POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Jan Bochenek, Teresa Winiarska

Zbiór zadań do wykładów z matematyki dla studentów I roku Politechniki Krakowskiej

KRAKÓW 1974

Z dostarczonego maszynopisu druk i oprawę wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Krakowskiej w Krakowie. Nakład 1200+25 egz. Ark.wyd. 1,5. Ark.druk. 6,0. Papier offsetowy V kl. 70 g. Oddano do druku 16.IX. 1974 r. Druk ukończono w listopadzie 1974 r.

Zam. 469/74 S-67-1649 Cena zł 2,-

P R Z E D M O W A

Niniejszy zbiór zadań przeznaczony jest głównie dla studentów I roku Wydziału Mechanicznego Politechniki Krakowskiej. Zawiera on wybrane zadania, które zdaniem autorów powinien umieć rozwiązać każdy student kończący I rok studiów w Politechnice Krakowskiej na Wydziałach: Mechanicznym, Budownictwa Lądowego i Inżynierii Sanitarnej i Wodnej. Ze zbioru tego mogą również korzystać studenci pozostałych wydziałów.

Zbiór ten zawiera, w przeważającej części, zadania wybrane z różnych zbiorów zadań, dostosowane do nowego, obecnie obowiązującego programu matematyki.

Do napisania tego zbioru skłoniły autorów następujące powody:

1/ dostarczenie studentowi I roku niezbyt obszernego, ale dostosowanego do obowiązującego programu matematyki, materiału do ćwiczeń,

2/ uzupełnienie luki jaka powstała w związku z unowocześnieniem wykładów z matematyki. Pojawiły się bowiem pewne partie materiału, których nie obejmują ogólnie dostępne zbiory zadań przeznaczone dla studiów technicznych.

PROGRAM PRZEDMIOTU MATEMATYKA

1. Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości dotyczących ciągów i funkcji jednej zmiennej

twierdzenie o monotonii, twierdzenie o trzech ciągach, kresy, warunek Couchy'ego zbieżności ciągu, granice specjalne:

$$\left\{\sqrt[n]{a}\right\} \text{ dla } a>0 , \qquad \left\{\sqrt[n]{n}\right\} ,$$

$$\sqrt[n]{a_n} \text{ gdy } a_n > 0 \text{ i } a_n \longrightarrow a > 0 ,$$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \qquad \left\{q^n\right\}$$

szeregi liczbowe, kryteria zbieżności : kryterium porównawcze, d'Alamberta, Couchy'ego, Leibniza, funkcja odwrotna, funkcja złożona, funkcje cyklometryczne /odwrotne do funkcji trygonometrycznych/ arc sin x , arc cos x , arc tg x , arc ctg x , twierdzenia o ciągłości funkcji złożonej i odwrotnej, granice specjalne dla funkcji:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x}, \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

różniczkowanie funkcji elementarnych, funkcje potęgowe funkcje trygonometryczne, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna, funkcje cyklometryczne, pochodna logarytmiczna, twierdzenia o różniczkowaniu funkcji odwrotnej i złożonej, twierdzenie Rolle'a, twierdzenie Lagrange'a, twierdzenie Taylora, twierdzenie Couchy'ego, twierdzenie de l'Hospitala, extrema, monotoniczność, punkt przegięcia, wypukłość, asymptoty.

2. Przestrzenie liniowe

definicja grupy, pierścienia, ciała, przykłady tych struktur, pierścień liczb całkowitych Z, ciało liczb wymiernych Q, ciało liczb rzeczywistych R, ciało liczb zespolonych C, podstawowe działania na liczbach zespolonych, postać trygonometryczna liczby zespolonej, potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych, postać wykładnicza liczby zespolonej, definicja przestrzeni wektorowej, liniowa zależność i niezależność, baza, wymiar, odwzorowanie liniowe, przestrzeń odwzorowań liniowych $\mathcal{L}(R^n; R^m)$, macierze, związek odwzorowań liniowych z macierzami, rachunek macierzowy, dodawanie i odejmowanie macierzy, mnożenie macierzy przez liczbę, mnożenie macierzy, macierz odwrotna, transponowana, ortogonalna, wyznaczniki, definicja wyznacznika, rozwinięcie Laplace'a, własności wyznaczników, układy równań liniowych, jednorodnych i niejednorodnych, twierdzenie Koneckera Capelliego, wartości i wektory własne macierzy.

3. Geometria analityczna

przestrzeń afiniczna, układy współrzędnych, współrzędne kowariantne, kontrawariantne, zmiana układu współrzędnych jako szczególne przypadki, przesunięcie i obrót na płaszczyźnie, zastosowanie do badania krzywych stopnia drugiego, postać kanoniczna krzywych stopnia drugiego, sprowadzenie do postaci kanonicznej przez obrót i przesunięcie, powierzchnie stopnia drugiego, powierzchnia obrotowa, walcowa, kula, elipsoida, stożki, hiperboloidy, paraboloidy, zastosowanie wartości i wektorów własnych macierzy do badania krzywych i powierzchni stopnia drugiego, przestrzeń wektorowa z iloczynem skalarnym, przestrzeń unormowana, związek iloczynu skalarnego z normą, nierówność Schwarza, iloczyn skalarny w przestrzeni afinicznej, iloczyn skalarny we współrzędnych, długość wektora, wersor wektora, cosinusy kierunkowe, orientacja przestrzeni, iloczyn wektorowy i jego własności, współrzędne iloczynu wektorowego, iloczyn mieszany i jego własności, zastosowanie iloczynu mieszanego, iloczyn mieszany we współrzędnych, równanie prostej: parametryczne, ogólne, krawędziowe, odcinkowe, równanie płaszczyzny: parametryczne, ogólne, odcinkowe, odległość punktu od prostej i płaszczyzny, odległość prostych skośnych, wzajemne położenie prostych i płaszczyzn,kąt między prostą a płaszczyzną.

4. Przestrzenie metryczne

definicja przestrzeni metrycznej, topologia przestrzeni metrycznej, ciągi w przestrzeni metrycznej, przestrzeń zupełna, Banacha, Hilberta, ciągłość odwzorowań i warunki równoważne ciągłości, składanie odwzorowań ciągłych, granica odwzorowania w punkcie, ciągłość odwzorowań z $R^n \to R^m$.

5. Różniczkowanie funkcji /odwzorowań/

funkcja wektorowa argumentu skalarnego, pochodna funkcji wektorowej i jej interpretacja geometryczna i fizyczna, odwzorowanie $f: R^n \to R$ i jego pochodna kierunkowa, jako szczególny przypadek pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych, interpretacja pochodnych cząstkowych dla funkcji dwóch zmiennych, definicja pochodnej odwzorowania funkcji $R^n \to R^m$, różniczka odwzorowania, twierdzenie o pochodnej odwzorowania złożonego, twierdzenie o różniczkowaniu odwzorowań specjalnych; stałego, liniowego, twierdzenia o różniczkowaniu sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu odwzorowań, twierdzenie o pochodnych cząstkowych odwzorowania złożonego, odwzorowanie odwrotne, twierdzenie o ciągłości i różniczkowaniu odwzorowania odwrotnego, jakobian odwzorowania, przykłady: współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne, funkcja uwikłana, twierdzenie o funkcji uwikłanej, równanie stycznej do krzywej danej równaniem $f(x,y) = 0$, extrema funkcji uwikłanej, pochodne wyższych rzędów dla odwzorowań $f: R^n \longrightarrow R^m$, odwzorowanie $f: R^n \longrightarrow R$ i jego różniczka, różniczki wyższych rzędów, wzór Taylora dla odwzorowań $f: R^n \longrightarrow R$, klasyfikacja form kwadratowych, extrema lokalne odwzorowania $f: R^n \longrightarrow R$, warunki konieczne, warunek wystarczający, extrema warunkowe, metoda bezpośrednia znajdowania extremum warunkowego, metoda mnożników Lagrange´a.

6. Całka nieoznaczona funkcji jednej zmiennej

definicja, wzory podstawowe, całkowanie przez części, przez podstawienie, wzory rekurencyjne:

$$\int \sin^n x \, dx , \qquad \int \cos^n x \, dx , \qquad \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

całkowanie funkcji wymiernych: definicja ułamków prostych I i II rodzaju, ich całkowanie, rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste, całkowanie funkcji niewymiernych:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,$$

I i II podstawienie Eulera, metoda współczynników nieoznaczonych dla

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \, dx,$$

całkowanie funkcji trygonometrycznych postaci $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, podstawienie uniwersalne $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\operatorname{tg} x = t$, $\cos x = t$, $\sin x = t$ w zależności od funkcji podcałkowej $R(u,v)$, informacja o całkach nieelementarnych.

7. Całka Riemanna

prostopadłościan w przestrzeni R^m, objętość prostopadłościanu, podział i ciąg podziałów prostopadłościanu, średnica podziału, normalny ciąg podziałów prostopadłościanu $B \subset R^m$, definicja ciągu sum całkowych Riemanna, definicja całki Riemanna sumy Darboux /dolna i górna/, własności ciągów sum Darboux, całki Darboux - dolna i górna, WKW całkowalności funkcji w sensie Riemana po prostopadłościanie, interpretacja tych pojęć w przypadku

$m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, interpretacja geometryczna w przypadku $m = 1$ /całka oznaczona/, $m = 2$ /całka podwójna/ , $m = 3$ /całka potrójna/, zbiory miary zero: definicja, przykłady, zbiory pełnej miary, WW całkowalności funkcji, przykłady funkcji niecałkowalnych w sensie Riemana, definicja całki Riemana po dowolnym ograniczonym zbiorze zawartym w R^m, zbiory mierzalne w sensie Jordana, WW całkowalności funkcji f po zbiorze $D \subset R^m$, własności całki Riemana, twierdzenie o wartości średniej dla całki, przypadek $m = 1$: całka jako funkcja górnej granic całkowania, twierdzenie o ciągłości i różniczkowalności, związek całki oznaczonej z nieoznaczoną, zmiana zmiennej w całce oznaczonej, zastosowanie całki oznaczonej do obliczania pól obszarów płaskich, pole obszaru we współrzędnych biegunowych, długość łuku krzywej, objętość i pole powierzchni bryły obrotowej, całki niewłaściwe, definicja całki niewłaściwej I rodzaju po przedziale nieograniczonym, całka niewłaściwa II rodzaju z funkcji nieograniczonej, własności, metody obliczania i przykłady tych całek, związek całki niewłaściwej z szeregiem liczbowym, kryterium całkowe zbieżności szeregów liczbowych, całka zależna od parametru, twierdzenie Leibniza o różniczkowaniu całki względem parametru, twierdzenie Fubiniego o iteracji całki Riemanną,dowód tego twierdzenia w przypadku całki podwójnej, obszary normalne w R^2 i w R^3, twierdzenia w przypadku całki Riemanna o zmianie zmiennych, przykłady dla $m = 2$ i $m = 3$, całkowanie po obszarach normalnych, pojęcie dyfeomorfizmu $q: \Delta \longrightarrow D$, gdzie $\Delta \subset R^m$ i $D \subset R^m$.

8. Elementy geometrii różniczkowej

funkcja wektorowa argumentu skalarnego, hodograf funkcji wektorowej, ciągłość i różniczkowalność funkcji wektorowej, interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej, różniczka funkcji wektorowej, różniczki wyższych rzędów, wzór Taylora z resztą w postaci Peano, definicja i równanie prostej stycznej, definicja i równanie płaszczyzny ściśle stycznej do krzywej, płaszczyzna normalna do krzywej i jej równanie, płaszczyzna prostująca i jej równanie, prosta normalna główna i binormalna i ich równania, trójścian Freneta, koło krzywiznowe krzywej, wektor promienia krzywizny, wektor wodzący środka koła krzywiznowego, promień krzywizny i krzywizna krzywej, współrzędne środka koła krzywiznowego dla krzywej płaskiej, definicja i równanie ewoluty dla krzywej płaskiej, parametr naturalny, elementy trójścianu Freneta i krzywizna krzywej w parametryzacji naturalnej, powierzchnie w przestrzeni R^3, równanie parametryczne, wyraźne, uwikłane, równanie płaszczyzny stycznej i wektor normalny do powierzchni, prosta normalna do powierzchni, pole płata powierzchniowego, wyprowadzenie wzoru.

9. <u>Całka krzywoliniowa niezorientowana i całka powierzchniowa niezorientowana</u>

definicja całki krzywoliniowej jako granicy ciągu sum, interpretacja fizyczna i geometryczna, własności całki krzywoliniowej, twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej niezorientowanej na całkę oznaczoną, definicja całki powierzchniowej niezorientowanej jako granicy ciągu sum całkowych, interpretacja fizyczna, własności całki powierzchniowej, twierdzenie o zamianie całki powierzchniowej niezorientowanej na całkę podwójną, zastosowanie całki krzywoliniowej niezorientowanej i powierzchniowej niezorientowanej w mechanice, wyznaczanie momentów i środków ciężkości.

10. <u>Formy różniczkowe</u>

odwzorowania znakozmienne $R^n \longrightarrow R$, przestrzeń $A_p(R^n,R)$, iloczyn zewnętrzny odwzorowań wieloliniowych znakozmiennych, definicja, własności, przykłady, iloczyn zewnętrzny odwzorowań liniowych, iloczyn zewnętrzny a liniowa zależność odwzorowań liniowych, baza kanoniczna przestrzeni $A_p(R^n,R)$, przykłady baz kanonicznych dla różnych n i p, definicja formy różniczkowej, postać kanoniczna formy różniczkowej, przykłady, różniczka zewnętrzna formy różniczkowej, zmiana zmiennych w formie różniczkowej, własności odwzorowania φ^*, pierwotna formy różniczkowej, twierdzenie Poincarego i wnioski z tego twierdzenia, całkowanie form różniczkowych, całka krzywoliniowa formy różniczkowej stopnia I /całka krzywoliniowa zorientowana/, definicja, własności, zmiana parametru, całka krzywoliniowa po krzywej zamkniętej, forma zamknięta, niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania, warunki Schwarza, całka krzywoliniowa jako granica ciągu sum całkowych, interpretacja fizyczna, definicja rozmaitości, orientacja rozmaitości, definicja kompaktu z brzegiem na rozmaitości orientowalnej, całka formy różniczkowej stopnia drugiego po kompakcie z brzegiem /całka powierzchniowa zorientowana/, definicja, własności, zamiana całki powierzchniowej na całkę podwójną, całka formy różniczkowej po kompakcie z brzegiem w przestrzeni R^n, twierdzenie Stokesa w postaci ogólnej, jako przypadki szczególne twierdzenia Greena, Riemana, Greena-Gausa-Ostrogradskiego, twierdzenie Stokesa w postaci klasycznej, elementy teorii pola, podstawowe pojęcia analizy wektorowej i ich interpretacja fizyczna.

11. <u>Równania różniczkowe zwyczajne</u>

definicja równania różniczkowego, rząd równania, warunki początkowe, twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności, interpretacja geometryczna równania różniczkowego rzędu pierwszego, metody całkowania równań różniczkowych rzędu pierwszego, równania o zmiennych rozdzielonych, równania jednorodne, równanie liniowe jednorodne i niejednorodne, równanie Bernoulli´ego, równania zupełne, równanie różniczkowe rodziny krzywych, trajektorie ortogonalne, równania różniczkowe wyższego rzędu, równania różniczkowe rzędu drugiego sprowadzalne do równań różniczkowych I rzędu, równanie liniowe n-tego rzędu, równanie jednorodne i niejednorodne, własności jego całek, metoda uzmienniania stałych, metoda przewidywań całek szczególnych równań liniowych niejednorodnych, równanie Eulera i jego całkowanie, układy równań różniczkowych, układy liniowe I rzędu, sprowadzanie do jednego równania wyższego rzędu, zastosowanie rachunku macierzowego do rozwiązywania układów równań różniczkowych liniowych rzędu I.

I. Ciągi liczbowe

1. Wykazać na podstawie definicji, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 3}{n + 2} = 2, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n - 1}{1 - 4n} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n}{n^2 + 3} = 3.$$

2. Udowodnić twierdzenia:

Z: $\{a_n\}$ ogranicz.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

T: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$

Z: $|a_n| \longrightarrow \infty$

T: $b_n = \dfrac{1}{a_n} \longrightarrow 0$

Z: $a_n \longrightarrow 0$

T: $b_n = \dfrac{1}{|a_n|} \longrightarrow +\infty$

$a_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow |a_n| \longrightarrow 0$

Z: $a_n \longrightarrow a$

T: $|a_n| \longrightarrow |a|$

Z: $a_n \longrightarrow a > 0$

T: $\sqrt{a_n} \longrightarrow \sqrt{a}$

$\sqrt[3]{a_n} \longrightarrow \sqrt[3]{a}$

3. Obliczyć granice ciągów o wyrazie ogólnym:

$$\frac{(-1)^n}{2n + 3}, \qquad \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2 + 1}, \qquad \frac{(2n - 1)(5 - 3n^3)}{(4 + n^2)(5 - 3n^2)},$$

$$\frac{\binom{n}{3}\binom{n}{5}}{\binom{n}{8}}, \qquad \frac{\binom{n}{3}}{2n^3 - 10}, \qquad \frac{\binom{n}{3}^2}{\binom{n}{4}\binom{n}{2}}, \qquad \frac{\binom{n}{4} + 1}{7n^4},$$

$$\frac{(2n-1)^{15}(5-3n^3)}{(4+n^2)(5-3n^2)^8},\quad \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}},$$

$$\sqrt{n+5}-\sqrt{n},\quad \sqrt[3]{2+2n-3n^3}+\sqrt[3]{3n^3+2n},$$

$$\frac{\sqrt{n}+\sqrt{4n+1}}{2+\sqrt{n-1}},\quad \sqrt[4]{n^4+n^2}-\sqrt[3]{n+1},\quad (-1)^n\,\frac{n^2+1}{n},$$

$$\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2}n)+n\sin^2(\frac{\pi}{2}n)},\quad \frac{3^{2n+1}-7}{9^n+4},\quad \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7},$$

$$\frac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7},\quad \frac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+3},\quad \frac{8^{-\log_2 n}}{2^n},\quad \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}},$$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k},\quad \sum_{k=1}^{n} a^k \text{ /w zależności od } a\text{/},\quad \sqrt[n]{2^n+3^n},$$

$$\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n},\quad \sqrt[n]{2n^2+5n-2},\quad \sqrt[n]{2n^2+5n+2},\quad \sqrt[n]{5n^3-7n},$$

$$\sqrt[n]{\frac{2n^2+3n+1}{n^2+5}},\quad \sqrt[n]{\frac{3n^3-5n}{2n^2-2}},\quad \sqrt[n]{\frac{n^2+n+1}{n^4+3n-1}},$$

$$\sqrt[n]{\frac{3n^3-5n}{2n^2-2}},\quad \sqrt[n]{\frac{n^2+n+1}{n^4+3n-1}},\quad \left(\frac{n+2}{n}\right)^n,\quad \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+3},$$

$$\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{4n},\quad \left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{2n+1},\quad \left(\frac{2n^2+5}{2n^2-5}\right)^{4n},\quad \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{2n+1}$$

4. Dla każdego n naturalnego dany jest trójkąt o wierzchołkach $A\left(\log_3\frac{3n-2}{1+3n}, -2, 3\right)$, $B\left(1, 3^{\frac{\sqrt{n}}{1+3n}}, -2\right)$, $C(-5, -1, 2)$. Obliczyć granicę pól tych trójkątów.

5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osią x-ów, rzędną w punkcie $x = 1$ oraz krzywą o równaniu: a/ $y = x^2$

b/ $y = x^3$.

II. Szeregi liczbowe

6. Obliczyć sumy szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1}.$$

7. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{2n^3-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, 5^n}{2^n \cdot 3^{n+1}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{2} - 1\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \ \operatorname{tg} \frac{1}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \sin \frac{2}{n} \operatorname{tg} \frac{5}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\, 2^n}{n^{2n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}}{(3n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{3^n \cdot n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}{}' (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)^2}{(1+n^3)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{100n+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}},$$

$$\sum_{n=1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

III. Funkcje odwrotne i cyklometryczne

8. Zbadać różnowartościowość funkcji $y = \frac{2x+3}{1-2x}$ i znaleźć funkcję odwrotną do niej, sporządzić wykresy tych funkcji.

9. Wykazać, że:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arc\ ctg}\ x) = \frac{1}{x}$$

$$\mathrm{ctg}(\mathrm{arc\ tg}\ x) = \frac{1}{x}$$

$$\mathrm{arc\ tg}\ x + \mathrm{arc\ ctg}\ x = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{arc\ sin}\ x + \mathrm{arc\ cos}\ x = \frac{\pi}{2}$$

IV. Granice specjalne

10. Obliczyć następujące granice:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1},$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\mathrm{arc\ sin}(1-2x)}{4x^2-1} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2\ \mathrm{arc\ tg}\ 3x}{\sin x^3},$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{\mathrm{arc\ sin}(x+2)}{x^2+2x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin 2x)}{\mathrm{tg}(\mathrm{tg}\ 3x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\ x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{tg}\ x, \quad \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{\mathrm{arc\ tg}\ \frac{1}{x}}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+3x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{x+1}-3}{2x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(x+5)^3-125}{x}, \quad \lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{3x}, \quad \lim_{x\to 8} \frac{8-x}{\sin\frac{\pi x}{8}}, \quad \lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x},$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}, \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1},$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x}, \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left\{x\left[\ln(x+a) - \ln x\right]\right\}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{\sin x},$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right].$$

V. Różniczkowanie funkcji jednej zmiennej

11. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

$$y = \frac{x^p(1 - x^q)}{1 + x}, \qquad y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x},$$

$$y = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x, \quad y = \sin^n x \cos nx,$$

$$y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x), \qquad y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2},$$

$$y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}, \qquad y = \sin\left[\cos^2(\mathrm{tg}^3 x)\right],$$

$$y = 4\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\mathrm{ctg}^8 x}, \qquad y = 2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}},$$

$$y = \left[\frac{1 - x^2}{2}\sin x - \frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right] e^{-x}$$

$$y = \frac{\ln 3 \sin x + \cos x}{3^x}, \qquad y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}},$$

$$y = \ln\left[\ln^2(\ln^3 x)\right], \qquad y = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \qquad y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ \ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}} \qquad (a > 0,\ b > 0),$$

$$y = \ln\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2-a^2}\ \sin x}{a + b\cos x},$$

$$y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right), \qquad y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}},$$

$$y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x \ln \operatorname{tg} x, \qquad y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{a},$$

$$y = x + \sqrt{1-x^2}\ \arccos x,$$

$$y = x \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+}} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} - \sqrt{x},$$

$$y = \operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right), \qquad y = \ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

$$y = \ln\left(1+\sin^2 x\right) - 2\sin x \operatorname{arc\,tg}(\sin x),$$

$$y = \ln \frac{x + a}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{b} ,$$

$$y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} ,$$

$$y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x ,$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} ,$$

$$y = \frac{x^6}{1 + x^{12}} - \operatorname{arc\,tg} x^6 ,$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} ,$$

$$y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}{\sqrt[4]{1 + x^4} - x} ,$$

$$y = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right), \qquad y = x + x^x$$

$$y = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{1 + x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x^2}} ,$$

$$y = \sqrt[x]{x} , \qquad y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x} ,$$

$$y = \log_x e \qquad y = x \cdot |x| ,$$

$$y = \left|(x - 1)^2 (x + 1)^3\right| , \quad y = \arccos \frac{1}{|x|} , \quad y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} .$$

VI. Obliczanie granic za pomocą reguły de l'Hospitala

12. Obliczyć granice:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1 - x^2}}, \quad \lim_{x\to 0} e^{-x} x^2,$$

$$\lim_{x\to \infty} \left[(\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x)\ln x\right], \quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right),$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}},$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}, \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x},$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}, \quad \lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x,$$

$$\lim_{x\to 0} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} \quad \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\varepsilon} \ln x \quad \varepsilon > 0, \quad \lim_{x\to 1} \ln x \ln(1 - x),$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right), \quad \lim_{x\to \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1 - x)}{\ln[\sin(1 - x)]}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right),$$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2 \operatorname{tg} x},$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right], \qquad \lim_{x\to\infty} \left[(x + 2)\, e^{\frac{1}{x}} - x\right].$$

VII. Zastosowanie twierdzenia Taylora

13. Znaleźć przybliżone wartości wyrażeń:

$\arcsin 0{,}54$, $\log 11$, $\cos 10^\circ$,

$\sin 18^\circ$, $\operatorname{tg} 40^\circ$, $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

VIII. Badanie funkcji

14. Zbadać przebieg zmienności i narysować wykresy następujących funkcji:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 25}{(x + 1)^2}, \qquad y = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1},$$

$$y = x\sqrt{\frac{x}{2 - x}}, \qquad y = x\sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}},$$

$$y = x^2\sqrt{36 - x^2}, \qquad y = x\sqrt{\frac{x}{x + 4}},$$

$$y = \cos^2 x + 2\sin^2 x, \qquad y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$y = \sin^2 x \cos x, \qquad y = \sin 2x + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

$$y = x^2 \ln x, \qquad y = \ln^3 x - 3\ln x,$$

$$y = \frac{1}{\ln x}, \qquad y = \ln x + \frac{1}{\ln x},$$

$$y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 1}, \qquad y = e^{\frac{x}{x-1}},$$

$$y = e^{\frac{x}{x^2-1}}, \qquad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

$$y = xe^{\frac{1}{x}}, \qquad y = \frac{x}{\ln x}$$

$$y = (1 + x)\, e^{\frac{1}{x}}, \qquad y = (x - 1)\, e^{\frac{x}{x-1}},$$

$$y = x\, e^{\frac{x}{x-1}}, \qquad y = (x - 2)^2 \ln(x - 2),$$

$$y = (x+2)e^{\frac{x}{x+2}} \quad , \quad y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}} \quad .$$

15. Znaleźć stosunek promienia R podstawy i wysokości H walca mającego przy danej objętości najmniejszą powierzchnię całkowitą.

16. Na okręgu dany jest punkt A. Poprowadzić cięciwę BC równolegle do stycznej do okręgu w punkcie A tak, aby pole trójkąta ABC było największe.

17. W dany odcinek koła wpisać prostokąt o największym polu.

18. Znaleźć kąt przy wierzchołku przecięcia osiowego stożka o najmniejszej powierzchni bocznej, opisanego na danej kuli.

19. W daną półkulę o promieniu r wpisano stożek, którego wierzchołek leży w środku kuli, a podstawa jest równoległa do podstawy półkuli. Zbadać przebieg zmienności objętości V tego stożka.

20. Dla jakiego punktu P paraboli $y^2 = 2px$ odcinek normalnej w punkcie P, znajdujący się wewnątrz krzywej, ma najmniejszą długość.

21. W odcinek paraboli $y^2 = 2px$ ograniczony prostą $x = 2a$ wpisać prostokąt o największym polu.

22. Na jakiej wysokości nad środkiem okrągłego stołu o promieniu r należy zawiesić żarówkę, aby brzeg stołu był najlepiej oświetlony.

IX. Podstawowe struktury algebraiczne

23. Wykazać, że zbiór wszystkich liczb zespolonych $a + bi$, gdzie a, b są dowolnymi liczbami wymiernymi nie równymi zeru równocześnie, jest grupą ze względu na mnożenie.

24. Wykazać, że zbiór wszystkich liczb postaci $a + b\sqrt{5}$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami całkowitymi, jest pierścieniem.

25. Wykazać, że zbiór wszystkich liczb postaci $a + b\sqrt{5}$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami wymiernymi, jest ciałem.

26. Czy zbiór wszystkich liczb postaci $a + b\sqrt[3]{2}$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami wymiernymi, jest ciałem ?

X. Liczby zespolone

27. Obliczyć:

$$(2 - 5i)^2, \qquad (2 - 5i)^{10}, \qquad (1 + i)^{10},$$

$$\sqrt{2 - 4i}\,, \qquad \sqrt[3]{1}\,, \qquad \sqrt[5]{i}\,,$$

$$\sqrt{-1}\,, \qquad \sqrt[6]{-81}\,, \qquad \sqrt[10]{1 + 3i}\,,$$

28. Znaleźć zbiór punktów płaszczyzny określonych następująco:

$$A = \{z: \ |z| \leq 6\} \cup \{z: \ |\mathrm{Re}\, z| < 3\}$$

$$B = \{z: \ 2 \leq |\mathrm{Re}\, z| \leq 4\} \cap \{z: 1 \leq |\mathrm{Jm}\, z| < 3\}$$

$$C = \{z: |z-2| < 2\} \cup \{z: |z+i| < 1\}$$

$$D = \{z: \ 2 \leq |z-1-2i| \leq 4\} \cap \{z: 1 \leq |z+1-2i| \leq 5\}$$

$$(\bar{z})^2 - z^2 + 4i = 0$$

29. Znaleźć miejsca zerowe wielomianów i rozłożyć te wielomiany na czynniki liniowe:

$x^3 \pm 4x$, $\quad 3x^2 + 5x + 5$, $\quad x^4 - 16$,

$x^6 + x^3$, $\quad x^8 - 32x^4 + 256$, $\quad (x^2 + 4x + 5)^4$,

XI. Przestrzeń liniowa

30. Niech X będzie dowolnym zbiorem, E - przestrzenią wektorową nad ciałem R. Oznaczmy przez V zbiór wszystkich odwzorowań zbioru X w E. W zbiorze V określamy działania:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Wykazać, że zbiór V z tak określonymi działaniami tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem R. Co oznacza liniowa niezależność elementów przestrzeni V.

31. Wykazać, że liczby $1, \sqrt{2}$ są liniowo niezależne nad ciałem liczb wymiernych.

32. Wyznaczyć bazę przestrzeni liniowej wielomianów stopnia $\leqslant n$ nad ciałem R.

33. Wykazać, że w przestrzeni $V_3(R)$ wektory $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(4, 4, 5)$ są liniowo niezależne.

34. Zbadać, czy w przestrzeni funkcji ciągłych na R funkcje $f(x) = 2^x - 1$ $g(x) = 3^x$ są liniowo zależne.

35. Niech V będzie zbiorem wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych. W zbiorze V określamy działania:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

$$\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\} \qquad \lambda \in R$$

Wykazać, że $(V, + ; \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem R.

XII. Odwzorowania liniowe

36. Opisać sens geometryczny następujących przekształceń liniowych $R^2 \longrightarrow R^2$

a/ $(x,y) \longrightarrow (y, x)$

b/ $(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$

c/ $(x,y) \longrightarrow (x,0)$

d/ $(x,y) \longrightarrow (x,x)$

i podać macierz tego przekształcenia.

37. Wyznaczyć macierz reprezentującą odwzorowanie liniowe

a/ $A: R^3 \longrightarrow R^3$, w R^3 bazą jest baza kanoniczna.

$A(1,0,0) = (1,2,1)$
$A(0,1,0) = (3,1,1)$
$A(0,0,1) = (0,0,3)$

b/ $T: R^2 \longrightarrow R^3$

$T(1,2) = (1,2,3)$
$T(2,1) = (0,1,2)$

wiedząc, że w R^2 bazą jest baza kanoniczna, a w R^3 bazę stanowi układ wektorów: $\bar{e}_1' = (1,0,0)$

$\bar{e}_2' = (1,1,1)$

$\bar{e}_3' = (1,1,0)$

c/ $A: R^2 \longrightarrow R^3$, w R^2 i R^3 bazą są bazy kanoniczne

$A(1,1) = (0,1,2)$
$A(-1,1) = (2,1,0)$

d/ $A: R^3 \longrightarrow R^3$, w R^3 bazą jest baza kanoniczna

$A\ (1,0,0) = (1,2,1)$
$A\ (0,0,1) = (0,0,3)$
$A\ (0,1,0) = (3,1,1)$

XIII. Macierze

38. Niech

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a/ wykazać $\mathcal{J}^2 = -J$

b/ wykazać, że macierze $z = \alpha J + \beta \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

dodają się i mnożą tak jak liczby zespolone.

39. Obliczyć A^n, $n \in N$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

40. Obliczyć iloczyn macierzy AB, BA, (AB)X i A(BX), gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

41. Dany jest wielomian $P(x) = x^2 - 5x + 6$ i macierz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Obliczyć $P(A)$.

42. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sprawdzić równość

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

XIV. Wyznaczniki i układy równań

43. Obliczyć wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

44. Obliczyć rząd macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

45. Rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z - 2u = 6 \\ 2x - y - 2z - 3u = 8 \\ 3x + 2y - z + 2u = 4 \\ 2x - 3y + 2z + u = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 3z + 4u = -5 \\ x - 2z + 3u = -4 \\ 3x + 2y - 5u = 12 \\ 4x + 3y - 5z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ x + y + 2z + 3u = 0 \\ x + 5y + z + 2u = 0 \\ x + 5y + 5z + 2u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 3u = 0 \\ 3x - y + 11z - 13u = 0 \\ 4x + 5y - 7z - 2u = 0 \\ 3x - 25y + z + 11u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + z + u = 1 \\ x - 2y + z - u = -1 \\ x - 2y + z + 5u = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z + u + v = 7 \\ 3x + 2y + z + u - 3v = -2 \\ y + 2z + 2u + 6v = 23 \end{cases}$$

46. Znaleźć macierz X spełniającą równanie:

a/ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

b/ $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

c/ $XA = B \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

47. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

48. Znaleźć wartości własne macierzy A, A^{-1}, A^2 dla macierzy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

49. Jaką postać przyjmie równanie hiperboli równoosiowej $x^2 - y^2 = a^2$, jeżeli obrócimy układ o kąt $\varphi = -45^\circ$.

50. Znaleźć równanie krzywej $x^2 - 2xy + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$ po obrocie układu współrzędnych o kąt 45°.

51. Jakie krzywe przedstawiają równania:

a/ $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 16x - 12y + 3 = 0$

b/ $17x^2 - 18xy - 7y^2 + 34x - 18y + 7 = 0$

c/ $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x + 10y = 0$

d/ $6x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 18y + 14 = 0$

e/ $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

f/ $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$

g/ $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$

h/ $x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 6$

i/ $2x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 = 3$

j/ $7x^2 - 4xy + 6y^2 - 4yz + 5z^2 = 18$

k/ $x^2 + 4xy - 8xz - 2y^2 - 4yz + z^2 = 6$

XV. Przestrzeń wektorowa unormowana

52. Niech W będzie przestrzenią wektorową złożoną z wszystkich wielomianów stopnia $\leqslant$ n /n ustalone/ o współczynnikach rzeczywistych. Wykazać, że odwzorowanie

φ: W x W $\longrightarrow$ R określone następująco $\varphi(f,g) = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$,

gdzie: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$

$g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$, jest iloczynem skalarnym w W. Zinterpretować w tym przypadku nierówność Schwarza.

53. Jaki kąt tworzą wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ jeśli wiadomo, że

$$\begin{cases}(\bar{a} + 3\bar{b}) \perp (7\bar{a} - 5\bar{b}) \\ (\bar{a} - 4\bar{b}) \perp (7\bar{a} - 2\bar{b})\end{cases}, \quad \begin{cases}(4\bar{a} - 5\bar{b}) \perp (2\bar{a} + \bar{b}) \\ (7\bar{a} - 2\bar{b}) \perp (\bar{a} - 4\bar{b})\end{cases}$$

54. Wykazać, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów przekątnych równa się sumie kwadratów boków równoległoboku.

55. Znaleźć wektor $\bar{x}$ prostopadły do wektorów $\bar{a}=(2,3,-1)$, $\bar{b}=(1,-2,3)$ i spełniający warunek $\bar{x}\cdot(2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) = -6$

56. Dane są trzy wektory $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$. Znaleźć wektor $\bar{x}$ spełniający warunki $\bar{x} \cdot \bar{a} = -5$, $\bar{x} \cdot \bar{b} = -11$, $\bar{x} \cdot \bar{c} = 20$.

57. Wykazać, że jeżeli wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ spełniają warunek $\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c}$, to dla każdego punktu $O \in R^3$ punkty A,B,C należące do R^3 takie, że $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$ leżą na jednej prostej, a wektory $\bar{a} \times \bar{b}$, $\bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{c} \times \bar{a}$ są równoległe.

58. Obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\bar{p}$ i $\bar{q}$ wiedząc, że pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\bar{a} = 2\bar{p} + 4\bar{q}$ i $\bar{b} = \bar{p} - \bar{q}$ jest równe 12.

59. Dane są wierzchołki trójkąta $A(-3,1,-1)$, $B(6,-2,-5)$, $C(1,-2,-1)$. Obliczyć długość wysokości opuszczonej z wierzchołka B na bok AC.

60. Punkty $A(2,1,-1)$, $B(4,2,1)$, $C(2,4,3)$ są wierzchołkami równoległoboku. Znaleźć wektor wysokości $\overline{CK}$ tego równoległoboku opuszczonej na bok AB.

61. W punkcie $A(3,-1,5)$ przyłożono siłę o współrzędnych $\bar{F}(2,5,-4)$. Wyznaczyć moment tej siły względem punktu $B(1,-2,3)$.

62. Dane są trzy siły $\bar{a} = (3,2,-1)$, $\bar{b} = (-4,1,3)$, $\bar{c} = (2,-1,-3)$ przyłożone w punkcie $M(-1,4,-2)$. Obliczyć długość i cosinusy kierunkowe momentu wypadkowej tych sił względem punktu $N(2,3,-1)$.

63. Wykazać, że punkty $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ leżą w jednej płaszczyźnie.

64. Dany jest czworościan o wierzchołkach w punktach $A(3,1,1)$, $B(1,4,1)$, $C(1,1,7)$, $D(3,4,9)$. Obliczyć jego objętość oraz wysokość poprowadzoną z wierzchołka D.

XVI. Prosta i płaszczyzna w przestrzeni

65. Dana jest prosta

$$\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0 \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

Zapisać jej równanie w postaci kanonicznej.

66. Jakie kąty tworzy prosta

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

z osiami układu współrzędnych.

67. Znaleźć punkty przecięcia prostej

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{1}$$

z płaszczyznami układu współrzędnych.

68. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(2,-1,1)$ i prostopadłej do prostej

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

69. Znaleźć kąt między prostymi

$$l_1\colon\ x = 2t, \quad y = 1-t, \quad z = t$$

$$l_2\colon \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0\ , \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0\ . \end{cases}$$

70. Sprawdzić, że proste

$$l_1\colon \begin{cases} 2x + y - z = 0\ , \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

i

$$l_2\colon \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0\ , \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

są równoległe.

71. Wykazać, że proste

$$l_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$$

i

$$l_2: \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 , \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$$

są prostopadłe.

72. Znaleźć punkt przebicia płaszczyzny $2x+3y+z-1 = 0$ prostą

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} .$$

73. Znaleźć rzut punktu $A(1,-2,1)$ na prostą

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+8}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

74. Znaleźć punkt B symetryczny do punktu $A(2,-1,3)$ względem prostej $x = 3t,\ y = 5t - 7,\ z = 2t + 2.$

75. Znaleźć rzut punktu $A(2,3,-6)$ na płaszczyznę $x + 2y + z + 4 = 0.$

76. Znaleźć punkt B symetryczny do punktu $A(5,2,-1)$ względem płaszczyzny $2x - y + 3z + 23 = 0.$

77. Znaleźć odległość punktu $A(2,-1,1)$ od prostej

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} .$$

78. Dane są dwie proste równoległe

$$l_1:\ \frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{3},$$

$$l_2:\ \frac{x}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}.$$

Znaleźć odległość między nimi.

79. Znaleźć równania dwusiecznych kątów zawartych między prostymi

$$l_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1},\qquad l_2:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}.$$

80. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(1,2,1)$ i przechodzącej przez dwie proste

$$l_1:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{2},$$

$$l_2:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{3}.$$

81. Napisać równanie prostej przecinającej proste

$l_1:\ x = t+1,\ \ y = 2t+1,\ \ z = t+2$

i

$l_2:\ x = 2\lambda,\ \ y = \lambda+1,\ \ z = \lambda+9.$

pod kątem prostym.

82. Znaleźć równanie prostej l przechodzącej przez punkt $A(1,1,1)$, przecinającej prostą l_1: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ i prostopadłą do prostej l_2: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$.

83. Znaleźć odległość między prostymi skośnymi

$$l_1: \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1} \quad \text{i} \quad l_2: \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

84. Znaleźć odległości między prostymi

$$l_1: x=2t-4, \quad y=4-t, \quad z = -2t-1,$$

$$l_2: \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5}.$$

85. Znaleźć rzut prostej l_1: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ na płaszczyznę π poprowadzoną przez prostą

$$l_2: \begin{cases} 2x + 3y + z - 8 = 0, \\ x + 4y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

równolegle do prostej l_1.

86. Znaleźć równanie płaszczyzny, w której leżą proste l_1: $x = y = z$ i l_2: $2x = y = -z$.

87. Dany jest punkt $A(1,2,3)$ i dwie płaszczyzny

$$\pi_1: x + y - z = 3, \quad \pi_2: 2x + z = 10.$$

Z punktu A poprowadzono proste prostopadłe do płaszczyzn π_1 i π_2 i przecinające je w punktach B i C. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkty B i C.

88. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(1,0,-1)$ równoległej do płaszczyzny : $3x-2y-3z+3=0$ i przecinającej prostą

$$l: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{2}.$$

XVII. Przestrzeń metryczna

89. Niech $\rho : R^2 \times R^2 \longrightarrow R$ będzie określone wzorem

$$\rho(x,y) = \begin{cases} |x_2-y_2| & \text{gdy } x_1 = y_1 \\ |x_2|+|y_1-x_1|+|y_2| & \text{gdy } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$.

Sprawdzić, czy ρ jest metryką w R^2. Narysować kule o środku $(1,1)$ i promieniach: a/ $r = \frac{1}{2}$,

b/ $r = 2$.

90. Niech X będzie dowolnym zbiorem i $\rho : X \times X \longrightarrow R$ określone wzorem

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Wykazać, że ρ jest metryką. Przyjąć $X = R^2$ i narysować kule o środku (x_0,y_0) i promieniach a/ $r = \frac{1}{2}$,

b/ $r = 1$,

c/ $r = 2$.

Uwaga: Przestrzeń X z tak określoną metryką nazywa się przestrzenią dyskretną, metryka ρ – metryką dyskretną.

91. W przestrzeni $X_1 = R$ określona jest metryka dyskretna ϱ_1. W przestrzeni $X_2 = R$ określona jest metryka naturalna ϱ_2, tzn.

$$\varrho_2(x_2,y_2) = |x_2 - y_2| .$$

Niech $X = X_1 \times X_2$ i $\varrho : X \times X \longrightarrow R$ określone wzorem

$$\varrho\big((x_1,x_2),\ (y_1,y_2)\big) = \varrho_1(x_1,y_1) + \varrho_2(x_2,y_2).$$

Zbadać, czy ϱ jest metryką w X i narysować kule o środku w $(0,0)$ i promieniach a/ $r = \frac{1}{2}$;
b/ $r = 2$.

92. Zbadać, czy istnieją granice

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big), \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big),$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

jeśli

a/ $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

b/ $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} + y\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

93. Odwzorowanie $f: R \longrightarrow R^2$ określone jest wzorem $f(t) = (t, 2t)$. Zbadać ciągłość tego odwzorowania z definicji w punkcie $t_0 = 1$. Sprawdzić, czy odwzorowanie f jest liniowe.

94. Odwzorowanie $f: R^2 \longrightarrow R$ określone jest wzorem $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$. Zbadać ciągłość tego odwzorowania z definicji w punkcie $(0,1)$. Sprawdzić, czy odwzorowanie f jest liniowe.

XVIII. Różniczkowanie odwzorowań

95. Dane odwzorowanie $f: R^3 \longrightarrow R$ określone wzorem

$$f(x,y,z) = x^3 + xyz - y^2.$$

Wyznaczyć pochodną kierunkową odwzorowania f w punkcie $A(2,-1,3)$ w kierunku wektora $\bar{v}(3,4,-2)$.

96. Wykazać, że pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ w każdym punkcie elipsy $2x^2 + y^2 = a^2$ w kierunku normalnej do elipsy w tym punkcie równa się zeru.

97. Wyznaczyć punkty, w których pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$ w dowolnym kierunku równa się zeru.

98. Obliczyć pochodną funkcji wektorowej:

a/ $\bar{r}(t) = (\sin t, \cos t, \operatorname{tg} t)$ w punkcie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$,

b/ $\bar{r}(t) = \left(e^{t^2} \cos t^2 + e, e^{t+2} \sin t, e^{t^2} + \pi\right)$, $t = 0$

c/ $\bar{r}(t) = \left(\operatorname{arctg}^2 \sqrt[3]{t}, \log \frac{t^2+1}{3}, \sqrt[4]{e^{t + \frac{1}{t}}}\right)$.

99. Obliczyć pochodną rzędu pierwszego następujących odwzorowań

a/ $f: R \longrightarrow R^3$ określone wzorem $f(x) = \left(x^2, \cos 2x, x^3\right)$

b/ $f: R^3 \longrightarrow R^3$ " " $f(x,y,z) = \left(x^y, (x+y)^z, (\sin x \cdot y)^{\cos 3z}\right)$

c/ $f: R^3 \longrightarrow R^3$ " " $f(x,y,z) = \left(xyz, xy - xyz, y - xy\right)$,

d/ $f: R \longrightarrow R^3$ " " $f(x) = \left(x^x, \operatorname{arc} \cos^2 x, \frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}}\right)$,

e/ $f: R^2 \longrightarrow R^3$ " " $f(x,y) = \left(y^x, x^y, xy\right)$,

f/ $f: R^3 \longrightarrow R$ " " $f(x,y,z) = \log_{\sqrt{\pi}} \frac{\sin^3 \frac{xy}{z}}{x^2+y^2+z^2}$,

g/ $f: R^2 \longrightarrow R^2$ " " $f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{y}}, \ln \frac{y}{x}\right)$,

h/ $f: R^3 \longrightarrow R^2$ " " $f(x,y,z) = \left(e^{x+y^2+z^2}, \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{x}{yz}}\right)$

100. Obliczyć pochodną odwzorowania złożonego $F = f \cdot g$, gdzie:

a/ $g: R^3 \longrightarrow R^2$ określone wzorem $g(x,y,z) = \left(x^2+y^2+\frac{1}{z}, \frac{xy}{z}\right)$

$f: R^2 \longrightarrow R$ " " $f(u,v) = \frac{u}{v}$

b/ $g: R \longrightarrow R^2$ " " $g(x) = \left(\frac{1}{x}, \sqrt{x}\right)$

$f: R^2 \longrightarrow R$ " " $f(u,v) = \operatorname{tg}\left(3u^2 + 2v\right)$

c/ $g: R^2 \longrightarrow R^2$ określone wzorem $g(x,y) = \left(\frac{x}{y},\ 3x - 2y\right)$

$f: R^2 \longrightarrow R$ " " $f(u,v) = u^2 \ln v$

d/ $g: R^3 \longrightarrow R^2$ " " $g(x,y,z) = \left(x+y+z,\ \sin \frac{xy}{z}\right)$

$f: R^2 \longrightarrow R^3$ " " $f(u,v) = \left(u^2+v^2,\ \frac{u}{v},\ u \cdot v\right)$

e/ $g: R \longrightarrow R^3$ " " $g(x) = \left(x^2 \ln x,\ e^{x^2},\ \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

$f: R^3 \longrightarrow R^2$ " " $f(u,v,w) = \left(uvw,\ \frac{u+v}{u-w}\right)$

101. Pokazać, że $z = yf(x^2 - y^2)$, gdzie f jest dowolną różniczkowalną funkcją, spełnia równanie

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz .$$

102. Pokazać, że funkcja $z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, gdzie f jest dowolną różniczkowalną funkcją, spełnia równanie

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz .$$

103. Wykazać, że $f: R^2 \longrightarrow R$ określone wzorem

$$f(x,y) = |x| + |y|$$

nie jest różniczkowalne w punkcie $(0,0)$.

104. Wykazać, że jeżeli $f: R^n \longrightarrow R$ spełnia warunek

$$|f(x)| \quad \|x\|^2 ,$$

to f jest różniczkowalne w zerze.

105. a/ Wyznaczyć jakobian odwzorowania f: $R^3 \longrightarrow R^3$ w punkcie (1,1,1)

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = xyz \\ f_2(x,y,z) = xy - xyz \\ f_3(x,y,z) = y - xy \, , \end{cases}$$

b/ Wyznaczyć jakobian odwzorowania f: $R^4 \longrightarrow R^4$

$$f_1(x,y,z,t) = \frac{x - vt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$f_2(x,y,z,t) = y$$

$$f_3(x,y,z,t) = z$$

$$f_4(x,y,z,t) = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \, .$$

XIX. Różniczka odwzorowania

106. Znaleźć:

a/ $d_{(1,1)}(e^{xy})\left(\frac{15}{100}, \frac{1}{10}\right)$,

b/ $d_{(3,4)}\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right)$,

c/ $d^k_{(1,1,1)}\left(\sqrt[z]{\frac{x}{y}}\right)$ dla $k = 1,2$.

107. Znaleźć przybliżenia liczb:

— $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$,

$\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$,

— $\dfrac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0{,}98 \sqrt[4]{(1{,}05)^3}}}$.

108. Funkcję $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ rozłożyć za pomocą wzoru Taylora w otoczeniu punktu $P_0\ (-2,1)$.

109. Funkcję $f(x,y) = e^x \sin y$ rozłożyć za pomocą wzoru Taylora w otoczeniu punktu $O(0,0)$ dla $n = 3$ /bez reszty/.

110. Stosując wzór Taylora dla $n = 2$ znaleźć przybliżenia liczb:

$\sqrt{1{,}03}$, $\sqrt[3]{0{,}98}$, $(0{,}95)^{2{,}01}$.

111. Znaleźć drugą pochodną funkcji uwikłanej, określonej równaniem

a/ $x^2 + xy + y^2 = 3$ w punkcie $(0,1)$,

b/ $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ w punkcie $(0,1)$.

112. Dla funkcji uwikłanej, określonej równaniem:

$x + y + z = e^{-(x+y+z)}$ obliczyć:

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} .$$

113. Pod jakim kątem przecinają się krzywe:

a/ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ i $xy = 1$,

b/ $x^2 + y^2 = 1$ i $y^2 = 2x$.

114. Znaleźć równania wspólnych stycznych do elipsy $4x^2 + 9y^2 = 180$ i paraboli $y^2 = \frac{20}{3} x$.

115. Znaleźć równania wspólnych stycznych do paraboli $y^2 = 30x$ i do okręgu $x^2 + y^2 = 64$.

XX. Ekstrema

116. Zbadać ekstrema następujących funkcji uwikłanych:

a/ $x^3 + y^3 = 3axy$,

b/ $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0$,

c/ $x^3 + x^2 + 3y^3 - y - 2 = 0$.

117. Wyznaczyć ekstrema funkcji:

a/ $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$,

b/ $z = e^{2x} (x + y^2 + 2y)$,

c/ $z = xy (a - x - y)$,

d/ $z = e^{-(x^2+xy+y^2)}$,

e/ $z = e^{-2x^2+xy+y^2}$,

f/ $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

g/ $z = xy \ln(x^2 + y^2)$,

h/ $u = xyz(4 - x - y - z)$.

118. Wyznaczyć najmniejszą odległość prostej $x-y-2 = 0$ od paraboli $y = x^2$.

119. Na płaszczyźnie Oxy znaleźć punkt $P(x,y)$, dla którego suma kwadratów odległości od trzech prostych: $x = 0$, $y = 0$ i $x - y + 1 = 0$ jest ekstremalna.

120. Liczbę dodatnią a przedstawić w postaci trzech takich składników dodatnich, aby ich iloczyn był największy.

121. Na powierzchni stożkowej $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ znaleźć punkt, którego kwadrat odległości od punktu $A(2,2,0)$ jest najmniejszy.

122. Na elipsoidzie trójosiowej $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ znaleźć punkt, którego kwadrat odległości od punktu $A(1,2,0)$ jest najmniejszy.

123. Na płaszczyźnie $3x - 2z = 0$ znaleźć taki punkt, aby suma kwadratów jego odległości od punktów $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ była najmniejsza.

XXI. Ekstrema warunkowe

124. Wyznaczyć ekstremum funkcji przy warunkach

a/ $f(x,y)=xy$ przy warunku $x^2+y^2=2a^2$, $a>0$,

b/ $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ " " $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$, $a>0$,

c/ $f(x,y,z)=xyz$ " " $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$,

d/ $f(x,y,z)=xy+yz$ " $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y+z=2 \end{cases}$;

e/ $f(x,y,z,t)=x+y+z+t$ " $xyzt=c^4$
$x>0$, $y>0$, $z>0$,
$t>0$, $c>0$.

125. Znaleźć największą wartość iloczynu $u=xyzt$ nieujemnych liczb x,y,z,t, których suma ma stałą wartość $x+y+z+t=4c$.

126. Spośród wszystkich trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć ten, którego pole S jest największe. /skorzystać ze wzoru Herona/.

XXII. Całka nieoznaczona

127. Obliczyć:

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1}\,dx \;; \quad \int \frac{x}{1 + x^4}\,dx \;; \quad \int \frac{dx}{x \ln x} \;;$$

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\,dx \;; \quad \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\,dx \;; \quad \int x^3 \ln^2 x\,dx \;;$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx \;; \quad \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \;; \quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx \;;$$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx \;; \quad \int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\,dx \;; \quad \int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1 + \ln x}} \;;$$

$$\int \cos ax \cos bx\,dx \;; \quad \int e^{\alpha x} \cos \beta x\,dx \;; \quad \int x^2 \ln x\,dx \;;$$

$$\int \sin 2x \cos 3x\,dx \;; \quad \int \sin ax \sin bx\,dx \;; \quad \int x \ln x\,dx \;;$$

$$\int \frac{1}{x^2} \operatorname{arc\,tg} x\,dx \;; \quad \int \operatorname{ctg}(2x - 5)\,dx \;; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x}} \;;$$

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x} \;; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 7x^2}} \;; \quad \int \frac{x\,dx}{3x^2 + 5} \;;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 3}} \;; \quad \int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5} \;; \quad \int \operatorname{tg}^n x\,dx \;;$$

$$\int tg^2x\,dx\ ;\quad \int tg^3x\,dx\ ;\quad \int \arcsin x\,dx\ ;$$

$$\int \ln x\,dx\ ;\quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx\ ;\quad \int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}\ ;\quad \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x}}\ ;\quad \int \frac{dx}{\sqrt{5-7x^2}}\ ;$$

$$\int tg(3x+5)dx\ ;\quad \int \frac{dx}{x(\ln^2 x-\ln x+1)}\ ;\quad \int \frac{dx}{(x-a)^6}\ ;$$

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx\ ;\quad \int x\sqrt{1+4x^2}\,dx\ ;\quad \int \frac{dx}{a^2+b^2+x^2}\ ;$$

$$\int \frac{x\,dx}{3x^2+5}\ ;\quad \int \frac{x^2\,dx}{x^6-10x^3+9}\ ;\quad \int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\ ;\quad \int \frac{dx}{x(1+x^2)}\ ;\quad \int \frac{x}{x^3+1}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{x^3+x}{x^4+2x^2+5}\,dx\ ;\quad \int \frac{x^5\,dx}{(x^2+1)^3}\ ;\quad \int \sqrt{x-x^2}\,dx;$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}\ ;\quad \int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2-1}}\ ;\quad \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}\ ;$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad ; \quad \int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x}}$$

$$\int \frac{dx}{-x^2 + (a+b)x - ab} \quad ; \quad \int \frac{dx}{x^2 - x} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$\int x\sqrt{x^2 + 2x + 3}\,dx \quad ; \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\cos x} \quad ;$$

$$\int \frac{\sqrt{3\ln^2 x + 2\ln x + 1}}{x}\,dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \quad ;$$

$$\int \frac{dx}{4e^x + 9e^{-x}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{3 + \cos x} \quad ; \quad \int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\,dx \quad ;$$

$$\int \frac{dx}{2 - 3\sin x} \quad ; \quad \int \sqrt{x^2 - 1}\,dx \quad ; \quad \int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\,dx \quad ;$$

$$\int (\arcsin x)^2\,dx \quad ; \quad \int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$$

$$\int \frac{2 + e^{2x} + e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}\,dx \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx \quad ; \quad \int \operatorname{tg} x\,dx \quad ;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} ; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x + \mathrm{tg}^2 x} ; \quad \int \sqrt{e^x + 1}\, dx ;$$

$$\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}} ; \quad \int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} ; \quad \int \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2-1)^2} dx$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt[4]{2x + 3}} ; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x + a}} ; \quad \int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} dx ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x^2}} ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{x + 1}}$$

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)(5 - \arcsin^2 x)} ; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{2 + 5\mathrm{tg}^2 x}} ;$$

$$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x + 1}}\, dx ; \quad \int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{3 - \cos^2 x}} ;$$

$$\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{-e^{2x} + e^x + 1}} ; \quad \int \sqrt{\frac{x - 1}{x - 2}} \frac{dx}{(x-1)^2} ;$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x} - 1} dx ; \quad \int \frac{(8x + 3)\, dx}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}} ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{7 - 6x - x^2}} ; \quad \int \sqrt{6x - x^2}\, dx$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}\ ; \qquad \int \sqrt{3x^2+10x+9}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}\ ; \qquad \int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx\ ;$$

$$\int x\sqrt{6+x-x^2}\,dx\ ; \quad \int (2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}\ ; \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}\ ;$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-6x-1}}\ ; \qquad \int \frac{\ln x\ dx}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\ .$$

XXIII. Całka Riemanna

128. Podać definicję całki Riemanna w przypadku $n = 2$ i $n = 3$ oraz podać ich interpretację geometryczną.

129. Korzystając z definicji obliczyć:

a/ $\int\limits_0^1 x\,dx$, b/ $\int\limits_0^1 x^2 dx$.

130. Korzystając z definicji całki oznaczonej obliczyć:

a/ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

b/ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \right)$

131. Obliczyć całki:

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}, \qquad \int_{-\frac{2}{5}}^{\frac{2}{5}} \frac{dx}{4 + 25x^2},$$

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{3 + 2x - x^2}, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(2x-3)\,dx}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}},$$

$$\int_{1}^{2} \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}}, \qquad \int_{3}^{4} \sqrt{x^2 - 2x - 1}\,dx,$$

$$\int_{0}^{1} x^2 \operatorname{arctg} x\,dx, \qquad \int_{0}^{2} \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\,dx,$$

$$\int_{1}^{2} x(x^2+1)e^{x^2}\,dx, \qquad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\,dx}{3 + 5\cos x}\,, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 1)\cos x \; dx\,,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx\,, \qquad \int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}}\,,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx\,, \qquad \int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(x+1)^5}}\,,$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx\,, \qquad \int_1^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\,dx$$

$$\int_0^{1} x^2\sqrt{1 - x^2}\,dx\,, \qquad \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}}\,dx\,.$$

132. Obliczyć pole figury ograniczonej liniami o równaniach $y^2 = 2x + 1$ i $x - y - 1 = 0$.

133. Obliczyć pole figury zawartej między krzywą

$$y = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{i parabolą} \quad y = \frac{1}{2}x^2 .$$

134. Obliczyć pole figury ograniczonej parabolą $y^2 = 2px$ i normalną do paraboli nachyloną do osi Ox pod kątem 135°.

135. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y^2 = -4x$, styczną do tej krzywej w punkcie $(-1,2)$ i osią Ox.

136. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y^2 = 4x$, stycznymi do krzywej w punktach $A(4,4)$, $B(4,-4)$.

137. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \sqrt{\sin x - \sin^3 x}$ i $y = 0$ dla $x \in [0, \pi]$.

138. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \sqrt{\cos x - \cos^3 x}$ i $y = 0$ dla $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

139. Wyznaczyć pole figury ograniczonej krzywą zamkniętą $y^2 = x^2 - x^4$.

140. Znaleźć pole figury ograniczonej krzywą $\varrho = a \sin 2\varphi$.

141. Znaleźć pole figury ograniczonej krzywą $\varrho = a \operatorname{tg} \varphi$, gdzie $a > 0$ i prostą $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

142. Znaleźć pole figury ograniczonej ślimakiem Pascala $\varrho = 2a(2 + \cos\varphi)$.

143. Znaleźć długość łuku krzywej

$$y = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right].$$

od $x_1 = 1$ do $x_2 = 1 + a$.

144. Znaleźć długość łuku krzywej $y = 1 - \ln\cos x$

od $x_1 = 0$ do $x_2 = \frac{\pi}{4}$.

145. Znaleźć długość łuku krzywej $y = \ln(1 - x^2)$

od $x_1 = 0$ do $x_2 = \frac{1}{2}$.

146. Znaleźć długość łuku krzywej

$$y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x} .$$

147. Znaleźć długość łuku krzywej $x = a\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$ $a > 0$

$y = a\sin t$

od punktu $(0,a)$ do punktu (x,y) .

148. Znaleźć długość pętli krzywej $x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3}$.

149. Znaleźć długość cardioidy $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

150. Znaleźć długość krzywej $y = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$

dla $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

151. Obliczyć objętość bryły otrzymanej z obrotu obszaru zawartego między krzywymi $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ dookoła osi Ox.

152. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi Ox obszaru ograniczonego krzywymi: $y^2 = -x + 4$, $y = x - 2$, $y = \frac{1}{3}x + 2$.

153. Obszar ograniczony hiperbolą $x^2 - y^2 = a^2$, $a > 0$ i prostą $y = 3a - x$ obraca się dookoła osi x. Obliczyć objętość powstałej bryły.

154. Symetryczny odcinek paraboli o podstawie a i wysokości h obraca się dookoła swojej podstawy. Obliczyć objętość powstałej bryły obrotowej.

155. Obszar ograniczony krzywymi: $y = 4$, $y = 4 - 3x$, $y = x^2$ obraca się wokół osi x. Obliczyć objętość powstałej bryły.

156. Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót dookoła osi Ox linii $y^2(x - 4) = x(x - 3)$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.

157. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi x hiperboli $x^2 - y^2 = a^2$, $a > 0$ dla $a \leqslant x \leqslant a\sqrt{2}$ wraz z rzędną końcową w p-kcie $x = a\sqrt{2}$.

158. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót dookoła osi x paraboli $3y - x^3 = 0$, dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ wraz z rzędną końcową w punkcie $x = 1$.

159. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi $0x$ krzywej $y = \sqrt{2rx - x^2}$ w przedziale $[0,2r]$.

160. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót dookoła osi x asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$ dla $t \in [0,\pi]$.

161. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi x krzywej $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$ dla $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$.

XXIV. Całki niewłaściwe

162. Obliczyć całki niewłaściwe:

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2}\, dx,$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2},$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)^2} , \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} ,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\, dx , \qquad \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx ,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \; dx , \qquad \int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx ,$$

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} , \qquad \int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad a > 0 ,$$

$$\int_0^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} , \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} ,$$

$$\int_0^{1} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx , \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 2x} ,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} , \qquad \int_0^{\pi} \frac{dx}{2\sin x+3} ,$$

$$\int_0^{1} x \ln x\, dx , \qquad \int_0^{\infty} xe^{-\sqrt{x}}\, dx .$$

163. Obliczyć długość krzywej danej równaniem

$$x = e^{-t}\cos t$$
$$y = e^{-t}\sin t \qquad 0 \leqslant t \leqslant \infty .$$
$$z = e^{-t}$$

164. Obliczyć długość łuku krzywej $\varrho = e^{-\varphi}$ dla $0 \leqslant \varphi < \infty$.

165. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią otrzymaną z obrotu krzywej $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ dookoła jej asymptoty.

166. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu krzywej $y = e^{-x^2}$ i jej asymptoty dookoła osi Oy .

167. Łuk nieskończony krzywej $y = e^{-x}$, odpowiadający dodatnim wartościom x, obraca się dookoła osi Ox. Obliczyć pole powierzchni, która przy tym powstaje.

XXV. Całki wielokrotne

168. Obliczyć całki podwójne po prostokącie:

$$\iint\limits_D \sqrt{xy}\, dx\, dy \quad , \qquad D: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant b \end{cases}$$

$$\iint\limits_D x\sin y \, dx\, dy \qquad D: \begin{cases} 1 < x < 2 \\ 0 < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iint\limits_D e^{x+y} \, dx\, dx \qquad D: \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$\iint\limits_D \frac{dx\ dy}{(x+y)^2} \qquad D: \begin{cases} 3 < x < 4 \\ 1 < y < 2 \end{cases}$$

$$\iint\limits_D x^2 y e^{xy} \, dx\, dy \qquad D: \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

169. Zmienić porządek całkowania w danych całkach:

$$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)\, dy \quad , \qquad \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy \quad ,$$

$$\int_0^r dx \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\, dy \qquad \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)\, dy \quad ,$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\, dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\, dy \quad ,$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy \;+\; \int_1^3 dx \int_0^{\frac{(3-x)}{2}} f(x,y)\,dy \;,$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x,y)\,dy \;+\; \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy \;;$$

170. Obliczyć całki podwójne:

$$\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy \qquad D: \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$$

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy \qquad D: \begin{cases} x = 2 \\ y = x \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy \qquad D: \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi \\ y = x \end{cases}$$

$$\iint_D x^2y\,dx\,dy \qquad D: \begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{2ax - x^2} \end{cases}$$

$$\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy \qquad D: \begin{cases} y = 0 \\ y = x \\ x+y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iint\limits_D (2x + 3y + 1)\, dx\, dy$$

D jest trójkątem o wierzchołkach: A $(1,3)$, B$(-1,-1)$, C$(2,-4)$.

$$\iint\limits_D \frac{x\, dx\, dy}{x^2 + y^2}$$

D: $\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = x \end{cases}$

$$\iint\limits_D (x + 2y)\, dx\, dy$$

D jest trójkątem o wierzchołkach: A$(0,0)$, B$(2,2)$, C$(-1,1)$.

$$\iint\limits_D \ln(1 + x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant R^2 \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0 \end{cases}$.

$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}$$

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x \leqslant 0, \ y \leqslant 0 \end{cases}$.

$$\iint\limits_D (h - 2x - 3y)\, dx\, dy$$

D: $\{x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

D: $\{x^2 + y^2 \leqslant Rx$.

$$\iint\limits_{D} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy \qquad D:\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ x \leqslant 0, \quad y \geqslant 0 . \end{cases}$$

$$\iint\limits_{D} xy\,dx\,dy \qquad D:\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \\ x \geqslant 0, \quad y \leqslant 0 . \end{cases}$$

171. Obliczyć całki potrójne:

$$\iiint\limits_{V} \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^2} \qquad V:\begin{cases} x \geqslant 0, \; y \geqslant 0, \; z \geqslant 0 \\ x+y+z \leqslant 1 \end{cases} .$$

$$\iiint\limits_{V} xy\,dx\,dy\,dz \qquad V:\begin{cases} z = xy, \quad x+y = 1 \\ z = 0, \quad z \geqslant 0 . \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{V} y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz \qquad V:\begin{cases} y = \sqrt{x}, \quad y = 0 \\ z = 0, \quad x+z = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} .$$

$$\iiint\limits_{V} (x\cos a\cos b + y\cos a\sin b + z\sin a)\,dx\,dy\,dz$$

$$V:\left\{ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 .\right.$$

$$\iiint\limits_{V} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \qquad V:\begin{cases} z \geqslant 0 , \\ r^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2 . \end{cases}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\, dz\,, \qquad \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz,$$

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz\,,$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\,,$$

XXVI. Zastosowania całek podwójnych i potrójnych

172. Obliczyć objętości brył ograniczonych danymi powierzchniami:

a/ $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 4,\ y = 4,\ z = x^2 + y^2 + 1$.

b/ $y = 0,\ z = 0,\ 3x + y = 6,\ 3x + 2y = 12,\ x+y+z = 6$.

c/ $z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

d/ $y = \sqrt{x},\quad y = 2\sqrt{x},\quad z = 0,\quad x + z = 6$.

e/ $z = 9 - y^2,\ 3x + 4y = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

f/ $2y^2 = x\ ,\quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1\ ,\quad z = 0$.

g/ $x^2 + z^2 = r^2,\ \frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1\ ,\quad x = 0,\ y = 0,\quad z = 0$.

h/ $x^2+y^2=R^2$, $z=\frac{x^3}{a^2}$, $z=0$, $x\geqslant 0$.

i/ $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=1$.

j/ $x^2+y^2=2ax$, $z=\frac{x^2+y^2}{a}$, $z=0$.

k/ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$, $2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

l/ $z=h\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $x^2+y^2=R^2$, $x=0$, $z=0$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

173. Za pomocą całki podwójnej obliczyć pola obszarów:

a/ $y^2=\frac{b^2}{a}x$, $y=\frac{b}{a}x$.

b/ $xy=\alpha$, $xy=\beta$, $x=a$, $x=b$, $0<\alpha<\beta$, $0<a<b$.

c/ $x+y-a=0$, $x+y-b=0$, $y=kx$, $y=mx$, $0<a<b$, $0<k<m$.

d/ $y=x$, $y=\frac{1}{2}x$, $x+y=a$, $x+3y=a$, $a>0$.

e/ $y^2=10x+25$, $y^2=-6x+9$.

f/ $xy=a^2$, $x+y=\frac{5}{2}a$, $a>0$.

g/ $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $y=0$.

h/ $(x^2+y^2)^2=2ax^3$, $a>0$.

i/ $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$.

174. Obliczyć pola wskazanych części danych powierzchni:

a/ $z^2 = x^2 + y^2$ wyciętej walcem $x^2 = 2py$.

b/ $y^2 + z^2 = x^2$ leżącej wewnątrz walca $x^2 + y^2 = R^2$.

c/ $z^2 = 4x$ wyciętej walcem $y^2 = 4x$ i płaszczyzną $x=1$.

d/ $2z = x^2 + y^2$ wyciętej walcem $x^2 + y^2 = 1$.

e/ $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ wyciętej walcem $x^2 + y^2 = Rx$.

f/ $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ wyciętej powierzchniami $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

g/ $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ i $x^2 + y^2 = 2az$, $z \geqslant 0$ /pole całkowitej powierzchni/.

175. Za pomocą całki potrójnej obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami o równaniach:

a/ $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = -h$, $z = h$.

b/ $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

c/ $ax = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $a > 0$.

d/ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z^2 = x^2 + y^2$, $(z^2 \leqslant x^2 + y^2)$.

176. Ciało jest ograniczone dwoma współśrodkowymi powierzchniami kul o promieniach r i R /R > r/. Wiedząc, że gęstość materiału jest odwrotnie proporcjonalna do odległości od środka kul i w odległości od środka równej 1 wynosi γ, znaleźć całą masę ciała.

177. Obliczyć masę walca obrotowego o promieniu R i wysokości H, jeżeli jego gęstość w dowolnym punkcie liczbowo jest równa kwadratowi odległości tego punktu od środka podstawy walca.

178. Wyznaczyć masę kuli o promieniu R, jeżeli gęstość jest proporcjonalna do sześcianu odległości od środka kuli i w odległości równej 1 wynosi γ.

179. Momenty i środki ciężkości:

a. Obliczyć momenty statyczne sześciokąta względem boku, wiedząc, że gęstość $\gamma = 1$.

b. Obliczyć współrzędne środka ciężkości figury ograniczonej górną połową elipsy opierającej się na wielkiej osi.

c. Obliczyć moment bezwładności koła względem środka wiedząc, że gęstość $\gamma = 1$.

d. Obliczyć momenty statyczne prostopadłościanu o krawędziach a, b, c względem jego krawędzi wiedząc, że gęstość $\gamma = 1$.

e. Znaleźć współrzędne środka ciężkości graniastosłupa ściętego ograniczonego płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 4$, $x + y + z = 8$.

f. Obliczyć moment bezwładności walca obrotowego o promieniu podstawy R i wysokości H względem średnicy jego podstawy wiedząc, że masa walca jest równa m.

XXVII. Elementy geometrii różniczkowej

180. Znaleźć krzywizny następujących krzywych:

a/ $f(x) = x^4 - x + 2$ w punkcie o odciętej $x = 2$,

b/ $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t^2$ dla $t = \frac{1}{2}\pi$.

181. Wykazać, że krzywizna k krzywej określonej równaniem uwikłanym $F(x,y) = 0$ wyraża się wzorem:

$$k = \frac{1}{\left(F_x'^2 + F_y'^2\right)^{3/2}} \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F'_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}$$

182. Korzystając z powyższego wzoru znaleźć krzywizny następujących krzywych:

a/ $x^2 + xy + y^2 = 3$ w punkcie $A(1,1)$,

b/ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ w wierzchołkach $A(a,0)$, $B(0,b)$.

183. W jakim punkcie paraboli $y^2 = 8x$ krzywizna równa się $0{,}128$.

184. Znaleźć równania okręgów krzywiznowych krzywych:

a/ $x(t) = 3t$, $y(t) = t^2 - 6$ dla $t = 1$,

b/ $x(t) = \sin^4 t$, $y(t) = \cos^4 t$ dla $t = \frac{1}{4}\pi$.

185. Znaleźć ewoluty krzywych:

a/ $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$,

b/ $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$.

186. Dla jakiej wartości parametru t styczna do krzywej $x = -2t$, $y = t^2 - 1$, $z = 3t^3$ jest równoległa do płaszczyzny $x - y + 3z + 1 = 0$.

187. Znaleźć równania stycznych do krzywych:

a/ $x(t) = a \cos\alpha \cos t$, $y(t) = a \sin\alpha \cos t$, $z(t) = a \sin t$, dla $t = t_0$.

b/ $x(t) = R \cos^2 t$, $y(t) = R \sin t \cos t$, $z(t) = R \sin t$, dla $t = \frac{\pi}{4}$.

188. Na krzywej $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$ znaleźć punkt, w którym styczna jest równoległa do płaszczyzny $x + 2y + z - 4 = 0$.

189. Na krzywej $x(t) = -t\cos t + \sin t$,

$y(t) = t\sin t + \cos t$,

$z(t) = t + 1$

znaleźć punkty, w których styczna jest równoległa do: a/ płaszczyzny Oxz ,

b/ płaszczyzny Oyz .

190. Wykazać, że krzywa $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^2 - t + 2$ $z(t) = t$ leży na płaszczyźnie oraz znaleźć równanie tej płaszczyzny.

191. Znaleźć równania elementów trójścianu Freneta krzywej

$$\bar{r}(t) = t\,\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k} \quad \text{dla } t=1.$$

192. Znaleźć równania: stycznej, normalnej głównej i binormalnej krzywej $r(t) = \frac{1}{4}t^4\bar{i} + \frac{1}{3}t^3\bar{j} + \frac{1}{2}t^2\bar{k}$ w punkcie $P(t) = P(x(t), y(t), z(t))$.

193. Znaleźć równanie płaszczyzny ściśle stycznej do krzywej

$$\bar{r}(t) = e^t\bar{i} + e^{-t}\bar{j} + \sqrt{2}\,t\bar{k} \quad \text{dla } t=0.$$

194. Znaleźć krzywiznę krzywej

$$\bar{r}(t) = e^t\cos t\,\bar{i} + e^t\sin t\,\bar{j} + e^t\,\bar{k}$$

w punkcie $P(t)$.

195. Znaleźć krzywiznę krzywej

$$\bar{r}(t) = \cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} + \cos h t\,\bar{k} \qquad \text{dla } t=0.$$

196. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do powierzchni:

a/ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ w punkcie $P_o(x_o, y_o, z_o)$,

b/ $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ w punkcie $P(1, 1, \frac{\pi}{4})$,

c/ $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ $u=1$, $v=-1$.

197. Znaleźć równania normalnych po powierzchni:

a/ $z = y + \ln \frac{x}{z}$ w punkcie $P(1,1,1)$,

b/ $z = x^2 + y^2$ w punkcie $P(1,2,5)$.

XXVIII. Całka krzywoliniowa niezorientowana i jej zastosowanie

198. Obliczyć:

a/ $\int_k (x^2 + y)\,ds$, gdzie k jest odcinkiem prostej od punktu $A(0,2)$ do punktu $B(2,4)$.

b/ $\int_k y e^{-x}\,ds$, gdzie k: $x = \ln(1 + t^2)$
$y = 2 \operatorname{arctg} t - t + 3$
$0 \leqslant t \leqslant 1$.

c/ $\int\limits_k xy\, ds$, gdzie k jest łukiem elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ leżącym w pierwszej ćwiartce.

d/ $\int\limits_k xy\, ds$, gdzie k dane jest równaniem $|x| + |y| = a \quad (a > 0)$.

e/ $\int\limits_k \frac{ds}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, gdzie k dane jest równaniem $\varrho = \frac{1}{\varphi}$, $\sqrt{3} \leqslant \varphi \leqslant 2\sqrt{2}$.

f/ $\int\limits_k (ax^2 + by^2 + cz^2)\, ds$, gdzie k jest odcinkiem AB, $A(0,0,0)$, $B(a,b,c)$.

g/ $\int\limits_k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, ds$, gdzie k dane jest równaniem

$$x = at\cos t$$
$$y = at\sin t$$
$$z = ct$$
$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi .$$

199. Obliczyć masę łuku krzywej $k: y = \ln x$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, jeżeli gęstość krzywej w każdym punkcie równa się kwadratowi odciętej tego punktu.

200. Obliczyć masę krzywej $k: \begin{array}{l} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{array}$ dla $t \in [0, 2\pi]$, jeżeli gęstość jej w każdym punkcie równa się kwadratowi promienia wodzącego tego punktu.

201. Obliczyć masę krzywej $k: x = at, \quad y = \frac{1}{2} at^2,$
$z = \frac{1}{3} at^3, \quad a > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$, jeżeli gęstość
$\varrho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

202. Obliczyć masę łuku krzywej

$$C: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

jeżeli gęstość w każdym punkcie równa się kwadratowi odciętej tego punktu.

203. Znaleźć masę części krzywej $x^2 + y^2 = 4, \quad x \leqslant 0,$ $y \leqslant 0$, wiedząc, że gęstość w każdym punkcie tej krzywej jest równa iloczynowi kwadratu odległości tego punktu od osi y przez odległość od osi x .

204. Znaleźć masę łuku krzywej $K: \; x = e^t \cos t ,$
$y = e^t \sin t ,$
$z = e^t, \quad t \in [0, 2\pi],$

jeżeli gęstość łuku w każdym punkcie jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu promienia wodzące tego punktu i w punkcie $P(1,0,1)$ wynosi 1 .

205. Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodne łuku cykloidy $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ $t \in [0, \pi]$ oraz moment bezwładności tego łuku względem początku układu współrzędnych.

206. Obliczyć pola części powierzchni walcowych zawartych między płaszczyzną $z = 0$ i wskazanymi powierzchniami:

a/ $x^2 + y^2 = R^2$, $\quad z = R + \frac{x^2}{R}$.

b/ $y^2 = 2px$, $\quad z = \sqrt{2px - 4x^2}$.

c/ $x^2 + y^2 = R^2$, $\quad 2Rz = xy$.

d/ $x^2 + y^2 = Rx$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

XIX. Całka powierzchniowa niezorientowana i jej zastosowanie

207. Obliczyć:

a/ $\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) ds$, $\quad S: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$.

b/ $\iint\limits_S x\, ds$, $\quad S: x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0,\ z \geqslant 0$

c/ $\iint\limits_S \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad S: x^2+y^2 = R^2,\ z=0,\ z=4$.

d/ $\iint\limits_S \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, S jest częścią powierzchni $z = xy$ wyciętej walcem $x^2 + y^2 = R^2$.

208. Znaleźć masę powierzchni kuli, jeżeli gęstość tej powierzchni w każdym punkcie jest liczbowo równa odległości tego punktu od pewnej określonej średnicy kuli.

209. Obliczyć masę powierzchni $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, jeżeli gęstość powierzchniowa $\varrho(x,y,z) = x^2 \cdot y^2$.

210. Obliczyć masę powierzchni walcowej $x^2 + y^2 = R^2$ zawartej między płaszczyznami $z = 0$, $z = H$, jeżeli w każdym jej punkcie gęstość powierzchniowa jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości tego punktu od początku układu.

211. Znaleźć masę powierzchni sześcianu jednostkowego, jeżeli w każdym jej punkcie gęstość powierzchniowa jest równa iloczynowi odległości tego punktu od trzech ścian sześcianu, wychodzących ze wspólnego wierzchołka.

212. Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnej paraboloidy $az = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

213. Obliczyć moment bezwładności jednorodnej powierzchni kuli względem jej średnicy.

XXX. Formy różniczkowe

214. Niech $f \in A_p(R^n; R)$, $g \in A_q(R^n; R)$. Podać postać $f \wedge g$ w przypadku $p = 1, 2$ i $q = 1, 2$.

215. Niech $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \in R^n$ dla $i=1,\dots n$.

Niech $g\colon \underbrace{R^n \times \dots \times R^n}_{n \text{ razy}} \to R$ będzie dane wzorem

$$g(x_1, \dots x_n) = \det \begin{pmatrix} x_{11} \dots\dots & x_{1n} \\ \vdots & \\ x_{n1} \dots\dots & x_{nn} \end{pmatrix} .$$

Wykazać, że $g \in A_n(R^n; R)$ oraz że:

$g = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ dla $n = 2$
i $n = 3$.

216. Podać bazy kanoniczne przestrzeni $A_p(R^n; R)$ dla $n = 2, 3, 4$ i wszystkich możliwych p .

217. Niech $\omega\colon \Omega \to A_p(R^n; R)$, gdzie $\Omega \subset R^n$ będzie formą różniczkową stopnia p określoną na Ω . Podać postacie kanoniczne ω dla $n = 2, 3, 4$ i wszystkich możliwych p. Obliczyć $d\omega$ dla każdej z otrzymanych form .

218. Obliczyć iloczyn zewnętrzny $\omega_1 \wedge \omega_2$ następujących form różniczkowych, gdy:

a/ $\omega_1 = \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{y}{x}\,dy$;

$\omega_2 = \sin(xy)\,dx + \cos(xy)\,dy$.

b/ $\omega_1 = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$;

$\omega_2 = \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{z}\,dz$.

c/ $\omega_1 = e^{x^2+y^2+z^2}\,dx \wedge dy \wedge dz$;

$\omega_2 = \arcsin xy\,dx + \arccos\frac{x}{y} + xy\,dz$.

219. Obliczyć $d\omega$ wiedząc, że:

a/ $\omega(x,y,z) = \cos(x+y)$,

b/ $\omega(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2}\,dy + \sqrt{1+e^{xz}}\,dx$,

c/ $\omega(x,y,z) = \sin(xy)\,dy \wedge dz + e^{x^2-y^2-z^2}\,dx \wedge dz$,

d/ $\omega(x,y,z) = \sin(xyz)\,dx \wedge dy \wedge dz$,

e/ $\omega(x,y,z) = x\,e^{-y-z^2}\,dx \wedge dz$, f/ $\omega(x,y,z) = e^{x+y+z}\,dx + dz$,

g/ $\omega(x,y,z) = x^2 dy\wedge dz + y^2 dx\wedge dz + z^2 dx\wedge dy$.

220. Znaleźć $\varphi^*\omega$, jeśli:

a/ $\varphi: R^1 \longrightarrow R^3$ dane jest wzorem:

$$\varphi(x) = (y_1, y_2, y_3) = (x, x^3, \cos x)$$

i

$$\omega(y_1, y_2, y_3) = y_2 dy_2\wedge dy_3 + dy_1\wedge dy_3 ,$$

b/ $\varphi: R^2 \longrightarrow R^3$ dane jest wzorem:

$$\varphi(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = (1,\ 2^{x_1 x_2},\ x_1 \cdot x_2)$$

i

$$\omega(y_1, y_2, y_3) = y_2 dy_2\wedge dy_3 + dy_1\wedge dy_3 ,$$

c/ $\varphi: R^3 \longrightarrow R^1$ dane jest wzorem:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = y = x_1 + x_2 + x_3 + \pi$$

i

$$\omega(y) = (1 + y^2)\,dy .$$

XXXI. Całkowanie form różniczkowych

221. Obliczyć:

a/ $\int_C xdy$, gdzie C jest odcinkiem prostej $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ od punktu $A(a,0)$ do punktu $B(0,b)$.

b/ $\int_C ydx$, gdzie C jest obwodem prostokąta utworzonego przez proste $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=4$ w kierunku dodatnim.

c/ $\int_C xydx+(y-x)dy$, gdzie C jest krzywą o równaniu $y^2=x$ od punktu $A(0,0)$ do punktu $B(1,1)$.

d/ $\int_C ydx - xdy$, gdzie C jest elipsą o równaniu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ zorientowaną dodatnio.

e/ $\int_C xdx + ydy + (x+y-1)dz$, gdzie C jest odcinkiem prostej od punktu $A(1,1,1)$ do punktu $B(2,3,4)$.

f/ $\int_C yzdx + z\sqrt{R^2-y^2}\,dy + xy\,dz$, gdzie C jest łukiem linii śrubowej:

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $\quad z=\frac{a}{2\pi}t \quad$ $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, g/ $\int\limits_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, gdzie C: $x = a\sqrt{2}\cos t$, $y = a\sqrt{2}\cos t$, $z = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

h/ $\int\limits_C \left(2xy + \frac{y}{2\sqrt{x+1}}\right)dx + \left(x^2 + \sqrt{x+1}\right)dy$, gdzie C: $y^2 = \frac{x}{3}$ od p-ktu $A(0,0)$ do p-ktu $B(3,1)$.

i/ $\int\limits_C \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$, gdzie

$$C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = \pi \end{cases} \quad t \in [1, \sqrt{2}].$$

j/ $\int\limits_C \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,dz$, gdzie

$$C: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t^2 \\ z = 1 + 2t^3 \end{cases} \quad t \in [0,1] .$$

k/ $\int\limits_C \left(e^{3y} + y^2 - 10x\right)dx + \left(3xe^{3y} + 2xy + 7x\right)dy$, gdzie C jest brzegiem obszaru, skierowanym dodatnio, ograniczonego krzywymi o równaniach:

1/ $x^2 + y^2 = 1$ dla $y \leq 0$

2/ $y = 0$ dla $1 \leq x \leq 2$

3/ $\frac{x}{2} + y = 1$ dla $0 \leq x \leq 2$

4/ $y - x = 1$ dla $-1 \leq x \leq 0$.

l/ $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy$, gdzie

C jest brzegiem obszaru, skierowanym dodatnio, ograniczonego krzywymi o równaniach:

1/ $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant e$

2/ $x = e$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

3/ $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$.

m/ $\int\limits_C (x+y)dx - (x-y)dy$, gdzie C jest brzegiem obszaru skierowanym ujemnie, ograniczonego krzywymi

1/ $y = x^2 - 1$,

2/ $x + y = 1$.

n/ $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni sześcianu ograniczonego płaszczyznami: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

o/ $\iint\limits_S (x+z)\,dz\,dx$, gdzie S jest górną stroną trójkąta o wierzchołkach:

$A(a,0,0)$, $a>0$,
$B(0,b,0)$, $b>0$,
$C(0,0,c)$, $c>0$.

p/ $\iint\limits_S xy\, dy\, dz + yz\, dz\, dx + xz\, dx\, dy$, gdzie S jest zewnętrzną powierzchnią ostrosłupa ograniczonego płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x + y + z = 1$.

r/ $\iint\limits_S xz\, dy\, dz + xy\, dz\, dx + yz\, dx\, dy$, gdzi S jest zewnętrzną powierzchnią ograniczoną walcem $x^2 + y^2 = R^2$ i płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $z=H$.

s/ $\iint\limits_S xz\, dy\, dz + x^2y\, dz\, dx + y^2z\, dx\, dy$, gdzie S jest zewnętrzną powierzchnią ograniczoną paraboloidą $z = x^2 + y^2$ i walcem $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

t/ $\iint\limits_S dy\, dz - 2\, dz\, dx + x^3 dx\, dy$, gdzie S jest częścią, leżącą w pierwszym oktancie, zewnętrznej strony zamkniętej powierzchni utworzonej z powierzchni stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i paraboloidy $x^2 + y^2 = 4z - 4$.

u/ $\iint\limits_S (x+y)\, dy\, dz + (y-z)\, dz\, dx + (x+z)\, dx\, dy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$.

w/ $\int\limits_C x^2y^3dx + dy + z\,dz$, gdzie C jest okręgiem $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, dodatnio zorientowanym .

XXXII. Zastosowanie całki krzywoliniowej zorientowanej

222. W każdym punkcie M elipsy działa siła $\bar{F}$ liczbowo równa odległości punktu M od środka elipsy i skierowana do środka.
a/ obliczyć pracę siły $\bar{F}$ przy przesunięciu się punktu materialnego P o masie m po leżącym w pierwszej ćwiartce łuku elipsy.

b/ znaleźć pracę, jeśli punkt P obejdzie całą elipsę.

223. Pole jest utworzone przez siłę odwrotnie proporcjonalną do odległości punktu jej działania od płaszczyzny (x,y) i skierowaną do początku współrzędnych. Wyznaczyć pracę pola przy ruchu punktu o masie m po odcinku MN od punktu M(a,b,c) do punktu N(2a,2b,2c).

224. Siły pola są odwrotnie proporcjonalne do odległości ich punktów działania od osi Oz, są prostopadłe do tej osi i do niej skierowane. Znaleźć pracę pola przy ruchu punktu o masie m po okręgu $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ od punktu M(1,1,0) do punktu N(0,1,1) .

225. Obliczyć pracę siły $\bar{F} = (x^2 + y^2)\bar{j}$ potrzebnej do przemieszczenia punktu materialnego o masie m po skierowanej ujemnie krzywej zamkniętej o równaniu $\rho = \sin 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

226. Dane jest pole sił $\bar{F} = (xz - z)\bar{i} + (2x+z^2)\bar{k}$. Wyznaczyć jaką pracę trzeba wykonać, pokonując siły pola wzdłuż drogi łuku $z = x^3$ od punktu $A(0,0,0)$ do punktu $B(1,0,1)$.

227. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi:

a/ elipsą o półosiach a, b ,

b/ parabolą $(x+y)^2 = 2x$ i osią Ox ,

c/ kardioidą $x = a(2\cos t - \cos 2t)$,
$y = a(2\sin t - \sin 2t)$,

d/ asteroidą $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

XXXIII. Równania różniczkowe zwyczajne

228. Rozwiązać równania różniczkowe rzędu pierwszego:

$$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$x^3y + y + xy^2\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$y - x\frac{dy}{dx} = (1+x^2)\frac{dy}{dx}, \qquad y^2 = x\frac{dy}{dx} + y,$$

$$x(1 + e^y) - e^y \frac{dy}{dx} = 0 , \quad x + y + x \frac{dy}{dx} = 0 ,$$

$$y^2 + xy^2 + (x^2 - yx^2) \frac{dy}{dx} = 0 , \quad (x + y) \frac{dy}{dx} = y ,$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2 + 2} - \frac{1}{x(y^2 + 2)} ,$$

$$xy\, e^{\frac{x}{y}} + y^2 - x^2 e^{\frac{x}{y}} \frac{dy}{dx} = 0 ,$$

$$x - \sqrt{xy} - y + \sqrt{xy} \frac{dy}{dx} = 0 ,$$

$$y + (2\sqrt{xy} - x) \frac{dy}{dx} = 0 ,$$

$$x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x} , \quad y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx} ,$$

$$x \frac{dy}{dx} - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x} ,$$

$$x \cos \frac{y}{x} (y\, dx + x\, dy) = y \sin \frac{y}{x} (x\, dy - y\, dx) ,$$

$$y' + 2xy = xe^{-x^2} , \quad y' + y\cos x = \frac{1}{2} \sin 2x ,$$

$$y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x , \quad y' - \frac{2y}{x + 1} = (x+1)^3$$

$$y' = \frac{y}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}x} + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{arctg}x\ ,$$

$$y'\cos x + y\sin x = x\cos x + \frac{1}{2}x^2\sin x\ ,$$

$$2xy' - y = \frac{3}{2}x^3, \qquad y' + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{\sin x}{1+x^2},$$

$$y' + \frac{x}{1+x^2}\,y = -\frac{1}{2x(1+x^2)}, \qquad y' = 3y + 2\ ,$$

$$y' - 2xy = x - x^3, \qquad \cos x\, y' = \cos^2 x + y\sin x\ ,$$

$$(1-x^2)y' + x(y-a) = 0\ , \qquad y' - \frac{y}{\sin x} = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$$

$$y' + \frac{xy}{x^2+a^2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\ , \qquad x^2y' - 2xy = 3y\ ,$$

$$y' + \frac{x}{1-x^2}\,y = \frac{ax}{1-x^2}\ , \qquad y' + 2y = 4x\ ,$$

$$y'\cos x + y\sin x = 1\ , \qquad y' + 3y = e^{7x}\ ,$$

$$y' - y = xe^{2x}\ , \qquad 2y' + 5y = 5\sin x + 4\cos x\ ,$$

$$y' + y = x^3 + x^2 + x + 1\ , \qquad xy' - 4y = x^2\sqrt{y}\ ,$$

$$(1-x^2)y' - xy = axy^2, \qquad y'(x^2y^3 + xy) = 1\ ,$$

$$y' + \frac{y}{x} = ay^2 \ln x , \qquad y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} = \frac{x}{2y} ,$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + 4\sqrt{y}\,x = 2xe^{-x^2} ,$$

$$y' = 9x^2y + 3(x^5 - x^2)\sqrt[3]{y^2} ,$$

$$2x - y + (4y - x)\,y' = 0 ,$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0 ,$$

$$e^x(1 + e^y) + e^y(1 + e^x)y' = 0 ,$$

$$\frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \cdot y' + \frac{2x}{y^3} = 0 ,$$

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + y + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right) y' = 0 ,$$

$$\ln y - 2x + \left(\frac{x}{y} - 2y\right) y' = 0 .$$

229. Wyznaczyć trajektorie ortogonalne do krzywych danej rodziny:

a/ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$,

b/ $y^2 = 2(x - c)$,

c/ $(y - 2)^2 = 2px$, $p \neq 0$

d/ $xy = k$, $k \neq 0$,

e/ $y = ce^{-x}$, $c \neq 0$.

230. Rozwiązać równania różniczkowe rzędu drugiego:

$x^3 y'' + x^2 y' = 1$,

$(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$,

$(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$,

$y'' + y' \mathrm{tg} x = \sin 2x$,

$2 y'' = 3e^y$, $2y'^2 = (y - 1)y''$,

$2(4 - y)y'' = 1 + y'^2$, $y y'' = 1 + y'^2$,

$y y'' = y'(a + y')$, $y'' + y' - 2y = 4x$,

$y'' + 6y' + 10y = 1 - x$; $y'' - 4y' + 4y = 4x$,

$y'' + y = a\cos x$ $a \neq 0$;

$2y'' - y' - y = 3\cos 2x - \sin 2x$,

$y'' - 2y' + 2y = 2\cos x + \sin x$,

$y'' + 9y = \sin 3x$,

$y'' + 4y = \sin x \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$,

$y'' + 4y = x\sin 2x$, $\quad y'' - 3y' + 2y = x^3 + \sin x$,

$y'' - 4y = 10e^{3x}$, $\quad y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$,

$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)\, e^{3x}$,

$y'' + y' + y = e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}$,

$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}\sin x$, $\begin{cases} y(0) = 0 , \\ y'(0) = 0 , \end{cases}$

$2y'' - 5y' - 7y = e^{2x} + \sin x$,

$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $\quad x^2y'' + xy' - y = 0$,

$x^2y'' + 9xy' + 12y = 0$, $\quad x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x$,

$x^2y'' - 4xy' + 6y = x^5$, $\quad x^2y'' + 2xy' + 2y = x^5 \ln x$,

$x^2y'' + xy' = 12\ln x$.

231. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe rzędu wyższego:

$$y^{III} - 6y^{II} + 11y^{I} - 6y = 0 ,$$

$$y^{III} - 5y^{II} + 17y^{I} - 13y = 0 ,$$

$$y^{IV} - 16y = 0 ,$$

$$y^{IV} + 4y = 0 ,$$

$$y^{III} - 2y^{II} + y^{I} = x^2 ,$$

$$y^{III} - 3y^{I} + 2y = (9x + 1)\, e^{x} ,$$

$$y^{III} + y^{II} = \sin 2x ,$$

$$y^{III} + y^{II} + y^{I} + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6 ,$$

$$y^{IV} + 5y^{II} + 4y = 3\sin x .$$

232. Rozwiązać układy równań różniczkowych rzędu pierwszego:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y , \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y ; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y , \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}, \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y - 2z - 3x \\ \frac{dy}{dt} = z + x \\ \frac{dz}{dt} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}, \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2z \\ \frac{dz}{dt} = y - 2x - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2z - y \end{cases}, \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2y + 4z \\ \frac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = x + z \end{cases}, \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - 2z \\ \frac{dz}{dt} = 2z - x + y \end{cases}$$