

**Artur Ganczarski
Jacek Skrzypek**

Mechanika nowoczesnych materiałów

Modele, anizotropia,
powierzchnie graniczne,
materiały kompozytowe,
procesy dyssypatywne



Politechnika Krakowska
Kraków 2013

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

ARTUR GANCZARSKI, JACEK SKRZYPEK

MECHANIKA
NOWOCZESNYCH MATERIAŁÓW

MODELE
ANIZOTROPIA
POWIERZCHNIE GRANICZNE
MATERIAŁY KOMPOZYTOWE
PROCESY DYSSYPATYWNE



Kraków 2013

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Jan Kazior

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTW NAUKOWYCH

Józef Nizioł

REDAKTOR SERII
Wydział Mechaniczny

Józef Gawlik

REDAKTOR NAUKOWY

Krzysztof Szuwalski

RECENZENCI

Zbigniew L. Kowalewski, Andrzej Seweryn

SEKRETARZ SEKCJI KSIĄŻKI NAUKOWEJ

Barbara Korta-Wyrzycka

© Copyright by Politechnika Krakowska, Kraków 2013

ISBN 978-83-7242-707-6

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; tel. 12 628 37 25, fax 12 628 37 60
e-mail: wydawnictwo@pk.edu.pl www.wydawnictwo.pk.edu.pl
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Druk i oprawę wykonano w Dziale Poligrafii Politechniki Krakowskiej.
Ark. wyd. 13,00. Podpisano do druku 24.05.2013 r.

Zam. ??/2013

Nakład 200 egz.

Cena zł 31,50 z VAT

Spis treści

Wstęp	VII
Spis oznaczeń	XI
1 Reprezentatywne wyniki prób wytrzymałościowych	1
1.1. Statyczna próba rozciągania	1
1.2. Statyczne próby dla materiałów o różnej wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie	5
1.3. Anizotropia	9
1.4. Cykliczna próba rozciągania oraz ściskania	12
1.5. Próby pełzania, relaksacji z uwzględnieniem rozwoju uszkodzeń	14
1.6. Wpływ warunków przeprowadzenia próby wytrzymałościowej	20
1.7. Zmęczenie nisko – i wysokocyklowe	24
1.8. Klasyfikacja i właściwości materiałów wieloskładnikowych – poziomy analizy	27
2 Jednoosiowe modele materiałów sprężystych, lepkich oraz plastycznych	43
2.1. Modele jednoosiowe oparte na ścinaniu	43
2.2. Modele jednowymiarowe oparte na rozciąganiu	58
3 Niezmienniki tensora naprężenia i tensora odkształcenia; tensor uszkodzenia i macierze efektywne	67
3.1. Tensor naprężenia – niezmienniki naprężenia	67
3.2. Tensor odkształcenia – niezmienniki tensora odkształcenia . . .	70
3.3. Macierze reprezentacji naprężenia i odkształcenia	73
3.4. Macierze sztywności i podatności – notacja Voigta	74
3.5. Tensor uszkodzenia i macierze efektywne	77

4	Prawo Hooke'a – klasy symetrii materiału sprężystego, energia sprężystości	85
4.1.	Izotropia sprężysta	85
4.2.	Anizotropia sprężysta	88
4.3.	Ortotropia sprężysta	90
4.4.	Poprzeczna izotropia sprężysta	92
4.5.	Energia odkształcenia i energia dopełniająca – potencjał stanu	97
4.6.	Energia sprężystości jako funkcja niezmienników – potencjał stanu	102
5	Równania konstytutywne materiałów liniowo lepko-sprężystych	113
5.1.	Jednowymiarowe modele izotropowych materiałów liniowo lepko-sprężystych	114
5.2.	Liniowe ośrodki lepko-sprężyste a zasada superpozycji Boltzmanna	119
5.3.	Równania materiałów liniowo lepko-sprężystych w złożonym stanie naprężenia	125
5.4.	Analogia sprężysto-lepko-sprężysta dla materiałów izotropowych	130
5.5.	Uogólnienie całkowitej postaci równań konstytutywnych materiałów liniowo lepko-sprężystych na przypadek materiału anizotropowego	133
5.6.	Analogia sprężysto/lepko-sprężysta dla materiałów anizotropowych – zastosowanie do kompozytów	135
6	Mechanika materiałów kompozytowych	139
6.1.	Klasyfikacja kompozytów z uwagi na symetrię	139
6.2.	Efektywne macierze sprężystości kompozytów – homogenizacja	147
7	Ogólna koncepcja powierzchni granicznych – wypukłość, zasada normalności, stateczność materiałowa	167
7.1.	Ograniczenia zakresu sprężystego materiałów anizotropowych lub izotropowych	167
7.2.	Postulat Druckera materiałów ciągliwych: wnioski odnośnie do wypukłości powierzchni granicznej plastyczności i reguły normalności	170
7.3.	Postulat stateczności materiałów sprężysto-kruchych: kryterium zniszczenia w sensie dodatniej określoności macierzy sztywności	174

7.4. Porównanie postulatu stateczności materiału sprężysto- plastycznego Druckera z kryterium dodatniej określoności stycznej macierzy sztywności materiału sprężysto-kruchego . . .	182
8 Ograniczenia zakresu sprężystego materiałów ciągłych – kryteria początku uplastycznienia	185
8.1. Izotropowe warunki początku uplastycznienia metali	185
8.2. Anizotropowe warunki początku uplastycznienia metali	194
8.3. Ortotropowe warunki początku uplastycznienia	201
8.4. Ograniczenie warunku Hilla dla materiałów silnie ortotropowych - warunek Hu–Marina	207
8.5. Przypadek poprzecznej izotropii	213
9 Ograniczenia zakresu sprężystego materiałów kruchych bądź sypkich – kryteria początku zniszczenia	219
9.1. Charakterystyka inicjacji zniszczenia materiałów kruchych . . .	219
9.2. Izotropowe obrotowo-symetryczne powierzchnie zniszczenia materiałów kruchych zależne od σ_h i J_{2s} , lecz niezależne od J_{3s}	221
9.3. Izotropowe warunki zniszczenia materiałów kruchych zależne od σ_h , J_{2s} i J_{3s}	228
9.4. Anizotropowe warunki zniszczenia materiałów kruchych - zależnych od ciśnienia hydrostatycznego	232
9.5. Ortotropowe warunki zniszczenia materiałów kruchych	236
9.6. Przypadek poprzecznej izotropii	238
10 Modelowanie powierzchni granicznych w kompozytach	243
10.1. Modelowanie początkowych powierzchni plastyczności/ zniszczenia kompozytu SCS-6/Ti-15-3 za pomocą jednolitej powierzchni typu Tsai–Wu	244
10.2. Modelowanie kolejnych powierzchni granicznych kompozytu SCS-6/Ti-15-3 na poziomie mikro oparte na warunku Hilla–Tsai–Wu	249
11 Klasyfikacja równań konstytutywnych materiałów dyssypatywnych – ogólna charakterystyka	253
11.1. Sprężone procesy dyssypatywne	253
11.2. Wstępna koncepcja powierzchni granicznych sprężystości	257
11.3. Sprężystość liniowa i nieliniowa	258
11.4. Plastyczność a pełzanie	260

11.5. Sprężystość nieliniowa z udziałem uszkodzeń	264
11.6. Sprężysto-plastyczność z udziałem uszkodzeń	266
11.7. Równania konstytutywne procesów odwracalnych i nieodwracalnych – ogólna charakterystyka	267
11.8. Wpływ zmiennego pola temperatur na związki konstytutywne – sprężenia termiczne	270
Epilog	273
Podziękowanie	279
Bibliografia	281
Indeks	295

Wstęp

Pomysł napisania tej książki powstawał i rozwijał się powoli. Przed trzema laty, w wyniku wdrażania nowego systemu kształcenia w zgodności z tzw. strategią bolońską, powstały pewne szkody w dotychczasowym nauczaniu studentów specjalności „Mechanika konstrukcji i materiałów”, a będącej spadkobierczynią dotychczasowej „Mechaniki komputerowej”. Nie wdając się w szczegóły, dotychczasowy kurs nauki o materiałach z pozycji mechanika, obejmujący tradycyjny podział na sprężystość, plastyczność, reologię i mechanikę zniszczenia, stracił rację bytu, nie mieszcząc się w całości w programach I stopnia studiów, i nie mając większych szans w II stopniu. Tak powstał pomysł przedmiotu: „Podstawy mechaniki nowoczesnych materiałów”, który, jak koło ratunkowe, miał zapobiec niedokończonej edukacji absolwentów I stopnia, którzy nie zdecydowali się zgłębiać swej wiedzy na II stopniu studiów. Nowy przedmiot wymagał nowego podręcznika, który rodził się w konspektach wykładów i projektów, prowadzonych wspólnie z Szymonem Hernikiem, by potem dojrzeć do nowej książki.

Idea była następująca: czas podziału na sprężystość, plastyczność, reologię i zniszczenie już prawdopodobnie minął bezpowrotnie, wraz z nowym spojrzeniem na wielorakie zjawiska zachodzące w materiałach konstrukcyjnych, podczas których wzajemnie sprzężone procesy fizyczne na poziomie przebudowy mikrostruktury skutkują zmianami obserwowanymi w zachowaniu materiału w skali makroskopowej. Takie myśli dojrzewały już we wrześniu 2008 r., gdy kończyliśmy prace nad podręcznikiem: *Plastyczność materiałów inżynierskich* [48]. Brakowało tam zarówno pełzania, jak i zniszczenia, a sytuacji nie usprawiedliwiały ani nieco przedawniona książka *Plastyczność i pełzanie* [136, 137], ani też kolejna pozycja *Podstawy mechaniki uszkodzeń* [140], o charakterze zbliżonym do monografii. Wszystkie te pozycje były, przy tym, w sposób oczywisty, wzajemnie sprzężone, a zarazem nakładające się na siebie.

Wśród wielu propozycji na szczególne wyróżnienie i rekomendację zasługuje monografia Josefa Bettena *Creep Mechanics* [8] będąca znakomitym kom-

pendium wiedzy z zakresu nieliniowego pełzania materiałów izotropowych oraz anizotropowych z uwzględnieniem wpływu rozwoju uszkodzeń na fazę pełzania nieustalonego. Szeroki wachlarz zagadnień mechaniki i termodynamiki ośrodków ciągłych zawierający: modele konstytutywne materiałów sprężystych, termosprężystych, plastycznych, lepkoplastycznych z uszkodzeniem oraz odstawy mechaniki pękania, został szeroko omówiony przez Jeana Lemaitre'a i Jeana-Louisa Chaboche'a w znanej monografii *Mécanique des Matériaux Solides* [90]. Pomimo że od opublikowania tej monografii upłynęły już niemal trzy dekady, jest ona wciąż aktualna zwłaszcza w kontekście bogatego materiału eksperymentalnego. Nowsze ujęcie elementów mechaniki materiałów sprężysto-plastycznych z podkreśleniem wpływu uszkodzenia jest przedmiotem monografii Jeana Lemaitre'a *A Course on Damage Mechanics* [91]. W związku z dynamicznym rozwojem metod komputerowych inżynierskie zastosowania nieliniowych modeli anizotropowych stanowią poważne wyzwanie. W tym kontekście szczególnie wartościowe są monografie Chen i Han *Plasticity for Structural Engineers* [24] oraz Ottosen i Ristinmaa *The Mechanics of Constitutive Modeling* [110], które okazały się bardzo pomocne przy przygotowaniu obecnej monografii. Obie te wartościowe pozycje wzajemnie się uzupełniają, zabrakło w nich jednak szerszego spojrzenia na różnorodne procesy dyssypatywne w materiałach, bowiem ograniczono się jedynie w nich do plastyczności i lepkości.

Przy współpracy z Haliną Egner, która zgłębiła naturę sprzężeń procesów: plastyczności, uszkodzeń oraz przemian strukturalnych przy zmianach fazy, a także po doświadczeniu przedstawienia takiej wizji mechaniki materiałów na kongresie Thermal Stresses'09 w formie wykładu „keynote lecture” [49], rozpoczęliśmy prace nad książką, pod roboczym tytułem „Podstawy mechaniki nowoczesnych materiałów”. Dodatkowym czynnikiem i zachętą były doświadczenia wyniesione z czterech lat pracy w programie europejskiej sieci doskonałości Knowledge-based Multicomponent Materials for Durable and Safe Performance KMMNoE (2004–2008), które zmusiły nas, po zderzeniu ze specjalistami różnych branż: mechaniki, inżynierii materiałowej i fizyki materiałów wieloskładnikowych o złożonej skulturze kompozytowej i równie złożonych właściwościach oraz zachowaniu, do poszukiwania nowej formuły.

Koncepcja książki, jej treść i metoda wykładu, nie powstała jednak natychmiast, lecz podlegała wielokrotnej przebudowie w miarę tworzenia oraz, musimy też przyznać, zagłębiania się w jej istotę. Zajęło nam sporo czasu i wymagało wielu burzliwych dyskusji określenie, w jaki sposób pogodzić ze sobą zamierzenie przedstawienia aktualnego stanu wiedzy w skomplikowanym języku termodynamiki procesów nieodwracalnych z oczekiwaniami nowoczesnej

inżynierii materiałowej, która w zakresie wytwarzania materiałów, o (niemal) dowolnie złożonych właściwościach i funkcjach, znacznie wyprzedziła techniki określania cech strukturalnych, mechanicznych, termicznych czy eksploatacyjnych oraz budowy adekwatnych modeli konstytutywnych. Jeśli dodać do tego zamierzenie przedstawienia skomplikowanej rzeczywistości językiem nowoczesnym, możliwie ścisłym, a jednocześnie zrozumiałym nie tylko w gronie wąskich specjalistów, to zamierzenie takie okazało się sporym wyzwaniem.

W miarę pisania książki jej cel ulegał pewnym przeobrażeniom. Okazało się bowiem konieczne, aby przedstawić nie tyle „mechanikę nowoczesnych materiałów”, co nowe spojrzenia na mechanikę materiałów, z uwzględnieniem aktualnych osiągnięć w dziedzinie inżynierii materiałowej. Skłoniło nas to do nieklasycznego podejścia do modelowania i opisu materiałów, z uwzględnieniem wzajemnych sprzężeń pomiędzy różnymi procesami dyssypatywnymi oraz szerszym niż zazwyczaj uwzględnieniem anizotropii i symetrii materiałowej bądź to pierwotnej (sprężystość), bądź też nabytej w trakcie przebudowy mikrostruktury (plastyczność, uszkodzenia, stany reszkowe). Ponadto, nasze nieoczekiwane doświadczenia zdobyte podczas pracy w strukturze sieci KMM, z jednej strony skłoniły nas do weryfikacji zamkniętego języka termodynamiki procesów nieodwracalnych, w zderzeniu z językiem stosowanym w inżynierii materiałowej, z uwzględnieniem nowoczesnych technik eksperymentalnych w badaniu zmian mikrostruktury oraz właściwości fizycznych, z drugiej. Choć oczywiście nie należy oczekiwać, że trudności te zostały zażegnane, jednak ufamy, że prezentowane w tej książce spojrzenie na mechanikę materiałów wychodzi nieco naprzeciw tym wymaganiom.

Wreszcie, po wielokrotnych przemyśleniach i dyskusjach uznaliśmy, że korzystne będzie podzielenie całej książki na dwie oddzielne, choć wzajemnie sprzężone części. Tak więc książka, którą teraz przekazujemy, zawiera w istocie podstawy nowoczesnej mechaniki materiałów dyssypatywnych, z głównym naciskiem położonym na anizotropię oraz inicjację głównych procesów dyssypatywnych – plastycznego płynięcia bądź rozwoju uszkodzeń. Zachowanie materiałów po przekroczeniu stanów granicznych, obejmujące wzmocnienie materiałowe typu plastycznego bądź uszkodzeniowego, jest tutaj jedynie wzmiankowane z zamiarem pełnego ujęcia w części drugiej. W efekcie książka, którą przekazujemy czytelnikom, jest pozycją noszącą cechy zarówno zaawansowanego podręcznika, jak i monografii ujmującej całość tematyki z uwzględnieniem współczesnych oczekiwań odbiorców.

Na koniec kilka słów na temat adresatów tej książki. Jak już pisaliśmy, inspiracją były zajęcia ze studentami stopnia I i II na kierunku „Mechanika i budowa maszyn”. Jednak okazało się, że materiał ten może być również

przydatny na kierunku „Inżynieria materiałowa”, a także włączony do programu studiów doktoranckich III stopnia. Chcielibyśmy również, aby książka była pomocna także dla badaczy i inżynierów zarówno w obszarze inżynierii mechanicznej, jak i materiałowej, a także, w pewnym zakresie, fizyki ciała stałego. To oczywiście narzuca wymagania odnośnie do komunikatywności języka, spójności oznaczeń, definicji, terminologii itd. Biorąc to pod uwagę, obok rozdziałów wprowadzających, przedstawiających proste modele jednowymiarowe, wprowadziliśmy także obszerny rozdział poświęcony definicji pojęć z zakresu algebry tensorowej i macierzowej czy teorii niezmienników, jednak wyraźnie w odniesieniu do problemów mechaniki materiałów i potrzeb dalszych rozdziałów. W ten sposób, naszym zdaniem, nawet przeciętnie przygotowany czytelnik nie natrafi na istotne trudności w trakcie studiowania dalszych rozdziałów.

Autorzy

Spis oznaczeń

Reguły ogólne

górne prawe indeksy ε^e , ε^p , ε^v , ε^d , ε^t odnoszą się do wielkości związanych kolejno ze sprężystością, plastycznością, lepkością, uszkodzeniem oraz temperaturą

górny lewy indeks przed tensorem ${}^e\mathbb{E}$ (${}^e\mathbb{E}^{-1}$) lub macierzą sztywności ${}^e\mathbf{E}$ (${}^e\mathbf{E}^{-1}$) (podatności) odnosi się do sprężystości

dolne lewe indeksy ${}_{\text{sec}}\mathbb{E}$ lub ${}_{\text{tan}}\mathbb{E}$ przed tensorem lub macierzą sztywności (podatności) odznaczają odpowiednio wielkości sieczne oraz styczne

dolny prawy indeks f_0 odnosi się do początkowej powierzchni granicznej

tylda nad symbolem \tilde{E} oznacza wielkość efektywną, osłabioną przez wpływ uszkodzenia

A	–	pole powierzchni
A, B, C	–	współczynniki Burzyńskiego
A_p	–	trwałe wydłużenie względne
B_j	–	wektor sił masowych
c	–	współczynnik kohezji
c	–	ciepło właściwe
C	–	energia dopełniająca właściwa
D	–	zmienna stanu uszkodzenia
\mathbf{D}	–	tensor uszkodzenia
\mathbf{e}, e_{ij}	–	dewiator odkształcenia
E	–	moduł Younga
E_{ijkl}, E_{ijkl}^{-1}	–	tensor sztywności lub podatności Hooke'a
E_{ii}	–	osiowe moduły sprężystości
\tilde{E}	–	efektywny moduł Younga

E_1, E_2	–	moduły Younga odpowiadające rozciąganiu wzdłuż kierunków głównych 1, 2
E^{45°	–	moduł Younga odpowiadający rozciąganiu pod kątem 45° do kierunków głównych ortotropii materiałowej
E_θ	–	kierunkowy moduł sprężystości
$E(t)$	–	funkcja relaksacji
$\mathcal{E}(t)$	–	tensor funkcji relaksacji
$\frac{d\varepsilon_y^p}{d\varepsilon_x^p}, \frac{d\varepsilon_y^p}{d\varepsilon_z^p}, \frac{d\varepsilon_x^p}{d\varepsilon_z^p}$	–	współczynniki Lankforda
f	–	potencjał dyssypacji
g	–	potencjał stanu
G	–	moduł Kirchhoffa
G_1	–	moduł wzmocnienia plastycznego
G_{12}, G_{23}	–	moduły ścinania w płaszczyźnie izotropii poprzecznej oraz w płaszczyźnie do niej prostopadłej
G_{ij}	–	moduły ścinania w trzech płaszczyznach
\mathcal{G}	–	potencjał Gibbsa
$H(t)$	–	funkcja Heaviside'a
I	–	moment bezwładności pola przekroju
I_{ijkl}	–	izotropowy tensor 4-rzędu
$I_{i\varepsilon}$	–	niezmienniki główne tensora odkształcenia
$I_{i\sigma}$	–	niezmienniki główne tensora naprężenia
J_{ie}	–	niezmienniki podstawowe dewiatora odkształcenia
$J_{i\varepsilon}$	–	niezmienniki podstawowe tensora odkształcenia
J_{is}	–	niezmienniki podstawowe dewiatora naprężenia
$J_{i\sigma}$	–	niezmienniki podstawowe tensora naprężenia
$J(t)$	–	funkcja pełzania
$\mathbb{J}(t)$	–	tensor funkcji pełzania
k	–	granica plastyczności na rozciąganie
k_{\max}	–	naprężenie maksymalne
$k_{cr}^{(m)}$	–	wytrzymałość na pełzanie w czasie 10^m h
$k_{cx}^{(m)}$	–	naprężenie potrzebne do wywołania odkształcenia nominalnego pełzania, o wartości $x\%$, np: 0.1%, 0.2%, 0.5%, 1%, 2%, 5% w czasie 10^m h
k_c	–	wytrzymałość przy ściskaniu
k_t	–	wytrzymałość przy rozciąganiu

k_s	–	granica plastyczności na ścinanie
k_{stat}	–	granica plastyczności w próbie statycznej rozciągania
k_{dyn}	–	granica plastyczności w próbie dynamicznej rozciągania
k_x, k_y, k_z	–	granice plastyczności w kierunkach x, y, z
k_∞	–	asymptotyczna wartość granicy plastyczności
K	–	moduł ściśliwości
K, n	–	stałe materiałowe modelu Ludwika
K_α	–	wektor zmiennych wewnętrznych wzmocnienia
m	–	wykładnik potęgi we wzorze Ramberga–Osgooda
M	–	moment zginający
$\mathbf{M}^{(i)}$	–	tensory strukturalne
n_i	–	wektor współczynników kierunkowych
N	–	siła normalna
N	–	liczba cykli
p	–	kumulowane odkształcenie plastyczne
p	–	ciśnienie
p_i	–	wektor naprężenia
P^{LM}	–	parametr Larsona–Millera
q_{ij}	–	iloczyny współczynników kierunkowych w macierzy obrotu
\mathbf{q}	–	strumień ciepła
$[\mathbf{Q}]$	–	macierz obrotu
r	–	promień
\mathbf{s}, s_{ij}	–	dewiator naprężenia
t	–	czas
t_r	–	czas do zniszczenia
t_{rel}	–	czas relaksacji
t_{ret}	–	czas retardacji
T	–	temperatura bezwzględna
T_m	–	temperatura topnienia
$\text{tr}(\cdot)$	–	operator śladu tensora
u, v, w	–	składowe przemieszczenia w kierunku osi x, y, z
u_i	–	wektor przemieszczenia
v	–	prędkość przepływu cieczy lepkiej
V	–	objętość
\mathcal{W}	–	energia właściwa odkształcenia sprężystego
x, y, z	–	kierunki osi układu kartezjańskiego
z	–	stosunek wytrzymałości na ściskanie do wytrzymałości na rozciąganie

Z	– trwałe przewężenie względne
$\mathbf{1}$	– tensor jednostkowy 2-rzędu
α	– współczynnik rozszerzalności termicznej, stała materiałowa w prawie Ramberga–Osgooda oraz w warunku Druckera–Pragera
α_{ij}	– tensor rozszerzalności termicznej
α_{11}, α_{33}	– współczynnik rozszerzalności termicznej w płaszczyźnie poprzecznej izotropii oraz w kierunku prostopadłym do niej
α_i	– stałe materiałowe hipersprężystego materiału ortotropowego
γ	– odkształcenie postaciowe
γ_s	– stała materiałowa modelu Ludwika
$\delta(t)$	– funkcja delta Diraca
δ_{ij}	– symbol delta Kroneckera
ε	– odkształcenie osiowe
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	– tensor odkształcenia
$\varepsilon_m \mathbf{1}$	– aksjator odkształcenia
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	– odkształcenia osiowe w kierunkach osi x, y, z
ε_c^{\max}	– maksymalne odkształcenie przy ściskaniu
$\varepsilon_p^{\text{eq}}$	– kumulowane odkształcenie plastyczne
ε_{ij}	– tensor odkształcenia Greena
η_s	– współczynnik lepkości dynamicznej
η_i	– stałe materiałowe potencjału Helmholtza
$\eta_{i(jk)}$	– moduły Rabinovicha
ϑ_i	– stałe materiałowe potencjału Gibbsa
κ	– krzywizna
λ	– współczynnik przewodnictwa cieplnego, wydłużenie względne, mnożnik plastyczny, współczynnik Lamé
π_{ij}	– tensor 2-rzędu anizotropii plastycznej lub uszkodzenia
μ	– współczynnik Lamé, współczynnik tarcia
$\mu_{ij(kl)}$	– moduły Chencova
ν	– współczynnik Poissona
ν_{12}, ν_{23}	– współczynniki Poissona charakteryzujące zwięźnienie w płaszczyźnie izotropii spowodowane obciążeniem w niej działającym oraz spowodowane obciążeniem działającym w kierunku normalnym do niej

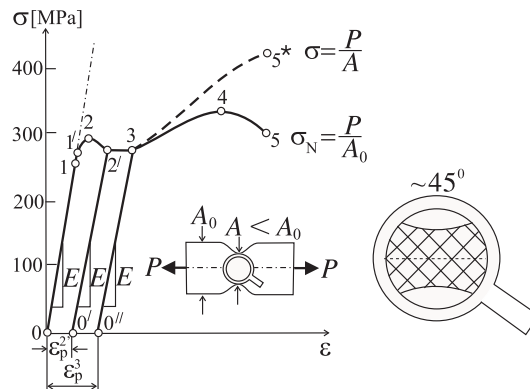
ν_{ij}	–	współczynniki odkształcenia poprzecznego
ξ, ρ, θ	–	współrzędne Haigha–Westergaarda
ϕ	–	kąt tarcia wewnętrznego
ρ	–	gęstość masy
σ, σ_{ij}	–	tensor naprężenia
σ_{eq}	–	naprężenie efektywne
σ_h	–	naprężenie hydrostatyczne
$\sigma_h \mathbf{1}$	–	aksjator naprężenia
σ_m	–	naprężenie średnie, średnia wartość naprężenia w próbie cyklicznej
$\sigma_{0.2}$	–	umowna granica plastyczności (przy odkształceniu trwałym 0.2%)
σ^{pr}	–	granica proporcjonalności
σ_s, σ_H	–	granica sprężystości
σ_{max}	–	naprężenie maksymalne
σ_c^{pr}	–	granica proporcjonalności przy ściskaniu
σ_t^{pr}	–	granica proporcjonalności przy rozciąganiu
σ_c^{spr}	–	umowna granica sprężystości przy ściskaniu
σ_{ult}, k_{fract}	–	naprężenie zrywające
τ, τ_{ij}	–	naprężenie styczne, składowe styczne naprężenia
ψ	–	energia swobodna Helmholtza
Σ_{ij}	–	drugi tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa
Θ	–	dylatacja
Λ	–	mnożnik plastyczny
Π_{ijkl}	–	tensor 4-rzędu anizotropii plastycznej lub uszkodzenia

Rozdział 1

Reprezentatywne wyniki prób wytrzymałościowych

1.1. Statyczna próba rozciągania

Schematyczny przebieg krzywej rozciągania, dla materiału sprężysto-plastycznego (np. stali niskowęglowej), pokazano na rys. 1.1. Na wykresie zaznaczone



Rysunek 1.1. Wykres krzywej rozciągania materiału sprężysto-plastycznego (stal niskowęglowa): porównanie naprężeń nominalnych i uśrednionych rzeczywistych

zostały następujące charakterystyczne punkty próby rozciągania:

1 σ^{pr} granica proporcjonalności (ang. *proportional limit*)

1/ σ_s, σ_H granica sprężystości (ang. *elastic limit*)

2, 2' k granica plastyczności na rozciąganie, górna lub dolna (ang. *yield point*)

2'–3 platforma idealnej plastyczności (ang. *perfectly-plastic flow*)

3–4 wzmocnienie plastyczne (ang. *plastic hardening*)

4 σ_{\max} , k_{\max} naprężenie maksymalne (ang. *maximal nominal stress*)

4–5 niestateczna deformacja (ang. *unstable deformation*)

5 σ_{ult} , k_{fract} naprężenie zrywające (ang. *fracture strength*)

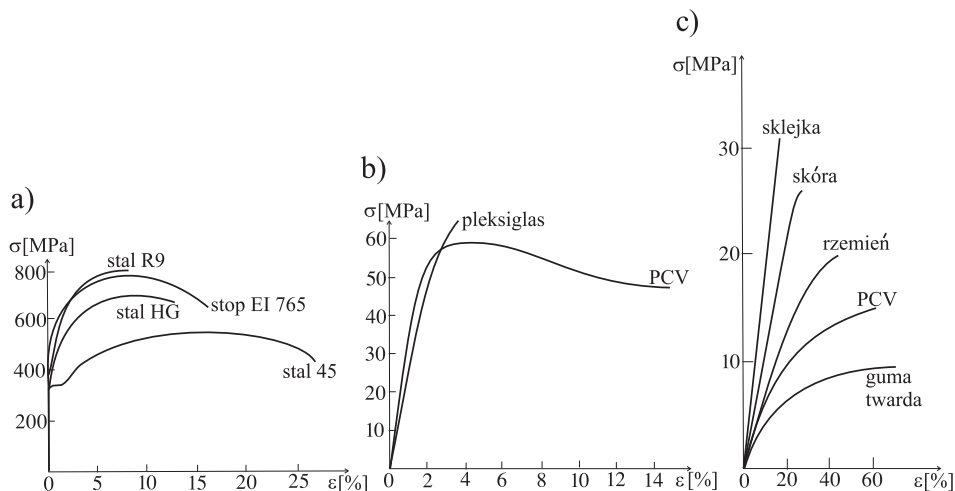
Przedstawiony wykres wykazuje kilka charakterystycznych zakresów. W początkowym zakresie, opisanym odcinkiem 0–1, niewielkim wydłużeniem względnym ε odpowiadają proporcjonalne przyrosty siły P , po odciążeniu natomiast próbka powraca do swojej pierwotnej długości, $\varepsilon = 0$. Zakres ten, którego górnym kresem jest naprężenie σ^{Pr} , nazywany jest liniowo sprężystym i opisywany matematycznie za pomocą prawa Hooke'a. Przy wzroście obciążenia ponad σ^{Pr} obserwuje się istotne odstępstwa od liniowej zależności pomiędzy naprężeniem a odkształceniem. Odcinek 1–2, który nazywamy nieliniowo sprężystym, jest wyraźnie krzywoliniowy, o malejącym nachyleniu. Z chwilą osiągnięcia dolnej granicy plastyczności k wykres przechodzi w odcinek poziomy 2'–3, zwany półką (platformą) plastyczności, dla którego wzrastającemu odkształceniu nie towarzyszy wzrost naprężenia. Takie zachowanie materiału powszechnie określane jest mianem plastycznego płynięcia, jeśli zastosować analogię i nazewnictwo zaczerpnięte z mechaniki płynów. Plastycznemu płynięciu towarzyszy pojawienie się siatki linii na polerowanej powierzchni próbki, zwanych *liniami Lüdersa–Czernowa*. Linie te, nachylone pod kątem około 45° do osi próbki, są śladem wzajemnych poślizgów cząstek materiału następujących w płaszczyznach występowania największego naprężenia stycznego. Przemieszczanie się i poślizg cząstek materiału, towarzyszące plastycznemu płynięciu, są zjawiskami zachodzącymi w sposób nieodwracalny. Zatem zakładając, że odciążenie próbki (odcinek 2'–0') przebiega wzdłuż prostej o takim samym nachyleniu, jak dla odcinka 0–1, końcowa wartość wydłużenia względnego próbki będzie wynosić $\varepsilon_p^{2'}$. Model matematyczny opisujący przebieg zjawisk związanych z płynięciem plastycznym nosi nazwę teorii idealnej plastyczności.

Gdy w następstwie przegrupowania się cząstek materiału plastyczne płynięcie stopniowo ustaje, a materiał zaczyna ponownie odzyskiwać możliwość stawiania oporu obciążeniu zewnętrznemu (odcinek 3–4), mówimy o *wzmocnieniu plastycznym*, albo zgnioście materiału (ang. *plastic hardening*). Zakres

ten, scharakteryzowany wyraźnie nieproporcjonalnym stosunkiem wydłużenia względnego do naprężenia, opisywany jest jedną z teorii wzmocnienia plastycznego. Począwszy od punktu 4, odpowiadającego osiągnięciu przez naprężenie nominalne wartości maksymalnej σ_{\max} , plastyczne płynięcie staje się niestatyczne z uwagi na pojawienie się zlokalizowanego przewężenia zwanego szyjką (ang. *necking*). Szyjka stopniowo wydłuża się, czemu towarzyszy zmniejszanie się pola przekroju, aby w końcu ulec zerwaniu pod *naprężeniem zrywającym*, $\sigma_{\text{ult}} < \sigma_{\max}$. Na całym odcinku 4–5 wzorstwi wydłużenia względnego odpowiada zmniejszanie się *naprężenia nominalnego* $\sigma_N = P/A_0$ (przy jednoczesnym wzroście *uśrednionego naprężenia rzeczywistego* $\sigma = P/A$). W momencie zerwania następuje całkowite odciążenie próbki (punkt 5), zatem pole powierzchni ograniczone wykresem rozciągania i osią odciętych jest równe pracy potrzebnej do zerwania próbki.

Należy tutaj wyraźnie zaznaczyć uśredniony charakter powyższego naprężenia na skutek zaniedbania wpływu stanu trójosiowego wywołanego szyjkowaniem. Ścisłe rozwiązania zagadnienia trójosiowego rozkładu naprężenia w najmniejszym przekroju szyjki towarzyszącej lokalizacji logarytmicznych odkształceń sprężysto-plastycznych zostały podane przez Davidienkova i Spiridonową [34] oraz Bridgmana [12] w połowie ubiegłego stulecia. Dalsze uogólnienie zagadnienia o wpływ uszkodzenia oraz zastosowanie do modelowania zmęczenia niskocyklowego stali stopowej 316L wg testu Dufailly i Lemaitre'a [40] (rys. 1.24) przeprowadzili Ganczarski i Barwacz [47]. Natomiast Derpeński i Seweryn [35] zaproponowali oryginalne i znacznie dokładniejsze podejście hybrydowe (eksperymentalno-obliczeniowe) polegające na równoczesnym pomiarze odkształceń osiowych i promieniowych za pomocą dwóch ekstensometrów oraz dobieraniu parametrów umocnienia w taki sposób, aby krzywe rozciągania, doświadczalna i rzeczywista były jednakowe.

Wykresy jednoosiowego rozciągania różnych materiałów przedstawiono na rys. 1.2a-c. Większość materiałów metalicznych wykazuje zakres sprężysty oraz plastycznego wzmocnienia, jak przedstawiono na rys. 1.2a, natomiast wyraźna platforma idealnej plastyczności występuje rzadko, np. w miękkiej stali węglowej. Wykresy przykładowych tworzyw sztucznych wykazują nieliniowość niemal od początku procesu, przy czym polichlorek winylu wykazuje wyraźne płynięcie plastyczne poprzedzające zniszczenie, w przeciwieństwie do polimetakrylanu metylu, w którym wykres rozciągania sugeruje raczej pęknięcie kruche, rys. 1.2b. Wreszcie przykłady różnych materiałów niemetalicznych, zestawione na rys. 1.2c, wskazują na cechy sprężysto-kruche, liniowe bądź nieliniowe, bez wyraźnych efektów plastycznych. Zwróćmy też uwagę na różne skale naprężeń i odkształceń, przy których wykonywano próby, rys. 1.2a-c.



Rysunek 1.2. Pozorne wykresy rozciągania: a) stali i stopów, wg Malinin i Rżysko [96], b) sztucznych tworzyw, wg Malinin i Rżysko [96], c) materiałów pochodzenia organicznego, wg Niezgodziński i Niezgodziński [106]

Duże odkształcenia towarzyszące zniszczeniu metali mają naturę nieodwracalną (plastyczność), w przeciwieństwie do nawet większych odkształceń w niektórych materiałach niemetalicznych (guma), które są w zasadzie odwracalne (sprężystość nieliniowa). Wybrane charakterystyczne stałe, określające wykresy rozciągania różnych materiałów, zestawiono w tab. 1.1. Podkreślmy ogromną rozpiętość niektórych ich wartości, np. granicy plastyczności k , od kilku MPa do 1600 MPa (w przypadku ołowiu i stali stopowej), czy modułu Younga E , od kilku GPa do ponad 200 GPa (odpowiednio w przypadku baktelit czy drewna i większości stali).

W tabeli podano również dwa parametry inżynierskie charakteryzujące właściwości plastyczne materiału: *trwałe wydłużenie względne* przy rozciąganiu A_p oraz *trwałe przewężenie względne* pola przekroju poprzecznego przy zrywaniu Z .

Tabela 1.1. Właściwości mechaniczne przy rozciąganiu próbek wybranych materiałów konstrukcyjnych, wg Jakubowicz i Orłoś [72]

Materiał	k [MPa]	E [GPa]	ν	σ_{\max} [MPa]	A_p [%]	Z [%]
żelazo	125	210		250	25	70
stal $^{\circ}/_{00}C$						
0.7-1.5	210	206	0.24-0.33	340	31	55
5.0-6.0	360	210	0.24-0.33	640	12	35
5.5-6.5	380	211	0.24-0.33	700	9	35
2.5-3.5 har.	700	219	0.24-0.33	900	8-10	30-40
CrSi spręż.	1600	211	0.24-0.33	1800	5	20
żeliwo sfer.	200-250	130-160	0.23-0.27	450-700	6	
aluminium	50	72	0.34	90-100	13-8	
cyna	40	55	0.33	20-40	40	75
cynk	90-100	94		110-105	50-20	
miedź	60-80	132	0.32-0.35	220	60	75
ołów	5-10	17	0.42	18	50	100
wolfram	750	42		1200-1400		
sosna*		8-12	0.045-0.065	80		
dąb*		10-20	0.045-0.065	96		
kauczuk		0.008	0.47	7-10		
guma tw.				12		
bakelit		2-3	0.47	20-30		
polistyren				40		
poliamid 6				84		
szkło		56	0.25	20-30		

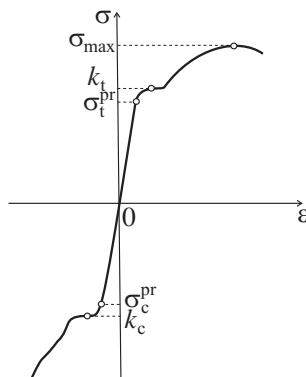
* właściwości materiałów drewnianych podano w kierunku wzdłuż włókien

1.2. Statyczne próby dla materiałów o różnej wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie

Próba ściskania przeprowadzana jest w celu określenia podstawowych właściwości dla materiałów sprężysto-kruchych charakteryzujących się znaczną wytrzymałością na ściskanie (żeliwo, beton, materiały skałopodobne, ceramiczne), natomiast bardzo niską bądź zerową wytrzymałością na rozciąganie (materiały

sypkie, piaski, niespoiste grunty). Próbie ściskania poddawane są również materiały sprężysto-plastyczne, głównie w celu wykrycia ewentualnych różnic wytrzymałości między ściskaniem a rozciąganiem, $k_t \neq k_c$ (ang. *strength differential effect*).

W początkowej fazie ściskania, analogicznie do rozciągania, względne skrócenia próbki są proporcjonalne do wartości naprężenia ściskającego (rys. 1.3). Podobnie do próby rozciągania, obserwuje się *granice proporcjonalności* σ_c^{pr}



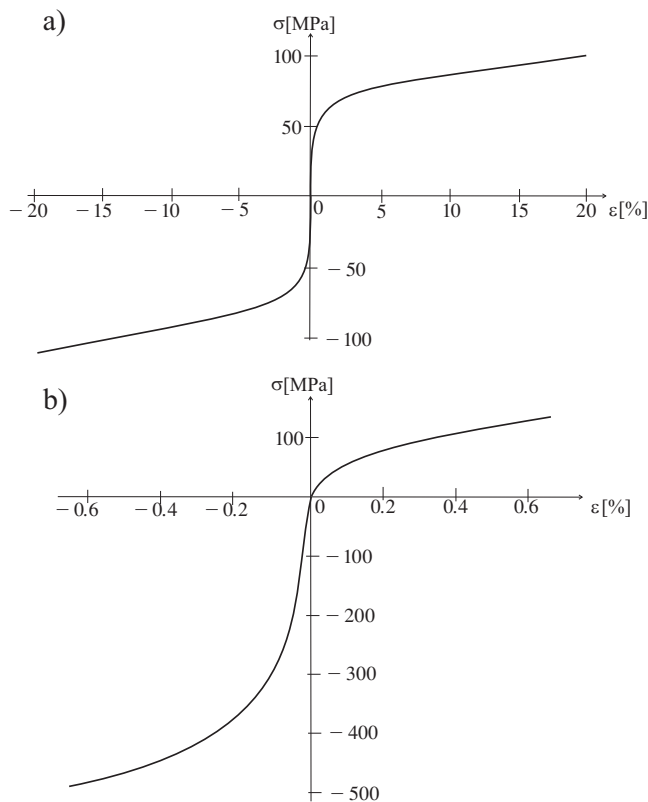
Rysunek 1.3. Schemat próby rozciągania i ściskania dla materiału sprężysto-plastycznego

czy *granice plastyczności przy ściskaniu* k_c (wrażną lub umowną).

W przypadku metali o cechach plastycznych wartości *umownych granic proporcjonalności* σ_c^{pr} i *plastyczności* k_c przy ściskaniu są zazwyczaj wyższe co do modułu, niż odpowiednie wartości σ_t^{pr} i k_t , przy rozciąganiu (rys. 1.4).

Właściwości mechaniczne przy ściskaniu wybranych materiałów konstrukcyjnych zostały zestawione w tab. 1.2. Różnice pomiędzy właściwościami po stronie ściskania a rozciągania są wyraźniejsze w przypadku materiałów kruchych. Wśród nich szczególną pozycję zajmuje żeliwo (rys. 1.4b), dla którego stosunek wytrzymałości na ściskanie k_c do wytrzymałości na rozciąganie k_t wynosi $z = k_c/k_t = 3-4$.

W przypadku betonu stosunek wytrzymałości na ściskanie k_c do wytrzymałości na rozciąganie k_t może osiągać jeszcze wyższą wartość, $z \cong 10$. Jest to ściśle związane z mikrostrukturą betonu, będącego mieszaniną ziaren piasku i żwiru, spojonych cementem. Beton jest typowym reprezentantem *materiałów kruchych* o silnie nieliniowej charakterystyce. Charakterystyczny wykres ściskania próbki betonowej, pokazany na rys. 1.5, ujawnia istnienie trzech faz zachowania materiału po stronie ściskania. W fazie pierwszej, odpowiadającej wartości naprężenia nie przewyższającej około 30% k_c , wykres jest liniowy i dla-



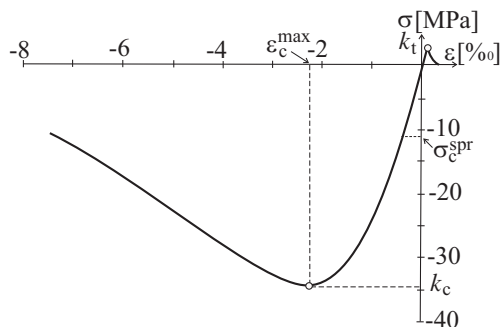
Rysunek 1.4. Umowne wykresy rozciągania i ściskania: a) aluminium, b) żeliwa szarego odlanego w formie masy formierskiej, wg Malinin i Rżysko [96]

tego tę wartość uznaje się za umowną granicę sprężystości przy ściskaniu σ_c^{spr} . W przypadku obciążenia próbki naprężeniem o wartości bezwzględnej wyższej niż granica sprężystości, beton zaczyna wykazywać wyraźnie nieliniowe zachowanie. Dla naprężenia z przedziału $(30\% - 75\%)k_c$, charakteryzującego drugą fazę, obserwuje się początkowo wzrost i łączenie mikropęknięć istniejących w materiale, które następnie przekształcają się w makropęknięcia. Propagacja pęknięć w tej fazie odbywa się w sposób stabilny, w odróżnieniu od następnej fazy, w której niestabilna propagacja pęknięć prowadzi do lokalizacji i zniszczenia próbki. W przypadku gdy próba sterowana jest przemieszczeniowo, beton wykazuje osłabienie odkształceniowe po przekroczeniu punktu $|\varepsilon| > \varepsilon_c^{\text{max}}$, odpowiadającego *maksymalnemu naprężeniu przy ściskaniu* k_c (punkt niestaceczności na wykresie $\sigma - \varepsilon$).

Tabela 1.2. Właściwości mechaniczne przy ściskaniu wybranych materiałów konstrukcyjnych, wg Jakubowicz i Orłoś [72], Niezgodziński i Niezgodziński [106]

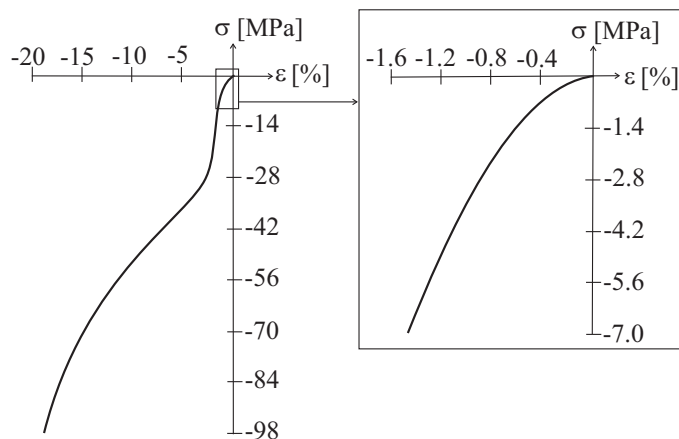
Material	k_t [MPa]	E [GPa]	ν [-]	k_c [MPa]	$z = \frac{k_c}{k_t}$ [-]
żeliwo zwykłe		120	0.23-0.27	700-900	5.8-4.5
żeliwo sfer.	200-250	130-160	0.23-0.27	1700-2200	3.7-3.1
sosna*		8-12	0.045-0.065	45	0.5
dąb*		10-20	0.045-0.065	55	0.6
granit		13-61		160-240	
beton zwykły		18-43	0.16-0.18	7.2	7.2
bakelit		2-3	0.47	80-100	4-3.3

* właściwości materiałów drewnianych podano w kierunku wzdłuż włókien



Rysunek 1.5. Umowny wykres rozciągania i ściskania betonu, wg Pijaudier-Cabot i Mazars [116]

Obok betonów i materiałów skałopodobnych, charakteryzujących się niewielką wytrzymałością na rozciąganie, istnieje szeroka klasa materiałów mających niemal zerową wytrzymałość na rozciąganie. Są to generalnie wszystkie *materiały sypkie*, takie jak grunty, skały w stanie rozdrobnionym, ale również proszki stosowane w technice. Próba ściskania próbki z materiału sypkiego przeprowadzana jest w warunkach *próby edometrycznej*, tzn. przy eliminacji rozszerzalności bocznej. Na rys. 1.6 pokazano umowny wykres ściskania rów-



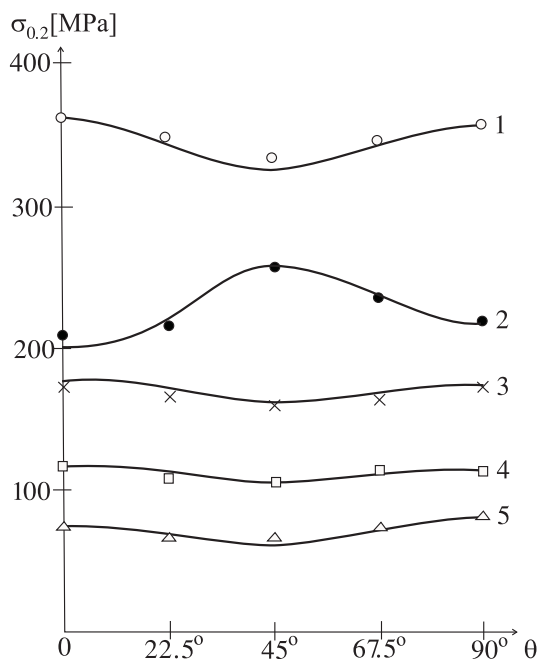
Rysunek 1.6. Umowny wykres ściskania piasku w warunkach zablokowanej rozszerzalności bocznej, wg Lambe [87]

nomiennie uziarnionego piasku kwarcowego. Na wykresie dają się wyróżnić trzy przedziały. Przy ściskaniu wywołanym naprężeniem nieprzekraczającym wartości około 28 MPa krzywa zależności $\sigma - \varepsilon$ jest wypukła. Wzrostowi naprężenia towarzyszy wówczas wzrost sztywności, co nazywamy *procesem konsolidacji* (zagęszczania). Począwszy od około 28 MPa, krzywa $\sigma - \varepsilon$ zmienia krzywiznę (punkt przegięcia) jako efekt pęknięcia ziaren piasku, powodującego jeszcze większe ich zagęszczenie. Jednocześnie pękaniu ziaren piasku towarzyszy zwiększenie ich liczby, co prowadzi do zmniejszenia się przeciętnej wartości siły na styku ziaren, a w konsekwencji do dalszego wzrostu sztywności materiału.

1.3. Anizotropia

Podstawowe właściwości mechaniczne materiałów wyznaczone są na podstawie odpowiednich eksperymentów przeprowadzanych na próbkach wyciętych z badanego materiału. Najczęściej ani miejsce, ani kierunek pobrania próbki nie wpływają na badane właściwości mechaniczne. W takim przypadku mówimy, że badany materiał jest *jednorodny* i *izotropowy* (ang. *homogeneous* i *isotropic materials*). Jednorodność i izotropowość są cechami charakterystycznymi dla materiałów polikrystalicznych, w których pojedyncze kryształy, wykazujące wewnątrz ziaren silne właściwości różnokierunkowe, są ułożone w sposób przypadkowy. Częściowe przywrócenie właściwości *anizotropowych* (gr. *ànìsòs* nierówny i *tròpos* kierunek) zachodzi podczas niektórych procesów techno-

logicznych, jak kucie, walcowanie lub prasowanie, które mogą nadać większości ziaren ukierunkowaną orientację. W wyniku takiego procesu materiał zaczyna wykazywać inną wartość umownej granicy plastyczności na rozciąganie wzdłuż kierunku walcowania niż w kierunku do niego poprzecznym (rys. 1.7).



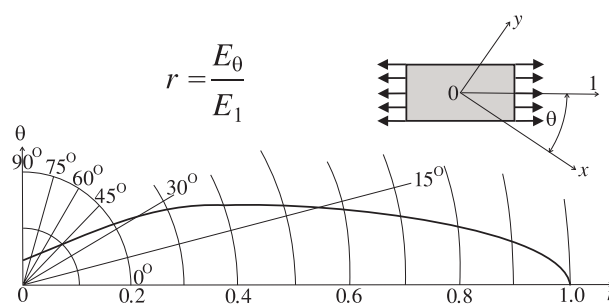
Rysunek 1.7. Zależność umownej granicy plastyczności od kąta pobrania próbki względem kierunku walcowania (por. rys. 1.8): 1 – stal OH18N9T, 2 – mosiądz Ł62, 3 – stal 08KP, 4 – stop aluminium-magnez AMG6M, 5 – aluminium AMcAM, wg Malinin i Rżysko [96]

Właściwości mechaniczne wybranych materiałów anizotropowych zestawiono w tab. 1.3. Wykazują one cechy *ortotropii materiałowej* (gr. *orthòs* prosty i *tròpos* kierunek), polegającej na istnieniu trzech wzajemnie prostopadłych, wyróżnionych osi materialnych, takich że rozciąganie bądź ściskanie, w tych kierunkach nie wywołuje deformacji postaciowej, co znacznie upraszcza opis konstytutywny (por. szerzej, rozdz. 11).

Przykładem materiału naturalnego wykazującego właściwości niejednorodne i anizotropowe jest *drewno*. Próbka pobrana wzdłuż włókien (kierunek 1) ma zupełnie inne właściwości od próbki wyciętej w poprzek włókien (kierunek 2), co zilustrowano na wykresie zależności kierunkowego modułu sprężystości E_θ od kąta θ (rys. 1.8).

Tabela 1.3. Właściwości mechaniczne wybranych materiałów ortotropowych, wg Malinin i Rżysko [96]

Materiał	Granice plastyczności			Współczynniki Lankforda		
	k_x [MPa]	k_y [MPa]	k_z [MPa]	$\frac{d\varepsilon_y^p}{d\varepsilon_x^p}$	$\frac{d\varepsilon_y^p}{d\varepsilon_z^p}$	$\frac{d\varepsilon_x^p}{d\varepsilon_z^p}$
stop tytanu OTCz	490	520	800	0.750	3.00	5.25
stop tytanu TC5	640	671	1020	0.774	3.42	5.70
dural D16	275	297	320	0.532	1.14	1.64
mosiądz Ł62	950	105	120	0.550	1.22	2.83



Rysunek 1.8. Zależność modułu sprężystości od kąta pobrania próbki dla drewna sosnowego, wg Lekhnitskii [89]

Poniżej, w tab. 1.4, podano wartości stałych materiałowych czterech typów sklejki:

- trójwarstwowa sklejka brzozowa klejona bakielitem
- sklejka pierwszego gatunku BS-1 o siedmiu warstwach okleinowych i grubości arkusza 8 mm
- sklejka klejona bekielitem BFS o siedmiu warstwach okleinowych i grubości arkusza 7 mm
- sklejka typu FSF

Moduły E_1, E_2 odpowiadają rozciąganiu wzdłuż kierunków głównych (wzdłuż włókien oraz w kierunku do niego prostym), natomiast moduł E_{45° odpowiada rozciąganiu pod kątem 45° do kierunków głównych.

Tabela 1.4. Stałe materiałowe sklejk, wg Lekhnitskii [89]

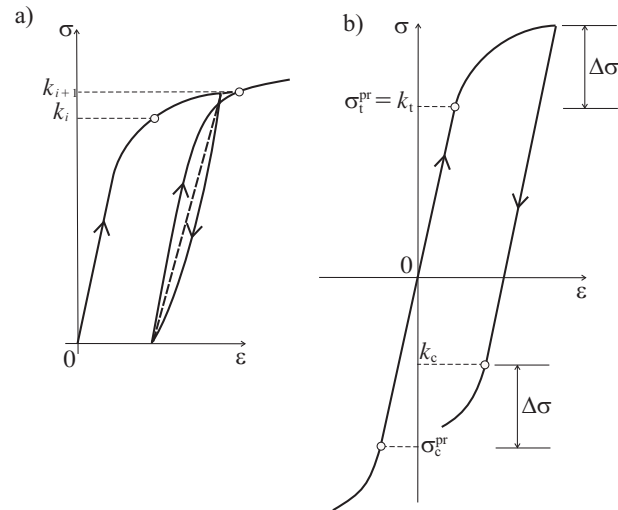
Stała materiałowa	Nazwa lub gatunek sklejki			
	sklejka brzozowa	BS-1 grade 1	BFS	FSF
$E_1 \times 10^{-4}$ MPa	1.20	1.10	1.48	1.09
$E_2 \times 10^{-4}$ MPa	0.60	0.85	1.00	0.87
$E_{45^\circ} \times 10^{-4}$ MPa	0.24	0.30	0.44	0.28
$G \times 10^{-4}$ MPa	0.07	0.09	0.135	0.079
ν_1	0.071	0.076	0.088	0.174
ν_2	0.036	0.060	0.062	0.038

1.4. Cykliczna próba rozciągania oraz ściskania

Próba rozciągania powtarzana wielokrotnie, ujawnia istnienie zjawiska *Gerstnera* (rys. 1.9a). Polega ono na podwyższaniu granicy plastyczności, towarzyszącemu wtórnemu obciążaniu k_{i+1} , w stosunku do granicy plastyczności przy obciążeniu pierwotnym k_i . Ponadto, założenie o pokrywaniu się ścieżek odciążenia i powtórnego obciążenia jest tylko przybliżeniem (linia przerywana), gdyż w rzeczywistości mamy do czynienia z pojawieniem się pętli histerezy.

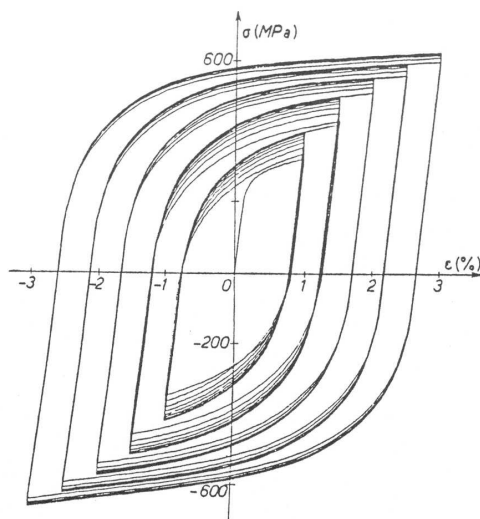
W przypadku próby przeprowadzonej w sposób przeciwwrotny, to znaczy gdy wtórne obciążanie jest ściskaniem, obserwowane jest zjawisko odwrotne, polegające na obniżaniu granicy proporcjonalności po stronie przeciwnej (rys. 1.9b), zwane *efektem Bauschingera*. Na podstawie badań metalograficznych efekt Bauschingera jest tłumaczony uplastycznieniem na skutek obciążenia tylko pewnej części ziaren w materiale, podczas gdy inne ziarna odkształcają się nadal sprężysto. Po odciążeniu, pomiędzy oboma systemami ziaren wytwarza się nowy, samozrównoważony układ oddziaływań, w którym ziarna uplastycznione są ściskane, zaś ziarna sprężyste rozciągane. Przy powtórnym obciążeniu, ale przeciwnego znaku, ziarna ściskane w pierwszej kolejności ulegają uplastycznieniu, co makroskopowo odpowiada zmniejszeniu wtórnej granicy proporcjonalności.

Na rys. 1.10 przedstawiono, wg. Chaboche i inni [19], wyniki prób przy obciążeniu cyklicznym, jednoosiowego rozciągania/ściskania, próbki ze stali nierdzewnej 316L, przy ustalonych poziomach amplitudy cykli odkształceniowych: $\Delta\varepsilon = \pm 0.01, \pm 0.015, \pm 0.02, \pm 0.025, \pm 0.03$. Dla każdego z poziomów obserwujemy zjawisko nieliniowego wzmocnienia plastycznego, zmierzającego do osiągnięcia stanu nasycenia, takiego że przy dalszym wzroście liczby cy-



Rysunek 1.9. Ilustracja efektów: a) Gerstnera, b) Bauschingera

kli $n_1 \rightarrow \infty$, subpętla histerezy nie ulega zmianie. W następnym kroku, przy powiększonej amplitudzie stałego odkształcenia $\Delta\varepsilon_{n+1}$, rozpoczyna się ponowny proces nieliniowego wzmocnienia, znów prowadzący do nowego stanu nasycenia, przy $n_2 \rightarrow \infty$. W przeprowadzonym teście, dla każdego poziomu amplitudy obserwowano osiągnięcie subpętli nasycenia po niewielkiej liczbie (kilkunastu) cykli. Nowsze badania, wykonane np. przez Dufailly i Lemaitre'a [40], pokazały jednak, że przy większej liczbie cykli, np. rzędu kilkuset, na tym samym poziomie amplitudy odkształcenia obserwuje się tzw. *zmęczenie niskocyklowe*, skutkujące asymetryczną deformacją pętli ustalonej (por. podrozdział 1.7).



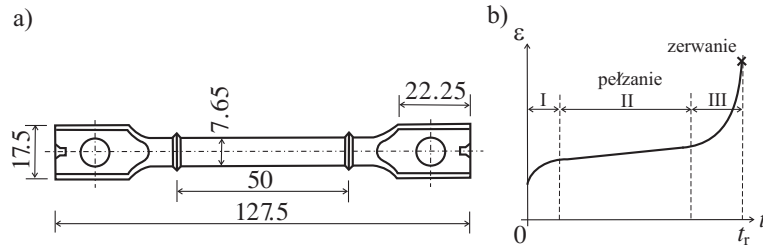
Rysunek 1.10. Próba cyklicznego rozciągania-ściskania przy 5 różnych poziomach obciążenia dla stali nierdzewnej 316L w temperaturze pokojowej, wg Chaboche i inni [19]

1.5. Próby pełzania, relaksacji z uwzględnieniem rozwoju uszkodzeń

Statyczna próba pełzania przeprowadzana w temperaturze pokojowej (ok. 20°C) ujawnia występowanie odkształceń powoli narastających w czasie, w przypadku niektórych materiałów, jak np. ołów, aluminium czy tworzywa sztuczne, pomimo że naprężenie pozostaje znacznie poniżej granicy plastyczności. Zjawisko to nazywamy *pełzaniem materiału*. Dla stali zjawisko pełzania zaczyna być obserwowane już w temperaturach powyżej 250°C. Próba pełzania przeprowadzana jest na specjalnych próbkach cylindrycznych, mocowanych w maszynie wytrzymałościowej, zwanej pełzarką, i umieszczonych w komorze zapewniającej utrzymanie stałej temperatury (rys. 1.11a).

W czasie próby pełzania dają się zazwyczaj wyróżnić trzy okresy (rys. 1.11b). W pierwszym okresie, nazywanym *pełzaniem pierwszorzędowym* (ang. *primary creep*), prędkość pełzania maleje w miarę upływu czasu. W drugim okresie, nazywanym *pełzaniem drugorzędowym* lub *ustalonym* (ang. *secondary*

lub *stationary creep*), prędkość pełzania jest ustalona. Natomiast w trzecim



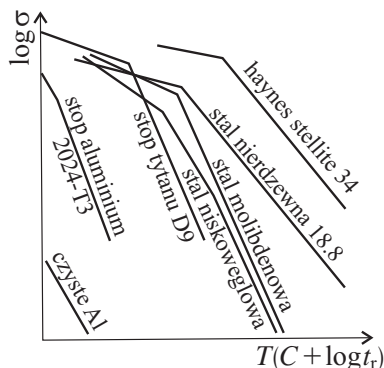
Rysunek 1.11. a) próbka Kowalewskiego [78] i Hayhursta [59] oraz b) schematyczny wykres próby pełzania przy stałym naprężeniu

okresie, określanym mianem *pełzania trzeciorzędowego* (ang. *tertiary creep*), prędkość pełzania gwałtownie wzrasta i kończy się zerwaniem próbki w czasie t_r . Zerwanie próbki poddanej próbie pełzania może być poprzedzone powstaniem szyjki (ang. *ductile rupture*) bądź może nastąpić w sposób kruchy, bez efektu szyjkowania (ang. *brittle rupture*). W pierwszym przypadku pękanie ma charakter międzykrystaliczny, w odróżnieniu od drugiego przypadku, gdy jego charakter jest wewnątrzkrystaliczny. Pękanie międzykrystaliczne jest typowe dla metali polikrystalicznych, pracujących w niskich temperaturach i przy dużych prędkościach odkształcenia. Natomiast pękanie wewnątrzkrystaliczne jest charakterystyczne dla metali polikrystalicznych, pracujących w wysokich temperaturach przy niewielkich prędkościach odkształcenia. Częstość przypadkiem jest także pękanie typu mieszanego, obserwowane w temperaturach pośrednich pomiędzy pękaniami między- i wewnątrzkrystalicznymi.

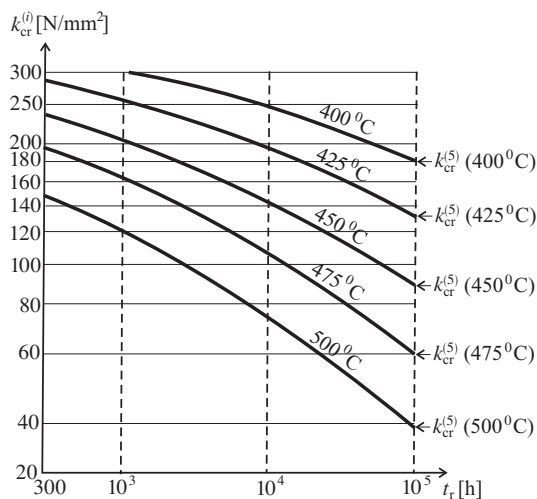
Larson i Miller [86] wprowadzili pojęcie *parametru temperaturowo-czasowego* (*parametr Larsona–Millera*), $P^{LM} = T(C + \log t_r)$, w którym t_r oznacza czas do pęknięcia (np. 10^3 h, lub 10^5 h), a T – temperaturę bezwzględną. Większość materiałów wykazuje obecność powyższych dwóch mechanizmów pęknięcia w warunkach pełzania ciągłego lub kruchego, jak pokazano na tzw. *uniwersalnych krzywych trwałości* $f(\sigma, t_r, T) = \text{const}$, rys. 1.12, wg Penny i Marriott [114].

Nowsze badania pełzania przeprowadzone na stalach stopowych węglowo-manganowych w szerokim przedziale wysokich temperatur, $400^\circ - 600^\circ\text{C}$, wskazują raczej na ciągłą zmianę charakteru krzywych wytrzymałości na pełzanie $k_{cr}^{(m)}$, rys. 1.13.

Wykresy pełzania stali nierdzewnych pokazano na rys. 1.14. Pierwszy z nich ilustruje wpływ stałego poziomu naprężenia na przebieg procesu pełzania w ustalonej temperaturze 600°C . Pokazano również czasy zniszczenia t_{ri}



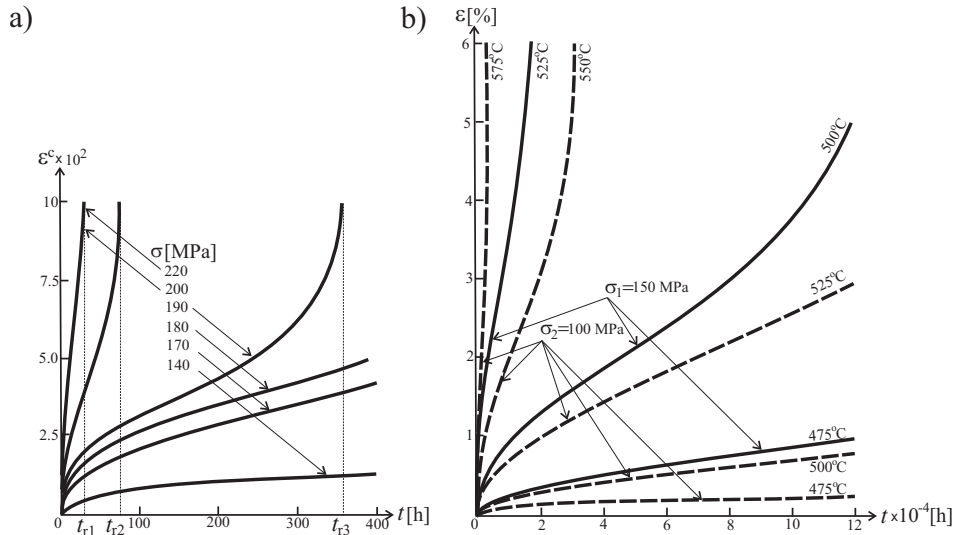
Rysunek 1.12. Uniwersalny parametr temperaturowo–czasowy Larsona–Millera dla różnych materiałów metalicznych, wg Penny i Marriott [114]



Rysunek 1.13. Wykresy wytrzymałości na pełzanie $k_{cr}^{(m)}$ stali węglowo–manganowej, wg Townley [154]

(dla $\varepsilon_i^c \rightarrow \infty$), przy trzech najwyższych poziomach naprężenia σ_i : 220 MPa, 200 MPa, 190 MPa, $t_{r1} < t_{r2} < t_{r3} \dots$, (rys. 1.14a).

Drugi (rys. 1.14b) przedstawia jednoczesny wpływ poziomu naprężenia i temperatury na przebieg procesu pełzania stali stopowej. Podkreślmy, że zależnie od warunków próby (poziom naprężenia, temperatura), wykresy wykazują bądź to pełną krzywą pełzania, bądź też kończą się w obszarze pełzania ustalonego. Zwróćmy uwagę, że podane tutaj stałe nie mogą być bezpiecz-

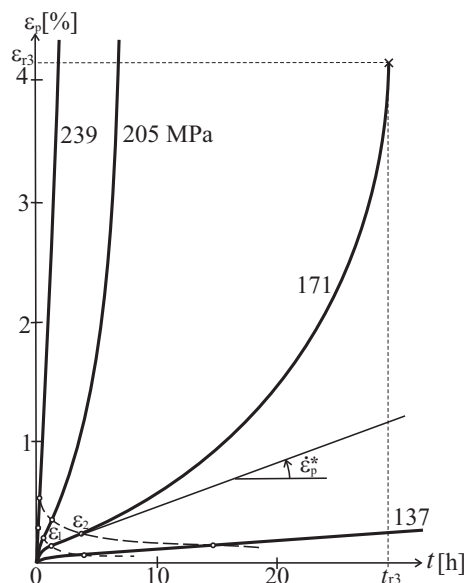


Rysunek 1.14. Wpływ naprężenia oraz temperatury na pełzanie stali nierdzewnych: a) krzywe pełzania stali nierdzewnej EI 756 w temperaturze $T = 600^{\circ}\text{C}$, wg Boikov [11], oraz b) wpływ temperatury na pełzanie stali chromowej 9Cr1Mo, wg Townley [154]

nie użytkowane w temperaturach bliskich 600°C , przy których nieznacznemu wzrostowi temperatury towarzyszy gwałtowne skrócenie czasu zniszczenia t_r . W przypadku superstopów Inconel IN100 (rys. 1.15), próby pełzania do zniszczenia prowadzono w wyższej temperaturze 1000°C , uzyskując czasy do zniszczenia w przedziale od kilku do kilkudziesięciu godzin.

Wprowadźmy za Odqvistem [109] dwie podstawowe stałe opisu procesu pełzania:

1. *Oporność na pełzanie* lub granica pełzania (ang. *creep resistance*) $k_{cx}^{(m)}$, która określa poziom naprężenia potrzebny do wywołania odkształcenia nominalnego pełzania, o wartości $x\%$, np: 0.1%, 0.2%, 0.5%, 1%, 2%, 5% w czasie 10^mh ,
2. *Naprężenie niszczące* w określonym czasie 10^mh , lub *wytrzymałość na pełzanie* (ang. *rupture strength*) $k_{cr}^{(m)}$, które określa poziom naprężenia potrzebny do wywołania zniszczenia w czasie 10^mh , np. 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5h .



Rysunek 1.15. Pełzanie superstopu Inconel IN 100 w temperaturze $T = 1000^{\circ}\text{C}$, przy różnych poziomach naprężenia, wg Lemaitre i Chaboche [90]

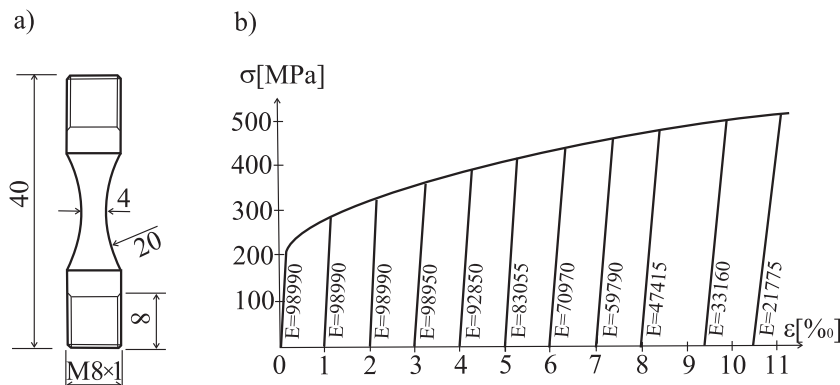
W tab. 1.5 zestawiono wartości *odporności na pełzanie* $k_{c0.1}^{(3)}$, dla różnych materiałów metalicznych, w funkcji temperatury.

Tabela 1.5. Wartości naprężenia wywołującego odkształcenie 0.1% po 10^3h dla wybranych materiałów metalicznych, wg Finnie i Heller [43]

Material	Temperatura $^{\circ}\text{C}$	$k_{c0.1}^{(3)}$ [MPa]
stop aluminiowo-miedziowy 4.25% Cu, 0.63% Mn, 0.44% Mg, 0.52% Fe, 0.25% Si	150 250 350	154.6 40.1 105.5
stop aluminiowo-krzemowy Si 13, 18, Ni 3.08, Cu 2.96, Mg 1.04, Fe 0.53	205 315	61.9 6.46
miedź elektrolityczna	205	47.2
miedź odtleniona	205	144.2
stop miedziowo-niklowy 20% Ni, 5.08% Zn, 0.69% Mn	315	195.5

Material	Temperatura °C	$k_{\epsilon 0.1}^{(3)}$ [MPa]
stop miedziowo-cynkowy 5.99% Sn, 5.10% Zn, 2.33% Pb, 0.23% Ni, 0.06% Fe	260	70.3
stop miedziowo-cynkowy 96.43% Cu, 0.05% Pb, 0.01% Fe	149 205 260	352 24.6 4.92
stal węglowa 0.15% C, 0.46% Mo, 0.28% Si	427 538 650	121 23.2 3.8
stal chromowa 0.10% C, 5.09% Cr, 0.55% Mo, 0.45% Mn, 0.18% Si	483 538 594 650	106.8 71 41.2 19.7
stal molibdenowa 0.22% C, 1.06% Mo, 0.50% Mn, 0.13% Si	427 483 538	196.9 196.9 146.2
stal niklowa 0.36% C, 1.19% Ni, 1.19% Ni, 0.58% Mn, 0.51% Cr, 0.51% Mo, 0.22% Si	455 538 594 650	281 86.5 25.3 11.3
ołów	43.4	2.25
stop magnezowy 3% Al, 1% Zn stop niklowy 28.46% Cu, 1.24% Fe, 0.94% Mn, 0.18% C, 0.10% Si	150 427 483 538 594 650	34.5 221 211 161.6 9.1 3.2
stop cynkowy 0.3% Cd, 0.3% Pb	20 40 60	71 56.25 44.3
stop cynkowy 0.4% Cd, 0.4% Pb	20 40 60	108.2 86.1 56.3

Procesowi pełzania towarzyszy powstawanie i rozwój licznych mikropęknięć i mikropustek wewnątrz materiału, osłabiających jego globalną sztywność (rys. 1.16). Zjawisko to jest szczególnie dobrze widoczne w przypadku analizy spa-



Rysunek 1.16. Badanie rozwoju mikrouszkodzeń w próbie pełzania miedzi elektrolitycznej: a) próbka klepsydryczna, wg Socha [144], b) spadek modułu sprężystości, wg Lemaitre [91]

dku wartości modułu sprężystości, obserwowanego podczas kolejnych odciażeń małej próbki klepsydrycznej, zapewniającej koncentrację naprężenia w jej najwęższym przekroju.

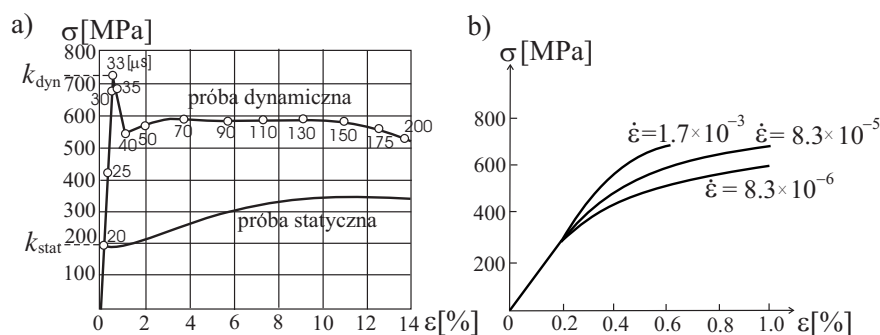
Na rysunkach cytowanych przez Lemaitre [91] za Dufailly [40] obserwowany spadek modułu sprężystości w próbce miedzianej, w temperaturze pokojowej jest bardzo wyraźny, poczynając od $E \cong 100$ GPa do $\tilde{E} \cong 22$ GPa. Efektywny moduł sprężystości Younga \tilde{E} jest, w najprostszym przypadku, funkcją parametru uszkodzenia D , $\tilde{E}(D)$. Zmienna stanu uszkodzenia D (skalar) bądź tensor uszkodzenia \mathbf{D} (tensor drugiego rzędu) są podstawowymi zmiennymi kontynualnej mechaniki uszkodzeń (ang. CDM, *continuum damage mechanics*) i będą szerzej omówione w dalszych rozdziałach.

1.6. Wpływ warunków przeprowadzenia próby wytrzymałościowej

Omówione powyżej statyczne próby rozciągania/ściskania przeprowadza się w sposób quasistatyczny, to znaczy zaniehbując wpływ prędkości deformacji, która na zwykłych maszynach wytrzymałościowych, przy procesie sterowanym hydraulicznie, waha się w granicach $10^{-5} \cong 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ (por. Malinin i Rżysko [96]). W istocie prędkość deformacji może zasadniczo zmienić krzywą rozciągania/ściskania, co można zbadać za pomocą maszyn wytrzymałościowych ze sterowaniem kinematycznym (np. typu Instron lub MTS). Liczne badania

potwierdzają, jak istotna jest ta zależność.

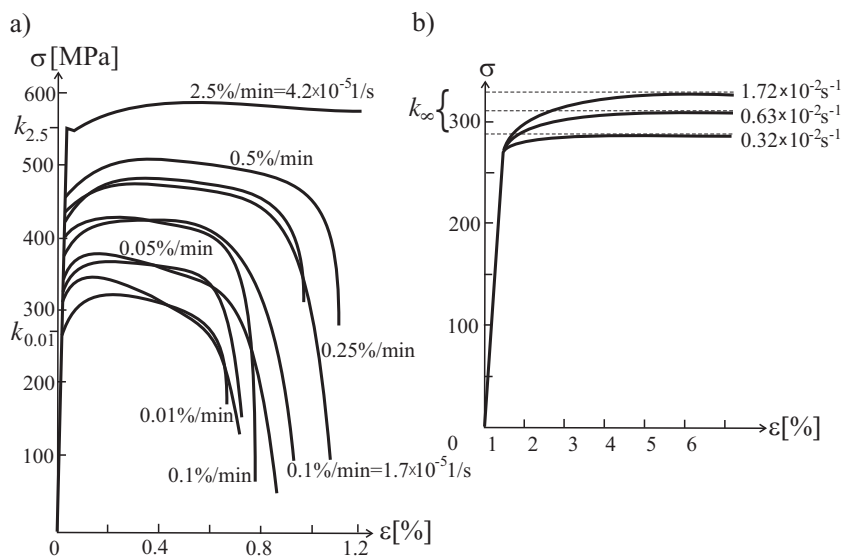
Na rys. 1.17a przedstawiono porównanie prób *quasi-statycznego* i *dynamicznego rozciągania* stali niskowęglowej. Wykresy te różnią się zasadniczo jeśli chodzi o początkową granicę plastyczności w próbie statycznej $k_{\text{stat}} \cong 200$ MPa i dynamicznej $k_{\text{dyn}} \cong 730$ MPa. Również dalszy przebieg procesu plastycznego jest odmienny: w próbie statycznej wykazuje monotoniczne wzmocnienie plastyczne o charakterze asymptotycznym, natomiast w próbie dynamicznej obserwujemy początkowo fazę osłabienia, której towarzyszy spadek naprężenia do ok. 550 MPa, a następnie fazę niewielkiego wzmocnienia. Prędkość rozciągania nie ma zasadniczego wpływu na początkowy moduł sprężystości, co potwierdzają również wykresy dla stopu niklu, rys. 1.17b.



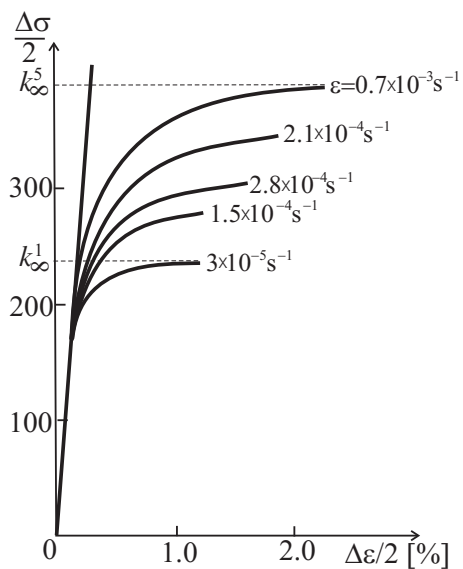
Rysunek 1.17. a) Porównanie statycznego lub dynamicznego wykresu rozciągania stali niskowęglowej, wg Harding i inni [56], b) wpływ prędkości rozciągania na wykres $\sigma - \epsilon$ stopu na bazie niklu B1900+Hf, w temperaturze 871°C, wg Chan i inni [22]

Na rys. 1.18 pokazano, za Lemaitre i Chaboche [90], wyniki prób rozciągania stopu Udimet 700 w podwyższonej temperaturze 927°C, w szerokim przedziale prędkości rozciągania od $1.7 \times 10^{-6} \text{s}^{-1}$ do $4.2 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$. Z wyjątkiem próby dynamicznej (2.5%/min), wykresy pokazują długi okres osłabienia, poprzedzający zerwanie, przy jednoczesnym wzroście początkowej granicy plastyczności, od wartości około $k_{0.01} \cong 250$ MPa, przy najmniejszej prędkości $\dot{\epsilon} = 0.01\%/min$, do około $k_{2.5} \cong 550$ MPa, przy próbie dynamicznej $\dot{\epsilon} = 2.5\%/min$. Z kolei dla stopu AU4G, w temperaturze 200°C, zmiana początkowej granicy plastyczności jest niewidoczna, natomiast asymptotyczna wartość granicy plastyczności wzrasta, od około $k_{\infty} \cong 280$ MPa, do około $k_{\infty} \cong 330$ MPa, wraz ze wzrostem prędkości deformacji.

Podobne zachowanie wykazuje stal stopowa 316, w temperaturze 705°C, podczas próby cyklicznej, rys. 1.19. Również i tutaj zmiany początkowej gra-



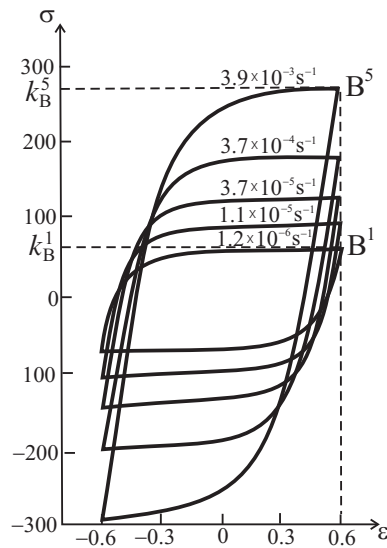
Rysunek 1.18. Wpływ prędkości odkształcenia na krzywe rozciągania: a) Udimet 700, w temperaturze $T = 927^\circ\text{C}$, b) AU4G, w temperaturze $T = 200^\circ\text{C}$, wg Lemaitre i Chaboche [90]



Rysunek 1.19. Wpływ prędkości odkształcenia w stali stopowej 316, w temperaturze 705°C , wg Lemaitre i Chaboche [90]

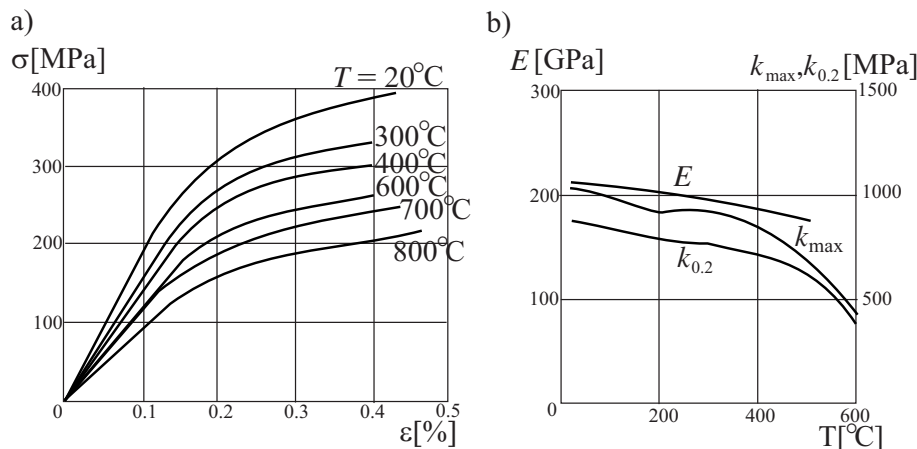
nicy plastyczności są niezauważalne, natomiast wartości asymptotyczne k_{∞}^i rosną niemal dwukrotnie wraz z prędkością $\dot{\varepsilon}$.

Interesujące wyniki ustabilizowanych pętli histerezy w próbach cyklicznych, otrzymane dla stopu Hastalloy X w szerokim zakresie prędkości odkształcenia, w przedziale $\varepsilon = 1.2 \times 10^{-6} \text{s}^{-1} - 3.9 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$, przedstawiono na rys. 1.20. Procesy sterowane kinematycznie, przy odkształceniach: $-0.6 < \varepsilon < 0.6$, wykazują także wyraźną zależność granicy plastyczności w punktach narożnych k_B^i , od prędkości deformacji $\dot{\varepsilon}^i$. Wraz ze wzrostem prędkości odkształcenia, naprężenia te rosną kilkakrotnie, od około 50 MPa do około 260 MPa. Natomiast moduł sprężystości zmienia się nieznacznie, co potwierdzają równoległe odcinki odciążania.



Rysunek 1.20. Wpływ prędkości odkształcenia w Hastalloy X, w temperaturze 871°C, wg Lemaitre i Chaboche [90]

Należy podkreślić, że temperatura przeprowadzenia prób ma zasadniczy wpływ na przebieg wykresów. Wyniki prób dla stali stopowej EI434, wg Malinin i Rżysko [96], w zakresie temperatur $T = 20^\circ\text{C} - 800^\circ\text{C}$, rys. 1.21a, dotyczą tylko przebiegu początkowych części wykresów. Z kolei na rys. 1.21b, przedstawiono zależność modułu sprężystości $E(T)$ i początkowej umownej granicy plastyczności $k_{0.2}(T)$ od temperatury, dla stali stopowej 34HN3M, w przedziale temperatur $T = 20^\circ\text{C} - 600^\circ\text{C}$. Spadek mechanicznych właściwości stali, wraz ze wzrostem temperatury, jest wyraźnie widoczny.

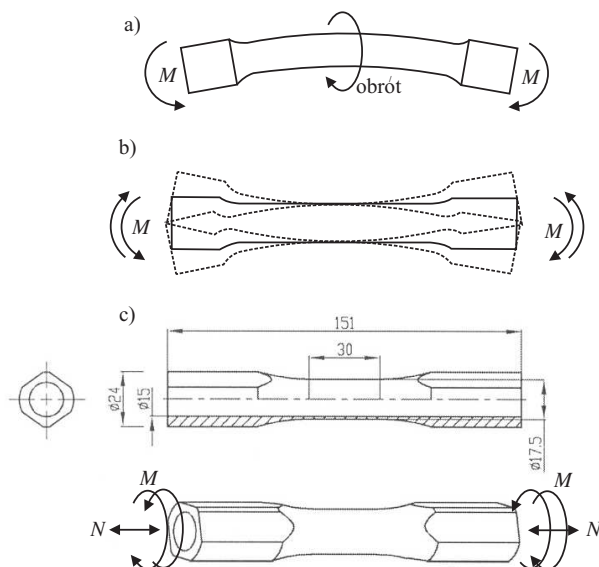


Rysunek 1.21. Efekt temperatury w stali EI434 oraz 34HN3M, wg Malinin i Rżysko [96]

1.7. Zmęczenie nisko- i wysokocyklowe

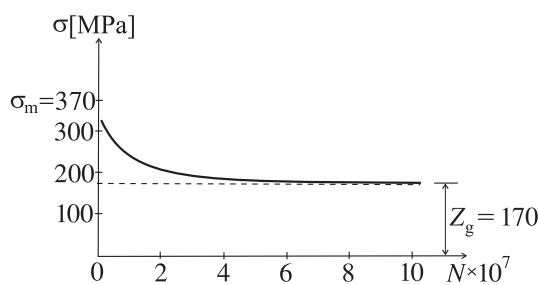
Zmęczenie materiału jest zjawiskiem nierozłącznie związanym z obciążeniem działającym dynamicznie i powtarzającym się cyklicznie dużą liczbę razy. Zniszczenie pojawia się w postaci nagłego pęknięcia, pomimo że bezwzględna wartość naprężenia leży znacznie poniżej wytrzymałości materiału określonej w próbie statycznej. Obniżoną na skutek działania zmiennych w czasie obciążeń wytrzymałość materiału przyjęło się nazywać *wytrzymałością zmęczeniową*.

Próbki tradycyjnie stosowane w próbie zmęczeniowej to: próbka okrągła do próby obrotowo-giętnej oraz próbka płaska do próby obustronnego zginania (rys. 1.22a, b). Próbki są mocowane w maszynach wytrzymałościowych zwanych pulsatorami realizującymi okresowo zmienne cykle obciążenia. W próbie zmęczeniowej obrotowo-giętnej próbka podlega zginaniu momentem działającym w ustalonej płaszczyźnie, wykonując jednocześnie ruch obrotowy względem własnej osi. W próbie zmęczeniowej obustronnego zginania próbka jest naprzemiennie zginana momentem działającym w ustalonej płaszczyźnie. Oba powyższe typy próbek nadają się do wykorzystania jedynie w testach wysokocyklowych, gdy maksymalne wartości naprężenia nie osiągną granicy plastyczności. Wobec tego w przypadku badań zmęczeniowych niskocyklowych, szczególnie w przypadku obciążeń dwuosiowych proporcjonalnych lub nieproporcjonalnych, należy stosować cienkościennie próbki rurkowe zaproponowane przez Szustę i Seweryna [150] (rys 1.22c).



Rysunek 1.22. Próby zmęczeniowe: a) wysokocyklowa obrotowo-giętna, b) wysokocyklowa obustronnego zginania, c) niskocyklowa rozciągania/ściskania ze skręcaniem wg Szusta i Seweryn [150]

W wyniku próby zmęczeniowej określana jest wytrzymałość zmęczeniowa materiału, czyli taka wartość graniczna skrajnego naprężenia cyklicznie zmiennego Z , które może być bezpiecznie powtórzone określoną liczbę cykli (zwykle $N = 2-5 \times 10^7$). Powtarzając próbę zmęczeniową dla różnych poziomów naprężenia i nanosząc uzyskane wyniki w układzie $N - \sigma$, otrzymujemy tzw. wykres Wöhlera. Przykładowy wykres Wöhlera w próbie na zginanie obustronne, uzyskany dla stali St3, pokazano na rys. 1.23.



Rysunek 1.23. Wykres Wöhlera na zginanie obustronne stali St3, wg Niezgodziński i Niezgodziński [106]

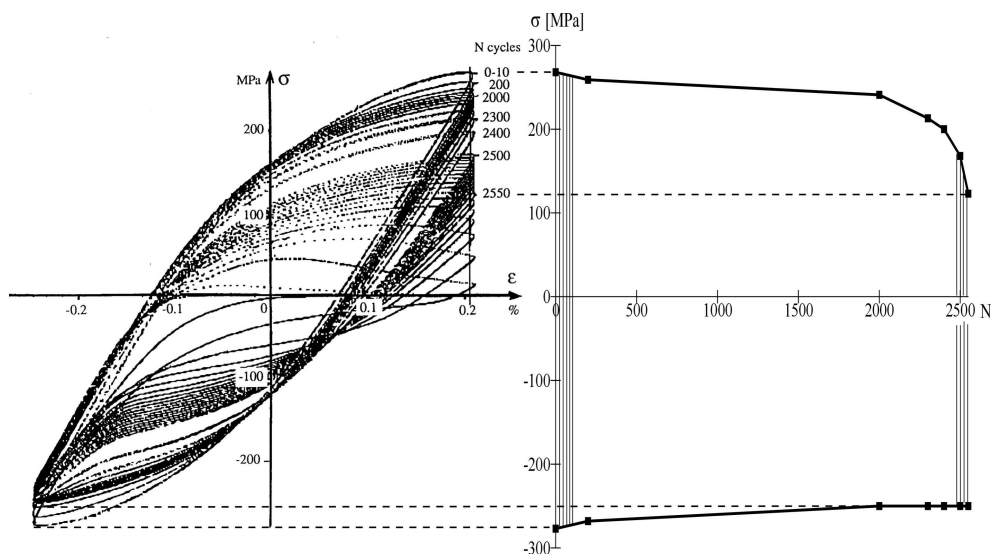
Z wykresu widać, że wykres Wöhlera zbliża się do asymptoty poziomej o rzędnej $Z = 170$ MPa po $N = 10^7$ cyklach, co praktycznie oznacza, że przy poziomie naprężenia niższym od Z próbka nigdy nie ulegnie pęknięciu. Analogiczne wykresy zmęczeniowe można zbudować dla takich materiałów jak stal, żeliwo, miedź, mosiądz czy brąz. Natomiast odrębną grupę materiałów stanowią aluminium i jego stopy, tworzywa sztuczne itp., nie wykazujące poziomej asymptoty, a zatem wymagające oszacowania wytrzymałości zmęczeniowej na ograniczoną liczbę cykli.

Wytrzymałość zmęczeniowa przy zginaniu obustronnym dla wybranych materiałów konstrukcyjnych została zestawiona w tabeli 1.6.

Tabela 1.6. Wytrzymałość zmęczeniowa przy zginaniu obustronnym dla wybranych materiałów konstrukcyjnych, wg Niezgodziński i Niezgodziński [106]

Materiał	Stal	Staliwo	Żeliwo	Brązy i stopy lekkie
	$(0.36-0.58) \sigma_m$	$(0.3-0.45) \sigma_m$	$(0.35-0.6) \sigma_m$	$(0.3-0.4) \sigma_m$

Nowsze wyniki badań w zakresie zmęczenia niskocyklowego stali stopowej 316L przeprowadzone przez Dufailly [40] w temperaturze pokojowej pokazano na rys. 1.24. Materiał poddany cyklom o stałej amplitudzie odkształcenia wykazuje równoczesne wzmocnienie plastyczne podczas każdego z cykli wraz z towarzyszącym mu osłabieniem z cyklu na cykl wywołanym narastającym uszkodzeniem. Spadek amplitudy naprężenia oraz modułu sprężystości wykazuje silny efekt *unilateralny*, co jest widoczne na przykładzie wyraźnej asymetrii zakresu rozciągania i ściskania. Szczegółowa analiza kolejnych pętli odkształcenie–naprężenie ujawnia istnienie trzech faz procesu osłabienia towarzyszących wzrostowi uszkodzeń. W pierwszej fazie ($0 < N < 2000$ cykli) uszkodzenia rozwijają się w taki sposób, że odpowiada im identyczny spadek amplitudy naprężenia oraz modułu sprężystości po stronie rozciągania oraz ściskania. Dla wyższej liczby cykli ($2000 < N < 2400$ cykli) aktywowany zostaje drugi mechanizm unilateralnych uszkodzeń, w którym spadek amplitudy naprężenia oraz modułu sprężystości przebiega szybciej po stronie rozciągania niż ściskania. Wreszcie w trzeciej fazie, bezpośrednio poprzedzającej zerwanie ($2400 < N < 2556$ cykli), pojawia się mechanizm związany z lokalizacją odkształceń plastycznych. Obserwowane jest równoczesne tworzenie się niestacności naprężenia po stronie rozciągania, jak również pojawienie się charakterystycznego punktu przegięcia na części histerezy odpowiadającej zakresowi ściskania.



Rysunek 1.24. Test zmęczenia niskocyklowego stali stopowej 316L, wg Dufailly i Lemaitre [40]

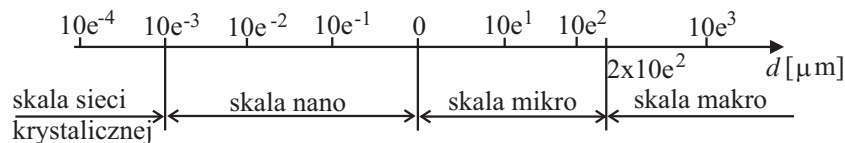
Czytelników pragnących poszerzyć wiedzę z zakresu metod doświadczalnych mechaniki ciała stałego, jak również z zakresu mechaniki skał i gruntów odsyłamy w tym miejscu do obszernych monografii pod powyższymi tytułami przygotowanych pod redakcją odpowiednio W. Szczepińskiego oraz I. Kisiela, a wydanych jako tomy X i VII z serii Mechanika Techniczna [147, 77].

1.8. Klasyfikacja i właściwości materiałów wieloskładnikowych – poziomy analizy

1.8.1. Poziom sieci krystalicznej – intermetaliki

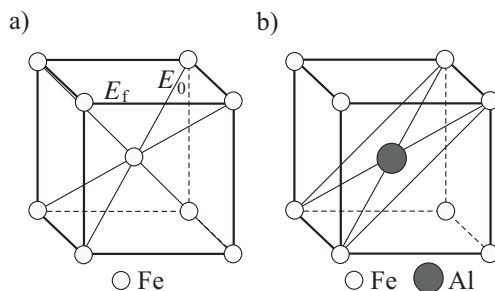
W przypadku materiałów dwu- lub więcej składnikowych, konieczne jest rozróżnienie właściwości i cech symetrii składników od właściwości i symetrii kompozytu. Zależy to od poziomu analizy i obserwacji, określonych w sposób umowny za pomocą skal wymiarowych, jak przedstawiono schematycznie na rys. 1.25.

Na *poziomie sieci krystalicznej* (bądź atomowym) materiały metaliczne i inne materiały krystaliczne cechuje uporządkowana, jednolita struktura przestrzenna sieci krystalicznej, o określonych cechach symetrii. Zilustrowano to na przykładzie sieci kubicznej przestrzennie centrowanej żelaza α -Fe bądź *materiału intermetalicznego* FeAl. Właściwości mechaniczne na poziomie sieci kry-



Rysunek 1.25. Skale wymiarowe dla różnych poziomów obserwacji i analizy, wg Rustichelli i Skrzypek [128]

stalicznej są wyraźnie anizotropowe. W szczególności, np. moduł sprężystości



Rysunek 1.26. Komórka jednostkowa RUC sieci krystalicznej i mikrostruktura: a) α -Fe, b) FeAl, wg Pantelakis i Rustichelli [112]

mierzony w kierunku przekątnej komórki α -Fe wynosi $E_0 = 285$ GPa, natomiast w kierunku jej krawędzi $E_f = 127$ GPa. Cechy anizotropii są zachowane w przypadku *monokryształów* naturalnych bądź specjalnie hodowanych (ang. *single crystals*).

Jednak w przypadku *polikrystalicznych metali* orientacja ziaren jest chaotyczna, w wyniku czego na *poziomie mikro* lub *makro* materiał traci cechy anizotropii, a uśredniony moduł Younga dla żelaza odbiega od wartości E_0 i E_f i wynosi $E = 200$ GPa, niezależnie od kierunku pobrania próbki, co jest cechą *izotropii*.

Szczególną pozycję zajmują *materiały intermetaliczne* (ang. *intermetallic materials*). Materiały intermetaliczne powstają jako związek chemiczny dwóch lub więcej składników w procesie syntezy wysokotemperaturowej, tworząc wspólną strukturę krystaliczną, odmienną od struktury metali składowych, por. rys. 1.26. Wśród materiałów intermetalicznych można wyróżnić materiały oparte na związkach aluminium z innymi metalami (ang. *aluminides*): FeAl, Fe₂Al (*iron aluminides*), NiAl, Ni₃Al (*nickel aluminides*), TiAl, Ti₃Al (*titanium aluminides*) oraz NbAl, NbAl₃ (*niobum aluminides*). Wybrane

Tabela 1.7 Wybrane właściwości mechaniczne intermetalików, wg Rustichelli i Skrzypek [128], za Chrystanthou [29]

Właściwość	Fe ₃ Al (Zr,C)	Fe ₃ Al (Cr,Zr,B)	FeAl (B)	NiAl 1200°C	Ni ₃ Al proszkowany w 950°C	Ni ₃ Al 1250°C	Ti ₃ Al	TiAl	NbAl	NbAl ₃
ρ [kg/m ³]				5430			4100–4700	3700–3900		4540
E [GPa]							100–145	160–180		246
k (20°C) [MPa]	690	450	460	1645	640	540	700–990	400–650	865	
k_T [MPa]				—	760 w 600°C	650	—	—	627 w 649°C	
k^f (20°C) [MPa]	1460	970	650	2536	780	830	800–1140	450–800	915	
k_T^f [MPa]				—	840 w 600°C	1140			750 w 649°C	
ϵ^f (20°C) [%]	13.8	18	5	15	13	23	2–26	1–4	11.8	
ϵ_T^f [%]							10–20	10–60		
$T_{\max(\text{cr})}$ [°C]							760	1000	650	850
$T_{\max(\text{ox})}$ [°C]							650	900		600
H_v [MPa]		do 800		545						

ρ – gęstość, E – moduł Younga, k – granica plastyczności w temperaturze pokojowej, k_T – granica plastyczności w temperaturze podwyższonej, k^f – krańcowa wytrzymałość na rozciąganie, k_T^f – wytrzymałość na rozciąganie w temperaturze podwyższonej, ϵ^f – wydłużenie względne przy pękaniu (kruchość), ϵ_T^f – wydłużenie względne przy pękaniu w podwyższonej temperaturze, $T_{\max(\text{cr})}$ – graniczna temperatura z uwagi na pełzanie, $T_{\max(\text{ox})}$ – graniczna temperatura z uwagi na utlenianie, H_v – twardość

właściwości mechaniczne intermetalików przedstawiono w tab. 1.7, za Chrysanthou [29].

Właściwości materiałów intermetalicznych zależą w dużym stopniu od technologii ich wytwarzania, temperatur proszkowania czy dodatkowych składników. Mówiąc ogólnie, cechuje te materiały wysoki moduł Younga E , wysoka krańcowa wytrzymałość na rozciąganie k^f , także w temperaturach podwyższonych do 700–900°C k_T^f . Dodatek niewielkich ilości aktywnych składników: Zr, Cr, C, B czy Y wpływa korzystnie na końcowe właściwości.

1.8.2. Nanomateriały i nanokompozyty

Zgodnie z powszechnie przyjętą definicją, pod pojęciem *nanomechaniki* rozumiemy wytwarzanie, obróbkę, identyfikację i zastosowanie materiałów, obiektów i elementów o wymiarach w skali nano, rzędu 0.1–100 nm, które charakteryzują się istotnie poprawionymi właściwościami w stosunku do składników.

Nanokompozyty można podzielić na trzy grupy, oparte na sposobie zbrojenia: *nanocząsteczkowe* (ang. *nanoparticles reinforcement*), *warstwowe* (ang. *layered reinforcement*) oraz *włókniste zbrojone nanowłóknami* lub *nanorurkami* (ang. *nanofibers, nanotubes*).

Zbrojenie wyjściowego ceramicznego materiału matrycy nanocząsteczkami innego materiału o rozmiarach w skali nano, np. nanocząsteczkami (nanoproszkiem) SiC, prowadzi do wytworzenia *nanokompozytu cząsteczkowego*, np. Si₃N₄+SiC, lub Al₂O₃+SiC, o właściwościach lepszych niż materiały wyjściowe. Ilustruje to tab. 1.8. Jednak poprawa wytrzymałości i odporności

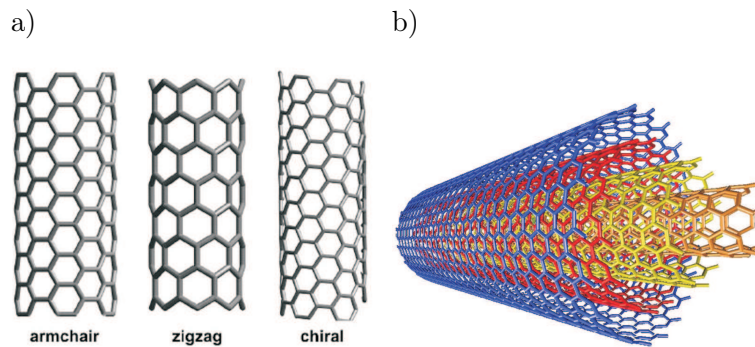
Tabela 1.8. Porównanie wytrzymałości na pękanie (ang. *fracture strength*) kompozytów nanocząsteczkowych z wyjściowymi monolitycznymi ceramikami, wg Boccaccini i in. [9]

Nanokompozyt vs. ceramik	Ceramik Al ₂ O ₃	Al ₂ O ₃ +5SiC nano	Ceramik Si ₃ N ₄	Si ₃ N ₄ +10SiC nano
k^f [MPa]	663	738	864	1203

na pękanie, a także obserwowanej podwyższonej odporności na pełzanie przy rozciąganiu, w zakresie temperatur $T = 1200–1500^\circ\text{C}$, zależy od rozmiaru cząstek *nanoproszku* SiC zazwyczaj < 100 nm, wg innych źródeł 100–500 nm i rozmiaru ziaren kompozytu oraz procesu wytwarzania. Zatem należy ostrożnie podchodzić do rezultatów podawanych przez różnych autorów. Nanokompozyty Al₂O₃+SiC nie wykazują szczególnej orientacji nanocząstek SiC względem

matrycy. Z kolei w nanorurkach $\text{Si}_3\text{N}_4+\text{SiC}$ nanocząstki SiC mogą się obracać w procesie spiekania, prowadząc niekiedy do specyficznej orientacji względem matrycy. Mimo tego, nanokompozyty cząsteczkowe, obserwowane na poziomie mikro (wielkości ziaren w ceramiku Al_2O_3 ocenia się na 6–8 μm , a wielkość klastrów, ang. *clusters*, nano-SiC, ok. 30 μm) zachowują się w sposób izotropowy.

Nanorurki węglowe są włóknami krótkimi o długości rzędu kilku μm i średnicy rzędu nanometrów, < 200 nm. Z kolei *nanorurki węglowe* należą do klasy quasi-jednowymiarowych konstrukcji o średnicy rzędu nanometrów, których właściwości są bardzo zbliżone do *włókien grafitowych*. Przestrzennie po-



Rysunek 1.27. Różne typy nanorurek węglowych pojedynczych oraz wielosłoiennych wg Rustichelli i Skrzypek [128]

włokowa struktura nanorurek węglowych (rys. 1.27) czyni je bardzo lekkimi; średni ciężar właściwy do 1.8 g/cm^3 , w porównaniu z włóknami grafitowymi 2.26 g/cm^3 . Eksperymenty wykonywane na pojedynczych nanorurkach węglowych wskazują, iż jest to jeden z najsztywniejszych materiałów jakie, kiedykolwiek wytworzono. *Moduł Younga* pojedynczej *nanorurki węglowej* w kierunku osiowym wynosi teoretycznie od 1000 GPa do 5000 GPa, podczas gdy jej wytrzymałość na rozciąganie zmienia się od 45 GPa do 100 GPa.

Oszacowane wartości modułu Younga zależą silnie od zastosowanej metody oraz przyjętej do analizy grubości ścianki nanorurki. Według badań Treacy i inni [155] oraz Wong i inni [162], zmierzone wartości modułu Younga w kierunku osiowym, dla pojedynczej nanorurki węglowej, są rzędu od 700 GPa do 1880 GPa. Z drugiej strony, średnia wartość modułu Younga, cytowana przez Ajajana [2], jest rzędu 1800 GPa. Jednak, z uwagi na silną ortotropię nanorurki węglowej, współczynnik ortotropii E_{11}/E_{33} jest w przybliżeniu równy 0.1, porównaj Muc [102].

Zwykle wyróżnia się pojedyncze nanorurki w postaci małych cylindrów z atomów węgla, rys. 1.27a (ang. *single-walled nanotubes* – SWNT) bądź też bardziej złożone struktury zwane wielościennymi nanorurkami, rys. 1.27b (ang. *multi-walled nanotubes* – MWNT), zbudowane z wielu powłok.

Nanorurki węglowe są obecnie często wykorzystywane do zbrojenia nanokompozytów, jednak podstawowa trudność polega na uzyskaniu możliwie jednorodnego rozkładu nanorurek wewnątrz materiału matrycy. Dzięki jednorodnemu rozkładowi przestrzennemu, nanorurki mają większą zdolność absorbowania energii prowadzącej do pęknięcia materiału matrycy (np. ceramicznej czy polimerowej). Z danych literaturowych (Boccaccini [9]) wynika, że pojedyncze nanorurki (SWNT) mają lepszą zdolność zbrojenia kompozytów (np. typu SWNT/alumina) niż wielościenne struktury (MWNT). Jednak MWNTs mają przewagę technologiczno-ekonomiczną. Podkreślić należy, że mechanizmy poprawy właściwości materiałowych (głównie odporności na pęknięcie kruchych matryc ceramicznych czy szklanych) przez zastosowanie nanorurek węglowych nie są jeszcze dobrze zbadane. Również identyfikacja cech symetrii napotyka na trudności eksperymentalne.

1.8.3. Kompozyty na poziomie mikro – mikrokompozyty

Na poziomie mikrostruktury *materiały kompozytowe* lub *mikrokompozyty* powstają w wyniku złożonych procesów technologicznych, prowadzących do wytworzenia z dwóch lub większej liczby różnych składników, nowego materiału o złożonej mikrostrukturze i poprawionych właściwościach fizycznych. Najczęściej mamy do czynienia z kompozytami zbudowanymi na bazie materiałów metalicznych oraz ceramicznych bądź polimerowych.

Tradycyjne, *polikrystaliczne materiały metaliczne*, takie jak: stale węglowe, stale nierdzewne, stopy na bazie aluminium, niklu lub tytanu i inne, charakteryzują się, na ogół, dobrymi właściwościami mechanicznymi, takimi jak: wysoka lub umiarkowana ciągliwość k , wysoka wytrzymałość na rozciąganie k_t^{\max} , dobra odporność na uszkodzenie i pęknięcie. Równocześnie, do wad konwencjonalnych materiałów metalicznych należy zaliczyć: ograniczoną odporność na bardzo wysokie temperatury (np. rzędu 2000–3000 K), niską odporność na pełzanie $k_{cx}^{(m)}$, relatywnie małą odporność na zużycie powierzchniowe (zwłaszcza w podwyższonych temperaturach), złą izolacyjność termiczną (wysoki współczynnik przewodnictwa cieplnego λ), stosunkowo dużą rozszerzalność termiczną (relatywnie wysoki współczynnik rozszerzalności termicznej α), małą odporność na wpływ środowiska (korozja) i utlenianie, wysoką gęstość masy ρ (por. tab. 1.9).

Z kolei różnorodne *materiały ceramiczne*, takie jak: tlenki metali, np. Al_2O_3 , ZrO_2 , TiO_2 ; węgliki, np. SiC , B_4C , TiC , Ti_2C ; azotki, np. TiN , CrN , Cr_2N , WN , MoN , ZrN , i wiele innych, charakteryzują się głównie bardzo wysoką twardością H_v , wysoką wytrzymałością na ściskanie k_c^{\max} , odpornością na zużycie powierzchniowe, wysoką odpornością na podwyższoną temperaturę, dobrą izolacyjnością termiczną (niski współczynnik przewodnictwa cieplnego), relatywnie niskim współczynnikiem rozszerzalności termicznej, dobrą odpornością na utlenianie, niską gęstością masy. Z drugiej strony, wśród wad materiałów ceramicznych można wymienić: znikomą wytrzymałość na rozciąganie $k_t \ll k_c$ (wielokrotnie niższą niż wytrzymałość na ściskanie), kruchość, czyli niską odporność na pękanie (brak ciągliwości), porowatość.

Tabela 1.9. Porównanie cech materiałów metalicznych oraz ceramicznych

Cecha	Polikrystaliczne metale	Ceramiki
ciągliwość σ_0	(umiarkowanie) wysoka	brak
kruchość K_{Ic}, ε^P	niska	wysoka
wytrzymałość na rozciąganie k_{\max}^t	wysoka	niska
wytrzymałość na ściskanie k_{\max}^c	porównywalna z k_{\max}^t	wysoka
gęstość masy ρ	wysoka	niska
porowatość	śladowa	wysoka
moduł Younga E	średni	wysoki
twardość	średnia	bardzo wysoka
odporność na ścieranie	umiarkowana	bardzo wysoka
współczynnik przewodnictwa cieplnego λ	wysoki	niski
współczynnik rozszerzalności termicznej α	dość wysoki	niski
odporność na pełzanie $k_{cx}^{(m)}$ w podwyższonej temperaturze	niska	bardzo wysoka

Powyższe zestawienie właściwości oraz cech polikrystalicznych metali oraz materiałów ceramicznych wskazuje na celowość budowy materiałów kompozytowych metalowo-ceramicznych w taki sposób, aby połączyć dobre mechaniczne właściwości metali z korzystnymi termicznymi właściwościami ceramików, na poziomie mikrostruktury (por. rys. 1.25).

W materiale kompozytowym zazwyczaj wyróżniamy dwie fazy: osnowę (matrycę) o dominującym udziale objętościowym oraz zbrojenie. Wyróżniamy tutaj podstawowe typy: *kompozyt o osnowie metalowej* (ang. *metal matrix composite* – MMC), *kompozyt o osnowie ceramicznej* (ang. *ceramic matrix composite* – CMC), względnie *polimerowej* (ang. *polymer matrix composite* – PMC). W kompozytach typu MMC zbrojenie stanowią z reguły cząstki ceramiczne (ang. *ceramic particles reinforcement*) bądź włókna, natomiast kompozyty typu CMC są zazwyczaj zbrojone włóknami metalicznymi (krótkimi lub długimi) (ang. *ceramic fiber reinforcement*).

Postać i geometria zbrojenia zastosowanego w materiale kompozytowym, w formie mikrocząstek bądź mikrowłókien, ma zasadniczy wpływ na mikrostrukturę kompozytu, a w konsekwencji na jego właściwości i cechy symetrii w skali makro. Można tu wyodrębnić dwa zasadnicze typy kompozytów z uwagi na rodzaj wzmocnienia: *kompozyty mikrocząsteczkowo zbrojone* (ang. *micro particles reinforced composites*) lub *kompozyty zbrojone włóknami* (ang. *fiber reinforced composites*). Kompozyty zbrojone cząsteczkowo na poziomie mikrostruktury cechuje zazwyczaj zachowanie izotropowe na poziomie makro. Z kolei kompozyty zbrojone włóknami (długimi) na poziomie mikro nabierają cech anizotropii na poziomie makro, a w szczególnych przypadkach ortotropii bądź poprzecznej izotropii, jeśli orientacja włókien wykazuje pewien sposób uporządkowania.

Kompozyty cząsteczkowe

W *kompozytach zbrojonych cząsteczkowo* na poziomie mikrostruktury, sztywne cząsteczki ceramiczne są rozmieszczone w możliwie jednorodny sposób w ciągłym materiale metalicznym matrycy, w trakcie procesu fabrykacji. Dla przykładu, matryca na bazie aluminium jest wzmocniana mikrocząstkami Al_2O_3 lub TiB_2 , lub matryca na bazie tytanu jest wzmocniana mikrocząstkami zbrojenia TiC lub TiB . Wielkość cząstek, udział objętościowy i możliwie jednorodny rozkład cząstek w materiale matrycy w skali mikro określa właściwości kompozytu MMC w skali makro.

Wybrane właściwości fizyczne pojedynczych cząstek ceramicznych SiC , B_4C , Al_2O_3 , TiC stosowanych w cząsteczkowo zbrojonych kompozytach typu MMC, przedstawiono w tab. 1.10, za Rödel [127] i Smith [143]. Charakteryzuje je niska gęstość ρ , wysoka sztywność E i wysoka wytrzymałość na ściskanie k_c^f .

Podstawowe właściwości termomechaniczne składników *kompozytów cząsteczkowo zbrojonych metalowo-ceramicznych*: Al_2O_3 na osnowie Ni lub Al, zestawiono w tab. 1.11, gdzie podano moduł Younga E , współczynnik prze-

wodnictwa cieplnego λ , współczynnik rozszerzalności termicznej α , a także ciepło właściwe c i gęstość masy ρ . Z kolei właściwości termomechaniczne

Tabela 1.10. Porównanie wybranych właściwości cząstek ceramicznych dla kompozytów metal/ceramik, wg Rödel [127] i Smith [143]

	ρ [g/cm ³]	E [GPa]	k_c^t [MPa]	λ [W/mK]	α [10 ⁻⁶ /K]
SiC	3.21	430	2800	132	34
B ₄ C	2.52	450	3000	29	50
Al ₂ O ₃	3.92	350	2500	33	6.8
TiC	4.93	345	2500	20.5	7.4

Tabela 1.11. Porównanie właściwości składników kompozytów metal/ceramik (a – Chen i Tong [25], Cho i Shin [26], b – Wang i inni [159])

		E [GPa]	λ [W/mK]	α [10 ⁻⁶ /K]	c [J/kgK]	ρ [g/cm ⁴]
a	Ni	199.5	90.7	13.3	444	8.9
	Al ₂ O ₃	393.0	30.7	8.8	775	3.97
b	Al	73	154	23	963	2.8
	Al ₂ O ₃	380	46	8.5	765	3.96

kompozytu cząsteczkowo zbrojonego typu metal/ceramik (TiC/Ni) lub typu ceramic/ceramik (C/TiC) z węglikiem tytanu TiC na osnowie metalicznej Ni lub ceramicznej SiC, przedstawiono w tab. 1.12. Należy tu nadmienić, nie

Tabela 1.12. Porównanie właściwości składników dwóch kompozytów ceramic/metal TiC–Ni oraz ceramic/ceramik TiC–SiC (a – Wang i inni [160], b – Jin i Paulino [73])

		E [GPa]	λ [W/mK]	α [10 ⁻⁶ /K]	c [J/kgK]	k_c^t [MPa]
a	TiC	320	25.1	7.4	134	230
	Ni	206	90.5	13.3	439.5	332
b	TiC	400	20	7.0	700	
	SiC	400	60	4.0	1000	

wnikając w szczegóły technologiczne, o dwóch odmiennych sposobach wytwarzania kompozytów zbrojonych cząsteczkowo: technologii *ex situ* lub *in situ*.

W pierwszym przypadku, proszek ceramiczny (o odpowiedniej ziarnistości) jest wytwarzany na zewnątrz, a dopiero potem łączony z materiałem matrycy w podwyższonej temperaturze. W drugim przypadku, cząstki ceramiczne powstają jako wynik wysokotemperaturowej syntezy samopropagującej się w materiale matrycy.

Porównanie właściwości kompozytów otrzymanych tymi dwoma sposobami wskazuje na wyższość technologii np. TiB_2/Al (*in situ*) nad TiB_2/Al (*ex situ*), zwłaszcza co do wytrzymałości granicznej k^f , tab. 1.13. Jeszcze lepsze właści-

Tabela 1.13. Właściwości kompozytów metal/ceramik na bazie Al wg Tjong i Ma [153]

	E [GPa]	k [MPa]	k^f [MPa]	ε^f [%]	VHN
Al	70	64	90	21	37
TiB_2/Al (<i>ex situ</i>)	96	121	166	16	85
TiB_2/Al (<i>in situ</i>)	131	235	334	7	110
SiC/Al (<i>ex situ</i>)	–	117-178	200-278	10-11	–
$(\text{Al}_2\text{O}_3+\text{TiB}_2)/\text{Al}$	–	588	618	2	–

wości wytrzymałościowe, aż do $k^f = 618$ MPa, wykazuje kompozyt zbrojony cząsteczkami dwojakiego rodzaju ceramików: Al_2O_3 i jednocześnie TiB_2 oraz Al, jednak w tym przypadku materiał cechuje większa kruchość, $\varepsilon^f = 2\%$. Powyższe uwagi wskazują na znaczenie znajomości technologii wytwarzania kompozytów i jej wpływ na zachowanie materiału w trakcie eksploatacji.

Kompozyty włókniste

Pośród kompozytów zbrojonych włóknami długimi, szczególne miejsce zajmują *kompozyty jednokierunkowo zbrojone* o symetrii ortotropowej – poprzecznie izotropowej.

Przykładowe właściwości mechaniczne i termiczne poprzecznie izotropowych kompozytów, zbrojonych jednokierunkową wiązką włókien, zestawiono w tab. 1.14. Zachowano tutaj handlowe oznaczenia materiałów włókno/matryca, zastosowane w publikacji Herakovich, Aboudi [62].

Tabela 1.14. Właściwości mechaniczne i termiczne jednokierunkowych kompozytów poprzecznie izotropowych (na podstawie Herakovich i Aboudi [62]). Wartości w nawiasach za Tamma i Avila [152]

Material kompozytowy: włókno /matryca	T300/ 5208	Aramid/ Epoxy	Glass/ Epoxy	Boron /Al $V_f = 47\%$	SCS-6/ Ti-15-3	SiC/Al 6061-TO $V_f = 30\%$
1	2	3	4	5	6	7
Gęstość ρ [g/cm ³]	1.54	1.38	2.08	2.65	3.86	–
Moduł osiowy E_{33} [GPa]	132	61.0	43.5	227 (215)	221	171.7
Moduł poprzeczny E_{11} [GPa]	10.8	4.1	11.5	139 (144)	145	99.1
Współczynnik Poissona osiowy ν_{31} [-]	0.24	0.43	0.27	0.24 (0.190)	0.27	0.270
Współczynnik Poisson'a poprzeczny ν_{21} [-]	0.59	0.37	0.40	0.36 (0.290)	0.40	0.290
Moduł ścinania osiowy G_{23} [GPa]	5.65	1.5	3.45	57.6 (57.2)	53.2	41.2
Moduł ścianania poprzeczny G_{12} [GPa]	3.38	1.4	4.12	49.1 (45.9)	51.7	38.5
Wytrzymałość osiowa k_a^{\max} [MPa]	1513	1380	1724	1290	1517	–
Wytrzymałość poprzeczna k_t^{\max} [MPa]	43.4	27.6	41.4	117	317	–
Współczynnik rozszerzalności termicznej osiowy α_{33} [10 ⁻⁶ 1/K]	-0.77	-4	6.48	5.94 (10.61)	6.15	7.43

1	2	3	4	5	6	7
Współczynnik rozszerzalności termicznej poprzecznej α_{11} [$10^{-6}1/K$]	25	57	29	16.6 (17.85)	7.90	20.67

Pierwsze trzy *kompozyty* (typu PMC) oparte są *na osnowie polimerowej* (żywica epoksydowa), zbrojonej włóknami węglowymi (T300), aramidowymi (poliamid typu kevlar) lub szklanymi. Następne trzy *kompozyty* (typu MMC) są oparte *na osnowie metalicznej*, aluminiowej lub tytanowej, zbrojonej włóknami szklanymi (Boron) lub z węgla krzemu (SiC, SCS-6). Kompozyty włókniste na osnowie polimerowej (PMC) mają ograniczone zastosowanie w podwyższonych temperaturach, z uwagi na gwałtowną zmianę właściwości w pobliżu temperatury zmiany struktury T_g oraz wysokie wartości naprężeń reszkowych, wynikłych z dużej rozbieżności współczynników rozszerzalności włókien i matrycy (współczynniki osiowej rozszerzalności termicznej włókien aramidowych lub węglowych mogą przyjmować wartości ujemne). Kompozyty na osnowie metalicznej mogą być stosowane w wyższym przedziale temperatur: do 300°C w przypadku matrycy aluminiowej lub do 800°C w przypadku matrycy tytanowej [152]. Z kolei kompozyty na osnowie ceramicznej znajdują zastosowanie w wyższym zakresie temperatur do 2000°C, a w przypadku zbrojenia włóknami ceramicznymi nawet do 2200°C (np. kompozyty typu węgiel/węgiel).

1.8.4. Struktury kompozytowe na poziomie makro – makrokompozyty

Materiały kompozytowe otrzymywane na poziomie atomowym – nanokompozyty bądź też na poziomie mikrostruktury – mikrokompozyty są, w zamierzeniu, jednorodne w skali makro, o efektywnych właściwościach termomechanicznych zasadniczo różnych od właściwości materiałów składowych. W wielu zastosowaniach technicznych, zwłaszcza w konstrukcjach narażonych na bardzo wysokie temperatury sięgające zakresu 1900°C–2200°C konieczne jest, oprócz optymalnego doboru składu kompozytu, także kształtowanie makrostruktury systemu kompozytowego złożonego z elementów o różnych właściwościach.

Szczególne miejsce zajmują *struktury makrokompozytowe* złożone z dwóch lub więcej warstw materiałów o różnych właściwościach. Z reguły, chodzi o po-

łączenie dobrych właściwości mechanicznych metali z dobrymi właściwościami termicznymi bądź ochronnymi ceramików. W najprostszym rozwiązaniu nakłada się pojedynczą cieką warstwę ceramiczną (ang. *coating*) na materiał podłoża metalicznego (ang. *substrate*), w formie warstwy ochronnej: termicznej albo chroniącej przed zużyciem ciernym, bądź wpływami środowiska (ang. *thermal barrier coatings* TBC, *wear* lub *corrosion barrier coatings*, WBC lub CBC).

Konwencjonalne materiały stosowane na *bariery termiczne* (TBC) to cyrkonia ZrO_2 stabilizowana przy użyciu itru $Y_2O_3-ZrO_2$ (ang. *yttria stabilized zirconia* YSZ), *trójtlenek glinu* Al_2O_3 (ang. *alumina*) oraz mullit ($3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$). Charakteryzują się one niskim *współczynnikiem przewodnictwa cieplnego* w przedziale: $\lambda = 2 \text{ W/mK}$ (YSZ)– 5.8 W/mK (Al_2O_3), w podwyższonej temperaturze $T = 1127^\circ\text{C}$. Z kolei *współczynnik rozszerzalności termicznej* zawiera się w zakresie: $\alpha = 5.7 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (mullit)– $8.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (Al_2O_3)– $10.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (YSZ) por. Lee i in. [88]. Jednocześnie towarzyszy im wysoki moduł Younga: $E = 145 \text{ GPa}$ (mullit)– 205 GPa (YSZ)– 434 GPa (Al_2O_3). Warstwy ochronne są z reguły grubości rzędu mikrometrów bądź nawet nanometrów.

Tabela 1.15. Charakterystyki termomechaniczne konwencjonalnych materiałów na TBC, wg Lee i inni [88]

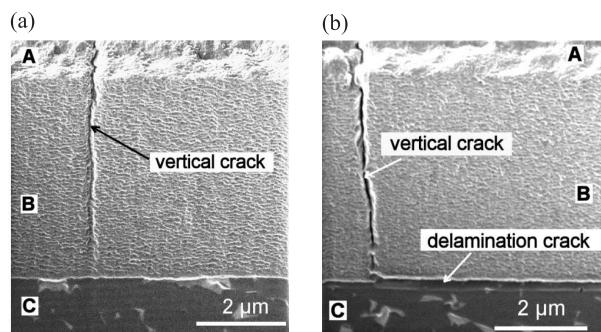
Materiał warstwy TBC-ceramik	Moduł Younga $E[\text{GPa}]$	Współczynnik przewodnictwa $\lambda[\text{W/mK}]$ w 1127°C	Współczynnik rozszerzalności $\alpha[10^{-6}1/\text{K}]$
Cyrkonia $Y_2O_3+ZrO_2$	205	2.0	8.9–10.6
Al_2O_3	380–434	5.8	7.2–8.6
Mullit $3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$	145	3.3	5.7
TiO_2	283	3.3	9.4
$Ca_{0.5}Sr_{0.5}Zr_4P_6O_{24}$	70	1.0 (1000°C)	3.0

Wśród materiałów stosowanych na warstwy chroniące przed zużyciem ciernym – *bariery przeciwcierne* WBC – wyróżniają się azotki chromu, molibdenu lub wolframu: CrN, Cr_2N , Mo_2N lub WN. Charakteryzują się one bardzo wysoką twardością, w zakresie od 11 GPa (CrN) do 17 GPa (Mo_2N), a nawet 30 GPa (dla bardzo cienkich warstw WN o grubości $1 \mu\text{m}$). Przykładowe dane termomechaniczne dla CrN przedstawiono w tab. 1.16. Nie wnikając zbyt w

Tabela 1.16. Właściwości termomechaniczne CrN, wg Hones i inni [66]

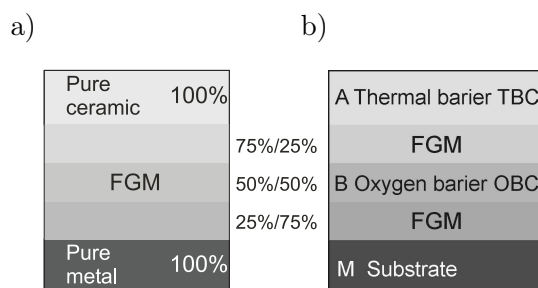
Właściwość	E [GPa]	ν [-]	α [1/K]	λ [W/mK]	c [J/kgK]	ρ [kg/m ³]
	185	0.3	7.0×10^{-7}	12.0	465	7190

technologii wytwarzania cienkich warstw ceramicznych ochronnych nakładanych na podłoże metaliczne (np. *Air Plasma Spray-Thermal Barrier Coating: APS-TBC*, lub *Electron Beam Physical Vapour Deposition: EB-PVD*, por. np. Lee i in. [88], Schulz i in. [133]), należy podkreślić dużą rozpiętość stałych termomechanicznych pomiędzy metalicznym materiałem podłoża a ceramiczną warstwą ochronną, nakładaną zazwyczaj w podwyższonej temperaturze. W efekcie, po schłodzeniu od temperatury nakładania (np. 800 K dla filmu CrN na podłożu Si) do temperatury pokojowej powstają wysokie ściskające naprężenia rezydualne w warstwie ceramicznej, np: $\sigma_{\text{res}} = -1.25$ [GPa] (Cr_2N) – 0.85 [GPa] (CrN) – 2.05 [GPa] (Mo_2N), wg Hones i in. [66]. Tak więc, niekiedy już podczas nakładania warstwy, a często podczas cyklicznych obciążeń termicznych w trakcie eksploatacji, dochodzi do zniszczenia struktury TBC poprzez inicjujące pęknięcia poprzeczne w ceramiku, a w konsekwencji delaminację połączenia na styku cienkiej warstwy z podłożem, jak ilustruje rys. 1.28, dla połączenia TiAl-N.



Rysunek 1.28. Dwie fazy zniszczenia cienkiej pojedynczej warstwy ochronnej (TiAl/N-coating): a) pęknięcie poprzeczne warstwy, b) pęknięcie wzdłuż styku warstwa-podłoże, wg Kirchhoff i inni [76]: A-powierzchniowa warstwa (ok. 1 μm), B-wewnętrzna warstwa (ok. 5 μm), C-podłoże metaliczne TiAl

Opisane powyżej problemy z ostrą nieciągłością naprężeń na styku metal-ceramik, stały się głównym motywem do rozwoju technologii struktur wielowarstwowych, a szczególnie rozwiązań z funkcjonalnie stopniowaną zmianą mikrostruktury pomiędzy warstwą ceramiczną a podłożem metalicznym (ang. *functionally graded materials* – FGM). Architekturę struktur z pojedynczą warstwą ochronną – TBC i stopniowanym interfejsem – FGM przedstawia rys. 1.29a. Bardziej złożoną architekturę, z dwiema warstwami ochronnymi: termiczną (TBC) i antykorozyjną (OBC), rozdzielonych dwoma interfejsami, zapewniającymi ciągłą zmianę właściwości (FGM) przedstawiono na rys. 1.29b.

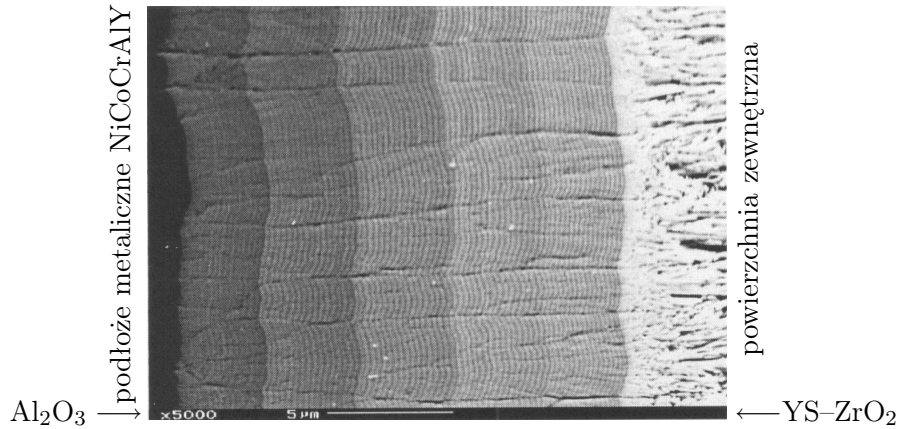


Rysunek 1.29. Schematyczna ilustracja ciągłej zmiany mikrostruktury na styku metal/ceramik: a) pojedyncza warstwa (TBC) z ciągłą (warstwową) warstwą pośredniczącą (FGM), b) dwuwarstwowy system pokryć (TBC i OBC) z dwoma interfejsami (typu FGM), wg Lee i inni [88]

Na rys. 1.30 przedstawiono skomplikowaną siedmiowarstwową mikrostrukturę warstwy ochronnej typu (TBC + WBC), powstałą w drodze mieszania (podczas natrysku) twardych cząstek Al_2O_3 z cyrkonią $ZrO_2-Y_2O_3$, uzyskując jednocześnie dobrą odporność termiczną i przeciwierną. Na rysunku widoczna jest złożona mikrostruktura: każda z siedmiu warstw (o grubości kilku μm) wykazuje dodatkowo strukturę nanowarstwową, a ponadto ZrO_2 wykazuje wyraźnie kolumnową mikrostrukturę na powierzchni zewnętrznej.

Powyższe ilustracje prowadzą do następujących wniosków. Złożone warstwy ochronne: pojedyncze (TBC), wielowarstwowe (TBC + OBC albo TBC + WBC), a także systemy z interfejsem (FGM) są, na poziomie makro, materiałami niejednorodnymi oraz często anizotropowymi (np. poprzecznie izotropowymi). Sytuację komplikuje także fakt pojawienia się naprężeń resztkowych powstałych w trakcie nakładania poszczególnych warstw w podwyższonych temperaturach. W efekcie, określenie efektywnych właściwości w skali

makro, jak również przewidywanie i opis mechanizmów zniszczenia, zarodkowanymi najczęściej na poziomie mikrostruktury, są często bardzo trudne (por. Kirchoff i inni [76], Bahr i inni [4]).



Rysunek 1.30. Warstwowa zmiana mikrostruktury bariery termicznej TBC na podłożu metalicznym NiCoCrAlY, otrzymana poprzez nakładanie warstw metodą EBPVD, o stopniowo zmiennym udziale dwóch materiałów ceramicznych: Al₂O₃ (100% na styku z podłożem metalicznym) oraz (YS) ZrO₂ (100% na powierzchni zewnętrznej, wg Schulz i inni [133])

Rozdział 2

Jednoosiowe modele materiałów sprężystych, lepkich oraz plastycznych

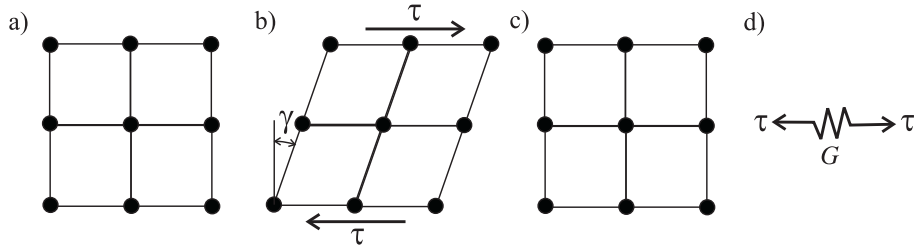
2.1. Modele jednoosiowe oparte na ścinaniu

2.1.1. Materiały sprężyste

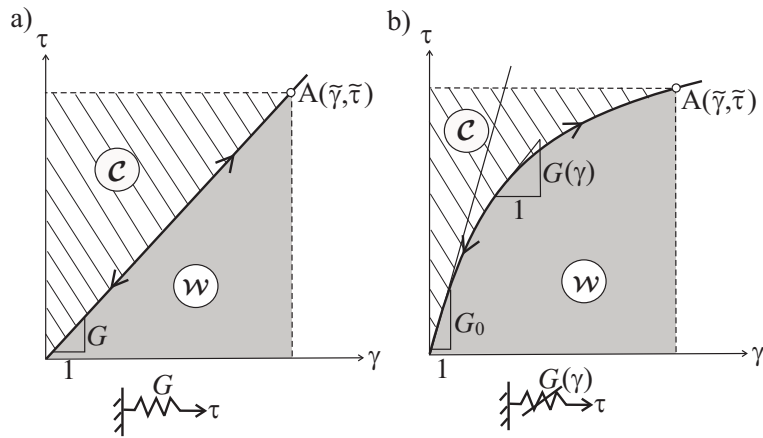
Właściwości mechaniczne ciał, to znaczy ich zdolność przeciwstawiania się działaniu obciążenia, są ściśle związane z typem oddziaływań występujących pomiędzy ich poszczególnymi atomami. Najogólniej rzecz biorąc, siły międzyatomowe przeciwdziałają jakiegokolwiek zmianie odległości pomiędzy sąsiednimi atomami bądź ich położenia.

Deformację ciała przyjęto uważać za sprężystą wtedy, gdy jest ona odwracalna, to znaczy, po usunięciu obciążenia ciało powraca do swego pierwotnego kształtu. W *materiale jednorodnym* i *izotropowym* jedynym stanem prostym, z uwagi na zarówno naprężenie τ jak odkształcenie γ , jest stan *prostego ścinania* (w jednej tylko płaszczyźnie). Można to prześledzić już na poziomie deformacji sieci krystalicznej, pokazanej na rys. 2.1.

Mechanicznym modelem takiego typu zachowania materiałów jest sprężyna, o charakterystyce interpretowanej jako moduł sprężystości na ścinanie G . Model matematyczny, wiążący naprężenie styczne τ z odkształceniem postaciowym γ , znany jest jako *model materiału sprężystego*. Można rozróżnić dwa przypadki: $G = \text{const}$ lub $G = G(\gamma)$. Pierwszy przypadek odpowiada liniowej deformacji sprężystej (rys. 2.2a), a drugi deformacji nieliniowej (rys. 2.2b). Pole zawarte pod lub nad krzywą ścinania $\tau(\gamma)$ reprezentuje odpowiednio, *energię właściwą odkształcenia sprężystego* \mathcal{W} lub *energię dopełniającą* \mathcal{C} .



Rysunek 2.1. Sprężysta deformacja sieci atomowej przy prostym ścinaniu: a) stan początkowy, b) stan pod obciążeniem, c) stan po odciążeniu, d) model mechaniczny



Rysunek 2.2. Modele materiału sprężystego: a) liniowy Hooke'a, b) nieliniowo sprężysty

Zapisując, odpowiednio, równanie sprężystości liniowej lub nieliniowej, otrzymujemy

$$\tau = G\gamma \quad \tau = G(\gamma)\gamma \quad (2.1)$$

Odpowiednie wzory na energię odkształcenia i energię dopełniającą przyjmują postać

$$W = \int_0^{\tilde{\gamma}} G\gamma d\gamma = \frac{1}{2}G\tilde{\gamma}^2 \quad C = \int_0^{\tilde{\tau}} \frac{\tau}{G} d\tau = \frac{\tilde{\tau}^2}{2G} \quad (2.2)$$

lub

$$W = \int_0^{\tilde{\gamma}} \tau(\gamma) d\gamma \quad C = \int_0^{\tilde{\tau}} \gamma(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Jednocześnie obowiązują wzajemne zależności dla obu energii w materiale liniowym

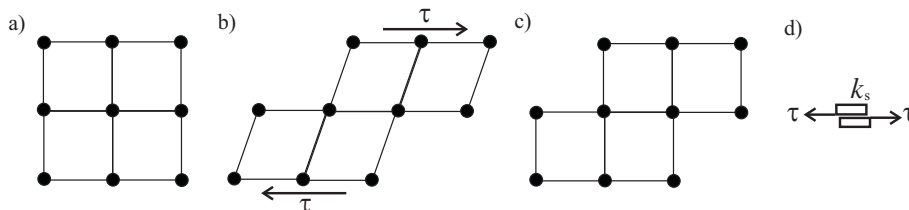
$$\mathcal{W} = \mathcal{C} = \frac{1}{2} \tilde{\tau} \tilde{\gamma} \quad (2.4)$$

lub nieliniowym

$$\mathcal{W} \neq \mathcal{C} \quad \mathcal{W} + \mathcal{C} = \tilde{\tau} \tilde{\gamma} = \text{const} \quad (2.5)$$

2.1.2. Materiały plastyczne

W przypadku gdy, w wyniku obciążenia i całkowitego odciążenia, atomy nie powracają do swego położenia, czyli następuje ich trwałe przemieszczenie wzdłuż płaszczyzny poślizgu, mówimy, iż *deformacja* ciała jest nieodwracalna, *typu plastycznego* (rys. 2.3). Mechaniczny model opisujący tego typu zachowania



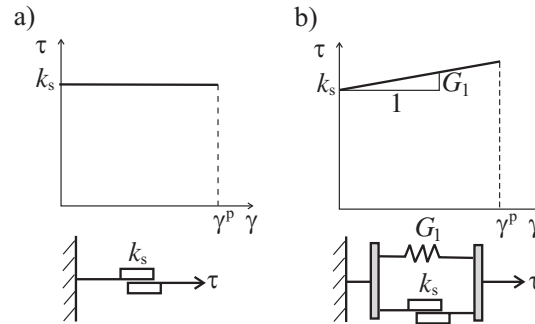
Rysunek 2.3. Sprężysto-plastyczna deformacja sieci atomowej: a) stan początkowy, b) stan pod obciążeniem, c) stan po odciążeniu, d) model mechaniczny ciała jest suwakiem, w którym siła tarcia jest równa liczbowo wartości *granicy plastyczności na ścinanie* k_s . Model matematyczny znany jest jako model materiału plastycznego. Można rozróżnić dwa proste przypadki: *model materiału idealnie plastycznego* lub *materiału ze wzmocnieniem plastycznym* (rys. 2.4a, b).

Oba modele łączy istnienie progowej wartości naprężenia ścinającego k_s , przy której uruchamia się proces deformacji ($\tau \geq k_s$). Odpowiednie równania przyjmują więc postać (rys. 2.4)

$$\tau = k_s \quad \tau = k_s + G_1 \gamma \quad (2.6)$$

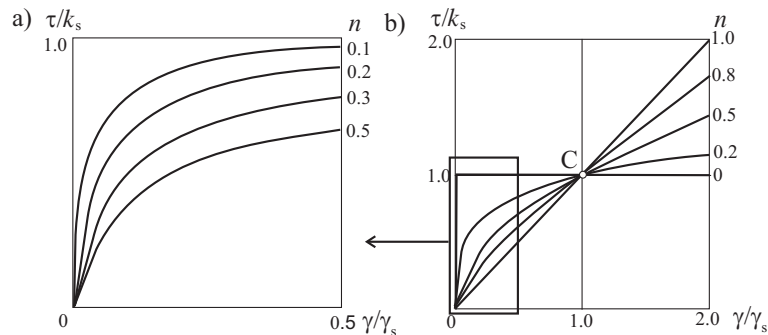
Z kolei Ludwik [95] zaproponował nieliniowy *model potęgowy* $\tau = \tau(\gamma)$, w którym deformacja nie jest poprzedzona osiągnięciem progu naprężenia. *Model Ludwika*, w postaci źródłowej [95] lub znormalizowanej, zapisujemy następująco (rys. 2.5)

$$\tau = K \gamma^n \quad 0 < n < 1 \quad \frac{\tau}{k_s} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_s} \right)^n \quad (2.7)$$



Rysunek 2.4. Modele materiału: a) idealnie plastycznego, b) z liniowym wzmocnieniem plastycznym

gdzie występują, odpowiednio, dwie stałe materiałowe K i n , lub trzy stałe k_s , γ_s i n , przy czym tylko dwie z nich są niezależne. Stałe k_s i γ_s są współrzędnymi punktu szkieletowego modelu Ludwika C, rys. 2.5b, takiego że wszystkie wykresy przecinają się w tym punkcie, niezależnie od wartości wykładnika n . W szczególnym przypadku gdy $n = 1$, otrzymujemy materiał liniowo sprężysty o stałej sprężystości $G = k_s/\gamma_s$. W granicznym przypadku $n \rightarrow 0$ otrzymujemy przejście do materiału idealnie sztywno plastycznego (rys. 2.4a), gdy $\tau = k_s$

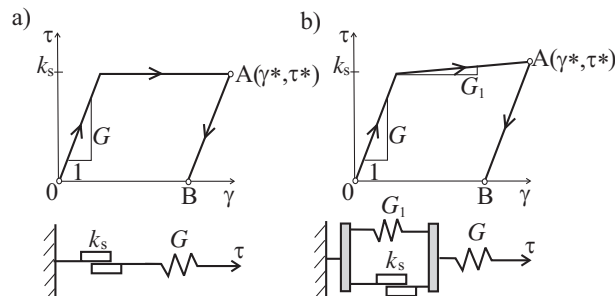


Rysunek 2.5. Model Ludwika: a) postać źródłowa, b) postać znormalizowana

2.1.3. Materiały sprężysto-plastyczne

Istnieje szereg modeli łączących zachowanie sprężyste z plastycznym. Dwa modele odcinkowo liniowe materiału sprężysto-idealnie plastycznego (typu Prandtl'a) oraz materiału sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem (typu Iliuszyna), zilustrowano na rys. 2.6a, b. W odróżnieniu od poprzednich mo-

deli, oba te modele wykazują dwa zakresy pracy: sprężysty ($\tau < k_s$) oraz plastyczny ($\tau \geq k_s$).



Rysunek 2.6. Modele sprężysto-plastyczne: a) Prandtla oraz b) Iliuszyna
Równania modelu Prandtla (rys. 2.6a) są następujące

$$\tau = \begin{cases} G\gamma & \text{gdy } \gamma < \frac{k_s}{G} \\ k_s & \text{gdy } \gamma \geq \frac{k_s}{G} \end{cases} \quad (2.8)$$

Z kolei równania modelu Iliuszyna (rys. 2.6b) zapisujemy w postaci

$$\tau = \begin{cases} G\gamma & \text{gdy } \gamma < \frac{k_s}{G} \\ k_s + G_1 \left(\gamma - \frac{k_s}{G} \right) = & \\ k_s + G_1 [1 - \omega(\gamma)] & \text{gdy } \gamma \geq \frac{k_s}{G} \end{cases} \quad (2.9)$$

gdzie wprowadzono pomocniczą funkcję $\omega(\gamma)$

$$\omega(\gamma) = \frac{G - G_1}{G} \left(1 - \frac{k_s}{G\gamma} \right) \quad (2.10)$$

W obu przypadkach omawianych modeli, Prandtla i Iliuszyna, przedstawione wzory dotyczą ścieżki obciążenia (0A). Natomiast, dla ścieżki odciążenia (AB), w obu przypadkach obowiązuje równanie

$$\tau^* - \tau = G(\gamma^* - \gamma) \quad (2.11)$$

w którym założono ten sam, liniowy moduł sprężystego odciążania, co dla odcinka sprężystego obciążania.

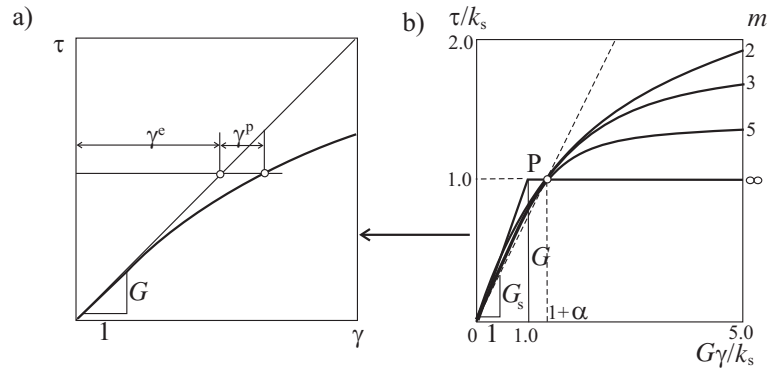
Inny *model materiału sprężysto-plastycznego*, wykazujący nieliniowe zachowanie w zakresie plastycznym, został zaproponowany przez *Ramberga* i *Osgooda*, w postaci źródłowej [121]

$$\gamma = \frac{\tau}{G} + K \left(\frac{\tau}{G} \right)^m \quad (2.12)$$

lub znormalizowanej

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \left[1 + \alpha \left(\frac{\tau}{k_s} \right)^{m-1} \right] \quad (2.13)$$

Jest on określony trzema stałymi G, K, m lub G, k_s, m . Model ten wykazuje ciągły spadek pochylenia krzywej $d\tau/d\gamma$, rozpoczynając od wartości G w początku układu współrzędnych. Dodatkowo, w przypadku stosowania postaci znormalizowanej (2.13), osiągnięciu przez naprężenie wartości nominalnej $\tau = k_s$ odpowiada zawsze odkształcenie plastyczne o wartości $\gamma^p = \alpha\gamma^e$, niezależnie od wartości współczynnika m , występującego w wykładniku. Ponadto, wartość modułu siecznego w tym punkcie wyraża się odpowiednim ułamkiem początkowego modułu sprężystości $G_s = G/(1 + \alpha)$. W przypadku granicznym, gdy $m \rightarrow \infty$, model Ramberga–Osgooda przechodzi w model Prandtla. Dla szerokiej klasy materiałów, najlepszą aproksymację daje przyjęcie wartości $\alpha = 3/7$. W przypadku pewnych materiałów, charakteryzujących się



Rysunek 2.7. Model Ramberga–Osgooda: a) postać źródłowa, b) postać znormalizowana

malejącym do zera modulem wzmocnienia plastycznego, wygodny opis matematyczny dają tzw. modele z *asymptotyczną plastycznością*. Chronologicznie najwcześniejszy z nich pochodzi od Pragera [118], wykorzystujący aproksyma-

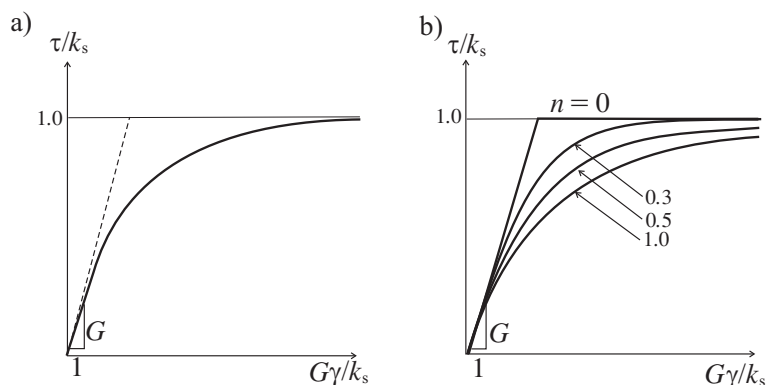
cję funkcją tangens hiperboliczny

$$\tau = k_s \tanh \left(\frac{G\gamma}{k_s} \right) \quad (2.14)$$

W innym modelu, Szuwalski i Życzkowski [149], proponują aproksymację typu

$$\gamma = \frac{\tau}{G \left(1 - \frac{\tau}{k_s} \right)^n} \quad (2.15)$$

Oba modele wykazują początkową wartość pochylenia wykresu krzywej $d\tau/d\gamma$ równą G , która następnie asymptotycznie zmierza do zera, w miarę wzrostu odkształcenia do nieskończoności $\gamma \rightarrow \infty$. Dodatkowo, *model Szuwalskiego–Życzkowskiego* przechodzi w model materiału sprężysto-idealnie plastycznego w szczególnym przypadku, gdy $n = 0$.

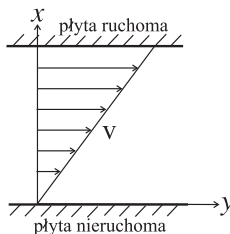


Rysunek 2.8. Modele wykazujące asymptotyczną plastyczność: a) model Pragera, b) model Szuwalskiego–Życzkowskiego

2.1.4. Materiały lepkie

Postulat równowagi pomiędzy stanami odkształcenia i naprężenia jest uzasadniony w przypadku rozpatrywania większości materiałów metalicznych, w temperaturach niezbyt odbiegających od temperatury pokojowej. Jednakże materiały te zaczynają wykazywać znaczne odstępstwa od powyższego założenia w temperaturach podwyższonych. Obserwowane są wówczas zmiany odkształcenia lub naprężenia w czasie, towarzyszące, odpowiednio, ustalonemu poziomowi naprężenia lub odkształcenia. Zjawiska te określane są pojęciem pełzania

materiału bądź relaksacji. Z jednej strony, zmiana odkształcenia w czasie odpowiada *procesowi pełzania*, natomiast z drugiej strony zmiana naprężenia w czasie stanowi istotę *procesu relaksacji*. Budowa modelu uwzględniającego oba te efekty wymaga wprowadzenia właściwości zwanej *lepkością*, która jest ściśle związana z zachowaniem charakterystycznym dla cieczy. W przypadku *cieczy*



Rysunek 2.9. Element cieczy lepkiej ściany dwoma równoległymi płytami
lepkiej Newtona wartość naprężenia stycznego, ścinającego element płynu, jest proporcjonalna do iloczynu *lepkości dynamicznej* η_s i gradientu prędkości

$$\tau = \eta_s \frac{dv}{dx} \quad (2.16)$$

Z uwagi na fakt, iż gradient prędkości równy jest wprost prędkości odkształcenia postaciowego

$$\frac{dv}{dx} = \dot{\gamma} \quad (2.17)$$

można zdefiniować następujące dwa modele cieczy lepkiej:

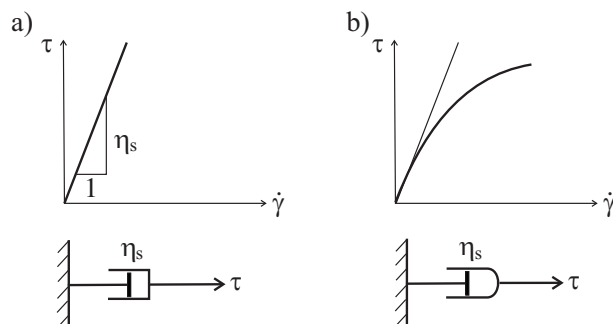
– *model liniowo lepki Newtona*

$$\tau = \eta_s \dot{\gamma} \quad (2.18)$$

– *model nieliniowo lepki typu potęgowego*

$$\tau = \eta_s \dot{\gamma}^{1/n} \quad (2.19)$$

posiadające prostą interpretację w postaci tłumika wypełnionego cieczą lepką.



Rysunek 2.10. Modele cieczy lepkiej: a) liniowy Newtona, b) nieliniowy

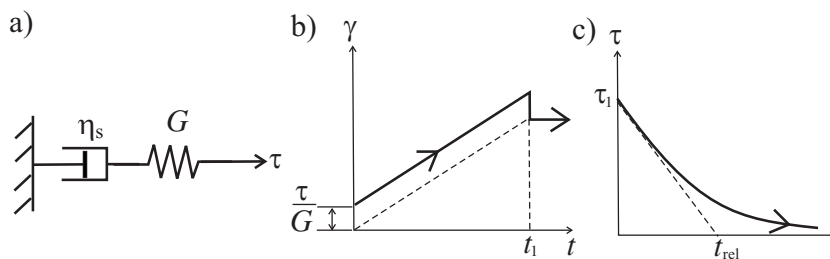
2.1.5. Materiały liniowo lepko-sprężyste

Model Maxwella stanowi szeregowe połączenie modeli Hooke'a oraz Newtona, (rys. 2.11). Równanie różniczkowe oparte na ścinaniu, opisujące model Maxwella, jest otrzymywane poprzez sumowanie prędkości odkształcenia obu jego elementów i przyjmuje postać

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta_s} \quad (2.20)$$

Całkowanie równania (2.20), przy stałej wartości naprężenia $\tau = \text{const}$ przyłożonej w chwili $t = 0$, a następnie usuniętej w chwili $t = t_1$, prowadzi do rozwiązań przedstawiających, odpowiednio, *krzywą pełzania* oraz *krzywą nawrotu*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \tau \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{\eta_s} t \right) & \text{dla } t < t_1 \\ \frac{\tau}{\eta_s} t_1 & \text{dla } t > t_1 \end{cases} \quad (2.21)$$



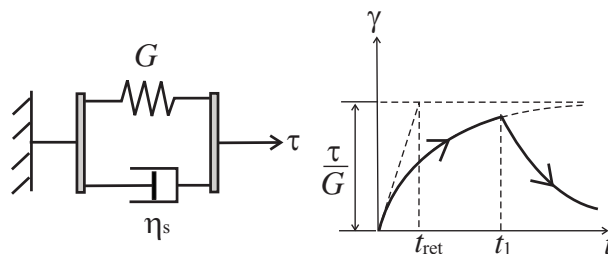
Rysunek 2.11. Model Maxwella: a) schemat mechaniczny, b) krzywe pełzania oraz nawrotu, c) krzywa relaksacji

W przypadku gdy model Maxwella jest poddany ustalonym odkształceniom $\gamma = \text{const}$, rozwiązanie równania (2.20), przy warunku początkowym $\tau(t = 0) = \tau_1$, nosi nazwę *krzywej relaksacji*

$$\tau(t) = \tau_1 \exp\left(-\frac{G}{\eta_s} t\right) \quad (2.22)$$

dążącej do zera przy $t \rightarrow \infty$. Ważnym parametrem rozwiązania (2.22) jest tzw. *czas relaksacji* t_{rel} , czyli czas, po upływie którego wartość naprężenia osiągnęłaby zero, gdyby relaksacja przebiegała w sposób liniowy z największą prędkością, taką jak w chwili początkowej $t_{\text{rel}} = \eta_s/G$.

Model Voigta–Kelvina otrzymywany jest w wyniku równoległego połączenia modeli Hooke’a oraz Newtona (rys. 2.12). Równanie różniczkowe modelu



Rysunek 2.12. Model Voigta–Kelvina

oparte na ścinaniu, otrzymywane na drodze sumowania naprężeń występujących w obu elementach, ma postać

$$\tau = \eta_s \dot{\gamma} + G\gamma \quad (2.23)$$

Całkowanie równania (2.23), przy stałej wartości naprężenia $\tau = \text{const}$ przyłożonego w chwili $t = 0$, a następnie usuniętego w chwili $t = t_1$, daje następujące *krzywe pełzania oraz nawrotu*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{\tau}{G} \left[1 - \exp\left(-\frac{G}{\eta_s} t\right) \right] & \text{dla } t < t_1 \\ \frac{\tau}{G} \exp\left(-\frac{G}{\eta_s} t\right) \left[\exp\left(\frac{G}{\eta_s} t_1\right) - 1 \right] & \text{dla } t > t_1 \end{cases} \quad (2.24)$$

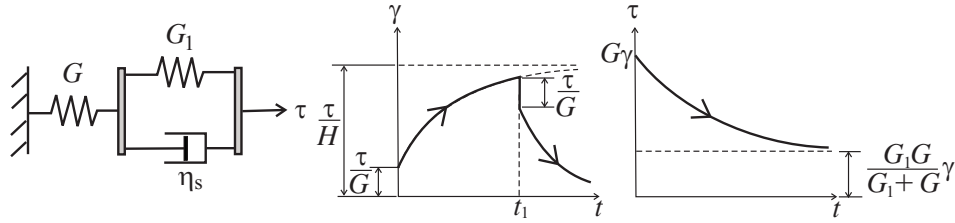
Krzywa pełzania (2.24₁) zmierza do poziomej asymptoty $\gamma = \tau/G$, przy $t \rightarrow \infty$. Z procesem pełzania związany jest istotny parametr, tzw. *czas retardacji* t_{ret} , czyli czas, po upływie którego wartość odkształcenia osiągnęłaby wartość asymptotyczną τ/G , gdyby pełzanie zachodziło w sposób liniowy

z największą prędkością, taką jak w chwili początkowej $t_{\text{ret}} = \eta_s/G$. Krzywa nawrotu zmierza do zera przy $t \rightarrow \infty$. Model Voigta–Kelvina nie nadaje się do opisu procesu relaksacji z uwagi na fakt, iż natychmiastowemu wymuszeniu typu odkształceniowego $\gamma(t) = \gamma_1 H(t)$ odpowiadać musi nieskończona, co do wartości, odpowiedź naprężenia

$$\tau(t) = \eta_s \gamma_1 \delta(t) + G \gamma_1 H(t) \quad (2.25)$$

gdzie symbol δ jest funkcją *delta Diraca*. Takie zachowanie nie ma uzasadnienia fizycznego.

Model standardowy jest utworzony przez szeregowe połączenie modeli Hooke’a oraz Voigta–Kelvina (rys. 2.13). Równanie różniczkowe tego modelu



Rysunek 2.13. Model standardowy ($\frac{1}{H} = \frac{1}{G} + \frac{1}{G_1}$)

oparte na ścinaniu ma następującą postać

$$\tau + \frac{\eta_s}{G_1 + G} \dot{\tau} = \frac{G_1 G}{G_1 + G} \gamma + \frac{\eta_s G}{G_1 + G} \dot{\gamma} \quad (2.26)$$

Krzywe *pełzania* oraz *nawrotu* dla modelu standardowego, poddanego naprężeniu o stałej wartości $\tau = \text{const}$ w chwili $t = 0$, a następnie odciążonego w chwili $t = t_1$, przyjmują następującą postać

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{\tau}{G} \left[\left(1 + \frac{G}{G_1} \right) - \frac{G}{G_1} \exp \left(-\frac{G_1}{\eta_s} t \right) \right] & \text{dla } t < t_1 \\ \frac{\tau}{G_1} \left[\exp \left(\frac{G_1}{\eta_s} t_1 \right) - 1 \right] \exp \left(-\frac{G_1}{\eta_s} t \right) & \text{dla } t > t_1 \end{cases} \quad (2.27)$$

W przypadku, gdy model standardowy jest poddany ustalonym odkształceniu $\gamma = \text{const}$, krzywa *relaksacji* wykazuje monotoniczny spadek od wartości początkowej $G\gamma$ do wartości określającej położenie poziomej asymptoty $\tau = \frac{G_1 G}{G_1 + G} \gamma$, według zależności

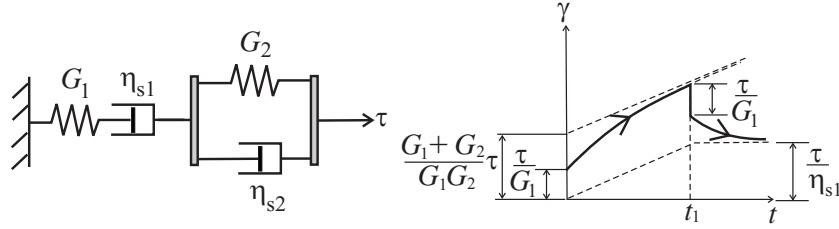
$$\tau(t) = G\gamma \left[\frac{G_1}{G_1 + G} + \frac{G}{G_1 + G} \exp \left(-\frac{G_1 + G}{\eta_s} t \right) \right] \quad (2.28)$$

Ostatnia z właściwości, czyli relaksacja do poziomu naprężenia różnego od zera, powoduje, że model standardowy lepiej odwzorowuje rzeczywisty przebieg procesu relaksacji niż model Maxwella.

Czteroparametrowy *model Burgersa* powstaje z szeregowego połączenia modeli Maxwella oraz Voigta–Kelvina (rys. 2.14). Równanie różniczkowe modelu Burgersa jest równaniem drugiego rzędu, zarówno z uwagi na naprężenie, jak i odkształcenie

$$\tau + \left(\frac{\eta_{s1}}{G_1} + \frac{\eta_{s1}}{G_2} + \frac{\eta_{s2}}{G_2} \right) \dot{\tau} + \frac{\eta_{s1}\eta_{s2}}{G_1G_2} \ddot{\tau} = \eta_{s1}\dot{\gamma} + \frac{\eta_{s1}\eta_{s2}}{G_2} \ddot{\gamma} \quad (2.29)$$

Całkowanie równania (2.29), przy stałej wartości naprężenia przyłożonego w



Rysunek 2.14. Model Burgersa

chwili $t = 0$, a następnie zdjętego w chwili $t = t_1$, prowadzi do odpowiednich wzorów na *krzywe pełzania oraz nawrotu*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{\tau}{G_1} \left\{ 1 + \frac{G_1}{\eta_{s1}} t + \frac{G_1}{G_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{G_2}{\eta_{s2}} t\right) \right] \right\} & \text{dla } t < t_1 \\ \tau \left\{ \frac{t_1}{\eta_{s1}} - \frac{1}{G_1} \exp\left(-\frac{G_2}{\eta_{s2}} t\right) \left[1 - \exp\left(\frac{G_2}{\eta_{s2}} t_1\right) \right] \right\} & \text{dla } t > t_1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Łatwo sprawdzić, że powyższe rozwiązania można otrzymać na drodze superpozycji odpowiednich zależności dla modeli Maxwella (2.21) oraz Voigta–Kelvina (2.24), por. rys. 2.14. Równie łatwo jest wykazać, iż krzywa nawrotu składa się z natychmiastowej sprężystej odpowiedzi τ/G_1 , po której następuje pełzanie nawrotu do poziomej asymptoty, o wartości $\gamma = \tau t_1 / \eta_{s1}$.

W przypadku gdy model Burgersa poddany jest stałemu w czasie odkształceniu, naprężenie ulega relaksacji według zależności podanej, np. przez Findley [42]

$$\tau(t) = \frac{\varepsilon}{A} [(q_1 - q_2 r_1) \exp(-r_1 t) - (p_1 - p_2 r_2) \exp(-r_2 t)] \quad (2.31)$$

gdzie oznaczono

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{\eta_{s1}}{G_1} + \frac{\eta_{s1}}{G_2} + \frac{\eta_{s2}}{G_2} & p_2 &= \frac{\eta_{s1}\eta_{s2}}{G_1G_2} \\
 A &= \sqrt{p_1^2 - 4p_2} & q_1 &= \eta_{s1} & q_2 &= \frac{\eta_{s1}\eta_{s2}}{G_2} \\
 r_1 &= \frac{p_1 - A}{2p_2} & r_2 &= \frac{p_1 + A}{2p_2}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

2.1.6. Materiały sprężysto-lepko-plastyczne – odcinkowo liniowe

Omówione w poprzednim podrozdziale 2.1.5 materiały liniowo lepko-sprężyste nie wykazują trwałych odkształceń plastycznych, charakterystycznych dla rzeczywistych materiałów reologicznych. W obecnym podrozdziale zaprezentowane zostaną modele powstałe przez wzbogacenie modeli liniowo lepko-sprężystych o element tarcowy (idealnie plastyczny) (rys. 2.4). Każdy z omawianych modeli będzie charakteryzował się dwoma etapami, poprzedzającym oraz następującym po uruchomieniu elementu idealnie plastycznego. Pomimo, że każdy z etapów określony jest odpowiednim liniowym równaniem różniczkowym, to całkowity zakres nie będzie już liniowy, lecz wyłącznie odcinkowo liniowy.

Wśród *materiałów odcinkowo liniowych* można dodatkowo wyróżnić takie, w których właściwości lepkie pojawiają się dopiero po uplastycznieniu, zaś przed uplastycznieniem wykazują wyłącznie właściwości sprężyste, oraz takie materiały, które wykazują właściwości lepkie zarówno w zakresie sprężystym, jak i plastycznym.

Trójparametrowy *model Bingham*a, składający się ze sprężyny, połączonej szeregowo z segmentem zawierającym równoległe połączenie tłumika oraz suwaka (rys. 2.15a), jest reprezentantem pierwszej grupy materiałów odcinkowo liniowych. *Równania różniczkowe modelu Bingham*a oparte na ścinaniu przyjmują formę następujących związków

$$nG\dot{\gamma} = \begin{cases} n\dot{\tau} & \text{gdy } \tau \leq k_s \\ n\dot{\tau} + \tau - k_s & \text{gdy } \tau > k_s \end{cases} \tag{2.33}$$

gdzie $n = \eta_s/G$. Należy tutaj wyraźnie podkreślić, iż odkształcenie pełzania we wzorze (2.33₂) zależy od tzw. naprężenia nadwyżkowego $\tau - k_s$. W przypadku obciążenia modelu w chwili $t = 0$ stałym naprężeniem $\tau = \text{const}$, które

następnie zostaje usunięte w chwili $t = t_1$, krzywa *pełzania modelu Bingham* może być wyrażona w następującej postaci

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{\tau}{G} & \text{gdy } \tau \leq k_s \\ \frac{\tau}{G} + \frac{\tau - k_s}{nG}t & \text{gdy } \tau > k_s \end{cases} \quad (2.34)$$

Ponadto, model Bingham wykazuje zależność od *prędkości wymuszenia* naprężeniem. W najprostszym przypadku, gdy naprężenie narasta liniowo z czasem $\tau(t) = vt$ ($v = \text{const}$), całkowanie układu (2.33), przy uwzględnieniu warunku początkowego dla drugiej fazy procesu z aktywną lepkością: $t = t_1 = k_s/v$, $\gamma = k_s/G$, który określa stałą całkowania, prowadzi do rozwiązania dla $\gamma(t)$ w postaci

$$nG\gamma(t) = \frac{vt^2}{2} + (nv - k_s)t + \frac{k_s^2}{2v} \quad (2.35)$$

Eliminując następnie czas $t = \tau/v$ i wykonując redukcję, otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie w postaci

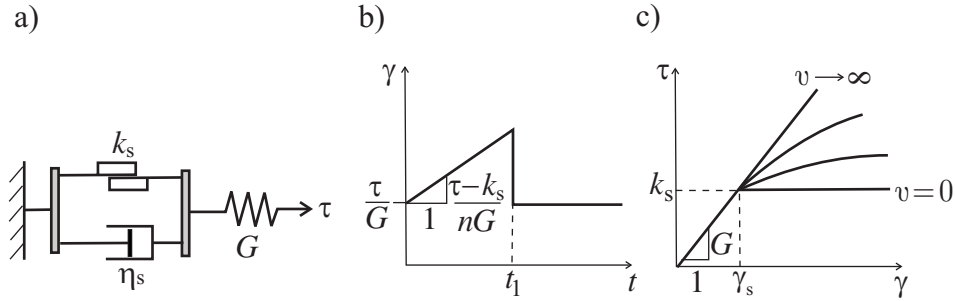
$$\gamma(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{G} & \text{gdy } \tau \leq k_s \\ \frac{\tau}{G} + \frac{(\tau - k_s)^2}{2nvG} & \text{gdy } \tau > k_s \end{cases} \quad (2.36)$$

Obliczając dalej pochodną $d\gamma/d\tau$ dla drugiego etapu pracy modelu, dochodzimy bez trudu do pochodnej $G'(\tau) = d\tau/d\gamma$, w postaci

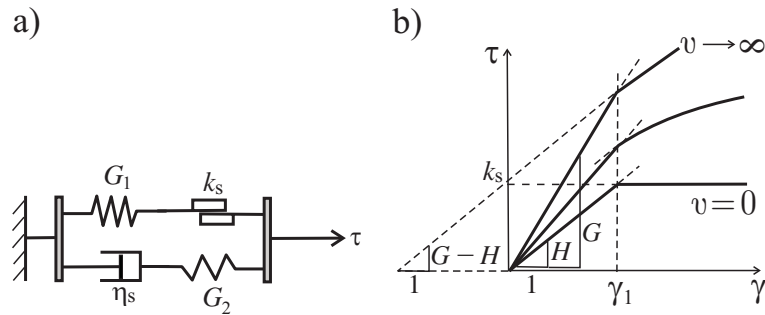
$$\frac{d\tau}{d\gamma} = \frac{nvG}{\tau - k_s + nv} \quad (2.37)$$

Szczegółowa analiza wzoru (2.37) pozwala stwierdzić, iż w przypadku gdy naprężenie narasta w sposób quasi-statyczny ($v \rightarrow 0$), model Bingham przechodzi w model sprężysto idelanie-plastyczny $d\tau/d\gamma \rightarrow 0$. Natomiast w przypadku granicznym, gdy naprężenie narasta z nieskończoną prędkością ($v \rightarrow \infty$), model Bingham nie wykazuje właściwości lepkich i w obu etapach pracy zachowuje się jak model ciała liniowo sprężystego (rys. 2.15b).

Czteroparametrowy model zaproponowany przez Rżanicyna [130] należy do grupy materiałów odcinkowo liniowych, w których właściwości lepkie towarzyszą zarówno zakresowi przed, jak i po uplastycznieniu. Model ten składa się z dwóch równoległych sekcji zawierających kolejno: sprężynę G_1 i suwak k_s połączone w szereg, oraz model Maxwella o stałych η_s i G (rys. 2.16a). Równania różniczkowe modelu przyjmują postać



Rysunek 2.15. Model Binghama: a) schemat, b) krzywa pełzania oraz c) zależność od prędkości naprężenia v



Rysunek 2.16. Model Różnicyna: a) schemat, b) zależność od prędkości naprężenia v

$$\begin{aligned}
 nG\dot{\gamma} + H\gamma &= n\dot{\tau} + \tau & \text{gdy } \gamma &\leq \frac{k_s}{H} \\
 n(G-H)\dot{\gamma} &= n\dot{\tau} + \tau - k_s & \text{gdy } \gamma &> \frac{k_s}{H}
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

gdzie: $n = \eta_s/G_2$, $G = G_1 + G_2$, $H = G_1$. Całkowanie równań (2.38), w przypadku naprężenia narastającego ze stałą prędkością $\tau = vt$ ($v = \text{const}$), prowadzi do następującej krzywej pełzania

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{vt}{H} - \frac{n(G-H)v}{H^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{H}{nG}t\right) \right] & \text{gdy } t \leq t_1 \\ \frac{k_s}{H} + \frac{1}{n(G-H)} \left[\frac{v(t^2 - t_1^2)}{2} + (nv - k_s)(t - t_1) \right] & \text{gdy } t > t_1 \end{cases}
 \tag{2.39}$$

Czas t_1 , po którym naprężenie osiąga wartość granicy plastyczności na ścinanie ($\tau = k_s$), i tym samym uruchamiany jest drugi, plastyczny etap pracy modelu,

wyliczany jest z warunku ciągłości

$$1 - \exp\left(-\frac{H}{nG}t_1\right) = \frac{H(vt_1 - k_s)}{nv(G - H)} \quad (2.40)$$

Równoważna do (2.39), zależność naprężenie–odkształcenie $\gamma = \gamma(\tau)$ otrzymywana jest po wyeliminowaniu czasu t , wtedy

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{H} - \frac{n(G - H)v}{H^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{H}{nvG}\tau\right) \right] & \text{gdy } \tau \leq \tau_1 \\ \frac{k_s}{H} + \frac{1}{n(G - H)} \left[\frac{\tau^2 - \tau_1^2}{2v} + \left(n - \frac{k_s}{v}\right)(\tau - \tau_1) \right] & \text{gdy } \tau > \tau_1 \end{cases} \quad (2.41)$$

gdzie odpowiednia wartość naprężenia inicjująca drugi etap pracy modelu $\tau = \tau_1$, obliczana jest z warunku

$$1 - \exp\left(-\frac{H}{nvG}\tau_1\right) = \frac{H(\tau_1 - k_s)}{nv(G - H)} \quad (2.42)$$

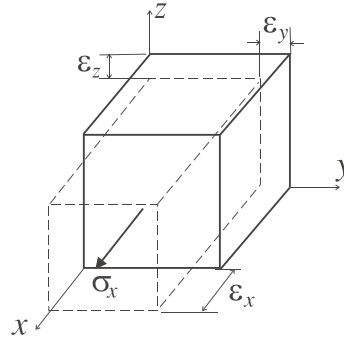
Wykres zależności (2.41), dla różnych prędkości narastania naprężenia v , pokazano na rys. 2.16b.

2.2. Modele jednowymiarowe oparte na rozciąganiu

Przedstawione w podrozdziale 2.1. proste modele materiałów pracujących w warunkach deformacji sprężystych, plastycznych bądź lepkich, zostały zapisane dla przypadku prostego ścianania ($\tau - \gamma$), będącego w istocie jedynym możliwym jednoosiowym stanem zarówno odkształcenia, jak i naprężenia. Przejście do przypadku *jednoosiowego rozciągania* nie jest trywialne. Zauważmy bowiem, że jednoosiowemu naprężeniu rozciągającemu, działającemu w warunkach nieskrępowanej deformacji poprzecznej, odpowiada *trójosiowy stan odkształcenia*

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x. \quad (2.43)$$

Oznacza to, innymi słowy, że powszechnie stosowana próba wytrzymałościowa rozciągania, nie jest w istocie próbą jednoosiową z punktu widzenia złożonego stanu odkształcenia. Jednak jest ona łatwiejsza do realizacji od strony technicznej niż próba prostego ścianania. Z tego też powodu identyfikacja stałych materiałowych występujących w równaniach *jednowymiarowych modeli*


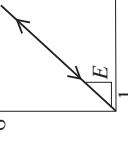


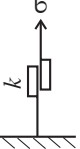

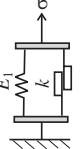
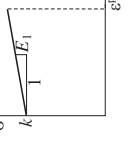
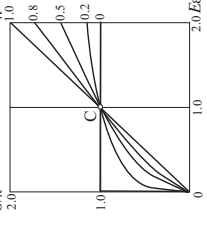



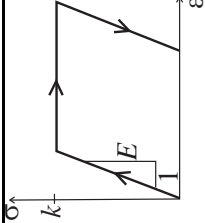
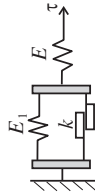
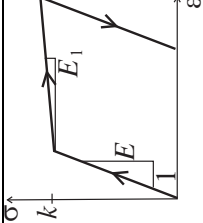
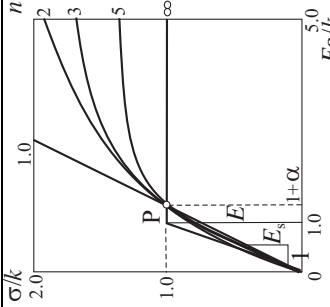
Rysunek 2.17. Efekt deformacji poprzecznej towarzyszący rozciąganiu

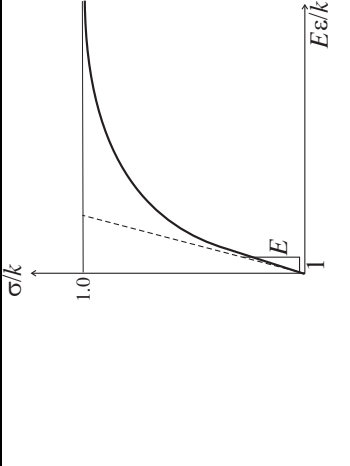
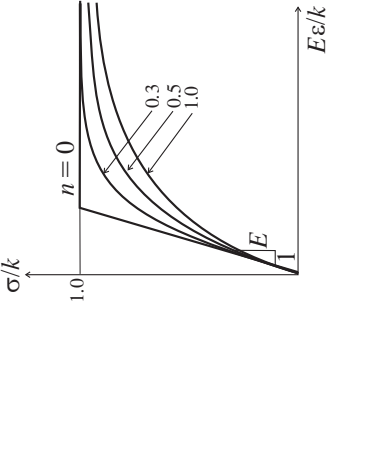
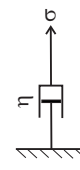
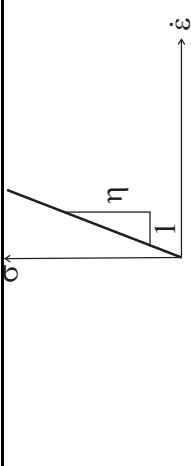
materiałowych dokonywana jest na podstawie próby rozciągania. Poprzednie relacje pomiędzy τ i γ (por. podrozdział 2.1) należy zatem zastąpić odpowiednimi zależnościami pomiędzy σ_x i ϵ_x . Zakładamy, innymi słowy, analogiczną postać równań wiążących pary $\tau - \gamma$ oraz $\sigma - \epsilon$, z jednoczesnym zastąpieniem stałych materiałowych, charakteryzujących właściwości sprężyste, plastyczne i lepkie przy ścinaniu G, G_1, k_s, η_s odpowiednimi stałymi E, E_1, k, η przy rozciąganiu. Stałe materiałowe mierzone w próbie jednoosiowego rozciągania mają oczywiście inne wartości, od odpowiednich stałych materiałowych z próby prostego ścinania.

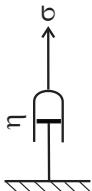
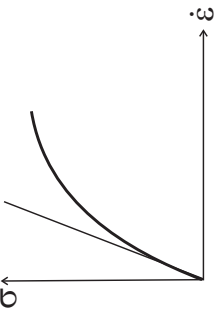
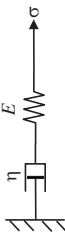
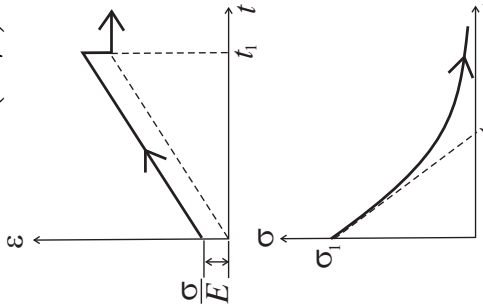
Poniższa tabela 2.1 zawiera zestawienie modeli jednoosiowego rozciągania, odpowiadających wszystkim modelom omawianym w podrozdziale 2.1.

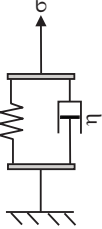
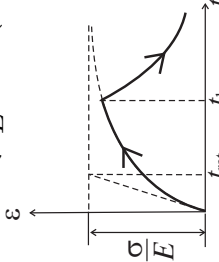
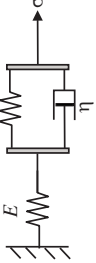
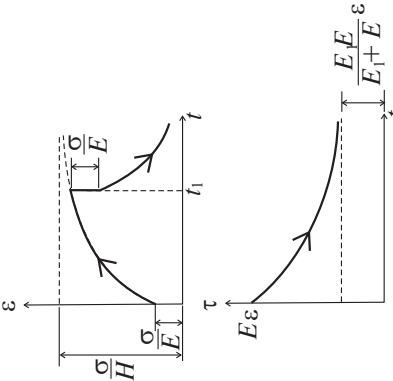
Tabela 2.1. Modele jednoosiowego rozciągania

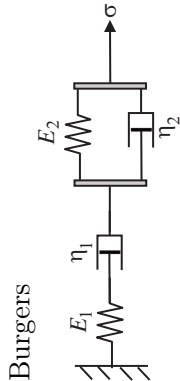
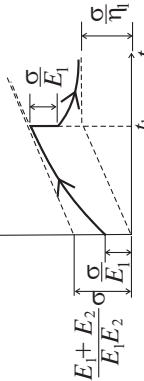
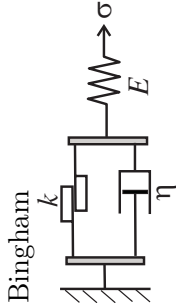
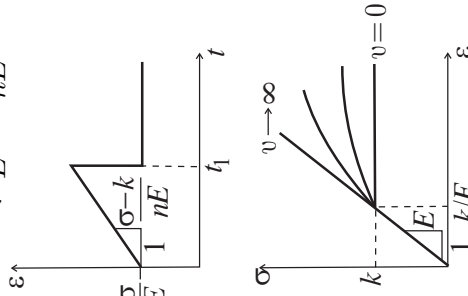
Model/schemat	Równanie/rozwiązanie	Wykres
1	2	3
liniowo sprężysty 	$\sigma = E\varepsilon$	
nieliniowo sprężysty 	$\sigma = E(\varepsilon)\varepsilon$	
idealnie plastyczny 	$\sigma = k$	
idealnie plastyczny z liniowym wzmocnieniem 	$\sigma = k + E_1\varepsilon$	
Ludwik	$\sigma = K\varepsilon^n$ lub $\frac{\sigma}{k} = \left(\frac{E\varepsilon}{k}\right)^n$	

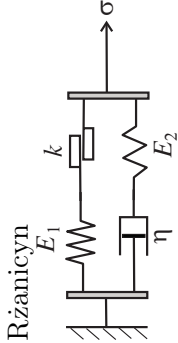
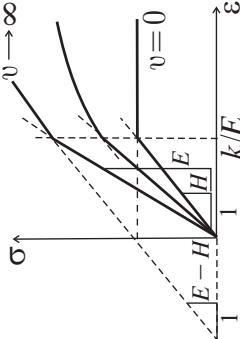
1	2	3
<p>Prandtl</p> 	$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon < \frac{k}{E} \\ k & \varepsilon \geq \frac{k}{E} \end{cases}$	
<p>Iliuszyn</p> 	$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon < \frac{k}{E} \\ k + E_1(\varepsilon - \frac{k}{E}) & \varepsilon \geq \frac{k}{E} \end{cases}$	
<p>Ramberg-Osgood</p>	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K \left(\frac{\sigma}{E} \right)^m$ <p>lub</p> $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 + \alpha \left(\frac{\sigma}{k} \right)^{m-1} \right]$	

1	2	3
<p>Prager</p>	$\sigma = k \tanh\left(\frac{E\varepsilon}{k}\right)$	
<p>Szuwalski- Życzkowski</p>	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left(1 - \frac{\sigma}{k}\right)^n$	
<p>liniowo lekki</p> 	$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$	

1	2	3
<p>nieliniowy lepki</p> 	$\sigma = \eta \dot{\epsilon}^{1/n}$	
<p>Maxwell</p> 	$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$	<p> $\epsilon(t) = \begin{cases} \sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) & t < t_1 \\ \frac{\sigma}{\eta} t_1 & t > t_1 \end{cases}$ $\sigma(t) = \sigma_1 \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right)$ </p> 

1	2	3
<p>Voigt-Kelvin</p> 	$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} + E\varepsilon$	$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) & t < t_1 \\ \frac{\sigma}{E} e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_1)} \left(e^{\frac{E}{\eta}t_1} - 1 \right) & t > t_1 \end{cases}$ 
<p>standardowy</p> 	$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E} \dot{\sigma} = \frac{\eta E}{E_1 + E} \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E}{E_1 + E} \varepsilon + \frac{\eta E}{E_1 + E} \dot{\varepsilon}$	$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{E} \left[\left(1 + \frac{E}{E_1} \right) - \frac{E}{E_1} e^{-\frac{E_1}{\eta}t} \right] & t < t_1 \\ \frac{\sigma}{E_1} \left(e^{\frac{E_1}{\eta}t_1} - 1 \right) e^{-\frac{E_1}{\eta}(t-t_1)} & t > t_1 \end{cases}$ 

<p>1</p> <p>Burgers</p> 	<p>2</p> $\sigma + \left(\frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1}{E_2} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = \eta_1 \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \ddot{\epsilon}$	<p>3</p> $\epsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E_1} \left[t_1 - \frac{E_2 t}{E_1} \right] + \frac{E_1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta_2}} \right) & t < t_1 \\ \frac{\sigma}{E_1} \left[t_1 - \frac{E_2 t}{E_1} \right] + \frac{E_1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t_1}{\eta_2}} \right) & t > t_1 \end{cases}$ 
<p>Bingham</p> 	$nE\dot{\epsilon} = n\dot{\sigma}$ $nE\dot{\epsilon} = n\dot{\sigma} + \sigma - k$ $n = \eta/E$ <p style="text-align: center;">$\sigma \leq k$ $\sigma > k$</p>	$\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{E} & \sigma \leq k \\ \frac{\sigma - k}{nE} + \frac{\sigma}{E} & \sigma > k \end{cases}$ 

1	2	3
<p>Rzaniczyn</p> 	$nE\dot{\varepsilon} + H\varepsilon = n\dot{\sigma} + \sigma$ $n(E - H)\dot{\varepsilon} = n\dot{\sigma} + \sigma - k$ $E = E_1 + E_2, \quad H = E_1, \quad n = \frac{\eta_1}{E_2}$	$\varepsilon(\sigma) = \left\{ \frac{\sigma}{H} - \frac{n(E-H)v}{H^2} \times \left[\frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{H}{nvE}\sigma\right)} \right] \right\} \times \left[\frac{k}{H} + \frac{n(E-H)}{\sigma^2 - \sigma_1^2} \times \left(n - \frac{k}{v} \right) (\sigma - \sigma_1) \right]$ <p style="text-align: right;">$\sigma \leq \sigma_1$</p> <p style="text-align: right;">$\sigma > \sigma_1$</p> 

Rozdział 3

Niezmienniki tensora naprężenia i tensora odkształcenia; tensor uszkodzenia i macierze efektywne

3.1. Tensor naprężenia – niezmienniki naprężenia

Tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ w notacji matematycznej σ_{ij} $i, j = 1, 2, 3$, lub $i, j = x, y, z$, oraz w notacji inżynierskiej, zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.1)$$

gdzie x, y, z oznaczają dowolne kierunki wzajemnie prostopadłe.

W przypadku symetrii tensora naprężenia $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, możliwe jest przedstawienie tensora naprężenia w postaci *wektora kolumnowego naprężenia*

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}^T = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}\quad (3.2)$$

Zakładając definicję *dewiatora naprężenia*, można zapisać

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_h\delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\delta_{ij} \quad (3.3)$$

gdzie $\sigma_h = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$ oznacza *naprężenie hydrostatyczne* bądź *średnie*, a $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ symbol Kroneckera. Rozkład tensora naprężenia na aksjator i dewiator przyjmuje więc postać

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_h \mathbf{1} + \mathbf{s} \quad (3.4)$$

gdzie, w notacji symbolicznej, $\sigma_h \mathbf{1}$ i \mathbf{s} oznaczają, odpowiednio, *aksjator* i *dewiator naprężenia*

$$\sigma_h \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_h & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_h & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Transformacja naprężenia z jednego układu kierunków i, j do drugiego k, l odbywa się zgodnie z regułą transformacji tensora drugiego rzędu

$$\sigma_{kl} = a_{ki}a_{lj}\sigma_{ij} \quad (3.6)$$

gdzie a_{ki}, a_{lj} są kosinusami kierunkowymi wiążącymi osie obu układów. Spośród wszystkich możliwych transformacji można wyróżnić transformację na kierunki główne 1, 2, 3, dla których tensor naprężenia przyjmuje postać diagonalną

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{transformacja}} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Poszukiwanie naprężeń głównych sprowadza się do rozwiązania tzw. problemu własnego dla tensora $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{1} \quad (3.8)$$

w którym wartości własne wynoszą $\lambda_i = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Są one rzeczywistymi pierwiastkami równania *charakterystycznego tensora naprężenia* $\lambda_i = \sigma_i$

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad (3.9)$$

które w formie rozwiniętej przyjmuje postać

$$\sigma^3 - I_{1\sigma}\sigma^2 + I_{2\sigma}\sigma - I_{3\sigma} = 0 \quad (3.10)$$

Trzy współczynniki równania charakterystycznego (3.10) $I_{\beta\sigma}$ noszą nazwę *niezmienników głównych tensora naprężenia*, określonych wzorami

$$\begin{aligned} I_{1\sigma} &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} && [\text{MPa}] \\ I_{2\sigma} &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{zz} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{xx} \end{vmatrix} \\ &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) && [\text{MPa}^2] \\ I_{3\sigma} &= \det \boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} \\ &\quad + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx} - (\sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 + \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 + \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2) && [\text{MPa}^3] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Oprócz niezmienników głównych, duże znaczenie mają *niezmienniki podstawowe* bądź *generujące tensora naprężenia* (ang. *basic stress invariants* lub *generic stress invariants*), mianowicie

$$\begin{aligned} J_{1\sigma} &= \sigma_{ii} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) && [\text{MPa}] \\ J_{2\sigma} &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji} = \frac{1}{2}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) && [\text{MPa}^2] \\ J_{3\sigma} &= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3) && [\text{MPa}^3] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Jak widać, niezmienniki podstawowe można wyrazić poprzez ślady kolejnych potęg tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, z odpowiednimi współczynnikami 1, 1/2, 1/3. Zauważmy, że niezmienniki podstawowe różnią się od niezmienników głównych, będących współczynnikami równania charakterystycznego (3.10).

Niezmienniki podstawowe $J_{i\sigma}$ wyrażają się poprzez niezmienniki główne tensora naprężenia $I_{i\sigma}$ wzorami

$$\begin{aligned} J_{1\sigma} &= I_{1\sigma} \\ J_{2\sigma} &= \frac{1}{2}I_{1\sigma}^2 - I_{2\sigma} \\ J_{3\sigma} &= \frac{1}{3}I_{1\sigma}^3 - I_{1\sigma}^2 I_{2\sigma} + I_{3\sigma} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Podobnie, zależności odwrotne wyrażają w następujący sposób

$$\begin{aligned} I_{1\sigma} &= J_{1\sigma} \\ I_{2\sigma} &= \frac{1}{2}J_{1\sigma}^2 - J_{2\sigma} \\ I_{3\sigma} &= \frac{1}{6}J_{1\sigma}^3 - J_{1\sigma}^2 J_{2\sigma} + J_{3\sigma} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dekompozycja tensora naprężenia na aksjator i dewiator (3.4–3.5) pozwala zdefiniować następujący układ *niezmienników podstawowych* lub *generujących dewiatora naprężenia* (ang. *basic* lub *generic deviatoric stress invariants*)

$$\begin{aligned} J_{1s} &= s_{ii} = \text{tr}(\mathbf{s}) = 0 && [\text{MPa}] \\ J_{2s} &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{s}^2) && [\text{MPa}^2] \\ J_{3s} &= \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{s}^3) && [\text{MPa}^3] \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdzie oznaczono, podobnie, kolejne potęgi dewiatora naprężenia \mathbf{s} , $\mathbf{s}^2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}$, $\mathbf{s}^3 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}$. Zauważmy także, że pierwszy niezmiennik podstawowy dewiatora naprężenia J_{1s} , na mocy definicji (3.3), jest równy zero.

Dla dalszych potrzeb przytaczamy również częściej używane wielkości inżynierskie określone poprzez niezmienniki tensora naprężenia i charakteryzujące się jednorodnością wymiaru naprężenia [MPa], w odróżnieniu od uprzednio zdefiniowanych niezmienników podstawowych, o wymiarach [MPa], [MPa²], [MPa³].

$$\begin{aligned} \sigma_h &= \frac{1}{3}J_{1\sigma} = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} = \frac{1}{3}\sigma_{kk} && [\text{MPa}] \\ \sigma_{\text{eq}} &= \sqrt{3J_{2s}} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ji}} && [\text{MPa}] \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2. Tensor odkształcenia – niezmienniki tensora odkształcenia

Tensor odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}$ w jednolitej notacji matematycznej, $i, j = 1, 2, 3$ lub $i, j = x, y, z$, oraz w notacji inżynierskiej, zapisujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdzie x, y, z oznaczają dowolne kierunki wzajemnie prostopadłe.

Transformacja tensora odkształcenia jest opisana analogicznym równaniem jak tensora naprężenia (3.6), mianowicie

$$\varepsilon_{kl} = a_{ki}a_{lj}\varepsilon_{ij} \quad (3.18)$$

Podobnie, poszukiwanie odkształceń głównych sprowadza się do rozwiązania tzw. problemu własnego dla tensora $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \mathbf{1} \quad (3.19)$$

który prowadzi do równania charakterystycznego tensora odkształcenia

$$\boldsymbol{\varepsilon}^3 - I_{1\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^2 + I_{2\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} - I_{3\varepsilon} = 0 \quad (3.20)$$

Współczynniki tego równania zawierają *niezmienniki główne tensora odkształcenia*,

$$\begin{aligned} I_{1\varepsilon} &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \\ I_{2\varepsilon} &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{xx} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \\ I_{3\varepsilon} &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx} \\ &\quad - (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}^2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

W przypadku symetrii tensora odkształcenia $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ obowiązuje przedstawienie tensora odkształcenia w postaci wektora *kolumnowego odkształcenia*

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}\}^T = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Zakładając definicję *dewiatora odkształcenia*, analogiczną do przypadku naprężenia (3.3), zapisujemy

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij} \quad (3.23)$$

gdzie ε_m jest średnim odkształceniem objętościowym. Rozkład tensora odkształcenia na aksjator i dewiator przyjmuje zatem postać

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_m \mathbf{1} + \mathbf{e} \quad (3.24)$$

gdzie, w notacji symbolicznej, $\varepsilon_m \mathbf{1}$ i \mathbf{e} oznaczają aksjator i dewiator odkształcenia

$$\begin{aligned} \varepsilon_m \mathbf{1} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{e} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Niezmienniki podstawowe lub generujące tensora odkształcenia (ang. *basic* lub *generic strain invariants*) definiujemy analogicznie do (3.12)

$$\begin{aligned} J_{1\varepsilon} &= \varepsilon_{ii} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ J_{2\varepsilon} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) \\ J_{3\varepsilon} &= \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki} = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^3) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Niezmienniki podstawowe tensora odkształcenia $J_{i\varepsilon}$ wyrażają się przez niezmienniki główne $I_{i\varepsilon}$ następująco

$$\begin{aligned} J_{1\varepsilon} &= I_{1\varepsilon} \\ J_{2\varepsilon} &= \frac{1}{2}I_{1\varepsilon}^2 - I_{2\varepsilon} \\ J_{3\varepsilon} &= \frac{1}{3}I_{1\varepsilon}^3 - I_{1\varepsilon}^2 I_{2\varepsilon} + I_{3\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Zależności odwrotne są następujące

$$\begin{aligned} I_{1\varepsilon} &= J_{1\varepsilon} \\ I_{2\varepsilon} &= \frac{1}{2}J_{1\varepsilon}^2 - J_{2\varepsilon} \\ I_{3\varepsilon} &= \frac{1}{6}J_{1\varepsilon}^3 - J_{1\varepsilon}^2 J_{2\varepsilon} + J_{3\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Niezmienniki podstawowe dewiatora odkształcenia (ang. *basic deviatoric strain invariants*), definiujemy analogicznie do (3.15)

$$\begin{aligned} J_{1e} &= e_{ii} = \text{tr}(\mathbf{e}) \\ J_{2e} &= \frac{1}{2}e_{ij}e_{ji} = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{e}^2) \\ J_{3e} &= \frac{1}{3}e_{ij}e_{jk}e_{ki} = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{e}^3) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Podobnie do przypadku tensora naprężenia (3.16), definiowane są również niezmienniki inżynierskie tensora odkształcenia plastycznego, takie jak: *śląd tensora odkształcenia plastycznego*, *efektywne odkształcenie plastyczne*, *efektywna prędkość odkształcenia plastycznego* oraz *kumulowane odkształcenie*

plastyczne (parametr Odqvista)

$$\begin{aligned}
 J_{1\varepsilon}^p &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \varepsilon_{kk}^p = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p \\
 \varepsilon_{\text{eq}}^p &= \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ji}^p} = \frac{2}{\sqrt{3}} J_{2\varepsilon}^p \\
 \dot{p} &= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ji}^p} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_{2\dot{\varepsilon}}^p} \\
 p &= \int_0^t \dot{p}(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

3.3. Macierze reprezentacji naprężenia i odkształcenia

Tensory naprężenia σ_{ij} oraz odkształcenia ε_{ij} są obiektami zawierającymi, w ogólności, każdy po $3^2 = 9$ składowych, gdyż każdy z indeksów i, j przyjmuje wartości 1, 2, 3. Każdy z powyższych tensorów może być traktowany jako liniowa transformacja pewnego wektora w inny wektor (w przypadku tensora naprężenia jest transformacją kosinusów kierunkowych n_j w wektor naprężenia p_i – ang. *traction*) według wzoru

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \tag{3.31}$$

lub w postaci rozwiniętej

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\
 p_2 &= \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\
 p_3 &= \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Z uwagi na podobieństwo pomiędzy wzorem transformacyjnym dla tensora naprężenia (3.6) oraz zapisem macierzowym

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

naturalnym narzędziem do przedstawienia tensora drugiego rzędu (tu naprężenia) staje się macierz o wymiarze 3×3 , zwana *macierzą reprezentacji tensora naprężenia* i analogicznie macierzą reprezentacji tensora odkształcenia

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad [\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Z uwagi na symetrię tensorów naprężenia $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ oraz odkształcenia $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, ich macierze reprezentacji są również macierzami symetrycznymi, zawierającymi, każda, po 6 niezależnych składowych. W zapisie inżynierskim, zastępując kierunki 1, 2, 3 współrzędnymi x, y, z oraz odpowiednio $\sigma_{ij} = \tau_{ij}$ i $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ dla $i \neq j$, otrzymujemy

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad [\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

3.4. Macierze sztywności i podatności – notacja Voigta

Ogólna postać liniowego równania sprężystości materiału anizotropowego (uogólnione prawo Hooke'a) jest następująca

$$\varepsilon_{ij} = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.36)$$

gdzie *tensory* czwartego rzędu, sprężystej *sztywności* E_{ijkl} bądź *podatności* E_{ijkl}^{-1} mają, w ogólności, po $3^4 = 81$ składowych, gdyż każdy z indeksów i, j, k, l przyjmuje wartości 1, 2, 3. Z własności symetrii tensorów naprężenia $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$ oraz odkształcenia $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ wynika symetria obu tensorów, sztywności oraz podatności, względem zamiany wskaźników w parach $i \leftrightarrow j$ oraz $k \leftrightarrow l$

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} \quad E_{ijkl}^{-1} = E_{jikl}^{-1} = E_{ijlk}^{-1} \quad (3.37)$$

natomiast z warunku dodatniej określoności energii odkształcenia bądź energii dopełniającej, wynika ich symetria względem zamiany wskaźników pomiędzy parami $ij \leftrightarrow kl$

$$E_{ijkl} = E_{klij} \quad E_{ijkl}^{-1} = E_{klij}^{-1} \quad (3.38)$$

Uwzględnienie warunków symetrii (3.37–3.38) pozwala zredukować liczbę niezależnych składowych obu tensorów, sztywności oraz podatności, z 81 do 21, a w konsekwencji przejść do zapisu ogólnego prawa Hooke'a (3.36) w postaci wektorowo-macierzowej, zaproponowanej przez Voigta. W tym celu tensory naprężenia oraz odkształcenia zapisujemy jako *wektory kolumnowe naprężenia* lub *odkształcenia*, posługując się jednym wskaźnikiem, przyjmującym wartości od 1 do 6, według następującego schematu

zapis tensorowy	11	22	33	23,32	31,13	12,21
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
zapis wektorowy	1	2	3	4	5	6

W rezultacie takiej operacji, tensory naprężenia oraz odkształcenia zostają przekształcone następująco

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ & \sigma_2 & \sigma_4 \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ & & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

Ten sam schemat stosujemy do pierwszej oraz drugiej pary wskaźników tensora sztywności oraz podatności. Jednocześnie wprowadzamy czynniki 2 i 4 w sposób następujący

$$\begin{aligned} E_{ijkl} &= E_{mn}, \quad E_{ijkl}^{-1} = E_{mn}^{-1} && \text{gdy } m \text{ lub } n \text{ przyjmują wartości } 1, 2 \text{ lub } 3 \\ 2E_{ijkl} &= E_{mn}, \quad 2E_{ijkl}^{-1} = E_{mn}^{-1} && \text{gdy albo } m \text{ albo } n \text{ przyjmują wartości } 4, 5, \\ &&& \text{lub } 6 \\ 4E_{ijkl} &= E_{mn}, \quad 4E_{ijkl}^{-1} = E_{mn}^{-1} && \text{gdy zarówno } m, \text{ jak i } n \text{ przyjmują wartości} \\ &&& 4, 5, \text{ lub } 6 \end{aligned}$$

W zastosowaniu do przykładowej składowej osiowej odkształcenia ε_{11} taki schemat przekształca tę składową w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= E_{1111}^{-1}\sigma_{11} + E_{1122}^{-1}\sigma_{22} + E_{1133}^{-1}\sigma_{33} + 2E_{1123}^{-1}\sigma_{23} + 2E_{1113}^{-1}\sigma_{13} + 2E_{1112}^{-1}\sigma_{12} \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \varepsilon_1 &= E_{11}^{-1}\sigma_1 + E_{12}^{-1}\sigma_2 + E_{13}^{-1}\sigma_3 + E_{14}^{-1}\sigma_4 + E_{15}^{-1}\sigma_5 + E_{16}^{-1}\sigma_6 \end{aligned}$$

W przypadku przykładowej składowej stycznej odkształcenia ε_{23} daje

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23} &= E_{2311}^{-1}\sigma_{11} + E_{2322}^{-1}\sigma_{22} + E_{2333}^{-1}\sigma_{33} + 2E_{2323}^{-1}\sigma_{23} + 2E_{2313}^{-1}\sigma_{13} + 2E_{2312}^{-1}\sigma_{12} \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 2\varepsilon_4 &= 2E_{2311}^{-1}\sigma_1 + 2E_{2322}^{-1}\sigma_2 + 2E_{2333}^{-1}\sigma_3 + 4E_{2323}^{-1}\sigma_4 + 4E_{2313}^{-1}\sigma_5 + 4E_{2312}^{-1}\sigma_6 \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \gamma_4 &= E_{41}^{-1}\sigma_1 + E_{42}^{-1}\sigma_2 + E_{43}^{-1}\sigma_3 + E_{44}^{-1}\sigma_4 + E_{45}^{-1}\sigma_5 + E_{46}^{-1}\sigma_6 \end{aligned}$$

Ostatecznie, uogólnione prawo Hooke'a (3.36) daje się przedstawić w postaci wektorowo-macierzowej

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= E_{ij}^{-1} \sigma_j & (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 6) \\ \gamma_i &= E_{ij}^{-1} \sigma_j & (i = 4, 5, 6, j = 1, 2, \dots, 6)\end{aligned}\quad (3.39)$$

lub krócej

$$\{\varepsilon\} = [\mathbb{E}^{-1}] \{\sigma\} \quad (3.40)$$

байд równoważnie

$$\{\sigma\} = [\mathbb{E}] \{\varepsilon\} \quad (3.41)$$

gdzie $[\mathbb{E}]$ bądź $[\mathbb{E}^{-1}]$ oznaczają odpowiednio macierze reprezentacji tensorów sztywności bądź podatności sprężystej, natomiast $\{\varepsilon\}$ i $\{\sigma\}$ oznaczają wektory kolumnowe odkształcenia i naprężenia. Po rozpisaniu wektorów kolumnowych naprężenia i odkształcenia oraz macierzy sprężystości, a następnie po przyjęciu inżynierskich oznaczeń dla składowych stycznych tensora naprężenia $\tau_j = \sigma_j$ ($j = 4, 5, 6$)

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} E_{11}^{-1} & E_{12}^{-1} & E_{13}^{-1} & E_{14}^{-1} & E_{15}^{-1} & E_{16}^{-1} \\ E_{21}^{-1} & E_{22}^{-1} & E_{23}^{-1} & E_{24}^{-1} & E_{25}^{-1} & E_{26}^{-1} \\ E_{31}^{-1} & E_{32}^{-1} & E_{33}^{-1} & E_{34}^{-1} & E_{35}^{-1} & E_{36}^{-1} \\ \hline E_{41}^{-1} & E_{42}^{-1} & E_{43}^{-1} & E_{44}^{-1} & E_{45}^{-1} & E_{46}^{-1} \\ E_{51}^{-1} & E_{52}^{-1} & E_{53}^{-1} & E_{54}^{-1} & E_{55}^{-1} & E_{56}^{-1} \\ E_{61}^{-1} & E_{62}^{-1} & E_{63}^{-1} & E_{64}^{-1} & E_{65}^{-1} & E_{66}^{-1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ \hline E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{array} \right\}\end{aligned}\quad (3.42)$$

Należy tutaj zaznaczyć, iż symetryczne macierze sztywności $[E_{ij}] = [E_{ji}]$ oraz podatności $[E_{ij}^{-1}] = [E_{ji}^{-1}]$, każda o wymiarze 6×6 , są *macierzami reprezentacji tensorów czwartego rzędu sprężystej sztywności E_{ijkl} oraz sprężystej podatności E_{ijkl}^{-1}* . Transformacja każdej z macierzy do innego układu współrzędnych może być dokonana dopiero po sprowadzeniu zapisu macierzowego (3.42) do postaci tensorowej (3.36) lub na drodze mnożenia przez specjalnie skonstruowaną *macierz obrotu*

$$[\mathbb{E}'] = [\mathbb{Q}]^T [\mathbb{E}] [\mathbb{Q}] \quad (3.43)$$

Przykładowo, w przypadku macierzy sztywności macierz obrotu przyjmuje postać

$$[\mathbb{Q}] = \begin{bmatrix} q_{11}q_{11} & q_{12}q_{12} & q_{13}q_{13} \\ q_{21}q_{21} & q_{22}q_{22} & q_{23}q_{23} \\ q_{31}q_{31} & q_{32}q_{32} & q_{33}q_{33} \\ 2q_{31}q_{21} & 2q_{32}q_{22} & 2q_{33}q_{23} \\ 2q_{31}q_{11} & 2q_{32}q_{12} & 2q_{33}q_{13} \\ 2q_{21}q_{11} & 2q_{12}q_{22} & 2q_{13}q_{23} \\ q_{12}q_{13} & q_{13}q_{11} & q_{12}q_{11} \\ q_{23}q_{22} & q_{23}q_{21} & q_{22}q_{21} \\ q_{33}q_{32} & q_{33}q_{31} & q_{32}q_{31} \\ q_{33}q_{22} + q_{32}q_{23} & q_{33}q_{21} + q_{31}q_{23} & q_{31}q_{22} + q_{32}q_{21} \\ q_{33}q_{12} + q_{32}q_{13} & q_{33}q_{11} + q_{31}q_{13} & q_{31}q_{12} + q_{32}q_{11} \\ q_{13}q_{22} + q_{12}q_{23} & q_{13}q_{21} + q_{11}q_{23} & q_{11}q_{22} + q_{12}q_{21} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

której współczynniki są iloczynami odpowiednich kosinusów kierunkowych $q_{ij} = n_i n_j$ wiążących oba układy współrzędnych.

3.5. Tensor uszkodzenia i macierze efektywne

W dotychczasowych rozważaniach opis materiału był silnie uproszczony z uwagi na brak wpływu stanu uszkodzenia. Przez uszkodzenie rozumiany jest ogół mikropustek w materiale, powodujący pogorszenie jego właściwości mechanicznych w skali makro, takich jak wytrzymałość bądź sztywność.

W najprostszym przypadku, gdy mikropustki mają kształt sferyczny i są w miarę równomiernie rozłożone w materiale, uszkodzenie jest opisywane pojedynczą zmienną skalarną D , zwaną *parametrem uszkodzenia*

$$D = \frac{A^d}{A} \quad (3.45)$$

Skalarna zmienna uszkodzenia D , wprowadzona przez Kachanova [74] oraz Rabotnova [120], ma geometryczną interpretacją stosunku powierzchni uszkodzonej do powierzchni początkowej (nieuszkodzonej). Uogólnieniem skalarnej zmiennej uszkodzenia, w przypadku gdy mikropustki w materiale wykazują wyraźną strukturę kierunkową, jest *wektorowa zmienna uszkodzenia* D_i , zapoczątkowana przez Davisona i Stevensa [33], Kachanova [75], Krajcinovica i Fonsekę [81]

$$D_i = \frac{A_i^d}{A_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.46)$$

Kolejną wielkością spełniającą fundamentalną rolę w mechanice uszkodzeń jest symetryczny *tensor uszkodzenia drugiego rzędu* \mathbf{D} zaproponowany przez Murakami i Ohno [103], zdolny opisać ortotropową naturę uszkodzenia

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ & & D_{33} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Wreszcie próby poprawnego opisu uszkodzenia występującego w materiałach sprężysto-kruchych typu skały, ceramika oraz beton doprowadziły do wprowadzenia tensora uszkodzenia czwartego rzędu Chaboche [20], Krajcinovic [82] czy Lubarda i Krajcinovic [94]. Obok wymienionych wyżej zmiennych uszkodzenia o wyraźnej interpretacji geometrycznej należy również wspomnieć o zmiennych uszkodzenia związanych z płaszczyzną fizyczną, szczegółowo opisanych między innymi przez Gambarotta i Lagomarsino [44] oraz Seweryna i Mroza [134]. Bardziej szczegółowe zestawienia zmiennych uszkodzenia przedstawiono w następujących monografiach autorstwa: Krajcinovica [82], Skrzypka i Ganczarskiego [139], Bettina [8] oraz ostatnio wydanej Murakami [105].

W *kontynuualnej mechanice uszkodzeń* (ang. *Continuum Damage Mechanics* – CDM), oprócz konfiguracji początkowej \mathcal{A} , opisującej materiał w stanie nieuszkodzonym $D(\mathcal{A}) = 0$ (dziewiczym), definiuje się konfigurację fizyczną \mathcal{B} , opisującą materiał w stanie uszkodzonym $D(\mathcal{B}) \neq 0$, oraz równoważną konfigurację pseudo-nieuszkodzoną \mathcal{C} , w której rzeczywisty materiał heterogeniczny zawierający uszkodzenia zastępuje się materiałem homogenicznym bez uszkodzeń $D(\mathcal{C}) = 0$, jak przedstawiono na jednoosiowym schemacie, rys. 3.1.

Pomiędzy konfiguracją fizyczną (uszkodzoną) \mathcal{B} oraz konfiguracją efektywną (pseudo-uszkodzoną) \mathcal{C} zachodzi *równoważność* w określonym sensie, np. *odkształceń* Chaboche [18], *naprężeń* Taher i inni [151] bądź *energii* odkształcenia sprężystego Cordebois i Sidoroff [30]. W konfiguracji fizycznej \mathcal{B} stan uszkodzenia manifestuje się *efektywnym modułem sprężystości* \tilde{E} , np.

$$\tilde{E} = E(1 - D) \quad \text{lub} \quad \tilde{E} = E(1 - D)^2 \quad (3.48)$$

odpowiednio według hipotezy równoważności odkształceń i naprężeń (ta sama zależność) bądź energii odkształcenia. Z kolei w konfiguracji efektywnej \mathcal{C} , stan uszkodzenia zawarty jest w definicji *zmiennych efektywnych* $\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}$, np. odpowiednio

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{E}{\tilde{E}}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \quad \text{lub} \quad \tilde{\sigma} = \sigma \sqrt{\frac{E}{\tilde{E}}}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \sqrt{\frac{\tilde{E}}{E}} \quad (3.49)$$

$$= \frac{1}{1-D} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz wpływu uszkodzenia odgrywa z kolei podstawową rolę w definicjach *tensora naprężenia efektywnego*

$$\{\tilde{\sigma}\} = [\mathbf{M}] \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x}{1-D} & \frac{\tau_{xy}}{1-D} & \frac{\tau_{xz}}{1-D} \\ & \frac{\sigma_y}{1-D} & \frac{\tau_{yz}}{1-D} \\ & & \frac{\sigma_z}{1-D} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

oraz *efektywnej macierzy podatności (sztywności)* materiału

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}^{-1}] &= [\mathbf{M}]^T [\mathbf{E}^{-1}] [\mathbf{M}] = \\ &= \frac{1}{E(1-D)^2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ \hline & & & 1+\nu & & \\ & & & & 1+\nu & \\ & & & & & 1+\nu \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Przyjęto tu, dla przejrzystości, że materiał w stanie nieuszkodzonym (\mathcal{A}) jest izotropowy.

Założenie izotropowej natury uszkodzenia jest bardzo silnym uproszczeniem, gdyż najczęściej mikropustki bądź mikrouszkodzenia mają kształt soczewkowy bądź kierunkowy, a zatem ich opis wymaga użycia pełnego, np. ortotropowego tensora uszkodzenia (4.60), któremu w przypadku przejścia z kierunków dowolnych uszkodzenia do kierunków głównych uszkodzenia odpowiada tensor uszkodzenia w postaci diagonalnej, w której składowe D_1, D_2, D_3 mają interpretację redukcji powierzchni nośnej w trzech przekrojach 1, 2, 3

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & D_2 & \\ & & D_3 \end{bmatrix} \quad D_i = \frac{A_i^d}{A_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.54)$$

Można zdefiniować różne macierze efektu uszkodzenia oparte na różnych hipotezach, np. Chen i Chow [23], Skrzypek [140]

Natomiast naprężenie efektywne może zostać zdefiniowane na różne sposoby, z których demonstrujemy wybrane dwa, zapewniające symetrię tensora naprężenia efektywnego $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{D})$

$$\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\} = [\sqrt{\mathbb{M}_1}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} [\sqrt{\mathbb{M}_1}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x}{1-D_1} & \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_2)}} & \frac{\tau_{xz}}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_3)}} \\ \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_2)}} & \frac{\sigma_y}{1-D_2} & \frac{\tau_{yz}}{\sqrt{(1-D_2)(1-D_3)}} \\ \frac{\tau_{xz}}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_3)}} & \frac{\tau_{yz}}{\sqrt{(1-D_2)(1-D_3)}} & \frac{\sigma_z}{1-D_3} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\} = [\sqrt{\mathbb{M}_1}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} [\sqrt{\mathbb{M}_1}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x}{(1-D_1)^2} & \frac{\tau_{xy}(1-D_2)}{\sigma_y(1-D_2)^2} & \frac{\tau_{xz}(1-D_3)}{\tau_{yz}(1-D_3)^2} \\ \frac{\tau_{xy}(1-D_2)}{\sigma_y(1-D_2)^2} & \frac{\tau_{xy}(1-D_2)}{\sigma_y(1-D_2)^2} & \frac{\tau_{yz}(1-D_3)}{\tau_{yz}(1-D_3)^2} \\ \frac{\tau_{xz}(1-D_3)}{\tau_{yz}(1-D_3)^2} & \frac{\tau_{yz}(1-D_3)}{\tau_{yz}(1-D_3)^2} & \frac{\sigma_z}{(1-D_3)^2} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Przykładowe macierze efektywnej podatności materiału przyjmują postacie

$$[\tilde{\mathbb{E}}^{-1}] = [\mathbb{M}_1]^T [\mathbb{E}^{-1}] [\mathbb{M}_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-D_1)^2} & \frac{-\nu}{(1-D_1)(1-D_2)} & \frac{-\nu}{(1-D_1)(1-D_3)} \\ \frac{(1-D_2)(1-D_1)}{(1-D_3)(1-D_1)} & \frac{(1-D_2)^2}{(1-D_3)(1-D_2)} & \frac{(1-D_2)(1-D_3)}{(1-D_3)^2} \\ \frac{(1-D_3)(1-D_1)}{(1-D_3)(1-D_2)} & \frac{(1-D_3)(1-D_2)}{(1-D_3)(1-D_2)} & \frac{(1-D_3)^2}{(1-D_3)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\nu}{(1-D_2)(1-D_3)} & & \\ & \frac{1+\nu}{(1-D_3)(1-D_1)} & \\ & & \frac{1+\nu}{(1-D_1)(1-D_2)} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathbb{E}}^{-1}] &= \frac{1}{2} ([\mathbb{M}_2][\mathbb{E}^{-1}] + [\mathbb{E}^{-1}][\mathbb{M}_2]) = \\
& \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{1-D_1} & \frac{-\nu}{1-0.5(D_1+D_2)} & \frac{-\nu}{1-0.5(D_1+D_3)} \\ \frac{-\nu}{1-0.5(D_2+D_1)} & \frac{1}{1-D_2} & \frac{-\nu}{1-0.5(D_2+D_3)} \\ \frac{-\nu}{1-0.5(D_3+D_1)} & \frac{-\nu}{1-0.5(D_3+D_2)} & \frac{1}{1-D_3} \end{array} \right] \\
& \left[\begin{array}{c} \frac{1}{E} \\ \frac{1+\nu}{1-0.5(D_2+D_3)} \\ \frac{1+\nu}{1-0.5(D_1+D_2)} \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{3.61}$$

W obu przypadkach przyjęto, dla zachowania przejrzystości, że materiał w stanie nieuszkodzonym jest izotropowy.

W bardziej ogólnym przypadku pełnej anizotropii uszkodzenia należy posługiwać się *tensorem uszkodzenia* IV rzędu D_{ijkl} , o 21 niezależnych składowych. W szczególnym przypadku ortotropowej symetrii materiału uszkodzonego tensor uszkodzenia przyjmuje postać macierzową (Cauvin, Testa [17])

$$[\mathbb{D}] = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2D_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2D_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2D_{1212} \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

określoną przez 9 niezależnych elementów, na ogół niesymetryczną (trzy elementy D_{2211} , D_{3311} , D_{3322} są zależne). W jeszcze węższym przypadku poprzecznej izotropii (w płaszczyźnie 2, 3), liczba niezależnych elementów tensora \mathbb{D} redukuje się do 5, mianowicie D_1, D_2, D_3, D_4, D_5

$$[\mathbb{D}] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_{2'} & D_3 & D_4 & 0 & 0 & 0 \\ D_{2'} & D_4 & D_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 - D_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_6 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Elementy $D_{2'}$ nie są niezależne, lecz wyrażają się przez

$$D_{2'} = \frac{1}{1 - \nu} [D_2 + \nu(D_1 - D_3) - \nu D_4] \quad (3.64)$$

Rozdział 4

Prawo Hooke'a – klasy symetrii materiału sprężystego, energia sprężystości

4.1. Izotropia sprężysta

W materiale izotropowym właściwości mechaniczne nie zależą od wyboru kierunku. Zatem układ dowolnych kierunków x, y, z wystarcza do jednoznacznego zdefiniowania cech materiałowych. W celu podania matematycznego zapisu prawa Hooke'a materiału izotropowego, najwygodniej posłużyć się zasadą superpozycji składowych odkształcenia $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}$ wywołanych przez poszczególne składowe naprężenia $\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}$ (patrz tabela 4.1), prowadzącą do następującego zapisu macierzowego

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbb{E}^{-1}] \{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (4.1)$$

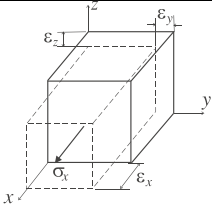
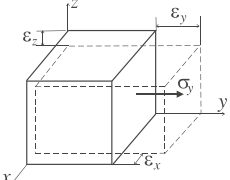
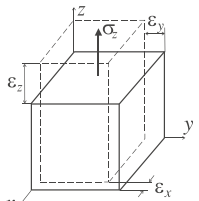
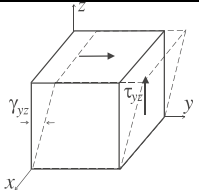
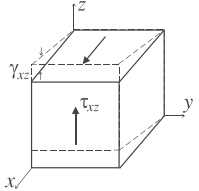
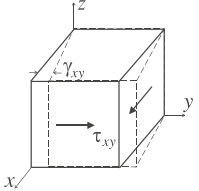
gdzie macierz podatności $[\mathbb{E}^{-1}]$, definiująca właściwości sprężyste materiału, ma następującą reprezentację

$$[\mathbb{E}^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{array} \right] \quad (4.2)$$

Prawo Hooke'a można również przedstawić w postaci odwrotnej

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbb{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (4.3)$$

Tabela 4.1. Superpozycja składowych tensora odkształcenia materiału izotropowego odpowiadających poszczególnym składowym tensora naprężenia

Szkic stanu	Odkształcenia					
	osiowe			postaciowe		
	ε_x	ε_y	ε_z	γ_{yz}	γ_{zx}	γ_{xy}
	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\frac{\nu\sigma_x}{E}$	$-\frac{\nu\sigma_x}{E}$	0	0	0
	$-\frac{\nu\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\frac{\nu\sigma_y}{E}$	0	0	0
	$-\frac{\nu\sigma_z}{E}$	$-\frac{\nu\sigma_z}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$	0	0	0
	0	0	0	$\frac{\tau_{yz}}{G}$	0	0
	0	0	0	0	$\frac{\tau_{zx}}{G}$	0
	0	0	0	0	0	$\frac{\tau_{xy}}{G}$

gdzie macierz sztywności $[\mathbb{E}]$ jest równa

$$[\mathbb{E}] = \frac{E}{1 + \nu} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right] \quad (4.4)$$

Objaśnienie symboli \bullet lub \circ na oznaczenie elementów macierzy sprężystości, niezależnych lub zależnych przyjęto za Nye [108] (por. szerzej podrozdz. 5.2). W prawie Hooke'a dla materiału izotropowego występują 3 stałe materiałowe: E - moduł sprężystości wzdłużnej (moduł Younga), G - moduł sprężystości poprzecznej (moduł Kirchhoffa), ν - współczynnik Poissona, z których tylko 2 są niezależne, ponieważ obowiązuje związek

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.5)$$

Występujące w zależnościach (4.2) i (4.4) macierze podatności $[\mathbb{E}^{-1}]$ i sztywności $[\mathbb{E}]$ mają wymiar 6×6 , bowiem w notacji Voigta symetryczne tensory naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ i odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ są wyrażone za pomocą wektorów kolumnowych $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ i $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ mających po sześć niezależnych składowych każdy.

W szczególnym przypadku sprężystej izotropii można oddzielić efekty zmiany postaci od efektów zmiany objętości, wprowadzając dekompozycję tensorów odkształcenia i naprężenia na dewiatory i aksajatory (3.5), (3.25). Prowadzi to do rozprężonych równań zmiany objętości i zmiany postaci

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3K} \sigma_{ii} \quad e_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij} \quad (4.6)$$

Występujące tu *moduły*, *ściśliwości* K i *Kirchhoffa* G , można oczywiście wyrazić za pomocą *modułu Younga* E i stałej Poissona ν

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.7)$$

Jednak w ogólnym przypadku sprężystej anizotropii materiałowej powyższe rozseparowanie deformacji objętościowej i postaciowej nie jest możliwe z uwagi na wzajemne sprzężenia.

Szczególny przypadek *płaskiego stanu naprężenia* w płaszczyźnie x, y , pozwala wyrazić odkształcenie ε_z , poprzez odkształcenia w płaszczyźnie x, y

$$\sigma_z = 0 \rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4.8)$$

Ostatecznie zatem wymiar macierzy sztywności \mathbb{E} można wówczas zredukować do 3×3

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Innymi słowy, dekompozycja prawa Hooke'a (4.1) na niezależne prawo zmiany postaci i prawo zmiany objętości jest możliwa tylko w przypadku sprężystej izotropii.

4.2. Anizotropia sprężysta

W ogólnym przypadku, *macierz podatności materiału anizotropowego* charakteryzuje się pełnym obsadzeniem elementów. Oznacza to, że uwzględnia ona powiązanie wszystkich składowych wektora kolumnowego naprężenia z wszystkimi składowymi wektora kolumnowego odkształcenia (36 kombinacji).

$$[\mathbb{E}^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & \frac{\eta_{23(1)}}{E_{11}} & \frac{\eta_{31(1)}}{E_{11}} & \frac{\eta_{12(1)}}{E_{11}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{22}} & \frac{\eta_{23(2)}}{E_{22}} & \frac{\eta_{31(2)}}{E_{22}} & \frac{\eta_{12(2)}}{E_{22}} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} & \frac{\eta_{23(3)}}{E_{33}} & \frac{\eta_{31(3)}}{E_{33}} & \frac{\eta_{12(3)}}{E_{33}} \\ \hline \frac{G_{23}}{\eta_{(1)31}} & \frac{G_{23}}{\eta_{(2)31}} & \frac{G_{23}}{\eta_{(3)31}} & \frac{1}{\mu_{(23)31}} & \frac{G_{23}}{1} & \frac{G_{23}}{\mu_{12(31)}} \\ \frac{G_{31}}{\eta_{(1)12}} & \frac{G_{31}}{\eta_{(2)12}} & \frac{G_{31}}{\eta_{(3)12}} & \frac{G_{31}}{\mu_{(23)12}} & \frac{G_{31}}{\mu_{(31)12}} & \frac{G_{31}}{1} \\ \frac{G_{12}}{G_{12}} & \frac{G_{12}}{G_{12}} & \frac{G_{12}}{G_{12}} & \frac{G_{12}}{G_{12}} & \frac{G_{12}}{G_{12}} & \frac{G_{12}}{G_{12}} \end{array} \right] \quad (4.10)$$

Jednocześnie należy podkreślić, że z symetrii tensora naprężenia oraz tensora odkształcenia wynikają stosowne warunki symetrii macierzy podatności (sztywności)

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{ij}}{E_{jj}} &= \frac{\nu_{ji}}{E_{ii}} & \longrightarrow & \nu_{ij}E_{ii} = \nu_{ji}E_{jj} \\ \frac{\eta_{ij(k)}}{E_{kk}} &= \frac{\eta_{(k)ij}}{G_{ij}} & \longrightarrow & \eta_{ij(k)}G_{ij} = \eta_{(k)ij}E_{kk} \\ \frac{\mu_{ij(ki)}}{G_{ki}} &= \frac{\mu_{(ki)ij}}{G_{ji}} & \longrightarrow & \mu_{ij(ki)}G_{ji} = \mu_{(ki)ij}G_{ki} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Podkreślmy, że symetria $\mathbb{E}_{ij}^{-1} = \mathbb{E}_{ji}^{-1}$ obowiązuje dla elementów macierzy podatności, a nie dla odpowiednich współczynników anizotropii $E_{ii}, \nu_{ij}, G_{ij}, \eta_{(i)jk}, \mu_{ij(ki)}$ (4.10)

$$[\mathbb{E}^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} E_{11}^{-1} & E_{12}^{-1} & E_{13}^{-1} & E_{14}^{-1} & E_{15}^{-1} & E_{16}^{-1} \\ E_{21}^{-1} & E_{22}^{-1} & E_{23}^{-1} & E_{24}^{-1} & E_{25}^{-1} & E_{26}^{-1} \\ E_{31}^{-1} & E_{32}^{-1} & E_{33}^{-1} & E_{34}^{-1} & E_{35}^{-1} & E_{36}^{-1} \\ \hline E_{41}^{-1} & E_{42}^{-1} & E_{43}^{-1} & E_{44}^{-1} & E_{45}^{-1} & E_{46}^{-1} \\ E_{51}^{-1} & E_{52}^{-1} & E_{53}^{-1} & E_{54}^{-1} & E_{55}^{-1} & E_{56}^{-1} \\ E_{61}^{-1} & E_{62}^{-1} & E_{63}^{-1} & E_{64}^{-1} & E_{65}^{-1} & E_{66}^{-1} \end{array} \right] \quad (4.12)$$

Tabela 4.2. Typy modułów inżynierskich w macierzy podatności (4.10) dla materiału anizotropowego

Moduły inżynierskie	Efekt		Odpowiednia oś lub płaszczyzna	liczba składowych
	naprężenie	odkształcenie		
E_{11}, E_{22}, E_{33}	osiowe	liniowe	te same osie 1 → 1, itd.	3
G_{12}, G_{32}, G_{31}	ścinające	postaciowe	te same płaszczyzny 12 → 12, itd.	3
$\nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$	osiowe	liniowe	kierunki styczne 1 → 2, itd.	3
$\mu_{31(23)}, \mu_{12(23)}, \mu_{12(31)}$	ścinające	postaciowe	różne płaszczyzny 13 → 23, itd.	3
$\eta_{23(1)}, \dots, \eta_{12(3)}$	ścinające	liniowe	normalne do 23 → 1, itd.	9

W tabeli 4.2 zestawiono 5 grup modułów inżynierskich, które oznaczają kolejno:

- E_{ii} – osiowe moduły sprężystości (3 uogólnione moduły Younga)
- G_{ij} – moduły ścinania w trzech płaszczyznach (3 uogólnione moduły Kirchhoffa)
- ν_{ij} – współczynniki odkształcenia poprzecznego (3 uogólnione współczynniki Poissona)

- $\mu_{ij(kl)}$ – 3 moduły Chencova (powiązanie ścinania w różnych płaszczyznach – efekt Chencova)
- $\eta_{i(jk)}$ – 9 modułów Rabinovicha (powiązanie ścinania z naprężeniami normalnymi – efekt Rabinovicha)

W przypadku anizotropii naprężenie ścinające działające w jednej płaszczyźnie wywołuje odkształcenia postaciowe również w pozostałych płaszczyznach. Efekt ten ujmują 3 moduły $\mu_{ij(kl)}$ $ij \neq kl$, zwane *modułami Chencova*. Dzięki temu dolny prawy blok macierzy (4.12) uzyskuje kompletne wypełnienie.

Dla opisanego powiązania pomiędzy naprężeniami stycznymi a odkształceniami liniowymi (górny prawy blok), jak również pomiędzy naprężeniami normalnymi a odkształceniami postaciowymi (dolny lewy blok), konieczne jest wprowadzenie 9 dodatkowych modułów $\eta_{(i)jk}$, zwanych *modułami Rabinovicha*. Ogólna liczba omawianych modułów wynosi zatem 21. Jednak, w istocie, tylko 18 spośród nich jest niezależnych, bowiem macierz podatności $[\mathbb{E}^{-1}]$ musi podlegać regułom transformacji przez obrót, określony 3 *kątami Eulera*. Podkreślmy jednak z naciskiem, że w ogólnym przypadku anizotropii, pomimo iż reprezentacja macierzy jest zależna od wyboru układu współrzędnych, to jednak nie można znaleźć takiego układu współrzędnych, który doprowadziłby do wyzerowania wybranych jej elementów.

4.3. Ortotropia sprężysta

Większość materiałów inżynierskich wykazuje pewne cechy symetrii, które mogą doprowadzić do redukcji liczby niezerowych modułów sprężystych. Oznacza to, że w materiale charakteryzującym się pewną klasą symetrii, można znaleźć pewne uprzywilejowane kierunki materiałowe takie, że transformacja macierzy podatności (sztywności) do tych kierunków skutkuje wyzerowaniem pewnych elementów pełnej macierzy anizotropii (4.10).

Szczególnym przypadkiem anizotropii jest *ortotropia*. Oznacza ona, że w materiale można wyróżnić trzy wzajemnie prostopadłe osie (1, 2, 3), które wyznaczają trzy charakterystyczne *płaszczyzny ortotropii materiału*. Wówczas, w ogólnej reprezentacji macierzy anizotropii zerują się 3 współczynniki Chencova $\mu_{ij(kl)}$ oraz 9 współczynników Rabinovicha $\eta_{(i)jk}$. Innymi słowy, w ogólnej macierzy anizotropii, z uwagi na brak efektu Rabinovicha i Chencova, niezerowe pozostają tylko elementy w lewym górnym bloku oraz na przekątnej prawego dolnego bloku

$$[\mathbb{E}^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ & \bullet & \bullet & & & \\ & & \bullet & & & \\ \hline & & & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & \bullet \end{array} \right] \quad (4.13)$$

przy czym obowiązują następujące dodatkowe warunki zapewniające symetrię

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \quad \frac{\nu_{31}}{E_{33}} = \frac{\nu_{13}}{E_{11}} \quad \frac{\nu_{32}}{E_{33}} = \frac{\nu_{23}}{E_{22}} \quad (4.14)$$

Ostatecznie, liczba niezależnych stałych materiałowych dla przypadku *ortotropii materiałowej* wynosi 9 (3 moduły sprężystości osiowej E_{11}, E_{22}, E_{33} ; 3 współczynniki odkształcenia poprzecznego $\nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{31}$; oraz 3 moduły ścinania G_{12}, G_{23}, G_{31}).

Przykładowe stałe materiałowe dla czterech rodzajów tworzyw sztucznych, zbrojonych włóknami szklanymi, podano w tab. 4.3. Są to, kolejno:

- tworzywo sztuczne wzmocnione równolegle położonymi wiązkami włókien szklanych, wykazujące maksimum wytrzymałości i sztywności w kierunku ułożenia zbrojenia,
- laminat zbrojony, krzyżowo włóknami szklanymi, tworzącymi szereg równoległych warstw, każda o równoległym systemie włókien,
- laminat prasowany na gorąco zbrojony krzyżowo włóknami szklanymi STET różnych typów, skąd wynikają jego ortotropowe właściwości,
- tworzywo na bazie szkła, klasy ASTT(b)-C₂-O i żywicy poliestrowej, klasy PN-3 (zbrojone krzyżowo włóknami ASTT(b)-C₂-0 oraz PN-3 różnych typów, skąd wynikają jego ortotropowe właściwości).

Tabela 4.3. Stałe materiałowe tworzyw sztucznych zbrojonych włóknami szklanymi wg Lekhnitskii [89]

Stała materiałowa	Tworzywa sztuczne zbrojone włóknami szklanymi			
	typ zbrojenia			
	równoległe wiązki włókien	krzyżowe		
		2:1	dwa typy włókien	
		STET	ASTT	
$E_{11} \times 10^{-4}$ MPa	5.70	3.68	3.59	1.79
$E_{22} \times 10^{-4}$ MPa	1.40	2.68	2.93	1.31
$E_{33} \times 10^{-4}$ MPa	1.40	1.10	1.83	0.43
$G_{12} \times 10^{-4}$ MPa	0.57	0.50	0.76	0.28
$G_{13} \times 10^{-4}$ MPa	0.57	0.41	0.66	0.24
$G_{23} \times 10^{-4}$ MPa	0.50	0.45	0.63	0.24
ν_{21}	0.272	0.105	0.177	0.150
ν_{31}	0.068	0.405	0.157	0.080
ν_{32}	0.400	0.431	0.371	0.310

4.4. Poprzeczna izotropia sprężysta

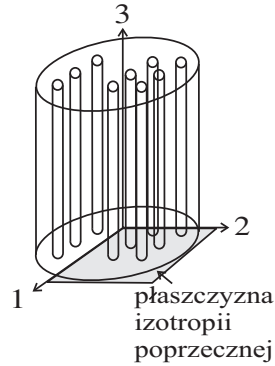
W wielu zastosowaniach ogólny model ortotropowy jest zbyt skomplikowany, ponieważ w materiałach inżynierskich często występują dodatkowe warunki symetrii. W szczególności, poprzez założenie warunków izotropii w pewnej płaszczyźnie materiału ortotropowego, dochodzimy do specjalnego przypadku ortotropii o cechach *izotropii poprzecznej* (ang. *transverse isotropy*).

Można wyróżnić dwa przypadki szczególne poprzecznej izotropii materiału. W przypadku tzw. *symetrii tetragonalnej* właściwości materiałowe w dwóch kierunkach (np. 1 i 2) są takie same, lecz inne niż w trzecim kierunku 3 (patrz rys. 4.1).

Zatem obowiązuje wówczas

$$E_{11} = E_{22}, \quad G_{13} = G_{23}, \quad \nu_{31} = \nu_{32} \quad (4.15)$$

zatem liczba niezależnych stałych ortotropii w przypadku symetrii tetragonalnej wynosi 6: E_{11} , E_{33} , G_{23} , G_{12} , ν_{21} , ν_{31} .



Rysunek 4.1. Przypadek poprzecznej izotropii sprężystej dla kompozytu zbrojonego równoległym jednokierunkowym pękiem włókien

Uwzględniając związki (4.15) w (4.13), otrzymujemy *macierz podatności poprzecznej izotropii* w następującej postaci

$$[\mathbb{E}^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right] \quad (4.16)$$

Ze wzoru (4.16) wynika, iż *macierz podatności materiału poprzecznie izotropowego* klasy tetragonalnej zawiera 6 niezależnych stałych materiałowych:

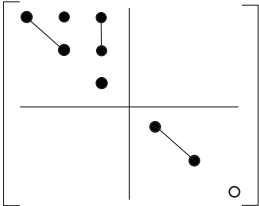
- E_{11}, E_{33} – moduły sprężystości w płaszczyźnie izotropii oraz w kierunku prostopadłym do niej,
- ν_{21}, ν_{31} – współczynniki Poissona charakteryzujące, odpowiednio, zwięźnienie w płaszczyźnie izotropii spowodowane obciążeniem w niej działającym oraz zwięźnienie w płaszczyźnie izotropii, spowodowane obciążeniem działającym w kierunku normalnym do niej

- G_{12}, G_{23} – moduły ścinania, w płaszczyźnie izotropii, oraz w płaszczyźnie ortotropii do niej prostopadłej

W drugim ważnym przypadku, tzw. *symetrii heksagonalnej*, obowiązuje oprócz powyższych dodatkowy warunek wiążący moduł ścinania w płaszczyźnie poprzecznej izotropii G_{12} z poprzecznym modułem Younga E_{11} oraz z poprzecznym współczynnikiem Poissona ν_{21} , mianowicie

$$G_{12} = \frac{E_{11}}{2(1 + \nu_{21})} \quad \text{lub} \quad E_{66}^{-1} = 2(E_{11}^{-1} - E_{12}^{-1}) \quad (4.17)$$

W efekcie, liczba niezależnych stałych poprzecznej ortotropii w przypadku symetrii heksagonalnej wynosi 5: $E_{11}, E_{33}, G_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}$. Wybór 5 niezależnych stałych materiałowych (spośród 6) w przypadku materiału poprzecznie izotropowego klasy heksagonalnej, jest dowolny.

$$[\mathbb{E}^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ & & & & & \frac{2(1+\nu_{21})}{E_{11}} \end{array} \right] \quad (4.18)$$


Materiałami poprzecznie izotropowymi są, między innymi, metale po procesie walcowania, pewne typy kompozytów, bazalt z materiałów kamiennych oraz lód tworzący lodowiec, powstający w warunkach dużego ściskania w kierunku działania obciążeń masowych, zwany lodem kolumnowym.

4.4.1. Dyskusja o braku możliwości rozdzielenia deformacji czysto objętościowej od czysto postaciowej w materiale anizotropowym

W ogólnym przypadku *materiału anizotropowego* zachodzi pełne wzajemne sprzężenie wszystkich składowych odkształcenia ze wszystkimi składowymi na-

prężenia. Istotnie, zapisując (4.10) otrzymujemy w formie rozwiniętej (Rabinovich [119]).

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_{11}} \left(\sigma_{11} - \nu_{21}\sigma_{22} - \nu_{31}\sigma_{33} \right. \\
&\quad \left. + \eta_{23(1)}\tau_{23} + \eta_{31(1)}\tau_{31} + \eta_{12(1)}\tau_{12} \right) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_{22}} \left(-\nu_{12}\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu_{32}\sigma_{33} \right. \\
&\quad \left. + \eta_{23(2)}\tau_{23} + \eta_{31(2)}\tau_{31} + \eta_{12(2)}\tau_{12} \right) \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_{22}} \left(-\nu_{13}\sigma_{11} - \nu_{23}\sigma_{22} + \sigma_{33} \right. \\
&\quad \left. + \eta_{23(3)}\tau_{23} + \eta_{31(3)}\tau_{31} + \eta_{12(3)}\tau_{12} \right) \\
\gamma_{23} &= \frac{1}{G_{23}} \left(\eta_{(1)23}\sigma_{11} + \eta_{(2)23}\sigma_{22} + \eta_{(3)23}\sigma_{33} \right. \\
&\quad \left. + \tau_{23} + \mu_{31(23)}\tau_{31} + \mu_{12(23)}\tau_{12} \right) \\
\gamma_{31} &= \frac{1}{G_{31}} \left(\eta_{(1)31}\sigma_{11} + \eta_{(2)31}\sigma_{22} + \eta_{(3)31}\sigma_{33} \right. \\
&\quad \left. + \mu_{23(31)}\tau_{23} + \tau_{31} + \mu_{12(31)}\tau_{12} \right) \\
\gamma_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \left(\eta_{(1)12}\sigma_{11} + \eta_{(2)12}\sigma_{22} + \eta_{(3)12}\sigma_{33} \right. \\
&\quad \left. + \mu_{23(12)}\tau_{23} + \mu_{31(12)}\tau_{12} + \tau_{12} \right)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Podkreślmy, że w powyższych równaniach sprężyste odkształcenia liniowe ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} zależą nie tylko od wszystkich naprężeń normalnych σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , ale również od wszystkich naprężeń stycznych τ_{23} , τ_{31} , τ_{12} (poprzez uogólnione *moduły Younga* E_{ii} oraz *współczynniki Rabinovicha* $\eta_{ij(k)}$), powodując występowanie niezerowych elementów symetrycznej macierzy konstytutywnej sprężystości w jej prawym górnym bloku. Ponadto, odkształcenia postaciowe γ_{23} , γ_{31} , γ_{12} zależą zarówno od wszystkich naprężeń stycznych τ_{23} , τ_{31} , τ_{12} (poprzez uogólnione *moduły Kirchhoffa* G_{ij} oraz *współczynniki Chencova* $\mu_{ij(kl)}$), jak i od wszystkich naprężeń normalnych σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , wypełniając całkowicie bloki, lewy dolny i prawy dolny, macierzy sprężystości. Te spostrzeżenia prowadzą do istotnych konsekwencji odnośnie do niemożności odseparowania (w przypadku anizotropii) efektów deformacji czysto objętościowej od deformacji czysto postaciowej. Innymi słowy, dekompozycja tensorów odkształcenia i naprężenia na aksjator i dewiator $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_m \mathbf{1} + \mathbf{e}$ i $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{1} + \mathbf{s}$ nie prowadzi do prostego zapisania równań sprężystości (4.10), w rozbięciu na niezależne prawo zmiany objętości oraz prawo zmiany postaci.

Problemu tego nie unikniemy także w przypadku prostszym, na przykład *ortotropii* (4.13), pomimo że naprężenia styczne nie są tutaj sprzęgnięte z odkształceniami liniowymi i, *vice versa*, naprężenia normalne nie mają wpływu na odkształcenia postaciowe. Aby to prześledzić, zapiszmy (4.13) w postaci rozwiniętej

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_{11}} (\sigma_{11} - \nu_{21}\sigma_{22} - \nu_{31}\sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_{22}} (-\nu_{12}\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu_{13}\sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_{33}} (-\nu_{13}\sigma_{11} - \nu_{23}\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \quad \gamma_{31} = \frac{\tau_{31}}{G_{31}} \quad \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}\end{aligned}\tag{4.20}$$

Obliczając stąd dylatację, $\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Theta^{\text{orto}} = 3\varepsilon_{\text{m}} &= \frac{1}{E_{11}} (\sigma_{11} - \nu_{21}\sigma_{22} - \nu_{31}\sigma_{33}) \\ &+ \frac{1}{E_{22}} (-\nu_{12}\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu_{13}\sigma_{33}) \\ &+ \frac{1}{E_{33}} (-\nu_{13}\sigma_{11} - \nu_{23}\sigma_{22} + \sigma_{33})\end{aligned}\tag{4.21}$$

lub uwzględniając symetrię macierzy sprężystości (4.14) w postaci zależności

$$\frac{\nu_{21}}{E_{11}} = \frac{\nu_{12}}{E_{22}}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_{11}} = \frac{\nu_{13}}{E_{33}}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_{22}} = \frac{\nu_{23}}{E_{33}}\tag{4.22}$$

możemy zapisać równoważnie

$$\Theta^{\text{orto}} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} (1 - \nu_{21} - \nu_{31}) + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} (1 - \nu_{12} - \nu_{32}) + \frac{\sigma_{33}}{E_{33}} (1 - \nu_{13} - \nu_{23})\tag{4.23}$$

Dylatacja wyraża się zatem nie wyłącznie poprzez naprężenie hydrostatyczne, $\Theta = \Theta^{\text{izo}}(\sigma_{\text{h}})$, lecz przez bardziej ogólną funkcję $\Theta = \Theta^{\text{orto}}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}; E_{ij}, \nu_{ij})$ lub $\Theta = \Theta^{\text{orto}}(\sigma_{kk}, \mathbb{E}_{ijkl}^{-1})$.

Jedynie w szczególnym przypadku *izotropii*, gdy $E_{ij} = E$, $\nu_{ij} = \nu$, powyższe równanie redukuje się do klasycznej postaci

$$\Theta^{\text{izo}} = 3\varepsilon_{\text{m}} = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \sigma_{\text{h}}\tag{4.24}$$

lub

$$\varepsilon_{\text{m}} = \frac{1}{3K} \sigma_{\text{h}}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}\tag{4.25}$$

w której efekt dylatacji bądź odkształcenie średnie ε_m , zależy wyłącznie od naprężenia hydrostatycznego σ_h w postaci prostej proporcjonalności, $\varepsilon_m \sim \sigma_h$.

Wyliczając w przypadku ortotropii *składowe dewiatorowe odkształceń*, przy formalnym zastosowaniu definicji

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\mathbf{1} = \mathbb{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\Theta^{\text{orto}}(\sigma_{kk}; \mathbb{E}_{ijkl}^{-1})\mathbf{1} \quad (4.26)$$

otrzymujemy w notacji wektorowo-macierzowej

$$\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{12} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$- \frac{1}{3}\Theta^{\text{orto}}(\sigma_{kk}; \mathbb{E}_{ijkl}^{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Innymi słowy, deformacja czysto postaciowa, powstała przez odjęcie od pełnego stanu odkształcenia części czysto objętościowej, zależy również od dylatacji Θ^{orto} , zatem niemożliwe jest rozseparowanie tych dwóch efektów.

Zwróćmy na koniec uwagę, że powyższe trudności związane z niemożnością odseparowania, w przypadku ogólnym, deformacji czysto objętościowej od deformacji czysto postaciowej, rzutują również na formę równań *określających ograniczenia zakresu sprężystego*. Bez dodatkowych zawężających założeń równania te muszą być formułowane w postaci ogólnej $f(\sigma_{ij}) = 0$, opisującej hiperpowierzchnię graniczną w sześciowymiarowej (symetria) przestrzeni naprężeń, a nie w trójwymiarowej przestrzeni niezmienników naprężenia (porównaj rozdział 8).

4.5. Energia odkształcenia i energia dopełniająca – potencjał stanu

Materiał będziemy nazywać *sprężystym*, jeżeli jego odpowiedź (deformacja) jest niezależna od historii obciążenia (porównaj rys. 4.2), czyli naprężenie jest

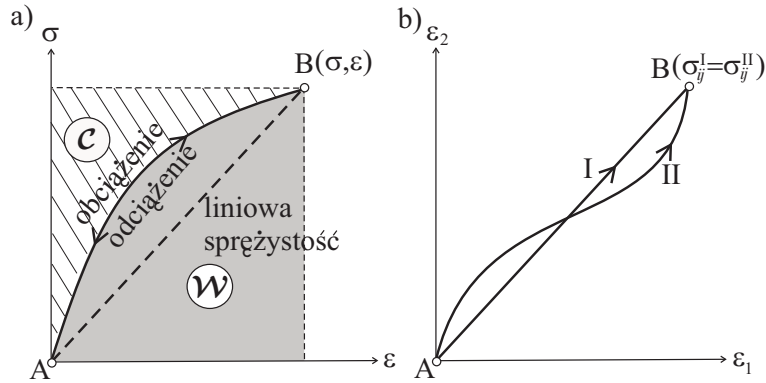
jednoznacznie określone przez odkształcenie

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (4.28)$$

lub formie odwrotnej

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}) \quad (4.29)$$

Po wykonaniu pełnego cyklu obciążenia–odciążenia (A-B-A), materiał powraca do stanu pierwotnego A.



Rysunek 4.2. Ilustracja zachowania materiału sprężystego: a) energia odkształcenia i energia dopełniająca, b) niezależność stanu końcowego od historii obciążenia

Wprowadzając pojęcie *energii właściwej odkształcenia* \mathcal{W} [Nm/m^3], możemy zapisać, odpowiednio dla stanu jednoosiowego lub wieloosiowego obciążenia

$$\mathcal{W}(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\epsilon) d\epsilon \quad \text{lub} \quad \mathcal{W}(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}) d\epsilon_{ij} \quad (4.30)$$

Podobnie, *energia właściwa dopełniająca* \mathcal{C} [Nm/m^3], wyraża się wzorami

$$\mathcal{C}(\sigma) = \int_0^\sigma \epsilon(\varsigma) d\varsigma \quad \text{lub} \quad \mathcal{C}(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \varsigma_{ij}(\epsilon_{kl}) d\varsigma_{ij} \quad (4.31)$$

Ponadto obowiązuje zależność (por. rys. 4.2)

$$\mathcal{C}(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \mathcal{W}(\varepsilon_{ij}) \quad (4.32)$$

Podkreślmy, że w rozważanym materiale, zarówno energia odkształcenia \mathcal{W} , jak i energia dopełniająca \mathcal{C} , nie zależą od historii obciążenia.

W przypadku bardziej ogólnym, gdy procesowi deformacji mogą towarzyszyć trwale (nieodwracalne) zmiany w mikrostrukturze materiału, na przykład wskutek wystąpienia płynięcia plastycznego, bądź rozwoju mikrouszkodzeń, czy wreszcie przebudowy struktury materiału związanej ze zmianą fazy podczas przemiany martenzytycznej lub innych zjawisk nieodwracalnych, energia odkształcenia i energia dopełniająca zależą od *historii procesu obciążenia*.

W *materiale sprężystym*, w którym energia odkształcenia zależy jedynie od aktualnego stanu odkształcenia $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$, a nie zależy od drogi dojścia do tego odkształcenia, może ona służyć jako niezmiennicza *funkcja potencjału dla naprężeń*

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.33)$$

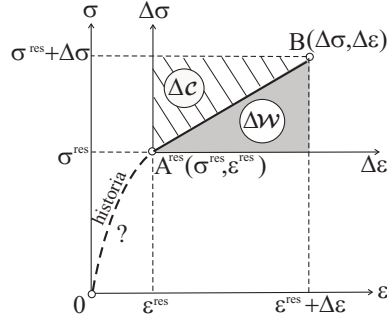
Podobnie, *energia dopełniająca*, która zależy wyłącznie od aktualnego stanu naprężenia $\mathcal{C}(\sigma_{ij})$, może zostać użyta jako niezmiennicza *funkcja potencjału dla odkształceń*, czyli

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \mathcal{C}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.34)$$

W ogólnym przypadku *nieliniowego materiału sprężystego* energie te nie muszą być równe $\mathcal{W} \neq \mathcal{C}$, natomiast, jedynie w *szczególnym przypadku materiału liniowo sprężystego*, zachodzi równość $\mathcal{W} = \mathcal{C}$.

W powyższych rozważaniach stan początkowy był traktowany jako wolny od składowych naprężeń i odkształcenia, punkt A ($\sigma = 0, \varepsilon = 0$). W rzeczywistości, w stanie początkowym, materiał może wykazywać pewien *resztkowy stan naprężenia i odkształcenia* A^{res} ($\sigma = \sigma^{\text{res}}, \varepsilon = \varepsilon^{\text{res}}$), będący wynikiem bądź procesu wytwarzania materiału, bądź też poprzedniej historii obciążenia, w czasie których wystąpiły nieodwracalne zmiany w strukturze materiału (np. plastyczność cykliczna), bądź też zostały „zamrożone” naprężenia resztkowe i odkształcenia resztkowe (np. w wyniku schłodzenia kompozytu włóknistego, o różnych właściwościach termicznych włókna i matrycy). Na ogół, stan resztkowy nie jest znany, ponieważ nieznana jest cała historia materiału, zawierająca pełną informację o procesie wytwarzania i wstępnej obróbki, jak również o procesie odciążania poprzedzającego osiągnięcie tego samorozważonego stanu resztkowego.

Rozważmy proces *sprężystej deformacji* materiału, od stanu resztkowego $A^{\text{res}}(\sigma^{\text{res}}, \varepsilon^{\text{res}})$, do stanu końcowego B($\Delta\sigma, \Delta\varepsilon$), ograniczając się, na początek, do jednoosiowego rozciągania (por. rys. 4.3).



Rysunek 4.3. Proces deformacji materiału sprężystego poprzedzony stanem resztkowym

Energia sprężysta materiału odpowiadająca wywołanemu odkształceniu $\Delta\varepsilon$ w obecności stanu resztkowego ε^{res} wynosi zatem

$$\Delta\mathcal{W}(\Delta\varepsilon) = \int_0^{\Delta\varepsilon} \Delta\sigma(\Delta\varepsilon) d(\Delta\varepsilon) \quad (4.35)$$

co, w szczególnym przypadku *liniowego prawa Hooke'a* dla materiału izotropowego, sprowadza się do postaci

$$\Delta\mathcal{W}(\Delta\varepsilon) = \frac{1}{2} E (\Delta\varepsilon)^2 \quad (4.36)$$

gdzie obowiązuje

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad \Delta\sigma = \sigma - \sigma^{\text{res}} \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^{\text{res}} \quad (4.37)$$

W bardziej ogólnym przypadku wieloosiowego stanu deformacji *energia właściwa odkształcenia materiału sprężystego* w obecności stanu resztkowego, wynosi

$$\Delta\mathcal{W}(\Delta\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\Delta\varepsilon_{ij}} \Delta\sigma_{ij}(\Delta\varepsilon_{kl}) d(\Delta\varepsilon_{ij}) \quad (4.38)$$

Natomiast, dla materiału *liniowo sprężystego*, postulując zależność liniową dla przyrostów

$$\Delta\sigma_{ij} = E_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl} \quad (4.39)$$

powyższe wyrażenie przyjmuje postać energii sprężystej $\Delta\mathcal{W}$ w obecności stanu resztkowego, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{res}} + \Delta\varepsilon_{ij}$

$$\Delta\mathcal{W}(\Delta\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\Delta\varepsilon_{ij}} E_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl} d(\Delta\varepsilon_{ij}) \quad (4.40)$$

gdzie tensor IV-rzędu E_{ijkl} jest *tensorem sztywności materiału sprężystego*. Zwróćmy uwagę, że równanie (4.40) obowiązuje zarówno dla *materiału izotropowego*, jak i *anizotropowego* dowolnej klasy symetrii (patrz rozdział 5). W tensorze sztywności E_{ijkl} zawarta jest pełna informacja o sprężystym zachowaniu materiału.

Podobnie, dla energii dopełniającej w obecności stanu resztkowego $\Delta\mathcal{C}$ otrzymujemy, odpowiednio, dla *materiału sprężystego*

$$\Delta\mathcal{C}(\Delta\sigma_{kl}) = \int_0^{\Delta\sigma_{kl}} \Delta\varepsilon_{kl}(\Delta\varsigma_{mn}) d(\Delta\varsigma_{kl}) \quad (4.41)$$

bądź dla *materiału liniowo sprężystego*

$$\Delta\mathcal{C}(\Delta\sigma_{kl}) = \int_0^{\Delta\sigma_{kl}} E_{klmn}^{-1} \Delta\varsigma_{mn} d(\Delta\varsigma_{kl}) \quad (4.42)$$

gdzie E_{klmn}^{-1} jest *tensorem podatności materiału sprężystego*

$$\Delta\varepsilon_{kl} = E_{klmn}^{-1} \Delta\sigma_{mn} \quad (4.43)$$

Powyższe równanie (4.43) stanowi uogólnienie równania materiału liniowo sprężystego na przypadek występowania niezerowego stanu resztkowego, bowiem przyjmując

$$\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{res}} \quad \Delta\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{\text{res}} \quad (4.44)$$

otrzymujemy równoważnie

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{res}} = E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{\text{res}}) \quad (4.45)$$

lub

$$\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{\text{res}} = E_{klmn}^{-1} (\sigma_{mn} - \sigma_{mn}^{\text{res}}) \quad (4.46)$$

Stosując *notację wektorowo-macierzową*, tensory IV-rzędu E_{ijkl} i E_{klmn}^{-1} można zastąpić symetrycznymi macierzami reprezentacji o wymiarze 6×6 : $[\mathbb{E}]$ i $[\mathbb{E}^{-1}]$ zwanymi, odpowiednio, *macierzą sztywności* i *macierzą podatności*, oraz tensory $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{res}}$ i $\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{\text{res}}$, odpowiednio, *wektorami kolumnowymi* naprężenia

i odkształcenia nadwyżkowego

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{11}^{\text{res}} \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}^{\text{res}} \\ \sigma_{33} - \sigma_{33}^{\text{res}} \\ \tau_{23} - \tau_{23}^{\text{res}} \\ \tau_{31} - \tau_{31}^{\text{res}} \\ \tau_{12} - \tau_{12}^{\text{res}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^{\text{res}} \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^{\text{res}} \\ \varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^{\text{res}} \\ \gamma_{23} - \gamma_{23}^{\text{res}} \\ \gamma_{31} - \gamma_{31}^{\text{res}} \\ \gamma_{12} - \gamma_{12}^{\text{res}} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Zatem, w notacji Voigta otrzymujemy równoważnie do (4.45) i (4.46)

$$\{\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{res}}\} = [\mathbb{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{res}}\} \quad (4.48)$$

lub

$$\{\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{res}}\} = [\mathbb{E}^{-1}] \{\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{res}}\} \quad (4.49)$$

4.6. Energia sprężystości jako funkcja niezmienników – potencjał stanu

W rozdziale 3 tensory naprężenia oraz odkształcenia zostały przedstawione poprzez swoje niezmienniki. W obecnym rozdziale *energia właściwa odkształcenia sprężystego* \mathcal{W} , wyrażona poprzez iloczyn skalarny obu tych tensorów

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ji} \quad (4.50)$$

zostanie również przedstawiona poprzez niezmienniki. W przypadku materiału izotropowego, do jednoznacznego przedstawienia energii odkształcenia wystarczają 3 *niezmienniki podstawowe tensora odkształcenia*, natomiast w przypadku materiału sprężystego zawierającego uszkodzenia bądź materiału sprężystego ortotropowego, należy użyć dodatkowych niezmienników wspólnych definiujących wewnętrzną strukturę materiału.

4.6.1. Energia sprężystości materiału izotropowego

Najprostszym przykładem funkcji skalarnej argumentu tensorowego jest *energia odkształcenia sprężystego* $\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon})$. W przypadku *materiału izotropowego*, tensor odkształcenia jest jednoznacznie określony poprzez *niezmienniki podstawowe* lub *niezmienniki generujące odkształcenia* (3.26), czyli

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathcal{W}(J_{1\varepsilon}, J_{2\varepsilon}, J_{3\varepsilon}) \quad (4.51)$$

Prawo fizyczne dla *materiału sprężystego* (4.33) można zatem zapisać w postaci

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_{1\varepsilon}} \frac{\partial J_{1\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_{2\varepsilon}} \frac{\partial J_{2\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_{3\varepsilon}} \frac{\partial J_{3\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.52)$$

w której

$$\frac{\partial J_{1\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij} \quad \frac{\partial J_{2\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ij} \quad \frac{\partial J_{3\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} \quad (4.53)$$

czyli

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_{1\varepsilon}} \delta_{ij} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_{2\varepsilon}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_{3\varepsilon}} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} \quad (4.54)$$

Przyjmując następnie

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_{1\varepsilon}} = \lambda \varepsilon_{kk} \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_{2\varepsilon}} = 2\mu \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_{3\varepsilon}} = 0 \quad (4.55)$$

gdzie $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ oraz $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ oznaczają *stałe sprężystości Lamé*, otrzymujemy *prawo Hooke'a dla materiału izotropowego*

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4.56)$$

Podsumowując, *izotropowy materiał sprężysty Hooke'a* jest jednoznacznie zdefiniowany przez energię odkształcenia, zależną od pierwszych dwóch niezmienników podstawowych tensora odkształcenia, a nie zależy od trzeciego niezmiennika $J_{3\varepsilon}$

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \lambda (J_{1\varepsilon})^2 + 2\mu J_{2\varepsilon} \quad (4.57)$$

4.6.2. Energia materiału zawierającego uszkodzenia

Teoria niezmienników tensorowych pozwala określić minimalny zbiór niezmienników podstawowych, z których można utworzyć wszystkie inne niezmienniki tensorowe, niezbędne do wystarczająco ogólnego sformułowania równań stanu (por. np. Spencer [145], Rymarz [129]). Najczęściej, energia właściwa odkształcenia $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$ lub energia dopełniająca $\mathcal{C}(\sigma_{ij})$ jest przyjmowana jako *potencjał stanu sprężystości* (por. podrozdział 4.7.1). Jak pokazano w 4.7.1, w przypadku *izotropii sprężystej* trzy niezmienniki wystarczająco określają obie energie, $\mathcal{W}(J_{i\varepsilon})$ lub $\mathcal{C}(J_{i\sigma})$, $i = 1, 2, 3$.

Bardziej złożonym przypadkiem jest funkcja skalarna zależna od pary argumentów tensorowych, z których każdy jest symetrycznym tensorem 2-go rzędu. Reprezentatywnym przykładem dla takiego przypadku jest *energia odkształcenia materiału zawierającego uszkodzenia* $\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$. Analogicznie do

przypadku materiału izotropowego (4.51), każdy z tensorów, $\boldsymbol{\varepsilon}$ oraz \boldsymbol{D} , jest jednoznacznie określony poprzez swoje (własne) niemienniki podstawowe $J_{i\varepsilon}$ oraz J_{iD} ($i = 1, 2, 3$). Funkcja skalarna zależna od pary argumentów tensorowych $\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D})$ zależy jednak nie tylko od ich niemienników własnych $J_{i\varepsilon}$ oraz J_{iD} , lecz również od tzw. *niemienników wspólnych* $J_{j\varepsilon D}$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Zgodnie z teorią niemienników tensorowych, podstawowy (niesprowadzalny) zbiór niemienników obejmuje wówczas 10 niemienników skalarnych, wystarczających do jej jednoznacznego określenia, mianowicie

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}) = \mathcal{W}(J_{1\varepsilon}, J_{2\varepsilon}, J_{3\varepsilon}, J_{1D}, J_{2D}, J_{3D}; J_{1\varepsilon D}, J_{2\varepsilon D}, J_{3\varepsilon D}, J_{4\varepsilon D}) \quad (4.58)$$

gdzie obowiązują definicje niemienników w przestrzeni wspólnej $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D})$

$$\begin{aligned} J_{1\varepsilon} &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} \\ J_{2\varepsilon} &= \frac{1}{2}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} \\ J_{3\varepsilon} &= \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki} \\ J_{1D} &= \text{tr}(\boldsymbol{D}) = D_{ii} \\ J_{2D} &= \frac{1}{2}\text{tr}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{D}) = \frac{1}{2}D_{ij}D_{ji} \\ J_{3D} &= \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{D}) = \frac{1}{3}D_{ij}D_{jk}D_{ki} \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} J_{1\varepsilon D} &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{D}) = \varepsilon_{ij}D_{ji} \\ J_{2\varepsilon D} &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{D}) = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}D_{ki} \\ J_{3\varepsilon D} &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{D}) = \varepsilon_{ij}D_{jk}D_{ki} \\ J_{4\varepsilon D} &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{D}) = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}D_{kl}D_{li} \end{aligned}$$

Jednak pamiętając, że \mathcal{W} ma definiować jednostkową *energię odkształcenia materiału sprężystego z uszkodzeniami*, nie wszystkie z dziesięciu niemienników (4.59) mogą być użyte do jej niemiennicznej reprezentacji. Mianowicie, zakładając że w stanie pierwotnym materiał jest *izotropowy i liniowo sprężysty*, $\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D})$ jest funkcją kwadratową z uwagi na $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ponadto, energia swobodna $\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D})$ jest funkcją malejącą wraz ze wzrostem uszkodzenia, bowiem jest wyzwalana wskutek powstawania i wzrostu mikrouszkodzeń, a więc jest ona liniową funkcją względem \boldsymbol{D} . Zatem, energia odkształcenia nie może zależeć od trzeciego niemiennika tensora odkształcenia $J_{3\varepsilon}$ ani też od dwóch niemienników uszkodzenia J_{2D} , J_{3D} , jak również od dwóch niemienników wspólnych $J_{3\varepsilon D}$, $J_{4\varepsilon D}$. Na podstawie tych rozważań natury fizycznej, energia odkształcenia może być ostatecznie określona przy użyciu kombinacji pięciu niemienników, a mianowicie

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}) = \rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}) = \rho\psi(J_{1\varepsilon}, J_{2\varepsilon}, J_{1D}, J_{1\varepsilon D}, J_{2\varepsilon D}) \quad (4.60)$$

Dochodzimy w ten sposób do reprezentacji energii swobodnej Helmholtza, która ma zasadnicze znaczenie przy formułowaniu równań konstytutywnych, jest bowiem często przyjmowana jako *potencjał stanu Helmholtza*, określający jednoznacznie stan naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial[\rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})]}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.61)$$

Zauważmy wreszcie, że w reprezentacji (4.60), muszą wystąpić takie kombinacje niezmienników, przy których skalarna funkcja $\psi(\boldsymbol{\varepsilon})$ jest funkcją kwadratową z uwagi na odkształcenie. Zatem, ostatecznie wyrażenie (4.60) przyjmuje ogólną postać (por. Murakami i Kamiya [104])

$$\begin{aligned} \rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = & \frac{1}{2}\lambda(J_{1\varepsilon})^2 + 2\mu J_{2\varepsilon} + \eta_1(J_{1\varepsilon})^2 J_{1D} + 2\eta_2 J_{2\varepsilon} J_{1D} \\ & + \eta_3 J_{1\varepsilon} J_{1\varepsilon D} + \eta_4 J_{2\varepsilon D} \end{aligned} \quad (4.62)$$

bądź równoważnie (porównaj, np. Skrzypek i inni [141])

$$\begin{aligned} \rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = & \frac{1}{2}\lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \eta_1(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 \text{tr}(\mathbf{D}) \\ & + \eta_2 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \text{tr}(\mathbf{D}) + \eta_3 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}) + \eta_4 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Pamiętajmy jednak, że powyższe reprezentacje energii swobodnej poprzez niezmienniki dotyczą szczególnego przypadku anizotropowej sprężystości, nabytej w wyniku rozwoju uszkodzeń, które przy braku uszkodzeń przechodzą w równania pierwotnie izotropowej sprężystości Hooke'a. Symbol $\boldsymbol{\varepsilon}$ należy zatem interpretować jako odkształcenie sprężyste $\boldsymbol{\varepsilon}^e$.

Alternatywne sformułowanie opiera się na koncepcji energii dopełniającej \mathcal{C} , zależnej od dwóch argumentów tensorowych $\boldsymbol{\sigma}$ i \mathbf{D} , czyli $\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$, i prowadzi do określenia *potencjału Gibbsa* (por. np. Spencer [145], Rymarz [129], Hayakawa–Murakami [58], i inni). Powtarzając powyższe rozważania, oraz stosując definicje nieredukowalnych niezmienników analogiczne do (4.59), dla przestrzeni $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$, otrzymujemy równoważnie

$$\begin{aligned} J_{1\boldsymbol{\sigma}} &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii} \\ J_{2\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{2}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji} \\ J_{3\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \\ J_{1D} &= \text{tr}(\mathbf{D}) = D_{ii} \\ J_{2D} &= \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{2}D_{ij}D_{ji} \\ J_{3D} &= \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{3}D_{ij}D_{jk}D_{ki} \\ J_{1\boldsymbol{\sigma}D} &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) = \sigma_{ij}D_{ji} \\ J_{2\boldsymbol{\sigma}D} &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) = \sigma_{ij}\sigma_{jk}D_{ki} \\ J_{3\boldsymbol{\sigma}D} &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) = \sigma_{ij}D_{jk}D_{ki} \\ J_{4\boldsymbol{\sigma}D} &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) = \sigma_{ij}\sigma_{jk}D_{kl}D_{li} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Zatem, w przypadku ogólnym, reprezentacja energii dopełniającej \mathcal{C} jako funkcji powyższych niezmienników przyjmuje ogólną formę

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = \mathcal{C}(J_{1\sigma}, J_{2\sigma}, J_{3\sigma}, J_{1D}, J_{2D}, J_{3D}, J_{1\sigma D}, J_{2\sigma D}, J_{3\sigma D}, J_{4\sigma D}) \quad (4.65)$$

Stosując, analogicznie do poprzedniego przypadku, rozważania o naturze fizycznej energii dopełniającej $\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$, tylko pięć z tych niezmienników może być użyte do jej reprezentacji, mianowicie

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = \rho\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = \rho\mathcal{G}(J_{1\sigma}, J_{2\sigma}, J_{1D}, J_{1\sigma D}, J_{2\sigma D}) \quad (4.66)$$

Ostatecznie zatem, w przypadku materiału sprężystego, pierwotnie izotropowego, nabierającego cechy anizotropii w wyniku rozwoju uszkodzeń, *potencjał stanu Gibbsa* przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \rho\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = & -\frac{\nu}{2E} (\text{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 + \frac{1+\nu}{2E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \vartheta_1 (\text{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 \text{tr}(\mathbf{D}) \\ & + \vartheta_2 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \text{tr}(\mathbf{D}) + \vartheta_3 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) + \vartheta_4 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) \end{aligned} \quad (4.67)$$

Podkreśmy, że energia dopełniająca Gibbsa $\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ odpowiada odkształceniom sprężystym $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ i jest kwadratową funkcją $\boldsymbol{\sigma}$ i liniową funkcją \mathbf{D} , analogicznie do sformułowania opartego na energii swobodnej Helmholtza $\rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$.

Występujące w potencjale stanu Helmholtza (4.63) cztery stałe η_i , analogicznie do potencjału stanu Gibbsa (4.67) stałe ϑ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), są obok stałych sprężystości materiału pierwotnie izotropowego: λ, μ lub E, ν , dodatkowymi stałymi materiałowymi określającymi wpływ uszkodzenia na równania stanu. Mianowicie, w ujęciu opartym na *potencjale Helmholtza*, czyli przyjmując funkcję $\mathcal{W} = \rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$ jako *funkcję potencjału dla naprężeń* otrzymujemy równanie stanu $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = & [\lambda\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\eta_1\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\text{tr}(\mathbf{D}) + \eta_3\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D})] \mathbf{1} \\ & + 2[\mu + \eta_2\text{tr}(\mathbf{D})] \boldsymbol{\varepsilon} + \eta_3\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{D} + \eta_4(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Natomiast, posługując się sformułowaniem opartym na *potencjale Gibbsa*, czyli przyjmując funkcję $\mathcal{C} = \rho\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ jako *funkcję potencjału dla odkształcenia*, otrzymujemy równanie stanu $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial(\rho\mathcal{G})}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = & -\frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{2E} \boldsymbol{\sigma} + 2\vartheta_1 \text{tr}(\mathbf{D}) \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \\ & + 2\vartheta_2 \text{tr}(\mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} + \vartheta_3 [\text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{D}] \\ & + \vartheta_4 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Zauważmy jednak, że w przypadku materiałów sprężystych z uszkodzeniami macierze konstytutywne, sztywności $[\mathbb{E}(\mathbf{D})]$ i podatności $[\mathbb{E}^{-1}(\mathbf{D})]$ podlegają zmianie (przebudowie), wraz z rozwojem uszkodzeń, a materiał nabywa cech anizotropii.

Równanie stanu materiału sprężysto-krucho z uszkodzeniami (4.63) zostało skalibrowane przykładowo dla *betonu o podwyższonej wytrzymałości* przez Murakami i Kamiya [104] (por. Skrzypek [140]).

Tabela 4.4. Wyniki kalibracji 9 stałych materiałowych w równaniu konstytutywnym materiału sprężysto-krucho z uszkodzeniami, dla betonu (na podstawie Murakami i Kamiya [104])

E GPa	ν –	η_1 MPa	η_2 MPa	η_3 MPa	η_4 MPa	K_d MPa	B_0 MPa	ζ –
21.4	0.2	–400	–900	100	–23500	0.04	0.0026	0.1

Oprócz stałych E, ν (λ, μ) oraz czterech stałych η_i ($i = 1, 2, 3, 4$) w tab. 4.4 podano również progową wartość siły termodynamicznej uszkodzenia $Y_{\text{eq}} = B_0$, stałą charakteryzującą wzmocnienie uszkodzeniowe K_d oraz parametr efektu unilateralnego uszkodzenia ζ (w przypadku $\zeta = 0$ składowe ujemne odkształceń głównych nie mają żadnego wpływu na rozwój uszkodzeń, a w przypadku $\zeta = 1$ nie ma rozróżnienia wpływu składowych dodatnich bądź ujemnych).

Z kolei równanie stanu materiału sprężysto-umiarkowanie ciągliwego z uszkodzeniami (4.69), zostało skalibrowane dla *żeliwa sferoidalnego FCD400*, w innej pracy autorstwa Hayakawa i Murakami [58] (por. Skrzypek [140]).

Oprócz stałych sprężystości E, ν (λ, μ) oraz czterech stałych ϑ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) w tabeli 4.5 zamieszczono, dla kompletu, dodatkowe stałe definiujące granicę plastyczności $\sigma_{\text{eq}} = R_0$ i jej wartość asymptotyczną R_∞ , wartość progową siły termodynamicznej uszkodzenia $Y_{\text{eq}} = B_0$, stałą wzmocnienia uszkodzeniowego K_d bezwymiarowe stałe określające sprzężenia wzajemne procesu rozwoju uszkodzeń i procesu płynięcia plastycznego, oraz parametr efektu unilateralnego uszkodzenia ζ (podobnie, jak wyżej, dla $\zeta = 0$ ujemne naprężenia główne nie wpływają na rozwój uszkodzeń, a dla $\zeta = 1$, nie ma rozróżnienia wpływu naprężeń dodatnich bądź ujemnych).

Tabela 4.5. Wyniki kalibracji 15 stałych materiałowych w równaniu konstytutywnym materiału sprężysto-plastycznego z uszkodzeniami, dla żeliwa sferoidalnego FCD400 (na podstawie Hayakawa i Murakami [58])

E GPa	ν –	ϑ_1 MPa ⁻¹	ϑ_2 MPa ⁻¹	ϑ_3 MPa ⁻¹
169	0.285	-3.95×10^{-1}	4.0×10^{-6}	-4.0×10^{-7}
ϑ_4 MPa ⁻¹	K_d MPa	ζ –	b –	R_0 MPa
2.50×10^{-6}	1.3	0.89	15	293.0
R_∞ MPa	B_0 MPa	c^p –	c^d –	c^f –
250.0	0.273	1.0	-15.0	50.0

4.6.3. Energia sprężystości materiału ortotropowego

Ogólniejszym przypadkiem jest funkcja skalarna pary argumentów tensorowych, z których jeden jest *tensorem czwartego rzędu*, a drugi *drugiego rzędu*. Reprezentantem takiego przypadku jest *energia odkształcenia materiału ortotropowego* $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbb{E})$. Materiał ortotropowy charakteryzuje się istnieniem trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn symetrii, określonych trzema tensorami drugiego rzędu, zwanymi *tensorami strukturalnymi* i tworzącymi tensor sprężystości \mathbb{E}

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}, \mathbf{M}^{(3)}) \quad (4.70)$$

W szczególnym przypadku, gdy kierunki materiałowe ortotropii pokrywają się z kierunkami osi układu współrzędnych, tensory strukturalne przyjmują prostą postać

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

która prowadzi do następującej, oczywistej zależności

$$\mathbf{1} = \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)} + \mathbf{M}^{(3)} \quad (4.72)$$

Równanie (4.72) dowodzi, że tensory strukturalne są wzajemnie zależne od siebie; jeśli dwa z nich są znane, to trzeci wynika z (4.72). W konsekwencji, we

wzorze na energię odkształcenia materiału ortotropowego (4.70) uwzględniamy tylko dwa, np. $\mathbf{M}^{(1)}$ oraz $\mathbf{M}^{(2)}$

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}) \quad (4.73)$$

Z kolei, dla tensora odkształcenia zachodzi $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{1}$, co, po wykorzystaniu (4.72), daje, równoważnie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{M}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}^{(3)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Dodając oba powyższe przedstawienia tensora $\boldsymbol{\varepsilon}$, otrzymujemy jego symetryczną reprezentację

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)} + \mathbf{M}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)} + \mathbf{M}^{(3)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4.75)$$

Stosując następnie procedurę (4.58), przedstawiamy energię odkształcenia materiału ortotropowego jako funkcję 7 niezmienników, zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \mathcal{W} \left[\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}), \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}), \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}), \right. \\ &\quad \left. \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)}), \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)}), \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)}), \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)}) \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$

w której, na podstawie (4.75), dwa pierwsze niezmienniki odkształcenia wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)}) + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)}) + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)}) \\ \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)}) + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)}) + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)}) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Natomiast trzeci niezmiennik odkształcenia $\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$ pomijamy, ponieważ wprowadza nieliniowość. Innymi słowy, energia określona jest funkcją kwadratową z uwagi na $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Równanie fizyczne *ortotropowego materiału hipersprężystego* otrzymujemy poprzez różniczkowanie energii odkształcenia (por. Boehler [10])

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_1} \mathbf{M}^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_2} \mathbf{M}^{(2)} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_3} \mathbf{M}^{(3)} \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_4} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_5} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)} + \mathbf{M}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_6} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)} + \mathbf{M}^{(3)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (4.78)$$

gdzie

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)}) & J_2 &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)}) & J_3 &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)}) \\ J_4 &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)}) & J_5 &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)}) & J_6 &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)}) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Przyjmując

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_1} &= \alpha_1 J_1 + \beta_1 J_2 + \beta_2 J_3 \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_2} &= \alpha_2 J_1 + \alpha_3 J_2 + \beta_3 J_3 \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_3} &= \alpha_4 J_1 + \alpha_5 J_2 + \alpha_6 J_3 \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_4} &= \alpha_7 & \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_5} &= \alpha_8 & \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J_6} &= \alpha_9 \end{aligned} \quad (4.80)$$

oraz wprowadzając symetrię współczynników $\beta_1 = \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_4$, $\beta_3 = \alpha_5$ otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \left[\alpha_1 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)}) + \alpha_2 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)}) + \alpha_4 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)}) \right] \mathbf{M}^{(1)} \\ &+ \left[\alpha_2 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)}) + \alpha_3 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)}) + \alpha_5 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)}) \right] \mathbf{M}^{(2)} \\ &+ \left[\alpha_4 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)}) + \alpha_5 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)}) + \alpha_6 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)}) \right] \mathbf{M}^{(3)} \\ &+ \alpha_7 \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \right) + \alpha_8 \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)} + \mathbf{M}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \right) \\ &+ \alpha_9 \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)} + \mathbf{M}^{(3)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (4.81)$$

Równaniu (4.81) w postaci niezmienniczej można oczywiście nadać tradycyjną formę $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$. W tym celu należy wykonać kolejne działania mnożenia tensorów $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(i)}$ oraz określania ich śladów. Przykładowo obliczając

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

skąd znajdujemy

$$\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)}) = \varepsilon_{xx} \quad (4.83)$$

oraz

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Przeprowadzając analogiczne obliczenia dla iloczynów $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(2)}$ oraz $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{(3)}$, po zgrupowaniu współczynników α_i poprzedzających te same składowe tensora odkształcenia oraz po wprowadzeniu notacji inżynierskiej dla naprężenia i odkształcenia, równanie (4.81) zostaje ostatecznie przekształcone do postaci

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & & & \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & & & \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & & & \\ & & & E_{44} & & \\ & & & & E_{55} & \\ & & & & & E_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

w której kolejne elementy macierzy sztywności materiału ortotropowego wyrażają się poprzez odpowiednie kombinacje współczynników α_i

$$\begin{aligned} E_{11} &= \alpha_1 + 2\alpha_7 & E_{12} &= E_{21} = \alpha_2 & E_{13} &= E_{31} = \alpha_4 \\ E_{22} &= \alpha_3 + 2\alpha_8 & E_{23} &= E_{32} = \alpha_5 & E_{33} &= \alpha_6 + 2\alpha_9 \\ E_{44} &= \alpha_8 + \alpha_9 & E_{55} &= \alpha_9 + \alpha_7 & E_{66} &= \alpha_7 + \alpha_8 \end{aligned} \quad (4.86)$$

Na koniec, warto zaznaczyć, że powyższe wyprowadzenie *niezmiennicznych równań liniowej sprężystości* dla *materiału ortotropowego* opiera się na zupełnie odmiennej metodzie w stosunku do (4.13), wykorzystującej twierdzenie o reprezentacji funkcji argumentów tensorowych za pomocą niezmienników.

Rozdział 5

Równania konstytutywne materiałów liniowo lepko-sprężystych

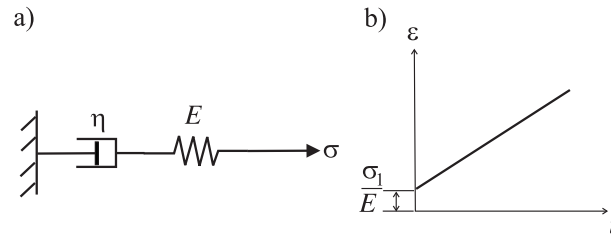
Zjawiska pełzania zachodzące zwłaszcza w podwyższonych temperaturach są z reguły traktowane jako problemy fizycznie nieliniowe. Istnieje bogata literatura dotycząca pełzania nieliniowego, wśród której wymienimy pozycje poświęcone: anizotropii Findley i inni [42], przeglądowi równań i modeli pełzania nieliniowego Skrzypek [137], Betten [8], interakcjom zjawisk pełzania i plastyczności Krempl [83], sprzężeniom procesów pełzania i rozwoju uszkodzenia Skrzypek [138], Skrzypek i Ganczarski [139] oraz nieklasycznym modelom pełzania dla materiałów anizotropowych Altenbach [3].

Dla opisu pełzania materiałów kompozytowych wygodnym narzędziem matematycznym będzie zastosowanie transformacji całkowitej Laplace'a, która wymaga zawężenia klasy rozpatrywanych modeli materiałów reologicznych do liniowo lepko-sprężystych. W przestrzeni zmiennych transformowanych można bowiem wówczas zastosować klasyczne reguły homogenizacji dla sprężystych materiałów kompozytowych. Z tego względu w dalszej części tego rozdziału ograniczymy rozważania do klasy materiałów liniowo lepko-sprężystych.

5.1. Jednowymiarowe modele izotropowych materiałów liniowo lepko-sprężystych

5.1.1. Model Maxwella

Jednowymiarowy *model Maxwella* (M) powstaje przez szeregowe połączenie elementu liniowo sprężystego, o równaniu $\varepsilon^H = \sigma/E$, oraz liniowo lepkiego $\dot{\varepsilon}^\eta = \sigma/\eta$ (rys. 5.1a). Różniczkując pierwszy z tych związków po czasie, mo-



Rysunek 5.1. Model Maxwella: a) model mechaniczny, b) wykres krzywej pełzania prostego

żemy zapisać równanie $\dot{\varepsilon}^H = \dot{\sigma}/E$. Z addytywności odkształcenia (bądź jego prędkości) $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^H + \dot{\varepsilon}^\eta$, otrzymujemy równanie modelu Maxwella w postaci różniczkowej

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \text{lub} \quad \sigma + \frac{\eta}{E}\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon} \quad (5.1)$$

Wykonując całkowanie tego równania, przy stałym naprężeniu $\sigma = \sigma_1 = \text{const}$ ($\dot{\sigma} = 0$) i warunku początkowym $\varepsilon(0) = \sigma_1/E$, dochodzimy do równania *pełzania prostego*

$$\varepsilon = \sigma_1 \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}t \right) \quad (5.2)$$

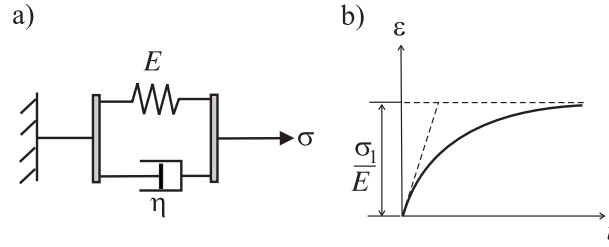
lub

$$\varepsilon = \sigma_1 J^M(t), \quad J^M(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad (5.3)$$

Funkcja czasu $J^M(t)$ charakteryzująca *model Maxwella* jest zwana *funkcją pełzania prostego* dla tego modelu.

5.1.2. Model Voigta–Kelvina

Model Voigta–Kelvina (V–K) powstaje przez równoległe połączenie elementu liniowo sprężystego (sprężyny) i liniowo lepkiego (tłumika), rys. 5.2a. Całkowite naprężenie σ przenoszone przez element V–K składa się z części sprężystej



Rysunek 5.2. Model Voigta–Kelvina: a) model mechaniczny, b) wykres krzywej pełzania prostego

$\sigma^H = E\varepsilon$ oraz lepkiej $\sigma^\eta = \eta\dot{\varepsilon}$, natomiast odkształcenia obu części są sobie równe $\varepsilon = \varepsilon^H = \varepsilon^\eta$. Zatem równanie różniczkowe modelu V–K ma postać

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} \quad (5.4)$$

Przechodząc do całkowania równania w warunkach stałego naprężenia $\sigma = \sigma_1 = \text{const}$ ($\dot{\sigma} = 0$), otrzymujemy równanie niejednorodne

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma_1}{\eta} \quad (5.5)$$

Aby znaleźć jego rozwiązanie $\varepsilon(t)$, przy warunku początkowym $\varepsilon(0) = 0$ (brak natychmiastowej deformacji sprężystej), rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = 0 \quad (5.6)$$

które jest równaniem o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{E}{\eta} \quad (5.7)$$

i posiada całkę ogólną równania jednorodnego

$$\varepsilon = C \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \quad (5.8)$$

Stosując dalej metodę wariacji stałej $C(t)$, oraz przyjmując warunek początkowy, dochodzimy ostatecznie do całki ogólnej równania niejednorodnego, będącej rozwiązaniem równania (5.5)

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \right] \quad (5.9)$$

lub

$$\varepsilon = \sigma_1 J^{\text{VK}}(t), \quad J^{\text{VK}}(t) = \frac{1}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \right] \quad (5.10)$$

Funkcja $J^{\text{VK}}(t)$ charakteryzująca model V–K jest funkcją pełzania tego modelu. Podkreślmy jeszcze raz, że w tym modelu $J^{\text{VK}}(0) = 0$, zatem nie wykazuje on sprężystości natychmiastowej.

Model V–K wykazuje odpowiedź określoną bardziej ogólnym rozwiązaniem, w przypadku wymuszenia naprężeniem dowolnie zmiennym w czasie $\sigma(t)$. Aby uzyskać to rozwiązanie, powróćmy do całki ogólnej równania jednorodnego (5.8) i zastosujmy jeszcze raz metodę uzmienniania stałej, otrzymując tym razem do całkowania równanie różniczkowe

$$\dot{C}(t) = \eta \exp\left(\frac{E}{\eta}t\right) \sigma(t) \quad (5.11)$$

posiadające rozwiązanie ogólne w postaci

$$C(t) = C_1 + \eta \int_0^t \exp\left(\frac{E}{\eta}\xi\right) \sigma(\xi) d\xi \quad (5.12)$$

Podstawienie (5.12) do (5.8) i jednoczesne wykorzystanie warunku początkowego $\varepsilon(0) = 0$, daje $C_1 = 0$ i, w rezultacie, prowadzi do następującego rozwiązania dla funkcji $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \eta e^{-\frac{E}{\eta}t} \int_0^t e^{\frac{E}{\eta}\xi} \sigma(\xi) d\xi = \eta \int_0^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\xi)} \sigma(\xi) d\xi \quad (5.13)$$

Wykonując całkowanie przez części, w stosunku do ostatniej z całek lewej strony równania (5.13), dochodzimy to tzw. *całkowej postaci modelu V–K*

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} - \frac{1}{E} \int_0^t \exp\left[-\frac{E}{\eta}(t-\xi)\right] \dot{\sigma}(\xi) d\xi \quad (5.14)$$

w której wyraźnie widać rolę, jaką spełnia funkcja pełzania $J^{\text{VK}}(t)$ rozbita na część niezależną od czasu $J_0 = 1/E$ oraz funkcję zależną od czasu $\varphi(t) = \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}(t-\xi)}$.

Analogiczny wynik, lecz na drodze krótszych rachunków, można otrzymać rozwiązując powyższy problem metodą transformacji całkowej Laplace'a (por.

(5.45)). W tym celu równanie niejednorodne (5.4) jest mnożone obustronnie przez e^{-st} i całkowane względem zmiennej t , w granicach od 0 do ∞

$$\int_0^{\infty} \dot{\varepsilon}(t)e^{-st} dt + \frac{E}{\eta} \int_0^{\infty} \varepsilon(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sigma(t)}{\eta} e^{-st} dt \quad (5.15)$$

W rezultacie otrzymujemy równanie algebraiczne w funkcji zmiennej transformowanej s , w postaci

$$s\widehat{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0) + \frac{E}{\eta}\widehat{\varepsilon}(s) = \frac{\widehat{\sigma}(s)}{\eta} \quad (5.16)$$

Podstawiając warunek początkowy $\varepsilon(0) = 0$ i rozwiązując (5.16) z uwagi na $\widehat{\varepsilon}(s)$ dostajemy

$$\widehat{\varepsilon}(s) = \frac{1}{E + \frac{s}{\eta}} * \widehat{\sigma}(s) \quad (5.17)$$

Następnie, obliczając dla tego równania *odwrotną transformację Laplace'a*, wykorzystujemy własność przekształcenia całkowego polegającą na fakcie, iż mnożeniu dwóch transformat odpowiada splot całkowony w dziedzinie funkcji

$$\varepsilon(t) = \eta \int_0^t \exp\left[-\frac{E}{\eta}(t - \xi)\right] \sigma(\xi) d\xi \quad (5.18)$$

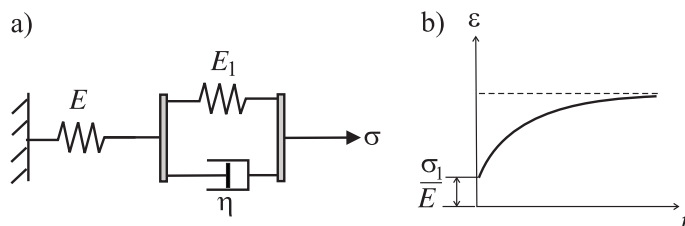
identyczny jak we wzorze (5.13), zaś rozwiązanie końcowe (5.14) otrzymywane jest po wykonaniu całkowania przez części.

5.1.3. Model standardowy

Przedstawione w poprzednich dwóch podpunktach modele elementarne Maxwella i Voigta–Kelvina są bardzo proste, jednak wykazują istotne wady. Model Maxwella wykazuje liniowe pełzanie przy stałym naprężeniu (czego nie potwierdzają eksperymenty), natomiast model Voigta–Kelvina nie wykazuje odkształcenia natychmiastowego (sprężystego). Aby uniknąć powyższych wad można zbudować bardziej złożony model trójparametrowy, otrzymany w wyniku szeregowego połączenia elementu sprężystego (E) i elementu V–K, nazywany *modelem standardowym*.

Równanie różniczkowe dla tego modelu otrzymywane jest analogicznie do przypadku prostych modeli Maxwella i Voigta–Kelvina, skąd po przekształceniach, otrzymujemy

$$\frac{\eta E}{E_1 + E} \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E}{E_1 + E} \varepsilon = \sigma + \frac{\eta}{E_1 + E} \dot{\sigma} \quad (5.19)$$



Rysunek 5.3. Model standardowy: a) schemat mechaniczny, b) wykres krzywej pełzania prostego

Wykonując całkowanie tego równania, przy stałym naprężeniu $\sigma = \sigma_1 = \text{const}$ ($\dot{\sigma} = 0$) i warunku początkowym $\varepsilon(0) = \sigma_1/E$, dochodzimy do rozwiązania równania pełzania prostego modelu standardowego w postaci

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} \left[\left(1 + \frac{E}{E_1} \right) - \frac{E}{E_1} \exp \left(-\frac{E_1}{\eta} t \right) \right] \quad (5.20)$$

lub przy użyciu funkcji pełzania modelu standardowego $J^s(t)$

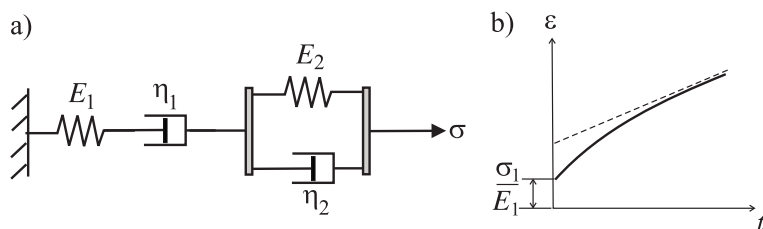
$$\varepsilon = \sigma_1 J^s(t), \quad J^s(t) = \frac{1}{E} \left[\left(1 + \frac{E}{E_1} \right) - \frac{E}{E_1} \exp \left(-\frac{E_1}{\eta} t \right) \right] \quad (5.21)$$

5.1.4. Model Burgersa

Model standardowy pozwala na uwolnienie się od wad modeli Maxwella i Voigta–Kelvina, jednakże jego krzywa pełzania wykazuje poziomą asymptotę (stabilizacja odkształcenia), czego nie potwierdzają doświadczenia wykazujące zazwyczaj nieograniczone narastanie odkształcenia pełzania. Aby uwolnić się również od tej wady należy zbudować model bardziej złożony, co najmniej czteroparametrowy, na przykład poprzez połączenie szeregowo elementu Maxwella z elementem Voigta–Kelvina. W ten sposób zbudowano *model Burgersa* (rys. 5.4a). *Równanie różniczkowe modelu Burgersa* można zapisać w postaci

$$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \ddot{\varepsilon} + \eta_1 \dot{\varepsilon} = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} + \left(\frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1}{E_2} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \dot{\sigma} + \sigma \quad (5.22)$$

Zwróćmy uwagę, że równanie to jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, zarówno z uwagi na odkształcenie, jak i naprężenie, jednakże pozostaje nadal równaniem liniowym. Ponadto jest ono również równaniem różniczkowym o stałych współczynnikach. Oznacza to, innymi słowy, że wszystkie funkcje oraz



Rysunek 5.4. Model Burgersa: a) model mechaniczny, b) wykres krzywej pełzania prostego

ich pochodne występują co najwyżej w pierwszej potędze, a ponadto współczynniki równania są stałymi wyrażonymi przez cztery stałe materiałowe ośrodka: dwie stałe lepkości η_1, η_2 oraz dwie stałe sprężyste E_1, E_2 .

Podobnie do poprzednich przypadków, w celu uzyskania rozwiązania dla pełzania prostego w warunkach stałego naprężenia $\sigma = \sigma_1 = \text{const}$ ($\dot{\sigma} = 0$) należy wykonać jego całkowanie przy następujących dwóch warunkach początkowych $\varepsilon(0) = \sigma_1/E_1$, $\dot{\varepsilon}(0) = \sigma_1/\eta_1 + \sigma_1/\eta_2$, bowiem całkowane równanie jest drugiego rzędu. Rozwiązanie przyjmuje więc postać

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E_1} \left\{ 1 + \frac{E_1}{\eta_1} t + \frac{E_1}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta_2} t\right) \right] \right\} \quad (5.23)$$

lub przez *funkcję pełzania modelu Burgersa* $J^B(t)$

$$\varepsilon = \sigma_1 J^B(t), \quad J^B(t) = \frac{1}{E_1} \left\{ 1 + \frac{E_1}{\eta_1} t + \frac{E_1}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta_2} t\right) \right] \right\} \quad (5.24)$$

Zauważmy przy tym, że *krzywa pełzania modelu Burgersa* wykazuje ukośną asymptotę (rys. 5.4b), co obrazuje nieograniczone narastanie odkształcenia z malejącą prędkością i lepiej oddaje obserwacje eksperymentalne.

5.2. Liniowe ośrodki lepko-sprężyste a zasada superpozycji Boltzmann

Podsumowując wyniki z poprzednich podpunktów można stwierdzić, że odpowiedź dowolnego *modelu liniowo lepko-sprężystego* na wymuszenie $\sigma = \sigma_1 = \text{const}$, za wyjątkiem modelu V-K, jest postaci

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon^e(x) E J(t) \quad (5.25)$$

czyli odkształcenie dowolnego elementu materialnego, będące funkcją współrzędnej x oraz czasu t , daje się przedstawić jako iloczyn odkształcenia natychmiastowego (sprężystego), zależnego tylko od x , oraz funkcji pełzania, charakterystycznej dla danego modelu materiałowego, zależnej wyłącznie od czasu t .

Tabela 5.1. Charakterystyki prostych modeli lepko-sprężystych

Model	Funkcja pełzania $J(t)$
Maxwell	$\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}$
V-K	$\frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)$
Standard	$\frac{1}{E} \left(1 + \frac{E}{E_1} - \frac{E}{E_1} e^{-\frac{E_1}{\eta}t}\right)$
Burgers	$\frac{1}{E_1} \left[1 + \frac{E_1}{\eta_1}t + \frac{E_1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_2}t}\right)\right]$
Model	Funkcja relaksacji $E(t)$
Maxwell	$E e^{-\frac{E}{\eta}t}$
V-K	$E + \eta \delta(t)$
Standard	$E \left(\frac{E_1}{E_1 + E} + \frac{E}{E_1 + E} e^{-\frac{E_1 + E}{\eta}t}\right)$
Burgers	$\frac{(q_1 - q_2 r_1) e^{-r_1 t} - (q_1 - q_2 r_2) e^{-r_2 t}}{A}$
	$r_{1,2} = \frac{p_1 \mp A}{2p_2}, \quad A = \sqrt{p_1^2 - 4p_2}$

W szczególnym przypadku, ugięcie belki wykonanej z materiału liniowo lepko-sprężystego przy stałym obciążeniu może być zapisane jako iloczyn funkcji ugięcia sprężystego $w^e(x)$ oraz funkcji materiałowej $EJ(t)$, jak następuje

$$w^{ve}(x, t) = w^e(x) EJ(t) \quad (5.26)$$

a mianowicie, dla funkcji pełzania w tab. 5.1

$$w^M(x, t) = w^e(x) \left(1 + \frac{E}{\eta}t\right)$$

$$w^{VK}(x, t) = w^e(x) \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right)\right]$$

$$\begin{aligned} w^s(x, t) &= w^e(x) \left[\left(1 + \frac{E}{E_1} \right) - \frac{E}{E_1} \exp\left(-\frac{E_1}{\eta} t\right) \right] \\ w^B(x, t) &= w^e(x) \left\{ 1 + \frac{E_1}{\eta_1} t + \frac{E_1}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta_2} t\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Przykładowo, rozpatrując pryzmatyczną belkę, o podwójnie symetrycznym przekroju, w której siła osiowa i moment zginający są funkcjami współrzędnej x i czasu t : $N = N(x, t)$, $M = M(x, t)$, przy czym $N(x, t) = N(x)f(t)$ i $M(x, t) = M(x)f(t)$, a ponadto deformacja spełnia ograniczenie płaskich przekrojów Bernoulliego, $\varepsilon(x, z, t) = \lambda(x, t) + z\kappa(x, t)$, w przypadku materiałów liniowo lepko-sprężystych (5.25), można rozseparować równania dla wydłużenia jednostkowego λ^{ve} i krzywizny κ^{ve}

$$\begin{aligned} \lambda^{\text{ve}}(x, t) &= \frac{N(x)}{A} \int_0^t J(t-\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\ \kappa^{\text{ve}}(x, t) &= \frac{M(x)}{I} \int_0^t J(t-\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi \end{aligned} \quad (5.28)$$

Zakładając, na przykład, stałe obciążenie przyłożone natychmiastowo w chwili $t = 0$, czyli $N(x, t) = N(x)H(t)$, $M(x, t) = M(x)H(t)$, oraz posługując się funkcją Diraca $\delta(t) = \dot{H}(t)$ zdefiniowaną jako pochodna funkcji Heaviside'a i przy wykorzystaniu (por. Byron, Fuller [15])

$$\int_0^t J(t-\xi)\delta(\xi)d\xi = \int_0^t J(\xi)\delta(t-\xi)d\xi = J(t) \quad (5.29)$$

otrzymujemy ostatecznie następujące wzory na wydłużenie $\lambda^{\text{ve}}(x, t)$ i krzywiznę $\kappa^{\text{ve}}(x, t)$

$$\begin{aligned} \lambda^{\text{ve}}(x, t) &= \frac{N(x)}{EA} J(t) \\ \kappa^{\text{ve}}(x, t) &= -w''(x, t) = \frac{M(x)}{EI} J(t) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Zauważmy zatem, że wydłużenie jednostkowe belki liniowo lepko-sprężystej λ^{ve} jest iloczynem wydłużenia natychmiastowego (sprężystego) i funkcji materiałowej, oraz podobnie krzywizna belki liniowo lepko-sprężystej κ^{ve} jest iloczynem krzywizny natychmiastowej (sprężystej) i funkcji materiałowej $J(t)$.

Natomiast, w rozpatrywanym przykładzie stałego (w czasie) obciążenia, naprężenie pozostaje również niezależne od czasu, czyli

$$\sigma(x, z, t) = \frac{N(x)}{EA} + \frac{M(x)}{EI} z \quad (5.31)$$

Oczywiście, powyższe wnioski są słuszne jedynie dla *materiału liniowo lepko-sprężystego*, bowiem tylko wówczas można rozseparować problem przestrzenny od zmienności w czasie, jak pokazuje wzór (5.25).

Uogólniając powyższe rozważania, zapiszmy jednolitym równaniem wszystkie możliwe postacie *równań różniczkowych jednowymiarowych liniowych modeli lepko-sprężystych*

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} + \dots = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon} + \dots \quad (5.32)$$

Jest to równanie różniczkowe dowolnego rzędu, liniowe, o stałych współczynnikach p_i, q_i , charakteryzujących materiał. Rząd równania jest równy liczbie elementów lepkich (tłumików) w modelu fizycznym. Dla skrócenia zapisu, równanie powyższe można przedstawić w formie

$$P\sigma(t) = Q\varepsilon(t) \quad (5.33)$$

gdzie P i Q są *liniowymi operatorami różniczkowymi* względem zmiennej czasowej

$$\begin{aligned} P &= p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \\ Q &= q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.34)$$

Oczywiście, szczególnym przypadkiem ośrodka liniowo lepko-sprężystego jest materiał liniowo sprężysty (Hooke'a), dla którego w równaniu (5.32) znikają wszystkie pochodne, natomiast $q_0/p_0 = E$.

Algebraizacja *jednoosiowego problemu lepko-sprężystego* (5.33) umożliwia traktowanie operatorów różniczkowych Q(t) i P(t) jak ułamków i wprowadzenie zapisu

$$\frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = E_{ve}(t) = \frac{Q(t)}{P(t)} \quad (5.35)$$

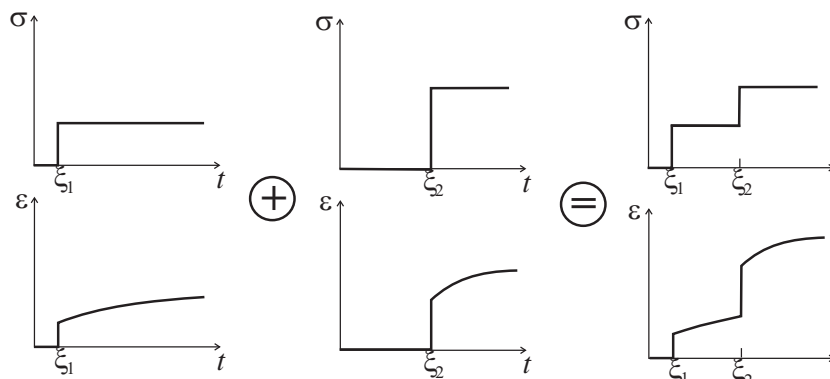
W przeciwieństwie do sprężystości, ułamek $\sigma(t)/\varepsilon(t)$ nie jest stały, lecz zależy od czasu. Wyrażenie (5.35) należy przy tym interpretować symbolicznie w taki sposób, że

$$\frac{Q(t)}{P(t)} \not\propto \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} \quad (5.36)$$

Materiały liniowo lepko-sprężyste są szczególnym przypadkiem nieliniowych materiałów lepko-sprężystych, jednak wyłącznie materiały liniowo lepko-sprężyste spełniają *zasadę superpozycji Boltzmanna*. Zasada superpozycji oznacza że wypadkowa odpowiedź układu $\varepsilon(t)$ pod działaniem „sumy” przyczyn, jest sumą odpowiedzi pod działaniem każdej z przyczyn oddzielnie.

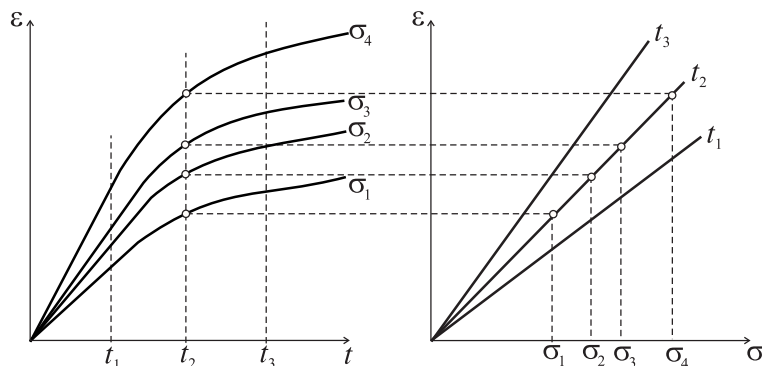
W szczególności, jeżeli naprężenie σ_1 jest przyłożone w chwili ξ_1 , a następnie σ_2 w chwili ξ_2 , wówczas odkształcenie $\varepsilon(t)$ w dowolnej chwili $t > \xi_2$, będące wynikiem obu naprężeń łącznie, jest równe sumie odkształceń w tym samym czasie ξ , w wyniku każdego z naprężeń oddzielnie (rys. 5.5), czyli

$$\varepsilon[\sigma_1(t - \xi_1) + \sigma_2(t - \xi_2)] = \varepsilon[\sigma_1(t - \xi_1)] + \varepsilon[\sigma_2(t - \xi_2)] \quad (5.37)$$



Rysunek 5.5. Zasada superpozycji Boltzmann

Klasa *materiałów liniowo lepko-sprężystych* jest bardzo dogodna do opisu realnych materiałów, jednak w celu zastosowania tych równań trzeba sprawdzić, czy materiał rzeczywiście im podlega. Prosty test, łatwy do przeprowadzenia, polega na zbudowaniu tzw. *izochronicznych krzywych pełzania*. W tym celu należy przeprowadzić szereg prób pełzania prostego przy różnych, ustalonych poziomach naprężenia, którym odpowiada pęk krzywych pełzania $\varepsilon(t)$ (rys. 5.6). Izochroniczne krzywe pełzania otrzymujemy jako przekroje krzywych pełzania stałymi współrzędnymi czasu t_i . Jeżeli otrzymany w ten sposób pęk izochronicznych krzywych pełzania jest pękiem prostych, oznacza to że materiał jest, w rozpatrywanym zakresie obciążenia, liniowo lepko-sprężysty. Prostoliniowość izochronicznych krzywych pełzania jest warunkiem koniecznym liniowości materiału, jednakże w większości przypadków nie jest on spełniony, bądź spełniony tylko z pewnym przybliżeniem (słaba nieliniowość). W praktyce często występuje przypadek, gdy dany materiał wykazuje pełzanie liniowe w okresie początkowym, a w dalszym zakresie, w wyniku powolnej zmiany struktury, zaczyna wykazywać cechy nieliniowe. W szczególności może mieć miejsce przypadek, że w trakcie liniowego procesu pełzania pojawia się uplastycznienie, które zmienia cechy materiałowe na inne, w taki sposób, że



Rysunek 5.6. Konstrukcja izochronicznych krzywych pełzania

dalszy przebieg znów jest liniowy, ale inny niż poprzednio. Taki materiał będziemy nazywać *materiałem odcinkowo-liniowym*, dla którego nie obowiązuje jednak zasada superpozycji Boltzmanna.

W przypadku *dowolnej historii obciążenia*, wykres $\sigma(t)$ można aproksymować sumą n stałych impulsów $\Delta\sigma_i$. Wówczas na mocy zasady Boltzmanna obowiązuje

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t - \xi_i) = \sum_{i=1}^n J(t - \xi_i) \Delta\sigma_i \quad (5.38)$$

skąd, dla kroku czasowego bliskiego zeru, otrzymujemy *całkową postać równania pełzania* jednoosiowego dowolnego ośrodka liniowo lepko-sprężystego

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \xi) \frac{\partial \sigma(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \int_0^t J(t - \xi) \dot{\sigma}(\xi) d\xi \quad (5.39)$$

Przeprowadzając podobne rozumowanie dla dowolnej historii odkształcenia (wymuszenie kinematyczne) otrzymujemy, *całkową postać równania relaksacji* jednoosiowej dowolnego ośrodka liniowo lepko-sprężystego

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \xi) \frac{\partial \varepsilon(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \int_0^t E(t - \xi) \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi \quad (5.40)$$

W powyższych równaniach całkowych ośrodków liniowo lepko-sprężystych $J(t - \xi)$ i $E(t - \xi)$ oznaczają odpowiednio *funkcję pełzania* i *funkcję relaksacji*, charakteryzujące materiał. Należy przy tym wyraźnie zaznaczyć, iż obie postacie

całkowe (5.39) i (5.40) mają charakter czysto formalny, bowiem w większości przypadków zarówno funkcja pełzania, jak i funkcja relaksacji zawierają w sobie części niezależne od czasu (sprężyste) J_0 lub E_0 oraz funkcje zależne od czasu $\varphi(t - \xi)$ lub $\psi(t - \xi)$. W praktyce zatem posługujemy się postaciami całkowymi alternatywnymi wobec (5.39) i (5.40), mianowicie

$$\varepsilon(t) = J_0 \sigma(t) + \int_0^t \varphi(t - \xi) \dot{\sigma}(\xi) d\xi \quad (5.41)$$

lub

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) - \int_0^t \psi(t - \xi) \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi \quad (5.42)$$

w których wydzielona jest odpowiedź sprężysta, oraz odpowiedź zależna od czasu.

5.3. Równania materiałów liniowo lepko-sprężystych w złożonym stanie naprężenia

5.3.1. Różniczkowa postać równań izotropowych materiałów liniowo lepko-sprężystych dla wieloosiowych stanów naprężenia

Przy konstruowaniu równań konstytutywnych *izotropowych ośrodków liniowo lepko-sprężystych* w wieloosiowym stanie naprężenia dogodnie jest, podobnie do teorii sprężystości, oddzielić efekty zmiany postaci (dewiatory) od zmiany objętości (aksjatory). Należy przy tym pamiętać, że podobnie do sprężystości, rozdzielanie (rozprężenie) tych efektów jest możliwe jedynie przy założeniu cech izotropowych materiału (por. 5.2.6).

Bezpośrednie uogólnienie różniczkowej reprezentacji równań konstytutywnych *izotropowych ośrodków liniowo lepko-sprężystych* (5.33–5.34), na stany przestrzenne ma postać

$$\begin{aligned} P_1 \{s_{ij}(t)\} &= Q_1 \{e_{ij}(t)\} \\ P_2 \{\sigma_{kk}(t)\} &= Q_2 \{\varepsilon_{kk}(t)\} \end{aligned} \quad (5.43)$$

gdzie P_1, Q_1, P_2, Q_2 są liniowymi operatorami różniczkowymi, innymi dla prawa zmiany postaci, a innymi dla prawa zmiany objętości. W zapisie rozwiniętym

równania (5.43) można przedstawić następująco

$$\begin{aligned} \left(p'_0 + p'_1 \frac{\partial}{\partial t} + p'_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p'_a \frac{\partial^a}{\partial t^a} \right) s_{ij}(t) = \\ \left(q'_0 + q'_1 \frac{\partial}{\partial t} + q'_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + q'_b \frac{\partial^b}{\partial t^b} \right) e_{ij}(t) \\ \left(p''_0 + p''_1 \frac{\partial}{\partial t} + p''_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p''_a \frac{\partial^a}{\partial t^a} \right) \sigma_{kk}(t) = \\ \left(q''_0 + q''_1 \frac{\partial}{\partial t} + q''_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + q''_b \frac{\partial^b}{\partial t^b} \right) \varepsilon_{kk}(t) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Dla wygody dalszych rozważań przedstawimy też równania (5.44) w zmienionej postaci, przez zastosowanie transformacji Laplace'a. W transformacji Laplace'a dokonuje się zamiany funkcji zmiennej t , $f(t)$, na nową funkcję zmiennej transformowanej s , $\hat{f}(s)$ według reguły

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (5.45)$$

Operacja powyższa wprowadzana jest w celu zastąpienia problemu początkowego dla rzeczywistego materiału liniowo lepko-sprężystego (równanie różniczkowe wraz z warunkami początkowymi), równoważnym równaniem algebraicznym fikcyjnego materiału sprężystego. W drugim kroku, po rozwiązaniu fikcyjnego równoważnego problemu sprężystego, należy oczywiście, na drodze odwrotnej transformacji Laplace'a, powrócić do rozważanego rzeczywistego problemu lepko-sprężystości. Opisana tu procedura prowadzi, na ogół, szybciej do rozwiązania (niż bezpośrednio całkowanie równania różniczkowego), dzięki posługiwaniu się gotowymi tabelami transformacji Laplace'a (przejście od zmiennej t do zmiennej s), oraz transformacji odwrotnej ($s \rightarrow t$).

Podstawowe właściwości oraz tablice transformacji Laplace'a, ze szczególnym podkreśleniem ich zastosowań w teorii ośrodków lepko-sprężystych, podają np.: Nowacki [107], Pipkin [117], Findley i inni [42]. Przykładowe transformaty Laplace'a prostych funkcji $f(t)$, używanych najczęściej w lepko-sprężystości, zestawiono w tabeli 5.2.

Wykonując transformację Laplace'a na równaniach izotropowych ośrodków liniowo-sprężystych (5.43), możemy je zapisać w funkcji zmiennej transformowanej s , następująco

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 \hat{s}_{ij}(s) &= \hat{Q}_1 \hat{e}_{ij}(s) \\ \hat{P}_2 \hat{\sigma}_{kk}(s) &= \hat{Q}_2 \hat{\varepsilon}_{kk}(s) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Tabela 5.2. Transformaty Laplace'a najczęściej używanych funkcji

$f(t)$	$\widehat{f}(s)$	$f(t)$	$\widehat{f}(s)$
$\dot{f}(t)$	$s\widehat{f}(s) - f(0)$	$\int_0^t f(\xi)d\xi$	$\frac{\widehat{f}(s)}{s}$
1	$\frac{1}{s}$	a	$\frac{a}{s}$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$	$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t) = \dot{H}(t)$	1	$\delta(t-a)$	e^{-as}
t	$\frac{1}{s^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$ae^{-at} - be^{-bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s+a)(s+b)}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$

lub równoważnie

$$\begin{aligned}
 (p'_0 + p'_1 s + p'_2 s^2 + \dots + p'_a s^a) \widehat{s}_{ij}(s) &= \\
 (q'_0 + q'_1 s + q'_2 s^2 + \dots + q'_b s^b) \widehat{e}_{ij}(s) & \\
 (p''_0 + p''_1 s + p''_2 s^2 + \dots + p''_a s^a) \widehat{\sigma}_{kk}(s) &= \\
 (q''_0 + q''_1 s + q''_2 s^2 + \dots + q''_b s^b) \widehat{\varepsilon}_{kk}(s) &
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Na podstawie analogii pomiędzy równaniami (5.46), opisującymi przetransformowany problem lepko-sprężysty, a równaniami izotropowej, liniowej sprężystości

$$s_{ij} = 2G e_{ij}, \quad \sigma_{kk} = 3K \varepsilon_{kk} \tag{5.48}$$

można zdefiniować uogólnione moduły lepko-sprężystości $G_{ve}(t)$ i $K_{ve}(t)$

$$G_{ve}(t) = \frac{Q_1}{2P_1} \quad K_{ve}(t) = \frac{Q_2}{3P_2} \tag{5.49}$$

które są funkcjami czasu t . Posiłkujemy się dalej definicjami obowiązującymi dla materiału sprężystego, gdzie moduł Younga E i stała Poissona ν są wyrażone wzorami

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (5.50)$$

Podstawiając następnie do (5.50) uogólnione moduły lepko-sprężystości (5.49), otrzymujemy *uogólniony moduł Younga* $E_{ve}(t)$ (zwany *modułem relaksacji*) oraz *uogólniony współczynnik Poissona* $\nu_{ve}(t)$ dla izotropowego ośrodka liniowo lepko-sprężystego, wyrażone poprzez operatory czasowe.

$$\begin{aligned} E_{ve}(t) &= \frac{3\frac{Q_1}{P_1}\frac{Q_2}{P_2}}{\frac{Q_1}{P_1} + 2\frac{Q_2}{P_2}} = \frac{3Q_1Q_2}{P_2Q_1 + 2P_1Q_2} \\ \nu_{ve}(t) &= \frac{\frac{Q_2}{P_2} - \frac{Q_1}{P_1}}{2\frac{Q_2}{P_2} + \frac{Q_1}{P_1}} = \frac{P_1Q_2 - P_2Q_1}{P_2Q_1 + 2P_1Q_2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

W przeciwieństwie do teorii sprężystości, wielkości te dla materiałów lepko-sprężystych nie są stałymi materiałowymi, lecz są zależne od czasu.

W tabeli 5.3 zestawiono *operatory różniczkowe, dewiatorowe* P_1, Q_1 i *dy-latacyjne* P_2, Q_2 oraz odpowiednio *operatory transformowane* \hat{P}_1, \hat{Q}_1 i \hat{P}_2, \hat{Q}_2 dla izotropowych modeli liniowo lepko-sprężystych. Zakładając dodatkowo, że pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego materiał zachowuje się w sposób sprężysty, należy w powyższym zestawieniu konsekwentnie przyjmować $P_2 = 1, Q_2 = 3K$. Zauważmy na koniec, że omawiane równania dotyczą izotropowego materiału liniowo lepko-sprężystego, dla którego liczba niezależnych uogólnionych modułów (5.49) (skalarnych funkcji) wynosi 2, mianowicie $G_{ve}(t)$ i $K_{ve}(t)$ lub równoważnie $E_{ve}(t)$ i $\nu_{ve}(t)$ (5.51). W szczególności dla materiału izotropowo sprężystego powyższe moduły pełzania redukują się do stałych $G_{ve}(t) = G$, i $K_{ve}(t) = K$, lub równoważnie $E_{ve}(t) = E$ i $\nu_{ve}(t) = \nu$.

Tabela 5.3 Operatory różniczkowe prostych ośrodków liniowo lepko-sprężystych (wg Findley i inni [42])

Model	Hooke	Maxwell	Voigt–Kelvin	Standard	Burgers
Równanie różniczkowe	$\sigma = E\varepsilon$	$\sigma + \frac{\eta}{E}\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon}$	$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$	$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon}$	$\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} = q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon}$
Operatory dewiatorowe					
P_1	1	$1 + \frac{\eta'}{E'}\frac{\partial}{\partial t}$	1	$1 + \frac{\eta'}{E'_1 + E'}\frac{\partial}{\partial t}$	$1 + p'_1\frac{\partial}{\partial t} + p'_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$
Q_1	$2G$	$\eta'\frac{\partial}{\partial t}$	$E' + \eta'\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{E'_1 E'}{E'_1 + E'} + \frac{\eta' E'}{E'_1 + E'}\frac{\partial}{\partial t}$	$q'_1\frac{\partial}{\partial t} + q'_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$
Operatory dylatacyjne					
P_2	1	$1 + \frac{\eta''}{E''}\frac{\partial}{\partial t}$	1	$1 + \frac{\eta''}{E''_1 + E''}\frac{\partial}{\partial t}$	$1 + p''_1\frac{\partial}{\partial t} + p''_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$
Q_2	$3K$	$\eta''\frac{\partial}{\partial t}$	$E'' + \eta''\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{E''_1 E''}{E''_1 + E''} + \frac{\eta'' E''}{E''_1 + E''}\frac{\partial}{\partial t}$	$q''_1\frac{\partial}{\partial t} + q''_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$
Transformowane operatory dewiatorowe					
\hat{P}_1	1	$1 + \frac{\eta'}{E'}s$	1	$1 + \frac{\eta'}{E'_1 + E'}s$	$1 + p'_1s + p'_2s^2$
\hat{Q}_1	$2G$	$\eta's$	$E' + \eta's$	$\frac{E'_1 E'}{E'_1 + E'} + \frac{\eta' E'}{E'_1 + E'}s$	$q'_1s + q'_2s^2$
Transformowane operatory dylatacyjne					
\hat{P}_2	1	$1 + \frac{\eta''}{E''}s$	1	$1 + \frac{\eta''}{E''_1 + E''}s$	$1 + p''_1s + p''_2s^2$
\hat{Q}_2	$3K$	$\eta''s$	$E'' + \eta''s$	$\frac{E''_1 E''}{E''_1 + E''} + \frac{\eta'' E''}{E''_1 + E''}s$	$q''_1s + q''_2s^2$

5.3.2. Całkowa postać równań konstytutywnych izotropowych materiałów liniowo lepko-sprężystych dla wielosiowych stanów naprężenia

Jak wspomniano wcześniej, dla materiałów izotropowych liczba skalarnych funkcji pełzania redukuje się do dwóch. Rozdzielając zatem efekty zmiany postaci (dewiatorowe) od zmiany objętości (dylatacyjne), otrzymujemy następujące *całkowe równania izotropowego materiału liniowo lepko-sprężystego* uogólnione na stany przestrzenne (5.39)

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2 \int_0^t G_{ve}(t-\xi) \frac{\partial e_{ij}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\ \sigma_{kk}(t) &= 3 \int_0^t K_{ve}(t-\xi) \frac{\partial \varepsilon_{kk}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \end{aligned} \quad (5.52)$$

W szczególnym przypadku, gdy obowiązuje założenie, że zmiany objętości odbywają się w sposób sprężysty, równania (5.52) przyjmują uproszczoną postać

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2 \int_0^t G_{ve}(t-\xi) \frac{\partial e_{ij}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\ \sigma_{kk} &= 3K\varepsilon_{kk} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Dodajmy, że omawiana tutaj zmiana modułów podatności (sztywności) w czasie, w materiale lepko-sprężystym, jest zjawiskiem wyraźnie obserwowalnym w testach nieliniowego pełzania rzeczywistych materiałów reologicznych, wykazujących mięknięcie w trakcie pełzania. Zjawisko to będzie szerzej omówione w rozdziale poświęconym rozwojowi uszkodzeń.

5.4. Analogia sprężysto-lepko-sprężysta dla materiałów izotropowych

Omawiana w poprzednim podpunkcie analogia pomiędzy równaniami izotropowych materiałów liniowo lepko-sprężystych i równaniami izotropowej sprężystości prowadzi do metody poszukiwania rozwiązań problemów lepko-sprężystości na podstawie znanych rozwiązań analogicznych problemów sprężystości. Analogia ta jest znana jako *analogia Alfrey-Hoffa*.

Zestawmy pełny komplet równań *izotropowej liniowej lepko-sprężystości*

a) równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(t)}{\partial x_i} + B_j(t) = 0 \quad (5.54)$$

- b) równania konstytutywne, w operatorowej reprezentacji różniczkowej (5.43)

$$\begin{aligned} P_1 \{s_{ij}(t)\} &= Q_1 \{e_{ij}(t)\} \\ P_2 \{\sigma_{kk}(t)\} &= Q_2 \{\varepsilon_{kk}(t)\} \end{aligned} \quad (5.55)$$

lub w reprezentacji całkowej (5.52)

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2 \int_0^t G_{ev}(t-\xi) \dot{e}_{ij}(\xi) d\xi \\ \sigma_{kk}(t) &= 3 \int_0^t K_{ev}(t-\xi) \dot{\varepsilon}_{kk}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (5.56)$$

- c) związki geometryczne (geometrycznie liniowe)

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(t)}{\partial x_i} \right] \quad (5.57)$$

- d) warunki brzegowe (pod założeniem niezmienniczości granicy obszarów Γ_P i Γ_U)

$$\begin{aligned} P_i(t) &= \sigma_{ji}(t) n_j \quad \text{na } \Gamma_P \\ U_i(t) &= u_i(t) \quad \text{na } \Gamma_U \end{aligned} \quad (5.58)$$

Podkreślimy, że założono tutaj niezależność modułów G_{ve} , K_{ve} od współrzędnej materialnej (jednorodność).

Przeprowadzając transformację Laplace'a na równaniach (5.52–5.58), otrzymujemy układ równań opisujący „fikcyjny problem sprężysty”

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}(s)}{\partial x_i} + \hat{B}_j(s) &= 0 \\ \hat{s}_{ij}(s) &= 2s\hat{G}\hat{e}_{ij}(s) = \frac{\hat{Q}_1}{\hat{P}_1}\hat{e}_{ij}(s) \\ \hat{\sigma}_{kk}(s) &= 3s\hat{K}\hat{\varepsilon}_{kk}(s) = \frac{\hat{Q}_2}{\hat{P}_2}\hat{\varepsilon}_{kk}(s) \\ \hat{\varepsilon}_{ij}(s) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{u}_i(s)}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j(s)}{\partial x_i} \right] \\ \hat{P}_i(s) &= \hat{\sigma}_{ji}(s) n_j \quad \text{na } \Gamma_P \\ \hat{U}_i(s) &= \hat{u}_i(s) \quad \text{na } \Gamma_U \end{aligned} \quad (5.59)$$

w którym siły masowe $\hat{B}_j(s)$, siły zewnętrzne $\hat{P}_i(s)$, przemieszczenia $\hat{U}_i(s)$, jak również „fikcyjne stałe sprężyste” \hat{G} i \hat{K} , są funkcjami zmiennej transformowanej s .

Analogia sprężysto-lepko-sprężysta dla materiału izotropowego może być zatem sformułowana następująco:

Jeżeli znane jest rozwiązanie sprzężonego, fikcyjnego problemu sprężystego (5.59), $\hat{\sigma}_{ij}(s)$ i $\hat{u}_i(s)$, to rozwiązanie problemu lepko-sprężystego (5.52–5.58) może być otrzymane w drodze odwrotnej transformacji Laplace'a $\sigma_{ij}(t)$ i $u_i(t)$. Przy tym musi obowiązywać

$$\hat{G}_{ve} = \frac{\hat{Q}_1(s)}{2s\hat{P}_1(s)} \quad \hat{K}_{ve} = \frac{\hat{Q}_2(s)}{3s\hat{P}_2(s)} \quad (5.60)$$

Analogia sprężysto-lepko-sprężysta może być stosowana jedynie do takich zagadnień brzegowych, w których granica pomiędzy częścią brzegu Γ_P (na której są zadane siły), a częścią brzegu Γ_U (na której są zadane przemieszczenia), jest niezmienna w czasie. Warunki zadane na każdym z brzegów mogą jednak przy tym podlegać zmianom w czasie (Findley i inni [42]). Jest to uogólnienie uprzednio rozważanej analogii dla modeli jednowymiarowych na problemy przestrzenne.

Stosując, dla przykładu, analogię do przypadku rury grubościennnej z izotropowego materiału standardowego, pod działaniem ciśnienia wewnętrznego $p(t) = pH(t)$, przywołujemy wpierw wzory Lamégo (dla sprzężonego problemu sprężystego)

$$u^e = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \frac{1 + \nu}{E} \left(\frac{b^2}{r} + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} r \right) \quad (5.61)$$

Następnie stosujemy transformację Laplace'a

$$\hat{u}(s) = \frac{\hat{p}(s)a^2}{b^2 - a^2} \frac{\hat{P}_1}{\hat{Q}_1} \left(\frac{b^2}{r} + \frac{2\hat{P}_2\hat{Q}_1 + \hat{P}_1\hat{Q}_2}{3\hat{P}_1\hat{Q}_2} r \right) \quad (5.62)$$

Podstawiając za $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ funkcje dla modelu standardowego (tabl. 5.3), przy założeniu niezależności pełzania od stanu hydrostatycznego $\hat{P}_2 = 1, \hat{Q}_2 = 3K$, otrzymujemy dla sprzężonego problemu fikcyjnego

$$\hat{u}(s) = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{A}{\frac{E'_1}{\eta'}} + \frac{B}{s} \right) \quad (5.63)$$

gdzie

$$A = -\frac{1}{E'} \left(\frac{b^2}{r} + \frac{r}{3} \right), \quad B = \frac{E'_1 + E'}{E'_1 E'} \left(\frac{b^2}{r} + \frac{r}{3} \right) + \frac{2r}{9K} \quad (5.64)$$

Natomiast, dla rzeczywistego problemu liniowo lepko-sprężystego, po zastosowaniu retransformacji, otrzymujemy ostatecznie

$$u(t) = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left\{ \frac{1}{E'} \left(\frac{b^2}{r} + \frac{r}{3} \right) + \frac{2r}{9K} + \frac{1}{E'_1} \left(\frac{b^2}{r} + \frac{r}{3} \right) \times \left[1 - \exp \left(-\frac{E'_1}{\eta'} t \right) \right] \right\} \quad (5.65)$$

5.5. Uogólnienie całkowej postaci równań konstytutywnych materiałów liniowo lepko-sprężystych na przypadek materiału anizotropowego

W ogólnym przypadku anizotropowego ośrodka liniowo lepko-sprężystego można zapisać równania konstytutywne w następującej, całkowej postaci (Shu i Onat [135])

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t {}^{\text{ve}}J_{ijkl}(t - \xi) \dot{\sigma}_{kl}(\xi) d\xi \quad (5.66)$$

lub

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t {}^{\text{ve}}E_{ijkl}(t - \xi) \dot{\varepsilon}_{kl}(\xi) d\xi \quad (5.67)$$

gdzie ${}^{\text{ve}}J_{ijkl}(t - \xi)$ jest *tensoriem funkcji pełzania* czwartego rzędu, natomiast ${}^{\text{ve}}E_{ijkl}(t - \xi)$ jest *tensoriem funkcji relaksacji*. Zakładając warunki symetrii: ${}^{\text{ve}}J_{ijkl} = {}^{\text{ve}}J_{klij} = {}^{\text{ve}}J_{jikl} = {}^{\text{ve}}J_{ijlk}$, lub ${}^{\text{ve}}E_{ijkl} = {}^{\text{ve}}E_{klij} = {}^{\text{ve}}E_{jikl} = {}^{\text{ve}}E_{ijlk}$, tensory te mają (w ogólnym przypadku anizotropii) 21 niezależnych składowych. W odróżnieniu od sprężystości, tensory ${}^{\text{ve}}J_{ijkl}$ lub ${}^{\text{ve}}E_{ijkl}$ są funkcjami czasu bieżącego, t (granica całkowania). Jest to istotna różnica, bowiem nie można ich wyłączyć spod symbolu całki.

W szczególnym przypadku *sprężystego materiału anizotropowego* równanie powyższe redukuje się zatem do postaci

$$\varepsilon_{ij}(t) = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}(t) \quad (5.68)$$

gdzie niezmienny w czasie *tensor podatności sprężystej* $J_{ijkl} \stackrel{\text{def}}{=} E_{ijkl}^{-1}$ definiuje anizotropowe właściwości materiału sprężystego (4.10).

Zatem, w przypadku pełnej anizotropii materiału liniowo lepko-sprężystego, i przy użyciu notacji wektorowo-macierzowej Voigta, równania (5.66–5.67) przyjmują równoważną postać

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\} &= \int_0^t [{}^{\text{ve}}\mathbb{J}(t-\xi)] \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\xi)\} d\xi \\ \{\boldsymbol{\sigma}(t)\} &= \int_0^t [{}^{\text{ve}}\mathbb{E}(t-\xi)] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi)\} d\xi \end{aligned} \quad (5.69)$$

W zapisie rozwiniętym, wprowadzając macierz funkcji relaksacji $E_{ij}(t-\xi)$, otrzymujemy uogólnienie równania konstytutywnego materiału anizotropowego na przypadek anizotropowego materiału liniowo lepko-sprężystego

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ \hline E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} \\ \dot{\varepsilon}_{yy} \\ \dot{\varepsilon}_{zz} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{pmatrix} d\xi \quad (5.70)$$

gdzie $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t)$ oraz $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\xi)$. W szczególnym przypadku ortotropowego materiału liniowo lepko-sprężystego, równanie (5.70) redukuje się do postaci

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\gamma}_{23} \\ \dot{\gamma}_{31} \\ \dot{\gamma}_{12} \end{pmatrix} d\xi \quad (5.71)$$

będącej uogólnieniem równania ortotropowej liniowej sprężystości (6.3), na przypadek ortotropowego materiału liniowo lepko-sprężystego. Podkreślmy, że zarówno naprężenia jak i prędkości odkształcenia są funkcjami czasu ${}^{\text{ve}}\sigma_{ij} = {}^{\text{ve}}\sigma_{ij}(t)$, ${}^{\text{ve}}\dot{\varepsilon}_{ij} = {}^{\text{ve}}\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$, podobnie do elementów macierzy funkcji relaksacji ${}^{\text{ve}}E_{ij} = {}^{\text{ve}}E_{ij}(t-\xi)$.

5.6. Analogia sprężysto/lepko-sprężysta dla materiałów anizotropowych – zastosowanie do kompozytów

Wykonując transformację Laplace'a (5.45) na równaniach konstytutywnych (5.70) lub (5.71) otrzymujemy sprzężony układ równań opisujących „fikcyjny” problem sprężysty dla materiału anizotropowego, w funkcji zmiennej transformowanej s

$$\{\hat{\sigma}(s)\} = s[\hat{\mathbb{E}}(s)]\{\hat{\varepsilon}(s)\} \quad (5.72)$$

W szczególnym przypadku ortotropii równania sprzężonego problemu sprężystego przyjmują zatem postać

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} \\ \hat{\sigma}_{22} \\ \hat{\sigma}_{33} \\ \hat{\tau}_{23} \\ \hat{\tau}_{31} \\ \hat{\tau}_{12} \end{pmatrix} = s \left[\begin{array}{ccc|ccc} \hat{E}_{11} & \hat{E}_{12} & \hat{E}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E}_{21} & \hat{E}_{22} & \hat{E}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E}_{31} & \hat{E}_{32} & \hat{E}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \hat{E}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{E}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{E}_{66} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{11} \\ \hat{\varepsilon}_{22} \\ \hat{\varepsilon}_{33} \\ \hat{\gamma}_{23} \\ \hat{\gamma}_{31} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

będącą uogólnieniem równań (5.59)_{2,3} na przypadek ortotropii, gdzie $\hat{E}_{ij} = \hat{E}_{ij}(s)$. Rozwiązanie problemu ortotropii lepko-sprężystości może być zatem otrzymane na drodze odwrotnej transformaty Laplace'a, ze zmiennych transformowanych $\hat{\sigma}_{ij}(s)$, $\hat{\varepsilon}_{ij}(s)$ do zmiennych fizycznych $\sigma_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$.

Podkreślmy jednak, że w problemach anizotropowych liniowej lepko-sprężystości, podobnie do problemów anizotropowej sprężystości, nie można rozdzielić równań opisujących zmiany postaci od równań zmiany objętości, bowiem anizotropia sprzęga deformację postaciową z objętościową (por. podrozdział 5.2.6).

Posługując się metodami homogenizacji heterogenicznych właściwości kompozytów sprężystych (por. podrozdział 5.3) można dokonać ich uogólnienia na kompozyty liniowo-lepkosprężyste. W tym celu można się posłużyć koncepcją komórki jednostkowej RUC (np. rys. 6.4) reologicznego materiału kompozytowego, w którym przynajmniej jeden z komponentów wykazuje cechy reologiczne (np. lepko-sprężyste metalowe włókno w ceramicznej matrycy sprężystej). Na poziomie subkomórki obowiązują *lokalne równania lepko-sprężystości*, w których zmienne lokalne, mikronapężenia i mikroodkształcenia

powiązane są *lokalnymi tensorami lepkosprężystości* (pełzania lub relaksacji)

$${}^{\text{ve}}\varepsilon_{ij}^{(\beta\gamma)}(t) = \int_0^t {}^{\text{ve}}J_{ijkl}^{(\beta\gamma)}(t-\xi) {}^{\text{ve}}\dot{\sigma}_{kl}^{(\beta\gamma)}(\xi) d\xi \quad (5.74)$$

lub

$${}^{\text{ve}}\sigma_{ij}^{(\beta\gamma)}(t) = \int_0^t {}^{\text{ve}}E_{ijkl}^{(\beta\gamma)}(t-\xi) {}^{\text{ve}}\dot{\varepsilon}_{kl}^{(\beta\gamma)}(\xi) d\xi \quad (5.75)$$

Stosując, analogicznie do podrozdz. 6.3, uśrednienia (homogenizację) wewnątrz RUC, możemy zapisać *równania liniowej lepkosprężystości* materiału kompozytowego *na poziomie RUC*, a mianowicie

$${}^{\text{ve}}\bar{\varepsilon}_{ij}(t) = \int_0^t {}^{\text{ve}}\bar{J}_{ijkl}(t-\xi) {}^{\text{ve}}\bar{\sigma}_{kl}(\xi) d\xi \quad (5.76)$$

lub

$${}^{\text{ve}}\bar{\sigma}_{ij}(t) = \int_0^t {}^{\text{ve}}\bar{E}_{ijkl}(t-\xi) {}^{\text{ve}}\bar{\varepsilon}_{kl}(\xi) d\xi \quad (5.77)$$

Uśrednione tensory funkcji pełzania ${}^{\text{ve}}\bar{J}_{ijkl}$ bądź *funkcji relaksacji* ${}^{\text{ve}}\bar{E}_{ijkl}$ kompozytu (na poziomie RUC) wyrażone są poprzez odpowiednie tensory lokalne ${}^{\text{ve}}\bar{J}_{ijkl}^{(\beta\gamma)}$ bądź ${}^{\text{ve}}\bar{E}_{ijkl}^{(\beta\gamma)}$ (na poziomie subkomórki) za pomocą procedury homogenizacji, analogicznej jak dla kompozytu sprężystego (6.27). Posługując się analogią sprężysto/lepko-sprężystą dla kompozytu anizotropowego na poziomie RUC możemy, stosując transformację Laplace'a, sprowadzić równania całkowe materiału rzeczywistego (5.76) lub (5.77), do sprzężonego układu równań fikcyjnego problemu sprężystego, w funkcji zmiennej transformowanej s

$${}^{\text{e}}\hat{\varepsilon}_{ij}(s) = s \hat{E}_{ijkl}^{-1}(s) {}^{\text{e}}\hat{\sigma}_{kl}(s) \quad (5.78)$$

lub

$${}^{\text{e}}\hat{\sigma}_{ij}(s) = s \hat{E}_{ijkl}(s) {}^{\text{e}}\hat{\varepsilon}_{kl}(s) \quad (5.79)$$

Ostatecznie, rozwiązanie problemu anizotropowej, liniowej lepkosprężystości może być otrzymane na drodze odwrotnej transformacji Laplace'a wychodząc za zmiennych transformowanych ${}^{\text{e}}\hat{\varepsilon}_{ij}(s)$, ${}^{\text{e}}\hat{\sigma}_{ij}(s)$, do zmiennych fizycznych

${}^{\text{ve}}\bar{\varepsilon}_{ij}(t)$, ${}^{\text{ve}}\bar{\sigma}_{ij}(t)$. W zapisie wektorowo-macierzowym otrzymujemy (por. Haasemann i Ulbricht [54])

$$\begin{aligned} {}^{\text{ve}}\bar{\sigma}(t) &= {}^{\text{ve}}\bar{\mathbb{E}}(t) : {}^{\text{ve}}\bar{\varepsilon}(t=0) + \int_0^t {}^{\text{ve}}\bar{\mathbb{E}}(t-\xi) : {}^{\text{ve}}\bar{\dot{\varepsilon}}(\xi) d\xi \\ &= {}^{\text{ve}}\bar{\mathbb{E}}(t) : {}^{\text{ve}}\bar{\varepsilon}(t=0) + [{}^{\text{ve}}\bar{\mathbb{E}} * {}^{\text{ve}}\bar{\dot{\varepsilon}}](t) \end{aligned} \quad (5.80)$$

Posługując się definicją transformacji Laplace'a funkcji $f(t)$ ($t > 0$) do funkcji nowej zmiennej $\hat{f}(s)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \hat{f}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\xi)d\xi\right\} &= \frac{\hat{f}(s)}{s} \end{aligned} \quad (5.81)$$

oraz twierdzeniem o splocie (zob. Findley i Onaran [42])

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi\right\} = \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \hat{f}(s)\hat{g}(s) \quad (5.82)$$

sprowadzamy całkowite równanie konstytutywne anizotropowej liniowej lepko-sprężystości, (5.80) do transformowanego, równoważnego równania algebraicznego liniowej anizotropowej sprężystości, według schematu

$${}^{\text{ve}}\bar{\sigma}(t) = {}^{\text{ve}}\bar{\mathbb{E}}(t) : {}^{\text{ve}}\bar{\varepsilon}(t=0) + {}^{\text{ve}}\bar{\mathbb{E}}(t) * {}^{\text{ve}}\bar{\dot{\varepsilon}}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \hat{\sigma}(s) = s\hat{\mathbb{E}}(s) : \hat{\varepsilon}(s) \quad (5.83)$$

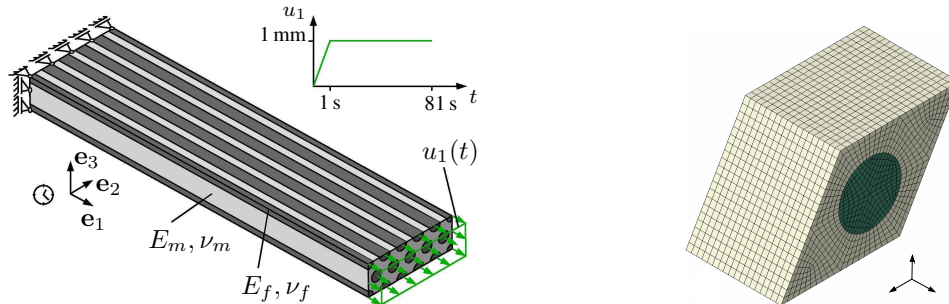
określonego w funkcji zmiennej transformowanej s . Transformowana macierz anizotropowej sprężystości $s\hat{\mathbb{E}}(s)$ jest oczywiście zbudowana na poziomie RUC kompozytu, w drodze uśrednienia transformowanych izotropowych macierzy lokalnych $s\hat{\mathbb{E}}^{(\beta\gamma)}(s)$ na poziomie mikrostruktury kompozytu (subkomórki). Z reguły, dla uproszczenia dalszych zastosowań, będziemy przyjmować macierz uśrednioną $s\hat{\mathbb{E}}(s)$ w wyniku homogenizacji, jako poprzecznie izotropową, natomiast na poziomie mikro (subkomórki) – dla materiału włókna (f) i osnowy (m) – wystarczy zdefiniować macierze izotropowe $s\hat{\mathbb{E}}^{(f)}(s)$ i $s\hat{\mathbb{E}}^{(m)}(s)$, (zob. także, (5.73).

Analogia sprężysto/lepko-sprężysta w zastosowaniu do materiałów ortotropowych (5.73) została wykorzystana w pracy Haasemanna i Ulbrichta [54] dla numerycznego określenia liniowo lepko-sprężystego i lepkoplastycznego zachowania kompozytów. Rozpatrywano kompozyt jednokierunkowo zbrojony,

Tabela 5.4. Lepko-sprężyste właściwości materiałów włókna oraz matrycy wg Haasemanna i Ulbrichta [54]

	Włókno	Matryca
Funkcja pełzania	$70 + 200e^{-0.1t/s}$	$3 + 15e^{-t/s}$
Współczynnik Poissona	0.2	0.35

w którym zarówno materiał włókna jak i matrycy był opisany równaniem materiału liniowo lepko-sprężystego (tab. 5.4). Założono, że w skali makro materiał wykazuje cechy poprzecznej izotropii



Rysunek 5.7. Model belkowy oraz RVE kompozytu wg Haasemanna i Ulbrichta [54]

Stosując transformację całkową typu Laplace'a–Carsona autorzy zredukowali równania materiału liniowo lepko-sprężystego z przestrzeni rzeczywistej t do odpowiednich równań dla materiału liniowo sprężystego w przestrzeni zmiennej transformowanej s , w której można zastosować klasyczne metody homogenizacji dla kompozytów (por. szersze omównienie w rozdz. 6).

Rozdział 6

Mechanika materiałów kompozytowych

6.1. Klasyfikacja kompozytów z uwagi na symetrię

6.1.1. Analogia pomiędzy strukturą macierzy konstytutywnych na poziomie atomowym oraz poziomie makro

Na rysunku 6.1 zilustrowano pomocniczą analogię pomiędzy strukturą sieci krystalicznej na *poziomie monokryształu* lub ziaren krystalicznych a strukturą materiału kompozytowego na poziomie meso, oraz ich *grupami symetrii w opisie makro*.

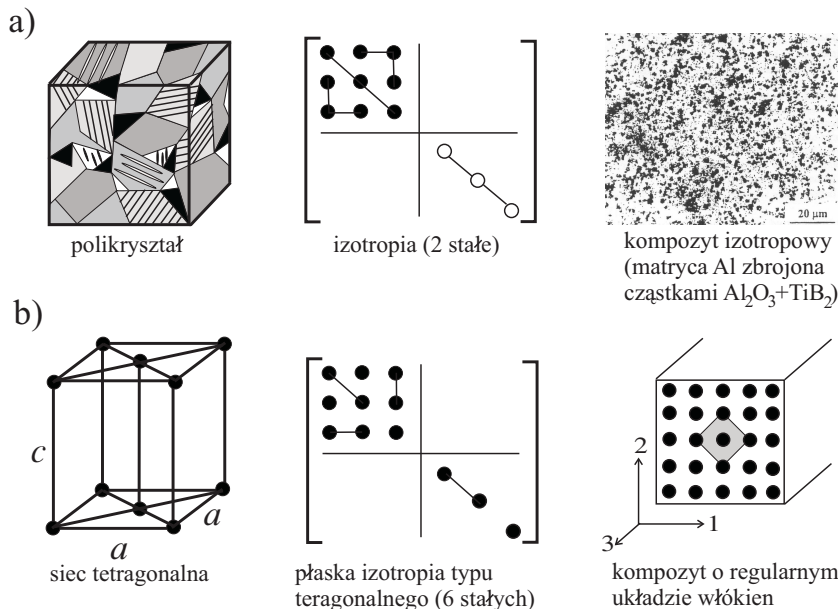
Materiały kompozytowe na poziomie mikro, zbrojone mikrocząsteczkami o nieregularnym kształcie, rozmieszczeniu i orientacji – *kompozyty mikrocząsteczkowo zbrojone*, można w opisie makroskopowym zastąpić *izotropowym kontinuum*, o dwóch stałych sprężystości zastępczej, obliczanych na podstawie udziału objętościowego fazy zbrojącej względem materiału matrycy V_f , patrz rys. 6.1a.

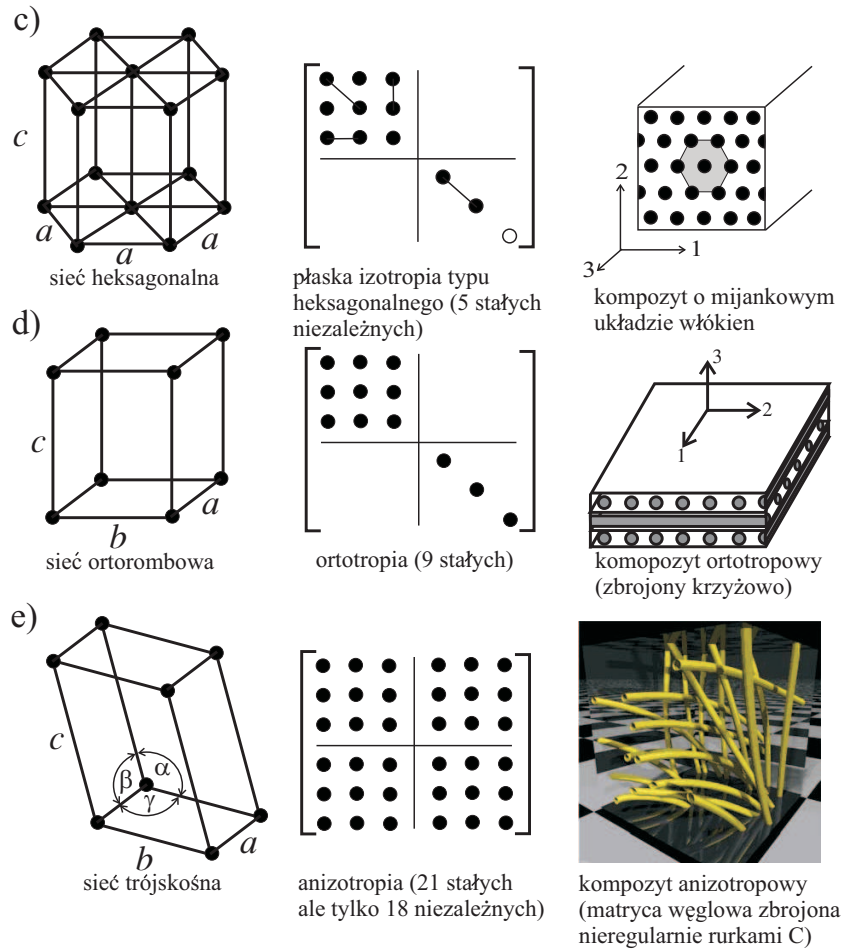
Materiały kompozytowe zbrojone kierunkowo, za pomocą równoległego regularnego układu włókien, odpowiadają na poziomie makroskopowym uśrednionemu *kontinuum ortotropowemu*, o cechach *izotropii poprzecznej* w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku włókien, opisanemu przez sześć modułów sprężystości np. E_{11} , E_{33} , ν_{21} , ν_{31} , G_{12} i G_{23} (por. rys. 4.1). Na poziomie sieci krystalicznej komórka reprezentatywna odpowiada wówczas architekturze sieci o symetrii tetragonalnej, jak pokazano na rys. 6.1b. Z kolei w przypadku innego – mijankowego rozmieszczenia włókien liczba niezależnych modułów sprężystości wynosi pięć, bowiem moduł w płaszczyźnie izotropii

G_{12} jest związany. Na poziomie sieci krystalicznej komórka reprezentatywna cechuje się wtedy *symetrią heksagonalną*, jak pokazano na rys. 6.1c.

Materiały kompozytowe warstwowe, zbudowane z warstw zbrojonych kierunkowym układem włókien o naprzemiennym rozmieszczeniu ortogonalnym (laminaty), są przykładem materiału, który na poziomie makroskopowym odpowiada uśrednionemu *kontinuum ortotropowemu*, którego cechy sprężyste są opisane przez 9 modułów ortotropii E_{11} , E_{22} , E_{33} , ν_{21} , ν_{32} , ν_{31} , G_{12} , G_{23} , G_{31} , por. podrozdział 4.3. Na poziomie sieci krystalicznej, można mu przyporządkować komórkę reprezentatywną o architekturze *krystalicznej sieci ortorombowej* (rys. 6.1d).

Wreszcie, w najogólniejszym przypadku *kompozytu anizotropowego*, np. w materiale zbrojonym nieregularnie rozmieszczonymi nanorurkami węglowymi, na poziomie makroskopowym *zastępcze kontinuum* cechuje pełna anizotropia, scharakteryzowana poprzez 21 modułów E_{ii} , G_{ij} , ν_{ij} , $\mu_{ij(kl)}$ i $\eta_{(i)jk}$, jak opisano w tab. 4.2. W takim przypadku odpowiednikiem sieci krystalicznej o analogicznych cechach symetrii jest komórka reprezentatywna o architekturze *sieci trójskośnej*, rys. 6.1e.





Rysunek 6.1. Klasyfikacja kompozytów z uwagi na postać ich macierzy podatności $[E]$ (kompozyt izotropowy, wg Tjong [153], kompozyt anizotropowy, wg Martin-Herrero [97]), w nawiązaniu do budowy sieci krystalicznych, wg Nye [108]

W schematycznej reprezentacji macierzy sprężystości kryształu bądź kompozytu posłużono się symboliką zaczerpniętą z Nye [108] oznaczając: elementy niezależne \bullet , zależne \circ , identyczne $\bullet-\bullet$ lub $\circ-\circ$.

Podkreślmy, że omawiana analogia pomiędzy klasami symetrii kryształów na poziomie sieci krystalicznej, a klasami symetrii materiałów kompozytowych na poziomie makro, ma jedynie znaczenie porównawcze. Istotnie, symetria kryształu implikuje postać i cechy symetrii *macierzy sprężystości kryształu*:

sztynności S_{ij} bądź podatności C_{ij} , utworzonych jako macierze reprezentacji (2-rzędu) *tensorów sprężystości kryształu* S_{ijkl} , bądź C_{ijkl} (4-rzędu). Z kolei przechodząc z poziomu atomowego (sieci krystalicznej) do poziomu makro (kompozytu), otrzymujemy odpowiednią symetrię analogicznych *macierzy sprężystości zastępczej kompozytu* E_{ij} , bądź E_{ij}^{-1} , utworzonych jako macierze reprezentacji zastępczych (uśrednionych w procesie homogenizacji) *tensorów sprężystości kompozytu* E_{ijkl} , bądź E_{ijkl}^{-1} . Konieczne jest przy tym rozróżnie-

Tabela 6.1. Równania sprężystości na poziomie kryształu oraz makro

Notacja	Poziom kryształu	Poziom makro
Tensorowa	$\sigma_{ij}^{(kr)} = S_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(kr)}$ $\varepsilon_{ij}^{(kr)} = C_{ijkl}\sigma_{kl}^{(kr)}$	$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ $\varepsilon_{ij} = E_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl}$
Macierzowo -wektorowa	$\sigma_i^{(kr)} = S_{ij}\varepsilon_j^{(kr)}$ $\varepsilon_i^{(kr)} = C_{ij}\sigma_j^{(kr)}$	$\sigma_j = E_{ij}\varepsilon_j$ $\varepsilon_i = E_{ij}^{-1}\sigma_j$

nie naprężeń i odkształceń na poziomie kryształu, $\sigma_{ij}^{(kr)}$ i $\varepsilon_{ij}^{(kr)}$, od odpowiednich zmiennych mierzonych na poziomie makro: makronaprężeń i makroodkształceń, σ_{ij} i ε_{ij} . Składowe tensorów S_{ijkl} i C_{ijkl} charakteryzujące właściwości sprężyste kryształu nazywane są, w krystalografii, *współczynnikami sprężystości* i *współczynnikami sztywności*. Może to być nieco mylące przy przejściu na poziom analizy makro, gdzie składowe tensorów E_{ijkl} i E_{ijkl}^{-1} nazywane są, odpowiednio, *stałymi sztywności* i *stałymi podatności*. Podkreśliśmy, że nie ma bezpośredniego przeniesienia stałych sprężystych kryształu na stałe sprężyste materiału w skali makro (makrokompozytu), porównaj, np. Nye [108]. Należy też pamiętać, że w procesie wytwarzania kompozytów pojawiają się często naprężenia rezydualne pochodzenia termicznego, różne w materiale matrycy i zbrojenia (zwłaszcza długimi włóknami). Równania sprężystości (por. rozdz. 4) należy wówczas wzbogacić o człony termiczne. Zakładając dla prostoty, że w trakcie wytwarzania kompozytu odkształcenia mają naturę wyłącznie sprężystą, wystarczy posłużyć się odpowiednimi równaniami termosprężystości. Jednak przy schładzaniu kompozytu mogą pojawić się już w fazie fabrykacji termoplastyczne zmiany mikrostruktury materiału. W takim przypadku analiza termosprężysta może okazać się niewystarczająca (por. Herakovich i Aboudi [62]). Klasyfikacja równań termosprężystości kompozytów według klas symetrii zostanie przedstawiona poniżej.

6.1.2. Kompozyt anizotropowy

Równania termosprężystości dla *materiału kompozytowego anizotropowego* (w skali makro), z efektami rozszerzalności termicznej, zapisane dla dowolnego układu kierunków 1, 2, 3, są następujące:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & \frac{\eta_{23(1)}}{E_{11}} & \frac{\eta_{31(1)}}{E_{11}} & \frac{\eta_{12(1)}}{E_{11}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{22}} & \frac{\eta_{23(2)}}{E_{22}} & \frac{\eta_{31(2)}}{E_{22}} & \frac{\eta_{12(2)}}{E_{22}} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} & \frac{\eta_{23(3)}}{E_{33}} & \frac{\eta_{31(3)}}{E_{33}} & \frac{\eta_{12(3)}}{E_{33}} \\ \frac{\eta_{(1)23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{(2)23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{(3)23}}{G_{23}} & \frac{1}{G_{23}} & \frac{\mu_{31(23)}}{G_{23}} & \frac{\mu_{12(23)}}{G_{23}} \\ \frac{\eta_{(1)31}}{G_{31}} & \frac{\eta_{(2)31}}{G_{31}} & \frac{\eta_{(3)31}}{G_{31}} & \frac{\mu_{(23)31}}{G_{31}} & \frac{1}{G_{31}} & \frac{\mu_{12(31)}}{G_{31}} \\ \frac{\eta_{(1)12}}{G_{12}} & \frac{\eta_{(2)12}}{G_{12}} & \frac{\eta_{(3)12}}{G_{12}} & \frac{\mu_{(23)12}}{G_{12}} & \frac{\mu_{(31)12}}{G_{12}} & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T \quad (6.1)$$

Zauważmy przy tym, że deformacja termiczna jest z natury ortotropowa, ponieważ jest określona przez 3 niezależne współczynniki α_{ii} , natomiast α_{ij} ($i \neq j$) są zależne przez kosinusy kierunkowe transformacji, wiążącej układ kierunków dowolnych x, y, z , ze szczególnym układem kierunków głównych ortotropii termicznej 1, 2, 3. Z kolei deformacja mechaniczna, opisana pierwszą macierzą (6×6) w (6.1), może być w pełni anizotropowa. Ostatecznie więc, w tym przypadku liczba niezależnych modułów materiałowych w ogólnym przypadku anizotropii termosprężystej wynosi $21 = 18 + 3$, bowiem w przypadku anizotropii mechanicznej liczba niezależnych stałych sprężystych jest równa 18.

6.1.3. Kompozyt ortotropowy

Przechodząc do przypadku *materiału kompozytowego* zarówno mechanicznie jak i termicznie *ortotropowego*, w równaniach (6.1) znikają współczynniki *Rabinovicha* $\eta_{ij(k)}$ (9) i *Chencova* $\mu_{ij(kl)}$ (3), zatem liczba niezależnych modułów mechanicznych *macierzy podatności ortotropii sprężystej* E_{ij}^{-1} , bądź sztywności E_{ij} redukuje się do $21 - 12 = 9$, natomiast liczba *modułów termicznych*

ortotropii α_{ij} pozostaje niezmienną (3)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T \quad (6.2)$$

Odwrócenie zależności $\{\varepsilon\} = [\mathbb{E}^{-1}] \{\sigma\}$, na zależność $\{\sigma\} = [\mathbb{E}] \{\varepsilon\}$, w przypadku ortotropii sprężystej nie jest operacją trywialną. Można to zrobić w sposób numeryczny przez odwrócenie macierzy podatności $[\mathbb{E}^{-1}]$ do postaci macierzy sztywności $[\mathbb{E}]$. Elementy macierzy sztywności $[\mathbb{E}]$ można wyrazić w sposób jawny, poprzez kombinację 9 składowych inżynierskich dla materiału ortotropowego, w następujący sposób (porównaj, np. Tamma i Avila [152])

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_{11} \Delta T \\ \varepsilon_{22} - \alpha_{22} \Delta T \\ \varepsilon_{33} - \alpha_{33} \Delta T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

gdzie elementy macierzy sztywności $[\mathbb{E}]$ wyrażone są wzorami

$$\begin{aligned} E_{1111} &= \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{\Delta} E_{11} & E_{1122} &= \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{\Delta} E_{22} \\ E_{1133} &= \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{\Delta} E_{33} & E_{2222} &= \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{\Delta} E_{22} \\ E_{2233} &= \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{\Delta} E_{33} & E_{3333} &= \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{\Delta} E_{33} \\ E_{2323} &= G_{23} & E_{1313} &= G_{13} & E_{1212} &= G_{12} \end{aligned} \quad (6.4)$$

natomiast symbolem Δ oznaczono

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{13}\nu_{32} \quad (6.5)$$

Zwróćmy uwagę, że pełna symetria ortotropowa oraz blokowa budowa obu macierzy, sztywności w związku (6.3) i podatności w związku (6.2), została zachowana i odnosi się do kombinacji pewnych modułów, a nie do samych modułów materiałowych, np.

$$E_{1122} = \frac{\nu_{21}}{E_{11}} = \frac{\nu_{12}}{E_{22}} = E_{2211} \quad \text{itd} \quad (6.6)$$

Wskutek tego tylko 9 modułów mechanicznych ortotropii $E_{11}, E_{22}, E_{33}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}, G_{23}, G_{13}$ i G_{12} jest niezależnych. Ostatecznie więc, liczba niezależnych modułów materiałowych w przypadku kompozytu ortotropowo termosprężystego wynosi $12 = 9 + 3$.

6.1.4. Kompozyt jednokierunkowy – poprzecznie izotropowy

Materiał poprzecznie izotropowy z efektami rozszerzalności termicznej jest opisany za pomocą 6 stałych mechanicznych: $E_{11} = E_{22}, E_{33}, \nu_{21}, \nu_{31} = \nu_{32}, G_{12}$ i $G_{23} = G_{13}$ oraz 2 stałych termicznych $\alpha_{11} = \alpha_{22}, \alpha_{33}$. W przypadku symetrii tetragonalnej (por. podrozdz. 4.4) sześć stałych mechanicznych jest niezależnych

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{13}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T \end{aligned} \quad (6.7)$$

Natomiast w przypadku symetrii heksagonalnej tylko 5 spośród stałych mechanicznych jest niezależnych, ponieważ $G_{12} = \frac{E_{11}}{2(1+\nu_{21})}$ oraz 2 niezależne moduły

rozszerzalności termicznej: $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ i α_{33}

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{13}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{21})}{E_{11}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T \quad (6.8)$$

W podobny sposób, jak w przypadku ogólnej ortotropii, można odwrócić równania konstytutywne termosprężystego materiału poprzecznie izotropowego klasy heksagonalnej do postaci gdzie symbol $\{ \}^T$ oznacza wektor wierszowy transponowany

$$\begin{aligned} & \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12} \}^T = \\ & \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{13}\nu_{31})E_{11}}{\Delta} & \frac{(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{31})E_{11}}{\Delta} & \frac{(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{31})E_{33}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{(1-\nu_{13}\nu_{31})E_{11}}{\Delta} & \frac{(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{13})E_{33}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \text{symetria} & & \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})E_{33}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_{11}}{2(1+\nu_{21})} \end{bmatrix} \\ & \times \{ \varepsilon_{11} - \alpha_{11}\Delta T, \varepsilon_{22} - \alpha_{11}\Delta T, \varepsilon_{33} - \alpha_{33}\Delta T, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12} \}^T \end{aligned} \quad (6.9)$$

natomiast przez Δ oznaczono

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - 2(1 + \nu_{21})\nu_{13}\nu_{31} \quad (6.10)$$

Podsumowując: liczba niezależnych zastępczych modułów termosprężystego kompozytu wykazującego cechy symetrii poprzecznie izotropowej wynosi w przypadku symetrii klasy tetragonalnej $8 = 6 + 2$, a w przypadku symetrii klasy heksagonalnej $7 = 5 + 2$.

6.1.5. Kompozyt izotropowy

Materiał izotropowy mechanicznie i termicznie, z efektami *rozszerzalności termicznej*, posiada 2 niezależne stałe mechaniczne: E, ν (jednocześnie zachodzi $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$) oraz 1 izotropowy moduł termiczny: α

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T \quad (6.11)$$

6.2. Efektywne macierze sprężystości kompozytów – homogenizacja

6.2.1. Problem homogenizacji właściwości heterogenicznych kompozytów

Opisane powyżej materiały kompozytowe są ciałami dwu- lub wieloskładnikowymi na poziomie nano (nanokompozyty), względnie mikro (mikrokompozyty). Z uwagi na różne właściwości składników tworzących kompozyt: osnowy (najczęściej metalicznej, ceramicznej bądź polimerowej) i cząstek lub włókien zbrojenia (mikrocząstki ceramiczne bądź metalowe, nanocząstki, względnie włókna krótkie lub długie, ceramiczne, metaliczne lub inne), materiały kompozytowe są materiałami niejednorodnymi (heterogenicznymi), pomimo że materiały składowe są najczęściej homogeniczne. Na poziomie mikro na granicy faz składowych występują skokowe zmiany właściwości termomechanicznych. Metody uśredniania objętościowego (*metody homogenizacji*) stosowane w analizie wielofazowych kompozytów opierają się na założeniu, że możliwe jest uzyskanie przybliżonych wyrażeń dla efektywnych właściwości (homogenicznych) poprzez uśrednienie objętościowe rzeczywistych właściwości komponentów (heterogenicznych), lub naprężeń i odkształceń w tych komponentach. Konieczne jest przyjęcie w tym celu koncepcji istnienia powtarzalnego, *reprezentatywnego elementu objętościowego* (ang. *representative volume element* – RVE), bądź *reprezentatywnej komórki jednostkowej* (ang. *representative unit cell* – RUC), dzielonej następnie na subkomórki. Wielkość RVE – w przypadku kompozytów cząsteczkowych, bądź wielkość i geometria RUC – w przypadku kompozytów zbrojonych kierunkowo musi być dostatecznie duża, aby uchw-

cić istotę właściwości i zachowania kompozytu. Równocześnie musi być wystarczająco mała, aby zasadne było odwzorowanie RVE bądź RUC do pojedynczego punktu przynależnego do jednorodnego pola deformacji, opisanego przemieszczeniem \mathbf{u} i gradientem $\nabla\mathbf{u}$, tak że średnie (efektywne) odkształcenie wynosi $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla^T\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u})$. Zauważmy przy tym, że składniki kompozytów są najczęściej na poziomie mikro (bądź nano) materiałami izotropowymi, natomiast w skali makro, kompozyt wielofazowy może być albo izotropowy, albo też anizotropowy (np. w przypadku kompozytów włóknistych o kierunkowym zbrojeniu).

W przypadku *kompozytu o cechach izotropowych* w skali makro, zwanego potocznie kompozytem cząsteczkowo-zbrojonym (np. kompozyty wzmacniane mikro- lub nanocząsteczkami, bądź krótkimi mikro- lub nanowłóknami), dla prawidłowego przeprowadzenia homogenizacji właściwości materiałów składowych kompozytu wielofazowego, wystarczające jest stosowanie klasycznych metod uśredniania: *reguły Voigta* [158] (ang. *Voigt estimation*) lub *reguły Reussa* [124] (ang. *Reuss estimation*), znanych również pod nazwą *reguł mieszania*. W najprostszym przypadku dwóch izotropowych faz składowych sprowadzają się one, odpowiednio, do prostych reguł mieszania

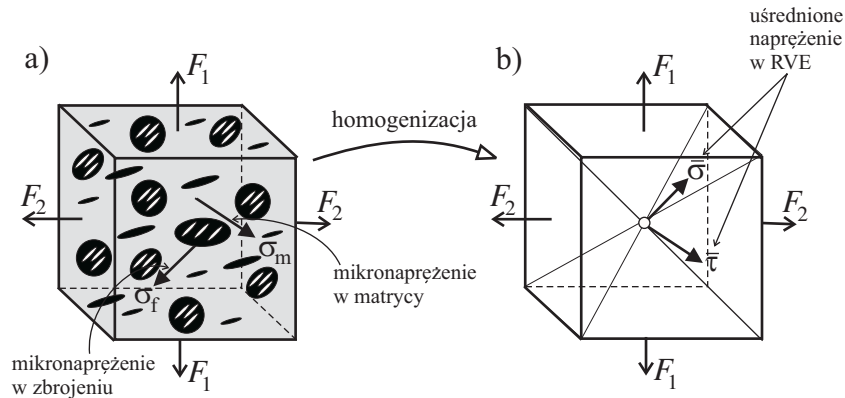
$$\begin{aligned} \bar{P} &= P_m V_m + P_c V_c && \text{reguła Voigta} \\ \frac{1}{\bar{P}} &= \frac{V_m}{P_m} + \frac{V_c}{P_c} && \text{reguła Reussa} \end{aligned} \quad (6.12)$$

w których P_m i P_c oznaczają stałe sprężystości faz składowych, np. moduły Younga E_m i E_c oraz moduły Kirchhoffa G_m i G_c materiałów składowych – matrycy i cząstek zbrojenia, natomiast \bar{P} oznacza odpowiednio moduły efektywne, \bar{E} i \bar{G} uśrednione na poziomie RVE. Symbole V_m i V_c oznaczają udział objętościowy faz, bez uwzględnienia wpływu ich rozmieszczenia, np. lokalnej koncentracji, w komórce RVE o czysto przypadkowej mikrogeometrii: wielkości, kształtu i rozmieszczenia obu faz składowych, por. rys. 6.2a.

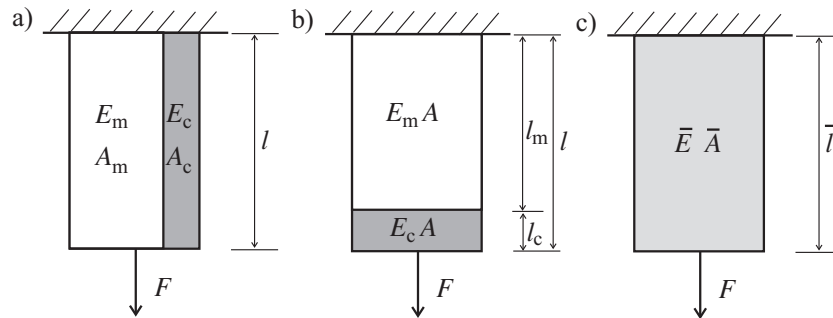
Reguły mieszania, Voigta i Reussa (6.12), prowadzą do dwóch różnych oszacowań wartości uśrednionych stałych sprężystości izotropowego, homogenicznego kontinuum, \bar{E} i \bar{G} . Można zbudować elementarne, dwuskładnikowe schematy mechaniczne pozwalające wyprowadzić te wzory (rys. 6.3).

W schemacie rys. 6.3a (*reguła mieszania Voigta*) pręty o przekrojach A_m i A_c odpowiadające materiałowi matrycy i cząstek są połączone w sposób równoległy $l = l_m = l_c$. W takim przypadku całkowita siła przenoszona przez element jest sumą sił przenoszonych przez matrycę i cząstki zbrojące

$$F = F_m + F_c \quad (6.13)$$



Rysunek 6.2. Reprezentatywny element objętościowy RVE: a) materiał heterogeniczny w skali mikro, b) materiał homogeniczny w skali makro



Rysunek 6.3. Zastępcze schematy mechaniczne dla reguł mieszania: a) reguła Voigta, b) reguła Reussa, c) zastępczy materiał homogeniczny

Uśrednione wydłużenie układu jest równe wydłużeniu prętów składowych

$$\Delta \bar{l} = \Delta l_m = \Delta l_c \tag{6.14}$$

Zatem, na mocy prawa Hooke'a, zastosowanego zarówno dla prętów składowych reprezentujących matrycę i cząstki zbrojące, jak i dla elementu uśrednionego rys. 6.3c, wzór (6.14) można zapisać równoważnie

$$\frac{F \bar{l}}{\bar{E} \bar{A}} = \frac{F_m \bar{l}}{E_m A_m} = \frac{F_c \bar{l}}{E_c A_c} \tag{6.15}$$

skąd, po podzieleniu przez \bar{l} oraz uwzględnieniu $\bar{A} = A_m + A_c$, dochodzimy do

rozdziła siły

$$F_m = \frac{E_m A_m}{\bar{E}(A_m + A_c)} F \quad F_c = \frac{E_c A_c}{\bar{E}(A_m + A_c)} F \quad (6.16)$$

Wykorzystując wreszcie zależność (6.13), otrzymujemy po uproszczeniu

$$1 = \frac{E_m A_m}{\bar{E}(A_m + A_c)} + \frac{E_c A_c}{\bar{E}(A_m + A_c)} \quad (6.17)$$

bądź równoważnie

$$\bar{E} = E_m V_m + E_c V_c = \bar{E}^V \quad (6.18)$$

gdzie udziały objętościowe matrycy i cząstek oznaczono

$$V_m = \frac{A_m}{A_m + A_c} \quad V_c = \frac{A_c}{A_m + A_c} \quad (6.19)$$

W schemacie rys. 6.3b (*reguła mieszania Reussa*) oba pręty o długościach l_m i l_c są połączone w sposób szeregowy, przy czym $A_m = A_c = \bar{A}$. W tym przypadku obowiązuje zatem

$$F = F_m = F_c \quad (6.20)$$

oraz

$$\Delta \bar{l} = \Delta l_m + \Delta l_c \quad (6.21)$$

Po zastosowaniu wzorów Hooke'a dla schematu rys. 6.3b i układu zastępczego rys. 6.3c, otrzymujemy

$$\frac{F \bar{l}}{\bar{E} \bar{A}} = \frac{F l_m}{E_m \bar{A}} + \frac{F l_c}{E_c \bar{A}} \quad (6.22)$$

skąd, po uproszczeniu przez F i \bar{A} , oraz wykorzystaniu wyrażień dla udziałów objętościowych matrycy i cząstek

$$V_m = \frac{l_m}{l_m + l_c} \quad V_c = \frac{l_c}{l_m + l_c} \quad (6.23)$$

dochodzimy ostatecznie do oszacowania Reussa

$$\frac{1}{\bar{E}} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_c}{E_c} = \frac{1}{\bar{E}^R} \quad (6.24)$$

Bezpośrednie zastosowanie reguł mieszania Voigta i Reussa do *kompozytów anizotropowych* nie jest możliwe, bowiem opierają się one jedynie na

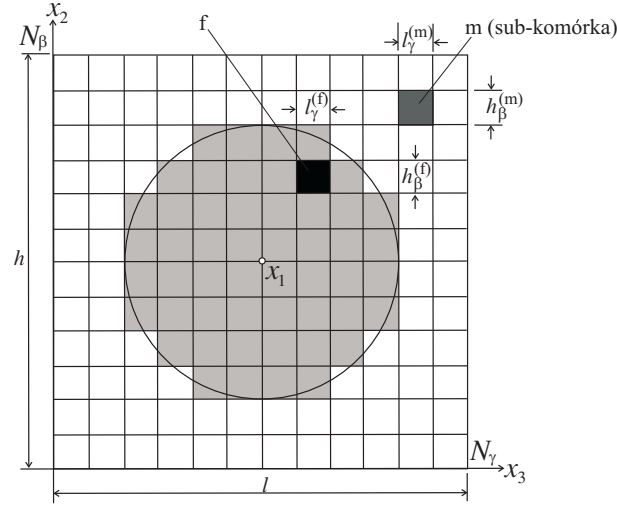
udziale objętościowym matrycy i zbrojenia (V_m i V_c), ale nie uwzględniają rzeczywistej geometrii i rozkładu obu składników. Reguły mieszania są zatem często niewystarczające dla prawidłowego oszacowania wielkości efektywnych realnego kompozytu, np. kierunkowo-zbrojonego. Bardziej współczesne *mikromechaniczne modele homogenizacji*, uwzględniają nie tylko same udziały objętościowe składników, ale również konfigurację, geometrię i koncentrację faz składowych. Należą tu takie *metody homogenizacji* jak: *model współosiowych cylindrów* (ang. *Concentric Cylinder Assembly – CCA*), Hashin i Rosen [57], *metoda homogenizacji Mori–Tanaka* (ang. *Mori–Tanaka Homogenisation Method – MT*), Mori i Tanaka [101], *uogólniona metoda komórek* (ang. *Generalized Method of Cells – GMC*), Paley i Aboudi [111] i *metoda kompatybilnych odkształceń* (ang. *Strain Compatible Method of Cells – SCMC*), Gan i inni [45].

Nie wchodząc zbyt głęboko w szczegóły można stwierdzić, że każda z tych mikromechanicznych metod aproksymacyjnych opiera się na założeniach uproszczających. Na przykład, metoda GMC nie uwzględnia efektu sprzężeń ścinania poprzecznego, które mogą wystąpić w kompozycie poddanym naprężeniom normalnym. Od tej wady wolna jest metoda SCMC. Zarówno GMC jak i SCMC spełniają natomiast założenia ciągłości przemieszczeń na granicach komórek i subkomórek, oraz stałego odkształcenia wewnątrz subkomórek. Ponadto, zarówno mikronaprężenia jak i mikroodkształcenia na poziomie komórek są periodyczne i powtarzalne w skali makro. Przykładowy przekrój 2D, jednostkowej komórki reprezentatywnej RUC kompozytu jednokierunkowego, podzielonej na subkomórki o różnych właściwościach materiału matrycy lub włókna (m lub f), przedstawiono na rys. 6.4. Na poziomie subkomórki $h_{\beta l_{\gamma}}$ obowiązuje *lokalne równanie sprężystości* wiążące *lokalne zmienne* w subkomórce $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta\gamma)}$ i $\boldsymbol{\sigma}^{(\beta\gamma)}$ (mikroodkształcenia i mikronaprężenia)

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(\beta\gamma)} = S_{ijkl}^{(\beta\gamma)} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{(\beta\gamma)} \quad (6.25)$$

natomiast $S_{ijkl}^{(\beta\gamma)}$ oznacza *lokalną macierz (tensor) sztywności* subkomórki $(\beta\gamma)$, inną dla matrycy $S_{ijkl}^{(m)}$ i włókna $S_{ijkl}^{(f)}$. Uśrednione wewnątrz RUC, *efektywne odkształcenie* i *naprężenie* – $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}$ i $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}$ aproksymowane są wzorami

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} &= \frac{1}{hl} \sum_{\beta}^{N_{\beta}} \sum_{\gamma}^{N_{\gamma}} h_{\beta} l_{\gamma} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(\beta\gamma)} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} &= \frac{1}{hl} \sum_{\beta}^{N_{\beta}} \sum_{\gamma}^{N_{\gamma}} h_{\beta} l_{\gamma} \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(\beta\gamma)} \end{aligned} \quad (6.26)$$



Rysunek 6.4. Przykładowa geometria reprezentatywnej komórki jednostkowej RUC–2D o wymiarach hl , podzielonej na subkomórki $l_\gamma^{(m)}h_\beta^{(m)}$ (matryca) i $l_\gamma^{(f)}h_\beta^{(f)}$ włókno, aproksymujących kołowe włókna zbrojące kompozyt jednokierunkowy (x_1 – oś wzdłużna, x_2, x_3 – przekrój poprzeczny)

Przez odwrócenie tych zależności do postaci $\varepsilon_{ij}^{(\beta\gamma)}(\bar{\varepsilon}_{ij})$ oraz $\sigma_{ij}^{(\beta\gamma)}(\bar{\sigma}_{ij})$ i podstawienie do lokalnego równania sprężystości (6.25) – na poziomie subkomórki $\beta\gamma$, dochodzimy do *równania sprężystości na poziomie RUC*, wiążącego uśrednione naprężenie z uśrednionym odkształceniem $\bar{\sigma}_{ij}$ i $\bar{\varepsilon}_{ij}$, mianowicie

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{hl} \underbrace{\sum_{\beta}^{N_{\beta}} \sum_{\gamma}^{N_{\gamma}} h_{\beta} l_{\gamma} S_{ijkl}^{(\beta\gamma)} A_{klmn}^{(\beta\gamma)}}_{\bar{S}_{ijmn}} \bar{\varepsilon}_{mn} \quad (6.27)$$

gdzie A_{klmn} jest tzw. *tensorowym operatorem koncentracji*, o składowych $A_{klmn}^{(\beta\gamma)}$ umożliwiających rozróżnienie właściwości faz składowych – matrycy i włókna. Wprowadzając oznaczenie dla uśrednionego tensora sztywności kompozytu \bar{S}_{ijmn} na poziomie RUC, dochodzimy do *uśrednionego równania sprężystości* wewnątrz RUC w postaci

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{S}_{ijmn} \bar{\varepsilon}_{mn} \quad (6.28)$$

Tensor \bar{S}_{ijmn} oznacza *uśredniony tensor sprężystości* kompozytu, wyrażony

przez lokalne tensory sprężystości w subkomórkach $\overline{S}_{klmn}^{(\beta\gamma)}$ oraz tensor współczynników koncentracji $A_{klmn}^{(\beta\gamma)}$. Ostatecznie więc, równanie (6.25) jest równaniem sprężystości na poziomie mikro (subkomórki), natomiast równanie (6.28) przedstawia równanie sprężystości uśrednione na poziomie RUC.

Posługując się notacją macierzową, oraz oznaczając zhomogenizowaną macierz sztywności wewnątrz RUC przez $\overline{\mathbb{E}} = \overline{\mathbb{S}}$, możemy zapisać oba równania w równoważnej postaci

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(\beta\gamma)} &= \mathbb{S}^{(\beta\gamma)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta\gamma)} && \text{(poziom subkomórki)} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}} &= \overline{\mathbb{E}} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} && \text{(poziom RUC)} \end{aligned} \quad (6.29)$$

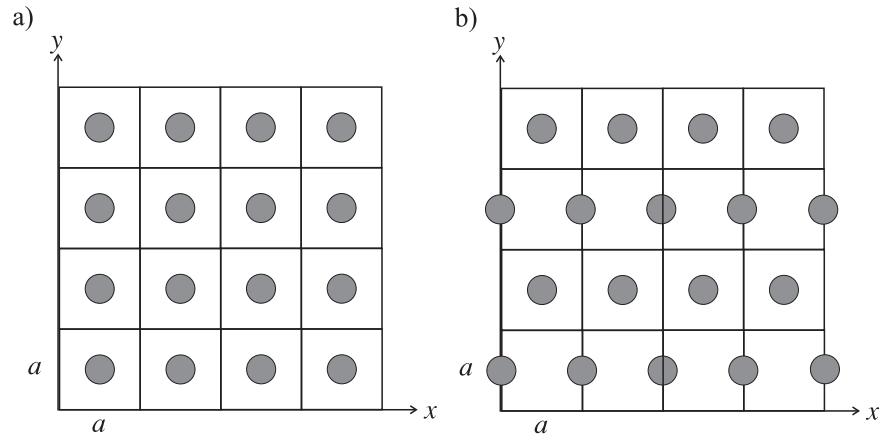
6.2.2. Efektywne moduły sztywności kompozytu jednokierunkowo zbrojonego za pomocą długich włókien

Ostateczna postać efektywnych macierzy sprężystości kompozytu $\overline{\mathbb{E}}$ lub $\overline{\mathbb{E}}^{-1}$ zależy nie tylko od wyboru metody homogenizacji (np. Reuss, Voigt, GMC, SCMC), ale także od wyboru komórki reprezentatywnej RUC.

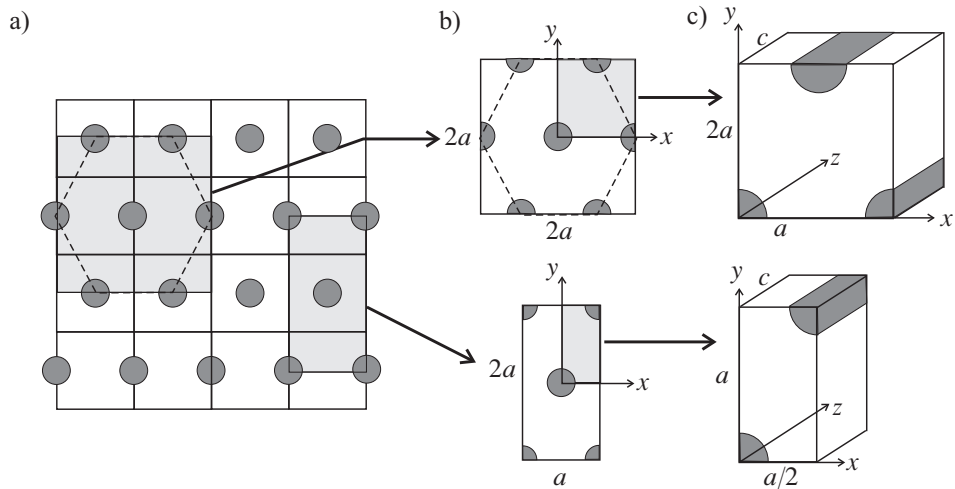
Przedstawimy obecnie dwie podstawowe, regularne, powtarzalne konfiguracje włókien w skali makro w kompozycie jednokierunkowo zbrojonym o symetrii poprzecznie izotropowej.

W przypadku *symetrii klasy tetragonalnej* (ang. *square array*) włókna rozmieszczone są w równoległych rzędach i szeregach odległych o wymiar a (rys. 6.5a). Takim rozmieszczeniem włókien posługują się między innymi Tamma i Avila [152], Würkner i in. [163]. Z kolei w przypadku *symetrii klasy heksagonalnej* (ang. *hexagonal array*) włókna rozmieszczone są w równoległych rzędach odległych o wymiar a , z naprzemiennym przesunięciem kolejnych rzędów o wymiar $a/2$ (rys. 6.5b). Taki układ włókien jest wykorzystywany np. przez Herakovicha i Aboudiego [62], Sun i Vaidya [146] oraz innych autorów. Rozmieszczenie włókien w kompozycie w skali makro jest punktem wyjścia do definicji *reprezentatywnej komórki jednostkowej* (*Representative Unit Cell RUC*), którą należy posługiwać się podczas symulacji numerycznych przy zastosowaniu wybranych reguł homogenizacji (por. podrozdział 5.3.1). Wychodząc z konfiguracji włókien w symetrii tetragonalnej (rys. 6.7a) bądź heksagonalnej (rys. 6.7b) można zdefiniować różne komórki reprezentatywne (por. Sun i Vaidya [146]). W przypadku symetrii tetragonalnej wybór komórek RUC zilustrowano na rys. 6.6a. Natomiast w przypadku symetrii heksagonalnej różne definicje komórek RUC pokazano na rys. 6.6b.

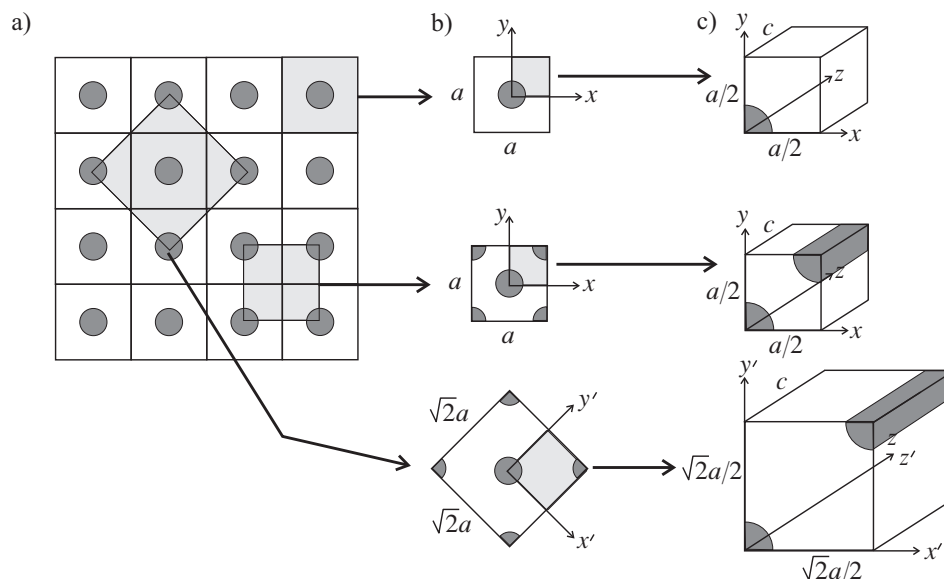
Zwróćmy uwagę, że komórki RUC typu tetragonalnego charakteryzują się 4 osiami symetrii geometrycznej, natomiast komórki RUC typu heksagonalnego,



Rysunek 6.5. Dwie regularne konfiguracje włókien w kompozycie jednokierunkowo zbrojonym, poprzecznie izotropowym (skala makro): a) symetria tetragonalna, b) symetria heksagonalna



Rysunek 6.6. Komórki reprezentatywne RUC – symetria heksagonalna: a) różny wybór powtarzalnej komórki, b) rozmieszczenie włókien w komórce RUC, c) kształt subkomórek RUC z wykorzystaniem symetrii



Rysunek 6.7. Komórki reprezentatywne RUC – symetria tetragonalna: a) różny wybór powtarzalnych komórek, b) rozmieszczenie włókien w RUC przed wykorzystaniem symetrii, c) kształt subkomórek RUC z wykorzystaniem symetrii

wpisane w kwadrat $2a \times 2a$ lub prostokąt $a \times 2a$, mają po dwie osie symetrii, pomimo że sześciokąt (heksagon) ma w istocie 6 własnych osi symetrii geometrycznej. Wybór subkomórek do symulacji numerycznej w celu homogenizacji jest jednak dowolny.

Przystąpimy obecnie do krytycznego omówienia zaczerpniętych z literatury wyników symulacji numerycznych dla kompozytów poprzecznie izotropowych typu Boron/aluminium przy różnych właściwościach składników oraz różnych topologiach rozkładu włókien z zastosowaniem metod homogenizacji opartych na FEM, GMC i SCMC. Sun i Vaidya [146] przyjęli do analizy właściwości dla włókien Boronu i matrycy aluminiowej przedstawione w tab. 6.2. Kluczem do rozróżnienia zachowania sprężystego kompozytu zgodnie z klasą symetrii tetragonalnej bądź heksagonalnej jest liczba niezależnych stałych materiałowych. W przypadku płaskiej izotropii typu tetragonalnego materiał kompozytowy scharakteryzowany jest przez 6 niezależnych stałych materiałowych $E_{11} = E_{22}$, E_{33} , $G_{23} = E_{13}$, ν_{21} , $\nu_{31} = \nu_{32}$. Natomiast w przypadku, płaskiej izotropii typu heksagonalnego moduł ścinania w płaszczyźnie izotropii G_{12} jest powiązany z modułem Younga w tej płaszczyźnie E_{11} oraz odpowied-

Tabela 6.2. Wartości modułów materiałowych komponentów kompozytu Boron/Al, wg Sun i Vaidya [146]

Materiał	E [GPa]	ν
Włókno Boron	379.3	0.1
Matryca Al	68.3	0.3

nim współczynnikiem Poissona ν_{21} zapomocą znanej relacji obowiązującej dla ośrodka izotropowego

$$G_{12} = \frac{E_{11}}{2(1 + \nu_{21})} \quad (6.30)$$

Przeanalizujemy obecnie wyniki zawarte w tab. 6.3 z punktu widzenia zależności (6.30). Z zestawienia pokazanego w tab. 6.4 wynika, że przy zastosowaniu

Tabela 6.3. Wartości sprężystych stałych materiałowych kompozytu Boron/Al, wg Sun i Vaidya [146]

Stałe materiałowe kompozytu Boron/Al ($V_f = 0.47$)	FEM Sun i Vaidya [146]		Symulacje numeryczne	
	<i>square array</i>	<i>hexagonal array</i>	Chamis [21]	Hashin i Rosen [57]
$E_{11} = E_{22}$ [GPa]	144	136.5	156	139.1
E_{33} [GPa]	215	215	214	215
$G_{23} = G_{13}$ [GPa]	57.2	54.0	62.6	53.9
G_{12} [GPa]	45.9	52.5	43.6	54.6
ν_{21}	0.29	0.34	0.31	0.31
$\nu_{31} = \nu_{32}$	0.19	0.19	0.20	0.195

podejścia FEM, przy użyciu komórki RUC o symetrii heksagonalnej, podobnie jak w symulacjach wg Hashina i Rosena [57], mamy do czynienia z kompozytem poprzecznie izotropowym klasy heksagonalnej. Natomiast przy zastosowaniu komórek RUC o symetrii tetragonalnej oraz w symulacjach wg Chamisa [21] kompozyt zachowuje się jak materiał klasy tetragonalnej.

W literaturze występuje duża rozbieżność dotycząca zarówno właściwości składników kompozytu tego samego typu jak również wyników otrzymanych przy zastosowaniu różnych metod homogenizacji (np. FEM, GMC, SCMC itd).

Tabela 6.4. Klasyfikacja kompozytu Boron/Al do klasy tetragonalnej bądź heksagonalnej w zależności wartości modułu Kirchhoffa G_{12} , wg Sun i Vaidya [146]

	Sun i Vaidya [146]		Chamis [21]	Hashin i Rosen [57]
	<i>square array</i>	<i>hexagonal array</i>		
G_{12} [GPa]	45.9	52.5	43.6	54.6
$G_{12} = \frac{E_{11}}{2(1+\nu_{21})}$	55.8	50.9	59.5	53.1
% rozbieżności	17.1	-3.1	26.7	-2.8

Omówimy obecnie wyniki zawarte w pracy Gan i inni [45] dotyczące również kompozytu typu Boron/Al o właściwościach przedstawionych w tab. 6.5.

Tabela 6.5. Wartości modułów materiałowych komponentów kompozytu Boron/Al, wg Gan i inni [45]

Materiał	E [GPa]	ν
Włókno Boron	413.7	0.2
Matryca Al	55.16	0.3

Podkreślimy duże rozbieżności danych wyjściowych komponentów użytych do symulacji Suna i Vaidya [146] w porównaniu z danymi użytymi przez Gana i inni [45]. Gan i inni [45] zastosowali do symulacji różne rozkłady włókien Boronu w komórce RUC: rozkład przypadkowy, pojedyncze włókno kwadratowe oraz rozkład o symetrii heksagonalnej, przy użyciu rozkładu przypadkowego, opartych na metodach homogenizacji FEM, GMC i SCMC jednak bez wstępnego założenia o grupie symetrii poprzecznie izotropowej. Wyniki zestawiono w tab. 6.6. Powyższe wyniki potwierdzają występowanie grupy symetrii poprzecznie izotropowej ($E_{11} \cong E_{22}, G_{23} \cong G_{13}, \nu_{31} \cong \nu_{32}$). Dalsze rozstrzygnięcie o przynależności do klasy tetragonalnej bądź heksagonalnej może być dokonane przez sprawdzenie spełnienia warunku (6.30). Analiza wyników ujętych w tabeli 6.7 prowadzi do wniosku, że rozpatrywany kompozyt wykazuje klasę symetrii tetragonalnej dla metod homogenizacji GMC i SCMC, bowiem warunek (6.30) nie jest spełniony. Natomiast w przypadku metody homogenizacji FEM spełnia on w przybliżeniu warunki dla klasy symetrii heksagonalnej.

Tabela 6.6. Wartości sprężystych stałych materiałowych kompozytu Boron/Al, wg Gan i inni [45]

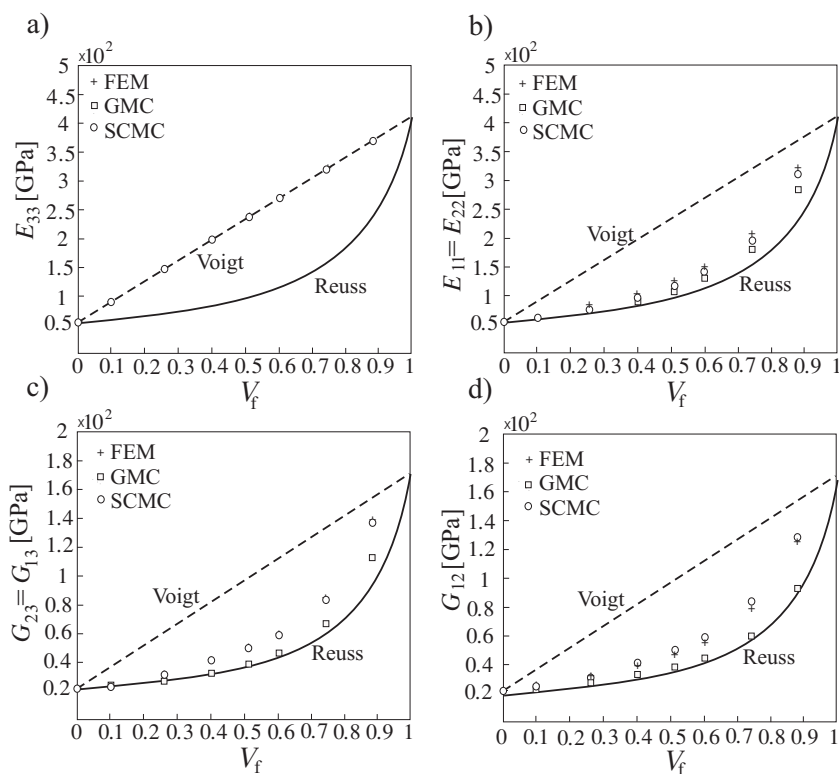
Stałe materiałowe kompozytu Boron /Al ($V_f = 0.5$)	Metody homogenizacji (przypadkowy rozkład włókien)		
	FEM	GMC	SCMC
E_{11} [GPa]	138.5	117.9	131.0
E_{22} [GPa]	137.3	113.1	128.6
E_{33} [GPa]	234.7	234.7	234.7
G_{23} [GPa]	60.48	42.94	58.51
G_{13} [GPa]	60.99	40.53	58.77
G_{12} [GPa]	54.78	37.78	50.70
ν_{21}	0.3078	0.3289	0.3182
ν_{31}	0.2361	0.2446	0.2387
ν_{32}	0.2369	0.2492	0.2405

Tabela 6.7. Porównanie modułów G_{12} obliczonych metodami FEM, GMC, SCMC dla kompozytu Boron/Al przy użyciu rozkładu przypadkowego wg Gan i inni [45] z wartościami przewidywanymi według wzoru (6.30)

	FEM	GMC	SCMC
G_{12} [GPa]	54.78	37.78	57.70
$G_{12} = \frac{E_{11}}{2(1+\nu_{21})}$	52.7	43.45	49.23
% rozbieżności	-3.9	13.0	-17.2

Wyniki symulacji numerycznej dla rozkładu tetragonalnego włókien uzyskane przez Gan i inni [45] dla kompozytu Boron/Al, przy użyciu różnych geometrii RUC (przypadkowej, bądź regularnej – tetragonalnej) rys. 6.8 potwierdzają wyraźnie wpływ rozkładu zbrojenia (czyli tensora koncentracji zdefiniowanego w 5.3.1, opisującego ten rozkład). Symulacje prowadzone dla bardziej zaawansowanych modeli homogenizacji (FEM, SCMC, GMC) zaznaczone na tym rysunku, w porównaniu z regułami mieszania opartymi jedynie na udziale objętościowym (Reuss, Voigt), potwierdzają w zasadzie twierdzenia o górnym (Voigt) i dolnym oszacowaniu (Reuss). Przedstawione na rys. 6.8 i rys. 6.9 wyniki symulacji numerycznej przy użyciu różnych reguł homoge-

nizacji (FEM, GMC, SMC) w odniesieniu do klasycznych reguł mieszania, opartych na udziale objętościowym V_f wyłącznie (Reuss, Voigt), skłaniają do dalszych spostrzeżeń. Można zauważyć, że aproksymacje Voigta i Reussa określają, odpowiednio, *górne* i *dolne* oszacowanie współczynników macierzy sprężystości kompozytu (Herakovich [61]) rys. 6.8. W szczególności, w kompozycie zbrojonym *jednokierunkowymi włóknami o symetrii poprzecznie izotropowej*, aproksymacja Reussa prowadzi do błędnego oszacowania modułu osiowego E_{33} (przeciwnie niż aproksymacja Voigta, która prowadzi do poprawnych wartości). Z kolei moduły ścinania $G_{23} = G_{13}$ i G_{12} na ogół są lepiej aproksymowane za pomocą reguły Reussa, niż reguły Voigta. W drodze prezentowanego



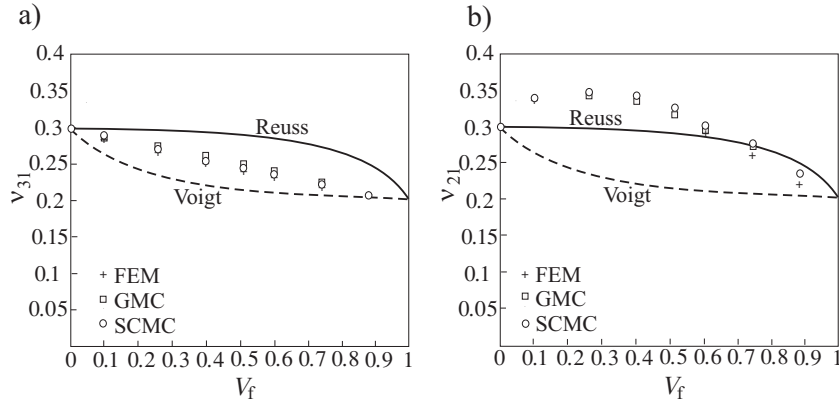
Rysunek 6.8. Porównanie różnych aproksymacji inżynierskich stałych sprężystości kompozytu kierunkowo-zbrojonego boron/Al, wg Gan i inni [45], w zestawieniu z przypadkowym rozkładem materiału zbrojącego (Voigt i Reuss), wg Gan i inni [45]

eksperymentu numerycznego (Gan i inni [45]) wyznaczono 6 modułów zastępczych sprężystości $E_{11} = E_{22}$, E_{33} , G_{12} , $G_{23} = G_{13}$ rys. 6.8a–d oraz rys. 6.9a–b

ν_{21}, ν_{31} , wszystkich w funkcji udziału objętościowego $V_f \in [0, 1]$. Odpowiada to uśrednionej macierzy sztywności \bar{E}_{ij} materiału ortotropowego, dla którego równanie sprężystości przybiera postać

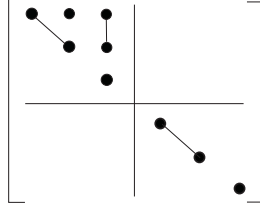
$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\tau}_{23} \\ \bar{\tau}_{31} \\ \bar{\tau}_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} & & & \\ & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} & & & \\ & & \bar{E}_{33} & & & \\ \hline & & & \bar{G}_{23} & & \\ & & & & \bar{G}_{13} & \\ & & & & & \bar{G}_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{33} \\ \bar{\gamma}_{23} \\ \bar{\gamma}_{31} \\ \bar{\gamma}_{12} \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

gdzie $\bar{E}_{11} = \bar{E}_{22}, \bar{E}_{33}, \bar{G}_{23} = \bar{G}_{13}, \bar{G}_{12}, \bar{E}_{12}, \bar{E}_{13} = \bar{E}_{23}$ oznaczają 6 niezależnych elementów uśrednionej macierzy sprężystości \bar{E}_{ij} . W dalszym ciągu można wyrazić elementy macierzy \bar{E}_{ij} przez inżynierskie stałe sprężystości wyznaczone w eksperymencie Gan i in. [45], uwzględniając poprzeczną izotropię



Rysunek 6.9. Porównanie rozbieżności reguł mieszania do bardziej zaawansowanych aproksymacji współczynników Poissona ν_{31} i ν_{21} , wg Gan i inni [45]

$$[\bar{E}] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{13}\nu_{31})E_{11}}{\Delta} & \frac{(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{31})E_{11}}{\Delta} & \frac{(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{31})E_{33}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{(1-\nu_{13}\nu_{31})E_{11}}{\Delta} & \frac{(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{13})E_{33}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \text{symetria} & & \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})E_{33}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$



Zastosowano tutaj oznaczenie $\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - 2(1 + \nu_{21})\nu_{13}\nu_{31}$. Macierz (6.32) zawiera 6 niezależnych stałych materiałowych, np. $E_{11}, E_{33}, G_{12}, G_{23}, \nu_{31}, \nu_{21}$. Zauważmy, że twierdzenie o oszacowaniu górnym i dolnym (przez reguły Voigta i Reussa) obowiązuje tylko dla 5 stałych materiałowych: dwóch modułów Younga E_{11}, E_{33} oraz dwóch modułów Kirchhoffa G_{12}, G_{23} (z diagonalii), mianowicie

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11}^R(V_f) &\leq E_{11} \leq \bar{E}_{11}^V(V_f) \\ \bar{E}_{33}^R(V_f) &\leq E_{33} \leq \bar{E}_{33}^V(V_f) \\ \bar{G}_{12}^R(V_f) &\leq G_{12} \leq \bar{G}_{12}^V(V_f) \\ \bar{G}_{23}^R(V_f) &\leq G_{23} \leq \bar{G}_{23}^V(V_f) \end{aligned} \quad (6.33)$$

natomiast oszacowania stałej Poissona w płaszczyźnie ortotropii ($\bar{\nu}_{31}^R$ i $\bar{\nu}_{31}^V$) zamieniają się rolami

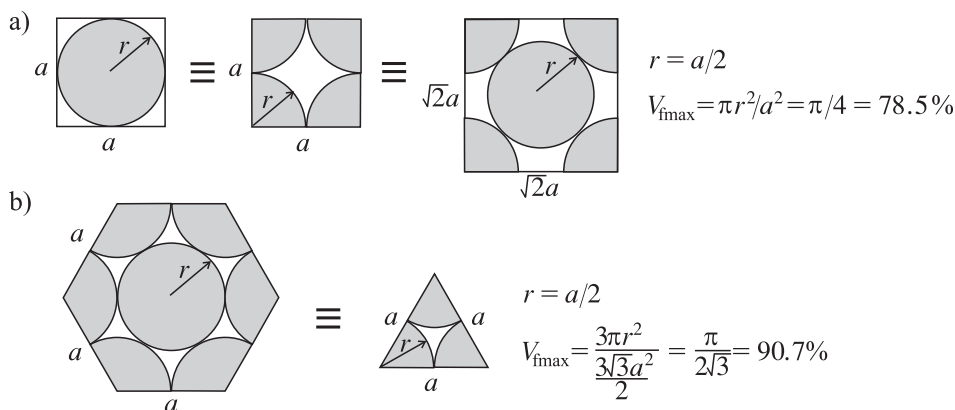
$$\bar{\nu}_{31}^V(V_f) \leq \nu_{31} \leq \bar{\nu}_{31}^R(V_f) \quad (6.34)$$

Stała Poissona w płaszczyźnie izotropii ν_{21} wyznaczona w pracy [45], która nie spełnia warunku (6.30), nie podporządkowuje się regule oszacowania górnego i dolnego przez wzory Voigta i Reussa. Do wyników tych należy podchodzić ostrożnie. W symulacjach Gana i innych [45] uzyskano z różnych metod homogenizacji wyniki uśrednionej stałej Poissona w płaszczyźnie poprzecznej izotropii wykraczające poza skrajne wartości dla obu składników użytych do symulacji $\nu_{21}(V_f = 0.0) = 0.3$ oraz $\nu_{21}(V_f = 1.0) = 0.2$. Maksymalne wartości ν_{21} uzyskane ze wszystkich metod homogenizacji osiągają poziom ~ 0.35 . Pokrewny problem został rozważony przez Liu i innych w pracy [92]. Analizowano biokompozyt warstwowy (copper/PDMS) poprzecznie izotropowy klasy heksagonalnej. Autorzy stwierdzili, że efektywne moduły Younga zarówno w kierunku poprzecznym jak i wzdłużnym mogą przekroczyć nie tylko oszacowanie Voigta, lecz również wartość sztywniejszego składnika kompozytu w przypadku gdy jeden ze składników jest bliski nieściśliwości.

Ponadto, wszystkie zmienne nadkreślane $\bar{\sigma}_{ij}$ i $\bar{\varepsilon}_{ij}$ oznaczają odpowiednio, naprężenia i odkształcenia efektywne, uśrednione po RUC, w odróżnieniu od zmiennych lokalnych σ_{ij} i ε_{ij} na poziomie subkomórki (poziom mikro).

6.2.3. Aproksymacja mechanicznych modułów anizotropii kompozytu Boron/Al na podstawie oszacowań Voigta i Reussa

Przypomnijmy na wstępie, iż reguły mieszania Voigta (6.12₁) i Reussa (6.12₂) są oparte na założeniu przypadkowego rozkładu komponentów w objętości komórki reprezentatywnej (RUC). Zastosowanie powyższych reguł do stałych sprężystości każdego z komponentów: matrycy E_m, G_m i włókna E_f, G_f , prowadzi w rezultacie do uśrednionych stałych według Voigta \bar{E}^V, \bar{G}^V lub Reussa \bar{E}^R, \bar{G}^R . W punktach końcowych $V_f = 0$ lub $V_f = 1$ oszacowania Voigta i Reussa zbiegają się, odpowiednio do wartości modułów matrycy i włókna, które dla rozpatrywanego kompozytu są podane w tab. 6.5. Sprawa ta wymaga jednak szerszej dyskusji. Zakładając mianowicie identyczne włókna o przekroju kołowym ułożone w sposób regularny bądź w układzie tetragonalnym, bądź też w heksagonalnym, otrzymujemy odmienne graniczne wartości maksymalnej gęstości upakowania włókien w kompozycie V_{fmax} (por. rys. 6.10). Widać wyraźnie, że maksymalna gęstość upakowania



Rysunek 6.10. Ilustracja maksymalnego upakowania identycznych włókien o przekroju kołowym w RUC o symetrii: a) tetragonalnej, b) heksagonalnej

według symetrii tetragonalnej $V_{fmax} \cong 78.5\%$ jest istotnie mniejsza od odpowiedniej wartości dla symetrii heksagonalnej $V_{fmax} \cong 90.7\%$. Teoretycznie jeszcze większe wartości maksymalnej gęstości upakowania włókien mogą być uzyskane jedynie w przypadku włókien o przekroju kołowym, lecz o różnych średnicach bądź też przy zastosowaniu włókien o innej geometrii. Jednakże, przyjmując do homogenizacji właściwości mechaniczne identyczne włókna kołowe

w jednym z dwóch powyższych układów regularnych kompozytu poprzecznie izotropowego, przekraczanie maksymalnych gęstości upakowani $V_f > V_{f\max}$ jest trudne do wyjaśnienia. W konsekwencji wyniki homogenizacji Voigta bądź Reussa dla $V_f \cong 1$ mają wyłącznie znaczenie teoretyczne. Podobne zastrzeżenia można sformułować dla wyników homogenizacji w otoczeniu punktu $V_f \cong 0$, gdzie pojęcie kompozytu traci sens.

Przejdziemy obecnie do szczegółowej analizy wyników zaprezentowanych przez Gana i innych [45]. Zwróćmy uwagę, że oszacowania regułami Voigta i Reussa $\bar{\nu}^{V/R}$, dla piątej stałej ν_{31} (rys. 6.9a i b) uzyskano poprzez zastosowanie stosownych reguł mieszania dla składowych tensora sztywności E_{ijkl} matrycy i włókna (por. (4.4))

$$E_{1122}^{m/f} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E^{m/f} \nu^{m/f}}{(1 + \nu^{m/f})(1 - 2\nu^{m/f})} \quad (6.35)$$

Stosując dla nich mieszanie według reguł Voigta i Reussa otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{E}_{1122}^V &= E_{1122}^m(1 - V_f) + E_{1122}^f V_f \\ \frac{1}{\bar{E}_{1122}^R} &= \frac{(1 - V_f)}{E_{1122}^m} + \frac{V_f}{E_{1122}^f} \end{aligned} \quad (6.36)$$

gdzie

$$\bar{E}_{1122}^{V/R} = \frac{\bar{E}^{V/R} \bar{\nu}^{V/R}}{(1 + \bar{\nu}^{V/R})(1 - 2\bar{\nu}^{V/R})} \quad (6.37)$$

Rozwiązując powyższe równania z uwagi na uśrednione wartości współczynników Poissona $\bar{\nu}^V, \bar{\nu}^R$ oraz wykorzystując moduły Younga \bar{E}^V, \bar{E}^R uśrednione według wzorów

$$\begin{aligned} \bar{E}^V(V_f) &= E^m(1 - V_f) + E^f V_f \\ \frac{1}{\bar{E}^R(V_f)} &= \frac{1 - V_f}{E^m} + \frac{V_f}{E^f} \end{aligned} \quad (6.38)$$

gdzie E^m i E^f oznaczają moduły Younga aluminium oraz Boronu (wg. tab. 6.5), otrzymujemy

$$\bar{\nu}^{V/R} = \frac{\sqrt{\left(1 - \bar{E}_{1122}^{V/R}/\bar{E}^{V/R}\right) \left(1 + 7\bar{E}_{1122}^{V/R}/\bar{E}^{V/R}\right)} + 1 - \bar{E}_{1122}^{V/R}/\bar{E}^{V/R}}{4\bar{E}_{1122}^{V/R}/\bar{E}^{V/R}} \quad (6.39)$$

Alternatywnie, stosując reguły Voigta lub Reussa bezpośrednio do stałych Poissona dla aluminium ν^m i Boronu ν^f (tab. 6.5) otrzymujemy inne oszacowania

$$\begin{aligned}\bar{\nu}^V &= \nu^m(1 - V_f) + \nu^f V_f \\ \frac{1}{\bar{\nu}^R} &= \frac{1 - V_f}{\nu^m} + \frac{V_f}{\nu^f}\end{aligned}\quad (6.40)$$

Uśrednione wartości stałych materiałowych $E_{11}, E_{33}, G_{12}, G_{23}$ oraz ν_{31} kompozytu kierunkowo zbrojonego boron–Al zostały otrzymane w przez Gana i innych w pracy [45] przy zastosowaniu trzech różnych, skomplikowanych reguł homogenizacji: FEM, GMC i SCMC. Zamiast powyższych złożonych reguł homogenizacji proponujemy prostą regułę uśredniania górnego i dolnego kresu (6.33–6.34). Jako wzorzec przydatności zaproponowanej reguły "supermieszania" przyjmujemy wyniki symulacji według metody homogenizacji SCMC. Z porównania wyników homogenizacji SCMC dla różnych modułów materiałowych z odpowiednimi ich oszacowaniami według reguł mieszania Voigta lub Reussa (rys. 6.8 i 6.9) wynika konieczność określenia 5 współczynników wagowych w regule supermieszania obu oszacowań. Innymi słowy, w wyniku uśrednienia dwóch izotropowych oszacowań, Voigta i Reussa, otrzymujemy aproksymację modułów kompozytu o cechach anizotropowych. Przyjmując, dodatkowo, niezależność współczynników od udziału objętościowego V_f , dla określenia tych współczynników $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ oraz α_5 ($\alpha_i \in [0, 1]$) posłużymy się wartościami stałych homogenizacji SCMC dla wybranego udziału objętościowego $V_f = 0.5$. Oczywiście, reguły supermieszania zapewniają również ściśle spełnienie wartości na obu brzegach, $V_f = 0$ i $V_f = 1$.

Proponowane reguły supermieszania przyjmują zatem postać

$$\begin{aligned}\bar{\bar{E}}_{11}(V_f) &= \alpha_1 \bar{E}_{11}^V(V_f) + (1 - \alpha_1) \bar{E}_{11}^R(V_f) \\ \bar{\bar{E}}_{33}(V_f) &= \alpha_2 \bar{E}_{33}^V(V_f) + (1 - \alpha_2) \bar{E}_{33}^R(V_f) \\ \bar{\bar{G}}_{12}(V_f) &= \alpha_3 \bar{G}_{12}^V(V_f) + (1 - \alpha_3) \bar{G}_{12}^R(V_f) \\ \bar{\bar{G}}_{23}(V_f) &= \alpha_4 \bar{G}_{23}^V(V_f) + (1 - \alpha_4) \bar{G}_{23}^R(V_f)\end{aligned}\quad (6.41)$$

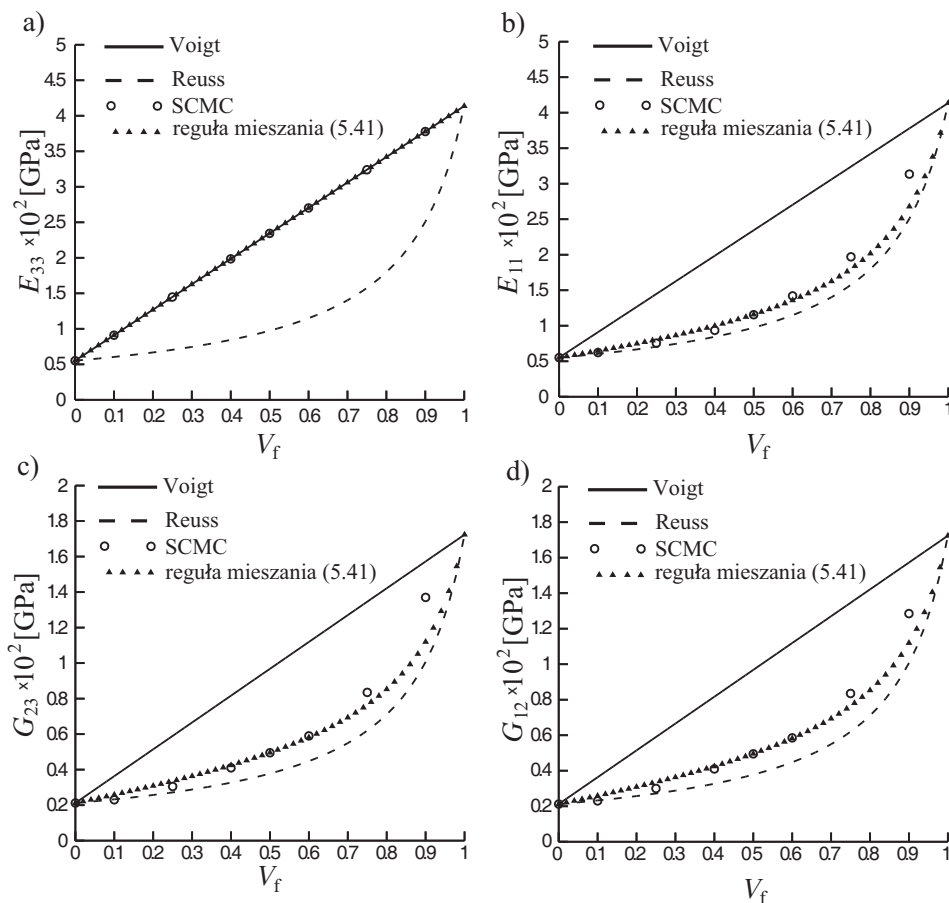
oraz

$$\bar{\bar{\nu}}_{31}(V_f) = \alpha_5 \bar{\nu}_{31}^V(V_f) + (1 - \alpha_5) \bar{\nu}_{31}^R(V_f) \quad (6.42)$$

przy czym obowiązują odpowiednie warunki zgodności dla $V_f = 0.5$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{E}}_{11}(V_f = 0.5) &= E_{11}^{\text{SCMC}}(V_f = 0.5) \\ \bar{\bar{E}}_{33}(V_f = 0.5) &= E_{33}^{\text{SCMC}}(V_f = 0.5) \\ \bar{\bar{G}}_{12}(V_f = 0.5) &= G_{12}^{\text{SCMC}}(V_f = 0.5) \\ \bar{\bar{G}}_{23}(V_f = 0.5) &= G_{23}^{\text{SCMC}}(V_f = 0.5) \\ \bar{\bar{\nu}}_{31}(V_f = 0.5) &= \nu_{31}^{\text{SCMC}}(V_f = 0.5)\end{aligned}\quad (6.43)$$

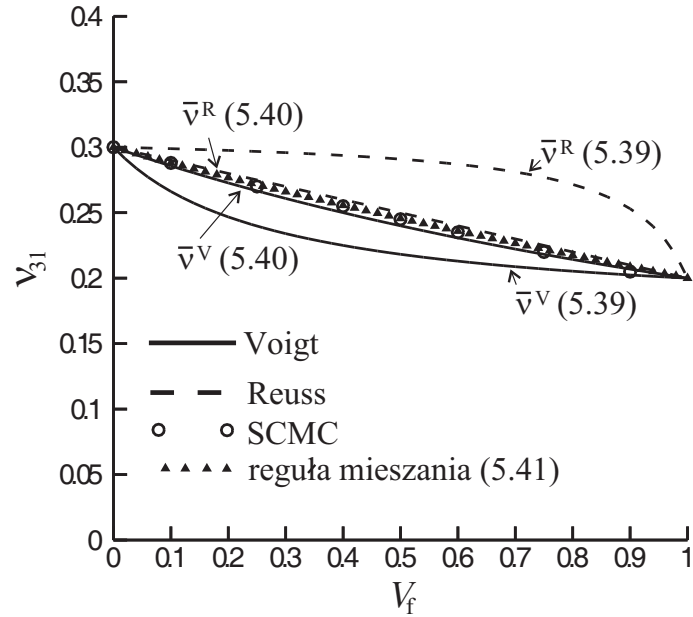
Obliczone współczynniki wagowe wynoszą $\alpha_1 = 1.000$, $\alpha_2 = 0.135$, $\alpha_3 = 0.200$, $\alpha_4 = 0.200$, $\alpha_5 = 0.700$. Wyniki zastosowania powyższej reguły supermieszania obu kresów, górnego i dolnego, do niezależnych stałych inżynierskich, przedstawiono na rys. 6.11a–d oraz rys. 6.12, w porównaniu do wyników homogenizacji metodą SMC (wg. Gan i inni [45]). W efekcie przez supermie-



Rysunek 6.11. Porównanie zbieżności wyników otrzymanych na podstawie reguły mieszania z wynikami metody SMC w przypadku kolejnych wartości: a-b) modułów Younga E_{11} , E_{33} , c-d) modułów Kirchhoffa G_{12} , G_{23}

szanie krzywych oszacowań górnego i dolnego modułów, współczynnikami α_i ($i = 1, \dots, 5$) określonych z warunków zgodności (6.43) z wynikami homogenizacji (bądź pomiarami) dla określonego V_f , można aproksymować rodzinę krzywych $\overline{\overline{E}}_{11}(V_f), \dots, \overline{\overline{v}}_{31}(V_f)$ w pełnym przedziale $V_f \in [0, 1]$.

Wyniki zastosowania zaproponowanej reguły supermieszania przedstawiono na rys. 6.11a–d oraz 6.12.



Rysunek 6.12. Porównanie zbieżności wyników otrzymanych na podstawie reguły mieszania z wynikami metody SCMC w przypadku wartości współczynnika Poissona ν_{31}

Rozdział 7

Ogólna koncepcja powierzchni granicznych – wypukłość, zasada normalności, stateczność materiałowa

7.1. Ograniczenia zakresu sprężystego materiałów anizotropowych lub izotropowych

W *anizotropowych materiałach ciągliwych* bądź *kruchych* osiągnięcie ograniczenia zakresu sprężystego jest równoważne z osiągnięciem początkowej *powierzchni plastyczności* f^p albo *powierzchni uszkodzenia* f^d , określonych zazwyczaj w przestrzeni naprężenia przez skalarne funkcje składowych stanu naprężenia σ_{ij} oraz odpowiednich tensorów strukturalnych anizotropii materiałowej bądź uszkodzenia (zniszczenia), a mianowicie

$$f^{p/d} = f^{p/d} \left(\sigma_{ij}; \Pi_i^{p/d}, \Pi_{ij}^{p/d}, \Pi_{ijkl}^{p/d}, \Pi_{ijklmn}^{p/d}, \dots \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

Zależne od temperatury stałe materiałowe, opisujące właściwości plastyczne albo uszkodzeniowe, występują jako skalary $\Pi_i^{p/d}$ (materiał izotropowy) lub jako *tensory strukturalne* $\Pi_{ij}^{p/d}$, $\Pi_{ijkl}^{p/d}$, $\Pi_{ijklmn}^{p/d}$ parzystego rzędu (materiał anizotropowy). Symbol $f(\)$ oznacza natomiast dowolną skalarną funkcję tensorowych argumentów jako *niezmienników wspólnych* tensora naprężenia σ_{ij} i tensorów strukturalnej anizotropii, np. $\Pi_{ij}\sigma_{ij}$, $\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$ i $\Pi_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}$ (por. np. Hill [64], Źyczkowski [165], Betten [7], i inni). Równania te określają dwie hiperpowierzchnie w 9-wymiarowej przestrzeni naprężenia, która z uwagi na symetrię tensora naprężenia $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ redukuje się do przestrzeni 6-wymiarowej. Założenie symetrii tensora naprężenia jest uzasadnione dla więk-

szości materiałów inżynierskich. W ogólnym przypadku materiałów anizotropowych inicjacja plastyczności bądź uszkodzenia jest zatem scharakteryzowana nie tylko przez pojedyncze stałe materiałowe k_i (jak w przypadku izotropii), lecz także przez *tensory strukturalne anizotropii* plastycznej lub uszkodzenia (zniszczenia) różnych rzędów $\Pi_{ij}\sigma_{ij}$, $\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$, $\Pi_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}$, \dots , odmienne dla inicjacji plastyczności (p) bądź uszkodzenia (d). W praktycznych zastosowaniach ogólne równania powierzchni granicznych (7.1) są wyrażone przy użyciu tylko trzech tensorów anizotropii strukturalnej (lub materiałowej) parzystych rzędów Π_{ij} (rzędu drugiego), Π_{ijkl} (rzędu czwartego) i Π_{ijklmn} (rzędu szóstego). Są one wystarczające, aby opisać wyróżnione transformacje powierzchni granicznych w dalszym procesie wzmocnienia: izotropową zmianę rozmiaru powierzchni, kinematyczną translację i obrót oraz zmianę krzywizny (dystorsję), por. Kowalski i inni [80].

Wyróżnienie dwóch klas zjawisk dyssypatywnych odpowiedzialnych za ograniczenie czysto sprężystego zachowania materiałów: inicjacji plastycznego płynięcia i/lub inicjacji rozwoju uszkodzeń (zniszczenia), nawiązuje do dwóch podstawowych rodzajów zachowania materiału po osiągnięciu stanu granicznego, mianowicie zachowania ciągłego bądź kruchego. Inicjacja plastycznego płynięcia jest charakterystyczna dla większości materiałów metalicznych (metale, stopy metali, materiały intermetaliczne), w których naprężenie hydrostatyczne nie ma istotnego wpływu na inicjację i rozwój odkształceń plastycznych. Równocześnie wpływ różnej wytrzymałości materiału w próbie rozciągania k_t lub próbie ściskania k_c jest zazwyczaj pomijalnie mały $k_t \cong k_c$, tak iż powierzchnie graniczne plastyczności są traktowane jako cylindryczne i wypukłe. Z kolei inicjacja uszkodzenia (zniszczenia) jest typowa dla większości materiałów kruchych (beton, materiały ceramiczne, skały itp.), dla których wpływ naprężenia hydrostatycznego jest istotny w procesie inicjacji uszkodzenia (zniszczenia). Jednocześnie rozróżnienie wytrzymałości w próbie rozciągania lub ściskania nie może być pominięte $k_t \neq k_c$, natomiast powierzchnia inicjacji uszkodzenia przestaje być na ogół powierzchnią cylindryczną, pozostając jednak powierzchnią wypukłą.

W szczególnym przypadku *materiałów izotropowych* równania powierzchni granicznych redukują się do postaci

$$f^{p/d} = f^{p/d} \left(\sigma_{ij}; \Pi_i^{p/d}(T) \right) = 0 \quad (7.2)$$

gdzie $\Pi_i^p(T)$ lub $\Pi_i^d(T)$ są skalarnymi stałymi materiałowymi (zależnymi od temperatury). Podkreślny, że w miejsce strukturalnych tensorów modułów plastycznych bądź uszkodzenia Π_{ij} , Π_{ijkl} , Π_{ijklmn} , \dots pojawiają się tutaj wyłą-

cznie pojedyncze stałe materiałowe Π_i , utożsamiane odpowiednio z granicą plastyczności k_i^p (kryterium uplastycznienia), bądź progiem inicjacji uszkodzeń k_i^d (kryterium zniszczenia). W ogólności jednak wartości naprężeń granicznych, odpowiadające inicjacji odnośnych procesów dyssypatywnych plastycznego płynięcia bądź powstawania mikrouszkodzeń, mogą być różne dla różnych procesów: jednoosiowego rozciągania, jednoosiowego ściskania bądź prostego ścinania $k_t \neq k_c \neq k_s$.

W obu przypadkach materiałów izotropowych bądź anizotropowych postać równań powierzchni granicznej zależy od przyjętego układu osi. Jednakże dla *powierzchni granicznej anizotropowej* (7.1), przy zmianie układu osi, transformacji podlegają zarówno naprężenia, jak i parametry materiałowe o tensorowym charakterze (zależne od wyboru kierunku). Natomiast w przypadku *powierzchni granicznej izotropowej* (7.2), pojedyncze, skalarne stałe materiałowe $A_i^p(T)$ lub $A_i^d(T)$, decydujące o uplastycznieniu lub zniszczeniu, są niezależne od wyboru kierunku, a zatem pozostają niezmiennicze. To znaczy, że *kryteria graniczne, uplastycznienia bądź zniszczenia* dla materiału izotropowego są *inwariantne*, czyli niezależne od wyboru układu osi. Można zatem wybrać szczególny układ współrzędnych, w którym tensor naprężenia przyjmuje postać diagonalną. Wówczas równania (7.2) przyjmują prostszą postać zależną, np. od naprężeń głównych

$$f^{p/d} = f^{p/d}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \Pi_i^{p/d}(T)) = 0 \quad (7.3)$$

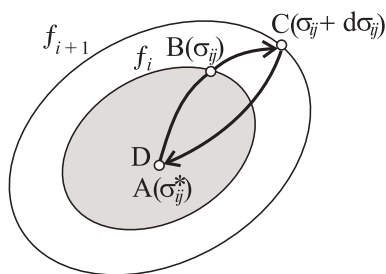
Przejdzie od postaci (7.2) do postaci (7.3) wiąże się zatem z redukcją wymiaru przestrzeni z 6 (przestrzeń naprężeń) do 3 (przestrzeń niezmienników). Ponieważ naprężenia główne wyrażają się jednoznacznie przez trzy niezmienniki tensora naprężenia (porównaj podrozdział 4.3), równania (7.3) można również zapisać w równoważnych postaciach

$$f^{p/d} = f^{p/d}(J_{1\sigma}, J_{2\sigma}, J_{3\sigma}; \Pi_i^{p/d}(T)) = 0 \quad (7.4)$$

7.2. Postulat Druckera materiałów ciągłych: wnioski odnośnie do wypukłości powierzchni granicznej plastyczności i reguły normalności

Przy budowie równań określających kształt pierwotnej powierzchni granicznej oraz jej dalszej przebudowy, w wyniku następnego procesu rozwoju odkształceń poza zakres sprężysty, dogodnie jest ograniczenie dalszych rozważań do takich procesów, które prowadzą w konsekwencji do *wypukłości kolejnych powierzchni granicznych* oraz *prawa płynięcia stowarzyszonego* z tymi powierzchniami.

Rozważmy w tym celu, dowolny cykl naprężeniowy ABCD, polegający na: sprężystym obciążeniu AB od stanu początkowego wewnątrz aktualnej powierzchni granicznej (σ_{ij}^*), do punktu na tej powierzchni (σ_{ij}), kolejnym obciążeniu BC związanym z elementarnym przyrostem naprężenia $d\sigma_{ij}$ i przebudową powierzchni granicznej $f_i \rightarrow f_{i+1}$, oraz ostatecznym odciążeniem CD do pierwotnego stanu naprężenia (σ_{ij}^*) (rys. 7.1). Zauważmy jednak, że opisany proces



Rysunek 7.1. Ilustracja zamkniętego quasi-cyklu naprężeniowego

oznacza zamknięty cykl jedynie w przestrzeni naprężenia $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij}^*$, jednak końcowemu stanowi D odpowiada zmieniony stan odkształcenia $\varepsilon_{ij}^D = \varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$, gdzie $d\varepsilon_{ij}^p$ oznacza trwałą, nieodwracalną zmianę odkształcenia (najczęściej plastycznego), związaną z przebudową powierzchni granicznej (kolejnej powierzchni plastyczności).

Dla materiałów wykazujących wzmocnienie (por. rys. 11.5a), zgodnie z *postulatem Druckera*, praca wykonana na (*quasi*) *cyklu naprężeniowym* ABCD musi być nieujemna

$$\mathcal{W} = \oint_{ABCD} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad (7.5)$$

Innymi słowy, gdyby powyższy warunek nie był spełniony, stan następny mógłby być osiągnięty w sposób spontaniczny, czemu towarzyszyłaby dyssypa-

cja energii. Dokonując dalej, dla małych odkształceń, addytywnego rozkładu przyrostu odkształcenia na część odwracalną i nieodwracalną $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$, otrzymujemy

$$\mathcal{W} = \oint_{ABCD} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^e + \oint_{ABCD} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \quad (7.6)$$

Pierwsza z powyższych całek wynosi zero, bowiem przyjmując prawo Hooke'a $\varepsilon_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}$, $E_{ijkl}^{-1} = \text{const}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) E_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} &= E_{ijkl}^{-1} \oint_{ABCD} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\sigma_{kl} \\ &= E_{ijkl}^{-1} \left(\oint_{ABCD} \sigma_{ij} d\sigma_{kl} - \sigma_{ij}^* \oint_{ABCD} d\sigma_{kl} \right) \\ &= E_{ijkl}^{-1} \left(\frac{\sigma_{ij} \sigma_{kl}}{2} - \sigma_{ij}^* \sigma_{kl} \right) \Big|_{\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij}^A}^{\sigma_{ij}^B} = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Zatem, pamiętając że $\varepsilon_{ij}^p \neq 0$ tylko na odcinku obciążenia BC, postulat Druckera (7.5) sprowadza się ostatecznie do postaci wyrażonej przez całkę zwykłą (a nie okrężną)

$$\mathcal{W}^p = \int (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (7.8)$$

która dotyczy nieujemności pracy zużytej na przebudowę powierzchni $f_i \rightarrow f_{i+1}$. Rozwijając wyrażenie całkowe dla \mathcal{W}^p w szereg Taylora wokół punktu początkowego $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^p &= \mathcal{W}^p(\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*) + \frac{d\mathcal{W}^p(\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*)}{1!} + \frac{d^2\mathcal{W}^p(\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*)}{2!} + \dots \\ &= 0 + (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p + \frac{1}{2} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p + \dots \geq 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Z warunku stateczności Druckera (7.8) wynika zatem nierówność

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p + \frac{1}{2} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p + \dots \geq 0 \quad (7.10)$$

która ma obowiązywać dla dowolnego stanu początkowego σ_{ij}^* (wewnątrz lub na powierzchni). Zatem warunek (7.10), wyrażający *stateczność materiału*

sprężysto/plastycznego w sensie Druckera, sprowadza się w końcu do dwóch nierówności

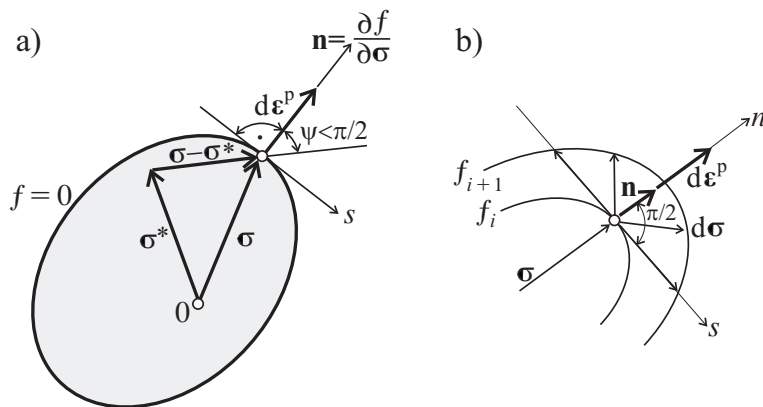
$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)d\varepsilon_{ij}^P \geq 0 \quad \text{i} \quad d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^P \geq 0 \quad (7.11)$$

Powyższe nierówności muszą być spełnione równocześnie, co matematycznie odpowiada nieujemności pierwszej i drugiej różniczki energii \mathcal{W}^P w otoczeniu punktu początkowego $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$.

Warunki te mają również interpretację geometryczną odnośnie do kształtu powierzchni plastyczności, *postulat wypukłości* (ang. *convexity rule*) oraz odnośnie do kierunku wektora przyrostu odkształceń plastycznych, *postulat normalności* (ang. *normality rule*). Prześledzimy je bardziej szczegółowo.

Pierwsza z nierówności (7.11) może być interpretowana jako nieujemna wartość iloczynu skalarnego dwóch wektorów $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)$ oraz $d\varepsilon^P$, a zatem kąt ψ , pod jakim są nachylone te wektory w przestrzeni naprężeń σ_{ij} , musi być kątem ostrym ewentualnie prostym ($\psi \leq \pi/2$) (rys. 7.2a). Ta relacja pozostaje słuszna dla każdego wektora $\boldsymbol{\sigma}^*$, którego koniec leży bądź to wewnątrz obszaru, bądź na powierzchni plastyczności. Zatem warunek ten jest równoważny zapewnieniu wypukłości powierzchni plastyczności $f = 0$. Jest to *postulat wypukłości powierzchni granicznej plastyczności f* .

Druga z nierówności (7.11) przedstawia iloczyn skalarny wektorów $d\boldsymbol{\sigma}$ i $d\varepsilon^P$, który musi być również nieujemny dla dowolnego $d\boldsymbol{\sigma}$ (rys. 7.2b). Ponieważ wszystkie możliwe wektory $d\boldsymbol{\sigma}$ odpowiadające przejściu z powierzchni f_i na powierzchnię f_{i+1} (rys. 7.2) są zawarte w półprzestrzni stycznej do i -tej powierzchni, zatem jedynym możliwym wektorem $d\varepsilon^P$, który zawsze zapewnia



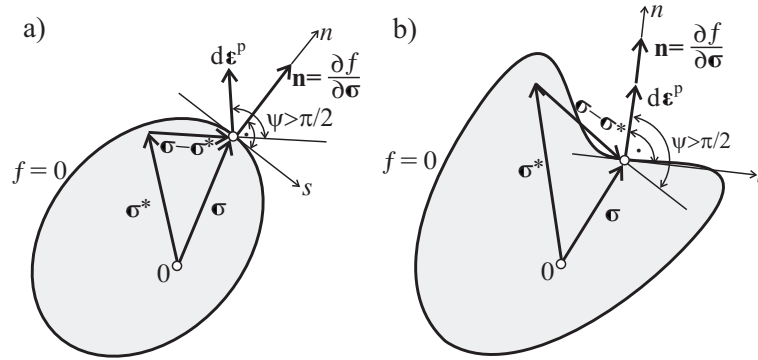
Rysunek 7.2. Graficzna interpretacja postulatów: a) wypukłości, b) normalności

spełnienie warunku (7.11), jest wektor normalny do powierzchni f , $\mathbf{n} = \mathbf{n}_f$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \lambda \mathbf{n} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \mathbf{grad} f \quad (7.12)$$

λ jest skalarnym mnożnikiem, którego wielkość zapewnia przynależność nowego punktu na trajektorii naprężenia do nowej powierzchni plastyczności. Jest to *postulat normalności* wektora przyrostu odkształceń plastycznych do powierzchni granicznej plastyczności f . Warunek (7.12) określa zatem kierunek przyrostu odkształcenia plastycznego $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ na podstawie gradientu $\mathbf{n} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{grad} f$, normalnego do powierzchni plastyczności. Jest to równoznaczne z przyjęciem tzw. *prawa płynięcia plastycznego stowarzyszonego* z powierzchnią plastyczności.

Postulat stateczności w sensie Druckera (7.11) żąda zapewnienia jednocześnie wypukłości i normalności. W przypadku gdy nie jest zachowana normal-



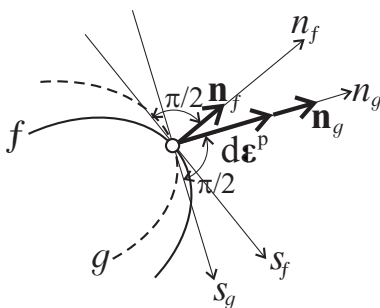
Rysunek 7.3. Ilustracja konsekwencji odstępstw od postulatu stateczności Druckera: a) wypukłość powierzchni f , lecz odstępstwo od normalności $\boldsymbol{\varepsilon}^P$, b) wklęsłość powierzchni f i normalność $\boldsymbol{\varepsilon}^P$

ność, wówczas można tak dobrać $\boldsymbol{\sigma}^* \neq \boldsymbol{\sigma}$, że kąt między wektorami $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)$ i $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ jest większy od $\pi/2$ i, w konsekwencji, iloczyn skalarny tych wektorów jest ujemny, czyli postulat Druckera nie jest spełniony (rys. 7.3a). Podobnie gdy nie jest zachowana wypukłość powierzchni plastyczności, wówczas można dobrać $\boldsymbol{\sigma}^*$ takie, by iloczyn skalarny $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)d\boldsymbol{\varepsilon}^P < 0$ (rys. 7.3c). Oba powyższe kontrprzykłady (rys. 7.3a i b) stanowią zarazem dowód nie wprost, w którym z naruszenia choćby jednego z warunków, normalności bądź wypukłości, wynika niespełnienie postulatu Druckera.

Podejście oparte na stowarzyszonym prawie płynięcia plastycznego jest uzasadnione dla większości metali, natomiast nie musi obowiązywać w materiałach niemetalicznych (grunty, skały, niektóre kompozyty). W takich przypadkach mamy do czynienia z tzw. *niestowarzyszonym prawem płynięcia*. Wówczas kierunek wektora płynięcia plastycznego może być wyznaczany na podstawie gradientu innej powierzchni g , która nie pokrywa się z powierzchnią plastyczności f , $g(\boldsymbol{\sigma}) \neq f(\boldsymbol{\sigma})$: $\mathbf{n} = \mathbf{n}_g \neq \mathbf{n}_f$ (rys. 7.4). W konsekwencji, w przypadku niestowarzyszonego prawa płynięcia, w miejsce (7.12) otrzymujemy

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \mathbf{grad} g \quad (7.13)$$

Dla takich materiałów nie ma jednak zastosowania postulat stateczności materiałowej Druckera.



Rysunek 7.4. Graficzna interpretacja niestowarzyszonego prawa płynięcia

7.3. Postulat stateczności materiałów sprężysto-kruchych: kryterium zniszczenia w sensie dodatniej określoności macierzy sztywności

Zgodnie z *postulatem Druckera* (patrz podrozdział 7.2), *materiał sprężysto-plastyczny* jest stateczny wtedy, gdy wzrostowi deformacji niesprężystej towarzyszy przyrost pracy, dla dowolnie określonego zamkniętego cyklu naprężeniowego. Jednak, dla *materiału liniowo sprężystego* bądź *nieliniowo sprężystego* wszystkie deformacje są odwracalne, a w konsekwencji warunek stateczności jest spełniony, gdy przyrost pracy na zamkniętym cyklu obciążenia i odciążenia, jest równy zero

$$\oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = 0 \quad (7.14)$$

Ponieważ funkcja podcałkowa ma znaczenie różniczki zupełnej, zatem nasuwa się naturalny wniosek, że energia sprężystości na jednostkę objętości \mathcal{W} , która reprezentuje powierzchnię w przestrzeni odkształceń $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$, służy jako *potencjał naprężenia* σ_{ij}

$$\mathcal{W}(\varepsilon_{ij}) = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad \text{oraz} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (7.15)$$

Wprowadzając dalej równanie konstytutywne w formie $\sigma_{ij} = \tan E_{ijkl}(\varepsilon_{mn})\varepsilon_{kl}$, gdzie $\tan E_{ijkl}$ jest *stycznym tensorem sztywności*, zależnym od odkształceń ε_{mn} , otrzymujemy

$$\mathcal{W}(\varepsilon_{ij}) = \int \tan E_{ijkl}(\varepsilon_{mn})\varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} \quad (7.16)$$

W następnym kroku, stosując twierdzenie w wartości średniej dla całki, możemy wyrazić \mathcal{W} przez wprowadzenie *tensora sztywności sieciowej* $\sec E_{ijkl}$

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sec E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (7.17)$$

Dalej, wykonując różniczkowanie energii \mathcal{W} względem ε_{ij} zgodnie z (7.15), dochodzimy do *równania konstytutywnego materiału nieliniowo sprężystego* w postaci przyrostowej, jawnej

$$d\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \sec E_{ijmn}}{\partial \varepsilon_{mn}} \varepsilon_{kl} + \sec E_{ijkl} \right) d\varepsilon_{kl} \quad (7.18)$$

w którym wyrażenie w nawiasie definiuje *styczny tensor sztywności*, określający materiał

$$\tan E_{ijkl} = \left(\frac{\partial \sec E_{ijmn}}{\partial \varepsilon_{mn}} \varepsilon_{kl} + \sec E_{ijkl} \right) \quad (7.19)$$

Natomiast równanie przyrostowe (7.18) przyjmuje ostateczną postać

$$d\sigma_{ij} = \tan E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (7.20)$$

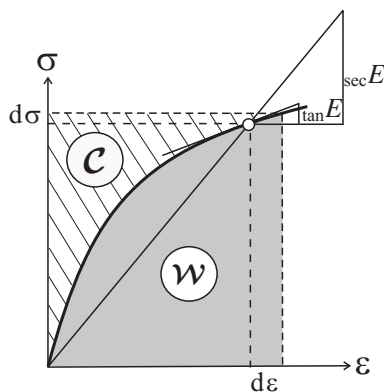
Zwróćmy uwagę, że *styczna macierz sztywności* $[\tan \mathbb{E}]_{mn}$ będąca macierzą charakterystyczną stycznego tensora sztywności (7.19), może być zapisana w równoważnej postaci przez macierz drugich pochodnych energii odkształcenia \mathcal{W} ,

względem składowych odkształcenia

$$[\tan \mathbb{E}]_{mn} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{xx}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{xx} \partial \varepsilon_{yy}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{xx} \partial \varepsilon_{zz}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{xx} \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{xx} \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{xx} \partial \gamma_{zx}} \\ & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{yy}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{yy} \partial \varepsilon_{zz}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{yy} \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{yy} \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{yy} \partial \gamma_{zx}} \\ & & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{zz}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{zz} \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{zz} \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{zz} \partial \gamma_{zx}} \\ & & & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_{xy}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{zx}} \\ & & & & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_{yz}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{zx}} \\ & & & & & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_{zx}^2} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

W podobny sposób dowodzi się, że energia dopełniająca na jednostkę objętości \mathcal{C} , która reprezentuje powierzchnię w przestrzeni naprężeń $\mathcal{C}(\sigma_{ij})$, służy jako potencjał odkształceń ε_{ij} (rys. 7.5)

$$\mathcal{C}(\sigma_{ij}) = \int \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7.22)$$



Rysunek 7.5. Ilustracja energii odkształcenia \mathcal{W} oraz energii dopełniającej \mathcal{C} w przypadku materiału nieliniowo sprężystego

Zauważmy jednak, że w ogólnym przypadku materiału niesprężystego, energia odkształceń \mathcal{W} może zależeć nie tylko od aktualnego stanu odkształceń

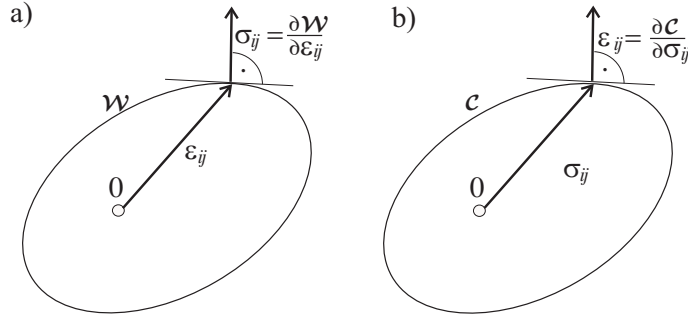
$\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$, lecz również od historii obciążenia $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij}, f(\varepsilon_{ij}))$, np. w wyniku nieodwracalnych zmian mikrostruktury wskutek płynięcia plastycznego, czy rozwoju mikrouszkodzeń. Podobnie w ogólnym przypadku energia dopełniająca \mathcal{C} może zależeć nie tylko od aktualnego stanu naprężenia $\mathcal{C}(\sigma_{ij})$, lecz również od historii obciążenia $\mathcal{C}(\sigma_{ij}, f(\sigma_{ij}))$. Oznacza to wówczas, że \mathcal{W} i \mathcal{C} nie mogą być wprost wybrane jako potencjały.

Zakładając jednak konsekwentnie, niezależność każdej z postaci tych energii od historii obciążenia, $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$ lub $\mathcal{C}(\sigma_{ij})$, pochodne skalarnych funkcji $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$ lub $\mathcal{C}(\sigma_{ij})$, opisujących hiperpowierzchnie w sześciowymiarowych przestrzeniach ε_{ij} lub σ_{ij} , względem swych argumentów odkształceń $\partial\mathcal{W}/\partial\varepsilon_{ij}$, lub naprężeń $\partial\mathcal{C}/\partial\sigma_{ij}$, mogą być interpretowane jako gradienty odpowiednich powierzchni, będących wektorami normalnymi i skierowanymi na zewnątrz tych hiperpowierzchni (rys. 7.6).

Przyrost (prędkość) naprężenia $\dot{\sigma}_{ij}$, por. (7.20) może być zatem wyrażony przez przyrost odkształcenia $\dot{\varepsilon}_{ij}$ w następujący sposób

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} = \tan E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (7.23)$$

W celu określenia kryterium utraty stateczności materiału sprężysto-kruchego

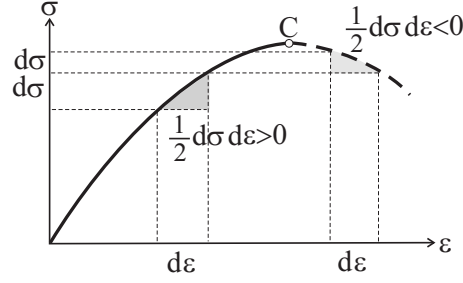


Rysunek 7.6. Ilustracja normalności: a) wektora naprężenia σ_{ij} do powierzchni stalej energii odkształcenia $\mathcal{W} = \text{const}$, b) wektora odkształcenia ε_{ij} do powierzchni stalej energii dopełniającej $\mathcal{C} = \text{const}$

można posłużyć się analogią do kryterium Druckera (rys. 7.7)

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} > 0 \quad (7.24)$$

Należy jednak podkreślić, że w (7.24), przyrost pracy jest obliczany na przyroście odkształcenia całkowitego $\dot{\varepsilon}_{ij}$, w przeciwieństwie do oryginalnego postulat Druckera (7.11), w którym przyrost pracy plastycznej jest obliczany na



Rysunek 7.7. Ilustracja kryterium utraty stateczności materiału sprężysto-krucho

przyroście odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}_{ij}^p$. Podstawienie $\dot{\sigma}_{ij}$, określonego zależnością (7.23), do warunku stateczności (7.24) prowadzi do nierówności

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl} > 0 \quad (7.25)$$

lub równoważnie

$$\tan E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl} > 0 \quad (7.26)$$

Nierówność (7.26) odpowiada kryterium dodatniej określoności formy kwadratowej, przy dowolnych wartościach przyrostów odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$ i $\dot{\epsilon}_{kl}$. Stosując notację Voigta, styczny tensor sztywności $\tan E_{ijkl}$ można przedstawić w postaci następującej symetrycznej stycznej macierzy sztywności, o wymiarze 6×6

$$[\tan \mathbb{E}]_{mn} = \begin{bmatrix} \tan E_{11} & \tan E_{12} & \tan E_{13} & \tan E_{14} & \tan E_{15} & \tan E_{16} \\ & \tan E_{22} & \tan E_{23} & \tan E_{24} & \tan E_{25} & \tan E_{26} \\ & & \tan E_{33} & \tan E_{34} & \tan E_{35} & \tan E_{36} \\ & & & \tan E_{44} & \tan E_{45} & \tan E_{46} \\ & & & & \tan E_{55} & \tan E_{56} \\ & & & & & \tan E_{66} \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Podobnie, przyrost odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$, wyrażony przez przyrost naprężenia $\dot{\sigma}_{ij}$, jako

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \dot{\sigma}_j = \tan E_{ij}^{-1} \dot{\sigma}_j \quad (7.28)$$

podstawiony do warunku stateczności (7.24), prowadzi do nierówności

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \dot{\sigma}_i \dot{\sigma}_j > 0 \quad (7.29)$$

Ze związków (7.25) i (7.29) wynika, że powierzchnie stałej energii odkształcenia $\mathcal{W} = \text{const}$ lub stałej energii dopełniającej $\mathcal{C} = \text{const}$, określone odpowiednio w przestrzeni odkształceń $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$, lub naprężeń $\mathcal{C}(\sigma_{ij})$, są wypukłe. Jest to tzw. *postulat wypukłości powierzchni stałej energii odkształcenia* $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$, bądź *energii dopełniającej* $\mathcal{C}(\sigma_{ij})$, który można wykazać na drodze poniższego rozumowania.

Rozważmy dwa stany sprężystego odkształcenia (niekoniecznie liniowego) $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ oraz $\varepsilon_{ij}^{(2)}$. Każdemu z tych stanów odkształcenia odpowiadają różne wartości energii odkształcenia $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij}^{(1)})$ oraz $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij}^{(2)})$. Rozwijając różnicę energii odkształcenia odpowiadającą obu stanom $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij}^{(1)}) - \mathcal{W}(\varepsilon_{ij}^{(2)})$ w szereg Taylora w otoczeniu stanu $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\varepsilon_{ij}^{(2)}) - \mathcal{W}(\varepsilon_{ij}^{(1)}) &= \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{\varepsilon_{ij}^{(1)}} (\varepsilon_{ij}^{(2)} - \varepsilon_{ij}^{(1)}) \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right|_{\varepsilon_{ij}^{(1)}} (\varepsilon_{ij}^{(2)} - \varepsilon_{ij}^{(1)}) (\varepsilon_{kl}^{(2)} - \varepsilon_{kl}^{(1)}) + \dots \end{aligned} \quad (7.30)$$

Ograniczając dalsze rozważania wyłącznie do dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia oraz uwzględniając dodatnią określoność drugiego z nich na mocy (7.25), dochodzimy do nierówności

$$\mathcal{W}(\varepsilon_{ij}^{(2)}) - \mathcal{W}(\varepsilon_{ij}^{(1)}) > \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{\varepsilon_{ij}^{(1)}} (\varepsilon_{ij}^{(2)} - \varepsilon_{ij}^{(1)}) \quad (7.31)$$

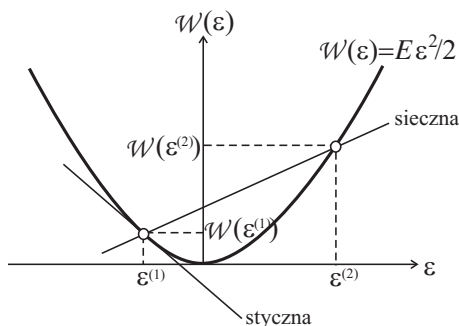
lub równoważnie

$$\frac{\mathcal{W}(\varepsilon_{ij}^{(2)}) - \mathcal{W}(\varepsilon_{ij}^{(1)})}{(\varepsilon_{ij}^{(2)} - \varepsilon_{ij}^{(1)})} > \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{\varepsilon_{ij}^{(1)}} \quad (7.32)$$

Strony powyższej nierówności można zinterpretować odpowiednio: lewa strona jest hiperpłaszczyzną sieczną przechodzącą przez punkty $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ oraz $\varepsilon_{ij}^{(2)}$, natomiast prawa strona przedstawia hiperpłaszczyznę styczną do powierzchni $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij}) = \text{const}$ w punkcie $\varepsilon_{ij}^{(1)}$. Przechodząc dla uproszczenia interpretacji do przypadku energii jako funkcji pojedynczej zmiennej $\mathcal{W}(\varepsilon)$, nierówność (7.32) można zapisać w postaci

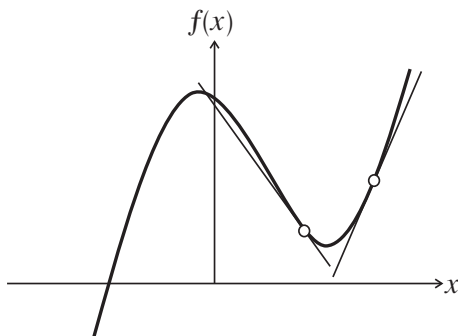
$$\frac{\mathcal{W}(\varepsilon^{(2)}) - \mathcal{W}(\varepsilon^{(1)})}{(\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)})} > \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon^{(1)}} \quad (7.33)$$

Zilustrowano to na rys. 7.8, gdzie widać, że dla energii $\mathcal{W}(\varepsilon)$ jako kwadratowej funkcji odkształcenia ε nachylenie siecznej jest większe od nachylenia stycznej określonej w punkcie początkowym. Odpowiada to przypadkowi, kiedy



Rysunek 7.8. Ilustracja wypukłości funkcji energii odkształcenia $\mathcal{W}(\varepsilon)$ w przypadku jej zależności od tylko jednej składowej ε

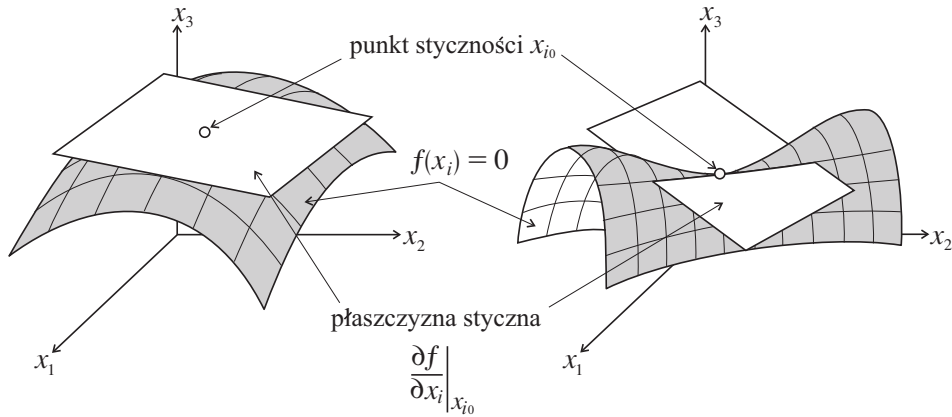
styczna „ślizga” się zawsze po jednej stronie „zewnętrznej” funkcji $\mathcal{W}(\varepsilon)$ nigdzie jej nie przecinając, w przeciwieństwie do np. funkcji trzeciego stopnia, gdzie powyższy warunek nie jest spełniony rys. 7.9.



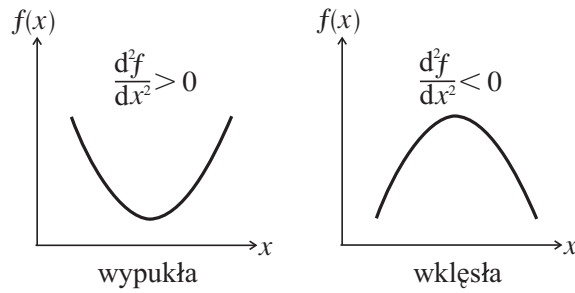
Rysunek 7.9. Ilustracja braku wypukłości funkcji trzeciego stopnia

Biorąc pod uwagę funkcję skalarną dwóch zmiennych, oba przypadki można zilustrować na rys. 7.10. Zauważmy również, że możliwe jest zdefiniowanie wypukłości funkcji $f(x)$ przez dodatnią określoność drugiej pochodnej, rys. 7.11.

Uogólniając powyższe stwierdzenie na funkcję wielu zmiennych, np. energię odkształcenia $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$, powyższy warunek wypukłości sprowadza się do dodatniej określoności Hessianu \mathcal{H}_{ij} , będącego macierzą (6×6) współczynników



Rysunek 7.10. Ilustracja warunku wypukłości lub wklęsłości powierzchni



Rysunek 7.11. Ilustracja warunku wypukłości bądź wklęsłości funkcji zależnie od znaku drugiej pochodnej

tensora 4-rzędu $\mathcal{H}_{ijkl} = \partial^2 \mathcal{W} / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}$ (7.21)

$$\mathcal{H}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_3} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_1 \partial \gamma_4} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_1 \partial \gamma_5} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_1 \partial \gamma_6} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_3} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_2 \partial \gamma_4} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_2 \partial \gamma_5} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_2 \partial \gamma_6} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_3^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_3 \partial \gamma_4} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_3 \partial \gamma_5} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_3 \partial \gamma_6} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_4^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_4 \partial \gamma_5} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_4 \partial \gamma_6} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_5^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_5 \partial \gamma_6} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \gamma_6^2} \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

co dowodzi wypukłości powierzchni $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$. W podobny sposób dowodzona jest wypukłość powierzchni $\mathcal{C}(\sigma_{ij})$.

Podsumowując, z *postulatu stateczności materiału sprężysto-kruchego* wynikają następujące własności deformacji sprężystej:

1. Energia odkształcenia $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$ oraz energia uzupełniająca $\mathcal{C}(\sigma_{ij})$ istnieją oraz są dodatnio określone.
2. Naprężenie σ_{ij} oraz odkształcenie ε_{ij} są odpowiednio normalne do powierzchni $\mathcal{W} = \text{const}$ oraz $\mathcal{C} = \text{const}$.
3. Powierzchnie $\mathcal{W} = \text{const}$ oraz $\mathcal{C} = \text{const}$ są wypukłe, odpowiednio w przestrzeni ε_{ij} oraz σ_{ij} .
4. Dodatnia określoność stycznych macierzy sztywności $[\text{tan}\mathbb{E}]$ oraz podatności $[\text{tan}\mathbb{E}^{-1}]$ zapewnia jednoznaczność odwracalność związków konstytutywnych, tzn. dla każdej zależności konstytutywnej typu $\sigma_{ij} = \mathcal{F}(\varepsilon_{ij})$ opartej na funkcji \mathcal{W} zawsze istnieje jej jednoznaczna odwrotność $\varepsilon_{ij} = \mathcal{F}^{-1}(\sigma_{ij})$.

7.4. Porównanie postulatu stateczności materiału sprężysto-plastycznego Druckera z kryterium dodatniej określoności stycznej macierzy sztywności materiału sprężysto-kruchego

Zaprezentowane w podrozdziałach 7.2 oraz 7.3 różne wersje *postulatu stateczności*, odpowiednio dla *materiału sprężysto-plastycznego* bądź *sprężysto-kruchego*, łączy wspólne wyprowadzenie przez analizę elementarnej pracy na zamkniętym cyklu naprężeniowym. W obu przypadkach szczegółowa analiza wyrażenia na pracę prowadzi do sformułowania zasady normalności oraz wypukłości odpowiedniej powierzchni. Jednak na tym podobieństwa obu postulatów stateczności kończą się.

Po stronie różnic pomiędzy nimi należy natomiast zapisać fakt, iż *postulat stateczności Druckera*, w oryginalnej formie, ma sens jedynie w odniesieniu do *deformacji sprężysto-plastycznej* i, w sensie matematycznym, jest słabszym ograniczeniem niż analogiczny *warunek stateczności* dla *materiału sprężysto-kruchego*. W istocie żądanie nieujemności elementarnej pracy odkształceń

plastycznych zgodnie z postulatem Druckera dla materiału sprężysto-plastycznego

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^P \geq 0 \quad (7.35)$$

może zostać spełnione nawet w skrajnym przypadku, gdy choć tylko jeden iloczyn, np. $d\sigma_x d\varepsilon_x^P$, jest dodatni, lecz dominujący w stosunku do pozostałych

$$d\sigma_x d\varepsilon_x^P - d\sigma_y d\varepsilon_y^P - d\sigma_z d\varepsilon_z^P - d\tau_{zx} d\gamma_{zx}^P - d\tau_{xy} d\gamma_{xy}^P - d\tau_{yz} d\gamma_{yz}^P \geq 0 \quad (7.36)$$

Natomiast *warunek stateczności* dla *materiału sprężysto-kruchego* jest silniejszym ograniczeniem, gdyż żąda zapewnienia dodatniej określoności formy kwadratowej (7.25), która w notacji Voigta przyjmuje postać

$$[\tan \mathbb{E}]_{mn} \dot{\varepsilon}_m \dot{\varepsilon}_n > 0 \quad (7.37)$$

Zgodnie z *kryterium Sylwestera* warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby forma kwadratowa (7.38) była dodatnio określona dla dowolnych wartości argumentów $\dot{\varepsilon}_n$ i $\dot{\varepsilon}_m$ jest

$$\det[\tan \mathbb{E}]_k > 0 \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (7.38)$$

gdzie $[\tan \mathbb{E}]_k$ są *minorami* (podmacierzami o wymiarze $k \times k$) *stycznej macierzy sztywności* $[\tan \mathbb{E}]$, natomiast symbol $\det[]$ oznacza wyznacznik. Zatem warunek (7.38), w postaci rozwiniętej, przedstawia układ 6 nierówności (dla podwyznaczyków), które łącznie zapewniają stateczność materiału sprężysto-kruchego

$$\begin{aligned} & \tan E_{11} > 0 \\ & \det \begin{bmatrix} \tan E_{11} & \tan E_{12} \\ \tan E_{12} & \tan E_{22} \end{bmatrix} > 0 \\ & \det \begin{bmatrix} \tan E_{11} & \tan E_{12} & \tan E_{13} \\ \tan E_{12} & \tan E_{22} & \tan E_{23} \\ \tan E_{13} & \tan E_{23} & \tan E_{33} \end{bmatrix} > 0 \\ & \vdots \\ & \det \begin{bmatrix} \tan E_{11} & \tan E_{12} & \tan E_{13} & \tan E_{14} & \tan E_{15} & \tan E_{16} \\ & \tan E_{22} & \tan E_{23} & \tan E_{24} & \tan E_{25} & \tan E_{26} \\ & & \tan E_{33} & \tan E_{34} & \tan E_{35} & \tan E_{36} \\ & & & \tan E_{44} & \tan E_{45} & \tan E_{46} \\ & & & & \tan E_{55} & \tan E_{56} \\ & & & & & \tan E_{66} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (7.39)$$

Na koniec należy zauważyć, że istotna różnica pomiędzy warunkiem *stateczności Druckera* (7.35), sformułowanym dla *materiału sprężysto-plastycznego* oraz warunkiem *stateczności* dla *materiału sprężysto-kruchego*, opartym na *kryterium dodatniej określoności stycznej macierzy sztywności* (7.38) zanika, gdy w pierwszym z nich (postulat Druckera) wprowadzi się prawo konstytutywne przyrostowe wiążące przyrost odkształcenia plastycznego z przyrostem naprężenia, przy pomocy tzw. *stycznej macierzy sprężysto-plastyczności* (7.12)

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = {}^{\text{ep}}E_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} \quad (7.40)$$

Po wprowadzeniu (7.40) do kryterium nieujemności pracy plastycznej (7.35) otrzymujemy *uogólniony warunek Druckera* oparty na kryterium dodatniej półokreśloności¹ sprężysto-plastycznej stycznej macierzy sztywności

$${}^{\text{ep}}E_{ijkl}^{-1} d\sigma_{ij} d\sigma_{kl} \geq 0 \quad (7.41)$$

Tak sformułowany *uogólniony postulat stateczności Druckera* (7.40) *materiału sprężysto-plastycznego* jest jednak silniejszy niż tradycyjnie rozumiany postulat Druckera (7.35) i sprowadza się do postaci analogicznej, jak (7.39), z formalnym zastąpieniem podwyznaczników stycznej macierzy sprężystości ${}^{\text{tan}}\mathbb{E}$, podwyznacznikami stycznej macierzy sprężysto-plastyczności ${}^{\text{ep}}\mathbb{E}$ (por. np. Kuna-Ciskał i Skrzypek [84]).

$$\begin{aligned} & {}^{\text{ep}}E_{11} > 0 \\ \det \begin{bmatrix} {}^{\text{ep}}E_{11} & {}^{\text{ep}}E_{12} \\ {}^{\text{ep}}E_{12} & {}^{\text{ep}}E_{22} \end{bmatrix} & > 0 \\ \det \begin{bmatrix} {}^{\text{ep}}E_{11} & {}^{\text{ep}}E_{12} & {}^{\text{ep}}E_{13} \\ {}^{\text{ep}}E_{12} & {}^{\text{ep}}E_{22} & {}^{\text{ep}}E_{23} \\ {}^{\text{ep}}E_{13} & {}^{\text{ep}}E_{23} & {}^{\text{ep}}E_{33} \end{bmatrix} & > 0 \\ & \vdots \\ \det \begin{bmatrix} {}^{\text{ep}}E_{11} & {}^{\text{ep}}E_{12} & {}^{\text{ep}}E_{13} & {}^{\text{ep}}E_{14} & {}^{\text{ep}}E_{15} & {}^{\text{ep}}E_{16} \\ & {}^{\text{ep}}E_{22} & {}^{\text{ep}}E_{23} & {}^{\text{ep}}E_{24} & {}^{\text{ep}}E_{25} & {}^{\text{ep}}E_{26} \\ & & {}^{\text{ep}}E_{33} & {}^{\text{ep}}E_{34} & {}^{\text{ep}}E_{35} & {}^{\text{ep}}E_{36} \\ & & & {}^{\text{ep}}E_{44} & {}^{\text{ep}}E_{45} & {}^{\text{ep}}E_{46} \\ & & & & {}^{\text{ep}}E_{55} & {}^{\text{ep}}E_{56} \\ & & & & & {}^{\text{ep}}E_{66} \end{bmatrix} & > 0 \end{aligned} \quad (7.42)$$

¹Nierówność słaba z uwagi na dopuszczenie możliwości deformacji idealnie plastycznej.

Rozdział 8

Ograniczenia zakresu sprężystego materiałów ciągłych – kryteria początku uplastycznienia

8.1. Izotropowe warunki początku uplastycznienia metali

W podrozdziale 7.1 podkreślono że, w przypadku *materiałów izotropowych*, kryteria graniczne, określające *ograniczenie zakresu sprężystego*, są niezależne od wyboru układu współrzędnych. Z tego powodu, warunki izotropowe można zapisać w zredukowanej przestrzeni niezmienników tensora naprężenia $f(J_{i\sigma}, \Pi_i) = 0$, zamiast w przestrzeni składowych naprężenia $f(\sigma_{ij}, \Pi_i) = 0$, jak to jest konieczne w przypadku materiałów anizotropowych. Uproszczenie takie oznacza redukcję przestrzeni z sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń (σ_{ij}) do trójwymiarowej przestrzeni dowolnego układu trzech niezmienników naprężenia $(J_{i\sigma}; i = 1, 2, 3)$. Symbol Π_i oznacza skalarne stałe materiałowe określające ograniczenie zachowania sprężystego przez uplastycznienie w postaci mikroślizgów w materiale ciągłym, $\Pi_i = k_i^p$ (granica plastyczności), bądź zniszczenie przez lokalne mikropęknięcia w materiale kruchym, $\Pi_i = k_i^d$ (granica zniszczenia). Liczba niezależnych stałych materiałowych Π_i zależy od liczby parametrów równania powierzchni granicznej (początku uplastycznienia bądź zniszczenia), które muszą być wyznaczone z *niezależnych prób wytrzymałościowych*: np. *jednoosiowego rozciągania* (k_t), *jednoosiowego ściskania* (k_c) i *czystego ścinania* (k_s).

W najprostszym przypadku, gdy warunki początku uplastycznienia, bądź zniszczenia, są identyczne dla rozciągania i ściskania, liczba stałych materia-

łowych redukuje się do pojedynczego parametru $k_t = k_c = k$, odpowiadającego inicjacji uplastycznienia lub zniszczenia. Takie zawężenie jest uzasadnione dla kryterium początku uplastycznienia większości materiałów ciągliwych (większość metali i stopów metali). Natomiast w przypadku materiałów kruchych, wykazujących różną wytrzymałość graniczną na rozciąganie oraz ściskanie (zarówno przy uplastycznieniu jak i zniszczeniu), powierzchnia graniczna musi być scharakteryzowana co najmniej dwoma niezależnymi stałymi $k_t \neq k_c$ (ang. *strength differential materials*). Przykładem takiego metalu jest żeliwo (rys. 1.4b).

Dla potrzeb obecnego podrozdziału 8.1, ograniczymy dalsze rozważania do *izotropowych powierzchni granicznych* związanych z inicjacją mikropoślizgów w plastycznych metalach (rys. 2.3). W ogólnym przypadku uplastycznienia materiału izotropowego, równanie powierzchni plastyczności, wyrażonej przez trzy *niezmienniki podstawowe naprężenia* $J_{1\sigma}, J_{2\sigma}, J_{3\sigma}$ ma postać

$$f(J_{1\sigma}, J_{2\sigma}, J_{3\sigma}; k_i) = 0 \quad (8.1)$$

gdzie wykorzystano definicje (3.12).

Przyjmując dalej, uzasadnioną eksperymentalnie dla większości metali, niezależność powierzchni plastyczności od naprężenia hydrostatycznego (pierwszego niezmiennika tensora naprężenia $J_{1\sigma}$), otrzymujemy równanie powierzchni granicznej w funkcji drugiego i trzeciego niezmiennika tensora naprężenia

$$f(J_{2\sigma}, J_{3\sigma}; k_i) = 0 \quad (8.2)$$

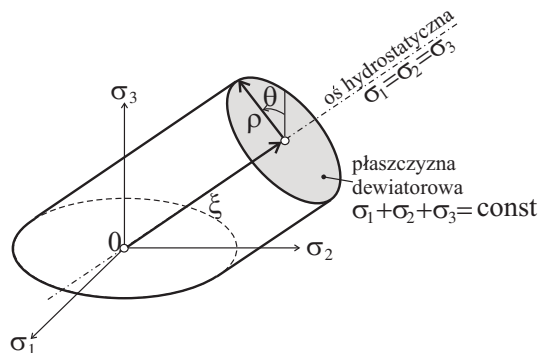
Wyrażając, z kolei *niezmienniki dewiatorowe* przez niezmienniki podstawowe naprężenia

$$\begin{aligned} J_{2s} &= -\frac{1}{3}(J_{1\sigma}^2 - 3J_{2\sigma}) \\ J_{3s} &= \frac{1}{27}(2J_{1\sigma}^3 - 9J_{1\sigma}J_{2\sigma} + 27J_{3\sigma}) \end{aligned} \quad (8.3)$$

oraz eliminując wyrazy zawierające $J_{1\sigma}$, otrzymujemy równoważne równanie powierzchni w funkcji drugiego i trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia

$$f(J_{2s}, J_{3s}; k_i) = 0 \quad (8.4)$$

Powyższy warunek zależy wprawdzie zarówno od drugiego, jak i trzeciego niezmiennika dewiatora (3.15), lecz nie zależy od pierwszego niezmiennika naprężenia $J_{1\sigma}$ (3.12). Pociąga to za sobą ograniczenie rozważanej klasy *powierzchni granicznych* do powierzchni *cyldrycznych*, o osi równo nachylonej do trzech osi naprężeń głównych ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), zwanej *osią hydrostatyczną* (rys. 8.1).



Rysunek 8.1. Cylindryczna powierzchnia plastyczności we współrzędnych Haigha–Westergaarda

Oznacza to, innymi słowy, że każdy przekrój powierzchni dowolną płaszczyzną prostopadłą do osi hydrostatycznej jest identyczny (niezależność od ciśnienia hydrostatycznego). Pociąga to za sobą nieograniczoność tej powierzchni. Mianowicie, w drodze dowolnego procesu wzdłuż ścieżki równoległej do osi hydrostatycznej, nie jest możliwe osiągnięcie żadnego stanu granicznego. Jest to, w ogólności, sprzeczne z obserwacją doświadczalną, co stanowi istotne zawiązanie stosowania cylindrycznych warunków granicznych.

W dalszych zastosowaniach wygodnie będzie wprowadzić system współrzędnych Haigha–Westergaarda [55, 161] ξ, ρ i θ , reprezentujący odpowiednio: odległość na osi hydrostatycznej mierzoną od początku układu współrzędnych (zależną od $J_{1\sigma}$), odległość punktu od osi hydrostatycznej na płaszczyźnie dewiatorowej prostopadłej do osi hydrostatycznej (zależną od J_{2s}) oraz współrzędną kątową punktu na płaszczyźnie dewiatorowej (zależną od J_{3s}) (rys. 8.1). Przy tym obowiązują relacje

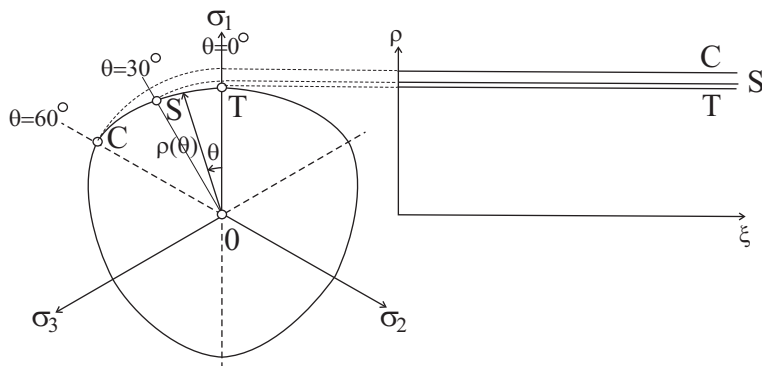
$$\xi = \frac{J_{1\sigma}}{\sqrt{3}}, \quad \rho = \sqrt{2J_{2s}}, \quad \cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3s}}{(J_{2s})^{3/2}} \quad \text{dla } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad (8.5)$$

Dla dalszych rozważań wygodnie będzie wprowadzić pojęcie *tworzącej powierzchni granicznej*, zwanej powszechnie meridianą. *Meridiany powierzchni granicznej*, uplastycznienia bądź zniszczenia, są krzywymi otrzymywanymi przez przekroje powierzchni płaszczyznami zawierającymi oś hydrostatyczną. Posługując się trzecią współrzędną Haigha–Westergaarda, dla wszystkich meridian obowiązuje warunek $\theta = \text{const}$. W przypadku *powierzchni obrotowych* wszystkie meridiany są identyczne. W szczególnym przypadku *powierzchni*

cylindrycznych (walcowych) wszystkie przekroje powierzchni płaszczyznami $\xi = \text{const}$ są identyczne, a meridiany są liniami prostymi.

W ogólnym przypadku *powierzchni walcowych*, lecz *nieobrotowych* (zależnych od trzeciego niezmiennika J_{3s} lub równoważnie zależnych od trzeciej współrzędnej θ) trzy spośród wszystkich meridian mają szczególne znaczenie (rys. 8.2)

1. Meridiana rozciągania T ($\theta = 0^\circ$)
2. Meridiana ściskania C ($\theta = 60^\circ$)
3. Meridiana ścinania S ($\theta = 30^\circ$)



Rysunek 8.2. Przekrój nieobrotowej powierzchni walcowej dowolną płaszczyzną dewiatorową $\xi = \text{const}$; punkty T, C i S odpowiadają granicy plastyczności na rozciąganie k_t , ściskanie k_c i ścinanie k_s , $k_t \neq k_c$

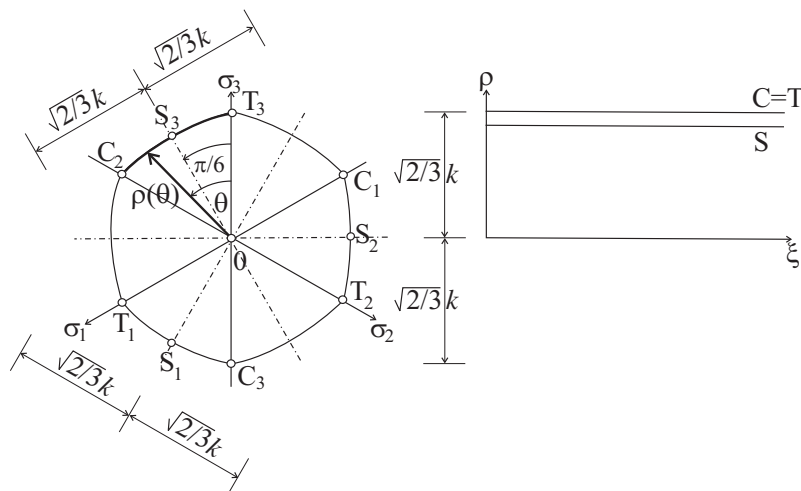
Zatem równanie *nieobrotowej powierzchni cylindrycznej* (8.4) można zapisać równoważnie w postaci

$$f(\rho, \theta; k) = 0 \quad (8.6)$$

która wskazuje wyraźnie na niezależność od położenia na osi hydrostatycznej (ξ).

Podkreślmy, że w ogólnym przypadku równanie (8.6) przedstawia powierzchnię cylindryczną o przekroju niekoniecznie kołowym $\rho(\theta)$. Wynika to z różnej granicy plastyczności w próbie jednoosiowego rozciągania, bądź ściskania, $k_t \neq k_c$ (ang. *strength differential material*). Jednak, dla wszystkich powierzchni w tej klasie, muszą obowiązywać pewne *warunki dyskretnej 60° symetrii*. Prowadzą one do konkluzji, że wystarczy określić kształt krzywej $\rho(\theta)$

w sektorze $0 \leq \theta \leq \pi/3$, a następnie powtórzyć go w pozostałych pięciu sektorach na płaszczyźnie dewiatorowej (rys. 8.3). Ponadto, oprócz omówionej



Rysunek 8.3. Dyskretna 60° symetria przekrojów powierzchni plastyczności (8.6) w płaszczyźnie dewiatorowej

powyżej własności dyskretniej 60° symetrii, przekroje powierzchni plastyczności prostopadłe do osi hydrostatycznej muszą spełniać *warunek wypukłości*, wynikający z *postulatu Druckera*, dotyczącego nieujemności mocy dyssypowanej na cyklu naprężeniowym (szersze omówienie w podrozdziale 7.3).

Zawężymy obecnie dalsze rozważania do materiałów nie wykazujących efektu różnej granicy plastyczności przy rozciąganiu bądź ścisaniu, $k_t = k_c = k$ (brak efektu *strength differential*) czemu odpowiada większość metali. Innymi słowy, w *przestrzeni Haigha–Westergaarda* dowolny przekrój płaszczyzną prostopadłą do osi hydrostatycznej musi przechodzić przez sześć punktów węzłowych: T_i ($\theta = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$) i C_i ($\theta = 60^\circ, 180^\circ, 270^\circ$) równo odległych od środka o stałą wartość $\sqrt{2/3}k$ (brak rozróżnienia granicy plastyczności na rozciąganie i ścisanie $k = k_t = k_c$). Równocześnie, każda z krzywych musi zawierać trzy punkty odpowiadające czystemu ścinaniu S_i ($\theta = 30^\circ, 150^\circ, 330^\circ$), porównaj: Ottosen i Ristinmaa [110], (rys. 8.3).

W najprostszym przypadku, uzasadnionym dla większości metali i stali, można dodatkowo założyć niezależność kształtu powierzchni od kąta θ (czyli niezależność od J_{3s}). Wówczas powierzchnia graniczna jest jednocześnie *po-*

wierzchnią cylindryczną i obrotową

$$f(\rho; k) = \sqrt{3J_{2s}} - k = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} - k = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho - k = 0 \quad (8.7)$$

Odpowiada to np. klasycznej hipotezie powierzchni granicznej Hubera–von Misesa–Hencky’ego (HMH), Huber (1904) [68], von Mises (1913) [98] oraz Hencky (1924) [60], wynikającej z krytycznej wartości energii właściwej odkształcenia postaciowego. W zapisie inżynierskim kryterium HMH przyjmuje postać jawnie dewiatorową

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) = 2k^2 \quad (8.8)$$

lub równoważnie, dla składowych głównych

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 = k^2 \quad (8.9)$$

Druga, powszechnie stosowana cylindryczna powierzchnia graniczna plastyczności Tresci–Guesta (TG), Tresca (1864) [156] i Guest (1900) [53], została wprowadzona na podstawie hipotezy maksymalnego naprężenia ścinającego. We współrzędnych Haigha–Westergaarda, równanie TG ma postać

$$f(\rho, \theta; k) = \sqrt{2}\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - k = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad (8.10)$$

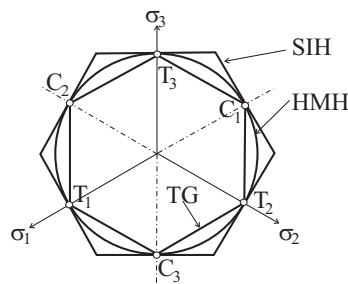
Używając naprężeń głównych, powyższe równanie można także przedstawić w postaci

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; k) = \max[|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|] - k = 0 \quad (8.11)$$

natomiast przy użyciu niezmienników dewiatorowych tensora naprężenia (3.12), otrzymujemy (Reuss [125])

$$f(J_{2s}, J_{3s}) = 4J_{2s}^3 - 27J_{3s}^2 - 9k^2J_{2s}^2 + 6k^4J_{2s} - k^6 = 0 \quad (8.12)$$

Powierzchnia graniczna Tresci–Guesta odpowiada powierzchni cylindrycznej nieobrotowej, zbudowanej na podstawie sześciokąta foremego, o osi zgodnej z osią hydrostatyczną (rys. 8.4). Jest widoczne, że powierzchnia Tresci–Guesta jest graniastoslupem foremnym wpisanym w walec Hubera–von Misesa–Hencky’ego, o punktach wspólnych T_1, T_2, T_3 oraz C_1, C_2, C_3 (rys. 8.4), odpowiadających narożom. Wykazuje ona symetrię jedynie w sensie dyskretnym, polegającą na powtarzalności segmentów (60° symetria).



Rysunek 8.4. Cylindryczne powierzchnie plastyczności na płaszczyźnie dewiatorowej

Mankamentem powierzchni plastyczności Tresca–Guesta jest występowanie naroży w punktach T_1 , T_2 , T_3 oraz C_1 , C_2 , C_3 . Jest to niewygodne z punktu widzenia nieciągłości normalnej do brzegu w tych punktach, która określa niejednoznacznie kierunek przyrostu odkształcenia plastycznego, jak pokazano na rys. 8.5. Aby tego uniknąć, można posłużyć się *hipotezą Hersheya–Daviesa* (HD), Hershey [63], Davies [32], która zapisana dla kierunków głównych tensora naprężenia ma postać

$$|\sigma_1 - \sigma_2|^m + |\sigma_2 - \sigma_3|^m + |\sigma_3 - \sigma_1|^m = 2k^m \quad (8.13)$$

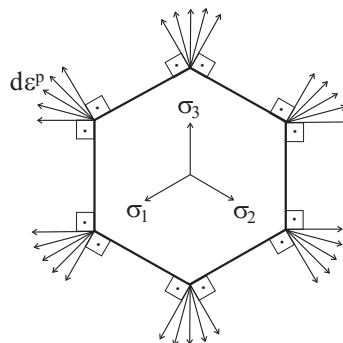
Wykładnik potęgowy $m = 2$ lub $m = 4$ sprowadza hipotezę HD do hipotezy HMH, wartość wykładnika $2 < m < 4$ opisuje krzywą leżącą na zewnątrz cylindra HMH, natomiast wartość $m > 4$ przedstawia krzywe pomiędzy cylindrem HMH a graniastosłupem TG. W przypadku granicznym $m \rightarrow \infty$ warunek HD przechodzi w warunek TG. Według Hersheya wykładniki $m = 6$ i $m = 8$ są zbliżone do wyników eksperymentalnych.

Kolejną stosowaną powierzchnią cylindryczną, nieobrotową jest *powierzchnia graniczna Schmidta–Iszlińskiego–Hilla* (SIH), Schmidt [132], Iszliński [69] i Hill [65], nawiązująca do hipotezy maksymalnych naprężeń dewiatorowych. We współrzędnych Haigha–Westergaarda, równanie SIH ma postać

$$f(\rho, \theta; k) = \max \left[\left| \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \cos \theta \right|, \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right|, \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right| \right] - \frac{2}{3}k = 0 \quad (8.14)$$

Używając natomiast naprężeń głównych, powyższe równanie przyjmuje formę

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; k) = \max [|\sigma_1 - \sigma_h|, |\sigma_2 - \sigma_h|, |\sigma_3 - \sigma_h|] - \frac{2}{3}k = 0 \quad (8.15)$$

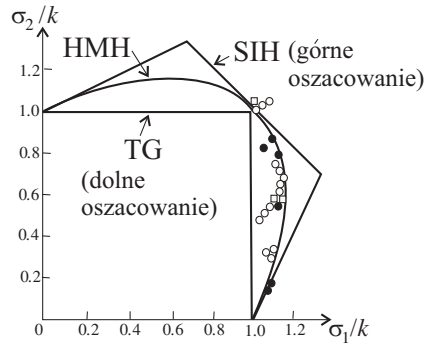


Rysunek 8.5. Niejednoznaczność kierunku przyrostu odkształcenia plastycznego w przypadku punktów narożnych dla warunku Tresci–Guesta

W przestrzeni Haigha–Westergaarda, powierzchnia SIH przedstawia powierzchnię cylindryczną, nieobrotową, zbudowaną na sześciokącie foremnym, o osi zgodnej z osią hydrostatyczną (rys. 8.4). Powierzchnia SIH jest zatem graniastosłupem foremnym opisanym na walcu HMH, w punktach T_1 , T_2 , T_3 oraz C_1 , C_2 , C_3 , opowiadających środkom boków (rys. 8.4).

Powierzchnie Tresci–Guesta oraz Schmidta–Izlińskiego–Hilla mają prostą interpretację geometryczną wynikającą z postulatu o dolnym i górnym oszacowaniu. Stanowią one mianowicie, odpowiednio, *dolne* (TG) oraz *górne* (SIH), oszacowanie wszystkich dopuszczalnych, *cylindrycznych powierzchni plastyczności* metali i stali. Wynika to z jednoczesnego spełnienia założenia o dyskretnej symetrii 60° w przestrzeni Haigha–Westergaarda (warunek 60° symetrii), oraz założenia wypukłości powierzchni granicznych (postulat Druckera). W rozważanej klasie *izotropowych powierzchni cylindrycznych*, niewrażliwych na kierunek rozciągania bądź ściskania, powierzchnie graniczne plastyczności realnych materiałów muszą się zatem zawierać pomiędzy ich ograniczeniem dolnym (TG) oraz górnym (SIH) i przechodzić przez punkty węzłowe T_1 , T_2 , T_3 oraz C_1 , C_2 , C_3 , równo odległe od osi hydrostatycznej $\sqrt{2/3}k$. Potwierdzają to wyniki badań przeprowadzonych przez Lode’a [93], na cienkościennych rurach stalowych, miedzianych oraz niklowych, weryfikujące główne kryteria początku uplastycznienia materiałów ciągliwych w warunkach płaskiego stanu naprężenia ($\sigma_3 = 0$) (rys. 8.6).

Powierzchnię graniczną zależną od drugiego i trzeciego niezmiennika naprężenia wykazującą efekt *strength differential* w zastosowaniu do powierzchni granicznych plastyczności lub przemian fazowych stopu TiNi zaproponowali Raniecki i Mróz [123] (rys. 8.7)



Rysunek 8.6. Wyniki badań rur stalowych (○), miedzianych (●) oraz niklowych (□), wg Lode [93]

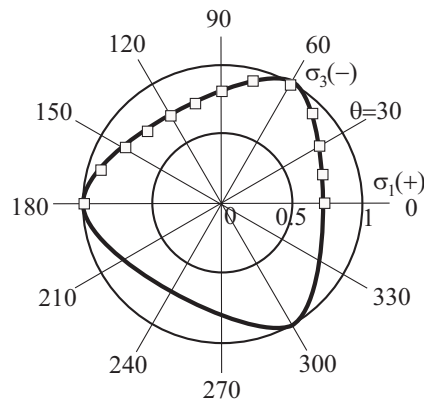
$$f(J_{2s}, J_{3s}) = (J_{2s})^{3n/2} - c(J_{3s})^n - k^{3n} = 0 \tag{8.16}$$

która stanowi uogólnienie warunku typu Casacu i Barlata [16] ($n = 1$)

$$f(J_{2s}, J_{3s}) = (J_{2s})^{3/2} - cJ_{3s} - k^3 = 0 \tag{8.17}$$

jak również warunku Druckera [36] ($n = 2$)

$$f(J_{2s}, J_{3s}) = (J_{2s})^3 - c(J_{3s})^2 - k^6 = 0 \tag{8.18}$$



Rysunek 8.7. Powierzchnia graniczna (8.16) zależna od drugiego i trzeciego niezmiennika naprężenia dla stopu TiNi, wg Raniecki i Mróz [123]

8.2. Anizotropowe warunki początku uplastycznienia metali

W najogólniejszym przypadku dla materiałów wykazujących cechy anizotropii zarówno sprężystej jak i plastycznej, uogólnienie warunków izotropowej plastyczności (7.3) i (7.4) na *anizotropowe warunki inicjacji uplastycznienia*, można wykonać przez zastąpienie pojedynczych niezmienników naprężenia $J_{1\sigma}$, $J_{2\sigma}$, $J_{3\sigma}$, przez *wspólne niezmienniki tensora naprężenia i tensora strukturalnego anizotropii plastycznej* (Hill [64], Życzkowski [165], Betten [7], Sayir [131])

$$f^P = f^P(\Pi, \Pi_{ij}\sigma_{ij}, \Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \Pi_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}, \dots) = 0 \quad (8.19)$$

W takich przypadkach, o inicjacji uplastycznienia decydują nie pojedyncze stałe k_i (jak w materiałach o właściwościach izotropowych), lecz tensory strukturalne anizotropii plastycznej różnych rzędów, $\mathbf{\Pi}^{(0)} = \Pi$, $\mathbf{\Pi}^{(2)} = \Pi_{ij}$, $\mathbf{\Pi}^{(4)} = \Pi_{ijkl}$, $\mathbf{\Pi}^{(6)} = \Pi_{ijklmn}$, \dots . Powierzchnia plastyczności typu (8.19) jest bardzo ogólna, a do jej identyfikacji potrzeba dużej liczby testów. Z tego powodu forma ta jest mało przydatna dla celów inżynierskich i podlega dalszym zawężeniom.

W szczególnym przypadku Goldenblat i Kopnov [52], a także Sayir [131], zaproponowali *tensorowo-wielomianową* postać *kryterium anizotropowego* (8.19)

$$(\Pi_{ij}\sigma_{ij})^\alpha + (\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^\beta + (\Pi_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^\gamma + \dots - 1 = 0 \quad (8.20)$$

gdzie $\Pi_{ij}, \Pi_{ijkl}, \Pi_{ijklmn}, \dots$, oznaczają tensory anizotropii rzędu 2, 4, 6, \dots , unormowane wspólną stałą Π_0 .

Przez odpowiedni dobór wykładników, mianowicie: $\alpha = 1, \beta = 1/2, \gamma = 1/3$, ograniczając się do trzech tylko wspólnych niezmienników tensora naprężenia σ i tensorów strukturalnych $\mathbf{\Pi}^{(2)}$ (2-rzędu), $\mathbf{\Pi}^{(4)}$ (4-rzędu) i $\mathbf{\Pi}^{(6)}$ (6-rzędu), równanie powyższe staje się automatycznie jednorodnie wymiarowo (wszystkie składniki wielomianu są bezwymiarowe)

$$\Pi_{ij}\sigma_{ij} + (\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^{1/2} + (\Pi_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^{1/3} - 1 = 0 \quad (8.21)$$

Forma (8.21), zawierająca tensory anizotropii plastycznej drugiego, czwartego i szóstego rzędu $\mathbf{\Pi}^{(2)}, \mathbf{\Pi}^{(4)}, \mathbf{\Pi}^{(6)}$, pozwala uwzględnić różne sposoby przebudowy powierzchni w trakcie wzmocnienia plastycznego: izotropową zmianę wymiarów, kinematyczne przesunięcie i obrót powierzchni, a także zmianę jej krzywizny (dystorsję), porównaj, np. Kowalsky i inni [80].

Również i ta forma jest jednak zbyt ogólna do dalszych zastosowań. Przyjmując, mianowicie, w (8.20) $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$ otrzymujemy tzw. *anizotropowy warunek von Misesa* [99]

$$\sigma_{ij}\Pi_{ijkl}\sigma_{kl} - 1 = 0 \quad (8.22)$$

zawierający jeden tensor anizotropii plastycznej czwartego rzędu $\Pi^{(4)}$.

Anizotropowy warunek von Misesa (8.22), będący kryterium uplastycznienia materiału anizotropowego, można traktować jako uogólnienie *izotropowego warunku Hubera–von Misesa–Hencky’ego*. Aby to pokazać, warunek HMMH (np. (8.7)), należy zapisać w postaci analogicznej do (8.22)

$$\sigma_{ij}\Pi_{ijkl}^{\text{HMMH}}\sigma_{kl} - 1 = 0 \quad (8.23)$$

gdzie Π_{ijkl}^{HMMH} oznacza *izotropowy tensor strukturalny* 4-rzędowy, wyrażony następująco

$$[\Pi^{\text{HMMH}}] = \frac{1}{k^2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ & & & & & 3 \end{array} \right] \quad (8.24)$$

Podkreślmy jednak, że w warunku (8.23) występują składowe tensora naprężenia σ_{ij} , a nie składowe dewiatora naprężenia s_{ij} , jak to ma miejsce w klasycznym warunku HMMH (8.7). Jednakże równanie (8.23) przyjmuje podobną postać przy przejściu na składowe dewiatora naprężenia s_{ij} , a mianowicie

$$s_{ij}\Pi_{ijkl}^{\text{HMMH}}s_{kl} - 1 = 0 \quad (8.25)$$

bowiem po rozkładzie tensora naprężenia na dewiator i aksjator $\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ otrzymujemy

$$s_{ij}\Pi_{ijkl}^{\text{HMMH}}s_{kl} + \left(2s_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{mm}\delta_{ij}\right) \underline{(\Pi_{ijkl}^{\text{HMMH}}\delta_{kl})} \frac{1}{3}\sigma_{nn} - 1 = 0 \quad (8.26)$$

Wyraz podkreślony w (8.26) jest jednak tożsamościowo równy zeru. W notacji macierzowej Voigta, widać bowiem co następuje

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^{\text{HMMH}} + \Pi_{12}^{\text{HMMH}} + \Pi_{13}^{\text{HMMH}} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ \Pi_{21}^{\text{HMMH}} + \Pi_{22}^{\text{HMMH}} + \Pi_{23}^{\text{HMMH}} &= -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0 \\ \Pi_{31}^{\text{HMMH}} + \Pi_{32}^{\text{HMMH}} + \Pi_{33}^{\text{HMMH}} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0 \end{aligned} \quad (8.27)$$

Tensor anizotropii plastycznej von Misesa, jest symetrycznym tensorem IV-rzędu, to znaczy $\Pi_{ijkl} = \Pi_{klij} = \Pi_{jikl} = \Pi_{ijlk}$. Tensor ten zawiera zatem 21 modułów anizotropii plastycznej, bowiem nie obowiązują żadne dodatkowe warunki symetrii materiałowej (strukturalnej). Jednak tylko 18 spośród nich jest istotnie niezależnych, albowiem tensor von Misesa musi podlegać prawu transformacji tensorowej, z wykorzystaniem 3 kątów Eulera. Zatem w formie rozwiniętej anizotropowy warunek von Misesa (8.22) zapisujemy następująco:

$$\begin{aligned}
& \Pi_{xxxx}\sigma_x^2 + \Pi_{yyyy}\sigma_y^2 + \Pi_{zzzz}\sigma_z^2 + \\
& 2\Pi_{xxyy}\sigma_x\sigma_y + 2\Pi_{yyzz}\sigma_y\sigma_z + 2\Pi_{zzxx}\sigma_z\sigma_x + \\
& 4\Pi_{xxyz}\sigma_x\tau_{yz} + 4\Pi_{xxzx}\sigma_x\tau_{zx} + 4\Pi_{xxyx}\sigma_x\tau_{xy} + \\
& 4\Pi_{yyyz}\sigma_y\tau_{yz} + 4\Pi_{yyzx}\sigma_y\tau_{zx} + 4\Pi_{yyxy}\sigma_y\tau_{xy} + \\
& 4\Pi_{zzyz}\sigma_z\tau_{yz} + 4\Pi_{zzzx}\sigma_z\tau_{zx} + 4\Pi_{zzxy}\sigma_z\tau_{xy} + \\
& 8\Pi_{xxyz}\tau_{xy}\tau_{yz} + 8\Pi_{yyzx}\tau_{yz}\tau_{zx} + 8\Pi_{zxyx}\tau_{zx}\tau_{xy} + \\
& 4\Pi_{yzyz}\tau_{yz}^2 + 4\Pi_{zxzx}\tau_{zx}^2 + 4\Pi_{xyxy}\tau_{xy}^2 = 1
\end{aligned} \tag{8.28}$$

gdzie Π_{ijkl} są współrzędnymi tensorowymi anizotropii plastycznej.

Przechodząc do notacji wektorowo-macierzowej Voigta, ogólny anizotropowy warunek von Misesa (8.22) zapisujemy równoważnie

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\text{III}] \{\boldsymbol{\sigma}\} - 1 = 0 \tag{8.29}$$

Zamiast tensora anizotropii plastycznej von Misesa Π_{ijkl} posłużono się tutaj macierzą anizotropii plastycznej von Misesa $[\text{III}]$, o wymiarze 6×6 , będącej symetryczną macierzą reprezentacji tensora 4-rzędu Π_{ijkl} , (patrz podrozdział 4.12)

$$[\text{III}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Pi_{16} \\ & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & \Pi_{26} \\ & & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & \Pi_{36} \\ \hline & & & \Pi_{44} & \Pi_{45} & \Pi_{46} \\ & & & & \Pi_{55} & \Pi_{56} \\ & & & & & \Pi_{66} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet \end{array} \right] \tag{8.30}$$

oraz wektorem naprężenia $\{\boldsymbol{\sigma}\}$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \tag{8.31}$$

redukując w ten sposób przestrzeń z 9-wymiarowej, do 6-wymiarowej. Elementy macierzy $[\mathbb{M}]$ są wyrażone poprzez elementy tensora IV-rzędu Π_{ijkl} następująco

$$\begin{aligned}
\Pi_{11} &= \Pi_{xxxx} & \Pi_{22} &= \Pi_{yyyy} & \Pi_{33} &= \Pi_{zzzz} \\
\Pi_{12} &= \Pi_{xxyy} & \Pi_{13} &= \Pi_{xxzz} & \Pi_{23} &= \Pi_{yyzz} \\
\Pi_{14} &= 2\Pi_{xxyz} & \Pi_{15} &= 2\Pi_{xxzx} & \Pi_{16} &= 2\Pi_{xxxy} \quad \dots \\
\Pi_{44} &= 4\Pi_{yzyz} & \Pi_{55} &= 4\Pi_{zxzx} & \Pi_{66} &= 4\Pi_{xyxy} \\
\Pi_{45} &= 4\Pi_{yzzx} & \Pi_{46} &= 4\Pi_{xyyz} & \Pi_{56} &= 4\Pi_{zxxy}
\end{aligned} \tag{8.32}$$

Równanie (8.28) przyjmuje zatem postać

$$\begin{aligned}
& \Pi_{11}\sigma_x^2 + \Pi_{22}\sigma_y^2 + \Pi_{33}\sigma_z^2 + \\
& 2(\Pi_{12}\sigma_x\sigma_y + \Pi_{23}\sigma_y\sigma_z + \Pi_{31}\sigma_z\sigma_x + \\
& \Pi_{14}\sigma_x\tau_{yz} + \Pi_{15}\sigma_x\tau_{zx} + \Pi_{16}\sigma_x\tau_{xy} + \\
& \Pi_{24}\sigma_y\tau_{yz} + \Pi_{25}\sigma_y\tau_{zx} + \Pi_{26}\sigma_y\tau_{xy} + \\
& \Pi_{34}\sigma_z\tau_{yz} + \Pi_{35}\sigma_z\tau_{zx} + \Pi_{36}\sigma_z\tau_{xy} + \\
& \Pi_{45}\tau_{yz}\tau_{zx} + \Pi_{46}\tau_{xy}\tau_{yz} + \Pi_{56}\tau_{zx}\tau_{xy}) + \\
& \Pi_{44}\tau_{yz}^2 + \Pi_{55}\tau_{zx}^2 + \Pi_{66}\tau_{xy}^2 = 1
\end{aligned} \tag{8.33}$$

Przeciwnie niż w przypadku izotropowego warunku plastyczności HMH (8.23), w przypadku anizotropii plastycznej deformacje objętościowa i postaciowa są jednak wzajemnie sprzężone. Wykonując, mianowicie, dekompozycję tensora naprężenia na dewiator i aksjator $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \sigma_h \mathbf{1}$ otrzymujemy odpowiednią postać *anizotropowego warunku von Misesa* (8.29)

$$\{\mathbf{s}\}^T [\mathbb{M}] \{\mathbf{s}\} + \underbrace{\left(2\{\mathbf{s}\}^T + \sigma_h \{\mathbf{1}\}^T\right) ([\mathbb{M}] \{\mathbf{1}\} \sigma_h) - 1}_{= 0} = 0 \tag{8.34}$$

Widać tu wyraźnie, że ogólny warunek von Misesa dla materiału anizotropowego zależy zarówno od dewiatora naprężenia \mathbf{s} , jak i aksjatora $\sigma_h \mathbf{1}$.

Równanie (8.29) jest trudne do zastosowania, ze względu na zbyt dużą liczbę modułów plastycznych (21 stałych, w tym 18 niezależnych), które należy określić w próbach wytrzymałościowych. Tę liczbę stałych plastycznych można zredukować przyjmując, za von Misesem [99], że przy hydrostatycznym rozciąganiu bądź ściskaniu nie powstają odkształcenia plastyczne również w materiale anizotropowym. Aby to uzyskać, należy wyzerować podkreślone wyrażenie we wzorze (8.34). Zatem, dla dowolnego stanu hydrostatycznego $\sigma_h \neq 0$, musi obowiązywać

$$[\mathbb{M}] \{\mathbf{1}\} = 0 \tag{8.35}$$

które sprowadza się do sześciu dodatkowych warunków ograniczających narzuconych na składowe macierzy anizotropii plastycznej $[\mathbb{III}]$ gwarantujących niezależność od ciśnienia hydrostatycznego σ_h

$$\begin{aligned}\Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{13} &= 0 \\ \Pi_{12} + \Pi_{22} + \Pi_{23} &= 0 \\ \Pi_{13} + \Pi_{23} + \Pi_{33} &= 0 \\ \Pi_{14} + \Pi_{24} + \Pi_{34} &= 0 \\ \Pi_{15} + \Pi_{25} + \Pi_{35} &= 0 \\ \Pi_{16} + \Pi_{26} + \Pi_{36} &= 0\end{aligned}\tag{8.36}$$

Dopiero po spełnieniu warunków ograniczających (8.36), warunek tensorowy von Misesa (8.29) można zredukować do *dewiatorowej* postaci *anizotropowego warunku von Misesa*, innej niż tensorowa postać ogólna (8.29), czyli

$$\{\mathbf{s}\}^T [{}_{\text{dew}}\mathbb{III}] \{\mathbf{s}\} - 1 = 0\tag{8.37}$$

Zauważmy, że warunek (8.37) jest obecnie zapisany w zredukowanej przestrzeni naprężeń dewiatorowych \mathbf{s} , a nie przestrzeni naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$, co miało miejsce w tensorowym warunku von Misesa (8.33).

Wykorzystanie sześciu warunków (8.36) redukuje liczbę niezależnych elementów macierzy $[\mathbb{III}]$ o sześć ($21 - 6 = 15$). Postać macierzy $[{}_{\text{dew}}\mathbb{III}]$ zależy od wyboru niezależnych elementów. Wyróżnimy poniżej jej dwie równoważne formy.

W pierwszym przypadku przyjmiemy za niezależne następujące elementy: $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}; \Pi_{15}, \Pi_{16}, \Pi_{24}, \Pi_{26}, \Pi_{34}, \Pi_{35}$ oraz $\Pi_{44}, \Pi_{55}, \Pi_{66}; \Pi_{45}, \Pi_{46}, \Pi_{56}$. Pozostałe elementy obliczamy wykorzystując warunki (8.36)

$$\begin{aligned}\Pi_{11} &= -\Pi_{12} - \Pi_{13} \\ \Pi_{22} &= -\Pi_{12} - \Pi_{23} \\ \Pi_{33} &= -\Pi_{13} - \Pi_{23} \\ \Pi_{14} &= -\Pi_{24} - \Pi_{34} \\ \Pi_{25} &= -\Pi_{15} - \Pi_{35} \\ \Pi_{36} &= -\Pi_{16} - \Pi_{26}\end{aligned}\tag{8.38}$$

Uwzględnienie zależności (8.38) w (8.30) prowadzi do następującej reprezenta-

cji macierzy dewiatorowej von Misesa

$$\begin{aligned}
 [{}_{\text{dew}}\mathbb{III}] = & \left[\begin{array}{ccc|c} -\Pi_{12} - \Pi_{13} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \\ & -\Pi_{12} - \Pi_{23} & \Pi_{23} & \\ & & -\Pi_{13} - \Pi_{23} & \\ \hline -\Pi_{24} - \Pi_{34} & \Pi_{15} & \Pi_{16} & \\ \Pi_{24} & -\Pi_{15} - \Pi_{35} & \Pi_{26} & \\ \Pi_{34} & \Pi_{35} & -\Pi_{16} - \Pi_{26} & \\ \hline \Pi_{44} & \Pi_{45} & \Pi_{46} & \\ & \Pi_{55} & \Pi_{56} & \\ & & \Pi_{66} & \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \circ & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \bullet \\ & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \\ & & \circ & \bullet & \bullet & \circ \\ \hline & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet \end{array} \right] \quad (8.39)
 \end{aligned}$$

W drugim przypadku, za niezależne przyjmujemy następujące elementy: Π_{11} , Π_{22} , Π_{33} ; Π_{15} , Π_{16} , Π_{24} , Π_{26} , Π_{34} , Π_{35} oraz Π_{44} , Π_{55} , Π_{66} ; Π_{45} , Π_{46} , Π_{56} . Zależne elementy wyliczymy stosując równania (8.36)

$$\begin{aligned}
 \Pi_{12} &= \frac{1}{2}(\Pi_{33} - \Pi_{11} - \Pi_{22}) \\
 \Pi_{13} &= \frac{1}{2}(\Pi_{22} - \Pi_{11} - \Pi_{33}) \\
 \Pi_{23} &= \frac{1}{2}(\Pi_{11} - \Pi_{22} - \Pi_{33}) \\
 \Pi_{14} &= -\Pi_{24} - \Pi_{34} \\
 \Pi_{25} &= -\Pi_{15} - \Pi_{35} \\
 \Pi_{36} &= -\Pi_{16} - \Pi_{26}
 \end{aligned} \quad (8.40)$$

W efekcie tej operacji otrzymujemy drugą, równoważną reprezentację macierzy dewiatorowej von Misesa

$$\begin{aligned}
 [{}_{\text{dew}}\mathbb{III}] = & \left[\begin{array}{ccc|c} \Pi_{11} & \frac{1}{2}(\Pi_{33} - \Pi_{11} - \Pi_{22}) & \frac{1}{2}(\Pi_{22} - \Pi_{11} - \Pi_{33}) & \\ & \Pi_{22} & \frac{1}{2}(\Pi_{11} - \Pi_{22} - \Pi_{33}) & \\ & & \Pi_{33} & \\ \hline -\Pi_{24} - \Pi_{34} & \Pi_{15} & \Pi_{16} & \\ \Pi_{24} & -\Pi_{15} - \Pi_{35} & \Pi_{26} & \\ \Pi_{34} & \Pi_{35} & -\Pi_{16} - \Pi_{26} & \\ \hline \Pi_{44} & \Pi_{45} & \Pi_{46} & \\ & \Pi_{55} & \Pi_{56} & \\ & & \Pi_{66} & \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \hline & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet \end{array} \right] \quad (8.41)
 \end{aligned}$$

Fizyczna zasadność takiej redukcji nie jest jednak oczywista (por. dyskusja 8.2). W szczególności, dewiatorowa postać warunku von Misesa może okazać się zbyt zawężona dla opisu powierzchni granicznych, plastyczności bądź zniszczenia materiałów kompozytowych jednokierunkowo zbrojonych (zob. także, rozdział 10). Jednak, z uwagi na niezależność warunku inicjacji uplastycznienia od stanu hydrostatycznego, w powyższej hipotezie jest ona często stosowana.

W celu wyprowadzenia warunku von Misesa w rozwiniętej postaci jawnie dewiatorowej posłużymy się reprezentacją (8.39). Wprowadzając następnie reprezentację macierzową (8.39) do dewiatorowej formy warunku von Misesa (8.37) otrzymujemy dewiatorowy odpowiednik równania (8.33)

$$\begin{aligned}
& -\Pi_{12}(s_x - s_y)^2 - \Pi_{13}(s_x - s_z)^2 - \Pi_{23}(s_y - s_z)^2 + \\
& 2\{\tau_{yz}[\Pi_{24}(s_y - s_x) + \Pi_{34}(s_z - s_x)] + \\
& \tau_{zx}[\Pi_{15}(s_x - s_y) + \Pi_{35}(s_z - s_y)] + \\
& \tau_{xy}[\Pi_{16}(s_x - s_z) + \Pi_{26}(s_y - s_z)] + \\
& \Pi_{45}\tau_{yz}\tau_{zx} + \Pi_{46}\tau_{xy}\tau_{yz} + \Pi_{56}\tau_{zx}\tau_{xy}\} + \\
& \Pi_{44}\tau_{yz}^2 + \Pi_{55}\tau_{zx}^2 + \Pi_{66}\tau_{xy}^2 = 1
\end{aligned} \tag{8.42}$$

Forma powyższa ma strukturę jawnie dewiatorową (zawiera wyłącznie różnice dewiatorowych składowych normalnych, np. $s_y - s_x \dots$). Przechodząc na składowe tensorowe, np. $s_y - s_x = \sigma_y - \sigma_x \dots$, otrzymujemy równoważnie dewiatorowy warunek von Misesa zapisany w składowych tensorowych (por. Szczepiński [148])

$$\begin{aligned}
& -\Pi_{12}(\sigma_x - \sigma_y)^2 - \Pi_{13}(\sigma_x - \sigma_z)^2 - \Pi_{23}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + \\
& 2\{\tau_{yz}[\Pi_{24}(\sigma_y - \sigma_x) + \Pi_{34}(\sigma_z - \sigma_x)] + \\
& \tau_{zx}[\Pi_{15}(\sigma_x - \sigma_y) + \Pi_{35}(\sigma_z - \sigma_y)] + \\
& \tau_{xy}[\Pi_{16}(\sigma_x - \sigma_z) + \Pi_{26}(\sigma_y - \sigma_z)] + \\
& \Pi_{45}\tau_{yz}\tau_{zx} + \Pi_{46}\tau_{xy}\tau_{yz} + \Pi_{56}\tau_{zx}\tau_{xy}\} + \\
& \Pi_{44}\tau_{yz}^2 + \Pi_{55}\tau_{zx}^2 + \Pi_{66}\tau_{xy}^2 = 1
\end{aligned} \tag{8.43}$$

Równania (8.42) i (8.43) są określone przez 15 stałych Π_{ij} , każde. W powyższej formie (8.43) pokazują się iloczyny naprężeń następującego typu: naprężenie styczne i normalne oraz iloczyny naprężeń stycznych działających w różnych płaszczyznach, np. $\tau_{yz}(\sigma_y - \sigma_x) \dots$ oraz $\tau_{yz}\tau_{zx} \dots$. Forma tego warunku jest zatem czuła na zmiany znaku naprężeń stycznych. Jest to fizycznie dyskusyjne i z tego powodu wyrazy te (podkreślone) bywają przez niektórych autorów pomijane (np. Malinin i Rżysko [96]). Jednakże pełna forma (8.43) może być

przydatna do opisu powierzchni granicznej materiałów o cechach kruchych, typu von Misesa–Tsai–Wu (por. rozdz. 9).

8.3. Ortotropowe warunki początku uplastycznienia

Ogólna postać *macierzy anizotropii plastycznej von Misesa* (8.30) nie zakłada żadnej symetrii materiałowej. W istocie, stosowane materiały inżynierskie charakteryzują się najczęściej pewną grupą symetrii materiałowej, zarówno sprężystej, jak i plastycznej.

W szczególności, w węższym przypadku plastycznej ortotropii macierz anizotropii plastycznej von Misesa $[\mathbb{III}]$ przyjmuje w kierunkach głównych ortotropii postać zredukowaną do *macierzy ortotropii plastycznej von Misesa* $[\text{orto}\mathbb{III}]$

$$[\text{orto}\mathbb{III}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \Pi_{22} & \Pi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \Pi_{55} & 0 \\ & & & & & \Pi_{66} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ & \bullet & \bullet & & & \\ & & \bullet & & & \\ \hline & & & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & \bullet \end{array} \right] \quad (8.44)$$

W miejsce ogólnego anizotropowego warunku von Misesa (8.28) otrzymujemy, dla naprężeń w kierunkach materiałowej ortotropii (1,2,3), *ortotropowy warunek von Misesa*

$$\begin{aligned} & \Pi_{11}\sigma_x^2 + \Pi_{22}\sigma_y^2 + \Pi_{33}\sigma_z^2 + \\ & 2(\Pi_{12}\sigma_x\sigma_y + \Pi_{23}\sigma_y\sigma_z + \Pi_{31}\sigma_z\sigma_x) + \\ & \Pi_{44}\tau_{yz}^2 + \Pi_{55}\tau_{zx}^2 + \Pi_{66}\tau_{xy}^2 = 1 \end{aligned} \quad (8.45)$$

gdzie przyjęto uporządkowanie składowych naprężenia (8.31). W tym ogólnym przypadku liczba niezależnych modułów ortotropii plastycznej wynosi więc 9. W miejsce anizotropowego warunku von Misesa (8.30), obowiązuje teraz warunek ortotropowy von Misesa

$$\sigma_{ij}\Pi_{ijkl}\sigma_{kl} - 1 = 0 \quad (8.46)$$

w którym tensor Π_{ijkl} jest *tensorem ortotropii plastycznej von Misesa*. W notacji Voigta, zamiast (8.46), otrzymujemy postać

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\text{orto}\mathbb{III}] \{\boldsymbol{\sigma}\} - 1 = 0 \quad (8.47)$$

w której macierz reprezentacji tensora von Misesa $[\text{orto}\mathbb{III}]$ jest *macierzą ortotropii plastycznej von Misesa*.

Rozkładając dalej, tensor naprężenia na aksjator i dewiator, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \sigma_h \mathbf{1}$, oraz powtarzając rozważania dotyczące anizotropowego warunku von Misesa, możemy zapisać analogicznie do (8.34)

$$\{\mathbf{s}\}^T [\text{orto}\mathbb{III}] \{\mathbf{s}\} + \underline{\left(2\{\mathbf{s}\}^T + \sigma_h \{\mathbf{1}\}^T\right) ([\text{orto}\mathbb{III}] \{\mathbf{1}\} \sigma_h) - 1} = 0 \quad (8.48)$$

Jak widać, ogólny warunek ortotropowy von Misesa (8.48) zależy zatem zarówno od dewiatora \mathbf{s} jak i aksjatora $\sigma_h \mathbf{1}$ naprężenia. Jednakże obserwacje doświadczalne dla materiałów ciągłych usprawiedliwiają przyjęcie dodatkowego założenia o niezależności warunku ortotropowej plastyczności od naprężenia hydrostatycznego. Pozwala to wyeliminować podkreślony wyraz w równaniu (8.48), który odpowiada za sprzężenie obu stanów, dewiatorowego i hydrostatycznego. Zakładając, mianowicie, niezależność warunku ortotropii plastycznej od naprężenia hydrostatycznego $\sigma_h \neq 0$, musi obowiązywać ograniczenie

$$[\text{orto}\mathbb{III}] \{\mathbf{1}\} = 0 \quad (8.49)$$

które prowadzi, w zapisie rozwiniętym, do trzech dodatkowych warunków wiążących składowe macierzy ortotropii plastycznej von Misesa $[\text{orto}\mathbb{III}]$ (zamiast sześciu warunków w przypadku macierzy anizotropii von Misesa, (8.36))

$$\begin{aligned} \Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{13} &= 0 \\ \Pi_{12} + \Pi_{22} + \Pi_{23} &= 0 \\ \Pi_{13} + \Pi_{23} + \Pi_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (8.50)$$

Oznacza to przyjęcie hipotezy, że tylko naprężenia dewiatorowe są odpowiedzialne za początek uplastycznienia w ortotropowym materiale plastycznym. Również i w tym przypadku, założenie takie jest jednak dyskusyjne. W wyniku powyższej operacji równanie (8.47) można zatem zredukować do *dewiatorowej postaci ortotropowego warunku von Misesa*, znanego jako *warunek Hilla* [64, 65], w którym liczba niezależnych stałych wynosi 6

$$\{\mathbf{s}\}^T [\mathbb{III}^H] \{\mathbf{s}\} - 1 = 0 \quad (8.51)$$

Macierz Hilla $[\mathbb{III}^H]$ występującą w (8.51) można otrzymać z macierzy dewiatorowej von Misesa $[\text{dew}\mathbb{III}]$ na dwa sposoby nawiązujące do reprezentacji (8.39) i (8.41).

Macierz $[\mathbb{III}^H]$ występującą w (8.51) otrzymujemy z macierzy dewiatorowej Misesa $[\text{dew}\mathbb{III}]$ poprzez sprowadzenie jej do formy ortotropowej, czyli

$$[\mathbb{III}^H] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\Pi_{12} - \Pi_{13} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & & & \\ & -\Pi_{12} - \Pi_{23} & \Pi_{23} & & & \\ & & -\Pi_{13} - \Pi_{23} & & & \\ \hline & & & \Pi_{44} & & \\ & & & & \Pi_{55} & \\ & & & & & \Pi_{66} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \circ & \bullet & \bullet & & & \\ & \circ & \bullet & & & \\ & & \circ & & & \\ \hline & & & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & \bullet \end{array} \right]$$

(8.52)

lub

$$[\mathbb{III}^H] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Pi_{11} & \frac{\Pi_{33} - \Pi_{11} - \Pi_{22}}{2} & \frac{\Pi_{22} - \Pi_{11} - \Pi_{33}}{2} & & & \\ & \Pi_{22} & \frac{\Pi_{11} - \Pi_{22} - \Pi_{33}}{2} & & & \\ & & \Pi_{33} & & & \\ \hline & & & \Pi_{44} & & \\ & & & & \Pi_{55} & \\ & & & & & \Pi_{66} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & \circ & \circ & & & \\ & \bullet & \circ & & & \\ & & \bullet & & & \\ \hline & & & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & \bullet \end{array} \right]$$

(8.53)

Przejdźmy obecnie do inżynierskiego sformułowania warunku plastycznej ortotropii Hilla i jego kalibracji. Rozpisując warunek (8.51), otrzymujemy 6-parametrowy *warunek Hilla* w formie inżynierskiej, który można również traktować jako 6-parametrowe uogólnienie izotropowego warunku plastyczności HMH (8.8) na materiały plastycznie ortotropowe. Wykorzystując reprezentację macierzy Hilla (8.52) oraz rozpisując równanie (8.51) otrzymujemy

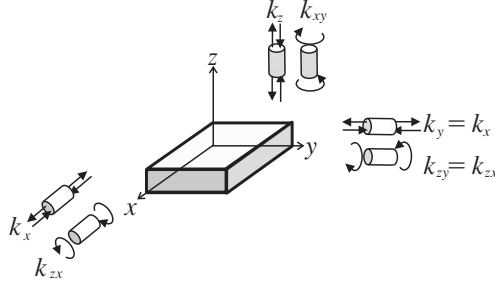
$$- \left[\Pi_{23} (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \Pi_{13} (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \Pi_{12} (\sigma_x - \sigma_y)^2 \right] + \Pi_{44} \tau_{yz}^2 + \Pi_{55} \tau_{zx}^2 + \Pi_{66} \tau_{xy}^2 = 1 \tag{8.54}$$

Z kolei posługując się reprezentacją (8.53) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \Pi_{11}\sigma_x^2 + \Pi_{22}\sigma_y^2 + \Pi_{33}\sigma_z^2 + (\Pi_{33} - \Pi_{11} - \Pi_{22})\sigma_x\sigma_y + \\ & (\Pi_{22} - \Pi_{11} - \Pi_{33})\sigma_x\sigma_z + (\Pi_{11} - \Pi_{22} - \Pi_{33})\sigma_y\sigma_z + \\ & \Pi_{44}\tau_{yz}^2 + \Pi_{55}\tau_{zx}^2 + \Pi_{66}\tau_{xy}^2 = 1 \end{aligned} \quad (8.55)$$

Oba powyższe równania opisują w istocie tę samą powierzchnię graniczną, przyjmując za niezależne inne elementy macierzy $[\mathbb{H}^H]$ (8.52) lub (8.53).

Stosując trzy próby jednoosiowego rozciągania $\sigma_x = k_x, \sigma_y = k_y, \sigma_z = k_z$ oraz trzy próby ścinania $\tau_{xy} = k_{xy}, \tau_{yz} = k_{yz}, \tau_{zx} = k_{zx}$, w kierunkach oraz płaszczyznach ortotropii materiałowej (rys. 8.8), 6 współczynników równania (8.54) można wyrazić przez 3 niezależne granice plastyczności na rozciąganie



Rysunek 8.8. Przypadek ortotropii plastycznej

k_x, k_y, k_z (w kierunkach ortotropii), oraz 3 niezależne granice plastyczności na ścinanie k_{yz}, k_{zx} i k_{xy} (w płaszczyznach ortotropii materiałowej), mianowicie

$$\begin{aligned} -\Pi_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_y^2} + \frac{1}{k_z^2} - \frac{1}{k_x^2} \right) & \Pi_{44} &= \frac{1}{k_{yz}^2} \\ -\Pi_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_z^2} + \frac{1}{k_x^2} - \frac{1}{k_y^2} \right) & \Pi_{55} &= \frac{1}{k_{zx}^2} \\ -\Pi_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_x^2} + \frac{1}{k_y^2} - \frac{1}{k_z^2} \right) & \Pi_{66} &= \frac{1}{k_{xy}^2} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Warunki plastyczności Hilla (8.54) i (8.55) przyjmują kolejno formę

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_y^2} + \frac{1}{k_z^2} - \frac{1}{k_x^2} \right) (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_z^2} + \frac{1}{k_x^2} - \frac{1}{k_y^2} \right) (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_x^2} + \frac{1}{k_y^2} - \frac{1}{k_z^2} \right) (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \left(\frac{\tau_{yz}}{k_{yz}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{zx}}{k_{zx}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{k_{xy}} \right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (8.57)$$

bądź równoważnie

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_x}{k_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{k_y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{k_z}\right)^2 - \left(\frac{1}{k_x^2} + \frac{1}{k_y^2} - \frac{1}{k_z^2}\right) \sigma_x \sigma_y - \\ & \left(\frac{1}{k_y^2} + \frac{1}{k_z^2} - \frac{1}{k_x^2}\right) \sigma_y \sigma_z - \left(\frac{1}{k_z^2} + \frac{1}{k_x^2} - \frac{1}{k_y^2}\right) \sigma_z \sigma_x + \\ & \left(\frac{\tau_{yz}}{k_{yz}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{zx}}{k_{zx}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{k_{xy}}\right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (8.58)$$

W szczególnym przypadku *płaskiego stanu naprężenia*, np. w płaszczyźnie x, y gdy $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$, zastosowanie wzorów (8.58) prowadzi do postaci *4-parametrowej ortotropowego warunku Hilla*

$$\frac{\sigma_x^2}{k_x^2} + \frac{\sigma_y^2}{k_y^2} - \left(\frac{1}{k_x^2} + \frac{1}{k_y^2} - \frac{1}{k_z^2}\right) \sigma_x \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{k_{xy}^2} = 1 \quad (8.59)$$

w której na osiągnięcie początku uplastycznienia w płaszczyźnie x, y wpływają nie tylko k_x, k_y i k_{xy} , lecz również granica plastyczności w kierunku z , k_z (co jest fizycznie wątpliwe).

Łatwo zauważyć, że dla $\Pi_{23} = \Pi_{13} = \Pi_{12} = -1/2k^2$ i $\Pi_{44} = \Pi_{55} = \Pi_{66} = 3/k^2$, ortotropowy warunek Hilla (8.54) przechodzi w izotropowy warunek HMMH

$$\frac{1}{2k^2} \left[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 \right] + \frac{3}{k^2} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) = 1 \quad (8.60)$$

czyli

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) = 2k^2 \quad (8.61)$$

Warunek Hilla, np. w postaci (8.54), jest zapisany dla kierunków głównych ortotropii materiałowej, które na ogół nie muszą pokrywać się z kierunkami naprężeń głównych. W szczególnym przypadku zgodności kierunków głównych ortotropii materiałowej i kierunków głównych naprężenia $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$; $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, otrzymamy

$$-\Pi_{23} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \Pi_{13} (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \Pi_{12} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 1 \quad (8.62)$$

Po podstawieniu wyników kalibracji (8.56) warunek (8.62) przyjmuje formę

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_3^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_3^2} + \frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} \right) (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right) (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 1 \end{aligned} \quad (8.63)$$

Warunek Hilla (8.63) reprezentuje w przestrzeni naprężeń głównych powierzchnię walcową o przekroju eliptycznym i osi zgodnej z osią hydrostatyczną. Aby to zilustrować posłużymy się współrzędnymi Haigha–Westergaarda (8.5), por. Ganczarski i Lenczowski [46]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{\xi}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho(\theta) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta + 2\pi/3) \end{Bmatrix} \quad (8.64)$$

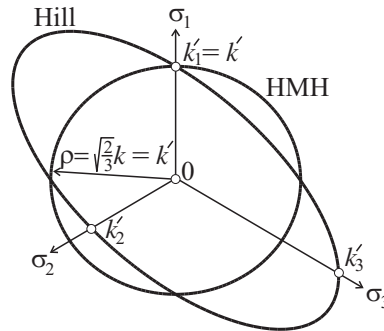
Podstawiając (8.64) do (8.63) otrzymujemy następujące wyrażenie na zależny od kąta promień powierzchni walcowej Hilla

$$\rho(\theta) = \left[\frac{2}{\left(\frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_3^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) \sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \left(\frac{1}{k_3^2} + \frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} \right) \sin^2 \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) + \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right) \sin^2 \theta} \right]^{1/2} \quad (8.65)$$

Zauważmy, że w przypadku $k_1 = k_2 = k_3 = k$ wzór (8.65) przechodzi w klasyczny warunek HMM

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} k = \text{const} \quad (8.66)$$

reprezentujący w przestrzeni Haigha–Westergaarda walec kołowy, por. rys. 8.9.

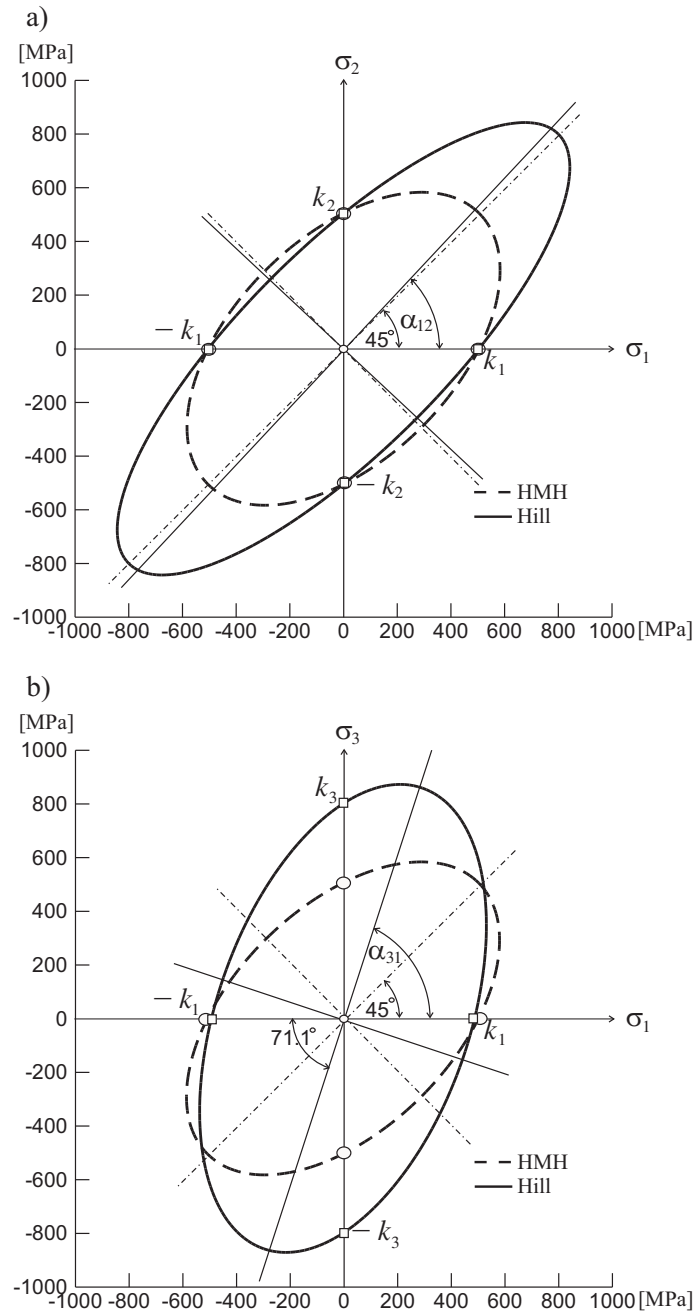


Rysunek 8.9. Porównanie warunków plastyczności HMH oraz Hilla ($k_1 = k$, $k_2 = 0.8k$, $k_3 = 1.5k$) we współrzędnych Haigha–Westergaarda

8.4. Ograniczenie warunku Hilla dla materiałów silnie ortotropowych - warunek Hu–Marina

Prześledzimy obecnie przydatność warunku Hilla (8.58) do opisu rzeczywistych ortotropowych materiałów inżynierskich. Dla prostoty dalszych rozważań, ograniczymy się do przypadku zgodności kierunków głównych naprężenia i ortotropii materiałowej, gdy warunek (8.58) redukuje się do zawężonej postaci (8.63).

Warunek Hilla (8.63) obowiązuje dla większości rzeczywistych materiałów inżynierskich wykazujących ortotropię plastyczną. Stopień ortotropii nie może być jednak dowolnie duży. Przedstawimy obecnie dwa przykłady materiałów ortotropowych, z których pierwszy można poprawnie opisać warunkiem Hilla, natomiast w stosunku do drugiego opis warunkiem Hilla prowadzi do fizycznie niedopuszczalnej degeneracji powierzchni granicznej. Na rys. 8.10 dokonano porównania warunku Hilla z izotropową aproksymacją warunkiem Hubera–von Misesa–Hencky’ego dla stopu tytanu OTCz. Materiał OTCz wykazuje niezbyt silną ortotropię plastyczną, zbliżoną do symetrii poprzecznie izotropowej (granice plastyczności w płaszczyźnie 1–2 różnią się nieznacznie, natomiast oś 3 jest osią dominującą ortotropii). W płaszczyźnie ”słabej” ortotropii 1–2, elipsa Hilla jest nieznacznie tylko obrócona w kierunku osi 2 ($\alpha_{12} \cong 45^\circ$), jednak jej większa półoś jest wyraźnie dłuższa niż w aproksymacji HMH rys. 8.10a. Natomiast w płaszczyźnie ”silnej” ortotropii 1–3 obrót osi elipsy Hilla jest znacząco widoczny ($\alpha_{13} \cong 71^\circ$) rys. 8.10b. W konsekwencji, próba aproksymacji powierzchni ortotropowej Hilla, walcem kołowym HMH, obarczona jest dużym



Rysunek 8.10. Porównanie ortotropowego warunku plastyczności Hilla z izotropową aproksymacją HMH dla stopu tytanu OTCz tab. 1.3 ($k_1 = 490$ MPa, $k_2 = 520$ MPa, $k_3 = 800$ MPa): a) przekrój w płaszczyźnie „słabej” ortotropii prostopadłej do osi dominującej ortotropii (1, 2), b) przekrój w płaszczyźnie „silnej” ortotropii zawierającej oś dominującej ortotropii (1, 3)

błędem i nie może być stosowana. Reasumując, materiały o niezbyt silnej ortotropii mogą być opisywane warunkiem Hilla.

W założeniach Hilla, dewiatorowa postać warunku plastyczności (8.63) przedstawia walec eliptyczny o osi zgodnej z osią hydrostatyczną. Jednak w przypadku bardzo silnej ortotropii, gdy np. $k_3 \gg k_1$ i $k_3 \gg k_2$ (co zachodzi przykładowo dla mosiądzu Ł62 pokazanego w tab. 1.3), elipsa w przekroju powierzchni Hilla płaszczyzną 1–2 może ulec degeneracji do dwóch hiperbol. Wówczas kwadrat długości krótszej półosi elipsy przechodzi, z liczby rzeczywistej dodatniej, na ujemną rys. 8.12b.

Warunek zapobiegający utracie eliptyczności warunku Hilla ma postać, por. Ottosen i Ristinmaa [110]

$$\frac{2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{2}{k_3^2 k_1^2} > \frac{1}{k_1^4} + \frac{1}{k_2^4} + \frac{1}{k_3^4} \quad (8.67)$$

W ogólnym przypadku materiałów silnie ortotropowych, dla których warunek (8.67) nie jest spełniony, należy powrócić do pełnego, *dziwięcioparametrowego ortotropowego warunku von Misesa* w postaci tensorowej (8.45), zapisanego dla przypadku zgodności kierunków głównych ortotropii materiałowej z kierunkami głównymi naprężenia, mianowicie

$$\Pi_{11}\sigma_1^2 + \Pi_{22}\sigma_2^2 + \Pi_{33}\sigma_3^2 + 2(\Pi_{12}\sigma_1\sigma_2 + \Pi_{23}\sigma_2\sigma_3 + \Pi_{31}\sigma_3\sigma_1) = 1 \quad (8.68)$$

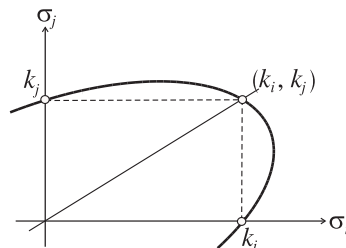
Wyrazy uwzględniające ścinanie w (8.45) znikają, gdyż $\tau_{23} \equiv \tau_{31} \equiv \tau_{12} \equiv 0$. Warunek (8.68) zawiera sześć aktywnych, niezależnych parametrów materiałowych. W celu kalibracji tego warunku należy przeprowadzić trzy próby jednoosiowego rozciągania wzdłuż głównych osi ortotropii, które określają trzy pierwsze moduły $\Pi_{11}, \Pi_{22}, \Pi_{33}$

$$\begin{aligned} \sigma_1 = k_1 \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = 0 &\longrightarrow \Pi_{11} = 1/k_1^2 \\ \sigma_2 = k_2 \quad \sigma_1 = 0 \quad \sigma_3 = 0 &\longrightarrow \Pi_{22} = 1/k_2^2 \\ \sigma_3 = k_3 \quad \sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = 0 &\longrightarrow \Pi_{33} = 1/k_3^2 \end{aligned} \quad (8.69)$$

Pozostałe trzy moduły $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$ należy określić na podstawie dodatkowych warunków

$$\begin{aligned} \sigma_1 = k_1 \quad \sigma_2 = k_2 \quad \sigma_3 = 0 &\longrightarrow \Pi_{12} = -1/2k_1k_2 \\ \sigma_1 = k_1 \quad \sigma_3 = k_3 \quad \sigma_2 = 0 &\longrightarrow \Pi_{13} = -1/2k_1k_3 \\ \sigma_2 = k_2 \quad \sigma_3 = k_3 \quad \sigma_1 = 0 &\longrightarrow \Pi_{23} = -1/2k_2k_3 \end{aligned} \quad (8.70)$$

Warunki (8.70) mogą być zinterpretowane jako kryteria zgodności dwuosio- wych stanów granicznych (k_i, k_j) z odpowiednimi parami granic plastyczności



Rysunek 8.11. Graficzna interpretacja warunków (8.70)

w próbach jednoosiowych k_i, k_j , por. rys. 8.11. Wykonana w ten sposób kalibracja ortotropowego warunku von Misesa (8.68) prowadzi do trójosiowego uogólnienia warunku typu *Hu–Marina* [67] (por. Ganczarski i Skrzypek [50] oraz Skrzypek i Ganczarski [142])

$$\left(\frac{\sigma_1}{k_1}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{k_1k_2} + \left(\frac{\sigma_2}{k_2}\right)^2 - \frac{\sigma_2\sigma_3}{k_2k_3} + \left(\frac{\sigma_3}{k_3}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_3}{k_1k_3} = 1 \quad (8.71)$$

Można wykazać, że w przeciwieństwie do warunku Hilla (8.63), warunek typu uogólnionego *Hu–Marina* przedstawia zawsze walec eliptyczny, nawet w przypadku bardzo silnej ortotropii. Cecha ta jest bardzo istotna, bowiem, powierzchnie tego typu nie naruszają postulatu stateczności Druckera (por. podrozdział 7.2), czego nie gwarantują powierzchnie oparte na klasycznym warunku Hilla. Postać warunku typu *Hu–Marina* określona równaniem (8.71), daje się równocześnie, na drodze elementarnych rachunków, przekształcić do postaci „pseudodewiatorowej”

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{k_1} - \frac{\sigma_2}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2}{k_2} - \frac{\sigma_3}{k_3}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_3}{k_3} - \frac{\sigma_1}{k_1}\right)^2 = 1 \quad (8.72)$$

Z równania (8.72) wynika geometryczne znaczenie trzech granic plastyczności k_1, k_2 i k_3 , wyznaczających jednoznacznie nachylenie osi „pseudohydrostatycznej” ortotropowej powierzchni cylindrycznej typu *Hu–Marina*. Podkreślimy jednak, że oś „pseudohydrostatyczna” nie jest osią równonachyloną w przestrzeni $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, bowiem obowiązuje wzdłuż niej warunek równomiernej wytrzymałości $\sigma_1 = \alpha k_1, \sigma_2 = \alpha k_2$ i $\sigma_3 = \alpha k_3$. Warunek typu *Hu–Marina* (8.71) pozwala zatem uwolnić się od ograniczenia stosowalności warunku Hilla (8.67), polegającego na utracie eliptyczności klasycznego warunku Hilla w przypadku silnej ortotropii plastycznej.

W szczególnym przypadku płaskiego stanu naprężenia $\sigma_3 = 0$, zamiast trójparametrowego warunku (8.71), otrzymujemy *dwuparametrowy warunek Hu–Marina* [67]

$$\left(\frac{\sigma_1}{k_1}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{k_1k_2} + \left(\frac{\sigma_2}{k_2}\right)^2 = 1 \quad (8.73)$$

Porównując 2-parametrowy warunek Hu–Marina (8.73) z *trójparametrowym warunkiem Hilla* (8.59), zapisanym dla przypadku zgodności osi głównych naprężenia z osiami ortotropii ($\tau_{yx} = 0, \sigma_x, \sigma_y = \sigma_1, \sigma_2$, ale $k_x, k_y, k_z = k_1, k_2, k_3$), czyli

$$\left(\frac{\sigma_1}{k_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2}\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\sigma_2}{k_2}\right)^2 = 1 \quad (8.74)$$

otrzymujemy zależność wyrażającą k_3 poprzez k_1 i k_2

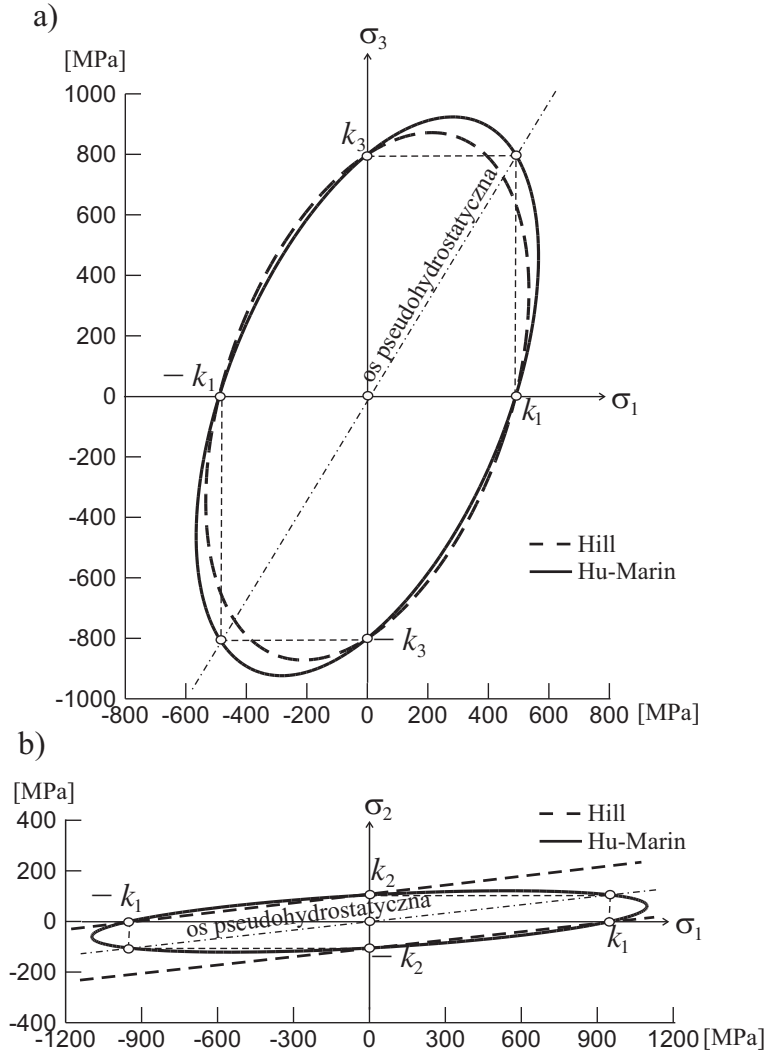
$$\frac{1}{k_3^2} = \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1k_2} \quad (8.75)$$

przy której oba warunki są identyczne. Jednak w (8.74) stała k_3 jest zależna.

Dla ilustracji zalet sformułowania warunku ortotropowego typu Hu–Marina, w porównaniu z warunkiem Hilla, prześledzimy ich przydatność dla dwóch rodzajów materiałów, różniących się stopniem ortotropii plastycznej. W przypadku ”słabej” ortotropii (stop tytanu) obie hipotezy dają zadowalające wyniki. Przedstawiając graficznie powierzchnie plastyczności typu Hilla (8.74) i Hu–Marina (8.73), przykładowo dla stopu tytanu OTCz (tab. 1.3), otrzymujemy w przekroju płaszczyzną $\sigma_2 = 0$ (płaszczyzna ortotropii) dwie elipsy (rys. 8.12a). Natomiast, w przypadku mosiądzu Ł62 (tab. 1.3) charakteryzującego się tak silną ortotropią, że nie jest spełniony warunek eliptyczności (8.67), powierzchnia Hilla przedstawia parę wklęsłych walców hiperbolicznych. Powstają one wskutek „otwarcia” powierzchni walca eliptycznego w kierunku osi „pseudohydrostatycznej” rys. 8.12b. Natomiast powierzchnia typu Hu–Marina przedstawia zawsze walec eliptyczny, niezależnie od tego jak silna jest ortotropia. Efekt powyższy jest doskonale widoczny w płaszczyźnie największej ortotropii 1–2 ($\sigma_3 = 0$) rys. 8.12b. Takie zachowanie warunku typu Hu–Marina jest możliwe dzięki temu, że muszą być spełnione jednocześnie trzy warunki w próbach jednoosiowych, oraz trzy dodatkowe w warunki (8.70).

Dokonując uogólnienia oryginalnego warunku plastyczności Hilla (8.54) na wyższe (parzyste) potęgi, otrzymujemy *uogólnienie warunku Hersheya–Daviesa* (8.13) *na przypadek ortotropii*

$$\begin{aligned} & -\Pi_{23}|\sigma_y - \sigma_z|^m - \Pi_{13}|\sigma_z - \sigma_x|^m - \Pi_{12}|\sigma_x - \sigma_y|^m \\ & + \Pi_{44}|\tau_{yz}|^m + \Pi_{55}|\tau_{zx}|^m + \Pi_{66}|\tau_{xy}|^m = 1 \end{aligned} \quad (8.76)$$



Rysunek 8.12. Porównanie warunków plastyczności Hilla i von Misesa–Hu–Marina dla materiałów ortotropowych: a) „słaba” ortotropia: stop tytanu OTCz ($k_1 = 490$ MPa, $k_2 = 520$ MPa, $k_3 = 800$ MPa), b) „silna” ortotropia: mosiądz Ł62 ($k_1 = 950$ MPa, $k_2 = 105$ MPa, $k_3 = 120$ MPa) tab. 1.3

Stałe $\Pi_{23}, \dots, \Pi_{66}$ oznaczają teraz uogólnione moduły ortotropii plastycznej określone wzorami o analogicznej budowie jak warunku Hilla (8.56), mianowicie

$$-\Pi_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|k_y|^m} + \frac{1}{|k_z|^m} - \frac{1}{|k_x|^m} \right) \quad \Pi_{44} = \frac{1}{|k_{yz}|^m}$$

$$\begin{aligned}
-\Pi_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|k_z|^m} + \frac{1}{|k_x|^m} - \frac{1}{|k_y|^m} \right) & \Pi_{55} &= \frac{1}{|k_{zx}|^m} \\
-\Pi_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|k_x|^m} + \frac{1}{|k_y|^m} - \frac{1}{|k_z|^m} \right) & \Pi_{66} &= \frac{1}{|k_{xy}|^m}
\end{aligned} \tag{8.77}$$

Jednak w obecnie rozważanym przypadku ich wymiar zależy od wartości wykładnika m i wynosi MPa^{-m} .

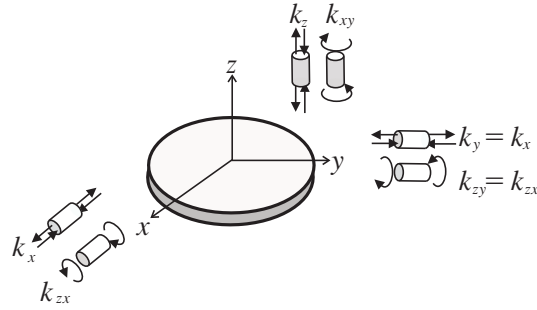
Podkreślmy raz jeszcze, że warunek Hilla (8.54), bądź jego uogólnienie na wyższe potęgi typu anizotropowego Hersheya–Daviesa (8.76), nie wykazuje różnicy w osiągnięciu stanu granicznego materiału przez rozciąganie bądź ściskanie $k_{tx} = k_{cx}$, $k_{ty} = k_{cy}$, $k_{tz} = k_{cz}$. Stanowi to istotne ograniczenie, bowiem wyklucza stosowanie warunków tego typu do klasy *materiałów kruchych*, bądź *sypkich* (skały, beton, ceramika, grunty), w których efekt *strength differential* jest wyraźny i nie może być pominięty.

8.5. Przypadek poprzecznej izotropii

Warunek Hilla (8.54), zawierający 6 niezależnych współczynników utożsamianych z odpowiednimi granicami plastyczności k_x , k_y , k_z , k_{yz} , k_{zx} i k_{xy} , jest często zbyt ogólny w zastosowaniu do materiałów wykazujących grupę symetrii typu *poprzecznej izotropii* (ang. *transverse isotropy*). W szczególności, jeśli już w zakresie sprężystym zachowana jest symetria w postaci poprzecznej izotropii, należy oczekiwać, że również i w zakresie plastycznym należy zawęzić przypadek pełnej plastycznej ortotropii do *poprzecznej izotropii plastycznej*, por. podrozdział 4.4. Przyjmujemy, że oś z jest osią ortotropii, natomiast płaszczyzna x i y jest płaszczyzną izotropii poprzecznej. Przypadek ten znajduje zastosowanie, np. w kompozytach zbrojonych kierunkowo (zob. rozdział 5).

Posługując się równaniami (8.54) lub (8.55) oraz kalibracją (8.56) i zakładając kierunki poprzecznej izotropii x, y : $k_x = k_y \neq k_z$ oraz $k_{zx} = k_{zy} \neq k_{xy}$, można zredukować liczbę współczynników w *równaniu Hilla* do 4, np. dwóch granic plastyczności na rozciąganie bądź ściskanie k_x i k_z , oraz dwóch granic plastyczności na ścinanie k_{zx} i k_{xy} (rys. 8.13). Zatem otrzymujemy

$$\begin{aligned}
-\Pi_{13} &= -\Pi_{23} = \frac{1}{2k_z^2} & \Pi_{44} &= \Pi_{55} = \frac{1}{k_{zx}^2} \\
-\Pi_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{k_x^2} - \frac{1}{k_z^2} \right) & \Pi_{66} &= \frac{1}{2k_{xy}^2}
\end{aligned} \tag{8.78}$$



Rysunek 8.13. Przypadek poprzecznej izotropii plastycznej

W przypadku poprzecznej izotropii macierzy Hilla w reprezentacjach (8.52) lub (8.53) redukują się, do postaci 4-parametrowych

$$\left[\text{pop III}^H \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\Pi_{12} - \Pi_{13} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & & & \\ & -\Pi_{12} - \Pi_{23} & \Pi_{13} & & & \\ & & -2\Pi_{13} & & & \\ \hline & & & \Pi_{44} & & \\ & & & & \Pi_{44} & \\ & & & & & \Pi_{66} \end{array} \right]$$

(8.79)

lub

$$\left[\text{pop III}^H \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Pi_{11} & \frac{\Pi_{33} - 2\Pi_{11}}{2} & -\frac{\Pi_{33}}{2} & & & \\ & \Pi_{11} & -\frac{\Pi_{33}}{2} & & & \\ & & \Pi_{33} & & & \\ \hline & & & \Pi_{44} & & \\ & & & & \Pi_{44} & \\ & & & & & \Pi_{66} \end{array} \right]$$

(8.80)

Poprzecznie izotropowe warunki Hilla zapisane przy użyciu reprezentacji (8.79)

lub (8.80) przyjmują odpowiednio postaci

$$\frac{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}{2k_z^2} + \left(\frac{1}{k_x^2} - \frac{1}{2k_z^2} \right) (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{k_{zx}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{k_{xy}^2} = 1 \quad (8.81)$$

lub równoważnie

$$\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{k_x^2} + \frac{\sigma_z^2}{k_z^2} - \left(\frac{2}{k_x^2} - \frac{1}{k_z^2} \right) \sigma_x \sigma_y - \frac{\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x}{k_z^2} + \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{k_{zx}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{k_{xy}^2} = 1 \quad (8.82)$$

Obie powyższe formy wykorzystują 4 granice plastyczności k_x, k_z, k_{zx} i k_{xy} traktowane jako niezależne. Oznacza to, że w płaszczyźnie poprzecznej izotropii k_{xy} jest niezależna od k_x , a ponadto określony współczynnik przy wyrazie $\sigma_x \sigma_y$ zawiera w sobie nie tylko k_x , ale również k_z . Podobnie jak to miało miejsce w przypadku ogólnej ortotropii, na osiągnięcie uplastycznienia w płaszczyźnie izotropii x, y wpływa więc nie tylko granica plastyczności w tej płaszczyźnie k_x , ale również granica plastyczności w kierunku ortotropii k_z . W związku z powyższym, warunki (8.81) i (8.82) należy zakwalifikować jako przypadki *materiału plastycznie poprzecznie izotropowego Hilla klasy tetragonalnej* (por. rys. 6.1b).

Oprócz tak sformułowanego warunku poprzecznie izotropowego Hilla klasy tetragonalnej, można również wprowadzić *warunek poprzecznie izotropowy typu Hu–Marina klasy heksagonalnej* (por. rys. 6.1c)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{k_x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{k_x} - \frac{\sigma_z}{k_z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{k_z} - \frac{\sigma_x}{k_x} \right)^2 + \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{k_{zx}^2} + 3 \frac{\tau_{xy}^2}{k_x^2} = 1 \quad (8.83)$$

lub

$$\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{k_x^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{k_x^2} + \frac{\sigma_z^2}{k_z^2} - \frac{\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x}{k_z k_x} + \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{k_{zx}^2} + 3 \frac{\tau_{xy}^2}{k_x^2} = 1 \quad (8.84)$$

które w płaszczyźnie poprzecznej izotropii redukują się do warunku HMM. Zauważmy, że powyższe warunki (8.83) lub (8.84) odpowiadają uogólnionym warunkom typu Hu–Marina przy $k_1 = k_2$ (8.72) lub (8.71) wzbogaconym o wyrazy zawierające ścinanie. Można je wyprowadzić z warunku ortotropowego von Misesa (8.45) w sposób analogiczny do zaprezentowanego w podrozdziale 8.4, por. (8.69) i (8.70). Wprowadzając ograniczenia poprzecznej

izotropii otrzymujemy obecnie:

– trzy próby, rozciągania w kierunkach izotropii x i ortotropii z oraz ścinania w płaszczyźnie ortotropii zx

$$\begin{aligned} \sigma_x = k_x \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 &\longrightarrow \Pi_{11} = \Pi_{22} = \frac{1}{k_x^2} \\ \sigma_z = k_z \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 &\longrightarrow \Pi_{33} = \frac{1}{k_z^2} \\ \tau_{zx} = k_{zx} \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 &\longrightarrow \Pi_{44} = \Pi_{55} = \frac{1}{k_{zx}^2} \end{aligned} \quad (8.85)$$

– ponadto trzy dodatkowe warunki zgodności stanów dwuosiowych z odpowiednimi parami granic plastyczności

$$\begin{aligned} \sigma_x = k_x, \sigma_y = k_x \quad \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 &\longrightarrow \Pi_{12} = -\frac{1}{2k_x^2} \\ \sigma_x = k_x, \sigma_z = k_z \quad \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 &\longrightarrow \Pi_{13} = -\frac{1}{2k_x k_z} \\ \sigma_x = k_x, \tau_{xy} = \frac{k_x}{\sqrt{3}} \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 &\longrightarrow \Pi_{66} = \frac{3}{k_x^2} \end{aligned} \quad (8.86)$$

Warunki poprzecznie izotropowe Hilla klasy tetragonalnej (8.81) lub (8.82) oraz typu Hu–Marina klasy heksagonalnej (8.83) lub (8.84) zostały porównane dla ustalonego stosunku $R = 2(k_z/k_x)^2 - 1 = 2$, $k_{xy}/k_x = 0.8$, $k_{(xy)}/k_x = 0.9$, $k_{zx}/k_x = 0.4$ w dwóch płaszczyznach: poprzecznej izotropii rys. 8.14a, c oraz ortotropii rys. 8.14b, d. Stany naprężenia zilustrowane na rys. 8.14a, b odpowiadają dwuosiemu rozciąganiu w płaszczyźnie poprzecznej izotropii (σ_x, σ_y) oraz w płaszczyźnie ortotropii (σ_x, σ_z) . Stany naprężenia zilustrowane na rys. 8.14c, d odpowiadają jednoosiowemu rozciąganiu ze ścinaniem w płaszczyźnie poprzecznej izotropii (σ_x, τ_{xy}) oraz w płaszczyźnie ortotropii (σ_x, τ_{zx}) . Wszystkie składowe naprężenia zostały jednolicie odniesione do osiowej granicy plastyczności w płaszczyźnie poprzecznej izotropii k_x .

Podkreśmy, że warunek poprzecznie izotropowy Hilla w sformułowaniu odpowiadającym klasie tetragonalnej (8.81) lub (8.82) zawiera 4 niezależne granice plastyczności. Natomiast warunek poprzecznie izotropowy typu wzbożonego Hu–Marina (8.83) lub (8.84) zawiera tylko 3 niezależne granice plastyczności. Zatem reprezentacja macierzy konstytutywnej plastyczności wygląda następująco (8.80)

$$[\text{pop III}^{\text{HM}}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{k_x^2} & -\frac{1}{2k_x^2} & -\frac{1}{2k_x k_z} & & & \\ & \frac{1}{k_x^2} & -\frac{1}{2k_x k_z} & & & \\ & & \frac{1}{k_z^2} & & & \\ \hline & & & \frac{1}{k_{zx}^2} & & \\ & & & & \frac{1}{k_{zx}^2} & \\ & & & & & \frac{3}{k_x^2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} \right] \quad (8.87)$$

Oba warunki poprzecznie izotropowe klasy tetragonalnej typu Hilla (8.81) oraz klasy heksagonalnej typu Hu–Marina (8.83) opisują powierzchnię cylindryczną w przestrzeni naprężeń głównych, jednak warunek typu Hilla przedstawia walec eliptyczny o osi zgodnej z osią hydrostatyczną w przeciwieństwie do warunku typu wzbogaconego Hu–Marina, który przedstawia walec eliptyczny o osi „pseudohydrostatycznej”. Warunek typu wzbogaconego Hu–Marina nie spełnia zatem kryterium dewiatorowości, co jest ceną za zapewnienie zgodności z warunkiem Hubera–von Misesa–Hencky’ego w płaszczyźnie poprzecznej izotropii oraz zachowanie cylindryczności bez względu na stopień ortotropii (patrz dyskusja w podrozdziale 8.4).

Wybór odpowiedniego warunku granicznego poprzecznie izotropowego klasy tetragonalnej (8.81) bądź heksagonalnej (8.83) będzie zależał od zgodności z wynikami eksperymentów na rzeczywistych materiałach, które mogą podporządkowywać się jednej bądź drugiej klasie, ale również mogą wykazywać zachowanie odmienne od obu powyższych przypadków. Kluczem do prawidłowego zklasyfikowania rzeczywistego materiału poprzecznie izotropowego do odpowiedniej klasy symetrii (tetragonalnej, heksagonalnej lub mieszanej) jest kształt krzywej granicznej w płaszczyźnie poprzecznej izotropii.

Przejdziemy obecnie do wyprowadzenia warunku granicznego dla klasy mieszanej (odmiennej zarówno od klasy tetragonalnej (8.81) lub (8.82) jak i heksagonalnej (8.83) lub (8.84)). Równania typu Hu–Marina dla czystej klasy heksagonalnej (8.83) lub (8.84) zawierają trzy niezależne stałe materiałowe k_x, k_z i k_{zx} . Rzeczywiste materiały klasy mieszanej charakteryzują się występowaniem czterech niezależnych stałych materiałowych: w dwóch próbach jednoosiowego rozciągania k_x i k_z , próbie ścinania k_{zx} (8.85) oraz dodatkowo próbie dwuosiowego rozciągania $k_{(xy)}$ (ang. *bulge test*)

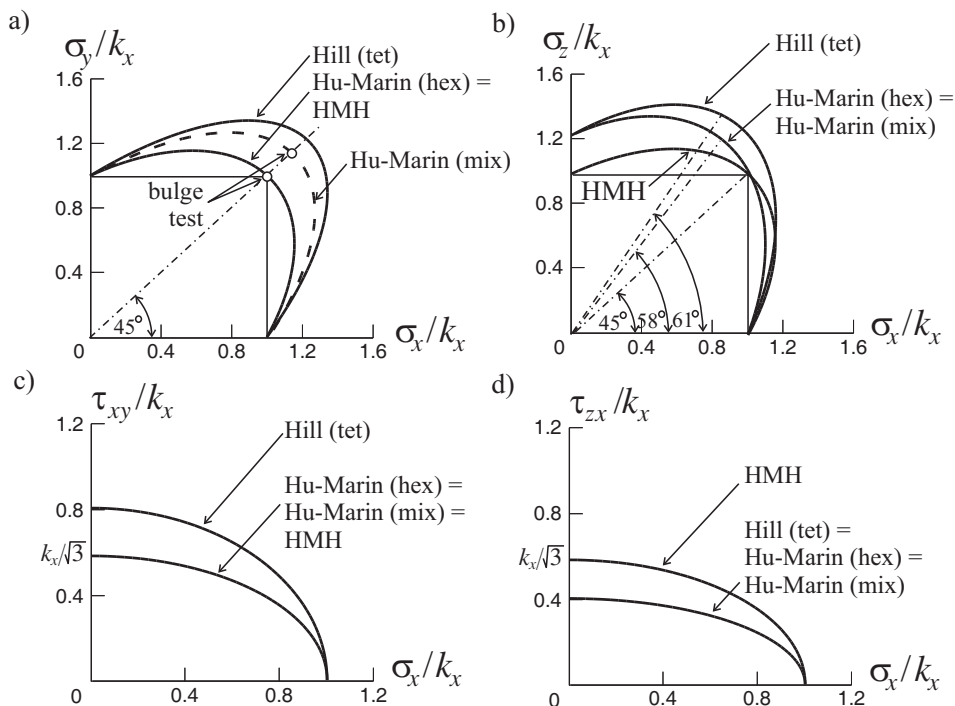
$$\sigma_x = \sigma_y = k_{(xy)} \quad \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Pi_{12} = -\frac{1}{2k_{(xy)}^2} \quad (8.88)$$

zamiast pierwszego z warunków (8.86). Prowadzi to do następującego równania powierzchni granicznej typu Hu–Marina klasy mieszanej

$$\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{k_x^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{k_{(xy)}^2} + \frac{\sigma_z^2}{k_z^2} - \frac{\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x}{k_z k_x} + \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{k_{zx}^2} + 3 \frac{\tau_{xy}^2}{k_x^2} = 1 \quad (8.89)$$

różniące się współczynnikiem przy wyrazie mieszanym (podkreślonym) w stosunku do (8.84). Warunek ten został zilustrowany liniami przerywanymi na rys. 8.14a. Warunek typu Hu–Marina klasy mieszanej pozwala lepiej od-

wzorować zachowanie materiałów kompozytowych, które w płaszczyźnie poprzecznej izotropii zachowują się odmiennie zarówno od materiału Hilla jak i Hubera–von Misesa–Hencky’ego.



Rysunek 8.14. Porównanie warunków poprzecznie izotropowych Hilla klasy tetragonalnej (8.82), Hu–Marina klasy heksagonalnej (8.84) oraz mieszanej (8.89) przy ustalonym stosunku $R = 2(k_z/k_x)^2 - 1 = 2$, $k_{xy}/k_x = 0.8$, $k_{(xy)}/k_x = 0.9$, $k_{zx}/k_x = 0.4$ dla stanów dwuosiowych w płaszczyznach: a) poprzecznej izotropii (σ_x, σ_y) , b) ortotropii (σ_x, σ_z) , c) ścinania w płaszczyźnie izotropii (σ_x, τ_{xy}) oraz d) ścinania w płaszczyźnie ortotropii (σ_x, τ_{zx})

Rozdział 9

Ograniczenia zakresu sprężystego materiałów kruchych bądź sypkich – kryteria początku zniszczenia

9.1. Charakterystyka inicjacji zniszczenia materiałów kruchych

Warunki ograniczenia zakresu sprężystego omawiane w rozdziale 8 znajdują zastosowanie dla materiałów ciągliwych, w których można na ogół założyć niewrażliwość na kierunek naprężenia (rozciągania bądź ściskania). Większość *materiałów metalicznych* o strukturze polikrystalicznej wykazuje takie zachowanie, o ile rozważymy ograniczenie odpowiadające wstępnemu poślizgowi plastycznemu. W przypadku *materiałów kruchych*, takich jak większość *materiałów ceramicznych*, *skały*, *beton*, *materiały kompozytowe* o osnowie ceramicznej typu CMC, lód i tym podobne, o lokalnym uszkodzeniu materiału decydują nie poślizgi plastyczne, lecz powstające w materiale *mikropęknięcia*, które w drodze dalszej ewolucji oraz agregacji mogą prowadzić do powstania *makropęknięć*.

Ogólna, *anizotropowa postać kryterium inicjacji zniszczenia materiałów kruchych*, może być przyjęta analogicznie do kryterium początku uplastycznienia (8.19), zatem

$$f^d = f^d(\Pi_{ij}\sigma_{ij}, \Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \Pi_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}, \dots) = 0 \quad (9.1)$$

Tensory Π_{ij} , Π_{ijkl} , Π_{ijklmn} , ... charakteryzują teraz sprężystą anizotropię materiału, który podlega zniszczeniu przez pojawienie się mikrouszkodzeń (bez

udziału plastyczności). Przyjmując, przez analogię do (8.20), tensorowo-wielomianową postać kryterium (9.1) otrzymujemy równoważnie ogólne, anizotropowe kryterium początku zniszczenia typu *Goldenblata–Kopnova*, w postaci identycznej do (8.20)

$$(\Pi_{ij}\sigma_{ij})^\alpha + (\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^\beta + (\Pi_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^\gamma + \dots - 1 = 0 \quad (9.2)$$

Pomimo że ogólna postać kryterium początku zniszczenia (9.2) jest analogiczna do postaci kryterium początku uplastycznienia (8.20), to dalsze uproszczenia tego równania dla materiałów kruchych należy przeprowadzać według innych założeń, niż dla materiałów ciągliwych. W istocie, początek *plastycznego płynięcia materiałów metalicznych* charakteryzuje (zob. rozdział 8):

1. Brak wpływu naprężenia hydrostatycznego na kryterium uplastycznienia (brak efektu *strength differential*).
2. Brak wpływu zmiany znaku naprężenia (z rozciągania na ściskanie, lub odwrotnie), na postać kryterium uplastycznienia.
3. Wypukłość powierzchni uplastycznienia (*postulat Druckera*).

Natomiast, rozpatrywany teraz początek procesu zniszczenia *materiałów kruchych* (beton, materiały ceramiczne, materiały skałopodobne, itp.), cechuje:

1. Silny wpływ naprężenia hydrostatycznego na kryterium zniszczenia.
2. Postać kryterium zniszczenia jest wyraźnie zależna od zmiany znaku naprężenia, bowiem dla większości materiałów kruchych *odporność na zniszczenie* w warunkach ściskania jest niewspółmiernie wyższa, niż w warunkach rozciągania (wyraźny efekt *strength differential*).
3. *Powierzchnia zniszczenia* jest wypukła (podobnie do powierzchni plastyczności).

W podrozdziale 8.1 przedstawiono warunki początku uplastycznienia materiałów o *strukturze polikrystalicznej*. Materiały plastyczne (większość metali, stali) nie wykazują zależności powierzchni granicznej plastyczności od ciśnienia hydrostatycznego. Jak pokazano, w takim przypadku, powierzchnie graniczne są niezależne od *pierwszego niezmiennika naprężenia* ($J_{1\sigma}$), lub równoważnie od *pierwszej współrzędnej Haigha–Westergaarda* (ξ). *Powierzchnie uplastycznienia* są wówczas typu *cyldrycznego* o osi hydrostatycznej, zatem nie pozwalają na rozróżnienie osiągnięcia stanu granicznego inicjacji zniszczenia przy rozciąganiu k_c oraz ścisaniu k_t , czyli $k_t = k_c$.

Istnieje szeroka grupa materiałów, dla których powyższe ograniczenie nie jest uzasadnione (*beton, skały, grunty, żeliwo, kompozyty zbrojone cząsteczkami*). Wówczas konieczne jest uwzględnienie w równaniu powierzchni granicznej zniszczenia *pierwszego niezmiennika naprężenia* ($J_{1\sigma}$) lub równoważnie *pierwszej współrzędnej Haigha–Westergaarda* (ξ). Powierzchnie graniczne w przestrzeni naprężeń głównych tracą wtedy własność cylindryczności, co pozwala na rozróżnienie zniszczenia przy rozciąganiu oraz ściskaniu $k_t \neq k_c$ (ang. *strength differential materials*). Jest to bezpośrednią konsekwencją uwzględnienia w równaniu pierwszego niezmiennika, modyfikującego kształt i wielkość przekroju poprzecznego krzywej granicznej wzdłuż osi hydrostatycznej.

W ogólnym przypadku *zniszczenia materiału izotropowego*, równanie powierzchni granicznej można zapisać w funkcji trzech niezmienników: pierwszego dla tensora naprężenia $J_{1\sigma}$ oraz drugiego i trzeciego dla dewiatora naprężenia J_{2s}, J_{3s}

$$f(J_{1\sigma}, J_{2s}, J_{3s}; k) = 0 \quad (9.3)$$

lub, równoważnie, trzech współrzędnych *Haigha–Westergaarda*

$$f(\xi, \rho, \theta; k) = 0 \quad (9.4)$$

które wskazują na zależność od położenia na osi hydrostatycznej ξ (odmienny wpływ rozciągania, bądź ściskania). Wszystkie te powierzchnie wykazują pewien rodzaj *symetrii dyskretnej* względem osi hydrostatycznej, jednak tylko w szczególnym przypadku – niezależności od trzeciego niezmiennika J_{3s} (lub θ), jest to pełna *symetria obrotowa*.

Prosta kombinacja powyższych trzech niezmienników prowadzi do równania izotropowej powierzchni granicznej w postaci wymiarowo jednorodnej (Iyer i Lissenden [70])

$$f = aJ_{1\sigma}^2 + bJ_{2s} + c\text{sgn}(J_{3s})(|J_{3s}|^{2/3}) - 1 = 0 \quad (9.5)$$

gdzie występują trzy parametry materiałowe a, b i c . Równanie tego typu, znajduje potwierdzenie w opisie inicjacji zniszczenia np. materiałów na bazie *żelaza* (Brünig i inni [13]).

9.2. Izotropowe obrotowo-symetryczne powierzchnie zniszczenia materiałów kruchych zależne od σ_h i J_{2s} , lecz niezależne od J_{3s}

Zawężymy dalej geometryczną symetrię izotropowych powierzchni granicznych do pełnej symetrii obrotowej względem *osi hydrostatycznej* o równaniu $\sigma_1 =$

$\sigma_2 = \sigma_3$. Powierzchnie obrotowo-symetryczne nie mogą oczywiście zależeć od trzeciego niezmiennika J_{3s} ani, równoważnie, od trzeciego parametru Haigha–Westergaarda θ .

Ogólną postać trójparametrowej izotropowej powierzchni granicznej obrotowo-symetrycznej niezależnej od trzeciego niezmiennika, zaproponował Burzyński [14]

$$A\sigma_{\text{eq}}^2 + B\sigma_{\text{h}}^2 + C\sigma_{\text{h}} - 1 = 0 \quad (9.6)$$

gdzie A, B i C są stałymi materiałowymi. Warunek Burzyńskiego (9.6) przyjmuje formę równoważną, w postaci niezmienniczej zależnej od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia $J_{1\sigma}$ i drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia J_{2s}

$$A3J_{2s} + B\left(\frac{J_{1\sigma}}{3}\right)^2 + C\left(\frac{J_{1\sigma}}{3}\right) - 1 = 0 \quad (9.7)$$

natomiast w przestrzeni Haigha–Westergaarda, otrzymujemy odpowiednio

$$A\frac{3}{2}\rho^2 + B\left(\frac{\xi}{\sqrt{3}}\right)^2 + C\frac{\xi}{\sqrt{3}} - 1 = 0 \quad (9.8)$$

Trzy stałe w warunku Burzyńskiego A, B i C zostały określone na podstawie trzech prób: jednoosiowego rozciągania (k_t), jednoosiowego ściskania (k_c) i prostego ścinania (k_s). Prowadzi to do równania trójparametrowego warunku Burzyńskiego, w postaci

$$\frac{k_t k_c}{3k_s^2} \sigma_{\text{eq}}^2 + \left(9 - \frac{3k_t k_c}{k_s^2}\right) \sigma_{\text{h}}^2 + 3(k_c - k_t) \sigma_{\text{h}} - k_t k_c = 0 \quad (9.9)$$

W równaniu (9.9), wszystkie trzy parametry k_t, k_c i k_s są niezależnymi stałymi materiałowymi, odpowiadającymi wartościom granicznym inicjacji uplastycznienia bądź zniszczenia w próbach: jednoosiowego rozciągania, ściskania, bądź ścinania. Plastyczne płynięcie bądź zniszczenie, zainicjowane w dowolnym punkcie materialnym (RVE lub RUC), rozpoczyna zazwyczaj dalszy proces rozwoju plastyczności i uszkodzeń, któremu towarzyszy przebudowa początkowej powierzchni plastyczności względnie zniszczenia. Zależnie od właściwości materiałów: plastycznych, kruchych, sypkich, kompozytów itd., graniczne wartości naprężeń k_t, k_c i k_s w kolejnych etapach cyklicznego obciążenia ulegają zazwyczaj zmianie w porównaniu do wartości początkowych, rosnąc w przypadku umocnienia (ang. *hardening*) bądź malejąc w przypadku osłabienia (ang. *softening*) (w sposób izotropowy, bądź anizotropowy). Raz zapoczątkowany proces uplastycznienia i/bądź zniszczenia może się więc nadal rozwijać. Proces ten może zachodzić pomimo redystrybucji naprężeń w konstrukcji,

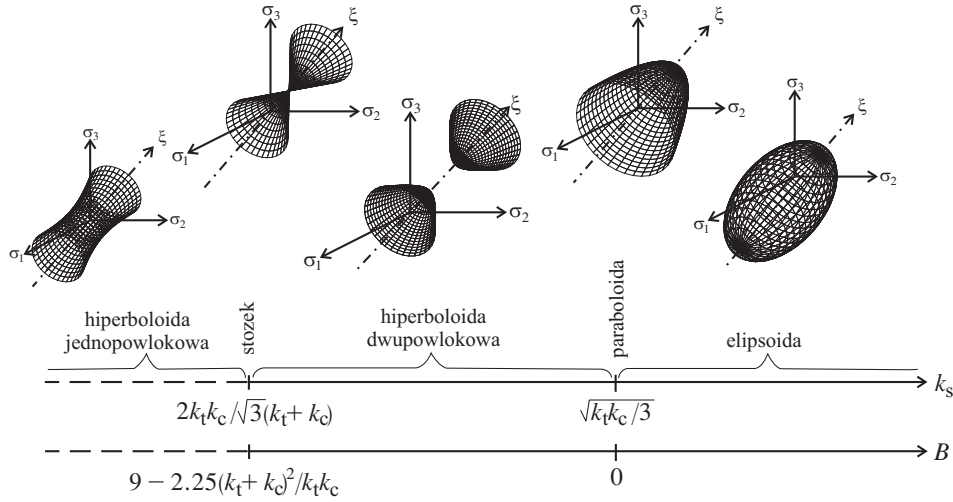
która prowadzi do spontanicznego odciążenia stref lokalnie uplastycznionych bądź zniszczonych wraz z dociążeniem stref sprężystych (nie uplastycznionych ani nie zniszczonych).

W zależności od wzajemnych relacji pomiędzy k_t , k_c i k_s , równanie (9.9) przedstawia rozmaite typy *powierzchni obrotowej Burzyńskiego*, wszystkie jednak niezależne od trzeciej współrzędnej Haigha–Westergaarda θ bądź alternatywnie trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia J_{3s} . Mianowicie, w przypadku, gdy naprężenie graniczne przy prostym ścinaniu k_s jest większe niż $\sqrt{k_t k_c / 3}$, jest to elipsoida obrotowa, gdy równe $\sqrt{k_t k_c / 3}$ – paraboloida obrotowa, natomiast gdy k_s jest mniejsze niż $\sqrt{k_t k_c / 3}$, powierzchnia Burzyńskiego przedstawia, odpowiednio, hiperboloidę dwupowłokową (tylko jedna czasza ma sens fizyczny) bądź stożek obrotowy, bądź wreszcie wklęsłą hiperboloidę jednopowłokową (która nie spełnia oczywiście postulatu wypukłości, por. 7.3 (zob. rys. 9.1):

1. $k_s > \sqrt{\frac{k_t k_c}{3}}$ elipsoidalna obrotowa
2. $k_s = \sqrt{\frac{k_t k_c}{3}}$ paraboloidalna obrotowa
3. $k_s < \sqrt{\frac{k_t k_c}{3}}$ hiperboloidalna dwupowłokowa
4. $k_s = \frac{2k_t k_c}{\sqrt{3}(k_t + k_c)}$ stożek obrotowy
5. $k_s < \frac{2k_t k_c}{\sqrt{3}(k_t + k_c)}$ hiperboloidalna jednopowłokowa

W przypadku hiperboloidy dwupowłokowej, sens fizyczny posiada jedynie ta czasza hiperboloidy, która zawiera wewnątrz początek układu współrzędnych.

W materiałach niemetalicznych (np. beton) stosunek k_c/k_t może być znacznie większy niż 1, sięgając wartości 10. W takich przypadkach obszar ograniczony powierzchnią Burzyńskiego: elipsoidą, paraboloidą bądź stożkiem, obejmuje zasadniczo strefę ściskania – tylko nieznacznie wykraczając w strefę rozciągania ($\xi > 0$), jak zilustrowano na rys. 9.2. W przypadku trójparametrowej aproksymacji elipsoidą obrotową warunki jednoosiowego rozciągania $T(k_t)$, ściskania $C(k_c)$ i prostego ścinania $S(k_s)$ spełnione są w sposób ścisły (wszystkie trzy stałe k_t , k_c i k_s niezależne). Natomiast aproksymacje dwuparametrowe, paraboloidalna bądź stożkowa, prowadzone są przez punkty T i C, co odpowiada przyjęciu k_s jako stałej zależnej $k_s(k_t, k_c)$.



Rysunek 9.1. Różne typy obrotowych powierzchni granicznych Burzyńskiego, w zależności od wartości wytrzymałości na ścinanie k_s , lub wartości współczynnika B we wzorze (9.6)

Potwierdzenie doświadczalne dla stopów metali ma *paraboloida obrotowa Burzyńskiego* (przypadek $k_s = \sqrt{\frac{k_t k_c}{3}}$) o równaniu

$$\sigma_{eq}^2 + 3(k_c - k_t) \sigma_h - k_t k_c = 0 \tag{9.10}$$

lub

$$3J_{2s} + (k_c - k_t) J_{1\sigma} - k_t k_c = 0 \tag{9.11}$$

lub

$$\frac{3}{2} \rho^2 + (k_c - k_t) \sqrt{3} \xi - k_t k_c = 0 \tag{9.12}$$

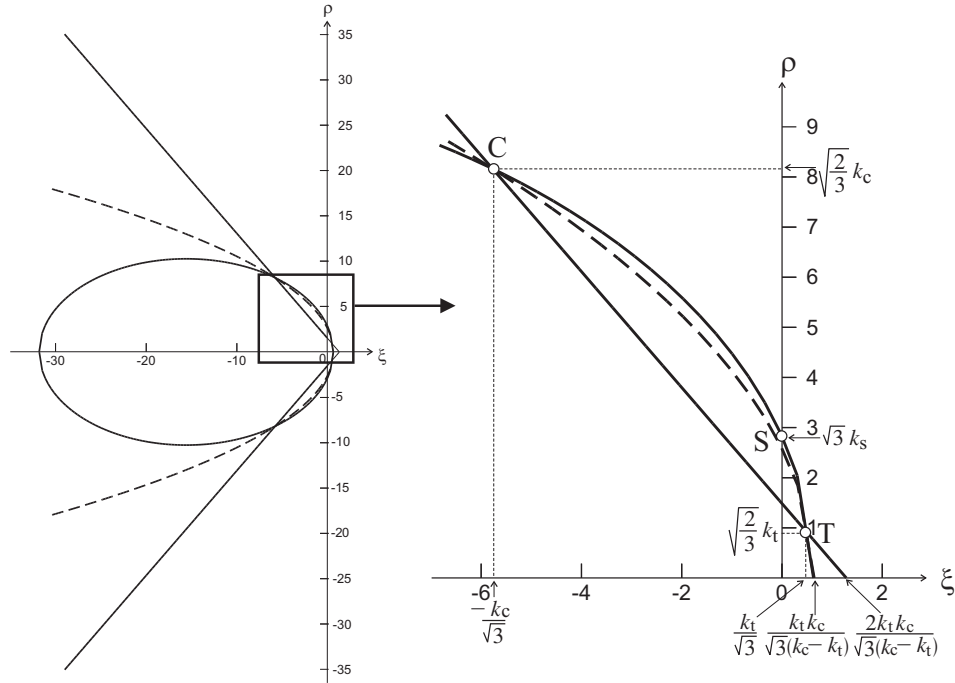
Zauważmy również, że według np. Pęcherskiego i innych [115], stałe materiałowe dla stopu *Inconel 718* na bazie niklu z dodatkiem chromu, wynoszą

$$k_t = 779 \text{ MPa}, \quad k_c = 878 \text{ MPa}, \quad k_s = 473 \text{ MPa} \tag{9.13}$$

które spełniają warunek paraboliczności ($k_s = \sqrt{\frac{k_t k_c}{3}}$). Innymi słowy, stała k_s nie jest wówczas niezależna.

W innym szczególnym przypadku, gdy

$$k_s = \frac{2k_t k_c}{\sqrt{3}(k_t + k_c)} \tag{9.14}$$



Rysunek 9.2. Przekroje: eliptyczny, paraboliczny oraz stożkowy powierzchni granicznej Burzyńskiego płaszczyzną Haigha–Westergaarda $\xi - \rho$ w przypadku hipotetycznego materiału, scharakteryzowanego stosunkiem wytrzymałości na ściskanie do wytrzymałości na rozciąganie $k_c/k_t = 10$

trójparametrowy warunek Burzyńskiego (9.9) przechodzi, po zastosowaniu operacji pierwiastkowania, w dwuparametrową aproksymację stożkową Burzyńskiego

$$\sigma_{\text{eq}} + 3 \frac{k_c - k_t}{k_t + k_c} \sigma_h - 2 \frac{k_t k_c}{k_t + k_c} = 0 \quad (9.15)$$

lub

$$\sqrt{3} J_{2s} + \frac{k_c - k_t}{k_t + k_c} J_{1\sigma} - 2 \frac{k_t k_c}{k_t + k_c} = 0 \quad (9.16)$$

lub

$$\rho + \frac{k_c - k_t}{k_t + k_c} \sqrt{2} \xi - 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{k_t k_c}{k_t + k_c} = 0 \quad (9.17)$$

którą można sprowadzić do izotropowego warunku Druckera–Pragera, często spotykanego w literaturze. Jest to krańcowy przypadek, gwarantujący

wypukłość powierzchni granicznej typu Burzyńskiego. Poza tą granicą, gdy $k_s < \frac{2k_t k_c}{\sqrt{3}(k_t + k_c)}$, powierzchnia stożkowa przekształca się (geometrycznie) we wklęsłą hiperboloide jednopowłokową. Stojąc jednak na gruncie postulatu stateczności Druckera, powierzchnie wklęsłe muszą być wykluczone z dalszych rozważań.

Wprowadzając oznaczenia

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{k_c - k_t}{k_t + k_c}, \quad k = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{k_t k_c}{k_t + k_c} \quad (9.18)$$

powierzchnię stożkową Burzyńskiego (9.15, 9.16, 9.17) można sprowadzić ostatecznie do dwuparametrowego izotropowego warunku Druckera–Pragera [39]. Stanowi on modyfikację warunku uplastycznienia materiałów ciągliwych typu HMM na materiały kruche przez uwzględnienie w równaniu powierzchni zniszczenia wpływu ciśnienia hydrostatycznego σ_h . W notacji Druckera–Pragera, otrzymujemy zatem (por. (9.16))

$$f(J_{1\sigma}, J_{2s}; k) = \alpha J_{1\sigma} + \sqrt{J_{2s}} - k = 0 \quad (9.19)$$

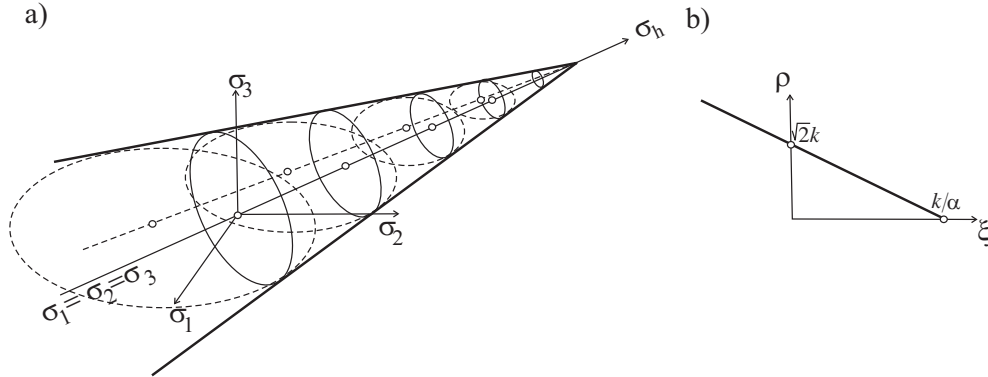
lub, analogicznie, we współrzędnych Haigha–Westergaarda

$$f(\xi, \rho; k) = \alpha \sqrt{3} \xi + \frac{\rho}{\sqrt{2}} - k = 0 \quad (9.20)$$

Warunek Druckera–Pragera (9.19–9.20) opisuje powierzchnię stożkową o przekroju kołowym i osi równo nachylonej do trzech osi σ_1, σ_2 i σ_3 (hydrostatycznej), jak pokazano na rys. 9.3. Przy hydrostatycznym rozciąganiu ($\sigma_h > 0$) przekroje powierzchni ulegają równomiernemu (izotropowemu) kurczeniu, natomiast przy hydrostatycznym ściskaniu ($\sigma_h < 0$) – równomiernemu rozszerzaniu. W przypadku $\alpha = 0$ powierzchnia Druckera–Pragera redukuje się do walca HMM, jednak należy podkreślić, że stożek Druckera–Pragera jest ograniczony od strony hydrostatycznego rozciągania ($\sigma_h < k/\alpha$), natomiast po stronie hydrostatycznego ściskania nie można doprowadzić do zniszczenia $\sigma_h \rightarrow -\infty$, co wymaga dodatkowych ograniczeń. Warunek Druckera–Pragera znajduje zastosowanie w opisie różnych metalicznych materiałów: np. aluminium, stal AISI 4330, żelazo, tytan i inne.

W zapisie rozwiniętym, warunek Druckera–Pragera (9.19)–(9.20) przyjmuje postać

$$\alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1}{3}} - k = 0 \quad (9.21)$$



Rysunek 9.3. Powierzchnia plastyczności lub zniszczenia Druckera–Pragera: a) w przestrzeni naprężeń głównych, oraz b) we współrzędnych Haigha–Westergaarda

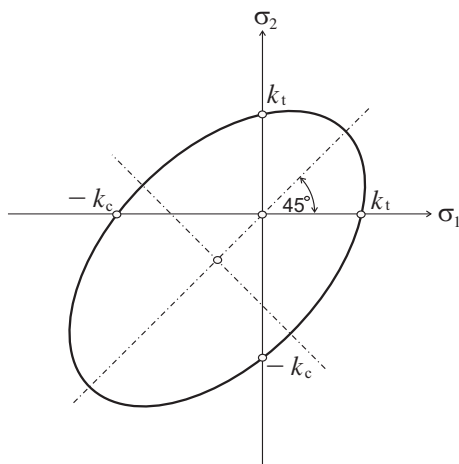
W szczególnym przypadku, przy założeniu płaskiego stanu naprężenia $\sigma_3 = 0$, powyższe równanie redukuje się do postaci

$$\alpha(\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}{3}} - k = 0 \quad (9.22)$$

przedstawiającej na płaszczyźnie σ_1, σ_2 elipsę, ze środkiem przesuniętym względem początku układu (rys. 9.4) i dłuższej osi nachylonej pod kątem 45° , oraz przecinającej osie układu w punktach o różnych współrzędnych

$$k_t = \frac{\sqrt{3}k}{1 + \sqrt{3}\alpha}, \quad k_c = \frac{\sqrt{3}k}{1 - \sqrt{3}\alpha} \quad (9.23)$$

oznaczających odpowiednie wartości wytrzymałości materiału na zniszczenie w warunkach rozciągania oraz ściskania, $k_c > k_t$ (ang. *strength differential effect*).



Rysunek 9.4. Przykładowy przekrój powierzchni granicznej Druckera–Pragera płaszczyzną $\sigma_3 = 0$

9.3. Izotropowe warunki zniszczenia materiałów kruchych zależne od σ_h , J_{2s} i J_{3s}

W poprzednim podrozdziale 9.2 omawialiśmy powierzchnie graniczne niezależne od trzeciego niezmiennika J_{3s} , które w przestrzeni naprężeń głównych należą do klasy powierzchni obrotowo-symetrycznych. Obecnie, dopuszczając również zależność od trzeciego niezmiennika J_{3s} (bądź trzeciej współrzędnej Haigha–Westergaarda θ), wychodzimy poza klasę powierzchni obrotowo-symetrycznych w sensie pełnym, lecz które mogą charakteryzować się symetrią odcinkową (zob. także 9.1). Z uwagi na zależność od pierwszego niezmiennika $J_{1\sigma}$, powierzchnie te nie są również powierzchniami cylindrycznymi.

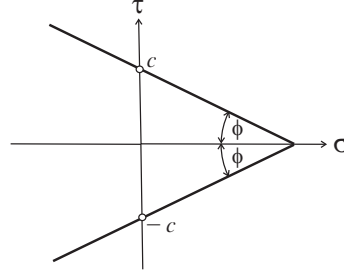
Szczególne zastosowanie do materiałów kruchych bądź sypkich znajdują powierzchnie w kształcie stożków o normalnym przekroju eliptycznym, bądź powierzchnie w formie nieregularnych ostrosłupów.

Interesujący warunek zniszczenia obowiązujący dla *materiałów sypkich* (np. *gruntów*), a później zastosowany do opisu *betonów*, został zaproponowany przez Coulomba [31] i Mohra [100]. Poprzez uwzględnienie w (9.19) dodatkowo wpływu *trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia* J_{3s} stanowi on jednocześnie uogólnienie zarówno *warunku Tresci–Guesta*, jak i *warunku Druckera–Pragera*. W oryginalnej postaci, zaproponowanej przez *Coulomba* [31], przy-

biera on następującą formę

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi = c - \mu\sigma \quad (9.24)$$

gdzie c oznacza *kohezję* czyli spójność gruntu (ang. *cohesion*), a ϕ jest *kątem tarcia wewnętrznego* μ . Warunek Coulomba–Mohra (9.24) przedstawia zatem na płaszczyźnie $\sigma - \tau$ wnętrze kąta 2ϕ (rys. 9.5), który tylko w szczególnym



Rysunek 9.5. Warunek graniczny Coulomba–Mohra na płaszczyźnie $\sigma - \tau$ przypadku materiału bez tarcia wewnętrznego $\phi = 0$ redukuje się do warunku Tresci–Guesta przy założeniu, że granice zniszczenia na rozciąganie i ściskanie są identyczne $k_c = k_t$.

Równanie (9.24), definiujące warunek Coulomba–Mohra, w zapisie rozwiniętym i przy uszeregowaniu składowych głównych naprężeń $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, przyjmuje postać

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \phi = c - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \right] \tan \phi \quad (9.25)$$

która może zostać zredukowana do prostej formy

$$\sigma_1 \frac{1 + \sin \phi}{2c \cos \phi} - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{2c \cos \phi} = 1 \quad (9.26)$$

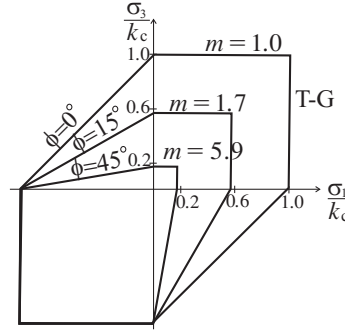
Definiując następnie różne wartości wytrzymałości na zniszczenie przy ścisaniu k_c oraz rozciąganiu k_t , $k_c > k_t$, w postaci:

$$k_c = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad k_t = \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad (9.27)$$

możemy sprowadzić (9.26) do związku

$$m\sigma_1 - \sigma_3 = k_c \quad \text{gdzie} \quad m = \frac{k_c}{k_t} \quad (9.28)$$

Warunek Coulomba–Mohra (9.28) przedstawia w przestrzeni naprężeń głównych $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ powierzchnię o kształcie nieregularnego ostrosłupa, której przekrojem płaszczyzną $\sigma_2 = 0$ jest nieregularny sześciokąt, zdeformowany poprzez wpływ współczynnika $m \geq 1$ w (9.28), pokazany na rys. 9.6. Dla



Rysunek 9.6. Przekroje różnych powierzchni granicznych Coulomba–Mohra płaszczyzną $\sigma_2 = 0$, w zależności od wartości współczynnika $m = k_c/k_t$

$k_c = k_t$ ($m = 1$) otrzymujemy klasyczny warunek Tresci–Guesta, jednak dla $k_c \neq k_t$ ($m > 1$), następuje zawężenie obszaru dopuszczalnego po stronie rozciągania, bez zmiany obszaru po stronie ściskania.

Kombinowana pełna postać warunku Coulomba–Mohra, niezmiennicza z uwagi na $J_{1\sigma}$ i J_{2s} , lecz zawierająca trzecią współrzędną Haigha–Westergaarda θ , zamiast niezmiennika J_{3s} , jest następująca

$$f(J_{1\sigma}, J_{2s}, \theta; c, \phi) = \frac{1}{3}J_{1\sigma} \sin \phi + \sqrt{J_{2s}} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{\frac{J_{2s}}{3}} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (9.29)$$

natomiast, zapisana konsystentnie, we współrzędnych Haigha–Westergaarda ξ, ρ, θ , przybiera postać

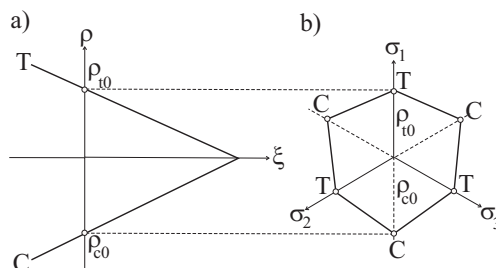
$$f(\xi, \rho, \theta; c, \phi) = \sqrt{2}\xi \sin \phi + \sqrt{3}\rho \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \rho \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - \sqrt{6}c \cos \phi = 0 \quad (9.30)$$

Zgodnie z (9.24), materiał jest zdefiniowany poprzez dwie stałe: kohezję c i tarcie wewnętrzne $\phi = \arctan \mu$, gdzie $c = k_c \frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi}$.

We współrzędnych Haigha–Westergaarda, warunek Coulomba–Mohra przedstawia nieregularny ostrosłup, którego *meridiany rozciągania* T oraz *ściskania* C pozostają liniami prostymi, jednak różnie nachylonymi do osi hydrostatycznej (rys. 9.7a)

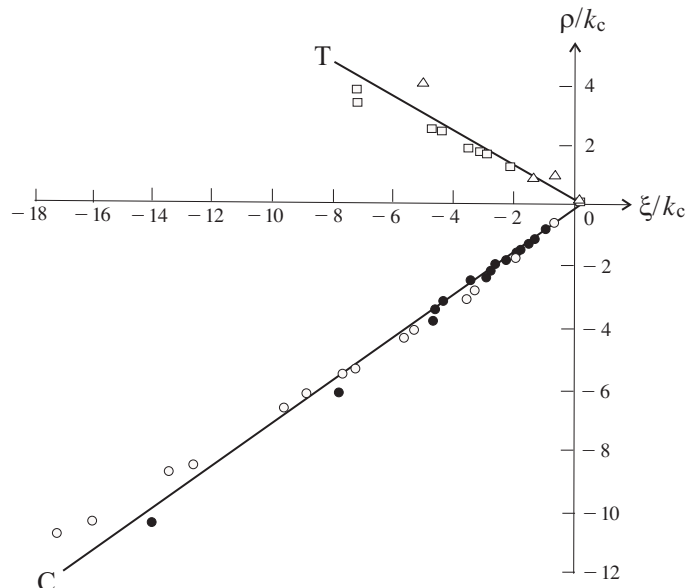
$$\begin{aligned}\rho_{t0} &= \frac{2\sqrt{6}c \cos \phi}{3 + \sin \phi} = \frac{\sqrt{6}k_c(1 - \sin \phi)}{3 + \sin \phi} \\ \rho_{c0} &= \frac{2\sqrt{6}c \cos \phi}{3 - \sin \phi} = \frac{\sqrt{6}k_c(1 - \sin \phi)}{3 - \sin \phi}\end{aligned}\tag{9.31}$$

Natomiast, przekrój powierzchni Coulomba–Mohra płaszczyzną dewiatorową zawierającą początek układu współrzędnych jest nieregularnym sześciokątem, który przechodzi w regularny sześciokąt Tresci–Guesta jedynie w szczególnym przypadku, gdy $\phi = 0^\circ$ (rys. 9.7b).



Rysunek 9.7. Przekroje powierzchni granicznej Coulomba–Mohra: a) płaszczyzną $\xi - \rho$, b) płaszczyzną dewiatorową, zawierającą początek układu współrzędnych

Na rys. 9.8 przedstawiono weryfikację *warunku granicznego Coulomba–Mohra* dla *próbek betonowych*, poddanych próbom trójosiowym wzdłuż *meridiany rozciągania* T – Richart i inni [126], Kupfer i inni [85] oraz *meridiany ściskania* C – Balmer [5], Richart i inni [126]. Należy podkreślić, że obszar dopuszczalny, określony meridianami T i C, znajduje się niemal wyłącznie w zakresie ściskania ($\xi < 0$), co jest konsekwencją znikomej wytrzymałości na rozciąganie (k_t dla materiałów sypkich jest bliskie zero).



Rysunek 9.8. Weryfikacja warunku granicznego Coulomba–Mohra w płaszczyźnie $\xi - \rho$ dla próbek betonowych wg (\square, \circ) Richart i inni [126], (\triangle) Kupfer i inni [85], (\bullet) Balmer [5]

9.4. Anizotropowe warunki zniszczenia materiałów kruchych - zależnych od ciśnienia hydrostatycznego

Z dyskusji w podrozdziale 9.1 wynika, że w przypadku *materiałów kruchych*, w kryterium zniszczenia typu *Goldenblata–Kopnova* (9.2) wyrazy liniowe z uwagi na naprężenie $\Pi_{ij}\sigma_{ij}$ grają istotną rolę i nie mogą być pominięte ($\alpha \neq 0$).

Zakładając: $\alpha = 1, \beta = 1/2, \gamma = 1/3$, sprowadzamy warunek *Goldenblata–Kopnova* (9.2) do szczególnej formy wymiarowo jednorodnej

$$\Pi_{ij}\sigma_{ij} + (\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^{1/2} + (\Pi_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^{1/3} - 1 = 0 \quad (9.32)$$

Ograniczając dalej postać (9.32) wyłącznie do wyrazów liniowych i kwadratowych, a więc pomijając niezmiennik sześcienny z uwagi na naprężenie, otrzymujemy szczególny przypadek *kryterium Goldenblata–Kopnova*

$$\Pi_{ij}\sigma_{ij} + \sqrt{\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}} - 1 = 0 \quad (9.33)$$

który może być traktowany jako *anizotropowe uogólnienie izotropowego warunku zniszczenia* typu *Druckera–Pragera* (9.19). Podkreślmy jednak, że w warunku *Druckera–Pragera*, z uwagi na materiałową izotropię, występują pojedyncze niezmienniki tensora naprężenia, np. $J_{1\sigma}$ i J_{2s} , natomiast w (9.33), ze względu na anizotropię, musimy posługiwać się niezmiennikami wspólnymi tensorów naprężenia i *tensorów charakterystycznych anizotropii zniszczenia* Π_{ij} i Π_{ijkl} (zob. szerzej rozdział 4).

Z kolei wychodząc również z warunku *Goldenblata–Kopnova* (9.2) i przyjmując $\alpha = 1, \beta = 1$ oraz ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów, otrzymujemy *anizotropowe uogólnienie paraboloidy Burzyńskiego*

$$\Pi_{ij}\sigma_{ij} + \Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - 1 = 0 \quad (9.34)$$

Z uwagi na fakt, że w równaniu (9.33) człon kwadratowy jest umieszczony pod pierwiastkiem lecz w równaniu (9.34) - nie, warunek (9.33) przedstawia nieobrotowy stożek, natomiast warunek (9.34) - nieobrotową paraboloidę.

Występujące w (9.34) tensory drugiego rzędu Π_{ij} i czwartego rzędu Π_{ijkl} są dwoma niezależnymi *tensorami anizotropii zniszczenia*, których identyfikację należy przeprowadzić na podstawie stosownych prób zniszczenia (analogicznie do problemów identyfikacji tensorów anizotropii plastycznej). Podkreślmy, że mimo wyraźnej analogii do *tensorów anizotropii plastycznej*, np. von Misesa, zdefiniowanych w podrozdziale 8.2, występujące tutaj tensory anizotropii zniszczenia drugiego Π_{ij} i czwartego Π_{ijkl} rzędu określają anizotropię inicjacji kruchego zniszczenia, zatem wymagają oddzielnej identyfikacji w próbach zniszczenia w materiałach kruchych (bez plastyczności). Tensory charakterystyczne zniszczenia wprowadzili np. Chow i Wang [27, 28] do analizy *anizotropowego zniszczenia materiałów ciągliwych*. Ograniczali się jednak do tensorów czwartego rzędu Π_{ijkl} dla materiału pierwotnie izotropowego, który dopiero pod wpływem rozwoju uszkodzeń nabiera cech anizotropii. W obecnym sformułowaniu (9.34) o inicjacji zniszczenia decydują dwa *tensory charakterystyczne zniszczenia*, drugiego rzędu Π_{ij} i czwartego rzędu Π_{ijkl} . Przyjmując oznaczenie $\Pi_{ij} = \pi_{ij}$, oba powyższe tensory można przedstawić w postaci *wektorowo-macierzowej Voigta*, a mianowicie

$$[\boldsymbol{\pi}] = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ & \pi_{22} & \pi_{23} \\ & & \pi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet \\ & & \bullet \end{bmatrix} \text{ lub} \\ \{\boldsymbol{\pi}\}^T = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} \pi_{11} & \pi_{22} & \pi_{33} & \pi_{23} & \pi_{13} & \pi_{12} \end{array} \right\}^T \left\{ \bullet \bullet \bullet \mid \bullet \bullet \bullet \right\}^T$$

$$[\mathbb{III}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Pi_{16} \\ & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & \Pi_{26} \\ & & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & \Pi_{36} \\ \hline & & & \Pi_{44} & \Pi_{45} & \Pi_{46} \\ & & & & \Pi_{55} & \Pi_{56} \\ & & & & & \Pi_{66} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet \end{array} \right] \quad (9.35)$$

gdzie odporność materiału na zniszczenie jest określona dwiema macierzami charakterystycznymi zniszczenia, o wymiarach (3×3) $[\boldsymbol{\pi}]$ oraz (6×6) $[\mathbb{III}]$. W rozważanym przypadku ogólnej anizotropii liczba stałych określających inicjację zniszczenia wynosi zatem $27 = 6 + 21$.

Warunek inicjacji zniszczenia materiałów anizotropowych (9.34), w notacji Voigta przyjmuje więc postać

$$\{\boldsymbol{\pi}\} \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\mathbb{III}] \{\boldsymbol{\sigma}\} - 1 = 0 \quad (9.36)$$

gdzie:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} \quad (9.37)$$

będącą rozszerzeniem anizotropowego warunku von Misesa dla materiałów plastycznych (8.29) o dodatkowy wyraz liniowy. Spośród stałych materiałowych tylko $21 = 3 + 18$ jest istotnie niezależnych, bowiem oba tensory charakterystyczne zniszczenia muszą spełniać warunki transformacji poprzez 3 kąty Eulera. Jednakże, w zastosowaniach praktycznych, tak duża liczba stałych materiałowych opisujących zniszczenie może zostać dalej ograniczona, np. przez założenie pewnej klasy symetrii określającej powierzchnię zniszczenia, np. ortotropii, stawiając hipotezę, że symetria w zakresie sprężystym zostaje zachowana również w symetrii powierzchni inicjacji zniszczenia.

Przedstawimy obecnie zastosowanie anizotropowego warunku Misesa (8.22) lub (8.28) wzbogaconego o człony liniowe (9.34). Wykorzystamy w tym celu dewiatorową formę warunku von Misesa (8.43) rozszerzając ją o wyrazy liniowe. Otrzymujemy w ten sposób formę dewiatorową w części kwadratowej,

jednak zależną od ciśnienia hydrostatycznego poprzez wyrazy liniowe

$$\begin{aligned}
& -\Pi_{12}(\sigma_x - \sigma_y)^2 - \Pi_{13}(\sigma_x - \sigma_z)^2 - \Pi_{23}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + \\
& 2\{\tau_{yz}[\Pi_{24}(\sigma_y - \sigma_x) + \Pi_{34}(\sigma_z - \sigma_x)] + \\
& \quad \tau_{zx}[\Pi_{15}(\sigma_x - \sigma_y) + \Pi_{35}(\sigma_z - \sigma_y)] + \\
& \quad \tau_{xy}[\Pi_{16}(\sigma_x - \sigma_z) + \Pi_{26}(\sigma_y - \sigma_z)] + \\
& \quad \Pi_{45}\tau_{yz}\tau_{zx} + \Pi_{46}\tau_{xy}\tau_{yz} + \Pi_{56}\tau_{zx}\tau_{xy}\} + \\
& \Pi_{44}\tau_{yz}^2 + \Pi_{55}\tau_{zx}^2 + \Pi_{66}\tau_{xy}^2 + \\
& \pi_{11}\sigma_x + \pi_{22}\sigma_y + \pi_{33}\sigma_z + \pi_{12}\tau_{xy} + \pi_{13}\tau_{zx} + \pi_{23}\tau_{yz} = 1
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Chcąc uniezależnić równanie (9.38) od ciśnienia hydrostatycznego należy dodatkowo narzucić warunek

$$\pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{33} = 0 \tag{9.39}$$

W zależności od tego, które ze stałych (9.39) przyjmujemy za niezależne otrzymujemy trzy możliwości

$$\pi_{11} = -(\pi_{22} + \pi_{33}) \quad \text{albo} \quad \pi_{22} = -(\pi_{11} + \pi_{33}) \quad \text{albo} \quad \pi_{33} = -(\pi_{11} + \pi_{22}) \tag{9.40}$$

Przykładowo, przyjmując pierwszy z warunków (9.40) w równaniu (9.38), otrzymujemy pierwszą z trzech w pełni dewiatorową formę warunku von Misesa–Tsai–Wu

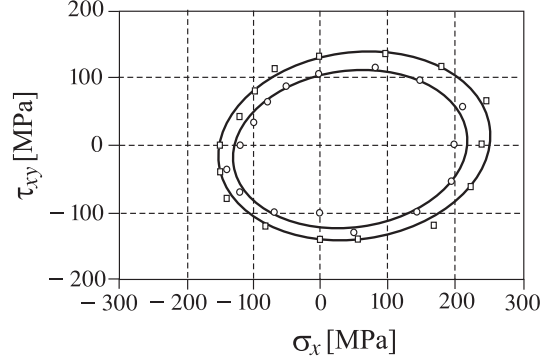
$$\begin{aligned}
& -\Pi_{12}(\sigma_x - \sigma_y)^2 - \Pi_{13}(\sigma_x - \sigma_z)^2 - \Pi_{23}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + \\
& 2\{\tau_{yz}[\Pi_{24}(\sigma_y - \sigma_x) + \Pi_{34}(\sigma_z - \sigma_x)] + \\
& \quad \tau_{zx}[\Pi_{15}(\sigma_x - \sigma_y) + \Pi_{35}(\sigma_z - \sigma_y)] + \\
& \quad \tau_{xy}[\Pi_{16}(\sigma_x - \sigma_z) + \Pi_{26}(\sigma_y - \sigma_z)] + \\
& \quad \Pi_{45}\tau_{yz}\tau_{zx} + \Pi_{46}\tau_{xy}\tau_{yz} + \Pi_{56}\tau_{zx}\tau_{xy}\} + \\
& \Pi_{44}\tau_{yz}^2 + \Pi_{55}\tau_{zx}^2 + \Pi_{66}\tau_{xy}^2 + \\
& \pi_{22}(\sigma_y - \sigma_x) + \pi_{33}(\sigma_z - \sigma_x) + \pi_{12}\tau_{xy} + \pi_{13}\tau_{zx} + \pi_{23}\tau_{yz} = 1
\end{aligned} \tag{9.41}$$

Formę analogiczną do (9.41) rozważał np. Szczepiński [148] zwracając uwagę na zależności (9.40) przy kalibracji stałych równania $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}, \dots, \Pi_{66}$ (15 stałych) oraz $\pi_{22}, \pi_{33}, \dots, \pi_{23}$ (5 stałych).

Eksperymentalną weryfikację równania typu (9.41) przeprowadzili np. Kowalewski i Śliwowski [79] na próbkach o przekroju pierścieniowym wykonanych ze stali niskostopowej 18G2A. W eksperymencie rozważano przekrój powierzchni (9.41) płaszczyzną σ_x, τ_{xy}

$$-(\Pi_{12} + \Pi_{13})\sigma_x^2 + 2\Pi_{16}\tau_{xy}\sigma_x + \Pi_{66}\tau_{xy}^2 - (\pi_{22} + \pi_{33})\sigma_x + \pi_{12}\tau_{xy} = 1 \tag{9.42}$$

Równanie (9.42) przedstawia elipsę o środku przesuniętym względem początku układu (σ_x, τ_{xy}) , o półosiach różnych niż w materiale pierwotnym (HMH) i obróconych względem osi układu, rys. 9.9.



Rysunek 9.9. Eksperymentalna weryfikacja równania typu (9.41) dla stali niskostopowej 18G2A poddanej monotonicznemu przepiężaniu $\circ - \varepsilon_{\text{off}} = 1 \times 10^{-5}$, $\square - \varepsilon_{\text{off}} = 5 \times 10^{-5}$, wg Kowalewski i Śliwowski [79]

9.5. Ortotropowe warunki zniszczenia materiałów kruchych

Zawężając zatem dalej *hipotezę zniszczenia do materiałów ortotropowych* otrzymujemy *ortotropowe macierze charakterystyczne zniszczenia*, drugiego i czwartego rzędu, w kierunkach głównych ortotropii

$$\begin{aligned}
 [{}_{\text{orto}}\boldsymbol{\pi}] &= \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 & 0 \\ & \pi_{22} & 0 \\ & & \pi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \end{bmatrix} \{ \bullet \bullet \bullet \mid \quad \}^T \\
 [{}_{\text{orto}}\mathbb{III}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \Pi_{22} & \Pi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \Pi_{55} & 0 \\ & & & & & \Pi_{66} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ & \bullet & \bullet & & & \\ & & \bullet & & & \\ \hline & & & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & \bullet \end{array} \right] \quad (9.43)
 \end{aligned}$$

o wymiarach $[{}_{\text{orto}}\boldsymbol{\pi}]$ (3×3) i $[{}_{\text{orto}}\mathbb{III}]$ (6×6). Macierz $[{}_{\text{orto}}\boldsymbol{\pi}]$ ma postać diagonalną, natomiast macierz $[{}_{\text{orto}}\mathbb{III}]$ posiada identyczną symetrię jak macierz ortotropii plastycznej von Misesa (8.44). Macierze (9.43) są określone przez $12 = 3 + 9$ stałych materiałowych.

Warunek inicjacji zniszczenia materiałów anizotropowych (9.36) przybiera zatem postać zawężoną do grupy symetrii ortotropowej

$$\{\text{orto}\boldsymbol{\pi}\} \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\text{orto}\boldsymbol{\mathbb{I}}] \{\boldsymbol{\sigma}\} - 1 = 0 \quad (9.44)$$

będącą rozszerzeniem warunku ortotropowego von Misesa (8.47) o wyraz liniowy. W zapisie rozwiniętym ortotropowy warunek zniszczenia (9.44) przyjmuje następującą postać

$$\begin{aligned} & \Pi_{11}\sigma_x^2 + \Pi_{22}\sigma_y^2 + \Pi_{33}\sigma_z^2 + \\ & \Pi_{12}\sigma_x\sigma_y + \Pi_{23}\sigma_y\sigma_z + \Pi_{31}\sigma_z\sigma_x + \\ & \Pi_{44}\tau_{yz}^2 + \Pi_{55}\tau_{zx}^2 + \Pi_{66}\tau_{xy}^2 + \\ & \pi_{11}\sigma_x + \pi_{22}\sigma_y + \pi_{33}\sigma_z - 1 = 0 \end{aligned} \quad (9.45)$$

Podkreślmy, że w powyższym równaniu, warunek zniszczenia ma pełną postać tensorową, a nie dewiatorową, jak to miało miejsce w przypadku plastyczności typu Hilla. Oznacza to, że do jego identyfikacji potrzeba wyznaczyć $12 = 3 + 9$ stałych materiałowych, określających *tensory charakterystyczne zniszczenia* $\text{orto}\boldsymbol{\pi}$ i $\text{orto}\boldsymbol{\mathbb{I}}$. Pierwszy wyraz w warunku (9.44) jest odpowiedzialny za rozróżnienie granic zniszczenia w warunkach rozciągania lub ściskania (ang. *strength differential*), natomiast drugi wyraz przedstawia powierzchnię typu von Misesa o osi na ogół niezgodnej z osią hydrostatyczną.

Przedstawimy obecnie redukcję warunku (9.44) do węższej postaci, znanej w literaturze jako *ortotropowy warunek zniszczenia Tsai–Wu*. Warunek Tsai–Wu charakteryzuje się równocześnie: uwzględnieniem efektu *strength differential* i niezależnością macierzy charakterystycznej zniszczenia IV-rzędu $[\text{orto}\boldsymbol{\mathbb{I}}]$ (9.43) od ciśnienia hydrostatycznego $[\text{orto}\boldsymbol{\mathbb{I}}] \rightarrow [\boldsymbol{\mathbb{I}}^{\text{TW}}]$ (por. (8.51))

$$\{\boldsymbol{\pi}^{\text{TW}}\} \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\boldsymbol{s}\}^T [\boldsymbol{\mathbb{I}}^{\text{TW}}] \{\boldsymbol{s}\} - 1 = 0 \quad (9.46)$$

gdzie:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{s}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_h \\ \sigma_y - \sigma_h \\ \sigma_z - \sigma_h \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9.47)$$

Prowadzi to do następującej reprezentacji obu macierzy charakterystycznych

(por. (8.52))

$$\begin{aligned}
 [\boldsymbol{\pi}^{\text{TW}}] &= \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 & 0 \\ & \pi_{22} & 0 \\ & & \pi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \end{bmatrix} \{ \bullet \bullet \bullet \mid \quad \}^{\text{T}} \\
 [\text{III}^{\text{TW}}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 -\Pi_{12} - \Pi_{13} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 & -\Pi_{12} - \Pi_{23} & \Pi_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 & & -\Pi_{13} - \Pi_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 & & & \Pi_{44} & 0 & 0 \\
 & & & & \Pi_{55} & 0 \\
 & & & & & \Pi_{66}
 \end{array} \right] \\
 & \quad \quad \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 \circ & \bullet & \bullet & & & \\
 & \circ & \bullet & & & \\
 & & \circ & & & \\
 \hline
 & & & \bullet & & \\
 & & & & \bullet & \\
 & & & & & \bullet
 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{9.48}$$

Równanie (9.46) wraz z reprezentacją (9.48) ma „zapis hybrydowy” w następującym sensie: pierwszy wyraz reprezentuje liniowy niezmiennik wspólny tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ i tensora strukturalnego $\boldsymbol{\pi}^{\text{TW}}$ (analogia do wpływu naprężenia hydrostatycznego w warunku dla materiału izotropowego), natomiast drugi wyraz przedstawia mieszany niezmiennik kwadratowy dewiatora naprężenia \boldsymbol{s} i tensora strukturalnego III^{TW} (odpowiedzialnego za kształt i orientację powierzchni w przestrzeni naprężeń). W formie rozwiniętej, macierzowy warunek (9.46) przyjmuje więc postać *dziwięcioparametrowego warunku* typu *Tsai–Wu* [157]

$$\begin{aligned}
 - \left[\Pi_{23} (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \Pi_{13} (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \Pi_{12} (\sigma_x - \sigma_y)^2 \right] + \Pi_{44} \tau_{yz}^2 + \\
 \Pi_{55} \tau_{zx}^2 + \Pi_{66} \tau_{xy}^2 + \pi_{11} \sigma_x + \pi_{22} \sigma_y + \pi_{33} \sigma_z - 1 = 0
 \end{aligned} \tag{9.49}$$

W istocie, dodając w równaniu (9.49) do wszystkich naprężeń normalnych naprężenie hydrostatyczne, np. $\sigma_x \rightarrow \sigma_x \pm \sigma_h$, itd., wyrazy kwadratowe nie podlegają zmianie, jednak wyrazy liniowe są nadal zależne od σ_h .

9.6. Przypadek poprzecznej izotropii

Przy redukcji dziwięcioparametrowego ortotropowego warunku zniszczenia Tsai–Wu (9.49) do węższego przypadku *symetrii poprzecznie izotropowej* na-

leży wyraźnie odróżnić klasy symetrii: tetragonalnej od heksagonalnej, podobnie jak w podrozdziale 8.5. W istocie, zakładając za Chen i Han [24], że płaszczyzna xy jest płaszczyzną poprzecznej izotropii klasy tetragonalnej (moduł Π_{66} jest niezależny) macierz ortotropowa IV-rzędu $[\text{III}^{\text{TW}}]$ (9.48) redukuje się do postaci $[\text{pop III}^{\text{TW}}]$, analogicznie do przypadku poprzecznie izotropowego warunku Hilla (8.79) lub (8.80) z czterema niezależnymi stałymi materiałowymi macierzy IV-rzędu, natomiast poprzecznie izotropowa macierz II-rzędu $[\text{pop } \boldsymbol{\pi}^{\text{TW}}]$ jest zredukowana do postaci zawierającej dwie niezależne stałe. W rezultacie, przyjmując w (9.48) zależności gwarantujące poprzeczną izotropię klasy tetragonalnej: $\Pi_{23} = \Pi_{13}$, $\Pi_{44} = \Pi_{55}$, $\pi_{11} = \pi_{22}$ w miejsce dziewięcioparametrowej postaci (9.48) otrzymujemy dla *poprzecznej izotropii klasy tetragonalnej* dwie postaci sześcioparametrowe (nawiązujące do sformułowań (8.52) lub (8.53))

$$\begin{aligned}
 [\text{pop } \boldsymbol{\pi}^{\text{TW}}] &= \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 & 0 \\ & \pi_{11} & 0 \\ & & \pi_{33} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right] \\
 [\text{pop III}^{\text{TW}}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\Pi_{12} - \Pi_{13} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & -\Pi_{12} - \Pi_{13} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & -2\Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \Pi_{44} & 0 \\ & & & & & \Pi_{66} \end{array} \right] \\
 &\quad \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{9.50}$$

lub alternatywnie

$$[\text{pop } \boldsymbol{\pi}^{\text{TW}}] = \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 & 0 \\ & \pi_{11} & 0 \\ & & \pi_{33} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right]$$

$$\left[\text{pop III}^{\text{TW}} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Pi_{11} & \frac{\Pi_{33}-2\Pi_{11}}{2} & -\frac{\Pi_{33}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & \Pi_{11} & -\frac{\Pi_{33}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \Pi_{44} & 0 \\ & & & & & \Pi_{66} \end{array} \right] \quad (9.51)$$

W zapisie rozwiniętym 6-parametrowy warunek Tsai–Wu poprzecznie izotropowy klasy tetragonalnej ma postać

$$-\Pi_{13} \left[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] - \Pi_{12} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \Pi_{44} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + \Pi_{66} \tau_{xy}^2 + \pi_{11} (\sigma_x + \sigma_y) + \pi_{33} \sigma_z - 1 = 0 \quad (9.52)$$

lub alternatywnie

$$\Pi_{11} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \Pi_{33} \sigma_z^2 - (\Pi_{33} - 2\Pi_{11}) \sigma_x \sigma_y - \Pi_{33} (\sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \Pi_{44} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + \Pi_{66} \tau_{xy}^2 + \pi_{11} (\sigma_x + \sigma_y) + \pi_{33} \sigma_z - 1 = 0 \quad (9.53)$$

Przykładem materiału, który podlega warunkowi poprzecznie izotropowemu klasy tetragonalnej jest lód o strukturze kolumnowej. Równanie typu (9.52) zostało skalibrowane dla lodu przez Ralstona [122] przy dodatkowym założeniu znikania naprężeń ścinających w kryterium inicjacji pęknięcia $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

$$-\Pi_{13} [(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] - \Pi_{12} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \pi_{11} (\sigma_x + \sigma_y) + \pi_{33} \sigma_z - 1 = 0 \quad (9.54)$$

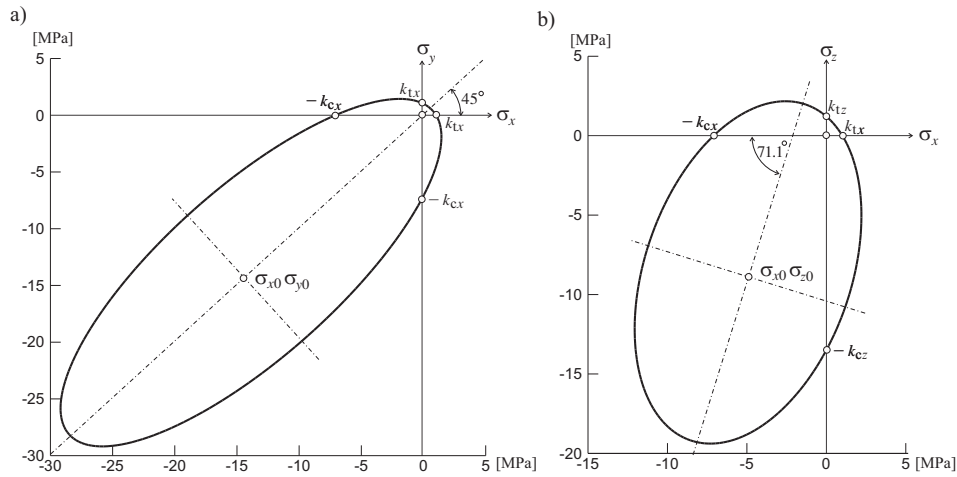
Wówczas, w tak zawężonym problemie, parametr Π_{44} jest nieaktywny, zatem do pełnej identyfikacji materiału wystarczają cztery próby: rozciągania (k_{tz}) i ściskania (k_{cz}) w kierunku wzdłużnym-ortotropii (z), oraz rozciągania (k_{tx}) i ściskania (k_{cx}), w płaszczyźnie izotropii (x, y)

$$\begin{aligned} -\Pi_{13} &= \frac{1}{2k_{tz}k_{cz}}, & -\Pi_{12} &= \frac{1}{k_{tx}k_{cx}} - \frac{1}{2k_{tz}k_{cz}}, \\ \pi_{11} &= \frac{1}{k_{tx}} - \frac{1}{k_{cx}}, & \pi_{33} &= \frac{1}{k_{tz}} - \frac{1}{k_{cz}}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Wyznaczone przez Ralstona dla lodu stałe materiałowe wynoszą

$$\begin{aligned} k_{tx} &= 1.01 \text{ MPa}, & k_{tz} &= 1.21 \text{ MPa}, \\ k_{cx} &= 7.11 \text{ MPa}, & k_{cz} &= 13.5 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (9.56)$$

Po wprowadzeniu (9.56) do wzorów (9.55) możemy przedstawić graficznie przekroje powierzchni zniszczenia typu Tsai–Wu (9.52), dla lodu o strukturze kolumnowej w płaszczyznach: poprzecznej izotropii (x, y) oraz ortotropii (z, x) , rys. 9.10. Są one silnie wydłużonymi elipsami, o środkach przesuniętych w



Rysunek 9.10. Przekroje powierzchni zniszczenia typu Hilla–Tsai (9.52) dla lodu o strukturze kolumnowej: a) w płaszczyźnie izotropii (x, y) , b) w płaszczyźnie ortotropii (x, z)

kierunku tej ćwiartki układu współrzędnych, która odpowiada dwuosowemu ścisnaniu. W przypadku przekroju powierzchni zniszczenia *płaszczyzną izotropii*, rys. 9.10a, oś symetrii elipsy jest oczywiście nachylona pod kątem 45° do osi układu współrzędnych, czyli pokrywa się z rzutem osi hydrostatycznej na płaszczyznę (x, y) , w przeciwieństwie do przekroju *płaszczyzną ortotropii* (x, z) , rys. 9.10b, dla której oś symetrii elipsy jest nachylona pod kątem 71.1° . Podkreślmy, że w rozważanym materiale, wytrzymałość na zniszczenie przy ścisnaniu w kierunku ortotropii k_{cz} jest ponad dziesięciokrotnie wyższa niż przy rozciąganiu k_{tz} , a w płaszczyźnie poprzecznej izotropii te proporcje wynoszą około siedmiu. Ponadto, na rys. 9.10a stosunek półosi elipsy Tsai–Wu w płaszczyźnie poprzecznej izotropii znacznie przewyższa analogiczny stosunek półosi elipsy Hubera–von Misesa–Hencky’ego. Oznacza to innymi słowy,

że lód o strukturze kolumnowej z eksperymentu Ralstona podlega warunkowi Tsai–Wu poprzecznie izotropowemu klasy tetragonalnej.

Rozdział 10

Modelowanie powierzchni granicznych w kompozytach

Przedstawimy obecnie zastosowanie warunku *poprzecznie izotropowego Tsai–Wu klasy tetragonalnej* do modelowania powierzchni zniszczenia dla kompozytu o matrycy tytanowej (Ti-15-3) zbrojonego jednokierunkowym układem włókien z węgla krzemu SiC (SCS-6). Wykorzystamy wyniki przedstawione w pracy Herakovicha i Aboudi dotyczącej efektów termicznych w kompozytach [62].

Kompozyty są wieloskładnikowymi materiałami charakteryzującymi się brakiem dopasowania właściwości poszczególnych składników na szczeblu mikrostruktury (RUC), por. podrozdz. 5.1. Naprężenia rezydualne zostają wbudowane (ang. *built-in*) w kompozyt podczas procesu schładzania od podwyższonej temperatury wytwarzania kompozytu (około 600°C) do temperatury otoczenia (około 20°C). Wpływ niedopasowania termomechanicznego jest typowy zarówno dla kompozytów anizotropowych zbrojonych długimi włóknami, jak i kompozytów izotropowych cząsteczkowo zbrojonych. Powyższe efekty termiczne są dwojakiej natury wywołane bądź to naprężeniami rezydualnymi, bądź wpływem temperatury na właściwości materiałowe. Oba efekty są w istocie sprzężone, pomimo że odpowiedzialne za transformację powierzchni granicznych różnych typów. Wpływ temperatury na właściwości materiałowe manifestuje się zasadniczo przez zmianę wymiaru i kształtu powierzchni granicznej. Z kolei naprężenia resztkowe zamrożone w procesie fabrykacji i schłodzenia kompozytu są odpowiedzialne za efekty kinematyczne. W świetle uwag zawartych w rozdz. 8 i 9, translacje powierzchni granicznych kompozytu jako całości (poziom makro) jak również jego składników (poziom mikro) manifestują się występowaniem efektu *strength differential* i dotyczą zarówno trans-

lacji powierzchni granicznych składników (matryca, włókno/cząsteczka) jak i ich wspólnej części, wykazującej nie tylko translację i dystorsję lecz również punkty narożne.

W zależności od tego, czy opisywane są powierzchnie graniczne przed schłodzeniem (nie wykazujące efektu *strength differential*) czy po schłodzeniu (wykazujące efekt *strength differential*) człony liniowe w warunku Tsai–Wu będą odpowiednio pomijane (dla powierzchni początkowych) bądź uwzględniane (dla powierzchni po schłodzeniu).

10.1. Modelowanie początkowych powierzchni plastyczności/zniszczenia kompozytu SCS-6/Ti-15-3 za pomocą jednolitej powierzchni typu Tsai–Wu

Warunek Tsai–Wu dla materiału poprzecznie izotropowego, klasy tetragonalnej (9.52) zapisany dla wielkości efektywnych, tzn. uśrednionych na poziomie RUC (por. podrozdział 5.3.1) i po pominięciu członów liniowych $\pi_{11} = \pi_{33} = 0$ oraz związanych ze ścinaniem w płaszczyznach: izotropii $\tau_{xy} = 0$ oraz jednej z dwóch płaszczyzn ortotropii $\tau_{zy} = 0$ ma postać

$$-\Pi_{13} \left[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] - \Pi_{12} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \Pi_{44} \tau_{zx}^2 - 1 = 0 \quad (10.1)$$

która zawiera trzy niezależne parametry. Wartości Π_{13} , Π_{12} i Π_{44} zostaną określone w dwóch próbach rozciągania wzdłuż osi leżących kolejno w płaszczyźnie poprzecznej izotropii (x, y) i osi ortotropii z oraz jednej próby ścinania w płaszczyźnie ortotropii (z, x)

$$\begin{aligned} \sigma_x = k_x \quad \sigma_y = 0 \quad \sigma_z = 0 \quad \tau_{zx} = 0 &\longrightarrow -\Pi_{23} - \Pi_{12} = \frac{1}{k_x^2} \\ \sigma_z = k_z \quad \sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{zx} = 0 &\longrightarrow -\Pi_{23} = \frac{1}{2k_z^2} \\ \tau_{zx} = k_{zx} \quad \sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \sigma_z = 0 &\longrightarrow \Pi_{44} = \frac{1}{k_{zx}^2} \end{aligned} \quad (10.2)$$

Po wprowadzeniu (10.2) do warunku (10.1) otrzymujemy powierzchnię graniczną określoną równaniem

$$\frac{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}{2k_z^2} + \left(\frac{1}{k_x^2} - \frac{1}{2k_z^2} \right) (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{\tau_{zx}^2}{k_{zx}^2} = 1 \quad (10.3)$$

Warunek Tsai–Wu został w ten sposób zredukowany do warunku Hilla dla materiału poprzecznie izotropowego klasy tetragonalnej (8.81) przy założeniu $\tau_{xy} = \tau_{zy} = 0$. Nawiązując do wyników Herakovicha i Aboudiego [62] wykonujemy odpowiednie przekroje powierzchni (10.3)

- przekrój płaszczyzną izotropii (σ_x, σ_y) przy zidentyfikowanych wartościach granicznych $k_x = k$ i $k_z = 2.3k$ (rys. 10.1a)

$$\left(\frac{\sigma_x}{k}\right)^2 - 1.811 \frac{\sigma_x \sigma_y}{k^2} + \left(\frac{\sigma_y}{k}\right)^2 = 1 \quad (10.4)$$

- przekrój płaszczyzną ortotropii (σ_x, σ_z) przy $\tau_{zx} = 0$ i zidentyfikowanych wartościach granicznych $k_x = k$ i $k_z = 2.3k$ (rys. 10.1b)

$$\left(\frac{\sigma_x}{k}\right)^2 - 0.189 \frac{\sigma_x \sigma_z}{k^2} + 0.189 \left(\frac{\sigma_z}{k}\right)^2 = 1 \quad (10.5)$$

- przekrój w płaszczyźnie ortotropii (σ_x, τ_{zx}) przy $\sigma_z = 0$ i zidentyfikowanych wartościach granicznych $k_{zx} = 0.5k$ i $k_x = k$ (rys. 10.1c)

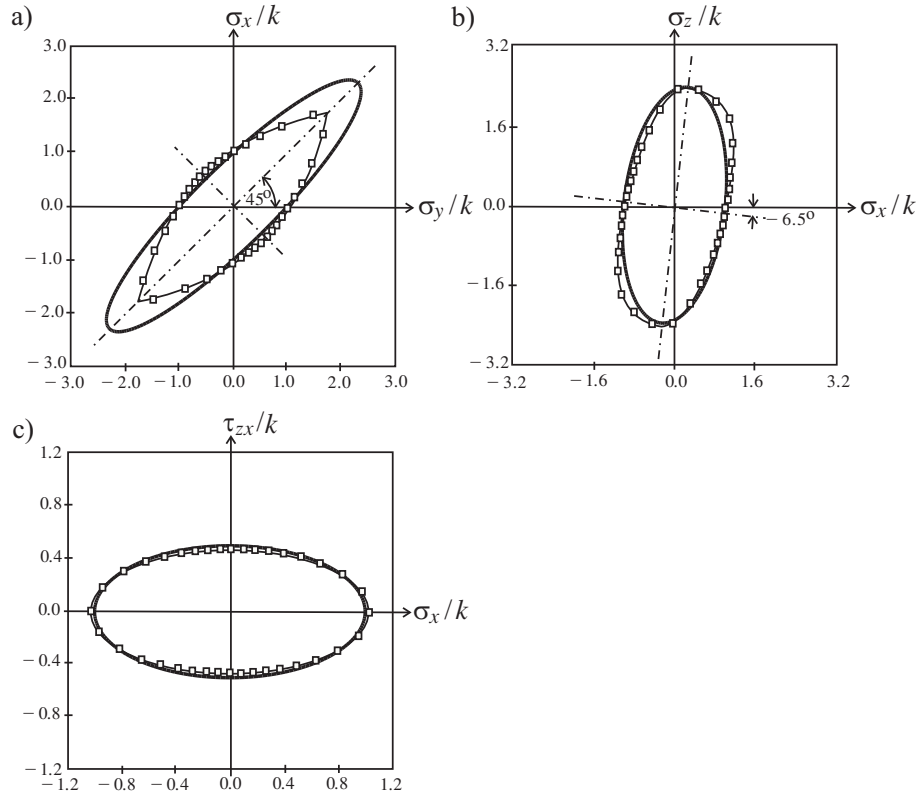
$$\left(\frac{\sigma_x}{k}\right)^2 + 4 \left(\frac{\tau_{zx}}{k}\right)^2 = 1 \quad (10.6)$$

Wyniki aproksymacji Hilla (10.3) przedstawiono na rys. 10.1a–c. W płaszczyznach ortotropii: (σ_y, σ_z) rys. 10.1b i (σ_x, τ_{zx}) rys. 10.1c, zgodność jest zadowalająca, jednak w płaszczyźnie izotropii poprzecznej (σ_x, σ_y) aproksymacja przy użyciu warunku Hilla klasy tetragonalnej daleko odbiega od wyników Herakovicha i Aboudiego, rys. 10.1a.

Z uwagi na słabe dopasowanie krzywej granicznej w płaszczyźnie izotropii (σ_x, σ_y) do wyników eksperymentu numerycznego (rys. 10.1a), proponowane jest dalej zastąpienie warunku poprzecznie izotropowego typu Hilla klasy tetragonalnej warunkiem von Misesa (8.28) dla materiału poprzecznie izotropowego, $(\Pi_{11} = \Pi_{22}, \Pi_{13} = \Pi_{23})$ po pominięciu członów związanych ze ścinaniem w płaszczyźnie izotropii $\tau_{xy} = 0$ oraz zachowaniem tylko jednego ścinania w płaszczyźnie ortotropii $\tau_{zx} \neq 0, \tau_{zy} = 0$ (8.45) przyjmującym postać

$$\frac{\Pi_{11} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \Pi_{33} \sigma_z^2 + 2\Pi_{12} \sigma_x \sigma_y + 2\Pi_{13} (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \Pi_{44} \tau_{zx}^2}{\Pi_{44} \tau_{zx}^2} = 1 \quad (10.7)$$

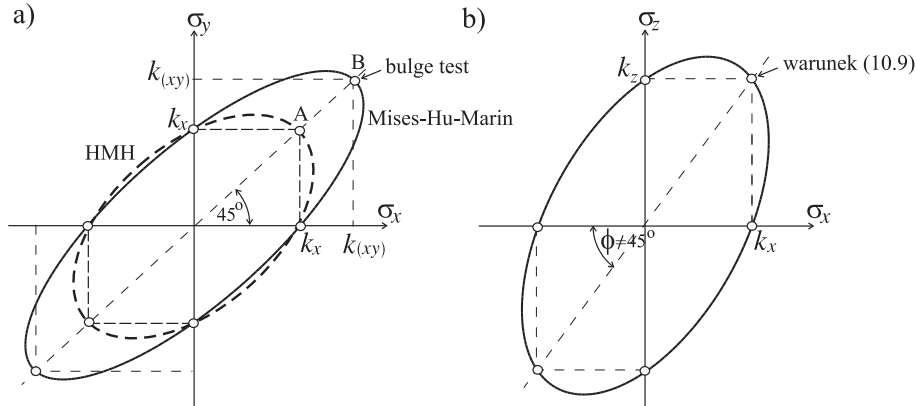
W celu określenia pięciu niezależnych stałych materiałowych $\Pi_{11}, \Pi_{33}, \Pi_{12}, \Pi_{13}$ i Π_{44} posłużymy się czterema próbami: mianowicie dwoma próbami jednoosiowego rozciągania wzdłuż osi ortotropii z i osi izotropii x , próbą prostego



Rysunek 10.1. Przekroje powierzchni zniszczenia dla kompozytu SCS-6/Ti-15-3: krzywe cienie punktowe – wyniki eksperymentalne Herakovicha i Aboudiego [62], krzywe pogrubione – aproksymacja modelem typu Hilla (10.3) por. Skrzypek i Ganczarski [142]

ścianania w płaszczyźnie ortotropii zx i dwuosiową próbą rozciągania (ang. *bulge test*) w płaszczyźnie izotropii xy (rys. 10.2a). Próby typu *bulge test* były stosowane np. przez Jacksona i innych [71]

$$\begin{aligned}
 \sigma_x = k_x \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{zx} = 0 &\longrightarrow \Pi_{11} = \frac{1}{k_x^2} \\
 \sigma_z = k_z \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{zx} = 0 &\longrightarrow \Pi_{33} = \frac{1}{k_z^2} \\
 \tau_{zx} = k_{zx} \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 &\longrightarrow \Pi_{44} = \frac{1}{k_{zx}^2} \\
 \sigma_x = \sigma_y = k_{(xy)} \quad \sigma_z = \tau_{zx} = 0 &\longrightarrow 2\Pi_{12} = \frac{1}{k_{(xy)}^2} - \frac{2}{k_x^2}
 \end{aligned} \tag{10.8}$$



Rysunek 10.2. Dodatkowe warunki dla materiału poprzecznie izotropowego von Misesa: a) dwuosiowa póba rozciągania *bulge test* w płaszczyźnie izotropii, b) warunek zgodności w płaszczyźnie ortotropii

Dodatkowo jest postulowany jeden warunek zgodności w płaszczyźnie ortotropii (σ_x, σ_z) (rys. 10.2b).

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x = k_x \\ \sigma_z = k_z \end{matrix} \right\} \sigma_y = \tau_{zx} = 0 \longrightarrow 2\Pi_{13} = -\frac{1}{k_z k_x} \quad (10.9)$$

Po wprowadzeniu (10.8) i (10.9) do warunku (10.7) otrzymujemy czteroparametrową powierzchnię graniczną określoną równaniem

$$\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{k_x^2} + \left(\frac{\sigma_z}{k_z}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_{(xy)}^2} - \frac{2}{k_x^2}\right) \sigma_x \sigma_y - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)\sigma_z}{k_x k_z} + \left(\frac{\tau_{zx}}{k_{zx}}\right)^2 = 1 \quad (10.10)$$

Otrzymano w ten sposób niedewiatorowy warunek typu von Misesa–Hu–Marina dla materiału poprzecznie izotropowego klasy pośredniej pomiędzy tetragonalną a heksagonalną (por. Ganczarski i Skrzypek [50]). Elipsy przechodzące przez punkty A i B na rys. 10.2a odpowiadają: przypadkom poprzecznej izotropii klasy heksagonalnej (zgodność z warunkiem Hubera–von Misesa–Hencky’ego – punkt A) i *poprzecznej izotropii klasy mieszanej* (dłuższa półoś elipsy w płaszczyźnie izotropii jest określona na podstawie niezerowej próby typu *bulge test* – punkt B).

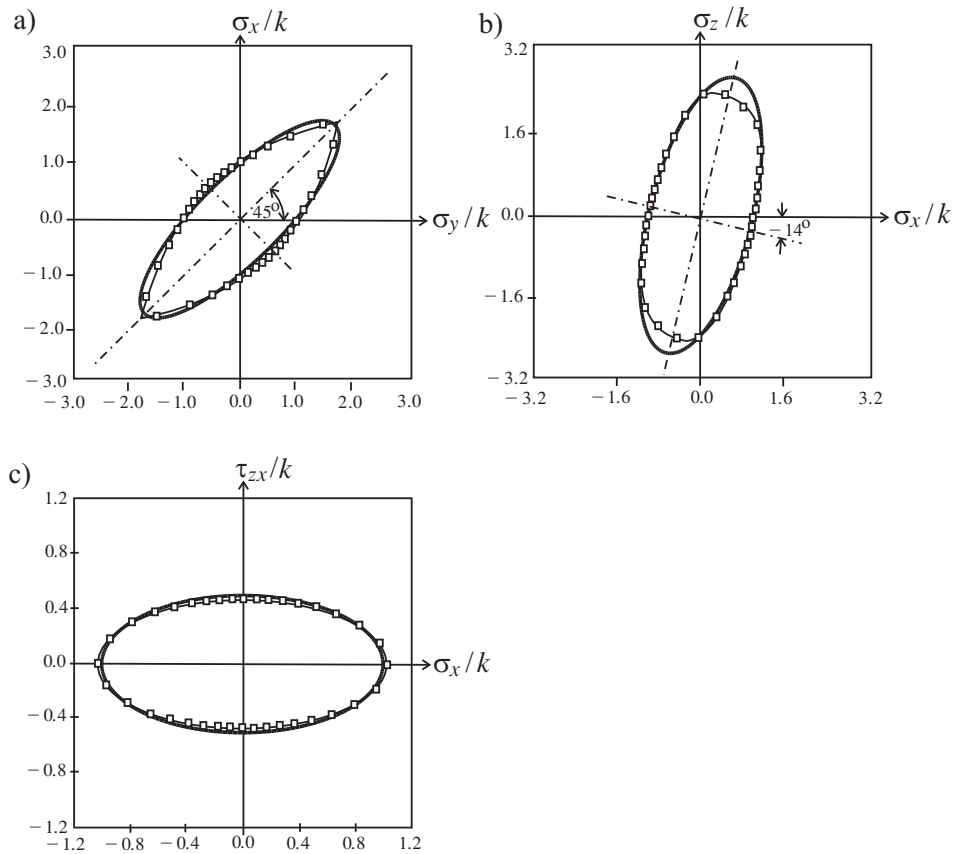
W celu identyfikacji 4 stałych k_x, k_z, k_{zx} i $k_{(xy)}$ w równaniu (10.10) posłużymy się trzema następującymi przekrojami powierzchni granicznej:

- przekrój płaszczyzną izotropii (σ_x, σ_y) dla $k_x = k$ i $k_{(xy)} = 1.7k$ (rys. 10.3a)

$$\left(\frac{\sigma_x}{k}\right)^2 - 1.654 \frac{\sigma_x \sigma_y}{k^2} + \left(\frac{\sigma_y}{k}\right)^2 = 1 \quad (10.11)$$

- przekrój płaszczyzną ortotropii (σ_x, σ_z) dla $k_x = k$ i $k_z = 2.3k$ (rys. 10.3b)

$$\left(\frac{\sigma_x}{k}\right)^2 - 0.434 \frac{\sigma_x \sigma_z}{k^2} + 0.189 \left(\frac{\sigma_z}{k}\right)^2 = 1 \quad (10.12)$$



Rysunek 10.3. Przekroje powierzchni zniszczenia dla kompozytu SCS-6/Ti-15-3: krzywe cienne punktowe – wyniki eksperymentalne Herakovicha i Abo-udiego [62], krzywe pogrubione – aproksymacja modelem typu von Misesa–Hu–Marina (10.10) por. Skrzypek i Ganczarski [142]

- przekrój w płaszczyźnie ortotropii (σ_x, τ_{zx}) dla $k_{zx} = 0.5k$ i $k_x = k$ (rys. 10.3c)

$$\left(\frac{\sigma_x}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau_{zx}}{k}\right)^2 = 1 \quad (10.13)$$

Zastosowanie warunku von Misesa–Hu–Marina (10.10) zamiast warunku Hilla (10.3) znacznie poprawiło zbieżność aproksymacji w płaszczyźnie poprzecznej izotropii, rys. 10.3a, nieznacznie tylko pogarszając aproksymację w płaszczyźnie ortotropii, rys. 10.3b, i bez wpływu na aproksymację w płaszczyźnie ścinania, rys. 10.3c.

10.2. Modelowanie kolejnych powierzchni granicznych kompozytu SCS-6/Ti-15-3 na poziomie mikro oparte na warunku Hilla–Tsai–Wu

Opis jednolitej początkowej powierzchni granicznej kompozytu jednokierunkowego typu SCS-6/Ti-15-3 dla temperatury $\Delta T = 0^\circ\text{C}$ (por. podrozdz. 10.1) zawodzi w przypadku kolejnych powierzchni odpowiadających temperaturze schłodzenia $\Delta T = -555^\circ\text{C}$.

Powierzchnia graniczna kompozytu włóknistego SCS-6/Ti-15-3 wykazuje wówczas zarówno przesunięcie środka powierzchni względem początku układu współrzędnych, jak również efekty dystorsyjne. Powierzchnie zniszczenia muszą bowiem uwzględniać wpływ naprężeń resztkowych, powstałych w wyniku schłodzenia, różnych w materiale matrycy i włókna. W efekcie przekroje poprzeczne nie są już jednolitymi elipsami, lecz częścią wspólną par elips (różnych dla obu komponentów). W związku z powyższym próba opisu jednolitym uniwersalnym równaniem (opis przy pomocy wielkości efektywnych na poziomie RUC) staje się praktycznie niemożliwa. Powierzchnie graniczne odpowiadające stanom przed i po schłodzeniu zostaną aproksymowane przecinającymi się krzywymi oddzielnie dla materiału matrycy oraz włókna (analiza na poziomie mikro). Zakładamy, że każda krzywa z eksperymentu Herakovicha i Aboudiego odpowiada przekrojowi powierzchni opisanej przy użyciu ortotropowego warunku zniszczenia typu Tsai–Wu (9.49)

$$\begin{aligned} & -\Pi_{23}^{(\beta\gamma)} (\sigma_y - \sigma_z)^2 - \Pi_{13}^{(\beta\gamma)} (\sigma_z - \sigma_x)^2 - \Pi_{12}^{(\beta\gamma)} (\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ & + \Pi_{44}^{(\beta\gamma)} \tau_{yz}^2 + \Pi_{55}^{(\beta\gamma)} \tau_{zx}^2 + \Pi_{66}^{(\beta\gamma)} \tau_{xy}^2 \\ & + \pi_{11}^{(\beta\gamma)} \sigma_x + \pi_{22}^{(\beta\gamma)} \sigma_y + \pi_{33}^{(\beta\gamma)} \sigma_z - 1 = 0 \end{aligned} \quad (10.14)$$

gdzie indeksy górne β, γ odnoszą się do dwóch faz materiałowych (matrycy i włókna) w analizie na poziomie mikrostruktury. W przypadku *materiału poprzecznie izotropowego klasy tetragonalnej* $\Pi_{23} = \Pi_{13}$, $\Pi_{44} = \Pi_{55}$, $\pi_{11} = \pi_{22}$ równanie 9-parametrowe (10.14) przyjmuje postać 6-parametrową

$$\begin{aligned} & -\Pi_{23}^{(\beta\gamma)} \left[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] - \Pi_{12}^{(\beta\gamma)} (\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ & + \Pi_{44}^{(\beta\gamma)} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + \Pi_{66}^{(\beta\gamma)} \tau_{xy}^2 \\ & + \pi_{11}^{(\beta\gamma)} (\sigma_x + \sigma_y) + \pi_{33}^{(\beta\gamma)} \sigma_z - 1 = 0 \end{aligned} \quad (10.15)$$

Z uwagi na symulacje Herakovicha i Aboudiego przeprowadzone w trzech przekrojach: rozciąganie dwuosiowe w płaszczyźnie ortotropii x, z , rozciąganie dwuosiowe w płaszczyźnie izotropii x, y oraz rozciąganie w jednym z kierunków izotropii x z równoczesnym ścinaniem w płaszczyźnie ortotropii z, x , można dokonać dalszego zawężenia równania (10.15) poprzez założenie $\tau_{yz} = \tau_{xy} = 0$, do postaci 5-parametrowej

$$\begin{aligned} & -\Pi_{23}^{(\beta\gamma)} \left[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] - \Pi_{12}^{(\beta\gamma)} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \Pi_{44}^{(\beta\gamma)} \tau_{zx}^2 + \\ & + \pi_{11}^{(\beta\gamma)} (\sigma_x + \sigma_y) + \pi_{33}^{(\beta\gamma)} \sigma_z - 1 = 0 \end{aligned} \quad (10.16)$$

Pięć niezależnych współczynników równania (10.16) należy wyznaczyć dla każdej z faz (β, γ) oddzielnie z warunków zgodności trzech analizowanych przekrojów dla dwóch rodzin krzywych odpowiadających zarówno temperaturze początkowej $\Delta T = 0^\circ\text{C}$, jak i końcowej $\Delta T = -555^\circ\text{C}$. Przy wyznaczaniu modułów materiałowych krzywych przekrojowych zastosowano zasadę najlepszego dopasowania krzywych aproksymujących do danych z eksperymentu Herakovicha i Aboudiego [62]. Dopasowanie takie nie jest, w istocie, jednoznaczne z uwagi na to, że punkty eksperymentalne są zgrupowane na krótkich łukach krzywych. W efekcie są możliwe dopasowania elipsami o różnym układzie osi głównych, spośród których wybieramy leżące w ćwiartkach I i III, przez analogię do warunków plastyczności powierzchni materiałów izotropowych. Dla każdej krzywej granicznej określono 5 parametrów: dwie współrzędne położenia jej środka, dwie półosie elipsy oraz kąt obrotu elipsy. Na podstawie tych parametrów wyznaczono kolejno odpowiednie wartości modułów materiałowych Π_{ij}, π_{ii} . Zastosowanie tej procedury zarówno do krzywych granicznych odpowiadających temperaturze początkowej $\Delta T = 0^\circ\text{C}$, jak po schłodzeniu $\Delta T = -555^\circ\text{C}$ pozwoliło uzyskać wierne odwzorowanie obu rodzajów przekrojów:

– płaszczyzną ortotropii $\Sigma_z = \sigma_z/k, \Sigma_x = \sigma_x/k$ (rys. 10.4a)

$$\begin{aligned}
 \text{A)} \quad & 0.184\Sigma_z^2 - 0.251\Sigma_z\Sigma_x + 0.530\Sigma_x^2 - 8.14 \cdot 10^{-3}\Sigma_z + 0.361\Sigma_x = 1 \\
 \text{B)} \quad & 0.188\Sigma_z^2 - 0.256\Sigma_z\Sigma_x + 0.541\Sigma_x^2 + 3.99 \cdot 10^{-3}\Sigma_z - 0.435\Sigma_x = 1 \\
 \text{C)} \quad & 0.276\Sigma_z^2 - 0.384\Sigma_z\Sigma_x + 0.276\Sigma_x^2 + 4.92\Sigma_z + 0.935\Sigma_x = 1 \\
 \text{D)} \quad & 0.320\Sigma_z^2 - 0.445\Sigma_z\Sigma_x + 0.934\Sigma_x^2 + 0.65 \cdot 10^{-3}\Sigma_z - 2.010\Sigma_x = 1
 \end{aligned} \tag{10.17}$$

– płaszczyzną izotropii $\Sigma_x = \sigma_x/k, \Sigma_y = \sigma_y/k$ (rys. 10.4b)

$$\begin{aligned}
 \text{E)} \quad & 0.404\Sigma_x^2 - 0.445\Sigma_x\Sigma_y - 0.505\Sigma_y^2 + 0.560\Sigma_y = 1 \\
 \text{F)} \quad & 0.376\Sigma_x^2 - 0.414\Sigma_x\Sigma_y + 0.376\Sigma_y^2 + 0.408\Sigma_x - 0.408\Sigma_y = 1 \\
 \text{G)} \quad & 0.823\Sigma_x^2 - 0.725\Sigma_x\Sigma_y + 0.500\Sigma_y^2 - 2.130\Sigma_x + 1.000\Sigma_y = 1 \\
 \text{H)} \quad & 0.596\Sigma_x^2 - 0.866\Sigma_x\Sigma_y + 0.912\Sigma_y^2 + 0.921\Sigma_x - 2.102\Sigma_y = 1
 \end{aligned} \tag{10.18}$$

– płaszczyzną poprzecznego ścinania $\Sigma_x = \sigma_x/k, \Sigma_{zx} = \sigma_{zx}/k$ (rys. 10.4c)

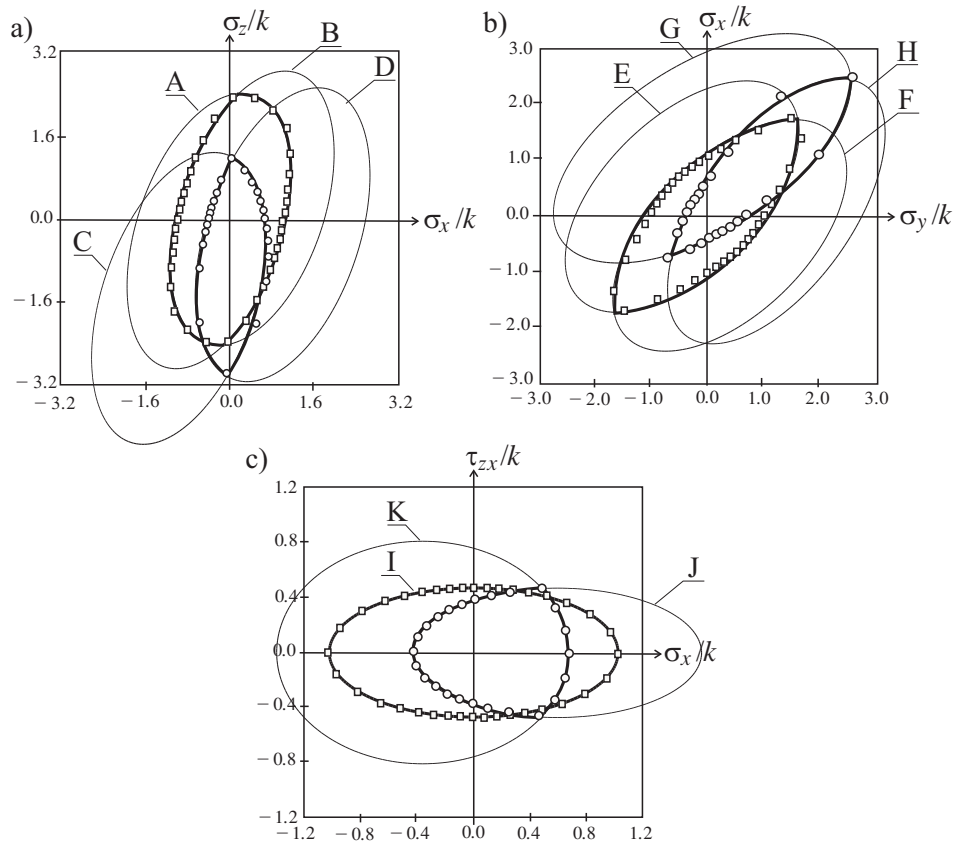
$$\begin{aligned}
 \text{I)} \quad & 0.942\Sigma_x^2 + 4.527\Sigma_{zx}^2 = 1 \\
 \text{J)} \quad & 1.426\Sigma_x^2 + 6.852\Sigma_{zx}^2 - 1.712\Sigma_x = 1 \\
 \text{K)} \quad & 1.065\Sigma_x^2 + 1.723\Sigma_{zx}^2 + 0.746\Sigma_x = 1
 \end{aligned} \tag{10.19}$$

Bliższa analiza opisanych powyżej aproksymacji (rys. 10.4a-c) prowadzi do następujących wniosków:

- Para elips reprezentująca w rozpatrywanym przekroju krzywe graniczne dla matrycy bądź włókna w odpowiedniej temperaturze (np. krzywe A i B odnoszące się do temperatury początkowej oraz krzywe C i D odnoszące się do temperatury końcowej na rys. 10.4a) mają środki przesunięte względem początku układu i ich półosie są nachylone pod różnymi kątami. Widoczne przy tym przesunięcia oraz obroty krzywych granicznych są wywołane narastającymi w trakcie procesu naprężeniami rezydualnymi różnymi w materiale matrycy i włókna. Temu efektowi kinematycznemu towarzyszy również efekt izotropowy polegający na zwiększeniu wielkości krzywych granicznych wskutek schłodzenia.
- W wyniku przebudowy powierzchni granicznych w obu fazach materiału następuje także przebudowa części wspólnych odpowiednich par krzywych granicznych. Na skutek narastającego efektu kinematycznego pary

elips oddalają się od siebie, a ich wspólna część ulega zawężeniu. Jednocześnie w temperaturze początkowej ($\Delta T = 0^\circ\text{C}$) obserwujemy występowanie części wspólnej o kształcie soczewkowym wyoblonym, natomiast po schłodzeniu ($\Delta T = -555^\circ\text{C}$) części wspólne wykazują ostre naroża.

- Aproksymacje uzyskane poprzez dopasowanie par krzywych granicznych do wyników eksperymentalnych jest w istocie jedynie przybliżeniem powierzchni granicznej za pomocą wielu płatów, powstałych w wyniku przecięcia walców o przekrojach eliptycznych.



Rysunek 10.4. Aproksymacja przekrojów powierzchni zniszczenia dla kompozytu SCS-6/Ti-15-3 wzorami (10.17)–(10.19) por. Skrzypek i Ganczarski [142]: a) płaszczyzna ortotropii, b) płaszczyzna poprzecznej izotropii, c) płaszczyzna poprzecznego ścinania, \square – $\Delta T = 0^\circ\text{C}$, \circ – $\Delta T = -555^\circ\text{C}$, wyniki wg eksperymentu Herakovicha i Aboudiego [62]

Rozdział 11

Klasyfikacja równań konstytutywnych materiałów dyssypatywnych – ogólna charakterystyka

11.1. Sprężone procesy dyssypatywne

Zależności wiążące naprężenia z odkształceniami (bądź ich prędkości lub przyrosty), w materiale podlegającym deformacji w wyniku działania obciążeń, noszą nazwę równań konstytutywnych. W ogólności, procesy deformacji można podzielić na odwracalne bądź nieodwracalne. W *procesach odwracalnych* po usunięciu obciążenia materiał wraca do stanu pierwotnego, a jego właściwości nie podlegają żadnej zmianie. W *procesach nieodwracalnych* po usunięciu obciążenia materiał nie powraca do stanu pierwotnego, lecz do pewnego stanu resztkowego, scharakteryzowanego trwałymi odkształceniami, i ewentualnie zmienionymi właściwościami i cechami strukturalnymi. Procesom nieodwracalnym towarzyszy rozpraszanie (dyssypacja ang. *dissipation*) energii wprowadzonej do materiału w procesie deformacji. Z tego powodu będziemy używać równoważnej nazwy *procesów dyssypatywnych* na określenie różnych procesów nieodwracalnej deformacji materiału.

W szczególności wśród procesów deformacji odwracalnych można wyróżnić *liniową* bądź *nieliniową sprężystość*. Wśród procesów deformacji nieodwracalnych (bądź dyssypatywnych) natomiast: procesy plastyczne, procesy pełzania, procesy rozwoju mikrouszkodzeń i mikropęknięć oraz innych zmian mikrostruktury (np. zmiany fazy).

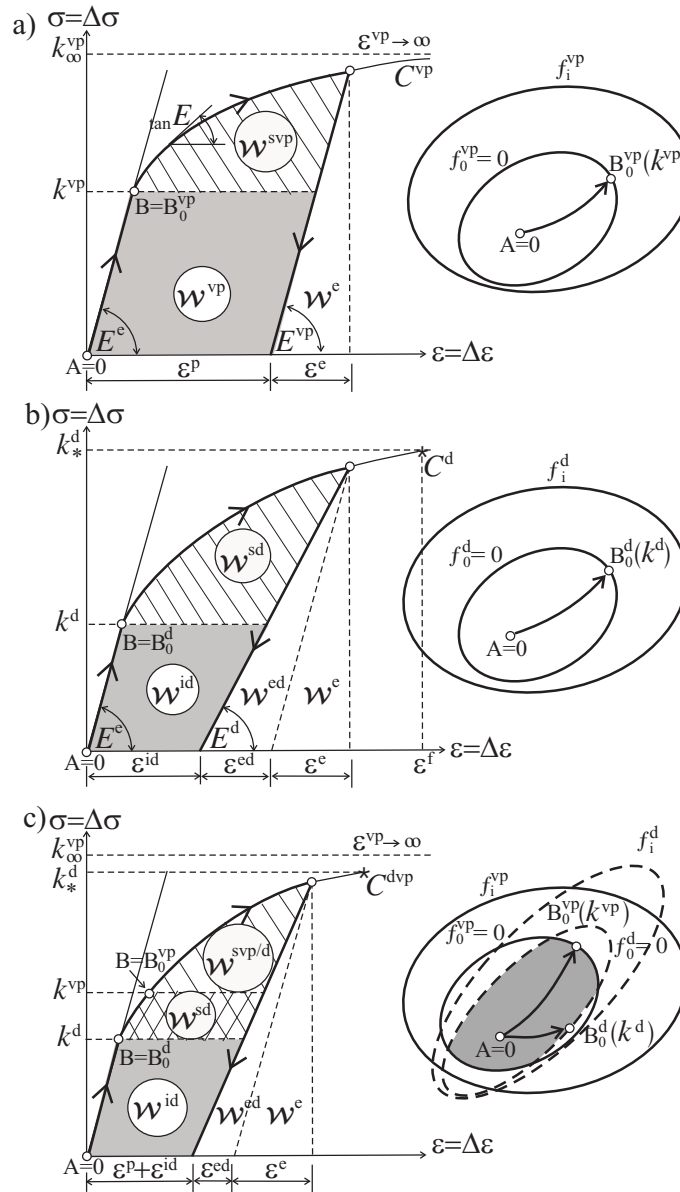
Deformacja sprężysta materiału podlega ograniczeniom ze względu na osiągnięcie pewnych stanów granicznych, związanych z inicjacją odkształceń trwa-

łych, powiązanych z nieodwracalnymi procesami dyssypatywnymi zachodzącymi w materiale. Najczęściej będą to *mikropoślizgi plastyczne* (materiały ciągliwe) bądź (i) *mikrouszkodzenia* (materiały kruche). Procesy te można zilustrować na przykładzie jednoosiowego rozciągania i odciążania dla trzech charakterystycznych grup materiałów: (lepko)plastycznych, bądź ciągliwych (większość metali), kruchych (niektóre kompozyty typu CMC, materiały ceramiczne, beton, skały, grunty) i mieszanych – (lepko) plastyczno/kruchych (większość kompozytów typu MMC, żeliwo sferoidalne), por. rys. 11.1.

W materiale ciągliwym (lepko)plastycznym, rys. 11.1a, po przekroczeniu naprężenia progowego k^{VP} , rozpoczyna się nieliniowy odcinek wykresu, związany z rozwojem odkształceń (lepko)plastycznych. Na podstawie doświadczeń można przyjąć, że w trakcie tego procesu wzmocnienia, moduł sprężystości nie ulega zmianie $E^{VP} = E^e$. Oznaczone pola pod wykresem \mathcal{W}^e , \mathcal{W}^{VP} i \mathcal{W}^{sVP} są, odpowiednio, miarą właściwej energii sprężystej odzyskanej przy odciążaniu, energii dyssypowanej (głównie w postaci ciepła) i energii zużytej na przebudowę mikrostruktury materiału. Poziom naprężenia k_{∞}^{VP} odpowiada asymptocie, do której zmierza wykres rozciągania materiału ciągliwego, gdy $\varepsilon^{VP} \rightarrow \infty$ (wzmocnienie asymptotyczne).

Inaczej przebiega proces rozciągania próbki z materiału kruchego, po przekroczeniu naprężenia progowego k^d , związanego z inicjacją rozwoju mikrouszkodzeń, rys. 11.1b. Wprawdzie nieliniowa część wykresu, odpowiadająca wzmocnieniu uszkodzeniowemu, przypomina swoim charakterem odcinek wzmocnienia plastycznego, jednak spadek sztywności jest wolniejszy, a po osiągnięciu odkształcenia niszczącego ε^f materiał ulega kruchemu pękaniu (ang. *brittle fracture*). Jednocześnie obserwuje się progresywny spadek modułu sprężystości $E^d < E^e$. Pola pod wykresem obciążenia i odciążenia \mathcal{W}^e , \mathcal{W}^{ed} , \mathcal{W}^{id} i \mathcal{W}^{sd} , są odpowiednio: miarą energii właściwej sprężystej, odwracalnej części energii związanej z częściowym zamykaniem mikrouszkodzeń, nieodwracalnej energii dyssypowanej w trakcie rozwoju mikrouszkodzeń i mikropęknięć i energii zużytej na przebudowę mikrostruktury materiału (energii magazynowanej – ang. *stored*).

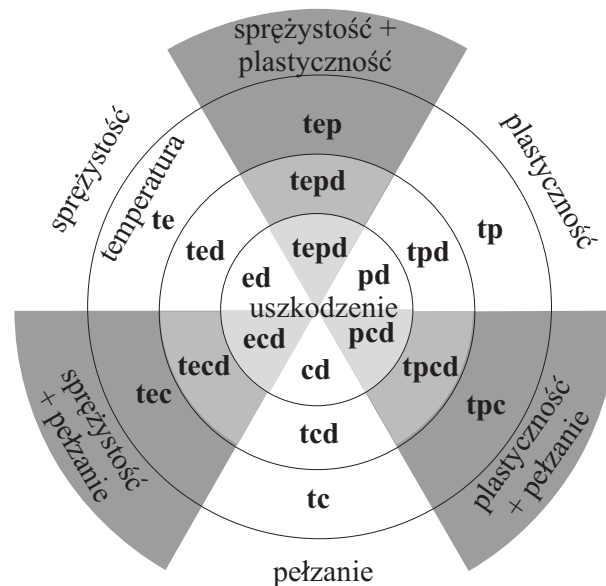
W przypadku złożonym, gdy materiał wykazuje zarówno cechy kruche jak i ciągliwe (np. żeliwo zbrojone cząsteczkami grafitu sferoidalnego), pojawiają się, sukcesywnie, trzy fazy procesu: sprężysta ($\sigma < k^d$), sprężysta w obecności uszkodzeń ($k^d < \sigma < k^{VP}$) oraz mieszana: (lepko)plastyczna z towarzyszeniem uszkodzeń ($k^{VP} < \sigma$), jeśli założyć że próg (lepko)plastyczności jest wyższy niż próg inicjacji uszkodzeń, $k^d < k^{VP}$, rys. 11.1c. Odpowiednie pola \mathcal{W}^e , \mathcal{W}^{ed} , \mathcal{W}^{id} , \mathcal{W}^{sd} i \mathcal{W}^{sVPd} , są również miarą energii właściwej: sprężystej, sprężystej części energii uszkodzenia, energii dyssypowanej w trakcie rozwoju mikrousz-



Rysunek 11.1. Jednoosiowe procesy obciążenia i odciążenia w obecności różnych mechanizmów dyssypacji: a) (lepkoplastycznej, b) uszkodzeniowej i c) mieszanej plastyczno-uszkodzeniowej

zkodzeń, energii zużytej na przebudowę materiału w trakcie rozwoju mikrouszkodzeń (wzmocnienie mikrouszkodzeniowe) i energii zużytej na przebudowę mikrostruktury materiału w trakcie jednoczesnego rozwoju odkształceń plastycznych i mikrouszkodzeń. W takim sprzężonym problemie, ograniczenie zakresu sprężystego w przestrzeni naprężeń jest częścią wspólną dwóch powierzchni początku uplastycznienia f_0^{VP} i inicjacji uszkodzeń f_0^d . W trakcie *sprężonego procesu dyssypacji* uszkodzeniowej i (lepko)plastycznej, zarówno odkształcenia plastyczne wpływają na przebudowę obu powierzchni: plastyczności i uszkodzenia, jak i progresywny rozwój uszkodzeń skutkuje zmianami tych powierzchni. Dyskusji omawianych tutaj obustronnych sprzężeń jest poświęcona np. praca Egner [41].

Reasumując, *procesy dyssypatywne*, pojedyncze lub złożone, są z reguły sprzężone z różnymi rodzajami deformacji. Dla przykładu, rozróżniamy złożone procesy: lepko-sprężyste, sprężysto-plastyczne, lepko-plastyczne, lepko-sprężysto-plastyczne, sprężyste z uszkodzeniami, plastyczne z uszkodzeniami, sprężysto-plastyczne z uszkodzeniami, lepko-plastyczne z uszkodzeniami, by wymienić najważniejsze spośród nich, jak zilustrowano na schematycznej mapie, rys. 11.2. Dodatkowo, różnym procesom deformacji mogą towarzyszyć



Rysunek 11.2. Mapa sprzężonych mechanizmów dyssypacji

procesy termiczne związane z doprowadzaniem bądź odprowadzaniem ciepła w ogólności w warunkach nieizotermicznych. W efekcie, równania konstytutywne różnych materiałów, opisujące procesy odwracalne bądź nieodwracalne (dyssypatywne), powinny uwzględniać zarówno zależność parametrów materiałowych od temperatury (słabe sprzężenie z ustalonym polem temperatur $T(\mathbf{x})$), jak i wpływ zmiany prędkości temperatury w czasie w rozważanym punkcie, na procesy towarzyszące deformacji (silne sprzężenie równań konstytutywnych ze zmianą temperatury $\dot{T}(\mathbf{x})$).

11.2. Wstępna koncepcja powierzchni granicznych sprężystości

W wieloosiowym stanie naprężenia można zdefiniować *hiperpowierzchnie graniczne*, odpowiadające inicjacji *mikropoślizgów plastycznych* f_0^p , (11.1a) lub *mikrouszkodzeń* f_0^d (ang. *damage*), (11.1b). Zatem, zakładając, że w rozważanym materiale nie występują naprężenia resztkowe $\sigma_{ij}^{\text{res}} = 0$, ograniczenia zakresu sprężystego przyjmują odpowiednio postać

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & f_0^p(\Delta\sigma_{ij}) \leq k^p(T) \\ \text{b)} \quad & f_0^d(\Delta\sigma_{ij}) \leq k^d(T) \\ \text{c)} \quad & f_0^p(\Delta\sigma_{ij}) \leq k^p(T) \quad \wedge \quad f_0^d(\Delta\sigma_{ij}) \leq k^d(T) \end{aligned} \quad (11.1)$$

W przypadku (11.1c) powierzchnię graniczną stanowi część wspólna obu hiperpowierzchni, por. także, rys. 11.1.

Jeśli natomiast stan początkowy (punkt początku procesu A na rys. 11.1) nie jest wolny od naprężeń, $A = A^{\text{res}}(\sigma_{ij}^{\text{res}})$, wówczas naprężenia wywołane przyłożonym obciążeniem $\Delta\sigma_{ij}$ nakładają się na stan resztkowy σ_{ij}^{res} , zatem ograniczenia zakresu sprężystego (11.1) otrzymują zmienioną postać

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & f_0^p(\Delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{res}}) \leq k^p(T) \\ \text{b)} \quad & f_0^d(\Delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{res}}) \leq k^d(T) \\ \text{c)} \quad & f_0^p(\Delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{res}}) \leq k^p(T) \quad \wedge \quad f_0^d(\Delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{res}}) \leq k^d(T) \end{aligned} \quad (11.2)$$

W takim przypadku, wykresy na rys. 11.1 należy interpretować jako wykresy przyrostów $\Delta\sigma(\Delta\varepsilon)$, przesunięte względem początku układu $\sigma - \varepsilon$ (punkt 0) o wartości naprężeń i odkształceń resztkowych $A^{\text{res}}(\sigma^{\text{res}}, \varepsilon^{\text{res}})$ jak pokazano, np. na rys. 4.3. Występujące tu stałe k^p lub k^d oznaczają wartość *granicznego naprężenia zastępczego*, przy której inicjuje się proces *rozwoju plastyczności*

lub *uszkodzeń*, w jakimś punkcie materiału. Są to stałe materiałowe, na ogół silnie zależne od temperatury $k^p(T)$ lub $k^d(T)$.

Zauważmy, że osiągnięcie powierzchni granicznej dla odkształceń sprężystych nie oznacza zazwyczaj natychmiastowego zniszczenia materiału, a jedynie inicjację procesów mikroślizgów (lepko)plastycznych i/lub mikrouszkodzeń. W istocie więc, przy dalszym obciążeniu po odejściu od wykresu liniowego obserwujemy nieliniową odpowiedź $\sigma(\varepsilon)$, która może mieć swoje źródło w jednym z rozpatrywanych procesów dyssypatywnych (plastycznym, uszkodzeniowym bądź, mieszanym). W efekcie, tylko część całkowitej energii odkształcenia (pole pod krzywą $\sigma(\varepsilon)$ na rys. 11.1 jest odwracalna ($\mathcal{W}^e + \mathcal{W}^{ed}$). Pozostała część energii odkształcenia jest częściowo rozpraszana, głównie w formie ciepła (plastyczność) lub innej energii, np. akustycznej (mikrouszkodzenie), a częściowo zużyta w materiale na przebudowę jego mikrostruktury i związaną z tym przebudowę powierzchni granicznych (\mathcal{W}^{svp} , \mathcal{W}^{sd} , $\mathcal{W}^{svp/d}$) (efekt *wzmocnienia plastycznego* bądź *uszkodzeniowego*). Użytego tutaj terminu „wzmocnienie plastyczne” bądź „wzmocnienie uszkodzeniowe” nie należy interpretować jako wzrost sztywności materiału (czyli w szczególności modułu Younga w materiale izotropowym). Oba omawiane procesy dyssypatywne powodują bowiem spadek sztywności (czyli wzrost podatności) materiału, co manifestuje się malejącym modułem stycznym $\tan E = d\sigma/d\varepsilon$.

Aby rozpoznać, który z procesów dyssypatywnych jest odpowiedzialny za mięknięcie materiału i nieliniowość wykresu, należy przeprowadzić odciążenie. W przypadku dyssypacji wyłącznie plastycznej, pierwotny moduł sprężystości po odciążeniu pozostaje niezmienny $E^p = E^e$. Natomiast w przypadku dyssypacji uszkodzeniowej obserwuje się spadek pierwotnego modułu sprężystości $E^d \leq E^e$. Przy tym E^d należy rozumieć jako efektywny moduł materiału sprężystego z uszkodzeniami, np. $E^d = E^e(1 - D)$, gdzie *parametr uszkodzenia* D oznacza, w najprostszym ujęciu, stosunek powierzchni uszkodzonej A^d do powierzchni nominalnej A rozpatrywanego przekroju $D = A^d/A$. Natomiast przy powtórным obciążeniu materiału uprzednio odciążonego nowy zakres sprężysty dla rozciągania wydłuża się, jednak najczęściej towarzyszy mu pewne skrócenie zakresu wtórnego sprężystego ściskania.

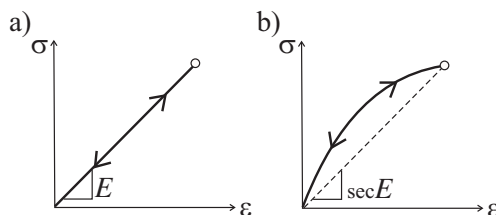
11.3. Sprężystość liniowa oraz nieliniowa

Równanie konstytutywne sprężystości opisuje jednoznaczne przyporządkowanie naprężeń zadanyemu odkształceniu, bez uwzględnienia wpływu historii ob-

ciążenia. Równanie to przyjmuje zatem ogólną postać

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}) \quad (11.3)$$

Równania tego typu są, w ogólności, nieliniowe i mają identyczną postać dla procesów obciążenia i odciążenia (rys. 11.3a)



Rysunek 11.3. Ścieżki obciążenia i odciążenia materiału sprężystego: a) liniowego, b) nieliniowego

W szczególnym przypadku *liniowej sprężystości* (rys. 11.3a) równania (11.3) zapisujemy następująco

$$\sigma_{ij} = {}^e E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{ij} = {}^e E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (11.4)$$

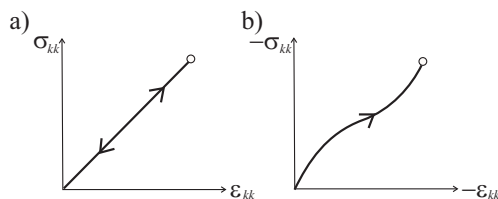
gdzie ${}^e E_{ijkl}$ i ${}^e E_{ijkl}^{-1}$ oznaczają, odpowiednio, tensory czwartego rzędu charakteryzujące materiał sprężysty: *tensor sztywności* i *tensor podatności*, których postać zależy, na ogół, od wyboru układu współrzędnych i symetrii materiałowej, lecz nie podlega zmianie w trakcie procesu (por. szerzej rozdział 4).

W przypadku *izotropowej liniowej sprężystości* tensor sztywności jest tensorem Hooke'a E_{ijkl} , gdzie dwie stałe, moduł ściśliwości K i moduł ścianania G , charakteryzują niesprężone, liniowe zależności dla części objętościowej i postaciowej deformacji sprężystej, zwane prawem zmiany objętości i postaci

$$\sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk} \quad s_{ij} = 2Ge_{ij} \quad (11.5)$$

W ogólnym przypadku *anizotropowej sprężystości* efekty objętościowe pozostają jednak sprzężone z efektami postaciowymi, tak iż rozbicie równań sprężystości na niezależne prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci (11.5) nie jest możliwe (por. szerzej podrozdział 5.2.6).

Natomiast w przypadku *izotropowej nieliniowej sprężystości* obie części deformacji (objętościowa i postaciowa) są sprzężone i nieliniowe. Zilustrowano to na przykładzie: a) metali bądź b) betonu, na rys. 11.4.

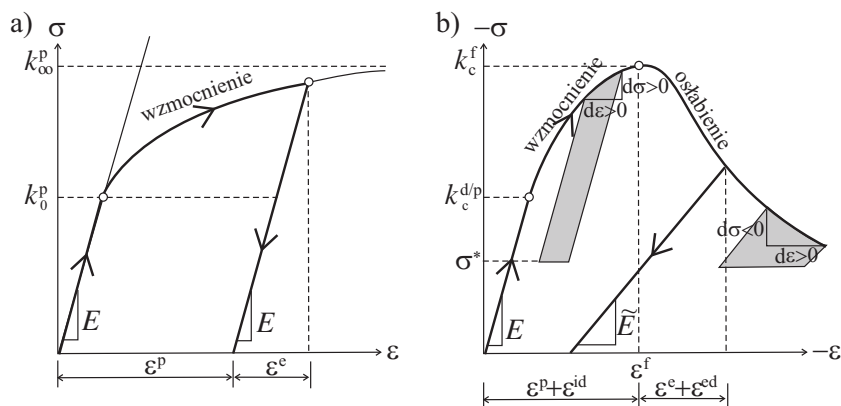


Rysunek 11.4. Deformacje objętościowe: a) liniowa metalu, b) nieliniowa betonu

11.4. Plastyczność a pełzanie

Proces plastycznego płynięcia materiału pojawia się w *metalicznym materiale* sprężystym po osiągnięciu granicy plastyczności k^p i rozpoczęciu nieliniowego procesu wzmocnienia plastycznego, podczas którego granica plastyczności przy rozciąganiu rośnie, np. do pewnej wartości asymptotycznej k_∞ . Moduł sprężystości nie ulega przy tym zmianie, co pokazuje próba odciążania na rys. 11.5a.

Inaczej przebiega proces wzmocnienia/osłabienia przy ściskaniu w *materiałach kruchych* lub sypkich (beton, skały, grunty), jak zilustrowano na rys. 11.5b. Jak opisano w 9.1, w ściskanym materiale kruchym, po przekrocze-



Rysunek 11.5. Procesy: a) wzmocnienia plastycznego na wykresie rozciągania z odciążeniem dla metalu, b) początkowego wzmocnienia plastycznego na wykresie ściskania, poprzedzającego osłabienie dla betonu

niu progu $k_c^{d/p}$, odpowiadającego inicjacji sprężonego procesu plastycznego płynięcia i rozwoju mikrouszkodzeń mamy do czynienia z przeciwstawnymi procesami wzmocnienia typu plastycznego i osłabienia typu uszkodzeniowego. W efekcie, po pierwszej fazie wzmocnienia ($\varepsilon < \varepsilon^f$), pojawia się druga niesta-

teczna faza osłabieniowa ($\varepsilon > \varepsilon^f$). Pojawienie się niestatecznej części wykresu $\sigma - \varepsilon$ (rys. 11.5b), na wykresie jednoosiowego ściskania betonu lub skał (poza punktem k_c^f, ε^f), pozostaje jednak w sprzeczności z podstawowym *postulatem stateczności materiałowej Druckera*, zgodnie z którym elementarna praca wykonana na dowolnym *quasi-cykle naprężeniowym* musi być dodatnia (Drucker [37], Życzkowski [164]), porównaj szerzej podrozdziały 7.3 i 7.4

$$dW^{p/d} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\boldsymbol{\varepsilon}^{p/d} + \frac{1}{2} d\boldsymbol{\sigma}^{p/d} \boldsymbol{\varepsilon}^{p/d} + \dots \geq 0 \quad (11.6)$$

Stanowi to poważne komplikacje, a analiza części pokrytycznej ścieżki równowagi, $|\varepsilon| > \varepsilon^f$ wymaga sterowania kinematycznego. Ponadto, należy podkreślić, że odciążaniu od punktu na ścieżce niestatecznej (mięknięciu) towarzyszy osłabiony moduł sprężystości $\tilde{E} < E$ wskazujący na równoczesny udział, obok plastyczności, drugiego procesu dyssypatywnego – rozwoju uszkodzeń. W najprostszym przypadku zaawansowanie uszkodzenia można określać za pomocą zmiennej stanu uszkodzenia D , definiowanego jako (porównaj 3.5, rys. 3.1)

$$D = \frac{A^d}{A}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (11.7)$$

gdzie: A oznacza przekrój nominalny, A^d natomiast część przekroju, która podlegała uszkodzeniu; σ oznacza naprężenie nominalne $\sigma = F/A$, natomiast $\tilde{\sigma} = F/(A - A^d)$ oznacza naprężenie efektywne. Postulat stateczności materiałów sprężysto-kruchych był szerzej dyskutowany w podrozdziale 7.4.

Zakładając addytywną dekompozycję małych odkształceń w materiale sprężysto-plastycznym (rys. 11.5a) na część sprężystą i plastyczną, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$, możemy zapisać, niezależnie od czasu, *równanie konstytutywne plastyczności* w postaci przyrostowej

$$d\sigma_{ij} = {}^e E_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad \text{i} \quad d\sigma_{ij} = {}_{\tan}^{\text{ep}} E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (11.8)$$

lub równoważnie

$$\dot{\sigma}_{ij} = {}^e E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) \quad \text{i} \quad \dot{\sigma}_{ij} = {}_{\tan}^{\text{ep}} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (11.9)$$

Przyrost odkształcenia plastycznego określamy na podstawie *potencjału dyssypacji plastycznej* $f^p(\sigma_{ij}, K_\alpha^p) = 0$, za pomocą *prawa plastycznego płynięcia*, wynikającego z tzw. *reguły normalności*

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11.10)$$

W (11.9) $\dot{\lambda}^P(\dot{\varepsilon}_{ij}^P)$ jest skalarną funkcją prędkości przyrostu odkształceń plastycznych, a K_α^P oznacza tzw. *zmiennę wzmocnienia plastycznego*, opisującą zmianę powierzchni plastyczności w miarę rozwoju procesu (efekt wzmocnienia plastycznego). Występujący tu tensor konstytutywny ${}^{\text{ep}}_{\text{tan}}E_{ijkl}$ jest *tensoriem sztywności materiału sprężysto-plastycznego*, którego elementy nie są stałe, lecz ulegają modyfikacji w trakcie postępującego procesu plastycznego

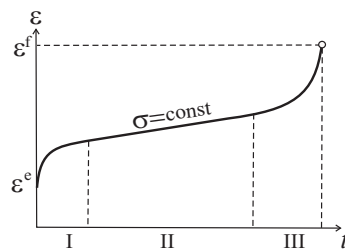
$${}^{\text{ep}}_{\text{tan}}E_{ijkl} = {}^{\text{ep}}_{\text{tan}}E_{ijkl}(\varepsilon_{mn}^P) \quad (11.11)$$

Podkreślmy, że procesy plastycznego płynięcia, omówione powyżej, opisują zachowanie niezależne od czasu. Można je bowiem przedstawić w formie przyrostowej (po uproszczeniu obustronnym przez dt), przypisując jednoznacznie przyrost naprężenia $d\sigma_{ij}$, określone przyrostowi odkształcenia $d\varepsilon_{kl}$, w której czas nie występuje w sposób jawny

$$d\sigma_{ij} = {}^{\text{ep}}_{\text{tan}}E_{ijkl}d\varepsilon_{kl} \quad \text{lub} \quad d\varepsilon_{ij} = {}^{\text{ep}}_{\text{tan}}E_{ijkl}^{-1}d\sigma_{kl} \quad (11.12)$$

Zauważmy jednak, że *macierze reprezentacji obu tensorów konstytutywnych sztywności i podatności* ${}^{\text{ep}}_{\text{tan}}\mathbf{E}$ i ${}^{\text{ep}}_{\text{tan}}\mathbf{E}^{-1}$, występujących w równaniach przyrostowych (11.8) i (11.12), są macierzami stycznymi, które należy aktualizować na każdym kroku przyrostu odkształcenia. Aby wywołać przyrost odkształcenia plastycznego $d\varepsilon_{ij}^P$, bądź odkształcenia całkowitego $d\varepsilon_{ij}$, musi być na ogół dokonany przyrost naprężenia $d\sigma_{kl}$. Wyjątek stanowi tzw. *idealna plastyczność*, w przypadku której nie ma jednoznacznego przyporządkowania odkształceń stałemu naprężeniu. Zauważmy wreszcie, że przyrost naprężenia w rozpatrywanym punkcie $d\sigma_{kl}(\mathbf{x})$, niekoniecznie musi wynikać z przyrostu obciążenia zewnętrznego, lecz może być rezultatem przegrupowania (redystrybucji) naprężeń w konstrukcji.

W przeciwieństwie do procesów plastyczności, w przypadku *procesu pełzania* bądź ogólniej *procesów lepko-sprężystych* mamy do czynienia z procesami zależnymi od czasu. Oznacza to, że nawet w przypadku stałego naprężenia $\sigma = \text{const}$, odkształcenie narasta w czasie $\varepsilon = \varepsilon(t)$, jak zilustrowano schematycznie na rys. 11.6. Przyłożeniu naprężenia odpowiada natychmiastowe odkształcenie sprężyste ε^e , a następnie narasta w czasie odkształcenie pełzania ε^v , początkowo z malejącą prędkością $\dot{\varepsilon}^v$, a dalej z ustaloną prędkością pełzania $\dot{\varepsilon}^v = \text{const}$, co odpowiada kolejnym fazom: *pełzania pierwszorzędowego I* i *pełzania drugorzędowego*–ustalonego II. W kolejnej, trzeciej fazie *pełzania trzeciorzędowego III* obserwujemy ponowny, narastający w czasie, wzrost prędkości pełzania spowodowany włączeniem się drugiego, obok pełzania, procesu dyssypatywnego związanego z rozwojem uszkodzeń, rys. 11.6.



Rysunek 11.6. Wykresy materiału lepko-sprężystego wykazującego pełzanie pierwszo-, drugo- oraz trzeciorzędowe

Równania konstytutywne pełzania są z reguły *nieliniowe* i można je przedstawić w postaci formalnie analogicznej do przyrostowych równań plastyczności, a mianowicie

$$\dot{\sigma}_{ij} = {}^e E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^v) \quad \text{lub} \quad \dot{\sigma}_{ij} = \frac{ev}{\tan} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (11.13)$$

a prędkość odkształcenia pełzania $\dot{\varepsilon}_{kl}$, określamy na podstawie *potencjału dysypacji pełzania* $f^v(\sigma_{ij}, K_\alpha^v) = 0$, przy użyciu *prawa ewolucji pełzania*, będącego wynikiem przeniesienia reguły normalności, z plastyczności (11.9) na pełzanie

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^v = \lambda^v \frac{\partial f^v}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11.14)$$

Analogicznie do plastyczności (por. K_α^p), K_α^v oznacza tzw. *zmienne wzmocnienia lepkiego*, opisujące zmianę (przebudowę) powierzchni pełzania wskutek procesu rozwoju odkształceń lepkich ε^{vp} . Jednakże w tym przypadku, w przeciwieństwie do plastyczności, moduł $\lambda^v(\sigma_{ij}, T)$ jest skalarną funkcją, zależną od naprężenia i temperatury, charakteryzującą materiał w określonych warunkach. Odkształcenie pełzania ε_{ij}^v zależy zatem od czasu $\varepsilon_{ij}^v(t)$ w sposób jawny.

Szczególnym przypadkiem pełzania jest *liniowa lepko-sprężystość*, dla której odkształcenie sprężyste ε_{ij}^e i prędkość odkształceń lepkich $\dot{\varepsilon}_{ij}^v$ są tensorowo liniowymi funkcjami naprężenia σ_{kl}

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e(\sigma_{kl}) \quad \text{i} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^v = \dot{\varepsilon}_{ij}^v(\sigma_{kl}) \quad (11.15)$$

Dla przykładu, w *uogólnionym modelu Maxwella*, obowiązuje $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^v$ porównaj 2.1.5, zatem

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^v = \dot{\varepsilon}_{ij}^e(\sigma_{kl}) + \dot{\varepsilon}_{ij}^v(\sigma_{kl}) \quad (11.16)$$

natomiast, w uogólnionym modelu Voigta–Kelvina, gdzie $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^v$, otrzymujemy (porównaj także tab. 2.1)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e(\varepsilon_{kl}) + \sigma_{ij}^v(\dot{\varepsilon}_{kl}) \quad (11.17)$$

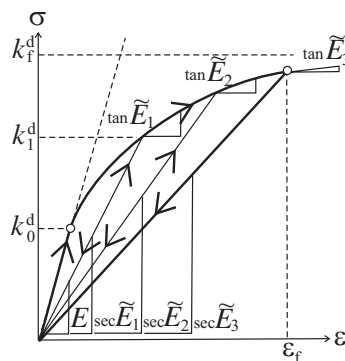
11.5. Sprężystość nieliniowa z udziałem uszkodzeń

W liniowych równaniach konstytutywnych sprężystości (11.4), w sformułowaniu skończonym, tensory konstytutywne ${}^e E_{ijkl}$ lub ${}^e E_{ijkl}^{-1}$, charakteryzują niezmiennie, w trakcie procesu deformacji, właściwości materiału. W efekcie równania te można również zapisać w analogicznej formie przyrostowej

$$\dot{\sigma}_{ij} = {}^e E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad \text{lub} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = {}^e E_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.18)$$

gdzie, ze względu na niezmienność w czasie obu tensorów konstytutywnych, sztywności i podatności, ${}^e \dot{E}_{ijkl} = 0$ i ${}^e \dot{E}_{ijkl}^{-1} = 0$, liniowość jest nadal zachowana. Tensory konstytutywne są wówczas identyczne, jak w sformułowaniu skończonym (11.4).

Po przekroczeniu pewnego progu naprężenia k_0^d może pojawić się jednak, już w zakresie odkształceń sprężystych (w pełni odwracalnych), proces rozwoju uszkodzeń wewnątrz materiału, który wpływa na zmianę (degradację) pierwotnych właściwości sprężystych materiału, np. siecznego modułu sprężystości ${}_{\text{sec}} \tilde{E}$ czy ogólniej siecznego tensora sprężystości z uszkodzeniem ${}_{\text{sec}}^{\text{ed}} \tilde{E}_{ijkl}$. Proces rozwoju uszkodzeń jest częstym, obok plastyczności, procesem dyssypatywnym, będącym źródłem nieliniowości wykresu rozciągania, jak schematycznie pokazano na rys. 11.7.



Rysunek 11.7. Wykresy jednoosiowe materiału nieliniowo sprężystego z uszkodzeniem

W najprostszym przypadku, po usunięciu naprężenia, odkształcenie wraca wprawdzie do punktu początkowego, jednak powrót następuje po innej ścieżce, natomiast *sieczny moduł sprężystości* ulega zmianie, zależnie od zaawansowania procesu rozwoju mikrouszkodzeń, określonego pewną zmienną D (parametr uszkodzenia), $\text{sec}\tilde{E}(D)$, por. podrozdział 3.5. Przy powtórny obciążeniu, progowa wartość naprężenia k_1^d , zamykająca nowy odcinek sprężysty bez przyrostu uszkodzeń, zostaje podwyższona, a po jej przekroczeniu aktywuje się ponowny proces ewolucji uszkodzeń, związany z dalszą, progresywną degradacją materiału. Innymi słowy, nieliniowość wykresu rozciągania na rys. 11.7 ma w tym przypadku swoje źródło w zmianach mikrostruktury, w ślad za rozwojem uszkodzeń w materiale, a nie wynika z cech materiału nieliniowo sprężystego, jak pokazano uprzednio na rys. 11.3b, w którym powrót do stanu pierwotnego odbywa się po tej samej ścieżce co obciążenie, bez żadnych zmian właściwości materiału.

W ogólnym przypadku, w miejsce liniowych równań sprężystości (11.4), należy zatem zastosować *nieliniowe równania materiału sprężystego z uszkodzeniem*, które w sformułowaniu skończonym mają postać

$$\sigma_{ij} = \text{sec}^{\text{ed}} E_{ijkl}(D_{mn}) \varepsilon_{kl} \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{ij} = \text{sec}^{\text{ed}} E_{ijkl}^{-1}(D_{mn}) \sigma_{kl} \quad (11.19)$$

Występujący w (11.19) *tensor uszkodzenia* drugiego rzędu D_{mn} , opisuje aktualny stan zaawansowania procesu degradacji właściwości materiałowych, wyrażony *równaniem ewolucji uszkodzenia*, analogicznym do plastyczności lub pełzania, porównaj (11.10) i (11.14)

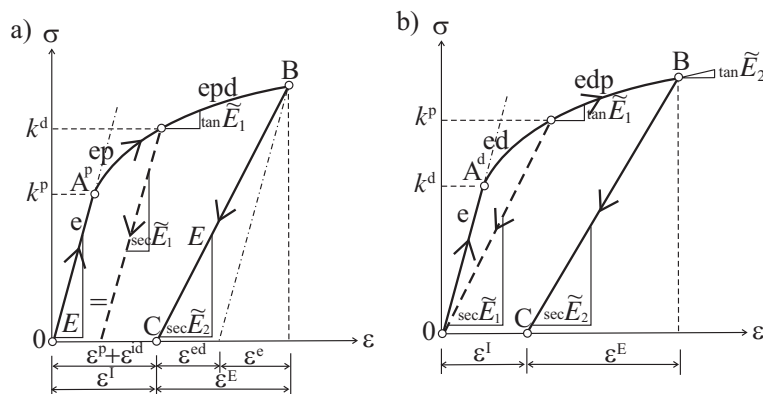
$$\dot{D}_{mn} = \dot{\lambda}^d \frac{\partial f^d}{\partial Y_{mn}} \quad (11.20)$$

Skalarna funkcja $f^d(Y_{ij}, K_\alpha^d) = 0$ jest *potencjałem dyssypacji* związanej z rozwojem *uszkodzeń*, natomiast Y_{ij} i K_α^d oznaczają, odpowiednio, *siłę termodynamicznie sprzężoną* odpowiedzialną za rozwój uszkodzeń i *zmienne wzmocnienia* (przebudowy) powierzchni uszkodzenia $f^d = 0$.

Podkreślmy że, pomimo formalnego podobieństwa *równań nieliniowej sprężystości z uszkodzeniem* w ujęciu skończonym (11.19) do równań liniowej sprężystości (11.4), tensory konstytutywne sztywności $\text{sec}^{\text{ed}} E_{ijkl}(D_{mn})$ i podatności $\text{sec}^{\text{ed}} E_{ijkl}^{-1}(D_{mn})$ ulegają przebudowie w trakcie procesu rozwoju uszkodzeń towarzyszącego deformacji, zatem równania (11.19) są nieliniowe. Reasumując, równania konstytutywne dla materiału sprężystego z uszkodzeniem w sformułowaniu skończonym (11.19), posługują się tensorami konstytutywnymi, których macierzowe reprezentacje odpowiadają macierzom siecznym, $[\text{sec}^{\text{ed}} \mathbb{E}]$ lub $[\text{sec}^{\text{ed}} \mathbb{E}^{-1}]$, co zilustrowano na rys. 11.7.

11.6. Sprężysto-plastyczność z udziałem uszkodzeń

W przypadku jednoczesnej możliwości wystąpienia dwóch podstawowych mechanizmów dyssypatywnych, plastyczności i rozwoju uszkodzeń, nieliniowość wykresu rozciągania lub ściskania może mieć źródło w każdym z tych zachowań niezależnie, bądź też w sprzężonym procesie równoczesnego płynięcia plastycznego i wzrostu mikrouszkodzeń, rys. 11.8.



Rysunek 11.8. Wykres jednoosiowego rozciągania i odciążania: a) próbki metalicznej (ciągliwo-kruczej), wg Abu Al-Ru i Voyiadjis [1], b) próbki niemetalicznej (kruczo-ciągliwej)

W większości materiałów metalicznych (polikrystalicznych), rys. 11.8a, w pierwszej fazie procesu nieliniowego ($k^p \leq \sigma \leq k^d$) zachodzi wyłącznie płynięcie plastyczne (bez uszkodzeń), któremu nie towarzyszy zmiana modułu sprężystości E . W drugiej fazie procesu ($k^d < \sigma$) płynięciu plastycznemu towarzyszy rozwój uszkodzeń, wskutek którego następuje degradacja modułu sprężystości $\tilde{E} < E$. W fazie pierwszej obowiązują równania konstytutywne materiału sprężysto-plastycznego (11.8–11.9). W fazie drugiej sprężysto-plastycznej z uszkodzeniami należy przyjąć bardziej złożoną formę równania konstytutywnego, uwzględniającą addytywne rozkłady na część odwracalną $\varepsilon^E = \varepsilon^e + \varepsilon^{ed}$ oraz część nieodwracalną $\varepsilon^I = \varepsilon^p + \varepsilon^{id}$, czyli

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^I = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{ed} + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{id} \quad (11.21)$$

W takim ogólnym sformułowaniu, zakłada się, że tylko część odkształceń typu uszkodzeniowego jest odwracalna (ε^{ed}), a pozostała część ma charakter nieodwracalny (ε^{id}), czyli inaczej niż przyjmowaliśmy w uproszczonym modelu materiału sprężystego z uszkodzeniem (11.5). Zatem równanie konstytutywne

materiału sprężysto-plastycznego z uszkodzeniem ma postać ogólną

$$\dot{\sigma}_{ij} = \overset{\text{epd}}{\text{sec}} E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^{\text{I}}) \quad (11.22)$$

gdzie *sieczny tensor sztywności* zależy od aktualnego stanu uszkodzenia $\overset{\text{sec}}{E}_{ijkl}$ (D_{mn}). Zauważmy, że w ogólnym przypadku pełnego sprzężenia obu procesów dyssypatywnych, plastyczności i uszkodzeń, zachodzi wzajemne oddziaływanie obu zmiennych $\varepsilon_{kl}^{\text{I}}$ i D_{mn} na przebudowę obu powierzchni dyssypacji, $f^{\text{p}} = 0$ i $f^{\text{d}} = 0$, w procesie wzmocnienia, porównaj Egner [41]. *Równania kinematyczne bądź równania ewolucji obu zmiennych stanu* mają więc postać

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{I}} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{p}} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{id}} = \dot{\lambda}^{\text{p}} \frac{\partial f^{\text{p}}}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{\lambda}^{\text{d}} \frac{\partial f^{\text{d}}}{\partial \sigma_{ij}} \\ \dot{D}_{mn} &= \dot{D}_{mn}^{\text{p}} + \dot{D}_{mn}^{\text{d}} = \dot{\lambda}^{\text{p}} \frac{\partial f^{\text{p}}}{\partial Y_{mn}} + \dot{\lambda}^{\text{d}} \frac{\partial f^{\text{d}}}{\partial Y_{mn}} \end{aligned} \quad (11.23)$$

Występują tu dwa skalarne mnożniki zaawansowania obu procesów, plastyczności $\dot{\lambda}^{\text{p}}$ i uszkodzeń $\dot{\lambda}^{\text{d}}$.

Równanie (11.22) można dalej sprowadzić do formy przyrostowej

$$\dot{\sigma}_{ij} = \overset{\text{epd}}{\text{tan}} E_{ijkl} (\varepsilon_{pq}^{\text{p}}, D_{mn}) \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (11.24)$$

w której występuje zmienny *styczny tensor sztywności*, zależny od aktualnych wartości obu zmiennych $\varepsilon_{pq}^{\text{p}}$ i D_{mn} .

11.7. Równania konstytutywne procesów odwracalnych i nieodwracalnych – ogólna charakterystyka

W tabeli 11.1, stosując *notację wektorowo-macierzową Voigta*, zestawiono symboliczne postaci równań konstytutywnych, opisujących poszczególne procesy, pojedyncze bądź złożone-sprężone. Zastosowano następujące oznaczenia procesów sprzężonych:

Tabela 11.1. Równania konstytutywne procesów: odwracalnych w sensie odkształceń oraz nieodwracalnych

Proces		Równania konstytutywne procesu	
Odwracalny	LE	$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [{}^e\mathbb{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ lub $\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [{}^e\mathbb{E}] \{d\boldsymbol{\varepsilon}\}$	niezależny od czasu
	LED	$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [{}^{\text{ed}}_{\text{sec}}\mathbb{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ lub $\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [{}^{\text{ed}}_{\text{tan}}\mathbb{E}] \{d\boldsymbol{\varepsilon}\}$	
	NE	$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [{}^{\text{ne}}_{\text{tan}}\mathbb{E}] \{d\boldsymbol{\varepsilon}\}$	
	NED	$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [{}^{\text{ned}}_{\text{tan}}\mathbb{E}] \{d\boldsymbol{\varepsilon}\}$	
Nieodwracalny	P	$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{d\boldsymbol{\varepsilon}^P\} = [{}^P_{\text{tan}}\mathbb{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^P)] \{d\boldsymbol{\sigma}\}$	niezależny od czasu
	EP	$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^P\} = [{}^{\text{ep}}_{\text{tan}}\mathbb{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^P)] \{d\boldsymbol{\sigma}\}$	
	PD	$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pd}}\} = [{}^{\text{pd}}_{\text{tan}}\mathbb{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^P, \boldsymbol{D})] \{d\boldsymbol{\sigma}\}$	
	EPD	$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{epd}}\} = [{}^{\text{epd}}_{\text{tan}}\mathbb{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^P, \boldsymbol{D})] \{d\boldsymbol{\sigma}\}$	
	LVE	$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{lve}}\} = [{}^{\text{lve}}\mathbb{J}(t)] \{\boldsymbol{\sigma}\} dt$	zależny od czasu
	NVE	$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{nve}}\} = [{}^{\text{nve}}\mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}, t)] \{\boldsymbol{\sigma}\} dt$	
	VP	$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}\} = [{}^{\text{vp}}\mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^P, t)] \{\boldsymbol{\sigma}\} dt$	
	NVED	$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{nved}}\} = [{}^{\text{nved}}\mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}, t)] \{\boldsymbol{\sigma}\} dt$	
	NVEPD	$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{nvepd}}\} = [{}^{\text{nvepd}}\mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^P, \boldsymbol{D}, t)] \{\boldsymbol{\sigma}\} dt$	

- LE – liniowo-sprężysty
- NE – nieliniowo-sprężysty
- LED – liniowo-sprężysty + uszkodzenie
- NED – nieliniowo-sprężysty + uszkodzenie
- P – plastyczny
- EP – sprężysto-plastyczny
- PD – plastyczny + uszkodzenie
- EPD – sprężysto-plastyczny + uszkodzenie
- LVE – liniowo-lepko-sprężysty
- NVE – nieliniowo-lepko-sprężysty
- VP – lepko-plastyczny
- NVED – nieliniowo-lepko-sprężysty + uszkodzenie
- NVEPD – nieliniowo-lepko-sprężysto-plastyczny + uszkodzenie

W problemach sprężystości (E) bądź sprężystości sprzężonej z rozwojem uszkodzeń sprężystych (ED) mamy do czynienia z procesami odwracalnymi w takim sensie, że po pełnym odciążeniu naprężenia wypadkowe odkształcenie resztkowe jest zerowe. Jednakże, w przypadku rozwoju uszkodzeń, wykres $\sigma - \varepsilon$

staje się nieliniowy, czemu towarzyszy trwała zmiana (degradacja) modułów sprężystych $E > \bar{E}(D)$ bądź, w przypadku ogólnym, przebudowa macierzy sztywności $[\text{ed}\mathbb{E}(\mathbf{D})] \neq [\text{e}\mathbb{E}]$, niezależnie czy w stanie wolnym od uszkodzeń materiał był *liniowo-sprężysty* (LE) czy *nieliniowo-sprężysty* (NE). W istocie, mamy tu więc do czynienia z fizycznie nieodwracalnym dyssypatywnym procesem uszkodzenia materiału (zmianą struktury) oraz całkowicie odwracalnymi odkształceniami sprężystymi towarzyszącymi uszkodzeniu ε^e , co zilustrowano na rys. 11.7. W takich przypadkach wygodniej jest stosować przyrostową formę równania (ang. *incremental*), ze zmodyfikowaną wzdłuż ścieżki obciążenia *styczną macierzą sztywności* (bądź *podatności*) $[\text{tan}^{\text{ed}}\mathbb{E}]$, niż sformułowanie skończone (ang. *total*) z *sieczną macierzą sztywności*, $[\text{sec}^{\text{ed}}\mathbb{E}] \neq [\text{tan}^{\text{ed}}\mathbb{E}]$. Odkształcenie jest przy tym natychmiastowe (podobnie do plastyczności), bowiem „proces” rozwoju uszkodzeń jest niezależny od czasu fizycznego (ang. *time-independent materials*), a zależy jedynie od aktualnego stanu odkształcenia (lub naprężenia). Takie zachowanie jest charakterystyczne dla materiałów kruchych (beton, skały, ceramiki, itp).

W *plastyczności* (P), bądź *plastyczności sprzężonej z rozwojem uszkodzeń niesprężystych* (PD), mamy do czynienia z procesami nieodwracalnymi, bowiem po całkowitym odciążeniu pozostaje niezerowe odkształcenie trwałe, zależne od historii obciążenia (ang. *path-dependent materials*). W takich przypadkach dogodne jest zatem stosowanie równań w postaci przyrostowej, pozwalającej śledzić trajektorię obciążenia. Styczna macierz podatności $[\text{tan}^{\text{p}}\mathbb{E}^{-1}]$ bądź $[\text{tan}^{\text{pd}}\mathbb{E}^{-1}]$ jest przebudowywana w miarę rozwoju procesu płynięcia plastycznego $[\text{tan}^{\text{p}}\mathbb{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}})]$, bądź jednoczesnego płynięcia plastycznego i wzrostu uszkodzeń $[\text{tan}^{\text{pd}}\mathbb{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}, \mathbf{D})]$. Należy przy tym podkreślić, że procesy takie są również niezależne od czasu fizycznego (ang. *time-independent materials*), zatem odpowiedź materiału na przyrost naprężenia $d\boldsymbol{\sigma}$ jest natychmiastowa. Innymi słowy, bez wzrostu naprężeń (lub odkształceń) nie zachodzi ani płynięcie plastyczne, ani rozwój uszkodzeń. Dodatkowo rozwój uszkodzeń może pojawić się bądź to jedynie w towarzystwie płynięcia plastycznego (mocne sprzężenie obu zjawisk dyssypatywnych), bądź niezależnie od plastyczności (słabe sprzężenie). Takie zachowanie cechuje, odpowiednio, materiały ciągliwe (np. metaliczne o strukturze polikrystalicznej), bądź ciągliwo-kruche (np. kompozyty metaliczno/ceramiczne typu MMC, kompozyty ceramiczno/metaliczne CMC, żeliwa sferoidalne zbrojone cząstkami grafitowymi, itp). Omawiane tu procesy (typu P lub PD) nie zależą ponadto od wpływu prędkości obciążenia (ang. *rate-independent materials*).

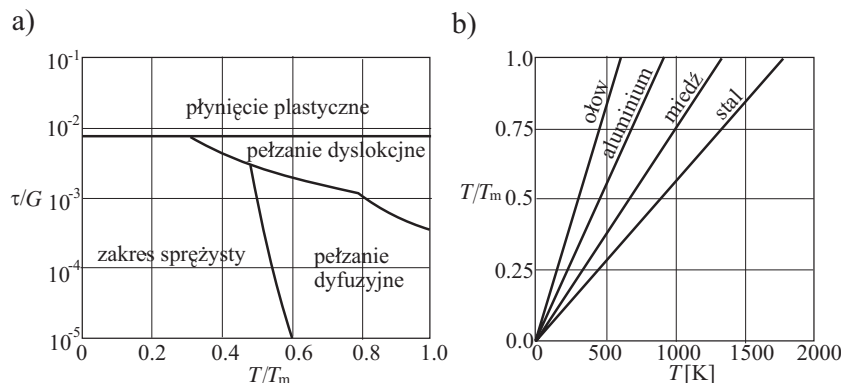
Oddzielną grupę stanowią procesy z udziałem lepkości, *lepko-sprężyste*

(VE), *lepko-plastyczne* (VP), *lepko-sprężyste z uszkodzeniem* (VED) i *lepko-plastyczne z uszkodzeniem* (VPD). Są one zależne od czasu fizycznego (ang. *time-dependent materials*), zatem dla rozwoju odkształceń nie jest konieczny przyrost naprężeń $d\boldsymbol{\sigma} > 0$, czyli mogą one zachodzić nawet przy stałym naprężeniu $\boldsymbol{\sigma} = \text{const}$. W równaniach materiału lepko-sprężystego (VE), zamiast macierzy podatności (bądź sztywności) występują zależne od czasu *macierze pełzania* bądź *relaksacji*, które mogą być niezależne od naprężeń $[\text{ve}\mathbb{J}(t)]$ (*materiały liniowo lepko-sprężyste* LVE), bądź zależne od czasu i naprężenia $[\text{nve}\mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}, t)]$ (*materiały nieliniowo lepko-sprężyste* NVE). Jeśli jednocześnie towarzyszy temu procesowi zmiana (degradacja) właściwości materiałowych wskutek rozwoju uszkodzeń (VED), wówczas macierz pełzania $[\text{nved}\mathbb{J}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, t)]$ bądź relaksacji, także podlega dodatkowej przebudowie. Podkreślimy wreszcie, że w *materiałach lepko-plastycznych* (VP), lub *lepko-plastycznych z uszkodzeniami* (VPD), odpowiedź (odkształcenie) zależy nie tylko od naprężenia, lecz także od prędkości obciążenia (ang. *rate-dependent materials*), która dodatkowo wpływa na postać macierzy pełzania $[\text{vepd}\mathbb{J}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{D}, t)]$. Warto przypomnieć, że wpływ prędkości obciążenia na zachowanie (odpowiedź) materiału można zaobserwować już w próbie dynamicznej bądź statycznej rozciągania, jak pokazano na rys. 1.17.

11.8. Wpływ zmiennego pola temperatur na związki konstytutywne – sprzężenia termiczne

Omówione powyżej, różnorodne zachowania materiałów: sprężyste, plastyczne, lepkie z towarzyszeniem uszkodzeń lub bez, są silnie zależne od temperatury. Ten sam materiał, zależnie od poziomu naprężenia oraz temperatury, a także warunków próby, może wykazywać różne cechy deformacji: sprężyste, plastyczne czy lepkie (pełzanie), także dodatkowo sprzężone z rozwojem uszkodzeń.

Tradycyjnie, ilustruje się to na tzw. *mapach mechanizmów deformacji*, przedstawianych w układzie osi: normalizowane naprężenie ścinania τ/G w funkcji *homologicznych temperatur* T/T_m , rys. 11.9a, gdzie T_m oznacza temperaturę topnienia rys. 11.9b. Mówiąc ogólnie, wzrost temperatury wpływa na wszystkie właściwości mechaniczne i termiczne materiału: *moduł Younga* $E(T)$, *moduł Kirchhoffa* $G(T)$, *granice plastyczności* $k^p(T)$, *próg uszkodzeń* $k^d(T)$, *wytrzymałość na rozciąganie* $k_t(T)$, lub *ściskanie* $k_c(T)$, *współczynnik rozszerzalności termicznej* $\alpha(T)$, *współczynnik przewodnictwa cieplnego* $\lambda(T)$, itd., porównaj podrozdział 1.5.



Rysunek 11.9. Mapa mechanizmów deformacji dla aluminium, wg Gittus [51]

Zachowanie sprężyste materiału obserwujemy przy niezbyt wysokich poziomach naprężenia, $\tau < 10^{-2}G$, oraz względnie niskich temperaturach $T < 0.3T_m$. W zakresie wyższych naprężeń, $\tau > 10^{-2}G$, dominują deformacje plastyczne, polegające na mikropoślizgach bądź ruchu dyslokacji w sieci krystalicznej. Przy rosnących temperaturach $0.3T_m < T < 0.5T_m$ i przy naprężeniu $\tau < 10^{-2}G$, występuje początkowo *mechanizm pełzania typu poślizgowego*, charakterystyczny dla pełzania pierwszorzędowego, który ze wzrostem temperatury ustępuje miejsca drugiemu mechanizmowi pełzania, polegającemu na termicznym wzroście ruchliwości dyslokacji w sieci krystalicznej. *Mechanizm dyslokacyjny pełzania* dominuje w okresie drugorzędowym z ustaloną prędkością pełzania, kiedy pełzanie dyslokacyjne jest początkowo zrównoważone umocnieniem materiałowym, aby przy dalszym wzroście temperatury, $0.5T_m < T < 0.6T_m$ przejąć rolę decydującą. Przy jeszcze wyższych temperaturach, $0.6T_m < T < 0.8T_m$, uruchamia się trzeci – *dyfuzyjny mechanizm pełzania*, cechujący się rosnącą prędkością pełzania obserwowaną w fazie pełzania trzeciorzędowego (rys. 11.9). Dodatkowo, w pełzaniu trzeciorzędowym, nakłada się nań *mechanizm rozwoju uszkodzeń*, powodując szybko narastającą degradację właściwości materiałowych, prowadzącą do zniszczenia. Omawiane mapy deformacji mają, dla większości metali lub stopów metali, naturę uniwersalną (por. rys. 11.9b).

Wracając do równań konstytutywnych procesów zachodzących podczas deformacji materiałów (tab. 11.1), należy podkreślić, że wszystkie zdefiniowane tam macierze konstytutywne: sztywności lub podatności (niezależne od czasu), a także macierze pełzania i relaksacji (zależne od czasu w sposób jawny), są dodatkowo zależne od temperatury. Dotyczy to, oczywiście, zarówno pro-

procesów odwracalnych, np. $[\mathbb{E}] = [{}^e\mathbb{E}(T)]$, itd., jak i nieodwracalnych, prostych lub sprzężonych, np. $[\mathbb{E}^{-1}] = [{}^{\text{epd}}\mathbb{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{D}; T)]$, itp., a także, w szczególności, zachowań lepkich zależnych od czasu, np. $[\mathbb{J}] = [{}^{\text{vepd}}\mathbb{J}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, t, \mathbf{D}; T)]$, itd. Taki sposób sprzężenia procesów dyssypatywnych z polem temperatury, polegającym na uzależnieniu stałych materiałowych przyjętego modelu od temperatury T , będziemy nazywać *słabym sprzężeniem termicznym*. Jest ono na ogół wystarczające przy analizie ustalonych lub *wolno zmiennych pól temperatury*.

W najprostszym przypadku *materiału liniowo termo-sprężystego*, w miejsce równań (11.4) należy wówczas przyjąć

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(T) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T) \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T = E_{ijkl}^{-1}(T) \sigma_{kl} \quad (11.25)$$

W ogólnym przypadku *anizotropii*, odkształcenie termiczne wynosi $\varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl} \Delta T$, gdzie α_{kl} jest tensorem rozszerzalności termicznej, a ε_{kl}^T ma naturę anizotropową (patrz szerzej rozdz. 6). W szczególnym przypadku *izotropii* deformacja termiczna jest czysto objętościowa, zatem $\varepsilon_{kk}^T = \alpha \Delta T$.

W przypadkach, gdy mamy do czynienia z nieustalonymi *szybko zmiennymi polami temperatur*, konieczne jest jednak również uwzględnienie zależności macierzy materiałowych od prędkości zmian temperatury \dot{T} . W takim przypadku, nawet w materiale sprężystym, przechodząc od sformułowania skończonego (11.4) do przyrostowego, należy uwzględnić również zmianę (przebudowę) tensora konstytutywnego w czasie wskutek zmiany temperatury \dot{T} , zatem

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(T) (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^T) + \frac{d}{dT} E_{ijkl}(T) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T) \dot{T} \quad (11.26)$$

Taki typ sprzężenia termicznego będziemy dalej nazywać *mocnym sprzężeniem termicznym*, w którym uwzględnia się nie tylko zależność tensora konstytutywnego od temperatury (ustalonej), lecz również przyrost tego tensora wynikający z prędkości zmiany temperatury (\dot{T}), porównaj np. Ganczarski i Skrzypek [48], Egner [41].

Epilog

W największym skrócie, niniejsza książka stanowi próbę opisanego mechaniki różnorodnych materiałów - zarówno klasycznych (np. izotropowych polikrystalicznych materiałów metalicznych) – jak i nieklasycznych, a będących wytworem nowoczesnej inżynierii materiałowej (np. wieloskładnikowych, zazwyczaj anizotropowych materiałów kompozytowych, ceramicznych itp.).

Metodyka, która została przyjęta, opiera się na klasycznych założeniach ośrodka ciągłego w zastosowaniu do uśrednionego w skali makro materiału homogenicznego (na poziomie reprezentatywnego elementu objętościowego bądź reprezentatywnej komórki jednostkowej). Zarówno uśrednione efektywne właściwości materiałów na poziomie makro, jak i stosowny opis konstytutywny, zależą od heterogenicznej na ogół mikrostruktury materiału, a także od odpowiednich grup symetrii materiałowej (anizotropia, ortotropia, poprzeczna izotropia, pełna izotropia, itd.). Szczegółowe reguły homogenizacji, będące w ostatnich dekadach przedmiotem zainteresowania wielu badaczy, wykraczają w zasadzie poza zakres tej książki, jednakże generalne metody uśredniania znajdują odbicie przy klasyfikacji i wyborze odpowiednich z punktu widzenia symetrii fenomenologicznych modeli materiałowych w skali makro. Można zatem powiedzieć, że symetria jest tłem, a anizotropia jest rdzeniem, wokół którego konstruowany jest układ całej książki. Takie spojrzenie na modelowanie materiałowe prowadzi w istocie do rewizji klasycznych reguł opisu konstytutywnego materiałów zarówno w zakresie sprężystym, jak i kryteriów ograniczenia zakresu sprężystego w wyniku inicjacji różnych nieodwracalnych mechanizmów dyssypatywnych, czy wreszcie zachowania materiałów po przekroczeniu progów uplastycznienia bądź mikrouszkodzenia (faza umocnienia).

Przy opisie i dyskusji różnorodnych modeli konstytutywnych podkreślono zarówno ich potwierdzenie w dostępnych wynikach eksperymentów, jak i adekwatność i spójność modeli w sensie określonych grup i klas symetrii. Analogie pomiędzy symetrią w opisie cech fizycznych kryształów (właściwości i modele termomechaniczne, magnetoelektryczne, optyczne i inne, por. np. Nye [108])

w zastosowaniu do poziomu sieci krystalicznej mogą okazać się przydatne również przy poprawnym doborze stosownych cech symetrii modeli konstytutywnych na poziomach mikro i makro. Te analogie prezentowano już przy omawianiu zachowania sprężystego materiałów o strukturze homogenicznej, lecz różnych grupach i klasach symetrii oraz postaci macierzy sprężystości (rozdz. 4), a także w przypadku materiałów kompozytowych niejednorodnych na poziomie mikro: subkomórek matrycy i zbrojenia w powtarzalnej komórce reprezentatywnej (rozdz. 5). Analogia pomiędzy symetrią krystaliczną a symetrią strukturalnych macierzy konstytutywnych powierzchni granicznych (Goldenblat i Kopnov, von Mises, Hill, Tsai–Wu, itp.) jest również bardzo przydatna dla poprawnego konstruowania równań powierzchni granicznych klasycznych materiałów jednorodnych o cechach ciągliwych lub kruchych (rozdz. 8 i rozdz. 9). Na podkreślenie zasługuje przy tym rewizja obecnych w literaturze warunków granicznych z punktu widzenia fundamentalnych postulatów wypukłości i stateczności materiałowej zarówno materiałów sprężysto-kruchych (kryterium typu Sylwestera, rozdz. 7), jak i sprężysto-plastycznych (kryterium Druckera, rozdz. 7).

Systematyczna budowa równań powierzchni granicznych materiałów o cechach anizotropowych, lecz różnych grupach i klasach symetrii, wymaga odpowiedniego narzędzia w postaci układu niezmienników wspólnych tensorów naprężenia bądź odkształcenia oraz tensorów strukturalnych charakteryzujących cechy materiałowe. Elementy teorii niezmienników zostały skrótowo przedstawione w rozdz. 3. Równania powierzchni granicznych opisywane w literaturze oparte na teorii wspólnych niezmienników, zostały w książce szczegółowo przedyskutowane pod kątem ograniczeń zakresu ich stosowalności z uwagi na możliwą utratę cech eliptyczności i wypukłości, prowadzącą w końcu do fizycznie niedopuszczalnej utraty jednospójności w postaci „pęknięcia” powierzchni w przypadku materiałów o wysokim stopniu ortotropii, rozdz. 8. Na podkreślenie zasługuje przy tym nowa propozycja kalibracji równań Hilla lub Tsai–Wu, będąca rozszerzeniem koncepcji Hu–Marina, a gwarantująca zachowanie cech wypukłości i jednospójności nawet przy dowolnie dużych stopniach ortotropii, rozdz. 8. Liczne przykłady ilustrują te problemy.

Podczas pracy nad książką natknęliśmy się na szereg nieścisłości i niespójności w przedmiotowej literaturze. Dotyczy to zwłaszcza sformułowań równań konstytutywnych inicjacji plastyczności bądź zniszczenia materiałów o cechach poprzecznej izotropii. Dotyczy to zarówno materiałów polikrystalicznych o cechach anizotropowych nabytych podczas obróbki (np. walcowania blach, por. np. Malinin i Rżysko [96]), jak i w szczególności materiałów kompozytowych (por. np. Gan i inni [45], Berryman [6]). Często nie wprowadza się istot-

nego rozróżnienia dwóch podstawowych klas symetrii w grupie symetrii poprzecznie izotropowej w rozmieszczeniu równoległej wiązki włókien z zachowaniem symetrii tetragonalnej, bądź symetrii heksagonalnej. Obie te klasy znane z krystalografii prowadzą jednak do odmiennej liczby niezależnych modułów materiałowych. Np. poprzecznie izotropowa macierz sprężystości o symetrii tetragonalnej ma sześć niezależnych modułów sprężystości, a przy symetrii heksagonalnej pięć. Podobnie ma się rzecz np. z poprzecznie izotropową macierzą konstytutywną inicjacji plastyczności typu Hilla o symetrii tetragonalnej bądź heksagonalnej i odpowiednio czterech bądź trzech niezależnych modułach. Zatem od wyboru klasy symetrii modelu konstytutywnego zależy poprawność opisu zachowania materiału, bowiem spotykamy materiały wykazujące obie dyskutowane cechy. Problem ten przedstawiliśmy w sposób systematyczny w odniesieniu do poprzecznie izotropowych materiałów sprężystych (rozdz. 4), powierzchni granicznych poprzecznie izotropowych materiałów ciągliwych o symetrii tetragonalnej lub heksagonalnej (rozdz. 8) oraz materiałów kruchych wykazujących powyższe klasy symetrii (rozdz. 9). Z nieprecyzyjnego rozróżniania symetrii tetragonalnej bądź heksagonalnej narosło w literaturze wiele niejasności, które wymagają dużej ostrożności zarówno przy modelowaniu, jak i kalibracji tych modeli.

Powszechnie dziś stosowane materiały wieloskładnikowe, czyli kompozytowe, wymagają odrębnego omówienia, któremu poświęciliśmy rozdz. 10. Rozdział ten należy jednak raczej traktować jako wprowadzenie w świat kompozytów, a nie systematyczny wykład. Literatura z tego zakresu jest bardzo bogata, zwłaszcza w ostatnich dekadach, gdy rozwój technologii wytwarzania materiałów kompozytowych zbrojonych cząsteczkami bądź włóknami nastąpił bardzo dynamicznie. Jest dość oczywiste, że kompozyty cząsteczkowe można na ogół opisywać jako materiały izotropowe, dla których klasyczne reguły mieszania Voigta i Reussa pozwalają poprawnie oszacować efektywne moduły zastępcze. W przypadku kompozytów włóknistych, które wykazują bardziej złożone cechy symetrii: anizotropii, ortotropii czy poprzecznej izotropii, rozwijane są złożone reguły homogenizacji: np. typu GMC, SCMC, FEM, itd., prowadzące do zastępczych modułów w rozpatrywanej klasie symetrii. Na potrzeby tej książki koncepcja homogenizacji została tylko ogólnie zarysowana, w takim stopniu aby umożliwić analizę i dyskusję wybranych wyników homogenizacji (rozdz. 10). Klasyczne metody homogenizacji prowadzą jednak do dużej rozbieżności zarówno pomiędzy sobą, jak i w porównaniu z eksperymentami (por. np. Gan, Orozco i Herakovich [45]), stawiającymi wiele z nich pod znakiem zapytania. Mając to na uwadze sformułowaliśmy własną prostą regułę „supermieszania”, opartą na znajomości górnego i dolnego osza-

cowaniu Voigta i Reussa i zastosowaniu „tensorowego mieszania” obu macierzy, prowadzącego do uśrednionej macierzy sprężystości (rozd. 5). W przypadku kompozytów włóknistych, technologie wytwarzania prowadzą z reguły do obecności termicznych naprężeń resztkowych w matrycy i włóknach. Wynikające stąd komplikacje w opisie ”wypadkowych” powierzchni granicznych przy zastosowaniu modelu typu von Misesa–Hu–Marina zostały też zasygnalizowane na przykładzie wyników przedstawionych w pracy Herakovicha i Aboudiego [62] (rozd. 10).

Jeśli chodzi o zachowanie lepkosprężyste, w obecnej książce ograniczyliśmy się w zasadzie do materiałów liniowo-lepkosprężystych, jednakże wykazujących różne cechy symetrii materiałowej (np. ortotropii). Pozwala to na zastosowanie dogodnej analogii sprężysto-lepkosprężystej w rozszerzonej postaci anizotropowej (rozd. 6).

Mamy pełną świadomość, że zawartość tej książki jest mocno zawężona (np. w porównaniu z obszerną, nowoczesną monografią Ottosena i Ristinmaa [110]). Rozmyślnie nie objęto nią zakresu umocnienia materiału, w którym zostały przekroczone stany graniczne plastyczności i/lub rozwoju uszkodzeń. Problem ten, zasygnalizowany bardzo ogólnie w rozdz. 11, jest traktowany jako pomost do oddzielnej monografii, która powinna odpowiedzieć na pytania, jak poprawnie opisać sprzężenia pomiędzy różnymi procesami dyssypatywnymi w materiale, obejmującymi nie tylko plastyczne płynięcie, czy rozwój uszkodzeń, ale także inne procesy fizyczne prowadzące do przebudowy mikrostruktury (np. towarzyszące przemianom fazowym) z zachowaniem odpowiednich cech symetrii materiałowej.

Kto chciałby się doszukiwać kompletności ujęcia złożonych zagadnień mechaniki materiałów o różnych cechach symetrii i różnych własnościach i zachowaniach fizycznych (plastyczność, reologia, rozwój uszkodzeń, zniszczenie, przebudowy mikrostruktury), a także różnym stopniu złożoności funkcji i struktury (kompozyty różnych typów i cech symetrii i własności fizycznych oraz zastosowań, nanomateriały i nanokompozyty, materiały intermetaliczne, bariery ochronne, laminaty, itd.) będzie mógł sięgnąć do bardziej wyspecjalizowanych pozycji, np. monografii *Innovative Technological Materials*, ed. Rustichelli, Skrzypek, Springer 2010. Mamy jednak nadzieję, że obecna książka pomoże czytelnikom w krytycznym spojrzeniu na bogaty świat materiałów, oraz jego modelowanie.

Na koniec pragniemy wyrazić naszą wdzięczność czytelnikom, którzy mieli sposobność wyrazić swoje uwagi, opinie i sugestie już w trakcie tworzenia książki. W szczególności dziękujemy recenzentom: profesorowi Andrzejowi Sewerynowi

i profesorowi Zbigniewowi Kowalewskiemu za wiele cennych uwag i wskazówek zarówno merytorycznych jak i redakcyjnych, a także redaktorowi naukowemu, profesorowi Krzysztofowi Szuwalskiemu, które znalazły swoje odbicie w ostatecznej wersji książki. Nie sposób także pominąć wkładu kolegów i współpracowników. Dziękujemy doktorom: Halinie Egner, Szymonowi Hernikowi i Marcinowi Cegielskiemu, którzy dostarczali nam motywacji dla przedstawienia trudnego materiału książki możliwie jasnym językiem. Wykorzystaliśmy również dyskusje przeprowadzone w gronie doktorantów, pierwszych czytelników manuskryptów wybranych rozdziałów w ramach studium doktoranckiego, za które również dziękujemy.

Cenną pomoc przy wydaniu tej książki okazał Dziekan Wydziału Mechanicznego profesor Leszek Wojnar, który wyraził zgodę na pokrycie części dodatkowych kosztów wydania obecnej monografii (pierwotnie planowanej jako podręcznik akademicki) ze środków Wydziału Mechanicznego. Za tę pomoc i okazaną życzliwość wyrażamy wdzięczność.

Podziękowanie

Wyrażamy podziękowanie Narodowemu Centrum Nauki za częściowe wsparcie finansowe udzielone w trakcie przygotowania tej monografii w ramach realizacji projektu UMO-2011/03/B/ST8/05132 pt. „Mechanika sprzężonych zjawisk dyssypatywnych w materiałach anizotropowych”.

Bibliografia

- [1] Abu Al-Rub R.K, Voyiadjis G.Z. (2003): On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials, *Int. J. Solids Struct.*, 40, 2611–2643.
- [2] Ajajan P.M. (2002): Carbon nanotubes, w Nalwa H.S. (ed.) *Nanostructural materials and nanotechnology*, Academic, San Diego, 329–360.
- [3] Altenbach H. (1999): Classical and non-classical creep models, w H. Altenbach i J.J. Skrzypek (eds.) Creep and damage in materials and structures, *CISM Courses and Lectures* No. 399, Springer-Wien, 45–96.
- [4] Bahr H.-A., Balke H., Felt T., Hofinger I., Kirchhoff G., Munz D., Neubrand A., Semenov A.S., Weiss H.-J., Yang Y.Y. (2003): Cracks in functionally graded materials, *Mat. Sci. Eng.*, A362, 2–16.
- [5] Balmer G.G. (1949): Shearing strength of concrete under high triaxial stress - computation of Mohr's envelope as a curve, *Structural Research Laboratory Report SP-23*, Denver, Colorado.
- [6] Berryman J.G. (2005): Bounds and self-consistent estimates for elastic constants of random polycrystals with hexagonal, trigonal, and tetragonal symmetries, *J. Mech. Phys. Solids*, 53, 2141–2173.
- [7] Betten J. (1988): Applications of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials, *Int. J. Plasticity*, 4, 29–46.
- [8] Betten J. (2002): *Creep Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [9] Boccaccini A.R. (2005): KMM-NoE: State-of-the-Art: Part I. Experimental investigations of physico-mechanical properties, Chap. I.2: Ceramic matrix composites.

-
- [10] Boehler J.-P. (1979): A simple derivation of representation for non-polynomial constitutive equations for some cases of anisotropy, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 59, 157–167.
- [11] Бойков В.Н. (1966): Прочность надрезанных образцов при длительном нагружении, Известия высших учебных заведений, *Машиностроение*, 6.
- [12] Bridgman P. (1952): *Studies in large plastic flow and fracture*, McGraw-Hill, New York.
- [13] Brüning M., Berger S., Obrecht H. (2000): Numerical simulation of the localization behavior of hydrostatic-stress-sensitive metals, *Int. J. Mech. Sci.*, 42, 2147.
- [14] Burzyński W. (1928): Studium nad hipotezami wyężenia, Akad. Nauk. Techn., Lwów.
- [15] Byron F.W., Fuller M.D. (1975): *Mathematics of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer, Berlin-Heidelberg.
- [16] Casacu O., Barlat F. (2004): A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive materials, *Int. J. Plast.*, 20, 2027–2045.
- [17] Cauvin A., Testa R.B. (1999): Damage mechanics: basic variables in continuum theories, *Int. J. Solids Struct.*, 36, 747–761.
- [18] Chaboche J.L. (1978): Description Thermodynamique et Phénoménologique de la Viscoplasticité Cyclique avec Endommagement, Thèse Univ. Paris VI et Publication ONERA, No. 1978–3.
- [19] Chaboche J.L., Dang-Van K., Cordier G. (1979): Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel, *SMIRT 5*, Berlin.
- [20] Chaboche J.L. (1982): Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, Boehler J.P. (ed.), Martinus Nijhoff.
- [21] Chamis C.C. (1984): Simplified composite micromechanics equations for hygral, thermal and mechanical properties, *SAMPE Quart.*, April, 14–23.

-
- [22] Chan K.S., Bodner S.R., Lindholm U.S. (1988): Phenomenological modeling of hardening and thermal recovery in metals, *J. Eng. Materials Technol.*, 111, 424–430.
- [23] Chen X.F., Chow C.L. (1995): On damage strain energy release rate Y , *Int. J. Damage Mech.*, 4, 3, 251–263.
- [24] Chen, W.F., Han, D.J. (1995): *Plasticity for Structural Engineers*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [25] Chen B., Tong L. (2004): Sensitivity analysis of heat conduction for functionally graded materials, *Mater. Design.*, 25, 663–672.
- [26] Cho J.R., Shin S.W. (2004): Material composition optimization for heat-resisting FGMs by artificial neural network, *Composites A* 35, 585–594.
- [27] Chow C.L., Wang J. (1987): An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics, *Int. J. Fracture*, 33, 3–16.
- [28] Chow C.L., Wang J. (1987): An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile materials, *Eng. Fracture Mech.*, 27, 547–558.
- [29] Chrysanthou A. (2005): KMM-NoE: State-of-the-Art: Part I. Experimental investigations of physico-mechanical properties and deformation mechanisms on micro- and macro-scale.
- [30] Cordebois J.P., Sidoroff F. (1979): Damage induced elastic anisotropy, Coll. Euromech 115, Villard de Lans, również w Boehler J.P. (ed.) *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, Martinus Nijhoff, Boston, 1983, 761–774.
- [31] Coulomb C. (1776): Essai sur une application des règles maximis et minimis á quelques problèmes de statique relatifs á l'architecture, *Mémoires de l'Acad. Roy. des Sci.*, 7, 343.
- [32] Davies E.A. (1961): The Bailey flow rule and associated yield surface, *Trans. ASME*, E28, 2, 310.
- [33] Davison L., Stevens A.L. (1973): Thermodynamical constitution of spalling elastic bodies, *J. Appl. Phys.*, 44, 2, 668.
- [34] Давиденков Н.Н., Спиридонова Н.Е. (1945): Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца, Заводская лаборатория, XI, 6.

-
- [35] Derpeński Ł., Seweryn A. (2011): Experimental research into fracture of EN-AW 2024 and EW-AW 2007 aluminium alloy specimens with notches subjected to tension, *Exper. Mech.*, 51, 1075–1094.
- [36] Drucker D.C. (1949): Relation of experiments to mathematical theories of plasticity, *J. Appl. Mech.*, 16, 349–357.
- [37] Drucker D.C. (1951): A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, *Proc. 1st US. Nat. Congr. Appl. Mech.*, Chicago, 487–491.
- [38] Drucker D.C., Prager W. (1952): Solid mechanics and plastic analysis of limit design, *Quart. Appl. Math.*, 10, 157–165.
- [39] Drucker D.C. (1953): Limit analysis of two- and three-dimensional soil mechanics problems, *J. Mech. Phys. Sol.*, 1, 297.
- [40] Dufailly J., Lemaitre J. (1995): Modeling very low cycle fatigue, *Int. J. Damage Mech.*, 4, 153–170.
- [41] Egner H. (2012): On the full coupling between thermo-plasticity and thermo-damage in thermodynamic modeling of dissipative materials, *Int. J. Solids Struct.*, 49, 279–288.
- [42] Findley W.N., Lai J.S., Onaran K. (1976): Creep and relaxation of nonlinear viscoplastic materials, North-Holland.
- [43] Finnie I., Heller W.R. (1962): Pełzanie materiałów konstrukcyjnych, WNT, Warszawa.
- [44] Gambarotta L., Lagomarsino S. (1993): A microcrack damage model for brittle materials, *Int. J. Solids Struct.*, 30, 177–198.
- [45] Gan H., Orozco C.E., Herkovich C.T. (2000): A strain-compatible method for micromechanical analysis of multi-phase composites, *Int. J. Solids Struct.*, 37, 5097–5122.
- [46] Ganczarski A., Lenczowski J. (1997): On the convexity of the Goldenblatt-Kopnov yield condition, *Arch. Mech.*, 49(3), 461–475.
- [47] Ganczarski A., Barwacz L. (2007): Low cycle fatigue based on unilateral damage evolution, *Int. J. Damage Mech.*, 16(2), 159–177.

- [48] Ganczarski A., Skrzypek J. (2009): *Plastyczność materiałów inżynierskich, podstawy, modele, metody i zastosowania komputerowe*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.
- [49] Ganczarski A., Skrzypek J. (2009): A study on coupled thermo-elasto-plastic-damage dissipative phenomena: models and application to some innovative materials, *J. Thermal Stresses*, 32, 698–751.
- [50] Ganczarski A., Skrzypek J. (2011): Modelowanie powierzchni granicznych poprzecznie izotropowego kompozytu SCS-6/Ti-15-3, *Acta Mechanica et Automatica*, 5(3), 24–30.
- [51] Gittus J. (1975): *Creep, Viscoelasticity and Creep Fracture in Solids*, Applied Science Publisher.
- [52] Гольденвлат И.И., Копнов В.А. (1966): Обобщенная теория пластического течения анизотропных сред, *Сборник Строительная Механика*, Стройиздат, Москва, 307–319.
- [53] Guest J.J. (1900): On the strength of ductile materials under combined stress, *Phil. Mag.*, 50, 69–132.
- [54] Haasemann G., Ulbricht V. (2010): Numerical evaluation of the visco-elastic and viscoplastic behavior of composites, *Technische Mechanik*, 30, 1–3, 122–135.
- [55] Haigh B.F (1920): The strain-energy function and the elastic limit, *Engineering*, London, 109, 158-160.
- [56] Harding J., Wood E.O., Campbell J.D. (1960): Tensile testing of materials at impact rates of strain, *J. Mech. Engrg. Sci.*, 2, 88–96.
- [57] Hashin Z., Rosen B.W. (1964): The elastic moduli of fiber-reinforced materials, *J. Appl. Mechanics*, 31, 223–232.
- [58] Hayakawa, K., Murakami, S. (1997): Thermodynamical modeling of elastic-plastic damage and experimental validation of damage potential, *Int. J. Damage Mech.*, 6, October, 333–362.
- [59] Hayhurst D.R. (1999): Materials data based and mechanisms-based constitutive equations for use in design, w: H. Altenbach i J.J. Skrzypek (eds.) *Creep and damage in materials and structures, CISM Courses and Lectures No. 399*, Springer-Wien, 45–96.

- [60] Hencky H. (1924): Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nach-Spannungen, *ZAMM*, 4, 323–334.
- [61] Herakovich C.T. (1998): *Mechanics of Fibrous Composites*, Wiley, New York.
- [62] Herakovich C.T., Aboudi J. (1999): Thermal effects in composites, *Thermal Stresses*, Hetnarski R.B. (ed.), Lastran Corporation Publ. Division, 1–142.
- [63] Hershey A.V. (1954): The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face – centred cubic crystals, *J. Appl. Mech.*, 21, 3, 241–249.
- [64] Hill R. (1948): A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proc. Roy. Soc. London*, A193, 281–297.
- [65] Hill R. (1950): *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press.
- [66] Hones P., Martin N., Reguła M., Levy F. (2003): Structural and mechanical properties of chromium nitride, molybdenum nitride, tungsten nitride thin films, *J. Phys. D.: Appl. Phys.* 36, 1023–1029.
- [67] Hu Z.W., Marin J. (1956): Anisotropic loading functions for combined stresses in the plastic range, *J. Appl. Mech.*, 22, 1.
- [68] Huber M.T. (1904): Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału, *Czas. Techn.* 22, 34–40, 49–50, 61–62, 80–81, Lwów, *Pisma*, Vol. II, PWN, Warszawa, 1956, 3–20.
- [69] Ишлинский А.Ю. (1940): Гипотеза прочности формоизменения, *Учебные Записки Моск. Унив.*, Мех., 46.
- [70] Iyer S.K., Lissenden C.J. (2003): Multiaxial constitutive model accounting for the strength-differential in Inconel 718, *Int. J. Plasticity*, 19, 2055–2081.
- [71] Jackson L.R., Smith K.F., Lankford W.T. (1948) Plastic flow in anisotropic sheet steel, *Amer. Inst. Mining. Metall. Eng.*, 2440, 1–15.
- [72] Jakubowicz A., Orłoś Z. (1966): *Wytrzymałość materiałów*, WNT, Warszawa.

- [73] Jin Z.-H., Paulino G.H. (2001): Transient thermal stresses analysis of an edge crack in a functionally graded material, *Int. J. Fracture*, 107, 73–98.
- [74] Качанов Л.М. (1958): О времени разрушения в условиях ползучести, *Известия АН СССР, Отд. мехн. наук.*, 8, 26–31.
- [75] Качанов Л.М. (1974): Основы механики разрушения, Москва, Издат. Наука.
- [76] Kirchhoff G., Göbel Th., Bahr H.-A., Balke H., Wetzig K., Bartsch K. (2004): Damage analysis for thermally cycled (Ti, Al)N coatings – estimation of strength and interface fracture toughness, *Surface Coat. Tech.*, 179: 39–46.
- [77] Kisiel I. (1982): *Mechanika skał i gruntów, Mechanika Techniczna*, t. VII, PWN, Warszawa.
- [78] Kowalewski Z.L., Lin J., Hayhurst D.R. (1994): Experimental and theoretical evaluation of a high-accuracy uni-axial creep testpieces with slit extensometer ridges, *Int. J. Mech. Sci.*, 36, 751–769.
- [79] Kowalewski Z.L., Śliwowski M. (1997): Effect of cyclic loading on the yield surface evolution of 18G2A low-alloy steel, *Int. J. Mech. Sci.*, 39, 1, 51–68.
- [80] Kowalsky U.K., Ahrens H., Dinkler D. (1999): Distorted yield surfaces - modeling by higher order anisotropic hardening tensors, *Comput. Mat. Sci.*, 16, 81–88.
- [81] Krajcinovic D., Fonseka G.U. (1981): The continuous damage theory of brittle materials, Part I: General theory, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 48, 4, 809–815.
- [82] Krajcinovic D. (1989): Damage mechanics, *Mech. Mater.*, 8, 117–197.
- [83] Krempl E. (1999): Creep-plastic interaction, w H. Altenbach i J.J. Skrzypek (eds.) *Creep and damage in materials and structures*, CISM Courses and Lectures No. 399, Springer-Wien, 285–348.
- [84] Kuna-Ciskał H., Skrzypek J. (2004): CDM based modelling of damage and fracture mechanisms in concrete under tension and compression, *Eng. Fracture Mech.*, 71, 681–698.

- [85] Kupfer H., Hilsdorf H.K., Rusch H. (1969): Behavior of concrete under biaxial stresses, *ACI Journal*, 66(8), 656–666.
- [86] Larson F.R., Miller J. (1952): A time-temperature relationship for rupture and creep stresses, *Trans. ASME.*, 175(5).
- [87] Lambe T.W., Whitman R.V. (1977): *Mechanika gruntów*, Arkady, Warszawa.
- [88] Lee W.Y., Stinton D.P., Berndt C.C., Erdogan F., Lee Y.-D., Mutasin Z. (1996): Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coating applications, *J. Amer. Ceram. Soc.*, 79, 3003–3012.
- [89] Lekhnitskii S.G. (1981): *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Engl. Transl., Mir Publishers, wyd. w j. rosyjskim: Лехницкий С.Г. (1977): *Теория уругости анизотропного тела*, Москва, Издательство Наука.
- [90] Lemaitre J. Chaboche J.-L. (1985): *Mécanique des Matériaux Solides*, Dunod Publ., Paris.
- [91] Lemaitre J. (1992)(1996): *A Course on Damage Mechanics*, 2nd rev. and enlarged edn. 1996 Springer, Berlin.
- [92] Liu B., Feng X., Zhang S.-M. (2009): The effective Young's modulus of composites beyond the Voigt estimation due to the Poisson effect, *Comp. Sci. Techn.*, 69, 2198–2204.
- [93] Lode W. (1928): Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf der Fliessen der Metalle, *Forschungs arbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesen*, 303.
- [94] Lubarda V.A., Krajcinovic D. (1993): Damage tensors and the crack density distribution, *Int. J. Solids Struct.*, 30, 20, 2859–2877.
- [95] Ludwik P. (1909): *Elemente der technologischen Mechanik*, Springer Verlag, Berlin.
- [96] Malinin N.N, Rżysko J. (1981): *Mechanika materiałów*, PWN, Warszawa.
- [97] Martin-Herrero J., Germain Ch. (2007): Microstructure reconstruction of fibrous C/C composites from X-ray microtomography, *Carbon* 45, 1242–1253.

-
- [98] Mises von R. (1913): Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand, Göttingen Nachrichten, *Math. Phys.*, 4(1), 582–592.
- [99] Mises von R. (1928): Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, *ZAMM*, 8(13), 161–185.
- [100] Mohr O. (1900): Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?, *Verein Deuts. Ing. Zeit.*, 44, 1524–1530 1572–1577.
- [101] Mori T., Tanaka K. (1973): Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, 21, 571–574.
- [102] Muc A. (2009): Design and identification methods of effective mechanical properties for carbon nanotubes, *Mater. Design.*, 31(4), 1671–1675.
- [103] Murakami S., Ohno N. (1981): A continuum theory of creep and creep damage, w Ponter A.R.S., Hayhurst D.R. (eds.), *Creep in Structures*, Springer, Berlin, 442–444.
- [104] Murakami S., Kamiya, K. (1997): Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics, *Int. J. Mech. Sci.*, 39, 4, 473–486.
- [105] Murakami S. (2012): *Continuum Damage Mechanics*, Springer Verlag, Berlin.
- [106] Niezgodziński M.N., Niezgodziński T. (1984): *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa.
- [107] Nowacki W. (1963): *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa.
- [108] Nye J.F. (1962): *Własności fizyczne kryształów*, PWN, Warszawa.
- [109] Odqvist F.K.G. (1966): *Mathematical theory of creep and creep rupture*, Clarendon Press, Oxford.
- [110] Ottosen N.S., Ristinmaa M. (2005): *The mechanics of constitutive modeling*, Elsevier, Amsterdam.
- [111] Paley M., Aboudi J. (1992): Micromechanical analysis of composites by generalized method of cells, *Mechanics and Materials*, 14, 127–139.

-
- [112] Pantelakis S., Rustichelli F. (eds) (2006): Industrial applications of nanotechnologies, *Int. School: Advanced Material Science and Technology*, Jesi 2006, Italy.
- [113] Pariseau W.G. (1968): Plasticity theory for anisotropic rocks and solids, *Proc. 10th Symp. Rock Mech.*, Chapter 10, Austin.
- [114] Penny R.K., Marriott D.L. (1971): Design for creep, McGraw-Hill, Maidenhead-Berkshire.
- [115] Peçherski R.B., Szeptyński P., Nowak M. (2011): An extension of Burzyński hypothesis of material effort accounting for the third invariant of stress tensor, *Arch. Metall. Mat.*, 56, 503–508.
- [116] Pijaudier-Cabot G., Mazars J. (2001): Damage models for concrete, *Handbook of Material Behaviour Models*, Lemaitre J., Academic Press, San Diego, 500–512.
- [117] Pipikin A.C. (1972): Lectures on viscoelasticity theory, Springer, Berlin-Heidelberg.
- [118] Prager W. (1938): On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state, *Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge Mass., 234–237.
- [119] Rabinovich A.L. (1946): On the elastic constants and strength of aircraft materials, *Trudy Tsentr. Aero-gidrodin. Instr.*, 582, 1–56.
- [120] Работнов Ю.Н. (1963): О разрушении вследствие ползучести, *Журнал прикладной механики и технической физики*, 2, 113–123.
- [121] Ramberg W., Osgood W. (1943): Description of stress-strain curves by three parameters, *Nat. Adv. Comm. for Aeronautics*, Techn. Note No. 902.
- [122] Ralston T.D. (1977): Yield and plastic deformation in ice crushing failure, *ICSI.AIDJEX Symposium on Sea Ice-Processes and Models*, Seattle, Washington.
- [123] Raniecki B., Mróz Z. (2008): Yield or martensitic phase transformation conditions and dissipative functions for isotropic, pressure-insensitive alloys exhibiting SD effect, *Acta Mech.*, 195, 81–102.

-
- [124] Reuss A. (1929): Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle, *Z. angew. Math. Mech.*, 9, 49–58.
- [125] Reuss A. (1933): Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungen in der Plastizitätstheorie, *ZAMM*, 10(3), 266–274.
- [126] Richart F.E, Brandtzaeg A., Brown R.L. (1928): A study of the failure of concrete under combined compressive stresses, *University of Illinois Engineering Experimental Station Bulletin*, 185.
- [127] Rödel J. (2005): Metal Ceramic Composites, *KMM State-of-the-Art Report 2*.
- [128] Rustichelli F., Skrzypek J.J. (eds) (2010): Innovative Technological Materials, Springer, Berlin-Heidelberg.
- [129] Rymarz Cz. (1993): Mechanika ośrodków ciągłych, PWN, Warszawa.
- [130] Ржаницын А.Р. (1968): Теория ползучести, Москва, Стройиздат.
- [131] Sayir M. (1970): Zur Fließbedingung der Plastizitätstheorie, *Ingenieurarchiv* 39, 414–432.
- [132] Schmidt R. (1932): Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Vestigungsgebiet, *Ing.-Arch.*, 3, 215–235.
- [133] Schulz U., Bach F.W., Tegeder G. (2003): Graded coating for thermal, wear and corrosion barriers, *Mater. Sci. Eng. A.*, 362(1–2), 61–80.
- [134] Seweryn A., Mróz Z. (1998): A non-local failure and damage evolution rule: Application to a dilatant crack model, *J. de Physique IV France*, 8, 257–268.
- [135] Shu L.S., Onat E.T. (1967): On anisotropic linear viscoelastic solids, *Proc. Fourth Symp. on naval Struct. Mech.*, Pergamon Press, London, 203.
- [136] Skrzypek J. (1986): Plastyczność i pełzanie; teoria, zastosowania, zadania, PWN, Warszawa.
- [137] Skrzypek J.J. (1993): Plasticity and Creep, Theory, Examples, and Problems, Hetnarski R.B. (ed.), Begell House – CRC Press.

-
- [138] Skrzypek J. (1999): Material models for creep failure analysis and design of structures, w H. Altenbach i J.J. Skrzypek (eds.) Creep and damage in materials and structures, *CISM Courses and Lectures* No. 399, Springer-Wien, 97–166.
- [139] Skrzypek J., Ganczarski A. (1999): Modeling of Material Damage and Failure of Structures, Springer, Berlin.
- [140] Skrzypek J. (2006): Podstawy mechaniki uszkodzeń, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.
- [141] Skrzypek J.J., Ganczarski A., Rustichelli F., Egner H. (2008): Advanced Materials and Structures for Extreme Operating Conditions, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [142] Skrzypek J., Ganczarski A. (2013): Anisotropic initial yield and failure criteria including temperature effect, in *Encyclopedia of Thermal Stresses*, Hetnarski R.B. (ed.), Springer, Dordrecht (in print).
- [143] Smith C. (2001): Discontinuous reinforcement for MMC, *ASM Handbook on Composites*, 21, 51.
- [144] Socha G. (2004): Nowa metoda wczesnego wykrywania i monitorowania kumulacji zniszczenia zmęczeniowego stali konstrukcyjnych, *LAPROMAT - Monografie IPPT PAN*, Warszawa.
- [145] Spencer A.J.M. (1971): Theory of invariants, in *Continuum Physics*, Eringen C. (ed.), Academic Press, New York, 239–353.
- [146] Sun C.T., Vaidya R.S. (1996): Prediction of composite properties from a representative volume element, *Composites Science Technol.*, 56, 171–179.
- [147] Szczepiński W. (1984): Metody doświadczalne mechaniki ciała stałego, *Mechanika Techniczna*, t. X, PWN, Warszawa.
- [148] Szczepiński W. (1993): On deformation-induced plastic anisotropy of sheet metals, *Arch. Mech.*, 45(1), 3–38.
- [149] Szuwalski K., Życzkowski M. (1973): On the phenomenon of decohesion in perfect plasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 9(1), 85–98.

- [150] Szusta J., Seweryn A. (2011): Fatigue damage accumulation modelling in the range of complex low-cycle loadings – The strain approach and its experimental verification on the basis of EN AW-2027 aluminum alloy, *Int. J. Fatigue*, 33, 255–264.
- [151] Taher S.F., Baluch M.H., Al-Gadhib A.H. (1994): Towards a canonical elastoplastic damage model, *Eng. Fracture Mechanics*, 48, 2, 151–166.
- [152] Tamma K.K., Avila A.F. (1999): An Integrated Micro/Macro Modelling and Computational Methodology for High Temperature Composites, w *Thermal Stresses V*, Hetnarski R.B. (ed.), Lastran Corporation–Publishing Div., Rochester, N.Y., 143–256.
- [153] Tjong S.C., Ma Z.Y. (2000): Microstructural and mechanical characteristics of in situ metal matrix composites, *Material Science and Engineering*, R29, 3–4, 49–113.
- [154] Townley C.H.A., et. al. (1991): High temperature design data for ferritic pressure vessel steels, *Creep of Steel Working Party (CSWP)*, Inst. of Mechanical Eng., J. Mech. E. London.
- [155] Treacy M.M.J., Ebbesen T.W., Gibson J.M. (1996): Exceptionally high Young's modulus observed for individual carbon nanotubes, *Nature* 381, 680–687.
- [156] Tresca H. (1864): Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis á de fortes pressions, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 59, 754–758.
- [157] Tsai S.T., Wu E.M. (1971): A general theory of strength for anisotropic materials, *Int. J. Numer. Methods. Engng.*, 38. 2083–2088.
- [158] Voigt W. (1889): Über die Beziehungen zwischen beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper, *Wied. Ann.*, 38, 573–587.
- [159] Wang B.-L., Han J.C., Du S.Y. (2000): Crack problems for functionally graded materials under transient thermal loading, *J. Thermal Stresses*, 23, 143–168.
- [160] Wang B.-L., Mai Y.-W., Zhang X.-H. (2004): Thermal shock resistance of functionally graded materials, *Acta Mech*, 52, 4961–4972.

-
- [161] Westergaard H.M. (1920): On the resistance of ductile materials to combined stresses in two and three directions perpendicular to one another, *Journal of the Franklin Institute*, 189, 627–640.
- [162] Wong E.W., Sheehan P.E., Lieber C.M. (1997): Nanobeam mechanics: elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes, *Science*, 227
- [163] Würkner M., Berger H., Gabbert U. (2011): On numerical evaluation of effective material properties for composite structures with rhombic arrangements, *Int. J. Eng. Sciences*, 49, 322–332.
- [164] Życzkowski M. (1981): Combined loadings in the theory of plasticity, PWN, Warszawa.
- [165] Życzkowski M. (2001): Anisotropic yield conditions, w *Handbook of materials behavior models*, Lemaitre J. (ed.), Academic Press, San Diego, 155–165.

Indeks

- 4-parametrowy ortotropowy warunek Hilla 205
- Air Plasma Spray-Thermal Barrier Coating* 40
- aksjator
 - naprężenia 68
 - odkształcenia 72
- alumina* 39
- aluminide* 28
- aluminium 226
- analogia
 - Alfreya–Hoffa 130
 - sprężysto-lepko-sprężysta 132
- anizotropia 272
- anizotropowa
 - postać kryterium inicjacji zniszczenia materiałów kruchych 219
 - sprężystość 259
- anizotropowe
 - uogólnienie izotropowego warunku zniszczenia Druckera–Pragera 233
 - uogólnienie paraboloidy Burzyńskiego 233
 - zniszczenie materiałów ciągliwych 233
- anizotropowy
 - materiał liniowo lepko-sprężysty 134
 - ośrodek liniowo lepko-sprężysty 133
 - warunek inicjacji uplastycznienia 194
 - warunek von Misesa 195, 196, 197
- asymptotyczna plastyczność 48
- bariera
 - przeciwcierna 39
 - termiczna 39
- basic*
 - deviatoric strain invariants* 72
 - deviatoric stress invariants* 70
 - strain invariants* 72
 - stress invariants* 69
- beton 219, 221, 228
 - o podwyższonej wytrzymałości 107
- brittle*
 - fracture* 254
 - rupture* 15
- bulge test* 217
- całkowa postać 124
 - modelu Voigta–Kelvina 116
 - równania relaksacji 124
- całkowe równanie izotropowego materiału liniowo lepko-sprężystego 130
- ceramic*
 - fiber reinforcement* 34
 - matrix composite* 34
 - particles reinforcement* 34

- ciecz lepka Newtona 50
cluster 31
coating 39
cohesion 229
Concentric Cylinder Assembly 151
Continuum Damage Mechanics 20, 78
convexity rule 172
corrosion barrier coating 39
creep resistance 17
 cylindryczne powierzchnie uplastycznienia 220
 cyrkonium 39
 czas
 –relaksacji 52
 –retardacji 52
 czteroparametrowy model Rżanicy-na 56

damage 257
 –*effect tensor* 79
 deformacja
 –sprężysta 99
 –sprężysto-plastyczna 182
 –typu plastycznego 45
 delta Diraca 53
 dewiator
 –naprężenia 68
 –odkształcenia 71, 72
 dewiatorowa
 –forma warunku von Misesa 200
 –forma warunku von Misesa–Tsai–Wu 235
 dewiatorowy
 –anizotropowy warunek von Misesa 198
 –ortotropowy warunek von Misesa 202
 –warunek von Misesa 200

 dolne oszacowanie
 –cylindrycznych powierzchni plastyczności 192
 –współczynników macierzy sprężystości 159
 dowolna historia obciążenia 124
 drewno 10
ductile rupture 15
 dwuparametrowa aproksymacja stożkowa Burzyńskiego 225
 dwuparametrowy
 –izotropowy warunek Druckera–Pragera 226
 –warunek Hu–Marina 211
 dyfuzyjny mechanizm pełzania 271
 dylatacja 96
 dziewięcioparametrowy
 –ortotropowy warunek von Misesa 209
 –warunek Hill–Tsai–Wu 238

 efekt
 –Bauschingera 12
 –unilateralny 26
 efektywna macierz
 –podatności 80
 –sztywności 80
 efektywne
 –naprężenie 151
 –odkształcenie 151
 –odkształcenie plastyczne 72
 efektywny moduł
 –sprężystości 78
 –Younga 20
elastic limit 1
Electron Beam Physical Vapour Deposition 40
 elipsoida obrotowa 223
 energia

- dopełniająca 43, 99, 105, 176, 179
- dopełniająca w obecności stanu resztkowego 101
- dyssypowana 254
- dyssypowana mikrouszkodzeń 254
- odkształcenia 99, 179
- odkształcenia materiału ortotropowego 108
- odkształcenia materiału sprężystego z uszkodzeniem 104
- odkształcenia materiału zawierającego uszkodzenia 103
- odkształcenia sprężystego 102
- przebudowy mikrostruktury 254
- sprężysta 254
- sprężysta w obecności stanu resztkowego 101
- swobodna Helmholtza 105
- właściwa dopełniająca 98
- właściwa odkształcenia 98
- właściwa odkształcenia materiału sprężystego 100
- właściwa odkształcenia sprężystego 43, 102
- właściwa sprężystości 254
- fiber reinforced composite* 34
- fracture strength* 2
- functionally graded material* 41
- funkcja
 - pełzania 116, 124
 - pełzania prostego 114
 - pełzania $J^{VK}(t)$ 116
 - pełzania modelu Burgersa 119
 - pełzania modelu standardowego 118
 - potencjału naprężeń 99, 106
 - potencjału odkształcenia 99, 106
 - relaksacji 124
- górne oszacowanie
 - cylindrycznych powierzchni plastyczności 192
 - współczynników macierzy sprężystości 159
- Generalized Method of Cells* 151
- generic*
 - deviatoric stress invariants* 70
 - strain invariants* 72
 - stress invariants* 69
- granica
 - pełzania 17
 - plastyczności 270
 - plastyczności na ścinanie 45
 - plastyczności na rozciąganie 2
 - plastyczności przy ściskaniu 6
 - proporcjonalności 1
 - proporcjonalności przy ściskaniu 6
 - sprężystości 1
- graniczne naprężenie zastępcze 257
- grunty 221, 228
- grupa symetrii w opisie makro 139
- hardening* 222
- hiperboloida
 - dwupowłokowa 223
 - jednopowłokowa 223
- hiperpowierzchnie graniczne 257
- hipoteza
 - Hersheya–Daviesia 191
 - powierzchni granicznej Hubera–von Misesa–Hencky’ego 190
 - zniszczenia materiałów ortotropowych 236
- historia procesu obciążenia 99
- homologiczna temperatura 270
- idealna plastyczność 262

- intermetallic material* 28
- inwariantność 169
- iron aluminide* 28
- izochroniczne krzywe pełzania 123
- izotropia 28, 96, 272
- poprzeczna 92, 139
 - sprężysta 103
- izotropowa
- liniowa lepko-sprężystość 130
 - liniowa sprężystość 259
 - nieliniowa sprężystość 259
 - powierzchnia graniczna 186
- izotropowe
- kontinuum 139
 - ośrodki liniowo lepko-sprężystych 125
 - powierzchnie cylindryczne 192
- izotropowy
- materiał 168
 - materiał sprężysty Hooke’a 103
 - ośrodek liniowo lepko-sprężysty 125
 - tensor strukturalny 195
 - warunek Druckera–Pragera 225
 - warunek Hubera–von Misesa–Hencky’ego 195
- jednokierunkowy kompozyt włóknisty poprzecznie izotropowy 159
- jednoosiowe
- rozciąganie 58, 222
 - ściskanie 222
- jednoosiowy problem lepko-sprężysty 122
- jednowymiarowe modele materiałowe 59
- kąt
- Eulera 90
 - tarcia wewnętrznego 229
- klasa
- heksagonalna 157
 - tetragonalna 157
- kohezja 229
- kompozyt
- anizotropowy 140, 150
 - cząsteczkowo zbrojony 35
 - cząsteczkowo zbrojony metalowo-ceramiczny 34
 - jednokierunkowo zbrojony 36
 - mikrocząsteczkowo zbrojony 34, 139
 - na osnowie metalicznej 38
 - na osnowie polimerowej 38
 - o cechach izotropowych 148
 - o osnowie ceramicznej 34
 - o osnowie metalowej 34
 - o osnowie polimerowej 34
 - ortotropowo termosprężysty 145
 - zbrojony cząsteczkami 34, 221
 - zbrojony włóknami 34
- kontinuum ortotropowe 139, 140
- kontynuualna mechanika uszkodzeń 78
- krystaliczna sieć ortorombowa 140
- kryterium
- dodatniej określoności formy kwadratowej 178
 - dodatniej określoności stycznej macierzy sztywności 184
 - Goldenblata–Kopnova 232
 - graniczne uplastycznienia 169
 - graniczne zniszczenia 169
 - początku zniszczenia Goldenblata–Kopnova 220
 - Sylwestera 183
 - uplastycznienia 220

- zniszczenia typu Goldenblata–
Kopnova 232
- krzywa
 - nawrotu 51, 52, 53, 54
 - pełzania 51, 52, 53, 57
 - pełzania modelu Bingham’a 56
 - pełzania modelu Burgersa 119
 - relaksacji 52, 53
 - rozciągania 1
- kumulowane odkształcenie plastyczne 73
- łód o strukturze kolumnowej 241
- layered reinforcement* 30
- lepkość 50
 - dynamiczna 50
- linie Lüdersa–Czernowa 2
- liniowa
 - lepko-sprężystość 263
 - sprężystość 100, 253, 259
- liniowe
 - operatory różniczkowe 122
 - prawa Hooke’a 100
 - równanie konstytutywne sprężystości 264
- lokalna macierz sztywności 151
- lokalne
 - równanie lepko-sprężystości 135
 - równanie sprężystości 151
 - tensory lepko-sprężystości 136
- macierz
 - anizotropii plastycznej von Misesa 196, 201
 - dewiatorowa von Misesa 199
 - efektywnej podatności 82
 - Hilla 202
 - obrotu 76
 - ortotropii plastycznej von Misesa 201, 202
 - pełzania 270
 - podatności 85, 101
 - podatności materiału anizotropowego 88
 - podatności ortotropii sprężystej 143
 - podatności poprzecznej izotropii 93
 - relaksacji 270
 - reprezentacji tensora 73
 - reprezentacji tensora czwartego rzędu 76
 - sprężystości kryształu 141
 - sprężystości zastępczej kompozytu 142
 - sztywności 87, 101
 - wpływu uszkodzenia 79
- macierze reprezentacji tensora konstytutywnego 262
- makropęknięcie 219
- maksymalne naprężenie przy ścisaniu 7
- mapa mechanizmów deformacji 270
- material*
 - homogeneous* 9
 - isotropic* 9
- materiał
 - anizotropowy 94, 101
 - anizotropowy ciągliwy 167
 - anizotropowy kruchy 167
 - ceramiczny 33, 219
 - ciągliwy 254
 - intermetaliczny 27, 28
 - izotropowy 9, 43, 85, 101, 102, 147, 185
 - izotropowy i liniowo-sprężysty 104
 - jednorodny 9, 43
 - kompozytowy 32
 - kompozytowy anizotropowy 143

- kompozytowy CMC 219
- kompozytowy ortotropowy 143
- kompozytowy warstwowy 140
- kompozytowy zbrojony kierunkowo 139
- kruchy 6, 213, 219, 220, 226, 232, 254, 260
- lepko-plastyczny 270
- lepko-plastyczny z uszkodzeniami 270
- liniowo lepko-sprężysty 122, 269, 270
- liniowo sprężysty 99, 101, 174
- liniowo termo-sprężysty 272
- metaliczny 219, 260
- nieliniowo lepko-sprężysty 270
- nieliniowo sprężysty 174, 269
- odcinkowo-liniowy 55, 124
- plastycznie poprzecznie izotropowy Hilla klasy tetragonalnej 215
- poprzecznie izotropowy 93
- poprzecznie izotropowy klasy tetragonalnej 250
- sprężysto-idealnie plastyczny Prandtla 46
- sprężysto-plastyczny z uszkodzeniem 267
- sprężysto-plastyczny 174
- sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem Iliuszyna 46
- sprężysty 99, 101, 103
- syпки 8, 213
- maximal nominal stress* 2
- mechanizm
 - dyslokacyjny pełzania 271
 - dyssypatywny plastyczności 266
 - dyssypatywny uszkodzenia 266
 - pełzania typu poślizgowego 271
 - rozwoju uszkodzeń 271
- meridiana
 - ścianania 188
 - ściskania 188, 231
 - powierzchni granicznej 187
 - rozciągania 188, 231
- metal matrix composite* 34
- metoda
 - homogenizacji 147, 151
 - kompatybilnych odkształceń 151
 - Mori-Tanaka 151
- micro particles reinforced composite* 34
- mikrokompozyt 32
- mikromechaniczny model homogenizacji 151
- mikropęknięcie 219
- mikropoślizg plastyczny 254, 257
- mikrouszkodzenia 254, 257
- minor stycznej macierzy sztywności 183
- mocne sprzężenie termiczne 272
- model
 - Binghama 55
 - Burgersa 54, 118
 - Iliuszyna 47
 - liniowo lepki Newtona 50
 - liniowo lepko-sprężysty 119
 - Ludwika 45
 - materiału idealnie plastycznego 45
 - materiału sprężystego 43
 - materiału sprężysto-plastycznego Ramberga-Osgooda 48
 - materiału z liniowym wzmocnieniem plastycznym 45
 - Maxwella 51, 114
 - nieliniowo lepki 50
 - potęgowy 45
 - Prandtla 47
 - standardowy 53, 117

- Szuwalskiego–Życzkowskiego 49
- Voigta–Kelvina 52, 114, 116
- współosiowych cylindrów 151
- moduł
 - anizotropii plastycznej 196
 - Chencova 90
 - Kirchhoffa 87, 95, 270
 - mechaniczny ortotropii 145
 - Rabinovicha 90
 - relaksacji 128
 - sprężystości osiowej 91
 - ścianania 91
 - ściśliwości 87
 - termicznej ortotropii 144
 - Younga 87, 95, 270
 - Younga nanorurki węglowej 31
- monokryształ 28
- Mori–Tanaka Homogenisation Method* 151
- multi-walled nanotubes* 32

- nanofiber* 30
- nanokompozyt 30
 - cząsteczkowy 30
- nanomechanika 30
- nanoparticles reinforcement* 30
- nanoproszek 30
- nanorurka 30
 - węglowa 31
- nanotube* 30
- nanowłókna 30
- naprężenie
 - hydrostatyczne 68
 - maksymalne 2
 - niszczące 17
 - nominalne 3
 - zrywające 2, 3
- necking* 3
- nickel aluminide* 28
- nieliniowa sprężystość 253
- nieliniowe równanie
 - konstrytywne pełzania 263
 - materiału sprężystego z uszkodzeniem 265
- nieliniowy materiał sprężysty 99
- niestowarzyszone prawo płynięcia 174
- niezmiennicze równania liniowej sprężystości materiału ortotropowego 111
- niezmiennik
 - dewiatorowy 186
 - podstawowy naprężenia 186
 - tensora strukturalnego anizotropii plastycznej 194
- niezmienniki
 - główne tensora naprężenia 69
 - główne tensora odkształcenia 71
 - generujące dewiatora naprężenia 70
 - generujące odkształcenia 102
 - generujące tensora naprężenia 69
 - generujące tensora odkształcenia 72
 - podstawowe dewiatora naprężenia 70
 - podstawowe dewiatora odkształcenia 72
 - podstawowe odkształcenia 102
 - podstawowe tensora naprężenia 69
 - podstawowe tensora odkształcenia 72, 102
 - wspólne 104, 167
- niobum aluminide* 28
- normality rule* 172
- notacja wektorowo-macierzowa 101
 - Voigta 102, 267

- oś
 –hydrostatyczna 186, 221
 –pseudohydrostatyczna 210
- odporność na
 –pełzanie 17
 –zniszczenie 220
- odwracalna energia zamykania
 mikrouszkodzeń 254
- odwrotna transformacja Laplace’a
 117
- ograniczenie zakresu sprężystego 97,
 185
- operator
 –różniczkowy dewiatorowy 128
 –różniczkowy dylatacyjny 128
 –transformowany 128
- ortotropia 90, 96
 –materiałowa 10, 91
- ortotropowa
 –macierz charakterystyczna zniszczenia 236
 –symetria materiału uszkodzonego 83
- ortotropowy
 –materiał sprężysty 109
 –materiał liniowo lepko-sprężysty 134
 –warunek von Misesa 201
 –zniszczenia Tsai–Wu 237, 249
- pękanie
 –międzykrystaliczne 15
 –wewnątrzkrystaliczne 15
- płaski stan naprężenia 87, 205
- płaszczyzna
 –izotropii 241
 –ortotropii 241
 –ortotropii materiału 90
- paraboloida obrotowa 223
 –Burzyńskiego 224
- parametr
 –Haigha–Westergaarda 222
 –Larsona–Millera 15
 –temperaturowo–czasowy 15
 –uszkodzenia 20, 77, 258
- path-dependent material* 269
- pełzanie
 –drugorzędowe 14, 262
 –materiału 14
 –pierwszorzędowe 14, 262
 –proste 114
 –trzeciorzędowe 15, 262
 –ustalone 14
- perfectly-plastic flow* 2
- piasek kwarcowy 9
- pierwsza współrzędna Haigha–
 Westergaarda 221
- pierwszy niezmiennik naprężenia
 220, 221
- plastic hardening* 2
- plastyczne płynięcie materiałów
 metalicznych 220
- plastyczność 269
- platforma idealnej plastyczności 2
- polikrystaliczny
 –materiał metaliczny 32
 –metal 28 *polymer matrix composite* 34
- poprzeczna izotropia 145, 160, 213
 –klasy tetragonalnej 239
 –plastyczna 213
- postać wektorowo-macierzowa Voigt’a 233
- postulat
 –Druckera 170, 174, 189, 220
 –normalności 172, 173
 –stateczności materiałowej Druckera 261

- stateczności materiału sprężysto-
kruchego 182
- stateczności materiału sprężysto-
plastycznego 182
- wypukłości 172
- wypukłości powierzchni granicz-
nej plastyczności 172
- wypukłości powierzchni stałej
energii dopełniającej 179
- wypukłości powierzchni stałej
energii odkształcenia 179
- potencjał
 - dyssypacji plastycznej 261
 - dyssypacji pełzania 263
 - dyssypacji uszkodzenia 265
 - Gibbsa 105, 106
 - Helmholtza 105, 106
 - naprężenia 175
 - odkształceń 176
 - stanu sprężystości 103
- powierzchnia
 - cylindryczna 188
 - cylindryczna nieobrotowa 190
 - cylindryczna i obrotowa 190
 - Druckera–Pragera 226
 - graniczna anizotropowa 169
 - graniczna cylindryczna 186
 - graniczna izotropowa 169
 - graniczna obrotowo symetryczna
222
 - graniczna plastyczności Tresci–
Guesta 190
 - graniczna Schmidta–Iszlińskiego–
Hilla 191
 - graniczna typu Hu–Marina klasy
mieszanej 217
 - obrotowa 187
 - obrotowa Burzyńskiego 223
 - obrotowo symetryczna 222
 - plastyczności 167
 - Schmidta–Iszlińskiego–Hilla 192
 - stożkowa Burzyńskiego 226
 - Tresci–Guesta 192
 - uplastycznienia 220
 - uszkodzenia 167
 - walcowa nieobrotowa 188
 - zniszczenia 220
 - zniszczenia Hill–Tsai 241
- poziom
 - makro 28
 - mikro 28
 - monokryształu 139
 - sieci krystalicznej 27
- próba
 - cykliczna 21
 - edometryczna 8
 - ściskania 5
 - wytrzymałościowa czystego ścina-
nia 185
 - wytrzymałościowa jednoosiowego
ściskania 185
 - wytrzymałościowa jednoosiowego
rozciągania 185
- próbka betonowa 231
- próby
 - dynamicznego rozciągania 21
 - quasi-statycznego rozciągania 21
- próg uszkodzeń 270
- prędkość wymuszenia 56
- prawo
 - ewolucji pełzania 263
 - Hooke’a materiału izotropowego
85, 87, 103
 - plastycznego płynięcia 261
 - płynięcia stowarzyszonego 170,
173
- primary creep* 14
- proces

- dyssypatywny 256
- konsolidacji 9
- lepko-sprężysty 262
- pełzania 50, 262
- relaksacji 50
- procesy
 - lepko-plastyczne 270
 - lepko-plastyczne z uszkodzeniem 270
 - lepko-sprężyste 270
 - lepko-sprężyste z uszkodzeniem 270
 - nieodwracalne 253
 - odwracalne 253, 268
- proportional limit* 1
- proste ścinanie 43, 222
- przestrzeń Haigha–Westergaarda 189, 222
- punkt szkieletowy modelu Ludwika 46
- quasi-cykl naprężeniowy 170, 261
- równanie
 - charakterystyczne tensora naprężenia 68
 - charakterystyczne tensora odkształcenia 71
 - ewolucji 267
 - ewolucji uszkodzenia 265
 - kinematyczne 267
 - konstrytywne materiału hipersprężystego 175
 - konstrytywne plastyczności 261
 - liniowej lepkosprężystości na poziomie RUC 136
 - nieliniowej sprężystości z uszkodzeniem 265
 - nieobrotowej powierzchni cylindrycznej 188
 - pełzania prostego modelu standardowego 118
 - różniczkowe jednowymiarowych liniowych modeli lepko-sprężystych 122
 - różniczkowe modelu Bingham'a 55
 - różniczkowe modelu Burgersa 118
 - sprężystości na poziomie RUC 152
- rate-dependent material* 270
- rate-independent material* 269
- reguła
 - mieszania 148
 - mieszania Reussa 150
 - mieszania Voigta 148
 - normalności 261
 - Reussa 148
 - Voigta 148
- reguły supermieszania 164
- representative*
 - unit cell* 147
 - volume element* 147
- reprezentatywna komórka jednostkowa 147, 153
- reprezentatywny element objętościowy 147
- resztkowy stan
 - naprężenia 99
 - odkształcenia 99
- Reuss estimation* 148
- rozszerzalność termiczna 145, 147
- rozszerzenie
 - anizotropowego warunku von Misesa 234
 - warunku ortotropowego von Misesa 237
- rozwój
 - plastyczności 257
 - uszkodzeń 258
- rupture strength* 17

- rura grubościenna z izotropowego materiału standardowego 132
- słabe sprzężeni termiczne 272
- secondary creep* 15
- siła termodynamicznie sprzężona 265
- sić trójskośna 140
- sieczna macierz sztywności 269
- sieczny
- moduł sprężystości 265
 - tensor sprężystości z uszkodzeniem 264
 - tensor sztywności 267
- single crystal* 28
- single-walled nanotubes* 32
- składowa dewiatorowa odkształcenia 97
- skała 219, 221
- skalarna zmienna uszkodzenia 77
- softening* 222
- sprężystość 97, 268
- sprężysty materiał anizotropowy 133
- sprężony procesu dyssypacji 256
- stała
- podatności 142
 - sprężystości Lamé 103
 - sztywności 142
- stal AISI 4330 226
- stateczność materiału
- sprężysto/plastycznego w sensie Druckera 172
 - sprężysto-kruchego 177
- stationary creep* 15
- statyczna próba pełzania 14
- stożek
- Druckera–Pragera 226
 - obrotowy 223
- stop
- Inconel 718 224
 - metal 224
- stored energy* 254
- Strain Compatible Method of Cells* 151
- strength differential* 243
- effect 6, 227
 - material 186, 188, 221
- struktura
- makrokompozytowa 38
 - polikrystaliczna 220
- styczna macierz
- podatności 269
 - sprężysto-plastyczności 184
 - sztywności 175, 178, 269
- styczny tensor sztywności 175, 267
- substrate* 39
- symetria
- dyskretna 221
 - heksagonalna 94, 140, 145, 153
 - obrotowa 221
 - ortotropowa macierzy podatności 145
 - ortotropowa macierzy sztywności 145
 - poprzecznie izotropowa 238
 - tetragonalna 92, 145, 153
- szybko-zmienne pole temperatury 272
- śląd tensora odkształcenia plastycznego 72
- tensor
- anizotropii plastycznej von Misesa 196, 233
 - charakterystyczny zniszczenia 233, 237
 - czwartego rzędu 108
 - drugiego rzędu 108

- funkcji relaksacji 133
- naprężenia efektywnego 80
- ortotropii plastycznej von Misesa 201
- podatności materiału hipersprężystego 101
- podatności sprężystej 133
- podatności 74, 259
- sprężystości kompozytu 142
- sprężystości kryształu 142
- strukturalny 167
- strukturalny anizotropii 168
- sztywności 74, 259
- sztywności materiału sprężystego 101
- sztywności materiału sprężysto-plastycznego 262
- sztywności siecznej 175
- uszkodzenia 265
- uszkodzenia IV rzędu 83
- uszkodzenia drugiego rzędu 78
- tensorowe-wielomianowe kryterium anizotropowe 194
- tensorowy operator koncentracji 152
- tensory
 - anizotropii zniszczenia 233
 - charakterystyczne anizotropii zniszczenia 233
 - strukturalne 108
- teoria niezmienników tensorowych 103
- tertiary creep* 15
- thermal barrier coating* 39
- time-dependent material* 270
- time-independent material* 269
- titanium aluminide* 28
- trójosiowe uogólnienie warunku Hu–Marin 210
- trójosiowy stan odkształcenia 58
- trójparametrowy warunek
 - Burzyńskiego 222
 - Hilla 211
- traction* 73
- transformacja całkowita Laplace’a 116, 126, 137
- transverse isotropy* 92, 213
- trwale
 - przewężenie względne 4
 - wydłużenie względne 4
- trzeci niezmiennik 222
 - dewiatora naprężenia 228
- trzecia współrzędna Haigha–Westergaarda 230
- twierdzenie
 - o oszacowaniu górnym i dolnym 161
 - o splocie 137
- tworząca powierzchni granicznej 187
- tytan 226
- uśredniona macierz
 - sprężystości 160
 - sztywności materiału ortotropowego 160
- uśrednione
 - naprężenie rzeczywiste 3
 - równanie sprężystości 152
- uśredniony tensor
 - funkcji pełzania 136
 - funkcji relaksacji 136
 - sprężystości 152
- uniwersalne krzywe trwałości 15
- unstable deformation* 2
- uogólnienie warunku Hersheya–Daviesa na przypadek ortotropii 211
- uogólniona metoda komórek 151
- uogólniony
 - model Maxwella 263

- model Voigta–Kelvina 264
- moduł Kirchhoffa 89
- moduł lepko-sprężystości 127
- moduł Younga 89, 128
- postulat stateczności Druckera materiału sprężysto-plastycznego 184
- warunek Druckera 184
- współczynnik Poissona 89, 128
- uszkodzenia
 - niesprężyste 269
 - sprężyste 268
- utrata eliptyczności warunku Hilla 209
- Voigt estimation* 148
- warunek
 - Burzyńskiego 222
 - Coulomba–Mohra 229, 230
 - Druckera–Pragera 228
 - Goldenblata–Kopnova 232, 233
 - graniczny Coulomba–Mohra 231
 - Hilla 202, 203
 - Hilla dla materiału poprzecznie izotropowego klasy tetragonalnej 245
 - Hilla materiału poprzecznie izotropowego 244
 - inicjacji zniszczenia materiału anizotropowego 234, 237
 - poprzecznie izotropowy klasy heksagonalnej typu Hu–Marina 217
 - poprzecznie izotropowy klasy tetragonalnej typu Hilla 217
 - poprzecznie izotropowy Tsai–Wu klasy tetragonalnej 243
 - poprzecznie izotropowy typu Hu–Marina klasy heksagonalnej 215
- stateczności Druckera 171
- stateczności Druckera materiału sprężysto-plastycznego 184
- stateczności materiału sprężysto-kruchego 182, 183
- Tresci–Guesta 228
- Tsai–Wu poprzecznie izotropowy klasy tetragonalnej 240, 242
- typu von Misesa–Hu–Marina klasy mieszanej 247
- typu von Misesa–Hu–Marina klasy pośredniej 247
- von Misesa materiału poprzecznie izotropowego 245
- wypukłości 189
- zniszczenia materiałów sypkich 228
- warunki
 - dyskretnej symetrii 60° 188
 - stateczności materiału sprężysto-kruchego 184
- wear barrier coating* 39
- wektor
 - kolumnowy 101
 - naprężenia 67, 74, 196
 - kolumnowy odkształcenia 71, 74
- wektorowa zmienna uszkodzenia 77
- właściwości anizotropowe 9
- włókno grafitowe 31
- wolno zmienne pole temperatury 272
- wpływ prędkości deformacji 20
- współczynnik
 - Chencova 95, 143
 - odkształcenia poprzecznego 91
 - przewodnictwa cieplnego 39, 270
 - Rabinovicha 95, 143
 - rozszerzalności termicznej 39, 270
 - sprężystości 142

- sztywności 142
- współrzędna Haigha–Westergaarda
 - 187, 190, 191, 220, 221, 226,
 - 230
- wspólny niezmiennik tensora naprężenia 194
- wykres Wöhlera 25, 26
- wypukłość powierzchni granicznej 170
 - Burzyńskiego 226
- wytrzymałość
 - na ściskanie 6, 270
 - na pełzanie 17
 - na rozciąganie 6, 270
 - zmęczeniowa 24
- wzmocnienie
 - plastyczne 2, 258
 - uszkodzeniowe 258
- yield point* 2
- yttria stabilized zirconia* 39
- zasada
 - równoważności energii 78
 - równoważności naprężeń 78
 - równoważności odkształceń 78
 - superpozycji Boltzmanna 122
- zastępcze kontinuum 140
- zbrojenie
 - nanocząsteczkowe 30
 - włókniste 30
 - warstwowe 30
- zjawisko Gerstnera 12
- zmęczenie niskocyklowe 13, 26
- zmienna
 - efektywna 78
 - stanu 267
 - wzmocnienia 265
- wzmocnienia lepkiego 263
- wzmocnienia plastycznego 262
- zniszczenie materiału izotropowego 221
- żelazo 221, 226
- żeliwo 221
 - sferoidalne FCD400 107