

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

ANDRZEJ PRYSTAJ

ZADANIA Z HYDROSTATYKI

PODRĘCZNIK DLA STUDENTÓW WYŻSZYCH SZKÓŁ TECHNICZNYCH
DO PRZEDMIOTU: MECHANIKA PŁYNÓW

Wydanie trzecie



Kraków 1999



**PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTW POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ**

Józef Gawlik

**KIEROWNIK SEKCJI SKRYPTÓW
I SKRYPTOWYCH POMOCY DYDAKTYCZNYCH**

Zbigniew Polański



REDAKTOR SERII „Ś”
Bolesław Osuch

SEKRETARZ SEKCJI
Jolanta Wyznakiewicz

RECENZENT
Jerzy Sobota

ADRES REDAKCJI
ul. Warszawska 24
31-155 Kraków

Projekt graficzny okładki
Barbara Skąpska

Wydanie pierwsze — 1993 r.

Wydanie drugie — 1995 r.

ISBN 83-7242-068-8

Z dostarczonego składu druk i oprawę wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Krakowskiej.
Ark. wyd. 11. Ark. druk. 15. Oddano do druku 02.11.1999 r. Podpisano do druku 03.11.1999 r.

Zam. 192/99

Nakład 500+65+18 egz.

Cena zł 18,00



CZĘŚĆ	I	PODSTAWY TEORETYCZNE	5
CZĘŚĆ	II	PRZYKŁADY ZADAŃ I SZCZEGÓŁOWE ROZWIĄZANIA	61
CZĘŚĆ	III	ZBIOR ZADAŃ	171





PODSTAWY TEORETYCZNE

Zasadnicze oznaczenia	7
1. Przedmiot hydrostatyki	9
2. Zwierciadło swobodne cieczy	9
3. Gęstość i ciężar objętościowy cieczy	9
4. Siły działające na ciecz	10
5. Jednostkowe siły masowe	10
6. Definicja ciśnienia	12
7. Ciśnienie atmosferyczne, podciśnienie, nadciśnienie	12
8. Powierzchnia jednakowego ciśnienia	12
9. Siła parcia cieczy	13
10. Różniczkowe równania równowagi cieczy	13
11. Spoczynek bezwzględny cieczy	15
12. Równowaga względna	15
13. Równanie powierzchni swobodnego zwierciadła cieczy	18
14. Obliczanie ciśnienia w danym punkcie cieczy	21
15. Obliczanie siły parcia na ściany o płaskiej powierzchni	24
16. Obliczanie sił parcia na ściany zakrzywione	35
17. Obliczanie parcia w przypadkach równowagi względnej cieczy	43
18. Siła wyporu	43
19. Prawo Archimidesa	52
20. Warunek pływania ciał	52
21. Równowaga ciała częściowo zanurzonego w cieczy. Wysokość metacentryczna	53
Pismiennictwo	57
Skorowidz podstawowych terminów i pojęć nie występujących w tytułach rozdziałów	58



Zagadnienia omówione w podręczniku ujęte są w programie przedmiotu **Mechanika płynów i hydraulika**, wykładanego na Wydziale Inżynierii Sanitarnej i Wodnej Politechniki Krakowskiej.

Zamierzeniem autora pracy było dostarczenie studiującym materiału dydaktycznego, który pomógłby w nabyciu umiejętności rozwiązywania zadań z hydrostatyki. Dwie pierwsze części podręcznika zawierają podstawowe wiadomości teoretyczne oraz liczne przykłady zadań ze szczegółowo omówionymi rozwiązaniami. Część trzecią stanowi zbiór zadań do samodzielnego rozwiązania.

Kolejne wydanie pozostaje bez zmian.

Zasadnicze oznaczenia

- A - powierzchnia
 \vec{a} - wektor przyspieszenia (opóźnienia) w ruchu prostoliniowym
 a_x, a_y, a_z - składowe wypadkowej jednostkowych sił masowych w prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z
 \vec{F} - wektor wypadkowej jednostkowych sił masowych, działających na ciecz
 g - przyspieszenie ziemskie
 h - pionowe zagłębienie punktu pod zwierciadłem cieczy
 L_s - odległość środka ciężkości powierzchni płaskiej od zwierciadła cieczy, mierzona w płaszczyźnie sciany, której fragmentem jest dana powierzchnia
 m - wysokość metacentryczna
 P - parcie cieczy
 P_h - składowa pozioma parcia
 P_v - składowa pionowa parcia
 p - ciśnienie
 p_a - ciśnienie atmosferyczne
 p_o - ciśnienie zewnętrzne (na powierzchni zwierciadła cieczy)
 V - objętość zanurzonej w cieczy części ciała (wyporność)
 W - siła wyporu
 z_s - pionowe zagłębienie środka ciężkości powierzchni płaskiej pod zwierciadłem cieczy
 γ - ciężar objętościowy cieczy
 ρ - gęstość cieczy
 ω - prędkość kątowna

1. Przedmiot hydrostatyki

Hydrostatyka zajmuje się opisem praw rządzących cieczą pozostającą w równowadze, czyli w spoczynku względem przyjętego układu odniesienia.

2. Zwierciadło swobodne cieczy

Charakteryzując się brakiem sprężystości postaciowej, ciecz przybiera zawsze kształt naczynia, w którym się znajduje. W naczyniach otwartych, a także częściowo wypełnionych zbiornikach zamkniętych, formuje się swobodna powierzchnia cieczy zwana **zwierciadłem swobodnym**.

3. Gęstość i ciężar objętościowy cieczy

3.1

Dla cieczy jednorodnych gęstość ρ definiuje się jako stosunek masy cieczy do objętości, która tę masę zawiera. Podstawową jednostką gęstości jest kg/m^3 . Gęstość cieczy zmienia się zależnie od ciśnienia i temperatury.

3.2

Ciężar objętościowy γ można obliczyć z zależności

$$\gamma = \rho g \quad (\text{I.1})$$

Podstawiając gęstość cieczy ρ w kg/m^3 , a przyspieszenie ziemskie g w m/s^2 - otrzymamy ciężar objętościowy wyrażony w N/m^3 .

4. Siły działające na ciecz

Na dowolnie wyodrębnioną część cieczy działają siły zewnętrzne dwojakiego rodzaju: siły powierzchniowe i masowe.

4.1

Siły powierzchniowe są siłami molekularnymi działającymi na powierzchnię zewnętrzną ograniczającą daną masę cieczy. Siły te traktujemy jako rozłożone w sposób ciągły na powierzchni ograniczającej, a ich globalna wartość jest do owej powierzchni proporcjonalna.

Przykładem sił powierzchniowych są siły pochodzące od ciśnienia gazu znajdującego się nad swobodnym zwierciadłem cieczy, siły wywołane naciskiem tłoka na ciecz, etc.

4.2

Siły masowe są wynikiem oddziaływania na ciecz zewnętrznych pól sił, a ich wartość jest proporcjonalna do masy cieczy.

Podstawową siłą masową jest siła ciężkości, będąca skutkiem działania pola grawitacyjnego. Przy zastosowaniu względnych układów odniesienia (np. układu unoszonego z poruszającą się cieczą, związanego z poruszającym się naczyniem) należy uwzględnić masowe siły bezwładności, wynikające z ruchu układu.

5. Jednostkowe siły masowe

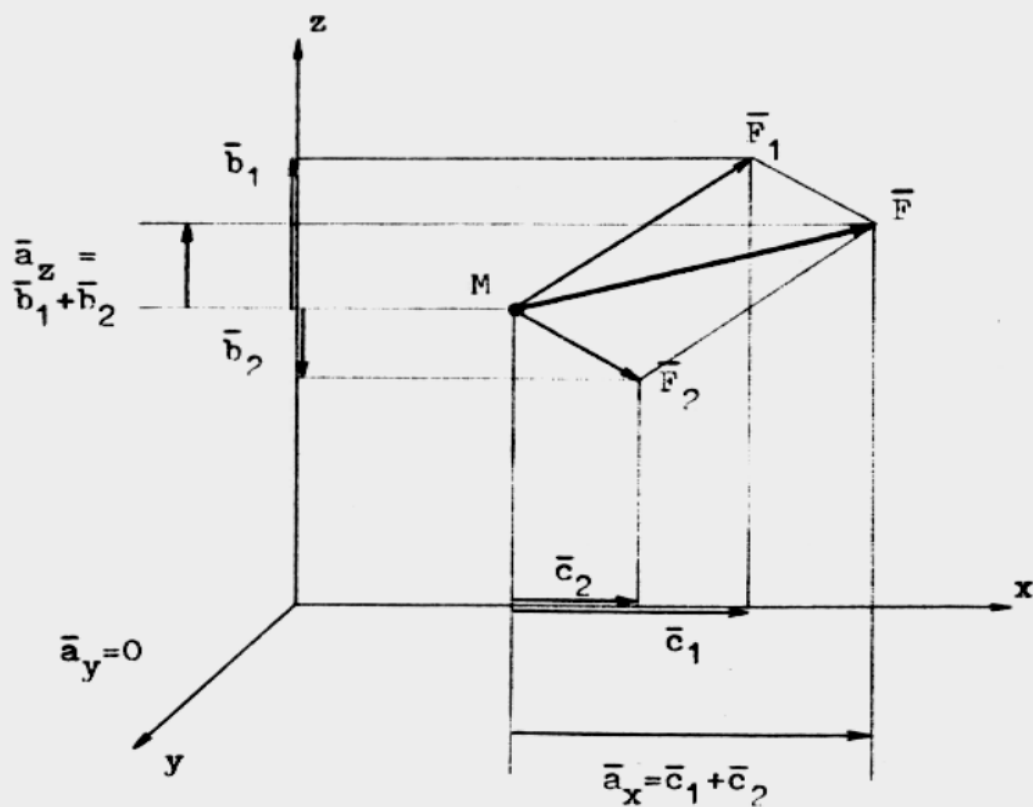
Wartość siły masowej przypadająca na jednostkę masy cieczy nazwiemy jednostkową siłą masową.

Niech na każdy punkt cieczy działają jednostkowe siły masowe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$. W prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z wypadkowa \bar{F} tych sił będzie posiadać składowe a_x, a_y, a_z :

$$\bar{F} = \bar{F} (a_x, a_y, a_z) \quad (I.2)$$

Korzystając ze znajomości pojęcia "składowa wektora", możemy podać następujące określenia:

- a_x - suma wektorowa rzutów jednostkowych sił masowych na os x prostokątnego układu współrzędnych
- a_y - j.w., lecz na os y układu
- a_z - j.w., lecz na os z (zob. rys. I.1).



Rys. I.1

6. Definicja ciśnienia

Stosunek siły S do powierzchni A , na którą działa ta siła, określa ciśnienie p

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA} \quad (1.3)$$

Napisany wyżej iloraz różnicowy nazywamy ciśnieniem średnim, zaś iloraz różniczek - ciśnieniem w punkcie. Podstawową jednostką ciśnienia w układzie SI jest paskal (Pa), przy czym $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.

7. Cisnienie atmosferyczne, podciśnienie, nadciśnienie

7.1

Cisnienie wywierane przez atmosferę ziemską nazywamy ciśnieniem atmosferycznym i oznaczamy symbolem p_a . Tzw. normalne ciśnienie atmosferyczne wynosi:

$$p_a = 760 \text{ mm Hg} = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} = 1,033 \text{ at} = 1,033 \text{ kg/cm}^2$$

7.2

Założmy, że w zbiorniku z gazem panuje ciśnienie p . Jest to ciśnienie bezwzględne (całkowite) gazu. Jeżeli $p < p_a$, wówczas różnicę ($p_a - p$) nazywa się podciśnieniem; jeżeli $p > p_a$, wówczas różnicę ($p - p_a$) nazywa się nadciśnieniem.

8. Powierzchnia jednakowego ciśnienia

Powierzchnię, na której w każdym jej punkcie panuje jednakowe ciśnienie, nazywamy powierzchnią jednakowego ciśnienia. Powierzchnią taką jest np. powierzchnia swobodnego zwierciadła cieczy w naczyniu.

Na zwierciadle swobodnym cisnienie jest jednakowe, równe przykładowo ciśnieniu gazu zalegającego nad powierzchnią cieczy, tak więc na zwierciadle $p = \text{const}$ (a zatem $dp = 0$).

9. Siła parcia cieczy

9.1

Siła, z jaką ciecz działa na otaczające środowisko, nazywa się parciem. Oblicza się zatem parcie na powierzchnię ciała zanurzonego w cieczy, siłę parcia na ściany zbiornika, na konstrukcje mające styczność z cieczą, itp. Jednostkami parcia są jednostki siły (a więc np. 1 N).

Siłę parcia oznaczamy symbolem P . Z zależności (3) wynika, że

$$dP = p \, dA \quad (I.4)$$

9.2

Parcie wywołane cieczą pozostającą w spoczynku nazywa się parciem hydrostatycznym.

Wektor reprezentujący siłę parcia hydrostatycznego działa zawsze prostopadle do elementu powierzchni, bowiem w warunkach hydrostatyki istnieć mogą wyłącznie naprężenia normalne (naprężenia styczne wiążą się z oporami wywołanymi lepkością cieczy, a w cieczy w spoczynku wpływ lepkości nie występuje).

10. Różniczkowe równania równowagi cieczy

10.1

Jeśli wypadkowa wszystkich sił powierzchniowych i masowych działających na element cieczy równa jest zeru, wówczas mówimy, że ciecz znajduje się w

równowadze, czyli w spoczynku. Fakt ten opisują równania równowagi cieczy, które mają postać

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ a_y &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ a_z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

lub wektorowo

$$\bar{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (\text{I.6})$$

(p oznacza ciśnienie, ρ - gęstość cieczy, symbole \bar{F} oraz a_x , a_y , a_z zostały opisane w rozdziale 5).

10.2

Jeśli równania układu (I.5) pomnożymy odpowiednio przez dx , dy i dz , a następnie dodamy je do siebie stronami, otrzymamy

$$\boxed{dp = \rho (a_x dx + a_y dy + a_z dz)} \quad (\text{I.7})$$

Równanie równowagi cieczy zapisane w tej formie nosi nazwę podstawowego równania hydrostatyki. Wyraża ono zależność między ciśnieniem w punkcie a jednostkowymi siłami masowymi, działającymi na znajdujący się w tym punkcie element cieczy.

10.3

Wprowadźmy do równania (I.7) warunek $dp = 0$ obowiązujący dla powierzchni jednakowego ciśnienia i przeanalizujmy otrzymaną zależność. Wynika z niej, że

powierzchnie jednakowego ciśnienia są w każdym punkcie prostopadłe do wypadkowej sił masowych, działających na ten punkt.

11. Spoczynek bezwzględny cieczy

O spoczynku bezwzględnym mówimy w przypadku, gdy stan równowagi cieczy jest zachowany w każdym przyjętym układzie odniesienia. Przypadek taki ma miejsce wówczas, gdy jedyną siłą masową działającą na ciecz jest siła ciężkości.

Zaznaczmy, że jednostkowa siła ciężkości jest równa co do wartości przyspieszeniu ziemskiemu g i skierowana jest pionowo w dół.

12. Równowaga względna

Gdy w poruszającym się naczyniu z cieczą wszystkie jej czastki pozostają nieruchome względem siebie oraz względem ścian naczynia, wówczas w układzie odniesienia związanym z owym naczyniem (i tylko w tym układzie) ciecz znajduje się w spoczynku. W takiej sytuacji mówimy o równowadze względnej cieczy.

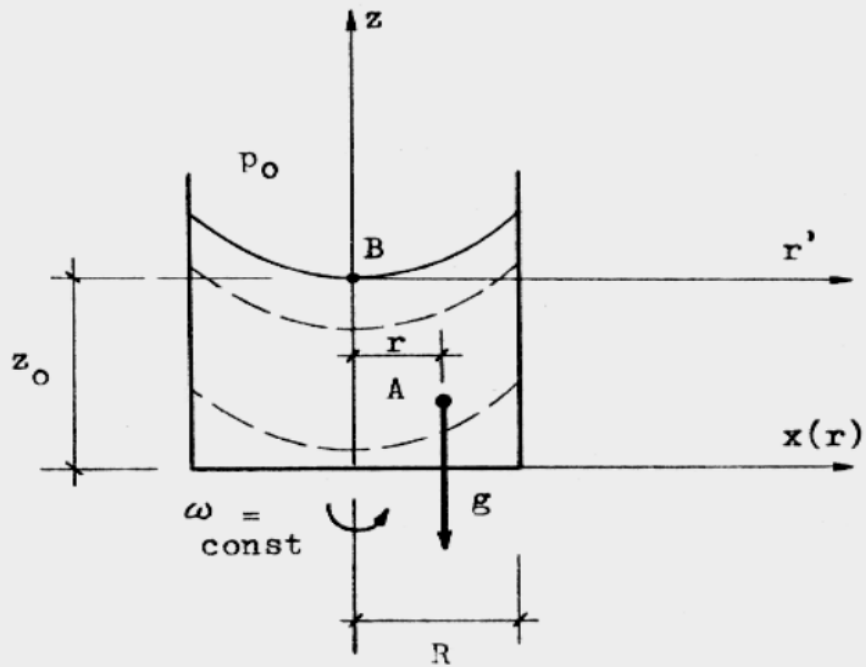
Omówione będą dwa przypadki, w których ma miejsce równowaga względna cieczy.

PRZYPADEK A Naczynie z cieczą wiruje ze stałą prędkością kątową wokół swej pionowej osi

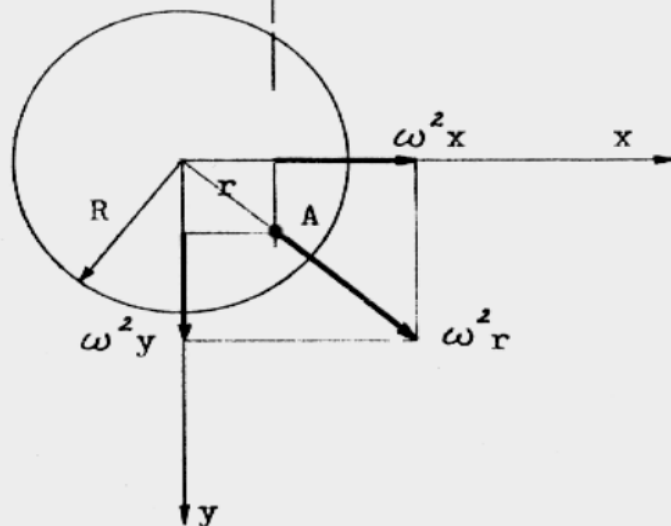
Ciecz w wirującym naczyniu będzie w równowadze względnej tylko wtedy, gdy ruch obrotowy naczynia będzie ruchem jednostajnym, tzn. gdy prędkość kątowa obrotu $\omega = \text{const}$. Każda czastka cieczy będzie wówczas pozostawać w spoczynku względem ścian naczynia. Z tego rodzaju równowagą cieczy możemy mieć w praktyce do czynienia we wszelkiego rodzaju wirówkach.

Na każdy punkt cieczy w naczyniu wirującym działają dwie siły masowe: pionowo - siła ciężkości, poziomo - skierowana na zewnątrz naczynia siła odśrodkowa. Wartości jednostkowe tych sił, tj. przypadające na jednostkę masy cieczy, są równe

- jednostkowa siła ciężkości g
- jednostkowa siła odśrodkowa $\omega^2 r$. (Zgodnie z rys. 1.2 r oznacza promień wiodący punktu, w którym obliczana jest siła).



przekrój poprzeczny
naczynia:

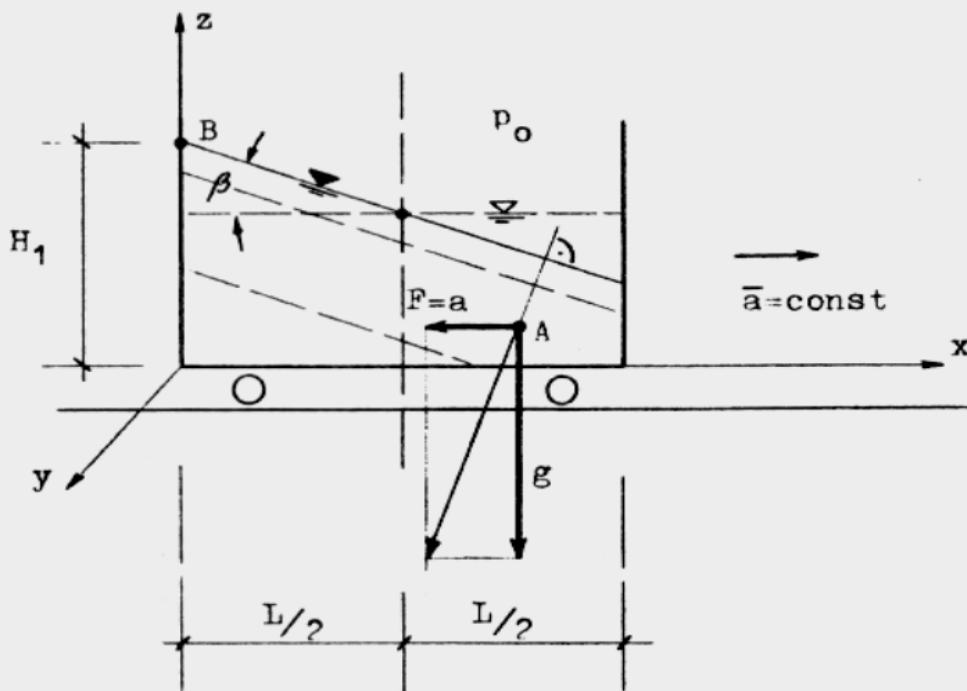


Rys. I.2

PRZYPADEK B Naczynie z cieczą porusza się ruchem jednostajnie zmiennym prostoliniowym

Na każdy punkt cieczy znajdującej się w naczyniu działają dwie jednostkowe siły masowe (zob. rys. I.3):

- jednostkowa siła ciężkości g
- jednostkowa siła bezwładności F_b ; jest to siła równa co do wartości przyspieszeniu (opóźnieniu) naczynia a , zatem $F_b = a$, przy czym wektor siły F_b posiada zwrot przeciwny do zwrotu wektora przyspieszenia (opóźnienia).



Rys. I.3



13. Równanie powierzchni swobodnego zwierciadła cieczy

13.1

S p o c z y n e k b e z w z g l ę d n y

W tym przypadku jedyną siłą masową, jaka działa na ciecz, jest siła ciężkości. Jeśli przyjmiemy pionowy kierunek osi z prostokątnego układu współrzędnych, wówczas $a_x = a_y = 0$, $a_z = \pm g$ (zależnie od zwrotu osi z), a całkowanie równania (I.7) przy warunku $dp = 0$ doprowadzi do równania

$$z = \text{const} \quad (\text{I.8})$$

Oznacza to, że w cieczy pozostającej w spoczynku bezwzględny, czyli znajdującej się pod wyłącznym działaniem siły ciężkości jako jedynej siły masowej, powierzchnie jednakowego ciśnienia - w tym i powierzchnia zwierciadła - są płaszczyznami poziomymi.

13.2

R o w n o w a g a w z g l ę d n a

PRZYPADEK A ¹⁾

Osie x , y , z prostokątnego układu współrzędnych przyjmijmy np. tak, jak pokazano na rysunku I.2 (str.16).

Pamiętajmy, że układ odniesienia musi być związany z naczyniem (obracać się wraz z nim), gdyż tylko względem takiego układu ciecz pozostawać będzie w równowadze.

Z rys. I.2 widać, że $a_x = \omega^2 x$, $a_y = \omega^2 y$, $a_z = -g$. Kładąc ponadto warunek $dp = 0$ i całkując równanie (I.7) otrzymuje się

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - g z = \frac{\omega^2 r^2}{2} - g z = C \quad (\text{I.9})$$

1) Nazwy przypadków równowagi względnej-zgodne z treścią rozdziału 12.

Ponieważ stała całkowania C może mieć dowolną wartość, zależność (I.9) jest równaniem każdej powierzchni jednakowego ciśnienia w naczyniu wirującym. Z równania tego wynika, że w wirującym naczyniu z cieczą powierzchnie jednakowego ciśnienia - w tym i powierzchnia zwierciadła cieczy - mają kształt paraboloidy obrotowej. Ich przekrojem pionowym są parabole o wierzchołku leżącym na osi obrotu naczynia; naszkicowano je na rys. I.2.

Równanie powierzchni zwierciadła określimy jednoznacznie, jeśli wyznaczymy dla niej wartość stałej C . W tym celu wprowadzimy do równania (I.9) warunek brzegowy, tj. współrzędne jednego z punktów zwierciadła cieczy. Niech to będzie punkt B (patrz rys. I.2); w punkcie tym $r = 0$, $z = z_0$, a zatem po podstawieniu do równania (I.9) otrzymujemy

$$C = -g z_0$$

i ostatecznie

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z - z_0 \tag{I.10}$$

Jest to równanie powierzchni swobodnego zwierciadła cieczy w naczyniu wirującym wokół osi pionowej ze stałą prędkością kątową.

Wymaga wyraźnego podkreślenia, że równanie (I.10) obowiązuje wyłącznie wówczas, gdy układ współrzędnych jest przyjęty tak, jak na rysunku I.2: os z pokrywa się z osią wirowania naczynia i skierowana jest pionowo w górę, osie x i y (czyli równoważnie os r) leżą na poziomie dna naczynia.

Załóżmy, że os r układu poprowadzimy na innym - niż poprzednio - poziomie, np. tak, by w trakcie wirowania naczynia przechodziła ona przez najniższy punkt zwierciadła cieczy (na rysunku I.2 os r'). Zmienia się od razu warunki brzegowe, np. dla punktu B zwierciadła będzie teraz $r = 0$, $z = 0$ i z równania (I.9) otrzymamy

$$C = 0,$$

tak więc

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z \tag{I.11}$$

Jest to równanie powierzchni swobodnego zwierciadła cieczy w naczyniu wirującym przy następująco przyjętym układzie współrzędnych: os z pokrywa się z pionową osią wirowania naczynia i skierowana jest pionowo w górę, o-

sie x i y (czyli równoważnie os r) przechodzą przez wierzchołek paraboloidy obrotowej, jaką tworzy zwierciadło cieczy w trakcie wirowania naczynia.

PRZYPADEK B

Układ współrzędnych musimy przyjąć tak, by był on związany z poruszającym się naczyniem, tzn. aby poruszał się wraz z nim, bowiem względem takiego tylko układu ciecz pozostawać będzie w spoczynku.

Ustalmy układ współrzędnych zgodnie z rysunkiem I.3 (str.17). Widac, że $a_x = -a$, $a_y = 0$, $a_z = -g$. Po scałkowaniu równania (I.7) przy warunku $dp = 0$ otrzymamy

$$a x + g z = C \quad (I.12)$$

Z powyższej zależności wynika, że w naczyniu z cieczą, poruszającym się ruchem prostoliniowym jednostajnie zmiennym, powierzchnie jednakowego ciśnienia - w tym i powierzchnia zwierciadła cieczy - są płaszczyznami nachylnymi do poziomu pod kątem

$$\beta = \arctg\left(-\frac{a}{g}\right) \quad 1)$$

(zob. na rys. I.3 linie przerywane oraz linię zwierciadła cieczy).

Wartość stałej C odpowiadająca powierzchni zwierciadła cieczy w naczyniu wyznaczmy przez wprowadzenie do równania (I.12) warunku brzegowego, czyli współrzędnych x i z jednego z punktów zwierciadła. Wybierając np. punkt B (rys. I.3), mamy $x = 0$, $z = H_1$, a więc zgodnie z równaniem (I.12)

$$C = g H_1$$

i ostatecznie

$$a x + g z = g H_1 \quad (I.13)$$

1) Związek otrzymany po wyliczeniu z równania (I.12) współczynnika kierunkowego prostej.

Jest to równanie powierzchni swobodnego zwierciadła cieczy w naczyniu poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym prostoliniowym.

Należy pamiętać, że równanie (I.13) jest słuszne tylko w tym wypadku, gdy układ współrzędnych został przyjęty tak, jak na rysunku I.3. Przy innym usytuowaniu osi układu zmieniają się warunki brzegowe, a co za tym idzie-kon-cowa postać równania.

13.3

Wnioski dotyczące kształtu powierzchni zwierciadła swobodnego cieczy we wszystkich omówionych wypadkach zgodne są z ogólną zasadą podaną w punkcie 10.3.

14. Obliczanie ciśnienia w danym punkcie cieczy

14.1

S p o c z y n e k b e z w z g l ę d n y

Po założeniu, że na powierzchni swobodnego zwierciadła cieczy ciśnienie wynosi p_0 (warunek brzegowy) i po uwzględnieniu, że dla cieczy niescislwej $\rho = \text{const}$ - obustronne całkowanie równania (I.7) doprowadza do wzoru

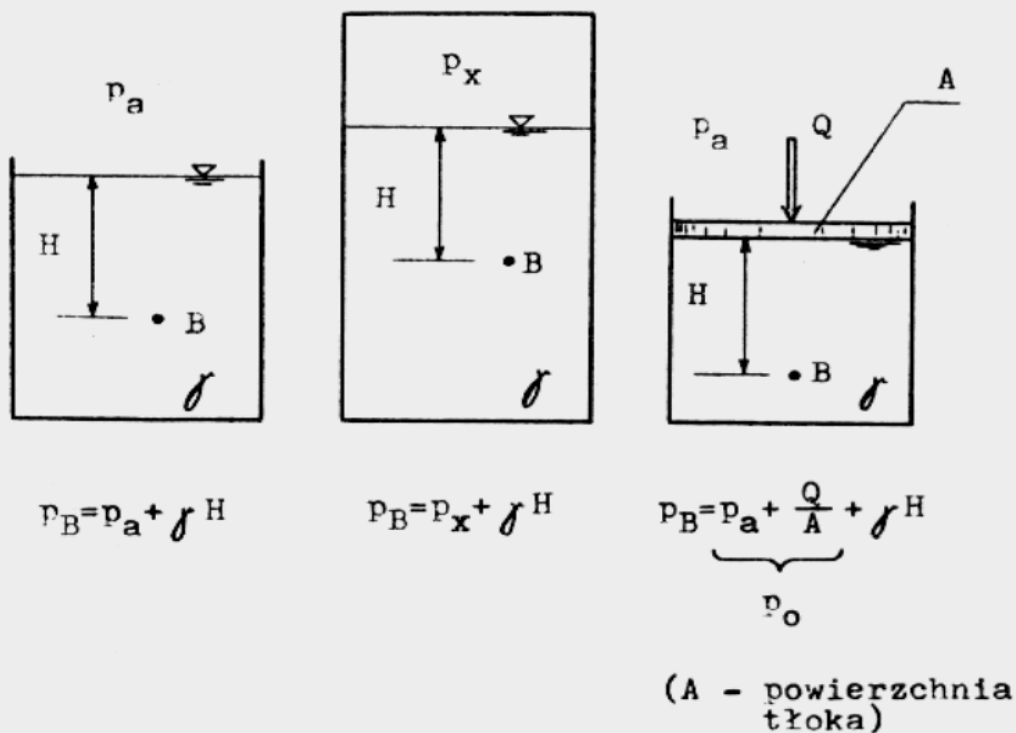
$$p = p_0 + \gamma h$$

(I.14)

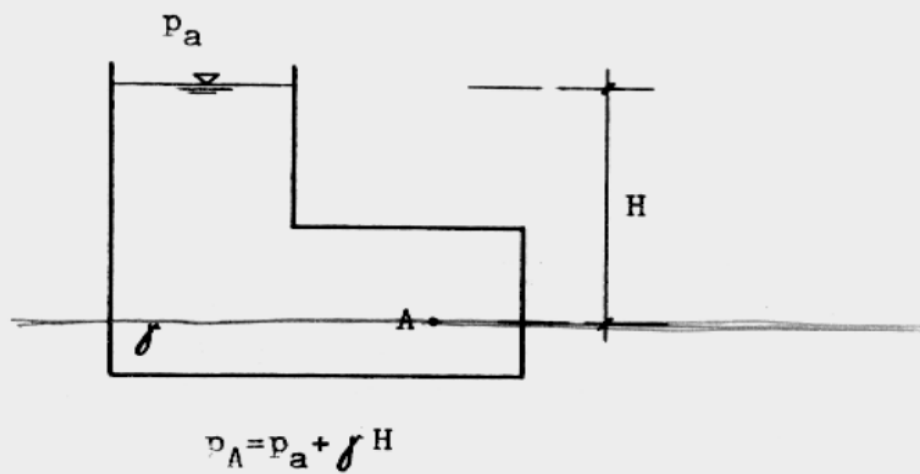
We wzorze tym:

- p_0 - ciśnienie zewnętrzne, panujące na powierzchni zwierciadła cieczy
- h - pionowe zagłębienie punktu, w którym obliczamy ciśnienie, pod swobodnym zwierciadłem cieczy.

Proste przykłady obliczania ciśnienia w określonym punkcie cieczy pokazano na rysunkach I.4 i I.5.



Rys. 1.4



Rys. 1.5

Wzór (I.14) opatrzmy komentarzem.

- Ciśnieniem zewnętrznym p_o może być ciśnienie atmosferyczne p_a w przypadku otwartego zbiornika, dowolne ciśnienie p_x gazu w zbiorniku zamkniętym lub ciśnienie pochodzące od działania tłoka obciążonego siłą skupioną i spoczywającego na powierzchni zwierciadła cieczy (zob. rys. I.4).
- Zagłębienie h danego punktu jest to pionowa odległość tego punktu od poziomu zwierciadła cieczy. Dla korzystających ze wzoru (I.14) uwaga ta jest bardzo istotna, a jej sens pokazuje rys. I.5.
- Ciśnienie p w danym punkcie cieczy obliczone wzorem (I.14) jest ciśnieniem bezwzględnym (całkowitym).
- Wartość iloczynu γh występującego po prawej stronie wzoru (I.14) nazywamy ciśnieniem hydrostatycznym. Jest to ciśnienie, jakie wywiera słup danej cieczy o wysokości h .
- Iloraz p/γ ma wymiar liniowy i określa tzw. wysokość ciśnienia. Jest to wysokość słupa cieczy o ciężarze objętościowym γ , wywierającego u swej podstawy ciśnienie p .

14.2

R ó w n o w a g a w z g l ę d n a

PRZYPADEK A ¹⁾

Ogólną postać równania pozwalającego obliczyć ciśnienie w dowolnym punkcie cieczy otrzymamy po obustronnym scałkowaniu równania (I.7). Jeżeli os z przyjętego układu współrzędnych będzie skierowana pionowo w górę (zob. rys. I.2 na str.16), wówczas $a_x = \omega^2 x$, $a_y = \omega^2 y$, $a_z = -g$ i całkowanie równania (I.7) doprowadzi do zależności

$$p = \rho \left[\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z \right] + C \quad (I.15)$$

¹⁾ Nazwy przypadków równowagi względnej zgodne z treścią rozdziału 12.

PRZYPADEK B

Przyjmijmy układ współrzędnych tak, jak na rysunku I.3 na str.17 (oś z układu skierowana jest pionowo w górę, a zwrot osi x jest zgodny ze zwrotem wektora przyspieszenia czy opóźnienia, jakiemu podlega naczynie). W układzie tym $a_x = -a$, $a_y = 0$, $a_z = -g$ i po scałkowaniu równania (I.7) otrzymamy

$$p = \rho (-a x - g z) + C \quad (\text{I.16})$$

15. Obliczanie siły parcia na ściany o płaskiej powierzchni

Parcie cieczy na płaską powierzchnię A można obliczyć dwiema metodami: graficzno-analityczną lub analityczną.

15.1

M E T O D A G R A F I C Z N O - A N A L I T Y C Z N A

15.1.1

Jeżeli w każdym punkcie powierzchni A odłożymy prostopadle do niej odcinek o długości równej zagłębieniu danego punktu pod swobodnym zwierciadłem cieczy - utworzona zostanie pewna bryła (zob. rys. I.6), nosząca nazwę **bryły parcia**. Ciężar bryły parcia obliczymy mnożąc jej objętość przez ciężar objętościowy cieczy.

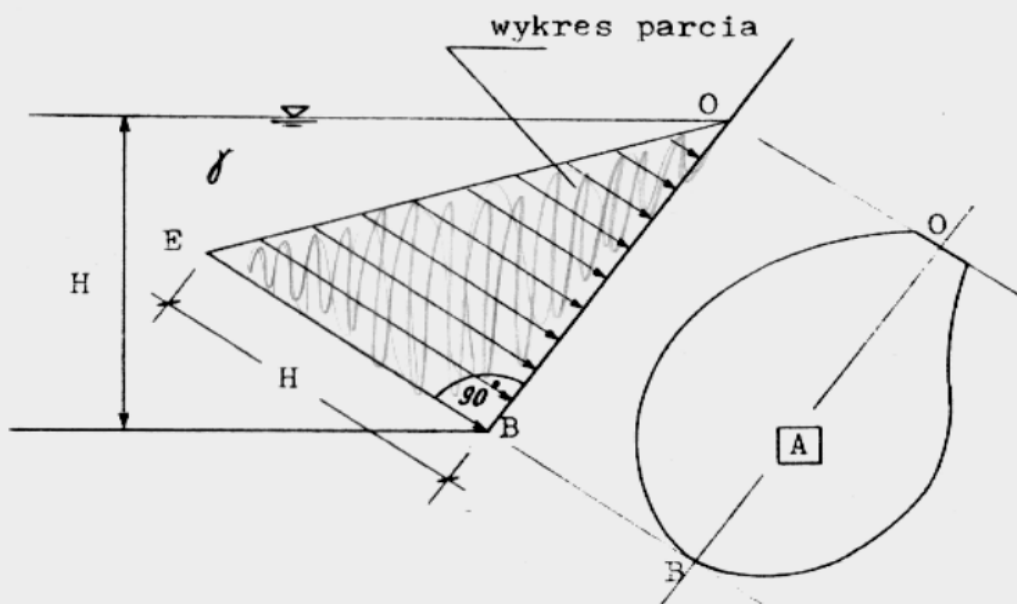
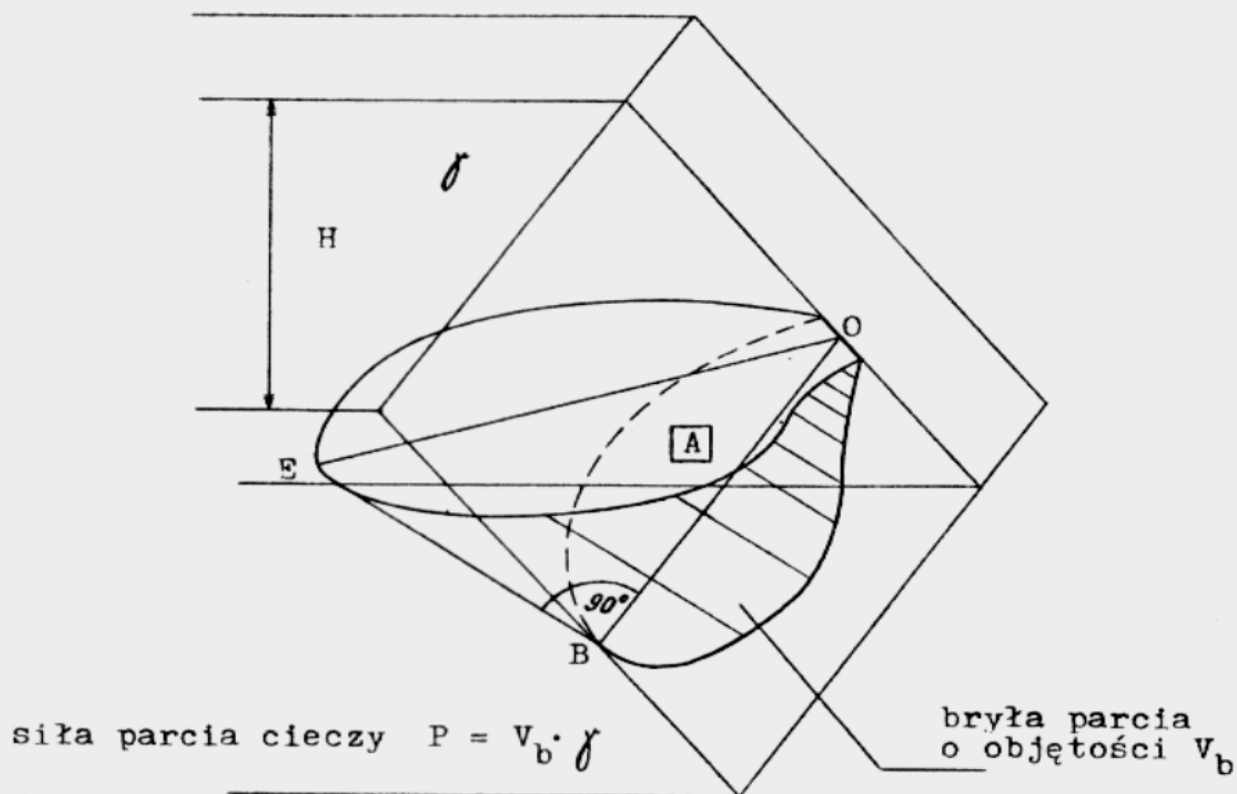
Siła parcia cieczy na daną powierzchnię płaską jest co do wartości równa ciężarowi bryły parcia, skonstruowanej dla tej powierzchni.

Tak więc

$$P = V_b \gamma$$

(I.17)

gdzie V_b oznacza objętość bryły parcia.



Rys. I.6

15.1.2

Pionowy przekrój bryły parcia, którym może być trójkąt lub trapez (zob. rys. I.6 + I.10), nazywamy **wykresem parcia**. W każdym wypadku punkt O przecięcia przeciwprostokątnego boku wykresu parcia z linią przekroju rozpatry-

wanej powierzchni A leżeć musi na poziomie zwierciadła cieczy, ma to być bowiem punkt o zagłębieniu równym zeru.

Wykres parcia pokrywa się zwyczajowo strzałkami. Mają one symbolizować działanie sił parcia na daną powierzchnię, rysuje się je zatem prostopadle do tej powierzchni i ze zwrotem ku niej.

15.1.3

Parcie P obliczone w sposób podany w punkcie 15.1.1 jest siłą pochodzącą od samej tylko cieczy. Chcąc uwzględnić także działanie ciśnienia zewnętrznego p_0 nad zwierciadłem, należy (zob. rys. I.10):

- poziom zwierciadła przesunąć o wartość p_0/γ , tworząc tzw. zwierciadło pozorne (ciśnienie zewnętrzne p_0 zostało w ten sposób zastąpione ciśnieniem dodatkowej warstwy cieczy)
- skonstruować dla rozpatrywanej powierzchni ściany bryły parcia wg opisu podanego w punkcie 15.1.1, przy czym zagłębienia punktów powierzchni liczyć należy względem zwierciadła pozornego
- obliczyć ciężar bryły parcia zgodnie ze wzorem (I.17).

15.1.4

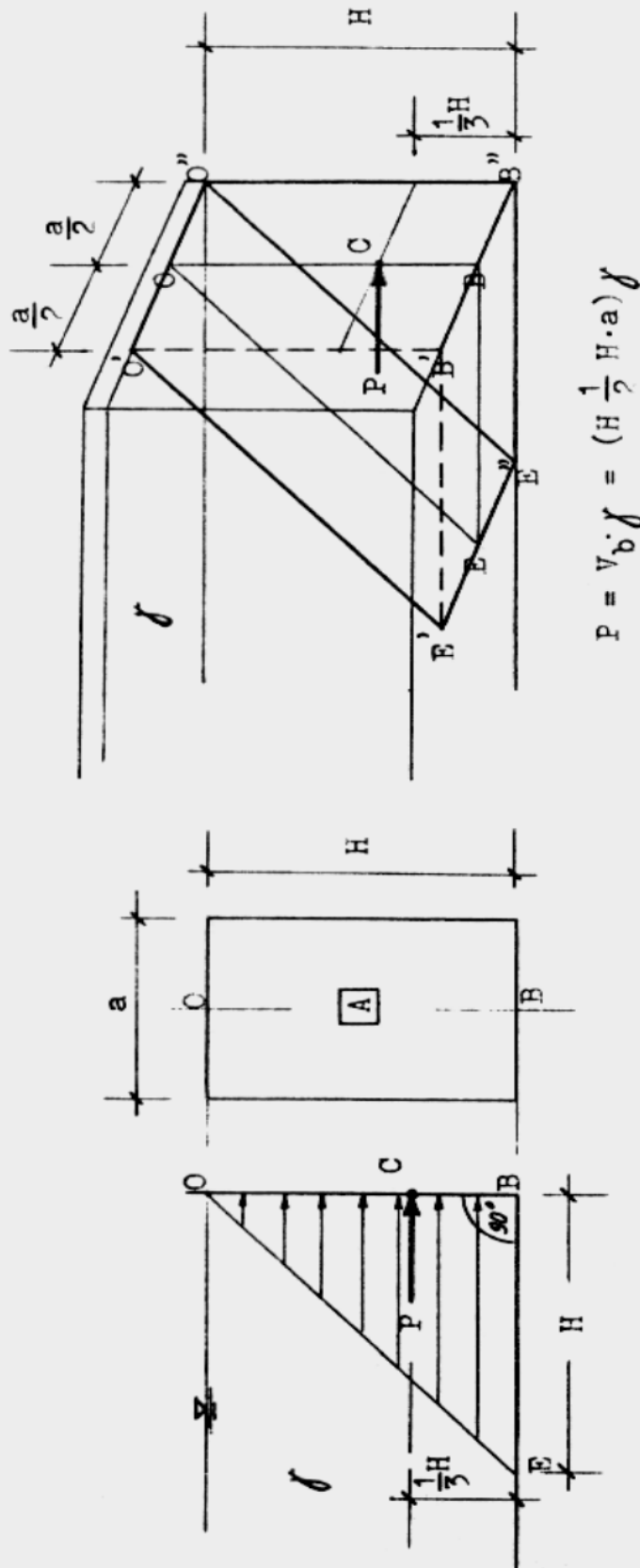
Wektor siły parcia skierowany jest prostopadle do rozpatrywanej powierzchni (zob. punkt 9.2) i przechodzi przez środek ciężkości bryły parcia.

Jeśli powierzchnia, na którą parcie obliczamy, jest prostokątem o poziomej podstawie, wówczas środek ciężkości bryły parcia leży na tej samej wysokości co środek ciężkości wykresu parcia (rys. I.7 i I.10).

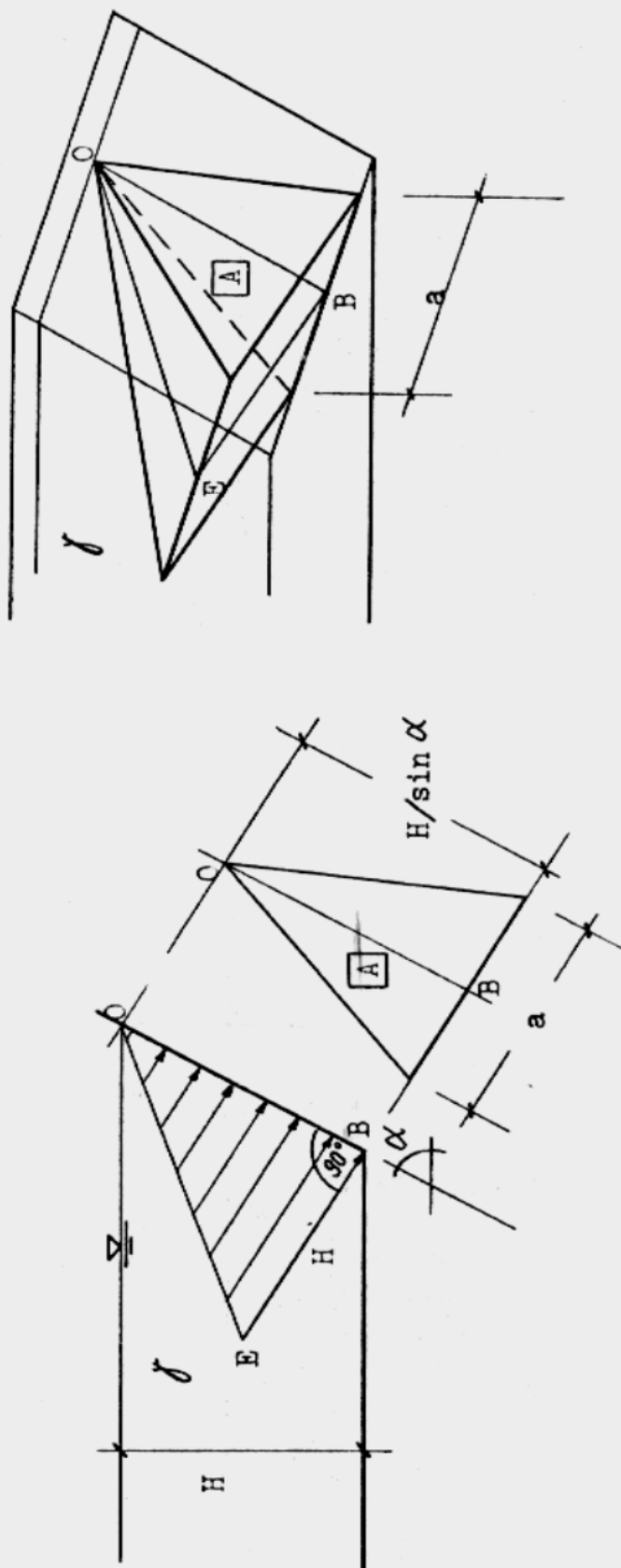
Punkt C, w którym wektor siły parcia przebija rozpatrywaną powierzchnię A, nazywa się **środkiem parcia**. Jest on prostokątnym rzutem środka ciężkości bryły parcia na powierzchnię A.

15.1.5

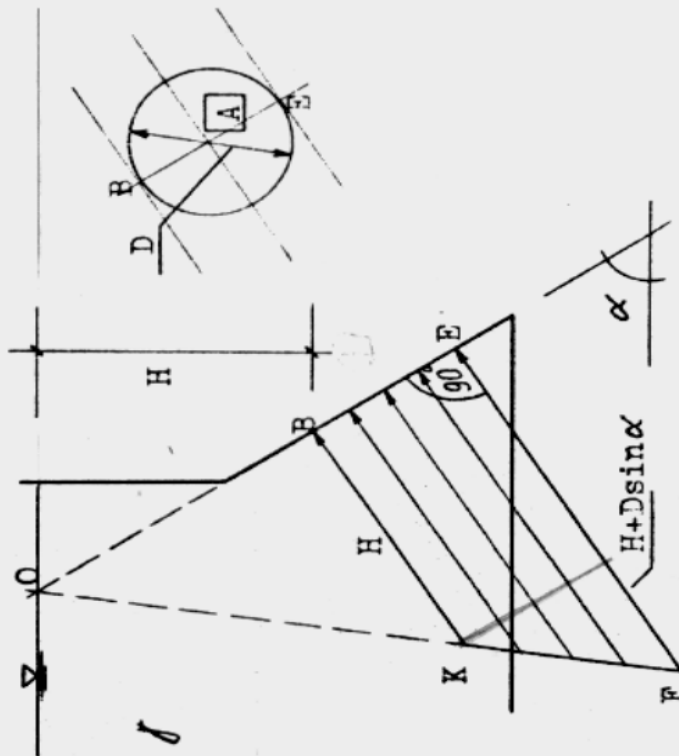
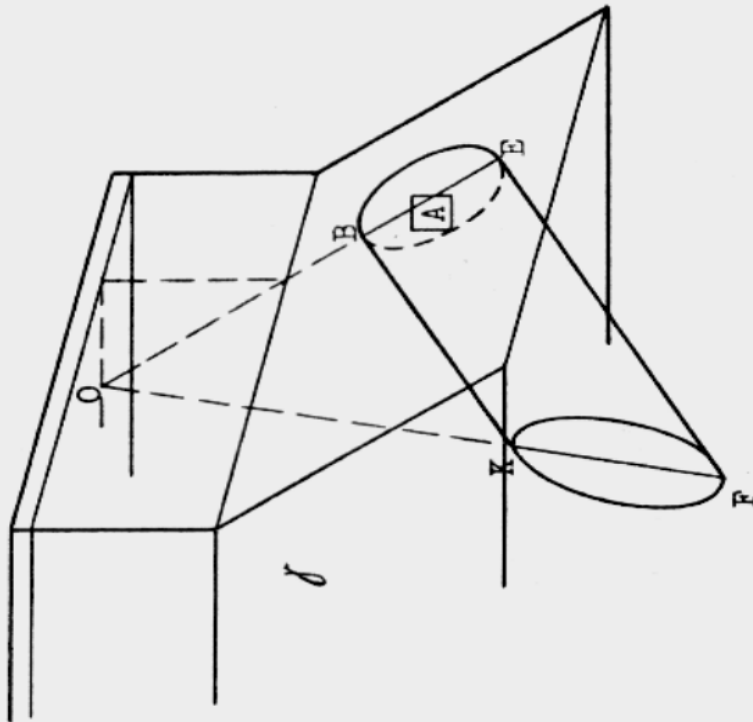
Sposób obliczania parcia metodą graficzno-analityczną zilustrowano rysunkami I.7, I.8, I.9 i I.10.



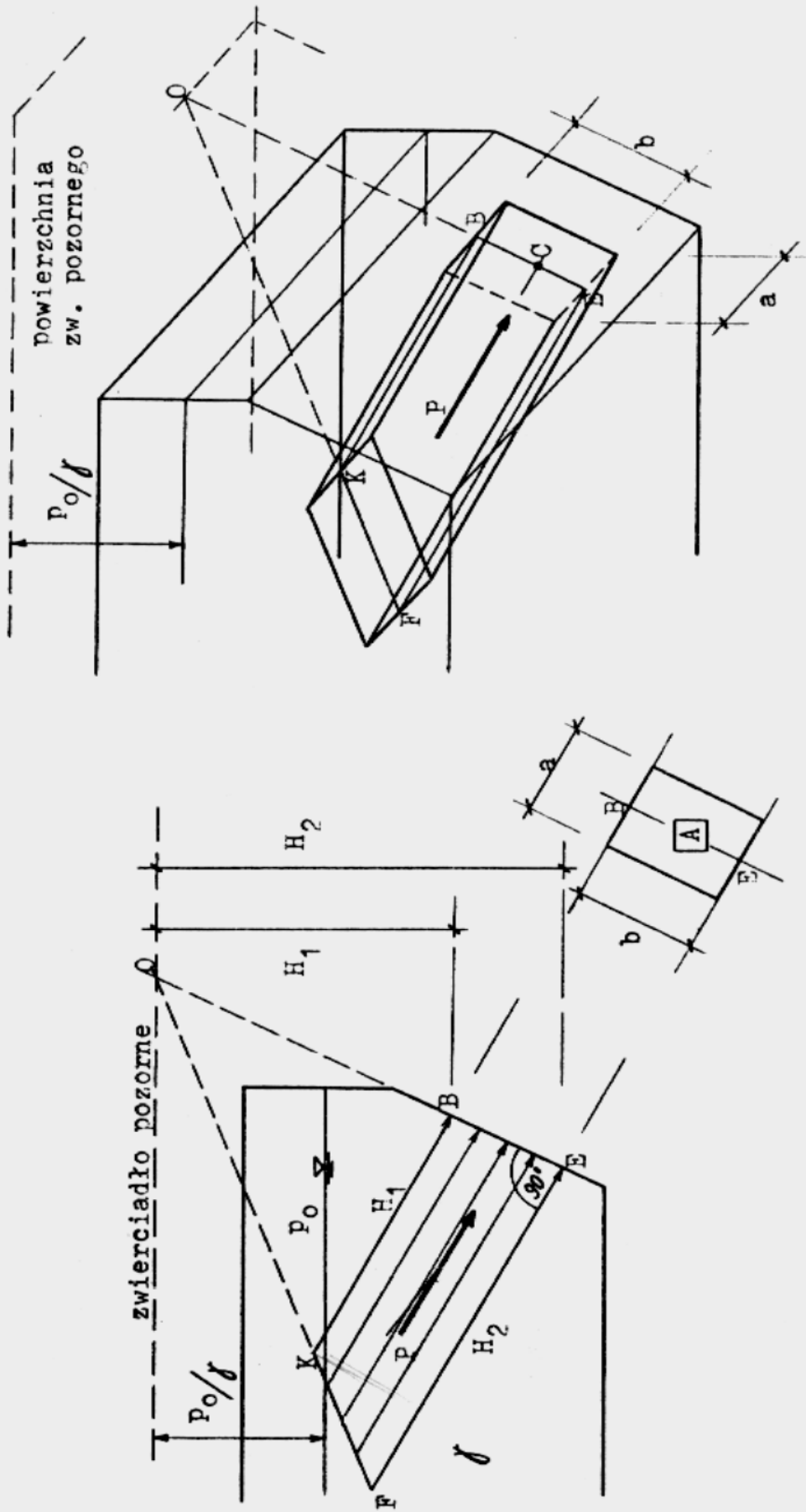
Rys. I.7



Rys. I.8



Rys. I.9



Rys. I.10

15.2

M E T O D A A N A L I T Y C Z N A

15.2.1

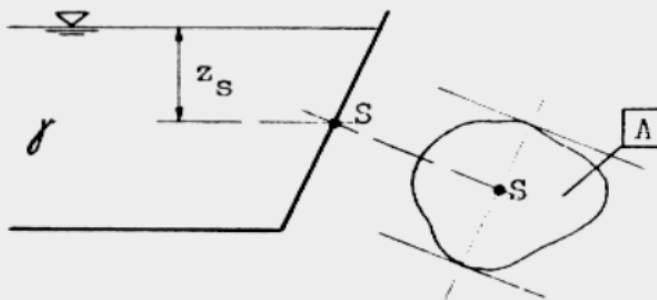
Parcie cieczy na płaską powierzchnię obliczymy wzorem

$$P = \gamma z_S A$$

(I.18)

We wzorze tym:

- A - pole powierzchni, na którą parcie obliczamy
- γ - ciężar objętościowy cieczy
- z_S - pionowe zagłębienie środka ciężkości powierzchni A pod zwierciadłem cieczy (zob. rysunki I.11, I.12, I.13).



Rys. I.11

15.2.2

Wektor siły parcia jest prostopadły do rozpatrywanej powierzchni i przebiega ją w punkcie zwanym środkiem parcia.

Przyjmijmy prostokątny układ osi η, ζ tak, jak na rysunku I.12. Współrzędne środka parcia oblicza się z zależności:

$$\eta_c = \frac{I}{L_s A}$$

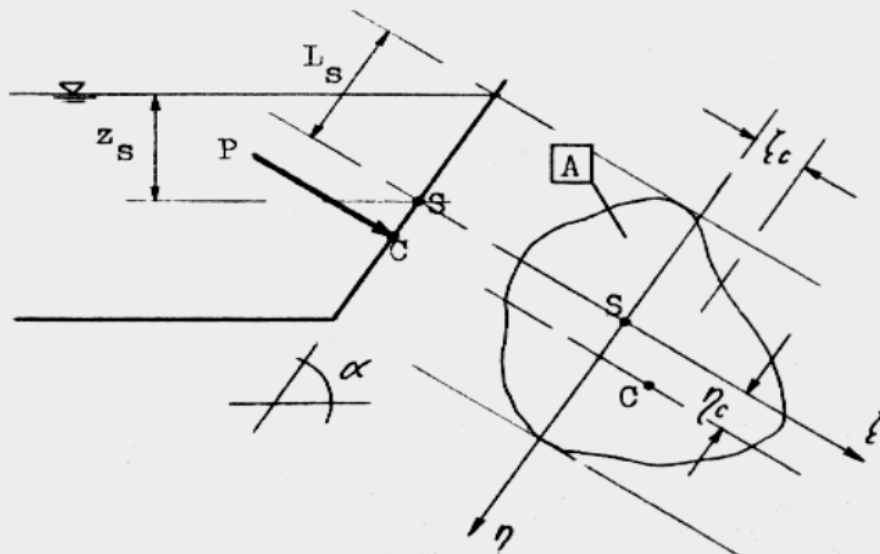
(I.19)

$$\zeta_c = \frac{I_o}{L_s A}$$

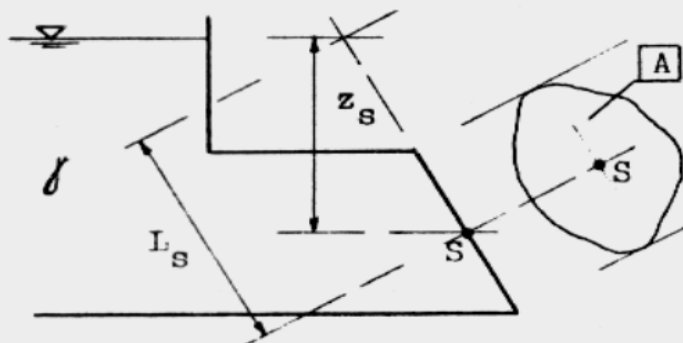
(I.20)

w których

- A - pole powierzchni, na którą parcie jest obliczane
- L_s - odległość środka ciężkości powierzchni A od zwierciadła cieczy, mierzona w płaszczyźnie sciany, której fragmentem jest rozpatrywana powierzchnia A.
- Ogólnie $L_s = z_s / \sin \alpha$, gdzie α jest kątem nachylenia powierzchni A do poziomu. W przypadku powierzchni pionowych $L_s = z_s$, dla powierzchni poziomej $L_s = \infty$
- I - moment bezwładności pola A względem osi ζ ; zgodnie z rys. I.12 oś ta przechodzi przez środek ciężkości pola A, leży na płaszczyźnie A i jest równoległa do prostej stanowiącej przecięcie tej płaszczyzny ze zwierciadłem cieczy
- I_o - moment odszkowy pola A względem układu osi η, ζ .



Rys. I.12



Rys. I.13

15.2.3

Zagłębienie z_s oraz odległość L_s liczone są od rzeczywistego zwierciadła swobodnego cieczy w tych wypadkach, gdy

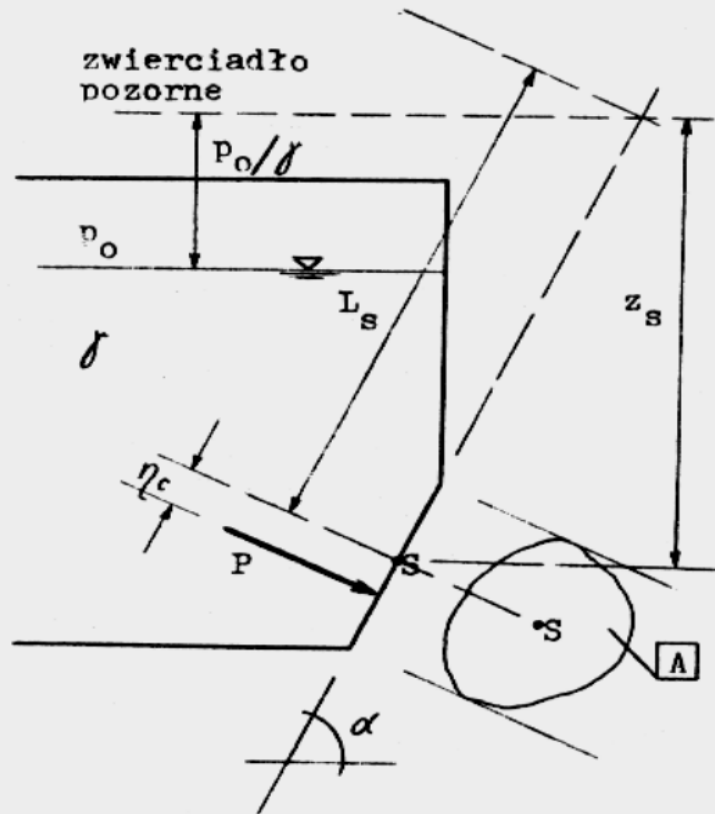
- pomijamy działanie ciśnienia zewnętrznego p_o nad zwierciadłem
- ciśnienie zewnętrzne p_o działa z obu stron na taką samą powierzchnię rozpatrywanej ściany, wobec czego uznajemy, że wpływ tego ciśnienia redukuje się wzajemnie i można go nie brać pod uwagę.

Jesli chcemy uwzględnić działanie ciśnienia p_o ponad cieczą, wówczas wyznaczamy położenie tzw. zwierciadła pozornego, przesuwając poziom rzeczywistego zwierciadła o wartość p_o/γ . Odległości z_s i L_s będą teraz liczone od zwierciadła pozornego (rys. I.14).

15.2.4

Dla ścian pionowych i nachylonych wartość η_c (wzór (I.19)) jest zawsze dodatnia, zatem wektor siły parcia cieczy przebija rozpatrywaną powierzchnię A zawsze poniżej jej środka ciężkości (zob. rysunki I.12 i I.13). Jedynie w wypadku, gdy powierzchnia A jest pozioma, środek parcia pokrywa się ze środkiem ciężkości pola A.

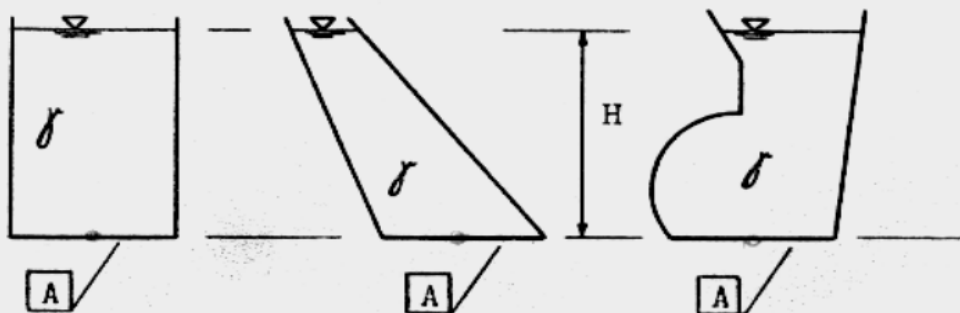
Jesli oś η (patrz rysunek I.12), przechodząca przez środek ciężkości powierzchni, na którą parcie obliczamy, jest jednocześnie pionową osią symetrii tej powierzchni - wówczas środek parcia leży na owej osi, bowiem moment odsrodkowy I_o , a więc i współrzędna ζ_c są równe zeru.



Rys. I.14

15.2.5

Z wzoru (I.18) wynika, że wartość siły parcia hydrostatycznego na poziome dno naczynia nie zależy od kształtu tego naczynia, a jedynie od jego napełnienia, rodzaju cieczy i pola powierzchni dna (rys. I.15). Twierdzenie to nazywane jest "paradoksem hydrostatycznym".



Rys. I.15

16. Obliczanie sił parcia na ściany zakrzywione

16.1

W przypadku ścian zakrzywionych oblicza się kolejno:

- składowe parcia, pozioma P_h i pionowa P_v
- parcie całkowite P .

16.2

S k ł a d o w a p o z i o m a p a r c i a

16.2.1

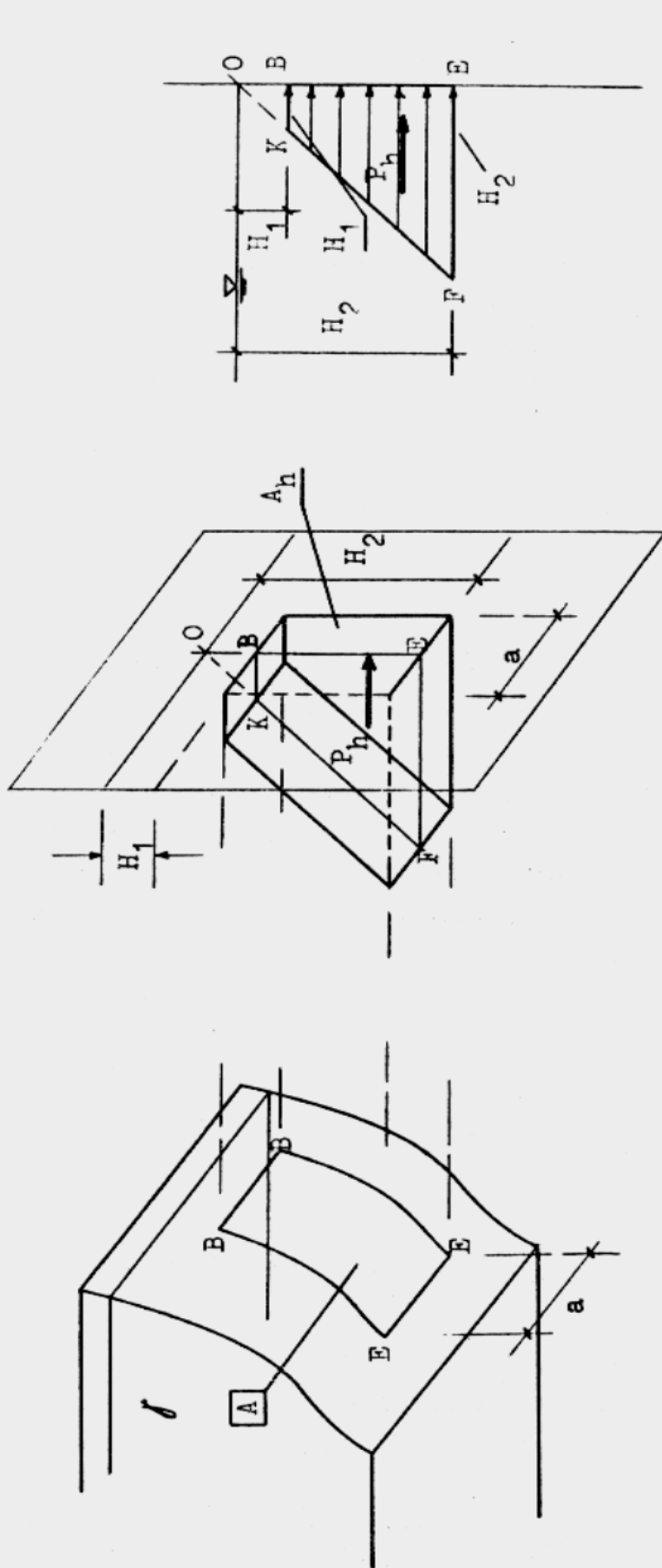
By obliczyć składową poziomą P_h parcia cieczy na ścianę o powierzchni A , należy wykonać prostokątny rzut A_h tej ściany na dowolną płaszczyznę pionową i dla rzutu tego (czyli dla powierzchni A_h) skonstruować bryłę parcia wg zasad podanych w punkcie 15.1.1 lub 15.1.3. Otrzymuje się w ten sposób bryłę składowej poziomej parcia (rys. I.16), której ciężar równy jest wartości składowej P_h :

$$P_h = V_{bh} \gamma \quad (I.21)$$

(V_{bh} - objętość bryły składowej poziomej parcia).

16.2.2

Poziomy wektor składowej P_h jest zwrócony ku rozpatrywanej powierzchni A , składową P_h należy zatem obliczać oddzielnie dla przypadku, gdy dany fragment powierzchni ogranicza ciecz od lewej strony (zwrot wektora P_h w lewo), i dla przypadku, gdy powierzchnia ogranicza ciecz od strony prawej (zwrot wektora P_h w prawo - zob. rys. I.17).

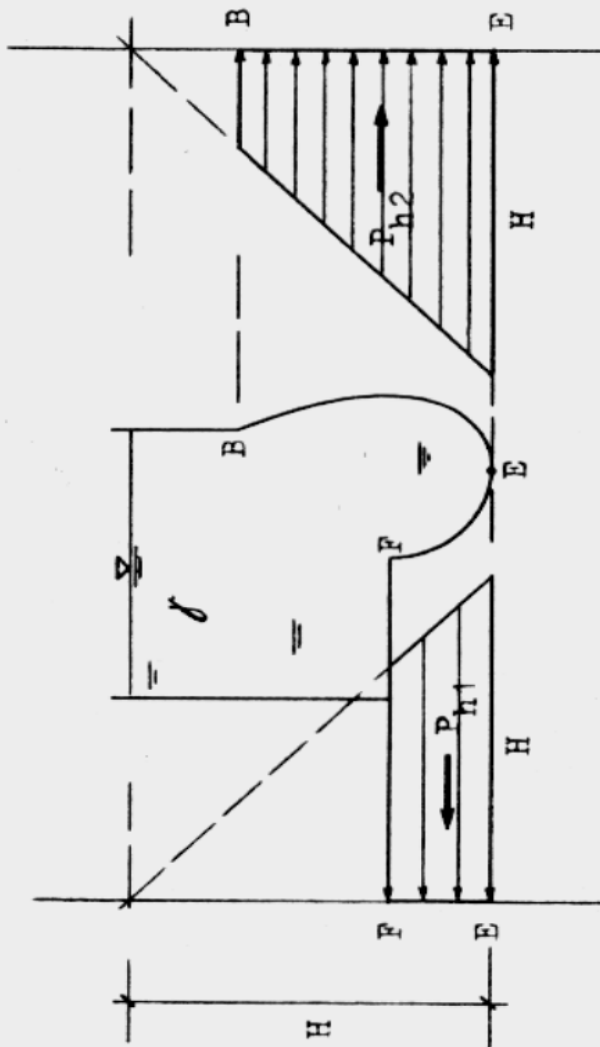


bryła składowej poziomej parcia o obj. v_b^h

wykres składowej poziomej parcia

$$P_h = v_b^h \cdot \gamma$$

Rys. I.16



wykres składowej poziomej parcia na ścianę o przekroju FE

wykres składowej poziomej parcia na ścianę o przekroju BE

Rys. I.17

16.2.3

Wektor składowej P_h jest prostopadły do pionowego rzutu A_h danej powierzchni i przechodzi przez środek ciężkości bryły składowej poziomej parcia.

Jeżeli powierzchnia rzutu A_h ma kształt prostokąta o poziomej podstawie, wówczas wektor P_h leży na wysokości środka ciężkości wykresu składowej poziomej parcia, skonstruowanego dla powierzchni A_h .

16.3

S k ł a d o w a p i o n o w a p a r c i a

16.3.1

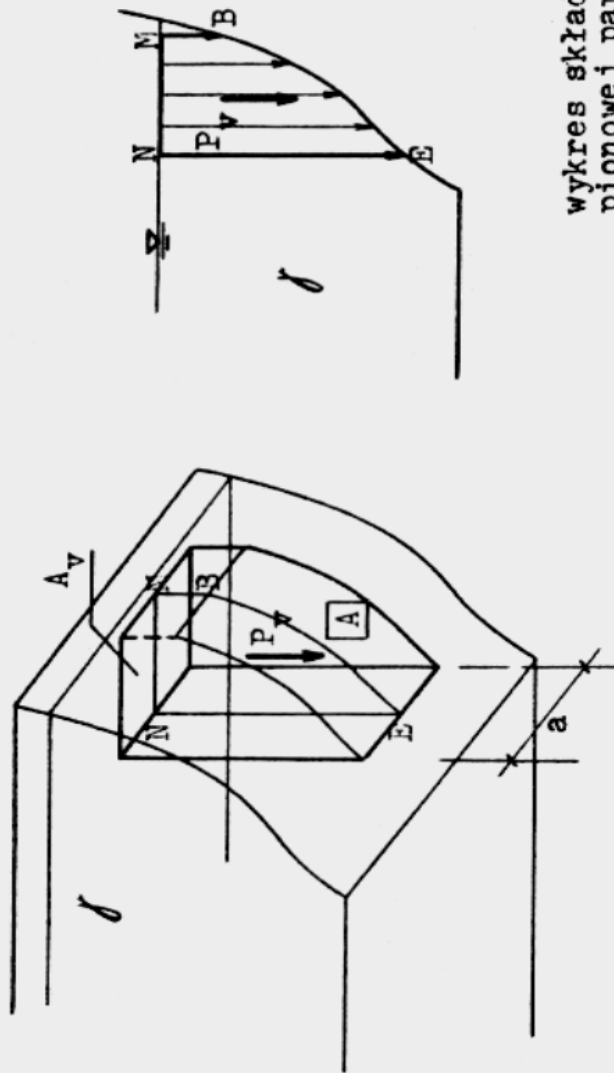
By obliczyć składową pionową P_v parcia cieczy na ścianę o powierzchni A , należy wykonać prostokątny rzut A_v tej ściany na powierzchnię zwierciadła cieczy. Bryła ograniczona daną ścianą A , jej rzutem A_v oraz pionowymi tworzącymi, jest bryłą składowej pionowej parcia (rys. I.18). Ciężar tej bryły daje wartość składowej pionowej P_v :

$$P_v = V_{bv} \gamma \quad (I.22)$$

(V_{bv} - objętość bryły składowej pionowej parcia).

16.3.2

Składową P_v należy obliczać oddzielnie dla przypadku, gdy ciecz znajduje się nad rozpatrywaną powierzchnią A (wektor P_v skierowany jest wówczas pionowo w dół) i dla przypadku, gdy ciecz znajduje się pod ścianą A (zwrot wektora P_v pionowo w górę - zob. rys. I.19).

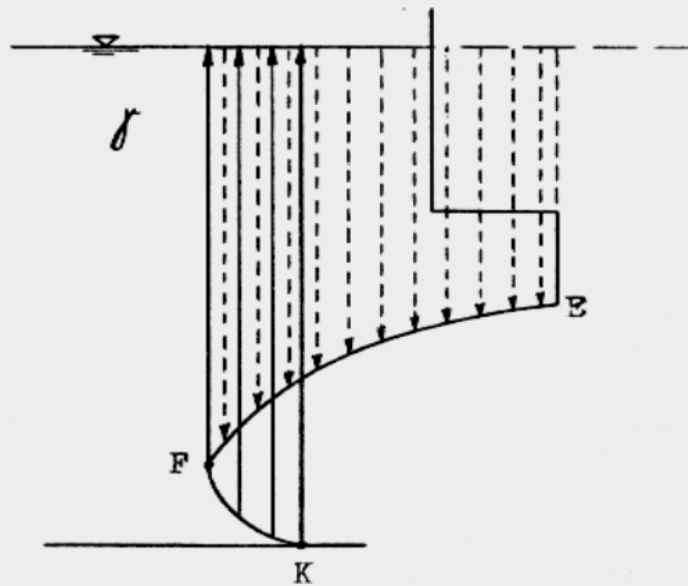


bryła składowej pionowej parcia o obj. V_b^v

$$P_v = V_b^v \cdot \delta$$

wykres składowej pionowej parcia

Rys. I.18



- wykres składowej parcia pionowego na ścianę o przekroju FK
- wykres składowej parcia pionowego na ścianę o przekroju EF

Rys. I.19

16.3.3

Wektor P_v przechodzi przez środek ciężkości bryły składowej pionowej parcia.

16.4

P a r c i e c a ł k o w i t e

Wektor parcia całkowitego, jako wypadkowa składowych, ma długość

$$P = \sqrt{P_h^2 + P_v^2}$$

(I.23)

i jest nachylony do poziomu pod kątem $\operatorname{tg} \alpha = P_v / P_h$

16.5

Jeżeli działanie ciśnienia zewnętrznego p_0 nad swobodnym zwierciadłem cieczy nie może zostać pominięte, wówczas bryły parcia składowych poziomej i pionowej należy konstruować biorąc pod uwagę tzw. pozorne zwierciadło cieczy.

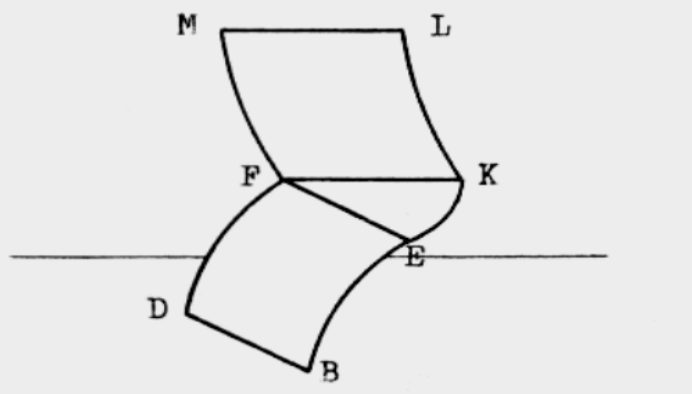
Przypomnijmy, że zwierciadło pozorne powstaje po przesunięciu poziomu rzeczywistego zwierciadła o wartość p_0/γ , czyli po zastąpieniu ciśnienia p_0 odpowiednią warstwą cieczy.

16.6

Na rysunku I.20 pokazano szkic aksonometryczny ściany o dwukierunkowej krzywiznie. Zauważmy, że w tym przypadku składową poziomą parcia na ścianę należy obliczyć zarówno dla kierunku x , jak i dla kierunku y , co ilustruje rys. I.21.

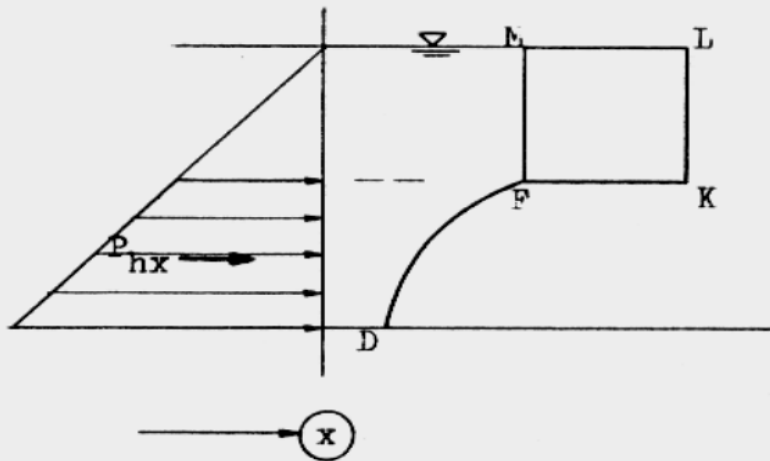
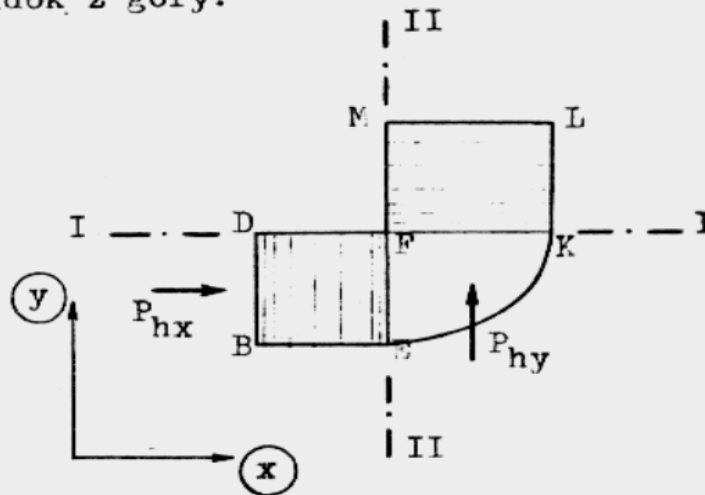
16.7

Obliczenia składowych poziomej i pionowej parcia można naturalnie dokonać także i dla przypadków ścian o płaskiej powierzchni. Obowiązujące będą wówczas bez zmian wszystkie zasady, które stanowią treść niniejszego rozdziału.

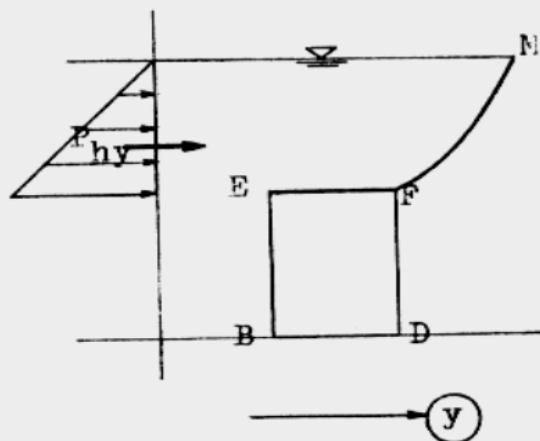


Rys. I.20

widok z góry:



przekrój I-I



przekrój II-II

Rys. 1.21

17. Obliczanie parcia w przypadkach równowagi względnej cieczy

Gdy ciecz znajduje się w równowadze względnej, tzn. gdy jest ona w spoczynku względem ścian poruszającego się naczynia, pozostają w mocy wszelkie prawa hydrostatyki. Siły parcia cieczy na ściany naczynia oraz na powierzchnie w cieczy zanurzone i poruszające się wraz z nią obliczać należy zgodnie z zasadami omówionymi w rozdziałach 15 i 16.

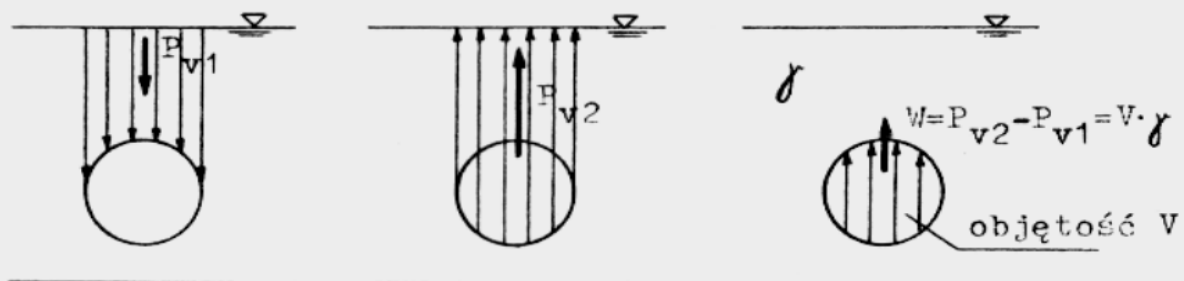
18. Siła wyporu

18.1

Rozważmy ciało zanurzone w cieczy. Na ciało to działa siła parcia, przy czym wektor składowej pionowej parcia P_{v1} , reprezentujący siłę pochodzącą od cieczy znajdującej się nad powierzchnią ciała, zwrócony jest pionowo w dół, natomiast wektor P_{v2} parcia cieczy znajdującej się pod ciałem - pionowo w górę.

Jeżeli wypadkowy wektor tych dwóch parć posiada zwrot ku górze, wówczas wypadkową tę nazywamy **wyporem** i oznaczamy symbolem W .

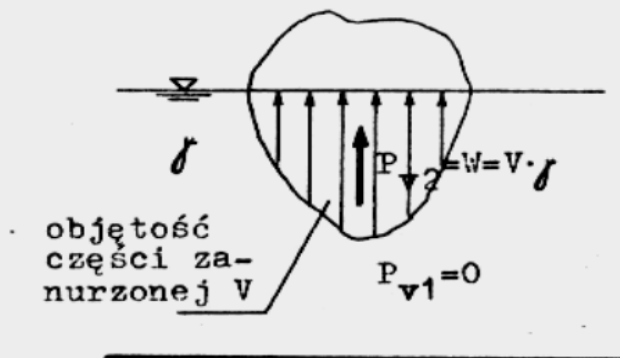
Przykład ilustrujący powyższą definicję podaje rys. I.22. W przykładzie tym $P_{v2} > P_{v1}$, zatem wypadkowa zwrócona jest w górę, tak więc na zanurzone ciało działa siła wyporu $W = P_{v2} - P_{v1}$.



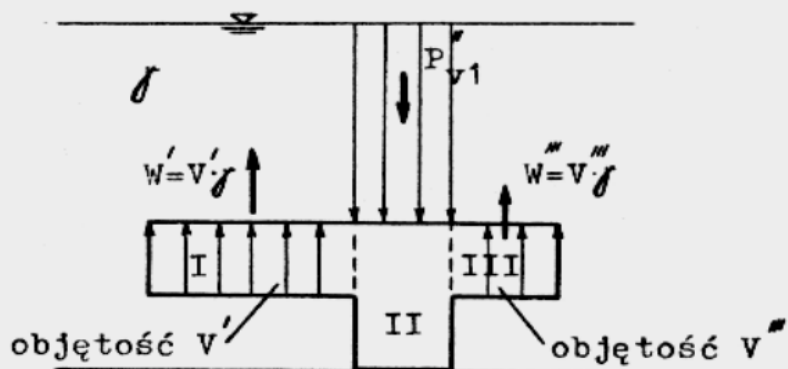
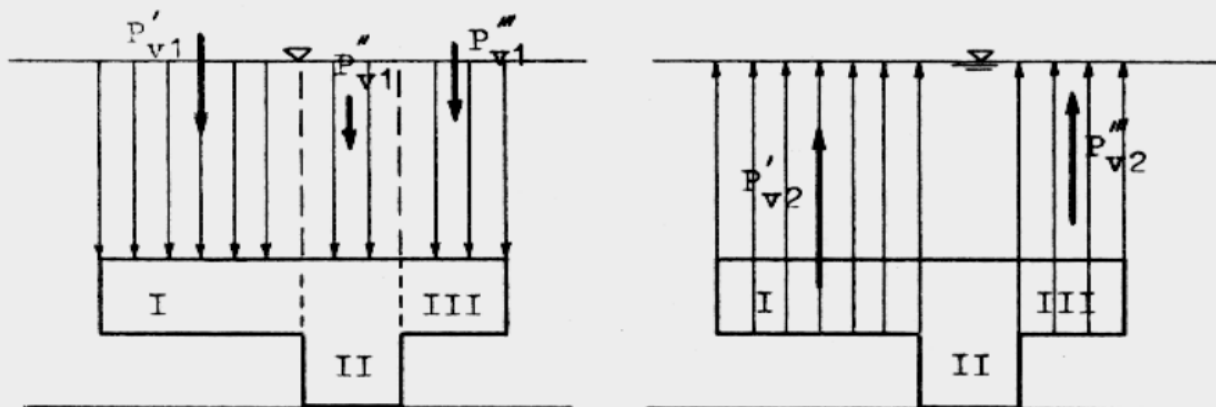
Rys. I.22

18.2

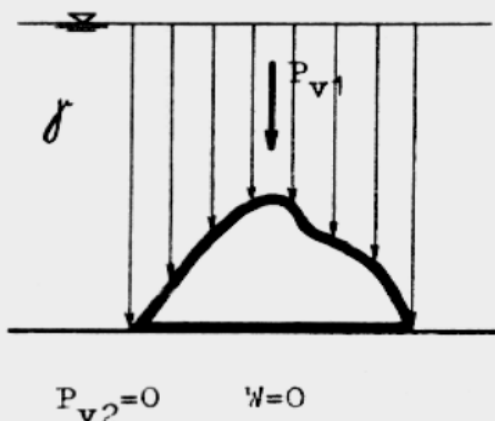
Kolejne przykłady pokazano na rysunkach I.23, I.24 (wrócimy do nich w następnym punkcie). Na uwagę zasługuje rys. I.25. Dowodzi on, że w szczególnym przypadku stykania się ciała z dnem naczynia na zanurzone ciało nie działa w ogóle siła wyporu (zob. także fragment II ciała na rys. I.24).



Rys. I.23



Rys. I.24



Rys. I.25

18.3

Niech naczynie wypełnione będzie cieczą o ciężarze objętościowym γ . W dwóch wypadkach, mianowicie gdy ciało

- pływa częściowo zanurzone w cieczy
- jest zanurzone całkowicie, lecz nie styka się z powierzchnią dna naczynia (lub co najwyżej styka się w jednym punkcie)

wartość siły wyporu oblicza się wzorem, zgodnym z poznaną wcześniej zależnością (I.22)

$$W = V \gamma \quad (I.24)$$

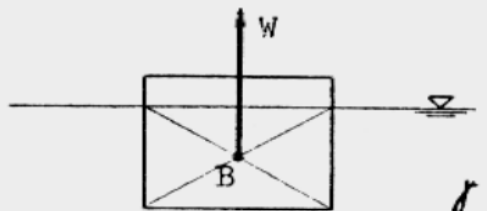
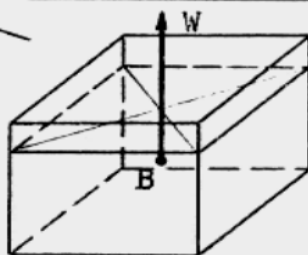
We wzorze tym V oznacza objętość zanurzonej w cieczy części ciała (zob. ponownie rys. I.22, I.23 oraz fragmenty I i III ciała na rysunku I.24). Objętość V nazywa się **wypornością ciała**.

Wyporność V jest niczym innym jak objętością bryły wypadkowej składowych pionowych parcia. Jest ona równoznaczna z objętością cieczy wypartej przez zanurzone w niej ciało. Rozważmy przykład walcowej, pustej beczki, pływającej w położeniu pionowym. Objętość V będzie określona jako iloczyn pola podstawy tej beczki i głębokości jej zanurzenia, nie zaś jako objętość samych tylko fragmentów konstrukcji beczki znajdujących się pod zwierciadłem cieczy.

18.4

Wektor wyporu zwrócony jest pionowo w górę i zaczepiony jest w geometrycznym środku ciężkości zanurzonej części ciała (rys. I.26). Punkt zaczepienia wektora wyporu nazywamy **środkiem wyporu** (będziemy go oznaczać literą B).

powierzchnia
zwierciadła



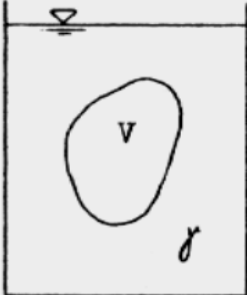
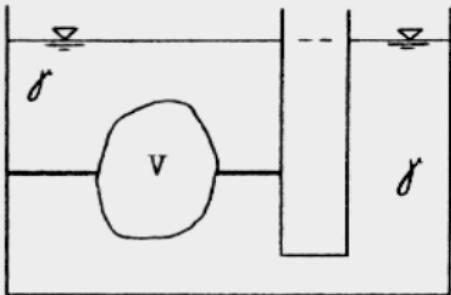
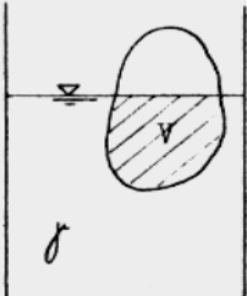
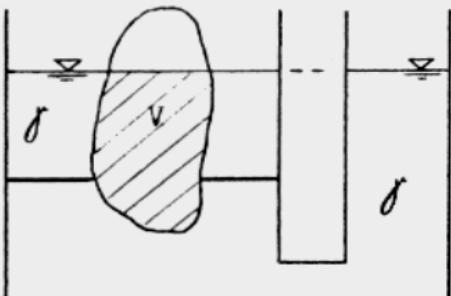
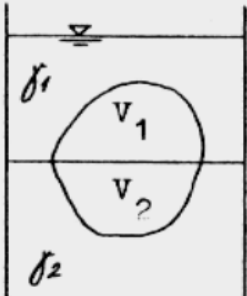
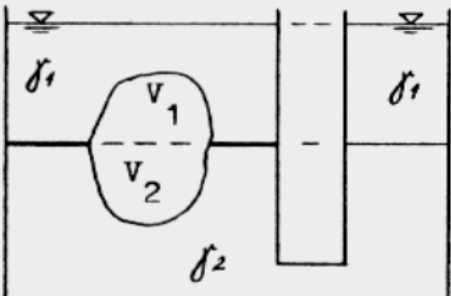
Rys. I.26

18.5

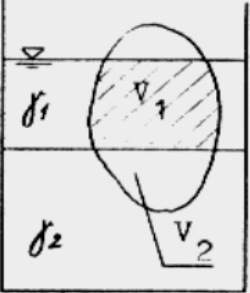
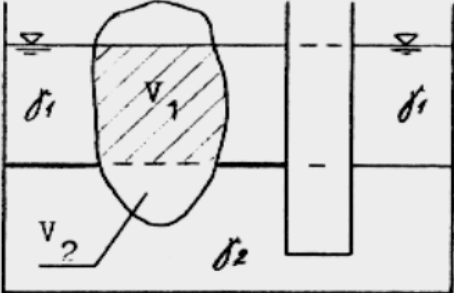
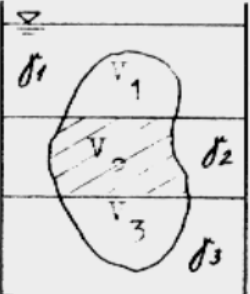
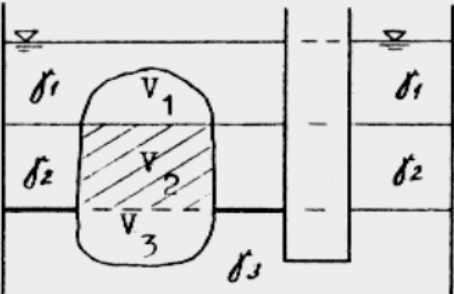
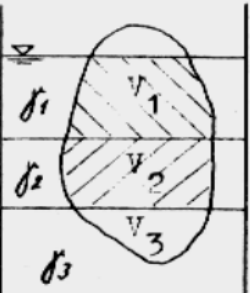
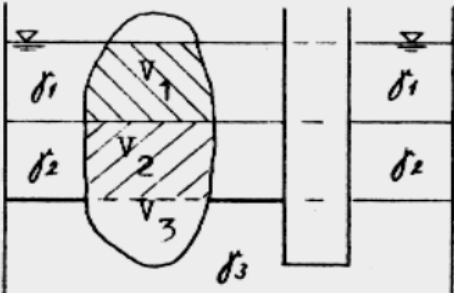
Przy rozwiązywaniu zadań można mieć niekiedy wątpliwości co do stosowania wzoru (I.24). Podane poniżej ZESTAWIENIE określa jasno ważność tego wzoru.

Z E S T A W I E N I E

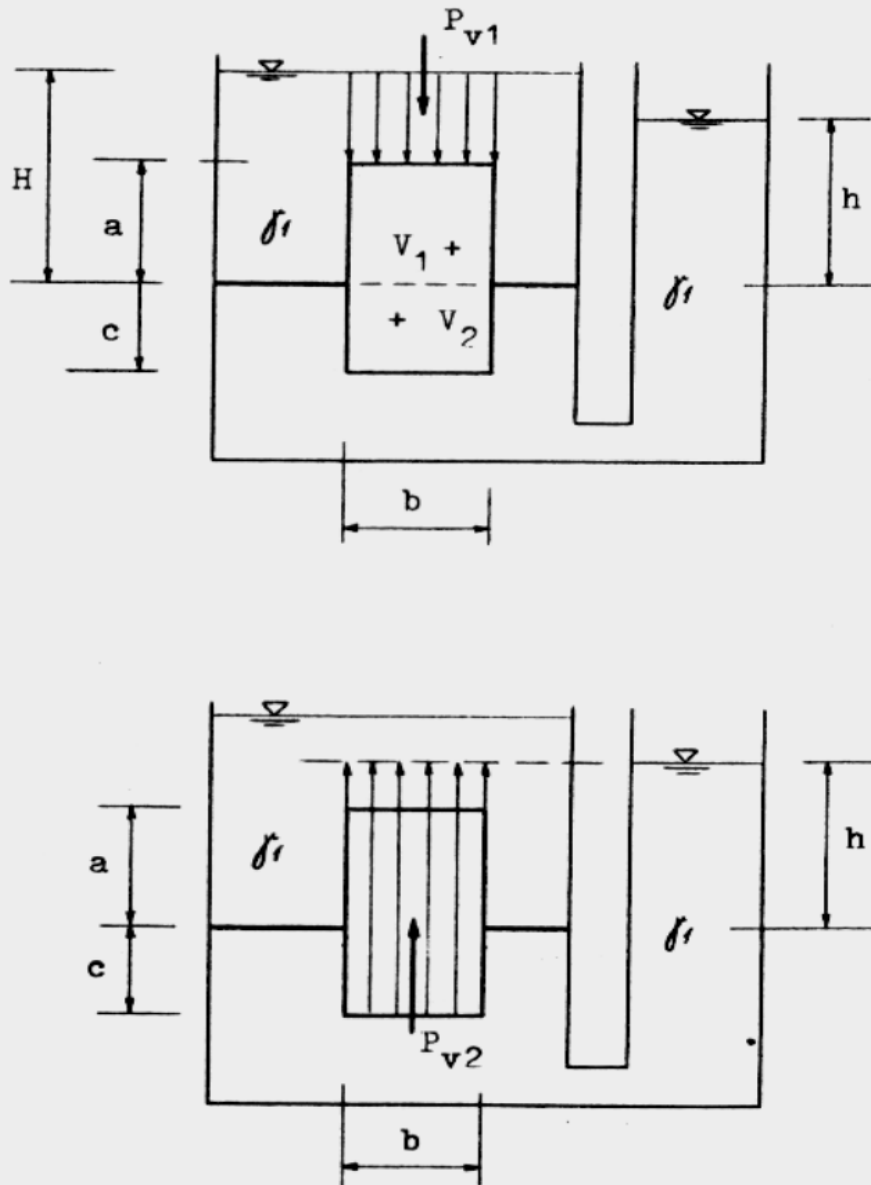
WAŻNOSC WZORU (I.24)

Sytuacja	Sytuacja równorzędna na przykładzie zbiornika z dwiema komorami	Siła wyporu W
		$W = V \cdot \rho$
		$W = V \cdot \rho$
		$W = V_1 \cdot \rho_1 + V_2 \cdot \rho_2$

ZESTAWIENIE (cd.)

Sytuacja	Sytuacja równorzędna na przykładzie zbiornika z dwiema komorami	Siła wyporu W
		$W = V_1 \cdot \delta_1 + V_2 \cdot \delta_2$
		$W = V_1 \cdot \delta_1 + V_2 \cdot \delta_2 + V_3 \cdot \delta_3$
		$W = V_1 \cdot \delta_1 + V_2 \cdot \delta_2 + V_3 \cdot \delta_3$
<p>etc. dla większej liczby różnych cieczy</p>		

Przeanalizujemy sytuację, która nie jest ujęta w ZESTAWIENIU. Niech to będzie przypadek pokazany na rys. I.27; dla prostoty obliczeń ciałem zamykającym otwór w przegrodzie między komorami zbiornika jest prostopadłoscian o wymiarach $b \times (a+c) \times L$.



Rys. I.27

Składowa pionowa parcia P_{v1} działająca na prostopadłoscian od góry jest - jako ciężar bryły parcia - równa

$$P_{v1} = [b L (H-a)] \gamma_1$$

zaś składowa P_{v2} , działająca od dołu

$$P_{v2} = [b L (c+h)] \gamma_1$$

Wypadkowa tych sił wynosi

$$\begin{aligned} P_{v2} - P_{v1} &= b L c \gamma_1 + b L h \gamma_1 - b L H \gamma_1 + b L a \gamma_1 = \\ &= b L c \gamma_1 + b L a \gamma_1 + b L \gamma_1 (h-H) = V \gamma_1 + b L \gamma_1 (h-H) \end{aligned}$$

Załóżmy, że przy określonych wartościach liczbowych obliczona różnica $P_{v2} - P_{v1}$ jest dodatnia, co oznacza, że wypadkowa składowych pionowych parcia posiada zwrot ku górze. W tej sytuacji różnicę $P_{v2} - P_{v1}$ nazwiemy - zgodnie z definicją - wyporem W , działającym na prostopadłoscian. Zauważmy jednak, że zastosowanie wzoru (I.24) nie dałoby prawidłowego wyniku.

Rozważmy jeszcze jeden przykład (rys. I.28). Na kulę działają składowe pionowe parcia

$$P_{v1} = (\pi r^2 H_1 - V_1) \gamma_1$$

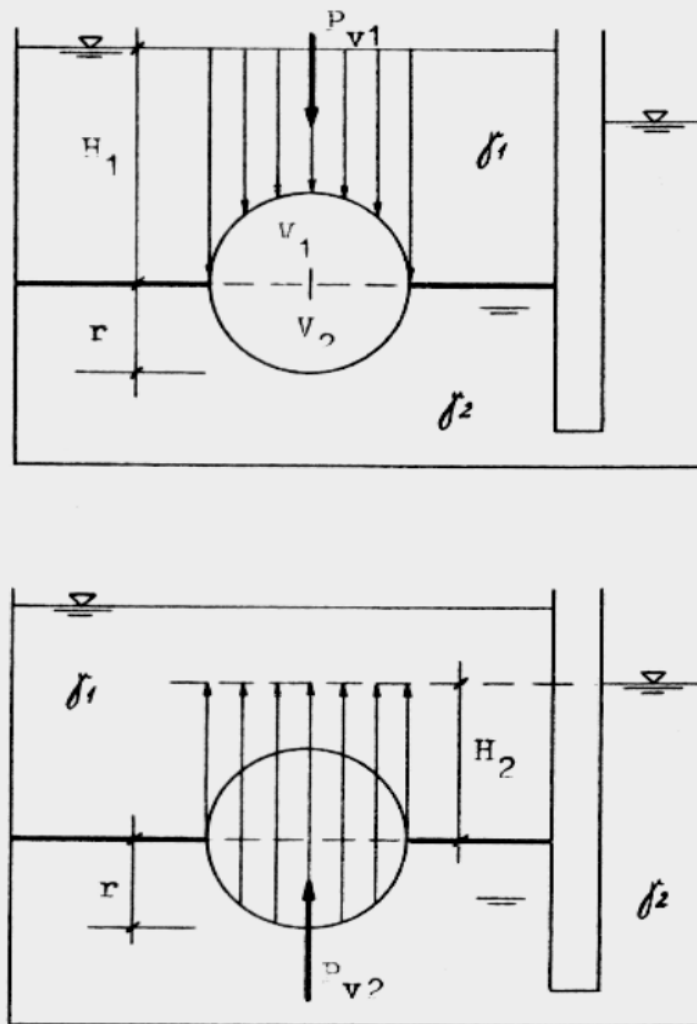
$$P_{v2} = (\pi r^2 H_2 + V_2) \gamma_2$$

Jeżeli wypadkowa tych sił będzie skierowana w górę, tzn. gdy $P_{v2} - P_{v1} > 0$, wówczas powiemy, że na kulę działa siła wyporu

$$\begin{aligned} W = P_{v2} - P_{v1} &= \pi r^2 H_2 \gamma_2 + V_2 \gamma_2 - \pi r^2 H_1 \gamma_1 + V_1 \gamma_1 = \\ &= V_2 \gamma_2 + V_1 \gamma_1 + \pi r^2 (H_2 \gamma_2 - H_1 \gamma_1) \end{aligned}$$

Wyniku takiego nie da mechaniczne zastosowanie wzoru (I.24).

W konkluzji stwierdzamy, że w przypadkach nie podanych w ZESTAWIENIU należy określić siły P_{v1} i P_{v2} działające na dane ciało i gdy $P_{v2} > P_{v1}$, obliczyć wypór jako $W = P_{v2} - P_{v1}$.



Rys. I.28

18.6

Wymaga podkreślenia, że b ł ę d n e jest ewentualne stwierdzenie "na ciało zanurzone w cieczy działają - prócz ciężaru tego ciała - trzy pionowe siły: składowa pionowa parcia P_{v1} od góry, składowa pionowa parcia P_{v2} od dołu oraz siła wyporu W ".

N a l e ż a ł o b y p o w i e d z i e ć - "na ciało zanurzone w cieczy działają - prócz ciężaru tego ciała - dwie pionowe siły: składowa pionowa parcia P_{v1} od góry i składowa pionowa parcia P_{v2} od dołu". Jeżeli $P_{v2} > P_{v1}$, wówczas wypadkową tych składowych nazwiemy wyporem W , lecz nie jest to jakaś trzecia, dodatkowa siła.

W przypadkach ujętych w ZESTAWIENIU (str. 47 i 48) sytuacja jest od razu jednoznaczna: " na ciało działa siła wyporu, którą obliczymy wzorem (I.24)". Tu z kolei dodatkowe wyliczanie pionowych składowych parcia (P_{v1} i P_{v2}) byłoby nieporozumieniem.

19. Prawo Archimedesesa

Gdy ciało jest zanurzone w jednorodnej cieczy częściowo lub też całkowicie i nie styka się przy tym z dnem naczynia, w kierunku pionowym działają na to ciało: ciężar własny G i siła wyporu W określona wzorem (I.24). Ponieważ wektory tych sił mają przeciwne zwroty, zatem wypadkowa siła pionowa G' działająca na ciało, zwana pozornym jego ciężarem, jest równa

$$G' = G - W$$

czyli

$$G' = G - V \gamma \quad (I.25)$$

Powyższa zależność wyraża treść znanego prawa Archimedesesa: ciało zanurzone w cieczy traci pozornie na ciężarze tyle, ile waży ciecz wyparta przez to ciało.

20. Warunek pływania ciała

Ciało pływające może być zanurzone w cieczy częściowo lub całkowicie. W obu wypadkach fakt pływania ciała oznacza, że działająca na to ciało siła wyporu równoważy jego ciężar, czyli że

$$G = W \quad (I.26)$$

Równość ta stanowi tzw. **warunek pływania**.

Gdy ciężar objętościowy materiału, z którego zbudowane jest ciało, oraz ciężar objętościowy cieczy są jednakowe, ciało unosi się w cieczy całkowicie w niej zanurzone.

21. Równowaga ciała częściowo zanurzonego w cieczy. Wysokość metacentryczna

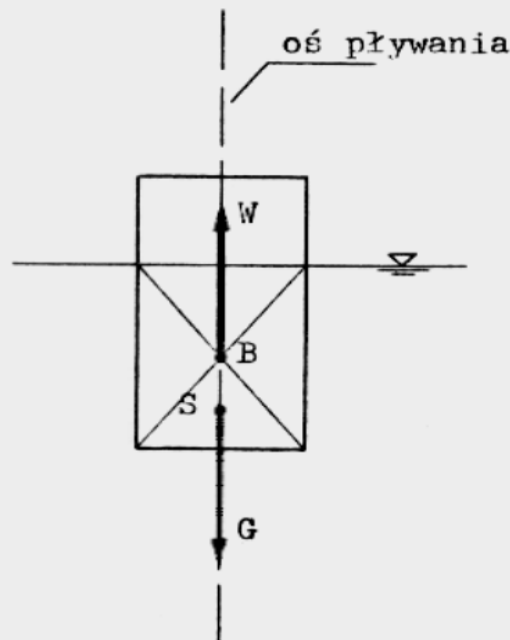
21.1

Ciało pływające pozostaje w równowadze, gdy spełnione są dwa warunki:

- zachodzi równość (I.26)
- środek ciężkości masy ciała S oraz środek wyporu B (czyli geometryczny środek ciężkości zanurzonej części ciała) leżą na wspólnej prostej pionowej.

21.2

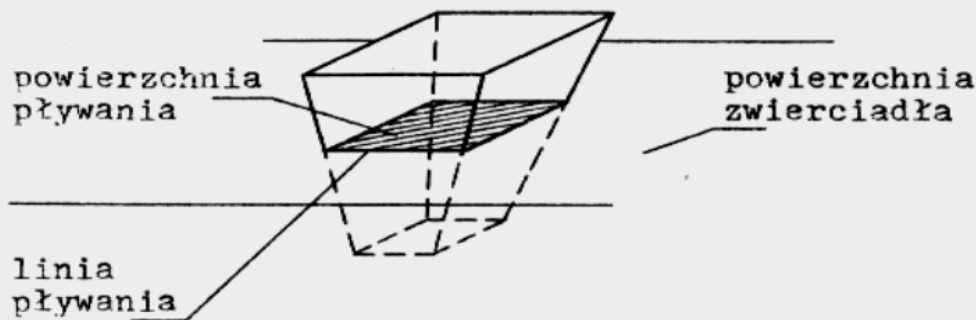
Prosta, na której leżą punkty S i B w stanie równowagi ciała, zwana jest **osią pływania** (rys. I.29).



Rys. I.29

Dokonajmy przekroju częściowo zanurzonego, pływającego ciała zwierciadłem cieczy. Powierzchnia tego przekroju nazywa się **powierzchnią pływania**, zaś krzywa ją ograniczająca - **linią pływania** (rys. I.30).

Należy zwrócić uwagę, że nawet gdy pływające ciało jest wewnątrz wydrążone (np. pusta beczka), powierzchnią pływania będzie cały jego przekrój zwierciadłem, łącznie z polem przekroju wydrążonej części.



Rys. I.30

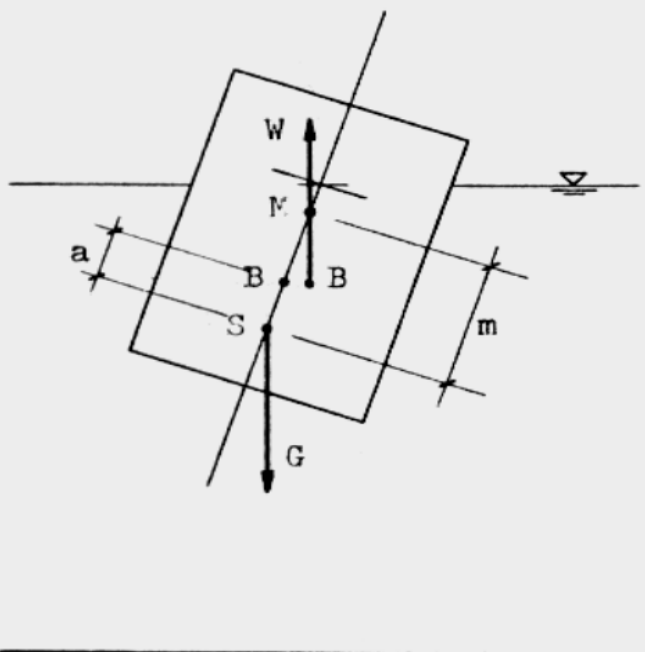
21.3

Jeżeli wychylimy pływające ciało z położenia równowagi, obracając je o pewien kąt wokół osi leżącej na powierzchni pływania, wówczas zmieni się kształt zanurzonej części ciała. Środek wyporu przesunie się z punktu B do B' i wektor siły wyporu przetnie oś pływania w punkcie M (rys. I.31). Jest to tzw. **punkt metacentryczny** (in. **metacentrum**).

Odległość od punktu M do środka ciężkości ciała S nazywa się **wysokością metacentryczną** i jest oznaczana literą m .

21.4

Przyjęto zasadę, że jeśli metacentrum leży wyżej niż środek ciężkości ciała, wysokość metacentryczna jest dodatnia, gdy zaś niżej - ujemna.



Rys. I.31

21.5

Znak wysokości metacentrycznej określa rodzaj równowagi ciała pływającego. Mianowicie

- gdy $m > 0$ - równowaga ciała jest trwała (zob. rys. I.31; para sił G i W wywołuje moment przywracający ciało do położenia równowagi)
- gdy $m < 0$ - równowaga nietrwała
- gdy $m = 0$ - równowaga obojętna.

21.6

Wysokość metacentryczna stanowi miarę stateczności ciał pływających. Im większą wartość ma wysokość m , tym większa jest stateczność ciała. Z tego właśnie względu środek ciężkości masy jednostek pływających winien być położony jak najniżej.

21.7

Wysokość metacentryczną m można obliczyć wzorem

$$m = \frac{\tilde{I}}{V} - a_s \quad (I.27)$$

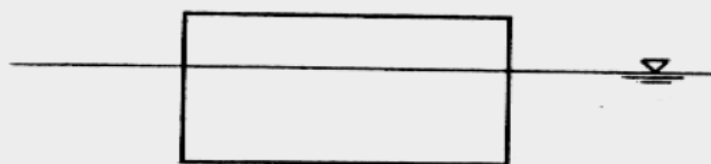
w którym:

\tilde{I} - moment bezwładności powierzchni pływania ciała (określonej w położeniu równowagi)

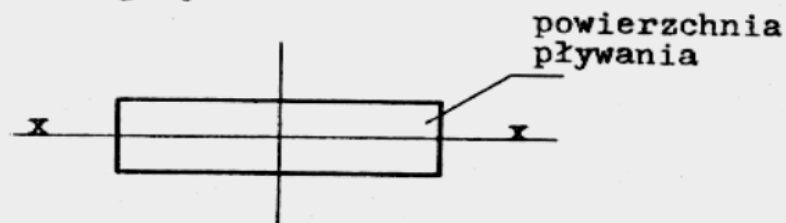
Uwzględniając przypadki najbardziej niekorzystne, moment \tilde{I} liczy się względem podłużnej osi $x-x$ powierzchni pływania jako możliwej osi obrotu ciała (zob. rys. I.32); względem tej właśnie osi stateczność ciała jest najmniejsza

V - objętość zanurzonej części ciała pływającego

a_s - odległość pomiędzy środkiem ciężkości ciała S a środkiem wyporu B w położeniu równowagi (patrz rys. I.31). Jeśli punkt B leży niżej niż punkt S , wartość a_s ma znak dodatni, jeśli wyżej - znak ujemny. Zauważmy, że w tym ostatnim wypadku wysokość metacentryczna będzie zgodnie z omawianym wzorem (I.27) zawsze większa od zera, a równowaga ciała pływającego - trwała.



widok z góry:



Rys. I.32

Pismnictwo

Wybrane prace polskich autorów:

- E. Czetwertyński - "Hydraulika i hydromechanika",
PWN, Warszawa 1958
- J. Dołęga, R. Rogala - "Hydraulika stosowana" (cz.I),
skrypt Politechniki Wrocławskiej, 1988
- Praca zbiorowa pod red.
K. Jeżowieckiej-Kabsch - "Mechanika płynów. Teoria i zastosowa-
nia",
skrypt Politechniki Wrocławskiej, 1984
- J. Sobota - "Hydraulika i elementy hydromechaniki",
skrypt Akademii Rolniczej, Wrocław
1984
- A. Szuster, B. Utrysko - "Hydraulika i podstawy hydromechaniki",
skrypt Politechniki Warszawskiej, 1986

Skorowidz podstawowych terminów i pojęć nie występujących w tytułach
rozdziałów

bryła parcia	24	
bryła składowej pionowej parcia	38	
bryła składowej poziomej parcia	35	
ciśnienie hydrostatyczne	23	
linia pływania	54	
metacentrum (punkt metacentryczny)	54	
obliczanie parcia na powierzchni płaskie, met. analityczna	31	
obliczanie parcia na powierzchni płaskie, met. graficzno-analityczna	24	
obliczanie składowej pionowej parcia	38	
obliczanie składowej poziomej parcia	35	
os pływania	53	
paradoks hydrostatyczny	34	
parcie hydrostatyczne	13	
podstawowe równanie hydrostatyki	14	
powierzchnia pływania	54	
pozorny ciężar ciała	52	
punkt metacentryczny (metacentrum)	54	
siła masowa	10	
siła powierzchniowa	10	
składowe wypadkowej jednostkowych sił masowych (a_x, a_y, a_z)	11	
stateczność ciał pływających	55	
srodek parcia	26	
srodek wyporu	46	
współrzędne środka parcia dla płaskiej powierzchni	31-32	
wykres parcia	25	

wyporność	45
wysokość ciśnienia	23
zwierciadło pozorne	26





PRZYKŁADY ZADAŃ I SZCZEGÓŁOWE ROZWIĄZANIA

1. Obliczanie ciśnienia. Naczynia połączone.	63
2. Parcie na płaskie powierzchnie	77
3. Parcie na powierzchnie zakrzywione. Siła wyporu.	100
4. Pływanie ciał	130
5. Obliczenia w warunkach równowagi względnej cieczy	138



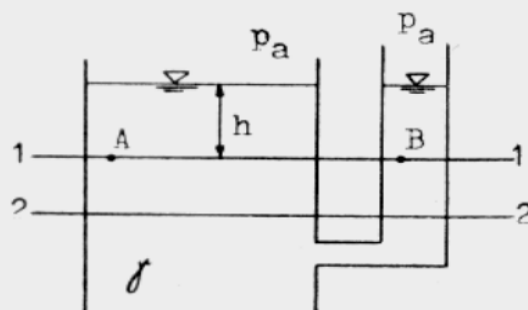
1. Obliczanie ciśnienia. Naczynia połączone

Wyjaśnienia uzupełniające

Jeżeli w naczyniu połączonym znajduje się jedna tylko ciecz (rys. II.1, II.2, II.3), wówczas powierzchnią jednakowego ciśnienia jest każda płaszczyzna pozioma przechodząca przez ciecz wypełniającą ramiona naczynia.

Na rysunku II.1 płaszczyzna taka przechodzi np. na poziomie 1-1, ciśnienie w punkcie B wynosi zatem tyle samo, ile w punkcie A, czyli zgodnie z wzorem (I.14)

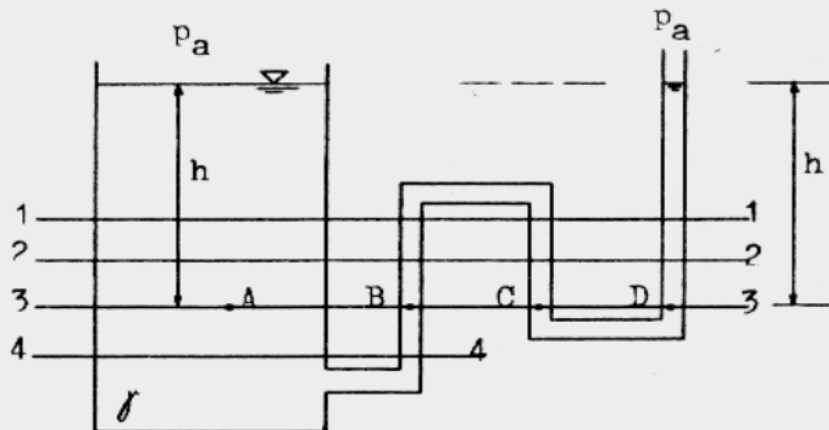
$$p_B = p_A = p_a + \gamma h$$



Rys. II.1

Podobnie z rys. II.2 można odczytać

$$p_A = p_a + \gamma h = p_B = p_C = p_D$$



Rys. II.2

W przypadku pokazanym na rys. II.3 zachodzi równość

$$p_A = p_x + \gamma h = p_B$$

i jednocześnie

$$p_B = p_a + \gamma H = p_A$$

tak więc

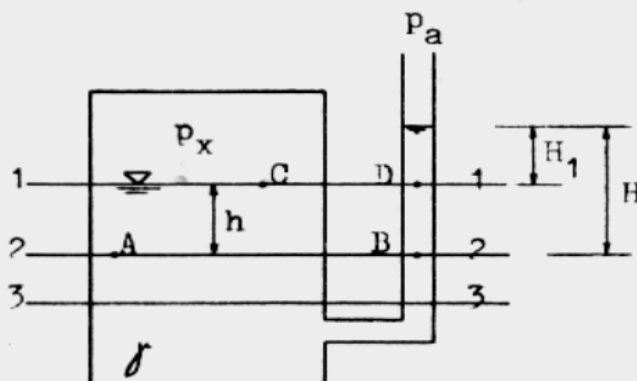
$$p_a + \gamma H = p_x + \gamma h$$

Można stąd łatwo obliczyć ciśnienie gazu p_x w zbiorniku

$$p_x = p_a + \gamma H - \gamma h = p_a + \gamma (H-h) = p_a + \gamma H_1$$

Wynik ten otrzymamy od razu, jeśli płaszczyznę jednakowego ciśnienia przeprowadzimy przez punkty C i D

$$p_C = p_x = p_D = p_a + \gamma H_1$$

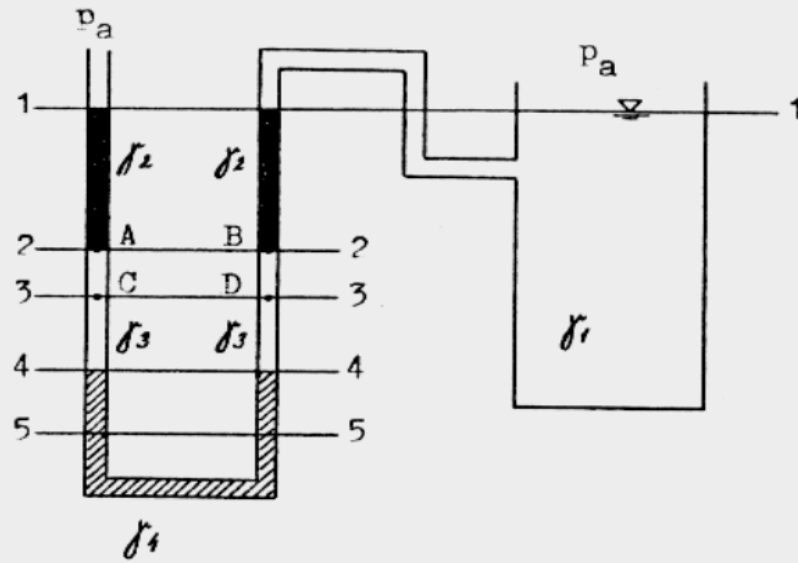


Rys. II.3

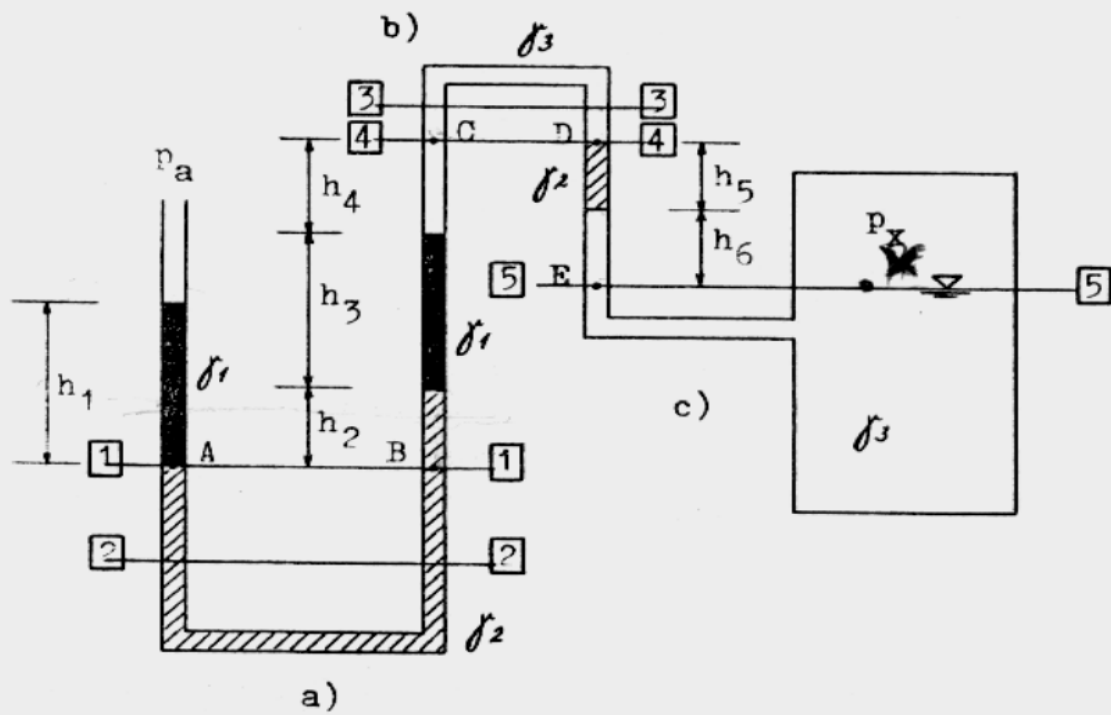
Cienka rurka otwarta u góry i wypełniona tą samą cieczą, jaka znajduje się w zbiorniku (zob. np. rysunek II.3) nazywa się piezometrem. Jak wynika z ostatnio podanego przykładu, znajomość położenia zwierciadła cieczy w piezometrze posłużyć może do obliczenia ciśnienia panującego w zbiorniku nad zwierciadłem cieczy.

Każda płaszczyzna pozioma jest powierzchnią jednakowego ciśnienia również wtedy, gdy w naczyniu połączonym znajduje się kilka różnych, nie mieszających się ze sobą cieczy, a ich ułożenie w ramionach naczynia oraz wysokości słupów danej cieczy są jednakowe (rys. II.4). Jeśli warunki te nie są spełnione (zob. rys. II.5), wówczas powierzchnią jednakowego ciśnienia jest tylko taka płaszczyzna pozioma, pod którą (patrz przypadki a) i c) pokazane na rysunku II.5) lub nad którą (przypadek b) na rys. II.5) znajduje się już tylko jedna ciecz o stałym ciężarze objętościowym γ .

Prawidłowe wyznaczenie położenia powierzchni jednakowego ciśnienia w naczyniu połączonym jest bardzo pomocne przy obliczaniu wartości ciśnienia w poszczególnych punktach cieczy.



Rys. II.4



Rys. II.5

P r z y k ł a d y

Przykład 1

Na rys. II.5 pokazany jest pewien stan równowagi cieczy. Obliczyć ciśnienie p_x panujące w zbiorniku nad powierzchnią swobodnego zwierciadła.

DANE: $p_a, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

Weźmy pod uwagę powierzchnie jednakowego ciśnienia, które leżą na poziomach 1-1, 2-2, i 3-3. Obliczamy:

- ciśnienie w punkcie A (i jednocześnie w punkcie B) wynosi

$$p_A = p_a + \gamma_1 h_1 = p_B$$

- ponieważ punkt C leży **wyżej** niż punkt B, ciśnienie p_C (a równocześnie ciśnienie p_D) jest **mniejsze** od ciśnienia p_B i wynosi

$$p_C = p_B - \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_3 - \gamma_3 h_4 = p_D$$

- punkt E leży **niżej** niż punkt D, zatem ciśnienie p_E jest **większe** od ciśnienia p_D i jest równe

$$p_E = p_D + \gamma_2 h_5 + \gamma_3 h_6$$

- jednocześnie

$$p_E = p_x$$

Wyrażając powyższe jednym równaniem, napisać można

$$p_a + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_3 - \gamma_3 h_4 + \gamma_2 h_5 + \gamma_3 h_6 = p_x$$

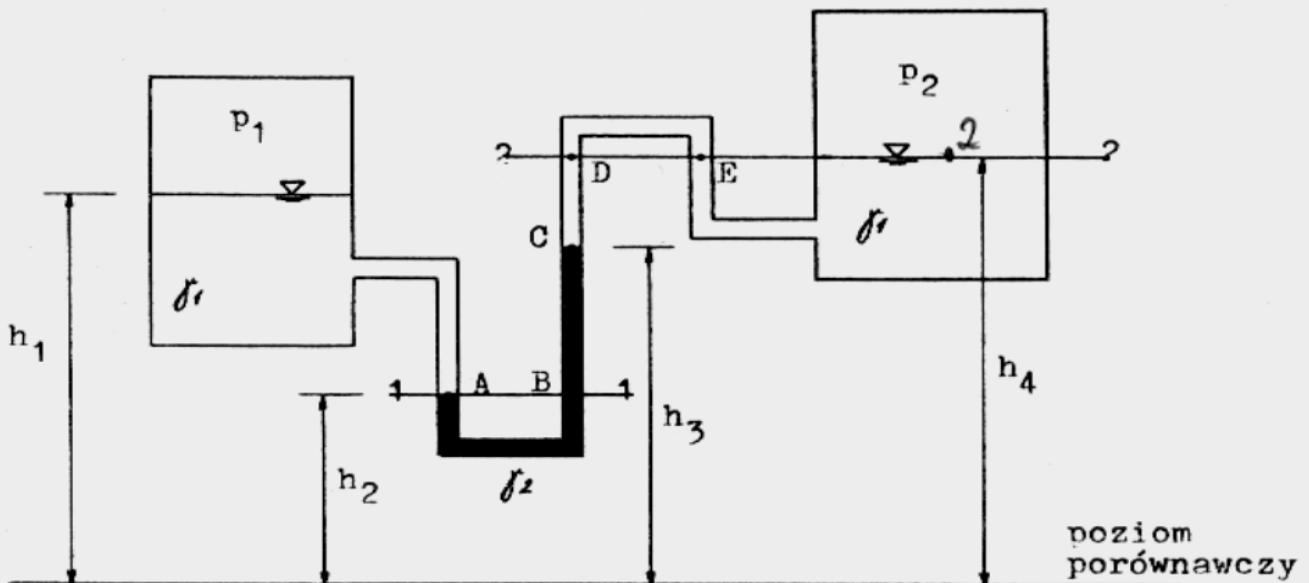
co stanowi rozwiązanie zadania.

W odróżnieniu od piezometru rurka pokazana na rys. II.4 i II.5 wypełniona jest kilkoma cieczami. Rurka taka nazywana jest **manometrem cieczowym otwartym** lub krótko **rurką manometryczną**.

Przykład 2

Obliczyć różnicę ciśnienia gazu $\Delta p = p_1 - p_2$ w zbiornikach pokazanych na rys. II.6.

DANE: $h_1, h_2, h_3, h_4, \gamma_1, \gamma_2$



Rys. II.6

Po wyznaczeniu powierzchni jednakowego ciśnienia tak, jak na rys. II.6 (poziomy 1-1 i 2-2) możemy napisać

$$p_1 + \gamma_1 (h_1 - h_2) - \gamma_2 (h_3 - h_2) - \gamma_1 (h_4 - h_3) = p_2$$

$$\underbrace{p_1 + \gamma_1 (h_1 - h_2)}_{p_A = p_B} - \underbrace{\gamma_2 (h_3 - h_2)}_{p_C} = p_2$$

$$\underbrace{p_1 + \gamma_1 (h_1 - h_2) - \gamma_2 (h_3 - h_2)}_{p_D = p_E} - \gamma_1 (h_4 - h_3) = p_2$$

a zatem

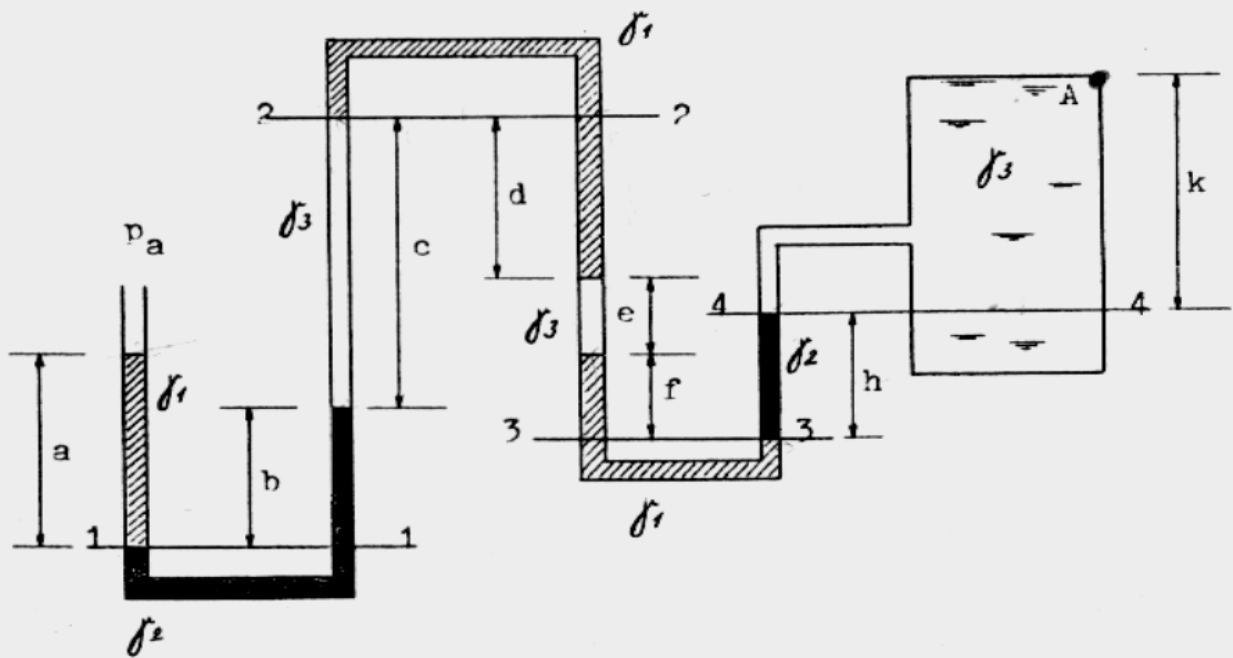
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma_2 (h_3 - h_2) + \gamma_1 (h_4 - h_3 - h_1 + h_2)$$

Zwróćmy uwagę, że ewentualna zmiana różnicy ciśnienia Δp w zbiornikach spowoduje inne ułożenie cieczy γ_2 w rurce manometrycznej i zmieni się różnica poziomów $\Delta h = h_3 - h_2$. Istnieje zatem zawsze zależność $\Delta h = f(\Delta p)$, stąd naszkicowany na rys. II.6 manometr cieczowy nazywany jest **manometrem różnicowym**.

Przykład 3

Obliczyć ciśnienie panujące tuż pod pokrywą zbiornika (np. w punkcie A - patrz rys. II.7).

DANE: p_a , a , b , c , d , e , f , h , k , γ_1 , γ_2 , γ_3



Rys. II.7

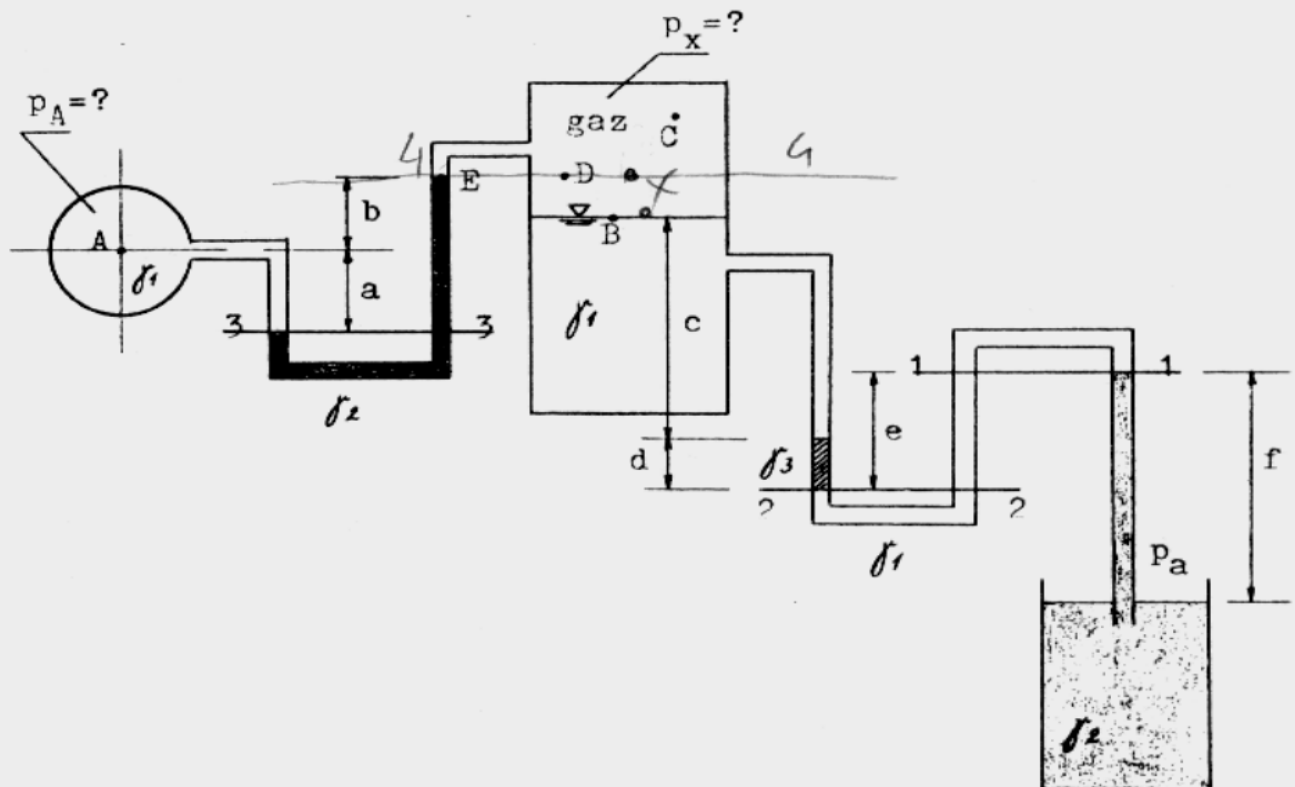
Rozwiązanie:

$$p_a + \gamma_1 a - \gamma_2 b - \gamma_3 c + \gamma_1 d + \gamma_3 e + \gamma_1 f - \gamma_2 h - \gamma_3 k = p_A$$

Przykład 4

Obliczyć ciśnienie p_x w zbiorniku oraz ciśnienie p_A panujące w punkcie A przekroju rurociągu (rys. II.8).

DANE: p_a , a , b , c , d , e , f , γ_1 , γ_2 , γ_3



Rys. II.8

Ze względu na to, że ciężar objętościowy gazów jest liczbowo niewielki w porównaniu z ciężarem objętościowym cieczy można przyjąć, że w obliczeniach pomijając się będzie różnice ciśnienia między poszczególnymi punktami słupa gazu. Przyjmijmy więc, że w objętości zajętej przez gaz $p_B = p_C = p_D = p_E$ (zob. rys. II.8).

Rozwiązując zadanie, otrzymamy

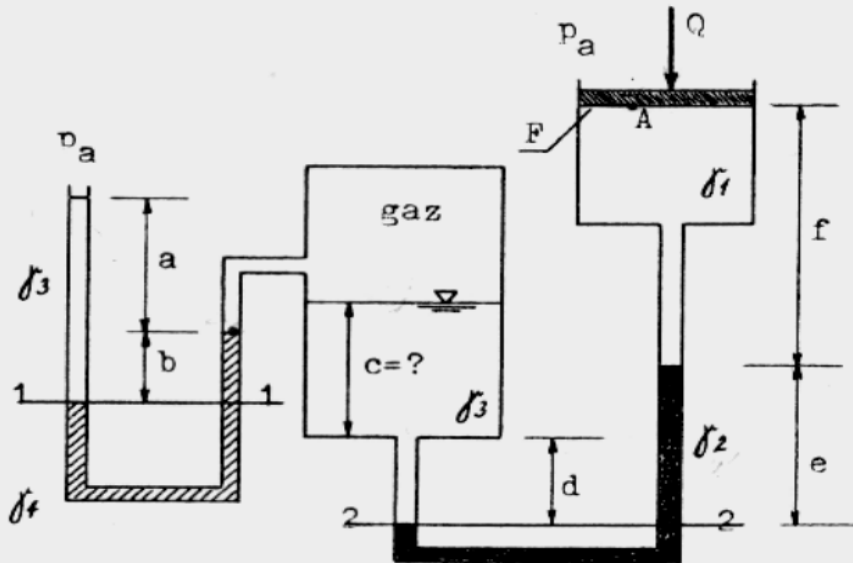
$$p_a - \gamma_2 f + \gamma_1 e - \gamma_3 d - \gamma_1 c = p_x$$

$$p_x + \gamma_2 (b+a) - \gamma_1 a = p_A$$

Przykład 5

Obliczyć napęnienie c zbiornika (rys. II.9).

DANE: p_a , Q , F , a , b , d , e , f , γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_4



Rys. II.9

Rozwiązanie:

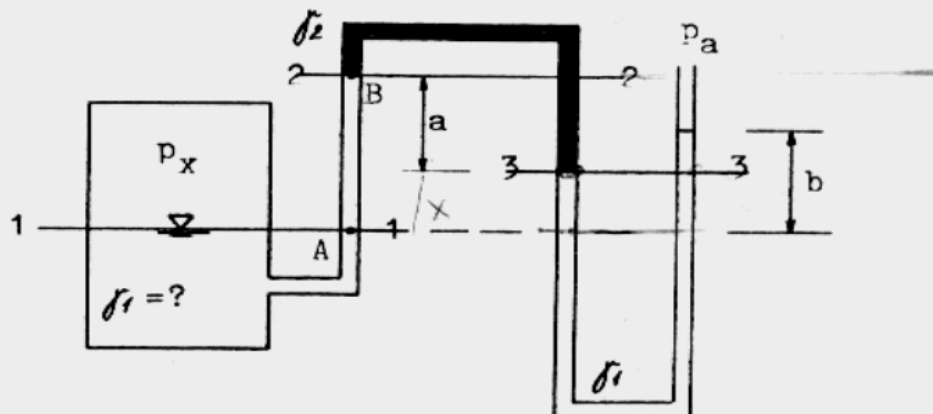
$$p_a + \gamma_3 (a+b) - \gamma_4 b + \gamma_3 (c+d) - \gamma_2 e - \gamma_1 f = p_a + \frac{Q}{F}$$

Z równania tego obliczymy szukaną wartość c .

Przykład 6

Obliczyć ciężar objętościowy γ_1 cieczy wypełniającej zbiornik (zob. rys. II.10).

DANE: p_a , p_x , a , b , γ_2



Rys. II.10

Do rozwiązania zadania konieczna byłaby znajomość odległości między punktami A i B. Odległość ta nie jest dana, przyjmijmy jednak, że jest ona równa $a + x$. Zgodnie z rys. II.10 otrzymamy

$$p_x - \gamma_1 (a+x) + \gamma_2 a - \gamma_1 (b-x) = p_a$$

czyli

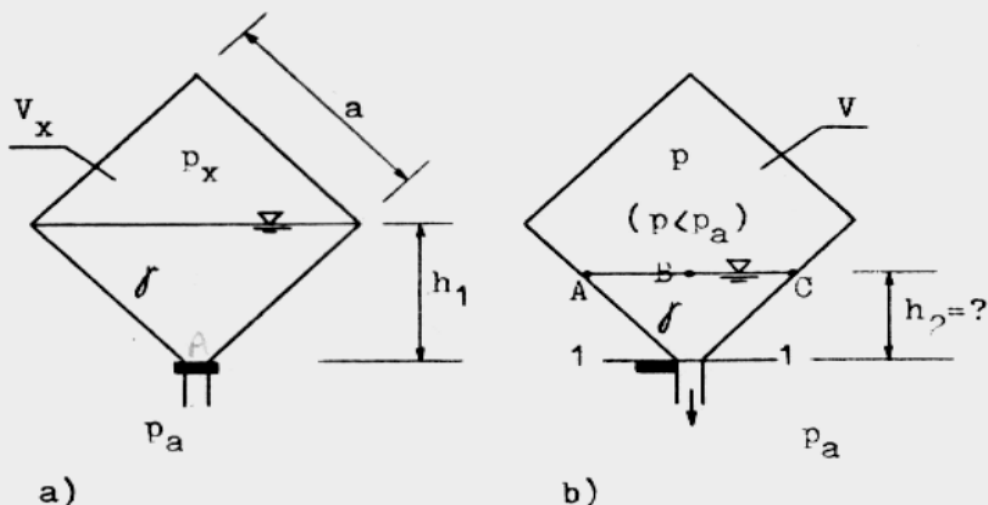
$$p_x - \gamma_1 a + \gamma_2 a - \gamma_1 b = p_a$$

(nieznana wielkość x uległa redukcji). Ostatecznie

$$\gamma_1 = \frac{p_x - p_a + \gamma_2 a}{a + b}$$

Przykład 7

Na dolnej krawędzi szesciennego naczynia zamontowany jest zawór o niewielkiej średnicy. Gdy zawór ten jest zamknięty, ciecz o ciężarze objętościowym γ wypełnia naczynie do wysokości h_1 , zaś nad swobodnym zwierciadłem cieczy panuje ciśnienie p_x (rys. II.11a). Po otwarciu zaworu ciecz zaczyna wypływać z naczynia. Przy jakim napełnieniu h_2 ustanie wypływ cieczy? (zob. rys. II.11b).



Rys. II.11

DANE: p_a , p_x , a , γ

Przystępując do rozwiązania zadania trzeba przede wszystkim postawić pytanie, jak muszą się ułożyć warunki fizyczne, by mimo otwartego zaworu ciecz przestała wypływać z naczynia.

W trakcie opróżniania naczynia poziom zwierciadła cieczy opada, zwiększa się natomiast objętość gazu nad powierzchnią cieczy. Ponieważ do wnętrza naczynia nie ma dostępu z zewnątrz, ciśnienie rozprężanego gazu musi stopniowo maleć. Wypływ cieczy ustanie, jeśli w przekroju zaworu (poziom 1-1 na rys. II.11b) suma ciśnienia gazu oraz ciśnienia słupa cieczy w naczyniu zrównoważy się z ciśnieniem atmosferycznym p_a , panującym na zewnątrz naczynia.

Tak sformułowany warunek równowagi zapiszemy następująco:

$$p + \gamma h_2 = p_a \quad (1)$$

Ciśnienie gazu p panujące w momencie równowagi nie jest znane, lecz można je obliczyć, odwołując się do prawa Boyle'a - Mariotte'a. Jeżeli mianowicie przyjąć, że rozprężanie się gazu w naczyniu zachodziło w warunkach izotermicznych, wówczas

$$p_x V_x = p V$$

Symbol V_x oznacza początkową objętość gazu w naczyniu przy ciśnieniu gazu p_x , natomiast V jest objętością gazu o ciśnieniu p . W naszym zadaniu

$$V_x = \frac{1}{2} \text{obj. szescianu} = \frac{1}{2} a^3$$

$$\begin{aligned} V &= \text{obj. szescianu} - \text{obj. cieczy} = a^3 - \frac{1}{2} h_2 \overline{AC} a = \\ &= a^3 - \frac{1}{2} h_2 2h_2 a \operatorname{tg}45^\circ = a(a^2 - h_2^2) \end{aligned}$$

(zob. rys. II.11b). Zatem

$$p_x \frac{1}{2} a^3 = p a (a^2 - h_2^2) \quad (2)$$

Równania (1) i (2) stanowią układ o dwóch niewiadomych h_2 i p , które możemy łatwo obliczyć.

Przykład 8

Zbiornik I wypełniony cieczą do wysokości h_1 połączony jest z pustym, otwartym zbiornikiem II krotką rurką z zaworem Z (rys. II.12). Po otwarciu tego zaworu ciecz zaczyna wypełniać zbiornik II. Obliczyć napełnienia h_2 i h_3 , jakie ustalą się w zbiornikach w chwili ustania przepływu.

DANE: p_a , p_x (początkowe ciśnienie gazu nad powierzchnią cieczy w zbiorniku I), H , a , b , c , d , h_1 , γ

W trakcie przepływu cieczy ze zbiornika I do II zmienia się napełnienie zbiorników: zwierciadło cieczy w zbiorniku I opada, natomiast podnosi się w zbiorniku II. O ile w otwartym zbiorniku II ciśnienie gazu nie ulega zmianie (jest to zawsze ciśnienie atmosferyczne p_a), to w zbiorniku I obniżanie poziomu zwierciadła powoduje rozprężanie gazu nad powierzchnią cieczy, skutkiem czego ciśnienie gazu stopniowo maleje.

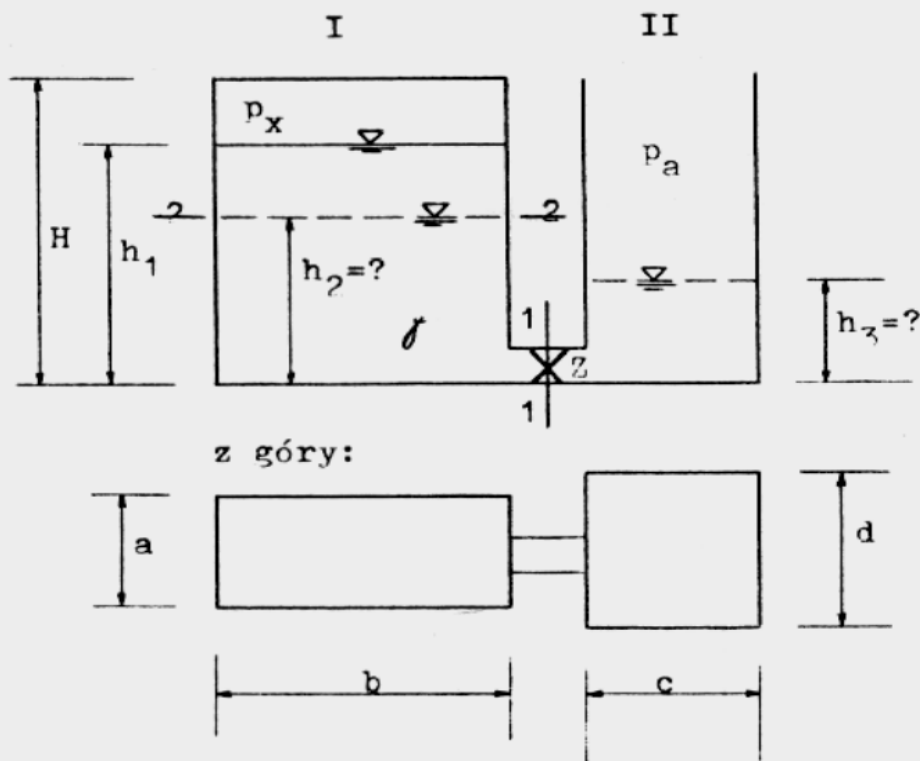
Wzmy pod uwagę przekrój 1-1 (przekrój zaworu Z). Warunek, jaki winien być spełniony, by ustał przepływ cieczy między zbiornikami, czyli **warunek równowagi**, jest następujący: ciśnienie obliczone od strony zbiornika I musi być równe ciśnieniu od strony zbiornika II. Tak więc

$$p + \gamma h_2 = p_a + \gamma h_3 \quad (1)$$

W powyższym równaniu p oznacza ciśnienie gazu w zbiorniku I w momencie równowagi, tzn. w chwili ustania przepływu pomiędzy zbiornikami.

Warunek równowagi ciśnień można naturalnie zapisać dla każdego innego przekroju, niekoniecznie przechodzącego przez zawór. Tak np. dla przekroju 2-2 (zob. rys. II.12) napisalibyśmy:

$$p = p_a + \gamma h_3 - \gamma h_2$$



Rys. II.12

Ciśnienie p można obliczyć, stosując - jak w poprzednim zadaniu - prawo Boyle'a - Mariotte'a. Ponieważ objętość gazu odpowiadająca jego początkowemu ciśnieniu p_x wynosiła

$$V_x = a b (H - h_1)$$

zaś objętość odpowiadająca ciśnieniu p jest równa

$$V = a b (H - h_2)$$

zatem

$$p_x a b (H-h_1) = p a b (H-h_2) \quad (2)$$

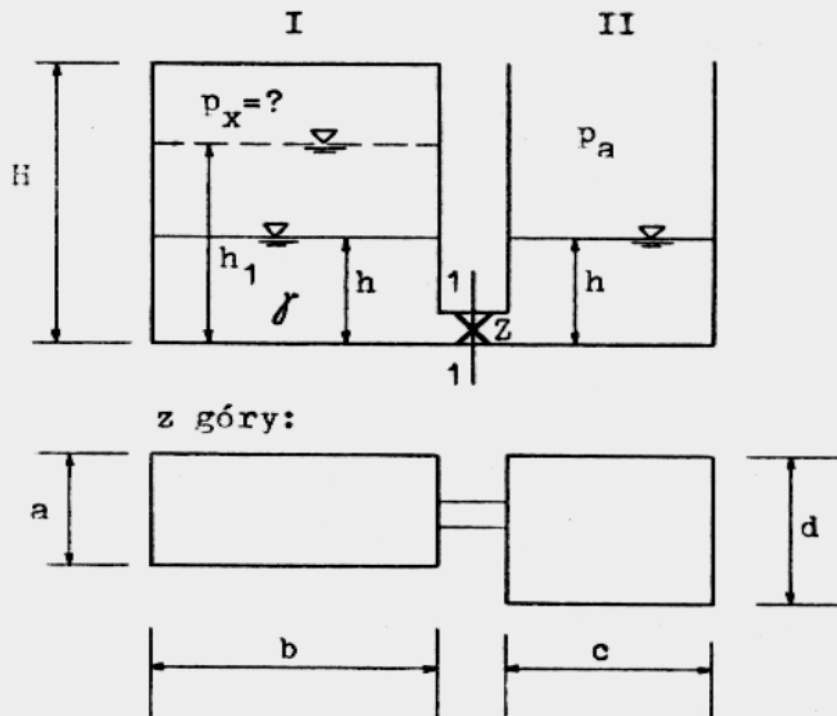
Równania (1) i (2) nie wystarczą jeszcze do rozwiązania zadania, zawierają bowiem trzy niewiadome: p , h_2 i h_3 . Zauważmy jednak, że suma objętości cieczy w zbiornikach pozostaje niezmienną, a więc:

$$a b h_1 = a b h_2 + c d h_3 \quad (3)$$

Z układu równań (1), (2) i (3) obliczymy szukane napęnlienia h_2 oraz h_3 , a także ciśnienie p .

Można przy okazji zastanowić się nad rozwiązaniem zadania o następującej treści:

Ile wynosić musi początkowe ciśnienie p_x gazu w zbiorniku I, by po otwarciu zaworu Z uzyskać jednakowe napęnlienia h w obu zbiornikach (zob. rysunek II.13)?



Rys. II.13

Warunek równowagi dla przekroju 1-1 brzmi:

$$p + \gamma h = p_a + \gamma h$$

co oznacza, że w momencie równowagi ciśnienie gazu w zbiorniku I wynosić musi $p = p_a$.

Po zapisaniu prawa Boyle'a - Mariotte'a

$$p_x V_x = p V$$

czyli

$$p_x a b (H-h_1) = p_a a b (H-h)$$

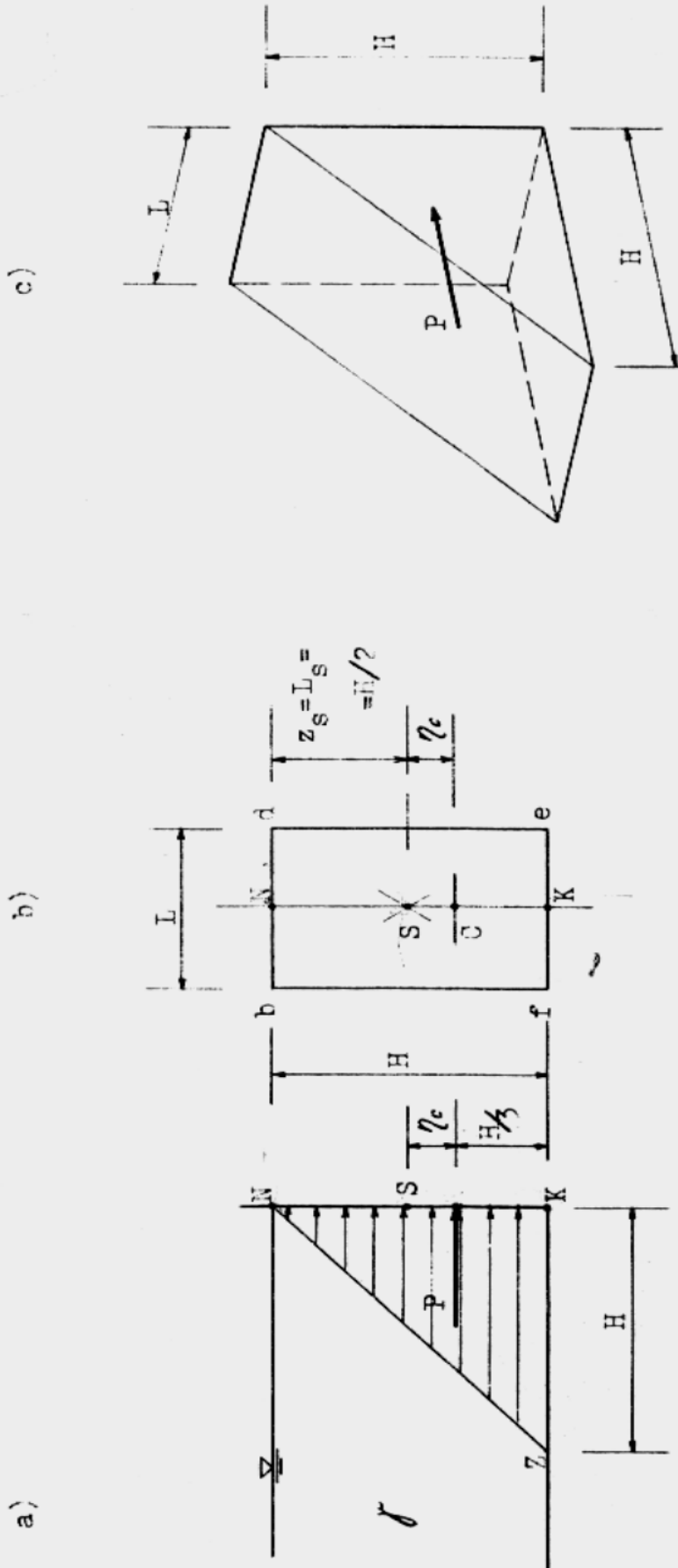
obliczymy szukane początkowe ciśnienie p_x :

$$p_x = \frac{p_a (H-h)}{H-h_1}$$

2. Parcie na płaskie powierzchnie

Porównanie metod obliczania siły parcia na powierzchnie płaskie skłania do wniosku, że metoda analityczna jest znacznie łatwiejsza w zastosowaniu, toteż w większości niżej zamieszczonych przykładów proponuje się używanie właśnie tej metody.

Zwróćmy uwagę, że jeżeli rozpatrywana w danym zadaniu powierzchnia jest symetryczna względem przechodzącej przez jej środek ciężkości pionowej osi, wówczas współrzędna ζ_c środka parcia jest z definicji równa zeru (zob. pkt 15.2.2 części I) i jej obliczanie jest zbędne; z góry wiadomo, że środek parcia leży na wspomnianej osi symetrii.



Rys. II.14

Przykład 1

Obliczyć parcie cieczy na prostokątną ścianę bdef zbiornika oraz moment siły parcia względem punktu K (rys. II.14).

DANE: H, L, γ

Przystępując do rozwiązania zadania zauważmy przede wszystkim, że:

- po obu stronach rozpatrywanej ściany panuje to samo ciśnienie zewnętrzne (ciśnienie atmosferyczne p_a) i działa ono z obu stron na jednakową powierzchnię ściany; w tej sytuacji wpływ ciśnienia zewnętrznego redukuje się wzajemnie i jego działanie można pominąć w obliczeniach.

Rozwiązanie metodą graficzno-analityczną

Odcinek KN (rys. II.14a) jest pionowym przekrojem ściany bdef. Zagłębienie H punktu K pod zwierciadłem cieczy odłożmy w tymże punkcie prostopadłe do przekroju ściany i połączmy linią prostą z punktem N, którego zagłębienie równe jest zeru. Otrzymujemy wykres parcia; jest on - jak wiemy - przekrojem bryły parcia. Kształt tego wykresu oraz rozpatrywanej ściany bdef pozwala nam wyobrazić sobie bryłę parcia (naszkicowano ją na rys. II.14c).

Ciężar owej bryły jest równy poszukiwanej sile parcia, zatem

$$P = V_b \gamma = H \frac{H}{2} L \gamma$$

Wektor parcia P przechodzi przez środek ciężkości bryły parcia. W rozwanym przypadku leży on na wysokości środka ciężkości pola wykresu KZN, zatem odległość środka parcia (czyli punktu C) od podstawy ściany bdef wynosi

$$r = \frac{H}{3}$$

Moment siły parcia względem punktu K jest równy

$$M = P r = \gamma L \frac{H^3}{6}$$

Rozwiązanie metodą analityczną

Parcie cieczy na ścianę bdef obliczymy zgodnie z wzorem (I.18)

$$P = \gamma z_s A = \gamma \frac{H}{2} L H$$

(zob. rys. II.14b). Współrzędna η_c środka parcia, czyli odległość między środkiem ciężkości S rozpatrywanej ściany a punktem C, liczona wzdłuż powierzchni ściany - jest wg wzoru (I.19) równa

$$\eta_c = \frac{I}{L_s A} = \frac{(L H^3)/12}{\frac{H}{2} (L H)} = \frac{H}{6}$$

Z rys. II.14a wynika, że ramię siły parcia względem punktu K wynosi

$$r = \frac{H}{2} - \eta_c = \frac{H}{3}$$

zatem moment

$$M = P r = \gamma L \frac{H^3}{6}$$

Wyniki otrzymane obydwoma metodami są naturalnie identyczne.

Przykład 2

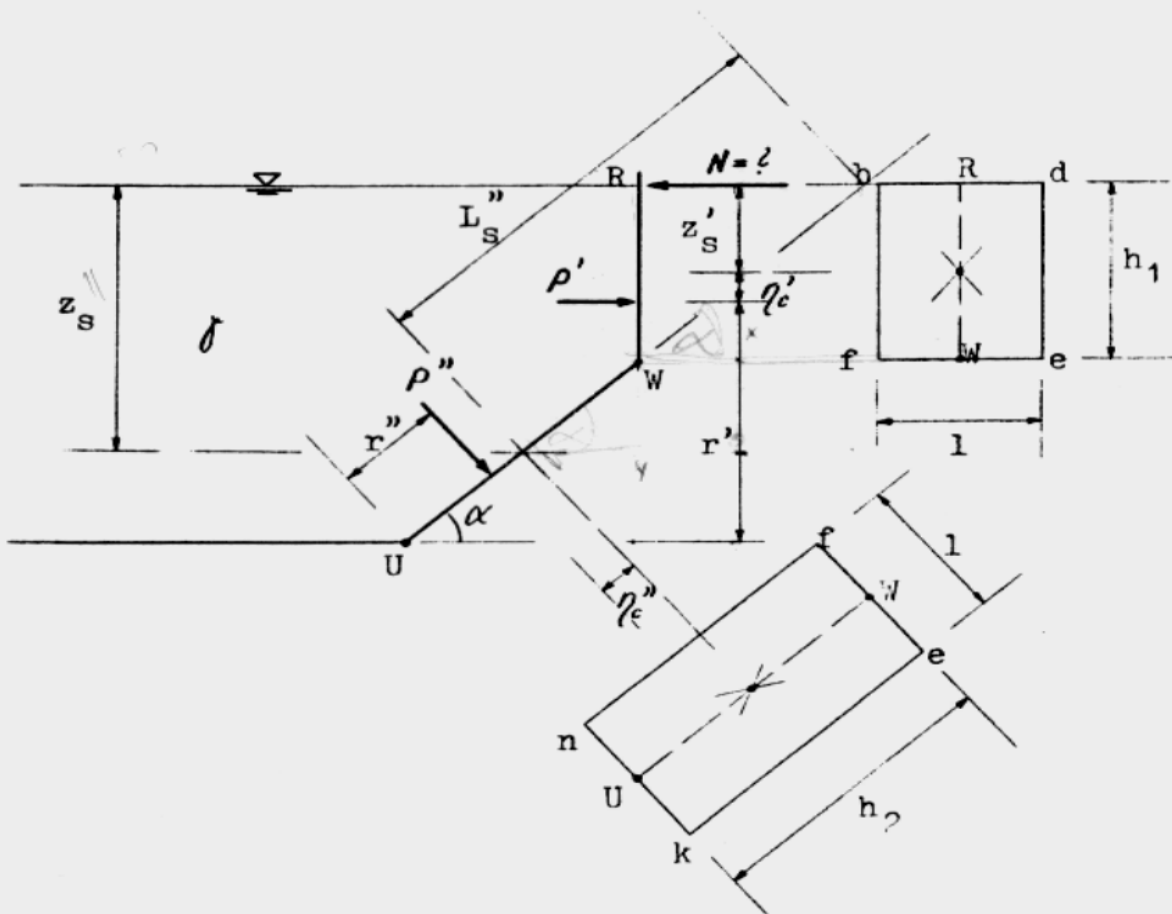
Ściana zbiornika, której kształt pokazano na rysunku II.15, może obracać się wokół osi k-n. Ile wynosić musi siła N, by przyłożona poziomo do górnej krawędzi ściany nie pozwoliła na jej obrót pod wpływem parcia cieczy wypełniającej zbiornik? (W obliczeniach nie uwzględniać ciężaru ściany).

DANE: $h_1, h_2, l, \gamma, \alpha$

Siła parcia cieczy działająca na rozpatrywaną ścianę od strony zbiornika powoduje moment "otwierający"; moment "zamykający" o kierunku przeciwnym pochodzi od siły N. Równość owych momentów stanowi warunek równowagi

sciany. Z warunku tego wyznaczmy szukaną siłę N , wcześniej jednak obliczyć trzeba wartość i położenie siły parcia cieczy. Można użyć w tym celu dwóch metod, co pokazano poniżej.

Zauważmy, że aktualna jest uwaga ze znakiem * umieszczona na str. 79.



Rys. II.15

Rozwiązanie przy użyciu analitycznej metody obliczenia siły parcia cieczy

Rozpatrując górną część sciany (czyli powierzchnię $A' = l h_1$) otrzymamy

$$P' = \gamma z'_s A' = \gamma \frac{h_1}{2} l h_1 \tag{1}$$

$$\eta'_c = \frac{I'}{L'_s A'} = \frac{(1 h_1^3)/12}{\frac{h_1}{2} (h_1 \cdot 1)} = \frac{h_1}{6}$$

Ramię siły P względem osi obrotu sciany

$$r' = h_2 \sin \alpha + \left(\frac{h_1}{2} - \eta'_c \right) = h_2 \sin \alpha + \frac{h_1}{3} \quad (2)$$

Dla dolnej części sciany (dla powierzchni $A'' = 1 h_2$)

$$P'' = \gamma z''_s A'' = \gamma \left(h_1 + \frac{h_2}{2} \sin \alpha \right) \cdot h_2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \eta''_c &= \frac{I''}{L''_s A''} = \frac{I''}{(z''_s / \sin \alpha) A''} = \frac{(1 h_2^3)/12}{\left[\frac{h_1}{\sin \alpha} + \frac{h_2}{2} \right] h_2 \cdot 1} = \\ &= \frac{h_2^2}{12 \left(\frac{h_1}{\sin \alpha} + \frac{h_2}{2} \right)} \end{aligned}$$

$$r'' = \frac{h_2}{2} - \eta''_c = \frac{h_2}{2} - \frac{h_2^2}{12 \left(\frac{h_1}{\sin \alpha} + \frac{h_2}{2} \right)} \quad (4)$$

Warunek równowagi dla całej rozpatrywanej sciany zapiszemy następująco:

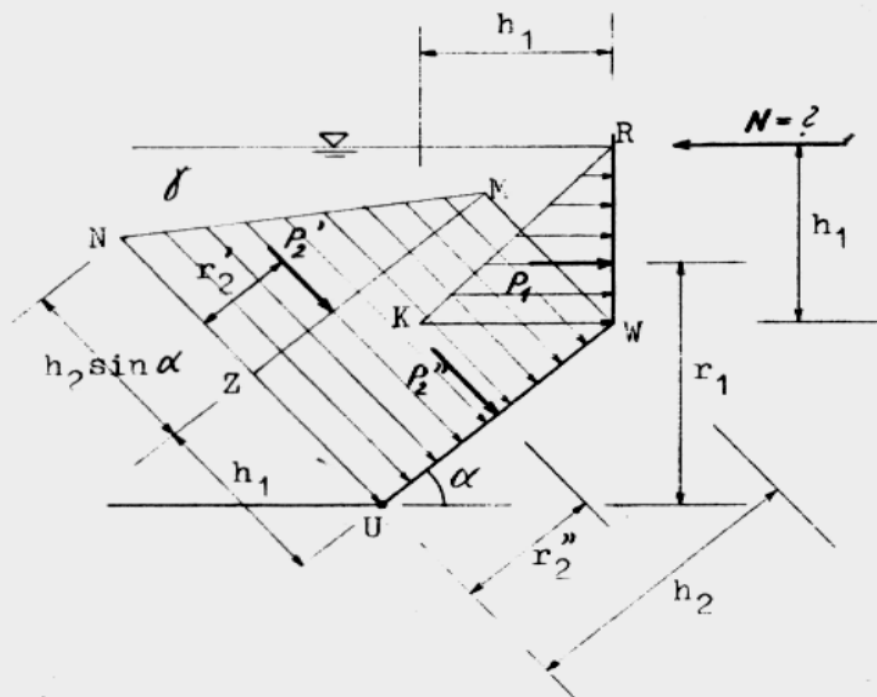
$$P' r' + P'' r'' = N (h_1 + h_2 \sin \alpha) \quad (5)$$

Po wstawieniu zależności (1) + (4) okaże się, że jedyną niewiadomą w równaniu (5) jest szukana siła N; można ją teraz łatwo wyznaczyć.

Rozwiązanie przy użyciu graficzno-analitycznej metody obliczenia siły parcia cieczy

Po odłożeniu zagłębień poszczególnych punktów pionowego przekroju rozpatrywanej sciany prostopadle do tego przekroju otrzymujemy wykresy par-

cia: trójkąt KRW dla górnej części sciany oraz trapez MWUN dla części dolnej (rys. II.16). Bryły parcia naszkicowano na rys. II.17, zamieszczonym na następnej stronie.



Rys. II.16

Ciężar bryły parcia odpowiadającej powierzchni $1 \cdot h_1$ sciany jest równy sile parcia P_1 na tę powierzchnię

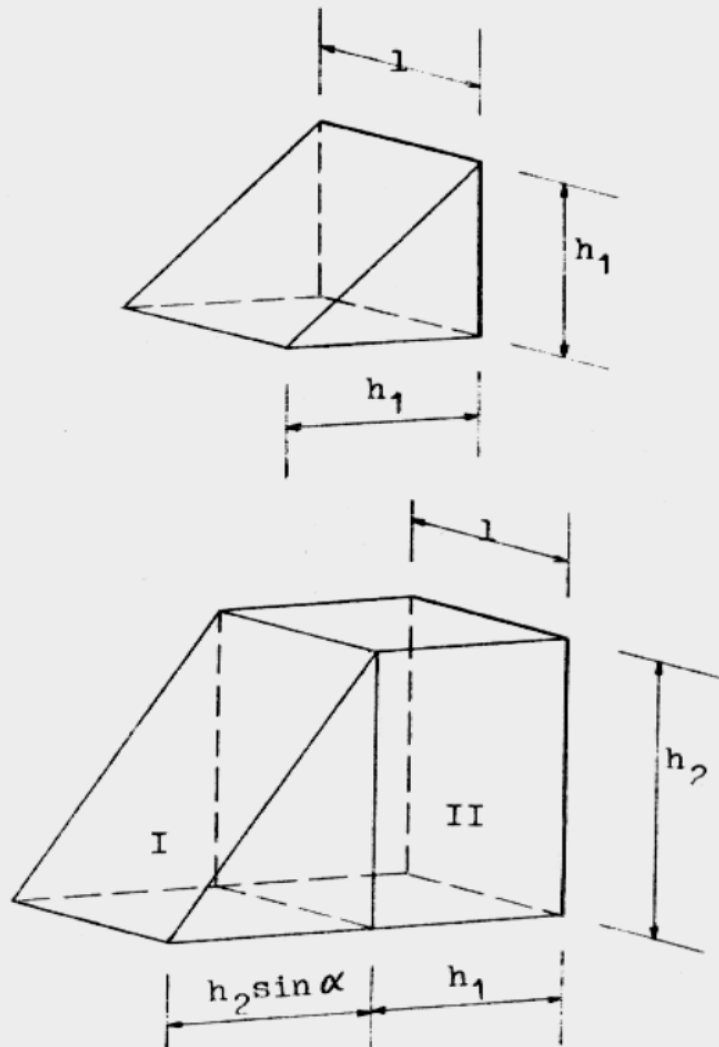
$$P_1 = h_1 \frac{h_1}{2} \cdot \gamma \quad (6)$$

Z uwagi na to, że pole $1 \cdot h_1$ jest prostokątem, środek ciężkości bryły parcia, przez który przechodzi wektor P_1 , leży na tej samej wysokości co środek ciężkości wykresu parcia. Tak więc ramie siły P_1 względem osi obrotu sciany (czyli względem osi k-n) jest równe

$$r_1 = h_2 \sin \alpha + \frac{1}{3} h_1 \quad (7)$$

Analogicznie wektor P_2 siły parcia działającej na część $1 \cdot h_2$ sciany leży na wysokości środka ciężkości S_T wykresu parcia MWUN. Jakkolwiek położenie punktu S_T można określić odpowiednim wzorem, jednakże najłatwiej będzie podzielić trapezowy wykres parcia na trójkąt i prostokąt (zob. rys. II.16)

i odpowiednio do tego wyróżnić dwie bryły parcia: bryłę I oraz bryłę II, pokazane na rys. II.17.



Rys. II.17

Bryła I odpowiada składowej P'_2 parcia, przy czym wektor P'_2 leży na wysokości środka ciężkości trójkąta NMZ (rys. II.16). Bryła II odpowiada składowej P'_2 , a wektor P'_2 leży na wysokości środka ciężkości prostokąta MWUZ (patrz ponownie rys. II.16). Tak więc

$$P'_2 = \text{ciężar bryły parcia I} = h_2 \sin \alpha \frac{h_2}{2} l \gamma \quad (8)$$

$$r'_2 = \frac{h_2}{3} \quad (9)$$

$$P_2'' = \text{ciężar bryły parcia II} = h_1 h_2 l \gamma \quad (10)$$

$$r_2'' = \frac{h_2}{2} \quad (11)$$

Ostatecznie warunek równowagi całej sciany ma postać

$$P_1 r_1 + P_2' r_2' + P_2'' r_2'' = N (h_1 + h_2 \sin \alpha) \quad (12)$$

Z równania tego po wprowadzeniu zależności (6) + (11) obliczymy bez kłopotu siłę N.

Sprawdzeniem poprawności obliczeń będzie porównanie otrzymanego wyniku z rezultatem uzyskanym przy wykorzystaniu analitycznej metody obliczenia parcia cieczy.

Przykład 3

W nachylonej scianie zbiornika napełnionego cieczą znajduje się okrągła kłapa o średnicy D (rysunek II.18), obracająca się wokół punktu O. Kłapę tę utrzymywać ma w położeniu zamkniętym siła N, równoważąc działanie parcia cieczy. Obliczyć potrzebną długość x przyspawanego do kłapy płaskownika, na którego końcu przyłożona będzie siła N. (Ciężar kłapy i płaskownika pominać w obliczeniach).

DANE: N, D, a, b, α , γ

Kłapa się nie otworzy, jeśli obracający ją moment pochodzący od siły parcia cieczy będzie co najmniej równy momentowi wywołanemu przez siłę N. Momenty te muszą być obliczone względem punktu obrotu O, zatem warunek równowagi kłapy ma postać (zob. rys. II.18)

$$P r = N (x+D) \quad (1)$$

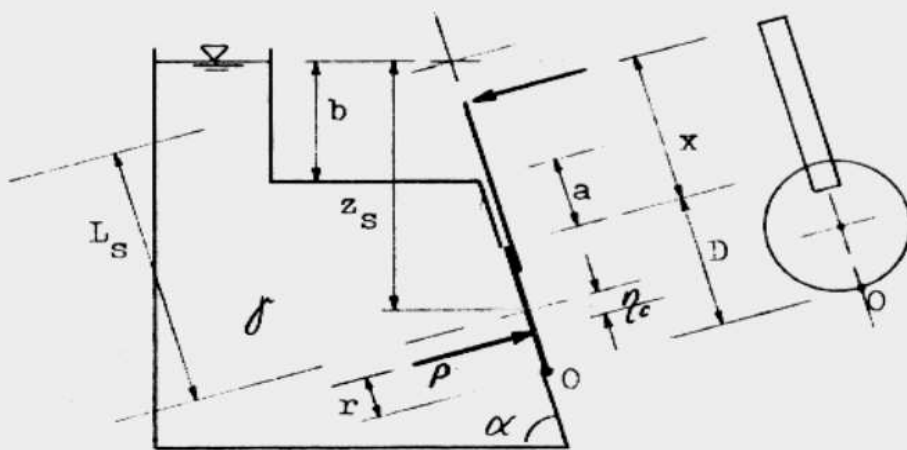
Siłę parcia P obliczymy metodą analityczną. Uwzględniając słuszność uwagi z gwiazdką ze strony 79, napiszemy zgodnie ze wzorem (I.18)

$$P = \gamma z_s A = \gamma \left[b + \left(a + \frac{D}{2} \right) \sin \alpha \right] \frac{\pi D^2}{4} \quad (2)$$

Ramię siły P jest równe

$$r = \frac{D}{2} - \eta_c = \frac{D}{2} - \frac{I}{L_s A} = \frac{D}{2} - \frac{(\pi D^4)/64}{\left(\frac{b}{\sin \alpha} + a + \frac{D}{2}\right) \frac{\pi D^2}{4}} \quad (3)$$

Po podstawieniu zależności (2) i (3) do równania (1) wyliczymy szukaną wartość x jako jedyną niewiadomą w tym równaniu.



Rys. II.18

Przykład 4

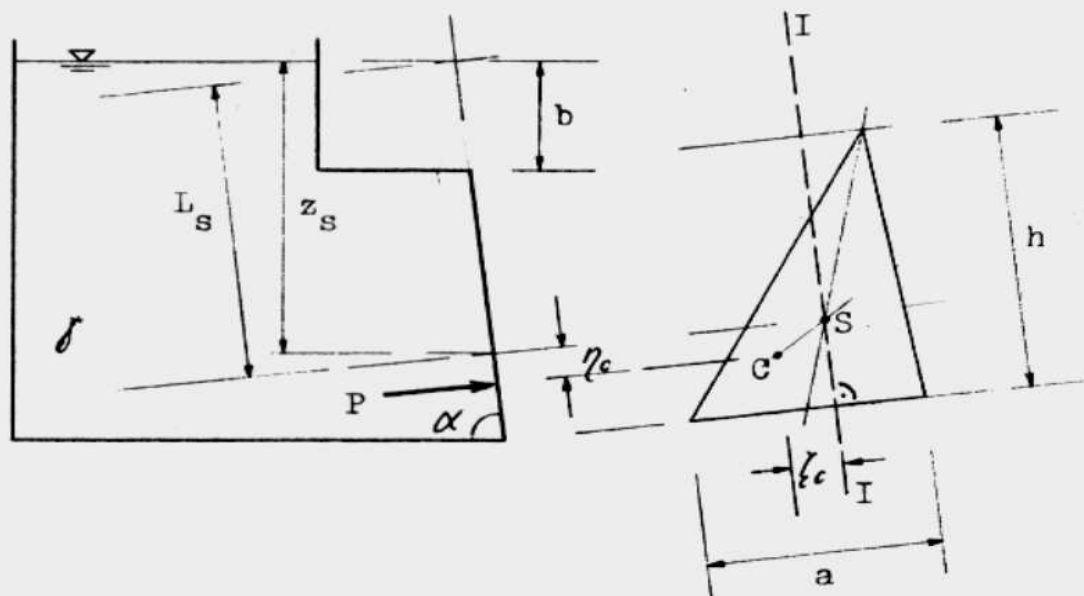
Należy obliczyć parcie cieczy na trójkątną ścianę zbiornika (rys. II.19) oraz określić położenie wektora parcia.

DANE: a, b, h, α, γ

Wpływ ciśnienia zewnętrznego (p_a), działającego z obu stron na całą powierzchnię rozpatrywanej ściany, znosi się wzajemnie.

Parcie na ścianę wynosi

$$P = \gamma z_s A = \gamma \left(b + \frac{2}{3} h \sin \alpha\right) \frac{a h}{2}$$



Rys. II.19

Pionowa oś I-I (zob. rys. II.19), przechodząca przez środek ciężkości sciany, nie jest jej osią symetrii, by zatem znaleźć położenie wektora parcia trzeba w tym wypadku obliczyć obie współrzędne środka parcia, η_c oraz ζ_c . Zgodnie z wzorem (I.19)

$$\eta_c = \frac{I}{L_s A}$$

przy czym

$$L_s = \frac{z_s}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha} + \frac{2}{3} h$$

zatem

$$\eta_c = \frac{(a h^3) / 36}{\left(\frac{b}{\sin \alpha} + \frac{2}{3} h\right) \frac{a h}{2}}$$

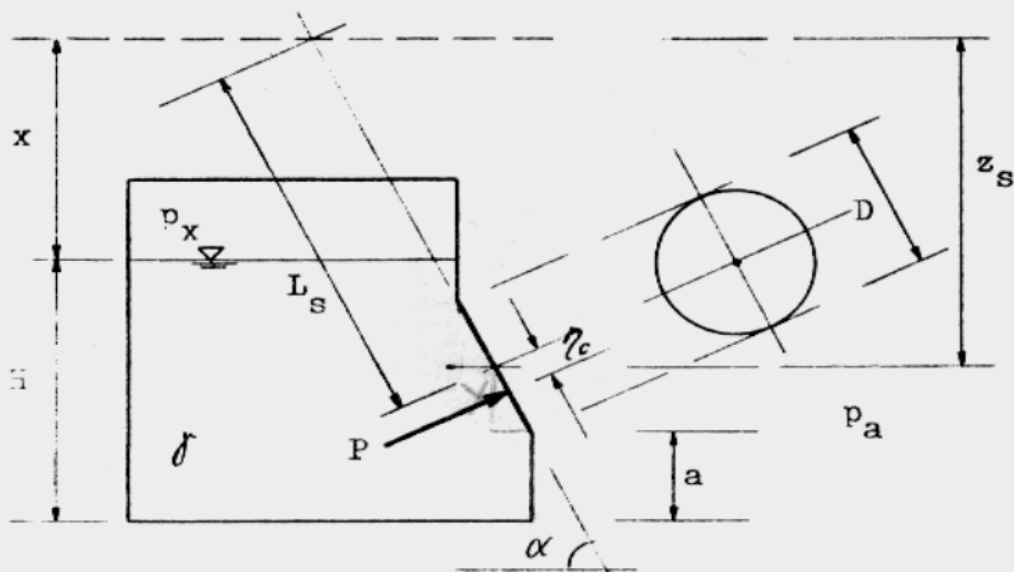
Wg wzoru (I.20)

$$\zeta_c = \frac{I_o}{L_s A} = \frac{(a^2 h^2) / 72}{\left(\frac{b}{\sin \alpha} + \frac{2}{3} h\right) \frac{a h}{2}}$$

Przykład 5

W zamkniętym zbiorniku, napełnionym cieczą do wysokości H , panuje nad zwierciadłem cieczy ciśnienie p_x (rys. II.20). Obliczyć parcie cieczy na kołową klapę umieszczoną w nachylonej ścianie zbiornika i wyznaczyć położenie wektora parcia.

DANE: p_a , p_x , H , a , D , α , γ



Rys. II.20

W niniejszym zadaniu ciśnienie zewnętrzne działające na powierzchnię klapy nie jest po obu jej stronach takie samo. W tym wypadku po dokonaniu redukcji pozostanie do uwzględnienia ciśnienie

$$p_o = p_x - p_a$$

ponad swobodnym zwierciadłem cieczy w zbiorniku.

Zgodnie z treścią uwag w punkcie 15.2.3 cz. I należy kolejno:

- ciśnienie p_o zastąpić ciśnieniem słupa cieczy wypełniającej zbiornik; wysokość tego słupa jest równa

$$x = \frac{p_o}{\gamma} = \frac{p_x - p_a}{\gamma}$$

- poziom cieczy w zbiorniku podnieść o wysokość x (zob. rys. II.20), znajdując tym samym poziom pozornego zwierciadła.

Stosując metodę analityczną obliczymy następująco:

$$P = \gamma z_s A = \gamma z_s \frac{\pi D^2}{4}$$

przy czym

$$z_s = H - a - \frac{D}{2} \sin \alpha + x$$

oraz

$$\eta_c = \frac{I}{L_s A} = \frac{(\pi D^4)/64}{z_s \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{(\pi D^4)/64}{\left(\frac{H-a+x}{\sin \alpha} - \frac{D}{2}\right) \frac{\pi D^2}{4}}$$

Przykład 6

Zamknięty zbiornik jest całkowicie wypełniony cieczą o ciężarze objętościowym γ_1 (rys. II.21). Ciśnienie panujące w zbiorniku określa pokazany na rysunku stan równowagi cieczy w rurce manometrycznej. Obliczyć parcie cieczy na kołowy fragment nachylonej ściany zbiornika oraz wyznaczyć położenie wektora parcia.

DANE: $H, h_1, h_2, h_3, D, \alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$

Na rozważaną powierzchnię kołową A działa od prawej strony - poprzez cieczę w rurce manometrycznej i w zbiorniku - zewnętrzne ciśnienie atmosferyczne p_a . Ponieważ takie samo ciśnienie działa na powierzchnię A od strony lewej, zatem jego wpływ redukuje się wzajemnie w całości i w obliczeniach możemy go nie uwzględniać.

Ciecz wypełnia zbiornik całkowicie, toteż niezbędne jest wyznaczenie położenia pozornego zwierciadła swobodnego. Dokonujemy tego w sposób opisany poniżej.

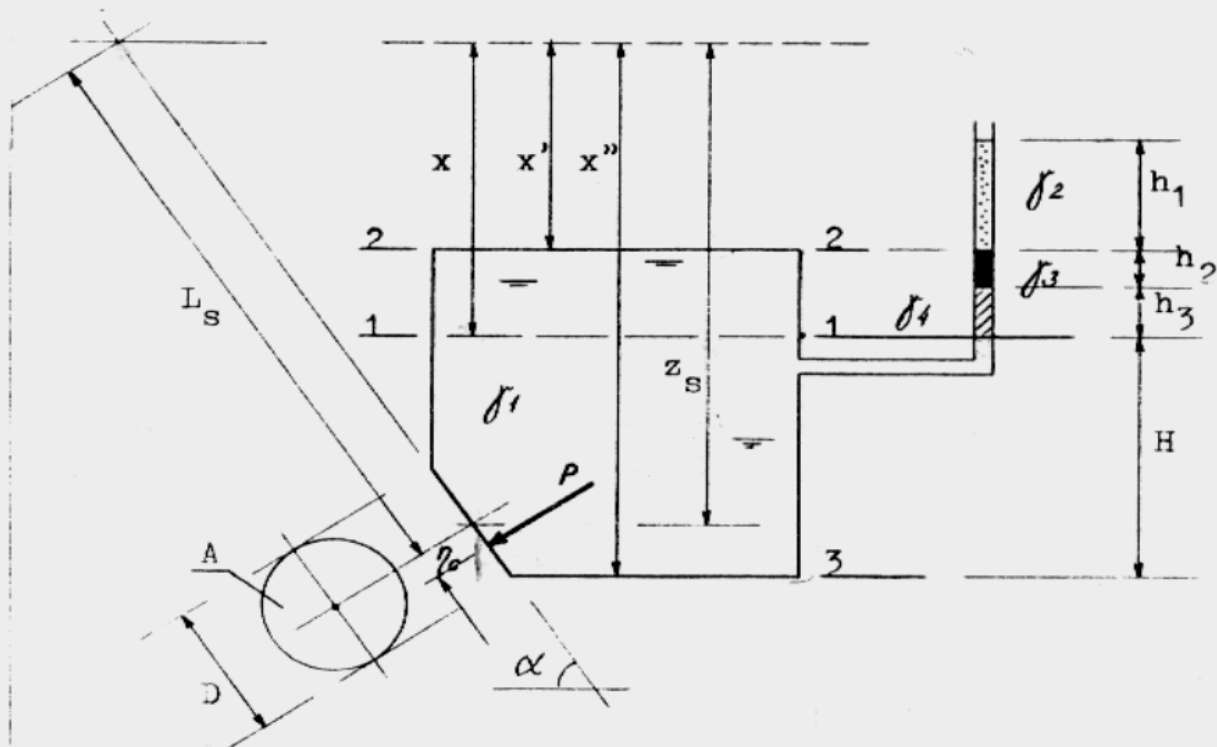
Zbiornik wraz z rurką manometryczną tworzą naczynia połączone. Poprowadźmy powierzchnię jednakowego ciśnienia na poziomie 1-1 (zob. rys. II.21) i obliczmy ciśnienie panujące na tym poziomie w zbiorniku

$$P_{1-1} = \gamma_2 h_1 + \gamma_3 h_2 + \gamma_4 h_3$$

Zastąpmy to ciśnienie działaniem słupa cieczy wypełniającej zbiornik. Słup ten winien mieć wysokość

$$x = \frac{p_{1-1}}{\gamma_1}$$

Po przesunięciu w górę poziomu 1-1 o wyliczoną wartość x otrzymujemy położenie pozornego zwierciadła cieczy w zbiorniku.



Rys. II.21

Obliczając ciśnienie w zbiorniku możemy to uczynić niekoniecznie dla poziomu 1-1. Wyznamy np. ciśnienie na poziomie 2-2 (pokrywa zbiornika); będzie ono równe

$$p_{2-2} = \gamma_2 h_1 + \gamma_3 h_2 + \gamma_4 h_3 - \gamma_1 (h_2 + h_3)$$

Aby określić położenie pozornego zwierciadła cieczy w zbiorniku, należy w tym wypadku przesunąć w górę poziom 2-2, przy czym przesunięcie wyniesie

$$x' = \frac{p_{2-2}}{\gamma_1}$$

Obliczmy jeszcze dla przykładu ciśnienie na poziomie 3-3 (na dnie zbiornika):

$$P_{3-3} = \gamma_2 h_1 + \gamma_3 h_2 + \gamma_4 h_3 + \gamma_1 H$$

Zwierciadło pozorne osiągniemy wówczas, gdy poziom 3-3 przesuniemy w górę o odcinek

$$x'' = \frac{P_{3-3}}{\gamma_1}$$

Niezależnie od tego, który poziomy przekrój zbiornika przyjmiemy do obliczenia ciśnienia otrzymamy naturalnie zawsze jedno i to samo położenie pozornego zwierciadła cieczy (zob. rys. II.21).

Dalsze obliczenia nie wymagają komentarza

$$P = \gamma_1 z_s \quad A = \gamma_1 \left(H - \frac{D}{2} \sin \alpha + x \right) \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\eta_c = \frac{I}{L_s A}$$

przy czym

$$L_s = \frac{z_s}{\sin \alpha} = \frac{H+x}{\sin \alpha} - \frac{D}{2}$$

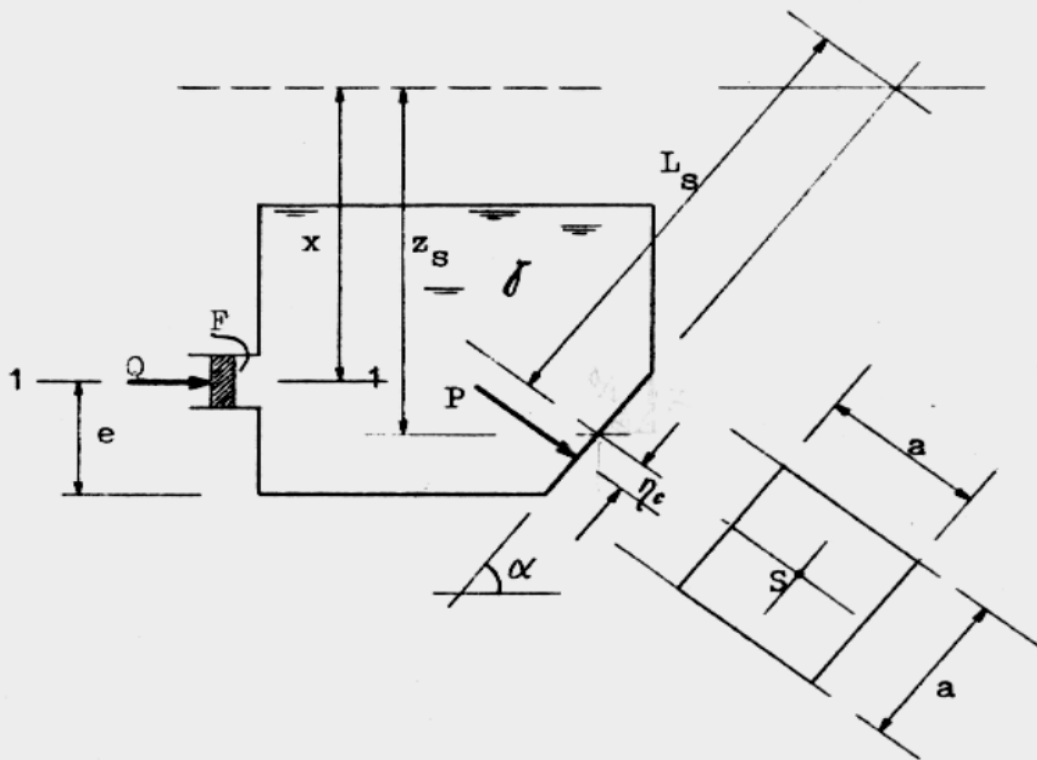
$$I = \frac{\pi D^4}{64}$$

Przykład 7

Pokazany na rysunku II.22 zbiornik zamknięty wypełniony jest całkowicie cieczą sprężoną tłokiem. Obliczyć parcie na powierzchnię nachylonej ściany zbiornika.

DANE: $Q, F, a, e, \alpha, \gamma$

Obustronny wpływ działania zewnętrznego ciśnienia atmosferycznego na rozpatrywaną powierzchnię redukuje się wzajemnie.



Rys. II.22

Dla wyznaczenia położenia pozornego zwierciadła cieczy w zbiorniku o- bierzmy przekroj 1-1 zbiornika, przechodzący przez srodek tłoka o powierz- chni F (zob. rys. II.22). Na poziomie tego przekroju panuje ciśnienie równe ciśnieniu wywieranemu przez tłok, bowiem cały układ znajduje się w równowa- dze, zatem

$$p_{1-1} = \frac{Q}{F}$$

Zastąpmy ciśnienie p_{1-1} działaniem słupa cieczy, która napelniony jest zbiornik. Jeśli wysokość tego słupa równa

$$x = \frac{p_{1-1}}{\gamma} = \frac{Q}{F \gamma}$$

odłożymy w górę od przekroju 1-1, otrzymamy poziom pozornego zwierciadła cieczy.

Po określeniu położenia zwierciadła pozornego obliczymy siłę parcia

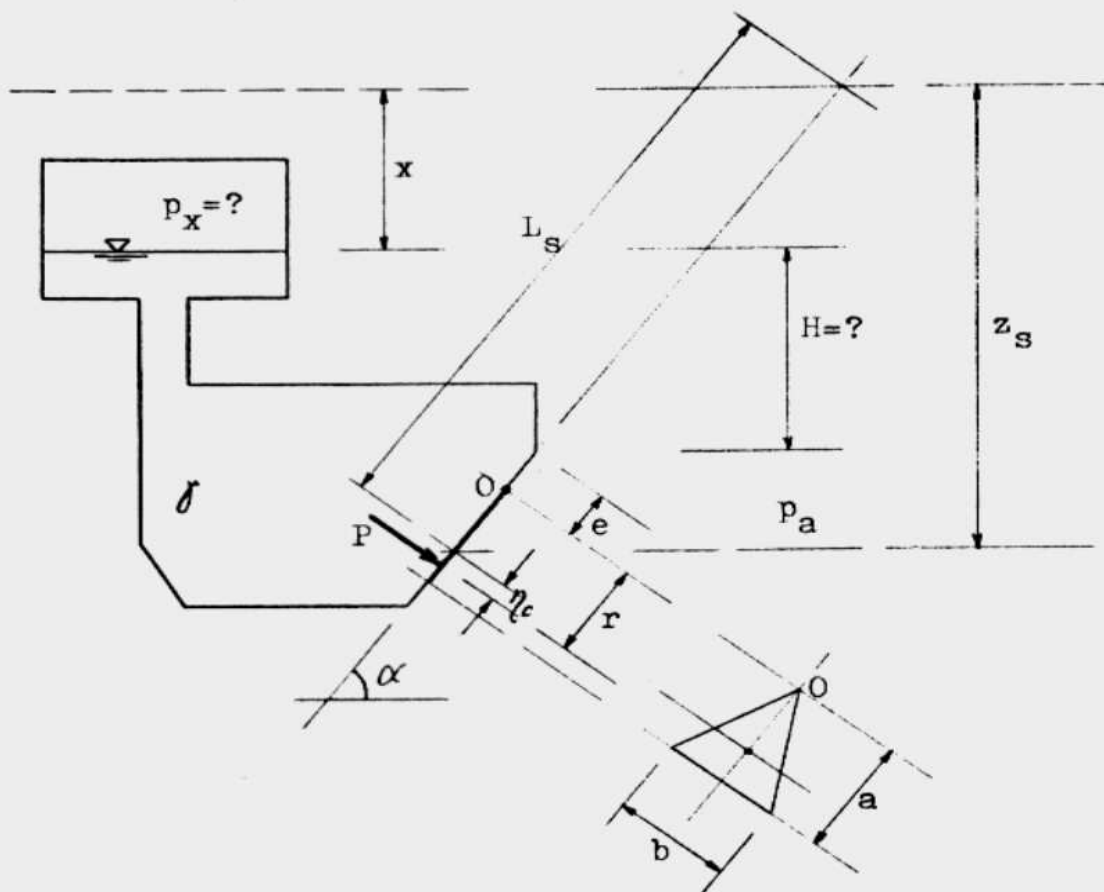
$$P = \gamma z_s A = \gamma \left(x + e - \frac{a}{2} \sin \alpha \right) a^2$$

Przykład 8

Zamknięty zbiornik o kształcie pokazanym na rys. II.23 napełniony jest cieczą do pewnej wysokości. Obliczyć ciśnienie p_x panujące nad zwierciadłem cieczy oraz napełnienie zbiornika H , wiedząc, że:

- siła parcia cieczy na trójkątny fragment nachylonej ściany zbiornika ma wartość P ,
- moment tej siły względem punktu O równy jest M .

DANE: p_a , P , M , a , b , e , α , γ



Rys. II.23

Ponieważ szukane są dwie wielkości (p_x oraz H), potrzebne będą dwa równania wielkości te zawierające.

1) Równanie określające siłę parcia P

Po dokonaniu redukcji ciśnień zewnętrznych działających z obu stron powierzchni rozpatrywanego trójkąta pozostanie do uwzględnienia w obliczeniach nadwyżka ciśnienia $p'_x = p_x - p_a$ nad zwierciadłem cieczy w zbiorniku. Ciśnienie p'_x zastąpimy działaniem słupa cieczy, którą napelniony jest zbiornik. Wysokość tego słupa wynosić musi

$$x = \frac{p'_x}{\gamma} = \frac{p_x - p_a}{\gamma} \quad (1)$$

Przesuwając poziom zwierciadła cieczy o odcinek x w górę, otrzymujemy poziom zwierciadła pozornego.

Zapiszemy następnie (zob. rys. II.23)

$$P = \gamma z_s A = \gamma \left[x + H + \left(e + \frac{2}{3} a \right) \sin \alpha \right] \frac{b a}{2} \quad (2)$$

2) Równanie określające moment siły parcia względem punktu O

Moment ten jest równy $M = P r$, przy czym ramię r siły parcia wynosi

$$r = \frac{2}{3} a + \eta_c = \frac{2}{3} a + \frac{I}{L_s A}$$

Ponieważ

$$I = \frac{b a^3}{36}$$

$$L_s = \frac{z_s}{\sin \alpha} = \frac{x+H}{\sin \alpha} + e + \frac{2}{3} a$$

zatem ostatecznie

$$M = P r = \gamma \left[x + H + \left(e + \frac{2}{3} a \right) \sin \alpha \right] \frac{b a}{2} \frac{(b a^3) / 36}{\left(\frac{x+H}{\sin \alpha} + e + \frac{2}{3} a \right) \frac{b a}{2}} \quad (3)$$

Równania (2) i (3) stanowią układ, z którego wyliczymy dwie poszukiwane w zadaniu niewiadome: H oraz p_x .

Przykład 9

Okragły otwór w nachylonej ścianie zbiornika zakrywa kołowa kłapa o średnicy D , większej niż średnica otworu d . Kłapa może się obracać wokół punktu O , a przytrzymuje ją siła N (rys. II.24). Zbiornik jest zamknięty, wypełniony całkowicie cieczą o ciężarze objętościowym γ_3 . Ciśnienie w zbiorniku określa położenie cieczy w rurce manometrycznej. Wiedząc, że minimalna siła potrzebna do zamknięcia kłapy równa jest N , obliczyć ciężar objętościowy cieczy wypełniającej zbiornik. (Ciężar kłapy pominąć w obliczeniach).

DANE: p_a , N , D , d , h_1 , h_2 , a , α , γ_1 , γ_2

Rozważmy, czy wpływ ciśnienia zewnętrznego działającego z obu stron na kłapę redukuje się wzajemnie.

Zakładamy, że kłapa szczelnie przylega do ściany zbiornika. Ciśnienie atmosferyczne p_a działa poprzez cieczę w rurce manometrycznej i w zbiorniku na fragment kłapy o powierzchni A (zob. rys. II.24), natomiast od strony zewnętrznej zbiornika na całą powierzchnię kłapy A_1 . Ponieważ powierzchnie $A = (\pi d^2)/4$ oraz $A_1 = (\pi D^2)/4$ nie są sobie równe, działania ciśnienia p_a nie możemy pominąć w obliczeniach, gdyż wywołane tym ciśnieniem: siła parcia od lewej strony kłapy

$$P_{al} = p_a A \quad (1)$$

i siła parcia od strony prawej

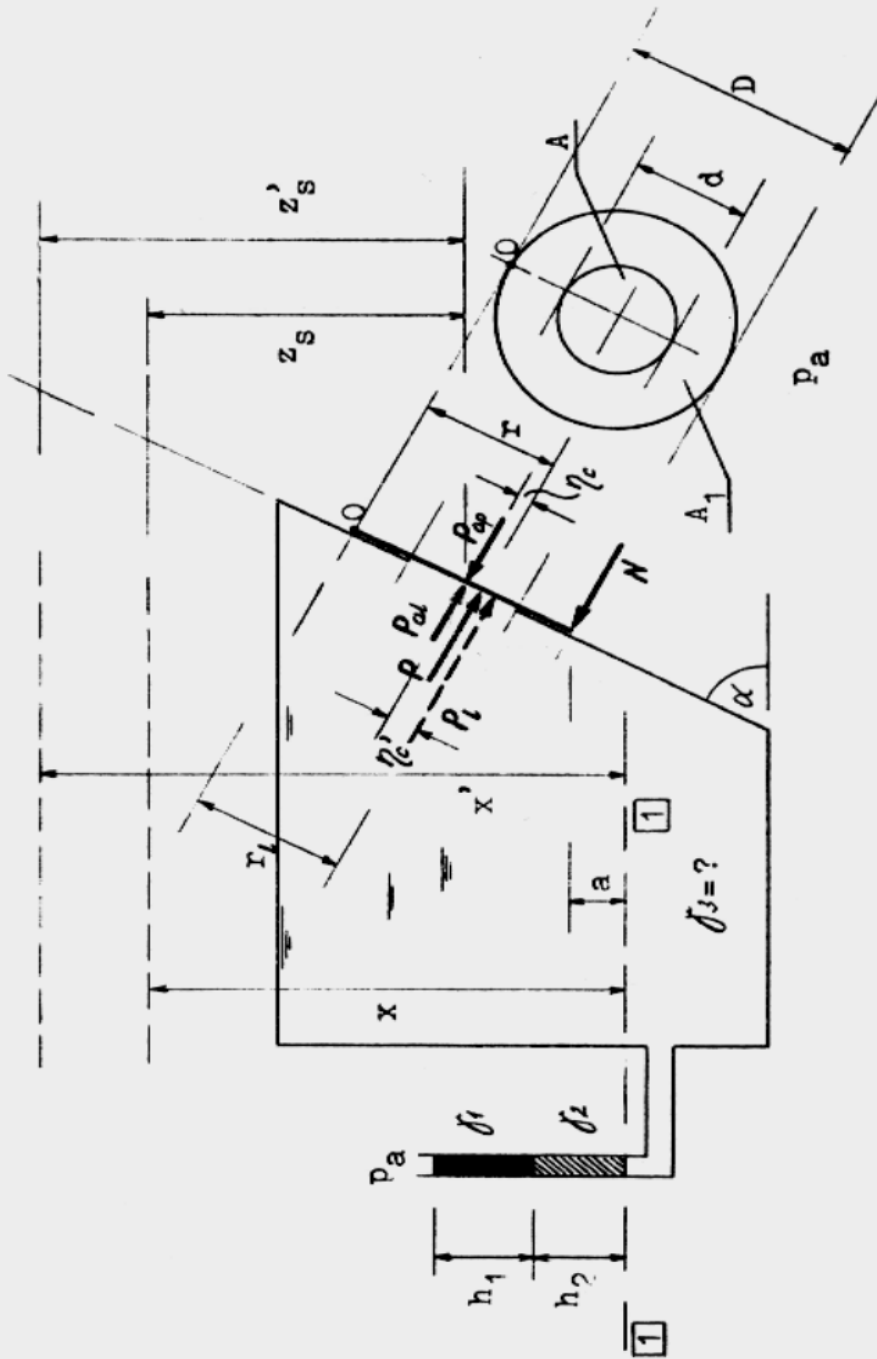
$$P_{ap} = p_a A_1 \quad (2)$$

nie są co do wartości takie same.

Sformułujmy warunek równowagi kłapy. Obok wymienionych wyżej sił parcia P_{al} i P_{ap} , pochodzących od działania ciśnienia atmosferycznego, na kłapę działa ponadto parcie P cieczy wypełniającej zbiornik oraz siła N przytrzymująca kłapę. Siły P_{al} i P wywołują obrót kłapy w lewo, siły P_{ap} oraz N - obrót w prawo, by zatem kłapa pozostawała w równowadze, zachodzić musi równość

$$P r + P_{al} r_1 = N r_N + P_{ap} r_p \quad (3)$$

W równaniu tym r , r_1 , r_N , r_p oznaczają ramiona poszczególnych sił względem punktu obrotu kłapy.



Rys. II.24

Prócz siły N , której wartość jest dana, wszystkie pozostałe wielkości występujące w równaniu (3) należy obliczyć. I tak:

■ biorąc pod uwagę powierzchnię jednakowego ciśnienia 1-1 (rys. II.24) zapiszemy, że ciśnienie w zbiorniku na poziomie 1-1 jest równe

$$p_{1-1} = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$$

zatem pozorne zwierciadło cieczy wznosi się ponad poziomem 1-1 o odcinek

$$x = \frac{p_{1-1}}{\gamma_3}$$

i parcie cieczy, działające na powierzchnię A klapy, wynosi

$$P = \gamma_3 z_s A = \gamma_3 \left(x - a - \frac{D}{2} \sin \alpha \right) \frac{\pi d^2}{4} \quad (4)$$

■ ramię wektora parcia P względem punktu O jest równe

$$\begin{aligned} r &= \frac{D}{2} + \eta_c = \frac{D}{2} + \frac{I}{L_s A} = \frac{D}{2} + \frac{(\pi d^4)/64}{\frac{z_s}{\sin \alpha} \frac{\pi d^2}{4}} = \\ &= \frac{D}{2} + \frac{(\pi d^4)/64}{\left(\frac{x-a}{\sin \alpha} - \frac{D}{2} \right) \frac{\pi d^2}{4}} \end{aligned} \quad (5)$$

■ zgodnie z zależnością (1)

$$P_{al} = p_a A = p_a \frac{\pi d^2}{4} \quad (6)$$

■ ciśnienie atmosferyczne, a zatem także wywołane nim parcia elementarne mają w każdym punkcie powierzchni A jednakową wartość; z tego powodu wektor wypadkowego parcia P_{al} przechodzi przez geometryczny środek ciężkości pola A , czyli przez środek klapy, tak więc odległość wektora P_{al} od punktu O wynosi

$$r_1 = \frac{D}{2} \quad (7)$$

■ zgodnie z równością (2)

$$P_{ap} = p_a A_1 = p_a \frac{\pi D^2}{4} \quad (8)$$

■ analogicznie jak w przypadku siły P_{al} odległość wektora P_{ap} od punktu obrotu O jest równa

$$r_p = \frac{D}{2} \quad (9)$$

■ ramię siły N względem punktu O wynosi

$$r_N = D \quad (10)$$

Po wstawieniu zależności (4) + (10) do równania równowagi (3) otrzymamy równanie z jedną, poszukiwaną przez nas, niewiadomą γ_3 .

Zauważmy, że w miejsce dwóch sił P i P_{al} możemy obliczyć jedną siłę P_L , wyrażającą łączne działanie cieczy oraz ciśnienia atmosferycznego z lewej strony klapy. Wyznamy mianowicie ciśnienie na poziomie 1-1 zbiornika z uwzględnieniem działania p_a poprzez rurkę manometryczną

$$p'_{1-1} = p_a + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$$

Po przesunięciu w górę poziomu 1-1 o odcinek

$$x' = \frac{p'_{1-1}}{\gamma_3}$$

otrzymamy poziom pozornego zwierciadła i obliczymy (rys. II.24)

$$\begin{aligned} P_L &= \gamma_3 z'_s A = \gamma_3 \left(x' - a - \frac{D}{2} \sin \alpha \right) \frac{\pi d^2}{4} = \\ &= \gamma_3 \left(\frac{p_a + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2}{\gamma_3} - a - \frac{D}{2} \sin \alpha \right) \frac{\pi d^2}{4} = \\ &= p_a \frac{\pi d^2}{4} + \gamma_3 \left(\frac{\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2}{\gamma_3} - a - \frac{D}{2} \sin \alpha \right) \frac{\pi d^2}{4} = \\ &= P_{al} + P \end{aligned} \quad (11)$$

Ramię siły P_L względem punktu obrotu O jest równe

$$r_L = \frac{D}{2} + \eta'_c = \frac{D}{2} + \frac{I}{L'_s A} = \frac{D}{2} + \frac{(\pi d^4)/64}{\left(\frac{x' - a}{\sin \alpha} - \frac{D}{2} \right) \frac{\pi d^2}{4}} \quad (12)$$

Warunek równowagi klapy zapiszemy teraz następująco:

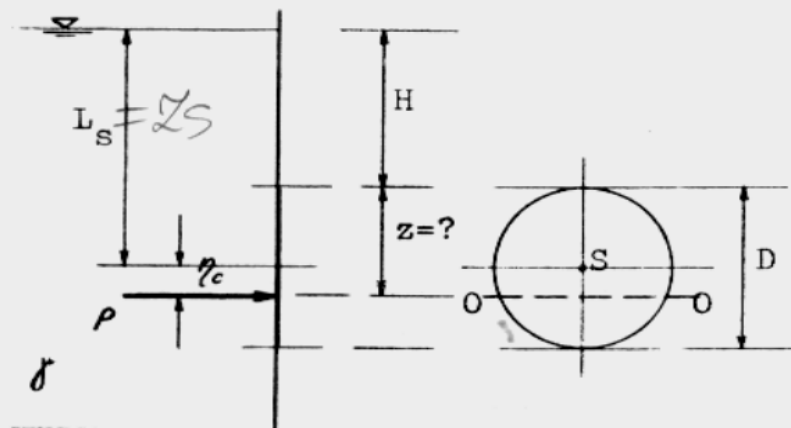
$$P_L r_L = N r_N + P_{ap} r_P$$

Po wstawieniu zależności (8) + (12) otrzymamy równanie, z którego wyliczymy niewiadomą γ_3 .

Przykład 10

Okrągły otwór w ścianie zbiornika zamykany jest ruchomą klapą o tej samej co otwór średnicy D . Klapa obracać się może wokół osi $O-O$, położonej w odległości z od górnej krawędzi klapy. Ile wynosić musi ta odległość, by przy podanym na rysunku II.25 napełnieniu zbiornika klapa pozostawała zamknięta? (Ciężaru klapy nie uwzględniać w rozważaniach).

DANE: D, H



Rvs. II.25

Ponieważ ciśnienie atmosferyczne działa z obu stron na całą powierzchnię klapy, wpływ jego możemy pominąć.

Jedyną siłą, która spowodować może otwarcie klapy, czyli jej wychylenie z pionowego położenia, jest siła parcia cieczy. Zwroćmy uwagę, że jeżeli wektor parcia na klapę przejdzie przez punkt leżący na osi jej obrotu, wówczas moment obracający będzie równy zeru i klapa pozostanie nieruchoma (zamknięta). Warunek równowagi klapy zapiszemy zatem następująco (zob. rys. II.25)

$$z = \frac{D}{2} + \eta_c$$

Po wprowadzeniu wzoru (I.19) otrzymamy

$$z = \frac{D}{2} + \frac{I}{L_s A} = \frac{D}{2} + \frac{(\pi D^4)/64}{(H + \frac{D}{2}) \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{D}{2} + \frac{D^2}{16 (H + \frac{D}{2})}$$

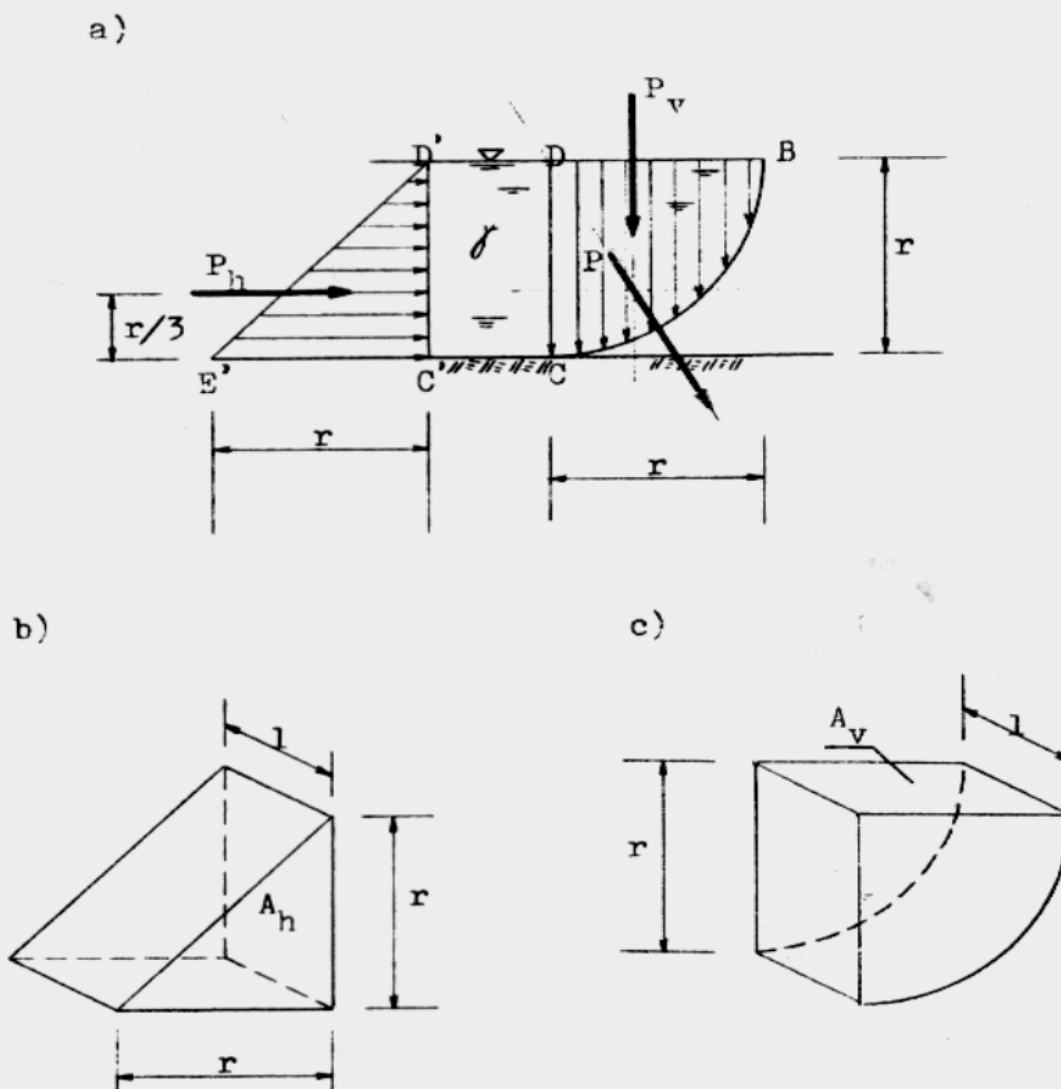
3. Parcie na powierzchnie zakrzywione. Siła wyporu

Przykład 1

Obliczyć siłę parcia cieczy na walcową ścianę o przekroju poprzecznym BC pokazanym na rysunku II.26. Długość ściany w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku wynosi l . Rozważyć dwa przypadki: w pierwszym ciecz znajduje się po lewej stronie ściany, w drugim po prawej.

DANE: l, r, γ

Przystępując do rozwiązania zadania zauważmy, że w obu rozpatrywanych przypadkach ciśnienie atmosferyczne p_a działa na taką samą powierzchnię ściany z obu stron, wpływ jego redukuje się więc wzajemnie.



Rys. II.26

PRZYPADEK 1 (rys. II.26)

Obliczenie składowej poziomej parcia

Rzutem A_h ściany na dowolną płaszczyznę pionową jest prostokąt o wysokości r i o długości podstawy równej długości ściany l . Pionowym przekrojem rzutu A_h jest odcinek $C'D'$ (rys. II.26a), zaś trójkąt $C'D'E'$ stanowi wykres składowej poziomej parcia na rozpatrywaną ścianę walcową. Kształt bryły parcia, której ów wykres jest przekrojem, pokazuje rys. II.26b.

Składowa pozioma P_h parcia na ścianę jest równa ciężarowi bryły parcia, zatem

$$P_h = r \frac{r}{2} l \gamma$$

Wektor P_h zwrócony jest naturalnie ku ścianie (w prawo). Ponieważ rzut A_h ściany jest prostokątem, wektor parcia P_h leży na wysokości środka ciężkości wykresu parcia, czyli w odległości $r/3$ od podstawy ściany (rysunek II.26a).

Obliczenie składowej pionowej

Rzutem A_v ściany na powierzchnię zwierciadła cieczy jest prostokąt o wymiarach $r \times l$. Powierzchnia BCD między przekrojem pionowym ściany a przekrojem rzutu A_h , czyli linią zwierciadła (zob. rys. II.26a), stanowi wykres składowej pionowej parcia na rozpatrywaną ścianę. Jest on przekrojem bryły parcia, której kształt pokazano na rys. II.26c.

Składowa pionowa P_v parcia na ścianę jest co do wartości równa ciężarowi bryły parcia, tak więc

$$P_v = \frac{1}{4} \pi r^2 l \gamma$$

Wektor P_v przechodzi przez środek ciężkości bryły parcia, którego rzut pokrywa się ze środkiem ciężkości wykresu BCD. Ponieważ ciecz znajduje się nad rozważaną ścianą, wektor P_v skierowany jest w dół (również i strzałki pokrywające wykres parcia BCD mają taki właśnie zwrot).

Wektor całkowitego parcia P na ścianę ma długość

$$P = \sqrt{P_h^2 + P_v^2}$$

i działa prostopadłe do powierzchni ściany (zob. rys. II.26a).

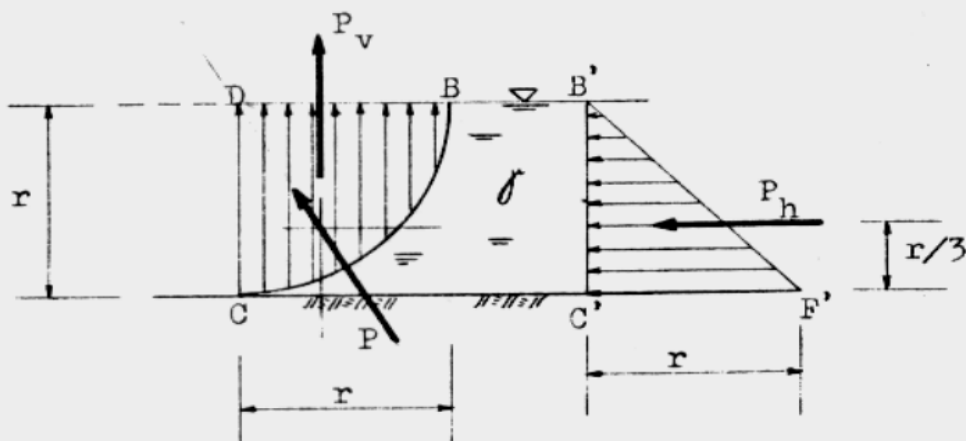
PRZYPADEK 2 (rys. II.27)

Obliczenie składowej poziomej parcia

Bryła składowej poziomej parcia ma identyczny kształt, objętość i ciężar jak w rozważanym uprzednio przypadku 1 (rys. II.26b), ponieważ rzut ściany A_h oraz ciężar objętościowy cieczy γ są te same. Co do wartości zatem składowe poziome parcia dla obu przypadków są sobie równe

$$P_h = r \frac{r}{2} l \gamma$$

Nie zmienia się również położenie wektora P_h , jednakże w przypadku 2 wektor ten, działając ku rozpatrywanej ścianie, posiada zwrot w lewo (rys. II.27).



Rys. II.27

Obliczenie pionowej składowej parcia

Przedłużamy powierzchnię zwierciadła cieczy i wykonujemy na nią rzut A_v ściany. Powierzchnia tego rzutu jest taka sama jak w przypadku 1, zatem i bryła składowej pionowej parcia ma taki sam kształt, objętość, a także ciężar jak bryła na rysunku II.26c. W obu omawianych w zadaniu przypadkach 1 oraz 2 składowe pionowe parcia mają więc tę samą wartość

$$P_v = \frac{1}{4} \pi r^2 l \gamma$$

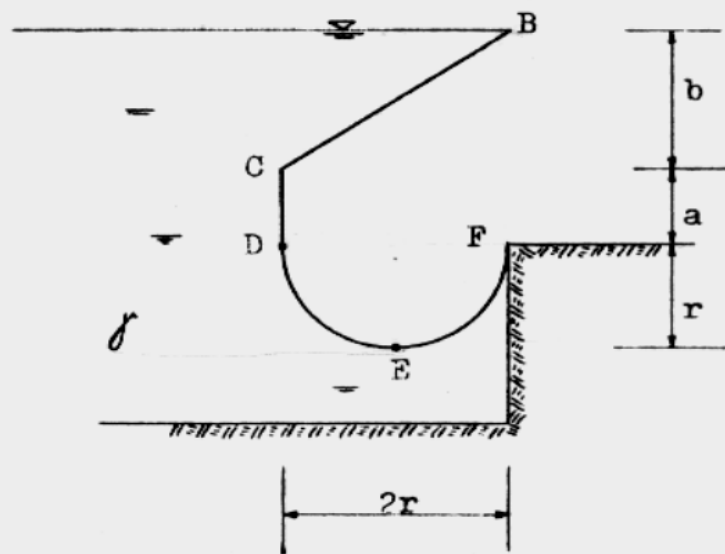
i to samo położenie. Różnica polega na tym, że w przypadku 2 wektor P_v jest skierowany ku górze, bowiem ciecz znajduje się pod rozpatrywaną ścianą. Z tego samego powodu odmienny jest także zwrot wektora parcia całkowitego P .

Podkreślmy jeszcze raz oczywistą zasadę: wektory parcia, tak składowych, jak i parcia całkowitego, zwrócone są zawsze od strony cieczy ku danej ścianie.

Przykład 2

Obliczyć składowe siły parcia na ścianę o przekroju BCDEF, pokazanym na rys. II.28. Długość ściany w kierunku prostopadłym do rysunku wynosi L .

DANE: b, a, r, L, γ

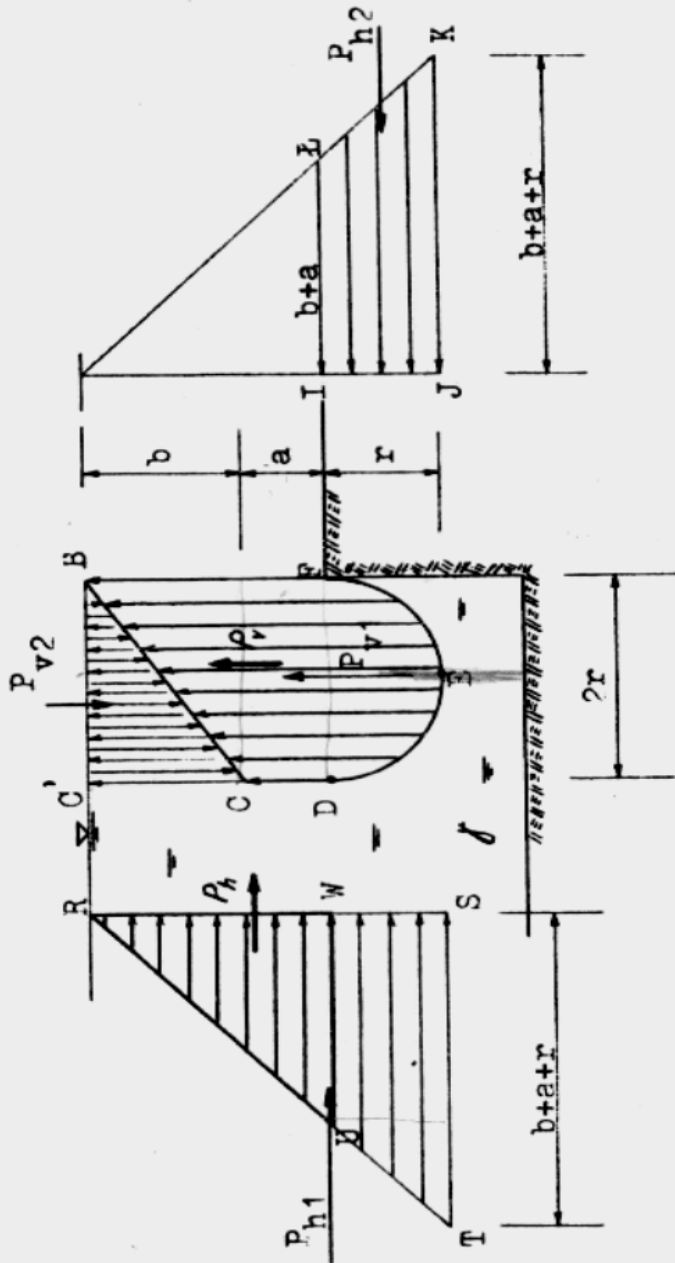


Rys. II.28

Zwróćmy uwagę, że w obliczeniach nie musimy uwzględniać ciśnienia zewnętrznego p_a , gdyż ciśnienie to działa z obu stron na taką samą powierzchnię rozpatrywanej ściany.

Obliczenie poziomej składowej P_h

Zgodnie z zasadą podaną na końcu poprzedniego przykładu, wektor składowej poziomej parcia działającego na ten fragment ściany, którego przekrojem jest linia BCDE, będzie miał zwrot w prawo, natomiast wektor parcia działającego na fragment o przekroju EC - zwrot w lewo. Stosownie do tego narysujemy dwa osobne wykresy parcia.



Rys. II.29

Dla fragmentu ściany określonego przekrojem BCDE rzut A_h jest prostokątem o wymiarach $(b+a+r) \times L$, a wykresem składowej poziomej parcia P_{h1} jest trójkąt RST (zob. rys. II.29 na poprzedniej stronie). W przypadku fragmentu mającego przekrój EF rzut A_h to prostokąt $r \times L$, zaś wykres składowej P_{h2} stanowi trapez IJKŁ.

Wykresy RST i IJKŁ są przekrojami brył, których ciężar określa wartość poziomych składowych parcia na rozpatrywane fragmenty ściany. I tak składowa o zwrocie w prawo jest równa

$$P_{h1} = (\text{pole trójkąta RST} \times L) \times \gamma \quad (1)$$

a składowa o zwrocie w lewo

$$P_{h2} = (\text{pole trapezu IJKŁ} \times L) \times \gamma \quad (2)$$

Przeciwny zwrot wektorów P_{h1} i P_{h2} powodują, że składowa pozioma P_h liczona w odniesieniu do całej ściany jest co do wartości równa

$$P_h = P_{h1} - P_{h2} = L \times \gamma \times (\text{pole RST} - \text{pole IJKŁ}) \quad (3)$$

Wynika z tego, że by obliczyć składową P_h parcia na rozpatrywaną ścianę, należy przede wszystkim dokonać redukcji (odejmowania) wykresów RST i IJKŁ. W efekcie otrzymuje się trójkąt RWU (rys. II.29), pokryty strzałkami o zwrocie w prawo. Taki też zwrot będzie posiadać składowa pozioma P_h parcia na ścianę.

Wykres RWU nazywać będziemy **wypadkowym wykresem parcia poziomego**. Jest on przekrojem **wypadkowej bryły parcia poziomego**, której ciężar określa wartość składowej P_h

$$P_h = (\text{pole trójkąta RWU} \times L) \times \gamma \quad (4)$$

Zależności (4) i (3) są naturalnie tożsame. Ostatecznie w naszym zadaniu

$$P_h = (b+a) \frac{b+a}{2} L \gamma$$

Należy zwrócić uwagę, że redukcja poszczególnych wykresów parcia ma sens jedynie wówczas, gdy w obliczeniach występuje tylko jedna ciecz i mamy do czynienia z jedną wartością γ , tylko wtedy bowiem wzory (3) i (4) są słuszne.

Składowa pionowa parcia P_v

Działając od strony cieczy ku ścianie, wektor P_{v1} składowej pionowej parcia na fragment o przekroju DEF posiada zwrot do góry, natomiast wektor P_{v2} składowej parcia na część ściany o przekroju BC ma zwrot ku dołowi. W tej sytuacji narysować trzeba oddzielnie dwa wykresy parcia.

Rzutem A_v obu wymienionych fragmentów ściany na powierzchnię zwierciadła cieczy jest prostokąt $2r \times L$. Rysując wykresy parcia uzyskamy (rys. II.29):

- wykres składowej pionowej P_{v1} o powierzchni BC'DEFB (zwrot do góry),
- wykres składowej pionowej P_{v2} stanowiący trójkąt BC'C (zwrot w dół).

W oparciu o rozumowanie analogiczne do tego, jakie przeprowadziliśmy w przypadku obliczania składowej P_h dokonujemy redukcji wykresów parcia. Jako wynik otrzymujemy figurę o powierzchni BCDEFB, która stanowi **wypadkowy wykres parcia pionowego**. Jest on pokryty strzałkami zwróconymi w górę, co określa zwrot składowej P_v .

Wykres BCDEFB jest przekrojem **wypadkowej bryły parcia pionowego**. Jej ciężar daje wartość składowej parcia P_v

$$P_v = (\text{pole BCDEFB} \times L) \times \gamma = \left(2r \frac{b}{2} + 2r a + \frac{1}{2} \pi r^2 \right) L \gamma$$

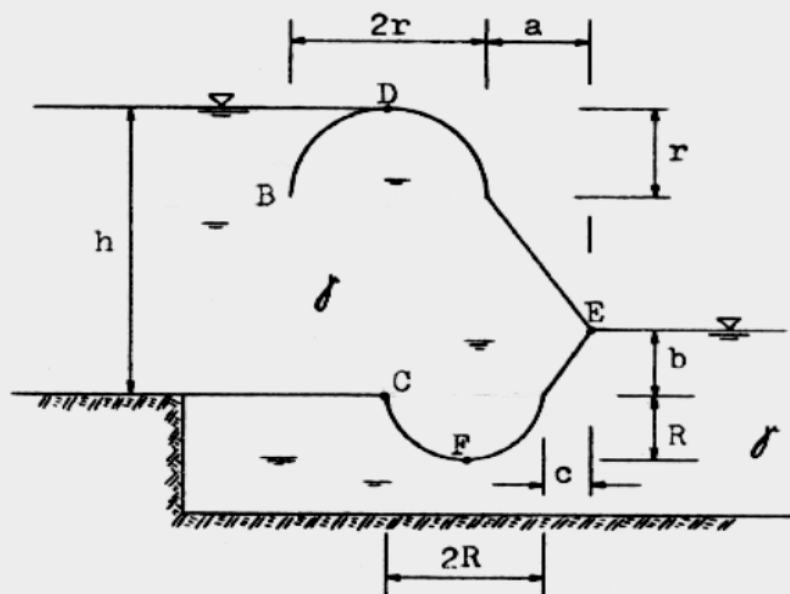
Podkreślmy ponownie, że redukcja wykresów parcia była uzasadniona tylko z tego powodu, iż w obliczeniach występowała jedna wartość ciężaru objętościowego cieczy γ .

Przykład 3

Obliczyć składowe siły parcia na ścianę o pokazanym na rys. II.30 przekroju BDEFC. Długość ściany w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku równa jest 1.

DANE: a, b, c, R, r, h, l, γ

W obliczeniach nie musimy uwzględniać wpływu zewnętrznego ciśnienia p_a , jako że działa ono z obu stron na jednakową powierzchnię ściany przez nas rozpatrywanej.



Rys. II.30

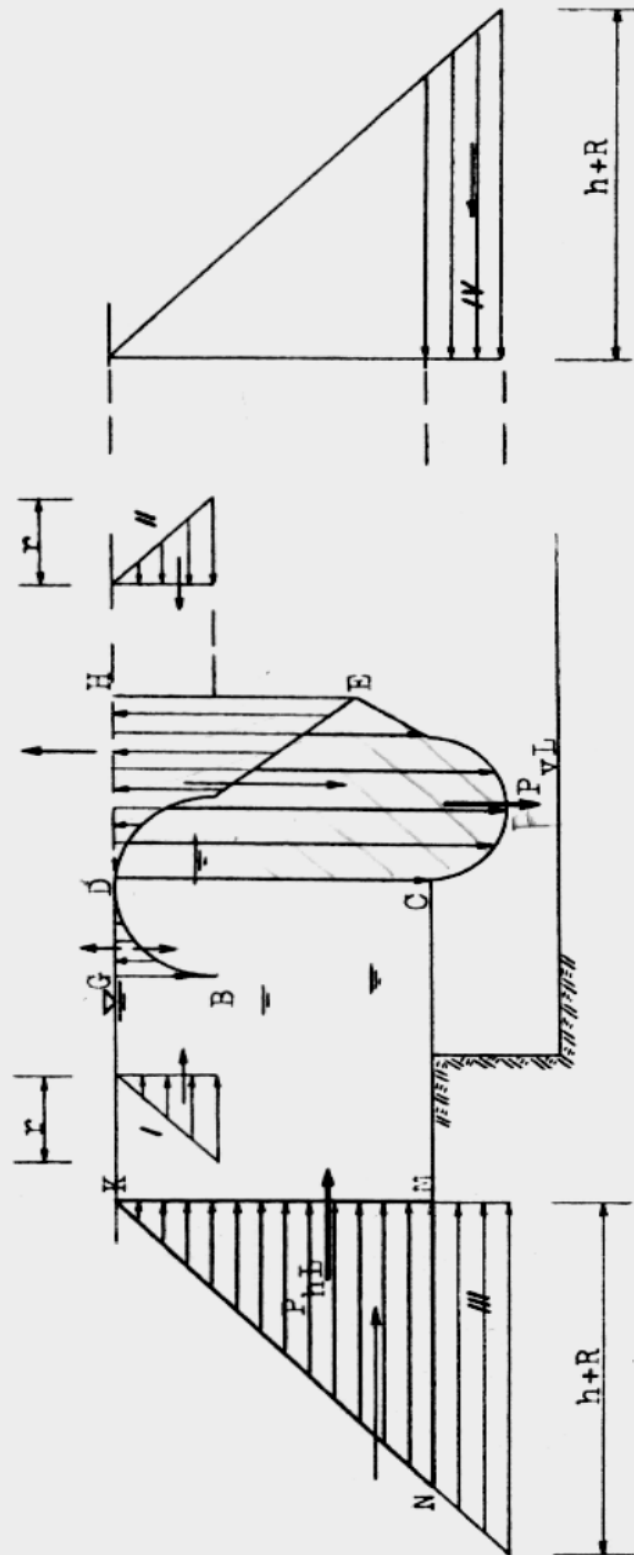
Tak rozwiązanie zadania podzielimy na trzy części. W pierwszej obliczymy siły parcia dla przypadku, w którym rozpatrywana ściana styka się wyłącznie z cieczą po swej lewej stronie (przyjmujemy na chwilę, że ciecz po stronie prawej nie istnieje). Część druga dotyczyć będzie sytuacji odwrotnej, gdy oddziałuje jedynie ciecz po prawej stronie ściany. W trzeciej części rozwiązania zsumujemy siły otrzymane dla wymienionych przypadków.

■ C z ę ś c 1 (rys. II.31)

Wykresem składowej poziomej parcia P_{h1} , działającej na część ściany o przekroju BD od lewej strony, jest trójkąt I, zaś składowej P_{h2} od strony prawej - trójkąt II. Wykresy te redukują się wzajemnie (mają te same powierzchnie pokryte strzałkami o przeciwnych zwrotach).

Wykresem składowej poziomej P_{h3} na fragment ściany o przekroju DEF jest trójkąt III, a składowej P_{h4} na fragment FC - trapez IV. Po redukcji otrzymujemy wypadkowy wykres parcia poziomego P_{hL} w postaci trójkąta KMN. Licząc ciężar bryły parcia, której ten wykres jest przekrojem, otrzymamy

$$P_{hL} = h \frac{h}{2} l \gamma$$



Rys. II.31

Figura o powierzchni BGD jest wykresem składowej pionowej parcia P_{v1} działającej na część sciany o przekroju BD od góry; wykresem składowej P_{v2} parcia na tę część od dołu jest również figura BGD, co powoduje wzajemną redukcję wykresów.

Wykres DHECD składowej pionowej P_{v3} , działającej na fragment sciany posiadający przekrój EFC, redukuje się częściowo z wykresem DHED składowej P_{v4} parcia na część DE. Wypadkowym wykresem parcia pionowego P_{vL} jest figura DECD, ze zwrotem strzałek w dół. Obliczamy

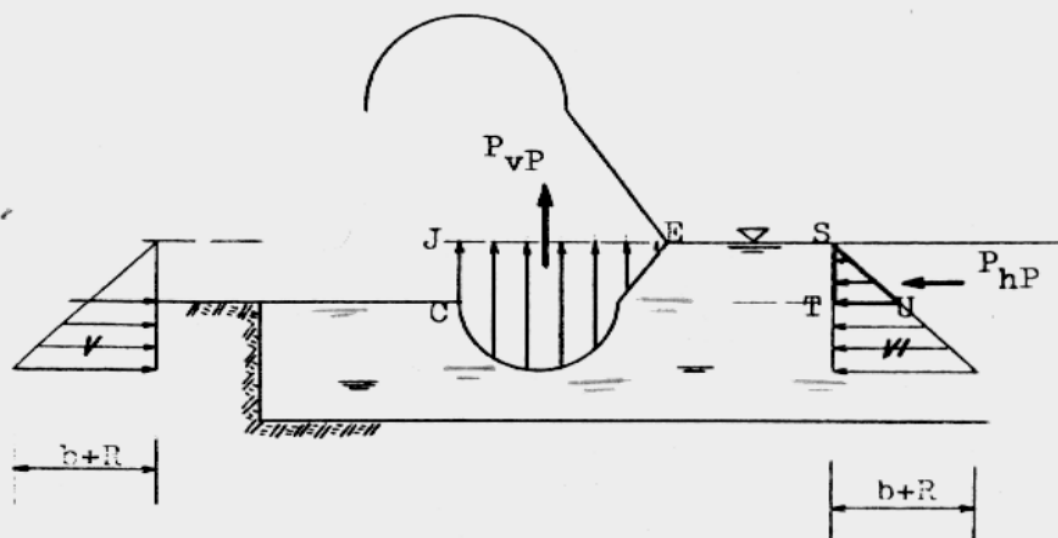
$$P_{vL} = (\text{pole DECD} \times 1) \times \gamma =$$

$$= \left[\frac{1}{4} \pi r^2 + (r+r+a) \frac{h-b-r}{2} + (r+a+2R) \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \pi R^2 \right] 1 \gamma$$

■ C z ę s c 2 (rys. II.32)

Wykresem wypadkowym parcia poziomego P_{hP} jest trójkąt STU (po redukcji trójkąta VI z trapezem V), zatem

$$P_{hP} = b \frac{b}{2} 1 \gamma$$



Rys. II.32

Z kolei

$$P_{VP} = (\text{pole JEC} \times 1) \times \gamma = \left[(r+a+2R) \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \pi R^2 \right] \gamma$$

ze zwrotem ku górze.

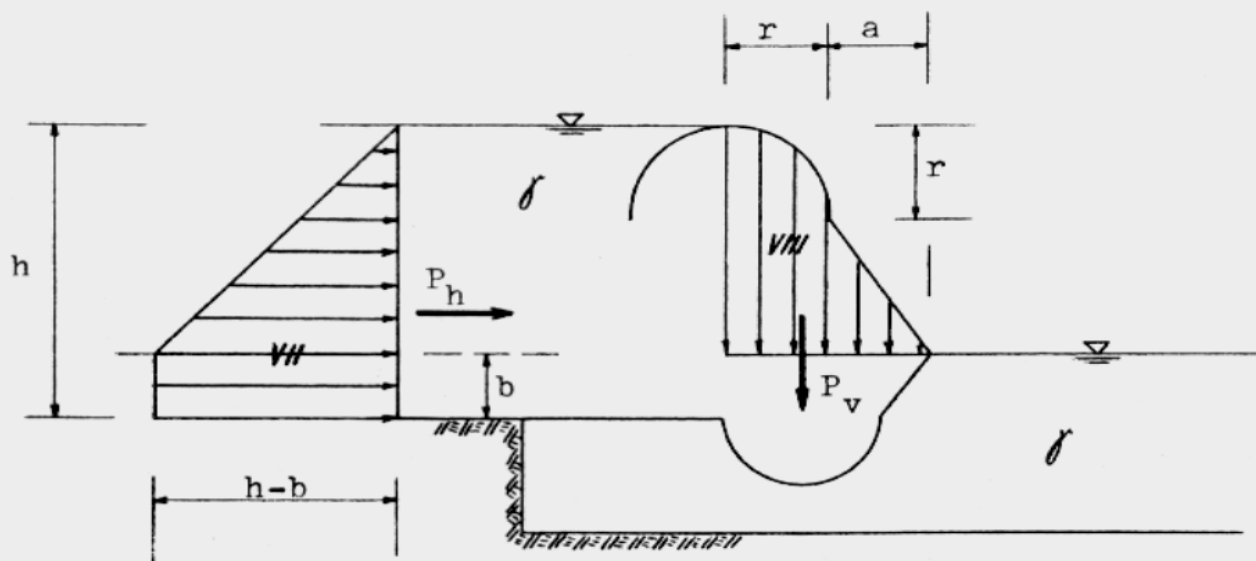
■ C z ę s c 3

Wartości wypadkowych składowych siły parcia na rozpatrywaną ścianę są równe

$$P_h = |P_{hL} - P_{hP}|$$

$$P_v = |P_{vL} - P_{vP}|$$

Te same wyniki, dodatkowo z określeniem zwrotu wektorów sił parcia, otrzymać możemy inaczej. Ponieważ w omawianym zadaniu ciężar objętościowy obu stykających się ze ścianą cieczy jest jednakowy, wypadkowe wykresy składowych parcia otrzymane dla cieczy po lewej i dla cieczy po prawej stronie ściany możemy graficznie dodawać, bacząc naturalnie na kierunek działania tych składowych. Uzyskamy w efekcie sumaryczne wykresy parcia na ścianę (zob. rys. II.33).



Rys. II.33

Wykresami tymi są:

- dla składowej poziomej P_h wykres VII (po redukcji wykresów KMN z rysunku II.31 oraz STU z rys. II.32), ze zwrotem w prawo,
- dla składowej pionowej P_v wykres VIII (po redukcji DECD z rys. II.31 oraz JEC z rys. II.32), ze zwrotem w dół.

Możemy obliczyć

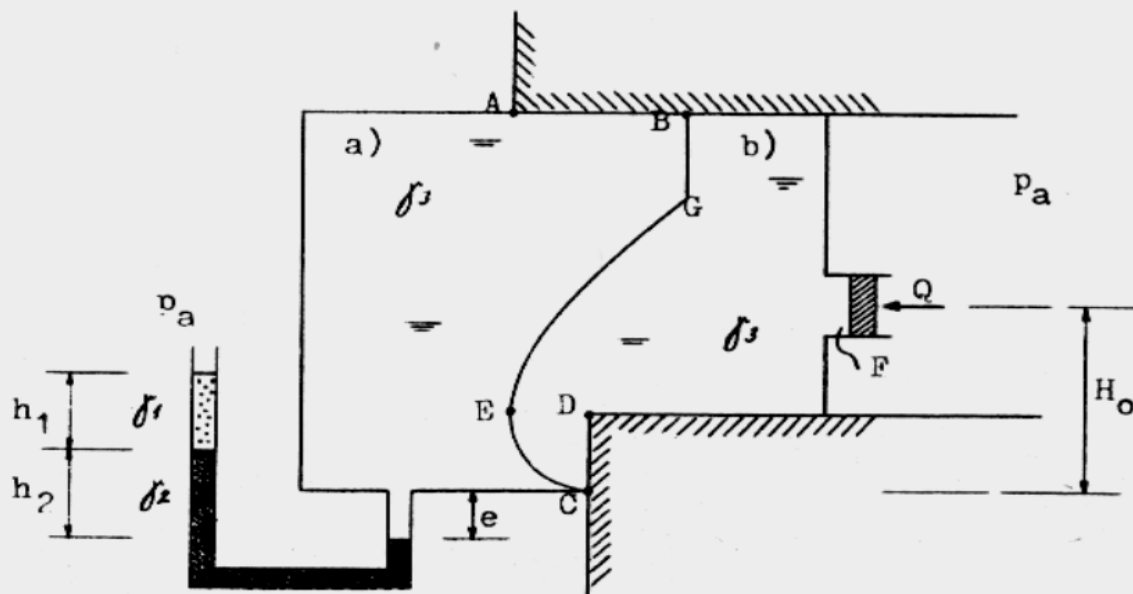
$$P_h = (\text{pole figury VII} \times 1) \times \gamma = \left[(h-b) \frac{h-b}{2} + (h-b) b \right] 1 \gamma$$

$$P_v = (\text{pole figury VIII} \times 1) \times \gamma = \left[\frac{1}{4} \pi r^2 + (r+r+a) \frac{h-r-b}{2} \right] 1 \gamma$$

Przykład 4

Narysować wykresy składowej poziomej i składowej pionowej parcia na ścianę dwukomorowego zbiornika, której przekrój ABGECD pokazuje rys. II.34.

DANE: p_a , Q , F , h_1 , h_2 , e , H_0 , γ_1 , γ_2 , γ_3



Rys. II.34

W niniejszym przykładzie uwzględnimy wpływ zewnętrznego ciśnienia p_a . Ciśnienie to od strony komory a) działa poprzez rurkę manometryczną na ścianę o przekroju ABGEC, zaś od strony komory b) - poprzez tłok - na fragment o przekroju BGECD. Jeśli przyjmiemy, że zbiornik ma stałą szerokość (prostopadle do rysunku), wówczas powierzchnie o wymienionych przekrojach nie są sobie równe i wpływ ciśnienia p_a nie redukuje się wzajemnie w całości.

Obie komory zbiornika są zamknięte i całkowicie wypełnione cieczą, zatem by móc rysować wykresy parcia musimy wpiery wyznaczyć poziom pozornego zwierciadła cieczy w komorach. Uczynimy to tak, by uwzględnić również działanie ciśnienia p_a , mianowicie

■ dla komory a)

ciśnienie na poziomie 1-1 (zob. rys. II.35), równe

$$p_{1-1} = p_a + h_1 \gamma_1 + h_2 \gamma_2$$

zastąpimy ciśnieniem słupa cieczy napełniającej komorę

$$p_a + h_1 \gamma_1 + h_2 \gamma_2 = x_1 \gamma_3$$

$$\text{stad} \quad x_1 = \frac{p_a + h_1 \gamma_1 + h_2 \gamma_2}{\gamma_3}$$

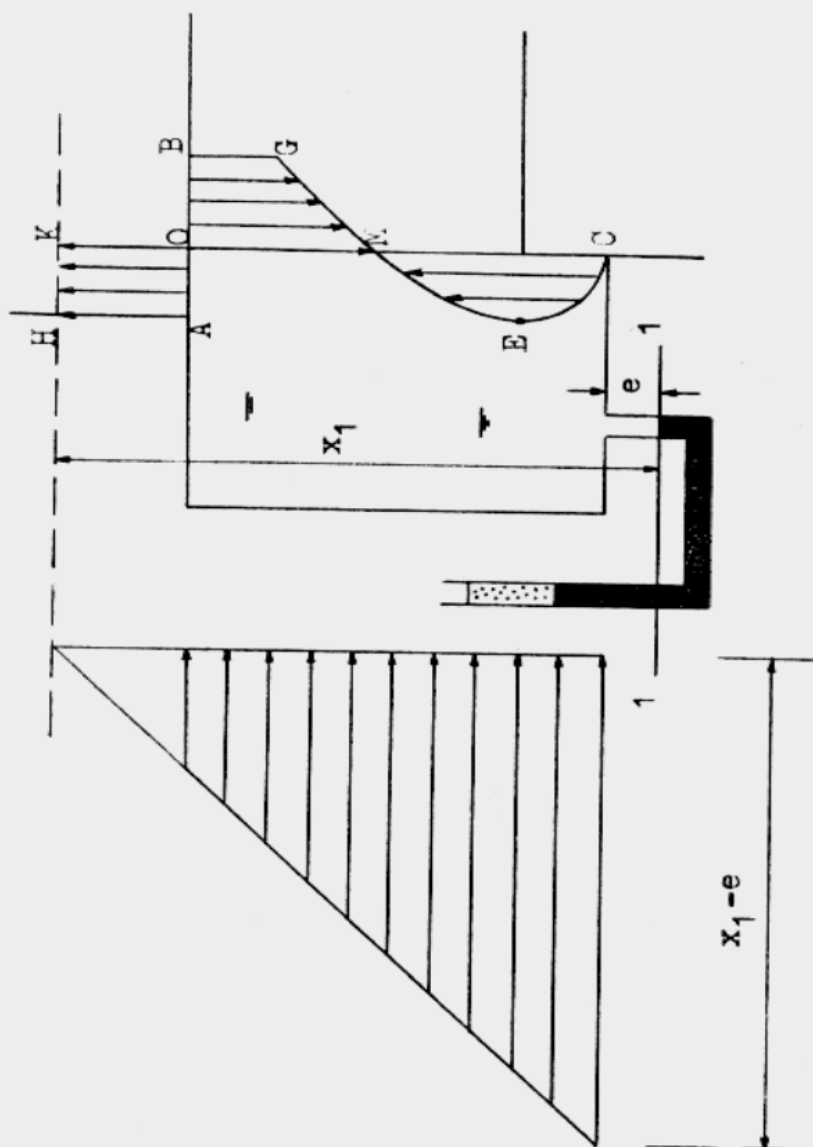
■ dla komory b) obliczymy (zob. rys. II.38 na str. 116)

$$p_{2-2} = p_a + (Q/F) = x_2 \gamma_3$$

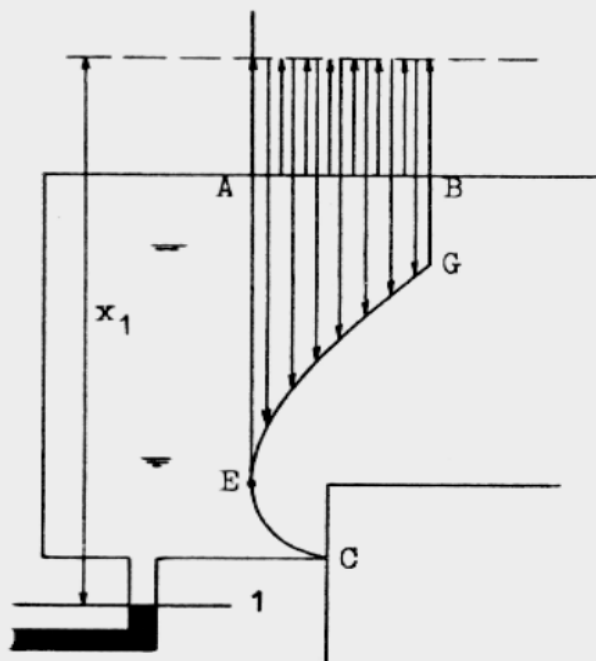
$$\text{zatem} \quad x_2 = \frac{p_a + (Q/F)}{\gamma_3}$$

Poziom 1-1 przesuniemy o odcinek x_1 , zaś poziom 2-2 o odcinek x_2 , otrzymując położenie pozornych zwierciadeł dla komór zbiornika.

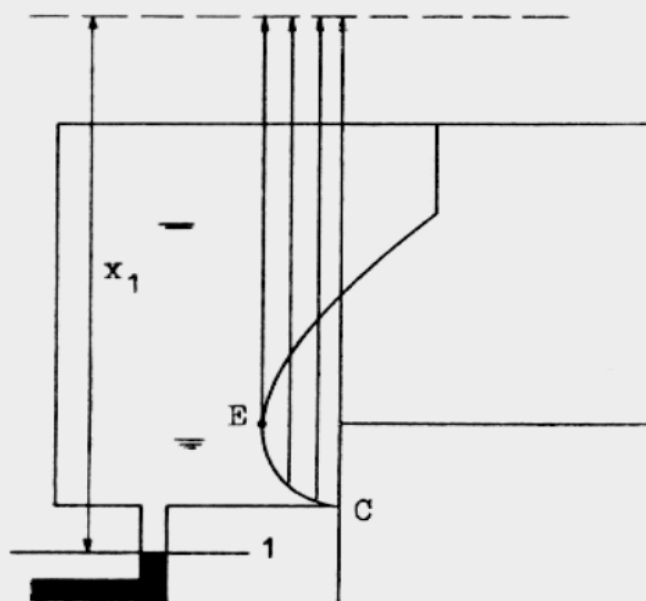
Na rysunku II.35 pokazano wykresy parcia na rozpatrywaną ścianę od strony komory lewej, czyli komory a). Wykres składowej poziomej nie wymaga komentarza. Wypadkowy wykres składowej pionowej składa się z trzech fragmentów: HKOAH i MCEM (zwrot ku górze) oraz OBGMO (zwrot ku dołowi). Jest to rezultat redukcji wykresów, które zostały wykonane kolejno dla fragmentów ściany o przekrojach AB, GE (zob. rys. II.36) i EC (rys. II.37).



Rys. II.35

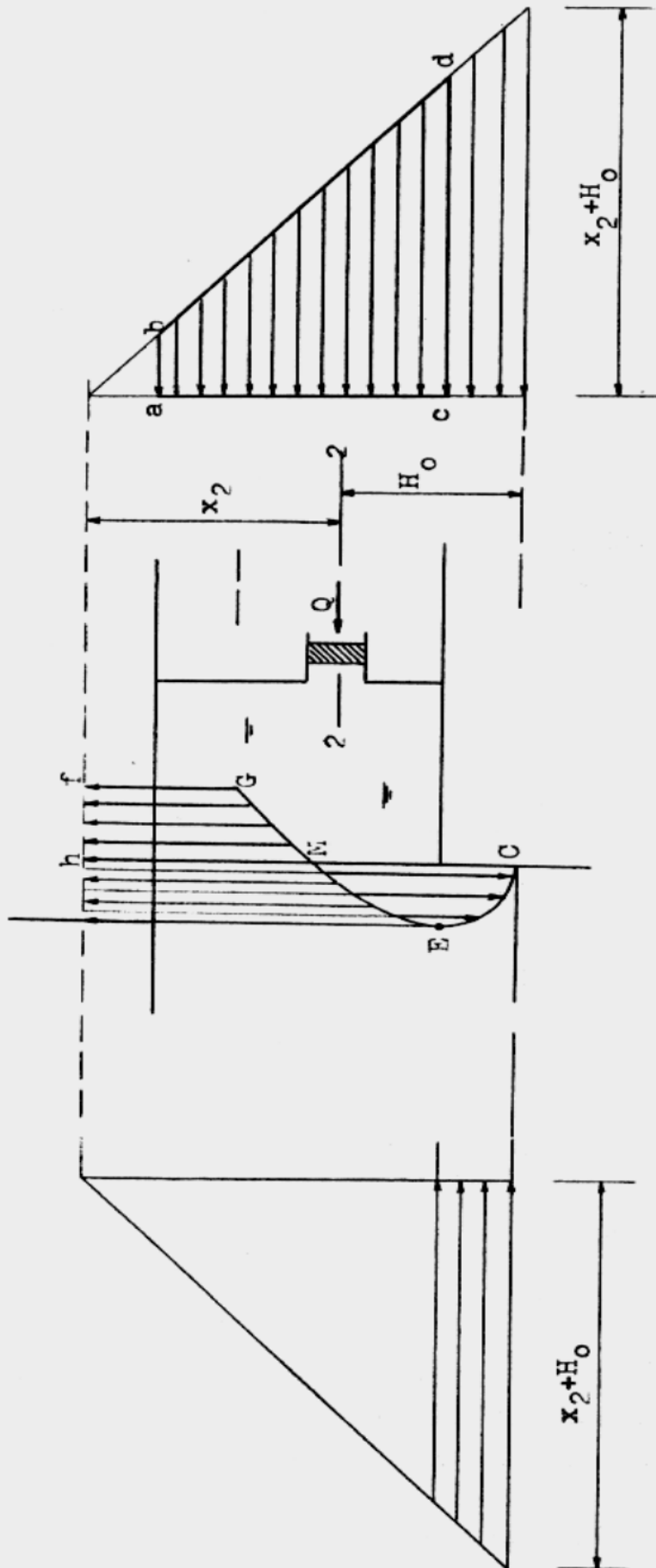


Rys. II.36



Rys. II.37

Rysunek II.38 pokazuje wykresy od strony komory prawej. Wypadkowy wykres składowej poziomej parcia jest trapezem $abdc$, zaś wykres składowej pionowej stanowi figurę złożoną z powierzchni $hfGMh$ (zwrot wektora parcia ku górze) i $MCEM$ (zwrot w dół). Powierzchnie te powstały po redukcji wykresów narysowanych kolejno dla fragmentów ściany o przekrojach GE i EC .



Rys. II.38

Przykład 5

Ściana o przekroju OA i szerokości l , oddzielająca dwa zbiorniki, może obracać się wokół poziomej osi przechodzącej przez punkt O (rys. II.39). W punkcie B przekroju ściany zaczepiona jest siła Q skierowana pionowo w dół. Ile wynosi ciężar objętościowy cieczy wypełniającej zbiorniki, skoro rozpatrywana ściana utrzymuje się w takim położeniu, jakie pokazano na rysunku? (Ciężaru ściany nie uwzględniać w obliczeniach).

DANE: $Q, a, b, d, c, h_1, h_2, \gamma_1, \gamma_2$

Prócz siły Q na ścianę o przekroju OA działają także siły parcia cieczy, od strony lewego oraz prawego zbiornika. Siły te wyznaczymy, pomijając wpływ zewnętrznego ciśnienia p_a , który przy obustronnym działaniu tego ciśnienia na całą powierzchnię ściany redukuje się wzajemnie.

Z b i o r n i k l e w y

Wykres składowej poziomej parcia na rozpatrywaną w zadaniu ścianę jest trójkątem EDC , natomiast wykres składowej pionowej - figurą $FAOF$ (zwrot strzałek w dół).

Z b i o r n i k p r a w y

Przed narysowaniem wykresów wyznaczyć musimy położenie pozornego zwierciadła cieczy w zbiorniku, bowiem jest on zamknięty i wypełniony w całości. Napiszemy (zob. rys. II.39)

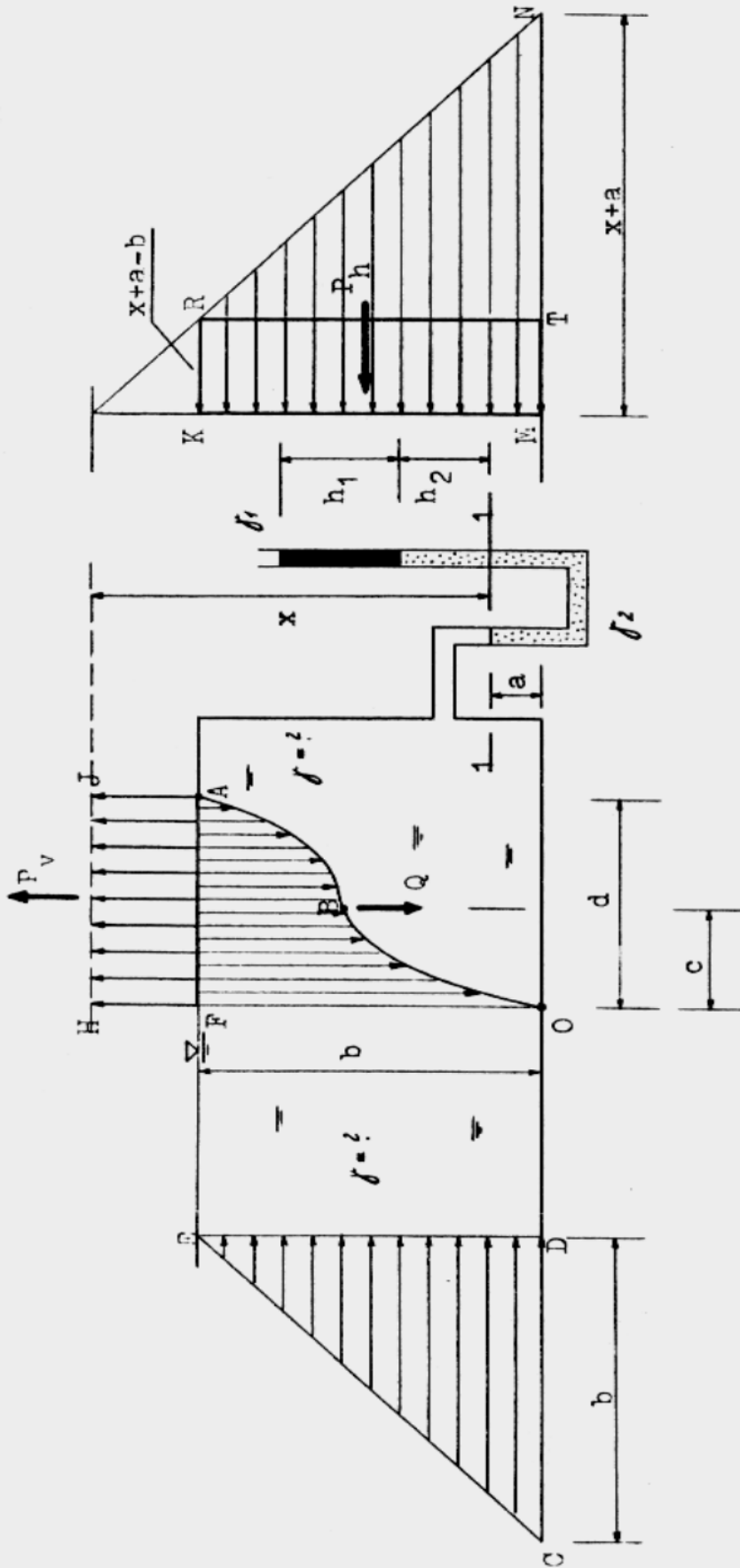
$$p_{1-1} = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 = x \gamma$$

$$\text{stad} \quad x = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2}{\gamma} \quad (1)$$

Zwierciadło pozorne leży w odległości x nad poziomem 1-1.

Wykresem składowej poziomej parcia na ścianę o przekroju OA jest trapez $RNMK$, zaś wykres składowej pionowej stanowi powierzchnia $HJAOH$ (ze zwrotem strzałek do góry).

Ponieważ oba zbiorniki wypełnia ciecz o jednakowym ciężarze objętościowym γ , celowe jest dodanie poszczególnych wykresów. W efekcie tego dodawania otrzymujemy:



Rys. II.39

- sumaryczny wykres parcia poziomego P_h na rozpatrywaną ścianę w postaci prostokąta RTMK (zwrot wektora P_h w lewo),
- sumaryczny wykres parcia pionowego P_v jako prostokąt HJAF (zwrot wektora P_v w górę).

Licząc ciężary odpowiednich brył parcia, otrzymamy równania

$$P_h = [(x+a-b) b l] \gamma = \left[\left(\frac{\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2}{\gamma} + a - b \right) b l \right] \gamma \quad (2)$$

$$P_v = [(x+a-b) d l] \gamma = \left[\left(\frac{\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2}{\gamma} + a - b \right) d l \right] \gamma \quad (3)$$

Przechodząc przez środek ciężkości brył parcia, wektory P_h i P_v leżą w następujących odległościach od osi obrotu ściany (patrz rys. II.39)

$$r_h = \frac{b}{2} \quad (4)$$

$$r_v = \frac{d}{2} \quad (5)$$

Zapiszmy teraz warunek równowagi ściany. Brzmi on

$$Q c = P_h r_h + P_v r_v$$

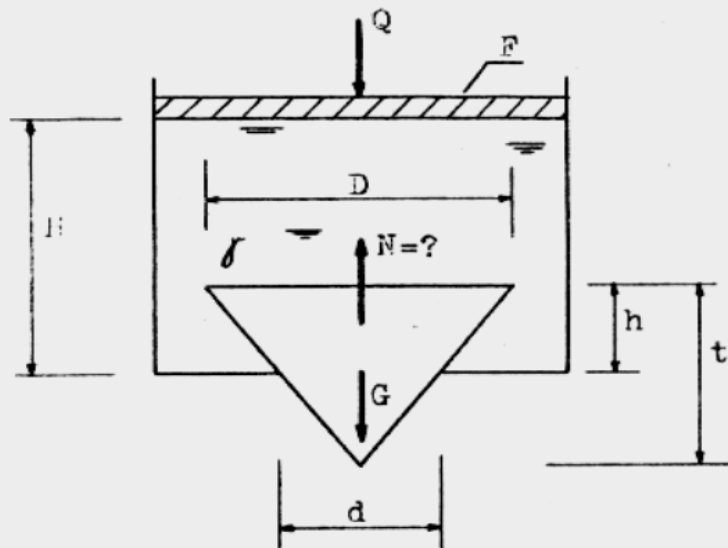
Po podstawieniu zależności (2) + (5) otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą γ .

Przykład 6

Otwór o średnicy d wykonany w dnie zbiornika zamykany jest stożkiem o ciężarze G (rys. II.40). Zbiornik wypełniony jest cieczą do wysokości H , przy czym na zwierciadle cieczy spoczywa szczelny tłok o powierzchni F , obciążony siłą Q . Obliczyć siłę N potrzebną do wyciągnięcia stożka z otworu. (W obliczeniach pominąć działanie ciśnienia atmosferycznego).

DANE: $G, Q, F, D, d, H, t, \gamma$

Poszukiwaną siłę N wyliczyć będzie można z warunku równowagi stożka, a więc z równania sił pionowych, jakie na niego działają. Siłami tymi są: ciężar stożka G , siła N oraz składowa pionowa parcia cieczy na stożek.



Rys. II.40

Obliczmy, ile wynosi wspomniana siła parcia i określmy jej zwrot. Stosując metodę graficzno-analityczną wyznaczamy kolejno (zob. rys. II.41):

- położenie pozornego zwierciadła cieczy w zbiorniku; zwierciadło pozorne leży na wysokości x ponad poziomem 1-1, przy czym zachodzić musi równość

$$P_{1-1} = \frac{Q}{F} = x \gamma$$

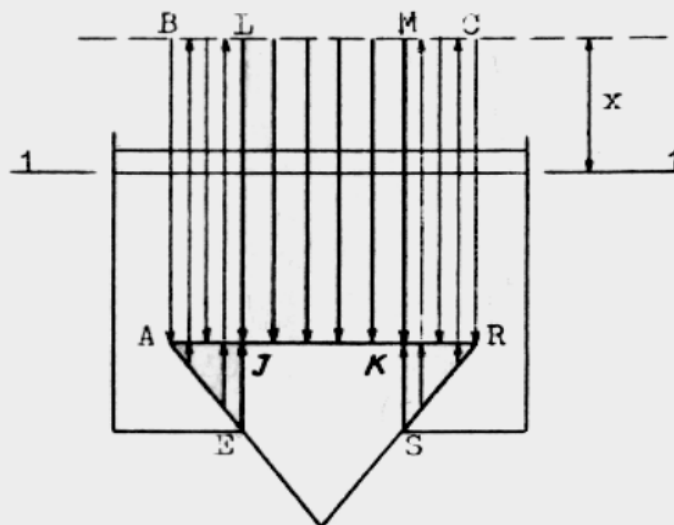
zatem
$$x = \frac{Q}{F \gamma}$$

- wykresy składowych pionowych parcia na poszczególne fragmenty powierzchni stożka.

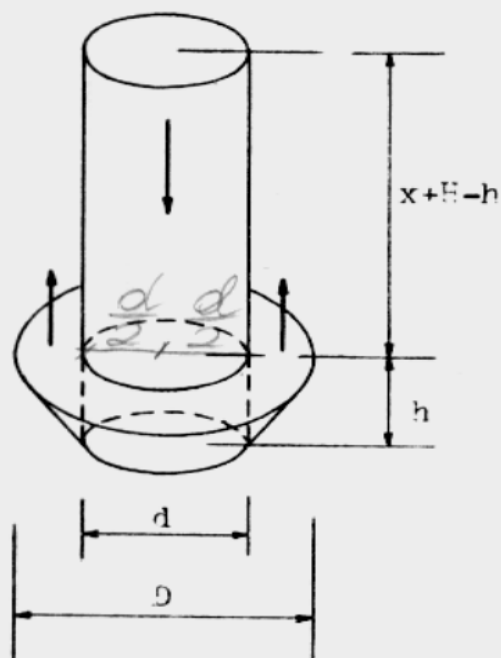
Rysunek II.41 stanowi pionowy przekrój stożka płaszczyzną, na której leży jego oś. Wykresem składowej pionowej parcia na przekrój AR podstawy stożka jest prostokąt ABCR (zwrot strzałek w dół), na przekrój powierzchni bocznej AE - trapez ABLE, a na przekrój RS - trapez SMCR (zwroty ku górze). Po redukcji pozostanie wypadkowy wykres parcia pionowego, składający się z powierzchni: JLMK (zwrot na dół), AJE oraz RSK (zwrot w górę).

Bryła parcia, której ów wypadkowy wykres jest pionowym przekrojem, ma kształt pokazany na rys. II.42, zatem składowa pionowa parcia o zwrocie w dół jest równa

$$P_{v1} = \frac{\pi d^2}{4} (x+H-h) \gamma \quad (1)$$



Rys. II. 41



Rys. II. 42

natomiast składowa o zwrocie w górę

P_{v2} = (objętość stożka ściętego o wysokości h - objętość walca o przekroju pionowym EJKSE) γ =

$$= \left\{ \frac{1}{3} \pi h \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 + \frac{D}{2} \frac{d}{2} + \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right] - \frac{\pi d^2}{4} h \right\} \gamma \quad (2)$$

(występującą we wzorach (1) i (2) wielkość h można obliczyć, posługując się twierdzeniem Talesa, znamy bowiem wysokość stożka t).

Powróćmy do równania równowagi stożka. Przy uwzględnieniu zwrotów poszczególnych sił pionowych ma ono postać:

$$G + P_{v1} = N + P_{v2}$$

Po wstawieniu do powyższego równania zależności (1) i (2), obliczymy siłę N . Będzie to minimalna siła potrzebna do uniesienia stożka.

Przykład 7

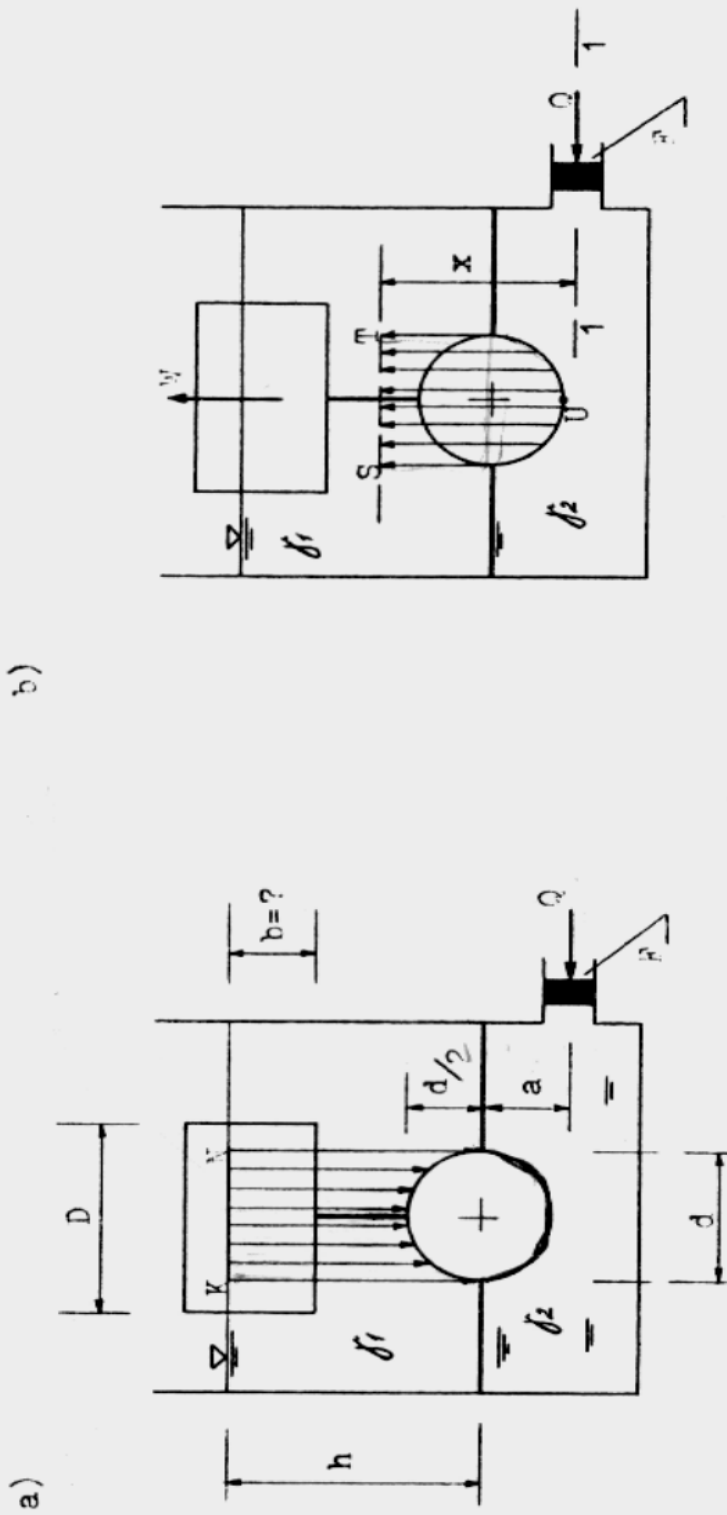
W poziomej ścianie oddzielającej dwie komory zbiornika znajduje się okrągły otwór o średnicy d . Otwór ten zamykany jest zaworem składającym się z kuli i z przymocowanego do niej sztywnym prętem walcowego pływaka o średnicy D (rys. II.43). Łączny ciężar kuli, pływaka i pręta wynosi G . Górna komora zbiornika napełniona jest cieczą do wysokości h , w komorze dolnej ciecz sprężona jest tłokiem. Obliczyć głębokość b zanurzenia pływaka, przy której zawór odsłoni otwór przesuając się do góry.

DANE: $G, Q, F, a, h, D, d, \gamma_1, \gamma_2$

Zawór poruszy się wówczas, gdy działające nań siły pionowe zwrócone w górę przewyższą siły skierowane w dół. Rozważmy, jakie siły pionowe działają na poszczególne części zaworu.

Na pływak działa siła wyporu W , którą obliczymy wzorem (I.24); (zob. treść punktu 18.5 w części I). Gdy zanurzenie pływaka będzie równe poszukiwanej wielkości b , wówczas siła wyporu wyniesie:

$$W = \left(\frac{\pi D^2}{4} b \right) \gamma_1 \quad (1)$$



Rys. II.43

Część kulista zaworu styka się z dwiema różnymi cieczami i przypadek ten wymaga, by zgodnie z komentarzem do ZESTAWIENIA umieszczonego na stronach 47 i 48 obliczyć - nie stosując wzoru (I.24) - działające na kulę składowe pionowe parcia P_{v1} i P_{v2} . Składowa P_{v1} od cieczy w górnej komorze zbiornika posiada zwrot w dół, siła P_{v2} od cieczy w komorze dolnej zwrócona jest w górę.

Wziąć musimy pod uwagę ponadto ciężar całego zaworu G . W zadaniu pominiemy siłę tarcia powierzchni kuli o krawędzie otworu.

Uwzględniając zwrot poszczególnych sił, równanie równowagi zaworu zapiszemy następująco:

$$G + P_{v1} = P_{v2} + W \quad (2)$$

Obliczmy siły P_{v1} i P_{v2} działające na kulę zaworu. Uczynimy to po narysowaniu odpowiednich wykresów parcia, przedtem jednak zauważmy, że wpływu działania ciśnienia zewnętrznego (p_a) nie musimy uwzględniać. Istotnie, ciśnienie to poprzez ciecz w komorach zbiornika działa na całą powierzchnię kuli, zatem zawsze w kierunkach przeciwnych (np. pionowo z góry i pionowo z dołu) redukuje się wzajemnie.

Rzutem powierzchni górnej połowy kuli na płaszczyznę zwierciadła cieczy jest koło o średnicy KN (rownej d), zatem pokryta strzałkami powierzchnia pokazana na rys. II.43a jest wykresem składowej pionowej parcia P_{v1} . Wykres ten stanowi pionowy przekrój bryły parcia w płaszczyźnie jej symetrii, takową jest bowiem płaszczyzna rysunku. Napiszemy więc:

$$\begin{aligned} P_{v1} &= \text{objętość bryły parcia} \times \gamma_1 = (\text{objętość walca o wysokości } h - \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{ objętości kuli o średnicy } d) \times \gamma_1 = \\ &= \left[\frac{\pi d^2}{4} h - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \right] \gamma_1 \end{aligned} \quad (3)$$

By narysować wykres składowej pionowej parcia P_{v2} , należy wpierw znaleźć położenie pozornego zwierciadła cieczy dla dolnej komory zbiornika. W tym celu odkładamy w górę od powierzchni 1-1 odcinek o długości x (zob. rysunek II.43b), wynikającej z równania ciśnienia zapisanego dla poziomu 1-1. Równanie to ma postać

$$\frac{Q}{F} = x \gamma_2$$

$$\text{zatem} \quad x = \frac{Q}{F \gamma_2} \quad (4)$$

Rzutem powierzchni dolnej połowy kuli na płaszczyznę pozornego zwierciadła cieczy jest koło o średnicy ST , a pionowym przekrojem bryły parcia P_{v2} - powierzchnia $STUS$ pokazana na rys. II.43b. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 P_{v2} &= \text{objętość bryły parcia} \times \gamma_2 = [\text{objętość walca o wysokości } (x-a) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \text{ objętości kuli o średnicy } d] \times \gamma_2 = \\
 &= \left[\frac{\pi d^2}{4} (x-a) + \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \right] \gamma_2 \quad (5)
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu zależności (1), (3), (5), oraz (4) do równania równowagi (2), otrzymano równanie o jednej niewiadomej b , którą łatwo wyliczyć.

Przykład 8

Otwór o średnicy d , wykonany w poziomej przegrodzie zbiornika, zamykany jest zaworem składającym się z dwóch półkul i połączonej z nimi sztywnym prętem kuli (rys. II.44). Obliczyć siły pionowe działające na zawór.

DANE: $a, b, h, D, d, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ (ciężar objętościowy materiału, z którego wykonany jest zawór)

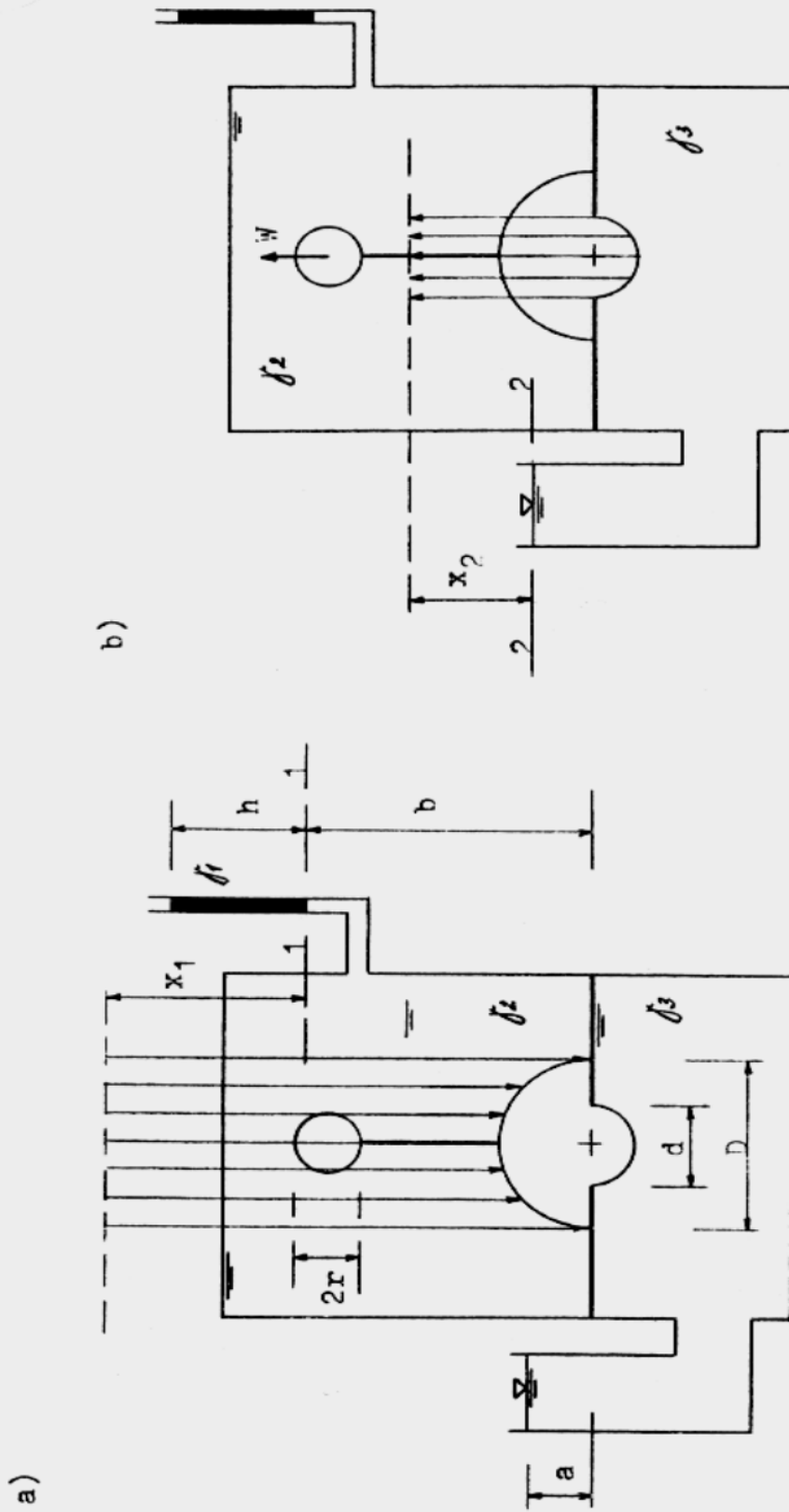
Rezultaty obliczeń podane są niżej w kolejnych punktach. Siły parcia cieczy działające na poszczególne części zaworu określimy, uwzględniając treść punktu 18.5 w części I.

a) Ciężar całego zaworu jest równy:

$$\begin{aligned}
 G &= \text{objętość zaworu} \times \gamma_4 = \left[\frac{4}{3} \pi r^3 + \frac{2}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 + \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \right] \gamma_4 = \\
 &= \frac{4}{3} \pi \left[r^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2}\right)^3 \right] \gamma_4
 \end{aligned}$$

b) Na kulę o promieniu r działa siła wyporu określona wzorem (I.24):

$$W = \left(\frac{4}{3} \pi r^3\right) \gamma_2$$



Rys. II.44

c) Na półkulę o średnicy D działa składowa pionowa parcia P_{v1} od cieczy w górnej komorze zbiornika. Wartość tej siły określimy, licząc ciężar bryły parcia.

Zwróćmy uwagę, że w omawianym zadaniu działanie ciśnienia zewnętrznego należy uwzględnić. Ciśnienie atmosferyczne p_a działa poprzez cieczę od góry na poziomy rzut półkuli równy $(\pi D^2)/4$, zaś od dołu na rzut $(\pi d^2)/4$. Powoduje to istnienie przeciwnie wprawdzie skierowanych, lecz niejednakowych co do wartości sił pionowych, wywołanych działaniem ciśnienia p_a ; siły te nie redukują się wzajemnie w całości.

W tej sytuacji wyznaczmy położenie zwierciadła pozornego cieczy dla komory górnej zbiornika z uwzględnieniem ciśnienia p_a , pisząc:

$$P_{1-1} = p_a + \gamma_1 h = x_1 \gamma_2$$

(zob. rys. II.44a). Po wyliczeniu stąd wartości x_1 , odcinek o tej długości odkładamy w górę od powierzchni 1-1.

Wykres parcia P_{v1} , będący pionowym przekrojem bryły parcia w jej płaszczyźnie symetrii, pokazano na rysunku II.44a. Obliczamy:

$$\begin{aligned} P_{v1} &= \text{objętość bryły parcia} \times \gamma_2 = [\text{objętość walca o wysokości } (x_1+b) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{ objętości kuli o średnicy } D] \times \gamma_2 = \\ &= \left[\frac{\pi D^2}{4} (x_1+b) - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \right] \gamma_2 \end{aligned}$$

d) Na półkulę o średnicy d działa składowa pionowa parcia P_{v2} od cieczy wypełniającej dolną komorę zbiornika. W obliczeniach konsekwentnie musimy uwzględnić działanie ciśnienia zewnętrznego p_a , napiszemy zatem (zob. rys. II.44b):

$$P_{2-2} = p_a = x_2 \gamma_3, \quad \text{a więc} \quad x_2 = \frac{p_a}{\gamma_3}$$

i o odcinek tej długości podniesiemy poziom zwierciadła 2-2. Powierzchnia pokryta strzałkami pokazana na rys. II.44b jest wykresem parcia P_{v2} w pionowej płaszczyźnie symetrii zaworu, tak więc

$$\begin{aligned} P_{v2} &= \text{objętość bryły parcia} \times \gamma_3 = [\text{objętość walca o wysokości } (x_2+a) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{ objętości kuli o średnicy } d] \times \gamma_3 \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$P_{v2} = \left[\frac{\pi d^2}{4} (x_2 + a) + \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \right] \gamma_3$$

Przykład 9

Przepływ cieczy z komory lewej zbiornika do prawej odbywać się może przewodem, którego wylot zamyka zawór wykonany w kształcie stożka z wydrążoną w nim półkulą (rys. II.45). Prawa komora napełniona jest cieczą do wysokości H . Przy jakim napełnieniu t lewej komory zawór przesunie się do góry?

DANE: G (ciężar zaworu), H , h , D , d , γ_1 , γ_2

Na zawór działają następujące siły pionowe:

- ciężar zaworu G ,
- składowe pionowe parcia, mianowicie od cieczy w lewej komorze zbiornika siła P_{v2} o zwrocie w górę, a od cieczy w prawej komorze siła P_{v1} ze zwrotem w dół.

W tym stanie rzeczy równanie równowagi zaworu ma postać:

$$G + P_{v1} = P_{v2} \quad (1)$$

Obliczając siły P_{v1} i P_{v2} musimy uwzględnić wpływ działania ciśnienia atmosferycznego p_a , bowiem od strony cieczy o ciężarze objętościowym γ_2 ciśnienie p_a działa na poziomy rzut zaworu równy $(\pi D^2)/4$, natomiast od strony cieczy drugiej - na rzut $(\pi d^2)/4$ (zob. rys. II.45). Skutkiem tego przeciwnie skierowane pionowe siły, pochodzące od działania p_a , nie są jednakowe co do wartości i zredukować w całości ich nie można.

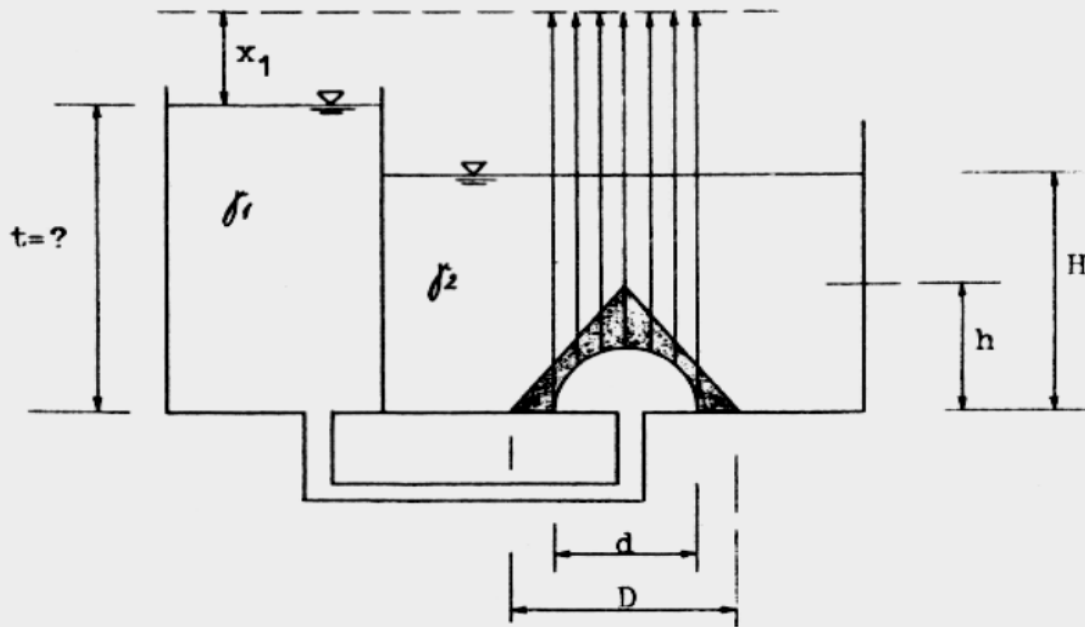
By zatem narysować prawidłowo wykresy parcia na zawór, należy wcześniej

a) zastąpić ciśnienie atmosferyczne ciśnieniem słupów cieczy:

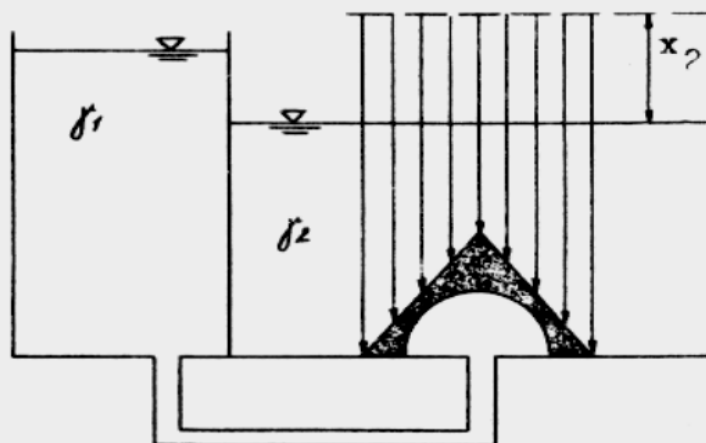
$$p_a = x_1 \gamma_1 \quad \text{oraz} \quad p_a = x_2 \gamma_2$$

b) po obliczeniu z podanych równości długości odcinków x_1 i x_2 odłożyć je w górę od powierzchni cieczy w komorach zbiornika; wyznaczymy w ten sposób poziomy pozornych zwierciadeł swobodnych.

a)



b)



Rys. II.45

Wykresy składowych pionowych parcia na zawór, stanowiące przekroje brył parcia w płaszczyźnie ich symetrii, pokazano na rysunkach: II.45a dla komory lewej oraz II.45b dla komory prawej. Siły parcia są równe

$$\begin{aligned}
 P_{v2} &= \text{objętość bryły parcia} \times \gamma_1 = [\text{objętość walca o wysokości } (x_1+t) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{ objętości kuli o średnicy } \bar{d}] \times \gamma_1 = \\
 &= \left[\frac{\pi d^2}{4} (x_1+t) - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \right] \gamma_1 \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{v1} &= \text{objętość bryły parcia} \times \gamma_2 = [\text{objętość walca o wysokości } (x_2+H) - \\
 &\quad - \text{objętość stożka o wysokości } h] \times \gamma_2 = \\
 &= \left[\frac{\pi D^2}{4} (x_2+H) - \frac{1}{3} h \frac{\pi D^2}{4} \right] \gamma_2 \quad (3)
 \end{aligned}$$

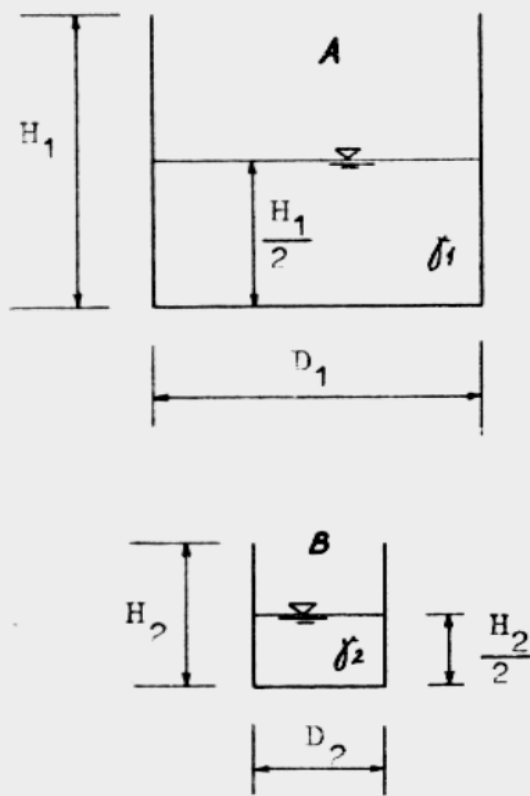
Po podstawieniu powyższych zależności do równania równowagi (1) wyliczymy napelnienie t lewej komory zbiornika; po przekroczeniu tego napelnienia zawór odsłoni wylot przewodu.

4. Pływanie ciał

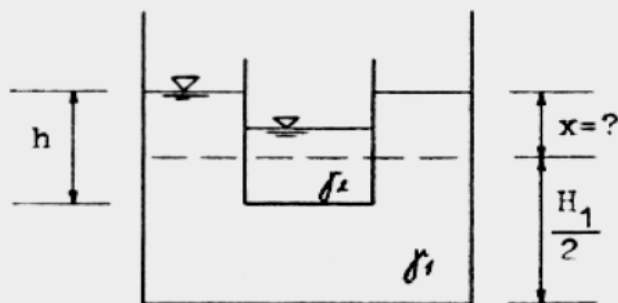
Przykład 1

Dane są dwa cylindryczne naczynia wypełnione do połowy cieczą (rysunek II.46). Naczynie mniejsze (B) po włożeniu go do naczynia A pływa częściowo zanurzone (rys. II.47). O ile przy tym podniósł się poziom cieczy w naczyniu A?

DANE: G (ciężar pustego naczynia B), H_2 , D_1 , D_2 , γ_1 , γ_2



Rys. II.46



Rys. II.47

Obliczmy głębokość h , na jaką zanurza się w cieczy naczynie B. Warunek pływania (zob. wzór (I.26)) mówi, że ciężar tego naczynia wraz z zawartą w nim cieczą równy jest sile wyporu, jaka działa na owo naczynie, zatem

$$Q + G = W$$

W równaniu tym Q oznacza ciężar cieczy wypełniającej naczynie B; jest on równy

$$Q = \frac{\pi D_2^2}{4} \frac{H_2}{2} \gamma_2$$

Zgodnie z punktem 18.5 z części I dla przypadku pokazanego na rys. II.47 siłę wyporu W określimy wzorem (I.24)

$$W = V \gamma_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} h \gamma_1$$

Ostatecznie więc

$$\frac{\pi D_2^2}{4} \frac{H_2}{2} \gamma_2 + G = \frac{\pi D_2^2}{4} h \gamma_1$$

skąd wyznaczmy głębokość zanurzenia h .

Po włożeniu naczynia B do większego naczynia A ilość cieczy w tym ostatnim nie zmieniła się, tak więc (zob. rys. II.47)

$$\frac{\pi D_1^2}{4} \frac{H_1}{2} = \frac{\pi D_1^2}{4} \left(\frac{H_1}{2} + x \right) - \frac{\pi D_2^2}{4} h$$

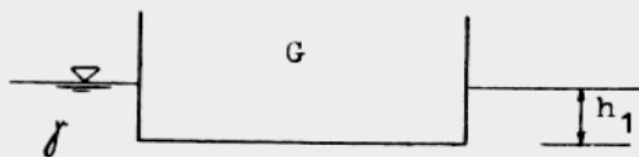
Po podstawieniu do powyższego równania otrzymanego wcześniej wyrażenia na h otrzymamy

$$x = \left(\frac{D_2}{D_1} \right) \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\gamma_2 H_2}{2} + \frac{4 G}{\pi D_2^2} \right)$$

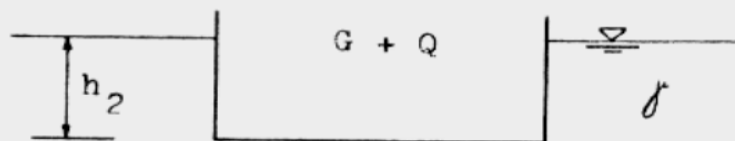
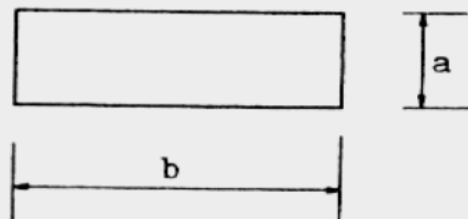
Przykład 2

Pusta barka o pokazanym na rysunku II.48 kształcie zanurza się pływając na głębokość h_1 . Jaki maksymalny ciężar Q może barka ta przewieźć, by głębokość jej zanurzenia nie przekroczyła wartości h_2 ?

DANE: a, b, h_1, h_2, γ



wymiary dna barki:



Rys. II.48

Gdy barka jest pusta, warunek jej pływania zapiszemy następująco (zob. wzór (I.26))

$$G = W_1 \quad (1)$$

gdzie G oznacza ciężar pustej barki, a wypór W_1 jest wg wzoru (I.24) równy

$$W_1 = a b h_1 \gamma \quad (2)$$

Dla barki pływającej z ładunkiem zajść musi

$$G + Q = W_2 \quad (3)$$

czyli wobec równości (1)

$$W_1 + Q = W_2 \quad (4)$$

gdzie

$$W_2 = a b h_2 \gamma \quad (5)$$

Z powyższych zależności wynika ostatecznie, że

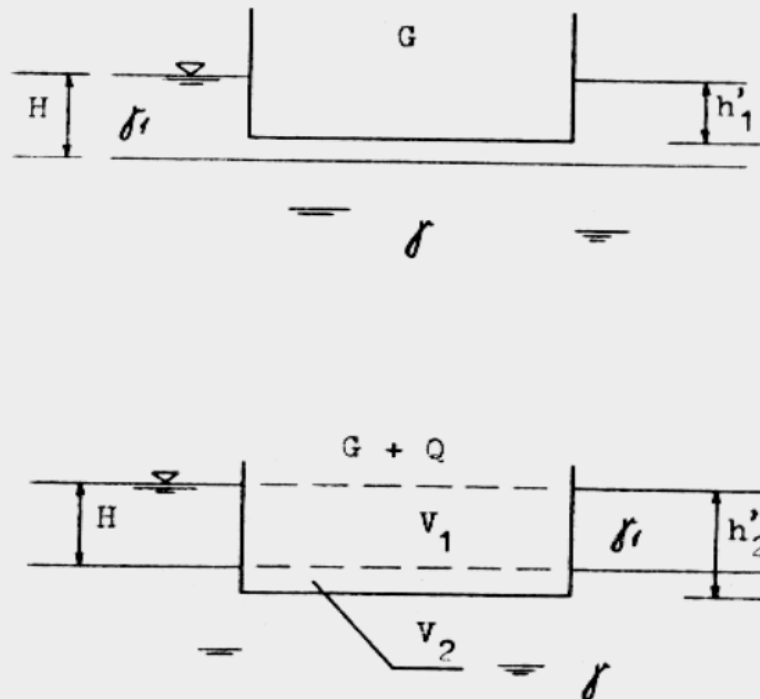
$$a b h_1 \gamma + Q = a b h_2 \gamma$$

zatem

$$Q = a b \gamma (h_2 - h_1)$$

Założmy, że ta sama barka pływa w warunkach, gdy na powierzchni cieczy o ciężarze objętościowym γ znajduje się warstwa innej cieczy (przy czym ciecze te nie mieszają się ze sobą). Niech grubość owej warstwy wynosi H . Pusta barka zanurza się na głębokość h'_1 , zaś obciążona ładunkiem Q na głębokość h'_2 i zachodzi nierówność (patrz rys. II.49)

$$h'_1 < H < h'_2$$



Rys. II.49

W tym przypadku zależność (2) przyjmie postać

$$W_1 = a b h'_1 \gamma_1 \quad (6)$$

zas obliczając siłę wyporu działającą na barkę przewożącą ładunek Q , napiszemy:

$$W_2 = V_1 \gamma_1 + V_2 \gamma = a b H \gamma_1 + a b (h'_2 - H) \gamma \quad (7)$$

(zob. ZESTAWIENIE podane na str. 47 i 48). Zgodnie zatem z równaniem (4)

$$a b h'_1 \gamma_1 + Q = a b H \gamma_1 + a b (h'_2 - H) \gamma$$

czyli

$$Q = a b [(H - h'_1) \gamma_1 + (h'_2 - H) \gamma]$$

Przykład 3

Beczka o ciężarze G i kształcie pokazanym na rys. II.50 pływa częściowo zanurzona w cieczy. Na jakiej wysokości r_s ponad dnem winien leżeć srodek ciężkości beczki, by znajdowała się ona w równowadze trwałej?

DANE: G, D, γ

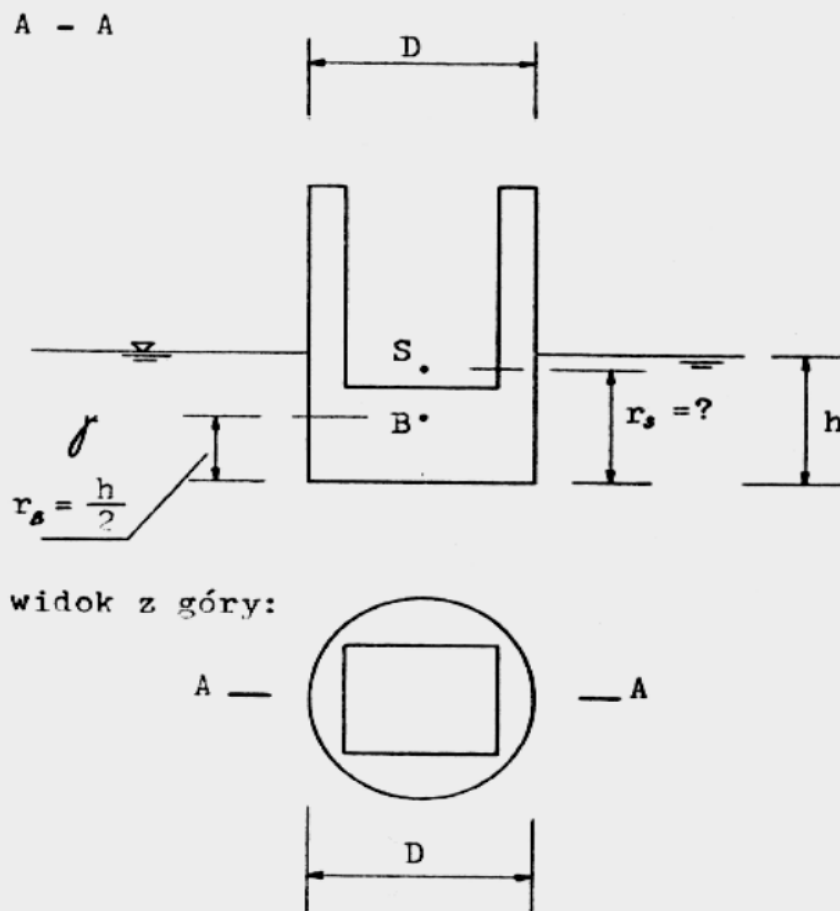
Zgodnie z treścią punktu 21.5 z części I częściowo zanurzone, pływające ciało znajduje się w równowadze trwałej, gdy obliczona dlań wysokość metacentryczna m jest dodatnia. Oznacza to, że - uwzględniając wzór (I.27) - zachodzić musi nierówność

$$\frac{\tilde{I}}{V} - a_s > 0 \quad (1)$$

Obliczmy kolejno wielkości \tilde{I} , V oraz a_s dla rozważanej w zadaniu pływającej beczki.

■ Powierzchnia pływania jest kołem o średnicy D (patrz rys. II.50), zatem moment bezwładności tej powierzchni

$$\tilde{I} = \frac{\pi D^4}{64} \quad (2)$$



Rys. II.50

- Warunek pływania (I.26)

$$W = G$$

po wykorzystaniu wzoru (I.24) na siłę wyporu przyjmuje postać

$$V \gamma = G$$

tak więc objętość części zanurzonej V jest równa

$$V = \frac{G}{\gamma} \quad (3)$$

- Środek wyporu leży w geometrycznym środku ciężkości zanurzonej części ciała, zatem (rys. II.50)

$$r_B = \frac{h}{2}$$

Ponieważ, jak widać na rysunku II.50

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h$$

więc głębokość zanurzenia beczki

$$h = \frac{4 V}{\pi D^2}$$

a po wykorzystaniu zależności (3)

$$h = \frac{4 G}{\pi D^2 \gamma} \quad (4)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$r_B = \frac{2 G}{\pi D^2 \gamma} \quad (5)$$

Uwzględniając powyższe odległość między środkiem ciężkości beczki a środkiem wyporu jest równa

$$a_s = r_s - r_B = r_s - \frac{2 G}{\pi D^2 \gamma} \quad (6)$$

Po wstawieniu zależności (2), (3) i (6) do nierówności (1) otrzymujemy

$$\frac{\gamma \pi D^4}{64 G} - \left(r_s - \frac{2 G}{\pi D^2 \gamma} \right) > 0$$

Wynika stąd, że poszukiwana odległość między dnem beczki a jej środkiem ciężkości wynosić musi

$$r_s \leq \left(\frac{\gamma \pi D^4}{64 G} + \frac{2 G}{\pi D^2 \gamma} \right)$$

Zgodnie z wyjaśnieniami podanymi na stronie 56 wartość a_s ma znak dodatni, jeśli środek ciężkości ciała pływającego leży wyżej niż środek wyporu, czyli gdy $r_s > r_B$. Zależność (6) jest słuszna przy takim właśnie założeniu. Można równie dobrze przyjąć przy rozwiązywaniu zadania, że $r_B > r_s$, wówczas jednak należałoby w miejsce równania (6) napisać

$$-a_s = r_B - r_s = \frac{2 G}{\pi D^2 \gamma} - r_s \quad (6')$$

w tym bowiem przypadku wartość a_s musi być opatrzona znakiem ujemnym (zob. str. 56). Po wstawieniu zależności (2), (3) i (6') do nierówności (1) otrzymalibyśmy

$$\frac{\gamma \pi D^4}{64 G} + \frac{2 G}{\pi D^2 \gamma} - r_s > 0$$

i ostatecznie ten sam, jak poprzednio, wynik

$$r_s \leq \left(\frac{\gamma \pi D^4}{64 G} + \frac{2 G}{\pi D^2 \gamma} \right)$$

5. Obliczenia w warunkach równowagi względnej cieczy

Przykład 1

Naczynie cylindryczne o wysokości H i średnicy dna równej D napełniono cieczą do wysokości h , a następnie wprowadzono w jednostajny ruch wirowy wokół pionowej osi. Z jaką prędkością kątową wirować musi naczynie, by paraboloida obrotowa utworzona przez zwierciadło cieczy:

- dotknęła dna naczynia,
- dotknęła krawędzi naczynia?

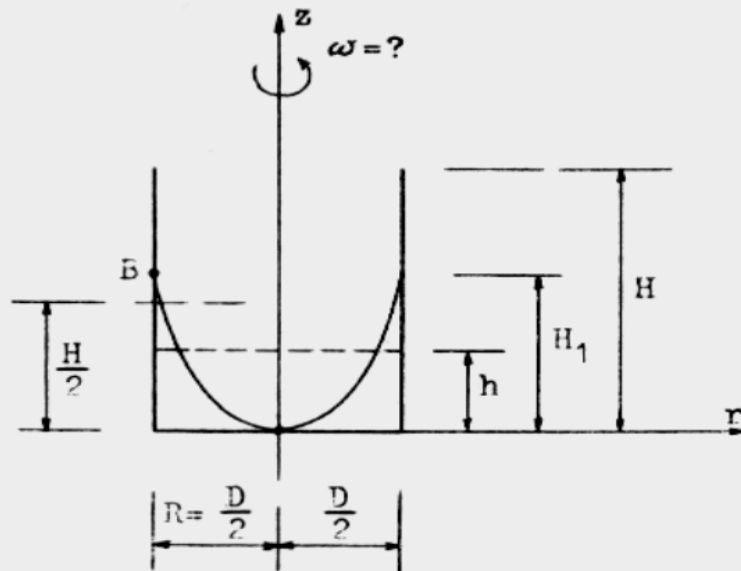
DANE: $H, h, D, R = D/2$

Rozwiązanie zadania a)

Zwróćmy przede wszystkim uwagę na to, że napełnienie h naczynia przed rozpoczęciem wirowania ma istotne znaczenie. Z faktu niescisłości cieczy i konieczności zachowania jej objętości wynikają następujące możliwe przypadki:

- a1. Jeśli $h < \frac{H}{2}$, wówczas przy odpowiedniej prędkości obrotu naczynia zwierciadło cieczy dotknie dna nie dochodząc jeszcze do krawędzi cylindra (rys. II.51).
- a2. Gdy $h > \frac{H}{2}$, dotknięcie przez zwierciadło dna naczynia poprzedzi osiągnięcie górnych jego krawędzi; część cieczy wyleje się z naczynia (rys. II.52 na stronie 141).
- a3. Jeśli $h = \frac{H}{2}$, po osiągnięciu odpowiedniej prędkości wirowania nastąpi jednoczesne zetknięcie się zwierciadła cieczy z dnem i z krawędziami naczynia.

Rozważmy przypadki a1 i a2.



Rys. II.51

■ a1

Dla układu współrzędnych przyjętego tak, jak na rysunku II.51 (początek układu leży w wierzchołku paraboloidy swobodnego zwierciadła cieczy) równanie powierzchni zwierciadła jest następujące (patrz równanie (I.11)):

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z \tag{1}$$

Weźmy pod uwagę dowolny punkt zwierciadła cieczy, np. punkt B. Dla punktu tego:

$$r = R, \quad z = H_1,$$

zatem po wstawieniu do równania (1) otrzymamy

$$\omega = \sqrt{\frac{2 g H_1}{R^2}} \quad (2)$$

Nieznana wielkość H_1 obliczymy z porównania objętości cieczy przed i w trakcie wirowania naczynia. Przed wirowaniem objętość ta wynosiła $\pi R^2 h$, zaś podczas wirowania z prędkością ω jest równa $\frac{1}{2} \pi R^2 H_1$ (objętość paraboloidy obrotowej stanowi połowę objętości walca opisanego na tej paraboloidzie). Ponieważ w trakcie ruchu naczynia cieczy zeń nie ubyło, zatem

$$\pi R^2 h = \frac{1}{2} \pi R^2 H_1$$

a więc

$$H_1 = 2h$$

i ostatecznie ze wzoru (2)

$$\omega = \frac{2}{R} \sqrt{g h}$$

■ a2

Dla układu współrzędnych jak na rys. II.52 (patrz następna strona) równanie swobodnego zwierciadła cieczy w wirującym naczyniu ma postać

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z \quad (1)$$

Współrzędne leżącego na zwierciadle punktu B są następujące:

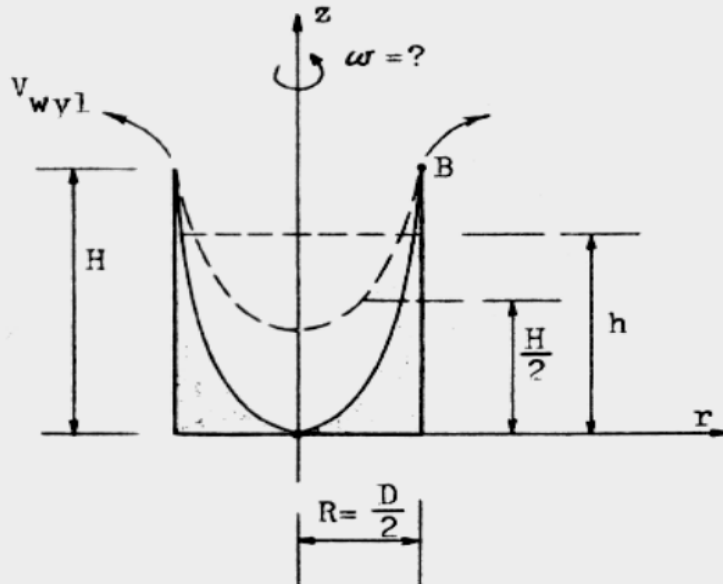
$$r = R, \quad z = H,$$

zatem z równania (1) otrzymujemy

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{2 g H}$$

Można dodatkowo obliczyć, ile cieczy wylało się z naczynia zanim powierzchnia zwierciadła dotknęła dna. Przed rozpoczęciem wirowania objętość cieczy w naczyniu była równa $\pi R^2 h$, natomiast w sytuacji pokazanej na rysunku II.52 objętość ta wynosi $\frac{1}{2} \pi R^2 H$. Z naczynia wylało się więc:

$$V_{\text{wyl}} = \pi R^2 h - \frac{1}{2} \pi R^2 H = \pi R^2 \left(h - \frac{H}{2} \right)$$



Rys. II.52

Rozwiązanie zadania b)

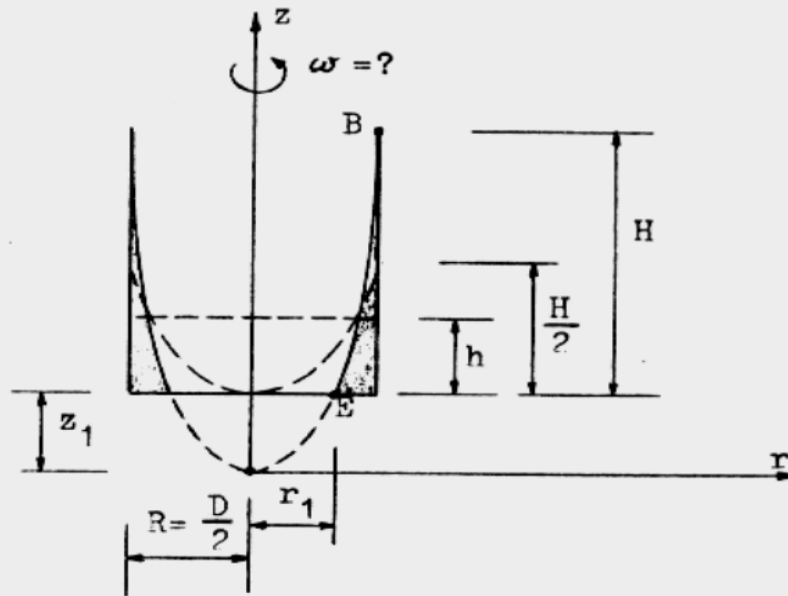
Jak i poprzednio rozważymy dwa przypadki:

- b1 gdy $h < \frac{H}{2}$, zwierciadło cieczy najpierw dotknie dna naczynia, a następnie - dążąc wraz ze wzrostem prędkości obrotu ω do krawędzi cylindra - utworzy ściętą paraboloidę obrotową, odsłaniając część powierzchni dna (rys. II.53),
- b2 jeśli $h > \frac{H}{2}$, wówczas przy odpowiedniej prędkości wirowania ω zwierciadło cieczy dotknie krawędzi naczynia nie dotykając dna (rysunek II.54 na str. 144).

■ b1

Przyjmijmy układ współrzędnych tak, by os r przechodziła przez wierzchołek paraboloidy obrotowej utworzonej przez zwierciadło cieczy (rys. II.53). W tym układzie równanie zwierciadła jest następujące (zob. równ. (I.11)):

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z \quad (1)$$



Rys. II.53

Wybierzmy punkt B zwierciadła. Współrzędnymi tego punktu są

$$r = R, \quad z = H + z_1$$

zatem z równania (1) obliczymy

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{2g(H + z_1)} \quad (2)$$

Wyznaczyć jeszcze należy nieznaną wielkość z_1 . Zauważmy, że dla punktu E zwierciadła mamy

$$r = r_1, \quad z = z_1$$

a więc z równania (1)

$$z_1 = \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} \quad (3)$$

Pojawia się wprawdzie nowa niewiadoma r_1 , jednakże można ją obliczyć porównując objętości cieczy w naczyniu

- przed wirowaniem

$$\pi R^2 h$$

- w trakcie ruchu (scislej - w momencie, gdy prędkość wirowania stała się na tyle duża, że zwierciadło ciecży dotknęło krawędzi naczynia; jest to sytuacja pokazana na rys. II.53)

$$\begin{aligned} \pi R^2 H - \text{objętość paraboloidy ściętej} &= \pi R^2 H - \frac{1}{2} \pi H (r_1^2 + R^2) = \\ &= \frac{1}{2} \pi H (R^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

Objętości te są sobie równe (ciecz nie wylała się z naczynia), zatem

$$\pi R^2 h = \frac{1}{2} \pi H (R^2 - r_1^2)$$

a stąd:

$$r_1^2 = R^2 \left(1 - \frac{2h}{H}\right) \quad (4)$$

Po wstawieniu (4) do (3) otrzymamy

$$z_1 = \frac{\omega^2 R^2 \left(1 - \frac{2h}{H}\right)}{2g}$$

i ostatecznie ze wzoru (2) po przekształceniach

$$\omega = \frac{H}{R} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

■ b2

Układ współrzędnych przyjmijmy dla odmiany tak, jak na rys. II.54 (patrz następna strona). W tym przypadku początek układu nie pokrywa się z wierzchołkiem paraboloidy zwierciadła i równanie powierzchni zwierciadła ciecży ma postać (zob. równanie (I.10))

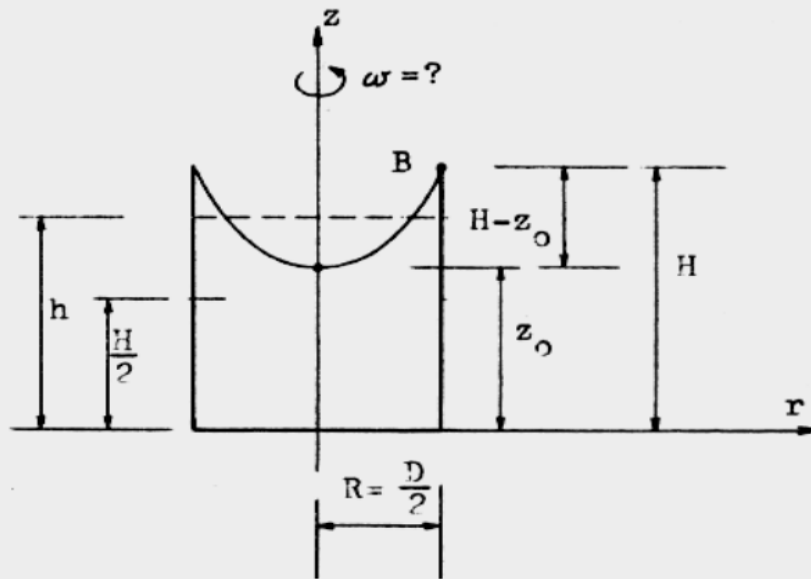
$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z - z_0 \quad (1)$$

Współrzędne wybranego punktu B zwierciadła są następujące

$$r = R, \quad z = H,$$

zatem z równania (1)

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{2g(H - z_0)} \quad (2)$$



Rys. II.54

Wielkość z_0 obliczymy wiedząc, że w nieruchomym naczyniu ciecz zajmowała objętość równą $\pi R^2 h$, zaś podczas wirowania z prędkością ω objętość

$$\pi R^2 z_0 + \frac{1}{2} \pi R^2 (H - z_0)$$

Porównując je ze sobą otrzymamy

$$h = z_0 + \frac{1}{2} (H - z_0)$$

a zatem

$$z_0 = 2h - H \tag{3}$$

i ostatecznie po wstawieniu (3) do (2)

$$\omega = \frac{2}{R} \sqrt{g (H - h)}$$

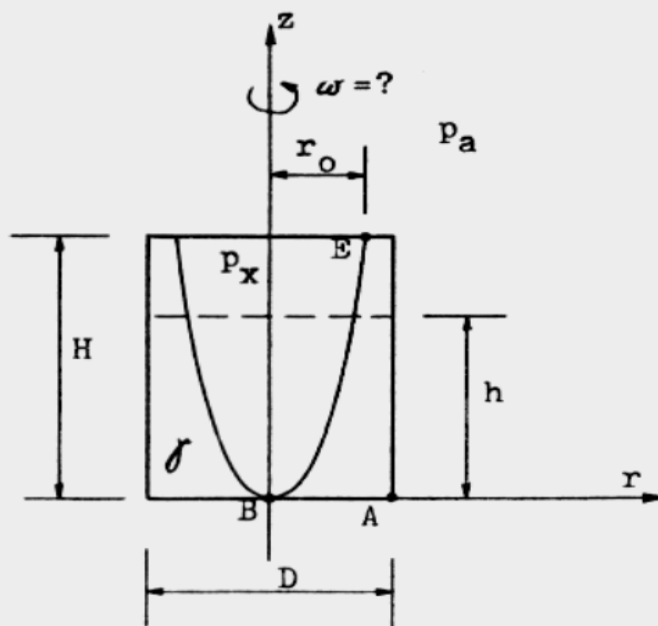
Przykład 2

Zamknięty, cylindryczny zbiornik o średnicy D i wysokości H , wypełniony początkowo cieczą do wysokości h (przy czym $h > \frac{H}{2}$), wiruje dookoła swej

plonowej osi ze stałą prędkością kątową. W trakcie ruchu zwierciadło cieczy dotyka dna (rys. II.55). Obliczyć:

- prędkość obrotu zbiornika ω ,
- ciśnienie panujące w punkcie A zbiornika, wiedząc, że ciśnienie gazu nad swobodnym zwierciadłem cieczy równe jest p_x .

DANE: p_x , H , h , D , γ



Rys. II.55

Rozwiązanie zadania a)

Ponieważ początkowe napełnienie zbiornika h było większe niż połowa wysokości tego zbiornika, zatem w momencie, gdy paraboloida obrotowa zwierciadła dotknie dna, powierzchnia jej przetnie pokrywę zamykającą od góry zbiornik; pokazano to na rysunku II.55 (por. przypadek a2 z poprzedniego zadania, odnoszący się do otwartego naczynia).

Dla zaznaczonego na wspomnianym rysunku układu współrzędnych równanie zwierciadła ma postać:

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z \quad (1)$$

Wstawmy do tego równania współrzędne punktu E zwierciadła

$$r = r_0, \quad z = H;$$

otrzymamy

$$\omega = \sqrt{\frac{2 g H}{r_0^2}} \quad (2)$$

Ponieważ zbiornik jest zamknięty, ciecz nie wyleje się na zewnątrz w trakcie wirowania i objętości cieczy przed oraz w czasie ruchu są jednakowe. Nie zmienia się także objętość gazu w zbiorniku, co można prosto zapisać

$$\frac{\pi D^2}{4} (H-h) = \frac{1}{2} \pi r_0^2 H$$

Wynika stąd, że

$$r_0^2 = \frac{D^2 (H-h)}{2 H}$$

tak więc po wstawieniu do (2) otrzymujemy ostatecznie

$$\omega = \frac{2 H}{D} \sqrt{\frac{g}{H-h}}$$

R o z w i ą z a n i e z a d a n i a b)

Oś z przyjętego układu współrzędnych skierowana jest pionowo w górę (rysunek II.55), zatem ogólną postać równania ciśnienia zapiszemy zgodnie z zależnością (I.15)

$$p = \rho \left[\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z \right] + C \quad (1)$$

By obliczyć stałą całkowania C wprowadzimy do równania warunki brzegowe. Wybierzmy np. punkt B cieczy; w punkcie tym

$$r = 0, \quad z = 0, \quad \text{zaś ciśnienie} \quad p = p_B = p_x.$$

Po wstawieniu do (1) otrzymamy

$$C = p_x$$

a zatem równanie ciśnienia przybierze postać

$$p = \rho \left(-\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z \right) + p_x \quad (2)$$

Punkt A, w którym mamy obliczyć ciśnienie, posiada w przyjętym układzie współrzędne

$$r = \frac{D}{2}, \quad z = 0.$$

Jeśli współrzędne te wstawimy do równania ciśnienia (2), uzyskamy rozwiązanie zadania

$$p_A = \rho \frac{\omega^2 D^2}{8} + p_x$$

czyli uwzględniając zależność (I.1)

$$p_A = \gamma \frac{\omega^2 D^2}{8g} + p_x$$

Przykład 3

Naczynie w kształcie walca o średnicy D i wysokości H wiruje wokół swej pionowej osi ze stałą prędkością kątową ω . W trakcie ruchu ciecz podniosła się na ścianach naczynia do wysokości H_1 (rys. II.56). Obliczyć:

- do jakiej wysokości a napełnione było naczynie przed rozpoczęciem wirowania?
- o ile zmieniło się ciśnienie w punkcie A w porównaniu ze stanem, gdy naczynie było nieruchome?

Po obliczeniu napełnienia a rozwiązać następujące zadanie:

Prędkość kątową obrotu zwiększono do wartości ω_1 . Jaką maksymalną średnicę d może mieć otwór w pokrywie naczynia, by ciecz nie wylała się na zewnątrz w trakcie wirowania (zob. rys. II.56)?

DANE: $H, H_1, R = \frac{D}{2}, \omega, \omega_1, \gamma$

Wyberzmy punkt B zwierciadła i jego współrzędne

$$r = R, \quad z = H_2$$

wstawmy do równania (3). Otrzymamy

$$\frac{\omega^2 R^2}{2g} = H_2 \quad (4)$$

zatem zgodnie z zależnością (2)

$$a = H_1 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (5)$$

R o z w i ą z a n i e z a d a n i a b)

Gdy naczynie było nieruchome, ciśnienie w punkcie A było równe

$$p'_A = p_a$$

W trakcie wirowania naczynia, przy układzie osi z i r przyjętym tak, jak na rysunku II.56, słuszne jest ogólne równanie ciśnienia (I.15)

$$p = \rho \left[\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z \right] + C \quad (1)$$

Wstawiając do tego równania współrzędne np. punktu E cieczy

$$r = 0, \quad z = 0$$

i uwzględniając, że ciśnienie w tym punkcie wynosi

$$p = p_E = p_a,$$

otrzymamy

$$C = p_a$$

zatem równanie ciśnienia ma postać

$$p = \rho \left[\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z \right] + p_a \quad (2)$$

By obliczyć ciśnienie p'_A panujące w punkcie A w czasie wirowania naczynia, wstawmy do równania (2) współrzędne tego punktu

$$r = R, \quad z = a - (H_1 - H_2)$$

Po uwzględnieniu zależności (4) i (5) z zadania a) oraz związku (I.1) otrzymamy z równania (2)

$$p'_A = p_a + \gamma \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (3)$$

Szukana różnica ciśnień w punkcie A wynosi

$$p'_A - p'_A = \gamma \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Wynik ten można otrzymać inną drogą. Ciecz w rozważanym wirującym naczyniu pozostaje we względnym spoczynku, toteż obowiązują wszelkie prawa hydrostatyki, także i wzor (I.14). Zgodnie z tym wzorem ciśnienie w punkcie A wynosi

$$p'_A = p_o + \gamma h = p_a + \gamma h$$

przy czym - jak pokazuje rys. II.56 -

$$h = H_1 - a$$

Wykorzystajmy zależność (5) z punktu a); otrzymamy

$$h = \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

tak więc

$$p'_A = p_a + \gamma h = p_a + \gamma \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

(por. wzor (3)).

Obliczenie średnicy otworu w pokrywie naczynia

Powierzchnia paraboloidy zwierciadła cieczy, uformowana w trakcie obracania się naczynia z prędkością kątową ω_1 , może co najwyżej sięgać krawędzi otworu w pokrywie, gdyż inaczej ciecz wylewałaby się z naczynia i warunek zadania nie byłby spełniony. Na rysunku II.56 przekrojem powierzchni zwierciadła jest parabola naszkicowana linią przerywaną.

Przyjmijmy układ osi z i r_1 (zob. rys. II.56). W układzie tym słuszne będzie równanie zwierciadła

$$\frac{\omega_1^2 r_1^2}{2g} = z \quad (1)$$

Weźmy pod uwagę punkt F leżący na krawędzi otworu i jednocześnie na zwierciadle cieczy. W punkcie tym

$$r_1 = \frac{d}{2}, \quad z = H_3$$

zatem z równania (1) otrzymujemy

$$\frac{\omega_1^2 d^2}{8g} = H_3 \quad (2)$$

Zauważmy, że ponieważ w czasie ruchu ciecz nie wylała się z naczynia (warunek zadania), objętość gazu w naczyniu przed i w trakcie wirowania z prędkością ω_1 pozostała ta sama, zatem

$$\pi R^2 (H-a) = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} H_3$$

Wynika stąd, że

$$H_3 = \frac{8 R^2 (H-a)}{d^2} \quad (3)$$

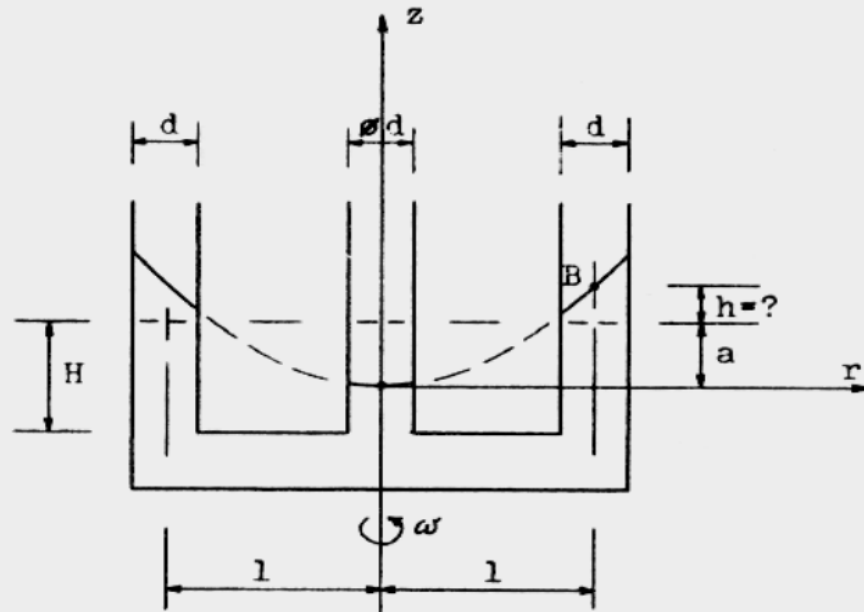
Łącząc zależności (2) i (3) otrzymamy poszukiwaną wielkość d

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 g R^2 (H-a)}{\omega_1^2}}$$

Przykład 4

Naczynie składające się z trzech pionowych rurek o jednakowej, niewielkiej średnicy d , wypełnione początkowo cieczą do wysokości H (rys. II.57), wiruje wokół swej osi symetrii ze stałą prędkością kątową ω . Obliczyć o ile podniosła się ciecz w bocznych ramionach naczynia w trakcie jego wirowania.

DANE: l, ω



Rys. II.57

Powierzchnia zwierciadła cieczy w naczyniu przyjmie w czasie wirowania kształt paraboloidy obrotowej, przy czym w poszczególnych częściach naczynia (ramionach i części środkowej) widoczne będą fragmenty tej paraboloidy. W porównaniu z początkowym napełnieniem H ciecz w ramionach bocznych ułoży się wyżej, a w środkowej części - niżej (zob. rys. II.57).

Jeśli układ współrzędnych przyjmiemy tak jak na wspomnianym rysunku, równanie powierzchni zwierciadła będzie następujące:

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z \quad (1)$$

Weźmy pod uwagę punkt B zwierciadła cieczy o współrzędnych

$$r = l, \quad z = h + a$$

Po wstawieniu ich do równania (1) otrzymujemy

$$h = \frac{\omega^2 l^2}{2g} - a \quad (2)$$

Warunek zachowania objętości cieczy wymaga, by jej przyrost w ramionach naczynia był równy ubytkowi w części środkowej, czyli aby

$$2\left(\frac{\pi d^2}{4} h\right) = a \frac{\pi d^2}{4}$$

Otrzymujemy więc

$$a = 2h$$

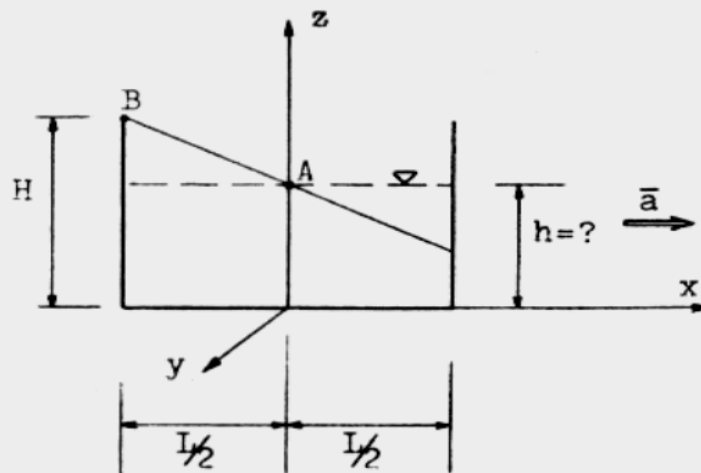
i ostatecznie zgodnie z równaniem (2)

$$h = \frac{\omega^2 l^2}{6g}$$

Przykład 5

Naczynie prostokątne o długości L i wysokości H (rys. II.58) porusza się po torze poziomym ze stałym przyspieszeniem a . Obliczyć, do jakiej wysokości h można było napełnić to naczynie cieczą, by nie wylała się ona podczas ruchu.

DANE: L, H, a



Rys. II.58

Z treści zadania wynika, że dopuszczalne jest co najwyżej takie nachylenie zwierciadła cieczy w czasie ruchu naczynia, jakie pokazano na rysunku II.58.

Przy podanym na tym rysunku układzie współrzędnych, równanie powierzchni jednakowego ciśnienia ma postać (I.12)

$$a x + g z = C \quad 1) \quad (1)$$

Wzmy pod uwagę punkt A zwierciadła o współrzędnych $x = 0$, $z = h$. Po wstawieniu ich do równania (1) obliczymy wartość stałej całkowania

$$C = g h$$

i otrzymamy równanie powierzchni zwierciadła cieczy

$$a x + g z = g h \quad (2)$$

Punktem zwierciadła, którego współrzędne narzuca treść zadania, jest punkt B. W punkcie tym

$$x = -\frac{L}{2}, \quad z = H$$

Po wstawieniu powyższych wielkości do równania (2) uzyskamy

$$h = H - \frac{a L}{2g}$$

Przykład 6

Naczynie pokazane na rysunku II.59, napełnione początkowo cieczą do połowy swej wysokości, porusza się ruchem jednostajnie zmiennym prostoliniowym. Obliczyć:

- z jakim przyspieszeniem porusza się naczynie, jeśli wiadomo, że w trakcie ruchu ciecz przy tylnej ścianie podniosła się do wysokości H_1 ,
- cisnienie panujące w punkcie E naczynia.

DANE: p_a , H , H_1 , L , γ

Rozwiązanie zadania a)

Przyjmijmy układ współrzędnych x , y , z jak na rys. II.59. W układzie tym współrzędne punktu A zwierciadła są następujące: $x = L/2$, $z = H/2$.

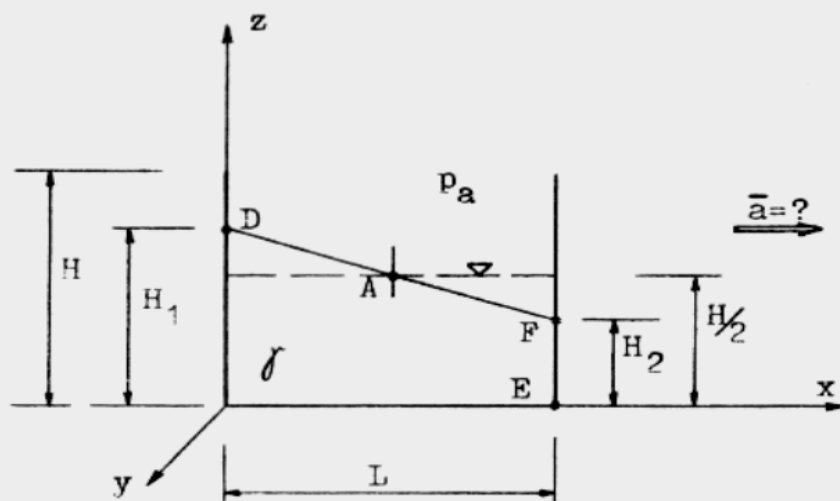
1) Zgodnie z treścią punktu 13.2 z części I równanie (I.12) jest słuszne zawsze wtedy, gdy oś z układu współrzędnych skierowana jest pionowo w górę, a oś x zgodnie z kierunkiem ruchu naczynia.

Po wstawieniu ich do równania (I.12) ¹⁾ otrzymujemy

$$C = a \frac{L}{2} + g \frac{H}{2}$$

zatem równanie powierzchni swobodnego zwierciadła cieczy w rozpatrywanym naczyniu ma postać

$$a x + g z = a \frac{L}{2} + g \frac{H}{2} \quad (1)$$



Rys. II.59

Weźmy teraz pod uwagę punkt D zwierciadła i jego współrzędne

$$x = 0, \quad z = H_1$$

wprowadźmy do równania (1). Uzyskamy zależność, z której obliczymy szukaną wartość przyspieszenia

$$a = \frac{2g}{L} \left(H_1 - \frac{H}{2} \right)$$

1) Zob. uwaga w odnosniku na poprzedniej stronie.

Rozwiązanie zadania b)

Przy układzie współrzędnych przyjętym tak jak na rys. II.59, słuszne jest ogólne równanie ciśnienia (I.16):

$$p = \rho (- a x - g z) + C \quad (1)$$

W punkcie A

$$x = \frac{L}{2}, \quad z = \frac{H}{2}, \quad \text{ciśnienie } p = p_A = p_a.$$

tak więc z równania (1)

$$C = p_a + \rho a \frac{L}{2} + \rho g \frac{H}{2}$$

lub po wykorzystaniu zależności (I.1)

$$C = p_a + \frac{\gamma}{g} a \frac{L}{2} + \gamma \frac{H}{2}$$

Ostatecznie zatem równanie ciśnienia ma postać

$$p = \frac{\gamma}{g} (- a x - g z) + p_a + \frac{\gamma}{g} a \frac{L}{2} + \gamma \frac{H}{2} \quad (2)$$

Współrzędne interesującego nas punktu E są następujące:

$$x = L, \quad z = 0;$$

po wstawieniu ich do równania (2) otrzymamy

$$p_E = \gamma \frac{H}{2} - \gamma \frac{a L}{2g} + p_a$$

Zadanie to można rozwiązać inaczej. Ponieważ ciecz w naczyniu pozostaje we względnym spoczynku, obowiązują wszystkie prawa hydrostatyki i ciśnienie w danym punkcie cieczy musi być zgodnie ze wzorem (I.14) równe

$$p = p_0 + \gamma h$$

Tak więc w naszym zadaniu

$$p_E = p_a + \gamma H_2 \quad (3)$$

(zob. rys. II.59), przy czym wielkość H_2 obliczyć można wykorzystując równanie zwierciadła cieczy (równanie (1) z zadania a)). Po wstawieniu do tego równania współrzędnych leżącego na zwierciadle punktu F

$$x = L, \quad z = H_2$$

otrzymujemy

$$H_2 = \frac{H}{2} - \frac{aL}{2g}$$

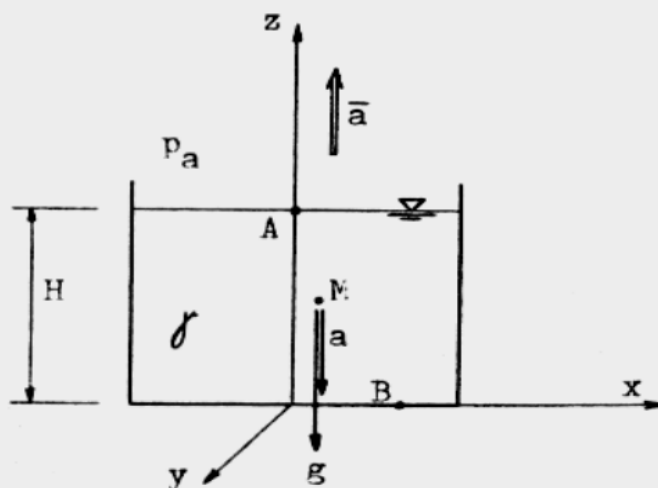
i ostatecznie zgodnie z zależnością (3)

$$p_E = p_a + \gamma \frac{H}{2} - \gamma \frac{aL}{2g}$$

Przykład 7

Naczynie wypełnione cieczą do wysokości H porusza się pionowo w górę ze stałym przyspieszeniem a . Obliczyć ciśnienie wywierane przez ciecz na dno tego naczynia (rys. II.60).

DANE: p_a , a , H , γ



Rys. II.60

Obie działające na ciecz siły masowe, siła ciężkości oraz siła bezwładności, są w omawianym przypadku reprezentowane przez wektory o kierunku pionowym, zatem powierzchnia zwierciadła cieczy - układająca się zawsze prostopadle do wypadkowej sił masowych (zob. punkt 10.3 części I) - pozostanie pozioma pomimo ruchu naczynia.

Układ współrzędnych przyjmijmy tak, jak pokazano na rysunku II.60. Ponieważ równanie ciśnienia w postaci (I.16) było wyprowadzone dla innego układu (oś x była zgodna z kierunkiem ruchu naczynia), nie możemy z niego skorzystać. Wyprowadzmy równanie ciśnienia ponownie.

Z rys. II.60 wynika, że

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= 0 \\ a_z &= -a + (-g) = -(a+g) \end{aligned} \quad (1)$$

Po wstawieniu tych wielkości do równania równowagi (I.7) otrzymamy

$$dp = \rho [-(a+g)dz]$$

a po scałkowaniu i wprowadzeniu zależności (I.1)

$$p = -\frac{\gamma}{g} (a+g) z + C \quad (2)$$

Wyberzmy np. punkt A cieczy. W punkcie tym

$$z = H, \quad p = p_A = p_a$$

zatem z równania (2)

$$C = p_a + \frac{\gamma}{g} (a+g) H$$

tak więc równanie ciśnienia w rozważanym naczyniu ma postać

$$p = -\frac{\gamma}{g} (a+g) z + p_a + \frac{\gamma}{g} (a+g) H \quad (3)$$

Obliczając ciśnienie panujące na dnie naczynia uczynmy to na przykład dla punktu B. Współrzędna z tego punktu jest równa

$$z = 0$$

z równania (3) wynika zatem, że

$$p_B = p_a + \frac{\gamma}{g} (a+g) H \quad (4)$$

Omówione zadanie opatrzmy komentarzem.

1. Gdy naczynie jest nieruchome i ciecz pozostaje w spoczynku bezwzględny, ciśnienie na poziomie dna wynosi - zgodnie z wzorem (I.14)

$$p_B = p_a + \gamma H$$

2. Jeżeli naczynie poruszałyby się w górę ze stałym przyspieszeniem $a = g$, wówczas ze wzoru (4) otrzymalibyśmy

$$p_B = p_a + 2 \gamma H$$

3. Gdyby naczynie opadało pionowo w dół ze stałym przyspieszeniem $a = g$, wtedy w równościach (1) należałoby dokonać zmiany, pisząc

$$a_z = +a + (-g) = g - g = 0$$

W konsekwencji w miejsce równania (3) otrzymalibyśmy następujące równanie ciśnienia

$$p = p_a$$

W tym przypadku zatem w każdym punkcie cieczy, niezależnie od jego położenia w naczyniu, ciśnienie byłoby stałe i równe ciśnieniu zewnętrznemu; ciecz w naczyniu staje się nieważka.

Przykład 8

Po równi pochyłej zsuwa się pod własnym ciężarem naczynie z cieczą (rys. II.61). Obliczyć kąt nachylenia zwierciadła tej cieczy do poziomu

- pomiijając opory ruchu wynikające z tarcia naczynia o równię,
- przy uwzględnieniu siły tarcia.

DANE: kąt nachylenia równi α

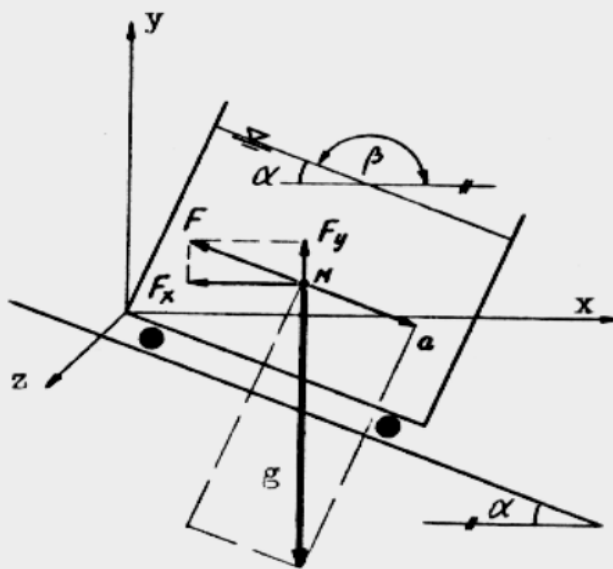
współczynnik tarcia naczynia o równię $f = \tan \varphi$

Rozwiązanie zadania a)

Naczynie zsuwa się po równi na skutek działania przyspieszenia a , które jest równe składowej przyspieszenia ziemskiego w kierunku ruchu (patrz rys. II.61)

$$a = g \sin \alpha$$

- Na każdy punkt cieczy w naczyniu działają dwie jednostkowe siły masowe:
- jednostkowa siła ciężkości g (pionowo w dół),
 - jednostkowa siła bezwładności $F = a = g \sin \alpha$ (o zwrocie przeciwnym do zwrotu wektora przyspieszenia a).



Rys. II.61

Przyjmijmy układ współrzędnych jak na rysunku II.61. Po rozłożeniu wymienionych sił masowych na osie układu otrzymamy

$$a_z = 0$$

$$a_y = F_y - g = F \sin \alpha - g = g \sin^2 \alpha - g = g (\sin^2 \alpha - 1) = -g \cos^2 \alpha$$

$$a_x = -F_x = -F \cos \alpha = -g \sin \alpha \cos \alpha$$

Po wprowadzeniu tych wielkości do równania równowagi (I.7) i po uwzględnieniu, że powierzchnia zwierciadła cieczy jest powierzchnią jednakowego ciśnienia, na której $dp = 0$, uzyskujemy

$$g \sin \alpha \cos \alpha dx + g \cos^2 \alpha dy = 0$$

Z powyższego równania wynika, że

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = - \operatorname{tg} \alpha$$

Jednocześnie na mocy zasad rachunku różniczkowego

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta$$

gdzie β jest kątem zaznaczonym na rys. II.61. Ostatecznie więc

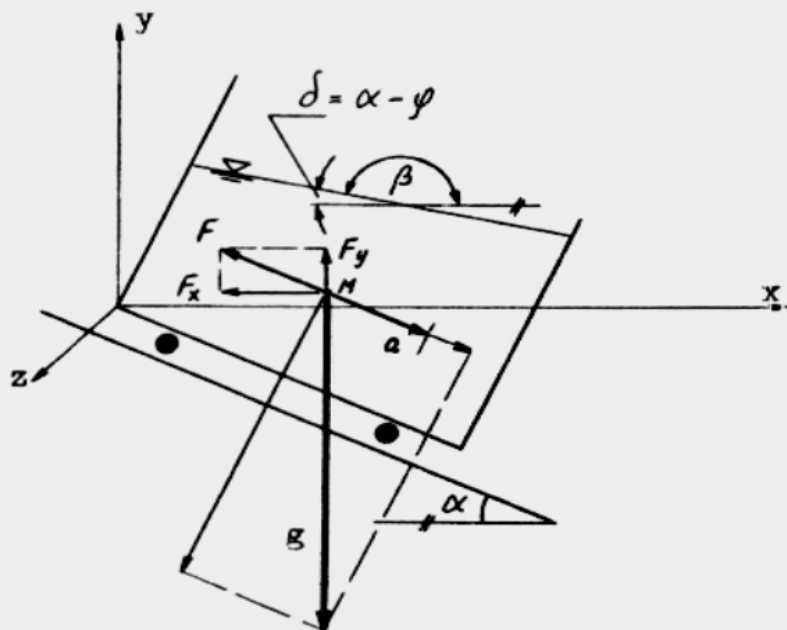
$$\operatorname{tg} \beta = - \operatorname{tg} \alpha$$

Uzyskana zależność dowodzi, że kąt α jest dopełnieniem kąta β do 180° . Oznacza to, że zwierciadło cieczy w poruszającym się po równi naczyniu nachylone jest do poziomu właśnie pod kątem α , a zatem układa się równoległe do powierzchni równi.

R o z w i ą z a n i e z a d a n i a b)

Przyspieszenie a powodujące ruch naczynia równe jest składowej przyspieszenia ziemskiego w kierunku ruchu ($g \sin \alpha$) pomniejszonej o jednostkową siłę tarcia naczynia o równię. Siłę tarcia obliczymy jako iloczyn składowej przyspieszenia g w kierunku do równi prostopadłym (czyli $g \cos \alpha$) oraz współczynnika tarcia $f = \operatorname{tg} \varphi$. W rezultacie

$$a = g \sin \alpha - g \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$$



Rys. II.62

Jednostkowe siły masowe działające na ciecz w rozważanym naczyniu są równe (zob. rys. II.62):

- jednostkowa siła ciężkości g (pionowo w dół),
- jednostkowa siła bezwładności $F = a = g \sin \alpha - g \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$ (zwrócona przeciwnie niż wektor przyspieszenia a).

Przy układzie współrzędnych pokazanym na rysunku II.62 otrzymamy

$$a_z = 0$$

$$\begin{aligned} a_y &= F_y - g = F \sin \alpha - g = g \sin^2 \alpha - g \cos \alpha \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi - g = \\ &= -g (\cos^2 \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_x &= -F_x = -F \cos \alpha = -g \sin \alpha \cos \alpha + g \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi = \\ &= -g (\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi) \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe zależności, a także fakt, że powierzchnia zwierciadła cieczy jest powierzchnią jednakowego ciśnienia (toteż $dp = 0$), z równania równowagi (I.7) uzyskamy

$$g (\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi) dx + g (\cos^2 \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha) dy = 0$$

lub inaczej

$$\left[\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \varphi \right] dx + \left[1 + \frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right] dy = 0$$

czyli

$$(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi) dx + (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha) dy = 0$$

Wynika stąd, że

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha}$$

Z drugiej strony

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta$$

(zob. zadanie a), przy czym β jest kątem pokazanym na rysunku II.62. Zatem

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha}$$

a więc zgodnie z wzorami trygonometrycznymi

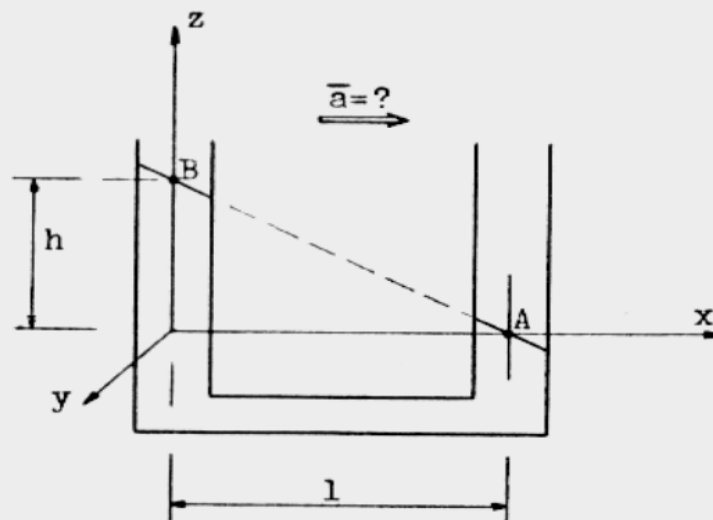
$$\operatorname{tg} \beta = - \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)$$

Jak widać, dopełnieniem kąta β do 180° jest kąt $\delta = \alpha - \varphi$ i pod takim też kątem nachylone jest do poziomu zwierciadło cieczy w poruszającym się naczyniu (patrz rys. II.62). Działanie siły tarcia naczynia o powierzchnię równi powoduje, że zwierciadło cieczy w naczyniu nie jest do równi równoległe.

Przykład 9

Przyspieszeniometer, którym jest u-rurka napełniona cieczą (rys. II.63), ustawiono w podłużnej płaszczyźnie symetrii samochodu. Podczas jazdy po torze poziomym, prostoliniowym, w ramionach przyspieszeniometera ustaliła się różnica zwierciadeł cieczy równa h . Obliczyć przyspieszenie samochodu.

DANE: h, l



Rys. II.63

Ruch samochodu jest jednostajnie zmienny prostoliniowy, zatem powierzchnia zwierciadła cieczy w przyspieszeniometerze jest płaszczyzną nachyloną pod pewnym kątem do poziomu; fragmenty tej płaszczyzny są widoczne w ramionach przyspieszeniometera (rys. II.63).

Jeśli układ współrzędnych przyjmiemy tak jak na wspomnianym wyżej rysunku II.63, wówczas ogólnym równaniem powierzchni jednakowego ciśnienia w przyspieszeniomierzu będzie równanie (I.12)

$$a x + g z = C \quad (1)$$

Wyberzmy punkt A zwierciadła cieczy, po czym jego współrzędne

$$x = l, \quad z = 0$$

wstawmy do równania (1); otrzymamy

$$C = a l$$

zatem równanie swobodnego zwierciadła cieczy w przyspieszeniomierzu ma następującą postać:

$$a x + g z = a l \quad (2)$$

Wprowadźmy do tego równania współrzędne innego punktu zwierciadła, np. punktu B

$$x = 0, \quad z = h$$

Uzyskamy równość

$$g h = a l$$

tak więc

$$a = \frac{g h}{l}$$

Przykład 10

Prostopadłościenną naczynię napełnioną początkowo cieczą do wysokości h (rys. II.64) porusza się po torze prostoliniowym ze stałym przyspieszeniem a . Obliczyć parcie cieczy na tylną ścianę naczynia.

DANE: a , L , h , b (szerokość naczynia), γ

Niezależnie od tego, którą z metod zastosujemy do obliczenia siły parcia najpierw wyznaczyć musimy położenie zwierciadła cieczy w naczyniu podczas jego ruchu. Zagadnienie to zostało już omówione w przykładach nr 5, 6, 9. Skorzystajmy z treści rozwiązania przykładu nr 5 (str.153). W układzie

współrzędnych pokazanym na rysunku II.64 równanie zwierciadła cieczy ma następującą postać:

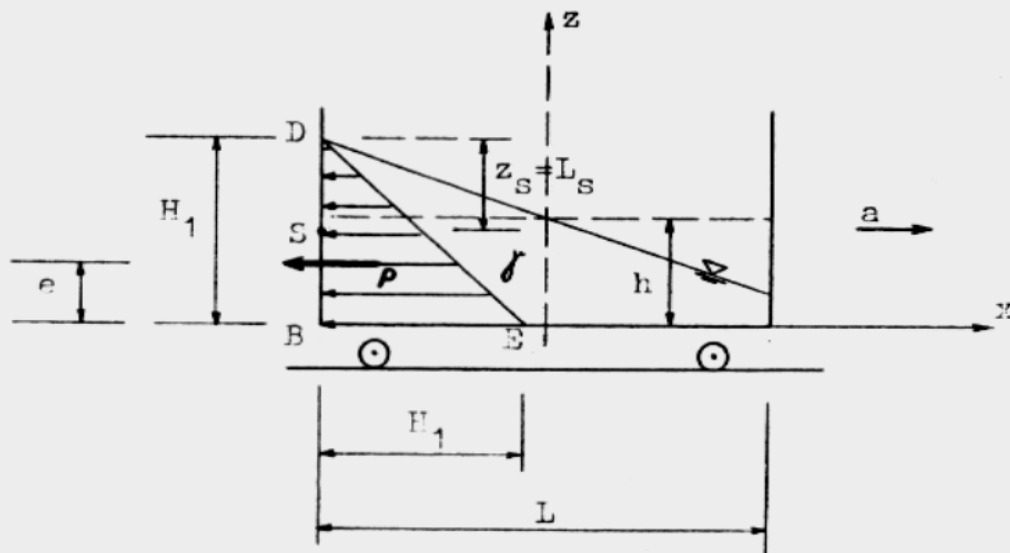
$$a x + g z = g h \quad (1)$$

Chcąc określić współrzędną pionową punktu D, w którym zwierciadło styka się z tylną ścianą naczynia, wstawimy do równania (1)

$$x = - \frac{L}{2}$$

(współrzędna pozioma punktu D); otrzymamy

$$z = H_1 = h + \frac{a L}{2g} \quad (2)$$



Rys. II.64

Zauważmy jeszcze, że wpływ obustronnego działania ciśnienia zewnętrznego p_a na rozpatrywaną ścianę redukuje się wzajemnie.

Parcie na ścianę obliczymy dwiema metodami.

Metoda graficzno-analityczna

Wykres parcia jest trójkątem BDE, a siła parcia

$$P = (\text{pole trójkąta BDE} \times b) \times \gamma = H_1 \frac{H_1}{2} b \gamma = \frac{1}{2} \left(h + \frac{a L}{2g} \right)^2 b \gamma$$

Wektor P leży na wysokości środka ciężkości wykresu parcia, zatem jego odległość od dna naczynia wynosi

$$e = \frac{H_1}{3}$$

Metoda analityczna

Zgodnie z wzorem (I.18)

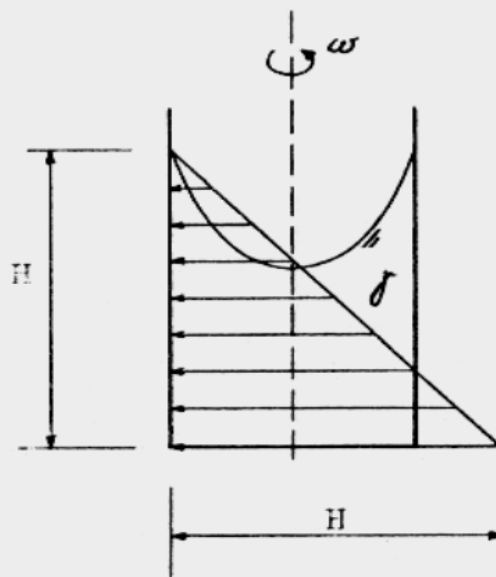
$$P = \gamma z_s A = \gamma \frac{H_1}{2} (H_1 b) = \frac{1}{2} \left(h + \frac{a L}{2g} \right)^2 b \gamma$$

natomiast

$$e = \frac{H_1}{2} - \eta_c = \frac{H_1}{2} - \frac{I}{L_s A} = \frac{H_1}{2} - \frac{(b H_1^3)/12}{(H_1/2) (H_1 b)} = \frac{H_1}{3}$$

Przykład 11

Na rysunku II.65 pokazano wykres parcia na bocznej ścianie naczynia, które wiruje wraz z cieczą dookoła swej pionowej osi ze stałą prędkością kątową ω .

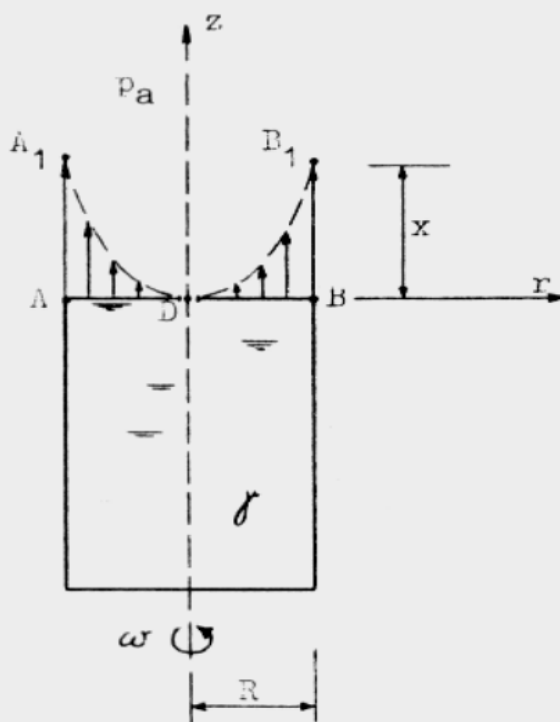


Rys. II.65

Przykład 12

Cylindryczny, zamknięty zbiornik, wypełniony całkowicie cieczą, wiruje ze stałą prędkością kątową ω wokół pionowej osi. W centrum pokrywy (na osi zbiornika) znajduje się niewielki otwór, dzięki czemu do wnętrza zbiornika ma dostęp ciśnienie atmosferyczne (rys. II.66). Obliczyć siłę parcia, z jaką ciecz działa na pokrywę zbiornika.

DANE: R , γ , ω



Rys. II.66

Przypomnijmy, że w wirującym naczyniu powierzchnia zwierciadła cieczy przyjmuje kształt paraboloidy obrotowej. W przypadku opisanym w treści niniejszego zadania (zbiornik zamknięty, całkowicie wypełniony cieczą) paraboloida swobodnego zwierciadła nie będzie utworzona, gdyż jest to fizycznie niemożliwe; ciecz jest niesciśliwa, a od góry przytrzymywana jest pokrywą i nic z naczynia wylać się nie może. Niezależnie zatem od tego, czy naczynie wiruje, czy też nie punkt D na osi zbiornika (zob. rys. II.66) pozostanie punktem cieczy. Kształt paraboloidy obrotowej będzie natomiast miało pozorne zwierciadło cieczy, którego położenie musimy wyznaczyć, by móc obliczyć następnie siłę parcia cieczy.

Z treści punktu 14.2 części I skryptu wiemy, że jeżeli układ współrzędnych zostanie przyjęty tak, jak na rysunku II.66, wówczas ciśnienie w dowolnym punkcie cieczy w wirującym naczyniu możemy obliczyć z równania

$$p = \rho \left[\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z \right] + C \quad (1)$$

Zgodnie z rys. II.66 w punkcie D

$$r = 0, \quad z = 0, \quad p = p_a$$

stąd z równania (1)

$$C = p_a$$

i ostatecznie równanie ciśnienia ma postać

$$p = \rho \left[\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z \right] + p_a \quad (2)$$

Współrzędne tych punktów cieczy, które znajdują się w miejscach styku pokrywy ze ścianką zbiornika, czyli punktów A i B na rysunku II.66, są następujące

$$r = R, \quad z = 0$$

z równania (2) wynika zatem, że ciśnienie w tych punktach podczas obrotu zbiornika wynosi

$$p_A = p_B = \rho \frac{\omega^2 R^2}{2} + p_a = \gamma \frac{\omega^2 R^2}{2g} + p_a$$

Pominmy wpływ ciśnienia atmosferycznego, które na pokrywę zbiornika działa z góry oraz - poprzez otwór i ciecz - od dołu. W takim przypadku

$$p'_A = p'_B = \gamma \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

zas dla punktu D cieczy

$$p'_D = 0$$

Zapisane wyżej ciśnienia zastąpmy ciśnieniem słupów cieczy wypełniającej zbiornik:

$$p'_A = p'_B = \gamma \frac{\omega^2 R^2}{2g} = x \gamma$$

$$p'_D = 0 = x \gamma$$

Jak widać, wysokości tych słupów są równe:

- dla punktów A i B

$$x = \frac{p'_A}{\gamma} = \frac{p'_B}{\gamma} = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

- dla punktu D

$$x = 0$$

Ostatecznie zatem paraboloida pozornego zwierciadła cieczy w rozpatrywanym zbiorniku wznosi się nad krawędzią pokrywy na wysokość

$$x = \frac{\omega^2 R^2}{2g},$$

zaś jej najniższy punkt pokrywa się z punktem D. Przekrój powierzchni pozornego zwierciadła zaznaczono na rysunku II.66 linią przerywaną.

Figura AA_1DB_1B na wspomnianym rysunku jest wykresem parcia na pokrywę. Bryła parcia ma objętość:

V_b = objętość walca o przekroju pionowym AA_1B_1BA - objętość paraboloidy obrotowej o przekroju $A_1DB_1A_1$ =

$$= \pi R^2 \frac{\omega^2 R^2}{2g} - \frac{1}{2} \pi R^2 \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \pi \frac{\omega^2 R^4}{4g}$$

zatem siła parcia cieczy na pokrywę zbiornika jest równa

$$P = V_b \gamma = \pi \frac{\omega^2 R^4}{4g} \gamma$$

Wektor siły parcia skierowany jest pionowo w górę.



**ZBIÓR ZADAŃ**

1. Tematy	173
2. Odpowiedzi	218



1. Tematy**U w a g a**

Temat każdego zadania uzupełniony jest rysunkiem. Wielkości zaznaczone na rysunkach należy traktować jako dane, z wyjątkiem tych naturalnie, które opatrzone są znakiem zapytania.

Zadanie 1

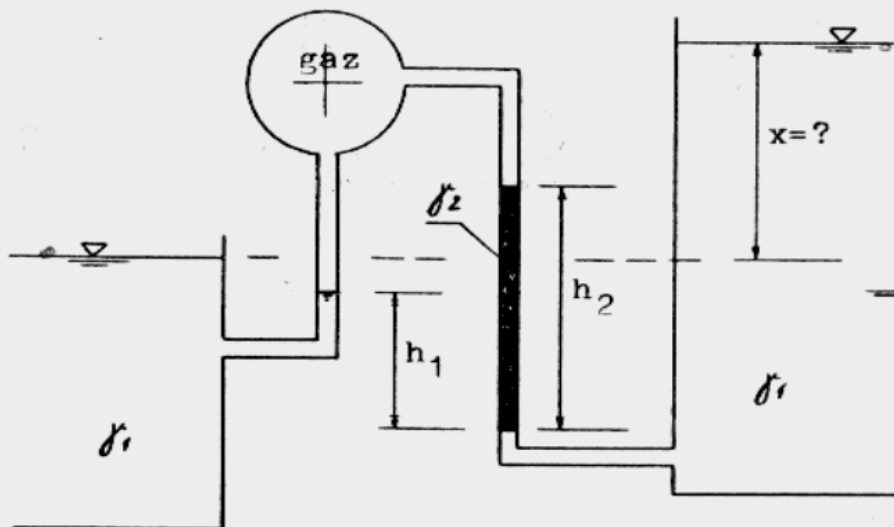
Na rysunku III.1 pokazane są dwa zbiorniki połączone rurką manometryczną. Ile wynosi różnica poziomów cieczy w tych zbiornikach?

Zadanie 2

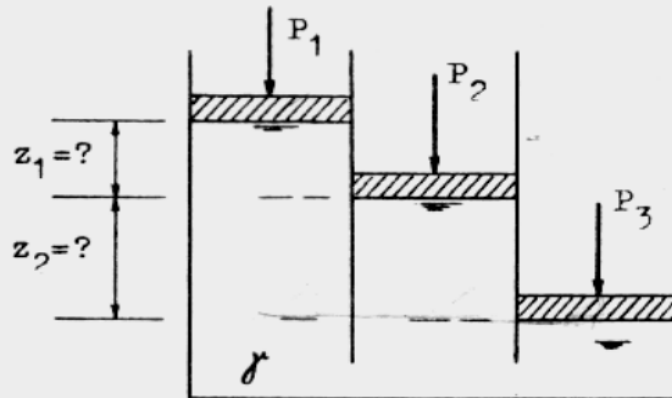
Obliczyć wysokości z_1 i z_2 przy podanym na rysunku III.2 stanie równowagi tłoków. (Powierzchnie tłoków przyjąć jednakowe, równe F).

Zadanie 3

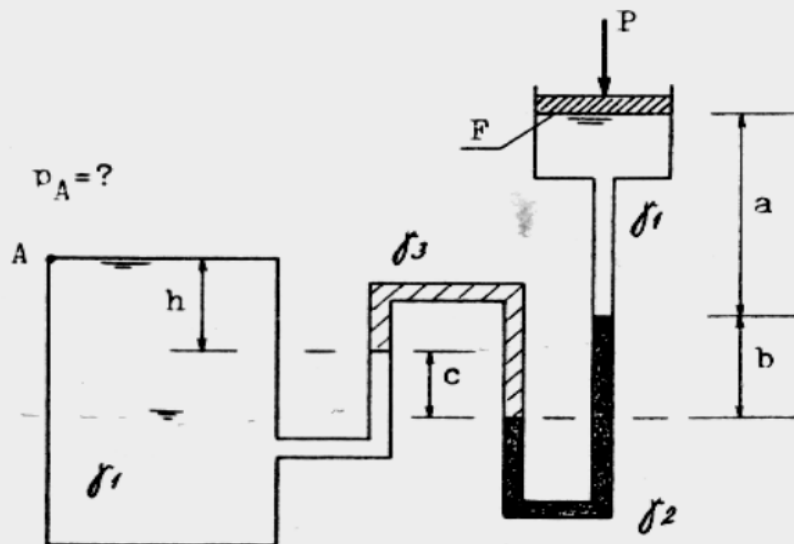
Obliczyć ciśnienie w punkcie A zbiornika (rys. III.3).



Rys. III.1



Rys. III.2



Rys. III.3

Zadanie 4

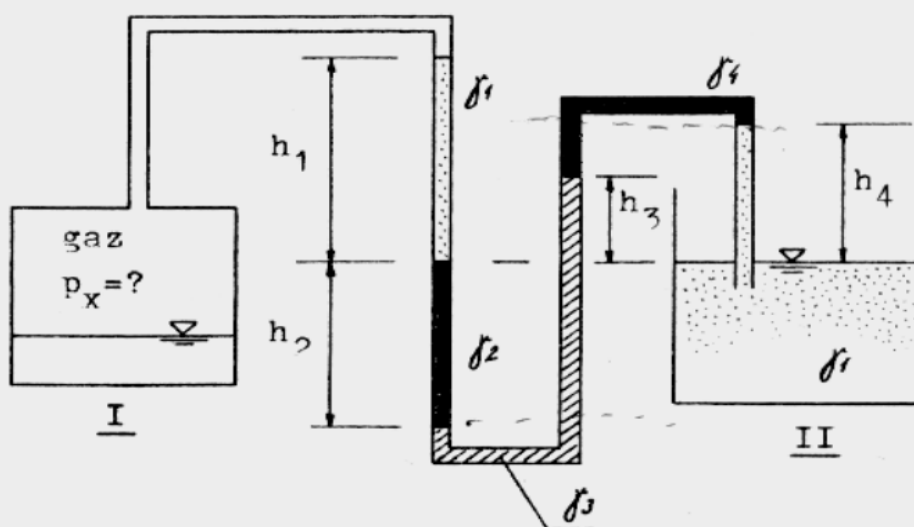
Ile wynosi ciśnienie p_x nad swobodnym zwierciadłem cieczy w zbiorniku I, pokazanym na rysunku III.4?

Zadanie 5

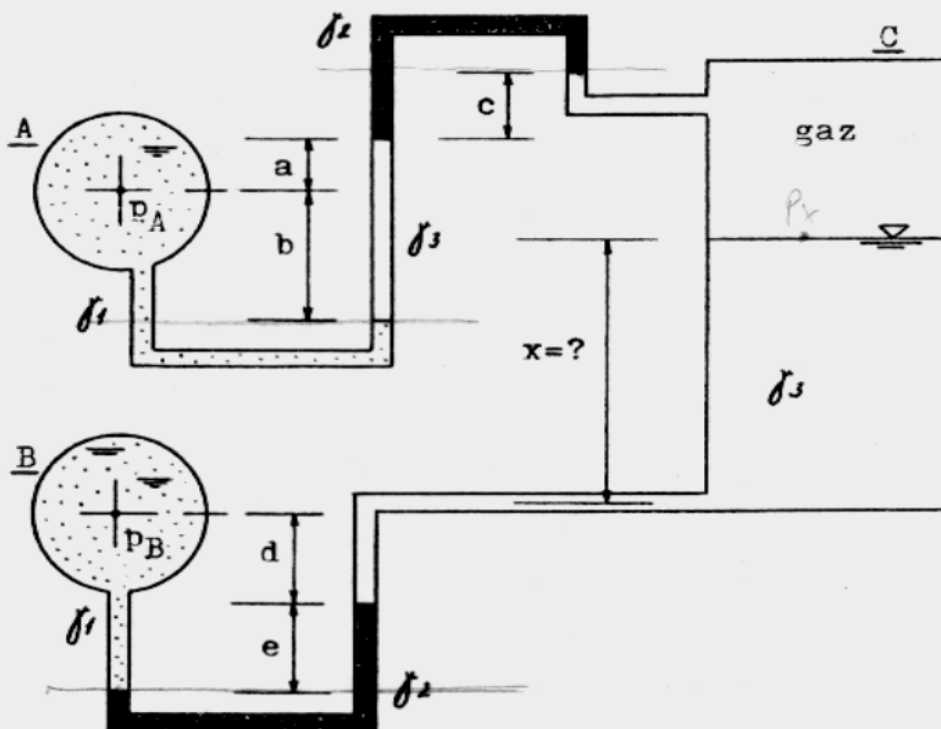
Rurociągi A i B, których przekroje poprzeczne pokazane są na rysunku III.5, połączone z zamkniętym zbiornikiem C rurkami manometrycznymi. W centralnych punktach przekrojów rurociągów panują ciśnienia równe odpowiednio p_A i p_B . Obliczyć napełnienie x zbiornika przy podanym na rysunku stanie równowagi cieczy.

Zadanie 6

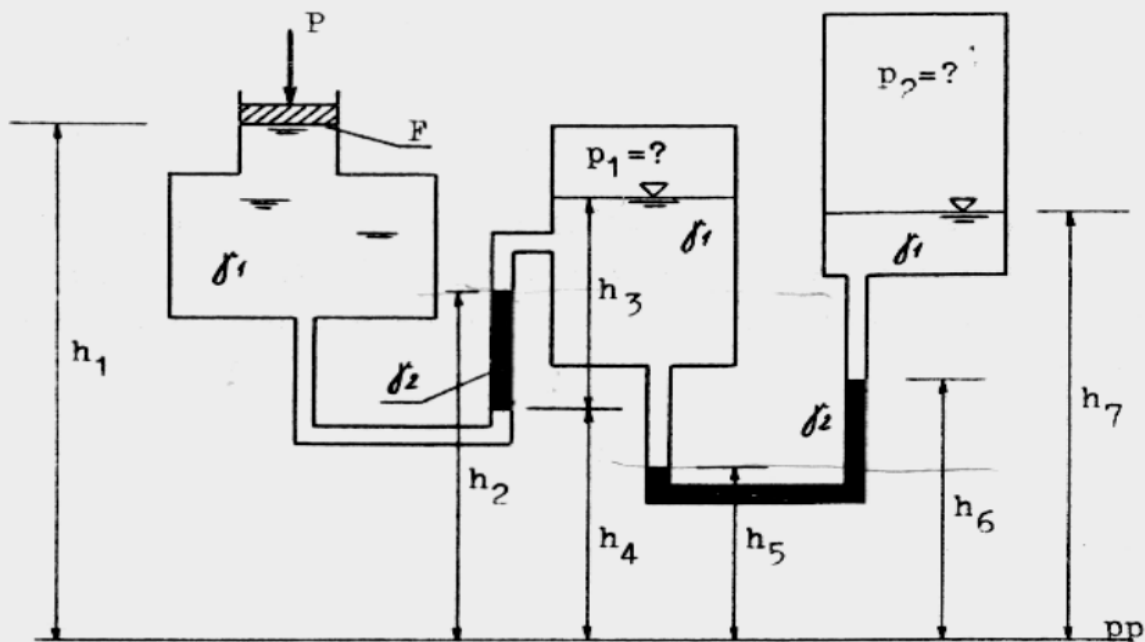
Obliczyć ciśnienia p_1 i p_2 panujące nad zwierciadłem cieczy w zbiornikach (zob. rys. III.6).



Rys. III.4



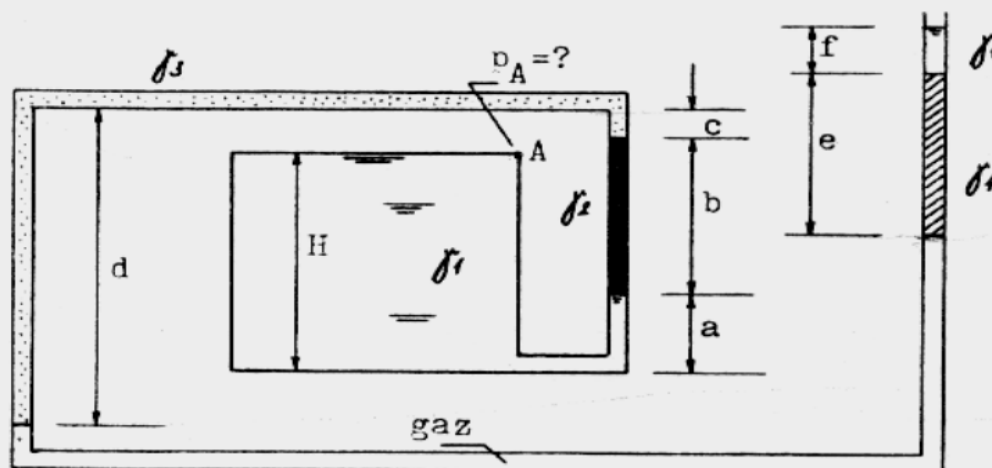
Rys. III.5



Rys. III.6

Zadanie 7

Dla stanu równowagi cieczy podanego na rysunku III.7 obliczyć ciśnienie w punkcie A zbiornika.



Rys. III.7

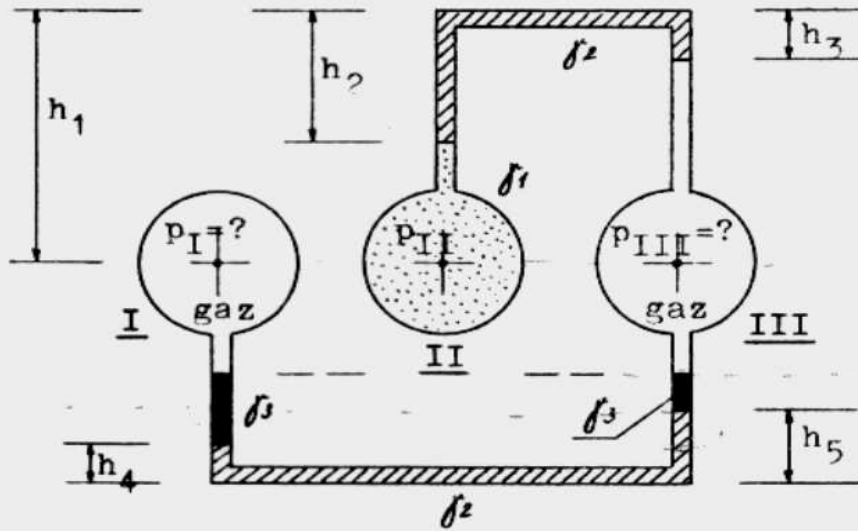
Zadanie 8

Trzy rurociągi połączone są rurkami manometrycznymi, w których ustalili się pewien stan równowagi cieczy (zob. rys. III.8). Znając ciśnienie p_{II} w osi przekroju rurociągu II, obliczyć ciśnienia w przekrojach pozostałych rurociągów.

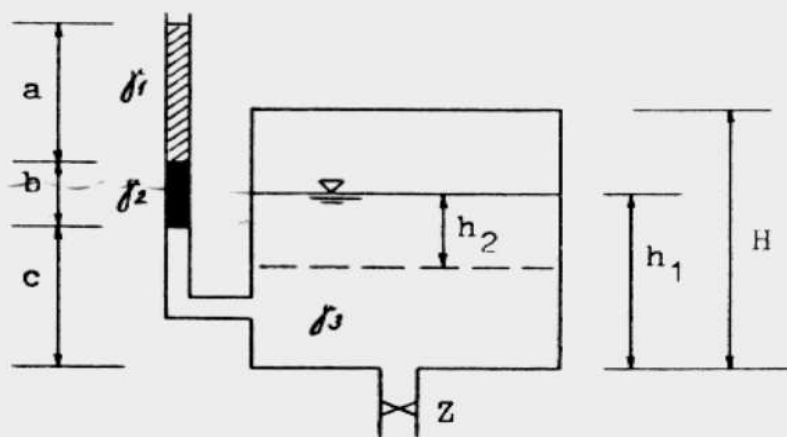
Zadanie 9

Zamknięty zbiornik walcowy o wysokości H napełniony jest cieczą do wysokości h_1 . Ciśnienie gazu w zbiorniku określa układ cieczy w rurce manometrycznej, pokazany na rys. III.9. W pewnej chwili otwarty został zawór Z,

skutkiem czego napełnienie zbiornika zmniejszyło się do wysokości $(h_1 - h_2)$, a ciśnienie nad swobodnym zwierciadłem cieczy w zbiorniku przyjęło wartość p_x . Obliczyć ciśnienie p_x .



Rys. III.8



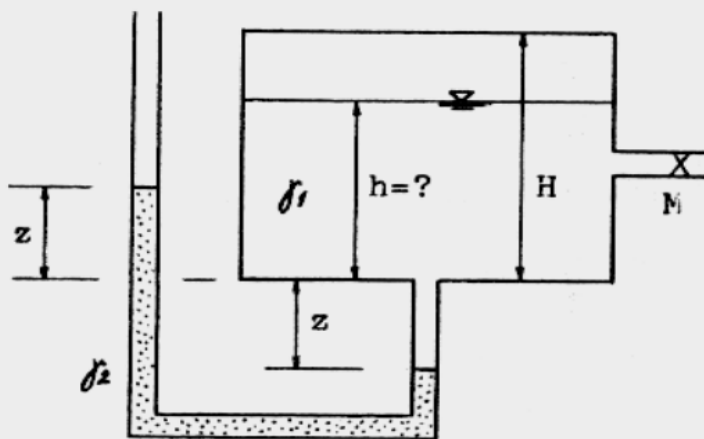
Rys. III.9

Zadanie 10

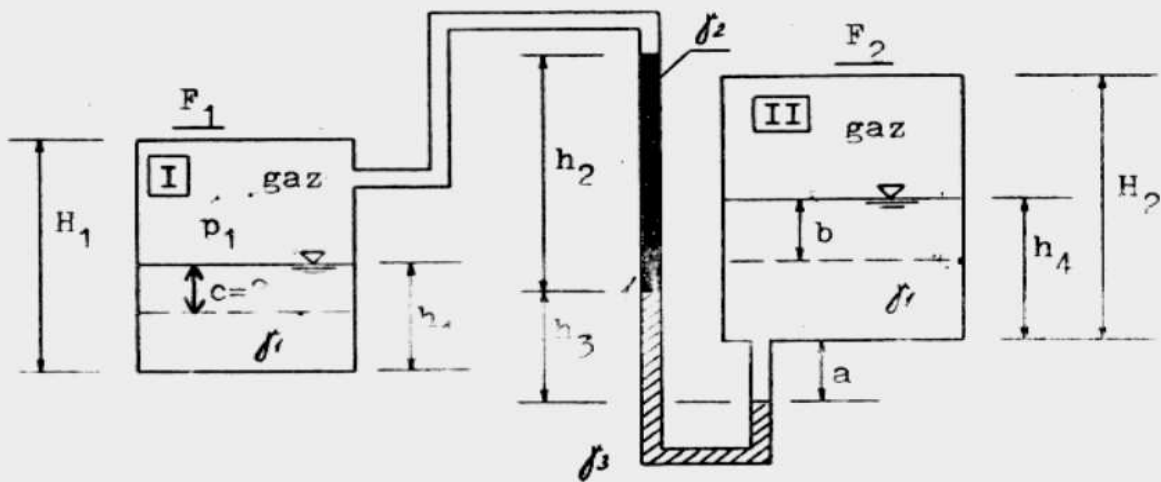
Do pustego, zamkniętego zbiornika, w którym panowało ciśnienie atmosferyczne, wtłoczono ciecz przewodem M. W momencie gdy zbiornik został napełniony do wysokości h , w rurce manometrycznej ustaliła się różnica poziomów cieczy równa $2z$ (zob. rys. III.10). Obliczyć wspomniane napełnienie h zbiornika.

Zadanie 11

Zamknięte zbiorniki I i II, których powierzchnie przekroju poprzecznego równe są odpowiednio F_1 i F_2 , połączone są rurką manometryczną (rysunek III.11). Nad swobodnym zwierciadłem w zbiorniku I panuje znane ciśnienie p_1 , stan równowagi cieczy w manometrze jest taki, jak pokazano na wymienionym rysunku III.11. W pewnej chwili zmniejszono napełnienie zbiornika II o wysokość b . O ile należy obniżyć zwierciadło cieczy w zbiorniku I, aby ułożenie cieczy w rurce manometrycznej pozostało niezmienione?



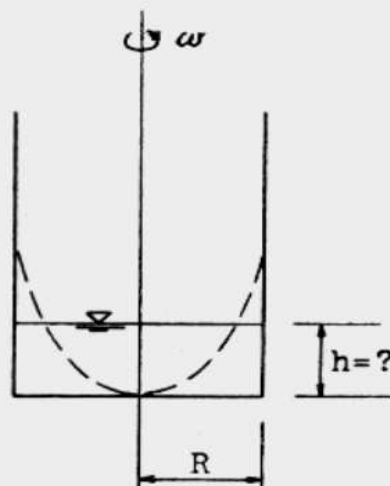
Rys. III.10



Rys. III.11

Zadanie 12

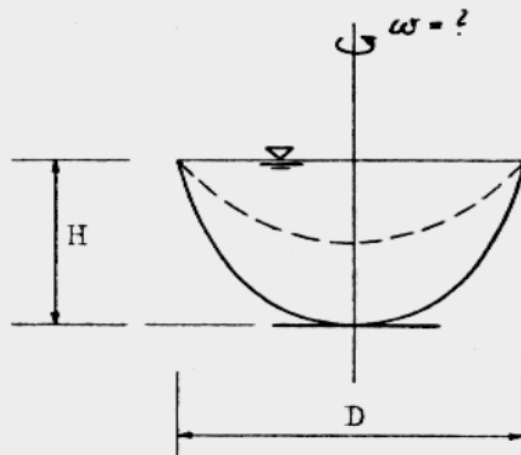
Do jakiej wysokości h napełnić pokazane na rysunku III.12 cylindryczne naczynie, aby w trakcie jego wirowania ze stałą prędkością kątową ω zwierciadło cieczy dotknęło dna?



Rys. III.12

Zadanie 13

Otwarte naczynie w kształcie paraboloidy obrotowej, wypełnione całkowicie cieczą, wprowadzono w ruch wirowy wokół jego pionowej osi (rys. III.13). Z jaką prędkością kątową ω winno wirować naczynie, by pozostała w nim tylko połowa początkowej objętości cieczy?



Rys. III.13

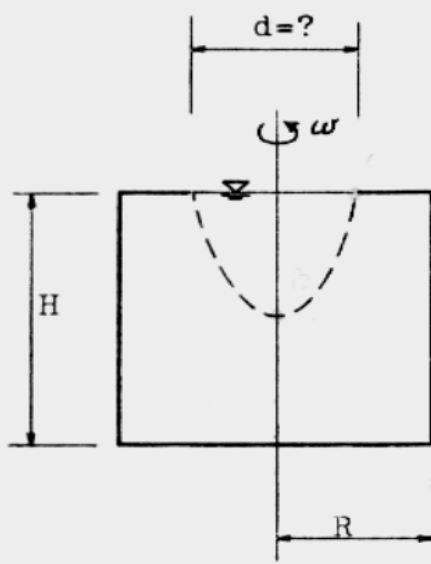
Zadanie 14

Cylindryczny zbiornik, początkowo całkowicie wypełniony cieczą, wiruje wokół swej osi pionowej ze stałą prędkością kątową. Ile powinna wynosić średnica otworu w pokrywie zbiornika, by w trakcie wirowania paraboloida obrotowa tworząca zwierciadło cieczy dotykała krawędzi tego otworu (zob. rysunek III.14), a na zewnątrz wylała się $1/4$ objętości cieczy?

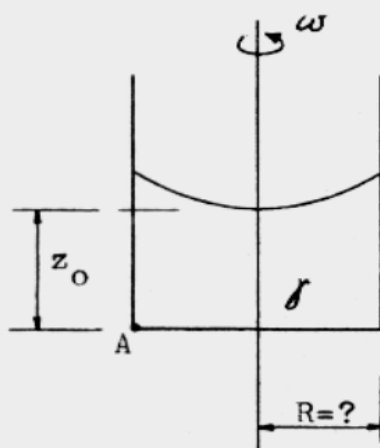
Zadanie 15

Naczynie cylindryczne napełnione jest cieczą do pewnej wysokości. Jaka średnicę ma to naczynie, skoro w trakcie wirowania ze stałą prędkością ką-

to w najniższy punkt zwierciadła cieczy leży na wysokości z_0 ponad dnem, a ciśnienie w punkcie A wynosi $2p_a$? (zob. rys. III.15; zakłada się, że podczas wirowania ciecz nie wylewa się z naczynia).



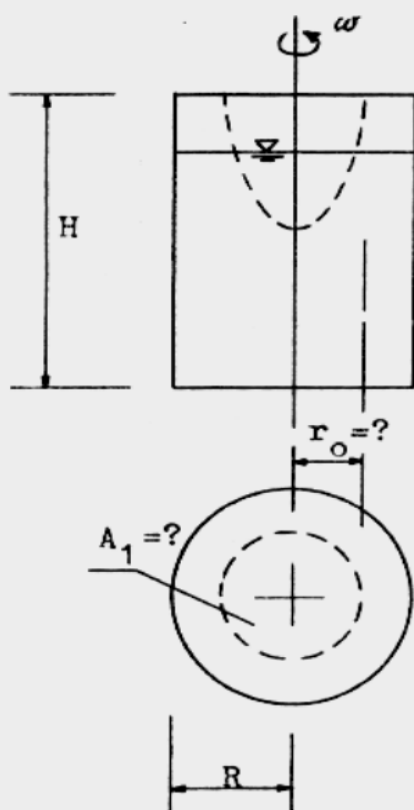
Rys. III. 14



Rys. III. 15

Zadanie 16

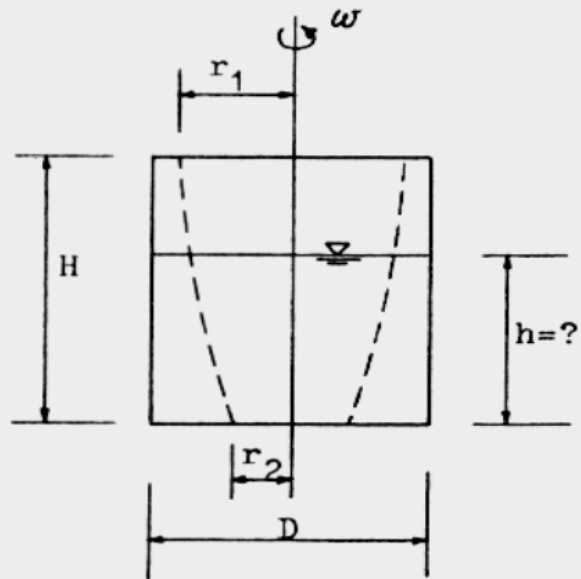
Zamknięte, cylindryczne naczynie napełniono cieczą do wysokości $\frac{4}{5} H$ i wprowadzono w ruch wirowy wokół pionowej osi ze stałą prędkością kątową ω . W trakcie wirowania zwierciadło cieczy styka się z pokrywą naczynia (rys. III.16). Jaki procent p powierzchni pokrywy nie zostanie zwilżony cieczą?



Rys. III.16

Zadanie 17

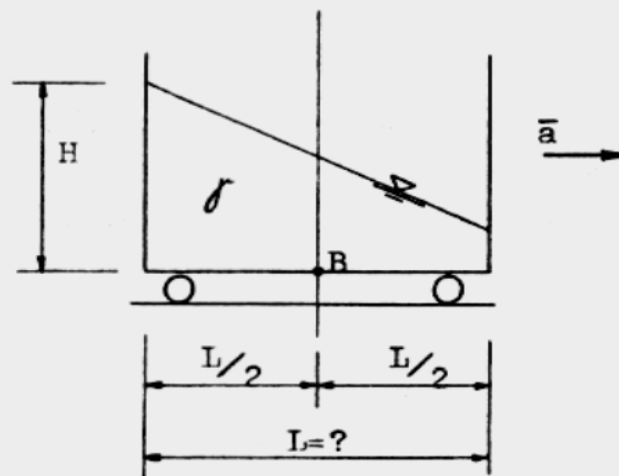
Obliczyć wysokość h do jakiej był napełniony zamknięty cylinder o wymiarach podanych na rys. III.17, skoro podczas jego wirowania ze stałą prędkością kątową ω powierzchnia swobodnego zwierciadła cieczy przyjmuje kształt ściętej paraboloidy obrotowej, a stosunek promieni jej podstaw r_1/r_2 równy jest δ .



Rys. III.17

Zadanie 18

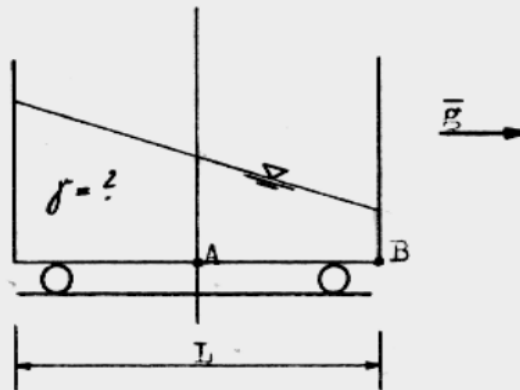
Pokazane na rysunku III.18 prostopadłościenne naczynie z cieczą porusza się ruchem jednostajnie zmiennym prostoliniowym z przyspieszeniem a . Wiadomo, że w trakcie ruchu ciecz styka się z tylną ścianą naczynia do wysokości H , a w punkcie B ciśnienie wynosi p_B . Obliczyć długość L naczynia.



Rys. III.18

Zadanie 19

Naczynie z cieczą porusza się po torze prostoliniowym ze stałym przyspieszeniem równym g . Zwierciadło swobodne cieczy układa się tak, jak pokazano na rysunku III.19; w punkcie B dna naczynia ciśnienie wynosi p_B , natomiast w punkcie A jest dwukrotnie większe. Obliczyć ciężar objętościowy cieczy wypełniającej naczynie.



Rys. III.19

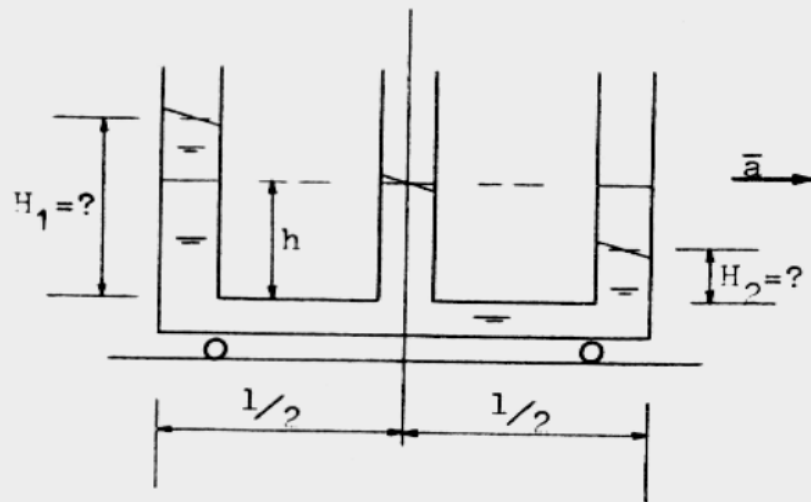
Zadanie 20

Naczynie składające się z trzech połączonych pionowych rurek (rysunek III.20) napełniono cieczą do wysokości h . Ile wynoszą będą napełnienia H_1 w lewej i H_2 w prawej rurce, jeśli naczynie poruszać się będzie ruchem jednostajnie zmiennym prostoliniowym z przyspieszeniem a ? O ile zmieni się napełnienie H_1 , gdyby przyspieszenie a zwiększyć dwukrotnie?

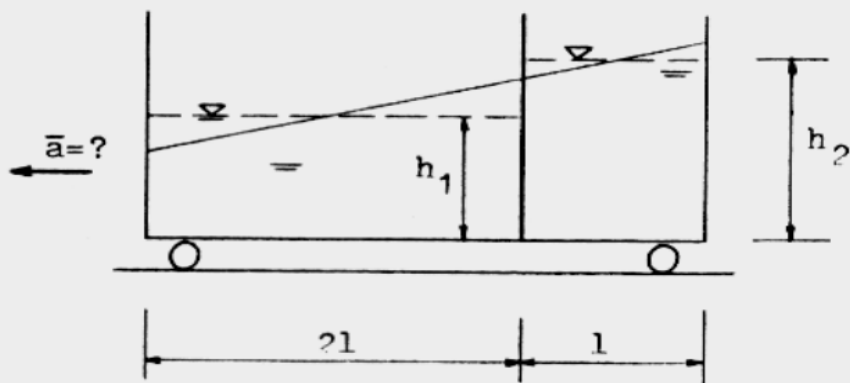
Zadanie 21

Prostopadłościenny zbiornik o długości $3l$ podzielony jest pionową przegrodą na dwie części. Lewą część napełniono cieczą do wysokości h_1 , a prawa

do wysokości h_2 , po czym wprowadzono ten zbiornik w ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy. Obliczyć przy jakim przyspieszeniu a zbiornika przegroda będzie z obu stron zwilżona cieczą do tej samej wysokości (zob. rysunek III.21).



Rys. III.20

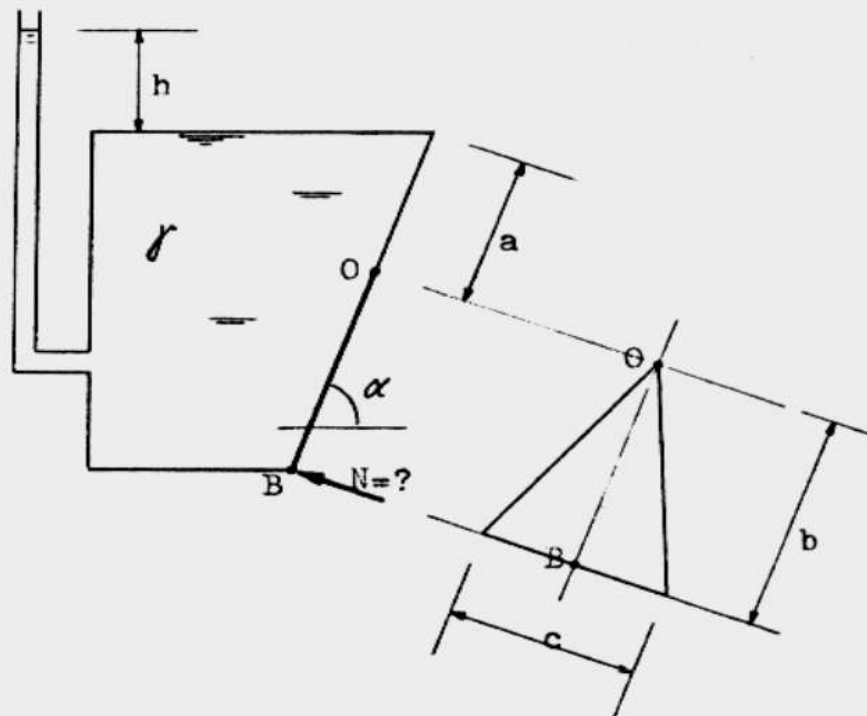


Rys. III.21

Zadanie 22

W nachylonej ścianie zbiornika pokazanego na rysunku III.22 znajduje się trójkątna kłapa, która może się obracać wokół swego wierzchołka O . Należy:

- narysować wykres parcia cieczy na kłapę (w jej płaszczyźnie symetrii),
- obliczyć, ile musi wynieść siła N przyłożona prostopadle w połowie podstawy kłapy (zob. rys. III.22), aby kłapa nie została otwarta wskutek działania parcia cieczy. (Ciężar kłapy pominąć).

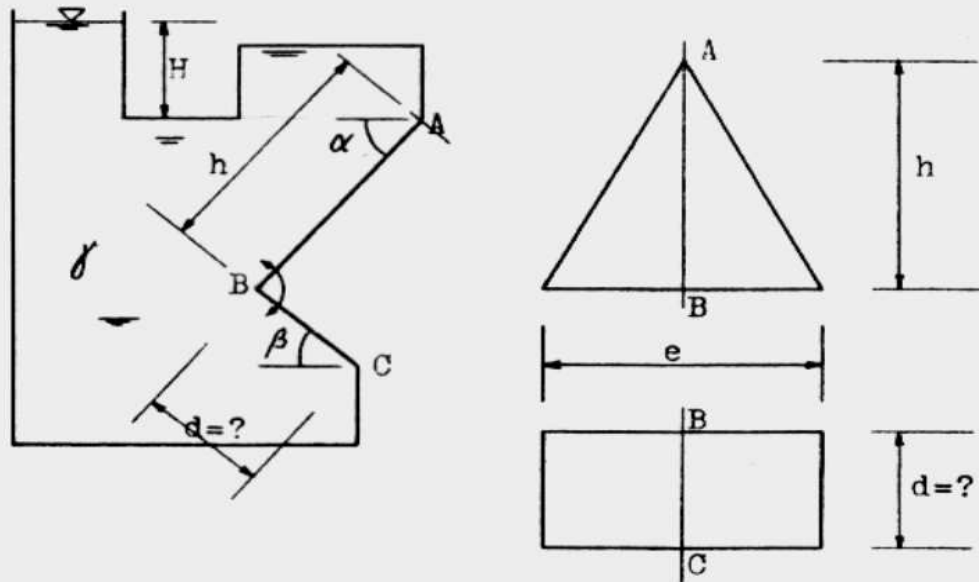


Rys. III.22

Zadanie 23

W bocznej ścianie zbiornika znajduje się kłapa, której pozioma oś obrotu przechodzi przez punkt B (zob. rys. III.23). Górna część kłapy ma kształt

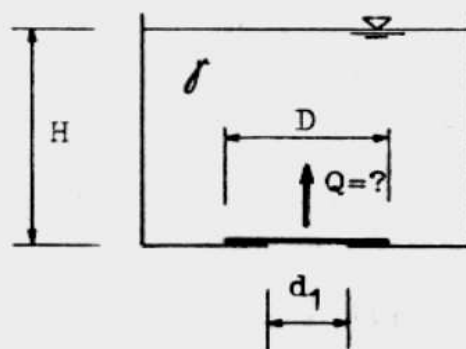
trójkąta, część dolna jest prostokątem. Zakładając, że przy podanym na rysunku napełnieniu zbiornika kłapa winna być zamknięta, obliczyć jej wymiar oznaczony jako d . (Ciężaru kłapy nie uwzględniać).



Rys. III.23

Zadanie 24

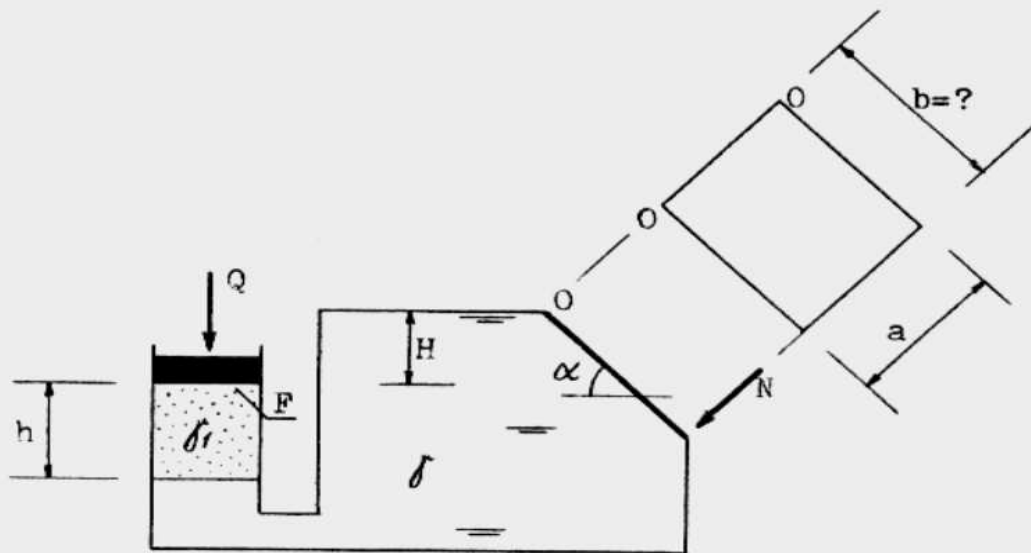
Okragły otwór w dnie naczynia zamyka pokrywa o średnicy D i ciężarze G (rys. III.24). Ile wynosić musi siła Q potrzebna do podniesienia pokrywy, jeśli naczynie jest napełnione cieczą do wysokości H ?



Rys. III.24

Zadanie 25

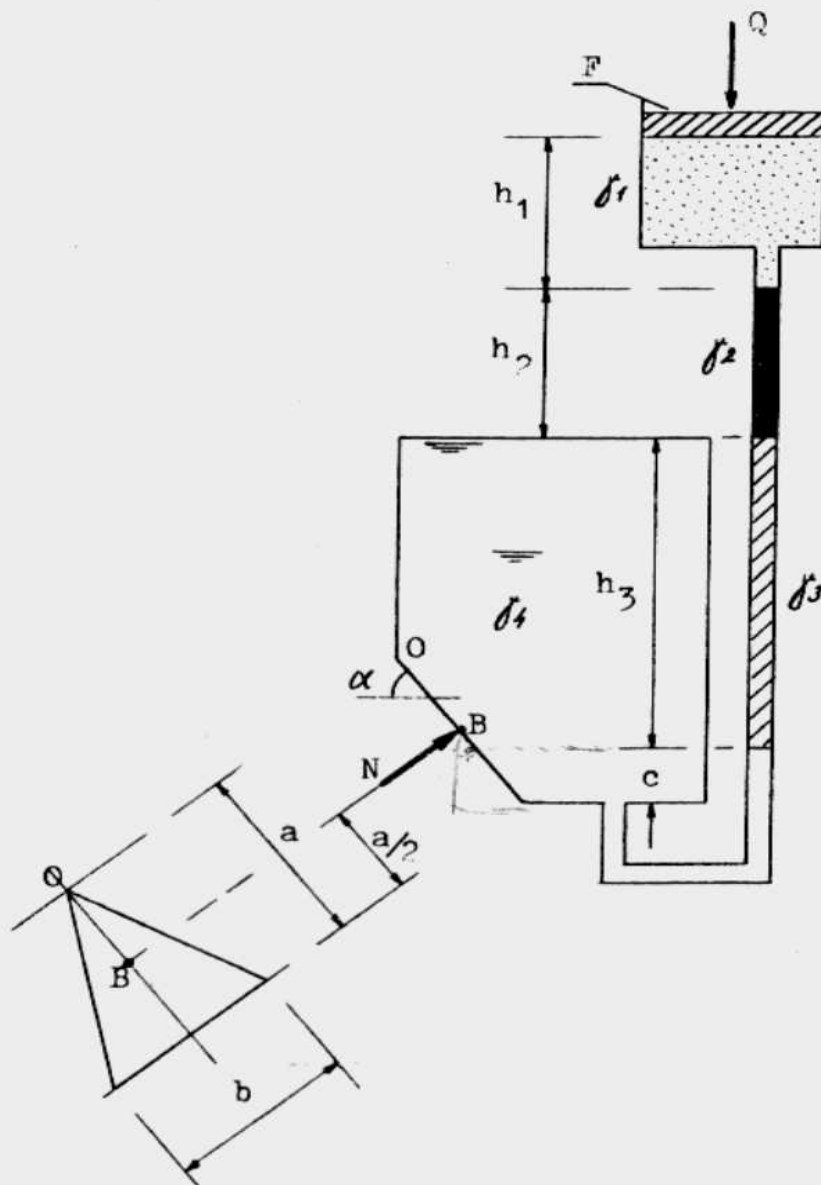
Zamknięty zbiornik napełniony jest dwiema nie mieszającymi się cieciami, sprężonymi tłokiem (rys. III.25). W bocznej ścianie zbiornika znajduje się prostokątna klapa, która może obracać się wokół swej górnej podstawy $O - O$. Wiedząc, że siła przyłożona prostopadłe do kłapy i utrzymująca ją w położeniu zamkniętym wynosi N , obliczyć wysokość kłapy b . (Ciężaru zamknięcia nie uwzględniać).



Rys. III.25

Zadanie 26

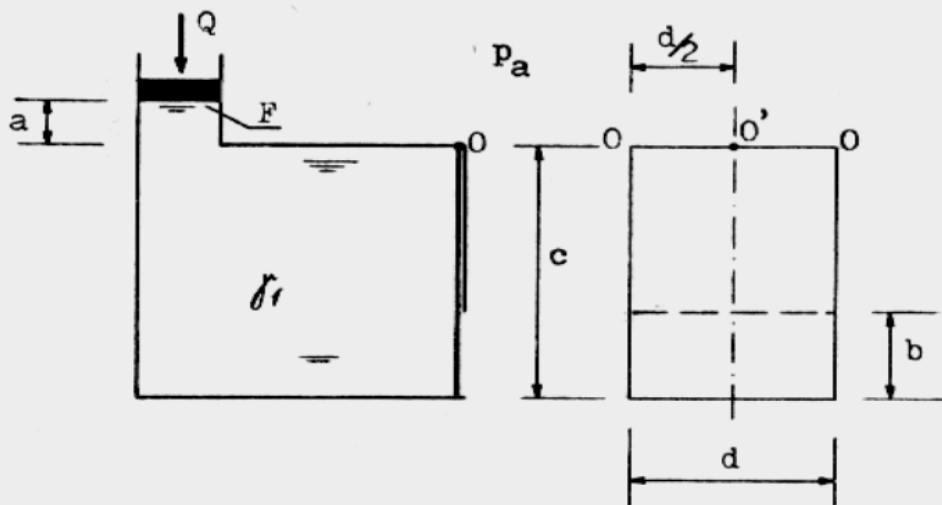
Os obrotu trójkątnej kłapy umieszczonej w ścianie zbiornika przechodzi przez punkt O (rysunek III.26). Sprawdzić, czy siła równa N , przyłożona do kłapy w punkcie B , wystarczy do utrzymania jej w położeniu zamkniętym. (W obliczeniach pominąć ciężar kłapy).



Rys. III.26

Zadanie 27

Prostokątny otwór w pionowej ścianie zbiornika, posiadający wymiar $b \times d$, zamknięty jest klapą o wysokości c (rys. III.27). Ciecz wypełniająca zbiornik spręża tłok o powierzchni F , obciążony siłą Q . Obliczyć siły parcia działające na klapę oraz ich moment względem punktu O' .



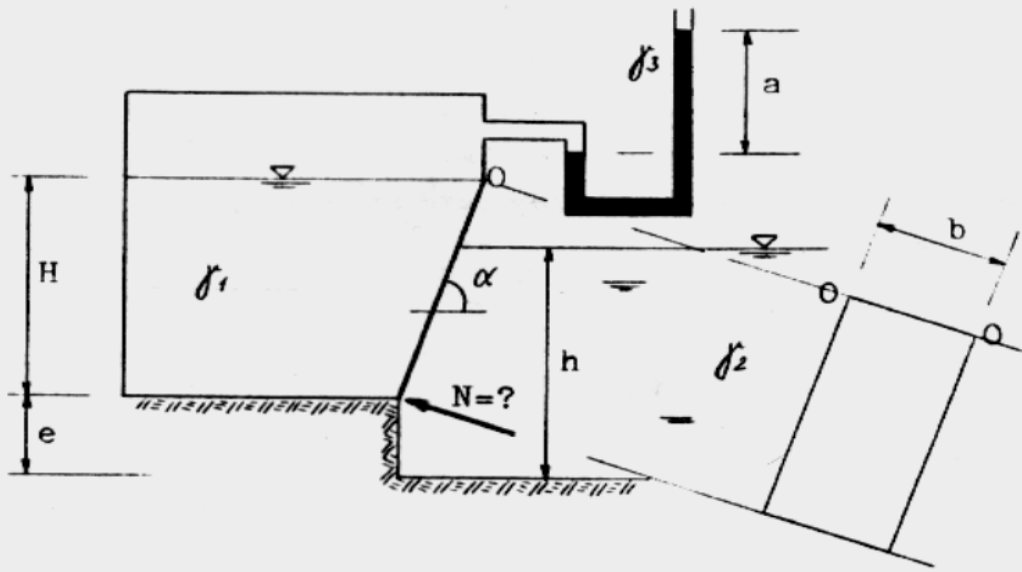
Rys. III.27

Zadanie 28

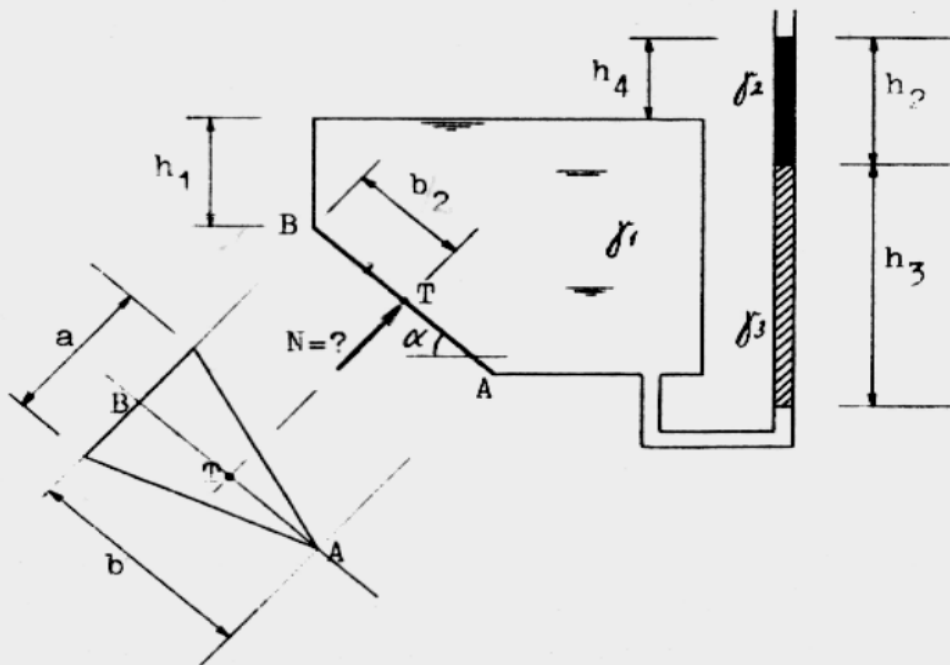
Prostokątna klapa umieszczona w nachylonej ścianie oddzielającej zbiornik zamknięty od otwartego może obracać się wokół osi $O - O$ i przytrzymywana jest siłą N (rys. III.28). Obliczyć minimalną wartość tej siły, jaka jest potrzebna do zamknięcia kłapy. (Ciężar kłapy pominąć).

Zadanie 29

Ile wynosi siła N (patrz rys. III.29) utrzymująca trójkątną klapę w położeniu zamkniętym? Os obrotu kłapy przechodzi przez punkt B prostopadle do rysunku; ciężaru kłapy nie uwzględniać.



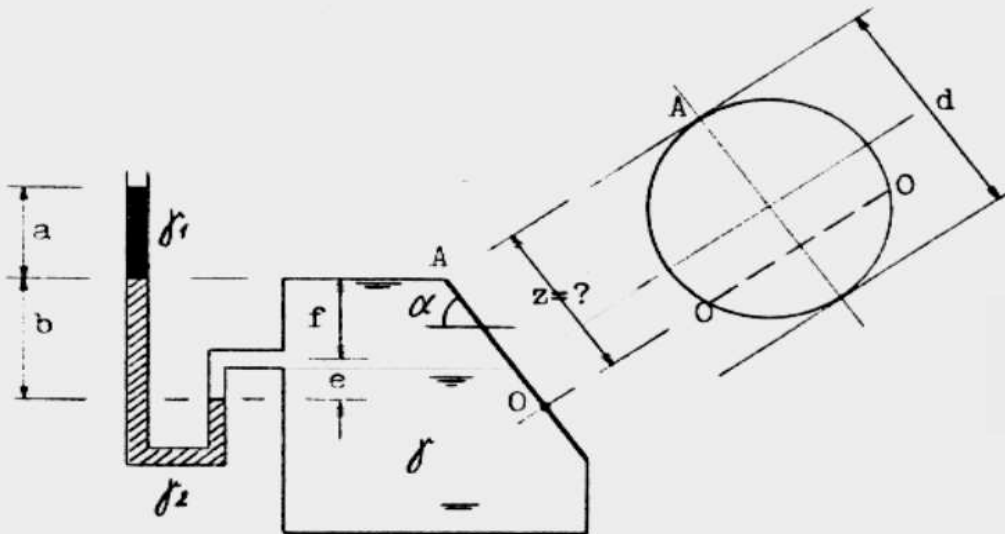
Rys. III.28



Rys. III.29

Zadanie 30

W jakiej odległości z od punktu A powinna się znajdować oś obrotu O-O kołowej kłapy (zob. rys. III.30), by przy stanie równowagi cieczy pokazanym na w.w. rysunku kłapa ta nie uległa otwarciu? Ile wynosi parcie cieczy na kłapę? (W obliczeniach nie uwzględniać ciężaru kłapy).

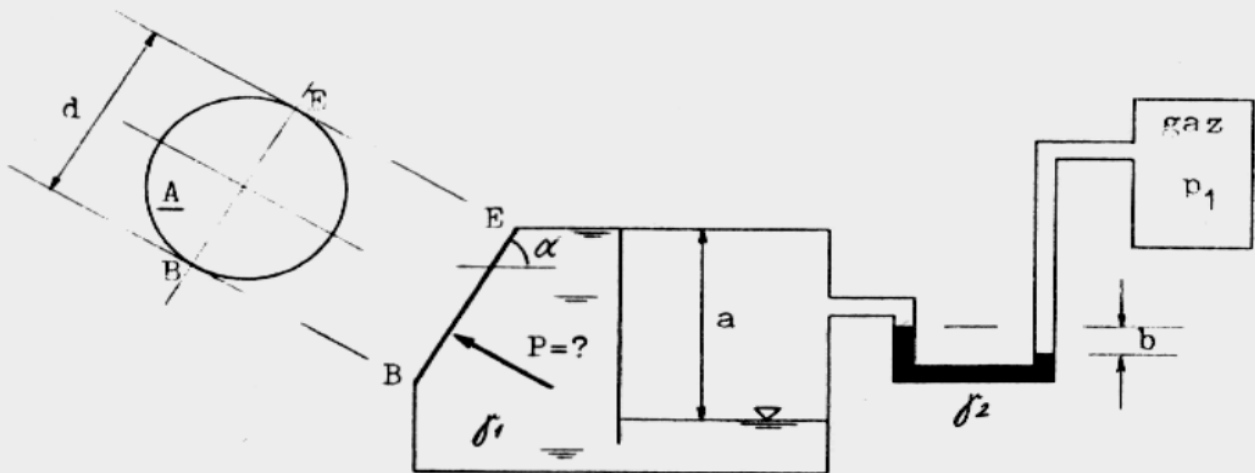


Rys. III.30

Zadanie 31

Dwukomorowy zamknięty zbiornik napełniono cieczą i połączono za pośrednictwem rurki manometrycznej z naczyniem zawierającym gaz (rysunek III.31). Przyjmując, że ciśnienie bezwzględne gazu wynosi p_1 , a układ cieczy znajduje się w takim stanie równowagi, jaki pokazano na rysunku, obliczyć:

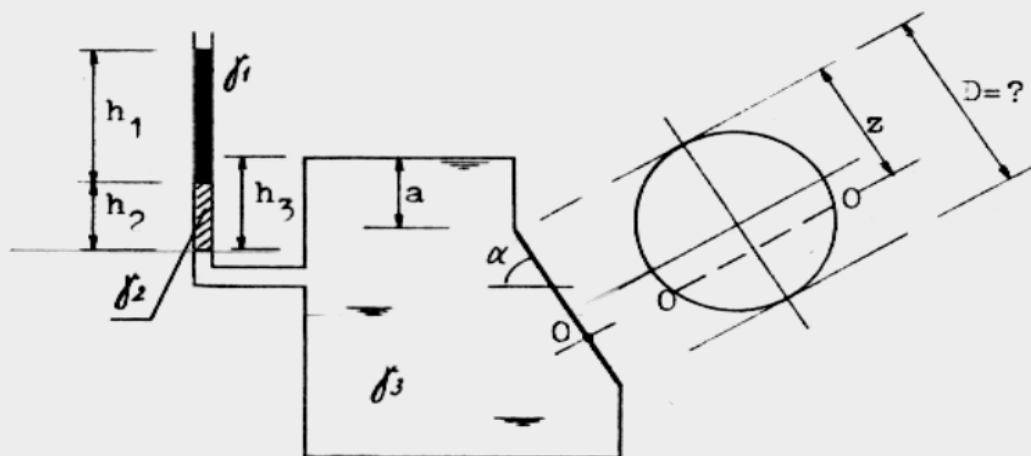
- parcie cieczy na kołowy fragment A nachylonej ściany zbiornika,
- moment tej siły parcia względem punktu E ściany.



Rys. III.31

Zadanie 32

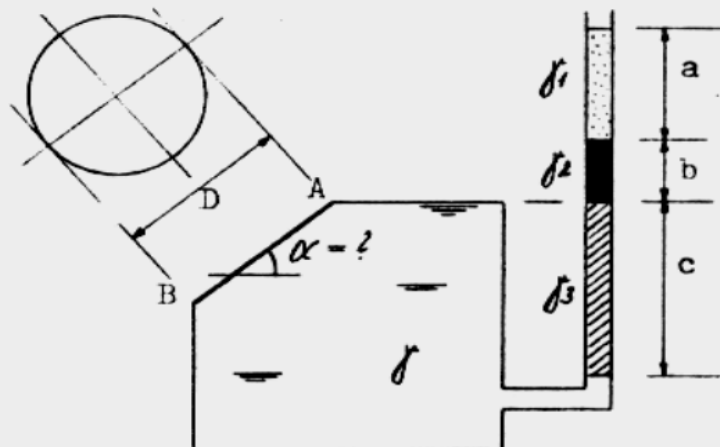
Kołowa klapa umieszczona w nachylonej ścianie zbiornika obracać się może wokół osi $O - O$, położonej w odległości z od górnej krawędzi kłapy (rysunek III.32). Ile wynosi średnica D tej kłapy, jeśli przy pokazanym na rysunku stanie równowagi cieczy jest ona zamknięta? Ile wynosi parcie cieczy na klapę? (W obliczeniach pominąć ciężar kłapy).



Rys. III.32

Zadanie 33

Przyjmując, że obliczony względem punktu A moment siły parcia cieczy na kołowy fragment nachylonej ściany zbiornika (rys. III.33) nie może przekroczyć wartości M_A , obliczyć kąt nachylenia tej ściany do poziomu.



Rys. III.33

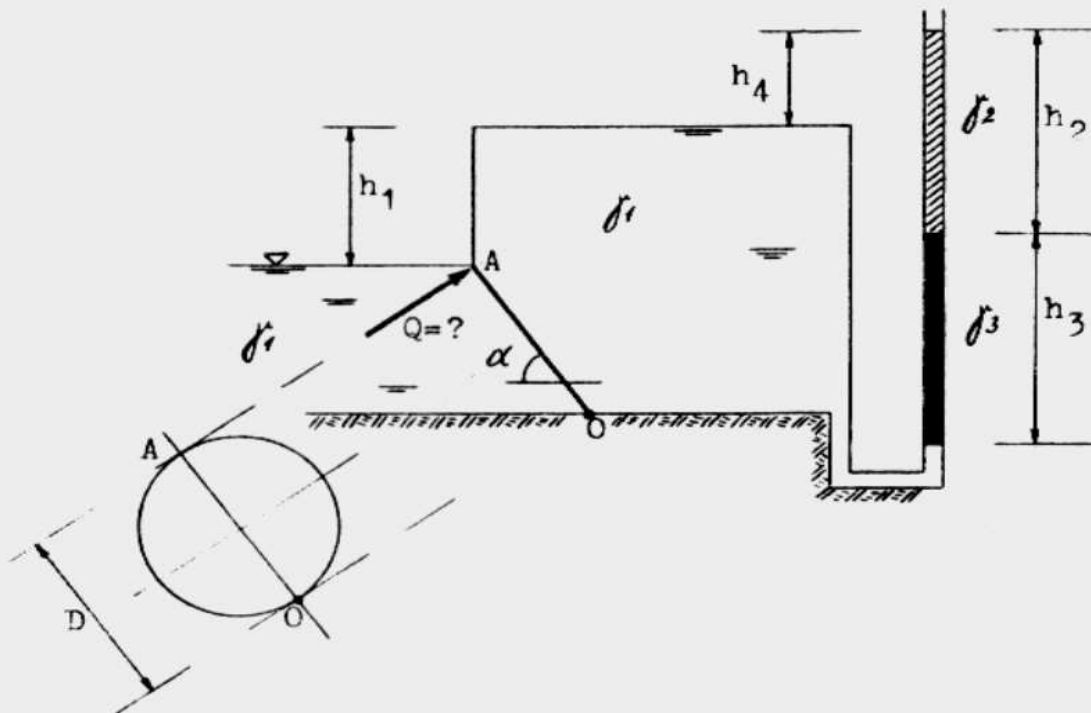
Zadanie 34

Kołowa kłapa umieszczona w nachylonej ścianie zamkniętego zbiornika obracać się może wokół punktu O (zob. rys. III.34). Ile wynosić musi siła Q podtrzymująca kłapę, by nie uległa ona otwarciu? (Ciężaru kłapy w obliczeniach nie uwzględniać).

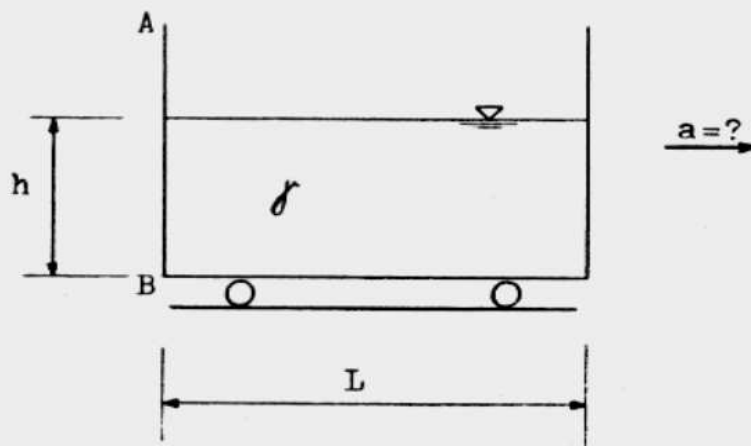
Zadanie 35

Prostopadłościennie naczynie o długości L i szerokości b, napełnione cieczą do wysokości h (rys. III.35), porusza się ruchem jednostajnie zmiennym

prostoliniowym. Jak duże przyspieszenie a można nadać temu naczyniu, by siła parcia cieczy działająca w trakcie ruchu na ścianę o przekroju AB nie przekroczyła zadanej wartości P_{max} ? (Zakłada się, że podczas ruchu naczynia ciecz nie wylewa się na zewnątrz).



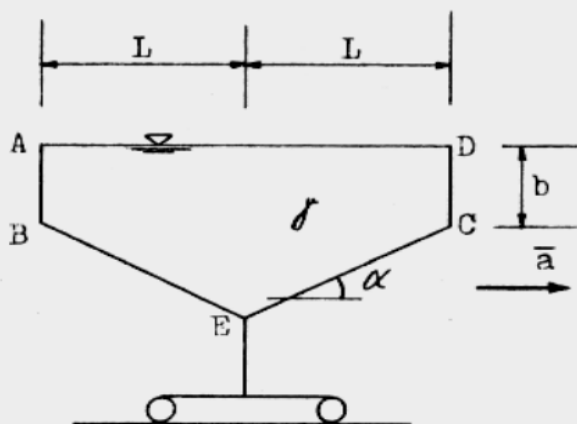
Rys. III.34



Rys. III.35

Zadanie 36

Naczynie o przekroju pokazanym na rysunku III.36 i stałej szerokości B wypełniono w całości cieczą i wprowadzono w ruch prostoliniowy ze stałym przyspieszeniem a . Wartość tego przyspieszenia jest równa wartości wyrażenia $(g b)/(2 L)$. Obliczyć metodą graficzno-analityczną siły parcia cieczy na poszczególne ściany naczynia, tj. na ściany o przekroju AB, BE, EC i CD. Ile cieczy wyleje się z naczynia w trakcie jego ruchu?



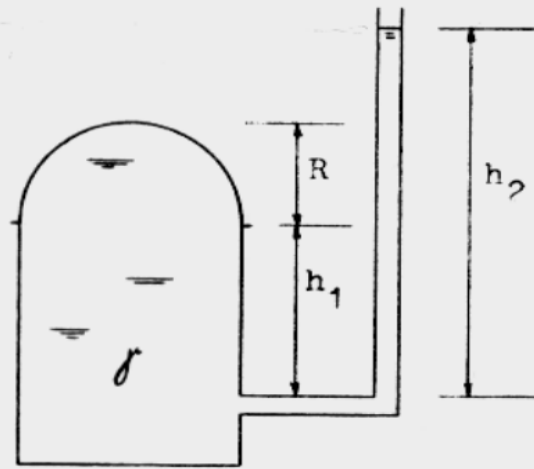
Rys. III.36

• Zadanie 37

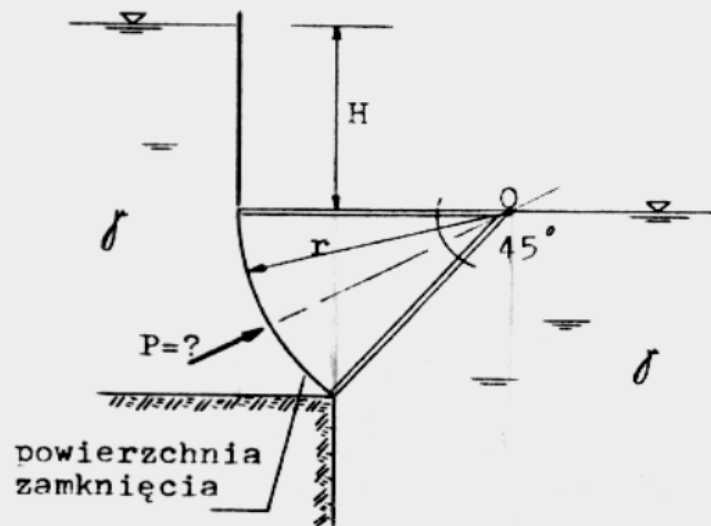
Obliczyć parcie cieczy na półkulistą pokrywę zbiornika (rys. III.37).

Zadanie 38

Powierzchnia segmentowego zamknięcia, którego przekrój poprzeczny pokazano na rysunku III.38, jest fragmentem pobocznicę walca o długości L i promieniu podstawy r . Obliczyć parcie cieczy na segment i wyznaczyć położenie wektora parcia.



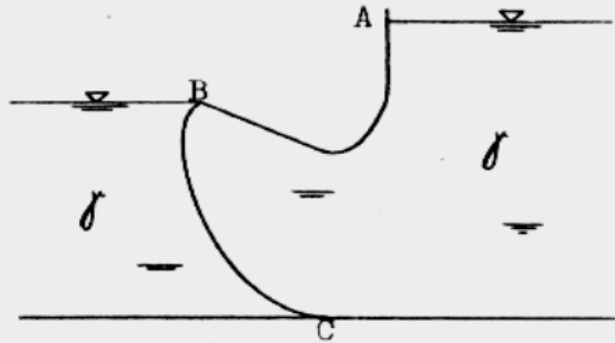
Rys. III.37



Rys. III.38

Zadanie 39

Narysować sumaryczne wykresy parcia pionowego i poziomego na walcową ścianę o przekroju ABC, pokazanym na rysunku III.39.



Rys. III.39

Zadanie 40

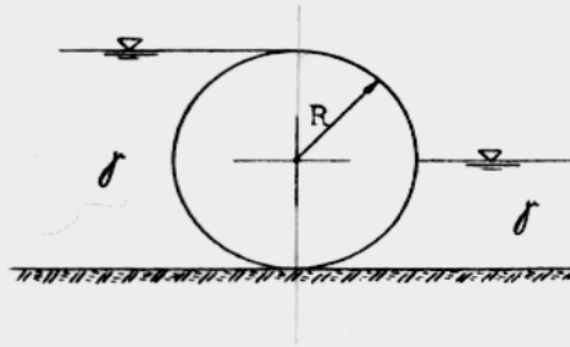
W poprzek zbiornika ułożono poziomo stalowy walec o promieniu R i długości b (rys. III.40). Obliczyć wypadkowe składowe parcia P_h i P_v działające na powierzchnię tego walca.

Zadanie 41

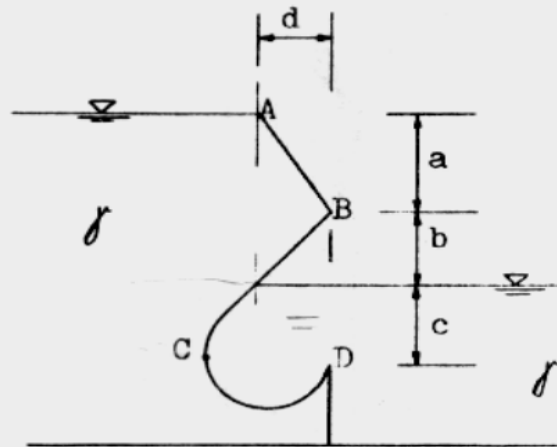
Obliczyć wypadkowe składowe parcia, poziomą P_h i pionową P_v , na ścianę o przekroju ABCD (rys. III.41). Długość ściany w kierunku prostopadłym do powierzchni rysunku wynosi 1.

Zadanie 42

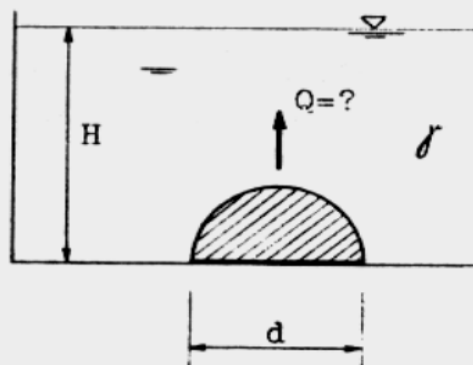
Żeliwna półkula o ciężarze G przylega szczelnie do dna wypełnionego cieczą zbiornika (rys. III.42). Ile wynosić musi siła Q potrzebna do podniesienia półkuli?



Rys. III. 40



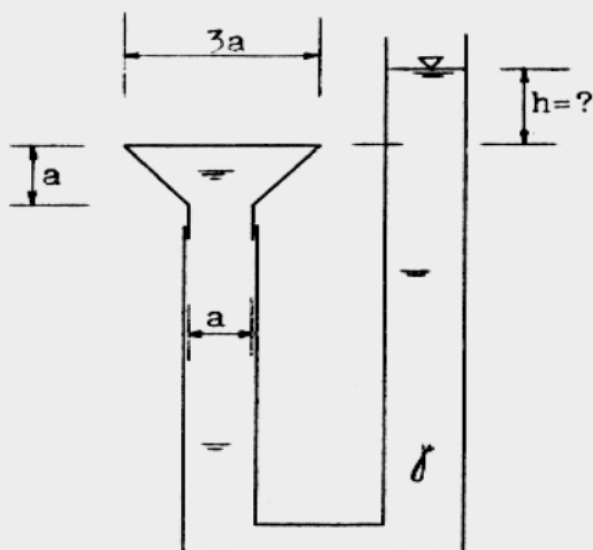
Rys. III. 41



Rys. III. 42

Zadanie 43

Klosz w kształcie stożka ściętego o podanych na rysunku III.43 wymiarach zamyka lewą komorę naczynia wypełnionego cieczą, przy czym może się on przesuwac w kierunku pionowym. Ile wynosić powinna wysokość h słupa cieczy w prawej komorze, by klosz pozostawał w równowadze? (Ciężar klosza przyjąć równy G).



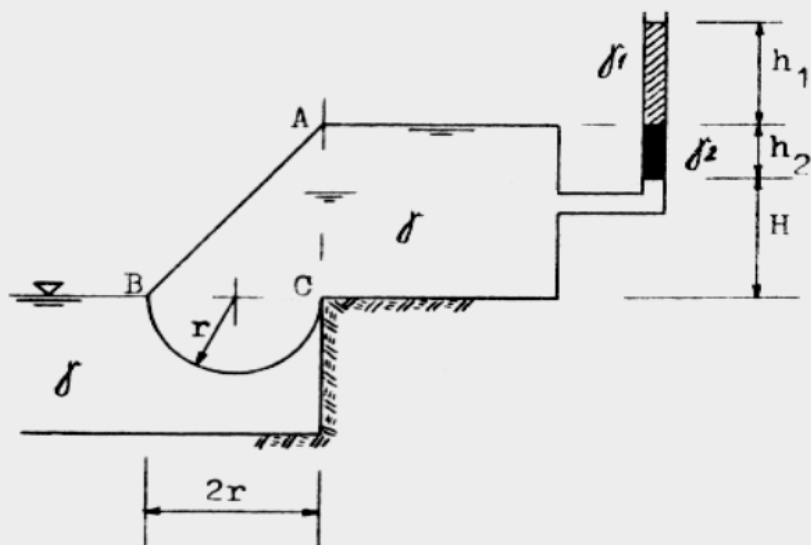
Rys. III.43

Zadanie 44

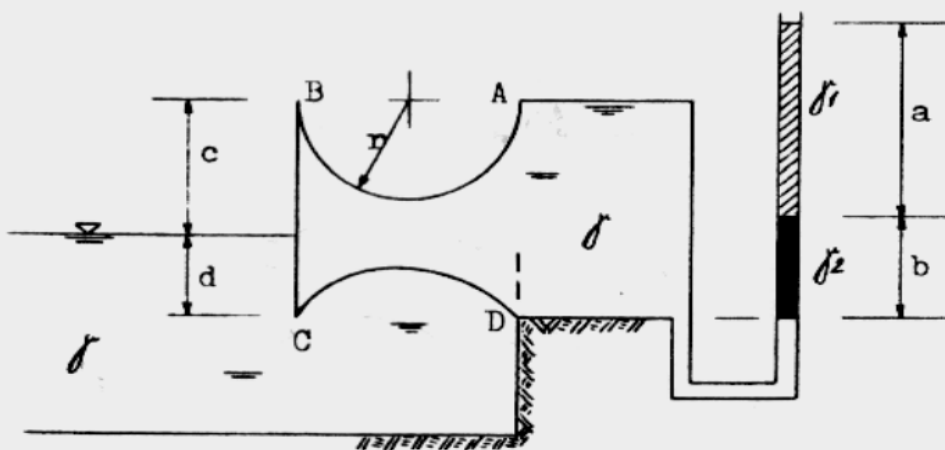
Obliczyć wypadkowe składowe parcia P_h i P_v na ścianę o przekroju ABC (rys. III.44). Długość ściany w kierunku prostopadłym do rysunku przyjąć równą L .

Zadanie 45

Obliczyć wypadkowe składowe parcia, pozioma i pionowa, na ścianę o przekroju ABCD (rys. III.45). Długość ściany prostopadle do rysunku wynosi l .



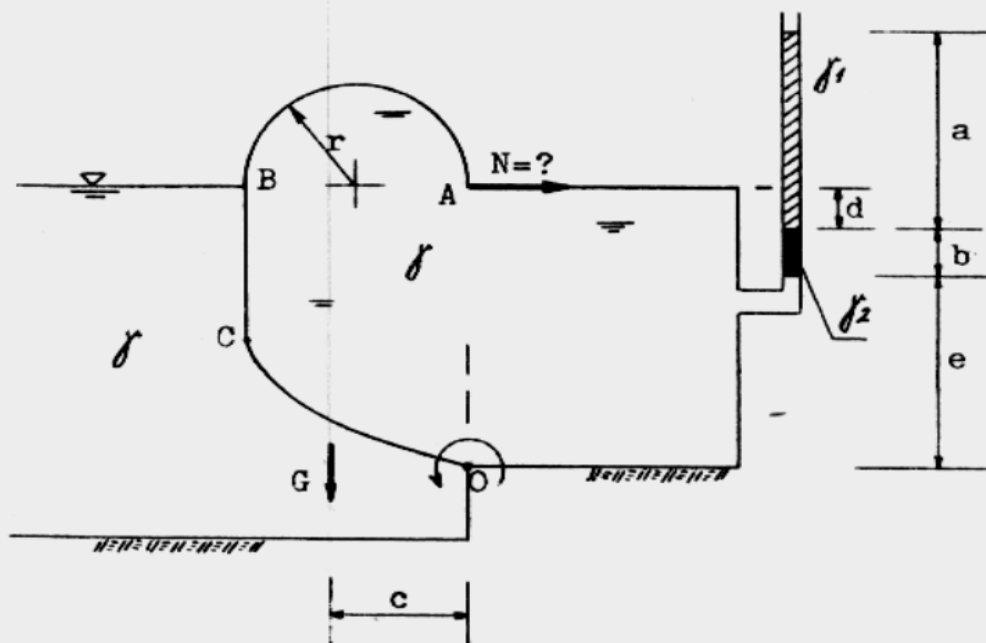
Rys. III.44



Rys. III.45

Zadanie 46

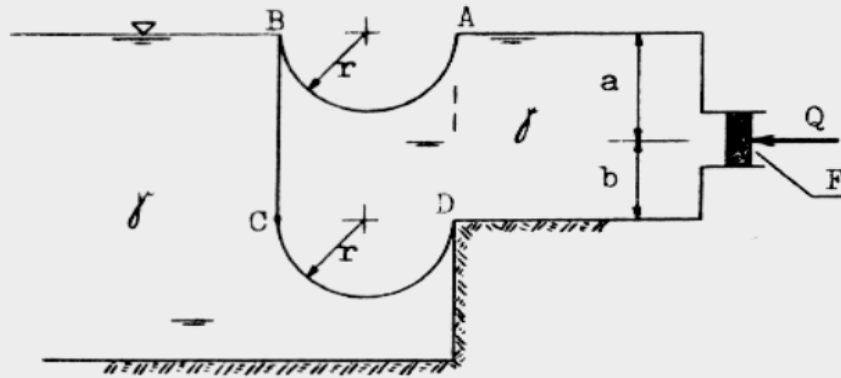
Sciana o przekroju ABCO, długości l i ciężarze G , stanowi zamknięcie zbiornika i może się obracać wokół poziomej osi przechodzącej przez punkt O (rys. III.46). Ile wynosić musi siła N , by przy stanie równowagi cieczy pokazanym na w w. rysunku przytrzymała ona ścianę w położeniu zamkniętym?



Rys. III.46

Zadanie 47

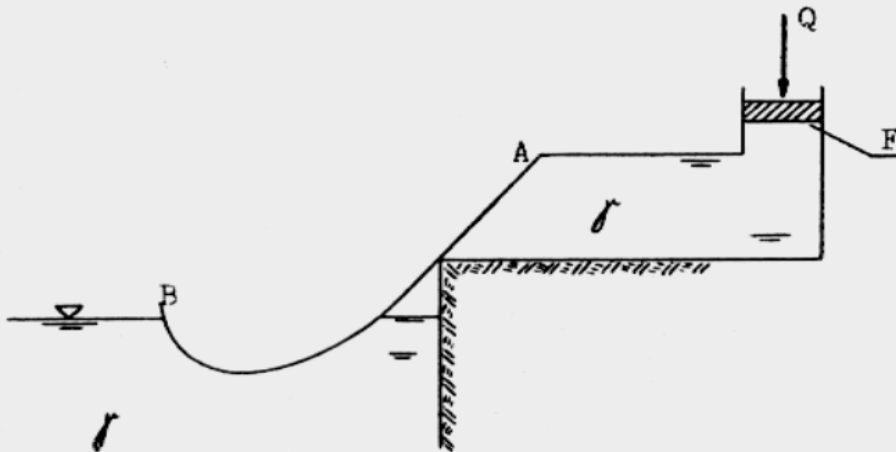
Obliczyć wypadkowe składowe parcia, pozioma i pionowa, działające na ścianę o przekroju ABCD (rys. III.47). Długość ściany prostopadłe do rysunku równa jest L .



Rys. III.47

Zadanie 48

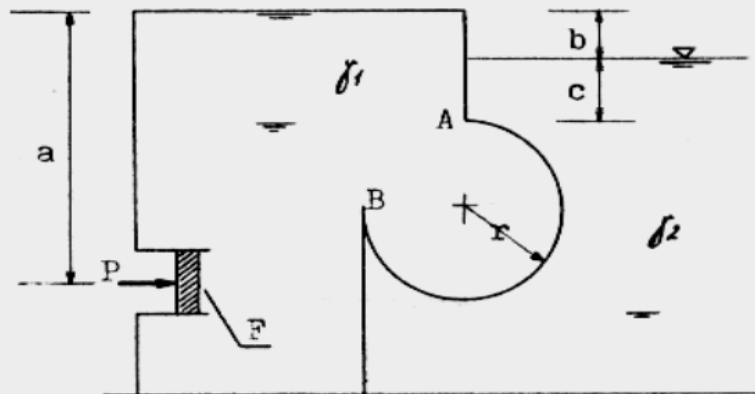
Narysować wykresy parcia na ścianę o przekroju AB (rys. III.48).



Rys. III.48

Zadanie 49

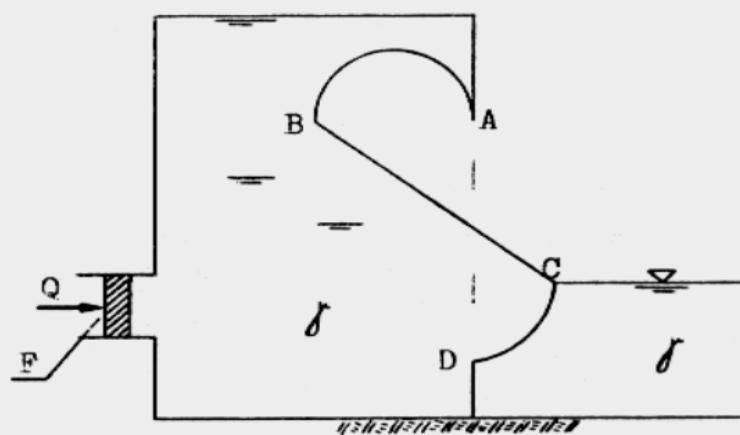
Obliczyć składowe parcia cieczy na walcową ścianę, której przekrój AB pokazano na rysunku III.49. Długość ściany prostopadłe do rysunku wynosi L .



Rys. III.49

Zadanie 50

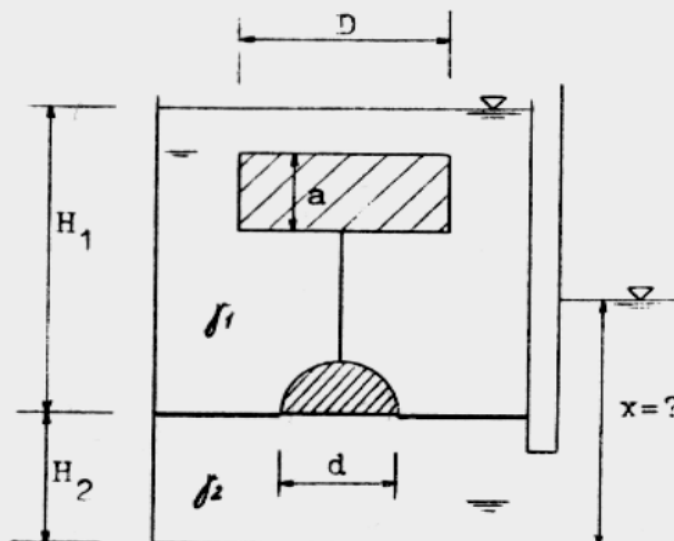
Narysować sumaryczne wykresy parcia poziomego i pionowego na ścianę o przekroju ABCD (rys. III.50).



Rys. III.50

Zadanie 51

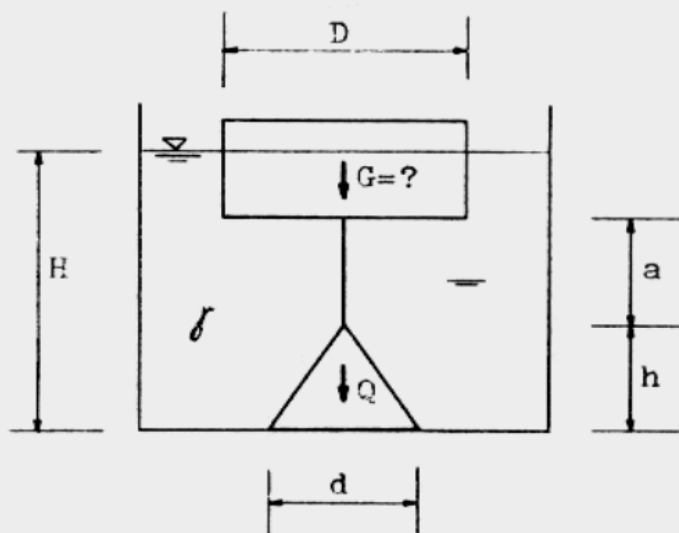
Otwór o średnicy d wykonany w poziomej ścianie dzielącej zbiornik zamknięty jest zaworem, który składa się z półkuli również o średnicy d i z walcowego pływaka mającego średnicę D (rysunek III.51). Pływak z półkulą połączony jest za pomocą sztywnego pręta. Ciężar pływaka wynosi G , zaś półkuli (wraz z prętem) - Q . Przy jakim napełnieniu x prawej komory zbiornika zawór przesunie się do góry odsłaniając otwór?



Rys. III.51

Zadanie 52

Na dnie zbiornika z cieczą spoczywa stożek o ciężarze Q , połączony cienką linką z pływakim mającym kształt pionowego walca (rys. III.52). Ile wynosi ciężar G pływaka, skoro przy napełnieniu zbiornika równym H stożek zostaje samoczynnie podniesiony?



Rys. III.52

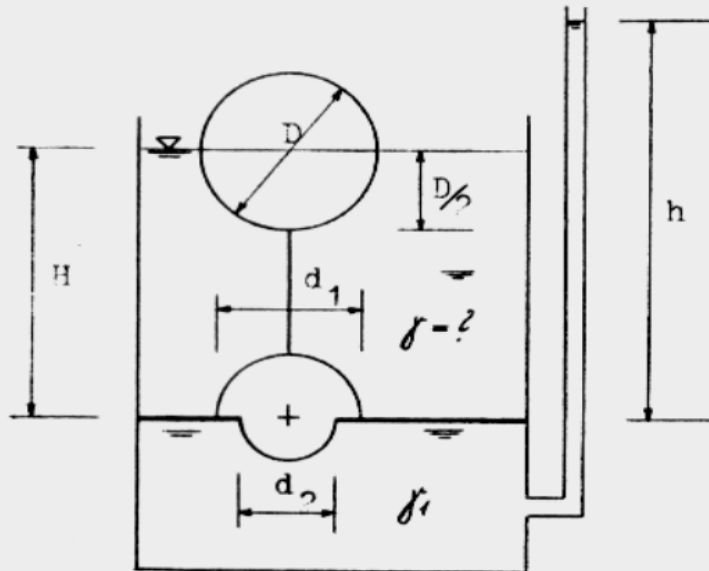
Zadanie 53

Zawór zamykający otwór o średnicy d_2 składa się z kuli oraz połączonych z nią sztywno dwóch półkul. Średnica kuli wynosi D , zaś półkul d_1 oraz d_2 (rys. III.53). Ciężar całego zaworu równy jest Q . Przyjmując, że przy podanych na rysunku napełnieniach komór zbiornika wypadkowa sił pionowych działających na zawór równa jest zeru, obliczyć ciężar objętościowy γ cieczy w komorze górnej.

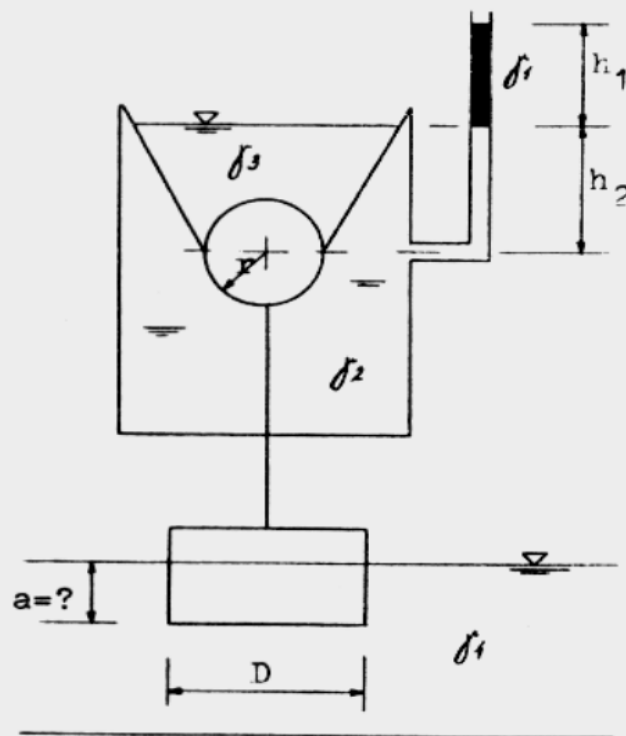
Zadanie 54

Okragły otwór o promieniu r , wykonany w przegrodzie dzielącej komory zbiornika, zamknięty jest zaworem składającym się z kuli i pływaka (patrz rysunek III.54). Pływak połączony jest z kulą sztywnym prętem i ma kształt

walca o średnicy D . Ciężar całego zaworu równy jest G . Obliczyć zanurzenie a pływaka, przy którym zawór przesunie się do góry.



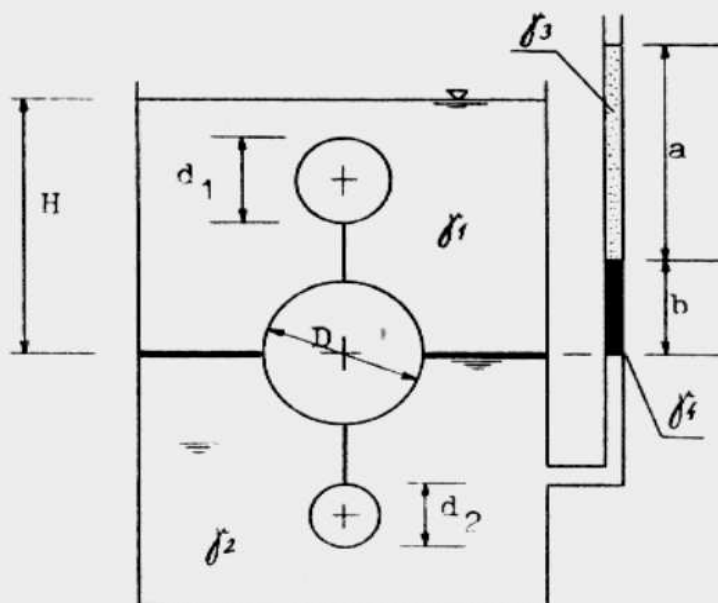
Rys. III.53



Rys. III.54

Zadanie 55

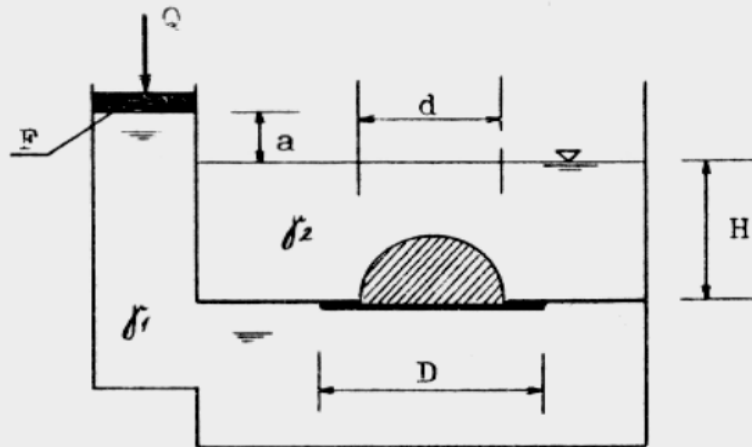
Przy pokazanym na rysunku III.55 stanie równowagi cieczy, zawór składający się z trzech połączonych sztywno kul zamyka szczelnie otwór o średnicy D , wykonany w poziomej przegrodzie zbiornika. Ile wynosi ciężar zaworu G ?



Rys. III.55

Zadanie 56

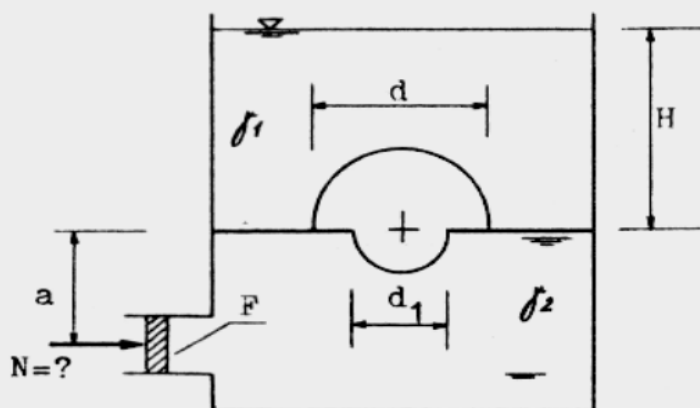
W poziomej ścianie dzielącej zbiornik na dwie komory znajduje się otwór o średnicy d (rys. III.56). Przy takim stanie równowagi cieczy, jaki pokazano na rysunku, otwór ten zamknięty jest szczelnie zaworem składającym się z okrągłej płytki o średnicy D i przyspawanej doń od góry półkuli. Obliczyć, ile wynosi ciężar zaworu.



Rys. III.56

Zadanie 57

Zawór o ciężarze G , składający się z dwóch półkul, zamyka otwór o średnicy d_1 wykonany w poziomej ścianie przedzielającej zbiornik (rys. III.57). Po przyłożeniu do tłoka w dolnej komorze zbiornika siły N , zawór przesunął się do góry. Obliczyć tę siłę.



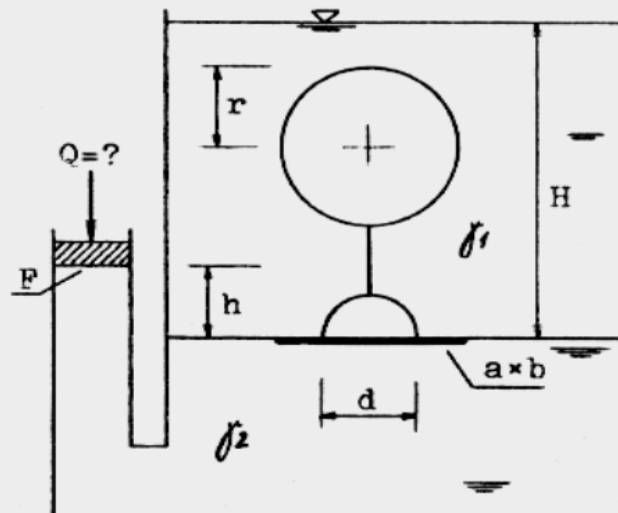
Rys. III.57

Zadanie 58

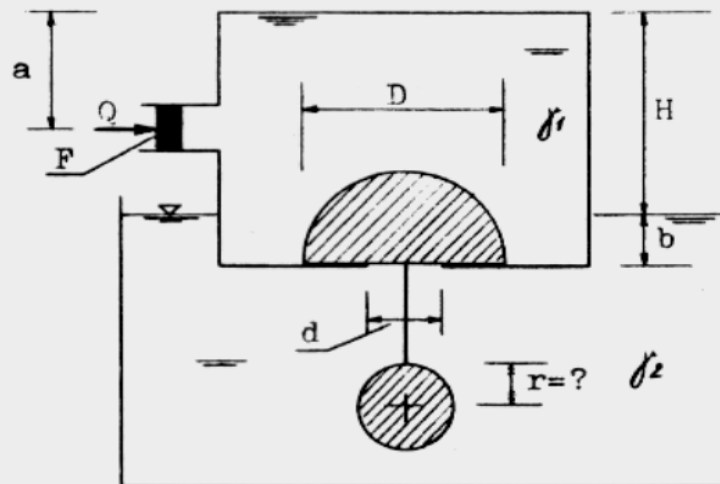
Otwór o średnicy d ma być zamykany zaworem złożonym z następujących elementów: kuli o promieniu r , półkuli tej samej średnicy co otwór, oraz prostokątnej płyty o wymiarach $a \times b$ (rys. III.58). Dolna część zaworu (półkula wraz z płytą) połączona jest z kulą sztywnym prętem. Ciężar całego zaworu wynosi G . Jak dużą siłą Q należy obciążyć tłok sprężający ciecz w niższej komorze zbiornika, by przy podanym na rysunku napełnieniu komory górnej utrzymać zawór w otworze?

Zadanie 59

Stalową półkulę o średnicy D zakrywającą okrągły otwór w dnie zbiornika, połączono sztywno z kulą zanurzoną w cieczy otaczającej zbiornik (rysunek III.59). Ciężar tak zbudowanego zaworu wynosi G . Biorąc pod uwagę pozostałe dane pokazane na rysunku i przyjmując, że zawór znajduje się w równowadze (tzn. że wypadkowa działających nań sił pionowych jest równa zero) - obliczyć promień kuli r .



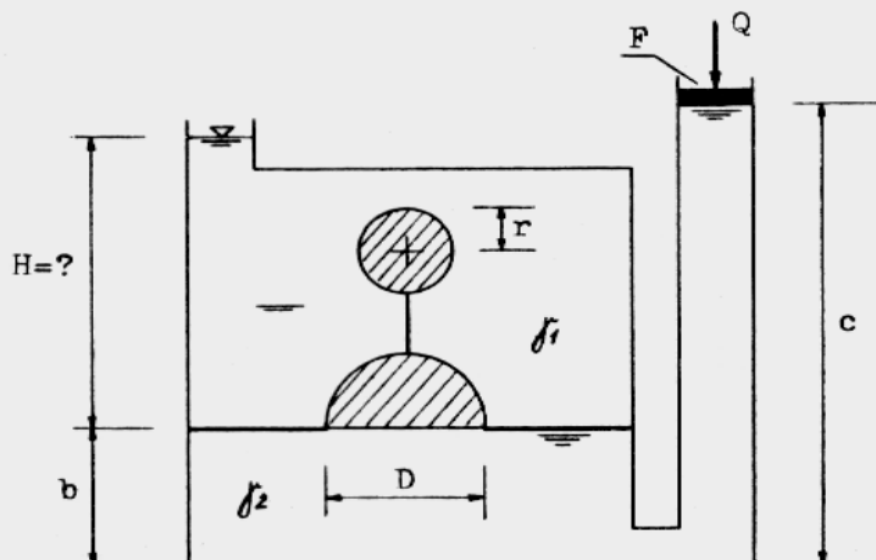
Rys. III.58



Rys. III.59

Zadanie 60

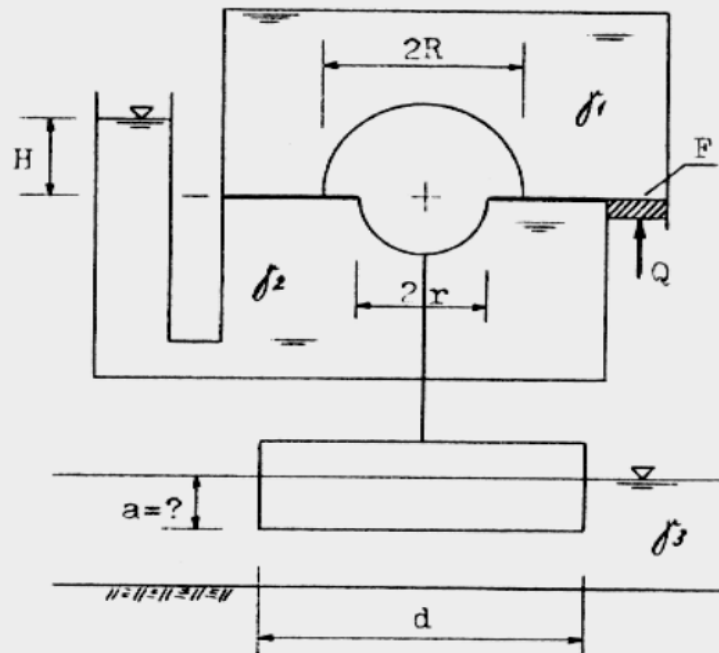
Pokazany na rysunku III.60 zawór składa się z kuli o promieniu r i połączonej z nią sztywno półkuli o tej samej średnicy co otwór wykonany w poziomej przegrodzie zbiornika. Ile wynosić musi napelnienie H górnej komory zbiornika, by przy obciążeniu tłoka siłą Q (zob. rys. III.60) zawór zamykał otwór? (Ciężar zaworu przyjąć równy G).



Rys. III.60

Zadanie 61

Otwór o średnicy $2r$ zamknięty jest zaworem wykonanym z dwóch półkul (rysunek III.61). Zawór ten połączony jest sztywnym prętem z walcowym pływakem, posiadającym średnicę d . Sumaryczny ciężar zaworu, pręta i pływaka wynosi G . Obliczyć zanurzenie a pływaka, przy którym zawór przesunie się do góry i odsłoni otwór.



Rys. III.61

Zadanie 62

Naczynie N, pokazane na rysunku III.62, napełnione jest cieczą do wysokości H_1 . Znajdujący się w jego dnie okrągły otwór o średnicy d przykryty jest szczelną klapą o średnicy D . Naczynie to włożono do zbiornika Z, który był uprzednio napełniony do wysokości H_2 (zob. rys. III.62). Naczynie N pływa częściowo zanurzone. Obliczyć:

- o ile podniósł się poziom cieczy w zbiorniku Z po włożeniu naczynia,
- siłę Q , potrzebną do uniesienia klapy z dna naczynia N.

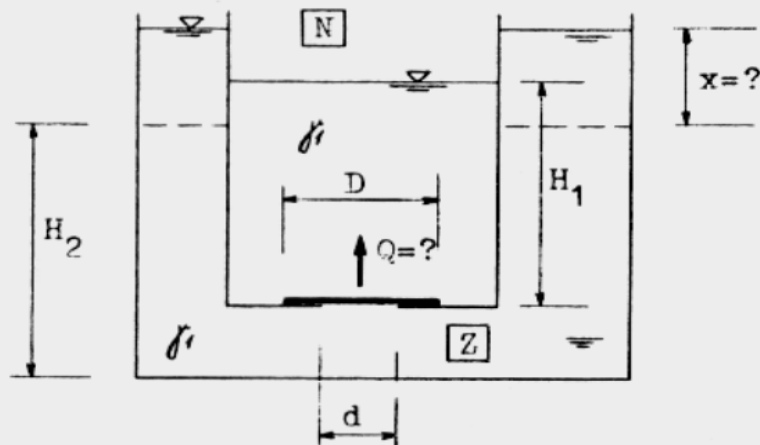
Jako znane przyjąć:

G_K - ciężar klapy,

G_N - ciężar pustego naczynia N,

F_1 - pole powierzchni przekroju poprzecznego naczynia N,

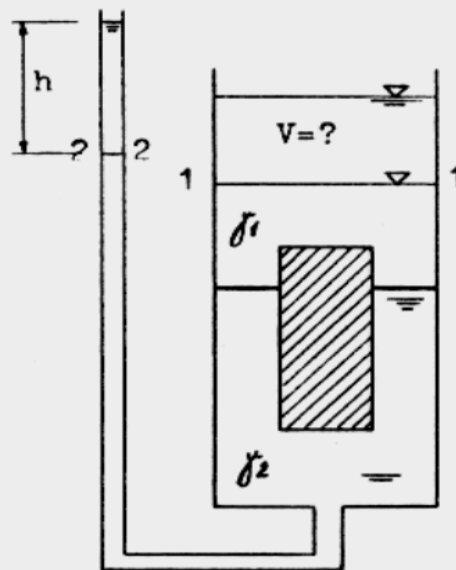
F_2 - pole powierzchni poprzecznego przekroju zbiornika Z.



Rys. III.62

Zadanie 63

Okragły otwór w poziomej ścianie przedzielającej zbiornik zamyka stalowy trzpień w kształcie walca. Gdy górna komora zbiornika napełniona jest cieczą do poziomu 1-1, a w piezometrze połączonym z komorą dolną zwierciadło cieczy leży na poziomie 2-2 (zob. rysunek III.63), wówczas trzpień znajduje się w równowadze. W pewnej chwili dolano nieco cieczy o ciężarze objętościowym γ_2 do rurki piezometrycznej, podnosząc w niej poziom zwierciadła o wysokość h . Obliczyć objętość V cieczy o ciężarze objętościowym γ_1 jaką należy dolać do górnej komory zbiornika, aby trzpień nie uległ przesunięciu w pionie. (Pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika przyjąć równe F).

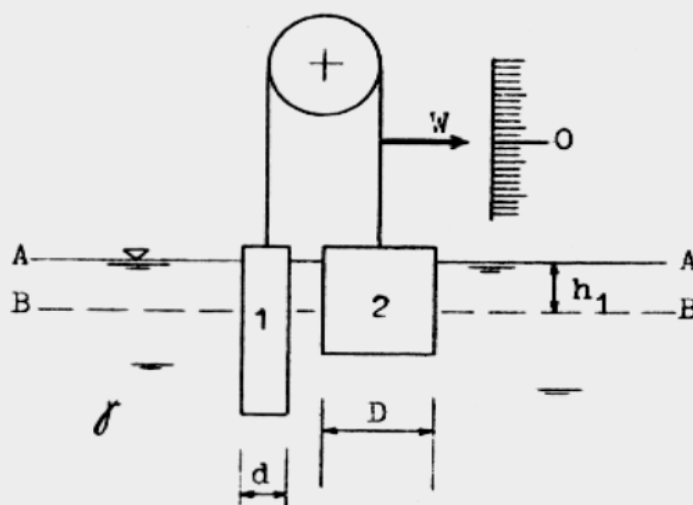


Rys. III.63

Zadanie 64

Dwa pionowe walce o średnicach d oraz D zawieszony na linie przerzuconej przez blok zanurzone są częściowo w cieczy (rys. III.64). Gdy zwierciadło

cieczy znajduje się na poziomie A - A, układ pozostaje w równowadze i wskazówka W przymocowana do linki wskazuje punkt 0. Obliczyć, w jakim kierunku i o ile przesunie się wskazówka, jeżeli zwierciadło cieczy obniży się do poziomu B - B. (Zgodnie z rysunkiem założyć, że oba walce nadal pozostaną częściowo w cieczy zanurzone).



Rys. III.64

2. Odpowiedzi

Zadanie 1

$$x = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_2 - h_1$$

Zadanie 2

$$z_1 = \frac{P_2 - P_1}{F \gamma}, \quad z_2 = \frac{P_3 - P_2}{F \gamma}$$

Zadanie 3

$$p_A = p_a + \frac{P}{F} + \gamma_1 a + \gamma_2 b - \gamma_3 c - \gamma_1 h$$

Zadanie 4

$$p_x = p_a - \gamma_1 h_4 + \gamma_4 (h_4 - h_3) + \gamma_3 (h_3 + h_2) - \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1$$

Zadanie 5

$$x = \frac{p_B - p_A + \gamma_1 (e+d-b) + \gamma_2 (c-e)}{\gamma_3} + a + b - d$$

Zadanie 6

$$p_1 = p_a + \frac{P}{F} + \gamma_1 (h_1 - h_4) - \gamma_2 (h_2 - h_4) - \gamma_1 (h_3 + h_4 - h_2)$$

$$p_2 = p_1 + \gamma_1 (h_3 + h_4 - h_5) - \gamma_2 (h_6 - h_5) - \gamma_1 (h_7 - h_6)$$

Zadanie 7

$$p_A = p_a + \gamma_1 f + \gamma_4 e - \gamma_3 (d-c) + \gamma_2 b - \gamma_1 (H-a)$$

Zadanie 8

$$p_{III} = p_{II} - \gamma_1 (h_1 - h_2) - \gamma_2 (h_2 - h_3)$$

$$p_I = p_{III} + \gamma_2 (h_5 - h_4) - \gamma_3 (h_5 - h_4)$$

Zadanie 9

Szukane ciśnienie p_x wyliczymy z prawa Boyle'a - Mariotte'a:

$$p (H - h_1) = p_x (H - h_1 + h_2)$$

przy czym

$$p = p_a + \gamma_1 a + \gamma_2 b - \gamma_3 (h_1 - c)$$

Zadanie 10

Ponieważ zgodnie z prawem Boyle'a - Mariotte'a

$$p (H-h) = p_a H$$

zaś

$$p = p_a + \gamma_2 2z - \gamma_1 (z+h)$$

zatem

$$p_a + \gamma_2 2z - \gamma_1 (z+h) = \frac{p_a H}{H-h}$$

skąd wyliczyć można h .

Zadanie 11

Cisnienie gazu p_2 w zbiorniku II przed obniżeniem zwierciadeł cieczy jest równe

$$p_2 = p_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 (a + h_4) \quad (1)$$

Z prawa Boyle'a - Mariotte'a obliczymy ciśnienie p'_2 gazu w zbiorniku II po obniżeniu w nim poziomu cieczy

$$p_2 (H_2 - h_4) F_2 = p'_2 (H_2 - h_4 + b) F_2 \quad (2)$$

Po obniżeniu poziomu cieczy w zbiorniku I ciśnienie gazu p'_1 w tym zbiorniku winno wynosić

$$p'_1 = p'_2 + \gamma_1 (h_4 - b + a) - \gamma_3 h_3 - \gamma_2 h_2 \quad (3)$$

przy czym spełnione musi zostać prawo Boyle'a - Mariotte'a

$$p_1 (H_1 - h_1) F_1 = p'_1 (H_1 - h_1 + c) F_1 \quad (4)$$

Układ równań (1) + (4) pozwala wyznaczyć szukaną wielkość c .

Zadanie 12

$$h = \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Zadanie 13

$$\omega = \frac{2}{D} \sqrt{g H}$$

Zadanie 14

$$d = 2 \sqrt{\frac{R}{\omega}} \sqrt[4]{g H}$$

Zadanie 15

$$D = 2R = \frac{2}{\omega} \sqrt{2g \left(\frac{p_a}{\gamma} - z_o \right)}$$

Zadanie 16

$$p = \left(\frac{r_o}{R} \right)^2 100 \%$$

przy czym

$$r_o = \sqrt{\frac{R}{\omega}} \sqrt[4]{\frac{4}{5} g H}$$

Zadanie 17

$$h = H - \frac{4 g H^2 (\delta^2 + 1)}{D^2 \omega^2 (\delta^2 - 1)}$$

Zadanie 18

$$L = \frac{2 g (p_a - p_B + \gamma H)}{\gamma a}$$

Zadanie 19

$$\gamma = \frac{2 p_B}{L}$$

Zadanie 20

$$H_1 = h + \frac{a l}{2 g} \quad ; \quad H_2 = h - \frac{a l}{2 g} \quad ;$$

przy przyspieszeniu $a' = 2a$ otrzymamy

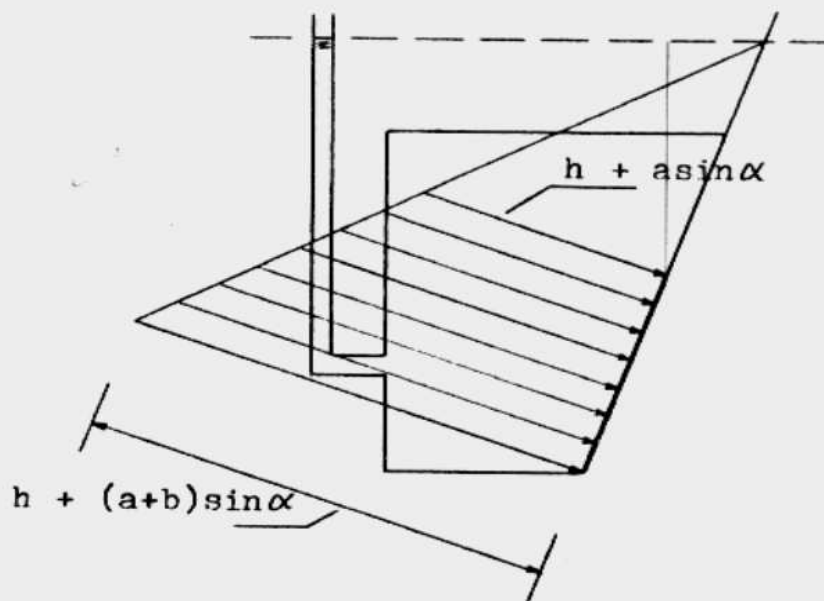
$$H'_1 = h + \frac{a l}{g}$$

Zadanie 21

$$a = \frac{2}{3} g \frac{h_2 - h_1}{l}$$

Zadanie 22

Wykres parcia pokazano na rysunku III.65.



Rys. III.65

$$N = \frac{P r}{b}$$

przy czym

$$P = \gamma \left[h + \left(a + \frac{2}{3} b \right) \sin \alpha \right] \frac{c b}{2}$$

$$r = \frac{2}{3} b + \frac{b^2}{18 \left(\frac{h}{\sin \alpha} + a + \frac{2}{3} b \right)}$$

Zadanie 23

Kłapa pozostanie zamknięta, jeśli spełniona będzie równość momentów

$$P_{AB} r_{AB} = P_{BC} r_{BC}$$

Po podstawieniu zależności

$$P_{AB} = \gamma \left(H + \frac{2}{3} h \sin \alpha \right) \frac{e h}{2}$$

$$r_{AB} = \frac{1}{3} h - \frac{h^2}{18 \left(\frac{H}{\sin \alpha} + \frac{2}{3} h \right)}$$

$$P_{BC} = \gamma \left(H + h \sin \alpha + \frac{d}{2} \sin \beta \right) e d$$

$$r_{BC} = \frac{d}{2} + \frac{d^2}{12 \left(\frac{H + h \sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{d}{2} \right)}$$

otrzymamy równanie z jedną niewiadomą d .

Zadanie 24

$$Q = G + \frac{\pi D^2}{4} H \gamma + p_a \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4} \right)$$

Zadanie 25

Wartość b wyliczymy z równania

$$P r = N b$$

w którym:

$$P = \gamma \left(x - h - H + \frac{b}{2} \sin \alpha \right) a b$$

$$r = \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12 \left(\frac{x-h-H}{\sin \alpha} + \frac{b}{2} \right)}$$

przy czym

$$x = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{Q}{F} + \gamma_1 h \right)$$

Zadanie 26

Siła N będzie wystarczająca, jeśli spełnione zostanie równanie równowagi klapy:

$$P r = N \frac{a}{2}$$

W równaniu tym

$$P = \gamma_4 \left(x + c - \frac{1}{3} a \sin \alpha \right) \frac{a b}{2}$$

$$r = \frac{2}{3} a + \frac{a^2}{18 \left(\frac{x+c}{\sin \alpha} - \frac{1}{3} a \right)}$$

natomiast

$$x = \frac{1}{\gamma_4} \left(\frac{Q}{F} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 \right)$$

Zadanie 27

$$P_1 = \gamma_1 \left(x + \frac{c}{2} \right) c d$$

$$M_{01} = P_1 \left[\frac{c}{2} + \frac{c^2}{12 \left(x + \frac{c}{2} \right)} \right]$$

przy czym

$$x = \frac{1}{\gamma_1} \left(p_a + \frac{Q}{F} \right) + a ;$$

$$P_2 = p_a b d$$

$$M_{02} = P_2 \left(c - \frac{b}{2} \right)$$

Zadanie 28

Siłę N obliczymy z równania równowagi kłapy

$$P_1 r_1 = P_2 r_2 + N \frac{H}{\sin \alpha}$$

W podanym równaniu:

$$P_1 = \gamma_1 \left(x + \frac{H}{2} \right) \frac{b H}{\sin \alpha}$$

$$r_1 = \frac{H}{2 \sin \alpha} + \frac{H^2}{12 \sin \alpha \left(x + \frac{H}{2} \right)}$$

gdzie $x = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} a ;$

$$P_2 = \gamma_2 \frac{b}{2} \frac{(h-e)^2}{\sin \alpha}$$

$$r_2 = \frac{H}{\sin \alpha} - \frac{1}{3} \frac{h-e}{\sin \alpha}$$

Zadanie 29

$$N = \frac{2 P r}{b}$$

gdzie

$$P = \gamma_1 (x - h_3 - h_2 + h_4 + h_1 + \frac{1}{3} b \sin \alpha) \frac{a b}{2}$$

$$r = \frac{1}{3} b + \frac{a b^3}{\left[\frac{x - h_3 - h_2 + h_4 + h_1}{\sin \alpha} + \frac{1}{3} b \right] 18 a b}$$

oraz
$$x = \frac{1}{\gamma_1} (\gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3)$$

Zadanie 30

$$z = \frac{d}{2} + \frac{d^2}{16 \left(\frac{x}{\sin \alpha} + \frac{d}{2} \right)}$$

$$P = \gamma \left(x + \frac{d}{2} \sin \alpha \right) \frac{\pi d^2}{4}$$

przy czym

$$x = \frac{1}{\gamma} [\gamma_1 a + \gamma_2 b - \gamma (e+f)]$$

Zadanie 31

$$P = \gamma_1 \left(x + \frac{d}{2} \sin \alpha \right) \frac{\pi d^2}{4}$$

$$M_E = P \left[\frac{d}{2} + \frac{d^2}{16 \left(\frac{x}{\sin \alpha} + \frac{d}{2} \right)} \right]$$

gdzie

$$x = \frac{1}{\gamma_1} (p_1 - p_a - \gamma_2 b - \gamma_1 a)$$

Zadanie 32

$$z = \frac{D}{2} + \frac{D^2}{16 \left(\frac{x+a}{\sin \alpha} + \frac{D}{2} \right)}$$

stąd D. Parcie na klapę

$$P = \gamma_3 \left(x + a + \frac{D}{2} \sin \alpha \right) \frac{\pi D^2}{4}$$

W powyższych wzorach

$$x = \frac{1}{\gamma_3} (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 h_3)$$

Zadanie 33

Wartość $\sin \alpha$ wyliczymy z równania

$$\gamma \left(x + \frac{D}{2} \sin \alpha \right) \frac{\pi D^2}{4} \left[\frac{D}{2} + \frac{D^2}{16 \left(\frac{x}{\sin \alpha} + \frac{D}{2} \right)} \right] = M_A$$

w którym

$$x = \frac{1}{\gamma} (\gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c) - c$$

Zadanie 34

$$Q = \frac{P_P r_P - P_L r_L}{D}$$

gdzie

$$P_P = \gamma_1 \left(x + h_1 + \frac{D}{2} \sin \alpha \right) \frac{\pi D^2}{4}$$

$$r_P = \frac{D}{2} - \frac{D^2}{16 \left(\frac{x+h_1}{\sin \alpha} + \frac{D}{2} \right)}$$

$$P_L = \gamma_1 \frac{\pi D^3}{8} \sin \alpha$$

$$r_L = \frac{3}{8} D$$

przy czym

$$x = \frac{1}{\gamma_1} (\gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3) - h_3 + h_2 - h_4$$

Zadanie 35

$$P_{\max} = \gamma \frac{b}{2} \left(h + \frac{a L}{2 g} \right)^2$$

stąd a.

Zadanie 36

W trakcie ruchu naczynia przekrojem powierzchni zwierciadła cieczy będzie odcinek AC (zob. rys. III.66a), tak więc z naczynia wyleje się objętość

$$V_{\text{wyl}} = b L B$$

Wykresy parcia na poszczególne ściany naczynia pokazano na rys. III.66. Siły parcia na ściany wynoszą

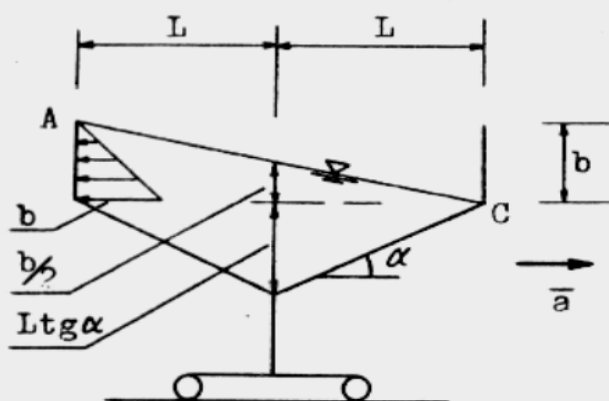
$$P_{AB} = \gamma \frac{b^2}{2} B$$

$$P_{BE} = \gamma \frac{L B}{2 \cos \alpha} \left(\frac{3}{2} b + L \operatorname{tg} \alpha \right)$$

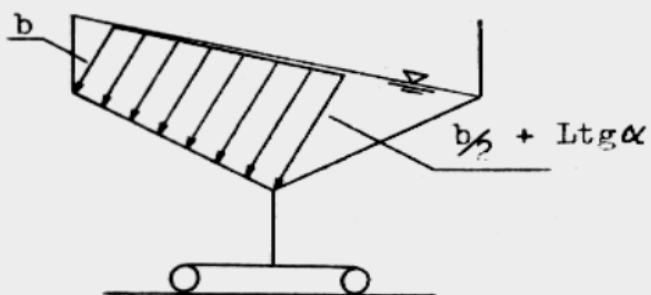
$$P_{EC} = \gamma \frac{L B}{2 \cos \alpha} \left(\frac{b}{2} + L \operatorname{tg} \alpha \right)$$

$$P_{CD} = 0$$

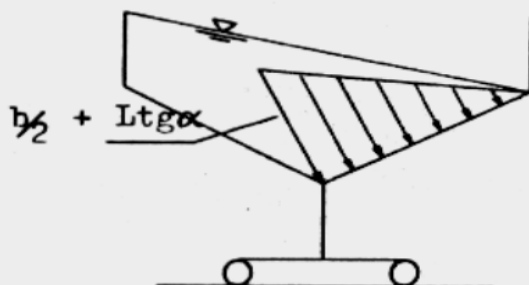
a)



b)



c)



Rys. III.66

Zadanie 37

$$P_v = \left[\pi R^2 (h_2 - h_1) - \frac{2}{3} \pi R^3 \right] \gamma$$

Zadanie 38

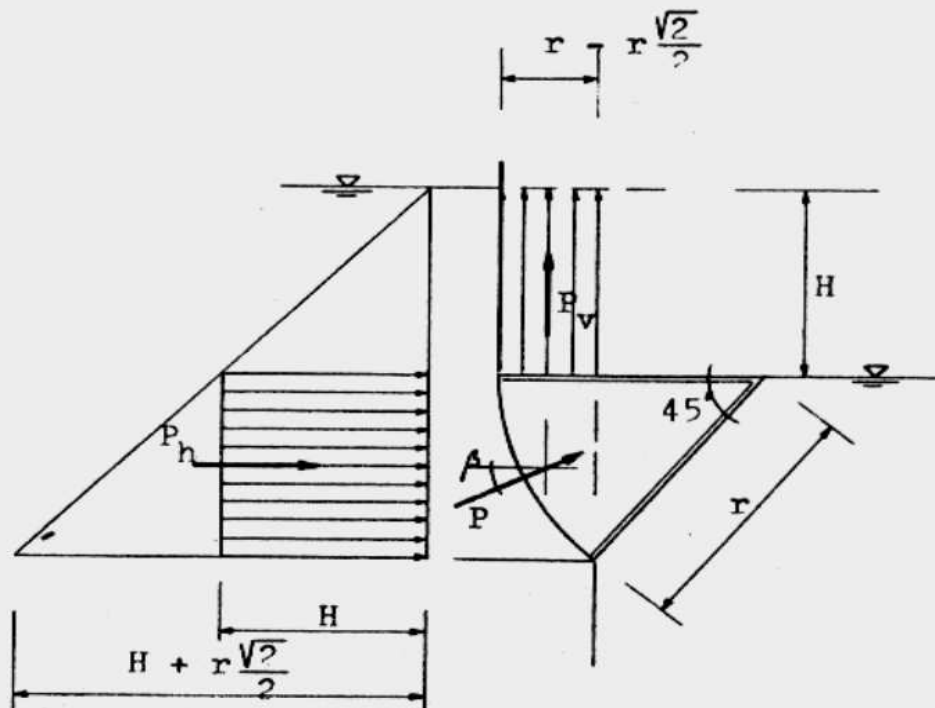
Wykresy składowych parcia pokazane są na rys. III.67.

$$P_h = H r \frac{\sqrt{2}}{2} L \gamma$$

$$P_v = H r \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) L \gamma$$

$$P = \sqrt{P_h^2 + P_v^2}, \quad \text{tg } \beta = \frac{P_v}{P_h}$$

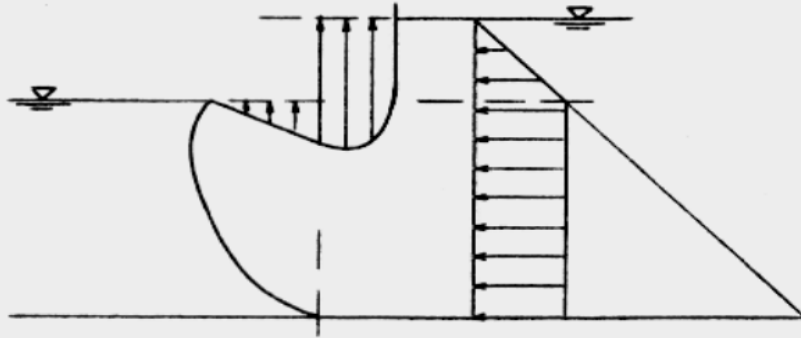
Wektor parcia całkowitego P działając prostopadle do powierzchni zamknięcia, działa wzdłuż jego promienia r .



Rys. III.67

Zadanie 39

Wykresy parcia pokazano na rysunku III.68.



Rys. III.68

Zadanie 40

$$P_h = \frac{3}{2} \gamma b R^2 \quad P_v = \frac{3}{4} \gamma b \pi R^2$$

Zadanie 41

$$P_h = \gamma l (a+b) \left(\frac{a+b}{2} + c \right)$$

$$P_v = \gamma l d \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$$

Zadanie 42

$$Q > G + P_v$$

przy czym

$$P_v = \left[\frac{\pi d^2}{4} \left(H + \frac{P_a}{\gamma} \right) - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right] \gamma$$

Zadanie 43

$$h = \frac{10}{3} a + \frac{4 G}{\gamma \pi a^2}$$

Zadanie 44

$$P_h = \gamma \frac{H + h_2}{2} L (2x - h_2 + H)$$

$$P_v = \gamma r (H + h_2) L$$

przy czym

$$x = \frac{1}{\gamma} (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2)$$

Zadanie 45

$$P_h = \left\{ \left[\gamma (x-b) + \gamma (x-a-b) \right] \frac{a}{2} + \gamma (x-b) b \right\} l$$

gdzie $x = \frac{1}{\gamma} (\gamma_1 a + \gamma_2 b)$.

$$P_v = \left(2r a - \frac{1}{2} \pi r^2 \right) l \gamma$$

Zadanie 46

$$N = \frac{P_h r_h + P_v r + G c}{d + b + e}$$

przy czym

$$P_h = \gamma x (d + b + e) l, \quad x = \frac{1}{\gamma} (\gamma_1 a + \gamma_2 b) - b - d$$

$$r_h = \frac{1}{2} (d + b + e)$$

$$P_v = \frac{1}{2} \pi r^2 l \gamma$$

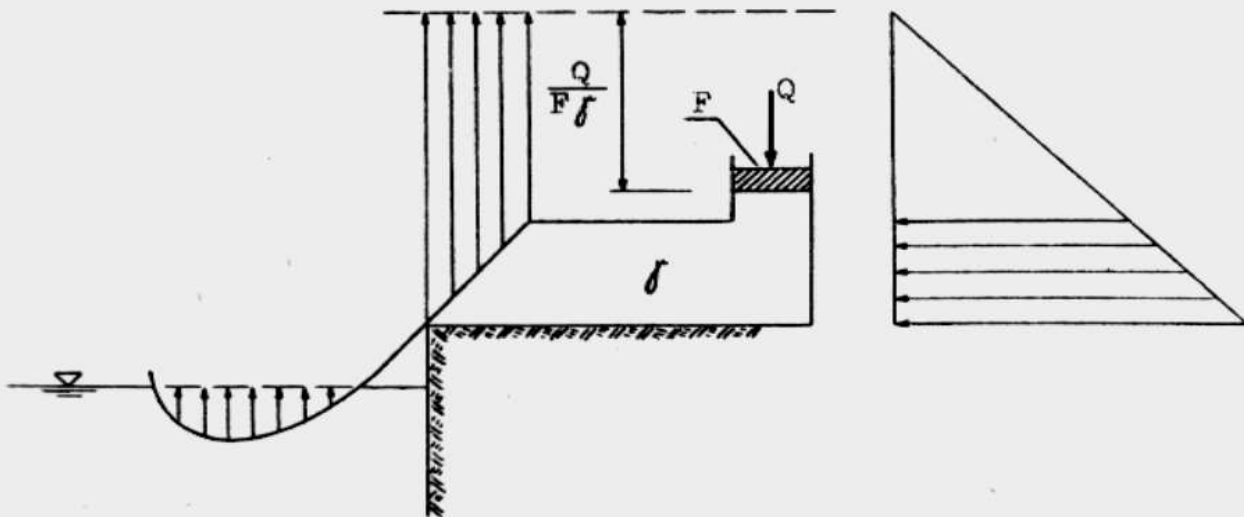
Zadanie 47

$$P_h = \left(\frac{Q}{F} - \gamma a \right) (a + b) L$$

$$P_v = \frac{1}{2} \pi r^2 L \gamma$$

Zadanie 48

Wykresy parcia pokazane są na rysunku III.69.



Rys. III.69

Zadanie 49

$$P_{h1} = \gamma_1 (2x + 2b + 2c + r) \frac{r}{2} L$$

$$P_{v1} = \left[(x + b + c + r) r + \frac{3}{4} \pi r^2 \right] L \gamma_1$$

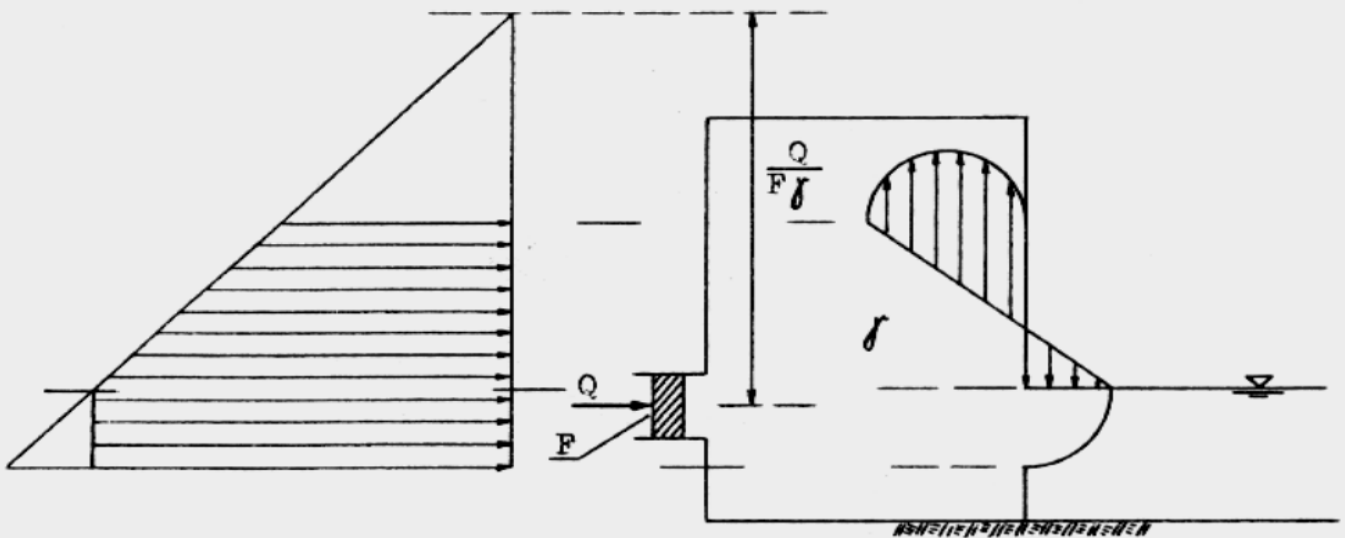
przy czym $x = \frac{P}{F \gamma_1} - a$

$$P_{hp} = \gamma_2 (2c + r) \frac{r}{2} L$$

$$P_{vp} = \left[(c + r) r + \frac{3}{4} \pi r^2 \right] L \gamma_2$$

Zadanie 50

Wykresy parcia pokazano na rysunku III.70.



Rys. III.70

Zadanie 51

$$x > \frac{4}{\gamma_2 \pi d^2} \left\{ G + Q + \gamma_1 \left[\frac{\pi d^2}{4} H_1 - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 - \frac{\pi D^2}{4} a \right] + \right. \\ \left. + \gamma_2 H_2 \frac{\pi d^2}{4} \right\}$$

Zadanie 52

$$G > \left[\frac{\pi D^2}{4} (H-a-h) + \frac{\pi d^2}{4} \left(\frac{1}{3} h - H \right) \right] \gamma - p_a \frac{\pi d^2}{4} - Q$$

Zadanie 53

$$\gamma = \frac{\gamma_1 \left[\frac{\pi d_2^2}{4} h + \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d_2}{2} \right)^3 \right] + p_a \left(\frac{\pi d_2^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4} \right) - Q}{\frac{\pi d_1^2}{4} H - \frac{2}{3} \pi \left[\left(\frac{d_1}{2} \right)^3 + \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right]}$$

Zadanie 54

$$a > \frac{4}{\gamma_4 \pi D^2} \left[G + (\pi r^2 h_2 - \frac{2}{3} \pi r^3) \gamma_3 - (\pi r^2 x + \frac{2}{3} \pi r^3) \gamma_2 \right]$$

przy czym

$$x = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} h_1 + h_2$$

Zadanie 55

$$G = P_d - P_g + W_1 + W_2$$

gdzie

$$P_d = \left[\frac{\pi D^2}{4} x + \frac{2}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right] \gamma_2$$

$$P_g = \left[\frac{\pi D^2}{4} H - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right] \gamma_1$$

$$W_1 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_1}{2} \right)^3 \gamma_1$$

$$W_2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_2}{2} \right)^3 \gamma_2 ;$$

$$x = \frac{1}{\gamma_2} (\gamma_3 a + \gamma_4 b)$$

Zadanie 56

$$G = P_d - P_g$$

przy czym

$$P_d = \frac{\pi D^2}{4} (H + a + x_1) \gamma_1$$

$$P_g = \left[\frac{\pi d^2}{4} (H + x_2) - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right] \gamma_2$$

$$x_1 = \frac{1}{\gamma_1} \left(p_a + \frac{Q}{F} \right)$$

$$x_2 = \frac{p_a}{\gamma_2}$$

Zadanie 57

$$N > \frac{4 F}{\pi d_1^2} \left\{ G + \left[\frac{\pi d^2}{4} \left(H + \frac{p_a}{\gamma_1} \right) - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right] \gamma_1 - \right. \\ \left. - \frac{\pi d_1^2}{4} (p_a - a \gamma_2) - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d_1}{2} \right)^3 \gamma_2 \right\}$$

Zadanie 58

$$Q > \frac{F}{a b} \left\{ G + \left[\frac{\pi d^2}{4} \left(H + \frac{p_a}{\gamma} \right) - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right] \gamma_1 - \frac{4}{3} \pi r^3 \gamma_1 - \right. \\ \left. - a b (p_a + \gamma_2 h) \right\}$$

Zadanie 59

$$r = \left[\frac{3}{4 \pi \gamma_2} \left\{ G + \left[\frac{\pi D^2}{4} (H + b + x) - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \right] \gamma_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi d^2}{4} \left(b + \frac{p_a}{\gamma_2}\right) \gamma_2 \right\} \right]^{1/3} ;$$

$$x = \frac{1}{\gamma_1} \left(p_a + \frac{Q}{F}\right) - a$$

Zadanie 60

$$H \geq \frac{4}{\gamma_1 \pi D^2} \left\{ \frac{\pi D^2}{4} \left(c - b + \frac{Q}{F \gamma_2}\right) \gamma_2 + \left[\frac{4}{3} \pi r^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \right] \gamma_1 - G \right\}$$

Zadanie 61

$$a > \frac{4}{\gamma_3 \pi d^2} \left\{ G + \left[\pi R^2 \left(\frac{p_a}{\gamma_1} + \frac{Q}{F \gamma_1}\right) - \frac{2}{3} \pi R^3 \right] \gamma_1 \right. \\ \left. - \left[\pi r^2 \left(H + \frac{p_a}{\gamma_2}\right) + \frac{2}{3} \pi r^3 \right] \gamma_2 \right\}$$

Zadanie 62

$$x = \frac{1}{F_2} \left[\frac{G_N + G_K}{\gamma_1} + F_1 H_1 \right]$$

$$Q > G_K + (p_a + \gamma_1 H_1) \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right) - \frac{\pi d^2}{4} \frac{G_N + G_K}{F_1}$$

Zadanie 63

$$V = F h \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

Zadanie 64

Wskazówka przesunie się w dół o odcinek

$$x = h_1 \frac{D^2 - d^2}{D^2 + d^2}$$

