

otrzymamy punkt K_1 , który połączony z I wyznacza parcie Q_1 na płaszczyznę odłamu, odchylone od prostopadłej o kąt mniejszy, niż ϱ .

§ 199. Wyznaczenie płaszczyzny odłamu.

Dotychczas nie mówiliśmy, w jaki sposób wyznaczamy płaszczyznę odłamu, zastanowimy się teraz nad tem, bo z kątem δ , który tworzy parcie ziemi z prostopadłą na ścianę, zmienia się też i położenie płaszczyzny odłamu. Będzie więc inna płaszczyzna odłamu dla stanu spoczynku, a inna dla stanu ruchu. Pierwsza nie jest właściwie płaszczyzną odłamu, gdyż podczas ruchu objawia się inna płaszczyzna odłamu; nazywamy jednak także tę płaszczyznę płaszczyzną odłamu, dla której parcie geostatyczne jest największem.

Położenie płaszczyzny odłamu jest zależne od kąta δ , który znów zależnym jest od położenia płaszczyzny odłamu. Wyznaczenie płaszczyzny odłamu wprost byłoby więc niemożliwem, gdyby nam nie przyszło w pomoc twierdzenie Almquist'a, które w tem miejscu podamy.

Na rys. 435 mamy wyznaczyć płaszczyznę odłamu AC , gdy ściana AB jest pochylona na zewnątrz pod kątem $-\varepsilon$.

Wykreślmy pionową AB_1 i wyznaczmy naprzód płaszczyznę odłamu dla tej pomyślanej ściany pionowej. Wtedy jest parcie geostatyczne równoległe do BD , więc nachylone do poziomej pod kątem β , kreślimy zatem kierującą B_1L pod kątem $\varrho + \beta$, a z pomocą punktu L otrzymamy jak zwykle, K_1 , kreślimy $KC \parallel LB_1$, a AC jest płaszczyzną odłamu dla ściany pionowej AB_1 .

Otóż da się udowodnić, że tę samą płaszczyznę odłamu otrzymamy i dla ściany AB , nachylonej pod dowolnym kątem $-\varepsilon$. Jeżeli bowiem AC jest płaszczyzną odłamu, to możemy łatwo wynaleść środek ciężkości odłamu i położenie siły C . Przedłużmy kierunek siły Q do punktu przecięcia się K_2S_0C , to $K'E$ jest kierunkiem parcia geostatycznego P' , który zawiera z prostopadłą na ścianę kąt δ . Wykreślmy teraz prostą CK pod kątem $\delta + \varepsilon$ do prostopadłej CH , to jeżeli AC jest płaszczyzną odłamu, musi być $ABC = ACK$, co zaraz udowodnimy.

$$AK : AK_1 = ME : UM = BC : B_1 C \dots \dots \dots \gamma)$$

Dalej mamy

$$ACK : ACK_1 = AK : AK_1$$

$$ABC : AB_1 C = AC : B_1 C,$$

więc ze względu na równ. $\gamma)$

$$ACK : ACK_1 = ABC : AB_1 C$$

$$ACK : ABC = ACK_1 : AB_1 C.$$

A że $ACK_1 = AB_1 C$, więc także $ACK = ABC$, co było do udowodnienia.

A więc AC jest powierzchnią odłamu także dla ściany pochylej AB i wogóle dla jakiegokolwiek ściany, sięgającej od A do prostej BD .

Za pomocą tego twierdzenia, któreśmy udowodnili, możemy łatwo wyznaczyć płaszczyznę odłamu dla dowolnie nachylonych ścian, wyszukawszy ją dla odnośnej ściany pionowej. Wyznaczenie parcia geostatycznego nie podlega wedle powyższego żadnej trudności.

Prawie zawsze jest $P' > P$ t. j. parcie geostatyczne (w stanie spoczynku) jest większem, niż parcie geodynamiczne (w stanie ruchu). Dla płynów było to prawo dawno znane, mianowicie prawo, że parcie hydrostatyczne jest większem, niż hydrodynamiczne.

§ 200. Wyznaczenie analityczne parcia geostatycznego dla ściany pionowej i naziomu poziomego.

Wiemy, że dla ściany pionowej jest parcie geostatyczne P' równoległym do naziomu, w tym wypadku (rys. 436) więc poziomem.

A zatem tu $\alpha = 90^\circ$, $\delta' = 0$, $\beta = 0$. Wstawivszy te wartości w równ. 824) otrzymamy,

$$\begin{aligned} \text{dot } \chi &= \text{st } \varrho + \sqrt{[\text{st } \varrho + \text{dot } \varrho] \text{st } \varrho} = \text{st } \varrho + \sqrt{\text{st}^2 \varrho + 1} \\ &= \text{st } \varrho + \text{siecz } \varrho = \frac{1 + \text{wst } \varrho}{\text{dost } \varrho} = \text{dot } (45 - \frac{1}{2} \varrho). \end{aligned}$$

Zatem $\chi = \varphi = 45 - \frac{1}{2} \varrho \dots \dots \dots 862)$

A więc płaszczyzna odłamu połowi kąt między ścianą a stokiem naturalnym.

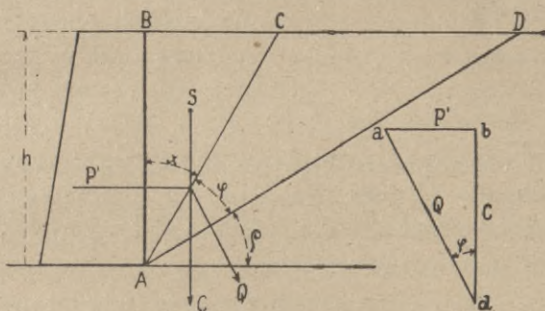
Z równ. zaś 826) otrzymamy:

$$P' = \frac{\gamma h^2 \operatorname{dost} \varrho}{2 \operatorname{wst} \varrho (\sqrt{\operatorname{st} \varrho + \operatorname{dot} \varrho} + \sqrt{\operatorname{st} \varrho})^2} = \frac{\gamma h^2}{2 [\sqrt{1 + \operatorname{st}^2 \varrho} + \operatorname{st} \varrho]^2} =$$

$$= \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{st}^2 \left(45 - \frac{\varrho}{2} \right) \dots \dots \dots 863)$$

Zwykle jest ϱ od 30 do 45°, otrzymamy więc

dla $\varrho =$	30	33	35	37	40	45°
P'	0,1667	0,1474	0,1355	0,1233	0,1087	0,0858 γh^2 .



rys. 436.

Dla odporu należy tylko zmienić znak parcia, otrzymamy

więc
$$P'' = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{st}^2 \left(45 + \frac{\varrho}{2} \right) \dots \dots \dots 864)$$

Stąd otrzymamy dla

$\varrho =$	30	33	35	37	40	45°
$P'' =$	1,400	1,696	1,845	2,011	2,298	2,914 γh^2 .

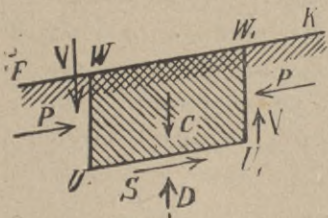
Widzimy stąd, jak ogromna jest różnica między parciem czynnym a odporem ziemi.

§ 201. Nowsze teorie.

Zadaleko zaprowadziłoby nas opisanie wszystkich teoryj parcia ziemi, które podali Rankine, Considere, Lévy, St. Venant, Winkler, Scheffler, Mohr, Boussinesq i inni. Wspominamy tu tylko o ogólnych zarysach nowszej teorii według streszczenia Müllera-Breslaua*).

*) *Graphische Statik*. 1881.

Rankine i Boussinesq zastanawiają się nad naprężeniami, stniejącymi w ziemi o naziomiu dowolnym, zresztą nieograniczonej. Wytnijmy w myśli nieskończone mały równoległobok UWW_1U_1



rys. 437.

tuż przy powierzchni ziemi płaszczyznami pionowymi i badajmy siły, jakie nań działają. Siły, działające w nieskończonej bliskich płaszczyznach UW i U_1W_1 , możemy przyjąć jako równe, oznaczamy je więc obie

literą V . Dla równowagi muszą być też i siły P , działające pod kątem na te płaszczyzny, równe i równoległe do naziomu. Ciśnienie pionowe na dno D musi być $=C$, a ponieważ suma momentów musi być $=0$, więc $S=0$ i $V=0$. Stąd wyprowadzają Rankine i Boussinesq następujące wnioski:

1.^o Parcie ziemi na powierzchnię pionową jest równoległe do naziomu.

2. Parcie ziemi na powierzchnię równoległą do naziomu jest pionowe.

Wniosek pierwszy prowadzi do parcia geostatycznego, drugi znany jest nam z § 180.

Jeżeli twierdzenie pierwsze zastosujemy wprost do parcia ziemi na mur, to pomijamy tarcie między ścianą a murem, przez co otrzymujemy parcie geostatyczne a nie geodynamiczne.

Inni, jak Weyrauch (*Theorie des Erddruckes auf Grund der neueren Anschauungen 1884*), wyznaczają inny kierunek parcia na dowolną płaszczyznę, mianowicie kąt δ , o który odchyła się tu parcie do prostopadłej na płaszczyznę. Niektórzy, jak Lèvy i Winkler, przyjmują nawet, że $\delta=\varrho$; wszyscy jednak wychodzą z ogólnych naprężeń ziemi o dowolnym naziomiu, zresztą nieograniczonej. Wyniki, w ten sposób otrzymane, zastosowują wprost do parcia ziemi na stałe ściany, mówiąc, że gdy pomyślimy sobie przez ziemię położoną płaszczyznę i gdy przypuścimy, że ziemia po jednej stronie tej płaszczyzny nagle stwardnieje, to stan równowagi przez to się nie zmienia. Słusznie zauważa tu Weyrauch, że tak nie jest, że po stwardnieniu ziemi będzie wprawdzie istnieć równowaga, ale nie ta sama, że siły, układające się w równowagę, będą prawdopodobnie teraz inne. Dlatego

sami autorowie nowszych teoryj ograniczają ważność ich tylko do pewnych wypadków. Weyrauch wyznacza mianowicie podobnie, jak w ciałach sprężystych, osie główne naprężeń i twierdzi, że nowsza teoria jest wtedy prawdziwą, jeśli obie osie przecinają naziom. Sprawdza się to zawsze przy naziomie poziomym, gdy $\varepsilon < 0$ i pod pewnymi warunkami przy naziomie spadającym.

Zresztą i w tych wypadkach wyniki, otrzymane według nowszej teoryj nie zgadzają się z praktyką ani z doświadczeniami i dają za wielkie parcie.

Dlatego też nie będziemy się dalej zastanawiać nad nowszą teorią i zadowolimy się dawniejszą, zastosowując przytem, gdzie tego potrzeba, naszą poprawkę.

Doświadczenia prof. Engelsa*) stwierdziły, że rzeczywiście parcie ziemi w stanie spoczynku na ścianę pionową jest poziome, mały ruch jednak, do którego stwierdzenia potrzeba aż przyrzędu zwierciadłowego, wystarczy, aby wywołać tarcie. Ponieważ w praktyce możemy śmiało dopuścić prawie zawsze tak małe ruchy, zatem możemy też uwzględnić tarcie, chociaż ono w stanie spoczynku nie istnieje.

XVIII. Parcie ziemi na sklepienie. Inne parcia.

§ 202. Sklepienie owalne.

W § 134. nie uwzględnialiśmy parcia ziemi na sklepienie, lecz tylko jej ciężar pionowy. Z § 180 wynika, że możemy tak postępować, dopóki grzbiet sklepienia lub nadmurowania nie jest bardziej nachylony do poziomu niż stok naturalny. Przy sklepieniach owalnych, jajowatych i tunelowych musimy jednak z powodu większego nachylenia uwzględnić także wielkość i kierunek ukośnego parcia na sklepienie, przyczem zastosowujemy tylko znane już prawidła. Tok postępowania pokażemy na przykładzie.

Na tabl. VI. wykreśliśmy sklepienie owalne z wielką nadsypką symetryczne i symetrycznie obciążone, to samo, dla którego Ott wyznaczył linię ciśnienia w swym podręczniku (*Vorträge über Bautechnik I. Theil*). Przypuszczamy, że grzbiet sklepienia jest wieloboczny; jeśli tak nie jest, to zamiast krzywej

*) *Zeitschrift für Bauwesen*, 1896, str. 409.

przyjmujemy wielobok w nią wpisany lub opisany. Na każdy kliniec wyznaczamy parcie ziemi $P_1, P_2, P_3 \dots P_r$, przyczem przyjmujemy kąt tarcia $\rho = 35^\circ$, $\delta = \frac{1}{4} \rho = 26'15''$, ciężar gatunkowy ziemi $\gamma_z = 1,8 \frac{t}{m^3}$, kamienia $\gamma_k = \frac{t}{m^3}$. Dla pierwszych dwóch klinców jest $\alpha > 180 - \rho$, więc parcie jest pionowe i równe ciężarowi ziemi, leżącej nad klincami. Następne parcia są nachylone do prostopadłej na ścianę o kąt ρ , obliczyliśmy je według wzoru 808), po części korzystaliśmy także z tablic, obliczonych dla tych równań. Ponieważ mamy tu wyznaczyć parcie na część ściany, więc obliczywszy parcie dla całej ściany przedłużonej aż do naziomu, wykreśliśmy trójkąt parcia. Dla danej ściany otrzymaliśmy więc według § 192 trapez parcia, który nam służył do wyznaczenia wielkości i punktu zaczepienia (rys. 424). Aby rysunek na tabl. VI. uczynić wyraźnym, opuściliśmy na nim te przedwstępne konstrukcje, znane nam zrezztą z poprzedniego.

Teraz wyznaczamy ciężar klinców $G_1, G_2 \dots G_r$, mnożymy powierzchnie przekroju klinców przez długość $= l$ i przez ciężar gatunkowy $\gamma_k = 2,3 \frac{t}{m^3}$.

Wyznaczywszy w ten sposób wszystkie sły, działające na sklepienie, przystępujemy do wykreślenia linii ciśnienia według § 138. Przyjmujemy więc naprzód dowolnie parcie poziome $H = 0$, a , zaczepiamy go w e w połowie wysokości klucza i na tej podstawie wykreślamy linią ciśnienia (kreskowaną na tablicy). Ostatni jej bok cd przedłużony przecina się z pierwszym w punkcie d , przez który przechodzi wypadkowa R wszystkich sił, działających na prawą stronę sklepienia. Jeżeli przypuścimy, że linia ciśnienia przechodzi przez środek podstawy f , to fd jest ostatnim bokiem wieloboku sznurowego, a więc zrobiwszy $bo // fd$, otrzymamy prawdziwy biegun O . Wykreślamy teraz drugi raz linią ciśnienia (pełno wyciągniętą na tablicy), przechodzącą przez punkty e i f . ta ciśnienia wpada na punkt jędrny w g . Z kształtu jej jednak widzimy, że cała leży poniżej osi sklepienia, co sprzeciwia się prawidłu, wypowiedzianemu w § 144, że suma powierzchni dodatnich ma być równa sumie powierzchni ujemnych. Prawdziwa linia ciśnienia leżeć będzie nieco wyżej, niż linia pełna wyciągnięta, należałoby zatem przyjąć punkt e nieco wyżej, a wtedy punkt g wejdzie w jądro.

§ 203. Sklepienie tunelowe.

Linję ciśnienia w sklepieniu tunelowym możnaby wyznaczyć według poprzedniego paragrafu. Jeżeli jednak tunel leży głęboko pod poziomem, otrzymalibyśmy w ten sposób parcie ziemi znacznie większe, niż w rzeczywistości istnieje. Głębiej położone warstwy ziemi i skały mają bowiem spójność zwykle tak wielką, że jej pominąć zupełnie nie możemy. Wielki wpływ na parcie ziemi ma też także kierunek warstw, tak że nieraz parcie jest większe z jednej, niż z drugiej strony osi tunelu. Spójność ziemi i kierunek warstw zmieniają się jednak często dla tego samego tunelu tak, że w praktyce nieraz widzimy, że w niektórych

miejscach tunel obejść się może czasem zupełnie bez sklepienia, a w innych grubość sklepienia jest nader zmienną. Obliczenie sklepienia tunelowego jest więc zwykle niemożliwe dla nieznaności sił, nań działających. Jeżeli jednak potrafimy wyznaczyć siły zewnętrzne, czy to jako zwykle parcie ziemi, czy też praktycznie, badając zachowanie się tymczasowego rusztowania drewnianego, to wykreślenie linii ciśnienia nie będzie przedstawiać żadnych trudności.

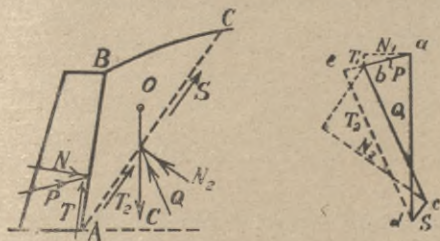
§ 204. Uwzględnienie spójności.

Powiedzieliśmy wyżej, że zwykle przy wyznaczaniu parcia ziemi nie uwzględniamy spójności. Zdarzają się jednak wypadki, że to jest koniecznem lub przynajmniej wskazanem. Koniecznem jest ono przy parciu na sklepienie tunelowe, a wskazanem przy murach w przekopach, gdzie mur przylega do ziemi naturalnej, nienasypanej, wskazującej mniejszą lub większą spójność.

Zaznaczamy tu w krótkości, w jaki sposób należałoby uwzględnić spójność, która, jak wiadomo, proporcjonalną jest do powierzchni odłamu. Jeżeli więc spójność na jednostkę kwadratową nazwiemy c , to cała spójność S w wyznaczonej w zwykły sposób płaszczyźnie odłamu AC (rys. 423) będzie $S=cl$. Wykreślmy teraz wielobok sił, zróbmy $ad=C$, $dc//AC$ i równe S , dalej $cb//Q$ i $ab//P$, to $ab=P$. Nie uwzględnivszy spójności, otrzymalibyśmy $P=ae$, przyczem $ae>ab$. Jeżeli spójność przyjmujemy większą, to ab będzie mniejszem, może się nawet stać zerem, wtedy niema wcale parcia.

Wyznaczenie to nie jest dokładnem, bo S zmienia się proporcjonalnie do l , które jest funkcją φ , może więc przy uwzględnieniu spójności otrzymamy inną płaszczyznę usuwową.

W przybliżeniu możemy też uwzględnić spójność według prof. Skibińskiego, przyjmując zamiast kąta φ większy kąt φ' , wyznaczony z paraboli spójności. Dla tego większego kąta przeprowadzamy wtedy obliczenie w zwykły sposób. Przybliżone te sposoby są tem bardziej



rys. 438.

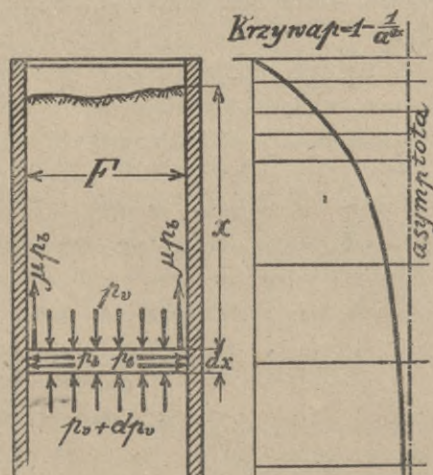
nie w zwykły sposób. Przybliżone te sposoby są tem bardziej

wystarczające, że zwykle dokładnie nie wiemy, jak wielką jest spójność.

§ 205. Ciśnienie ciał sypkich.

Ciała stałe nie wywierają żadnego ciśnienia na ściany boczne, lecz cały ciężar przenosi się na podstawę. Ciała płynne wywierają ciśnienie boczne i na dno jednostajne, zależne od głębokości warstwy, na którą ciecz działa. Ciała sypkie znajdują się po środku między ciałami stałymi i płynnymi. Wywierają one ciśnienie na ściany boczne, zależne od wysokości, ale zmniejszone tarciem ciał o ściany. Część ciężaru tylko przenosi się na dno, resztę niosą ściany.

Dla inżynierów ważnem jest wyznaczenie ciśnienia na ściany boczne i na dno, zwłaszcza w komorach siła, w których się przechowuje zboże i inne towary sypkie.



rys. 439.

rys. 440.

Teorię ciśnienia ciał sypkich podał w r. 1896 Janssen, którą doświadczenia w głównych zarysach potwierdziły. Rys 439. przedstawia przekrój pionowy komory siła. W głębokości x ciśnienie pionowe jednostkowe ciała sypkiego niech będzie p_v , w głębokości $x+dx$ zaś p_v+dp_v . To dp_v równa cię ciężarowi warstwy

o grubości dx zmniejszonej o tarcie na ściany. Więc $F dp_v = \gamma dx h + -f p_b O dx$, przyczem p_b oznacza ciśnienie na ściany boczne, O obwód powierzchni, γ ciężar jednostki objętości ciała sypkiego,

f współczynnik tarcia. Stąd $dx = \frac{dp_v}{\gamma \frac{f p_b}{F} O}$. Nazwijmy $K = \frac{f p_b}{p_v}$

i scałkujemy to równanie, to otrzymamy

$$\log \text{ nat} \left(1 - \frac{KO}{F\gamma} p_b \right) = - \frac{KOx}{F}$$

$$\text{czyli } 1 - \frac{KO}{F\gamma} p_b = e^{-\frac{KOx}{F}}$$

Stąd :

$$p_v = \frac{F\gamma}{KO} \left(1 - e^{-\frac{KOx}{F}} \right), \text{ a } p_b = \frac{F\gamma}{fO} \left(1 - e^{-\frac{KOx}{F}} \right) . . . 865)$$

p_v i p_b dadzą się więc przedstawić linjami logarytmicznymi (rys. 440). Linje te mają asymptoty pionowe. Dla $x = \infty$ mamy *najw*

$p_v = \frac{F\gamma}{KO}$, *najw* $p_b = \frac{F\gamma}{Of}$. Dla przekroju okrągłego o średnicy s lub

dla prostokątnego o długości boku s jest $\frac{F}{O} = \frac{s}{4}$, więc *najw*

$$p_v = \frac{s\gamma}{4K}, \text{ najw } p_b = \frac{s\gamma}{4f}$$

Z równań powyższych widzimy, że ciśnienia p_b i p_v wzrastają z x , lecz dla głębokości 3 s do 4 s dosięgają prawie największości. Dla większych głębokości ciśnienia już nie wzrastają, dno i ściany boczne mogą mieć tę samą grubość. Z tego wynika wskazówka, że komory sila powinny być wysokie, o nie bardzo wielkiej średnicy, gdy zbiorniki na wodę lepsze są niskie o wielkiem s . Ściany boczne komór prostokątnych wykazują naprężenie proporcjonalne do trzeciej potęgi s , gdy naprężenie okrągłych komór wzrasta proporcjonalnie do drugiej potęgi. Dlatego dla większych s używamy tylko przekroju okrągłego, a prostokątnego tylko do szekości 3 do 4 m .

Ściany boczne komór wielobocznych pracują nie tylko na zginanie, ale działają na nie też ciągnienia obwodowe. Oprócz tego działają też siły pionowe, odpowiadające ciężarowi ziaren przylegających wskutek tarcia do ścian. Siła ta pionowa wynosi

$$V = F\gamma h - p_v F 866)$$

a dla $h > 4s$ $V = F \gamma h - \frac{s\gamma}{4k} F = F \gamma \left(h - \frac{s}{4k} \right) \dots \dots \dots 867)$

Równ. 865) da się przedstawić w kształcie $y = a \left(1 - \frac{1}{e^{bx}} \right)$.

Po zlogarytmowaniu otrzymamy $\log n (a-y) = \log n (ae^{-bx}) =$
 $= \log n a - bx$ stąd $x = \frac{1}{b} \log n \frac{a}{a-y}$, albo gdy $\frac{a}{a-y} = z$

$$x = \frac{1}{b} \log \text{nat } z \dots \dots \dots 868)$$

więc ciśnienie wzrasta według linii logarytmicznej (rys. 440). Linja ta ma asymptotę pionową w odstępnie $a = \frac{F\gamma}{kO}$ dla ciśnienia na

dno a $a = \frac{F\gamma}{fO}$ dla ciśnienia bocznego. Równanie zaś stycznej

w punkcie początkowym jest $\eta = ab\xi$, a dla ciśnienia na dno $\eta = \gamma\xi$. Wykreśliwszy styczne, możemy krzywą narysować od ręki.

Co do wartości f , γ i K należy zauważyć, że Janssen otrzymał $K=0.203$ do 0.235 . Autor jednak otrzymuje zgodność z doświadczeniami w Buenos Aires dla $K=0.14$, dla pszenicy lekkiej $\gamma=0.72$, zaś $K=0.3$ dla pszenicy ciężkiej $\gamma=0.78$. Koenen przyjmuje K zależne od kąta tarcia $K = st^2 \left(45 - \frac{\varrho}{2} \right) st \varrho$. Wedle doświadczeń Jamiesona było $K=0.265$, dla piasku $K=0.17$. Współczynnik tarcia między zbożem a ścianą przyjmował on $f=0,441$. Lufft*) na podstawie swych doświadczeń jest zdania, że aby uzgodnić doświadczenia z rachunkiem, trzeba przyjąć f trochę większe.

Jeżeli w napełnieniu następuje przerwa, ciśnienia p_b i p_v się zmniejszają, ciało sypkie się osiada. Ciekawe są zjawiska przy opróżnianiu komory. Prante znalazł, że wtedy ciśnienia się zwiększają i dochodzą aż do ciśnień hydrostatycznych. Następne wszystkie doświadczenia tego nie potwierdziły. Z początku wypróżniania następują znaczne wahania ciśnienia, które czasem o kilka procent przewyższają ciśnienie przy napełnianiu. Jednak, gdy wypróżnienie następuje po pewnej przerwie, to przez to ciśnienie spadło, a wtedy pomimo wahań ciśnienie nie dochodzi do pierwotnej wysokości. Jeżeli napełnia się komorę powoli, to

*) P. Lufft, Druckverhältnisse in Silozellen.

odpowiada to ciągłym małym przerwom, a przez to ciśnienie jest mniejsze, niż przy napełnianiu prędkiem.

Pleissner stwierdził, że ciało sypkie w komorze staje się gęstszym i ciężar gatunkowy γ jest zazwyczaj większym, niż w hektolitrach w handlu. Przy wysokich siłach stwierdził on powiększenie γ o 14% w dolnej warstwie. Ciśnienie na dno p_v nie jest jednostajne, największe jest albo w środku dna, albo też niedaleko środka i wynosi około 1.3 p_v , za to spada ku ścianom do 0.7 p_v . To samo zauważono co do ciśnienia na ściany boczne komór o przekroju prostokątnym. Przy opróżnianiu komory porusza się w dół jądro środkowe, ziarna przy ścianach nie opadają pionowo, lecz ku środkowi. Dlatego nawet po kilku latach ściany komory przedstawiają te same nierówności, co z początku w czasie budowy. Dawniej wzmocniano nieraz ściany boczne kotwami. Otóż okazało się, że z powodu ciśnienia pionowego i ruchu ziarna one się wyginały i nie działały. Jeżeli już używa się kotew, to należy umieścić je w rogach poza jądrem środkowym.

Przy budowie silów możemy przyjąć nieco większe naprężenie ze względu na to, że niema wcale wstrząśnień, zmiany wielkości naprężeń mogą tu jednak być wielkie. Podpory dźwigają cały ciężar własny i ciała sypkiego, dna i lejki możemy obliczać na ciśnienie $\frac{F}{O} \cdot \frac{\gamma}{K}$, resztę ciężaru niosą ściany, które zatem są ciśnione ciężarem pionowym, a oprócz tego działają na nie ciśnienia boczne. Na zużycie ścian nie potrzeba wcale liczyć, bo podczas wypróżnienia ziarna po ścianie się nie przesuwają.

E. MURY OPOROWE.

XIX. Stałość murów oporowych.

§ 206. Ogólne zasady.

W § 170. podaliśmy określenie muru oporowego. Składa się on z warstw poziomych lub też pochyłych. Jeżeli wyznaczymy siły, działające na każdą warstwę, t. j. ciężar muru i parcie ziemi, wyznajdziemy środek ciśnienia czyli punkt zaczepienia wypadkowej,

działającej na szew, a jeżeli środki ciśnienia wszystkich szwów połączymy, otrzymamy, jak wiemy, linją ciśnienia.

Warunki równowagi murów oporowych są te same, co sklepień, filarów i przyczółków, a więc według § 133.

1. Środek ciśnienia powinien leżeć w jądrze t. j. w średniej trzeciej części szwu, aby zaprawa nie pracowała na ciągnięcie. Przy murach litych betonowych lub żelbetowych możemy dopuścić pewne ciągnięcie, linja ciśnienia może więc wyjść z jądra.

2. Wypadkowa nie powinna być odchylną od prostopadłej na szew więcej, niż wynosi kąt tarcia.

3. Naprężenie nie powinno przekraczać współczynnika wytrzymałości. Jeśli przyjmiemy stosowną pewność, to naprężenie nie powinno być większem, niż dopuszczalne.

Jeżeli na mur oporowy pionowy lub mało pochylony działa tylko parcie ziemi i ciężar własny muru, to linja ciśnienia wpada u góry muru, gdzie parcie równe zeru, na oś i oddala się dla dolnych części muru coraz bardziej od osi. Dlatego w zwykłych wypadkach wystarcza, gdy sprawdzimy, czy te trzy warunki wypełniają się dla podstawy muru. W wypadkach bardziej zawiłych potrzeba badanie rozciągnąć i do innych szwów.

§ 207. Ogólne wyznaczenie grubości muru oporowego.

Jeżeli Z jest parciem ziemi na mur $ABML$ (rys. 441) a C ciężarem tego muru, to dwie te siły złożone dają wypadkową R , która przecina podstawę muru AL w punkcie G . Rozłożmy wszystkie te siły na składowe równoległe i prostopadłe do AL , to otrzymamy siły Z_1, Z_2, C_1, C_2, P i T . Z rysunku widzimy, że $P = C_2 + Z_2$ a $T = Z_1 - C_1$, dalej, że $C_1 = C \text{ wst } \beta$, $C_2 = C \text{ dost } \beta$, $Z_1 = Z \text{ wst } \eta$, $Z_2 = Z \text{ dost } \eta$.

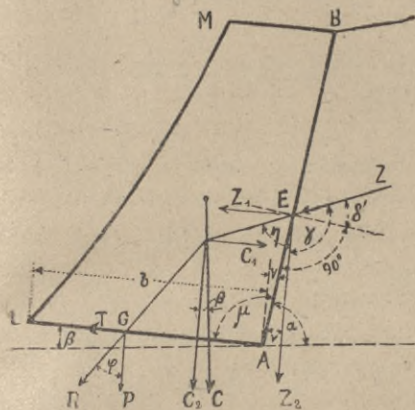
Dalej widzimy, że $\nu = \mu - 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ - \nu + \delta'$, a wstawiwszy wartość za ν , otrzymamy $\gamma = 180^\circ - \mu + \delta'$. Dalej mamy $\eta = 180^\circ - \gamma$ albo $\eta = 180^\circ - (180^\circ - \mu + \delta') = \mu - \delta'$.

Wstawiwszy tę wartość za η , otrzymamy

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z \text{ wst } (\mu - \delta'), & Z_2 &= Z \text{ dost } (\mu - \delta'), & \text{ a więc} \\ P &= C \text{ dost } \beta + Z \text{ dost } (\mu - \delta') \} \\ T &= C \text{ wst } \beta - Z \text{ wst } (\mu - \delta') \} \quad \dots \dots \dots 869 \end{aligned}$$

a stąd

$$\text{st } \varphi = \frac{T}{P} = \frac{C \text{ wst } \beta - Z \text{ wst } (\mu - \delta')}{C \text{ dost } \beta + Z \text{ dost } (\mu - \delta')} \dots \dots \dots 870)$$



rys. 441.

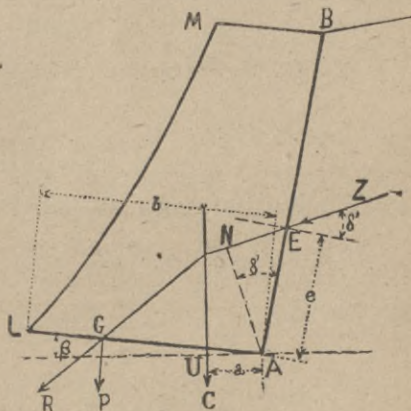
Przy obliczaniu murów podporowych przyjmujemy zwykle takie wymiary muru, aby środek ciśnienia podstawy wpadał na zewnętrzny punkt jądry. Przyjmujemy to położenie graniczne środka ciśnienia, ponieważ, chcąc go sprowadzić bliżej środka ciężkości podstawy, potrzebowalibyśmy wiele więcej materiału, a gdyby z jakichkolwiek przyczyn środek ciśnienia wyszedł nawet poza jądro, to mur jeszczeby się nie wywrócił, tylko szew

otworzyłby się trochę. Robiąc to przypuszczenie, mamy więc jeszcze dostateczną pewność.

Aby zatem środek ciśnienia G nie wyszedł z jądra, musi być $AG \leq \frac{2}{3} AL = \frac{2}{3} b$. Jeżeli $AG = \frac{2}{3} b$ (rys. 442), to możemy ustawić następane równanie momentów ze względu na punkt A:

$P \cdot \frac{2}{3} b = C \cdot AU + Z \cdot AN$,
a nazwawszy $AU = a$, $AN = e \text{ dost } \delta' = e \text{ dost } \delta'$, otrzymamy:

$$\frac{2}{3} b = \frac{a \cdot C + Z e \text{ dost } \delta'}{P} = \frac{a C + Z e \text{ dost } \delta'}{C \text{ dost } \beta + Z \text{ dost } (\mu - \delta')} \dots \dots \dots 871)$$



rys. 442.

Rozumie się, że należałoby też zbadać punkt 3-ci, dotyczący naprężenia, które obliczać należy wedle równania 636). W razie, gdy punkt G wpada na punkt jądry, mamy wedle 639

$$v_1 = \frac{2 P}{100 b} \dots \dots \dots 872)$$

jeżeli wszystko liczymy w *kg* i *cm*. Również należy zbadać, czy ciśnienie w fundamencie nie jest za wielkiem.

§ 208. Analityczne wyznaczenie grubości muru dla szwów pochyłych.

Na podstawie równ. 871) wyznaczmy teraz według Otta grubość *b* muru o przekroju trapezowym.

Jeżeli przekrój muru ma kształt trapezu *ABML* (rys. 443) to da się równ. 871) inaczej wyrazić.

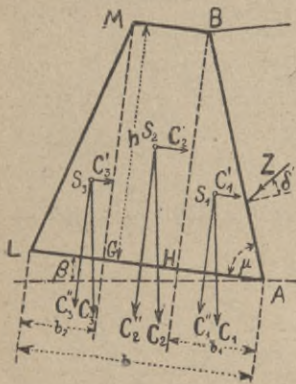
Z rysunku otrzymamy *C*, ciężar muru na długość równą jednośc

$$C = \gamma h \frac{AL + MB}{2} = \gamma \frac{h}{2} (2b - b_1 - b_2) \quad \left. \vphantom{C} \right\} 873)$$

$$h = b_1 \operatorname{st} \mu$$

jeżeli γ oznacza ciężar gatunkowy muru.

Chcąc wyznaczyć moment siły *C* ze względu na punkt *A*, rozłożymy trapez na prostokąt *GIBM* i dwa trójkąty, oznaczymy ciężar części składowych przekroju i rozłożymy każdy z nich na składowe równoległe i prostopadłe do podstawy *AL*.



rys. 443.

Wtedy otrzymamy moment ciężaru *C* ze względu na *A*

$$C a = C_1'' \frac{2}{3} b_1 + C_2'' \left(b_1 + \frac{b - b_1 - b_2}{2} \right) + C_3'' \left(b - \frac{2 b_2}{3} \right) +$$

$$- (C_1' + C_3') \frac{h}{3} - C_2' \frac{h}{2}.$$

Z rysunku widzimy, że

$$C_1 = \gamma \frac{b_1 h}{2}, \text{ więc } C_1'' = \gamma \frac{b_1 h}{2} \operatorname{dost} \beta, \quad C_1' = \gamma \frac{b_1 h}{2} \operatorname{wst} \beta,$$

$$C_2 = \gamma (b - b_1 - b_2) h, \text{ więc } C_2'' = \gamma (b - b_1 - b_2) h \operatorname{dost} \beta,$$

$$C_2' = \gamma (b - b_1 - b_2) h \operatorname{wst} \beta,$$

$$C_3 = \gamma \frac{b_2 h}{2}, \text{ więc } C_3'' = \gamma \frac{b_2 h}{2} \operatorname{dost} \beta, \quad C_3' = \gamma \frac{b_2 h}{2} \operatorname{wst} \beta.$$

Wstawiliśmy te wartości w poprzednie równanie, otrzymamy:

$$Ca = \gamma h \cdot \text{dost } \beta \left[\frac{2}{3} b_1^2 + \frac{(b_1 - b_2)^2 - b_1^2}{2} + \left(b - \frac{2 b_2}{3} \right) \frac{b_2}{2} \right] +$$

$$- \gamma h^2 \text{wst } \beta \left(\frac{b_1 + b_2}{6} + \frac{b - b_1 - b_2}{2} \right)$$

$$Ca = \gamma \frac{h \text{dost } \beta}{2} \left[b^2 - (b_2 + h \text{st } \beta) b + \frac{b_2^2 - b_1^2}{3} + \frac{2}{3} (b_1 + b_2) h \text{st } \beta \right] \quad . \quad 874)$$

Wstawiliśmy wartości za C i Ca w równ. 851), otrzymamy

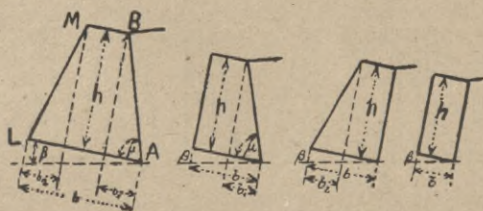
$$\frac{2}{3} b = \frac{\frac{\gamma}{2} h \text{dost } \beta [b^2 - (b_2 + h \text{st } \beta) b + \frac{b_2^2 - b_1^2}{3} + \frac{2}{3} (b_1 + b_2) h \text{st } \beta] + Z e \text{dost } \delta'}{\frac{1}{2} \gamma h (2b - b_1 - b_2) \text{dost } \beta + Z \text{dost } (\mu - \delta')}$$

Stąd otrzymamy wreszcie, uporządkowawszy równanie według b :

$$b^2 + \left[b_2 - 2 b_1 + 3 h \text{st } \beta + \frac{4 Z \text{dost } (\mu - \delta')}{\gamma h \text{dost } \beta} \right] b = b_2^2 - b_1^2 +$$

$$+ 2 (b_1 + b_2) h \text{st } \beta + \frac{6 Z e \text{dost } \delta'}{\gamma h \text{dost } \beta}, \quad . \quad . \quad . \quad 875)$$

a więc równanie drugiego stopnia, które w danym wypadku możemy łatwo rozwiązać.



rys. 444. rys. 445. rys. 446. rys. 447.

Z równ. 875) otrzymamy dla poszczególnych wypadków następujące wzory:

1. Dla $b_1 = b_2$ (rys. 444) otrzymamy:

$$b^2 + \left(-b_1 + 3 h \text{st } \beta + \frac{4 Z \text{dost } (\mu - \delta')}{\gamma h \text{dost } \beta} \right) b =$$

$$= 4 b_1 h \text{st } \beta + \frac{6 Z e \text{dost } \delta'}{\gamma h \text{dost } \beta} \quad . \quad . \quad . \quad 876)$$

2. Dla $b_2 = 0$ (rys. 445) otrzymamy:

$$b^2 + \left(-2 b_1 + 3 h \text{st } \beta + \frac{4 Z \text{dost } (\mu - \delta')}{\gamma h \text{dost } \beta} \right) b = -b_1^2 + 2 b_1 h \text{st } \beta +$$

$$+ \frac{6 Z e \text{ dost } \delta'}{\gamma h \text{ dost } \beta} \dots \dots \dots 877)$$

3. Dla $b_1=0$ (rys. 446) otrzymamy, zważywszy, że $\mu=90^\circ$,

$$b^2 + \left(b_2 + 3 h \text{ st } \beta + \frac{4 Z \text{ wst } \delta'}{\gamma h \text{ dosi } \beta} \right) b = b_2^2 + 2 b_2 h \text{ st } \beta + \frac{6 Z e \text{ dost } \delta'}{\gamma h \text{ dost } \beta} \quad 878)$$

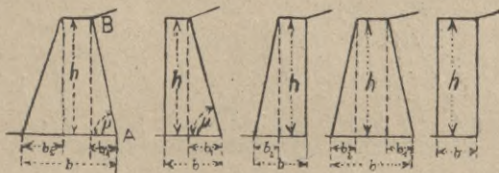
4. Dla $b_1=b_2=0$, a więc dla przekroju prostokątnego (rys. 447) mamy:

$$b^2 + \left(3 h \text{ st } \beta + \frac{4 Z \text{ wst } \delta'}{\gamma h \text{ dost } \beta} \right) b = \frac{6 Z e \text{ dost } \delta'}{\gamma h \text{ dost } \beta} \dots \dots 879)$$

§ 209. Analityczne wyznaczenie grubości murów dla szwów poziomych.

Jeżeli szwy muru podporowego są poziome (rys. 448), to otrzymamy odnośne wzory dla przekroju trapezowego, wstawiając w równ. 875) $\beta=0$, więc $\text{st } \beta=0$, $\text{dost } \beta=1$. Mamy więc

$$b^2 + \left(b_2 - 2 b_1 + \frac{4 Z \text{ dost } (\mu - \delta')}{\gamma h} \right) b = b_2^2 - b_1^2 + \frac{6 Z e \text{ dost } \delta'}{\gamma h} \quad 880)$$



rys. 448. rys. 449. rys. 450. rys. 451. rys. 452.

Z równania tego otrzymamy znowu w szczególnych wypadkach

1. Dla $b_2=0$ (rys. 449):

$$b^2 + \left(-2 b_1 + \frac{4 Z \text{ dost } (\mu - \delta')}{\gamma h} \right) b = -b_1^2 + \frac{6 Z e \text{ dost } \delta'}{\gamma h} \quad 881)$$

2. Dla $b_1=0$ będzie $\mu=90^\circ$ (rys. 450), więc

$$b^2 + \left(b_2 + \frac{4 Z \text{ wst } \delta'}{\gamma h} \right) b = b_2^2 + \frac{6 Z e \text{ dost } \delta'}{\gamma h} \dots \dots 882)$$

3. Dla $b_1=b_2$ (rys. 436) otrzymamy:

$$b^2 + \left(-b_1 + \frac{4 Z \text{ dost } (\mu - \delta')}{\gamma h} \right) b = \frac{6 Z e \text{ dost } \delta'}{\gamma h} \dots \dots 883)$$

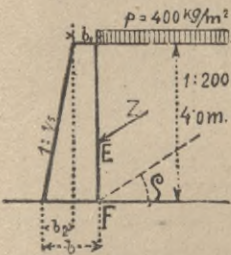
Dla $b_1 = b_2 = 0$ (rys. 452), a więc dla przekroju prostokątnego będzie:

$$b^2 + \frac{4 Z \text{wst } \delta'}{\gamma h} b = \frac{6 Z e \text{dost } \delta'}{\gamma h} \dots \dots \dots 884)$$

Podobnie dadzą się ustawić wzory dla murów zakrzywionych lub wielobocznych, ale są one jeszcze zawilsze, więc je pomijamy. Obliczenia tego rodzaju należą do nauki o budowlach ziemnych. Obliczając grubości muru zbiorników wody, tam itd. możemy zatrzymać te same wzory, wstawivszy w nie tylko dla wody $\delta' = 0$. Przy wysokich takich murach obliczenie należy przeprowadzić na innych zasadach. Omawianie tego zagadnienia należy do budownictwa wodnego.

Dla przekonania się, czy drugi warunek równowagi jest wypełnionym, mianowicie czy $\varphi < \rho$, musimy jeszcze obliczyć $\text{st } \varphi$ według równ. 870). Gdyby kąt φ był większym od kąta tarcia, to należałoby użyć albo szwów ukośnych, lub też pogrubić mur, a przez to powiększyć jego ciężar.

Przykład. Mur podporowy 4 m wysoki podtrzymuje drogę, dla której $p = 400 \text{ kg/m}^2$. Niechaj będzie $\rho = 33^\circ$, $\delta' = \frac{1}{3} \rho = 24^\circ 45'$, $\gamma_z = 1,8 \text{ t/m}^3$, $\gamma_m = 2,3 \text{ t/m}^3$ (rys. 453). Nachylenie przedniej ściany jest 1 : 200. Jak wielka ma być szerokość muru u podstawy b .



rys. 453.

Najprzód wyznaczmy parcie ziemi Z . Dla $\nu = 33^\circ$ jest $\text{dot } \rho = 1,54$, $\text{st } \rho = 0,646$. Według tablicy w § 184 mamy dla $\text{st } \beta = 0$ i $\text{st } \rho = 0,7$ współczynnik 0,122, dla $\text{st } \rho = 0,6$, 0,143, więc dla $\text{st } \rho = 0,649$ otrzymamy 0,131, zatem $P = 0,131 \cdot 1,8 \cdot 4^2 = 3,77 \text{ t}$. Dalej mamy wedle 839) $h_1 = \frac{400}{1800} = 0,222$, a wedle 841):

$$Z = 3,77 \left(1 + \frac{2 \cdot 400}{1800 \cdot 4} \right) = 3,77 \cdot 1,11 = 4,18 \text{ t}$$

Wreszcie wedle 844):

$$FE = e' = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 + 3 \cdot 0,222}{4 + 2 \cdot 0,222} = \frac{4,666}{4,444} = \frac{4}{3} \cdot 1,05 = 1,4 \text{ m.}$$

Teraz przystąpimy do obliczenia grubości muru. Wedle założenia $b_2 = \frac{h}{5} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ m}$, więc wedle 882):

$$b^2 + \left(0,8 + \frac{4 \cdot 4,18 \text{wst } 24^\circ 45'}{2,3 \cdot 4} \right) b = 0,8^2 + \frac{6 \cdot 4,18 \cdot 1,4 \text{dost } 24^\circ 45'}{2,3 \cdot 4}$$

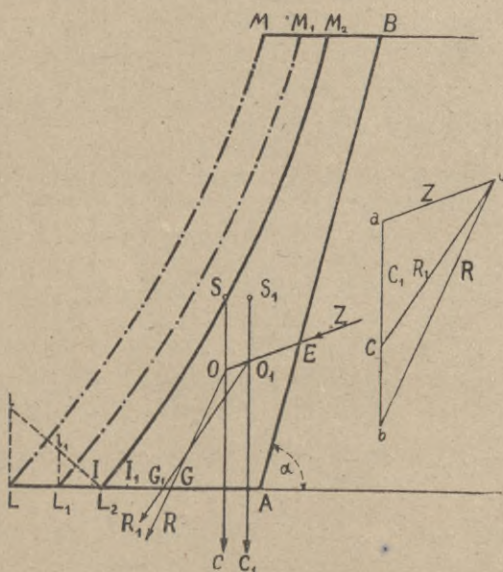
Dalej mamy $\text{wst } 24^\circ 45' = 0,419$, $\text{dost } 24^\circ 45' = 0,908$, co wstawivszy, otrzymamy:

$$b^2 + 1,56 b = 4,05, \text{ stąd } b = -0,78 + \sqrt{0,78^2 + 4,05} = 1,38 \text{ m.}$$

$b_0 = 1,38 - 0,8 = 0,58$. Gdyby b_0 wypadło mniejsze, niż $0,4 m$, należałoby ze względu na wykonanie przyjąć inne nachylenie ściany przedniej i powtórzyć rachunek dopóty, aż $b_0 \geq 0,4 m$.

§ 210. Wykreślne wyznaczenie grubości muru oporowego.

Jeżeli mamy dany przekrój muru $ABML$ (rys. 454), to łatwo obliczymy ciężar C muru na jednostkę długości w kierunku prostopadłym do rysunku. Parcie ziemi Z i punkt zaczepienia E wyznaczamy w znany sposób. Dwie te siły $Z = Oa$ i $C = ab$ składamy zapomocą wieloboku sił i otrzymujemy wypadkową R , przecinającą podstawę w punkcie G . Jeżeli, jak tu, środek ciśnienia G



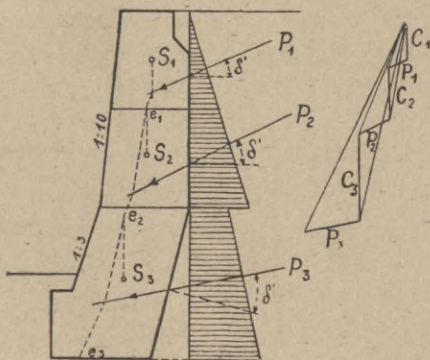
rys. 454.

leży w jądrze t. j. średniej trzeciej części podstawy, to nietylko równowaga jest zapewniona, ale też cała podstawa pracuje na ciśnieniu. Jeżeliby G wypadło poza punkt jądry I , to w punkcie A powstałoby ciągnięcie, czego ze względu na małą wytrzymałość zaprawy na ciągnięcie zwykle nie chcemy dopuścić. Chcąc, aby koszta muru były jak najmniejsze, a z drugiej strony, aby nigdzie mur nie pracował na ciągnięcie, będziemy się starali, jak przy analitycznym obliczeniu, aby punkt G wypadł na punkt

jądny I . W naszym wypadku wypadaloby więc zmniejszyć grubość muru. Przyjmy zatem teraz przekrój muru mniejszy $ABM_1 L_1$, przyczem $M_1 L_1 // ML$, i powtórzmy całą konstrukcją, to otrzymamy jako środek ciśnienia punkt G_1 jeszcze w średniej trzeciej części podstawy. Zróbmy $l_1 = IG_1$ równe odstępowi środka ciśnienia G od punktu jędrnego, dalej $L_1 l_1 = I_1 G_1 =$ odstępowi punktu G_1 od nowego punktu jędrnego I_1 , to gdybyśmy to dla kilku wypadków powtórzyli i połączyli wierzchołki rzędnych linją, to linja ta byłaby w ogóle wprawdzie krzywa, lecz nie wiele różniłaby się od prostej ll_1 . Jeżeli więc prostą ll_1 przedłużymy do przecięcia się z podstawą AL i poprowadzimy $L_2 M_2$, to $ABM_2 L_2$



rys. 455.



rys. 456.

będzie w przybliżeniu przekrojem muru, dla którego środek ciśnienia podstawy wpada w punkt jędrny. Chcąc dokładniej wyznaczyć grubość muru, wyszukamy jeszcze dla tej grubości $L_2 l_2 = I_2 G_2$. Mamy teraz trzy punkty linii krzywej, możemy ją wykreślić, a punkt L_3 przecięcia się jej z podstawą da szukaną szerokość podstawy.

Jeżeli górna szerokość muru jest dana, wtedy przyjmujemy rozmaite położenia ściany ML , obracając ją około punktu M (rys. 455). Zamiast wyszukiwać każdą razą na nowo ciężar muru i jego środek ciężkości, możemy do poprzednich sił dołączyć ciężar paska, który dodajemy lub odejmujemy (wtedy ciężar ujemny do góry działający) i złożyć w zwyczajny sposób tę dodatkową siłę z poprzecznym R .

Są także inne sposoby, prowadzące wprost (nie przez próbowanie) do wyznaczenia grubości muru, jak np. metoda prof. Rychtera („Przegląd Techniczny“ 1877), Crugnoli („Eisenbahn“ 1882), które jako więcej zawiłe pomijamy, gdyż wyznaczenie grubości muru według powyższej metody jest w praktyce dostatecznie dokładnem.

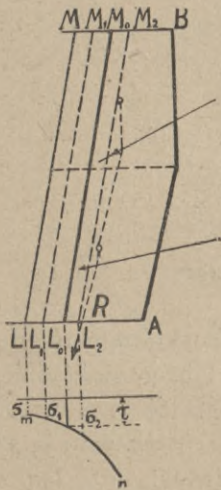
Jeżeli przekrój muru jest zawilszy, podcięty (rys. 422) lub ograniczony linjami krzywymi, to dzielimy go na paski (w rys. 456), wyznaczamy dla każdego z nich wedle poprzedniego parcia ziemi na każdy pasek P_1 , P_2 i P_3 i ich punkty zaczepienia. Wyznaczamy środki ciężkości pasków i ciężary ich C_1 , C_2 i C_3 i składamy siły po kolei zapomocą wieloboku sił. Punkty przecięcia się wypadkowych na szew e_1 , e_2 i e_3 połączone dają linią ciśnienia, która

wypadku linia ciśnienia wychodzi z średniej trzeciej części przekroju, więc należałoby obrać grubszy mur (dla wyrazistości rysunku linia ciśnienia jest opuszczoną).

Wyznaczając grubość muru w ten sposób, trzeba jeszcze zawsze wyznaczyć najw. ciśnienie w zewnętrznej krawędzi, które nie może być większem od dopuszczalnego.

Niektórzy inżynierowie dopuszczają otwarcia szwu przy murach oporowych, a wtedy linia ciśnienia może wychodzić z jądra, a chodzi tylko o to, aby naprężenie nie było za wielkiem.

Dla przyjętych grubości w podstawie AL , AL_1 , AL_2 (rys. 457); wyznaczamy wypadkową R , a stąd największe ciśnienie σ , σ_1 , σ_2 itd. Wartości te odnosimy w pionowych pod L , L_1 , L_2 i h i otrzymujemy krzywą $m n$. Dla danego naprężenia dopuszczalnego I wyznaczamy wtedy wykreślnie z łatwością grubość AL_0 .



rys. 457.

§ 211. Parcie geostatyczne przy wyznaczaniu grubości muru podporowego.

Dotychczas używaliśmy do wyznaczenia grubości muru podporowego parcia geodynamicznego. O ile to tyczy przewrotu lub przesunięcia muru, jest to usprawiedliwionem. Jeżeli jednak chcielibyśmy poznać naprężenie w murze podczas spokoju, to należałoby wyznaczyć parcie geostatyczne i na podstawie tego obliczyć naprężenie według znanych prawideł.

A może się zdarzyć wypadek, że przy parciu geostatycznym leży linja ciśnienia wewnątrz przekroju muru, przy parciu geostatycznym zaś zewnątrz przekroju. Jak wtedy utrzymuje się równowaga i jakie są wtedy naprężenia?

Ponieważ dla parcia geostatycznego wypadkowa przecina podstawę poza przekrojem muru, to musiałby się mur przewrócić. Ale skoro zacznie się ruch, występuje całe tarcie na powierzchni muru i musimy się liczyć tylko z mniejszem i korzystniejszą działającym parciem geodynamicznem, wskutek tego wypadkowa odchyli się o tyle, że przecina podstawę wewnątrz przekroju. Ruch więc muru ustaje, ale tarcie, wywołane tym ruchem, działa dalej. Widzimy zatem, że w takim razie możliwy jest tylko bardzo mały ruch, tylko otwarcie szwów, potem panuje znów równowaga. Ale jak wytłómaczymy sobie tę równowagę? Otóż musimy tu znów przypomnąć, że tarcie jest tylko oporem, siłą bierną, która w stanie spoczynku działa tylko o tyle, o ile tego potrzeba do utrzymania równowagi. A więc wystąpi dla stanu równowagi tylko tyle tarcia, aby wypadkowa przechodziła przez zewnętrzną krawędź muru, aby jeszcze równowaga była zachowaną. W rzeczywistości nie może jednak wypadkowa przechodzić przez samą krawędź, bo wtedy byłoby tam naprężenie nieskończenie wielkie. Musiałby się wtedy mur na krawędzi skruszyć, a wypadkowa przesunie się od krawędzi na wewnątrz o 2 do 5 *cm*.

Z powyższego widzimy, że mur podporowy, obliczony według parcia geodynamicznego (dawnej teorji) w ten sposób, aby linja ciśnienia nie wychodziła z jądra, nie wywróci się nawet w tym wypadku, jeżeliby linja ciśnienia geostatyczna wychodziła z przekroju. Z drugiej strony będzie w stanie spoczynku w murze, obliczonym według dawnej metody, linja ciśnienia wychodzić często poza jądro, wskutek czego wystąpi ciągnienie, a z powodu

małej wytrzymałości zaprawy na ciągnięcie, otwarcie szwu i bardzo mały ruch muru.

Tam więc, gdzie taki mały ruch muru i otwarcie szwów nie jest szkodliwym, więc zwykle przy murach podporowych, możemy używać bez obawy dawnej teorii parcia ziemi, jak to zresztą praktyka nas uczy, jeżeli tylko materiał jest dość wytrzymałym. Przy przyczółkach jednak mostów sklepionych i w ogóle wszędzie tam, gdzie nie możemy dopuścić żadnego nawet małego ruchu, należałoby uwzględnić parcie geostatyczne. Przy niskich przyczółkach, gdzie przeważa parcie sklepienia, jest parcie geostatycznie korzystniejsze od geodynamicznego. Przeciwnie przy wysokich przyczółkach, gdzie przeważa parcie ziemi, a linja ciśnienia zwraca się ku wewnętrznej stronie (ku osi mostu), tam działa parcie geostatyczne niekorzystniej i należałoby je koniecznie uwzględnić, bo w takim razie nawet mały ruch przyczółka może spowodować pęknięcie sklepienia. W praktyce jednak takich przyczółków unikamy.

§ 212. Mury oporowe z przyporami.

Czasem robimy mury oporowe z przyporami (n. *Strebepfeiler*, fr. *contresfort*, an. *counterfort*, r. контрфорс) (rys. 458). Wtedy obliczamy parcie nie na 1 m bieżący, lecz na długość a i c . Parcie P_c działa wtedy w powierzchni mn , parcie P_a w pr . Parcia te składamy z ciężarami C_a i C_c , zaczepiającymi w środku ciężkości przekroju fgp_1p i fgm_1m . Wypadkowa R przecina podstawę w e , który to punkt nie powinien wychodzić poza punkt jędry. Punkt ten nie będzie leżał tutaj w $\frac{1}{3}$ grubości. Trzeba go osobno wyznaczyć.

Co do grubości g , to na długości a działa siła P_a . Składowa pozioma tej siły H_a , równo rozdzielona na st czyli na jednostkę H , wywołuje w tej części muru naprężenia zginające. Mamy przytem w przybliżeniu, zważywszy, że siła H nie rozdziela się równo na przekrój pionowy, lecz działając w jednej trzeciej wysokości, wywołuje 2 razy tak wielkie naprężenie, niż gdyby działała w środku, $2 \frac{Ha^2}{8} = \frac{hg^2}{6} \tau$,

a stąd

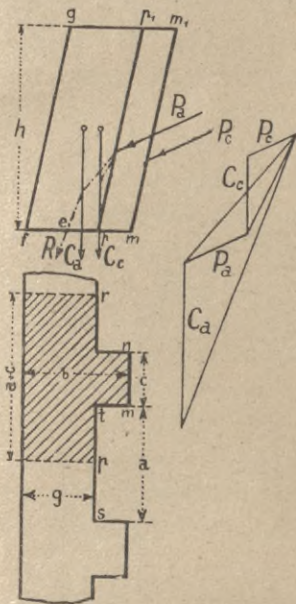
$$a = 2g \sqrt{\frac{h\tau}{6H}} \dots \dots \dots 885)$$

lub

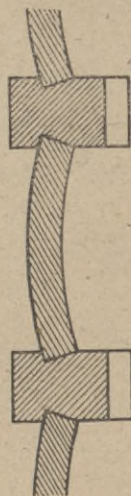
$$g = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{6H}{h\tau}} \dots \dots \dots 886)$$

τ oznacza tu dodatkowe naprężenie wskutek wypadkowej R .

Dlatego przyjmujemy zwykle τ bardzo małe, $\tau = 1$ do $1,5 \text{ kg/cm}^2$ *).



rys. 458.



rys. 459.

Aby uniknąć naprężeń na zginanie w murze między przyporami, używają zamiast muru płaskiego sklepień (rys. 459). Tu także podwójną siłę H uważać należy za obciążenie sklepienia i wyznaczyć linią ciśnienia, a osobno badać równowagę filarów między sklepieniami.

§ 213. Korzystny przekrój muru oporowego.

Chcąc wyznaczyć najkorzystniejszy przekrój muru podporowego, musimy zważyć najprzód na oszczędność materiału, potem na wielkość wykopu i na inne względy.

*) Inny dokładniejszy sposób obliczenia podaje Haeseler w *Handbuch der Ingenieurwissenschaft* 1. t. 2. Oddział str. 297.

Pod względem oszczędności materiału są leżące mury najlepsze i to tem korzystniejsze, im mniejszy kąt α . Gdy $\alpha = \rho$, a nawet nieco większy (§ 160), ziemia utrzymuje się sama, muru wtedy wcale nie potrzeba.

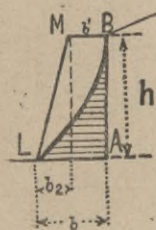
Z drugiej strony im mniejszy kąt α , tem większy jest wykop, który także kosztuje, a właśnie dla zmniejszenia wykopu i aby wykop nie sięgał za daleko na stromych stokach lub w miejscach zabudowanych, używamy bardzo często murów podporowych. Czasem chodzi nam o to, aby przystęp był łatwiejszy, np. przy bulwarach, wtedy budujemy mur wewnątrz pionowy, zewnątrz trochę pochyły.

Dobry przekrój muru powinien być dalej taki, aby pewność była w całej wysokości jednakowa. To jednak nie da się osiągnąć, gdyż dla wierzchu muru parcie ziemi jest równem zeru, teoretycznie więc grubość muru powinna być na wierzchu równą zeru i wzrastać wraz z parciem, a więc, jeżeli naziom jest płaskim, przekrój powinien mieć kształt ABL (rys 460). Ze względów praktycznych nie możemy jednak budować takich murów, bo po-

minąwszy, że oprócz parcia ziemi mogą działać i siły przypadkowe, lecz także wpływ powietrza działa szkodliwie na mur i zmniejsza jego przekrój, a wpływ ten jest największym na wierzchu muru. Szerokość wierzchu muru $BM = b'$ przyjmujemy więc zwykle

dla murów kamiennych $b' \geq 0,5 m$

„ „ ceglanych $b' \geq 0,45 m$



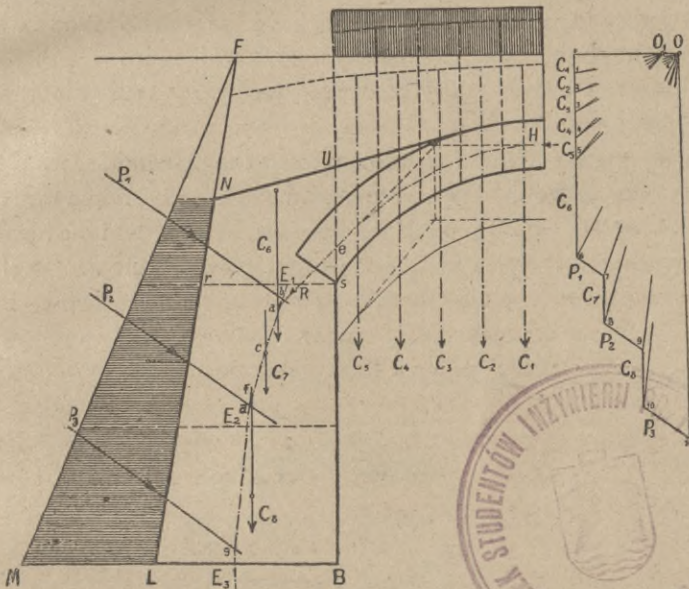
rys. 460.

Ponieważ, jak wiadomo, najkorzystniejszy jest kształt przekroju budowli murowanej, gdy linja ciśnienia spada z osią, więc gdy chcemy się do tego pravidła zastosować, należy przednią powierzchnię muru ML nachylić, albo co lepiej jeszcze, użyć muru o przekroju podciętem (rys. 456). Oszczędność materiału może wynieść w stosunku do przekroju prostokątnego do 35%. O korzyściach tego rodzaju przekrojów murów oporowych traktuje zresztą nauka o budowlach ziemnych i budowie mostów, do których czytelników odsyłamy.

§ 214. Parcie ziemi na przyczółek.

Jeżeli oprócz parcia ziemi działa na mur inna siła ukośna, np. parcie sklepienia, wtedy linja ciśnienia wyjść może z jądra niekoniecznie w podstawie, lecz w którymkolwiek innym szwie, dlatego zwykle wykreślamy wtedy całą linję ciśnienia, aby osądzić, czy w murze takim nie wystąpi ciągnięcie.

Rys. 461 przedstawia taki przypadek. Jest to przyczółek sklepienia, na które działa parcie ziemi. W znany nam z po-



rys. 461.

przednich rozdziałów sposób wykreślamy linję ciśnienia w sklepieniu i otrzymujemy parcie R ukośne sklepienia na mur, przechodzące przez środek szwu w węzłowi. W znany również sposób wyznaczamy parcie P_1, P_2, P_3 , na warstwy muru i ich punkty zaczepienia, jakoteż ciężary warstw. Parcie ziemi na NU jest, jak wiadomo, pionowe i równe ciężarowi ziemi, nad NU leżącej, który to ciężar składamy razem z ciężarem muru nad rs i otrzymujemy C_0 . Siłę R i siły C składamy jedną po drugiej za pomocą wieloboku sił w zwykły sposób. A więc przedłużamy R aż do przecięcia się z C_1 w punkcie a i kreślimy wypadkową $ab \parallel O_6$, dalej $bc \parallel C_7$. Przedłużywszy bc do przecięcia z rs

w punkcie E_1 , otrzymujemy punkt linii ciśnienia. Wypadkową $O7$ składamy teraz z C_7 , robimy więc $cd // O8$, $df // O9$. Przecięcie się tej prostej z drugim szwem w E_2 daje nam następny punkt linii ciśnienia. $O9$ składamy teraz z C_8 i P_8 , a więc robimy najprzód $fg // O10$, potem $gE_3 // O11$. Przecięcie się gE_3 z podstawą daje nam środek ciśnienia podstawy. Linja ciśnienia jest linią, łączącą środki ciśnień na pojedyncze szwy, a więc $eE_1E_2E_3$ (na rysunku dla wyrazistości opuszczona).

W tym wypadku widzimy, że linja ciśnienia nie wychodzi wcale z jądra w podstawie, a nawet leży za blisko środka podstawy, potrzebaby więc zmniejszyć przekrój muru i powtórzyć konstrukcją raz jeszcze, aby się przekonać, czy mur nie pracuje na ciągnięcie.

Jeżeli parcie ziemi jest stosunkowo większem, a więc przy wysokich przyczółkach, zdarza się często, że linja ciśnienia w środku wysokości zbliża się do ojędrnej zewnętrznej, potem zaś zwraca się na wewnątrz i zbliża się do ojędrnej wewnętrznej.





I. DODATEK.

Literatura.

Podajemy tu w porządku chronologicznym spis podręczników i ważniejszych (bo ilość ich jest nader wielka) artykułów, jako też dzieł o statyce budowli, przyczem nadmienić musimy, że przytaczamy tu także dzieła, z których przy układaniu podręcznika wcale nie korzystaliśmy.

1. Ogólne dzieła.

- Bresse: *Cours de mécanique appliquée*. Paryż 1859. 3 wyd. 1880.
- Rankine W. J. M.: *Manuel of civil engineering*. Londyn 1862. 12 wydanie 1877.
- Heinzerling F.: *Die angreifenden und widerstehenden Kräfte*. Berlin 1867. 2 wyd. 1876.
- Collignon: *Cours de mécanique appliquée*. Paryż 1870.
- Holzhey: *Vorträge über Baumechanik*. Wiedeń 1872—1879.
- Frauenholz: *Bauconstruction für Ingenieure*. Mnichów 1875.
- Ritter A.: *Lehrbuch der Ingenieurmechanik*. Hanower 1885. 3 wyd. 1885.
- Ott: *Vorträge über Baumechanik*. Praga 1877—1880., 3 wyd. 1888—1893.
- Navier: *Mechanik der Baukunst, bearbeitet von Westphal und Föppl*. Hanower 1879.
- Résal H.: *Traité de la mécanique générale*.
- Hintz L.: *Baustatik*. Weimar 1872.
- Herrmann: *Die Statik der Bauwerke*. Brunswik 1882.
- Flamant: *Stabilité des constructions*. Paryż 1886. 2 wyd. 1909.
- Planat: *Pratique de la mécanique appliquée*. Paryż 1887., 2 wyd. 1899.
- Tetmajer: *Baumechanik*. II. część. Zurych 1899.

- Landsberg Theod.: *Die Statik der Hochbauconstructionen*. Darmstadt. 2 wyd. 1899., 3 wyd. 1899.
- Vigreux: *Revue technique de l' exposition universelle*. Paryż 1891.
- Canevazzi S.: *Meccanica applicata delle construcionì*. Turyn 1891.
- Claussen E.: *Statik und Festigkeitslehre*. Berlin 1893.
- Pillet J.: *Traité de stabilité des constructions*. Paryż 1895.
- Vonderlinn J.: *Statik für Hoch- und Tiefbautechniker*. Stuttgart 1886. 2 wyd. 1906.
- Mehrtens G.: *Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre*. Lipsk 1903—5., 2 wyd. 1909.
- Тимошенко: Сборникъ задачъ по сопротивленію матеріяловъ. Kijów 1910.
- Zschetzsche A. P.: *Handbuch der Baustatik*. Düsseldorf 1912.
- Waldrum. Percy: *The principles of structural mechanics*. Londyn 1912.
- Andrews Ewart S.: *The theory and design of structures*. Londyn 1913.
- Pigeaud: *Cours de mécanique appliquée*. Paryż 1915.
- Foerster Dr. Max: *Abriss der Statik der Hochbau-Konstruktionen*. Berlin 1920.

2. Statyka wykreslna.

- Culmann: *Graphische Statik*. Zurych 1 wyd. 1866, 2 wyd. 1875.
- Bauschinger: *Elemente der graphischen Statik*. Mnichów 1871. 2 wyd. 1880.
- Favařo: *La statica grafica*. Wenecja 1873, 2 wyd. Padwa 1877.
- Levy: *La statique graphique et ses applications aux constructions*. Paryż 1874, 2 wyd. 1888.
- Cremona L.: *Elementi di calcolo grafico*. Turyn 1874.
- Ott: *Graphische Statik*. 1874, 4 wyd. Praga 1884—1885.
- Abakanowicz B.: *Zyrys statyki wykreslnej*. Lwów 1876.
- Du Bois: *Elements of graphiral statics* Nowy York 1876.
- Klasen: *Graphische Ermittlung der Spannungen*. Wiedeń 1878.
- Saviotti C.: *Lezioni di statica grafica*. Rzym 1878—9.
- Cremona L.: *Le figure reciproche nella statica grafica*. Medyolan, 3 wyd. 1879.
- Eddy: *New constructions in graphical statics*. Londyn 1880, 2 wyd. 1888.

- Müller Breslau: *Elemente der graphischen Statik*. Berlin 1881.
3 wyd. 1887—1892. 5 wyd. 1912.
- Baldermann: *Graphische Integration Allg. Bauzeitung*. 1881.
- Chalmers: *Graphical determination of forces*. Londyn 1881.
- Maurer: *Statique graphique*. Paryż 1882, 2 wyd. 1885.
- Stelzel: *Graphische Statik*. Gradec 1882.
- Hauser et Cunq.: *Statique graphique appliquée*. Paryż 1886.
- Ritter W.: *Anwendungen der graphischen Statik*. 1 część, Zurich 1888.
- Cullmann-Ritter: *Anwendungen der graphischen Statik*. Zurich 1888—90.
- Köchlin: *Applications de la statique graphique*. Paryż 1889, 2 wyd. 1898.
- Lauenstein B.: *Die graphische Statik*. Stuttgart 1—4 wyd. 1890—1898, 8 wyd. 1904.
- Keck W.: *Vorträge über graphische Statik*. Hannover 1894.
- Кирипцев: *Основапія графической статики*. Kijów 1902.
- Eyverding G.: *Lehrbuch der Graphostatik*. 1906.
- Huber Dr. Maks.: *Statyka wykreślna*. Lwów 1909.
- Wehnert Ern.: *Einführung in die Festigkeitslehre*. 1910.
- Schur Fr.: *Vorlesungen über graphische Statik*. 1915.
- Popławski: *Statyka wykreślna*. Warszawa 1917.
- Foerster Dr. M.: *Graphostatik und Festigkeitslehre*. Berlin 1919.

3. Teorja belek, sprężystość i wytrzymałość.

- Rebhann: *Theorie der Holz- u. Eisenkonstruktion*. Wiedeń 1856.
- Morin A.: *Résistance des matériaux*. Paryż 1857.
- Clapeyron: *Caleul d'une poutre élastique, reposant librement sur des appuis inégalement espècés*. 1857.
- Scheffler H.: *Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken*. Brunzwick 1858.
- Grashof: *Festigkeitslehre*. Berlin 1866.
- Winkler E.: *Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Praga 1867.
- Mohr: *Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstruktionen*, *Zeit. der Arch. oder Ing. Ver. zu Hannover* 1868.
- Ritter A.: *Theorie und Berechnung der eisernen Dach- und Brückenconstruktionen*. 1870, 3 wyd. 1873.

- Wöhler: *Die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl*. Berlin 1870.
- Cordier E.: *Equilibre stable des charpentes*. Paryż 1872.
- Winkler E.: *Vorträge über Brückenbau*. 1875.
- Spangenberg: *Ueber das Verhalten der Metalle bei wiederholten Anstrengungen*. Berlin 1875.
- Tetmajer: *Die äusseren und inneren Kräfte an st. bestimmten Constructionen*. Zurych 1875.
- Hulewicz: *Obliczenie wytrzymałości belek wieloprzęśłowych*. Paryż 1876.
- Kluger: *Wykład wytrzymałości materyalów*. Paryż 1876.
- Weyrauch J.: *Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen und Stahlkonstruktionen*. Lipsk 1876.
- Bauschinger: *Mittheilungen aus dem mech. technischen Laboratorium der k. k. Hochschule in München*, zeszyt I. 1877.
- Winkler E.: *Wahl der zulässigen Inanspruchnahme der Eisenconstruction*. Wiedeń 1877.
- Winkler E.: *Versuche über die Knickfestigkeit eiserner Säulen*. Civiling. 1878.
- Abakanowicz: *Integrator, krzywa całkowita i jej zastosowanie*. Warszawa 1880, 2 wyd. Paryż 1886.
- Burr: *A course on the stresses in bridge and roof trusses*. Nowy York 1880.
- Foeppl: *Theorie des Fachwerks*. Lipsk 1880.
- Wehage: *Spannungen in verbogenen Körpern*. Civiling 1880.
- Hulewicz: *Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées*. *Ann. d. ponts et chaus.* 1882.
- Wittmann: *Statik der Hochbauconstructionen II. Holzconstructionen*. Mnichów 1882.
- Ritter W.: *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf der continuirlichen Balken*. Zurych 1883.
- Jay du Bois: *The strains in framed structures*. Nowy York 1883.
- Wittmann: *Statik der Hochbauconstructionen III. Eisenconstruction*. Mnichów 1884, 2 wyd. 1893.
- Dwelshavers-Dery: *Principes de la résistance des matériaux*, Leodyum 1884.
- Tetmajer L.: *Mittheilungen der Anstalt zur Prüfung der Baumaterialien*. Zurych 1884–1901.
- Obrębowicz: *O wytrzymałości na wyboczenie*. Rocznik Akademji Umiejętności. Kraków 1885.

- Vigreux L.: *Traité théorique et pratique de la résistance des matériaux*. Paryż 1855.
- Müller-Breslau: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*. Lipsk 1886, 3 wyd. 1904, 4 wyd. 1913.
- Brune: *Cours de constructions. Résistance des matériaux*. Paryż 1888.
- Smith R.: *Stress diagrams of solid structures*. 1889.
- Bach: *Elasticität und Festigkeit*. Berlin 1889—1890, 2 wyd. 1894.
- Ritter W.: *Das Fachwerk*. Zurych 1890.
- Miceau et Petit: *Congrès international des procédés de construction*. Paryż 1891.
- Madamet A.: *Résistance des matériaux*. Paryż 1891.
- Keck W.: *Vorträge über Elastizitäts-Lehre*, Hannover 1902—3.
- Hartig: *Vergleichende Versuche über die Festigkeitseigenschaften metallener Gliederkette, Civilingen*. 1892.
- Résal Jean: *Constructions métalliques, élasticité et résistance des matériaux, fonte, fer et acier*. Paryż 1892.
- Jasiński F. S.: *Opiat razwytia teorii prodalnaho izhyba*. Piotrogród 1893; to samo po francusku 1894 i po polsku 1895.
- Fidler T. Claxton: *A practical treatise on bridge construction*. Londyn 1893.
- Bovey Henry: *Theory of structures and strength of materials* Nowy York 1893.
- Tetmajer: *Gesetze der Knickfestigkeit der technisch wichtigsten Materialien*. Zurych 1896, 2 wyd. 1901.
- Dechamps: *Les principes de la constructions des charpentes métalliques*. Leodjum 2 wyd. 1898.
- Planat: *Recherches sur la théorie des ciments armés*. Paryż 1898.
- Huber Dr. M. T.: O wytrzymałości słupów. Przegl. Tech. Warszawa 1907.
- Gestessy Th.: *Die Festigkeits-Berechnung der eisernen Träger*. Halle 1908.
- Bryła Dr. St.: Obliczenie kopuł płaszczowych. Lwów 1910.
- Ulkowski Fr.: Tablica wykreślna dźwigarów walcowanych i belek drewnianych. Rzeszów-Lwów 1910.
- Murdock H. E.: *Strength of materials* Nowy York 1911.
- Jackson Dr. A.: *Über Spannungslinien*. Stuttgart 1917.
- Karasiński Leon. Wytrzymałość tworzyw. Warszawa 1919.

4. Teorja sklepień.

- Carvallo: *Etude sur la stabilité du voûtes*. Paryż 1853.
- Scheffler: *Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken*. Brunswik 1875.
- Schwedler: *Zur Theorie der Gewölbe*. *Zeitschrift für Bauwesen*. Berlin 1859.
- Fabré: *Theorie des voûtes élastiques et dilatables*. Paryż 1859.
- Hagen: *Form und Stärke gewölbter Bögen*. 1862.
- Harlacher: *Stützlinie im Gewölbe*. *Technische Blätter*. Praga 1870.
- Dupuit: *Traité d'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie* 1870.
- Heinzerling: *Theorie, Construction und statische Berechnung der Brückengewölbe*. *Allgem. Bauzeitung*. 1872.
- Chrzanowski T.: *Teorja sklepień*. Warszawa 1877.
- Szysztowski: *Nowy sposób kreślenia krzywej ciśnienia*. Paryż 1877.
- Wittmann: *Statik der Hochbauconstruction. I. Theil*. Praga 1879.
- Winkler E.: *Ueber die Lage der Stützlinie im Gewölbe*. *Deutsche Bauzeitung*. 1879.
- Foepf: *Theorie der Gewölbe*. Lipsk 1880.
- Ritter Fr.: *Zur Theorie der Gewölbe etc. Allg. Bauzeit.* 1881.
- Groeger J.: *Die Statik der Tunnelgewölbe im druckreichen Gebirge*. Praga 1881.
- Perrodil: *Arc d'expérience en maçonnerie An. d. ponts et chaus.* 1882.
- Barkhausen: *Druckvertheilung im rechteckigen Mauerquerschnitt*, *Z. des hann. Ing. und Arch. Verein.* 1883.
- Rytl: *Beitrag zur Statik der Gewölbe*. *Mitth. der Arch. und Ing. Ver. Böhmen.* 1884.
- Obrębowicz: *Oznaczenie naprężeń, wywołanych działaniem sił prostopadłych do przekroju*. *Przegląd Techn.* 1884.
- Autenrieth E.: *Die statische Berechnung der Kuppelgewölbe*. Berlin 1894.
- Tolkmitt G.: *Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken*. Berlin 1895.
- Cain W.: *Theory of steel concrete arches and of vaulted structures*, 2 wyd. Nowy York 1902. 6 wyd. 1918.
- Weyrauch: *Elastische Bogenträger*. 1911.

Vetulani: Wyznaczenie natężeń normalnych w łukach płaskich.
Lwów 1911.

Kögler: Vereinfachte Berechnung eingespannter Gewölbe. 1913.

5. Budowle ziemne i mury oporowe.

Ande: *Nouvelles expériences sur la poussée des terres*. Paryż 1849.

Rebhann: *Theorie des Erddruckes und der Futtermauern*. Wiedeń 1871.

Mohr: *Beitrag zur Theorie des Erddruckes*. *Zeits. der hann. Ing. und Arch. Ver.* 1871.

Winkler E.: *Neue Theorie des Erddruckes*. Wiedeń 1872.

Chrzanowski T.: Wyznaczenie grubości ścian murowanych podtrzymujących nasypy. Warszawa 1876.

Wittmann: *Statik der Hochbauconstructionen I. Theil*. 1879.

Weyrauch: *Theorie des Erddruckes*. Wiedeń 1881.

Dubosque: *Murs de soutènement et ponts en maçonnerie*. Paryż 1881.

Baker B.: *The actual lateral pressure of earthwork*. Nowy York 1881.

Forchheimer: *Erddruckversuche*. *Zeitschr. der öster. Ing. und Arch. Ver.* 1882—1883.

Gobin: *Détermination précise de la stabilité des murs de soutènement*. Paryż 1884.

Flamant: *La poussée des terres*. *Ann. des ponts et chaussées*, 1883.

Thullie: *Einige Bemerkungen über die ältere Erddrucktheorie*. *Wochens. des öster. Ing. und Arch. Verein.* 1884.

Skibiński: Parcie ziemi na podstawie nowych doświadczeń. *Czasop. Techn. i Zeits. des öster. Ing. und Arch. Ver.* 1885.

Thullie: Doświadczenia Gobina w kwestji parcia ziemi. *Czasop. Techn. i Wochenbl. für Baukunde.* 1885.

Kaven A. v.: *Anwendungen der Theorie der Böschungen*. Lipsk. 1885.

Leygue M. L.: *Poussée des terres*. *Ann. d. pont. et chaus.* 1885.

Häseler E.: *Stütz- und Futtermauern*. *Handb. d. Ing.* I. tom II. oddz. 3 wyd. Lipsk 1907.

Skibiński: *Ueber Stützmauerquerschnitte*. Wiedeń 1893.

Résal J.: *Poussée des terres, stabilité des murs de soutènement*.
Paryż 1903.

Müller Breslau: *Erddruck auf Stützmauer*. Stuttgart. 1906.

Skibiński: *Das Gleichgewicht des rolligen Materiales*. Wiedeń
Wochen f. d. öffent. Baudienst. 1917.

Dr. Thullie i Dr. Kuryłło: O wyznaczeniu parcia ziemi sposobem Färbera. *Czas. Tech.* 1920 i odbitka.





II. DODATEK.

Tablice obciążeń stropów.

1. Ciężar własny stropów

wedle Melana.

Ustrój stropu:

	Ciężar w kg/m^2
1. Strop belkowy z podłogą wprost przybitą z dołu, opierzony, z trzcinowaniem i wyprawą	110
2. Strop taki, ale z wstawioną warstwą desek zakładanych na listwach i 8 cm nadsypką	210
3. Zwyczajny strop belkowy z powalą zakładaną z sufitem, 10 cm nadsypką, podłogą ślepą i posadzką deszczulkową	250
4. Strop zбитy z belek w przecięciu 24 cm wysokich z sufitem, 10 cm nadsypką i leżącym brukiem ceglany z 4 cm płytami strychowemi	330
5. Strop z belek żelaznych, zresztą jak 3, bez belek	230
6. „ sklepiony między dźwigarami żelaznymi 15 cm grubymi, z cegiel, z wyprawą, nadsypką w kluczu 8 cm grubą i podłogą drewnianą przy odstępach dźwigarów do 1.5 m bez dźwigarów	450
7. Strop taki sam, ale przy odstępach dźwigarów do 3.0 m	500
8. Sklepienie płaskie, sklepienie według układu Demskiego, Hönela, Ludwiga, Schneidra, Scholera, Wehlera i i., zresztą jak 6, średnio	470
9. Strop Kleina z cegłą porowatą, z zaprawą cementową i wkładkami żelaznymi z 4 cm warstwą zaprawy cementowej, zresztą jak 6	370
10. Sklepienie betonowe w kluczu 8 cm gr., strzałka 15 do 20 cm nadsypka 6 cm nad kluczem, zresztą jak 6	380
11. Sklepienie takie, ale z wypełnieniem z lekkiego betonu nad sklepieniem aż do 2 cm nad kluczem z 2 cm gr. polepą cementową	330
12. Sklepienie Moniera, w kluczu 5 cm gr. odstęp dźwigarów do 3 m, zresztą jak 10	340
13. Dttto, ale z podłogą jak 11	300
14. Strop z blachy falistej, z wypełnieniem betonem poza łukiem w kluczu 8 cm gr. i polepą cementową, odstęp dźwigarów do 3 m, bez wyprawy sufitu i bez dźwigarów	250

2. Ciężary i obciążenia

wedle tow. austr. inż. i arch. w Wiedniu.

a) Ciężar własny stropów.

	z cięż. dźwig.	bez dźwig.
	kg/m ²	
1. Zwykły strop belkowy z nadsypką 10 cm, z podłogą, trzciniowaniem i wyprawą powały	250	
2. Zwykły strop zbity z nadsypką 10 cm, zresztą jak pod 1	340	
3. Zwykły strop zbity z nadsypką 8 cm, trzciniowaniem i wyprawą, posadzką z leżącego bruku ceglanego lub z płyt kamiennych	360	
4. Strop belkowy między dźwigarami, zresztą jak pod 1	260	210
5. Sklepienie ceglane 15 cm grube między dźwigarami z nadsypką 8 cm w kluczu, trzciniowaniem, posadzką i dźwigarami:		
a) przy odstępach dźwigarów do 1,4	480	450
b) „ „ „ 1,4 m do 3 m	550	520
6. Proste sklepienia, aż do odstępów dźwigarów 1,5 z cegieł wraz z nadsypką, trzciniowaniem i podłogą układu Scholera, wys. ustr. 35 cm	570	530
układu Demskiego, Hömbla, Ludwiga, Schneidra, Wehlera, Seidla, wys. ustr. 32 cm	450	420
7. Sklepienie betonowe z wyprawą, z nadsypką 6 cm i podłogą:		
a) 7,5 cm gr. 11,5 cm strzałka, wys. ustr. 30 cm	370	350
b) 8,5 cm gr. 20,5 cm strzałka, wys. ustr. 40 m	430	410
8. Sklepienie betonowe z wypełnieniem betonowym i 6 cm grubą betonową podłogą nad kluczem:		
a) 7,5 cm gr. 16,5 cm strzałka wys. ustr. 30 cm	460	440
b) 8,5 cm gr. 25,5 cm strzałka wys. ustr. 40 m	550	530
9. Sklepienie Moniera:		
a) 5 cm gruba 25 cm strzałka, wys. ustr. 40 cm z wyprawą, nadsypką 5 cm w kluczu i podłogą drewnianą	360	340
b) 5 cm gr. 43 cm strzałka, wys. ustr. 50 cm z posadzką cementową 2 cm i wypełnieniem pachwin żużlowym betonem	450	430
10. Proste płyty Moniera z podłogą drewnianą, wyprawą i nadsypką, gr. płyt 5 cm z wybetonowaniem główki dźwigaru	440	420
11. Sklepienie z blachy falistej między żelaznymi dźwigarami z podłogą i nadsypką, jednak bez wyprawy:		
a) do odstępu dźwigarów 2 m przy nadsypce 10 m nad szczytem*)	250	235
b) do odstępu 3 m przy nads. 6 cm nad szczytem	280	265

*) Na każdy centymetr większej nadsypki zwiększa się ciężar o 14 kg.

b) Ciężar zmienny.

Nazwa obciążonej ubikacji.	Ciężar w kg/m^2
Zwykły strych	150
Zwykłe mieszkanie	250
Szkoły	300
Schody, ganki, sale koncertowe i balowe, gimnastyczne i dla szermierki, dla zgromadzeń	400
Kancelarje, pracownie, magazyny na piątrach	450
Dtto w parterze	550
Komórki na siano i sieżkę	400
Lodownie na warstwę lodu 1 m	750

3. Ciężary stropów i obciążenia

wedle rozp. prusk. ministerstwa robót publicznych z r. 1919.

a) Stropy drewniane: kg/m^2

Odstęp belek od środka do środka 1 m, grubość 24 . 26 cm.

1. Strop belkowy wałkowy płaski, warstwa gliny 10 cm gruba . . .	230
2. Dtto tylko z podłogą 3,5 cm gr.	70
3. Dtto z powalą zakładaną 3 cm gr. i warstwą gliny 10 cm	210
4. Dtto z polepą zwykłą, wypełnieniem gliną do dolnej krawędzi podłogi 11 cm gr. i podłogą 3,5 cm gr.	220
5. Dtto ale zamiast podłogi z polepą gipsową lub glinianą 5 do 7 cm gr.	310
6. Dtto jak 4, lecz oprócz tego z sufitem 2 cm gr., trzciniowaniem i wyprawą	250
7. Dtto jak 5, lecz oprócz tego z sufitem 2 cm, z trzciniowaniem i wyprawą	340
8. Dtto z polepą pełną, także u dołu okryty gliną do dolnej krawędzi belek, podłoga 3,5 cm gr.	360

b) Stropy sklepione między dźwigarami

stosunek strzałki $\frac{1}{8}$, ciężar bez dźwigarów. kg/m^2

9. Sklepienie łączaste do 2 m rozp. przy wyrównaniu popiołem koksowym i podłogą drewnianą	370
9a Dtto przy wyrównaniu piaskiem zamiast popiołem }	420
9b aż do górnej powierzchni legarów	
popiołem koksowym	440
9c piaskiem	560
10. Dtto jak 9, dla l od 2 do 2,5 m	400
10a przy wyrównaniu piaskiem }	490
10b aż do powierzchni górnej legarów	
popiołem	470
10c piaskiem	630

4. Rozporządzenie austr. ministr. dla budowl. żelbetowych

z r. 1911 przypisuje w § 3. ciężar użyteczny.

6. Jako ciężar użyteczny należy przyjąć następujące wartości w kg na m^2 :

dla zwykłych strychów	150
„ „ mieszkań	250
„ sal szkolnych	300
„ korytarzy, sali koncertowych, gimnastycznych i szermierskich, dalej dla komór na obrok i dla schodów w zwykłych domach mieszkalnych	400
„ ubikacyj handlowych, sal roboczych i składów na piętrach domów mieszkalnych i handlowych	450
„ schodów budynków publicznych, dla sal tańców i sal na zgromadzenia, ubikacyj handlowych, warsztatów i składów na parterze . .	550
„ lodowni (do wysokości lodu 1 m)	750

7. Wielkość obciążenia dla teatrów, bibliotek, spichrzów, magazynów i pracowni z ciężkimi maszynami należy wyznaczyć w każdym przypadku z osobna.

8. Zeskłady niosące, które podlegają wstrząśnieniom, należy obliczać dla ciężaru użytecznego 1,3 razy większego, te, które podlegają silnym wstrząśnieniom (np. przez ciężkie maszyny robocze 1,5 razy większego, niż podane w punkcie 6 (lub obliczone wedle punktu 7).

5. Rozporządzenie bawarskie.

Stropy w małych mieszkaniach	150 kg/m^2
„ w innych „	200 „

6. Ciężar towarów.

nasypanych i nałożonych w magazynach.

Słoma	45 kg/m^3
„ prasowana	280 „
Siano	70 „
Pszenvca	760 „
Żyto	680 „
Jęczmień gruby	640 „
„ drobny	510 „
Owies	550 „
Groch, soczewica, proso	850 „
Jabłka	300 „
Gruszki, śliwki	350 „
Trawa, koniczyna	350 „
Buraki	650 „
Torf wilgotny	600 „
„ suchy	400 „

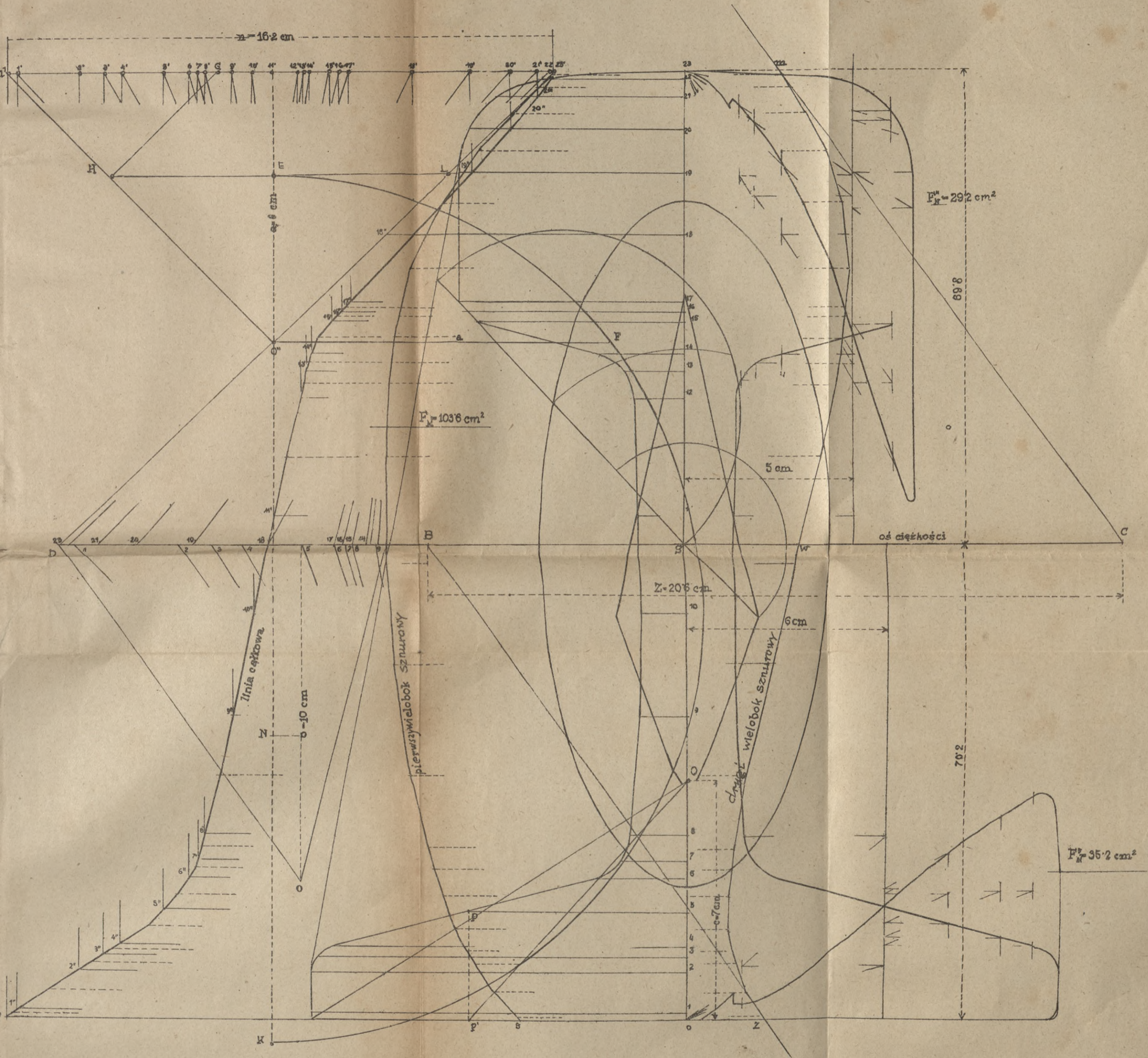
Węgiel brunatny	750 <i>kg/m³</i>
„ kamienny	900 „
Koks	540 „
Półki na akta, szafy z książkami itd.	600 „
Papier złożony 1 m wysok.	1100 „
Mąka	750 „
Grys	650 „
Proso	850 „
Słód	530 „
Len	680 „
Książki	800 „
Torf	600 „
Cement	1400—2000 „
Ziemniaki	750 „
Cukier	750 „
Sól	800 „

Ułożone w workach o 20% mniej.

DOSTRZEŻONE OMYŁKI:

str.	wiersz	jest	ma być
28	1 z dołu	—	w przypadku
65	5 z góry	wyrażenie w nawiasie: (najwyżej 1150)	powinno być pod wyrażeniem 870+3L.
65	5 i 6 z góry	odpowiedzieć	odpowiadać
220	1 z góry	$\frac{dl}{E} = \frac{\gamma m}{E} = \alpha \gamma m$	$\frac{dl}{l} = \frac{\gamma m}{E} = \alpha \gamma m$
354	13 z góry	§ 106	§ 108
389	1 z góry	§ 180	§ 120
406	7 z dołu	§ 127	§ 128

MOMENT BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU SZYNY KOLEJOWEJ



$$I_1 = \frac{20 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{16} = 1442 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{103 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{16} = 1450 \text{ cm}^4$$

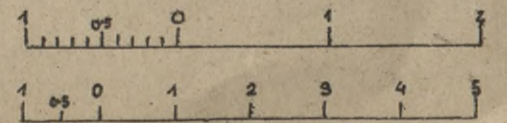
$$I_x = \frac{I_1 + I_2}{2} = 1446 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6^2}{16} = 249.6 \text{ cm}^4$$

$$F = \frac{16 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2}{4} = 56.7 \text{ cm}^2$$

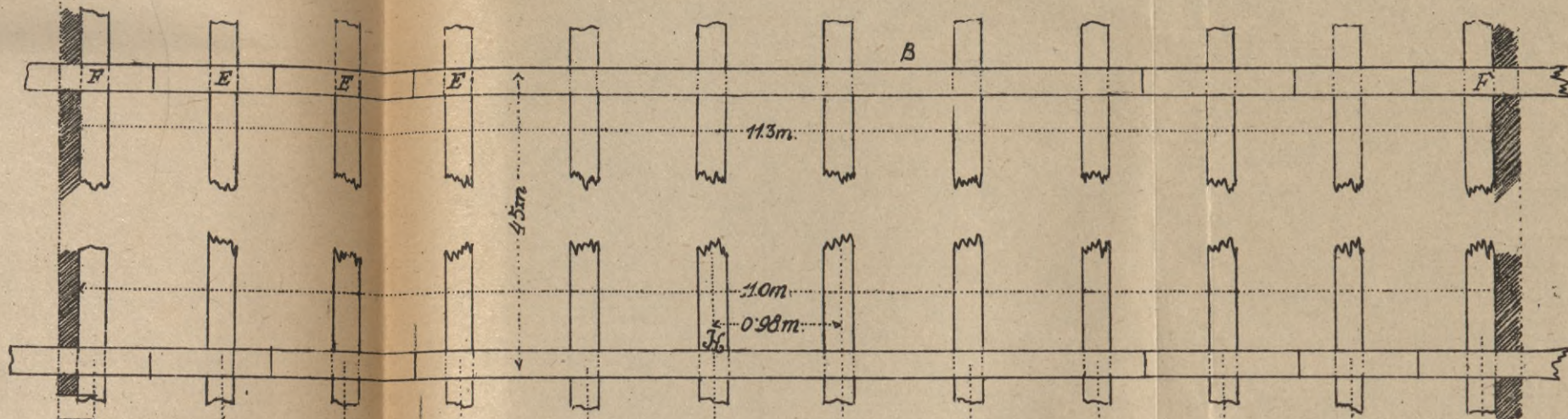
Podziałka dla przekroju 2:1

dla innych długości 1:1

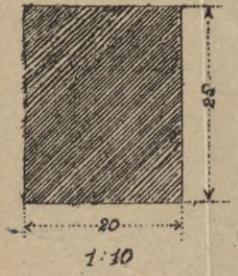




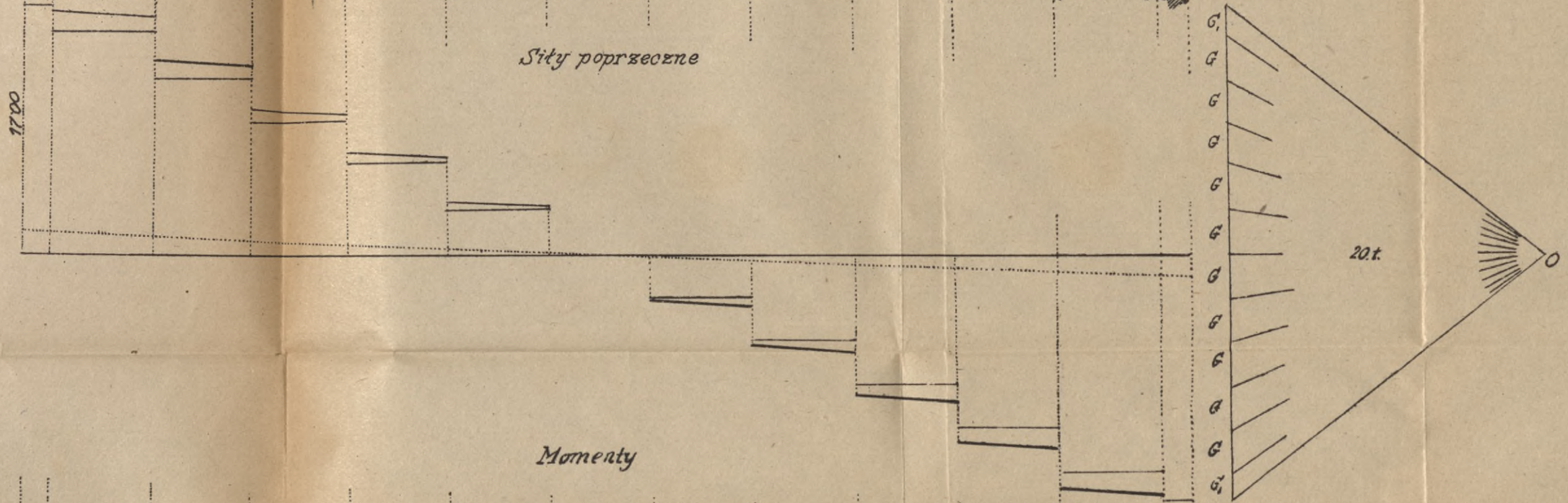
Rzut poziomy układu belek



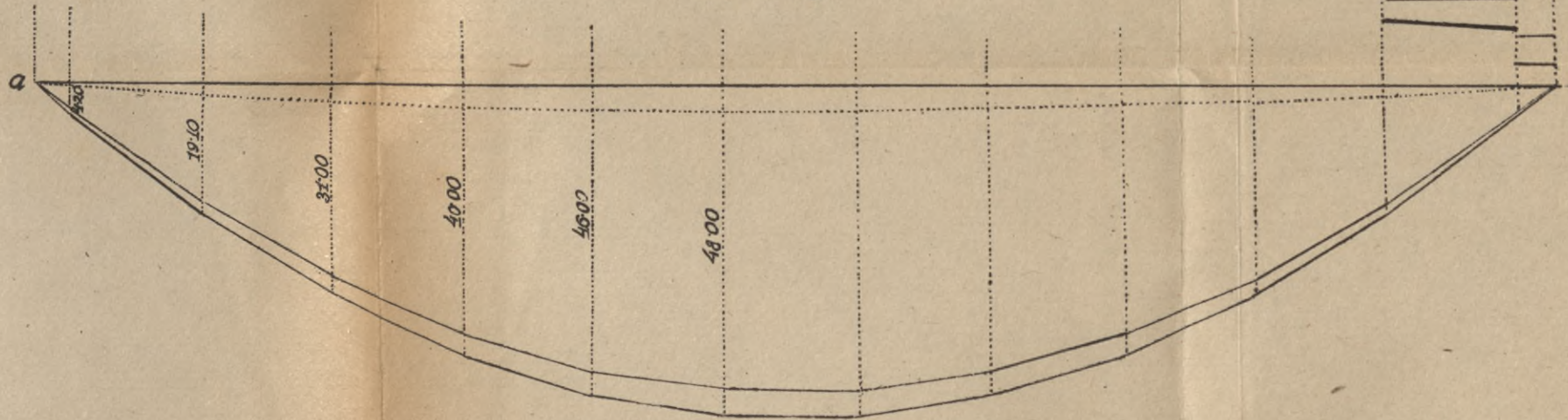
Przekrój belki drewnianej



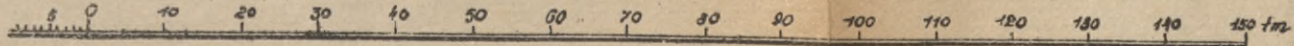
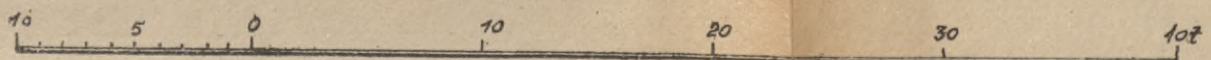
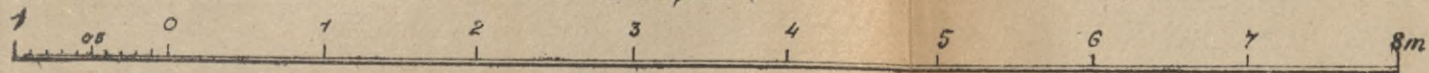
Sity poprzeczne



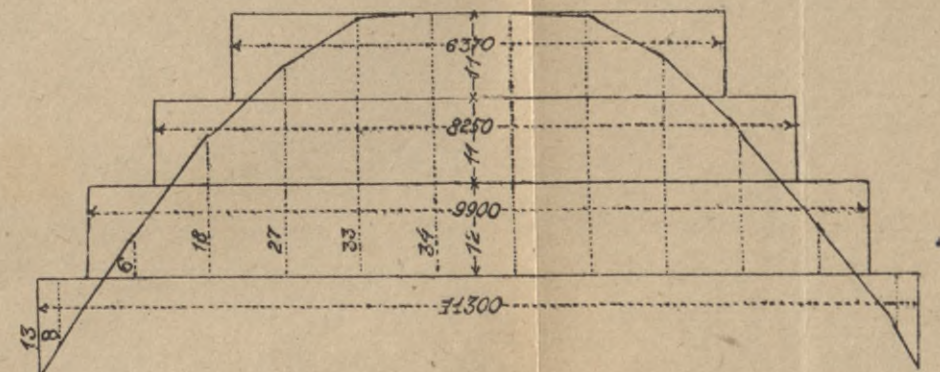
Momenty

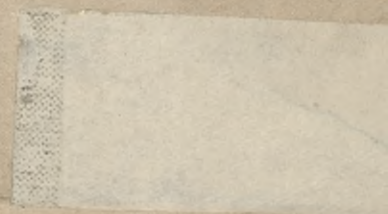


Podziałki

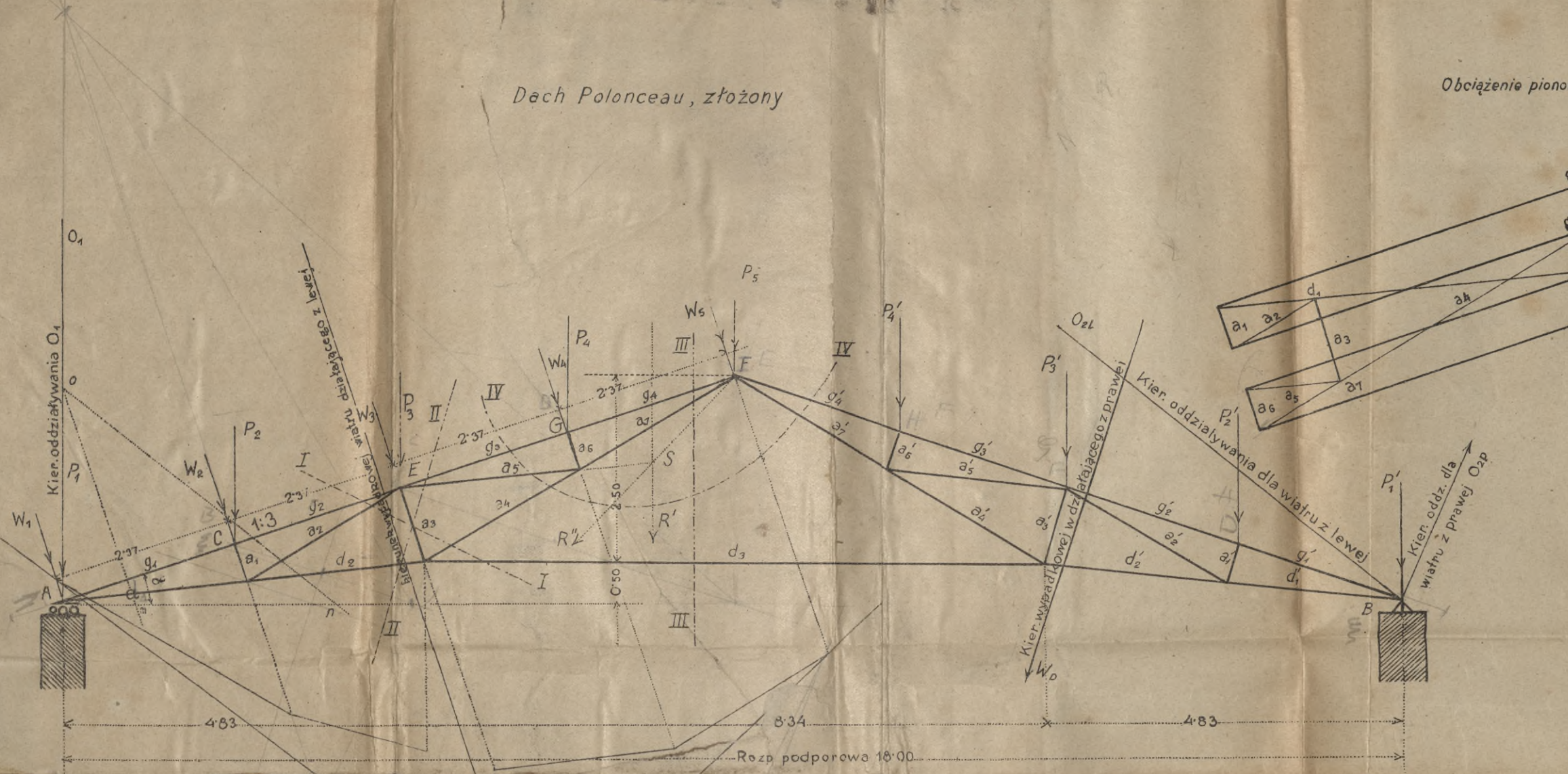


Wyznaczenie długości nakładek

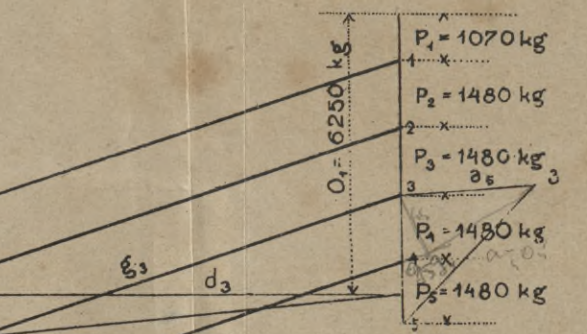




Dach Polonceau, złożony



Obciążenie pionowe

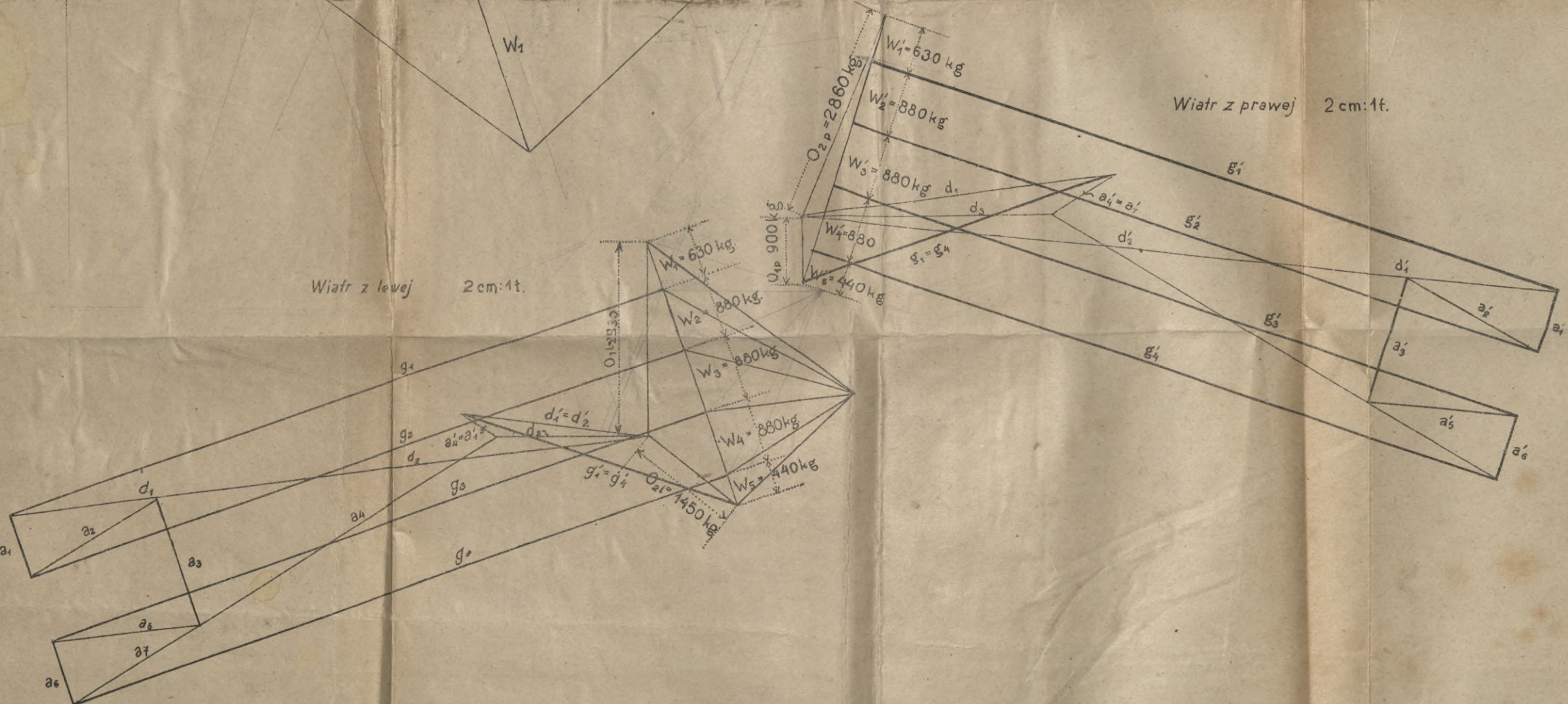


- $P_1 = 1070 \text{ kg}$
- $P_2 = 1480 \text{ kg}$
- $P_3 = 1480 \text{ kg}$
- $P_4 = 1480 \text{ kg}$
- $P_5 = 1480 \text{ kg}$

0.8 cm : 1 t.

Sily wewn. i przekroje prętów.

Pręt	Obciąż. pionowe	Wiatr z lewej	Wiatr z prawej	Najw. P	Przekrój		
Pas górny	g_1	-23.72	-9.31	-4.41	-33.03	I $\phi 20$	
	g_2	-23.27			-32.58		
	g_3	-22.85			-32.16		
	g_4	-22.37			-31.68		
	g_4'	-22.37			-32.03		
	g_3'	-22.85			-32.51		
Pas dolny	d_4	+22.70	+8.69	+4.24	+31.39	II $\phi 20$	
	d_2	+19.48	+6.73		+26.21		
	d_3	+10.70	+2.04	+3.40	+14.10		
	d_2'	+19.48	+2.47	+8.15	+27.63		
Kratka	a_1	-1.40	-0.88	0.00	-2.28	I $\phi 12$	
	a_2	+3.21	+2.00		+5.21		
	a_3	-2.80	-1.76		-4.56		
	a_4	+8.98	+4.75	+0.95	+13.73	II $\phi 20$	
	a_5	+3.19	+2.00	+5.19			
	a_6	-1.40	-0.88	0.00	-2.28	I $\phi 12$	
	a_7	+12.17	+6.75		+0.95		+18.92
	a_7'	+12.17	+0.50		+6.88		+19.05
	a_6'	-1.40	0.00	-0.88	-2.28	I $\phi 12$	
	a_5'	+3.19		+2.00	+5.19		
	a_4'	+8.98	+0.50	+4.85	+13.83	II $\phi 20$	
	a_3'	-2.80	0.00	-1.76	-4.56		
a_2'	+3.21	+2.00		+5.21	II $\phi 12$		
a_1'	-1.40	-0.88	-2.28				

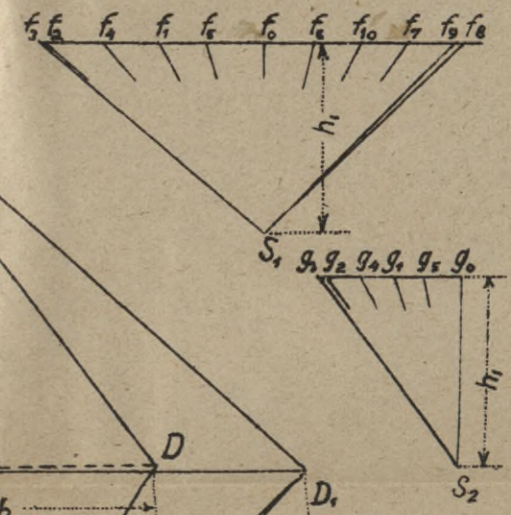
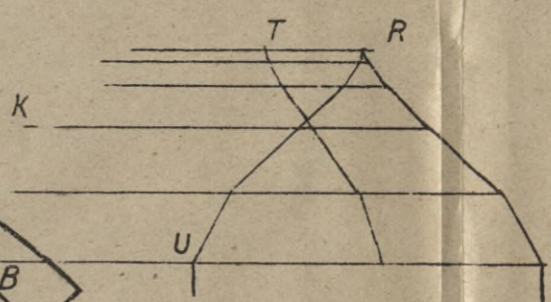
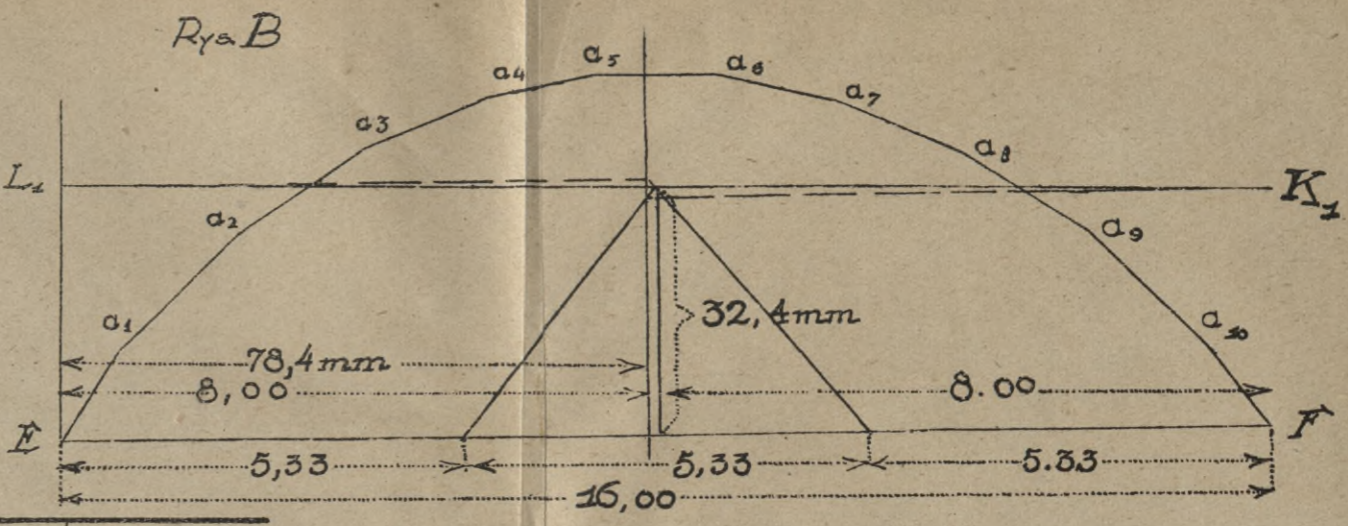
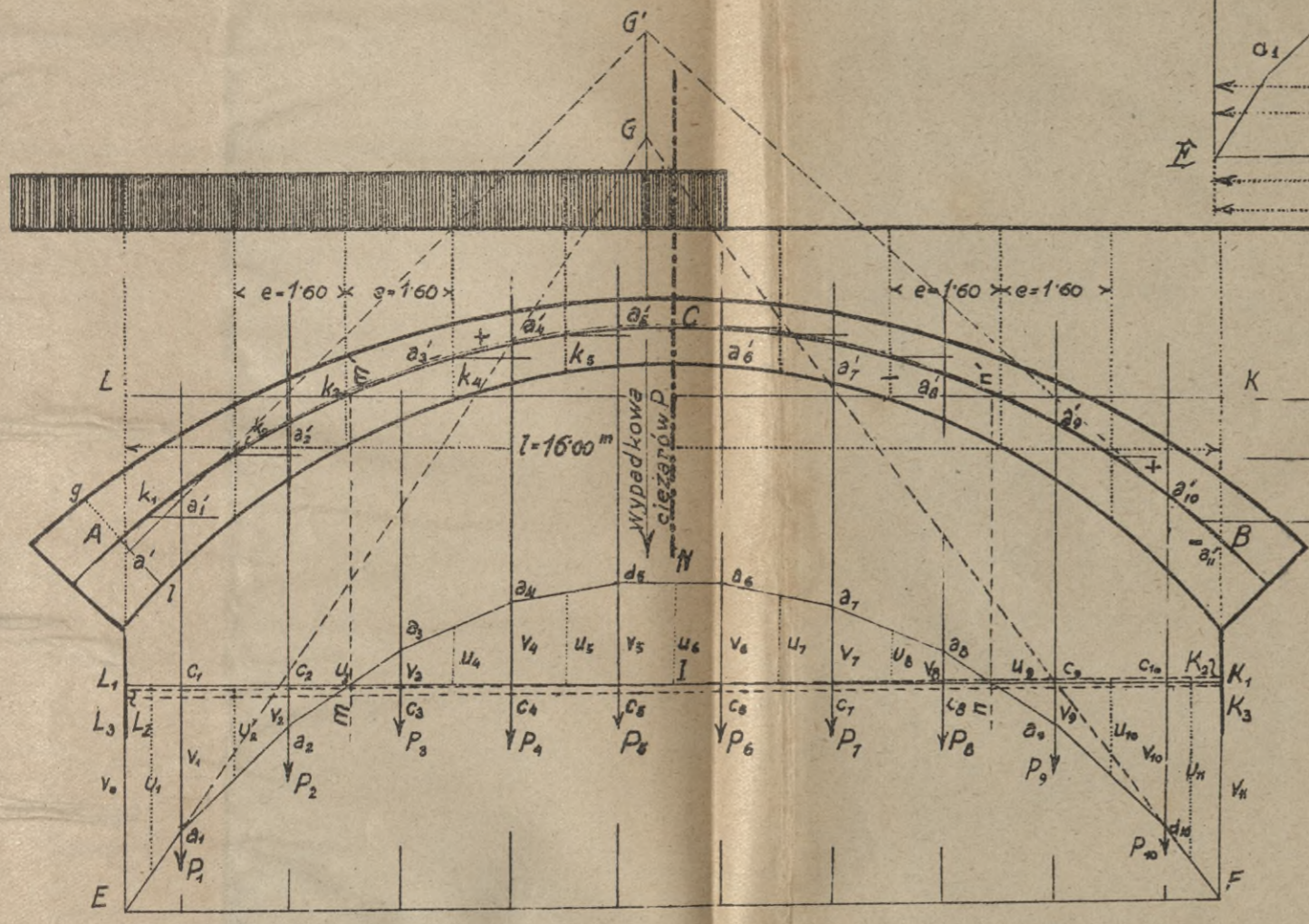


Wiatr z lewej 2 cm:1t.

Wiatr z prawej 2 cm:1t.



Prawdziwa linia ciśnienia w sklepieniu.

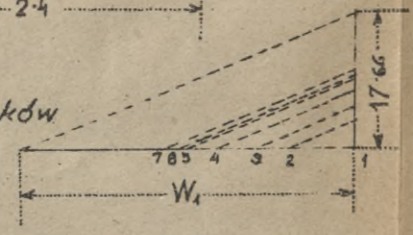


Kąty proporcjonalności:

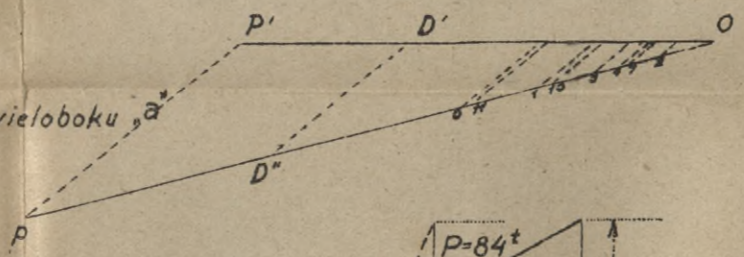
dla linii obciążenia



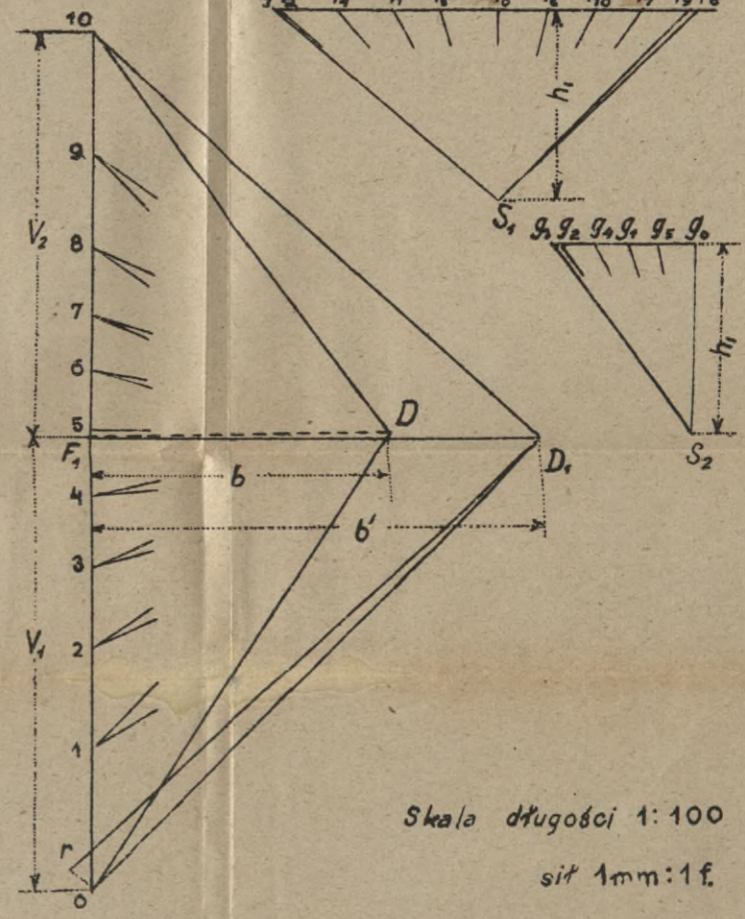
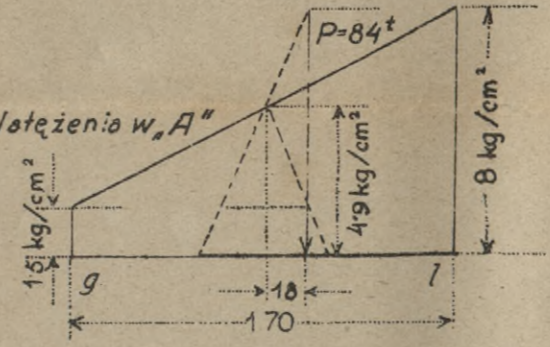
dla ciężaru pasków



dla wieloboku, a'

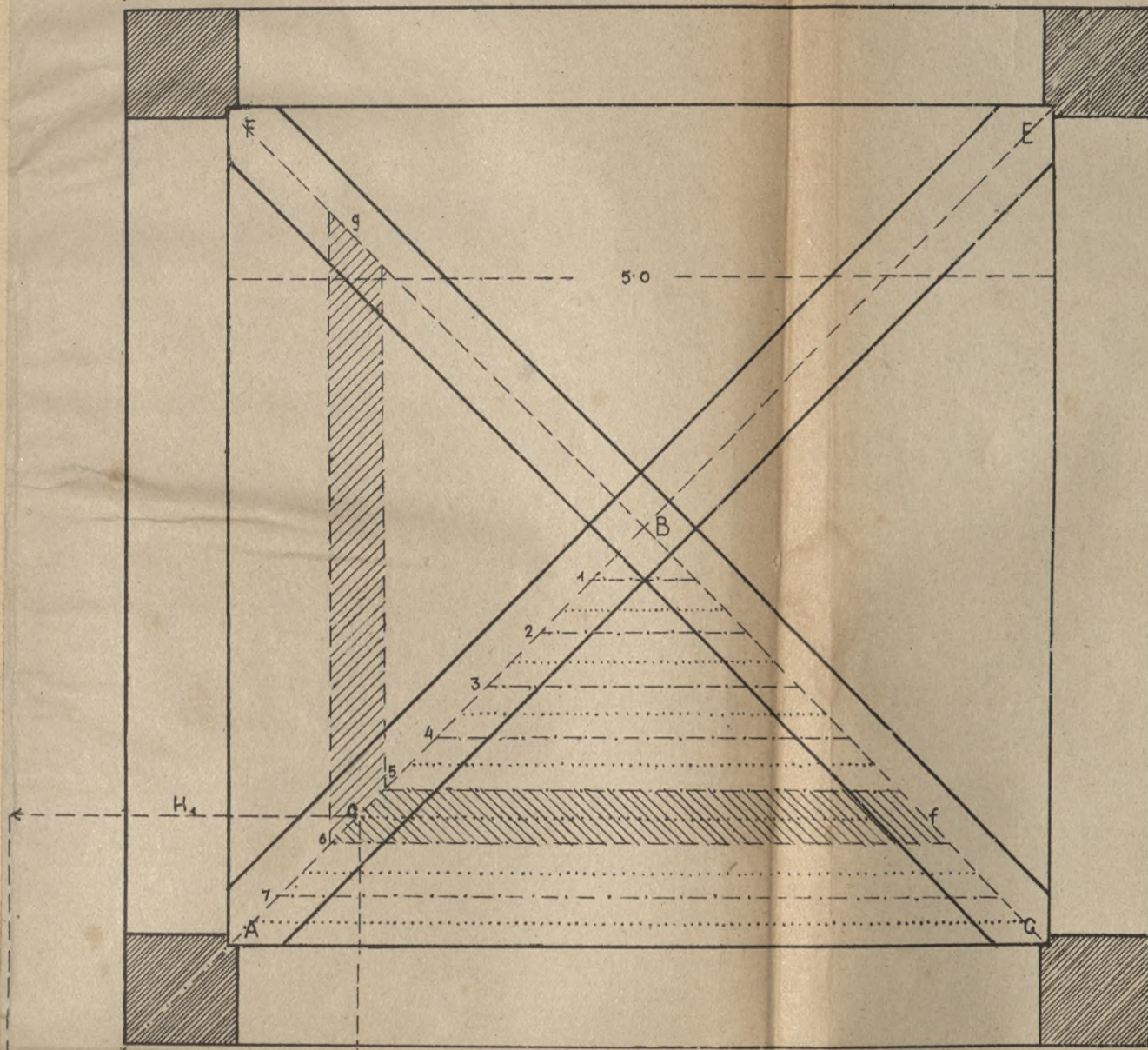


Natężenia w, A''

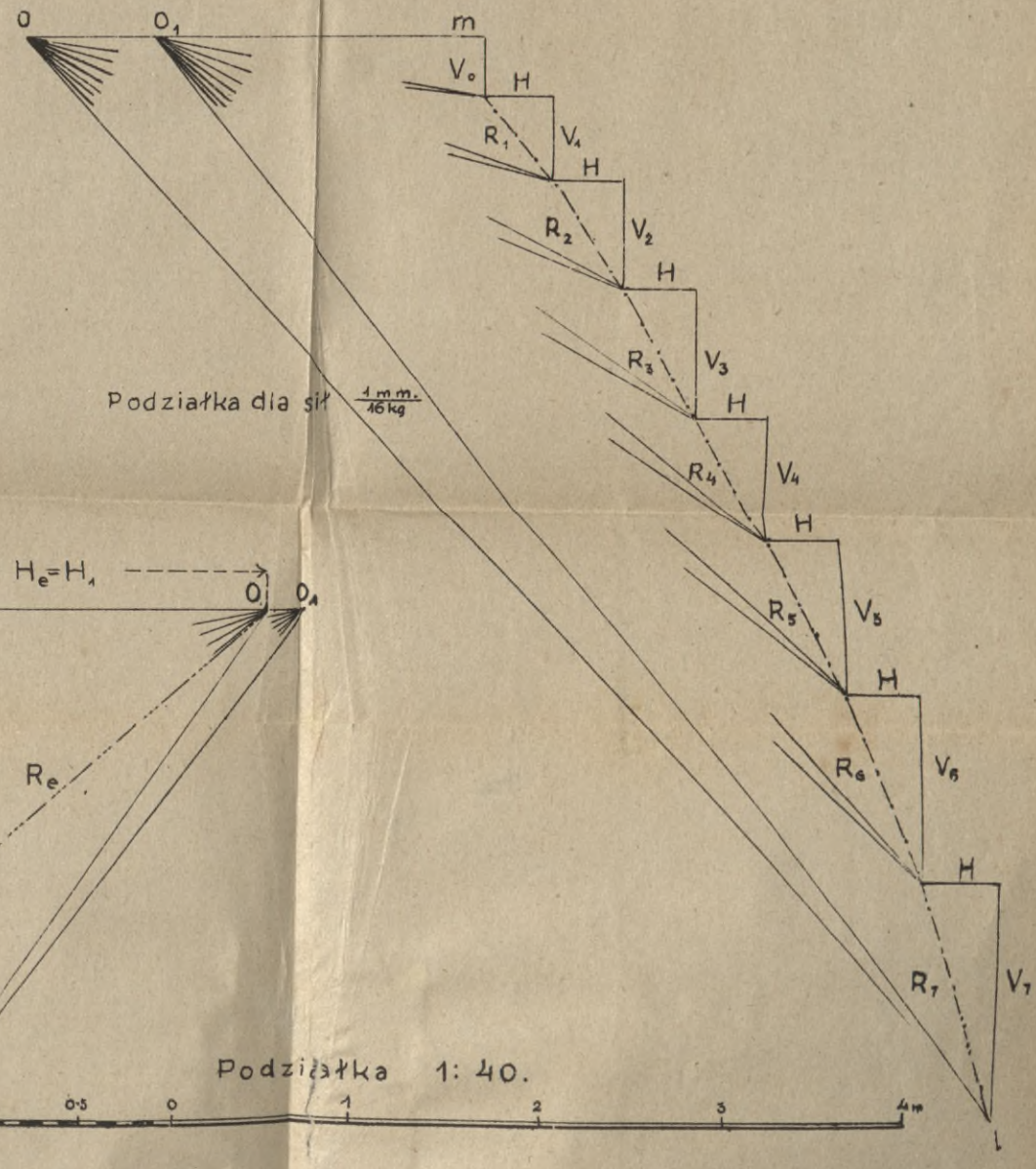
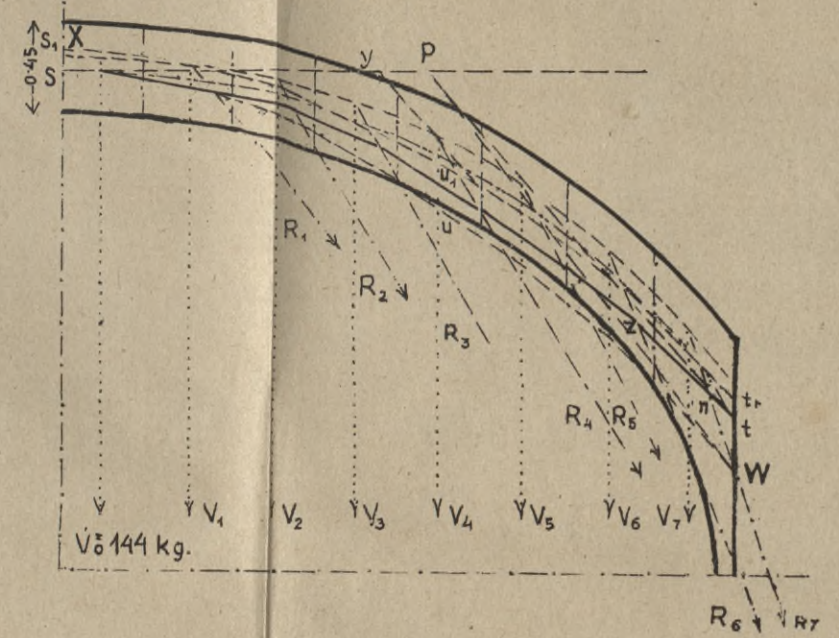


Skala długości 1:100
sił 1mm:1f.

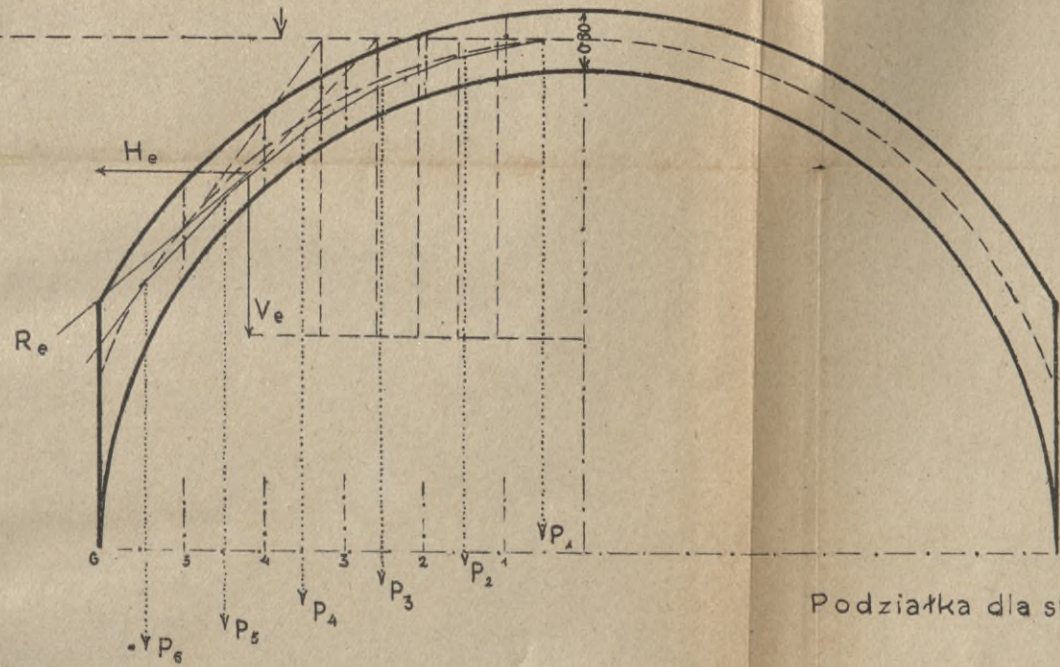




Przekrój B-C



Przekrój A-C

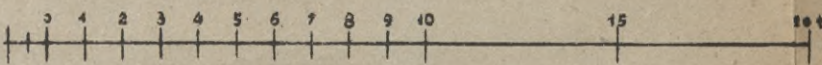
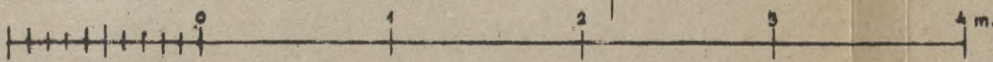
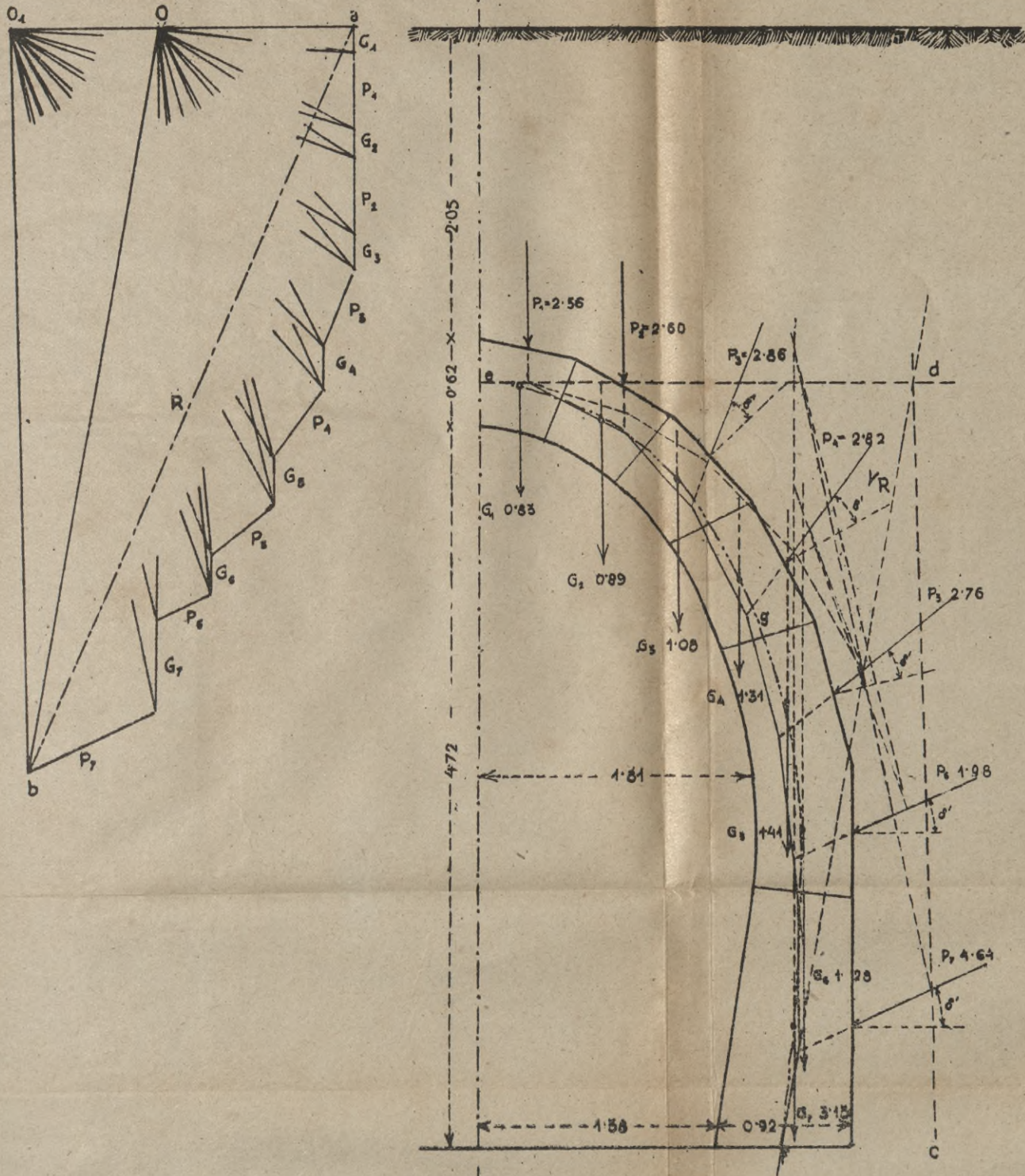


Podziałka dla sił $\frac{1 \text{ mm}}{2 \text{ kg}}$.

Podziałka dla sił $\frac{1 \text{ mm}}{16 \text{ kg}}$.



Wykreslenie linii ciśnienia z uwzględnieniem ukośnego parcia ziemi



POLITECHNIKA KRAKOWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA



6167

L. inw.

z. zam. 480/55 20.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000231331