

Współistnienie faz i ich stabilność w gęstej materii  
nukleonowej

Sebastian Kubis

Rozprawa habilitacyjna

Politechnika Krakowska im. T. Kościuszki  
Kraków 2013



*Pragnę w tym miejscu podziękować prof. dr hab. Włodzimierzowi Wójcikowi oraz koleżankom i kolegom z Instytutu Fizyki Politechniki Krakowskiej za zachętę i pomoc w trakcie przygotowania tej pracy. W pamięci mam cierpliwą wyrozumiałość oraz wsparcie ze strony mojej żony i dzieci, którym pracę tę dedykuję.*



## Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>7</b>
<b>1 Materia jądrowa - podstawowe parametry</b>	<b>9</b>
<b>2 Modelowanie struktury wewnętrznej gwiazdy neutronowej</b>	<b>13</b>
2.1 Termodynamika jako metoda opisu układów złożonych . . . . .	14
2.2 Równowaga wzajemna układu termodynamicznego . . . . .	18
2.3 Stabilność wewnętrzna układu termodynamicznego . . . . .	20
2.3.1 Potencjały termodynamiczne i stabilność wewnętrzna . . . . .	26
2.3.2 Ogólne warunki stabilności dla materii w równowadze beta . . . . .	29
<b>3 Stabilność materii egzotycznej - kondensat kaonów</b>	<b>36</b>
3.1 Model chiralny . . . . .	37
3.2 Model wymiany mezonowej . . . . .	41
3.3 Przejście fazowe w materii gwiazdy neutronowej . . . . .	44
3.4 Wewnętrzna stabilność różnych modeli kondensacji kaonów . . . . .	49
<b>4 Separacja faz w materii jądrowej</b>	<b>55</b>
4.1 Przejście fazowe i poprawka kulombowska . . . . .	57
4.2 Niestabilność w ciekłym rdzeniu gwiazdy . . . . .	65
<b>Podsumowanie</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>73</b>
<b>Streszczenie</b>	<b>77</b>
Streszczenie . . . . .	77
Summary . . . . .	78
<b>Podziękowanie</b>	<b>79</b>



## Wstęp

Gwiazdy neutronowe należy uznać za obiekty wyjątkowe na tle innych obiektów we Wszechświecie. Odkryto je przypadkiem w roku 1968 jako pulsary - źródła niezwykle szybkich, a jednocześnie stabilnych pulsów radiowych o okresie pulsacji rzędu 1 s. Pulsary, z początku zagadkowe, niedługo po swym odkryciu zostały zidentyfikowane jako szybko obracające się gwiazdy neutronowe. Pewne przypuszczenia na temat obiektów zbudowanych wyłącznie z neutronów pojawiały się już w latach 30-tych ubiegłego wieku, jednak ze względu na znikomy, jak na gwiazdy, rozmiar rzędu 10 km oraz brak reakcji termojądrowych, dzięki którym świecą zwykłe gwiazdy, gwiazdy neutronowe miały w zasadzie nie być obserwowane. Nikt jednak wtedy nie przypuszczał, że mogą posiadać gigantyczne pole magnetyczne, dzięki któremu gwiazda neutronowa staje się kosmiczną latarnią morską. Dzisiaj gwiazdy neutronowe obserwowane są w pełnym zakresie widma: od fal radiowych do promieniowania gamma. Mogą być zarówno pulsarami, jak i źródłami ciągłej emisji. Materia, która je wypełnia istotnie odbiega od materii, z której zbudowane są zwykłe gwiazdy. Zamiast wysokotemperaturowej plazmy, w której począwszy od wodoru i helu produkowane są coraz cięższe pierwiastki, w gwiazdach neutronowych mamy stygnącą mieszaninę zdegenerowanych cząstek - niekoniecznie neutronów. Swoją wewnętrzną budową gwiazdy neutronowe bardziej przypominają planety posiadając skorupę i ciekłe jądro. Chociaż w ogólnym zarysie taka struktura wewnętrzna jest potwierdzona przez obserwacje i rozważania teoretyczne, to bardziej szczegółowa analiza napotyka na poważne trudności. Materia gwiazdy obejmuje niezwykle szeroki zakres gęstości pomiędzy  $10^1$  a  $10^{15}$  g/cm<sup>3</sup> i ciśnień sięgających  $10^{36}$  dyn/cm<sup>2</sup>. Niemożność prowadzenia eksperymentów w tym zakresie ciśnień i gęstości skazuje nas na modele teoretyczne. Aby znaleźć równanie stanu materii musimy założyć, że możliwa jest ekstrapolacja wiedzy, jaką dają ziemskie laboratoria o wiele rzędów wielkości. I tak, obszar skorupy (gęstości  $< 10^{13}$  g/cm<sup>3</sup>) wydaje się być dobrze znany, choć ciągle pozostają nierozstrzygnięte pytania dotyczące nadciekłości i roli, jaką odgrywa w rotacji i stygnięciu gwiazdy. Niestety, rdzeń pozostaje ciągle domeną hipotez i spekulacji. Równania równowagi hydrostatycznej pokazują, że gęstość w centrum gwiazdy może być istotnie większa niż średnia gęstość jądra atomowego, co otwiera możliwość rozważania tak egzotycznych form materii, jak materia hiperonowa, kondensaty mezonów czy materia kwarkowa. Pojawienie się nowych form materii zwykle odbywa się na drodze przejścia fazowego. Należy wtedy poprawnie opisać równowagę i stabilność poszczególnych faz i ich wpływ na równanie stanu. Przejścia fazowe pojawiają się nie tylko w centralnym obszarze

rdzenia gwiazdy. Granicę, jaka istnieje pomiędzy ciekłym rdzeniem a sztywną skorupą gwiazdy, również należy traktować jako przejście fazowe.

W niniejszej pracy analizowano gęstą materię pod kątem *stabilności termodynamicznej*. Podkreślono wagę pojęcia stabilności, które okazało się niezwykle pomocne w analizie struktury wewnętrznej gwiazdy. Przejście rdzeń-skorupa, możliwe zestalenie rdzenia, jak i weryfikacja egzotycznych modeli gęstej materii, okazują się mieć proste przełożenie na warunki stabilności.

Praca podzielona jest na następujące rozdziały. Pierwszy zawiera charakterystykę materii jądrowej i omawia jej podstawowe parametry. Drugi przedstawia konieczne warunki stabilności jako konsekwencje postulatów termodynamiki. Następnie te ogólne rozważania zostały wykorzystane w przypadku gęstej materii wypełniającej wnętrze gwiazdy neutronowej. W rozdziale trzecim warunki stabilności zastosowano w przypadku kondensacji kaonów, jako jednej z możliwych postaci materii egzotycznej. Rozdział czwarty poświęcony jest analizie stabilności standardowej materii złożonej z nukleonów i leptonów. Przedstawiono rolę energii symetrii, istotną przy określaniu grubości skorupy, jak również możliwość pojawienia się fazy stałej w samym rdzeniu gwiazdy.



## 1. Materia jądrowa - podstawowe parametry

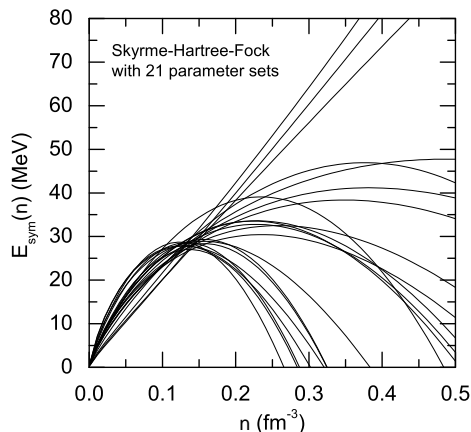
Pojęcie materii jądrowej ma swoją genezę w formule masowej Weizsäckera [Weizsacker35]. Według tej formuły energia wiązania cięższych jąder<sup>1</sup> jest proporcjonalna do liczby nukleonów  $A$  w jądrze, a nie jak należałoby oczekiwać, do liczby oddziałujących par  $A(A - 1)$

$$E(A, Z) = -a_V A + a_S A^{2/3} + \frac{a_C Z^2}{A^{1/3}} + \frac{a_A (N - Z)^2}{A}. \quad (1.1)$$

Dzieje się tak, ponieważ siły jądrowe mają własność saturacji, czyli wysycenia oddziaływania pomiędzy poszczególnymi parami. W formule masowej oprócz głównego przyczynku określonego przez  $a_V$ , obecne są również wkłady od energii powierzchniowej, kulombowskiej oraz związanej z asymetrią pomiędzy liczbą protonów  $Z$  i neutronów  $N$ . Te poszczególne rodzaje energii ilościowo określają parametry:  $a_S, a_C, a_A$ . Formuła ma charakter przybliżony, gdyż nukleony, będąc fermionami, w rzeczywistości obsadzają kolejne poziomy energetyczne (powłoki - podobnie jak elektrony w atomie) w studni uśrednionego potencjału jądrowego. Istnienie poszczególnych powłok potwierdzają szczególnie silnie związane jądra, o tzw. magicznych liczbach nukleonów, które odpowiadają powłokom zapełnionym. Efekty powłokowe są szczególnie silne w przypadku lekkich jąder ( $A < 20$ ), gdzie formuły masowej stosować nie można. Dla ciężkich jąder również ich promień  $R$  z dobrym przybliżeniem zmienia się z liczbą masową jak  $R = r_0 A^{1/3}$ , gdzie  $r_0 = 1.2$  fm. Takie skalowanie oznacza, że wszystkie jądra mają w przybliżeniu tę samą średnią gęstość. Formuła masowa wyraża fakt, że jądro atomowe możemy traktować jako kroplę materii o średniej gęstości  $\rho_0 = 2.5 \times 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup> i gęstości liczby barionowej  $n_0 = 0.16$  fm<sup>-3</sup>. Na jądro atomowe możemy spojrzeć w sensie granicy termodynamicznej, tzn. przechodząc z jego objętością do nieskończoności przy zachowaniu gęstości równej  $n_0$ . Znikają wtedy wszystkie wyrazy poza objętościowym  $a_V$  i asymetrycznym  $a_A$ . Przy takim przejściu granicznym jesteśmy zmuszeni pominąć wkład od energii elektrostatycznej jądra  $a_C$ , który jest w rzeczywistości rozbieżny. Fakt ten jest wyrazem długozasięgowego charakteru oddziaływań związanych z ładunkiem protonów. W związku z tym materia jądrowa jest to hipotetyczny układ nukleonów, które oddziałują między sobą z pominięciem oddziaływań elektromagnetycznych. Możemy wtedy zapisać, że przy gęstości  $n_0$ , zwanej punktem saturacji, energia przypadająca na barion

---

<sup>1</sup>Dla  $A > 40$  dokładność formuły sięga 1%.



Rysunek 1.1: Przykładowe kształty energii symetrii otrzymane przy różnych parametryzacjach modelu jądrowego Skyryma.

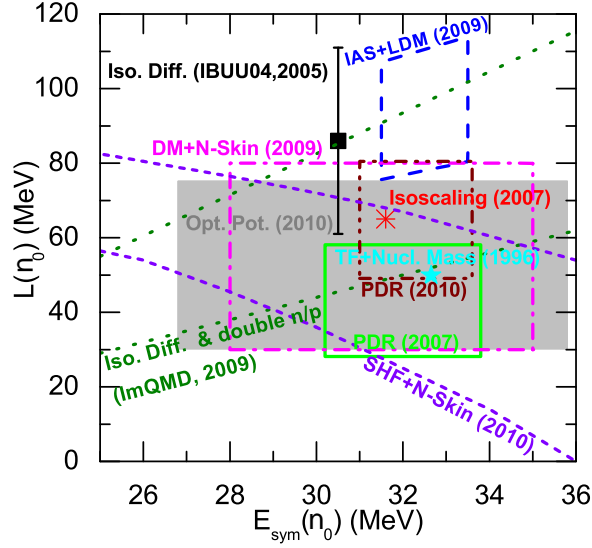
$u = E/A$  dla materii jądrowej wynosi:

$$u = m_N - a_V + a_S \frac{n_n - n_p}{n_0}, \quad (1.2)$$

gdzie  $n_p$  i  $n_n$  to gęstości neutronów i protonów, a  $m_N$  to ich średnia masa spoczynkowa. Jak wskazują obserwacje pulsarów, wewnątrz gwiazdy neutronowej zawiera materię o gęstości znacznie powyżej  $n_0$ . Materia jądrowa jest układem dwuskładnikowym, a jej energia zależy od wzajemnej proporcji protonów i neutronów. Zatem pełny opis materii jądrowej przedstawia energia, która jest funkcją gęstości liczby barionowej  $n$  i zawartości protonów  $x = n_p/n$ . Symetria izospinu oznacza, że wyrażenie na energię materii jądrowej musi być symetryczne ze względu na zamianę protonów na neutrony, czyli  $x \leftrightarrow \frac{1}{2} - x$ . Stąd, w zmiennych  $n$  i  $x$  energia powinna być parzystą funkcją asymetrii  $(x - \frac{1}{2})$ . Rozwijając w szereg

$$u^N(n, x) = m_N + V(n) + E_s(n)(1 - 2x)^2 + Q(n)(1 - 2x)^4 + \dots \quad (1.3)$$

otrzymujemy odpowiednio:  $V$  - potencjał izoskalarny,  $E_s$  - energię symetrii, oraz  $Q$  - człon czwartego rzędu. Własności materii jądrowej w punkcie saturacji nakładają więzy na postać funkcji  $V$  oraz  $E_s$  jedynie w punkcie  $n_0$ :  $V(n_0) = -a_v \approx -16$  MeV,  $E_s(n_0) = S_v \approx 30$  MeV. Kształt zależności  $E_s(n)$  w pełnym zakresie gęstości jest, jak dotąd nieznan. Modele teoretyczne, w zależności od metody i sposobu opisu oddziaływań nukleonowych dają zupełnie różne przewidywania. Nawet w ramach tego samego modelu zmiany w parametryzacji pozostające w zgodzie z formułą masową prowadzą do dużych rozbieżności dla gęstości dalekich od  $n_0$ . Rys. 1.1 przedstawia szerokie spektrum możliwych kształtów  $E_s(n)$  dla różnych parametryzacji modelu



Rysunek 1.2: Korelacja pomiędzy wartością energii symetrii w  $n_0$  a jej nachyleniem  $L$  jako wynik różnych eksperymentów.

Skyrma [Chen05]. Aby nieco dokładniej określić postać energii symetrii  $E_s$ , jako funkcji gęstości można posłużyć się rozwinięciem

$$E_s(n) = S_v + \frac{L}{3n_0}(n - n_0) + \frac{K_s}{18n_0^2}(n - n_0)^2 + \dots, \quad (1.4)$$

gdzie parametry  $L$  i  $K_s$  to odpowiednio nachylenie i krzywizna energii symetrii w punkcie saturacji. W ostatnich latach [Li08] intensywnie bada się własności materii asymetrycznej z wykorzystaniem wiązek ciężkich jąder o wysokim stopniu asymetrii, których celem jest między innymi dokładniejsze określenie postaci funkcji  $E_s(n)$ . Niestety parametry takie, jak  $S_v$ ,  $L$  i  $K_s$  nie podlegają niezależnemu i bezpośredniemu pomiarowi, lecz w uwikłany sposób określają wyniki eksperymentów akceleratorowych. Rys. 1.2 przedstawia ilościowe korelacje, które do pewnego stopnia zawężają dowolność  $E_s(n)$ . Można przyjąć, że nachylenie energii symetrii  $L$  zawiera się pomiędzy 40 a 100 MeV. Z kolei krzywizna energii symetrii  $K_s$  w punkcie saturacji przyjmuje wartości od -120 do +540 MeV. W pracy [Lattimer12] wzięto pod uwagę wyniki różnych eksperymentów i ograniczeń na parametr  $L$ . Taka krzyżowa analiza sugeruje, że  $L \approx 50$  MeV. Pewien postęp dokonał się jeśli chodzi o zakres bardzo niskich gęstości,  $n < 0.01n_0$ . Autorzy pracy [Kowalski07] pokazali, wykorzystując zjawisko izoskalowania, że  $E_s(n \rightarrow 0) \approx 10$  MeV. Jednak, według standardowych modeli teoretycznych energia symetrii powinna dążyć do zera jako niewysoka potęga  $n$  i stąd skończona wartość  $E_s$  w zerowej gęstości jest nadal przedmiotem dyskusji.

Interesującą wielkością jest człon czwartego rzędu  $Q$  (ang. *quartic term*), który jest zwykle pomijany w opisie materii jądrowej. Jak dotąd nie istnieją żadne pomiary pozwalające określić wartość członu kwartycznego. Jakie wartości może przyjmować  $Q$ ? Gdybyśmy założyli brak oddziaływań między nukleonami, całkowitą energię stanowiłaby jedynie energia kinetyczna gazu Fermiego swobodnych protonów i neutronów

$$u_{kin}^N = 1/n \sum_{i=n,p} \int_0^{k_i} \frac{k^2}{2m_N} \frac{k^2 dk}{\pi^2} = \frac{3}{5} E_F \left( \frac{2n}{n_0} \right)^{2/3} \left( (1-x)^{5/3} + x^{5/3} \right), \quad (1.5)$$

gdzie  $E_F$  to energia poziomu Fermiego w materii symetrycznej. Stąd wynika, że wkład kinetyczny do każdego z parametrów pojawiających się w rozwinięciu (1.3) wynosi:

$$S_v^{kin} = \frac{E_F}{3} = 12.3 \text{ MeV} \quad , \quad Q^{kin} = \frac{E_F}{81} = 0.5 \text{ MeV}. \quad (1.6)$$

Jak widać, dla członu kwadratowego wkład od oddziaływań  $S_v^{int} = S_v - S_v^{kin}$  stanowi 2/3 całej wartości  $S_v \approx 30 \text{ MeV}$ . Z kolei  $Q^{kin}$  nie przekracza niepewności pomiarowych, co tłumaczy zaniedbywanie członu czwartego rzędu w analizie danych eksperymentalnych. Można jednak przypuszczać, że podobnie jak w przypadku członu drugiego rzędu, uwzględnienie oddziaływań,  $Q = Q^{kin} + Q^{int}$ , zwiększy wartość  $Q$  w stosunku do części kinetycznej. Rachunki teoretyczne wykorzystujące relatywistyczne podejście Hartee-Focka (DBHF) do opisu materii jądrowej [Lee98] pokazują, że udział oddziaływań  $Q^{int}$  w okolicy  $n_0$  pozostaje na poziomie +1 MeV. Z kolei w wyższych gęstościach, co ciekawe,  $Q$  zmienia znak i sięga nawet  $-10 \text{ MeV}$ . Mimo że sama wartość członu kwartycznego jest niewielka w porównaniu z kwadratowym, to okazuje się być ważna w materii gwiazdy, gdyż ta jest zwykle silnie asymetryczna. Na rolę  $Q$  zwrócono uwagę w związku z chłodzeniem neutrinowym [Steiner06] oraz przejściem rdzeń-skorupa w gwiazdzie neutronowej [Kubis08].

W opisie własności materii jądrowej w okolicy punktu saturacji skupiliśmy się na części zależnej od asymetrii materii jądrowej  $E_s(n)$  i  $Q(n)$ . Jak się okazuje, właśnie ta część ma istotny wpływ na stabilność fazową w materii gwiazdy neutronowej. Słaba znajomość zależności energii symetrii od gęstości przekłada się na nieznaną strukturę wewnętrzną jak i ewolucji gwiazdy. Z drugiej strony, jakiegokolwiek wyniki obserwacyjne dotyczące gwiazd neutronowych mogą istotnie pomóc w ograniczeniu obecnych dowolności w wyrażeniu na energię materii nukleonowej.

## 2. Modelowanie struktury wewnętrznej gwiazdy neutronowej

Masa gwiazdy neutronowej przekraczająca masę Słońca  $M_{\odot}$  oraz jej rozmiar mniejszy niż 20 km wskazują, że mamy do czynienia z obiektem specyficznym - średnia gęstość materii gwiazdy jest większa od średniej gęstości jądra atomowego  $\rho_0 = 2.5 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$ . Badania eksperymentalne dotyczące własności jąder atomowych siłą rzeczy nie wychodzą poza  $\rho_0$ , stąd też, nie mogą w wyczerpujący sposób opisać własności materii gwiazdy neutronowej. Ogromny postęp, jaki się dokonał w dziedzinie fizyki cząstek elementarnych, wraz z konstrukcją wielkich zderzaczy hadronowych pozwala na badanie materii o gęstościach powyżej  $\rho_0$ . Jednak stan materii, jaki się obserwuje w zderzeniach ciężkich jonów, daleki jest od stanu materii gwiazdy. Materia w gwieździe ma charakter układu statycznego - jest w stanie równowagi termodynamicznej, czego nie można powiedzieć o materii produkowanej w akceleratorach. Nawet zakładając jej termalizację napotykamy tu temperatury rzędu 100 MeV, czyli  $10^{12}$  K, znacznie wyższe od typowych temperatur we wnętrzu gwiazdy, które nie przekraczają  $10^8$  K<sup>1</sup>. Mimo wysokiej temperatury materia gwiazdowa jest silnie zdegenerowana. Ponadto obecne są w niej leptony, co oznacza że kluczową rolę w jej opisie odgrywają oddziaływania słabe, których rola w formacji materii dostępnej w akceleratorach jest marginalna. Brak możliwości eksperymentowania z materią o takich własnościach skazuje nas na badania czysto teoretyczne, w których, na ile jest to możliwe, staramy się wykorzystać wiedzę dostępną z ziemskich laboratoriów. Paradoksalnie postęp w fizyce cząstek elementarnych, który zaowocował odkryciem nowych cząstek poza podstawowymi składnikami jądra, jak protony i neutrony, stawia fizykę gwiazd neutronowych w kłopotliwej sytuacji. Odkrycie cząstek dziwnych, powabnych, dodatkowych generacji leptonów, a w końcu samej struktury kwarkowej hadronów, zmusza nas od uwzględnienia tych faktów w opisie materii gwiazdy. Stąd też po ponad 40-stu latach od odkrycia pulsarów radiowych, pierwszych reprezentantów gwiazd neutronowych, nadal nie wiemy jednoznacznie, jaka jest ich wewnętrzna struktura. Podstawowy element, jakim jest równanie stanu gęstej materii hadronowej  $P(\rho, T)$ , nie jest do dzisiaj znany. Przypuszcza się, że w obszarze wysokich gęstości,  $n \gg n_0$ , pojawiają się cząstki dziwne lub uwolnione kwarki, prowadząc do drastycznych różnic w relacji  $P(\rho)$ . O ile poniżej  $n_0$  równanie stanu jest dość dobrze określone, o tyle mikroskopowa struktura materii i jej

---

<sup>1</sup>Temperatura wewnętrzna nie podlega bezpośredniej obserwacji i jest modelowana na podstawie obserwacji temperatury powierzchniowej.

skład chemiczny są przedmiotem różnych hipotez. Obszar o gęstości poniżej  $n_0$  odpowiada skorupie gwiazdy, w której gęstość materii na odcinku  $\approx 1$  km spada o 13 rzędów wielkości. Istnienie skorupy oprócz rachunków modelowych potwierdzają obserwacje gwiazd neutronowych. Zjawisko gliczingu pulsarów, polegające na nagłym i nieoczekiwanym wzroście częstości pulsów<sup>2</sup>, nie da się wyjaśnić bez zestalonej, niezbyt grubej powłoki otaczającej ciekły rdzeń gwiazdy. Skorupa może być przyczyną precesji pulsarów i emisji fal grawitacyjnych. Dyfuzja ciepła i struktura pola magnetycznego przyczepionego do skorupy mają decydujący wpływ na własności obserwacyjne gwiazd neutronowych. Stąd też rzetelny opis własności materii, która ją tworzy jest wysoce pożądanym. Granica pomiędzy ciekłym rdzeniem a skorupą, podobnie jak utworzenie egzotycznych form materii w centrum gwiazdy, ma charakter przejścia fazowego w układzie, w którym występuje kilka rodzajów cząstek. W następnych podrozdziałach zostanie przedstawiona termodynamika takiego układu ze szczególnym uwzględnieniem stabilności i równowagi fazowej.

## 2.1. Termodynamika jako metoda opisu układów złożonych

Rozważamy poniżej układ składający się z kilku rodzajów cząstek  $i = 1, \dots, \alpha$ . Układ jest jednorodny - tzn. nie występują w nim gradienty gęstości, czyli nie dochodzi w nim do przepływu cząstek pomiędzy różnymi jego częściami. Zakładamy również, że układ ten jest w równowadze termodynamicznej - tzn. nie dochodzi w nim do przepływu ciepła pomiędzy wybranymi jego fragmentami. Ciepło, chociaż jest formą energii nie podlega zasadom zachowania, w związku z tym nie zależy od stanu układu, ale od jego historii. Opis układu, w którym pojawia się ciepło jako forma energii wymaga wprowadzenia nowej wielkości - entropii  $S$ , która istotnie odróżnia termodynamikę od innych działów fizyki. Dziś wiadomo, że entropia jest miarą nieuporządkowania układu i pojawia się dlatego, że rezygnujemy z pełnego mikroskopowego opisu na rzecz opisu statystycznego. Opis statystyczny wprowadza pojęcie prawdopodobieństwa  $p_j$  z jakim  $j$ -ty mikrostan występuje w naszym układzie. Stosując fundamentalne stwierdzenie, że entropia jest związana z prawdopodobieństwem poprzez wzór

$$S = -k_B \sum_j p_j \ln p_j \quad (2.1)$$

gdzie  $k_B$  to stała Boltzmana, możemy "wyprowadzić" termodynamikę z mechaniki. Jednak na poziomie makroskopowym termodynamikę można rozumieć jako opis pewnego fragmentu rzeczywistości fizycznej, co do której pełna informacja zawarta jest poprzez podanie globalnych wielkości, takich jak: objętość,

---

<sup>2</sup>Trudny w tłumaczeniu termin *glitch* - usterka, zakłócenie, dobrze oddaje naturę tego zjawiska, które poprzez swoją nieprzewidywalność psuje obraz idealnego zegara jakimi zwykle są pulsary [Lyne90]

liczby cząstek, średnie pole elektryczne bądź magnetyczne itp. Związki między tymi wielkościami, czy też sposób "konstrukcji" opisu termodynamicznego danego układu określają postulaty termodynamiki. W niniejszej monografii skorzystamy z postulatów, których brzmienie nieco różni się od powszechnie stosowanych zasad termodynamiki: pierwsza zasada określa, jak praca i ciepło zwiększają energię wewnętrzną układu, druga mówi o maksimum entropii, trzecia o zmierzaniu entropii do zera wraz z temperaturą. Do naszych celów pełniejsze sformułowanie termodynamiki zawiera podręcznik Callena [Callen]. W tym podejściu wprowadza się entropię jako podstawową wielkość, a postulowanie jej własności, jako funkcji stanu układu jest równoważne zasadom termodynamiki.

Własności entropii określają trzy postulaty. Zgodnie z I postulatem stan takiego jednorodnego układu, zwanego też fazą, jednoznacznie opisują: całkowita energia  $U$ , objętość  $V$  oraz poszczególne liczby cząstek  $N_i$  obecne całej objętości.  $U, V, N_i$  należą do kategorii tzw. parametrów ekstensywnych to znaczy liniowo rosnących z rozmiarem układu. W stanie równowagi wielkości te nie są niezależne, ale wiąże je *relacja fundamentalna* czyli funkcyjna zależność między entropią a pozostałymi wielkościami:

$$S = S(U, V, N_1, N_2, \dots, N_\alpha) . \quad (2.2)$$

Geometrycznie oznacza to że stany równowagowe leżą na  $\alpha+1$  - wymiarowej hiperpowierzchni w  $\alpha+2$  - wymiarowej przestrzeni stanów równowagi.

Nie każda funkcja parametrów  $U, V, N_1, \dots, N_\alpha$  może być entropią. Własności entropii określają kolejne dwa postulaty. Ich treść wymaga wprowadzenia pojęcia podukładu, to znaczy części naszego układu fizycznego, który został z niego wydzielony za pomocą wewnętrznych więzów. Więzy te można sobie wyobrażać jako "ścianki" o określonych własnościach, np. mogą się poruszać - czyli zmieniać objętość podukładu, mogą przepuszczać ciepło - czyli podukład może wymieniać energię z resztą układu, mogą przepuszczać określony rodzaj cząstek. Układ, w którym występują podukłady, nazwiemy układem złożonym. Postulat II mówi, że entropia układu złożonego, w którym występują wewnętrzne więzy ma taką własność, że osiąga maksimum ze względu na parametry ekstensywne określające więzy podukładów. Postulat III dotyczy sposobu "konstrukcji" entropii dla układu złożonego. Po pierwsze, entropia jest addytywną funkcją podukładów

$$S(U, V, N) = S(U_1, V_1, N_1) + S(U_2, V_2, N_2) , \quad (2.3)$$

gdzie  $U_i, V_i, N_i$  to parametry podukładów, oraz  $U = U_1 + U_2, V = V_1 + V_2$  itd. Powyższy warunek oznacza, że entropia jest funkcją jednorodną pierwszego stopnia, co zapisujemy

$$S(kU, kV, kN_1, kN_2, \dots) = kS(U, V, N_1, N_2, \dots) , \quad (2.4)$$

gdzie  $k$  to dowolna stała. Równanie to oznacza również ekstensywność entropii. Po drugie, entropia ma rosnać monotonicznie z energią całego układu

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V, N_1, \dots} > 0, \quad (2.5)$$

a ponieważ pochodna entropii po energii definiuje temperaturę  $T$  w skali bezwzględnej

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V, N_1, \dots}, \quad (2.6)$$

to powyższy warunek oznacza dodatniość temperatury dla stanów równowagi. Dzięki własności (2.5) można odwrócić relację fundamentalną (2.2) i przedstawić energię jako funkcję entropii:

$$U = U(S, V, N_1, N_2, \dots, N_\alpha). \quad (2.7)$$

Jest to inny sposób wyrażenie relacji fundamentalnej. Równanie (2.7) zawiera pełną wiedzę o układzie termodynamicznym, podobnie jak równanie (2.2). Funkcja  $U$  ma podobne własności do entropii - jest jednorodną funkcją swoich zmiennych

$$U(kS, kV, kN_1, kN_2, \dots) = kU(S, V, N_1, N_2, \dots). \quad (2.8)$$

Z twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej wynika, że skoro entropia przyjmuje maksimum ze względu na parametry ekstensywne podukładów i zachodzi warunek (2.5), to energia w tym samym punkcie przyjmuje minimum. Intuicja podpowiada, że energia wzrośnie  $k$ -krotnie, jeśli układ termodynamiczny powiększymy, tak że liczby cząstek  $N_i$  oraz objętość  $V$  zwiększą się  $k$ -krotnie. Powyższa zasada addytywności energii kryje w sobie jednak ważne założenie, że charakterystyczna skala oddziaływań cząstek w układzie jest znacznie mniejsza od rozmiaru układu. W ogólności energia nie musi być wielkością addytywną. Dobrze ilustruje to przypadek elektrostatycznego oddziaływania dwóch rozkładów ładunków  $\rho_1, \rho_2$  zawartych w objętości  $V_1$  i  $V_2$ . Długozasięgowy charakter oddziaływań elektromagnetycznych powoduje, że rozkład ładunku  $\rho_i$  generuje pole elektryczne opisane potencjałem  $\Phi_i$ , które rozciąga się w całej przestrzeni. Liniowość równań Maxwella zapewnia, że całkowity potencjał  $\Phi$  jest sumą potencjałów  $\Phi_1$  oraz  $\Phi_2$ , ale całkowita energia wyrażona jest całką:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho \, d^3x = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\Phi_1 + \Phi_2) \rho_1 \, d^3x + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\Phi_1 + \Phi_2) \rho_2 \, d^3x \\ &= U_1 + U_2 + \frac{1}{2} \left( \int_{V_1} \Phi_2 \rho_1 \, d^3x + \int_{V_2} \Phi_1 \rho_2 \, d^3x \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie ostatni wyraz, który miesza ze sobą rozkłady z odpowiadającymi im potencjałami, łamie addytywność energii. Ekstensywność energii, czyli liniowe



skalowanie z objętością i liczbą cząstek, jest również łamane przez zjawiska pojawiające się na brzegu układu. Jeśli układ jest zamknięty przez ścianki wyznaczające jego objętość to z faktu, że cząsteczki układu inaczej oddziałują z cząstkami ściany niż pomiędzy sobą wynika pojawianie się dodatkowego wkładu do całkowitej energii. Zjawisko to nazywane jest adhezją lub przyleganiem. Jego wkład do energii jest proporcjonalny do powierzchni ścianek, czyli skaluje się jak  $V^{2/3}$ . Nawet przy braku ścianek, jeśli tylko oddziaływanie cząstek układu ma charakter przyciągający to na brzegu układu pojawia swobodna powierzchnia zamykająca objętość  $V$ . Z powierzchnią tą związane jest zjawisko napięcia powierzchniowego oraz energia, która jest proporcjonalna do powierzchni układu. Efekty brzegowe czy powierzchniowe mogą zostać wyeliminowane jeśli energię całkowitą układu termodynamicznego będziemy rozważać w tzw. *granicie termodynamicznej* to znaczy, że mierzymy z  $V$  oraz  $N_i$  do nieskończoności, tak jednak by gęstości liczby cząstek  $n_i = N_i/V$  były stałe. Wtedy dostajemy wyrażenie na energię, którą należałoby nazwać energią objętościową (ang. *bulk energy*).

Relacja fundamentalna zawiera pełną informację o badanym układzie, niemniej jednak wielkości ekstensywne nie są wygodne w użyciu, zwłaszcza gdy odnosimy się do eksperymentu. W rzeczywistych pomiarach mamy do czynienia z takimi wielkościami jak: ciśnienie, temperatura, gęstość masy czy gęstości liczby cząstek (molowe). Poszczególne parametry termodynamiczne takie, jak:  $T$  - temperatura,  $P$  - ciśnienie,  $\mu_i$  - potencjały chemiczne odpowiadające poszczególnym rodzajom cząstek, wyrażają się jako pochodne cząstkowe relacji fundamentalnej:

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1 \dots N_\alpha} \quad P = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_1 \dots N_\alpha} \quad \mu_i = \left( \frac{\partial U}{\partial N_i} \right)_{S, N_j \neq N_i} . \quad (2.10)$$

Korzystając z własności pochodnych można pokazać, że powyższe pochodne nie zmieniają się przy przeskalowaniu układu, to znaczy gdy  $U' = kU$ ,  $V' = kV$ ,  $N'_i = kN_i$ . Na przykład dla ciśnienia

$$P' = \left( \frac{\partial U'}{\partial V'} \right)_{S', N'_i} = k \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_i} \frac{\partial V}{\partial V'} = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_i} = P . \quad (2.11)$$

Warunek ekstensywności dla  $U$  (2.8) pozwala ją zapisać jako kombinację liniową zmiennych  $S, V, N_i$  i odpowiadających im pochodnych

$$U = TS - PV + \sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i N_i \quad (2.12)$$

znanej jako tożsamość Eulera. Różniczkowym odpowiednikiem tożsamości Eulera jest relacja Gibbsa-Duhema:

$$S dT - V dP + \sum_i N_i d\mu_i = 0 . \quad (2.13)$$

Wielkości niezmiennicze względem skali nazywamy wielkościami *intensywnymi*. W stanie równowagi ciśnienie, temperatura i potencjały chemiczne zachowują swoją wartość również wtedy, gdy weźmiemy podukład będący dowolnie małą kopią naszego układu, zmierzając z jego objętością do zera<sup>3</sup>. Uzasadnia to traktowanie  $P, T, \mu_i$ , jako wielkości *lokalnych*, tj. określonych w dowolnym punkcie przestrzeni. Podobnie lokalny charakter mają wszystkie "gęstości", to znaczy wielkości, które są ilorazami wielkości ekstensywnych, na przykład: gęstość energii lub entropii:  $\varepsilon = U/V$ ,  $s = S/V$  lub energia czy entropia przypadająca na  $i$ -tą cząstkę:  $u_i = U/N_i$ ,  $s_i = S/N_i$ . Gęstości są wielkościami intensywnymi, co wynika z ich definicji, jednak odgrywają one inną rolę w rozważaniach równowagi termodynamicznej układu niż pochodne relacji fundamentalnej, (2.10) zwane też czasem "siłami" termodynamicznymi. O ile "siły", czyli  $T, P, \mu_i$  określają wzajemną równowagę pomiędzy różnymi częściami układu, o tyle "gęstości" mają związek z wewnętrzną stabilnością układu, co przedstawimy w następnych dwóch podrozdziałach.

## 2.2. Równowaga wzajemna układu termodynamicznego

Na podstawie definicji (2.10) możemy zapisać zmianę energii wewnętrznej jako:

$$dU = TdS - PdV + \mu_1dN_1 + \dots + \mu_\alpha dN_\alpha, \quad (2.14)$$

co wyraża I zasadę termodynamiki dla układu otwartego, czyli takiego, który oprócz ciepła i pracy może również wymieniać cząstki z otoczeniem. Zastosujmy wprowadzony w poprzednim podrozdziale postulat minimum energii do układu, który został podzielony na dwa podukłady - dwie części o różnych objętościach  $V_a$  i  $V_b$  i różnych entropiach. Fizycznie można sobie wyobrazić, że mamy do czynienia z zamkniętym cylindrem odizolowanym termicznie od otoczenia, w którym znajduje się przewodzący ciepło ruchomy tłok. W minimum energii jej przyrost wynosi zero, zatem korzystając z addytywności energii możemy zapisać:

$$0 = dU = dU_a + dU_b = T_a dS_a + T_b dS_b - P_a dV_a - P_b dV_b. \quad (2.15)$$

Parametry podukładów minimalizują energię wewnętrzną, jednak przy ustalonej całkowitej objętości  $V$  i entropii  $S$ . Stąd nie są one dowolne, lecz spełniają związki  $V = V_a + V_b$ ,  $S = S_a + S_b$  lub inaczej  $dV_a = -dV_b$ ,  $dS_a = -dS_b$ , stąd dostajemy:

$$0 = (T_a - T_b)dS_a + (P_a - P_b)dV_a, \quad (2.16)$$

przy czym  $dV_a$  i  $dS_a$  są już dowolne. Warunek ten oznacza, że w stanie równowagi termodynamicznej temperatury i ciśnienia w poszczególnych częściach

<sup>3</sup>Takie zmierzanie do zera ma sens, pod warunkiem że cały rozmiar podukładu nie jest mniejszy niż charakterystyczna skala oddziaływań.

układu muszą być te same:

$$T_a = T_b \quad , \quad P_a = P_b \quad . \quad (2.17)$$

Gdybyśmy usunęli przegrodę i jedynie "myślowo" podzielili układ na dwie części, to by również oznaczało swobodną wymianę cząstek pomiędzy podukładami. Rozumując jak powyżej dostalibyśmy równość potencjałów chemicznych

$$\mu_{i,a} = \mu_{i,b} \quad . \quad (2.18)$$

Podsumowując można powiedzieć, że w stanie równowagi termodynamicznej ciśnienie, temperatura i potencjały chemiczne pozostają stałe w całej objętości układu. W przeciwnym razie gradient ciśnienia prowadziłby do przepływu masy, gradient temperatury do przepływu ciepła, a gradienty potencjałów chemicznych do przepływów cząstek pomiędzy poszczególnymi obszarami układu. Mówimy w takim przypadku o równowadze *wzajemnej*. Powyższe warunki równowagi, pojawiają się również w kontekście równowagi układu wielofazowego i nazywa się je powszechnie warunkami Gibbsa. W układzie, w którym dochodzi do przejścia fazowego 1-szego rodzaju, w pewnym zakresie ciśnień i temperatur dwie lub więcej faz może współistnieć pod warunkiem spełnienia warunków Gibbsa (2.17,2.18). Zauważmy, że równania te nie dotyczą "gęstości", a jedynie "sił" termodynamicznych, co wobec powyższych rozważań uzasadnia ich nazwę. Przez analogię do mechaniki można powiedzieć, że równość sił oznacza równowagę układu. Z kolei "gęstości", czyli gęstość energii, entropii, czy liczby cząstek mogą być różne w poszczególnych fazach. Układ wielofazowy nie będzie jednorodny - poszczególne fazy mogą mieć różne gęstości dla każdego rodzaju cząstek - niemniej jednak pozostaje w równowadze. Warunki równowagi wzajemnej są ściśle związane *regulą faz* Gibbsa, która mówi o liczbie stopni swobody, czyli liczbie niezależnych zmiennych intensywnych  $P, T, \mu_1, \dots, \mu_\alpha$ , którą określa liczba składników w układzie  $\alpha$  i liczba faz  $f$  w równowadze wzajemnej. W układzie, w którym występuje  $\alpha$  składników i może się zmieniać  $T$  i  $P$ , każda fazy wprowadza jeden więz w postaci relacji Gibbsa-Duhema. Otrzymujemy więc

$$s = 2 + \alpha - f \quad (2.19)$$

wolnych parametrów. Stąd na przykład temperatura wrzenia wody ( $\alpha = 1, f = 2$ ) jest jednoznacznie określona przez ciśnienie. Natomiast w punkcie potrójnym, gdzie współistnieją 3 fazy: lód, ciecz i para, nie ma żadnej swobody. Wtedy ciśnienie i temperatura mają stałą wartość<sup>4</sup>. Szerzej te zagadnienia, w kontekście materii gwiazdy neutronowej będą rozwijane w następnych rozdziałach.

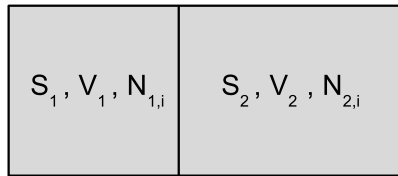
---

<sup>4</sup>Ta własność powoduje, że punkty potrójne dla wody i kilkunastu innych substancji używane są do precyzyjnego wyznaczenia skali temperatury.

### 2.3. Stabilność wewnętrzna układu termodynamicznego

Pojęcie równowagi wzajemnej układu wykorzystuje jedynie stacjonarność energii wewnętrznej  $U$  ze względu na podział na podukłady. Znikanie przyrostu energii (2.15) to jedynie warunek konieczny na ekstremum. Jak dyskutowano w podrozdziale 2.1, konsekwencją II postulatu mówiącego o maksimum entropii jest to, że energia wewnętrzna powinna osiągać minimum niezależnie od sposobu w jaki podzielimy układ na części, byle tylko globalne wartości parametrów ekstensywnych  $S, V, N_i$  były stałe. Istnienie minimum ma związek z wypukłością funkcji. Jednak pojawiające się powszechnie sformułowanie, że energia powinna być wypukłą funkcją swoich zmiennych (z czego wynika dodatniość ciepła właściwych, czy ściśliwości) nie zawsze jest jasno określone i poprawnie rozumiane. Z tego względu poniżej przedstawiamy bardziej szczegółową dyskusję zagadnienia stabilności wewnętrznej układu termodynamicznego.

Podobnie jak w poprzednich rozważaniach dzielimy układ o ustalonej entropii, objętości i liczbie cząstek na dwie części, co przedstawia Rys. 2.1. Ponieważ energia  $U$  jest taką funkcją  $S, V, N_i$ , że osiąga minimum przy do-



Rysunek 2.1: Rozkład wielkości ekstensywnych na dwie części układu.

wolnym sposobie rozkładu entropii, objętości i liczby poszczególnych rodzajów cząstek na dwie części to możemy zapisać:

$$U(S, V, N_i) < U(S_1, V_1, N_{i,1}) + U(S_2, V_2, N_{i,2}) \quad (2.20)$$

Pamiętając o tym, że

$$S = S_1 + S_2 \quad , \quad V = V_1 + V_2 \quad , \quad N_i = N_{i,1} + N_{i,2} \quad (2.21)$$

i korzystając z ekstensywności energii, możemy zapisać, że:

$$U\left(\frac{S_1 + S_2}{2}, \frac{V_1 + V_2}{2}, \frac{N_{i,1} + N_{i,2}}{2}\right) < \frac{1}{2}(U(S_1, V_1, N_{i,1}) + U(S_2, V_2, N_{i,2})) \quad (2.22)$$

Dla przejrzystości zapisu oznaczymy zmienne  $S, V, N_i$  jako  $(2+\alpha)$ -wymiarowy wektor  $\mathbf{X}$ , wtedy powyższa nierówność przyjmuje postać:

$$U\left(\frac{\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2}{2}\right) < \frac{U(\mathbf{X}_1) + U(\mathbf{X}_2)}{2} \quad (2.23)$$

Relacja taka dotycząca wartości średniej funkcji pomiędzy dwoma punktami w przestrzeni  $S, V, N_i$  jest równoznaczna z wypukłością funkcji  $U$  pod warunkiem, że zachodzi dla dowolnych dwóch wektorów  $\mathbf{X}_1$  i  $\mathbf{X}_2$ . Jeśli jednak wybierzemy je w ten sposób, że są kolinearne w przestrzeni  $S, V, N_i$ , to znaczy:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{N_{i,1}}{N_{i,2}}, \quad (2.24)$$

wtedy na mocy jednorodności  $U$  (2.8) nierówność (2.23) staje się równością. Funkcja  $U(S, V, N_i)$  nie jest funkcją wypukłą. Potwierdza to inne rozumowanie oparte o badanie hesjanu z funkcji  $U$ , czyli jej macierzy drugich pochodnych:

$$\mathcal{H}(U) = \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} \right], \quad (2.25)$$

gdzie  $X_i = V, S, N_1 \dots N_\alpha$  reprezentuje wszystkie parametry ekstensywne pojawiające się w relacji fundamentalnej. Dla funkcji wypukłej forma kwadratowa, którą definiuje powyższa macierz, musi być dodatnio określona. To z kolei oznacza, że jej wyznacznik główny (oraz wszystkie podwyznaczniki) powinny być dodatnie. Różniczkując tożsamość Eulera (2.12) po dowolnej wybranej zmiennej np. entropii, dostajemy:

$$0 = T \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial S} + V \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} + N_1 \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial N_1} + \dots + N_\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial N_\alpha}, \quad (2.26)$$

co oznacza liniową zależność pomiędzy elementami wybranymi wiersza w macierzy  $\mathcal{H}(U)$  i w konsekwencji jej wyznacznik główny jest równy zero.

$$\det(\mathcal{H}(U)) = 0 \quad (2.27)$$

Znikanie wyznacznika macierzy drugich pochodnych jest konsekwencją jednorodności funkcji  $U$ . Można pokazać, że kolejne podwyznaczniki hesjanu są już dodatnie. To sugeruje, aby zdefiniować funkcję termodynamiczną pochodzącą od energii  $U$ , a która nie będzie ekstensywna. Zdefiniujmy gęstość energii jako

$$\varepsilon = \frac{U}{V}, \quad (2.28)$$

ale tak, by była funkcją innych pozostałych gęstości

$$s = \frac{S}{V}, \quad n_i = \frac{N_i}{V}. \quad (2.29)$$

Okazuje się że gęstość energii jest funkcją o jeden mniej zmiennych niż  $U$  (czyli  $1 + \alpha$ ), a ponadto jest intensywna i jest funkcją jedynie wielkości intensywnych. Łatwo pokazać, że z wyrażenia na gęstość energii objętość znika:

$$\varepsilon(s, n_1 \dots n_\alpha) = U(S, V, N_1 \dots N_\alpha) / V = U(s, 1, n_1 \dots n_\alpha). \quad (2.30)$$

Zapiszmy teraz warunek minimalizacji energii wewnętrznej przy podziale na podukłady (nierówność 2.20), ale z użyciem gęstości energii

$$V\varepsilon\left(\frac{S_1+S_2}{V}, \frac{N_{1,1}+N_{1,2}}{V}, \dots\right) < V_1 \varepsilon\left(\frac{S_1}{V_1}, \frac{N_{i,1}}{V_1}, \dots\right) + V_2 \varepsilon\left(\frac{S_2}{V_2}, \frac{N_{i,2}}{V_2}, \dots\right) \quad (2.31)$$

Zapisując udział objętości jednego z podukładów  $V_1$  w stosunku do całości jako

$$t = \frac{V_1}{V} \quad , \quad 0 < t < 1 \quad (2.32)$$

oraz wektor  $\mathbf{x} = (s, n_1, \dots, n_\alpha)$  w przestrzeni poszczególnych gęstości, otrzymujemy nierówność postaci:

$$\varepsilon(t \mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) < t \varepsilon(\mathbf{x}_1) + (1-t) \varepsilon(\mathbf{x}_2). \quad (2.33)$$

W odróżnieniu od (2.23) powyższa nierówność zachodzi przy dowolnych  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  oraz  $t$ . Jest to literalnie definicja wypukłości funkcji  $\varepsilon(s, n_1, \dots, n_\alpha)$ . Zupełnie podobnie można pokazać wypukłość innych "gęstości", tzn. energii na cząstkę określonego rodzaju

$$u_i = \frac{U}{N_i}. \quad (2.34)$$

Dla funkcji wypukłej i odpowiednio gładkiej jej hesjan jest dodatnio określony, co wygodnie jest badać, analizując dodatniość kolejnych jego podwyznaczyków. Dla ilustracji rozważmy układ jednoskładnikowy i zapiszmy warunki wypukłości dla gęstości energii:

$$\varepsilon(s, n) = U/V \quad , \quad d\varepsilon = Tds + \mu dn \quad , \quad (2.35)$$

gdzie  $s = S/V$ ,  $n = N/V$ . Wtedy dodatniość hesjanu oznacza

$$\det[\mathcal{H}(\varepsilon)] \equiv \begin{vmatrix} \varepsilon_{ss} & \varepsilon_{sn} \\ \varepsilon_{ns} & \varepsilon_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{oraz} \quad (\varepsilon_{nn} > 0 \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{ss} > 0) \quad (2.36)$$

Pojawiające się tu drugie pochodne pochodne można wyrazić przez pierwsze pochodne "sił" termodynamicznych  $\varepsilon_{ss} = \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_n$ ,  $\varepsilon_{sn} = \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_s$  itd. Ponadto stosując własności pochodnych dla funkcji uwikłanych, można pokazać, że

$$\det[\mathcal{H}(\varepsilon)] = \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_n \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_T = \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_\mu \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_s \quad (2.37)$$

Stąd dostajemy dwie pary równoważnych warunków wypukłości:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_n > 0 \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_T > 0 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_\mu > 0 \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_s > 0. \quad (2.38)$$

Pierwsza z nierówności w każdej z par przedstawia *ciepło właściwe* na jednostkę objętości

$$c_i = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_i \quad , \quad i = n, \mu \quad , \quad (2.39)$$

druga nierówność, rzadziej pojawiająca się w kursie termodynamiki odnosi się do *podatności*. Podatność  $\chi$  określa koszt energetyczny zmiany gęstości przy określonym procesie  $i$

$$\chi_i = \left( \frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_i, \quad i = s, T. \quad (2.40)$$

W warunkach stabilności pojawia się zarówno odwrotność ciepła właściwego, jak i odwrotność podatności, dlatego niestabilność oznacza, że ciepło właściwe lub podatność stają się rozbieżne. Pojawiające się nierówności ostre w powyższych warunkach wypukłości dla  $\varepsilon$  wymagają komentarza. Zgodnie z matematyczną terminologią jest to wypukłość *silna* i w dalszym ciągu będziemy ją tak rozumieć. Dla matematycznej definicji wypukłości funkcji wystarczy, aby nierówność w (2.33) była nierównością nieostrą. Jednak do naszych celów wymagana jest nierówność ostra. Po pierwsze oznacza ona, że mamy do czynienia z układem jednorodnym przestrzennie, czyli jednofazowym. Po drugie, jak pokażemy poniżej, warunki (2.38) mają związek ze stabilnością fluktuacji, do jakich dochodzi w układzie termodynamicznym w stanie równowagi. W statystycznym podejściu do termodynamiki można pokazać, że drugie pochodne gęstości energii są odwrotnie proporcjonalne do wielkości fluktuacji. Jeśli układ na poziomie mikrostanu jest opisany przez hamiltonian  $H$ , to stosując rozkład kanoniczny pokazuje się, że fluktuacje średniej energii układu są proporcjonalne do ciepła właściwego przy stałej objętości [Huang]

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = k_B T^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \right)_V = k_B V T^3 \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_n. \quad (2.41)$$

Zatem dodatniość ciepła właściwego oznacza skończony rozmiar fluktuacji energii. Łamanie warunku silnej wypukłości,  $\left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_n = 0$ , oznaczałoby, że fluktuacje energii mogą rosnąć nieograniczenie. Aby obliczyć fluktuacje liczby cząstek należy się posłużyć wielkim rozkładem kanonicznym. Rozkład ten opisuje gęstość prawdopodobieństwa dla układu otwartego, czyli takiego który może wymieniać cząstki z otoczeniem. Wtedy można wykazać, że [Huang]

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = k_B T V \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} \right)_T. \quad (2.42)$$

Dzięki relacji Gibbsa-Duhema, stwierdzamy że druga pochodna ciśnienia po potencjale chemicznym to zdefiniowana wcześniej podatność

$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} \right)_T = \left( \frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T. \quad (2.43)$$

Podsumowując można powiedzieć, że pojawiająca się w warunkach wypukłości (2.38) dodatnia podatność oznacza stabilność fluktuacji liczby cząstek. Fizycznie znikanie  $\chi^{-1}$ , czyli rozbieżność podatności oznacza, że narastanie kontrastu

gęstości cząstek w pewnej części układu może się odbywać bez wzrostu energii - jest to sygnał przejścia fazowego. Układ może podzielić się na dwie fazy o skończonej różnicy gęstości, jak w przypadku przejścia fazowego I rodzaju lub przejawiać zjawiska krytyczne związane z makroskopowym rozmiarem fluktuacji, jak w przejściu fazowym II rodzaju. Zapiszmy teraz warunki wypukłości dla energii na cząstkę  $u$ :

$$\det[\mathcal{H}(u)] \equiv \begin{vmatrix} u_{\tilde{s}\tilde{s}} & u_{\tilde{s}v} \\ u_{v\tilde{s}} & u_{vv} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{oraz} \quad (u_{vv} > 0 \quad \text{lub} \quad u_{\tilde{s}\tilde{s}} > 0), \quad (2.44)$$

gdzie

$$u(\tilde{s}, v) = U/N, \quad du = Td\tilde{s} - Pdv \quad (2.45)$$

oraz entropia na cząstkę  $\tilde{s}$  i objętość właściwa  $v$  wynoszą:

$$\tilde{s} = S/N, \quad v = V/N. \quad (2.46)$$

Wykorzystując ponownie związki między pochodnymi dla  $T$  i  $P$  dostajemy warunki stabilności,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{s}}\right)_v > 0 \quad - \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T > 0 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{s}}\right)_P > 0 \quad \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{\tilde{s}} > 0 \quad (2.47)$$

w których rozpoznamy warunki na dodatnie molowe ciepło właściwe przy stałej objętości lub ciśnieniu

$$\tilde{c}_i = T \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial T}\right)_i, \quad i = v, P \quad (2.48)$$

oraz dodatnią ściśliwość: izotermiczną lub adiabatyczną

$$\kappa_i = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_i, \quad i = T, \tilde{s}. \quad (2.49)$$

Warunki (2.47) nie niosą żadnej dodatkowej informacji w porównaniu z warunkami (2.38). Ponownie posługując się własnościami pochodnych i relacją Gibbsa-Duhema, można dowieść następujących równości

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{s}}\right)_v = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_n \quad - \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = n^3 \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_T, \quad (2.50)$$

a także równoważność wyznaczników głównych

$$\det[\mathcal{H}(u(\tilde{s}, v))] = n^4 \det[\mathcal{H}(\varepsilon(s, n))].$$

Wypukłość gęstości energii  $\varepsilon$  jest równoważna wypukłości energii na cząstkę  $u$ . Każda z czterech par nierówności z (2.38,2.47) niesie ze sobą tę samą treść i może być użyta do badania wewnętrznej stabilności układu i szukania



możliwych przejść fazowych. O wyborze konkretnej pary może decydować wygodna rachunkowa lub sposób, w jaki przeprowadzany jest eksperyment i jakie parametry termodynamiczne jesteśmy w stanie mierzyć.

W układzie jednoskładnikowym ściśliwość jest proporcjonalna do podatności (2.50). W ogólności tak być nie musi. W układzie wieloskładnikowym mamy tyle podatności ile rodzajów cząstek występujących w opisie energii układu, natomiast ściśliwość jest nadal jedna (z dokładnością do procesu przy którym się odbywa). Dla układu dwuskładnikowego, w którym różniczka gęstości energii ma postać

$$d\varepsilon = Tds + \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2, \quad (2.51)$$

dotatniość hesjanu dla  $\varepsilon(s, n_1, n_2)$  jest zapewniona przez dodatniość jego kolejnych podwyznaczników:

$$\det[\mathcal{H}(\varepsilon)] = \begin{vmatrix} \varepsilon_{ss} & \varepsilon_{sn_1} & \varepsilon_{sn_2} \\ \varepsilon_{n_1s} & \varepsilon_{n_1n_1} & \varepsilon_{n_1n_2} \\ \varepsilon_{n_2s} & \varepsilon_{n_2n_1} & \varepsilon_{n_2n_2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_{ss} & \varepsilon_{sn_1} \\ \varepsilon_{n_1s} & \varepsilon_{n_1n_1} \end{vmatrix} > 0, \quad \varepsilon_{nn} > 0. \quad (2.52)$$

Korzystając ponownie z tożsamości termodynamicznych oraz z relacji dla pochodnych funkcji uwikłanych dostajemy warunki stabilności wyrażone przez ciepło właściwe i podatności:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{s}}\right)_{n_1, n_2} > 0, \quad \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial n_1}\right)_{T, n_2} > 0, \quad \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial n_2}\right)_{T, \mu_1} > 0. \quad (2.53)$$

Podobnie możemy zapisać warunki stabilności wychodząc od energii na cząstkę oznaczonej wskaźnikiem "1". Jeśli oznaczymy przez  $u = U/N_1$ , to

$$du = Td\tilde{s} - Pd\tilde{v} + \mu_2 d\tilde{x}, \quad \text{gdzie} \quad \tilde{s} = S/N_1 \quad \tilde{v} = V/N_1 \quad \tilde{x} = N_2/N_1 \quad (2.54)$$

Dostajemy stąd równoważną trójkę nierówności, gdzie zamiast jednej z podatności pojawia się ściśliwość:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{s}}\right)_{v, x} > 0 \quad - \left(\frac{\partial P}{\partial \tilde{v}}\right)_{T, x} > 0 \quad \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial \tilde{x}}\right)_{T, P} > 0. \quad (2.55)$$

Jako podsumowanie należy powiedzieć, że w układzie, w którym występuje  $\alpha$  składników dostajemy dokładnie  $\alpha+1$  niezależnych nierówności, zawierających pochodne "sił" termodynamicznych po odpowiadających im "gęstościach".

Stabilność gęstej materii nukleonowej, która wypełnia wnętrze gwiazdy neutronowej może być opisana warunkami (2.53) bądź (2.55). Materia w gwieździe, mimo że może w niej występować nawet kilkanaście różnych rodzajów cząstek, jest efektywnie układem **dwuskładnikowym**. Dzięki oddziaływaniom słabym, w materii zachodzą reakcje, które prowadzą do stanu równowagi jednoznacznie opisanego przez: liczbę barionową, ładunek i temperaturę. Zagadnienie to będzie bardziej szczegółowo przedstawione w dalszych podrozdziałach.

### 2.3.1. Potencjały termodynamiczne i stabilność wewnętrzna

Energia wewnętrzna jest funkcją wielkości ekstensywnych  $S, V, N_1..N_\alpha$ , które zadają jednoznacznie stan układu termodynamicznego, zwany też makrostanem. Wielkości te nazywa się zmiennymi *naturalnymi* dla energii wewnętrznej  $U$ . Oznacza to, że jeśli istnieją jakieś wewnętrzne parametry (np. parametry mikrostanu), które wpływają na wartość energii, to przy ustalonych zmiennych naturalnych,  $S, V, N_1..N_\alpha$ , energia wewnętrzna osiąga minimum ze względu na te dodatkowe parametry<sup>5</sup>. Dla gęstości energii  $\varepsilon = U/V$  jej zmiennymi naturalnymi są odpowiednie gęstości: entropii  $s$  oraz poszczególnych liczb cząstek  $n_1, ..n_\alpha$ . Analogicznie jak energia  $U$  również gęstość energii  $\varepsilon$  osiąga minimum ze względu na wewnętrzne parametry przy ustalonych  $s, n_1, .., n_\alpha$ .

Sytuacja, w której w rachunkach modelowych określamy minimum energii, przy ustalonych wartościach jej zmiennych naturalnych, jest często niewygodna lub wręcz niemożliwa. Również z eksperymentalnego punktu widzenia bezpośredni pomiar entropii jest w zasadzie niemożliwy. Znacznie łatwiej jest badać układ w termostacie, gdzie można ustalić temperaturę, podczas gdy entropia (czyli ciepło) może swobodnie przepływać między układem a jego otoczeniem. Dla takiej sytuacji jednak, właściwym okazuje się wprowadzenie *potencjałów termodynamicznych*. Potencjały termodynamiczne to wielkości o charakterze energii, które podobnie jak energia wewnętrzna, realizują minimum ze względu na parametry mikrostanu, jednak przy ustalonych innych zmiennych. Własności takie zapewnia transformacja Legendre’a. Polega ona na zamianie wybranej zmiennej na rzecz pochodnej energii po tej zmiennej, podobnie jak w formalizmie kanonicznym mechaniki przechodzi się od prędkości do pędów uogólnionych, a lagranżjan zastępuje hamiltonianem. I tak np. energia swobodna  $F$ , określona jako

$$F(T, V, N_1..N_\alpha) = U - TS, \quad \text{gdzie } T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_i} \quad (2.56)$$

jest funkcją, która osiąga minimum ze względu na parametry mikrostanu przy ustalonych  $T, V, N$ . Naturalnymi zmiennymi dla  $F$  są teraz temperatura  $T$  zamiast entropii oraz objętości i odpowiednie liczby cząstek. Różniczka energii swobodnej przyjmuje postać

$$dF = -SdT - PdV + \sum_i \mu_i dN_i. \quad (2.57)$$

Transformacja Legendre’a jest jednoznaczna pod warunkiem, że relacja między

---

<sup>5</sup>Wykorzystaliśmy tę własność energii przy analizie stabilności, gdzie role wewnętrznych parametrów pełniły entropie, objętości i liczby cząstek podukładów powstałych przy podziale układu na mniejsze części.

temperaturą a entropią jest odwracalna, to znaczy gdy zachodzi

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_{V, N_i} > 0, \quad (2.58)$$

w czym rozpoznajemy dodatniość molowego ciepła właściwego  $c_v$ , ponieważ:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_{V, N_i} = \frac{1}{N_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{s}}\right)_{v, n_i \neq n_1} = \frac{T}{N} \tilde{c}_{v, n_i \neq n_1}^{-1}.$$

Podobnie dla entalpii, którą określa transformacja

$$H(S, P, N_1..N_\alpha) = U + PV, \quad \text{gdzie } P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, N_i} \quad (2.59)$$

oraz

$$dH = TdS + VdP + \sum_i \mu_i dN_i \quad (2.60)$$

musimy założyć, aby

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\right)_{S, N_i} > 0, \quad (2.61)$$

czyli ściśliwość adiabatyczna ma być dodatnia. Uogólniając powyższą dyskusję, można powiedzieć, że gdy chcemy dokonać transformacji Legendre'a ze względu na  $k$  zmiennych musimy założyć dodatniość  $k$ -wymiarowego podwyznacznika z hesjanu  $\mathcal{H}(U)$ , co jest dokładnie równoważne wybranej części warunków wypukłości dla gęstości energii. Nie można przeprowadzić transformacji Legendre'a dla  $U$  ze względu na wszystkie jej zmienne naturalne  $S, V, N_i..N_\alpha$ , gdyż, co już było wspomniane,  $U$  nie jest wypukła. W istocie transformacja  $U$  ze względu wszystkie jej zmienne przeprowadza  $U$  na zero, czego wyrazem jest tożsamość Eulera (2.12).

W stosunku do potencjałów termodynamicznych podobnie jak w przypadku energii wewnętrznej narzuca się pytanie czy odpowiednia "gęstość" danego potencjału termodynamicznego jest funkcją wypukłą. Dla przykładu rozważmy układ jednoskładnikowy, a jako "gęstość" wybranego potencjału weźmy energię swobodną na cząstkę:

$$f = F/N = u - T\tilde{s} \quad \rightarrow \quad df = -\tilde{s} dT - Pdv. \quad (2.62)$$

Naturalnymi zmiennymi dla gęstości energii swobodnej są temperatura  $T$  i objętość właściwa  $v$ . Zapisując wyznacznik hesjanu, dostajemy:

$$\det[f(T, v)] = \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T - \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial v}\right)_T^2 = -\frac{V\tilde{c}_v}{T\kappa_T} - \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial v}\right)_T^2, \quad (2.63)$$

czyli jest zawsze ujemny, zatem  $f$  **nie jest funkcją wypukłą**. Podobnie dzieje się dla entalpii na cząstkę  $h = H/N = u + Pv$ . Natomiast jeśli zbadamy wypukłość potencjału Gibbsa na cząstkę

$$g = G/N = u - T\tilde{s} + Pv \quad , \quad dg = -\tilde{s} dT + v dP \quad (2.64)$$

to okaże się, że

$$\det[g(T, P)] = \begin{vmatrix} g_{TT} & g_{TP} \\ g_{PT} & g_{PP} \end{vmatrix} = - \left( \frac{\partial \tilde{s}}{\partial T} \right)_P \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_{\tilde{s}} = \frac{v\tilde{c}_v\kappa_{\tilde{s}}}{T}, \quad (2.65)$$

czyli parzysty wyznacznik jest dodatni, a z kolei nieparzysty jest ujemny

$$g_{TT} = - \left( \frac{\partial \tilde{s}}{\partial T} \right)_P, \quad (2.66)$$

co oznacza, że  $g(T, P)$  **jest funkcją wklęsłą**. Stwierdzenie to można uogólnić na przypadek układu wieloskładnikowego. Mianowicie, dopiero jeśli dokonamy transformacji Legendre'a gęstości energii ze względu na wszystkie jej zmienne naturalne to otrzymamy funkcję, która będzie funkcją wklęsłą. Podsumowując powyższą dyskusję należy podkreślić, że gęstości potencjałów termodynamicznych, powstałych z wypukłej gęstości energii poprzez transformacje Legendre'a w ogólności nie są funkcjami wypukłymi ani wklęsłymi. Trzeba jednak dodać, że w literaturze dość powszechnie pojawiają się sformułowania dotyczące wypukłości lub wklęsłości potencjałów termodynamicznych. Należy je właściwie rozumieć jako wypukłość lub wklęsłość cięć danej funkcji poprzez ustalenie wybranego parametru. Na przykład dla energii swobodnej  $f$ , dokonując cięć wzdłuż jej zmiennych naturalnych mamy:

$$\text{przy stałej } T : \quad \left( \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)_T = - \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_T = \frac{1}{v\kappa_T} > 0, \quad (2.67)$$

$$\text{przy stałej } v : \quad \left( \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_v = - \left( \frac{\partial \tilde{s}}{\partial T} \right)_v = -\frac{c_v}{T} < 0, \quad (2.68)$$

czyli energia swobodna jest wypukła ze względu na  $v$ , a wklęsła ze względu na  $T$ . Posługując się własnościami transformacji Legendre'a można sformułować ogólne twierdzenie, że potencjał termodynamiczny jest wypukły ze względu na "gęstości" ( $s, v, n_i$ ) a wklęsły ze względu "siły" ( $P, T, \mu_i$ ), czyli te zmienne, ze względu na które dokonano transformacji<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Standardowa definicja transformacji Legendre'a dla dowolnej funkcji  $f(x)$  to:  $\tilde{f}(p) = xp - f$  gdzie  $p = f'(x)$ . Taka definicja zachowuje wypukłość. Z przyczyn historycznych potencjały termodynamiczne to transformaty Legendre'a wzięte ze znakiem przeciwnym:  $\tilde{f}(p) = f - px$ , stąd wypukłość  $f$  ze względu na  $x$  przechodzi we wklęsłość  $\tilde{f}$  ze względu na  $p$ .

### 2.3.2. Ogólne warunki stabilności dla materii w równowadze beta

Powszechnie przyjmuje się, że gwiazda neutronowa powstaje w czasie wybuchu supernowej typu II. Supernowa jest ostatnim etapem ewolucji gwiazdy o masie przekraczającej  $9M_{\odot}$  [Woosley02]. Na drodze szeregu reakcji termojądrowych począwszy od wodoru i helu, w masywnej gwiazdzie dochodzi do powstania żelaznego jądra otoczonego powłokami z lżejszych pierwiastków. Na żelazie  $^{56}\text{Fe}$ , które jest najsilniej związanym nuklidem zatrzymują się reakcje termojądrowe, które przez większą część życia gwiazdy są źródłem ciśnienia termicznego podtrzymującego grawitację. W żelaznym jądrze dominującym źródłem ciśnienia staje się gaz elektronowy podobnie, jak w przypadku białych karłów. Ciśnienie gazu elektronowego nie może jednak utrzymać obiektu o dowolnie dużej masie, stąd po przekroczeniu masy krytycznej zwanej masą Chandrasekhara (ok.  $1.1 - 1.4M_{\odot}$ , w zależności od szczegółów struktury wewnętrznej jądra), jądro zapada się w czasie rzędu 100 ms. Gwałtowny wzrost ciśnienia i temperatury powoduje fotodezintegrację jąder atomowych na pojedyncze nukleony. W tych warunkach elektrony są intensywnie wylapywane w procesie odwrotnym do rozpadu  $\beta$  neutronu



Materia silnie się neutronizuje i jej gęstość rośnie aż do momentu pojawienia się zdegenerowanego gazu neutronów. Dalszy kolaps jest powstrzymany dzięki nowemu źródłu ciśnienia jakim są zdegenerowane nukleony i odpychające oddziaływania między nimi. Powstaje protogwiazda neutronowa. Przez kilkanaście sekund po kolapsie neutrino powstałe w procesie wychwytu elektronu pozostają złapane w materii gorącej protogwiazdy, która w tych warunkach ciśnienia i temperatury jest dla neutrin nieprzezroczysta. Wraz ze spadkiem temperatury neutrino zostają nagle uwolnione i unoszą ze sobą przeważającą część energii zgromadzonej w materii na skutek grawitacyjnej kontrakcji. Dopiero po uwolnieniu neutrin możemy mówić o narodzinach gwiazdy neutronowej - obiektu, który w przeważającej części składa się z neutronów z niewielką domieszką protonów i leptonów (elektronów i mionów) będących w stanie równowagi termodynamicznej. Tego rodzaju materia nukleonowo-leptonowa występuje tylko w gwiazdach neutronowych i nie jest obserwowana w eksperymentach akceleratorowych. Ponadto, jeśli weźmiemy pod uwagę promień gwiazdy nie przekraczający 20 km przy masie około  $1.5 M_{\odot}$ , to otrzymamy średnią gęstość gwiazdy większą niż średnia gęstość jądra atomowego. Wysokie gęstości materii gwiazdy neutronowej sugerują powstawanie egzotycznych form materii. W materii mogą pojawić się inne cząstki poza nukleonami i leptonami. W sprzyjających okolicznościach w centralnych obszarach gwiazdy produkowane są: hiperony, kondensaty mezonów lub materia kwarkowa. Opis układu o takiej mnogości cząstek byłby skomplikowany gdyby nie fakt, że oprócz oddziaływań silnych w materii gwiazdy zachodzą również procesy

związane z oddziaływaniami słabymi. Stan równowagi opisany jest przez cykl reakcji, których prototypem jest rozpad beta neutronu i wychwytywanie elektronu przez proton:

$$b_1 \rightarrow b_2 + l + \bar{\nu}_l \quad , \quad b_2 + l \rightarrow b_1 + \nu_l \quad , \quad (2.70)$$

gdzie  $b_i$  to dowolny barion, a  $l$  reprezentuje jeden z dwóch leptonów  $l = e, \mu$ <sup>7</sup>. Żądając stacjonarności energii swobodnej  $F$  przy zadanej temperaturze, mamy

$$dF = \mu_{b_1} dN_1 + \mu_{b_2} dN_2 + \mu_l dN_l = 0 \quad , \quad (2.71)$$

gdzie nie pojawia się potencjał chemiczny neutrin, gdyż neutrina swobodnie opuszczają objętość gwiazdy. Ponieważ procesy słabe (2.70) zachowują liczbę barionową i ładunek, to mamy związki  $dN_1 = dN_2$  oraz  $dN_e = q_1 dN_1 + q_2 dN_2$ . Wstawiając je do (2.71) otrzymujemy relacje pomiędzy potencjałami chemicznymi cząstek biorących udział w cyklu reakcji beta:

$$\mu_{b_1} = \mu_{b_2} + \mu_l \quad . \quad (2.72)$$

Związki pomiędzy potencjałami chemicznymi, zwane warunkami *równowagi beta* pozwalają wyrugować z wyrażenia na całkowitą energię układu poszczególne liczby cząstek  $N_i$  tak, że pozostaje jedynie całkowita liczba barionowa  $B$  i ładunek  $Q$ . Ponadto wszystkie potencjały chemiczne można wyrazić za pomocą potencjału chemicznego neutronu  $\mu_n$  i elektronu  $\mu_e$  według przepisu

$$\mu_{b_i} = B_i \mu_n + Q_i \mu_e \quad , \quad (2.73)$$

gdzie  $B_i$  i  $Q_i$  to odpowiednio liczba barionowa i ładunek  $i$ -tej cząstki (formuła pozostaje ważna również w przypadku mezonów, dla których  $B_i = 0$ ). I tak na przykład, w przypadku materii gwiazdy składającej się z neutronów, protonów, elektronów oraz mionów, które pojawiają dla gęstości około  $n_0$  mamy związki:

$$\mu_e = \mu_\mu = \mu_n - \mu_p, \quad (2.74)$$

spośród czterech potencjałów chemicznych tylko dwa pozostają niezależne. Dzięki reakcjom beta materia gwiazdy neutronowej jest efektywnie układem dwuskładnikowym, jej energia wewnętrzna jest funkcją  $U(S, V, B, Q)$  czyli:

$$dU = TdS - PdV + \mu_n dB - \mu_e dQ \quad , \quad (2.75)$$

gdzie znak "-" przy potencjale chemicznym elektronu wziął się z konwencji zapisu ładunku elektronu i pozostałych cząstek  $Q = -N_e - N_\mu + N_p$ . Relacja powyższa uzasadnia nazwę potencjał chemiczny liczby barionowej dla potencjału neutronu  $\mu_n$  oraz potencjał chemiczny ładunku dla potencjału elektronu

<sup>7</sup>Lepton  $\tau$  jest za ciężki by mógł być produkowany we wnętrzu gwiazdy neutronowej.

$\mu_e$ . W dalszym ciągu potencjał chemiczny elektronu będziemy oznaczać krótko przez  $\mu$  bez indeksu:

$$\mu \equiv \mu_e.$$

Ponieważ chcemy zbadać stabilność materii gwiazdy, przejdziemy do odpowiedniej "gęstości". W naszym wypadku wygodnie będzie skorzystać z energii na barion  $u$ , dla której zachodzi

$$u(s, v, q) = U/B \quad du = Tds - Pdv - \mu dq, \quad (2.76)$$

gdzie  $s$  to entropia na barion,  $s = S/B$  i  $q$  ładunek na barion  $q = Q/B$ . Warunki stabilności (2.55), jakie należałoby zapisać dla materii w równowadze beta przyjęłyby następującą postać:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_{v,q} > 0, \quad -\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T,q} > 0, \quad -\left(\frac{\partial \mu}{\partial q}\right)_{T,P} > 0. \quad (2.77)$$

Typowe temperatury jakie napotykamy we wnętrzu gwiazdy neutronowej nie przekraczają  $10^8$  K [Yakovlev01], czyli  $10^{-2}$  MeV, z kolei potencjały chemiczne są rzędu 10-100 MeV<sup>8</sup>. Przy opisie równania stanu zdegenerowanych fermionów istotny jest stosunek temperatury do potencjału chemicznego, który w przypadku materii gwiazdy jest istotnie mniejszy od 1,

$$\frac{T}{\mu_i} \ll 1. \quad (2.78)$$

Stąd uzasadnione jest przyjęcie, że temperatura wynosi zero. Przy takim założeniu stan materii jest zależny jedynie od gęstości poszczególnych cząstek. Energia na barion jest teraz funkcją dwóch zmiennych,

$$u(v, q) = U/B, \quad du = -Pdv - \mu dq \quad (2.79)$$

i zamiast trzech, mamy dwa warunki na stabilność materii nukleonowej

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_q > 0, \quad -\left(\frac{\partial \mu}{\partial q}\right)_P > 0 \quad (2.80)$$

lub równoważne im

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_\mu > 0, \quad -\left(\frac{\partial \mu}{\partial q}\right)_v > 0. \quad (2.81)$$

Dodatnia ściśliwość, jak wcześniej powiedziano (2.50) oznacza stabilność fluktuacji liczby barionowej i jest warunkiem stabilności powszechnie brany pod

<sup>8</sup>W istocie chodzi tu o różnicę między potencjałem chemicznym a masą spoczynkową danej cząstki. W teorii relatywistycznej potencjał chemiczny zawiera masę spoczynkową, np. dla elektronu  $\mu_e = \sqrt{m_e^2 + k_e^2}$ .

uwagę w konstruowaniu równania stanu dla materii nukleonowej. Pojawiające się warunki na pochodne  $(\partial\mu/\partial q)_i$  stanowią dodatkowy warunek, który zwykle nie był brany pod uwagę. Na konieczność jego uwzględnienia zwrócono uwagę w pracy [Kubis04]. Okazało się, że nie wszystkie poprawnie skonstruowane modele oddziaływań silnych prowadzą do termodynamicznie poprawnego opisu materii w równowadze beta. Wprowadźmy oznaczenie

$$\chi_i = - \left( \frac{\partial q}{\partial \mu} \right)_i, \quad i = v, P, \quad (2.82)$$

które ze względu na swój wymiar (ładunek<sup>2</sup>/energia) i podobieństwo do pojemności cieplnej można by nazwać pojemnością elektryczną materii, jak to uczyniono w pracy [Kubis04]. Jak się okazuje wielkości te mają bezpośredni związek z podatnością ładunkową czyli pochodnymi typu  $\partial n_q / \partial \mu$ , na przykład

$$\left( \frac{\partial q}{\partial \mu} \right)_v = v \left( \frac{\partial n_q}{\partial \mu} \right)_v \quad (2.83)$$

i dlatego w dalszym ciągu pochodne typu  $\partial q / \partial \mu$  będziemy również określać terminem *podatności*. Jak pokazano wcześniej (2.43), tego rodzaju podatność określa wielkość fluktuacji cząstek naładowanych. W fizyce jądrowej mianem ściśliwości określa się pochodną ciśnienia po gęstości  $n$

$$K_i = \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_i, \quad (2.84)$$

a nie, jak zdefiniowano wcześniej (2.49). Tak określona wielkość ma wymiar energii (MeV). Ponieważ  $K_i$  jest odwrotnością ściśliwości  $K_i = 1/(n\kappa_i)$ , więc należałoby ją nazwać nieściśliwością<sup>9</sup> - im większe  $K_i$  tym materia sztywniejsza. Pozostaniemy jednak przy terminie ściśliwość, aby nie wprowadzać niepotrzebnych rozróżnień.

Posługując się wprowadzonymi oznaczeniami, warunki stabilności dla materii w równowadze beta można zapisać krótko:

$$K_q > 0, \quad \chi_P^{-1} > 0 \quad \text{lub} \quad K_\mu > 0, \quad \chi_v^{-1} > 0, \quad (2.85)$$

które oznaczają równoczesną stabilność fluktuacji liczby barionowej i ładunku. Własności pochodnych dla funkcji uwikłanych pozwalają zapisać interesujące relacje:

$$\frac{K_\mu}{K_q} = \frac{\chi_v}{\chi_p} \quad (2.86)$$

---

<sup>9</sup>W literaturze angielskiej pojawia się termin *incompressibility* dla pochodnych typu  $\partial P / \partial n$ .



oraz

$$\chi_v^{-1} - \chi_P^{-1} = \frac{K_q}{n^2} \left( \frac{\partial n}{\partial q} \right)_P^2, \quad (2.87)$$

$$K_q - K_\mu = \chi_v \left( \frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_q^2 n^2, \quad (2.88)$$

z czego wynikają nierówności

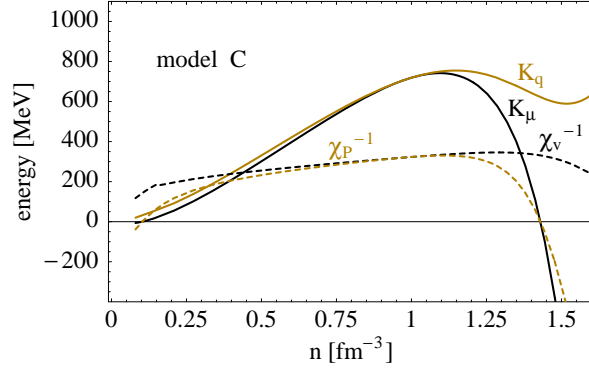
$$K_\mu < K_q \quad \text{oraz} \quad \chi_P^{-1} < \chi_v^{-1}. \quad (2.89)$$

Można powiedzieć, że z danej pary warunków stabilności jedna wielkość jest bardziej wrażliwa na niestabilność. Z pary  $K_q, \chi_P^{-1}$  jest nią podatność  $\chi_P^{-1}$ , z pary  $K_\mu, \chi_v^{-1}$  to ściśliwość  $K_\mu$ .

Przedstawione powyżej warunki stabilności stanowią uwzględnienie istotnego elementu w opisie własności materii gwiazdy neutronowej. Przy analizie możliwych przejść fazowych analizuje się zwykle ściśliwość materii neutralnej, czyli ściśliwość przy ustalonym ładunku  $K_q$ , gdzie  $q = 0$ .  $K_q$  określa wielkość fluktuacji liczby barionowej  $n$ , przy założeniu że nie dochodzi do przepływu ładunku między częściami układu. Taki więc stanowi silne ograniczenie. Jak pokazuje relacja (2.88) fluktuacje z przepływem ładunku określone przez  $K_\mu$  (lub  $\chi_P^{-1}$ ) są bardziej niestabilne. Nie oznacza to, że  $K_q$  nie ma znaczenia fizycznego. Jej wartość jest związana z fluktuacjami układu na tyle szybkimi, że nie dochodzi do wymiany ładunku pomiędzy fluktuującymi częściami, która jest konieczna aby wyrównać powstającą różnicę w potencjale chemicznym  $\mu$ . Tak więc  $K_q$  odpowiada za prędkość dźwięku w materii  $v_s^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_q$ , podczas gdy  $K_\mu$  za przejście fazowe przy zachowaniu równowagi beta. Jest to sytuacja analogiczna do gazu rzeczywistego, gdy ściśliwość adiabatyczna  $\left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_s$  jest zawsze większa od ściśliwości izotermicznej  $\left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_T$  ze względu na brak przepływu ciepła między lokalnymi zgęszczeniami w gazie<sup>10</sup>. O ile pierwsza decyduje o prędkości dźwięku w gazie, o tyle druga wskazuje na przejście fazowe gaz-ciecz. Rys. 2.2 pokazuje wzajemne relacje między podatnościami i ściśliwościami w materii w stanie równowagi beta dla wybranego modelu oddziaływań jądrowych. W następnych rozdziałach zostaną przedstawione modele materii jądrowej, które pomimo pozornej stabilności wyrażonej przez dodatniość  $K_q$ , nie są w ogóle stabilne lub pojawia się w nich nie dostrzegane wcześniej przejście fazowe.

Rozważania dotyczące stabilności materii nukleonowej w stanie równowagi beta przy założeniu zerowej temperatury przypominają opis układu jednoskładnikowego w niezerowej temperaturze (np. gaz doskonały), jeśli dokonamy

<sup>10</sup>Ten brak rozróżnienia pomiędzy dwoma rodzajami ściśliwości spowodował błędne określenie prędkości dźwięku przez Newtona [Newton], który posłużył się ściśliwością izotermiczną. Ponad sto lat później wynik poprawił dopiero Laplace [Laplace].



Rysunek 2.2: Dwie równoważne pary warunków stabilności: linie czarne - warunki (2.81), brązowe (2.80).

przypisania

$$q \rightarrow \tilde{s} \quad \mu \rightarrow T . \quad (2.90)$$

To znaczy, gdy ładunek na barion pełni rolę entropii, a potencjał chemiczny ładunku - rolę temperatury, to otrzymamy warunki (2.47). Relacje (2.86,2.88) są analogiczne do znanych związków między ciepłami właściwymi i ściśliwościami, np. dla gazu doskonałego zachodzą równości

$$\tilde{c}_P - \tilde{c}_v = k_B , \quad \kappa_T - \kappa_{\tilde{s}} = (1 - \gamma^{-1})/P \quad (2.91)$$

$$\text{gdzie wykładnik adiabaty:} \quad \gamma = \tilde{c}_P/\tilde{c}_v = \kappa_{\tilde{s}}/\kappa_T \quad (2.92)$$

Analogia ładunek  $\leftrightarrow$  entropia nie jest jednak zupełna. W całych powyższych rozważaniach nie uwzględniliśmy specyficznego charakteru oddziaływań elektrycznych, to znaczy ich długozasięgowego charakteru. Długozasięgowy charakter powoduje, że energia oddziaływania związana z cząstkami naładowanymi nie jest wielkością ekstensywną, co zostało już pokazane w (2.9). W szczególności dla układu, który posiada globalny ładunek nie istnieje granica termodynamiczna. Energia kulombowska  $E_c$  układu o niezerowej gęstości ładunku  $\rho$  skaluje się jak  $\rho^2 V^{5/3}$  w związku z czym gęstość energii  $E_c/V$  jest rozbieżna, gdy  $V \rightarrow \infty$  [Ducoin07]. Warunkiem koniecznym jest zatem neutralność ładunkowa układu termodynamicznego jako całości. Ponieważ w układzie takim występują cząstki o przeciwnych ładunkach dochodzi w nim do zjawiska ekranowania ładunku - oddziaływanie kulombowskie  $1/r$  staje się efektywnie krótkozasięgowe  $e^{-r/\lambda}/r$ , gdzie  $\lambda$  to długość ekranowania zwana długością Debye'a. Ponadto w materii gwiazdy neutronowej przy gęstościach porównywalnych i większych od gęstości jądrowej  $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  dominującym rodzajem oddziaływań są oddziaływania silne, które przy odległościach około 1 fm są o dwa rzędy wielkości większe od oddziaływań kulombowskich. Pozwala to na pominięcie oddziaływań związanych z ładunkiem cząstek przy

gęstościach powyżej  $n_0$ , a więc w ciekłym rdzeniu gwiazdy. Ta metoda zostanie przedstawiona w następnym rozdziale, gdzie będzie badana stabilność materii nukleonowej zawierającej kondensat kaonów. Z drugiej strony, jeśli chcemy opisać materię jądrową w coraz niższych gęstościach okazuje się, że warunki stabilności (2.85) z dobrym przybliżeniem określają moment przejścia fazowego i koniecznej separacji faz. Oddziaływania elektryczne okazują się istotne przy określaniu warunków współistnienia faz, rozmiaru i kształtu powstających wtedy struktur. Zagadnienia te zostaną przedstawione w dalszych rozdziałach.

### 3. Stabilność materii egzotycznej - kondensat kaonów

W materii gwiazdy neutronowej panują warunki umożliwiające naturalną produkcję cząstek, które w zwykłych gwiazdach praktycznie nie występują i nie odgrywają istotnej roli. Kaony zostały odkryte w 1947 roku, jako cząstki wtórne powstałe w wyniku reakcji cząstek promieniowania kosmicznego z atmosferą ziemską. Należą do kategorii mezonów - cząstek, które nie niosą liczby barionowej. Ich długi czas życia w porównaniu z typowym czasem życia cząstek rezonansowych skłonił odkrywców do nadania im miana cząstek dziwnych. Kaony powstawały zawsze poprzez oddziaływania silne w parze z hiperonem w skali czasowej rzędu  $10^{-23}$  s, natomiast rozpadały się na dwa lub trzy piony w skali czasowej  $10^{-10}$  s, typowej dla oddziaływań słabych. Aby rozwiązać tę zagadkę Abraham Pais zapostulował istnienie nowej liczby kwantowej - *dziwności*, która, obok znanych już wtedy: liczby barionowej, izospinu i ładunku, byłaby zachowana w oddziaływaniach silnych, a nie zachowana w oddziaływaniach słabych. Dzisiaj po sformułowaniu modelu kwarkowego wiemy, że kaony są mezonami, które wraz z kwarkiem  $u$  lub  $d$  zawierają również kwark dziwny  $s$ . Opis oddziaływań kaon-nukleon na poziomie fundamentalnym zawiera Model Standardowy, który posługuje się teorią pola z symetrią cechowania - Chromodynamiką Kwantową - gdzie kwarki oddziałują ze sobą za pośrednictwem gluonów. Perturbacyjne rachunki, jakie przeprowadza się w ramach tej teorii, nie nadają się do opisu oddziaływań kaon-nukleon w zakresie niskich energii. Dlatego do naszych celów znacznie lepiej jest używać teorii, która stanowi niskoenergetyczną granicę Modelu Standardowego. Jednym ze sposobów opisu mezonów  $\pi$  i  $K$  jest *model chiralny*. W takim podejściu, mezony te, należące do oktetu mezonów pseudoskalarnych, stanowią bozony Goldstone'a pojawiające się w teorii z symetrią chiralną  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ , to znaczy gdy założymy, że kwarki  $u, d, s$  są bezmasowe. Ogólny sposób konstrukcji lagranżjanu dla takiej teorii efektywnej przedstawia praca [Coleman69]. Teorie tego rodzaju są nierenormalizowalne, ale Weinberg [Weinberg79] pokazał, w jaki sposób można prowadzić rachunek perturbacyjny, tak by otrzymać poprawne wyniki. Symetria chiralna nie jest dokładna, kwarki  $u, d$  mają masę rzędu kilku MeV, a kwark  $s$  około 100 MeV, stąd zarówno piony jak i kaony są tylko w przybliżeniu bozonami Goldstone'a i również posiadają masę. Składniki lagranżjanu łamiące symetrię chiralną okazują się istotne, gdyż od nich zależy siła oddziaływania kaon-nukleon.

Inne podejście do zagadnienia kondensacji kaonów prezentuje *model wymiany mezonowej*. Jest to rozszerzenie relatywistycznej teorii średniego pola (RMF) zaproponowanej przez Waleckę [Walecka74] do opisu gęstej materii.

W modelu tym pola mezonowe przyjmują niezerowe wartości średnie, a stałe sprzężenia są tak dobrane, aby poprawnie odtworzyć własności materii jądrowej w punkcie saturacji  $n_0$ . Model ten wykorzystuje standardowy lagranżjan z symetrią liczby barionowej i izospinu, lecz bez symetrii chiralnej. O ile w przypadku modelu chiralnego sprzężenia kaon-nukleon były jednoznacznie określone i wynikały z założonej symetrii chiralnej, o tyle w przypadku modelu wymiany mezonowej sposób konstrukcji sprzężeń kaon-nukleon nie jest jednoznaczny i pozwala na pewną dowolność. Model wymiany mezonowej ma tę przewagę nad modelem chiralnym, że uwzględniając kaony pozwala na spójny opis własności punktu saturacji materii jądrowej, co jest niemożliwe w podejściu wykorzystującym jedynie symetrię chiralną. W dalszych podrozdziałach zostaną zaprezentowane model chiralny oraz dwie wersje modelu wymiany mezonowej, a następnie zostaną one porównane z punktu widzenia stabilności termodynamicznej.

### 3.1. Model chiralny

W swojej pionierskiej pracy Kaplan i Nelson [Kaplan86] użyli efektywnego lagranżjanu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\chi = & \frac{f^2}{4} \text{Tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + \text{Tr} \bar{B} (i\gamma^\mu D_\mu - m_B) B \\
& + F \text{Tr} \bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 [A_\mu, B] + D \text{Tr} \bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 \{A_\mu, B\} \\
& + c \text{Tr} \mathcal{M} (U + U^\dagger) + a_1 \text{Tr} \bar{B} (\xi \mathcal{M} \xi + \xi^\dagger \mathcal{M} \xi^\dagger) B \\
& + a_2 \text{Tr} \bar{B} B (\xi \mathcal{M} \xi + \xi^\dagger \mathcal{M} \xi^\dagger) \\
& + a_3 \text{Tr} \bar{B} B \text{Tr} (\xi \mathcal{M} \xi + \xi^\dagger \mathcal{M} \xi^\dagger)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

i zaproponowali podstawowe idee wskazujące na możliwość produkcji ujemnych kaonów  $K^-$  w gęstej materii. Powyższy lagranżjan przedstawia nieliniową teorię pola, gdzie  $U$  i  $\xi$  to macierze zawierające oktety pól mezonowych ( $U = \xi^2$ ), a  $B$  zawiera oktety barionów. Parametry  $a_1, a_2, a_3$  określają wyrazy łamiące symetrię chiralną i równocześnie sprzężenie kaon-nukleon. Wszystkie parametry lagranżjanu (3.1) są dobrze określone przez dane eksperymentalne z wyjątkiem  $a_3$ , który pojawia się w tzw. członie sigma

$$\Sigma_{KN} = \frac{1}{2} m_s \langle N | \bar{u}u + \bar{s}s | N \rangle = -(\frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_3) m_s . \tag{3.2}$$

Jego wartość związana jest zawartością dziwności w protonie, która waha się w granicach  $0.2 > \langle \bar{s}s \rangle_p / \langle \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s \rangle_p > 0$ , co odpowiada wartości  $a_3 m_s$  między -310 a -134 MeV. Opierając się na powyższym lagranżjanie Kaplan i Nelson zwrócili uwagę, że ze względu na silnie przyciągający charakter oddziaływań kaon-nukleon, masa efektywna kaonów w gęstej materii spada wraz gęstością nukleonów. Ilościowo ten efekt określa właśnie  $\Sigma_{KN}$ . W tej sytuacji kaony

mogą być produkowane w procesach słabych

$$n \rightarrow p + K^- . \quad (3.3)$$

Reakcja ta jest kinetycznie dozwolona, gdy różnica między energią neutronu i protonu zrówna się z masą efektywną kaonu

$$\mu_n - \mu_p \geq m_{K^-}^* . \quad (3.4)$$

Ponieważ piony są znacznie lżejsze od kaonów,  $m_{\pi^-} = 140$  MeV, z kolei  $m_{K^-} = 494$  MeV, to naturalnym wydaje się, że w przypadku pionów łatwiej jest przekroczyć próg na ich produkcję (3.4). Dlatego też, kondensacja pionów była pierwotnie proponowana już w latach 70-tych niezależnie przez Migdala [Migdal71] i Sawyera [Sawyer72]. Niemniej jednak późniejsze gruntowne analizy oparte o chiralny rachunek zaburzeń wskazują na odpychający charakter oddziaływań pion-nukleon i wzrost masy efektywnej pionu. Ostatecznie, skutkuje to brakiem kondensacji pionów [Ericson92].

W języku teorii pola, stan materii z kondensatem opisuje nieznikająca wartość średnia dla pola kaonowego. Twierdzenie Bayma [Baym73] stwierdza, że jeśli cząstki niosą ładunek, to w stanie z kondensatem wartość średnia pola zależy od czasu

$$\langle K^\pm \rangle = f\theta/\sqrt{2} \exp(\pm i\mu_K t), \quad (3.5)$$

gdzie  $\mu_K$  to potencjał chemiczny ujemnych kaonów. Gęstość energii związana z nieznikającą wartością średnią pola kaonowego wynosi

$$\varepsilon_{KN} = f^2 \frac{\mu_K^2}{2} \sin^2 \theta + 2(m_K^2 f^2 - n\Sigma_{KN}(x)) \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (3.6)$$

gdzie pojawia się człon sigma kaon-nukleon zależny od zawartości protonów  $x = n_p/n$

$$\Sigma_{KN}(x) = -(a_1 x + a_2 + 2a_3)m_s.$$

Chiralny lagarnżjan opisuje jedynie oddziaływania nukleonów z mezonami pseudoskalarnymi i nie jest w stanie wyjaśnić całości oddziaływań pomiędzy nukleonami, w szczególności części krótkozasięgowej, za którą odpowiadają mezony wektorowe. W związku z tym wielu autorów używa modelu hybrydowego, w którym sektor chiralny jest reprezentowany poprzez wkład (3.6), natomiast pozostała część jest wzięta z innej teorii. W pracy [Thorsson94] część czysto nukleonowa opisana jest przez fenomenologiczny model PAL [Prakash88]

$$\varepsilon_{NN} = \frac{3}{5} E_F^{(0)} n_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^{5/3} + mn + V(n) + n(1 - 2x)^2 E_s(n), \quad (3.7)$$

gdzie pierwszy wyraz przedstawia wkład od energii kinetycznej nukleonów, zaś oddziaływania parametryzowane są poprzez funkcje  $V$  i  $E_s$ . Zgodnie z rozwinięciem (1.3)  $V$  - odpowiada za sektor izoskalarny, a energia symetrii  $E_s$

za sektor izowektorowy. Całkowita energia materii jest sumą poszczególnych wkładów

$$\varepsilon = \varepsilon_{KN} + \varepsilon_{NN} + \varepsilon_L, \quad (3.8)$$

gdzie pojawia się jeszcze  $\varepsilon_L$  gęstość energii leptonów (elektronów i mionów), które stanowią gaz swobodnych fermionów. Nie uwzględniamy tu oddziaływań elektromagnetycznych zgodnie z duchem dyskusji przeprowadzonej w poprzednim rozdziale. Wkład do energii leptonów stanowi tylko ich energia kinetyczna, wyrażona poprzez całkę po wszystkich stanach z morza Fermiego:

$$\varepsilon_i = \int_0^{k_i} \sqrt{k^2 + m_i^2} \frac{k^2 dk}{\pi^2}, \quad \text{gdzie } i = e, \mu. \quad (3.9)$$

W materii gwiazdy elektrony są ultrarelatywistyczne, gdyż typowe wartości pędu Fermiego elektronu  $k_e$  są znacznie większe od jego masy spoczynkowej  $m_e = 0.5$  MeV, stąd możemy przyjąć  $k_e = \mu$ . Dla mionów nie możemy pominąć ich masy spoczynkowej  $m_\mu = 106$  MeV, wtedy  $k_\mu = \sqrt{\mu^2 - m_\mu^2}$ , przy czym należy uwzględnić, że miony są produkowane tylko, gdy  $\mu > m_\mu$ . Ostatecznie wkład leptonów do całkowitej energii ma postać:

$$\varepsilon_L = \frac{\mu^4}{4\pi^2} + m_\mu^4 g(\sqrt{\eta(\mu^2 - m_\mu^2)}/m_\mu), \quad (3.10)$$

gdzie  $g(t) = \frac{1}{8\pi^2} ((2t^3 + t)\sqrt{1 + t^2} - \operatorname{arsinh} t)$  i  $\eta(x) = x$  dla  $x \geq 0$  i  $0$  dla  $x \leq 0$ . Ponieważ dla elektronów potencjał chemiczny prosto wyraża się przez ich gęstość

$$n_e = \int_0^{k_e} \frac{k^2 dk}{\pi^2} = \frac{\mu^3}{3\pi^2} \rightarrow \mu = (3\pi^2 n_e)^{1/3}, \quad (3.11)$$

to udział leptonów w całkowitej energii zależy jedynie od gęstości elektronów  $n_e$ . Podsumowując należy powiedzieć, że w naszym układzie występują cztery rodzaje cząstek: neutrony, protony, leptony i kaony. Zgodnie z zasadami termodynamiki, w stanie równowagi, całkowita gęstość energii  $\varepsilon$  powinna osiągać minimum ze względu na  $\theta$  przy ustalonych  $n_p, n_n, n_e, n_K$

$$\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right)_{n_p, n_n, n_e, n_K} = 0. \quad (3.12)$$

Jak dotąd jednak, całkowita energia materii z kondensatem wyrażona przez sumę wyrażeń (3.6, 3.7, 3.10) jest funkcją zmiennych  $n_p, n_n, n_e, \mu, \theta$ . W związku z tym wygodnie jest dokonać transformacji Legendre'a energii do potencjału termodynamicznego  $\tilde{\varepsilon}$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \mu_K n_K \quad (3.13)$$

i szukać minimum dla  $\tilde{\varepsilon}$  przy ustalonych  $n_p, n_n, n_e, \mu_K$ .

$$\left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \theta} \right)_{n_p, n_n, n_e, \mu_K} = 0. \quad (3.14)$$

W tym celu jest nam potrzebna gęstość kaonów. Aby ją znaleźć należy się odwołać do symetrii lagranżjanu (3.1). Pierwsze cztery wyrazy przedstawiają część niezmienniczą względem 16-to parametrowej grupy  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ . Z symetrią tą związane są dwa oktety prądów zachowanych: jeden wektorowy  $V^\mu = V_a^\mu \lambda_a$  i jeden pseudowektorowy (aksjalny)  $A^\mu = A_a^\mu \lambda_a$ , gdzie  $\lambda_a$  to osiem macierzy Gell-Manna - generatorów symetrii  $SU(3)$ . Zarówno bariony jak i mezony dają wkład do prądów zachowanych, stąd wygodnie jest zapisać je jako sumę części mezonowej i barionowej

$$V^\mu = V_M^\mu + V_B^\mu, \quad A^\mu = A_M^\mu + A_B^\mu, \quad (3.15)$$

$$V_{M,a}^\mu = -i \frac{f^2}{4} \text{Tr} \lambda_a (U^+ \partial^\mu U + U \partial^\mu U^+), \quad (3.16)$$

$$A_{M,a}^\mu = i \frac{f^2}{4} \text{Tr} \lambda_a (U^+ \partial^\mu U - U \partial^\mu U^+), \quad (3.17)$$

$$V_{B,a}^\mu = \frac{1}{4} \text{Tr} \bar{B} \gamma^\mu [u_+^a, B] + \frac{F}{4} \text{Tr} \bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 [u_-^a, B] + \frac{D}{4} \text{Tr} \bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 \{u_-^a, B\}, \quad (3.18)$$

$$A_{B,a}^\mu = \frac{1}{4} \text{Tr} \bar{B} \gamma^\mu [u_-^a, B] + \frac{F}{4} \text{Tr} \bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 [u_+^a, B] + \frac{D}{4} \text{Tr} \bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 \{u_+^a, B\}, \quad (3.19)$$

gdzie  $u_\pm^a = \xi^+ \lambda_a \xi \pm \xi \lambda_a \xi^+$ , a macierz  $\xi$  jest związana z  $U$  poprzez relację  $\xi^2 = U$ .

Dobrze określone liczby kwantowe cząstek odpowiadają generatorom diagonalnym. W algebrze generatorów grupy  $SU(3)$  istnieją dwa generatory diagonalne: 3-ia składowa izospinu  $I_3 = \lambda_3/2$  i hiperładunek  $Y = \lambda_8/\sqrt{3}$ , który zawiera w sobie dziwność  $Y = (B + S)$ . Ładunek jest związany izospinem  $I_3$  i hiperładunkiem poprzez relację Gell-Manna-Nishijimy  $Q = I_3 + Y/2$ , stąd prąd elektromagnetyczny w naszej teorii chiralnej ma postać:

$$J^\mu = \frac{1}{2} V_3^\mu + \frac{1}{2\sqrt{3}} V_8^\mu. \quad (3.20)$$

Podstawiając odpowiednio gęstości nukleonowe i wartość średnią pola kaonowego dostajemy wyrażenie na gęstość ładunku niesioną przez bariony i kaony

$$J^0 = -f^2 \mu \sin^2 \theta - n(1+x) \sin^2 \frac{\theta}{2} + nx, \quad (3.21)$$

gdzie pierwsze dwa wyrazy odpowiadają  $n_K$ , gęstości ładunku zawartej w kondensacie  $K^-$ , a ostatni to gęstość protonów. Mając  $n_K$  możemy poprawnie wyrazić  $\tilde{\varepsilon}$ , jako funkcję  $n_p, n_n, n_e, \mu_K, \theta$  i znaleźć jej minimum. Dostajemy wtedy równanie na wartość amplitudy kondensatu  $\theta$

$$\cos \theta = \frac{1}{f^2 \mu_K^2} \left( m_K^2 f^2 - n \Sigma_{KN}(x) - \frac{1}{2} \mu_K n(1+x) \right). \quad (3.22)$$



W istocie jest to minimum, gdyż druga pochodna  $\tilde{\varepsilon}$  po  $\theta$

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial \theta^2}\right)_{n_p, n_n, n_e, \mu_K} = f^2 \mu_K^2 \sin^2 \theta ,$$

czyli jest zawsze dodatnia. Równania równowagi beta

$$\mu = \mu_n - \mu_p \quad , \quad \mu_K = \mu_n - \mu_p \quad (3.23)$$

pozwalają wyrugować następne dwie zmienne i zgodnie z dyskusją w poprzednim rozdziale gęstość energii w stanie równowagi beta jest ostatecznie określona jednoznacznie przez dwie zmienne: gęstość liczby barionowej i ładunek na barion

$$n = B/V \quad , \quad q = Q/B = \frac{nx - n_L - n_K}{n} . \quad (3.24)$$

### 3.2. Model wymiany mezonowej

W modelu wymiany mezonowej dla cząstek bez dziwności, lagranżjan ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N = & \bar{N} \left( i\gamma_\mu \partial^\mu - m_N + g_{\sigma N} \sigma - g_{\omega N} \gamma_\mu V_\mu - g_{\rho N} \vec{\tau} \vec{R}_\mu \right) N \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - U(\sigma) \\ & - \frac{1}{4} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 V_\mu V^\mu \\ & - \frac{1}{4} \vec{R}_{\mu\nu} \vec{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{R}_\mu \vec{R}^\mu , \end{aligned} \quad (3.25)$$

gdzie  $N$  opisuje nukleony  $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ , a  $\sigma, V, \vec{R}$  to odpowiednio pole skalarne, wektorowe i wektorowo-izowektorowe. W modelu wymiany mezonowej kaony przedstawione są przez dublety izospinu  $K = (K^+, K^0)$  i nie sprzęgają się bezpośrednio do nukleonów, a jedynie pośrednio poprzez inne mezony, a dopiero te oddziałują z nukleonami. W sektorze dziwnym rozważymy dwa sposoby realizacji oddziaływań kaonów z mezonami. Jeden zaproponowany przez autorów pracy [Knorren95] zwany dalej KPE:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K^{KPE} = & \partial_\mu K^+ \partial^\mu K^- + i(g_{\omega K} V^\mu + g_\rho R_3^\mu)(K^+ \partial_\mu K^- - K^- \partial_\mu K^+) \\ & - m_K^{*2} K^+ K^- \end{aligned} \quad (3.26)$$

i drugi zaproponowany przez [Glendenning97] zwany dalej GS:

$$\mathcal{L}_K^{GS} = \mathcal{D}_\mu^* K^- \mathcal{D}^\mu K^+ - m_K^{*2} K^- K^+ , \quad (3.27)$$

gdzie symbol  $\mathcal{D}_\mu$  oznacza pochodną kowariantną

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig_{\omega K} V_\mu + ig_{\rho K} \vec{R}_{3,\mu} . \quad (3.28)$$

Różnice między modelami polegają na różnych sposobach sprzężenia kaonów zarówno do mezonów wektorowych ( $V, \vec{R}$ ), jak i mezonu skalarnego  $\sigma$ . W modelu GS sprzężenie do  $V$  i  $\vec{R}$  jest zrealizowane poprzez wprowadzenie pochodnej kowariantnej, co ma tę zaletę, że pole  $V$  jest sprzężone do zachowanego prądu, który zawiera zarówno bariony, jak i prąd kaonowy  $J_\mu^K$ :

$$\partial_\nu V^{\mu\nu} + m_\omega V^\mu = g_{\omega N} \bar{N} \gamma^\mu N - g_{\omega K} J_\mu^K, \quad (3.29)$$

gdzie ładunek niesiony przez kaony jest opisywany prądem

$$\begin{aligned} J_\mu^K &= iK^- \partial_\mu K^+ - i\partial_\mu K^- K^+ \\ &\quad - 2g_{\omega K} V_\mu K^- K^+ - 2g_{\rho K} \vec{\tau}_K \vec{R}_\mu K^- K^+, \end{aligned} \quad (3.30)$$

który jest konsekwencją symetrii ładunkowej  $K^\pm \rightarrow \exp^{\pm i\alpha} K^\pm$ . Ponieważ dywergencja prawej strony równania (3.29) znika to oznacza, że  $\partial_\mu V^\mu = 0$  co pozwala spełnić tożsamości Warda dla pola wektorowego w ośrodku, czyli wobec nieznikających gęstości nukleonowych. Podobne rozumowanie aplikuje się do pola izowektorowego  $\vec{R}$ . W tym sensie model GS jest bardziej spójny niż KPE, na co zwrócili uwagę autorzy pracy [Schaffner95]. Różnica między modelami polega również na członie masowym dla kaonów realizowanym poprzez sprzężenie do mezonu  $\sigma$

$$m_K^{*(GS)} = m_K - g_{\sigma K} \sigma, \quad (3.31)$$

$$m_K^{*(KPE)} = \sqrt{m_K^2 - g_{\sigma K} m_K \sigma}. \quad (3.32)$$

W obu modelach, dla sektora czysto nukleonowego (3.25) przyjęto tę samą parametryzację zapewniającą standardowe własności punktu saturacji: gęstość barionowa  $n_0 = 0.153 \text{ fm}^{-3}$ , energia wiązania  $E/A = -16.3 \text{ MeV}$ , energia symetrii  $E_s(n_0) = 32.5 \text{ MeV}$ , ściśliwość  $K_0 = 240 \text{ MeV}$  oraz masa efektywna nukleonu w  $n_0$ :  $m^*/m = 0.78$ . Chcąc porównać siłę oddziaływań kaon-nukleon dla wszystkich trzech modeli (GS, KPE oraz chiralnego) wygodnie jest się posłużyć potencjałem optycznym

$$U_K^{GS} = -g_{\sigma K} m_\sigma - g_{\omega K} V_0 + \frac{(g_{\omega K} V_0)^2 + (g_{\sigma K} \sigma)^2}{2m_K}, \quad (3.33)$$

$$U_K^{KPE} = -\frac{1}{2} g_{\sigma K} m_\sigma - g_{\omega K} V_0 \quad (3.34)$$

oraz dla modelu chiralnego

$$U_K^{ch} = -\frac{\Sigma_{KN}(\frac{1}{2}) n_s}{2m_K f_\pi^2} - \frac{3n}{8f_\pi^2}. \quad (3.35)$$

Wtedy zawartość dziwności w protonie pomiędzy 0 a 0.2 przekłada się na wartości potencjału optycznego  $U_K^{ch}$  pomiędzy -73 a -120 MeV. Stałe sprzężenia  $g_{\sigma K}, g_{\omega K}$  w modelach GS i KPE były tak dobrane by odpowiadające im potencjały optyczne były w zakresie od -80 do -120 MeV.

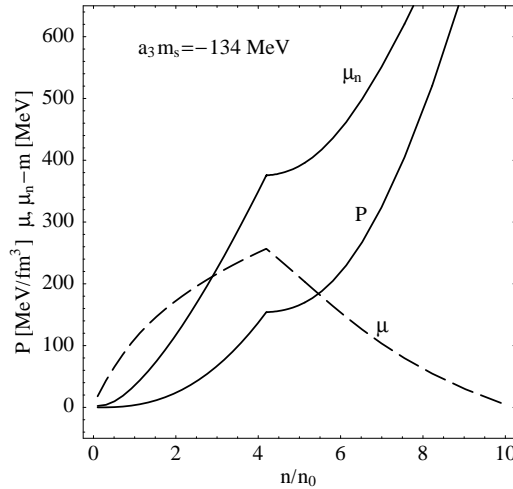
Zgodnie z duchem teorii średniego pola przy nieznikających gęstościach nukleonów, tylko składowe czasowe pól wektorowych  $V^0, R_3^0$  oraz pole skalarne  $\sigma$  pozostają niezerowe. Z kolei dla kaonów, na mocy twierdzenia Bayma (3.5) o wartości średniej mamy  $K^\pm = (f\theta/\sqrt{2}) \exp^{\pm i\mu t}$ . Równania ruchu określają wartości średnie pól mezonowych. Ich rozwiązania odpowiadają minimum całkowitej energii przy założonych gęstościach nukleonów i kaonów, gdzie tym razem gęstość kaonów wynosi

$$n_K = f^2\theta^2(\mu + g_{\omega K}V_0 + g_{\rho K}R_{0,3}). \quad (3.36)$$

Ostatecznie, podobnie jak w przypadku modelu chiralnego, wykorzystując równowagę beta, można wyrazić energię, jako funkcję liczby barionowej  $n$  i ładunku na barion  $q$ .

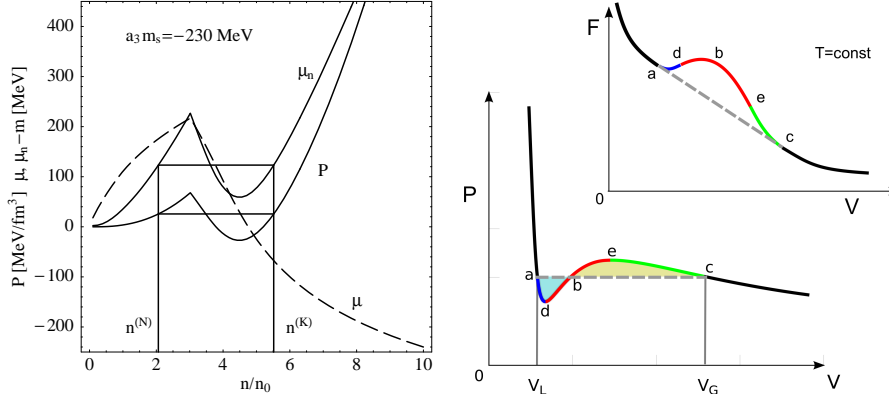
### 3.3. Przejście fazowe w materii gwiazdy neutronowej

Pojawienie się naładowanego kondensatu Bose-Einsteina w materii gwiazdy neutronowej ma istotny wpływ na równanie stanu, czyli zależność między ciśnieniem a gęstością energii  $P = P(\varepsilon)$ . Cząstki formujące kondensat (piony czy kaony) obsadzają stan podstawowy z zerowym pędem, to znaczy, że kondensat nie daje wkładu do ciśnienia. Oddziaływanie cząstek kondensatu z nukleonami ma charakter przyciągający, co również obniża całkowite ciśnienie materii. Ponadto, kondensat jest ujemnie naładowany i konkuruje z elektronami w przejmowaniu ładunku ujemnego, koniecznego do zneutralizowania protonów. Łatwość w produkcji ładunku ujemnego oznacza, że materia staje się bardziej symetryczna, co także prowadzi do obniżki ciśnienia. Wszystkie te efekty powodują, że równanie stanu materii z kondensatem jest zawsze bardziej "miękkie". Na przykładzie modelu chiralnego, nawet dla minimalnej wartości sprzężenia kaon-nukleon, odpowiadającej mało realistycznej zerowej zawartości dziwności, materia z kondensatem ma znacznie niższe ciśnienie, co przedstawia Rys. 3.1. Dalsze zwiększanie siły oddziaływania kaon-nukleon po-



Rysunek 3.1: Ciśnienie oraz potencjały chemiczne w modelu chiralnym dla minimalnej wartości sprzężenia kaon-nukleon.

woduje pojawienie się w równaniu stanu obszaru o ujemnej ściśliwości. Obszar o ujemnej ściśliwości pojawiał się już przy analizie kondensacji pionów badanej w latach 70-tych [Hartle75, Weise75]. Tego rodzaju równanie stanu jakościowo przypomina równanie van der Waalsa, gdzie również pojawia się obszar ujemnej ściśliwości, który zastępowany jest za pomocą konstrukcji *równych pól* zaproponowanej jeszcze przez J.C.Maxwella w XIX wieku. Ponieważ jest to ważne z punktu widzenia dalszej analizy, poniżej przedstawimy szczegółowo konstrukcję Maxwella w układzie jednoskładnikowym. Prawy diagram na



Rysunek 3.2: Po lewej - ciśnienie oraz potencjały chemiczne w modelu chiralnym dla maksymalnej wartości sprężenia kaon-nukleon. Poziome linie przedstawiają równość ciśnienia i potencjału chemicznego liczby barionowej. Potencjał chemiczny ładunku przyjmuje różne wartości dla różnych faz  $\mu(n^{(N)}) \neq \mu(n^{(K)})$ . Po prawej - schematyczna ilustracja konstrukcji Maxwella.

Rys. 3.2 przedstawia izotermę równania van der Waalsa, przy stałej ustalonej liczbie cząstek  $N$ . Ponieważ  $N$  jest ustalone, to w analizie wypukłości możemy posługiwać się energią swobodną  $F$  zamiast jej gęstością  $f = F/N$ . Równość pól zakreślonych figurami  $adb$  i  $bec$ , przedstawia wyrażenie

$$P_a(V_b - V_a) - \int_a^b P dV = P_c(V_c - V_b) + \int_b^c P dV. \quad (3.37)$$

gdzie  $P_c = P_a$ . Ponieważ całka z ciśnienia wzdłuż izotermy, odpowiada różnicy energii swobodnej  $F(T, V, N)$  pomiędzy punktami końcowymi oraz  $F = -PV + \mu N$ , to powyższe równanie jest równoważne równości potencjałów chemicznych dla faz w punktach  $a$  i  $c$

$$\mu_a = \mu_c.$$

Konstrukcja Maxwella zatem odpowiada równowadze wzajemnej fazy ciekłej i gazowej. Konstrukcja Maxwella bywa też nazywana konstrukcją *wspólnej stycznej*. Jeśli przedstawimy energię swobodną jako funkcję objętości przy ustalonej temperaturze i liczbie cząstek, to równanie (3.37) odpowiada zastąpieniu łuku  $dbe$ , który przedstawia obszar o ujemnej ściśliwości, odcinkiem prostej między punktami  $ac$ . Ponieważ ściśliwość na tym odcinku wynosi zero<sup>1</sup>, nie może on odpowiadać za układ jednofazowy. Stąd między punktami  $a$  i  $c$  mamy do czynienia ze współlistnieniem dwóch faz, które w różnych proporcjach wypełniają całkowitą objętość układu. Punkty  $a$  i  $c$ , gdzie układ rozszczepia

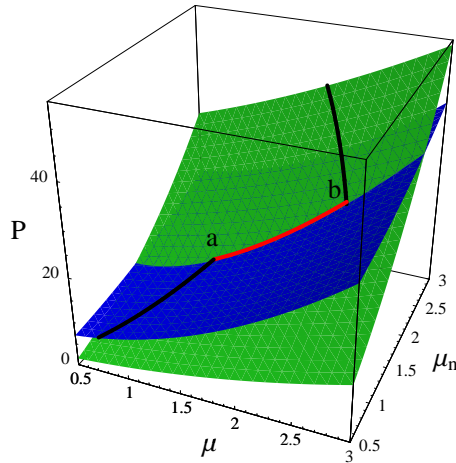
<sup>1</sup>Gęstość energii swobodnej  $f(T, v)$  jest w tym obszarze *slabo wypukła*, układ zachowuje stabilność, ale kosztem rozdzielania się na dwie fazy.

się na dwie fazy nazywane są punktami *binodalnymi*. Parametry intensywne  $P, T, \mu$  fazy ciekłej opisują parametry w punkcie  $a$ , a dla fazy gazowej parametry w punkcie  $c$ . Fazy są w równowadze, gdyż sama konstrukcja zapewnia, że ich ciśnienia, temperatury i potencjały chemiczne są sobie równe. Również każda z nich jest stabilna, gdyż zarówno punkt  $a$  jak i  $c$  leżą na wypukłych fragmentach wykresu energii swobodnej. Punkty, gdzie ściśliwość staje się ujemna  $d$  i  $e$  (geometrycznie - punkty przegięcia energii swobodnej) zwane są punktami *spinodalnymi*. Pomiedzy punktami spinodalnymi a binodalnymi (łuki  $ad$  i  $ec$ ) istnieje możliwość wystąpienia układu jednofazowego ze względu na dodatnią ściśliwość. Jednak jego energia swobodna jest większa niż w wypadku układu dwufazowego. Łuki te reprezentują fazy metastabilne:  $ad$  - przegrzana ciecz,  $ec$  - przechłodzona para. Fazy te są metastabilne ze względu na barierę energetyczną związaną z formacją kropli nowej fazy - zjawisko nukleacji. W przypadku przejścia I-go rodzaju na granicy faz występuje napięcie powierzchniowe. Nukleacja nowej fazy wymaga dostarczenia porcji energii związanej z powstaniem błonki otaczającej kroplę. Taką nadwyżkę energii mogą stanowić naturalne fluktuacje lub lokalne zmiany energii związane z adhezją do ścianek naczynia lub zanieczyszczeń.

Powyższa dyskusja własności układu opisywanego równaniem van der Waalsa odpowiada zachowaniu układu jednoskładnikowego, to znaczy takiego, w którym występuje jeden rodzaj cząstek, których liczba jest zachowana. W przypadku materii wypełniającej wnętrze gwiazdy neutronowej mamy do czynienia z układem dwuskładnikowym. Energia jest funkcją liczby barionowej  $n$  i ładunku  $q$ , stąd jeśli pojawi się w nim możliwość współistnienia dwóch faz, to potencjały chemiczne liczby barionowej  $\mu_n$  i ładunku  $\mu$  w tych fazach muszą być sobie równe:

$$\mu_n^{(N)} = \mu_n^{(K)} \quad , \quad \mu^{(N)} = \mu^{(K)} \quad , \quad (3.38)$$

gdzie indeksy  $N$  i  $K$  odpowiadają odpowiednio fazie normalnej (czysto nukleonowej) i fazie z kondensatem. Jak przedstawiono na Rys. 3.2 w przypadku dużego sprzężenia kaon-nukleon, dla fazy kaonowej pojawia się obszar ujemnej ściśliwości. Naturalnym wydaje się zastąpienie go poziomym odcinkiem zgodnie z konstrukcją Maxwella. Niestety, warunki Gibbsa (2.18) nie mogą być wtedy spełnione. Chociaż konstrukcja ta zapewnia równość ciśnienia i potencjału chemicznego liczby barionowej  $\mu_n$ , to potencjał chemiczny ładunku jest różny dla różnych faz. Na ten fakt zwrócono uwagę w pracy [Glendenning92] w kontekście formacji materii kwarkowej we wnętrzu gwiazdy neutronowej. Niemożność spełnienia wszystkich warunków Gibbsa bierze się z założenia *lokalnej neutralności* materii gwiazdy - w każdym punkcie przestrzeni  $q = 0$ . W obszarze, gdzie pojawia się ujemna ściśliwość nie ma powodu, by obok niestabilnych fluktuacji gęstości liczby barionowej pojawiały się również niestabilne fluktuacje gęstości ładunku. W związku z tym, w układzie mogą się pojawić dwie fazy nie tylko o różnej gęstości  $n$ , ale i różnym ładunku  $q$ . Warunki Gibbsa



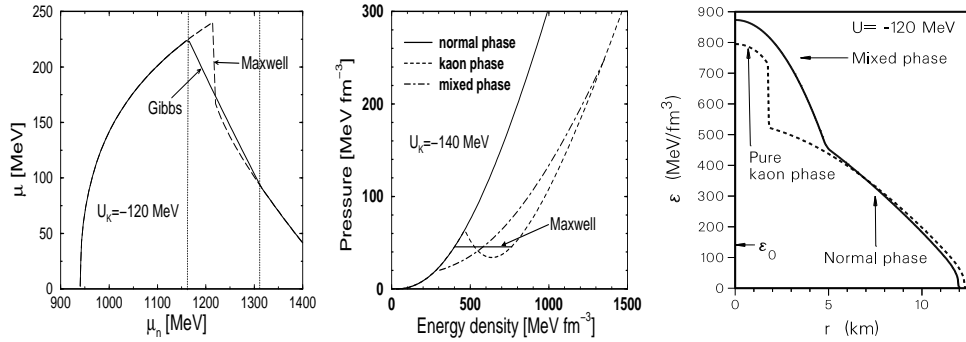
Rysunek 3.3: Schematyczne przedstawienie konstrukcji Gibbsa. Płat niebieski odpowiada ciśnieniu fazy nukleonowej, zielony fazy kaonowej. Czarne linie odpowiadają odpowiednio fazy nukleonowej (na płacie niebieskim) i kaonowej (na płacie zielonym) Czerwony odcinek między punktami  $a$  i  $b$  przedstawia układ dwufazowy. Jednostki na osiach mają charakter umowny

dla naszego układu można zapisać jednym równaniem

$$P^{(N)}(\mu_n, \mu) = P^{(K)}(\mu_n, \mu), \quad (3.39)$$

gdzie  $P^{(N)}$  i  $P^{(K)}$  to osobne funkcje opisujące ciśnienie dla fazy zwykłej i z kondensatem. Geometrycznie równanie (3.39) odpowiada przecięciu płatów reprezentujących ciśnienia dla obydwu faz w przestrzeni  $(P, \mu_n, \mu)$ , co schematycznie przedstawia Rys. 3.3. Dla niskich gęstości (niskie wartości  $\mu_n$ ) neutralna materia czysto nukleonowa stanowi stabilny układ jednofazowy, reprezentowany przez linię leżącą na płacie  $P^{(N)}(\mu_n, \mu)$ . Minimum energii przy zadanych  $n$  i  $q$  odpowiada maksimum ciśnienia przy zadanych  $\mu_n$  i  $\mu$ . Aż do punktu  $a$  faza nukleonowa ma wyższe ciśnienie niż kaonowa. W punkcie  $a$  powinno nastąpić przejście do fazy kaonowej, jako tej o wyższym ciśnieniu. Niestety faza z kondensatem nie jest w tym punkcie neutralna. Dlatego od punktu  $a$  rozpoczyna się odcinek, na którym obie fazy występują w materii zajmując różne proporcje objętości, tak aby materia jako całość była nadal neutralna. Odcinek  $ab$  nazywa się, niezbyt poprawnie, obszarem występowania fazy *mieszanej*, w istocie jest to po prostu układ dwufazowy. Obydwie fazy tworzą mikrostruktury, których kształt można określić dopiero po uwzględnieniu zaniedbanej dotąd energii kulombowskiej i powierzchniowej. W skali makro materia pozostaje neutralna, stąd wzajemne proporcje objętości zajmowanej przez koegzystujące fazy wynikają z warunku:

$$wn_q^{(K)} - (1 - w)n_q^{(N)} = 0, \quad (3.40)$$



Rysunek 3.4: Konstrukcja Gibbsa i Maxwella w przestrzeni  $(\mu_n, \mu)$  oraz równanie stanu i profil gęstości gwiazdy neutronowej.

gdzie  $w = V^{(K)}/V$  to udział objętości dla fazy kaonowej, a  $n_q$  to gęstość ładunku  $n_q = qn$ . Warunek ten nazywany warunkiem *globalnej neutralności* dla odróżnienia od *neutralności lokalnej*, która zakłada  $n_q = 0$  dla każdej fazy z osobna, jak to ma miejsce w przypadku konstrukcji Maxwella. Idąc od punktu  $a$ , wzdłuż linii równych ciśnień (3.39), przybywa fazy z kondensatem kosztem fazy normalnej, aż do jej całkowitego zaniku w punkcie  $b$ . Od punktu  $b$  faza kaonowa jest już neutralna i samodzielnie może wypełniać całą objętość. Warunek globalnej neutralności pozwala wyznaczyć  $w$  i stąd możemy określić średnią gęstość liczby barionowej i energii materii w obszarze fazy mieszanej:

$$\bar{n} = w n^{(K)} + (1 - w)n^{(N)}, \quad \bar{\varepsilon} = w \varepsilon^{(K)} + (1 - w)\varepsilon^{(N)}.$$

Po zastosowaniu konstrukcji Gibbsa równanie stanu dla układu dwuskładnikowego, wygląda inaczej niż w przypadku konstrukcji Maxwella. Przedstawia to Rys. 3.4. W relacji  $P(\varepsilon)$  nie pojawia się teraz odcinek stałego ciśnienia, który odpowiadał współlistnieniu dwóch faz. Ciśnienie rośnie monotonicznie z gęstością energii. Takie zachowanie równania stanu ma jakościowe znaczenie dla profilu gęstości we wnętrzu gwiazdy neutronowej. Równania równowagi hydrostatycznej wymagają, aby ciśnienie monotonicznie malało ze wzrostem odległości od centrum gwiazdy. Stąd odcinkowi stałego ciśnienia w równaniu stanu odpowiadałby punkt, w którym profil gęstości ma skok równy różnicy gęstości między fazami. W przypadku konstrukcji Gibbsa nie pojawia się taki skok gęstości, gęstość płynnie się zmienia wraz z odległością od centrum gwiazdy. Faza mieszana wypełnia teraz pewną część wnętrza gwiazdy w postaci powłoki o skończonej grubości pomiędzy fazą normalną a czysto kaonową. Jak widać na prawym panelu w Rys. 3.4 z relacji  $P(\varepsilon)$ , faza mieszana może występować przy bardzo szerokim zakresie gęstości, zajmując duży obszar objętości całej gwiazdy.

Istnienie fazy mieszanej jest wyrazem dyskutowanej wcześniej reguły faz Gibbsa (2.19). Ponieważ założyliśmy, że rozważamy przybliżenie  $T = 0$ , mamy



jeden stopień swobody mniej i reguła ta przyjmie teraz postać

$$s = 1 + \alpha - f. \quad (3.41)$$

Dla materii w równowadze beta  $\alpha = 2$ , układ dwufazowy ma jeden stopień swobody, a nie zero jak sugeruje konstrukcja Maxwella. Tę swobodę wyraża płynnie zmienna proporcja objętości  $w$  między fazami  $K$  i  $N$ . Równania wzajemnej równowagi fazowej (3.38,3.39) nie biorą pod uwagę przyczynków energetycznych związanych ze skończonym rozmiarem struktur (*finite-size effects*), które tworzą fazę mieszaną. Jest to tzw. *przybliżenie objętościowe*<sup>2</sup>. Ponieważ fazy mają różne ładunki, więc pojawia się energia kulombowska ich wzajemnego oddziaływania, a ponadto na granicy faz występuje napięcie powierzchniowe. Te nie-ekstensywne przyczynki do całkowitej energii, powodują powstanie mikroskopowych niejednorodności, mogących prowadzić do krystalizacji fazy mieszanej [Christiansen00]. Istnienie takiej zestalonej warstwy we wnętrzu gwiazdy powinno mieć związek z interpretacją danych obserwacyjnych pulsarów.

### 3.4. Wewnętrzna stabilność różnych modeli kondensacji kaonów

Na poziomie przybliżenia objętościowego konstrukcja Gibbsa jest w pełni konsystentnym sposobem opisu przejścia fazowego w materii gwiazdy i poprawną metodą "naprawienia" równania stanu, w którym występuje ujemna ściślność. Badając kondensację kaonów szereg autorów, [Pons00, Tatsumi96] wychodząc z różnych modeli oddziaływań silnych nie przeprowadzało konstrukcji Gibbsa lub stwierdzało niemożność jej wykonania. Poniżej pokażemy, że niemożność wykonania konstrukcji Gibbsa ma głębsze podłoże. Jest cechą charakterystyczną użytego modelu oddziaływań i weryfikuje przydatność danego modelu do opisu materii gwiazdy neutronowej.

W podrozdziale 2.3.2 zostały sformułowane warunki wewnętrznej stabilności materii w stanie równowagi beta. Do dalszej analizy wybierzemy podatność  $\chi_P$  z pary nierówności (2.80). Podatność  $\chi_P^{-1} = -(\partial\mu/\partial q)_P$  stanowi nachylenie zależności potencjału chemicznego  $\mu(q)$  od ładunku  $q$  przy stałym ciśnieniu, stąd wygodnie jest ją przedstawić za pomocą izobar na płaszczyźnie  $(q, \mu)$ . Analizę stabilności zaczniemy od modelu GS, dla którego można przeprowadzić konstrukcję Gibbsa. Przedstawia ją Rys. 3.5. Przy niedużym sprzężeniu kaon-nukleon (potencjał optyczny  $U_K = -80\text{MeV}$ ) izobary fazy kaonowej mają zawsze dodatnie nachylenie - faza kaonowa jest zawsze stabilna, podobnie jak faza normalna. Przy większej wartości  $U_K$  pojawia się obszar niestabilny - na lewo od linii spinodalnej (czerwona linia). Nie istnieje stabilna neutralna faza kaonowa w tym obszarze. Niestabilne fluktuacje ładunku narastają, aż w

<sup>2</sup>Angielski termin *bulk approximation*.

materii pojawiają się dwie różnoimienne fazy zaznaczone na wykresie liniami N1-N2 i K1-K2. Przebieg tych linii wyznaczają warunki Gibbsa i globalna neutralność. W punkcie K1 zaczyna przybywać ujemnie naładowanej fazy kaonowej, kosztem dodatniej fazy normalnej. W punkcie K2, faza kaonowa wypełnia całą objętość i jest już neutralna, a faza zwykła zanika w punkcie N2. Otrzymana za pomocą konstrukcji Gibbsa ujemnie naładowana faza kaonowa znajduje się zawsze w obszarze stabilności, co stanowi o konsystencji całego opisu. Wydaje się, że podobne rozumowanie należy przeprowadzić w przypadku modelu chiralnego, w którym przy odpowiednio dużej wartości oddziaływania kaon-nukleon w równaniu stanu również pojawia się obszar ujemnej ściśliwości. Niestety, jak się okazuje, w modelu chiralnym obszar niestabilny ( $\chi_P^{-1} < 0$ ) zajmuje praktycznie cały dozwolony zakres zmiennych  $\mu, q$ , co przedstawia Rys. 3.6. Efekt ten nie jest spowodowany zbyt dużą wartością sprzężenia kaon-nukleon (wyrażoną przez  $a_3 m_s$  w członie sigma (3.2)), lecz dzieje się tak również w przypadku minimalnej wartości sprzężenia ( $a_3 m_s = -134$  MeV). Można skonstruować, że niestabilność wewnętrzna fazy z kondensatem jest cechą modelu chiralnego. W modelu chiralnym nie jest możliwe przeprowadzenie konstrukcji Gibbsa dla fazy mieszanej. Gdybyśmy spróbowali przedstawić ciśnienie jako funkcję potencjałów chemicznych  $\mu$  oraz  $\mu_n$  i znaleźć przecięcie z ciśnieniem dla fazy normalnej, to otrzymujemy sytuację, którą przedstawia Rys. 3.7. Ciśnienie dla fazy kaonowej jest zawsze niższe od ciśnienia fazy normalnej, co jest sprzeczne z zasadą maksimum ciśnienia przy ustalonych potencjałach chemicznych. Obydwie powierzchnie mają punkty wspólne jedynie wzdłuż linii  $\cos \theta = 0$ . Linia ta nie odpowiada jednak koegzystencji fazowej. Powierzchnia dla  $P^{(K)}$  jest styczna wzdłuż tej linii do powierzchni  $P^{(N)}$ . Ponieważ pochodne

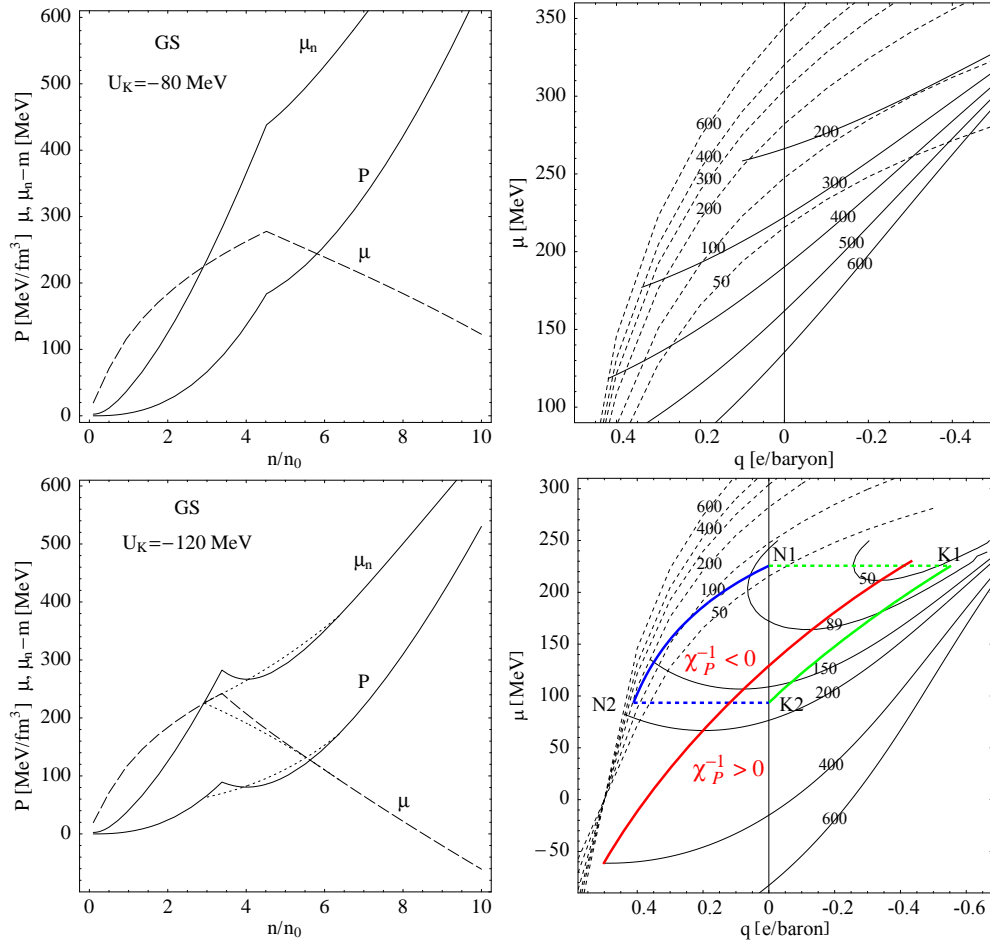
$$\left(\frac{\partial P}{\partial \mu_n}\right)_\mu = n \quad , \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{\mu_n} = n_q$$

określają gęstości liczby barionowej i ładunku, to znaczy, że linia  $\cos \theta = 0$  w istocie przedstawia jedną fazę.

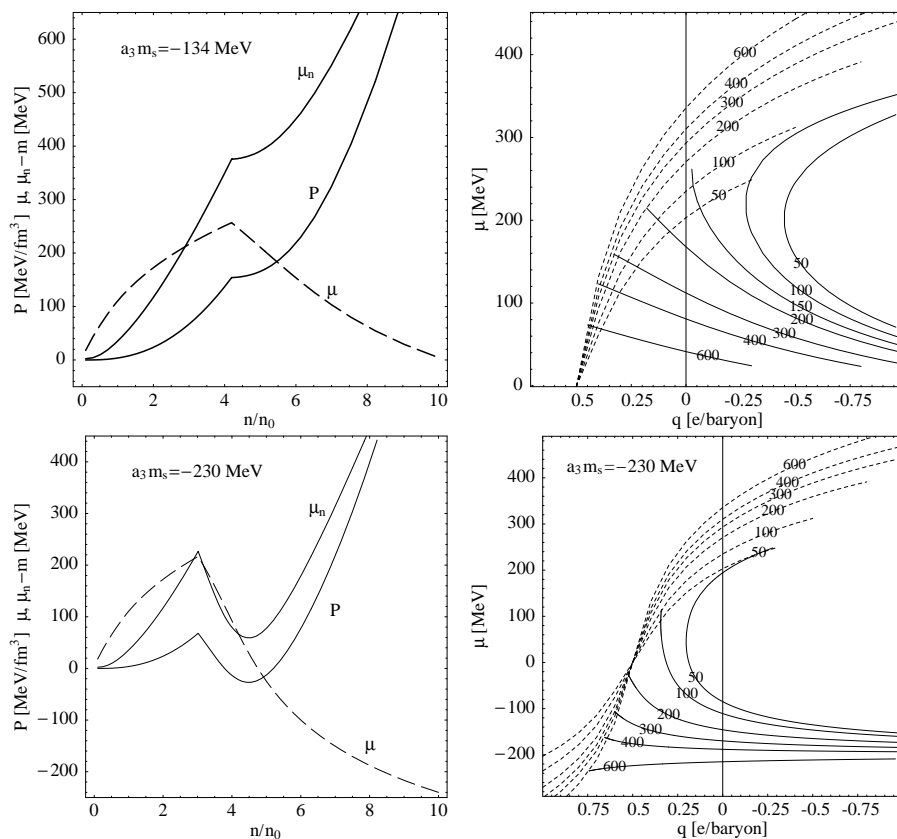
Model chiralny jest istotnie różny od modeli wymiany mezonowej i można by przypuszczać, że pojawiająca się w nim niekonsystencja wynika z jego hybridowego charakteru, gdzie oddziaływania czysto nukleonowe wprowadzane są wprost przez dodanie energii z tego sektora (3.7). Model wymiany mezonowej ma tę przewagę nad modelem chiralnym, że wszystkie pojawiające się w układzie cząstki traktowane są na tym samym poziomie, będąc opisane za pomocą jednego lagranżjanu. Jak się jednak okazuje, ta własność nie zapewnia stabilności termodynamicznej układu. Na Rys. 3.8 przedstawiona jest analiza stabilności modelu KPE dla dwóch skrajnych wartości sprzężenia kaon-nukleon. Podobnie jak w modelu chiralnym faza kaonowa jest niestabilna w całym zakresie  $\mu, q$ . Również dla tego modelu nie można przeprowadzić konstrukcji Gibbsa. Na uwagę zasługuje fakt, że w przypadku obydwu modeli, jeśli dla słabego sprzężenia kaon-nukleon przedstawiamy zależność  $P(n)$ , to w

ogóle nie dostrzegamy żadnej nieprawidłowości. Równanie stanu powyżej gęstości krytycznej jest jedynie bardziej miękkie z powodu obecności kondensatu. Nachylenie  $P(n)$  dla materii neutralnej jest w całym zakresie gęstości dodatnie (ściślność  $K_q > 0$ ). Jest to wyrazem dyskutowanych już wcześniej nierówności (2.89). Ściślność  $K_q$  jest cały czas dodatnia, podczas gdy  $K_\mu$ , w której zakodowana jest niestabilność fluktuacji ładunku staje się ujemna.

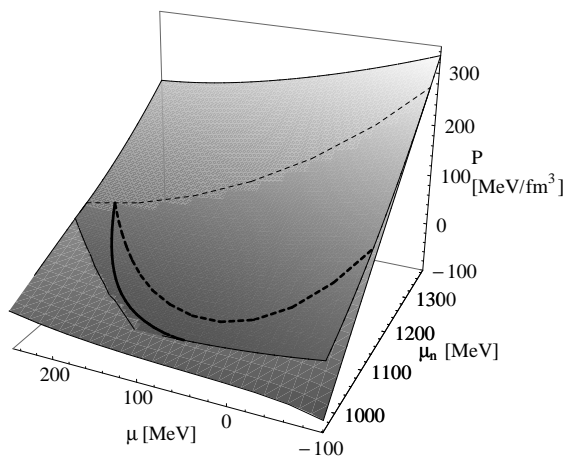
Powyższa analiza stabilności pokazuje, że z pozoru poprawnie skonstruowane modele oddziaływań silnych, dające prawidłowy opis oddziaływań kaon-nukleon w próżni, w zastosowaniu do gęstej materii prowadzą do niekonsystentnego opisu termodynamicznego i w związku z tym nie powinny być stosowane. Oznacza to, że analiza stabilności egzotycznych form materii, których obecność rozważa się w modelowaniu struktury wewnętrznej gwiazdy neutronowej stanowi ważny czynnik weryfikujący dany model.



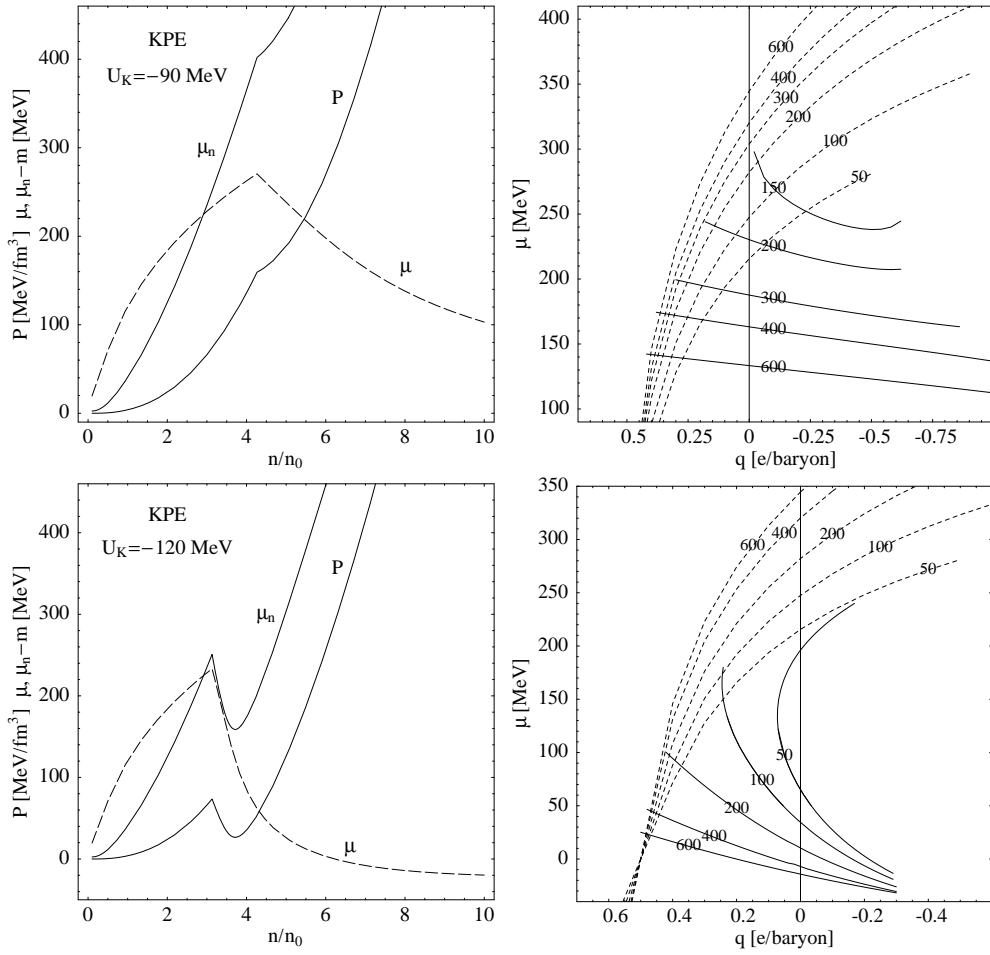
Rysunek 3.5: Stabilność faz dla modelu GS, przy różnych wartościach sprężenia kaon nukleon. Po lewej: ciśnienie i potencjały chemiczne w funkcji  $n$  dla układu jednorodnego (linie ciągłe) i fazy mieszanej (przerywane). Po prawej: izobary dla fazy normalnej (linie przerywane) i kaonowej (ciągłe). Czerwona linia przedstawia linię spinodalną  $\chi_P^{-1} = 0$ . Łuki N1-N2 oraz K1-K2 to linie binodalne - odpowiadają naładowanej fazie normalnej (niebieski) i kaonowej (zielony).



Rysunek 3.6: Brak stabilności fazy kaonowej w modelu chiralnym dla minimalnej (wykresy górne) i maksymalnej wartości sprzężenia kaon-nukleon.



Rysunek 3.7: Próba konstrukcji Gibbsa dla modelu chiralnego. Górny płatek przedstawia ciśnienie fazy normalnej, dolny kaonowej. Linia cienka przerywana odpowiada  $\cos \theta = 0$ . Linie pogrubione to linia neutralności ładunkowej dla fazy normalnej (ciągła) i kaonowej (przerywana - biegnie po dolnym płacie)



Rysunek 3.8: Brak stabilności fazy kaonowej dla modelu KPE, przy różnych wartościach sprzężenia kaon nukleon.

## 4. Separacja faz w materii jądrowej

Sformułowane w podrozdziale 2.3.2 warunki stabilności dla materii w równowadze beta można również zastosować w przypadku zwykłej materii składającej się jedynie z nukleonów i leptonów. Ponieważ na razie pomijamy oddziaływania kulombowskie, to całkowita energia na barion  $u$  takiego układu jest sumą energii materii jądrowej i wkładu leptonowego (3.9). Stan materii jądrowej, w przybliżeniu zerowej temperatury, jest jednoznacznie opisany poprzez gęstość liczby barionowej  $n$  oraz zawartość protonów  $x = n_p/n$ . Gęstość energii leptonów zależy jedynie od potencjału chemicznego  $\mu$  (wzór 3.10). Możemy więc zapisać, że całkowita energia na barion  $u$  wynosi

$$u = u^N(n, x) + \varepsilon^L(\mu)/n, \quad (4.1)$$

wtedy potencjały chemiczne protonu i neutronu przyjmują postać:

$$\mu_p = \left( \frac{\partial \varepsilon^N}{\partial n_p} \right)_{n_n} = n u_n^N + (1-x) u_x^N + u^N, \quad (4.2)$$

$$\mu_n = \left( \frac{\partial \varepsilon^N}{\partial n_n} \right)_{n_p} = n u_n^N - x u_x^N + u^N, \quad (4.3)$$

a warunek równowagi beta (2.74) wyraża się prosto

$$\mu = -u_x^N, \quad (4.4)$$

gdzie indeksy dolne oznaczają różniczkowanie po  $n$  lub  $x$ . Podobnie jak energie separują się również ciśnienia

$$P = P^N(n, x) + P^L(\mu), \quad (4.5)$$

gdzie ciśnienie leptonów  $P^L = \mu n^L - \varepsilon^L$ , a nukleonów  $P^N = n^2(\partial u^N / \partial n)_x$ . Założenie równowagi beta powoduje, że spośród zmiennych  $n, x, \mu$  tylko dwie są niezależne. Ponieważ wkład od leptonów zależy wyłącznie od potencjału chemicznego ładunku  $\mu$ , zatem spośród dwóch par warunków stabilności (2.80,2.81) wygodnie jest użyć teraz pary, która zawiera ściśliwość przy stałym  $\mu$ .

$$K_\mu = \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_\mu > 0, \quad \chi_v^{-1} = - \left( \frac{\partial \mu}{\partial q} \right)_v > 0. \quad (4.6)$$

Wybierając parę  $K_\mu, \chi_v$  unikamy niewygodnych związków między  $\mu$  a  $n$  oraz  $x$  i wtedy otrzymujemy proste wyrażenia na ściśliwość i podatność

$$K_\mu = 2n u_n^N + n^2 u_{nn}^N - \frac{(u_{nx}^N n)^2}{u_{xx}^N}, \quad (4.7)$$

$$\chi_v = \frac{1}{u_{xx}^N} + \frac{\partial n^L}{\partial \mu}, \quad (4.8)$$

gdzie podatność gazu Fermiego leptonów można wyrazić poprzez ich pędy Fermiego, jako  $\partial n^L / \partial \mu = \mu(k_e + k_\mu) / (n\pi^2)$ . Stosując rozwinięcie względem potęg asymetrii (wzór 1.3) otrzymujemy warunki stabilności wyrażone przez dwie funkcje gęstości:  $V$  - potencjał izoskalarny oraz energię symetrii  $E_s$

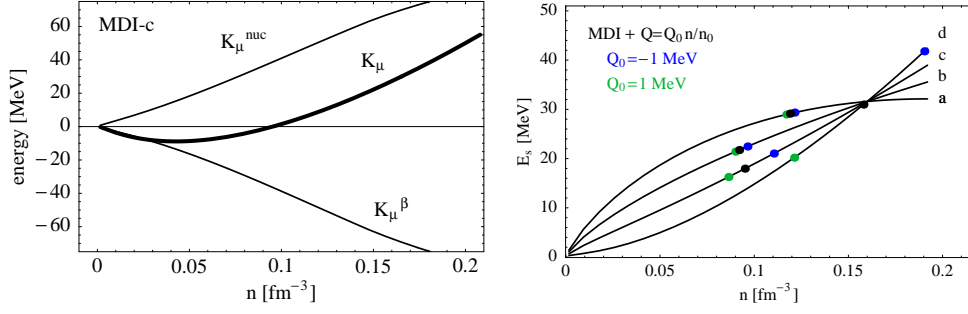
$$K_\mu = n^2 \left( E_s''(1-2x)^2 + V'' \right) + 2n \left( E_s'(1-2x)^2 + V' \right) - \frac{2(1-2x)^2 E_s'^2 n^2}{E_s} > 0 \quad (4.9)$$

$$\chi_v = \frac{1}{8E_s(n)} + \frac{\mu(k_e + k_\mu)}{n\pi^2} > 0. \quad (4.10)$$

W materii symetrycznej  $x = 1/2$  i wtedy tylko  $V'$  i  $V''$  decydują o jej stabilności. Dla materii gwiazdowej  $x$  jest zwykle dalekie od  $1/2$ <sup>1</sup>, stąd trzeci, ujemny wyraz pojawiający się w  $K_\mu$  odgrywa kluczową rolę. Wysoka asymetria jest konsekwencją równowagi beta i obecności leptonów (poniżej  $n_0$  występują tylko elektrony). Można zatem powiedzieć, że to elektrony czynią materię gwiazdy niestabilną i będą prowadzić do przejścia fazowego. Trzeci składnik w  $K_\mu$  zależy od  $1/E_s$  stąd należy przypuszczać, że niestabilność pojawi się, wtedy gdy energia symetrii przyjmuje niewielkie wartości. Takim naturalnym miejscem są niskie gęstości nieco poniżej  $n_0$ . Okazuje się, że tam neutralna i jednorodna materia, nie będąc już dłużej stabilna, ulega klasteryzacji tworząc dodatnie jądra zanurzone w ujemnej cieczy neutronowo-elektronowej. W gwiazdzie neutronowej obszar ten odpowiada przejściu między zestaloną skorupą gwiazdy, a jej ciekłym rdzeniem. Rolę ostatniego wyrazu we wzorze (4.9) przedstawia lewy panel na Rys. 4.1. W szeregu prac [Kubis07, Porębska10, Kubis12] analizowano różnego rodzaju postacie energii symetrii, które mimo niewielkich różnic dawały istotnie różne gęstości krytyczne  $n_c$  dla przejścia fazowego. Przykładowe wyniki przedstawia prawy panel na Rys. 4.1. Na tym wykresie przedstawiono również zmiany gęstości krytycznej, jakim ona podlega po uwzględnieniu członu kwartycznego w rozwinięciu potęg asymetrii według wzoru (1.3).  $Q(n)$  przy pewnych postaciach  $E_s$  istotnie zmienia położenie  $n_c$ . Bierze się to z faktu, że

<sup>1</sup>W okolicy  $n_0$  zawartość protonów wynosi  $x \approx 0.04$ .





Rysunek 4.1: Po lewej: poszczególne wkłady do ściśliwości dla modelu MDI-c:  $K_\mu^{nuc}$  - dwa pierwsze wyrazy we wzorze (4.9),  $K_\mu^\beta$  - trzeci wyraz. Po prawej: położenie gęstości krytycznych dla różnych modeli MDI, z uwzględnieniem członu kwartycznego.

ściśliwość jest drugą pochodną energii po gęstości i kolejne wyrazy w rozwinięciu Taylora dla pochodnej dają coraz większy wkład<sup>2</sup>. Po uwzględnieniu  $Q$ , wyraz destabilizujący ściśliwość  $K_\mu^\beta$  przyjmuje postać

$$-\frac{2(1-2x)^2 E_s'^2 n^2}{E_s} \rightarrow -\frac{2((1-2x)^2 E_s'^2 + 2Q'(1-2x)^3) n^2}{E_s + 6Q(1-2x)^2}, \quad (4.11)$$

gdzie  $Q$  wchodzi z 6-krotnie większą wagą niż część kwadratowa  $E_s$ . Na rolę jaką może odgrywać człon kwartyczny zwrócono uwagę w publikacji konferencyjnej [Kubis08], a później analizowany był również w pracach [Xu09, Chen09].

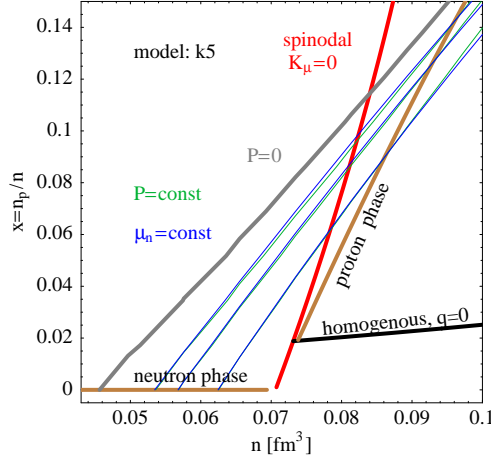
#### 4.1. Przejście fazowe i poprawka kulombowska

Znikanie ściśliwości  $K_\mu$  dla neutralnej gęstej materii oznacza konieczność formacji dwóch faz o przeciwnym ładunku. Każda z nowo powstałych wtedy faz musi być wewnętrznie stabilna ( $K_\mu > 0$ ), a oprócz tego spełniać warunki równowagi wzajemnej, potocznie zwane warunkami Gibbsa, dotyczące równości potencjałów chemicznych dla cząstek występujących w obydwu fazach (2.18). Jak się okazuje, dla większości modeli jądrowych materia nukleonowa w równowadze beta rozdziela się na dwie fazy, z których tylko jedna zawiera protony<sup>3</sup>. Dzieje się tak, gdyż poniżej pewnej gęstości materia w równowadze beta, niezależnie od swego ładunku, jest zawsze niestabilna. Geometrycznie oznacza to, że linia spinodalna dzieli płaszczyznę  $n, x$  na dwie części rozciągając się aż do  $x = 0$ . Fakt ten przedstawia Rys. 4.2. Teraz warunki Gibbsa dotyczą jedynie potencjałów chemicznych neutronu i elektronu oraz ciśnienia

$$P^{(N)} = P^{(P)}, \quad \mu^{(N)} = \mu^{(P)}, \quad \mu_n^{(N)} = \mu_n^{(P)}, \quad (4.12)$$

<sup>2</sup>Np. jeśli  $f = a + bx^2 + cx^4$  to wtedy  $f'' = 2b + 12cx^2$ .

<sup>3</sup>W przypadku niektórych modeli jądrowych istnieje wąski przedział gęstości, gdzie jest możliwa koegzystencja dwóch faz protonowych [Pethick95, Centelles98].



Rysunek 4.2: Diagram fazowy w niskich gęstościach.

gdzie indeksy górne  $P$  i  $N$  oznaczają odpowiednio fazę protonową, zawierającą  $p + n + e$  i neutronową  $n + e$ . Z kolei potencjał chemiczny protonów jest niższy w fazie (P) niż (N)

$$\mu_p^{(P)} < \mu_p^{(N)}, \quad (4.13)$$

gdyż protony są obecne jedynie w fazie (P) i pozostają w niej uwięzione - przeniesienie protonu do fazy neutronowej oznacza wzrost energii układu. Rys. 4.2 przedstawia zachowanie się poszczególnych faz w obszarze niskich gęstości ( $n < n_0$ ) dla fenomenologicznego modelu jądrowego, którego szczegóły parametryzacji przedstawia praca [Porębska10]. Na lewo od linii spinodalnej nie istnieje stabilna materia w równowadze beta. W okolicy gęstości  $0.074 \text{ fm}^{-3}$ , tuż przed spinodalną, jednorodna i neutralna materia rozpada się na dwie fazy (brązowe linie binodalne). W związku z tym gęstość krytyczna  $n_c(K_\mu)$ , w której  $K_\mu = 0$  jest zawsze nieco mniejsza niż jej binodalny odpowiednik  $n_c(1 \leftrightarrow 2)$ , czyli punkt, w którym rozpoczyna się separacja faz. Powyższy schemat koegzystencji fazy neutronowej i protonowej odpowiada dokładnie opisowi wewnętrznej skorupy gwiazdy neutronowej, gdzie neutrono-nadmiarowe jądra atomowe tworzą sieć krystaliczną, zanurzoną w cieczy zdegenerowanych neutronów i elektronów [Baym71]. Gęstość, przy której zanika taka sieć na rzecz swobodnych nukleonów stanowi dolny brzeg skorupy gwiazdy  $n_{edge}$ . Jest to wielkość bardzo ważna z obserwacyjnego punktu widzenia, gdyż przy danym równaniu stanu określa podstawowe parametry skorupy, takie jak grubość, masa czy udział w całkowitym momencie bezwładności. Parametry skorupy są bardzo wrażliwe na  $n_{edge}$ , stąd nawet, jeśli dotychczasowe obserwacje gwiazd neutronowych dają jedynie ich bardzo przybliżone oszacowania, to dokładne określenie punktu przejścia rdzeń-skorupa jest istotne. Zarówno  $n_c(K_\mu)$ , jak i  $n_c(1 \leftrightarrow 2)$ , określają w przybliżony sposób dolny brzeg skorupy, ze względu na

brak uwzględnienia oddziaływań kulombowskich między naładowanymi fazami. W rozważaniach dotyczących stabilności materii, w której pojawiają się oddziaływania elektromagnetyczne, konieczne jest uwzględnienie skończonego przestrzennego rozmiaru fluktuacji gęstości ładunku. Musimy założyć teraz, że poszczególne gęstości cząstek zależą od położenia  $\mathbf{r}$ , a całkowita energia będzie wtedy funkcjonalem gęstości  $n_i(\mathbf{r})$ . W przybliżeniu statycznym energia związana z niejednorodnościami gęstości ładunku wynosi

$$E_C = \frac{1}{2} \int d^3r_1 d^3r_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad (4.14)$$

gdzie  $\rho(\mathbf{r}) = e(n_p(\mathbf{r}) - n_e(\mathbf{r}))$ , a całkowanie odbywa się po całej objętości  $V$  układu. W podejściu termodynamicznym (przybliżenie objętościowe) energia materii nukleonowo-elektronowej zależała jedynie od lokalnych gęstości  $n_n, n_p, n_e$ . Z chwilą gdy  $n_i$  może się zmieniać od punktu do punktu, należy również wziąć pod uwagę skończony zasięg oddziaływań jądrowych. Efekt ten można uwzględnić w funkcjonale gęstości poprzez wprowadzenie gradientów  $\nabla n_i(\mathbf{r})$ . Jest to tzw. różniczkowe lub rozszerzone przybliżenie Thomasa-Fermiego (ETF) zaproponowane przez Bethego [Bethe68]

$$E_{ETF} = E_{loc}(n_n, n_p, n_e) + \int \left[ \frac{1}{2} D_{nn} (\nabla n_n)^2 + \frac{1}{2} D_{pp} (\nabla n_p)^2 + D_{np} \nabla n_n \cdot \nabla n_p \right] d^3r, \quad (4.15)$$

gdzie  $E_{loc}$  to gęstość energii nukleonów i leptonów (w tym wypadku tylko elektronów) w przybliżeniu objętościowym,  $E_{loc} = (\varepsilon_N + \varepsilon_e)V$  (4.1). Parametry  $D_{ij}$  są tak dobrane, aby poprawnie odtwarzać własności statyczne (min. profil gęstości jąder). Rozważając stabilność jednorodnej fazy badamy zaburzenia wokół wartości średnich gęstości poszczególnych cząstek  $n_i \rightarrow n_i + \delta n_i(\mathbf{r})$ . Metodę taką przyjęli autorzy pracy [Baym71]. Wtedy przyrost całkowitej energii  $E = E_{ETF} + E_C$  związany z zaburzeniami  $\delta n_i(\mathbf{r})$  wynosi

$$\delta E = \int d^3r [\mu_n \delta n_n + \mu_p \delta n_p + \mu_e \delta n_e] + \int d^3r \frac{\delta^2 E}{\delta n_i(\mathbf{r}) \delta n_j(\mathbf{r})}. \quad (4.16)$$

Ponieważ rozważamy fluktuacje w równowadze beta oraz przy zachowaniu ładunku i liczby barionowej  $\int d^3r (n_p + n_n) = \text{const}$ ,  $\int d^3r (n_p - n_e) = 0$ , to w wyrażeniu na  $\delta E$  pozostają jedynie wyrazy drugiego rzędu. Wygodnie jest wprowadzić transformaty Fouriera dla fluktuacji  $\delta n_i(\mathbf{r})$ , co pozwoli zbadać niestabilność poszczególnych modów. Wtedy zmianę energii określa macierz stabilności

$$\frac{\delta^2 E}{\delta n_i(\mathbf{q}) \delta n_j(\mathbf{q})^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_p}{\partial n_p} + D_{pp} q^2 + \frac{4\pi e^2}{q^2} & \frac{\partial \mu_p}{\partial n_n} + D_{pn} q^2 & -\frac{4\pi e^2}{q^2} \\ \frac{\partial \mu_p}{\partial n_n} + D_{pn} q^2 & \frac{\partial \mu_n}{\partial n_n} + D_{nn} q^2 & 0 \\ -\frac{4\pi e^2}{q^2} & 0 & \frac{\partial \mu_e}{\partial n_e} + \frac{4\pi e^2}{q^2} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Jest ona analogonem hesjanu dla układu wieloskładnikowego (2.52). W zerowej temperaturze i przy zaniedbaniu przyczynków gradientowych  $D_{ij}$  oraz energii kulombowskiej macierz (4.17) przechodzi w  $\mathcal{H}(\varepsilon(n_p, n_n, n_e))$ . Dodatniość wyznacznika głównego macierzy (4.17) jest wyrażona równaniem

$$v(q) = v_0 + \beta q^2 + \frac{4\pi e^2}{q^2 + k_{TF}^2} > 0, \quad (4.18)$$

gdzie wielkość  $v_0$  przedstawia część niezależną od rozmiaru fluktuacji  $q$

$$v_0 = \frac{\partial \mu_p}{\partial n_p} - \frac{(\partial \mu_p / \partial n_n)^2}{(\partial \mu_n / \partial n_n)} = \left( \frac{\partial \mu_p}{\partial n_p} \right)_{\mu_n, \mu_e}. \quad (4.19)$$

Daje ona dominujący wkład do  $v(q)$  i w rzeczywistości reprezentuje przybliżenie objętościowe. Stosując tożsamości termodynamiczne można wykazać, że

$$v_0(n) = K_\mu \frac{u_{xx}}{n^2} \left( \frac{\partial \mu_n}{\partial n_n} \right)_{n_p}^{-1}, \quad (4.20)$$

gdzie  $u_{xx}$  to nic innego, jak energia symetrii, która jest dodatnia w niskich gęstościach. Podobnie, podatność neutronów  $\left( \frac{\partial \mu_n}{\partial n_n} \right)_{n_p}$  jest zawsze dodatnia<sup>4</sup>. Zatem warunek stabilności termodynamicznej  $K_\mu > 0$  jest dokładnie równoważny  $v_0 > 0$ . Drugi składnik w (4.18), określony przez parametr  $\beta = D_{pp} + 2D_{np}\zeta + D_{nn}\zeta^2$ ,  $\zeta = -\left( \frac{\partial \mu_p}{\partial \mu_n} \right)_{n_p}$  odpowiada za energię związaną z narastaniem gradientów, czyli formowaniem się powierzchni międzyfazowej. Trzeci człon przedstawia oddziaływanie kulombowskie, które w ośrodku jakim jest gaz elektronowy, okazuje się mieć skończony zasięg. Potencjał kulombowski, jest ekranowany - staje się efektywnie potencjałem Yukawy o zasięgu  $2\pi k_{TF}^{-1}$ , gdzie wektor falowy Thomasa-Fermiego wynosi  $k_{TF}^2 = \frac{4e^2}{\pi} \mu_e^2$ . Wielkość  $v(q)$  można też nazwać potencjałem efektywnym dla protonów, gdyż ponownie korzystając z zachowania liczby barionowej i ładunku, zmianę energii można wyrazić jednoznacznie przez fluktuacje gęstości protonów

$$\delta E = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q}) |\delta n_p(\mathbf{q})|^2 \quad (4.21)$$

i tym samym znikanie  $v(q)$  oznacza tendencję do narastania zagęszczeń protonów o rozmiarze  $q^{-1}$ . Obydwa, zależne od  $q$  składniki w (4.18) powodują, że  $v(q) > v_0$ , czyli przyczynki te mają charakter stabilizujący materię. Gęstość krytyczna wyznaczona z uwzględnieniem efektów *finite-size* będzie zawsze niższa niż wyznaczona z rozważań czysto termodynamicznych. Przyrównanie  $v(q)$

<sup>4</sup>Mimo różnych intrygujących doniesień [Marques01], jak dotąd nie potwierdzono eksperymentalnie klasteryzacji neutronów. Również rachunki teoretyczne nie przewidują stanów związanych samych neutronów [Pieper03, Lazauskas05].

do zera daje gęstość krytyczną zależną od rozmiaru fluktuacji. Jak się okazuje, funkcja  $v(q)$  ma zawsze minimum ze względu na  $q$ , czyli istnieje jeden mod, najbardziej niestabilny, który jako pierwszy prowadzi do powstania klastrów protonowych:

$$Q^2 \equiv q_{min}^2 = \left( \frac{4\pi e^2}{\beta} \right)^{1/2} - k_{TF}^2. \quad (4.22)$$

Ostatecznie gęstość krytyczna,  $n_c(Q)$  to gęstość przy której  $v(Q) = 0$  co daje nam warunek:

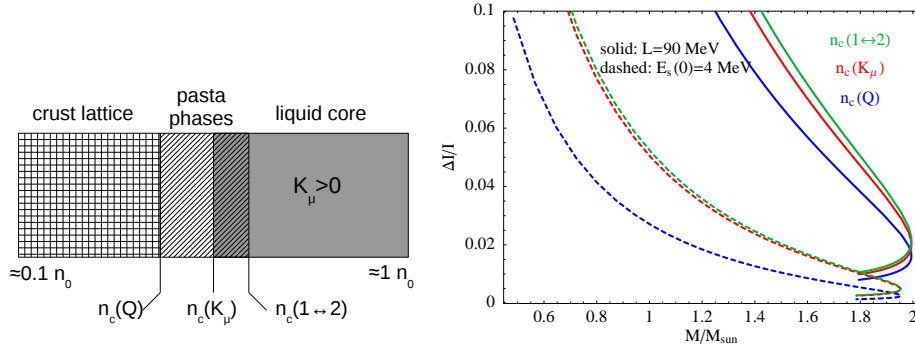
$$v(Q) = v_{min} = v_0 + 2(4\pi e^2 \beta)^{1/2} - \beta k_{TF}^2. \quad (4.23)$$

Na ile istotne jest uwzględnienie efektów związanych ze skończonym rozmiarem fluktuacji? Ilościowe wyniki dla kilku wybranych modeli przedstawia Tabela 4.1. Jak można zauważyć poprawki *finite-size* obniżają gęstość krytyczną o

Tabela 4.1: Różne gęstości krytyczne dla wybranych modeli jądrowych.

model	$n_c(Q)$	$n_c(K_\mu)$	$n_c(1 \leftrightarrow 2)$
L=40 MeV	0.101	0.108	0.113
60	0.092	0.100	0.103
90	0.088	0.101	0.102
120	0.111	0.139	0.143
$E_s(0)=0$ MeV	0.0817	0.0931	0.0943
4	0.0537	0.0648	0.0648
8	0.0306	0.0351	0.0353
12	0.0210	0.0234	0.0258

5% - 20% w stosunku do punktu spinodalnego  $n_c(K_\mu)$ . Z kolei punkt binodalny  $n_c(1 \leftrightarrow 2)$  jest nieco wyżej. Poprawka do  $n_c(K_\mu)$  pozostaje na poziomie kilku procent. Wydaje się, że  $n(Q)$  przedstawia bardziej realistyczną ocenę rzeczywistego przejścia rdzeń-skorupa niż pozostałe dwie gęstości, ponieważ uwzględnia ważną energię kulombowską. Należy jednak pamiętać, że  $n_c(Q)$  jest jedynie wynikiem analizy stabilności fluktuacji. Dla pełnego obrazu konieczne jest uwzględnienie formacji układu dwufazowego, w którym energia kulombowska została poprawnie uwzględniona. Analiza termodynamiczna pokazuje, że stabilny układ dwufazowy ma energię mniejszą niż układ jednofazowy w obszarze pomiędzy  $n_c(K_\mu)$  a  $n_c(1 \leftrightarrow 2)$  ( $\rightarrow$  dyskusja równania van der Waalasa). Poprawki, gradientowa i kulombowska, przesuwały gęstość krytyczną w dół, podczas gdy rozdzielenie faz - w górę. Traktując  $n_c(Q)$ , jako odpowiednik punktu spinodalnego, należy się spodziewać, że gęstość krytyczna dla powstania układu dwufazowego z uwzględnieniem energii kulombowskiej przesunie się z powrotem w stronę wyższych gęstości.



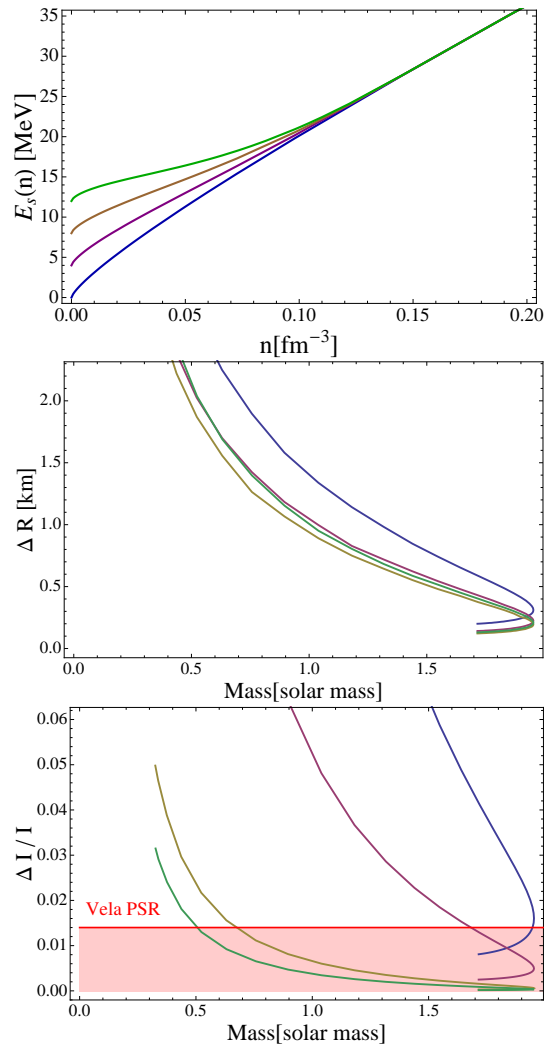
Rysunek 4.3: Po lewej: wzajemne położenie różnych gęstości krytycznych dla przejścia rdzeń-skorupa. Po prawej: wpływ różnych  $n_c$  na udział skorupy w całkowitym momencie bezwładności dla dwóch modeli jądrowych.

Tabela 4.1, oprócz różnych definicji  $n_c$ , porównuje również gęstości krytyczne otrzymane w ramach różnych modeli jądrowych. Wybrano dwie rodziny modeli: w jednej zmieniano nachylenie energii symetrii w punkcie saturacji (parametr  $L$ ), dla drugiej rozważano niezerowe wartości  $E_s$  przy  $n \rightarrow 0$ . Szczegóły parametryzacji przedstawia praca [Kubis12]. Wyniki wskazują, że w analizie przejścia rdzeń-skorupa bardziej istotne są różnice pomiędzy różnymi modelami jądrowymi niż niejednoznaczności związane z różnymi gęstościami krytycznymi. Niemniej jednak trzeba je mieć na uwadze, gdyż nawet te niewielkie różnice przekładają się na duże zmiany w parametrach skorupy gwiazdy. Do jakiego stopnia przyjęcie różnych  $n_c$ , jako brzegu skorupy, zmienia jej obserwabę, przedstawia prawy panel na Rys. 4.3, gdzie widać udział skorupy w całkowitym momencie bezwładności  $\Delta I/I$ , w zależności od masy gwiazdy. Różne kolory odpowiadają różnym gęstościom krytycznym dla dwóch wybranych modeli jądrowych z Tabeli 4.1.

Analiza stabilności fluktuacji jednorodnej materii pozwala jedynie na określenie punktu, poza którym nie istnieje układ jednofazowy, przez co rozumiemy ciekłe jądro gwiazdy. W ten sposób dostajemy dolne ograniczenie na grubość skorupy. Obserwacje zjawiska gliczingu pulsarów pozwalają, przy pewnych założeniach co do modelu zjawiska, które nie zostało dotąd wyjaśnione, oszacować udział skorupy w całkowitym momencie bezwładności gwiazdy. Praca [Link99] pokazuje, że w przypadku znanego pulsara w gwiazdozbiórze Żagla (ang. Vela pulsar, PSR J0835-4510) dolna granica dla  $\Delta I/I$  wynosi 1.4%. Porównując ten wynik z teoretycznymi przewidywaniami możemy dostać ograniczenia na postać energii symetrii. W pracy [Kubis12] podjęto się systematycznej analizy wpływu kształtu energii symetrii na skorupę gwiazdy. Przykładowy wynik przedstawia Rys. 4.4. Cztery różne postaci energii symetrii, które różnią się tylko w obszarze niskich gęstości w zakresie kilku MeV prowadzą do bardzo dużych różnic skorupowego momentu bezwładności. Czerwo-

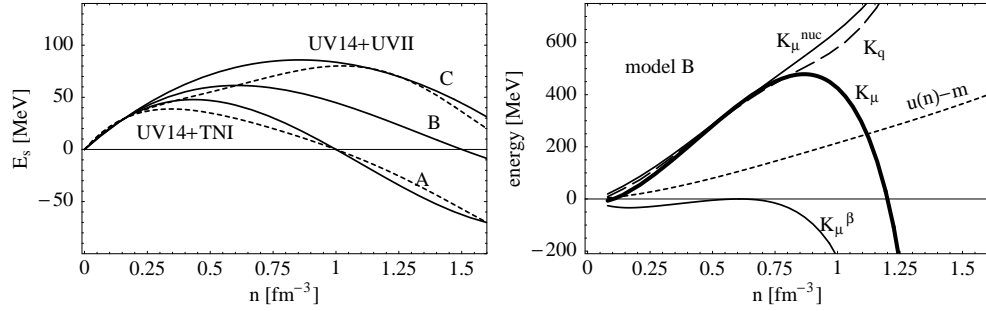
ny obszar przedstawia niezgodne z obserwacjami wartości  $\Delta I/I$ . W konkluzji trzeba powiedzieć, że modele jądrowe, które przedstawiają nieznikające wartości  $E_s(n \rightarrow 0)$ , co sugerują niektóre wyniki eksperymentalne [Kowalski07], są trudne do pogodzenia z obserwacjami. Pulsar w Żaglu musiałby mieć masę dużo poniżej  $1M_\odot$ , a to stoi w sprzeczności ze standardowym scenariuszem narodzin gwiazdy neutronowej w wybuchu supernowej [Woosley02].

Pełniejszy opis struktury wewnętrznej gwiazdy w obszarze między rdzeniem, a skorupą wymaga opisu przejścia od fazy jednorodnej do układu dwufazowego. Można to zrealizować w oparciu o model kropłowy jądra atomowego. Główne założenia takiego podejścia przedstawia praca [Baym71]. Dostępna objętość układu jest podzielona na elementarne, neutralne fragmenty, tzw. komórki Wignera-Seitza. W każdej komórce znajduje się dodatni naładowany klaster protonowy - jądro o wysokiej zawartości neutronów. Takie jądro w próżni jest niestabilne ze względu na rozpad beta, teraz jednak ze względu na otaczający je gaz zdegenerowanych neutronów rozpad beta jest blokowany. Stabilność całej struktury, podobnie jak w przypadku zwykłych jąder w modelu kropłowym, zapewnia konkurencyjne działanie energii powierzchniowej, dążącej do kontrakcji klastra oraz energii kulombowskiej, która rozpycha protony. Komórka Wignera-Seitza powinna być kostką o periodycznych warunkach brzegowych tak, aby zapewnić ekstensywność energii w skali makro. Periodyczne warunki brzegowe powodują jednak znaczną komplikację w opisie. Stąd w pracy [Baym71] założono, że komórka ma sferyczny kształt ze znikającym gradientem potencjału elektrycznego na brzegu. Efektywnie oznacza to, że całość objętości układu jest wypełniona nieoddziałującymi komórkami Wignera-Seitza. Takie podejście zaniedbuje energię sieci krystalicznej. Energię tę dodaje się jako osobny składnik, będący wynikiem rachunków dla kulombowskiej sieci ładunków punktowych [Coldwell60]. Proste założenia modelu kropłowego pozwalają na opis klastrów o niesferycznym kształcie [Ravenhall83]. W miarę wzrostu gęstości jądra zbliżają się do siebie i można oczekiwać, że będą się wydłużać i łączyć w większe struktury o postaci cylindrów i płaszczyzn. Są to tzw. fazy makaronowe (*pasta phases*), nazwane tak przez swoje podobieństwo do różnych rodzajów włoskiej "pasty", jak *gnocchi* - sferyczne klastry, *spaghetti* - cylindry, *penne* - cylindry puste w środku, czy *lasagne* - płaszczyzny. Zakres gęstości, w jakim występują fazy makaronowe silnie zależy od modelu oddziaływań użytego do ich opisu. Na przykład w pracy [Lorenz93] zestawiono model FPS wykorzystujący potencjały realistyczne, oraz model SKM wykorzystujące fenomenologiczny potencjał Skyrma. Dla modelu FPS fazy makaronowe pojawiają się w szerokim zakresie gęstości między  $0.060$  a  $0.095 \text{ fm}^{-3}$ , a dla modelu SKM nie powstają w ogóle - sieć sferycznych jąder przechodzi w fazę jednorodną przy gęstości  $0.0725 \text{ fm}^{-3}$ . Podobny efekt przedstawia praca [Douchin00]. Fazy makaronowe swoją strukturą przypominają ciekłe kryształy. Pod względem mechanicznym stanowią ciecze, gdyż nie przenoszą naprężeń stycznych w kierunku wydłużonych struktur [Pethick98]. Ich obecność czyni



Rysunek 4.4: Kształt energii symetrii  $E_s(n)$  w obszarze niskich gęstości dla czterech różnych modeli jądrowych. Poniżej grubość skorupy  $\Delta R$  i udział skorupy w całkowitym momencie bezwładności  $\Delta I/I$ .





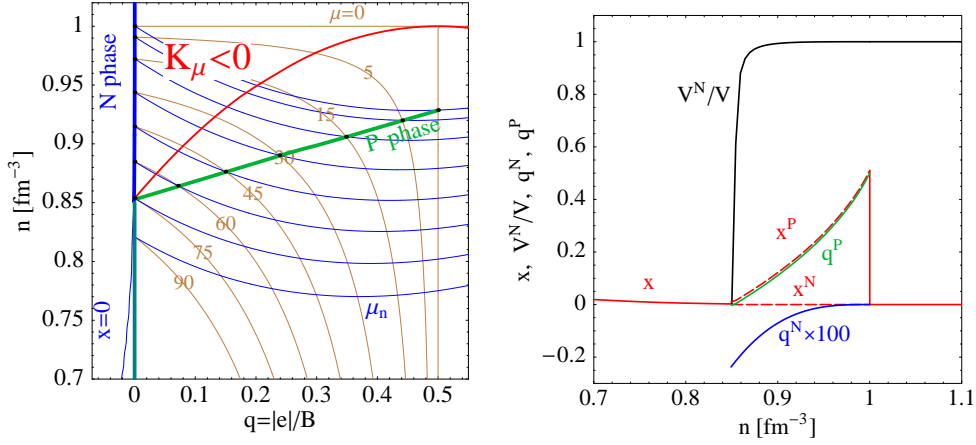
Rysunek 4.5: Po lewej: różne postacie  $E_s(n)$  w obszarze wysokich gęstości. Linie przerywane przedstawiają kształt energii symetrii dla teorii potencjałów realistycznych UV14 z różną siłą trójciałową (UVII lub TNI). Po prawej: analiza stabilności materii dla wybranego modelu, wyszczególniono wkłady do  $K_\mu$ , podobnie jak na Rys. 4.1.

skorupę cieńszą. Mają również wpływ na transport neutrin w gorącej materii protogwiazdy neutronowej [Horowitz04]. Zagadnienie stabilności kształtu takich struktur, czy też nałożenie prawidłowych, to znaczy okresowych warunków brzegowych w modelu kropkowym, stanowi odrębny problem. Wstępne wyniki dotyczące takiej analizy przedstawia praca [Kubis13].

Zagadnienie deformacji jąder i zaniku sieci krystalicznej, jest również badane w innych ujęciach, stosuje się podejście kwantowe Hartree-Focka [Gogelein07], dynamikę molekularną [Dorso12] czy relatywistyczną teorię średniego pola [Okamoto11]. Podejścia te wymagają zaawansowanych metod numerycznych oraz dużych mocy obliczeniowych. Omówienie ich wykracza poza tematykę tej pracy. Co warto podkreślić, prezentowane przez nie wyniki jakościowo pozostają w zgodzie z przewidywaniami prostego i intuicyjnego modelu kropkowego.

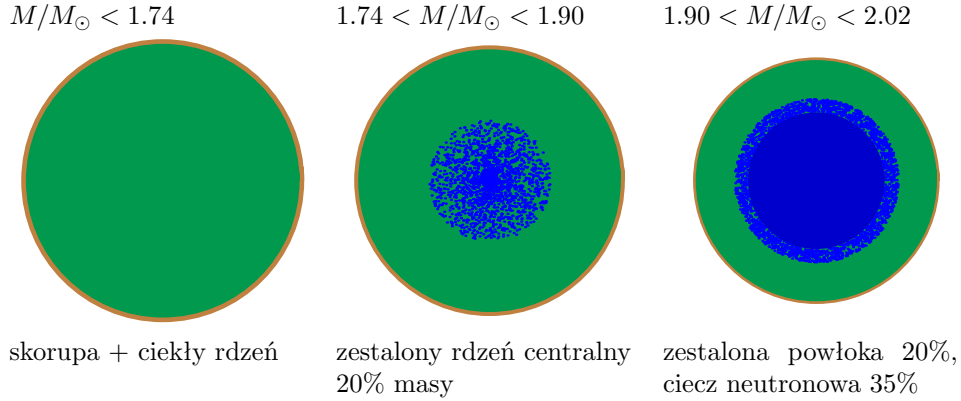
## 4.2. Niestabilność w ciekłym rdzeniu gwiazdy

Niskie wartości energii symetrii, które prowadzą do niestabilności, są również możliwe w wysokich gęstościach. Chociaż w okolicy  $n_0$  energia symetrii ma dodatnie nachylenie i większość modeli przewiduje jej monotoniczny wzrost, to istnieją modele oddziaływań, w których  $E_s$  ma maksimum, po czym spada z gęstością. Wtedy również jednorodna materia może stać się niestabilna w wysokich gęstościach i dojdzie do separacji faz. Tego rodzaju zachowanie jest charakterystyczne dla teorii wykorzystujących potencjały realistyczne, gdzie konieczne jest uwzględnienie sił trójciałowych, aby uzyskać odpowiednie parametry punktu saturacji. Siły trójciałowe stanowiące niewielką poprawkę w okolicy  $n_0$  stają się istotne wraz ze wzrostem gęstości i prowadzą do jakościowych różnic w energii symetrii [Wiringa88]. Rys. 4.5 przedstawia postacie energii symetrii wzorowane na wynikach powyższej pracy. Aby uniknąć artefaktów,



Rysunek 4.6: Diagram fazowy w zakresie wysokich gęstości, szczegółowy opis w tekście. Po lewej zawartość protonów i ładunek poszczególnych faz oraz udział objętości fazy neutronowej  $V^N/V$ .

które pojawiają się przy interpolacji punktów będących wynikiem [Wiringa88], zastosowano tu przybliżenie  $E_s$  za pomocą wielomianu [Kubis07a]. Takie zachowanie energii symetrii prowadzi do niestabilności jednorodnej materii w gęstościach znacznie powyżej  $n_0$ , co przedstawia prawy panel na Rys. 4.5. Separacja faz ma identyczny charakter, jak w przypadku przejścia rdzeń-skorupa w niskich gęstościach. Przejście fazowe przedstawia diagram fazowy w płaszczyźnie  $n, q$  na Rys. 4.6 dla wybranego modelu oddziaływań. Konstrukcja przejścia fazowego nie przypomina w tym przypadku konstrukcji Gibbsa, gdzie współistnienie dwóch faz jest wyznaczone warunkami równego ciśnienia i wszystkich potencjałów chemicznych. Powyżej linii spinodalnej (czerwony kolor) materia jest absolutnie niestabilna przy każdej zawartości protonów  $x > 0$ . Wyjątek stanowi materia neutronowo-elektronowa (niebieska linia,  $x = 0$ ), która jest zawsze stabilna. Nie dochodzi w niej do cyklu beta, a jej ściśliwość jest sumą zawsze dodatniej ściśliwości neutronów i elektronów. Dzięki temu, układ może podzielić się na dwie fazy: neutronowo-elektronową i będącą w obszarze stabilności, fazę z protonami. Jednorodnej materii neutralnej odpowiada ciemnozielona linia  $q = 0$ . Przy gęstości krytycznej, która w tym przypadku wynosi ok.  $0.85 \text{ fm}^{-3}$  dochodzi do podziału materii na dwie fazy o różnym ładunku: ujemnej neutronowo-elektronowej (N - gruba, niebieska linia) oraz dodatniej zawierającej  $n, p, e$  (P - gruba, zielona linia). Cienkie linie niebieskie i brązowe to kontury stałego  $\mu_n$  i  $\mu$  potwierdzające równość potencjałów chemicznych neutronu i elektronu w obydwu fazach. Faza (N) szybko zajmuje całą objętość, co przedstawia wykres po prawej stronie w Rys. 4.6. Powyżej gęstości  $n \approx 1 \text{ fm}^{-3}$  faza protonowa zanika całkowicie i całą objętość układu wypełnia



Rysunek 4.7: Wielowarstwowa struktura gwiazdy neutronowej w zależności od jej masy całkowitej. Kolor zielony - jednorodna materia  $n+p+e$ , ciemnoniebieski - jednorodna materia neutronowa  $n+e$ , obszar zakropkowany - układ dwufazowy.

materia czysto neutronowa. Na co warto zwrócić uwagę to fakt, że tego rodzaju separacja faz nie ujawnia się przy testowaniu "standardowej" ściśliwości  $K_q$ . Jak przedstawia prawy panel na Rys. 4.5  $K_q$  jest dodatnia w całym zakresie gęstości i energia na barion  $u(n)$  dla fazy neutralnej ( $q=0$ ) jest wypukła. Badanie  $K_q$  nie określa w pełni wypukłości  $u(n, q)$ , jako funkcji dwóch zmiennych. Ściśliwość  $K_q$  mówi jedynie o stabilności fluktuacji liczby barionowej  $n$  przy braku fluktuacji ładunku. Dla pełnej analizy potrzebne jest testowanie drugiego warunku, czyli  $\chi_p^{-1} > 0$ , bądź wzięcie pod uwagę równoważnej pary warunków stabilności (2.85), czyli  $K_\mu > 0$  i  $\chi_v^{-1} > 0$ . Z tej pary, to właśnie  $K_\mu$  jest bardziej wrażliwa na niestabilność i w pełni ją określa, zgodnie z ogólną dyskusją wzorów (2.87-2.89) przeprowadzoną wcześniej w podrozdziale 2.3.2.

Przedstawione rozważania dotyczą przybliżenia objętościowego tzn. bez uwzględnienia efektów powierzchniowych czy energii kulombowskiej. Uwzględnienie tych efektów wytycza kierunek przyszłych badań tego rodzaju przejścia fazowego. Dokładnie tak samo jak to ma miejsce w przypadku faz makaronowych, które pojawiają się w obszarze przejścia rdzeń-skorupa w zakresie niskich gęstości, można określić rozmiar i kształt powstających wtedy struktur. Należy przypuszczać, że obszar koegzystencji fazowej będzie miał własności mechaniczne ciała stałego podobnie jak skorupa gwiazdy. Z kolei materia neutronowa zachowuje się jak ciecz. W związku z tym może się w niej pojawić zestalony rdzeń lub powłoka zawierając ciecz neutronową, w zależności od masy gwiazdy. Obrazowo przedstawia to Rys. 4.7. Istnienie sztywnego rdzenia gwiazdy neutronowej jest interesujące ze względu na zjawisko precesji czy gliczingu pulsarów oraz emisji fal grawitacyjnych. Zestalenie ciekłego rdzenia gwiazdy było proponowane już w latach 70-tych, kiedy zakładano silne odpychanie między neutronami, które miało prowadzić do ich lokalizacji i w konsekwencji utworzenia kryształu neutronowego [Coldwell72]. Późniejsze,

udoskonalone potencjały jądrowe już nie wskazywały na taką krystalizację neutronów. Separacja faz w powyższym schemacie dotyczy energii symetrii, a więc oddziaływań proton-neutron. Tego rodzaju niestabilność była też sygnalizowana w pracy [Kutschera94] i ma bezpośredni związek z zagadnieniem lokalizacji protonów przedstawionym w pracach [Kutschera93, Kutschera95]. Zlokalizowane protony tworzą sieć krystaliczną, która może utrzymywać spontaniczną polaryzację magnetyczną i w ten sposób być źródłem stałego pola magnetycznego w rdzeniu gwiazdy neutronowej. Można powiedzieć, że klasteryzacja materii protonowej przedstawiona powyżej jest termodynamicznym odpowiednikiem lokalizacji protonów będącej zjawiskiem kwantowym. Tym samym stanowi poparcie przedstawionych tam wyników i hipotez dotyczących ewolucji pola magnetycznego gwiazdy [Szmag10]. Wartością powyższej analizy jest wyczerpujący opis zagadnienia stabilności materii nukleonowej w równowadze beta. Uwzględnia ona wszystkie konieczne warunki stabilności i wzajemnej równowagi fazowej przy konstrukcji przejścia fazowego.

## Podsumowanie

Niniejsza monografia przedstawia zagadnienie stabilności termodynamicznej gęstej materii jądrowej jako ważny element badań teoretycznych nad strukturą wewnętrzną gwiazd neutronowych.

Na początku przedstawiono podstawowe parametry materii jądrowej ze szczególnym uwzględnieniem części zależnej od asymetrii izospinowej. Jak się okazuje, ta część jest szczególnie istotna w rozważaniach dotyczących stabilności materii.

### Dyskusja warunków stabilności

Wychodząc z postulatów dotyczących tego, jak entropia i energia powinny zachowywać się przy podziale układu na części, pokazano że odpowiednie "gęstości" termodynamiczne, takie jak: gęstość energii  $\varepsilon = U/V$ , czy energia na cząstkę  $u = U/N$  powinny być funkcjami wypukłymi swoich zmiennych naturalnych. Poprzez odwołanie się do mechaniki statystycznej wykazano, że abstrakcyjny warunek wypukłości zyskuje interpretację fizyczną - oznacza stabilność fluktuacji energii oraz liczby cząstek. Z tego powodu warunki wypukłości dla gęstości energii wyrażone przez jej drugie pochodne nazywa się warunkami stabilności wewnętrznej. W układzie, w którym występuje  $\alpha$  rodzajów cząstek, gęstość energii jest funkcją  $(\alpha+1)$  zmiennych. Stąd dostajemy dokładnie  $(\alpha+1)$  warunków stabilności, będących warunkami dodatniości poszczególnych podwyznaczników hesjanu z gęstości energii (2.52). Fizycznie warunki stabilności prowadzą do warunków na dodatnie ciepło właściwe, ściśliwość i podatność. Te same warunki stabilności można zapisać na różne sposoby, jak na przykład poprzez wzory (2.53) lub (2.55). W podrozdziale (2.3.1) analizowano wypukłość gęstości potencjałów termodynamicznych - gęstości entalpii, energii swobodnej itp. Zwrócono tam uwagę, że w odróżnieniu od gęstości energii funkcje te nie są w ogólności wypukłe, co nie zawsze jest wyraźnie podkreślone w literaturze. Łamanie któregokolwiek z warunków stabilności wewnętrznej wskazuje na nieograniczone narastanie fluktuacji i jest sygnałem przejścia fazowego. Stabilność układu wielofazowego, oprócz warunków stabilności wewnętrznej dla każdej z faz z osobna wymaga dodatkowo warunków stabilności wzajemnej, wyrażonej przez pierwsze pochodne energii, czyli: ciśnienie, temperaturę i potencjały chemiczne (2.17, 2.18). Powszechnie przyjęło się je nazywać warunkami Gibbsa.

Pojęcie stabilności, zwykle kojarzone z dodatnim ciepłem właściwym i ściśliwością, zmienia nieco swój charakter w kontekście materii gwiazdy neutronowej. Ze względu na silną degenerację gazu występujących w niej cząstek, temperaturę materii można zaniedbać, a jej rolę przejmują potencjały chemiczne. Konsekwencją równowagi beta jest to, że mimo wielu rodzajów cząstek,

które mogą pojawić się w materii gwiazdy, jej stan jest jednoznacznie opisany gęstością liczby barionowej  $n$  i ładunkiem na barion  $q$ . Stąd, w przybliżeniu  $T = 0$ , w warunkach stabilności (2.85) pojawiają się tylko odpowiednie ściślności  $K_i = \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_i$  i podatności  $\chi_i = \left(\frac{\partial q}{\partial \mu}\right)_i$ . Zaletą powyższej dyskusji, zawartej w rozdziale 2, jest wyczerpująca analiza zagadnienia stabilności termodynamicznej. Wychodząc z postulatów dotyczących własności energii i entropii określono liczbę koniecznych i wystarczających warunków stabilności wewnętrznej dla  $\alpha$ -składnikowej, jednorodnej fazy. Wyprowadzono równoważne pary warunków stabilności w przypadku materii gwiazdy neutronowej i pokazano związki między nimi.

### Weryfikacja efektywnych lagranżjanów

W oparciu o warunki stabilności zdefiniowane w podrozdziale 2.3.2 analizowano materię gwiazdy zawierającej kondensat kaonów w ramach modelu chiralnego oraz dwóch różnych modeli wymiany mezonowej. W toku analizy, jej wyniki opublikowano w [Kubis04], okazało się, że niektóre modele oddziaływań silnych mogą być zupełnie niestabilne. W pełnym zakresie zmiennych  $n$  i  $q$  energia na cząstkę nie jest wypukła, co pokazano badając znak podatności  $\chi_P$ . W związku z tym, modeli tych nie można stosować do opisu kondensacji kaonów we wnętrzu gwiazdy neutronowej. Spośród badanych modeli tę własność posiada model chiralny kondensacji i model wymiany mezonowej KPE. Stabilny okazał się model wymiany mezonowej GS, który różni się od KPE sposobem sprzęgania kaonów z nukleonami. Wynik tej analizy, choć ma charakter negatywny, nie pozbawiony jest użyteczności. Dostępne obecnie dane obserwacyjne dla gwiazd neutronowych nie pozwalają na rozstrzygnięcie pomiędzy różnymi, często sprzecznymi sposobami opisu gęstej materii. Monografia niniejsza wskazuje badanie stabilności termodynamicznej jako metodę, która pozwala już na poziomie teoretycznym weryfikować zaproponowany model oddziaływań. Nowym elementem w przedstawionej tu analizie jest wzięcie pod uwagę obydwu koniecznych warunków stabilności. Jak dotąd, stabilność materii w równowadze beta była określana jedynie na podstawie ściślności fazy neutralnej - badano znak  $K_q$  przy  $q = 0$ . Ta wielkość określa stabilność fluktuacji liczby barionowej przy braku fluktuacji ładunku. Po raz pierwszy wprowadzony tu warunek dotyczący podatności  $\chi_P > 0$ , odpowiada stabilności fluktuacji ładunku i to on jest łamany. Autorzy pracy [Pons00] analizując kilka modeli kondensacji kaonów wskazywali na niemożność przeprowadzenia konstrukcji Gibbsa w równaniu stanu dla fazy mieszanej z kondensatem. Dzięki przeprowadzonym tu rozważaniom rozumiemy, że jej prawdziwą przyczyną jest właśnie zupełna niestabilność fazy z kondensatem. Brak wypukłości energii na cząstkę  $u(n, q)$  nie pozwala poprawnie określić ciśnienia koegzystujących faz w układzie.

Z drugiej strony otwarte pozostaje pytanie, jakie cechy lagranżjanu teorii powodują, że w zastosowaniu do gęstej materii nie dają poprawnego opisu.

Badane tu lagranżjany są poprawne w sensie teorii pola - realizują zasadę minimum ze względu na występujące w nich pola mezonowe, natomiast nie prowadzą do poprawnego opisu termodynamicznego. Uwięzienie kwarków powoduje, że w niskich energiach, przy opisie oddziaływań silnych, rezygnujemy z teorii fundamentalnej, jaką jest Chromodynamika Kwantowa, na rzecz efektywnych teorii pola. Chiralny rachunek zaburzeń czy model wymiany mezonowej są przykładami takich efektywnych teorii pola i ich konstrukcja zawiera zawsze pewną dowolność. Poszukiwanie dodatkowych reguł ograniczających tę dowolność jest na pewno wskazane. Niniejsza monografia po raz pierwszy wskazuje na istnienie takich reguł, które oparte są o powszechnie przyjęte postulaty termodynamiki.

### **Rozdzielenie faz w materii gwiazdy neutronowej**

W rozdziale 4 monografii badano standardową (nukleonowo-leptonową) materię gwiazdy pod kątem zdefiniowanych wcześniej warunków stabilności. Pokazano, jak łamanie warunków stabilności oznacza konieczność przejścia fazowego i powstanie układu niejednorodnego, w którym współistnieją dwie fazy o różnej gęstości liczby barionowej jak i ładunku. Taki układ dwufazowy należy interpretować jako dodatnie klastry protonowe zanurzone w ujemnej cieczy neutronowo-elektronowej, co odpowiada strukturze skorupy gwiazdy. Zatem badanie stabilności materii odpowiada poszukiwaniu granicy pomiędzy jednorodnym i ciekłym rdzeniem, a skorupą gwiazdy. Przejście rdzeń-skorupa było już wcześniej analizowane [Baym71, Pethick95]. Jednak dzięki wybraniu pary  $K_\mu > 0$  i  $\chi_v > 0$  jako warunków stabilności, jasnym okazała się rola energii symetrii  $E_s$  (relacje (4.9,4.10)). To właśnie niskie wartości  $E_s$  prowadzą do niestabilności i separacji faz, co pokazano w pracy [Kubis07]. Energia symetrii jest funkcją gęstości i poza jej wartością w punkcie saturacji ( $E_s(n_0) = 30$  MeV) postać  $E_s(n)$  w pełnym zakresie gęstości nie jest znana. Poniżej  $n_0$  energia symetrii spada wraz z gęstością. Tempo jej spadku ma wpływ na położenie punktu niestabilności  $n_c$ , który można interpretować jako granicę między rdzeniem a skorupą gwiazdy. Jak dotąd, obserwacje pulsarów nie pozwalają dokładnie określić grubości skorupy gwiazdy. Niemniej jednak, nawet skąpe dane obserwacyjne dotyczące oszacowania momentu bezwładności skorupy mogą do pewnego stopnia ograniczyć dowolność zależności  $E_s(n)$ . Ważnym wnioskiem jest, że energia symetrii nie może przyjmować wysokich wartości w bardzo niskich gęstościach, jak sugerują niektóre wyniki eksperymentalne, gdyż prowadzi to do zbyt cienkiej skorupy.

Ponadto w rozdziale 4 zwrócono uwagę na tzw. człon kwartyczny  $Q(n)$  w rozwinięciu energii (1.3). Parametr ten przyjmujący wartości na poziomie niepewności eksperymentalnych jest zwykle zupełnie pomijany. Mimo to, w przypadku gwiazd neutronowych, może istotnie przesunąć wartość gęstości krytycznej na niestabilność  $n_c$  (Rys. 4.1), [Kubis08].

Rozszerzeniem termodynamicznych warunków stabilności jest uwzględnienie energii kulombowskiej w opisie przejścia fazowego. Dyskutowano różne spo-

soby określenia przejścia rdzeń-skorupa gwiazdy. Poprawka kulombowska przesuwana  $n_c$  średnio na poziomie 10% (Tabela 4.1), tak więc dominującym czynnikiem przy określaniu grubości skorupy pozostaje energia symetrii [Kubis12].

Ostatni podrozdział, 4.2, przedstawia interesującą możliwość formacji zeskalonego rdzenia gwiazdy neutronowej. Krystalizacja ciekłego rdzenia gwiazdy była już wcześniej proponowana, ale w kontekście materii egzotycznej: kondensacji pionów [Takatsuka76] lub kaonów [Christiansen00]. Tu po raz pierwszy pokazano, że jest ona również możliwa w standardowej materii, o ile tylko energia symetrii przyjmuje odpowiednio niskie wartości w wysokich gęstościach. Scenariusz przejścia fazowego i krystalizacji jest analogiczny, jak w przypadku przejścia rdzeń-skorupa [Kubis07a]. Tego rodzaju rozdzielanie faz jest paralelne do proponowanego wcześniej kwantowego zjawiska lokalizacji protonów [Kutschera93] i stanowi zachętę do kontynuacji badań w tym kierunku. Opisane przejście fazowe w centralnej części gwiazdy prowadzi do bardziej złożonej, wielowarstwowej struktury gwiazdy neutronowej (Rys. 4.7) co nie jest bez znaczenia ze względu na obserwowaną precesję pulsarów i gliczing.

W zakończeniu warto dodać, że mimo iż monografia dotyczy stosunkowo wąskiej dziedziny, jaką jest struktura wewnętrzna gwiazd neutronowych, to ma ona wyraźnie interdyscyplinarny charakter. Przedstawione w niej badania łączą wiedzę z różnych dziedzin, takich jak: fizyka jądrowa, fizyka cząstek elementarnych, mechanika statystyczna i termodynamika czy teoria pola i ogólna teoria względności. W ten sposób może być interesująca dla specjalistów z różnych dziedzin fizyki.



## Bibliografia

- [Bethe68] H. A. Bethe, Phys. Rev. **167** (1968) 879.
- [Baym71] G. Baym, H. A. Bethe and C. Pethick, Nucl. Phys. A **175** (1971) 225.
- [Baym73] G. Baym, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1340.
- [Callen] H. Callen *Thermodynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1960.
- [Chen05] L.-W. Chen, C. M. Ko and B.-A. Li, Phys. Rev. C **72** (2005) 064309.
- [Chen09] L.-W. Chen, B.-J. Cai, C. M. Ko, B.-A. Li, C. Shen and J. Xu, Phys. Rev. C **80** (2009) 014322.
- [Centelles98] M. Centelles, M. Del Estal and X. Vinas, Nucl. Phys. A **635** (1998) 193.
- [Coldwell60] R. Coldwell-Horsfall, A. Maradudin, Jour. of Math. Phys. **1** (1960) 395.
- [Coldwell72] R. L. Coldwell, Phys. Rev. D **5** (1972) 1273,  
V. Canuto and S. M. Chitre, Phys. Rev. D **9** (1974) 1587,  
R. G. Palmer and P. W. Anderson, Phys. Rev. D **9** (1974) 3281.
- [Coleman69] S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, Phys. Rev. **177** (1969) 2239.
- [Christiansen00] M. B. Christiansen, N. K. Glendenning and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. C **62** (2000) 025804.
- [Douchin00] F. Douchin and P. Haensel, Phys. Lett. B **485** (2000) 107.
- [Ducoin07] C. Ducoin, K. H. O. Hasnaoui, P. Napolitani, P. Chomaz and F. Gulminelli, Phys. Rev. C **75** (2007) 065805.
- [Dauxois02] T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, M. Wilkens Eds., Lecture Notes in Physics Vol. 602, Springer, 2002.
- [Ericson92] J. Delorme, M. Ericson, T. E. O. Ericson, Phys. Lett. B **291** (1992) 379  
C. K. Au, G. Baym, Nucl. Phys. A **236** (1974) 500.
- [Glendenning92] N. K. Glendenning, Phys. Rev. D **46** (1992) 1274.

- [Glendenning97] N. K. Glendenning and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. C **60** (1999) 025803.
- [Gogelein07] P. Gogelein and H. Muther, Phys. Rev. C **76** (2007) 024312.  
J. W. Negele and D. Vautherin, Nucl. Phys. A **207** (1973) 298.
- [Hartle75] J. B. Hartle, R. F. Sawyer and D. J. Scalapino, Astrophys. J. **199** (1975) 471.
- [Huang] K. Huang, *Mechanika statystyczna*, PWN, Warszawa 1987.
- [Horowitz04] C. J. Horowitz, M. A. Perez-Garcia and J. Piekarewicz, Phys. Rev. C **69** (2004) 045804.
- [Dorso12] C. O. Dorso, P. A. Gimenez Molinelli and J. A. Lopez, Phys. Rev. C **86** (2012) 055805.
- [Kaplan86] D. B. Kaplan and A. E. Nelson, Phys. Lett. B **175** (1986) 57.
- [Knorren95] R. Knorren, M. Prakash and P. J. Ellis, Phys. Rev. C **52** (1995) 3470.
- [Kowalski07] S. Kowalski, J. B. Natowitz, S. Shlomo, *et.al* Phys. Rev. C **75** (2007) 014601.
- [Kubis04] S. Kubis, Phys. Rev. C **70** (2004) 065804.
- [Kubis07] S. Kubis, Phys. Rev. C **76** (2007) 025801.
- [Kubis07a] S. Kubis, Acta Phys. Polon. B **38** (2007) 3879.
- [Kubis08] ASY-EOS:International Workshop on Nuclear Symmetry Energy at medium energies ,2008, Catania and Militello V.C. (CT) - Italy.  
<http://agenda.ct.infn.it/materialDisplay.py?contribId=11&sessionId=7&materialId=slides&confId=42>
- [Kubis12] S. Kubis and D. E. Alvarez-Castillo, arXiv:1205.6368 [astro-ph.SR].
- [Kubis13] praca w przygotowaniu.
- [Kutschera93] M. Kutschera and W. Wojcik, Phys. Rev. C **47** (1993) 1077.
- [Kutschera94] M. Kutschera, Phys. Lett. B **340** (1994) 1.
- [Kutschera95] M. Kutschera and W. Wojcik, Nucl. Phys. A **581** (1995) 706.
- [Laplace] S. Laplace, Annales de chimie et de physique **3** (1816) 328.
- [Lattimer12] J. M. Lattimer and Y. Lim, Astrophys. J., **771** (2013) 51.

- [Lazauskas05] R. Lazauskas and J. Carbonell, Phys. Rev. C **72** (2005) 034003.
- [Lee98] C.-H. Lee, T. T. S. Kuo, G. Q. Li and G. E. Brown, Phys. Rev. C **57** (1998) 3488.
- [Li08] B.-A. Li, L.-W. Chen and C. M. Ko, Phys. Rept. **464** (2008) 113.
- [Link99] B. Link, R. I. Epstein and J. M. Lattimer, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3362.
- [Lorenz93] C. P. Lorenz, D. G. Ravenhall and C. J. Pethick, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 379.
- [Lyne90] A. G. Lyne and F. Graham-Smith, *Pulsar astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. 1990
- [Marques01] F. M. Marques, M. Labiche, N. A. Orr, J. C. Angelique, L. Axelson, B. Benoit, U. C. Bergmann and M. J. G. Borge *et al.*, Phys. Rev. C **65** (2002) 044006.
- [Migdal71] A. B. Migdal, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61** (1971) 2209.
- [Migdal79] A. B. Migdal, A. I. Chernoutsan and I. N. Mishustin, Phys. Lett. B **83** (1979) 158.
- [Newton] I. Newton, *Philosophicae Naturalis Principia Mathematica*, Vol.II, Sect. VII, Prop.46, London, 1687.
- [Okamoto11] M. Okamoto, T. Maruyama, K. Yabana and T. Tatsumi, Phys. Lett. B **713** (2012) 284.
- [Pethick95] C. J. Pethick, D. G. Ravenhall and C. P. Lorenz, Nucl. Phys. A **584** (1995) 675.
- [Pethick98] C. J. Pethick and A. Y. Potekhin, Phys. Lett. B **427** (1998) 7.
- [Pieper03] S. C. Pieper, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 252501.
- [Pons00] J. A. Pons, S. Reddy, P. J. Ellis, M. Prakash and J. M. Lattimer, Phys. Rev. C **62** (2000) 035803.
- [Porebska10] J. Porebska and S. Kubis, Acta Phys. Polon. B **41** (2010) 2449.
- [Prakash88] M.Prakash, T.L.Ainsworth, J.M.Lattimer, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 2518.
- [Ravenhall83] D. G. Ravenhall, C. J. Pethick and J. R. Wilson, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 2066.

- [Sawyer72] R. F. Sawyer, Phys. Rev. Lett. **29** (1972) 382.
- [Schaffner95] J. Schaffner and I. N. Mishustin, Phys. Rev. C **53** (1996) 1416.
- [Steiner06] A. W. Steiner, Phys. Rev. C **74** (2006) 045808.
- [Szmag10] A. Szmaglinski, M. Kutschera, S. Stachniewicz, W. Wojcik, *Struktura materii gwiazdy neutronowej*, Monografia Politechniki Krakowskiej **389**, 2010.
- [Takatsuka76] T. Takatsuka and R. Tamagaki Prog. Theor. Phys. **55** (1976) 624.
- [Tatsumi96] T. Tatsumi and M. Yasuhira, Nucl. Phys. A **670** (2000) 218.
- [Thorsson94] V. Thorsson, M. Prakash, J. M. Lattimer, Nucl. Phys. A **572** (1994) 693
- [Walecka74] J. D. Walecka, Ann. of Phys. **83** (1974) 491.
- [Weinberg79] S. Weinberg, Physica A **96** (1979) 327.
- [Weise75] W. Weise and G. E. Brown, Phys. Lett. B **58** (1975) 300.
- [Weizsacker35] C. F. V. Weizsäcker, Z. Phys. **96** (1935) 431.
- [Wiringa88] R. B. Wiringa, V. Fiks, A. Fabrocini, Phys. Rev. **C38** (1988) 1010
- [Woosley02] S. E. Woosley, A. Heger, and T. A. Weaver, Reviews of Modern Physics, **74** (2002) 1015.
- [Xu09] J. Xu, L.-W. Chen, B.-A. Li and H.-R. Ma, Phys. Rev. C **79** (2009) 035802.
- [Yakovlev01] D. G. Yakovlev, A. D. Kaminker, O. Y. Gnedin and P. Haensel, Phys. Rept. **354** (2001) 1.

## Streszczenie

Przedstawiona monografia w wyczerpujący sposób przedstawia warunki stabilności termodynamicznej układu wieloskładnikowego i wielofazowego. Wprowadzono różne, lecz równoważne sobie warunki stabilności wewnętrznej i pokazano ich związek z fluktuacjami energii oraz liczby cząstek.

Ogólne rozważania dotyczące stabilności zostały zastosowane w przypadku materii gwiazdy neutronowej. Materia gwiazdy, w przybliżeniu zerowej temperatury, jest układem dwuskładnikowym ze względu na zachowaną liczbę barionową i ładunek, stąd należy uwzględnić dwa, a nie jeden jak się powszechnie przyjmuje, warunki stabilności. Zostały one wyrażone przez dodatnio określoną ściśliwość i podatność. Zastosowanie warunków stabilności w przypadku kondensacji kaonów wskazało na nieznaną wcześniej, zupełną niestabilność niektórych modeli oddziaływań silnych. W tym przypadku, pełne warunki stabilności okazały się być czynnikiem, który już na poziomie teoretycznym pozwala weryfikować dany model.

W odniesieniu do standardowej materii gwiazdy składającej się z nukleonów i leptonów pokazano, że kluczową wielkością określającą jej stabilność jest jądrowa energia symetrii, a dokładniej jej zależność od gęstości. Warunki stabilności wprost pokazują, jak przede wszystkim energia symetrii decyduje o położeniu granicy między ciekłym rdzeniem gwiazdy a jej skorupą. Dzięki temu, można było wykorzystać skąpe dane obserwacyjne dotyczące momentu bezwładności skorupy, by ograniczyć dowolność formuł na energię symetrii w zakresie niskich gęstości.

Eksperymenty akceleratorowe nie pozwalają określić postaci energii symetrii w zakresie wysokich gęstości. Z kolei różne modele teoretyczne prowadzą do jakościowo różnych wyników. Jeśli przyjąć, że energia symetrii przyjmuje odpowiednio niskie wartości to prowadzi to do niestabilności neutralnej materii i pociąga tworzenie się różnoimiennie naładowanych faz. Pokazano, że tego rodzaju przejście fazowe prowadzi do powstania zestalonego rdzenia w centralnej części gwiazdy neutronowej.

## Summary

The monograph presents thermodynamical stability considerations in the context of neutron star matter. The intrinsic and mutual stability conditions were discussed in a complete way in the case of any multicomponent and multiphase system. The various but equivalent forms of the intrinsic stability conditions was derived and their connection to stable fluctuations of energy or particle number was shown as well.

In the following, these general considerations were applied to the neutron star matter. This kind of matter under zero temperature approximation is effectively two-component system because of conserved baryon number and charge. This leads to two stability conditions instead of one as it is usually accepted. The conditions may be expressed in terms of positive compressibility and susceptibility. The dense matter with kaon condensate was tested against those stability conditions. It was shown that some models of kaon condensation are completely unstable and should not be used. It means that stability considerations may reject a given model already on the theoretical level before it is compared with observations.

The standard nucleon-lepton dense matter was also subject of stability tests. The nuclear symmetry energy and its dependence on density appeared to be the key quantity here. The stability conditions show in an apparent way how the symmetry energy determines the crust-core transition in a neutron star. The analysis was used to constraint the symmetry energy form at low densities by use of pulsar observations.

Present terrestrial experiments are not able determine the symmetry energy form at higher densities. Theoretical predictions differs qualitatively. It was shown that if the symmetry takes sufficiently low values it leads to the phase separation and formation of a solid core in the central part of neutron star.

## Podziękowanie

Niniejsza monografia powstała w ramach projektu "The Limits of Scientific Explanation" realizowanego przez Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych w Krakowie i finansowanego przez The John Templeton Foundation.