

**OBCIĄŻENIA ZŁOŻONE
W TEORII PLASTYCZNOŚCI**

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

**BIBLIOTEKA
MECHANIKI
STOSOWANEJ**

KOMITET REDAKCYJNY

W. Nowacki — przewodniczący

Józef Janiczek • Waclaw Olszak • Piotr Perzyna

Antoni Sawczuk • Henryk Zorski

WARSZAWA

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE



P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

MICHAŁ ŻYCKOWSKI

OBCIĄŻENIA ZŁOŻONE W TEORII PLASTYCZNOŚCI

Pracownia Nauk i Techniki

WYDAWCA: INSTYTUT

WARSZAWA 1973



539.3/.6



64974

Copyright by
Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1973

All rights reserved

PRINTED IN POLAND

438 / 73



SPIS TREŚCI

Przedmowa	11
Wykaz ważniejszych oznaczeń	12
Rozdział I. Podstawowe pojęcia teorii obciążeń złożonych	17
1. Uwagi wstępne	17
2. Szczelble analizy odkształceń plastycznych	18
2.1. Definicja poszczególnych szczelbli i przyjęta symbolika	18
2.2. Czynniki wyteżenia na szczelblu punktu ciała (P)	18
2.3. Czynniki wyteżenia na szczelblu przekroju (S)	19
2.4. Czynniki wyteżenia na szczelblu całego ciała B	22
2.5. Podstawowe czynniki wyteżenia	22
3. Proces czynny a proces bierny. Obciążanie a odciążanie	23
3.1. Definicja procesu czynnego i procesu biernego.	23
3.2. Obciążanie a odciążanie w przypadku jednego czynnika wyteżenia.	23
3.3. Obciążanie a odciążanie w przypadku kilku czynników wyteżenia	25
4. Pojęcie powierzchni granicznej	26
4.1. Przestrzeń czynników wyteżenia.	26
4.2. Typowe powierzchnie graniczne	27
5. Klasyfikacja obciążeń złożonych	29
5.1. Symbolika klasyfikacji.	29
5.2. Przykłady klasyfikacji	30
5.3. Kwestia niezależności czynników wyteżenia	32
Rozdział II. Podstawowe równania teorii plastyczności	34
6. Niezmienniki tensorów drugiego rzędu	34
6.1. Niezmienniki podstawowe tensora.	34
6.2. Niezmienniki główne tensora	36
6.3. Niezmienniki walcowe tensora	38
6.4. Niezmienniki aksjatora i dewiatora.	39
6.5. Tensor kierunków i podobieństwa	41
6.6. Parametr Lodego	41
6.7. Obliczanie wartości głównych tensora drugiego rzędu	42
6.8. Niezmienniki symetryczne	43
6.9. Niezmienniki wspólne dwóch tensorów drugiego rzędu	43
7. Naprężenia i prędkości naprężenia	44
7.1. Oznaczenia składowych stanu naprężenia	44
7.2. Transformacja naprężeń, niezmienniki	46
7.3. Warunki równowagi wewnętrznej.	47
7.4. Prędkości naprężenia	49
8. Odkształcenia i prędkości odkształcenia	50
8.1. Wektor przemieszczenia	50
8.2. Tensory odkształceń skończonych	52
8.3. Średni obrót elementu	56
8.4. Gradienty wektora przemieszczenia	57
8.5. Odkształcenia nieskończenie małe we współrzędnych walcowych i kulistych	59

8.6.	Rozkład tensora nieskończenie małego odkształcenia. Dylatacja	60
8.7.	Niezmienniki tensora nieskończenie małego odkształcenia	61
8.8.	Równania nierozdzielności odkształceń	62
8.9.	Prędkości odkształcenia	64
8.10.	Logarytmiczna miara odkształcenia	65
9.	Schematyzacje wykresu rozciągania materiału	67
9.1.	Rzeczywiste wykresy rozciągania	67
9.2.	Ciała idealnie plastyczne	68
9.3.	Schematyzacje wzmocnienia plastycznego	70
9.4.	Schematyzacje specjalne	72
9.5.	Efekt Bauschingera	73
9.6.	Modele ciał plastycznych	75
9.7.	Odształcenie plastyczne. Praca odkształcenia plastycznego	77
10.	Klasyczne teorie idealnej plastyczności	80
10.1.	Zakres sprężysty. Prawo Hooke'a	80
10.2.	Ograniczenie zakresu sprężystego	82
10.3.	Warunki idealnej plastyczności	84
10.4.	Prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci	86
10.5.	Współczynnik odkształcenia poprzecznego	87
10.6.	Teoria odkształceniowa Hencky'ego—Iliuszina	88
10.7.	Teoria płynięcia plastycznego Levy'ego—Misesa	92
10.8.	Teoria płynięcia plastycznego Prandtl'a—Reussa	95
10.9.	Zbieżność teorii odkształceniowej i teorii płynięcia plastycznego	97
10.10.	Przykład porównania wyników omówionych teorii	100
11.	Nośność graniczna	101
11.1.	Pojęcie nośności granicznej	101
11.2.	Wpływ odkształceń sprężystych	102
11.3.	Wpływ odstępstw od zasady zeszywnienia	103
11.4.	Wpływ wzmocnienia plastycznego	105
11.5.	Nośność graniczna a całkowite uplastycznienie ciała	106
11.6.	Nośność konstrukcji w przypadku obciążeń zmiennych w czasie	109
12.	Metody redukcji liczby równań teorii plastyczności	110
12.1.	Zestawienie równań klasycznej teorii idealnej plastyczności	110
12.2.	Funkcje naprężeń	111
12.3.	Równania przemieszczeniowe teorii plastyczności	113
12.4.	Parametryzacja warunku plastyczności	115
13.	Niektóre metody rozwiązywania problemów teorii plastyczności	118
13.1.	Uwagi ogólne. Hipotezy geometryczne	118
13.2.	Całkowanie wzdluż charakterystyk	118
13.3.	Metody rozwiązań sprężystych	119
13.4.	Rozwiązania statycznie dopuszczalne	120
13.5.	Rozwiązania kinematycznie dopuszczalne	124
13.6.	Rozwiązania statycznie częściowo dopuszczalne	126
13.7.	Metody wariacyjne	127
13.8.	Programowanie liniowe i nieliniowe	128
13.9.	Metoda małego parametru (zakłóceń)	129
13.10.	Modyfikowana metoda małego parametru (PLK)	131
13.11.	Aproksymacja typu Hermite'a	132
13.12.	Aproksymacja jednokrotnie optymalna	133
Rozdział III. Obciążenia złożone na szczepku P punktu ciała		134
14.	Pomocnicze przestrzenie wektorowe	134
14.1.	Przestrzenie dziewięciowymiarowe	134

14.2.	Przestrzenie sześciowymiarowe	135
14.3.	Przestrzenie pięciowymiarowe	135
14.4.	Przestrzenie trójwymiarowe	136
14.5.	Przestrzenie dwuwymiarowe — płaszczyzny	137
15.	Warunki idealnej plastyczności ciał izotropowych	139
15.1.	Uwagi ogólne	139
15.2.	Powierzchnie graniczne walcowe	139
15.3.	Powierzchnie graniczne obrotowe	143
15.4.	Inne powierzchnie graniczne w przestrzeni naprężeń głównych	145
15.5.	Wpływ ubocznych czynników wyteżenia	145
15.6.	Zakres stosowności warunków plastyczności	146
16.	Warunki idealnej plastyczności ciał anizotropowych	147
16.1.	Uogólnienia warunku Hubera — Misesa — Hencky'ego	147
16.2.	Uogólnienia warunku Burzyńskiego	148
16.3.	Uogólnienia warunku Treski — Guesta	149
17.	Postulat Druckera. Równania fizyczne teorii idealnej plastyczności	149
17.1.	Potencjał plastyczny	149
17.2.	Pojęcia cyklu w teorii plastyczności	152
17.3.	Postulat Druckera. Materiały stateczne w sensie Druckera	153
17.4.	Wnioski z postulatu Druckera	155
17.5.	Odstępstwa od postulatu Druckera	156
17.6.	Postulat Druckera a stosowanie przybliżonych warunków plastyczności	159
17.7.	Ogólne związki fizyczne teorii idealnej plastyczności	164
18.	Powierzchnie czynno-bierne przy wzmocnieniu plastycznym	164
18.1.	Jednolita krzywa wzmocnienia plastycznego	164
18.2.	Wzmocnienie izotropowe	166
18.3.	Wzmocnienie kinematyczne	170
18.4.	Wzmocnienie mieszane	173
18.5.	Ogólne wzmocnienie anizotropowe	174
18.6.	Problem tworzenia się naroży plastycznych	176
18.7.	Powierzchnie czynno-bierne w przestrzeni odkształceń	178
18.8.	Badania doświadczalne powierzchni czynno-biernych i trudności w ich interpretacji	179
18.9.	Powierzchnie graniczne wytrzymałości	182
19.	Równania fizyczne teorii wzmocnienia plastycznego	183
19.1.	Uwagi ogólne	183
19.2.	Odształceniowe teorie plastyczności	183
19.3.	Klasyczne teorie przyrostowe (płynięcia plastycznego)	185
19.4.	Uogólnienia teorii przyrostowych	190
19.5.	Teorie poślizgów wewnątrzkrystalicznych	193
19.6.	Geometryczna teoria plastyczności A. A. Iliuszina	195
19.7.	Odształcenia plastyczne przy zmiennej temperaturze	196
19.8.	Teorie mięknięcia plastycznego	198
20.	Równania fizyczne teorii plastyczności ciał anizotropowych	198
20.1.	Prawa płynięcia ciał anizotropowych idealnie plastycznych	198
20.2.	Koncepcja jednolitej krzywej wzmocnienia w przypadku anizotropii	200
20.3.	Odształceniowe teorie wzmocnienia plastycznego	201
20.4.	Przyrostowe teorie wzmocnienia plastycznego	201
Rozdział IV. Obciążenia złożone na szczelbu S przekroju pręta		203
21.	Obciążenia typu P_1/S_2	203
21.1.	Uwagi ogólne	203
21.2.	Sprężysto-plastyczne zginanie z rozciąganiem lub ściskaniem prętów o dowolnym przekroju	205

21.2.1.	Prawa fizykalne idealnej plastyczności.	205
21.2.2.	Przybliżone założenie nierozciągłości osi	209
21.2.3.	Metody przybliżone. Uwzględnienie wzmocnienia plastycznego.	210
21.3.	Sprężysto-plastyczne zginanie z rozciąganiem lub ściskaniem prętów o przekroju prostokątnym.	211
21.3.1.	Prawa fizykalne idealnej plastyczności	211
21.3.2.	Krzywe graniczne.	213
21.3.3.	Obliczanie skończonych ugięć belek.	217
21.3.4.	Przybliżone obliczanie ugięć	221
21.4.	Inne kształty przekroju.	222
21.5.	Wielopunktowe przekroje zastępcze przy sprężysto-plastycznym zginaniu z siłą podłużną	223
21.5.1.	Zasady doboru przekrojów wielopunktowych	223
21.5.2.	Prawa fizykalne wielokrotnego wzmocnienia liniowego	225
21.5.3.	Prawa fizykalne idealnej plastyczności.	226
21.5.4.	Obliczanie skończonych ugięć belek.	227
21.5.5.	Przybliżone obliczanie ugięć	228
21.6.	Nośność graniczna przekroju przy jednoczesnym zginaniu z rozciąganiem lub ściskaniem	228
21.6.1.	Określenie krzywych granicznych uogólnionymi szeregami potęgowymi	228
21.6.2.	Szczególne przypadki szeregów potęgowych	231
21.6.3.	Szeregi potęgowe dla typowych kształtów przekroju.	233
21.6.4.	Zastosowanie aproksymacji jednokrotnie optymalnej	237
21.6.5.	Niejednorodność materiału. Zastosowania	237
21.7.	Zginanie ukośne (podwójne)	239
21.7.1.	Sprężysto-plastyczne zginanie ukośne prętów o dowolnym przekroju	239
21.7.2.	Sprężysto-plastyczne zginanie prętów o przekrojach bisymetrycznych	241
21.7.3.	Nośność graniczna przekroju pręta przy zginaniu ukośnym	242
21.8.	Skęcianie ze ścinaniem.	244
21.8.1.	Sformułowanie zagadnienia	244
21.8.2.	Przypadek materiału jednorodnego	247
21.8.3.	Przykład niejednorodności materiału	248
22.	Obciążenia typu P_2/S_2	249
22.1.	Uwagi ogólne.	249
22.1.1.	Warunki plastyczności.	249
22.1.2.	Ogólne dolne oszacowanie krzywej nośności granicznej	250
22.2.	Rozciąganie ze skęcianiem prętów o przekrojach okrągłych	251
22.2.1.	Nośność graniczna przekroju	251
22.2.2.	Zakres sprężysto-plastyczny w przypadku nieściśliwości materiału.	252
22.2.3.	Wpływ ściśliwości materiału	255
22.3.	Rozciąganie ze skęcianiem prętów o przekrojach nieokrągłych.	258
22.3.1.	Równanie różniczkowe dla przemieszczeń	258
22.3.2.	Przekrój o kształcie wąskiego prostokąta	260
22.3.3.	Metoda małego parametru.	261
22.3.4.	Zakres sprężysto-plastyczny	263
22.4.	Zginanie ze skęcianiem prętów o przekroju kołowym.	263
22.4.1.	Równanie różniczkowe dla przemieszczeń	263
22.4.2.	Metoda małego parametru: wpływ zginania na nośność pręta skęcianego	266
22.4.3.	Metoda małego parametru: wpływ skęciania na nośność pręta zginanego	268
22.4.4.	Uogólniona aproksymacja brzegowa typu Hermite'a	270
22.4.5.	Oszacowanie dolne i oszacowanie górne nośności granicznej.	271
22.4.6.	Przypadek wzmocnienia plastycznego	273

22.5. Zginanie ze skręcaniem prętów o dowolnym przekroju	273
22.5.1. Rozwiązania ścisłe	273
22.5.2. Rozwiązania numeryczne.	274
22.5.3. Oszacowania i aproksymacje.	274
22.5.4. Badania doświadczalne	275
22.5.5. Zastosowania	276
22.6. Zginanie ze ścinaniem	276
22.6.1. Uwagi wstępne	276
22.6.2. Podstawowe hipotezy odnośnie rozkładu naprężeń	278
22.6.3. Nośność graniczna przekroju prostokątnego	282
22.6.4. Nośność graniczna przekrojów cienkościennych	284
22.6.5. Zakres sprężysto-plastyczny, wzmocnienie plastyczne	286
23. Obciążenia typu S_n , $n > 3$ (wielokrotnie złożone).	286
23.1. Ogólne metody uzyskiwania oszacowań.	286
23.1.1. Oszacowania dolne nośności granicznej	286
23.1.2. Oszacowania górne nośności granicznej	288
23.2. Zginanie ukośne z rozciąganiem lub ściskaniem.	289
23.2.1. Zakres sprężysto-plastyczny	289
23.2.2. Nośność graniczna przekroju	290
23.3. Ogólny przypadek jednorodności podłużnej stanu naprężenia	290
23.3.1. Równanie Handelman–Hilla	290
23.3.2. Równanie przemieszczeniowe.	293
23.3.3. Zginanie ukośne ze skręcaniem	293
23.3.4. Zginanie proste z rozciąganiem i skręcaniem.	294
23.4. Zginanie z rozciąganiem i ścinaniem	294
23.4.1. Przekrój prostokątny	294
23.4.2. Przekroje cienkościenne	295
23.5. Ogólniejsze obciążenia złożone przekrojów cienkościennych.	296
Rozdział V. Obciążenia złożone na szczeblu S przekroju dźwigarów powierzchniowych	300
24. Stany czysto tarczowe (blonowe) $P_3 \rightarrow S_3$ i czysto gięte P_3/S_3	300
24.1. Uwagi ogólne.	300
24.2. Obciążenia złożone w stanie tarczowym lub blonowym	301
24.3. Obciążenia złożone w stanie czysto giętym	303
24.3.1. Zakres sprężysto-plastyczny	303
24.3.2. Nośność graniczna przekroju	307
25. Obciążenia złożone typu P_2/S_4	309
25.1. Nośność graniczna przekroju pełnościennego	309
25.1.1. Warunek plastyczności Hubera–Misesa–Hencky’ego	309
25.1.2. Warunek plastyczności Treski–Guesta	312
25.1.3. Warunek plastyczności największego naprężenia normalnego	316
25.1.4. Inne warunki plastyczności ciał izotropowych	316
25.2. Nośność graniczna przekroju warstwowego	317
25.2.1. Uwagi ogólne.	317
25.2.2. Warunek plastyczności Hubera–Misesa–Hencky’ego	318
25.2.3. Warunek plastyczności Treski–Guesta	319
25.3. Zakres sprężysto-plastyczny i wzmocnienie plastyczne	320
26. Ogólniejsze obciążenia złożone.	322
26.1. Uwagi ogólne.	322
26.2. Nośność graniczna przekroju pełnościennego przy warunku plastyczności HMH	322
26.2.1. Ścisłe określenie powierzchni nośności granicznej w przypadku P_3/S_6	322
26.2.2. Przypadki szczególne i aproksymacje	324
26.2.3. Wpływ sił poprzecznych.	326

26.3. Nośność graniczna przekroju warstwowego	327
26.3.1. Warunek plastyczności Hubera—Misesa—Hencky'ego	327
26.3.2. Warunek plastyczności Treski—Guesta	327
26.4. Oszacowania i aproksymacje	328
26.5. Nośność graniczna przekroju w przypadku anizotropii	329
Rozdział VI. Obciążenia złożone na szczeblu <i>B</i> całego ciała	331
27. Obciążenia złożone prętów i układów prętowych	331
27.1. Uwagi ogólne	331
27.2. Złożone obciążenia powierzchniowe	333
27.2.1. Prosty przykład konstruowania krzywych granicznych	333
27.2.2. Przegląd ważniejszych rozwiązań	335
27.3. Przypadek sił masowych	336
27.4. Przypadek obciążeń cieplnych	337
28. Kołowo-symetryczne obciążenia złożone cylindrów.	337
28.1. Uwagi ogólne	337
28.2. Przypadek ogólny kołowej symetrii w rurach grubościennych	338
28.2.1. Równania podstawowe	338
28.2.2. Określenie obciążeń (powierzchni nośności granicznej).	342
28.3. Przypadki szczególne kołowej symetrii	344
28.3.1. Jednoczesne rozciąganie, skręcanie i różnica ciśnień	344
28.3.2. Skręcanie przy różnicy ciśnień	346
28.3.3. Rozciąganie przy różnicy ciśnień	348
28.3.4. Przypadek sił masowych	349
28.3.5. Przypadek obciążeń cieplnych	351
28.4. Obciążenia złożone grubościennych powłok kulistych	352
28.5. Badania doświadczalne rur cienkościennych	352
29. Obciążenia złożone cylindrów nie wykazujące kołowej symetrii	353
29.1. Ogólne obciążenie złożone rury cienkościennej	353
29.1.1. Sformułowanie zagadnienia	353
29.1.2. Rozwiązanie ogólne	356
29.1.3. Jednoczesne rozciąganie, zginanie, ścinanie i ciśnienie wewnętrzne	358
29.1.4. Zginanie ze skręcaniem	359
29.1.5. Wpływ zginania obwodowego	359
29.2. Ogólne obciążenie rury grubościennej wykazujące jednorodność podłużną.	361
29.2.1. Założenia i równania podstawowe	361
29.2.2. Rozwiązanie dla przypadku dużego ciśnienia	363
29.2.3. Rozwiązanie dla przypadku dużego momentu skręcającego	367
29.2.4. Uogólniona aproksymacja brzegowa Hermite'a.	369
29.3. Inne przypadki obciążeń złożonych	371
30. Złożone obciążenia zewnętrzne tarcz, płyt i powłok	371
30.1. Obciążenia złożone tarcz	371
30.1.1. Tarcza pierścieniowa pod działaniem ciśnień promieniowych.	371
30.1.2. Działanie sił masowych i obciążeń cieplnych	373
30.2. Obciążenia złożone płyt	373
30.3. Obciążenia złożone powłok	374
30.4. Uwagi końcowe	375
Bibliografia	376
Skorowidz autorów	423
Skorowidz rzeczowy	433

PRZEDMOWA

Analiza obciążeń złożonych w zakresie niesprężystym stanowi jedną z trudniejszych gałęzi teorii plastyczności, o dużym znaczeniu dla zastosowań inżynierskich i poważnym aspekcie teoretyczno-poznawczym. Liczba publikowanych prac z tej dziedziny rośnie ostatnio tak znacznie, że brak ujęcia monograficznego stawał się coraz bardziej wyraźny.

Lukę tę ma zapełnić obecna praca. Jej celem jest z jednej strony usystematyzowanie podstawowych pojęć, omówienie metod rozwiązywania problemów, przytoczenie ważniejszych rozwiązań i wyników badań doświadczalnych, a z drugiej — dostarczenie pracownikom naukowym i inżynierom klucza do niezwykle obszernej literatury. Wprowadzono klasyfikację obciążeń złożonych na szczeblu punktu ciała, przekroju i całego ciała i stosowano ją konsekwentnie w całej pracy. Starano się nawiązywać do pojęć ogólnie przyjętych, jednak w pewnych przypadkach autor uznał za celowe wprowadzenie nowych definicji, np. procesu samorzutnego, pola statycznie częściowo dopuszczalnego, quasi-cyklu naprężeniowego, quasi-cyklu odkształceniowego itd.

Szczególną uwagę zwrócono na wyczerpujące zestawienie piśmiennictwa. Kompletność zamieszczonego wykazu literatury ocenia autor na około 80% w skali światowej. Niestety, ze względów technicznych zamknięto wykaz literatury na roku 1969, tak, że najnowsze prace nie mogły już zostać uwzględnione. Oddzielnie zestawiono pozycje opublikowane alfabetem łacińskim (1–781), oddzielnie — grażdanką (782–1262).

Praca, mimo charakteru monograficznego, zwraca dużą uwagę na stronę dydaktyczną. Zastosowano równoległe zapis „rozwinięty” i zapis wskaźnikowy, a częściowo również zapis wektorowy, podkreślając korzyści posługiwania się poszczególnymi formami zapisów. Zamieszczono liczne przykłady ilustrujące teorię oraz znaczną liczbę tablic i wykresów. Ograniczono natomiast dowody twierdzeń, podając z reguły jedynie wskazówki bibliograficzne w tym zakresie. Od Czytelnika wymaga się znajomości kursu wytrzymałości materiałów w zakresie wykładanym na politechnikach oraz pewnego wprowadzenia do teorii sprężystości i plastyczności i do rachunku tensorowego.

W zakończeniu autor pragnie wyrazić głęboką wdzięczność licznym Kolegom z Instytutów: Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn oraz Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej za przeczytanie poszczególnych rozdziałów pracy i cenne uwagi.

Michał Życzkowski

Kraków, styczeń 1971 r.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- A_τ aksjator wielkości τ ,
- A^e macierz modułów sprężystości,
- B przy klasyfikacji: analiza na szczelbu całego ciała,
- B bimoment,
- B szerokość przekroju na osi środkowej,
- D_τ dewiator wielkości τ ,
- E moduł Younga,
- E_{ijkl} składowe tensora modułów sprężystości,
- E_x moduł sieczny,
- E_t moduł styczny,
- E_1 moduł wzmocnienia liniowego,
- E^e macierz modułów sprężystości,
- F powierzchnia pola przekroju,
- F_j składowe siły masowej na jednostkę objętości (w zapisie matemat.),
- F, G, H, L, M, N moduły Hilla anizotropii plastycznej,
- G moduł Kirchhoffa,
- H pół grubości dźwigara powierzchniowego,
- I_y, I_z momenty bezwładności przekroju poprzecznego,
- $I_{1\tau}, I_{2\tau}, \dots$ niezmienniki podstawowe tensora T_τ ,
- $I_{1\tau}, I_{2\tau}, \dots$ niezmienniki podstawowe dewiatora D_τ ,
- $I_{\tau p}$ parametr Odqvista, długość drogi w przestrzeni odkształceń plastycznych,
- $J_{1\tau}, J_{2\tau}, J_{3\tau}$ niezmienniki główne tensora T_τ ,
- $J_{1\tau}, J_{2\tau}, J_{3\tau}$ niezmienniki główne dewiatora D_τ ,
- K moduł ściśliwości,
- L długość,
- L funkcja Lagrange'a,
- $M_\theta, M_{\theta y}, M_{\theta z}$ momenty zginające (w prętach, belkach),
- M_x, M_y momenty zginające (w dźwigarach powierzchniowych),
- M_{xy}, M_{yx} momenty skręcające (w dźwigarach powierzchniowych),
- M_x moment skręcający (w prętach),
- M_θ moment giętno-skrętny,
- N siła podłużna (w prętach),
- N_x, N_y siły podłużne (w dźwigarach powierzchniowych),
- N_{xy}, N_{yx} siły styczne (w dźwigarach powierzchniowych),
- P przy klasyfikacji: analiza na szczelbu punktu ciała,
- P siła skupiona,
- $P_K, P_{K\lambda}, P_\lambda$ formy kwadratowe uogólnionych odkształceń (w dźwigarach pow.),
- P_M, P_{MN}, P_N formy kwadratowe uogólnionych sił wewnętrznych (,),
- Q_i uogólnione siły zewnętrzne lub wewnętrzne,
- Q_x, Q_y siły poprzeczne (w dźwigarach powierzchniowych),
- R reakcja,
- R zewnętrzny promień rury,

- R promień krzywizny pierwotnej pręta kołowo zakrzywionego,
 R_τ niezmiennik walcowy (promieniowy) tensora T_τ ,
 S przy klasyfikacji: analiza na szczelbu przekroju,
 S granica sprężystości przy jednoosiowym rozciąganiu,
 S moment statyczny pola przekroju,
 $S_{0,5}$ moment statyczny połowy pola przekroju,
 T temperatura,
 T, T_y, T_z siły poprzeczne (w prętach, belkach),
 T_τ tensor wielkości τ ,
 W_0 sprężysty wskaźnik zginania przekroju,
 W_0 sprężysty wskaźnik skręcania przekroju,
 W^d energia rozproszona przy odkształceniu plastycznym,
 W^e energia zwrócona przy odciążeniu,
 W^0 energia mikronaprężeń resztkowych,
 W^p praca odkształcenia plastycznego,
 \dot{W} moc obciążeń zewnętrznych,
 W^* elementarna praca nadwyżkowa,
 X, Y, Z składowe siły masowej na jednostkę objętości (w zapisie inżynierskim),
 Z_τ niezmiennik walcowy (osiowy) tensora T_τ ,
 a, b promień wewnętrzny i promień zewnętrzny cylindra,
 $a_{x\xi}$ cosinus kąta między osiami x i ξ ,
 b szerokość przekroju prostokątnego, bieżąca szerokość przekroju,
 e mimośród,
 e bezwymiarowe (zredukowane) wydłużenie,
 e_{ij} składowe dewiatora odkształceń w zapisie matematycznym,
 $f(\sigma_{ij})$ funkcja określająca warunek plastyczności,
 $g(\sigma_{ij})$ potencjał plastyczny,
 g przyspieszenie ziemskie,
 g bezwymiarowy jednostkowy kąt skręcenia,
 h funkcja wzmocnienia plastycznego,
 h pół wysokości przekroju prostokątnego,
 l długość (odcinka pręta itp.),
 Δl wydłużenie odcinka (pręta),
 m, m_0 bezwymiarowy moment zginający (w prętach, belkach),
 m mnożnik dla obciążeń,
 m_k, m_s mnożnik kinematycznie i mnożnik statycznie dopuszczalny,
 m_s bezwymiarowy moment skręcający,
 $m_\xi, m_\eta, m_{\xi\eta}$ bezwymiarowe momenty (w dźwigarach powierzchniowych),
 m_1, m_2 bezwymiarowe momenty główne,
 n bezwymiarowa siła podłużna (w prętach),
 n normalna do powierzchni,
 $n_\xi, n_\eta, n_{\xi\eta}$ bezwymiarowe siły błonowe (w dźwigarach powierzchniowych),
 n_1, n_2 bezwymiarowe siły błonowe główne
 \mathbf{n}_F jednostkowy wektor normalny do powierzchni F ,
 p ciśnienie,
 p bezwymiarowa siła skupiona,
 p_ξ wektor naprężenia wypadkowego,
 $p_{n,j}$ składowe wektora obciążeń zewnętrznych na ścianie o normalnej n ,
 q bezwymiarowe ciśnienie normalne,
 q_i uogólnione przemieszczenie,
 r promień, współrzędna walcowa lub biegunowa; promień walca,
 s_x, s_y, \dots składowe dewiatora naprężeń w zapisie inżynierskim,

- s_{ij} składowe dewiatora naprężeń w zapisie matematycznym,
 t czas, parametr o charakterze czasu,
 t bezwymiarowe ciśnienie styczne,
 u, v, w przemieszczenia (w zapisie inżynierskim),
 u_r, u_θ, u_z przemieszczenia w układzie walcowym,
 u_i składowe wektora przemieszczenia w zapisie matematycznym,
 w bezwymiarowy kwadrat prędkości kątowej,
 x, y, z współrzędne kartezjańskie (współrzędne Eulera, przestrzenne),
 z_0 współrzędna osi obojętnej,
 Δ błąd aproksymacji,
 θ dylatacja, względna zmiana objętości,
 Π_{ijkl} składowe tensora modułów anizotropii plastycznej,
 Φ funkcja naprężeń (Airy'ego),
 Φ_{ij} składowe tensora funkcji naprężeń Krutkowa-Blocha,
 Φ_f właściwa energia odkształcenia postaciowego,
 Ψ funkcja naprężeń Prandtla,
 α, β, γ kąty Eulera przy trygonometrycznej parametryzacji warunku plastyczności HMM,
 α_{ij} składowe tensora określającego środek powierzchni czynno-biernej,
 $\beta = a/b$ stosunek promieni cylindra,
 γ ciężar właściwy materiału,
 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ odkształcenia kątowe (w zapisie inżynierskim),
 δ grubość ścianki przekroju cienkościennego,
 δ_{ij} symbol Kroneckera,
 ϵ wektor przyporządkowany tensorowi odkształceń T_ϵ ,
 ϵ odkształcenie odcinkowe (wydłużenie względne),
 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ odkształcenia główne,
 $\epsilon_I, \epsilon_{II}, \epsilon_{III}$ odkształcenia główne uporządkowane: $\epsilon_I \geq \epsilon_{II} \geq \epsilon_{III}$,
 ϵ^{*E} wydłużenie względne w ujęciu Eulera (odcinka o ustalonym kierunku końcowym),
 ϵ^{*L} wydłużenie względne w ujęciu Lagrange'a (odcinka o ustalonym kierunku początkowym),
 ϵ_{ij}^E składowe tensora odkształceń skończonych Eulera (Almansi'ego),
 ϵ_{ij}^L składowe tensora odkształceń skończonych Lagrange'a (Greena),
 $\hat{\epsilon}_{ij}^E$ składowe części symetrycznej gradientu wektora przemieszczenia we współrzędnych Eulera,
 $\hat{\epsilon}_{ij}^L$ składowe części symetrycznej gradientu wektora przemieszczenia we współrzędnych Lagrange'a,
 ϵ_{ij} składowe tensora odkształceń nieskończenie małych,
 ϵ_i intensywność odkształceń,
 ϵ_m średnie odkształcenie odcinkowe,
 ϵ_0 wydłużenie osi belki,
 ϵ^H odkształcenie odcinkowe w mierze logarytmicznej (Hencky'ego),
 ϵ^e odkształcenie sprężyste,
 ϵ^p odkształcenie plastyczne,
 θ kąt, współrzędna walcowa lub biegunowa,
 θ jednostkowy kąt skręcenia pręta,
 κ krzywizna (osi belki),
 κ_n krzywizna osi obojętnej,
 κ_1, κ_2 krzywizny główne (dźwigara powierzchniowego),
 λ funkcja (współczynnik proporcjonalności) w teorii płynięcia plastycznego,

λ, λ_i	mnożniki Lagrange'a,
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$	wydłużenia powierzchni środkowej (dźwigara powierzchniowego),
μ_τ	parametr Lodego dla tensora T_τ ,
ν	współczynnik Poissona,
ν^p	współczynnik odkształcenia poprzecznego w zakresie sprężysto- -plastycznym,
ξ, η, ζ	współrzędne materialne (Lagrange'a),
ϱ	promień krzywizny osi belki,
ϱ	bezwymiarowa współrzędna promieniowa,
ϱ_n	promień krzywizny osi obojętnej,
σ	wektor przyporządkowany tensorowi naprężeń T_σ ,
σ	naprężenie normalne,
σ_{ij}	składowe tensora naprężenia w zapisie matematycznym,
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	naprężenia główne,
$\sigma_1, \sigma_{11}, \sigma_{111}$	naprężenia główne uporządkowane: $\sigma_1 > \sigma_{11} > \sigma_{111}$,
σ_i	intensywność naprężeń,
σ_m	średnie naprężenie normalne,
σ_0	granica plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu,
σ_{0+}, σ_{0-}	granice plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu i ściskaniu (gdy należy je rozróżnić),
σ_{red}	naprężenie zastępcze (zredukowane),
τ	wektor (na ogół w przestrzeni dziewięciowymiarowej) przyporząd- kowany tensorowi T_τ ,
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	naprężenia styczne (w zapisie inżynierskim),
τ_0	granica plastyczności przy czystym ścinaniu (skręcaniu),
φ	funkcja (współczynnik proporcjonalności) w teorii Hencky'ego- -Iliuszina,
φ	kąt obrotu przekroju (kąt ugięcia belki),
χ	kąt nachylenia osi obojętnej,
ω	prędkość kątowna,
$\hat{\omega}_{ij}^E$	składowe części antymetrycznej gradientu wektora przemieszczenia we współrzędnych Eulera,
$\hat{\omega}_{ij}^L$	składowe części antymetrycznej gradientu wektora przemieszczenia we współrzędnych Lagrange'a,
ω_τ	niezmiennik walcowy (kątowy) tensora T_τ

Wskaźniki

- nad symbolem odnosi się do nośności sprężyste
- = nad symbolem odnosi się do nośności granicznej
- ~ nad symbolem określa wartość czynnika wyężenia przed rozpoczęciem procesu biernego (odciążaniem)
- nad symbolem oznacza pochodną względem czasu
- * po prawej u góry określa tensor kierunków i podobieństwa
- e po prawej u góry lub u dołu «sprężyste»
- p po prawej u góry lub u dołu «plastyczne»
- + po prawej u dołu uplastycznienie przez naprężenia dodatnie
- po prawej u dołu uplastycznienie przez naprężenia ujemne
- g po prawej u dołu wielkość rozgraniczająca (np. współrzędna)
- pomiędzy symbolami przy klasyfikacji: przejście ze szczebla na szczebel w sposób jednorodny
- / pomiędzy symbolami przy klasyfikacji: przejście ze szczebla na szczebel w sposób niejednorodny



ROZDZIAŁ I

PODSTAWOWE POJĘCIA TEORII OBCIĄŻEŃ ZŁOŻONYCH

1. Uwagi wstępne

Teoria plastyczności zajmuje się analizą odkształceń trwałych, czyli pozostających po usunięciu wywołujących je przyczyn. Ta nieodwracalność procesu jest podstawową cechą fizyczną odkształceń plastycznych. Podstawową cechą matematyczną jest natomiast niemożność opisanie ich prawami liniowej teorii sprężystości; opisujemy je odmiennymi równaniami fizykalnymi (konstrytuwnymi), ustalonymi dla poszczególnych materiałów i typów procesów w oparciu o wyniki badań doświadczalnych.

Z punktu widzenia zastosowań inżynierskich ta druga cecha jest niejednokrotnie znacznie ważniejsza od fizycznej cechy nieodwracalności. Zniszczenie konstrukcji, wykonanej z materiału wykazującego zdolności do odkształceń plastycznych znacznych w stosunku do sprężystych, z reguły poprzedzone jest właśnie takimi odkształceniami i dokładniejsza ocena obciążenia niszczącego wymaga zastosowania równań teorii plastyczności. Często opisujemy tymi równaniami jedynie proces związany z narastaniem obciążeń, a nie interesujemy się tym, co nastąpiłoby po usunięciu tych obciążeń. Natomiast w niektórych przypadkach zastosowań nieodwracalność procesu odgrywa istotną rolę; wymienimy tu:

- (1) procesy technologiczne nadawania kształtu na drodze wywołania znacznych odkształceń trwałych,
- (2) ocenę nośności konstrukcji przy obciążeniach zmiennych w czasie, a więc tzw. problemy plastycznego przystosowywania się konstrukcji,
- (3) ocenę nośności konstrukcji przy obciążeniach stopniowo narastających, lecz wywołujących pomimo wzrostu zmniejszanie się naprężeń i odkształceń w pewnych partiach konstrukcji (lokalne odciążanie, a raczej pojawienie się stref lokalnie biernych).

W powyższych problemach cecha nieodwracalności odkształceń plastycznych posiada znaczenie istotne; oczywiście odstępstwo od równań fizykalnych liniowej teorii sprężystości musi być uwzględnione w każdym przypadku analizy takich odkształceń.

W wyniku nieliniowości praw fizykalnych zasada superpozycji w teorii plastyczności z reguły nie obowiązuje i znajomość rozwiązania dla przypadków prostych zazwyczaj nie wystarcza do uzyskania rozwiązania dla przypadku złożonego. Przypadki złożone muszą być rozwiązywane oddzielnie, często specjalnymi metodami. Takim właśnie przypadkiem, które zdefiniujemy bliżej w p. 5, poświęcona jest obecna praca.

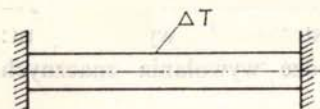


2. Szczelne analizy odkształceń plastycznych

2.1. Definicja poszczególnych szczelbi i przyjęta symbolika. Ostatecznym celem analizy odkształceń plastycznych jest z reguły określenie rozkładu tych odkształceń lub nośności (wytrzymałości) ciała, poddanego pewnemu układowi różnorodnych obciążeń zewnętrznych. Analiza taka, którą można by nazwać integralną, wymaga zazwyczaj uprzedniej analizy lokalnej, odnoszącej się do poszczególnych punktów ciała. W przypadku ciał o pewnych specjalnych, ale często stosowanych w praktyce kształtach (pręty, płyty, powłoki), posługujemy się ponadto szczelbem pośrednim, rozpatrując odkształcenia plastyczne lub nośność poszczególnych przekrojów poprzecznych.

Tak więc wyodrębnimy *trzy szczelbe odkształceń plastycznych*. Szczebel pierwszy, lokalny, związany będzie z poszczególnymi punktami ciała; oznaczymy go symbolem P . Szczebel następny, «półintegralny», dotyczyć będzie przekroju poprzecznego (pręta, płyty, powłoki itp.). Oznaczymy go symbolem S podobnie jak w pracy [779]. Wreszcie ostatni szczebel, integralny, odnoszący się do całego ciała, oznaczymy symbolem B .

Na poszczególnych szczelbch będziemy rozpatrywali *procesy odkształcania*, zachodzące w wyniku działania pewnych czynników o charakterze obciążeń. Wypada tu zauważyć, że w pewnych, zresztą bardzo szczególnych przypadkach, termin «proces odkształcania» może być nieco zbyt wąski. Jeżeli np. weźmiemy pod uwagę jednorodny pręt, obustronnie utwierdzony, poddany działaniu przyrostu temperatury ΔT , stałej wzdłuż osi, to odkształcenie (przynajmniej osiowe) jest w każdym punkcie w ciągu całego procesu równe zero (rys. 1); jednakże w trakcie tego procesu mogą powstać odkształcenia plastyczne ε^p , takie, że w sumie z odkształceniami sprężystymi ε^e są równe zero. W przykładzie



Rys. 1. Pręt obustronnie utwierdzony pod działaniem obciążenia cieplnego

tym «czynnikiem o charakterze obciążeń» był przyrost temperatury ΔT . By ujednoczyć terminologię, każdy taki czynnik, który może być uważany za niezależny, będziemy nazywali podobnie jak w pracy [770] «*czynnikiem wyężenia*», przy czym nazwa ta będzie stosowana na poszczególnych szczelbch analizy P , S i B . Proces odkształcania będziemy uważali za określony przez zmianę czynników wyężenia w czasie, przy czym skala czasu

jest w teorii plastyczności z reguły bez znaczenia, zmienna czasowa daje się wyrugować (do wyjątków należą: procesy dynamiczne, w których należy uwzględnić siły bezwładności; procesy w materiałach wykazujących lepkość; procesy, w których czas występuje jako istotny parametr, np. przy własnościach mechanicznych materiału zależnych od czasu itp.).

Kwestię niezależności czynników wyężenia na poszczególnych szczelbch przedyskutujemy oddzielnie w p. 5.3.

2.2. Czynniki wyężenia na szczelbu punktu ciała (P). Omówimy obecnie typowe czynniki wyężenia na poszczególnych szczelbch. W ustalonym punkcie ciała P za czynniki wyężenia przyjmuje się przede wszystkim składowe stanu naprężenia. Przy założeniu symetrii tensora naprężeń niezależnych składowych tensora jest sześć. Inną możliwością jest przyjęcie sześciu niezależnych składowych tensora odkształceń. Możliwy jest również dość dowolny dobór sześciu spośród dwunastu wymienionych składowych; A. A. ILIU-

SZIN [960] podaje, że wyłania się tu 3696 kombinacji, z których jednak nie wszystkie są dopuszczalne jako niezależne. Różnice fizyczne występujące przy przyjmowaniu za czynniki wyłężenia: naprężeń z jednej, a odkształceń z drugiej strony, zostały omówione w pracy [770].

Jednakże wyżej wymienione czynniki nie wyczerpują zagadnienia. Zasadniczym czynnikiem staje się często *temperatura*, wpływająca zarówno na postać związków między naprężeniami i odkształceniami, jak i na własności mechaniczne materiału. Pokrewnym czynnikiem wyłężenia może stać się *natężenie strumienia neutronów* przy poddaniu ciała promieniowaniu. W przypadku drewna i pokrewnych materiałów istotną rolę odgrywa *wilgotność*; podobnych czynników można by wymienić znacznie więcej.

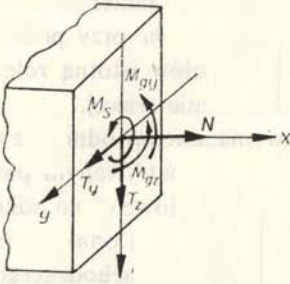
Omawiany szczel *P* wyróżnia się od pozostałych wymaganiami odnośnie niezmienniczości. Istotnie, przyjęcie lokalnego układu odniesienia w rozpatrywanym punkcie jest w zasadzie całkowicie dowolne. Składowe stanu naprężenia i składowe stanu odkształcenia jako składowe tensorów drugiego rzędu zależą od przyjętego układu odniesienia zgodnie z prawami transformacji tensorowej. Jednakże opis matematyczny zachodzącego procesu odkształcenia musi określać ten sam proces w każdym układzie odniesienia, a więc formułowane tu prawa, rządzące procesem, muszą być niezmiennicze.

2.3. Czynniki wyłężenia na szczelbu przekroju (S). Przechodząc do szczelbu *S* omówimy przede wszystkim *pojęcie przekroju poprzecznego*. Pojęcie takie wprowadza się dla elementów jednowymiarowych, których jeden wymiar — długość — jest znacznie większy od dwóch pozostałych, oraz dla elementów dwuwymiarowych, których jeden wymiar — grubość — jest znacznie mniejszy od dwóch pozostałych. Elementy dwuwymiarowe — tarcze, płyty i powłoki — noszą dogodną nazwę «*dźwigarów powierzchniowych*», rozpowszechnioną przez K. GIRKMANNĄ. Analogicznie elementy jednowymiarowe (pręty proste lub zakrzywione, belki, wały) należałoby nazywać «*dźwigarami liniowymi*»; bardziej rozpowszechniona jest nazwa «*elementy prętowe*».

W dźwigarach liniowych (prętach) przez przekrój poprzeczny rozumiemy przekrój prostopadły do osi pręta. Przekrój taki posiada swój kształt opisany np. funkcją $r = r(\theta)$ we współrzędnych biegunowych płaskich. W przypadku pręta cienkościennego dogodniejszy opis uzyskujemy przez wprowadzenie dwóch funkcji, np. $r = r(\theta)$ i $g = g(\theta)$, gdzie pierwsza z tych funkcji wyznacza średnią linię profilu, natomiast druga — grubość profilu (oczywiście w szczególnych przypadkach współrzędne kartezjańskie mogą być dogodniejsze do opisu kształtu przekroju od współrzędnych biegunowych). Fakt różnorodności kształtów przekroju dźwigarów liniowych posiada istotne znaczenie szczególnie w teorii plastyczności; zazwyczaj procesy odkształcania dla poszczególnych kształtów przekroju muszą być na szczelbu *S* rozpatrywane odrębnie.

Przyjmując w przekroju poprzecznym pręta o osi *x* ortogonalny układ osi *y*, *z*, pokrywających się z głównymi środkowymi (centralnymi) osiami bezwładności tego przekroju, rozkładamy wektor główny sił wewnętrznych w tym przekroju na siłę podłużną *N* i dwie wzajemnie prostopadłe siły poprzeczne *T₁* i *T₂*, a moment główny na moment skręcający *M_s* i dwa momenty zginające *M_{gy}* i *M_{gz}*. Te sześć wielkości, zwane *uogólnionymi siłami wewnętrznymi* lub *uogólnionymi naprężeniami* («generalized stresses»), traktujemy zazwyczaj jako czynniki wyłężenia na szczelbu *S*. Na rys. 2 przedstawiono je jako działające na jedną ze ścianek elementu utworzonego przez rozsuniecie dwóch sąsiednich przekrojów.

Warto zauważyć, że przyjęty układ odniesienia jest tu ściśle zdeterminowany (z wyjątkiem przekrojów o nieskończenie wielu kierunkach głównych), zatem transformacja układu i kwestia niezmienniczości rządzących praw nie wchodzi w rachubę. Skrętność układu w większości przypadków nie odgrywa roli.



Rys. 2. Uogólnione siły wewnętrzne w przekroju pręta



Rys. 3. Pojęcie przekroju dźwigara powierzchniowego

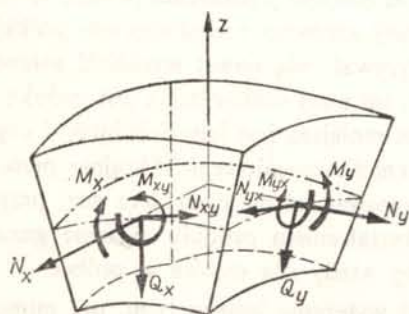
Wymienionym sześciu uogólnionym siłom wewnętrznym odpowiada sześć parametrów odkształceniowych, nazywanych *uogólnionymi odkształceniami*. Zazwyczaj definiuje się je tak, by uogólniona siła wewnętrzna wykonywała pracę na odpowiednim uogólnionym odkształceniu. Praca ta jest liczona na jednostkę długości osi pręta, ma więc wymiar siły. Będą to zatem; jednostkowe wydłużenie, jednostkowy kąt skręcenia, dwie krzywizny osi pręta i dwa jednostkowe przesunięcia poprzeczne. Te wielkości mogą również być przyjmowane za czynniki wyężenia i określać proces, zachodzący w przekroju poprzecznym.

W prętach cienkościennych — oprócz wymienionych powyżej sześciu uogólnionych sił wewnętrznych — wyprowadza się jeszcze pojęcie bimomentu i momentu giętno-skrętnego. Te wielkości mogą również stanowić czynniki wyężenia przekroju, tak że maksymalna liczba sił wewnętrznych wzrasta tu do ośmiu.

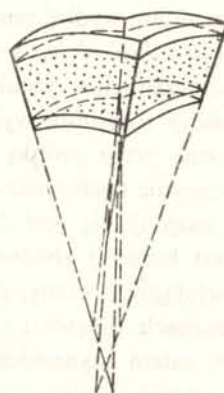
Więcej trudności może nastęcać uwzględnienie innych czynników. Jeżeli rozpatrujemy wpływ zmian temperatury, która jest stała w całym przekroju, to temperaturę tę T możemy również uważać za czynnik wyężenia przekroju. Jeżeli rozkład temperatury jest określony przez n parametrów, to każdy z tych parametrów można w pewnym stopniu uważać za czynnik wyężenia. W ogólnym przypadku dowolnego rozkładu temperatury liczba czynników wyężenia wzrastałaby nieograniczenie, co poważnie utrudnia analizę. Podobne uwagi odnoszą się do zmian wilgotności itp.

Nieco odmiennie przedstawiają się czynniki wyężenia w przypadku przekroju dźwigara powierzchniowego. Pojęcie przekroju poprzecznego takiego dźwigara wprowadzamy następująco. Weźmiemy pod uwagę odcinek prostopadły do powierzchni środkowej, a więc element jednowymiarowy, i przyporządkujemy mu dwa wzajemnie prostopadłe nieskończenie wąskie przekroje wycięte tak, aby przystawały do przekrojów sąsiednich (rys. 3). Taki odcinek z przyporządkowanymi mu dwoma przekrojami «składowymi» będziemy nazywali przekrojem poprzecznym dźwigara powierzchniowego. W każdym z przekrojów «składowych» może wystąpić po pięć sił uogólnionych wewnętrznych (li-

czonych tu na jednostkę długości przekroju), bowiem zakłada się, że momenty gnące w płaszczyźnie stycznej do powierzchni środkowej dźwigara (czyli o wektorach prostopadłych do tej powierzchni) są równe zero. Te uogólnione siły wewnętrzne przedstawiono na rys. 4 jako działające na element, utworzony przez rozsuniecie sąsiednich przekrojów. Są to: dwa momenty zginające M_x i M_y , dwa momenty skręcające M_{xy} i M_{yx} , dwie siły podłużne N_x i N_y , dwie siły styczne N_{xy} i N_{yx} oraz dwie siły poprzeczne Q_x i Q_y (zazwyczaj wielkości te oznaczają się małymi literami, jednak w teorii plastyczności zarezerwujemy małe litery dla stosownie wprowadzonych wielkości bezwymiarowych). Tak więc w ogólnym przypadku przekroju dźwigara powierzchniowego wystąpić może dziesięć czynników wyłężenia o charakterze wewnętrznych sił uogólnionych lub odpowiednich dziesięć uogólnionych odkształceń. W przypadku płyty mamy $M_{xy} = M_{yx}$ oraz $N_{xy} = N_{yx}$ i każda z tych liczb redukuje się do ośmiu; przy ograniczeniu się do analizy małych ugięć można przyjąć $N_x = N_y = N_{xy} = 0$, zatem pozostaje tylko pięć czynników; wreszcie w przypadku tarczy tylko trzy, mianowicie N_x , N_y i N_{xy} .



Rys. 4. Uogólnione siły wewnętrzne działające na element dźwigara powierzchniowego



Rys. 5. Element konstrukcji trójwarstwowej (sandwiczowej)

Z uwagi na dowolność przyporządkowania wspomnianych dwóch wzajemnie prostopadłych przekrojów do podstawowego odcinka prawa rządzące procesem muszą być niezmiennicze względem transformacji (płaskiej) tych przekrojów. Momenty M_x , M_y , M_{xy} i M_{yx} tworzą mianowicie tensor płaski, podobnie siły N_x , N_y , N_{xy} i N_{yx} , natomiast siły Q_x i Q_y transformują się jako składowe wektora. Uwzględnienie innych czynników wyłężenia (temperatury, wilgotności itp.) napotyka na takie same trudności, jak w przypadku przekroju pręta.

Odmienne natomiast w stosunku do przekrojów prętów nie występuje tu pojęcie kształtu przekroju, co zapewnia większą ogólność rozważań. Istnieje jednakże jeden wyjątek, mianowicie konstrukcja trójwarstwowa (sandwiczowa), której dwie cienkie warstwy skrajne pracują jedynie na rozciąganie lub ściskanie i ścinanie w swej płaszczyźnie, natomiast warstwa środkowa (wypełniacz) przenosi siły poprzeczne Q_x i Q_y . W tym znacznie uproszczonym przypadku odcinek stanowiący umownie przekrój powłoki można z dosta-

teczną dokładnością zredukować do dwóch punktów i całkowanie naprężeń można zastąpić przez sumowanie (rys. 5). W pewnych przypadkach można również rozważać powłoki wielowarstwowe (P. G. HODGE [249]).

2.4. Czynniki wyteżenia na szczelbu całego ciała B . Na szczelbu analizy całego ciała B za czynniki wyteżenia uważa się zazwyczaj przede wszystkim niezależnie działające siły zewnętrzne P_i . Mogą tu należeć również czynniki wywołujące siły masowe (ciężar właściwy materiału, prędkość kątowna tarczy wirującej), parametry charakteryzujące rozkład temperatury (np. wydajność źródła ciepła), rozkład wilgotności, natężenie promieniowania itp. Czasem za czynniki wyteżenia można uważać pewne wielkości o charakterze przemieszczeń, ale w wielu przypadkach sprawa jest znacznie bardziej skomplikowana.

Weźmy na przykład pod uwagę próbkę, rozciąganą w maszynie wytrzymałościowej (zrywarce). Istnieje tu tylko jeden czynnik wyteżenia na szczelbu B (pomijając ewentualne podwyższenie temperatury itp.); jest on zależny od konstrukcji maszyny. W najprostszym przypadku maszyny o napędzie mechanicznym czynnikiem tym jest *kąt obrotu* śruby napędowej, a zatem wydłużenie próbki. W przypadku napędu hydraulicznego czynnikiem niezależnym jest *ilość oleju*, doprowadzona pod tłok. Pod założeniem nieściśliwości oleju i idealnego uszczelnienia cylindra odpowiadałby on również wydłużeniu próbki. W istocie olej jest ściśliwy i czynnik wyteżenia jest związany zarówno z wydłużeniem próbki jak i z przenoszoną przez próbkę siłą. Może tu odgrywać rolę nawet wysokość ustawienia próbki w maszynie (położenie dolnego uchwytu); im niżej umieszczona jest próbka, tym mniej oleju znajduje się pod tłokiem, a więc tym mniejsza jest jego ściśliwość i czynnik wyteżenia jest bardziej zbliżony do czynnika przemieszczeniowego. Skrajnie przeciwny przypadek wystąpiłby wtedy, gdyby pod tłok doprowadzać nie ciecz, lecz gaz; przy niewielkich zmianach objętości (związanych z odkształceniem próbki) ciśnienie gazu jest niemal stałe, zatem czynnikiem wyteżenia byłaby wtedy siła osiowa w próbce.

W pracy [774] zwrócono uwagę na czynniki wyteżenia innego typu, np. mimośród działania siły ściskającej pręt. Istotnie, gdy wielkość taka jest niezależna i może się zmieniać w trakcie procesu, to wpływa w sposób zasadniczy na przebieg tego procesu. Charakterystyczną cechą czynników tego typu jest fakt, że same one nie wywołują żadnego procesu odkształcania, proces ten zachodzi jedynie w przypadku działania co najmniej jeszcze jednego innego czynnika.

2.5. Podstawowe czynniki wyteżenia. Znaczna większość rozważań teorii plastyczności ograniczona jest do następujących czynników wyteżenia: na szczelbu P — składowych stanu naprężenia; na szczelbu S — uogólnionych sił wewnętrznych; na szczelbu B — sił zewnętrznych, powierzchniowych i ewentualnie masowych. Przy takim ograniczeniu się można wykazać liczne twierdzenia, które przestają lub mogą przestać obowiązywać w przypadku ogólnym. Korzystne jest więc pewne wyodrębnienie wyżej wymienionych czynników; nazwiemy je *podstawowymi czynnikami wyteżenia* na poszczególnych szczelbach. Pozostałe będziemy nazywali czynnikami ubocznymi, jakkolwiek oczywiście mogą one wywierać zasadniczy wpływ na przebieg rozpatrywanych procesów.

3. Proces czynny a proces bierny. Obciążanie a odciażanie

3.1. Definicja procesu czynnego i procesu biernego. Teoria plastyczności rozpatruje w zasadzie procesy nieodwracalne, jednak pewne fragmenty tych procesów mogą być odwracalne. O nieodwracalności procesu decyduje rozpraszanie, czyli dysypacja energii odkształcenia (zamiana jej na energię cieplną). Ograniczmy się na razie do analizy na szczelbu P punktu ciała. Proces (lub fragment procesu) nieodwracalny, podczas którego następuje rozpraszanie energii odkształcenia, będziemy nazywali *procesem plastycznie czynnym*, krócej *procesem czynnym*; proces, podczas którego energia odkształcenia nie jest rozpraszana, będziemy nazywali *procesem plastycznie biernym* lub *procesem biernym* (czasem używa się też nazwy «proces sprężysty», choć z wielu względów wygodniejsze jest zawężenie tej ostatniej nazwy do procesów biernych niepoprzedzonych procesami czynnymi). W przypadku procesów biernych siły posiadają potencjał (z wyjątkiem pewnych specjalnych typów obciążeń) i stan końcowy procesu nie zależy od drogi.

Rozróżnienie powyższe jest ważne nie tylko ze względu fizycznego (różnorodny charakter rozpatrywanych zjawisk), lecz również ze względu matematycznego, gdyż oba typy procesów są opisywane różnymi równaniami. Warto tu jednak od razu wspomnieć, że W. D. KLUSZNIKOW w pracy [987] podjął próbę sformułowania równań uniwersalnych, opisujących w sposób przybliżony oba procesy łącznie i jednolicie.

Tak więc samo zdefiniowanie procesu czynnego i procesu biernego na szczelbu P punktu ciała nie nastęrcza trudności: trudności te mogą się natomiast pojawić przy precyzowaniu matematycznych warunków, rozgraniczających oba te typy procesów. Problem ten zostanie szerzej omówiony w rozdziale III.

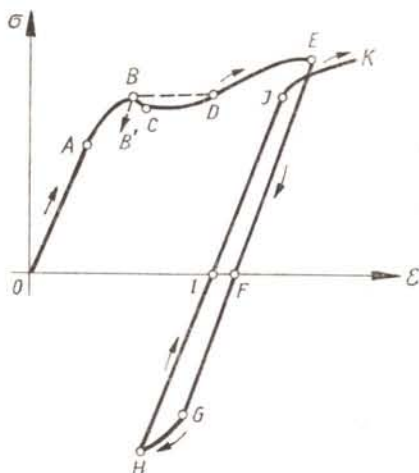
Na szczelbach S i B może wystąpić większa różnorodność procesów. Przez proces bierny będziemy tu rozumieli proces, który jest bierny w każdym punkcie rozpatrywanego przekroju lub ciała. Proces, czynny w każdym punkcie, nazwiemy procesem całkowicie czynnym: procesy takie zdarzają się dość rzadko w zastosowaniach. Krótszą nazwą «proces czynny» obejmimy tu szerszą klasę procesów, które w poszczególnych punktach są bądź czynne, bądź bierne lecz niepoprzedzone procesami czynnymi w tych punktach. Jeżeli natomiast w pewnych punktach proces będzie czynny, a w innych bierny poprzedzony procesem czynnym, to w odniesieniu do całego przekroju lub ciała będziemy mówili o procesie częściowo czynnym. Procesy takie są zazwyczaj najtrudniejsze do analizy. Można wtedy wyodrębnić strefy lokalnie czynne i strefy lokalnie bierne. W tym ostatnim przypadku mówi się czasem o lokalnym odciażaniu, jednak termin ten może budzić wątpliwości, jak wyjaśnimy poniżej.

3.2. Obciążanie a odciażanie w przypadku jednego czynnika wyężenia. Przejdziemy do zdefiniowania procesu obciążania i procesu odciażania. Zazwyczaj utożsamia się te pojęcia odpowiednio z pojęciami procesu czynnego i procesu biernego, jednak takie podejście jest nielogiczne, prowadzi do licznych nieporozumień i dlatego przyjmujemy tu definicje odrębne, zresztą nie całkiem ogólne. Ponadto wypada zauważyć, że pojęcia procesu czynnego i biernego są pojęciami wprowadzonymi specjalnie w teorii plastyczności, natomiast przez obciążanie i przez odciażanie rozumie się często pojęcia czysto techniczne, związane np. z techniką eksperymentu lub pracą konstrukcji bez względu na to, z jakim ma-

teriałem mamy do czynienia. Tak właśnie zdefiniujemy obciążanie i odciążanie w obecnej pracy.

Rozważmy najpierw przypadek, w którym występuje tylko jeden czynnik wyteżenia. Jeżeli ograniczymy się do zdefiniowanych w p. 2 czynników podstawowych, to logicznie uzasadniona jest nazwa «proces obciążania» dla przypadku wzrostu wartości bezwzględnej tego czynnika, a «proces odciążania» — przy zmniejszaniu się wartości bezwzględnej czynnika. Jeżeli wreszcie zachodzi proces bez zmiany czynnika wyteżenia, to należałoby go nazwać «procesem samorzutnym», gdyż wtedy nie mamy żadnego wpływu na jego przebieg.

Zanim przejdziemy do przypadku ogólniejszego, przedstawimy na prostym przykładzie zestawienie podanych definicji. Weźmiemy pod uwagę proces jednoosiowego rozciągania-ściskania próbki ze stali miękkiej, zobrazowany wykresem na rys. 6. Punkt A odpowiada



Rys. 6. Proces czynny a proces bierny; obciążanie a odciążanie

granicy sprężystości, punkt B — górnej granicy plastyczności, punkt C — dolnej granicy plastyczności. Pojęcia procesu czynnego i procesu biernego są zdefiniowane jednoznacznie, natomiast obciążania i odciążania zależą od przyjętego czynnika wyteżenia. Rozpatrzmy dwie możliwości, przyjmując jako czynnik wyteżenia kolejno naprężenie σ i odkształcenie ϵ (względnie siłę P i wydłużenie Δl , co przy niezbyt wielkich odkształceniach plastycznych jest równoważne). Klasyfikacja poszczególnych etapów procesu — zgodna z przyjętymi definicjami — podana jest w tabelcy 1.

Jak widać z tabelcy 1, już w tak prostym przypadku pojawiają się możliwości różnych nieporozumień i rozróżnienie pojęć obciążanie — proces czynny oraz odciążanie — proces bierny wydaje się niezbędne.

Pewne bliższe określenie procesu uzyskuje się przez dodanie przymiotników «przeciwwrotny» oraz «wtórny», chociaż zdefiniowanie tych pojęć w przypadku ogólnym (gdzie rozpatrujemy więcej czynników wyteżenia) może napotykać na trudności. Ponadto wypada tu zwrócić uwagę na fakt, że czynnik wyteżenia (niezależny parametr) rzutuje tu nie tylko na nazwę, ale na sam przebieg procesu: przy czynniku wyteżenia σ otrzymamy

Tablica 1

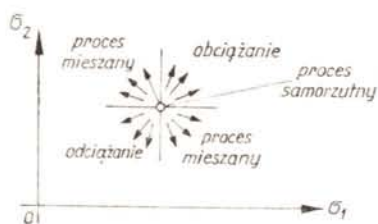
Oznaczenie fragmentu procesu	proces: czynny-bierny	proces: obciążania-odciążania	
		czynnik σ	czynnik ε
<i>OA</i>	bierny	obciążanie	obciążanie
<i>AB</i>	czynny	obciążanie	obciążanie
<i>BC</i>	czynny	} samorzutny	obciążanie
<i>CD</i>	czynny		obciążanie
<i>DE</i>	czynny	obciążanie	obciążanie
<i>EF</i>	bierny	odciążanie	odciążanie
<i>FG</i>	bierny	obciążanie (przeciwwzrotne)	odciążanie
<i>GH</i>	czynny (przeciwwzrotny)	obciążanie (przeciwwzrotne)	odciążanie
<i>HI</i>	bierny	odciążanie	obciążanie (wtórne)
<i>IJ</i>	bierny	obciążanie (wtórne)	obciążanie (wtórne)
<i>JK</i>	czynny (wtórny)	obciążanie (wtórne)	obciążanie (wtórne)

prostą procesu samorzutnego *BD* (zmniejszenie tego czynnika powodowałoby odciążanie po prostej *BB'*), natomiast przy czynniku wyłężenia ε otrzymamy krzywą obciążania *BCD*.

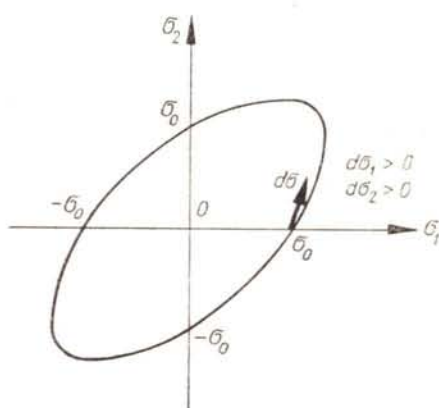
Pewne trudności pojawiają się przy logicznym definiowaniu procesów obciążania i odciążania w przypadku ubocznych czynników wyłężenia, np. temperatury. Utożsamianie wzrostu temperatury w stopniach Kelvina z obciążaniem a spadku z odciążaniem raczej nie miałyby sensu, jakkolwiek niewątpliwie wzrost temperatury przybliży stan ciała do pewnego stanu niebezpiecznego. Weźmy jednak pod uwagę pret obustronnie utwierdzony, przedstawiony na rys. 1. Przypuśćmy, że został on zmontowany w temperaturze T_0 bez naprężeń montażowych. Zarówno podwyższenie, jak i obniżenie temperatury wywoła wtedy pewne naprężenia, a ewentualnie również odkształcenia plastyczne, tak że uzasadnione wydaje się nazywanie obciążeniem procesu, podczas którego wartość bezwzględna $|T - T_0|$ jest rosnącą funkcją czasu. Większa trudność występuje wtedy, gdy przy montowaniu układu w temperaturze wyjściowej T_0 pojawiły się naprężenia montażowe, scharakteryzowane np. siłą podłużną N_0 . Wówczas można by przyjąć, że procesem obciążania nazywamy proces, w trakcie którego N jest rosnącą funkcją czasu ($N = 0$ nie odpowiada tu $T = T_0$). Definicja taka jest jednak bardzo nieogólna, nie może być np. przyjęta, gdy skutek ciężaru własnego w pręcie ustawionym pionowo siła podłużna N jest zmienna od punktu do punktu. Wtedy pozostaje jedynie powrót do definicji poprzedniej i wiązanie pojęcia «obciążania» ze wzrostem $|T - T_0|$.

3.3. Obciążanie a odciążanie w przypadku kilku czynników wyłężenia. Przejdziemy do przypadku występowania kilku czynników wyłężenia. Logicznie uzasadnione wydaje się tu przyjęcie następujących definicji; *obciążaniem* nazywamy proces, podczas którego

wszystkie czynniki wyężenia są niemalejącymi funkcjami czasu (w tym co najmniej jeden rosnącą); *odciążaniem* — proces, podczas którego wszystkie czynniki wyężenia są nierosnącymi funkcjami czasu (w tym co najmniej jeden malejący). Oczywiście poza tymi definicjami pozostaje cała klasa procesów, w trakcie których niektóre czynniki wyężenia są rosnącymi, a inne — malejącymi funkcjami czasu. Procesy takie można by nazwać *procesami mieszanymi*. Wreszcie przez *proces samorzutny* będziemy rozumieli proces, który zachodzi bez zmiany jakiegokolwiek czynnika wyężenia — podobnie jak w przypadku jednego czynnika wyężenia nie mamy wtedy żadnego wpływu na przebieg procesu. Przyjęte definicje w przypadku istnienia dwóch czynników wyężenia ilustruje rys. 7. Oczywiście wszystkie trudności, na które zwróciliśmy uwagę przy omawianiu jednego czynnika wyężenia, pozostają aktualne i tutaj.



Rys. 7. Obciążanie a odciążanie w przypadku dwóch czynników wyężenia



Rys. 8. Proces bierny odpowiadający obciążaniu na granicy plastyczności

Warto jeszcze raz zwrócić uwagę na różnice między zdefiniowanymi tu pojęciami procesu czynnego z jednej, a obciążania z drugiej strony. Proces obciążania może być procesem biernym nie tylko wtedy, gdy leży w całości w zakresie odkształceń sprężystych, ale nawet wtedy, gdy rozpoczyna się na granicy plastyczności. Przykład takiego procesu przy płaskim stanie naprężenia materiału podlegającego warunkowi plastyczności Hubera-Misesa⁽¹⁾ podaje rys. 8. Gdy za czynniki wyężenia przyjmiemy naprężenia σ_1 i σ_2 , to w trakcie procesu zobrazowanego wektorem przyrostu naprężenia $d\sigma$ oba te czynniki są rosnącymi funkcjami czasu, zatem zgodnie z przyjętą definicją mamy tu do czynienia z procesem obciążania. Jednakże, zgodnie z hipotezą Hubera-Misesa odkształcenia plastyczne przy takim procesie nie narastają, zatem proces jest plastycznie bierny.

4. Pojęcie powierzchni granicznej

4.1. Przestrzeń czynników wyężenia. Dogodną interpretację geometryczną omawianych procesów odkształcenia otrzymujemy przez wprowadzenie pewnej pomocniczej

⁽¹⁾ Szczegółowe omówienie warunków plastyczności zawiera rozdział III.

przestrzeni, którą w ogólnym przypadku nazwiemy *przestrzenią czynników wyłężenia* [770]. Tę n -wymiarową przestrzeń definiujemy odkładając poszczególne czynniki wyłężenia na osiach pewnego, na ogół kartezjańskiego układu współrzędnych. W przypadku ograniczenia się do podstawowych czynników wyłężenia liczba n wymiarów tej przestrzeni jest nie większa od 6 na szczeblu « P », oraz nie większa od 6, 8, 10, 5 lub 3 na szczeblu S odpowiednio dla pręta o przekroju zwartym, pręta cienkościennego, powłoki, płyty obciążonej poprzeczno-podłużnie, płyty obciążonej poprzecznie i tarczy. Liczby te wynikają z dyskusji, podanej w p. 2. Na szczeblu B liczba wymiarów przestrzeni może być dowolnie wielka; podobnie na szczeblach P i S przy uwzględnieniu ubocznych czynników wyłężenia.

Przestrzeń czynników wyłężenia można by nazwać przestrzenią zmiennych niezależnych. Dowolny proces odkształcenia można przedstawić jako pewną linię (drogę, ścieżkę) w tej przestrzeni.

Podobnie można wprowadzić *przestrzeń zmiennych zależnych*. Tak na przykład, gdy na szczeblu P przestrzenią zmiennych niezależnych będzie przestrzeń naprężeń, to za przestrzeń zmiennych zależnych można zazwyczaj uważać przestrzeń odkształceń (lub na odwrót); przestrzeń taką wprowadza A. A. ILIUSZIN [951, 960]. Również i w przestrzeni zmiennych zależnych proces (a raczej jego wynik) może być przedstawiony pewną linią, odpowiadającą danej linii w przestrzeni czynników wyłężenia. Określenie tej linii wynikowej jest jednym z podstawowych zadań teorii plastyczności. Dopiero znajomość obu linii oznacza znajomość całego procesu. Przyporządkowanie wzajemne tych linii stanowi z punktu widzenia matematycznego pewną *operację*, poszukujemy wartości tej operacji.

Opisany powyżej typ rozwiązania — znajomość wartości operacji — można by nazwać, rozwiązaniem w sensie szerszym. W sensie węższym poszukujemy jedynie współrzędnych punktu w przestrzeni zmiennych zależnych, odpowiadającego punktowi końcowemu drogi w przestrzeni czynników wyłężenia. Wynik jest wtedy wartością pewnego *funkcjonału*, zależnego od tej drogi.

Proces odkształcania przebiega zazwyczaj przez różne stadia (zakresy), różniące się od siebie pod względem fizycznym i matematycznym. Zakresom tym odpowiadają pewne obszary w przestrzeni czynników wyłężenia. Powierzchnie, rozdzielające poszczególne obszary, będziemy nazywali ogólnie powierzchniami granicznymi; w przypadku przestrzeni n -wymiarowej można by mówić o hiperpowierzchniach, w przypadku płaszczyzny (dwóch czynników wyłężenia) — o krzywych granicznych.

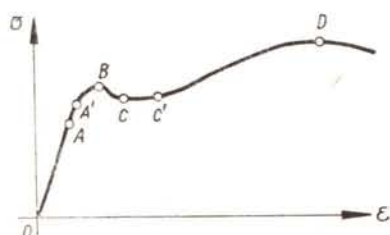
4.2. Typowe powierzchnie graniczne. Omówimy krótko typowe powierzchnie graniczne na poszczególnych szczeblach P , S i B . Badając proces odkształcenia na dowolnym z tych szczebli musimy przede wszystkim oddzielić obszar odkształceń sprężystych (procesów biernych) od obszaru, w którym obok odkształceń sprężystych pojawiają się również odkształcenia plastyczne (procesów czynnych). Ten stan graniczny będziemy nazywali *nośnością sprężystą*, a odpowiednią powierzchnię — powierzchnią nośności sprężystej. W razie konieczności wyróżnienia poszczególnych wielkości, odnoszących się do tego stanu, będziemy stosowali oznaczenie jedną kreską poziomą u góry, np. \bar{M}_g , $\bar{\kappa}$ itp.

Omawiana powierzchnia, rozgraniczająca obszar odkształceń sprężystych od obszaru

odkształceń plastycznych, może ulegać zmianie w trakcie procesu (może się przemieszczać, zmieniać wielkość i kształt). Jednakże nazwę «nośność sprężysta» i «powierzchnia nośności sprężystej» będziemy odnosili tylko do powierzchni pierwotnej. Powierzchnie przekształcone noszą różne nazwy na poszczególnych szczeblach P , S i B .

Zauważymy jeszcze, że powierzchnia nośności sprężystej (pierwotna) nie zależy od drogi w przestrzeni czynników wyężenia. Wszystkie inne powierzchnie graniczne mogą zależeć od drogi. Nie określając bliżej drogi obciążenia mamy zazwyczaj na myśli powierzchnię, odpowiadającą proporcjonalnemu wzrostowi wszystkich czynników wyężenia.

Na szczeblu P przy analizie procesów odkształcania w ustalonym punkcie ciała wyróżnia się przede wszystkim stany graniczne, odpowiadające punktom A , B , C i D na wykresie rozciągania, przedstawionym na rys. 9. Punkt A odpowiada granicy sprężystości, a więc



Rys. 9. Typowe stany graniczne przy jednoosiowym rozciąganiu

wyznacza powierzchnię nośności sprężystej. Punkty B , C i D określone są warunkami typu $d\sigma/d\epsilon = 0$ (lokalny przyrost odkształceń bez przyrostu naprężeń) i odpowiadają górnej granicy plastyczności, dolnej granicy plastyczności i granicy wytrzymałości.

Przy naprężeniu odpowiadającym punktowi C , a więc dolnej granicy plastyczności, warunek $d\sigma/d\epsilon = 0$ jest spełniony nie tylko lokalnie, ale w pewnym skończonym przedziale CC' : mówimy wtedy, że ciało zachowuje się w tym przedziale w sposób idealnie plastyczny. Równanie, określające odpowiedni stan w przypadku n czynników wyężenia, nazywamy warunkiem idealnej plastyczności. Natomiast ogólnie warunkiem plastyczności nazywamy równanie powierzchni, rozgraniczającej na szczeblu P na pewnym etapie procesu odkształcania obszar procesów czynnych od obszaru procesów biernych. Sama powierzchnia bywa tu najczęściej nazywana *powierzchnią plastyczności* lub *powierzchnią obciążania* (P. M. NAGHDI [456]). Powierzchnia taka może odpowiadać dowolnemu punktowi wykresu rozciągania, położonemu powyżej punktu A na rys. 9.

Punkty B i C mogą się w przypadku niektórych materiałów pokrywać, a w przypadku innych materiałów nie występują. W tym ostatnim przypadku nie istnieje warunek idealnej plastyczności, natomiast — o ile ciało jest w ogóle zdolne do odkształceń plastycznych — istnieje warunek plastyczności w sensie zdefiniowanym powyżej.

Na szczeblu przekroju S można również wprowadzić pojęcie nośności sprężystej i powierzchni nośności sprężystej; warunkiem definiującym jest tu dojście do granicy sprężystości w pewnym najbardziej wyężonym punkcie przekroju. Powierzchnia ta rozgranicza obszar procesów biernych od procesów całkowicie czynnych lub częściowo czynnych. Jak już wspomnieliśmy, powierzchnia taka w trakcie procesu może ulegać zmianie. Odpowiednie powierzchnie «chwilowe» nazywa J. A. KÖNIG [324] «*powierzchniami sprężystymi*». Nazwa ta nie odpowiada przyjętemu na szczeblu P terminowi «powierzchnie

plastyczne» lub «powierzchnie plastyczności» dla powierzchni o tej samej własności. Oba terminy są uzasadnione o tyle, że chodzi tu o rozgraniczenie procesów sprężystych od plastycznych, a raczej czynnych od biernych; korzystne byłoby jednak pewne ujednoczenie terminologii. Wspomniany już termin «powierzchnia obciążania» przestaje być właściwy po rozgraniczeniu pojęć obciążania i odciążania z jednej, a procesów czynnych i biernych z drugiej strony. Nazwa «powierzchnia sprężysto-plastyczna» mogłaby się mylić z określeniem całkiem innej powierzchni, mianowicie powierzchni fizycznej, rozgraniczającej w rozpatrywanym przekroju strefy sprężyste od stref uplastycznionych: raczej uzasadniony byłby tu termin «*powierzchnia czynno-bierna*», jako rozgraniczająca w przestrzeni czynników wyężenia oba te typy procesów na każdym szczelbu analizy.

Różnorodność powierzchni granicznych na szczelbu S jest znacznie większa, niż na szczelbu P : możemy wyodrębnić powierzchnie, odpowiadające tworzeniu się kolejnych stref uplastycznionych (np. przy zginaniu z rozciąganiem), tworzeniu się stref lokalnie biernych itp. Najważniejsza dla dalszych zastosowań jest jednak powierzchnia *nośności granicznej przekroju*. Pojęcie nośności granicznej przekroju związane jest zazwyczaj z idealną plastycznością materiału i odpowiada możliwości nieskrępowanego plastycznego płynięcia, pojawiającej się z reguły jedynie przy całkowitym uplastycznieniu przekroju (pojęcie to omówimy szczegółowo w p. 11). W razie konieczności wyróżnienia poszczególnych wielkości, odnoszących się do nośności granicznej (przekroju lub całego ciała) będziemy stosowali oznaczenie dwiema kreskami poziomymi u góry (np. $\bar{M}_g, \bar{\kappa}$, itp.).

Powierzchnie nośności granicznej bywają również nazywane powierzchniami współdziałania (interaction surfaces) lub ściślej *powierzchniami plastycznego współdziałania* (plastic interaction surfaces). Przy przyjęciu tej terminologii powierzchnie nośności sprężystej można by nazwać powierzchniami sprężystego współdziałania, jednak nazwy te wydają się mniej dogodne. Równanie powierzchni nośności granicznej przekroju, wiążące poszczególne uogólnione siły wewnętrzne, bywa nazywane warunkiem plastyczności dla przekroju (por. A. SAWCZUK [485]).

Wszystkie uwagi dotyczące szczelbu S odnoszą się również do analizy całego ciała (szczelbu B). Podobnie określamy tu powierzchnię nośności sprężystej i powierzchnię nośności granicznej. Dodatkowy, istotny wpływ może tu mieć odstępstwo od zasady zeszywnienia, czyli uwzględnianie wpływu odkształceń na rozkład sił wewnętrznych w ciele.

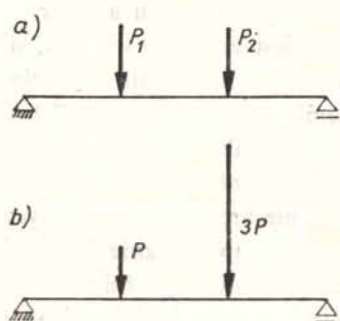
5. Klasyfikacja obciążeń złożonych

5.1. Symbolika klasyfikacji. Przez *obciążenie złożone* na dowolnym ze szczelbi P, S lub B będziemy rozumieli przypadek występowania więcej niż jednego czynnika wyężenia na danym szczelbu. Wypada przypomnieć, że przez czynnik wyężenia rozumiemy wielkości niezależne. Tak np. obciążenie belki, przedstawionej na rys. 10a, jest obciążeniem złożonym na szczelbu B , jeżeli siły P_1 i P_2 są niezależne; przy danej zależności między siłami np. jak na rys. 10b obciążenia nie będziemy uważali za złożone. Jednakże czasami ten ostatni przypadek dogodnie jest rozpatrywać jako przypadek szczególny obciążenia złożonego.

W przypadku obciążenia złożonego, gdy występuje więcej niż jeden czynnik wyężenia, możemy wprowadzić omówioną w p. 2 i p. 4 pomocniczą przestrzeń czynników wyężenia

i powierzchnie graniczne w tej przestrzeni. Tak więc problemy obciążeń złożonych są nierozdzielnie związane z konstrukcją powierzchni granicznych.

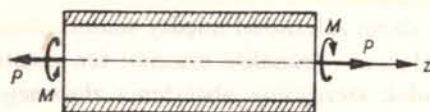
Przytoczmy obecnie klasyfikację obciążeń złożonych, zaproponowaną w pracy [779]. Obciążenie może być złożone (w sposób w pewnym stopniu niezależny) z osobna na szczęblu P , S i B . *Stopień złożenia* będziemy oznaczali wskaźnikami liczbowymi przy symbolach P , S i B ; wskaźnik taki będzie oznaczał liczbę czynników wyężenia, czyli jednocześnie liczbę wymiarów przestrzeni czynników wyężenia, w której należy określić odpowiednie powierzchnie graniczne.



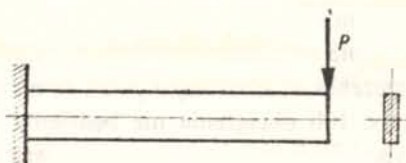
Rys. 10. a) Obciążenie złożone na szczęblu B , b) Obciążenie może być traktowane jako szczególny przypadek obciążenia złożonego

Drugi istotny dla klasyfikacji problem dotyczy *jednorodności* lub *niejednorodności* rozkładu czynników wyężenia w przekroju (jednorodność poprzeczna) lub wzdłuż osi lub powierzchni środkowej (jednorodność podłużna). Przypadek jednorodności jest oczywiście znacznie prostszy do analizy. Jednorodność poprzeczną czynników wyężenia będziemy oznaczali symbolem \rightarrow między literami P i S , natomiast podłużną tym samym symbolem między literami S i B , ponieważ w tym przypadku przejście z jednego szczębla analizy na drugi jest natychmiastowe (wniosek ten mógłby nie być słuszny w przypadku ciał niejednorodnych). Niejednorodność czynników wyężenia będziemy oznaczali symbolem $/$.

5.2. Przykłady klasyfikacji. Przejdziemy do przykładów. Klasyyczny przypadek cienkiej rury kolistej, poddanej działaniu jednoczesnego rozciągania i skręcania (rys. 11), sklasyfikujemy jako $P_2 \rightarrow S_2 \rightarrow B_2$: występują tu dwie składowe stanu naprężenia σ_z i $\tau_{z\theta}$ (lub dwie niezależne składowe stanu odkształcenia ε_z i $\gamma_{z\theta}$, bowiem pojawiające się odkształcenia poprzeczne ε_r i ε_θ są zależne od ε_z), dwie uogólnione siły wewnętrzne w przekroju, N i M_x , wreszcie dwie uogólnione siły zewnętrzne P i M . Przypadek ten jest złożony



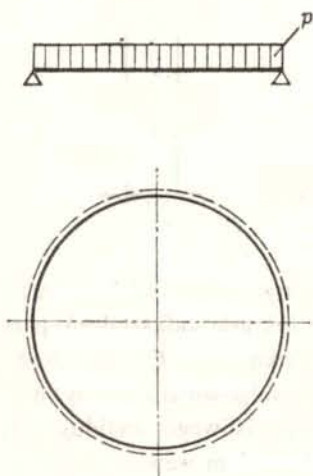
Rys. 11. Przykład jednorodnego przejścia pomiędzy szczęblami P , S i B



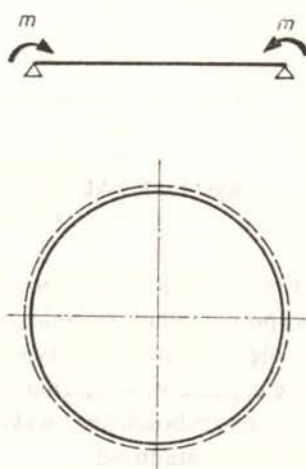
Rys. 12. Przykład niejednorodnego przejścia pomiędzy szczęblami P , S i B

na wszystkich trzech szczeblach, jednak jego prostota polega na jednorodności zarówno poprzecznej, jak i podłużnej. Wypada tu zauważyć, że w zasadzie niezależnymi wielkościami mogą być tylko obciążenia zewnętrzne; niezależne siły wewnętrzne w przekroju uzyskujemy najłatwiej przez wykorzystanie jednorodności podłużnej, a niezależne naprężenia w punkcie przez wykorzystanie jednorodności podłużnej i poprzecznej.

Zginanie belki jednostronnie utwierdzonej, obciążonej siłą skupioną (rys. 12), sklasyfikujemy przy uwzględnieniu ścinania jako $P_2/S_2/B_1$; przypadek ten jest trudniejszy wobec braku jednorodności. Płyta kołowa pod działaniem równomiernie rozłożonego obciążenia ciągłego (rys. 13) zostanie sklasyfikowana jako $P_2/S_2/B_1$ przy przyjęciu teorii małych ugięć i pominięciu naprężeń stycznych; jako $P_2/S_4/B_1$ w oparciu o teorię ugięć skończo-



Rys. 13. Klasyfikacja płyty kołowej w zależności od przyjętej teorii

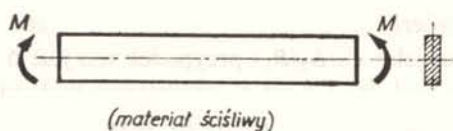


Rys. 14. Przykład jednorodności podłużnej stanu naprężenia

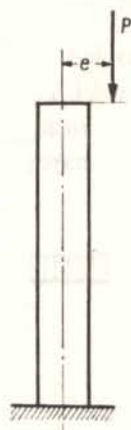
nych (dwie siły podłużne występują tu obok momentów zginających), wreszcie jako $P_3/S_3/B_1$ przy uwzględnieniu naprężeń stycznych w teorii małych ugięć ($\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}; M_r, M_\theta, Q_r; p$). Płyta kołowa pod działaniem momentów równomiernie rozłożonych na brzegu, $P_2/S_2 \rightarrow B_1$ (w świetle teorii małych ugięć) jest prostsza do analizy z uwagi na jednorodność podłużną, rys. 14. W przypadku rury grubościennej szczebel S jest często trudny do zdefiniowania: rurę pod działaniem ciśnienia wewnętrznego p i siły osiowej N sklasyfikujemy jedynie jako P_3/B_2 ($\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z; p, N$).

Obciążenie może być złożone na wszystkich trzech szczeblach, lecz również na każdym szczeblu z osobna. Podamy odpowiednie przykłady. Rozważmy belkę wykonaną ze ściśliwego materiału sprężysto-plastycznego, poddaną czystemu zginaniu (rys. 15). Jak wykazał A. A. ILIUSZIN [950] założenie istnienia tylko jednej składowej stanu naprężenia σ nie zezwala na spełnienie równań nierozdzielności; dodatkowo muszą wystąpić trzy inne składowe stanu naprężenia, zatem mamy tu $P_4/S_1 \rightarrow B_1$. Pręt mimośrodowo ściskany (rys. 16) sklasyfikujemy — przy założeniu ustalenia mimośrodowo — jako $P_1/S_2/B_1$. Wreszcie belkę obciążoną jak na rys. 10a przy pominięciu wpływu sił poprzecznych sklasyfikujemy jako $P_1/S_1/B_2$.

Zauważmy, że czasem obciążenie jest tylko *pozornie złożone* — tak na przykład naprężenia τ_{zx} i τ_{zy} , występujące przy czystym skręcaniu, mogą w niektórych przypadkach być zastąpione ich wypadkową τ_z i wtedy nie ma tu powodu mówić o obciążeniu złożonym w punkcie ciała. Podobnie zginanie pręta o przekroju kołowym dwoma wzajemnie prosto-



Rys. 15. Przykład obciążenia złożonego jedynie na szczęblu P



Rys. 16. Przykład obciążenia złożonego jedynie na szczęblu S

padłymi momentami jest tylko pozornie zginaniem ukośnym, jakkolwiek, z drugiej strony, przy nieproporcjonalnej zmianie obu momentów w zakresie odkształceń plastycznych spotykamy się ze zjawiskami typowymi dla zginania ukośnego. Czasem można zredukować liczbę czynników wyężenia przez połączenie ich w odpowiednie grupy: na przykład, rozważając rurę grubościenną, wykonaną z materiału nieściśliwego, znajdującą się w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, a obciążoną ciśnieniem wewnętrznym p_w i ciśnieniem zewnętrznym p_z , wystarczy jako czynnik wyężenia traktować jedynie różnicę ciśnień $p_w - p_z$.

Przytoczone tu przykłady zakładają milcząco jednorodność materiału. W przypadku materiału niejednorodnego klasyfikacja może ulec nawet bardzo istotnym zmianom, które zresztą z reguły odpowiadają istotnym zmianom pod względem fizycznym. I tak np. poddanie jednorodnego, jednospójnego ciała ciśnieniu hydrostatycznemu powoduje występowanie w każdym punkcie stanu wszechstronnego równomiernego ściskania, które z reguły nie wywołuje uplastycznienia materiału. Możemy tu zastosować klasyfikację $P_1 \rightarrow B_1$; wprawdzie w poszczególnych punktach występują trzy naprężenia główne, ale tylko jedno z nich może być uważane za niezależne. W przypadku materiału niejednorodnego stan naprężenia z reguły przestaje być jednorodnym, równomiernym, trójosiowym ściskaniem i uplastycznienie może się pojawić (J. RYCHLEWSKI [590]); klasyfikacja powinna ulec tu zmianie na P_6/B_1 .

5.3. Kwestia niezależności czynników wyężenia. Omówiony powyżej przykład mimośrodowego ściskania pręta, sklasyfikowany przez nas jako $P_1/S_2/B_1$, posłuży nam do przedyskutowania kwestii niezależności czynników wyężenia na poszczególnych szczęblach analizy. W istocie rzeczy niezależne są tylko czynniki na szczęblu całego ciała B ; ich zmienność jest bądź określona (deterministycznie lub probabilistycznie) w warunkach

pracy konstrukcji, bądź też może być — na ogół dowolnie — zadawana w warunkach prób laboratoryjnych. Czynniki wyłężenia na szczęblach P i S są w pewien sposób zależne od czynników na szczęblu B ; tym niemniej w większości przypadków celowe jest traktowanie ich jako niezależnych.

Przypadek mimośrodowego ściskania pręta (rys. 16) analizuje się bądź pod założeniem zasady zeszywnienia bez uwzględnienia wpływu odkształceń na rozkład uogólnionych sił wewnętrznych (teoria pierwszego rzędu), bądź przy uwzględnieniu wpływu odkształceń (teorie drugiego i trzeciego rzędu zależnie od stopnia dokładności). Pierwszemu przypadkowi odpowiadałaby klasyfikacja $P_1/S_1 \rightarrow B_1$, bowiem między momentem zginającym M_g a siłą podłużną N w dowolnym przekroju istnieje związek $M_g = N \cdot e$; tylko jedna z tych wielkości jest niezależna, a ponadto występuje jednorodność podłużna stanu naprężenia. Natomiast drugi przypadek zasługuje na klasyfikację $P_1/S_2/B_1$; w poszczególnych przekrojach związek między momentem zginającym, a siłą podłużną jest różny i właśnie założenie niezależności obu wielkości M_g i N jest niezbędne dla przeprowadzenia pełnej analizy pracy pręta i jego nośności sprężystej lub granicznej.

Tak więc na ogół należy mówić o czynnikach *niezależnych* na szczęblu B oraz o czynnikach, które *mogą być przyjęte za niezależne* na szczęblach P i S .

Znajomość powierzchni granicznych w przestrzeni czynników wyłężenia jest bądź celem sama dla siebie (szczególnie powierzchni nośności sprężystej i powierzchni nośności granicznej), bądź też określa granice stosowalności równań określających proces odkształcania w poszczególnych podobszarach tej pomocniczej przestrzeni.

Zbliżenie do powierzchni granicznej punktu, reprezentującego stan fizyczny na rozpatrywanym szczęblu, odpowiada zazwyczaj zbliżeniu konstrukcji do pewnego stanu niebezpiecznego. Zbliżenie to można ogólnie nazwać wyłężeniem (materiału w punkcie, przekroju lub konstrukcji). Bezwymiarową miarę wyłężenia materiału w punkcie, odpowiadającą proporcjonalnemu wzrostowi naprężeń, wprowadzili J. WALCZAK i S. ZIEMBA [721]. Pewne uogólnienie tej miary, uwzględniające prawdopodobieństwo różnych dróg w przestrzeni czynników wyłężenia, zaproponował M. ŻYCZKOWSKI w pracach [769, 773 i 774].

PODSTAWOWE RÓWNANIA TEORII PLASTYCZNOŚCI

6. Niezmienniki tensorów drugiego rzędu

6.1. Niezmienniki podstawowe tensora. Niektóre podstawowe wielkości fizyczne, którymi posługuje się mechanika ośrodków ciągłych, a w szczególności teoria plastyczności — jak naprężenia, odkształcenia, prędkości naprężeń, prędkości odkształceń itp. — tworzą tensory drugiego rzędu, mianowicie przy obrocie układu odniesienia transformują się zgodnie z prawami *transformacji tensorowej*. Ograniczając się do układów odniesienia lokalnie ortogonalnych możemy mianowicie napisać dla dowolnego tensora drugiego rzędu T_{τ}

$$(6.1) \quad \tau_{\xi\eta} = \tau_{xx} a_{\xi x} a_{\eta x} + \tau_{xy} a_{\xi x} a_{\eta y} + \tau_{xz} a_{\xi x} a_{\eta z} + \tau_{yx} a_{\xi y} a_{\eta x} + \tau_{yy} a_{\xi y} a_{\eta y} + \tau_{yz} a_{\xi y} a_{\eta z} + \\ + \tau_{zx} a_{\xi z} a_{\eta x} + \tau_{zy} a_{\xi z} a_{\eta y} + \tau_{zz} a_{\xi z} a_{\eta z}.$$

We wzorze tym $\tau_{\xi\eta}$ oznacza składową tensora T_{τ} w «nowym» układzie odniesienia $\xi\eta\zeta$, $\tau_{xx}, \dots, \tau_{zz}$ — składowe w «starym» układzie xyz , wreszcie symbole typu $a_{\xi x}$ oznaczają cosinusy kątów między osiami ξ i x ; spełniają one warunki typu

$$(6.2) \quad a_{\xi x}^2 + a_{\xi y}^2 + a_{\xi z}^2 - 1 = 0$$

dla każdej z osi ξ, η, ζ oraz trzy dalsze warunki prostopadłości tych osi. Stosując skrócony zapis wskaźnikowy oraz *konwencję sumacyjną*, zgodnie z którą powtarzanie się wskaźnika w jednomianie oznacza sumowanie po tym wskaźniku, możemy zamiast dziewięciu wzorów typu (6.1) dla poszczególnych składowych tensora T_{τ} w nowym układzie odniesienia napisać krótko

$$(6.3) \quad \tau_{kl} = a_{ik} a_{jl} \tau_{ij}, \quad i, j = x, y, z; \quad k, l = \xi, \eta, \zeta.$$

Przy stosowaniu konwencji sumacyjnej można zazwyczaj bez obawy nieporozumień opuścić wyjaśnienie, po jakich zmiennych przebiegają wskaźniki i, j , a po jakich k, l itp.

Tak więc tensor drugiego rzędu T_{τ} posiada dziewięć składowych, transformujących się zgodnie ze wzorem (6.1) lub (6.3); aby efektywnie zapisać te składowe w pewnym układzie x, y, z , zastosujemy zapis

$$(6.4) \quad T_{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{Bmatrix}.$$

Przekątną, przechodzącą przez składowe $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$, będziemy nazywali przekątną główną. Rozróżnienie składowych tensora, leżących na przekątnej głównej i poza nią, posiada duże znaczenie dla problemów wyężenia materiału, a więc problemów uplastycznienia, pęknięcia itp.

W klasycznej mechanice ośrodków ciągłych oddziaływanie jednej cząstki ciała na cząstkę sąsiednią przedstawia się za pomocą naprężeń, definiowanych jako granice stosunków sił do powierzchni pola przekroju, na którą te siły działają, gdy powierzchnia ta zmierza do zera. Oddziaływań za pośrednictwem momentów (naprężeń momentowych) nie uwzględnia się. W obecnej pracy również nie będziemy uwzględniali naprężeń momentowych. Z warunku równowagi momentów sił, działających na element ciała, wynika wtedy symetria tensora naprężeń i prędkości naprężeń względem przekątnej głównej; można również wykazać symetrię tensora odkształceń i prędkości odkształceń. Rozważania nasze ograniczymy więc do tensorów symetrycznych, przyjmując $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ dla dowolnej pary wskaźników i, j . Sformułowaniu podstaw teorii plastyczności ośrodka, w którym występują naprężenia momentowe (ośrodek typu Cosseratów), poświęcone są prace A. E. GREENA i P. M. NAGHDIEGO [178], S. KOMLJENOWIĆA [320], A. SAWCZUKA [628], A. E. GREENA, B. C. MCINNISA i P. M. NAGHDIEGO [179].

Podstawowe prawa fizyczne, opisujące zachowanie się rozpatrywanego materiału, muszą obowiązywać bez względu na przyjęty układ odniesienia w danym punkcie ciała, czyli muszą być niezmiennicze względem transformacji układu. Wynika stąd fundamentalna rola niezmienników rozpatrywanych tensorów. Istnieje nieskończenie wiele różnych niezmienników tensora, ale można wykazać (por. np. A. C. ERINGEN [128], str. 31), że tensor drugiego rzędu w przestrzeni trójwymiarowej ma nie więcej, niż trzy niezależne niezmienniki. Dobór takiej trójki niezależnych niezmienników może mieć istotne znaczenie dla prostoty sformułowania związków fizycznych, dlatego też typowe układy niezmienników omówimy bardziej szczegółowo i przypiszemy im pewne dogodnie nazwy. Podamy również związki między niezmiennikami należącymi do poszczególnych układów.

Najprostszym sposobem otrzymania układu niezmienników jest dokonanie kilkukrotnego mnożenia tensora przez siebie i zrównanie sąsiednich wskaźników (zwięźenie tensora). Otrzymujemy wtedy układ niezmienników, które nazwiemy *niezmiennikami podstawowymi* tensora T_r i oznaczymy przez I_{1r}, I_{2r}, \dots :

$$\begin{aligned}
 (6.5) \quad I_{1r} &= \tau_{ii} = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}, \\
 I_{2r} &= \tau_{ij} \tau_{ji} = \tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + \tau_{zz}^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2, \\
 I_{3r} &= \tau_{ij} \tau_{jk} \tau_{ki} = \tau_{xx}^3 + \tau_{yy}^3 + \tau_{zz}^3 + 3\tau_{xx} \tau_{xy}^2 + 3\tau_{xx} \tau_{xz}^2 + \\
 &\quad + 3\tau_{yy} \tau_{yz}^2 + 3\tau_{yy} \tau_{yx}^2 + 3\tau_{zz} \tau_{zx}^2 + \\
 &\quad + 3\tau_{zz} \tau_{zy}^2 + 6\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}.
 \end{aligned}$$

Niezmienniki te zostały rozpisane pod przyjętym uprzednio założeniem symetrii rozważanego tensora T_r . Dogodna nazwa «niezmienniki podstawowe» jest stosowana np. przez I. I. GOLDIENBLATA [853], który również stosuje zbliżoną symbolikę. Tworzone w ten sposób dalsze niezmienniki wyrażają się przez trzy przytoczone; i tak np.

$$(6.6) \quad \begin{aligned} I_{4\tau} &= \frac{1}{6} I_{1\tau}^4 + \frac{1}{2} I_{2\tau}^2 - I_{1\tau}^2 I_{2\tau} + \frac{4}{3} I_{1\tau} I_{3\tau}, \\ I_{5\tau} &= \frac{1}{6} I_{1\tau}^5 + \frac{5}{6} I_{2\tau} I_{3\tau} + \frac{5}{6} I_{1\tau}^2 I_{3\tau} - \frac{5}{6} I_{1\tau}^3 I_{2\tau}. \\ &\dots \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że niektórzy autorzy definiują te niezmienniki z nieco odmiennymi współczynnikami, np. A. M. FREUDENTHAL i M. GEIRINGER [145] przyjmują przy definicji niezmiennika T_{nc} współczynnik $1/n$. Wszystkie przytoczone powyżej niezmienniki są *niezmiennikami symetrycznymi*, to znaczy nie ulegają zmianie przy cyklicznej przemianie wskaźników (x na y , y na z , z na x). Pierwsze trzy niezmienniki noszą nazwę *liniowego*, *kwadratowego* i *sześciennego* niezmiennika podstawowego tensora T_τ .

6.2. Niezmienniki główne tensora. Do innego układu niezmienników dochodzimy przy obliczeniu wartości głównych (własnych) tensora T_τ , np. naprężeń głównych lub odkształceń głównych. Przez *wartość główną* tensora drugiego rzędu rozumiemy wartość ekstremalną (ściślej: stacjonarną) składowej leżącej na przekątnej głównej τ_{ii} z uwagi na kierunek osi i : symbol τ_{ii} rozumiemy tu bez sumowania po i . Okazuje się, że pod przyjętym przez nas założeniem symetrii tensora (1) istnieją zawsze trzy wartości główne tego tensora, τ_1, τ_2, τ_3 , określone równaniem sześciennym

$$(6.7) \quad \tau^3 - J_{1\tau} \tau^2 + J_{2\tau} \tau - J_{3\tau} = 0;$$

(2) kierunki, w których występują wartości główne, zwane *kierunkami głównymi* tensora T_τ , są do siebie wzajemnie prostopadłe, tak że wyznaczają one pewien lokalnie ortogonalny układ odniesienia; (3) w układzie kierunków głównych składowe tensora leżące poza przekątną główną są równe zeru, czyli tensor przyjmuje formę diagonalną

$$(6.8) \quad T_\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Można łatwo wykazać, że zerowanie się składowych tensora, leżących poza przekątną główną, jest równoważne ekstremalności (stacjonarności) wartości głównych τ_1, τ_2, τ_3 , tak że bywa ono również wykorzystywane przy definiowaniu wartości głównych i kierunków głównych tensora. Odpowiednią definicję nazwiemy definicją wtórną wartości głównych.

Wychodząc z tej definicji szybciej i łatwiej otrzymuje się równanie sześciennic (6.7). Jednakże ekstremalność wartości głównych tensora jest z punktu widzenia wytrzymałościowego własnością ważniejszą, niż znikanie składowych poza przekątną. Wyprowadzenie równania (6.7) z warunków stacjonarności podaje np. J. WALCZAK [722] (ekstremum z warunkiem pobocznym (6.2)) i A. M. FREUDENTHAL [146] (ekstremum względem dwóch niezależnych dostaw kierunkowych). Wzory, określające kierunki główne, można znaleźć w podręczniku W. KRZYSIA i M. ŻYCKOWSKIEGO [329].

Wartości główne algebraicznie uszeregowane będziemy oznaczali wskaźnikami rzymskimi, $\tau_I, \tau_{II}, \tau_{III}$: będzie zatem zawsze $\tau_I \geq \tau_{II} \geq \tau_{III}$. Wartość τ_I jest wtedy maksymalna z uwagi na kierunek osi przyjętego układu, τ_{III} — minimalna, natomiast τ_{II} odpowiada

z reguły punktowi siodłowemu, zwanemu minimaks: z uwagi na tę ostatnią wartość ściślej jest mówić o stacjonarności niż o ekstremalności wartości głównych tensora. Przez stacjonarność rozumiemy mianowicie jedynie zerowanie się wszystkich pierwszych pochodnych cząstkowych funkcji wielu zmiennych, co nie jest jeszcze warunkiem wystarczającym ekstremum.

Same wartości główne tensora są oczywiście niezmiennikami, gdyż nie mogą zależeć od przyjętego pierwotnie układu odniesienia. Są to jednak niezmienniki niesymetryczne: natomiast współczynniki równania sześciennego (6.7), które są związane z pierwiastkami tego równania — a więc z wartościami głównymi tensora — znanymi z algebry związkami

$$(6.9) \quad \begin{aligned} J_{1\tau} &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \\ J_{2\tau} &= \tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1, \\ J_{3\tau} &= \tau_1 \tau_2 \tau_3 \end{aligned}$$

są niezmiennikami symetrycznymi. Dla odróżnienia od niezmienników podstawowych (6.5) nazwiemy je *niezmiennikami głównymi* tensora T_τ ; tę nazwę stosują np. A. M. FREUDENTHAL i H. GEIRINGER [145] i P. PERZYNA [529]. Niezmienniki główne jako współczynniki równania (6.7) wyrażają się następującymi funkcjami składowych tensora w dowolnym lokalnie ortogonalnym układzie odniesienia x, y, z ;

$$(6.10) \quad \begin{aligned} J_{1\tau} &= \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}, \\ J_{2\tau} &= \tau_{xx}\tau_{yy} + \tau_{yy}\tau_{zz} + \tau_{zz}\tau_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ J_{3\tau} &= \tau_{xx}\tau_{yy}\tau_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{xx}\tau_{yz}^2 - \\ &\quad - \tau_{yy}\tau_{zx}^2 - \tau_{zz}\tau_{xy}^2 = \det T_\tau. \end{aligned}$$

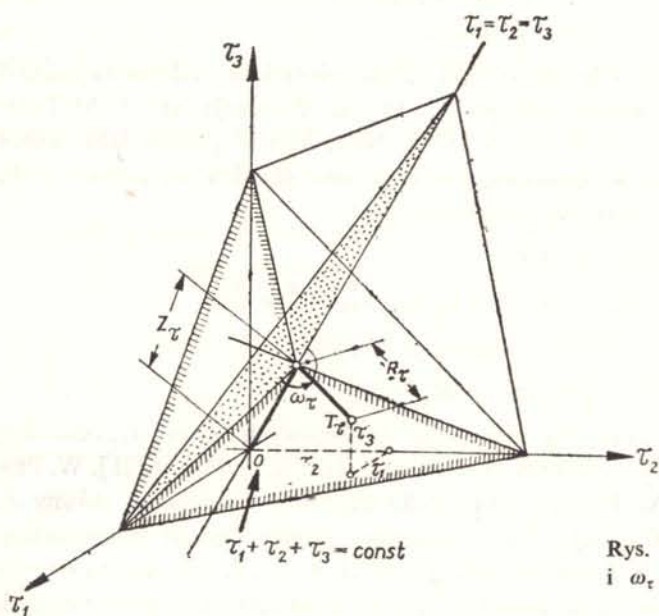
Symbolem $\det T_\tau$ oznaczyliśmy wyznacznik utworzony ze składowych tensora T_τ . Niektórzy autorzy, np. A. A. ILIUSZIN [949] (niekonsekwentnie, por. str. 21), R. HILL [221], W. PRAGER i P. G. HODGE [552] oraz W. PRAGER [565], definiują drugi niezmiennik główny $J_{2\tau}$ ze znakiem przeciwnym; powód takiej zmiany wyjaśnimy poniżej, jednak pozostaniemy tu przy definicjach klasycznych. Samych wartości głównych τ_1, τ_2, τ_3 , nie można wyrazić przez dowolne składowe tensora T_τ za pomocą funkcji algebraicznych, gdyż równanie sześciennne (6.7) ma zawsze wyróżnik ujemny i sprowadza się do przypadku nieprzywiedlnego.

Jak widać z porównania wzorów (6.5) i (6.10), pierwszy niezmiennik podstawowy tensora $I_{1\tau}$ jest równy pierwszemu niezmiennikowi głównemu tego tensora $J_{1\tau}$, dlatego też w dalszym ciągu mówiąc «pierwszy niezmiennik tensora» będziemy mogli opuszczać dodatkowe określenia «podstawowy» lub «główny»; dalsze natomiast niezmienniki podstawowe można wyrazić jako dość proste funkcje niezmienników głównych i na odwrót. Odpowiednie wzory podamy w tablicy zbiorczej w p. 7. Niezmienniki $J_{1\tau}, J_{2\tau}, J_{3\tau}$, nazwiemy kolejno liniowym, kwadratowym i sześciennym niezmiennikiem głównym tensora T_τ .

Niezmiennikami są również składowe tensora w dowolnym układzie współrzędnych, jednoznacznie usytuowanym względem kierunków głównych. Niezmienniki symetryczne otrzymamy wtedy, gdy odpowiednia oś układu jest równo nachylona do wszystkich trzech kierunków głównych $\left(a_{1x}^2 = a_{1y}^2 = a_{1z}^2 = \frac{1}{3}\right)$. Istnieje osiem takich osi, a odpowiednie

niezmienniki nazywamy ośmiościennymi. Omówimy je później bardziej szczegółowo w odniesieniu do naprężeń i do odkształceń z osobna.

6.3. Niezmienniki walcowe tensora. Odkładając na osiach pewnego na ogół kartezjańskiego układu współrzędnych trzy niezależne niezmienniki tensora T_τ określamy pewną pomocniczą przestrzeń wektorową, którą można nazwać *przestrzenią niezmienników* danego tensora. Przyjmijmy jako te niezmienniki wartości główne τ_1, τ_2, τ_3 ; w przypadku tensora naprężeń odpowiednia przestrzeń nosi zazwyczaj nazwę przestrzeni HAIGHA [196] — WESTERGAARDA [734], jakkolwiek posługiwał się nią już w XIX wieku H. HERTZ (por. W. BURZYŃSKI [55]). Każdemu tensorowi T_τ odpowiada określony punkt tak wpro-



Rys. 17. Współrzędne walcowe Z_τ , R_τ i ω_τ w przestrzeni wartości głównych tensora T_τ

dzonej przestrzeni (w przeciwną stronę odpowiedniość nie jest jednoznaczna). Wprowadźmy następnie w tej przestrzeni układ współrzędnych walcowych, skierowując oś układu zgodnie z prostą równo nachyloną do osi τ_1, τ_2, τ_3 , a więc prostą o równaniu $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ (rys. 17). Współrzędne walcowe punktu T_τ , które oznaczymy przez Z_τ, R_τ i ω_τ są również ważnymi niezmiennikami tensora T_τ . Wyrażają się one przez wartości główne tensora następująco (J. MURZEWSKI [446]):

$$(6.11) \quad \begin{aligned} Z_\tau &= \sqrt{\frac{1}{3}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)}, \\ R_\tau &= \sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{(\tau_1 - \tau_2)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^2 + (\tau_3 - \tau_1)^2}}, \\ \omega_\tau &= \arcsin \frac{\tau_2 - \tau_3}{R_\tau \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Odwrotne zależności mają postać

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{Z_\tau}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} R_\tau \cos \omega_\tau, \\ \tau_2 &= \frac{Z_\tau}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} R_\tau \cos \left(\omega_\tau - \frac{2}{3} \pi \right), \\ \tau_3 &= \frac{Z_\tau}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} R_\tau \cos \left(\omega_\tau + \frac{2}{3} \pi \right). \end{aligned}$$

Jak widać z powyższych wzorów, kąt ω_τ jest odmierzany od płaszczyzny przechodzącej przez oś τ_1 i oś równonachyloną; płaszczyzna ta została zakropkowana na rys. 17. Niezmienniki Z_τ , R_τ i ω_τ będziemy nazywali *niezmiennikami walcowymi* tensora T_τ ; można je również stosunkowo łatwo wyrazić efektywnie przez dowolne składowe tensora T_τ . W dalszych zastosowaniach będziemy je wykorzystywali z nieco innymi współczynnikami liczbowymi.

6.4. Niezmienniki aksjatora i dewiatora. Każdy tensor drugiego rzędu T_τ można rozłożyć na *aksjator* (tensor kulisty) A_τ i *dewiator* D_τ według schematu

$$(6.13) \quad T_\tau = \begin{Bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_m & 0 & 0 \\ 0 & \tau_m & 0 \\ 0 & 0 & \tau_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tau_{xx} - \tau_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} - \tau_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} - \tau_m \end{Bmatrix}.$$

Przez τ_m oznaczono wartość średnią składowych na przekątnej głównej, proporcjonalną do pierwszego niezmiennika

$$(6.14) \quad \tau_m = \frac{1}{3} (\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) = \frac{1}{3} I_{1\tau} = \frac{1}{3} J_{1\tau}.$$

Sens fizyczny takiego rozkładu jest szczególnie widoczny na przykładzie tensora nieskończenie małych odkształceń, gdzie aksjator odpowiada *zmianie objętości* ciała bez zmiany postaci, a dewiator — *zmianie postaci* bez zmiany objętości (suma wyrazów na przekątnej głównej jest równa zero). W sprężystym ciele izotropowym (a z reguły także w teorii plastyczności ciał izotropowych) podobny wniosek jest również słuszny w odniesieniu do rozkładu tensora naprężeń. Składowe dewiatora będziemy w zasadzie oznaczali literami łacińskimi, odpowiadającymi oznaczeniom greckim składowych tensora; i tak dowolnie zresztą w tym punkcie obranemu symbolowi τ przypiszemy symbol t , pisząc krótko w zapisie wskaźnikowym

$$(6.15) \quad t_{ij} = \tau_{ij} - \tau_m \delta_{ij},$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera, $\delta_{ij} = 1$ dla $i = j$ oraz $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$.

Ze względu na omówioną powyżej interpretację fizyczną rozkładu tensora (6.13) szczególnego znaczenia nabierają niezmienniki aksjatora i dewiatora. Aksjator A_τ , który jest scharakteryzowany tylko jedną niezależną składową, posiada oczywiście tylko jeden niezależny niezmiennik. Pierwszy niezmiennik aksjatora jest przy tym równy pierwszemu

niezmiennikowi tensora, więc nie będziemy mu przypisywali nowego oznaczenia; dalsze niezmienniki aksjatora są już prostymi funkcjami pierwszego niezmiennika. Warto jedynie zauważyć, że spośród niezmienników walcowych aksjatora $R_r = 0$, wzór na ω_r prowadzi do symbolu nieoznaczonego, natomiast Z_r jest proporcjonalne do pierwszego niezmiennika aksjatora.

Niezmienniki podstawowe dewiatora D_r będziemy oznaczali przez I_{1r}, I_{2r}, I_{3r} , a niezmienniki główne przez J_{1r}, J_{2r}, J_{3r} . Pierwszy niezmiennik dewiatora jest oczywiście równy zeru wprost z definicji, $I_{1r} = J_{1r} = 0$. Drugi i trzeci niezmiennik podstawowy dewiatora, I_{2r} i I_{3r} , określamy przez podstawienie składowych dewiatora do wzorów (6.5); otrzymujemy najpierw

$$(6.16) \quad \begin{aligned} I_{2r} &= t_{xx}^2 + t_{yy}^2 + t_{zz}^2 + 2t_{xy}^2 + 2t_{yz}^2 + 2t_{zx}^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = t_{ij} t_{ji} \\ I_{3r} &= t_{xx}^3 + t_{yy}^3 + t_{zz}^3 + 3t_{xx} t_{xy}^2 + 3t_{xx} t_{xz}^2 + 3t_{yy} t_{yz}^2 + 3t_{yy} t_{yx}^2 + \\ &\quad + 3t_{zz} t_{zx}^2 + 3t_{zz} t_{zy}^2 + 6t_{xy} t_{yz} t_{zx} = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = t_{ij} t_{jk} t_{ki}, \end{aligned}$$

gdzie t_1, t_2, t_3 oznaczają, jak zwykle, wartości główne dewiatora; po wyrażeniu składowych dewiatora przez składowe tensora i przekształceniu otrzymujemy:

$$(6.17) \quad \begin{aligned} I_{2r} &= \frac{2}{3} [\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + \tau_{zz}^2 - \tau_{xx} \tau_{yy} - \tau_{yy} \tau_{zz} - \tau_{zz} \tau_{xx} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \\ &= \frac{1}{3} [(\tau_{xx} - \tau_{yy})^2 + (\tau_{yy} - \tau_{zz})^2 + (\tau_{zz} - \tau_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \\ &= \frac{1}{3} [(\tau_1 - \tau_2)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^2 + (\tau_3 - \tau_1)^2], \\ I_{3r} &= \frac{4}{3} \tau_{xx} \tau_{yy} \tau_{zz} - \frac{1}{3} (\tau_{xx}^2 \tau_{yy} + \tau_{xx}^2 \tau_{zz} + \tau_{yy}^2 \tau_{xx} + \tau_{yy}^2 \tau_{zz} + \tau_{zz}^2 \tau_{xx} + \tau_{zz}^2 \tau_{yy}) + \\ &\quad + \frac{2}{9} (\tau_{xx}^3 + \tau_{yy}^3 + \tau_{zz}^3) - 2(\tau_{xx} \tau_{yz}^2 + \tau_{yy} \tau_{zx}^2 + \tau_{zz} \tau_{xy}^2) + \\ &\quad + (\tau_{xx} \tau_{xy}^2 + \tau_{xx} \tau_{xz}^2 + \tau_{yy} \tau_{yz}^2 + \tau_{yy} \tau_{yx}^2 + \tau_{zz} \tau_{zx}^2 + \tau_{zz} \tau_{zy}^2) + 6\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} = \\ &= \frac{4}{3} \tau_1 \tau_2 \tau_3 - \frac{1}{3} (\tau_1^2 \tau_2 + \tau_1^2 \tau_3 + \tau_2^2 \tau_1 + \tau_2^2 \tau_3 + \tau_3^2 \tau_1 + \tau_3^2 \tau_2) + \frac{2}{9} (\tau_1^3 + \tau_2^3 + \tau_3^3). \end{aligned}$$

Okazuje się dalej, że niezmienniki główne dewiatora różnią się tylko współczynnikami od niezmienników podstawowych tego dewiatora:

$$(6.18) \quad J_{2r} = -\frac{1}{2} I_{2r}, \quad J_{3r} = \frac{1}{3} I_{3r}.$$

Tak więc mówiąc o kwadratowym lub sześciennym niezmienniku dewiatora możemy (z dokładnością do stałego współczynnika) opuszczać przymienniki «podstawowy» lub «główny».

Z pierwszego ze wzorów (6.17) wynika, że kwadratowy niezmiennik podstawowy dewiatora jest zawsze nieujemny, zatem — wobec (6.18) — kwadratowy niezmiennik główny dewiatora jest zawsze niedodatni. Ten fakt był powodem odmiennego przyjęcia

znaku przy definiowaniu niezmiennika głównego J_2 przez kilku autorów, wspomnianych w p. 6.2.

Zauważmy, że drugi podstawowy niezmiennik dewiatora I_{2t} jest równy kwadratowi współrzędnej walcowej (promienia) R_t , (6.11). Sam promień (ewentualnie z innym współczynnikiem liczbowym), którego wymiar jest zgodny z wymiarem składowych tensora T_t , nazywamy intensywnością tensora. Intensywność tensora wyraża się intensywnością utworzonego z niego dewiatora, gdyż na wartość R_t aksjator nie posiada wpływu; we wzorze występują tylko różnice wartości głównych. Odpowiednie współczynniki liczbowe podamy oddzielnie przy omawianiu stanu naprężenia i stanu odkształcenia. Tak więc niezmiennik aksjatora związany jest z niezmiennikiem walcowym Z_t , drugi niezmiennik dewiatora — z niezmiennikiem walcowym R_t , natomiast trzeci niezmiennik dewiatora pełni w pewnym sensie rolę niezmiennika walcowego ω_t . Wydaje się jednak, że posługiwanie się niezmiennikiem ω_t jest dogodniejsze i bardziej przejrzyste niż niezmiennikiem I_{3t} , określonym dość złożonym wzorem (6.17) i nie posiadającym prostej interpretacji. Jedyną «wadą» niezmiennika ω_t jest to, iż nie jest on niezmiennikiem symetrycznym, jednak symetria odpowiednich wzorów (praw fizycznych) jest zapewniona, o ile występują w nich tylko funkcje trygonometryczne kąta $3\omega_t$ (por. p. 6.8).

Układ niezmienników $I_{1t}-I_{2t}-I_{3t}$, dość rozpowszechniony w teorii plastyczności, będziemy nazywali układem *niezmienników aksjatorowo-dewiatorowych*.

6.5. Tensor kierunków i podobieństwa. Tensor symetryczny ma sześć niezależnych współrzędnych, dewiator — pięć. A. A. ILIUSZIN [949] wprowadził dogodny bezwymiarowy tensor o czterech niezależnych współrzędnych, nazywając go tensorem kierującym: W. URBANOWSKI [485] wprowadził nazwę «tensor kierunków i podobieństwa», lepiej oddającą istotę rzeczy. Składowe tego tensora, t_{ij}^* , są definiowane jako składowe dewiatora, dzielone przez pewną intensywność dewiatora. Przyjmijmy następującą definicję:

$$(6.19) \quad t_{ij}^* = \frac{t_{ij}}{R_t} = \frac{t_{ij}}{\sqrt{I_{2t}}}.$$

Definicje A. A. Iliuszina i W. Urbanowskiego różnią się od powyższej (i między sobą) współczynnikami liczbowymi. Tak zdefiniowany tensor charakteryzuje się tylko jednym niezależnym niezmiennikiem, bowiem mamy tu $I_{1t}^* = 0$, $I_{2t}^* = 1$. Niezależnym niezmiennikiem może być I_{3t}^* lub ω_t , przy czym ten ostatni wydaje się dogodniejszy. Miejscem geometrycznym punktów, odpowiadających tensorowi kierunków i podobieństwa w przestrzeni wartości głównych tensora wyjściowego, jest okrąg koła jednostkowego, leżącego w płaszczyźnie prostopadłej do osi $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$, przechodzącej przez początek układu.

Czterema niezależnymi bezwymiarowymi wielkościami, określającymi tensor kierunków i podobieństwa, mogą być stosunki wartości głównych dewiatora wyjściowego (jedna wielkość niezależna) oraz dostawy kierunkowe kierunków głównych (trzy wielkości niezależne). Przy proporcjonalnej zmianie wszystkich składowych dewiatora D_t tensor kierunków i podobieństwa pozostaje stały.

6.6. Parametr Lodego. W. LODE [359, 360, 361] w celu oceny wpływu pośredniego naprężenia głównego na uplastycznienie metali wprowadził bezwymiarowy niezmiennik,

który w ogólnym przypadku tensora T_τ można zapisać następująco

$$(6.20) \quad \mu_\tau = \frac{2\tau_{II} - \tau_I - \tau_{III}}{\tau_I - \tau_{III}} = \frac{3t_{II}}{t_I - t_{III}},$$

zawarty, wobec umowy $\tau_I \geq \tau_{II} \geq \tau_{III}$, w przedziale $-1 \leq \mu_\tau \leq 1$. Przez t_I, t_{II}, t_{III} oznaczono tu, zgodnie z ogólnie przyjętą umową, uporządkowane wartości główne dewiatora. Parametr Lodego μ_τ jest bezpośrednio związany z niezmiennikiem walcowym ω_τ (6.11), (6.12). W przedziale $0 \leq \omega_\tau \leq \pi/3$, gdy uszeregowanie wartości głównych jest takie, że wskaźniki rzymskie są równe wprost arabskim, mamy po podstawieniu (6.12) i zastosowaniu prostych działań na funkcjach trygonometrycznych

$$(6.21) \quad \mu_\tau = \sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\omega_\tau - \frac{\pi}{6} \right);$$

w pozostałych przedziałach można wyprowadzić analogiczne wzory. Tak więc parametr Lodego wyznacza podobieństwo dewiatorów, ale nie wyznacza ich kierunków (co zachodziło w przypadku tensora kierunków i podobieństwa).

6.7. Obliczanie wartości głównych tensora drugiego rzędu. Wartości główne dowolnego tensora symetrycznego drugiego rzędu T_τ są określone równaniem sześciennym (6.7). Aby je efektywnie obliczyć, przekształcamy najpierw równanie do postaci kanonicznej, wprowadzając nową niewiadomą

$$(6.22) \quad t = \tau - \frac{1}{3} J_{1\tau} = \tau - \tau_m.$$

Jak widać, niewiadomą t , a właściwie niewiadomymi, są wartości główne dewiatora D_τ . Tak więc rozkład tensora na aksjator i dewiator jest również związany z obliczaniem wartości głównych tensora. Równanie (6.7) przybiera oczywiście postać

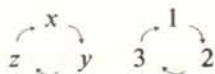
$$(6.23) \quad t^3 + J_{2\tau} t - J_{3\tau} = 0,$$

bowiem przez $J_{2\tau}$ i $J_{3\tau}$ oznaczyliśmy niezmienniki główne dewiatora. W dalszym ciągu wprowadza się pomocniczy kąt ω_τ , określony równaniem

$$(6.24) \quad \cos 3\omega_\tau = \frac{\sqrt{27}}{2} \frac{J_{3\tau}}{(-J_{2\tau})^{3/2}} = \frac{27J_{3\tau} - 9J_{1\tau}J_{2\tau} + 2J_{1\tau}^3}{2(J_{1\tau}^2 - 3J_{2\tau})^{3/2}}, \quad 0 \leq \omega_\tau \leq \frac{\pi}{3}.$$

Można sprawdzić, że jest to ten sam kąt, który został określony trzecim ze wzorów (6.11). Obliczając $\cos 3\omega_\tau$ dochodzimy następnie do samego kąta ω_τ ; poszukiwane wartości główne tensora τ_1, τ_2, τ_3 są ostatecznie określone wzorami (6.12). Obliczenie wartości głównych pozostaje zatem w ścisłym związku z wprowadzonymi w p. 6.3 walcowymi niezmiennikami tensora T_τ . Na związek ten zwracają uwagę H. M. WESTERGAARD [735] i T. PEŁCZYŃSKI [525]; wprowadzone w pracy [525] gwiazdy naprężeń i gwiazdy odkształceń wykazują pewną analogię do ujęcia graficznego elektrotechniki prądów trójfazowych, co zresztą jest widoczne z budowy wzorów (6.12).

6.8. Niezmienniki symetryczne. Przez *niezmiennik symetryczny* tensora rozumiemy każdy taki niezmiennik, którego wartość pozostaje bez zmiany przy cyklicznej przemianie wskaźników typu



Niezmienniki takie grają szczególną rolę przy opisywaniu własności ciał izotropowych.

Spośród omówionych przez nas niezmienników większość stanowiły niezmienniki symetryczne (podstawowe, główne, aksjatorowo-dewiatorowe). Wartości główne tensora, τ_1, τ_2, τ_3 , nie są niezmiennikami symetrycznymi, jednak stają się nimi po uszeregowaniu $\tau_1, \tau_{II}, \tau_{III}$. Tak więc również parametr Lodego (6.20) jest niezmiennikiem symetrycznym. Spośród niezmienników walcowych Z_τ i R_τ są symetryczne; ω_τ nie jest niezmiennikiem symetrycznym, ale jak wspomnieliśmy już w p. 6.4, niezmiennikiem takim jest $\cos 3 \omega_\tau$, co wynika np. ze wzoru (6.24).

6.9. Niezmienniki wspólne dwóch tensorów drugiego rzędu. W niektórych równaniach teorii plastyczności, szczególnie opisujących wzmocnienie plastyczne, pojawiają się również niezmienniki wspólne dwóch tensorów drugiego rzędu. Zgodnie z twierdzeniem Hilberta dowolny niezmiennik wspólny dwóch tensorów daje się wyrazić w funkcji pewnej skończonej liczby wspólnych niezmienników podstawowych. W przypadku dwóch symetrycznych tensorów drugiego rzędu w przestrzeni trójwymiarowej takich niezmienników podstawowych jest dziewięć. I. I. GOLDIENBLAT [853] podaje prostą interpretację tej liczby. Przyjmijmy układ osi tak, aby pokrył się z kierunkami głównymi pierwszego tensora, który oznaczmy przez T_σ ; dowolną wielkość, związaną z tym tensorem i z pewnym drugim tensorem T_ϵ , można wtedy wyrazić w funkcji trzech wartości głównych tensora T_σ , trzech wartości głównych tensora T_ϵ i trzech kątów Eulera między kierunkami głównymi tych tensorów. Tak więc powyższych dziewięć wielkości można by przyjąć za podstawowe niezmienniki wspólne.

Dogodniej jest jednak przyjąć inny układ niezmienników podstawowych, wyrażających się prostymi wzorami, a nawiązujący bezpośrednio do przyjętych przez nas definicji niezmienników podstawowych jednego tensora (6.5). Będzie to układ niezmienników $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}, I_{1\epsilon}, I_{2\epsilon}, I_{3\epsilon}$ oraz trzech niezmienników wspólnych, uzyskanych na podobnej drodze zwięzania tensorów:

$$(6.25) \quad \begin{aligned} I_{\sigma\epsilon} &= \sigma_{ij} \epsilon_{ji} = \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + 2\sigma_{xy} \epsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \epsilon_{yz} + 2\sigma_{zx} \epsilon_{zx}, \\ I_{\sigma\sigma\epsilon} &= \sigma_{ij} \sigma_{jk} \epsilon_{ki}, \\ I_{\sigma\epsilon\epsilon} &= \sigma_{ij} \epsilon_{jk} \epsilon_{ki}. \end{aligned}$$

W przypadku tensorów naprężenia i odkształcenia pierwszy z tych niezmienników $I_{\sigma\epsilon}$ związany jest z energią odkształcenia jednostki objętości pod założeniem liniowej sprężystości materiału. W przypadku tensorów naprężenia i prędkości odkształcenia niezmiennik ten jest równy mocy odkształcenia jednostki objętości w ogólnym przypadku bez dodatkowego założenia odnośnie sprężystości materiału. Dwa pozostałe niezmienniki (6.25) nie posiadają tak prostej interpretacji.

Dowolny inny niezmiennik wspólny tensorów T_σ i T_ϵ może być wyrażony w funkcji wymienionych dziewięciu niezmienników podstawowych, jednak nie zawsze jest funkcją wymierną tych niezmienników.

7. Naprężenia i prędkości naprężeń

7.1. Oznaczenia składowych stanu naprężenia. Przy założeniu zasady zeszywnienia, a więc przy rozpatrywaniu równowagi nieodkształconego elementu ciała, składowe stanu naprężenia w ustalonym punkcie ciała definiuje się jednoznacznie jako pochodne sił wewnętrznych względem przekroju w trzech wzajemnie prostopadłych przekrojach przechodzących przez ten punkt. Przy rozpatrywaniu dużych odkształceń przyjęcie zasady zeszywnienia nie jest dopuszczalne; należy wtedy uwzględnić zmianę wymiarów elementu, a składowe stanu naprężenia mogą być definiowane różnorodnie. Tak więc wtedy analiza stanu odkształcenia musi poprzedzać analizę stanu naprężenia. W obecnej pracy ograniczymy się w zasadzie do małych odkształceń, co zezwala na niezależną analizę stanu naprężenia i stanu odkształcenia.

Dziewięć składowych stanu naprężenia w ustalonym punkcie ciała transformuje się przy obrocie układu odniesienia zgodnie ze wzorem (6.1), zatem składowe te tworzą tensor drugiego rzędu; oznaczymy go przez T_σ . Jak już wspomnieliśmy w poprzednim punkcie, nie dopuścimy możliwości istnienia naprężeń momentowych, w związku z czym tensor T_σ będzie tensorem symetrycznym.

Przyjmijmy dwa różne systemy oznaczeń składowych tensora naprężenia. Dla zastosowań inżynierskich dogodniejsze są oznaczenia typu Kármána-Timoshenki, mianowicie w układzie kartezjańskim xyz naprężenia normalne oznaczane są przez $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, naprężenia styczne przez $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$; taki system oznaczeń zwraca wyraźnie uwagę na typ naprężenia i wywołane przez niego skutki. Symbolikę Kármána-Timoshenki, którą stosował w swych późniejszych pracach już de SAINT-VENANT, będziemy nazywali *oznaczeniami inżynierskimi* (zarówno w odniesieniu do naprężeń, jak i odkształceń). Jest to najbardziej obecnie rozpowszechniony system oznaczania naprężeń. Oznaczenia inżynierskie $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ tylko przypadkowo pokrywają się z oznaczeniami składowych dowolnego tensora T_τ , stosowanymi w p. 6. Dla skrócenia zapisu równań podstawowych dogodniejsze są natomiast oznaczenia konsekwentnie dwuwskaźnikowe, nawiązujące bezpośrednio do rachunku tensorowego. Przyjmijmy tu oznaczenia $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$, krótko σ_{ij} , gdzie $i, j = x, y, z$ (podobne oznaczenia przyjmują A. M. FREUDENTHAL [146], W. JOHNSON i P. B. MELLOR [296]). Przy operacjach nie zawierających różniczkowania względem x, y, z układ odniesienia może być tylko lokalnie ortogonalny, natomiast przy operacjach różniczkowych ograniczymy się (w zapisie dwuwskaźnikowym) do układów kartezjańskich, w związku z czym nie będziemy rozróżniali składowych tensora od składowych fizycznych. Oznaczenia dwuwskaźnikowe, które zezwalają na stosowanie konwencji sumacyjnej Einsteina, będziemy nazywali *zapisem matematycznym*. Pierwszy wskaźnik oznacza tu konsekwentnie kierunek normalnej do przekroju, drugi — kierunek samego naprężenia.

Niektórzy autorzy oznaczają kierunki dowolnego lokalnie ortogonalnego układu osi przez 1, 2, 3, zatem naprężenia przez $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$. Jednakże w obecnej

pracy zachowamy oznaczenia 1, 2, 3 dla kierunków głównych, co przyniesie wyraźne korzyści w zapisie.

Taka dwoistość oznaczeń bywa ostatnio często stosowana i wykazuje swe zalety; przejście z jednego układu oznaczeń na drugi nie następuje żadnych trudności. Podobne ujęcia można znaleźć we wspomnianych już pracach JOHNSONA i MELLORA [296], FREUDENTHALA [146], A. RECKLINGA [576] i innych.

Dla porównania podajemy w tablicy 2 kilka innych oznaczeń składowych stanu naprężenia bądź o znaczeniu historycznym, bądź też stosowanych obecnie:

Tablica 2

Oznaczenia	Autorzy
$P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}, P_{xy}, P_{yz}, P_{zx}$	CAUCHY (prace późniejsze) DE SAINT-VENANT (prace wcześniejsze) MAXWELL H. FORD
$X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$	KIRCHHOFF LOVE KÁRMÁN (prace wcześniejsze) PAPKOWICZ ILIUSZIN (prace wcześniejsze) FIŁONIENKO-BORODICZ (prace wcześniejsze)
$\widehat{xx}, \widehat{yy}, \widehat{zz}, \widehat{xy}, \widehat{yz}, \widehat{zx}$ $I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{23}, I_{31}$	PEARSON CLEBSCH TRUESDELL ERINGEN
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$ $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y$	GREEN-ZERNA (składowe fizyczne) GREEN-ZERNA (składowe tensora) SOKOLNIKOFF MISES BURZYŃSKI KŁĘBOWSKI

W przypadku definiowania tensora naprężenia we współrzędnych krzywoliniowych zachodzi konieczność rozróżnienia składowych tensora od składowych fizycznych stanu naprężenia, stąd niektóre pozycje pojawiają się dwukrotnie.

Naprężenia główne oznaczymy — zgodnie z ogólną umową — przez $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, a po algebraicznym uporządkowaniu — przez $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$.

Tensor naprężenia rozłożymy na aksjator A_σ i dewiator D_σ według schematu $T_\sigma = A_\sigma + D_\sigma$. Jediną niezależną składową aksjatora naprężeń oznaczymy — zgodnie z ogólną umową — przez σ_m :

$$(7.1) \quad \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),$$

natomiast składowe dewiatora będziemy oznaczali w zapisie inżynierskim przez $s_x, s_y, s_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, a w zapisie matematycznym przez s_{ij} ; $i, j = x, y, z$. Składowe tensora kierunków i podobieństwa oznaczymy przez s_{ij} ; parametr Lodego dla naprężeń — μ_σ

7.2 Transformacja naprężeń, niezmienniki. Składowe stanu naprężenia podlegają prawu transformacji tensorowej, zatem składowa w «nowym» układzie $\xi\eta\zeta$ jest określona wzorem, wynikającym z (6.3)

$$(7.2) \quad \sigma_{kl} = a_{lk} a_{jl} \sigma_{ij}, \quad i, j = x, y, z; \quad k, l = \xi, \eta, \zeta.$$

Z uwagi na przyjętą symetrię tensora naprężenia wzór ten po rozwinięciu i przejściu na symbolikę inżynierską można zredukować do sześciu wyrazów, mianowicie

$$(7.3) \quad \sigma_{\xi} = \sigma_x a_{\xi x}^2 + \sigma_y a_{\xi y}^2 + \sigma_z a_{\xi z}^2 + 2\tau_{xy} a_{\xi x} a_{\xi y} + 2\tau_{yz} a_{\xi y} a_{\xi z} + 2\tau_{zx} a_{\xi z} a_{\xi x};$$

we wzorze na $\tau_{\xi\eta}$ pojawiają się sumy typu $(a_{\xi x} a_{\eta y} + a_{\xi y} a_{\eta x})$.

Składowe wypadkowego naprężenia p_{ξ} na ściance o normalnej zewnętrznej ξ obliczamy z warunków równowagi elementarnego czworościanu:

$$(7.4) \quad p_{\xi i} = \sigma_{ij} a_{\xi j},$$

czyli, w zapisie inżynierskim,

$$(7.5) \quad \begin{aligned} p_{\xi x} &= \sigma_x a_{\xi x} + \tau_{xy} a_{\xi y} + \tau_{xz} a_{\xi z}, \\ p_{\xi y} &= \tau_{yx} a_{\xi x} + \sigma_y a_{\xi y} + \tau_{yz} a_{\xi z}, \\ p_{\xi z} &= \tau_{zx} a_{\xi x} + \tau_{zy} a_{\xi y} + \sigma_z a_{\xi z}. \end{aligned}$$

Jeżeli rozpatrywana ścianka jest ścianką zewnętrzną (na brzegu ciała), to równania (7.5) wyrażają *naprężeniowe warunki brzegowe*; przez p_{ξ} (lub częściej p_n) rozumiemy wtedy wektor obciążenia zewnętrznego działającego na tę ściankę.

Typowe układy niezmienników stanu naprężenia przyjmujemy zgodnie z p. 6. Będą to niezmienniki podstawowe $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$, niezmienniki główne $J_{1\sigma}, J_{2\sigma}, J_{3\sigma}$, niezmienniki aksjatorowo-dewiatorowe $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$. Natomiast niezmienniki walcowe przyjmujemy z nieco innymi współczynnikami. Zamiast niezmiennika Z_{σ} będziemy się posługiwali proporcjonalnym do niego niezmiennikiem σ_m (współczynnik $1/3$ zamiast $1/\sqrt{3}$), zamiast niezmiennika R_{σ} — proporcjonalnym do niego niezmiennikiem σ_i

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \\ &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \end{aligned}$$

(współczynnik $1/\sqrt{2}$ zamiast $1/\sqrt{3}$). Niezmiennik σ_i będziemy nazywali *intensywnością naprężenia*; bywa on również czasem oznaczany przez σ_e (naprężenie efektywne). Współczynnik liczbowy we wzorze (7.6) dobrany jest tak, że przy jednoosiowym rozciąganiu $\sigma_i = \sigma$. Czasem zamiast σ_i wprowadza się również niezmiennik $\tau_i = \sigma_i/\sqrt{3}$, zwany intensywnością naprężeń stycznych (oznaczenie τ_i stosuje np. A. A. ILIUSZIN [949]; W. W. SOKOŁOWSKI [1169] wprowadza ten niezmiennik oznaczając go przez S). Trzeci niezmiennik walcowy ω_{σ} pozostawimy bez zmiany w stosunku do ogólnej definicji (6.11).

Przejdziemy do obliczenia *niezmienników oktaedrycznych*, czyli naprężeń σ_{oct} i τ_{oct} na ściance równo nachylonej do wszystkich trzech kierunków głównych. Aby obliczyć σ_{oct} można skorzystać ze wzoru transformacyjnego (7.3) przyjmując za układ wyjściowy układ kierunków głównych oraz podstawiając $a_{1\xi} = a_{2\xi} = a_{3\xi} = \pm 1/\sqrt{3}$ (kąt nachy-

lenia normalnej do przekroju względem kierunków głównych wynosi $54^{\circ}44'07''$). Otrzymujemy

$$(7.7) \quad \sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m = \frac{1}{\sqrt{3}} Z_{\sigma}.$$

Całkowite naprężenie styczne w rozpatrywanym przekroju najłatwiej obliczyć przez zastosowanie wzorów (7.5) dla naprężenia wypadkowego $p = p_{\text{oct}}$ i odjęcie geometryczne σ_{oct} : otrzymujemy

$$(7.8) \quad p_{\text{oct}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{I_{2\sigma}},$$

$$(7.9) \quad \tau_{\text{oct}} = \sqrt{p_{\text{oct}}^2 - \sigma_{\text{oct}}^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_l = \frac{1}{\sqrt{3}} R_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{I_{2\tau}}.$$

Tak więc naprężenia oktaedryczne są odpowiednio proporcjonalne do pierwszych dwóch niezmienników walcowych lub niezmienników aksjatorowo-dewiatorowych. Ogólnie sądzi się, że niezmienniki te zostały wprowadzone w r. 1937 przez A. NÁDAIA [451], a niektórzy autorzy powołują się na autorstwo M. ROŠA i A. EICHINGERA, jednakże posługuje się nimi (jako niezmiennikami oktaedrycznymi) W. BURZYŃSKI [55, s. 20] już w r. 1928.

Ważnymi niezmiennikami stanu naprężenia są również *ekstremalne naprężenia styczne* τ . Okazuje się, że działają one na ściankach nachylonych pod kątem 45° do dwóch dowolnie obranych kierunków głównych i są równe połowie różnicy odpowiednich naprężeń głównych. Zgodnie z przyjętą symboliką uszeregowanych naprężeń głównych największe z nich wynosi

$$(7.10) \quad \tau_{\text{max}} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_{\text{III}}).$$

Zestawienie typowych układów niezmienników stanu naprężenia i związki pomiędzy nimi podaje tablica 3.

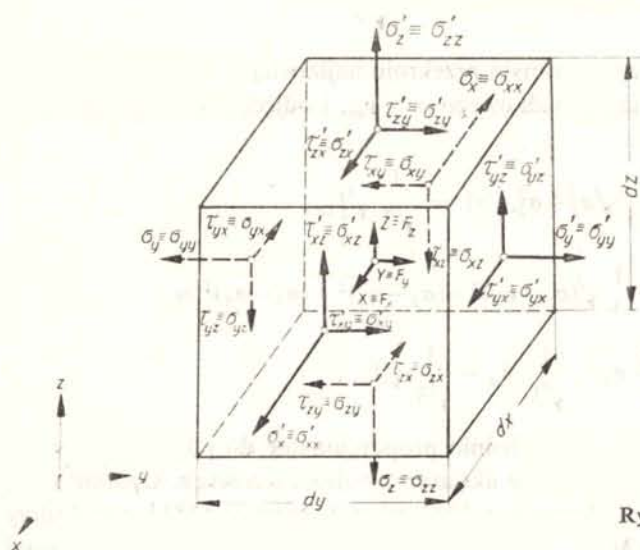
7.3. Warunki równowagi wewnętrznej. Na rysunku 18 przedstawiono naprężenia działające na elementarny prostopadłościan wycięty z wnętrza ciała oraz składowe siły masywowej X, Y, Z , liczone na jednostkę objętości. Każde z naprężeń dla porównania oznaczono podwójnie; pierwsze oznaczenie jest oznaczeniem inżynierskim, drugie — matematycznym. Zwroty przyjęto tak, aby wszystkie składowe stanu naprężenia były dodatnie stosownie do ogólnie obowiązującej umowy.

W przypadku jednorodnego stanu naprężenia odpowiednie składowe po obu stronach prostopadłościanu są sobie równe, np. $\sigma'_x = \sigma_x$: prostopadłościan znajduje się w równowadze, gdy tylko są spełnione warunki momentów

$$(7.11) \quad \tau_{ij} = \tau_{ji},$$

a więc gdy tensor naprężeń jest symetryczny. Z warunku równowagi rzutów sił wynika

wtedy $X = Y = Z = 0$, zatem założenie stanu jednorodnego wyklucza możliwość istnienia sił masowych. W ogólnym przypadku niejednorodnego stanu naprężenia poszczególne składowe tensora naprężenia T_{σ} zależą od współrzędnych, np. $T_{\sigma} = T_{\sigma}(x, y, z)$ i mamy



Rys. 18. Oznaczenia naprężeń. Warunki równowagi wewnętrznej

do czynienia z polem tensorowym naprężeń. Naprężenie σ'_x jest różne od σ_x , musimy mianowicie uwzględnić przyrost

$$(7.12) \quad \sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

i podobnie dla innych składowych. Przecinkami u góry oznaczono naprężenia na ściankach, którym odpowiada większa wartość zmiennej x , y lub z , zatem naprężenia z przyrostem. Warunki równowagi momentów prowadzą tu znowu do związków (7.11) (Cauchy'ego), natomiast z warunków rzutów sił otrzymamy równania

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned}$$

zwane warunkami równowagi wewnętrznej we współrzędnych kartezjańskich (Naviera). W zapisie matematycznym przybierają one krótką formę:

$$(7.14) \quad \sigma_{ij,i} + F_j = 0, \quad i, j = x, y, z,$$

gdzie, zgodnie z konwencją sumacyjną Einsteina, następuje sumowanie po powtarzającym się wskaźniku i ; wskaźnik za przecinkiem oznacza różniczkowanie względem odpowiedniej

zmiennej. Przez F_j oznaczono tu składowe siły masowej na jednostkę objętości $F_x \equiv X$, $F_y \equiv Y$, $F_z \equiv Z$.

Przez wprowadzenie *składowych kowariantnych* lub *kontrawariantnych* tensora naprężeń oraz różniczkowania kowariantnego można krótki zapis (7.14) uogólnić na dowolny układ współrzędnych. Uogólnienia tego nie podajemy ograniczając się do przytoczenia warunków równowagi wewnętrznej w dwóch innych, najczęściej stosowanych układach współrzędnych:

w układzie współrzędnych walcowych r, θ, z ,

$$(7.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \Theta &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z &= 0, \end{aligned}$$

natomiast w układzie współrzędnych kulistych r, ψ, θ ,

$$(7.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\psi r}}{\partial \psi} + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - (\sigma_\psi + \sigma_\theta) + \tau_{\psi r} \operatorname{ctg} \psi] + R &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\psi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial \tau_{\theta\psi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\psi} + (\sigma_\psi - \sigma_\theta) \operatorname{ctg} \psi] + \Psi &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\psi\theta}}{\partial \psi} + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\theta} + 2\tau_{\psi\theta} \operatorname{ctg} \psi] + \Theta &= 0. \end{aligned}$$

W równaniach tych R, Θ i Z oraz R, Ψ i Θ oznaczają składowe sił masowych w odpowiednich kierunkach.

Równania równowagi (7.13), (7.15) lub (7.16) obowiązują w punktach regularnych, w których składowe stanu naprężenia są ciągłe wraz z pierwszymi pochodnymi. W teorii plastyczności rozważa się również *powierzchnie* lub *linie nieciągłości*. Przypuśćmy, że rozpatrywany punkt leży na powierzchni nieciągłości naprężeń. Obierzmy układ osi $\xi\eta\zeta$ tak, aby oś ξ pokrywała się z normalną do powierzchni nieciągłości, η i ζ leżały w płaszczyźnie stycznej do tej powierzchni. Z warunku równowagi sąsiednich elementów, przedzielonych powierzchnią nieciągłości, wynika wtedy ciągłość naprężeń $\sigma_\xi, \tau_{\xi\eta}$ i $\tau_{\xi\zeta}$, natomiast $\sigma_\eta, \sigma_\zeta$ i $\tau_{\eta\zeta}$ mogą być nieciągłe.

Bardziej szczegółową analizę warunków na powierzchni nieciągłości można znaleźć w pracach A. M. FREUDENTHALA i H. GEIRINGER [145], W. PRAGERA [558], T. Y. THOMASA [698], R. HILLA [226, 235] oraz D. D. IWLEWA [941].

7.4. Prędkości naprężenia. Teoria plastyczności posługuje się pojęciem *przyrostów naprężeń* $d\sigma$ lub *prędkości zmiany naprężeń* $d\sigma/dt = \dot{\sigma}$; te dwa pojęcia są w pewnym stopniu równoważne o tyle, że czynnik czasu daje się zazwyczaj wyrugować. Zajmiemy się więc również prędkościami zmiany naprężeń lub krócej prędkościami naprężenia.

W przypadku małych odkształceń, gdy można zastosować zasadę zeszywnienia i roz-

patrywać równowagę elementu nieodkształconego, prędkości poszczególnych składowych stanu naprężenia tworzą tensor, który zapiszemy następująco — kolejno w zapisie inżynierskim i matematycznym:

$$(7.17) \quad T_{\dot{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x & \dot{\tau}_{xy} & \dot{\tau}_{xz} \\ \dot{\tau}_{yx} & \dot{\sigma}_y & \dot{\tau}_{yz} \\ \dot{\tau}_{zx} & \dot{\tau}_{zy} & \dot{\sigma}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{xx} & \dot{\sigma}_{xy} & \dot{\sigma}_{xz} \\ \dot{\sigma}_{yx} & \dot{\sigma}_{yy} & \dot{\sigma}_{yz} \\ \dot{\sigma}_{zx} & \dot{\sigma}_{zy} & \dot{\sigma}_{zz} \end{Bmatrix}.$$

Niezmienniki tego tensora oznaczymy następująco; niezmienniki podstawowe $I_{1\dot{\sigma}}, I_{2\dot{\sigma}}, I_{3\dot{\sigma}}$; niezmienniki główne $J_{1\dot{\sigma}}, J_{2\dot{\sigma}}, J_{3\dot{\sigma}}$ itp. W odniesieniu do niezmienników liniowych obowiązuje przemienność różniczkowania względem czasu, mianowicie $I_{1\dot{\sigma}} = \dot{I}_{1\sigma}$, natomiast w przypadku niezmienników kwadratowych i sześciennych reguła ta przestaje obowiązywać. Różniczkując takie niezmienniki stanu naprężenia otrzymujemy pewne niezmienniki wspólne tensora naprężenia i tensora prędkości naprężenia, na przykład

$$(7.18) \quad \dot{I}_{2\sigma} = \frac{d}{dt} I_{2\sigma} = 2\sigma_1 \dot{\sigma}_1 + 2\sigma_2 \dot{\sigma}_2 + 2\sigma_3 \dot{\sigma}_3 = 2I_{\sigma\dot{\sigma}},$$

zgodnie z oznaczeniami typu (6.25).

Jeżeli kierunki główne tensora naprężeń są stałe, to kierunki główne tensora prędkości naprężenia są również stałe i oba układy kierunków głównych pokrywają się: przyjmując mianowicie układ odniesienia zgodnie z kierunkami głównymi mamy $\tau_{xy} \equiv \tau_{yz} \equiv \tau_{zx} \equiv 0$, zatem również $\dot{\tau}_{xy} \equiv \dot{\tau}_{yz} \equiv \dot{\tau}_{zx} \equiv 0$. W ogólnym przypadku kierunki główne obu tych tensorów są różne.

Zwróćmy jeszcze uwagę na niezmiennik

$$(7.19) \quad S_{\sigma} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{I_{2\dot{\sigma}}} dt = \int_A^B \sqrt{d\sigma_{ij} d\sigma_{ij}};$$

określa on *długość drogi* w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń pomiędzy punktami reprezentującymi dwa stany naprężenia A i B (por. p. 14.1).

Tensor prędkości naprężenia można rozłożyć na aksjator i dewiator, $T_{\dot{\sigma}} = A_{\dot{\sigma}} + D_{\dot{\sigma}}$. Składowe tensora prędkości naprężenia muszą spełniać warunki równowagi wewnętrznej typu (7.13).

W przypadku odkształceń skończonych określenie tensora prędkości naprężenia napotyka na trudności i może być formułowane dość różnorodnie. Przegląd podstawowych definicji podaje praca W. PRAGERA [564]; pewna nowa propozycja zawarta jest w pracy ZH. H. GUO [192].

8. Odkształcenia i prędkości odkształcenia

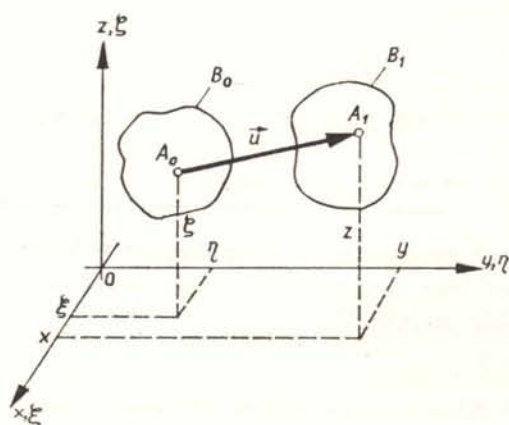
8.1. Wektor przemieszczenia. Poszczególne punkty ciała poddanego procesowi odkształcenia znajdują się w ruchu. Przypiszmy dowolnemu punktowi A_0 ciała nieodkształconego współrzędne kartezjańskie ξ, η, ζ , a temu samemu punktowi ciała po odkształceniu A_1 współrzędne x, y, z (rys. 19). Przebieg procesu zostanie (pod względem geometrycznym) określony bądź przez znajomość funkcji

$$(8.1) \quad x = x(\xi, \eta, \zeta, t), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta, t), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta, t),$$

bądź też funkcji

$$(8.2) \quad \xi = \xi(x, y, z, t), \quad \eta = \eta(x, y, z, t), \quad \zeta = \zeta(x, y, z, t),$$

gdzie t oznacza czas lub dowolny parametr o charakterze czasu. W teorii sprężystości często nie interesuje nas przebieg funkcji w czasie, a jedynie porównanie stanu końcowego z początkowym, natomiast w teorii plastyczności «historia» procesu może odgrywać istotną rolę.



Rys. 19. Współrzędne przestrzenne i materialne (Eulera i Lagrange'a)

Współrzędne ξ, η, ζ traktowane jako niezależne jak np. w równaniach (8.1) noszą tradycyjną nazwę *współrzędnych Lagrange'a* (choć w istocie rzeczy wprowadził je w r. 1761 EULER), a niezależne współrzędne x, y, z jak np. w równaniach (8.2) tradycyjną nazwę *współrzędnych Eulera* (w rzeczywistości wprowadził je w r. 1752 d'ALEMBERT, por. C. TRUESDELL [712, 713], W. W. NOWOŻIŁOW [1100]). Współrzędne Lagrange'a nazywa się również *materialnymi*, Eulera — *przestrzennymi*.

Podczas gdy w mechanice płynów szczególnie dogodnie są współrzędne Eulera, to w mechanice ciał stałych wyraźną przewagę wykazują na ogół współrzędne Lagrange'a: z reguły interesujemy się ruchem określonego punktu ciała, a nie tym, jaki punkt ciała znajduje się w określonym punkcie przestrzeni. Toteż liczni autorzy, którzy posługują się tylko jednym układem współrzędnych bez bliższego sprecyzowania, mają zawsze na myśli współrzędne materialne. W zapisie Lagrange'a funkcja opisująca brzeg (powierzchnię) ciała nie ulega zmianie w trakcie procesu odkształcania. Jedynie niektóre pomiary doświadczalne (np. elastooptyczne) łatwiej jest odnosić do współrzędnych Eulera.

Dla porównania w tablicy 4 zestawiono najczęściej stosowane oznaczenia współrzędnych Lagrange'a i współrzędnych Eulera.

Przyjęte przez nas oznaczenia są zbliżone do oznaczeń Murnaghana-Freudenthala i stanowią «odwrócenie» oznaczeń Nowożyłowa. Oznaczanie współrzędnych Eulera przez x, y, z jest bardziej tradycyjne, bowiem układ xyz pozostaje zawsze układem kartezjańskim, natomiast $\xi\eta\zeta$ przestaje nim być po odkształceniu. W zapisie matematycznym współrzędne Lagrange'a oznaczmy przez ξ_i , natomiast współrzędne Eulera przez x_i .

Wektor $A_0A_1 = \mathbf{u}$ nazwiemy *wektorem przemieszczenia*. Wektor ten jest funkcją współrzędnych bądź Lagrange'a, bądź Eulera — tak że możemy mówić o polu wektorowo-

Tablica 4

Współrzędne Lagrange'a (materialne)	Współrzędne Eulera (przestrzenne)	Autorzy
a, b, c	x, y, z	MURNAGHAN FREUDENTHAL
a_1, a_1, a_3	x_1, x_2, x_3	SOKOLNIKOFF GOLDIENBLAT PRAGER
x_1, x_2, x_3	y_1, y_2, y_3	GREEN-ZERNA
X, Y, Z	x, y, z	TRUESDELL
lub X_1, X_2, X_3	lub x_1, x_2, x_3	ERINGEN
x, y, z	ξ, η, ζ	PERZYNA NOWOŹIŁOW

wym przemieszczeń. Współrzędne wektora \mathbf{u} względem układu nieruchomego (Eulera) będziemy oznaczali przez u, v, w (zapis inżynierski) bądź u_i (zapis matematyczny). W zapisie inżynierskim

$$(8.3) \quad u = x - \xi, \quad v = y - \eta, \quad w = z - \zeta.$$

Wielkości u, v, w można przedstawić jako funkcje współrzędnych ξ, η, ζ bądź x, y, z , a ponadto czasu t .

8.2. Tensory odkształceń skończonych. Rozpatrzmy przemieszczenia dwóch dowolnych punktów A_0 i B_0 , które następnie zajmą położenia A_1 i B_1 . Jeżeli długość odcinka $|\overline{A_1 B_1}| = s_1$ jest równa długości $|\overline{A_0 B_0}| = s_0$ dla dowolnej pary punktów ciała, to mówimy, że ciało przemieszcza się jako ciało sztywne, nieodkształcalne. Odkształcenie ciała można więc przede wszystkim scharakteryzować zmianą długości odcinków pomiędzy poszczególnymi punktami ciała.

Odkształcenie (średnie) odcinka określa się tradycyjnie stosunkiem przyrostu jego długości do długości pierwotnej. Jest to z punktu widzenia technicznego definicja najprostsza, a odpowiednie odkształcenie jest najłatwiejsze do zmierzenia. Powyższą definicję miary odkształcenia przypisuje się A. Cauchy'emu, jakkolwiek już w XVII wieku posługiwali się nią BEECKMAN i Jakub BERNOULLI (por. C. TRUESDELL i R. TOUPIN [713]); CAUCHY wyprowadził jedynie związki pomiędzy tak zdefiniowanymi odkształceniami a przemieszczeniami. Tym niemniej będziemy się posługiwali rozpowszechnioną terminologią «odkształcenie w mierze Cauchy'ego». Z punktu widzenia teoretycznego dogodniejsza byłaby definicja miary odkształcenia odcinka jako stosunku przyrostu kwadratu długości do kwadratu długości początkowej, gdyż wtedy łatwiej dochodzi się do ujęcia tensorowego przy odkształceniach skończonych.

W ogólnym przypadku niejednorodnego stanu odkształcenia należy rozpatrzyć odkształcenie odcinka nieskończenie małego. Posłużymy się najpierw współrzędnymi Lagrange'a. Weźmy pod uwagę taki odcinek $\overline{A_0 B_0} = d\xi$ o kierunku pierwotnym osi x ; długość jego po odkształceniu wyniesie

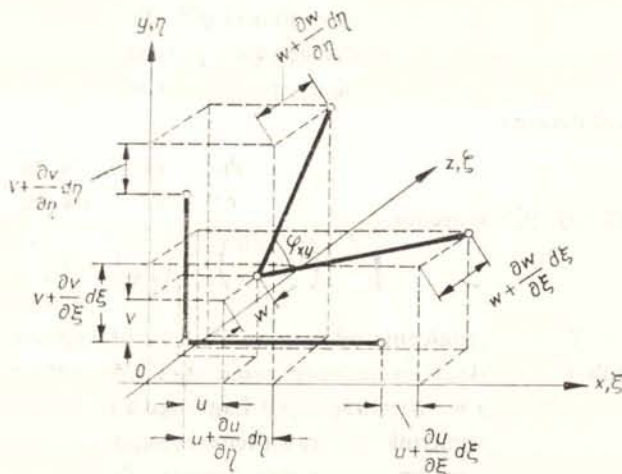
$$(8.4) \quad ds_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2} d\xi.$$

Wykorzystaliśmy tu związki (8.3) oraz założenie $d\eta = d\zeta = 0$. Względną zmianę długości odcinka $d\xi$, charakteryzującą według Cauchy'ego odkształcenie tego odcinka, oznaczmy przez ε_x^{*L} , zatem

$$(8.5) \quad \varepsilon_x^{*L} = \frac{ds_1}{d\xi} - 1 = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2} - 1.$$

Podobne wzory określające ε_y^{*L} i ε_z^{*L} otrzymujemy przez cykliczną zamianę zmiennych ξ, η, ζ , oraz u, v, w . Wielkości ε są dodatnie przy wzroście długości odcinka. Nazywamy je *odkształceniami odcinkowymi* lub *wydłużeniami względnymi*.

Znajomość zmiany długości trzech wzajemnie prostopadłych odcinków nie określa jeszcze odkształcenia w sposób jednoznaczny; tak np. prostopadłościan może wskutek odkształcenia zamienić się na równoległościan o tych samych długościach krawędzi. Takie odkształcenie można scharakteryzować zmianą kątów między parami odcinków o kierunkach pierwotnych osi x, y i z . Oznaczmy zmianę kąta pierwotnie prostego między odcinkami $\overline{A_0 B_0} = d\xi$ i $\overline{A_0 C_0} = d\eta$ przez γ_{xy}^{*L} ; wielkość tę będziemy uważali za dodatnią



Rys. 20. Odkształcenia kątowe we współrzędnych Lagrange'a

przy zmniejszaniu, a za ujemną przy zwiększaniu się kąta (rys. 20). Z rysunku 20 wynika, że $\gamma_{xy}^{*L} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{xy}$, gdzie kąt φ_{xy} można określić wykorzystując definicję iloczynu skalarnego:

$$(8.6) \quad \overline{A_1 B_1} \cdot \overline{A_1 C_1} = |\overline{A_1 B_1}| \cdot |\overline{A_1 C_1}| \cos \varphi_{xy}.$$

Mamy więc

$$(8.7) \quad \sin \gamma_{xy}^{*L} = \frac{\overline{A_1 B_1} \cdot \overline{A_1 C_1}}{|\overline{A_1 B_1}| \cdot |\overline{A_1 C_1}|},$$

a po wyrażeniu iloczynu skalarnego i długości obu wektorów przez ich współrzędne

$$(8.8) \quad \gamma_{xy}^{*L} = \arcsin \frac{\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta}}{\sqrt{\left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right] \left[\left(1 + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2\right]}}.$$

Podobne wzory otrzymujemy na γ_{yz}^{*L} i γ_{zx}^{*L} . Oczywiście $\gamma_{yx}^{*L} = \gamma_{xy}^{*L}$, $\gamma_{zy}^{*L} = \gamma_{yz}^{*L}$ oraz $\gamma_{xz}^{*L} = \gamma_{zx}^{*L}$ wprost z definicji. Wielkości te nazywamy *odkształceniami kątowymi* lub *odkształceniami postaciowymi*. Przy wyprowadzaniu wzorów (8.5) i (8.8) nie czyniono żadnych założeń upraszczających, słuszne są one dla odkształceń dowolnie dużych inaczej odkształceń skończonych.

Przy zastosowaniu współrzędnych Eulera wygodniej jest wprowadzić pewne drobne zmiany w definicjach. Przez ε_x^{*E} oznaczymy mianowicie względną zmianę długości odcinka, który *po odkształceniu* przybiera kierunek x , a długość jego wynosi dx . W takim razie

$$(8.9) \quad \varepsilon_x^{*E} = \frac{dx}{ds_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}} - 1.$$

Wypada zauważyć, że jest to wielkość na ogół różna od ε_x^{*L} , bowiem na ogół rozpatrujemy tu odkształcenia dwóch różnych odcinków (zgodność zachodzi wtedy, gdy odcinek nie ulega obrotowi, a stan odkształcenia jest jednorodny).

Podobnie określa się wielkości γ_{xy}^{*E} . Przez γ_{xy}^{*E} rozumiemy mianowicie zmianę kąta, który *po odkształceniu* stał się kątem prostym, a jego ramiona pokryły się z kierunkami x i y . Postępując podobnie jak w przypadku współrzędnych Lagrange'a otrzymuje się tutaj ostatecznie

$$(8.10) \quad \gamma_{xy}^{*E} = \arcsin \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \left[\left(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]}}.$$

Trzy odkształcenia odcinkowe ε^* (8.5) lub (8.9) oraz trzy odkształcenia kątowe γ^* (8.8) lub (8.10) określają jednoznacznie stan odkształcenia w rozpatrywanym punkcie ciała odpowiednio we współrzędnych Lagrange'a i Eulera. Wielkości te transformują się jednak całkowicie odmiennie od prawa tensorowego (z uwagi na występujące pierwiastki i funkcję arcus sinus), zatem nie tworzą tensora. Ze względu na formułowanie niezmienniczych praw fizycznych (konstytutywnych) pożądane jest jednak opisanie odkształceń skończonych za pomocą pewnego tensora. Istnieje kilka możliwości skonstruowania takiego tensora; w żadnej z nich składowe tensora nie mają jednakże tak prostej interpretacji fizycznej (geometrycznej), jak wielkości ε^* i γ^* .

Określmy zmianę kwadratu długości nieskończenie małego odcinka o dowolnym kierunku pierwotnym ds_0 , rys. 21. Długość jego *po odkształceniu* wyrazimy przyrostami współrzędnych Eulera, przed odkształceniem — przyrostami współrzędnych Lagrange'a. Zastosujemy krótszy zapis matematyczny, dający ponadto natychmiastowy dowód na to, że uzyskany obiekt będzie tensorem:

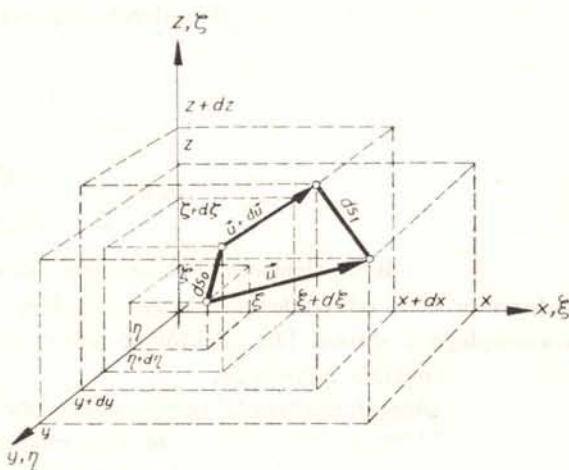
$$(8.11) \quad ds_1^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - d\xi_i d\xi_i.$$

Opisując proces we współrzędnych Lagrange'a podstawimy

$$(8.12) \quad dx_i = d\xi_i + du_i = d\xi_i + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} d\xi_j,$$

a po dogodnej zamianie wskaźników, po których następuje sumowanie, i po dokonaniu symetryzacji wynik zapiszemy następująco:

$$(8.13) \quad ds_1^2 - ds_0^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right) d\xi_i d\xi_j.$$



Rys. 21. Odkształcenia nieskończenie małego odcinka o dowolnym kierunku

Jak wynika z podstawowych twierdzeń rachunku tensorowego, wyrażenia w nawiasie tworzą tensor drugiego rzędu. Tensor, którego składowymi ϵ_{ij}^L są połówki wyrażeń w nawiasie, nazywamy *tensorem odkształcenia skończonego Lagrange'a* (lub G. Greena):

$$(8.14) \quad \epsilon_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right).$$

W zapisie inżynierskim wzory (8.14) przybierają postać

$$(8.14a) \quad \epsilon_x^L = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right],$$

$$\epsilon_{xy}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right).$$

Odpowiednie wzory we współrzędnych walcowych i kulistych podaje np. I. I. GOLDIENBLAT [853].

Jak już wspomnieliśmy, składowe tensora odkształcenia Lagrange'a nie posiadają prostej interpretacji fizycznej, jednakże odkształcenia odcinkowe i odkształcenia kątowe można wyrazić w funkcji tych składowych, np.

$$(8.15) \quad \epsilon_x^{*L} = \sqrt{1 + 2\epsilon_x^L} - 1,$$

$$\gamma_{xy}^{*L} = \arcsin \frac{2\epsilon_{xy}^L}{\sqrt{(1 + 2\epsilon_x^L)(1 + 2\epsilon_y^L)}}.$$

Wyrażając różnicę $ds_1^2 - ds_0^2$ we współrzędnych Eulera dochodzimy w podobny sposób do *tensora odkształcenia skończonego Eulera* (lub E. Almansi'ego)

$$(8.16) \quad \varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right);$$

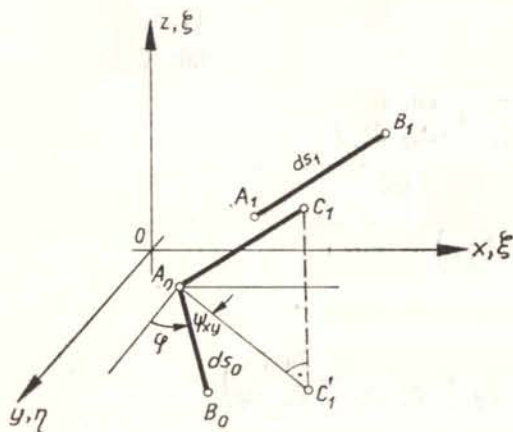
odkształcenia odcinkowe i odkształcenia kątowe są związane ze składowymi tensora Eulera wzorami typu

$$(8.17) \quad \varepsilon_x^{*E} = \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon_x^E}} - 1,$$

$$\gamma_{xy}^{*E} = \arcsin \frac{2\varepsilon_{xy}^E}{\sqrt{(1-2\varepsilon_x^E)(1-2\varepsilon_y^E)}}.$$

8.3. Średni obrót elementu. Poszczególne nieskończenie małe odcinki ciała doznają podczas procesu odkształcania nie tylko zmiany długości, lecz również przemieszczenia równoległego i obrotu. Dla niektórych zastosowań ważne jest wyodrębnienie obrotu elementu jako ciała sztywnego.

Spośród różnych możliwości oceny takiego obrotu przytoczymy propozycję W. W. Nowożyłowa [1100]. Przypuśćmy, że nieskończenie mały odcinek $A_0B_0 = ds_0$, leżący początkowo w płaszczyźnie xy , zajmuje po odkształceniu pozycję $A_1B_1 = ds_1$ (rys. 22). Przesunijmy go równoległe tak, aby punkt A_1 pokrył się z A_0 . Punkt B_1 zajmie wtedy pewne



Rys. 22. Średni obrót elementu (według Nowożyłowa)

położenie C_1 ; rzut punktu C_1 na płaszczyznę xy oznaczmy przez C_1' . Kąt $\sphericalangle B_0 A_0 C_1' = \psi_{xy}$ określa obrót rozpatrywanego odcinka w płaszczyźnie xy (zwrot tego kąta przyjęto odmiennie niż u Nowożyłowa z powodów, które wyjaśnimy w p. 8.4), jednak nie stanowi jeszcze miary obrotu elementu jako całości. Miarę taką uzyskamy przez obliczenie pewnej wartości średniej przy wszystkich możliwych kierunkach odcinka A_0B_0 w płaszczyźnie xy . W. W. Nowożyłow proponuje obliczenie *wartości średniej tangensa* kąta ψ_{xy} :

$$(8.18) \quad \overline{\operatorname{tg} \psi_{xy}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} \psi_{xy}(\varphi) d\varphi.$$

Przy zastosowaniu współrzędnych Lagrange'a po dokonaniu odpowiednich podstawień i przeprowadzeniu całkowania otrzymujemy

$$(8.19) \quad \overline{\text{tg } \psi_{xy}} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2}}.$$

Wzory na $\overline{\text{tg } \psi_{yz}}$ i $\overline{\text{tg } \psi_{zx}}$ można uzyskać przez cykliczną przemianę wskaźników.

Inną ocenę obrotu elementu stanowi tensor obrotu, który wprowadza np. A. C. ERINGEN [128].

8.4. Gradienty wektora przemieszczenia. Utwórzmy tensory $\partial u_i / \partial \xi_j$ i $\partial u_i / \partial x_j$, będące gradientami pola wektorowego przemieszczenia odpowiednio we współrzędnych Lagrange'a i Eulera (zapis matematyczny):

$$(8.20) \quad \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial \xi} & \frac{\partial u_x}{\partial \eta} & \frac{\partial u_x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial u_y}{\partial \xi} & \frac{\partial u_y}{\partial \eta} & \frac{\partial u_y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial u_z}{\partial \xi} & \frac{\partial u_z}{\partial \eta} & \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

i rozłóżmy je na tensory symetryczne i antysymetryczne. We współrzędnych Lagrange'a

$$(8.21) \quad \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) = \hat{T}_\varepsilon^L + \hat{T}_\omega^L.$$

Składowe tensora symetrycznego \hat{T}_ε^L oznaczmy przez $\hat{\varepsilon}_{ij}^L$, a antysymetrycznego \hat{T}_ω^L przez $\hat{\omega}_{ij}^L$:

$$(8.22) \quad \hat{\varepsilon}_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right), \quad \hat{\omega}_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right).$$

Podobnie można rozłożyć tensor $\partial u_i / \partial x_j$ na część symetryczną \hat{T}_ε^E i antysymetryczną \hat{T}_ω^E .

Zajmiemy się obecnie określeniem związków między składowymi tensorów ε_{ij}^L i $\hat{\varepsilon}_{ij}^L$ oraz odkształceniami odcinkowymi i kątowymi ε^{*L} i γ^{*L} , a także podobnych związków przy zastosowaniu współrzędnych Eulera. Korzystając z oznaczeń (8.22) można składowe tensorów odkształcenia skończonego Lagrange'a (8.14) i Eulera (8.16) przedstawić następująco:

$$(8.23) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{ij}^L &= \hat{\varepsilon}_{ij}^L + \frac{1}{2} (\hat{\varepsilon}_{ik}^L + \hat{\omega}_{ik}^L) (\hat{\varepsilon}_{jk}^L + \hat{\omega}_{jk}^L), \\ \varepsilon_{ij}^E &= \hat{\varepsilon}_{ij}^E - \frac{1}{2} (\hat{\varepsilon}_{ik}^E + \hat{\omega}_{ik}^E) (\hat{\varepsilon}_{jk}^E + \hat{\omega}_{jk}^E). \end{aligned}$$

W zależności od tego, które z wielkości $\hat{\varepsilon}$ i $\hat{\omega}$ można uważać za małe i jaki jest wzajemny rząd tych wielkości, można wzory (8.23) aproksymować przez wzory prostsze.

Jeżeli w najprostszym przypadku wszystkie składowe gradientów wektora przemieszczenia są małe wobec jedności, to pomijając we wzorach (8.23) wszystkie iloczyny otrzymujemy

$$(8.24) \quad \varepsilon_{ij}^L \approx \hat{\varepsilon}_{ij}^L, \quad \varepsilon_{ij}^E \approx \hat{\varepsilon}_{ij}^E.$$

Wtedy również różnice między różniczkowaniem względem współrzędnych Lagrange'a i współrzędnych Eulera są małe wyższego rzędu i wszystkie cztery wielkości (8.24) można utożsamić. Składowe tensora stanowiącego liniowe przybliżenie ε_{ij}^L i jednocześnie ε_{ij}^E oznaczymy krótko przez ε_{ij} . Tensor ten, T_ε , nosi tradycyjną nazwę *tensora odkształceń nieskończenie małych*. W istocie rzeczy stanowi on uzasadnione przybliżenie tensorów ε_{ij}^L i ε_{ij}^E , gdy nie tylko odkształcenia są małe (sześć wielkości), ale gdy wszystkie składowe gradientów wektora przemieszczenia są małe (dziewięć wielkości). Wtedy można również pominąć różnicę między tensorami \hat{T}_ω^L i \hat{T}_ω^E ; odpowiedni tensor T_ω , związany z obrotem elementu jako ciała sztywnego [jego składowe występują w liczniku wzorów typu (8.19)], nosi nazwę tensora nieskończenie małego obrotu. Tradycyjnie przypisywano składowym tego tensora znaki odmienne niż określone wzorami (8.22), jednak z uwagi na prostszy zapis rozkładu gradientów wektora przemieszczenia na część symetryczną i antysymetryczną spotyka się coraz częściej przyjętą tu umowę (8.22) (por. np. A. C. ERINGEN [128]).

Założenie małych obrotów, umożliwiające zastosowanie przybliżeń (8.24), jest bardzo ograniczające. Czasem można się uwolnić od tego założenia wprowadzając ruchomy układ odniesienia, czyli sprowadzając przemieszczenia do przemieszczeń względnych (np. wiążąc układ z elementem środkowym wirującej tarczy). Podejście takie może przynieść dobre rezultaty, jeżeli zmiany gradientów, związane z krzywiznami linii $\xi_i = \text{const}$, nie są duże.

Rozwińmy teraz funkcje określające odkształcenia odcinkowe ε^* i odkształcenia kątowe γ^* w szeregi potęgowe względem składowych gradientu wektora przemieszczenia. Będą to odpowiednio wzory (8.5) i (8.8) przy zastosowaniu współrzędnych Lagrange'a, a wzory (8.9) i (8.10) przy zastosowaniu współrzędnych Eulera. Liniowe wyrazy tych szeregów, które można parami utożsamić przy zastosowaniu obu typów współrzędnych, oznaczymy przez ε i γ (bez gwiazdek):

$$(8.25) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

Praktycznie stosowanie wzorów (8.25) jako przybliżeń wzorów na ε^* i γ^* jest ograniczone, zależnie od wymaganej dokładności, do wartości składowych gradientu przemieszczenia np. rzędu 0,01 (błąd rzędu 1%), lub rzędu 0,1 (błąd rzędu 10%), więc wzory te obejmują dość znaczny zakres odkształceń. Zakres ten można zwiększyć przez wspomniane już przyjęcie ruchomego układu odniesienia. Ponadto wypada podkreślić, że wzory przybliżone na odkształcenia odcinkowe ε (8.25) są zgodne ze wzorami ścisłymi również w przy-

padku odkształceń skończonych (dużych), gdy tylko przemieszczenia są funkcjami jednej zmiennej przestrzennej $u = u(x)$, $v = v(y)$, $w = w(z)$.

Porównując wzory (8.25) ze wzorami (8.22) stwierdzamy, że wielkości ε i γ nie tworzą tensora, natomiast tworzą go wielkości ε i $\gamma/2$. Tak więc ostatecznie tensor nieskończenie małego odkształcenia T_ε przedstawimy w zapisie inżynierskim i matematycznym następująco:

$$(8.26) \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Wielkości typu ε_{xy} są dogodniejsze z uwagi na prawa transformacji i wynikającą stąd analogię z naprężeniami stycznymi, jednakże definicja wielkości γ_{xy} jest prostsza i często dogodniejsza w zastosowaniach inżynierskich.

W omówionym powyżej najprostszym przypadku małych gradientów wektora przemieszczenia można było wzory (8.14) względnie (8.23) zastąpić przez liniowe wzory (8.22). Gdy tylko odkształcenia są małe, a obroty duże i nie dające się zredukować do małych, to przybliżenie takie nie jest dopuszczalne. Czasem można przyjąć, że odkształcenia są rzędu kwadratów składowych tensora T_ω ; wtedy wzory (8.23) upraszczają się do postaci

$$(8.27) \quad \varepsilon_{xx}^L = \hat{\varepsilon}_{xx}^L + \frac{1}{2} (\hat{\omega}_{xy}^L + \hat{\omega}_{xz}^L), \quad \varepsilon_{xy}^L = \hat{\varepsilon}_{xy}^L + \frac{1}{2} \hat{\omega}_{xz}^L \hat{\omega}_{yz}^L$$

.....

przy zastosowaniu współrzędnych Lagrange'a, a do postaci

$$(8.28) \quad \varepsilon_{xx}^E = \hat{\varepsilon}_{xx}^E - \frac{1}{2} (\hat{\omega}_{xy}^E + \hat{\omega}_{xz}^E), \quad \varepsilon_{xy}^E = \hat{\varepsilon}_{xy}^E - \frac{1}{2} \hat{\omega}_{xz}^E \hat{\omega}_{yz}^E$$

.....

przy zastosowaniu współrzędnych Eulera. Wzory (8.27) i (8.28) o dokładności pośredniej między (8.23) i przybliżeniem (8.24) bywają stosowane przy analizie stanu odkształcenia w elementach smukłych lub cienkościennych, w szczególności przy analizie problemów stateczności.

Jeżeli natomiast w pewnym układzie współrzędnych wszystkie składowe tensora T_ω są równe zeru, to są oczywiście równe zeru w każdym układzie dowolnie obróconym. Taki przypadek nazywamy odkształceniem bezobrotowym. Jeżeli odkształcenie jest bezobrotowe w każdym punkcie ciała, to pole przemieszczeń posiada potencjał, bowiem ze wzorów (8.23) wynika, że rotacja tego pola jest tożsamościowo równa zeru.

8.5. Odkształcenia nieskończenie małe we współrzędnych walcowych i kulistych. Wzory (8.25), określające małe odkształcenia (przy dodatkowym założeniu małych obrotów), w układzie kartezjańskim można uogólnić na dowolny układ odniesienia przez wprowadzenie

dzenie współrzędnych kowariantnych lub kontrawariantnych i reguły kowariantnego różniczkowania. Ograniczymy się jedynie do przytoczenia wzorów wynikowych dla układu współrzędnych walcowych r, θ, z i współrzędnych kulistych r, ψ, θ ; wzory te można zresztą wyprowadzić na drodze całkiem elementarnej. Oznaczając w układzie walcowym współrzędne wektora przemieszczenia przez u_r, u_θ, u_z , otrzymujemy

$$(8.29) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{zr} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \end{aligned}$$

natomiast w układzie kulistym, przy oznaczeniu współrzędnych wektora przemieszczenia przez u_r, u_ψ, u_θ ,

$$(8.30) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \gamma_{r\psi} &= \frac{\partial u_\psi}{\partial r} - \frac{u_\psi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \psi} \\ \varepsilon_\psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{u_r}{r}, & \gamma_{\psi\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \psi} + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial u_\psi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta \operatorname{ctg} \psi}{r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\psi \operatorname{ctg} \psi}{r} + \frac{u_r}{r}, & \gamma_{\theta r} &= \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{aligned}$$

8.6. Rozkład tensora nieskończenie małego odkształcenia. Dylatacja. Tensor odkształcenia T_ε możemy rozłożyć na aksjator i dewiator zgodnie z ogólnym schematem $T_\varepsilon = A_\varepsilon + D_\varepsilon$. Niezależna składowa aksjatora ε_m wynosi

$$(8.31) \quad \varepsilon_m = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z);$$

składowe dewiatora odkształceń będziemy oznaczali przez $e_x, e_y, e_z, \gamma_{xy}/2, \gamma_{yz}/2, \gamma_{zx}/2$ w zapisie inżynierskim, natomiast przez e_{ij} w zapisie matematycznym.

Omawiany rozkład tensora odkształcenia posiada wyjątkowo prostą i ważną interpretację fizyczną. Obliczmy mianowicie względną zmianę objętości elementu prostopadłościennego o bokach dx, dy, dz . Przyjmując dla uproszczenia układ odniesienia x, y, z tak, aby poszczególne osie pokrywały się z kierunkami głównymi stanu odkształcenia, otrzymamy po odkształceniu również prostopadłościan o bokach $dx_1 = dx(1 + \varepsilon_1)$, $dy_1 = dy(1 + \varepsilon_2)$, $dz_1 = dz(1 + \varepsilon_3)$. Względna zmiana objętości, zwana również dylatacją i oznaczana przez Θ , wyniesie

$$(8.32) \quad \Theta = \frac{dx(1 + \varepsilon_1) dy(1 + \varepsilon_2) dz(1 + \varepsilon_3)}{dx dy dz} - 1,$$

a po wykonaniu działań i konsekwentnym pozostawieniu jedynie wyrazów liniowych

$$(8.33) \quad \Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_m.$$

Tak więc aksjator odkształcenia przedstawia czystą zmianę objętości; zmiana postaci nie występuje, bowiem odkształcenie jest w każdym kierunku takie samo. Natomiast dewiator odkształcenia przedstawia czystą zmianę postaci, gdyż odpowiednia zmiana objętości — określona sumą wyrazów na przekątnej — jest z definicji równa zero. W przypadku materiałów nieściśliwych aksjator odkształcenia jest tożsamościowo równy zero. Definicję dewiatora odkształceń w przypadku odkształceń skończonych podaje np. I. I. GOLDIENBLAT [853].

8.7. Niezmienniki tensora nieskończenie małego odkształcenia. Typowe układy niezmienników przyjmujemy zgodnie z p. 6. Będą to niezmienniki podstawowe I_{1e}, I_{2e}, I_{3e} , niezmienniki główne J_{1e}, J_{2e}, J_{3e} ; niezmienniki aksjatorowo-dewiatorowe I_{1e}, I_{2e}, I_{3e} . Definicje ich są zgodne z ogólnymi, podanymi w p. 6, a związki pomiędzy poszczególnymi układami tych niezmienników i odkształceniami głównymi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ są identyczne ze związkami zestawionymi w tablicy 3 dla niezmienników stanu naprężenia.

Pewne różnice występują przy określaniu współczynników niezmienników walcowych. Niezmiennik Z_e (6.11) zastępujemy podobnie jak w przypadku naprężeń przez proporcjonalny do niego niezmiennik ε_m (8.31). Definicję ω_e (6.11) pozostawiamy bez zmiany, natomiast niezmiennik R_e zastępuje się zazwyczaj przez pewien inny niezmiennik, różniący się jedynie współczynnikiem. Zapiszmy mianowicie wzór określający R_e w postaci

$$(8.34) \quad R_e = c \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},$$

gdzie współczynnik c wynosi $c = 1/\sqrt{3}$. W teorii naprężeń zdefiniowaliśmy intensywność naprężeń σ_i zastępując w odnośnym wzorze współczynnik $1/\sqrt{3}$ przez $1/\sqrt{2}$; wtedy przy jednoosiowym stanie naprężenia otrzymaliśmy wprost $\sigma_i = \sigma$. W teorii odkształceń propozycje są znacznie bardziej różnorodne. Identyczny współczynnik $c = 1/\sqrt{2}$, który dawałby pełną analogię do wzorów dla naprężeń, przyjmuje się bardzo rzadko (W. URBAŃSKI [485], H. FORD [139], E. P. UNKSOW [1213]); bezpośrednie przejście takiego niezmiennika w ε_1 w przypadku $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ nie ma większego znaczenia praktycznego, a dla materiałów nieściśliwych $\varepsilon_1 \neq 0$ przy $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ jest w ogóle niemożliwe. N. I. BIEZUCHOW [802] zaproponował nazwać *intensywnością odkształceń* ε_i wyrażenie (8.34) ze współczynnikiem $\sqrt{2}/2(1+\nu)$; wtedy w zakresie sprężystym obowiązuje związek $\sigma_i = E\varepsilon_i$ zarówno dla materiałów nieściśliwych, jak i ściśliwych. Wadą takiej propozycji jest uzależnienie intensywności odkształceń od stałej materiałowej — współczynnika Poissona ν . Trudność tę można ominąć przyjmując $\nu = 1/2$ jak dla materiałów nieściśliwych; taka definicja intensywności odkształceń bywa stosowana najczęściej i ją też przyjmujemy w obecnej pracy:

$$(8.35) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij} e_{ij} = \\ = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{3}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Definicję taką przyjmuje np. A. A. ILIUSZIN [949], O. HOFFMAN i G. SACHS [263], S. D. PONOMARIEW i inni [1123], A. M. FREUDENTHAL [146], I. I. GOLDIENBLAT [853], K. A. RECKLING [576], N. N. MALININ [1057] (przy dość różnorodnych oznaczeniach).

Niektórzy autorzy posługują się *intensywnością odkształceń kątowych* (postaciowych) γ_i , definiowanej bądź ze współczynnikiem $c = \sqrt{2/3}$ (Ł. M. KACZANOW [977]), bądź ze współczynnikiem $c = 1/\sqrt{6}$ (W. W. SOKOŁOWSKI [1169], W. SZCZEPIŃSKI [688]), bądź ze współczynnikiem $2/3$ (M. ROŠ, A. EICHINGER [586], A. A. ILIUSZIN [949], S. D. PONOMARIEW i inni [1123]). W pierwszym z trzech powyższych przypadków mamy przy czystym ścinaniu $\gamma_i = \gamma$, w drugim $\gamma_i = \gamma/2$, natomiast w trzecim obowiązuje związek $\gamma_i = \gamma_{\text{oct}}$, przy czym *odkształcenia oktaedryczne* są określone wzorami analogicznymi do (7.7) i (7.9), jednak z zastąpieniem τ przez $\gamma/2$:

$$(8.36) \quad \varepsilon_{\text{oct}} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

$$(8.37) \quad \gamma_{\text{oct}} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

W przypadku materiału nieściśliwego $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ i możemy ε_i wyrazić w funkcji dwóch tylko odkształceń głównych, np. ε_1 i ε_2 . Otrzymujemy wtedy

$$(8.38) \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2},$$

natomiast γ_{oct} jest określone tym samym wzorem ze współczynnikiem $2\sqrt{2/3}$.

Ekstremalne odkształcenia kątowe γ występują w płaszczyznach nachylonych pod kątem 45° do dwóch dowolnie obranych kierunków głównych. Zgodnie z przyjętą symboliką uszeregowania odkształceń głównych największe z nich wynosi

$$(8.39) \quad \gamma_{\text{max}} = \varepsilon_I - \varepsilon_{III}.$$

Związki pomiędzy typowymi układami niezmienników stanu nieskończenie małego odkształcenia można otrzymać wprost z tablicy 3, zastępując formalnie σ przez ε i s przez e . Istotniejsza różnica występuje jedynie przy wielkości σ_I , którą, porównując definicje (7.6) i (8.35), należy zastąpić przez $3\varepsilon_I/2$.

Związki między niezmiennikami tensorów odkształceń skończonych można znaleźć w monografii I. I. GOLDIENBLATA [853].

8.8. Równania nierozdzielności odkształceń. Nieskończenie małe odkształcenia, określone we współrzędnych kartezjańskich wzorami (8.25) jako funkcje współrzędnych x, y, z nie mogą być niezależne, gdyż muszą zapewniać istnienie ciągłego pola wektora przemieszczenia. Rugując z równań (8.25) przemieszczenia u, v, w przez odpowiednie różniczkowanie i wykorzystanie warunków Schwarz'a równości pochodnych mieszanych dojdziemy do sześciu *równań nierozdzielności de Saint-Venanta*:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x},$$

$$(8.40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \end{aligned}$$

W zapisie matematycznym przy zastosowaniu konwencji sumacyjnej można je zapisać krótko

$$(8.41) \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0, \quad i, j, k, l = x, y, z,$$

gdzie różniczkowanie następuje po współrzędnych bądź Lagrange'a, bądź Eulera (w rozpatrywanym liniowym przypadku różniczkowania względem tych współrzędnych nie różnią się).

Wskaźniki i, j, k, l należy dobrać tak, aby nie więcej niż dwa były równe (w przeciwnym razie równanie (8.41) byłoby spełnione tożsamościowo). Spośród 54 otrzymanych w ten sposób równań tylko 6 jest niezależnych — są to równania (8.40). Równania te muszą być spełnione w punktach regularnych (ciągłości odkształceń wraz z drugimi pochodnymi), natomiast na ewentualnych powierzchniach nieciągłości obowiązuje tylko ciągłość przemieszczeń w kierunku normalnej do tej powierzchni, a pozostałe dwie składowe wektora przemieszczenia mogą nie być ciągłe.

W układzie współrzędnych walcowych odpowiednie równania wyprowadził F. K. G. ODQVIST [470], a w dowolnym układzie — W. Z. WŁASOW [838, 839]. Przytoczymy tu równania dla układu walcowego posługując się nieco dogodniejszą formą Własowa, lecz zmieniając stosowane przez niego oznaczenia matematyczne na inżynierskie:

$$(8.42) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zr}}{\partial z \partial r} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{\theta z}}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{zr}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial z^2} - r \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{\gamma_{\theta z}}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{zr}}{\partial \theta \partial z} + 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\varepsilon_z}{r} \right) &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \gamma_{\theta z})}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^2 \gamma_{r\theta})}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\gamma_{zr}}{r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r \gamma_{\theta z})}{\partial r} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \gamma_{\theta z})}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} + 2 \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\theta)}{\partial z \partial r} - 2 \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Stosowanie równań nierozdzielności wymaga z reguły wyznaczania niektórych stałych całkowania wprost z równań wyjściowych (8.26) lub (8.29).

Ogólny zapis równań nierozdzielności w dowolnych współrzędnych krzywoliniowych w przypadku odkształceń skończonych można znaleźć w pracach A. E. GREENA i W. ZERNY [177], A. C. ERINGENA [128]; bardziej szczegółową analizę podaje I. I. GOLDIENBLAT [853].

8.9. Prędkości odkształcenia. Teoria plastyczności posługuje się pojęciem przyrostów odkształcenia $d\varepsilon$; odpowiednie równania zapisujemy jednak często posługując się prędkościami zmiany odkształceń $d\varepsilon/dt = \dot{\varepsilon}$, a następnie rugując czynnik czasu.

W przypadku małych odkształceń i małych obrotów prędkości poszczególnych składowych tensora odkształcenia tworzą tensor, który zapiszemy następująco, kolejno w zapisie inżynierskim i matematycznym:

$$(8.43) \quad T_{\dot{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{\varepsilon}_y & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix}.$$

Korzystając ze zróżniczkowanych względem czasu równań (8.25) możemy wyrazić składowe tego tensora w funkcji współrzędnych wektora prędkości \dot{u}_i :

$$(8.44) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}).$$

W punktach regularnych wielkości te muszą spełniać zróżniczkowane względem czasu równania nierozdzielności (8.40). Na powierzchniach nieciągłości natomiast składowa prędkości w kierunku normalnej musi być ciągła, pozostałe dwie składowe mogą być nieciągłe.

Niezmienniki tensora $T_{\dot{\varepsilon}}$ oznaczmy przez $I_{1\dot{\varepsilon}}, I_{2\dot{\varepsilon}}, I_{3\dot{\varepsilon}}$ (niezmienniki podstawowe), $J_{1\dot{\varepsilon}}, J_{2\dot{\varepsilon}}, J_{3\dot{\varepsilon}}$ (niezmienniki główne) itp. Podobnie jak w przypadku naprężeń niezmiennik

$$(8.45) \quad S_{\dot{\varepsilon}} = \int_{t^A}^{t^B} \sqrt{I_{2\dot{\varepsilon}}} dt = \int_A^B \sqrt{d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}}$$

określa długość drogi w dziewięciowymiarowej przestrzeni odkształceń pomiędzy punktami reprezentującymi dwa stany odkształcenia A i B . Dla oceny wpływu pośredniej głównej prędkości odkształcenia bywa często stosowany odpowiedni parametr Lodego, definowany zgodnie z ogólnym wzorem (6.20) wzorem

$$(8.46) \quad \mu_{\dot{\varepsilon}} = \frac{2(d\varepsilon)_{II} - (d\varepsilon)_I - (d\varepsilon)_{III}}{(d\varepsilon)_I - (d\varepsilon)_{III}} = \frac{3(d\varepsilon)_{II}}{(d\varepsilon)_I - (d\varepsilon)_{III}}.$$

Pochodne względem czasu zastąpiono tu już przez różniczki, mnożąc formalnie licznik i mianownik przez dt . Różniczki te przed przypisaniem im wskaźnika ujęto w nawias, gdyż wobec konieczności uszeregowania algebraicznego nie zawsze $(d\varepsilon)_I = d(\varepsilon)_I$.

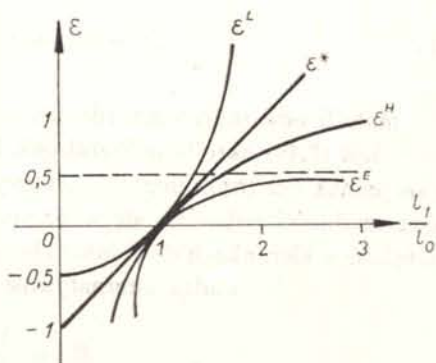
Tensor prędkości odkształcenia można rozłożyć na aksjator i dewiator. W przypadku materiałów nieściśliwych aksjator A_{ij} jest tożsamościowo równy zeru.

Istnieją różne możliwości określenia prędkości odkształcenia w przypadku odkształceń skończonych. W najprostszyc przypadkach jako składowe takiego tensora przyjmuje się wielkości $\dot{\varepsilon}_{ij}^L = \partial \varepsilon_{ij}^L / \partial t$ w zapisie Lagrange'a oraz

$$(8.47) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^E = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^E}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^E}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial t}$$

w zapisie Eulera (I. I. GOLDIENBLAT [853]). Przegląd różnych definicji pochodnej konstytutywnej tensora odkształceń oraz pewną ogólną propozycję podaje praca Z. H. GUO [192].

8.10. Logarytmiczna miara odkształcenia. Nawet w najprostszym przypadku jednoosiowego rozciągania występują przy odkształceniach skończonych dość istotne różnice między wydłużeniem względnym $\varepsilon^* = \varepsilon$ (różnica między wynikami wzorów (8.5) i (8.25) w tym przypadku zanika), a odpowiednimi składowymi tensora odkształcenia Lagrange'a ε^L i Eulera ε^E . Różnice te uwidocznione są na rys. 23, gdzie przedstawiono ε^* , ε^L i ε^E w funkcji stosunku długości próbki po odkształceniu l_1 do długości początkowej l_0 .



Rys. 23. Typowe miary odkształcenia odcinka

Żadna z powyższych wielkości nie spełnia jednak w zakresie odkształceń skończonych warunku addytywności (np. wydłużając próbkę dwukrotnie, $\varepsilon^* = 1$, a następnie jeszcze raz dwukrotnie, $\varepsilon^* = 1$, otrzymujemy w stosunku do długości pierwotnej $\varepsilon^* = 3$, a nie $\varepsilon^* = 2$), a ponadto nie spełnia warunku symetrii z uwagi na rozciąganie i ściskanie (jednakowo co do wartości bezwzględnej odkształcenia przy n -krotnym wydłużeniu i n -krotnym skróceniu). Wymagania te spełnia *miara logarytmiczna odkształcenia*, którą wprowadzimy następująco.

Zapiszmy najpierw zaproponowaną przez Cauchy'ego miarę odkształcenia odcinka w postaci całki:

$$(8.48) \quad \varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l_0}$$

Wymaganie addytywności spełnimy, jeżeli przyrosty wydłużenia odcinka będziemy odnosili

nie do długości pierwotnej l_0 , lecz do długości bieżącej l . Oznaczmy tak zdefiniowaną wielkość przez ε^H :

$$(8.49) \quad \varepsilon^H = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_1}{l_0}.$$

Wielkość tę wprowadził w r. 1909 P. LUDWIK [365] (podobną propozycję wysunął A. MESSNER na kongresie fizyki w r. 1900), jednak więcej uwagi poświęcił jej dopiero w r. 1928 H. HENCKY [211] i stąd nosi ona nazwę miary Hencky'ego lub logarytmicznej. A. NÁDAI [451] nazwał wielkość ε^H *odkształceniem naturalnym*. Zaletą miary logarytmicznej jest również prosty związek między logarytmiczną dylatacją, a odkształceniami głównymi; dla dowolnych odkształceń obowiązuje tu związek

$$(8.50) \quad \Theta^H = \ln \frac{V_1}{V_0} = \varepsilon_1^H + \varepsilon_2^H + \varepsilon_3^H,$$

słuszny — przy mierze Cauchy'ego — jedynie dla odkształceń nieskończenie małych.

Dla porównania na rys. 23 pokazano również przebieg krzywej ε^H (8.49).

Między miarami odkształcenia Cauchy'ego i Hencky'ego obowiązuje związek

$$(8.51) \quad \varepsilon^H = \ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \dots$$

i przy małych odkształceniach różnica między tymi miarami jest pomijalnie mała.

Definicja (8.49) określa odkształcenie logarytmiczne w przypadku jednowymiarowym, daje się jednak bez trudu uogólnić na przypadek, gdy znane są kierunki główne. Znacznie większe trudności pojawiają się w przypadku ogólnym, mianowicie przy rozpatrywaniu odkształceń w kierunkach dowolnych. Istnieją tu dość różnorodne propozycje. F. D. MURNAGHAN [445] wprowadza alternatywnie wielkości

$$(8.52) \quad H_{IJ} = \frac{1}{2} \ln(1 + 2\varepsilon_{IJ}^L),$$

$$(8.53) \quad h_{ij} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\varepsilon_{ij}^E).$$

Inne wzory określające wydłużenie dowolnie skierowanego odcinka i zamianę kąta prostego w funkcji głównych odkształceń logarytmicznych można znaleźć w podręczniku O. HOFFMANA i G. SACHSA [263]. Zawarta tam również propozycja logarytmicznej miary odkształcenia kąтового budzi wątpliwości, gdyż daje ona różne wyniki dla dodatnich i ujemnych kątów γ , co nie wydaje się uzasadnione (w przeciwieństwie do odkształceń odcinkowych ε). Wady tej nie posiada zaproponowana przez Y. YOSHIMURĘ [753] wielkość

$$(8.54) \quad \gamma^H = -\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right).$$

Jeszcze inne propozycje można znaleźć w monografii S. I. GUBKINA [881]. Pewną krytykę miary logarytmicznej w przypadku ogólnym zawierają prace H. RICHTERA [583]

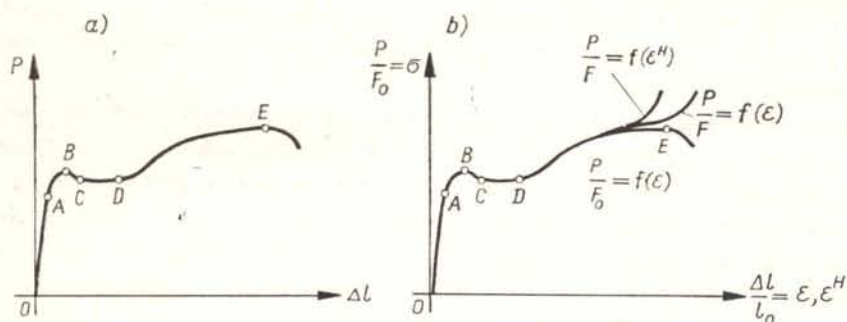
i C. TRUESDELLA [712]; TRUESDELL dowodzi, iż miara ta może być użyteczna tylko w przypadku odkształcenia bezobrotowego, gdy kierunki główne odkształceń są znane i ustalone. Tym niemniej w wielu zagadnieniach, spełniających te warunki (cylindry grubościennie, tarcze itp.), stosowanie miary logarytmicznej prowadzi do dobrych rezultatów, zgodnych z wynikami doświadczeń.

Przegląd różnych miar odkształceń skończonych podaje praca A. V. HERSHEY'A [214].

9. Schematyzacje wykresu rozciągania materiału

9.1. Rzeczywiste wykresy rozciągania. Najprostszą z punktu widzenia technicznego próbą wytrzymałościową, zezwalającą na określenie podstawowych własności mechanicznych materiału, jest próba rozciągania (jednoosiowego), wykonywana na zrywance. Z punktu widzenia teoretycznego próba ta nie jest zbyt dogodna, gdyż jednoosiowemu stanowi naprężenia odpowiada tu trójosiowy stan odkształcenia, a ponadto występuje komplikujący efekt zmniejszania się przekroju próbki. Teoretycznie najdogodniejsza byłaby próba czystego ścinania, któremu odpowiada (w materiale izotropowym i licznych materiałach anizotropowych) czyste odkształcenie kątowe i brak zmiany objętości. Taką próbę można urzeczywistnić przez skręcanie próbki o przekroju pierścieniowym cienkościennym; komplikacja może tu polegać na utracie stateczności ścianki. Jednakże z uwagi na prostotę wykonania próbek i przeprowadzania samej próby punkt wyjścia teorii plastyczności stanowi przede wszystkim wykres rozciągania.

Na rysunku 24a przedstawiono typowy wykres rozciągania stali niskowęglowej; przyjęto układ $\Delta l - P$, taki, jakiego dostarcza nam zrywarka. Wykres ten przeliczamy na



Rys. 24. Wykres rozciągania stali niskowęglowej: a) w układzie $\Delta l - P$, b) w układzie $\varepsilon - \sigma$

układ $\varepsilon - \sigma$. Przy założeniu proporcjonalności ε do Δl i σ do P otrzymalibyśmy wykres geometrycznie podobny. Taka sytuacja zachodzi przy posługiwaniu się miarą odkształcenia Cauchy'ego i tzw. naprężeniem pozornym (umownym), określającym — zgodnie z zasadą zeszywnienia — stosunek siły do przekroju pierwotnego P/F_0 (rys. 24b). W rzeczywistości przy większych odkształceniach zmniejszenie przekroju może być dość znaczne i rezygnując z zasady zeszywnienia należy naprężenia rzeczywiste określić wzorem $\sigma = P/F$. Po utworzeniu się szyjki stan naprężenia zaczyna wyraźnie odbiegać od jednoosiowego, a stan odkształcenia od jednorodnego i końcowa część wykresu ma jedynie znaczenie

orientacyjne. Czasem zamiast miary odkształcenia Cauchy'ego posługujemy się miarą logarytmiczną Hencky'ego ϵ^H , która nie jest już proporcjonalna do Δl ; odpowiedni wykres pokazano również na rys. 24b.

Punkt A na wykresie odpowiada granicy sprężystości, utożsamianej dla większości metali z granicą proporcjonalności, punkt B — górnej granicy plastyczności, C — dolnej granicy plastyczności (terminy te wprowadził w r. 1904 C. BACH). Odcinek BC odpowiada *mięknieniu plastycznemu* materiału; zjawisko mięknienia wykazują tylko niektóre materiały; jest ono związane z pewną niestatecznością materiału w tym zakresie. Odcinek CD nazywamy platformą plastyczności lub odcinkiem idealnej plastyczności. Linia DE obrazuje zjawisko wzmocnienia plastycznego. Punkt E — wytrzymałość doraźna na rozciąganie — występuje tylko na krzywej naprężenia pozornego i nie ma odpowiednika na krzywej naprężenia rzeczywistego.

Większość innych materiałów nie wykazuje zjawiska dolnej i górnej granicy plastyczności lub nawet nie wykazuje platformy plastyczności. Dla celów technicznych wprowadza się wtedy pojęcie umownej granicy plastyczności, zdefiniowanej pewną wartością odkształcenia trwałego. Jednak aproksymacyjne ujęcie matematyczne krzywej rozciągania musi wtedy być inne niż w przypadku platformy plastyczności.

Wykres rozciągania materiału zależy na ogół w dość znacznym stopniu od temperatury. W przypadku stali niskowęglowej ze wzrostem temperatury różnica między górną a dolną granicą plastyczności maleje, maleje również długość platformy plastyczności. Zdolność materiału do wzmocnienia plastycznego początkowo rośnie, natomiast po przekroczeniu temperatury rzędu 300°C zaczyna ponownie maleć.

Wykresy rozciągania większości materiałów zależą również od prędkości wykonywania próby, scharakteryzowanej bądź prędkością zmiany naprężeń, bądź prędkością zmiany odkształceń. Są to efekty reologiczne, którymi nie zajmujemy się w obecnej książce. Będziemy zakładali, że analizowane wykresy zostały otrzymane przy bardzo małej prędkości przykładania obciążeń.

Wypada wspomnieć, że dla pewnych zastosowań wygodniejszy jest inny opis matematyczny wykresu rozciągania niż funkcją $\sigma = f(\epsilon)$. Pochodną $d\sigma/d\epsilon = E_t$ nazwiemy *modułem stycznym*, a stosunek $\sigma/\epsilon = E_s$ — *modułem siecznym* w danym punkcie. Wykres rozciągania można również opisać równaniami $E_t = f(\sigma)$, $E_t = f(\epsilon)$, $E_s = f(\sigma)$ lub $E_s = f(\epsilon)$. Pierwsze dwa z nich są równaniami różniczkowymi względem funkcji $\sigma = f(\epsilon)$; szczególnie równanie $E_t = f(\sigma)$ bywa często stosowane przy określaniu stateczności konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym.

A. A. ILIUSZIN [949] zapisuje równanie wykresu rozciągania w postaci

$$(9.1) \quad \sigma = E\epsilon [1 - \omega(\epsilon)],$$

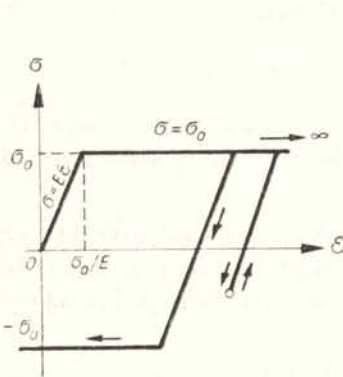
gdzie wartości funkcji $\omega(\epsilon)$ są zawarte w przedziale $0 \leq \omega < 1$.

Czasem stosuje się również pewien opis całkowity wykresu rozciągania, np. $\sigma = f(W^p)$, gdzie W^p oznacza energię rozproszoną podczas odkształceń plastycznych, a zatem wielkość całkową względem naprężeń i odkształceń.

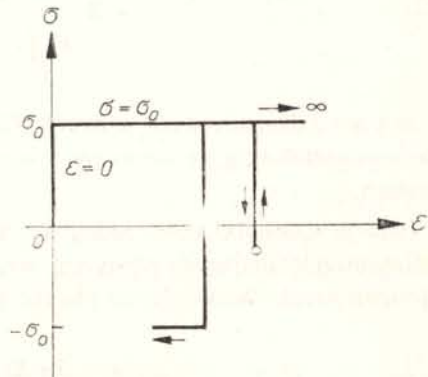
9.2. Ciała idealnie plastyczne. Dostatecznie dokładne opisanie jednym wspólnym równaniem poszczególnych krzywych, przedstawionych na rys. 24b, lub podobnych dla innych

materiałów wydaje się niemożliwe. Dlatego też dokonuje się schematyzacji wykresu rozciągania czyli aproksymacji przez linię lub kilka linii o równaniach znacznie prostszych.

Przy występowaniu platformy plastyczności i niewielkim wzmocnieniu plastycznym wykres rozciągania można aproksymować wykresem przedstawionym na rys. 25. Wykres ten łączy się z nazwiskiem L. PRANDTLA [569], jednakże był już stosowany we wcześniejszych pracach, np. R. MISESA [422]. Przedłuża on zakres liniowo-sprężysty aż do granicy plastyczności (zamiast proporcjonalności), pomija różnicę między górną i dolną granicą plastyczności, pomija wzmocnienie plastyczne, lecz za to obowiązywać ma aż do odkształceń nieskończenie wielkich, składa się przy obciążaniu z odcinka $\sigma = E\varepsilon$ (zakres idealnie sprężysty, proces plastycznie bierny) i półprostej $\sigma = \sigma_0$ (zakres idealnie plastyczny, proces czynny). Przez σ_0 oznaczono tu *granice plastyczności* przy jednoosiowym rozciąganiu, a więc naprężenie, przy którym $d\sigma/d\varepsilon = 0$. Spośród dziesiątków różnych oznaczeń tej wielkości (np. σ_{pl} , σ_y , σ_T , σ_F , σ_s , Q , R_{pl} , k , K , Y) wybraliśmy oznaczenie o charakterze międzynarodowym, często spotykane w literaturze. Na rysunku 25 pokazano również



Rys. 25. Wykres rozciągania materiału idealnie sprężysto-plastycznego



Rys. 26. Wykres rozciągania materiału idealnie sztywno-plastycznego

odpowiednią schematyzację procesu plastycznie biernego i procesu czynnego przeciwnego ($\sigma = -\sigma_0$); przy opisie procesu biernego pomija się niewielką pętlę histerezy, która w rzeczywistości występuje. Wyidealizowane ciało, które podlega ściśle wykresowi Prandtla, nazywamy *ciałem idealnie sprężysto-plastycznym*. Model takiego ciała, aproksymujący dość dobrze zachowanie się np. stali niskowęglowej, stanowi podstawę obszernej gałęzi teorii plastyczności.

W przypadku znacznych odkształceń plastycznych, wielokrotnie większych od σ_0/E , uzasadnione jest pomijanie odkształceń sprężystych względem plastycznych, co odpowiada przejściu granicznemu $E \rightarrow \infty$. Ciało idealnie sprężysto-plastyczne przechodzi wtedy w *ciało idealnie sztywno-plastyczne* (rys. 26); wykres tego ciała przy obciążaniu składa się z prostej $\varepsilon = 0$ (zakres idealnie sztywny, proces plastycznie bierny) i prostej $\sigma = \sigma_0$ (zakres idealnie plastyczny, czynny). Model ciała idealnie sztywno-plastycznego jest w zasadzie prostszy od idealnie sprężysto-plastycznego, jednak przy posługiwaniu się nim można natrafić na pewne wątpliwości, dające się usunąć dopiero przez przejście graniczne od modelu idealnie sprężysto-plastycznego.

Oba omówione modele ciał stanowią podstawę teorii idealnej plastyczności.

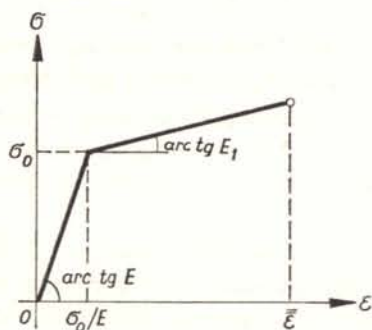
9.3. Schematyzacje wzmocnienia plastycznego. W przypadku dokładniejszej aproksymacji wykresu rozciągania, uwzględniającej wzmocnienie plastyczne, należy najpierw określić, którą z krzywych przedstawionych na rys. 24b chcemy aproksymować. Odpowiedź na to pytanie musi zależeć od dalszego wykorzystania uzyskanego równania. Przy niezbyt wielkich odkształceniach różnice między tymi krzywymi można pominąć. Przy większych odkształceniach (jeżeli w rozważaniach przyjmujemy zasadę zeszywnienia, nie uwzględniając zmiany przekrojów elementu) należy posługiwać się krzywą $P/F_0 = f(\varepsilon)$ — oczywiście wtedy próba przeniesienia wyników na przypadek jednoosiowego ściskania jest skazana na niepowodzenie, a na inne stany naprężenia też budzi wątpliwości. Dokładniejsze ujęcie, odrzucające zasadę zeszywnienia, musi konsekwentnie posługiwać się wykresem $\sigma = f(\varepsilon)$ i uwzględniać zmianę wielkości przekroju. W przybliżeniu przy założeniu nieściśliwości materiału i jednorodności stanu odkształcenia (przed utworzeniem się szyjki na próbce rozciąganej) naprężenie rzeczywiste można określić wzorem

$$(9.2) \quad \sigma \cong \frac{P}{F_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \cong \frac{P}{F_0} (1 + \varepsilon),$$

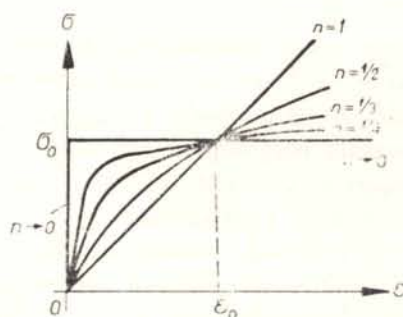
gdzie ε jest odkształceniem w mierze Cauchy'ego. Korzystanie przy tym z logarytmicznej miary odkształcenia powinno być związane z posługiwaniem się tą samą miarą w obliczeniach.

Istnieją dziesiątki różnorodnych propozycji równań aproksymacyjnych krzywej $\sigma = f(\varepsilon)$, uwzględniających plastyczne wzmocnienie materiału. Omówimy krótko tylko kilka najważniejszych. Wzmocnienie plastyczne stali opisuje się często funkcją liniową (rys. 27):

$$(9.3) \quad \sigma = A + E_1 \varepsilon, \quad \frac{\sigma_0}{E} \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}.$$



Rys. 27. Wykres rozciągania materiału o liniowym wzmocnieniu plastycznym



Rys. 28. Wykres rozciągania materiałów o potęgowym wzmocnieniu plastycznym

Materiał, podlegający prawu (9.3), nazywamy ciałem o liniowym wzmocnieniu plastycznym. Stałą E_1 nazywamy modulem wzmocnienia; w praktyce zawarta jest ona z reguły w przedziale $0 \leq E_1 \leq E/10$. Prosta (9.3) musimy ograniczyć pewną wartością odkształ-

cenia $\bar{\varepsilon}$, gdyż w przeciwnym razie niezgodnie z rzeczywistością wytrzymałość materiału byłaby nieograniczenie wielka. Z warunku ciągłości wykresu obliczamy stałą A :

$$(9.4) \quad A = \left(1 - \frac{E_1}{E}\right) \sigma_0.$$

W zapisie Iliuszina (9.1) mamy wtedy

$$(9.5) \quad \omega(\varepsilon) = \lambda \left(1 - \frac{\sigma_0}{E\varepsilon}\right)$$

gdzie stała λ wynosi

$$(9.6) \quad \lambda = \frac{E - E_1}{E}.$$

W przypadku granicznym $E_1 = 0$ otrzymujemy równanie dla ciała idealnie sprężysto-plastycznego. W przypadku granicznym $E \rightarrow \infty$ mówimy o *ciele sztywno-plastycznym ze wzmocnieniem liniowym*.

Dokładniejszą aproksymację możemy otrzymać przez zastosowanie kilku równań typu (9.3), ważnych w poszczególnych przedziałach zmienności ε . Mówimy wtedy o *odcinkowo-liniowym* albo o *wielokrotnym liniowym wzmocnieniu plastycznym*. Trudności w korzystaniu z takiej schematyzacji związane są z reguły z koniecznością podziału ciała na wiele podobszarów, odpowiadających poszczególnym zakresom zmienności ε i koniecznością stosowania warunków ciągłości na granicach tych podobszarów.

Wady powyższej nie posiada schemat ciała o potęgowym wzmocnieniu plastycznym

$$(9.7) \quad \sigma = k\varepsilon^n, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon},$$

gdzie k oznacza pewną stałą o wymiarze naprężenia, n -wykładnik zwany wskaźnikiem wzmocnienia plastycznego materiału. Równanie (9.7) o prostej budowie (jednomian) ma opisywać cały zakres zmienności ε . Aby otrzymywać krzywe zwrócone wypukłością ku górze, należy dobierać n z przedziału $0 < n < 1$. W przypadku granicznym $n \rightarrow 1$, $k = E$, otrzymujemy prawo Hooke'a (materiał idealnie sprężysty). W drugim przypadku granicznym $n \rightarrow 0$, otrzymujemy opis ciała idealnie sztywno-plastycznego; istotnie, pisząc równanie (9.7) w postaci

$$(9.8) \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n$$

stwierdzamy, że przy $n \rightarrow 0$ jest ono spełnione dla dowolnego $\sigma \leq \sigma_0$ przy $\varepsilon = 0$ i dla dowolnego ε przy $\sigma = \sigma_0$, rys. 28. Poważną wadą równań (9.7) i (9.8) jest nieograniczony wzrost pochodnej $d\sigma/d\varepsilon$ w punkcie $\varepsilon = 0$ (pionowa styczna); takiej własności nie wykazuje żaden realny materiał i ogranicza to stosowalność tych równań do zakresu niezbyt małych odkształceń. W tym zakresie omawiane równania dość dobrze opisują zachowanie się stopów aluminium i metali kolorowych.

Najprostszy dwoma uogólnieniami równania potęgowego wzmocnienia plastycznego są; równania P. LUDWIKA [365]

$$(9.9) \quad \sigma = \sigma_0 + k\varepsilon^n,$$

odnoszące się również jedynie do materiałów sztywno-plastycznych, oraz równanie W. RAMBERGA i W. OSGOODA [575]

$$(9.10) \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k}\right)^m,$$

uwzględniające odkształcenia sprężyste; przy $m = 1/n$, $E \rightarrow \infty$, równanie (9.10) przechodzi w (9.7).

9.4. Schematyzacje specjalne. Przytoczone powyżej równania schematyzujące wykres rozciągania pretendują do pewnej ogólności, z drugiej zaś strony starają się opisać funkcję $\sigma = f(\varepsilon)$ w sposób możliwie prosty. Nie zawsze jednak prostota funkcji $\sigma = f(\varepsilon)$ prowadzi do prostych rozwiązań problemów złożonych. Wtedy dogodniej jest dobierać pewną specjalną, pozornie bardziej skomplikowaną schematyzację, prowadzącą do wyników prostych tylko dla pewnej określonej klasy problemów, o ile oczywiście możemy zapewnić dostateczną zgodność funkcji aproksymującej i funkcji określonej na drodze doświadczalnej pod względem jakościowym i ilościowym.

Jak już wspomnieliśmy, przy analizie stateczności w zakresie sprężysto-plastycznym (którą zresztą w obecnej pracy w zasadzie nie będziemy się zajmowali), szczególnie ważna jest znajomość funkcji $E_t = f(\sigma)$, przede wszystkim w zakresie niewielkich odstępstw od prawa Hooke'a, poniżej granicy plastyczności. Niewielki błąd przy aproksymacji funkcji $\sigma = f(\varepsilon)$ może przy tym rzutować na znaczną różnicę modułów stycznych E_t , a co za tym idzie na znaczny błąd przy określaniu obciążeń krytycznych.

A. YLINEN [751] zaproponował aproksymację zależności $E_t = f(\sigma)$ funkcją

$$(9.11) \quad E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \frac{\sigma_0 - c|\sigma|}{\sigma_0 - c|\sigma|},$$

gdzie bezwymiarowy współczynnik c oznacza stałą materiałową. Po scałkowaniu (9.11) jako równania różniczkowego względem funkcji $\sigma = f(\varepsilon)$ otrzymujemy

$$(9.12) \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \left[c\sigma - (1-c)\sigma_0 \ln \left(1 - \frac{|\sigma|}{\sigma_0} \right) \text{sign } \sigma \right].$$

Jest to właśnie proponowana schematyzacja wykresu rozciągania. Równanie to — trójparametrowe, podobnie jak np. (9.9) i (9.10) — ma postać bardziej skomplikowaną od tamtych, ale wobec prostej postaci związku $E_t = f(\sigma)$ prowadzi do prostszych wyników przy analizie stateczności.

Przy określaniu optymalnych kształtów prętów cienkościennych, narażonych na wyboczenie sprężysto-plastyczne, W. KRZYŻ [330, 331] wprowadził pozornie jeszcze bardziej złożoną, również trójparametrową schematyzację

$$(9.13) \quad E_t = E \left[\frac{(\sigma_0 - |\sigma|)\sigma^2}{(\sigma_0 - S)S^2} \right]^{2/3}, \quad S \leq |\sigma| \leq \sigma_0,$$

gdzie S oznacza granicę sprężystości materiału. Określenie kształtu optymalnego właśnie przy tej schematyzacji okazało się najprostsze, a możliwa do uzyskania dokładność aproksymacji wykresu rozciągania funkcją (9.13) jest tego samego rzędu, co przy innych funkcjach trójparametrowych.

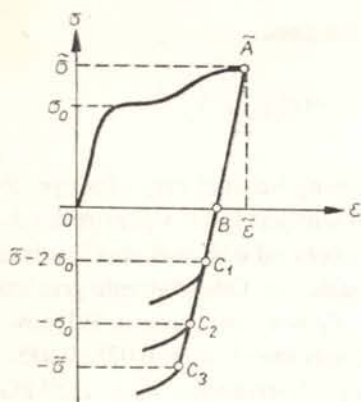
9.5. Efekt Bauschingera. Omówione w p. 9.3 i 9.4 schematyzacje wzmocnienia plastycznego odnosiły się do przypadku obciążania, mianowicie wzrostu bądź odkształceń, bądź naprężeń jako czynnika niezależnego (w tym ostatnim przypadku zjawiska występowania górnej i dolnej granicy plastyczności nie można zaobserwować). Osobnym problemem jest zachowanie się materiału przy odciażaniu i obciążeniach przeciwwrotnych i jego schematyzacja. Jakkolwiek obciążanie przeciwwrotne w zastosowaniach nie jest zbyt częste, to jednak przebieg procesu przy takim typie obciążania rzutuje w znacznym stopniu na sformułowanie ogólnych równań teorii plastyczności dla danego materiału.

Ograniczymy się do rozważania materiałów, które w stanie naturalnym wykazują jednakową granicę plastyczności σ_0 po stronie rozciągania i ściskania. Przy odciażaniu występuje najpierw proces bierny, który z dostateczną zazwyczaj dokładnością można opisać równaniem liniowym

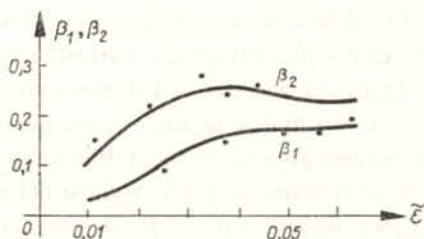
$$(9.14) \quad \bar{\sigma} - \sigma = E(\bar{\epsilon} - \epsilon),$$

gdzie przez $\bar{\epsilon}$ i $\bar{\sigma}$ oznaczono współrzędne punktu \bar{A} , od którego rozpoczyna się odciażanie (rys. 29). W przypadku traktowania materiału jako sztywno-plastycznego ($E \rightarrow \infty$) zamiast (9.14) należałoby napisać $\epsilon = \bar{\epsilon} = \text{const}$ (prosta pionowa). Przyjmijmy dalej, że za czynnik wyężenia możemy w rozpatrywanym przypadku uważać naprężenie σ . W takim razie po przekroczeniu punktu B mamy do czynienia znowu z procesem obciążania (przeciwwrotnego). Jest to początkowo proces bierny i podlegający nadal równaniu (9.14). J. BAUSCHINGER [19, 20] zauważył, że początek procesu czynnego, scharakteryzowany punktem C na wykresie, następuje przy obciążaniu przeciwwrotnym wcześniej niż przy ponownym obciążaniu w pierwotnym kierunku (byłby to punkt \bar{A}). Zjawisko to nazywamy *efektem Bauschingera*. O idealnym efekcie Bauschingera mówimy wtedy, gdy współrzędna σ punktu C , którą oznaczmy przez $\bar{\sigma}_-$ wynosi (punkt C_1)

$$(9.15) \quad \bar{\sigma}_- = \bar{\sigma} - 2\sigma_0;$$



Rys. 29. Efekt Bauschingera przy jednoosiowym rozciąganiu-ściskaniu



Rys. 30. Zależność efektu Bauschingera od odkształcenia pod obciążeniem

taka wartość oznaczałaby, że wzrost granicy plastyczności po stronie rozciągania został w całości zrekomensowany zmniejszeniem się jej po stronie ściskania (punkt C_1). Z punktu widzenia fizycznego można wtedy właściwie mówić o braku wzmocnienia plastycznego,

a jedynie o występowaniu niejednorodności (mikroniejednorodności) materiału i związanych z nimi niejednorodności stanu naprężenia; w punkcie B występują wtedy tzw. *mikronaprężenia resztkowe* (JU. I. KADASZEWICZ i W. W. NOWOŻILOW [966]). Gdyby proces czynny rozpoczął się w punkcie C_3 , czyli $\tilde{\sigma}_- = -\tilde{\sigma}$, mówilibyśmy o braku efektu Bauschingera. Pewien przypadek pośredni $\tilde{\sigma}_- = -\sigma_0$, który można by nazwać przypadkiem stabilizacji granicy plastyczności, został zaznaczony na rys. 20 punktem C_2 .

Określenie punktu C na drodze doświadczalnej nie jest możliwe: praktycznie znajdujemy jedynie punkt zastępczy C^* , w którym odkształcenia plastyczne zmieniły się o pewną umowną wartość. W. SZCZEPIŃSKI [687] zwraca uwagę na fakt, że ocena efektu Bauschingera bardzo istotnie zależy od przyjęcia tej wartości: efekt jest tym wyraźniejszy, im mniejsza jest umowna wartość zmiany odkształcenia plastycznego w punkcie C^* .

Pierwszą próbę teoretycznego wyjaśnienia efektu Bauschingera podjął G. MASING [393], który zakładał, że poszczególne ziarna w ciele polikrystalicznym wykazują anizotropię i przy różnorodnej orientacji pojawia się zjawisko mikroniejednorodności. Takie ujęcie objaśnia idealny efekt Bauschingera. Dalsze prace doświadczalne należą do G. SACHSA i H. SHOJI [595]; próbę teoretycznego ujęcia wniosków podaje praca H. SHOJI [648]. Obszerny przegląd danych doświadczalnych i koncepcji teoretycznych można znaleźć w monografii W. W. MOSKWITINA [1087].

Wiele prac poświęcił badaniu efektu Bauschingera G. B. TAŁYPOW (prace [1203, 1204, 1205]); zostały one podsumowane w opracowaniu zbiorczym [1207]). Efekt ten określa on stosunkiem $|\tilde{\sigma}_-|/|\tilde{\sigma}|$. Takie ujęcie jest niedogodne o tyle, że gdy stosunek ten maleje, to — zgodnie z definicją — efekt Bauschingera rośnie, natomiast Tałypow używa wtedy zwrotu «efekt Bauschingera maleje». Dogodniej byłoby wprowadzić stosunek

$$(9.16) \quad \beta_1 = 1 + \frac{\tilde{\sigma}_-}{\tilde{\sigma}} = 1 - \frac{|\tilde{\sigma}_-|}{|\tilde{\sigma}|}, \quad 0 \leq \beta_1 \leq 2 \left(1 - \frac{\sigma_0}{\tilde{\sigma}}\right),$$

równy zeru przy braku efektu Bauschingera, albo stosunek

$$(9.17) \quad \beta_2 = \frac{\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}_-}{2(\tilde{\sigma} - \sigma_0)} = \frac{\tilde{\sigma} - |\tilde{\sigma}_-|}{2(\tilde{\sigma} - \sigma_0)}, \quad 0 \leq \beta_2 \leq 1,$$

równy także zeru przy braku efektu Bauschingera, a równy jedności przy idealnym efekcie. Dogodny zapis przy użyciu wartości bezwzględnych słuszny jest tylko w przypadku $\tilde{\sigma}_- \leq 0$.

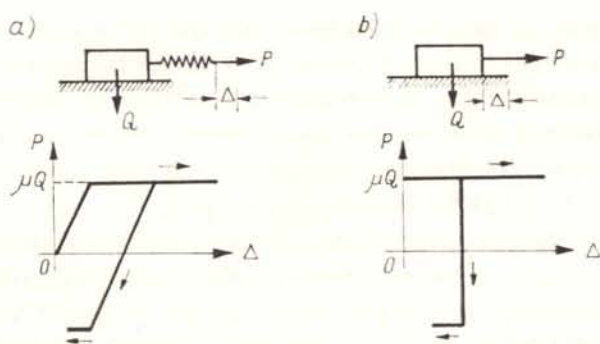
Zgodnie z badaniami Tałypowa stosunek $|\tilde{\sigma}_-|/|\tilde{\sigma}|$ zależy od odkształcenia $\tilde{\epsilon}$, mianowicie początkowo maleje (a więc β_1 rośnie), a następnie ustala się. Odkształcenie graniczne $\tilde{\epsilon}_\beta$, od którego począwszy efekt Bauschingera jest stały, $\beta_1 = \text{const}$, nazywa Tałypow «*progiem nasycenia*»; próg ten wynosi dla różnych badanych metali $\epsilon_\beta = 0,025-0,035$. Przykładowy wykres $\beta_1(\epsilon)$ i $\beta_2(\epsilon)$ dla stali 20 o granicy plastyczności $\sigma_0 = 2150 \text{ kG/cm}^2$, sporządzony według danych G. B. TAŁYPOWA [1207], podaje rys. 30. Wartości funkcji $\beta_2(\epsilon)$ wskazują, że dla rozpatrywanego materiału efekt Bauschingera jest rzędu jednej czwartej idealnego. Efekt Bauschingera przy czystym ścinaniu badano w pracy [1202]. Badania Tałypowa dotyczące obciążeń złożonych omówimy oddzielnie.

Wypada wspomnieć, że sam termin «efekt Bauschingera» może prowadzić do pewnych nieporozumień. Niektórzy autorzy, np. P. M. NAGHDI [456] i A. C. ERINGEN [128]

określają tym terminem różnicę między granicami plastyczności (początkowymi) przy jednoosiowym rozciąganiu i jednoosiowym ściskaniu, a więc pojęcie całkowicie odmienne od ogólnie przyjętego. Zazwyczaj bada się efekt Bauschingera (w sensie ogólnie przyjętym) jedynie dla tych materiałów, które w ogóle nie wykazują efektu Bauschingera w sensie Naghdiego-Eringena.

9.6. Modele ciał plastycznych. Dogodną ilustracją własności podstawowych ośrodków reologicznych są modele mechaniczne, w których naprężenie modelowane jest przyłożoną siłą P , a odkształcenie — przemieszczeniem punktu przyłożenia tej siły Δ . Analizie modeli reologicznych poświęcona jest monografia W. DERSKIEGO i S. ZIEMBY [90]. Podobnymi modelami można również zilustrować własności ciał plastycznych; zezwalają one na prostą dyskusję niektórych zjawisk, trudnych do oceny w materiałach rzeczywistych. Tym niemniej należy pamiętać, że dyskutuje się tylko wyidealizowane i uproszczone modele, które nie mogą w zupełności odpowiadać zachowaniu się ciał rzeczywistych.

Idealną plastyczność modeluje się z reguły tarcie suche typu Coulomba o współczynniku tarcia niezależnym od prędkości. Pierwsze propozycje modeli tego typu pochodzą z lat dwudziestych obecnego stulecia (C. F. JENKIN [293], wielokrotne wzmocnienia liniowe, S. LEES [341], model z mechanizmem mimośrodowym). Pewne ograniczenia związane z takim podejściem omawia D. C. DRUCKER [97, 103], jednakże zasadnicze podobieństwo zjawiska rozpraszania energii podczas odkształceń ciała idealnie plastycznego i podczas ruchu ciała ciężkiego po poziomej płaszczyźnie przy występowaniu tarcia typu Coulomba jest niewątpliwe. I tak własności ciał idealnie sprężysto-plastycznych i idealnie sztywno-plastycznych można zilustrować modelami przedstawionymi na rys. 31. Modele te poprawnie ilustrują również przypadek odciażania i obciążania przeciwnego (oczywiście przy wykluczeniu utraty stateczności sprężyny modelującej własności sprężyste materiału).

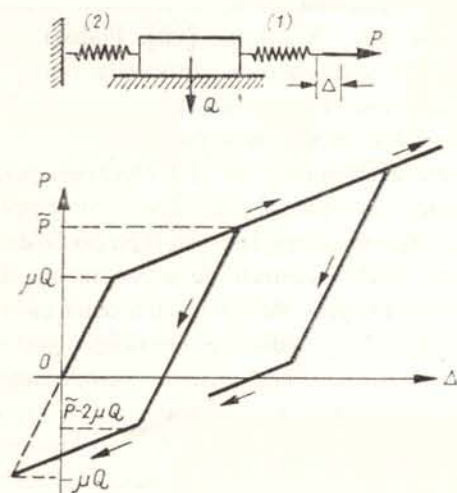


Rys. 31. Modele ciał idealnie plastycznych: a) idealnie sprężysto-plastyczne, b) idealnie sztywno-plastyczne

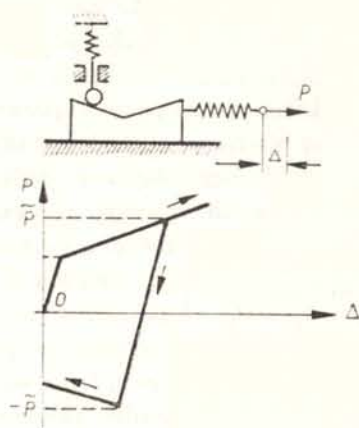
Istnieją różne możliwości modelowania wzmocnienia plastycznego, różniące się przede wszystkim stopniem uwzględnienia efektu Bauschingera. Liniowe wzmocnienie plastyczne przy idealnym efekcie Bauschingera modeluje układ przedstawiony na rys. 32. Resztkowe mikronaprężenia modeluje tu siła wewnętrzna w sprężynie 2. Warto zauważyć, że przy

siłę \tilde{P} większej od $2\mu Q$ występuje proces czynny przeciwwrotny już przy dodatnich siłach P (rozciąganiu); przez \tilde{P} oznaczyliśmy tu siłę, od której począwszy rozpoczyna się proces odciążania. Dwuwymiarowy model tego typu opisują JU. I. KADASZEWICZ i W. W. NOWOŻIŁOW [966].

Przejdźmy do przypadku przeciwnego, mianowicie braku efektu Bauschingera. Brak tego efektu jest charakterystyczny dla ciał wykazujących izotropowe wzmocnienie plastyczne, przy czym samo pojęcie wzmocnienia izotropowego zdefiniujemy dopiero przy



Rys. 32. Model wzmocnienia liniowego przy idealnym efekcie Bauschingera



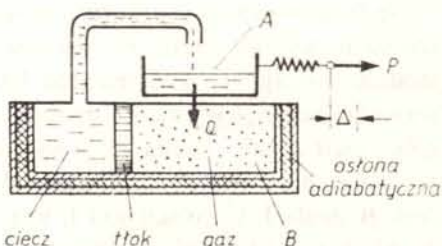
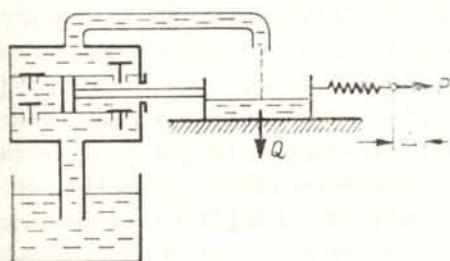
Rys. 33. Model wzmocnienia liniowego izotropowego

omawianiu przestrzennych stanów naprężenia. Na rys. 33 przedstawiono model omówiony w monografii W. DERSKIEGO i S. ZIEMBY [90]. Model ten opisuje poprawnie proces obciążania i nie wykazuje efektu Bauschingera przy obciążaniu przeciwwrotnym (o ile abstrahujemy od działania składowej poziomej nacisku rolki na równię pochyłą), jednak przy procesie czynnym przeciwwrotnym występuje zjawisko mięknięcia plastycznego, raczej niespotykane w przypadku materiałów rzeczywistych.

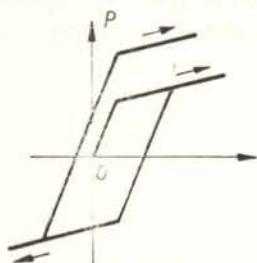
Zaproponujemy tu dwa inne modele izotropowego wzmocnienia plastycznego. Pierwszy z nich, opisujący wzmocnienie odkształceniowe (zależne od zmiany odkształceń plastycznych, ang. strain-hardening), przedstawiony jest na rys. 34. Ciężar Q , przesuwający się z tarcieniem po szorstkiej płaszczyźnie, jest tu zbiornikiem na ciecz; jest on połączony sztywno z pompą ssąco-tłoczącą, która przy każdym ruchu zbiornika (modelującym odkształcenie plastyczne) dostarcza dodatkową ciecz zwiększając w ten sposób opory ruchu, a więc i siłę P . Zwiększanie to następuje niezależnie od kierunku ruchu zbiornika.

Drugi model, przedstawiony na rys. 35, opisuje wzmocnienie plastyczne zależne od pracy odkształcenia plastycznego, czyli energii zamienionej na energię cieplną (ang. work-hardening). Pod zbiornikiem A z cieczą o ciężarze Q znajduje się zbiornik B z gazem w osłonie adiabatycznej; wzrost temperatury gazu wskutek tarcia obu zbiorników o siebie

(dopływ ciepła jest proporcjonalny do pracy odkształcenia plastycznego) powoduje ruch tłoka w lewo i dostarczenie dodatkowej cieczy do zbiornika *A*. Także i tu dostarczenie dodatkowej cieczy, a więc i wzmocnienie plastyczne, nie zależy od kierunku ruchu zbiornika *A*. Wykres zależności $P-\Delta$ jest podobny do wykresu na rys. 34 (różnice między obu typami wzmocnienia plastycznego występują raczej dopiero przy obciążeniach złożonych) z tym, że liniowość lub nieliniowość wykresu jest tu zależna od praw fizycznych, którym podlega gaz, i ewentualnego uwzględnienia kilku czynników ubocznych.



Rys. 35. Model wzmocnienia liniowego izotropowego, zależnego od pracy odkształcenia plastycznego



Rys. 34. Model wzmocnienia liniowego izotropowego, zależnego od odkształcenia

Oczywiście nie przedstawia trudności podanie modelu, opisującego wzmocnienie plastyczne, będące kombinacją idealnego efektu Bauschingera i wzmocnienia izotropowego — wystarczy do modeli pokazanych na rys. 34 lub 35 dołączyć po lewej stronie ruchomego zbiornika dodatkową sprężynę, opartą o stałą przegrodę jak na rys. 32.

Wzmocnienie plastyczne można również modelować pewnymi prostymi konstrukcjami wykonanymi z materiału idealnie plastycznego. Model tego typu (wewnętrznie statycznie niewyznaczalny układ rozciągania-ściskania, w którym bada się zależność między siłą a przemieszczeniem) omawia szczegółowo K. A. RECKLING [576]. Ogólną dyskusję modeli tego typu zawiera praca H. F. BOHNENBLUSTA i P. DUWEZA [37].

Omówione tu jednowymiarowe modele ciał plastycznych, jakkolwiek rzucające tylko pewne światło na jakościową (fenomenologiczną) stronę zjawisk związanych z plastycznym wzmocnieniem materiału, mogą być przydatne przy dyskusji podstawowych pojęć i praw teorii plastyczności. Modele wielowymiarowe, mające ilustrować zachowanie się materiału przy obciążeniach złożonych, zostaną omówione oddzielnie (p. 18.3).

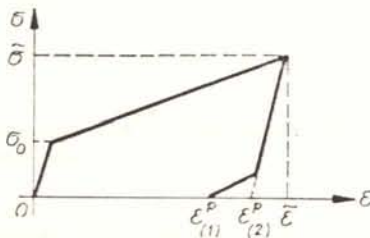
9.7. Odkształcenie plastyczne. Praca odkształcenia plastycznego. Wielokrotnie posługiwaliśmy się już pojęciem odkształcenia plastycznego nie definiując dotychczas bliżej tego pojęcia. W teorii plastyczności przyjmuje się, że całkowite odkształcenie (chwilowo

mówimy tylko o przypadku jednoosiowego rozciągania) można przedstawić jako sumę odkształcenia sprężystego, ε^e , które zanika po zdjęciu obciążenia, i odkształcenia plastycznego, trwałego, ε^p . Rozkład ten określa się wzorem

$$(9.18) \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad \varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e = \varepsilon - \frac{\sigma}{E},$$

gdzie E jest modułem Younga materiału nieodkształconego.

Jednakże wypada zauważyć, że wzór (9.18) nie zawsze odpowiada powyżej zamieszczoneму sformułowaniu. Po pierwsze, moduł odciążania może się różnić od pierwotnego modułu Younga E . Problem ten badał doświadczalnie A. M. ŻUKOW [915, 916, 917], stwierdzając zmniejszenie się modułu Younga wskutek odkształcenia plastycznego; szczególnie duże różnice (rzędu 20%) występowały jednak przy znacznym obrocie osi głównych, natomiast przy ustalonych kierunkach głównych obserwowano obniżkę rzędu kilku procent. Badania J. LITOŃSKIEGO i J. KLEPACZKI nad mosiądzem i stalą [358] wskazują raczej na niezbyt wielką zmianę modułu Younga po wyeliminowaniu efektów reologicznych. Druga różnica między sformułowaniem a wzorem (9.18) związana jest z występowaniem silnego efektu Bauschingera. Na rysunku 36 przytoczono wykres $\sigma - \varepsilon$ odpowiadający



Rys. 36. Dwie możliwe definicje odkształcenia plastycznego

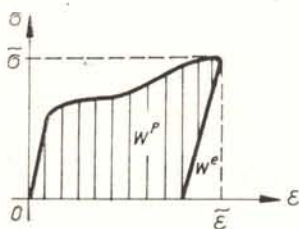
omówionemu w p. 9.6 modelowi idealnego efektu Bauschingera. Odkształcenie trwałe, odpowiadające danemu odkształceniu całkowitemu $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$, jest określone współrzędną $\varepsilon_{(1)}^p$, natomiast wzór (9.18) określa współrzędną $\varepsilon_{(2)}^p$. W takiej sytuacji jako definicję odkształcenia plastycznego ε^p przyjmujemy wzór (9.18), a więc wielkość $\varepsilon_{(2)}^p$; gdyby przyjąć $\varepsilon_{(1)}^p$, to w ogóle trudno byłoby mówić o rozkładzie odkształcenia na część sprężystą i część plastyczną. Inna sprawa, że opisywana różnica między definicjami odkształcenia plastycznego wystąpi w przypadku materiałów rzeczywistych niezmiernie rzadko, tak że z punktu widzenia praktycznego można obie definicje utożsamiać.

Przejdziemy do określenia pracy zużytej na odkształcenie plastyczne W^p i energii rozproszonej czyli dysypowanej w procesie odkształcenia W^d (w czynnej części tego procesu). Zazwyczaj utożsamia się te dwie wielkości; podejście takie można uważać za uzasadnione w przypadku izotropowego wzmocnienia plastycznego, natomiast nie jest poprawne w przypadku występowania efektu Bauschingera, gdy pozostaje w ciele energia mikronaprężeń reszkowych, W^0 (rodzaje wzmocnienia plastycznego zostaną omówione bardziej szczegółowo w p. 18).

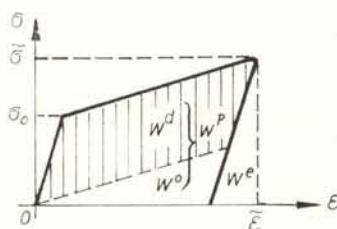
Pracę W^p , zużyłą na odkształcenie plastyczne jednostki objętości materiału, określa się

powierzchnią pod wykresem rozciągania, z uwzględnieniem energii zwróconej przy odciążeniu W^e , rys. 37:

$$(9.19) \quad W^p = \int_0^{\tilde{\varepsilon}} \sigma d\varepsilon^p = \int_0^{\tilde{\varepsilon}} \sigma \left(d\varepsilon - \frac{d\sigma}{E} \right) = \int_0^{\tilde{\varepsilon}} \sigma d\varepsilon - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2E}.$$



Rys. 37. Praca odkształcenia plastycznego i energia zwracana



Rys. 38. Praca odkształcenia plastycznego przy idealnym efekcie Bauschingera

W przypadku wzmocnienia izotropowego można przyjąć $W^d = W^p$. Weźmy jednak pod uwagę model idealnego efektu Bauschingera, przedstawiony na rys. 32; w tym przypadku energia rozproszona jest mniejsza, mianowicie dla modelu $dW^d = \mu Q d\Delta$, zatem dla modelowanego ciała rzeczywistego

$$(9.20) \quad W^d = \int_0^{\tilde{\varepsilon}} \sigma_0 d\varepsilon^p = \sigma_0 \tilde{\varepsilon} - \frac{\sigma_0 \tilde{\sigma}}{E}.$$

Odpowiednia powierzchnia, zakreskowana na rys. 38, jest znacznie mniejsza od określonej wzorem (9.19). Wypada jednak zaznaczyć, że z biegiem czasu efekt Bauschingera maleje (wpływ «starzenia» materiału), zatem maleje również energia magazynowana W^0 , ulegając stopniowemu rozproszeniu. Określanie energii W^0 poświęcona jest praca T. H. LINA i M. ITO [356].

W ogólnym przypadku, gdy występuje efekt Bauschingera lecz zazwyczaj mniejszy od efektu idealnego, energię rozproszoną można by określić wzorem

$$(9.21) \quad W^d = \int_0^{\tilde{\varepsilon}} \sigma^p d\varepsilon^p,$$

gdzie σ^p , zawarte w przedziale $\sigma_0 \leq \sigma^p \leq \sigma$ określa tę część naprężenia, która «pracuje» na odkształceniach plastycznych, a zależną od wykazywanego przez dany materiał efektu Bauschingera. Wzór tego typu wyprowadza na drodze rozważań termodynamicznych Z. MRÓZ [437].

Podamy metodę przybliżonej oceny naprężenia σ^p dla danego materiału przy znajomości efektu Bauschingera, scharakteryzowanego funkcją $\beta_1(\varepsilon)$ lub $\beta_2(\varepsilon)$, (9.16) lub (9.17). W obu rozważanych powyżej przypadkach skrajnych, braku efektu Bauschingera z jednej,

a idealnego efektu Bauschingera z drugiej strony, naprężenie σ^p może być określone wzorem

$$(9.22) \quad \sigma^p = \frac{\tilde{\sigma} + |\tilde{\sigma}_-|}{2} = \frac{\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_-}{2},$$

gdzie wężykami określono wielkości tak jak w p. 9.5. Przyjmując, że wzór (9.22) będzie słuszny i w przypadkach pośrednich, możemy $\tilde{\sigma}_-$ wyrugować za pomocą parametru β_1 lub β_2 ,

$$(9.23) \quad \tilde{\sigma}_- = -(1 - \beta_1) \tilde{\sigma} = 2\beta_2(\tilde{\sigma} - \sigma_0) - \tilde{\sigma},$$

a po podstawieniu do (9.19) i pominięciu niepotrzebnego już wężyka

$$(9.24) \quad \sigma^p = \left(1 - \frac{\beta_1}{2}\right) \sigma = \sigma - \beta_2(\sigma - \sigma_0).$$

W przypadkach granicznych otrzymujemy $\sigma^p = \sigma$ lub $\sigma^p = \sigma_0$, co sprowadza wzór ogólny (9.21) do (9.19) lub (9.20).

W przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego $\sigma = \sigma_0$, efekt Bauschingera nie występuje i wzory (9.19), (9.20) i (9.21) prowadzą do wyników identycznych.

10. Klasyczne teorie idealnej plastyczności

10.1. Zakres sprężysty. Prawo Hooke'a. W zakresie liniowo sprężystym (lub krócej: sprężystym), którego granice omówimy bardziej szczegółowo w p. 10.2 i w rozdziale III, naprężenia i odkształcenia związane są prawem Hooke'a. Ogólny zapis tego prawa dla ciała anizotropowego

$$(10.1) \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

gdzie E_{ijkl} oznaczają składowe tensora (czwartego rzędu) modułów sprężystości oraz zastosowano konwencję sumacyjną, ulega znacznemu uproszczeniu w przypadku ciała izotropowego. Składowe E_{ijkl} można mianowicie za pomocą symbolu Kroneckera wyrazić wtedy w postaci

$$(10.2) \quad E_{ijkl} = \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] G,$$

gdzie

$$(10.3) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

oznacza moduł Kirchhoffa, ν — współczynnik Poissona. Po podstawieniu do (10.1) i wykonaniu niektórych sumowań

$$(10.4) \quad \sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right).$$

Przyjęcie $i = j$, czyli zwężenie tensorów, prowadzi do związku

$$(10.5) \quad \sigma_{ii} = 2G \left(\varepsilon_{ii} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \right) = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_{ii}.$$

Równanie (10.5) wiąże jedyną niezależną składową aksjatora A_σ z odpowiednią składową aksjatora A_ε , możemy więc napisać

$$(10.6) \quad A_\sigma = \frac{E}{1-2\nu} A_\varepsilon = 3KA_\varepsilon,$$

gdzie stałą K , określoną wzorem

$$(10.7) \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

nazywamy modułem ściśliwości. Ponieważ aksjator odkształcenia określa zmianę objętości ciała (przy odkształceniach nieskończenie małych), więc prawo (10.6) nazywamy *prawem zmiany objętości*. Jest to jedno niezależne równanie algebraiczne, które w zapisie inżynierskim przybiera postać

$$(10.8) \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Moduł K został zdefiniowany tak, aby przy wszechstronnym ściskaniu ciśnieniem p dyatacja θ (8.33) była określona wzorem

$$(10.9) \quad \theta = -\frac{p}{K}.$$

Obliczając ε_{kk} z (10.5) i podstawiając do (10.4) odwracamy ten układ równań względem ε_{IJ} :

$$(10.10) \quad \varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2G} \sigma_{IJ} - \frac{\nu}{E} \delta_{IJ} \sigma_{kk}$$

czyli w zapisie inżynierskim

$$(10.11) \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

.....,

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}.$$

.....

Odejmując od obu stron równań (10.10) $\varepsilon_m = \varepsilon_{kk}/3$ dochodzimy po uwzględnieniu (10.5) do związku

$$(10.12) \quad \varepsilon_{IJ} - \delta_{IJ} \varepsilon_m = \frac{1}{2G} (\sigma_{IJ} - \delta_{IJ} \sigma_m),$$

czyli

$$(10.13) \quad e_{IJ} = \frac{1}{2G} s_{IJ},$$

$$(10.14) \quad D_\varepsilon = \frac{1}{2G} D_\sigma.$$

Równania (10.12), (10.13) lub (10.14) noszą nazwę *prawa zmiany postaci* (w zakresie sprężystym). W zapisie inżynierskim zamiast związków

$$(10.15) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_m &= \frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma_m), \\ \varepsilon_y - \varepsilon_m &= \frac{1}{2G} (\sigma_y - \sigma_m), \\ \varepsilon_z - \varepsilon_m &= \frac{1}{2G} (\sigma_z - \sigma_m) \end{aligned}$$

stosuje się często związki nie zawierające ε_m i σ_m , mianowicie

$$(10.16) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma_y), \\ \varepsilon_y - \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} (\sigma_y - \sigma_z), \\ \varepsilon_z - \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} (\sigma_z - \sigma_x), \end{aligned}$$

wynikające z poprzednich przez odejmowanie stronami. Spośród związków (10.15) lub (10.16) tylko dwa są niezależne; spośród (10.12) lub (10.14) — pięć.

10.2. Ograniczenie zakresu sprężystego. W przypadku jednoosiowego rozciągania zakres sprężysty ograniczony jest (przy ustalonej temperaturze i innych czynnikach ubocznych) pewną wartością naprężenia, zwaną granicą sprężystości S , lub odpowiednią wartością odkształcenia $\varepsilon_s = S/E$. Ograniczenie należy rozumieć w ten sposób, że np. naprężenie σ w danej chwili i podczas całego poprzedniego procesu było zawarte w przedziale $0 \leq \sigma < S$ (ściskania chwilowo nie rozważamy). Przy schematyzacji wykresu często zakres $S \leq \sigma < \sigma_0$ traktujemy również jako sprężysty, wtedy ograniczenie ma postać $0 \leq \sigma < \sigma_0$.

W ogólnym przypadku przestrzennego stanu naprężenia, możliwości zmian temperatury, napromieniowania, wilgotności itp., zakres sprężysty w odniesieniu do pewnego ustalonego punktu ciała jest ograniczony pewną powierzchnią (hiperpowierzchnią) w przestrzeni czynników wyężenia. Jest to podstawowa powierzchnia graniczna na szczeblu P analizy procesu, zachodzącego w punkcie ciała. Nosi ona nazwę powierzchni plastyczności lub ściślej — początkowej powierzchni plastyczności. Należy ona do rodziny powierzchni, które nazwaliśmy «czynno-biernymi», bowiem rozgranicza te dwa typy procesów. Procesy, które zachodzą w całości wewnątrz tej powierzchni, są procesami plastycznie biernymi, natomiast procesom plastycznie czynnym odpowiadają bądź punkty na powierzchni (w przypadku ciał idealnie plastycznych), bądź skierowanie drogi poza powierzchnię (ciała wykazujące wzmocnienie plastyczne — wtedy początkowa powierzchnia plastyczności określa typ procesu tylko na nieskończenie małym odcinku, wychodzącym na zewnątrz). Początkowa powierzchnia plastyczności może być powierzchnią zamkniętą lub nie, jednak w każdym razie dzieli przestrzeń czynników wyężenia na dwa podobszary;

w tym ostatnim przypadku przez «wnętrze» rozumiemy ten podobszar, który odpowiada procesom sprężystym. Początkowa powierzchnia plastyczności nie zależy od drogi obciążenia, bowiem zachodzące wewnątrz niej procesy są odwracalne.

Określenie początkowej powierzchni plastyczności stanowi przedmiot *fizyki ciała stałego* bądź też — w ujęciu fenomenologicznym — *hipotez wyężenia materiału*. Ograniczymy się do ujęcia fenomenologicznego, prostszego i bardziej efektywnego w zastosowaniach inżynierskich. Wyłaniają się tu dwa typowe podejścia. Pierwsze z nich polega na sformułowaniu hipotezy odnośnie istnienia takiej wielkości skalarnej (niezmiennika tensora naprężenia, odkształcenia lub niezmiennika wspólnego obu tych tensorów), która miałaby być bądź stała na brzegu obszaru odpowiadającego zakresowi sprężystemu, bądź też zależna jedynie od czynników skalarnych, jak np. temperatury, a następnie na sprawdzeniu doświadczalnym takiej hipotezy i ocenie błędów. Taką wielkość skalarną nazwiemy — podobnie jak w pracy [769] — *kryterium wyężenia*. Drugie podejście polega na uprzednim wykonaniu serii doświadczeń, a następnie na matematycznym ich ujęciu na drodze czysto aproksymacyjnej przy zapewnieniu niezmienniczości proponowanych związków.

Pierwszy typ podejścia reprezentuje między innymi hipoteza *energii odkształcenia postaciowego*, sformułowana przez M. T. HUBERA [281], B. T. HAIGHA [196] i H. HENCKY'EGO [210] i sprawdzona doświadczalnie dla dość szerokiej klasy materiałów, zwanych materiałami ciągliwymi. Podobną myśl wyraził już w r. 1856 J. C. MAXWELL w liście do W. THOMSONA — obszerny wyjątek z tego listu przytacza np. F. K. VAN ITERSON [719]. Według tej hipotezy kryterium wyężenia stanowi energia właściwa odkształcenia postaciowego Φ_f , czyli że zakres sprężysty jest ograniczony pewną stałą wartością tej energii. W przypadku ciała izotropowego energia Φ_f jest wyrażona pewnym niezmiennikiem wspólnym tensora naprężenia i tensora odkształcenia, mianowicie

$$(10.17) \quad \Phi_f = \frac{1}{2} D_\sigma D_\epsilon = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij}.$$

Granica zakresu sprężystego jest zatem określona równaniem

$$(10.18) \quad s_{ij} e_{ij} = \text{const} = C,$$

gdzie wartość stałej C można określić z dowolnej próby wytrzymałościowej, np. próby jednoosiowego rozciągania. Hipoteza Hubera-Haigha-Hencky'ego jest więc hipotezą jednoparametrową, gdyż według niej do efektywnego określenia granicy zakresu sprężystego wystarcza jedna próba wytrzymałościowa.

Równanie (10.18) nie określa jeszcze powierzchni granicznej, gdyż wiąże dwanaście wielkości (składowe tensora naprężenia i składowe tensora odkształcenia), z których tylko sześć może być niezależnych. Wielkości zależne mogą być jednak wyrugowane za pomocą prawa Hooke'a, które obowiązuje aż do granicy zakresu sprężystego; korzystając z prawa zmiany postaci (10.13) określimy początkową powierzchnię plastyczności bądź w funkcji naprężeń

$$(10.19) \quad s_{ij} s_{ij} = 2GC = \frac{2}{3} \sigma_0^2,$$

bądź w funkcji odkształceń

$$(10.20) \quad e_{ij} e_{ij} = \frac{C}{2G} = \frac{\sigma_0^2}{6G^2},$$

gdzie stała C została dobrana tak, aby przy jednoosiowym rozciąganiu granica zakresu sprężystego była wyznaczona równością $\sigma = \sigma_0$. Zależność powierzchni granicznej od temperatury i innych czynników ubocznych może być uwzględniona w omawianej hipotezie jedynie przez uzależnienie σ_0 od tych czynników.

Pożyteczne okazuje się tu wprowadzenie pojęcia *naprężenia zredukowanego* (zastępczego) σ_{red} , jako takiego naprężenia w stanie jednoosiowego rozciągania, który jest wyteżeniowo równoważny danemu stanowi przestrzennemu. Oznaczmy skalar, przyjęty za kryterium wyteżenia przez F i wyrażmy go w funkcji składowych stanu naprężenia lub naprężeń głównych. Równość kryterium wyteżenia w ogólnym stanie przestrzennym i stanie jednoosiowego rozciągania

$$(10.21) \quad F(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}) = F(\sigma_{red}, 0, \dots, 0)$$

pozwała na określenie naprężenia zredukowanego w funkcji składowych stanu naprężenia

$$(10.22) \quad \sigma_{red} = f(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}),$$

W przypadku niektórych hipotez określenie efektywne funkcji (10.22) napotyka na trudności, natomiast z łatwością można określić funkcję

$$(10.23) \quad \sigma_{red} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

Początkowa powierzchnia plastyczności jest wtedy w przestrzeni składowych stanu naprężenia lub przestrzeni naprężeń głównych określona równaniem

$$(10.24) \quad \sigma_{red} = \sigma_0.$$

Przyjmując jako kryterium wyteżenia energię Φ_f czyli $F = \Phi_f$, dochodzimy do wniosku, że według tej hipotezy

$$(10.25) \quad \sigma_{red} = \sigma_i,$$

gdzie σ_i oznacza intensywność naprężeń, zdefiniowaną wzorem (7.6). Zakres sprężysty można więc wtedy określić nierównością

$$(10.26) \quad \sigma_i < \sigma_0.$$

Drugi typ podejścia — czysto aproksymacyjny — przedstawia np. propozycja R. MISESA [422], którą omówimy w następnym punkcie.

10.3. Warunki idealnej plastyczności. W przypadku jednoosiowego rozciągania ciało idealnie plastyczne charakteryzuje się podczas procesu plastycznie czynnego wzrostem odkształceń przy stałym naprężeniu $\sigma = \sigma_0$. Proces taki nazywamy *plynięciem plastycznym*. W ogólnym przypadku przestrzennego stanu naprężenia podczas procesu czynnego poszczególne składowe stanu naprężenia mogą się zmieniać, jednak punkt przedstawiający ten stan w przestrzeni naprężeń musi pozostawać na początkowej powierzchni plastyczności. Określenie «początkowa» przestaje być wtedy potrzebne, jego znaczenie uwidacznia się

dopiero w przypadku wzmocnienia plastycznego. Równanie powierzchni plastyczności nazywamy warunkiem idealnej plastyczności lub krócej warunkiem plastyczności. Wprowadzając pojęcie naprężenia zredukowanego σ_{red} możemy zapisać warunek plastyczności w postaci ogólnej (10.24). Jednakże sens tego zapisu jest obecnie inny: w p. 10.2 mówiliśmy tylko o granicy zakresu sprężystego, a obecnie mamy na myśli spełnienie warunku (10.24) w całym zakresie plastycznym.

Inaczej można powiedzieć, że podczas płynięcia plastycznego pewien niezmiennik wyłącznie stanu naprężenia, niezależny od odkształceń, pozostaje stały. Niezmiennik ten może jednak być funkcją temperatury i innych czynników ubocznych. W przypadku ciała izotropowego musi to być niezmiennik symetryczny (względem przemiany wskaźników). W przypadku ciała anizotropowego uzasadnione jest przyjęcie, że własności plastyczne dają się opisać pewnymi tensorami parzystego rzędu, a omawiany niezmiennik może być funkcją niezmienników wspólnych tensora naprężenia i tensora określającego własności plastyczne materiału.

Dobór omawianego niezmiennika jest również przedmiotem hipotez wyteżenia materiału i stanowi zagadnienie bezpośrednio związane z problemem granicy zakresu sprężystego. Jeżeli wielkość fizyczna, stanowiąca kryterium wyteżenia, jest niezmiennikiem tensora naprężenia, a nie zależy od odkształceń, to przyrównanie jej do wartości stałej określa jednocześnie granicę zakresu sprężystego i warunek idealnej plastyczności. Taką wielkością jest np. długość wektora największego naprężenia stycznego τ_{max} , określona wzorem (7.10); równanie

$$(10.27) \quad \tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_{III}) = \text{const} = \frac{1}{2} \sigma_0,$$

odpowiadające hipotezie *największych naprężeń stycznych*, było formułowane przez J. GUESTA [191] jako równanie granicy zakresu sprężystego, a już uprzednio przez H. TRESKĘ [709] jako warunek idealnej plastyczności.

Odmierna sytuacja występuje w przypadku, gdy wielkość fizyczna, stanowiąca kryterium wyteżenia, jest niezmiennikiem wspólnym tensora naprężenia i tensora odkształcenia. Weźmy na przykład pod uwagę energię właściwą odkształcenia postaciowego Φ_f : równanie $\Phi_f = \text{const}$ może określać granicę zakresu sprężystego, i to jest przedmiotem hipotezy Hubera, a nie może stanowić warunku plastyczności, bowiem energia ta zależy oczywiście od odkształceń. Odpowiedni warunek plastyczności można sformułować stosując najpierw prawo Hooke'a i wyrażając kryterium wyteżenia przez składowe stanu naprężenia, a następnie tak uzyskaną wielkość przyrównując do wartości stałej. Tak właśnie postąpił H. HENCKY w odniesieniu do energii odkształcenia postaciowego, otrzymując ostatecznie równanie (10.19). Sens fizyczny kryterium wyteżenia ulega wtedy zataraceni, gdyż energia odkształcenia postaciowego w trakcie odkształceń plastycznych nie jest już stała. Równaniu (10.19), traktowanemu jako warunek plastyczności, można natomiast przypisać inny sens fizyczny; wyraża ono np. stałą wartość stycznego naprężenia oktaedrycznego τ_{oct} , stałą wartość średniego naprężenia stycznego we wszystkich możliwych przekrojach przechodzących przez dany punkt (W. W. NOWOŻIŁOW [1098]) itp.

Podobnie jak w przypadku określania granicy zakresu sprężystego, także i przy formułowaniu warunku plastyczności możliwe i coraz częściej stosowane jest podejście typu

czysto aproksymacyjnego bez wprowadzania kryterium wyężenia o jakimś wyraźniejszym sensie fizycznym. We wspomnianej już pracy [422] R. MISES zaproponował, aby powierzchnię plastyczności w przestrzeni ekstremalnych naprężeń stycznych aproksymować powierzchnią kuli. H. HENCKY w pracy [210] stwierdził, że uzyskane w ten sposób równanie jest zgodne z wyprowadzonym w oparciu o rozważania energetyczne równaniem (10.19). Odpowiedni warunek plastyczności będziemy w dalszym ciągu nazywali warunkiem Hubera-Misesa-Hencky'ego lub krócej HMM.

Warunki plastyczności omówimy bardziej szczegółowo w rozdziale III. W tej chwili zauważymy jedynie, że proces zachodzący przy spełnieniu warunku idealnej plastyczności (10.24) jest z reguły procesem plastycznie czynnym, natomiast w przypadku $\sigma_{red} < \sigma_0$ mamy do czynienia z procesem biernym. Ponadto wprowadzimy pojęcie *procesu neutralnego*, stanowiącego rozgraniczenie procesów czynnych od procesów biernych. Przez proces neutralny będziemy rozumieli taki proces bierny, który zachodzi przy spełnieniu warunku idealnej plastyczności, a więc któremu odpowiada ruch punktu po powierzchni czynno-biernej. Wyodrębnienie takiego procesu dla ciała idealnie plastycznego w przestrzeni naprężeń napotyka na trudności, bowiem nie mamy możliwości wyróżnić go spośród procesów czynnych (wobec pewnej samorzutności procesu, danego zmianą naprężeń w czasie). Natomiast pojęcie to staje się jasne w przestrzeni odkształceń (por. przykład w p. 10.6). W przypadku wzmocnienia plastycznego wyróżnienie procesu neutralnego nie nastęrcza trudności ani w przestrzeni naprężeń, ani w przestrzeni odkształceń.

Jednym z fundamentalnych postulatów teorii plastyczności jest możliwość opisanie procesu neutralnego zarówno w oparciu o równania procesów czynnych, jak i w oparciu o równania procesów biernych (postulat ciągłości na granicy czynno-biernej). Jak zobaczymy, nie wszystkie teorie spełniają ten postulat.

Zwrócimy jeszcze uwagę na pewną kwestię terminologiczną. Niektórzy autorzy nazywają materiałem idealnie plastycznym każdy materiał, który podczas procesu czynnego spełnia warunek plastyczności typu (10.24), inni natomiast tylko taki materiał, dla którego powierzchnia plastyczności posiada środek symetrii w punkcie $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, a więc dla którego $\sigma_{red}(-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3) = \sigma_{red}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Granica plastyczności przy ściskaniu jest wtedy równa granicy przy rozciąganiu. Aby wyróżnić tę drugą, węższą klasę materiałów D. D. IWLEW [941] wprowadza pojęcie «ciał idealnie plastycznych o izotropii normalnej», pozostawiając nazwę «ciała idealnie plastyczne» dla klasy szerszej (10.24). Oba podane tu warunki plastyczności (10.19) i (10.27) odnoszą się do przypadku izotropii normalnej, przy czym w przypadku (10.19) jest to wprost widoczne, natomiast w przypadku (10.27) daje się łatwo wykazać.

10.4. Prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci. Równania fizyczne (konstytutywne), wiążące tensor naprężenia i tensor odkształcenia oraz ewentualnie ich pochodne względem czasu, dzieli się z reguły na dwie grupy, mianowicie na związki między aksjatorami, wyrażające prawo zmiany objętości, i związki między dewiatorami, wyrażające prawo zmiany postaci. Takie ujęcie, które w teorii sprężystości wygląda nieco sztucznie, jest w teorii plastyczności całkowicie uzasadnione, bowiem prawa, rządzące zmianą objętości i zmianą postaci, różnią się tu od siebie w sposób zasadniczy.

Liczne doświadczenia przeprowadzone przez P. W. BRIDGMANA [44] dowiodły, że dla

znacznej większości materiałów zmiana objętości jest czysto sprężysta i podlega prawu (10.6), czyli w zapisie skalarnym (10.8) lub (10.9). Jedynie przy bardzo wysokich ciśnieniach hydrostatycznych zaobserwował Bridgman odstępstwa od liniowego prawa (10.9) i zaproponował zależność kwadratową

$$(10.28) \quad \theta = -\frac{p}{K} + \frac{p^2}{K_1},$$

gdzie moduł K_1 dla większości metali jest zawarty w przedziale od $2,5 \cdot 10^8$ do $50 \cdot 10^8 \text{ kG}^2/\text{cm}^4$. W teorii plastyczności już liniowe prawo (10.8) lub (10.9) uważa się za wystarczająco dokładne, a bardzo często zakłada się dla uproszczenia nieściśliwość materiału, $K \rightarrow \infty$, oraz

$$(10.29) \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0,$$

Przybliżenie takie uzasadnione jest faktem, że w zakresie plastycznym odkształcenia objętościowe są z reguły bardzo małe względem postaciowych.

Prawo zmiany objętości (10.8) albo w przybliżeniu (10.29) przyjmuje się z reguły we wszystkich teoriach plastyczności, zarówno przy procesach plastycznie czynnych, jak i plastycznie biernych, tak że różnice występują dopiero przy formułowaniu praw zmiany postaci. Przez «teorię plastyczności» (w węższym tego słowa znaczeniu) będziemy więc rozumieli prawo zmiany postaci, które, zdaniem autorów, opisuje zachowanie się materiału w zakresie odkształceń plastycznych. Omówimy tu przede wszystkim trzy klasyczne teorie plastyczności, porządkując je nie chronologicznie, lecz według stopnia trudności przy efektywnym ich wykorzystywaniu. Najpierw jednak wyciągniemy pewne wnioski z prawa zmiany objętości.

10.5. Współczynnik odkształcenia poprzecznego. W jednoosiowo rozciągającym przecie występuje na ogół trójosiowy stan odkształcenia. W zakresie sprężystym stosunek odkształceń poprzecznych ε_2 i ε_3 do odkształcenia podłużnego ε_1 jest stały:

$$(10.30) \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\nu,$$

gdzie ν oznacza współczynnik Poissona. Po przekroczeniu granicy sprężystości stosunek ten ulega na ogół zmianie. Oznaczmy mianowicie przez ν^p współczynnik odkształcenia poprzecznego, zdefiniowany równościami $\varepsilon_2 = -\nu^p \varepsilon_1$, $\varepsilon_3 = -\nu^p \varepsilon_1$, które mają obowiązywać przy jednoosiowym rozciąganiu naprężeniem σ_1 . Podstawiając te związki do prawa zmiany objętości (10.8) otrzymujemy

$$(10.31) \quad (1-2\nu^p)\varepsilon = \frac{1-2\nu^p}{E} \sigma,$$

gdzie opuszczono wskaźniki 1 przy σ i ε . Stąd po obliczeniu ν^p

$$(10.32) \quad \nu^p = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{\sigma(\varepsilon)}{E\varepsilon},$$

przy czym zaznaczono, że naprężenia σ traktujemy jako pewną funkcję odkształcenia ε . W przypadku prawa Hooke'a $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon$ otrzymujemy oczywiście $\nu^p = \nu = \text{const}$, na-

tomiast w innych przypadkach $\nu^p = f(\varepsilon)$. Tak np. dla ciała idealnie plastycznego zależność ν^p od ε jest w zakresie plastycznym hiperboliczna,

$$(10.33) \quad \nu^p = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \frac{\sigma_0}{E\varepsilon},$$

przy czym funkcja ta zmierza asymptotycznie do $1/2$. Jedyne w przypadku materiału nieściśliwego mamy zawsze $\nu^p = 1/2 = \text{const}$, co stanowi znaczne uproszczenie obliczeń.

Problemowi współczynnika odkształcenia poprzecznego poświęcone są prace G. GERARDA i S. WILDHORN [165], R. A. MIEŻŁUMIANA [1069] oraz I. VIGNESSE i T. E. PARDUE [720]. A. K. SINICKIJ [1162] zaproponował przybliżone zastąpienie prawa zmiany objętości (10.8) hipotezą stałego współczynnika odkształcenia poprzecznego ν^p , co wyraźnie upraszcza obliczenia, może być jednak przyczyną dość znacznych błędów; błędy te były badane w pracach M. ŻYCKOWSKIEGO [767] oraz JU. R. LEPIKA i L. JA. LUHTA [1040]. Zależą one od ściśliwości materiału i są równe zeru dla materiałów nieściśliwych. Problemowi wpływu ściśliwości materiału na rozwiązania zagadnień teorii plastyczności poświęcone są prace W. I. ROZENBLUMA [1150] i M. COMO [77].

10.6. Teoria odkształceniowa Hencky'ego-Iliuszina. Jak już wspomnieliśmy we wstępie, dla wielu zastosowań inżynierskich bardziej istotną cechą jest fizykalna nieliniowość odkształceń plastycznych, niż ich nieodwracalność i zależność od drogi. Do nieliniowej teorii sprężystości nawiązuje najprostsza teoria plastyczności, sformułowana ogólnie przez H. HENCKY'EGO [210] (choć do problemów plastycznego skręcania stosował ją już rok wcześniej A. NÁDAI [449]), a rozwinięta przez A. A. ILIUSZINA [943, 947, 948]. Procesy czynne opisuje ona równaniami nieliniowej teorii sprężystości, natomiast w przeciwieństwie do tej ostatniej wprowadza pojęcie procesów biernych, w trakcie których zmiany naprężeń są związane ze zmianami odkształceń prawem Hooke'a (równania typu (9.11)). Tak więc w teorii tej stan końcowy jest niezależny od drogi, gdy po procesie plastycznie biernym (zakresie sprężystym) nastąpił jedynie proces plastycznie czynny; zależność od drogi występuje dopiero wtedy, gdy po procesie czynnym następuje proces bierny.

Ponieważ w teorii plastyczności występuje — w stosunku do teorii sprężystości — nowe równanie, mianowicie warunek plastyczności, więc prawo zmiany postaci, opisujące proces czynny, musi zawierać pewną nową niewiadomą, aby zachować zgodność liczby równań i niewiadomych. W teorii odkształceniowej Hencky'ego-Iliuszina niewiadomą tą jest współczynnik proporcjonalności między dewiatorami naprężenia i odkształcenia (nieskończenie małego), który oznaczymy przez φ :

$$(10.34) \quad D_\varepsilon = \varphi D_\sigma, \quad e_{ij} = \varphi s_{ij}.$$

Wykorzystując prawo zmiany objętości (10.6), możemy stąd wyrazić odkształcenia przez naprężenia następująco:

$$(10.35) \quad \varepsilon_{ij} = \varphi \sigma_{ij} + \left(\frac{1}{3K} - \varphi \right) \sigma_m \delta_{ij}.$$

Zapis ten jest słuszny dla materiałów ściśliwych bądź też, przy przyjęciu $1/3K = 0$, dla nieściśliwych.

Przyjmując $\varphi = 1/2G$ i nie uwzględniając warunku plastyczności możemy tymi równaniami opisać zakres sprężysty. W zakresie plastycznym natomiast funkcja φ jest nową niewiadomą, którą obliczamy z warunku plastyczności. Mnożąc mianowicie każdy z występujących po obu stronach równania (10.34) tensorów skalarnie przez siebie otrzymujemy

$$(10.36) \quad e_{ij}e_{ij} = \varphi^2 s_{ij}s_{ij},$$

skąd w oparciu o warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego i definicję intensywności odkształceń (8.35)

$$(10.37) \quad \varphi = \frac{3e_i}{2\sigma_0}.$$

Funkcja φ , zwana czasem modułem zaawansowania odkształceń plastycznych, jest więc proporcjonalna do intensywności odkształceń. Inaczej zamiast (10.37) można zapisać

$$(10.38) \quad \varphi = \frac{3s_{ij}e_{ij}}{2\sigma_0^2}.$$

W szczególnych przypadkach można znaleźć dogodniejszy sposób rugowania funkcji φ np. przez podzielenie kolejnych równań (10.34) przez siebie stronami. Określenie funkcji φ w przypadku innych warunków plastyczności może przebiegać podobnie, jest jednak z reguły trudniejsze.

Jak wynika z równań (10.35), teoria Hencky'ego-Iliuszina zakłada tożsamość tensora kierunków i podobieństwa naprężeń i odkształceń (6.19), $e_{ij}^* = s_{ij}^*$, a także równość parametrów Lodego $\mu_e = \mu_\sigma$. Równania (10.34) wyrażają prawo podobieństwa dewiatorów naprężeń i odkształceń.

Układ (10.35) jest układem sześciu równań algebraicznych, z których tylko pięć jest niezależnych. Przedstawiamy je w formie (10.15) lub częściej (10.16):

$$(10.39) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_y &= \varphi(\sigma_x - \sigma_y), & \gamma_{xy} &= 2\varphi\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y - \varepsilon_z &= \varphi(\sigma_y - \sigma_z), & \gamma_{yz} &= 2\varphi\tau_{yz}, \\ \varepsilon_z - \varepsilon_x &= \varphi(\sigma_z - \sigma_x), & \gamma_{zx} &= 2\varphi\tau_{zx}. \end{aligned}$$

W przypadku gdy tylko część ciała jest uplastyczniona, równanie granicy sprężysto-plastycznej możemy otrzymać bądź z warunku $\varphi = 1/2G$ (wychodząc z rozwiązania dla strefy uplastycznionej), bądź z warunku $\sigma_i = \sigma_0$ (od strony strefy sprężystej). Na powierzchni oddzielającej obie te strefy obowiązują warunki ciągłości wszystkich składowych stanu naprężenia i stanu odkształcenia (por. Ł. M. KACZANOW [977]).

Równania powyższe opisują proces plastycznie czynny. Proces bierny jest przy schematyzacji Prandtl'a opisany równaniami typu (9.14), które w zapisie tensorowym przyjmują postać ogólną

$$(10.40) \quad \tilde{D}_\sigma - D_\sigma = 2G(\tilde{D}_e - D_e),$$

gdzie wężykiem oznaczono wielkości, od których proces bierny się rozpoczyna. Odpo-

wiednie równania algebraiczne w zapisie inżynierskim wykorzystuje się bądź w formie analogicznej do (10.39), mianowicie

$$\begin{aligned}
 (10.41) \quad & \tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y - \sigma_x + \sigma_y = 2G(\tilde{\varepsilon}_x - \tilde{\varepsilon}_y - \varepsilon_x + \varepsilon_y), \\
 & \tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_z - \sigma_y + \sigma_z = 2G(\tilde{\varepsilon}_y - \tilde{\varepsilon}_z - \varepsilon_y + \varepsilon_z), \\
 & \tilde{\sigma}_z - \tilde{\sigma}_x - \sigma_z + \sigma_x = 2G(\tilde{\varepsilon}_z - \tilde{\varepsilon}_x - \varepsilon_z + \varepsilon_x), \\
 & \tilde{\tau}_{xy} - \tau_{xy} = G(\tilde{\gamma}_{xy} - \gamma_{xy}), \\
 & \tilde{\tau}_{yz} - \tau_{yz} = G(\tilde{\gamma}_{yz} - \gamma_{yz}), \\
 & \tilde{\tau}_{zx} - \tau_{zx} = G(\tilde{\gamma}_{zx} - \gamma_{zx}),
 \end{aligned}$$

bądź też po wykorzystaniu obowiązującego i tutaj prawa zmiany objętości (10.8) w formie odpowiadającej klasycznemu zapisowi prawa Hooke'a:

$$(10.42) \quad \tilde{\varepsilon}_x - \varepsilon_x = \frac{1}{E} [(\tilde{\sigma}_x - \sigma_x) - \nu(\tilde{\sigma}_y - \sigma_y + \tilde{\sigma}_z - \sigma_z)].$$

.....

Stosownie do schematyzacji typu Prandtla równania procesu biernego nie uwzględniają zmian modułów sprężystości w wyniku uprzednich odkształceń plastycznych. W rzeczywistości zmiany takie występują, jak już wspomnieliśmy w p. 9.7, badał je doświadczalnie np. A. M. ŻUKOW [915, 916, 917].

Zakres stosowalności teorii odkształceniowej Hencky'ego-Iliuszina jest z punktu widzenia zgodności z doświadczeniami i z punktu widzenia przesłanek logicznych dość silnie ograniczony; omówimy go bardziej szczegółowo w p. 10.9. Tym niemniej teoria ta może oddać spore usługi przy pewnych szczególnych typach obciążeń, gdy rozwiązanie w oparciu o teorie dokładniejsze jest bardzo skomplikowane.

Zajmiemy się natomiast obecnie rozgraniczeniem procesów czynnych od biernych. Jeżeli czynnikami wytężenia są naprężenia, czyli proces jest dany zmianą naprężeń w czasie, to wówczas spełnianie przez naprężenia warunku plastyczności określa proces czynny, a w przypadku $\sigma_{red} < \sigma_0$ mamy do czynienia z procesem biernym. Gdy natomiast dane są odkształcenia, to patrząc na wzór (10.37) można by sądzić, że wzrost intensywności odkształceń w czasie warunkuje proces czynny, a zmniejszanie się intensywności — proces bierny. Takie ujęcie, które można znaleźć w licznych podręcznikach, a które w pierwszej chwili wydaje się logiczne, nie jest jednak poprawne, na co zwrócił uwagę np. już W. W. NOWOŻIŁOW [1099]. Podamy najpierw poprawne określenie powierzchni plastyczności (czynno-biernej) w przestrzeni odkształceń, a następnie zilustrujemy tę kwestię prostym przykładem liczbowym.

Poprawne określenie powierzchni czynno-biernej w przestrzeni odkształceń wygląda następująco. Rozpatrujemy procesy bierne, przy których stan końcowy nie zależy od drogi, a które określone są równaniami (10.39). Granicą obszaru procesów biernych będzie spełnienie przez naprężenia warunku plastyczności, skąd otrzymujemy odpowiednie równanie powierzchni. Z (10.40) wynika mianowicie

$$(10.43) \quad s_{ij} = \tilde{s}_{ij} - 2G(\tilde{e}_{ij} - e_{ij}),$$

a podstawienie (10.39) do warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego (10.19) prowadzi do związku

$$(10.44) \quad [\tilde{s}_{ij} - 2G(\tilde{e}_{ij} - e_{ij})][(\tilde{s}_{ij} - 2G(\tilde{e}_{ij} - e_{ij}))] = \frac{2}{3} \sigma_0^2.$$

Jest to poszukiwane równanie powierzchni, wiążące odkształcenia e_{ij} ; wielkości z wężykiem traktujemy jako znane (powierzchnię taką budujemy dla danego punktu procesu, scharakteryzowanego wielkościami \tilde{s}_{ij} i \tilde{e}_{ij}). Naprężenia \tilde{s}_{ij} spełniają z założenia warunek plastyczności (10.19); wykorzystując ten związek możemy zamiast (10.44) napisać

$$(10.45) \quad G(\tilde{e}_{ij} - e_{ij})(\tilde{e}_{ij} - e_{ij}) - (\tilde{e}_{ij} - e_{ij})\tilde{s}_{ij} = 0.$$

Warunek ten nie pokrywa się z warunkiem stałej intensywności odkształceń; dogodną ilustracją występującej różnicy będzie przykład liczbowy.

Przypadkiem złożonym, najłatwiejszym do dyskusji i obliczeń porównawczych (choć niewątpliwie trudniejszym przy realizacji eksperymentalnej), jest przypadek występowania tylko dwóch różnych od zera, niezależnych składowych stanu naprężenia, mianowicie naprężeń stycznych τ_{zx} i τ_{zy} ; odpowiadają im tylko dwie składowe stanu odkształcenia γ_{zx} i γ_{zy} , tak że możemy posługiwać się płaszczyzną naprężeń i płaszczyzną odkształceń. Warunek idealnej plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego (lub dowolny inny warunek plastyczności dla ciała izotropowego) jest tu równaniem koła

$$(10.46) \quad \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \tau_0^2,$$

gdzie przez τ_0 oznaczono granicę plastyczności przy ścinaniu (skręcaniu). W przypadku płaskiego stanu naprężenia $\sigma_1 - \sigma_2$ warunkowi plastyczności HMH odpowiada elipsa o bardziej złożonym równaniu, a ponadto występuje przestrzenny stan odkształcenia, więc rozpatrywany przypadek $\tau_{zx} - \tau_{zy}$ jest wyraźnie prostszy. Posługują się nim do dyskusji np. G. I. BYKOWCEW, W. W. DUDUKALENKO i D. D. IWLEW [827].

Równanie powierzchni czynno-biernej (10.44) przybiera tu postać (po podstawieniu $\sigma_0^2 = 3\tau_0^2$, co odpowiada hipotezie HMH, a następnie uproszczeniu przez 2, bowiem do (10.44) należy podstawić zarówno τ_{zx} , jak i τ_{zy} itp.):

$$(10.47) \quad [\tilde{\tau}_{zx} - G(\tilde{\gamma}_{zx} - \gamma_{zx})]^2 + [\tilde{\tau}_{zy} - G(\tilde{\gamma}_{zy} - \gamma_{zy})]^2 = \tau_0^2.$$

Jest to równanie koła w płaszczyźnie odkształceń $\gamma_{zx} - \gamma_{zy}$ o środku w punkcie $\tilde{\tau}_{zx}/G, \tilde{\tau}_{zy}/G$ i o promieniu τ_0/G . Stałej intensywności odkształceń odpowiada natomiast koło

$$(10.48) \quad \gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2 = \tilde{\gamma}_{zx}^2 + \tilde{\gamma}_{zy}^2 = \text{const}$$

o środku w początku układu współrzędnych i o promieniu $r = \sqrt{\tilde{\gamma}_{zx}^2 + \tilde{\gamma}_{zy}^2}$. Dla przykładu na rys. 39 przyjęto $\tilde{\gamma}_{zx} = 4\tau_0/G, \tilde{\gamma}_{zy} = 0, \tilde{\tau}_{zy} = 0, \tilde{\tau}_{zx} = \tau_0$ i wykreślono oba koła różniące się, jak widać, bardzo istotnie.

Rozpatrzmy obecnie proces, określony w płaszczyźnie odkształceń ruchem punktu po kole o promieniu $\alpha\tau_0/G$

$$(10.49) \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_0}{G} [(4-\alpha) + \alpha \cos t], \quad \gamma_{zy} = \frac{\tau_0}{G} \alpha \sin t,$$

gdzie t jest parametrem o charakterze czasu. Jeżeli α jest zawarte w przedziale $1 < \alpha < 4$, to mamy do czynienia z procesami czynnymi o malejącej intensywności odkształceń. Istotnie, intensywność odkształceń ε_i (8.35) wynosi tutaj

$$(10.50) \quad \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2} = \frac{\tau_0}{G\sqrt{3}} \sqrt{(16-8\alpha+2\alpha^2) + 2\alpha(4-\alpha)\cos t}$$

i w przedziale $0 < t < \pi$ pochodna de_i/dt jest ujemna. Gdybyśmy jednak założyli, że proces jest bierny i zgodnie z (10.43) podstawili

$$(10.51) \quad \tau_{zx} = \tau_0(1 - \alpha + \alpha \cos t), \quad \tau_{zy} = \tau_0 \alpha \sin t,$$

to otrzymalibyśmy wówczas

$$(10.52) \quad \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \tau_0^2 [1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \cos t] > \tau_0^2,$$

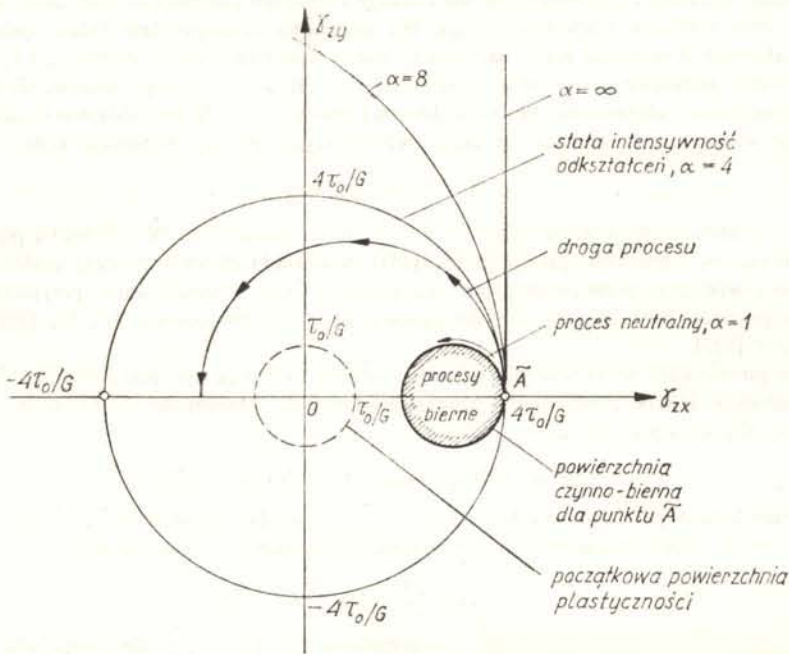
co dla ciała idealnie plastycznego nie jest możliwe. Proces jest więc czynny mimo malejącej intensywności odkształceń.

Korzystając z równań procesu czynnego (10.39) obliczamy kolejno

$$(10.53) \quad \varphi = \frac{1}{G} \sqrt{16 - 8\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha(4 - \alpha) \cos t},$$

$$(10.54) \quad \tau_{zx} = \frac{(4 - \alpha) + \alpha \cos t}{\sqrt{16 - 8\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha(4 - \alpha) \cos t}} \tau_0,$$

$$(10.55) \quad \tau_{zy} = \frac{\alpha \sin t}{\sqrt{16 - 8\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha(4 - \alpha) \cos t}} \tau_0.$$



Rys. 39. Przykład analizy procesu odkształcenia w punkcie. Falszywy opis procesu neutralnego teorią Hencky-Iliuszina

Wyniki powyższe są poprawne w sensie teorii Hencky'ego-Iliuszina, ale trudno przypuścić, aby poprawnie opisywały rzeczywiście zachodzące procesy. Zwróćmy np. uwagę na przypadek graniczny $\alpha = 1$, wówczas dochodzimy do granicy czynno-biernej od strony procesów czynnych. Zgodnie z definicją podaną w p. 10.3 jest to proces neutralny. Z równań (10.54) i (10.55) wynika

$$(10.56) \quad \tau_{zx} = \frac{3 + \cos t}{\sqrt{10 + 6 \cos t}} \tau_0, \quad \tau_{zy} = \frac{\sin t}{\sqrt{10 + 6 \cos t}} \tau_0$$

i przy $t = \pi$, czyli $\gamma_{zx} = 2\tau_0/G$, $\gamma_{zy} = 0$, mamy $\tau_{zx} = +\tau_0$, $\tau_{zy} = 0$. Z równań procesu biernego (10.51), które na granicy powinny również obowiązywać, otrzymujemy $\tau_{zx} = -\tau_0$, $\tau_{zy} = 0$. Na granicy wystę-

puje więc nieciągłość opisu procesów, która w rzeczywistości nie powinna mieć miejsca. Innymi słowy, proces neutralny jest inaczej opisany równaniami procesów czynnych, a inaczej równaniami procesów biernych, zatem postulat ciągłości na granicy czynno-biernej w teorii Hencky'ego-Iliuszina nie jest spełniony.

Wyniki (10.54) i (10.55) porównamy z wynikami innych teorii, które poprawniej opiszą rozpatrywany proces.

10.7. Teoria płynięcia plastycznego Levy'ego-Misesa. Chronologicznie najstarsza jest teoria plastyczności, zaproponowana w r. 1870 przez M. LEVY'EGO [349] i B. DE SAINT VENANTA (część pracy, zawierająca zasadnicze równania, podpisana jest tylko przez M. LEVY'EGO), a rozwinięta przez R. MISESA [422]. Jest ona w pewnym sensie przeciwieństwem teorii Hencky'ego-Iliuszina; podczas gdy tamta nawiązuje bezpośrednio do teorii sprężystości, teoria Levy'ego-Misesa w ogóle pomija odkształcenia sprężyste, a nawiązuje do schematyzacji ciała idealnie sztywno-plastycznego. Według tej teorii prawo zmiany postaci wiąże dewiator prędkości odkształcenia (nieskończenie małego) z dewiatorem naprężenia

$$(10.57) \quad D_i = \lambda D_\sigma,$$

$$(10.58) \quad \dot{e}_{ij} = \lambda s_{ij}$$

i w pewnym stopniu przypomina prawo odnoszące się do ruchu cieczy lepkiej; stąd nazwa «teoria płynięcia plastycznego». Teoria ta zakłada tożsamość tensora kierunków i podobieństwa naprężeń i prędkości odkształceń $\dot{e}_{ij}^* = s_{ij}^*$, i równość parametrów Lodego $\mu_i = \mu_\sigma$. Równania (10.57) lub (10.58) wyrażają prawo podobieństwa dewiatorów naprężeń i prędkości odkształceń.

Niewiadomą funkcję λ należy określić w oparciu o warunek plastyczności. M. LEVY korzystał z warunku plastyczności TRESKI (10.27), jednakże R. MISES [422] zauważył, że znacznie dogodniejsze jest obliczenie λ w oparciu o warunek (10.19). Postępując podobnie jak w przypadku teorii Hencky'ego-Iliuszina dochodzimy do wzorów

$$(10.59) \quad \lambda = \frac{3\dot{e}_i}{2\sigma_0}$$

albo

$$(10.60) \quad \lambda = \frac{3s_{ij}\dot{e}_{ij}}{2\sigma_0^2}.$$

Przez \dot{e}_i oznaczyliśmy tu intensywność prędkości odkształceń, zdefiniowaną analogicznie do (8.35). Wyrażenie $s_{ij}\dot{e}_{ij}$ w liczniku wzoru (10.60) określa moc odkształceń plastycznych; wzór ten bywa stosowany częściej niż (10.59). Po podstawieniu do (10.58) i stosownej zmianie wskaźników możemy mianowicie napisać

$$(10.61) \quad \dot{e}_{ij} = \frac{3s_{kl}\dot{e}_{kl}}{2\sigma_0^2} s_{ij}$$

albo w formie przyrostowej, po formalnym pomnożeniu (10.57) przez różniczkę czasu dt ,

$$(10.62) \quad de_{ij} = \frac{3s_{kl}de_{kl}}{2\sigma_0^2} s_{ij}.$$

Forma zapisu (10.62) dowodzi, że czynnik czasu t jest tu jedynie czynnikiem pomocniczym i daje się wyrugować (skala czasu jest bez znaczenia); inna sprawa, że czynnik ten może się pojawić w innej formie, np. w problemach dynamicznych.

Przyjmując w równaniach (10.58) $\lambda = 0$ nie opisujemy ciała sprężystego, lecz ciało sztywne; opisanie zakresu sprężystego nie jest tu możliwe.

Ponieważ w teorii Levy'ego-Misesa pomija się odkształcenia sprężyste, więc konsekwentnie w prawie zmiany objętości (10.8) należy przyjąć $E \rightarrow \infty$ i otrzymujemy warunek nieściśliwości

$$(10.63) \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = 0.$$

Dewiator odkształcenia jest tu więc wprost równy tensorowi odkształcenia, $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$, podobnie $\dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$.

Powierzchnia czynno-bierna jest w przestrzeni naprężeń określona warunkiem plastyczności, np. (10.19), natomiast w przestrzeni odkształceń redukuje się do punktu; każdy ruch w przestrzeni odkształceń oznacza tu proces czynny. Proces bierny odpowiada sztywnemu zachowaniu się materiału, zamiast (10.40) musimy tu napisać

$$(10.64) \quad \check{D}_\varepsilon - D_\varepsilon = 0, \quad D_\dot{\varepsilon} = 0.$$

Zauważymy wreszcie, że jakkolwiek równania Hencky'ego-Iliuszina i równania Levy'ego-Misesa opisują zjawiska odkształceń plastycznych w sposób z punktu widzenia fizycznego całkowicie odmienny, to jednak istnieje między nimi pewna analogia (A. A. ILIUSZIN [946]). Równania (10.57), (10.58) i (10.60) są mianowicie pod względem formalnym podobne odpowiednio do (10.34), (10.37) i (10.38). Wystarczyłoby umówić się, że przez e_{ij} oznaczamy raz składowe dewiatora odkształceń, drugi raz składowe dewiatora prędkości odkształceń, aby tym samym zapisem objąć obie teorie. Istotnie, w licznych problemach obie teorie prowadzą do identycznych wyników, jeżeli odkształcenia, względnie prędkości odkształceń są tylko parametrami, ulegającymi wyrugowaniu (niektóre problemy nośności granicznej). Natomiast w przypadku procesów określonych zmianą odkształceń w czasie różnice są zasadnicze, jak zobaczymy na przykładzie.

Rozważmy podobnie jak w p. 10.6 proces określony równaniami (10.49) i rys. 39. Stałą G potraktujemy teraz jako pewien parametr bez istotnego sensu fizycznego. Obliczamy najpierw prędkości odkształceń

$$(10.65) \quad \dot{\gamma}_{zx} = -\frac{\tau_0}{G} \alpha \sin t, \quad \dot{\gamma}_{zy} = \frac{\tau_0}{G} \alpha \cos t,$$

zatem naprężenia styczne, które mają być odpowiednio proporcjonalne do tych prędkości i spełniać warunek plastyczności, określone są wzorami

$$(10.66) \quad \tau_{zx} = -\tau_0 \sin t, \quad \tau_{zy} = \tau_0 \cos t.$$

Różnice w stosunku do wzorów (10.54) i (10.55) są zasadnicze. Zanalizujemy je bardziej szczegółowo w p. 10.10. Zauważymy jedynie, że w tej teorii każdemu załomowi trajektorii w płaszczyźnie odkształceń towarzyszy nieciągłość trajektorii naprężeń (co oczywiście wynika wprost z (10.58)). Tak np. przy dojściu do punktu \tilde{A} na rys. 39 wzdłuż prostej $\gamma_{zy} = 0$ naprężenia były równe $\tau_{zx} = \tau_0$, $\tau_{zy} = 0$, natomiast rozpatrywany tu proces rozpoczyna się od $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = \tau_0$, zatem występuje skokowa zmiana naprężeń.

10.8. Teoria płynięcia plastycznego Prandtla-Reussa. L. PRANDTL [568] (w przypadku szczególnym) i A. REUSS [580] zwiększyli dokładność teorii Levy'ego-Misesa przez dodanie prędkości odkształceń sprężystych, pominiętych przez tamtą teorię, do prędkości odkształceń plastycznych, określonych wzorami (10.57) albo (10.58). Różniczkując względem czasu prawo sprężystej zmiany postaci (10.14) możemy napisać

$$(10.67) \quad D_{\dot{\epsilon}}^e = \frac{1}{2G} D_{\dot{\sigma}},$$

a po dodaniu do dewiatora $D_{\dot{\epsilon}}^p$, określonego wzorem (10.57) otrzymujemy

$$(10.68) \quad D_{\dot{\epsilon}} = \lambda D_{\dot{\sigma}} + \frac{1}{2G} D_{\dot{\sigma}},$$

$$(10.69) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda s_{ij} + \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij}.$$

Sens fizyczny tych równań nie odbiega w sposób istotny od (10.57) i (10.58) i dlatego stosujemy tu również nazwę «teoria płynięcia plastycznego» (można również spotkać termin «teoria płynięcia sprężysto-plastycznego»). Jednakże opisanie zachowania się materiału idealnie plastycznego jest tu znacznie doskonalsze, z drugiej jednak strony występują spore komplikacje matematyczne. Tensory kierunków i podobieństwa naprężeń i odkształceń całkowitych lub ich prędkości przestają być podobne, natomiast podobieństwo to zostaje zachowane oddzielnie dla prędkości odkształceń sprężystych $\dot{\epsilon}_{ij}^{e*} = \dot{s}_{ij}^*$, oddzielnie dla prędkości odkształceń plastycznych $\dot{\epsilon}_{ij}^{p*} = \dot{s}_{ij}^*$. Podobna uwaga odnosi się do parametrów Lodego.

Niewiadomą funkcję λ określamy z warunku plastyczności. Wzór typu (10.59) przestaje tu być słuszny, natomiast wzór (10.60) pozostaje bez zmiany; mnożąc mianowicie (10.69) obustronnie przez s_{ij} otrzymujemy

$$(10.70) \quad s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda s_{ij} s_{ij} + \frac{1}{2G} s_{ij} \dot{s}_{ij};$$

korzystając z warunku plastyczności (10.19) otrzymujemy po zróżniczkowaniu

$$(10.71) \quad s_{ij} \dot{s}_{ij} = 0,$$

zatem z (10.70) wynika wprost (10.60). Wyrażenie $s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ przedstawia tu również moc odkształceń plastycznych, pomimo że $\dot{\epsilon}_{ij}$ są składowymi dewiatora prędkości odkształceń całkowitych; możemy jednak napisać

$$(10.72) \quad s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = s_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^e) = s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p + s_{ij} \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} = s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p,$$

bowiem zgodnie z (10.71) drugi składnik znika.

Podstawienie (10.60) do (10.69) i formalne pomnożenie równań przez dt umożliwia wyrugowanie czynnika czasu. Odpowiednie równania przybierają w zapisie inżynierskim postać

$$(10.73) \quad de_x = \frac{3}{2\sigma_n^2} (s_x de_x + s_y de_y + s_z de_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}) s_x + \frac{1}{2G} ds_x.$$

Czasem dogodniejsza jest nieco inna forma równań Prandtla-Reussa, w której występują już tylko składowe tensorów naprężeń i przyrostów odkształceń, a nie dewiatorów, a zatem z wyrugowanymi wielkościami σ_m i $d\epsilon_m$. Przez odejmowanie od siebie stronami kolejno trzech pierwszych równań (10.69) (odnoszących się do odkształceń odcinkowych i naprężeń normalnych) otrzymujemy najpierw układ

$$(10.74) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y &= \lambda(\sigma_x - \sigma_y) + \frac{1}{2G}(\dot{\sigma}_x - \dot{\sigma}_y), & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} &= \lambda\tau_{xy} + \frac{1}{2G}\dot{\tau}_{xy}, \\ \dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z &= \lambda(\sigma_y - \sigma_z) + \frac{1}{2G}(\dot{\sigma}_y - \dot{\sigma}_z), & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} &= \lambda\tau_{yz} + \frac{1}{2G}\dot{\tau}_{yz}, \\ \dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x &= \lambda(\sigma_z - \sigma_x) + \frac{1}{2G}(\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_x), & \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} &= \lambda\tau_{zx} + \frac{1}{2G}\dot{\tau}_{zx}. \end{aligned}$$

Mnożąc trzy pierwsze równania odpowiednio przez $(\sigma_x - \sigma_y)$, ..., trzy następne przez $6\tau_{xy}$, ... i dodając stronami, po wykorzystaniu warunku plastyczności HMM otrzymujemy

$$(10.75) \quad (\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)(\sigma_x - \sigma_y) + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)(\sigma_y - \sigma_z) + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)(\sigma_z - \sigma_x) + 3\dot{\gamma}_{xy}\tau_{xy} + 3\dot{\gamma}_{yz}\tau_{yz} + 3\dot{\gamma}_{zx}\tau_{zx} = 2\lambda\sigma_0^2.$$

Podstawienie obliczonej stąd funkcji λ do (10.74) i formalne pomnożenie przez dt prowadzi do równań

$$(10.76) \quad \begin{aligned} d\epsilon_x - d\epsilon_y &= \frac{1}{2\sigma_0^2}[(\sigma_x - \sigma_y)(d\epsilon_x - d\epsilon_y) + (\sigma_y - \sigma_z)(d\epsilon_y - d\epsilon_z) + (\sigma_z - \sigma_x)(d\epsilon_z - d\epsilon_x) + \\ &+ 3\tau_{xy}d\gamma_{xy} + 3\tau_{yz}d\gamma_{yz} + 3\tau_{zx}d\gamma_{zx}](\sigma_x - \sigma_y) + \frac{1}{2G}(d\sigma_x - d\sigma_y) \\ &\dots \end{aligned}$$

Przyjęcie $\lambda = 0$ w równaniach (10.69) lub (10.74) i pominięcie warunku plastyczności pozwala na opisanie tymi równaniami zakresu sprężystego. W przypadku gdy tylko część ciała jest uplastyczniona, równanie granicy sprężysto-plastycznej możemy otrzymać bądź z warunku $\lambda = 0$ (wychodząc z rozwiązania dla strefy uplastycznionej), bądź z warunku $\sigma_i = \sigma_0$ (od strony strefy sprężystej). Na granicy sprężysto-plastycznej obowiązują warunki ciągłości wszystkich składowych stanu naprężenia i stanu odkształcenia.

Równania powyższe opisują proces plastycznie czynny. Proces bierny jest opisany równaniami (10.40), (10.41) lub (10.42): czasom stosuje się również zapis różniczkowy

$$(10.77) \quad ds_{ij} = 2Gde_{ij},$$

który określa proces przy znajomości stanu początkowego. Rozgraniczenie procesów czynnych od procesów biernych nie różni się od opisanego w p. 10.6.

Dla przykładu zastosujemy teorię Prandtla-Reussa do analizy procesu określonego równaniami (10.49) i rys. 39. Równania (10.73) można tu zapisać w postaci

$$(10.78) \quad \begin{aligned} d\gamma_{zx} &= \frac{1}{\tau_0^2}(\tau_{zx}d\gamma_{zx} + \tau_{zy}d\gamma_{zy})\tau_{zx} + \frac{1}{G}d\tau_{zx}, \\ d\gamma_{zy} &= \frac{1}{\tau_0^2}(\tau_{zx}d\gamma_{zx} + \tau_{zy}d\gamma_{zy})\tau_{zy} + \frac{1}{G}d\tau_{zy}; \end{aligned}$$

określają one naprężenia τ_{xx} i τ_{xy} w funkcji odkształceń lub czasu t , jednak są one dość złożone i prowadzą do równania różniczkowego drugiego rzędu. Zastosujemy prostszą drogę, którą jest tu parametryzacja warunku plastyczności (10.46). Podstawimy mianowicie

$$(10.79) \quad \tau_{xx} = \tau_0 \cos \psi, \quad \tau_{xy} = \tau_0 \sin \psi,$$

zastępując dwie niewiadome τ_{xx} i τ_{xy} przez jedną niewiadomą ψ . Warunek początkowy (wyjścia z punktu \tilde{A}) przybiera teraz postać $\psi(0) = 0$. Równania (10.74) przy podstawieniu (10.79) i (10.65) przybierają postać

$$(10.80) \quad -\frac{\tau_0}{G} \alpha \sin t = 2\lambda\tau_0 \cos \psi - \frac{\tau_0}{G} \dot{\psi} \sin \psi,$$

$$\frac{\tau_0}{G} \alpha \cos t = 2\lambda\tau_0 \sin \psi + \frac{\tau_0}{G} \dot{\psi} \cos \psi.$$

Rugowanie λ przeprowadzimy teraz mnożąc pierwsze równanie przez $\sin \psi$, drugie przez $\cos \psi$ i odejmując; otrzymujemy

$$(10.81) \quad \alpha \cos(\psi - t) = \frac{d\psi}{dt}.$$

Podstawienie $\psi(t) - t = u(t)$ i rozdzielenie zmiennych daje

$$(10.82) \quad \frac{du}{\alpha \cos u - 1} = dt,$$

a po scałkowaniu i uwzględnieniu warunku $u(0) = 0$

$$(10.83) \quad t = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \ln \frac{\alpha - 1 + \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{tg} \frac{u}{2}}.$$

Odwracając zależność (10.83) i powracając do niewiadomej ψ otrzymujemy

$$(10.84) \quad \psi = t + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{2} t \right) \right].$$

Wzór (10.84) łącznie ze wzorami (10.79) stanowią poszukiwane rozwiązanie, mianowicie określają zmianę naprężeń w czasie. Symbol th oznacza tu funkcję tangens hiperboliczny; funkcja ta występuje dość często w rozwiązaniach, uzyskanych w oparciu o teorię Prandtla-Reussa.

Liczbowe porównanie wyników tej teorii z wynikami uzyskanymi poprzednio, podamy w p. 10.10. Natomiast obecnie dokonamy sprawdzenia spełnienia postulatu ciągłości na granicy czynno-biernej. Podstawiając do (10.84) $\alpha = 1$ określamy proces neutralny równaniami procesów czynnych; otrzymujemy $\psi = t$, zatem $\tau_{xx} = \tau_0 \cos t$, $\tau_{xy} = \tau_0 \sin t$. Wyniki te są zgodne ze wzorami (10.51), wyprowadzonymi przy założeniu procesu biernego, zatem postulat ciągłości jest spełniony.

10.9. Zbieżność teorii odkształceniowej i teorii płynięcia plastycznego. W ogólnym przypadku omówione w p. 10.6–10.8 teorie ciała idealnie plastycznego prowadzą do różnych wyników. Przez wynik rozumiemy tu — zgodnie z uwagami zamieszczonymi w p. 4.1 — bądź wartość pewnej operacji, bądź pewnego funkcjonału, zależnych od drogi w przestrzeni czynników wyężenia (zmiennych niezależnych); za czynniki te przyjmujemy zazwyczaj bądź składowe tensora odkształcenia, bądź naprężenia.

Zajmiemy się przypadkiem szczególnym, w którym wyniki wszystkich trzech omówionych teorii plastyczności pokrywają się. Weźmiemy pod uwagę proces, w trakcie którego składowe dewiatora odkształceń wzrastają proporcjonalnie do pewnego parametru, inaczej mówiąc proporcjonalnie do siebie, czyli dadzą się przedstawić wzorem

$$(10.85) \quad e_{ij} = e_{ij}^{(0)} f(t),$$

gdzie $e_{ij}^{(0)}$ są ustalone, $f(t)$ jest niemalejącą funkcją czasu. Tensor kierunków i podobieństwa stanu odkształcenia e_{ij}^* (6.19) jest wtedy stały podczas całego procesu. Przy dostatecznie małej wartości funkcji $f(t)$ mamy do czynienia z procesem sprężystym (plastycznie biernym), wtedy

$$(10.86) \quad s_{ij} = 2G e_{ij}^{(0)} f(t).$$

Proces plastycznie czynny rozpocznie się, gdy opierając się na hipotezie Hubera-Misesa-Hencky'ego

$$(10.87) \quad s_{ij} s_{ij} = 4G^2 e_{ij}^{(0)} e_{ij}^{(0)} f^2(t) = \frac{2}{3} \sigma_0^2,$$

czyli gdy

$$(10.88) \quad f(t) = \frac{\sigma_0}{G \sqrt{6 e_{ij}^{(0)} e_{ij}^{(0)}}}.$$

Odpowiednie składowe dewiatora naprężeń (10.86) wynoszą wtedy

$$(10.89) \quad s_{ij} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{3}{2} e_{kl}^{(0)} e_{kl}^{(0)}}} e_{ij}^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 e_{ij}^*.$$

Przyjmując następnie, że w całej dalszej części procesu, a więc podczas procesu czynnego, składowe dewiatora naprężeń są stałe i określone wzorami (10.89), stwierdzamy bez trudu, że równania wszystkich trzech teorii plastyczności są spełnione. Istotnie, równania Hencky'ego-IIiuszina (10.34) są spełnione, gdy przyjmiemy

$$(10.90) \quad \varphi = \frac{f(t)}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} e_{kl}^{(0)} e_{kl}^{(0)}}.$$

Dalej, przy przyjęciu $s_{ij} = \text{const}$ mamy $\dot{s}_{ij} = 0$, zatem teorie Levy'ego-Misesa i Prandtla-Reussa pokrywają się w tym przypadku; odnośne równania są spełnione, gdy podstawimy

$$(10.91) \quad \lambda = \frac{\dot{f}(t)}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} e_{kl}^{(0)} e_{kl}^{(0)}}.$$

Tak więc w rozpatrywanym przypadku (10.85) wyniki wszystkich trzech teorii pokrywają się, są mianowicie określone wzorami (10.89). Trajektoria w przestrzeni naprężeń odpowiadająca procesowi czynnemu degeneruje się do punktu, następuje «stabilizacja naprężeń». Taka stabilizacja wystąpi przy dowolnym warunku idealnej plastyczności, jeżeli tylko zachowamy prawa fizyczne w postaci (10.34), (10.57) i (10.68) (możliwe modyfikacje praw płynięcia plastycznego omówimy w rozdziale III).

Proces, określony równaniami (10.85), będziemy nazywali *prostym procesem odkształcania* lub krótko *procesem prostym*. Proces prosty charakteryzuje się więc proporcjonalnym wzrostem składowych dewiatora odkształceń; jak widać ze wzorów (10.86) i (10.89), składowe dewiatora naprężeń pozostają wtedy również do siebie proporcjonalne. Ta ostatnia proporcjonalność i zbieżność wyników wszystkich trzech teorii zachodzi również w przypadku wzmocnienia plastycznego, jeżeli wzmocnienie to jest opisane równaniami, stanowiącymi bezpośrednie uogólnienie praw (10.34), (10.57) albo (10.68); przy innych opisach wzmocnienia plastycznego i w przypadku ciał anizotropowych proporcjonalność wzrostu składowych dewiatora odkształcenia nie oznacza jednocześnie proporcjonalności

składowych dewiatora naprężenia. Wtedy możemy wyróżnić proces prosty w odniesieniu do odkształceń i proces prosty w odniesieniu do naprężeń.

Szczególny przypadek procesu prostego, mianowicie przypadek proporcjonalnego wzrostu wszystkich składowych tensora (a nie tylko dewiatora) odkształcenia, nazwiemy *procesem proporcjonalnym* w odniesieniu do odkształceń; podobnie zdefiniujemy proces proporcjonalny w odniesieniu do naprężeń. Proporcjonalność procesu w odniesieniu do odkształceń nie powoduje na ogół proporcjonalności w odniesieniu do naprężeń i na odwrót. A. A. ILIUSZIN [947], [949] wykazał jednak następujące ważne twierdzenie, zwane *twierdzeniem o obciążeniu prostym*: w przypadku proporcjonalnego wzrostu wszystkich obciążeń zewnętrznych, działających na ciało, proces jest w każdym punkcie ciała proporcjonalny w odniesieniu zarówno do odkształceń jak i naprężeń, a więc jest procesem prostym i wyniki wszystkich trzech teorii pokrywają się. Twierdzenie to zostało wykazane co prawda tylko przy dość silnych założeniach ograniczających, mianowicie przy schematyzacji potęgowej wykresu rozciągania typu (9.7), jednorodności i nieściśliwości materiału oraz przy przyjęciu zasady zeszytwnienia, a więc przy pominięciu wpływu odkształceń na rozkład sił wewnętrznych i reakcji. Pod innymi założeniami, np. przy schematyzacji typu Prandtla, twierdzenie powyższe nie jest, ściśle rzecz biorąc, prawdziwe, jednak określa ono dość dobrze zakres stosowalności teorii odkształceniowej Hencky'ego-Iliuszina. Warunki stosowalności twierdzenia Iliuszina omawia szczegółowo JU. N. RABOTNOW [1128]. Przypadki różnych warunków plastyczności badał F. EDELMAN [124]. Szczególnie przypadki zbieżności teorii odkształceniowej i teorii płynięcia plastycznego omawiają G. H. HANDELMAN i W. H. WARNER [200].

W ogólnym przypadku nie istnieją takie układy obciążeń (poza pewnymi trywialnymi, jak np. wywołującymi jednorodny stan odkształcenia i jednorodny stan naprężenia), które urzeczywistniałyby proces prosty w każdym punkcie ciała; problem ten badał np. D. D. IWLEW [927] przy założeniu schematyzacji wykresu rozciągania opisanej wielomianem oraz W. D. KLUSZNIKOW [982]. L. I. SIEDOW [1160] zwrócił uwagę na trudności, pojawiające się w przypadku odkształceń skończonych.

Teorię odkształceniową Hencky'ego-Iliuszina można więc uznać za poprawną w przypadku procesów prostych, gdy wyniki pokrywają się z wynikami teorii Prandtla-Reussa; za błędną — w przypadku procesów neutralnych i bliskich procesom neutralnym, bowiem naruszany jest wtedy postulat ciągłości; za wystarczająco dokładną — przy procesach niezbyt odbiegających od prostego (procesy takie analizuje np. Ł. M. KACZANOW [976]). Teoria Prandtla-Reussa może opisywać zachowanie się ciała przy dowolnych procesach, co oczywiście nie oznacza, że w odniesieniu do konkretnego materiału zawsze opisuje je poprawnie. Pewne ograniczenia stosowalności teorii płynięcia plastycznego omawia praca J. MARINA i L. W. HU [387].

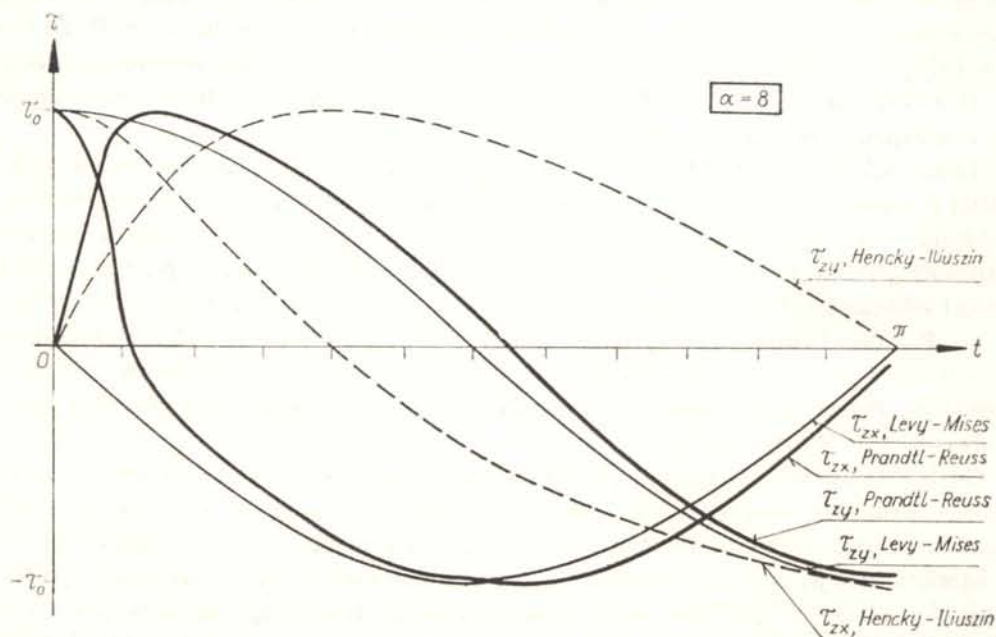
Gdybyśmy użyli sformułowania, że stosowalność teorii Hencky'ego-Iliuszina jest ograniczona wyłącznie do przypadku, kiedy jej wyniki pokrywają się z wynikami teorii Prandtla-Reussa, to znaczenie teorii odkształceniowej byłoby ocenione bardzo nisko. W istocie rzeczy jej rola jest znacznie większa. Po pierwsze, nawet w przypadku pokrywania się wyników, uzyskanie ich w oparciu o teorię Hencky'ego-Iliuszina jest o tyle łatwiejsze, że najdogodniej jest posługiwać się równaniami tej teorii, a następnie jedynie sprawdzać spełnienie równań Prandtla-Reussa. Po drugie, w zastosowaniach praktycz-

nych spotykamy się z licznymi procesami, które tylko nieznacznie odbiegają od prostego i wyniki teorii odkształceniowej są wystarczająco dokładne. Po trzecie wreszcie należy zauważyć, że wyniki licznych doświadczeń leżą z reguły między wynikami obu teorii, jakkolwiek niewątpliwie lepiej potwierdzają teorię płynięcia plastycznego.

Wróćmy jeszcze do zjawiska stabilizacji naprężeń, zaobserwowanej podczas czynnej części procesu prostego (10.85). S. D. LEJTES [1025, 1026] oraz A. G. DORFMAN i S. D. LEJTES [893] zaproponowali przyjęcie, w przybliżeniu, stabilizacji naprężeń również w przypadku procesów nieznacznie odbiegających od prostego. W porównaniu do teorii Prandla-Reussa hipoteza stabilizacji jest obciążona z reguły większym błędem, niż teoria Hencky'ego-Iliuszina, tym niemniej można za jej pomocą uzyskać niektóre rozwiązania o dość dobrej dokładności.

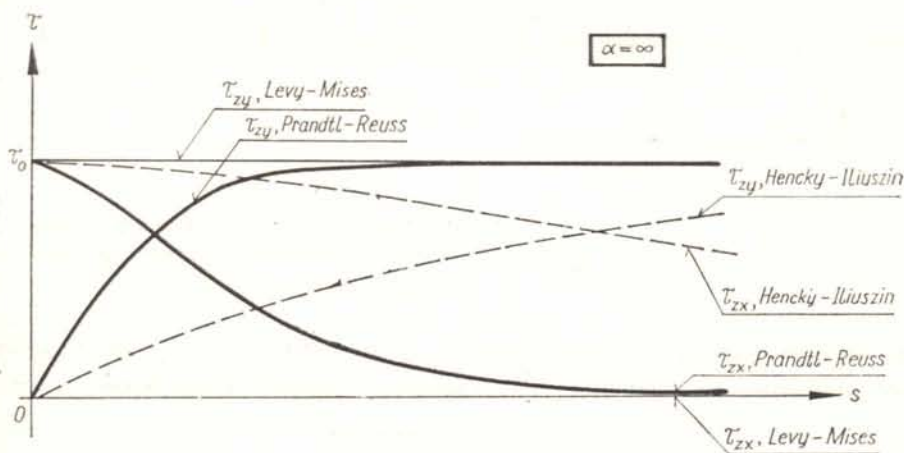
10.10. Przykład porównania wyników omówionych teorii. Powyżej wykazaliśmy, że przy procesie prostym wyniki wszystkich trzech omówionych teorii ciała idealnie plastycznego pokrywają się. Interesująca jest ocena różnic w przypadku procesu wyraźnie odbiegającego od procesu prostego.

Na rysunkach 40 i 41 przeprowadzono takie porównanie dla procesów, określonych rys. 39 i równaniami (10.49). Przedstawiono mianowicie wykresy naprężeń τ_{zx} i τ_{zy} w funkcji parametru t dla $\alpha = 8$ (rys. 40) i $\alpha = \infty$ (rys. 41, w tym przypadku $s = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha t$). W początkowej fazie procesu krzywe Prandla-Reussa są lepiej aproksymowane teorią Hencky'ego-Iliuszina, niż Levy'ego-Misesa, jednak ze wzrostem parametru t obie teorie płynięcia plastycznego stają się dość silnie zbieżne, a różnice w stosunku do teorii Hencky'ego-Iliuszina gwałtownie rosną.



Rys. 40. Zmiany naprężeń w czasie dla procesu pokazanego na rys 39 przy $\alpha = 8$

W przypadku $\alpha = \infty$, gdy proces jest prostoliniowy (ale nie prosty), wszystkie trzy linie dla każdego z naprężeń mają wspólne asymptoty zgodnie z twierdzeniem Ł. M. KACZANOWA [976]. Różnice liczbowe zmniejszają się jednak dopiero przy stosunkowo dużym odkształceniu γ_{zy} .



Rys. 41. Zmiany naprężeń w czasie dla procesu pokazanego na rys. 39 przy $\alpha \rightarrow \infty$

Inne przykłady porównania teorii odkształceniowej i teorii płynięcia plastycznego podają prace P.G. HODGE'A i G.N. WHITE'A [241], W. PRAGERA [550], F. EDELMANA [124], H.J. GREENBERGA, W.S. DORNA i E.H. WETHERELLA [186], M.R. SHAMMAMY [641] oraz M.R. SHAMMAMY i O.M. SIDEBOTTOMA [642].

11. Nośność graniczna

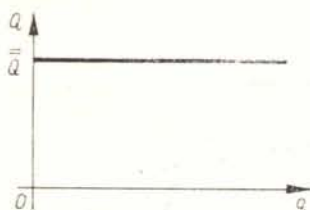
11.1. Pojęcie nośności granicznej. Dla zastosowań praktycznych szczególnie ważne jest określenie największego obciążenia, jakie może przenieść konstrukcja. Obciążenie takie nie zawsze istnieje; tak np. przy wszechstronnym równomiernym ściskaniu elementów, wykonanych z materiałów dość szerokiej klasy, nie stwierdzono zniszczenia przy dowolnie wielkiej wartości obciążenia. Podobna sytuacja występuje przy jednoosiowym ściskaniu bardzo krótkich prętów, wykonanych z materiału ciągliwego, o ile uwzględnimy zwiększenie się przekroju pręta w trakcie obciążania. Tym niemniej w znacznej większości przypadków największe obciążenie przyjmuje wartość skończoną.

Najprostszą ocenę największego obciążenia uzyskamy na drodze przyjęcia schematyzacji ciała idealnie sztywno-plastycznego przy pominięciu wpływu zmian geometrii ciała w trakcie procesu odkształcenia na rozkład sił wewnętrznych i reakcji, czyli przy przyjęciu zasady zeszywnienia. Wówczas gdy element obciążony jest jedną uogólnioną siłą zewnętrzną Q , to wykres zależności między tą siłą a pewnym charakterystycznym uogólnionym przemieszczeniem q odpowiada po prostu wykresowi $\sigma - \epsilon$ (rys. 42). Siła $Q = \bar{Q}$, przy której rozpoczną się odkształcenia, jest zarazem siłą największą, która może być przeniesiona przez element. Będziemy mówili, że przy tej wartości siły została wyczerpana nośność graniczna elementu, lub że element znajduje się w stanie nośności granicznej. Dokonując wreszcie

pewnego skrótu myślowego możemy po prostu nośnością graniczną elementu nazwać samą siłę \bar{Q} . Siła ta jest scharakteryzowana równaniem

$$(11.1) \quad \frac{dQ}{dq} = 0$$

obowiązującym oczywiście dla całej prostej poziomej, przedstawionej na rys. 42.



Rys. 42. Nośność graniczna elementu pod założeniem materiału idealnie sztywno-plastycznego i zasady zeszywnienia

W ogólnym przypadku działania n sił uogólnionych Q_i wszystkie one będą spełniać w stanie granicznym warunki typu (11.1), a sam stan graniczny będzie określony równaniem

$$(11.2) \quad f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0.$$

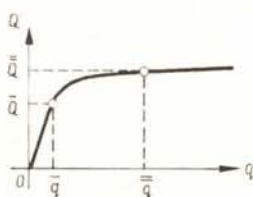
Równanie to będziemy nazywali równaniem powierzchni nośności granicznej. W stanie granicznym będziemy mieli do czynienia z przyrostem odkształceń i przemieszczeń, a więc z ruchem przy stałym obciążeniu; mówimy, że ruch ten odpowiada pewnemu *schematowi zniszczenia*.

Za pierwszą pracę w dziedzinie nośności granicznej ciał sztywno-plastycznych uważa się pracę [305], której autorem jest G. KAZINCZY. Określił on nośność graniczną kilku belek statycznie niewyznaczalnych. Teorię nośności granicznej płyt sztywno-plastycznych zapoczątkowaną przez A. INGERSLEVA [285], rozwinął w pierwszym rzędzie K. W. JOHANSEN [295]. Problemy anizotropii i niejednorodności w teorii nośności granicznej płyt badali W. OLSZAK [472, 473] i A. SAWCZUK [613]. Szczególnie bogata literatura dotyczy nośności granicznej ustrojów prętowych i płyt: wspomniemy tu jedynie monografie, których autorami są J.A. VAN DEN BROEK [718], A.A. GWOZDIEW [846], A.R. RZANICYN [1138], Z. SOBOTKA [656], B.G. NEAL [460], J.F. BAKER, M.R. HORNE i J. HEYMAN [11], L.S. BEEDLE [23], J. HEYMAN [216], R.H. WOOD [744], H. HAASE [195], D. NIEPOSTYN [464, 465], A. SAWCZUK i TH. JAEGER [620], A. SAWCZUK [623], M. JANAS [291]. Ogólne twierdzenia dotyczące nośności granicznej ciał idealnie sztywno-plastycznych należą do R. HILLA [224, 227] i W. PRAGERA [554, 555].

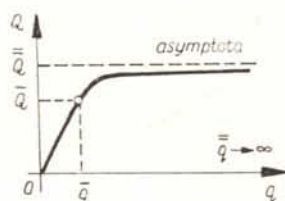
Podstawowym problemem staje się kwestia związku tak zdefiniowanej nośności granicznej z nośnością elementu rzeczywistego. Omówimy w kolejności wpływ trzech pominiętych tu czynników; odkształceń sprężystych, odstępstw od zasady zeszywnienia i plastycznego wzmocnienia materiału.

11.2. Wpływ odkształceń sprężystych. Wpływ odkształceń sprężystych przy jednoczesnym zachowaniu zasady zeszywnienia z reguły nie jest zbyt istotny. Typowe wykresy zależności obciążenie Q — uogólnione przemieszczenie q są przedstawione na rys. 43 i 44.

W przypadku przedstawionym na rys. 43 występuje zakres sprężysty, ograniczony parametrami nośności sprężystej \bar{Q} i \bar{q} , następnie zakres sprężysto-plastyczny, $\bar{Q} < Q < \bar{Q}$, $\bar{q} < q < \bar{q}$, wreszcie zakres czysto plastyczny, charakteryzujący się spełnianiem równania (11.1) przy obciążeniu $Q = \bar{Q}$. Jako przykład może tu posłużyć skręcanie pręta jednostronnie utwierdzonego o przekroju pierścieniowym; przez q rozumiemy wtedy przemieszczenie obwodowe dowolnego punktu przekroju na swobodnym końcu lub po prostu całkowity kąt skręcenia pręta, przez Q — moment obciążający. Innym przykładem jest cylinder grubościenny pod działaniem ciśnienia wewnętrznego.



Rys. 43. Nośność graniczna elementu wykonanego z materiału idealnie sprężysto-plastycznego osiągnięta przy skończonej wartości uogólnionego przemieszczenia



Rys. 44. Nośność graniczna elementu wykonanego z materiału idealnie sprężysto-plastycznego osiągnięta przy nieskończonej wartości uogólnionego przemieszczenia

W przypadku przedstawionym na rys. 44 równanie (11.1) jest spełnione dopiero w nieskończoności: siła uogólniona Q zmierza do \bar{Q} dopiero w granicy, co w pewnym stopniu tłumaczy nazwę «nośność graniczna». Za przykład może tu posłużyć skręcanie pręta o przekroju kołowym (pełnym), lub czyste zginanie. W obu omówionych przypadkach największe obciążenie jest równe nośności granicznej obliczonej dla ciała idealnie sztywno-plastycznego.

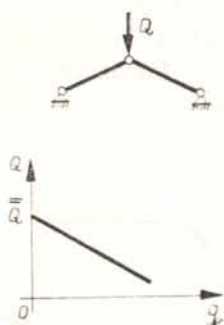
Ogólnej analizie nośności granicznej ciał idealnie sprężysto-plastycznych i porównaniom z teorią ciał sztywno-plastycznych poświęcone są prace D.C. DRUCKERA, H.J. GREENBERGA, E.H. LEE i W. PRAGERA [99, 100, 101], J.F. W. BISHOPA [30] i E.H. LEE [339].

11.3. Wpływ odstępstw od zasady zeszywnienia. Znacznie bardziej istotne różnice mogą wystąpić przy dużych przemieszczeniach lub odkształceniach, gdy uwzględnianie zasady zeszywnienia nie jest już dopuszczalne. Założymy na razie schematyzację ciała idealnie sztywno-plastycznego. Typowe wykresy zależności uogólnionej siły Q od pewnego uogólnionego przemieszczenia q są pokazane na rysunkach 45–47 wraz z przykładowymi konstrukcjami.

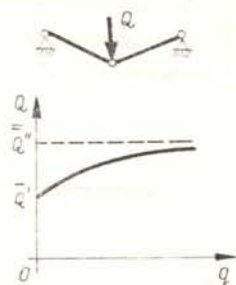
W przypadku układu kratowego, przedstawionego na rys. 45, siła \bar{Q} , obliczona przy przyjęciu zasady zeszywnienia, jest istotnie największą siłą, jaką może przenieść układ (pracy układu «po przeskoku» na drugą stronę w tej chwili nie rozważamy), jednak warunek (11.1) nie jest spełniony ani w jednym punkcie. Tym niemniej siła \bar{Q} jako największa zasługuje na nazwę nośności granicznej.

W przypadku układu kratowego, przedstawionego na rys. 46, siła rośnie wraz z ugięciem do pewnej wartości asymptotycznej \bar{Q}'' . Każda z sił \bar{Q}' , \bar{Q}'' zasługuje tu w pewnym sensie na opatrzenie jej nazwą «nośność graniczna»; czasem mówimy o *nośności granicznej*

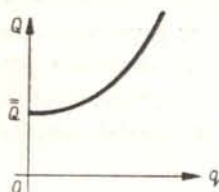
pierwszego i drugiego rodzaju. W przypadku krótkiego pręta poddanego ściskaniu (rys. 47) nośność graniczna drugiego rodzaju (związana ze zwiększaniem się przekroju pręta) zmierza do nieskończoności.



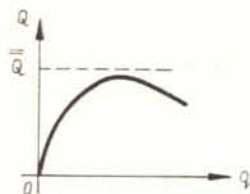
Rys. 45. Zmniejszanie się obciążenia w wyniku zmian geometrii układu



Rys. 46. Wzrost obciążenia w wyniku zmian geometrii układu



Rys. 47. Nieskończenie wielka nośność drugiego rodzaju



Rys. 48. i Rys. 49. Przykłady zależności uogólnionej siły od uogólnionego przemieszczenia przy uwzględnieniu odkształceń sprężystych i zmian geometrii układu



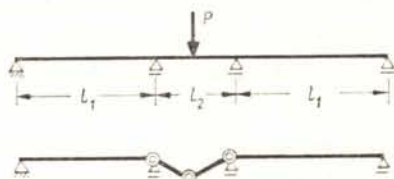
Dość częstym zjawiskiem przy odstępieniu od zasady zeszytywnienia jest pojawianie się stref plastycznie biernych pomimo obciążania ciała jako całości (nawet przy proporcjonalnym wzroście wszystkich obciążeń zewnętrznych). Przy przyjęciu zasady zeszytywnienia sytuacja taka jest również możliwa, jednak znacznie rzadsza.

Problem staje się jeszcze bardziej złożony przy jednoczesnym uwzględnianiu odkształceń sprężystych i odstępstw od zasady zeszytywnienia. Dwa typowe wykresy $Q = f(q)$ podają rys. 48 i 49; odpowiadają one rys. 45 i 46 przy uwzględnianiu odkształceń sprężystych. Związek rzeczywistego największego obciążenia z nośnością graniczną ciała, obliczoną w sposób klasyczny, nie zawsze jest tu oczywisty. Szczególnie w przypadku przedstawionym na rys. 48 rzeczywiste największe obciążenie może być wyraźnie niższe od \bar{Q} .

Zwróćmy tu jeszcze uwagę na pewien paradoks, któremu poświęcili pracę [679] F. STÜSSI i C.F. KOLLBRUNNER. Badali oni nośność graniczną symetrycznej trójprzęsłowej belki statycznie niewyznaczalnej, obciążonej jedynie siłą skupioną P na środkowym przęśle

(rys. 50). Jedyny możliwy schemat zniszczenia tej belki jako sztywno-plastycznej przedstawiono poniżej; odpowiada on obciążeniu granicznemu

$$(11.3) \quad \bar{P} = \frac{8\bar{M}}{l_2},$$



Rys. 50. Paradoks Stüssi-Kollbrunnera

(gdzie \bar{M} określa nośność graniczną przekroju belki), zatem nie zależy od długości l_1 . Tymczasem w przypadku granicznym $l_1 \rightarrow \infty$ przęsła boczne przestają mieć jakikolwiek wpływ na przęsło środkowe, które pracuje jako swobodnie podparte, zatem nośność wynosi $\bar{P} = 4\bar{M}/l_2$. W istocie rzeczy ten brak ciągłości obciążenia granicznego związany jest z dużymi odkształceniami (a raczej przemieszczeniami) sprężystymi i koniecznością odstępstw od zasady zeszywnienia. Wyjaśnieniu tego paradoksu poświęcona jest praca P.S. SYMONDSA i B.G. NEALA [686].

Na znaczenie odstępstwa od zasady zeszywnienia i wpływu zmian geometrii układu na nośność graniczną zwrócili w sposób wyraźniejszy uwagę C. DYRBYE i P. LANGE HANSEN [122] przy doświadczalnym badaniu nośności granicznej łuków. W istocie rzeczy efekt ten przy ocenie nośności granicznej słupów ściskanych uwzględniany był już znacznie dawniej (E. CHWALLA [70, 71], K. JEŹEK [294], F. HARTMANN [203], S.D. LEJTES [1022, 1023]). Autorami dalszych prac są E.T. ONAT [494, 497, 498], E.T. ONAT i R.M. HAYTHORNTHWAITE [495, 204], B. PAUL i P.G. HODGE [521], M. DUSZEK [115, 116, 117, 899]. Problemowi stateczności i jednoznaczności rozwiązań w przypadku wpływu zmian geometrii poświęcona jest praca R. HILLA [233]. Pewną metodę określania nośności granicznej przy dużych przemieszczeniach w przypadku układów o skończonej liczbie stopni swobody podał A. M. PROCENKO [1124].

Duże znaczenie ma również wpływ zmian geometrii przy ocenie nośności elementów wirujących, bowiem promieniowe przemieszczenie elementu ciała powoduje wzrost siły odśrodkowej. Problemowi temu w przypadku wirujących tarcz kołowych poświęcona jest praca M.H. LEE WU [747], a w przypadku wirujących cylindrów W. SZCZEPIŃSKIEGO [689].

11.4. Wpływ wzmocnienia plastycznego. Klasyczne pojęcie nośności granicznej zostało wprowadzone dla ciał idealnie sztywno-plastycznych ewentualnie idealnie sprężysto-plastycznych. Przypadek wzmocnienia plastycznego (np. wzmocnienia liniowego) wykazuje przy przyjęciu zasady zeszywnienia zasadniczą różnicę jakościową. W przypadku wykresu nieskończenie długiego również największe obciążenie ciała byłoby nieskończenie wielkie; praktycznie wykres ogranicza się pewnym punktem, odpowiadającym pęknięciu próbki, a zatem nośność elementu ogranicza się zniszczeniem spójności.

Sytuacja może przedstawiać się odmiennie przy uwzględnieniu zmian geometrii układu. Wtedy możemy mieć do czynienia z warunkiem maksimum obciążenia typu (11.1) nie

tylko przy wzmocnieniu plastycznym, ale nawet w przypadku ciała idealnie sprężystego. Dogodnym przykładem są tu zjawiska «przeskoków», np. układu kratowego przedstawionego na rys. 45 lub małowyniosłej powłoki. Tak więc o nośności granicznej elementów, wykonanych z materiałów wykazujących wzmocnienie plastyczne, mówimy zazwyczaj jedynie przy odrzuceniu zasady zeszywnienia, gdy zmiany geometrii pogarszają warunki pracy konstrukcji. Takie podejście reprezentuje np. praca E.T. ONATA [497]. Przy wzmocnieniu odcinkowo-liniowym możliwe jest występowanie kilku ekstremów obciążenia; stosunkowo prostą analizę tego zagadnienia na modelu układu kratowego Misesa podają J. LEDZIŃSKI i Z. WASZCZYŻYN [338].

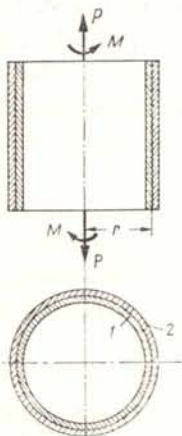
Szczególne znaczenie ma uwzględnienie zmian geometrii dla oceny nośności zbiorników ciśnieniowych, zwłaszcza wykonanych z materiałów zdolnych do dużych odkształceń. Teoria takich zbiorników obrotowo-symetrycznych, uwzględniająca duże odkształcenia i duże przemieszczenia, została zaproponowana przez A.S. GRIGORIEWA [879, 880, 188] i rozwijana przez J. ORKISZA [503, 506, 507]. Podobne ujęcie zastosowali do oceny nośności w prostszym przypadku wielowarstwowych walcowych zbiorników ciśnieniowych M. ŻYCKOWSKI i M. GALOS [776, 155].

11.5. Nośność graniczna a całkowite uplastycznienie ciała. Jest faktem dobrze znanym, że nośność graniczna ciała idealnie plastycznego może zostać wyczerpana przy niecałkowitym uplastycznieniu ciała: wystarczy przypomnieć schemat zniszczenia belki jednostronnie utwierdzonej, obciążonej na końcu swobodnym siłą skupioną. Natomiast często sądzi się, że całkowite uplastycznienie ciała idealnie plastycznego jest w każdym razie warunkiem wystarczającym do wyczerpania jego nośności. Taka zbieżność zjawisk istotnie zachodzi w znacznej większości przypadków; od tej reguły występują jednak wyjątki, tak

że traktowanie całkowitego uplastycznienia jako warunku wystarczającego wyczerpania nośności granicznej ciała nie może być uważane za poprawne. Wyczerpanie nośności następuje bowiem dopiero przy pojawieniu się jakiegoś schematu zniszczenia, a więc możliwości wystąpienia przyrostów odkształceń bez przyrostu obciążeń zewnętrznych.

Przytoczmy tu stosunkowo prosty przykład całkowitego uplastycznienia ciała, które *nie powoduje jeszcze wyczerpania nośności granicznej*⁽¹⁾. Weźmiemy pod uwagę cylinder cienkościenny, którego ścianka złożona jest z dwóch różnych materiałów, spojonych ze sobą (rys. 51). Własności sprężyste obu materiałów są dla uproszczenia jednakowe (materiały nieściśliwe, $E = 3G$), natomiast granica plastyczności pierwszego materiału σ_{01} jest niższa od granicy plastyczności drugiego materiału σ_{02} ; stosunek liczbowy σ_{02}/σ_{01} ze względów czysto rachunkowych określimy dopiero później.

Powierzchnia przekroju każdej z części składowych jest



Rys. 51. Przykład całkowitego uplastycznienia nie powodującego wyczerpania nośności granicznej układu

⁽¹⁾ Myśl przewodnią tego przykładu podał Z. MRÓZ na seminarium Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki Krakowskiej.

równa i wynosi F ; przyjmijmy ponadto, że ścianka jest na tyle cienka, że promień r będzie promieniem średnim dla każdej z części składowych. Nie rozpatrujemy przy tym jednak zjawiska utraty stateczności ścianki.

W pierwszym etapie cylinder poddany jest działaniu osiowo przyłożonej siły P , wynoszącej $P = 3\sigma_{01}F$; przy założeniu $\sigma_{02} > 2\sigma_{01}$ otrzymujemy wtedy następujący układ naprężeń: $\sigma_1 = \sigma_{01}$, $\sigma_2 = 2\sigma_{01}$. W drugim etapie skręcamy cylinder zachowując stałą siłę rozciągającą P . W pierwszym cylindrze składowym wystąpi wtedy proces plastyczności czynnicy, który opiszemy równaniami Prandtla-Reussa, natomiast w drugim cylindrze składowym — proces sprężysty, opisany prawem Hooke'a. Parametryzując warunek plastyczności HMH dla pierwszego cylindra napiszemy

$$(11.4) \quad \sigma_1 = \sigma_{01} \cos \psi_1, \quad \tau_1 = \frac{\sigma_{01}}{\sqrt{3}} \sin \psi_1.$$

Równania Prandtla-Reussa zapiszemy najpierw w postaci

$$(11.5) \quad \frac{d\varepsilon - \frac{d\sigma_1}{3G}}{d\gamma - \frac{d\tau_1}{G}} = \frac{\sigma_1}{3\tau_1}$$

(przy $d\varepsilon$ i $d\gamma$ nie piszemy wskaźników, bowiem odkształcenia obu cylindrów składowych są identyczne), a po podstawieniu (11.4)

$$(11.6) \quad d\varepsilon + \frac{\sigma_{01}}{3G} \sin \psi_1 d\psi_1 = \left(d\gamma - \frac{\sigma_{01}}{G\sqrt{3}} \cos \psi_1 d\psi_1 \right) \frac{\operatorname{ctg} \psi_1}{\sqrt{3}}$$

W oparciu o prawo Hooke'a dla drugiego cylindra

$$(11.7) \quad d\varepsilon = \frac{d\sigma_2}{3G} = -\frac{d\sigma_1}{3G}, \quad d\gamma = \frac{d\tau_2}{G},$$

bowiem z warunku stałej siły podłużnej $d\sigma_1 + d\sigma_2 = 0$. Podstawienie i proste przekształcenie prowadzi do równania

$$(11.8) \quad d\tau_2 = \frac{2\sigma_{01}}{\sqrt{3}} \frac{d\psi_1}{\cos \psi_1} - \frac{\sigma_{01}}{\sqrt{3}} \cos \psi_1 d\psi_1.$$

Po scałkowaniu i uwzględnieniu warunku początkowego $\tau_2(0) = 0$ otrzymujemy

$$(11.9) \quad \tau_2 = \frac{2\sigma_{01}}{\sqrt{3}} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\psi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sigma_{01}}{\sqrt{3}} \sin \psi_1.$$

Wobec założenia stałej siły podłużnej

$$(11.10) \quad \sigma_2 = 3\sigma_{01} - \sigma_1 = 3\sigma_{01} - \sigma_{01} \cos \psi_1$$

i równania (11.4), (11.9) i (11.10) opisują drugi etap procesu w funkcji parametru ψ_1 .

Koniec drugiego etapu i początek całkowitego uplastycznienia jest uwarunkowany spełnieniem przez σ_2 i τ_2 odpowiedniego warunku plastyczności, mianowicie

$$(11.11) \quad (3\sigma_{01} - \sigma_{01} \cos \psi_1)^2 + \left[2\sigma_{01} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\psi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sigma_{01} \sin \psi_1 \right]^2 = \sigma_{02}^2.$$

Jest to równanie przestępne względem parametru ψ_1 . Dla ułatwienia rachunków celowo jednak nie dobraliśmy dotychczas wartości σ_{02} ; idąc drogą odwrotną, przyjmijmy np. dla prostoty $\psi_1 = \pi/6 = 30^\circ$ i obliczymy odpowiednią wartość σ_{02} :

$$(11.12) \quad \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}} = \sqrt{10 - 3\sqrt{3} - \ln 3 + \ln^2 3} = 2,216.$$

Przy końcu drugiego etapu, naprężenia wynoszą: $\sigma_1 = 0,866 \sigma_{01}$, $\tau_1 = 0,289 \sigma_{01}$, $\sigma_2 = 2,134 \sigma_{01} = 0,963 \sigma_{02}$, $\tau_2 = 0,346 \sigma_{01} = 0,156 \sigma_{02}$. Parametryzując warunek plastyczności dla drugiego cylindra analogicznie do (11.4) otrzymujemy w chwili rozpoczęcia się całkowitego uplastycznienia $\psi_2 = \arctg \tau_2 \sqrt{3}/\sigma_2 = 0,273 = 15^\circ 38'$.

Wymienione powyżej naprężenia powodują całkowite uplastycznienie cylindra, ale nie wyczerpują jego nośności granicznej. Istotnie, przy stałej sile równej $P = 3\sigma_{01} Fr$ i stałym momencie $M = (\tau_1 + \tau_2) Fr = 0,635 \sigma_{01} Fr$ nie istnieje możliwość wzrostu odkształceń γ i ε , czyli nie istnieje schemat plastycznego zniszczenia. Wzrost γ spowoduje wzrost momentu skręcającego. Ten trzeci etap pracy cylindra opiszemy równaniami Prandla-Reussa dla obu cylindrów składowych. Wprowadzając parametryzację typu (11.4) dla obu cylindrów po prostych przekształceniach otrzymujemy układ równań

$$(11.13) \quad \begin{aligned} \sin \psi_1 d\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \psi_1 d\gamma &= -\frac{\sigma_{01}}{3G} d\psi_1, \\ \sin \psi_2 d\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \psi_2 d\gamma &= -\frac{\sigma_{02}}{3G} d\psi_2, \end{aligned}$$

który wraz z warunkiem stałej siły rozciągającej

$$(11.14) \quad \sigma_{01} \cos \psi_1 + \sigma_{02} \cos \psi_2 = \frac{P}{F} = 3\sigma_{01}$$

określa trzy poszukiwane funkcje, na przykład $\psi_1 = \psi_1(\gamma)$, $\psi_2 = \psi_2(\gamma)$ i $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$.

Scałkowanie powyższego układu równań natrafia na trudności, jednakże określenie nośności granicznej rozpatrywanego cylindra jest znacznie prostsze. Potraktujemy równania (11.13) jako układ o niewiadomych $d\varepsilon$ i $d\gamma$; wyznacznik główny tego układu wynosi

$$(11.15) \quad \Delta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\psi_1 - \psi_2)$$

i jest równy zero przy $\psi_1 = \psi_2$ (inne pierwiastki nie wchodzą w rachubę). Jeżeli $\psi_1 = \psi_2 = \text{const}$, to $d\psi_1 = d\psi_2 = 0$ i układ (11.13) staje się nieoznaczony; istnieje wtedy możliwość różnych od zera przyrostów $d\varepsilon$ i $d\gamma$ bez zmiany naprężeń, a zatem bez zmiany przyłożonych sił. Pojawia się więc schemat plastycznego zniszczenia i nośność cylindra ulega wyczerpaniu. Pomocniczy kąt $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ określamy z (11.14):

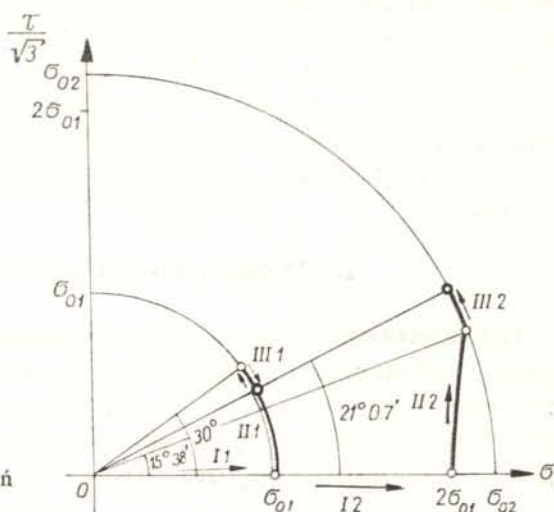
$$(11.16) \quad \cos \psi = \frac{3\sigma_{01}}{\sigma_{01} + \sigma_{02}} = 0,9328, \quad \psi = 0,369 = 21^\circ 07';$$

przybiera on więc pewną wartość pośrednią między wartościami ψ_1 i ψ_2 na początku trzeciego etapu procesu. Odpowiedni moment skręcający wynosi:

$$(11.17) \quad \bar{M} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_{01} + \sigma_{02}) Fr \sin \psi = 0,676 \sigma_{01} Fr$$

i jest około 7% większy od momentu na początku całkowitego uplastycznienia.

Przebieg poszczególnych etapów (I, II, III) jest zilustrowany wykresem w układzie $\sigma - \tau/\sqrt{3}$ na rys. 52.



Rys. 52. Trajektorie w płaszczyźnie naprężeń dla cylindra pokazanego na rys. 51

11.6. Nośność konstrukcji w przypadku obciążeń zmiennych w czasie. Konstrukcje bardzo często obciążane są układem sił, z których każda może się niezależnie zmieniać w pewnych granicach. Jeżeli nawet żaden z możliwych układów sił nie wyczerpuje statycznej nośności granicznej konstrukcji, to jednak przy obciążeniach zmiennych w czasie możliwe jest stopniowe rozpraszanie energii i stały nieograniczony wzrost odkształceń plastycznych, prowadzący do zniszczenia konstrukcji. Mówimy wtedy, że konstrukcja *nie przystosowała się* do programu zmian obciążenia. W przeciwnym razie, gdy przy obciążeniach zmiennych w czasie nie następuje nieograniczony wzrost odkształceń plastycznych, mówimy o *plastycznym przystosowaniu się konstrukcji*. Proste prętowe modele nieograniczonego wzrostu odkształceń przy obciążeniach zmiennych podali S. S. GILL [172] oraz C. RUIZ [587].

Pojęcie plastycznego przystosowania się wprowadza się zazwyczaj na szczeblu *B* lub *S*. Można je również wprowadzić na szczeblu *P* w przypadku występowania wzmocnienia plastycznego; okazuje się przy tym, że brak plastycznego przystosowania się jest związany z efektem Bauschingera. Obszarem plastycznego przystosowania się będziemy nazywali więc każdy obszar w przestrzeni czynników wyężenia o tej własności, że dowolny proces scharakteryzowany ruchem punktu wewnątrz tego obszaru nie powoduje nieograniczonego wzrostu odkształceń plastycznych.

Problemy plastycznego przystosowania się konstrukcji rozpatrywał pierwszy w r. 1926 M. GRÜNING [189]. Autorami dalszych prac o charakterze częściowo doświadczalnym, byli G. KAZINCZY [306], J. FRITZSCHE [149], E. O. PATON i B. N. GORBUNOW [1116]. H. BLEICH [34] i E. MELAN [399] podali pierwsze ogólniejsze twierdzenia dotyczące ustrojów prętowych, a E. MELAN [401] — dotyczące trójwymiarowego kontinuum. Prostszy dowód twierdzenia Melana (które przytoczymy w p. 13.4) podali P. S. SYMONDS [685] i W. T. KOITER [316]. Dalsze prace należą do J. DUTHEILA [119], M. R. HORNE'A [267], B. G. NEALA [459] (wzmocnienie plastyczne), P. S. SYMONDSA i W. PRAGERA [683].

Drugie ogólne twierdzenie wykazał w r. 1956 W. T. KOITER [317]. E. W. PARKES [520] zwrócił uwagę na problem plastycznego przystosowania się konstrukcji do zmiennych obciążeń cieplnych; ujęcie teoretyczne tego problemu podał W. PRAGER [560, 561], dalsze prace w tym kierunku prowadzili W. I. ROZENBLUM [1145, 1146, 1149] oraz D. A. GOCHFELD [860, 861, 868, 872, 874]. W. W. MOSKWITIN [1086] sformułował warunki procesu prostego w przypadku obciążeń wielokrotnych; liczne przypadki szczególnie omawia jego monografia [1087]. J. A. KÖNIG w pracy [324] sformułował warunki plastycznego przystosowania się konstrukcji wyrażone za pomocą wewnętrznych sił uogólnionych.

12. Metody redukcji liczby równań teorii plastyczności

12.1. Zestawienie równań klasycznej teorii idealnej plastyczności. Komplet równań klasycznej teorii plastyczności obejmuje w ogólnym przypadku 16 równań. Dziewięć równań, stanowiących podstawę mechaniki ośrodków ciągłych, jest identycznych jak w teorii sprężystości, reologii itp.; są to trzy równania równowagi wewnętrznej, które we współrzędnych kartezjańskich zapiszemy krótko

$$(12.1) \quad \sigma_{i,j,i} + F_j = 0$$

i sześć związków między odkształceniami a przemieszczeniami; przy założeniu małych odkształceń i małych obrotów

$$(12.2) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Te ostatnie równania mogą być zastąpione układem sześciu równań nierozdzielności. Ponadto, zgodnie z wynikami badań doświadczalnych, prawo zmiany objętości izotropowego ciała sprężystego zachowuje również swą ważność w teorii plastyczności;

$$(12.3) \quad \varepsilon_m = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m.$$

Różnice występują dopiero przy prawie zmiany postaci; prawo takie zawiera w stosunku do teorii sprężystości nową funkcję niewiadomą φ lub λ . Według Hencky'ego-Iliuszina dla ciała izotropowego

$$(12.4) \quad e_{ij} = \varphi s_{ij},$$

według Levy'ego-Misesa

$$(12.5) \quad \dot{e}_{ij} = \lambda s_{ij},$$

według Prandtla-Reussa

$$(12.6) \quad \dot{e}_{ij} = \lambda s_{ij} + \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij}.$$

Każdy z układów (12.4)–(12.6) obejmuje pięć niezależnych równań skalarnych. Szesnastym równaniem jest warunek idealnej plastyczności, który krótko można zapisać w postaci

$$(12.7) \quad \sigma_{\text{red}} = \sigma_0.$$

W innych układach współrzędnych zmieniają się jedynie równania (12.1) i (12.2),

natomiast przy założeniu lokalnej ortogonalności układu w pozostałych równaniach następuje jedynie formalna zamiana wskaźników.

Równania powyższe określają sześć składowych stanu naprężenia σ_{ij} , sześć składowych stanu odkształcenia ε_{ij} , trzy współrzędne wektora przemieszczenia u_i oraz funkcję φ lub λ . Warunki brzegowe określają bądź trzy składowe stanu naprężenia, bądź trzy współrzędne wektora przemieszczenia lub wektora prędkości na brzegu ciała S . Zazwyczaj można wyodrębnić pewną część brzegu ciała S_T , na której obowiązują naprężeniowe warunki brzegowe, oraz część brzegu S_V , na której obowiązują warunki przemieszczeniowe (rys. 53). W przypadku rozwiązywania problemu sprężysto-plastycznego należy określić obszary uplastycznione, w których $\lambda > 0$ lub $\varphi > 1/2G$ i w tych obszarach wyznaczyć wymienionych powyżej szesnaście niewiadomych, oraz obszary sprężyste, w których $\lambda = 0$ lub $\varphi = 1/2G$, a zamiast (12.7) obowiązuje nierówność $\sigma_{red} < \sigma_0$ i w tych obszarach wyznaczyć piętnaście pozostałych niewiadomych. W przypadku określania nośności granicznej obciążenia powierzchniowe (lub masowe) są dane z dokładnością do pewnej stałej, w najprostszym przypadku

$$(12.8) \quad \mathbf{p}_n = m \mathbf{p}_{n0};$$

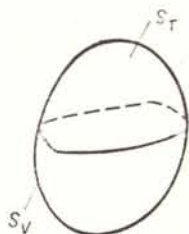
należy ponadto wyznaczyć taką wartość stałej m , która odpowiada powstaniu plastycznego schematu zniszczenia.

Przy tak dużej liczbie równań i niewiadomych funkcji kwestia redukcji tej liczby przez rugowanie niewiadomych nabiera pierwszorzędного znaczenia. Metody tej redukcji są bądź identyczne, jak w teorii sprężystości, bądź też dostosowane specjalnie do potrzeb teorii plastyczności.

12.2. Funkcje naprężeń. Przez funkcje naprężeń rozumiemy funkcje powiązane ze składowymi stanu naprężenia tak, że warunki równowagi wewnętrznej po ich wprowadzeniu stają się spełnione tożsamościowo. Są to więc funkcje rugujące warunki równowagi wewnętrznej. Sposób ich wprowadzania jest taki sam, jak w teorii sprężystości, natomiast ostateczne równania, określające te funkcje są oczywiście odmienne. Pożądana redukcja następuje wtedy, gdy liczba funkcji naprężeń jest równa liczbie niewiadomych składowych stanu naprężenia pomniejszonej o liczbę równań równowagi; w ogólnym przypadku przestrzennym powinno zatem być ich trzy.

Istnieją różne możliwości wprowadzenia funkcji naprężeń; pewne ogólne rozważania na ten temat zawierają prace J. A. KRUTKOWA [1007] i W. I. BŁOCHA [816]. Jeżeli wprowadzimy symetryczny tensor T_ϕ tak, że we współrzędnych kartezjańskich naprężenia wyrażają się wzorami

$$(12.9) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{yy}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \Phi_{xx}}{\partial y \partial z} \end{aligned}$$



Rys. 53. Warunki brzegowe naprężeniowe i przemieszczeniowe

(pozostałe wzory uzyskujemy przez cykliczną przemianę wskaźników), to równania równowagi wewnętrznej przy braku sił masowych są spełnione tożsamościowo. Spośród sześciu niezależnych składowych tensora funkcji naprężeń T_ϕ trzy można przyjąć dowolnie, np. równe zeru; wtedy dopiero uzyskujemy pożądaną redukcję liczby niewiadomych. Łatwo obliczyć, że istnieje dwadzieścia takich możliwości doboru układu trzech funkcji naprężeń. Najbardziej znane układy, to *układ funkcji naprężeń Maxwella* Φ_{xx} , Φ_{yy} , Φ_{zz} (przy $\Phi_{xy} \equiv \Phi_{yz} \equiv \Phi_{zx} \equiv 0$);

$$(12.10) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{yy}}{\partial z^2}, & \tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 \Phi_{xx}}{\partial y \partial z}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{zz}}{\partial x^2}, & \tau_{zx} &= -\frac{\partial^2 \Phi_{yy}}{\partial z \partial x}, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \Phi_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{xx}}{\partial y^2}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi_{zz}}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

i *układ funkcji naprężeń Morery* Φ_{xy} , Φ_{yz} , Φ_{zx} (przy $\Phi_{xx} \equiv \Phi_{yy} \equiv \Phi_{zz} \equiv 0$)

$$(12.11) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_{yz}}{\partial y \partial z}, & \tau_{yz} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial z} \right), \\ \sigma_y &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_{zx}}{\partial z \partial x}, & \tau_{zx} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} \right), \\ \sigma_z &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_{xy}}{\partial x \partial y}, & \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y} \right); \end{aligned}$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie xy wystarczy pozostawić funkcję $\Phi_{zz} = \Phi_{zz}(x, y)$; nosi ona nazwę *funkcji naprężeń Airy'ego*. W przypadku swobodnego skręcania pręta pryzmatycznego o osi z , gdy zgodnie z założeniem de Saint-Venanta można przyjąć $\sigma_x \equiv \sigma_y \equiv \sigma_z \equiv \tau_{xy} \equiv 0$, a pozostałe dwie składowe zależą tylko od zmiennych x i y , można posługiwać się funkcją

$$(12.12) \quad \psi = \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y}$$

która nosi nazwę *funkcji naprężeń Prandtla*.

W przypadku współrzędnych walcowych odpowiednie wzory można uzyskać przez transformację naprężeń, funkcji naprężeń i różniczkowanie względem nowych zmiennych. W tym przypadku, jak podaje W. I. BŁOCH, na omówionej drodze można otrzymać nie 20, lecz tylko 18 układów funkcji naprężeń, a w przypadku osiowej symetrii — 10. Jeden z takich układów podaje M. M. FIŁONIENKO-BORODICZ [1216].

Omówimy tu tylko pewne przypadki szczególne. Gdy naprężenia zależą tylko od dwóch zmiennych r i θ , to wówczas w trzech równaniach równowagi wewnętrznej (7.15) występuje tylko 5 składowych stanu naprężenia (σ_z odpada). Równania te wyrugujemy wprowadzając

np. funkcje Φ_{zz} i Ψ dwóch zmiennych r i θ takie, że

$$(12.13) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{zz}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_{zz}}{\partial \theta^2}, & \tau_{zr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi_{zz}}{\partial r^2}, & \tau_{\theta z} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{zz}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_{zz}}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

Gdy natomiast naprężenia zależą tylko od dwóch zmiennych r i z (symetria obrotowa), to w równaniach (7.15) występuje wszystkie 6 składowych, bowiem σ_θ zostaje w pierwszym równaniu. Pożądane rugowanie tych równań uzyskamy, wprowadzając na przykład trzy funkcje Φ , χ i Ψ dwóch zmiennych r i z (M. M. FIŁONIENKO-BORODICZ [1216]), takie, że

$$(12.14) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\Phi}{r}, & \tau_{\theta z} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}, & \tau_{zr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial z}, \\ \sigma_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r}, & \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{aligned}$$

W przypadku $\tau_{\theta z} \equiv \tau_{r\theta} \equiv 0$, gdy kierunek θ jest kierunkiem głównym, funkcja $\Psi \equiv 0$. Czasem tylko ten przypadek bywa nazywany symetrią obrotową: można by mówić wtedy o symetrii obrotowej w węższym sensie. Przy swobodnym skręcaniu prętów niepryzmatycznych lub kołowo zakrzywionych pozostaje tylko funkcja $\Psi = \Psi(r, z)$, natomiast $\Phi \equiv \chi \equiv 0$.

Jak już wspomnieliśmy, funkcje naprężeń mogą być wprowadzane identycznymi wzorami w teorii sprężystości, plastyczności lub reologii. Jednakże w teorii plastyczności często dogodnie jest wprowadzić przy funkcjach naprężeń pewien mnożnik o wymiarze naprężeń, np. σ_0 lub τ_0 ; wtedy same funkcje są bezwymiarowe (przy jednoczesnym wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych).

W teorii sprężystości funkcjami naprężeń nazywa się czasem funkcje tak wprowadzone, aby uzyskać nie tylko wyrugowanie warunków równowagi wewnętrznej, lecz również rozprężenie układu równań różniczkowych, określających te funkcje (równań wynikających z warunków nierozdzielności). S. KALISKI [303] stosuje tu dogodną, wyróżniającą nazwę «bifunkcje naprężeń»; oczywiście bifunkcje naprężeń dla poszczególnych typów ciał muszą być wprowadzane odrębnymi wzorami. W teorii plastyczności uzyskanie rozprężenia równań na drodze wprowadzenia bifunkcji naprężeń na ogół nie jest możliwe.

12.3. Równania przemieszczeniowe teorii plastyczności. Jedną z bardziej efektywnych metod redukcji liczby równań w teorii sprężystości jest wyrugowanie naprężeń przez odkształcenia opierając się na prawie Hooke'a, a następnie odkształceń przez przemieszczenia opierając się na związkach (8.26). Otrzymany układ trzech równań o niewiadomych współrzędnych wektora przemieszczenia nosi nazwę równań przemieszczeniowych Lamé'go.

W teorii plastyczności podobne podejście jest możliwe przy wykorzystaniu równań Hencky'ego-Iliuszina lub Levy'ego-Misesa, natomiast natrafia na poważne trudności przy równaniach Prandtla-Reussa. Równania tego typu dla teorii odkształceniowej wyprowadza A. A. ILIUSZIN [949], dla teorii Levy'ego-Misesa — H. GEIRINGER [164] i T. Y. THOMAS [699]. Wyprowadzone poniżej równania, zapisane w postaci rozwiniętej, słuszne będą dla obu teorii. Ograniczymy się przy tym do współrzędnych kartezjańskich.

Musimy oddzielnie rozważyć przypadek ciała nieściśliwego, a oddzielnie ciała sprężyste ściśliwego. W przypadku nieściśliwości otrzymamy układ czterech równań o czterech niewiadomych u_i ($i = x, y, z$) oraz σ_m , natomiast dla ciał ściśliwych — układ trzech równań o niewiadomych u_i . Dla skrócenia przekształceń zastosujemy zapis matematyczny; wskaźniki martwe, po których następuje sumowanie, oznaczymy literami greckimi.

W przypadku ciał nieściśliwych wykorzystamy równania równowagi wewnętrznej (12.1), związku Cauchy'ego (12.2), warunek nieściśliwości

$$(12.15) \quad u_{\beta,\beta} = 0,$$

prawo zmiany postaci (12.4) (które będziemy mogli interpretować jednocześnie jako prawo Hencky'ego-Iliuszina, rozumiejąc przez e_{ij} składowe dewiatora odkształcenia, lub jako prawo Levy'ego-Misesa, rozumiejąc przez e_{ij} składowe dewiatora prędkości odkształcenia), wreszcie warunek plastyczności HMM (10.19). Funkcję φ obliczamy z (10.36), uwzględniając (10.19) oraz równość $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$:

$$(12.16) \quad \varphi = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon_{\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda}}.$$

Składowe stanu naprężenia σ_{ij} określimy następująco:

$$(12.17) \quad \sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij} \sigma_m = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varphi} + \delta_{ij} \sigma_m.$$

Poszukiwany układ równań wynika z podstawienia (12.17) do równań równowagi (12.1), a następnie wykorzystania związków Cauchy'ego (12.2), wreszcie dołączenia (12.15). Podstawienie zapiszemy najpierw w postaci

$$(12.18) \quad \frac{\varepsilon_{\alpha j, \alpha} \varphi - \varphi_{, \alpha} \varepsilon_{\alpha j}}{\varphi^2} + \sigma_{m, \alpha} \delta_{\alpha j} + F_j = 0.$$

Pochodna $\varphi_{, \alpha}$ wynosi

$$(12.19) \quad \varphi_{, \alpha} = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{\mu\nu, \alpha} \varepsilon_{\mu\nu}}{\sqrt{\varepsilon_{\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda}}}},$$

zatem (12.18) przepiszemy w postaci

$$(12.20) \quad \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon_{\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda}} \varepsilon_{\alpha j, \alpha} - \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{\mu\nu, \alpha} \varepsilon_{\mu\nu}}{\sqrt{\varepsilon_{\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda}}}} \varepsilon_{\alpha j} + (\sigma_{m, j} + F_j) \frac{3}{2\sigma_0^2} \varepsilon_{\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda} = 0.$$

Po wykorzystaniu (12.2) i przekształceniach, polegających na stosownym grupowaniu wyrazów, otrzymujemy ostatecznie układ trzech nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, jednorodnych trzeciego stopnia względem u_j ,

$$(12.21) \quad u_{\kappa,\lambda}(u_{\kappa,\lambda} + u_{\lambda,\kappa}) \nabla^2 u_j - (u_{\kappa,\lambda\alpha} u_{\kappa,\lambda} u_{j,\alpha} + u_{\kappa,\lambda\alpha} u_{\lambda,\kappa} u_{j,\alpha} + u_{\kappa,\lambda\alpha} u_{\kappa,\lambda} u_{\alpha,j} + \\ + u_{\kappa,\lambda\alpha} u_{\lambda,\kappa} u_{\alpha,j}) + \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} (\sigma_{m,j} + F_j) [u_{\kappa,\lambda}(u_{\kappa,\lambda} + u_{\lambda,\kappa})]^{3/2} = 0,$$

do których należy dołączyć równanie liniowe (12.15). Niewiadomymi są tu współrzędne wektora przemieszczenia (względnie prędkości) u_j oraz naprężenie średnie σ_m .

W przypadku ciał ściśliwych (nawiązujemy tu jedynie do teorii Hencky'ego-Iliuszina) zamiast (12.16) musimy napisać

$$(12.22) \quad \varphi = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} \left(\varepsilon_{\kappa\lambda} - \frac{1}{3} \varepsilon_{\beta\beta} \delta_{\kappa\lambda} \right) \left(\varepsilon_{\kappa\lambda} - \frac{1}{3} \varepsilon_{\mu\mu} \delta_{\kappa\lambda} \right)},$$

a zamiast (12.17)

$$(12.23) \quad \sigma_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{\beta\beta} \delta_{ij}}{\varphi} + \frac{E}{3(1-2\nu)} \varepsilon_{\beta\beta} \delta_{ij}.$$

Podstawienie do równań równowagi wewnętrznej (12.1) daje

$$(12.24) \quad \frac{\left(\varepsilon_{\alpha j, \alpha} - \frac{1}{3} \varepsilon_{\beta\beta, j} \right) \varphi - \varphi_{, \alpha} \left(\varepsilon_{\alpha j} - \frac{1}{3} \varepsilon_{\beta\beta} \delta_{\alpha j} \right)}{\varphi^2} + \frac{E}{3(1-2\nu)} \varepsilon_{\beta\beta, j} + F_j = 0.$$

Po wprowadzeniu współrzędnych wektora przemieszczenia wzorami (12.2) i przekształceniach zapiszemy równania wynikowe w postaci

$$(12.25) \quad (3u_{\kappa,\lambda} u_{\kappa,\lambda} + 3u_{\kappa,\lambda} u_{\lambda,\kappa} - 2u_{\kappa,\kappa} u_{\lambda,\lambda}) (u_{\alpha,j\alpha} + 3u_{j,\beta\beta}) - \\ - (3u_{\kappa,\lambda\alpha} u_{\kappa,\lambda} + 3u_{\kappa,\lambda\alpha} u_{\lambda,\kappa} - 2u_{\kappa,\kappa} u_{\lambda,\lambda\alpha}) (3u_{\alpha,j} + 3u_{j,\alpha} - 2u_{\beta,\beta} \delta_{\alpha j}) + \\ + \frac{1}{6\sigma_0} \left[\frac{E}{3(1-2\nu)} u_{\beta,\beta j} + F_j \right] (3u_{\kappa,\lambda} u_{\kappa,\lambda} + 3u_{\kappa,\lambda} u_{\lambda,\kappa} - 2u_{\kappa,\kappa} u_{\lambda,\lambda})^{3/2} = 0.$$

Równania (12.21) względnie (12.25) wykazują w stosunku do równań określających funkcje naprężeń szczególne zalety przy poszukiwaniu rozwiązań przybliżonych. Błąd przy określaniu przemieszczenia (lub prędkości) wpływa zazwyczaj bardzo nieznacznie na wartość naprężenia, a tym samym i np. na nośność graniczną. Natomiast błąd przy określaniu funkcji naprężeń ma bardzo duży wpływ na wartość naprężeń, które zależą od pierwszych lub drugich pochodnych funkcji naprężeń.

12.4. Parametryzacja warunku plastyczności. Oprócz omówionych powyżej metod, nie różniących się w zasadzie od metod redukcji liczby równań w teorii sprężystości, w teorii plastyczności możemy jeszcze wprowadzić rugowanie warunku plastyczności przez stosowaną parametryzację.

Parametryzację warunku plastyczności HMH w przypadku ogólnym zaproponował W. W. SOKOŁOWSKI [1168, 1169]. Warunek ten będzie tożsamościowo spełniony, jeżeli podstawimy

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{2}{3} \sigma_0 \left[l_1^2 \cos \omega + l_2^2 \cos \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) + l_3^2 \cos \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) \right] + \sigma_m, \\
 \sigma_y &= \frac{2}{3} \sigma_0 \left[m_1^2 \cos \omega + m_2^2 \cos \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) + m_3^2 \cos \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) \right] + \sigma_m, \\
 \sigma_z &= \frac{2}{3} \sigma_0 \left[n_1^2 \cos \omega + n_2^2 \cos \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) + n_3^2 \cos \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) \right] + \sigma_m, \\
 \tau_{yz} &= \frac{2}{3} \sigma_0 \left[m_1 n_1 \cos \omega + m_2 n_2 \cos \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) + m_3 n_3 \cos \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) \right], \\
 \tau_{zx} &= \frac{2}{3} \sigma_0 \left[n_1 l_1 \cos \omega + n_2 l_2 \cos \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) + n_3 l_3 \cos \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) \right], \\
 \tau_{xy} &= \frac{2}{3} \sigma_0 \left[l_1 m_1 \cos \omega + l_2 m_2 \cos \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) + l_3 m_3 \cos \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) \right],
 \end{aligned}
 \tag{12.26}$$

gdzie l_i, m_i, n_i są dostawami kierunkowymi osi głównych; związane są one sześcioma równaniami typu $\sum l_i^2 = 1$, $\sum l_i m_i = 0$ i mogą być wyrażone przez kąty Eulera np. wzorami

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\
 l_2 &= -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma, \\
 l_3 &= \sin \alpha \sin \gamma, \\
 m_1 &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, & n_1 &= \sin \beta \sin \gamma, \\
 m_2 &= -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma, & n_2 &= \cos \beta \sin \gamma, \\
 m_3 &= -\cos \alpha \sin \gamma, & n_3 &= \cos \gamma.
 \end{aligned}
 \tag{12.27}$$

W ten sposób sześć niewiadomych składowych stanu naprężenia (w układzie lokalnie ortogonalnym) zostaje zastąpionych przez pięć nowych niewiadomych $\sigma_m, \omega, \alpha, \beta, \gamma$. Gdy dane kierunki są kierunkami głównymi, wówczas można przyjąć np. $\alpha = \beta = \gamma = 0$, wtedy $l_1 = m_2 = n_3 = 1$, $l_2 = l_3 = m_1 = m_3 = n_1 = n_2 = 0$, a trzy niewiadome $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zostają zastąpione przez dwie: σ_m i ω . Sens fizyczny tych niewiadomych jest związany z niezmiennikami walcowymi tensora naprężenia, wzory (6.12).

W ogólnym przypadku wzory (12.26) i (12.27) bywają stosowane niezmiernie rzadko z uwagi na ich złożoną budowę i wyrugowanie tylko jednej niewiadomej. Natomiast częściej stosuje się je w przypadku znanych kierunków głównych, a szczególnie w przypadku płaskiego stanu naprężenia, gdy np. $\sigma_3 = 0$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{2}{3} \sigma_0 \cos \omega + \sigma_m, \\
 \sigma_2 &= \frac{2}{3} \sigma_0 \cos \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) + \sigma_m, \\
 \sigma_3 &= \frac{2}{3} \sigma_0 \cos \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) + \sigma_m = 0;
 \end{aligned}
 \tag{12.28}$$

wyrażając z ostatniego równania σ_m i podstawiając do dwóch pierwszych, po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(12.29) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \sin\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right), \\ \sigma_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \sin \omega. \end{aligned}$$

Parametryzację tego typu stosował już A. NÁDAI [450] (przy nieco innym przyjęciu kąta ω). Pozwala ona na zastąpienie dwóch niewiadomych σ_1 i σ_2 przez jedną niewiadomą ω .

W różnych innych przypadkach szczególnych możliwe są również dogodne parametryzacje warunku plastyczności. Tak np. przy występowaniu tylko jednej składowej σ jednej składowej τ warunek HMH redukuje się do postaci

$$(12.30) \quad \sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2,$$

która jest tożsamościowo spełniona przez podstawienie

$$(12.31) \quad \begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \cos \psi, \\ \tau &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \psi. \end{aligned}$$

Przypadek ten występuje szczególnie często przy złożonych obciążeniach prętów. Parametryzację (12.31) stosowaliśmy już w p. 11.5.

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia, gdy np. $\varepsilon_z \equiv \gamma_{zx} \equiv \gamma_{zy} \equiv 0$, z równań dowolnej teorii plastyczności ciała izotropowego otrzymujemy $\tau_{zx} \equiv \tau_{zy} \equiv 0$, a pod dodatkowym założeniem nieściśliwości materiału

$$(12.32) \quad \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

Warunek plastyczności HMH przybiera wtedy postać

$$(12.33) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\tau_0^2;$$

celowo napisaliśmy tu $4\tau_0^2$ zamiast $\frac{4}{3}\sigma_0^2$, gdyż przy zastosowanej pisowni warunek Treski-Guesta jest tu identyczny. Warunek ten parametryzuje się na przykład przez podstawienie (M. LEVY [350])

$$(12.34) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \tau_0(2\chi + \cos 2\varphi), \\ \sigma_y &= \tau_0(2\chi - \cos 2\varphi), \\ \tau_{xy} &= \tau_0 \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

pozwalające na zastąpienie trzech niewiadomych $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ przez dwie: χ i φ .

Parametryzacja innych warunków plastyczności jest z reguły trudniejsza.

13. Niektóre metody rozwiązywania problemów teorii plastyczności

13.1. Uwagi ogólne. Hipotezy geometryczne. Istnieją dziesiątki różnorodnych metod, ścisłych lub przybliżonych, rozwiązywania podstawowych równań teorii plastyczności. Omówimy jedynie kilka metod typowych, głównie przybliżonych, które znajdują zastosowanie przy badaniu obciążeń złożonych, w szczególności przy określaniu powierzchni granicznych na szczelbu przekroju S lub całego ciała B . Zwrócimy ponadto uwagę na pracę przeglądową G. P. CZEREPANOWA [1227], która dość szczegółowo omawia różnorodne metody rozwiązywania zagadnień sprężysto-plastycznych.

Bardzo często rozwiązania uzyskuje się przy wykorzystaniu pewnych hipotez geometrycznych, jak np. hipoteza płaskich przekrojów Bernoulliego w odniesieniu do prętów lub hipoteza prostych normalnych Love'a-Kirchhoffa w przypadku dźwigarów powierzchniowych. Rozwiązania takie mogą być ścisłe bądź też jedynie przybliżone, gdy przyjęcie hipotezy nie zezwala na spełnienie wszystkich równań teorii plastyczności. Nie interesując się na razie kwestią ścisłości rozwiązania i oceny błędu, stwierdzimy, że przyjęcie hipotez geometrycznych prowadzi z reguły do wyników podanych w formie parametrycznej. Tak np. powierzchnia graniczna w przestrzeni sił jest wtedy zazwyczaj określona równaniami

$$(13.1) \quad Q_i = Q_i(\hat{q}_j), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

gdzie przez Q_i oznaczyliśmy siły uogólnione (wewnętrzne na szczelbu S lub zewnętrzne na szczelbu B), natomiast przez \hat{q}_j stosunki parametrów geometrycznych, np. krzywizny do wydłużenia jednostkowego lub ich prędkości. Parametrów tych jest zazwyczaj również n , tak że niezależnych stosunków jest $n-1$. Przedstawienie równania powierzchni granicznej w postaci jawnej (lub nawet tylko uwikłanej) wymaga wyrugowania parametrów \hat{q}_j , czyli deparametryzacji. Czynność ta nie zawsze daje się przeprowadzić w sposób ścisły, tak że często jesteśmy zmuszeni do posługiwania się postacią parametryczną (13.1).

13.2. Całkowanie wzdłuż charakterystyk. Liczne zagadnienia teorii plastyczności prowadzą do równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego, których rozwiązanie daje się określić na drodze całkowania wzdłuż charakterystyk. Omówimy tu krótko tok postępowania w przypadku płaskiego stanu odkształcenia w płaszczyźnie xy .

Problemy płaskiego stanu odkształcenia nieściśliwego materiału idealnie plastycznego można nazwać wewnętrznymi statycznie pseudo-wyznaczalnymi; po wykorzystaniu jednego z równań prawa zmiany postaci (które w problemach wewnętrznymi statycznie wyznaczalnych w ogóle nie ingerują przy określaniu naprężeń) do określenia σ_z (12.32) otrzymujemy układ trzech równań, mianowicie (12.33) i dwóch równań równowagi wewnętrznej (7.13), określających trzy naprężenia σ_x , σ_y i τ_{xy} jako funkcje zmiennych x i y . Sparametryzujemy warunek plastyczności (12.33) wzorami (12.34) i podstawimy je do równań równowagi wewnętrznej, otrzymując (pod założeniem braku sił masowych)

$$(13.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} + \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Przyrosty funkcji χ i φ można określić wzorami

$$(13.3) \quad d\chi = \frac{\partial\chi}{\partial x} dx + \frac{\partial\chi}{\partial y} dy, \quad d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy.$$

Równania (13.2) i (13.3) można na ogół rozwiązać względem pochodnych $\frac{\partial\chi}{\partial x}$, $\frac{\partial\chi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$; określają one przyrosty funkcji χ i φ wzdłuż linii $y = y(x)$. Jeżeli jednak wyznacznik główny układu (13.2) i (13.3) jest równy zeru,

$$(13.4) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ 0 & 1 & \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0,$$

to układ ten nie posiada rozwiązania jednoznacznego. Gdy ponadto wyznaczniki Δ_i są równe zeru, to odpowiednią linię $y(x)$ nazywamy *charakterystyką układu* (13.2); gdy są różne od zera — mówimy o *linii nieciągłości*, bowiem wzdłuż takiej linii pochodne funkcji χ i φ rosną nieograniczenie, a same funkcje są na ogół nieciągłe.

Równanie (13.4) jest kwadratowym równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu względem funkcji $y = y(x)$; po rozwinięciu wyznacznika i rozwikłaniu względem dy/dx otrzymujemy

$$(13.5) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\varphi \pm \frac{\pi}{4} \right).$$

Zakładając, że (13.5) określa charakterystyki, przyrównujemy jeszcze do zera wyznaczniki Δ_i , otrzymując (po wykorzystaniu (13.5) i scałkowaniu)

$$(13.6) \quad \chi \pm \varphi = \text{const.}$$

Stosunkowo proste związki (13.5) i (13.6) zezwalają w pewnych przypadkach na uzyskanie rozwiązań ścisłych, w innych — na uzyskanie rozwiązań przybliżonych na drodze numerycznej.

Metoda charakterystyk w teorii plastyczności ma bardzo obszerną literaturę. Wspomnimy tu jedynie klasyczne prace H. HENCKY'EGO [209], L. PRANDTLA [567], H. GEIRINGER [161 i 163], H. GEIRINGER i W. PRAGERA [162] oraz obszerniejsze opracowania w monografiach W. W. SOKOŁOWSKIEGO [1169], D. D. IWLEWA [941], J. RYCHLEWSKIEGO [485], E. G. THOMSENA, C. T. YANGA, S. KOBAYASHI [700] i W. SZCZEPIŃSKIEGO [688]. Metodę charakterystyk dla przypadku osiowej symetrii opracował R. T. SHIELD.

13.3. Metody rozwiązań sprężystych. W przypadku materiałów wykazujących wzmocnienie plastyczne dogodnie metody iteracyjne opracowali A. A. ILIUSZIN [949] i I. A. BIRGER [811, 812]. Metody te można podzielić na metodę uzupełniających obciążeń i metodę uzupełniających odkształceń.

Schemat *metody uzupełniających obciążeń* przedstawia się następująco; zapisujemy równania teorii Hencky'ego-Iliuszina w postaci

$$(13.7) \quad s_{ij} = 2G e_{ij} + \left[\frac{1}{\varphi(e_{ij})} - 2G \right] e_{ij}$$

i podstawiamy do równań równowagi wewnętrznej, pozostawiając wyrazy podkreślone po prawej stronie tych równań. Wyrazy te będziemy traktowali jako znane. W pierwszym przybliżeniu przyjmujemy wyrazy podkreślone równe zero, $\varphi = 1/2G$, i rozwiązujemy odnośny problem teorii sprężystości. Następnie określamy funkcję φ (w pierwszym przybliżeniu) i podstawiamy do prawej strony równań równowagi, otrzymując w ten sposób równania drugiego przybliżenia. Są to znowu równania teorii sprężystości ale z dodatkowymi wyrazami, które możemy traktować jako dodatkowe obciążenia powierzchniowe i masowe. Rozwiązanie tych równań pozwala na określenie φ w następnym przybliżeniu itd. Problem zbieżności tej metody badał W. M. PANFIEROW [1113]. Równania podstawowe w postaci rozwiniętej można znaleźć w monografii S. D. PONOMARIEWA i innych [1123].

Pokrewna metoda uzupełniających odkształceń polega na zapisaniu związków Hencky'ego-Iliuszina w postaci

$$(13.8) \quad e_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij} + \left[\varphi(s_{ij}) - \frac{1}{2G} \right] s_{ij},$$

podstawieniu ich do równań nierozdzielności i pozostawieniu wyrazów podkreślonych po prawej stronie tych równań. W pierwszym przybliżeniu rozwiązujemy znowu problem teorii sprężystości pomijając wyrazy podkreślone, czyli przyjmując $\varphi = 1/2G$; następnie obliczamy φ i wstawiamy tę wartość do wyrażen po prawej stronie, uzyskując równania drugiego przybliżenia itd. Uzupełniające odkształcenia, występujące po prawej stronie równań, znane są w teorii sprężystości np. jako wynik nierównomiernego rozkładu temperatury.

Podobną metodę analogii termosprężystej zaproponował T. H. LIN [354, 357].

13.4. Rozwiązania statycznie dopuszczalne. W p. 13.1 sformułowaliśmy problem teorii plastyczności jako problem rozwiązania 16 równań o 16 niewiadomych. Duże znaczenie praktyczne posiadają w teorii plastyczności, mianowicie przy określaniu nośności granicznej, rozwiązania przybliżone, uzyskane na drodze spełnienia tylko niektórych równań podstawowych, tak że liczba równań jest mniejsza od liczby niewiadomych (pozostają pewne «stopnie swobody»).

Pole tensorowe naprężeń, które spełnia warunki równowagi wewnętrznej (12.1), naprężeniowe warunki brzegowe (7.5) na części brzegu S_T oraz warunek plastyczności w formie nierówności słabej, np. według HMM

$$(13.9) \quad \sigma_i \leq \sigma_0$$

będziemy nazywali *polem statycznie dopuszczalnym*; nazwę tę wprowadzili H. J. GREENBERG i W. PRAGER [185]. Przy konstruowaniu takiego pola mamy w ogólnym przypadku dwa «stopnie swobody» wewnątrz obszaru ciała, bowiem sześć funkcji σ_{ij} ma spełniać tylko cztery równania (12.1) i (13.9), przy założeniu, że warunek (13.9) ma być choć w części ciała spełniony w formie równości. Dodatkowe ograniczenia wynikają z konieczności spełnienia na brzegu S_T warunków (7.5). W każdym razie problem znalezienia pewnego statycznie dopuszczalnego pola naprężeń jest znacznie prostszy od uzyskania rozwiązania ścisłego. Pole takie może przy tym wykazywać nieciągłości zgodnie z uwagami podanymi w p. 7.3. Odkształcenia albo prędkości odkształceń można określić opierając

się na (12.3) i (12.4)–(12.6) z dokładnością do pewnej liczby nieoznaczonych parametrów; warunki nierozdzielności na ogół nie będą przy tym spełnione.

W szczególnych przypadkach możemy mieć przy poszukiwaniu statycznie dopuszczalnego pola naprężeń tylko jeden lub nawet zero «stopni swobody» (problemy wewnętrznie statycznie wyznaczalne). W tym ostatnim przypadku, o ile rozwiązanie problemu jest jednoznaczne, istnieje tylko jedno pole statycznie dopuszczalne, określające rozwiązanie ściśle.

W podobny sposób można wprowadzić pojęcie statycznie dopuszczalnego pola sił wewnętrznych w prętach, płytach, powłokach itp.

Konstruowanie pól statycznie dopuszczalnych jest dogodnym narzędziem przybliżonej oceny nośności granicznej konstrukcji. Można mianowicie uzasadnić twierdzenie zwane twierdzeniem o dolnym oszacowaniu nośności granicznej, że nośność konstrukcji obliczona w przybliżeniu w oparciu o dowolne statycznie dopuszczalne pole naprężeń jest nie większa od nośności rzeczywistej. Inaczej mówiąc, jeżeli obliczoną na tej drodze wartość mnożnika we wzorze (12.8) oznaczymy przez m_s (mnożnik statycznie dopuszczalny), to $m_s \leq m$, gdzie m oznacza wartość ścisłą; ponadto można wykazać, że kres górny mnożników statycznie dopuszczalnych m_s jest właśnie równy m . Mnożnik m_s jest więc funkcjonałem, zależnym od przyjętego statycznie dopuszczalnego pola naprężeń; maksimum tego funkcjonału wynosi m . Pola statycznie dopuszczalne pozwalają więc na określenie obciążenia granicznego z błędem przez niedomiar, wyznaczając tym samym oszacowanie dolne obciążenia granicznego. Rozwiązanie uzyskane w oparciu o pole statycznie dopuszczalne będziemy nazywali *rozwiązaniem statycznie dopuszczalnym*.

Twierdzenie o oszacowaniu dolnym obciążenia granicznego wykazał w szczególnym przypadku belek statycznie niewyznaczalnych G. KAZINCZY [305]; dalsze prace należą do A. A. GWOZDIEWA [843, 844, 845], J. A. VAN DEN BROEKA [718] i S. M. FEJNBERGA [1214], który sformułował twierdzenie w przypadku ogólnym. Pełny dowód twierdzenia podali D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG i W. PRAGER [99] dla płaskiego stanu odkształcenia, a następnie [101] w przypadku ogólnym przy warunku plastyczności odpowiadającym powierzchni regularnej; W. PRAGER [554] wykazał je również w przypadku powierzchni posiadającej osobliwość, np. odpowiadającej warunkowi plastyczności Treski-Guesta.

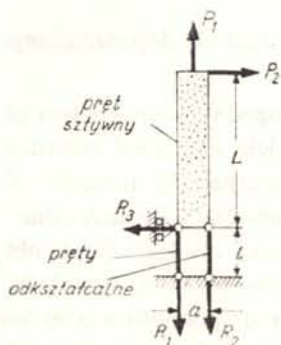
Dowód twierdzenia wymaga założenia o *wypukłości powierzchni granicznej* odpowiadającej warunkowi plastyczności (w przypadku warunku HMH założenie to jest oczywiście spełnione) przyjęcia stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego (por. p. 17.1), oraz przyjęcia *zasady zeszywnienia*, czyli pominięcia wpływu zmian geometrii układu na nośność graniczną. Podamy prosty przykład ilustrujący niesłuszność twierdzenia przy odstępstwach od zasady zeszywnienia.

Rozpatrzmy układ przedstawiony na rys. 54, składający się z pionowego pręta sztywnego, podpartego dwoma krótkimi prętami odkształcalnymi, nie podlegającymi wyboczeniu, obciążony dwiema siłami P_1 i P_2 . Układem takim przy $P_1 < 0$, $P_2 = 0$ posługiwał się JA. G. PANOWKO [1112] przy analizie wyboczenia w zakresie sprężysto-plastycznym; model ten nie różni się istotnie od modelu Rydera, stosowanego przez F. R. SHANLEY'Ą [643]. Założymy, że przekroje obu prętów są równe i wynoszą F , granica plastyczności przy rozciąganiu lub ściskaniu wynosi σ_0 .

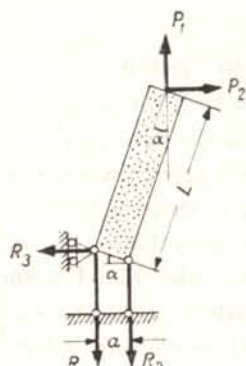
Przyjmijmy, że siły P_1 i P_2 są równe co do wartości bezwzględnej, $P_2 = -P_1 > 0$, (siła P_1 jest ujemna, czyli ściskająca), a siły podłużne w prętach wynoszą

$$(13.10) \quad N_1 = R_1 = \frac{2L-a}{2L+a} \sigma_0 F$$

$$N_2 = R_2 = -\sigma_0 F.$$



Rys. 54. Układ prętowy nieodkształcony



Rys. 55. Układ prętowy odkształcony

Jest to układ sił wewnętrznych statycznie dopuszczalny, bowiem warunki równowagi rzutów i momentów są spełnione (przy założeniu zasady zeszywnienia), a granica plastyczności w żadnym z prętów nie jest przekroczona. Odpowiednie obciążenie graniczne, które oznaczymy przez \bar{P}_s , wynosi

$$(13.11) \quad \bar{P}_s = P_2 = -P_1 = \frac{2a}{2L+a} \sigma_0 F.$$

Zgodnie z twierdzeniem o szacowaniu dolnym ścisła wartość \bar{P} powinna być nie mniejsza od \bar{P}_s . W istocie rzeczy przy uwzględnieniu odkształceń sprężystych i wpływu zmian geometrii układu wynik jest wręcz przeciwny.

Rozpatrzmy równowagę układu w położeniu słabo wychylonym, rys. 55; przyjmijmy w przybliżeniu $\sin \alpha \cong \text{tg } \alpha \cong \alpha$. Równania równowagi zapiszemy w postaci

$$(13.12) \quad R_1 + R_2 = P_1,$$

$$R_2 a = -P_2 L + P_1 \left(\frac{a}{2} + \alpha L \right).$$

W zakresie sprężystym przy założeniu prawa Hooke'a mamy ponadto następujący związek między reakcjami a kątem obrotu części sztywnej α :

$$(13.13) \quad (R_1 - R_2) \frac{l}{EF} = \alpha x.$$

Rugując kąt α obliczamy reakcje

$$(13.14) \quad R_1 = \frac{2LlP_1^2 + a^2 EFP_1 + 2a LEFP_2}{2a^2 EF + 4LlP_1},$$

$$R_2 = \frac{2LlP_1^2 + a^2 EFP_1 - 2a LEFP_2}{2a^2 EF + 4LlP_1}.$$

Nośność układu zostanie wyczerpana, gdy bezwzględna wartość naprężenia σ w jednym z prętów będzie równa granicy plastyczności: istotnie, wtedy wydłużenie tego pręta staje się dowolne i układ zmienia się w mechanizm. W rozpatrywanym przypadku $P_1 < 0$ większe co do modułu naprężenie występuje w pręcie 2; jest ono ujemne, więc podstawimy $R_2 = -\sigma_0 F$, otrzymując

$$(13.15) \quad 2LIP_1^2 + a^2 EFP_1 + 4Ll\sigma_0 FP_1 + 2a^2\sigma_0 EF^2 - 2a LEFP_2 = 0.$$

Podstawiając dalej zgodnie z uczynionym na wstępie przyjęciem $P_2 = -P_1 = \bar{P}$ otrzymujemy równanie kwadratowe względem \bar{P} , którego mniejszy pierwiastek zapiszemy w postaci

$$(13.16) \quad \bar{P} = \frac{4a^2\sigma_0 F}{a^2 + 2aL + \frac{4Ll\sigma_0}{E} + \sqrt{\left(a^2 + 2aL + \frac{4Ll\sigma_0}{E}\right)^2 - 16a^2Ll\frac{\sigma_0}{E}}}.$$

Postać ta z pozostawieniem niewymierności w mianowniku ułatwia analizę. Przy $E \rightarrow \infty$ otrzymujemy wzór poprzedni (13.11). Natomiast przy E skończonym mianownik rośnie, mamy $\bar{P} < \bar{P}_s$, zatem twierdzenie o oszacowaniu dolnym nie obowiązuje.

Zgodność wzorów (13.11) i (13.16) w przypadku granicznym $E \rightarrow \infty$, a więc dla ciała idealnie sztywno-plastycznego, mogłaby służyć jako argument za tezą, iż pojęcie nośności granicznej należy wiązać jedynie ze schematyzacją ciała idealnie sztywno-plastycznego. Takie podejście reprezentuje np. R. HILL w pracach [228, 230] polemizując z pracą E. H. LEE [339]. Jednakże w istocie rzeczy każdy materiał wykazuje pewne własności sprężyste i wzór (13.16) lepiej odpowiada rzeczywistości niż (13.11). Posługiwanie się schematem ciała idealnie sztywno-plastycznego prowadzi jedynie do pewnych uproszczeń, a nie jest celem samo dla siebie.

Pewną metodę konstruowania statycznie dopuszczalnych pól naprężeń podaje H. GAJEWSKI [152]. Dla rozwiązania wielu problemów szczególnie korzystne okazują się statycznie dopuszczalne pola naprężeń, wykazujące niejednorodność wyłącznie skokową (jednorodny stan naprężenia w poszczególnych podobszarach). Zastosowaniu takich pól do optymalnego kształtowania elementów maszyn poświęcona jest obszerna praca W. SZCZEPIŃSKIEGO [690].

Często formułuje się problem nośności granicznej nieco odmiennie; nie przyjmuje się mianowicie jednoznacznego typu rozkładu obciążeń zewnętrznych p_{nJ0} na brzegu S_T , a jedynie zakłada się działanie pewnych obciążeń wypadkowych, np. siły wypadkowej lub momentu wypadkowego. Takie podejście nawiązuje do zasady de Saint-Venanta; należy jednak pamiętać, że stosowanie tej zasady nie zawsze jest dopuszczalne, a twierdzenie o oszacowaniu dolnym może tu nie być prawdziwe.

Uogólnieniem twierdzenia o statycznie dopuszczalnych polach naprężeń na przypadek obciążeń zmiennych w czasie jest twierdzenie Melana, które sformułujemy następująco: jeżeli można znaleźć taki niezależny od czasu rozkład samonaprężeń (naprężeń resztkowych), że ich suma wraz z naprężeniami odpowiadającymi danemu obciążeniu, a obliczonymi metodami teorii sprężystości, spełnia w każdej chwili i w każdym punkcie ciała warunek $\sigma_{red} \leq \sigma_0$, to konstrukcja przystosuje się do danego programu obciążenia i zniszczenie wskutek stałego przyrostu odkształceń plastycznych nie wystąpi. Innymi słowy, punkt reprezentujący dane obciążenie w przestrzeni czynników wyężenia powinien w trakcie całego procesu leżeć wewnątrz pewnej «poprawionej» powierzchni nośności

sprężystej, obliczonej dla danego obciążenia wraz ze stosownie dobranym układem samonaprzeżeń. Dowód twierdzenia Melana podaje np. W. T. KOITER [318].

13.5. Rozwiązania kinematycznie dopuszczalne. Omówione w p. 13.4 rozwiązania statycznie dopuszczalne nie wymagają sprecyzowania teorii plastyczności, którą chcemy się posługiwać: Hencky'ego-Iliuszina, Levy'ego-Misesa czy Prandtla-Reussa; niezbędny jest jedynie dobór warunku plastyczności. Obecnie omówimy rozwiązania kinematycznie dopuszczalne, gdzie korzystanie z określonej teorii plastyczności jest już wyraźniejsze.

Zazwyczaj przyjmuje się tu teorię Levy'ego-Misesa nawiązując do schematyzacji ciała idealnie sztywno-plastycznego.

Kinematycznie dopuszczalnym polem wektorowym prędkości $\dot{u}_i^* = v_i^*$ nazywa się dowolne pole, które spełnia warunek nieściśliwości (w nawiązaniu do schematu ciała sztywno-plastycznego)

$$(13.17) \quad v_{i,t}^* = 0,$$

przemieszczeniowe warunki brzegowe na części konturu S_0 oraz warunek dodatniości mocy obciążeń zewnętrznych

$$(13.18) \quad \dot{W} = \int_S p_{nJ} v_J^* dS > 0$$

gdzie zastosowano konwencję sumacyjną. Pole prędkości może wykazywać nieciągłości, jednak przy spełnieniu warunków omówionych w p. 8.9. W przypadku analizy nośności granicznej płyt i powłok warunki zgodności na liniach nieciągłości badał bliżej M. JANAS [292].

Przy doborze takiego pola mamy więc znowu dwa «stopnie swobody» podobnie jak w przypadku pól statycznie dopuszczalnych, bowiem trzy funkcje v_i^* związane są wewnątrz obszaru ciała tylko równaniem (13.17). Korzystając z równań (12.5) i (12.7) możemy określić s_{ij} , a następnie σ_{ij} z dokładnością do nieznanego naprężenia średniego σ_m ; warunki równowagi wewnętrznej pozostają na ogół nie spełnione.

W szczególnych przypadkach możemy mieć przy poszukiwaniu kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości tylko jeden lub nawet zero «stopni swobody» (problemy «geometrycznie wyznaczalne», np. cylindry grubościenne poddane działaniu ciśnienia przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia). W tym ostatnim przypadku, o ile rozwiązanie problemu jest jednoznaczne, istnieje tylko jedno pole prędkości kinematycznie dopuszczalne, określające rozwiązanie ściśle.

Podobnie można wprowadzić kinematycznie dopuszczalne pola uogólnionych prędkości w przypadku prętów, płyt i powłok.

W przypadku rozwiązania ściśłego problemu nośności granicznej moc obciążeń zewnętrznych \dot{W} jest równa mocy rozpraszanej wewnątrz ciała

$$(13.19) \quad \dot{W} = \int_V \int \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \int \int s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV;$$

w przypadku nieciągłych pól prędkości należy tu jeszcze dodać moc rozproszoną na powierzchniach nieciągłości. Można dowieść twierdzenie, zwane twierdzeniem o górnym

oszacowaniu nośności granicznej, że przy dowolnym kinematycznie dopuszczalnym polu prędkości moc obciążeń zewnętrznych jest nie większa od mocy rozpraszanej, zatem przy założeniu obciążeń jedynie powierzchniowych,

$$(13.20) \quad \int_S p_{nj} v_j^* dS \leq \int_V s_{ij}^* \dot{e}_{ij}^* dV.$$

Przedstawiając obciążenie zewnętrzne w postaci (12.8) otrzymujemy stąd

$$(13.21) \quad m \leq \frac{\int_V s_{ij}^* \dot{e}_{ij}^* dV}{\int_S p_{nj0} v_j^* dS} \stackrel{\text{def}}{=} m_k,$$

gdzie zdefiniowany wzorem (13.21) mnożnik m_k nazywamy *mnożnikiem kinematycznie dopuszczalnym*. Wzór (13.21) określa górne oszacowanie nośności granicznej, przy czym można wykazać, że kres dolny mnożników m_k jest równy wartości ściślej m . Mnożnik m_k jest więc funkcjonalem zależnym od przyjętego pola prędkości; minimum tego funkcjonału wynosi m .

Rozwiązania kinematycznie dopuszczalne są szczególnie dogodnie przy ocenie nośności granicznej ustrojów prętowych statycznie niewyznaczalnych, płyt i powłok. Ich wadą jest fakt, że obliczona na tej drodze nośność graniczna jest obarczona błędem przez nadmiar, zatem na niekorzyść pewności. Natomiast podanie dla danego problemu dwóch rozwiązań przybliżonych, statycznie dopuszczalnego i kinematycznie dopuszczalnego, pozwala na wykorzystanie nierówności łącznej

$$(13.22) \quad m_s \leq m \leq m_k;$$

przyjmując w dalszym przybliżeniu

$$(13.23) \quad m \cong \frac{m_s + m_k}{2}$$

możemy określić błąd, nie przekraczający

$$(13.24) \quad \frac{\Delta m}{m} = \frac{m_k - m_s}{2m} \cdot 100\%.$$

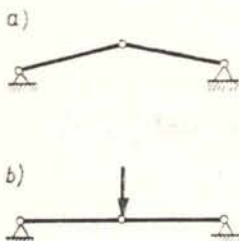
Podobnie jak w przypadku poprzednim twierdzenie wyrażające się nierównością $m_k \geq m$ słuszne jest tylko przy przyjęciu zasady zeszytnienia. Podamy dwa przykłady niesłuszności tego twierdzenia w przypadku uwzględnienia wpływu zmian geometrii układu.

W rozpatrywanym obecnie przypadku istotnych zmian geometrii układu kinematycznie dopuszczalne pole prędkości można skonstruować bądź dla stanu nieodkształconego, bądź dla odkształconego. Przy obu podejściach można znaleźć przykłady przeczące nierówności $m_k \geq m$.

Rozpatrzmy jeszcze raz układ przedstawiony na rysunkach 54 i 55, tym razem przy obu siłach dodatnich, np. $P_1 = P_2 = P$. Kinematycznie dopuszczalne pole prędkości określone jest np. ruchem

obrotowym części sztywnej wokół prawego górnego przegubu. Odpowiednie obciążenie wynosi

$$(13.25) \quad \bar{P} = P_1 = P_2 = \frac{2a}{2L+a} \sigma_0 F$$



Rys. 56. Układ kratowy Misesa

i jest mniejsze od wartości ścisłej, określonej równaniem (13.15) przy $P_1 = P_2$.

W poprzednim przykładzie rozpatrywaliśmy pole prędkości odpowiadające położeniu nieodkształconego układu. Rozpatrzmy teraz układ kratowy Misesa, przedstawiony na rys. 56. W położeniu odkształconym, rys. 56b, ruch możliwy jest przy sile $P = 0$, podczas gdy rzeczywista nośność układu $\bar{P} > 0$.

Uogólnieniem twierdzenia o kinematycznie dopuszczalnych polach prędkości dla przypadku obciążeń zmiennych w czasie jest twierdzenie Koitera, które sformułujemy następująco: plastyczne przystosowanie się konstrukcji nie może nastąpić, jeżeli można znaleźć takie cyklicznie zmienne obciążenia zewnętrzne $p_{nj}(t)$, należące w każdej chwili t do rozpatrywanego obszaru zmienności obciążeń, oraz takie kinematycznie dopuszczalne pole prędkości $v_j^*(t)$, że będzie spełniona nierówność

$$(13.26) \quad \int_0^T dt \iint_S p_{nj} v_j^* dS > \int_0^T dt \iiint_V F(\dot{\epsilon}_{ij}^*) dV$$

gdzie T oznacza okres (długość cyklu), $F(\dot{\epsilon}_{ij}^*)$ — funkcję plastycznego rozpraszania energii. Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć np. w pracy W. T. KOITERA [318].

13.6. Rozwiązania statycznie częściowo dopuszczalne. W niektórych pracach można znaleźć rozwiązania przybliżone, wykorzystujące pole naprężeń, spełniające jeszcze słabsze warunki od określonych w p. 13.4. Pola takie będziemy nazywali *statycznie częściowo dopuszczalnymi*. Szczególnie często można się spotkać ze spełnieniem jedynie warunku plastyczności i warunków brzegowych bez spełnienia równań równowagi wewnętrznej. Takie podejście można znaleźć np. w pracy A. A. GWOZDIEWA [846] przy analizie nośności granicznej cienkościennego przekroju pierścieniowego, poddanego działaniu jednoczesnego rozciągania, skręcania, zginania i ścinania (str. 249–254); z warunku równowagi (lub z twierdzenia o cyrkulacji) wynika niezależność naprężeń stycznych τ_{θ} od kąta θ , natomiast autor dopuszcza również funkcje $\tau_{\theta} = f(\theta)$.

W tym przypadku nie można już twierdzić, że uzyskane rozwiązanie jest obarczone błędem przez niedomiar (oszacowanie dolne). Wręcz przeciwnie, o ile przybliżoną wartość mnożnika (funkcjonału) m określamy w oparciu o metody rachunku wariacyjnego poszukując maksimum tego funkcyjonału, to zazwyczaj dochodzimy do oszacowania górnego, z błędem przez nadmiar. Istotnie, jeżeli maksimum funkcyjonału m_s z warunkami pobocznymi w formie równań równowagi wewnętrznej wynosi m , to maksimum tego funkcyjonału bez warunków pobocznych jest nie mniejsze od m , a z reguły od m większe.

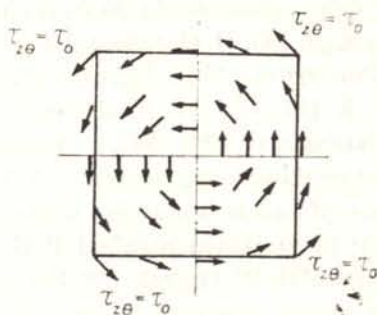
Do wspomnianego rozwiązania Gwozdiewa (np. dla zginania ze skręcaniem) można dobrać kinematycznie dopuszczalne pole prędkości, odpowiadające brakowi spaczenia przekroju, a ponieważ warunki równowagi wewnętrznej nie są spełnione, więc rozwiązanie

jest obarczone błędem przez nadmiar. Podobna uwaga odnosi się do wielu innych rozwiązań problemu nośności granicznej przekroju, gdzie warunki równowagi wewnętrznej nie były brane pod uwagę.

Innym przypadkiem pola naprężeń statycznie częściowo dopuszczalnego jest brak spełnienia warunków brzegowych przy zachowaniu warunków równowagi. Wtedy mnożnik m_s przedstawia oszacowanie dolne jednak nie problemu, który chcemy rozwiązać, lecz innego problemu, mianowicie przy obciążeniu odpowiadającym warunkom brzegowym, wynikającym z danego pola naprężeń. O błędzie przybliżenia na tej drodze rozwiązania problemu danego zazwyczaj nic nie można powiedzieć. Tak np. przyjmując dla skręcanego pręta o przekroju kwadratowym rozkład naprężeń

$$(13.27) \quad \tau_{z\theta} = \tau_0$$

uzyskujemy zarówno spełnienie warunków równowagi, jak i warunku plastyczności, jednak warunki brzegowe na pobocznicę nie są spełnione (rys. 57). Nie biorąc pod uwagę



Rys. 57. Pole naprężeń statycznie częściowo dopuszczalne (warunki brzegowe nie są tu spełnione)

tego faktu i traktując (13.27) jako pole statycznie częściowo dopuszczalne dla danego problemu czystego skręcania, otrzymujemy przybliżoną wartość granicznego momentu skręcającego z błędem przez nadmiar.

Warunków brzegowych nie spełnia np. podane przez A. R. RZANICYNA [1138] rozwiązanie problemu nośności granicznej przekroju jednocześnie zginanego i ścinanego. W tej sytuacji trudno powiedzieć, czy rozwiązanie jest obarczone błędem przez nadmiar, czy przez niedomiar: prawdopodobnie nośność przekroju jednocześnie zginanego i ścinanego nie jest określona jednoznacznie, lecz zależy od zmienności momentu zginającego i siły poprzecznej wzdłuż osi belki.

Omawiane rozwiązania statycznie częściowo dopuszczalne nie przedstawiają zazwyczaj takiej wartości, jak rozwiązania statycznie dopuszczalne, bowiem nie umożliwiają oceny błędu; tym niemniej pozwalają one często na dość dokładną ocenę nośności granicznej, a podstawową zaletą jest ich prostota.

13.7. Metody wariacyjne. Posługiwanie się rozwiązaniami statycznie dopuszczalnymi jako spełniającymi tylko niektóre z równań podstawowych pozornie nie ma nic wspólnego z rachunkiem wariacyjnym. W istocie rzeczy dowody twierzeń o oszacowaniu dolnym i o oszacowaniu górnym nośności granicznej są oparte na rachunku wariacyjnym; ponadto, jeżeli pole statycznie lub kinematycznie dopuszczalne określone jest jedynie z dokładnością

do pewnej funkcji, to optymalny dobór tej funkcji odpowiada ekstremum funkcyjonału (nośności granicznej), zatem stanowi przedmiot rachunku wariacyjnego. Związek pól statycznie częściowo dopuszczalnych z rachunkiem wariacyjnym jest mniej oczywisty.

Tak więc konstruowanie rozwiązań statycznie lub kinematycznie dopuszczalnych zaliczamy do metod wariacyjnych teorii plastyczności, mianowicie teorii nośności granicznej. Podobne metody mogą być również stosowane w zakresie sprężysto-plastycznym. Obecnie podamy jedynie krótki rys historyczny rozwoju tych metod.

Pierwszą zasadę wariacyjną w teorii plastyczności sformułowali A. HAAR i T. KÁRMÁN [194] w r. 1909; jest ona związana z teorią odkształceniową, jakkolwiek równania tej ostatniej zostały sformułowane dopiero kilkanaście lat później. Również zasada G. COLONETTI [74] związana jest z teorią odkształceniową. O pracach A. A. GWOZDIEWA [843, 844] wspomnieliśmy już w p. 13.4.

Silniejszy rozwój metod wariacyjnych datuje się od drugiej wojny światowej. W r. 1942 Ł. M. KACZANOW [974] sformułował zasadę, stanowiącą uogólnienie twierdzenia Castigliana; dalsze prace należą do A. M. SADOWSKY'EGO [596] (zasada maksymalnego oporu plastycznego) i G. H. HANDELMANA [198]. Dowód słuszności zasady Sadowsky'ego podał A. H. PHILIPPIDIS [530]. Pierwsze prace z lat powojennych należą do A. A. MARKOWA [1066], R. HILLA [219], P. G. HODGE'A i W. PRAGERA [240] (wzmocnienie plastyczne), H. J. GREENBERGA [183, 184], Y. YAMAMOTO [748], W. M. PANFIEROWA [1114]. Przypadek odkształceń skończonych rozważali A. PHILLIPS [531] i A. NÁDAI [453]. W. T. KOITER [314] sformułował zasadę wariacyjną w przypadku warunku plastyczności, wykazującego osłabiwości; kierunek ten rozwinął P. G. HODGE [244]. Przypadek anizotropii i niejednorodności badali W. OLSZAK i P. PERZYNA [478, 479]. Porównanie różnych zasad wariacyjnych można znaleźć w pracach R. HILLA [222] i D. C. DRUCKERA [108].

T. MURA i S. L. LEE [441] sformułowali zasadę wariacyjną w teorii nośności granicznej, zgodnie z którą mnożnik statycznie dopuszczalny i mnożnik kinematycznie dopuszczalny można traktować jako ekstremum tego samego funkcyjonału przy różnych warunkach pobocznych. Dalszemu rozwinięciu tej zasady poświęcone są prace T. MURA, W. H. RIMAWI i S. L. LEE [443], T. MURA, S. L. LEE, R. H. BRYANT i W. H. RIMAWI [444] oraz G. SACCHI i M. SAVE [594].

Zasada wariacyjna, sformułowana przez G. CERADINI [69] odnosi się do rozkładu naprężeń resztkowych. A. R. S. PONTER podał w pracy [545] zasadę, stanowiącą uogólnienie twierdzenia Haara-Kármána. Praca M. SAYIRA i H. ZIEGLERA [634] poświęcona jest przypadkowi pól kinematycznie dopuszczalnych, wykazujących nieciągłości.

Niemal wszystkie zasady wariacyjne są słuszne jedynie w przypadku, gdy materiał nie wykazuje zjawiska mięknięcia plastycznego. Sformułowaniu odpowiednich zasad w tym ostatnim przypadku poświęcone są prace G. MAIERA [372] i O. DE DONATO [94].

13.8. Programowanie liniowe i nieliniowe. Omówione powyżej metody wariacyjne, a w szczególności poszukiwanie kresu górnego mnożników statycznie dopuszczalnych lub kresu dolnego mnożników kinematycznie dopuszczalnych, są ściśle związane z problemami programowania nieliniowego lub, w szczególnych przypadkach, liniowego. Istotnie, jeżeli zrezygnujemy z poszukiwania ekstremum funkcyjonałów w sposób ścisły (jak to

zresztą zazwyczaj bywa) i podobnie jak w metodzie Ritza przyjmujemy np. następującą postać rozwiązania statycznie dopuszczalnego:

$$(13.28) \quad \sigma_{ij} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \sigma_{ijn},$$

to dobór optymalnych parametrów α_n stanowi problem programowania matematycznego, na ogół nieliniowego: poszukujemy kresu górnego mnożnika m_s jako funkcji parametrów α_n przy ograniczeniach wynikających z warunku plastyczności.

Ujęcie problemów nośności granicznej jako problemów programowania nieliniowego zaproponował P. G. HODGE [260]. Dalsze prace należą do G. MAIERA [374, 375] (programowanie kwadratowe), A. C. PALMERA [514] (programowanie dynamiczne), A. M. PROCENKI [1124] (nośność graniczna przy odstępstwach od zasady zeszytnienia). Wiele prac poświęcono przypadkom dającym się ująć programowaniem liniowym; wspomnimy tu tylko prace o charakterze ogólnym, których autorami są D. C. A. KOOPMAN i R. H. LANCE [321], C. GAVARINI [158] oraz G. SACCHI i G. BUZZI FERRARIS [592]. Zastosowaniu metod programowania liniowego do badania plastycznego przystosowania się konstrukcji do obciążeń zmiennych poświęcone są prace D. A. GOCHFELDA i O. F. CZERNIAWSKIEGO [869, 873].

13.9. Metoda małego parametru (zakłóceń). Metoda małego parametru, rozwinięta przez H. Poincarégo, polega na przedstawieniu rozwiązania w formie szeregu potęgowego względem pewnego parametru ψ ; bywa on nazywany «małym» parametrem, gdyż jego wartość jest ograniczona — teoretycznie rzecz biorąc — promieniem zbieżności uzyskanych szeregów, a praktycznie — dostatecznie szybką zbieżnością tych szeregów.

Warunkiem koniecznym stosowalności metody małego parametru jest rozwijalność rozwiązania w szereg potęgowy względem ψ ; możliwość pewnych odstępstw od tego warunku omówimy w p. 13.10.

Z punktu widzenia praktycznego warunkiem stosowalności tej metody jest również istnienie prostego rozwiązania rozpatrywanego problemu w przypadku $\psi = 0$, gdyż stanowi ono zerowe przybliżenie w przypadku ogólnym «zakłóconym», $\psi \neq 0$. I tak np. w pracach [762] i [767] M. ŻYCZKOWSKI uwzględniał metodą małego parametru wpływ ściśliwości materiału, gdy rozwiązania odnośnych problemów w przypadku nieściśliwości były stosunkowo proste; D. D. IWLEW i L. W. JERSZOW [929, 930, 908] uwzględniali odstępstwa od prostych kształtów rozpatrywanych ciał; A. J. M. SPENCER w serii prac [667] rozpatrzył dla płaskiego stanu odkształcenia kolejno problemy niewielkiej niejednorodności, odstępstw od prostych kształtów ciał oraz niewielkich sił masowych.

Zastosowanie metody małego parametru polega w najprostszym przypadku na założeniu rozwiązania w postaci

$$(13.29) \quad X_i = \sum_{j=0}^{\infty} X_{ij} \psi^j,$$

gdzie przez X_i oznaczono w sposób ogólny wielkości niewiadome, np. naprężenia, odkształcenia, przemieszczenia, funkcję φ lub λ itp.; po podstawieniu tych szeregów do podsta-

wowych równań teorii plastyczności w formie bądź to wyjściowej, bądź też po uprzednim wyrugowaniu niektórych niewiadomych, i porównaniu współczynników przy kolejnych potęgach parametru ψ otrzymuje się układy równań określających kolejne niewiadome funkcje $X_{i,j}$. Równania te są z reguły znacznie prostsze od równań określających X_i , są mianowicie często równaniami liniowymi przy nieliniowych równaniach wyjściowych. W przypadku ciał o kształtach odbiegających nieco od kształtów prostych dogodnie jest czasem wprowadzenie nowych zmiennych niezależnych tak, aby przy użyciu tych zmiennych mały parametr nie pojawiał się już w równaniu konturu, a jedynie w równaniach obowiązujących wewnątrz ciała.

Rozwiązywanie problemów obciążeń złożonych w teorii plastyczności daje szerokie możliwości zastosowania metody małego parametru: można mianowicie przez mały parametr rozumieć tu pewien nowy typ obciążenia, nakładanego na obciążenie «podstawowe», dla którego rozwiązanie jest proste i dobrze znane. Można oczywiście rozważać jednocześnie wpływ kilku dodatkowych obciążeń, wprowadzając kilka małych parametrów. Na tej drodze określamy pewien fragment powierzchni granicznej «w otoczeniu» obciążenia podstawowego. Podejście takie można znaleźć np. w pracach S. PIECHNIKA [540], S. PIECHNIKA i M. ŻYCKOWSKIEGO [541], M. WNUKA [738, 741], M. ŻYCKOWSKIEGO [778, 780], J. SKRZYPKA [652], J. SKRZYPKA i M. ŻYCKOWSKIEGO [654]. Opisane tu zastosowanie metody małego parametru okazało się również dogodne przy rozwiązywaniu pokrewnych problemów pełzania przy obciążeniach złożonych (S. PIECHNIK [542, 543, 544]).

Podstawową czynnością przy posługiwaniu się metodą małego parametru jest dokonywanie działań na szeregach potęgowych: mnożenia i dzielenia szeregów, podnoszenia do potęgi, odwracania, podstawiania szeregu w szereg i rugowaniu parametru z dwóch szeregów czyli deparametryzacji. Działaniom tym poświęcone są prace [771, 772 i 777]; ponieważ w niektórych przypadkach zastosowań szeregi potęgowe względem małego parametru przyjmują postać uogólnioną typu

$$(13.30) \quad X_i = \sum_{j=0}^{\infty} X_{i,j} \psi^{\mu+\nu j}$$

(np. przy analizie jednoczesnego zginania i rozciągania pręta [778]), więc wspomniane powyżej prace odnoszą się do szerszej klasy szeregów typu (13.30). W szeregu (13.30) μ i $\nu \neq 0$, są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Przytoczymy tu jedynie wzory odnoszące się do działania podstawowego, jakim jest podnoszenie szeregu potęgowego do dowolnej potęgi; inne wymienione powyżej działania, jak odwracanie szeregu, podstawianie itp. dadzą się sprowadzić do potęgowania szeregów. Problem polega na obliczeniu współczynników $A_{j,\xi}$ w równaniu

$$(13.31) \quad [y(\psi)]^\xi = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \psi^{\mu+\nu j} \right)^\xi = \sum_{j=0}^{\infty} A_{j,\xi} \psi^{\mu\xi+\nu j},$$

gdzie ξ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wskaźnik za przecinkiem nie oznacza tu różniczkowania.

Współczynniki $A_{j,\xi}$ są określone wzorem ogólnym

$$(13.32) \quad A_{j,\xi} = \sum_{s=1}^{S(j)} \frac{\xi(\xi-1)\dots(\xi-m+1)}{k_{1s}! k_{2s}! \dots k_{js}!} a_0^{\xi-m} a_1^{k_{1s}} a_2^{k_{2s}} \dots a_j^{k_{js}},$$

gdzie k_{is} są kolejnymi rozwiązaniami równania

$$(13.33) \quad k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + jk_j = j,$$

w liczbach całkowitych nieujemnych, s oznacza kolejny numer rozwiązania, $s = 1, 2, \dots$
 $S(j)$, S — liczbę takich rozwiązań, wreszcie

$$(13.34) \quad m = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_j = m(s).$$

Pierwsze wyrazy $A_{j,\xi}$ są więc określone wzorami [771],

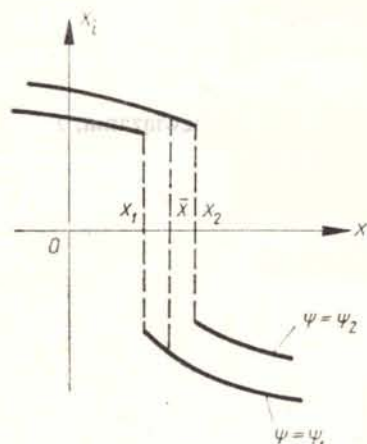
$$(13.35) \quad \begin{aligned} A_{0,\xi} &= a_0^\xi, \\ A_{1,\xi} &= \xi a_0^{\xi-1} a_1, \\ A_{2,\xi} &= \frac{\xi(\xi-1)}{2!} a_0^{\xi-2} a_1^2 + \frac{\xi}{1!} a_0^{\xi-1} a_2, \\ A_{3,\xi} &= \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{3!} a_0^{\xi-3} a_1^3 + \frac{\xi(\xi-1)}{1!1!} a_0^{\xi-2} a_1 a_2 + \frac{\xi}{1!} a_0^{\xi-1} a_3, \\ A_{4,\xi} &= \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)(\xi-3)}{4!} a_0^{\xi-4} a_1^4 + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{2!1!} a_0^{\xi-3} a_1^2 a_2 + \\ &\quad + \frac{\xi(\xi-1)}{2!} a_0^{\xi-2} a_2^2 + \frac{\xi(\xi-1)}{1!1!} a_0^{\xi-2} a_1 a_3 + \frac{\xi}{1!} a_0^{\xi-1} a_4. \end{aligned}$$

Tablice współczynników $A_{j,\xi}$ dla najczęściej spotykanych całkowitych i ułamkowych, dodatnich i ujemnych wartości wykładnika ξ zestawione są w pracy [772].

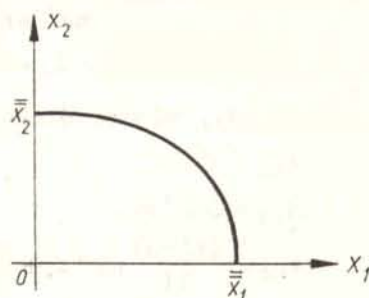
13.10. Modyfikowana metoda małego parametru (PLK). Opisana powyżej metoda małego parametru nie może znaleźć zastosowania np. wtedy, gdy poszukiwana funkcja X_i wykazuje nieciągłość w punkcie (lub wzdłuż linii) zależną od parametru ψ . Istotnie, jeżeli przy wartości parametru ψ_1 występuje nieciągłość w punkcie x_1 , a przy wartości parametru ψ_2 w punkcie x_2 , to zmiana wartości funkcji X_i w pewnym punkcie pośrednim \bar{x} jest duża nawet przy bardzo małej zmianie parametru ψ (rys. 58). Szereg typu (13.28) w pewnym otoczeniu punktu nieciągłości jest wtedy szeregiem rozbieżnym.

W przypadkach takich daje się jednak zazwyczaj zastosować *modyfikowaną metodę małego parametru*, zaproponowaną przez M. J. LIGHTHILLA [351]. Polega ona na rozwijaniu w szeregi potęgowe parametru ψ nie tylko zmiennych zależnych (poszukiwanych funkcji) X_i , lecz również zmiennych niezależnych x_i . Rozwinięcia takie są niejednoznaczne, bowiem przy porównywaniu współczynników przy ψ^n mamy pewną liczbę «stopni swobody» (więcej niewiadomych niż równań); można wtedy narzucić dodatkowy warunek, aby w układzie zakłóconych współrzędnych punkt lub linia nieciągłości były niezależne od parametru ψ . W ten sposób można zazwyczaj uzyskać szeregi zbieżne w całym rozpatrywanym obszarze.

Szczegółowy opis metody i przykłady zastosowań podaje np. praca H. S. TSIENA [715]; wprowadził on nazwę «metoda PLK» (Poincaré-Lighthill-Kuo). W przypadku jednej zmiennej niezależnej metoda ta jest dość prosta, natomiast wyraźnie komplikuje się w przypadku wielowymiarowym.



Rys. 58. Zależność nieciągłości funkcji od parametru



Rys. 59. Uogólniona aproksymacja brzegowa typu Hermite'a

13.11. Aproksymacja typu Hermite'a. Korzystając z metody małego parametru lub metody PLK możemy określić pewne fragmenty powierzchni granicznej szeregami potęgowymi; inaczej mówiąc, w pewnych punktach powierzchnia graniczna określona jest znajomością wartości funkcji i kilku pierwszych pochodnych (ewentualnie cząstkowych). Te dane zezwalają na przybliżone określenie powierzchni granicznej w całym rozpatrywanym obszarze przez zastosowanie aproksymacji typu Hermite'a, a ściślej biorąc, pewnego uogólnienia aproksymacji Hermite'a.

CH. HERMITE sformułował następujący problem aproksymacji interpolacyjnej: poszukiwał on funkcji jednej zmiennej o postaci wielomianu $H(x)$, który by w n punktach (węzłach) x_i wykazywał z daną funkcją $y(x)$ zgodność aż do pochodnej $y^{(\alpha_i-1)}$ włącznie.

Ogółem na wielomian ten nałożono więc $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ warunków; wielomian taki stopnia $(\sum_{i=1}^n \alpha_i) - 1$ istnieje i jest wyznaczony jednoznacznie (por. I. P. NATANSON [1094], gdzie można znaleźć również oszacowanie błędu aproksymacji).

Dla naszych celów niezbędne są pewne uogólnienia. Przypuśćmy, że w rozpatrywanym przypadku złożonym występują tylko dwa czynniki wyteżenia (np. dwa niezależne obciążenia lub dwie uogólnione siły wewnętrzne) X_1 i X_2 i że chcemy uzyskać aproksymacyjne równanie pewnej krzywej granicznej, np. krzywej nośności granicznej $X_2 = f(X_1)$. Przypuśćmy dalej, że znamy rozwinięcie tej funkcji w szeregi potęgowe o środkach w punkcie $X_1 = 0$ (wtedy $X_2 = \bar{X}_2$, otoczenie «czystego przypadku X_2 ») oraz w punkcie $X_1 = \bar{X}_1$ (wtedy $X_2 = 0$, otoczenie «czystego przypadku X_1 »). Moglibyśmy więc zastosować aproksymację interpolacyjną Hermite'a, wykorzystując warunki zgodności na brzegu przedziału $0 \leq X_1 \leq \bar{X}_1$; aproksymację tego typu będziemy nazywali «aproksymacją

brzegową Hermite'a». Wzory, określające współczynniki takiego wielomianu, można znaleźć w pracy M. ŻYCZKOWSKIEGO [763].

W większości przypadków jednak wszystkie pochodne funkcji $X_2 = f(X_1)$ w punkcie $X_1 = \bar{X}_1$ zmierzają do nieskończoności (rys. 59), a uzyskany metodą małego parametru szereg potęgowy określa jedynie funkcję odwrotną $X_1 = f(X_2)$. Wtedy aproksymacja wielomianem nie może znaleźć zastosowania; można jednak zazwyczaj zaproponować funkcję typu $f(X_1, X_2) = 0$ o tej własności, że odpowiednie pochodne, liczone np. jako pochodne funkcji uwikłanej, wykazują wymaganą zgodność zarówno w punkcie $X_1 = 0$, $X_2 = \bar{X}_2$, jak i w punkcie $X_1 = \bar{X}_1$, $X_2 = 0$. Taką aproksymację będziemy nazywali *uogólnioną aproksymacją brzegową Hermite'a*; była ona stosowana w pracach S. PIECHNIKA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [541], M. WNUKA [740, 743], M. MROWCA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [431], J. SKRZYPKA [651].

Dalsza trudność pojawia się w przypadkach wielowymiarowych, gdy chcemy na podobnej drodze wyprowadzić aproksymacyjne równanie powierzchni lub hiperpowierzchni granicznej. Wówczas należy żądać zgodności kolejnych pochodnych cząstkowych w poszczególnych punktach. Pewien przykład zastosowania aproksymacji tego typu w przypadku poczwórnie złożonym można znaleźć w pracy J. SKRZYPKA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [654].

Stosowalność aproksymacji brzegowej jest w zasadzie uwarunkowana brakiem jakichkolwiek osobliwości krzywej lub powierzchni granicznej wewnątrz rozpatrywanego przedziału lub obszaru. W pewnych przypadkach można jednak uzyskiwać przydatne wyniki nawet przy występowaniu pewnych słabych osobliwości, jak np. nieciągłości drugiej pochodnej krzywej granicznej; przypadek taki był rozpatrywany w pracy [778].

13.12. Aproksymacja jednokrotnie optymalna. Omówiona w p. 13.11 aproksymacja brzegowa Hermite'a wykazuje z reguły dużą dokładność w pobliżu brzegów przedziału, jednak może być obciążona większym błędem w pobliżu środka przedziału. Stanowi ona do pewnego stopnia przeciwieństwo aproksymacji optymalnej Czebyszewa, przy której błąd bezwzględny jest w całym przedziale możliwie najmniejszy. Jednakże pewną wadą aproksymacji Czebyszewa jest fakt, że na końcach przedziału, a więc w punktach o wyraźnej interpretacji fizycznej, błąd aproksymacji nie tylko nie jest równy zero, ale przybiera właśnie wartość największą. Propozycję pewnej aproksymacji o własnościach pośrednich można znaleźć w pracy [775]. Aproksymacja ta nazwana *aproksymacją jednokrotnie optymalną*, może być stosowana w przypadku gdy znamy dostateczną liczbę punktów krzywej granicznej, określonych np. na drodze numerycznej. Chcąc ująć wyniki w formę analityczną, możemy zastosować aproksymację brzegową Hermite'a, pozostawiając jeden parametr swobodny, a następnie dobrać wartość tego parametru z warunku najmniejszej odległości między krzywą aproksymującą a aproksymowaną. Z warunku takiego można by oczywiście dobrać również większą liczbę parametrów, jednak nakład pracy przy ich efektywnym obliczaniu rośnie wtedy znacznie.

Aproksymację jednokrotnie optymalną zastosowano w pracy [778] do przedstawienia krzywych nośności granicznej dla jednoczesnego zginania i rozciągania prętów o różnych kształtach przekroju prostymi wielomianami aproksymacyjnymi o jednolitej budowie

OBCIĄŻENIA ZŁOŻONE NA SZCZEBLU P PUNKTU CIAŁA

14. Pomocnicze przestrzenie wektorowe

14.1. Przestrzenie dziewięciowymiarowe. W p. 2.2 omówiliśmy typowe czynniki wyężeń na szczebłu P punktu ciała i wspomnieliśmy o odpowiednich przestrzeniach czynników wyężenia. Za czynniki wyężenia szczególnie często uważa się tu składowe stanu naprężenia; nazwaliśmy je podstawowymi czynnikami wyężenia. Obecnie omówimy bardziej szczegółowo pomocnicze przestrzenie wektorowe odnoszące się do szczebłu P , w szczególności przestrzenie naprężeń. Pewne ogólne rozważania dotyczące takich przestrzeni zawiera praca A. K. MAŁMEJSTERA [1060].

Dowolny tensor drugiego rzędu w przestrzeni trójwymiarowej τ_{ij} może być przedstawiony jako pewien wektor τ w pomocniczej przestrzeni dziewięciowymiarowej o składowych, równych np. odpowiednio uporządkowanym składowym tensora. Należy przy tym sformułować związki między działaniami na tensorach i działaniami na przyporządkowanych im wektorach. Zazwyczaj przyjmuje się, że mnożeniu tensora τ_{ij} przez skalar λ odpowiada mnożenie wektora τ przez ten skalar, dodawaniu dwóch tensorów odpowiada dodawanie przyporządkowanych wektorów, a skalarnemu mnożeniu tensorów — skalarne mnożenie wektorów.

Taką *dziewięciowymiarową przestrzeń naprężeń* wprowadzili w r. 1932 K. HOHENEMSER i W. PRAGER [265]; znalazła ona jednak szersze zastosowanie dopiero znacznie później (R. HILL [230, 231], R. SHIELD i H. ZIEGLER [645], Z. MRÓZ [436]). Przestrzeń ta bywa często nazywana *przestrzenią Pragera*. Zezwala ona na całkiem ogólne przedstawienie geometryczne zjawisk, opisanych zmianą tensora naprężenia w rozpatrywanym punkcie ciała; jej wadą jest trudna wyobrażalność i trudności w przedstawieniu graficznym. Podobnie można wprowadzić dziewięciowymiarową przestrzeń odkształceń (składowe ε i $\gamma/2$) oraz przestrzeń prędkości odkształceń.

W. W. NOWOŻIŁOW [1101] zwraca uwagę na fakt, że wprowadzona w ten sposób przestrzeń ma tylko znaczenie pomocnicze, a wektor w przestrzeni dziewięciowymiarowej (lub o mniejszej ilości wymiarów) nie może być równoważny danemu tensorowi. Istotnie, tensor ma trzy niezależne niezmienniki, a wektor tylko jeden (długość). W rozpatrywanym przypadku dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń długość wektora σ jest równa jednemu z niezmienników tensora naprężenia, mianowicie

$$(14.1) \quad |\sigma| = \sqrt{I_{2\sigma}};$$

wtedy obrót fizycznego układu odniesienia powoduje zmianę wektora σ , ale bez zmiany jego długości.

Omawianą przestrzeń dziewięciowymiarową trudno uważać za przestrzeń czynników wyężenia w sensie podanym w p. 2. Przez czynnik wyężenia rozumiemy mianowicie wielkości, które mogą być przyjęte za niezależne, a równania $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ itp. redukują liczbę takich wielkości do sześciu.

14.2. Przestrzeń sześciowymiarowe. Wykorzystując symetrię tensora naprężeń i tensora odkształceń można liczbę wymiarów odpowiedniej pomocniczej przestrzeni wektorowej zredukować do sześciu. Taką sześciowymiarową przestrzenią naprężeń posługują się np. R. SHIELD i H. ZIEGLER [645], odkładając na osiach układu kolejno $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Pewną wadą tej wygodnej interpretacji fizycznej jest fakt, że długość pomocniczego wektora σ nie jest niezmiennikiem; wadę tę można usunąć przez odkładanie na osiach $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} \sqrt{2}, \tau_{yz} \sqrt{2}, \tau_{zx} \sqrt{2}$. W przypadku odkształceń odpowiednimi wielkościami są ε i $\gamma/\sqrt{2}$, podobnie w przypadku prędkości odkształceń.

Przestrzeń sześciowymiarowe mogą być traktowane jako przestrzeń czynników wyężenia na szczeblu P .

14.3. Przestrzeń pięciowymiarowe. O powstawaniu i narastaniu odkształceń plastycznych decydują przede wszystkim składowe dewiatora naprężeń albo odkształceń lub prędkości odkształceń. Niezależnych składowych dewiatora jest pięć, co nasuwa myśl posługiwania się przestrzenią pięciowymiarową. Przestrzeń taką wprowadził A. A. ILIUSZIN [951], odkładając na osiach układu wielkości

$$(14.2) \quad \begin{aligned} \tau_1 &= t_{xx} \sqrt{\frac{3}{2}}, & \tau_3 &= t_{xy} \sqrt{2}, \\ \tau_2 &= (t_{yy} - t_{zz}) \frac{\sqrt{2}}{2}, & \tau_4 &= t_{yz} \sqrt{2}, \\ & & \tau_5 &= t_{zx} \sqrt{2}, \end{aligned}$$

gdzie t_{ij} są składowymi dewiatora utworzonego z tensora T_τ (np. tensora naprężeń, odkształceń lub prędkości odkształceń). Długość tak utworzonego pięciowymiarowego pomocniczego wektora τ jest proporcjonalna do intensywności tensora wyjściowego, jest więc niezmiennikiem; tak np. w przypadku naprężeń

$$(14.3) \quad |\sigma| = \sigma_i \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Wprowadzona w ten sposób przestrzeń, zwana *przestrzenią Iliuszina*, spełnia warunki odpowiedniości działań na tensorach i przyporządkowanych im wektorach, omówione w p. 14.1.

Jak stwierdza Iliuszin, istnieje nieskończenie wiele różnych przestrzeni pięciowymiarowych, spełniających wymagane warunki; można mianowicie przyjąć

$$(14.4) \quad \begin{aligned} \tau_1 &= t_{xx} \sqrt{2} \cos \alpha \pm t_{yy} \sqrt{2} \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{6} \right), \\ \tau_2 &= t_{xx} \sqrt{2} \sin \alpha \mp t_{yy} \sqrt{2} \cos \left(\alpha \pm \frac{\pi}{6} \right), \\ \tau_3 &= t_{xy} \sqrt{2}, & \tau_4 &= t_{yz} \sqrt{2}, & \tau_5 &= t_{zx} \sqrt{2} \end{aligned}$$

przy dowolnej wartości pomocniczego kąta α i przy jednym ze wskazanych układów znaków. W przypadku (14.2) przyjęto $\alpha = \pi/6$ i znaki dolne; przyjęcie takie, jak dowodzi Iliuszin, jest dogodne ze względów praktycznych.

Warunkowi plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego odpowiada w omawianej przestrzeni hiperkula o równaniu

$$(14.5) \quad |\sigma| = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

14.4. Przestrzenie trójwymiarowe. Najczęściej stosowanymi przestrzeniami trójwymiarowymi są przestrzenie składowych głównych tensora. O przestrzeni naprężeń głównych Haigha-Westergaarda wspomnieliśmy już w p. 6.3; na osiach układu kartezjańskiego odcinamy naprężenia główne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Zaletą takich przestrzeni jest ich prostota i pogłębliwość; wadą — niemożność przedstawienia zmian kierunków głównych np. bez zmian naprężeń głównych. Procesowi, podczas którego zmieniają się tylko kierunki główne, a wartości naprężeń głównych pozostają bez zmiany, odpowiada ustalony punkt w przestrzeni naprężeń głównych, co stanowi niewątpliwą wadę. Ponadto przestrzeń taka nie spełnia już warunków omówionych w p. 14.1, tak np. iloczyn skalarny dwóch tensorów nie jest na ogół równy iloczynowi skalarnemu przyporządkowanych im wektorów (równość zachodzi przy współosiowości tensorów i jednolitym ponumerowaniu osi głównych). Tym niemniej przestrzeń taka jest szeroko stosowana i posługiwanie się nią np. w przypadku ustalonych kierunków głównych jest wystarczające i uzasadnione.

Warunek idealnej plastyczności odwzorowany jest w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń głównych Haigha-Westergaarda pewną powierzchnią (powierzchnią graniczną). Fotografie modeli takich powierzchni odpowiadających różnym warunkom plastyczności (różnym hipotezom wyężenia) można znaleźć np. w pracach W. BURZYŃSKIEGO [55] i A. MELDAHLA [403].

W przeciwieństwie do przestrzeni poprzednio omawianych przestrzeni naprężeń głównych jest *przestrzenią niezmienniczą* w tym sensie, że powierzchnia graniczna nie zależy tu od przyjętego układu odniesienia w rozpatrywanym punkcie ciała. Podobnie można wprowadzić przestrzeń odkształceń głównych, prędkości odkształceń itp.

Ponieważ spośród nieskończonej liczby niezmienników dowolnego tensora drugiego rzędu tylko trzy są niezależne, więc dobierając dowolny układ takich trzech niezależnych niezmienników możemy wprowadzić odpowiednią trójwymiarową przestrzeń; tensorowi naprężeń będą np. odpowiadały przestrzenie $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}; J_{1\sigma}, J_{2\sigma}, J_{3\sigma}; I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$. W wymienionych tu przypadkach na poszczególnych osiach byłyby odcinane wielkości o różnych wymiarach, czego można łatwo uniknąć posługując się niezmiennikami typu $\sqrt{|I_{2\sigma}|}, \sqrt[3]{I_{3\sigma}}$ itd. Przestrzenie niezmienników stanu naprężenia wprowadza np. S. IRMAY [286].

Dobór takiej przestrzeni w zasadniczy sposób rzutuje na wyciągane wnioski. I tak np. dla dość szerokiej klasy materiałów powierzchnia graniczna (warunek plastyczności) w układzie niezmienników aksjatorowo-dewiatorowych $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$ nie zależy od pierwszego niezmiennika $I_{1\sigma}$. Analizując ten problem L. W. HU [280] dochodzi do paradoksalnego wniosku, że każdy warunek plastyczności musi zależeć od $I_{1\sigma}$; wniosek Hu jest całkowicie słuszny, a paradoksalność polega na tym, że jest on słuszny w układzie niezmienników

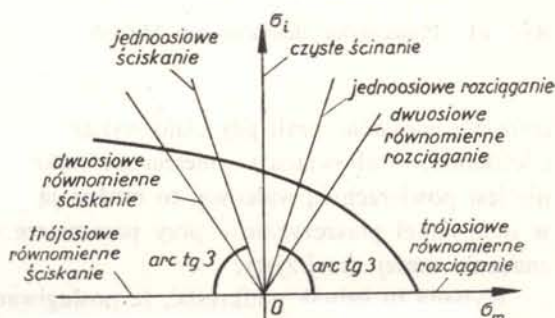
głównych $J_{1\sigma}, J_{2\sigma}, J_{3\sigma}$ (przy czym $J_{1\sigma} = I_{1\sigma}$), a nie jest słuszny w układzie $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$, którego dotyczy zasadnicza dyskusja.

14.5. Przestrzeń dwuwymiarowe — płaszczyzny. Odzworowanie zachodzących procesów w rozpatrywanym punkcie ciała jest szczególnie proste w przypadku, gdy może być dokonane na płaszczyźnie. Toteż istnieją liczne propozycje zdefiniowania takich płaszczyzn, z których przytoczymy najważniejsze. Omówimy jedynie płaszczyzny naprężeń, ale odpowiednie płaszczyzny odkształceń itp. mogą być konstruowane podobnie.

Jeżeli powierzchnia graniczna w przestrzeni naprężeń głównych jest powierzchnią obrotową o osi równonachylonej do płaszczyzn układu, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, to jest ona całkowicie określona tworzącą, czyli krzywą w płaszczyźnie niezmienników walcowych Z_σ, R_σ . Zamiast tej płaszczyzny stosujemy częściej płaszczyznę o zmienionej skali $\sigma_m - \sigma_i$ (naprężenie średnie — intensywność naprężeń), gdzie, jak podaliśmy w p. 6,

$$(14.6) \quad \sigma_m = Z_\sigma / \sqrt{3}, \quad \sigma_i = R_\sigma \sqrt{3/2}.$$

Wobec $\sigma_i \geq 0$ wystarczy rozpatrywać tylko górną połowę płaszczyzny (rys. 60). Omawianą płaszczyznę będziemy nazywali *płaszczyzną Burzyńskiego*, który po raz pierwszy posłużył



Rys. 60. Płaszczyzna Burzyńskiego $\sigma_m - \sigma_i$

się nią w r. 1928 [55] (w istocie rzeczy Burzyński stosował nieco mniej dogodnie współrzędne $\sigma_m, \sigma_i \sqrt{2}$).

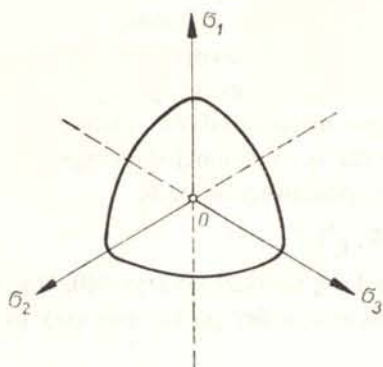
We współrzędnych σ_m, σ_i jednoosiowe rozciąganie i jednoosiowe ściskanie przedstawione są półprostymi $\sigma_i = \pm 3\sigma_m$, dwuosiove równomierne rozciąganie i ściskanie — półprostymi $\sigma_i = \pm \frac{3}{2}\sigma_m$, czyste ścinanie — półprostą $\sigma_m = 0$, trójosiowe równomierne rozciąganie — półprostą $\sigma_i = 0, \sigma_m > 0$, wreszcie trójosiowe równomierne ściskanie — półprostą $\sigma_i = 0, \sigma_m < 0$.

W przypadku gdy powierzchnia graniczna nie jest powierzchnią obrotową, można ją przedstawić na płaszczyźnie Burzyńskiego jednoparametrową rodziną krzywych, gdzie za parametr najdogodniej jest obrać trzeci niezmiennik walcowy ω_σ .

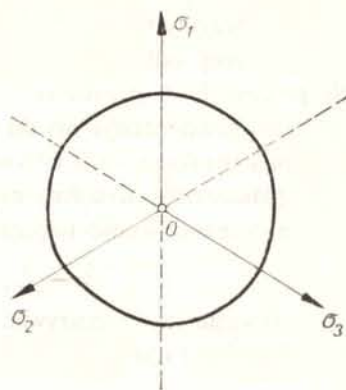
Jeżeli powierzchnia graniczna jest powierzchnią walcową (na ogół niekolistą) o osi walca $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, to jest ona w zupełności określona krzywą, uzyskaną w wyniku przecięcia walca płaszczyzną prostopadłą do jego osi, a więc płaszczyzną

$$(14.7) \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = C = \text{const}.$$

Płaszczyzna taka nosi nazwę *płaszczyzny dewiatorowej* (ta nazwa jest uzasadniona przy przyjęciu $C = 0$) lub *płaszczyzny Meldahla* (F. CORREIA DE ARAÚJO [79]). Rzuty osi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ na tę płaszczyznę tworzą kąty 120° , rys. 61 i 62. W przypadku ciał izotropowych krzywa graniczna w tej płaszczyźnie musi wykazywać potrójną symetrię, mianowicie symetrię względem rzutów osi σ_1, σ_2 i σ_3 (rys. 61); jeżeli ponadto izotropia ciała jest



Rys. 61. Płaszczyzna dewiatorowa Meldahla



Rys. 62. Przypadek izotropii normalnej w płaszczyźnie dewiatorowej Meldahla

izotropią normalną, czyli gdy ciało wykazuje jednakowe własności po stronie rozciągania i ściskania, to obowiązuje symetria sześciokrotna (rys. 62). Jeżeli powierzchnia graniczna nie jest powierzchnią walcową, to można ją przedstawić jednoparametrową rodziną linii w omawianej płaszczyźnie — przy parametrze $C = 3\sigma_m$ — jednak obraz staje się wtedy znacznie mniej przejrzysty.

Wypada tu jednak podkreślić, że posługiwanie się płaszczyzną dewiatorową Meldahla może prowadzić do pewnych nieporozumień, bowiem osie, oznaczone przez nas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, są w istocie rzeczy tylko rzutami tych osi na rozpatrywaną płaszczyznę (14.7). Można więc na tych osiach odkładać bądź same naprężenia główne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, jak to czynił MELDAHL [402], bądź też odpowiednie ich rzuty, wynoszące $\sigma_1 \sqrt{2/3}, \sigma_2 \sqrt{2/3}, \sigma_3 \sqrt{2/3}$; tylko to ostatnie podejście przedstawia przekrój powierzchni granicznej we właściwej skali, ale dla niektórych zastosowań podejście Meldahla jest dogodniejsze.

Podobnie można wprowadzić płaszczyznę dewiatorową odkształceń. Jej zakres zastosowania może być nawet większy niż płaszczyzny naprężeń. Istotnie, w przypadku materiału nieściśliwego $\varepsilon_m = 0$ i każdy punkt reprezentujący stan odkształcenia w przestrzeni odkształceń głównych musi leżeć w płaszczyźnie dewiatorowej. Charakterystyki typowych dróg w płaszczyźnie dewiatorowej odkształceń omawia T. C. HSU [273].

Często rozważa się również krzywe graniczne w płaszczyźnie σ_1, σ_2 , czyli przekroje powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń głównych płaszczyzny $\sigma_3 = 0$. Taka krzywa nie zezwala na odtworzenie całości powierzchni, jednakże dla wielu zastosowań może być wystarczająca, mianowicie opisuje zachowanie się materiału w przypadkach płaskiego stanu naprężenia.

Omówione powyżej płaszczyzny należą do płaszczyzn niezmienniczych — krzywe

graniczne nie zależą tu od przyjętego układu odniesienia w rozpatrywanym punkcie ciała. Często stosuje się również płaszczyzny nie posiadające tej własności, np. płaszczyznę σ_x, τ_{xy} w przypadku złożonych obciążeń prętów — kierunki osi są jednak wtedy z reguły ściśle określone i problem transformacji nie wchodzi w rachubę.

Przypomnimy tu jeszcze raz, że omówione powyżej przestrzenie i płaszczyzny naprężeń albo odkształceń mogą się w wielu przypadkach okazać niewystarczające do opisu procesu; należy wtedy rozbudować je przez dołączenie nowych osi odpowiadających innym czynnikom wyężenia, jak np. temperaturze, wilgotności itp.

15. Warunki idealnej plastyczności ciał izotropowych

15.1. Uwagi ogólne. Jak wspomnieliśmy już w p. 10.2 i 10.3, sformułowanie warunku idealnej plastyczności stanowi przedmiot hipotez wyężeniowych: dobieramy bądź pewien skalar, zależny od niezmienników stanu naprężenia i ewentualnie ubocznych czynników wyężenia, który miałby być stały w trakcie procesu czynnego ośrodka idealnie plastycznego, bądź też ujmujemy wyniki serii doświadczeń na drodze aproksymacyjnej. Hipotezy takie odnosić się mogą również do różnych innych zjawisk fizycznych, jak np. przekroczenie granicy sprężystości lub pojawienie się pierwszych pęknięć, jednak forma matematycznego ich zapisu jest w zasadzie jednolita i dlatego zjawiska te często omawia się łącznie. Istnieją liczne prace przeglądowe, omawiające poszczególne hipotezy i zakres ich zastosowania; wspomnimy tu prace W. BURZYŃSKIEGO [55], H. FROMMA [150], J. MARINA [386], M. T. HUBERA [282], M. M. FIŁONIEŃKI-BORODICZA [1217], T. PEŁCZYŃSKIEGO [526], I. I. GOLDIENBŁATA i W. A. KOPNOWA [857] oraz G. S. PISARENKI i A. A. LEBIEDIEWA [1121]. Dość bogaty dorobek polski w tym zakresie omawia praca Z. KLĘBOWSKIEGO [311].

Obecnie omówimy krótko te hipotezy, które są szczególnie często stosowane przy formułowaniu warunków plastyczności. Sklasyfikujemy je według kształtu odpowiednich powierzchni granicznych w przestrzeni naprężeń głównych.

15.2. Powierzchnie graniczne walcowe. Jeżeli warunek idealnej plastyczności daje się zapisać alternatywnie w formie

$$(15.1) \quad f(I_{2s}, I_{3s}) = 0 \quad \text{lub} \quad f(R_\sigma, \omega_\sigma) = 0,$$

czyli gdy odnośne równanie nie zależy od pierwszego niezmiennika w układzie niezmienników aksjatorowo-dewiatorowych lub w układzie niezmienników walcowych, to odpowiednia powierzchnia graniczna jest powierzchnią walcową o osi równo nachylonej do płaszczyzn układu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Przyjęcie hipotezy tego typu oznacza pominięcie wpływu naprężenia średniego (ciśnienia hydrostatycznego) na uplastycznienie materiału. Problem istnienia takiego wpływu badali doświadczalnie B. CROSSLAND [83] i L. W. HU [277]; stwierdzili oni, że dla dość szerokiej klasy materiałów wpływ taki nie jest zbyt istotny i w pierwszym przybliżeniu może być pominięty, jednak może odgrywać pewną rolę przy obliczeniach dokładniejszych. Warto tu podkreślić, że kwestia wpływu ciśnienia hydrostatycznego na uplastycznienie materiału nie ma nic wspólnego z kwestią jednakowych własności materiału przy rozciąganiu i przy ściskaniu (izotropia normalna); powierzchnie

walcowe mogą również opisywać zachowanie się materiału, który nie wykazuje izotropii normalnej.

Najprostszy opis powierzchni walcowej przedstawia równanie

$$(15.2) \quad R_\sigma = f(\omega_\sigma),$$

które określa krzywą w płaszczyźnie dewiatorowej Meldahla, rys. 61. Stosowany przez W. PRAGER [549] i w licznych innych pracach opis powierzchni walcowej równaniem

$$(15.3) \quad I_{2s} = f(I_{3s})$$

jest nieco mniej przejrzysty.

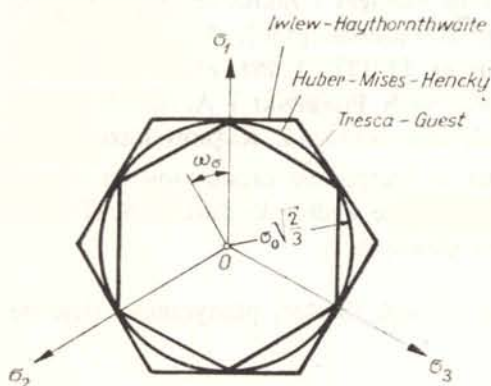
Powierzchnią graniczną jednocześnie walcową i obrotową jest powierzchnia odpowiadająca warunkowi plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego określonego równaniem (10.19), które tu zapiszemy jeszcze w postaci (15.2), mianowicie

$$(15.4) \quad R_\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3}} = \text{const}$$

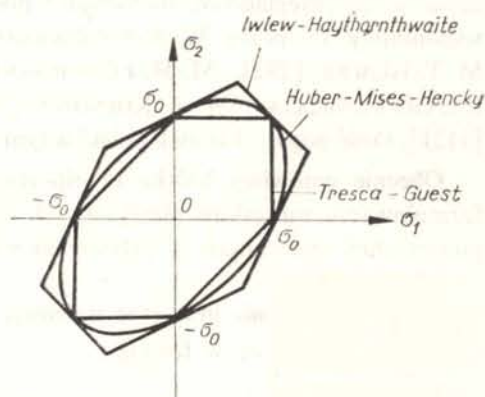
(rys. 63) oraz w dwóch często stosowanych postaciach «rozwinętych»:

$$(15.5) \quad \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_0,$$

$$(15.6) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_0^2.$$



Rys. 63. Przekroje typowych powierzchni granicznych walcowych płaszczyzną dewiatorową Meldahla



Rys. 64. Przekroje typowych powierzchni granicznych walcowych płaszczyzną $\sigma_3 = 0$

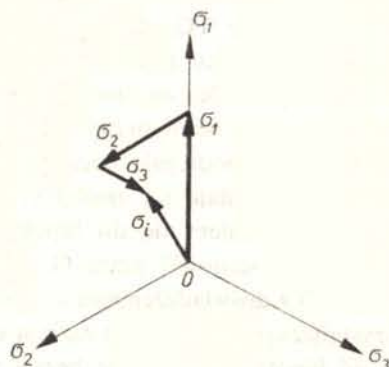
Warunek plastyczności HMH jest sprawdzony doświadczalnie dla dość szerokiej klasy materiałów (W. LODE [359, 360, 361]; M. ROŠ, A. EICHINGER [586]; G. I. TAYLOR, H. QUINNEY [693]; A. M. ŻUKOW [911, 912, 913]; L. W. HU, J. F. BRATT [279]; G. B. TAYLOR, W. N. KAMIENCEW [1199]; J. MIĄSTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI [412]).

Przekrój walca kołowego Hubera-Misesa-Hencky'ego płaszczyzną $\sigma_3 = 0$ jest elipsą o równaniu

$$(15.7) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_0^2,$$

przedstawioną na rys. 64; bywa ona krótko zwana *elipsą huberowską*.

Przytoczymy jeszcze podaną przez A. MELDAHLA [402] prostą konstrukcję geometryczną, zezwalającą na znalezienie intensywności naprężeń, czyli naprężenia zastępczego według hipotezy HMH. Dodając mianowicie geometrycznie wektory σ_1 , σ_2 i σ_3 o kierunkach odpowiednich osi w płaszczyźnie dewiatorowej, otrzymujemy w wyniku wektor, którego długość — jak łatwo wykazać — wynosi σ_i (rys. 65). Tablice liczbowe, pozwalające na szybkie określenie intensywności naprężeń w stanach złożonych, podaje C. BRUTTI [48]



Rys. 65. Graficzne wyznaczenie intensywności naprężeń

Inną często stosowaną powierzchnią walcową jest powierzchnia odpowiadająca warunkowi plastyczności Treski-Guesta (10.27) (w skrócie TG). Równanie (10.27) jest równaniem płaszczyzny w przestrzeni naprężeń głównych; w istocie rzeczy, ponieważ symbole σ_I i σ_{III} oznaczają naprężenia główne algebraicznie uszeregowane, a możliwości takich uszeregowania jest sześć, więc (10.27) określa powierzchnię walcową (graniastosłup), której przekrojem poprzecznym jest sześciokąt umiarkowy przedstawiony również na rys. 63. Graniastosłup Treski-Guesta jest wpisany w walec kołowy Hubera-Misesa-Hencky'ego.

Równanie przekroju graniastosłupa płaszczyzną dewiatorową w zapisie (15.2) przyjmuje postać następującą:

$$(15.8) \quad R_\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2} \cos\left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{6} - n \frac{\pi}{3}\right)}, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Inną, bardziej jednolitą, ale też bardziej skomplikowaną formę zapisu tego związku podano w pracy [770]; przy stosowanych obecnie oznaczeniach przepisujemy ją następująco;

$$(15.9) \quad \cos 6\omega_\sigma = 1 - \frac{(2\sigma_0^2 - 3R_\sigma^2)^2 \sigma_0^2}{R_\sigma^6}.$$

Przekrój powierzchni granicznej płaszczyzną $\sigma_3 = 0$ jest sześciokątem, pokazanym również na rys. 64.

Zasadniczą zaletą warunku plastyczności Treski-Guesta jest liniowość i prostota związku (10.27), wiążącego naprężenia główne. Jeżeli kierunki główne i naprężenia główne nie są znane, to prostota ta z reguły całkowicie zanika: wręcz przeciwnie, praktycznie rzecz biorąc nie można wyrazić warunku Treski-Guesta przez dowolne składowe stanu naprężenia. Pewną propozycję aproksymacji podali Z. WASZCZYŹYŃ i M. ŻYCZKOWSKI

[729], jednak i ta aproksymacja nie jest zbyt prosta. Ale co najmniej równie poważną wadą jest brak zgodności tej hipotezy z danymi doświadczalnymi. Doświadczenia J. GUESTA z r. 1900 [191] były zbyt fragmentaryczne i mało dokładne. Właściwie brak jest danych doświadczalnych, potwierdzających tę hipotezę, a w szczególności istnienie sześciu naroży na powierzchni granicznej: punkty, obrazujące wyniki doświadczeń dla licznych materiałów leżą pomiędzy walcem HMH, a graniastosłupem TG, zbliżając się bardziej wyraźnie do walca HMH i nie potwierdzając istnienia naroży. Przyznają to nawet zdecydowani rzecznicy hipotezy TG, np. D. D. IWLEW [931]; IWLEW, stwierdzając pewne własności ekstremalne warunku plastyczności TG i przypuszczając na tej podstawie, że właśnie ten warunek powinien ogólnie obowiązywać, przypisuje lepszą zgodność warunku HMH z doświadczeniami pewnym czynnikom ubocznym. T. H. LIN i M. ITO [355] przypuszczają, że hipotezie TG podlegają początkowe odkształcenia plastyczne ciała polikrystalicznego tak małe, iż nie dają się zmierzyć; pewien niewielki choćby ich wzrost związany jest z szybkim zbliżeniem się do hipotezy HMH. Pewne doświadczalne potwierdzenie tej teorii mogłaby stanowić praca O. A. SZISZMARIĘWA [1251]. Być może zresztą zgodność hipotezy TG z doświadczeniami byłaby w przypadku monokryształów lepsza niż w ciałach polikrystalicznych; w każdym razie w odniesieniu do licznych materiałów konstrukcyjnych wyższość hipotezy HMH jest bezsporna.

Łatwo wykazać, że różnice liczbowe między wynikami hipotezy HMH, a wynikami hipotezy TG nie przekraczają 15,5% i czasami przyjmuje się hipotezę TG tylko dlatego, że jest prostsza (gdy znane są kierunki główne i uszeregowanie algebraiczne naprężeń głównych). Jednakże, gdy obliczenia wykorzystują nie tylko wartości samej funkcji, ale również wartości pochodnej (przypadki te omówimy w p. 17), to różnice mogą być znacznie większe i przybierają charakter jakościowy (istnienie naroży wobec braku tych naroży przy hipotezie HMH).

Uogólnienie warunku Treski-Guesta na przypadek różnych granic plastyczności przy rozciąganiu i przy ściskaniu można znaleźć w pracy D. D. IWLEWA [932].

Pewien ogólny warunek plastyczności, zawierający w sobie warunki HMH i TG jako przypadki szczególne, zaproponowali A. V. HERSHEY [215] oraz E. A. DAVIS [88], przenosząc na grunt teorii plastyczności prawo pełzania Baileya. Warunek ten ma postać

$$(15.10) \quad |\sigma_1 - \sigma_2|^n + |\sigma_2 - \sigma_3|^n + |\sigma_3 - \sigma_1|^n = 2\sigma_0^n;$$

określa on powierzchnię walcową, która przy $n = 2$ (a także przy $n = 4$) jest walcem kołowym HMH; przy wykładniku n zawartym w przedziale $2 < n < 4$ leży ona na zewnątrz walca HMH, przy wykładniku $n > 4$ — pomiędzy walcem HMH i graniastosłupem TG, przy $n \rightarrow \infty$ przechodzi w graniastosłup TG. Warto jednak zauważyć, że osłabiwości powierzchni granicznej (naroża) występują tylko w przypadku granicznym $n \rightarrow \infty$. Według A. HERSHEY'A szczególnie dobrą zgodność z doświadczeniami uzyskuje się przez przyjęcie wartości wykładnika $n = 6$.

Innemu graniastosłupowi o przekroju sześciokątnym odpowiada warunek plastyczności według hipotezy największego naprężenia dewiatorowego

$$(15.11) \quad \max [|\sigma_1 - \sigma_m|, |\sigma_2 - \sigma_m|, |\sigma_3 - \sigma_m|] = \text{const} = \frac{2}{3} \sigma_0.$$

Hipoteza ta została sformułowana przez D. D. IWLEWA [931] i R. M. HAYTHORNTHWAITE'A [206], chociaż pewne sugestie w tym kierunku można już znaleźć w pracach R. SCHMIDTA [637], A. JU. ISZLINSKIEGO [961] i R. HILLA [223]. Odpowiednie krzywe graniczne w płaszczyźnie dewiatorowej i płaszczyźnie $\sigma_3 = 0$ przytoczono również na rys. 63 i 64. Zgodność tej hipotezy z doświadczeniami jest raczej słaba, jednak pewne jej znaczenie polega na górnym oszacowaniu warunku plastyczności HMH. Jako przykłady zastosowań wymienimy tu prace D. D. IWLEWA [938] oraz D. D. IWLEWA, JU. I. LISTROWEJ i JU. W. NIEMIROWSKIEGO [940].

Inne walcowe powierzchnie graniczne rozpatrywali M. M. FIŁONIENKO-BORODICZ [1215] oraz Z. SOBOTKA [663].

15.3. Powierzchnie graniczne obrotowe. Warunek plastyczności dla szerokiej klasy materiałów wrażliwych na ciśnienie hydrostatyczne można zapisać w postaci równania, które w przestrzeni naprężeń głównych określa powierzchnia obrotowa o osi równonachylonej $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Są to równania typu

$$(15.12) \quad f(I_{1\sigma}, I_{2\sigma}) = 0, \quad f(Z_\sigma, R_\sigma) = 0 \quad \text{lub} \quad f(\sigma_m, \sigma_1) = 0.$$

Drugie z tych równań określa tworzącą powierzchni obrotowej (przekrój osiowy); ostatnie — tę samą tworzącą w płaszczyźnie Burzyńskiego.

Do powierzchni granicznych obrotowych należy omówiony już walec Hubera-Misesa-Hencky'ego. Pierwszą historycznie hipotezą tego typu była hipoteza Beltramiiego (r. 1885), przyjmująca za kryterium wyteżenia całkowitą energię właściwą odkształcenia sprężystego; hipoteza ta nie została jednak potwierdzona doświadczalnie i nie znalazła zastosowania w teorii plastyczności. F. SCHLEICHER [636] przyjął, że w stanie granicznym energia ta jest pewną funkcją naprężenia średniego σ_m ; wadę hipotezy Schleichera stanowi jednak fakt, że w przypadku szczególnym materiału o izotropii normalnej przechodzi ona w hipotezę Beltramiiego a nie HMH.

O możliwości uogólnienia hipotezy HMH przez przyjęcie równania powierzchni granicznej w postaci $\sigma_1 = f(\sigma_m)$ wspomniał w r. 1926 R. MISES w dyskusji nad pracą LODEGO [359] oraz W. LODE [361], jednak efektywną hipotezę tego typu o dużej ogólności sformułował dopiero W. BURZYŃSKI w r. 1928 [55, 56, 57], który propozycję ogólną $\sigma_1 = f(\sigma_m)$ ograniczył ze względów praktycznych do trójparametrowej funkcji typu

$$(15.13) \quad A\sigma_1^2 + B\sigma_m^2 + C\sigma_m - 1 = 0.$$

Przyjmując, że powierzchnia graniczna ma zostać wyznaczona próbami jednoosiowego rozciągania, ściskania i skręcania (ścianania), przy których odpowiednie granice plastyczności oznaczymy kolejno przez σ_{0+} , σ_{0-} , i τ_0 , zapiszemy równanie (15.13) w postaci

$$(15.14) \quad \frac{\sigma_{0+} + \sigma_{0-}}{3\tau_0^2} \sigma_1^2 + \left(9 - \frac{3\sigma_{0+} + \sigma_{0-}}{\tau_0^2}\right) \sigma_m^2 + 3(\sigma_{0-} - \sigma_{0+}) \sigma_m - \sigma_{0+} + \sigma_{0-} = 0.$$

Równanie to przedstawia w przestrzeni naprężeń głównych zasadniczo elipsoidę lub hiperboloideę. W przypadku szczególnym (redukującym liczbę niezależnych parametrów do dwóch)

$$(15.15) \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{\sigma_{0+} + \sigma_{0-}}{3}},$$

otrzymujemy paraboloidę:

$$(15.16) \quad \sigma_t^2 + 3(\sigma_{0-} - \sigma_{0+})\sigma_m - \sigma_{0+}\sigma_{0-} = 0,$$

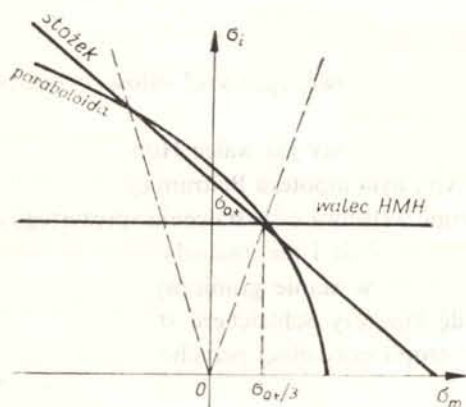
natomiast w przypadku szczególnym

$$(15.17) \quad \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{0+}\sigma_{0-}}{\sigma_{0+} + \sigma_{0-}},$$

otrzymujemy (po wykonaniu pierwiastkowania) powierzchnię stożka kołowego:

$$(15.18) \quad \sigma_t + 3 \frac{\sigma_{0-} - \sigma_{0+}}{\sigma_{0-} + \sigma_{0+}} \sigma_m - 2 \frac{\sigma_{0+}\sigma_{0-}}{\sigma_{0+} + \sigma_{0-}} = 0.$$

Gdy $\sigma_{0+} = \sigma_{0-} = \sigma_0$ oraz $\tau_0 = \sigma_0/\sqrt{3}$, to równanie ogólne (15.14) przechodzi w hipotezę HMM, a więc powierzchnia graniczna staje się walcem kołowym. Odpowiednie krzywe graniczne w płaszczyźnie Burzyńskiego σ_m σ_t pokazano na rys. 66.



Rys. 66. Przypadki szczególne powierzchni granicznej Burzyńskiego

W latach późniejszych równanie powierzchni granicznej (15.14) lub jego przypadki szczególne było jeszcze wielokrotnie proponowane przez różnych autorów. Ogólną postać (15.14) zaproponował w r. 1931 Ju. I. JAGN [1259], w r. 1938 L. RENDULIC [579], a w r. 1954 M. M. FIŁONIEŃKO-BORODICZ [1215]; równanie paraboloidy (15.16) zaproponował w r. 1930 G. D. SANDEL [599], w r. 1937 P. P. BAŁANDIN [794], w r. 1947 C. TORRE [704, 705, 706, 707], nawiązując częściowo do pracy Sandela; w r. 1951 F. STASSI D'ALIA [669] (uwzględniając dodatkowo wpływ zmiennej temperatury), w r. 1958 G. A. GENIEW [850], w r. 1967 H. H. LE BOITEUX [337]; wreszcie równanie stożka (15.18) zaproponowali w r. 1952 D. C. DRUCKER i W. PRAGER [102], a w r. 1953 I. N. MIROLUBOW [1077], który badał również przypadek ogólny (15.14). Również propozycje G. A. GENIEWA [849] i Z. SOBOTKI [662] stanowią szczególny przypadek (15.17); odpowiednia powierzchnia graniczna jest wtedy elipsoidą obrotową. Także powierzchnie graniczne badane przez H. HENCKY'EGO [213] są przypadkami szczególnymi (15.14). Z. KLĘBOWSKI [309, 310] zaproponował aproksymację paraboloidy (15.16) powierzchnią walcową i dwiema powierzchniami stożkowymi.

Pewne nowe ujęcie i uzasadnienie hipotez Burzyńskiego i Schleichera, oparte o rozwa-

żania z zakresu fizyki ciał stałych, podał J. ZAWADZKI [756]. Weryfikację doświadczalną hipotezy parabolicznej (15.16) w odniesieniu do żeliwa przeprowadził N. ALBERTI [1].

Równanie powierzchni obrotowej, w którym niezmiennik $I_{1\sigma}$ występuje w potęgze czwartej, zaproponował R. MISES [424].

15.4. Inne powierzchnie graniczne w przestrzeni naprężeń głównych. Powierzchnie graniczne, odpowiadające większości klasycznych hipotez wyężenia (GALILEUSZ, CLEBSCH, DE SAINT-VENANT, PONCELET), nie są ani powierzchniami walcowymi, ani obrotowymi. Hipotezy te, określające raczej wytrzymałość ciał kruchych, nie znalazły szerszego zastosowania w teorii plastyczności. Natomiast czynione były próby uogólnień hipotezy O. MOHRA [425, 426], którą z kolei można traktować jako pewne uogólnienie hipotezy Treski-Guesta. Wspomniemy tu dwie prace, których autorami są A. LEON [346] i Y. HARA [201].

Dość obszerna klasa warunków plastyczności daje się zapisać w postaci

$$(15.19) \quad R_{\sigma} = f_1(Z_{\sigma})f_2(\omega_{\sigma}) \quad \text{lub} \quad \sigma_i = f_1(\sigma_m)f_2(\omega_{\sigma}).$$

W przypadkach szczególnych $f_2(\omega_{\sigma}) = \text{const}$ otrzymujemy omówione już powierzchnie obrotowe, natomiast $f_1(Z_{\sigma}) = \text{const}$ lub $f_1(\sigma_m) = \text{const}$ — powierzchnie walcowe. Trójparametrowy warunek plastyczności typu (15.19), mianowicie

$$(15.20) \quad R_{\sigma} = (A - BZ_{\sigma})(1 + C \cos 6\omega_{\sigma}),$$

gdzie A , B i C są stałymi, zaproponowali J. MURZEWSKI i Z. MENDERA [447]. Odpowiednia powierzchnia graniczna jest stożkiem niekołowym. Podobną postać powierzchni granicznej zakłada również R. M. HAYTHORNTHWAITTE [205], choć nie opisuje jej analitycznie.

Postać niektórych warunków plastyczności jest jeszcze bardziej złożona niż (15.19); wymienimy tu przykładowo pięcioparametrową hipotezę J. MAJERA [378]

$$(15.21) \quad \sigma_i = (C - \sigma_m)^{n+p} \cos 3\omega_{\sigma} (A + B \cos 3\omega_{\sigma}).$$

Problem warunków plastyczności dla ciał niejednorodnych był analizowany w pracach W. OLSZAKA i W. URBANOWSKIEGO [475, 476, 481] oraz W. OLSZAKA, J. RYCHLEWSKIEGO i W. URBANOWSKIEGO [482].

15.5. Wpływ ubocznych czynników wyężenia. Bardzo istotny wpływ na uplastycznienie ciała mogą mieć czynniki, które nazwalismy ubocznymi, jak np. temperatura, natężenie strumienia neutronów, wilgotność itp. W najprostszym ujęciu, pisząc warunek idealnej plastyczności w postaci $\sigma_{red} = \sigma_0$, uzależnimy od tych czynników jedynie granicę plastyczności σ_0 . Takie ujęcie może jednak prowadzić do zbyt dużych błędów: i tak np. podwyższenie temperatury wpływa na ogół odmiennie na granicę plastyczności po stronie rozciągania σ_{0+} , a odmiennie na granicę po stronie ściskania σ_{0-} (zazwyczaj zbliża je ku sobie, jeżeli były różne w temperaturze pokojowej).

Innego rodzaju uwzględnienie wpływu temperatury zaproponował F. STASSI D'ALIA [669, 670, 671]; uogólnił on równania paraboloidy W. Burzyńskiego (15.16) wprowadzając do niego funkcję temperatury $\alpha(T)$, przy czym w temperaturze pokojowej $\alpha = 1$. Równanie Stassi D'Alia zapiszemy najpierw w postaci

$$(15.22) \quad \sigma_i^2 + 3\alpha(\sigma_{0-} - \alpha\sigma_{0+})\sigma_m - \alpha^3\sigma_{0+}\sigma_{0-} = 0,$$

gdzie σ_{0+} i σ_{0-} oznaczają odpowiednie granice plastyczności w temperaturze pokojowej. Po wprowadzeniu oznaczenia

$$(15.23) \quad \frac{\sigma_{0-}}{\sigma_{0+}} = \kappa$$

i oznaczenia skróconego $\sigma_{0+} = \sigma_0$ oraz po wyrażeniu niezmienników σ_m i σ_l w funkcji składowych stanu naprężenia otrzymujemy

$$(15.24) \quad \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + \\ + \alpha(\kappa - \alpha)\sigma_0(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \alpha^3 \kappa \sigma_0^2 = 0.$$

Powyższy warunek plastyczności uwzględnia wpływ temperatury w sposób jednoparametrowy przez funkcję $\alpha(T)$. Sposób ten budzi jednak wątpliwości. Rozpatrując mianowicie stany jednoosiowe dochodzimy do związku

$$(15.25) \quad \sigma^2 + \alpha(\kappa - \alpha)\sigma_0\sigma - \alpha^3 \kappa \sigma_0^2 = 0,$$

skąd po rozwiązaniu równania kwadratowego względem σ wynika następująca zależność od temperatury granic plastyczności $\sigma_{0+}(T)$ i $\sigma_{0-}(T)$:

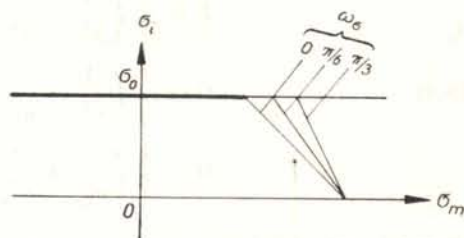
$$(15.26) \quad \sigma_{0+}(T) = \alpha^2(T)\sigma_0, \quad \sigma_{0-}(T) = \alpha(T)\kappa\sigma_0.$$

Ze wzrostem temperatury funkcja $\alpha(T)$ maleje dla znacznej większości materiałów i wobec $\kappa > 1$ różnica względna między granicami plastyczności $\sigma_{0+}(T)$ i $\sigma_{0-}(T)$ powiększa się, zamiast ulegać zmniejszeniu. Wydaje się, że w rozpatrywanym przypadku powierzchni granicznej w formie paraboloidy uwzględnienie wpływu temperatury powinno być co najmniej dwuparametrowe.

Wpływ temperatury na warunek plastyczności badał również szczegółowo P. M. OGIBALOW [1103], wpływ natężenia strumienia elektronów — T. D. DUDDEVAR i J. DUFFY [114]. Liczne uwagi na temat wpływu różnych ubocznych czynników wyteżenia na warunek plastyczności można znaleźć w monografii I. I. GOLDIENBLATA i W. A. KOPNOWA [857].

15.6. Zakres stosowalności warunków plastyczności. Powyżej przytoczyliśmy równania mające określać warunki idealnej plastyczności dla różnorodnych materiałów konstrukcyjnych, nie precyzując zakresu ich stosowalności. W rzeczywistości jedynie rzadko można przyjąć, że równania takie określają warunek plastyczności w całym obszarze określoności. W niektórych stanach naprężenia, zwłaszcza bliskich trójosiowemu równomiernemu rozciąganiu, a zależnych również od ubocznych czynników wyteżenia, utrata spójności cząstek może poprzedzić wystąpienie znaczniejszych odkształceń plastycznych. Na zjawisko to zwrócili uwagę N. N. DAWIDIENKOW i JA. B. FRIDMAN [1224]; ograniczyli oni zakres stosowalności hipotezy Treski-Guesta przyjmując, że utrata spójności określona jest odrębnie hipotezą największego wydłużenia de Saint-Venanta-Ponceleta. Podobnego typu ograniczenie stosowalności hipotezy energetycznej HMM sformułował T. PEŁCZYŃSKI [525]. Odpowiednia walcowa powierzchnia graniczna jest wtedy ścięta ostrosłupem o przekroju trójkątnym równobocznym; interpretację graficzną w płaszczyźnie Burzyńskiego pokazano na rys. 67.

Efektywne określenie zakresu stosowalności poszczególnych warunków plastyczności może być trudne, należy jednak zdawać sobie sprawę z faktu, że wykorzystywanie tych warunków w całym obszarze określoności stanowi z reguły pewną ekstrapolację, która może nie znaleźć potwierdzenia doświadczalnego.



Rys. 67. Ograniczenie zakresu stosowalności warunku plastyczności HMH (według Pełczyńskiego)

16. Warunki idealnej plastyczności ciał anizotropowych

16.1. Uogólnienia warunku Hubera-Misesa-Hencky'ego. Warunki idealnej plastyczności ciał anizotropowych są formułowane z reguły jako pewne uogólnienia warunków słusznych dla ciał izotropowych. W związku z tym sklasyfikujemy je według warunków, które podlegają uogólnieniu na przypadek anizotropii.

Uogólnienie hipotezy HMH może następować na dwojaki sposób: bądź przez poszukiwanie warunku plastyczności w formie jednorodnej kwadratowej funkcji stanu naprężenia, bądź też na drodze rozważań energetycznych. Pierwsza droga prowadzi do najogólniejszego warunku o postaci (dla skrócenia stosujemy zapis matematyczny)

$$(16.1) \quad II_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} = 1,$$

gdzie moduły II_{ijkl} , tworzące tensor czwartego rzędu, spełniają warunki symetrii $II_{ijkl} = II_{klij} = II_{jikl} = II_{iljk}$, tak że niezależnych modułów tego typu jest 21. Równanie (16.1) zaproponował w r. 1928 R. MISES [423]. Przy dodatkowym założeniu, że uplastycznienie ciała nie zależy od naprężenia średniego σ_m , liczba modułów II redukuje się do 15.

Prostszą postać można nadać równaniu (16.1) w przypadku anizotropii prostokątnej czyli ortotropii. Istnieją wtedy trzy wzajemnie prostopadłe kierunki główne tensora modułów plastyczności II_{ijkl} . Dobierając układ osi xyz tak, aby pokryły się one z osiami głównymi ortotropii, doprowadzamy do zniknięcia 9 wyrazów typu $\sigma_x \tau_{xy}$ i 3 wyrazów typu $\tau_{xy} \tau_{yz}$, tak że pozostaje następujących 9 wyrazów;

$$(16.2) \quad II_{1111} \sigma_x^2 + II_{2222} \sigma_y^2 + II_{3333} \sigma_z^2 + 2II_{1122} \sigma_x \sigma_y + 2II_{2233} \sigma_y \sigma_z + 2II_{3311} \sigma_z \sigma_x + \\ + 4II_{1212} \tau_{xy}^2 + 4II_{2323} \tau_{yz}^2 + 4II_{3131} \tau_{zx}^2 = 1.$$

Przechodząc na zapis inżynierski pozostawiliśmy przy modułach II wskaźniki 1, 2, 3 podkreślając w ten sposób, że mamy tu do czynienia z kierunkami głównymi tensora II_{ijkl} .

Przy dodatkowym założeniu niezależności warunku plastyczności od naprężenia średniego σ_m liczba modułów II_{ijkl} redukuje się do sześciu. Przypadek ten badał R. HILL [220]; w zapisie Hilla warunek (16.2) przybiera postać

$$(16.3) \quad F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1.$$

Moduły F, G, H, L, M, N mogą być wyrażone przez granice plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu (lub ściskaniu) w kierunkach x, y, z , które oznaczymy przez $\sigma_{0x}, \sigma_{0y}, \sigma_{0z}$, oraz granice plastyczności przy ścinaniu $\tau_{0xy}, \tau_{0yz}, \tau_{0zx}$. Łatwo wyprowadzić związki

$$(16.4) \quad \begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{0y}^2} + \frac{1}{\sigma_{0z}^2} - \frac{1}{\sigma_{0x}^2} \right), & L &= \frac{1}{2\tau_{0yz}^2}, \\ G &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{0z}^2} + \frac{1}{\sigma_{0x}^2} - \frac{1}{\sigma_{0y}^2} \right), & M &= \frac{1}{2\tau_{0zx}^2}, \\ H &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{0x}^2} + \frac{1}{\sigma_{0y}^2} - \frac{1}{\sigma_{0z}^2} \right), & N &= \frac{1}{2\tau_{0xy}^2}. \end{aligned}$$

Warunek ten został potwierdzony doświadczalnie dla licznych materiałów wykazujących jednakową granicę plastyczności przy rozciąganiu i ściskaniu.

Uogólnienie warunku plastyczności Misesa (16.1) na przypadek materiałów niejednorodnych podali W. OLSZAK i W. URBANOWSKI [475, 476].

Do uogólnienia warunku plastyczności HMH na przypadek ciał anizotropowych można dojść również na drodze energetycznej, postulując stałość energii odkształcenia postaciowego na granicy zakresu sprężystego, a następnie wyrażając uzyskane równanie przez same składowe stanu naprężenia. W najogólniejszym przypadku anizotropii energia odkształcenia sprężystego nie daje się rozłożyć na energię objętościową i postaciową. Problem ten rozpatrzył pierwszy W. BURZYŃSKI [55], który stwierdził, że istnienie takiego rozkładu wymaga spełnienia przez moduły sprężystości 5 związków, tak że tylko 16 modułów pozostaje niezależnych. Uogólnienia warunku plastyczności HMH na materiały anizotropowe na drodze rozważań energetycznych proponowali I. E. MILEJKOWSKI [1076], K. KLÖPPEL i M. YAMADA [313], C. I. BORŚ [38] oraz Z. SOBOTKA [661].

F. P. BIELANKIN, W. F. JACENKO i G. G. MARGOLIN [807] zaproponowali dla płaskiego stanu naprężenia warunek plastyczności w formie elipsy na płaszczyźnie $\sigma_1\sigma_2$, obróconej względem elipsy HMH.

16.2. Uogólnienia warunku Burzyńskiego. Pewne uogólnienie warunku plastyczności Burzyńskiego na przypadek materiałów anizotropowych podał w r. 1955 I. I. GOLDIENBŁAT [854]; warunek ten został dalej uogólniony w pracach I. I. GOLDIENBŁATA i W. KOPNOWA [855, 856, 857] do postaci

$$(16.5) \quad (II_{ij}\sigma_{ij})^\alpha + (II_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^\beta + (II_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^\gamma + \dots = 1,$$

gdzie $II_{ij}, II_{ijkl}, II_{ijklmn}, \dots$ są tensorami modułów anizotropii kolejnych parzystych rzędów, $\alpha, \beta, \gamma \dots$ wykładnikami, w zasadzie dowolnymi, jednak ze względów praktycznych (łatwość w uzyskaniu zgodności wymiarów) proponuje się $\alpha = 1, \beta = 1/2, \gamma = 1/3 \dots$ Warunek plastyczności w formie (16.5) w przypadku ciał izotropowych sprowadza się nawet do postaci znacznie ogólniejszej od propozycji Burzyńskiego (15.14). Autorzy opracowali jednak bardziej szczegółowo przypadek

$$(16.6) \quad II_{ij}\sigma_{ij} + \sqrt{II_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}} = 1,$$

który stanowi bezpośrednie uogólnienie warunku (15.14). W monografii [857] można

znaleźć opis sposobu wyznaczenia modułów Π_{ij} oraz Π_{ijkl} z danych doświadczalnych, jak również wzory „robocze” dla najważniejszych przypadków szczególnych.

Podobne, choć nieco mniej ogólne propozycje podali L. W. HU i J. MARIN [275], J. MARIN [392], W. O. GEOGDŻAJEW [852], M. SZ. MIKIEŁADZE [1074] oraz T. C. HSU [272]. Przypadek $\alpha = \beta = \gamma = \dots = 1$ w równaniu (16.5) badał A. K. MAŁMEJSTER [1060].

16.3. Uogólnienia warunku Treski-Guesta. Uogólnienie warunku Treski-Guesta na przypadek materiałów anizotropowych jest bardzo proste, jednak tylko w przypadku bardzo szczególnym: po pierwsze, gdy anizotropię ograniczymy do ortotropii, oraz po drugie, gdy kierunki główne stanu naprężenia pokrywają się z kierunkami głównymi ortotropii. Odpowiedni układ sześciu równań liniowych w przypadku różnych granic plastyczności po stronie rozciągania i ściskania wyprowadził L. W. HU [278], następnie D. D. IWLEW [932] i M. CAPURSO [63]:

$$(16.7) \quad \begin{aligned} & \frac{\sigma_1}{\sigma_{01+}} - \left(\frac{1}{\sigma_{01+}} - \frac{1}{\sigma_{03-}} \right) \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\sigma_{03-}} = 1, \\ & \dots \dots \dots \\ & - \frac{\sigma_1}{\sigma_{01-}} + \left(\frac{1}{\sigma_{01-}} - \frac{1}{\sigma_{03+}} \right) \sigma_2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_{03+}} = 1, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Pozostałe równania otrzymuje się przez cykliczną przemianę wskaźników. Symbol σ_{01+} oznacza tu granicę plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu w kierunku 1 itp.

Inne uogólnienia warunku TG na przypadek ciał anizotropowych można znaleźć w pracach I. BERMANA i P. G. HODGE'A [26] oraz A. SAWCZUKA [614].

17. Postulat Druckera. Równania fizykalne teorii idealnej plastyczności

17.1. Potencjał plastyczny. Składowe τ_{ij} dowolnego tensora drugiego rzędu T_{τ} można przedstawić jako pochodne cząstkowe pewnej funkcji skalarnej $g(\tau_{ij})$ względem τ_{ij} . Tą funkcją jest po prostu drugi niezmiennik podstawowy rozpatrywanego tensora (ze współczynnikiem 1/2), bowiem z drugiego ze wzorów (6.5), jeżeli się nie wykorzystają warunków symetrii tensora, wynika wprost

$$(17.1) \quad \tau_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial I_{2\tau}}{\partial \tau_{ij}}$$

Wynika stąd, że równania teorii plastyczności Hencky'ego-Iliuszina (10.34) można również zapisać w postaci

$$(17.2) \quad e_{ij} = \frac{\varphi}{2} \frac{\partial I_{2s}}{\partial s_{ij}},$$

a równania teorii plastyczności Levy'ego-Misesa i Prandtla-Reussa (10.58) i (10.69) w postaci

$$(17.3) \quad \dot{e}_{ij}^p = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial I_{2s}}{\partial s_{ij}},$$

gdzie \dot{e}_{ij}^p oznacza, jak zwykle, składowe dewiatora prędkości odkształceń plastycznych;

w przypadku teorii Levy'ego-Misesa przyjmujemy, że odkształcenia te są odkształceniami całkowitymi, natomiast w przypadku teorii Prandtla-Reussa uwzględniamy dodatkowo odkształcenia sprężyste.

Związki (17.2) i (17.3) można łatwo uogólnić obejmując w ten sposób szerszą klasę materiałów. Wykażemy najpierw, że jeżeli $I = I(\tau_{ij})$ jest dowolnym niezmiennikiem tensora T_τ , to obiekt

$$(17.4) \quad \chi_{ij} = \frac{\partial I(\tau_{ij})}{\partial \tau_{ij}}$$

jest tensorem drugiego rzędu. Istotnie, jeżeli dokonamy zmiany układu odniesienia, to niezmiennik I zachowuje swą postać, zatem

$$(17.5) \quad \chi_{kl} = \frac{\partial I(\tau_{kl})}{\partial \tau_{kl}} = \frac{\partial I(\tau_{ij})}{\partial \tau_{ij}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \tau_{kl}} = \frac{\partial I(\tau_{ij})}{\partial \tau_{ij}} a_{ik} a_{jl} = \chi_{ij} a_{ik} a_{jl}.$$

Uogólniając (17.2) i (17.3) możemy więc odpowiednio napisać

$$(17.6) \quad \varepsilon_{ij} = \varphi \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$(17.7) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie $g(\sigma_{ij})$ oznacza pewien, w zasadzie dowolny niezmiennik tensora naprężenia; w przypadku materiałów anizotropowych byłyby to pewien wspólny niezmiennik tensora naprężenia i tensora modułów anizotropii. Przyjmując $g(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} I_{2s}$ otrzymujemy (17.2) lub (17.3), bowiem wynik różniczkowania względem składowych tensora σ_{ij} lub składowych dewiatora s_{ij} jest tu identyczny.

Funkcję $g(\sigma_{ij})$ nazywamy *potencjałem plastycznym*; pojęcie to zostało wprowadzone przez R. MISESA [423]. Potencjał taki istnieje, jeżeli spełnione są związki

$$(17.8) \quad \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{kl}^p}{\partial \sigma_{ij}}$$

lub odpowiednie dla ε_{ij} . Różniczkowanie cząstkowe należy tu rozumieć przy ustalonej wartości φ lub λ ; dla ciał idealnie plastycznych wielkości te nie dadzą się zresztą wyrazić w funkcji naprężeń. Założenie (17.8) jest bardzo słabe, a np. dla materiału izotropowego związki (17.8) można uważać za oczywiste.

Samo istnienie potencjału plastycznego dla szerokiej klasy materiałów nie podlega więc dyskusji, natomiast dyskusyjna może być postać funkcji $g(\sigma_{ij})$. Zauważymy najpierw, że posługując się pomocniczą przestrzenią dziewięciowymiarową, zdefiniowaną w p. 14.1, możemy zamiast (17.6) i (17.7) napisać odpowiednio

$$(17.9) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varphi \text{grad } g(\boldsymbol{\sigma}_{ij})$$

$$(17.10) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \text{grad } g(\boldsymbol{\sigma}_{ij}).$$

Jeżeli przez przyrównanie potencjału plastycznego $g(\sigma_{ij})$ do zera (lub do pewnej stałej) określimy odpowiednią powierzchnię w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń, to

wektor ϵ względnie ϵ^p jest prostopadły do tej powierzchni. Wynika stąd dalej, że jeżeli wektory te mają odpowiadać dewiatorom, to odpowiednia powierzchnia musi być powierzchnią walcową (niekoniecznie kolistą) o osi $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ w przestrzeni dziewięciowymiarowej, a powierzchnią walcową o osi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ w przestrzeni trójwymiarowej naprężeń głównych. W tym przypadku prawa (17.9) lub (17.10) są prawami zmiany postaci; w przeciwnym razie określają zarówno zmianę postaci, jak i zmianę objętości.

Zapiszmy warunek plastyczności w postaci

$$(17.11) \quad f(\sigma_{ij}) = \text{const.}$$

Postać taka nie jest oczywiście jednoznaczna, jednak wieloznaczność nie odgrywa tu roli. W równaniach teorii odkształceniowej najbardziej uzasadnione jest określenie składowych dewiatora w oparciu o przyjęcie

$$(17.12) \quad g(\sigma_{ij}) = f_{\text{HMH}}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xz}^2) \right]$$

(gdzie przez f_{HMH} oznaczyliśmy funkcję składowych stanu naprężenia, odpowiadającą warunkowi plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego ze stosownym mnożnikiem, zapisaną w formie odpowiadającej przestrzeni dziewięciowymiarowej), bez względu na stosowany warunek plastyczności i dodanie składowych aksjatora określonych prawem zmiany objętości (10.8). Wtedy i tylko wtedy przyjęcie $\varphi = 1/2G$ prowadzi do równań zakresu sprężystego; w przeciwnym razie nie uzyskalibyśmy bezpośredniego przejścia do prawa Hooke'a.

Przejdźmy do teorii płynięcia plastycznego. Jeżeli przy przyjęciu warunku plastyczności w postaci (17.11) i prawa płynięcia plastycznego w postaci (17.7) zachodzi związek

$$(17.13) \quad g(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}),$$

to mówimy o *stowarzyszonym prawie płynięcia plastycznego*, a dokładniej, że prawo (17.7) jest stowarzyszone z zastosowanym warunkiem plastyczności (17.11).

W klasycznej teorii płynięcia plastycznego, korzystającej z warunku plastyczności HMH i prawa fizykalnego (17.3), mamy do czynienia ze stowarzyszonym prawem płynięcia, bowiem

$$(17.14) \quad g(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} I_{2s}(\sigma_{ij}) = f_{\text{HMH}}(\sigma_{ij})$$

Ujęcie takie zostało dość dobrze potwierdzone doświadczalnie, przynajmniej dla procesów, w trakcie których kierunki główne naprężeń nie ulegają zmianie.

W przypadku innych warunków plastyczności funkcja $g(\sigma_{ij})$, a zatem i prawo płynięcia plastycznego (17.7) powinny być określone na drodze doświadczalnej. Przy braku danych doświadczalnych nasuwają się dwa podejścia przybliżone; jedno z nich polega na zachowaniu prawa (17.3), natomiast drugie na przyjęciu stowarzyszonego prawa płynięcia (17.13). Prawo (17.3) oznacza podobieństwo dewiatorów naprężeń i prędkości odkształceń plastycznych; jest ono stowarzyszone z warunkiem plastyczności HMH. Na marginesie warto zauważyć, że w pewnym sensie równania fizykalne teorii sprężystości są stowarzyszone

z warunkiem plastyczności HMH, bowiem dla zakresu sprężystego możemy zamiast (10.13) napisać

$$(17.15) \quad e_{ij} = \frac{1}{4G} \frac{\partial I_{2s}}{\partial s_{ij}} = \frac{1}{2G} \frac{\partial f_{HMH}}{\partial s_{ij}}.$$

Związek ten oczywiście nie jest przypadkowy, lecz wynika z interpretacji energetycznej warunku plastyczności HMH. Pewne argumenty za stosowaniem stowarzyszonych praw płynięcia przytoczymy w p. 17.3. Pomimo że dane doświadczalne, dotyczące płynięcia plastycznego w przypadku warunków plastyczności różnych od HMH są jeszcze zbyt skąpe, można spodziewać się, że dla wielu materiałów żadne z opisanych podejść przybliżonych nie będzie dostatecznie dokładne.

Koncepcja potencjału plastycznego prowadzi do pewnych nieoznaczoności, gdy funkcja $g(\sigma_{ij})$ wykazuje osobliwości, gdy jest mianowicie w pewnych punktach lub wzdłuż pewnych linii nieróżniczkowalna. Istotnie, wtedy nie zawsze istnieje jednoznacznie określony gradient: przykładem może tu być funkcja odpowiadająca warunkowi plastyczności Treski-GUESTA. Odpowiednie stowarzyszone prawo płynięcia sformułował już w latach trzydziestych A. REUSS [581, 582], jednak ogólniejszą teorię podali dopiero W. PRAGER [553] i W. T. KOITER [314, 315]. Dalsze uogólnienie należy do J. MANDELA [380].

Bywają też wysuwane całkiem odmienne propozycje od obu opisanych tu podejść przybliżonych. Tak np. w przypadku warunku plastyczności Treski (10.27), S. A. CHRISTIANOWICZ i E. N. SZEMIAKIN [1225] zaproponowali prawo fizykalne teorii odkształceniowej

$$(17.16) \quad \sigma_{II} = \frac{3K}{1+\nu} [\nu \varepsilon_m + (1-2\nu) \varepsilon_{II}],$$

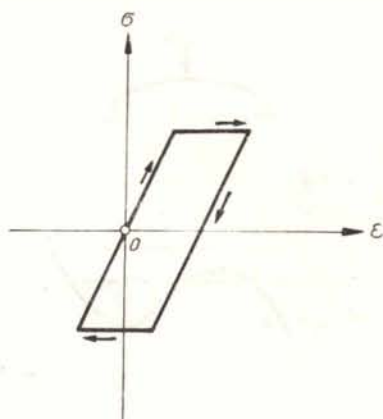
które wraz z warunkiem (10.27) i prawem zmiany objętości (10.8) określa całkowicie związki między odkształceniami i naprężeniami. W przypadku prawa (17.16) podobieństwo dewiatorów naprężeń i odkształceń na ogół nie zachodzi, parametry Lodego μ_σ i μ_ε są różne i — zgodnie z twierdzeniem autorów — prawo to prowadzi do lepszej zgodności z doświadczeniami niż prawo $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon$.

17.2. Pojęcia cyklu w teorii plastyczności. Przez proces cykliczny rozumiemy taki proces, który jest albo może być wielokrotnie powtarzany. Przyjmijmy następującą definicję cyklu, zgodną z definicją stosowaną w problemach wytrzymałości zmęczeniowej: przez *cykl* rozumiemy taki proces odkształcania, po zakończeniu którego zarówno zmienne niezależne (czynniki wyężenia) jak i zmienne zależne powrócą do wartości pierwotnych.

Wobec nieodwracalności procesów odkształceń plastycznych z cyklami w sensie zdefiniowanym powyżej zazwyczaj w teorii plastyczności nie mamy w ogóle do czynienia. Pewien przypadek wyjątkowy pokazuje rys. 68: powrót do stanu początkowego możliwy jest tu wskutek odpowiednich odkształceń plastycznych przeciwzwrotnych (jeżeli przyrostu temperatury nie bierzemy pod uwagę).

Wprowadzimy więc pojęcie pokrewne *quasi-cyklu*, które może znaleźć zastosowanie bez względu na odwracalność procesu. Przez quasi-cykl będziemy rozumieli taki proces odkształcania, po zakończeniu którego zmienne niezależne (czynniki wyężenia) powrócą

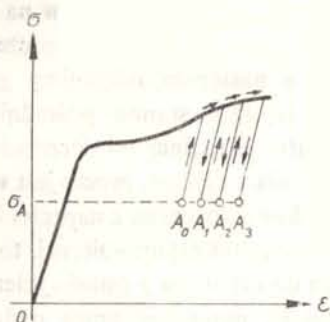
do wartości pierwotnych. Zmienne zależne mogą w trakcie każdego quasi-cyklu zachowywać się całkiem odmiennie, tak że na ogół trudno tu mówić o efektach powtarzalnych. Wyróżnimy dwa typowe quasi-cykle w zależności od doboru czynników wyężenia.



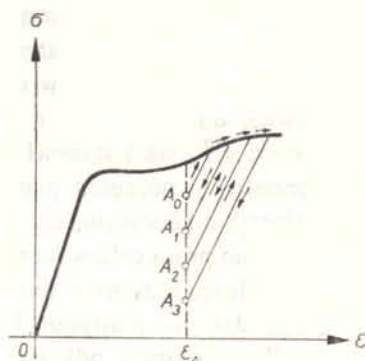
Rys. 68. Przykład cyklu w teorii plastyczności

Jeżeli za czynniki wyężenia można uważać składowe stanu naprężenia, to będziemy mówili o quasi-cyklu naprężeniowym; quasi-cyklem takim posługuje się D. C. DRUCKER [98, 105, 109] (nazywając go jednak cyklem, co stało się przyczyną licznych nieporozumień). Podobnie wprowadzamy pojęcie quasi-cyklu odkształceniowego (A. A. ILIUSZIN [955]). Ponadto w pracy [111] D. C. DRUCKER posługuje się quasi-cyklem naprężeniowo-temperaturowym.

Typowe quasi-cykle naprężeniowe i odkształceniowe w przypadku jednego czynnika wyężenia zostały zilustrowane na rys. 69 i 70.



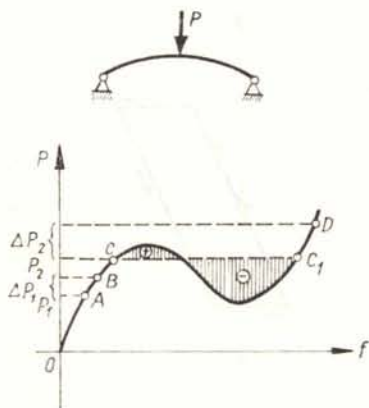
Rys. 69. Quasi-cykle naprężeniowe



Rys. 70. Quasi-cykle odkształceniowe

17.3. Postulat Druckera. Materiały stateczne w sensie Druckera. D. C. DRUCKER [98, 109] sformułował pewne kryterium stateczności procesu odkształcenia. Dla lepszej ilustracji problemu i wykazania analogii rozpatrzmy najpierw typowe zjawisko utraty

stateczności konstrukcji sprężystej. Weźmiemy pod uwagę np. powłokę sferyczną małowyniosłą, podpartą przegubowo nieprzesuwnie, obciążoną siłą P (rys. 71). Na rys. 71 przytoczono również wykres zależności między siłą P a ugięciem powłoki f . Przypuśćmy, że na powłokę działa siła P_1 , a następnie przykładamy dodatkowe obciążenie ΔP_1 i zdejmujemy je.



Rys. 71. Wykres ugięć sprężystej powłoki sferycznej małowyniosłej

mujemy je. Powstaje cykl ABA ; praca całkowita, jak i praca nadwyżki obciążenia ΔP_1 , są równe zero. Zachowanie się konstrukcji określamy wtedy jako stateczne. Przypuśćmy teraz, że na powłokę działa siła P_2 , a następnie przykładamy dodatkowe obciążenie ΔP_2 i zdejmujemy je. Powstaje quasi-cykl obciążeniowy CDC_1 ; nastąpiło zjawisko «przeskoku», została wykonana pewna dodatnia praca całkowita (przy braku rozpraszania energii musi ona pozostać w formie energii ruchu drgającego), natomiast pracę nadwyżki obciążenia ΔP_2 można uważać za ujemną (pole zakreskowane na rys. 71). Taką ujemną pracę nadwyżki obciążenia można traktować jako pewien objaw niestateczności. Na marginesie warto zauważyć, że dalsze przykładanie i zdejmowanie nadwyżki ΔP_2 powoduje każdorazowo cykl C_1DC_1 , wykazujący cechy stateczności.

Wróćmy obecnie do teorii plastyczności, mianowicie do analizy procesów na szczelbu punktu ciała P . Przypuśćmy, że w rozpatrywanym punkcie panuje stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(0)}$. Dodajmy pewien dodatkowy stan naprężenia $\Delta\sigma_{ij}$, a następnie odejmijmy go. Jeżeli zarówno stanowi $\sigma_{ij}^{(0)}$, jak i stanowi $\sigma_{ij}^{(0)} + \Delta\sigma_{ij}$ oraz wszystkim stanom pośrednim odpowiadały w przestrzeni naprężeń punkty leżące wewnątrz aktualnej powierzchni czynno-biernej (powierzchni plastyczności), to mamy do czynienia z cyklem, proces jest wyłącznie sprężysty i zarówno praca całkowita jak i praca nadwyżkowa związana z naprężeniami $\Delta\sigma_{ij}$ jest równa zero. Jeżeli natomiast punkt dotarł do powierzchni czynno-biernej, to na ogół pojawiają się odkształcenia plastyczne i mamy już tylko do czynienia z quasi-cyklem naprężeniowym; całkowita praca odkształcenia jest dodatnia, natomiast praca nadwyżkowa może być dodatnia, ujemna lub równa zero. Elementarną pracę nadwyżkową, odpowiadającą nieskończenie małemu przyrostowi odkształceń plastycznych, określimy wzorem (przy procesie izotermicznym)

$$(17.17) \quad dW^* = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(0)}) d\varepsilon_{ij}^p;$$

we wzorze tym zastosowano, jak zwykle, konwencję sumacyjną.

Założenie nieujemności pracy nadwyżkowej dW^* nazwiemy postulatem Druckera (ostatnio rozpowszechnia się bardziej uzasadniona nazwa «definicja materiału statecznego w sensie Druckera»);

$$(17.18) \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(0)}) d\epsilon_{ij}^p \geq 0.$$

Gdy dowolnie zresztą obrany stan $\sigma_{ij}^{(0)}$ zbliża się do σ_{ij} , czyli $\Delta\sigma_{ij}$ zmierza do zera, to zamiast (17.14) można napisać

$$(17.19) \quad d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \geq 0.$$

Dla rozróżnienia (17.18) można by nazwać wielkim, natomiast (17.19) małym postulatem Druckera. Mały postulat Druckera wynika z wielkiego (o ile ma on być słuszny dla każdego $\sigma_{ij}^{(0)}$), ale nie na odwrót.

Materiały, które spełniają postulaty (17.18) i (17.19), nazwał Drucker materiałami statecznymi. Wydaje się jednak celowe wprowadzenie bardziej szczegółowych definicji.

Materiały, które spełniają postulat Druckera (17.17) na każdym etapie procesu odkształcania i przy dowolnym wyborze punktu wyjściowego $\sigma_{ij}^{(0)}$, nazwiemy materiałami nieograniczenie statecznymi. Jeżeli nierówność (17.18) jest spełniona tylko na pewnym etapie procesu, to będziemy mówili o *stateczności chwilowej*; jeżeli jest spełniona nie dla dowolnego punktu wyjściowego $\sigma_{ij}^{(0)}$, lecz tylko dla punktów pewnego podobszaru, czyli gdy zależy od kierunku drogi w przestrzeni naprężeń, to będziemy mówili o *stateczności w pewnych kierunkach*.

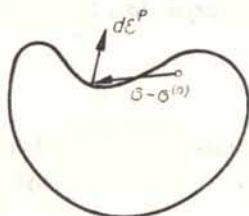
Osobnym problemem jest definicja stateczności przy dopuszczalnej zmienności ubocznych czynników wyteżenia. W przypadku zmian temperatury zagadnienie to badał D. C. DRUCKER [111] dochodząc do wniosku, iż warunkiem koniecznym nieujemności pracy nadwyżkowej jest wtedy wzrost granicy plastyczności wraz z temperaturą. Ponieważ w znacznej większości materiałów granica plastyczności jest malejącą funkcją temperatury, więc nieograniczona stateczność nie jest tu zachowana, może wystąpić jedynie stateczność w pewnych kierunkach (np. odpowiadających stałej temperaturze).

Pokrewny postulat, żądający nieujemności pracy nadwyżkowej w trakcie quasi-cyklu odkształceniowego, sformułował A. A. ILIUSZIN [955, 956, 957]. Postulat ten, nazwany przez autora postulatem plastyczności, jest słabszy od postulatu Druckera. Pewne postulaty, odnoszące się do zmiany odkształceń w trakcie quasi-cyklu naprężeniowego lub do zmiany naprężeń w trakcie quasi-cyklu odkształceniowego, sformułował W. I. MAŁYJ [1061].

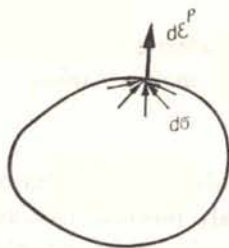
17.4. Wnioski z postulatu Druckera. Przyjmując słuszność postulatu (17.18), czyli rozważając materiały nieograniczenie stateczne, dochodzimy do wniosku, iż dla takich materiałów powierzchnia graniczna (czynno-bierna) musi być powierzchnią wypukłą. Istotnie, skorzystajmy z pomocniczej dziewięciowymiarowej przestrzeni wektorowej naprężeń, wtedy lewą stronę (17.18) można interpretować jako iloczyn skalarny wektorów $d\mathbf{e}^p$ i $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(0)}$. Jeżeli powierzchnia graniczna wykazuje wklęsłości, to zawsze można znaleźć taki punkt $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$, iż kąt między omawianymi wektorami jest rozwarty, zatem ich iloczyn skalarny ujemny (rys. 72), co przeczy nierówności (17.18).

Z nierówności (17.19) wynika dalej, że wektor $d\mathbf{e}^p$ musi być wtedy prostopadły do powierzchni granicznej (rys. 73); istotnie, tylko wtedy wykluczony jest kąt rozwarty między

$d\epsilon^p$ i $d\sigma$. Oznacza to, iż dla materiałów nieograniczenie statecznych prawo płynięcia plastycznego (17.10) musi być stowarzyszonym prawem płynięcia, czyli musi zachodzić związek (17.13).



Rys. 72. Przykład ujemnej pracy nadwyżkowej w przypadku wklęsłości powierzchni



Rys. 73. Normalność wektora $d\epsilon^p$ do powierzchni granicznej

Przyjęcie słuszności postulatu Druckera, a więc ograniczenie się do stowarzyszonych praw płynięcia, pociąga za sobą liczne konsekwencje, szczególnie ważne z punktu widzenia teoretycznego. Zezwala ono na wykazanie jednoznaczności rozwiązań (rozumianej tu oczywiście nie jako niezależność stanu końcowego od drogi, lecz w sensie przyrostowym — mały przyrost obciążeń powoduje jednoznaczny mały przyrost naprężeń i odkształceń) oraz na stosunkowo łatwe sformułowanie zasad wariacyjnych teorii plastyczności. Korzyści stosowania stowarzyszonych praw płynięcia uzasadniają np. G. I. TAYLOR [694], D. R. BLAND [33], D. C. DRUCKER [107, 112], R. HILL [233, 234] oraz H. LEIPHOLZ [344].

Przyjęcie postulatu Druckera nakłada dość silne ograniczenia na postać warunku plastyczności. I tak np. gdy rozważamy dopuszczalne powierzchnie graniczne walcowe (15.1) i założymy jednakowe własności materiału po stronie rozciągania i ściskania $\sigma_{0-} = \sigma_{0+}$, to ponieważ sześć punktów na osiach $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (rys. 63) jest wyznaczonych próbą jednoosiowego rozciągania, dowolna powierzchnia graniczna dla materiału nieograniczenie statecznego musi być zawarta między graniastostupem sześciokątnym Treski-Guesta a graniastostupem sześciokątnym Iwlewa-Haythornthwaite'a (D. D. IWLEW [931], R. M. HAYTHORNTHWAITE [206]). Ten sam autor badał również dopuszczalny kształt powierzchni granicznej w przypadku wpływu pierwszego niezmiennika tensora naprężenia [207].

Konsekwencję przyjęcia postulatu Druckera w przypadku materiału anizotropowego omówił w pracy [826] G. I. BYKOWCEW. B. BUDIANSKY [50] badał klasę procesów, które — obliczane w oparciu o teorię małych odkształceń sprężysto-plastycznych — spełniają postulat Druckera; podejście takie, zdaniem autora, może wskazać na granice zakresu stosowalności teorii odkształceniowej.

17.5. Odstępstwa od postulatu Druckera. Wielu autorów traktuje postulat Druckera jako pewne podstawowe prawo, nie podlegające dyskusji, a wynikające stąd stowarzyszone prawa płynięcia plastycznego — jako oczywiste, nie wymagające komentarzy. Istotnie, klasyczna teoria plastyczności, posługująca się warunkiem plastyczności HHM

i równaniami płynięcia plastycznego Levy'ego-Misesa lub Prandtla-Reussa, pozostaje w zgodzie z postulatem Druckera, a zatem odnosi się do materiału nieograniczenie statecznego. Jednak realne materiały mogą wykazywać różne odstępstwa od klasycznego modelu. Warto tu zacytować opinię samego DRUCKERA [109]: «Należy pamiętać, że określenie materiału statecznego, którego własności nie zależą od czasu, stanowi tylko definicję, a nie prawo przyrody. Istnieją materiały niestateczne różnego rodzaju...».

Niektórzy autorzy starają się uzasadnić ogólną słuszność postulatu Druckera rozumowaniem, iż «odbieranie» pracy nadwyżkowej na kolejnych, powtarzających się cyklach jest wykluczone. Rozumowanie to jest błędne o tyle, że w teorii plastyczności na ogół nie możemy mówić o powtarzaniu się cykli — dla podkreślenia tego faktu posłużyliśmy się terminem quasi-cykl; w przypadku procesu niestatecznego praca nadwyżkowa jest odbierana zazwyczaj jedynie w trakcie pierwszego quasi-cyklu.

Inni autorzy uzasadniają przyjmowanie postulatu Druckera dążeniem do zapewnienia jednoznaczności uzyskiwanych rozwiązań. Jak wykazał Z. MRÓZ [434], postulat Druckera jest warunkiem wystarczającym dla jednoznaczności (pod założeniem zasady zeszytnienia), ale nie jest warunkiem koniecznym; istnieje szersza klasa materiałów, dla których jednoznaczność jest zapewniona.

Za najbardziej typowy przykład odstępstwa od postulatu Druckera uważa się zjawisko «mięknienia plastycznego» (odcinek BC na rys. 6), obserwowane w wielu materiałach, w szczególności w stali niskowęglowej. Materiały takie są więc materiałami niestatecznymi na pewnym etapie procesu odkształcania. Prace dotyczące mięknienia plastycznego omówimy oddzielnie (p. 19.8).

Poważniejszy problem stwarzają materiały, dla których warunek plastyczności zależy w znacznie większym stopniu od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia (np. w układzie niezmienników $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$). Materiałów, których własności wytrzymałościowe zależą w zasadniczy sposób od pierwszego niezmiennika, istnieje bardzo wiele, jednak z reguły są to materiały kruche, wykazujące jedynie nieznaczne odkształcenia plastyczne (żeliwo, szkło itp.). Tym niemniej procesy odkształcania niektórych materiałów tego typu opisuje się metodami teorii plastyczności; należą tu przede wszystkim niektóre rodzaje gruntów i beton. Odpowiednimi warunkami plastyczności są wtedy z reguły: trójparametrowy warunek Burzyńskiego (15.13), jego dwuparametrowe przypadki szczególne — paraboloida (15.16) lub stożek (15.18), albo dwuparametrowy warunek Coulomba-Mohra, któremu w przestrzeni naprężeń głównych odpowiada ostrosłup o przekroju sześciokątnym.

Stowarzyszone prawa płynięcia prowadzą tu do wyników z reguły wyraźnie sprzecznych z doświadczeniami. Przyjmijmy na przykład warunek plastyczności w postaci (15.16) (paraboloida) i określmy prędkości odkształceń plastycznych w oparciu o stowarzyszone prawo płynięcia:

$$(17.20) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = \lambda [(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) + (\sigma_0 - \sigma_0+)], \\ \dot{\epsilon}_y^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \lambda [(2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x) + (\sigma_0 - \sigma_0+)], \\ \dot{\epsilon}_z^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = \lambda [(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) + (\sigma_0 - \sigma_0+)]. \end{aligned}$$

Wzorów na prędkości odkształceń postaciowych nie podajemy, nie różnią się one zresztą od klasycznych wzorów Levy'ego-Misesa. Rozważmy jednoosiowe rozciąganie materiału idealnie plastycznego; przyjmując $\sigma_x = \sigma_0+$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, otrzymujemy

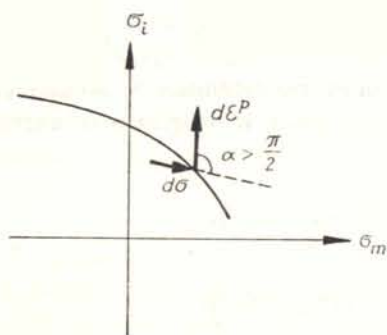
$$\dot{\epsilon}_x^p = \lambda (\sigma_{0+} + \sigma_{0-}). \quad (17.21)$$

$$\dot{\epsilon}_y^p = \dot{\epsilon}_z^p = -\lambda (2\sigma_{0+} - \sigma_{0-}).$$

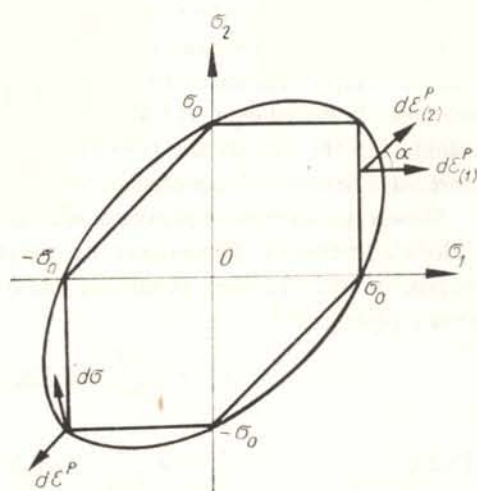
W przypadku $\sigma_{0-} > 2\sigma_{0+}$, występującym dość często w praktyce, otrzymywalibyśmy — przy pominięciu odkształceń sprężystych — wzrost wymiarów przekroju próbki rozciąganej; wynik ten jest sprzeczny z doświadczeniami. Analizując jednoosiowe ściskanie otrzymalibyśmy przyrost objętości (jak zresztą przy dowolnym innym procesie plastycznym, bowiem wektor normalny do krzywych pokazanych na rys. 66 jest zawsze skierowany w prawo), co również nie zostało potwierdzone doświadczalnie.

Przyjmowanie w rozważanych przypadkach stowarzyszonych praw płynięcia plastycznego (C. TORRE [706], D. C. DRUCKER, W. PRAGER [102], T. N. MARTYNOWA [1067]) ustępuje coraz częściej prawom niestowarzyszonym, lepiej zgodnym z danymi doświadczalnymi. W najprostszym przypadku może to być prawo podobieństwa dewiatorów, a więc stowarzyszone z warunkiem plastyczności HMM; dokładniejsza analiza wymaga oczywiście stosownych badań doświadczalnych. Przy zastosowaniu prawa podobieństwa dewiatorów materiał jest stateczny tylko w pewnych kierunkach; przykład procesu niestatecznego w sensie Druckera pokazują rys. 74.

Odstępstwa od normalności wektora $d\epsilon^p$ względem powierzchni granicznej w przypadku gruntów stwierdził np. R. M. HAYTHORNTHWAITTE [205], następnie G. DE JOSSELIN DE JONG [299]; na konieczność zastosowania niestowarzyszonych praw płynięcia zwrócił



Rys. 74. Przykład niestateczności materiału przy zastosowaniu prawa podobieństwa dewiatorów



Rys. 75. Błędy związane z aproksymacją warunku plastyczności HMM warunkiem Treski-Guesta

uwagę D. RADENKOWIĆ [572, 573], który odnośną klasę materiałów nazwał «materiałami niestandardowymi». Przybliżonymi metodami określenia nośności granicznej w przypadku materiałów niestandardowych poświęcili pracę [593] G. SACCHI i M. SAVE. Pewne porównanie stowarzyszonych i niestowarzyszonych praw płynięcia podają D. D. IWLEW i T. N. MARTYNOWA [937, 939].

Odstępstwa od postulatów Druckera występują oczywiście również w przypadku otrzymania z doświadczeń niewypukłych powierzchni granicznych (powierzchni plastyczności). Jakkolwiek dokładność doświadczeń może być zawsze poddana krytyce, to jednak pozostaje faktem, że niewypukłe powierzchnie plastyczności, konstruowane w oparciu o dane doświadczalne, można znaleźć w dość licznych pracach (M. M. FIŁONIENKO-BORODICZ [1215, 1217], R. M. HAYTHORNTHWAITE [205], I. N. MIROLUBOW [1077], T. C. HSU [274]).

Warto wreszcie zwrócić uwagę na fakt, iż przyjmując postulat Druckera nie zawsze dochodzimy do wniosków, sformułowanych w p. 17.4. Wnioski te uzyskano przy założeniu, iż praca nadwyżkowa odkształceń sprężystych na quasi-cykle naprężeniowym jest zawsze równa zeru. Jednakże A. A. ILIUSZIN [956] zauważył, że odkształcenia plastyczne mogą w konsekwencji powodować zmianę modułów sprężystych; wtedy z postulatów Druckera wynika związek

$$(17.22) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \dot{A}_{ijkl} \sigma_{kl}$$

gdzie \dot{A}_{ijkl} oznacza prędkość zmiany modułów sprężystych. Wektor $d\epsilon^p$ nie jest wtedy ortogonalny do powierzchni granicznej. Problem jednoznaczności rozwiązań w takim przypadku badali JU. M. BASZ, R. A. WASIN i K. E. WEGA [799], którzy sformułowali również odpowiednie zasady ekstremalne.

17.6. Postulat Druckera a stosowanie przybliżonych warunków plastyczności. W zastosowaniach praktycznych bardzo często (ze względów czysto rachunkowych) zastępuje się warunek plastyczności, najlepiej odpowiadający danemu materiałowi, przez inny, o prostszej budowie wzoru, obciążony niewielkim błędem. Powstaje wtedy problem doboru odpowiedniego prawa fizycznego, np. prawa płynięcia plastycznego. Do mechanicznego stosowania stowarzyszonych praw płynięcia należy podchodzić z wielką ostrożnością, gdyż nawet niewielkie różnice wartości funkcji (opisującej warunek plastyczności) mogą się wiązać z bardzo dużymi różnicami wartości pochodnych cząstkowych, a te właśnie występują w stowarzyszonym prawie płynięcia.

Jako zasadnicze kryterium powinno wtedy służyć kryterium dokładności uzyskiwanych rozwiązań. Oczywiście, jeżeli rozwiązanie ściśle (odpowiadające wyjściowemu, aproksymowanemu warunkowi plastyczności) nie jest znane, to ocena błędu natrafia na trudności. Jednak pewne wnioski można wysnuć z analizy rozwiązań tych problemów, dla których znane są rozwiązania ściśle, a czasami można przeprowadzić pewne rozważania natury ogólnej. Okazuje się przy tym, że z reguły lepsze (to znaczy dokładniejsze) wyniki otrzymujemy przez pozostawienie wyjściowych praw płynięcia (np. stowarzyszonych z warunkiem plastyczności aproksymowanym) niż przez zastosowanie praw stowarzyszonych z warunkiem aproksymującym.

Sytuacja taka pojawia się szczególnie często przy aproksymowaniu warunku plastycz-

ności HMM, który jest lepiej potwierdzony doświadczalnie, przez warunek Treski-Guesta lub inne warunki odcinkowo-liniowe (np. Iwlewa-Haythornthwaite'a). Przy operowaniu naprężeniami i odkształceniami głównymi uzyskuje się wtedy linearyzację równań wyjściowych. Aproxymując warunek HMM przez warunek Tresci-Guesta popełniamy błąd nie większy od 13,4% na korzyść pewności przy ustaleniu naprężenia σ_0 jako wielkości wyjściowej (rys. 75) lub błąd nie większy od 15,5% na niekorzyść pewności przy ustaleniu τ_0 . Jednakże dołączając do warunku Tresci stowarzyszone prawo płynięcia ($d\epsilon_{(1)}^p$ na rys. 75) zamiast prawa podobieństwa dewiatorów ($d\epsilon_{(2)}^p$) popełniamy znacznie większy błąd, mianowicie kąt α między odpowiednimi wektorami $d\epsilon^p$ może wynosić aż 45° . Na fakt ten i wynikające stąd poważne konsekwencje zwraca uwagę np. W. W. SOKOŁOWSKI [1170].

Stosując warunek Treski i niestowarzyszone z nim prawo płynięcia dopuszczamy oczywiście możliwość istnienia procesów niestatecznych w sensie Druckera. Przykład takiego procesu (bliskiego procesowi neutralnemu) pokazano również na rys. 75 w lewym dolnym rogu; istnienie wektora $d\sigma$ pokazanego na rysunku jest możliwe tylko przy występowaniu wzmocnienia plastycznego. Ale też ta pozorna niestateczność procesu ma swoje głębsze podłoże fizyczne: w istocie, jeżeli zakładamy jedynie aproksymację elipsy huberowskiej przez sześciokąt Treski, to proces pokazany na rys. 75 zmienia swój typ: proces ten, w istocie *bierny*, jest traktowany w przybliżeniu jako proces *czynny*. Ponieważ tego typu przybliżenie trudno uznać za zadowalające nawet przy najskromniejszych wymaganiach, więc można stąd wysnuć wniosek, iż niestateczność procesu oznacza po prostu jego niedopuszczalność przy przyjętej metodzie aproksymacji.

Posługując się w przybliżeniu warunkiem plastyczności Treski-Guesta (lub jakimkolwiek innym, odpowiadającym powierzchni walcowej w przestrzeni naprężeń głównych) wraz z prawem podobieństwa dewiatorów naprężeń i prędkości odkształceń, a nie prawem stowarzyszonym, otrzymujemy dla ciała idealnie plastycznego przy procesach prostych zawsze *stabilizację naprężeń*, charakterystyczną dla warunku huberowskiego. Ta zgodność jakościowa stanowi poważny argument za stosowaniem klasycznych równań Hencky'ego-Iliuszina czy Prandtla-Reussa zamiast praw stowarzyszonych, prowadzących z reguły do wyników zasadniczo różnych od stabilizacji. Podejście takie w odniesieniu do warunku plastyczności Treski-Guesta zastosował np. w swej monografii [221] R. HILL.

W celu naświetlenia tej kwestii rozważymy prosty przykład. Weźmy mianowicie pod uwagę dwuosiowe rozciąganie tarczy wykonanej z idealnie sprężysto-plastycznego materiału nieściśliwego. Proces określimy podaniem odkształceń jako funkcji czasu:

$$(17.23) \quad \epsilon_x = \alpha \frac{\sigma_0}{E}, \quad \epsilon_y = m \alpha \frac{\sigma_0}{E}, \quad \epsilon_z = -(1+m) \alpha \frac{\sigma_0}{E},$$

gdzie $\alpha = \alpha(t)$ jest pewną niemalejącą funkcją czasu, natomiast $m = \text{const}$. Przy dowolnej funkcji $\alpha(t)$ rozpatrywany proces jest procesem prostym. Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że stała m jest zawarta w przedziale $-\frac{1}{2} < m < 1$. W zakresie sprężystym naprężenia będą określone wzorami: $\sigma_z = 0$ z założenia oraz

$$(17.24) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{4}{3} E \left(\epsilon_x + \frac{1}{2} \epsilon_y \right) = \frac{4}{3} \alpha \sigma_0 \left(1 + \frac{m}{2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{4}{3} E \left(\epsilon_y + \frac{1}{2} \epsilon_x \right) = \frac{4}{3} \alpha \sigma_0 \left(m + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Przechodząc do zakresu plastycznego rozważymy trzy warianty. Przyjmiemy, że materiał podlega ściśle warunkowi plastyczności HMM i najpierw określimy naprężenia w sposób ścisły; dalej, zastosujemy aproksymację warunkiem plastyczności Treski, połączonym kolejno z prawem podobieństwa dewiatorów i ze stowarzyszonym prawem płynięcia, i porównamy tak uzyskane wyniki przybliżone z rozwiązaniem ścisłym.

Zakładając, że naprężenia (17.24) spełniają warunek huberowski, określamy wartość funkcji α , odpowiadającą nośności sprężystej tarczy:

$$(17.25) \quad \alpha = \bar{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1+m+m^2}}$$

oraz odpowiednie naprężenia

$$(17.26) \quad \sigma_x = \frac{2+m}{\sqrt{3}(1+m+m^2)} \sigma_0, \quad \sigma_y = \frac{2m+1}{\sqrt{3}(1+m+m^2)} \sigma_0.$$

Równania Prandtla-Reussa zapiszemy tu w postaci

$$(17.27) \quad \dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_z = \lambda \dot{\sigma}_x + \frac{3}{2E} \dot{\sigma}_x, \quad \dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z = \lambda \dot{\sigma}_y + \frac{3}{2E} \dot{\sigma}_y;$$

jak wiemy, dla procesu prostego zachodzi stabilizacja naprężeń i istotnie równania powyższe są spełnione przez podstawienie stałych wartości (17.26) oraz

$$(17.28) \quad \lambda = \sqrt{3(1+m+m^2)} \frac{\dot{\alpha}}{E}.$$

Przejdźmy do aproksymacji warunkiem plastyczności Treski-Guesta. Przy uczynionym na wstępie ograniczeniu zakresu stałej m , oba naprężenia σ_x i σ_y są dodatnie oraz $\sigma_x \geq \sigma_y$, zatem rozpatrywany warunek przybiera postać

$$(17.29) \quad \sigma_x = \sigma_0.$$

Wartość $\bar{\alpha}$ wynosi tu

$$(17.30) \quad \bar{\alpha} = \frac{3}{2(2+m)}$$

i różni się od wartości ścisłej (17.25) nie więcej, niż o 13,4% (największy błąd występuje przy $m = 0$)
Odpowiednie naprężenia wynoszą

$$(17.31) \quad \sigma_x = \sigma_0, \quad \sigma_y = \frac{2m+1}{2+m} \sigma_0.$$

Przyjmując bez zmiany równania Prandtla-Reussa (17.27), czyli zakładając prawo podobieństwa dewiatorów, stwierdzamy i w tym przypadku stabilizację naprężeń (17.31). Różnice w stosunku do wartości ścisłych (17.26) nie przekraczają więc 13,4%.

W trzecim wariantcie założymy stowarzyszone prawo płynięcia. Wobec warunku plastyczności aproksymowanego równaniem (17.29) prawo to ma postać

$$(17.32) \quad \dot{\epsilon}_x^p = \lambda, \quad \dot{\epsilon}_y^p = 0.$$

Drugie z tych równań zezwala na określenie σ_y . Zmiana odkształceń ϵ_y jest mianowicie – zgodnie z przyjętym prawem – czysto sprężysta, zatem

$$(17.33) \quad \dot{\epsilon}_y = m \dot{\alpha} \frac{\sigma_0}{E} = \frac{\dot{\sigma}_y}{E} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}_x}{E} = \frac{\dot{\sigma}_y}{E}$$

skąd przy warunku początkowym (17.31)

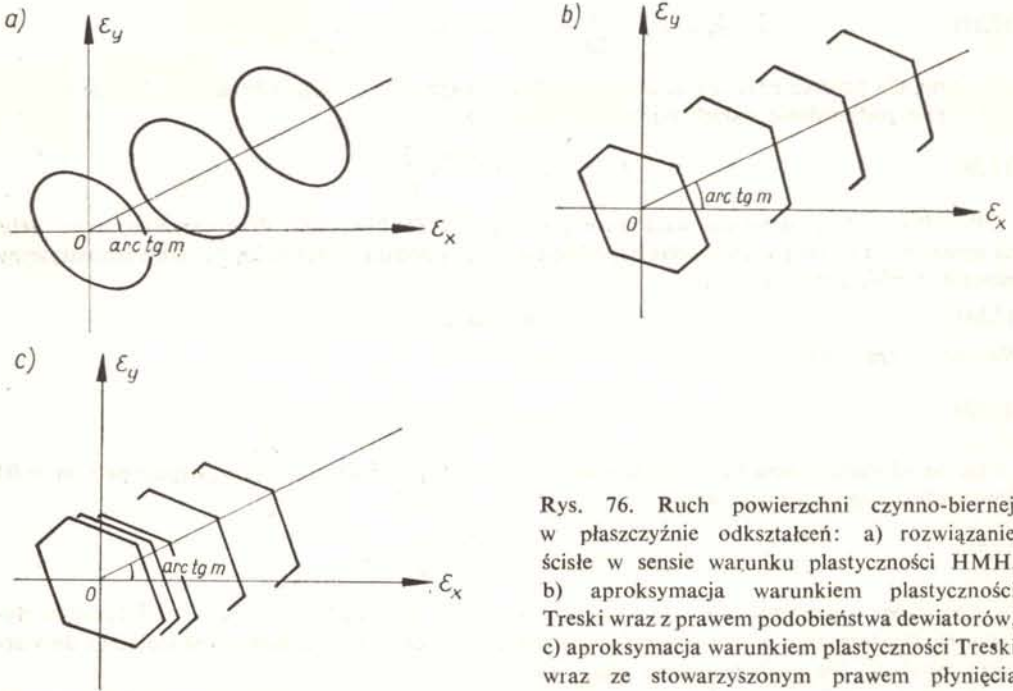
$$(17.34) \quad \sigma_y = \frac{2m+1}{2+m} \sigma_0 + m \sigma_0 (\alpha - \bar{\alpha}),$$

a wobec (17.30)

$$(17.35) \quad \sigma_y = \frac{\sigma_0}{2} (1 + 2m\alpha).$$

Wzór ten jest ważny tylko w pewnym zakresie, mianowicie gdy $0 < \sigma_y < \sigma_0$. W celu dalszej analizy musimy rozbić zakres zmienności m na dwa podzakresy. Jeżeli zachodzi $-1/2 < m < 0$, to ze wzrostem $\alpha = \alpha(t)$ naprężenie σ_y maleje do zera i osiąga tę wartość przy $\alpha = -1/2m$. W dalszym ciągu stowarzyszone prawo płynięcia (17.33) przestaje obowiązywać, bowiem punkt reprezentujący stan naprężenia znajduje się w narożu sześciokąta Treski, gradient przestaje być jednoznaczny, natomiast naprężenia pozostają stałe. Jeżeli natomiast zachodzi $0 < m < 1$, to σ_y jest rosnącą funkcją czasu, zmierzającą do wartości $\sigma_y = \sigma_0$ i osiągającą ją przy $\alpha = 1/2m$; w dalszym ciągu σ_y pozostaje stałe. Jeżeli wreszcie $m = 0$, to $\sigma_y = \sigma_0/2 = \text{const}$.

Rozważane procesy zilustrowano na rysunkach 76a–76c, przedstawiając ruch krzywych czynno-biernych w płaszczyźnie odkształceń ϵ_x, ϵ_y . W dwóch pierwszych przypadkach krzywa przesuwa się równolegle w kierunku promienia, określającego drogę obciążania w tej płaszczyźnie. W trzecim przy-

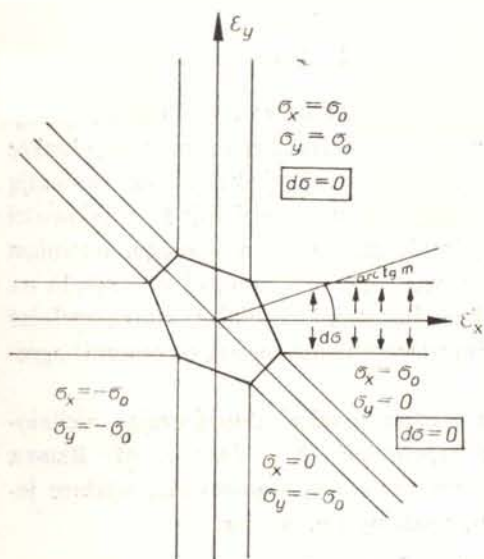


Rys. 76. Ruch powierzchni czynno-biernej w płaszczyźnie odkształceń: a) rozwiązanie ściśle w sensie warunku plastyczności HMM, b) aproksymacja warunkiem plastyczności Treski wraz z prawem podobieństwa dewiatorów, c) aproksymacja warunkiem plastyczności Treski wraz ze stowarzyszonym prawem płynięcia

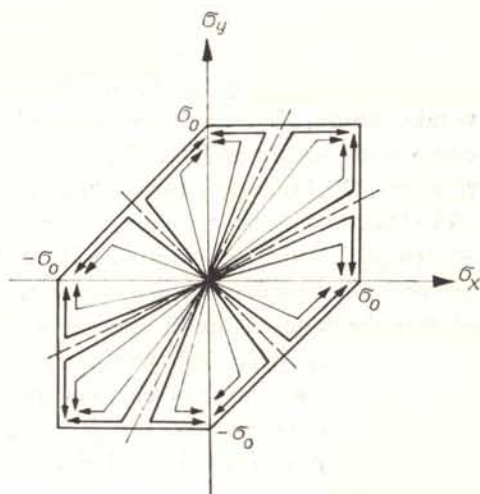
padku – prawa płynięcia stowarzyszonego warunkiem Treski – krzywa przesuwa się początkowo wyłącznie w kierunku osi ϵ_x , a ruch w kierunku promienia rozpoczyna się dopiero wtedy, gdy naroże krzywej zetknie się z promieniem. Występuje tu pewna analogia z teoriami kinematycznego wzmocnienia plastycznego, które omówimy w p. 18: przypadki (a) i (b) odpowiadają wzmocnieniu typu Zieglera, przypadek (c) – wzmocnieniu typu Melana-Iszlińskiego-Pragera (podobny ruch krzywych zachodzi tam w płaszczyźnie naprężeń).

Inną interpretację graficzną przypadku (c) pokazano na rys. 77 i 78. Rysunek 77 dzieli płaszczyznę ϵ_x, ϵ_y na podobszary, w których (przy obciążeniu prostym) naprężenia są stałe, $d\sigma = 0$, oraz obszary zmienności naprężeń (wrysowane wektory podają odpowiedni kierunek zmian naprężeń $d\sigma$). Na rys. 78 pokazano trajektorie ruchu punktu w płaszczyźnie naprężeń, odpowiadające procesom prostym w płaszczyźnie odkształceń. Są to trajektorie łamane, zmierzające do naroży. Występują tu pewne objawy

niestateczności ruchu w sensie Lapunowa: mała zmiana warunków początkowych (wartości m) może spowodować bardzo dużą zmianę trajektorii. Proste, odpowiadające niestateczności, zaznaczono liniami przerywanymi. Tak więc prawo płynięcia plastycznego stowarzyszone z warunkiem Treski eliminuje niestateczność procesu w sensie Druckera, ale wprowadza niestateczność typu Lapunowa.



Rys. 77. Podział płaszczyzny odkształceń na podobszary



Rys. 78. Trajektorie w płaszczyźnie naprężeń odpowiadające procesom prostym w świetle stowarzyszonego prawa płynięcia

Przeprowadzimy jeszcze porównanie liczbowe wyniku przybliżonego (17.35) z wynikiem (17.26), traktowanym jako ścisły. Największe błędy występują przy $m \approx 0$ dodatnim lub ujemnym. Przy bardzo niewielkim dodatnim m otrzymujemy dla dostatecznie dużego α , $\sigma_y = \sigma_0$, zamiast $\sigma_y = \sigma_0/\sqrt{3}$, zatem błąd wynosi 73% przez nadmiar; przy bardzo niewielkim ujemnym m σ_y zmierza do $\sigma_y = 0$ zamiast $\sigma_y = \sigma_0/\sqrt{3}$, więc błąd można określić jako 100% przez niedomiar. Błędy są tu zatem nieporównywalnie większe niż przy zastosowaniu prawa podobieństwa dewiatorów (17.27).

Należy więc dokonać wyraźnego rozróżnienia między materiałem podlegającym z dostatecznie dużą dokładnością warunkowi plastyczności Treski-Guesta (w szczególności potwierdzającym istnienie naroży już w pierwszej fazie uplastycznienia), a materiałem, dla którego warunek ten służy tylko jako aproksymacja. W pierwszym przypadku o niewielkim znaczeniu praktycznym, ograniczonym raczej np. do monokryształów — byłoby, być może, uzasadnione stosowanie stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego, zwłaszcza gdyby istniała dostateczna weryfikacja eksperymentalna. W drugim przypadku, o dużym znaczeniu praktycznym ze względu na częściową linearyzację równań wyjściowych, prawo podobieństwa dewiatorów naprężeń i prędkości odkształceń plastycznych prowadzi z reguły do wyników obciążonych znacznie mniejszymi błędami niż prawo stowarzyszone.

Przykłady obliczania konstrukcji w oparciu o warunek plastyczności Treski i prawo podobieństwa dewiatorów podaje praca J. A. KÖNIGA [323].

17.7. Ogólne związki fizyczne teorii idealnej plastyczności. Klasyczne związki fizyczne teorii idealnej plastyczności Hencky'ego-Iliuszina (10.34), Levy'ego-Misesa (10.58) i Prandtla-Reussa (10.69) wyrażone są liniowymi związkami między dewiatorami odkształceń, prędkości odkształceń, naprężeń i prędkości naprężeń. Można je potraktować jako przypadki szczególne ogólnego związku liniowego

$$(17.36) \quad c_1 e_{ij} + c_2 s_{ij} + c_3 \dot{e}_{ij} + c_4 \dot{s}_{ij} = 0.$$

Związek ten został zaproponowany w r. 1932 przez K. HOHENEMSERA i W. PRAGERA [265]. Współczynniki c_n mogą przy tym zależeć od niezmienników omawianych tensorów jednakże w taki sposób, aby opisywane procesy były niezależne od przyjętej skali czasu. Zawierają one pewną niewiadomą funkcję, wyznaczaną z warunku plastyczności, tak że o liniowości równania (17.36) można mówić tylko z punktu widzenia rachunku tensorowego, natomiast efektywnie rozpisane równania algebraiczne są równaniami nieliniowymi ze względu na występujące w nich naprężenia i odkształcenia. Ponadto współczynniki c_n muszą spełniać pewne fundamentalne postulaty (np. ciągłości opisu procesu neutralnego), co znacznie ogranicza liczbę dopuszczalnych alternatyw.

Ogólniejszy opis zachowania się materiału można uzyskać dopuszczając nieliniowość związków tensorowych. Podejście takie zaproponował w 1945 r. M. REINER (por. A. M. FREUDENTHAL [145]). Uogólniając równania Levy'ego-Misesa, wiążące jedynie tensory naprężeń i prędkości odkształceń, możemy np. napisać

$$(17.37) \quad \sigma_{ij} = \bar{M}_0 \delta_{ij} + \bar{M}_1 \dot{e}_{ij} + \bar{M}_2 \dot{e}_{ik} \dot{e}_{kj} + \bar{M}_3 \dot{e}_{ik} \dot{e}_{kl} \dot{e}_{lj} + \dots$$

Ponieważ z twierdzenia Cayley-Hamiltona wynika związek

$$(17.38) \quad \dot{e}_{ik} \dot{e}_{kl} \dot{e}_{ij} = J_{3\dot{e}} \delta_{ij} - J_{2\dot{e}} \dot{e}_{ij} + J_{1\dot{e}} \dot{e}_{ik} \dot{e}_{kj},$$

więc wyższe iloczyny (potęgi tensora) dadzą się wyrugować i ostatecznie możemy napisać

$$(17.39) \quad \sigma_{ij} = M_0 \delta_{ij} + M_1 \dot{e}_{ij} + M_2 \dot{e}_{ik} \dot{e}_{ij}.$$

Inne uogólnienie równań Levy'ego-Misesa można zapisać w postaci

$$(17.40) \quad \dot{e}_{ij} = C_0 \delta_{ij} + C_1 \sigma_{ij} + C_2 \sigma_{ik} \sigma_{kj}.$$

Przyjmując założenie nieściśliwości materiału można określić współczynniki M_0 lub C_0 [145].

Związki typu (17.39) były badane szczegółowo w pracach P. STUTZA [677, 678] oraz A. SAWCZUKA i P. STUTZA [629].

Uogólnienie równań Levy'ego-Misesa i Prandtla-Reussa na przypadek odkształceń skończonych zaproponował T. Y. THOMAS [696, 697, 699]; problemowi temu wiele uwagi poświęca monografia W. OLSZAKA, Z. MROZA i P. PERZYNY [483].

18. Powierzchnie czynno-bierne przy wzmocnieniu plastycznym

18.1. Jednolita krzywa wzmocnienia plastycznego. Jak już wspomnieliśmy w p. 9, podstawowej oceny plastycznego zachowania się materiału dostarcza wykres rozciągania. Toteż teorie plastycznego wzmocnienia materiału w ogólnym przypadku przestrzennego

stanu naprężenia starają się przede wszystkim wykorzystać znajomość wykresu rozciągania, w pewnym sensie «przenieść» go na przypadek przestrzenny.

Podejście takie możliwe jest jedynie w przypadku materiałów, które dają się opisać «jednoparametrowym» warunkiem plastyczności, bowiem tylko wtedy z wykresu rozciągania możemy wyciągnąć wnioski np. odnośnie wykresu ściskania.

Jednakże nawet w przypadku materiałów jednoparametrowych występują różne poważne ograniczenia takiego podejścia. Najprostsza forma «przeniesienia» wykresu rozciągania na przypadki przestrzenne polegałaby na sformułowaniu hipotezy, iż dla pewnej określonej klasy procesów odkształcania występuje jednoznaczna zależność między pewnymi niezmiennikami tensora naprężenia i tensora odkształcania typu

$$(18.1) \quad I_{\sigma} = f(I_{\epsilon});$$

postać funkcji f byłaby przy tym określona wykresem rozciągania. Problem polega na odpowiednim doborze niezmienników I_{σ} oraz I_{ϵ} , a następnie na weryfikacji doświadczalnej wraz z określeniem klasy dopuszczalnych procesów.

Najszerzej stosowaną obecnie hipotezę typu (18.1) sformułowali w r. 1926 M. ROS i A. EICHINGER [586], przyjmując za niezmienniki I_{σ} i I_{ϵ} odpowiednio intensywność naprężeń i intensywność odkształceń:

$$(18.2) \quad \sigma_i = f(\epsilon_i).$$

W przypadku jednoosiowego rozciągania mamy wprost $\sigma_i = \sigma$, natomiast $\epsilon_i = \epsilon$ przy przyjęciu definicji (8.35) jedynie dla materiału nieściśliwego. Dla takiego materiału funkcja f jest określona wprost wykresem rozciągania. W przypadku materiału ściśliwego występują dodatkowe komplikacje, związane ze zmianą współczynnika odkształcania poprzecznego (p. 10.5), jednak zazwyczaj nie posiadają one zbyt wielkiego znaczenia praktycznego. Większe różnice mogą wystąpić jedynie w początkowej fazie odkształceń plastycznych (I. A. KOZŁOW, A. A. LEBIEDIEW, W. L. ACHREMIENKO [989]).

R. SCHMIDT [637] porównywał wyniki hipotezy (18.2) z innymi hipotezami tego typu, mianowicie

$$(18.3) \quad \max |s| = f(\max |e|)$$

(gdzie $\max |s|$ i $\max |e|$ oznaczają odpowiednio największe co do wartości bezwzględnej składowe główne dewiatora naprężeń i dewiatora odkształceń) oraz

$$(18.4) \quad \tau_{\max} = f(\gamma_{\max}).$$

Podczas gdy związek (18.2) nawiązuje do hipotezy wyteżeniowej HMH, to związki (18.3) i (18.4) do hipotezy największego naprężenia dewiatorowego i hipotezy TG. Koncepcja istnienia jednolitej zależności (18.4) została sformułowana już w r. 1909 przez P. LUDWIKA [365], a więc wcześniej niż (18.2).

W przypadku obciążenia prostego hipoteza istnienia związku między intensywnościami (18.2) została potwierdzona doświadczalnie zupełnie dobrze dla licznych materiałów, wyraźnie lepiej niż hipotezy (18.3) i (18.4) [637]. Do podobnych wniosków doszli również FR. KÖRBER i A. EICHINGER [326] oraz W. R. OSGOOD [510]. Dalsze badania w zakresie małych odkształceń prowadził A. M. ŻUKOW [911, 913, 918].

Porównania samych tylko wykresów jednoosiowego rozciągania i jednoosiowego ściskania dokonywane były znacznie dawniej. P. LUDWIK [365] stwierdził, że dla licznych materiałów wykresy $\sigma = f(\varepsilon)$ przy rozciąganiu i ściskaniu można uważać za identyczne, jeżeli przez σ rozumie się naprężenie rzeczywiste (odniesione do aktualnej powierzchni przekroju), a przez ε — odkształcenie w mierze logarytmicznej. Dalszą serię badań omawia praca P. LUDWIKA i R. SCHEU [366].

W przypadku ogólnym przestrzennego stanu naprężenia przy większych odkształceniach hipoteza jednolitej krzywej (18.2) może więc również zachowywać swą ważność tylko w odniesieniu do naprężeń rzeczywistych i logarytmicznej miary odkształcenia (H. HENCKY [212]). Weryfikację doświadczalną tak rozumianej hipotezy (18.2) przeprowadzili D. M. CUNNINGHAM, E. G. THOMSEN i J. E. DORN [84], następnie J. MARIN [391] i L. S. ANDREJEW [789].

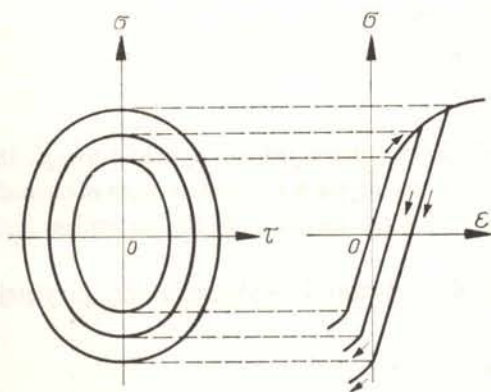
Przyjęcie hipotezy (18.2) oznacza pominięcie wpływu parametru Lodego μ lub niezmiennika ω na przebiegi krzywej przy różnych obciążeniach. Niektórzy badacze stwierdzili jednak pewien wpływ parametru Lodego na przebieg krzywej (S. A. JEŁSUFIEW [900], A. F. KREGERS [1005]). N. M. MITROCHIN i JU. I. JAGN [1081] z serii doświadczeń nad próbkami niklowymi wnoszą, iż bardziej jednolity związek typu (18.1) można by otrzymać dla pewnej wielkości, zawartej między σ_i oraz $2\tau_{max}$ z jednej, a ε_i oraz γ_{max} z drugiej strony. Największy wpływ parametru Lodego na wartość σ_i odpowiadającą ustalonej wartości ε_i oceniono w tej pracy na 12%.

Potwierdzenie doświadczalne hipotezy jednolitej krzywej (18.2) odnosi się jedynie do obciążeń prostych i zbliżonych do prostego. Możemy wtedy wzmocnienie plastyczne materiału opisać w przybliżeniu schematyzacjami omówionymi w p. 9, uogólniając bezpośrednio funkcję $\sigma = f(\varepsilon)$ do postaci $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$. Przy wyraźniejszych zmianach tensora kierunków i podobieństwa, np. przy obrocie kierunków głównych, uzyskiwane krzywe różnią się od siebie dość znacznie (G. N. WHITE, D. C. DRUCKER [737], S. S. GILL, J. PARKER [170]). Różnice, występujące przy obciążeniach przeciwwrotnych (przy skręcaniu) badał Z. MARCINIAK [385].

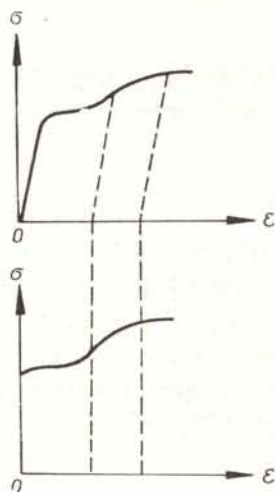
18.2. Wzmocnienie izotropowe. Rozszerzając dalej hipotezę jednolitej krzywej można by sformułować następną hipotezę, iż równanie (18.2) określa powierzchnię czynno-bierną na danym etapie procesu odkształcania. Jednakże w ogólnym przypadku dowolnych procesów odkształcania hipoteza taka byłaby nie do przyjęcia. Tak np. proces o równaniu $\varepsilon_i = \text{const}$ nie powodowałby zmiany powierzchni granicznej, czyli nie powodowałby wzmocnienia plastycznego, co jest charakterystyczne dla procesów biernych; tymczasem w p. 10.6 stwierdziliśmy, że nawet w przypadku ciała idealnie plastycznego procesy $\varepsilon_i = \text{const}$ mogą być (i z reguły są) procesami czynnymi. Oczywiście, doświadczenia również przeczą słuszności takiej hipotezy w przypadku ogólnym.

Natomiast dla pewnej klasy materiałów można przyjąć, że równanie (18.2) określa powierzchnię czynno-bierną na dowolnym etapie obciążenia prostego. Powierzchnia ta nie ulega oczywiście zmianie przy dowolnym następującym później procesie biernym, natomiast procesy czynne różne od prostego (zwłaszcza silnie różniące się od prostego, np. zbliżone do neutralnych) muszą być wyłączone z analizy bez dokonania stosownych uogólnień, które omówimy później.

Przyjmując chwilowo podane powyżej ograniczenie klasy rozpatrywanych procesów stwierdzamy, iż omawiana hipoteza oznacza proporcjonalny wzrost powierzchni granicznej (czynno-biernej) w trakcie procesu. Na rys. 79 pokazano przykładowo wykres rozciągania wraz z przyporządkowaną płaszczyzną $\sigma-\tau$, odpowiadającą przypadkowi złożonemu. Przyjęty do rozważań hipotetyczny materiał zachowuje swe własności izotropowe, w szczególności zdefiniowaną w p. 15.2 izotropię normalną, a zatem nie wykazuje efektu Bauschingera. Rozważany przypadek wzmocnienia plastycznego nosi nazwę wzmocnienia izotropowego.



Rys. 79. Izotropowe wzmocnienie plastyczne

Rys. 80. Graficzna konstrukcja wykresu $\varepsilon^p-\sigma$

Przejdziemy teraz do pewnych uogólnień. Pozostając jeszcze przy analizie jedynie prostych procesów czynnych, możemy zamiast związku (18.2) nawiązującego do hipotezy HMM, rozpatrywać pewien dowolny związek typu (18.1), czyli przyjąć do rozważań dowolną hipotezę wyężeniową. Odpowiednia powierzchnia graniczna będzie wtedy również proporcjonalnie wzrastała w wyniku wzmocnienia plastycznego w trakcie procesu odkształcania.

Większe trudności sprawia uogólnienie na przypadek obciążeń dowolnych, mianowicie dowolnie odbiegających od prostego. Postulat ciągłości wymaga, aby proces neutralny nie powodował wzmocnienia plastycznego. Postulat ten można łatwo spełnić wydzielając z całkowitego odkształcenia odkształcenie plastyczne, wprowadzając pojęcie intensywności odkształceń plastycznych ε_i^p wzorem analogicznym do (8.35) i zastępując (18.2) przez

$$(18.5) \quad \sigma_i = \tilde{f}(\varepsilon_i^p).$$

Przeliczenie krzywej (18.5) z wykresu rozciągania nie nastęca trudności (rys. 80). Hipoteza jednolitego związku (18.2) dla dowolnego obciążenia prostego prowadzi do jednolitości związku (18.5) i na odwrót. Istotnie, korzystając z pomocniczego przedstawienia tensora jako wektora w przestrzeni dziewięciowymiarowej, możemy interpretować inten-

sywność jako długość (z odpowiednim współczynnikiem) wektora odpowiadającego dewiatorowi:

$$(18.6) \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} |\mathbf{e}|.$$

Dokonując wektorowego rozkładu dewiatora odkształcenia na część sprężystą i plastyczną

$$(18.7) \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p$$

otrzymujemy dla długości tych wektorów związek

$$(18.8) \quad |\mathbf{e}|^2 = |\mathbf{e}^e|^2 + |\mathbf{e}^p|^2 + 2|\mathbf{e}^e||\mathbf{e}^p|\cos(\mathbf{e}^e, \mathbf{e}^p).$$

Dla obciążenia prostego składowe dewiatorów odkształcenia sprężystego i plastycznego są do siebie proporcjonalne, zatem kąt $(\mathbf{e}^e, \mathbf{e}^p) = 0$, oraz

$$(18.9) \quad |\mathbf{e}| = |\mathbf{e}^e| + |\mathbf{e}^p|,$$

$$(18.10) \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p.$$

Wzór (18.10) podaje np. A. A. ILIUSZIN [949] nie zwracając jednak wyraźnie uwagi, iż jest on słuszny jedynie dla obciążeń prostych. Przy innych typach obciążeń można otrzymać np. $\varepsilon_i = 0$ przy $\varepsilon_i^e > 0$ i $\varepsilon_i^p > 0$, co stoi w wyraźnej sprzeczności z (18.10), natomiast jest możliwe w świetle (18.8).

Przy obciążeniu prostym, korzystając z (18.10) i łatwego do wykazania przy przyjętej definicji (8.35) związku

$$(18.11) \quad \varepsilon_i^e = \frac{\sigma_i}{3G},$$

po podstawieniu do (18.2) otrzymujemy

$$(18.12) \quad \sigma_i = f \left(\frac{\sigma_i}{3G} + \varepsilon_i^p \right).$$

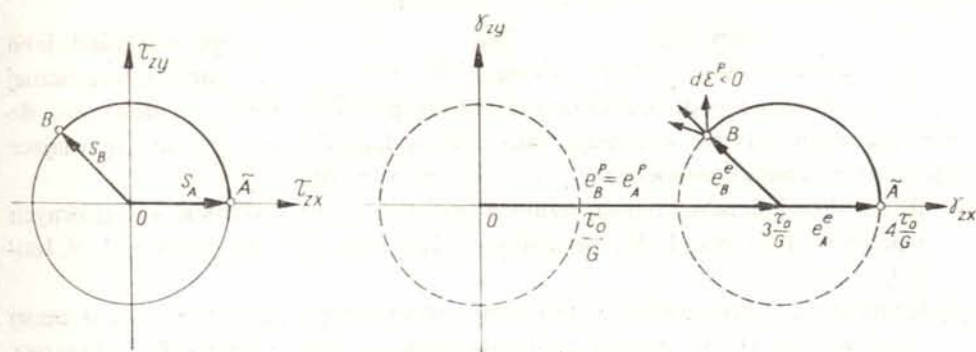
Formalne rozwikłanie (18.12) prowadzi do (18.5).

Sformułowanie hipotezy, iż równanie (18.5) może określać powierzchnię czynno-bierną w ogólnym przypadku obciążenia, stwarza więc daleko większe perspektywy niż podobna hipoteza związku (18.2). Jednakże i taka propozycja jest na ogół nie do przyjęcia, bowiem w trakcie niektórych procesów czynnych intensywność odkształceń plastycznych ε_i^p może maleć; ogólna jednoznaczność zależności (18.5) jest więc wykluczona.

Pokażemy przykład zmniejszania się intensywności odkształceń plastycznych w trakcie procesu czynnego. Korzystając z równań Prandtla-Reussa i przechodząc na zapis wektorowy mamy

$$(18.13) \quad \frac{d}{dt} [(\varepsilon_i^p)^2] = \frac{4}{3} e_{i,j}^p \dot{e}_{i,j}^p = \frac{4}{3} \lambda s_{i,j} e_{i,j}^p = \frac{4}{3} \lambda s e^p = \frac{4}{3} \lambda |s| |\mathbf{e}^p| \cos(s, \mathbf{e}^p).$$

Przypuśćmy, że po pewnym procesie prostym następuje proces neutralny: w trakcie tego procesu $\lambda = 0$, odkształcenia plastyczne są stałe, $\varepsilon_i^p = \text{const}$, natomiast naprężenia $\sigma_{i,j}$ ulegają zmianie. Dochodząc procesem neutralnym do punktu, w którym kąt między wektorami s i \mathbf{e}^p jest już rozwarty, a następnie rozpoczynając proces czynny otrzymujemy zmniejszenie się intensywności odkształceń plastycznych ε_i^p .



Rys. 81. Przykład zmniejszania się intensywności odkształceń plastycznych w trakcie procesu czynnego

W odniesieniu do przykładu analizowanego w p. 10.6 – 10.8, odpowiedni proces został zilustrowany w płaszczyznach $\tau_{zx} - \tau_{zy}$ i $\gamma_{zx} - \gamma_{zy}$ na rys. 81. Dla punktu B , osiągniętego w wyniku procesu neutralnego, wektor $e_B^p = e_A^p$, natomiast wektor s ulega zasadniczej zmianie, tak że kąt między tymi wektorami jest kątem rozwartym.

Dostatecznie ogólna hipoteza wzmocnienia izotropowego wymaga więc dalszego kroku naprzód w stosunku do równania wyjściowego (18.2), a właściwie w stosunku do dogodniejszej formy (18.5), mianowicie zastąpienie e_i^p przez niemalejącą funkcję odkształceń plastycznych. Rozpowszechnione są przede wszystkim dwie formy takiego uogólnienia. Formy te opisaliśmy już pokrótce w p. 9.6 w odniesieniu do jednoosiowego stanu naprężenia, podając odpowiednie modele mechaniczne.

Prostsza forma (choć, historycznie biorąc, druga), została zaproponowana w r. 1933 przez F. K. G. ODQVISTA [469] i stanowi bezpośrednie uogólnienie związku (18.5):

$$(18.14) \quad \sigma_i = f_1(I_{ep}).$$

Przez parametr Odqvista I_{ep} będziemy rozumieli długość drogi w przestrzeni odkształceń plastycznych

$$(18.15) \quad I_{ep} = \int_0^{\tilde{t}} \sqrt{\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p} dt = \int_0^{\tilde{t}} \sqrt{e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p} dt = \int_0^{e^p} \sqrt{de_{ij}^p de_{ij}^p}.$$

Przy obciążeniu prostym zachodzi związek

$$(18.16) \quad e_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}} I_{ep}$$

[czasami włącza się współczynnik $\sqrt{2/3}$ do definicji parametru Odqvista — por. np. R. HILL [221] — jednakże oryginalna definicja ma postać (18.15)], tak że (18.14) sprowadza się do formy (18.5). Natomiast w ogólnym przypadku związek (18.16) nie obowiązuje; istotna różnica polega na fakcie, iż parametr I_{ep} jest niemalejącą funkcją odkształceń plastycznych. Wzmocnienie plastyczne, opisane równaniem (18.14), nazywamy *odkształceniowym wzmocnieniem izotropowym*.

Wypada jeszcze zwrócić uwagę na sens przypisywany symbolowi de lub de . Jeżeli taki przyrost rozumiemy jako odniesiony zawsze do długości pierwotnej, to całkowanie pro-

wadzi do klasycznej miary odkształcenia Cauchy'ego; rozumiejąc go natomiast jako przyrost długości w stosunku do długości aktualnej, dochodzimy do miary logarytmicznej Hencky'ego. To ostatnie podejście można uznać za poprawne tylko w odniesieniu do kierunków głównych, gdy nie występują odkształcenia kątowe (na trudności pojawiające się w ogólnym przypadku zwróciliśmy już uwagę w p. 8.10).

Weryfikację doświadczalną prawa wzmocnienia (18.14) przy obrocie osi głównych podają np. prace JU. I. JAGNA i L. W. GREBNIWA [1262], oraz S. A. JEŁSUFIEWA i I. N. IZOTOWA [901].

Inna forma opisu izotropowego wzmocnienia plastycznego, nawiązująca nieco mniej wyraźnie do związku (18.5), została zaproponowana w 1931 r. przez G. I. TAYLORA i H. QUINNEY'A [693], a następnie niezależnie w 1932 r. przez R. SCHMIDTA [637]. Uzasadnia ona intensywność naprężeń od pracy odkształcenia plastycznego W^p , którą można tu utożsamiać z energią dysypowaną, zamienioną na energię cieplną:

$$(18.17) \quad \sigma_1 = f_2(W^p) = f_2(W^d).$$

W p. 9.7 zwróciliśmy uwagę na różnice, mogące wystąpić między W^p i W^d . Są one związane przede wszystkim z mikronaprężeniami resztkowymi, a więc z efektem Bauschingera, natomiast przy założeniu wzmocnienia izotropowego, nie opisującego tego efektu, można przyjąć

$$(18.18) \quad W^p = W^d = \int_0^{\tilde{\epsilon}^p} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p = \int_0^{\tilde{\epsilon}^p} \sigma_{ij} de_{ij}^p = \int_0^{\tilde{\epsilon}^p} s_{ij} de_{ij}^p.$$

Ta wielkość jest również niemalejącą funkcją odkształceń plastycznych i nadaje się do opisu wzmocnienia.

D. R. BLAND [32] wykazał, że formy zapisu izotropowego wzmocnienia plastycznego (18.14) i (18.17) są równoważne, jeżeli warunek plastyczności można opisać jednorodną funkcją składowych stanu naprężenia pierwszego lub drugiego stopnia.

Uogólnienie związków (18.14) albo (18.17) przez zastąpienie intensywności naprężeń σ_i pewnym innym niezmiennikiem stanu naprężenia (a więc nawiązanie do innych hipotez wyteżeńiowych) nie przedstawia zasadniczych trudności. Uzasadnienie takich wzorów z punktu widzenia logicznego jest trudniejsze, jednak mogą one oddać usługi jako dogodne narzędzie aproksymacji. Ogólną teorię izotropowego wzmocnienia plastycznego przy odcinkowo-liniowych warunkach plastyczności podaje praca P. G. HODGE'A [243].

18.3. Wzmocnienie kinematyczne. Hipoteza wzmocnienia izotropowego nie opisuje efektu Bauschingera, mianowicie odpowiada zerowaniu się wprowadzonych w p. 9.5 współczynników β . Rzeczywiste materiały wykazują pewien efekt Bauschingera, zwłaszcza w początkowych stadiach odkształceń plastycznych. Idealny efekt Bauschingera ($\beta_2 = 1$) opisuje inna podstawowa hipoteza wzmocnienia plastycznego, zwana hipotezą wzmocnienia kinematycznego.

Idealnym efektem Bauschingera nazwaliśmy w p. 9.5 takie zachowanie się materiału w stanie jednoosiowym, przy którym odległość od punktu rozpoczęcia procesu biernego do punktu początku uplastycznienia przeciwwrotnych jest stała (9.15). Przypadek ten,

którego model dynamiczny pokazano na rys. 32, daje się również przedstawić prostym modelem kinematycznym, mianowicie ruchem sztywnej listewki wzdłuż osi σ , rys. 82. Uogólniając myśl takiego modelu na przypadek przestrzenny można sformułować hipotezę, iż wzmocnieniu plastycznemu odpowiada pewien ruch postępowy powierzchni czynno-biernej jako ciała sztywnego w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń; jeżeli początkowa powierzchnia daje się opisać równaniem

$$(18.19) \quad F(\sigma_{ij}) = C,$$

to w wyniku wzmocnienia plastycznego przybiera ona postać

$$(18.20) \quad F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = C.$$

Hipotezę (18.20) nazywamy hipotezą wzmocnienia kinematycznego. Tensor α_{ij} określa położenie środka aktualnej powierzchni czynno-biernej w przestrzeni naprężeń; efektywne sformułowanie hipotezy wymaga — oprócz podania funkcji F — określenia zależności składowych tensora α_{ij} od odkształceń plastycznych.

Jakkolwiek pierwsza hipoteza typu (18.20) została sformułowana już w r. 1935 przez W. PRAGERA [546a], to jednak nie miała ona charakteru niezmienniczego (obiekt α_{ij} nie był tensorem) i nie znalazła zastosowania. Pierwszą poprawną z punktu widzenia niezmienniczości hipotezę wzmocnienia kinematycznego sformułował w 1938 r. E. MELAN. Ograniczając się zasadniczo do liniowego wzmocnienia plastycznego rozważał on dwa przypadki określenia tensora α_{ij} : bądź

$$(18.21) \quad d\alpha_{ij} = c d\epsilon_{ij}^p, \quad c = \text{const},$$

bądź też

$$(18.22) \quad d\alpha_{ij} = d\sigma_{ij}$$

(ta ostatnia propozycja może dotyczyć dowolnego wzmocnienia plastycznego). Propozycja Melana przez dłuższy czas uchodziła uwadze nauki światowej. Dalsze sugestie w kierunku uwzględnienia idealnego efektu Bauschingera podaje praca F. EDELMANA i D. C. DRUCKERA [123]. Większe uznanie zdobyły sobie dopiero prace A. JU. ISZLIŃSKIEGO [962] z r. 1954 oraz W. PRAGERA [557, 559] z lat 1955–1956. PRAGER zaproponował nazwę «wzmocnienie kinematyczne», związaną z podanymi przez niego modelami kinematycznymi. Prace Iszlińskiego i Pragera określają tensor α_{ij} równaniem (18.21). Przy założeniu słuszności stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego ruch powierzchni czynno-biernej nie zależy wtedy od przyrostu naprężeń $d\sigma$ (odmiennie niż w przypadku (18.22) Melana) i odbywa się w kierunku normalnej do powierzchni, zaczeplonej w punkcie reprezentującym dany stan naprężenia.

JU. N. KADASZEWICZ i W. W. NOWOŻIŁOW [966] przedstawili interpretację fizyczną hipotezy (18.20) i (18.21), wprowadzając pojęcie mikronaprężeń resztkowych w odniesieniu do tensora α_{ij} oraz uogólnili ją przyjmując, iż c może być pewną funkcją niezmienników tensora α_{ij} . Podobne uogólnienie zaproponowali M. A. EISENBERG i A. PHILLIPS [126], którzy uzależnili współczynnik c od parametru Odqvista I_{ep} , (18.15).

KADASZEWICZ i NOWOŻIŁOW [966] podali również odpowiedni dwuwymiarowy model,



Rys. 82. Model kinematyczny idealnego efektu Bauschingera

stanowiący uogólnienie modelu pokazanego na rys. 32. Odształcenia plastyczne są w tym modelu odwzorowane tarcie suche; W. W. NOWOŻIŁOW w pracy [1102] przedstawia naprężenia jako sumę mikronaprężeń, naprężeń pokonywających tarcie makroskopowe i pokonujących tarcie mikroskopowe. Dalszy rozwój teorii mikronaprężeń przynoszą prace JU. N. KADASZEWICZA i W. W. NOWOŻIŁOWA [969, 970, 971], A. A. WAKULENKI [832] (oparcie teorii mikronaprężeń o rozważania termodynamiczne), G. I. BARENBLATTA i W. A. GORODCOWA [795] (ujęcie statystyczne, analogia do praw ruchu turbulentnego), oraz V. KAFKI [302]. Nieco inną interpretację fizyczną wzmocnienia kinematycznego zaproponowali D. C. DRUCKER [113] oraz W. D. IWAN [288], którzy wiążą efekt Bauschinger'a z lokalnymi koncentracjami naprężeń wokół pustek i wtrąceń, a ogólnie z niejednorodnością materiału.

Pewną wadą koncepcji (18.21) jest niezachowywanie podstawowej idei wzmocnienia kinematycznego — ruchu postępowego powierzchni czynno-biernej jako bryły sztywnej — przy przejściu z dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń Pragera do podprzestrzeni o mniejszej liczbie wymiarów. W takiej podprzestrzeni może występować nie tylko ruch sztywny, ale i odształcenie powierzchni czynno-biernej, co znacznie utrudnia stosowanie przyjętej hipotezy do obliczeń praktycznych, jak również może być uważane za wadę z punktu widzenia logicznego. Problem ten był szczegółowo badany w pracach R. SHIELDA i H. ZIEGLERA [645], C. CLAVUOTA i H. ZIEGLERA [72] oraz N. PERRONE i P. G. HODGE'A [527]. Autorzy stwierdzili, iż w przypadku nawiązania do hipotezy wyężeniowej Hubera-Misesa-Hencky'ego wspomniane trudności nie są istotne, natomiast zasadnicze różnice w podprzestrzeniach o mniejszej liczbie wymiarów pojawiają się przy innych hipotezach wyężeniowych, w szczególności Treski-Guesta. W związku z występowaniem tych różnic PERRONE i HODGE zaproponowali, aby wzmocnienie kinematyczne, oparte o rozważania w przestrzeni dziewięciowymiarowej, nazywać *wzmocnieniem pełnym*, a przy formalnym stosowaniu hipotezy kinematycznej w pewnej podprzestrzeni mówić o *wzmocnieniu bezpośrednim*; to ostatnie może być traktowane jako pewne przybliżenie wzmocnienia pełnego.

Inną drogą poszedł H. ZIEGLER [757] proponując pewną modyfikację hipotezy wzmocnienia kinematycznego. Jeżeli mianowicie zgodnie z sugestią Zieglera zastąpimy związek (18.21) zależnością

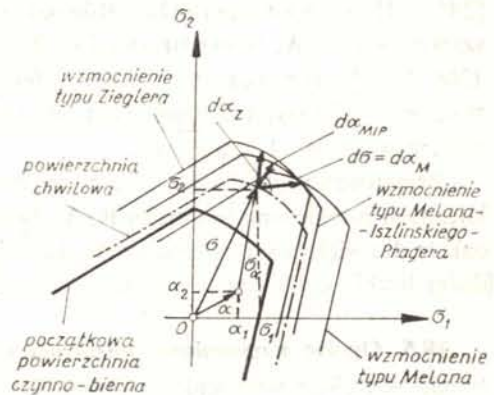
$$(18.23) \quad d\alpha_{ij} = (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) d\mu,$$

to hipoteza sztywnego ruchu powierzchni granicznej będzie obowiązywała w dowolnej podprzestrzeni przy dowolnej funkcji F . Sam ruch postępowy odbywa się w kierunku promienia, łączącego chwilowy środek powierzchni z punktem reprezentującym dany stan naprężenia. Różnicę w stosunku do hipotezy wzmocnienia kinematycznego Melana-Izlińskiego-Pragera ilustruje rys. 83, przy czym dla uproszczenia nie brano tu pod uwagę ewentualnej deformacji powierzchni, związanej z przejściem z przestrzeni dziewięciowymiarowej do płaszczyzny. Propozycję Zieglera dla warunku plastyczności Treski-Guesta rozwinął D. D. IWLEW [935] wyprowadzając odpowiednie równania rodzin charakterystyk.

Koncepcję Zieglera można również traktować w sposób odmienny. Można mianowicie pozostawić bez zmiany prawo (18.21), jednakże zastąpić stowarzyszone prawo płynięcia przez prawo

$$(18.24) \quad d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{c} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) d\mu,$$

stanowiące pewien odpowiednik prawa podobieństwa dewiatorów typu Levy'ego-Misesa. Ruch powierzchni czynno-biernej pozostanie wtedy bez zmiany w stosunku do (18.23), jednakże obliczane odkształcenia plastyczne ulegną zmianie. Zbliżone podejście można znaleźć w pracy R. A. ARUTIUNIANA i A. A. WAKULENKI [792].



Rys. 83. Różne warianty hipotezy wzmocnienia kinematycznego

Przystosowaniu koncepcji Zieglera do efektywnych obliczeń konstrukcji poddanych obciążeniom stałym lub cyklicznie zmiennym poświęcona jest praca H. ARMENA, G. ISAKSONA i A. PIJKO [4], którzy podali odpowiednie programy dla maszyn cyfrowych. W. W. MOSKWIĆ I Ź. I. TAJROWA [1089] stwierdzili, że w przypadku wzmocnienia typu Melana-Iszlińskiego-Pragera powiązanego z hipotezą Treski-Guesta można uzyskać pewne uproszczenia obliczeń procesów cyklicznych: autorzy nie ustosunkowują się jednak do wspomnianej powyżej krytyki takiego podejścia, sformułowanej przez R. SHIELDA, C. CLAVUOTA i H. ZIEGLERA [645, 72].

18.4. Wzmocnienie mieszane. Hipoteza wzmocnienia izotropowego odpowiada brakowi efektu Bauschingera (niektórzy autorzy używają tu nawet terminu «ujemny efekt Bauschingera»), natomiast hipoteza wzmocnienia kinematycznego — idealnemu efektowi Bauschingera. Ciała rzeczywiste wykazują z reguły pewien pośredni efekt. Dokładniejszy opis uzyskamy więc przez kombinację obu hipotez przyjmując, że w wyniku wzmocnienia plastycznego powierzchnia czynno-bierna może jednocześnie powiększać swe wymiary z zachowaniem podobieństwa geometrycznego i ulegać translacji. Taki typ wzmocnienia plastycznego nazwiemy *wzmocnieniem mieszanym*. Kombinując np. prawo (18.14), uogólnione na dowolną hipotezę wyężeniową, z prawem (18.20) możemy napisać

$$(18.25) \quad F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = f_1(I_{ep}),$$

przy czym składowe tensora α_{ij} można określić wzorem (18.21), (18.22) lub (18.23). Przy ograniczeniu się do hipotezy HMM otrzymujemy

$$(18.26) \quad (s_{ij} - \alpha'_{ij})(s_{ij} - \alpha'_{ij}) = f_1(I_{ep}),$$

gdzie α'_{ij} oznaczają składowe dewiatora, odpowiadającego tensorowi α_{ij} ; jeżeli zakładamy ważność prawa (18.21), to można zazwyczaj przyjąć $\alpha'_{ij} = \alpha_{ij}$. Przy znanej mierze efektu

Bauschingera, np. β_2 (9.17) musimy od tego parametru uzależnić zarówno funkcję f_1 , jak i c we wzorze (18.21). Jeżeli $\beta_2 = 0$, to $c = 0$; jeżeli natomiast $\beta_2 = 1$ (idealny efekt Bauschingera), to $f_1 = \text{const} = \frac{2}{3} \sigma_0^2$.

Koncepcję typu (18.25), nawiązującą do hipotezy Treski-Guesta, rozwinęli P. G. HODGE [245] i HUAN KE-Czži [1226]. Równanie (18.26), wzmiankowane w pracy JU. N. KADASZEWICZA i W. W. NOWOŻIŁOWA [966], zostało rozwinięte przez G. B. TAŁYPOWA [1205, 1206, 1207], który ponadto uzależnił efekt Bauschingera od parametru Lodego. K. F. KOWALOW [988] przyjął za miarę efektu Bauschingera przesunięcie środka powierzchni (18.25), a więc wielkość $\Delta = \sqrt{\alpha_{ij} \alpha_{ij}}$.

Przystosowaniu hipotezy wzmocnienia mieszanego (18.26) do analizy obciążeń cyklicznych poświęcona jest praca R. A. ARUTIUNIANA i A. A. WAKULENKI [792]; stwierdzili oni, że dla większości materiałów funkcja $f_1(I_{ep})$ ma poziomą asymptotę i przy dostatecznie dużej liczbie cykli (typu pokazanego na rys. 68) można przyjąć $f_1 = \text{const}$.

18.5. Ogólne wzmocnienie anizotropowe. Jeszcze ogólniejszy opis zachowania się materiału w trakcie wzmocnienia plastycznego można uzyskać, dopuszczając nie tylko proporcjonalny wzrost i translację pierwotnej powierzchni czynno-biernej, lecz również zmianę jej kształtu. Istnieje wiele bardzo ogólnych propozycji tego typu.

Pierwsza propozycja matematycznego opisu wzmocnienia anizotropowego została zawarta we wspomnianej już pracy W. PRAGERA z r. 1935 [546a]. Obszerna praca [27] I. F. BESSELINGA z r. 1953 zawiera propozycję dość złożonej hipotezy wzmocnienia anizotropowego; autor wychodzi z założenia, iż element objętości dV można rozpatrywać jako konglomerat podelementów (grup cząstek) o różnych krytycznych wartościach jednostkowej energii odkształcenia postaciowego. W teorii tej efekt Bauschingera jest więc związany z mikroniejednorodnością.

Bardziej szczegółowo omówimy tu propozycję A. BALTOWA i A. SAWCZUKA [12]. Autorzy, nawiązując do warunku plastyczności HMH i zakładając, że w wyniku wzmocnienia plastycznego materiał pierwotnie izotropowy staje się materiałem anizotropowym o dość ogólnej anizotropii (W. OLSZAK, W. URBANOWSKI [476], A. SAWCZUK [618]), proponują równania powierzchni czynno-biernej o postaci

$$(18.27) \quad N_{ijkl}(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{kl} - \alpha_{kl}) - 1 = 0,$$

gdzie N_{ijkl} oznacza tensor modułów plastycznych (czwartego rzędu), zależny od składowych tensora odkształceń plastycznych i od jego niezmienników. Przyjęcie $N_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} f(I_{ep})$ prowadzi do wzmocnienia mieszanego, a w szczególności do kinematycznego lub izotropowego. Po zbadaniu różnych możliwych, ogólniejszych form tensora N_{ijkl} zaproponowano bardziej wyspecyfikowaną postać równania (18.27), mianowicie

$$(18.28) \quad s_{ij} s_{ij} - 2s_{ij} \alpha_{ij} + A \alpha_{ij} \alpha_{kl} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{kl} - \alpha_{kl}) - \frac{2}{3} \sigma_0^2 = 0,$$

przy określeniu tensora α_{ij} prawem (18.21).

Nieco inaczej podchodzą do sformułowania ogólnego wzmocnienia anizotropowego G. I. BYKOWCEW, W. W. DUDUKALENKO i D. D. IWLEW [827]. Stwierdzają oni, iż równanie

powierzchni granicznej powinno być w każdym razie niezmiennicze względem obrotu układu, może być więc funkcją tylko 9 wspólnych niezmienników tensorów T_σ i T_ε^p (por. p. 6.9). Przyjmując za takie niezmienniki trzy naprężenia główne σ_j , trzy główne odkształcenia plastyczne ε_j^p , i trzy kąty Eulera między kierunkami głównymi naprężeń i kierunkami głównymi odkształceń plastycznych α, β i γ , poszukują równań powierzchni czynno-biernej w postaci

$$(18.29) \quad F(\sigma_j, \varepsilon_j^p, \alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Problem jednoznaczności rozwiązań w takim przypadku rozważał W. W. DUDUKALENKO [898].

Bardzo ogólnie ujęcie wzmocnienia plastycznego zaproponował również G. BACKHAUS [10]. Przyrost dewiatora naprężeń w trakcie procesu określa on wzorem

$$(18.30) \quad ds_{ij} = C s_{ij}^{(0)} dI_{\varepsilon p} + B d\varepsilon_{ij}^p + A s_{kl}^{(0)} \frac{d\varepsilon_{kl}^p}{dI_{\varepsilon p}} d\varepsilon_{ij}^p,$$

gdzie $s_{ij}^{(0)}$ oznaczają składowe dewiatora w chwili rozpoczęcia uplastycznienia, natomiast A, B i C — pewne funkcje parametru Odqvista, które należy określić doświadczalnie. Pierwszy składnik odpowiada wzmocnieniu izotropowemu, drugi — kinematycznemu typu Melana-Iszlińskiego-Pragera, trzeci — anizotropowemu. Całkując wzdłuż drogi w przestrzeni odkształceń plastycznych otrzymujemy

$$(18.31) \quad s_{ij} = s_{ij}^{(0)} + \int ds_{ij};$$

obliczając stąd $s_{ij}^{(0)}$ i wstawiając do warunku $s_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(0)} = \frac{2}{3} \sigma_0^2$ otrzymujemy aktualne równanie powierzchni czynno-biernej. W pracy [10] rozpatrywano różne przypadki szczególne; zastosowanie tej propozycji w bardziej ogólnych przypadkach wydaje się jednak natrafiać na poważne trudności rachunkowe.

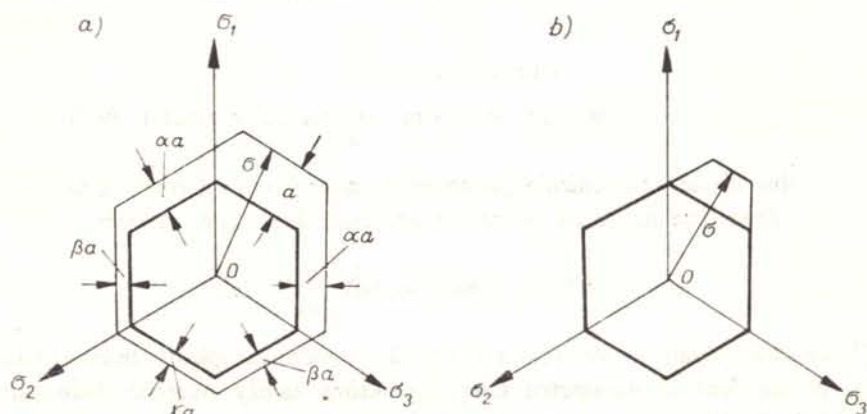
P. G. HODGE [246] sformułował ogólną teorię wzmocnienia anizotropowego w nawiązaniu do hipotezy wyęźnieniowej Treski-Guesta. Jeżeli w wyniku wzmocnienia plastycznego bok sześciokąta w płaszczyźnie dewiatorowej, na którym znajduje się koniec wektora określającego stan naprężenia, przesunie się o αa , to dwa sąsiednie boki przesuną się o αa , dwa dalsze o βa , wreszcie bok przeciwległy o γa (rys. 84). Efektywne sformułowanie hipotezy wzmocnienia wymaga tu znajomości funkcji $a = a(\varepsilon^p)$ (określonej np. z wykresu rozciągania; HODGE rozważał wzmocnienie odcinkowo-liniowe) oraz doboru współczynników α, β i γ . Omówione w p. 18.4 wzmocnienie mieszane jest szczególnym przypadkiem zaproponowanej hipotezy, gdy redukujemy liczbę «stopni swobody» z trzech do jednego, mianowicie gdy zachodzą związki

$$(18.32) \quad \beta = 3\alpha - 2, \quad \gamma = 4\alpha - 3.$$

Dalsza specyfikacja związana jest z doбором już tylko jednego parametru, np. α . Przy $\alpha = 1$ mamy $\beta = \gamma = 1$, co odpowiada wzmocnieniu izotropowemu. Przyjmując natomiast $\alpha = 1/2$ otrzymujemy $\beta = -1/2, \gamma = -1$, następuje translacja sześciokąta umiarowego i mamy do czynienia ze wzmocnieniem kinematycznym w płaszczyźnie dewiatorowej.

Odcinkowo-liniowe wzmocnienie anizotropowe w przypadku istnienia kilku powierzchni plastyczności rozważał Z. MRÓZ [438].

Pokazany na rys. 84a typ wzmocnienia można określić jako wzajemną zależność poszczególnych segmentów powierzchni plastyczności, odpowiadających różnym mechanizmom



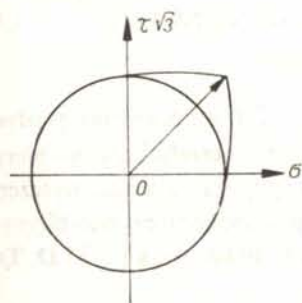
Rys. 84. Hipoteza Hodge'a wzmocnienia anizotropowego w nawiązaniu do warunku plastyczności Treski-Guesta: a) przypadek ogólny, b) przypadek niezależności mechanizmów $\alpha = \beta = \gamma = 0$

uplastycznienia. Czasem rozważa się również przypadek niezależności mechanizmów, pokazany na rys. 84b (P. M. NAGHDI [456]); otrzymujemy go przez przyjęcie w teorii Hodge'a $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

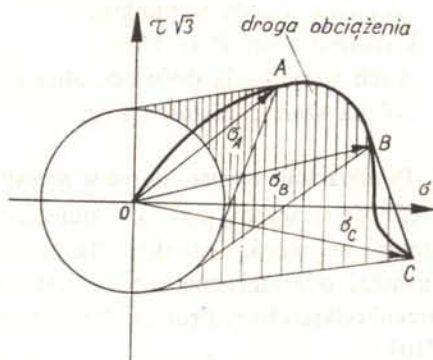
18.6. Problem tworzenia się naroży plastycznych. Omówione w p. 18.2–18.5 hipotezy wzmocnienia plastycznego odpowiadały mniej lub bardziej zasadniczym zmianom pierwotnej powierzchni granicznej (czynno-biernej), jednakże bez zmian jakościowych; tak np. powierzchnia gładka, np. walec Hubera-Misesa-Hencky'ego, ulegał przekształceniu na pewną powierzchnię gładką. Natomiast z pewnych rozważań natury fizycznej (np. z koncepcji poślizgów S. B. BATDORFA i B. BUDIANSKY'EGO [17, 18], którą omówimy bardziej szczegółowo w p. 19.5, oraz z pewnych modeli wzmocnienia plastycznego wynika tworzenie się naroży w punkcie odpowiadającym danemu stanowi naprężenia (rys. 85). Do modeli tego typu należy np. model JU. N. RABOTNOWA [1127], w którym wzmocnieniu plastycznemu odpowiada przyrost momentów zginających przy podwójnym (pseudo-ukośnym) zginaniu idealnie sprężysto-plastycznego pręta o przekroju pierścieniowym cienkościennym.

Liczne teorie opisują tworzenie się naroża plastycznego na aktualnej powierzchni czynno-biernej. Należą tu zarówno teorie o podstawach fizykalnych (S. B. BATDORF, B. BUDIANSKY [17], T. H. LIN [352], Y. YOSHIMURA [754], H. PAYNE [523]), jak i czysto fenomenologiczne (J. L. SANDERS [600], W. D. KLUSZNIKOW [985, 986], N. CRISTESCU [81]). Według pierwotnej koncepcji BATDORFA-BUDIANSKY'EGO [18] aktualna krzywa czynno-bierna na płaszczyźnie naprężeń składa się z odcinków powierzchni pierwotnej, odcinków prostych stycznych i niektórych odcinków drogi obciążania (rys. 86 pokazuje kolejne krzywe dla punktów A, B, C). Obszar procesów biernych miałby według tej hipotezy podlegać stalemu zwiększaniu (podobnie jak w przypadku hipotezy wzmocnienia izotro-

powego, przewidującej jeszcze znacznieszy wzrost tego obszaru). Pewne ogólne rozważania poświęcone problematyce tworzenia się naroży plastycznych zawierają prace A. PHILLIPSA [536] i W. OLSZAKA [486].

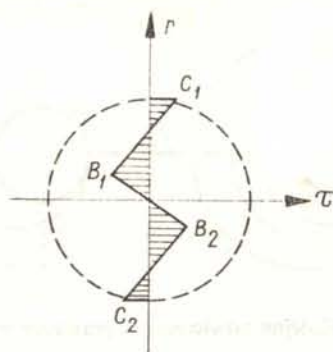
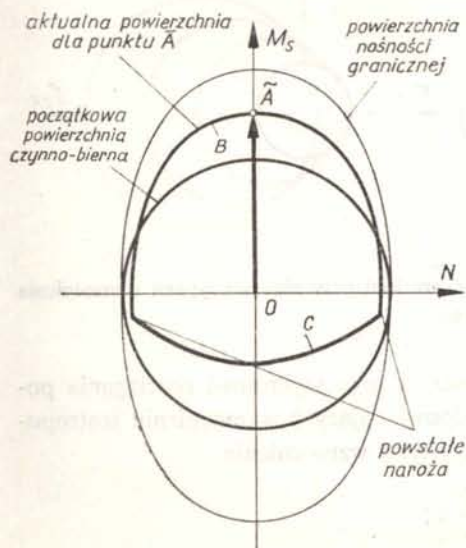


Rys. 85. Hipoteza tworzenia się naroży plastycznych



Rys. 86. Wzrost powierzchni czynno-biernej według koncepcji Batdorf'a-Budiansky'ego

Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że wyciąganie zbyt daleko idących wniosków z modeli, które można by nazwać «modelami konstrukcyjnymi», np. modelu Rabotnowa może być dość ryzykowne. I tak np. rozważając inny model, mianowicie jednoczesne rozciąganie i skręcanie idealnie sprężysto-plastycznego pręta o przekroju kołowym, stwierdzamy tworzenie się naroży plastycznych nie w punkcie odpowiadającym danemu obciążeniu pręta (np. przy czystym skręcaniu) lecz w dwóch innych punktach (rys. 87). Zjawisko to jest po prostu związane z faktem, iż ponowne uplastycznienie w przypadku złożonym może się rozpocząć bądź w punktach B, bądź w punktach C przekroju (rys. 88); w przypadku analizy uplastycznienia w pewnym określonym punkcie ciała podlegającego



Rys. 88. Rozkład naprężeń w przekroju pręta skręcanego sprężysto-plastycznie

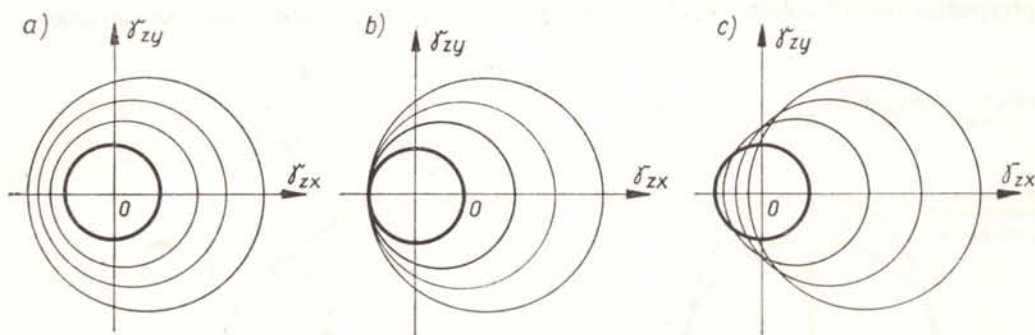
Rys. 87. Tworzenie się naroży na powierzchni czynno-biernej odpowiadającej jednoczesnemu rozciąganiu ze skręcaniem pręta o przekroju kołowym

wzmocnieniu plastycznemu zjawiska tego typu nie były rozważane ani nie stwierdzono żadnych faktów doświadczalnych, mogących potwierdzić tworzenie się takich naroży. Natomiast istnieją doświadczenia, z których autorzy wysnuwają pozytywne wnioski odnośnie istnienia naroży w punktach reprezentujących dany stan naprężenia. Tym niemniej, jak stwierdza np. P. G. HODGE [248], teorie poślizgowe są z reguły silnie skomplikowane, a ich weryfikacja doświadczalna raczej dość słaba, tak że prawdopodobnie nie mogą liczyć na szersze zastosowanie.

18.7. Powierzchnie czynno-bierne w przestrzeni odkształceń. Typ wzmocnienia plastycznego określa się zazwyczaj przez sformułowanie zachowania się powierzchni czynno-biernej w przestrzeni naprężeń. Jednakże dla pewnych zastosowań, gdy za czynniki wyteżenia można uważać odkształcenia, ważna jest również analiza powierzchni czynno-biernych w przestrzeni odkształceń. Problem ten poruszają np. prace I. F. BESSELINGA [27] i D. TRIFANA [710].

Zachowanie się powierzchni czynno-biernych w przestrzeni odkształceń w przypadku idealnej plastyczności badaliśmy w p. 10.6 i 17.6; widoczna jest tu analogia ze wzmocnieniem kinematycznym w przestrzeni naprężeń; powierzchnia podlega translacji jako ciało sztywne. Również w przypadku wzmocnienia kinematycznego sytuacja w przestrzeni odkształceń nie ulega zmianie, jedynie ruch powierzchni można określić jako wolniejszy. Kierunek tego ruchu jest oczywiście związany z przyjętym prawem fizykalnym.

Natomiast odmiennie wygląda zachowanie się powierzchni czynno-biernej w przestrzeni odkształceń w przypadku wzmocnienia izotropowego. Zajmijmy się dla uproszczenia płaszczyzną $\gamma_{xx} - \gamma_{yy}$ podobnie jak w p. 10.6, i ograniczmy się do procesu prostego (wzrasta jedynie γ_{xx}). Teoretycznie możliwe są tu trzy przypadki zachowania się powierzchni granicznej, pokazane na rys. 89. Przypadek graniczny (b) odpowiada początkowi uplastycznień

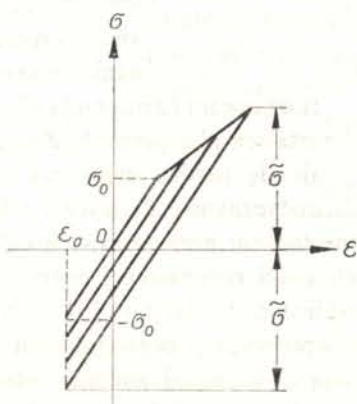


Rys. 89. Kolejne powierzchnie graniczne w przestrzeni odkształceń przy różnych typach wzmocnienia plastycznego

przeciwwrotnych przy stałej wartości odkształcenia, a więc wykresowi rozciągania pokazanemu na rys. 90. Z równości odcinków σ , odpowiadających wzmocnieniu izotropowemu, łatwo wyprowadzić odpowiednią charakterystykę wzmocnienia

$$(18.33) \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{E}{2} \varepsilon;$$

jest to więc wzmocnienie liniowe (9.3) o module $E_1 = E/2$. Materiały rzeczywiste wykazują z reguły mniejszy moduł wzmocnienia, zatem z reguły występuje sytuacja, pokazana na rys. 89c. Oczywiście niewielki choćby efekt Bauschingera znacznie wzmacnia efekt, przedstawiony na tym rysunku.



Rys. 90. Przypadek graniczny liniowego izotropowego wzmocnienia plastycznego

W przypadku procesów odbiegających od prostego następuje przy wzmocnieniu izotropowym jednoczesna krzywoliniowa translacja i proporcjonalny wzrost powierzchni granicznej w przestrzeni odkształceń, zatem występuje analogia do wzmocnienia mieszanego w przestrzeni naprężeń. Podobna sytuacja (przy nieco przyspieszonym ruchu) występuje w przypadku wzmocnienia mieszanego, tak że to ostatnie jest odwzorowywane w podobny sposób w obu przestrzeniach. Wreszcie w przypadku zmiany kształtu powierzchni czynno-biernej w przestrzeni naprężeń następuje również odpowiednia zmiana w przestrzeni odkształceń.

Warto zauważyć, że założenie nieściśliwości materiału redukuje przestrzeń odkształceń do pewnej podprzestrzeni, np. trójwymiarową przestrzeń odkształceń głównych do płaszczyzny $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$. Przekrój walca HMH taką płaszczyzną jest kołem o promieniu $\sigma_0/G\sqrt{6}$; jednakże często rysuje się krzywą graniczną w płaszczyźnie $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ jako elipsę pokazaną na rys. 76a. Nie jest to przekrój walca płaszczyzną $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, lecz rzut przekroju kołowego płaszczyzną $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ na płaszczyznę $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

18.8. Badania doświadczalne powierzchni czynno-biernych i trudności w ich interpretacji.

Teoria powierzchni czynno-biernych jest wyjątkowo trudna do weryfikacji doświadczalnej. Powierzchnia taka ma teoretycznie odpowiadać procesom neutralnym, czyli procesom granicznym od strony procesów czynnych, w trakcie których zmiana odkształceń plastycznych (i energia rozpraszana) zmierza do zera. Jednakże doświadczalnie trudno określić taki proces: gdy stwierdzamy brak zmiany odkształceń plastycznych, to zazwyczaj mamy do czynienia z procesem biernym, leżącym wewnątrz powierzchni granicznej. Natomiast pojawienie się zmiany odkształceń plastycznych stwierdzamy dopiero przez pomiar pewnej określonej, umownej ich wartości — w istocie mamy wtedy do czynienia już z pewnym procesem czynnym. Praktycznie nie bada się więc z reguły procesów neutralnych, lecz określa końcowe punkty procesów biernych, przy czym przez koniec procesu biernego

rozumie się pojawienie się zmiany odkształceń plastycznych o pewną umowną wartość. Wartość ta może być np. mierzona intensywnością zmiany odkształceń plastycznych $\Delta \varepsilon_i^p$.

Wielu autorów zwraca uwagę na niezwykle istotną zależność określanych w ten sposób powierzchni granicznych od umownie przyjętej wartości zmiany odkształceń plastycznych (Ju. I. JAGŃ, O. A. SZISZMARIEW [1260], W. SZCZEPIŃSKI [687], O. A. SZISZMARIEW [1251]). Na rys. 91 pokazano zaczerpnięte z pracy [1260] krzywe graniczne dla jednoczesnego rozciągania i skręcania cienkościennej rurkowej próbki niklowej, odpowiadające trwałemu odkształceniu rozciągania $\varepsilon_x^p = 1,1\%$, uzależnione od umownie przyjętej wartości zmiany odkształceń plastycznych. Zwłaszcza przy ostrych kryteriach $\Delta \varepsilon_i^p$ obszar procesów biernych staje się bardzo mały, tak że można by mówić o wzmocnieniu plastycznym «ponadkinematycznym». Zazwyczaj tak ostre kryterium $\Delta \varepsilon_i^p$ nie jest potrzebne, staje się ono istotne jedynie przy procesach cyklicznych, gdy następuje szybka kumulacja nawet niewielkich ilości rozpraszanej energii odkształceń plastycznych. Aby opisać poprawnie procesy cykliczne, A. PHILLIPS i R. L. SIERAKOWSKI [538] oraz J. W. JUSTUSSON i A. PHILLIPS [301] wprowadzają pojęcia dwóch odrębnych powierzchni: powierzchni plastyczności, odpowiadającej wyraźnej zmianie odkształceń plastycznych, oraz powierzchni czynno-biernej (powierzchni obciążenia), określonej bardzo ostrym kryterium $\Delta \varepsilon_i^p$. Nieco zbliżoną koncepcję podał również Z. MRÓZ [439].

Z uwagi na niektóre zastosowania i możliwość porównywania wyników doświadczeń cenna byłaby normalizacja wartości $\Delta \varepsilon_i^p$; J. MIASTKOWSKI [414] proponuje przyjęcie tej wartości jako równej wartości intensywności towarzyszących odkształceń sprężystych ε_i^e .

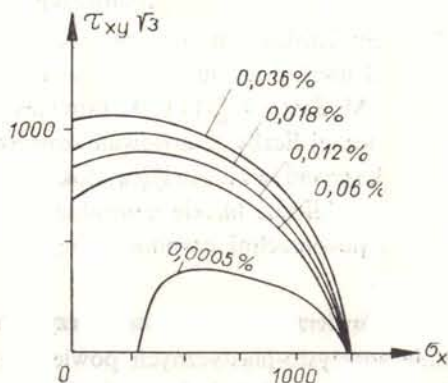
W skrajnym przypadku ostrości kryterium $\Delta \varepsilon_i^p \rightarrow 0$ można by nawet przyjąć, że obszar procesów biernych w trakcie wzmocnienia plastycznego redukuje się do zera; podejście takie zaproponował w swojej analitycznej teorii plastyczności W. D. KLUSZNIKOW [987].

Tak więc porównanie wyników badań różnych autorów i wyciągnięcie ogólniejszych wniosków natrafia na znaczne trudności. Te same doświadczenia można uważać za potwierdzające raczej hipotezę wzmocnienia izotropowego — przy przyjęciu większej wartości $\Delta \varepsilon_i^p$ — lub świadczące raczej za hipotezą wzmocnienia kinematycznego przy zaostreniu kryterium $\Delta \varepsilon_i^p$. Najczęściej można przyjąć pewną hipotezę wzmocnienia mieszanego; zmiana kształtu powierzchni granicznej lub pewien jej obrót są przy tym często na tyle istotne, że poprawny opis wymaga koncepcji ogólnego wzmocnienia anizotropowego.

Stosunkowo nieliczne prace doświadczalne, raczej starsze, weryfikują hipotezę wzmocnienia izotropowego (D. M. CUNNINGHAM, E. G. THOMSEN, J. E. DORN [84]; J. PARKER, M. B. BASSETT [519]). Znacznie większa liczba prac potwierdza hipotezę wzmocnienia mieszanego; stwierdzono przy tym, że przy niewielkich odkształceniach plastycznych jest ono zbliżone do kinematycznego (wpływ mikroniejednorodności plastycznej, większy udział mikronaprężeń), natomiast ze wzrostem odkształceń plastycznych udział wzmocnienia kinematycznego maleje (W. SZCZEPIŃSKI [687], J. MIASTKOWSKI i W. SZCZEPIŃSKI [412], J. MIASTKOWSKI [413, 414]). W serii doświadczeń [895, 896, 897, 1055], G. A. DOSZCZINSKI, W. I. MAKSAK i A. M. KORENIEWA stwierdzili przyrost intensywności odkształceń w trakcie procesu $\sigma_i = \text{const}$; fakt ten świadczy o udziale wzmocnienia kinematycznego, gdyż przy wzmocnieniu izotropowym, podobnie jak przy idealnej plastyczności, proces $\sigma_i = \text{const}$ charakteryzuje się zmniejszaniem intensywności odkształceń (por. przykład w p. 10.6–10.8). Jednakże we wcześniejszych doświadczeniach nad procesami $\sigma_i = \text{const}$.

J. MARIN i L. W. HU [390, 276] stwierdzili tylko początkowy wzrost, a następnie ubytek ε_i ; być może że ich doświadczenia obejmowały większy zakres zmienności odkształceń lub też że wartość wyjściowa ε_i była w zasadniczy sposób różna.

Interesującym wskaźnikiem jest zachowanie się powierzchni czynno-biernej w kierunku prostopadłym do kierunku obciążenia. Według hipotezy wzmocnienia izotropowego wymiary w kierunku prostopadłym powinny wzrastać, według kinematycznego — z reguły maleć, według teorii poślizgów Batdorfa-Budiansky'ego — nie powinny ulegać zmianie; hipoteza wzmocnienia mieszanego dopuszcza wszystkie ewentualności. Istotnie, wyniki badań doświadczalnych wskazują bądź na zwiększanie wymiarów powierzchni w kierunkach poprzecznych (P. S. THEOCARIS, C. R. HAZELL [695], R. A. ARUTIUNIAN [791], J. MIASTKOWSKI [414], A. I. CZISTIAKOW [1235] — przy zastosowaniu kilku quasi-cykli obciążeń), bądź brak widocznej zmiany wymiarów poprzecznych (P. M. NAGHDI, F. ESSENBERG, W. KOFF (por. [456]), H. J. IVEY [287]), bądź też na zmniejszenie tych wymiarów (L. W. HU, J. F. BRATT [279], J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI [412]). Wyniki doświadczeń zależą od badanego materiału, od wartości odkształceń plastycznych, ale w dużym stopniu również od przyjętej umownej wartości $\Delta\varepsilon_p^*$ (por. rys. 91).



Rys. 91. Zależność powierzchni czynno-biernej od przyjętego kryterium zmiany odkształceń plastycznych

Niektóre prace doświadczalne stwierdzają obrót powierzchni granicznej w wyniku wzmocnienia plastycznego (J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI [414], W. M. MAIR, H. PUGH [376], E. SHIRATORI, K. IKEGAMI, H. OKANO [647]), dający się interpretować jedynie w świetle hipotezy ogólnego wzmocnienia anizotropowego.

Szczególnie ostrą weryfikacją doświadczalną hipotez wzmocnienia plastycznego są badania obciążeń cyklicznych, bowiem dotyczą znacznych obszarów powierzchni granicznej. Doświadczenia takie na stalowych próbkach rurkowych, poddanych jednoczesnemu rozciąganiu, skręcaniu i ciśnieniu wewnętrznemu przeprowadził R. A. ARUTIUNIAN [791], stwierdzając, że nawet hipoteza wzmocnienia mieszanego jest wtedy zbyt mało dokładna i postulując pewne dalsze rozszerzenia typu anholonomicznego tej hipotezy. Również doświadczenia K. R. KENKA [979] nad przeciwwrotnym skręcaniem doprowadziły do dość dużych rozbieżności ze znanymi hipotezami wzmocnienia plastycznego. Natomiast doświadczenia A. M. FREUDENTHALA dotyczące cyklicznego skręcania nałożonego na

ustaloną wartość siły podłużnej [147] zostały przez autora zinterpretowane w świetle hipotezy wzmocnienia mieszanego.

Osobny problem stanowi weryfikacja doświadczalna hipotezy tworzenia się naroży plastycznych. Wyniki są tu skrajnie różne. Niektórzy badacze, jak P. M. NAGHDI, F. ESSENBURG i W. KOFF (por. [456]), P. M. NAGHDI, J. C. ROWLEY, C. W. BEADLE [455], A. PHILLIPS, G. A. GRAY [537], H. J. IVEY [287], B. K. BERTSCH i W. N. FINDLEY [25], P. S. THEOCARIS, C. R. HAZELL [695], wyciągają z doświadczeń wnioski o istnieniu takich naroży; inni autorzy dochodzą do wniosków wręcz przeciwnych (JU. I. JAGN, O. A. SZISZMARIEW [1260], B. PAUL, W. CHEN, L. C. LEE [522], W. SZCZEPIŃSKI [687], G. B. TALYPOW, W. W. KAMIENCEW [1199, 1200], A. I. CZISTIAKOW [1234]). Pewnym kompromisem jest hipoteza wzrostu krzywizny powierzchni czynno-biernej w pobliżu punktu reprezentującego dany stan naprężenia, nie mieszcząca się zresztą w ramach hipotezy wzmocnienia mieszanego (A. PHILLIPS [535, 536]). Efekt ten stwierdził doświadczalnie W. M. MAIR [377]; do podobnych wniosków doszedł H. D. BUI [53, 54], który jednak przy obciążeniach znacznie odbiegających od prostego zauważył, że największa krzywizna powierzchni występuje w punkcie nieco przesuniętym względem punktu danego stanu naprężenia. W pracy [54] zwiększano ostrość granicy plastyczności przez zastosowanie obciążeń cyklicznych o niewielkich amplitudach.

Problem istnienia naroży plastycznych w świetle weryfikacji doświadczalnej można więc nadal uważać za otwarty; na znaczne trudności interpretacyjne tej kwestii zwracają uwagę A. M. ŻUKOW [914], A. PHILLIPS [536] i W. OLSZAK [486]. Wydaje się jednak, że dla znacznej liczby zastosowań stosunkowo prosta hipoteza wzmocnienia mieszanego może wykazywać wystarczającą dokładność. Spośród wyjątków wymienimy tu jedynie obciążenie cykliczne bliskie neutralnemu, bowiem wtedy szczególnie dokładne określenie przebiegu powierzchni czynno-biernej nabiera zasadniczego znaczenia.

18.9. Powierzchnie graniczne wytrzymałości. W przypadku stosowania teorii materiałów idealnie sprężysto-plastycznych powierzchnia czynno-bierna w przestrzeni naprężeń jest utożsamiana z powierzchnią graniczną wytrzymałości, natomiast w przestrzeni odkształceń przyjmuje się zazwyczaj nieograniczoną wytrzymałość; uproszczenie takie nie powoduje z reguły większego błędu. Natomiast uwzględnienie wzmocnienia plastycznego wymaga oddzielnej oceny obszaru odkształceń plastycznych, mianowicie ograniczenia go powierzchnią graniczną wytrzymałości.

Jakkolwiek hipotezy wyteżeniowe, mające określić powierzchnię graniczną wytrzymałości, są formułowane już od kilkuset lat, to jednak ich związek z teorią wzmocnienia plastycznego jest dość luźny. Zazwyczaj badań wzmocnienia plastycznego nie przeprowadza się aż do utraty wytrzymałości. N. N. DAWIDIENKOW i JA. B. FRIDMAN [1224] przyjmują, że utrata wytrzymałości jest ograniczona bądź powierzchnią Treski-Guesta (o zwiększonych wymiarach), bądź w pewnym podobszarze powierzchnią odpowiadającą hipotezie największego wydłużenia. Doświadczenia A. M. ŻUKOWA [911] potwierdziły raczej odnośnie do pęknięcia hipotezę Galileusza.

A. A. ŁABUTIN [1018] zajął się określeniem granicznej intensywności logarytmicznych odkształceń $\bar{\epsilon}_i$, odpowiadającej wytrzymałości rozdzielczej. Wyniki doświadczeń nad

próbkami stalowymi zostały ujęte w formę wzoru

$$(18.34) \quad \bar{\varepsilon}_i = A + B \frac{\sigma_m}{\sigma_i},$$

gdzie A i B są stałymi materiałowymi. Z punktu widzenia zastosowań praktycznych teorii wzmocnienia plastycznego prowadzenie dalszych badań nad określeniem dopuszczalnego obszaru odkształceń wydaje się szczególnie ważne.

19. Równania fizykalne teorii wzmocnienia plastycznego

19.1. Uwagi ogólne. Omówione w p. 18 równania powierzchni czynno-biernych przy wzmocnieniu plastycznym można rozpatrywać dwojako. Z jednej strony są to niewątpliwie pewne równania fizykalne, zależne od badanego materiału. Jednocześnie, z drugiej strony, określają one powierzchnie graniczne, a więc wyznaczają zakres stosowalności zasadniczych równań fizykalnych, odrębnych dla procesów czynnych a odrębnych dla biernych. Równania procesów czynnych zawierają przy tym nową niewiadomą, którą należy wyrugować w oparciu o równanie powierzchni granicznej — podobnie jak w przypadku idealnej plastyczności.

Omówienie tych równań jest przedmiotem obecnego punktu. Niektóre z nich, formalnie rzecz biorąc, nie różnią się od równań klasycznych teorii idealnej plastyczności, np. (10.34), (10.58) i (10.69); różnice pojawiają się dopiero po wyrugowaniu funkcji φ lub λ . Są to zresztą zasadnicze różnice jakościowe; przyrosty naprężeń wyznaczają tu z reguły przyrosty odkształceń w sposób jednoznaczny, podczas gdy w teorii idealnej plastyczności przyrosty odkształceń mogą być wyznaczone jedynie z dokładnością do stałego mnożnika. Niektóre równania fizykalne są dostosowywane do przyjętej hipotezy wzmocnienia plastycznego; omówimy je bardziej szczegółowo i zwrócimy uwagę na uogólnienia.

19.2. Odkształceniowe teorie plastyczności. H. HENCKY [210] zaproponował swoje równania (10.35) w zasadzie dla ciał idealnie plastycznych. Jednakże przystosowanie ich do opisu wzmocnienia plastycznego nie przedstawia zasadniczych trudności (A. NÁDAI [451], A. A. ILIUSZIN [943]). Ponieważ równaniami tymi można opisywać jedynie procesy proste lub zbliżone do prostych, więc hipoteza wzmocnienia (izotropowe, kinematyczne itp.) jest bez większego znaczenia (wyznacza ona jedynie dopuszczalny obszar stosowalności równań procesów biernych); wystarczy przyjąć hipotezę jednolitej krzywej (18.2). Zamiast (10.37) otrzymuje się wtedy

$$(19.1) \quad \varphi = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} = \frac{3\varepsilon_i}{2f(\varepsilon_i)},$$

a po podstawieniu do (10.34)

$$(19.2) \quad e_{ij} = \frac{3\varepsilon_i}{2f(\varepsilon_i)} s_{ij}.$$

Odwracając zależność (18.2) można wyrazić odkształcenia wyłącznie przez naprężenia; często zamiast σ_i wprowadza się tu niezmiennik $I_{2s} = \frac{2}{3} \sigma_i^2$, pisząc

$$(19.3) \quad e_{ij} = f_1(I_{2s}) s_{ij}.$$

Kryterium procesu czynnego jest tu $de_i > 0$, co przy wykluczeniu występowania mięknięcia plastycznego jest równoważne $d\sigma_i > 0$ lub $dI_{2s} > 0$; jak stwierdziliśmy w p. 18.2, nie jest to kryterium całkowicie ogólne, ale w odniesieniu do procesów prostych — wystarczające.

Uogólnienie prawa (19.3) podał W. PRAGER [548]. Zakładając, że przy jednoosiowym rozciąganiu zależność $e = f(s)$ można przedstawić szeregiem potęgowym

$$(19.4) \quad e = c_1 s + c_3 s^3 + c_5 s^5 + \dots$$

(potęgi parzyste odpadają przy przyjęciu, iż materiał ma jednakowe własności po stronie rozciągania i ściskania), zastępując następnie e przez dewiator e_{ij} oraz s przez dewiator s_{ij} i rugując wyższe potęgi dewiatorów w oparciu o twierdzenie Cayleya-Hamiltona, otrzymał on związek typu

$$(19.5) \quad e_{ij} = f_1(I_{2s}, I_{3s}^2) s_{ij} + f_2(I_{2s}, I_{3s}^2) I_{3s} \left(s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} I_{2s} \delta_{ij} \right).$$

Funkcje f_1 i f_2 muszą być przy tym tak dobrane, aby stosunki odkształceń głównych zależały tylko od stosunków naprężeń głównych. Zamiast I_{3s} można do tego związku wprowadzić niezmiennik walcowy ω_σ , co dla pewnych zastosowań jest dogodniejsze i często prowadzi do wzorów bardziej przejrzystych; przypomniemy tu również, że niezmiennik ω_σ jest bezpośrednio związany z parametrem Lodego μ_σ (6.21).

Teoria odkształceniowa nawet w ogólnej postaci Pragera (19.5) jest znacznie prostsza w zastosowaniach od teorii przyrostowych (płynięcia plastycznego). Zasadniczym problemem staje się zakres jej stosowalności, który niestety jest stosunkowo bardzo wąski. Problem ten polega mianowicie na określeniu takich procesów nieprostych, dla których wyniki teorii można jeszcze uznać za poprawne. Pewną klasę procesów tego typu określił w świetle teorii poślizgów B. BUDIANSKY [50]; Z. MRÓZ [435] określił klasę procesów, które zapewniają jednoznaczność rozwiązania; D. D. IWLEW [942] badał ten problem dla powierzchni granicznych wykazujących osobliwości; B. A. RYCKOW i N. JU. SZWAJKO [1155] w przypadku wzmocnienia anizotropowego. A. S. KRAWCZUK [1003] określił pewien sposób obciążania rury grubościennej pod działaniem rozciągania, skręcania i ciśnienia wewnętrznego, przy którym zachodzi obciążanie proste w przypadku liniowego wzmocnienia materiału (z reguły taki sposób w ogóle nie istnieje przy schematyzacjach wzmocnienia różnych od potęgowego, por. D. D. IWLEW [927]). O niektórych innych pracach z tego zakresu wspomnieliśmy już w p. 10.8 i 10.9.

Po dokonaniu specjalnej modyfikacji teoria odkształceniowa umożliwi również opisanie uplastycznień przeciwwrotnych (prostych). Modyfikację taką wprowadził W. W. MOSKWITIN [1084, 1085]. Założmy, że od punktu A następuje proces bierny (rys. 92); w przypadku jednoosiowym podlega on równaniu

$$(19.6) \quad \Delta \varepsilon = \frac{1}{E} \Delta \sigma,$$

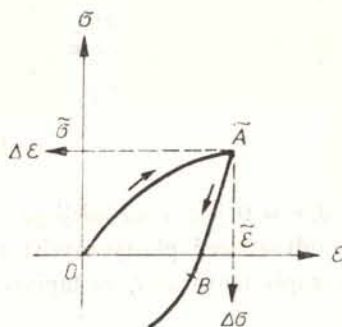
gdzie $\Delta \varepsilon$ i $\Delta \sigma$ można uważać za współrzędne w nowym układzie (rys. 92). W punkcie B rozpoczyna się nowy proces czynny; przy idealnym efekcie Bauschingera $\Delta \sigma_B = 2\sigma_0$, zazwyczaj $\Delta \sigma_B > 2\sigma_0$. MOSKWITIN zaproponował, aby we współrzędnych $\Delta \varepsilon, \Delta \sigma$ opisać go podobnie jak pierwszy proces czynny we współrzędnych ε, σ . Stąd dla przestrzennego

stanu wynika równanie

$$(19.7) \quad \Delta e_{ij} = \varphi \Delta s_{ij},$$

które musi być uzupełnione zależnością

$$(19.8) \quad (\Delta \sigma)_i = f[(\Delta \varepsilon)_i]$$



Rys. 92. Uplastycznienie przeciwwrotne w teorii odkształceniowej

wyznaczoną doświadczalnie. Przy wzmocnieniu liniowym i idealnym efekcie Bauschingera można przyjąć, że zależność ta różni się od wyjściowej zależności $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ jedynie podwójną granicą plastyczności.

Przedstawiona tu modyfikacja teorii odkształceniowej stała się podstawą obszernych monografii W. W. MOSKWITINA [1807] i R. M. SZNEJDEROWICZA [1257]. Warunki istnienia obciążenia prostego w rozpatrywanym przypadku badał W. W. MOSKWITIN [1086] oraz ten sam autor wraz z E. PALNE [1088].

Osobnym problemem staje się przydatność teorii odkształceniowej do opisu dużych odkształceń plastycznych. Jak zauważył L. I. SIEDOW [1160], w przypadku dużych odkształceń pojęcie obciążenia prostego nie daje się — ściśle rzecz biorąc — wprowadzić. Tym niemniej w pewnych przypadkach proporcjonalnie narastających obciążeń stosownie uogólniona teoria odkształceniowa może oddać dobre usługi. Pewne propozycje należą tu do A. NADAIA i E. A. DAVISIA [451], następnie do J. E. DORNA i A. J. LATTERA [96].

19.3. Klasyczne teorie przyrostowe (płynięcia plastycznego). Do ogólnego opisu procesów obciążen złożonych w ustalonym punkcie ciała wykazującego wzmocnienie plastyczne pretendować mogą dopiero teorie, stanowiące odpowiednik teorii płynięcia ciała idealnie plastycznego (10.58), (10.69). Teorie te, najszerzej rozpowszechnione, omówimy bardziej szczegółowo. Wiążą one przyrosty naprężeń i przyrosty odkształceń i bywają nazywane teoriami przyrostowymi; L. FINZI [134] zaproponował tu bardzo stosowną, choć jeszcze mało przyjętą nazwę «teorie anholonomiczne» (teorię odkształceniową, nie operującą przyrostami, można z uzasadnieniem nazwać «holonomiczną»). Natomiast często stosowana nazwa «teorie płynięcia plastycznego» jest w przypadku wzmocnienia raczej nie stosowna, gdyż płynięciem nazywamy przyrost odkształceń bez przyrostu naprężeń, a taka sytuacja na ogół tu nie występuje (pewne wyjątkowe przypadki rozważał R. HILL [237]).

Opis wzmocnienia plastycznego teoriami przyrostowymi związany jest już od pierw-

szych propozycji z hipotezą istnienia potencjału plastycznego, wprowadzoną przez R. MISESA [423] dla przypadku idealnej plastyczności. Przypuścimy, że równanie powierzchni czynno-biernej na pewnym etapie procesu czynnego ma postać

$$(19.9) \quad F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, I_{ep}) = 0,$$

przy czym zapis dobrany jest tak, aby $F(0, 0, 0) < 0$. Zapis (19.9) nie jest całkowicie ogólny, ale obejmuje znaczną większość hipotez wzmocnienia plastycznego, omówionych w p. 18. Oznaczmy przez $d_\sigma F$ różniczkę zupełną funkcji F , traktowanej chwilowo tylko jako funkcja naprężeń, przy ustalonych odkształceniach plastycznych;

$$(19.10) \quad d_\sigma F = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}.$$

Proces $d_\sigma F = 0$ jest z definicji procesem neutralnym i nie powinien powodować żadnej zmiany odkształceń plastycznych; aby spełnić to wymaganie, a ponadto zachować poprawny zapis tensorowy, zastąpimy (17.7) przez

$$(19.11) \quad d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{C} \frac{\partial g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, I_{ep})}{\partial \sigma_{ij}} d_\sigma F$$

gdzie $g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, I_{ep})$ oznacza potencjał plastyczny, natomiast C — skalarną funkcję niezmienników, charakteryzującą wzmocnienie plastyczne. Przypadek $C \rightarrow 0$ odpowiada przejściu do idealnej plastyczności (choć przejście to w wielu przypadkach może nastroczać trudności różnego typu, por. R. HILL [232]); wtedy również $d_\sigma F \rightarrow 0$ oraz

$$(19.12) \quad \lim_{C \rightarrow 0} \frac{d_\sigma F}{C} = \lambda dt.$$

Prawo przyrostowe (19.11) zaproponowali prawdopodobnie po raz pierwszy W. PRAGER i H. GEIRINGER w r. 1934 (por. E. MELAN [400]). R. HILL [221], powołując się na E. Melana, wprowadził nieco odmienny zapis

$$(19.13) \quad d\varepsilon_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d_\sigma F = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}.$$

Przy przejściu granicznym do ciała idealnie plastycznego funkcja $h = 1/C$ rośnie nieograniczenie; jednakże w późniejszych pracach, np. [231, 232] HILL stosuje oznaczenie $h = C$ zamiast $h = 1/C$.

Prawo (19.11) lub (19.12) obowiązuje jedynie w przypadku procesu czynnego, gdy $d_\sigma F > 0$; w przypadku procesu biernego, gdy $d_\sigma F \leq 0$, mamy oczywiście $d\varepsilon_{ij}^p = 0$. Oba te przypadki można zapisać łącznie w sposób następujący (P. G. HODGE, W. PRAGER [240], D. C. DRUCKER [97])

$$(19.14) \quad d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} (d_\sigma F + |d_\sigma F|).$$

W dalszym ciągu będziemy się w zasadzie ograniczali do omawiania równań opisujących jedynie procesy czynne. Przyrosty odkształceń całkowitych można przy tym określić przez dodanie przyrostów odkształceń sprężystych $d\varepsilon_{ij}^e$, określonych w oparciu o prawo Hooke'a.

Jeżeli przyjmujemy jak zwykle, że odkształcenia plastycznie nie powodują zmiany objętości, to potencjał plastyczny g musi spełniać związek

$$(19.15) \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ii}} = 0,$$

zatem powierzchnia $g = 0$ musi być w przestrzeni naprężeń głównych powierzchnią walcową o osi równonachylonej do osi układu. Nie ograniczając się do stowarzyszonych praw przyrostowych (stowarzyszonych praw płyniecia) możemy przy tym rozpatrywać warunki plastyczności zależne od σ_m w układzie $\sigma_m, \sigma_i, \omega_\sigma$.

Z całkiem oczywistego postulatu wynika, że w wyniku procesu czynnego punktu, reprezentujący dany stan naprężenia w przestrzeni naprężeń, musi pozostawać na powierzchni czynno-biernej. Postulat ten sformułował w r. 1949 W. PRAGER [551], wyprowadzając stąd odpowiedni wzór na funkcję skalarną h . Wyprowadzenie to podamy obecnie w postaci ogólniejszej, dostosowanej do równania powierzchni czynno-biernej (19.9).

Warunek pozostawiania na powierzchni (19.9) oznacza, że różniczka zupełna funkcji F , traktowanej jako funkcja wszystkich swoich argumentów, jest równa zeru. Wobec definicji parametru Odqvista (18.15) możemy więc napisać

$$(19.16) \quad d_\sigma F + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial F}{\partial I_{ep}} \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} = 0.$$

Wobec (19.13) otrzymujemy

$$(19.17) \quad d_\sigma F + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d_\sigma F + \frac{\partial F}{\partial I_{ep}} h d_\sigma F \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} = 0$$

skąd po uproszczeniu przez $d_\sigma F$

$$(19.18) \quad h = - \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial I_{ep}} \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}}}$$

Podstawienie (19.18) do (19.13) prowadzi do równań fizykalnych w ostatecznej postaci

$$(19.19) \quad d\varepsilon_{ij}^p = - \frac{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}}{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial F}{\partial I_{ep}} \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}}}} d\sigma_{kl}.$$

Podobny wzór w przypadku występowania we wzorze typu (19.9) pracy odkształcenia plastycznego W^p zamiast parametru Odqvista I_{ep} podają np. W. PRAGER [562] i P. M. NAGHDI [456].

Żądanie spełnienia postulatu Druckera prowadzi (z wyjątkami, omówionymi w p. 17) do stowarzyszonego prawa przyrostowego, czyli przyjęcia $g \equiv F$ (E. MELAN [400]):

$$(19.20) \quad d\varepsilon_{ij}^p = h \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d_\sigma F = h \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}.$$

MELAN stosował to prawo w nawiązaniu do hipotezy wzmocnienia kinematycznego.

Przy nawiązaniu do hipotezy wyteżeniowej HMH, przyjęciu hipotezy wzmocnienia

izotropowego typu (18.14), a więc niezależnej od parametru Lodgego, i po zapisaniu funkcji F ze stosownym współczynnikiem (jest on o tyle dowolny, że może się zawsze «zmieścić» w funkcji h), prawo (19.20) przybiera postać

$$(19.21) \quad d\varepsilon_{ij}^p = de_{ij}^p = h(I_{2s}) s_{ij} s_{kl} ds_{kl}.$$

Prawo (19.21) zaproponował w r. 1938 W. PRAGER [547], a następnie w 1942 r. w nieopublikowanej pracy LANING (por. W. D. KLUSZNIKOW [984]). Można je uważać za klasyczne prawo przyrostowe izotropowego wzmocnienia plastycznego. Jeżeli zapiszemy (18.14) w postaci

$$(19.22) \quad F = g = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - f(I_{ep}) = 0,$$

to wówczas ze wzoru (19.19) wynika (przy przejściu na zapis dewiatorowy)

$$(19.23) \quad de_{ij}^p = \frac{s_{ij} s_{kl}}{f'(I_{ep}) \sqrt{s_{mn} s_{mn}}} ds_{kl} = \frac{s_{ij} s_{kl}}{f'(I_{ep}) \sqrt{2f(I_{ep})}} ds_{kl}.$$

Funkcję $f(I_{ep})$ wyznacza podstawowa próba wytrzymałościowa, np. próba rozciągania. Określając z tej próby zależność $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ lub odwrotną zależność $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_i)$ i pamiętając o związku (18.16) możemy zamiast (19.23) napisać

$$(19.24) \quad de_{kl}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{kl} d\sigma_i}{\sigma_i \sigma_i'} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i'}{\sigma_i} s_{kl} d\sigma_i,$$

gdzie oczywiście i nie jest wskaźnikiem sumowania. Formę (19.24) podaje np. R. HILL [221] i A. MENDELSON [406]. Czasami równania (19.24) nazywa się równaniami Reussa (np. S. D. KLACZKO [980], A. MENDELSON [406]) — o tyle niesłusznie, że REUSS w istocie rzeczy nie rozważał problemów wzmocnienia plastycznego, ograniczając się do analizy idealnej plastyczności. Słuszniejsze wydaje się więc wiązanie tego prawa z nazwiskami Pragera i Laninga.

Dla rozważań teoretycznych a także dla niektórych zastosowań dogodnie jest posługiwanie się zapisem wektorowym równań fizykalnych teorii plastyczności. Podamy tu kilka takich form zapisu równań (19.13), (19.20) i równania Pragera-Laninga (19.21).

Wprowadzimy pomocniczą przestrzeń wektorową, w której spełnione są wymagania sprecyzowane w p. 14.1. Może to być np. dziewięciowymiarowa przestrzeń Pragera lub, jeżeli się ograniczymy do dewiatorów, pięciowymiarowa przestrzeń Iliuszina; w istocie, w przypadku dewiatorów, nawet przestrzeń dziewięciowymiarowa redukuje się do pewnej podprzestrzeni pięciowymiarowej, bowiem spełnione są cztery zależności $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0$. Wprowadzimy takie przestrzenie w odniesieniu do naprężeń i w odniesieniu do odkształceń plastycznych.

Jednostkowy wektor normalny do powierzchni F w przestrzeni naprężeń można określić wzorem

$$(19.25) \quad \mathbf{n}_F = \frac{\partial F / \partial \sigma_{ij}}{\sqrt{(\partial F / \partial \sigma_{kl})(\partial F / \partial \sigma_{kl})}},$$

zatem (19.13) daje się zapisać w postaci

$$(19.26) \quad d\varepsilon^p = h(\mathbf{n}_F d\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n}_\sigma,$$

gdzie w nawias ujęto iloczyn skalarny wektorów, a ponadto

$$(19.27) \quad \bar{h} = h \sqrt{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{pq}}}$$

jest pewną funkcją niezmienników. Formę zapisu (19.26) stosuje np. Z. MRÓZ [436, 437], a w przypadku stowarzyszonego prawa płynięcia (19.20), gdy $g \equiv F$, $\mathbf{n}_g = \mathbf{n}_F = \mathbf{n}$, R. HILL [232, 234]. Wyrażając jeszcze iloczyn skalarny przez długości wektorów i pamiętając, że $|\mathbf{n}| = 1$, otrzymujemy w tym ostatnim przypadku

$$(19.28) \quad d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \bar{h} \mathbf{n} |d\boldsymbol{\sigma}| \cos(\mathbf{n}, d\boldsymbol{\sigma}), \quad \text{gdy} \quad \cos(\mathbf{n}, d\boldsymbol{\sigma}) \geq 0.$$

Jednoznaczność rozwiązań opartych o prawo wzmocnienia (19.28) badali W. E. BOYCE i W. PRAGER [41].

Zapis (19.28) obejmuje oczywiście również równanie Pragera-Laninga (19.21). To ostatnie można jednak zapisać również bez wprowadzenia wektora \mathbf{n} . Z (19.21) wynika bezpośrednio

$$(19.29) \quad d\boldsymbol{\varepsilon}^p = h(\mathbf{s} d\mathbf{s}) \mathbf{s} = h s |d\mathbf{s}| \cos(\mathbf{s}, d\mathbf{s}) = \check{h} \mathbf{s} \cos(\mathbf{s}, d\mathbf{s}) |d\mathbf{s}|,$$

gdzie niezmiennik $|s|$ został włączony do funkcji \check{h} . Aby wyrugować funkcję h , czyli wykorzystać formę (19.24), zauważymy, że

$$(19.30) \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} |s|, \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} |e|,$$

i ostatecznie

$$(19.31) \quad d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\mathbf{s} d|s|}{|s| |s'|} = \frac{|e'|}{|s|} \mathbf{s} d|s|,$$

gdzie $|s'| = d|s|/d|e|$, $|e'| = d|e|/d|s|$. Prawo (19.31), oparte na hipotezie wzmocnienia izotropowego, obowiązuje, gdy $d|s| \geq 0$.

Powróćmy jeszcze do ogólniejszego zapisu (19.26). Przyrosty odkształceń całkowitych można tu po dodaniu przyrostów odkształceń sprężystych zapisać następująco:

$$(19.32) \quad d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^e d\boldsymbol{\sigma} + \bar{h}(\mathbf{n}_F d\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n}_g,$$

gdzie \mathbf{A}^e oznacza macierz modułów sprężystości (modułów o wymiarze cm^2/kG). Prawo (19.32) można odwrócić, określając z niego $d\boldsymbol{\sigma}$. Oznaczmy mianowicie przez \mathbf{E}^e macierz modułów sprężystości o wymiarze kG/cm^2 , odwrotną względem \mathbf{A}^e ; w takim razie

$$(19.33) \quad d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e [d\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{h}(\mathbf{n}_F d\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n}_g].$$

Aby wyrugować niewiadomy tu iloczyn skalarny $\mathbf{n}_F d\boldsymbol{\sigma}$, mnożymy obie strony równania skalarnie przez \mathbf{n}_F , otrzymując (por. Z. MRÓZ [437])

$$(19.34) \quad \mathbf{n}_F d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_F (\mathbf{E}^e d\boldsymbol{\varepsilon}) - \bar{h}(\mathbf{n}_F d\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n}_F (\mathbf{E}^e \mathbf{n}_g),$$

skąd

$$(19.35) \quad \mathbf{n}_F d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{n}_F (\mathbf{E}^e d\boldsymbol{\varepsilon})}{1 + \bar{h} [\mathbf{n}_F (\mathbf{E}^e \mathbf{n}_g)]}$$

i ostatecznie

$$(19.36) \quad d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e \left\{ d\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\bar{h} [\mathbf{n}_F (\mathbf{E}^e d\boldsymbol{\varepsilon})] \mathbf{n}_g}{1 + \bar{h} [\mathbf{n}_F (\mathbf{E}^e \mathbf{n}_g)]} \right\} = \left\{ \mathbf{E}^e - \frac{\bar{h} (\mathbf{E}^e \mathbf{n}_F) \otimes (\mathbf{E}^e \mathbf{n}_g)}{1 + \bar{h} [\mathbf{n}_F (\mathbf{E}^e \mathbf{n}_g)]} \right\} d\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Symbolem \otimes oznaczono tu iloczyn diadowy dwóch wektorów (zapis ten stosuje np. C. TRUESDELL), tak że drugi ze składników w drugiej formie zapisu wzoru (19.36) jest również macierzą. Równoważność obu form zapisu tego wzoru można sprawdzić bezpośrednim przeliczeniem albo przez zastosowanie zapisu wskaźnikowego.

W przypadku rozważanego tu ciała izotropowego macierz modułów E^e jest określona wzorami (10.2). Warunkiem stosowalności prawa (19.36) jest istnienie procesu czynnego, czyli $\mathbf{n}_F d\boldsymbol{\sigma} \geq 0$, a wobec (19.35)

$$(19.37) \quad \mathbf{n}_F(E^e d\boldsymbol{\varepsilon}) \geq 0;$$

w przeciwnym razie występuje proces bierny oraz $d\boldsymbol{\sigma} = E^e d\boldsymbol{\varepsilon}$.

Wzór (19.36) staje się efektywny dopiero po wyrażeniu funkcji wzmocnienia \bar{h} oraz współrzędnych wektorów \mathbf{n} przez odkształcenia, co może natrafić na trudności. Problem ten badał bardziej szczegółowo D. TRIFAN [710], który wyprowadził wzory typu (19.36) o dużej ogólności, oraz JU. I. KADASZEWICZ [967] w nawiązaniu do teorii mikronaprężeń resztkowych.

Podamy jeszcze dwie ważne, ogólne formy praw przyrostowych, zawierających się w (19.13) albo w (19.26). Przy założeniu izotropowego wzmocnienia plastycznego, nawiązującego do hipotezy HMM, G. H. HANDELMAN, C. C. LIN i W. PRAGER [199] sformułowali w r. 1947 ogólne (niestowarzyszone) prawo

$$(19.38) \quad d\varepsilon_{ij}^p = \left[P(I_{2s}, I_{3s}) s_{ij} + Q(I_{2s}, I_{3s}) \left(s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} I_{2s} \delta_{ij} \right) \right] dI_{2s},$$

przy czym warunkiem procesu czynnego (i słuszności powyższego prawa) jest $dI_{2s} \geq 0$. Przy dowolnym warunku plastyczności (ale przy założeniu wzmocnienia izotropowego) można zamiast (19.38) napisać

$$(19.39) \quad d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} \left[P(I_{2s}, I_{3s}) s_{ij} + Q(I_{2s}, I_{3s}) \left(s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} I_{2s} \delta_{ij} \right) \right] (d_\sigma F + |d_\sigma F|),$$

obejmując tym zapisem jednocześnie procesy czynne i procesy bierne. Prawo (19.39) podali P. G. HODGE i W. PRAGER [240].

19.4. Uogólnienia teorii przyrostowych. Uogólnienia prawa (19.21) idą w trzech kierunkach. Z jednej strony kontynuując myśl K. HOHENEMSERA i W. PRAGERA [265], A. A. ILIUSZIN [949] zaproponował w r. 1948 ogólne liniowe prawo tensorowe, wiążące dewiatory naprężeń i odkształceń:

$$(19.40) \quad L_1(D_\sigma) = L_2(D_\varepsilon),$$

gdzie liniowy operator różniczkowo-całkowy L_1 ma postać

$$(19.41) \quad L_1(D_\sigma) = A_1 D_\sigma + B_1 D_\sigma^* + \int_0^t C_1 D_\sigma d\tau + \dots;$$

operator L_2 ma postać analogiczną, natomiast współczynniki A, B, C, \dots są pewnymi funkcjami niezmienników. Zapis (19.40) obejmuje wszystkie klasyczne teorie plastyczności natomiast nie obejmuje praw tensorowo-nieliniowych, np. prawa (19.5). Prawo (19.40) było bardziej szczegółowo badane przez D. D. IWLEWA [928], a następnie przez JU. I. KA-

DASZEWICZA [968], który stwierdził, że w przypadku wzmocnienia plastycznego rzędu obu operatorów L_1 i L_2 powinny być równe, natomiast w przypadku idealnej plastyczności rząd operatora L_2 powinien być o jeden wyższy od rzędu operatora L_1 .

Interesujące uogólnienie prawa Pragera-Laninga (19.29) zaproponował W. D. KLUSZNIKOW [987]. Prawo to można mianowicie zapisać w postaci następującej

$$(19.42) \quad d\mathbf{e}^p = \tilde{h} s |ds| f(\alpha),$$

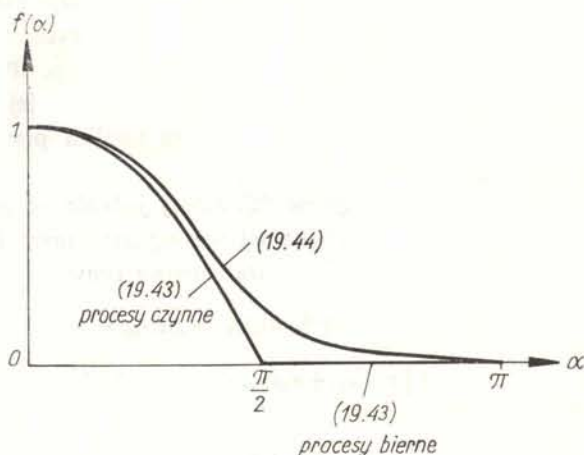
gdzie α oznacza kąt między wektorami s i ds , przy czym

$$(19.43) \quad f(\alpha) = \begin{cases} \cos \alpha, & \text{gdy } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ (proces czynny),} \\ 0, & \text{gdy } \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \text{ (proces bierny).} \end{cases}$$

W istocie rzeczy, jak stwierdza KLUSZNIKOW, proces czynny zachodzi nawet dla kątów α większych od $\pi/2$ (rozwartych), jednak zmiany odkształceń plastycznych są wtedy bardzo niewielkie. Rezygnując z wyodrębniania procesów biernych, czyli przyjmując, że każdy proces jest choćby w niewielkim stopniu czynny, można przyjąć pewne jednolite wyrażenie dla funkcji $f(\alpha)$; KLUSZNIKOW proponuje np.

$$(19.44) \quad f(\alpha) = \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)^\omega = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{2\omega}$$

twierdząc, iż przyjęcie wartości wykładnika $\omega = 2$ dość dobrze odpowiada danym doświadczalnym. Porównanie funkcji (19.43) i (19.44) dla $\omega = 2$ pokazano na rys. 93. Funkcja (19.43) nie jest wprawdzie szczególnym przypadkiem funkcji (19.44), jednak można by



Rys. 93. Porównanie praw wzmocnienia plastycznego Pragera-Laninga i Klusznikowa

dobrac taką rodzinę funkcji różniczkowalnych $f(\alpha)$, aby funkcja nieróżniczkowalna (19.43) była ich granicą. Nieco zbliżone uogólnienie zaproponował R. A. WASIN [835], uzależniając w równaniu (19.28) funkcję \bar{h} od kąta $(\mathbf{n}, d\boldsymbol{\sigma})$.

Drugi kierunek uogólnienia teorii przyrostowych, zapoczątkowany przez W. T. KOITERA [314], związany jest z koncepcją istnienia naroży plastycznych lub ich tworzenia się w trakcie

procesu odkształcania. W narożu powierzchni, mającej tworzyć potencjał plastyczności, normalna nie jest jednoznaczna i jej kierunek może leżeć wewnątrz pewnego stożka (pewnego kąta w przypadku płaskim). Wtedy, ograniczając się do praw stowarzyszonych, można zamiast (19.20) napisać

$$(19.45) \quad d\epsilon_{ij}^p = \sum_{\alpha=1}^m h_{\alpha} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl},$$

przy czym

$$(19.46) \quad \begin{aligned} h_{\alpha} &\geq 0 && \text{dla } \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \geq 0, \\ h_{\alpha} &= 0 && \text{dla } \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} < 0. \end{aligned}$$

Podobne prawo w przypadku liczby składników $m = 6$ badali szczegółowo W. H. WARNER i G. H. HANDELMAN [724]. Przypadki liniowych funkcji $F_{\alpha}(\sigma_{ij})$ badali W. PRAGER [553], J. L. SANDERS [600] i P. G. HODGE [243, 245, 246].

Trzeci podstawowy kierunek uogólnień teorii przyrostowych polega na dopuszczeniu nieliniowości tensorowej. Niemal wszystkie omawiane dotychczas prawa były prawami nieliniowymi (z uwagi na współczynniki), jednakże tensory $d\epsilon_{ij}^p$ i $d\sigma_{ij}$ były powiązane liniowo. Takie powiązanie zapewnia zgodność rzędów przyrostów naprężeń i odkształceń, czyli, inaczej mówiąc, zezwala na wyrugowanie czynnika czasu. Nie jest to jednak warunek konieczny; wystarczy, aby odpowiednie funkcje były funkcjami jednorodnymi pierwszego stopnia, co w przypadku funkcji wielu zmiennych jest żądaniem znacznie słabszym. Takie podejście prowadzi do nieliniowych praw przyrostowych.

Do nieliniowych praw prowadzi geometryczna teoria plastyczności A. A. ILIUSZINA [951, 955], którą omówimy dokładniej w p. 19.6, oraz nieco zbliżona propozycja W. D. KLUSZNIKOWA [983]; na możliwość bardziej ogólnych sformułowań zwraca uwagę R. HILL [234]. Bardziej szczegółowa analiza praw nieliniowych należy do Z. MROZA [436, 437].

Zakładając, że przyrost $d\epsilon_{ij}^p$ zależy jedynie od przyrostu ds_{ij} i kierunku normalnej n do powierzchni czynno-biernej w rozpatrywanym (regularnym) punkcie, MRÓZ wyprowadza następujące siedmioparametrowe prawo

$$(19.47) \quad \begin{aligned} d\epsilon_{ij}^p &= (\alpha_1 n_{ij} + \alpha_2 n_{ik} n_{kj}) n_{pq} ds_{pq} + \\ &+ [\alpha_3 ds_{ij} + \alpha_4 (n_{ik} ds_{kj} + n_{kj} ds_{ik}) + \alpha_5 (n_{ik} n_{kl} ds_{lj} + n_{kl} n_{lj} ds_{ik})] \frac{n_{pq} ds_{pq}}{\sqrt{ds_{uv} ds_{uv}}} \\ &+ [\alpha_6 ds_{ik} ds_{kj} + \alpha_7 (ds_{ik} ds_{kl} n_{lj} + ds_{kl} ds_{lj} n_{ik})] \frac{n_{pq} ds_{pq}}{ds_{uv} ds_{uv}}, \end{aligned}$$

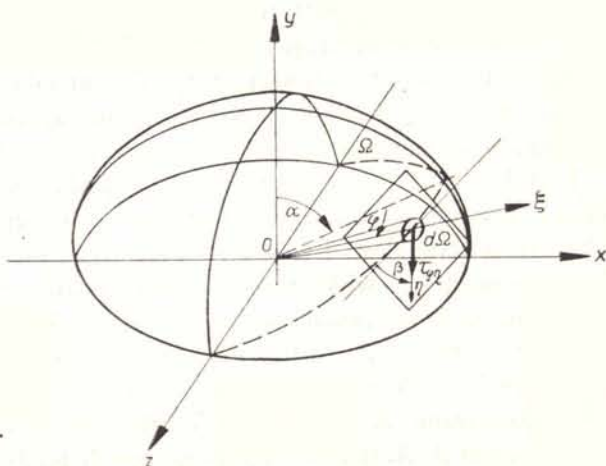
przy czym współczynniki $\alpha_1, \dots, \alpha_7$ mogą być funkcjami wspólnych niezmienników tensorów n_{ij} i ds_{ij} , jednorodnymi zerowego stopnia względem ds_{ij} . Jest to uogólnienie prawa liniowego (19.26), które otrzymujemy przez pozostawienie jedynie współczynnika $\alpha_1 = \bar{h}$. W pracy [437] zbadano bardziej szczegółowo przypadek pozostawienia dwóch współczynników α_1 i α_3 . Występuje tu pewna istotna różnica w stosunku do praw liniowych;

wektor $d\epsilon^p$ (w pomocniczej przestrzeni wektorowej) może zmieniać swój kierunek w zależności od wektora ds , podczas gdy w przypadku prawa liniowego kierunek wektora $d\epsilon^p$ był dla danego punktu powierzchni czynno-biernej stały, mianowicie zawsze zgodny z kierunkiem n_g .

Wspomniemy jeszcze o kilku innych pracach nawiązujących do przyrostowej teorii wzmocnienia plastycznego. Przypadek dużych odkształceń był analizowany w pracach T. Y. THOMASA [696, 697, 699], R. HILLA [233, 234], T. LEHMANN [342] oraz W. OLSZAKA, Z. MROZA i P. PERZYNY [483]. H. ZIEGLER [758] badał problem zgodności osi głównych tensora naprężeń i tensora prędkości odkształceń. W. OLSZAK i P. PERZYNA [484] rozważali przypadek zależności powierzchni czynno-biernej od czasu jako parametru; zależność taka może być związana np. ze zmianą temperatury lub wilgotności ciała, a także występowaniem efektów lepkich. W rozpatrywanym przypadku sformułowano równania wzmocnienia izotropowego i anizotropowego oraz kryteria procesu czynnego i biernego.

19.5. Teorie poślizgów wewnątrzkrystalicznych. Omówione powyżej teorie wzmocnienia plastycznego były teoriami typowo fenomenologicznymi, można powiedzieć inżynierskimi, nie wnioskującymi głębiej w fizyczną stronę przebiegu procesu narastania odkształceń plastycznych. Wniknięcie takie związane jest z reguły ze znacznym skomplikowaniem teorii i utrudnia jej stosowanie przy bardziej złożonych problemach. Pewne próby sformułowania teorii odkształceń plastycznych, nawiązującej do krystalicznej budowy metali, należą w latach trzydziestych do G. I. TAYLORA, jednak bardziej efektywne sformułowanie podali dopiero w r. 1949 S. BATDORF i B. BUDIANSKY [17, 18].

Teoria Batdorfa i Budiansky'ego traktuje ciało jako agregat polikrystaliczny, w którym osie kryształów ułożone są względem siebie w sposób przypadkowy. Zakłada się, że odkształcenia plastyczne są wynikiem poślizgów w poszczególnych kryształach, przy czym poślizg wewnątrz jednego kryształu nie ma wpływu na kryształy sąsiednie. Rozpatrzmy pewną płaszczyznę o normalnej ξ . Poślizg w kierunku η w tej płaszczyźnie (rys. 94) wystąpi, gdy naprężenie $\tau_{\xi\eta}$ przekroczy wartość granicy plastyczności τ_0 . Pojawi się wtedy kąt



Rys. 94. Teoria poślizgów wewnątrzkrystalicznych Batdorfa-Budiansky'ego

odkształcenia postaciowego $\gamma_{\xi\eta}$, zależny od $\tau_{\xi\eta}$: $\gamma_{\xi\eta} = F(\tau_{\xi\eta})$, gdzie funkcja F określa wzmocnienie plastyczne i jest określona na drodze doświadczalnej (fenomenologicznej). BATDORF i BUDIANSKY proponują przyjęcie tej funkcji w postaci następującego wielomianu lub szeregu:

$$(19.48) \quad \gamma_{\xi\eta} = F(\tau_{\xi\eta}) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \tau_{\xi\eta} \leq \tau_0, \\ \sum_n b_n \left(\frac{\tau_{\xi\eta}}{\tau_0} - 1\right)^n, & \text{gdy } \tau_{\xi\eta} \geq \tau_0. \end{cases}$$

Składową tensora ε_{ij} w układzie xyz , odpowiadającą odkształceniu jednego kryształu, można obliczyć ze wzorów transformacyjnych, w których pozostawiamy jedynie $\gamma_{\xi\eta}$:

$$(19.49) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (a_{i\xi} a_{j\eta} + a_{i\eta} a_{j\xi}) \gamma_{\xi\eta}.$$

Wzór ten należy rozumieć oczywiście bez sumowania po ξ i η . Aby określić całkowite odkształcenie plastyczne, wynikające z odkształceń poszczególnych kryształów o różnych orientacjach, należy dokonać całkowania po wszystkich możliwych kierunkach w rozpatrywanej płaszczyźnie, a następnie po wszystkich możliwych kierunkach płaszczyzn (po powierzchni jednostkowej półkuli Ω):

$$(19.50) \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\Omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a_{i\xi} a_{j\eta} + a_{i\eta} a_{j\xi}) F(\tau_{\xi\eta}) d\beta.$$

Całkowanie po Ω najdogodniej wykonać we współrzędnych kulistych α, φ (rys. 94); odpowiednie wzory na dostawy kierunkowe $a_{i\xi}, a_{i\eta}, a_{j\xi}, a_{j\eta}$ podaje praca [17]. Dalsze rozwinięcie omawianej teorii zawierają prace B. BUDIANSKY'EGO, Z. HASHINA i J. L. SANDERSA [51] oraz B. BUDIANSKY'EGO i T. T. WU [52]. J. F. W. BISHOP i R. HILL [29] w oparciu o zasadę maksymalnej pracy plastycznej wykazali normalność wektora przyrostów odkształceń plastycznych do powierzchni plastyczności.

Jakkolwiek pewne doświadczenia świadczyły o wyższości teorii poślizgów międzykryształicznych np. nad koncepcją wzmocnienia izotropowego (F. D. STOCKTON [675], J. MARIN i L. W. HU [390]), to jednak stwierdzono również znaczne odstępstwa od wyników badań doświadczalnych, a także pewne usterki teoretyczne. I tak np. Y. YOSHIMURA [754] zauważył, że funkcja $F(\tau_{\xi\eta})$ w równaniu (19.50) nie może być funkcją materiałową, lecz na ogół zależy od rodzaju stanu naprężenia. W związku z tym zaproponowano liczne warianty teorii poślizgów wewnątrzkrystalicznych.

T. H. LIN [352, 353] zaproponował uwzględnienie oddziaływań wzajemnych poszczególnych kryształów oraz dopuścił możliwość występowania trzech kierunków poślizgu w każdym z kryształów. Teorię tę rozwinął następnie H. PAYNE [523]. A. K. MALMEJSTER [1059] uwzględnił zjawisko powstawania kryształów bliźniaczych i związaną z tym możliwość istnienia trzech postaci równowagi, w tym jednej postaci niestatecznej. Zaproponowana przez niego teoria została nazwana teorią lokalności odkształceń; spośród licznych prac, rozwijających tę teorię, wymienimy A. F. KREGERSA [1004], analizującą jednoczesne rozciąganie ze skręcaniem. Teorię poślizgów, nawiązującą częściowo do teorii geometrycznej A. A. ILIUSZINA, zaproponowali M. JA. LEONOW i N. JU. SZWAJKO [1034,

1035]. Celem pracy R. HILLA [236] było uwzględnienie mikronejednorodności metalu. Pewne ujęcie statystyczne zaproponował A. G. KOSTIUK [1000].

Jak już wspomnieliśmy w p. 18.6, teoria poślizgów prowadzi do wniosku, iż na powierzchni czynno-biernej w trakcie procesu odkształcania tworzą się naroża, tzw. naroża plastyczne. Problem ten był szczegółowo badany w pracach W. D. KLUSZNIKOWA [984, 985, 986], który ponadto poświęcił sporo uwagi porównaniom różnych teorii i modeli.

19.6. Geometryczna teoria plastyczności A. A. Iliuszina. Odmienne ujęcie fenomenologiczne podstawowych koncepcji teorii plastyczności zaproponował w r. 1954 A. A. ILIUSZIN [951]. Wprowadził on pomocnicze pięciowymiarowe przestrzenie wektorowe, omówione przez nas w p. 14.3, i wykorzystał je w znacznie silniejszym stopniu niż czyniono to uprzednio, mianowicie posłużył się geometrycznymi niezmiennikami trajektorii w tych przestrzeniach. Dlatego też teorię Iliuszina będziemy nazywali «teorią geometryczną». Została ona wyłożona w pracach [951, 955, 956, 957 i 960].

Przypuśćmy, że rozważamy pewien proces odkształcenia (odnoszący się do ustalonego punktu ciała), określony zmianą odkształceń w czasie. Odkształcenia plastyczne określimy odpowiednim dewiatorem. Przedstawimy ten dewiator jako pewien wektor \mathbf{e} w pomocniczej przestrzeni pięciowymiarowej [składowe takiego wektora określają wzory typu (14.2)]; funkcja $\mathbf{e} = \mathbf{e}(t)$ określa z jednej strony przebieg procesu, z drugiej stanowi równania parametryczne trajektorii w rozważanej przestrzeni. Trajektorja ta jest scharakteryzowana pięcioma niezależnymi niezmiennikami, np.

$$(19.51) \quad |\mathbf{e}| = \sqrt{e_i e_i} = \sqrt{e_{kl} e_{kl}}, \quad \kappa_n = \left| \frac{d^{n+1} \mathbf{e}}{ds_e^{n+1}} \right|, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie s_e oznacza długość łuku trajektorii odkształceń

$$(19.52) \quad s_e = \int_0^t \sqrt{\frac{de_i}{d\tau} \frac{de_i}{d\tau}} d\tau,$$

a więc wielkość zbliżoną do parametru Odqvista (18.15). Parametr κ_1 oznacza krzywiznę trajektorii; dalsze parametry nie mają tak prostej interpretacji. Jednakże można wykazać, że piątka wersorów

$$(19.53) \quad \mathbf{p}_1 = \frac{d\mathbf{e}}{ds_e}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2 \mathbf{e}}{ds_e^2}, \quad \dots, \quad \mathbf{p}_5 = \frac{1}{\kappa_4} \frac{d^5 \mathbf{e}}{ds_e^5}$$

tworzy układ ortogonalny, zatem mogą one być przyjęte za pewien nowy, lokalny układ odniesienia w przestrzeni pięciowymiarowej. W przypadku przestrzeni trójwymiarowej kierunki takiego układu pokrywałyby się z kierunkami stycznej, normalnej i binormalnej do trajektorii.

Oznaczmy następnie przez \mathbf{s} wektor w pięciowymiarowej przestrzeni naprężeń, odpowiadający dewiatorowi naprężeń. Wektor ten można rozłożyć na kierunki \mathbf{p}_n , mianowicie

$$(19.54) \quad \mathbf{s} = S_n \mathbf{p}_n.$$

Przyjęcie niezmienniczych funkcji S_n oznacza sformułowanie równań fizykalnych teorii

plastyczności. Przyjmując np. $S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$ otrzymujemy

$$(19.55) \quad \mathbf{s} = S_1 \mathbf{p}_1 = S_1 \frac{d\mathbf{e}}{ds_e},$$

co odpowiada w pewnym stopniu teorii płynięcia plastycznego (proporcjonalność naprężeń do przyrostu odkształceń całkowitych). Geometryczną teorię plastyczności Iliuszina można więc traktować jako pewne uogólnienie teorii płynięcia plastycznego, ujmujące wpływ wyższych pochodnych odkształceń względem czasu. Funkcję S_n należy w przypadku ogólnym określić na drodze doświadczalnej. Teoria ta jest integralnie związana z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego.

Obrót wyjściowego układu odniesienia w przestrzeni fizycznej, przyjętego zresztą całkowicie dowolnie, spowoduje zmianę trajektorii w pomocniczej przestrzeni pięciowymiarowej (tak np. przy ustalonych kierunkach głównych i przyjęciu osi układu fizycznego zgodnie z kierunkami głównymi mamy zawsze $e_3 = e_4 = e_5 = 0$; przy innym układzie równość ta nie zachodzi). Jednakże wielkości $|\mathbf{e}|$ i κ_n jako niezmienniki nie ulegną zmianie; trajektoria ulegnie na ogół jedynie obrotowi. Możnaż zapisania równań (19.54) niezależnie od obrotu trajektorii nazwał ILIUSZIN *postulatem izotropii*.

Postulat izotropii, częściowo potwierdzony doświadczalnie przez W. S. LENSKIEGO [1029, 1031, 345], stał się przedmiotem ostrej krytyki ze strony D. D. IWLEWA [933, 934], która z kolei doprowadziła do obszernej dyskusji między W. S. LENSKIM [1032], A. A. ILIUSZINEM [958 i 959] i W. W. NOWOŻILOWEM [1101].

Uproszczony wariant teorii geometrycznej wprowadził W. S. LENSKI [1029, 1033] proponując tzw. *hipotezę lokalnej określoności*, określającą przybliżony kierunek wektora przyrostu naprężenia. Z drugiej strony wariant ten stanowi modyfikację teorii Prandtla-Reussa. Doświadczalną weryfikację hipotezy lokalnej określoności przeprowadził Z. B. DAO [890]. Inny wariant uproszczeń teorii geometrycznej, wykorzystujący rozwinięcia w szeregi małego parametru, zaproponował W. I. MAŁYJ [1062, 1063].

Równania (19.51)–(19.55) opisują proces zadany w przestrzeni odkształceń. Na drodze podobnych rozważań można również opisać proces zadany w przestrzeni naprężeń. Weryfikację doświadczalną postulatu izotropii w tym ostatnim przypadku przeprowadził L. S. ANDREJEW [790].

19.7. Odkształcenia plastyczne przy zmiennej temperaturze. W p. 2.5 zaliczyliśmy temperaturę do ubocznych czynników wyężenia; istotnie, w wielu przypadkach można ją traktować jako pewien ustalony parametr. Jeżeli jednak w trakcie procesu występują istotne zmiany temperatury, to fakt ten zmusza na ogół do traktowania jej jako nowej zmiennej niezależnej, czyli do powiększenia liczby wymiarów przestrzeni, w której opisywany jest proces. Wpływ zmian temperatury może być zasadniczy: i tak np. przy jednoosiowym rozciąganiu zmniejszanie obciążenia może prowadzić do procesu czynnego, o ile tylko towarzyszy mu odpowiedni wzrost temperatury.

Pierwsze sformułowanie opisu anizotermicznych odkształceń plastycznych, nawiązujące do teorii przyrostowej (płynięcia plastycznego), należy do W. PRAGERA [562]. Założył on, że równanie powierzchni czynno-biernej na pewnym etapie procesu czynnego ma postać

$$(19.56) \quad F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, W^p, T) = 0;$$

jest to więc pewne uogólnienie równania (19.9) na przypadek zmiennej temperatury T przy jednoczesnym zastąpieniu parametru Odqvista I_{ep} przez pracę odkształcenia plastycznego W^p . Proces neutralny, rozgraniczający procesy czynne od biernych, określimy tu następująco: odkształcenia plastyczne ε_{ij}^p oraz praca W^p nie ulegają zmianie, natomiast $F = 0$ ma nadal obowiązywać, zatem

$$(19.57) \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} dT = 0.$$

W przypadku wzmocnienia plastycznego, gdy lewa strona wyrażenia (19.57) jest dodatnia, mamy do czynienia z procesem czynnym, gdy ujemna — z biernym. W związku z tym uogólnienie prawa przyrostowego (19.13), zapewniające ciągłość opisu procesu neutralnego, można zapisać w postaci

$$(19.58) \quad d\varepsilon_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial T} dT \right)$$

(PRAGER stosował prawo stowarzyszone, przyjmując $g \equiv F$).

Rozważmy proces plastycznie czynny. Stosując rozumowanie, analogiczne do podanego w p. 19.3 napiszemy

$$(19.59) \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial F}{\partial W^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = 0.$$

Podstawiając (19.58) i upraszczając przez wyrażenie w nawiasie otrzymujemy

$$(19.60) \quad 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\partial F}{\partial W^p} \sigma_{ij} \right) h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 0.$$

Obliczając stąd funkcję h i podstawiając do (19.58) zapiszemy ostatecznie równania teorii przyrostowej w postaci

$$(19.61) \quad d\varepsilon_{ij}^p = - \frac{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial T} dT \right)}{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{mn}^p} + \frac{\partial F}{\partial W^p} \sigma_{mn} \right)}.$$

Zapis ten, dość ogólny, obejmuje większość typów wzmocnienia plastycznego, opisanych w p. 18. Przypadki szczególne i różne typy uproszczeń badali: I. Z. PALLEJ i E. A. KONIAJEW [1109, 997] (uogólnienie teorii mikronaprężeń resztkowych Kadaszewicza-Nowożyłowa), A. A. WAKULENKO i I. Z. PALLEJ [833] (wpływ prędkości odkształcenia na przebieg procesu), I. A. BIRGIER [813] oraz I. A. BIRGIER i I. W. DEMIANUSZKO [815] (różne przypadki szczególne).

Również teoria odkształceniowa została uogólniona na przypadek procesów anizotermicznych. Pojęcie obciążenia prostego, kluczowe dla oceny zakresu stosowalności teorii, omówił w tym przypadku szczegółowo I. A. BIRGIER [814]. JU. N. SZEWCZENKO [1244] wykazał dwa twierdzenia odnoszące się do procesów biernych i wtórnych odkształceń plastycznych: w pracy [1245] zajął się problemem zmiany modułów sprężystych w trakcie procesu odkształceń plastycznych, a w pracy [1246] omówił zastosowanie

typowych metod teorii odkształceniowej w przypadku zmiennej temperatury. I. A. BIRGIER i I. W. DEMIANUSZKO [815] podają równania teorii odkształceniowej w formie przystawej.

Równolegle rozwija się teoria termoplastyczności, bazująca na podstawowych prawach termodynamiki procesów nieodwracalnych. Wymienimy tu prace A. A. WAKULENKI [830, 831, 832] i P. M. NAGHDIEGO [456]. W pracy [111] D. C. DRUCKER uogólnił swój postulat na przypadek zmiennej temperatury (inaczej mówiąc, podał definicję materiału statecznego w przypadku zmiennej temperatury). Stwierdził jednakże, iż klasa takich materiałów jest tu bardzo wąska (z reguły wymagany jest wzrost granicy plastyczności ze wzrostem temperatury, co stoi w sprzeczności z wynikami doświadczeń).

19.8. Teorie mięknięcia plastycznego. Jak już wspomnieliśmy w p. 17.3, postulat Druckera nazywa się czasem definicją materiału statecznego lub nawet definicją wzmocnienia. W istocie obejmuje on również większość przypadków ciał idealnie sprężysto-plastycznych, natomiast nie obejmuje przypadku $d\sigma/de < 0$, zwanego mięknięciem plastycznym. Zjawiska takie występują w przyrodzie (np. przy dojściu do granicy plastyczności — liczbowo ujmuje się je przez wprowadzenie pojęcia *górnjej i dolnej granicy plastyczności*), mają charakter niestateczny i wymagają osobnego opisu. Twierdzenia wykorzystujące postulat Druckera na ogół przestają się tu stosować.

Badania w tym kierunku rozpoczęli stosunkowo niedawno G. MAIER i D. C. DRUCKER [369]. Dalsze prace należą do tych samych autorów wraz z A. C. PALMEREM [513] oraz G. MAIERA [370, 371, 373]. Stwierdzono występowanie wklęsłych powierzchni granicznych w tym przypadku oraz zbadano warunki ortogonalności wektora prędkości odkształceń do powierzchni granicznej. Zasady wariacyjne teorii plastyczności ulegają wtedy zmianie; dla przypadku mięknięcia plastycznego sformułowali je A. C. PALMER [512], G. MAIER [372] i O. de DONATO [93, 94, 95]. Przypadek obciążeń cyklicznych przy mięknięciu plastycznym badał W. R. POWELL [546].

Rozwój prac, badających mięknięcie plastyczne, ważny jest nie tylko ze względu na niestateczności występujące w pewnym punkcie ciała («niestateczności materiałowe»), lecz również z uwagi na pokrewne zjawiska niestateczności na dalszych szczelbach — przekroju i całego ciała («niestateczności konstrukcyjne» związane z niezbędnym czasami odstępstwem od zasady zeszywnienia).

20. Równania fizyczne teorii plastyczności ciał anizotropowych

20.1. Prawa płynięcia ciał anizotropowych idealnie plastycznych. Teorię idealnej plastyczności ciał anizotropowych zapoczątkował R. MISES [423] w r. 1928. Przyjmując hipotezę istnienia potencjału plastycznego, pokrywającego się z lewą stroną odpowiedniego warunku plastyczności (16.1), mianowicie

$$(20.1) \quad g(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} II_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$

(gdzie współczynnik $1/2$ wprowadzono dla wygody zapisu — pozostaje on bez wpływu

na ostateczną formę równań fizykalnych), zaproponował prawo płynięcia plastycznego w postaci

$$(20.2) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Jak już wspomnieliśmy w p. 16.1 niezależnych modułów II_{ijkl} w wyrażeniu (20.1) jest 21; przy dodatkowym założeniu o niezależności uplastycznienia ciała od naprężenia średniego σ_m liczba ta redukuje się do 15. W tym ostatnim przypadku po rozwinięciu równań (20.2) w zapisie inżynierskim otrzymujemy

$$(20.3) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \lambda [K_{12}(\sigma_x - \sigma_y) + K_{31}(\sigma_x - \sigma_z) - (K_{24} + K_{34})\tau_{yz} + K_{15}\tau_{zx} + K_{16}\tau_{xy}], \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} &= \lambda [-K_{24}(\sigma_x - \sigma_y) - K_{34}(\sigma_x - \sigma_z) + K_{44}\tau_{yz} + K_{45}\tau_{zx} + K_{64}\tau_{xy}], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

pozostałe równania można otrzymać przez cykliczną przemianę wskaźników odpowiednio 1, 2, 3; 4, 5, 6; x, y, z. Zastosowaliśmy tu symbolikę zbliżoną do stosowanej przez W. OLSZAKA i W. URBANOWSKIEGO [475, 476], którzy uogólnili pracę [423] na przypadek niejednorodności i anizotropii krzywoliniowej; w pracy [476] podano związki między modułami K_{ij} i modułami II_{ijkl} (oznaczonymi tam przez H_{ijkl}).

Przypadek ortotropii badali bardziej szczegółowo J. W. MACHOWIER (por. [475]) i R. HILL [220]. Wtedy zachodzi $K_{24} = K_{34} = K_{35} = K_{15} = K_{16} = K_{26} = K_{45} = K_{56} = K_{64}$ i w równaniach (20.3) występuje tylko 6 niezależnych modułów. Doświadczalne badania nad weryfikacją praw plastycznej ortotropii przeprowadzili L. A. TOŁOKONNIKOW, W. W. SZEWIELEW i S. P. JAKOWLEW [1209], uzyskując dla pięciu badanych materiałów dobrą zgodność z prawem Misesa-Hilla.

Nieco inne podejście do przypadku ogólnej anizotropii zaproponował Z. SOBOTKA [659, 660, 661, 665]. Wprowadził on tensor transformowanych naprężeń

$$(20.4) \quad \omega_{kl} = A_{ijkl} \sigma_{ij}$$

o kierunkach głównych na ogół różnych od kierunków głównych tensora σ_{ij} , i zaproponował prawo podobieństwa dewiatorów transformowanych naprężeń i prędkości odkształceń:

$$(20.5) \quad \dot{\epsilon}_{ij} - \delta_{ij} \dot{\epsilon}_m = \lambda (\omega_{ij} - \delta_{ij} \omega_m).$$

Omówione powyżej propozycje odnoszą się do uogólnienia warunku plastyczności HMH na przypadek ciał anizotropowych. Jednakże koncepcja stowarzyszonych praw płynięcia typu (20.2) może być — czysto formalnie — zastosowana do innych warunków plastyczności dla ciał anizotropowych. W odniesieniu do warunku (16.6) zastosowali ją I. I. GOLDIENBLAT i W. A. KOPNOW [856, 857], otrzymując wzory typu

$$(20.6) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \left[II_{ij} + \frac{II_{ijkl} \sigma_{kl}}{2\sqrt{II_{pqrs} \sigma_{pq} \sigma_{rs}}} \right].$$

Przypadek ortotropii był tu badany szczegółowo zarówno w pracach [856 i 857], jak i w pracy T. C. Hsu [272]. W odniesieniu do warunków plastyczności stanowiących

uogólnienie warunku Treski-Guesta, np. (16.7), odpowiednie prawa płynięcia sformułowali L. W. HU [278] oraz A. SAWCZUK [614].

20.2. Koncepcja jednolitej krzywej wzmocnienia w przypadku anizotropii. W p. 18.1 omówiliśmy trudności, związane z wprowadzeniem koncepcji jednolitej krzywej wzmocnienia plastycznego dla materiałów izotropowych. W przypadku anizotropii występują dalsze komplikacje — zamiast niezmienników stanu naprężenia i stanu odkształcenia w postulowanym związku typu (18.1) muszą wystąpić pewne niezmienniki wspólne tych tensorów i tensora modułów anizotropii. Tym niemniej hipotezy odnośnie istnienia pewnej jednolitej krzywej wzmocnienia są wysuwane jako najprostsza wersja opisu wzmocnienia plastycznego materiałów anizotropowych.

Pewną ogólną propozycję przedstawił W. O. GEOGDŻAJEW [852]. Wprowadził on w przypadku dowolnej anizotropii uogólnioną intensywność naprężeń i uogólnioną intensywność odkształceń

$$(20.7) \quad \sigma_{red}^2 = (K^* b_{ijkl} - \alpha_{ij} \alpha_{kl}) \sigma_{ij} \sigma_{kl},$$

$$(20.8) \quad \varepsilon_{red}^2 = \left(\frac{E_{ijkl}}{K^*} - \beta_{ij} \beta_{kl} \right) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

i sformułował postulat istnienia jednolitej zależności $\sigma_{red} = f(\varepsilon_{red})$ przynajmniej dla obciążeń prostych; samo pojęcie obciążenia prostego może być w przypadku anizotropii rozumiane w pewnym stopniu różnie. W powyższych wzorach E_{ijkl} oznacza tensor modułów sprężystych, występujący w związku (10.1), b_{ijkl} — tensor modułów sprężystych w związku odwrotnym, α_{ij} oraz β_{ij} — bezwymiarowe tensory anizotropii plastycznej, które należy określić doświadczalnie, wreszcie K^* — uogólniony moduł ściśliwości

$$(20.9) \quad K^* = E_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl}.$$

Rozważając przypadek materiału ortotropowego K. A. RECKLING [576] w nawiązaniu do warunku plastyczności R. HILLA (16.3) wprowadził uogólnioną intensywność naprężeń wzorem

$$(20.10) \quad \sigma_{red}^2 = \frac{1}{2} [F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2],$$

natomiast uogólnioną intensywność odkształceń plastycznych ε_{red}^p zdefiniował tak, aby pracę odkształcenia plastycznego określał wzór

$$(20.11) \quad dW^p = \sigma_{red} d\varepsilon_{red}^p.$$

Ostatecznie

$$(20.12) \quad d\varepsilon_{red}^p = \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{(FG+GH+HF)^2} [F(G d\varepsilon_y^p - H d\varepsilon_z^p)^2 + G(H d\varepsilon_z^p - F d\varepsilon_x^p)^2 + H(F d\varepsilon_x^p - G d\varepsilon_y^p)^2] + \frac{1}{12} \left[\frac{(d\gamma_{yz}^p)^2}{L} + \frac{(d\gamma_{zx}^p)^2}{M} + \frac{(d\gamma_{xy}^p)^2}{N} \right] \right\}^{1/2}.$$

Pokrewną propozycję przedstawił również F. J. FAVA [131]. Natomiast W. N. BASTUN [797], posługując się intensywnościami naprężeń i odkształceń, zdefiniowanymi dla materiałów izotropowych, badał zależność modułu siecznego $E_s = \sigma_i/\varepsilon_i$ od kierunku odkształcania.

Należy podkreślić, że wprowadzony w sposób całkowicie hipotetyczny postulat istnienia jednolitej krzywej wzmocnienia plastycznego dla materiałów anizotropowych został dotychczas zweryfikowany doświadczalnie w bardzo niewielkim stopniu. Jedynie badania K. A. RECKLINGA [577] wydają się potwierdzać go dla materiałów ortotropowych.

20.3. Odształceniowe teorie wzmocnienia plastycznego. Odształceniową teorię wzmocnienia plastycznego materiałów anizotropowych, stanowiącą uogólnienie prawa Henczy'ego-Iliuszina, sformułował po raz pierwszy P. P. PIETRISZCZEW [1117]: dalsze uogólnienia należą do I. I. GOLDIENBLATA [854], oraz W. O. GEOGDŻAJEWA [851]. Pietriszczew założył, że prawo zmiany objętości ciała izotropowego $\sigma_m = K e_m$ pozostaje słuszne również w przypadku anizotropii: GEOGDŻAJEW stwierdził, iż przyjęcie takie jest na ogół nieuzasadnione i zaproponował ogólniejsze prawo

$$(20.13) \quad \alpha_{ij} \sigma_{ij} = \alpha_{ij} E_{ijkl} e_{kl},$$

gdzie poszczególne oznaczenia zostały omówione w p. 20.2. Ponadto zamiast dewiatorów wprowadzono w pracy [851] wielkości

$$(20.14) \quad s_{ij}^* = \sigma_{ij} - \beta_{ij} \alpha_{kl} \sigma_{kl}, \quad e_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \alpha_{ij} \beta_{kl} e_{kl}.$$

Podstawowe równania fizyczne plastycznego wzmocnienia ciał anizotropowych można więc według Geogdżajewa zapisać następująco:

$$(20.15) \quad s_{ij}^* = \frac{\sigma_{red}}{K^* \varepsilon_{red}} E_{ijkl} e_{kl}^*,$$

gdzie σ_{red} , ε_{red} i K^* są zdefiniowane wzorami (20.7)–(20.9). Spośród tych równań tylko 5 jest niezależnych; dochodzi tu jeszcze związek (20.13) i hipoteza jednolitej krzywej wzmocnienia $\sigma_{red} = f(\varepsilon_{red})$.

W przeciwieństwie do teorii odształceniowej ciał izotropowych, prostej szczególnie w przypadku ciał nieściśliwych, omówiona tu teoria Geogdżajewa jest dość złożona i jej stosowanie często napotyka na różnorodne trudności.

20.4. Przyrostowe teorie wzmocnienia plastycznego. Sformułowanie przyrostowej teorii wzmocnienia plastycznego ciał anizotropowych wymaga określenia zachowania się powierzchni czynno-biernej w trakcie procesu odształcenia oraz podania wzorów na przyrosty lub prędkości odształceń. Odnośnie pierwszej kwestii, to analogicznie do materiałów pierwotnie izotropowych można by mówić i tu o wzmocnieniu izotropowym (proporcjonalnym wzroście początkowej powierzchni granicznej, co jednak nie ma oczywiście nic wspólnego z izotropią materiału), wzmocnieniu kinematycznym, mieszanym itp. Natomiast drugi problem bywa zazwyczaj rozstrzygany przez formułowanie stowarzyszonych praw przyrostowych, choć dane doświadczalne w tym zakresie są bardzo skąpe.

Pierwszą przyrostową teorię wzmocnienia materiału anizotropowego zaproponował R. HILL [220] ograniczając się do przypadku ortotropii i przyjmując, że odpowiednie naprężenie zredukowane (20.10) jest funkcją pracy odształcenia plastycznego. Koncepcja taka odpowiada wzmocnieniu izotropowemu. Pewną weryfikację doświadczalną propozycji Hilla zawiera praca K. A. RECKLINGA [577]; badania Recklinga odnosiły się jednak tylko do obciążeń prostych w warunkach płaskiego stanu naprężenia i nie mogą

np. dostarczyć żadnej informacji odnośnie słuszności hipotezy wzmocnienia izotropowego. Pracę Hilla uogólnił na przypadek dowolnej anizotropii [jednak odpowiadającej kwadratowemu warunkowi plastyczności typu (20.1) Misesa] W. A. ŁOMAKIN [1048] postulując również słuszność stowarzyszonego prawa przyrostowego.

Koncepcję wzmocnienia kinematycznego typu Melana-Iszlińskiego-Pragera zastosowali do materiałów anizotropowych I. I. GOLDIENBLAT i W. A. KOPNOW [856, 857]. Nawiązując do początkowego warunku plastyczności (16.6), a więc ogólniejszego od warunku Misesa, określili oni chwilową powierzchnię czynno-bierną równaniem

$$(10.16) \quad II_{ij}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) + \sqrt{II_{ijkl}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma_{kl} - \alpha_{kl})} - 1 = 0,$$

gdzie tensor α_{ij} jest proporcjonalny do tensora ϵ_{ij}^p . Autorzy wspominają również o innych możliwych wariantach wzmocnienia. Przyrosty odkształceń określono prawem stowarzyszonym.

Pewne bardzo ogólne prawo niestowarzyszone zaproponował T. LEHMANN [343]; uwzględnił on mianowicie dodatkowo pewien składnik, zależny od historii obciążania. Początkowy warunek plastyczności przyjęto przy tym w formie (16.5).

Odrębne podejście przedstawia praca I. BERMANA i P. G. HODGE'A [26]. Podano w niej ogólną teorię liniowego (anizotropowego) wzmocnienia materiałów anizotropowych o odcinkowo-liniowych powierzchniach granicznych: ograniczono się jednak do przypadku pokrywania się kierunków głównych naprężeń i odkształceń. Uogólnienie warunku plastyczności Treski-Guesta mieści się w tej teorii jako pewien przypadek szczególny.

Należy jednak podkreślić, że niemal wszystkie omówione tu propozycje mają charakter czysto formalny i wymagają obszernej weryfikacji doświadczalnej.

ROZDZIAŁ IV

OBCIĄŻENIA ZŁOŻONE NA SZCZEBLU S PRZEKROJU PRĘTA

21. Obciążenia typu P_1/S_2

21.1. Uwagi ogólne. Zgodnie z ogólną definicją, podaną w p. 5.1, przez obciążenie złożone przekroju S będziemy rozumieli przypadek występowania więcej niż jednego czynnika wyteżenia w tym przekroju. Czynniki te w przekroju dźwigara liniowego (pręta) mogą być przede wszystkim uogólnione siły wewnętrzne (uogólnione naprężenia) — siła podłużna N , dwie wzajemnie prostopadłe siły poprzeczne T_y i T_z , moment skręcający M_x i dwa momenty zginające M_{oy} i M_{oz} . Wielkości te nazwalimy podstawowymi czynnikami wyteżenia. W przypadku prętów cienkościennych istotną rolę mogą również odgrywać: bimoment B i moment giętno-skrętny M_ω . O innych możliwych czynnikach wyteżenia przekroju wspomnieliśmy w p. 2.3.

Szczebel S ma charakter integralny względem szczębla P — punktu ciała. Dlatego też stopień trudności analizy zależy tu w zasadniczym stopniu od sytuacji na poprzednim szczęblu. Najprostsze są przypadki sklasyfikowane w p. 5.1 jako P_1/S_2 ; w poszczególnych punktach przekroju występuje wtedy tylko jeden czynnik wyteżenia i przeprowadzenie analizy nie wymaga np. zastosowania żadnej określonej hipotezy wyteżeniowej. Należą tu przypadki zginania z rozciąganiem lub ściskaniem i skręcania ze ścinaniem — te właśnie przypadki będą przedmiotem niniejszego punktu. W następnym punkcie rozważymy przypadki P_2/S_2 , wymagające już przyjęcia pewnej hipotezy wyteżeniowej, natomiast w punkcie 23 przypadki S_n , $n \geq 3$, a więc wielokrotnie złożone.

Badania obciążeń złożonych przekroju można rozbić na dwie zasadnicze grupy. Celem badań pierwszej grupy jest określenie powierzchni granicznych, rozgraniczających poszczególne fazy pracy przekroju, a w szczególności powierzchni nośności granicznej przekroju. Powierzchnie takie przedstawia się w stosownej przestrzeni czynników wyteżenia. Często wprowadza się przy tym bezwymiarowe czynniki wyteżenia, odnosząc odpowiednie wielkości fizyczne bądź do nośności sprężystej, bądź też do nośności granicznej. Oba wymienione podejścia mają swoje zalety: pierwsze umożliwia bezpośrednią ocenę korzyści, wynikających z wykazywania przez materiał własności plastycznych w stosunku do materiału idealnie sprężystego (ale o ograniczonej wytrzymałości); drugie natomiast, przeciwnie, nawiązuje do schematu ciała idealnie sztywno-plastycznego i nie wymaga w ogólnej analizie zakresu sprężystego. W przypadku ciał ze wzmocnieniem plastycznym stosuje się raczej pierwsze podejście. W obecnej pracy będziemy stosowali bądź jeden, bądź drugi też sposób wprowadzenia wielkości bezwymiarowych, zależnie od rodzaju rozważanego zagadnienia.

Druga grupa badań obciążeń złożonych dotyczy stanów, odwzorowanych punktami leżącymi wewnątrz poszczególnych podobszarów, wyznaczonych powierzchniami granicznymi. Inaczej mówiąc, dotyczy ona (np. w przypadku zginania z rozciąganiem) badania stanów jednostronnego uplastycznienia, dwustronnego uplastycznienia itp. Celem jej jest określenie uogólnionych praw fizykalnych dla zakresu sprężysto-plastycznego, czyli związków między parametrami niezależnymi (czynnikami wyężenia) a parametrami zależnymi w poszczególnych podobszarach. Zależności takie mają charakter wyjściowy dla dalszej analizy, np. obliczania ugięć, rozwiązywania ustrojów statycznie niewyznaczalnych lub określania nośności ciała (badania obciążeń złożonych na szczelbł B). Kolejność analizy bywa często odwrotna — najpierw rozważa się prawa fizykalne, a dopiero później powierzchnie graniczne.

Wypada tu zauważyć, że dogodne i często stosowane w praktyce pojęcie nośności granicznej przekroju może nie być pojęciem jednoznacznym. Przez nośność graniczną przekroju rozumiemy tu największe siły wewnętrzne, które mogą być przeniesione przez przekrój w przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego; można również uogólnić to pojęcie na przypadek wzmocnienia plastycznego, wprowadzając np. pewną graniczną wartość odkształcenia (por. p. 18.9). Jeżeli mianowicie weźmiemy pod uwagę przekrój o określonym kształcie i wielkości, poddany działaniu określonych, np. proporcjonalnie wzrastających uogólnionych sił wewnętrznych, to jego nośność może w pewnym stopniu zależeć od zmian sił wewnętrznych wzdłuż osi pręta (gradientów), ewentualnej krzywizny pierwotnej osi pręta, zmienności przekroju pręta itp. Sytuacja taka nie jest zresztą nowa w stosunku do szczelbł P—punktu ciała; stwierdzono doświadczalnie, że uplastycznienie w punkcie może również zależeć np. od gradientów naprężeń. Tym niemniej zależność od wymienionych czynników jest z reguły nieznaczną i posługiwanie się pojęciem nośności granicznej przekroju jako pojęciem (w przybliżeniu) jednoznacznym przynosi wyraźne korzyści z punktu widzenia zastosowań inżynierskich, np. przy rozpatrywaniu schematów plastycznego zniszczenia konstrukcji.

Ogólne rozważania nad powierzchniami nośności granicznej dla przekroju należą do W. PRAGERA [563] i H. ZIEGLERA [759, 760, 761]. Rozważali oni jedynie podstawowe czynniki wyężenia przekroju. PRAGER wprowadził pojęcie reakcji plastycznej, rozumiejąc przez reakcję taką wielkość, która nie bierze udziału w rozpraszaniu energii odkształcenia (np. moment obwodowy w powłoce osiowo-symetrycznej). M. SAVE [608] wykazał, iż reakcja taka nie występuje w odpowiednim równaniu powierzchni nośności granicznej (warunku plastyczności dla przekroju). ZIEGLER analizował równania fizykalne (prawa plastycznego płynięcia) dla przekroju stwierdzając, że przy założeniu stowarzyszonego prawa płynięcia w poszczególnych punktach przekroju, prawo płynięcia jest również stowarzyszone — uogólnione prędkości odkształcenia są proporcjonalne do pochodnych cząstkowych funkcji, określającej warunek plastyczności dla przekroju względem odpowiednich uogólnionych sił wewnętrznych. J. A. KÖNIG [324] badał ogólnie problem plastycznego przystosowania się do obciążeń zmiennych na szczelbł przekroju.

Wspomnimy jeszcze, że badanie obciążeń czystych (pojedynczych) przekroju pręta w zakresie sprężysto-plastycznym zostało rozpoczęte u samego zarania rozwoju teorii plastyczności. B. DE SAINT-VENANT [597] rozwiązał już w r. 1871 przypadek sprężysto-plastycznego skręcania pręta o przekroju kołowym i sprężysto-plastycznego zginania

pręta o przekroju prostokątnym. Ogólniejsza teoria zginania została rozwinięta w latach trzydziestych (J. FRITZSCHE [148]). Wspomnimy również prace CH. MASSONETA i M. SAVE'A [396, 397], badające wpływ odkształcenia przekroju cienkościennego na jego nośność. Spośród licznych prac dotyczących skręcania wymienimy badania A. NÁDAIA [449], który podał analogię wzgórza piaskowego i analogię dachu, oraz L. A. GALINA [842] (skręcanie sprężysto-plastyczne prętów o dowolnym przekroju). Ogólne wzory analityczne na nośność graniczną prętów skręcanych zostały wyprowadzone w pracy M. GALOSA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [154]. Odmienne wygląda sytuacja w przypadku czystego ścinania i czystego rozciągania: pierwszy z nich nie posiada znaczenia praktycznego, bowiem ścinaniu towarzyszy zawsze inna uogólniona siła wewnętrzna (najczęściej moment zginający), drugi natomiast w przypadku prętów przyrzmatycznych jest trywialny. Problem przedstawiają tu jedynie zjawiska niestateczności, związane z tworzeniem się szyjki, posiadającej zresztą dość obszerną literaturę; z uwagi na odrębność zagadnienia nie będziemy jej tu omawiali.

21.2. Sprężysto-plastyczne zginanie z rozciąganiem lub ściskaniem prętów o dowolnym przekroju

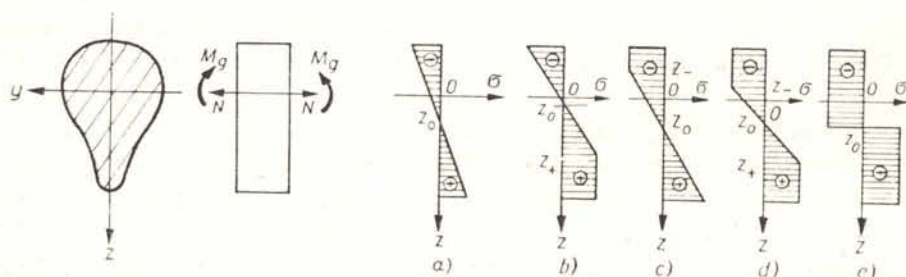
21.2.1. Prawa fizykalne idealnej plastyczności. Najprostszym przypadkiem obciążenia złożonego przekroju typu P_1/S_2 jest jednoczesne zginanie z rozciąganiem lub ściskaniem. Założenie jednoosiowego stanu naprężenia w poszczególnych punktach przekroju jest powszechnie przyjmowane, jakkolwiek w zakresie sprężysto-plastycznym w przypadku materiału ściśliwego nie jest ono całkowicie ścisłe; problem ten badał A. A. ILIUSZIN [950] stwierdzając, że nawet przy czystym zginaniu występują na ogół cztery składowe stanu naprężenia. Naprężenia σ_y , σ_z i τ_{yz} , niezbędne do spełnienia warunków nierozdzielności, są jednakże bardzo małe w stosunku do naprężenia osiowego σ_x i praktycznie mogą zostać pominięte.

Rozwój teorii sprężysto-plastycznego zginania przy uwzględnieniu wpływu siły osiowej związany jest przede wszystkim z analizą stateczności mimośrodowo ściskanych słupów i obliczaniem dużych ugięć belek. Pierwsza praca należy tu do M. ROŠA i J. BRUNNERA (rok 1926); w dalszych pracach E. CHWALLA [70, 71] podał przybliżoną metodę analizy przy dowolnym wzmocnieniu plastycznym zakładając, iż linia ugięcia pręta jest łukiem sinusoidy. Pierwsze rozwiązanie ściśle dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego podał K. JEŽEK [294]. Przytoczymy tu analizę zbliżoną do Jeżeka, jednakże uwzględniając zmianę długości osi pręta.

Rozważmy pręt (belkę) o przekroju posiadającym co najmniej jedną oś symetrii (rys. 95), poddany jednoczesnemu zginaniu i rozciąganiu lub ściskaniu. W takim przypadku przy zginaniu w płaszczyźnie głównej oś obojętna ulega przesunięciu, ale nie ulega obrotowi (obrot taki mógłby wystąpić w przypadku braku symetrii lub przy zginaniu ukośnym). Przy dodatnim zwrocie momentu M_θ (wypukłość wygiętej osi belki skierowana zgodnie z osią z), przy założeniu idealnej plastyczności materiału i założeniu występowania w przekroju jedynie procesów sprężystych lub plastycznie czynnych, może wystąpić pięć przypadków rozkładu naprężeń przedstawionych na rys. 95. Poddamy je szczegółowej analizie; w przypadku $M_\theta < 0$ różnice są nieistotne.

W przypadku dopuszczenia występowania procesów plastycznie biernych, następu-

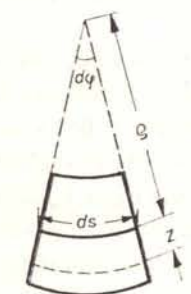
jących po procesach czynnych, kwestia ulega znacznej komplikacji i nawet w przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego mogą wystąpić krzywoliniowe wykresy rozkładu naprężeń. Problemem tym, który może być istotny np. przy mimośrodkowym ściskaniu prętów, nie będziemy się zajmowali.



Rys. 95. Rozkłady naprężeń przy jednoczesnym zginaniu z rozciąganiem lub ściskaniem

Przyjmujemy hipotezę Bernoulliego płaskich przekrojów. Przez ξ oznaczmy zmienną, mierzoną wzdłuż osi belki nieodkształconej i przypisaną poszczególnym punktom tej osi (cecha identyczności, współrzędna materialna, typu Lagrange'a). Elementarny odcinek belki prostej $d\xi$ zamieni się po odkształceniu na odcinek łuku o promieniu krzywizny osi ϱ , a długość odcinka odpowiadającego zmiennej z wyniesie $(\varrho + z) d\varphi$ (rys. 96). Współrzędna ξ będzie traktowana jako zmienna niezależna, natomiast kąt obrotu przekroju φ i długość łuku belki odkształconej s jako zmienne zależne. Rozkład odkształceń w przekroju określają wzory:

$$(21.1) \quad \varepsilon_z = \varepsilon = \frac{(\varrho + z) d\varphi}{d\xi} - 1 = \frac{d\varphi}{d\xi} z - \left(1 - \varrho \frac{d\varphi}{d\xi} \right),$$



Rys. 96. Odkształcenie elementu belki (pręta)

a ponieważ $\varrho d\varphi = ds$, przeto możemy napisać

$$(21.2) \quad \varepsilon = \frac{d\varphi}{d\xi} \left[z - \left(\frac{d\xi}{d\varphi} - \frac{ds}{d\varphi} \right) \right] = \frac{d\varphi}{d\xi} (z - z_0),$$

gdzie

$$(21.3) \quad z_0 = \frac{d\xi}{d\varphi} - \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1 - \frac{ds}{d\xi}}{\frac{d\varphi}{d\xi}}$$

oznacza współrzędną osi obojętnej (rys. 95). Liniowy rozkład odkształceń (21.2) wyjaśnia rozkłady naprężeń, pokazane na rys. 95; odpowiadają one po prostu przyjętemu wykresowi rozciągania dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego. W oparciu o przedstawione typy rozkładu naprężeń możemy obliczyć moment zginający M_θ i siłę podłużną N , a dalej — odwracając uzyskane zależności — wyrazić pochodne $d\varphi/d\xi$ i $ds/d\xi$ w funkcji M_θ i N . Pochodne te wyrażają «uogólnione odkształcenia» i umożliwiają określenie ugięć belki.

Rozważania ogólne, odnoszące się do dowolnego przekroju o jednej osi symetrii, będą przeprowadzane tylko częściowo; efektywne rozwiązania podamy w następnym punkcie jedynie dla przekroju prostokątnego.

W rozważanym przypadku zginania z rozciąganiem wystąpić mogą trzy strefy na przekroju: strefa sprężysta (odpowiednie wielkości będziemy oznaczali konsekwentnie wskaźnikiem e), strefa plastyczna po stronie rozciągania (wskaźnik $+$) oraz strefa plastyczna po stronie ściskania (wskaźnik $-$). W strefach tych naprężenia będą określone wzorami:

$$(21.4) \quad \begin{aligned} \sigma &= -\sigma_0 && \text{na powierzchni } F_-, \\ \sigma &= E \frac{d\varphi}{d\xi} (z - z_0) && \text{na powierzchni } F_e, \\ \sigma &= +\sigma_0 && \text{na powierzchni } F_+; \end{aligned}$$

pierwszy i trzeci z tych wzorów wynika z warunku idealnej plastyczności, drugi z prawa Hooke'a. Różnice między przypadkami (a)–(e), pokazane na rys. 95, związane są jedynie z występowaniem poszczególnych stref.

W zakresie sprężystym (a), gdy cała powierzchnia przekroju F redukuje się do powierzchni F_s , całkując naprężenia po tej powierzchni oraz mnożąc przez ramię z i całkując, otrzymujemy

$$(21.5) \quad N = -EF \frac{d\varphi}{d\xi} z_0, \quad M_\theta = EI_y \frac{d\varphi}{d\xi},$$

skąd w oparciu o (21.3) otrzymujemy podstawowe równania zginania przy sile podłużnej:

$$(21.6) \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{M_\theta}{EI_y}, \quad \frac{ds}{d\xi} = 1 + \frac{N}{EF}.$$

W przypadku jednostronnego uplastycznienia po stronie rozciągania (b), całkując po odpowiednich powierzchniach otrzymujemy

$$(21.7) \quad \begin{aligned} N &= \sigma_0 F_+ + E \frac{d\varphi}{d\xi} (S_e - z_0 F_e), \\ M_\theta &= \sigma_0 S_+ + E \frac{d\varphi}{d\xi} (I_e - z_0 S_e); \end{aligned}$$

przez S z odpowiednim indeksem oznaczono tu moment statyczny rozważanej części przekroju względem osi y . Dalej, oznaczając przez z_+ współrzędną graniczną pomiędzy strefą sprężystą i strefą uplastycznioną po stronie rozciągania (rys. 95), otrzymujemy z warunku ciągłości naprężeń

$$(21.8) \quad E \frac{d\varphi}{d\xi} (z_+ - z_0) = \sigma_0.$$

Układ trzech równań (21.7) i (21.8) określa po wyrugowaniu z_0 w oparciu o (21.3) pochodne $d\varphi/d\xi$, $ds/d\xi$ i współrzędną z_+ . W ogólnym przypadku możemy efektywnie określić jedynie powyższe pochodne i wyprowadzić równanie, określające z_+ ; nie może ono być efektywnie rozwiązane, gdyż współrzędna z_+ jest również ukryta w wielkościach geometrycznych F_+ , S_+ , F_e , S_e oraz I_e , które zależą od kształtu przekroju. Wykorzystując oczywiste zależności $F_+ + F_e = F$, $S_+ + S_e = 0$, otrzymujemy

$$(21.9) \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{M_g}{E(I_e - S_e z_+)}, \quad \frac{ds}{d\xi} = 1 - \frac{(\sigma_0 F_+ - N) z_+ + \sigma_0 S_e}{E(F_e z_+ - S_e)}$$

oraz równanie określające współrzędną z_+ :

$$(21.10) \quad [M_g F_e + (\sigma_0 F - N) S_e] z_+ - [M_g S_e + (\sigma_0 F - N) I_e] = 0.$$

Równanie to oczywiście nie jest liniowe z uwagi na z_+ , bowiem z_+ jest również ukryte w innych wielkościach geometrycznych. Po obliczeniu stąd z_+ i podstawieniu do (21.9) otrzymujemy układ podstawowych równań różniczkowych zginania w rozwiązywanym przypadku. Przy zachowaniu ścisłych wzorów na pochodne $d\varphi/d\xi$ i $ds/d\xi$ w funkcji współrzędnych układ ten może służyć do obliczania ugięć skończonych (dużych); należy jednakże wtedy pamiętać, iż milcząco zostało dokonane przybliżenie, polegające na pominięciu wpływu sił poprzecznych.

W przypadku jednostronnego uplastycznienia po stronie naprężeń ściskających (c), oznaczając przez z_- współrzędną graniczną, otrzymujemy podobnie

$$(21.11) \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{M_g}{E(I_e - S_e z_-)}, \quad \frac{ds}{d\xi} = 1 - \frac{(\sigma_0 F_- + N) z_- + \sigma_0 S_e}{E(S_e - F_e z_-)}$$

oraz równanie określające współrzędną z_- :

$$(21.12) \quad [M_g F_e - (\sigma_0 F + N) S_e] z_- - [M_g S_e - (\sigma_0 F + N) I_e] = 0.$$

W przypadku obustronnego uplastycznienia (d) otrzymujemy po scałkowaniu

$$(21.13) \quad N = \sigma_0 F_+ + E \frac{d\varphi}{d\xi} (S_e - z_0 F_e) - \sigma_0 F_-,$$

$$M_g = \sigma_0 S_+ + E \frac{d\varphi}{d\xi} (I_e - z_0 S_e) - \sigma_0 S_-,$$

natomiast warunki ciągłości naprężeń na granicach sprężysto-plastycznych prowadzą do dwóch dalszych równań

$$(21.14) \quad E \frac{d\varphi}{d\xi} (z_+ - z_0) = \sigma_0, \quad E \frac{d\varphi}{d\xi} (z_- - z_0) = -\sigma_0.$$

Układ równań (21.13) i (21.14) określa pochodne $d\varphi/d\xi$ i $ds/d\xi$ oraz współrzędne z_+ i z_- . Współrzędną z_0 można wyrugować wykorzystując związek (21.3). Podobnie jak poprzednio możemy efektywnie określić jedynie pochodne w funkcji z_+ i z_- oraz wyprowadzić układ dwóch równań określających te współrzędne. Z równań (21.14) i (21.3) otrzymujemy mianowicie

$$(21.15) \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\sigma_0}{E(z_+ - z_-)}, \quad \frac{ds}{d\xi} = 1 - \frac{(z_+ + z_-)\sigma_0}{(z_+ - z_-)E},$$

a podstawiając te związki do (21.13) otrzymujemy układ równań

$$(21.16) \quad \begin{aligned} & [2S_e + (2F_+ - F)z_+ + (2F_- - F)z_-] \sigma_0 - (z_+ - z_-)N = 0, \\ & 2(I_e + S_+z_+ + S_-z_-) \sigma_0 - (z_+ - z_-)M_g = 0. \end{aligned}$$

Po określeniu z tych równań współrzędnych z_+ i z_- dla danego kształtu przekroju i podstawieniu ich do (21.15) otrzymujemy układ podstawowych równań różniczkowych zginania w rozważanym przypadku.

W przypadku granicznym (e), odpowiadającym wyczerpaniu nośności granicznej przekroju, strefa sprężysta zanika i równania (21.13) redukują się do postaci

$$(21.17) \quad N = \sigma_0(F_+ - F_-), \quad M_g = \sigma_0(S_+ - S_-).$$

Równania te określają współrzędną graniczną $z_+ = z_0 = z_-$, a ponadto krzywą nośności granicznej dla przekroju w przypadku jednoczesnego zginania z rozciąganiem, $M_g = f(N)$ (warunek plastyczności dla przekroju). Krzywe takie dla różnych kształtów przekroju omówimy w p. 21.6.

21.2.2. Przybliżone założenie nierozciągliwości osi. Jak już wspomnieliśmy, wyprowadzone równania mogą służyć do obliczania skończonych ugięć belek, a po dokonaniu stosownych uproszczeń do obliczania małych ugięć. Jednakże nawet przy obliczaniu skończonych ugięć czyni się często przybliżenie polegające na pominięciu wydłużalności osi belki; przybliżenie takie zastosował już Euler przy wyprowadzaniu klasycznych równań elastyki. W zakresie sprężystym przybliżenie takie odpowiada pominięciu wpływu sił podłużnych; istotnie, przy pominięciu N w drugim ze wzorów (21.6) otrzymujemy $ds = d\xi$. W zakresie sprężysto-plastycznym kwestia ta nabiera większego znaczenia, gdyż przyjęcie w przybliżeniu $N = 0$ nie prowadzi na ogół do równości $ds = d\xi$. Tym niemniej w niektórych przypadkach pominięcie wydłużalności osi może powodować bardzo nieznaczne błędy; poświęcimy temu przybliżeniu nieco uwagi.

Pominięcie wydłużalności osi sprowadza się do utożsamienia zmiennych s i ξ , opuszczenia równania (21.3) i potraktowania współrzędnej z_0 jako parametru, który należy wyrugować. Tak np. układ równań (21.7) i (21.8) po zastąpieniu $d\xi$ przez ds można potraktować jako układ o niewiadomych $d\varphi/ds$, z_+ i z_0 . Zauważymy, że w układzie tym pochodna $ds/d\xi$ nie występuje [a jedynie w pominiętym tu równaniu (21.3)], tak że w wyniku otrzymujemy znowu pierwsze z równań (21.9) jedynie zastępując $d\xi$ przez ds :

$$(21.18) \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M_g}{E(I_e - S_e z_+)},$$

gdzie współrzędna z_+ jest określona ponownie równaniem (21.10). Podobnie otrzymuje się pierwsze z równań (21.11) przy zastąpieniu $d\xi$ przez ds . Oczywiście, iż w efektywnych rozwiązaniach występują różnice, bowiem moment zginający M_g jest na ogół określony innymi wzorami przy pominięciu, a innymi przy uwzględnieniu wydłużalności osi belki.

Należy jednak podkreślić, iż pominięcie wydłużalności osi belki prowadzi na ogół do pewnej wewnętrznej sprzeczności teorii. Istotnie, przyjmując $ds = d\xi$ otrzymujemy z równania ścisłego (21.3) zawsze $z_0 = 0$, podczas gdy eliminując z_0 z odpowiedniego układu równań, np. (21.7) i (21.8), otrzymujemy z reguły $z_0 \neq 0$. Ta sprzeczność z reguły nie

prowadzi do większych błędów i byłaby do przyjęcia, gdyby uzyskiwane przy założeniu $ds = d\xi$ wyniki były prostsze; okazuje się jednak, raczej niespodziewanie, iż w zakresie sprężysto-plastycznym równania ściśle prowadzą często do prostszych rozwiązań niż równania pomijające wydłużalność osi, a w takiej sytuacji stosowanie wspomnianego przybliżenia można uznać za bezcelowe.

21.2.3. Metody przybliżone. Uwzględnienie wzmocnienia plastycznego. Zastosowanie ogólnych wzorów, słusznych dla dowolnego kształtu przekroju, jest nawet w rozważanym tu przypadku idealnej plastyczności trudne i wymaga z reguły korzystania z maszyn cyfrowych. Podejście takie można znaleźć w pracy B. P. MAKAROWA [1054], poświęconej obliczaniu skończonych ugięć belek, oraz S. D. LEJTESA [1027], który badał tzw. utratę stateczności drugiego rodzaju (największą nośność słupów ściskanych). Szczególnym przypadkiem kształtu przekroju poświęcimy p. 21.3–21.5.

Dodatkowe komplikacje pojawiają się przy uwzględnieniu wzmocnienia plastycznego. W przypadku wzmocnienia liniowego ogólne rozważania słuszne dla dowolnego kształtu przekroju można znaleźć w dość obszernym opracowaniu monograficznym W. W. PINA-DŻIANA [1120], który następnie zastosował wyprowadzone wzory do oceny nośności granicznej słupów. Wzory ogólne i tablice ważniejszych przypadków szczególnych dla ciał sztywno-plastycznych o liniowym wzmocnieniu podaje I. L. DIKOWICZ w opracowaniu monograficznym [891], zamieszczając również przykłady obliczania ugięć. Jednocześnie zginaniu i rozciąganiu w przypadku liniowego wzmocnienia plastycznego poświęcone są również prace JU. I. LEPIKA [1036] oraz N. L. MOSZENSKIEGO [1091].

W przypadku dowolnego wzmocnienia plastycznego szczególnie wiele uwagi poświęcono opracowaniu metod numerycznych oraz zastosowaniu maszyn cyfrowych. Jak już wspomnieliśmy, pierwsze propozycje takich metod numerycznych podali w latach trzydziestych E. CHWALLA [70, 71] oraz F. HARTMANN [203]. Dalsze prace należą tu do R. M. SZNEJDEROWICZA [1253], który zastosował do rozważanego przypadku metodę «zmiennych parametrów sprężystości» I. A. BIRGIERA [811], L. O. KOLESNIKOWA [994], który badał duże ugięcia belek o dowolnym przekroju, oraz M. G. LAY'A [336]; w tej ostatniej pracy zwrócono uwagę na dodatkowy efekt niestateczności, związany z różnicą między górną a dolną granicą plastyczności materiału. Metodę numeryczną, dogodną do zastosowania w przypadku betonu zbrojonego, podali G. GURFINKEL i A. ROBINSON [193]. Przypadek prętów niepryzmatycznych rozważali K. K. MUCHANOW i JU. W. SOBOLEW [1093], weryfikując zaproponowaną teorię na drodze doświadczalnej.

Badaniom jakościowym poświęcone są prace L. FINZI [135], który stwierdził istnienie analogii matematycznej między rozważanym przypadkiem sprężysto-plastycznego zginania z siłą podłużną, a pewnym zagadnieniem nieliniowej dynamiki ciała sztywnego, oraz G. E. BIELSKIEGO [809], rozważającego stateczność jednocześnie zginanych i ściskanych prętów o dowolnym przekroju. Analizie zależności między przyrostami uogólnionych odkształceń a przyrostami uogólnionych sił wewnętrznych, czyli ocenie «chwilowych sztywności przekroju», poświęcone są prace A. R. RŻANICYNA [1142] i W. P. KOŁOMIECA [996].

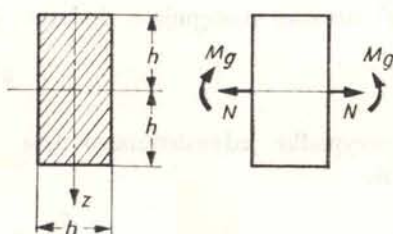
Kilka prac dotyczy plastycznego przystosowania się przekroju do obciążeń zmiennych w przypadku jednoczesnego działania momentu zginającego i siły podłużnej. Auto-

rami ich są B. I. LUBAROW [1050, 1051, 1052] oraz A. W. GEMMIERLING i B. N. KUZNIECOW [848].

Pewne różnice mogą się pojawić przy badaniu jednoczesnego działania momentu zginającego i siły podłużnej w przypadku prętów zakrzywionych. Przy prętach silnie zakrzywionych występuje mianowicie hiperboliczny rozkład odkształceń, a ponadto przy bardzo dużej krzywiznie zaczynają odgrywać rolę naprężenia promieniowe σ_r , a w przypadku prętów cienkościennych — zmiany kształtu przekroju. Badania nad prętami o przekroju prostokątnym rozpoczął W. SWIDA [682]; dowolny kształt przekroju rozważali A. PHILLIPS [532] i J. WÖLFEL [745]. Efektowi zmiany kształtu przekroju poświęcone są prace CH. MASSONETA i M. SAVE'A [396, 397]. Analiza pracy przekroju pręta zakrzywionego w zakresie sprężysto-plastycznym przy jednoczesnym zginaniu z rozciąganiem lub ściskaniem znajduje szczególnie częste zastosowanie do obliczania niesprężystych ugięć łuków oraz ich stateczności (L. K. STEVENS [673], G. I. ROZENBLAT [1143], F. A. PIWNIEW [1118], E. JÖGI [963, 964], N. A. LEBIEDINIEC [1021], Z. WASZCZYŹYŃ [733]).

21.3. Sprężysto-plastyczne zginanie z rozciąganiem lub ściskaniem prętów o przekroju prostokątnym

21.3.1. Prawa fizykalne idealnej plastyczności. Jednym z najprostszych (z uwagi na rozpatrywany przypadek złożony), a jednocześnie praktycznie ważnych kształtów przekroju jest przekrój prostokątny. Oznaczmy szerokość prostokąta przez b , a wysokość przez $2h$ — takie oznaczenie jest tu dogodniejsze od tradycyjnego symbolu h (rys. 97). W tym przypadku wzory ogólne, wyprowadzone w p. 21.2 dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego, dadzą się przedstawić w formie jawnej i efektywnie scałkować.



Rys. 97. Belka o przekroju prostokątnym

Zakresu sprężystego (a) nie będziemy tu rozważali, bowiem równania ogólne (21.6) są już dostatecznie efektywne.

Przechodząc do przypadku jednostronnego uplastycznienia po stronie rozciągania (b) podstawimy

$$(21.19) \quad \begin{aligned} F &= 2bh, & S_e &= -\frac{b}{2}(h^2 - z_+^2), \\ F_e &= b(h + z_+), & I_e &= \frac{b}{12}(h + z_+)^3 + \frac{b}{4}(h + z_+)(h - z_+)^2. \end{aligned}$$

Równanie (21.10) przybiera postać równania sześciennego z uwagi na współrzędną z_+ . Jednakże łatwo sprawdzić, iż równanie to posiada pierwiastek podwójny $z_+ = -h$, który

nie stanowi rozwiązania naszego problemu; dzieląc to równanie przez $(z_+ + h)^2$ otrzymujemy równanie liniowe, skąd

$$(21.20) \quad z_+ = 2h - \frac{3M_g}{2bh\sigma_0 - N}.$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy teraz oznaczenia bezwymiarowych uogólnionych sił wewnętrznych (czynników wyężenia), odnosząc je do odpowiednich wartości nośności granicznej przekroju przy obciążeniach czystych:

$$(21.21) \quad m = \frac{M_g}{\bar{M}_g} = \frac{M_g}{bh^2\sigma_0}, \quad n = \frac{N}{\bar{N}} = \frac{N}{2bh\sigma_0}.$$

Równanie (21.20) przybierze teraz postać

$$(21.22) \quad \frac{z_+}{h} = 2 - \frac{3m}{2(1-n)}.$$

Podstawiając do tego wzoru funkcje $m = m(\xi)$ i $n = n(\xi)$ (równanie momentu zginającego i siły podłużnej) możemy określić rozkład stref uplastycznionych wzdłuż belki. Z drugiej strony, podstawienie (21.22) do (21.9) pozwala zapisać podstawowe równania różniczkowe zginania z rozciąganiem lub ściskaniem belki o przekroju prostokątnym w następującej postaci bezwymiarowej:

$$(21.23) \quad h \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{16}{9} a^2 \frac{(1-n)^3}{(2-2n-m)^2},$$

$$\frac{ds}{d\xi} = 1 + \left[1 - \frac{8}{9} \frac{(4-4n-3m)(1-n)^2}{(2-2n-m)^2} \right] a^2,$$

gdzie a^2 oznacza następującą dodatnią bezwymiarową stałą materiałową:

$$(21.24) \quad a^2 = \frac{\sigma_0}{E}.$$

W przypadku jednostronnego uplastycznienia po stronie ściskania (c) otrzymujemy podobnie

$$(21.25) \quad \frac{z_-}{h} = -2 + \frac{3m}{2(1+n)}$$

i układ podstawowych równań różniczkowych

$$(21.26) \quad h \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{16}{9} a^2 \frac{(1+n)^3}{(2+2n-m)^2},$$

$$\frac{ds}{d\xi} = 1 - \left[1 - \frac{8}{9} \frac{(4+4n-3m)(1+n)^2}{(2+2n-m)^2} \right] a^2.$$

W przypadku przekrojów o podwójnej symetrii, a więc również w przypadku przekroju prostokątnego, uplastycznienie jednostronne w wyniku rozciągania może występować jedynie przy $n > 0$, natomiast uplastycznienie jednostronne w wyniku ściskania — tylko przy $n < 0$. Biorąc ten fakt pod uwagę i wprowadzając znaki wartości bezwzględnej możemy zapisać łącznie (21.23) i (21.26) w formie jednolitej; dalej, rozważając przypadki

$m < 0$, $n > 0$ oraz $m < 0$ i $n < 0$, dochodzimy do następujących wzorów ogólnych, ważnych dla jednostronnego uplastycznienia przy dowolnych znakach momentu zginającego i siły podłużnej:

$$(21.27) \quad \begin{aligned} h \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{16}{9} a^2 \frac{(1-|n|)^3}{(2-2|n|-|m|)^2} \operatorname{sign} m, \\ \frac{ds}{d\xi} &= 1 + \left[1 - \frac{8}{9} \frac{(4-4|n|-3|m|)(1-|n|)^2}{(2-2|n|-|m|)^2} \right] a^2 \operatorname{sign} n, \end{aligned}$$

gdzie $\operatorname{sign} m = +1$ dla $m > 0$, $\operatorname{sign} m = -1$ dla $m < 0$, i podobnie $\operatorname{sign} n$.

Przejdziemy do przypadku dwustronnego uplastycznienia (d). Podstawimy tutaj

$$(21.28) \quad \begin{aligned} F_e &= b(z_+ - z_-), \quad F_+ = b(h - z_+), \quad F_- = b(h + z_-), \\ S_e &= \frac{b}{2}(z_+^2 - z_-^2), \quad S_+ = \frac{b}{2}(h^2 - z_+^2), \quad S_- = -\frac{b}{2}(h^2 - z_-^2), \\ I_e &= \frac{b}{12}(z_+ - z_-)^3 + \frac{b}{4}(z_+ - z_-)(z_+ + z_-)^2. \end{aligned}$$

Układ równań (21.16), określających z_+ i z_- , staje się układem nieliniowych równań algebraicznych: pierwsze z nich jest równaniem kwadratowym, drugie — sześciennym. Jednakże okazuje się, że oba równania można podzielić przez różny od zera czynnik $(z_+ - z_-)$ i otrzymujemy układ złożony z równania liniowego i równania kwadratowego, dający się bez trudu rozwiązać:

$$(21.29) \quad \frac{z_+}{h} = -n + \sqrt{3} \sqrt{1-n^2-m}, \quad \frac{z_-}{h} = -n - \sqrt{3} \sqrt{1-n^2-m}.$$

Podstawiając tu znane funkcje $m = m(\xi)$ i $n = n(\xi)$ określamy rozkład stref plastycznych wzdłuż belki. Z drugiej strony podstawienie (21.29) do (21.15) prowadzi do układu podstawowych równań różniczkowych w rozpatrywanym przypadku. Podamy je w postaci bezwymiarowej, słusznej również dla przypadku $m < 0$:

$$(21.30) \quad \begin{aligned} h \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{a^2}{\sqrt{3} \sqrt{1-n^2-|m|}} \operatorname{sign} m, \\ \frac{ds}{d\xi} &= 1 + \frac{a^2 n}{\sqrt{3} \sqrt{1-n^2-|m|}}. \end{aligned}$$

Wspomniane powyżej przybliżone pominięcie wydłużalności osi polega tu na zastąpieniu w pierwszych równaniach układów (21.17) i (21.30) $d\xi$ przez ds , pominięciu drugich równań tych układów i podstawieniu funkcji $m = m(s)$ i $n = n(s)$, zazwyczaj różnych od funkcji $m = m(\xi)$ i $n = n(\xi)$.

21.3.2. Krzywe graniczne. Obecnie wyprowadzimy równania krzywych granicznych, rozgraniczających w płaszczyźnie m - n obszary poszczególnych faz pracy przekroju. Granicę między zakresem sprężystym a uplastycznieniem jednostronnym otrzymamy

przez przyrównanie współrzędnej granicznej z_+ (21.22) do połowy wysokości przekroju h ; wynika stąd równanie linii prostej

$$(21.31) \quad m = \frac{2}{3}(1-n),$$

z której aktualny jest odcinek $0 < n < 1$. Przyrównując współrzędną graniczną z_- (21.25) do $-h$ oraz przeprowadzając podobne rachunki dla ujemnych wartości momentu m , otrzymujemy jeszcze równania trzech prostych, które ostatecznie ograniczają obszar sprężysty o kształcie rombu. Granicę tego obszaru można opisać jednym równaniem uogólniającym (21.31), mianowicie

$$(21.32) \quad |m| = \frac{2}{3}(1-|n|).$$

Granice między uplastycznieniem jedno- a obustronnym najłatwiej określić przez przyrównanie z_+ do h i z_- do $-h$ w oparciu o wzory (21.29). Po prostych przekształceniach otrzymujemy odpowiednio równania parabol

$$(21.33) \quad m = \frac{2}{3}(1+n)(1-2n),$$

$$(21.34) \quad m = \frac{2}{3}(1-n)(1+2n).$$

Po stronie ujemnych momentów zginających m następuje jedynie zmiana znaku całych wyrażeń, znajdujących się po prawych stronach tych wzorów.

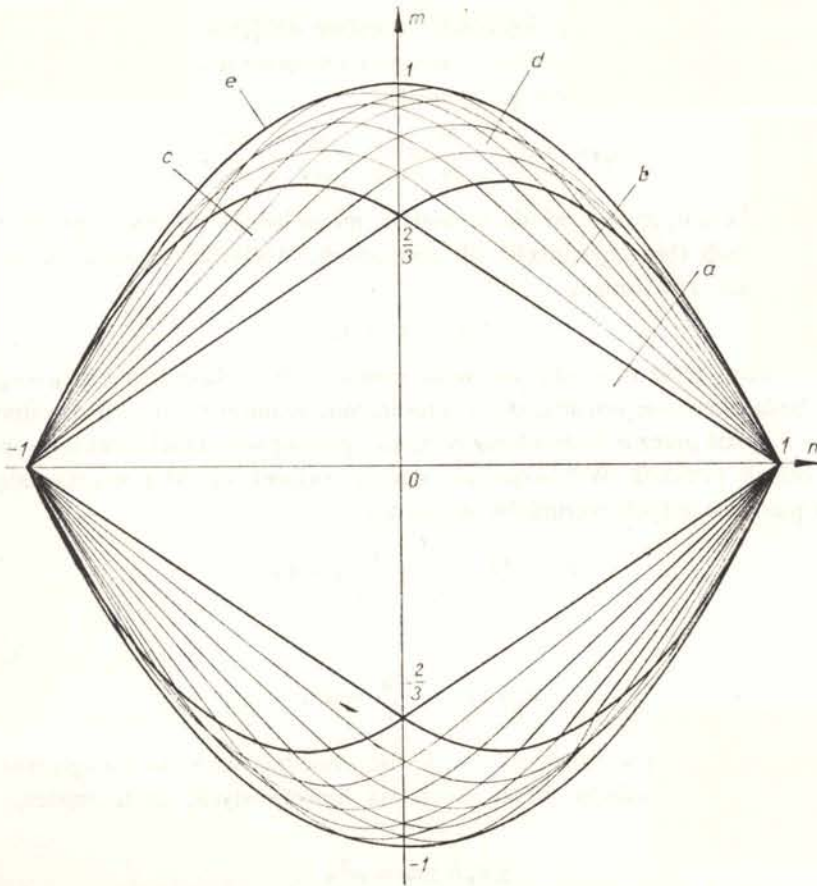
Krzywą nośności granicznej otrzymamy wreszcie przez przyjęcie $z_+ = z_-$ we wzorach (21.29). Wynika stąd również równanie parabol

$$(21.35) \quad m = 1 - n^2.$$

Równanie (21.35) wyprowadził pierwszy K. GIRKMANN [173] w r. 1931.

Komplet krzywych granicznych w płaszczyźnie $m-n$ pokazano na rys. 98 wraz z oznaczeniem poszczególnych podobszarów, zgodnym z symboliką rys. 95. Ponadto na rysunku tym pokazano linie stałych wartości z_+/h i z_-/h , umożliwiające łatwą ocenę stosowalności wyprowadzonych wzorów z uwagi na możliwość pojawienia się procesów biernych, które wykluczaliśmy z analizy. Procesy takie nie pojawią się, gdy współrzędna z_+ będzie nierosnącą, a współrzędna z_- niemalejącą funkcją czasu. Geometrycznie można ująć to ograniczenie następująco: trajektoria, obrazująca w płaszczyźnie $m-n$ zmianę obu tych uogólnionych sił wewnętrznych w czasie, musi przecinać linie obu rodzin (stałych z_+ i stałych z_-) w kierunku «na zewnątrz»; w przeciwnym razie pojawią się procesy lokalnie bierne.

Rysunek 98 przedstawia krzywe graniczne dla przekroju prostokątnego przy przyjęciu uogólnionych sił wewnętrznych za czynniki wyężenia przekroju (zmiennie niezależne). W pewnych przypadkach rolę zmiennych niezależnych mogą przejąć na siebie inne wielkości, np. uogólnione odkształcenia. Określenie krzywych granicznych w płaszczyźnie uogólnionych odkształceń jest nawet łatwiejsze niż w płaszczyźnie uogólnionych sił; ponadto krzywe takie są jednakowe dla wszystkich kształtów przekroju o dwóch osiach symetrii.



Rys. 98. Krzywe graniczne dla przekroju prostokątnego przy zginaniu z siłą podłużną

Za uogólnione odkształcenia przy jednoczesnym zginaniu z rozciąganiem lub ściskaniem uważa się często krzywiznę osi belki κ i wydłużenie osi ε_0 . Jeżeli jednak podejmiemy do tego zagadnienia od strony energetycznej, to wnioski są nieco odmienne. Zapiszmy wzór (21.1) w postaci (wynikającej z definicji ε_0)

$$(21.36) \quad \varepsilon = \frac{d\varphi}{d\xi} z + \varepsilon_0$$

i obliczmy elementarną pracę w rozpatrywanym przypadku obciążenia:

$$(21.37) \quad \delta W = \iint_F \sigma \delta \varepsilon dF = \iint_F \sigma \left[z \delta \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \delta \varepsilon_0 \right] dF.$$

Po scałkowaniu, którego wynik nie zależy od rozpatrywanego zakresu pracy przekroju,

$$(21.38) \quad \delta W = M_\sigma \delta \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right) + N \delta \varepsilon_0.$$

Tak więc rolę uogólnionych odkształceń odgrywiają tu $d\varphi/d\xi$ i ε_0 . Pochodna $d\varphi/d\xi$ nie jest

jednak krzywizną osi belki, lecz krzywizną warstwy obojętnej (neutralnej), którą oznaczymy przez κ_n . Istotnie, współrzędna z_0 warstwy obojętnej jest określona wzorem (21.3), a odpowiedni promień krzywizny ϱ_n wynosi:

$$(21.39) \quad \varrho_n = \varrho + z_0 = \frac{ds}{d\varphi} + \frac{d\xi}{d\varphi} - \frac{ds}{d\varphi} = \frac{d\xi}{d\varphi}.$$

Różnice między κ a κ_n zazwyczaj nie są wielkie, mogą jednak odgrywać pewną rolę przy dużych wartościach (bezwzględnych) sił podłużnych. Wielkości te związane są łatwym do wyprowadzenia równaniem

$$(21.40) \quad \kappa_n = \kappa(1 + \varepsilon_0).$$

Wyprowadzimy teraz równania krzywych granicznych w płaszczyznach $\varepsilon_0 - \kappa_n$ i $\varepsilon_0 - \kappa$. Krzywe te będą określone warunkami, iż współrzędne graniczne z_+ i z_- będą odpowiednio równe h i $-h$, gdzie przez h można teraz rozumieć połowę wysokości dowolnego przekroju o dwóch osiach symetrii. Wykorzystując ogólny związek (21.8) i podstawiając (21.3) zapiszemy pierwszy z tych warunków w postaci

$$(21.41) \quad E \frac{d\varphi}{d\xi} \left(h - \frac{d\xi}{d\varphi} + \frac{ds}{d\varphi} \right) = \sigma_0,$$

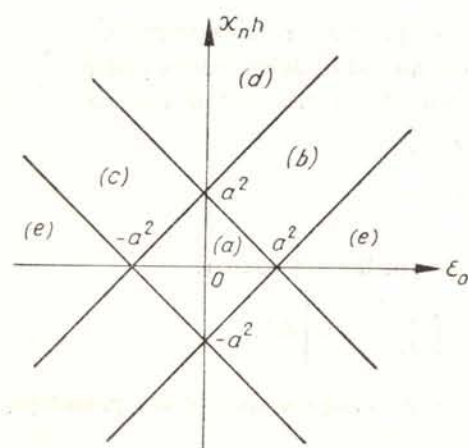
skąd

$$(21.42) \quad \kappa_n h + \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = a^2.$$

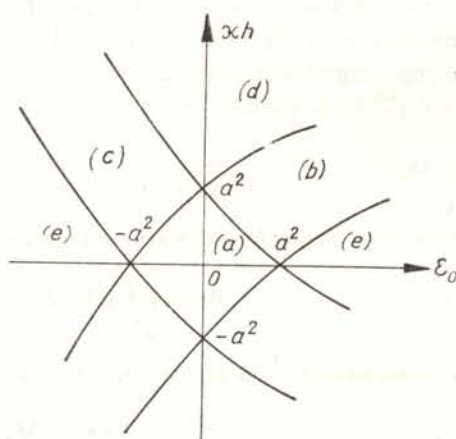
Przekształcając podobnie warunek $z_- = -h$ i odpowiednie warunki dla zginania o przeciwnym zwrocie, otrzymujemy cztery równania linii prostych, które możemy łącznie zapisać następująco:

$$(21.43) \quad \pm \kappa_n h \pm \varepsilon_0 = a^2.$$

Określone w ten sposób krzywe graniczne pokazano na rys. 99.



Rys. 99. Krzywe graniczne w płaszczyźnie wydłużenia osi — krzywizna warstwy obojętnej



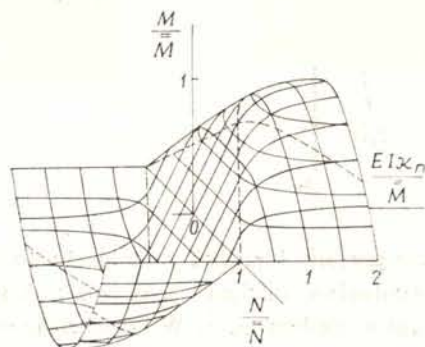
Rys. 100. Krzywe graniczne w płaszczyźnie wydłużenia osi — krzywizna osi

Podstawienie (21.40) do (21.43) pozwala natychmiast określić krzywe graniczne w płaszczyźnie $\varepsilon_0 - \kappa$ (wydłużenie osi — krzywizna osi). Otrzymujemy cztery hiperbole o równaniach

$$(21.44) \quad \kappa h = \pm \frac{a^2 \pm \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}.$$

Krzywe te pokazano na rys. 100.

Zależności między m , n , ε_0 i κ lub κ_n można przedstawiać jako pewne powierzchnie w różnie dobranych przestrzeniach trójwymiarowych. Przykłady takich powierzchni można znaleźć np. w pracy L. K. STEVENSA [674] oraz w pracy I. L. DIKOWICZA [891], skąd zaczerpnięto rys. 101, odnoszący się do przestrzeni $m-n-\kappa_n$.



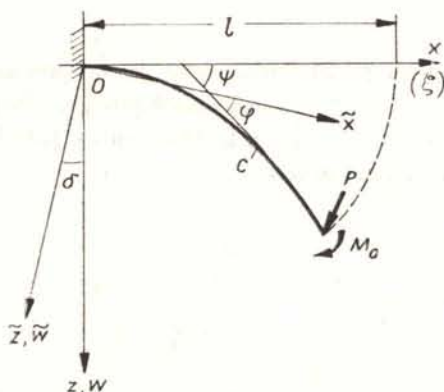
Rys. 101. Zależność krzywizny warstwy obojętnej od momentu zginającego i siły podłużnej (według Dikowicza)

Z innych badań dotyczących pracy prostokątnego przekroju belki idealnie sprężysto-plastycznej pod działaniem momentu zginającego i siły podłużnej, wspomniemy rozwiązania N. F. JERSZOWA [909] i M. W. PANKOWEJ [1111], w których potraktowano problem jako dwuwymiarowe zagadnienie teorii plastyczności (odpowiednio dla pręta prostego i kołowo zakrzywionego).

Szczegółową analizę w przypadku liniowego wzmocnienia plastycznego podaje I. L. DIKOWICZ [891]. Ogólną metodę analizy w przypadku dowolnego wzmocnienia zaproponował A. A. MAKAREWICZ [1053]. A. R. RŻANICYN [1141] zajmował się określeniem nośności przekroju (największego obciążenia) przy dowolnej zależności $\sigma = f(\varepsilon)$, ewentualnie różnej po stronie rozciągania i ściskania. A. J. BARRETT [16] oraz J. M. FRANKLAND i R. E. ROACH [142] badali wpływ zmiany wymiarów poprzecznych przekroju na jego pracę; w tej ostatniej pracy określono nośność przekroju przez przyjęcie pewnego kryterium odkształceniowego. Problemem odciążania i odkształceń resztkowych zajmowali się Y. TOZAWA [708] oraz H. SUDZUKI, E. TAKANO i H. NEGISI [680].

21.3.3. Obliczanie skończonych ugięć belek. Wyprowadzone w p. 21.3 równania stanowią podstawę obliczania ugięć belek przy jednoczesnym działaniu momentu zginającego i siły podłużnej. Najdokładniejsze wyniki uzyskuje się przy zastosowaniu (pozostawieniu) ścisłych wzorów na krzywiznę i uwzględnieniu wydłużalności osi; oczywiście i te wyniki są obarczone błędem wynikającym z pominięcia wpływu sił poprzecznych. Kolejne przybliżenia polegają na pominięciu wydłużalności osi i ograniczeniu się do analizy małych ugięć.

Podamy najpierw przykład obliczania skończonych ugięć przy uwzględnieniu wydłużalności osi, zaczerpnięty z pracy Z. WASZCZYSZYNA i M. ŻYCKOWSKIEGO [725]. Przyjmujemy, że belka jest obciążona tylko siłami i momentami skupionymi i rozważmy pewien przedział tej belki (rys. 102). Dokonamy obrotu układu odniesienia tak, aby oś \tilde{z} po



Rys. 102. Schemat obciążenia belki

obrocie przyjęła kierunek równoległy do siły P (wektora głównego obciążenia działającego na ewentualnie odciętej części belki). Kąt obrotu przekroju φ będziemy teraz mierzyli jako kąt względem osi \tilde{x} . W takim razie moment zginający M_φ i siłę podłużną N w dowolnym punkcie C osi belki możemy określić wzorami

$$(21.45) \quad M_\varphi = P \int_s^{s_1} ds \cos \varphi + M_0 = P \int_\xi^l \frac{ds}{d\xi} \cos \varphi d\xi + M_0,$$

$$N = P \sin \varphi,$$

gdzie s oznacza długość belki (odcinka belki) po odkształceniu. We wzorach tych nie wprowadzono nowych oznaczeń na zmienną całkowania, aby nie komplikować zapisu. Ponadto przyjęto tu odmienną umowę co do znaku momentu zginającego niż zazwyczaj, dzięki czemu dodatni moment odpowiadać będzie dodatniej pochodnej $d\varphi/d\xi$, co ułatwi zapis dalszych wzorów. Wprowadzimy jeszcze oznaczenia bezwymiarowych obciążeń

$$(21.46) \quad p = \frac{P}{N} = \frac{P}{2bh\sigma_0}, \quad m_0 = \frac{M_0}{M} = \frac{M_0}{bh^2\sigma_0}$$

i przepisujemy (21.45) w postaci bezwymiarowej

$$(21.47) \quad m = \frac{2p}{h} \int_\xi^l \frac{ds}{d\xi} \cos \varphi d\xi + m_0, \quad n = p \sin \varphi.$$

Zajmiemy się najpierw przypadkiem jednostronnego uplastycznienia (b) lub (c). Podstawienie (21.47) do (21.27) prowadzi do układu równań różniczkowo-całkowych z uwagi na φ i s . Układ ten jednakże może być stosunkowo prosto sprowadzony do jednego równania różniczkowego, mianowicie przez obliczenie m z pierwszego z równań (21.27), zróżniczkowanie i porównanie ze zróżniczkowanym pierwszym równaniem (21.47). Od-

wracając mianowicie pierwsze z równań (21.27) względem m (przy założeniu $m > 0$, co występuje w naszym przypadku zgodnie z przyjętą umową), oraz przy dodatkowym założeniu $n > 0$ otrzymujemy

$$(21.48) \quad m = 2 - 2n - \frac{4}{3} \frac{a}{\sqrt{h}} (1-n)^{3/2} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^{-1/2}.$$

Podstawiając ten wzór do drugiego z równań układu (21.27) wyrażamy pochodną $ds/d\xi$ w funkcji $d\varphi/d\xi$ i n :

$$(21.49) \quad \frac{ds}{d\xi} = 1 + a^2 - h \frac{d\varphi}{d\xi} \left(2a \sqrt{\frac{1-n}{h \frac{d\varphi}{d\xi}}} - 1 \right).$$

Różniczkując teraz pierwsze z równań (21.47) i podstawiając (21.49) określamy pochodną $dm/d\xi$:

$$(21.50) \quad \frac{dm}{d\xi} = -\frac{2p}{h} \cos \varphi \left[1 + a^2 - h \frac{d\varphi}{d\xi} \left(2a \sqrt{\frac{1-n}{h \frac{d\varphi}{d\xi}}} - 1 \right) \right],$$

a porównanie tego wyrażenia ze zróżniczkowanym wyrażeniem (21.48) prowadzi do poszukiwanego równania różniczkowego o niewiadomej funkcji φ ;

$$(21.51) \quad (1 - p \sin \varphi)^{3/2} a \varphi'' - 3ap(1 - p \sin \varphi)^{1/2} \cos \varphi \varphi'^2 + \frac{3(1+a^2)}{\sqrt{h}} p \cos \varphi \varphi'^{3/2} = 0,$$

gdzie przecinkami oznaczono różniczkowanie względem cechy identyczności — współrzędnej Lagrange'a ξ . Należy zwrócić uwagę na fakt, iż w równaniu (21.51) występowały wyrazy zawierające $\varphi'^{5/2}$, jednakże uległy redukcji, co znacznie ułatwia całkowanie. Wprowadzając mianowicie nową zmienną zależną u wzorem

$$(21.52) \quad \varphi' = u^2(\varphi), \quad \varphi'' = 2uu'\varphi' = 2u^3u',$$

i dzieląc (21.51) przez u^3 otrzymujemy liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$(21.53) \quad 2(1 - p \sin \varphi)^{3/2} au' - 3ap(1 - p \sin \varphi)^{1/2} \cos \varphi u + \frac{3(1+a^2)}{\sqrt{h}} p \cos \varphi = 0.$$

Całkę ogólną równania (21.53) można napisać w postaci

$$(21.54) \quad u = \sqrt{\frac{d\varphi}{d\xi}} = \frac{C_1 + k(1 - p \sin \varphi)}{(1 - p \sin \varphi)^{3/2}},$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania, a k oznacza stałą

$$(21.55) \quad k = \frac{3(1+a^2)}{2a\sqrt{h}}.$$

Dalsze całkowanie najłatwiej przeprowadzić w formie parametrycznej, bowiem równanie (21.54) — jakkolwiek całkowalne przy zastosowaniu funkcji elementarnych — nie daje się następnie rozwinąć względem φ . Wobec oczywistych związków (rys. 102)

$$dx = ds \cos(\varphi + \delta) = \frac{s'}{\varphi'} \cos(\varphi + \delta) d\varphi, \quad (21.56)$$

$$dw = ds \sin(\varphi + \delta) = \frac{s'}{\varphi'} \sin(\varphi + \delta) d\varphi,$$

po podstawieniu za s' wyrażenia (21.49), w którym pochodna φ' jest określona wzorem (21.54), i po formalnym scałkowaniu określimy linię ugięcia belki wzorami parametrycznymi

$$x = x_0 + \int \left\{ (1+a^2) \frac{(1-p \sin \varphi)^3}{[C_1 + k(1-p \sin \varphi)]^2} - 2a\sqrt{h} \frac{(1-p \sin \varphi)^2}{C_1 + k(1-p \sin \varphi)} + h \right\} \cos(\varphi + \delta) d\varphi, \quad (21.57)$$

$$w = w_0 + \int \left\{ (1+a^2) \frac{(1-p \sin \varphi)^3}{[C_1 + k(1-p \sin \varphi)]^2} - 2a\sqrt{h} \frac{(1-p \sin \varphi)^2}{C_1 + k(1-p \sin \varphi)} + h \right\} \sin(\varphi + \delta) d\varphi.$$

Stałe całkowania C_1 , x_0 i w_0 należy określić z odpowiednich warunków brzegowych.

Przejdziemy obecnie do przypadku obustronnego uplastycznienia (d), który jest nieco prostszy od poprzedniego. Tok postępowania jest tu całkowicie podobny. Obliczając z pierwszego z równań (21.30) bezwymiarowy moment zginający m (przy założeniu $m > 0$) otrzymujemy

$$m = 1 - n^2 - \frac{a^4}{3h^2 \varphi'}, \quad (21.58)$$

gdzie przecinkami u góry oznaczono różniczkowanie względem ξ jak poprzednio. Podstawiając (21.58) do drugiego z równań (21.30) otrzymujemy

$$s' = 1 + hn\varphi'. \quad (21.59)$$

W dalszym ciągu podstawienie (21.59) do pierwszego z równań (21.47), zróżniczkowanie i przyrównanie do zróżniczkowanego (21.58) prowadzi do równania

$$a^4 \varphi'' + 3ph \cos \varphi \varphi'^3 = 0, \quad (21.60)$$

w którym wyrazy zawierające φ'^4 uległy redukcji. Podstawiając następnie $\varphi' = u(\varphi)$ dochodzimy do równania o zmiennych rozdzielonych

$$a^4 u' + 3ph \cos \varphi u^2 = 0, \quad (21.61)$$

skąd po scałkowaniu

$$\frac{1}{u} = \frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{3ph}{a^4} \sin \varphi + D_1. \quad (21.62)$$

Równanie to można z łatwością scałkować powtórnie:

$$\xi = -\frac{3ph}{a^4} \cos \varphi + D_1 \varphi + D_2, \quad (21.63)$$

lecz uzyskany związek nie daje się na ogół rozwickłać względem φ i możemy przedstawić ostateczne równania linii ugięcia jedynie w postaci parametrycznej. Wobec (21.56), (21.59) i (21.62) otrzymujemy mianowicie

$$(21.64) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + \int \left[\left(1 + \frac{3}{a^4} \right) ph \sin \varphi + D_1 \right] \cos(\varphi + \delta) d\varphi, \\ w &= w_0 + \int \left[\left(1 + \frac{3}{a^4} \right) ph \sin \varphi + D_1 \right] \sin(\varphi + \delta) d\varphi. \end{aligned}$$

Równania (21.57) i (21.64) łącznie z równaniami elastyki Eulera przy uwzględnieniu rozciągłości osi tworzą rozwiązanie ogólne rozważanego problemu. Poważniejsze trudności mogą być związane ze «zszywaniem» poszczególnych stref; pewien przykład podano w pracy [725]. Ponadto Z. WASZCZYŹYŃ w pracach [726, 727 i 728] otrzymał rozwiązania w oparciu o metodę kolokacji, uwzględnił wzmocnienie plastyczne oraz przeprowadził weryfikację doświadczalną teorii.

21.3.4. Przybliżone obliczanie ugięć. Dla porównania pokażemy jeszcze tok rozwiązania tego samego problemu przy założeniu nierozciągłości osi belki. Zamiast układów równań (21.27) i (21.30) będziemy mieli wtedy tylko jedno równanie, ale uproszczenie jest pozorne, bowiem po podstawieniu wyrażań na m i n otrzymamy równania bardziej skomplikowane niż (21.51) i (21.60).

W przypadku jednostronnego uplastycznienia (b) lub (c) zamiast układu (21.26) napiszemy teraz

$$(21.65) \quad h \frac{d\varphi}{ds} = \frac{16}{9} a^2 \frac{(1-n)^3}{(2-2n-m)^2},$$

a zamiast pierwszego z równań (21.47)

$$(21.66) \quad m = \frac{2p}{h} \int_s^l \cos \varphi ds + m_0.$$

Obliczając m z równania (21.65) otrzymujemy ponownie wzór (21.48), w którym jednakże pochodną $d\varphi/d\xi$ należy zastąpić przez $d\varphi/ds$. Różniczkując ten związek względem s i porównując ze zróżniczkowanym (21.66) otrzymujemy równanie

$$(21.67) \quad \begin{aligned} &(1 - p \sin \varphi)^{3/2} a \varphi'' - 3p \sqrt{h} \cos \varphi \varphi'^{5/2} + \\ &+ 3ap(1 - p \sin \varphi)^{1/2} \cos \varphi \varphi'^2 + 3 \frac{p}{\sqrt{h}} \cos \varphi \varphi'^{3/2} = 0, \end{aligned}$$

gdzie przecinkami u góry oznaczono różniczkowanie względem długości (niezmiennej) łuku s . Porównując (21.67) w stosunku do (21.51) stwierdzamy istotną różnicę: wyrazy zawierające $\varphi'^{5/2}$ nie uległy redukcji. Fakt ten powoduje zasadnicze komplikacje przy całkowaniu: zamiast równania liniowego (21.53) otrzymuje się nieliniowe równanie typu Riccatiego, które daje się scałkować jedynie przy zastosowaniu funkcji Bessela. Szczegóły obliczeń można znaleźć w pracy [765].

Podobne komplikacje występują w przypadku obustronnego uplastycznienia (d). Pisząc zamiast (21.30) (przy założeniu $m > 0$) równanie

$$(21.68) \quad h \frac{d\varphi}{ds} = \frac{a^2}{\sqrt{3}\sqrt{1-n^2-m}},$$

określamy stąd ponownie m wzorem (21.58), w którym przecinki oznaczają teraz różniczkowanie względem zmiennej s . Różniczkując tę funkcję względem s i przyrównując do zróżniczkowanego (21.66) otrzymujemy

$$(21.69) \quad a^4 \varphi'' - 3p^2 h^2 \sin \varphi \cos \varphi \varphi'^4 + 3ph \cos \varphi \varphi'^3 = 0.$$

Tak więc wyrazy zawierające φ'^4 nie uległy tu redukcji i równanie (21.69) jest bardziej skomplikowane niż (21.60). Podstawienie $\varphi' = u(\varphi)$ sprowadza to równanie do równania pierwszego rzędu typu Abela. Równanie to daje się wprawdzie scałkować ściśle [765], jednakże wyniki są bardziej złożone niż (21.64). Jedynie «zszywanie» rozwiązań z klasyczną elastyką Eulera jest tu nieco prostsze.

S. D. LEJTES [1022, 1028] analizując duże ugięcia idealnie sprężysto-plastycznych prętów mimośrodowo ściskanych o przekroju prostokątnym, przyjmował przybliżone założenie nierozciągłości osi. Natomiast L. O. KOLESNIKOW [994], który uwzględnił dowolne wzmocnienie materiału, oraz A. M. KOCZETKOW [1001] (wzmocnienie potęgowe) uwzględniali ściśle lub w przybliżeniu wydłużalność osi.

Dotychczasowe nasze rozwiązania odnosiły się do skończonych ugięć belek. Przy analizie małych ugięć założenie nierozciągłości osi jest z reguły całkowicie uzasadnione, ponadto stosuje się linearyzację wzorów na krzywiznę osi, przyjmując $d\xi \approx ds \approx dx$. Podstawiając mianowicie $\varphi \approx -dw/dx$ do pierwszych równań układów (21.27) i (21.30) otrzymujemy (przy zwykłej umowie co do znaku momentu):

dla jednostronnego uplastycznienia

$$(21.70) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{16}{9} \frac{a^2}{h} \frac{(1-|n|)^3}{(2-2|n|-|m|)^2} \text{sign } m,$$

dla obustronnego uplastycznienia

$$(21.71) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{a^2}{h \sqrt{3} \sqrt{1-n^2-|m|}} \text{sign } m.$$

Całki szczególne tych równań w przypadku $n = \text{const}$, $m = \alpha + \beta w$ podał K. JEŹEK [294]; zostały one poddane szczegółowej analizie w monografii S. D. LEJTESA [1023]. W przypadku stosowania równań (21.70) i (21.71) do obliczania ugięć przy mimośrodowym ściskaniu należy zachować szczególną ostrożność, bowiem występują wtedy z reguły strefy lokalnie bierne pomimo wzrostu obciążenia; oczywiście wtedy wyprowadzone tu równania przestają obowiązywać.

21.4. Inne kształty przekroju. Rozważany w p. 21.3 i 21.4 przekrój prostokątny należy do najprostszych z uwagi na jednoczesne zginanie z rozciąganiem lub ściskaniem. Następny stopień trudności przedstawiają przekroje złożone z prostokątów, jak dwuteownik, teownik, ceownik i przekrój skrzynkowy. Dla takich przekrojów również uzyskano rozwiązania efektywne jedynie o dłuższym zapisie odpowiednich wzorów i większej liczbie zakresów

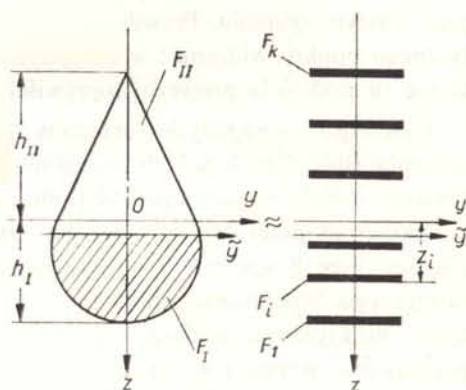
pracy przekroju. Natomiast rozwiązania efektywne problemów sprężysto-plastycznych przy krzywoliniowych konturach przekroju należą do rzadkości (z wyjątkiem zastosowania ogólnych metod przybliżonych w szczególności numerycznych).

Rozwiązania szczegółowe dla przekrojów złożonych z prostokątów, podali w przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego K. JEŹEK [294], F. B. SEELY i J. O. SMITH [640], L. K. STEVENS [674] oraz A. G. DORFMAN i S. D. LEJTES [894]. Szczegółowe badania wszystkich możliwych zakresów przeprowadził JU. N. ALESZINSKI [782, 783, 785]. Przekrój kołowy analizowali F. B. SEELY i J. O. SMITH [640]; przekrój pierścieniowy — T. J. DWYER i T. V. GALAMBOS [121] oraz S. D. LEJTES [1027], którzy ponadto obliczali ugięcia sprężysto-plastyczne i nośność słupów o takim przekroju.

Jeszcze mniej efektywnych rozwiązań podano w przypadku wzmocnienia plastycznego. Najprostszy jest tu model ciała idealnie sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem liniowym; przypadek jednoczesnego działania momentu zginającego i siły podłużnej rozważał dla różnych kształtów przekroju I. L. DIKOWICZ [891]. Modelem ciała sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem posługiwali się S. W. SERENSEN, W. P. KOGAJEW i R. M. SZNEJDEROWICZ [1161] (przekrój trapezowy i kołowy, również w przypadku pręta o krzywiznie pierwotnej) oraz B. S. BIŁOBRAN [810] (przekrój pierścieniowy).

21.5. Wielopunktowe przekroje zastępcze przy sprężysto-plastycznym zginaniu z siłą podłużną

21.5.1. Zasady doboru przekrojów wielopunktowych. Dogodna, analityczna metoda przybliżona analizy pracy przekroju poddanego jednoczesnemu zginaniu z rozciąganiem polega na zastąpieniu tego przekroju przez równoważny przekrój wielopunktowy (o powierzchniach skupionych), rys. 103. Przez równoważność rozumiemy tu równość



Rys. 103. Zastępczy przekrój wielopunktowy

powierzchni przekroju i pewnej liczby podstawowych cech geometrycznych. Otrzymuje się wtedy jednolite związki, słuszne dla wszystkich zakresów pracy przekroju (różniące się jedynie współczynnikami), a odpowiednie równania różniczkowe posiadają stosunkowo proste całki o jednolitej budowie. Natomiast wylaniające się tu trudności związane są z występowaniem dużej liczby zakresów pracy przekroju, a następnie pręta, i koniecznością «zszywania» rozwiązań uzyskanych dla poszczególnych stref.

Pierwszy problem polega na podaniu zasad doboru zastępczych przekrojów wielo-

punktowych tak, aby uzyskać możliwie dobrą aproksymację z punktu widzenia dalszych zastosowań. Takie zasady zostały sformułowane w pracy J. ORKISZA [500] dla przekrojów posiadających co najmniej jedną oś symetrii. Przy przyjęciu k powierzchni skupionych mamy do określenia $2k$ swobodnych parametrów, mianowicie k wielkości pól powierzchni i k współrzędnych ich położenia. Dla belki o jednej tylko osi symetrii wprowadźmy oś \tilde{y} , której położenie określimy później, i rozważmy obie części przekroju oddzielnie (ponad i pod osią \tilde{y}). Pamiętając, iż naszym celem jest analiza jednoczesnego zginania z rozciąganiem lub ściskaniem, powinniśmy przede wszystkim zażądać zgodności sprężystej sztywności zginania, zgodności nośności granicznej przekroju przy zginaniu i przy rozciąganiu (z osobna), i zgodności momentu zginającego, powodującego pierwsze uplastycznienie przy czystym zginaniu (a więc zgodności sprężystych wskaźników zginania). Pierwsze trzy warunki zgodności będą np. zapewnione, gdy zażądamy spełnienia sześciu warunków

$$(21.72) \quad \sum_i^{k_{I,II}} F_i z_i^j = \iint_{F_{I,II}} z^j dF, \quad j = 0, 1, 2,$$

gdzie F_I i F_{II} oznaczają powierzchnię kolejno pod i nad osią \tilde{y} , k_I i k_{II} — liczbę skupionych powierzchni pod i nad osią \tilde{y} ($F = F_I + F_{II}$, $k = k_I + k_{II}$), natomiast F_i są kolejnymi powierzchniami skupionymi. Warunki dla $j = 0$ prowadzą mianowicie do równości powierzchni odpowiednio obu połówek, a więc i powierzchni całkowitej, dla $j = 2$ — do równości momentów bezwładności, a więc sztywności sprężystej, bez względu na położenie osi \tilde{y} . Dla $j = 1$ otrzymujemy równość pewnych momentów statycznych S_y (i środków ciężkości całego przekroju); przyjmując $\tilde{y} = y$ otrzymujemy w efekcie zgodność największych momentów zginających w stanie nośności granicznej, natomiast przyjmując \tilde{y} jako oś połówiącą powierzchnię przekroju dochodzimy do zgodności momentów granicznych przy czystym zginaniu. Prawdopodobnie ta druga droga jest bardziej uzasadniona z praktycznego punktu widzenia; w przypadku przekrojów o dwóch osiach symetrii oba omówione tu podejścia prowadzą oczywiście do wyników identycznych.

Czwarty z wymaganych warunków zgodności, odnoszący się do sprężystego wskaźnika zginania (lub dwóch takich wskaźników w przypadku przekrojów niesymetrycznych), zostanie spełniony, gdy wysokości obu części przekroju h_I i h_{II} będą równe odpowiednim wysokościom przekroju zastępczego, czyli gdy $z_1 = h_I$ oraz $z_k = -h_{II}$. Ogółem otrzymujemy więc 8 warunków wystarczających do określenia czteropunktowego przekroju zastępczego. Stosowanie przekrojów czteropunktowych można więc zalecić do przeprowadzenia praktycznych obliczeń: są to najprostsze przekroje zastępcze, spełniające wszystkie podstawowe warunki zgodności i na ogół dostatecznie dokładnie aproksymujące pracę rzeczywistego przekroju. Rozwiązując otrzymany w tym przypadku układ równań, rozpadający się na dwa układy po cztery równania, określamy powierzchnie skupione F_I i F_2 oraz odpowiednie współrzędne z_1 i z_2 :

$$(21.73) \quad F_1 = \frac{F_I I_{Iy} - S_{Iy}^2}{I_{Iy} - 2S_{Iy} h_I + F_I h_I^2}, \quad z_1 = h_I,$$

$$F_2 = \frac{(S_{Iy} - F_I h_I)^2}{I_{Iy} - 2S_{Iy} h_I + F_I h_I^2}, \quad z_2 = \frac{I_{Iy} - S_{Iy} h_I}{S_{Iy} - F_I h_I},$$

gdzie F_1 , S_{1y} i I_{1y} oznaczają kolejno powierzchnię, moment statyczny i moment bezwładności względem osi y części I danego przekroju. Przypomnijmy, że jest to oś przechodząca przez środek ciężkości. Powierzchnie F_3 i F_4 oraz współrzędne z_3 i z_4 są określone analogicznymi wzorami.

Przy założeniu większej ilości punktów zastępczego przekroju wielopunktowego najbardziej uzasadnione wydaje się żądanie spełnienia warunków typu (21.72) dla $j = 3, 4, \dots$. Szczegółowe wzory dla pięcio- i sześciopunktowego przekroju zastępczego można znaleźć w pracy J. ORKISZA [500]; praca ta zawiera również dowód zbieżności procesu aproksymacyjnego i ocenę błędów aproksymacji.

21.5.2. Prawa fizykalne wielokrotnego wzmocnienia liniowego. Przejdziemy do wyprowadzenia podstawowych związków między uogólnionymi siłami wewnętrznymi i uogólnionymi odkształceniami. Założymy najpierw dość ogólny przypadek wielokrotnego wzmocnienia liniowego

$$(21.74) \quad \sigma = \sigma_x + E_x(\varepsilon - \varepsilon_x) \quad \text{dla} \quad \varepsilon_x \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{x+1}.$$

Przedstawiając rozkład odkształceń wzorem ogólnym, zapisanym w postaci (21.36), otrzymujemy

$$(21.75) \quad \sigma = \sigma_x + E_x \left(\frac{d\varphi}{d\xi} z + \varepsilon_0 - \varepsilon_x \right).$$

Poszczególnym powierzchniom skupionym F_i przypiszemy naprężenia określone wzorem (21.75) dla $z = z_i$. W takim razie siłę podłużną i moment zginający określimy sumami skończonymi

$$(21.76) \quad N = \sum_{\alpha} \sum_i \left[\sigma_x + E_x \left(\frac{d\varphi}{d\xi} z_i + \varepsilon_0 - \varepsilon_x \right) \right] F_i$$

$$M_{\theta} = \sum_{\alpha} \sum_i \left[\sigma_x + E_x \left(\frac{d\varphi}{d\xi} z_i + \varepsilon_0 - \varepsilon_x \right) \right] F_i z_i.$$

Sumowanie należy tu przeprowadzić po wszystkich segmentach (α) krzywej (łamanej) wykresu $\sigma - \varepsilon$ i po wszystkich powierzchniach skupionych (i), leżących wewnątrz danego segmentu. Wzory te można zapisać krócej w postaci

$$(21.77) \quad N = B_0 + A_0 \varepsilon_0 + A_1 \frac{d\varphi}{d\xi}, \quad M_{\theta} = B_1 + A_1 \varepsilon_0 + A_2 \frac{d\varphi}{d\xi},$$

gdzie dla skrócenia zastosowano oznaczenia

$$(21.78) \quad A_j = \sum_{\alpha} \sum_i E_x F_i z_i^j,$$

$$B_j = \sum_{\alpha} \sum_i (\sigma_x - E_x \varepsilon_x) F_i z_i^j \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, 2.$$

Stałe A_j i B_j zależą od stałych materiałowych, stałych charakteryzujących zastępczy przekrój wielopunktowy oraz od zakresu pracy tego przekroju (liczby punktów przekroju, odpowiadających poszczególnym odcinkom wykresu $\sigma - \varepsilon$). Tak więc w poszczególnych zakresach związku między N i M_{θ} z jednej, a ε_0 i $d\varphi/d\xi$ z drugiej strony, są związkami liniowymi. Przy założeniu $A_1^2 - A_0 A_2 \neq 0$ dają się one odwrócić względem ε_0 i $d\varphi/d\xi$.

Wyniki możemy zapisać w postaci

$$(21.79) \quad \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi} &= b_1 M_\theta + b_2 N + b_3, \\ \varepsilon_0 &= \frac{ds}{d\xi} - 1 = c_1 M_\theta + c_2 N + c_3, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki b_i oraz c_i wynoszą

$$(21.80) \quad \begin{aligned} b_1 &= \frac{A_0}{A_0 A_2 - A_1^2}, & b_2 = c_1 &= -\frac{A_1}{A_0 A_2 - A_1^2}, & c_2 &= \frac{A_2}{A_0 A_2 - A_1^2}, \\ b_3 &= -\frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{A_0 A_2 - A_1^2}, & c_3 &= \frac{A_1 B_1 - A_2 B_0}{A_0 A_2 - A_1^2}. \end{aligned}$$

Równanie różniczkowe (21.71), stanowiące podstawę obliczania sprężysto-plastycznych ugięć belek, mają więc jednolitą budowę, niezależną od kształtu przekroju i zasięgu uplastycznienia.

21.5.3. Prawa fizykalne idealnej plastyczności. W szczególnym przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego równania (21.79) są oczywiście nadal słuszne, jednakże współczynniki b_i oraz c_i dadzą się określić bardziej szczegółowo. Wzory (21.4) pozostają tu aktualne, przy czym współrzędna z_0 jest określona wzorem (21.3). Obliczając siłę podłużną N i moment zginający M_θ otrzymujemy ponownie (21.13), gdzie tym razem

$$(21.81) \quad F_+ = \sum_{i_+} F_i, \quad S_+ = \sum_{i_+} F_i z_i, \quad I_+ = \sum_{i_+} F_i z_i^2,$$

oraz podobnie F_- , S_- , I_- i I_- . Przez i_+ , i_- oraz i_0 oznaczono tu symbolicznie wszystkie powierzchnie skupione, leżące wewnątrz odpowiednich stref F_+ , F_- i F_0 . W przypadku jednostronnego uplastycznienia należy po prostu przyjąć $F_+ = S_+ = I_+ = 0$ albo $F_- = S_- = I_- = 0$. Warunki ciągłości (21.14) nie są w tej chwili efektywnie potrzebne, bowiem współrzędne z_+ i z_- nie występują w (21.13) ani w formie jawnej, ani (w przypadku przekroju wielopunktowego) poprzez wielkości F , S i I ; układ równań (21.3) i (21.13) całkowicie określa tu niewiadome $d\varphi/d\xi$, $ds/d\xi$ i z_0 . Zasadniczy problem polega natomiast na przypisaniu poszczególnych punktów przekroju wielopunktowego do odpowiednich stref F_+ , F_- lub F_0 . Można tego dokonać opierając się na znajomości krzywych granicznych w płaszczyźnie $M_\theta - N$. Krzywe takie w przypadku przekrojów wielopunktowych składają się zawsze z odcinków linii prostych; były one szczegółowo badane przez J. ORKISZA [501].

Eliminując z równań (21.3) i (21.13) współrzędna z_0 i rozwiązując uzyskany układ względem $d\varphi/d\xi$ i $ds/d\xi$ otrzymujemy liniowe związki typu (21.79), gdzie stałe b_i i c_i dadzą się obecnie zapisać w postaci

$$(21.82) \quad \begin{aligned} b_1 &= \frac{F_e}{E(F_e I_e - S_e^2)}, & b_2 = c_1 &= -\frac{S_e}{E(F_e I_e - S_e^2)}, \\ c_2 &= \frac{I_e}{E(F_e I_e - S_e^2)}, & b_3 &= \frac{\sigma_0 [(S_- - S_+) F_e - (F_- - F_+) S_e]}{E(F_e I_e - S_e^2)}, \\ c_3 &= \frac{\sigma_0 [(S_+ - S_-) S_e - (F_+ - F_-) I_e]}{E(F_e I_e - S_e^2)}. \end{aligned}$$

W szczególnych przypadkach uplastycznienia mogą wystąpić pewne uproszczenia. I tak np. jeżeli przekrój wykazuje podwójną symetrię oraz taka sama liczba powierzchni skupionych jest uplastyczniona po stronie rozciągania i po stronie ściskania (co zachodzi zawsze przy $N = 0$, ale może zachodzić również przy $N \neq 0$), wówczas $S_e = 0$, $F_+ = F_-$, oraz $b_2 = c_1 = c_3 = 0$.

21.5.4. Obliczanie skończonych ugięć belek. Równania (21.79), stanowiące podstawę obliczania ugięć belek o zastępczych przekrojach wielopunktowych, można całkować przy dokonywaniu różnych przybliżeń omówionych w p. 21.4. Dla przykładu omówimy krótko tok postępowania w przypadku belki pokazanej na rys. 102.

Zajmiemy się najpierw przypadkiem uwzględnienia wydłużalności osi, czyli całkowaniem ścisłym obu równań (21.79).

Podobnie, jak w przypadku przekroju prostokątnego, rugując z układu (21.79) moment zginający, wyrażamy najpierw pochodną $ds/d\xi$ tylko za pośrednictwem N :

$$(21.83) \quad \frac{ds}{d\xi} = \frac{c_1}{b_1} \frac{d\varphi}{d\xi} + \left(c_2 - \frac{c_1 b_2}{b_1} \right) N + 1 + c_3 - \frac{c_1 b_3}{b_1}.$$

Podstawienie do tego wzoru drugiego z wyrażeń (21.45) pozwala wyrazić $ds/d\xi$ jako funkcję wyłącznie kąta φ ; różniczkując wzory (21.45) względem ξ otrzymujemy

$$(21.84) \quad \frac{dM_g}{d\xi} = -P \frac{ds}{d\xi} \cos \varphi, \quad \frac{dN}{d\xi} = P \frac{d\varphi}{d\xi} \cos \varphi,$$

zatem obie te pochodne możemy również wyrazić wyłącznie w funkcji φ . Podstawienie tych wyrażeń do zróżniczkowanego pierwszego z równań (21.79) prowadzi wreszcie do zasadniczego równania różniczkowego ugięć rozważanej belki:

$$(21.85) \quad \varphi'' + P(c_1 - b_2) \cos \varphi \varphi' + P(b_1 + b_1 c_3 - b_3 c_1) \cos \varphi + P^2(b_1 c_2 - b_2 c_1) \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

gdzie przecinkami u góry oznaczono różniczkowanie względem zmiennej ξ . Zauważymy jednakże, iż $c_1 = b_2$, zatem drugi ze składników tego równania ulega redukcji, co w zasadniczy sposób upraszcza dalsze całkowanie. Po podstawieniu (21.80) otrzymujemy następujące równanie dla dowolnego liniowego wzmocnienia plastycznego:

$$(21.86) \quad \varphi'' + \frac{(A_0 - B_0)P}{A_0 A_2 - A_1^2} \cos \varphi + \frac{P^2}{A_0 A_2 - A_1^2} \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Jest to równanie analogiczne do równania skończonych ugięć sprężystych przy wydłużalności osi. Podstawienie $\sin \varphi = v$ prowadzi do równania

$$(21.87) \quad v''(1-v^2) + vv'^2 + D_1(1-v^2)^2 + D_2 v(1-v^2)^2 = 0,$$

gdzie D_1 i D_2 oznaczają kolejno współczynniki stałe, występujące w równaniu (21.86). Równanie to nie zawiera zmiennej niezależnej ξ , zatem daje się w każdym przypadku jeden raz scałkować; otrzymujemy

$$(21.88) \quad \frac{dv}{d\xi} = \sqrt{(1-v^2)(2C - 2D_1 v - D_2 v^2)},$$

gdzie C jest stałą całkowania. Dalszy tok rozwiązania prowadzi do całek eliptycznych; szczegóły podane są w pracy Z. WASZCZYŚNYA [730].

21.5.5. Przybliżone obliczanie ugięć. Pominięcie wydłużalności osi polega na przybliżonym przyjęciu $d\xi = ds$ i opuszczeniu drugiego z równań (21.79). Zamiast (21.86) otrzymujemy wtedy

$$(21.89) \quad \varphi'' + \frac{A_1 P}{A_0 A_2 - A_1^2} \cos \varphi \varphi' + \frac{A_0 P}{A_0 A_2 - A_1^2} \cos \varphi = 0.$$

Podstawienie $\varphi' = u(\varphi)$ pozwala sprowadzić to równanie do równania pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych, dające się raz scałkować. Drugie całkowanie prowadzi jednak do nowych funkcji nieelementarnych. Jedynie w przypadku $A_1 = 0$, odpowiadającym np. symetrycznemu uplastycznieniu przekroju o dwóch osiach symetrii, rozwiązanie jest stosunkowo proste, a linia ugięcia nie różni się w sposób istotny od elastyki Eulera. Szczegóły można znaleźć w pracy J. ORKISZA i M. ŻYCKOWSKIEGO [505].

Metoda wielopunktowych przekrojów zastępczych jest jeszcze bardziej efektywna w przypadku obliczania małych ugięć belek, gdy można przyjąć $d\xi = ds = dx$. Uzyskiwane równania są analogiczne do równań sprężystych ugięć belek o stałej niewielkiej krzywiznie pierwotnej. Liczne rozwiązania szczegółowe zawarte są w pracy J. ORKISZA i M. ŻYCKOWSKIEGO [502]. Ponadto J. ORKISZ [504] obliczał małe ugięcia sprężysto-plastyczne prętów słabo zakrzywionych o przekrojach wielopunktowych, co nie powodowało poważniejszych komplikacji w stosunku do analizy prętów pierwotnie prostych.

21.6. Nośność graniczna przekroju przy jednoczesnym zginaniu z rozciąganiem lub ścisaniem

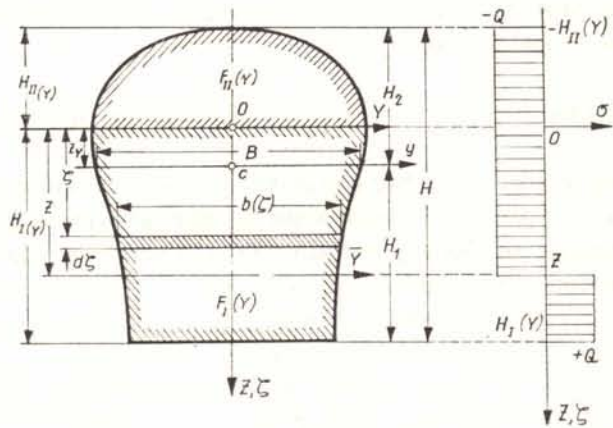
21.6.1. Określenie krzywych granicznych uogólnionymi szeregami potęgowymi. Całkowite uplastycznienie przekroju odpowiada w przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego wyczerpaniu nośności przekroju; odpowiednie uogólnione siły wewnętrzne N i M_g są określone prostymi wzorami ogólnymi (21.17), w których parametrem jest współrzędna z_0 , rozgraniczająca strefę rozciągania od strefy ścisania. Parametr z_0 , występujący we wzorach na F_+ , F_- , S_+ i S_- z reguły w sposób dość złożony, w wielu przypadkach nie może być wyeliminowany na drodze ścisłej, co uniemożliwia określenie krzywej granicznej $M_g = f(N)$ wzorem jawnym. Wyeliminowanie tego parametru jest natomiast możliwe przy zastosowaniu uogólnionych szeregów potęgowych i działań na tych szeregach; odpowiednie wzory wyprowadzimy w oparciu o pracę [778].

Rozważmy przekrój o co najmniej jednej osi symetrii i przyjmijmy układ osi YZ tak, iż oś Z jest osią symetrii, natomiast prostopadła oś Y przechodzi przez dowolny punkt O na tej osi. Oś Y będziemy nazywali osią wyjściową; w efekcie będziemy otrzymywali rozwinięcia równania krzywej granicznej $M_g = f(N)$ w szeregi potęgowe o środku w punkcie odpowiadającym pokrywaniu się linii nieciągłości naprężeń (osi obojętnej) z osią Y . Tak więc przyjmując oś Y tak, aby dzieliła powierzchnię przekroju F na dwie równe części, otrzymamy rozwinięcia wokół czystego zginania; przyjmując oś Y na brzegach konturu, otrzymamy rozwinięcia wokół czystego rozciągania i czystego ścisania itp.

Wyrazimy obecnie występujące we wzorach (21.17) wielkości tak, aby rozpoczynać całkowanie zawsze od $Z = 0$. Możemy mianowicie podstawić

$$(21.90) \quad \begin{aligned} F_+ &= F_I(Y) - \int_0^{z_0} b(\zeta) d\zeta, & S_+ &= S_I(Y) - \int_0^{z_0} b(\zeta)(\zeta - Z_Y) d\zeta, \\ F_- &= F_{II}(Y) + \int_0^{z_0} b(\zeta) d\zeta, & S_- &= S_{II}(Y) + \int_0^{z_0} b(\zeta)(\zeta - Z_Y) d\zeta, \end{aligned}$$

gdzie $F_I(Y)$, $F_{II}(Y)$, $S_I(Y)$ i $S_{II}(Y)$ oznaczają powierzchnie i momenty statyczne względem osi środkowej y części przekroju po obu stronach osi Y (rys. 104), natomiast Z_Y — współ-



Rys. 104. Całkowne uplastycznienie przekroju o jednej osi symetrii

rzędną środka ciężkości przekroju w układzie YZ . Po prostych przekształceniach napiszemy zamiast (21.17)

$$(21.91) \quad \begin{aligned} N &= \sigma_0 \left[F_I(Y) - F_{II}(Y) - 2 \int_0^{z_0} b(\zeta) d\zeta \right], \\ M_g &= \sigma_0 \left[2S_{II}(Y) + F_I(Y)Z_Y - F_{II}(Y)Z_Y - 2 \int_0^{z_0} \zeta b(\zeta) d\zeta \right] - NZ_Y. \end{aligned}$$

Sprowadzenie do postaci bezwymiarowej pozwala zapisać te wzory w skróconej postaci

$$(21.92) \quad \begin{aligned} m_g &= \vartheta_1(Y) - \vartheta_2(Y)n - \psi_2 \int_0^z u\beta(u) du, \\ n &= \vartheta_3(Y) - \psi_0 \int_0^z \beta(u) du. \end{aligned}$$

Przez m_g i n oznaczono tu stosunki $M_g/W_g \sigma_0$ i $N/F\sigma_0$, a więc odniesione do nośności sprężystej przekroju \bar{M}_g (m_g jest zdefiniowane odmiennie niż w p. 21.3), co ułatwia ocenę wzrostu nośności w wyniku odkształceń plastycznych; bezwymiarowe zmienne zdefiniowano wzorami $z = Z_0/H$, $u = \zeta/H$, $\beta = b/B$, gdzie H oznacza wysokość przekroju, B — szerokość na osi środkowej (rys. 104); $\vartheta_i(Y)$ oznaczają funkcje, zależne od położenia «osi wyjściowej Y »:

$$(21.93) \quad \vartheta_1(Y) = \frac{1}{W_g} [2S_1(Y) + F_{I_1}(Y)Z_Y - F_{II}(Y)Z_Y],$$

$$\vartheta_2(Y) = \frac{FZ_Y}{W_g}, \quad \vartheta_3(Y) = \frac{1}{F} [F_{I_1}(Y) - F_{II}(Y)];$$

W_g oznacza tu sprężysty wskaźnik zginania przekroju, wreszcie $\psi_0 = 2BH/F$ i $\psi_2 = 2BH^2/W_g$ są bezwymiarowymi współczynnikami kształtu przekroju.

Równania (21.92) podobnie jak (21.17) są parametrycznymi równaniami krzywej granicznej przy parametrze z . Aby wyeliminować tę wielkość założymy, że funkcja $\beta = \beta(u)$ daje się w pewnym otoczeniu punktu O (pozycji wyjściowej osi Y) rozwinąć w uogólniony szereg potęgowy

$$(21.94) \quad \beta(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j u^{\mu+vj}$$

gdzie μ i ν mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi. W zasadzie musimy tu założyć $u \geq 0$; oznacza to przesuwanie osi nieciągłości w stronę dodatniej osi Z , a zatem w stronę zmniejszania się siły podłużnej. O możliwości uzyskania rozwinięć ważnych w przeciwnym kierunku wspomniemy później.

Dwie całki oznaczone występujące we wzorach (21.92) oznaczymy przez s i f ; zatem

$$(21.95) \quad s = \int_0^z u \beta(u) du = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_j}{\mu+2+vj} z^{\mu+2+vj},$$

$$f = \int_0^z \beta(u) du = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_j}{\mu+1+vj} z^{\mu+1+vj}.$$

Problem sprowadza się do deparametryzacji funkcji $s = s(z)$ i $f = f(z)$, aby uzyskać jawną formę związku $s = s(f)$, skąd natychmiast wynika $m_g = m_g(n)$. Działanie to składa się z następujących elementów; odwrócenia drugiego z szeregów (21.95) i podstawienia do pierwszego. Oba działania składowe można wykonać, stosując wzory na podnoszenie uogólnionego szeregu potęgowego do dowolnej potęgi (13.32), (13.35) i metodę równych współczynników; jednakże praca [777] podaje gotowe wzory na złożone działanie deparametryzacji. Ostatecznie otrzymamy

$$(21.96) \quad s = s(f) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p f^{\mu+2 + \frac{\nu}{\mu+1} p},$$

gdzie współczynniki c_p zależą od współczynników rozwinięcia równania konturu β_j i od wykładników μ i ν następująco:

$$(21.97) \quad c_0 = \frac{(\mu+1)^{\frac{\mu+2}{\mu+1}}}{\mu+2} \beta_0^{-\frac{1}{\mu+1}}$$

$$c_1 = - \frac{(\mu+1)^{\frac{\mu+\nu+2}{\mu+1}}}{(\mu+\nu+1)(\mu+\nu+2)} \beta_0^{-\frac{\mu+\nu+2}{\mu+1}} \beta_1,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(\mu+1) \frac{\mu+2\nu+2}{\mu+1} \beta_0^{-\frac{2\mu+2\nu+3}{\mu+1}} \left[\frac{\beta_1^2}{(\mu+\nu+1)^2} - \frac{2\beta_0\beta_2}{(\mu+2\nu+1)(\mu+2\nu+2)} \right],$$

.....

Tak więc wobec (21.92) i (21.95) możemy ostatecznie równanie poszukiwanej krzywej granicznej zapisać w postaci jawnej

$$(21.98) \quad m_g = \vartheta_1(Y) - \vartheta_2(Y)n - \psi_2 \sum_{p=0}^{\infty} c_p \left[\frac{\vartheta_3(Y) - n}{\psi_0} \right]^{\frac{\mu+2}{\mu+1} + \frac{\nu}{\mu+1} p}$$

Jak już wspomnieliśmy rozwinięcia ważne w kierunku wzrastającej siły podłużnej n mogą mieć postać nieco odmienną. Otrzymuje się wtedy

$$(21.99) \quad m_g = \vartheta_1(Y) - \vartheta_2(Y)n - \psi_2 \sum_{p=0}^{\infty} c_p \left[\frac{n - \vartheta_3(Y)}{\psi_0} \right]^{\frac{\mu+2}{\mu+1} + \frac{\nu}{\mu+1} p}$$

gdzie współczynniki β_j a więc i c_p należy obliczać przy przyjęciu osi Z o zwrocie przeciwnym w stosunku do pokazanego na rys. 104 (w górę). Jednakże w większości przypadków różnice między (21.98) a (21.99) są czysto formalne.

21.6.2. Szczególne przypadki szeregów potęgowych. Omówimy obecnie najważniejsze przypadki szczególne wyprowadzonych wzorów. Zakładając, iż oś Y pokrywa się z osią środkową y , otrzymujemy rozwinięcie krzywej granicznej «wokół największego momentu zginającego»; w przypadku przekrojów bisymetrycznych największy moment zginający odpowiada czystemu zginaniu, natomiast przy pojedynczej symetrii towarzyszy mu pewna siła podłużna. Jeżeli oznaczymy powierzchnie odpowiednich części przekroju przez F_1 i F_2 , moment statyczny powierzchni F_1 względem osi $y = Y$ przez S_1 oraz wprowadzimy oznaczenia wielkości bezwymiarowych

$$(21.100) \quad \frac{2S_1}{W_g} = \psi_1, \quad \frac{F_1 - F_2}{F} = \delta_1,$$

to wobec $Z_Y = 0$, $\vartheta_1(Y) = \psi_1$, $\vartheta_2(Y) = 0$, $\vartheta_3(Y) = \delta_1$ oraz $\mu = 0$ (szerokość przekroju na osi y jest z reguły różna od zera — wyjątki mogą pojawić się jedynie w przypadku przekrojów cienkościennych), równanie (21.98) przyjmie prostszą postać

$$(21.101) \quad m_g = \psi_1 - \psi_2 \sum_{p=0}^{\infty} c_p \left(\frac{\delta_1 - n}{\psi_0} \right)^{2+\nu p},$$

gdzie współczynniki c_p określone są wzorami ogólnymi (21.97) dla $\mu = 0$. W tym ważnym i często występującym przypadku wzory te przyjmują postać znacznie prostszą:

$$(21.102) \quad c_0 = \frac{1}{2} \beta_0^{-1}, \quad c_1 = -\frac{1}{(v+1)(v+2)} \beta_0^{-v-2} \beta_1,$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \beta_0^{-2\nu-3} \left[\frac{\beta_1^2}{(v+1)^2} - \frac{\beta_0\beta_2}{(v+1)(2v+1)} \right],$$

.....

Z uwagi na definicję β mamy tu ponadto $\beta_0 = b(0)/B = 1$, co stanowi dalsze uproszczenie; we wzorach (21.102) pozostawiono jednak β_0 , gdyż w dalszym ciągu będą one wykorzystywane również przy $\beta_0 \neq 1$.

Przyjmując oś Y jako dzielącą powierzchnię F na dwie równe części dochodzimy do rozwinięcia «wokół czystego zginania». Mamy wtedy $F_1(Y) = F_{11}(Y) = F/2$, $Z_Y = Z_c$ (zmiana położenia osi obojętnej przy czystym zginaniu); oznaczając odpowiedni moment statyczny $S_1(Y)$ przez $S_{0,5}$ oraz

$$(21.103) \quad \frac{S_{0,5}}{W_g} = \psi_{0,5}, \quad \frac{Z_c F}{W_g} = \delta_2,$$

otrzymujemy

$$\vartheta_1(Y) = \psi_{0,5}, \quad \vartheta_2(Y) = \delta_2, \quad \vartheta_3(Y) = 0, \quad \mu = 0,$$

oraz

$$(21.104) \quad m_g = \psi_{0,5} - \delta_2 n - \psi_2 \sum_{p=0}^{\infty} c_p \left(-\frac{n}{\psi_0} \right)^{2+vp},$$

gdzie współczynniki c_p są określone wzorami (21.102). Rozwinięcie to jest ważne dla ujemnych n ; dla dodatnich n wystarczy z reguły zmienić znak wewnątrz nawiasu, obliczając jednocześnie współczynniki β_j przy zmienionym zwrocie osi Z .

W przypadku przekrojów bisymetrycznych rozwinięcia (21.101) i (21.104) są oczywiście identyczne: mamy wtedy $Z_c = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\psi_{0,5} = \psi_1$ oraz

$$(21.105) \quad m_g = \psi_1 - \psi_2 \sum_{p=0}^{\infty} c_p \left(-\frac{n}{\psi_0} \right)^{2+vp}.$$

Dalsze uproszczenia występują, jeżeli kontur przekroju nie posiada osi symetrii (osobliwość taką posiada np. kontur przekroju rombowego), lecz jest regularny. Wtedy mamy $\nu = 2$ (lub $\nu = 4, 6, \dots$, lecz taka zmiana nie jest istotna) oraz zamiast (21.105) możemy napisać zwyczajny szereg potęgowy

$$(21.106) \quad m_g = \psi_1 - \psi_2 \sum_{p=0}^{\infty} c_p \left(\frac{n^2}{\psi_0^2} \right)^{1+p}$$

ważny oczywiście w obu kierunkach. Współczynniki c_p , przy podstawieniu $\nu = 2$, $\beta_0 = 1$, są określone prostymi wzorami

$$(21.107) \quad c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = -\frac{1}{12} \beta_1,$$

$$c_2 = \frac{1}{90} (5\beta_1^2 - 3\beta_2), \quad c_3 = -\frac{1}{2520} (140\beta_1^3 - 168\beta_1\beta_2 + 45\beta_3),$$

.....

Przyjmując oś Y jako przechodzącą przez skrajny górny punkt konturu otrzymujemy w wyniku rozwinięcie równania krzywej granicznej «wokół czystego rozciągania». Wpro-

wadzając bezwymiarowe stałe, zależne od kształtu przekroju,

$$(21.108) \quad \frac{H_1 F}{W_g} = \eta_1, \quad \frac{H_2 F}{W_g} = \eta_2,$$

(gdzie H_1 i H_2 oznaczono na rys. 104), otrzymujemy tu $Z_Y = H_2$, $F_1(Y) = F$, $F_{11}(Y) = 0$, $S_1(Y) = 0$, $\vartheta_1(Y) = \eta_2$, $\vartheta_2(Y) = \eta_2$, $\vartheta_3(Y) = 1$, zatem

$$(21.109) \quad m_g = \eta_2(1-n) - \psi_2 \sum_{p=0}^{\infty} c_p \left(\frac{1-n}{\psi_0} \right)^{\frac{\mu+2}{\mu+1} + \frac{\nu}{\mu+1} p}.$$

Szereg ten jest oczywiście ważny jedynie w kierunku zmniejszających się sił podłużnych n . Parametr (wykładnik) μ jest w tym przypadku często różny od zera. Typowymi przypadkami są tu $\mu = 1$ (romb, wierzchołek trójkąta) oraz $\mu = 1/2$ (koło, elipsa, parabola). W obu tych przypadkach uogólniony szereg potęgowy (21.109) nie daje się sprowadzić do szeregu potęgowego zwyczajnego.

Gdy oś Y przechodzi przez skrajny dolny punkt konturu, to wówczas otrzymujemy rozwinięcie «wokół czystego ściskania» zbliżone do (21.109):

$$(21.110) \quad m_g = \eta_1(1+n) - \psi_2 \sum_{p=0}^{\infty} c_p \left(\frac{1+n}{\psi_0} \right)^{\frac{\mu+2}{\mu+1} + \frac{\nu}{\mu+1} p}$$

ważne w kierunku wzrastających sił podłużnych n .

Podane tu rozwinięcia równania krzywej granicznej $m_g = f(n)$ (21.101), (21.104), (21.109) i (21.110) są z reguły całkowicie wystarczające do dokładnego określenia tej krzywej w przypadku konturu regularnego lub wykazującego osobliwości na osi środkowej. Jednakże w przypadku innych osobliwości (np. skokowa zmiana szerokości przekroju w przypadku dwuteownika) może okazać się niezbędne dodatkowe przyjmowanie osi Y w miejscach występowania takich osobliwości; należy wtedy zastosować wzory ogólne (21.98), i (21.99). W pracy [778] wykazano, iż osobliwości równania konturu rzutują na osobliwości krzywych granicznych poprzez pochodne o dwa rzędy wyższe; tak więc skokowa zmiana szerokości przekroju powoduje nieciągłość drugiej pochodnej funkcji $m_g = f(n)$, nieciągłość pierwszej pochodnej równania konturu powoduje nieciągłość trzeciej pochodnej funkcji $m_g = f(n)$ itd.

21.6.3. Szeregi potęgowe dla typowych kształtów przekroju. Podamy obecnie kilka typowych przykładów rozwinięć równań krzywych granicznych w uogólnione szeregi potęgowe.

W przypadku przekroju prostokątnego $\beta_0 = 1$, $\beta_j = 0$ dla $j \geq 1$, (dla dowolnego położenia osi wyjściowej Y), podstawiając $\psi_0 = 2$, $\psi_1 = 3/2$, $\psi_2 = 12$, $\eta_1 = \eta_2 = 3$, $\mu = 0$, otrzymujemy rozwiązanie ściśle K. GIRKMANN [173]

$$(21.111) \quad m_g = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} n^2;$$

różnica w stosunku do zapisu (21.35) wynika z odmiennej tu definicji m_g , mianowicie $m_g = M_g/\bar{M}_g$.

Przekrój kołowy i eliptyczny możemy potraktować łącznie, bowiem odpowiednie równania konturów są we wprowadzonych współrzędnych bezwymiarowych $\beta = \beta(u)$ identyczne. Współczynniki kształtu przekroju wynoszą tutaj

$$\psi_0 = \frac{8}{\pi}, \quad \psi_1 = \frac{16}{3\pi}, \quad \psi_2 = \frac{64}{\pi}, \quad \eta_1 = \eta_2 = 4.$$

Przyjmując oś Y jako oś środkową, zapiszemy równanie konturu w postaci

$$(21.112) \quad \beta = \sqrt{1-4u^2} = 1 - 2u^2 - 2u^4 - 4u^6 - \dots,$$

bowiem mamy tu $H = 2R$, oraz $\zeta = R$ odpowiada $u = 1/2$. Parametry μ i ν dla szeregu (21.112) są równe $\mu = 0$, $\nu = 2$, zatem podstawienie odpowiednich współczynników β_j , wynikających z rozwinięcia (21.112), do wzorów (21.106) i (21.107), daje w wyniku szereg

$$(21.113) \quad m_g = \frac{16}{3\pi} - \frac{\pi}{2} n^2 - \frac{\pi^3}{384} n^4 - \frac{13\pi^5}{184320} n^6 - \dots$$

$$(21.113a) \quad m_g = 1,69765 - 1,57080n^2 - 0,08075n^4 - 0,02158n^6 - \dots$$

Przyjmując natomiast oś Y jako przechodzącą przez skrajny górny punkt przekroju, zapiszemy równania konturu w formie (którą można otrzymać z (21.112) zastępując u przez $u - 1/2$)

$$(21.114) \quad \beta = 2\sqrt{u-u^2} = 2u^{1/2} - u^{3/2} - \frac{1}{4}u^{5/2} - \frac{1}{8}u^{7/2} - \dots$$

W tym przypadku $\mu = 1/2$, $\nu = 1$; wykorzystując (21.97) i (21.109) otrzymujemy ostatecznie rozwinięcie

$$(21.115) \quad m_g = 4(1-n) - \frac{3^{5/3}\pi^{2/3}}{5 \cdot 2^{1/3}} (1-n)^{5/3} - \frac{3^{7/3}\pi^{4/3}}{35 \cdot 2^{11/3}} (1-n)^{7/3} - \frac{33\pi^2}{11200} (1-n)^3 - \dots,$$

$$(21.115a) \quad m_g = 4(1-n) - 2,12482(1-n)^{5/3} - 0,13437(1-n)^{7/3} - 0,02908(1-n)^3 - \dots$$

Szereg ten jest lepiej zbieżny niż (21.113). Istotnie, $n = \pm 1$ jest punktem osobliwym krzywej [osobliwość ta jest wyraźnie widoczna z postaci szeregu (21.115)], zatem szereg (21.113) może mieć promień zbieżności R_n równy co najwyżej $R_n = 1$, natomiast promień zbieżności szeregu (21.115) może wynosić $R_n = 2$. Trzecie typowe położenie osi Y (przechodzenie przez skrajny dolny punkt konturu) prowadzi do rozwinięcia (21.115), w którym jedynie $(1-n)$ należy zastąpić przez $(1+n)$.

Nieco bardziej złożony jest przypadek przekroju pierścieniowego (rury grubościennej). Oznaczmy promień wewnętrzny rury przez r , zewnętrzny przez R , stosunek promieni przez $r/R = \varphi$. Bezwymiarowe parametry ψ i η wynoszą tutaj

$$(21.116) \quad \psi_0 = \frac{8}{\pi(1+\varphi)}, \quad \psi_1 = \frac{16(1+\varphi+\varphi^2)}{3\pi(1+\varphi)(1+\varphi^2)}$$

$$\psi_2 = \frac{64}{\pi(1+\varphi)(1+\varphi^2)}, \quad \eta_1 = \eta_2 = \frac{4}{1+\varphi^2}.$$

Szerokość przekroju jest tu określona dwoma wzorami; przyjmując, iż oś Y pokrywa się

z osią symetrii, otrzymujemy

$$(21.117) \quad b = 2(\sqrt{R^2 - \zeta^2} - \sqrt{r^2 - \zeta^2}) \quad \text{dla} \quad \zeta \leq r,$$

$$(21.118) \quad b = 2\sqrt{R^2 - \zeta^2} \quad \text{dla} \quad \zeta \geq r.$$

Dokonując rozwinięcia «wokół czystego zginania», musimy wykorzystać wzór (21.117). Ponieważ w rozważanym przypadku $B = 2(R-r)$, zatem bezwymiarowa szerokość β jest określona wzorem

$$(21.119) \quad \beta = \frac{\sqrt{1-4u^2} - \sqrt{\varphi^2 - 4u^2}}{1-\varphi} = 1 + \frac{2}{\varphi} u^2 + \\ + \frac{2(1+\varphi+\varphi^2)}{\varphi^3} u^4 + \frac{4(1+\varphi+\varphi^2+\varphi^3+\varphi^4)}{\varphi^5} u^6 + \dots$$

Podstawiając określone tym rozwinięciem współczynniki β_j do (21.106) i (21.107) otrzymujemy

$$(21.120) \quad m_\theta = \frac{16(1+\varphi+\varphi^2)}{3\pi(1+\varphi)(1+\varphi^2)} - \frac{\pi(1+\varphi)}{2(1+\varphi^2)} n^2 + \frac{\pi^3(1+\varphi)^3}{384\varphi(1+\varphi^2)} n^4 + \\ + \frac{\pi^5(3-7\varphi+3\varphi^2)(1+\varphi)^5}{184320\varphi^3(1+\varphi^2)} n^6 + \dots$$

Podstawiając $\varphi = 0$ otrzymujemy szereg rozbieżny, a nie szereg (21.113); istotnie, przedział ważności wzoru i rozwinięcia (21.119) zmierza tu do zera i szereg (21.120) jest zbieżny jedynie w punkcie $n = 0$. W przypadku ogólnym szereg (21.120) określa krzywą nośności granicznej w pewnym przedziale $|n| \leq n^*$, gdzie n^* odpowiada osi nieciągłości naprężeń stycznej do wewnętrznego okręgu i wynosi

$$(21.121) \quad n^* = 1 - \frac{2 \arccos \varphi - 2\varphi\sqrt{1-\varphi^2}}{\pi(1-\varphi^2)};$$

odpowiedni moment zginający m_θ^* jest równy

$$(21.122) \quad m_\theta^* = \frac{16\sqrt{1-\varphi^2}}{3\pi(1+\varphi^2)}.$$

Aby uzyskać rozwinięcie w otoczeniu czystego rozciągania, wykorzystamy równanie (21.118) z podstawieniem $R-\zeta$ zamiast ζ ;

$$(21.123) \quad \beta = \frac{2\sqrt{u-u^2}}{1-\varphi} = \frac{2}{1-\varphi} u^{1/2} - \frac{1}{1-\varphi} u^{3/2} - \frac{1}{4(1-\varphi)} u^{5/2} - \dots$$

Wzory (21.97) oraz (21.116) prowadzą do wyniku

$$(21.124) \quad m_\theta = \frac{4}{1+\varphi^2} (1-n) - \frac{3^{5/3}\pi^{2/3}(1-\varphi^2)^{2/3}}{5 \cdot 2^{1/3}(1+\varphi^2)} (1-n)^{5/3} - \\ - \frac{3^{7/3}\pi^{4/3}(1-\varphi^2)^{4/3}}{35 \cdot 2^{11/3}(1+\varphi^2)} (1-n)^{7/3} - \frac{33\pi^2(1-\varphi^2)^2}{11200(1+\varphi^2)} (1-n)^3 + \dots$$

W przypadku przekroju pierścieniowego cienkościennego $\varphi \rightarrow 1$, otrzymujemy ze wzoru (21.120)

$$(21.125) \quad m_g = \frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{2} n^2 + \frac{\pi^3}{96} n^4 - \frac{\pi^5}{11\,520} n^6 + \dots$$

Jest to rozwinięcie wzoru ścisłego

$$(21.126) \quad m_g = \frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} n,$$

podanego przez A. A. GWOZDIEWA [846] w nieco innym zapisie. Uzyskanie przejścia granicznego ze wzoru (21.124) nie jest możliwe, bowiem zakres stosowności tego szeregu maleje wtedy do zera.

W niektórych przypadkach uogólnione szeregi potęgowe prowadzą do wzorów ścisłych o postaci zamkniętej. I tak np. w przypadku przekroju o kształcie rombu otrzymujemy

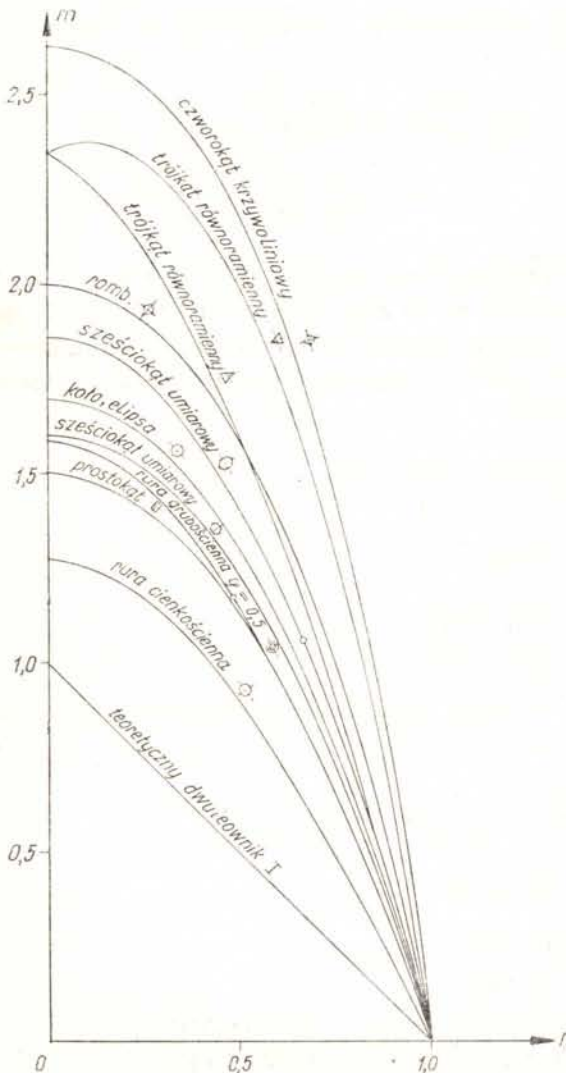
$$(21.127) \quad m_g = 6(1-n) - 4(1-n)^{3/2};$$

w przypadku przekroju trójkątnego równoramiennego

$$(21.128) \quad m_g = 8(1+n) - 4\sqrt{2}(1+n)^{3/2}.$$

Inne przykłady wzorów o postaci zamkniętej, rozwinięć w uogólnione szeregi potęgowe i tablice liczbowe podaje praca [778]. Tablicę wzorów o postaci zamkniętej, obejmującą również typowe schematyzowane profile cienkościenne, zamieścił w opracowaniu monograficznym [891] I. L. DIKOWICZ. Przypadek przekrojów dwuteowych był szczegółowo badany w pracach L. S. BEEDLE [23] i M. COMO [75].

Przebiegi krzywych nośności granicznej $m_g = f(n)$ dla typowych kształtów przekroju poprzecznego podaje rys. 105, zaczerpnięty z pracy [778].



Rys. 105. Krzywe nośności granicznej w płaszczyźnie $n-m$ dla różnych kształtów przekroju

21.6.4. Zastosowanie aproksymacji jednokrotnie optymalnej. Dla pewnych zastosowań ważna jest możliwość przedstawienia krzywych granicznych prostymi wzorami przybliżonymi o jednolitej budowie; za szczególnie dogodnie uważa się przybliżanie wielomianami. Dobór współczynników takich wielomianów aproksymacyjnych może być przeprowadzany na różnorodnych drogach, jednak poważne zalety wykazuje tu omówiona w p. 13.12 aproksymacja jednokrotnie optymalna, wykorzystująca warunki zgodności na brzegach przedziału, a jednocześnie minimalizująca maksimum odchylenia funkcji.

Dla przekrojów bisymetrycznych, dla których wystarczy rozważać przedział $0 \leq n \leq 1$, zaproponowano w pracy [778] aproksymację

$$(21.129) \quad m_g = a + bn^2 + cn^4,$$

przy czym współczynniki a , b i c zostały określone z warunków zgodności funkcji na obu brzegach przedziału i z warunku minimalizacji odchylenia; ponadto warunek zgodności pochodnej dm_g/dn dla $n = 0$, równej zeru, jest spełniony automatycznie. Jest to więc aproksymacja typu 2+1+1 stosownie do oznaczeń wprowadzonych w pracy [775]. Współczynniki a , b i c oraz największy błąd aproksymacji Δ (różnica wartości bezwymiarowych momentów m_g) zostały zestawione w tablicy 5; trzy rozważane kształty przekroju pokazano na rys. 106.

Tablica 5. Współczynniki aproksymacji jednokrotnie optymalnej funkcji $m_g = f(n)$

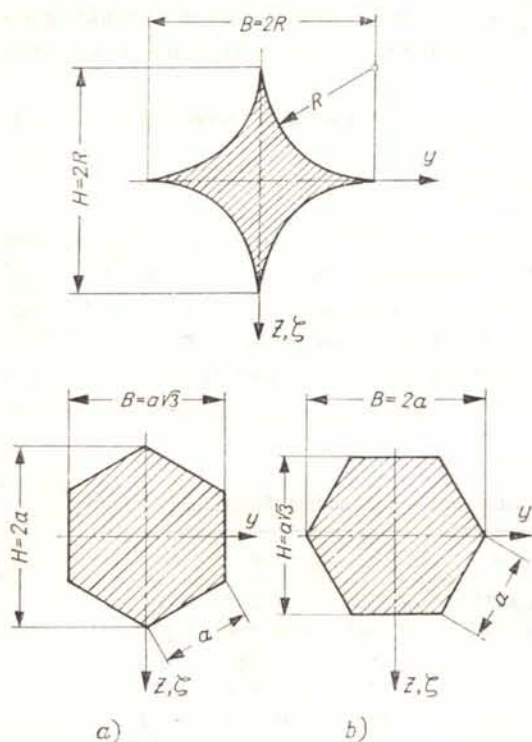
Kształt przekroju	a	b	c	$ \Delta \ll$
Koło, elipsa	1,6977	-1,5294	-0,1683	0,0053
Rura grubościenna $\varphi = 1/2$	1,5845	-1,7563	0,1718	0,0150
Rura cienkościenna	1,2732	-1,5584	0,2852	0,0012
Czworobok krzywoliniowy	2,6263	-1,3375	-1,2888	0,0371
Romb	2,0000	-1,4710	-0,5290	0,0139
Sześciokąt umiarowy (a)	1,8667	-1,7060	-0,1607	0,0137
Sześciokąt umiarowy (b)	1,6000	-1,4004	-0,1996	0,0012

Błędy aproksymacji, podane w ostatniej kolumnie, mogą być uznane za bardzo małe, chociaż klasyczne metody oszacowania błędów nie prowadzą tu z reguły do żadnego wyniku, bowiem niektóre pochodne rozważanej funkcji nie są w ogóle ograniczone wewnątrz przedziału $0 < n < 1$. Otrzymanie na podobnej drodze wyników dla przekrojów monosymetrycznych nie przedstawiłoby również poważniejszych trudności, należałoby jednakże rozpatrywać cały przedział $-1 \leq n \leq 1$.

Inne aproksymacje, w szczególności dla przekrojów dwuteowych, proponują T. R. HIGGINS [218], B. G. NEAL [460] oraz CH. MASSONNET i M. SAVE [395]. Pewne przybliżone metody graficzne określania nośności granicznej w rozważanym przypadku podali L. L. WALTER [834] i C. W. RABINOWICZ [1125].

21.6.5. Niejednorodność materiału. Zastosowania. Nośność graniczna przekrojów w przypadku niejednorodności materiału była badana w znacznym stopniu w związku z konstrukcjami żelbetowymi. Sporo uwagi poświęca tym zagadnieniom w swej

monografii [846] A. A. GWOZDIEW. Z innych prac dotyczących nośności niejednorodnego przekroju w przypadku jednoczesnego zginania i rozciągania lub ściskania wymienimy badania B. BARBARITO [13], G. GIANNELLI [168], A. RAITHEL i B. BARBARITO [574] (beton zbrojony), oraz B. BARBARITO i S. AIELLO [14] (beton sprężony); przegląd prac



Rys. 106. Niektóre kształty przekroju objęte tablicą 5

włoskich z tego zakresu podaje E. GIANGRECO [167]. Podobnym zagadnieniem, szczególnie pod kątem widzenia zastosowań w teorii łuków, zajmowali się A. SAWCZUK i M. JANAS [619, 291].

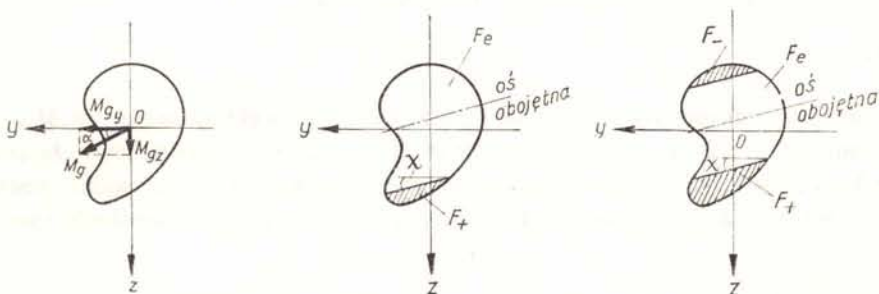
Rozważany przypadek nośności granicznej przekroju znajduje szczególnie częste zastosowanie w teorii nośności granicznej łuków i ram. Podstawy teorii podali tu E. T. ONAT i W. PRAGER [488, 489]. Dalszymi zastosowaniami w teorii ram zajmowali się H. TANAKA [692], T. R. HIGGINS [218] i L. S. BEEDLE [23]; w teorii belek na podporach nieprzesuwnych — R. M. HAYTHORNTHWAITTE [204] i Z. WASZCZYŻYŃ [726, 727, 728]. Weryfikację doświadczalną teorii nośności granicznej łuków przeprowadził T. KOZŁOWSKI [322]. Nośność niejednorodnego łuku kolistego, modelującego przekrój rury poddanej jednocześnie działaniu ciśnienia wewnętrznego i zginania rozpatrywał M. MROWIEC [429].

Wspomniemy jeszcze o zastosowaniach innego typu. A. F. ACHMIEROW [793] badał wpływ siły osiowej na przebieg procesu technologicznego gięcia; stwierdził on istotny wpływ kolejności przyłożenia obciążeń na ostateczny kształt elementu i rozkład naprężeń resztkowych. T. NONAKA [466] badał wpływ siły osiowej na plastyczne zginanie belek w wyniku obciążeń uderowych.

21.7. Zginanie ukośne (podwójne)

21.7.1. Sprężysto-plastyczne zginanie ukośne prętów o dowolnym przekroju. Uzasadnione jest traktowanie zginania ukośnego jako przypadku złożonego w teorii plastyczności; występują tu typowe dla obciążenia złożonego krzywe graniczne, analogiczne prawa fizyczne itp. Nawet w przypadku przekroju kołowego lub pierścieniowego, gdy zginanie w każdej płaszczyźnie jest zginaniem prostym, można odnieść pewne korzyści traktując je sztucznie jako ukośne; takim podejściem posłużył się np. JU. N. RABOTNOW [1127], który podał pewien model wzmocnienia plastycznego, ilustrujący powstawanie naroży na powierzchni plastyczności.

Rozważmy sprężysto-plastyczne zginanie ukośne prętów o dowolnym przekroju w przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Przy braku symetrii możliwe jest zarówno uplastycznienie jedno- jak i obustronne (rys. 107). Podobszary przekroju,



Rys. 107. Etapy uplastycznienia przy zginaniu ukośnym

na których występuje uplastycznienie w wyniku rozciągania i w wyniku ściskania, oznaczymy odpowiednio przez F_+ i F_- , podobszar sprężysty przez F_e , podobnie jak w p. 21.2. W takim razie rozkład naprężeń można określić wzorami

$$(21.130) \quad \begin{aligned} \sigma &= -\sigma_0 && \text{na powierzchni } F_-, \\ \sigma &= Ay + Bz + C && \text{na powierzchni } F_e, \\ \sigma &= +\sigma_0 && \text{na powierzchni } F_+. \end{aligned}$$

Zakładając zerowanie się siły podłużnej (przypadek zginania ukośnego z siłą podłużną P_1/S_3 rozpatrzmy oddzielnie) otrzymujemy najpierw związek

$$(21.131) \quad \int_F \int \sigma dF = -\sigma_0 F_- + AS_{ze} + BS_{ye} + CF_e + \sigma_0 F_+ = 0,$$

gdzie S_{ze} i S_{ye} oznaczają momenty statyczne powierzchni F_e względem odpowiednich osi. Warunki momentów prowadzą do związków

$$(21.132) \quad M_{gy} = M_g \cos \alpha = \int_F \int \sigma z dF = -\sigma_0 S_{y-} + AD_{yze} + BI_{ye} + CS_{ye} + \sigma_0 S_{y+},$$

$$M_{gz} = M_g \sin \alpha = \int_F \int \sigma y dF = -\sigma_0 S_{z-} + AI_{ze} + BD_{yze} + CS_{ze} + \sigma_0 S_{z+},$$

w których I_y , I_z i D_{yz} oznaczają momenty bezwładności i dewiacji odpowiednich części

przekroju poprzecznego. Ponadto z warunków ciągłości naprężeń otrzymujemy następujące równania prostych, rozgraniczających podobszary F_+ i F_c :

$$(21.133) \quad Ay + Bz + C = \sigma_0$$

oraz podobszary F_e i F_- ;

$$(21.134) \quad Ay + Bz + C = -\sigma_0.$$

Równania (21.131) i (21.132) można traktować w przypadku dwustronnego uplastycznienia jako układ trzech równań o trzech niewiadomych A , B i C . Nie są to równania liniowe, gdyż przez związki (21.133) i (21.134) poszukiwane niewiadome pojawiają się również w granicach całkowania lub, inaczej mówiąc, w wielkościach F , S , I oraz D . Rozwiązanie tego układu nawet w większości przypadków szczególnych natrafia na poważne trudności.

Po obliczeniu stałych A , B i C możemy określić kąt χ nachylenia osi obojętnej oraz obu granic sprężysto-plastycznych (rys. 107) ze wzoru

$$(21.135) \quad \chi = \arctg \frac{A}{B};$$

kąt ten jest na ogół nie tylko różny od kąta α nachylenia wektora momentu M_g , ale ponadto zmieniający się ze wzrostem tego momentu. Wypada tu wspomnieć, że podobna zmiana kąta χ występuje na ogół również przy zginaniu prostym w przypadku przekrojów nie wykazujących żadnej symetrii. Oś obojętna jest oczywiście określona równaniem

$$(21.136) \quad Ay + Bz + C = 0.$$

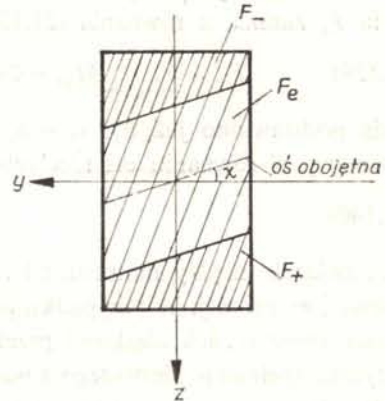
Określenie stałych A i B pozwala ponadto na napisanie równań różniczkowych linii ugięcia belki, bowiem (przy założeniu nierozciągłości osi belki) krzywizna osi w płaszczyźnie xy wynosi $\kappa_x = A/E$, natomiast krzywizna osi w płaszczyźnie xz jest równa $\kappa_y = B/E$.

W przypadku jednostronnego uplastycznienia, np. po stronie rozciągania, należy w równaniach (21.131) i (21.132) podstawić $F_- = S_y = S_z = 0$, a warunek ciągłości (21.134) opuścić. Pozostaje wtedy nadal do rozwiązania układ trzech równań o trzech niewiadomych.

Pierwsze ujęcie problemu sprężysto-plastycznego zginania ukośnego należy do I. N. KUDRIAWCEWA [1008], który ponadto uwzględnił możliwość istnienia różnych wartości granicy plastyczności po stronie rozciągania σ_{0+} i po stronie ściskania σ_{0-} . Dalsze badania należą do A. ORMERODA [508]. Przypadki szczególne przekrojów niesymetrycznych rozważała A. I. STRELBICKA (albo O. I. STRELBYČKA w jęz. ukraińskim) — praca [1174] została poświęcona analizie teoretycznej, a napisana wraz z JU. L. BIRIUKOWICZEM i E. O. PRIADKO praca [1185] badaniom doświadczalnym ukośnego sprężysto-plastycznego zginania belek o przekroju ceowym; S. D. KUDRIAWCEW [1009, 1010] podał szczegółową analizę kolejnych zakresów pracy niesymetrycznych przekrojów dwuteowych przy zginaniu ukośnym oraz przybliżoną metodę obliczania ugięć sprężysto-plastycznych.

Teorię zginania ukośnego prętów o dowolnym przekroju w przypadku potęgowego wzmocnienia plastycznego podał A. JAKUBOWICZ [289]; przypadek ten jest o tyle prosty, że przy ustalonym kącie działania momentu zginającego α kąt nachylenia osi obojętnej χ jest również stały, niezależny od wartości momentu M_g .

21.7.2. Sprężysto-plastyczne zginanie prętów o przekrojach bisymetrycznych. W przypadku przekrojów o podwójnej symetrii równania wyprowadzone w p. 21.7.1 ulegają wyraźnemu uproszczeniu. Oś obojętna przechodzi wtedy zawsze przez środek ciężkości przekroju, a powierzchnie F_+ i F_- są sobie równe; uplastycznienie jednostronne nie może wystąpić (przy braku siły podłużnej). Na rysunku 108 pokazano przy-



Rys. 108. Sprężysto-plastyczne zginanie ukośne przekroju prostokątnego

kładowo rozkład stref dla przekroju prostokątnego. Ze względu na symetrię wystarczy rozpatrywać połowę przekroju: bądź $z > 0$, bądź $y > 0$, bądź też po jednej stronie osi obojętnej, np. $\sigma > 0$. Równanie (21.131) jest spełnione tożsamościowo, a równania (21.132) przybierają postać

$$(21.137) \quad M_{oy} = 2(AD'_{yze} + BI'_{yze} + \sigma_0 S_{y+}), \quad M_{oz} = 2(AI'_{ze} + BD'_{yze} + \sigma_0 S_{z+}),$$

gdzie przecinkami u góry oznaczono wielkości odnoszące się do połowy strefy sprężystej. Równania te wraz z warunkiem ciągłości naprężeń na granicy sprężysto-plastycznej

$$(21.138) \quad Ay + Bz = \sigma_0,$$

określają A i B , a następnie kąt χ (21.135).

Oprócz wspomnianej ogólnej pracy I. N. KUDRIAWCEWA [1008] wymienimy tu badania A. I. STRELBICKIEJ [1174, 1185], dotyczące symetrycznego przekroju dwuteowego; E. R. CZERNA i M. L. CZERNOW [1228] określali teoretycznie i doświadczalnie ugięcia belki o przekroju dwuteowym oraz rozkład stref uplastycznionych na belce; N. L. CZERNOW i S. D. KUDRIAWCEW [1233] badali doświadczalnie nośność przy obciążeniach ruchomych, a B. I. LUBAROW [1051] ujął teoretycznie problem plastycznego przystosowania się do obciążeń zmiennych w przypadku zginania ukośnego.

Szczegółowe badania nad sprężysto-plastycznym ukośnym zginaniem belki o przekroju prostokątnym przeprowadził D. S. BROOKS [45]. Pomimo względnej prostoty równań (21.137) w tym przypadku, efektywne rachunki były prowadzone przy użyciu maszyny cyfrowej. Badano zależność zmian kąta nachylenia osi obojętnej χ w zależności od całkowitego momentu zginającego M_g przy ustalonym kącie działania momentu α : autor stwierdził, iż kąt ten może zmieniać się do 7° w przypadku przekroju kwadratowego, a do 13° w przypadku przekroju prostokątnego o stosunku boków 1:4. Praca [45] zawiera również analizę ugięć belki w rozważanym przypadku.

Wzmocnienie plastyczne przy ukośnym zginaniu belki o przekroju prostokątnym rozważał A. J. BARRETT [15], określając zależność między momentami i krzywiznami osi belki.

21.7.3. Nośność graniczna przekroju pręta przy zginaniu ukośnym. Nośność przekroju zostaje wyczerpana przy całkowitym uplastycznieniu tego przekroju; strefa F_e zanika, a równania (21.131) i (21.132) upraszczają się do postaci

$$(21.139) \quad F_-^1 = F_+, \quad M_{gy} = 2\sigma_0 S_{y+}, \quad M_{gz} = 2\sigma_0 S_{z+},$$

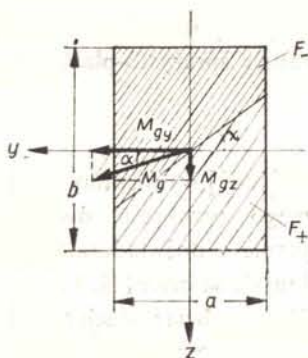
gdzie podstawiono już $S_{y-} = -S_{y+}$ i $S_{z-} = -S_{z+}$. Równania (21.139) określają dwa parametry w równaniu osi nieciągłości (obojętnej) o postaci ogólnej

$$(21.140) \quad z = A_1 y + B_1$$

oraz związek między momentami zginającymi $f(M_{gy}, M_{gz}) = 0$, czyli równanie krzywej nośności granicznej. W przypadku przekrojów bisymetrycznych oś nieciągłości przechodzi zawsze przez środek ciężkości przekroju, mianowicie przyjęcie $B_1 = 0$ powoduje automatyczne spełnienie pierwszego z warunków (21.139), a pozostałe dwa określają A_1 i prowadzą do równania krzywej granicznej.

Dla przykładu rozpatrzmy przekrój prostokątny (rys. 109). Wyrażając momenty statyczne S_{y+} i S_{z+} przez kąt χ , otrzymujemy tutaj (przy założeniu $\chi \leq \arctan b/a$)

$$(21.141) \quad M_{gy} = \frac{1}{4} ab^2 \sigma_0 - \frac{1}{12} a^3 \sigma_0 \operatorname{tg}^2 \chi, \quad M_{gz} = \frac{1}{6} a^3 \sigma_0 \operatorname{tg} \chi.$$



Rys. 109. Całkowite uplastycznienie przekroju prostokątnego przy zginaniu ukośnym

Rugując z tych równań $\operatorname{tg} \chi$ dochodzimy do równania odcinka krzywej nośności granicznej

$$(21.142) \quad M_{gy} = \frac{1}{4} ab^2 \sigma_0 - 3 \frac{M_{gz}^2}{a^3 \sigma_0},$$

lub inaczej w postaci bezwymiarowej

$$(21.143) \quad m_{gy} = 1 - \frac{3}{4} m_{gz}^2,$$

gdzie

$$(21.144) \quad m_{gy} = \frac{M_{gy}}{M_{gy}} = \frac{4M_{gy}}{ab^2\sigma_0}, \quad m_{gz} = \frac{M_{gz}}{M_{gz}} = \frac{4M_{gz}}{a^2b\sigma_0}$$

Kąt nachylenia wektora momentu zginającego α jest tu określony wzorem

$$(21.145) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_{gz}}{M_{gy}} = \frac{\operatorname{tg} \chi}{\frac{3}{2} \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \chi}$$

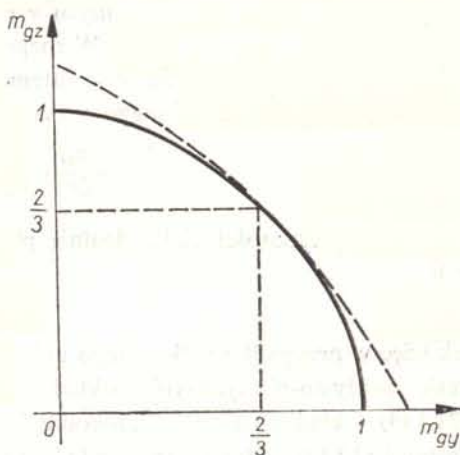
W zastosowaniach praktycznych z reguły dany jest kąt α , a poszukujemy kąta χ ; rozwiązanie równania (21.145) ze względu na χ można zapisać w postaci

$$(21.146) \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{3b^2 \operatorname{tg} \alpha}{a^2 \left(1 + \sqrt{1 + 3 \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)}$$

W przypadku granicznym $\chi = \arctg \frac{b}{a}$ otrzymujemy $M_{gy} = \frac{1}{6} ab^2\sigma_0$, $M_{gz} = \frac{1}{6} a^2b\sigma_0$, zatem $m_{gy} = m_{gz} = \frac{2}{3}$ oraz $\alpha = \arctg \frac{a}{b} = \frac{\pi}{2} - \chi$. Gdy α i χ są większe od tych wartości granicznych, role kierunków y i z ulegają zamianie i zamiast równania paraboli (21.143) otrzymujemy

$$(21.147) \quad m_{gz} = 1 - \frac{3}{4} m_{gy}^2.$$

Ćwiartkę krzywej nośności granicznej dla przekroju prostokątnego pokazano na rys. 110; pozostałe ćwiartki wykazują pełną symetrię.



Rys. 110. Krzywa nośności granicznej dla przekroju prostokątnego przy zginaniu ukośnym

Badanie nośności granicznej przekroju przy zginaniu ukośnym jest problemem prostszym od badania zakresu sprężysto-plastycznego i pierwsze prace ograniczały się do tego właśnie problemu. Są to prace B. N. GORBUNOWA i W. G. CZUDNOWSKIEGO [858] z roku

1935 oraz B. N. GORBUNOWA i S. A. PALCZEWSKIEGO [859], dotyczące przekroju prostokątnego i dwuteowego. Liczne dalsze przypadki szczególne rozpatrywał A. A. GWOZDIEW [846]. Szczegółowe badania przekroju dwuteowego i ceowego oraz odpowiednie tablice liczbowe zawiera praca O. I. STRELBYCIEJ [1183]. O. N. TOCKIJ [1210] i E. H. BROWN [46] badali miejsce geometryczne położenia środków ciężkości połówek przekroju przy różnych kierunkach χ , wyznaczających efektywnie nośność przekroju; TOCKIJ stwierdził, iż krzywa taka nieznacznie odbiega od elipsy i podał odpowiednie współczynniki poprawkowe, natomiast BROWN wprowadził nazwę «krzywa centroidalna» i zbadał jej ogólne własności.

Teoretyczne i doświadczalne badania nad nośnością graniczną belek statycznie niewyznaczalnych o przekroju prostokątnym, poddanych zginaniu ukośnemu, prowadził H. B. HARRISON [202].

21.8. Skręcanie ze ścinaniem⁽¹⁾

21.8.1. Sformułowanie zagadnienia. Przypadek jednoczesnego skręcania ze ścinaniem można również sklasyfikować jako P_1/S_2 ; wprawdzie w poszczególnych punktach przekroju występują z reguły dwie składowe naprężenia stycznego, jednakże zawsze dadzą się one dodać geometrycznie i problemy uplastycznienia można badać ogólnie bez przyjęcia określonej hipotezy wyężeniowej. Rozkład naprężeń przy pełnym uplastycznieniu ciała idealnie plastycznego daje się przy tym określić bez analizy odkształceń (problem wewnętrznie statycznie wyznaczalny).

Rozpatrywany przypadek nie posiada większego znaczenia w odniesieniu do przekroju prętów prostych, bowiem ścinaniu towarzyszy wtedy zawsze zginanie (co najmniej w przekrojach sąsiednich) i należy rozpatrywać przypadek bardziej złożony. Natomiast samo skręcanie ze ścinaniem może wystąpić w prętach kołowo zakrzywionych (rys. 111) i tym przypadkiem zajmiemy się obecnie.

Przyjmijmy układ współrzędnych walcowych r, θ, z i zajmijmy się najpierw określeniem rozkładu naprężeń $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$. W rozpatrywanym przypadku pochodne naprężeń względem współrzędnej θ są równe zeru, zatem z drugiego z warunków równowagi wewnętrznej (7.15) (jedyne nie spełnione tożsamościowo) otrzymujemy

$$(21.148) \quad \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{\theta r}}{r} = 0.$$

Warunek plastyczności ciała idealnie plastycznego daje się zapisać w postaci $|\tau| = \tau_0$, czyli

$$(21.149) \quad \tau_{\theta r}^2 + \tau_{\theta z}^2 = \tau_0^2.$$

Tak więc w przypadku całkowitego uplastycznienia lub w strefach uplastycznionych w zakresie sprężysto-plastycznym rozkład naprężeń jest określony układem równań (21.148) i (21.149). Układ ten można najdogodniej rozwiązać przez wprowadzenie funkcji naprężeń Ψ wzorami (12.14). Otrzymujemy wtedy równanie

$$(21.150) \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 = r^4 \tau_0^2 = \bar{\tau}_0^2(r, z),$$

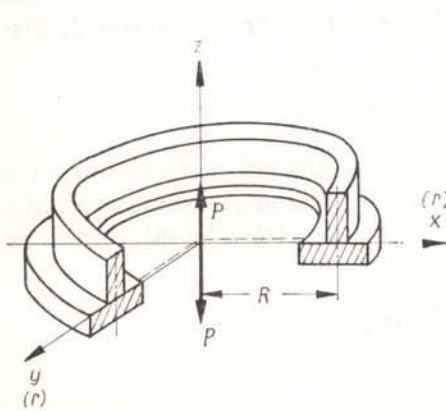
⁽¹⁾ Punkt opracowany przy wykorzystaniu rozprawy doktorskiej M. GALOSA.

gdzie $\bar{\tau}_0 = r^2\tau_0$ ma charakter pewnej «zredukowanej» granicy plastyczności przy ścinaniu. Jeżeli τ_0 zależy od r i z , to mamy do czynienia z niejednorodnością materiału, która zresztą nie komplikuje rozważań w sposób istotny. Zamiast (21.150) możemy napisać

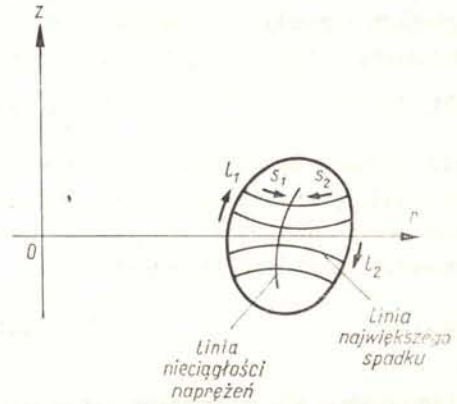
$$(21.151) \quad |\text{grad } \Psi| = \bar{\tau}_0(r, z).$$

Równanie to jest identyczne z równaniem plastycznego skręcania niejednorodnego pręta pryzmatycznego. Funkcję $\bar{\tau}_0 = r^2\tau_0$ można nazwać «niejednorodnością zastępczą». Równanie (21.151) można interpretować jako określające największy spadek powierzchni funkcji naprężeń Ψ . Linie największego spadku, a właściwie ich rzuty na płaszczyznę podstawy (przekroju) określone są równaniem różniczkowym zwyczajnym

$$(21.152) \quad z' \frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial r} - \frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial z} = - \frac{z'' \bar{\tau}_0}{1 + z'^2},$$



111. Skręcanie ze ścinaniem pręta kołowo zakrzywionego



Rys. 112. Wyznaczanie linii nieciągłości naprężeń

gdzie $z = z(r)$ jest równaniem poszukiwanej linii największego spadku. Przy parametryzacji warunku plastyczności (21.149) wzorami typu (10.79) i podstawieniu do (21.108) otrzymuje się z uwagi na parametr ψ równanie różniczkowe quasi-liniowe; odpowiednim równaniem charakterystyk jest znowu (21.152), tak że często linie największego spadku bywają nazywane charakterystykami.

Warunek brzegowy, wynikający z ogólnej formy naprężeniowych warunków brzegowych dla rozpatrywanego przypadku, sprowadza się do żądania prostokątowości linii największego spadku do konturu. Po określeniu jednoparametrowej rodziny tych linii możemy z kolei wyznaczyć wartości samej funkcji Ψ , bowiem wzdłuż linii największego spadku

$$(21.153) \quad \int \left| \frac{d\Psi}{dm} \right| = \bar{\tau}_0(r, z),$$

gdzie dm jest elementem łuku tej linii.

Równanie (21.153) określa funkcję Ψ w poszczególnych podobzarach przekroju pręta. Granicami tych podobzarów w przypadku całkowitego uplastycznienia są linie

nieciągłości naprężeń; można je określić z warunku równych wartości funkcji Ψ w obu podobzszarach (żądanie to zapewnia spełnienie wymaganych warunków ciągłości, omówionych w p. 7.3). Jeżeli mianowicie przez l oznaczymy parametr linii największego spadku (odpowiadający pewnej parametryzacji równania konturu), a przez s pewien parametr wyznaczający poszczególne punkty tej linii, to równanie linii nieciągłości można określić następująco (rys. 112)

$$(21.154) \quad \begin{aligned} \Psi_1(s_1, l_1) &= \Psi_2(s_2, l_2), \\ r_1(s_1, l_1) &= r_2(s_2, l_2), \\ z_1(s_1, l_1) &= z_2(s_2, l_2). \end{aligned}$$

Równania te pozwalają określić trzy parametry w funkcji czwartego, np. l_1 , a linię nieciągłości można ostatecznie określić w formie parametrycznej $r = r(l_1)$ i $z = z(l_1)$.

Znajomość funkcji Ψ w poszczególnych podobzszarach pozwala na określenie nośności granicznej przekroju, mianowicie momentu skręcającego M_s i siły poprzecznej T . Elementarny moment dM_s można określić wzorem

$$(21.155) \quad dM_s = [\tau_{\theta z}(r-R) - \tau_{\theta r} z] dF,$$

przy czym przez R będziemy rozumieli odległość środka ciężkości przekroju od osi z (rys. 111). Podstawienie wzorów na $\tau_{\theta z}$ i $\tau_{\theta r}$ (12.14) i odpowiednie przekształcenie (iteracja, całkowanie przez części i powrót do całki podwójnej) pozwalają określić ostatecznie moment skręcający M_s wzorem

$$(21.156) \quad M_s = 2R \int_F \int \frac{\Psi(r, z)}{r^3} dF.$$

Odpowiednia siła poprzeczna jest oczywiście równa

$$(21.157) \quad T = P = 2 \int_F \int \frac{\Psi(r, z)}{r^3} dF.$$

Wydaje się, że wobec prostego związku $M_s = TR$ wzory (21.156) i (21.157), zastosowane do przypadku całkowitego uplastycznienia przekroju, nie określają krzywej granicznej w płaszczyźnie odpowiednich uogólnionych sił wewnętrznych $M_s - T$. Istotnie, przy znanym promieniu R wielkości M_s i T nie są niezależne; dopuszczając jednak zmienność R i traktując tę wielkość jako parametr, można związki (21.156) i (21.157) uważać za parametryczne równania krzywej granicznej.

Wyprowadzone wzory są o tyle nieefektywne, że praktycznie znamy wartości funkcji $\Psi(s, l)$, gdzie s i l są poprzednio omówionymi parametrami, a nie bezpośrednio $\Psi(r, z)$. Wprowadzając jednak odpowiedni jacobian przekształcenia możemy zamiast (21.156) napisać

$$(21.158) \quad M_s = 2R \int_F \int \frac{\Psi(s, l)}{r^3(s, l)} \left| \left(\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right| ds dl,$$

a ten zapis jest już dostosowany do przyjętej metody. Podobny wzór określa siłę poprzeczną T .

21.8.2. Przypadek materiału jednorodnego. W przypadku materiału jednorodnego $\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}_0(r) = r^2\tau_0$, gdzie τ_0 jest wartością stałą. Równanie różniczkowe linii największego spadku (21.152) przybiera tu postać

$$(21.159) \quad 2z'r = -\frac{z''}{1+z'^2},$$

a całkę ogólną można zapisać w postaci

$$(21.160) \quad z = \pm \int \frac{C dr}{\sqrt{r^4 - C^2}} + D,$$

gdzie C i D są stałymi całkowania. Jeżeli przez M oznaczymy bieżący punkt konturu, sam kontur opiszemy równaniami parametrycznymi $z_M = z_M(l)$, $r_M = r_M(l)$, a parametr konturu l przyjmijmy za parametr linii największego spadku, to z warunku prostopadłości tej linii do konturu otrzymuje się (przy przyjęciu dolnej granicy całkowania równej zeru)

$$(21.161) \quad C = \frac{r_M^2 z'_M}{\sqrt{r_M'^2 + z_M'^2}}, \quad D = z_M,$$

gdzie przecinkami u góry oznaczono pochodne względem parametru l . Całka (21.160) jest całką eliptyczną. Po sprowadzeniu jej do postaci normalnej otrzymujemy

$$(21.162) \quad z = \pm \sqrt{\frac{C}{2}} \left[F\left(\arccos \frac{\sqrt{C}}{r}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F\left(\arccos \frac{\sqrt{C}}{r_M}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] + D.$$

Wykorzystując następnie związek (21.153) i warunek brzegowy $\Psi = 0$ na konturze przekroju, określimy wartości funkcji naprężeń Ψ wzdłuż linii największego spadku wzorem

$$(21.163) \quad \Psi = \tau_0 \left\{ \sqrt{\frac{C^3}{12}} \left[F\left(\arccos \frac{\sqrt{C}}{r}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F\left(\arccos \frac{\sqrt{C}}{r_M}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{r}{3} \sqrt{r^4 - C^2} - \frac{r_M}{3} \sqrt{r_M^4 - C^2} \right\}.$$

Jest to równanie typu $\Psi = \Psi(s, l)$, gdzie l jest wprowadzonym parametrem konturu, natomiast można przyjąć, że s jest tożsamościowo równe współrzędnej r . Po określeniu dla danego konturu linii nieciągłości (granic całkowania) i zastosowaniu wzoru (21.158) i analogicznego dla siły poprzecznej możemy określić nośność graniczną przekroju pręta w rozpatrywanym przypadku skręcania ze ścinaniem.

Problem nośności granicznej pręta o przekroju kołowym (ważnego ze względu na zastosowania w sprężynach śrubowych), poddanego jednoczesnemu skręcaniu i ścinaniu, rozpatrywali pierwsi w r. 1955 A. J. WANG i W. PRAGER [723], a następnie W. FREIBERGER i W. PRAGER [143] (przekroje pierścieniowe) oraz W. FREIBERGER [144] (przekroje dowolne). Autorzy ci podali również przybliżone metody graficzne określania nośności granicznej przekroju. Krzywą śrubową przestrzenną rozpatrywał D. D. IWLEW [936], uwzględniając geometrię krzywej przestrzennej, natomiast pomijając wpływ występujących wtedy siły podłużnej i momentu zginającego; w pracy [936] ograniczono się do sformułowania równań charakterystyk przy parametryzacji warunku plastyczności (10.79), natomiast nie określano bezpośrednio nośności granicznej.

21.8.3. Przykład niejednorodności materiału. W ogólnych przypadkach niejednorodności poprzecznej $\tau_0 = \tau_0(r, z)$ równanie różniczkowe linii największego spadku funkcji naprężeń Ψ (21.152) daje się bardzo rzadko efektywnie scałkować w postaci zamkniętej. Natomiast przy niejednorodności zależnej od jednej zmiennej $\tau_0 = \tau_0(r)$, a zatem i $\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}_0(r)$, całkowanie jest dość proste i otrzymujemy zamiast (21.160) ogólniejszy wzór

$$(21.164) \quad z = \pm \int \frac{C dr}{\sqrt{\bar{\tau}_0^2 - C^2}} + D.$$

Najprostszym szczególnym przypadkiem niejednorodności jest tu

$$(21.165) \quad \tau_0 = \frac{AR^2}{r^2},$$

gdzie A jest stałą o wymiarze naprężenia, bowiem wtedy niejednorodność zastępcza odpowiada jednorodności: $\bar{\tau}_0 = \tau_0 r^2 = AR^2 = \text{const}$. Tak więc (21.164) można wtedy zapisać w formie

$$(21.166) \quad z = Br + D,$$

zatem linie największego spadku są liniami prostymi.

Rozpatrzmy dla przykładu pręt o przekroju kołowym o promieniu r_0 ; promień krzywizny osi oznaczmy przez R jak poprzednio. Równanie konturu możemy zapisać w formie parametrycznej przy parametrze l

$$(21.167) \quad r_M = R + r_0 \cos l, \quad z_M = -r_0 \sin l.$$

Określając stałe B i D w równaniu (21.166) z warunku prostopadłości otrzymujemy ostatecznie następujące równanie rodziny linii największego spadku:

$$(21.168) \quad z = (R - r) \operatorname{tg} l.$$

Za parametr s , wyznaczający poszczególne punkty linii największego spadku, przyjmijmy odległość od konturu przekroju. Wtedy

$$(21.169) \quad r = R + (r_0 - s) \cos l, \quad z = -(r_0 - s) \sin l,$$

natomiast wartości funkcji naprężeń Ψ , określone równaniem (21.153), wyniosą $\Psi = AR^2 s$.

Nośność graniczna przekroju jest określona wzorem (21.158) i analogicznym dla siły poprzecznej T . Jakobian przekształcenia wynosi tu $|J| = r_0 - s$; linia nieciągłości redukuje się do punktu $s = r_0$, zatem całkowanie możemy przeprowadzić po jednym obszarze $0 \leq l \leq 2\pi$, $0 \leq s \leq r_0$. Po scałkowaniu względem l otrzymujemy

$$(21.170) \quad M_s = 2\pi AR^3 \int_0^{r_0} \frac{[2R^2 + (r_0 - s)^2] s (r_0 - s) ds}{[R^2 - (r_0 - s)^2]^{5/2}}.$$

Całka ta daje się wyrazić za pomocą funkcji elementarnych, jednakże wzór wynikowy jest bardzo złożony i nie będziemy go tu przytaczali. Natomiast prostą formę ma rozwinięcie w szereg potęgowy parametru $\alpha = r_0/R$:

$$(21.171) \quad \begin{aligned} M_s &= 2\pi Ar_0^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{10} \alpha^2 + \frac{45}{168} \alpha^4 + \dots \right), \\ T &= 2\pi Ar_0^2 \left(\frac{1}{3} \alpha + \frac{3}{10} \alpha^3 + \frac{45}{168} \alpha^5 + \dots \right). \end{aligned}$$

Wzory (21.171) określają nośność graniczną przekroju w rozpatrywanym przypadku. Nie można jednakże uważać, że są to równania pewnego fragmentu krzywej granicznej, bowiem zmiana parametru α powoduje jednocześnie zmianę niejednorodności rozpatrywanego przekroju.

22. Obciążenia typu P_2/S_2

22.1. Uwagi ogólne

22.1.1. Warunek plastyczności. W elementarnej teorii prętów zakłada się występowanie co najwyżej trzech składowych stanu naprężenia, np. $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ z tym, że z punktu widzenia wyteżeniowego składowe styczne można zawsze dodać geometrycznie i klasyfikować rozważane przypadki ogólne jako P_2/S_n . Przypadki P_1/S_2 omówiliśmy w p. 21, obecnie zajmujemy się przypadkami P_2/S_2 . Ściśle rzecz biorąc, w poszczególnych punktach ciała może wystąpić bardziej złożony stan naprężenia, głównie ze względu na inną ściśliwość ciała w zakresie sprężystym, inną w plastycznym. Nawet przy czystym zginaniu sprężysto-plastycznym belki z materiału ściśliwego A. A. ILIUSZIN stwierdził w pracy [950] występowanie czterech składowych stanu naprężenia, a więc przypadek P_4/S_1 : podobnie badany w pracy [762] przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym można by przy uwzględnieniu ściśliwości materiału sklasyfikować jako P_4/S_2 . Efekt ściśliwości może więc powodować bardzo istotne różnice z punktu widzenia teoretycznego — większe różnice w ujęciu analitycznym przy przyjmowaniu różnych hipotez wyteżeniowych i różnych praw fizykalnych — jednakże praktycznie wpływ ściśliwości na stronę ilościową zjawisk, w szczególności na przebieg krzywych granicznych jest z reguły bardzo niewielki.

Jeżeli ograniczymy się do elementarnej teorii prętów, to warunek idealnej plastyczności zarówno w oparciu o hipotezę HMH, jak i TG można zapisać w jednolitej postaci

$$(22.1) \quad \sigma^2 + c\tau^2 = \sigma_0^2$$

lub po bardziej efektywnym wyrażeniu naprężeń w dowolnym lokalnie ortogonalnym układzie współrzędnych x, α, β (gdzie współrzędna x jest odmierzana wzdłuż osi pręta)

$$(22.2) \quad \overline{\sigma_x^2} + c(\tau_{xx}^2 + \tau_{x\beta}^2) = \sigma_0^2.$$

W niektórych przypadkach, szczególnie przy posługiwaniu się współrzędnymi walcowymi, współrzędną osiową będziemy oznaczali przez z zamiast x . W przytoczonych równaniach współczynnik liczbowy c jest równy $c = 3$ według hipotezy HMH, natomiast $c = 4$ według TG. Jest również możliwe przyjmowanie pewnej innej, w szczególności pośredniej wartości c , ustalonej na drodze doświadczalnej; podejście takie, które może zresztą prowadzić do wyników o bardzo dobrej zgodności z doświadczeniami, oznacza rezygnację z zastosowania jakiejś hipotezy wyteżeniowej o charakterze ogólnym, a jedynie przyjęcie aproksymacji uzasadnionej tylko dla rozważanego przypadku jednej składowej σ i jednej (zredukowanej) składowej τ .

Jeżeli jednak zapiszemy warunek plastyczności w postaci ogólnej (22.1) lub (22.2), to wyłania się problem doboru odpowiedniego prawa fizykalnego. Prawo podobieństwa dewiatorów naprężeń i odkształceń lub prędkości odkształceń jest stowarzyszone z oma-

wianym warunkiem plastyczności tylko przy $c = 3$; przy innych wartościach tej stałej zgodność taka nie zachodzi i odpowiednie prawo fizyczne powinno zostać również określone na drodze doświadczalnej. W dalszym ciągu ograniczymy się do przyjęcia $c = 3$ i prawa podobieństwa dewiatorów (hipoteza HMH).

W przeciwieństwie do przypadków P_1/S_2 , które rozważaliśmy w p. 21, gdzie rozkład naprężeń w strefach uplastycznionych był całkowicie określony warunkiem plastyczności, w rozważanych obecnie przypadkach określenie rozkładu naprężeń w tych strefach wymaga rozwiązania pewnego układu równań, zazwyczaj różniczkowych. Będziemy więc najpierw formułować i rozwiązywać te równania, potem określimy nośność graniczną przekroju, a dopiero w ostatniej kolejności zajmiemy się zakresem sprężysto-plastycznym, którego analiza jest z reguły najtrudniejsza. Niektóre przypadki, jak rozciąganie ze skręcaniem i zginanie ze skręcaniem, wykazują jednorodność podłużną (przy założeniu pręta prostego, jednorodnego i pryzmatycznego), dadzą się więc sklasyfikować jako $P_2/S_2 \rightarrow B_2$; zajmiemy się nimi w pierwszej kolejności. Najprostszy jest tu przypadek jednoczesnego rozciągania ze skręcaniem prętów o przekrojach okrągłych (kołowym lub pierścieniowym); można go nazwać przypadkiem jednowymiarowym, bowiem naprężenia i odkształcenia zależą tylko od współrzędnej r w układzie walcowym.

22.1.2. Ogólne dolne oszacowanie krzywej nośności granicznej. Jak wspomnieliśmy, ujęcie ściśle problemów P_2/S_2 wymaga z reguły rozwiązania dość złożonych równań różniczkowych i prowadzi do wyników w formie nieco skomplikowanej. Natomiast bardzo proste, ogólne dolne oszacowanie krzywej nośności granicznej można tu uzyskać w oparciu o odpowiednio dobrane statycznie dopuszczalne pole naprężeń. Dla wielu zastosowań praktycznych podejście takie jest wystarczające, tym bardziej że oszacowanie dolne jest związane z błędem na korzyść pewności obliczeń.

Przypuśćmy, że pierwszemu z przypadków czystych odpowiada w stanie granicznym ścisły rozkład naprężeń $\sigma = \sigma_1(y, z)$, a drugiemu — ścisły rozkład naprężeń $\tau = \tau_2(y, z)$. Przy założeniu uplastycznienia całego przekroju w przypadkach czystych musi zachodzić $\sigma_1(y, z) = \pm \sigma_0$, $\tau_2(y, z) = \pm \tau_0$. W takim razie pole naprężeń

$$(22.3) \quad \sigma = \psi \sigma_1(y, z), \quad \tau = \chi \tau_2(y, z),$$

gdzie ψ i χ są pewnymi stałymi, niewątpliwie spełnia równania równowagi wewnętrznej, warunki brzegowe i wymagane warunki ciągłości wzdłuż ewentualnych linii nieciągłości. Warunek plastyczności (22.1) będzie ponadto spełniony, gdy

$$(22.4) \quad \psi^2 \sigma_1^2 + c \chi^2 \tau_2^2 = \sigma_0^2,$$

a po podstawieniu $\sigma_1^2 = \sigma_0^2$, $\tau_2^2 = \tau_0^2$ oraz $c \tau_0^2 = \sigma_0^2$ [co wynika wprost z (22.1) i definicji τ_0] otrzymujemy

$$(22.5) \quad \psi^2 + \chi^2 = 1.$$

W takim razie pole naprężeń

$$(22.6) \quad \sigma = \psi \sigma_1(y, z), \quad \tau = \sqrt{1 - \psi^2} \tau_2(y, z)$$

jest polem statycznie dopuszczalnym.

Oznaczmy nośność graniczną przekroju (odpowiednią uogólnioną siłę wewnętrzną)

w pierwszym przypadku czystym przez \bar{Q}_1 , w drugim przez \bar{Q}_2 . W przypadku złożonym, przy wykorzystaniu pola naprężeń (22.6), siły te wyniosą

$$(22.7) \quad Q_1 = \psi \bar{Q}_1, \quad Q_2 = \sqrt{1 - \psi^2} \bar{Q}_2.$$

Rugując stąd parametr ψ wykazujemy w sposób całkiem ogólny, że równanie okręgu koła we współrzędnych bezwymiarowych

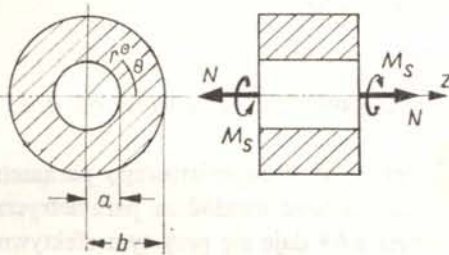
$$(22.8) \quad \left(\frac{Q_1}{\bar{Q}_1}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{\bar{Q}_2}\right)^2 = 1$$

(lub elipsy we współrzędnych wymiarowych) stanowi zawsze dolne oszacowanie nośności granicznej w rozważanych przypadkach obciążenia złożonego przekroju prętów typu P_2/S_2 .

Warto jeszcze zauważyć, że w odniesieniu do omówionych w p. 21 przypadków typu P_1/S_2 twierdzenie powyższe nie jest prawdziwe: istotnie, np. parabola (21.35) nie leży na zewnątrz okręgu koła (22.8). Wykazane twierdzenie jest słuszne dla takich przypadków, jak rozciąganie ze skręcaniem, zginanie ze skręcaniem itp.

22.2. Rozciąganie ze skręcaniem prętów o przekrojach okrągłych

22.2.1. Nośność graniczna przekroju. Weźmiemy pod uwagę element pręta o przekroju kołowym lub pierścieniowym, poddany działaniu siły podłużnej N i momentu skręcającego M_s (rys. 113). Problem nośności granicznej tak obciążonego przekroju



Rys. 113. Skręcanie z rozciąganiem pręta o przekroju okrągłym

rozwiązał po raz pierwszy A. NÁDAI w r. 1930 [450]. Jeżeli mianowicie opierając się na hipotezie płaskich przekrojów, założymy we współrzędnych walcowych rozkład odkształceń

$$(22.9) \quad \varepsilon_z = \varepsilon = \text{const}, \quad \gamma_{z\theta} = \vartheta r,$$

gdzie ϑ oznacza jednostkowy kąt skręcenia pręta, to warunki nierozdzielności są oczywiście spełnione. Dalszy tok postępowania zależy od przyjęcia założeń odnośnie ściślności materiału. Jeżeli założymy nieściślność, przyjmując $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\varepsilon/2$, to z równań Hencky'ego-Iliuszina lub Levy'ego-Misesa i z warunków brzegowych $\sigma_r = 0$ dla $r = b$ otrzymuje się $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ w całym obszarze. Występują jedynie naprężenia σ_z i $\tau_{z\theta}$, określone wzorami

$$(22.10) \quad \sigma_z = \frac{3}{2\varphi} \varepsilon_z = \frac{3}{2\varphi} \varepsilon, \quad \tau_{z\theta} = \frac{1}{2\varphi} \gamma_{z\theta} = \frac{\vartheta r}{2\varphi}.$$

Są to równania Hencky'ego-Iliuszina; formalnie można je jednak traktować jako równania Levy'ego-Misesa, gdybyśmy przez ε rozumieli prędkość odkształcenia osiowego, przez ϑ — prędkość jednostkowego kąta skręcenia, wreszcie funkcję λ oznaczyli formalnie przez φ .

Przyjmując w warunku plastyczności (22.1) $c = 3$ obliczamy stąd funkcję φ :

$$(22.11) \quad \varphi = \frac{1}{2\sigma_0} \sqrt{9\varepsilon^2 + 3\vartheta^2 r^2};$$

zatem rozkład naprężeń jest ostatecznie określony wzorami

$$(22.12) \quad \sigma_z = \frac{3\varepsilon\sigma_0}{\sqrt{9\varepsilon^2 + 3\vartheta^2 r^2}}, \quad \tau_{z\theta} = \frac{\vartheta r\sigma_0}{\sqrt{9\varepsilon^2 + 3\vartheta^2 r^2}}.$$

Łatwo sprawdzić, że równania równowagi wewnętrznej (7.15) jak i warunki brzegowe na poboczniczy $\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0$ są spełnione tożsamościowo, zatem rozwiązanie uzyskane przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów (22.9) jest tu rozwiązaniem ścisłym (w sensie teorii Hencky'ego-Iliuszina, a więc dla obciążenia prostego, lub opierając się na teorii Levy'ego-Misesa dla ciała idealnie sztywno-plastycznego).

Moment skręcający i siłę podłużną w stanie granicznym przekroju obliczymy w przypadku przekroju kołowego ze wzorów

$$(22.13) \quad M_s = 2\pi \int_0^b \tau_{z\theta} r^2 dr = \frac{2\pi\sigma_0}{9\vartheta^3} [(9^2 b^2 - 6\varepsilon^2)\sqrt{9\varepsilon^2 + 3\vartheta^2 b^2} + 18\varepsilon^3],$$

$$(22.14) \quad N = 2\pi \int_0^b \sigma_z r dr = \frac{2\pi\varepsilon\sigma_0}{9^2} (\sqrt{9\varepsilon^2 + 3\vartheta^2 b^2} - 3\varepsilon).$$

W przypadku przekroju pierścieniowego należy przeprowadzić całkowanie od a do b co nieznacznie komplikuje ostateczne wzory.

Uogólnione siły wewnętrzne M_s i N są tu zależne od bezwymiarowego parametru geometrycznego $\varepsilon/b\vartheta$. Równania (22.13) i (22.14) można więc uważać za parametryczne przedstawienie krzywej nośności granicznej. Parametr $\varepsilon/b\vartheta$ daje się przy tym efektywnie wyrugować; ostateczny wynik zapiszemy w postaci

$$(22.15) \quad m_s = \frac{2}{3} (2+n)\sqrt{1-n} = \frac{4}{3} \sqrt{1 - \frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{4}n^3},$$

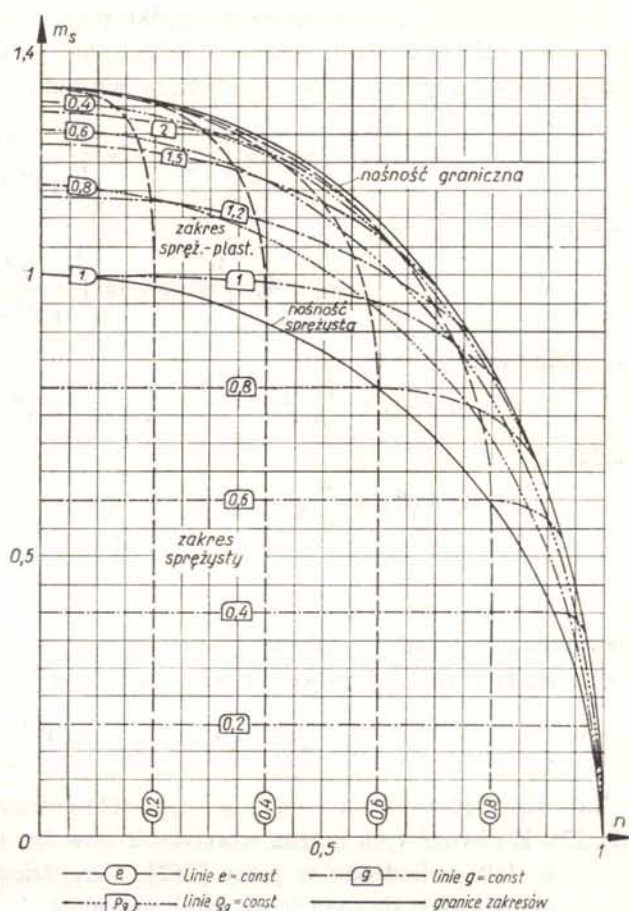
gdzie bezwymiarowe siły wewnętrzne zostały wprowadzone wzorami

$$(22.16) \quad n = \frac{N}{N} = \frac{N}{\pi b^2 \sigma_0}, \quad m_s = \frac{\overline{M}_s}{M_s} = \frac{2\sqrt{3} M_s}{\pi b^3 \sigma_0}.$$

Krzywa (22.15) nieznacznie odbiega od elipsy typu (22.8); przedstawiono ją na rys. 114 wraz z innymi krzywymi, opisującymi zakres sprężysto-plastyczny.

22.2.2. Zakres sprężysto-plastyczny w przypadku nieściśliwości materiału. W przypadku nieściśliwości materiału rozkład naprężeń w strefie uplastycznionej $r_\theta < r < b$ jest określony wzorami (22.12), natomiast w strefie sprężystej $0 < r < r_\theta$ lub $a < r < r_\theta$ wynikającymi z prawa Hooke'a wzorami

$$(22.17) \quad \sigma_z = E\varepsilon, \quad \tau_{z\theta} = G\vartheta r.$$



Rys. 114. Krzywe graniczne przy rozciąganiu ze skręcaniem pręta o przekroju kołowym wraz z liniami stałego wydłużenia, stałego kąta skręcenia i stałego promienia granicznego

Wprowadzimy bezwymiarowe parametry odkształceniowe wzorami

$$(22.18) \quad \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon = e, \quad \frac{Gb\sqrt{3}}{\sigma_0} \vartheta = g$$

i wobec obowiązującej dla ciała nieściśliwego zależności $E = 3G$ określimy rozkład naprężeń następująco: w strefie sprężystej

$$(22.19) \quad \sigma_z = \sigma_0 e, \quad \tau_{z\theta} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} g \varrho, \quad 0 < \varrho < \varrho_g$$

i w strefie uplastycznionej

$$(22.20) \quad \sigma_z = \frac{\sigma_0 e}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}, \quad \tau_{z\theta} = \frac{\sigma_0 g \varrho}{\sqrt{3} \sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}, \quad \varrho_g < \varrho < 1,$$

gdzie $\varrho = r/b$ i odpowiednio $\varrho_g = r_g/b$. W przypadku przekroju pierścieniowego strefa sprężysta obejmuje obszar $\beta < \varrho < \varrho_g$, gdzie $\beta = a/b$. Wzory (22.20) są już teraz związane wyraźnie z teorią Hencky'ego-Iliuszina, a więc z obciążeniem prostym, bowiem stosowanie teorii Levy'ego-Misesa do zagadnień sprężysto-plastycznych jest wykluczone.

Ograniczymy się do prostszego przypadku pręta o przekroju kołowym. Wprowadzając oznaczenia (22.16) i przeprowadzając całkowanie po odpowiednich strefach, określimy bezwymiarowe uogólnione siły wewnętrzne wzorami

$$(22.21) \quad n = 2e \int_0^{\varrho_g} \varrho d\varrho + 2e \int_{\varrho_g}^1 \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}},$$

$$m_s = 4g \int_0^{\varrho_g} \varrho^3 d\varrho + 4g \int_{\varrho_g}^1 \frac{\varrho^3 d\varrho}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}};$$

po scałkowaniu

$$(22.22) \quad n = \varrho_g^2 e + \frac{2e}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2} - \frac{2e}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2} \varrho_g^2$$

$$m_s = \varrho_g^4 g + \frac{4}{g} \sqrt{e^2 + g^2} - \frac{8}{3g^3} (e^2 + g^2)^{3/2} - \frac{4\varrho_g^2}{g} \sqrt{e^2 + g^2} \varrho_g^2 +$$

$$+ \frac{8}{3g^3} (e^2 + g^2 \varrho_g^2)^{3/2}.$$

Bezwymiarowy promień graniczny ϱ_g jest przy tym określony z warunku ciągłości naprężeń w obu strefach (inaczej mówiąc z warunku $\varphi = 1/2G$), mianowicie

$$(22.23) \quad e^2 + g^2 \varrho_g^2 = 1, \quad \varrho_g = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{|g|}.$$

Tak więc pięć wielkości n , m_s , e , g i ϱ_g zostało powiązanych trzema równaniami (22.22) i (22.23). Z równań tych można teoretycznie dowolne trzy wielkości wyrazić przez dwie pozostałe. Jak stwierdzono w pracy [762], z trzydziestu możliwych wzorów tego typu tylko dwanaście daje się wyrazić wzorami zamkniętymi przy użyciu funkcji elementarnych. Najważniejsze praktycznie związk¹, wyrażające uogólnione odkształcenia w funkcji uogólnionych sił wewnętrznych, mianowicie $e = f(m_s, n)$ i $g = f(m_s, n)$ nie dadzą się wyrazić w ten sposób: w pracy [762] podano natomiast trzycyfrowe tablice i wykresy tych funkcji.

Nośność sprężysta przekroju jest wyznaczona warunkiem $\varrho_g = 1$, czyli

$$(22.24) \quad e^2 + g^2 = 1.$$

Wzory (22.22) wyrażają wtedy n i m_s w funkcji jednego parametru np. e ; rugując ten parametr otrzymujemy równanie krzywej nośności sprężystej w formie jawnej

$$(22.25) \quad m_s^2 + n^2 = 1.$$

Krzywe (22.15) i (22.25) przedstawiono na rys. 114, na którym zamieszczono ponadto linie $e = \text{const}$, $g = \text{const}$ i $\varrho_g = \text{const}$ w pierwszej ćwiartce płaszczyzny $n - m_s$.

Podane rozwiązanie uzyskane zostało w oparciu o teorię odkształceniową, słuszną dla obciążeń prostych; warunki obciążenia prostego są tu realizowane przy proporcjonalnym wzroście wydłużenia ε i kąta skręcenia ϑ , co w zakresie sprężysto-plastycznym nie odpowiada dokładnie proporcjonalnemu wzrostowi siły podłużnej i momentu skręcającego (choć różnice nie są zbyt wielkie). Różne inne kolejności przykładania obciążeń badał w oparciu o teorię Prandtla-Reussa F. A. GAYDON [159]. Porównanie wyników różnych

teorii w rozważanym przypadku zawierają prace M. R. SHAMMAMY [641] oraz tego autora wraz z O. M. SIDEBOTTOMEM [642]. B. C. HOSKIN [271] określił sztywność skręcania pręta poddanego uprzedniemu plastycznemu rozciąganiu. Różne drogi obciążenia badali opierając się na hipotezie stabilizacji A. G. DORFMAN i S. D. LEJTES [893] oraz S. D. LEJTES [1025, 1026]; w oparciu o teorię lokalnych odkształceń A. F. KREGERS [1004], który wprowadził tu pojęcie tensora podatności; w oparciu o pewien wariant teorii poślizgów N. JU. SZWAJKO [1239].

Izotropowe wzmocnienie plastyczne w przypadku jednoczesnego rozciągania i skręcania prętów o przekroju kołowym i pierścieniowym uwzględniali H. MIU [415] oraz S. W. SERENSEN, W. P. KOGAJEW i R. M. SZNEJDEROWICZ [1161]. S. M. MAKKY [379] określał opierając się na teorii Thomasa powierzchnie niestateczności, odpowiadające powstawaniu pierwszych pęknięć.

Plastyczne przystosowanie się konstrukcji do obciążeń zmiennych badał w rozpatrywanym przypadku W. I. ROZENBLUM [1146], który ponadto dopuszczał możliwość zmian temperatury określonej dwiema funkcjami.

Najprostszy przypadek przekroju — przekrój pierścieniowy cienkościenny był wielokrotnie wykorzystywany w badaniach doświadczalnych do weryfikacji podstawowych równań teorii plastyczności. Przypadek ten, wykazujący całkowitą jednorodność stanu naprężenia, można sklasyfikować jako $P_2 \rightarrow S_2 \rightarrow B_2$. Pierwszą była tu praca K. HOHENEM-SERA z r. 1931 [264]. Z innych prac wymienimy tu jedynie badania W. S. LENSKEGO [1030], które następnie S. D. KLACZKO [980] analizował z punktu widzenia zgodności z hipotezami wzmocnienia izotropowego, kinematycznego i mieszanego. Badania fal sprężysto-plastycznych w rozważanym przypadku prowadził H. FUKUOKA [151].

22.2.3. Wpływ ściśliwości materiału. Uwzględnienie ściśliwości materiału, jak już wspomnieliśmy w p. 22.1.1, wprowadza dość istotne różnice. Współczynnik odkształcenia poprzecznego w strefie uplastycznionej, zewnętrznej, staje się większy od współczynnika Poissona ν i strefa ta zaczyna naciskać na wewnętrzny obszar sprężysty. Pojawiają się więc naprężenia σ_r i σ_θ i przypadek daje się sklasyfikować jako P_4/S_2 .

Przy założeniu obciążenia prostego posłużymy się równaniami Hencky'ego-Iliuszina, które dla materiału ściśliwego można zapisać w formie (10.35). Przyjęcie rozkładu odkształceń (22.9) jest tu nadal uzasadnione, natomiast rozkład odkształceń ε_r i ε_θ należy określić. Określając $\tau_{z\theta}$ wzorem (22.10) (odpowiedni wzór na σ_z przestaje być aktualny), możemy równania wyjściowe zapisać w formie następującego układu:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \varphi \sigma_r + \left(\frac{1}{9K} - \frac{\varphi}{3} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z), \\
 \varepsilon_\theta &= \varphi \sigma_\theta + \left(\frac{1}{9K} - \frac{\varphi}{3} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z), \\
 (22.26) \quad \varepsilon &= \varphi \sigma_z + \left(\frac{1}{9K} - \frac{\varphi}{3} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z), \quad \varepsilon_r - \varepsilon_\theta - r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0, \\
 \sigma_\theta - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} &= 0, \quad \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r \sigma_\theta - \sigma_\theta \sigma_z - \sigma_z \sigma_r + \frac{39^2 r^2}{4\varphi^2} = \sigma_0^2.
 \end{aligned}$$

Układ ten zawiera sześć niewiadomych funkcji; ε_r , ε_θ , σ_r , σ_θ , σ_z i φ . Rugując ε_r i ε_θ w oparciu o dwa pierwsze równania, σ_θ w oparciu o piąte i σ_z w oparciu o trzecie dochodzimy do układu dwóch równań o niewiadomych σ_r i φ . Opierając się na wynikach pracy [762] zapiszemy ten układ w postaci bezwymiarowej następująco:

$$(22.27) \quad \begin{aligned} & (4\psi^2 \varrho p^3 + 5\psi \varrho p^2 + \varrho p) s_r' + (-4\psi^2 \varrho p^2 p' + 12\psi^2 p^3 - 2\psi \varrho p p' + 15\psi p^2 - \varrho p' + 3p) s_r' - \\ & \quad - 6\psi^2 p^2 p' s_r + 2\psi (1 + \psi) e p^2 p' = 0 \\ & (12\psi^2 \varrho^2 p^2 + 6\psi \varrho^2 p + 3\varrho^2) s_r'^2 + 36\psi^2 \varrho p^2 s_r s_r' + 36\psi^2 p^2 s_r^2 - 12\psi (1 + \psi) e p^2 (2s_r + \varrho s_r') + \\ & \quad + 4g^2 \psi^2 \varrho^2 p^4 + 8g^2 \psi \varrho^2 p^3 + [4g^2 \varrho^2 - 4\psi^2 + 4(1 + \psi)^2 e^2] p^2 - 8\psi p - 4 = 0. \end{aligned}$$

W równaniach tych wprowadzono następujące oznaczenia bezwymiarowe:

$$(22.28) \quad s_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad p = \frac{1}{2G\varphi}, \quad \psi = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)};$$

s_r jest więc bezwymiarowym naprężeniem promieniowym (a nie składową dewiatora, jak oznaczaliśmy zazwyczaj), p — bezwymiarowym modułem siecznym, ψ — bezwymiarową stałą materiałową, równą zeru dla materiału nieściśliwego, a równą $1/2$ dla $\nu = 0$. Ponadto e i g zostały wprowadzone wzorami (22.18), a przecinkami u góry oznaczono różniczkowanie względem bezwymiarowego promienia $\varrho = r/b$.

Układ równań (22.27) przytoczyliśmy celowo dla zobrazowania komplikacji, jakie pojawiają się przy uwzględnieniu ściśliwości materiału w teorii plastyczności. Układ ten nie rokuje nadziei na rozwiązanie ściśle w postaci zamkniętej. W pracy [762] rozwiązano go metodą małego parametru, przyjmując za ten parametr bezwymiarową stałą materiałową ψ (22.28). Istotnie $\psi = 0$ odpowiada nieściśliwości materiału, a więc dość prostemu rozwiązaniu (22.20). Zakładając rozwiązanie układu (22.27) w postaci szeregow potęgowych

$$(22.29) \quad s_r = \sum_{i=0}^{\infty} s_{r_i}(\varrho) \psi^i, \quad p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\varrho) \psi^i,$$

podstawiając te szeregi do (22.21) i przyrównując do zera współczynniki przy poszczególnych potęgach ψ , otrzymujemy ciąg układów równań z uwagi na poszczególne funkcje s_{r_i} i p_i . Dla zerowego przybliżenia otrzymamy układ

$$(22.30) \quad \begin{aligned} & \varrho p_0 s_{r_0}' + (-\varrho p_0' + 3p_0) s_{r_0}' = 0, \\ & 3\varrho^2 s_{r_0}'^2 + 4g^2 \varrho^2 p_0^2 + 4e^2 p_0^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

o rozwiązaniu

$$(22.31) \quad s_{r_0} \equiv 0, \quad p_0 = \frac{1}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}.$$

Rozwiązanie to spełnia oczywiście warunek brzegowy $s_{r_0}(1) = 0$; wykorzystując pozostałe równania układu wyjściowego (22.26) dochodzimy ostatecznie do wzorów (22.20), uzyskanych poprzednio na prostszej drodze.

Przybliżenie pierwsze określimy przyrównując do zera współczynniki przy ψ^1 w równaniach (22.27); otrzymujemy układ

$$(22.32) \quad \begin{aligned} & \varrho (e^2 + g^2 \varrho^2)^2 s_{r_1}' + (3e^2 + 4g^2 \varrho^2) (e^2 + g^2 \varrho^2) s_{r_1}' = 2eg^2 \varrho, \\ & (e^2 + g^2 \varrho^2)^2 p_1 + e^2 \sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} - e^2 = 0. \end{aligned}$$

Z drugiego równania określamy bezpośrednio poprawkę modułu siecznego

$$(22.33) \quad p_1 = - \frac{e^2(\sqrt{e^2+g^2\varrho^2}-1)}{(e^2+g^2\varrho^2)^2},$$

natomiast całka ogólna pierwszego równania ma postać

$$(22.34) \quad s_{r1} = \frac{1}{e} \ln \frac{e^2+g^2\varrho^2}{\varrho^2} - \frac{2e}{g^2\varrho^2} + C_1 \left(\frac{g^2}{e^3} \ln \frac{\sqrt{e^2+g^2\varrho^2}+e}{\varrho} - \frac{e^2+g^2\varrho^2}{e^2\varrho^2} \right) + C_2.$$

Określenie stałych C_1 i C_2 zależy od tego, czy rozpatrujemy zakres sprężysto-plastyczny, czy całkowite uplastycznienie przekroju pręta. Przy rozpatrywaniu zakresu sprężysto-plastycznego musimy najpierw określić granicę strefową; przyrównując wyrażenie $p_0 + \psi p_1$ do jedności dochodzimy znowu do wzoru (22.23), zatem ściśliwość materiału w pierwszym przybliżeniu nie ma tu wpływu na położenie tej granicy. Dalej, należy określić stan naprężenia w strefie sprężystej. Łatwo stwierdzić, iż jest to stan jednorodny, równomierne ściskanie w kierunku promieniowym i obwodowym oraz rozciąganie w kierunku osiowym (przy $e > 0$). Wobec $\sigma_r = \sigma_\theta$ w strefie sprężystej, z równania równowagi wewnętrznej otrzymujemy warunek brzegowy $s'_{r1} = 0$ dla $\varrho = \varrho_g$. Drugim warunkiem brzegowym jest oczywiście $s_{r1} = 0$ dla $\varrho = 1$; po obliczeniu stąd obu stałych całkowania i podstawieniu wartości ϱ_g otrzymujemy ostatecznie

$$(22.35) \quad s_{r1} = - \left\{ \frac{1+e^2}{e^2} \ln \frac{\sqrt{e^2+g^2\varrho^2}+e}{\varrho(\sqrt{e^2+g^2}+e)} - \frac{1}{e} \ln \frac{e^2+g^2\varrho^2}{(e^2+g^2)\varrho^2} + \right. \\ \left. + \frac{2e}{g^2} \left(\frac{1}{\varrho^2} - 1 \right) - \frac{(1+e^2)(\sqrt{e^2+g^2\varrho^2}-\varrho^2\sqrt{e^2+g^2})}{eg^2\varrho^2} \right\}.$$

W pracy [762] podano również wzory na poprawki dla naprężeń σ_θ i σ_z . Wykresy rozkładu naprężeń σ_r i σ_θ przy wydłużeniu $e = 0,5$ i różnych wartościach kąta skręcenia g podają rysunki 115 i 116.

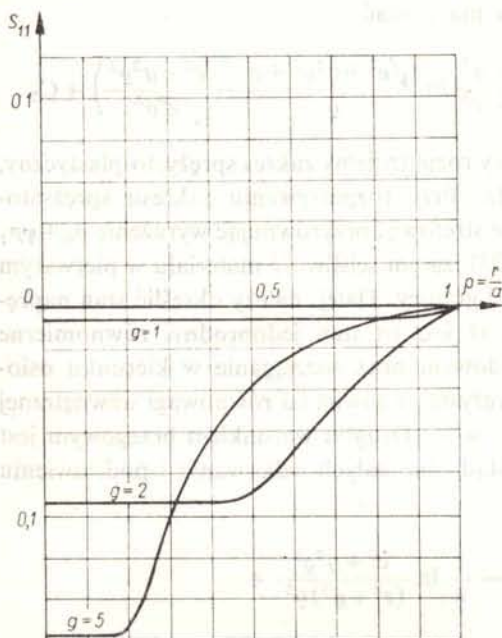
W przypadku całkowitego uplastycznienia przekroju warunek brzegowy $s_{r1}(1) = 0$ pozostaje, natomiast drugą stałą możemy określić z warunku, aby funkcja s_{r1} była ograniczona w punkcie osobliwym $\varrho = 0$. Ostatecznie otrzymuje się

$$(22.36) \quad s_{r1} = - \left[\frac{2}{e} \ln \frac{(\sqrt{e^2+g^2\varrho^2}+e)\sqrt{e^2+g^2}}{(\sqrt{e^2+g^2}+e)\sqrt{e^2+g^2\varrho^2}} + \frac{2e}{g^2} \left(\frac{1}{\varrho^2} - 1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{g^2\varrho^2} (\sqrt{e^2+g^2\varrho^2}-\varrho^2\sqrt{e^2+g^2}) \right].$$

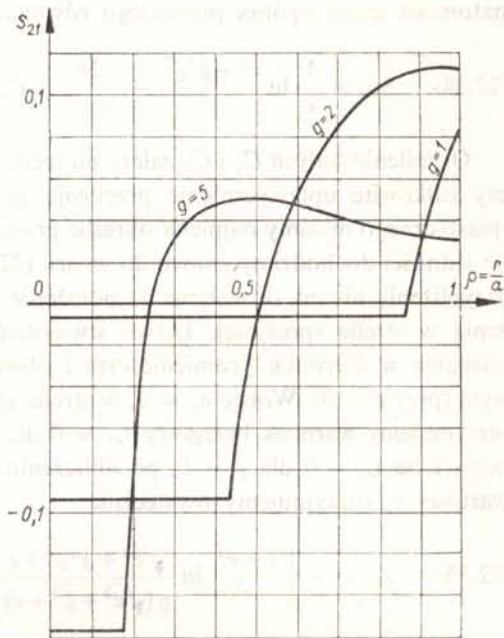
Wykresy rozkładu naprężeń σ_r , σ_θ , σ_z i $\tau_{z\theta}$ w tym przypadku podaje praca [762]. Związki pomiędzy uogólnionymi siłami wewnętrznymi a uogólnionymi odkształceniami dadzą się również w rozważanym pierwszym przybliżeniu wyrazić przy użyciu funkcji elementarnych; wzory są jednak bardzo złożone, a różnice liczbowe w stosunku do przypadku nieściśliwości nie przekraczają z reguły kilku procent.

Przypadek obciążeń nieprostych przy uwzględnieniu ściśliwości materiału rozważali opierając się na równaniach Prandtla-Reussa G. SVÉD i D. S. BROOKS [681]. Uzyskali oni

układ czterech równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego i podali rozwiązanie dla wzrastającej siły podłużnej przy stałym momencie skręcającym. Również i w tym przypadku różnice liczbowe w stosunku do materiału nieściśliwego są niewielkie.



Rys. 115. Rozkład naprężeń promieniowych σ_r przy sprężysto-plastycznym skręcaniu z rozciąganiem pręta o przekroju kołowym, wykonanego z materiału ściśliwego



Rys. 116. Rozkład naprężeń obwodowych σ_θ przy sprężysto-plastycznym skręcaniu z rozciąganiem pręta o przekroju kołowym, wykonanego z materiału ściśliwego

22.3. Rozciąganie ze skręcaniem prętów o przekrojach nieokrągłych

22.3.1. Równanie różniczkowe dla przemieszczeń. Przy skręcaniu prętów nieokrągłych występuje pacznie się przekroju pręta bez względu na sprężystość lub niesprężystość odkształceń. Dodatkowe rozciąganie nie zmienia sytuacji, tak że wynikający z hipotezy płaskich przekrojów rozkład odkształceń (22.9) jest tu nie do przyjęcia.

Do ścisłego ujęcia omawianego problemu nasuwają się dwie zasadnicze metody, omówione w p. 12: wprowadzenie odpowiedniej funkcji naprężeń lub wyprowadzenie stosownego równania przemieszczeniowego. Historycznie pierwsza była metoda funkcji naprężeń — odpowiednią jest tu po prostu funkcja naprężeń Prandtla. Wprowadzili ją w r. 1944 G. H. HANDELMAN [198], a następnie R. HILL [219, 221], rozważając bardziej ogólny przypadek rozciągania ze skręcaniem i zginaniem; podejście to omówimy w p. 23.3. Jednakże z punktu widzenia przybliżonego rozwiązywania tak uzyskanego równania metoda funkcji naprężeń wykazuje wyraźne wady: niewielkie błędy przy obliczaniu wartości tej funkcji mogą spowodować znacznie większe błędy przy ocenie naprężeń — pochodnych cząstkowych tej funkcji.

Wady tej nie posiada podejście przemieszczeniowe; przeciwnie, nawet dość znaczne błędy przy określaniu przemieszczeń powodują z reguły małe błędy w odniesieniu do naprężeń, a tym bardziej przy określaniu odpowiednich uogólnionych sił wewnętrznych. Przytoczymy więc obecnie wyprowadzenie równania przemieszczeniowego, podane przez M. WNUKA [738].

Przyjmijmy kartezjański układ odniesienia utożsamiając oś pręta z osią z podobnie jak w p. 22.2. Zakładając nieściśliwość materiału i dopuszczając spaczenie przekroju przyjmijmy rozkład przemieszczeń w formie odpowiadającej klasycznemu zagadnieniu de Saint-Venanta:

$$(22.37) \quad u = \vartheta yz - \frac{1}{2} \varepsilon x, \quad v = -\vartheta xz - \frac{1}{2} \varepsilon y, \quad w = \vartheta w_0(x, y) + \varepsilon z,$$

przy czym funkcję $w_0(x, y)$, określającą spaczenie, potraktujemy jako funkcję niewiadomą. Podobnie jak w p. 22.2 ε i ϑ oznaczają tu jednostkowe wydłużenie i jednostkowy kąt skręcenia; przy rozpatrywaniu nośności granicznej przekroju można je również traktować formalnie jako odpowiednie prędkości w nawiązaniu do teorii Levy'ego-Misesa. Opierając się na prawie podobieństwa dewiatorów określamy stąd naprężenia następująco:

$$(22.38) \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_z = \frac{|3\varepsilon'}{2\varphi},$$

$$\tau_{xz} = \frac{\vartheta}{2\varphi} \left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad \tau_{zy} = \frac{\vartheta}{2\varphi} \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right),$$

gdzie φ jest modulem w równaniach Hencky'ego-Iliuszina ewentualnie Levy'ego-Misesa. Wykorzystując następnie warunek plastyczności HMM typu (22.2) przy $c = 3$ określamy funkcję φ wzorem

$$(22.39) \quad \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \sqrt{3\varepsilon^2 + \vartheta^2 \left[\left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right]},$$

a zatem niezerowe składowe tensora naprężenia określają wzory

$$(22.40) \quad \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\varepsilon \sigma_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\vartheta^2}{3} \left[\left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right]}}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\vartheta \sigma_0 \left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)}{3 \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\vartheta^2}{3} \left[\left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right]}}, \\ \tau_{zy} &= \frac{\vartheta \sigma_0 \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)}{3 \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\vartheta^2}{3} \left[\left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right]}}. \end{aligned}$$

Podstawienie tych wzorów do jednego nie spełnionego tożsamościowo równania równowagi

wewnętrznej prowadzi do poszukiwanego podstawowego równania różniczkowego badanego problemu;

$$(22.41) \quad \nabla^2 w_0 + \frac{g^2}{3\varepsilon^2} \left[\left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2 \left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] = 0.$$

To nieliniowe równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu można traktować jako pewien przypadek szczególny równań przemieszczeniowych dla ośrodka nieściśliwego (12.21). Warunek brzegowy dla tego równania, wyrażający styczność wypadkowego naprężenia τ do konturu przekroju, ma postać

$$(22.42) \quad \left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) dy - \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) dx = 0.$$

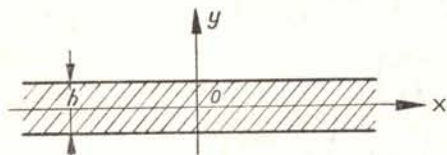
Po rozwiązaniu równania (22.41) z warunkiem brzegowym (22.42) dla określonego konturu możemy efektywnie określić naprężenia (22.40), a następnie siłę podłużną i moment skręcający w stanie granicznym. Wielkości te są określone całkami

$$(22.43) \quad N = \sigma_0 \operatorname{sign} \varepsilon \iint_F \frac{dF}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{3\varepsilon^2} \left[\left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right]}}, \\ M_s = \frac{g\sigma_0}{3|\varepsilon|} \iint_F \frac{\left[\left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) y - \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) x \right] dF}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{3\varepsilon^2} \left[\left(y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left(-x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right]}}.$$

Rugując z tych równań parametr g/ε możemy — przynajmniej teoretycznie — określić krzywą nośności granicznej w postaci jawnej. Dla przekroju kołowego przyjmując $w_0 = 0$, otrzymujemy stąd istotnie równanie ściśle (22.15). Dla innych kształtów przekroju trzeba z reguły poszukiwać pewnego przybliżonego rozwiązania równania (22.41).

22.3.2. Przekrój o kształcie wąskiego prostokąta. Łatwo sprawdzić, że funkcja $w_0 = xy$ spełnia ściśle równanie (22.41). Podstawiając tę funkcję do warunku brzegowego (22.42) otrzymujemy $dy = 0$, czyli że krawędzie przekroju mogą być tylko równoległe do osi x . Ściśle biorąc, odpowiada to nieograniczonemu pasmu równoległemu do osi x , rys. 117, jednak przekrój ten nie posiada większego znaczenia praktycznego. Natomiast w przybliżeniu można wykorzystać to proste rozwiązanie dla przekroju o kształcie wąskiego prostokąta o bokach b i h , gdzie $h \ll b$. Ze wzorów (22.40) otrzymujemy wtedy

$$(22.44) \quad \sigma_x = \frac{\varepsilon\sigma_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{3}g^2y^2}}, \quad \tau_{zx} = \frac{2g\sigma_0y}{3\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{3}g^2y^2}}, \quad \tau_{xy} \cong 0.$$



Rys. 117. Przekrój o kształcie wąskiego prostokąta

Wzory te uzyskał po raz pierwszy na innej drodze A. R. RŻANICYN [1138]. Dla przekroju prostokątnego o skończonym wymiarze b wzdłuż osi x trudno rozwiązanie (22.44) uważać za ścisłe; «delikatność» przybliżenia polega na tym, iż — jak wspomina RŻANICYN — moment skręcający od naprężeń τ_{xy} jest w istocie taki sam, jak od naprężeń τ_{zx} , tak że całkując tylko τ_{zx} należy wynik pomnożyć przez 2. Wyniki całkowania są następujące:

$$(22.45) \quad N = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z dy = \sqrt{3} \frac{\varepsilon}{\vartheta} b \sigma_0 \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\vartheta}{\varepsilon} h + \sqrt{1 + \frac{1}{3} \frac{\vartheta^2}{\varepsilon^2} h^2} \right),$$

$$(22.46) \quad M_s = 2b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} y dy = \frac{bh\sigma_0}{2} \frac{\varepsilon}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \frac{\vartheta^2}{\varepsilon^2} h^2} - \\ - \frac{\sqrt{3}}{2} b \sigma_0 \frac{\varepsilon^2}{\vartheta^2} \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\vartheta}{\varepsilon} h + \sqrt{1 + \frac{1}{3} \frac{\vartheta^2}{\varepsilon^2} h^2} \right).$$

Jest to parametryczne przedstawienie krzywej granicznej w rozważanym przypadku przy parametrze ε/ϑ (założono tu $\varepsilon > 0$, $\vartheta > 0$). Rugując ten parametr można uzyskać formę uwikłaną równania krzywej granicznej; równanie to nie daje się natomiast zapisać w formie jawnej.

22.3.3. Metoda małego parametru. Równanie (22.41) stwarza dwie zasadnicze możliwości zastosowania metody małego parametru: możemy jako mały parametr traktować bądź stosunek ϑ/ε , bądź stosunek ε/ϑ . W pierwszym przypadku zerowe przybliżenie odpowiada czystemu rozciąganiu, w drugim czystemu skręcaniu. Stopień trudności, związany z tymi podejściami, różni się zasadniczo, mianowicie przy małym parametrze ϑ/ε rozwiązanie jest łatwiejsze. Po pierwsze, czyste rozciąganie nie wykazuje żadnych osobliwości w rozkładzie naprężeń i zbieżność metody małego parametru nie budzi wątpliwości; po drugie, przyjmując w równaniu (22.41) $\vartheta/\varepsilon = 0$ otrzymujemy nie zerowe, a od razu pierwsze przybliżenie, bowiem już funkcja w_0 jest mnożona przez ϑ (22.37). Przeciwnie, czyste skręcanie wykazuje na ogół nieciągłości w rozkładzie naprężeń, zbieżność metody małego parametru w okolicach linii nieciągłości przybliżenia zerowego jest wątpliwa, a ponadto otrzymuje się trudniejsze równania do rozwiązania. Omówimy więc tylko rozwiązanie w zakresie niewielkiego wpływu skręcania na nośność pręta rozciąganego traktując parametr ϑ/ε jako mały.

Jeżeli założymy rozwiązanie równania (22.41) w postaci szeregu

$$(22.47) \quad w_0 = \sum_{i=0}^{\infty} w_{0i} \left(\frac{\vartheta}{\varepsilon} \right)^{2i} = w_{00} + w_{01} \left(\frac{\vartheta}{\varepsilon} \right)^2 + w_{02} \left(\frac{\vartheta}{\varepsilon} \right)^4 + \dots,$$

to poszczególne «poprawki» w_{0i} będą określone równaniami

$$\nabla^2 w_{00} = 0,$$

$$(22.48) \quad \nabla^2 w_{01} = -\frac{1}{3} \left[\left(y + \frac{\partial w_{00}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial y^2} + \left(-x + \frac{\partial w_{00}}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - 2 \left(y + \frac{\partial w_{00}}{\partial x} \right) \left(-x + \frac{\partial w_{00}}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial x \partial y} \right],$$

.....

przy niejednorodnym warunku brzegowym (22.42) z uwagi na funkcję w_{00} i jednorodnych warunkach

$$(22.49) \quad \frac{\partial w_{0i}}{\partial x} dy - \frac{\partial w_{0i}}{\partial y} dx = 0$$

dla pozostałych funkcji w_{0i} . Pierwsze z równań układu (22.48) jest równaniem Laplace'a z uwagi na funkcję w_{00} i wraz z warunkiem brzegowym typu (22.42) opisuje proces sprężystego skręcania pręta o danym przekroju. Całki szczególne tego równania dla różnych kształtów przekroju są dobrze znane. Następne równania, również liniowe, są równaniami typu Poissona, w każdym razie znacznie prostszymi od nieliniowego równania (22.41).

Już określenie funkcji harmonicznej w_{00} zezwala na uzyskanie jednego wyrazu szeregu na M_s i dwóch wyrazów szeregu na N . We wspomnianej pracy M. WNUKA [738] wprowadzono mianowicie wzory

$$(22.50) \quad M_s = \frac{1}{3} \frac{\vartheta}{\varepsilon} \cdot \sigma_0 \iint_F \left[\left(y + \frac{\partial w_{00}}{\partial x} \right) y - \left(-x + \frac{\partial w_{00}}{\partial y} \right) x \right] dF + \dots,$$

$$N = \sigma_0 F - \frac{\sigma_0}{6} \left(\frac{\vartheta}{\varepsilon} \right)^2 \iint_F \left[\left(y + \frac{\partial w_{00}}{\partial x} \right)^2 + \left(-x + \frac{\partial w_{00}}{\partial y} \right)^2 \right] dF + \dots,$$

a ponadto wykazano, że wartości obu występujących w tych wzorach całek są sobie równe i równe podwójnej objętości wzgórza Prandtla dla odpowiedniego problemu skręcania sprężystego. Ponadto M. WNUK zaproponował dla krzywej nośności granicznej aproksymację brzegową Hermite'a typu

$$(22.51) \quad AM_s^2 + BN^2 + CN^3 = 1,$$

wykorzystując zgodność rozwinięcia tego równania z rozwinięciem (22.50) i warunek przechodzenia krzywej przez punkt, odpowiadający nośności granicznej przy czystym skręcaniu. Postać wzoru (22.51) została dobrana tak, by dla przekroju kołowego otrzymać rozwiązanie ściśle (22.15). Praca [740] zawiera przykłady rozwinięć (22.50) i aproksymacji (22.51), praca [742] poświęcona jest bezpośredniemu wymiarowaniu przekroju prętów z uwagi na nośność graniczną, a praca [743] porównaniu nośności sprężystej i nośności granicznej.

Podano również metody oszacowań nośności granicznej przekroju w rozpatrywanym przypadku. E. A. BIEJLIN [805] zaproponował dla przekroju prostokątnego pewien statycznie dopuszczalny rozkład naprężeń, zakładając sinusoidalny rozkład naprężeń stycznych wzdłuż krótszego boku; prostsze ujęcie typu (22.6) można znaleźć w pracy K. A. RECKLINGA [576]. Dokładniejsze oszacowania dolne i górne należą do M. WNUKA [739], który np. dla oszacowania górnego zaproponował rozkład przemieszczeń (22.37), rozumiejąc tu przez w_0 funkcję określającą spaczenie przekroju przy czystym skręcaniu plastycznym.

22.3.4. Zakres sprężysto-plastyczny. Rozwiązanie zagadnienia sprężysto-plastycznego rozciągania ze skręcaniem prętów o dowolnym przekroju sprowadza się (w ujęciu przemieszczeniowym, przy założeniu obciążenia prostego i nieściśliwości materiału) do rozwiązania równania (22.41) w strefie uplastycznionej, równania $\nabla^2 w = 0$ w strefie sprężystej, wyznaczenia granicy strefowej i spełnienia warunków brzegowych oraz warunków ciągłości na granicy stref. Ten trudny problem ulega znacznemu uproszczeniu przy zastosowaniu metody małego parametru, bowiem w pierwszym przybliżeniu równanie przemieszczeniowe strefy plastycznej jest identyczne z równaniem strefy sprężystej i warunki ciągłości są spełnione automatycznie.

Przy znajomości rozwiązania równania $\nabla^2 w = 0$ z warunkiem brzegowym (22.42) dla danego konturu pozostaje jedynie do wyznaczenia — w pierwszym przybliżeniu — granica strefowa oraz obliczenie uogólnionych sił wewnętrznych na drodze odpowiednich całkowań. Granicę strefową można wyznaczyć z warunku, iż naprężenia od strony strefy sprężystej mają spełnić warunek plastyczności typu (22.2): otrzymujemy stąd

$$(22.52) \quad \left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_0}\right)^2 + 3\left(\frac{G\vartheta}{\sigma_0}\right)^2 \left[\left(y + \frac{\partial w^e}{\partial x}\right)^2 + \left(-x + \frac{\partial w^e}{\partial y}\right)^2 \right] = 1.$$

W pracy M. WNUKA [741] określono efektywnie tę granicę dla przekroju eliptycznego, trójkątnego równobocznego i przekroju typu skrzydła samolotu; ponadto dla przekroju eliptycznego wyprowadzono związki między uogólnionymi siłami wewnętrznymi a uogólnionymi odkształceniami.

Przypadek sprężysto-plastycznego skręcania z rozciąganiem pręta o wąskim przekroju prostokątnym rozważał W. A. KOŁGADIN [992].

Izotropowe wzmocnienie plastyczne w rozważanym przypadku badał S. I. IWANOW [925] metodą rozwiązań sprężystych przy zastosowaniu różnic skończonych. C. CLAVUOT [73] zajmował się dowolnymi przekrojami wypukłymi (a w szczególności przekrojem kołowym i pierścieniowym) przy założeniu materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem kinematycznym typu Zieglera.

22.4. Zginanie ze skręcaniem prętów o przekroju kołowym

22.4.1. Równanie różniczkowe dla przemieszczeń. Zginanie ze skręcaniem należy do przypadków złożonych często występujących w zastosowaniach konstrukcyjnych zarówno w budowie maszyn, jak i w budownictwie. Przypadek ten nie wykazuje kołowej symetrii, tak że sformułowanie problemu dla przekrojów nieokrągłych nie jest trudniejsze niż dla okrągłych. Tym niemniej przekrój kołowy potraktujemy oddzielnie, gdyż rozwiązanie jest tu nieco prostsze w wyniku prostoty zapisu warunku brzegowego we współrzędnych walcowych, a z drugiej strony przekroje kołowe są szczególnie często stosowane w budowie maszyn.

Metody ujęcia rozpatrywanego problemu są podobne jak w przypadku jednoczesnego rozciągania ze skręcaniem prętów o przekrojach nieokrągłych. Pierwsze wspomniane już w p. 22.3 prace G. H. HANDELMANA [198] oraz R. HILLA [219, 221] posługiwały się funkcją naprężeń Prandtla; jednakże podobnie jak i w poprzednim przypadku większe możliwości rozwiązań przybliżonych stwarza podejście przemieszczeniowe. Podejście takie zaproponowali w pracach [540 i 541] S. PIECHNIK i M. ŻYCZKOWSKI; ponadto S. PIECHNIK

w pracy [542] analizował na tej drodze pełzanie pręta przy jednoczesnym zginaniu i skręcaniu.

Zarówno w przypadku czystego zginania, jak i czystego skręcania pręta o przekroju kołowym, hipoteza płaskich przekrojów Bernoulliego prowadzi do wyników ścisłych, a spaczenie przekroju pręta nie występuje. Okazuje się jednak, że przyjęcie tej hipotezy w przypadku złożonym w zakresie niesprężystym stoi w sprzeczności z warunkami równowagi wewnętrznej, zatem może jedynie dostarczyć oszacowania górnego nośności granicznej przekroju. Oszacowanie takie podali w pracy [229] R. HILL i M. P. L. SIEBEL oraz w pracy [1139] A. R. RŻANICYN. W każdym razie można się spodziewać, że błędy popełnione przy przybliżonym określaniu spaczenia, będą miały mały wpływ na dokładność końcowego wyniku; przeciwnie, błędy przy określaniu funkcji naprężeń zwielokrotniają się przy obliczaniu samych naprężeń, będących pochodnymi cząstkowymi tej funkcji.

W celu ścisłego sformułowania rozpatrywanego problemu dopuścimy możliwość spaczenia przekroju i dla ciała nieściśliwego założymy rozkład przemieszczeń we współrzędnych kartezjańskich w postaci

$$(22.53) \quad \begin{aligned} u &= \kappa xz + \vartheta u_0(y, z), \\ v &= -\frac{1}{2} \kappa yz + \vartheta xz, \\ w &= -\frac{\kappa}{4} (2x^2 - y^2 + z^2) - \vartheta xy. \end{aligned}$$

Rozkład ten odpowiada stałym momentom M_θ i M_s wzdłuż osi pręta; w odpowiednim przypadku sprężystym funkcja $u_0(y, z)$, określająca spaczenie przekroju, jest dla przekroju kołowego równa zeru. Oś x skierowaliśmy tu zgodnie z osią pręta podobnie jak w p. 21.2–21.7, a odmiennie niż w p. 22.2–22.3, gdzie wygodniejsze było oznaczenie osi pręta przez z . Przy określaniu nośności granicznej przekroju w nawiązaniu do teorii Levy'ego-Misesa można również traktować (22.53) formalnie jako rozkład prędkości przemieszczeń, przypisując wielkościom κ i ϑ znaczenie prędkości krzywizny osi i prędkości jednostkowego kąta skręcenia. Rozpatrywanie zakresu sprężysto-plastycznego jest wtedy wykluczone.

Wynikający z (22.53) rozkład odkształceń jest następujący:

$$(22.54) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \kappa z, & \gamma_{yz} &= 0, \\ \varepsilon_y &= -\frac{1}{2} \kappa z, & \gamma_{zx} &= \vartheta \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right), \\ \varepsilon_z &= -\frac{1}{2} \kappa z, & \gamma_{xy} &= \vartheta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right); \end{aligned}$$

opierając się na równaniach Hencky'ego-Iliuszina lub Levy'ego-Misesa określimy rozkład naprężeń wzorami

$$(22.55) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3}{2\varphi} \kappa z, & \tau_{yx} &= 0, \\ \sigma_y &= 0, & \tau_{zx} &= \frac{\vartheta}{2\varphi} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right), \\ \sigma_z &= 0, & \tau_{xy} &= \frac{\vartheta}{2\varphi} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right). \end{aligned}$$

Napężenia normalne mogły przy tym zostać powiększone o dowolną jednakową wartość przyrostu napężenia średniego $\Delta\sigma_m$, jednakże z warunków brzegowych wynika $\Delta\sigma_m = 0$.

Pozostają do spełnienia dwa równania: jedno (pierwsze) z równań równowagi wewnętrznej i warunek plastyczności typu (22.2). Podejście Handelman-Hilla polega na wprowadzeniu dla naprężeń stycznych funkcji naprężeń Prandtla i wyrugowania na tej drodze funkcji spaczenia $u_0(y, z)$. Stosując podejście przemieszczeniowe wyrugujemy najpierw funkcję φ w oparciu o warunek plastyczności. Jeżeli mianowicie we wzorze (22.2) przyjmiemy $c = 3$ (warunek HMM), to po podstawieniu (22.55) otrzymamy

$$(22.56) \quad \varphi = \frac{1}{2\sigma_0} \sqrt{9\kappa^2 z^2 + 3\vartheta^2 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right)^2 \right]}$$

Kolejne podstawienie (22.56) do (22.55) i wykorzystanie warunku równowagi wewnętrznej prowadzi do równania różniczkowego, określającego funkcję spaczenia u_0 :

$$(22.57) \quad 3\kappa^2 z \left(z \nabla^2 u_0 - \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) + \vartheta^2 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right)^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right)^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right] = -3\kappa^2 y z^2.$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, niejednorodne: funkcja $u_0 \equiv 0$ nie jest całą tego równania z wyjątkiem przypadku $\kappa = 0$ czyli braku zginania. Ponadto spaczenie jest oczywiście równe zero przy braku skręcania, bowiem spaczenie oznaczyliśmy przez ϑu_0 . Dołączony do (22.57) warunek brzegowy ma dla dowolnego kształtu przekroju postać analogiczną do (22.42), mianowicie przy założeniu całkowitego uplastycznienia przekroju pręta:

$$(22.58) \quad \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right) dy - \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right) dz = 0.$$

Po rozwiązaniu równania (22.57) z warunkiem brzegowym (22.58), czyli po określeniu funkcji spaczenia u_0 , możemy obliczyć moment zginający i moment skręcający, otrzymując w ten sposób parametryczną formę równania krzywej granicznej. Momenty te są określone wzorami

$$(22.59) \quad M_g = \iint_F \sigma_x z dF = 3\kappa\sigma_0 \iint_F \frac{z^2 dF}{\sqrt{9\kappa^2 z^2 + 3\vartheta^2 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right)^2 \right]}},$$

$$M_s = \iint_F (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dF = \vartheta\sigma_0 \iint_F \frac{\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right) z - \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right) y \right] dF}{\sqrt{9\kappa^2 z^2 + 3\vartheta^2 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right)^2 \right]}}.$$

W rozważanym obecnie przypadku przekroju kołowego warunek brzegowy ulega szczególnemu uproszczeniu przy przejściu na współrzędne walcowe. Jeżeli mianowicie wprowadzimy współrzędne

$$(22.60) \quad \varrho = \frac{1}{b} \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctg \frac{z}{y},$$

gdzie b oznacza promień koła (przekroju), to równanie (22.57) przybierze postać

$$(22.61) \quad \begin{aligned} & 3\kappa^2 b^4 \varrho^3 \sin \theta \left[\left(\varrho^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} \right) \sin \theta - \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \cos \theta \right] + \\ & + \vartheta^2 \left[\varrho \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varrho^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} - b^2 \varrho^2 \right)^2 - 2 \frac{\partial u_0}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varrho \partial \theta} - \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} - b^2 \varrho^2 \right) + \right. \\ & \left. + \varrho \left(\frac{\partial u_0}{\partial \varrho} \right)^2 \left(\varrho \frac{\partial u_0}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} \right) \right] = -3\kappa^2 b^6 \varrho^5 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

z warunkiem brzegowym $\partial u_0 / \partial \varrho = 0$ dla $\varrho = 1$.

22.4.2. Metoda małego parametru: wpływ zginania na nośność pręta skręcanego. Nieliniowe równanie różniczkowe stawia dwie podstawowe możliwości zastosowania metody małego parametru: traktowanie kolejno stosunku κ/ϑ jako mały oraz stosunku ϑ/κ jako mały. W pierwszym przypadku określimy wpływ zginania na nośność pręta skręcanego, w drugim — wpływ skręcania na nośność pręta zginanego. Pierwszy z wymienionych wariantów jest prostszy, bowiem przybliżenie zerowe, odpowiadające czystemu skręcaniu, ma w przypadku przekroju kołowego tylko jeden punkt osobliwy $\varrho = 0$ i zbieżność szeregów jest zadowalająca. Natomiast w drugim wariantcie występuje w przybliżeniu zerowym rozkładu naprężeń linia nieciągłości $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ i w obszarze w pobliżu tej linii zbieżność szeregów jest słaba lub też szeregi przestają być zbieżne. Tym niemniej oba wymienione warianty metody małego parametru prowadzą do celu i przedstawimy je tu krótko w oparciu o pracę S. PIECHNIKA [540] oraz S. PIECHNIKA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [541].

Przyjmując że stosunek κ/ϑ jest mały, wprowadzimy bezwymiarowe oznaczenia

$$(22.62) \quad \frac{\kappa^2}{\vartheta^2} = \psi, \quad \frac{u_0}{b^2} = t$$

i przepisemy (22.61) w postaci bezwymiarowej

$$(22.63) \quad \begin{aligned} & 3\psi \varrho^3 \sin \theta \left[(\varrho^2 t''_{\rho\rho} + t''_{\theta\theta}) \sin \theta - t'_\theta \cos \theta \right] + \varrho t'_{\rho\rho} (t'_\theta - \varrho^2)^2 - 2t'_\rho (\varrho t'_{\rho\theta} - t'_\theta) (t'_\theta - \varrho^2) + \\ & + \varrho t'^2_{\rho} (\varrho t'_\rho + t'_{\theta\theta}) = -3\psi \varrho^5 \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

gdzie przecinkami u góry oznaczono różniczkowanie względem odpowiednich zmiennych. Zauważymy najpierw, że przyjmując rozwiązanie w postaci $t = t_0 + t_1 \psi + t_2 \psi^2 + \dots$ otrzymujemy z uwagi na t_0 równanie różniczkowe jednorodne, co przy jednorodnym warunku brzegowym $t'_\rho(1, \theta) = 0$ daje $t_0 \equiv 0$; istotnie, przy czystym skręcaniu spaczenie przekroju kołowego jest równe zeru. W takim razie możemy założyć $t = t_1 \psi + t_2 \psi^2 + \dots$ i na poszczególne poprawki otrzymujemy ciąg stosunkowo prostych równań różniczkowych liniowych:

$$(22.64) \quad \begin{aligned} & t''_{1\rho\rho} = -3 \sin \theta \cos \theta, \\ & \varrho^3 t''_{2\rho\rho} = -3\varrho \sin^2 \theta (\varrho^2 t''_{1\rho\rho} + t''_{1\theta\theta}) + 3\varrho \sin \theta \cos \theta t'_{1\theta} + 2\varrho t'_{1\rho\rho} t'_{1\theta} - 2\varrho t'_{1\rho} t'_{1\rho\theta} + 2t'_{1\rho} t'_{1\theta}, \\ & \dots \end{aligned}$$

Całkowanie powyższych równań nie nastęrcza poważniejszych trudności. Przy uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymujemy kolejno

$$(22.65) \quad \begin{aligned} t_1 &= 3 \left(\varrho - \frac{\varrho^2}{2} \right) \sin \theta \cos \theta \\ t_2 &= 9 \left[4\varrho (\ln \varrho - 1) \sin^3 \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\varrho - \frac{\varrho^2}{2} \right) \sin \theta \cos \theta \right], \\ &\dots \end{aligned}$$

zatem

$$(22.66) \quad t = 3\varrho \sin \theta \cos \theta \left\{ \left(1 - \frac{\varrho}{2} \right) \psi + 3 \left[4 (\ln \varrho - 1) \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varrho}{2} \right) \right] \psi^2 + \dots \right\}.$$

Obliczając kolejno φ ze wzoru (22.56) i podstawiając do (22.55) możemy określić rozkład naprężeń w postaci szeregów małego parametru ψ . Jednakże nieco lepszą zbieżność szeregów uzyskamy nie wykonując wszystkich działań na szeregach, tylko zapisując wyniki w formie

$$(22.67) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{\Omega} \varrho \sin \theta \sqrt{\psi}, \\ \tau_{xy} &= - \frac{\sigma_0 \cos \theta}{\Omega \sqrt{3}} \left\{ -\varrho + \frac{3}{2} (-\varrho + 2 \cos^2 \theta) \psi + \frac{9}{4} [-\varrho + \right. \\ &\quad \left. + (16 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta) + 48 (\ln \varrho - 1) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \psi^2 + \dots \right\}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\sigma_0 \sin \theta}{\Omega \sqrt{3}} \left\{ \varrho + \frac{3}{2} (-\varrho + 2 \sin^2 \theta) \psi + \frac{9}{4} [-\varrho + \right. \\ &\quad \left. + 48 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 16 \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta + 16 \ln \varrho (\sin^4 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)] \psi^2 + \dots \right\}, \end{aligned}$$

gdzie Ω oznacza pierwiastek z szeregu

$$(22.68) \quad \begin{aligned} \Omega^2 &= \varrho^3 + 3 [\varrho^2 \cos^2 \theta - 2\varrho (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \psi + \frac{9}{4} [(3 - 4 \sin^2 \theta) \varrho + \\ &\quad + 8 (13 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 4 \sin^4 \theta - \cos^2 \theta) - 32\varrho \ln \varrho (3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^4 \theta) + \\ &\quad + 4 (1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)] \psi^2 + \dots \end{aligned}$$

Wzory powyższe umożliwiają efektywne określenie rozkładu naprężeń w przekroju; odpowiednie wykresy zawiera praca [540].

W celu obliczenia momentu zginającego i momentu skręcającego (22.59) należy jednak najpierw dokonać rozwinięcia wyrażenia Ω (pierwiastkowania szeregu) i dzielenia szeregów, określonego wzorami (22.67). Zbieżność szeregów ulega pogorszeniu, ale całkowanie powoduje z kolei poprawę zbieżności. Ostatecznie otrzymuje się

$$(22.69) \quad M_\varrho = \pi b^3 \sigma_0 \sqrt{3} \psi \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{8} \psi + \frac{639}{64} \psi^2 - \dots \right),$$

$$(22.70) \quad M_s = \frac{\pi b^3 \sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \psi + \frac{63}{32} \psi^2 + \dots \right).$$

Wprowadzając bezwymiarowe momenty wzorami $m_\theta = M_\theta / \bar{M}_\theta$ i $m_s = M_s / \bar{M}_s$ zapiszemy powyższe wzory następująco

$$(22.71) \quad \begin{aligned} m_\theta &= 1,3603 \sqrt{\psi} - 3,5708 \psi^{3/2} + 40,7452 \psi^{5/2} + \dots, \\ m_s &= 1 - 0,7500\psi + 2,9297\psi^2 + \dots, \end{aligned}$$

a po wyrugowaniu parametru ψ

$$(22.72) \quad m_s = 1 - 0,4053m_\theta^2 - 0,1943m_\theta^4 + \dots$$

Szereg ten określa krzywą nośności granicznej $m_s = f(m_\theta)$ w pewnym otoczeniu punktu odpowiadającego czystemu skręcaniu.

22.4.3. Metoda małego parametru: wpływ skręcania na nośność pręta zginanego. Przejdziemy do rozpatrzenia przypadku, gdy stosunek ϑ/κ w równaniu (22.61) może być uważany za mały. Oznaczmy ten bezwymiarowy stosunek przez λ , a ponadto wprowadzimy tu bezwymiarową funkcję spaczenia wzorem

$$(22.73) \quad t = \frac{\vartheta u_0}{\kappa b^2}, \quad \text{czyli} \quad u_0 = \frac{\kappa}{\vartheta} b^2 t.$$

Podstawiając (22.73) do (22.61) zapiszemy teraz podstawowe równanie przemieszczeniowe w formie

$$(22.74) \quad \begin{aligned} 3 \sin \theta [(Q^2 t''_{\rho\rho} + t''_{\theta\theta}) \sin \theta - t'_\theta \cos \theta] + \frac{1}{Q^2} t''_{\rho\rho} (t'_\theta - \lambda Q^2)^2 - \\ - \frac{2}{Q^3} t'_\rho (Q t''_{\rho\theta} - t'_\theta) (t'_\theta - \lambda Q^2) + \frac{1}{Q^2} t'^2_{\rho} (Q t'_\rho + t''_{\theta\theta}) = -3\lambda Q^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Również i w tym przypadku przewidując rozwiązanie w postaci szeregu $t = t_0 + \lambda t_1 + \lambda^2 t_2 + \dots$ otrzymujemy z uwagi na t_0 równanie jednorodne, co przy jednorodnym warunku brzegowym $t'_\rho(1, \theta) = 0$ prowadzi do wniosku $t_0 \equiv 0$; ponadto spaczenie t musi być nieparzystą funkcją parametru λ , tak że podstawimy $t = t_1 \lambda + t_2 \lambda^3 + \dots$ otrzymując z uwagi na poszczególne poprawki ciąg równań

$$(22.75) \quad \begin{aligned} Q^2 \sin \theta t''_{1\rho\rho} + \sin \theta t''_{1\theta\theta} - \cos \theta t'_{1\theta} &= -Q^2 \cos \theta, \\ Q^2 \sin \theta t''_{2\rho\rho} + \sin \theta t''_{2\theta\theta} - \cos \theta t'_{2\theta} &= -\frac{1}{3 \sin \theta} \left[t''_{1\rho\rho} \left(\frac{1}{Q} t'_{1\theta} - Q \right)^2 - \right. \\ &- 2t'_{1\rho} \left(t''_{1\rho\theta} - \frac{1}{Q} t'_{1\theta} \right) \left(\frac{1}{Q^2} t'_{1\theta} - 1 \right) + \frac{1}{Q} t'^2_{1\rho} \left(t'_{1\rho} + \frac{1}{Q} t''_{1\theta\theta} \right) \Big], \\ &\dots \end{aligned}$$

Są to równania różniczkowe liniowe typu eliptycznego, wyraźnie trudniejsze do scałkowania od równań parabolicznych (22.64). Ich budowa nasuwa myśl poszukiwania całek w postaci szeregów Fouriera

$$(22.76) \quad t_i(Q, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{i,n}(Q) \sin 2n\theta,$$

które prowadzą do rozwiązań ścisłych, choć już nie w formie zamkniętej. Brak funkcji

cosinus i funkcji sinus nieparzystych wielokrotności kąta θ w szeregu (22.76) wynika z zerowania się funkcji spaczenia dla $\theta = 0, \pi, 2\pi, \dots$ i z warunków symetrii.

Okazuje się, że układ (22.75) można przy wykorzystaniu formy poszczególnych całek (22.76) zapisać w sposób ogólny następująco;

$$(22.77) \quad (\varrho^2 t'_{i\rho\rho} + t'_{i\theta\theta}) \sin \theta_i - t'_{i\theta} \cos \theta = \sum_{n=1}^{\infty} H_{i,n}(\varrho) \cos(2n-1)\theta.$$

Możliwość zapisania prawych stron tych równań w postaci szeregów nieparzystych cosinusów wynika również z warunków symetrii. Dla $i = 1$ mamy np. $H_{1,1}(\varrho) = -\varrho^2$, $H_{1,n}(\varrho) = 0$ dla $n \geq 2$. Podstawiając (22.76) do (22.77) otrzymujemy po stosownych zamianach wskaźników niektórych wyrażeń następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych z uwagi na funkcje $g_{i,n}$:

$$(22.78) \quad \varrho^2 g'_{i,n} - 2n(2n+1)g_{i,n} = 2H_{i,n} + \varrho^2 g'_{i,n-1} - 2(n-1)(2n-3)g_{i,n-1},$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$, przy czym przez $g_{i,0}$ rozumiemy tu funkcję równą identycznie zeru. Oznaczając prawą stronę równań (22.78) krótko przez $K_{i,n} = K_{i,n}(\varrho, g_{i,1}, \dots, g_{i,n-1})$ możemy poszukiwane całki szczególne tych niejednorodnych równań typu Eulera, spełniające warunek brzegowy $g'_{i,n}(1) = 0$ oraz warunek ograniczoności w punkcie $\varrho = 0$ zapisać w postaci

$$(22.79) \quad g_{i,n} = -\frac{1}{4n+1} \varrho^{-2n} \int_0^{\varrho} \xi^{2n-1} K_{i,n}(\xi) d\xi - \frac{2n}{(2n+1)(4n+1)} \varrho^{2n+1} \int_0^1 \xi^{2n-1} K_{i,n}(\xi) d\xi - \frac{1}{4n+1} \varrho^{2n+1} \int_{\varrho}^1 \xi^{-2n-2} K_{i,n}(\xi) d\xi.$$

Dla pierwszej poprawki funkcji spaczenia, $i = 1$, kilka pierwszych funkcji $g_{1,n}$ jest ostatecznie określonych prostymi wzorami

$$(22.80) \quad \begin{aligned} g_{1,1} &= \frac{1}{2} \varrho^2 - \frac{1}{3} \varrho^3, \\ g_{1,2} &= \frac{2}{3 \cdot 7} \varrho^3 - \frac{2}{5 \cdot 7} \varrho^5, \\ g_{1,3} &= \frac{1}{7 \cdot 9} \varrho^3 + \frac{8}{5 \cdot 7 \cdot 11} \varrho^5 - \frac{5}{3 \cdot 7 \cdot 11} \varrho^7, \\ &\dots \end{aligned}$$

tak że poprawkę tę można określić następującym szeregiem Fouriera

$$(22.81) \quad \begin{aligned} t_1(\varrho, \theta) &= \left(\frac{1}{2} \varrho^2 - \frac{1}{3} \varrho^3 \right) \sin 2\theta + \left(\frac{2}{21} \varrho^3 - \frac{2}{35} \varrho^5 \right) \sin 4\theta + \\ &+ \left(\frac{1}{63} \varrho^3 + \frac{8}{385} \varrho^5 - \frac{2}{231} \varrho^7 \right) \sin 6\theta + \dots \end{aligned}$$

W pracy [541] podano również szczegóły obliczania drugiej poprawki $i = 2$, jakkolwiek rachunki w tym przypadku są bardzo żmudne.

Przechodząc do określenia naprężeń, zajmijmy się najpierw funkcją φ (22.56). Przy wykorzystaniu (22.81) można kwadrat tej funkcji określić szeregiem

$$(22.82) \quad \varphi^2 = \frac{3b^2\kappa^2}{4\sigma_0^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{j,n}(\varrho) \lambda^{2j} \cos 2n\theta;$$

kolejne funkcje $\alpha_{j,n}$ dla $j = 1$ są określone następującymi szeregami promienia ϱ :

$$(22.83) \quad \begin{aligned} \alpha_{1,0} &= 2\varrho^2 - 1,667\varrho^3 + 0,8423\varrho^4 - 0,1500\varrho^6 + 0,0651\varrho^8 + \dots, \\ \alpha_{1,1} &= -2\varrho^2 + 2\varrho^3 - 0,4862\varrho^4 - 0,4668\varrho^5 + 0,3942\varrho^6 - 0,0948\varrho^8 + \dots, \\ \alpha_{1,2} &= 0,0924\varrho^3 - 0,3654\varrho^4 + 0,4570\varrho^5 - 0,1857\varrho^6 - 0,2813\varrho^7 + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

Korzystając następnie ze wzorów (22.55) możemy składowe stanu naprężenia przedstawić wzorami

$$(22.84) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 \sqrt{3} \frac{\varrho \sin \theta}{\sqrt{3\varrho^2 \sin^2 \theta + (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} \cos 2\theta + \alpha_{1,2} \cos 4\theta + \dots) \lambda^2 + \dots}}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\left(t'_{1\rho} \sin \theta + \frac{1}{\varrho} t'_{1\theta} \cos \theta - \varrho \cos \theta \right) \lambda + \left(t'_{2\rho} \sin \theta + \frac{1}{\varrho} t'_{2\theta} \cos \theta \right) \lambda^3 + \dots}{\sqrt{3\varrho^2 \sin^2 \theta + (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} \cos 2\theta + \alpha_{1,2} \cos 4\theta + \dots) \lambda^2 + \dots}}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\left(t'_{1\rho} \cos \theta - \frac{1}{\varrho} t'_{1\theta} \sin \theta + \varrho \sin \theta \right) \lambda + \left(t'_{2\rho} \cos \theta - \frac{1}{\varrho} t'_{2\theta} \sin \theta \right) \lambda^3 + \dots}{\sqrt{3\varrho^2 \sin^2 \theta + (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} \cos 2\theta + \alpha_{1,2} \cos 4\theta + \dots) \lambda^2 + \dots}}. \end{aligned}$$

Przykładowe wykresy rozkładów naprężeń podaje praca [541].

Szeregi powyższe (po wykonaniu działań) stają się rozbieżne dla $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ z uwagi na nieciągłość przybliżenia zerowego wzdłuż tych linii. Tym niemniej istnieje możliwość obliczenia momentu zginającego i momentu skręcającego (22.59) przez zastosowanie częściowo całkowania numerycznego. Postępując tą drogą otrzymano w pracy [541] wzory

$$(22.85) \quad M_g = \sigma_0 b^3 (1,3339 - 0,6870\lambda^2 + \dots),$$

$$M_s = \frac{\sigma_0 b^3}{\sqrt{3}} (2,3655\lambda + \dots),$$

a po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych podobnie jak w p. 22.4.2 i wyrugowaniu parametru λ ,

$$(22.86) \quad m_g = 1 - 0,4036m_s^2 - \dots$$

Szereg ten określa krzywą nośności granicznej $m_g = f(m_s)$ w pewnym otoczeniu punktu odpowiadającego czystemu zginaniu.

22.4.4. Uogólniona aproksymacja brzegowa typu Hermite'a. Szereg (22.72) określa wartość funkcji $m_s = f(m_g)$ i kilku jej pierwszych pochodnych w punkcie $m_g = 0$, natomiast szereg (22.86) — wartość funkcji $m_g = f(m_s)$ i kilku jej pochodnych w punkcie $m_s = 0$. Taka sytuacja stwarza możliwość zastosowania aproksymacji brzegowej typu Hermite'a dla całego przedziału. Jednakże pochodna funkcji $m_s = f(m_g)$ zmierza w punkcie $m_g = 1$ do nieskończoności, a pochodna funkcji $m_g = f(m_s)$ w punkcie $m_s = 1$ do nie-

skończoności. Wobec tego zastosujemy pewne uogólnienie aproksymacji brzegowej Hermite'a, polegające na założeniu funkcji aproksymującej w postaci uwikłanej i wykorzystaniu warunków zgodności w punkcie $m_g = 0$ przy rozwikłaniu tej funkcji do postaci $m_s = f(m_g)$, natomiast zgodności w punkcie $m_s = 0$ przy rozwikłaniu do postaci $m_g = f(m_s)$.

Założymy mianowicie uwikłane równanie krzywej nośności granicznej w postaci

$$(22.87) \quad Am_s^2 + Bm_g^2 + Cm_s^4 + Dm_g^4 = 1,$$

dającej się efektywnie rozwikłać zarówno względem m_s , jak i względem m_g , i spełniającej wymagane warunki symetrii. Rozwikłanie (22.87) względem m_s prowadzi do wzoru

$$(22.88) \quad m_s^2 = \frac{1}{2C} [-A + \sqrt{A^2 + 4C(1 - Bm_g^2 - Dm_g^4)}],$$

a po rozwinięciu w szereg względem m_g ,

$$(22.89) \quad m_s^2 = \frac{1}{2C} \left[-A + \sqrt{A^2 + 4C} \left(1 - \frac{2BCm_g^2}{A^2 + 4C} + \dots \right) \right].$$

Warunki zgodności typu Hermite'a uzyskamy przez porównanie współczynników szeregu (22.89) i podniesionego do kwadratu szeregu (22.72). Porównując mianowicie dwa współczynniki, skąd otrzymamy układ równań

$$(22.90) \quad A + C = 1, \quad B = 0,8106(2 - A),$$

zapewnimy zgodność wartości funkcji pierwszej i drugiej pochodnej, przy czym zgodność pierwszej pochodnej (równej zero) jest zapewniona automatycznie przez dobór funkcji aproksymującej (22.87).

Podobnie, dokonując rozwikłania (22.87) względem m_g^2 , rozwijając otrzymane wyrażenie w szereg potęgowy zmiennej m_s i porównując z podniesionym do kwadratu szeregiem (22.86) otrzymujemy układ równań

$$(22.91) \quad B + D = 1, \quad A = 0,8072(2 - B).$$

Rozwiązanie układu równań liniowych (22.90) i (22.91) pozwala na określenie stałych A, B, C, D i ostatecznie równanie aproksymacyjne krzywej nośności granicznej zapiszemy w postaci

$$(22.92) \quad 0,8845m_s^2 + 0,9042m_g^2 + 0,1155m_s^4 + 0,0958m_g^4 = 1.$$

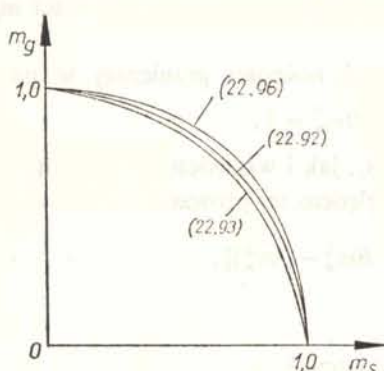
Krzywą (22.92) pokazano na rys. 118 wraz z oszacowaniami: dolnym i górnym, które omówimy w p. 22.4.5.

22.4.5. Oszacowanie dolne i oszacowanie górne nośności granicznej. Rozwiązywanie ściśle równania (22.57) lub odpowiedniego równania dla funkcji naprężeń natrafia, jak widzieliśmy, na dość poważne trudności, natomiast stosunkowo prosto otrzymuje się w rozważanym przypadku oszacowanie dolne i oszacowanie górne przez dobór odpowiednich pól statycznie i kinematycznie dopuszczalnych.

Oszacowanie dolne wynika wprost z (22.8); przy przyjętych oznaczeniach można je zapisać w postaci

$$(22.93) \quad m_s^2 + m_g^2 = 1.$$

Dla uzyskania oszacowania górnego przyjmujemy pole przemieszczeń (lub prędkości) (22.53), w którym $u_0 \equiv 0$ (hipoteza płaskich przekrojów). Moment zginający i moment skręcający są określone wzorami (22.59), w których należy podstawić $u_0 = 0$; po przejściu



Rys. 118. Krzywe nośności granicznej dla jednoczesnego zginania ze skręcaniem: uogólniona aproksymacja brzegowa Hermite'a, oszacowanie górne i dolne

na współrzędne biegunowe (22.60), wprowadzeniu jacobianu i wykonaniu prostego całkowania względem ϱ otrzymujemy

$$(22.94) \quad M_g = \kappa \sigma_0 b^3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{9\kappa^2 \sin^2 \theta + 3\vartheta^2}},$$

$$M_s = \frac{\vartheta \sigma_0 b^3}{3} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{9\kappa^2 \sin^2 \theta + 3\vartheta^2}}.$$

Uzyskane całki są całkami eliptycznymi, przy czym druga z nich wyraża się wprost przez całkę eliptyczną pełną pierwszego rodzaju, a pierwsza przez pewną kombinację całek obu rodzajów. Najprostszy zapis uzyskuje się przy traktowaniu całek eliptycznych pełnych nie jako funkcji modułu k jak zazwyczaj, lecz jako funkcji pomocniczego kąta α , mianowicie

$$(22.95) \quad \mathbf{K}(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}},$$

i podobnie $\mathbf{E}(\alpha)$. Po sprowadzeniu całek (22.94) do postaci normalnej uzyskuje się wtedy

$$(22.96) \quad m_g = \frac{\mathbf{E}(\alpha) - \mathbf{K}(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}, \quad m_s = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\alpha) \cos \alpha,$$

gdzie parametr α związany jest z parametrami κ i ϑ wzorem

$$(22.97) \quad \sin \alpha = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \frac{1}{3} \vartheta^2}}.$$

Wzory (22.96) określają oszacowanie górne krzywej granicznej w sposób parametryczny: na nieco innej drodze uzyskali je R. HILL i M. P. L. SIEBEL [229], A. R. RZANICYN [1139] oraz I. W. MIROLUBOW [1078]. Krzywe (22.93) i (22.96) pokazano również na rys. 118:

Ocenę dokładności przybliżonego przyjęcia hipotezy płaskich przekrojów (22.96) analizował Ju. A. RAKOWSZCZIK [1134], stwierdzając że błąd w stosunku do rozwiązania ścisłego nie przekracza 4%. Badania doświadczalne nośności granicznej w rozważanym przypadku przeprowadził P. G. BYCZKOW [828] dopuszczając różną kolejność przyłożenia obciążeń a także odkształcenia plastyczne przeciwzrotne.

22.4.6. Przypadek wzmocnienia plastycznego. Ścisła analiza wzmocnienia plastycznego przy jednoczesnym zginaniu ze skręcaniem natrafia na poważne trudności, natomiast stosunkowo proste wyniki można uzyskać przez zastosowanie rozwiązań statycznie dopuszczalnych lub kinematycznie dopuszczalnych. Podejścia takie stosowali R. M. SZNEJDEROWICZ i M. B. GROMAN [1254, 1255, 1256]. Uwzględniając liniowe izotropowe wzmocnienie materiału określili oni opierając się na uogólnionym twierdzeniu Castiglianiego ugięcia wału i sformułowali przemieszczeniowy warunek nośności. W pracy S. W. SERENSENA, W. P. KOGAJEWA i R. M. SZNEJDEROWICZA [1161] można znaleźć pomocnicze wykresy, ułatwiające efektywne obliczenia w przypadku liniowego wzmocnienia materiału.

22.5. Zginanie ze skręcaniem prętów o dowolnym przekroju

22.5.1. Rozwiązania ścisłe. Wyprowadzone w p. 22.4 równanie różniczkowe dla przemieszczeń lub prędkości (22.57) opisuje wraz z warunkiem brzegowym (22.58) problem plastycznego zginania ze skręcaniem pręta o dowolnym przekroju; podobnie ogólne jest równanie Handelman-Hilla, które podamy w p. 23.4. Rozpatrywany w p. 22.4 przypadek przekroju kołowego zezwalał jedynie na prostszy zapis warunku brzegowego przez przejście na współrzędne walcowe, a następnie na wykorzystanie szeregów Fouriera względem zmiennej θ .

Uzyskanie rozwiązań ścisłych równania (22.57) lub odpowiedniego równania z uwagi na funkcję naprężeń dla innych kształtów przekroju przedstawia poważne trudności. Podamy tu tylko jeden wyjątkowo prosty przykład.

Łatwo sprawdzić, że funkcja $u_0 = yz$ spełnia ściśle równanie różniczkowe (22.57), podobnie jak funkcja $w_0 = xy$ spełniała równanie (22.41) dla jednoczesnego rozciągania ze skręcaniem. Warunek brzegowy (22.58) będzie spełniony jedynie wtedy, gdy $dz = 0$, co odpowiada nieograniczonemu pasmu, pokazanemu na rys. 117, gdzie oznaczenia osi x i y należy teraz odpowiednio zmienić na y i z . Podobnie jak w p. 22.3.2 można to rozwiązanie z dostateczną dokładnością wykorzystać dla przekroju o kształcie wąskiego prostokąta o bokach b i h , gdzie $h \ll b$; zginanie zachodzi tu w płaszczyźnie mniejszej sztywności, co niestety ogranicza stosowalność rozwiązania w praktyce.

Rozkład naprężeń (22.55) przy podstawieniu (22.56) jest tu następujący

$$(22.98) \quad \sigma_x = \frac{3\sigma_0 \kappa \operatorname{sign} z}{\sqrt{9\kappa^2 + 12\theta^2}}, \quad \tau_{xy} = \frac{2\sigma_0 \theta \operatorname{sign} z}{\sqrt{9\kappa^2 + 12\theta^2}},$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Po obliczeniu momentów M_y i M_z wzorami (22.59), gdzie jednak moment M_z należy

mnożyć przez 2 z uwagi na występowanie w strefach brzegowych naprężeń stycznych τ_{xz} , działających na dużym ramieniu, otrzymujemy równanie krzywej granicznej w postaci (22.99)

$$16M_g^2 + 12M_s^2 = \sigma_0^2 b^2 h^4.$$

Rozwiązanie to uzyskał na nieco innej drodze A. R. RZANICYN [1138]. Jest ono zgodne z ogólną postacią oszacowań dolnych (22.8), bowiem w tym przypadku ścisły rozkład naprężeń jest typu (22.6).

22.5.2. Rozwiązania numeryczne. Równanie Handelmana-Hilla z uwagi na funkcję naprężeń oraz równanie przemieszczeniowe (22.57) mogą być całkowane numerycznie dla różnych kształtów przekroju; trudności są tu związane nie tylko z dość złożonymi postaciami równań i z koniecznością całkowania ich dla różnych wartości stosunków κ/β , ale i z oszacowaniem błędu przybliżenia.

Pierwsze całkowania numeryczne przeprowadził M. C. STEELE [672] dla przekroju kwadratowego; skorzystał on z równania Handelmana-Hilla. Wyniki były zbliżone do oszacowań podanych wcześniej przez HILLA i SIEBELA [229]. E. O. IMEGWU [283, 284] przeprowadził podobne całkowania dla przekroju kołowego i trójkątnego równobocznego wykorzystując metodę relaksacji Southwella. IMEGWU zakładał również warunek plastyczności Treski-Guesta, co zresztą w rozważanym przypadku nie powoduje istotniejszych różnic.

P. M. MILLER i L. E. MALVERN [419, 420, 421] zwrócili uwagę na fakt, iż całkowanie numeryczne równania przemieszczeniowego (22.57) zapewnia znacznie większą dokładność wyników. Ogólną analizę tego problemu zawiera praca [419], w której ponadto wyprowadzono równanie dla prędkości przemieszczeń w przypadku materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem. W pracy [420] całkowano równania (22.57) dla pręta o przekroju kwadratowym, a w pracy [421] odpowiednie równanie uwzględniające wzmocnienie plastyczne. Porównano przy tym wyniki teorii odkształceniowej i teorii przyrostowej (płynięcia plastycznego).

T. YAMASAKI i O. TOSYAKI [749] badali zakres sprężysto-plastyczny prostokątnego przekroju pręta, poddanego działaniu stałego momentu skręcającego i rosnącego zginającego.

22.5.3. Oszacowania i aproksymacje. Dolne oszacowanie nośności granicznej można dla dowolnego kształtu przekroju zapisać w postaci (22.8); szczegółowe wzory tego typu były proponowane przez wielu autorów.

Przybliżonej analizie jednoczesnego zginania ze skręcaniem prętów cienkościennych o profilu zamkniętym (prętów rurowych) poświęcone były prace R. HILLA i M. P. L. SIEBELA [225] oraz E. T. ONATA i R. T. SHIELDA [490]. Następna, kilkakrotnie już cytowana praca [229] R. HILLA i M. P. L. SIEBELA podała ogólną metodę otrzymywania oszacowań dolnych i oszacowań górnych dla prętów o przekrojach zwartych. Jej rozszerzeniem była analiza F. A. GAYDONA i H. NUTTALLA [160], w której obok oszacowań dolnych typu (22.8) zaproponowano dla przekroju prostokątnego, skrzynkowego i dwuteowego pewne oszacowania górne, uwzględniające spaczenie przekroju. Dalsze oszacowania należą do W. I. BACIKADZE [798] oraz O. I. GRESTE [187]. C. D. GOODE i M. A. HELMY [174]

podali proste oszacowanie nośności granicznej przekroju prostokątnego przy jednoczesnym zginaniu ze skręcaniem w przypadku materiału zbrojonego.

Oryginalną propozycję statycznie dopuszczalnego pola naprężeń podał K. A. RECKLING [576]: przyjął on rozkład naprężeń σ odpowiadający czystemu zginaniu sprężysto-plastycznemu oraz rozkład naprężeń τ , wynikający ze spełnienia warunku plastyczności (a więc $\tau \neq 0$ tylko w strefach sprężystych czystego zginania). Jednakże określenie rozkładu naprężeń stycznych, odpowiadające niejednorodności materiału, natrafia tu na pewne trudności i autor proponuje zastosowanie ponownego przybliżenia. Wyniki takiego podejścia powinny być jednak z reguły dokładniejsze od (22.8).

Niektóre prace podchodzą do problemu określenia krzywej nośności granicznej w sposób czysto aproksymacyjny, częściowo wyzyskując znane rozwiązania ściśle lub przybliżone. R. SANKARANARAYANAN i P. G. HODGE [601] zaproponowali aproksymację krzywej nośności granicznej pewnymi ośmiokątami, a w pracy LE-WU LU [363] podano metodę aproksymacji szesnastokątami dla różnych kształtów przekroju, w tym również przekrojów cienkościennych. Podejście takie ma zasadnicze znaczenie dla sformułowania odcinkowo-liniowej teorii nośności granicznej w rozważanym przypadku.

Jednoczesnemu niesprężystemu zginaniu ze skręcaniem prętów cienkościennych szczególnie wiele uwagi poświęciła A. I. STRELBICKA. Jej pierwsza praca z r. 1954, dotycząca szczegółowo tego przypadku [1175], poświęcona była nośności granicznej, praca [1177] — wzmocnieniu plastycznemu. W pracy [1178] badano zakres sprężysto-plastyczny w przypadku przekroju ceowego, a w pracy [1189] — w przypadku przekroju ceowego i dwuteowego, uwzględniając możliwość innej granicy plastyczności środka, a innej półek. Znaczna część wyników została podsumowana w monografii [1182]. Pokrewnej problematyce poświęcona jest również praca E. A. RAJEWSKIEJ [1131]; pewne proste oszacowania dla przekroju dwuteowego podali K. S. DINNO i W. MERCHANT [92].

Wspomnimy tu również o zbliżonych problemach oszacowań plastycznego przystosowania się przekroju w przypadku obciążeń zmiennych w czasie. Jednostronne narastanie odkształceń plastycznych w rozważanym przypadku nie może nastąpić, jedynie bądź przystosowanie się do danego programu obciążeń, bądź zniszczenie wskutek uplastycznień przeciwwrotnych. G. S. TROFIMOW [1212] badał dla przekroju ceowego przypadek stałego momentu skręcającego przy periodycznie zmiennym zginającym i wyciągnął wnioski odnośnie optymalnego kształtowania ceownika. B. I. LUBAROW [1051] określił graniczne współczynniki asymetrii cykli, rozdzielających obszar przystosowania się od obszaru uplastycznień przeciwwrotnych.

22.5.4. Badania doświadczalne. Badania doświadczalne nośności granicznej, zakresu sprężysto-plastycznego i wzmocnienia plastycznego przy jednoczesnym zginaniu ze skręcaniem były prowadzone głównie w odniesieniu do przekrojów cienkościennych, ważnych przede wszystkim z uwagi na zastosowania w konstrukcjach budowlanych. Pierwsze badania A. W. GEMMERLINGA [847] z r. 1950, polegały na obciążaniu dwuteowych swobodnie podpartych belek stalowych mimośrodowo przyłożoną siłą skupioną w środku. Mierzono nośność graniczną, nie obserwując przy tym lokalnej utraty stateczności. H. MII [416] badał belki wykonane ze stopów lekkich. Dalsze badania nośności prowadzili P. G. BYCZKOW [829] (przekrój prostokątny, trójkątny i dwuteowy), E. A. RA-

JEWSKA [1133] (przekrój dwuteowy), O. I. STRELBYĆKA, E. O. PRIADKO i G. I. EWSIENKO [1186, 1187] (przekrój dwuteowy, belki jednostronnie utwierdzone) — podsumowanie tych prac zawiera monografia [1196], oraz S. S. GILL i J. K. G. BOUCHER [171] (przekrój kwadratowy i prostokątny).

P. C. MASSEY [394] badał sztywność skrętną belek dwuteowych poddanych uprzednio zginaniu plastycznemu. B. FONTAINE [138] prowadził doświadczenia nad nośnością rur cienkościennych jednocześnie zginanych i skręcanych w przypadku istnienia w ścianie rury prostokątnych wycięć (np. na okna); zaproponował on dla tego przypadku prosty wzór aproksymacyjny typu (22.8).

22.5.5. Zastosowania. Analiza nośności granicznej i sprężysto-plastycznego zakresu pracy przekroju pręta poddanego jednoczesnemu zginaniu i skręcaniu stanowi podstawę obliczania nośności granicznej i ugięć wałów, ram przestrzennych, łuków obciążonych nie w swojej płaszczyźnie itp. Pierwsze prace, dotyczące przybliżonego uwzględniania skręcania przy obliczaniu nośności granicznej rusztów i ram przestrzennych pochodzą z r. 1951 i należą do J. HEYMANA (por. [216, 251]). Kilka bardziej szczegółowo opracowanych przykładów wyzyskujących odcinkową linearyzację krzywej nośności granicznej dla przekroju, znajduje się w monografii P. G. HODGE'A [251]. O. I. STRELBYĆKA [1180, 1181 i 1188] badała wpływ skręcania na nośność graniczną ram, wynikający np. z asymetrycznego obciążenia ryglą; prace z tego zakresu zostały podsumowane w monografii [1193]. Obliczaniem nośności granicznej łuków przy uwzględnieniu skręcania zajmują się N. S. BULTON i B. BOONSUKHA [39]. Różne przypadki przestrzennych obciążeń belek prostych o przekroju dwuteowym rozważał J. BRÓDKA [47].

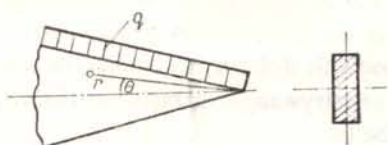
22.6. Zginanie ze ścinaniem

22.6.1. Uwagi wstępne. Przypadek zginania ze ścinaniem jest niewątpliwie najtrudniejszy ze wszystkich przypadków typu P_2/S_2 . Po pierwsze, poprzednio omówione przypadki wykazywały z reguły jednorodność podłużną i dały się klasyfikować jako $P_2/S_2 \rightarrow B_2$, natomiast omawiany problem wykazuje — wobec twierdzenia Schwedlera-Żurawskiego $T = dM_g/dx$ — niejako automatyczną niejednorodność podłużną $P_2/S_2/B_n$ lub nawet $P_4/S_2/B_n$, bowiem przy niektórych kształtach przekrojów nie można pominąć ani σ_x , ani τ_{xy} , wynikających z warunków równowagi. Tylko rozpatrując przekroje niektórych prętów niepryzmatycznych można, trochę sztucznie, przyjąć klasyfikację $P_n/S_2 \rightarrow B_1$: tak np. w pręcie nieograniczonym, pokazanym na rys. 119, traktowanym jako klin, naprężenia we współrzędnych biegunowych płaskich $r\theta$ nie zależą od r , co pozwala na traktowanie każdego (zginanego i ścinanego) przekroju w sposób identyczny.

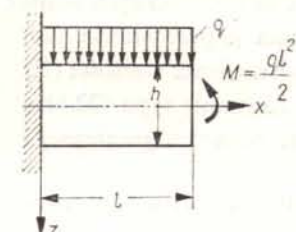
Wobec niejednorodności podłużnej pojęcie nośności granicznej przekroju jednocześnie zginanego i ścinanego może być niejednoznaczne, mianowicie może zależeć od gradientu uogólnionych sił wewnętrznych. Na fakt ten zwraca uwagę wielu autorów, np. D. C. DRUCKER [106] i B. G. NEAL [461]. Dokładniejsza analiza rozkładu naprężeń w przekroju wymaga, ściśle rzecz biorąc, rozpatrywania naprężeń w całej belce (co w znacznym stopniu niweczy korzyści analizy na szczęblu przekroju); inna sprawa, że efektywny wpływ gradientów na krzywą nośności granicznej przekroju jest z reguły bardzo nieznaczny.

Dalsza trudność związana jest z typem stanu naprężenia w poszczególnych punktach —

Jak już wspomnieliśmy, czasami niezbędne jest uwzględnienie nie tylko «podstawowych» naprężeń σ_x i τ_{xz} , lecz również σ_z i τ_{xy} (tego ostatniego np. w niecałkowicie uplastycznionych półkach dwuteowników), co poważnie komplikuje np. warunek plastyczności i może spowodować istotne różnice między warunkami HHM i TG.



Rys. 119. Nieograniczony klin zginany i ścinany (przykład jednorodności podłużnej)



Rys. 120. Belka, dla której przekrój niebezpieczny może odpowiadać czystemu ścinaniu

Poważną komplikację stanowi wreszcie trudność oceny nośności przekroju belki przy czystym ścinaniu, przy działaniu samej tylko siły T . Istnieje w ogóle niewiele przypadków obciążenia belek, gdzie zniszczenie mogłoby nastąpić w wyniku czystego ścinania. Jedną z takich belek pokazano na rys. 120; przy bardzo małej długości belki l w stosunku do wysokości h przekrój utwierdzony (w którym $M_g = 0$) mógłby być przekrojem niebezpiecznym, ale też w przypadku elementu o takim kształcie trudno mówić o stosowalności teorii belek. Niezależnie od takiej sytuacji można się starać ze względów czysto praktycznych, choćby z uwagi na możliwość stosowania oszacowania dolnego typu (22.8), o określenie nośności granicznej przy czystym ścinaniu \bar{T} . Nasuwająca się najprostsza budowa takiego wzoru,

$$(22.100) \quad \bar{T} = \tau_0 F$$

określa niewątpliwie oszacowanie górne, które raczej nigdy nie pokrywa się z rozwiązaniem ścisłym: istotnie, wzór (22.100) określa kres górny funkcjonatu

$$(22.101) \quad T = \iint_F \tau_{xz} dF$$

w klasie funkcji szerszej od dopuszczalnych, mianowicie spełniających jedynie warunek plastyczności, a nie spełniających na ogół ani równań równowagi wewnętrznej, ani warunków brzegowych (funkcje statycznie częściowo dopuszczalne). W przypadku przekroju prostokątnego błąd wzoru (22.100) może nie być zbyt duży, ale np. przy przekroju dwuteo-

wym błąd ten jest zasadniczy i należy wtedy stosować ostrożniejsze podejście (rozumiejąc np. przez F jedynie powierzchnię przekroju środka). Ogólnie można by napisać

$$(22.102) \quad \bar{T} = \mu \tau_0 F,$$

gdzie współczynnik liczbowy μ zależy od kształtu przekroju, ale w pewnym stopniu również od rozkładu sił poprzecznych wzdłuż osi belki (co najmniej od gradientu dT/dx). Określenie współczynnika μ przedstawia samo dla siebie trudny problem teoretyczny.

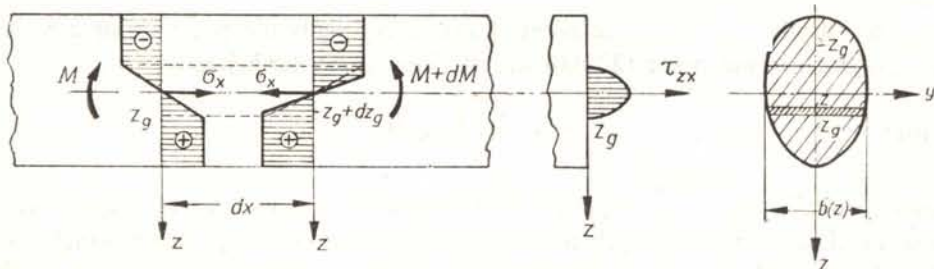
Przy podstawieniu wartości (22.102) ze stosownie dobranym współczynnikiem μ można przyjąć, że równanie typu (22.8) określa w rozpatrywanym przypadku złożonym oszacowanie dolne nośności granicznej przekroju belki.

22.6.2. Podstawowe hipotezy odnośnie rozkładu naprężeń. Wobec trudności w uzyskaniu rozwiązań ścisłych, a ponadto wspomnianej niejednoznaczności nośności granicznej przekroju w rozpatrywanym przypadku, zaproponowano liczne ujęcia przybliżone sprowadzające się do pewnych mniej lub bardziej uzasadnionych hipotez odnośnie rozkładów naprężeń w stanie granicznym. Hipotezy te dotyczą z reguły jedynie naprężeń σ_x i τ_{xz} ; naprężenia σ_z i τ_{xy} bywają uwzględniane jedynie przy bardziej wnikliwych analizach. Uzyskiwane w wyniku obliczeń równania krzywych granicznych przedstawiają bądź oszacowania dolne, bądź górne bowiem nie wszystkie przyjmowane rozkłady naprężeń spełniają warunki statycznej dopuszczalności.

Pierwsze ujęcie tego typu zaproponował w r. 1931 F. STÜSSI (por. B. G. NEAL [460]), jednakże odpowiednie rozkłady naprężeń nie spełniały warunku plastyczności. Dopiero podane w r. 1936 rozwiązanie N. I. BIEZUCHOWA [800] spełnia wszystkie warunki statycznej dopuszczalności. BIEZUCHOW przyjął mianowicie, iż w strefach zewnętrznych uplastycznienie następuje wyłącznie w wyniku naprężeń normalnych $\sigma_x = \pm \sigma_0$, natomiast w strefie wewnętrznej występują liniowo rozłożone naprężenia normalne, a odpowiedni rozkład naprężeń stycznych wynika z warunku równowagi wewnętrznej (np. w przypadku przekroju prostokątnego jest rozkładem parabolicznym), rys. 121. Naprężenia styczne są mianowicie określone wzorem

$$(22.103) \quad \tau_{xz} = \frac{TS_y^{(e)}(z)}{I_y^{(e)} b(z)},$$

gdzie $S_y^{(e)}(z)$ oznacza moment statyczny względem osi y części strefy sprężystej, odciętej na wysokości z (zakreskowanej gęsto na rys. 121), $I_y^{(e)}$ — moment bezwładności strefy



Rys. 121. Hipoteza Biezychowa odnośnie rozkładu naprężeń w belce zginanej i ścinanej w zakresie sprężysto-plastycznym

sprężystej względem osi y , $b(z)$ — bieżącą szerokość przekroju. Zakłada się, że w strefie wewnętrznej uplastycznienie nie następuje, co najwyżej $\max \tau_x = \tau_0$. Zbliżone ujęcie zaproponował A. N. MITINSKIJ [1079], a następnie M. R. HORNE [268], który ponadto uwzględnił naprężenia σ_z , wynikające z warunków równowagi. Pewną modyfikację podał T. VAN LANGENDONCK [335], proponując w strefie wewnętrznej rozkład naprężeń

$$(22.104) \quad \sigma_x = \sigma_0 \sin \frac{\pi z}{2z_0}, \quad \tau_{xz} = \tau_0 \cos \frac{\pi z}{2z_0};$$

rozkład ten spełnia w każdym punkcie przekroju warunek plastyczności i «podnosi» krzywą nośności granicznej, jednakże w przeciwieństwie do propozycji Biezuchowa nie jest on już statycznie dopuszczalny, bowiem równania równowagi wewnętrznej przestają być spełnione.

Przyjęcie zerowania się naprężeń stycznych τ_{xz} w całych strefach zewnętrznych można dla prętów pryzmatycznych uzasadnić opierając się na warunku plastyczności, warunkach brzegowych i równaniach równowagi wewnętrznej. Dowód taki podali W. PRAGER i P. G. HODGE [552] oraz M. R. HORNE [268] przy założeniu występowania jedynie naprężeń σ_x i τ_{xz} . Przytoczymy go tu w formie ogólniejszej, dopuszczając istnienie naprężeń σ_z i przyjmując dowolny warunek plastyczności $\sigma_{red} = f(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}) = \sigma_0$.

Warunki brzegowe na nieobciążonej ścianie $z = h$ pręta pryzmatycznego zapiszemy w postaci

$$(22.105) \quad \sigma_z(x, h) = 0, \quad \tau_{xz}(x, h) = 0, \quad \text{stąd} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}(x, h) = 0,$$

zatem z warunku plastyczności po stronie rozciągania

$$(22.106) \quad \sigma_x(x, h) = \sigma_0, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}(x, h) = 0.$$

Warunki równowagi wewnętrznej prowadzą teraz do wniosków

$$(22.107) \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}(x, h) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}(x, h) = 0$$

a ze zróżniczkowanego względem z warunku plastyczności

$$(22.108) \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

wynika z kolei

$$(22.109) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial z}(x, h) = 0.$$

Ponieważ z tej równości wynika natychmiast $\partial^2 \sigma_x / \partial x \partial z = 0$, więc ze zróżniczkowanego warunku równowagi $\partial^2 \tau_{xz} / \partial z^2 = 0$; kolejno dowodzimy, że wszystkie pochodne naprężeń σ_x , σ_z i τ_{xz} względem z są wzdłuż linii $z = h$ równe zero. Nie jest to jeszcze jednoznaczny dowód (o czym nie wspominają autorzy), że w całej strefie zewnętrznej $\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_z = \tau_{xz} = 0$, gdyż np. różna od zera funkcja

$$(22.110) \quad \tau_{xz} = A(x) e^{-\frac{c(x)}{(z^2-h^2)^2}}, \quad c(x) > 0,$$

ma wzdłuż linii $z = h$ i $z = -h$ wszystkie pochodne względem z równe zero, jednakże

rozkład naprężeń tego typu jest mało prawdopodobny, a rozkład $\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_z = \tau_{xz} = 0$ prowadzi do wyników znacznie prostszych. W każdym razie rozważanie powyższe przemawia wyraźnie na rzecz propozycji N. I. BIEZUCHOWA.

Drugie podstawowe podejście polega na poszukiwaniu kresu górnego (w sensie rachunku wariacyjnego) rozwiązań statycznie częściowo dopuszczalnych, spełniających jedynie warunek plastyczności. Podejście to zaproponował po raz pierwszy w r. 1939 P. F. PĄPKOWICZ [1115], próbując jednocześnie uwzględnić warunki brzegowe i warunki równowagi wewnętrznej. PĄPKOWICZ otrzymał bardzo złożony problem izoperymetryczny rachunku wariacyjnego i nie podał żadnego efektywnego rozwiązania. Niezależnie od PĄPKOWICZA myśl tę podjął w r. 1949 A. R. RŻANICYN [1138], ograniczając się jedynie do spełnienia warunku plastyczności. Jeżeli mianowicie siłę poprzeczną określimy całką (22.101), to przy wykorzystaniu warunku plastyczności HMM moment zginający można określić całką (przy pominięciu składowych τ_{xy} i σ_z)

$$(22.111) \quad M_y = \int \int_F z \sqrt{\sigma_0^2 - 3\tau_{xz}^2} dF.$$

Żądając maksimum momentu zginającego przy stałej wartości siły poprzecznej dochodzimy do problemu izoperymetrycznego rachunku wariacyjnego; odpowiednia funkcja Lagrange'a

$$(22.112) \quad L[\tau_{xz}(z)] = z \sqrt{\sigma_0^2 - 3\tau_{xz}^2} + \lambda \tau_{xz}$$

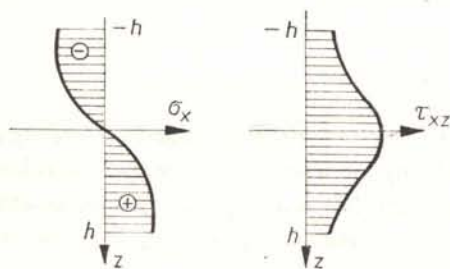
nie zawiera pochodnych funkcji τ_{xz} , tak że uwzględnienie jakichkolwiek warunków brzegowych nie jest możliwe. Z warunku ekstremum otrzymujemy jedynie równanie algebraiczne

$$(22.113) \quad \frac{-3z\tau_{xz}}{\sqrt{\sigma_0^2 - 3\tau_{xz}^2}} + \lambda = 0$$

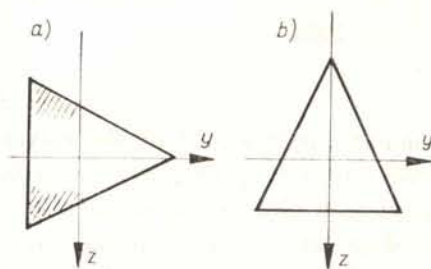
skąd po wyborze znaku + przy pierwiastkowaniu

$$(22.114) \quad \tau_{xz} = \frac{\lambda \sigma_0}{\sqrt{3} \sqrt{3z^2 + \lambda^2}}, \quad \sigma_z = \frac{\sqrt{3} \sigma_0 z}{\sqrt{3z^2 + \lambda^2}}.$$

Rozkład naprężeń (22.114) jest pokazany na rys. 122; jak widać, warunek brzegowy (22.105) nie jest spełniony.



Rys. 122. Rozkład naprężeń odpowiadający kresowi górnemu rozwiązań statycznie częściowo dopuszczalnych (spełniony jedynie warunek plastyczności)



Rys. 123. Powstawanie dodatkowych uogólnionych sił wewnętrznych w przekroju o jednej osi symetrii

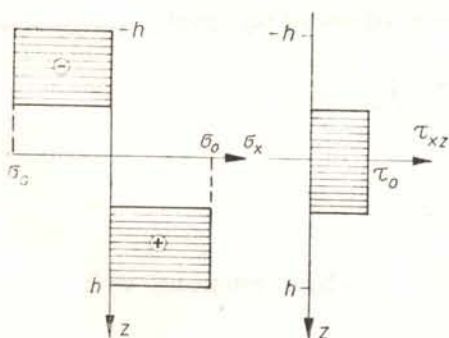
Tak więc krzywa nośności granicznej jest określona równaniami parametrycznymi

$$(22.115) \quad T = \frac{\lambda \sigma_0}{\sqrt{3}} \int_F \int \frac{dF}{\sqrt{3z^2 + \lambda^2}}, \quad M_g = \sqrt{3} \sigma_0 \int_F \int \frac{z^2 dF}{\sqrt{3z^2 + \lambda^2}}.$$

Ponadto RZANICYN (w wydaniu z r. 1954) wykazał, że podjęta przez PAKOWICZA próba uwzględnienia warunków brzegowych nie przynosi rezultatu i prowadzi również do (22.113). Równania (22.115), uzyskane w oparciu o podejście wariacyjne w klasie pól statycznie częściowo dopuszczalnych, dostarczają oczywiście oszacowania górnego krzywej nośności granicznej; odpowiednie pole kinematycznie dopuszczalne podał P. G. HODGE [247]. Efektywne wyniki całkowania dla przekroju prostokątnego, dwuteowego, kołowego, pierścieniowego, teowego, rombego i trójkątnego podaje w monografii [891] I. L. DIKOWICZ, który ponadto przeprowadził rugowanie parametru λ .

Należy tu podkreślić, że w przypadku przekrojów nie wykazujących podwójnej symetrii rozkład naprężeń (22.114) może odpowiadać nie tylko występowaniu siły poprzecznej $T = T_z$ i momentu zginającego $M_g = M_{gy}$, lecz również pewnych innych uogólnionych sił wewnętrznych. I tak np. w przypadku przekroju trójkątnego, usytuowanego jak na rys. 123a, pojawi się moment skręcający powstały w wyniku zmniejszenia się naprężeń stycznych w strefach zacienionych, położonych po jednej stronie względem środka ciężkości; w przypadku przekroju trójkątnego usytuowanego jak na rys. 123b, pojawi się pewna siła podłużna nawet przy braku ścinania (bowiem nie wystąpi wymagane przesunięcie osi obojętnej). Stanowi to dodatkową komplikację (nowy element przybliżenia) przy stosowaniu wzorów (22.115) do analizy samego tylko zginania ze ścinaniem. Na fakt ten zazwyczaj nie zwraca się uwagi.

Trzecia podstawowa propozycja należy do S. A. PALCZEWSKIEGO [1110]; zakłada ona rozkład naprężeń nieco zbliżony do rozkładu przy zginaniu z siłą podłużną (rys. 124).



Rys. 124. Hipoteza Palczewskiego odnośnie rozkładu naprężeń przy wyczerpaniu nośności przekroju zginanego i ścinanego

Rozkład ten jest również tylko częściowo statycznie dopuszczalny, bowiem naprężenie styczne τ_{xz} wykazuje niedopuszczalną nieciągłość, tym niemniej prowadzi z reguły do pewnego oszacowania dolnego, dość znacznie obniżając nośność przekroju. Jedyne w zakresie dużych sił poprzecznych T występują błędy przez nadmiar. Przy określaniu krzywych nośności granicznej dla różnych kształtów przekroju można tu bez większych zmian wykorzystać rozwinięcia w uogólnione szeregi potęgowe i wzory aproksymacyjne,

podane w p. 21.6. Podejście tego typu, mało dokładne, jest raczej dogodnie przy analizie jednoczesnego zginania z rozciąganiem i ścinaniem z uwagi na jednolitość ujęcia. Stosują się tu ponadto te same uwagi odnośnie możliwości występowania innych uogólnionych sił wewnętrznych w przekroju, które zostały zamieszczone przy omawianiu podejścia wariacyjnego A. R. RŻANICYNA.

Wymienimy jeszcze dwie inne propozycje o charakterze ogólnym. N. K. SNITKO [1164] zaproponował zachowanie stosunku σ_x/τ_{xz} identycznego jak w zakresie sprężystym przy spełnieniu w całym przekroju warunku plastyczności. Warunki brzegowe są wtedy spełnione, natomiast nie są spełnione warunki równowagi wewnętrznej. Z. SOBOTKA [656] zaproponował przyjęcie $\sigma = \text{const}$ i $\tau = \text{const}$, co zapewniałoby oszacowanie dolne typu (22.8), gdyby stan $\tau = \tau_0$ był stanem statycznie dopuszczalnym; przy założeniu $\tau = \text{const}$ otrzymujemy raczej pewne oszacowanie górne. Jak już wspomnieliśmy, oszacowanie dolne typu (22.8) otrzymujemy przy podstawieniu za \bar{T} wartości określonej wzorem (22.102).

22.6.3. Nośność graniczna przekroju prostokątnego. W rozważanym przypadku obciążenia złożonego najczęściej bywa badany przekrój prostokątny zarówno z uwagi na prostotę kształtu, jak i z uwagi na zastosowania. Przytoczymy obecnie wyniki obliczeń dla przekroju prostokątnego w oparciu o omówione w p. 22.6.2 podstawowe hipotezy oraz inne badania z tego zakresu.

Przy przyjęciu hipotezy N. I. BIEZUCHOWA [800] graniczny moment zginający dla przekroju prostokątnego o wysokości $2h$ jest określony wzorem, odpowiadającym czystemu zginaniu sprężysto-plastycznemu

$$(22.116) \quad M_g = \sigma_0 b \left(h^2 - \frac{1}{3} z_g^2 \right),$$

natomiast rozkład naprężeń stycznych τ_{xz} jest paraboliczny, przy czym maksymalne naprężenie na osi równe jest w stanie granicznym odpowiedniej granicy plastyczności:

$$(22.117) \quad \tau_{xz} = \tau_0 \left(1 - \frac{z^2}{z_g^2} \right).$$

Siła poprzeczna wynosi wtedy

$$(22.118) \quad T = \frac{2}{3} \tau_0 b z_g.$$

Rugując z równań (22.116) i (22.118) parametr z_g , możemy ostateczny wynik zapisać w postaci bezwymiarowej

$$(22.119) \quad m_g + \frac{3}{4} t^2 = 1,$$

gdzie $m_g = M_g/\bar{M}_g = M_g/\sigma_0 b h^2$, natomiast siła poprzeczna T została odniesiona nie do trudnej do określenia wartości ścisłej nośności granicznej \bar{T} , lecz do jej oszacowania górnego (22.100): $t = T/\tau_0 b h$. Wzór (22.119) obowiązuje dla $|t| \leq 2/3$ czyli $m_g \geq 2/3$; wartość siły poprzecznej $t = 2/3$ uważa się za graniczną, powodującą zniszczenie przez wzajemny poślizg warstw belki.

Ujęcie wariacyjne A. R. RZANICYNA [1138] prowadzi do wzorów całkowych (22.115), które dla przekroju prostokątnego dają się bez trudu wyrazić efektywnie. Otrzymujemy mianowicie

$$(22.120) \quad T = \frac{2}{3} \lambda \sigma_0 b \ln \frac{h\sqrt{3} + \sqrt{3h^2 + \lambda^2}}{\lambda},$$

$$M_g = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 b \left(h\sqrt{3h^2 + \lambda^2} - \frac{\lambda^2}{\sqrt{3}} \ln \frac{h\sqrt{3} + \sqrt{3h^2 + \lambda^2}}{\lambda} \right).$$

Krzywa (22.120), stanowiąca oszacowanie górne, wybiega nieznacznie poza okrąg koła (22.121)

$$m_g^2 + t^2 = 1$$

zaproponowany przez Z. SOBOTKĘ [656].

Propozycja S. A. PALCZEWSKIEGO [1110] prowadzi w przypadku przekroju prostokątnego do równania paraboli

$$(22.122) \quad m_g = 1 - t^2$$

analogicznej do paraboli Girkmanna (21.35).

Kilka prac stanowi kontynuację lub modyfikację koncepcji Biezuchowa. M. R. HORNE [268] uwzględnił istnienie składowej σ_z , dochodząc do wzoru

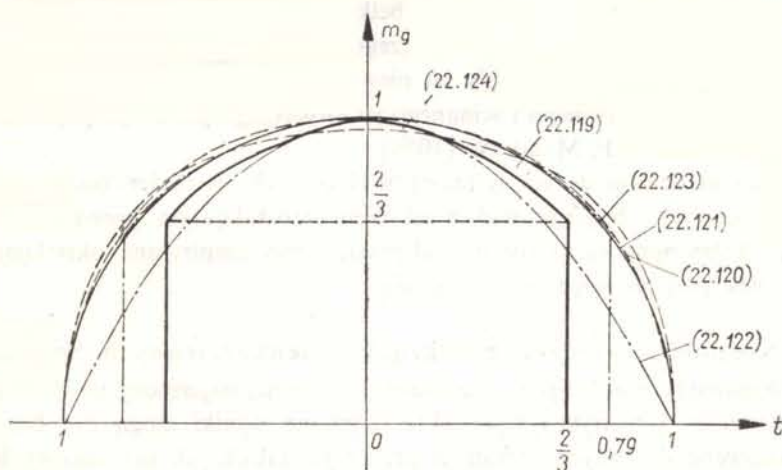
$$(22.123) \quad m_g = 1 - 0,44t^2; \quad t \ll 0,79.$$

D. C. DRUCKER [106] wyprowadził wzór, który można zapisać w postaci

$$(22.124) \quad m_g = 0,98(1 - t^4).$$

S. D. LEJTES [1025] zastosował zaproponowaną przez siebie hipotezę stabilizacji. Autorami dalszych prac są F. E. KLIMIENKO [981] oraz E. A. BIEJLIN [803]. Krzywe (22.119)–(22.124) pokazano na rys. 125.

Znaczna liczba autorów zdając sobie sprawę z niejednoznaczności nośności granicznej przekroju jednocześnie zginanego i ścinanego, mianowicie zależności jej od zmienności M_g



Rys. 125. Różne aproksymacje krzywej nośności granicznej dla przekroju prostokątnego jednocześnie zginanego i ścinanego

i T wzdłuż osi belki, rozpatruje badany problem jako dwuwymiarowe zagadnienie teorii plastyczności, ewentualnie przy uproszczonym pominięciu naprężeń σ_z . Pierwsze prace w tym ujęciu należą do B. M. BROUDEGO [824, 825], który szczegółowo rozpatrzył belkę swobodnie podpartą, obciążoną w środku siłą skupioną P . Propozycję Broudego uogólnił na belki niepryzmatyczne L. P. KUNICKI [1014], który rozpatrywał również belki statycznie niewyznaczalne. Obszerne badania pól kinematycznie dopuszczalnych, prowadzących do oszacowań górnych, przeprowadził A. P. GREEN [181] — rozpatrywał on trzy strefy w połowie przekroju belki, uplastycznienia od zginania, od ścinania i strefę sprężystą. Podobne podejście reprezentuje praca W. N. KUKUDŻANOWA [1013]. Zwiększenie dokładności obliczeń polegające na uwzględnieniu naprężeń σ_z zaproponowali M. CORSO [62] i K. A. RECKLING [576].

Przy uwzględnieniu naprężenia σ_z występuje istotna różnica między założeniem płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia, odpowiadającego belkom szerokim. Przy założeniu nieściśliwości materiału warunek plastyczności dla płaskiego stanu odkształcenia (12.33) ma nawet prostszą postać od warunku HMH dla płaskiego stanu naprężenia. Problemem płaskiego stanu odkształcenia zajęli się E. T. ONAT i R. T. SHIELD [492]; dokładniejszą i ogólniejszą analizę tego problemu podaje G. S. SZAPIRO [1236].

Nośność graniczną przekroju żelbetowego przy założeniu materiału krucho-idealnie plastycznego rozpatrywał M. COMO [76]. Wpływ kolejności przykładania obciążeń na nośność przekroju badał N. I. BIEZUCHOW [801] stwierdzając, że wpływ ten jest nieznaczny.

Liczne prace poświęcone są zastosowaniu uproszczonej teorii nośności granicznej przekroju jednocześnie zginanego i ścinanego do analizy nośności belki jako całości. Z reguły stwierdzono niewielki wpływ ścinania przy belkach statycznie wyznaczalnych, natomiast dość duży przy statycznej niewyznaczalności. Wymienimy tu przede wszystkim pracę A. GALLI i V. FRANCIOSI [153], którzy w przypadku belki dwustronnie utwierdzonej stwierdzili obniżenie nośności rzędu 30%; dalsze przykłady zastosowań można znaleźć w monografiach B. G. NEALA [460] i I. L. DIKOWICZA [891]. L. M. BIELENKIJ [808] badał wpływ stopnia skupienia obciążenia na nośność graniczną belki stwierdzając, iż przekroje niebezpieczne odpowiadają w przypadku belki swobodnie podpartej nie największemu momentowi zginającemu, lecz punktom brzegowym przyłożenia obciążenia (traktowane jako rozłożone w sposób ciągły na niewielkiej długości belki).

Nośność graniczną zginanego i ścinanego prostokątnego przekroju pręta silnie zakrzywionego rozpatrywał G. F. MALIKOW [1056].

Badania doświadczalne dotyczyły raczej belek o przekrojach cienkościennych, w szczególności dwuteowych; badania nad przekrojem prostokątnym prowadził A. I. KUZIN [1011, 1012], który ponadto zaproponował proste wzory empiryczne, określające nośność graniczną belek przy uwzględnieniu ścinania.

22.6.4. Nośność graniczna przekrojów cienkościennych. Spośród przekrojów cienkościennych, narażonych na zginanie i ścinanie, najczęściej poddawano analizie przekrój dwuteowy symetryczny; jednakże uzyskane wyniki mogą być bez większych zmian zastosowane do innych kształtów przekroju, takich jak skrzynkowy lub ceowy.

W pierwszej pracy z r. 1950 A. I. STRELBICKA [1173] zastosowała do dwuteowników koncepcję S. A. PALCZEWSKIEGO, przyjmując, że ścinanie może uplastyczyć zarówno śro-

dnik, jak i półki. Podejście takie prowadzi do dość znacznych błędów przez nadmiar, bowiem w przypadku prętów cienkościennych wynikający stąd w przypadku granicznym $M_g \rightarrow 0$ wzór (22.100) odbiega już wyraźnie od wartości ścisłej. Bardziej uzasadnione jest przyjęcie

$$(22.125) \quad \bar{T} = \tau_0 F_s,$$

gdzie F_s jest jedynie powierzchnią przekroju środnika. W dalszych pracach, podsumowanych w monografii [1182], STRELBICKA przyjęła brak naprężeń stycznych w półkach (naprężeń o kierunku prostopadłym do osi profilu) i rozważała kilka innych hipotez odnośnie rozkładu naprężeń w stanie granicznym [1184].

M. R. HORNE [268] zastosował modyfikację koncepcji Biezuchowa, uwzględniającą istnienie naprężeń σ_z ; zakładając ścinanie jedynie w środkniku otrzymał wzór, który zapiszemy w postaci

$$(22.126) \quad m_g = 1 - 0,44 \frac{F - F_p}{F + F_p} t^2, \quad t \leq 0,79,$$

gdzie $m_g = M_g / \bar{M}_g$, $t = T / \bar{T}$, przez \bar{T} rozumie się (22.125), wreszcie F_p oznacza powierzchnię przekroju obu półek. Podobne ujęcie zawiera również praca A. GALLI i V. FRANCIOSI [153]. Wzory zbliżone budową do (22.126) proponuje także K. A. RECKLING [576].

J. HEYMAN i V. L. DUTTON (por. B. G. NEAL [460]) założyli równomierny rozkład naprężeń $\sigma_x = \pm \sigma_0$ w półkach oraz równomierny rozkład τ_{xz} i $\sigma_x = \pm \sqrt{\sigma_0^2 - 3\tau_{xz}^2}$ w środkniku; krzywa graniczna jest wtedy określona wzorem

$$(22.127) \quad m_g = 1 - \frac{F - F_p}{F + F_p} (1 - \sqrt{1 - t^2}).$$

Obszerne rozważania, dotyczące nośności granicznej przekrojów dwuteowych, rozpoczął B. M. BROUDE [824, 825] od zdefiniowania tej nośności z praktycznego punktu widzenia. Stwierdził on, że nośność bywa tu wyczerpywana z reguły przed całkowitym uplastycznieniem przekroju. Wyniki swych rozważań ujął we wzory półempiryczne typu

$$(22.128) \quad m_g^2 + t^2 - \alpha m_g^2 t^2 = 1,$$

gdzie współczynnik α zależy od geometrii przekroju.

Z innych oszacowań i aproksymacji wymienimy prace A. P. GREENA [181], który badał odpowiednie pola linii poślizgów; C. F. A. LETHA [348], stwierdzającego występowanie uplastycznień przy przejściu środnika w półkę; B. G. NEALA [461], który rozpatrywał rozkład naprężeń w całej belce; W. W. KUKUDŻANOWA [1013], zajmującego się dowolnymi przekrojami bisymetrycznymi. Pewne oszacowania górne i dolne podał S. C. GOYAL [176], oszacowanie dolne — B. GOSCHY [175]. B. F. BOCZKOW [823] badał nośność dwuteownika niesymetrycznego, o różnych półkach; I. W. DAWIDOW i P. I. ZAJCEW [882] w nawiązaniu do koncepcji Biezuchowa uwzględnili możliwość istnienia skokowej niejednorodności materiału (różnych granic plastyczności w środkniku i w półkach). W. J. WORLEY [746] badał wpływ wycięć różnego kształtu w środkniku na nośność graniczną przekroju.

Stosunkowo liczne są badania doświadczalne nośności granicznej przekrojów dwuteowych. Wyniki badań są dość różnorodne, zależnie od kształtu przekroju, długości i sposobu obciążenia belek: bądź obserwowano brak ustalenia się obciążenia, charakterystyczny dla

tworzenia się przegubu plastycznego (J. F. BAKER, J. W. RODERICK; A. W. HENDRY — por. B. G. NEAL [460]), bądź też obserwowano nawet bardzo wyraźne ustalenie się obciążenia (J. HEYMAN, V. L. DUTTON; E. LONGBOTTOM i J. HEYMAN [362]). Obszerne serie doświadczeń przeprowadzili J. MUTERMILCH, E. OLSZEWSKI i M. ŁUBIŃSKI [448], C. BERARDI [24], A. P. GREEN i B. B. HUNDY [182] oraz B. B. ŁAMPISI [1020], ujmując ich wyniki w dość różnorodne wzory empiryczne lub półempiryczne.

22.6.5. Zakres sprężysto-plastyczny, wzmocnienie plastyczne. Wobec niejednorodności podłużnej stanu naprężenia w przypadku jednoczesnego zginania ze ścinaniem ściślejsze badania nośności granicznej muszą być oparte na analizie zakresu sprężysto-plastycznego; na liczne prace z tego zakresu zwróciliśmy uwagę w poprzednich punktach. Tu wspomnimy jedynie o pracach dotyczących obliczania ugięć i uwzględniających wzmocnienie plastyczne.

Wpływ ścinania na ugięcia belki o przekroju prostokątnym badali S. A. AMBARCUMIAN i M. A. ZADOJAN [788] nawiązując do koncepcji rozkładu naprężeń Biezychowa-Pragera-Hodge'a. Podobny problem dla przekroju dwuteowego rozpatrywali A. H. HALL i N. M. NEWMARK [197]; stwierdzono na ogół mały wpływ ścinania na ugięcia.

Plastycznemu przystosowaniu się przekroju do obciążeń zmiennych poświęcona jest praca B. I. LUBAROWA [1051]; prace belek w zakresie sprężysto-plastycznym pod działaniem obciążenia ruchomego — prace L. P. KUNICKIEGO [1015] (przekrój prostokątny) oraz N. A. KRAWCOWA [1002] i N. L. CZERNOWA [1231] (przekrój dwuteowy).

Kilka prac rozpatruje problem jednoczesnego zginania ze ścinaniem w zakresie wzmocnienia plastycznego. Wzmocnienie liniowe uwzględnił W. I. DAWYDOW [883], wzmocnienie potęgowe I. P. RENNE [1136] oraz D. VALALAS [717], który zajmował się również obliczaniem ugięć belek przy uwzględnieniu ścinania. Ogólny wzór na rozkład naprężeń stycznych przy dowolnym związku $\sigma = f(\varepsilon)$ wyprowadził M. MIKKOLA [417]. We wspomnianej już pracy [808] L. M. BIELENKIJ stwierdził, że wpływ stopnia skupienia obciążenia jest szczególnie widoczny w przypadku wzmocnienia plastycznego.

23. Obciążenia typu S_n , $n \geq 3$ (wielokrotnie złożone)

23.1. Ogólne metody uzyskiwania oszacowań

23.1.1. Oszacowania dolne nośności granicznej. Analiza wielokrotnie złożonych obciążeń przekroju pręta nasuwa różne skale trudności. Najprostszy jest przypadek zginania ukośnego z rozciąganiem, który można sklasyfikować jako P_1/S_3 ; nie wymaga on zastosowania żadnej określonej hipotezy wyężeniowej. Natomiast analogiczny przypadek dwukierunkowego ścinania ze skręcaniem (ale bez zginania) praktycznie nie występuje i nie bywa analizowany. Następny stopień trudności przedstawia jednoczesne rozciąganie, skręcanie i zginanie (ewentualnie ukośne); występuje wtedy jednorodność podłużna i możemy zastosować oznaczenie $P_2/S_3 \rightarrow B_n$ lub $P_2/S_4 \rightarrow B_n$. Największe trudności sprawia pojawienie się siły poprzecznej i związanej z tym niejednorodności podłużnej. W przypadku prętów cienkościennych dodatkowe komplikacje mogą pojawić się w przypadku występowania bimomentu i momentu giętno-skrętnego.

Nośność graniczną przekroju możemy tu odwzorować pewną powierzchnią lub hiperpowierzchnią graniczną w przestrzeni uogólnionych sił wewnętrznych, które najczęściej przyjmujemy za czynniki wyężenia. Praktycznie podaje się z reguły pewne przekroje powierzchni granicznej.

Podamy tu pewną ogólną metodę otrzymywania oszacowań dolnych w przypadkach wielokrotnie złożonych, zbliżoną do omówionej w p. 22.1.2. Przypuśćmy, że znamy ściśle równanie powierzchni granicznej w przypadku jednoczesnego działania siły podłużnej i ukośnego zginania,

$$(23.1) \quad f_1(M_{gy}, M_{gz}, N) = 0$$

oraz ściśle równanie powierzchni granicznej w przypadku jednoczesnego ścinania i skręcania

$$(23.2) \quad f_2(T_y, T_z, M_s) = 0$$

lub w dowolnym z odpowiednich podprzypadków. Przy pierwszym z wymienionych obciążeń złożonych występuje rozkład naprężeń normalnych $\sigma = \sigma_1(y, z)$, przy czym w każdym punkcie przekroju $|\sigma| = \sigma_0$ (lub $|\sigma| \leq \sigma_0$, gdyby wyczerpanie nośności następowało przy niecałkowitym uplastycznieniu), natomiast w drugim przypadku występują naprężenia styczne $\tau = \tau_2(y, z)$, przy czym $|\tau| \leq \tau_0$. W takim razie pole naprężeń $\sigma = \psi \sigma_1(y, z)$, $\tau = \sqrt{1 - \psi^2} \tau_2(y, z)$, gdzie $\psi = \text{const} \leq 1$ jest polem statycznie dopuszczalnym w rozpatrywanym przypadku ogólnym. Uogólnione siły wewnętrzne są wtedy odpowiednio ψ razy mniejsze albo $\sqrt{1 - \psi^2}$ razy mniejsze. Zachodzą więc równości

$$(23.3) \quad f_1\left(\frac{M_{gy}}{\psi}, \frac{M_{gz}}{\psi}, \frac{N}{|\psi|}\right) = 0,$$

$$f_2\left(\frac{T_y}{\sqrt{1 - \psi^2}}, \frac{T_z}{\sqrt{1 - \psi^2}}, \frac{M_s}{\sqrt{1 - \psi^2}}\right) = 0.$$

Równania (23.3) można traktować jako parametryczne przedstawienie oszacowania dolnego powierzchni granicznej w przypadku ogólnym. Po ewentualnym wyrugowaniu parametru ψ można zapisać równanie powierzchni granicznej w postaci uwikłanej $F(M_{gy}, M_{gz}, N, T_y, T_z, M_s) = 0$. W przypadku występowania bimomentu i momentu giętno-skrętnego można je włączyć odpowiednio do pierwszej i drugiej grupy uogólnionych sił wewnętrznych.

Jeżeli równania (23.1) i (23.2) nie są równaniami ścisłymi, lecz określają pewne oszacowania dolne, to równanie (23.3) określa również oszacowanie dolne; jeżeli natomiast są to oszacowania górne lub pewne aproksymacje o nieokreślonym błędzie, to wtedy również co do błędu przybliżenia (23.3) trudno wysnuć jakiegokolwiek wnioski.

Podana tu ogólna metoda uzyskiwania oszacowań dolnych stanowi rozszerzenie myśli N. I. BIEZUCHOWA [801], który zaproponował równanie powierzchni granicznej w postaci

$$(23.4) \quad \left(\frac{M_g}{\bar{M}_g^*}\right)^2 + \left(\frac{M_s}{\bar{M}_s^*}\right)^2 = 1,$$

gdzie \bar{M}_g^* oznacza graniczny moment zginający, zredukowany z uwagi na działanie siły podłużnej, natomiast \bar{M}_s^* — graniczny moment skręcający, zredukowany z uwagi na działanie siły poprzecznej.

Pewną ogólną metodę przybliżonego określania nośności granicznej przekroju zaproponował również M. I. JERCHOW [905]. Metoda ta, wykorzystująca podstawowe koncepcje teorii nośności granicznej przekroju powłoki, prowadzi z reguły do dolnych oszacowań powierzchni granicznej.

23.1.2. Oszacowania górne nośności granicznej. Ogólne oszacowania górne nośności granicznej możemy poszukiwać na drodze zastosowania rachunku wariacyjnego (poszukiwania maksimum funkcjonałów) do pól naprężeń statycznie częściowo dopuszczalnych, np. spełniających jedynie warunki plastyczności. Jest to rozwinięcie myśli A. A. GWOZDIEWA [846] (który stosował to podejście dla rur cienkościennych — opiszemy je bardziej szczegółowo w rozdziale VI) i A. R. RŻANICYNA [1138], przedstawionej w p. 22.6.2. Autorzy ci nie stwierdzili, iż rozwiązania ich są obciążone błędem przez nadmiar, jednakże w świetle uwag p. 13.6 fakt ten staje się oczywisty.

Ogólną formę warunku plastyczności dla przekroju pręta (22.2) sparametryzujemy we współrzędnych kartezjańskich następująco:

$$(23.5) \quad \sigma_x = \sigma_0 \cos \chi, \quad \tau_{xy} = \tau_0 \sin \chi \cos \psi, \quad \tau_{xz} = \tau_0 \sin \chi \sin \psi,$$

gdzie $\chi = \chi(y, z)$ oraz $\psi = \psi(y, z)$ są parametrami, ponadto

$$(23.6) \quad \sigma_0^2 = c\tau_0^2,$$

przy czym $c = 3$ dla warunku plastyczności HMH, $c = 4$ dla warunku TG. Uogólnione siły wewnętrzne w przekroju przedstawimy wzorami

$$(23.7) \quad \begin{aligned} N &= \sigma_0 \int_F \cos \chi dF, & T_y &= \tau_0 \int_F \sin \chi \cos \psi dF, \\ M_{gy} &= \sigma_0 \int_F \int z \cos \chi dF, & T_z &= \tau_0 \int_F \sin \chi \sin \psi dF, \\ M_{gz} &= \sigma_0 \int_F \int y \cos \chi dF, & M_s &= \tau_0 \int_F \int \sin \chi (z \cos \psi - y \sin \psi) dF. \end{aligned}$$

Będziemy poszukiwali maksimum jednej z tych sił przy ustalonych wartościach pozostałych. Odpowiednią funkcję Lagrange'a zapiszemy w postaci

$$(23.8) \quad L = \lambda_1 \sigma_0 \cos \chi + \lambda_2 \sigma_0 z \cos \chi + \lambda_3 \sigma_0 y \cos \chi + \lambda_4 \tau_0 \sin \chi \cos \psi + \lambda_5 \tau_0 \sin \chi \sin \psi + \\ + \lambda_6 \tau_0 \sin \chi (z \cos \psi - y \sin \psi).$$

Jeden z mnożników Lagrange'a λ_i jest tu w zasadzie niepotrzebny (równy jedności); wprowadzono wszystkie mnożniki dla uzyskania symetrii zapisu, przy czym w ostatecznych wzorach wystąpią tylko stosunki tych mnożników.

Warunki Eulera-Lagrange'a względem obu funkcji $\psi(y, z)$ i $\chi(y, z)$ prowadzą do układu równań

$$(23.9) \quad \begin{aligned} -\lambda_4 \sin \psi + \lambda_5 \cos \psi - \lambda_6 z \sin \psi - \lambda_6 y \cos \psi &= 0, \\ -(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y) \sigma_0 \sin \chi + (\lambda_4 \cos \psi + \lambda_5 \sin \psi + \\ &+ \lambda_6 z \cos \psi - \lambda_6 y \sin \psi) \tau_0 \cos \chi = 0 \end{aligned}$$

skąd

$$(23.10) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\lambda_5 - \lambda_6 y}{\lambda_4 + \lambda_6 z}, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{\sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6 y)^2 + (\lambda_4 + \lambda_6 z)^2}}{(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y) \sqrt{c}}.$$

Podstawienie (23.10) do (23.5) określa rozkład naprężeń; warunki równowagi wewnętrznej i warunki brzegowe na ogół nie są spełnione. Ostatecznie określimy górne oszacowanie powierzchni nośności granicznej następującymi wzorami całkowymi

$$\begin{aligned}
 N &= \sigma_0 \sqrt{c} \iint_F \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y) dF}{\sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6 y)^2 + (\lambda_4 + \lambda_6 z)^2 + c(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y)^2}}, \\
 M_{gy} &= \sigma_0 \sqrt{c} \iint_F \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y) z dF}{\sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6 y)^2 + (\lambda_4 + \lambda_6 z)^2 + c(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y)^2}}, \\
 M_{gz} &= \sigma_0 \sqrt{c} \iint_F \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y) y dF}{\sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6 y)^2 + (\lambda_4 + \lambda_6 z)^2 + c(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y)^2}}, \\
 (23.11) \quad T_y &= \tau_0 \iint_F \frac{(\lambda_4 + \lambda_6 z) dF}{\sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6 y)^2 + (\lambda_4 + \lambda_6 z)^2 + c(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y)^2}}, \\
 T_z &= \tau_0 \iint_F \frac{(\lambda_5 - \lambda_6 y) dF}{\sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6 y)^2 + (\lambda_4 + \lambda_6 z)^2 + c(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y)^2}}, \\
 M_s &= \tau_0 \iint_F \frac{[(\lambda_4 + \lambda_6 z) z - (\lambda_5 - \lambda_6 y) y] dF}{\sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6 y)^2 + (\lambda_4 + \lambda_6 z)^2 + c(\lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y)^2}}.
 \end{aligned}$$

Są to równania parametryczne powierzchni — sześć uogólnionych sił wewnętrznych jest wyrażonych w funkcji pięciu parametrów, mianowicie stosunków mnożników Lagrange'a λ_i/λ_j .

W przypadku $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_6 = 0$, $\lambda_5/\lambda_2 = \lambda$, otrzymujemy wzory (22.115) dla zginania (M_{gy}) ze ścinaniem (T_z); warto zauważyć, że przy braku symetrii przekroju pozostałe całki na ogół nie są równe zeru, a więc występują i inne (z reguły niewielkie) uogólnione siły wewnętrzne.

Dla przekrojów cienkościennych można na podobnej drodze wyprowadzić wzory całkowite, określające oszacowanie górne nośności granicznej o zwiększonej dokładności. Jeżeli mianowicie założymy, że kierunek wypadkowego naprężenia stycznego jest zgodny z kierunkiem linii środkowej profilu, to redukując dwie funkcje parametryzujące do jednej spełniamy warunki brzegowe, a jedynie równania równowagi wewnętrznej mogą pozostawać niespełnione. Podejście tego typu zaproponował dla rury walcowej cienkościennej A. A. GWOZDIEW [846].

23.2. Zginanie ukośne z rozciąganiem lub ściskaniem

23.2.1. Zakres sprężysto-plastyczny. Przypadek zginania ukośnego z rozciąganiem lub ściskaniem nie różni się wiele od przypadku samego zginania ukośnego, zwłaszcza przy ogólnym, dowolnym kształcie przekroju. Jedynie niektóre uproszczenia, związane np. z podwójną symetrią przekrojów, przestają tu być aktualne.

Na ogół przekrój pręta można podzielić na trzy strefy, pokazane na rys. 107, określając rozkład naprężeń w tych strefach wzorami (21.130). Wzory (21.132), określające momenty zginające M_{gy} i M_{gz} pozostają bez zmiany, natomiast warunek rzutów sił przybiera postać

$$(23.12) \quad N = \int_F \sigma dF = -\sigma_0 F_- + AS_{ze} + BS_{ye} + CF_e + \sigma_0 F_+,$$

gdzie oznaczenia poszczególnych wielkości omówiono w p. 21.7. Układ równań (21.132)

i (23.12) określa stałe A , B i C , przy czym granice obszarów całkowania wyznaczone są równaniami (21.133) i (21.134). Po obliczeniu tych stałych znajdujemy kąt nachylenia osi obojętnej χ ze wzoru (21.135) i krzywizny osi belki $\kappa_x = A/E$ oraz $\kappa_y = B/E$. W przypadku uplastycznienia jednostronnego, np. po stronie rozciągania, należy podstawić $F_- = S_{y-} = S_{z-} = 0$ i opuścić warunek ciągłości (21.134); pozostaje do rozwiązania układ trzech równań o trzech niewiadomych.

Teoria sprężysto-plastycznego zginania ukośnego z udziałem siły podłużnej była rozwijana głównie w związku z badaniami ugięć i stateczności prętów mimośrodowo ścisanych przy dwuosowym mimośrodku. W. W. PINADZJAN [1119] rozpatrywał ten problem dla przekroju dwuteowego, J. DUTHEIL [120] i F. CAMPUS [59] dla szerszej klasy kształtów przekroju. D. H. GARBACCIO [156] uwzględnił liniowe wzmocnienie materiału, rozpatrując przekrój prostokątny, dwuteowy i eliptyczny.

23.2.2. Nośność graniczna przekroju. Nośność graniczna przekroju zostaje wyczerpana przy zanikaniu strefy sprężystej F_e ; równania (23.12) i (21.132) przybierają wtedy postać

$$(23.13) \quad N = \sigma_0(F_+ - F_-), \quad M_{gy} = 2\sigma_0 S_{y+}, \quad M_{gz} = 2\sigma_0 S_{z+}.$$

Równania te określają dwa parametry A_1 i B_1 w równaniu osi nieciągłości (21.140) oraz prowadzą do równania powierzchni granicznej $f(N, M_{gy}, M_{gz}) = 0$.

Forma równań (23.13) jest niezwykle prosta, ale efektywne posługiwanie się nimi może prowadzić do rachunków dość skomplikowanych. Bardziej szczegółowo badał ten problem A. A. GWOZDIEW [846], który ponadto podał kilka rozwiązań szczegółowych dla przekroju eliptycznego, teoretycznego dwuteowego o zerowej grubości środnika i przekroju trzypunktowego o powierzchniach skupionych w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Przytoczmy tu równanie powierzchni granicznej dla przekroju eliptycznego w formie parametrycznej:

$$(23.14) \quad \left(\frac{M_{gy}}{a}\right)^2 + \left(\frac{M_{gz}}{b}\right)^2 = \frac{16}{9} a^2 b^2 (1 - \beta^2)^3 \sigma_0^2,$$

$$N = ab \sigma_0 [\pi - 2(\arccos \beta - \beta \sqrt{1 - \beta^2})],$$

gdzie β oznacza parametr, a i b półosie elipsy.

Nośność graniczną przekroju prostokątnego w rozpatrywanym przypadku obciążenia badali A. J. BARRETT [15] oraz G. RITTER [584], natomiast innych kształtów przekroju Z. BAŻANT [21]. Problem jednoczesnego ukośnego zginania z rozciąganiem z punktu widzenia technologicznej teorii plastyczności rozpatrywali M. I. RAZUMICHIN i JU. B. DROBOT [1129].

23.3. Ogólny przypadek jednorodności podłużnej stanu naprężenia

23.3.1. Równanie Handelman-Hilla. Występowanie sił poprzecznych wyklucza jednorodność podłużną stanu naprężenia; najogólniejszy przypadek jednorodności podłużnej odpowiada jednoczesnemu zginaniu ukośnemu ze skręcaniem i rozciąganiem $P_3/S_4 \rightarrow B_n$. Rozkład naprężeń w przekroju w momencie wyczerpania nośności granicznej

łatwo wtedy określić z dokładnością do jednej funkcji. Jest to bądź funkcja naprężeń typu Prandtla, bądź też funkcja określająca spaczenie przekroju. Funkcje te są określone równaniami różniczkowymi cząstkowymi drugiego rzędu.

Równanie takie z uwagi na funkcję naprężeń wyprowadzili G. H. HANDELMAN [198] i R. HILL [219, 221]. Dokonując superpozycji przemieszczeń, odpowiadających z osobna czterem obciążeniom prostym M_{yy} , M_{zz} , M_s , N przyjęli oni rozkład przemieszczeń w pręcie w postaci

$$(23.15) \quad \begin{aligned} u &= \kappa_y xz + \kappa_z xy + \varepsilon x + \vartheta u_0(y, z), \\ v &= -\frac{1}{2} \kappa_y yz - \frac{1}{4} \kappa_z (2x^2 + y^2 - z^2) - \frac{1}{2} \varepsilon y + \vartheta xz, \\ w &= -\frac{1}{2} \kappa_z yz - \frac{1}{4} \kappa_y (2x^2 - y^2 + z^2) - \frac{1}{2} \varepsilon z - \vartheta xy. \end{aligned}$$

Taka superpozycja przemieszczeń nie ma oczywiście nic wspólnego z superpozycją skutków działania poszczególnych uogólnionych sił wewnętrznych, która tu nie obowiązuje. Przez κ_y , κ_z , ε i ϑ oznaczono tu kolejno bądź krzywizny osi, wydłużenie i jednostkowy kąt skręcenia (w nawiązaniu do teorii Hencky'ego-Iliuszina) bądź też ich prędkości (w nawiązaniu do teorii Levy'ego-Misesa). HANDELMAN i HILL przyjmowali tę drugą interpretację; przy pierwszej interpretacji przy niektórych kombinacjach obciążeń poszczególne parametry rosną nieograniczenie, a jedynie ich stosunki pozostają skończone.

Obliczając w oparciu o (23.15) odkształcenia, a następnie w oparciu o prawo podobieństwa dewiatorów naprężenia, otrzymujemy

$$(23.16) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3}{2\varphi} (\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon), & \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{yz} = 0, \\ \tau_{xy} &= \frac{\vartheta}{2\varphi} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right), & \tau_{xz} &= \frac{\vartheta}{2\varphi} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right), \end{aligned}$$

gdzie φ oznacza zmienny moduł w równaniach Hencky'ego-Iliuszina lub Levy'ego-Misesa. Pozostaje do spełnienia jedno (pierwsze) równanie równowagi wewnętrznej oraz warunek plastyczności. HANDELMAN i HILL spełnili równanie równowagi wewnętrznej przez wprowadzenie funkcji naprężeń typu Prandtla:

$$(23.17) \quad \tau_{xy} = -\tau_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = \tau_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Z warunku plastyczności HMM otrzymujemy

$$(23.18) \quad \sigma_x = \pm \sigma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2};$$

porównanie tego wzoru z pierwszym ze wzorów (23.16) pozwala obliczyć funkcję φ :

$$(23.19) \quad \varphi = \pm \frac{3(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)}{2\sigma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2}}.$$

Równanie różniczkowe z uwagi na funkcję naprężeń Ψ otrzymamy przez wyrugowanie funkcji u_0 . Z porównania wzorów (23.16) i (23.17) wynika

$$(23.20) \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} = -z - \frac{2q\tau_0}{g} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial z} = y + \frac{2q\tau_0}{g} \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

a przyrównanie do siebie pochodnych mieszanych, liczonych kolejno z obu tych wzorów, prowadzi do następującego równania różniczkowego cząstkowego typu eliptycznego:

$$(23.21) \quad (\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)(\nabla^2 \Psi - \Psi_z'^2 \Psi_{yy}'' + 2\Psi_y' \Psi_z' \Psi_{yz}'' - \Psi_y'^2 \Psi_{zz}'') + \\ + (1 - \Psi_y'^2 - \Psi_z'^2)(\kappa_y \Psi_z' + \kappa_z \Psi_y') \pm \frac{2}{\sqrt{3}} g (1 - \Psi_y'^2 - \Psi_z'^2)^{3/2} = 0,$$

gdzie zastosowano skróconą symbolikę oznaczania pochodnych cząstkowych. Warunek brzegowy, dołączony do tego równania, ma szczególnie prostą postać; jak zwykle przy wprowadzeniu funkcji naprężeń wzorami (23.17) otrzymujemy

$$(23.22) \quad \Psi = \text{const}$$

na konturze, przy czym dla konturów jednospójnych tę stałą można przyjąć za równą zeru.

Po rozwiązaniu równania (23.21) z warunkiem brzegowym (23.22) dla danego kształtu przekroju możemy obliczyć układ uogólnionych sił wewnętrznych, powodujących wyczerpanie nośności granicznej przekroju. Również i te wzory, podobnie jak warunek (23.22), są stosunkowo proste; przy wprowadzeniu funkcji Prandtla moment skrecający jest określony klasycznym wzorem

$$(23.23) \quad M_s = 2\tau_0 \int \int_F \Psi dF,$$

natomiast momenty zginające i siłę podłużną obliczamy przez bezpośrednie całkowanie naprężeń σ_x (23.18)

$$(23.24) \quad M_{gy} = \pm \sigma_0 \int \int_F z \sqrt{1 - \Psi_y'^2 - \Psi_z'^2} dF, \\ M_{gz} = \pm \sigma_0 \int \int_F y \sqrt{1 - \Psi_y'^2 - \Psi_z'^2} dF, \\ N = \pm \sigma_0 \int \int_F \sqrt{1 - \Psi_y'^2 - \Psi_z'^2} dF;$$

znak wyrażeń (23.24) ma być zgodny ze znakiem wyrażenia $\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon$; praktycznie należy z reguły podzielić przekrój na dwie części, rozdzielone prostą

$$(23.25) \quad \kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon = 0$$

i przeprowadzić całkowanie po obu częściach z osobna.

Jak już wspomnieliśmy, równanie Handelman-Hilla (23.21) było całkowane numerycznie w różnych przypadkach szczególnych. Jednakże jego względna prostota, jak i prostota wzorów (23.23) i (23.24) jest trochę złudna, dokładność całkowania wpływa bardzo istotnie na wyniki końcowe i często dogodniejsze jest rozwiązywanie równania przemieszczeniowego (P. M. MILLER, L. E. MALVERN [421]). Również przy zastosowaniu metody małego parametru S. PIECHNIK [540] stwierdził, że równanie przemieszczeniowe prowadzi do prostszej formy rozwiązań.

23.3.2. Równanie przemieszczeniowe. Równanie przemieszczeniowe dla rozważanego przypadku zginania ukośnego ze skręcaniem i rozciąganiem wyprowadzimy opierając się na (23.16). Podstawiając te wzory do warunku plastyczności HMM określamy funkcję φ wzorem

$$(23.26) \quad \varphi = \frac{1}{2\sigma_0} \sqrt{9(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)^2 + 3\vartheta^2 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - y \right)^2 \right]}.$$

Podstawiając następnie tę funkcję do (23.16) i wykorzystując równanie równowagi wewnętrznej dochodzimy ostatecznie do następującego równania różniczkowego cząstkowego ze względu na funkcję $u_0 = u_0(y, z)$, określającą spaczenie przekroju:

$$(23.27) \quad 3\nabla^2 u_0 (\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)^2 - 3(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)(\kappa_z u'_{0y} + \kappa_y u'_{0z}) + \\ + \vartheta^2 [(u'_{0z} - y)^2 u''_{0yy} - 2(u'_{0z} - y)(u'_{0y} + z) u''_{0yz} + (u'_{0y} + z)^2 u''_{0zz}] = \\ = -3(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)(y\kappa_y - z\kappa_z),$$

gdzie również zastosowano skrócone oznaczenie pochodnych cząstkowych. Warunek brzegowy, dołączony do tego równania, ma formę (22.58) bardziej złożoną niż (23.22). Również uogólnione siły wewnętrzne wyrażają się wzorami dłuższymi niż (23.23) i (23.24):

$$(23.28) \quad M_s = \vartheta\sigma_0 \iint_F \frac{[(u'_{0y} + z)z - (u'_{0z} - y)y] dF}{\sqrt{9(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)^2 + 3\vartheta^2 [(u'_{0y} + z)^2 + (u'_{0z} - y)^2]}}, \\ M_g = 3\sigma_0 \iint_F \frac{(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)z dF}{\sqrt{9(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)^2 + 3\vartheta^2 [(u'_{0y} + z)^2 + (u'_{0z} - y)^2]}}, \\ M_{gz} = 3\sigma_0 \iint_F \frac{(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)y dF}{\sqrt{9(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)^2 + 3\vartheta^2 [(u'_{0y} + z)^2 + (u'_{0z} - y)^2]}}, \\ N = 3\sigma_0 \iint_F \frac{(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon) dF}{\sqrt{9(\kappa_y z + \kappa_z y + \varepsilon)^2 + 3\vartheta^2 [(u'_{0y} + z)^2 + (u'_{0z} - y)^2]}},$$

jednak wzory te nie wymagają rozbijania obszaru całkowania na dwa podobszary i są znacznie mniej czule na ewentualne błędy przybliżenia przy przybliżonym całkowaniu równania (23.27).

23.3.3. Zginanie ukośne ze skręcaniem. Przypadek zginania ukośnego ze skręcaniem otrzymujemy przy przyjęciu $\varepsilon = 0$ w równaniu (23.21) lub (23.27). Nie stanowi to wielkiego uproszczenia i rozwiązania ściśle tych równań nie zostały podane.

Pierwsza praca z omawianego zakresu należy do P. G. HODGE'A i R. SANKARANARAYANANA [250]; podali oni efektywne oszacowanie dolne dla przekroju kwadratowego i metodę otrzymywania oszacowania górnego [mianowicie równania (23.11) przy $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$]. Oszacowanie dolne wynika z (23.3) i równania krzywej granicznej (21.143):

$$(23.29) \quad m_{gy} \sqrt{1 - m_s^2} + \frac{3}{4} m_{gz}^2 + m_s^2 = 1, \quad |m_{gz}| < m_{gy},$$

i podobnie dla innych zakresów m_{gy} i m_{gz} . W monografii [251] P. G. HODGE zastosował

odcinkowo-liniową aproksymację krzywej (23.29) do obliczenia nośności granicznej przestrzennie obciążonej ramy.

Nośność graniczną przekrojów cienkościennych w omawianym przypadku badała O. I. STRELBŹYĆKA [1191, 1192]; weryfikację doświadczalną teorii zawierają jej prace (wspólne z G. I. JEWSEJENKO) [1190, 1194]. Zakres sprężysto-plastyczny był przedmiotem prac W. A. KOLGADINA; [991] (teoria ogólna i zastosowanie do przekroju ceowego) oraz [993] (przekrój dwuteowy). Nieco bardziej uproszczone ujęcie podała E. R. CZERNAJA [1229], która efektywnie obliczała ugięcia belki dwuteowej, obciążonej siłą przyłożoną ukośnie w środku półki. N. L. CZERNOW i E. R. CZERNAJA badali sprężysto-plastyczne odkształcenia w wyniku działania obciążenia ruchomego na drodze doświadczalnej [1230] i teoretycznej [1232].

23.3.4. Zginanie proste z rozciąganiem i skręcaniem. Również i w tym przypadku szczególnym, przyjmując np. $\kappa_z = 0$ w równaniu (23.21) lub (23.27), nie otrzymujemy zbyt wielkich uproszczeń. Stosunkowo proste rozwiązania ściśle można otrzymać jedynie dla przekroju o kształcie wąskiego prostokąta; podał je M. A. ZADJOAN [920].

Dla dowolnego przekroju prostokątnego łatwo uzyskać oszacowanie dolne przy wykorzystaniu paraboli Girkmanna (21.35) i wzorów ogólnych (23.3); ma ono postać

$$(23.30) \quad m_g \sqrt{1 - m_s^2 + m_s^2 + n^2} = 1. \quad \text{H}$$

Nośność graniczną przekrojów cienkościennych, mianowicie dwuteowego i ceowego, badała w pracy [1179] O. I. STRELBŹYĆKA. O. I. IBRAJEW badał w rozważanym przypadku wpływ kolejności przyłożenia obciążeń na nośność graniczną przekroju; stwierdził on, że wpływ ten jest nieznaczny zarówno w przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego [923] jak i wykazującego liniowe wzmocnienie plastyczne [924].

Badanie zakresu sprężysto-plastycznego w rozpatrywanym przypadku obciążenia jest szczególnie istotne z uwagi na analizę stateczności prętów jednocześnie ściskanych i skręcanych w zakresie sprężysto-plastycznym. Problemowi temu jest poświęcona praca Ł. M. KACZANOWA [975].

23.4. Zginanie z rozciąganiem i ścinaniem

23.4.1. Przekrój prostokątny. Przy obecności siły poprzecznej występuje niejednorodność podłużna stanu naprężenia; w związku z tym uzyskanie rozwiązań ścisłych narządza znaczne trudności, a praktycznie stosuje się z reguły pewne aproksymacje, uogólniające propozycje opisane dość szczegółowo w p. 22.6.

Pierwsza praca należy tu do N. I. BIEZUCHOWA [800], który przyjął brak naprężeń stycznych w strefach uplastycznionych, mianowicie rozkład naprężeń σ i τ pokazany na rys. 121 przy przesuniętej osi obojętnej. Dla przekroju prostokątnego uzyskuje się wtedy równanie powierzchni granicznej

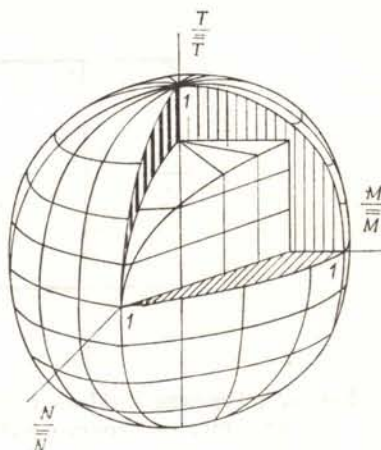
$$(23.31) \quad m_g = 1 - n^2 - \frac{3}{4} t^2, \quad |t| \leq \frac{2}{3},$$

stanowiące «połączenie» równań (21.35) i (22.119). Równanie to określa oszacowanie dolne nośności. Oszacowanie górne, wynikające z (23.11) przy $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_6 = 0$, a sta-

nowiące uogólnienie wzorów (22.120), podaje I. L. DIKOWICZ [891]; odpowiednią powierzchnię nośności sprężystej pokazano na rys. 126, zaczerpniętym z pracy Dikowicza.

V. FRANCIOSI i E. GIANGRECO [140] podali rozwiązanie, zbliżone do Biezuchowa, ale oparte — dla porównania — o kilka hipotez wyężeńiowych. Z. SOBOTKA [656] przyjął równomierny rozkład naprężeń w przekroju, $\sigma = \pm \psi \sigma_0$, $\tau = \tau_0 \sqrt{1 - \psi^2}$; prowadzi on do następującego równania powierzchni granicznej

$$(23.32) \quad m_g \sqrt{1 - t^2} + n^2 + t^2 = 1.$$



Rys. 126. Powierzchnie nośności granicznej i nośności sprężystej dla przekroju pod działaniem zginania z rozciąganiem i ścinaniem (według Dikowicza)

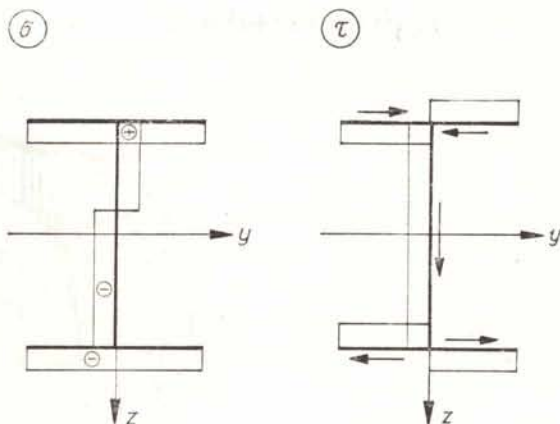
Autorami dalszych propozycji oszacowań i analizy odnośnych powierzchni granicznych dla przekroju prostokątnego są A. P. GREEN [181], który badał linie poślizgów w rozważanym przypadku, K. KLÖPPEL i M. YAMADA [312], E. A. BIEJLIN [804], zakładający sinusoidalny rozkład naprężeń σ i cosinusoidalny naprężeń τ , B. G. NEAL [463], Z. BAŻANT [22], który rozważał przy tym możliwość zginania ukośnego i ścinania ukośnego oraz S. ŠMIŘAK [691]. T. KUSUDA [332] zaproponował pewne oszacowanie dolne i przeprowadził weryfikację doświadczalną. A. SAWCZUK i M. JANAS [619] rozważali nośność graniczną przekroju o niejednorodności poprzecznej (w nawiązaniu do teorii żelbetu) i podali zastosowania do obliczania nośności łuków. JU. N. ALESZYŃSKI [784] badał nośność przekroju belek niepryzmatycznych, J. WÖLFEL [745] — przekroju prętów silnie zakrzywionych.

Wpływ sił podłużnych i poprzecznych na ugięcia belek w zakresie sprężysto-plastycznym rozpatrywał SJUJ BIN-HAŃ [1197], który otrzymał układ trzech równań różniczkowych i podał pewne rozwiązania numeryczne. A. YLINEN [752] rozpatrywał pokrewne zagadnienie wpływu sił poprzecznych na sprężysto-plastyczne wyoboczenie prętów ściskanych.

23.4.2. Przekroje cienkościennie. W przypadku przekrojów cienkościennych, w szczególności dwuteowego, ceowego i skrzynkowego, półki praktycznie nie przenoszą naprężeń ścinających (w każdym razie prostopadłych do linii środkowej profilu), co należy uwzględnić w obliczeniach. Odnośny problem rozważała A. I. STRELBICKA [1182], przyjmując rozkłady naprężeń pokazane na rys. 127; naprężenia styczne w półkach występują

ale nie mają wpływu na wartość siły poprzecznej T . Wyrażając siły wewnętrzne M_θ i N przez parametr z_0 , a następnie rugując ten parametr i wykorzystując warunek plastyczności dochodzi się do następującego równania powierzchni granicznej:

$$(23.33) \quad \frac{1}{2} \left[m_\theta^2 + m_g \sqrt{m_\theta^2 + \frac{(2F - F_p)^2}{F^2 - F_p^2} n^2} \right] + \frac{(2F - F_p)^2}{4(F^2 - F_p^2)} n^2 + t^2 = 1,$$



Rys. 127. Hipoteza rozkładu naprężeń normalnych i stycznych w stanie granicznym przekroju dwuteowego poddanego zginaniu z rozciąganiem i ścinaniem

gdzie F_p oznacza powierzchnię obu póltek, bezwymiarowa siła podłużna n jest odniesiona do powierzchni całego przekroju F , a bezwymiarowa siła poprzeczna t — do powierzchni środka $F - F_p$. Autorami dalszych badań byli: M. R. HORNE [270], który zwrócił uwagę na możliwość utraty stateczności środka, K. KLÖPPEL i M. YAMADA [312] oraz B. G. NEAL [462].

Problemowi wpływu siły podłużnej i poprzecznej na sprężysto-plastyczne ugięcia belki o przekroju dwuteowym w przypadku liniowego wzmocnienia materiału została poświęcona praca W. W. KOZŁAKOWA [990], który szczegółowo rozpatrywał różne etapy uplastycznienia i stosował metodę rozwiązań sprężystych.

23.5. Ogólniejsze obciążenia złożone przekrojów cienkościennych. Specyfika pracy przekrojów cienkościennych polega na istotnej roli, jaką mogą odegrać bimoment B i moment giętno-skrętny M_ω przy ograniczeniu spaczenia przekroju. Wielkości te można w pewnym stopniu uważać za wielkości niezależne, a zatem za czynniki wyężenia przekroju. Tak więc ogólna liczba uogólnionych sił wewnętrznych dla przekroju cienkościennego wynosi 8. Cztery spośród tych sił są związane z występowaniem naprężeń normalnych (N, M_{gy}, M_{gz}, B), a cztery z występowaniem naprężeń stycznych (T_y, T_z, M_s, M_ω).

Pierwsze ogólniejsze ujęcie problemu nośności granicznej przekroju prętów cienkościennych należy do A. R. RZANICYNA [1137] (r. 1941). Rozpatrywał on jednoczesne zginanie ze skręcaniem przekroju dwuteowego i ceowego przy udziale bimomentu.

Przypadek ogólny ośmiu uogólnionych sił wewnętrznych rozpatrywała A. I. STRELBICKA [1173, 1178, 1182]. Podstawą jej teorii jest założenie, iż w stanie granicznym naprę-

żenia σ i τ zmieniają się jedynie skokowo, przy czym w całym przekroju $\sigma = \pm \psi \sigma_0$, $\tau = \pm \sqrt{1 - \psi^2} \tau_0$. Naprężenia σ są przy tym stałe na grubości ścianki (brak zginania ścianki jako płyty lub powłoki) i zmieniają się skokowo jedynie w pewnych punktach linii środkowej profilu; naprężenia τ mogą się natomiast zmieniać skokowo na grubości ścianki — założenie takie jest niezbędne np. już przy rozpatrywaniu czystego skręcania prętów o profilu otwartym. Ponadto przyjęto założenie o nieodkształcalności konturu przekroju i o braku lokalnej utraty stateczności.

Przy powyższych założeniach zespół sił wewnętrznych N, M_{gy}, M_{gz}, B można rozpatrywać oddzielnie od zespołu T_y, T_z, M_s, M_ω ; wzajemne ich powiązanie występuje jedynie za pośrednictwem parametru ψ . W wyniku otrzymujemy z reguły oszacowanie dolne nośności granicznej (choć mogą tu wystąpić wyjątki związane z odstępstwami przyjętego pola naprężeń od statycznej dopuszczalności) na drodze, omówionej w p. 23.1.1.

STRELBICKA stwierdziła, że analiza rozkładu naprężeń normalnych σ nastęrcza więcej trudności niż naprężeń stycznych τ . Rugując mianowicie współrzędne punktów nieciągłości, czyli wyrażając te współrzędne w funkcji odpowiednich sił wewnętrznych, dochodzimy do równania algebraicznego dość wysokiego stopnia ze względu na σ czyli ze względu na ψ . W ogólnym przypadku jest to równanie ósmego stopnia. Przy występowaniu tylko dwóch punktów nieciągłości otrzymujemy równanie czwartego stopnia, a przy występowaniu tylko jednego punktu — jak np. na rys. 127, gdy rozważaliśmy tylko występowanie M_{gy} i N z pierwszej grupy uogólnionych sił wewnętrznych — do równania drugiego stopnia. Przy rozpatrywaniu naprężeń stycznych, gdy współrzędna skokowej zmiany wartości (a właściwie jedynie znaku) naprężenia τ jest jednakowa dla wszystkich ścianek, składających się na badany profil, to w wyniku rugowania tej współrzędnej otrzymujemy do rozwiązania zawsze równanie kwadratowe ze względu na τ , dające się rozwiązać bez trudności.

Dla przykładu przytoczymy rozwiązanie STRELBICKIEJ [1182], odnoszące się do występowania w przekroju następujących pięciu uogólnionych sił wewnętrznych: $M_{gy}, B; T_z, M_s, M_\omega$, a więc do przypadku P_2/S_5 . Ograniczenie się do dwóch tylko sił z pierwszej grupy, w szczególności przyjęcie $N = 0$, zezwala na sprowadzenie problemu określenia rozkładu naprężeń do układu dwóch równań kwadratowych, dających się łatwo rozwiązać.

Dla przykładu rozpatrzmy przekrój dwuteowy. Rozkład naprężeń normalnych σ (rys. 128) odpowiada działaniu momentu gnącego

$$(23.34) \quad M_{gy} = \sigma \left(2\delta_p hu + \delta_{sr} \frac{h^2}{4} \right)$$

oraz bimomentu

$$(23.35) \quad B = \sigma \delta_{sr} h \left(\frac{b^2}{4} - u^2 \right).$$

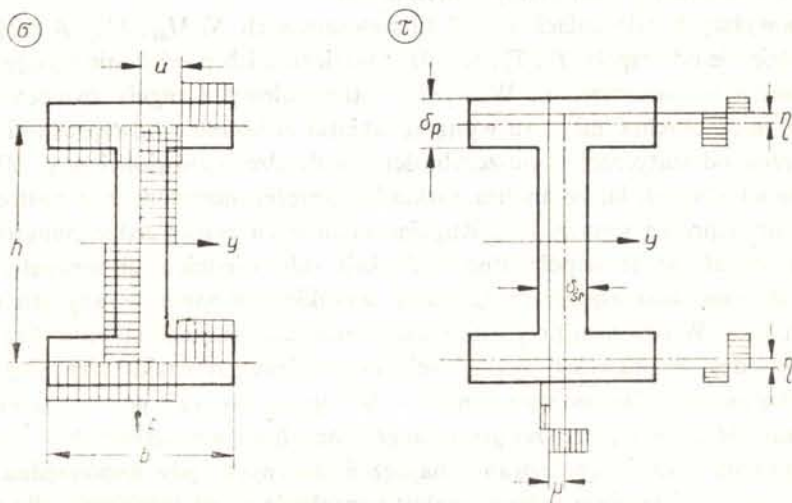
Rugując parametr u otrzymujemy równanie kwadratowe ze względu na σ . Rozwiązanie tego równania możemy napisać w postaci ogólnej, słusznej dla dość szerokiej klasy przekrojów, następująco

$$(23.36) \quad \sigma = \left[\frac{B - DM_{gy}}{2BK} + \sqrt{\frac{(B - DM_{gy})^2}{4B^2K^2} + \frac{M_{gy}^2}{4CBK\sigma_0}} \right] \sigma_0,$$

gdzie \bar{B} oznacza graniczny bimoment dla przekroju, C , D i K — pewne stałe, zależne od kształtu i wymiarów przekroju.

Rozkład naprężeń τ odpowiada działaniu momentu swobodnego skręcania (de Saint-Venanta)

$$(23.37) \quad M_s = \tau \left[b(\delta_p^2 - 4\eta^2) + \frac{h}{2}(\delta_{sr}^2 - 4\mu^2) \right],$$



Rys. 128. Hipoteza rozkładu naprężeń normalnych i stycznych w stanie granicznym przekroju dwuteowego przy obciążeniu pięciokrotnie złożonym

momentu giętno-skrętnego

$$(23.38) \quad M_{\omega}^3 = 2\tau h(b\eta + a_y\mu)$$

i siły poprzecznej

$$(22.39) \quad T = 2\tau h\mu.$$

Przez a_y oznaczono tu, dla ogólności, współrzędną środka ścinania przekroju; dla przekroju dwuteowego $a_y = 0$. Rugując z powyższych równań parametry μ i η dochodzimy do następującego równania kwadratowego ze względu na τ :

$$(23.40) \quad \bar{M}_s \tau^2 - M_s \tau_0 \tau - \frac{T^2 \tau_0}{2h} - \frac{(M_{\omega}^3 - T a_y)^2 \tau_0}{b h^2} = 0,$$

gdzie

$$(23.41) \quad \bar{M}_s = \alpha \left(b \delta_p^2 + \frac{h}{2} \delta_{sr}^2 \right) \tau_0$$

jest granicznym momentem skręcania swobodnego, α — współczynnikiem poprawkowym zależnym od kształtu przekroju. Rozwiązaniem równania (23.40) jest

$$(23.42) \quad \tau = \left\{ \frac{M_s}{2\bar{M}_s} + \sqrt{\frac{M_s^2}{4\bar{M}_s^2} + \frac{1}{\bar{M}_s \tau_0} \left[\frac{T^2}{2h} + \frac{(M_{\omega}^3 - T a_y)^2}{b h^2} \right]} \right\} \tau_0.$$

Podstawienie (23.36) i (23.42) do warunku plastyczności pozwala na uzyskanie równania powierzchni granicznej. Równanie to zapiszemy ostatecznie w postaci

$$(23.43) \quad \frac{(B-DM_{gy})^2}{2\bar{B}^2K^2} + \sqrt{\frac{(B-DM_{gy})^4}{4\bar{B}^4K^4} + \frac{M_{gy}^2(B-DM_{gy})^2}{4C\bar{B}^2K^3\sigma_0}} + \\ + \frac{M_{gy}^2}{4C\bar{B}K\sigma_0} + \frac{M_s^2}{2\bar{M}_s^2} + \sqrt{\frac{M_s^4}{4\bar{M}_s^4} + \frac{M_s^2}{\bar{M}_s^2\tau_0} \left[\frac{T^2}{2h} + \frac{(M_\omega - Ta_y)^2}{bh^2} \right]} + \\ + \frac{1}{\bar{M}_s\tau_0} \left[\frac{T^2}{2h} + \frac{(M_\omega - Ta_y)^2}{bh^2} \right] = 1.$$

Dla przekroju dwuteowego

$$(23.44) \quad C = \delta_p h, \quad D = \frac{1}{8} \frac{\delta_{sr}}{\delta_p} h, \quad K = 1 - \frac{\delta_{sr}^2 h^2}{16\delta_p^2 b^2}, \quad a_y = 0, \quad \bar{B} = \frac{1}{4} \delta_p h b^2 \sigma_0,$$

natomiast wartość \bar{M}_s podaliśmy powyżej; STRELBICKA podaje również wartości współczynników dla przekroju ceowego i rozpatruje ważniejsze przypadki szczególne wzoru (23.43).

Problem nośności granicznej przy skręcaniu skrępowanym, z udziałem bimomentu i momentu giętno-skrętnego był badany w pracach E. A. RAJEWSKIEJ [1130] i J. RUTECKIEGO [588]. Szczególnie wiele uwagi poświęcono jednoczesnemu zginaniu ze skrępowanym skręcaniem: V. KŘUPKA [328] (praca teoretyczno-doświadczalna), E. A. RAJEWSKA [1132], P. G. BYCZKOW [829], N. S. BOULTON [40], K. S. DINNO, S. S. GILL [91], K. S. DINNO, W. MERCHANT [92], G. AUGUSTI [5, 6, 8], G. AUGUSTI, R. SCUDERI [7]. L. E. FARMER i P. M. FERGUSON [130] badali nośność teowych przekrojów żelbetowych przy zginaniu ze skrępowanym skręcaniem.

Zakres sprężysto-plastyczny pracy przekrojów cienkościennych przy różnych kombinacjach obciążeń rozważała również A. I. STRELBICKA [1182]. W pracy [1176] rozważano ponadto przypadek liniowego i potęgowego wzmocnienia plastycznego. Wzmocnienie plastyczne przy jednoczesnym zginaniu, rozciąganiu i skrępowanym skręcaniu analizował szczegółowo R. A. MIEŻLUMIAN [1070]. Obszerne badania doświadczalne nośności granicznej i odkształceń sprężysto-plastycznych zostały omówione w pracach A. I. STRELBICKIEJ i G. I. JEWSIEJENKI [1194, 1195] i podsumowane w monografii tych samych autorów [1196].

ROZDZIAŁ V

OBCIĄŻENIA ZŁOŻONE NA SZCZEBLU S PRZEKROJU DŹWIGARÓW POWIERZCHNIOWYCH

24. Stany czysto tarczowe (błonowe) $P_3 \rightarrow S_3$ i czysto giętne P_3/S_3

24.1. Uwagi ogólne. Przekrój poprzeczny dźwigara powierzchniowego — tarczy, płyty lub powłoki — zdefiniowaliśmy w p. 2.3 jako pewien element jednowymiarowy (odcinek) z przyporządkowanymi dwoma nieskończone wąskimi wzajemnie prostopadłymi przekrojami (rys. 3). Po dogodnym ze względów poglądowych rozsunieciu tych przekrojów otrzymuje się element, pokazany na rys. 4. Na ściankach elementu może wystąpić 10 uogólnionych sił wewnętrznych, które mogą być traktowane jako czynniki wyężenia dla przekroju dźwigara powierzchniowego. Powierzchnie graniczne, zbudowane w przestrzeni czynników wyężenia, określają zakres pracy przekroju. Szczególnie istotne są tu, jak zwykle, powierzchnie nośności sprężystej i powierzchnie nośności granicznej przekroju. Równanie powierzchni nośności granicznej przekroju bywa nazywane warunkiem plastyczności dla płyty lub powłoki [259, 485, 487]. Bardziej uzasadniona wydaje się tu jednak nazwa «warunek plastyczności dla przekroju płyty lub powłoki», bowiem odnosi się on do analizy na szczelbu S ; warunkiem plastyczności dla płyty lub powłoki należałoby raczej nazwać odnośne równanie na szczelbu B , określające związek między czynnikami wyężenia na tym szczelbu (np. obciążeniami zewnętrznymi), powodującymi wyczerpanie nośności elementu jako całości.

W poszczególnych punktach przekroju dźwigarów powierzchniowych występuje z reguły płaski stan naprężenia, a przy uwzględnieniu sił poprzecznych nawet stan przestrzenny. W tym przypadku pojawiają się już zasadnicze różnice między warunkami plastyczności, formułowanymi w oparciu o różne hipotezy wyężeniowe, tak że kwestia doboru hipotezy staje się sprawą pierwszorzędnej wagi. Jak już wspomnieliśmy, dla szerokiej klasy materiałów najlepiej potwierdzoną doświadczalnie jest hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego wraz ze stowarzyszonym prawem płynięcia (prawem podobieństwa dewiatorów). Jako pewne przybliżenie stosuje się czasem hipotezę największych naprężeń stycznych Treski-Guesta; następny stopień uproszczenia polega na przyjęciu stowarzyszonego z warunkiem plastyczności TG prawa płynięcia. To ostatnie podejście przy znajomości kierunków głównych prowadzi w pewnych przypadkach do wyników stosunkowo prostych, ale — jak stwierdziliśmy w p. 17.6 — błędy w stosunku do warunku HMH mogą być wtedy dość znaczne. Niekiedy udaje się połączyć warunek plastyczności TG z prawem podobieństwa dewiatorów (J. A. KÖNIG [323]), co z reguły zmniejsza błąd przybliżenia.

Istnieje dość znaczna liczba monografii, poświęconych w całości lub części powierzch-

niom granicznym dla przekroju dźwigarów powierzchniowych, prawom fizykalnym, obowiązującym w poszczególnych zakresach, oraz zastosowaniom tych praw do obliczenia ugięć sprężysto-plastycznych i nośności granicznej dźwigarów jako całości. Wspomniemy tu jedynie monografie, których autorami są A. A. ILIUSZIN [949], P. G. HODGE [251], R. H. WOOD [744], D. NIEPOSTYN [464 i 465], H. HAASE [195], CH. MASSONNET i M. SAVE [395], A. SAWCZUK i TH. JAEGER [620], P. G. HODGE [259], praca zbiorowa pod redakcją W. OLSZAKA, P. PERZYNY i A. SAWCZUKA [485], wreszcie W. OLSZAK i A. SAWCZUK [487]; z prac przeglądowych wymienimy opracowania A. SAWCZUKA i W. OLSZAKA [621, 624], G. S. SZAPIRO [1237] i Ł. M. KACZANOWA [978].

Wobec dość bogatego materiału monograficznego i przeglądowego niniejszy rozdział będzie ujęty raczej skromnie, jednakże sklasyfikujemy i zwięźle omówimy tu większość prac, dotyczących obciążeń złożonych przekrojów dźwigarów powierzchniowych. Warto tu zaznaczyć, że prace te mają szczególne znaczenie dla efektywnych obliczeń nośności granicznej powłok; w przypadku płyt natomiast często korzysta się z teorii linii załomu, przyjmującej — w najprostszym ujęciu — iż w stadium zniszczenia w poszczególnych przekrojach występuje jedynie czyste zginanie w płaszczyźnie prostopadłej do linii załomu.

24.2. Obciążenia złożone w stanie tarczowym lub błonowym. W przypadku występowania jedynie sił podłużnych N_ξ i N_η oraz siły stycznej $N_{\xi\eta} = N_{\eta\xi}$ mówimy w płycie o stanie tarczowym (lub też płytę nazywamy tarczą), a w powłoce — o stanie błonowym. Przez ξ i η oznaczyliśmy tu dwa dowolne, wzajemnie prostopadłe kierunki w płaszczyźnie stycznej do powierzchni środkowej dźwigara; zazwyczaj zarówno w przypadku płyt, jak i powłok posługujemy się pewnymi układami współrzędnych, wykazującymi lokalną ortogonalność. Jak już wspomnieliśmy w p. 2.3, uogólnione siły wewnętrzne oznaczamy tu dużymi literami, rezerwując odpowiednie małe litery dla wielkości bezwymiarowych.

W przypadku stanu tarczowego lub błonowego uzasadnione jest (przy założeniu jednorodności materiału) przyjęcie równomiernego rozkładu naprężeń w całym przekroju; wynika ono z przyjęcia hipotezy prostych normalnych Love'a-Kirchhoffa. Oznaczając grubość dźwigara przez $2H$ (takie oznaczenie jest dogodnie podobnie jak przy analizie zginania belek o przekroju prostokątnym i stosowane jest np. w pracach [251, 259 i 487]) otrzymujemy proste związki

$$(24.1) \quad N_\xi = 2\sigma_\xi H, \quad N_\eta = 2\sigma_\eta H, \quad N_{\xi\eta} = 2\tau_{\xi\eta} H,$$

zatem rozpatrywany przypadek złożony daje się sklasyfikować jako $P_3 \rightarrow S_3$. Jeżeli więc warunek plastyczności zapiszemy w postaci

$$(24.2) \quad f\left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_0}, \frac{\sigma_\eta}{\sigma_0}, \frac{\tau_{\xi\eta}}{\sigma_0}\right) = 1,$$

to analogiczne równanie, wynikające wprost z pomnożenia liczników i mianowników argumentów przez $2H$,

$$(24.3) \quad f\left(\frac{N_\xi}{2\sigma_0 H}, \frac{N_\eta}{2\sigma_0 H}, \frac{N_{\xi\eta}}{2\sigma_0 H}\right) = 1$$

określa zarówno powierzchnię nośności sprężystej, jak i nośności granicznej dla przekroju w przestrzeni uogólnionych sił wewnętrznych. Zakres sprężysto-plastyczny pracy przekroju

przy rozpatrywanym obecnie typie obciążenia nie występuje. Jeżeli wprowadzimy bezwymiarowe siły podłużne i styczne wzorami

$$(24.4) \quad \frac{N_{\xi}}{2\sigma_0 H} = n_{\xi}, \quad \frac{N_{\eta}}{2\sigma_0 H} = n_{\eta}, \quad \frac{N_{\xi\eta}}{2\sigma_0 H} = n_{\xi\eta},$$

o (24.3) można zapisać krótko w postaci

$$(24.5) \quad n \stackrel{\text{def}}{=} f(n_{\xi}, n_{\eta}, n_{\xi\eta}) = 1.$$

Interpretacja graficzna równania (24.5) jest oczywiście identyczna z interpretacją warunku plastyczności (24.2). W pewnych przypadkach byłoby dogodniej zdefiniować bezwymiarową siłę styczną $n_{\xi\eta}$ jako $N_{\xi\eta}/2\tau_0 H$ tak, aby wyczerpaniu nośności granicznej przy czystym ścinaniu odpowiadała wartość $n_{\xi\eta} = 1$, jednakże ogólnie przyjęte jest oznaczenie (24.4).

Przytoczymy najważniejsze równania powierzchni nośności granicznej przekroju dla stanu tarczowego (błonowego). W oparciu o hipotezę HMM otrzymuje się

$$(24.6) \quad n_{\xi}^2 - n_{\xi} n_{\eta} + n_{\eta}^2 + 3n_{\xi\eta}^2 = 1.$$

Warunek plastyczności Treski-Guesta prowadzi do równania, które w kierunkach głównych można zapisać następująco:

$$(24.7) \quad \max(|n_1|, |n_2|, |n_1 - n_2|) = 1.$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia wartości główne sił podłużnych wynoszą

$$(24.8) \quad n_{1,2} = \frac{1}{2}(n_{\xi} + n_{\eta}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(n_{\xi} - n_{\eta})^2 + 4n_{\xi\eta}^2},$$

zatem równanie (24.7) określa trzy płyty powierzchni

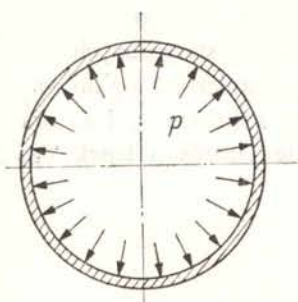
$$(24.9) \quad \begin{aligned} n_{\xi} + n_{\eta} - n_{\xi} n_{\eta} + n_{\xi\eta}^2 &= 1, \\ -n_{\xi} - n_{\eta} - n_{\xi} n_{\eta} + n_{\xi\eta}^2 &= 1, \\ n_{\xi}^2 + n_{\eta}^2 - 2n_{\xi} n_{\eta} + 4n_{\xi\eta}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Wobec analogicznej postaci równań (24.2) i (24.5) często operuje się w rozpatrywanym przypadku wprost naprężeniami zamiast uogólnionych sił wewnętrznych. Istotniejsze różnice występują tylko przy zmiennej grubości (w warunkach równowagi) i w przypadku niejednorodności materiału.

Z zastosowań obok wspomnianych już w p. 22.6 prac, traktujących belkę o wąskim przekroju prostokątnym jako tarczę, wspomnimy prace R. P. NORDGRENÄ i P. M. NAGH-DIEGO [467, 468], rozpatrujące nieograniczoną tarczę z otworem kołowym, poddanym jednoczesnemu działaniu ciśnienia normalnego i stycznego. Ogólny kołowo-symetryczny przypadek złożony obciążenia tarczy rozpatrywał w pracy [768] M. ŻYCZKOWSKI. Duże plastyczne ugięcia membran były badane w pracy N. N. MALININA i Ż. Ł. PETROSJANA [1058].

W powłokach stan błonowy — ściśle rzecz biorąc — występuje rzadko, ale w wielu przypadkach można z dostateczną dokładnością założyć w przybliżeniu istnienie stanu błonowego. Tak np. w przypadku powłoki walcowej kolistej, obciążonej ciśnieniem wewnętrznym p (rys. 129) występuje pewna zmiana (mianowicie zmniejszenie) krzywizny obwodowej i na ogół wystąpi związany z tym pewien moment obwodowy M_{θ} . Wpływ

tego momentu (z wyjątkiem powłok o dość znacznej grubości w stosunku do promienia krzywizny) jest jednak z reguły całkowicie pomijalny. Natomiast warto zauważyć, że wobec nieobowiązywania w zakresie odkształceń niesprężystych zasady superpozycji, nałożenie



Rys. 129. Zmiana krzywizny obwodowej powłoki walcowej kolistej w wyniku ciśnienia wewnętrznego

dwóch stanów błonowych (podłużnie niejednorodnych) może spowodować pojawienie się dodatkowego zginania: tak np. w pracach M. MROWCA i M. ŻYCKOWSKIEGO [430, 431] stwierdzono występowanie w stanie granicznym istotnego zginania obwodowego w powłoce walcowej, poddanej działaniu równomiernego ciśnienia wewnętrznego i zginania powłoki jako całości.

Ogólny przypadek stanu jednorodnego błonowego w powłoce walcowej kolistej badali P. G. HODGE i J. PANARELLI [261], którzy ponadto uwzględnili pewne giętne efekty brzegowe. Stany błonowe, odpowiadające obciążeniom niesymetrycznym powłok, rozważał M. I. JERCHOW [906].

24.3. Obciążenia złożone w stanie czysto giętym

24.3.1. Zakres sprężysto-plastyczny. Rozpatrzmy obecnie pracę przekroju dźwigara powierzchniowego w stanie czysto giętym w zakresie sprężysto-plastycznym. Wystąpić wtedy mogą momenty zginające M_ξ i M_η oraz moment skręcający $M_{\xi\eta}$. Dokonując stosownego obrotu układu odniesienia tak, aby pokrył się on lokalnie z kierunkami głównymi tensora momentów, możemy rozpatrywać jedynie działanie momentów zginających M_1 i M_2 , tak że rozpatrywany przypadek złożony można wtedy sklasyfikować jako P_2/S_2 .

Podejście takie upraszcza wyraźnie rozważania, odnoszące się do ustalonego przekroju, natomiast w przypadku analizy płyty lub powłoki jako całości wspomniana transformacja może się okazać niedogodna. Ogólnie mówiąc, bez transformacji mamy do czynienia z przypadkiem P_3/S_3 .

Zajmiemy się najpierw określeniem rozkładu naprężeń w przekroju dźwigara. W przypadku czystego zginania belek w zakresie sprężysto-plastycznym występuje (przy założeniu idealnej plastyczności) «dwutrapezowy» rozkład naprężeń σ . Istnienie takiego rozkładu naprężeń σ_1 i σ_2 przyjmuje się również często przy analizie pracy przekroju dźwigara powierzchniowego; założenie takie jest uzasadnione w przypadku materiału nieściśliwego, natomiast przy uwzględnieniu ściśliwości występują w strefach uplastycznionych krzywoliniowe wykresy naprężeń, a wykresy «dwutrapezowe» można traktować jedynie jako pewne aproksymacje. Problem ten przedstawimy opierając się na wynikach pracy [767].

Z hipotezy prostych normalnych wynika następujący rozkład odkształceń w kierunkach głównych:

$$(24.10) \quad \varepsilon_1 = \kappa_1 z, \quad \varepsilon_2 = \kappa_2 z.$$

Przez κ_1 i κ_2 rozumiemy tu krzywizny główne w przypadku płyty, a przyrosty krzywizn w przypadku powłoki (w tym ostatnim przypadku zakładamy zgodność kierunków głów-

nych momentów i pierwotnych krzywizn powłoki); z oznacza zmienną mierzoną prostopadłe do powierzchni środkowej. Jedynie w przypadku powłok silnie zakrzywionych otrzymywalibyśmy zamiast rozkładu liniowego odkształceń (24.10) rozkład hiperboliczny; przypadek ten o mniejszym znaczeniu praktycznym wyłączamy obecnie z naszych rozważań.

Przyjmujemy, jak zwykle w teorii dźwigarów powierzchniowych, założenie płaskiego stanu naprężenia: $\sigma_z = \sigma_3 = 0$; ponadto założymy w strefach uplastycznionych słusność warunku plastyczności HMH i teorii Hencky'ego-Iliuszina, ograniczając się do rozpatrywania proporcjonalnego wzrostu krzywizn κ_1 i κ_2 . Rozkład naprężeń σ_1 i σ_2 oraz odkształceń $\varepsilon_3 = \varepsilon_z$ określimy więc z prawa podobieństwa dewiatorów (Hencky'ego-Iliuszina)

$$(24.11) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3},$$

prawa zmiany objętości

$$(24.12) \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 3K(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

i warunku plastyczności HMH

$$(24.13) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_0^2.$$

Rugując z równań (24.11) i (24.12) ε_3 otrzymujemy

$$(24.14) \quad (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\sigma_1 - (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sigma_2 - \frac{1}{3K}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = 0.$$

Układ równań (24.13) i (24.14) określa rozkład naprężeń σ_1 i σ_2 . Każde z tych równań jest równaniem kwadratowym ze względu na każdą z niewiadomych. Układ ulega uproszczeniu przez wprowadzenie nowych niewiadomych

$$(24.15) \quad x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

mianowicie otrzymujemy

$$(24.16) \quad x^2 + 3y^2 = \sigma_0^2, \quad (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x + 3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)y - \frac{4}{3K}xy = 0.$$

Drugie z tych równań jest teraz równaniem liniowym zarówno ze względu na x , jak i na y . Rugując np. niewiadomą x otrzymujemy następujące równanie czwartego stopnia z uwagi na y :

$$(24.17) \quad 48y^4 + 72K(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y^3 + [108K^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) - 16\sigma_0^2]y^2 - 24\sigma_0^2K(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y - 9\sigma_0^2K^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Równanie (24.17) daje się łatwo rozwiązać jedynie w przypadkach szczególnych. W przypadku $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ (zginanie kuliste) otrzymujemy jedyny pierwiastek rzeczywisty $y = 0$, zatem $\sigma_1 = \sigma_2 = \pm\sigma_0 = \text{const}$; rozkład naprężeń jest wtedy dwutrapezowy. W przypadku $K \rightarrow \infty$ (materiał nieściśliwy) otrzymuje się równanie kwadratowe niezupełne

$$(24.18) \quad 12(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2)y^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2\sigma_0^2 = 0,$$

skąd, po rozwiązaniu i podstawieniu (24.10),

$$(24.19) \quad y = \pm \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2\sqrt{3} \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2}} \sigma_0 = \text{const},$$

zatem i w tym przypadku rozkład naprężeń jest dwutrapezowy.

W przypadku ogólnym rozwiązano w pracy [767] równanie (24.17) metodą małego parametru. Przy przyjęciu za mały parametr wielkości bezwymiarowej $(1-2\nu)$, równej zero dla materiału nieściśliwego, otrzymujemy

$$(24.20) \quad \sigma_1 = \frac{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sigma_0}{\sqrt{3} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}} + \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\varepsilon_2 \sigma_0^2}{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2)^2 E} (1-2\nu) + \\ + \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)(-2\varepsilon_1^3 + 3\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + 18\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 + 5\varepsilon_2^3) \sigma_0^3}{8\sqrt{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2)^{7/2} E^2} (1-2\nu)^2 + \dots;$$

wzór na σ_2 wynika z zastąpienia ε_1 przez ε_2 oraz ε_2 przez ε_1 . Wzór (24.20) ma charakter ogólny w odniesieniu do płaskiego stanu naprężenia. W rozpatrywanym przypadku przekroju dźwigara powierzchniowego podstawimy (24.10) otrzymując dla $z > 0$,

$$(24.21) \quad \sigma_1 = \frac{(2\kappa_1 + \kappa_2)\sigma_0}{\sqrt{3} \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2}} + \frac{(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)\kappa_2 \sigma_0^2}{2(\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2)^2 E} \frac{1-2\nu}{z} + \\ + \frac{(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)(-2\kappa_1^3 + 3\kappa_1^2 \kappa_2 + 18\kappa_1 \kappa_2 + 5\kappa_2^3) \sigma_0^3}{8\sqrt{3} (\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2)^{7/2} E^2} \frac{(1-2\nu)^2}{z^2} + \dots$$

Naprężenie σ_2 jest określone wzorem analogicznym. W przypadku $z < 0$ obydwa naprężenia jedynie zmieniają znak. Wzór (24.17) jest ważny w strefie uplastycznionej $z_0 < z < H$, gdzie współrzędna graniczna z_0 jest określona szeregiem [767],

$$(24.22) \quad z_0 = \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{2E \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2}} \left[1 + \frac{2\kappa_1^2 + 5\kappa_1 \kappa_2 + 2\kappa_2^2}{3(\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2)} (1-2\nu) - \right. \\ \left. - \frac{(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2}{2(\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2)^2} (1-2\nu)^2 + \dots \right].$$

Tak więc rozkład naprężeń w strefach uplastycznionych przekroju dźwigara powierzchniowego w przypadku materiału ściśliwego ma charakter hiperboliczny. Hiperbole przechodzą w linię prostą we wspomnianym już przypadku zgięcia kulistego $\kappa_1 = \kappa_2$ oraz w przypadku krzywizn (przyrostów krzywizn) równych co do wartości bezwzględnej, a o przeciwnym znaku. Ze wzrostem krzywizn κ_1 i κ_2 składniki hiperboliczne zanikają, bowiem potęgi κ w mianownikach są wyższe niż w licznikach.

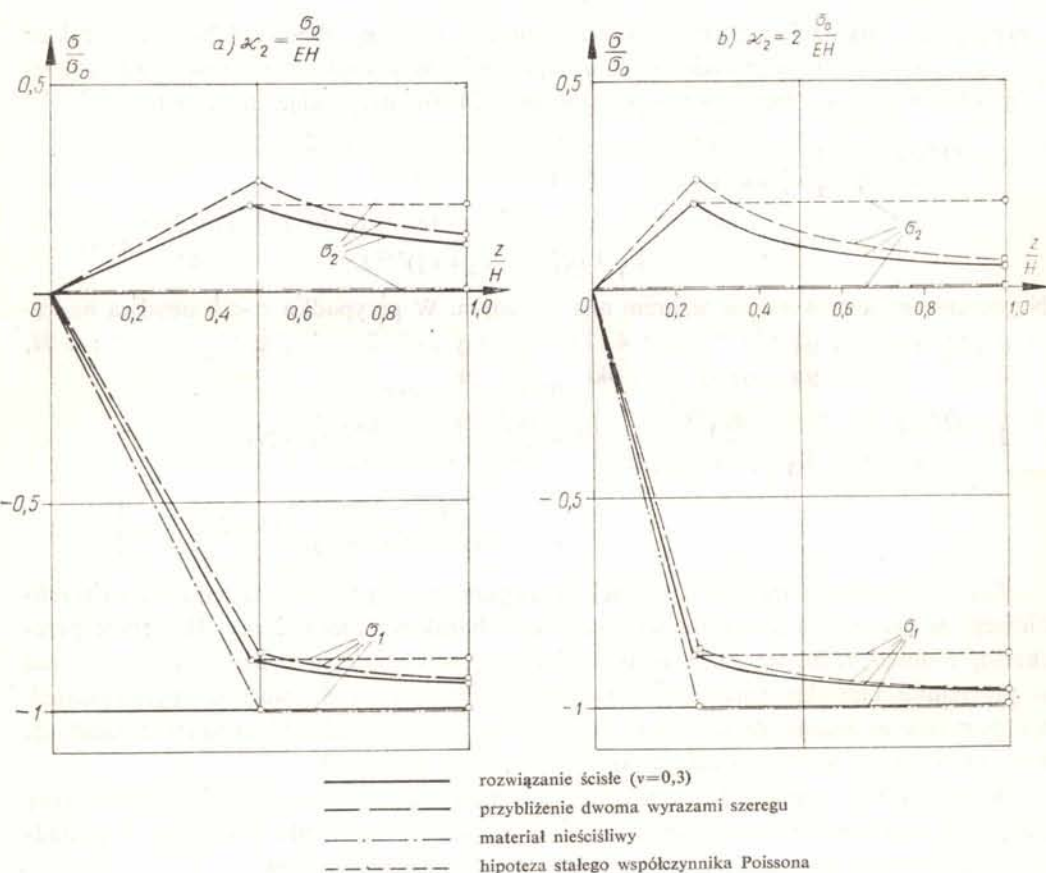
W pracy [767] wyprowadzono również wzory wiążące momenty zginające i krzywizny (przyrosty krzywizn) w zakresie sprężysto-plastycznym dla materiału ściśliwego. Z dokładnością pierwszego przybliżenia moment M_1 jest określony wzorem

$$(24.23) \quad M_1 = \frac{(2\kappa_1 + \kappa_2)\sigma_0 H^2}{\sqrt{3} \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2}} \left[1 - \frac{\sigma_0^2}{4E^2 H^2 (\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2)} \right] + \\ + \frac{\sigma_0^2}{E (\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2)^2} \left[(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)\kappa_2 H - \frac{(4\kappa_1^3 + 18\kappa_1^2 \kappa_2 + 9\kappa_1 \kappa_2^2 - 4\kappa_2^3)\sigma_0}{6\sqrt{3} E \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2}} \right] (1-2\nu);$$

moment M_2 określa oczywiście wzór analogiczny.

Przybliżone dwutrapezowe rozkłady naprężeń można otrzymywać w przypadku materiałów ściśliwych na różnych drogach. Jedną z dróg polega na założeniu nieściśliwości; jeżeli założymy ją tylko w strefie plastycznej, to na granicy strefowej $z = z_0$ wystąpi na ogół nieciągłość naprężeń, jeżeli natomiast założymy ją również w strefie sprężystej, to błędy przybliżenia są tu z reguły dość duże. Inną możliwością jest przyjęcie hipotezy stałego współczynnika Poissona ν również w zakresie plastycznym; z hipotezy takiej korzystali np. W. OLSZAK i J. MURZEWSKI [477], analizując sprężysto-plastyczne zginanie płyt ortotropowych niejednorodnych.

Przykładowe rozkłady naprężeń w przekroju dźwigara powierzchniowego (dla $z > 0$) pokazuje rys. 130. Przyjęto tu $\nu = 0,3$, $\kappa_1 = -2\kappa_2$, natomiast wartości κ_2 kolejno $\kappa_2 = \sigma_0/EH$ i $\kappa_2 = 2\sigma_0/EH$. Na rysunku pokazano rozwiązanie ściśle [rozwiązanie równania



Rys. 130. Rozkład naprężeń w przekroju dźwigara powierzchniowego w przypadku $\kappa_1 = -2\kappa_2$, $\nu = 0,3$

(24.17)], przybliżenie dwoma pierwszymi wyrazami szeregu (24.21), przybliżone założenie nieściśliwości materiału i przybliżoną hipotezę stałego współczynnika Poissona w zakresie plastycznym.

Wpływ ściśliwości materiału na pracę przekroju badał również A. S. GRIGORIEW [877] oraz JU. R. LEPIK i L. JA. LUHT [1040].

24.3.2. Nośność graniczna przekroju. Nośność graniczna przekroju zostaje w stanie czysto giętnym wyczerpana przy nieograniczonym wzroście krzywizn. Jeżeli stosunek krzywizn oznaczymy przez $\kappa_1/\kappa_2 = \psi$, to wzór (24.23) można będzie przepisać w dogodniejszej tu postaci

$$(24.24) \quad M_1 = \frac{(2\psi+1)\sigma_0 H^2}{\sqrt{3}\sqrt{\psi^2+\psi+1}} \left[1 - \frac{\sigma_0^2}{4\kappa_2^2 E^2 H^2 (\psi^2+\psi+1)} \right] + \frac{\sigma_0^2}{E\kappa_2(\psi^2+\psi+1)} \left[(\psi^2-1)H - \frac{(4\psi^3+18\psi^2+9\psi-4)\sigma_0}{6\sqrt{3}E\kappa_2\sqrt{\psi^2+\psi+1}} \right] (1-2\nu).$$

Gdy κ_2 rośnie nieograniczenie przy ustalonej wartości ψ , to moment M_1 zmierza do wartości granicznej

$$(24.25) \quad M_1 = \frac{(2\psi+1)\sigma_0 H^2}{\sqrt{3}\sqrt{\psi^2+\psi+1}}$$

bez względu na ściśliwość materiału; podobnym wzorem jest określony moment M_2 . Rugując z tych związków parametr ψ dochodzimy do równania krzywej nośności granicznej przekroju

$$(24.26) \quad M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 = \sigma_0^2 H^4.$$

Wprowadzenie bezwymiarowych momentów gnących

$$(24.27) \quad \frac{M_1}{\bar{M}} = \frac{M_1}{\sigma_0 H^2} = m_1, \quad \frac{M_2}{\bar{M}} = \frac{M_2}{\sigma_0 H^2} = m_2,$$

pozwala zapisać równanie (24.26) w prostszej postaci

$$(24.28) \quad m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 = 1.$$

Postać ta jest analogiczna do postaci wyjściowego warunku plastyczności (24.13). Istotnie, w stanie granicznym bez względu na ściśliwość materiału, która tu przestaje odgrywać rolę, otrzymujemy «dwuprostokątne» wykresy naprężeń, tak że wyjściowy warunek plastyczności przekształca się automatycznie w warunek wiążący momenty graniczne. Ogólnie biorąc, jeżeli przyjmiemy warunek plastyczności dla płaskiego stanu naprężenia w formie (24.2), to wprowadzając bezwymiarowe momenty gnące m_ξ i m_η wzorami analogicznymi do (24.27) oraz bezwymiarowy moment skręcający wzorem

$$(24.29) \quad \frac{M_{\xi\eta}}{\sigma_0 H^2} = m_{\xi\eta}$$

możemy zapisać równanie powierzchni nośności granicznej dla przekroju przy dwuosio- wym zginaniu i skręcaniu w postaci

$$(24.30) \quad m \stackrel{\text{def}}{=} f(m_\xi, m_\eta, m_{\xi\eta}) = 1.$$

Tak więc interpretacja graficzna tego równania podobnie jak (24.5) jest identyczna z interpretacją wyjściowego warunku plastyczności (24.2). Przypadek złożony (24.30) można sklasyfikować jako P_3/S_3 .

Forma równania (24.30) jest oczywista dla materiałów wykazujących izotropię normalną, czyli jednakowe własności po stronie rozciągania i ściskania. W przypadku $\sigma_{0+} \neq \sigma_{0-}$ występują pewne komplikacje, związane z ewentualnym przesuwaniem się warstwy obojętnej. Ostateczna forma równania zależy wtedy w pewnym stopniu od przyjętego prawa fizycznego, jednak często przyjmuje się w przybliżeniu równanie (24.30).

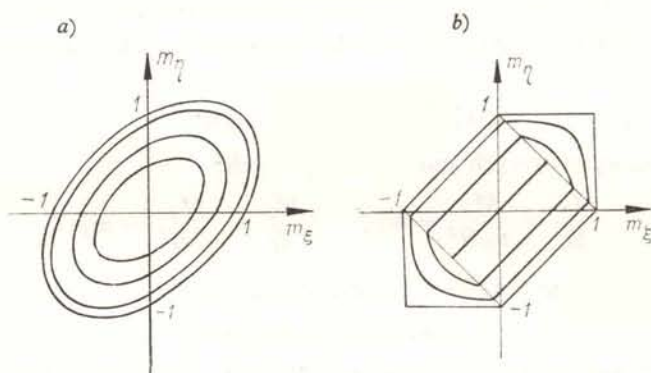
W oparciu o warunek plastyczności HMH otrzymuje się równanie powierzchni granicznej (elipsoidy)

$$(24.31) \quad m_{\xi}^2 - m_{\xi} m_{\eta} + m_{\eta}^2 + 3m_{\xi\eta}^2 = 1,$$

natomiast w oparciu o warunek TG — równania trzech płatów — analogiczne do (24.9),

$$(24.32) \quad \begin{aligned} m_{\xi} + m_{\eta} - m_{\xi} m_{\eta} + m_{\xi\eta}^2 &= 1, \\ -m_{\xi} - m_{\eta} - m_{\xi} m_{\eta} + m_{\xi\eta}^2 &= 1, \\ m_{\xi}^2 + m_{\eta}^2 - 2m_{\xi} m_{\eta} + 4m_{\xi\eta}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Warstwy powierzchni granicznych (24.31) i (24.32) w płaszczyźnie $m_{\xi} m_{\eta}$ pokazano na rys. 131 (A. SAWCZUK [485]).



Rys. 131. Warstwy powierzchni nośności granicznej przekroju dźwigara powierzchniowego w oparciu o warunek plastyczności a) Hubera-Misesa, b) Treski-Guesta

Równanie powierzchni nośności granicznej w oparciu o warunek plastyczności Buzińskiego-Stassi d'Alia dla przypadku P_2/S_2 wyprowadził i stosował do obliczania płyt kołowych G. MENDITTO [407, 408, 409], a dla przypadku P_3/S_3 — M. CAPURSO [60] (płyta prostokątna). Ortotropię naturalną lub wynikającą ze zbrojenia materiału uwzględniali A. SAWCZUK [613, 618], T. MURA, J. S. KAO i S. L. LEE [442] (płyta kołowa o ortotropii nie wykazującej kołowej symetrii), K. O. KEMP [307], M. W. KWIECIŃSKI [333] i M. SAVE [611] (zbrojenie ortotropowe), J. A. KÖNIG i J. RYCHLEWSKI [325] (ortotropia i skokowa niejednorodność) oraz M. CAPURSO i A. GANDOLFI [67] (żebrowanie). Badania doświadczalne nad warunkami plastyczności dla przekroju płyty przeprowadzili P. S. THEOCARIS i C. R. HAZELL [695].

Efektywne zastosowanie równania powierzchni granicznej do obliczania nośności granicznej dźwigarów powierzchniowych wymaga z reguły znajomości odpowiednich praw fizycznych, wiążących w stanie granicznym momenty zginające ze zmianami krzy-

wizn, a właściwie stosunkami zmian krzywizn (w przypadku konstrukcji pełnościennych krzywizny w stanie granicznym zmierzają do nieskończoności, jedynie w przypadku konstrukcji warstwowych mogłyby pozostawać skończone) lub z prędkościami krzywizn. Do określenia nośności szczególnie często bywa stosowany schemat ciała idealnie sztywno-plastycznego, nawiązujący do teorii plastyczności Levy'ego-Misesa; wówczas interesują nas związki momentów z prędkościami krzywizn.

Wykazano, iż jeżeli założymy słuszność stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego dla prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{ij}$, to również prawo określające prędkości krzywizn (i w ogóle prędkości uogólnionych odkształceń) jest prawem stowarzyszonym, mianowicie jeżeli równanie powierzchni granicznej zapiszemy w postaci $f(M_\xi, M_\eta, M_{\xi\eta}) = 1$, to

$$(24.33) \quad \dot{\kappa}_\xi = \lambda \frac{\partial f}{\partial M_\xi}, \quad \dot{\kappa}_\eta = \lambda \frac{\partial f}{\partial M_\eta}, \quad \dot{\kappa}_{\xi\eta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial M_{\xi\eta}},$$

(H. ZIEGLER [759, 760, 761], A. SAWCZUK i J. RYCHLEWSKI [616], M. SAVE [608]). W przypadku warunku plastyczności HMM związki (24.33) nie budzą większych wątpliwości, natomiast odmiennie przedstawia się sytuacja, gdy stosujemy dla uproszczenia pewien przybliżony warunek plastyczności, np. aproksymujemy warunek HMM warunkiem Treski-Guesta. Wówczas zastosowanie prawa (24.33) stowarzyszonego z warunkiem przybliżonym z reguły powiększa błąd aproksymacji.

Ogólniejsze badania nad formą związków między momentami i prędkościami krzywizn przeprowadził A. SAWCZUK [627], który stwierdził, iż dadzą się one zapisać w postaci

$$(24.34) \quad \dot{\kappa}_{ij} = AM_{ij} - B\delta_{ij}, \quad i, j = \xi, \eta,$$

gdzie A i B są pewnymi funkcjami niezmienników. Przez $M_{\xi\xi}$ rozumiemy tu moment zginający M_ξ , podobnie $M_{\eta\eta} = M_\eta$.

Wspomniemy jeszcze o niektórych zastosowaniach równań nośności granicznej przekroju (warunków plastyczności dla przekroju) w rozpatrywanych przypadkach P_2/S_2 i P_3/S_3 . Przypadki takie występują szczególnie często przy analizie płyt w zakresie małych ugięć. Nośność graniczną płyty kołowej przy dowolnym warunku plastyczności określali H. G. HOPKINS i A. J. WANG [266]; obciążenie antysymetryczne takiej płyty badał W. N. ALPERT [787]. W stanie granicznym mogą występować w płycie nieciągłości momentów zginających i nieciągłości prędkości krzywizn. Problem ten był badany w pracach Z. MROZA i A. SAWCZUKA [1092] oraz A. SAWCZUKA i P. G. HODGE'A [630]. Nośność płyt prostokątnych w oparciu o warunek (24.31) badał Z. SOBOTKA [664]; ogólną metodę otrzymywania oszacowań górnych i dolnych dla płyt podał A. ZAVELANI ROSSI [755].

Znacznie większą trudność przedstawiają problemy wzmocnienia plastycznego. Ugięcia płyty kołowej przy wzmocnieniu izotropowym i kinematycznym badał E. FACCIOLO [129], nawiązując do schematu ciała idealnie sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem, podlegającego początkowemu warunkowi plastyczności HMM. Niektóre inne rozwiązania omówimy w następnych punktach.

25. Obciążenia złożone typu P_2/S_4

25.1. Nośność graniczna przekroju pełnościennego

25.1.1. Warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego. W większości przypadków obliczeń nośności granicznej i odkształceń sprężysto-plastycznych powłok

oraz przy rozpatrywaniu dużych ugięć płyt niezbędne jest uwzględnienie jednoczesnego działania tensora sił błonowych i tensora momentów; często występują również siły poprzeczne. Taki ogólny przypadek przy dopuszczeniu asymetrii tensorów (która może mieć miejsce dla powłok silnie zakrzywionych) sklasyfikowaliśmy jako P_5/S_{10} . Obecnie zajmujemy się przypadkiem prostszym, gdy można założyć symetrię tensorów, kierunki główne tensora momentów, tensora sił błonowych i tensora krzywizn pierwotnych powłoki pokrywają się, a wpływ sił poprzecznych można pominąć. Przypadek taki daje się sklasyfikować jako P_2/S_4 ; w przekroju dźwigara powierzchniowego występują dwa momenty zginające M_1 i M_2 oraz dwie siły podłużne N_1 i N_2 . Szczególnemu uproszczeniu ulega wtedy warunek plastyczności Treski-Guesta, jednak postać warunku HMH jest również prostsza. Zastosowanie tego przypadku jest dość szerokie, np. przy obrotowej symetrii konstrukcji i obciążenia.

Z hipotezy prostych normalnych Love'a-Kirchhoffa wynika rozkład odkształceń

$$(25.1) \quad \varepsilon_1 = \kappa_1 z + \lambda_1, \quad \varepsilon_2 = \kappa_2 z + \lambda_2,$$

gdzie κ_1 i κ_2 oznaczają przyrosty krzywizn głównych (lub prędkości krzywizn w nawiązaniu do teorii płynięcia plastycznego), λ_1 i λ_2 — wydłużenia lub prędkości wydłużeń powierzchni środkowej. Założymy nieściśliwość materiału: założenie takie, całkowicie uzasadnione w stanie granicznym, znacznie upraszcza rozwiązanie. W takim razie

$$(25.2) \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z = -(\kappa_1 + \kappa_2)z - (\lambda_1 + \lambda_2).$$

Z prawa podobieństwa dewiatorów naprężeń i odkształceń (Hencky-Iliuszin) lub naprężeń i prędkości odkształceń (Levy-Mises) wynikają związki

$$(25.3) \quad \sigma_1 = \frac{1}{\varphi}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \sigma_2 = \frac{1}{\varphi}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3),$$

bowiem uzasadnione jest przyjęcie $\sigma_3 = \sigma_z = 0$. Różnica między obiema wymienionymi teoriami jest tu czysto formalna. Podstawiając (25.1), (25.2) i (25.3) do warunku plastyczności HMH określamy funkcję φ :

$$(25.4) \quad \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} [(\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2)z^2 + (2\kappa_1 \lambda_1 + 2\kappa_2 \lambda_2 + \kappa_1 \lambda_2 + \kappa_2 \lambda_1)z + (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)]^{1/2}.$$

Podstawienie (25.4) do (25.3) prowadzi do efektywnego określenia rozkładu naprężeń σ_1 i σ_2 . Całkując te naprężenia wprost lub mnożąc przez z określamy jednostkowe siły podłużne N_1 i N_2 oraz jednostkowe momenty gnące M_1 i M_2 :

$$(25.5) \quad \begin{aligned} N_1 &= \int_{-H}^H \sigma_1 dz, & M_1 &= \int_{-H}^H \sigma_1 z dz, \\ N_2 &= \int_{-H}^H \sigma_2 dz, & M_2 &= \int_{-H}^H \sigma_2 z dz. \end{aligned}$$

Ostatecznie wyniki zapiszemy w postaci:

$$(25.6) \quad \begin{aligned} N_1 &= (2\kappa_1 + \kappa_2) J_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2) J_0, \\ N_2 &= (2\kappa_2 + \kappa_1) J_1 + (2\lambda_2 + \lambda_1) J_0, \\ M_1 &= (2\kappa_1 + \kappa_2) J_2 + (2\lambda_1 + \lambda_2) J_1, \\ M_2 &= (2\kappa_2 + \kappa_1) J_2 + (2\lambda_2 + \lambda_1) J_1, \end{aligned}$$

gdzie przez J_k oznaczono całki

$$(25.7) \quad J_k = \int_{-H}^H \frac{z^k}{\varphi} dz, \quad k = 0, 1, 2.$$

Funkcję φ określa wzór (25.4). Wyrażenia (25.6) są funkcjami jednorodnymi zerowego stopnia względem $\kappa_1, \kappa_2, \lambda_1, \lambda_2$, tak że dadzą się przedstawić jako funkcje ich stosunków, np. $\kappa_2/\kappa_1, \lambda_1/\kappa_1$ i λ_2/κ_1 . Równania (25.6) określają więc powierzchnię (hiperpowierzchnię) nośności granicznej przekroju w formie parametrycznej. Całki (25.7) są całkami elementarnymi, jednak obliczanie ich jest żmudne, a postać końcowa zależna od wartości parametrów κ i λ . Ważniejsze przypadki analizują A. A. ILIUSZIN [945, 949] (który pierwszy podał równania powierzchni granicznej dla ogólniejszego przypadku P_3/S_6), W. W. ROZDIESTWIENSKI [1144] oraz A. SAWCZUK i J. RYCHLEWSKI [616].

Szczególnie uproszczenie równań (25.5) uzyskuje się w przypadku

$$(25.8) \quad 2\kappa_1 \lambda_1 + 2\kappa_2 \lambda_2 + \kappa_1 \lambda_2 + \kappa_2 \lambda_1 = 0,$$

który ILIUSZIN [949] nazwał prostszym przypadkiem złożonym. Wtedy funkcja φ jest funkcją parzystą zmiennej z , całki J_1 są równe zeru, a pozostałe całki wyrażają się stosunkowo prosto przez funkcję logarytm. Warunek (25.8) jest oczywiście spełniony w przypadku czysto błonowym (tarczowym) lub czysto giętnym, a ponadto np. w ważnych praktycznie przypadkach

$$\kappa_1 = 0, \quad \lambda_1 = -2\lambda_2 \quad \text{oraz} \quad \lambda_1 = 0, \quad \kappa_1 = -2\kappa_2.$$

Inną parametryzację równań (25.6) zaproponował P. G. HODGE [255, 256, 259]. Wprowadzając parametryzację trygonometryczną typu NÁDAIA-SOKOŁOWSKIEGO dla intensywności odkształceń (lub intensywności prędkości odkształceń), obliczając następnie naprężenia i całkując dochodzi on do następujących równań parametrycznych powierzchni granicznej w czterowymiarowej przestrzeni n_1, n_2, m_1, m_2 :

$$(25.9) \quad \begin{aligned} n_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{3} \sin(p-q)} \left[\cos p \cos q \cos \left(r \mp \frac{\pi}{6} \right) \ln \frac{(1 + \sin q)(1 - \sin p)}{(1 - \sin q)(1 + \sin p)} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \left(r \mp \frac{\pi}{6} \right) (\cos p - \cos q) \right], \\ m_{1,2} &= \frac{2 \cos p \cos q}{\sqrt{3} \sin^2(p-q)} \left\{ \left[\ln \frac{(1 + \sin q)(1 - \sin p)}{(1 - \sin q)(1 + \sin p)} \right] \left[\sin(p+q) \cos \left(r \mp \frac{\pi}{6} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos p \cos q \sin \left(r \mp \frac{\pi}{6} \right) \right] - 4 \cos \left(r \mp \frac{\pi}{6} \right) (\cos p - \cos q) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \left(r \mp \frac{\pi}{6} \right) (\sin p - \sin q) \right\}. \end{aligned}$$

We wzorach powyższych znaki górne odnoszą się do n_1 i m_1 , dolne do n_2 i m_2 ; p , q i r są parametrami, przy czym Hodge badał zakres zmienności tych parametrów; n_j i m_j , $j = 1, 2$ oznaczają bezwymiarowe siły podłużne i momenty, określone wzorami typu (24.4) i (24.27).

Równania powierzchni granicznej na drodze wariacyjnej wyprowadzali S. M. FEJNBURG [1214], W. W. ROZDIESTWIENSKI [1144] i T. H. H. PIAN [539].

25.1.2. Warunek plastyczności Treski-Guesta. Przy pokrywaniu się kierunków głównych tensora sił błonowych i tensora momentów warunek plastyczności Treski-Guesta prowadzi z reguły do prostszych postaci równań powierzchni granicznej niż warunek HMM. Prostota ta jest szczególnie przy dodatkowym przyjęciu hipotezy obowiązującego stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego, choć różnice w stosunku do warunku HMM ulegają wtedy z reguły dalszemu powiększeniu.

Podstawowe równanie warunku plastyczności TG (10.27) rozpada się w rozważanym przypadku płaskiego stanu naprężenia na 6 równań, wynikających ze wszystkich możliwych kombinacji uszeregowania naprężeń głównych. Zapiszemy je w postaci

$$(25.10) \quad \begin{aligned} \Phi_1 = \sigma_1 - \sigma_0 &= 0, & \Phi_4 = -\sigma_1 - \sigma_0 &= 0, \\ \Phi_2 = \sigma_2 - \sigma_0 &= 0, & \Phi_5 = -\sigma_2 - \sigma_0 &= 0, \\ \Phi_3 = \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_0 &= 0, & \Phi_6 = -\sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_0 &= 0. \end{aligned}$$

Spośród powyższych sześciu równań należy wybrać to, które prowadzi do mniejszej bezwzględnej wartości naprężeń przy ich danym stosunku i znaku.

Przyjmijmy najpierw, że naprężenia są związane z odkształceniami lub prędkościami odkształceń prawem podobieństwa dewiatorów (25.3). Po podstawieniu (25.1) i wyrugowaniu funkcji φ przez podzielenie stronami otrzymujemy związek

$$(25.11) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{(2\kappa_1 + \kappa_2)z + (2\lambda_1 + \lambda_2)}{(2\kappa_2 + \kappa_1)z + (2\lambda_2 + \lambda_1)}.$$

Jeżeli więc obowiązuje pierwsze z równań (25.10), $\sigma_1 = \sigma_0$, to wówczas rozkład naprężeń σ_2 jest hiperboliczny:

$$(25.12) \quad \sigma_2 = \frac{(2\kappa_2 + \kappa_1)z + (2\lambda_2 + \lambda_1)}{(2\kappa_1 + \kappa_2)z + (2\lambda_1 + \lambda_2)} \sigma_0.$$

W przypadku drugiego równania (25.10) $\sigma_2 = \sigma_0$ rozkład naprężeń σ_1 jest hiperboliczny

$$(25.13) \quad \sigma_1 = \frac{(2\kappa_1 + \kappa_2)z + (2\lambda_1 + \lambda_2)}{(2\kappa_2 + \kappa_1)z + (2\lambda_2 + \lambda_1)} \sigma_0.$$

Współrzedną z_θ , rozgraniczającą obszary stosowalności wzorów (25.12) i (25.13), możemy określić z porównania σ_1 i σ_2 :

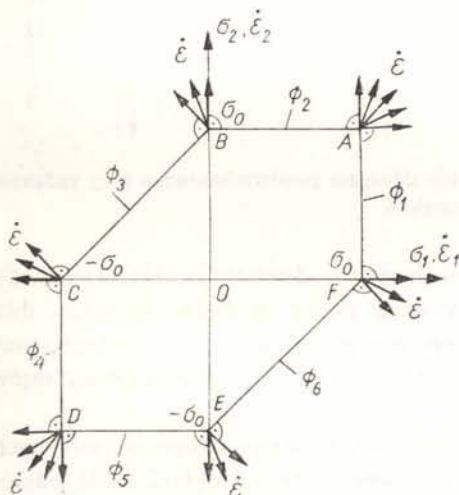
$$(25.14) \quad z_\theta = -\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\kappa_1 - \kappa_2}.$$

W obszarze stosowalności trzeciego z równań (25.10) rozkład obu naprężeń σ_1 i σ_2 jest hiperboliczny:

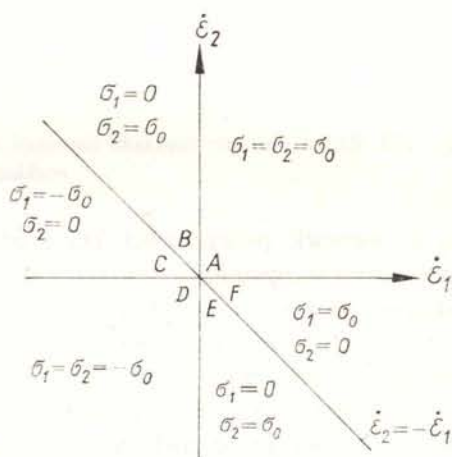
$$(25.15) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{(2\kappa_1 + \kappa_2)z + (2\lambda_1 + \lambda_2)}{(\kappa_2 - \kappa_1)z + (\lambda_2 - \lambda_1)} \sigma_0, \\ \sigma_2 &= \frac{(2\kappa_2 + \kappa_1)z + (2\lambda_2 + \lambda_1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)z + (\lambda_2 - \lambda_1)} \sigma_0. \end{aligned}$$

Podobnie można określić rozkłady naprężeń, odpowiadające pozostałym równaniom (25.10), a także wartości współrzędnych granicznych. Siły podłużne i momenty można obliczyć ze wzorów (25.5) rozbijając przedział $-H < z < H$ na stosowną liczbę podprzedziałów. Całki są elementarne, wyrażają się przez funkcję logarytm, jednakże budowa końcowych wzorów jest dość złożona.

Znacznie prostsze wyniki otrzymuje się przy założeniu stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego. Podejście takie, sugerowane już w pracach S. M. FEJNBIERGA [1214] i D. C. DRUCKERA (por. [487]), zostało szczegółowo rozpracowane przez E. T. ONATA i W. PRAGERA [491, 493]. Istota uproszczenia polega na tym, iż praktycznie biorąc występujące stany naprężenia odpowiadają jedynie narożom sześciokąta Treski-Guesta, zatem naprężenia σ są przedziałami stałe i równe $\pm\sigma_0$ lub 0. Prawo stowarzyszone wymaga mianowicie, aby wektor $\dot{\epsilon}$ był prostopadły do powierzchni (do krzywej) $\Phi = 0$, czyli w przypadku sześciokąta TG pokazanego na rys. 132, aby stosunek $\dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_2$ był dla poszczególnych boków Φ_1 do Φ_6 równy kolejno $\infty, 0, -1, \infty, 0, -1$; prędkości odkształceń



Rys. 132. Zastosowanie warunku plastyczności Treski i stowarzyszonego prawa płynięcia do obliczania nośności granicznej przekroju dźwigara powierzchniowego

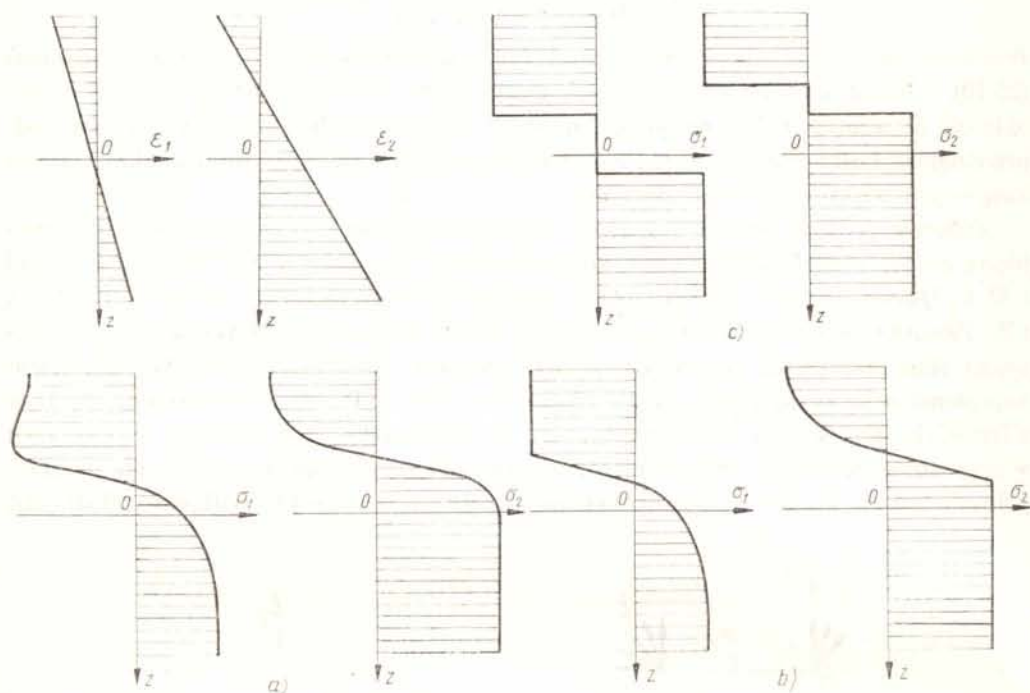


Rys. 133. Podział płaszczyzny prędkości odkształcenia na podobszary w wyniku zastosowania warunku plastyczności Treski i stowarzyszonego prawa płynięcia

określone wzorami (25.1) na ogół nie spełniają tego warunku, natomiast inne wartości stosunku $\dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_2$ mogą wystąpić tylko w narożach A-F, gdzie kierunek wektora $\dot{\epsilon}$ nie jest jednoznacznie ustalony. Płaszczyzna $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$ dzieli się więc na podobszary, odpowiadające

poszczególnym narożom $A-F$ sześciokąta (rys. 133, por. [485]) — naprężenia σ_1 i σ_2 są zatem przedziałami stałe.

Na rysunku 134 pokazano przykładowy rozkład odkształceń głównych (lub prędkości odkształceń) $\dot{\epsilon}_1$ i $\dot{\epsilon}_2$ oraz odpowiadające rozkłady naprężeń σ_1 i σ_2 , określone kolejno (a) w oparciu o warunek plastyczności HMM, wzory (25.3) z podstawieniem (25.4), (b) w opar-



Rys. 134. Różne warianty rozkładu naprężeń w przekroju dźwigara powierzchniowego przy zadanym rozkładzie odkształceń

ciu o warunek plastyczności TG i prawo podobieństwa dewiatorów (25.11)–(25.15), wreszcie (c) w oparciu o warunek TG i stowarzyszone prawo płynięcia. Traktując dwa ostatnie wykresy jako przybliżenie pierwszego, stwierdzamy wyraźnie większe błędy przy zastosowaniu stowarzyszonego prawa płynięcia, jednakże prostota tych ostatnich wykresów jest również wyraźnie większa.

Określenie sił N_1 i N_2 oraz momentów M_1 i M_2 w funkcji trzech stosownie dobranych parametrów nie przedstawia większych trudności; pewne trudności wyłaniają się jedynie przy ocenie zakresu stosowalności określonych na tej drodze fragmentów powierzchni nośności granicznej dla przekroju dźwigara powierzchniowego. ONAT i PRAGER [491, 493, 556] zaproponowali, aby za układ wspomnianych trzech parametrów przyjąć współrzędne punktów zerowania się odkształceń ϵ_1 , ϵ_2 i ϵ_3 , odniesione do grubości powłoki (wysokości przekroju) $2H$. Jeżeli oznaczymy współrzędne punktów zerowania się kolejnych odkształceń przez z_1 , z_2 i z_3 , to ze wzorów (25.1) i (25.2) wynika

$$(25.16) \quad z_1 = -\frac{\lambda_1}{\kappa_1}, \quad z_2 = -\frac{\lambda_2}{\kappa_2}, \quad z_3 = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\kappa_1 + \kappa_2}.$$

Parametrami Onata i Pragera są więc

$$(25.17) \quad p = -\frac{\lambda_1}{2H\kappa_1}, \quad r = -\frac{\lambda_2}{2H\kappa_2}, \quad q = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2H(\kappa_1 + \kappa_2)}.$$

Obliczenie sił i momentów zależy teraz w sposób istotny od uszeregowania algebraicznego parametrów p , q i r . Wylania się tu sześć możliwości; odpowiednie wyniki zestawiono w tabelicy 6, gdzie n_j i m_j oznaczają bezwymiarowe siły i momenty, określone wzorami typu (24.4) i (24.27).

Tabela 6. Powierzchnia nośności granicznej Treski — Guesta przy stowarzyszonym prawie płynięcia

Parametr o wartości pośredniej	Uogólnione siły wewnętrzne			
	n_1	n_2	m_1	m_2
p	$\mp(p+q)$	$\mp(q-r)$	$\pm 1 \mp 2(p^2+q^2)$	$\pm 2(r^2-q^2)$
q	$\mp(p+q)$	$\mp(q+r)$	$\pm 1 \mp 2(p^2+q^2)$	$\pm 1 \mp 2(q^2+r^2)$
r	$\mp(q-p)$	$\mp(q+r)$	$\pm 2(p^2-q^2)$	$\pm 1 \mp 2(q^2+r^2)$

Tabela określa sześć płatów powierzchni nośności granicznej w formie parametrycznej; kolejne rugowanie parametrów prowadzi do formy uwikłanej lub jawnej. Odpowiednie wydłużenia i krzywizny lub ich prędkości można określić (z dokładnością do wspólnego mnożnika) przez odwrócenie wzorów (25.17). Zakres stosowalności poszczególnych wzorów omawia np. P. G. HODGE [259].

Pewne przybliżenie równania powierzchni nośności granicznej, określonej tabelicą 6, zaproponował T. NAKAMURA [457]. Powierzchnia przybliżona, przedstawiająca oszacowanie górne, składa się mianowicie z trzech par parabolicznych hipercylindrów, odpowiadających przecięciom poszczególnych płatów powierzchni aproksymowanej:

$$(25.18) \quad \pm m_1 + n_1^2 = 1, \quad \pm m_2 + n_2^2 = 1, \quad \pm(m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)^2 = 1.$$

W pracy [136] W. FLÜGGE i T. NAKAMURA podali całki ogólne odpowiednich równań różniczkowych dla powłok obrotowo-symetrycznych przy pełnym uplastycznieniu, określonym poszczególnymi równaniami (25.18), i przykłady zastosowań do obliczania powłok stożkowych. Równania (25.18) zaproponowali niezależnie Z. MRÓZ i XU BING-YE [433] i zastosowali do obliczania nośności granicznej powłok kulistych.

Równania powierzchni granicznej ulegają wyraźnemu uproszczeniu w przypadku zerowania się jednego z momentów. Sytuacja taka ma miejsce przy obrotowo symetrycznym obciążeniu powłok walcowych, gdy można założyć zerowanie się momentu obwodowego; w przybliżeniu można założenie takie przyjąć dla dowolnej powłoki obrotowo-symetrycznej (D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD [110]).

Równania zestawione w tabelicy 6 lub ich przybliżenia były szczególnie często stosowane przy obliczaniu dużych ugięć sztywno-plastycznych płyt (E. T. ONAT, R. M. HAYTHORNTHWAITE [495], JU. R. LEPIK [1037, 1038]), powłok walcowych (M. DUSZEK [115, 116]) i kulistych (M. DUSZEK [899, 118]). Całki ogólne dla powłok walcowych (przy małych ugięciach) podał M. SAYIR [632, 633]. Ogólne metody uzyskiwania oszacowań nośności granicznej omówione są w pracy S. L. LEE i B. J. THORNA [340]. A. C. PALMER [514]

zastosował do określania nośności granicznej powłok metodę programowania dynamicznego.

Niejednorodność poprzeczną uwzględnili JU. P. LISTROWA, M. A. RUDIS [1044] oraz R. SANKARANARAYANAN [606]; niejednorodność wywołaną nierównomiernym rozkładem temperatury – JU. P. LISTROWA i M. A. RUDIS [1045].

Wiele uwagi poświęcono nośności granicznej przekroju konstrukcji powierzchniowej żebrowanej w sposób symetryczny lub niesymetryczny względem powierzchni środkowej. Przy przyjęciu warunku plastyczności Treski-Guesta problem ten rozpatrywali JU. W. NIEMIROWSKI i JU. N. RABOTNOW [1095], D. D. IWLEW, JU. I. LISTROWA i JU. W. NIEMIROWSKI [940], A. BIRON i A. SAWCZUK [28] oraz M. CAPURSO i A. GANDOLFI [61, 64].

25.1.3. Warunek plastyczności największego naprężenia normalnego. Dalsze uproszczenie otrzymuje się przez zastosowanie hipotezy największego naprężenia normalnego Galileusza-Clebscha-Rankine'a. Hipoteza ta znacznie odbiega od hipotezy HMM, tak że traktowanie jej jako aproksymacji tej ostatniej związane jest ze znacznymi błędami przybliżenia, jednak może znaleźć zastosowanie np. w przypadku betonu zbrojonego.

Warunek plastyczności ma tu znowu postać (25.10), jednak przy pominięciu równań $\Phi = 0$ i $\Phi_6 = 0$; odpowiednia krzywa graniczna na płaszczyźnie σ_1, σ_2 jest kwadratem. Zastosowanie prawa fizykalnego podobieństwa dewiatorów prowadzi do związków (25.12) i (25.13), tak że uproszczenie w stosunku do równań HMM nie jest zbyt znaczne. Poważne uproszczenie otrzymuje się dopiero przy zastosowaniu stowarzyszonego prawa płynięcia, które w przypadku konstrukcji zbrojonych może tu znaleźć uzasadnienie teoretyczne i doświadczalne. Wtedy przeprowadzając rozumowanie podobne jak w przypadku hipotezy TG stwierdzamy, że naprężenia σ_1 i σ_2 mogą być jedynie równe $\pm \sigma_0$ (z wyjątkiem szczególnych układów wartości $\kappa_1, \kappa_2, \lambda_1$ i λ_2). Rozkład naprężeń w przekroju jest więc co najmniej w jednym z kierunków głównych identyczny jak przy zginaniu z rozciąganiem pręta o przekroju prostokątnym i powierzchnia nośności granicznej składa się z dwóch hiperwalców:

$$(25.19) \quad m_1 = \pm(1 - n_1^2), \quad m_2 = \pm(1 - n_2^2),$$

stanowiących bezpośrednio przeniesienie paraboli Girkmanna (21.35) na grunt teorii nośności granicznej przekroju dźwigarów powierzchniowych.

Równania (25.19) znajdują zastosowanie przy korzystaniu z teorii załomu, np. przy określaniu nośności granicznej płyt i dużych ugięć płyt sztywno-plastycznych. Duże ugięcia określał na tej drodze A. SAWCZUK [625]. Wykorzystaniu pojęcia linii załomu w teorii nośności granicznej poświęcona jest praca A. SAWCZUKA i P. G. HODGE'A [630].

Nośność graniczną przekroju dźwigarów powierzchniowych zbrojonych badał szczegółowo Z. MRÓZ [432] rozpatrując zarówno uplastycznienie materiału zbrojonego, jak i zbrojenia. Dalsze uogólnienia powierzchni nośności granicznej (25.19) i bardziej szczegółową analizę zawierają prace R. SANKARANARAYANANA [603] oraz R. SANKARANARAYANANA i W. OLSZAKA [604].

25.1.4. Inne warunki plastyczności ciał izotropowych. Omówione dotychczas warunki plastyczności odpowiadają jednakowym własnościom materiału przy rozcią-

ganiu i ściskaniu czyli izotropii normalnej. Niektóre materiały można w przybliżeniu traktować jako idealnie plastyczne, jednak przy różnych granicach plastyczności po stronie rozciągania i ściskania (beton, drewno). Występuje wtedy konieczność stosowania odmiennych warunków plastyczności, np. Burzyńskiego lub odpowiedniego uogólnienia Treski-Guesta [równania (16.7) dla ciała izotropowego].

Pierwsza praca z r. 1961 należy tu do W. PRAGERA (por. W. OLSZAK, A. SAWCZUK [487]), który rozpatrywał powłokę sandwiczową, zakładając dla każdej z dwóch warstw nośnych uogólniony warunek plastyczności Treski-Guesta. Powłokę pełnościenną przy takim warunku plastyczności rozpatrywali M. JANAS [290] oraz JU. P. LISTROWA i N. I. MOKASZOWA [1046]. Uogólnienie warunku największego naprężenia normalnego na przypadek różnych granic plastyczności σ_{0+} i σ_{0-} zawierają wspomniane już prace R. SANKARANARAYANANA i W. OLSZAKA [603, 604]. Hipotezę Burzyńskiego-Stassi d'Alia stosował dla przekroju sandwiczowego C. MAZZARELLA [398].

D. D. IWLEW [938] podał równania powierzchni nośności granicznej przy warunku plastyczności największego naprężenia dewiatorowego (15.11). Równania te wraz z równaniami Treski-Guesta określają odpowiednio górne i dolne oszacowanie powierzchni nośności granicznej przy warunku HMM.

25.2. Nośność graniczna przekroju warstwowego

25.2.1. Uwagi ogólne. Często zamiast pełnościennej konstrukcji powierzchniowej rozważa się konstrukcję warstwową. Przyjmuje się wtedy, że płyta lub powłoka składa się z pewnej liczby cienkich warstw zdolnych do przenoszenia obciążeń błonowych, a nie przenoszących (z osobna) zginania i skręcania, oraz wypełniacza pracującego jedynie na ścinanie, a więc zabezpieczającego współpracę poszczególnych warstw. Odpowiedni przekrój zasługiwałby na nazwę przekroju wielopunktowego: będziemy jednak stosowali tu bardziej pogładową nazwę «przekrój warstwowy».

Pracę przekrojów warstwowych analizuje się z dwóch różnych powodów. Po pierwsze, w technice bywają stosowane konstrukcje powierzchniowe warstwowe, szczególnie trójwarstwowe (sandwiczowe), złożone z dwóch warstw skrajnych «roboczych» i jednej warstwy wypełniacza (rys. 5). Konstrukcje takie zapewniają lekkość, o ile tylko wypełniacz jest dostatecznie lekki, bowiem eliminują z konstrukcji pełnościennej ciężkie, a jednocześnie słabo pracujące warstwy wewnętrzne. Po drugie, analiza konstrukcji warstwowych jest prostsza od konstrukcji pełnościennych, bowiem całkowanie jest tu zastąpione przez sumowanie; analiza taka może więc stanowić dogodny narzędzie uzyskiwania równań aproksymacyjnych dla przekroju pełnościennego.

W tym ostatnim przypadku, gdy liczba dwóch warstw roboczych (przekrój sandwiczowy) jest zbyt mała, możemy uzyskiwać dokładniejsze aproksymacje przez zwiększenie liczby warstw. Problem doboru grubości i położenia poszczególnych warstw odpowiada w pewnym stopniu problemowi doboru zastępczych przekrojów wielopunktowych dla prętów, sformułowanemu przez J. ORKISZA [500]. Bardziej szczegółowo rozważali przekroje wielowarstwowe P. G. HODGE [249, 258] oraz JU. W. NIEMIROWSKI [1096].

W obecnym punkcie zajmiemy się jedynie przekrojami trójwarstwowymi (sandwiczowymi), dla których określenie nośności granicznej jest szczególnie proste. Uplastycznienie już jednej z warstw roboczych powoduje wyczerpanie nośności przekroju, bowiem jest

możliwy ruch obrotowy «wokół» drugiej warstwy, która zgodnie z założeniem nie wykazuje odporności na zginanie.

Oznaczmy grubość (jednakową) warstw nośnych przez h , odległość między średnimi powierzchniami tych warstw przez $2H$; zakładamy, że wymiar h jest znacznie mniejszy od H . Jeżeli w jednej z tych warstw $z = H$ naprężenia główne wyniosą σ_1^+ i σ_2^+ , a w drugiej warstwie $z = -H$ wyniosą σ_1^- i σ_2^- , to jednostkowe siły podłużne i momenty zginające będą równe

$$(25.20) \quad \begin{aligned} N_1 &= (\sigma_1^+ + \sigma_1^-) h, & N_2 &= (\sigma_2^+ + \sigma_2^-) h, \\ M_1 &= (\sigma_1^+ - \sigma_1^-) H h, & M_2 &= (\sigma_2^+ - \sigma_2^-) H h. \end{aligned}$$

Odwracając ten układ równań możemy wyrazić naprężenia przez uogólnione siły wewnętrzne następująco:

$$(25.21) \quad \begin{aligned} \sigma_1^+ &= (n_1 + m_1) \sigma_0, & \sigma_2^+ &= (n_2 + m_2) \sigma_0, \\ \sigma_1^- &= (n_1 - m_1) \sigma_0, & \sigma_2^- &= (n_2 - m_2) \sigma_0, \end{aligned}$$

gdzie n_j i m_j są wielkościami bezwymiarowymi, wprowadzonymi dla przekroju sandwiczowego następująco:

$$(25.22) \quad n_j = \frac{N_j}{N} = \frac{N_j}{2\sigma_0 h}, \quad m_j = \frac{M_j}{M} = \frac{M_j}{2\sigma_0 H h}, \quad j = 1, 2.$$

Z porównania wzorów (25.22) ze wzorami (24.4) i (24.29) dla konstrukcji pełnościenniej wynika, że o ile konstrukcja sandwiczowa ma stanowić aproksymację pełnościenniej, to dla zachowania równych wartości nośności granicznej przy czystym rozciąganiu i czystym zginaniu muszą być spełnione warunki

$$(25.23) \quad 2(\sigma_0 H h)_s = \sigma_0 H^2, \quad 2(\sigma_0 h)_s = 2\sigma_0 H,$$

gdzie wskaźnikami s oznaczono zastępczą konstrukcję sandwiczową. Stąd

$$(25.24) \quad \sigma_{0s} h_s = \sigma_0 H, \quad H_s = \frac{H}{2};$$

celowo dopuszczono tu możliwość innej granicy plastyczności konstrukcji sandwiczowej, aby mógł być spełniony warunek $h_s \ll H_s$, bowiem przy równych wartościach σ_0 otrzymalibyśmy $h_s = 2H_s$, co stoi w sprzeczności z podstawowym założeniem konstrukcji sandwiczowej.

25.2.2. Warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego. Nośność graniczna przekroju zostanie wyczerpana, gdy wystąpi uplastycznienie bądź w warstwie $z = H$, bądź w warstwie $z = -H$. Podstawiając naprężenia σ_1^+ i σ_2^+ (25.21) do warunku HMH dla płaskiego stanu naprężenia otrzymujemy równanie jednego z płatów powierzchni nośności granicznej przekroju:

$$(25.25) \quad (n_1 + m_1)^2 - (n_1 + m_1)(n_2 + m_2) + (n_2 + m_2)^2 = 1.$$

Podobnie otrzymujemy równanie drugiego płata powierzchni granicznej rozważając uplastycznienie warstwy $z = -H$:

$$(25.26) \quad (n_1 - m_1)^2 - (n_1 - m_1)(n_2 - m_2) + (n_2 - m_2)^2 = 1.$$

Uogólnione odkształcenia względnie prędkości uogólnionych odkształceń są przy tym określone w oparciu o stowarzyszone prawo fizykalne; dla płata powierzchni granicznej (25.25) otrzymujemy

$$(25.27) \quad \dot{\kappa}_1 = \frac{A}{H} (2n_1 + 2m_1 - n_2 - m_2), \quad \dot{\kappa}_2 = \frac{A}{H} (2n_2 + 2m_2 - n_1 - m_1),$$

$$\dot{\lambda}_1 = A(2n_1 + 2m_1 - n_2 - m_2), \quad \dot{\lambda}_2 = A(2n_2 + 2m_2 - n_1 - m_1).$$

Jak widać, zachodzi tu związek $H\dot{\kappa}_i = \dot{\lambda}_i$. Pojawienie się stałej H we wzorach (25.27) wynika z różniczkowania funkcji złożonej, mianowicie z mnożenia przez pochodną dm/dM (25.22); pozostałe stałe włączono do mnożnika A . Podobne związki można wyprowadzić również dla płata powierzchni granicznej (25.26).

Równania powierzchni nośności granicznej dla przekroju warstwowego dźwigara powierzchniowego zostały podane w ogólniejszej formie (którą omówimy w p. 26) przez JU. I. RABOTNOWA [1126] i W. I. ROZENBLUMA [1147]; szczegółową analizę zawierają prace A. SAWCZUKA i J. RYCHLEWSKIEGO [616] oraz A. SAWCZUKA i P. G. HODGE'A [617, 255]. Pewne całki ogólne dla uplastycznionych powłok walcowych podał A. RZANICYN [1140] opierając się na (25.25) i (25.26).

25.2.3. Warunek plastyczności Treski-Guesta. W przypadku posługiwania się kierunkami głównymi warunek plastyczności TG prowadzi do znacznych uproszczeń, mianowicie do liniowych równań poszczególnych płatów powierzchni nośności granicznej; płaty te są hiperpłaszczyznami. Podstawiając kolejno σ_1^+ i σ_1^- oraz σ_2^+ i σ_2^- , (25.21) do równań (25.10), otrzymujemy 12 równań hiperpłaszczyzn, mianowicie

$$(25.28) \quad \begin{array}{ll} n_1 + m_1 = 1, & n_1 - m_1 = 1, \\ n_2 + m_2 = 1, & n_2 - m_2 = 1, \\ n_2 + m_2 - n_1 - m_1 = 1, & n_2 - m_2 - n_1 + m_1 = 1, \\ -n_1 - m_1 = 1, & -n_1 + m_1 = 1, \\ -n_2 - m_2 = 1, & -n_2 + m_2 = 1, \\ -n_2 - m_2 + n_1 + m_1 = 1, & -n_2 + m_2 + n_1 - m_1 = 1. \end{array}$$

Części tych hiperpłaszczyzn, położone najbliżej początku układu współrzędnych, wyznaczają powierzchnię nośności granicznej.

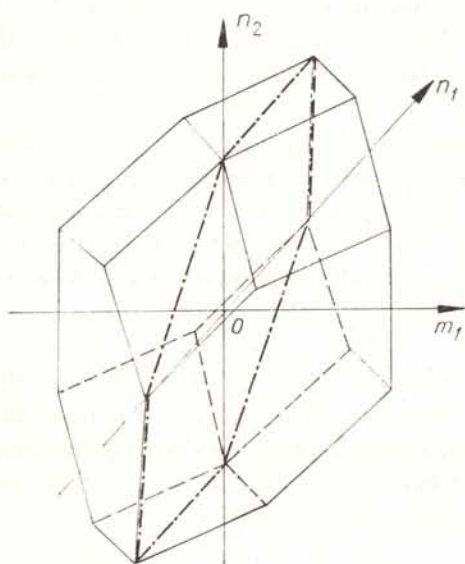
W rozpatrywanym przypadku konstrukcji sandwichowej określenie rozkładu naprężeń w stanie granicznym jest problemem wewnętrznym statycznie wyznaczalnym i dlatego postać równań określających powierzchnię graniczną (25.28) nie zależy od przyjętego prawa fizykalnego (odmiennie niż w przypadku konstrukcji pełnościennej). Od przyjęcia takiego prawa zależą natomiast prędkości uogólnionych odkształceń. Przy przyjęciu prawa stowarzyszonego można je określić wprost z (25.28) przez obliczenie odpowiednich pochodnych cząstkowych, natomiast przy przyjęciu podobieństwa dewiatorów należy rozwiązać odpowiedni układ równań typu (25.11) przy przyjęciu $z = +H$ i $z = -H$.

Układ równań (25.28) podali P. G. HODGE [242] i E. T. ONAT [493]. Na rysunku 135 pokazano trójwymiarowy przekrój hiperpowierzchni (25.28) hiperpłaszczyzną $m_2 = 0$; przypadek taki występuje z reguły przy analizie powłok osiowo-symetrycznych, jeżeli przyjmiemy $m_2 = m_\theta$.

Zasadniczą zaletą równań (25.28) jest ich liniowość. Równania liniowe ogólniejszego typu

$$(25.29) \quad a_1 m_1 + a_2 m_2 + b_1 n_1 + b_2 n_2 = 1$$

mogą określać oszacowania dolne lub górne innych, bardziej skomplikowanych powierzchni nośności granicznej. Problem ten badał P. G. HODGE [256] w odniesieniu do warunków plastyczności HMH i TG dla powłoki pełnościennej. Linearyzację warunku plastyczności



Rys. 135. Powierzchnia nośności granicznej dla przekroju sandwiczowego w oparciu o warunek plastyczności Treski-Guesta

HMH oraz warunku Hilla dla ciał ortotropowych stosowali W. OLSZAK i A. SAWCZUK [480] do określania nośności granicznej powłok walcowych. Szczegółowe porównanie równań powierzchni nośności granicznej przekroju powłok pełnościennych i sandwiczowych, wyprowadzonych w oparciu o warunki plastyczności HMH i TG podaje praca A. SAWCZUKA i P. G. HODGE'A [617].

Równania liniowe (25.28) o najprostszej budowie w teorii nośności granicznej dźwigarów powierzchniowych służyły do obliczania nośności oraz ugięć konstrukcji różnego typu. Wymienimy tu prace poświęcone obliczaniu dużych ugięć sztywno-plastycznych płyt (JU. R. LEPIK [1043]) i powłok (JU. R. LEPIK [347, 1042], M. DUSZEK [117]). Niesymetryczne powłoki sandwiczowe rozpatrywał T. NAKAMURA [458].

Większą liczbę warstw oraz jednocześnie uźebrowania rozważał JU. W. NIEMIROWSKI [1096, 1097]. Obliczaniu nośności granicznej powłok przy równaniu powierzchni granicznej (25.29) w przypadku zmiennej temperatury poświęcona jest praca W. N. STELMASZUKA [1172].

25.3. Zakres sprężysto-plastyczny i wzmocnienie plastyczne. Przy przyjęciu odkształceniowej teorii plastyczności i warunku plastyczności HMH związki (25.6) dają się przy założeniu nieściśliwości materiału bardzo łatwo uogólnić na przypadek dowolnego wzmoc-

nienia plastycznego; odpowiednie wzory podał również A. A. ILIUSZIN [944, 949]. Przyjmując definicję intensywności odkształceń (8.35) otrzymujemy dla płaskiego stanu naprężenia w materiale nieściśliwym wzór (8.38), czyli

$$(25.30) \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} [(\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2) z^2 + (2\kappa_1 \lambda_1 + 2\kappa_2 \lambda_2 + \kappa_1 \lambda_2 + \kappa_2 \lambda_1) z + (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)]^{1/2}.$$

Przyjmując dalej przy założeniu obciążenia prostego hipotezę jednolitej krzywej $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, możemy określić funkcję φ w równaniach Hencky'ego-Iliuszina wzorem (19.1). Związki między uogólnionymi siłami wewnętrznymi a uogólnionymi odkształceniami są więc nadal określone układem (25.6) z podstawieniem wzorów (25.7), w których przez φ należy teraz rozumieć (19.1) z podstawieniem (25.30). Oczywiście teoria ta nie obejmuje procesów nieprostych i procesów lokalnie biernych, które muszą być rozpatrywane oddzielnie.

Równania (25.6) były w tym przypadku stosowane do określania ugięć płyt kołowych jednocześnie zginanych i rozciąganych (I. OHASHI, S. MURAKAMI [471, 1105]), dużych ugięć płyt kołowych (Z. WASZCZYSZYN [731]) i ugięć powłok (Z. WASZCZYSZYN [732]). W. I. KOROLEW [998] zastosował metodę małego parametru, traktując wzmocnienie plastyczne jako małe; zerowe przybliżenie stanowią wtedy wzory Iliuszina dla materiału idealnie plastycznego. P. V. MARÇAL i W. R. PILGRIM [383] zaproponowali posługiwanie się «lokalnymi sztywnościami» $\partial Q_i / \partial q_j$, gdzie Q_i oznacza dowolną uogólnioną siłę wewnętrzną, q_j – dowolne uogólnione odkształcenie. Bardziej szczegółowo omawia problematykę ugięć sprężysto-plastycznych płyt i powłok praca przeglądowa Ł. M. KACZANOWA [978].

Hipotezę Treski-Guesta do obliczania ugięć powłok obrotowo-symetrycznych przy wzmocnieniu plastycznym zastosował E. T. ONAT [496]; w przypadku wzmocnienia izotropowego wyprowadził on równanie różniczkowo-całkowe, w przypadku wzmocnienia kinematycznego — nieliniowe równania różniczkowe cząstkowe. Problem niestaćności przemieszczeń w tym przypadku badali B. J. THORN, J. S. KAO i S. L. LEE [701]. B. PAUL i P. G. HODGE [521] oszacowali wpływ ugięć na nośność graniczną powłoki walcowej, poddanej hydrostatycznemu ściskaniu; rozpatrzono powłokę sandwichową przy warunku plastyczności Treski-Guesta.

Wiele uwagi poświęcono wpływowi równomiernego lub nierównomiernego rozkładu temperatury na sprężysto-plastyczne ugięcia płyt i powłok. I. Z. PALLEJ [1107] rozważał wpływ historii obciążania na rozkład naprężeń w powłoce sandwichowej przy uwzględnieniu zmian temperatury. Autorami dalszych prac są JU. R. LEPIK [1041], W. W. PISKUN [1122], A. I. BORISJUK [819], W. I. MACHNIENKO i E. A. WIELIKOIWANIENKO [1068], oraz D. A. GOCHFELD, P. I. JERMAKOW i I. M. PŁAGOW [870].

Problemmowi plastycznego przystosowania się do obciążeń zmiennych poświęcone są prace J. A. KÖNIGA [324], A. SAWCZUKA [626, 631] oraz D. A. GOCHFELDA [871] (zmienna temperatura).

26. Ogólniejsze obciążenia złożone

26.1. Uwagi ogólne. Jak już wspomnieliśmy, w przekroju dźwigara powierzchniowego przy uwzględnieniu ścinania w wyniku sił poprzecznych występuje w przypadku ogólnym stan, który można sklasyfikować jako P_5/S_{10} (jeżeli nie bierzemy pod uwagę czynników ubocznych, np. stałej lub zmiennej wzdłuż grubości temperatury). Większość rozważań ogólnych przyjmuje jednak pewne uproszczenia: zazwyczaj pomija się wpływ sił poprzecznych, a ponadto zakłada równość momentów skręcających $M_{\xi\eta} = M_{\eta\xi}$ i sił stycznych $N_{\xi\eta} = N_{\eta\xi}$. Równości te w przypadku przekroju płyty dają się wykazać, natomiast w przypadku przekroju powłoki błąd przybliżenia jest z reguły nieznaczny (za wyjątkiem powłok silnie zakrzywionych). Przy powyższych uproszczeniach klasyfikacja zmienia się na P_3/S_6 .

Odpowiednie uogólnienie rozważań opartych na warunku plastyczności HMH nie przedstawia większych trudności i zostało podane przez A. A. ILIUSZINA już w latach czterdziestych [944, 945, 949], natomiast przy warunku TG komplikacje stają się zasadnicze. Równanie powierzchni granicznej przy warunku TG daje się tu stosunkowo prosto wyprowadzić jedynie dla powłok sandwichowych. Zaproponowano również pewne aproksymacje równań powierzchni nośności granicznej. Ogólne rozważania dotyczące rzutów i przecięć powierzchni granicznej w przestrzeniach wielowymiarowych zawiera praca A. SAWCZUKA i J. RYCHLEWSKIEGO [616].

26.2. Nośność graniczna przekroju pełnościennego przy warunku plastyczności HMH

26.2.1. Ścisłe określenie powierzchni nośności granicznej w przypadku P_3/S_6 . Przyjmując dowolny lokalnie ortogonalny układ współrzędnych ξ, η w powierzchni środkowej powłoki, możemy rozkład odkształceń w oparciu o hipotezę Love'a-Kirchhoffa zapisać następująco:

$$(26.1) \quad \varepsilon_{ij} = \kappa_{ij}z + \lambda_{ij}, \quad i, j = \xi, \eta,$$

gdzie κ_{ij} są składowymi płaskiego tensora przyrostów krzywizn powierzchni środkowej, λ_{ij} — składowymi płaskiego tensora odkształceń powierzchni środkowej. Zakładając nieściśliwość materiału możemy odkształcenie ε_z określić wzorem

$$(26.2) \quad \varepsilon_z = -\kappa_{zz}z - \lambda_{zz},$$

gdzie przyjęto konwencję sumacyjną «płaską», mianowicie kolejno $\alpha = \xi$ i $\alpha = \eta$. Prawo podobieństwa dewiatorów (Hencky'ego-Iliuszina lub Levy'ego-Misesa przy traktowaniu wielkości κ i λ jako prędkości) prowadzi do związków

$$(26.3) \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{\varphi} (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_z) = \frac{1}{\varphi} [(\kappa_{ij} + \delta_{ij} \kappa_{zz})z + (\lambda_{ij} + \delta_{ij} \lambda_{zz})].$$

Warunek plastyczności HMH można dla płaskiego stanu naprężenia zapisać przy użyciu konwencji sumacyjnej następująco:

$$(26.4) \quad 3\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{zz}\sigma_{\beta\beta} = 2\sigma_0^2.$$

Podstawienie (26.3) i wykonanie kilku przekształceń zezwala na obliczenie funkcji φ :

$$(26.5) \quad \varphi = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{\beta\beta})}.$$

Podstawiając (26.1) możemy wyrazić φ jako funkcję zmiennej z ; wynik zapiszemy w postaci zaproponowanej przez Iliuszina, mianowicie

$$(26.6) \quad \varphi = \varphi(z) = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} \sqrt{P_\lambda + 2P_{\kappa\lambda}z + P_\kappa z^2},$$

gdzie P_λ , $P_{\kappa\lambda}$ i P_κ są następującymi formami kwadratowymi z uwagi na κ_{ij} i λ_{ij} :

$$P_\lambda = \frac{1}{2} (\lambda_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\alpha} \lambda_{\beta\beta}) = \lambda_{\xi\xi}^2 + \lambda_{\xi\xi} \lambda_{\eta\eta} + \lambda_{\eta\eta}^2 + \lambda_{\xi\eta}^2,$$

$$(28.7) \quad P_\kappa = \frac{1}{2} (\kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\alpha} \kappa_{\beta\beta}) = \kappa_{\xi\xi}^2 + \kappa_{\xi\xi} \kappa_{\eta\eta} + \kappa_{\eta\eta}^2 + \kappa_{\xi\eta}^2,$$

$$P_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2} (\lambda_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\alpha} \kappa_{\beta\beta}) = \lambda_{\xi\xi} \kappa_{\xi\xi} + \lambda_{\eta\eta} \kappa_{\eta\eta} + \frac{1}{2} \lambda_{\xi\xi} \kappa_{\eta\eta} + \frac{1}{2} \lambda_{\eta\eta} \kappa_{\xi\xi} + \lambda_{\xi\eta} \kappa_{\xi\eta}.$$

Wzór (26.6) stanowi bezpośrednie uogólnienie wzoru (25.4), słusznego tylko dla kierunków głównych. Przez $\lambda_{\xi\eta}$ i $\kappa_{\xi\eta}$ rozumiemy tu wielkości tensorowe; odpowiednimi oznaczeniami «inżynierskimi» są tu $\lambda_{\xi\eta}/2$ i $\kappa_{\xi\eta}/2$; oznaczenia takie stosuje np. G. S. SZAPIRO [644]. Ostatecznie naprężenia są następującymi funkcjami zmiennej z :

$$(26.8) \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{(\kappa_{ij} + \delta_{ij} \kappa_{\alpha\alpha})z + (\lambda_{ij} + \delta_{ij} \lambda_{\alpha\alpha})}{\sqrt{P_\lambda + 2P_{\kappa\lambda}z + P_\kappa z^2}}, \quad i, j = \xi, \eta.$$

Rozkład naprężeń (26.8) spełnia warunki brzegowe dla $z = \pm H$ i prowadzi do wyników ścisłych, o ile spełnione są również warunki równowagi wewnętrznej; w przeciwnym razie otrzymujemy oszacowanie górne powierzchni nośności granicznej.

Całkując funkcje (26.8) względem zmiennej z możemy określić uogólnione siły wewnętrzne w funkcji uogólnionych odkształceń κ_{ij} i λ_{ij} . Wynik zapiszemy w postaci, analogicznej do (25.6), mianowicie

$$(26.9) \quad \begin{aligned} N_{ij} &= (\kappa_{ij} + \delta_{ij} \kappa_{\alpha\alpha}) J_1 + (\lambda_{ij} + \delta_{ij} \lambda_{\alpha\alpha}) J_0, \\ M_{ij} &= (\kappa_{ij} + \delta_{ij} \kappa_{\alpha\alpha}) J_2 + (\lambda_{ij} + \delta_{ij} \lambda_{\alpha\alpha}) J_1, \end{aligned}$$

gdzie J_k oznaczają całki (25.7) z podstawieniem (26.6). Równanie (26.9) określa powierzchnię graniczną w przestrzeni 6-wymiarowej w funkcji pięciu parametrów, którymi są stosunki uogólnionych odkształceń (lub prędkości odkształceń). Wyniki całkowania zależą od wartości form kwadratowych (26.7); odpowiednią dyskusję przytacza A. A. ILIUSZIN [949].

Wzory (26.9) dadzą się teoretycznie odwrócić względem λ_{ij} i κ_{ij} (z dokładnością do stałej); ostatecznie otrzymujemy [616],

$$(26.10) \quad \begin{aligned} \lambda_{ij} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(N_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} N_{\alpha\alpha} \right) J_2 - \left(M_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} M_{\alpha\alpha} \right) J_1 \right], \\ \kappa_{ij} &= \frac{1}{\Delta} \left[- \left(N_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} N_{\alpha\alpha} \right) J_1 + \left(M_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} M_{\alpha\alpha} \right) J_0 \right], \end{aligned}$$

gdzie Δ oznacza wyznacznik główny układu,

$$(26.11) \quad \Delta = J_0 J_2 - J_1^2.$$

Wzory (26.10) nie są jednak efektywne, bowiem całki J_k są funkcjami κ_{ij} i λ_{ij} . Korzystając z (26.9) lub (26.10) możemy natomiast wyprowadzić następujące związki, łączące formy kwadratowe uogólnionych sił wewnętrznych i formy kwadratowe uogólnionych odkształceń:

$$(26.12) \quad \begin{aligned} P_N &= 3(J_0^2 P_\lambda + 2J_0 J_1 P_{\kappa\lambda} + J_1^2 P_\kappa), \\ P_{MN} &= 3[J_0 J_1 P_\lambda + (J_0 J_2 + J_1^2) P_{\kappa\lambda} + J_1 J_2 P_\kappa], \\ P_M &= 3(J_1^2 P_\lambda + 2J_1 J_2 P_{\kappa\lambda} + J_2^2 P_\kappa), \end{aligned}$$

gdzie formy P_N , P_{MN} i P_M zostały wprowadzone wzorami

$$(26.13) \quad \begin{aligned} P_N &= \frac{3}{2} N_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} N_{\alpha\alpha} N_{\beta\beta}, \\ P_{MN} &= \frac{3}{2} M_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} M_{\alpha\alpha} N_{\beta\beta}, \\ P_M &= \frac{3}{2} M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Wzory (26.12) mają zasadnicze znaczenie dla analizy powierzchni nośności granicznej, bowiem umożliwiają redukcję wymiarów przestrzeni. Istotnie, równania te można traktować jako równania parametryczne pewnej powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni P_N , P_{MN} , P_M przy parametrach np. P_λ/P_κ i $P_{\kappa\lambda}/P_\kappa$; całki J_k są bowiem jednorodnymi funkcjami form kwadratowych P_κ , P_λ i $P_{\kappa\lambda}$ stopnia $(-1/2)$, a więc funkcje (26.12) są jednorodne zerowego stopnia względem tych form. Fakt ten ułatwia wprowadzenie prostszych wzorów aproksymacyjnych.

26.2.2. Przypadki szczególne i aproksymacje. Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy przede wszystkim wielkości bezwymiarowe typu (24.4) i (24.27); odpowiednie wzory przybiorą tu postać

$$(26.14) \quad n_{ij} = \frac{N_{ij}}{2\sigma_0 H}, \quad m_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sigma_0 H^2}, \quad i, j = \xi, \eta.$$

Ponadto wprowadzimy formy kwadratowe P_n , P_{mn} i P_m , analogiczne do (26.13). Rozwijając efektywnie występujące w (26.13) sumy, otrzymujemy

$$(26.15) \quad \begin{aligned} P_n &= n_{\xi\xi}^2 - n_{\xi\xi} n_{\eta\eta} + n_{\eta\eta}^2 + 3n_{\xi\eta}^2, \\ P_{mn} &= m_{\xi\xi} n_{\xi\xi} - \frac{1}{2} m_{\xi\xi} n_{\eta\eta} - \frac{1}{2} m_{\eta\eta} n_{\xi\xi} + m_{\eta\eta} n_{\eta\eta} + 3m_{\xi\eta} n_{\xi\eta}, \\ P_m &= m_{\xi\xi}^2 - m_{\xi\xi} m_{\eta\eta} + m_{\eta\eta}^2 + 3m_{\xi\eta}^2. \end{aligned}$$

Równania powierzchni nośności granicznej można więc (teoretycznie) zapisać w formie uwikłanej

$$(26.16) \quad f(P_n, P_{mn}, P_m) = 0.$$

W. I. ROZENBLUM [1151] nawiązując do teorii powłok Łuriego-Nowożyłowa, uogólnił równania Iliuszina na przypadek powłok o znacznym krzywiznach, gdy tensory n_{ij} i m_{ij}

nie wykazują symetrii. Formy kwadratowe (26.15) należy wtedy zastąpić przez

$$(26.17) \quad \begin{aligned} P_n &= n_{\xi\xi}^2 - n_{\xi\xi} n_{\eta\eta} + n_{\eta\eta}^2 + \frac{3}{4} \left(n_{\xi\eta} + n_{\eta\xi} - \frac{H}{2R_1} m_{\xi\eta} - \frac{H}{2R_2} m_{\eta\xi} \right)^2, \\ P_{mn} &= m_{\xi\xi} n_{\xi\xi} - \frac{1}{2} m_{\xi\xi} n_{\eta\eta} - \frac{1}{2} m_{\eta\eta} n_{\xi\xi} + m_{\eta\eta} n_{\eta\eta} + \\ &\quad + \frac{3}{4} (m_{\xi\eta} + m_{\eta\xi}) \left(n_{\xi\eta} + n_{\eta\xi} - \frac{H}{2R_1} m_{\xi\eta} - \frac{H}{2R_2} m_{\eta\xi} \right), \\ P_m &= m_{\xi\xi}^2 - m_{\xi\xi} m_{\eta\eta} + m_{\eta\eta}^2 + \frac{3}{4} (m_{\xi\eta} + m_{\eta\xi})^2. \end{aligned}$$

Przez R_1 i R_2 oznaczono tu główne promienie krzywizny powłoki; zakłada się, że kierunki ξ i η pokrywają się z kierunkami głównymi tensora krzywizny powłoki. Dalsze uogólnienie, słuszne dla dowolnych kierunków ξ i η , podają prace J. RYCHLEWSKIEGO [589, 1154].

W ogólnym przypadku równania parametryczne powierzchni granicznej (26.12) nie dadzą się sprowadzić do postaci uwikłanej (26.16). W niektórych przypadkach szczególnych wyniki są jednak bardzo proste. Jeżeli $P_{\kappa\lambda} = P_\kappa = 0$, to $\varphi = \sqrt{3P_\lambda}/\sigma_0$, $J_1 = 0$, $J_0 = 2\sigma_0 H/\sqrt{3P_\lambda}$, $P_{MN} = P_M = 0$, natomiast $P_N = (2\sigma_0 H)^2$, czyli $P_n = 1$, zatem otrzymujemy równanie (24.6). Podobnie, jeżeli $P_{\kappa\lambda} = P_\lambda = 0$, to $P_{MN} = P_N = 0$, $P_m = 1$, więc otrzymujemy równanie (24.31).

Przypadek $P_{\kappa\lambda} = 0$ nazwał ILIUSZIN prostszym przypadkiem złożonym; niektóre przykłady takiego przypadku omówiliśmy już w p. 25.1.1. Wtedy $J_1 = 0$, a więc także $P_{mn} = 0$. Formy kwadratowe P_m i P_n są przy tym związane równaniami parametrycznymi [949]:

$$(26.18) \quad \begin{aligned} P_n &= \frac{\mu^2}{1-\mu^2} \ln^2 \frac{1+\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}, \\ P_m &= \left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2} \ln \frac{1+\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} - \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \right)^2, \end{aligned}$$

gdzie μ jest parametrem krzywej. Równanie (26.18) daje się sprowadzić do postaci uwikłanej $f(P_n, P_m) = 0$ (przez obliczenie z osobna μ i z osobna logarytmu, a następnie porównanie tych wielkości), jednakże postać końcowa jest bardzo złożona. ILIUSZIN [949] podał tablicę funkcji $P_m = f(P_n)$ i zaproponował prostą aproksymację

$$(26.19) \quad P_m + P_n = 1,$$

stwierdzając, że błędy wzoru (26.19) nie przekraczają 9%.

Inny stosunkowo prosty przypadek zachodzi wówczas, gdy

$$(26.20) \quad P_{mn}^2 = P_m P_n;$$

ILIUSZIN stwierdził, że jest on możliwy tylko wówczas, gdy

$$(26.21) \quad \frac{n_{\xi\xi}}{m_{\xi\xi}} = \frac{n_{\eta\eta}}{m_{\eta\eta}} = \frac{n_{\xi\eta}}{m_{\xi\eta}}.$$

Równanie powierzchni granicznej (a raczej krzywej granicznej) można wtedy zapisać w postaci

$$(26.22) \quad P_m = (1 - P_n)^2, \quad |P_{mn}| = (1 - P_n) \sqrt{P_n}.$$

Ogólny przypadek złożony podzielił ILIUSZIN na dwa podprzypadki. Badając funkcję zaawansowania odkształceń plastycznych φ (26.6) stwierdzamy, że osiąga ona minimum w punkcie $z_0 = -P_{\kappa\lambda}/P_{\kappa}$; jeżeli $|z_0| < H$, to mamy do czynienia z przypadkiem przewagi zginania, jeżeli natomiast $|z_0| > H$, to mówimy o przewadze sił błonowych. Dla przypadku przewagi zginania ILIUSZIN zaproponował aproksymację liniową

$$(26.23) \quad P_m + P_n + \frac{1}{\sqrt{3}} |P_{mn}| = 1,$$

stanowiącą uogólnienie wzoru (26.19).

Propozycja dokładniejszej aproksymacji powierzchni granicznej (26.12), należy do G. W. IWANOWA [926]. Spośród powierzchni o równaniu

$$(26.24) \quad P_n + \frac{1}{2} P_m - \frac{\alpha(P_m P_n - P_{mn}^2)}{P_n + \beta P_m} + \frac{1}{2} \sqrt{P_m^2 + 4P_{mn}^2} = 1$$

proponuje on wybrać powierzchnię o parametrach $\alpha = 0,25$, $\beta = 0,48$; wyboru dokonano na drodze przeliczeń numerycznych na maszynie cyfrowej. Inną aproksymację otrzymali J. SCHROEDER i A. N. SHERBOURNE [638].

26.2.3. Wpływ sił poprzecznych. W przypadku dźwigarów powierzchniowych wpływ sił poprzecznych może być bardziej istotny niż przy analizie belek. Istotnie, działanie siły skupionej wywołuje tu już siły poprzeczne nieograniczenie wielkie, więc także przy obciążeniu rozłożonym na pewnej powierzchni skończonej wartości sił poprzecznych mogą być znaczne, a przy działaniu dynamicznym mogą nawet zmierzać do nieskończoności (G. S. SZAPIRO [644]).

Problem wpływu sił poprzecznych na nośność graniczną płyty kołowej poruszył po raz pierwszy J. F. BROTCHE w r. 1960 (por. [622]), nawiązując do warunku plastyczności Treski-Guesta. Ogólne ujęcie problemu należy do G. S. SZAPIRO [644]; zastosował on podejście kinematyczne, przyjmując rozkład prędkości odkształceń typu (26.1) oraz dodatkowo $\gamma_{\xi z} = \text{const}$ i $\gamma_{\eta z} = \text{const}$. Rozpatrywany przypadek można sklasyfikować jako P_5/S_8 . Stosując warunek plastyczności HMM otrzymuje się wzory typu (26.9) na N_{ij} i M_{ij} , a ponadto siły poprzeczne są określone wzorami

$$(26.25) \quad Q_j = \varepsilon_{jz} J_0, \quad j = \xi, \eta.$$

Całka J_0 jest tu określona wzorem ogólnym (25.7), ponadto $\varepsilon_{\xi z} = \gamma_{\xi z}/2$, $\varepsilon_{\eta z} = \gamma_{\eta z}/2$. Rozbudowaniu ulega przy tym forma kwadratowa P_λ , mianowicie zamiast (26.7) należy podstawić

$$(26.26) \quad P_\lambda = \lambda_{\xi\xi}^2 + \lambda_{\xi\xi} \lambda_{\eta\eta} + \lambda_{\eta\eta}^2 + \lambda_{\xi\eta}^2 + \varepsilon_{\xi z}^2 + \varepsilon_{\eta z}^2;$$

formy kwadratowe P_κ i $P_{\kappa\lambda}$ (26.7) pozostają bez zmiany.

Równania (26.9) i (26.25) wyrażają osiem uogólnionych sił wewnętrznych w funkcji siedmiu parametrów (stosunków λ_{ij} , κ_{ij} oraz ε_{jz}), określają więc powierzchnię nośności granicznej przekroju w formie parametrycznej. Jest to oszacowanie górne nośności; naprężenia styczne $\tau_{\xi z}$ i $\tau_{\eta z}$ nie spełniają z reguły ani warunku brzegowego $\tau = 0$ dla $z = \pm H$, ani warunków równowagi wewnętrznej. Ten sam wynik otrzymał SZAPIRO [644] na drodze poszukiwania kresu górnego pól statycznie częściowo dopuszczalnych w ujęciu varia-

cyjnym; jest to więc znowu oszacowanie górne, a nie dolne, jak podaje autor. SZAPIRO podał również pewne metody aproksymacji równania powierzchni nośności granicznej. Wpływ ścinania w przypadku ogólnym badali również G. LANDGRAF [334] oraz J. SCHROEDER i A. N. SHERBOURNE [638, 639]; ci ostatni autorzy dopuszczali również możliwość występowania naprężeń σ_z .

Nieco więcej uwagi poświęcono wpływowi sił poprzecznych na nośność graniczną płyt, w szczególności kołowo-symetrycznych. A. SAWCZUK i M. DUSZEK [622] określili w tym przypadku całki J_k w sposób efektywny, zaproponowali linearyzację równania powierzchni granicznej i rozwiązali kilka przykładów. Możliwe mechanizmy zniszczenia takich płyt przy uwzględnieniu sił poprzecznych rozważał szczegółowo A. OSCHATZ [509]. Wpływ sił poprzecznych na początek uplastycznienia płyty badał A. J. MORRIS [427].

26.3. Nośność graniczna przekroju warstwowego

26.3.1. Warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego. Jak już wspomnieliśmy, analiza pracy przekrojów warstwowych może być bądź związana z realną konstrukcją, bądź też może służyć jako narzędzie aproksymacji przekrojów pełnościennych. Obecnie omówimy powierzchnie nośności granicznej przekrojów trójwarstwowych (sandwiczowych) w ogólnym złożonym przypadku obciążenia.

Uogólniając wzory (25.19) na przypadek występowania naprężeń stycznich i stosując zapis wskaźnikowy możemy napisać

$$(26.27) \quad N_{ij} = (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) h, \quad M_{ij} = (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) Hh, \quad i, j = \xi, \eta.$$

Rozwiązując ten układ względem naprężeń i wprowadzając wielkości bezwymiarowe wzorami typu (25.21) otrzymujemy

$$(26.28) \quad \sigma_{ij}^+ = (n_{ij} + m_{ij}) \sigma_0, \quad \sigma_{ij}^- = (n_{ij} - m_{ij}) \sigma_0.$$

Wyczerpanie nośności przekroju przez uplastycznienie warstwy $z = +H$ nastąpi, gdy naprężenia σ_{ij}^+ spełnią warunek plastyczności (26.4):

$$(26.29) \quad 3(n_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta})(n_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta}) - (n_{\alpha\alpha} + m_{\alpha\alpha})(n_{\beta\beta} + m_{\beta\beta}) = 2,$$

czyli wobec definicji form kwadratowych (26.13) i (26.15)

$$(26.30) \quad P_m + 2|P_{mn}| + P_n = 1.$$

Przy rozpatrywaniu uplastycznienia warstwy $z = -H$ zmienia się tylko znak przy P_{mn} , co już uwzględniono w zapisie (26.30) przez wprowadzenie znaku wartości bezwzględnej. Wobec większej wartości współczynnika przy P_{mn} we wzorze (26.30) niż we wzorze aproksymacyjnym Iliuszina (26.23) dla przekroju pełnościennego stwierdzamy, że powierzchnia (26.30) leży wewnątrz powierzchni (26.23).

Równanie (26.29) albo (26.30) podał JU. N. RABOTNOW [1126]; bardziej szczegółową analizę zawiera praca A. SAWCZUKA i J. RYCHLEWSKIEGO [616]. M. I. JERCHOW [902] proponuje stosowanie równania (26.30) jako przybliżonego (z błędem na korzyść bezpieczeństwa) dla przekroju powłoki pełnościennej.

26.3.2. Warunek plastyczności Treski-Guesta. W warstwach nośnych przekroju sandwiczowego panuje płaski stan naprężenia, więc uplastycznienie każdej z warstw następuje przy spełnieniu jednego z trzech warunków, analogicznych do (24.9). Powierzchnia

nośności granicznej przekroju jest więc określona ogółem sześcioma równaniami. Podstawiając np. (26.28) do pierwszej formy warunku uplastycznienia warstwy $z = +H$,

$$(26.31) \quad \sigma_{\xi\xi}^+ \sigma_0 + \sigma_{\eta\eta}^+ \sigma_0 - \sigma_{\xi\xi}^+ \sigma_{\eta\eta}^+ + (\sigma_{\xi\eta}^+)^2 - \sigma_0^2 = 0,$$

otrzymujemy

$$(26.32) \quad n_{\xi\xi} + m_{\xi\xi} + n_{\eta\eta} + m_{\eta\eta} - (n_{\xi\xi} + m_{\xi\xi})(n_{\eta\eta} + m_{\eta\eta}) + (n_{\xi\eta} + m_{\xi\eta})^2 = 1.$$

Ostatecznie komplet równań powierzchni granicznej można zapisać w postaci

$$(26.33) \quad \begin{aligned} n_{\xi\xi} \pm m_{\xi\xi} + n_{\eta\eta} \pm m_{\eta\eta} - (n_{\xi\xi} \pm m_{\xi\xi})(n_{\eta\eta} \pm m_{\eta\eta}) + (n_{\xi\eta} \pm m_{\xi\eta})^2 &= 1, \\ -n_{\xi\xi} \mp m_{\xi\xi} - n_{\eta\eta} \mp m_{\eta\eta} - (n_{\xi\xi} \pm m_{\xi\xi})(n_{\eta\eta} \pm m_{\eta\eta}) + (n_{\xi\eta} \pm m_{\xi\eta})^2 &= 1, \\ (n_{\xi\xi} \pm m_{\xi\xi})^2 + (n_{\eta\eta} \pm m_{\eta\eta})^2 - 2(n_{\xi\xi} \pm m_{\xi\xi})(n_{\eta\eta} \pm m_{\eta\eta}) + 4(n_{\xi\eta} \pm m_{\xi\eta})^2 &= 1, \end{aligned}$$

przy czym górne znaki odnoszą się do uplastycznienia warstwy $z = +H$, dolne do uplastycznienia warstwy $z = -H$.

Równania (27.33) są niewątpliwie bardziej skomplikowane od (26.29) albo (26.30) i stosowanie hipotezy Treski-Guesta w rozpatrywanym przypadku ogólnym wydaje się niecelowe.

Przy przyjęciu warunku plastyczności największego naprężenia normalnego pozostają cztery pierwsze równania układu (26.33) — dwóch ostatnich równań należy po prostu nie brać pod uwagę.

26.4. Oszacowania i aproksymacje. Wobec złożonej budowy wzorów w przypadku ogólnym wiele uwagi poświęcono wprowadzeniu wzorów aproksymacyjnych bądź jedynie upraszczających zapis, bądź też linearyzujących odnośne równania (zastąpienie hiperpowierzchni przez pewne płaty hiperpłaszczyzn).

Jedna z ogólnych metod polega na pewnym oddzieleniu wpływu sił błonowych i momentów. W przypadku warunku plastyczności HMH poszczególne uogólnione siły wewnętrzne występowały jedynie za pośrednictwem form kwadratowych P_n , P_m i P_{mn} (26.15). W przybliżeniu zakłada się czasem, iż równanie powierzchni nośności granicznej przekroju można zapisać przy użyciu tylko dwóch wielkości, z których pierwsza zależy tylko od sił błonowych, a druga tylko od momentów; w przypadku warunku HMH podejście takie odpowiadałoby pominięciu wpływu wielkości P_{mn} . Wielkościami tymi są m i n zdefiniowane wzorami (24.5) i (24.30), zależnymi jedynie od przyjętej formy warunku plastyczności. Wypada tu zaznaczyć, że definicje (24.5) i (24.30) nie są jednoznaczne; stają się one jednoznaczne dopiero po dodatkowym przyjęciu, iż funkcja f określa stosunek σ_{red}/σ_0 (a nie np. kwadrat tego stosunku). Będziemy się więc posługiwali tak sprecyzowanymi definicjami. W przypadku hipotezy HMH mamy oczywiście $m \equiv \sqrt{P_m}$, $n \equiv \sqrt{P_n}$ [choć w przypadku powłok o znacznej krzywiznie, wzory (26.17), występują już pewne różnice]. W ogólnym przypadku metoda oddzielenia wpływu sił błonowych i momentów polega na aproksymacji równania powierzchni nośności granicznej równaniem uproszczonym

$$(26.34) \quad \varphi(m, n) = 1.$$

Najprostsze przyjęcie polega tu na oddzielnym ograniczeniu obu wielkości, czyli zastąpieniu krzywej w płaszczyźnie m, n dwoma odcinkami prostych

$$(26.35) \quad m = 1, n = 1.$$

Podejście takie zaproponował P. G. HODGE [249, 252, 253], nazywając odpowiednią powierzchnię graniczną powierzchnią ograniczonego współdziałania. Otrzymujemy wtedy niewątpliwe oszacowanie górne z błędem przez nadmiar. Pewne oszacowanie dolne zaproponował S. QU [570, 571] w formie

$$(26.36) \quad n^2 + m = 1;$$

w odniesieniu do warunku plastyczności Treski-Guesta propozycja (26.36) jest zbliżona do aproksymacji T. NAKAMURY (25.18), jednak obejmuje więcej kombinacji od określonych wzorami (25.18), np. $n_1^2 + m_2 = 1$. W. I. ROZENBLUM [1147, 1148] stosuje aproksymację, nazwaną w przypadku hipotezy Treski-Guesta «półliniową»,

$$(26.37) \quad n^2 + m^2 = 1,$$

zawartą między (26.35) i (26.36). Ponadto dla hipotezy HMH zaproponowano w pracy [1147] oszacowanie dolne

$$(26.38) \quad n + m = 1, \quad \text{czyli} \quad P_n + P_m + 2\sqrt{P_m P_n} = 1.$$

M. I. JERCHOW [903, 907] proponuje aproksymację (26.37) w przypadku hipotezy HMH; oznacza to rozszerzenie zakresu przybliżenia Iliuszina (26.19), zaproponowanego dla $P_{\kappa\lambda} = P_{mn} = 0$ na przypadek dowolnej wartości P_{mn} . M. CAPURSO [65] stosował równanie (26.37) przy warunku plastyczności HMH, czyli równanie (26.19), dla obliczania dużych ugięć płyt sztywno-plastycznych.

Równania (26.35) w odniesieniu do warunku Treski-Guesta stosował np. R. F. GABBASOW [841] do określenia dolnego oszacowania nośności granicznej powłok kulistych (kopuły); ponieważ jednak samo równanie (26.35) określa oszacowanie górne, więc kierunek ostatecznego błędu trudno w tym przypadku określić.

Inna metoda aproksymacji równań powierzchni nośności granicznej polega na odrębnym traktowaniu uplastycznienia w kierunku głównym 1, a odrębnym — w kierunku głównym 2. W. OLSZAK i A. SAWCZUK [487] wykazali, że takie ujęcie sprowadza się do zastosowania hipotezy największego naprężenia normalnego i stowarzyszonego prawa płynięcia.

Analizę równań różniczkowych powłoki w obszarze całkowicie uplastycznym przy ogólnej formie warunku plastyczności podaje M. I. REITMAN [578], który wyprowadził również odpowiednie równania charakterystyk.

26.5. Nośność graniczna przekroju w przypadku anizotropii. Płyty i powłoki wykonuje się dość często z materiałów anizotropowych, tak że opracowanie odpowiedniej teorii nośności granicznej ma duże znaczenie praktyczne.

Uogólnienie teorii Iliuszina na przypadek warunku plastyczności Hilla dla materiału ortotropowego podał M. SZ. MIKIEŁADZE [1071, 1072, 1074]. Przy przyjęciu jak zwykle płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie $\xi\eta$ zapiszemy warunek Hilla (16.3) w postaci

$$(26.39) \quad (G+H)\sigma_\xi^2 - 2H\sigma_\xi\sigma_\eta + (H+F)\sigma_\eta^2 + 2N\tau_{\xi\eta}^2 = 1$$

lub inaczej, przy oznaczeniach typu (16.4),

$$(26.40) \quad \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_{0\xi}^2} - \left(\frac{\sigma_{0\eta}}{\sigma_{0\xi}} + \frac{\sigma_{0\xi}}{\sigma_{0\eta}} - \frac{\sigma_{0\xi}\sigma_{0\eta}}{\sigma_{0z}^2} \right) \frac{\sigma_\xi}{\sigma_{0\xi}} \frac{\sigma_\eta}{\sigma_{0\eta}} + \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_{0\eta}^2} + \frac{\tau_{\xi\eta}^2}{\tau_{0\xi\eta}^2} = 1.$$

Prawo fizyczne przyjęto jako prawo płynięcia stowarzyszone z tym warunkiem plastycz-

ności. MIEKIEŁADZE badał szczegółowo «przypadki prostsze», gdy równanie nośności granicznej przekroju można sprowadzić do postaci (26.18). Możliwość ta zachodzi w czterech przypadkach mianowicie, alternatywnie

$$(26.41) \quad \begin{aligned} (H+F)\lambda_\xi + H\lambda_\eta = \kappa_\eta = \lambda_{\xi\eta} = 0, \quad \text{skąd} \quad N_\xi = N_{\xi\eta} = M_\eta = 0, \\ P_n = \frac{H+F}{4h^2} N_\eta^2, \quad P_m = \frac{GH+HF+FG}{(H+F)h^4} M_\xi^2 + \frac{2N}{h^4} M_{\xi\eta}^2; \end{aligned}$$

$$(26.42) \quad \begin{aligned} (H+F)\lambda_\xi + H\lambda_\eta = \kappa_\eta = \kappa_{\xi\eta} = 0, \quad \text{skąd} \quad N_\eta = M_{\xi\eta} = M_\eta = 0, \\ P_n = \frac{H+F}{4h^2} N_\xi^2 + \frac{N}{2h^2} N_{\xi\eta}^2, \quad P_m = \frac{GH+HF+FG}{(H+F)h^4} M_\xi^2; \end{aligned}$$

$$(26.43) \quad \begin{aligned} (H+F)\kappa_\xi + H\kappa_\eta = \lambda_\eta = \kappa_{\xi\eta} = 0, \quad \text{skąd} \quad N_\eta = M_\xi = M_{\xi\eta} = 0, \\ P_n = \frac{GH+HF+FG}{4(H+F)h^2} N_\xi^2 + \frac{N}{2h^2} N_{\xi\eta}^2, \quad P_m = \frac{H+F}{h^4} M_\eta^2; \end{aligned}$$

$$(26.44) \quad \begin{aligned} (H+F)\kappa_\xi + H\kappa_\eta = \lambda_\eta = \lambda_{\xi\eta} = 0, \quad \text{skąd} \quad N_\eta = N_{\xi\eta} = M_\xi = 0, \\ P_n = \frac{GH+HF+FG}{4(H+F)h^2} N_\xi^2, \quad P_m = \frac{H+F}{h^4} M_\eta^2 + \frac{2N}{h^4} M_{\xi\eta}^2. \end{aligned}$$

We wszystkich tych przypadkach zdefiniowane powyższymi wzorami formy kwadratowe P_n i P_m spełniają równanie krzywej nośności granicznej (26.18). Przez h oznaczono tu pół grubości powłoki, aby odróżnić tę wielkość od modułu plastycznego H (26.39). Symbol N oznacza moduł plastyczny, natomiast N_{ij} siły błonowe tak, że mimo podobieństwa zapisu nie zachodzi obawa nieporozumień.

Równanie (26.40) ulega znacznemu uproszczeniu, gdy współczynnik wewnątrz nawiasu jest równy jedności. Ten szczególny przypadek warunku plastyczności Hilla weryfikowali doświadczalnie L. W. HU i J. MARIN [275]; większą część swojej monografii [1074] poświęcił MIEKIEŁADZE właśnie temu przypadkowi. Prace [1073 i 1075] dotyczą optymalnego kształtowania powłok ortotropowych z uwagi na ich nośność graniczną.

Uogólnienie prac Miekieładzego na przypadek dowolnej anizotropii, mianowicie warunku plastyczności Misesa (16.1), podają prace A. SAWCZUKA [615, 618], w których rozpatrywano powłoki pełnościenne i sandwichowe.

Równanie powierzchni nośności granicznej przekroju dźwigara powierzchniowego przy przyjęciu uogólnionego warunku plastyczności Treski-Guesta podał również A. SAWCZUK [614]. Zastosował on równania (16.7), w których jednakże, dla każdego rozpatrywanego kierunku, $\sigma_{0-} = \sigma_{0+}$. Ogólniejszy przypadek $\sigma_{0-} \neq \sigma_{0+}$ badała W. I. SEBIEKINA [1159]. Jednocześnie anizotropię i niejednorodność uwzględniali R. SANKARANAYANAN i W. OLSZAK [605, 607].

ROZDZIAŁ VI

OBCIĄŻENIA ZŁOŻONE NA SZCZEBLU B CAŁEGO CIAŁA

27. Obciążenia złożone prętów i układów prętowych

27.1. Uwagi ogólne. Podczas gdy na szczebłu punktu ciała P i przekroju S liczba niezależnych parametrów, a więc czynników wyężenia, była w pewnym stopniu ograniczona, to przy rozpatrywaniu szczebłu B całego ciała jest ona dowolnie wielka. Jak już wspomnieliśmy w p. 2.4, mogą tu występować nie tylko niezależnie działające siły zewnętrzne P_i , lecz również czynniki wywołujące siły masowe, parametry charakteryzujące rozkład temperatury, natężenie promieniowania itp.

Istnieje oczywiście bardzo wiele rozwiązań, odnoszących się do nośności granicznej lub sprężysto-plastycznego zakresu konstrukcji obciążonych układem wielu sił. Zgodnie z przyjętą w p. 5.1 definicją rozwiązań tych nie będziemy uważali za rozwiązania problemów obciążen złożonych, o ile wszystkie siły narastają proporcjonalnie do pewnego wspólnego parametru, przy czym współczynniki proporcjonalności są z góry ustalone (rys. 10b). Istotną dla problematyki obciążen złożonych jest niezależność poszczególnych obciążen (rys. 10a) i związana z tym konstrukcja powierzchni granicznych w odpowiedniej przestrzeni.

Teoria powierzchni granicznych w przestrzeni czynników wyężenia na szczebłu B jest stosunkowo mało zbadana. P. G. HODGE i C. K. SUN [262] wykazali, że powierzchnie takie są wypukłe, a wektor, charakteryzujący płynięcie plastyczne (zdefiniowany przez autorów), jest w każdym punkcie prostopadły do powierzchni. Dla dowodu należało ograniczyć się do czynników wyężenia o charakterze sił (podstawowych czynników wyężenia), przyjąć postulat Druckera, a ponadto ograniczyć się do schematu ciała idealnie sztywno-plastycznego przy pominięciu wpływu odkształceń sprężystych i wpływu zmian geometrii na nośność ciała. Z punktu widzenia zastosowań założenia te są dość silne i ograniczające, jednak wykazane twierdzenie jest ważnym elementem klasycznej teorii ciał idealnie sztywno-plastycznych.

W przypadku braku spełnienia wymienionych założeń twierdzenie przestaje obowiązywać. Podamy prosty przykład krzywej nośności granicznej, odcinkami wklęsłej, skonstruowanej przy uwzględnieniu wpływu odkształceń sprężystych na nośność konstrukcji. Rozważymy mianowicie układ, pokazany na rys. 55, przy dowolnym stosunku sił P_1 i P_2 . Układ płaski składa się z pręta sztywnego i dwóch prętów odkształcalnych; warunkiem wyczerpania nośności układu jest uplastycznienie jednego z prętów odkształcalnych. Otrzymujemy więc cztery równania typu (13.15), różniące się jedynie znakami. Zapiszemy

je w prostej postaci bezwymiarowej

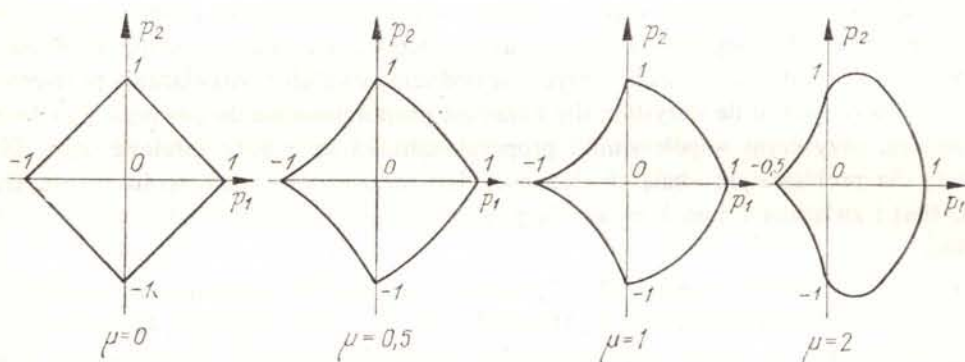
$$(27.1) \quad p_2 = \pm(p_1 \pm 1)(\mu p_1 + 1),$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(27.2) \quad p_1 = \frac{P_1}{\bar{P}_1} = \frac{P_1}{2\sigma_0 F}, \quad p_2 = \frac{P_2}{\bar{P}_2} = \frac{L}{\sigma_0 Fa} P_2, \quad \mu = 4 \frac{\sigma_0}{E} \frac{Ll}{a^2}.$$

Wielkość bezwymiarowa μ jest parametrem smukłości układu. Przyjęcie $\mu = 0$ odpowiada $E \rightarrow \infty$ czyli pominięciu wpływu odkształceń sprężystych; otrzymujemy układ sztywno-plastyczny — wtedy i tylko wtedy krzywa graniczna jest w całości krzywą wypukłą. Zakres parametru $0 < \mu < 1$ odpowiada wyboczeniu plastycznemu pod działaniem samej tylko (ujemnej) siły P_1 ; zakres parametru $\mu > 1$ odpowiada wyboczeniu sprężystemu przed osiągnięciem uplastycznienia. Znaki w równaniu (27.1) można dowolnie kombinować, aktualna jest zawsze część krzywej położona najbliżej początku układu współrzędnych.

Na rysunku 136 pokazano krzywe graniczne dla $\mu = 0$, $\mu = 0,5$, $\mu = 1$ i $\mu = 2$. Z wyjątkiem przypadku $\mu = 0$ odcinki krzywych, odpowiadające ujemnym wartościom p_1 , są wklęsłe. Fakt ten jest związany z pewną niestatecznością układu, bowiem wzrost ugięć odpowiada tu zmniejszaniu obciążeń.



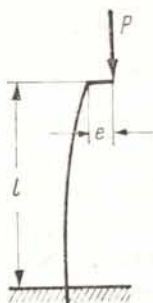
Rys. 136. Krzywe nośności granicznej dla układu pokazanego na rys. 54 i 55 przy uwzględnieniu odkształceń sprężystych i zmian geometrii

Powierzchnie graniczne mogą oczywiście być również wklęsłe w przypadku odstępstw od postulatu Druckera, gdy powierzchnia na szczęblu P wykazuje wklęsłości — wystarczy wtedy rozważyć przypadek obciążenia, odpowiadający jednorodnemu przejściu między szczęblami P i S oraz S i B .

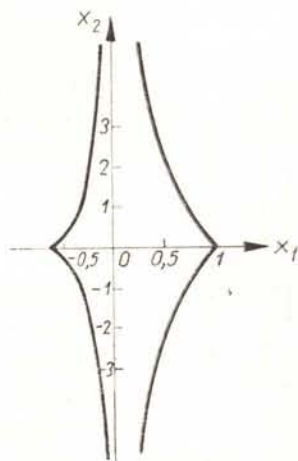
Z innymi przypadkami wklęsłości powierzchni granicznych możemy się spotkać przy rozważaniu ubocznych czynników wyężenia na szczęblu B . Weźmy np. pod uwagę mimośrodkowo ściskany pręt, pokazany na rys. 137, i potraktujmy za czynniki wyężenia siłę P i mimośrodek e . Na zaczerpniętym z pracy [774] rys. 138 pokazano krzywą graniczną nośności sprężystej pręta; bezwymiarowymi czynnikami wyężenia są tu

$$(27.3) \quad x_1 = \frac{1}{F\sigma_0} P, \quad x_2 = \frac{F}{W_0} e,$$

gdzie W_g oznacza sprężysty wskaźnik zginania. Krzywa ta wykazuje wklęsłość nie tylko po stronie ujemnych (ściskających) sił P , lecz również po stronie sił rozciągających. Można spodziewać się, że krzywa nośności granicznej miałaby przebieg podobny, jednakże okre-



Rys. 137. Mimośród obciążenia jako czynnik wyężenia



Rys. 138. Krzywa nośności sprężystej dla pręta pokazanego na rys. 137 przy zmiennym mimośrodku

ślenie jej (przy uwzględnieniu wpływu ugięć) jest znacznie trudniejsze, a ponadto krzywe takie zależą od kształtu przekroju.

Obciążenie mimośrodkowe jest równoważne obciążeniu siłą P i momentem $M = Pe$. Jednakże krzywa graniczna w płaszczyźnie P - M jest oczywiście inna od pokazanej na rys. 138, mianowicie wynika z tamtej przez zastosowanie transformacji $P' = P$, $M = Pe$. Posługiwanie się tą lub tamtą krzywą zależeć powinno od przeprowadzonej oceny, które z wielkości mogą być traktowane jako niezależne. Nawet przy danych P i e lub P i $M = Pe$ stopień narażenia konstrukcji na zniszczenie zależy w istotny sposób od tego, które z tych wielkości mogą zmieniać się niezależnie.

Wobec dużej różnorodności zagadnień obciążeń złożonych na szczęblu B omówimy uzyskane rozwiązania w sposób dość pobieżny. Zwrócimy jedynie większą uwagę na problemy cylindrów grubościennych, dla których wprowadzenie szczębla przekroju S może natrafić na trudności i którym — w związku z tym — nie poświęciliśmy dotychczas większej uwagi.

27.2. Złożone obciążenia powierzchniowe

27.2.1. Prosty przykład konstruowania krzywych granicznych. Podamy najpierw prosty przykład konstruowania krzywej nośności sprężystej i krzywej nośności granicznej dla pręta obciążonego dwiema siłami P_1 i P_2 , zamocowanego w sposób statycznie niewyznaczalny, pokazanego na rys. 139. Na przykładzie tym przedyskutujemy również problem plastycznego przystosowania się konstrukcji do danego programu obciążeń zmiennych.

Przyjmijmy, że pręt o stałym przekroju F wykonany jest z materiału jednorodnego sprężysto i plastycznie. W zakresie sprężystym reakcje wynoszą

$$(27.4) \quad R_1 = \frac{2}{3} P_1 - \frac{1}{3} P_2, \quad R_2 = \frac{2}{3} P_2 - \frac{1}{3} P_1.$$

Obliczając wartości sił podłużnych w poszczególnych przedziałach i przyrównując je do $\pm \sigma_0 F$, otrzymujemy równania sześciu prostych, określających krzywą nośności sprężystej w płaszczyźnie $P_1 - P_2$ (rys. 140):

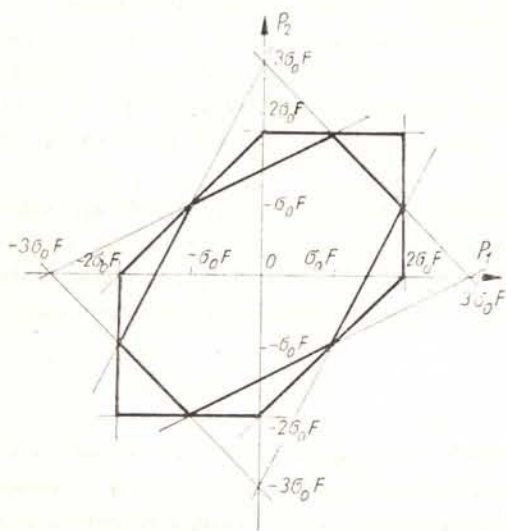
$$(27.5) \quad \begin{aligned} 2P_1 - P_2 &= \pm 3\sigma_0 F, & P_1 + P_2 &= \pm 3\sigma_0 F, \\ 2P_2 - P_1 &= \pm 3\sigma_0 F. \end{aligned}$$

Nośność graniczna układu zostaje wyczerpana, gdy w jednym z przedziałów następuje uplastycznienie w wyniku rozciągania, a w drugim w wyniku ściskania. Odpowiednie warunki wyznaczają reakcje i związki między siłami P_1 i P_2 , określające krzywą nośności granicznej. Sześć występujących tu możliwości prowadzi do następujących sześciu równań

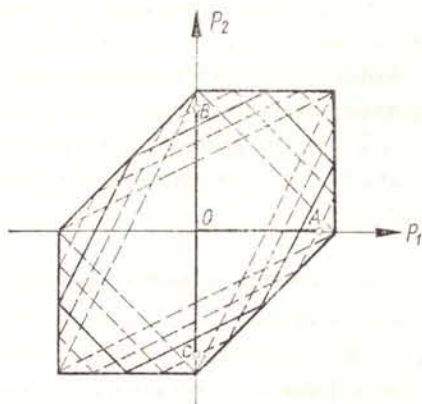
$$(27.6) \quad \begin{aligned} P_1 &= \pm 2\sigma_0 F, & P_2 &= \pm 2\sigma_0 F, \\ P_1 - P_2 &= \pm 2\sigma_0 F. \end{aligned}$$

Rys. 139. Pręt statycznie niewyznaczalny, obciążony dwiema niezależnymi siłami

Krzywą nośności granicznej pokazano również na rys. 140. Zauważymy, że krzywa ta odpowiada kształtem interpretacji graficznej warunku plastyczności Treski-Guesta, podczas gdy krzywa nośności sprężystej — warunkowi największego naprężenia dewiatorowego Iwlewa-Haythornthwaite'a.



Rys. 140. Krzywe nośności sprężystej i nośności granicznej dla pręta pokazanego na rys. 139



Rys. 141. Obszary plastycznego przystosowania się pręta do obciążeń zmiennych zgodnie z twierdzeniem Melana

Dowolny program zmiany obciążeń P_1 i P_2 , zadany krzywą leżącą wewnątrz krzywej nośności sprężystej, odpowiada oczywiście plastycznemu przystosowaniu się konstrukcji, bowiem odkształcenia plastyczne w ogóle wtedy nie wystąpią. Ponadto, zgodnie z twierdzeniem Melana, przystosowanie nastąpi również wtedy, gdy program leży wewnątrz zmienionej krzywej nośności sprężystej, skonstruowanej przy nałożeniu dowolnego układu samonaprzeżeń. W rozpatrywanym przypadku taki układ samonaprzeżeń (odpowiadający np. podgrzaniu lub oziębieniu pręta) powoduje bądź wzrost nośności sprężystej w odniesieniu do odcinków krzywej, odpowiadających uplastycznieniu przez rozciąganie, a obniżkę po stronie ściskania, bądź na odwrót. Kilka takich krzywych pokazano na rys. 141. W skrajnym przypadku sześciokąty zamieniają się na trójkąty.

Dowolny program zmian obciążeń, leżący w całości wewnątrz jednej z «poprawionych» krzywych nośności sprężystej, odpowiada plastycznemu przystosowaniu się konstrukcji. Należy tu np. cykliczna zmiana obciążeń $OAOBO\dots$, bowiem odpowiednia krzywa leży wewnątrz trójkąta zaznaczonego linią kreska-kropka. Natomiast np. cykliczna zmiana obciążeń $OAOOCO\dots$ nie leży w całości wewnątrz żadnej z «poprawionych» krzywych nośności sprężystej i jak łatwo sprawdzić bezpośrednim przeliczeniem odkształceń, plastyczne przystosowanie się konstrukcji w tym przypadku nie nastąpi.

27.2.2. Przegląd ważniejszych rozwiązań. Szczególnie wiele uwagi poświęcono obliczaniu sprężysto-plastycznych ugięć i nośności granicznej prętów, poddanych jednoczesnemu działaniu sił prostopadłych i równoległych do osi. Pierwsze rozwiązania, odnoszące się do materiału idealnie sprężysto-plastycznego i oparte o zlinearyzowaną teorię zginania, należą tu do K. JEŹEKA [294]. S. D. LEJTES [1023] rozpatrywał jednoczesne działanie siły ściskającej i równomiernie rozłożonego poprzecznego obciążenia ciągłego. Teorię ugięć skończonych zastosował I. G. GREZUCHO [875] określając największą siłę ściskającą przy danej sile prostopadłej do osi. Nagłe działanie obciążeń rozważali H. MAEDA i H. NAMIKAWA [368]. N. L. MOSZENSKI [1091] rozpatrywał przypadek wzmocnienia plastycznego stosując metodę rozwiązań sprężystych; podał on również metodę uzyskiwania rozwiązań przy użyciu maszyny analogowej MN-7. K. K. MUCHANOW i JU. W. SOBOLEW w teoretyczno-doświadczalnej pracy [1093] badali sprężysto-plastyczne ugięcia i nośność słupów o skokowo zmiennym przekroju, obciążonych dwiema siłami mimośrodowo ściskającymi, przyłożonymi na swobodnym końcu i na długości słupa. Nośność graniczna różnie zamocowanych prętów o przekroju dwuteowym, poddanych jednoczesnemu działaniu sił równoległych i prostopadłych do osi, była określona w pracy LE-WU LU i H. KAMALVANDA [364]. A. N. BOGDANOW [817] określał nośność prętów o krzywiznie pierwotnej, poddanych jednoczesnemu działaniu obciążenia normalnego i stycznego, przyłożonego na swobodnym końcu.

Oryginalne ujęcie zagadnienia belki zginanej równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym podaje praca B. B. ŁAMPSI [1019]. Zaproponował on równanie powierzchni granicznej w przestrzeni moment zginający-siła poprzeczna-obciążenie ciągłe w postaci równania elipsoidy. Dwie pierwsze z tych wielkości są uogólnionymi siłami wewnętrznymi, trzecia — uogólnioną siłą zewnętrzną. Siły wewnętrzne zależą oczywiście od sił zewnętrznych, jednakże autor pragnął ująć dodatkowo wpływ naprężeń σ_z (zazwyczaj pomijanych w teorii zginania ze ścinaniem) i wpływ gradientu dT/dx .

Problemowi przestrzennych ugięć prętów jednocześnie zginanych i ściskanych poświęcona jest praca S. D. LEJTESA [1024]. H. B. HARRISON [202] badał na drodze teoretycznej i doświadczalnej ugięcia i nośność prostokątnej belki obustronnie utwierdzonej, obciążonej dwiema siłami w płaszczyznach prostopadłych, a więc wywołującymi zginanie przestrzenne.

Ogólne ujęcie obliczania układów statycznie niewyznaczalnych przy obciążeniach złożonych podaje praca G. CERADINI [68].

Z punktu widzenia zastosowań duże znaczenie posiada teoria plastycznego przystosowania się konstrukcji do zadanego programu zmian obciążeń zewnętrznych — stanowi ona następny krok w stosunku do teorii przystosowania się przekroju do zadanego programu zmian uogólnionych sił wewnętrznych. Teoria ta, zapoczątkowana przez M. GRÜNINGA [189], była rozwijana w odniesieniu do belek przez H. BLEICHA [34] i B. G. NEALA [459]; A. F. M. GHANI i A. ROUSHAN [166] rozpatrywali przypadek belek niepryzmatycznych; belki jednocześnie zginane i ściskane były badane przez B. I. LUBAROWA [1050] i U. SÄVERINA [635]. Plastyczne przystosowanie się ram rozważali P. S. SYMONDS i B. G. NEAL [684], M. R. HORNE [267, 269], J. HEYMAN [216], W. W. KUPRIANOW [1016] (wpływ sił podłużnych i poprzecznych) oraz J. M. DAVIES [86]; przystosowanie się łuków V. FRANCIOSI, G. AUGUSTI i R. SPARACIO [141]. Optymalnemu kształtowaniu ram z uwagi na plastyczne przystosowanie się do zadanego programu zmiennych obciążeń zewnętrznych poświęcone są prace J. HEYMANA [217] i W. PRAGERA [566].

Pokrewne prace dotyczą problemów nośności prętów i układów prętowych pod działaniem obciążeń ruchomych. W tym przypadku za czynnik wyężenia może być uważana np. prędkość przesuwu obciążenia (o ile jest stała i równa dla wszystkich sił). Problematyki tej dotyczą prace L. P. KUNICKIEGO [1015], N. L. CZERNOWA [1231] oraz A. KOLARA [319]; metodę optymalnego projektowania belek przy obciążeniach ruchomych podali M. SAVE i W. PRAGER [609].

27.3. Przypadek sił masowych. W przypadku niejednostajnego ruchu poszczególnych części ciała, szczególnie przy rozpatrywaniu ruchu wirowego, a także przy znaczym ciężarze, siły masowe mogą mieć istotny wpływ na odkształcenia sprężysto-plastyczne i nośność graniczną. Siły te dają się zazwyczaj ująć jednym lub kilkoma parametrami (np. prędkością kątową ω , przyspieszeniem ziemskim g), które można potraktować jako odrębne czynniki wyężenia. Metodą przybliżonym określenia nośności granicznej w przypadku występowania sił masowych poświęcona jest praca A. D. COXA i A. J. M. SPENCERA [80], zawierająca porównanie metody małego parametru z metodą energetyczną.

Obszerną pracę [1156] poświęcił sprężysto-plastycznemu zginaniu wirujących prętów o przekroju kołowym D. D. SAWWIN. Problem ten był następnie rozpatrywany przez I. N. DANIŁOWĄ [887], która uwzględniała dodatkowo możliwość nierównomiernego nagrzania pręta, oraz przez W. E. WORONKOWA i W. W. MOSKWITINA [840] (wirująca rurka cienkościenna w przypadku liniowego wzmocnienia plastycznego).

N. S. KURDIN [1017] rozpatrywał sprężysto-plastyczne skręcanie wirującego pręta o przekroju kołowym. Autor stwierdził, iż uplastycznienie może się rozpocząć na osi pręta lub na powierzchni zewnętrznej, natomiast nie może się rozpocząć w innych punktach przekroju pręta.

27.4. Przypadek obciążeń cieplnych. Podwyższona temperatura może w różnorodny sposób wpływać na sprężysto-plastyczne odkształcenia i nośność konstrukcji. Po pierwsze, w jednorodnych konstrukcjach statycznie wyznaczalnych, w których równomierny rozkład temperatury nie powoduje naprężeń cieplnych, jej wpływ może uwidocznić się za pośrednictwem zmiany własności mechanicznych zarówno sprężystych, jak i plastycznych; już w tym przypadku temperatura może być traktowana jako czynnik wyężenia konstrukcji. Po drugie, w przypadku wewnętrznej lub zewnętrznej niewyznaczalności, równomierny rozkład temperatury powoduje na ogół pojawienie się naprężeń cieplnych. Po trzecie wreszcie, w przypadku nierównomiernego rozkładu temperatury możemy mieć do czynienia z kilkoma czynnikami wyężenia lub z jednym czynnikiem wyężenia innego typu, np. wydajnością źródła ciepła lub różnicą temperatur dwóch ścianek.

B. W. ŁOPATIN [1049] rozpatrywał utworzenie się przegubu plastycznego w belce o przekroju prostokątnym i dwuteowym w przypadku nierównomiernego rozkładu temperatury w przekroju; uwzględniono zależności stałych materiałowych od temperatury. G. H. BUZDUGAN [58] i S. CUOMO [85] badali zachowanie się belek zginanych w podwyższonej równomiernej temperaturze; w pierwszej z tych prac rozważano wpływ temperatury na tworzenie się stref uplastycznionych w belce obustronnie utwierdzonej, natomiast w drugiej uwzględniono wpływ zmian własności mechanicznych materiału wraz z temperaturą na ugięcia sprężysto-plastyczne.

L. A. SZAPOWAŁOW [1238] rozpatrywał sprężysto-plastyczne wyboczenie pręta obustronnie utwierdzonego w wyniku podwyższonej temperatury, stałej wzdłuż osi pręta a liniowo zmiennej w kierunku poprzecznym. Dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego i liniowego wzmocnienia plastycznego uzyskano rozwiązanie w postaci zamkniętej. Podobnemu zagadnieniu poświęcona jest praca S. R. BODNERA [36], w której do określania obciążenia krytycznego zastosowano metodę energetyczną.

Kilka prac poświęcono plastycznemu przystosowaniu się prętów i układów prętowych do cyklicznych obciążeń mechanicznych i cieplnych. R. SPARACIO w pracy [666], poświęconej przystosowaniu się układów prętowych do różnych cyklów obciążeń, uwzględnił możliwość cyklicznych zmian temperatury. B. E. GATEWOOD i R. W. GEHRING [157] badali przystosowanie się pręta w przypadku cyklicznych zmian zginania, ściskania i temperatury; uwzględniono zależność własności materiału od temperatury. K. B. AYERS [9] rozważał belkę o przekroju dwuteowym, poddaną działaniu stałego momentu wywołującego czyste zginanie i cyklicznie zmiennej temperatury. Przy założeniu liniowej zależności granicy plastyczności od temperatury określono obszary przystosowania, uplastycznień przeciwwrotnych i zniszczenia przyrostowego. E. H. MANSFIELD [381] analizował układ złożony z dwóch prętów, poddany działaniu obciążenia zewnętrznego i temperatury, zmiennych w czasie; przy założeniu liniowego wzmocnienia plastycznego określono naprężenia i odkształcenia resztkowe i warunki przystosowania się do zadanych cyklów obciążeń.

28. Kołowo-symetryczne obciążenia złożone cylindrów

28.1. Uwagi ogólne. Przy klasyfikacji obciążeń złożonych w rurach prostych lub zakrzywionych, cienkościennych lub grubościennych pojawiają się pewne trudności. Gdy

rura, w szczególności grubościenna, nie jest poddana działaniu ciśnienia, to może być zazwyczaj traktowana jako pręt lub belka o przekroju wielospójnym; wprowadzenie uogólnionych sił wewnętrznych, mianowicie momentu zginającego i skręcającego, siły podłużnej i poprzecznej, nie następuje wówczas trudności i możemy posługiwać się powierzchniami granicznymi w przestrzeni tych wielkości. Jednakże w zastosowaniach z reguły występuje ciśnienie, które wpływa w zasadniczy sposób na pracę rury, ewentualnie nawet przekroju rury, a nie posiada charakteru uogólnionej siły wewnętrznej. Rura cienkościenna może być analizowana bądź metodami teorii prętów cienkościennych o profilu zamkniętym (o ile nie jest poddana ciśnieniu), bądź też metodami teorii powłok. W tym ostatnim przypadku można oczywiście wprowadzić pojęcie przekroju i uogólnionych sił wewnętrznych jednakże w sposób całkowicie odmienny (bardziej lokalny).

W celu ujednoczenia potraktujemy wszystkie obciążenia rur jako obciążenia zewnętrzne i dokonamy klasyfikacji na szczebłu całego ciała. Nie stwarza to większych trudności przy rozpatrywaniu zginania, skręcania i rozciągania — można założyć, że są one wynikiem stosownie przyłożonych sił i momentów do przekrojów końcowych rury, wywołujących stan podłużnie jednorodny. Pewne trudności pojawiają się natomiast przy rozpatrywaniu ścinania, gdyż jednorodność podłużna jest wtedy wykluczona. Odpowiednią powierzchnię graniczną należy traktować wtedy jako zbudowaną w przestrzeni sił częściowo wewnętrznych, częściowo zewnętrznych. Tym niemniej praktyczne stosowanie takich powierzchni np. do analizy rurociągów poddanych zmiennemu wzdłuż osi zginaniu prowadzi z reguły do rozwiązań o wystarczającej dokładności.

Osobną uwagę wypada zwrócić na przypadek rur cienkościennych, poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego, rozciągania i skręcania. Występuje tu (w przypadku jednorodności materiału) pełna jednorodność stanu naprężenia, tak że rozpatrywany przypadek można sklasyfikować jako $P_3 \rightarrow B_3$. W związku z tym przypadek ten lub jego podprzypadki były wykorzystywane do licznych badań doświadczalnych o specjalnym przeznaczeniu, mianowicie do badań praw fizykalnych obciążeń złożonych na szczebłu P punktu ciała (warunków plastyczności, hipotez wzmocnienia plastycznego itp.). Pierwsze takie doświadczenia przeprowadzono już w początkowych stadiach rozwoju teorii plastyczności (J. J. GUEST [191], r. 1900), a niektóre dalsze badania uważane są za klasyczne — W. LODE [360, 361], M. ROŠ, A. EICHINGER [586], K. HOHENEMSER [264], G. I. TAYLOR, H. QUINNEY [693]. Ważniejszym nowszym pracom doświadczalnym tego typu poświęcimy nieco miejsca przy końcu punktu niniejszego.

28.2. Przypadek ogólnej kołowej symetrii w rurach grubościennych

28.2.1. Równania podstawowe. Przez przypadek kołowo-symetryczny będziemy rozumieli taki przypadek obciążenia, przy którym naprężenia i odkształcenia będą zależały tylko od współrzędnej r (promienia) w układzie współrzędnych walcowych; przemieszczenia (lub prędkości) mogą przy tym zależeć od wszystkich trzech współrzędnych r , θ i z .

W nawiązaniu do pracy [764] założymy kołową symetrię i rozwiążemy odpowiedni układ równań, a dopiero w następnym etapie określimy obciążenia odpowiadające rozważanemu przypadkowi. Założymy przy tym brak sił masowych i obciążeń cieplnych; obciążeniom tym poświęcono odrębną pracę [768], a ponadto zajmiemy się nimi w p. 28.3.4 i 28.3.5.

Przy uczynionych założeniach równania równowagi wewnętrznej we współrzędnych walcowych (7.15) przybierają postać

$$(28.1) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{d\tau_{r\theta}}{dr} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0, \quad \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0.$$

Związki między odkształceniami i przemieszczeniami przepiszemy w postaci (8.29) z zaznaczeniem, że odkształcenia są jedynie funkcjami zmiennej r :

$$(28.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = f_1(r), & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = f_4(r), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = f_2(r), & \gamma_{zr} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} = f_5(r), \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = f_3(r), & \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = f_6(r). \end{aligned}$$

Funkcje $f_i(r)$, $i = 1, 2, \dots, 6$, będziemy traktowali jako niewiadome. Zamiast równań (28.2) można by oczywiście wykorzystać równania nierozdzielności we współrzędnych walcowych (8.42). Warunek plastyczności przyjmiemy w formie Hubera-Misesa-Hencky'ego

$$(28.3) \quad (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{zr}^2) = 2\sigma_0^2;$$

dopuszczymy przy tym zależność $\sigma_0 = \sigma_0(r)$, a więc promieniową niejednorodność materiału cylindra. Ponadto założymy nieściśliwość materiału

$$(28.4) \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$$

oraz prawo podobieństwa dewiatorów

$$(28.5) \quad D_\varepsilon = \varphi D_\sigma,$$

które można traktować bądź jako równania Hencky'ego-Iliuszina, bądź też jako równania Levy'ego-Misesa przy formalnym traktowaniu ε_{ij} jako prędkości odkształceń, a u_i jako prędkości przemieszczeń.

Rozwiązywanie powyższego układu równań rozpoczniemy od analizy równań (28.2). Całkując pierwsze równanie otrzymujemy

$$(28.6) \quad u_r = \int f_1(r) dr + F_1(\theta, z),$$

gdzie $F_1(\theta, z)$ jest funkcją chwilowo nieznaną. Podstawienie (28.6) do drugiego z równań (28.2) i scałkowanie względem θ pozwala określić przemieszczenie u_θ wzorem

$$(28.7) \quad u_\theta = \theta r f_2(r) - \theta \int f_1(r) dr - \int F_1(\theta, z) d\theta + F_2(r, z),$$

natomiast z trzeciego z równań (28.2) wynika

$$(28.8) \quad u_z = z f_3(r) + F_3(r, \theta).$$

Wynikające z całkowania nieznanne funkcje F_i będziemy mogli wyznaczyć z pozostałych równań układu (28.2) i z przyjętych warunków brzegowych dla przemieszczeń. Podstawienie (28.6)–(28.8) do pozostałych równań (28.2) prowadzi mianowicie do następującego układu, który ma być spełniony tożsamościowo:

$$\begin{aligned}
 (28.9) \quad & \frac{1}{r} \frac{\partial F_3(r, \theta)}{\partial \theta} - \int \frac{\partial F_1(\theta, z)}{\partial z} d\theta + \frac{\partial F_2(r, z)}{\partial z} = f_4(r), \\
 & z f_3'(r) + \frac{\partial F_3(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial F_1(\theta, z)}{\partial \theta} = f_5(r), \\
 & \theta r f_2'(r) - \theta f_1(r) + \frac{\partial F_2(r, z)}{\partial r} + \frac{\theta}{r} \int f_1(r) dr + \\
 & + \frac{1}{r} \int F_1(\theta, z) d\theta - \frac{1}{r} F_2(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_1(\theta, z)}{\partial \theta} = f_6(r).
 \end{aligned}$$

Z drugiego z tych równań wynika najpierw

$$(28.10) \quad f_3'(r) = C_1 = \text{const}, \quad f_3(r) = C_1 r + \varepsilon;$$

istotnie, pojawienie się iloczynu funkcji zmiennych r i z jest wykluczone, bowiem żaden inny wyraz nie zawiera takiego iloczynu. Stała całkowania została tu oznaczona przez ε z uwagi na jej interpretację fizyczną (jednostkowe wydłużenie cylindra). W dalszym ciągu z drugiego z równań (28.9) wynikają jeszcze dwa związki

$$(28.11) \quad \frac{\partial F_1(\theta, z)}{\partial z} = -C_1 z + F_4(\theta), \quad \frac{\partial F_3(r, \theta)}{\partial r} + F_4(\theta) = f_5(r),$$

gdzie funkcja $F_4(\theta)$ jest nową niewiadomą. Całkując te równania określamy funkcje $F_1(\theta, z)$ i $F_3(r, \theta)$ za pośrednictwem nowych niewiadomych — funkcji jednej zmiennej $F_4(\theta)$, $F_5(\theta)$ i $F_6(\theta)$. Podstawiając następnie tak określone funkcje do pierwszego i trzeciego z równań (28.9) wyznaczamy $F_2(r, z)$, $F_4(\theta)$, $F_5(\theta)$ i $F_6(\theta)$. Szczegóły rachunków podane są w pracy [764]. Ostatecznie otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 (28.12) \quad & u_r = \int f_1(r) dr + (C_4 \sin \theta + C_5 \cos \theta) z + C_6 \sin \theta + C_7 \cos \theta, \\
 & u_\theta = \vartheta r z + r \int \frac{f_6(r)}{r} dr + (C_4 \cos \theta - C_5 \sin \theta) z + \\
 & + C_6 \cos \theta - C_7 \sin \theta + C_8 r, \\
 & u_z = \varepsilon z + \int f_5(r) dr - (C_4 \sin \theta + C_5 \cos \theta) r + C_2 \theta + C_3,
 \end{aligned}$$

gdzie C_i są stałymi; ϑ jest również stałą, oznaczoną odmiennie z uwagi na interpretację fizyczną (jednostkowy kąt skręcenia). Ponadto z rozpatrywania równań (28.9) wynika, że funkcje $f_1(r)$ i $f_2(r)$ są związane zależnością

$$(28.13) \quad f_1(r) = \frac{d}{dr} [r f_2(r)].$$

Jest to znane równanie nierozdzielności odkształceń w przypadku kołowej symetrii, otrzymane na nieco innej drodze.

Aby wyeliminować ruch ciała jako bryły sztywnej, należy mu odebrać sześć stopni swobody. Uczynimy to przyjmując np. $C_3 = C_6 = C_7 = 0$ (eliminacja przemieszczeń) i $C_4 = C_5 = C_8 = 0$ (eliminacja obrotów). Ponadto z warunku okresowości funkcji u_z ze względu na kąt θ wynika $C_2 = 0$.

Tak więc określiliśmy rozkład przemieszczeń z dokładnością do trzech funkcji f_5 , f_6 i f_1 lub f_2 . Powracając do odkształceń (28.2) stwierdzamy, że musi zachodzić

$$(28.14) \quad \varepsilon_z = \varepsilon = \text{const}, \quad \gamma_{\theta z} = \vartheta r,$$

natomiast pozostałe odkształcenia pozostają dotychczas niewyznaczone, jedynie ε_r i ε_θ są związane równaniem (28.13). Odkształcenia ε_r i ε_θ możemy jednak wyznaczyć wykorzystując dodatkowo warunek nieściśliwości (28.4): ostatecznie wobec (28.14)

$$(28.15) \quad \varepsilon_r = -\frac{C_r}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{C_r}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2},$$

gdzie C_r oznacza stałą całkowania.

Przejdziemy do wykorzystania pozostałych dziewięciu równań — (28.1), (28.3) i (28.5). Określają one dziewięć niewiadomych, mianowicie sześć składowych stanu naprężenia, odkształcenia γ_{zr} i $\gamma_{r\theta}$ oraz funkcję φ . Z drugiego i trzeciego z równań równowagi (28.1) wyznaczamy wprost rozkład naprężeń stycznych $\tau_{r\theta}$ i τ_{zr} :

$$(28.16) \quad \tau_{r\theta} = \frac{C_\theta}{r^2}, \quad \tau_{zr} = \frac{C_z}{r},$$

gdzie C_θ i C_z są stałymi całkowania. Dalej, podstawiając do warunku plastyczności (28.3) te wzory oraz naprężenia σ_r , σ_θ , σ_z i $\tau_{\theta z}$ wyrażone przez odpowiednie znane już odkształcenia i funkcję φ (28.5), otrzymujemy równanie o jednej niewiadomej φ , skąd

$$(28.17) \quad \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{g^2 r^6 + 3\varepsilon^2 r^4 + 4C_r^2}{\sigma_0^2 r^4 - 3C_z^2 r^2 - 3C_\theta^2}}.$$

Wobec znajomości funkcji φ obliczamy kolejno

$$(28.18) \quad \begin{aligned} \gamma_{zr} = f_5(r) &= -\frac{C_z \sqrt{3}}{r} \sqrt{\frac{g^2 r^6 + 3\varepsilon^2 r^4 + 4C_r^2}{\sigma_0^2 r^4 - 3C_z^2 r^2 - 3C_\theta^2}}, \\ \gamma_{r\theta} = f_6(r) &= \frac{C_\theta \sqrt{3}}{r^2} \sqrt{\frac{g^2 r^6 + 3\varepsilon^2 r^4 + 4C_r^2}{\sigma_0^2 r^4 - 3C_z^2 r^2 - 3C_\theta^2}}, \\ \tau_{\theta z} &= \frac{\vartheta r}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sigma_0^2 r^4 - 3C_z^2 r^2 - 3C_\theta^2}{g^2 r^6 + 3\varepsilon^2 r^4 + 4C_r^2}}. \end{aligned}$$

Do określenia rozkładu naprężeń normalnych wykorzystamy wreszcie pierwsze z równań równowagi (28.1):

$$(28.19) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{\varphi r} = \frac{2C_r}{\varphi r^3}.$$

Przyjmijmy, że na promieniu wewnętrznym rury $r = a$ działa ciśnienie wewnętrzne (promieniowe) p_{ar} i zapiszemy całkę równania (28.19) w postaci

$$(28.20) \quad \sigma_r = -p_{ar} + 2C_r \int_a^r \frac{d\xi}{\xi^3 \varphi(\xi)},$$

gdzie ξ oznacza zmienną całkowania. Pozostałe naprężenia normalne są określone rozkła-

dem odkształceń (28.14) i (28.15) oraz prawem podobieństwa dewiatorów (28.5), skąd ostatecznie

$$(28.21) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta} &= -p_{ar} + \frac{2C_r}{\varphi r^2} + 2C_r \int_a^r \frac{d\xi}{\xi^3 \varphi(\xi)}, \\ \sigma_z &= -p_{ar} + \frac{1}{\varphi} \left(\frac{3}{2} \varepsilon + \frac{C_r}{r^2} \right) + 2C_r \int_a^r \frac{d\xi}{\xi^3 \varphi(\xi)}. \end{aligned}$$

Wobec postaci funkcji φ (28.17) występujące tu całki są w przypadku materiału jednorodnego całkami hipereliptycznymi. Tak więc rozkład wszystkich odkształceń oraz naprężeń stycznych jest określony funkcjami elementarnymi, natomiast rozkład naprężeń normalnych — funkcjami nieelementarnymi. W ważniejszych przypadkach szczególnych całki te sprowadzają się jednak do eliptycznych lub nawet elementarnych i określenie rozkładu naprężeń i powierzchni nośności granicznej staje się łatwiejsze. Podobne wzory otrzymał również na nieco innej drodze M. A. ZADOJAN [919].

Zauważymy ponadto, że pewne szczególne typy plastycznej niejednorodności materiału mogą prowadzić do uproszczenia rozwiązań. Tak np. przy niejednorodnościach typu $\sigma_0 = A/r^2$ lub $\sigma_0 = A/r^4$ całki hipereliptyczne redukują się do eliptycznych. W dalszym ciągu ograniczymy się jednak do rozpatrywania cylindrów jednorodnych.

Określony tu rozkład naprężeń obowiązuje w całym ciele przy wyczerpaniu nośności granicznej cylindra (z pewnymi wyjątkami, omówionymi w pracy [764], gdy wskutek dużych wartości ciśnień stycznych następuje zniszczenie bez całkowitego uplastycznienia) lub w strefach uplastycznionych przy rozpatrywaniu cylindra sprężysto-plastycznego. W dalszym ciągu zajmiemy się bardziej szczegółowo jedynie analizą nośności granicznej cylindra.

28.2.2. Określenie obciążeń (powierzchni nośności granicznej). Podstawiając wzory określające rozkład naprężeń do równań, określających warunki brzegowe na denkach i pobocznicach cylindra stwierdzamy, że rozkład ten odpowiada pięciu typom obciążeń: sile podłużnej N , momentowi skręcającemu M_s , ciśnieniu normalnym p_{ar} i p_{br} , ciśnieniu stycznemu o kierunku obwodowym $p_{a\theta}$ i $p_{b\theta}$ oraz ciśnieniu stycznemu o kierunku promieniowym p_{az} i p_{bz} (rys. 142). Tak więc rozważany ogólny przypadek kołowo-symetryczny można sklasyfikować jako P_6/B_5 . Wymienione obciążenia są określone wzorami

$$(28.22) \quad \begin{aligned} N &= 2\pi \int_a^b \sigma_z r dr, & M_s &= 2\pi \int_a^b \tau_{\theta z} r^2 dr, & p_{br} &= -\sigma_r(b), \\ p_{a\theta} &= \frac{C_{\theta}}{a^2}, & p_{b\theta} &= \frac{C_{\theta}}{b^2}, & p_{az} &= \frac{C_z}{a}, & p_{bz} &= \frac{C_z}{b}; \end{aligned}$$

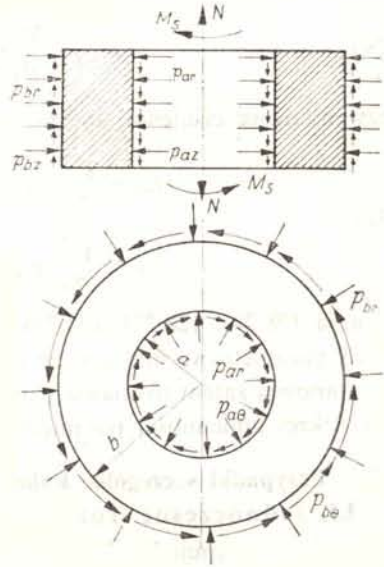
ciśnienie p_{ar} zostało już uwzględnione w zapisie wzorów (28.20) i (28.21).

Najpierw obliczymy zewnętrzne ciśnienie promieniowe p_{br} , określone trzecim ze wzorów (28.22). Wobec (28.20) napiszemy najpierw

$$(28.23) \quad p_{br} = p_{ar} - 2C_r \int_a^b \frac{d\xi}{\xi^3 \varphi(\xi)}.$$

W dalszym ciągu zastosujemy zapis bezwymiarowy

$$(28.24) \quad \Delta q = q_{ar} - q_{br} = \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_{\beta^2}^1 \frac{p(x)}{x^2} dx,$$



Rys. 142. Układ obciążeń cylindra grubościennego w ogólnym przypadku kołowo-symetrycznym

gdzie wprowadzono bezwymiarowe ciśnienia $q_{ar} = p_{ar}/\sigma_0$, $q_{br} = p_{br}/\sigma_0$, bezwymiarową zmienną $x = \xi^2/b^2$, zawartą w przedziale $\beta^2 \leq x \leq 1$, gdzie $\beta = a/b$; funkcja $p(x)$, stanowiąca bezwymiarową odwrotność $\varphi(\xi)$, jest określona wzorem

$$(28.25) \quad p(x) = \frac{1}{2G\varphi} = \sqrt{\frac{x^2 - \beta^2 c_z^2 x - \beta^4 c_\theta^2}{g^2 x^3 + e^2 x^2 + c_r^2}},$$

przy czym bezwymiarowe parametry wynoszą

$$(28.26) \quad e = \frac{3G}{\sigma_0} \varepsilon, \quad g = \frac{Gb\sqrt{3}}{\sigma_0} \vartheta$$

$$c_r = \frac{2\sqrt{3}G}{\sigma_0 b^2} C_r, \quad c_\theta = \frac{\sqrt{3}}{\beta^2 \sigma_0 b^2} C_\theta, \quad c_z = \frac{\sqrt{3}}{\beta \sigma_0 b} C_z.$$

Podstawiając (28.20) do pierwszej z całek (28.22) i stosując przekształcenie Dirichleta [764], możemy określić siłę podłużną N całką pojedynczą. Wynik zapiszemy w postaci bezwymiarowej

$$(28.27) \quad \bar{n} = n - \left(-\frac{q_{ar} + q_{br}}{2} \right) = \frac{1 + \beta^2}{2(1 - \beta^2)} \Delta q + \frac{e}{1 - \beta^2} \int_{\beta^2}^1 p(x) dx,$$

gdzie

$$(28.28) \quad n = \frac{N}{\sigma_0 F} = \frac{1}{\pi b^2 (1 - \beta^2) \sigma_0} N$$

jest bezwymiarową siłą podłużną, natomiast wielkość \bar{n} nazwiemy siłą zredukowaną z uwagi na działanie ciśnienia; możliwość wprowadzenia takiej wielkości wynika z faktu, iż zgodnie z przyjętą hipotezą wyężeniową nałożenie wszechstronnego równomiernego rozciągania lub ściskania nie ma wpływu na uplastycznienie ciała. Podobnie bezwymiarowy moment skręcający można określić wzorem

$$(28.29) \quad m_s = \frac{M_s \sqrt{3}}{W_0 \sigma_0} = \frac{2g}{1 - \beta^4} \int_{\beta^2}^1 x p(x) dx,$$

a bezwymiarowe ciśnienia styczne wynoszą

$$(28.30) \quad \begin{aligned} t_{a\theta} &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} p_{a\theta} = c_\theta, & t_{b\theta} &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} p_{b\theta} = \beta^2 c_\theta, \\ t_{az} &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} p_{az} = c_z, & t_{bz} &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} p_{bz} = \beta c_z. \end{aligned}$$

Równania (28.24), (28.27), (28.29) i (28.30) określają pięć typów obciążeń w funkcji czterech parametrów, mianowicie c_θ , c_z i stosunków pozostałych parametrów np. g/c_r i e/c_r , stanowią zatem równania parametryczne powierzchni nośności granicznej. Dopuszczalny zakres zmienności parametrów określono w pracy [764].

28.3. Przypadki szczególne kołowej symetrii

28.3.1. Jednoczesne rozciąganie, skręcanie i różnica ciśnień. Ciśnienia styczne t_θ i t_z występują bardzo rzadko w zastosowaniach praktycznych. Większe znaczenie posiada przypadek jednoczesnego rozciągania, skręcania i różnicy ciśnień normalnych, znacznie prostszy od poprzedniego, bowiem całki hipereliptyczne redukują się tu do eliptycznych. Przypadek ten przedstawimy w oparciu o pracę J. SKRZYPKA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [650].

Wprowadzimy nową zmienną całkowania $y = 1/x$, ułatwiającą sprowadzenie wielomianów trzeciego stopnia do postaci kanonicznej i przy podstawieniu $c_\theta = c_z = 0$ przepisemy wzory (28.24), (28.27) i (28.28) następująco:

$$(28.31) \quad \begin{aligned} \Delta q &= \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \int_1^{\beta^{-2}} \frac{y dy}{\sqrt{y \left(y^3 + \frac{e^2}{c_r^2} y + \frac{g^2}{c_r^2} \right)}}, \\ n &= \frac{\beta^2 q_a - q_b}{1 - \beta^2} + \frac{e \kappa_r}{(1 - \beta^2) c_r} \int_1^{\beta^{-2}} \frac{dy}{y \sqrt{y \left(y^3 + \frac{e^2}{c_r^2} y + \frac{g^2}{c_r^2} \right)}}, \\ m_s &= \frac{2g \kappa_r}{(1 - \beta^4) c_r} \int_1^{\beta^{-2}} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y \left(y^3 + \frac{e^2}{c_r^2} y + \frac{g^2}{c_r^2} \right)}}, \end{aligned}$$

gdzie $\kappa_r = \text{sign } c_r = \pm 1$ oraz przy q_a i q_b pominięto dodatkowy wskaźnik r .

Równania powyższe określają powierzchnię nośności granicznej w funkcji parametrów e/c_r i g/c_r . Aby przystosować je do obliczeń numerycznych i ułatwić analizę, sprowadzimy występujące tu całki eliptyczne do postaci normalnej.

Trójmian pod pierwiastkiem posiada jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone sprzężone, bowiem wyróżnik jest dodatni:

$$(28.32) \quad \Delta = \frac{g^4}{4c_r^4} + \frac{e^6}{27c_r^6} > 0.$$

Pierwiastki te wynoszą

$$(28.33) \quad y_1 = \omega_1 - \omega_2, \quad y_{2,3} = -\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{3} (\omega_1 + \omega_2),$$

gdzie

$$(28.34) \quad \omega_1 = \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} - \frac{g^2}{2c_r^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + \frac{g^2}{2c_r^2}}.$$

W takim przypadku sprowadzenie całek eliptycznych do postaci normalnej uzyskamy przez wprowadzenie nowej zmiennej ζ wzorem

$$(28.35) \quad \zeta = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2 y}{\alpha_1 [y - (\omega_1 - \omega_2)]}},$$

gdzie pomocnicze dodatnie parametry α_1 i α_2 są określone wzorami

$$(28.36) \quad \alpha_1^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_1 \omega_2, \quad \alpha_2^2 = 3(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_1 \omega_2).$$

Po wprowadzeniu (28.35) do pierwszej z całek (28.31) otrzymujemy najpierw

$$(28.37) \quad \Delta q = \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \frac{2(\omega_2 - \omega_1) \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{(b + \cos \zeta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}} - \\ - \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}},$$

gdzie oznaczono

$$(28.38) \quad k^2 = \frac{3\alpha_1^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2}{8\alpha_1 \alpha_2}, \quad b = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1},$$

$$\zeta_1 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 [1 - (\omega_1 - \omega_2)]}}, \quad \zeta_2 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 [1 - \beta^2 (\omega_1 - \omega_2)]}}.$$

Rozpatrywana całka jest więc sumą całki eliptycznej trzeciego rodzaju i całki eliptycznej pierwszego rodzaju. Całka trzeciego rodzaju ma przy tym pozorną osobliwość, która przed dokonaniem obliczeń numerycznych musi zostać usunięta. Dość żmudne rachunki podaje praca [650]; ostatecznie otrzymuje się następujący wzór nie wykazujący już osobliwości:

$$(28.39) \quad \Delta q = \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arth} \frac{2\sqrt{y(\omega_2^3 - \omega_1^3)} + 3y^2 \omega_1 \omega_2 + y^4}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) + 2y^2} + \right. \\ \left. + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(\omega_2 - \omega_1)}{2(\alpha_2 + \alpha_1) \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \Pi \left(\zeta, \frac{k^2}{v}, k \right) - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} F(\zeta, k) \right]_{y=1}^{y_2 = \beta^{-2}}$$

We wzorze tym symbol Ar th oznacza funkcję odwrotną względem tangensa hiperbolicznego, $F(\zeta, k)$ — niepełną całkę eliptyczną pierwszego rodzaju, $\Pi(\zeta, k^2/\nu, k)$ — niepełną całkę eliptyczną trzeciego rodzaju, ponadto obowiązują oznaczenia (28.35), (28.36), (28.38) wreszcie

$$(28.40) \quad \nu = - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{4\alpha_1 \alpha_2}.$$

Sprowadzając podobnie dwie następne całki eliptyczne (28.31) do postaci normalnej przez dokonanie podstawienia (28.35) otrzymujemy ostatecznie

$$(28.41) \quad \bar{n} = \frac{1 + \beta^2}{2(1 - \beta^2)} \Delta q + \frac{2e\kappa_r}{(1 - \beta^2)c_r \alpha_1} \left\{ \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)}} F(\zeta, k) - \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} E(\zeta, k) - \frac{\sqrt{(\omega_2 - \omega_1 + y)[y^2 + (\omega_2 - \omega_1)y + \alpha_1^2]}}{[\alpha_1(\omega_2 - \omega_1 + y) + \alpha_2 y] \sqrt{y}} \right\}_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}},$$

$$m_s = \frac{4g\kappa_r}{3c_r(1 - \beta^4)(\omega_2 - \omega_1)\alpha_1^3} \left\{ \frac{3\omega_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} [(\alpha_1 - \alpha_2)F(\zeta, k) + 2\alpha_2 E(\zeta, k)] + \frac{[(6\omega_1 \omega_2 - \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2)y - (\omega_2^3 - \omega_1^3)]\sqrt{y^4 + 3y^2\omega_1\omega_2 + y(\omega_2^3 - \omega_1^3)}}{y^2[\alpha_1(y - \omega_1 + \omega_2) + \alpha_2 y]} \right\}_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}}.$$

Wzory (28.39) i (28.41) określają powierzchnię graniczną w funkcji parametrów e/c_r i g/c_r (wielkości ω i α są funkcjami tych tylko stosunków).

Rozpatrywany przypadek złożony analizowali również E. J. PANARELLI i P. G. HODGE [515], którzy nie sprowadzali całek eliptycznych do postaci normalnej, natomiast podali wyniki pewnych obliczeń numerycznych. Liniowe wzmocnienie plastyczne rozważał A. S. KRAWCZUK [1003], który znalazł takie prawo wzrostu obciążeń zewnętrznych, przy którym we wszystkich punktach rury występuje prosty proces obciążania (prawo to jest nieco różne od proporcjonalnego wzrostu). M. A. ZADJOAN [921] podał rozwiązanie dla ciała ortotropowego, podlegającego warunkowi idealnej plastyczności Hilla (16.3).

28.3.2. Skręcanie przy różnicy ciśnień. Przyjęcie $n = 0$ we wzorach (28.31) lub (28.39) i (28.41) nie tylko nie upraszcza, lecz raczej komplikuje problem: należy wtedy wyrazić jeden z parametrów e/c_r , g/c_r w funkcji drugiego, co prowadzi do równań przestępnych, zawierających całki eliptyczne. Pewne rozwiązanie przybliżone, wykorzystujące metodę szeregów potęgowych, zawiera praca [650]. Natomiast dość znaczne uproszczenie otrzymuje się w przypadku $e = 0$, który odpowiada skręcaniu i różnicy ciśnień w warunkach płaskiego stanu odkształcenia.

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$(28.42) \quad \left(\frac{g}{c_r} \right)^{2/3} = \mu,$$

to wówczas przy $e = 0$ ze wzorów (28.34) i (28.36) wynika

$$(28.43) \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \mu, \quad \alpha_1 = \mu, \quad \alpha_2 = \mu\sqrt{3}.$$

W tym przypadku dogodnie jest wprowadzić nową zmienną

$$(28.44) \quad t = \frac{y}{\mu},$$

bowiem parametr μ pojawi się wtedy tylko w granicach całkowania, a nie w wyrażeniach podcałkowych. Otrzymujemy mianowicie

$$(28.45) \quad \Delta q = \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arth} \frac{2\sqrt{t+t^4}}{1+\sqrt{3}+2t^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}(1+\sqrt{3})^2} \Pi\left(\zeta, \frac{k^2}{v}, k\right) - \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} F(\zeta, k) \right]_{t_1=\mu^{-1}}^{t_2=\beta^{-2}\mu^{-1}},$$

gdzie argumenty całek wynoszą

$$(28.46) \quad k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{k^2}{v} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \zeta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt[4]{3} \sqrt{\frac{t}{t+1}}.$$

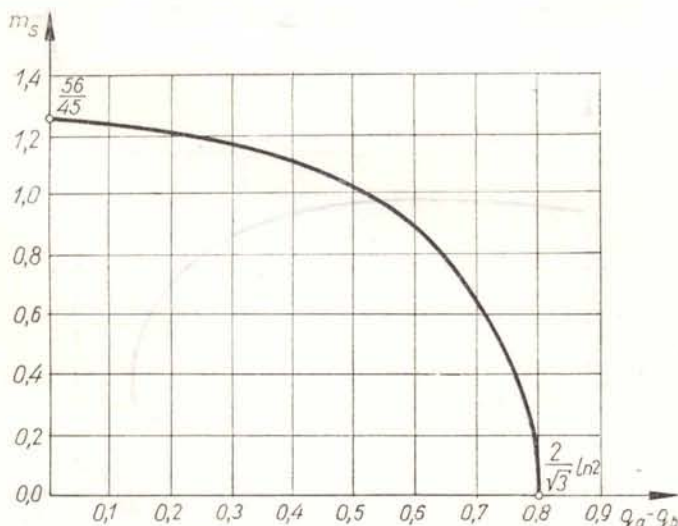
Wzór na moment skracający podlega znacznie większemu uproszczeniu i wyraża się za pomocą funkcji elementarnych:

$$(28.47) \quad m_s = -\frac{4}{3} \frac{\kappa_r}{(1-\beta^4)\mu^{3/2}} \frac{\sqrt{t^4+t}}{t^2} \Big|_{t_1=\mu^{-1}}^{t_2=\beta^{-2}\mu^{-1}}.$$

Zredukowana siła podłużna \bar{n} jest tu proporcjonalna do różnicy ciśnień i wynosi

$$(28.48) \quad \bar{n} = \frac{1+\beta^2}{2(1-\beta^2)} \Delta q.$$

Ćwiartkę krzywej granicznej $m_s = f(\Delta q)$ pokazano na rys. 143 dla stosunku promieni rury $\beta = a/b = 1/2$.



Rys. 143. Krzywa nośności granicznej dla cylindra pod działaniem różnicy ciśnień i skracania w warunkach braku wydłużenia osiowego

Teoretyczne i doświadczalne badania nad nośnością sprężystą i nośnością graniczną rur grubościennych, poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego i skręcania, omawia praca B. CROSSLANDA i R. HILLA [82]. A. M. SKUDRA [1163] zastosował do analizy rur betonowych teorię lokalności odkształceń Małmejstera. P. A. PAWŁOW [1106] podał metodę obliczania nośności połączeń kołnierzowych rurociągów w przypadku dodatkowego skręcania.

28.3.3. Rozciąganie przy różnicy ciśnień. Przyjęcie $g = 0$ we wzorach ogólnych prowadzi do największych uproszczeń. Ze wzorów (28.34) i (28.36) otrzymujemy wtedy

$$(28.49) \quad \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{e}{c_r} = \frac{1}{\sqrt{3}} \eta, \quad \text{gdzie} \quad \eta = \frac{e}{c_r},$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{e}{c_r} = \eta,$$

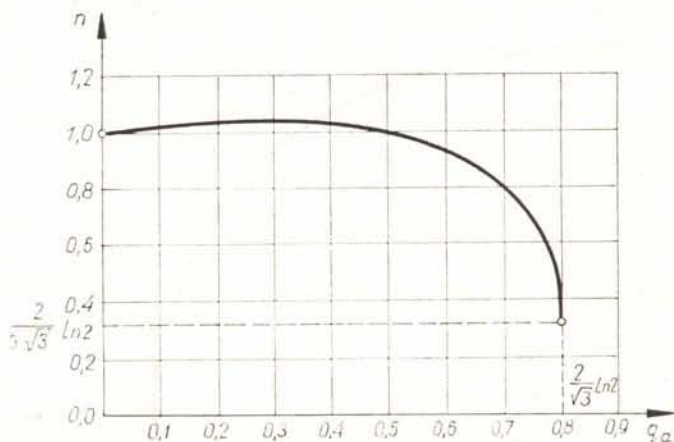
a całki eliptyczne przechodzą w całki elementarne. Ostatecznie otrzymuje się

$$(28.50) \quad \Delta q = \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \operatorname{Arth} \frac{y}{\sqrt{y^2 + \eta^2}} \Big|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}},$$

$$\bar{n} = \frac{1 + \beta^2}{2(1 - \beta^2)} \Delta q - \kappa_r \frac{\sqrt{y^2 + \eta^2}}{y\eta(1 - \beta^2)} \Big|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}}$$

Wykres funkcji $n = f(q_a)$ dla $\beta = a/b = 1/2$ oraz $q_b = 0$ podaje rys. 144.

Jednoczesne rozciąganie cylindra wraz z różnicą ciśnień stanowi najprostszy przypadek złożony obciążenia cylindrów, a odpowiednia literatura jest stosunkowo bogata. Za pierwsze rozwiązanie można by tu uznać już pracę B. de Saint-Venanta z r. 1872 o tyle, że przy zastosowanym przezeń warunku plastyczności Treski graniczna różnica ciśnień



Rys. 144. Krzywa nośności granicznej dla cylindra pod działaniem ciśnienia wewnętrznego i siły podłużnej

jest w pewnym przedziale niezależna od siły osiowej. Autorami klasycznych prac, odnoszących się do zakresu sprężysto-plastycznego cylindrów grubościennych, są N. M. BIELAJEW i A. K. SINICKI [806] oraz D. N. DE G. ALLEN i D. G. SOPWITH [3]. Szczegółowo rozważają ten problem również A. A. ILIUSZIN [949], W. W. SOKOŁOWSKI [1169] i A. NÁDAI [452]. Całki ogólne równań podstawowych dla dowolnego prawa wzmocnienia plastycznego przy uwzględnieniu ściśliwości materiału podali A. A. ILIUSZIN i P. M. OGIBAŁOW [954]. Pewne rozwiązanie w postaci zamkniętej przy wzmocnieniu plastycznym uzyskał również w oparciu o hipotezę Treski-Guesta H. JUNG [300]. Efektywną metodę obliczeń przy liniowym wzmocnieniu plastycznym podał J. RYŚ [591]. Przegląd niektórych rozwiązań zawiera praca R. EPAINA [127].

W. OLSZAK i W. URBANOWSKI [474] rozpatrzyli sprężysto-plastyczny cylinder niejednorodny. TSUAN W. TING [703, 716], rozważał opierając się na warunku TG dwa typy zniszczenia cylindrów wielowarstwowych nakładanych. N. BOGDANOWA [818] badała zakres sprężysto-plastyczny w cylindrach krótkich, gdy naprężenia zależą w pewnym stopniu również od zmiennej z .

Liczne prace poświęcono dużym odkształceniom cylindrów pod działaniem ciśnienia i siły podłużnej. Pierwsza praca należy tu do C. W. MACGREGORA, L. F. COFFINA i J. C. FISCHERA [367]; autorami dalszych są W. A. ŁOMAKIN [1047], P. M. OGIBAŁOW [1104], S. A. BOCZAROWA [820, 821, 822] (wzmocnienie liniowe) oraz M. D. COON i S. S. GILL [78]. Pokrewne zagadnienie stateczności przy dużych odkształceniach powodujących zmniejszenie czynnego przekroju badał w odniesieniu do cylindrów grubościennych P. B. MELLOR [405].

Nośność graniczną rury cienkościennej przy dowolnym wzmocnieniu plastycznym i uwzględnieniu zmian geometrii określił A. TROOST [711]. Hipotezę probabilistyczną do określenia nośności w przypadku idealnej plastyczności materiału zastosowali Z. SOBOTKA i J. MURZEWSKI [657]. R. DOBREW [892] badał stan graniczny cylindra cienkościennego przy nieproporcjonalnym wzroście siły podłużnej i ciśnienia; M. CAPURSO i A. GANDOLFI [66] — stan graniczny powłoki żebrowanej. Analizie wpływu niejednorodności stanu naprężenia (odstępstwo od idealnej cienkościenności cylindra) na nośność poświęcona jest praca R. M. HAYTHORNTHWAITE'A [208].

Ważny praktycznie problem niestateczności odkształceń przy dwukierunkowym rozciąganiu ścianki cylindra cienkościennego badali P. B. MELLOR [404], R. P. FELGAR [133], M. J. HILLIER [238, 239] oraz A. KRISCH i R. SCHWEITZER [327].

28.3.4. Przypadek sił masowych. Uogólnienie podanych powyżej rozwiązań na przypadek sił masowych związanych z jednostajnym lub niejednostajnym wirowaniem cylindrów zawierają prace M. ŻYCZKOWSKIEGO [768] i J. SKRZYPKA [651]. J. SKRZYPEK wykazał, że w przypadku obciążenia grubościennej rury jednostajnie wirującej z jednoczesnym rozciąganiem, skręcaniem i różnicą ciśnień wzory (28.39) i (28.41) ulegają jedynie niewielkim zmianom, mianowicie wzór na moment skręcający m_s pozostaje niezmienny, graniczna różnica ciśnień Δq zmienia się o wartość

$$(28.51) \quad \Delta(\Delta q) = - \frac{(1 - \beta^2)w}{2},$$

a więc maleje, natomiast graniczna siła podłużna n zwiększa się o wartość

$$(28.52) \quad \Delta n = \frac{1 + \beta^2}{4} w$$

w stosunku do wartości określonych wzorem (28.39) i pierwszym ze wzorów (28.41). Przez w oznaczono tu bezwymiarowy kwadrat prędkości kątowej,

$$(28.53) \quad w = \frac{\gamma b^2}{g \sigma_0} \omega^2,$$

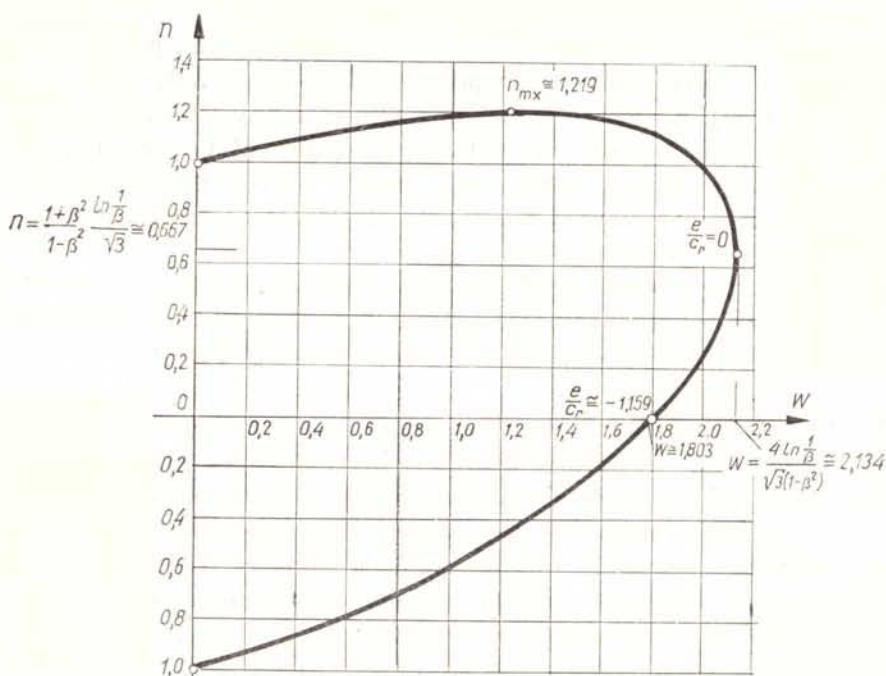
gdzie γ oznacza ciężar właściwy materiału rury. Możliwość wzrostu siły podłużnej n wynika ze zbliżenia stanu naprężenia w wyniku wirowania do wszechstronnego równomiernego rozciągania, co zgodnie z hipotezą HMM obniża wyężdżenie materiału.

W przypadku szczególnym braku skręcania i braku różnicy ciśnień Δq możemy określić krzywą nośności granicznej za pomocą funkcji elementarnych:

$$(28.54) \quad w = \frac{2}{\sqrt{3}(1-\beta^2)} \left[\operatorname{Ar th} \frac{1}{\sqrt{1+\beta^4 \frac{e^2}{c_r^2}}} - \operatorname{Ar th} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{e^2}{c_r^2}}} \right],$$

$$n = \frac{1+\beta^2}{4} w + \frac{\kappa_r c_r}{(1-\beta^2)e} \left[\sqrt{1+\frac{e^2}{c_r^2}} - \sqrt{1+\beta^4 \frac{e^2}{c_r^2}} \right].$$

Krzywą tę w przypadku $\beta = 1/2$ pokazano na rys. 145.



Rys. 145. Krzywa nośności granicznej dla cylindra wirującego pod działaniem siły podłużnej

W pracy [651] rozważono ponadto skręcanie z wirowaniem w płaskim stanie odkształcenia, skręcanie z wirowaniem przy braku siły osiowej oraz stan graniczny przy nieustalonym wirowaniu rury, a także problem optymalnego rozruchu. Możliwość zastosowania warunku plastyczności TG w przypadku wirującego cylindra badał W. I. ROZENBLUM [1152]. Wirowaniu pełnego (niewydrążonego) cylindra poświęcone są prace A. G. KOSTIUKA [999] i W. SZCZEPIŃSKIEGO [689].

Rozprzestrzenianie się sprężysto-plastycznych fal w wyniku zderzenia dwóch wirujących rur rozważał CH. A. RACHMATULIN [1135].

28.3.5. Przypadek obciążeń cieplnych. Cylindry znajdują się bardzo często pod działaniem ciśnienia wewnętrznego czynnika o podwyższonej temperaturze. Jeżeli ciśnienie i temperatura są od siebie niezależne, to mamy do czynienia z przypadkiem złożonym w sensie przyjętej definicji. Ale nawet w przypadku ustalonej zależności między tymi wielkościami dogodnie jest przeprowadzać obliczenia w oparciu o znajomość rozwiązania problemu złożonego, gdy oba czynniki były traktowane jako niezależne.

Autorem pierwszej pracy, poświęconej sprężysto-plastycznym odkształceniom rury grubościenniej pod działaniem różnicy ciśnień i obciążeń cieplnych, był Ł. M. KACZANOW [973], r. 1940. Wiele następnych prac oparto na warunku plastyczności TG przy uzależnieniu granicy plastyczności od temperatury: wymienimy tu prace, których autorami są T. MURA [440], E. WHALLEY [736], E. M. MOROZOW [1083], N. PERRONE [528] i W. I. DANIŁOWSKA [888]. Warunek plastyczności HMM uwzględniał JU. A. SAMOJŁOWICZ [1157]. Przypadek wzmocnienia plastycznego, w szczególności liniowego, rozważał w nawiązaniu do hipotezy TG D. R. BLAND [31], który nie uwzględniał jednak zależności własności materiału od temperatury. Schematyzację wzmocnienia plastycznego, zaproponowaną przez RAMBERGA i OSGOODA (9.10), stosowali K. A. V. PANDALAI i S. A. PATEL [516]. Krzywą graniczną nośności sprężystej w układzie ciśnienie wewnętrzne-temperatura badał M. ŻYCZKOWSKI [770].

Ważnym technicznie problemem jest zagadnienie plastycznego przystosowania się rurociągu do zadanych programów zmian ciśnienia i temperatury. Pierwsza praca D. R. MILLERA z r. 1959 [418] badała zwiększanie średnicy cylindra pod działaniem stałego ciśnienia i cyklicznie zmiennej temperatury. Autorami dalszych prac są W. L. FOMIN [1220], który rozważał pola temperatur kołowo-symetryczne i nie wykazujące kołowej symetrii, D. A. GOCHFELD i P. I. JERMAKOW [863, 864], R. I. WIEJCMAN [836] (badania doświadczalne), oraz A. SZ. DADASZEW [884]. Odkształcenia plastyczne w przypadku ciśnienia i impulsów cieplnych badali A. A. ILIUSZIN i P. M. OGIBAŁOW [952] oraz J. BREE [43]. Pokrewny problem cylindrów poddanych działaniu ciśnienia i strumienia neutronów badali K. R. MERCKX [410] oraz A. A. ILIUSZIN i P. M. OGIBAŁOW [953].

Kilka prac poświęcono bardziej złożonym przypadkom obciążenia. W. M. SOBOLEWSKI rozpatrywał w pracy [1165] jednoczesne działanie ciśnienia, siły osiowej i różnicy temperatur, zakładając przy tym, iż rura znajduje się w ośrodku sprężystym. Praca W. M. SOBOLEWSKIEGO [1167] uwzględnia dodatkowo siły masowe, związane z wirowaniem, w zakresie plastycznego wzmocnienia materiału. T. B. KAMMASH, S. A. MURCH i P. M. NAGHDI [304] rozpatrywali jednoczesne działanie ciśnienia, siły osiowej i promieniowo rozłożonych źródeł ciepła; założono wzmocnienie plastyczne materiału w nawiązaniu do hipotezy

Treski-Guesta. A. Sz. DADASZEW [885] badał plastyczne przystosowanie się wirujących cylindrów do zadanego programu obciążeń cieplnych.

28.4. Obciążenia złożone grubościennych powłok kulistych. Problematyka grubościennych powłok kulistych w przypadku biegunowej symetrii odbiega jedynie nieznacznie od problematyki kołowo-symetrycznych rur grubościennych. Występuje tu jednak znacznie mniej typów obciążeń, np. odpada możliwość działania siły osiowej, tak że najczęściej spotykanym układem obciążeń złożonych jest jednoczesne działanie różnicy ciśnień i różnicy temperatur.

M. G. DERRINGTON i W. JOHNSON [89] badali początek uplastycznienia i określali optymalny rozkład temperatury. W. M. SOBOLEWSKI [1166] rozpatrywał kulę znajdującą się w ośrodku sprężystym. M. ROGOZIŃSKI [585] przyjmował liniową zależność granicy plastyczności od temperatury. Dalsze prace należą do E. WHALLEY' A [736], W. JOHNSONA i P. B. MELLORA [297] (analiza tworzenia się stref uplastycznionych) oraz K. A. V. PANDALAI i S. A. PATELA [516] (wzmocnienie plastyczne).

Problemy plastycznego przystosowania się do zmiennych ciśnień i temperatur są przedmiotem prac D. A. GOCHFELDA i P. I. JERMAKOWA [866] oraz A. Sz. DADASZEW [886]. A. A. ILIUSZIN i P. M. OGIBALOW [953] badali grubościenną powłokę kulistą, poddaną działaniu ciśnienia i strumienia neutronów.

28.5. Badania doświadczalne rur cienkościennych. Jak już wspomnieliśmy w p. 28.1, dzięki pełnej jednorodności stanu naprężenia (ściślej mówiąc, dzięki pomijalnie małej niejednorodności tego stanu) liczne badania doświadczalne nad rurkami cienkościennymi, poddanymi działaniu jednoczesnego ciśnienia wewnętrznego, rozciągania i skręcania, służyły do formułowania lub weryfikacji praw fizykalnych na szczelbu *P* punktu ciała.

W najprostszym przypadku, ciśnienia wewnętrznego z rozciąganiem osiowym, mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia o ustalonych kierunkach głównych (osiowy i obwodowy). J. MARIN i J. A. SAUER [388] oraz L. W. HU i J. MARIN [275] badali tą drogą prawa fizykalne dla stopów aluminium; A. M. ŻUKOW [913] — dla stali EI 415; N. ALBERTI [1] — warunek plastyczności dla żeliwa; J. MIASKOWSKI i W. SZCZEPIŃSKI [412] — wpływ wstępnych odkształceń plastycznych na warunek plastyczności dla mosiądzu; G. B. TAŁYPOW i A. I. CZISTIAKOW [1201] — podobny efekt dla stali; J. F. BRATT i Ö. KANAN [42] — warunek plastyczności stopu aluminium przy dwukierunkowym ścisaniu; W. N. BASTUN i N. I. CZERNJAK [796] — warunek plastyczności dla stali wykazującej anizotropię.

W przypadku rozciągania ze skręcaniem mamy do czynienia z jednoczesną (współzależną) zmianą kierunków głównych i stosunku naprężeń głównych. Warunek plastyczności weryfikowali na tej drodze A. ONO [499] (miedź, stopy aluminium), P. M. NAGHDI, F. ESSENBURG i W. KOFF [456] (kolejne powierzchnie czynno-bierne), JU. I. JAGN i O. A. SZISZMARIEW [1261] (rozciąganie przyłożone po skręceniu), F. R. RYBAŁKO, A. W. KOSTIENKO i L. P. ZIELENIN [1153] (zmienny moment skręcający przy stałej sile podłużnej). Istnienie naroży plastycznych badali A. PHILLIPS i G. A. GRAY [537] (próbki ze stopu aluminium), P. K. BERTSCH i W. N. FINDLEY [25] oraz O. A. SZISZMARIEW [1249, 1250] (nikiel).

Prawa fizykalne odkształceń plastycznych weryfikowali B. BUDIANSKY, N. F. DOW, R. W. PETERS i R. P. SHEPHERD [49] (stop aluminium 14S-T4), A. PHILLIPS [533] (aluminium 2S-O), A. M. ŻUKOW i JU. N. RABOTNOW [910, 912] (stal 20 i stal 25), E. A. DAVIS [87] (stal), J. MARIN i H. A. B. WISEMAN [389] (stop aluminium 14S-TG), P. M. NAGHDI, J. C. ROWLEY i C. W. BEADLE [455] (stop aluminium), M. FEIGEN [132] (stop aluminium), W. A. SWIESZNIKOWA [1158] (miedź, aluminium, mosiądz), B. M. MAŁYSZEW [1064, 1065] (miedź, mosiądz, aluminium, stal), T. OTA, A. SHINDA i H. FUKUOKA [511] (stal, problem anizotropii), H. PAYNE i S. J. CZYZAK [524] (skręcanie próbki rozciągniętej) oraz B. PAUL, W. CHEN i LEE LI-CHIH [522] (stop aluminium, skokowy przyrost obciążeń).

W przypadku skręcania z ciśnieniem wewnętrznym mamy również do czynienia ze współzależnością zmiany stosunku naprężeń głównych i kierunków głównych. Ten typ obciążenia stosował S. S. GILL [169] do badania procesów neutralnych, YANG NAN-SHENG [750] (prawa fizykalne dla mosiądzu), SZ. N. KAC i Ł. M. KACZANOW [972] (prawa fizykalne dla stali) oraz J. PARKER i M. B. BASSETT [519] (problem istnienia naroży plastycznych).

W najogólniejszym przypadku jednorodnym skręcania z rozciąganiem i ciśnieniem wewnętrznym, $P_3 \rightarrow B_3$, możemy niezależnie zmieniać kierunki główne i stosunek naprężeń głównych. Na tej drodze A. PHILLIPS i L. KAECHLE [534] badali prawa fizykalne dla aluminium 2S-O, K. SAITO i H. IGAKI [598] tworzenie się anizotropii w wyniku odkształceń plastycznych miedzi, N. M. MITROCHIN [1080] — problem istnienia jednolitej krzywej wzmocnienia dla próbek niklowych, S. S. GILL i J. PARKER [170] — prawa fizykalne dla mosiądzu, N. JA. MICHAJŁOW i JU. I. JAGN [1082] — wpływ utraty stateczności na nośność graniczną, wreszcie J. PARKER i J. KETTLEWELL [518] — prawa fizykalne dla miedzi.

29. Obciążenia złożone cylindrów nie wykazujące kołowej symetrii

29.1. Ogólne obciążenia złożone rury cienkościennej

29.1.1. Sformułowanie zagadnienia. A. A. GWOZDIEW [846] badał nośność graniczną rur cienkościennej w dość ogólnym stanie obciążenia, mianowicie: siła osiowa N , dwie siły poprzeczne T_x i T_y , dwa momenty zginające $M_{\theta x}$ i $M_{\theta y}$ oraz moment skręcający M_z . Zastosował on podejście wariacyjne w odniesieniu do pól statycznie częściowo dopuszczalnych, spełniających warunek plastyczności i warunki brzegowe na poboczniczy, a nie spełniających na ogół warunków równowagi wewnętrznej, zatem uzyskane przez niego rozwiązanie stanowi pewne górne oszacowanie nośności granicznej.

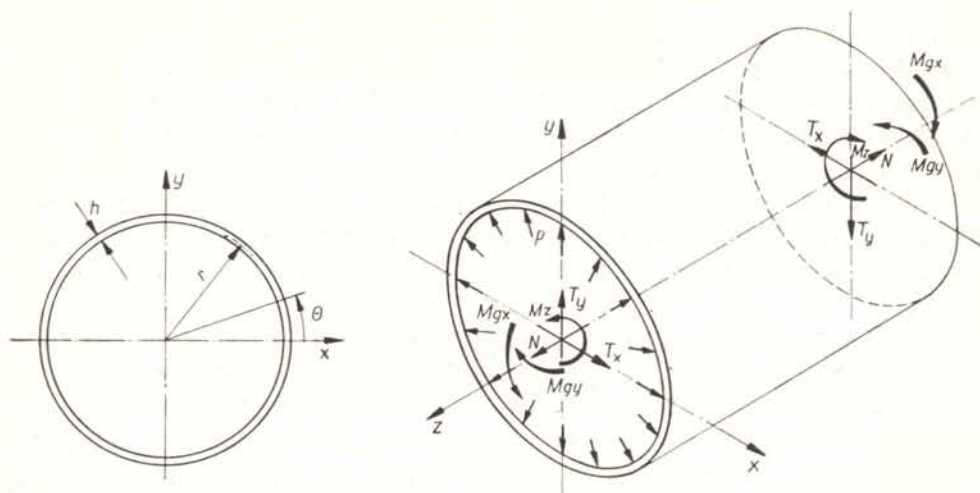
Rozwiązanie Gwozdiewa, choć bardzo ogólne, nie uwzględnia jednak jednego z najważniejszych obciążeń, jakim jest w przypadku rurociągów ciśnienie wewnętrzne. W nawiązaniu do pracy J. SKRZYPKA i M. ŻYCKOWSKIEGO [655] podamy obecnie rozwiązanie ogólniejsze, uwzględniające możliwość występowania ciśnienia.

Będziemy rozpatrywać rurę cienkościnną w siedmiokrotnie złożonym stanie obciążenia (rys. 146). Przy przybliżonym założeniu braku obwodowego zginania w uplastycznionej ścianie rury stan naprężenia wyznaczają trzy składowe σ_z , σ_θ i $\tau_{z\theta}$, stałe na grubości, tak że badany problem można będzie sklasyfikować jako P_3/B_7 . Przyjmujemy, że składowe te spełniają warunek plastyczności HMH

$$(29.1) \quad \sigma_z^2 - \sigma_z \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{z\theta}^2 = \sigma_0^2$$

w każdym punkcie rury (ściślej biorąc, rozpatrywanego przekroju niebezpiecznego rury), Ponadto założymy wynikającą z warunku równowagi stałość naprężenia σ_θ w przekroju,

$$(29.2) \quad \sigma_\theta = \frac{r}{h} p = \text{const},$$



Rys. 146. Rura cienkościenna w siedmiokrotnie złożonym stanie obciążenia

gdzie r oznacza średni promień, h — grubość ścianki rury, p — ciśnienie wewnętrzne. Nie jest natomiast na ogół spełniony warunek równowagi wewnętrznej

$$(29.3) \quad \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} = 0,$$

który powinien obowiązywać w każdym razie przy braku sił poprzecznych w rurze.

Wzór (29.2) wyraża obciążenie p wprost przez naprężenia σ_θ , natomiast pozostałe obciążenia są określone wzorami całkowymi

$$(29.4) \quad \begin{aligned} N &= \int_0^{2\pi} \sigma_z hr d\theta, & M_{gx} &= \int_0^{2\pi} \sigma_z hr^2 \sin \theta d\theta, & M_{gy} &= \int_0^{2\pi} \sigma_z hr^2 \cos \theta d\theta, \\ M_s &= M_z = \int_0^{2\pi} \tau_{z\theta} hr^2 d\theta, & T_x &= \int_0^{2\pi} \tau_{z\theta} hr \sin \theta d\theta, & T_y &= \int_0^{2\pi} \tau_{z\theta} hr \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu będziemy się posługiwali obciążeniami bezwymiarowymi, mianowicie

$$(29.5) \quad \begin{aligned} n &= \frac{N}{2\pi r h \sigma_0}, & m_x &= \frac{M_{gx}}{4r^2 h \sigma_0}, & m_y &= \frac{M_{gy}}{4r^2 h \sigma_0}, \\ m_z &= \frac{\sqrt{3} M_z}{2\pi r^2 h \sigma_0}, & t_x &= \frac{\sqrt{3} T_x}{4r h \sigma_0}, & t_y &= \frac{\sqrt{3} T_y}{4r h \sigma_0} \end{aligned}$$

oraz

$$(29.6) \quad q = \frac{r}{h \sigma_0} p.$$

Wprowadzimy obecnie dogodną parametryzację warunku plastyczności (29.1), uogólniającą parametryzację Gwozdiewia:

$$(29.7) \quad 3\tau_{z\theta}^2 = \sigma_0^2 \sin^2 \psi, \quad \sigma_z^2 - \sigma_z \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_0^2 \cos^2 \psi,$$

gdzie $\psi = \psi(\theta)$. Składowe stanu naprężenia można wyrazić przez funkcję ψ następująco

$$(29.8) \quad \tau_{z\theta} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \psi, \quad \sigma_\theta = \frac{r}{h} p = \text{const},$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2} [\sigma_\theta \mp \sqrt{4\sigma_0^2 \cos^2 \psi - 3\sigma_\theta^2}],$$

przy czym znak górny we wzorze na σ_z obowiązuje w pewnym (chwilowo nieznanym) przedziale $\theta_1^* < \theta < \theta_2^*$, natomiast znak dolny — w pozostałym przedziale $\theta_2^* < \theta < \theta_1^* + 2\pi$.

Po podstawieniu (29.8) do (29.4) zapiszemy wzory na bezwymiarowe obciążenia następująco:

$$(29.9) \quad n = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \left[\frac{\sigma_\theta}{2\sigma_0} - \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \right] d\theta + \int_{\theta_2^*}^{\theta_1^* + 2\pi} \left[\frac{\sigma_\theta}{2\sigma_0} + \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \right] d\theta \right\},$$

$$m_x = \frac{1}{4} \left\{ \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \left[\frac{\sigma_\theta}{2\sigma_0} - \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \right] \sin \theta d\theta + \int_{\theta_2^*}^{\theta_1^* + 2\pi} \left[\frac{\sigma_\theta}{2\sigma_0} + \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \right] \sin \theta d\theta \right\},$$

$$m_y = \frac{1}{4} \left\{ \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \left[\frac{\sigma_\theta}{2\sigma_0} - \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \right] \cos \theta d\theta + \int_{\theta_2^*}^{\theta_1^* + 2\pi} \left[\frac{\sigma_\theta}{2\sigma_0} + \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \right] \cos \theta d\theta \right\},$$

$$m_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \psi d\theta, \quad t_x = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin \theta d\theta, \quad t_y = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \theta d\theta.$$

Przy pewnej przyjętej wartości σ_θ będziemy teraz poszukiwali maksimum jednego z powyższych obciążeń przy ustalonych wartościach obciążeń pozostałych; jedyną funkcją niewiadomą jest tu $\psi = \psi(\theta)$. Wprowadzając mnożniki λ_i dla tego zagadnienia izoperymetrycznego rachunku wariacyjnego zapiszemy funkcjonał Lagrange'a następująco

$$(29.10) \quad \tilde{F}[\psi(\theta)] = \lambda_1 2\pi n + \lambda_2 2\pi m_z + \lambda_3 4m_y + \lambda_4 4t_x + \lambda_5 4m_x + \lambda_6 4t_y,$$

czyli

$$(29.11) \quad \tilde{F}[\psi(\theta)] = \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} g_1[\theta, \psi(\theta)] d\theta + \int_{\theta_2^*}^{\theta_1^*+2\pi} g_2[\theta, \psi(\theta)] d\theta,$$

gdzie dla skrócenia oznaczono

$$(29.12) \quad g_{1,2} = (\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta) \left(\frac{\sigma_\theta}{2\sigma_0} \mp \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \right) + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta) \sin \psi.$$

Mnożniki Lagrange'a wprowadzono tu dla symetrii zapisu przy wszystkich obciążeniach; w istocie jeden z nich jest niepotrzebny (równy jedności), a w końcowych wzorach wystąpią jedynie stosunki tych mnożników, a więc tylko pięć parametrów.

29.1.2. Rozwiązanie ogólne. Poszukujemy takich funkcji $\psi = \psi_1(\theta)$ w przedziale $\theta_1^* < \theta < \theta_2^*$ i $\psi = \psi_2(\theta)$ w przedziale $\theta_2^* < \theta < \theta_1^* + 2\pi$ oraz takich wartości kątów θ_1^* i θ_2^* , które zapewnią maksimum funkcjonau (29.11). Prowadzi to najpierw do dwóch równań Eulera-Lagrange'a w poszczególnych przedziałach, które wobec braku pochodnych funkcji ψ w wyrażeniach podcałkowych można zapisać następująco:

$$(29.13) \quad \frac{\partial g_1}{\partial \psi_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial g_2}{\partial \psi_2} = 0.$$

Kąty graniczne wyznaczmy natomiast z warunków ciągłości:

$$(29.14) \quad g_1 = g_2 \quad \text{dla} \quad \theta = \theta_1^* \quad \text{i} \quad \theta = \theta_2^*,$$

do których można zresztą dojść traktując (29.11) formalnie jako funkcjonau z ruchomymi końcami i stosując dodatkowe warunki ekstremalizacji ze względu na θ_1^* i θ_2^* .

Powyższe warunki po wykorzystaniu (29.12) i wykonaniu niezbędnych działań prowadzą do równań

$$(29.15) \quad (\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta) \sin \psi_1 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta) \sqrt{\cos^2 \psi_1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} = 0,$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta) \sin \psi_2 - (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta) \sqrt{\cos^2 \psi_2 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} = 0,$$

oraz dla obu kątów θ_1^* i θ_2^* :

$$(29.16) \quad \lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta^* + \lambda_5 \sin \theta^* = 0.$$

Rozwiązując równania (29.15) ze względu na funkcje ψ_1 i ψ_2 otrzymujemy odpowiednio w przedziałach (θ_1^*, θ_2^*) i $(\theta_2^*, \theta_1^* + 2\pi)$

$$(29.17) \quad \sin \psi_1 = - \frac{\kappa (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta)^2}},$$

$$\sin \psi_2 = + \frac{\kappa (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta)^2}},$$

gdzie dla skrócenia zapisu wprowadzono oznaczenie

$$(29.18) \quad \kappa = \text{sign}(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta).$$

Ponieważ jednak — zgodnie z przyjętymi definicjami przedziałów 1 i 2 i wobec (29.16) — w przedziale 1, $\theta_1^* < \theta < \theta_2^*$, zachodzi

$$(29.19) \quad \kappa = \kappa_1 = \text{sign}(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta) = -1,$$

natomiast w przedziale 2, $\theta_2^* < \theta < \theta_1^* + 2\pi$, zachodzi

$$(29.20) \quad \kappa = \kappa_2 = \text{sign}(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta) = +1,$$

zatem ostatecznie

$$(29.21) \quad \sin \psi_1 = \sin \psi_2 = + \frac{(\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta)^2}}.$$

Kąty graniczne θ_1^* i θ_2^* można określić z równania (29.16), które w przedziale $0 < \theta < 2\pi$ ma (z reguły) dwa pierwiastki, jednak okazuje się, że do napisania równania powierzchni granicznej efektywne ich wartości nie są potrzebne. Obliczając mianowicie wartość pierwiastka występującego w funkcjach g_1 i g_2 (29.12) wobec (29.21) otrzymujemy

$$(29.22) \quad \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} = \frac{\kappa (\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta)^2}},$$

gdzie κ jest określone wzorem (29.18), zatem $\kappa = -1$ w przedziale pierwszym, a $\kappa = +1$ w przedziale drugim. Pierwiastki te różnią się więc w obu przedziałach jedynie znakiem, a ponieważ funkcje g_1 i g_2 (29.12) różnią się też jedynie znakiem przy pierwiastku, zatem ostatecznie funkcja podcałkowa jest w obu przedziałach identyczna. Tak więc po wykorzystaniu periodyczności tej funkcji otrzymujemy następujące ogólne wzory na obciążenia:

$$(29.23) \quad \begin{aligned} n &= \frac{\sigma_\theta}{2\sigma_0} + \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta) d\theta}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta)^2}}, \\ m_x &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta)^2}}, \\ m_y &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta) \cos \theta d\theta}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta)^2}}, \\ m_z &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta) d\theta}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta)^2}}, \\ t_x &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta)^2}}, \\ t_y &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_0^2}} \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta) \cos \theta d\theta}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \theta + \lambda_6 \cos \theta)^2}} \end{aligned}$$

oraz dodatkowo

$$(29.24) \quad q = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}.$$

Całki (29.23) są całkami eliptycznymi. W ogólnym przypadku redukcja ich do postaci normalnej nastęrcza trudności, natomiast w przypadkach szczególnych tok postępowania ulega z reguły uproszczeniu. Określają one powierzchnię graniczną w funkcji pięciu parametrów — stosunków mnożników Lagrange'a λ_i .

29.1.3. Jednoczesne rozciąganie, zginanie, ścinanie i ciśnienie wewnętrzne. Jeżeli we wzorach (29.23) przyjmiemy $\lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, to mianowniki tych wzorów, wynoszące $[(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \theta)^2 + \lambda_4^2 \sin^2 \theta]^{1/2}$, stają się symetryczne względem $\theta = 0$ i $\theta = \pi$. Wobec tego wartości wszystkich całek, których liczniki są wtedy antysymetryczne względem $\theta = 0$ lub $\theta = \pi$ są równe zero, czyli $m_x = m_z = t_y = 0$. Mamy więc wtedy do czynienia z jednoczesnym zginaniem i ścinaniem w płaszczyźnie xz , rozciąganiem i ciśnieniem wewnętrznym. Odpowiednie obciążenia po wprowadzeniu nowych oznaczeń

$$(29.25) \quad A_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \quad A_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_3},$$

wyrugowaniu σ_θ wzorem (29.24) i wykorzystaniu parzystości całkowanych funkcji dadzą się określić wzorami

$$(29.26) \quad \begin{aligned} n &= \frac{q}{2} + \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} \int_0^\pi \frac{(A_1 + \cos \theta) d\theta}{\sqrt{(A_1 + \cos \theta)^2 + A_4^2 \sin^2 \theta}}, \\ m_y &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} \int_0^\pi \frac{(A_1 + \cos \theta) \cos \theta d\theta}{\sqrt{(A_1 + \cos \theta)^2 + A_4^2 \sin^2 \theta}}, \\ t_x &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} \int_0^\pi \frac{A_4 \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{(A_1 + \cos \theta)^2 + A_4^2 \sin^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Całki (29.26) można sprowadzić do postaci normalnej przez zastosowanie podstawienia

$$(29.27) \quad \zeta = 2 \operatorname{arccg} \sqrt{\frac{\alpha_1(1 - \cos \theta)}{\alpha_2(1 + \cos \theta)}},$$

gdzie

$$(29.28) \quad \alpha_{1,2}^2 = \left(\mp 1 - \frac{A_1}{1 - A_4^2} \right)^2 + \frac{A_1^2 + A_4^2}{1 - A_4^2} - \frac{A_1^2}{(1 - A_4^2)^2}.$$

Ostateczne wzory wyrażają się kombinacjami liniowymi normalnych pełnych całek eliptycznych wszystkich trzech typów, mianowicie

$$n = \frac{q}{2} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4} q^2}{1 - A_1^2}} \left[(b - A_1) \mathbf{K}(k) - b \mathbf{\Pi} \left(\frac{1}{b^2 - 1}, k \right) \right],$$

$$m_y = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4}q^2}{1 - A_1^2}} \left\{ (2b^2 - bA_1 - 1) \mathbf{K}(k) + \frac{b^2 - 1}{k'^2 + k^2 b^2} \mathbf{E}(k) - \right. \\ \left. - b \left[2b - A_1 - \frac{(1 - 2k^2 + 2b^2 k^2)b}{k'^2 + k^2 b^2} \mathbf{\Pi} \left(\frac{1}{b^2 - 1}, k \right) \right] \right\},$$

(29.29)

$$t_x = A_4 \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4}q^2}{1 - A_1^2}} \left\{ 2(b^2 - 1) \mathbf{K}(k) - \frac{b^2 - 1}{k'^2 + k^2 b^2} \mathbf{E}(k) + \right. \\ \left. + b^2 \left[2 - \frac{1 - 2k^2 + b^2 k^2}{k'^2 + k^2 b^2} \right] \mathbf{\Pi} \left(\frac{1}{b^2 - 1}, k \right) \right\},$$

gdzie

$$b = - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

(29.30)

$$k^2 = \frac{1 - A_1^2 - A_4^2}{1 - A_1^2}, \quad k'^2 = 1 - k^2.$$

Dalsze, bardziej szczególne przypadki omówione są w pracy [655].

29.1.4. Zginanie ze skręcaniem. Przyjmując we wzorach ogólnych (29.23) $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$ oraz dodatkowo $\sigma_\theta = 0$, otrzymujemy rozwiązany przez Gwoźdźdiewa przypadek zginania ze skręcaniem. Istotnie, wtedy $n = m_x = t_x = t_y = 0$, $q = 0$, a całki eliptyczne, określające pozostałe dwa obciążenia, dadzą się sprowadzić do następującej postaci normalnej

$$m_y = m_\theta = \sqrt{1 + A_2^2} \left[\mathbf{E}(k) - \frac{A_2^2}{1 + A_2^2} \mathbf{K}(k) \right],$$

(29.31)

$$m_z = m_s = \frac{2A_2}{\pi \sqrt{1 + A_2^2}} \mathbf{K}(k),$$

gdzie

$$A_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \quad k^2 = \frac{1}{1 + A_2^2}.$$

(29.32)

Są to w nieco innym zapisie przybliżone wzory (22.96), wyprowadzone dla przekroju kołowego pełnego przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów. Przebieg tej krzywej pokazano na rys. 118 (oszacowanie górne).

Zginanie ze skręcaniem rur cienkościennych w zakresie plastycznym rozważali również R. HILL i M. P. L. SIEBEL [225, 649] oraz G. GUERRA [190].

29.1.5. Wpływ zginania obwodowego. Podane powyżej rozwiązania oparte były na przybliżonym założeniu czysto błonowego stanu w ścianie rury, traktowanej jako powłoka walcowa. Podobne założenie przyjmowali również M. I. JERCHOW [904] oraz

A. I. WINOGRADOW i S. P. FIESIK [837] przy rozpatrywaniu bardziej szczególnego, ale praktycznie niezwykle ważnego przypadku ciśnienia wewnętrznego i zginania. W istocie, jak wykazali M. MROWIEC i M. ŻYCZKOWSKI [430, 431], w ścianie rury pojawi się wtedy na ogół również zginanie obwodowe (moment m_0), które obniża nośność graniczną. Istotnie, w miejscu pierwszego uplastycznienia (gdzie rozciągające naprężenia obwodowe spotykają się ze ściskającymi naprężeniami osiowymi od zginania) nastąpi jak gdyby osłabienie lokalne ścianki, a następstwem takiego osłabienia jest pojawienie się zginania obwodowego.

W oparciu o dość złożone statycznie dopuszczalne pole naprężeń i aproksymację brzegową typu Hermite'a wyprowadzono w pracy [431] następujący wzór, określający oszacowanie dolne nośności granicznej rury cienkościennej, poddanej jednoczesnemu ciśnieniu, zginaniu i rozciąganiu, a uwzględniający wpływ zginania obwodowego:

$$(29.33) \quad m = \sum_{j=0}^k \alpha_{jk} q^j,$$

gdzie

$$(29.34) \quad m = \frac{M_g}{\pi h r^2 \sigma_0}, \quad q = \frac{r}{h \sigma_0} p.$$

Współczynniki α_{jk} zależą od parametru ψ , określającego wpływ siły podłużnej:

$$(29.35) \quad \psi = \frac{N}{2\pi p r^2};$$

w przypadku rury zamkniętej dnami $\psi = 1/2$. Przy przyjęciu $k = 4$ (aproksymacja wielomianem czwartego stopnia), otrzymano:

$$(29.36) \quad \begin{aligned} \alpha_{04} &= \frac{4}{\pi}, & \alpha_{14} &= -(1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right), \\ \alpha_{24} &= -\frac{3}{2\pi} + \frac{3}{8} (1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right) t, \\ \alpha_{34} &= \sqrt{1-\psi+\psi^2} \left[\frac{3}{\pi} - \frac{3}{4} (1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right) t \right] + \\ &+ 3(1-\psi+\psi^2) (1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right) - \frac{16}{\pi} (1-\psi+\psi^2)^{3/2} + \\ &+ \frac{(1-\psi+\psi^2)^{3/2}}{2(1-2\psi)} [4\sqrt{1-\psi+\psi^2} + (2-\psi)t], \\ \alpha_{44} &= -(1-\psi+\psi^2) \left[\frac{3}{2\pi} - \frac{3}{8} (1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right) t \right] - \\ &- 2(1-\psi+\psi^2)^{3/2} (1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right) + \frac{12}{\pi} (1+\psi+\psi^2)^2 - \\ &- \frac{(1-\psi+\psi^2)^2}{2(1-2\psi)} [4\sqrt{1-\psi+\psi^2} + (2-\psi)t], \end{aligned}$$

gdzie t jest parametrem cienkościenności, $t = h/r$.

W przypadku $\psi = 1/2$ wzory powyższe stają się rozbieżne; okazuje się wtedy, że wpływ zginania obwodowego zanika i wystarczająco dokładne jest przybliżenie elipsą

$$(29.37) \quad m = \frac{4}{\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}.$$

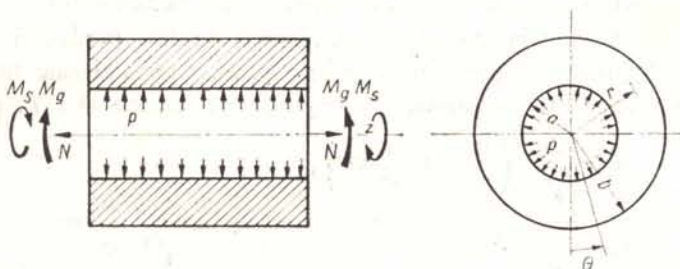
Równanie (29.37) wynika zarówno z zaproponowanych ogólniejszych wzorów JERCHOWA [904], jak i ze wzorów (29.23) (przy nieco zmienionych oznaczeniach). Jak widać, pochodna dm/dq w punkcie $q = 2/\sqrt{3}$ zmierza do nieskończoności, co powoduje wspomnianą rozbieżność wzorów (29.36). Przy $\psi = 0$ natomiast wpływ zginania obwodowego jest bardzo istotny; ze wzorów (29.33) i (29.36) otrzymujemy (dla $t = h/r = 0,1$)

$$(29.28) \quad m = 1,273 - 0,979q - 0,440q^2 + 0,825q^3 - 0,679q^4.$$

Parabola ta leży znacznie poniżej elipsy (29.37).

29.2. Ogólne obciążenie rury grubościennej wykazujące jednorodność podłużną

29.2.1. Założenia i równania podstawowe. Rozpatrzony w p. 28 ogólny przypadek kołowo-symetryczny obciążenia rury grubościennej nie obejmował jednego z bardzo ważnych przypadków obciążenia, mianowicie zginania. Zginanie bez ścinania będziemy mogli ująć rozpatrując stany naprężenia zależne od r i θ , a niezależne od z we współrzędnych walcowych. Obecnie rozważymy ten właśnie przypadek, mianowicie stan graniczny rury grubościennej pod działaniem ciśnienia wewnętrznego, rozciągania, skręcania i zginania (rys. 147). Zagadnienie to było przedmiotem prac M. ŻYCZKOWSKIEGO [781] i J. SKRZYPKA [652, 654].



Rys. 147. Rura grubościenna pod działaniem ciśnienia, rozciągania, zginania i skręcania

Przyjmijmy założenia podobne, jak w p. 28, w szczególności warunek plastyczności HMH, prawo podobieństwa dewiatorów (Hencky'ego-Iliuszina lub Levy'ego-Misesa) i założenie nieściśliwości materiału. Ponadto przyjmijmy założenie całkowitego uplastycznienia rury w stanie granicznym, które tu wymaga bardziej szczegółowego naświetlenia. Jakkolwiek w każdym z osobna przypadku szczególnym jest ono spełnione ściśle, to jednak w przypadku złożonym — jak zobaczymy — jest to jedynie założenie przybliżone. Aby ściśle je spełnić, muszą wystąpić pewne (niewielkie) obciążenia ciągłe normalne lub styczne, zależne od kąta θ . Jednakże błędy polegające na pominięciu tych obciążeń wydają się niewielkie, natomiast rozpatrywanie schematów zniszczenia, wykazujących pewne strefy sprężyste (lub sztywne), spowodowałoby znaczne komplikacje.

Przy założeniu niezależności naprężeń od zmiennej z i pominięciu sił masowych równania równowagi wewnętrznej (7.15) upraszczają się do postaci

$$(29.39) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Ponadto skorzystamy z warunków nierozdzielności we współrzędnych walcowych, (8.42), uproszczonych tu do postaci

$$(29.40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\varepsilon_z}{r} \right) = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \gamma_{\theta z})}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\gamma_{zr}}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r \gamma_{\theta z})}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 (r \gamma_{\theta z})}{\partial r \partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

Dołączając do tych dziewięciu równań warunek plastyczności (28.3), warunek nieściśliwości (28.4) i prawo podobieństwa dewiatorów (28.5) otrzymujemy układ 16 równań o niewiadomych naprężeniach, odkształceniach (lub prędkościach odkształceń) i funkcji φ : «ukrytymi» niewiadomymi zostają ponadto przemieszczenia lub prędkości przemieszczeń.

Redukcję liczby równań uzyskamy najpierw przez wprowadzenie funkcji naprężeń typu (12.13). Wprowadzimy mianowicie bezwymiarowe funkcje Φ i Ψ , takie, że

$$(29.41) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\varrho} \Phi' + \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \Phi'', & \tau_{rz} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{1}{\varrho} \Psi', \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\varrho} \Phi'' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi' \right), & \tau_{\theta z} &= -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \Psi', \end{aligned}$$

gdzie primy oznaczają różniczkowanie względem bezwymiarowego promienia $\varrho = r/b$, kropki — względem kąta θ . Równania (29.39) są tym samym tożsamościowo spełnione.

Trzy pierwsze równania (29.40) określają odkształcenie ε_z . Całka ogólna, spełniająca wszystkie te równania, jest mianowicie równa

$$(29.42) \quad \varepsilon_z = C_1 + C_2 r \cos(\theta - \theta_0),$$

a po wprowadzeniu bezwymiarowego promienia ϱ i przyjęciu układu osi jak na rys. 147, dla którego $\theta_0 = 0$,

$$(29.43) \quad \varepsilon_z = \lambda + \kappa \varrho \cos \theta,$$

gdzie λ i κ oznaczają parametry proporcjonalne odpowiednio do wydłużenia i krzywizny

osi (lub ich prędkości). Z równań (28.4) i (28.5) możemy teraz określić naprężenie σ_z , które nie występuje w warunkach równowagi, mianowicie

$$(29.44) \quad \sigma_z = \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{H} \varepsilon_z + \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta),$$

gdzie bezwymiarowy «moduł plastyczny» H jest określony wzorem

$$(29.45) \quad H = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \varphi.$$

Funkcje naprężeń Φ i Ψ oraz funkcję H potraktujemy jako podstawowe niewiadome w naszym zagadnieniu. Będą one określone równaniami, wynikającymi z warunku plastyczności i pozostałych warunków nierozdzielności. Po podstawieniu uzyskanych wzorów do warunku plastyczności (28.3) i prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(29.46) \quad \left\{ \left(\Phi'' - \frac{1}{\varrho} \Phi' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right)^2 + 4 \left[\left(\frac{1}{\varrho} \Phi' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right)^2 + (\Psi')^2 + \left(\frac{1}{\varrho} \Psi' \right)^2 \right] - 1 \right\} H^2 + \\ + 3(\kappa^2 \varrho^2 \cos^2 \theta + 2\kappa \lambda \varrho \cos \theta + \lambda^2) = 0.$$

Czwarte z równań (29.40) po wyrażeniu odkształceń przez naprężenia z prawa podobieństwa dewiatorów przybiera postać

$$(29.47) \quad \left(\varrho^2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + 3\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left[\left(\Phi'' - \frac{1}{\varrho} \Phi' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right) H \right] + \\ + 4 \left(\varrho \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[\left(\frac{1}{\varrho} \Phi' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right) H \right] = 0.$$

Wreszcie piąte i szóste równanie określające funkcję Ψ nie są niezależne: dadzą się one raz scałkować i łącznie prowadzą do następującego związku [652]:

$$(29.48) \quad \left(1 + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) (H\Psi') + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H}{\varrho} \Psi' \right) + 3\varrho = 0,$$

gdzie 3 jest stałą całkowania, proporcjonalną do jednostkowego kąta skrócenia rury.

Do układu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych (29.46), (29.47) i (29.48), dołączonych jest sześć warunków brzegowych (właściwie trzy warunki w nomenklaturze równań różniczkowych cząstkowych); $\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0$ dla $\varrho = 1$ oraz $\sigma_r = -p$, $\tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0$ dla $\varrho = a/b = \beta$. Wobec (29.41) zapiszemy te warunki w formie

$$(29.49) \quad \begin{aligned} \Phi'(1, \theta) + \Phi''(1, \theta) &= 0, & \beta \Phi'(\beta, \theta) + \Phi''(\beta, \theta) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \beta^2 \frac{p}{\sigma_0}, \\ \Phi'(1, \theta) - \Phi''(1, \theta) &= 0, & \beta \Phi''(\beta, \theta) - \Phi'(\beta, \theta) &= 0, \\ \Psi'(1, \theta) &= 0, & \Psi'(\beta, \theta) &= 0. \end{aligned}$$

Warunki te nie uwzględniają możliwości występowania ciśnień stycznych, które w zastosowaniach praktycznych pojawiają się stosunkowo rzadko.

29.2.2. Rozwiązanie dla przypadku dużego ciśnienia. Ścisłe rozwiązanie układu trzech równań różniczkowych (29.46), (29.47) i (29.48) natrafia na trudności.

Zastosujemy więc dwukrotnie metodę małego parametru, a następnie uogólnioną aproksymację brzegową Hermite'a, wykorzystując dodatkowo pewne wcześniej wyprowadzone wzory dla przypadków szczególnych. Metoda małego parametru prowadzi tu nie tylko do linearyzacji ale i rozprzęgnięcia układu równań.

Przy założeniu $\kappa = \lambda = \vartheta = 0$, odpowiadającym działaniu ciśnienia wewnętrznego w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, równania powyższe ulegają znacznemu uproszczeniu i z łatwością znajdujemy rozwiązanie

$$(29.50) \quad \begin{aligned} \Phi &= \Phi_{000} = \frac{1}{2} \varrho^2 \ln \varrho - \frac{1}{4} \varrho^2, \\ H &= H_{000} = \frac{D}{\varrho^2}, \quad \Psi = \Psi_{000} = 0, \end{aligned}$$

gdzie D jest stałą, która przy pełnym uplastycznieniu pozostaje niewyznaczoną. Obecnie przyjmiemy, że parametry κ/D , λ/D i ϑ/D są małe i będziemy poszukiwali rozwiązania badanego układu równań w formie potrójnego szeregu potęgowego

$$(29.51) \quad \begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \vartheta^k, \\ H &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} H_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \vartheta^k, \\ \Psi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \vartheta^k. \end{aligned}$$

Rozpocniemy rozwiązywanie od równania (29.48). Podstawienie (29.51) umożliwia określenie poszczególnych funkcji Ψ_{ijk} równaniami liniowymi typu

$$(29.52) \quad \Psi_{ijk}'' - \frac{1}{\varrho} \Psi_{ijk}' + \frac{1}{\varrho^2} \Psi_{ijk} = f_{ijk}^{(\Psi)}(\varrho, \theta),$$

gdzie $f_{ijk}^{(\Psi)}$ — zależą od funkcji poprzednio obliczonych. Całkę ogólną tego równania będziemy poszukiwali w postaci szeregu Fouriera

$$(29.53) \quad \Psi_{ijk} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varrho) \cos n\theta + \bar{\Psi}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

przy czym $\bar{\Psi}_{ijk}$ oznacza całkę szczególną równania niejednorodnego (29.52). Po wykonaniu zaznaczonych działań otrzymuje się z uwagi na $f_n(\varrho)$ równania typu Eulera

$$(29.54) \quad f_n'' - \frac{1}{\varrho} f_n' - \frac{n^2}{\varrho^2} f_n = 0,$$

skąd

$$(29.55) \quad f_n(\varrho) = C \varrho^m, \quad m = 1 \mp \sqrt{1+n^2}.$$

Ostatecznie otrzymujemy dla dowolnej poprawki Ψ_{ijk} wzór ogólny

$$(29.56) \quad \Psi_{ijk} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{n1} \varrho^{1-\sqrt{1+n^2}} + C_{n2} \varrho^{1+\sqrt{1+n^2}}) \cos n\theta + \bar{\Psi}_{ijk}(\varrho, \theta).$$

Podobnie z równania (29.46) otrzymuje się układ równań z uwagi na Φ_{ijk} ;

$$(29.57) \quad \Phi'_{ijk} - \frac{1}{\rho} \Phi'_{ijk} - \frac{1}{\rho^2} \Phi''_{ijk} = f_{ijk}^{(\varphi)}(\rho, \theta)$$

o całce ogólnej

$$(29.58) \quad \Phi_{ijk} = C_{01} + C_{02} \rho^2 + (C_{11} \rho + C_{12} \rho \ln \rho) \cos \theta + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} [C_{n1} \rho \cos(\sqrt{n^2-1} \ln \rho) + C_{n2} \rho \sin(\sqrt{n^2-1} \ln \rho)] \cos n\theta + \bar{\Phi}_{ijk}(\rho, \theta).$$

Wreszcie z równania (29.47) otrzymuje się układ równań z uwagi na H_{ijk} :

$$(29.59) \quad H'_{ijk} + \frac{3}{\rho} H'_{ijk} - \frac{1}{\rho^2} H''_{ijk} = f_{ijk}^{(H)}(\rho, \theta)$$

o całce ogólnej

$$(29.60) \quad H_{ijk} = C_{01} + \frac{C_{02}}{\rho^2} + \left(\frac{C_{11}}{\rho} + \frac{C_{12}}{\rho} \ln \rho \right) \cos \theta + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{C_{n1}}{\rho} \cos(\sqrt{n^2-1} \ln \rho) + \frac{C_{n2}}{\rho} \sin(\sqrt{n^2-1} \ln \rho) \right] \cos n\theta + \bar{H}_{ijk}(\rho, \theta).$$

Stałe C_{n1} i C_{n2} są oczywiście różne dla każdej z obliczanych funkcji i poszczególnych i, j, k . Stałe te określamy z warunków brzegowych i z warunków zgodności przemieszczeń, obliczonych przez całkowanie odkształceń, [652]. Okazuje się przy tym, że warunków brzegowych na jednym z brzegów nie można spełnić ściśle, bowiem przyjęty schemat zniszczenia, odpowiadający całkowitemu uplastycznieniu rury, jest tylko schematem przybliżonym. Przyjęto ściśle spełnienie warunków brzegowych (29.49) na promieniu zewnętrznym $\rho = 1$ oraz przybliżone spełnienie tych warunków na promieniu wewnętrznym; zamiast wzorów «lokalnych» zastosowano wzory całkowe

$$(29.61) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_r d\theta = -p, \quad \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta} d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \tau_{rz} d\theta = 0.$$

Ostatecznie rozkład naprężeń z dokładnością do poprawek drugiego rzędu określono wzorami:

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \rho + \left\{ \frac{1}{8} (1 - \rho^6) + \frac{3}{52} \left[\frac{1}{\rho} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \frac{2\sqrt{3}}{\rho} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \rho^6 \right] \cos 2\theta \right\} \frac{\kappa^2}{D^2} + \frac{3}{8} (1 - \rho^4) \frac{\lambda^2}{D^2} + \frac{1}{12} (1 - \rho^6) \frac{\vartheta^2}{D^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho^5 \right) \cos \theta \frac{\kappa \lambda}{D^2} + \dots \right], \\ \sigma_\theta = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[(\ln \rho + 1) + \left\{ \frac{1}{8} (1 - 7\rho^6) + \frac{3}{52} \left[\frac{1}{\rho} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \frac{2\sqrt{3}}{\rho} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 14\rho^6 \right] \cos 2\theta \right\} \frac{\kappa^2}{D^2} + \frac{3}{8} (1 - 5\rho^4) \frac{\lambda^2}{D^2} + \frac{1}{12} (1 - 7\rho^6) \frac{\vartheta^2}{D^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - 7\rho^5 \right) \cos \theta \frac{\kappa \lambda}{D^2} + \dots \right],$$

(29.62)

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\left(\ln \varrho + \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} \varrho^3 \cos \theta \frac{\kappa}{D} + \frac{3}{2} \varrho^2 \frac{\lambda}{D} + \left\{ \frac{1}{8} (1-4\varrho^6) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{52} \left[\frac{1}{\varrho} \cos(\sqrt{3} \ln \varrho) - \frac{2\sqrt{3}}{\varrho} \sin(\sqrt{3} \ln \varrho) - \frac{15}{2} \varrho^6 \right] \cos 2\theta \right\} \frac{\kappa^2}{D^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} (1-3\varrho^4) \frac{\lambda^2}{D^2} + \frac{1}{12} (1-4\varrho^6) \frac{\vartheta^2}{D^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho} - 4\varrho^5 \right) \cos \theta \frac{\kappa\lambda}{D^2} + \dots \right], \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{3}{104} \left[\frac{7}{\varrho} \cos(\sqrt{3} \ln \varrho) - \frac{\sqrt{3}}{\varrho} \sin(\sqrt{3} \ln \varrho) - 7\varrho^6 \right] \sin 2\theta \frac{\kappa^2}{D^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho} - \varrho^5 \right) \sin \theta \frac{\kappa\lambda}{D^2} + \dots \right\}, \\ \tau_{\theta z} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} \varrho^3 \frac{\vartheta}{D} + \dots \right], \\ \tau_{zr} &= 0 + \dots \end{aligned}$$

Obliczając poszczególne obciążenia wzorami całkowymi otrzymujemy po wykonaniu prostych całkowań i wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych;

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi b^2 \sigma_0} N = \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} + \frac{3}{4} (1-\beta^2) \frac{\lambda}{D} - \frac{1}{8} \beta^2 (1-\beta^6) \frac{\kappa^2}{D^2} - \\ &\quad - \frac{3}{8} \beta^2 (1-\beta^4) \frac{\lambda^2}{D^2} - \frac{1}{12} \beta^2 (1-\beta^6) \frac{\vartheta^2}{D^2} + \dots, \end{aligned}$$

$$(29.63) \quad m_s = \frac{\sqrt{3}}{W_0 \sigma_0} M_s = \frac{2}{3} \frac{1-\beta^6}{1-\beta^4} \frac{\vartheta}{D} + \dots,$$

$$m_n = \frac{2\sqrt{3}}{\pi b^3 \sigma_0} M_\theta = (1-\beta^6) \frac{\kappa}{D} - \beta^2 (1-\beta^6) \frac{\kappa\lambda}{D^2} + \dots$$

oraz, w oparciu o (29.61),

$$(29.64) \quad q_m = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} p_m = \ln \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8} (1-\beta^6) \frac{\kappa^2}{D^2} - \frac{3}{8} (1-\beta^4) \frac{\lambda^2}{D^2} - \frac{1}{12} (1-\beta^6) \frac{\vartheta^2}{D^2} + \dots$$

Przez p_m oznaczono tu wartość średnią ciśnienia wewnętrznego, wynikającą ze wzoru (29.61): oprócz tego w pracy J. SKRZYPKA [652] badano inne możliwości przybliżonego spełnienia warunków brzegowych, np. w oparciu o metodę Trefftza.

Równania (29.63) i (29.64) określają w formie parametrycznej fragment powierzchni nośności granicznej, położony w otoczeniu punktu, odpowiadającego czystemu ciśnieniu wewnętrznemu w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Odwracając wzory (29.63) względem κ/D , λ/D i ϑ/D i podstawiając tak uzyskane szeregi do (29.64) możemy również wyprowadzić wzór jawny

$$(29.65) \quad q_m = \ln \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8(1-\beta^6)} m_\theta^2 - \frac{2}{3(1-\beta^4)} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right)^2 - \frac{3(1-\beta^4)^2}{16(1-\beta^6)} m_s^2 - \\ - \frac{8\beta^2}{9(1-\beta^4)^2} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right)^3 - \frac{\beta^2}{2(1-\beta^4)(1-\beta^6)} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right) m_\theta^2 - \\ - \frac{\beta^2(1-\beta^4)}{4(1-\beta^6)} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right) m_s^2 - \dots$$

W pracy [652] badano odchyłki naprężeń σ_r na promieniu wewnętrznym $\varrho = \beta$ od wartości średniej, stwierdzając, iż są one rzędu kilku procent.

29.2.3. Rozwiązanie dla przypadku dużego momentu skręcającego. Inną możliwością zastosowania metody małego parametru do rozwiązania układu równań (29.46)–(29.48) jest przyjęcie rozwiązania w postaci potrójnych szeregów potęgowych

$$(29.66) \quad \Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \xi^k, \\ H = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} H_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \xi^k, \\ \Psi = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \xi^k,$$

gdzie ξ oznacza parametr proporcjonalny do ciśnienia wewnętrznego. Przybliżenie zerowe odpowiada tu wyczerpaniu nośności w wyniku czystego skręcania: odpowiednim rozwiązaniem jest

$$(29.67) \quad \Phi_{000} = 0, \quad H_{000} = \vartheta \varrho, \quad \Psi_{000} = -\frac{1}{2} \varrho.$$

Tym razem rozwiązywanie najdogodniej jest zacząć od równania (29.47), które określa kolejne funkcje Φ_{ijk} :

$$(29.68) \quad \Phi_{ijk}'''' + \frac{4}{\varrho} \Phi_{ijk}''' + \frac{2}{\varrho^2} \Phi_{ijk}'' + \frac{1}{\varrho^4} \Phi_{ijk}' + \frac{1}{\varrho^4} \Phi_{ijk} = f_{ijk}^{(\Phi)}(\varrho, \theta).$$

Poszukując całki ogólnej w formie szeregu Fouriera względem zmiennej θ otrzymujemy ostatecznie, [654]

$$(29.69) \quad \Phi_{ijk} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{n1} \varrho^{m_{n1}} + C_{n2} \varrho^{m_{n2}} + C_{n3} \varrho^{m_{n3}} + C_{n4} \varrho^{m_{n4}}) \cos n\theta + \bar{\Phi}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

przy czym m_{n1}, \dots, m_{n4} obliczamy jako pierwiastki równań charakterystycznych dla $n = 0, 1, 2, \dots$ o postaci

$$(29.70) \quad m^4 - 2m^3 - m^2(1 + 2n^2) + 2m(1 + n^2) - n^2(1 - n^2) = 0.$$

Przez $\bar{\Phi}_{ijk}$ oznaczono podobnie jak poprzednio całkę szczególną równania niejednorodnego (29.68).

Obliczenie poprawek funkcji Ψ i H jest znacznie prostsze. Z równania (29.46) po podstawieniu (29.66) i (29.67) wynika układ prostych równań liniowych

$$(29.71) \quad \Psi'_{ijk} = f_{ijk}^{(\Psi)}(\varrho, \theta)$$

o rozwiązaniach

$$(29.72) \quad \Psi_{ijk} = C(\theta) + \bar{\Psi}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

natomiast z równania (29.48) otrzymujemy układ równań

$$(29.73) \quad H'_{ijk} + \frac{1}{\varrho} H_{ijk} = f_{ijk}^{(H)}(\varrho, \theta)$$

którego rozwiązania można zapisać w postaci

$$(29.74) \quad H_{ijk} = \frac{C(\theta)}{\varrho} + \bar{H}_{ijk}(\varrho, \theta)$$

Po określeniu stałych całkowania z warunków brzegowych i warunku zgodności przemieszczeń otrzymujemy ostatecznie

$$(29.75) \quad \sigma_r = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{\varrho^3} \right) \frac{\xi}{9} + 12 \left[\frac{1 - \beta^9}{\beta^6(1 - \beta^3)} \left(\frac{1 - \beta^6}{1 - \beta^9} - \frac{1}{\varrho^3} \right) + \frac{1}{\varrho^9} \right] \frac{\xi^3}{9^3} + \right. \\ \left. + \left[\frac{18 \ln \beta}{\beta \frac{5 + \sqrt{17}}{2} - \beta \frac{5 - \sqrt{17}}{2}} \left(\varrho^{\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}} - \varrho^{\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}} \right) - \frac{18 \ln \varrho}{\varrho^4} \right] \cos \theta \frac{\kappa \lambda \xi}{9^3} + \right. \\ \left. + \left[(m_{21} - 4) C_{21} \varrho^{m_{21} - 2} + \dots + (m_{24} - 4) C_{24} \varrho^{m_{24} - 2} + \frac{9}{2} \left(\frac{5}{\varrho^3} - \frac{14}{\varrho^4} \right) \right] \cos 2\theta \frac{\kappa^2 \xi}{9^3} + \dots \right\}$$

i podobne wzory na pozostałe naprężenia (podane w całości, z dokładnością do poprawek trzeciego rzędu, w pracy [654]). Przez m_{21}, \dots, m_{24} oznaczono rzeczywiste pierwiastki równania (29.70) dla $n = 2$, czyli

$$(29.76) \quad m^4 - 2m^3 - 9m^2 + 10m + 12 = 0.$$

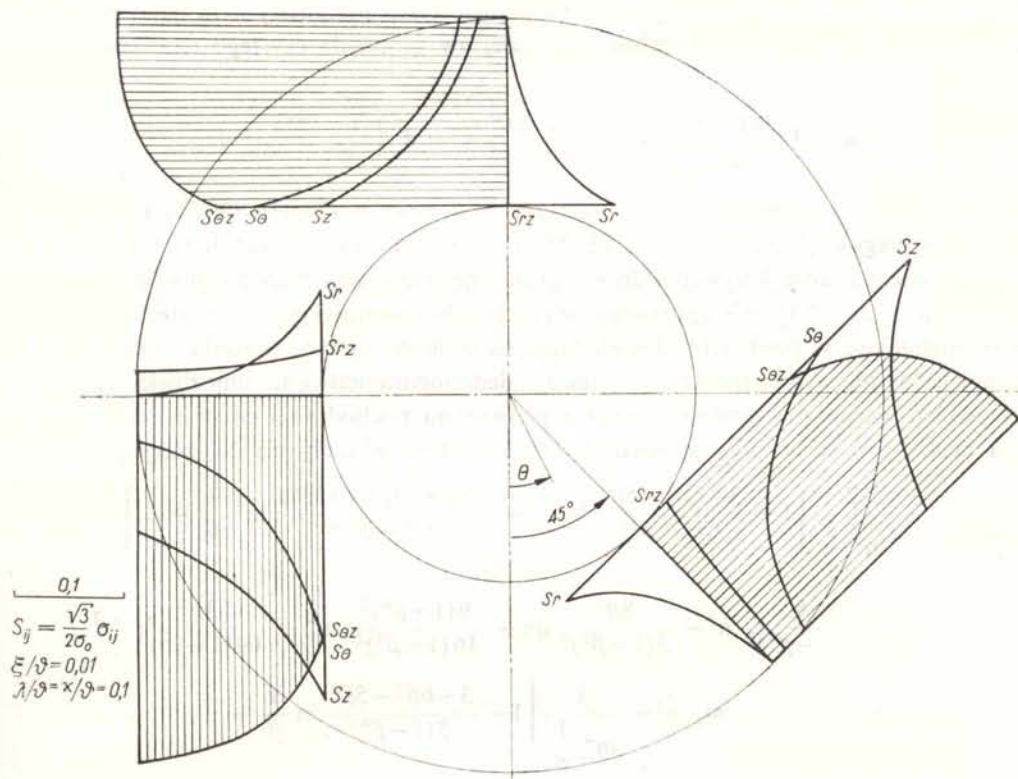
Na rysunku 148 pokazano wykresy naprężeń dla trzech przekrojów rury o stosunku promieni $\beta = 1/2$ ($\theta = 45^\circ$, $\theta = 180^\circ$, $\theta = 270^\circ$), uzyskane w oparciu o wzory (29.75) z wykorzystaniem poprawek rzędu drugiego włącznie. Obliczenia wykonano dla wartości parametrów $\xi/9 = 0,01$, $\kappa/9 = \lambda/9 = 0,1$.

Po dokonaniu odpowiednich całkowań możemy określić odpowiednie bezwymiarowe obciążenia (wprowadzone jak w p. 29.2.2) wzorami

$$(29.77) \quad n = 3(1 - \beta) \frac{\lambda}{9} + \frac{2(1 - \beta^3)}{\beta} \frac{\xi}{9} - \frac{54(1 - \beta^5)}{5\beta^5} \frac{\lambda \xi^2}{9^3} - \frac{9}{2} \left[\beta \ln \frac{1}{\beta} - \frac{5}{2}(1 - \beta) \right] \frac{\kappa^2 \lambda}{9^3} + \dots, \\ m_\sigma = 2(1 - \beta^3) \frac{\kappa}{9} - \frac{9}{2} \left[\frac{1 - \beta^3}{6} + 1 - \beta^2 \right] \frac{\kappa^3}{9^3} - 18 \left[3(1 - \beta) - \beta \ln \frac{1}{\beta} \right] \frac{\kappa \lambda^2}{9^3} - \\ - \frac{36(1 - \beta^3)}{\beta^3} \frac{\kappa \xi^2}{9^3} + \dots, \\ m_s = \frac{4}{1 - \beta^4} \left[\frac{1 - \beta^3}{3} - \frac{1 - \beta^3}{4} \frac{\kappa^2}{9^2} - \frac{3(1 - \beta)}{2} \frac{\lambda^2}{9^2} - \frac{6(1 - \beta^3)}{\beta^3} \frac{\xi^2}{9^2} + \dots \right],$$

natomiast ciśnienie wewnętrzne określamy z odpowiedniego warunku brzegowego dla $e = \beta$:

$$(29.78) \quad q = \frac{2(1-\beta^3)}{\beta^3} \frac{\xi}{\vartheta}.$$



Rys. 148. Rozkład naprężeń w stanie granicznym rury

Wyrażając z pierwszych dwóch równań (29.77) i równania (29.78) parametry λ/ϑ , κ/ϑ i ξ/ϑ w funkcji n , m_θ i q i podstawiając do trzeciego z równań (29.77) otrzymujemy równanie fragmentu powierzchni nośności granicznej w formie jawnej:

$$(29.79) \quad m_s = \frac{4}{1-\beta^3} \left[\frac{1-\beta^3}{3} - \frac{9\beta^3 + \beta^4(1+\beta+\beta^2)}{8(1-\beta^3)} q^2 - \frac{1}{6(1-\beta)} n^2 + \right. \\ \left. + \frac{\beta^2}{2\sqrt{3}(1-\beta)} qn - \frac{1}{16(1-\beta^3)} m_\theta^2 + \dots \right].$$

29.2.4. Uogólniona aproksymacja brzegowa Hermite'a. Zastosowanie metody małego parametru w dwóch pozostałych przypadkach, gdy parametry λ , ϑ i ξ względnie κ , ϑ i ξ są małe, natrafia na trudności. Istotnie, w pierwszym z tych przypadków, gdy przybliżenie zerowe odpowiada czystemu zginaniu, występuje już w tym przybliżeniu linia nieciągłości (naprężeń σ_z), co powoduje rozbieżność szeregów potęgowych w pewnych

obszarach położonych w pobliżu tej linii. W drugim z wymienionych przypadków przybliżenie zerowe odpowiada czystemu rozciąganiu. Wtedy nie występuje żadna nieciągłość, ale jak stwierdziliśmy w p. 21.6, szereg określający funkcję $m_g = m_g(n)$ nie jest wtedy zwykłym, lecz uogólnionym szeregiem potęgowym. Poszukiwanie rozwiązania w formie potrójnego zwykłego szeregu potęgowego parametrów κ , ϑ i ξ jest więc wykluczone. Natomiast wykluczając udział zginania i traktując tylko parametry ϑ i ξ jako małe, możemy określić fragment powierzchni granicznej «w otoczeniu czystego rozciągania» szeregiem

$$(29.80) \quad n = \frac{\sqrt{3}(1-\beta^2)}{2} + \beta^2 q - \frac{\sqrt{3}\beta^2}{1-\beta^2} q^2 - \frac{\sqrt{3}(1-\beta^4)}{8} m_s^2 + \dots$$

Korzystając z wyprowadzonych szeregów potęgowych (29.65), (29.79) i (29.80) jak również szeregów (21.124), (22.72), (22.86) i wyprowadzonego przez J. SKRZYPKA [653] dolnego oszacowania krzywej nośności granicznej rurociągu nierozciągliwego, zaproponowano w pracy [654] dwie aproksymacje powierzchni nośności granicznej $f(q, n, m_s, m_g) = 0$, spełniające w punktach odpowiadających stanom czystym warunki zgodności wraz z pochodnymi. Aproksymacja prostsza, siedmioparametrowa, umożliwia spełnienie wszystkich warunków zgodności wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi; posiada ona postać (po sprostowaniu pewnych błędów, które wkrały się do pracy [654])

$$(29.81) \quad \frac{2}{\ln^2 \frac{1}{\beta}} \left[1 - \frac{3+6\beta^2-5\beta^4}{6(1-\beta^4)} \ln \frac{1}{\beta} - \frac{\beta^4(9+18\beta^2+13\beta^4)}{9(1-\beta^4)^2} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \dots \right] q^2 +$$

$$+ \frac{4}{3(1-\beta^2)^2} n^2 - \frac{8\beta^2}{3(1-\beta^2)^2} qn + \frac{9(1-\beta^4)^2}{16(1-\beta^3)^2} m_s^2 + \frac{3\pi^2}{64(1-\beta^3)^2} m_g^2 +$$

$$+ \frac{4\sqrt{3}}{9(1-\beta^2)^3} |m_g| n^2 - \frac{1}{\ln^4 \frac{1}{\beta}} \left[1 - \frac{3+6\beta^2-5\beta^4}{3(1-\beta^4)} \ln \frac{1}{\beta} + \right.$$

$$\left. + \frac{-2\beta^4(15+30\beta^2-11\beta^4)}{9(1-\beta^4)^2} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \dots \right] q^4 = 1.$$

Występowanie szeregów we wzorze aproksymacyjnym wynika stąd, że wartość \bar{q} dla $n = 0$ jest określona szeregiem (29.65). Na przykład dla $\beta = 1/2$ otrzymujemy

$$(29.82) \quad 1,909q^2 + 2,370n^2 - 1,185qn + 0,6457m_s^2 + 0,6043m_g^2 +$$

$$+ 1,825|m_g|n^2 - 0,256q^4 = 1.$$

W pracy [654] zaproponowano również aproksymację dokładniejszą, osiemnastoparametrową, zezwalającą na uzyskanie zgodności nie tylko pierwszych, lecz również niemal wszystkich drugich pochodnych cząstkowych. Odpowiednie wzory są jednak bardzo złożone, a wzrost dokładności aproksymacji stosunkowo niewielki.

Pewne oszacowanie dolne powierzchni nośności granicznej w rozważanym przypadku oparte na warunku plastyczności Treski-Guesta, podali W. F. STOKEY, D. B. PETERSON i R. A. WUNDER [676]. Nośność sprężystą rury grubościenną pod działaniem ciśnienia, siły podłużnej i momentu zginającego badali M. MROWIEC i M. ŻYCZKOWSKI [428].

29.3. Inne przypadki obciążeń złożonych. Jednoczesne sprężysto-plastyczne zginanie, rozciąganie i skręcanie rury cienkościennej pod działaniem ciśnienia rozpatrywał I. W. STASIENKO [1171]. Sprężysto-plastyczne zginanie cienkościennej rury wirującej badał W. W. KOLKOLCZIKOW [995]. Porównanie nośności sprężystej i nośności granicznej rurociągów cienkościennych pod działaniem ciśnienia, zginania i temperatury podaje W. W. DANIŁOWSKA [889].

Sprężysto-plastyczne odkształcenia rury grubościenniej pod działaniem ciśnienia nie wykazującego kołowej symetrii badali O. A. GRIGAN, W. A. DINCYN, W. L. LIWSZIC i A. L. LIWSZIC [876]. Obciążenia cieplne nie wykazujące kołowej symetrii przy równoczesnym działaniu ciśnienia wewnętrznego badał W. L. FOMIN; w pracy [1218] uwzględniono zależność temperatury od kąta θ przez wprowadzenie stosownego małego parametru, w pracy [1219] — zależność temperatury od zmiennej z , w pracy [1221] — zależność od zmiennej θ przy uwzględnieniu wzmocnienia plastycznego. K. R. MERCKX [411] rozważał zginanie rury przy jednoczesnych obciążeniach cieplnych; przyjęto potęgowe prawo wzmocnienia plastycznego. J. B. TIEDEMANN, I. VIGNESS i T. E. PARDUE [702] przeprowadzili teoretyczne i doświadczalne badania nad ugięciami wirujących cylindrów grubościennych: uwzględniono wzmocnienie plastyczne i efekt Bauschingera. H. G. EDWARDS i F. J. BEER [125] badali plastyczne przystosowanie się naczyń ciśnieniowych do zmiennych obciążeń giętnych przy jednoczesnym działaniu ciśnienia wewnętrznego i podwyższonej temperatury.

30. Złożone obciążenia zewnętrzne tarcz, płyt i powłok

30.1. Obciążenia złożone tarcz

30.1.1. Tarcza pierścieniowa pod działaniem ciśnień promieniowych. Tarcze, zwłaszcza prostokątne, poddane są często obciążeniom wywołującym jednorodny stan naprężenia; odpowiedni przypadek złożony można sklasyfikować jako $P_n \rightarrow S_n \rightarrow B_n$, a analiza na szczelbu punktu jest wtedy równoważna z analizą na szczelbu całego ciała. Przypadki takie mogą służyć do weryfikacji doświadczalnej podstawowych równań teorii plastyczności (W. I. TROFIMOW [1211]).

Za najprostszy przypadek złożony, w którym występuje niejednorodność stanu naprężenia, można uważać tarczę pierścieniową o promieniach a i b , poddaną działaniu ciśnień normalnych (promieniowych) p_a i p_b . Określimy obecnie opierając się na warunku plastyczności HMM krzywą nośności granicznej dla tarczy. Jest to problem wewnętrznie statycznie wyznaczalny, bowiem równanie równowagi wewnętrznej [pierwsze z równań (28.1)] i warunek plastyczności zawierają tylko dwie niewiadome σ_r i σ_θ .

Warunek plastyczności możemy wyrugować, wprowadzając parametryzację typu Nádai-Sokołowskiego (12.29). Przyjmijmy mianowicie

$$(30.1) \quad \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right);$$

zastosowany tu parametr ω jest o $\pi/6$ większy od występującego we wzorach (12.29), co oczywiście jest dopuszczalne, a prowadzi nieco szybciej do celu. Podstawienia (30.1) do

równania równowagi wewnętrznej daje, po zastosowaniu wzoru na różnicę sinusów,

$$(30.2) \quad r\omega' \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\omega = 0.$$

Prostota podstawienia (30.1) polega na tym, że w drugim składniku występuje funkcja samego kąta ω , a nie sumy lub różnicy. Po scałkowaniu określimy funkcję odwrotną względem poszukiwanej wzorem

$$(30.3) \quad r = \frac{C}{\sqrt{|\cos\omega|}} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\right).$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$(30.4) \quad \begin{aligned} r = a, \quad \sigma_r = -p_a, \quad \omega = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p_a}{\sigma_0}\right) + \frac{\pi}{6}, \\ r = b, \quad \sigma_r = -p_b, \quad \omega = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p_b}{\sigma_0}\right) + \frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

prowadzi ostatecznie do następującego uwikłanego równania krzywej nośności granicznej

$$(30.5) \quad \frac{a^2}{b^2} = \beta^2 = \frac{\sqrt{4-3q_b^2} \pm q_b}{\sqrt{4-3q_a^2} \pm q_a} \exp\left\{\mp\sqrt{3}\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}q_a\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}q_b\right)\right]\right\},$$

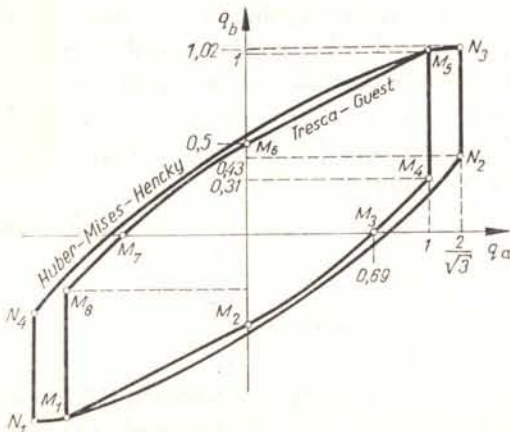
gdzie bezwymiarowe obciążenia wynoszą

$$(30.6) \quad q_a = p_a/\sigma_0, \quad q_b = p_b/\sigma_0.$$

Ponadto, aby pierwiastki posiadały wartość rzeczywistą, musi zachodzić $|q_a| \leq 2/\sqrt{3}$, $|q_b| \leq 2/\sqrt{3}$; okazuje się, że tylko pierwsze z tych ograniczeń jest istotne, drugie zachodzi automatycznie.

Odpowiednią krzywą graniczną pokazano dla $\beta = a/b = 1/2$ na rys. 149 wraz z krzywą, odpowiadającą hipotezie Treski-Guesta, składającą się z sześciu odcinków prostych i dwóch zakrzywionych (W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI [329]).

Przypadek jednoczesnego działania obciążeń normalnych i stycznych badali R. P. NORDGREN i P. M. NAGHDI [467, 468] oraz Ż. I. TAIROWA [1198].



Rys. 149. Krzywe nośności granicznej dla tarczy pierścieniowej obciążonej ciśnieniem wewnętrznym i zewnętrznym, w oparciu o warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego i Treski-Guesta

Rozkład stref uplastycznionych w prostokątnej tarczy rozciąganej i zginanej w swojej płaszczyźnie badał N. F. JERSZOW [909] stwierdzając możliwość występowania sześciu typów takich rozkładów. A. P. GREEN [180] badał pracę chropowatych połączeń metalicznych pod działaniem ciśnienia normalnego i ścinania. O. A. JUSZCZENKO [1258] rozpatrywał kołowo-symetryczne odkształcenia tarczy poddanej jednocześnie działaniu ściskania w kierunku prostopadłym do jej płaszczyzny.

30.1.2. Działanie sił masowych i obciążeń cieplnych. W licznych zastosowaniach, szczególnie w budowie maszyn wirnikowych, tarcze kołowe lub pierścieniowe są poddane jednoczesnemu działaniu sił masowych (wirowanie) i obciążeń cieplnych. Sprężysto-odkształcenia takich tarcz badano już z początkiem XX wieku; analiza odkształceń sprężysto-plastycznych została rozpoczęta w latach pięćdziesiątych.

Ogólną metodę analizy wirującej tarczy kołowej niejednorodnej o zmiennej grubości, nierównomiernie nagrzanej, podał w r. 1952 S. S. MANSON [382]. R. M. SZNEJDEROWICZ [1252] sprowadził problem do rozwiązania pewnych równań całkowych. Bardziej szczegółową analizę potęgowego wzmocnienia plastycznego w rozważanym przypadku zawierają prace JU. N. SZEWCZENKI [1241, 1242, 1243]. I. PALLEJ [1108] badał wpływ kolejności przykładania obciążeń (prędkości kątowej i temperatury) na powstawanie odkształceń plastycznych. Rozpatrując podobny problem z punktu widzenia teorii płynięcia plastycznego I. A. BIRGIER [814] wprowadził dla rozważanego przypadku pojęcie obciążenia prostego. Odkształcenia skończone nierównomiernie nagrzanych wirujących tarcz kołowych rozważał W. N. ALPERT [786]. R. G. TIERIECHOW [1208] przeprowadził badania doświadczalne.

Krzywą graniczną dla jednoczesnego działania ciśnienia zewnętrznego i sił masowych podał dla tarczy kołowej M. ŻYCKOWSKI [766, 774]. Jednoczesne działanie ciśnienia, temperatury i prędkości kątowej rozpatrywał JU. N. SZEWCZENKO [1247] oraz ten sam autor wraz z I. A. MOTOWIŁOWCEM, W. G. SAWCZENKO i W. N. WASILENKO [1248] (powtórne nagrzanie).

Dość znaczną liczbę prac poświęcono plastycznemu przystosowaniu się wirujących tarcz do zadanych cykli prędkości kątowej i temperatury. Problematykę tę rozpoczął D. A. GOCHFELD [860], kontynuując ją w pracy z K. M. KONONOWEM [862] (granica plastyczności zależna liniowo od temperatury, logarytmiczny rozkład temperatury), w pracy z O. F. CZERNIAWSKIM [869] (zastosowanie metod programowania matematycznego) oraz w pracach własnych [865 i 867]. Dalsze prace należą do M. G. KABIELEWSKIEGO [965] i L. I. FRIDMANA [1223].

Rozprzestrzenianie się sprężysto-plastycznych fal w tarczach, obciążonych dynamicznie ciśnieniem normalnym i stycznym w wyniku ukośnego zderzenia, rozpatrywali CH. A. RACHMATULIN [1135] i N. CRISTESCU [1006].

30.2. Obciążenia złożone płyt. Wymienimy tu jedynie kilka ważniejszych prac dotyczących nośności granicznej i ugięć sprężysto-plastycznych lub sztywno-plastycznych płyt pod działaniem złożonych obciążeń zewnętrznych. Za pierwszą pracę z tego zakresu można uznać rozważania D. C. DRUCKERA i H. G. HOPKINSA [104], którzy w oparciu o warunek plastyczności TG badali nośność graniczną płyty kołowej, poddanej jedno-

czesnemu działaniu równomiernego obciążenia ciągłego i siły skupionej w środku. Zakres sprężysto-plastyczny badała w tym przypadku N. A. FORSMAN [1222], natomiast R. T. SHIELD [646] zajął się optymalnym kształtowaniem tak obciążonej płyty z uwagi na nośność graniczną. Przypadek dwóch obciążeń ciągłych o przeciwnym zwrocie, działających na całą płytę kołową lub jej część, rozważali W. FLÜGGE i J. C. GERDEEN [137] (nośność opierając się na warunku plastyczności TG) oraz N. JONES [298] (duże ugięcia pod założeniem materiału sztywno-plastycznego).

Kilka prac poświęcono płytom kołowym i pierścieniowym pod działaniem obciążeń występujących w płaszczyźnie i prostopadle do płaszczyzny płyty. A. S. GRIGORIEW [878] badał nośność graniczną płyty kołowej, poddanej działaniu obciążeń ciągłych prostopadłych do jej płaszczyzny, obciążeń rozciągających i sił masowych. Nierównomierny rozkład temperatury uwzględniali dodatkowo JU. N. SZEWCZENKO [1240] oraz I. A. MOTOWIŁOWIEC i JU. N. SZEWCZENKO [1090]; w pracach tych uwzględniono wzmocnienie plastyczne metodą rozwiązań sprężystych. Krzywe nośności granicznej dla płyt pierścieniowych pod działaniem sił w płaszczyźnie i prostopadle do płaszczyzny płyty badali szczegółowo P. G. HODGE i R. SANKARANARAYANAN [254] opierając się na warunku plastyczności TG i stowarzyszonym prawie płynięcia. Ugięcia płyt rozciąganych i zginanych rozważali I. OHASHI i S. MURAKAMI [1105] (małe ugięcia płyt sprężysto-plastycznych) oraz JU. R. LEPIK [1043] (duże ugięcia płyt sztywno-plastycznych). N. PERRONE [528] badał nośność graniczną zginanej płyty kołowej przy uwzględnieniu obciążeń cieplnych, a JU. R. LEPIK [1039] — przy dodatkowym oddziaływaniu strumienia neutronów.

Nośność graniczną płyt prostokątnych pod działaniem obciążeń rozciągających i zginających badali A. SAWCZUK [612] oraz J. B. ALBLAS [2]. Z. MARCINIAK [384] rozważał pokrewny problem jako zagadnienie technologicznej teorii plastyczności. Przypadek kilku niezależnych obciążeń prostopadłych do płaszczyzny płyty rozpatrywał Z. SOBOTKA [658].

Obciążenia złożone płyt zbrojonych rozważał w sposób ogólny F. N. PANNELL [517]; wykazał on twierdzenie, iż suma zbrojeń zaprojektowanych z osobna dla poszczególnych obciążeń stanowi zbrojenie wystarczające dla wszystkich obciążeń przyłożonych łącznie.

30.3. Obciążenia złożone powłok. Najczęściej rozważanym przypadkiem złożonym obciążenia powłok walcowych kolistych jest jednoczesne działanie ciśnienia wewnętrznego i obciążenia osiowego. Przy dużej długości powłoki stan naprężenia można uważać za jednorodny i stosunkowo prosty do analizy (przypadki jednorodne omówiliśmy w p. 28), natomiast komplikacje związane są z efektami brzegowymi lub efektem kolumnowym przy sile osiowej ściskającej.

Pierwsza praca należy tu do P. G. HODGE'A [242], który opierając się na warunku plastyczności Treski-Guesta rozważał jednoczesne działanie ciśnienia i siły osiowej. R. SANKARANARAYANAN [602] badał krzywe graniczne dla takiej powłoki przy jednostronnym utwierdzeniu. P. G. HODGE i J. PANARELLI [257] porównywali w rozważanym przypadku warunek plastyczności HMM i TG. R. DOBREW [892] badał wpływ kolejności przykładania obciążeń na stan graniczny. Ź. LEPIK [347] określał opierając się na warunku TG i stowarzyszonym prawie płynięcia duże ugięcia powłok sztywno-plastycznych, poddanych jednoczesnemu działaniu rozciągania i ciśnienia zewnętrznego. J. KLEPACZKO i J. A. KÖNIG [308] badali na drodze teoretycznej i doświadczalnej nośność powłoki

walcowej, poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego i ściskania osiowego przy uwzględnieniu odstępstw od zasady zeszywnienia.

Optymalnemu kształtowaniu powłok przy obciążeniach złożonych poświęcone są prace M. SAVE i R. T. SHIELDA [610] (obciążenia stałe i ruchome) oraz M. R. IBRAGIMOWA [922] (kilka stałych, niezależnie działających obciążeń).

Teorię sprężysto-plastycznej stateczności powłok przy obciążeniach złożonych rozwinął szczególnie E. I. GRIGOLUK: prac tych nie omawiamy z uwagi na ich odrębną specyfikę.

30.4. Uwagi końcowe. Obok omówionych i sklasyfikowanych problemów obciążeń złożonych w teorii plastyczności możliwe są oczywiście również inne, bardziej specyficzne przypadki. Wymienimy tu np. pracę H. H. BLEICHA i I. NELSONA [35], poświęconą rozchodzeniu się sprężysto-plastycznych fal w półprzestrzeni obciążonej ciśnieniem normalnym i ciśnieniem stycznym.

Chociaż — jak wynika z załączonej bibliografii — literatura poświęcona obciążeniom złożonym w teorii plastyczności jest już dość bogata, to jednak niektóre problemy wymagają jeszcze niewątpliwie dalszych intensywnych badań zarówno teoretycznych, jak i doświadczalnych. Z punktu widzenia zastosowań na szczelbu punktu ciała P za najważniejsze można by uznać badania nad kryterium zniszczenia w przypadku materiałów wykazujących wzmocnienie plastyczne; kryterium takie jest niezbędne do poprawnego określenia nośności elementów przy uwzględnieniu wzmocnienia. Z punktu widzenia teoretycznego, ale częściowo również i praktycznego, szczególnie interesujące wydaje się rozwijanie teorii mięknięcia plastycznego i odstępstw od postulatu Druckera.

Na szczelbu S niewątpliwie ważne jest opracowanie ogólnych metod analizy zakresu sprężysto-plastycznego, uwzględniających pojawienie się stref lokalnie biernych. Strefy lokalnie bierne pojawiają się w zastosowaniach dość często, powodują jednak z reguły znaczne komplikacje przy obliczeniach.

Szczególne uwagę wypadałoby zwrócić na dalszy rozwój teorii obciążeń złożonych na szczelbu całego ciała B . Wymagają tu wyjaśnienia problemy odstępstw od zasady zeszywnienia, wpływające w sposób istotny na nośność konstrukcji, a jednocześnie wprowadzające nowe elementy do teorii (wkłęsłe powierzchnie graniczne, problem kolejności przykładania obciążeń). Słabo jest jeszcze rozwinięta problematyka sprężysto-plastycznej stateczności przy obciążeniach złożonych. Bardzo ważną dziedziną z punktu widzenia zastosowań inżynierskich jest wreszcie optymalne kształtowanie konstrukcji z uwagi na nośność graniczną przy obciążeniach złożonych.



BIBLIOGRAFIA

1. N. ALBERTI, *Conferme sperimentali di una condizione di plasticità*, Ricerca scient. 12, 30 (1960), 1953-1959.
2. J. B. ALBLAS, *On the limit analysis of a rectangular plate under combined stresses*, Appl. sci. Res. (4), 12 (1964), 435-453.
3. de G. ALLEN D. N., SOPWITH D. G., *The stresses and strains in a partly plastic thick tube under internal pressure and end load*, Proc. 7th Int. Congr. Appl. Mech. (London 1948).
4. H. ARMEN, G. ISAKSON, A. PIFKO, *Discrete element methods for the plastic analysis of structures subjected to cyclic loading*, AIAA/ASME 8th Struct., Struct. Dynamics and Mat. Conf., Palm Springs 1967, 148-161.
5. G. AUGUSTI, *Calcolo a rottura delle travi di parete sottile*, Ing. Civ. (Ital.) 20, 6 (1966), 637-660.
6. G. AUGUSTI, *Full plastic torque of I-beams*, Int. J. Mech. Sci. 8 (1966), 641-649.
7. G. AUGUSTI, R. SCUDERI, *Sul collasso plastico di travi a mensola con sezione a doppio T*, G. Genovese, Napoli 1967.
8. G. AUGUSTI, *On the limit analysis of I-beams with warping restraints*, Engineering Plasticity. ed. by J. Heyman and F. A. Leckie, Cambridge Univ. Press 1968, 21-40.
9. K. B. AYERS, *Behaviour patterns in I beams carrying a pure bending moment and subjected to a repeated thermal cycle*, J. Mech. Enging. Sci. 4, 6 (1964), 343-352.
10. G. BACKHAUS, *Zur Fließgrenze bei allgemeiner Verfestigung*, Z. angew. Math. Mech. 2, 48 (1968), 99-108; Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn. 3, 16 (1968), 223-232.
11. J. F. BAKER, M. R. HORNE, J. HEYMAN, *The steel skeleton*, vol. II, Cambridge Univ. Press 1956.
12. A. BALTOV, A. SAWCZUK, *A rule of anisotropic hardening*, Acta Mechanica 2, 1 (1965), 81-92.
13. B. BARBARITO, *La rottura delle sezioni pressoinflesse nel cemento armato*, Giorn. Genio Civ. 9 (1960).
14. B. BARBARITO, S. AIELLO, *La rottura delle sezioni pressoinflesse in conglomerato precompresso*, il Cemento 6, 59 (1962), 13-19.
15. A. J. BARRETT, *Unsymmetrical bending and bending combined with axial loading of a beam of rectangular cross section into the plastic range*, J. Roy. Aero. Soc. 57 (1953), 503-509.
16. A. J. BARRETT, *Beam strength and curvature under combined tension and bending in the plastic range*, J. Aero. Sci. 1, 22 (1955), 71-72.
17. S. BATDORF, B. BUDIANSKY, *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*, NACA TN 1871 (1949).
18. S. B. BATDORF, B. BUDIANSKY, *Polyaxial stress-strain relations of a strain-hardening metal*, J. Appl. Mech. 4, 21 (1954), 323-326.
19. J. BAUSCHINGER, *Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und des Elastizitätsmoduls verschiedener Metalle*, Civilingenieur 1881, 289-348.
20. J. BAUSCHINGER, *Die Veränderungen der Elastizitätsgrenze*, Mitt. Mech.-Techn. Lab. Techn. Hochschule, München 1886.
21. Z. BAŽANT, *Mézni stav pružezu namáhaných šikmým mimostředním tlakem nebo tahem*, Sb. Vysokého Učeni Techn. Brně, 3, 1965, 207-220.
22. Z. BAŽANT, *Mézni stav obdélníkového pružezu při současném působení ohybových momentů M_x , M_y , posouvajících sil T_x , T_y , a osové sily N* , Stavebn. Časop. 7, 15 (1967), 401-412.
23. L. S. BEEDLE, *Plastic design of steel frames*, Wiley, New York 1958.

24. C. BERARDI, *Il momento flettente limite in presenza della caratteristica tagliante nei profilati metallici a doppio T*, Acciaio e costruz. metall. 2, 8 (1956), 79–83.
25. P. K. BERTSCH, W. F. FINDLEY, *An experimental study of subsequent yield surfaces—corners, normality, Bauschinger and allied effects*, Proc. 4th Nat. Congr. A. M. Berkeley, 1962, Perg. Press.
26. I. BERMAN, P. G. HODGE Jr., *A general theory of piecewise linear plasticity for initially anisotropic materials*, Arch. Mech. Stos. 5, 11 (1959), 513–540.
27. I. F. BESSELING, *A theory of plastic flow for anisotropic hardening in plastic deformation of an initially isotropic material*, Nat. Luchtvaartlaboratorium Amsterdam, Rep. S-410, 1953.
28. A. BIRON, A. SAWCZUK, *Plastic analysis of rib-reinforced cylindrical shells*, Trans. ASME (J. Appl. Mech.) 1, E 34 (1967), 37–42.
29. J. F. W. BISHOP, R. HILL, *A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses*, Phil. Mag. 42 (1951), 414–427.
30. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Sol. 2 (1953), 43–53.
31. D. R. BLAND, *Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients*, J. Mech. Phys. Sol. 4, 4 (1956), 209–229.
32. D. R. BLAND, *The two measures of work-hardening*, Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., vol. 8 (1957), 45–50.
33. D. R. BLAND, *The associated flow rule of plasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 6 (1957), 71–78.
34. H. BLEICH, *Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung der elastischen-plastischen Verhalten des Baustoffes*, Bauingenieur 13 (1932), 261.
35. H. H. BLEICH, I. NELSON, *Plane waves in an elastic-plastic half-space due to combined surface pressure and shear*, Trans. ASME, (J. Appl. Mech.) 1, E33 (1966), 149–158.
36. S. R. BODNER, *Buckling of an elasto-plastic column subjected to axial load and a transverse temperature gradient*, Int. J. Mech. Sci. 4 (1962), 425–437.
37. H. F. BOHNENBLUST, P. DUWEZ, *Some properties of a mechanical model of plasticity*, J. Appl. Mech. 15 (1948), 222–225.
38. C. I. BORS, *Sur la théorie de la plasticité des corps orthotropes*, Bull. Acad. Pol. Sci., Serie Sci. Techn. 9, 14 (1966), 887–890.
39. N. S. BOULTON, B. BOONSUKHA, *Plastic collapse loads for circular-arc bow girders*, Proc. Inst. Civil Engrs. 13 (1959), June, 161–178.
40. N. S. BOULTON, *Plastic twisting and bending of an I-beam in which the warp is restricted*, I. Journ. Mech. Sci. 6, 4 (1962), 491–502.
41. W. E. BOYCE, W. PRAGER, *On rigid work-hardening solids with singular yield conditions*, J. Mech. Phys. Solids 1, 6 (1957), 9–12.
42. J. F. BRATT, Ö. KANAN, *Determination of the yield condition in the third quadrant of the stress plane*, Trans. ASME 1, E33 (1966), 228.
43. J. BREE, *Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast-nuclear-reactor fuel elements*, J. Strain Anal. 3, 2 (1967), 226–238.
44. P. W. BRIDGMAN, *The compressibility of thirty metals*, Proc. Am. Acad. Arts Sci. 5, 58 (1923), 163–242.
45. D. S. BROOKS, *The elasto-plastic behaviour of rectangular sections carrying biaxial bending*, Civ. Engineering. Trans. Inst. Engrs. Australia, 1964, 6, 1, 41–47.
46. E. H. BROWN, *Plastic asymmetrical bending of beams*, Int. J. Mech. Sci., 2, 9 (1967), 77–82.
47. J. BRÓDKA, *Zginanie i skręcanie dwuteownika cienkościennego w fazie odkształceń sprężysto-plastycznych*, Inż. Bud. 10, 18 (1961), 395–401.
48. C. BRUTTI, *Netztafeln zur Ermittlung der Anstrengung nach v. Mises-Huber bei mehrachsigen Spannungszuständen*, Konstruktion, 5, 16 (1964), 187–188.
49. B. BUDIANSKY, N. F. DOW, R. W. PETERS, R. P. SHEPHERD, *Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity*, Proc. First US Nat. Congr. Appl. Mech. ASME, NY 1952, 503–512.
50. B. BUDIANSKY, *A reassessment of deformation theories of plasticity*, Trans. ASME 2, E26 (1959), 259–264.

51. B. BUDIANSKY, Z. HASHIN, J. L. SANDERS, *The stress field of a slipped crystal and the early plastic behaviour of polycrystalline materials*, "Plasticity", Proc. Sec. Symp. Naval Struct. Mech., Perg. Press 1960, 239–258.
52. B. BUDIANSKY, T. T. WU, *Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals*, Proc. 4th US Nat. Congr. Appl. Mech. 1962, 1175–1185.
53. H. D. BUI, *Ecrouissage des métaux*, C.r. Acad. Sci. Paris **259** (1964), 4509–4512.
54. H. D. BUI, *Ecrouissage des métaux*, C.r. Acad. Sci. **7**, **AB262**, (1966), A401–A404.
55. W. BURZYŃSKI, *Studium nad hipotezami wyężenia*, Akad. Nauk Techn., Lwów 1928.
56. W. BURZYŃSKI, *Teoretyczne podstawy hipotez wyężenia*, Czas. Techn. Lwów 1929.
57. W. BURZYŃSKI, *Über die Anstrengungshypothesen*, Schw. Bauzeitung **21**, **94** (1929), 259.
58. Gh. BUZDUGAN, *Efectul variației uniforme a temperaturii asupra capacității portante a grinzilor solicitate la incovoiere elasto-plastica*, Metalurgia și Const. maș **1**, **10** (1958), 21–24.
59. F. CAMPUS, *Plastification de l'acier doux en flexion plane composée*, Bull. cl. sci. Acad. Roy. Belg. **4**, **49** (1963), 315–319.
60. M. CAPURSO, *Sur calcolo dei carichi di collasso di piastre semplicemente inflesse di materiale con diversa resistenza a trazione e compressione*, Tecn. Ital. **10**, **31** (1966), 545–555.
61. M. CAPURSO, *Sull'analisi limite delle superfici di rivoluzione con nervature eccentriche*, Costruz. Metall. **3**, **19** (1967), 170–179; **4**, **19** (1967), 219–233.
62. M. CAPURSO, *Stati limiti nelle lastre travi*, Giorn. Genio Civile **6–7**, **105** (1967), 427–443.
63. M. CAPURSO, *Yield conditions for incompressible isotropic and orthotropic materials with different yield stress in tension and compression*, Meccanica **2**, **2** (1967), 118–125.
64. M. CAPURSO, A. GANDOLFI, *Sul collasso rigido-plastico dei gusci nervati di rivoluzione*, Costr. Metall. **6**, **19** (1967), 418–424.
65. M. CAPURSO, *Comportamento elasto-plastico delle piastre sottili metalliche nel campo dei grandi spostamenti*, Costruz. Metall. **1**, **20** (1968), 42–51.
66. M. CAPURSO, A. GANDOLFI, *Sul collasso plastico dei tubi circolari nervati soggetti a pressione e sforzo assiale*, Costruz. Metall. **2**, **20** (1968), 102–118.
67. M. CAPURSO, A. GANDOLFI, *Sull'analisi limite delle piastre nervate*, Costruz. metall. **4**, **20** (1968), 254–262.
68. G. CERADINI, *Sul calcolo delle strutture elastoplastiche*, I **3**, **17** (1965), 177; II **5**, **17** (1965).
69. G. CERADINI, *A maximum principle for the analysis of elastic plastic systems*, Meccanica **3/4**, **1** (1966).
70. E. CHWALLA, *Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl*, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, 1928.
71. E. CHWALLA, *Theorie der aussermittig gedrückten Stäbe aus Baustahl*, Stahlbau 1934, 161.
72. C. CLAVUOT, H. ZIEGLER, *Über einige Verfestigungsregeln*, Ing.-Archiv **28** (1959), 13–26.
73. C. CLAVUOT, *Welle und Rohr aus starrplastischem Material unter Zug und Torsion*, Diss. Doct. Math. ETH Zürich, Leemann A.G., 1959.
74. G. COLONNETTI, *De l'équilibre des systèmes élastiques dans lesquels se produisent des déformations plastiques*, J. Math. Pures Appl. **9**, **17** (1938), 233–255.
75. M. COMO, *La sezione a doppio T nella fase di completa plasticizzazione in presenza di sforzo normale e momento flettente*, Rend. Acad. Sci. Fis. e Mat. Serie IV, **4** (1959).
76. M. COMO, *Il problema dello sforzo di taglio nel calcolo a rottura nelle sezioni in cemento armato*, Atti Ist. Tech. delle Costr. di Napoli, No 38.
77. M. COMO, *Sull'influenza della comprimibilità del materiale nei problemi di elasto-plasticità*, Costr. Metall. **2**, **19** (1967), 1–7.
78. M. D. COON, S. S. GILL, *The effect of change of geometry on the rigid plastic limit load of cylinders*, Int. J. Mech. Sci. **5**, **10** (1968), 355–368.
79. F. CORREIA DE ARAÚJO, *Elasticidade e plasticidade*, Imprensa Portuguesa, Porto 1961.
80. A. D. COX, A. J. M. SPENCER, *A note on the approximate calculation of yield-point loads for ideal plastic-rigid solids taking account of body forces*, Z.A.M.P. **2**, **14** (1963), 172–175.
81. N. CRISTESCU, *Sur l'effet de Bauschinger*, Compt. Rend. Acad. Sci. **5**, **249** (1959), 616–618.

82. B. CROSSLAND, R. HILL, *On the plastic behaviour of thick tubes under combined torsion and internal pressure*, J. Mech. Phys. Solids, **2** (1953), 1, 27-38.
83. B. CROSSLAND, *The effect of fluid pressure on the shear properties of metals*, Proc. Inst. Mech. Eng. **169** (1954), 935-944.
84. D. M. CUNNINGHAM, E. G. THOMSEN, J. E. DORN, *Plastic flow of magnesium alloy under bi-axial stresses*, Proc. ASTM **47** (1947), 546-553.
85. S. CUOMO, *Sulla resistenza di travi inflesse di acciaio ad elevate temperature*, Giorn. Genio Civile, **11**, **98** (1960), 861-883.
86. J. M. DAVIES, *Collapse and shakedown loads of plane frames*, J. Struct. Div. Proc. ASCE, **3**, **93** (1967), 35-50.
87. E. A. DAVIS, *Combined tension-torsion tests with fixed principal directions*, J. Appl. Mech. **3**, **22** (1955), 411-415.
88. E. A. DAVIS, *The Bailey flow rule and associated yield surface*, Trans. ASME **2**, **E28** (1961), 310.
89. M. G. DERRINGTON, W. JOHNSON, *The onset of yield in a thick spherical shell subject to internal pressure and uniform heat flow*, Appl. Sci. Res. **6**, **A7** (1959), 408-420.
90. W. DERSKI, S. ZIEMBA, *Analiza modeli reologicznych*, PWN, (IPPT PAN), Warszawa 1968.
91. K. S. DINNO, S. S. GILL, *The plastic torsion of I-sections with warping restraints*, Int. J. Mech. Sci. **6** (1964), 27-43.
92. K. S. DINNO, W. MERCHANT, *A procedure for calculating the plastic collapse of I-sections under bending and torsion*, Struct. Engr. **7**, **43** (1965), 219-221.
93. O. DE DONATO, *Extension to continua of some minimum theorems in elastoplastic theory*, Meccanica **4**, **3** (1968), 259-264.
94. O. DE DONATO, *Sufficient uniqueness and stability conditions for elastic-plastic structures with associated flow laws*, Meccanica **4**, **2** (1967), 218-225.
95. O. DE DONATO, *Iterative solution of the incremental problem for elastic-plastic structures with associated flow laws*, Int. J. Sol. Structures **1**, **5** (1969), 81-95.
96. J. E. DORN, A. J. LATTER, *Stress-strain relations for finite elasto-plastic deformations*, J. Appl. Mech. **15** (1948), 234-236.
97. D. C. DRUCKER, *Some implication of work hardening and ideal plasticity*, Quart. Appl. Math. **4**, **7** (1950), 411-418.
98. D. C. DRUCKER, *A more fundamental approach to plastic stress-strain relations*, Proc. First US Congr. Appl. Mech. 1951, 487-491.
99. D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, W. PRAGER, *The safety factor for an elastic-plastic body in plane strain*, J. Appl. Mech. **18** (1951), 371-378.
100. D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, E. H. LEE, W. PRAGER, *On plastic rigid solutions and limit design theorems for elastic plastic bodies*, Proc. 1st US Nat. Congr. Appl. Mech. Chicago, 1951, 533-538.
101. D. C. DRUCKER, W. PRAGER, H. J. GREENBERG, *Extended limit design theorems for continuous media*, Quart. Appl. Math. **4**, **9** (1952), 381-389.
102. D. C. DRUCKER, W. PRAGER, *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*, Quart. Appl. Math. **10** (1952), 157-165.
103. D. C. DRUCKER, *Coulomb friction, plasticity and limit loads*, J. Appl. Mech. **21** (1954), 71-74.
104. D. C. DRUCKER, H. G. HOPKINS, *Combined concentrated and distributed load on ideally-plastic circular plates*, Proc. 2-nd US Nat. Congr. Appl. Mech. Ann Arbor, Mich. 1954, New York 1955, 517-520.
105. D. C. DRUCKER, *Stress-strain relations in the plastic range of metals-experiments and basic concepts*, Rheology, vol. 1, New York 1956, 97-119.
106. D. C. DRUCKER, *The effect of shear on the plastic bending of beams*, J. Appl. Mech. **4**, **23** (1956).
107. D. C. DRUCKER, *On uniqueness in the theory of plasticity*, Quart. Appl. Math. **1**, **14** (1956), 35-42.
108. D. C. DRUCKER, *Variational principles in the mathematical theory of plasticity*, Proc. Symp. Appl. Math. **8**, 1958, 7-22.
109. D. C. DRUCKER, *A definition of stable inelastic material*, J. Appl. Mech. **1**, **26** (1959), 101-106.

110. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution*, Trans. ASME, 1, E26 (1959), 61–68.
111. D. C. DRUCKER, *Extension of the stability postulate with emphasis on temperature changes*, "Plasticity", Proc. Sec. Symp. Naval Struct. Mech., Pergamon Press 1960, 170–184.
112. D. C. DRUCKER, *On the postulate of stability of material in the mechanics of continua*, J. de Mécanique 2, 3 (1964), 235–249.
113. D. C. DRUCKER, *The continuum theory of plasticity on the macroscale and the microscale*, J. Materials, 4, 1 (1966), 873–910.
114. T. D. DUDDEVAR, J. DUFFY, *Neutron irradiation and the yield surface of copper*, J. Appl. Mech. Trans. ASME 1, E34 (1967), 200–206.
115. M. DUSZEK, *Effect of geometry changes on the carrying capacity of cylindrical shells*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Techn. 4, 13 (1965), 325–333.
116. M. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections*, Arch. Mech. Stos. 5, 18 (1966), 599–614.
117. M. DUSZEK, *Analiza plastyczna dwuwarstwowych powłok walcowych uwzględniająca wpływ zmian kształtu*, Rozpr. Inż. 4, 15 (1967), 653–663.
118. M. K. DUSZEK, *Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections*, Symp. IUTAM, "Theory of thin shells", 1967, Springer 1969.
119. J. DUTHEIL, *L'exploitation des phénomènes d'adaptation dans les ossatures en acier doux*, Ann. Inst. Techn. Bât. Trav. Publ. No 2, Jan. 1948.
120. J. DUTHEIL, *La stabilité des colonnes en acier soumises au flambement-déversement*, Ann. Inst. Techn. Bât. et Trav. Publics, 10 (1957), 679–711.
121. T. J. DWYER, T. V. GALAMBOS, *Plastic behavior of tubular beam columns*, J. Struct. Div. Proc. ASCE, 4, 91 (1965), 153–168.
122. C. DYRBYE, P. LANGE HANSEN, *Studies on the load carrying capacities of steel structures*, Res. Lab. Build. Techn., Bull. No 3, Copenhagen 1954.
123. F. EDELMAN, D. C. DRUCKER, *Some extension of elementary plasticity theory*, J. Frankl. Inst. 6, 251 (1951), 581–605.
124. F. EDELMAN, *On the coincidence of plasticity solutions obtained with incremental and deformation theories*, Proc. 1st US Nat. Congr. ASME 1952, 493–498.
125. H. G. EDWARDS, F. J. BEER, *Notes on incremental collapse of pressure vessels*, J. Mech. Eng. Sci. 3, 3 (1961), 187–199.
126. M. A. EISENBERG, A. PHILLIPS, *On nonlinear kinematical hardening*, Acta Mechanica 1, 5 (1968), 1–13.
127. R. ÉPAIN, *Résistance des cylindres épais élastoplastiques*, Semin. de Plasticité, École Polyt. 1961, Pub. Sci. et Techn. Minist. Air 116 (1962), 37–66.
128. A. C. ERINGEN, *Nonlinear theory of continuous media*, McGraw-Hill, New York 1962.
129. E. FACCIOLO, *Incrudimento cinematico della piastra circolare sottile con la condizione di plasticità iniziale di von Mises*, Ricerca Scient. 11, 37 (1967), 1028–1045.
130. L. E. FARMER, P. M. FERGUSON, *T-beams under combined bending, shear and torsion*, J. Amer. Concr. Inst. 11, 64 (1967), 757–766.
131. F. J. FAVA, *On the plasticity theory for anisotropic materials*, Ann. C.I.R.P. 4, 15 (1967), 411–415.
132. M. FEIGEN, *Inelastic behavior under combined tension and torsion*, Proc. 2nd US Nat. Congr. Appl. Mech., Ann Arbor; New York 1955, 469–476.
133. R. P. FELGAR, *Plastic analysis of the instability of pressure vessels subjected to internal pressure and axial load*, Trans. ASME 2, D84 (1962), 278–286.
134. L. FINZI, *Principle of minimum differential elastic energy*, Atti Accad. naz. Lincei Sci. fiz.-mat. 18, 8 (1955), 274–280.
135. L. FINZI, *Sulle condizioni al contorno di aste elastoplastiche presso o tensoinflesse studiate coi metodi della meccanica non lineare*, Rend. Ist. Lombardo Sci. e Lettere, Sci. Mat.-Fiz. 1, A95 (1961), 127–130.
136. W. FLÜGGE, T. NAKAMURA, *Plastic analysis of shells of revolution under axisymmetric loads*, Ing.-Archiv. 34 (1969), 4, 238–247.

137. W. FLÜGGE, J. C. GERDEEN, *Collapse of a simply supported circular plate under two uniform loads*, Int. J. Solids and Structures, 4, 3 (1967), 677-689.
138. B. FONTAINE, *Comportement des tubes métalliques munis de fenêtres et soumis à flexion et torsion*, Acier (Belg.), 7-8, 31 (1966), 351-354.
139. H. FORD, *Advanced mechanics of materials*, Longmans, London 1963.
140. V. FRANCIOSI, E. GIANGRECO, *Il calcolo a rottura in presenza di sforzo normale, momento flettente e sforzo di taglio*, Giorn. Genio Civile, 5, 92 (1954), 354-361.
141. V. FRANCIOSI, G. AUGUSTI, R. SPARACIO, *Collapse of arches under repeated loading*, Proc. ASCE 90, ST 1 (J. Struct. Div.) 165-201, 1964.
142. J. M. FRANKLAND, R. E. ROACH, *Strength under combined tension and bending in the plastic range*, J. Aero. Sci. 7, 21 (1954), 449-453; 11, 22 (1955), 795-797.
143. W. FREIBERGER, W. PRAGER, *Plastic twisting of thick-walled circular ring sectors*, J. Appl. Mech. 23 (1956), 461-463.
144. W. FREIBERGER, *Elastic-plastic torsion of circular ring sectors*, Quart. Appl. Math. 14 (1956), 259-265.
145. A. M. FREUDENTHAL, H. GEIRINGER, *Mathematical theories of the inelastic continuum*, Handbuch der Physik, Vol. 6, Springer-Verlag, Berlin 1958, 229-433.
146. A. M. FREUDENTHAL, *Introduction to the mechanics of solids*, Wiley, New York 1966.
147. A. M. FREUDENTHAL, *Second-order strain accumulation in workhardening media*, Rheol. Acta 2, 6 (1967).
148. J. FRITZSCHE, *Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens*, Bauingenieur 11 (1930), 851.
149. J. FRITZSCHE, *Die Tragfähigkeit von Balken aus Baustahl bei beliebig oft wiederholter Belastung*, Bauingenieur, 12 (1931), 827.
150. H. FROMM, *Grenzen des elastischen Verhaltens beanspruchter Stoffe*, Handbuch der Phys. u. Techn. Mechanik, IV/1, A. Barth 1931, 359.
151. H. FUKUOKA, *Infinitesimal plane waves in elastic-plastic tubes under combined tension-torsion loads*, Proc. 16th Jap. Nat. Congr. Appl. Mech. 1966, Tokyo 1967, 109-113.
152. H. GAJEWSKI, *Ein Verfahren zur Konstruktion statisch zulässiger Spannungsfelder*, ZAMM 1, 47 (1967), 19-30.
153. A. GALLI, V. FRANCIOSI, *Introduzione della caratteristica tagliante nel calcolo a rottura*, Ingegnere 8, 27 (1953), 893-897.
154. M. GALOS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analityczna metoda obliczania nośności granicznej prętów skręcanych*, Rozpr. Inż. 2, 12 (1964), 269-298.
155. M. GALOS, *O nośności granicznej roztlaczanych zbiorników wielowarstwowych*, Arch. Bud. Masz. 1, 15 (1968), 113-129; str. ang. Bull. Acad. Polon. Ser. Sci. Techn. 11-12, 16 (1968), 511-520.
156. D. H. GARBACCIO, *Bending with axial force of bars in plasticity*, Diss. Abstr. 6, 15 (1955), 1041-1042.
157. B. E. GATEWOOD, R. W. GEHRING, *Allowable axial loads and bending moments for inelastic structures under nonuniform temperature distribution*, J. Aero/Space Sci. 5, 29 (1962), 513-520.
158. C. GAVARINI, *Plastic analysis of structures and duality in linear programming*, Meccanica, 3-4, 1 (1966), 95-97.
159. F. A. GAYDON, *On the combined torsion and tension of a partly plastic circular cylinder*, QJMAM 5 (1952), 29-41.
160. F. A. GAYDON, H. NUTTALL, *On the combined bending and twisting of various sections*, J. Mech. Phys. Solids, 1, 6 (1957), 17-26.
161. H. GERINGER, *Beitrag zum vollständigen ebenen Plastizitätsproblem*, Proc. 3rd Int. Congr. Appl. Mech., Stockholm 1930.
162. H. GEIRINGER, W. PRAGER, *Mechanik isotroper Körper im plastischen Zustand*, Ergebn. Exact. Naturwiss. 13 (1933), 311.
163. H. GEIRINGER, *Some recent results in the theory of an ideal plastic body*, Adv. Appl. Mech. 3 (1953), 197-294.
164. H. GEIRINGER, *On the characteristics of v. Mises equations of a perfectly plastic body*, Mem. Sympos. Plast. Sci. Costr., Varenna, 1956, 125-130.

165. G. GERARD, S. WILDHORN, *A study of Poisson's ratio in the yield region*, NACA TN 2561, 1952.
166. A. F. M. GHANI, A. ROUSHAN, *Shakedown analysis of nonprismatic beams*, J. Struct. Div. Proc. ASCE, 6, 93 (1967), 25-54.
167. E. GIANGRECO, *Przegląd ostatnich prac włoskich w dziedzinie nośności granicznej*, Rozpr. Inż. 1, 14 (1966), 3-33.
168. G. GIANNELLI, *Sul calcolo a rottura delle sezioni in cemento armato pressoinflesse*, Giorn. Gen. Civile 12, 96 (1958), 828-836.
169. S. S. GILL, *Three «neutral» loading tests*, J. Appl. Mech. 4, 23 (1956), 497-502.
170. S. S. GILL, J. PARKER, *Plastic stress-strain relationship. Some experiments on the effect of loading path and loading history*, Trans. ASME, 1, E26 (1959), 77-87.
171. S. S. GILL, J. K. G. BOUCHER, *An experimental investigation of plastic collapse of structural members under combined bending and torsion*, Struct. Engr. 12, 42 (1964), 423-428.
172. S. S. GILL, *A simple illustration of incremental collapse*, Bull. Mech. Engrg. Educat. 1, 6 (1967), 3-8.
173. K. GIRKMANN, *Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundelegung eines ideal-plastischen Stahles*, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien (Abt. IIa), 140 (1931), 679.
174. C. D. GOODE, M. A. HELMY, *Design of rectangular beams subjected to combined bending and torsion*, Concrete 7, 1 (1967), 241-244.
175. B. GOSCHY, *I szelvényű tartó határállapota egyidejű hajlítás és nyírás esetén*, Melyépitéstud szemle, 13 (1963), 10, 470-473.
176. S. C. GOYAL, *The effect of shear on the plastic bending of I-beam*, Proc. 7-th Congr. Mech. India, Kharagpur 1961, Ind. S.T.A.M., 77-106.
177. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Clarendon Press, Oxford 1954.
178. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *Plasticity theory and multipolar continuum mechanics*, Matematika, 1, 12 (1965), 21-26.
179. A. E. GREEN, B. C. MC INNIS, P. M. NAGHDI, *Elastic-plastic continua with simple force dipole*, Intern. J. Eng. Sci. 7, 6 (1968), 373-394.
180. A. P. GREEN, *The plastic yielding of metal junctions due to combined shear and pressure*, J. Mech. Phys. Solids, 3, 2 (1954), 197-211.
181. A. P. GREEN, *A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and fixed-ended beams*, Part. I, J. Mech. Phys. Solids 1, 2 (1954), 1-15; Part II, 2, 3 (1955), 143-155.
182. A. P. GREEN, B. B. HUNDY, *Plastic yielding of I-beams*, Engineering, 184 (1957), 74-76, 112-115.
183. H. J. GREENBERG, *Complementary minimum principles for an elastic-plastic material*, Quart. Appl. Math. 1, 7 (1949), 85-95.
184. H. J. GREENBERG, *On the variational principles of plasticity*, Brown Univ. Rep. A11-54, March 1949.
185. H. J. GREENBERG, W. PRAGER, *On limit design of beams and frames*, Rep. A18-1 Grad. Div. Appl. Math. Brown Univ. 1949, oraz Trans. ASCE 117 (1952), 447-484.
186. H. J. GREENBERG, W. S. DORN, E. H. WETHERELL, *A comparison of flow and deformation theories in plastic torsion of a square cylinder*, "Plasticity", Proc. Sec. Symp. Naval Struct. Mech., Perg. Press 1960, 279-296.
187. O. I. GRESTE, *The fully plastic resistance of prismatic beams subjected to combined bending and torsion*, Kensington-Sydney, Univ. N.S.W. 1968.
188. A. S. GRIGORIEV, *The stress state and the carrying capacity of flexible plates and shells at large deformations*, Proc. IASS Symp. Non-classical Shell Problems, North-Holland-PWN, 1964.
189. M. GRÜNING, *Die Tragfähigkeit statisch unbestimmten Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung*, Springer, Berlin, 1926.
190. G. GUERRA, *Contributo allo studio dell'equilibrio dei prismi di de Saint Venant*, Aerotecnica, 6, 41 (1961), 347-351.
191. J. J. GUEST, *On the strength of ductile materials under combined stress*, Phil. Mag. 50 (1900), 69-132.
192. Zh. H. GUO, *Time derivatives of tensor fields in nonlinear continuum mechanics*, Arch. Mech. Stos. 1, 15 (1963), 131-163.
193. G. GURFINKEL, A. ROBINSON, *Determination of strain distribution and curvature in a reinforced*

- concrete section subjected to bending moment and longitudinal load, *J. Amer. Concr. Inst.* 7, 64 (1967), 398–403.
194. A. HAAR, Th. KÁRMÁN, *Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien*, Göttinger Nachr. Math.-Phys. Kl. 1909/2, 204–218.
 195. H. HAASE, *Bruchlinientheorie von Platten*, Werner-Verlag, Düsseldorf 1962.
 196. B. T. HAIGH, *The strain energy function and the elastic limit*, *Engineering* 109 (1920), 158–160.
 197. A. H. HALL, N. M. NEWMARK, *Shear deflection of wide-flange steel beams in the plastic range*, *Trans. ASCE* 122 (1957), 666–687.
 198. G. H. HANDELMAN, *A variational principle for a state of combined plastic stress*, *Quart. J. Appl. Math.* 1 (1944), 351–353.
 199. G. H. HANDELMAN, C. C. LIN, W. PRAGER, *On the mechanical behavior of metals in the strain-hardening range*, *Quart. Appl. Math.* 4 (1947), 397–407.
 200. G. H. HANDELMAN, W. H. WARNER, *Loading paths and the incremental strain law*, *J. Math. Phys.* 2, 33 (1954), 157–164.
 201. Y. HARA, *The condition of slip in yielding*, *Proc. 15th Jap. Congr. Appl. Mech.*, Tokyo 1966, 38–42.
 202. H. B. HARRISON, *The plastic behaviour of mild steel beams of rectangular section bent about both principal axes*, *Struct. Engr.* 7, 41 (1963), 231–237.
 203. F. HARTMANN, *Knickung, Kippung, Beulung*, F. Deuticke, Leipzig-Wien 1937.
 204. R. M. HAYTHORNTHWAITE, *Beams with full end fixity*, *Engineering*, 183 (1957), 110–112.
 205. R. M. HAYTHORNTHWAITE, *Stress and strain in soils*, "Plasticity", *Proc. Sec. Symp. Nav. Structural Mech.*, Pergamon Press 1960, 185–193.
 206. R. M. HAYTHORNTHWAITE, *Range of yield condition in ideal plasticity*, *J. Engng. Mech. Div. Proc. ASCE*, 6, 87 (1961), 117–133.
 207. R. M. HAYTHORNTHWAITE, *The range of the yield condition in a stable ideally plastic material sensitive to hydrostatic pressure*, "Applied Mechanics", Elsevier, Amsterdam–New York 1962, 296–297.
 208. R. M. HAYTHORNTHWAITE, *Analysis of complex stress states in classical plasticity*, *Devel. in Mechanics*, Vol. 3, Wiley 1967, 41–52.
 209. H. HENCKY, *Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichtes in plastischen Körpern*, *ZAMM* 4, 3 (1923), 241–251.
 210. H. HENCKY, *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen*, *ZAMM*, 4, 4 (1924), 323–334.
 211. H. HENCKY, *Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen*, *Z. techn. Phys.* 9 (1928), 214–223, 457.
 212. H. HENCKY, *Welche Umstände bedingen die Verfestigung bei der bildsamen Verformung von festen isotropen Körpern*, *Z. Physik* 55 (1929), 145–155.
 213. H. HENCKY, *Stahlbau*, 16 (1943), 95.
 214. A. V. HERSHEY, *A review of the definitions of finite strain*, *Proc. 1st US Nat. Congr. Appl. Mech.* (1951), 473–478.
 215. A. V. HERSHEY, *The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face-centered cubic crystals*, *J. Appl. Mech.* 3, 21 (1954), 241–249.
 216. J. HEYMAN, *Plastic design of portal frames*, Cambridge Univ. Press, 1957.
 217. J. HEYMAN, *Minimum weight of frames under shakedown loading*, *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE* 4, 84 (1958), 1790/1–1790/25.
 218. T. R. HIGGINS, *Plastic design of steel — a progress report*, *J. Boston Soc. Civ. Engrs* 3, 45 (1958), 207–226.
 219. R. HILL, *A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity*, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1 (1948), 18–28.
 220. R. HILL, *Theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals*, *Proc. Roy. Soc. A* 193 (1948), 281–297.
 221. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.

222. R. HILL, *A comparative study of some variational principles in the theory of plasticity*, J. Appl. Mech. 1, 17 (1950), 64-66.
223. R. HILL, Phil. Mag. 41 (1950), 733.
224. R. HILL, *On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point*, Phil. Mag. 42 (1951), 868-875.
225. R. HILL, M. P. L. SIEBEL, *On combined bending and twisting of thin tubes in the plastic range*, Phil. Mag. 42 (1951), 722-733.
226. R. HILL, *On discontinuous plastic states*, J. Mech. Phys. Sol. 1, 1 (1952), 19-30.
227. R. HILL, *A note on estimating yield point loads in a plastic-rigid body*, Phil. Mag. 43 (1952), 353-355.
228. R. HILL, *Comments on Dr Lee's paper*, Phil. Mag. Ser. 7, 43 (1952), 560.
229. R. HILL, M. P. L. SIEBEL, *On the plastic distortion of solid bars by combined bending and twisting*, J. Mech. Phys. Solids, 3, 1 (1953), 207-214.
230. R. HILL, *The mechanics of quasi-static plastic deformation in metals*, Surveys in Mechanics 7, Cambridge 1956.
231. R. HILL, *New horizons in the mechanics of solids*, J. Mech. Phys. Solids. 5 (1956), 66-74.
232. R. HILL, *On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid*, J. Mech. Phys. Solids 4, 4 (1956), 247-255; 1, 5 (1956), 1-8; 3, 5 (1957), 153-161; 4, 5 (1957), 312-317.
233. R. HILL, *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*, J. M. Phys. Sol. 6 (1958), 236-249.
234. R. HILL, *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time*, J. Mech. Phys. Solids 3, 7 (1959), 209-225.
235. R. HILL, *Discontinuity relations in mechanics of solids*, Progr. Solid Mech. 2 (1961), 247-276.
236. R. HILL, *Generalized constitutive relations for incremental deformations of metal crystals by multi-slip*, J. Mech. Phys. Solids 2, 14 (1966).
237. R. HILL, *Eigenmodal deformations in elastic-plastic continua*, J. Mech. Phys. Solids, 6, 15 (1967), 371-386.
238. M. J. HILLIER, *Tensile plastic stability under complex stress*, Int. J. Mech. Sci. 1, 5 (1963), 57-67.
239. M. J. HILLIER, *Tensile plastic instability of thin tubes, I*, Int. J. Mech. Sci. 8, 7 (1965), 531-538.
240. P. G. HODGE, Jr., W. PRAGER, *A variational principle for plastic materials with strain-hardening*, J. Math. Phys. 27 (1948), 1-10.
241. P. G. HODGE, Jr., G. N. WHITE, *A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity*, J. Appl. Mech. 17 (1950), 180-184.
242. P. G. HODGE, Jr., *Rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells*, J. Appl. Mech. 4, 21 (1954), 336-342.
243. P. G. HODGE, Jr., *The theory of piecewise linear isotropic plasticity*, IUTAM Colloquium Madrid 1955, Berlin 1956, Springer.
244. P. G. HODGE, Jr., *Minimum principles of piecewise linear isotropic plasticity*, J. Rat. Mech. Anal. 5 (1956), 917-938.
245. P. G. HODGE, Jr., *Piecewise linear plasticity*, Proc. 9th Congr. Appl. Mech. 8 (1957), 65-72.
245. P. G. HODGE, Jr., *A general theory of piecewise linear plasticity based on maximum shear*, J. Mech. Phys. Solids 5 (1957), 242-260.
247. P. G. HODGE, Jr., *Interaction curves for shear and bending of plastic beams*, J. Appl. Mech. 3, 24 (1957), 453-456.
248. P. G. HODGE, Jr., *The mathematical theory of plasticity*, in "Elasticity and Plasticity", Wiley, New York 1958.
249. P. G. HODGE, Jr., *The linearization of the plasticity problems by means of non-homogeneous materials*, Proc. IUTAM Symp. on Non-Homogeneity (Warsaw 1958), Perg. Press 1959, 147-156.
250. P. G. HODGE, Jr., R. SANKARANARAYANAN, *The determination of safe loads of beams subjected to combined twisting and bi-axial bending moments*, Trans. ASME, 3, E26, 1959, 442-447.
251. P. G. HODGE, Jr., *Plastic analysis of structures*, Mc Graw-Hill, New York 1959.
252. P. G. HODGE, Jr., *Boundary value problems in plasticity*, "Plasticity", Proc. Sec. Symp. Naval Struct. Mech., Perg. Press 1960, 297-337.

253. P. G. HODGE Jr., *Yield conditions for rotationally symmetric shells under axisymmetric loading*, J. Appl. Mech., Trans. ASME 2, **E27** (1960), 323–331.
254. P. G. HODGE, Jr., R. SANKARANARAYANAN, *Plastic interaction curves for annular plates in tension and bending*, J. Mech. Phys. Solids, 3, **8** (1960), 153–163.
255. P. G. HODGE, Jr., *The Mises yield condition for rotationally symmetric shells*, Quart. Appl. Math. 4, **18** (1961), 305–311.
256. P. G. HODGE, Jr., *A comparison of yield conditions in the theory of plastic shells*, Problems of Continuum Mechanics, Philad., Soc. In. Appl. Math. 1961, 165–177.
257. P. G. HODGE, Jr., J. PANARELLI, *Interaction curves for circular cylindrical shells according to the Mises or Tresca yield criterion*, Trans. ASME, **E29**, 1962, 2, 375–380, Paper ASME, 1961, WA-103.
258. P. G. HODGE, Jr., *Piecewise-linear bounds on the yield-point load of shells*, J. Mech. Phys. Solids, 1, **11** (1963), 1–12.
259. P. G. HODGE, Jr., *Plastic analysis of rotationally symmetric plates and shells*, Prentice Hall 1963.
260. P. G. HODGE, Jr., *Yield-point load determination by nonlinear programming*, Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech., München 1964, Springer, 554–561.
261. P. G. HODGE, Jr., J. PANARELLI, *Plastic analysis of cylindrical shells under pressure, axial loads and torque*, Developm. Mech. Vol. 2, part 2, Perg. Press 1965, 262–277.
262. P. G. HODGE, Jr., C. K. SUN, *General properties of yield-point load surfaces*, Trans. ASME 1, **E35** (J. Appl. Mech.) (1968), 107–110.
263. O. HOFFMAN, G. SACHS, *Introduction to the theory of plasticity for engineers*, Mc Graw-Hill, New York 1953. Przekład polski: *Wprowadzenie do teorii plastyczności*, PWT, Warszawa 1959.
264. K. HOHENEMSER, ZAMM, **11** (1931), 15.
265. K. HOHENEMSER, W. PRAGER, *Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flußstahl*, ZAMM 1, **12** (1932), 1–14.
266. H. G. HOPKINS, A. J. WANG, *Load carrying capacities for circular plates of perfectly-plastic material with arbitrary yield condition*, J. Mech. Phys. Solids 3 (1954), 117–129.
267. M. R. HORNE, *Effect of variable repeated loads in the plastic theory of structures*, Engineering structures, Acad. Press. New York 1949, 141–151.
268. M. R. HORNE, *The plastic theory of bending of mild steel beams with particular reference to the effect of shear forces*, Proc. Roy. Soc. London **A207** (1951).
269. M. R. HORNE, *The effect of variable repeated loads in building structures designed by plastic theory*, Proc. Int. Ass. Bridge Struct. Engng. **14** (1954), 53.
270. M. R. HORNE, *The full plastic moments of sections subjected to shear force and axial load*, Brit. Weld. J. 4, **5** (1958), 170–178.
271. B. C. HOSKIN, *Torsional rigidity of a prismatic bar of circular section under combined tension and torsion*, Austr. J. Appl. Sci. 2, **12** (1961), 255–256.
272. T. C. HSU, *A theory of the yield locus and flow rule of anisotropic materials*, J. Struct. Anal. 3, **1** (1966), 204–215.
273. T. C. HSU, *The characteristics of coaxial and non-coaxial strain paths*, J. Strain Anal. 3, **1** (1966), 216–222.
274. T. C. HSU, *The effect of the rotation of the stress axes on the yield criterion of prestrained materials*, Trans. ASME 1, **D88** (1966), 61–70.
275. L. W. HU, J. MARIN, *Anisotropic loading functions for combined stresses in the plastic range*, J. Appl. Mech. 1, **22** (1955), 77–85.
276. L. W. HU, J. MARIN, *Biaxial plastic stress-strain relations of a mild steel for variable stress ratios*, Trans. ASME 3, **78** (1956).
277. L. W. HU, *An experimental study of the fracture of metals under hydrostatic pressure*, J. Mech. Phys. Solids, 2, **4** (1956), 96–103.
278. L. W. HU, *Modified Tresca's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and its applications*, J. Franklin Inst. **265** (1958), 187–204.
279. L. W. HU, J. F. BRATT, *Effect of tensile plastic deformation on yield condition*, J. Appl. Mech. 3, **25** (1958), 411.

280. L. W. HU, *Plastic stress-strain relations and hydrostatic stress*, "Plasticity", Proc. Sec. Symp. Nav. Struct. Mech., Pergamon Press 1960, 194–201.
281. M. T. HUBER, *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału*, Czas. Techn. 22 Lwów 1904, 34–40, 49–50, 61–62, 80–81; Pisma, t. II, PWN, Warszawa 1956, 3–20.
282. M. T. HUBER, *Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej*, IW. SIMP, Warszawa 1948.
283. E. O. IMEGWU, *Plastic flexure and torsion*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 8 (1960), 141–146.
284. E. O. IMEGWU, *Combined plastic bending and torsion*, J. Mech. Phys. Solids, 3, 10 (1962), 277–282.
285. A. INGERSLEV, *The strength of rectangular slabs*, J. Inst. Struct. Eng. 1, 1 (1923).
286. S. IRMAY, *Failure criteria of plastic solids in the space of stress invariants*, Israel J. Technol. 3, 6 (1968), 165–173.
287. H. J. IVEY, *Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys*, J. Mech. Eng. Sci. 1, 3 (1961), 15–31.
288. W. D. IWAN, *On class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems*, Trans. ASME (J. A. Mech.) 3, E34 (1967), 612–617.
289. A. JAKUBOWICZ, *Techniczna teoria zginania prętów dla pewnego przypadku materiału fizycznie nielinowego*, Rozpr. Inż. 3, 10 (1962), 443–458.
290. M. JANAS, *Yield loci for nonsymmetric plastic shells*, Bull. Acad. Pol., Ser. Sci: Techn., 13 (1965), 1, 9–17.
291. M. JANAS, *Nośność graniczna luków i sklepień*, Arkady, Warszawa 1967.
292. M. JANAS, *Kinematical compatibility problems in yield-line theory*, Mag. Concr. Res. 58, 19 (1967), 33–44.
293. C. F. JENKIN, *A mechanical model illustrating the behaviour of metals under static and alternating loads*, Engineering 114 (1922), 603.
294. K. JEŹEK, *Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl*, Springer, Wien 1937.
295. K. W. JOHANSEN, *Brudlinieorie*, Gjellerup, Copenhagen 1943. Eng. ed.: *Yield-line theory*, Cement and Concr. Ass., London 1962.
296. W. JOHNSON, P. B. MELLOR, *Plasticity for mechanical engineers*, Van Nostrand, London-Princeton 1962.
297. W. JOHNSON, P. B. MELLOR, *Elasticplastic behaviour of thick-walled spheres of non-work-hardening material subject to a steady-state radial temperature gradient*, Intern. J. Mech. Sci. 4 (1962), 147–158.
298. N. JONES, *Combined distributed loads on rigid-plastic circular plates with large deflections*, Int. J. Sol. Structures 1, 5 (1969), 51–64.
299. G. DE JOSSELIN DE JONG, *Lower bound collapse theorem and lack of normality of strain rate to yield surface for soils*, Proc. IUTAM Symp. on Rheology and Soil Mech., Grenoble 1964, Springer.
300. H. JUNG, *Über die Spannungen in Dickwandigen Rohren bei elastisch-plastischer Beanspruchung*, Wiss. Z. Hochsch. Schwermaschinenbau Magdeburg, 2 (1958), 251–256.
301. J. W. JUSTUSSON, A. PHILLIPS, *Stability and convexity in plasticity*, Acta Mechanica 3, 2 (1966), 251–267.
302. V. KAFKA, *The general theory of isothermal elastic-plastic deformation of polycrystals based on the analysis of the microscopic state of stress*, Z. angew. Math. Mech. 4, 48 (1968), 265–282.
303. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, Wyd. WAT, Warszawa 1957.
304. T. B. KAMMASH, S. A. MURCH, P. M. NAGHDI, *The elastic-plastic cylinder subjected to radially distributed heat source, lateral pressure and axial force with application to nuclear reactor fuel elements*, J. Mech. Phys. Solids 1, 8 (1960), 1–25.
305. G. KAZINCZY, *Kisérletek befalozott tartókkal*, Betonszemle 4, 2 (1914), 68; 5, 2 (1914), 83; 6, 2 (1914), 101.
306. G. KAZINCZY, *Die Weiterentwicklung der Elastizitätstheorie*, Technika, Budapest 1931.
307. K. O. KEMP, *The yield criterion for orthotropically reinforced concrete slabs*, Int. J. Mech. Sci. 11, 7 (1965), 737–746.

308. J. KLEPACZKO, J. A. KÖNIG, *Ściskanie osiowe powłoki cylindrycznej z równoczesnym ciśnieniem wewnętrznym*, Rozpr. Inż. 2, **14** (1966), 263–275.
309. Z. KLĘBOWSKI, *Energetyczne hipotezy wyężenia a możność opracowania ogólnej teorii wyężenia*, Ks. Jubil. M. T. Hubera, Gdańsk 1950, 165–180.
310. Z. KLĘBOWSKI, *Warunek wytrzymałościowy na tle hipotez wyężenia*, PZWS, Warszawa 1950.
311. Z. KLĘBOWSKI, *Polski wkład w rozwiązywanie zagadnienia wyężenia*, Zesz. Nauk. Pol. Warsz. 45, Mechanika 6 (1960), 17–28.
312. K. KLÖPPEL, M. YAMADA, *Fliesspolyeder des Rechteck- und I-Querschnittes unter der Wirkung von Biegemoment, Normalkraft und Querkraft*, Stahlbau 11, **27** (1958), 284–290. Berichtigung: 4, **28** (1959), 112.
313. K. KLÖPPEL, M. YAMADA, *Anisotrope Fliessbedingung*, Stahlbau 6, **29** (1960), 173–180.
314. W. T. KOITER, *Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface*, Quart. Appl. Math. 3, **11** (1953), 29–53.
315. W. T. KOITER, *On the stress-strain relations and the general theorems in plasticity*, Labor. voor Toegepaste Mechanica, Techn. Hogeschool Delft, 1953.
316. W. T. KOITER, *Some remarks on plastic shakedown theorems*, Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech. Istanbul 1952, publ. 1955, **1**, 220.
317. W. T. KOITER, *A new general theorem on shake-down of elastic-plastic structures*, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. **B59** (1956), 24–34.
318. W. T. KOITER, *General theorems for elastic-plastic solids*, Progress in solid Mechanics, vol. I, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1960, chapter IV, 165–221.
319. A. KOLAŘ, *Mezní stavy únosnosti spojitych nosníků při pohyblivém zatížení*, Stavebn. Časop. 8, **16** (1968), 491–504.
320. S. KOMLJENOVIĆ, *Plastic flow with the non-symmetric stress tensor*, Bull. Scient. Conseil Acad. RSFY, 6, **A10** (1965), 185.
321. D. C. A. KOOPMAN, R. H. LANCE, *On linear programming and plastic limit analysis*, J. Mech. Phys. Solids 2, **13** (1965), 77–87.
322. T. KOZŁOWSKI, *Zagadnienie stanów granicznych stalowych luków*, Czas. Techn. 4, **65** (1960), 1–7.
323. J. A. KÖNIG, *Przybliżone określanie odkształceń płyt i powłok plastycznych w oparciu o niestowarzyszone prawo płynięcia*, Rozpr. Inż. 1, **13** (1965), 55–65.
324. J. A. KÖNIG, *Theory of shake-down of elastic-plastic structures*, Arch. Mech. Stos. 2, **18** (1966), 227–238.
325. J. A. KÖNIG, J. RYCHLEWSKI, *Limit analysis of circular plates with jump non-homogeneity*, Int. J. Solids and Structures 3, **2** (1966), 493–513.
326. Fr. KÖRBER, A. EICHINGER, *Die Grundlagen der bildsamen Verformung*, Mitt. Kaiser-Wilhelm Inst. Eisenforsch., Düsseldorf **22** (1940), 57–80.
327. A. KRISCH, R. SCHWEITZER, *Die Spannungen im ausbauchenden Rohr unter Innendruck und einer zusätzlichen Längskraft*, Arch. Eisenhüttenwesen 7, **37** (1966), 599–605.
328. V. KRŮPKA, *Mezní stav nosníků tvaru i při krutu za ohybu*, Inžen. Stavby 1, **2** (1954), 31–36.
329. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność*, PWN, Warszawa 1962.
330. W. KRZYŚ, *Optymalne kształtowanie z uwagi na stateczność ściskanych słupów cienkościennych o profilu zamkniętym*, Zesz. Nauk. Polit. Krak. Mechanika 24, Kraków 1967.
331. W. KRZYŚ, *Optimale Formen gedrückter dünnwandiger Stützen im elastisch-plastischen Bereich*, Wiss. Z. Univ. Dresden 2, **17** (1968), 407–410.
332. T. KUSUDA, *Wpływ sil poprzecznych i podłużnych na nośność graniczną przekroju belki* (w jęz. japońskim), Journ. Soc. Naval Archit. Japan, 1959, 105, 127–135.
333. M. W. KWIECIŃSKI, *Yield condition for orthotropically reinforced slab*, Arch. Mech. Stos. 5, **18** (1966), 615–626.
334. G. LANDGRAF, *Aufstellung von Fliessbedingungen für Schnittgrößen von Flächentragwerken*, ZAMM 5, **48** (1968), 317–323.
335. T. VAN LANGENDONCK, *Einfluss der Querkraft auf die Grösse des Biegemoments, das die plastischen Gelenke erzeugt*, Bautechnik 3, **33** (1965), 84–87.

336. M. G. LAY, *Yielding of uniformly loaded steel members*, J. Struct. Div. Proc. ASCE 6, **91** (1965), 49–66.
337. H. Le BOITEUX, *Sur un critère énergétique de limite élastique*, C.r. Acad. Sci. 8, **265** (1967), A238–A239
338. J. LEDZIŃSKI, Z. WASZCZYŚYŃ, *Analiza zjawiska „przeskoku” w zakresie sprężysto-plastycznym na modelu układu kratowego Misesa*, Mech. Teor. Stos. 2, **4** (1966), 71–82.
339. E. H. LEE, *On the significance of the limit theorems for a plastic-rigid body*, Phil. Mag. **VII**, **43** (1952), 549–560.
340. S. L. LEE, B. J. THORN, *Outer and inner bounds on Tresca limit loads of cylindrical shells*, J. Franklin Inst. 6, **277** (1964).
341. S. LEES, Phil. Mag. ser. 6, **44** (1922), 511.
342. T. LEHMANN, *Zur Beschreibung grosser plastischer Formänderungen unter Berücksichtigung der Werkstoffverfestigung*, Rheol. Acta **2** (1962), 247–254.
343. T. LEHMANN, *Anisotrope plastische Formänderungen*, Rheol. Acta **3** (1964), 281–285.
344. H. LEIPHOLZ, *Über den Zusammenhang zwischen Fließgesetz und Fließbedingung*, Ing.-Archiv. 3, **34** (1965), 194–197.
345. V. S. LENSKY, *Analysis of plastic behavior of metals under complex loading*, „Plasticity”, Proc. Sec. Symp. Naval Struct. Mech. Perg. Press 1960, 259–278.
346. A. LEON, Ing.-Archiv **4** (1933), 421.
347. Ű. LEPIK, *Large deflections of rigid-plastic cylindrical shells under axial tension and external pressure*, Nucl. Engng and Design 1, **4** (1966), 29–38.
348. C. F. A. LETH, *The effect of shear stresses on the carrying capacity of I-beams*, DAM Rept A11–107, Brown Univ. Providence 1954.
349. M. LEVY, *Mémoire sur les équations générales*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, **70** (1870), 1323–1325.
350. M. LEVY, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 16, **73** (1871), 1098–1103.
351. M. J. LIGHTHILL, *A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid*, Phil. Mag. **40** (1949), 1179.
352. T. H. LIN, *A proposed theory of plasticity based on slips*, Proc. Sec. US Nat. Congr. Appl. Mech. 1954, 461–468.
353. T. H. LIN, *On stress-strain relations based on slips*, Proc. Third US Nat. Congr. Appl. Mech. 1958, 581–587.
354. T. H. LIN, *Analogy between the inelastic strain gradient and body forces in cubic crystals and isotropic media*, Proc. Nat. Acad. Sci., March 1966.
355. T. H. LIN, M. ITO, *Theoretical plastic stress-strain relationship of a polycrystal and the comparisons with the von Mises and the Tresca plasticity theories*, Intern. J. Engng. Sci., **5**, **4** (1966), 543–561.
356. T. H. LIN, M. ITO, *Latent elastic strain energy due to the residual stresses in a plastically deformed polycrystal*, J. Appl. Mech., Trans. ASME 3, **E34** (1967), 606–611.
357. T. H. LIN, *Theory of inelastic structures*, Wiley, New York 1968.
358. J. LITOŃSKI, J. KLEPACZKO, *Wpływ wstępnego plastycznego rozciągania na modul Younga mosiądzu i niskowęglowej stali*, Rozpr. Inż. 2, **12** (1964), 251–266.
359. W. LODE, *Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze*, ZAMM **5** (1925).
360. W. LODE, *Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf des Fließen der Metalle — Eisen, Kupfer und Nickel*, Z. Physik 11/12, **36** (1926).
361. W. LODE, *Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle*, Forsch. auf dem Geb. Ingenieurwesen, Heft 303, 1928.
362. E. LONGBOTTOM, J. HEYMAN. *Experimental verification of the strengths of plate girders designed in accordance with the revised British Standard 153*, Proc. Instn. Civil Engrs. 2, **5** (1956), 462–521.
363. LE-WU LU, *Linearized interaction curves for plastic beams under combined bending and twisting*, AIAA Journal 3, **1** (1963), 706–707.
364. LE-WU LU, H. KAMALVAND, *Ultimate strength of laterally loaded columns*, J. Struct. Div. Proc. ASCE, 6, **94** (1968), 1505–1524.
365. P. LUDWIK, *Elemente der technologischen Mechanik*, Springer, Berlin 1909.

366. P. LUDWIK, L. SCHEU, *Vergleichende Zug-Druck- Dreh- und Walzversuche*, Stahl und Eisen, 11, 45 (1925), 373–381.
367. C. W. MAC GREGOR, L. F. COFFIN, J. C. FISCHER, *The plastic flow of thick-walled tubes with large strains*, J. Appl. Phys. 3, 9 (1947), 291–297.
368. H. MAEDA, H. NAMIKAWA, *On the rapid bending of the column subjected to axial and lateral loads*, Technol. Repts. Kansai Univ. 1961, 3, 1–11.
369. G. MAIER, D. C. DRUCKER, *Elastic-plastic continua containing unstable elements obeying normality and convexity relations*, Schweiz. Bauzeitung 23, 84 (1966), 447–450.
370. G. MAIER, *Sui legami associati tra sforzi e deformazioni incrementali in elastoplasticità*, Rend. Ist. Lombardo Accad. Sci. e Lettere 4, A100 (1966), 809–838.
371. G. MAIER, *Stabilità, unicità di soluzione e leggi di Scorrimento per strutture elastoplastiche con legami incrementali sforzi-deformazioni associati*, Rend. Ist. Lombardo Accad. Sci. e Lettere 1, A100 (1966), 3–27.
372. G. MAIER, *Extremum theorems for the analysis of elastic plastic structures containing unstable elements*, Meccanica 4, 2 (1967), 235–242.
373. G. MAIER, *On elastic-plastic structures with associated stress-strain relations allowing for work softening*, Meccanica 1, 2 (1967), 55–64.
374. G. MAIER, *A quadratic programming approach for certain classes of nonlinear structural problems*, Meccanica 2, 3 (1968), 121–130.
375. G. MAIER, *Quadratic programming and theory of elastic-plastic structures*, Meccanica 4, 3 (1968), 265–273.
376. W. M. MAIR, H. L. D. PUGH, *Effect of pre-strain on yield surfaces in copper*, J. Mech. Eng. Sci. 2, 6 (1964), 150–163.
377. W. M. MAIR, *An investigation into the existence of corners on the yield surface*, J. Strain Anal. 3, 2 (1967), 188–195.
378. J. MAJER, *Beitrag zu den dreiachsigen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen Fester Stoffe*, Österr. Ing.-Archiv 2, 4 (1950), 140–153.
379. S. M. MAKKY, *Fracture surfaces in round bars under combined tension and torsion*, Z. angew. Math. Mech. 6, 45 (1965), 433–440.
380. J. MANDEL, *Généralisation de la théorie de plasticité de W. Koiter*, Int. J. Solids Structures 1 (1965), 273–295.
381. E. H. MANSFIELD, *Loading and heating of a simple structure with linear work-hardening*, J. Roy. Aero. Soc. 67 (1963), 626, 92–102.
382. S. S. MANSON, *Analysis of rotating disks of arbitrary contour and radial temperature distribution in the region of plastic deformation*, Proc. First. US Nat. Congr. Appl. Mech. ASME NY 1952, 569–577.
383. P. V. MARÇAL, W. R. PILGRIM, *A stiffness method for elastic-plastic shells of revolution*, J. Strain Anal. 4, 1 (1966), 339–350.
384. Z. MARCINIAK, *Wykresne wyznaczanie rozkładu naprężeń przy plastycznym zginaniu blach z uwzględnieniem siły osiowej*, Rozpr. Inż. 4, 6 (1958), 539–545.
385. Z. MARCINIAK, *Influence of the sign change of the load on the strain hardening curve of a copper test piece subject to torsion*, Arch. Mech. Stos. 6, 13 (1961), 744–752.
386. J. MARIN, *Failure theories of materials subjected to combined stresses*, Proc. ASCE 61 (1935), 851–867.
387. J. MARIN, L. W. HU, *On the validity of assumptions made in theories of plastic flow for metals*, Trans. ASME 6, 75 (1953), 1181–1190.
388. J. MARIN, J. A. SAUER, *Plastic stress-strain relations under radial and non-radial combined stress loading*, J. Franklin Inst. 2, 256 (1953), 119–128.
389. J. MARIN, H. A. B. WISEMAN, *Plastic stress-strain relations for aluminium alloy 14S-T6 subjected to combined tension and torsion*, J. Metals, 5, sec. 2, 9, 1181–1190.
390. J. MARIN, L. W. HU, *Bi-axial plastic stress-strain relations of a mild steel for variable stress ratios*, Trans. ASME 3, 18 (1956), 499–509.

391. J. MARIN, *Mechanical properties of materials for combined stresses based upon true stress and strain*, J. Frankl. Inst. 1, **263** (1957), 35–46.
392. J. MARIN, *Theories of strength for combined stresses and nonisotropic materials*, J. Aero. Sci. 4, **24** (1957), 265–268, 274.
393. G. MASING, *Zur Heyn'schen Theorie der Verfestigung der Metalle durch Verborgene elastischer Spannungen*, Wiss. Veröff. Siemens-Konzern 1, **3** (1923).
394. P. C. MASSEY, *The torsional rigidity of steel I beams already yielding under uniform bending moment*, Civil Engng. and Public Works Rev. **58** (1963), 680, 367–371, 681, 488–492.
395. Ch. MASSONET, M. SAVE, *Calcul plastique des constructions*, Centre Belge-Luxemb. de l'acier Vol. II, Bruxelles 1963.
396. Ch. MASSONET, M. SAVE, *Résistance limite d'une poutre courbe à parois minces soumise à flexion*, Mem. AIPC **23** (1963), 245–261.
397. Ch. MASSONET, M. SAVE, *Résistance limite d'une poutre courbe en caisson soumise à flexion pure*, Vol. d'hommage F. Campus, 1964, 229–239.
398. C. MAZZARELLA, *I domini di plasticizzazione per le lastre formate da materiale con limite plastici a trazione ed a compressione diversi in condizioni di simmetria radiale*, Giorn. Genio Civile 6–7, **105** (1967), 472–483; 8, **105** (1967), 511–523.
399. E. MELAN, *Theorie statisch unbestimmter Systeme aus idealplastischem Baustoff*, Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien, IIa **145** (1936), 195.
400. E. MELAN, *Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums*, Ing.-Archiv **9** (1938), 116–126.
401. E. MELAN, *Der Spannungszustand eines Mises-Henckyschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung*, S. Ber. Akad. Wiss. Wien (Abt. IIa), **147** (1938), 73.
402. A. MELDAHL, *Brown Boveri Mitteilungen*, Jul.-Aug. 1943, 204.
403. A. MELDAHL, *Brown Boveri Rev.*, Zurich 1944, 260.
404. P. B. MELLOR, *Tensile instability in thin-walled tubes*, J. Mech. Eng. Sci. 3, **4** (1962), 251–256.
405. P. B. MELLOR, *Tensile instability conditions in ideal pressure containers*, Engineering **215** (1963), No. 5583, 174–179.
406. A. MENDELSON, *Plasticity: Theory and applications*, Macmillan, New York 1968.
407. G. MENDITTO, *La piastra circolare allo stato limite*, Rend. Ist. Lombardo, Sci. e Lett. Sci. Mat. 1, **98** (1964), 335–356.
408. G. MENDITTO, *Studio dello stato limite di una piastra circolare di materiale rigido-plastico con il criterio di plasticizzazione dello Stassi d'Alia*, Giorn. Genio Civile, 6–7, **103** (1965), 318–336.
409. G. MENDITTO, *Lo stato limite della piastra circolare in differenti condizioni di vincolo e di carico*, Rend. Ist. Lombardo Sci. e Lett., Sci. Mat.-Fis. 1, **99** (1965), 70–93.
410. K. R. MERCKX, *Cyclic operation of pressure piping with γ heating*, Paper ASME 1959, Met.-4, 55 pp.
411. K. R. MERCKX, *Plastic bending of rods or tubes with radial temperature distributions*, Nucl. Sci. and Engng. 3, **5** (1959), 202–203.
412. J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *An experimental study of yield surfaces of prestrained brass*, Mech. Teor. i Stos. 2, **3** (1965), 55–66; Int. J. Sol. Struct. **1** (1965), 189–194.
413. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności, I*, Mech. Teor. i Stos. 2, **4** (1966), 5–16.
414. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności, II*, Mech. Teor. i Stosow. 1, **6** (1968), 3–31.
415. H. MII, *Plastic deformation of light metal bars strained with combined tension and torsion*, J. Jap. Soc. Appl. Mech. **3** (1950), 196–198.
416. H. MII, *Plastic deformation of light metal bars strained with combined bending and torsion*, J. Jap. Soc. Appl. Mech. **5** (1952), 11–14.
417. M. MIKKOLA, *An analysis of physically nonlinear structures*, Julk. Valtion tekn. tutkimuslaitos **112** (1966), 98 pp.
418. D. R. MILLER, *Thermal-stress ratchet mechanism in pressure vessels*, Trans. ASME, 2, **D81** (1959), 190–196.

419. P. M. MILLER, *Numerical analysis of combined bending and torsion of a prismatic bar using rigid-plastic and workhardening plasticity theories*, Doct. diss. Mich. State Univ. 1966.
420. P. M. MILLER, L. E. MALVERN, *Numerical solution of Piechnik's equation for the combined bending and torsion of rigid-plastic bars*, Tenth Midw. Mech. Conf., Colorado State Univ. 1967, 571-580.
421. P. M. MILLER, L. E. MALVERN, *Numerical analysis of combined bending and torsion of a work-hardening plastic square bar*, Trans. ASME (J. Appl. Mech.) 4, E34 (1967), 1005-1010.
422. R. MISES, *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*, Göttinger Nachrichten, Math. Phys. Kl. 4, 1 (1913), 582-592.
423. R. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Z. angew. Math. Mech. 3, 8 (1928), 161-185.
424. R. MISES, *Three remarks on the theory of the ideal plastic body*, Reissner Anniv. Volume, Edwards, Ann Arbor, 1949, 415-429.
425. O. MOHR, *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?*, z. VDI 44 (1900), 1524-1530, 1572-1577; 45 (1901), 740.
426. O. MOHR, *Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik*, 2. Aufl. Ernst & Sohn, Berlin 1914.
427. A. J. MORRIS, *Elastic-plastic analysis of loaded plates*, Engineer, 5770, 222 (1966), 304-305.
428. M. MROWIEC, M. ŻYCZKOWSKI, *Nośność sprężysta rurociągu grubościennego*, Rozpr. Inż. 3, 10 (1962), 519-530.
429. M. MROWIEC, *Nośność graniczna niejednorodnego łuku kołowego o zmiennym przekroju, obciążonego ciśnieniem wewnętrznym*, Czas. Techn. 4, 68 (1963), 4-8.
430. M. MROWIEC, *Stan graniczny rurociągu cienkościennego w przypadku ciśnienia wewnętrznego i zginania*, Rozpr. Inż. 3, 14 (1966), 513-527.
431. M. MROWIEC, M. ŻYCZKOWSKI, *Krzywe nośności granicznej dla cienkościennego rurociągu poddanego ciśnieniu wewnętrznemu i zginaniu*, Rozpr. Inż. 4, 15 (1967), 617-627.
432. Z. MRÓZ, *The load carrying capacity of orthotropic shells*, 1, 12 (1960), 85-107.
433. Z. MRÓZ, XU BING-YE, *The load carrying capacities of symmetrically loaded spherical shells*, Arch. Mech. Stos. 2, 15 (1963), 245-266.
434. Z. MRÓZ, *Non-associated flow laws in plasticity*, Journ. de Mécanique 1, 2 (1963), 21-42.
435. Z. MRÓZ, *Admissible loading paths in the deformation theories of plasticity*, Arch. Mech. Stos. 5, 16 (1964), 1091-1102.
436. Z. MRÓZ, *On non-linear flow laws in the theory of plasticity*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn. 11, 12 (1964), 789-797.
437. Z. MRÓZ, *On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids*, Arch. Mech. Stos. 1, 18 (1966), 3-35.
438. Z. MRÓZ, *On the description of anisotropic workhardening*, J. Mech. Phys. Solids 3, 15 (1967), 163-175.
439. Z. MRÓZ, *An attempt to describe the behaviour of metals under cyclic loads using a more general workhardening model*, Acta Mechanica 7, (1969), 199-212.
440. T. MURA, *Unstable plastic yield of a hollow cylinder under internal pressure and thermal stress*, Res. Repts. Fac. Engng. Meiji Univ. 1957, 9, 20-29.
441. T. MURA, S. LEE, *Application of variational principles to limit analysis*, Quart. Appl. Math. 3, 21 (1963), 243-248.
442. T. MURA, J. S. KAO, S. L. LEE, *Limit analysis of circular orthotropic plates*, J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE EM5, 90, Oct. 1964.
443. T. MURA, W. H. RIMAWI, S. L. LEE, *Extended theorems of limit analysis*, Quart. Appl. Math. 2, 23 (1965).
444. T. MURA, S. L. LEE, R. H. BRYANT, W. H. RIMAWI, *Limit analysis by direct method of variation*, J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE EM5, 93 Oct. 1967, 67-78.
445. F. D. MURNAGHAN, *The compressibility of solids under extreme pressures*, Kármán Anniv. Volume (1961), 121-136.
446. J. MURZEWSKI, *A probability theory of plastic and brittle behaviour of quasi-homogeneous materials*, Arch. Mech. Stos. 2, 12 (1960), 203-227.

447. J. MURZEWSKI, Z. MENDERA, *Yield surface of steel determined by semiempirical method*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn. 7, **11** (1963), 35–42.
448. J. MUTERMILCH, E. OLSZEWSKI, M. ŁUBIŃSKI, *Wymiarowanie konstrukcji stalowych według stanów granicznych z uwzględnieniem naprężeń stycznycych i odkształceń*, Arch. Inż. Łąd. 1–2, **2** (1956), 15–44.
449. A. NÁDAI, *Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab*, ZAMM, 6, **3** (1923), 442–444.
450. A. NÁDAI, *Plasticity*, McGraw-Hill 1931.
451. A. NÁDAI, *Plastic behaviour of metals in the strain-hardening range*, part I, J. Appl. Phys. **8** (1937), 205–217.
452. A. NÁDAI, *Theory of flow and fracture of solids*, vol. 1, New York-Toronto-London, McGraw-Hill, 1950.
453. A. NÁDAI, *The principle of minimum work applied to states of finite, homogeneous, plane plastic strain*, Proc. 1st US Nat. Congr. Appl. Mech. 1952, 479–485.
454. P. M. NAGHDI, J. C. ROWLEY, *An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity*, J. Mech. Phys. Solids **1**, **3** (1954), 63–80.
455. P. M. NAGHDI, J. C. ROWLEY, C. W. BEADLE, *Experiments concerning the yield surface and the assumptions of linearity in the plastic stress-strain relations*, J. Appl. Mech., **3**, **22** (1955), 416–420.
456. P. M. NAGHDI, *Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity*, "Plasticity", Sec. Symp. Naval Struct. Mechanics, 1960, 121–167.
457. T. NAKAMURA, *Plastic analysis of shells of revolution under axisymmetric loads*, Doct. Diss. Stanford Univ. 1961.
458. T. NAKAMURA, *Limit analysis of nonsymmetric sandwich shells*, Symp. IUTAM Non-classical Shell Problems, Warszawa-Amsterdam 1963, 768–784.
459. B. G. NEAL, *Plastic collapse and shake-down theorems for structures of strain-hardening material*, J. Aero. Sci. **17** (1950), 297–306.
460. B. G. NEAL, *The plastic methods of structural analysis*, Wiley, New York 1956.
461. B. G. NEAL, *Effect of shear force on the fully plastic moment of an I-beam*, J. Mech. Eng. Sci., **3**, **3** (1961), 258–266.
462. B. G. NEAL, *Effect of shear and normal forces on the fully plastic moment of an I-beam*, J. Mech. Eng. Sci. **3**, **3** (1961), 279–285.
463. B. G. NEAL, *The effect of shear and normal forces on the fully plastic moment of a beam of rectangular cross-section*, Trans. ASME **2**, **E28** (1961), 269–274.
464. D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna płyt prostokątnych*, NOT-Arkady, Warszawa 1962.
465. D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna płyt kołowo-symetrycznych*, NOT-Arkady, Warszawa 1963.
466. T. NONAKA, *Some interaction effects in a problem of plastic beam dynamics*, Trans. ASME (J. Appl. Mech.) **3**, **E34** (1967), 623–630, 631–637, 638–643.
467. R. P. NORDGREN, P. M. NAGHDI, *Finite twisting and expansion of a hole in a rigid/plastic plate*, Trans. ASME, **4**, **E30** (1963), 605–612.
468. R. P. NORDGREN, P. M. NAGHDI, *Loading and unloading solutions for an elastic-plastic annular plate in the state of plane stress under combined pressure and couple*, Int. J. Eng. Sci., **1** (1963), 33–70.
469. F. K. G. ODQVIST, *Die Verfestigung von flusseisenähnlichen Körpern*, ZAMM **5**, **13** (1933), 360–363.
470. F. K. G. ODQVIST, *Kompatibilitätsgleichungen bei Zylinderkoordinaten*, ZAMM **2**, **14** (1934), 123–124.
471. Y. OHASHI, S. MURAKAMI, *Sprężysto-plastyczne zginanie płyt kołowych z uwzględnieniem sił podłużnych* (w jęz. japońskim), Trans. J. Soc. Mech. Eng. **206**, **29** (1963), 1581–1591; **224**, **31** (1965), 501–513; **224**, **31** (1965), 514–520.
472. W. OLSZAK, *Zagadnienia ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos. **3**, **5** (1953), 329–350.
473. W. OLSZAK, *Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych urządzeniach płytowych*, Rozpr. Inż. **6**, **1** (1954), 1–21.
474. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej*, Arch. Mech. Stos. **7** (1955), 315–336.

475. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Ortotropia i niejednorodność w teorii plastyczności*, Arch. Mech. Stos. 1, **8** (1956), 85–110.
476. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos. 4, **8** (1956), 671–694.
477. W. OLSZAK, J. MURZEWSKI, *Elastic-plastic bending of non-homogeneous orthotropic circular plates*, Arch. Mech. Stos. 4, **9** (1957), 467–485 i 5, 605–629.
478. W. OLSZAK, P. PERZYNA, *Extremum theorems in the theory of plasticity of non-homogeneous and anisotropic bodies*, Arch. Mech. Stos. 6, **9** (1957), 695–712.
479. W. OLSZAK, P. PERZYNA, *Remarks on the validity of variational theorems in the mechanics of inelastic bodies*, Proc. IUTAM Symp. Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press 1959, 157–165.
480. W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Die Grenztragfähigkeit von zylindrischen Schalen bei verschiedenen Formen der Plastizitätsbedingung*, Acta Techn. Acad. Sci. Hung. 1/2, **26** (1959), 55–77.
481. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Plastic non-homogeneity: a survey of theoretical and experimental research*, Proc. Symp. IUTAM on Non-homogeneity, Perg. Press 1959, 259–298.
482. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, W. URBANOWSKI, *Plasticity under non-homogeneous conditions*, Advances in Applied Mechanics. **7** (1962), Acad. Press, 131–214.
483. W. OLSZAK, Z. MRÓZ, P. PERZYNA, *Recent trends in the development of the theory of plasticity*, Pergamon Press-PWN 1963.
484. W. OLSZAK, P. PERZYNA, *The constitutive equations of the flow theory for a non-stationary yield condition*, Applied Mechanics, Proc. Eleventh Congr. Appl. Mech., Munich 1964, 545–553.
485. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK, (red.) Z. MARCINIAK, Z. MRÓZ, J. RYCHLEWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, W. URBANOWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
486. W. OLSZAK, *Koncepcja naroża plastycznego w świetle teorii i doświadczenia*, Księga jubil. ku czci prof. A. Krupkowskiego, Warszawa 1965, 349–370.
487. W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Inelastic behaviour in shells*, P. Noordhoff, Groningen 1967.
488. E. T. ONAT, W. PRAGER, *Limit analysis of arches*, J. Mech. Phys. Solids, **1**, **1** (1953), 77–89.
489. E. T. ONAT, W. PRAGER, *The influence of axial forces in the collapse loads of frames*, Proc. 1st Midwestern Conf. Solid Mech., Urbana 1953, 40–42.
490. E. T. ONAT, R. T. SHIELD, *Remarks on combined bending and twisting of thin tubes in the plastic range*, JAM **20** (1953), 345–348.
491. E. T. ONAT, W. PRAGER, *Limit analysis of shells of revolution*, I–II. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. **5**, **B57** (1954), 534–548.
492. E. T. ONAT, R. T. SHIELD, *The influence of shearing forces on the plastic bending of wide beams*, Proc. 2nd US Nat. Congr. Appl. Mech. Ann. Arbor 1954; New York 1955, 535–537.
493. E. T. ONAT, *Plastic collapse of cylindrical shells under axially symmetric loading*, Quart. Appl. Math. **13** (1955), 63–72.
494. E. T. ONAT, *On certain second-order effects in the limit design of frames*. J. Aero. Sci. **22** (1955), 681–684.
495. E. T. ONAT, R. M. HAYTHORNTHWAITE, *Load carrying capacity of circular plates at large deflection*, J. Appl. Mech. **1**, **23** (1956), 49–55.
496. E. T. ONAT, *Analysis of shells of revolution composed of workhardening material*, J. Mech. Phys. Solids, **1**, **7** (1958), 45–59.
497. E. T. ONAT, *The effects of non-homogeneity caused by strain-hardening on the small deformations of a rigid-plastic solid*, Proc. IUTAM Symp. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Perg. Press 1959, 171–180.
498. E. T. ONAT, *The influence of geometry changes on the load-deformation behaviour of plastic solids*, «Plasticity», Proc. Sec. Symp. Naval Struct. Mech., Pergamon Press 1960, 225–238.
499. A. ONO, *Stress and strain in metals undergoing plastic flow – tubewall subjected to axial pull and torque*, Proc. Japan Acad. **8**, **29** (1953), 446–451.
500. J. ORKISZ, *Principles of choosing a multipointed equivalent cross-section for elastic-plastic beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. **10**, **10** (1962), 405–414.

501. J. ORKISZ, *Interaction curves for multi-point equivalent cross-sections of elastic-plastic beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 11, **10** (1962), 451-460.
502. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Differential equations of elastic-plastic bending of beams with multi-point cross-sections*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 4, **12** (1964), 227-236.
503. J. ORKISZ, *Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych*, Mech. Teor. Stos. 1, **3** (1965), 63-83.
504. J. ORKISZ, *Sprężysto-plastyczne ugięcia prętów słabo zakrzywionych o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inż. 4, **14** (1966), 673-680.
505. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Skończone ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inż. 4, **14** (1966), 681-698; str. ang. Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **14** (1966), 651-660.
506. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia niesprężystych wiotkich osiowo-symetrycznych powłok ortotropowych w stanie blonowym*, Rozpr. Inż. 4, **15** (1967), 679-693.
507. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym w świetle teorii płynięcia plastycznego*, Mech. Teor. i Stos. 4, **5** (1967), 463-473.
508. A. ORMEROD, *The plastic bending of beams loaded in non-principal planes*, Civil Eng. and Public Works Review **54** (1954), 1179-1191.
509. A. OSCHATZ, *Bestimmung der Traglast von Kreis- und Kreisringplatten mit Berücksichtigung der Querkraftschubspannungen*, Z. angew. Math. Mech. 5, **48** (1968), 325-332.
510. W. R. OSGOOD, *Combined-stress tests on 24S-T aluminium-alloy tubes*, J. Appl. Mech. **14** (1947), 147.
511. T. OTA, A. SHINDO, H. FUKUOKA, *Anisotropy of mild steel by combined tension-torsion tests*, Proc. 8th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., Tokyo, 1958, Tokyo 1959, 221-224.
512. A. C. PALMER, *A limit theorem for materials with non-associated flow laws*, J. Mécanique 2, **5** (1966), 217-222.
513. A. C. PALMER, G. MAIER, D. C. DRUCKER, *Normality relations and convexity of yield surfaces for unstable materials or structural elements*, Trans ASME 2, **E34** (1967) (J. Appl. Mech.) 464-470.
514. A. C. PALMER, *Limit analysis of cylindrical shells by dynamic programming*, Int. J. Sol. Struct. 4, **5** (1969), 289-303.
515. E. J. PANARELLI, Ph. G. HODGE Jr., *Interaction of pressure, end load, and twisting moment for a rigid-plastic circular tube*, Trans. ASME 3, **E30** (1964), 396-400.
516. K. A. V. PANDALAI, S. A. PATEL, *Stress analysis in the inelastic range in the presence of temperature*, J. Aero. Sci. Soc. India, 3, **17** (1965), 149-153.
517. F. N. PANNELL, *The general principle of superposition in the design of rigid-plastic plates*, Concr. and Constr. Engng., 9, **61** (1966), 323-326.
518. J. PARKER, J. KETTLEWELL, *Plastic stress-strain relationships-further experiments on the effect of loading history*, Trans. ASME 3, **E28** (1961), 439-446.
519. J. PARKER, M. B. BASSETT, *Plastic stress-strain relationships-some experiments to derive a subsequent yield surface*, Trans. ASME 4, **E31** (1964), 676-682.
520. E. W. PARKES, *Wings under repeated thermal stress*, Aircraft Engineering **26** (1954), 402.
521. B. PAUL, P. G. HODGE, *Carrying capacity of elastic-plastic shells under hydrostatic pressure*, Proc. 3rd US Nat. Congr. Appl. Mech., Providence 1958, 631-640.
522. B. PAUL, W. CHEN, LEE LI-CHIH, *An experimental study of plastic flow under stepwise increments of tension and torsion*, Proc. 4th US Nat. Congr. Appl. Mech. Berkeley, 1962, v. 2, Perg. Press 1962, 1031-1038.
523. H. PAYNE, *The slip theory of plasticity for aggregates*, J. Mech. Phys. Solids 2, **7** (1959), 126-134.
524. H. PAYNE, S. J. CZYZAK, *On the torsion of a thin-wall cylinder following a plastic extension*, J. Mech. Phys. Solids 1, **8** (1960), 39-44.
525. T. PELCZYŃSKI, *Wpływ stanu naprężeń na przejście materialu w stan plastyczny*, Przegl. Mech. **10** (1951), 175-179 i 204-208.
526. T. PELCZYŃSKI, *Zagadnienia wyciężenia materiałów, rys historyczny*, Obróbka plast. 1, **3** (1962), 9-49.

527. N. PERRONE, P. G. HODGE, *Strain hardening solutions with generalized kinematic models*, Proc. Third US Nat. Congr. Appl. Mech. 1958, 641–648.
528. N. PERRONE, *Collapse load of structures with temperature-dependent yield stresses*, Proc. 4-th US Nat. Congr., Pergamon Press 1962, 705–713.
529. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastycznosci*, IPPT PAN-PWN, Warszawa 1966.
530. A. H. PHILIPPIDIS, *The general proof of the principle of maximum plastic resistance*, J. Appl. Mech. **15** (1948), 241–242.
531. A. PHILLIPS, *Variational principles in the theory of finite plastic deformations*, Quart. Appl. Math. **7** (1949), 110–114.
532. A. PHILLIPS, *Bending with axial force of curved bars in plasticity*, J. Appl. Mech. **19** (1952), 327–330.
533. A. PHILLIPS, *Combined tension and torsion tests for aluminum alloy 2S-O*, J. Appl. Mech. **4**, **19** (1952), 496–500.
534. A. PHILLIPS, L. KÄECHELE, *Combined stress tests in plasticity*, J. Appl. Mech. **1**, **23** (1956), 43–48.
535. A. PHILLIPS, *An experimental investigation of plastic stress-strain relations*, Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech. **9** (1957), 23–33.
536. A. PHILLIPS, *Pointed vertices in plasticity*, "Plasticity", Proc. Sec. Symp. Naval Struct. Mech., Perg. Press 1960, 202–214.
537. A. PHILLIPS, G. A. GRAY, *Experimental investigation of corners in the yield surface*, Trans. ASME **2**, **D83** (1961), 275–288.
538. A. PHILLIPS, R. L. SIERAKOWSKI, *On the concept of the yield surfaces*, Acta Mechanica **1**, **1** (1965), 29–35.
539. T. H. H. PIAN, *Yield conditions of plates and shells by Mises-Hencky criterion*, AFOSR TN 60–608, MIT, June 1960.
540. S. PIECHNIK, *The influence of bending on the limit state of a circular bar subjected to torsion*, Arch. Mech. Stos. **1**, **13** (1961), 77–106.
541. S. PIECHNIK, M. ŻYCZKOWSKI, *On the plastic interaction curve for bending and torsion of a circular bar*, Arch. Mech. Stosow. **5**, **13** (1961), 669–692.
542. S. PIECHNIK, *Steady-state creep of solid bar under combined load*, Trans. Roy. Inst. Techn. Stockholm, **190** (1962).
543. S. PIECHNIK, *Stationary creep of a solid circular bar and tube under torsion and tension*, Trans. Roy. Inst. Techn. Stockholm, **192** (1962).
544. S. PIECHNIK, *Combined tension-bending creep for a solid bar*, Trans. Roy. Inst. Techn. Stockholm **194** (1962).
545. A. R. S. PONTER, *Convexity conditions and energy theorems for time independent materials*, J. Mech. Phys. Solids **4**, **16** (1968), 283–288.
546. W. R. POWELL, *A note on yield curves in cyclic work softening*, JAM **4**, **35** (1968), 822–824.
- 546a. W. PRAGER, *Einfluss der Deformation auf die Fließbedingung von zähplastischen Körpern*, ZAMM **1/2**, **15** (1935), 76–80.
547. W. PRAGER, *On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state*, Proc. V-th Int. Congr. Appl. Mech. 1938, 234–237.
548. W. PRAGER, *Strain-hardening under combined stresses*, J. Appl. Phys. **12**, **16** (1945), 837–840.
549. W. PRAGER, *The stress-strain laws of the mathematical theory of plasticity*, J. Appl. Mech. **3**, **15** (1948), 226–233.
550. W. PRAGER, *Theory of plastic flow versus theory of plastic deformation*, J. Appl. Phys. **6**, **19** (1948), 540–543.
551. W. PRAGER, *Recent developments in the mathematical theory of plasticity*, J. Appl. Phys. **3**, **20** (1949), 235–241.
552. W. PRAGER, R. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, Wiley, New York 1951.
553. W. PRAGER, *On the use of singular yield conditions and associated flow rules*, J. Appl. Mech. **3**, **20** (1953), 317–320.
554. W. PRAGER, *The general theory of limit design*, Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech. 1952, Istanbul 1955, **2**, 65–72.

555. W. PRAGER, *Théorie générale des états limités d'équilibre*, J. Math. Pur. et Appliquées, **34** (1955), 395–406.
556. W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie*, Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1955.
557. W. PRAGER, *The theory of plasticity: a survey of recent achievements*, Proc. Inst. Mech. Eng. **169** (1955), 41–57.
558. W. PRAGER, *Discontinuous fields of plastic stress and flow*, Proc. 2nd US Nat. Congr. Appl. Mech. ASME, New York 1955, 21–32.
559. W. PRAGER, *A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids*, J. Appl. Mech. **4**, **23** (1956), 493–496.
560. W. PRAGER, *Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature*, Mem. Sympos. plast. sci. costr. Varenna 1956, 239–244.
561. W. PRAGER, *Plastic design and thermal stresses*, Brit. Weld. J. **8**, **3** (1956), 355–359.
562. W. PRAGER, *Non-isothermal plastic deformation*, Proc. Koninkl. Ned. Acad. Wet. **3**, **61** (1958), 176–182.
563. W. PRAGER, *Problèmes de plasticité théorique*, Dunod, Paris 1958.
564. W. PRAGER, *An elementary discussion of definitions of stress rate*, Quart. Appl. Math. **18** (1961), 403–407.
565. W. PRAGER, *Einführung in die Kontinuumsmechanik*, Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1961.
566. W. PRAGER, *Optimum plastic design of a portal frame for alternative loads*, Trans. ASME (J. Appl. Mech.) **3**, **E34** (1967), 772–773.
567. L. PRANDTL, *Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht*, ZAMM **6**, **3** (1923), 401–406.
568. L. PRANDTL, *Spannungsverteilung in plastischen Körpern*, Proc. First Int. Congr. Mech. Delft 1924, 43–54.
569. L. PRANDTL, *Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper*, Z. angew. Math. Mech. **8** (1928), 85–106.
570. S. QU, *Przybliżone warunki plastyczności dla osiowo-symetrycznie obciążonej powłoki obrotowej* (w jęz. chińskim), Acta Sci. Natur. Scholar. Sup. Sinens, Mat.-Mech. **2**, **1** (1965), 206–208.
571. S. QU, *Przybliżone warunki plastyczności dla powłok idealnie plastycznych* (w jęz. chińskim), Acta Mechanica Sinica, **3**, **8** (1965), 173–185.
572. D. RADENKOVIĆ, *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée*, C. r. Acad. Sci. No. 26, **252** (1961), 4103–4104.
573. D. RADENKOVIĆ, *Théorie des charges limites, extension à la mécanique des sols*, Séminaires de Plasticité Ec. Polyt. 1961, Pub. Sc. et Techn. Min. Air **116** (1962), 129–142.
574. A. RAITHEL, B. BARBARITO, *La rottura delle sezioni pressoinflesse nel cemento armato*, Giorn. Genio Civile **6** (1959).
575. W. RAMBERG, W. OSGOOD, *Description of stress-strain curves by three parameters*, NACA TN 902, July 1943.
576. K. A. RECKLING, *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*, Berl.-Heid.-New York, Springer 1967.
577. K. A. RECKLING, *Experimente zur Feststellung der Werkstoffanisotropie und zur Überprüfung der Hillschen Verfestigungshypothese*, Stahlbau **2**, **38** (1969), 43–51.
578. M. I. REITMAN, *Analysis of the equations of the theory of perfectly plastic shells*, Arch. Mech. Stos. **4**, **19** (1967), 595–601.
579. L. RENDULIC, *Eine Betrachtung zur Frage der plastischen Grenzzustände*, Bauingenieur **19** (1938), 159–164.
580. A. REUSS, *Berücksichtigung der elastischer Formänderungen in der Plastizitätstheorie*, Z. angew. Math. Mech. **3**, **10** (1930), 226–274.
581. A. REUSS, *Fließpotenzial oder Gleitebenen?* ZAMM **12** (1932), 15.
582. A. REUSS, *Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliessbedingung*, ZAMM **13** (1933), 356.
583. H. RICHTER, *Verzerrungstensor, Verzerrungsdeviator und Spannungstensor bei endlichen Formänderungen*, ZAMM **29** (1949), 65–75.

584. G. RITTER, *Zweiachsige Biegung mit Längskraft für Rechteckquerschnitte nach dem Traglastverfahren*, Wiss. Z. Hochschule Arch. Bauw. Weimar, 1, 12 (1965), 81–89.
585. M. ROGOZIŃSKI, *Some problems of thermoplasticity of a spherical shell*, Symp. IUTAM, Non-homogeneity in Elast. and Plast., Pergamon Press 1959, 215–226.
586. M. ROŠ, A. EICHINGER, *Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr*, EMPA Berichte 14, Zurich 1926; Verhandl. II Int. Kongr. Techn. Mech., Zurich 1926.
587. C. RUIZ, *The inclusion of the incremental collapse problem in undergraduate course*, Bull. Mech. Eng. Educ. 1, 6 (1967), 9–21.
588. J. RUTECKI, *Skręcanie rury cienkościennej o przekroju prostokątnym poza granicą sprężystości*, Arch. Mech. Stos. 1, 8 (1956), 29–40.
589. J. RYCHLEWSKI, *Limit analysis of helicoidal shells*, Proc. IASS Symp. on Non-Class. Shell Problems, North-Holland-PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 819–841.
590. J. RYCHLEWSKI, *Note on the beginning of plastic deformation in a body under uniform pressure*, AMS 3, 17 (1965), 405–412.
591. J. RYŚ, *Efektywne obliczanie rur grubościennych w przypadku liniowego wzmocnienia plastycznego*, Rozpr. Inż. 1, 17 (1969), 109–134.
592. G. SACCHI, G. BUZZI FERRARIS, *Sul criterio cinematico di calcolo a rottura di piastre inflesse mediante programmazione lineare*, Ist. Lomb. Sci. e Lett., Vol. 101, Milano 1967.
593. G. SACCHI, M. SAVE, *A note on the limit loads of non-standard materials*, Meccanica 1, 3 (1968), 43–45.
594. G. SACCHI, M. SAVE, *On the evaluation of the limit load for rigid-perfectly plastic continua*, Meccanica 3, 3 (1968), 1–8.
595. G. SACHS, H. SHOJI, *Zug-Druckversuche an Messingkristallen (Bauschinger effect)*, Z. Physik 45 (1927), 776–796.
596. M. A. SADOVSKY, *A principle of maximum plastic resistance*, J. Appl. Mech. 10 (1943), A65–A68.
597. B. de SAINT-VENANT, *Mémoire sur l'établissement des équations différentielles...*, J. Math. Pur. et Appl. II, 16 (1871), 373–382.
598. K. SAITŌ, H. IGAKI, *Anizotropia wywołana odkształceniem plastycznym*, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs. 23 (1957), 135, 893–904 (w jęz. jap.).
599. G. D. SANDEL, *Schweiz. Bauzeitung*, 95 (1930), 335.
600. J. L. SANDERS, *Plastic stress-strain relations based on linear loading functions*, Proc. Sec. US Nat. Congr. Appl. Mech. 1954, 455–460.
601. R. SANKARANARAYANAN, P. G. HODGE Jr., *On the use of linearized yield conditions for combined stresses in beams*, J. Mech. Phys. Solids, 1, 7 (1958), 22–36.
602. R. SANKARANARAYANAN, *Plastic interaction curves for circular cylindrical shells under combined lateral and axial pressures*, J. Franklin Inst. 5, 270 (1960), 359–366.
603. R. SANKARANARAYANAN, *A generalized square yield condition for shells of revolution*, Proc. Indian Acad. Sci., 3, A59 (1964), 127–140.
604. R. SANKARANARAYANAN, W. OLSZAK, *Carrying capacities of plates and shells*, Proc. IASS Symp. «Non-classical shell problems» Warszawa 1964, 842–866.
605. R. SANKARANARAYANAN, W. OLSZAK, *A note on the load carrying capacity of anisotropic plates and shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 4, 14 (1966), 329–336.
606. R. SANKARANARAYANAN, *Powierzchnie graniczne dla niejednorodnych powłok obrotowych*, Rozpr. Inż. 2, 14 (1966), 231–240; Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 7, 14 (1966), 633–636.
607. R. SANKARANARAYANAN, *Yield surfaces for non-homogeneous anisotropic shells of revolution*, Proc. Indian Acad. Sci. 1, A65 (1967), 49–61.
608. M. SAVE, *On yield conditions in generalized stresses*, Quart. Appl. Math. 3, 19 (1961), 259–267.
609. M. SAVE, W. PRAGER, *Minimum weight design of beams subjected to fixed and moving loads*, J. Mech. Phys. Sol. 11 (1963), 4, 255–267.
610. M. A. SAVE, R. T. SHIELD, *Minimum-weight design of sandwich shells subjected to fixed and moving loads*, Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech. München 1964, 341–349, Springer.
611. M. SAVE, *A consistent limit-analysis theory for reinforced concrete slabs*, Mag. Concr. Res. 58, 19 (1967), 3–12.

612. A. SAWCZUK, *Zagadnienia nośności granicznej elementów rozciąganych i zginanych w zastosowaniu do teorii zbiorników prostokątnych*, Rozpr. Inż. 2, 3 (1955), 255–284.
613. A. SAWCZUK, *Some problems of load carrying capacities of orthotropic and non-homogeneous plates*, Arch. Mech. Stos. 4, 8 (1956), 549–563.
614. A. SAWCZUK, *Linear theory of plasticity of anisotropic bodies and its applications to problems of limit analysis*, Arch. Mech. Stos. 5, 11 (1959), 541–556.
615. A. SAWCZUK, *Yield condition for anisotropic shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 6, 8 (1960), 273–277.
616. A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI, *On yield surfaces for plastic shells*, Arch. Mech. Stos. 1, 12 (1960), 29–53.
617. A. SAWCZUK, P. G. HODGE, *Comparison of yield conditions for circular cylindrical shells*, J. Franklin Inst. 5, 269 (1960), 362–374.
618. A. SAWCZUK, *On the theory of anisotropic plastic plates and shells*, Arch. Mech. Stos. 3, 13 (1961), 355–365.
619. A. SAWCZUK, M. JANAS, *Load-carrying capacities of arches with non-homogeneous properties of the cross-section*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 5, 9 (1961), 283–290.
620. A. SAWCZUK, Th. JAEGER, *Grenztragfähigkeitstheorie der Platten*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.
621. A. SAWCZUK, W. OLSZAK, *Zagadnienia powłok niesprężystych*, Mech. Teor. Stos. 1, 1 (1963), 37–73.
622. A. SAWCZUK, M. DUSZEK, *A note on the interaction of shear and bending in plastic plates*, Arch. Mech. Stos. 3, 15 (1963), 411–426.
623. A. SAWCZUK, *Nośność graniczna ram płaskich*, NOT-Arkady, Warszawa 1954.
624. A. SAWCZUK, W. OLSZAK, *Problems of inelastic shells*, «Theory of Plates and Shells», Bratislava 1966, 89–106.
625. A. SAWCZUK, *Estimation of the post-yield load-deflection relationship of perfectly plastic plates*, «Theory of Plates and Shells», Bratislava 1966, 435–440.
626. A. SAWCZUK, *On formulation of the equations of limit analysis of structures*, Z. angew. Math. Mech. 46 (1966), Sonderheft, 28–32.
627. A. SAWCZUK, *On yield criteria and collapse modes for plates*, Int. J. Non-Linear Mech. 3, 2 (1967), 233–243.
628. A. SAWCZUK, *On yielding of Cosserat continua*, Arch. Mech. Stos. 3, 19 (1967), 471–480.
629. A. SAWCZUK, P. STUTZ, *Sur le critère d'écoulement et de la loi de déformation plastique*, C.r. Acad. Sci. 2, 266 (1968), A87–A89.
630. A. SAWCZUK, P. G. HODGE, *Limit analysis and yield-line theory*, Trans. ASME (J. Appl. Mech.) 2, E35 (1968), 357–362.
631. A. SAWCZUK, *On incremental collapse of shells under cyclic loading*, Symp. IUTAM «Theory of thin shells», 1967, Springer 1969.
632. M. SAYIR, *Kollapsbelastung von rotationssymmetrischen Zylinderschalen*, Z. angew. Math. Phys. 2, 17 (1966), 353–360.
633. M. SAYIR, *Die rotationssymmetrische dünne Zylinderschale aus idealplastischem Material*, Z. angew. Math. Phys. 2, 19 (1968), 185–219.
634. M. SAYIR, H. ZIEGLER, *Der Verträglichkeitssatz der Plastizitätstheorie und seine Anwendung auf räumlich unetstetige Felder*, ZAMP 1, 20 (1969), 78–93.
635. U. SÄVERIN, *Bestimmung der Tragfähigkeitsgrenzen des druck- und biegebelasteten Durchlaufträgers unter variabler, wiederholter Belastung*, Schiffbau Forschung 1–2, 6 (1967), 82–99.
636. F. SCHLEICHER, *Der Spannungszustand an der Fließgrenze*, ZAMM 6 (1926), 199–216.
637. R. SCHMIDT, *Ingenieur — Archiv* 3 (1932), 215–235.
638. J. SCHROEDER, A. N. SHERBOURNE, *A general theorem for thin shells in classical plasticity*, J. Math. Phys. 1, 47 (1968), 95–108.
639. J. SCHROEDER, A. N. SHERBOURNE, *Bounds for unsymmetrical yield point loads of thin shells*, J. Math. Phys. 47 (1968), 249–261.
640. F. B. SEELY, J. O. SMITH, *Advanced mechanics of materials*, Sec. Ed., Wiley, New York 1952

641. M. R. SHAMMAMY, *Comparison of incremental and total theories with test data for circular torsion-tension members subjected to proportionate and non-proportionate loading*, Doct. Diss. Univ. Ill, 98 pp, 1965.
642. M. R. SHAMMAMY, O. M. SIDEBOTTOM, *Incremental versus total-strain theories for proportionate and non-proportionate loading of torsion-tension members*, Exptl. Mechanics 12, 7 (1967), 497-505.
643. F. R. SHANLEY, *Inelastic column theory*, J. Aero. Sci. 5, 14 (1947), 261-268.
644. G. S. SHAPIRO, *On yield surface for ideally plastic shells*, Philad. Soc. Ind. Appl. Math. 1961, 414-418.
645. R. SHIELD, H. ZIEGLER, *On Prager's hardening rule*, Z. angew. Math. Physik 9a (1958), 260-276.
646. R. T. SHIELD, *Optimum design methods for multiple loading*, ZAMP 1, 14 (1963), 38-45.
647. E. SHIRATORI, K. IKEGAMI, H. OKANO, *The influence of prestrain on subsequent yield surfaces*, I, Bull. J. Soc. Mech. Eng. 45, 11 (1968), 413-418.
648. H. SHOJI, *Über den Bauschingerereffect*, Z. Physik 51 (1928), 728-730.
649. M. P. L. SIEBEL, *The combined bending and twisting of thin cylinder in the plastic range*, J. Mech. Phys. Solids 1 (1953), 189-206.
650. J. SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, *Stan graniczny rury grubościennej przy jednoczesnym skręcaniu, rozciąganiu i różnicy ciśnień*, Rozpr. Inż. 2, 13 (1965), 281-296; Bull. Acad. Polon., Sci. Série Sci. Techn. 5, 13 (1965), 285-294.
651. J. SKRZYPEK, *Stan graniczny wirującej rury grubościennej w niektórych złożonych przypadkach obciążenia*, Rozpr. Inż. 4, 14 (1966), 629-652; Bull. Acad. Pol. 4, 15 (1967), 189-204.
652. J. SKRZYPEK, *On the limit carrying capacity of a pipe-line cross-section*, Int. J. Solids Struct. 12, 4 (1968), 1203-1219.
653. J. SKRZYPEK, *Dolne oszacowanie nośności granicznej nierozciągliwego grubościennego rurociągu*, Arch. Bud. Masz. 1, 16 (1969), 81-91; Bull. Acad. Pol., Ser. Sci. Techn. 11-12, 17 (1969), 525-532.
654. J. SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, *Aproksymacja powierzchni nośności granicznej przekroju rurociągu grubościennego przy obciążeniach złożonych*, Mech. Teor. Stos. 2, 8 (1970), 107-126; Bull. Acad. Pol., Ser. Sci. Techn., 12, 18 (1970), 545-562.
655. J. SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, *Uogólnienie problemu Gwozdiewa nośności granicznej rur cienkościennych na przypadek działania ciśnienia wewnętrznego*, Rozpr. Inż. 3, 18 (1970), 471-483.
656. Z. SOBOTKA, *Theorie plasticity*, t. I-II, ČSAV, Praha 1954 i 1955.
657. Z. SOBOTKA, J. MURZEWSKI, *A general method for computing the distribution of a function of random variables with application to the yield condition*, Arch. Mech. Stos. 1, 14 (1962), 19-34.
658. Z. SOBOTKA, *Únosnost vetknutých ortotropických obdélníkových desek s rovnomerným zatížením a s osamělými břemeny*, Stavebn. Časop. 10, 11 (1963), 589-607.
659. Z. SOBOTKA, *Základní vztahy přírůstkové theorie plasticity a nové pojetí plastického potenciálu pro anisotropické hmoty*, Stav. Čas. SAV 6, 14 (1966).
660. Z. SOBOTKA, *Anisotropie, deviace a deviační uhel*, Stav. Časopis SAV 6, 15 (1967), 359-364.
661. Z. SOBOTKA, *Energetic yield condition for the plane deformation of the anisotropic materials*, Stavebnický Časopis SAV 8, 15 (1967), 435-452.
662. Z. SOBOTKA, *Dvojparametrická kvadratická podmínka plasticity*, Stavebn. Časop. 8, 15 (1967), 494-500.
663. Z. SOBOTKA, *The cubic yield condition for incompressible bodies*, Acta Technica ČSAV, 6, 12 (1967), 830-832.
664. Z. SOBOTKA, *Statické řešení mezni únosnosti obdélníkových desek s energetickými podmínkami plasticity*, Stavebn. Časop. 1, 16 (1968), 7-27.
665. Z. SOBOTKA, *Theorie der plastischen Fließens von anisotropen Körpern*, ZAMM 1/2, 49 (1969), 25-32.
666. R. SPARACIO, *Collasso da carichi ripetuti in sollecitazione composta*, Ingegneri 10, 36 (1962), 899-903; 11, 1033-1043.
667. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity*, J. M. Phys. Sol. 3, 9 (1961), 279-288; 1, 10 (1962), 17-26; 2, 10 (1962), 165-177.

668. A. J. M. SPENCER, *A theory of the failure of ductile materials reinforced by elastic fibres*, Int. J. Mech. Sci. 3, 7 (1965), 197–209.
669. F. STASSI D'ALIA, *Un paraboloide di rivoluzione quale condizione di plasticità*, L'Ingegnere (1951).
670. F. STASSI D'ALIA, *La condizione di plasticità secondo recenti ricerche*, Rendiconti del corso Costruzioni Milano 1960, 60–71.
671. F. STASSI D'ALIA, *Flow and fracture of materials according to a new limiting condition of yielding*, Meccanica 3, 2 (1967), 178–195.
672. M. C. STEELE, *The plastic bending and twisting of square section members*, J. Mech. Phys. Solids 2, 3 (1955), 156–166.
673. L. K. STEVENS, *Carrying capacity of mild-steel arches*, Proc. Inst. Civ. Engrs. 7 (1957), 493–514.
674. L. K. STEVENS, *Moment – curvature relationship for axially loaded members*, Civil Eng. and Public Works Rev. 53 (1958), 626, 904–906.
675. F. D. STOCKTON, *Experimental evidence of nonlinearity in plastic stress-strain relations*, Techn. Rep. 88, Brown Univ. 1953.
676. W. F. STOKEY, D. B. PETERSON, R. A. WUNDER, *Limit loads for tubes under internal pressure, bending moment, axial force and torsion*, Nucl. Engng. and Design 2, 4 (1966), 193–201.
677. P. STUTZ, *Remarque sur l'écoulement plastique dans le cas d'une relation tensorielle linéaire entre contrainte et vitesse de déformation*, C.r. Acad. Sci. 16, 265 (1967), A481–A484.
678. P. STUTZ, *Remarque sur l'écoulement plastique dans le cas d'une relation tensorielle non linéaire entre contraintes et vitesse de déformation*, C.r. Acad. Sci. 23, 266 (1968), A1149–A1152.
679. F. STÜSSI, C. F. KOLLBRUNNER, *Beitrag zum Traglastverfahren*, Bautechnik 13 (1935), 264.
680. H. SUZUKI, E. TAKANO, H. NEGISI, *Odciążenie sprężyste przy plastycznym zginaniu z rozciąganiem* (w jęz. japońskim) Repts. Univ. Electro-Communs, 17 (1964), 27–35 i 18 (1965), 55–60.
681. G. SVÉD, D. S. BROOKS, *Elasto-plastic behaviour of a round bar subjected to axial force and torque*, Acta Techn. Acad. Sci. Hung. 1–4, 50 (1965), 337–351.
682. W. SWIDA, *Die Berechnung von Stählernen Bogen unter Berücksichtigung der Tragfähigkeitsreserve im elastisch-plastischen Zustand*, Stahlbau 3, 19 (1950), 17–20; 4, 19 (1950), 29–34; 2, 20 (1951), 25–28.
683. P. S. SYMONDS, W. PRAGER, *Elastic-plastic analysis of structures subjected to loads varying arbitrarily between prescribed limits*, J. Appl. Mech. 17 (1950), 315–323.
684. P. S. SYMONDS, B. G. NEAL, *The calculation of failure loads on plane frames under arbitrary loading programmes*, J. Inst. Civ. Engrs. 35 (1950), 41.
685. P. S. SYMONDS, *Shakedown in continuous media*, J. Appl. Mech. 18 (1951), 85–89.
686. P. S. SYMONDS, B. G. NEAL, *The interpretation of failure loads in the plastic theory of continuous beams and frames*, J. Aero. Sci. 19 (1952), 15.
687. W. SZCZEPIŃSKI, *On the effect of plastic deformation on yield condition*, Arch. Mech. Stos. 2, 15 (1963), 275–296.
688. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN (IPPT PAN), W-wa 1967.
689. W. SZCZEPIŃSKI, *Dynamic expansion of a rotating solid cylinder of mild steel*, Arch. Mech. Stos. 1, 19 (1967), 75–87.
690. W. SZCZEPIŃSKI, *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, IPPT PAN-PWN, Warszawa 1968.
691. S. ŠMIRÁK, *K otázce mezni plastické únosnosti průřezu v ohybu při současném působení smyku a tahu či tlaku*, Sb. Vys. Učení Techn. v Brně, 1967/3–4, 463–475.
692. H. TANAKA, *Traglastberechnung steifer Rahmen unter Berücksichtigung von Längskräften*, Bauplanung-Bautechnik 11, 12 (1958), 478–483.
693. G. I. TAYLOR, H. QUINNEY, *The plastic distortion of metals*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A230 (1931), 323–362.
694. G. I. TAYLOR, *A connection between the criterion of yield and the strain-ratio relationship in plastic solids*, Proc. Roy. Soc. A191 (1947), 441–446.
695. P. S. THEOCARIS, C. R. HAZELL, *Experimental investigation of subsequent yield surfaces using the moiré method*, J. Mech. Phys. Solids, 5, 13 (1965), 281–294.

696. T. Y. THOMAS, *Combined elastic and Mises' stress-strain relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 908–910.
697. T. Y. THOMAS, *Combined elastic and Prandtl-Reuss' stress-strain relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 720–726.
698. T. Y. THOMAS, *Extended compatibility conditions for the study of surfaces of discontinuity in continuum mechanics*, J. Math. Mech. **6** (1957), 311–322, 907–908.
699. T. Y. THOMAS, *Plastic flow and fracture in solids*, Academic Press, New York-London 1961.
700. E. G. THOMSEN, C. T. YANG, S. KOBAYASHI, *Mechanics of plastic deformation in metal processing*, Macmillan, New York 1965.
701. B. J. THORN, J. S. KAO, S. L. LEE, *Nonregular progression in strain hardening shells*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE **1**, **92** (1966), 59–80.
702. J. B. TIEDEMANN, I. VIGNESS, T. E. PARDUE, *Rotating beam deflection studies*, NRL Rep. 1953, nr 4139 17 pp.
703. T. W. TING, *Fracture of closed circular pipes under internal pressure and axial tension*, J. Math. Mech. **6**, **9** (1960), 821–867.
704. C. TORRE, *Einfluss der mittleren Hauptnormalspannung auf die Fließ- und Bruchgrenze*, Österr. Ing.-Archiv **4/5**, **1** (1947), 316–342.
705. C. TORRE, *Die Grenzzustände statisch beanspruchter Stoffe*, Schweiz. Archiv Angew. Wiss. Techn. **15** (1949), 116–145.
706. C. TORRE, *Die Mechanik der Grenzbeanspruchungen*, Österr. Ing.-Archiv **1**, **4** (1950), 93–108.
707. C. TORRE, *Grenzbedingungen für spröden Bruch und plastisches Verhalten bildsamer Metalle*, Österr. Ing.-Archiv **2**, **4** (1950), 174–189.
708. Y. TOZAWA, *Wpływ dodatkowej sily rozciągającej na wartość odporu sprężystego przy zginaniu sprężysto-plastycznym (w jez. jap.)*, Res. Rep. Fac. Technol. Chiba Univ. **11**, **7** (1956), 1–9.
709. H. TRESCA, *Mémoire sur l'écoulement des corps solides*, Mem. Pres. par. Div. Sav. **18** (1868), 733, **20** (1872).
710. D. TRIFAN, *Stress theory of plastic flow*, J. Math. Phys. **1**, **35** (1965), 44–51.
711. A. TROOST, *Belastbarkeit dünnwandiger Behälter durch Innendruck und Längskräfte*, Metall **9** (1955), 23–24, 1054–1061.
712. C. TRUESDELL, *The mathematical foundations of elasticity and fluid dynamics*, J. Rat. Mech. Anal. **1** (1952), 125–300.
713. C. TRUESDELL, *Corrections and additions to "The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics"*, J. Rat. Mech. Anal. **2** (1953), 593–616.
714. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The classical field theories*, Handbuch der Physik III/1 (1962), 226–793.
715. H. S. TSUEN, *The Poincaré-Lighthill-Kuo Method*, Advances in Appl. Mech., Vol. 4, Acad. Press, New York 1956, 281–349.
716. W. T. TSUAN, *Fracture of closed circular pipes under internal pressure and axial tension*, J. Math. Mech. **6**, **9** (1960), 821–867.
717. D. VALALAS, *Intervention de l'effort tranchant dans la rupture d'un matériau plastique*, Ann. trav. publics Belg. 1964, **6**, 465–472.
718. J. A. VAN den BROEK, *Theory of limit design*, Wiley, New York 1948.
719. F. K. VAN ITERTSON, *Plasticity in engineering*, Blackie and Son, London 1947.
720. I. VIGNESS, T. E. PARUDE, *Poisson-ratio determinations for elastic and plastic strains of tensile specimens*, Nat. Bur. Standarts Circ. 1954, No 528, 1–9.
721. J. WALCZAK, *Nowoczesna miara wyężenia materiału*, Arch. Mech. Stos. **1**, **3** (1951), 5–26.
722. J. WALCZAK, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, t. II, PWN, Warszawa-Kraków 1967.
723. A. J. WANG, W. PRAGER, *Plastic twisting of a circular ring sector*, J. M. Phys. Sol. **3** (1955), 169–175.
724. W. H. WARNER, G. H. HANDELMAN, *Modified incremental strain law for work hardening materials*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **3**, **9** (1956), 279–293.
725. Z. WASZCZYSZYN, M. ŻYCZKOWSKI, *Finite deflections of elastic-plastic beams, the stretchability*

- of their axes being taken into account, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 10, **11** (1963), 547-558.
726. Z. WASZCZYŻYŃ, *Zastosowanie metody kollokacji do obliczania sprężysto-plastycznych ugięć belek o skrępowanej przesuwności podpór*, Rozpr. Inż. 2, **13** (1965), 247-268.
727. Z. WASZCZYŻYŃ, *Uprozczone obliczanie sprężysto-plastycznych ugięć belek o skrępowanej przesuwności podpór*, Arch. Inż. Łąd. 3, **11** (1965), 417-442.
728. Z. WASZCZYŻYŃ, *Experimental verification of finite elastic-plastic deflections of beams on immovable supports*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 3, **14** (1966), 199-207; Mech. Teor. Stos. 2, **3** (1965), 35-54.
729. Z. WASZCZYŻYŃ, M. ŻYCZKOWSKI, *Some applications in mechanics of approximate formulae for real roots of a cubic equation*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 3, **14** (1966), 149-158.
730. Z. WASZCZYŻYŃ, *Application of multi-point equivalent cross-sections to the calculation of finite deflections of elastic-plastic beams with stretchable axis*, Acta Mechanica 2, **3** (1967), 219-235.
731. Z. WASZCZYŻYŃ, *Finite elastic-plastic deflections of circular symmetric plates*, Bull. Acad. Pol. Sci. 4, **15** (1967), 293-311.
732. Z. WASZCZYŻYŃ, *Ścisłe równania i obliczanie skończonych sprężysto-plastycznych ugięć ortotropowych powłok obrotowo-symetrycznych*, Rozpr. Inż. 3, **16** (1968), 363-383.
733. Z. WASZCZYŻYŃ, *Application of the theory of finite deflections to calculations of elastic-plastic arches*, Arch. Inż. Łąd. 1, **16** (1970), 55-74.
734. H. M. WESTERGAARD, *On the resistance of ductile materials to combined stresses*, J. Franklin Inst. 189 (1920), 627.
735. H. M. WESTERGAARD, *Theory of elasticity and plasticity*, J. Wiley, New York 1952.
736. E. WHALLEY, *The design of pressure vessels subjected to thermal stress*, Int. J. Mech. Sci. 2-3, **1** (1960), 301-308; 4, **1** (1960), 379-395.
737. G. N. WHITE, D. C. DRUCKER, *Effective stress and effective strain in relation to stress theories of plasticity*, J. Appl. Phys. 10, **21** (1950), 1013-1021.
738. M. WNUK, *Limit state of a bar with arbitrary cross-section under tension and torsion*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 6, **10** (1962), 221-230.
739. M. WNUK, *Upper and lower bounds to the plastic interaction curve for the combined tension and torsion*, I i II, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 2, **11** (1963), 33-40 i 41-45; Rozpr. Inż. 1, **11** (1963), 179-200.
740. M. WNUK, *Yield curves for bars of various cross-sections under combined torsion and tension*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 11, **11** (1963), 619-626.
741. M. WNUK, *Effect of torsion on the tension of a prismatic bar with cross-section of arbitrary shape in the elastic plastic range*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 11, **11** (1963), 627-635.
742. M. WNUK, *Wymiarowanie prętów jednocześnie skręcanych i rozciąganych w oparciu o teorię nośności granicznej*, Arch. Bud. Masz. 2, **10** (1963), 189-196.
743. M. WNUK, *Porównanie nośności sprężystej oraz plastycznej w przypadku obciążenia złożonego*, Arch. Bud. Masz. 1, **11** (1964), 97-108.
744. R. H. WOOD, *Plastic and elastic design of slabs and plates*, Thames and Hudson. London 1961.
745. J. WÖLFEL, *Zustandsdiagramme des elastisch-plastisch verformten Balkens*, Maschinenbautechnik 8, **11** (1962), 417-422.
746. W. J. WORLEY, *Inelastic behaviour of aluminum alloy I-beams with web cutouts*, Univ. Illinois Engng. Exper. Stat. Bull. 1958, 448, 36 pp.
747. M. H. LEE WU, *A simple method of determining plastic stresses and strains in rotating disks with non-uniform metal properties*, J. Appl. Mech. **19** (1952), 489-495.
748. Y. YAMAMOTO, *Variational principles of equilibrium of an elastic-plastic body*, Quart. Appl. Math. 3, **10** (1952), 215-224.
749. T. YAMASAKI, O. TOSYAKI, *Sprężysto-plastyczna analiza elementów o przekroju prostokątnym, poddanych działaniu stałego momentu skręcającego i rosnącego zginającego (w jęz. jap.)*, Technical Rep. Kyushiu Univ. 5, **40** (1967), 717-724.
750. YANG NAN-SHENG, *Zależności między naprężeniami i odkształceniami w obszarze plastycznym dla mosiądzu*, (w jęz. chińskim) Acta Mech. Sinica 1, **2** (1958), 43-65.

751. A. YLINEN, *A method of determining the buckling stress and required cross-sectional area for centrally loaded straight columns in elastic and inelastic range*, Mémoires Ass. Int. Ponts et Charpentes **16** (1956), 529–550.
752. A. YLINEN, *The effect of shearing force on the buckling load beyond the limit of proportionality*, Acta Techn. Acad. Sci. Hung. 1–4, **50** (1965), 403–414.
753. Y. YOSHIMURA, *On the natural shearing strain*, Proc. 2nd Japan Congr. Mat. Appl. Mech. (1952), 1–4.
754. Y. YOSHIMURA, *Comment on the slip theory of Batdorf and Budiansky*, Bull. Jap. Soc. Mech. Eng. 2, **1** (1958), 109–113.
755. A. ZAVELANI ROSSI, *Sul criterio statico di calcolo a rottura nei sistemi bidimensionali piani*, Ist. Lomb. Sci. e Lett., Milano, Nov. 1967; *Sul criterio cinematico...*, Milano, Nov. 1967.
756. J. ZAWADZKI, *Ciśnienie zredukowane jako jeden z parametrów wyężenia*, Rozpr. Inż. 3, **5** (1957), 357–398.
757. H. ZIEGLER, *A modification of Prager's hardening rule*, Quart. Appl. Math. **17** (1959), 55–65.
758. H. ZIEGLER, *Bemerkung zu einem Hauptachsenproblem in der Plastizitätstheorie*, ZAMP **21** (1960).
759. H. ZIEGLER, *Über den Zusammenhang zwischen der Fließbedingung eines elastisch-plastischen Körpers und seinem Fließgesetz*, Z. angew. Math. Phys. **12** (1961), 1, 53–68.
760. H. ZIEGLER, *Über den Zusammenhang zwischen der Fließbedingung eines starrplastischen Körpers und seinem Fließgesetz*, Z. angew. Math. Phys. **11** (1960), 5, 413–426.
761. H. ZIEGLER, *On the theory of plastic potential*, Quart. Appl. Math. **19** (1961), 39–44.
762. M. ŻYCZKOWSKI, *Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inż. 2, **3** (1955), 285–322; Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. Cl. IV, 2, **3** (1955), 51–55.
763. M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie sil krytycznych dla sprężystych prętów niepryzmatycznych metodą interpolacji częściowej*, Rozpr. Inż. 3, **4** (1956), 367–412; Bull. Acad. Polon. Cl. IV (Sci. Techn.) 4, **4** (1956), 221–233.
764. M. ŻYCZKOWSKI, *The limit load of a thick-walled tube in a general circularly symmetrical case*, Arch. Mech. Stos. 2, **8** (1956), 155–179; Proc. IX-th Int. Congr. IUTAM in Brussels, vol. VIII, 129–139, Brussels 1957.
765. M. ŻYCZKOWSKI, *Theory of finite deflections of elastic-plastic beams*, Proc. of the Sec. Congr. on Mech. India, 24–32, New Delhi 1957; Czas. Techn. 3, **62** (1957), 1–4.
766. M. ŻYCZKOWSKI, *Nośność graniczna niejednorodnych wirujących tarcz kołowych*, Rozpr. Inż. 1, **5** (1957), 49–96; Int. Congr. IUTAM in Brussels, vol. VI, 351–360, Brussels 1957.
767. M. ŻYCZKOWSKI, *Wpływ ściśliwości materiału na rozkład naprężeń w płytach częściowo uplastycznionych*, Arch. Bud. Masz. 1, **5** (1958), 53–87; Bull. Acad. Polon. 1, **6** (1958), 13–24.
768. M. ŻYCZKOWSKI, *Certain general equations for plane circularly symmetrical plastic states*, Arch. Mech. Stos. 4, **10** (1958), 463–478.
769. M. ŻYCZKOWSKI, *Wyężenie materiału w stanach podkrytycznych*, Rozpr. Inż. 4, **8** (1960), 725–761; Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 7, **8** (1960), 333–341.
770. M. ŻYCZKOWSKI, *Powierzchnie graniczne w teorii wyężenia*, Rozpr. Inż. 4, **9** (1961), 609–637; Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 12, **9** (1961), 667–676.
771. M. ŻYCZKOWSKI, *Potenzieren von verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigem Exponent*, Zeitschr. angew. Math. u. Phys. 6, **12** (1961), 572–576.
772. M. ŻYCZKOWSKI, *Tablice współczynników przy potęgowaniu szeregów potęgowych*, Zastos. Mat. 4, **6** (1963), 395–406.
773. M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie wyężenia materiału w stanach podkrytycznych*, Rozpr. Inż. 2, **10** (1962), 279–305; Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 6, **10** (1962), 211–220.
774. M. ŻYCZKOWSKI, *Zum Begriff der Konstruktionsanstrengung*, Österr. Ing.-Archiv 3, **17** (1963), 169–186.
775. M. ŻYCZKOWSKI, *Aproksymacja jednokrotnie optymalna i niektóre jej zastosowania w mechanice*, Rozpr. Inż. 3, **11** (1963), 463–490; Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 6, **11** (1963), 199–208.
776. M. ŻYCZKOWSKI, *Odształcenia plastyczne i wytrzymałość wielowarstwowych roztlaczanych wal-*

- cowych zbiorników ciśnieniowych, Arch. Bud. Masz. 1, 11 (1964), 83–96; Bull. Acad. Pol. Techn. 2, 12 (1964), 89–98.
777. M. ŻYCZKOWSKI, *Operations on generalized power series*, Z. angew. Math. Mech. 4, 45 (1965), 235–244.
778. M. ŻYCZKOWSKI, *Plastic interaction curves for combined bending and tension of beams with arbitrary cross-section*, Arch. Mech. Stos. 2, 17 (1965), 307–330.
779. M. ŻYCZKOWSKI, *Combined loadings in the theory of plasticity*, Int. J. of Non-linear Mechanics 2, 2 (1967), 173–205.
780. M. ŻYCZKOWSKI, *Rozwój teorii plastyczności i wytyżenia w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia PTMTS, 1958–1967*, Mech. Teor. Stos. 3, 6 (1957), 49–96.
781. M. ŻYCZKOWSKI, *Limit state of a thick-walled tube under internal pressure and bending*, Arch. Mech. Stos. 3, 20 (1968), 313–325.
782. Ю. Н. АЛЕШИНСКИЙ, *О расчете элементов конструкций за пределом упругости* Научн. Докл. Высшей Школы, Строит. 1958, 1, 52–63.
783. Ю. Н. АЛЕШИНСКИЙ, *Решение и уточнение некоторых вопросов расчета элементов стальных конструкций за пределом упругости*, Труды Моск. Ин-та Инж. Ж.-Д. Трансп. 1959, вып. 108, 5–81.
784. Ю. Н. АЛЕШИНСКИЙ, *Учет влияния касательных напряжений на несущую способность сечений стержня при продольно-поперечном изгибе*, Труды Моск. Ин-та Ж.-Д. Трансп. 1959, вып. 108, 82–116.
785. Ю. Н. АЛЕШИНСКИЙ, *Упруго-пластические напряженные состояния сечений обобщенного профиля при воздействии продольной силы и изгибающего момента*, Труды Ин-та Дружбы Нар. им. П. Лумумбы, 30 (1968), 3–30.
786. В. Н. АЛЬПЕРТ, *Конечные упруго-пластические деформации неравномерно нагретого вращающегося диска*, Прикл. Мех. 1 (1965), 9, 58–64.
787. В. Н. АЛЬПЕРТ, *Несущая способность круглых пластинок при антисимметрической нагрузке*, Инж. Журнал- Мех. Т. Т., 1966, 1, 90–93.
788. С. А. АМБАРЦУМЯН, М. А. ЗАДОЯН, *К задаче упруго-пластического изгиба балок*, Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 10, 130–132.
789. Л. С. АНДРЕЕВ, *О пластических деформациях металлов при двухосном растяжении*, Инж. Журнал, 3, 2 (1962), 150–157.
790. Л. С. АНДРЕЕВ, *О проверке законов пластичности в пространстве напряжений*, Инж. Журнал, Мех. Т. Т., 1966/2, 97–101.
791. Р. А. АРУТЮНЯН, *О циклическом нагружении упруго-пластической среды*, Изв. АН СССР, Мех. Машиностр. 1964/4, 89–91.
792. Р. А. АРУТЮНЯН, А. А. ВАКУЛЕНКО, *О многократном нагружении упруго-пластической среды*, Изв. АН СССР, Мех. 1965/4, 53–61.
793. А. Ф. АХМЕРОВ, *Исследование процессов гибки с растяжением деталей одинарной кривизны*, Тр. Казанского Авиац. Института, 1957, вып. 36, 49–66.
794. П. П. БАЛАНДИН, *К вопросу о гипотезах прочности*, Вестник Инж. и Техн. 1, (1937).
795. Г. И. БАРЕНБЛАТТ, В. А. ГОРОДЦОВ, *О структуре поля микронапряжений развитого пластического течения*, Прикл. Мат. Мех. 2, 28 (1964), 326–334.
796. В. Н. БАСТУН, Н. И. ЧЕРНЯК, *О применении некоторых условий пластичности для анизотропной стали*, Прикл. Мех. 1,2 (1966), 92–98.
797. В. Н. БАСТУН, *Об одном случае зависимости приведенного модуля упругости от вида напряженного состояния*, Прикл. Мех. 2, 5 (1969), 135–138.
798. В. И. БАЦИКАДЗЕ, *Изгиб с кручением балок за пределом упругости*, Тр. Груз. Пол. Ин-та, 1957, 9, 35–42.
799. Ю. М. БАШ, Р. А. ВАСИН, К. Е. ВЕГА, *Об учёте деформационной анизотропии в теории течения*, Сборник „Вопросы теории пластичности”, Москва 1961, 83–91.
800. Н. И. БЕЗУХОВ, *К теории пластического расчета на изгиб*, Вестн. Инж. и Техников, 1936, Но 10.

801. Н. И. БЕЗУХОВ, *Влияние очередности нагружения на несущую способность сечения при сложном напряженном состоянии*, Изв. Арт. Акад. 1953, т. 8.
802. Н. И. БЕЗУХОВ, *Теория упругости и пластичности*, Гостехиздат, Москва 1953.
803. Е. А. БЕЙЛИН, *О предельном состоянии изгибаемых и скручиваемых стержней*, Сборник 17 научн. конф. Ленинградского Инж.-Строит. Ин-та, Секция Мат.-Сопр. Мат., Лен. 1959, 11–16.
804. Е. А. БЕЙЛИН, *О предельном состоянии изогнутых и сжатоизогнутых стержней*, Строит. Мех. и Расчет Сооруж. 1, 1961, 18–23.
805. Е. А. БЕЙЛИН, *О предельном состоянии скрученного стержня подверженного действию продольной силы*, Сб. Тр. Ленингр. Ин-та Инж. Ж.-Д. Трансп., вып. 190, 1962, 229–235.
806. Н. М. БЕЛЯЕВ, А. К. СЕНИЦКИЙ, *Напряжения и деформации в толстостенных цилиндрах при упруго-пластическом состоянии материала*, Изв. АН СССР, ОТН, 1938, 2, 3–54.
807. Ф. П. БЕЛЯНКИН, В. Ф. ЯЦЕНКО, Г. Г. МАРГОЛИН, *Предельная деформативность анизотропных пластиков при двухосном сжатии*, Прикл. Мех. 9, 3 (1967), 90–94.
808. Л. М. БЕЛЕНЬКИЙ, *Об учете степени концентрации нагрузки при упруго-пластическом изгибе*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж. 5, 1963, 28–32.
809. Г. Е. БЕЛЬСКИЙ, *О качественном исследовании устойчивости сжато-изогнутых стержней*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж. 1967/2, 23–27.
810. Б. С. БИЛОБРАН, *О пластическом изгибе и растяжении тонкостенных труб*, Вестн. Львовск. Полит. Ин-та, 7, 1965, 207–212.
811. И. А. БИРГЕР, *Некоторые общие методы решения задач теории пластичности*, Прикл. Мат. Мех. 6, 15 (1951), 765–770.
812. И. А. БИРГЕР, *Метод дополнительных деформаций в задачах теории пластичности*, Изв. АН СССР, Механика и Машиностр. 1963/1, 48–56.
813. И. А. БИРГЕР, *Теория пластического течения при неизотермическом нагружении*, Изв. АН СССР, Мех. и Машиностр. 1964/1, 193–196.
814. И. А. БИРГЕР, *Теория пластического течения и расчет дисков*, Сборник „Расчеты на прочность” 12, Москва 1966, 183–199.
815. И. А. БИРГЕР, И. В. ДЕМЬЯНУШКО, *Теория пластичности при неизотермическом нагружении*, Инж. Журнал Мех. Т. Т. 1968/6, 70–77.
816. В. И. БЛОХ, *Теория упругости*, Изд. Харьк. Унив., Харьков 1964.
817. А. Н. БОГДАНОВ, *Пластическое течение кривоугольного стержня при некоторых соотношениях нормальной и касательной нагрузок, приложенных к незакрепленному концу*, Тр. Ленингр. Ин-та, Водн. Трансп. 88 (1967), 9–15.
818. Н. БОГДАНОВА, *Сложно напряжено и деформировано состояние на эластопластичности кули цилиндрического тела*, Техн. Мисъл 2, 2 (1965), 31–38.
819. А. И. БОРИСЮК, *Осесимметричное упруго-пластическое напряженное состояние оболочек вращения*, Прикл. Мех. 11, 2 (1966), 47–54.
820. С. А. БОЧАРОВА, *Напряженное состояние трубы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления и продольной силы при больших пластических деформациях*, Сб. Расчеты на прочность, 9, Москва 1963, 196–218.
821. С. А. БОЧАРОВА, *Напряженное состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления и продольной силы*, Изв. ВУЗ Машиностр., 1967/2, 16–23.
822. С. А. БОЧАРОВА, *О пределах применимости теории малых пластических деформаций к расчету толстостенных труб, находящихся под действием внутреннего давления и продольной силы*, Изв. ВУЗ, Машиностроение, 1967/3, 15–18.
823. Б. Ф. БОЧКОВ, *Упруго-пластический изгиб рам*, Труды Горьковского полит. ин-та, 14 (1960), 10, 35–62.
824. Б. М. БРОУДЕ, *Расчет балок по предельному состоянию при учете касательных напряжений*, Иссл. по теории сооруж. 5, М.-Л. 1951, Гос. Изд. Строй. Арх.
825. Б. М. БРОУДЕ, *Предельные состояния стальных балок*, Гос. изд. по строит. и арх. 1953, М.-Л.
826. Г. И. БЫКОВЦЕВ, *О следствиях постулата Друккера для пластических анизотропных сред*, Прикл. Мат. Мех. 2, 28 (1964), 356–359.

827. Г. И. БЫКОВЦЕВ, В. В. ДУДУКАЛЕНКО, Д. Д. ИВЛЕВ, *О функциях нагружения анизотропно упрочняющегося пластического материала*, Прикл. Мат. Мех. 4, **28** (1964), 794–797.
828. П. Г. БЫЧКОВ, *Несущая способность призматических стержней находящихся в условиях изгиба, осложненного кручением*, Труды моск. Торф. Ин-та, 1955, 3, 181–207.
829. П. Г. БЫЧКОВ, *Несущая способность стержней некруглых сечений при чистом и стесненном кручении и изгибе*, Тр. моск. Торф. Ин-та, 1957, 5, 257–274.
830. А. А. ВАКУЛЕНКО, *О связях между напряжениями и деформациями в неупругих средах*, Докл. АН СССР **118** (1958), 665–668.
831. А. А. ВАКУЛЕНКО, *Термодинамические исследование связей между напряжениями и деформациями в изотропных упруго-пластических средах*, Докл. АН СССР **126** (1959), 736–739.
832. А. А. ВАКУЛЕНКО, *О связях между напряжениями и деформациями в изотропных и первоначально изотропных неупругих средах*, Сборник Иссл. по упруг. и пласт. **2** (1963), 3–46.
833. А. А. ВАКУЛЕНКО, И. З. ПАЛЛЕЙ, *К вопросу о теории пластичности для среды испытывающей деформацию при переменных температурах*, Сборник „Иссл. по упруг. и пласт.“, 5, Ленинград 1966, 188–197.
834. Л. Л. ВАЛЬТЕР, *Графический способ определения предельной нагрузки для стального стержня при совместном действии изгибающего момента и продольной силы*, Труды Ленингр. Кор. Ин-та, **16** (1955), 56–59.
835. Р. А. ВАСИН, *О виде функции упрочнения в теории течения*, Прикл. Мех. 7, **3** (1967), 60–64.
836. Р. И. ВЕЙЦМАН, *О прочности труб, находящихся под воздействием внутреннего давления и переменных термических нагрузок в пластической области*, Сборн. „Вопросы механ. устойчивости“, Москва 1964, 234–238.
837. А. И. ВИНОГРАДОВ, С. П. ФЕСИК, *Некоторые задачи упругопластического изгиба*, Тр. Харьк. Ин-та Инж. Ж.-Д. Трансп. 1960, вып. 40, 89–115.
838. В. З. ВЛАСОВ, *Уравнения неразрывности деформаций в криволинейных координатах*, ПММ **4**, **8** (1944), 301–306.
839. В. З. ВЛАСОВ, *Общая теория оболочек и её приложения в технике*, Гостехиздат, Москва 1949.
840. В. Е. ВОРОНКОВ, В. В. МОСКВИТИН, *Вращение предварительно изогнутого упруго-пластического стержня*, Инж. Журнал Мех. Т. Т. 1966/6, 147–149.
841. Р. Ф. ГАББАСОВ, *О нижних оценках несущей способности оболочек вращения*, Сб. тр. Моск. Строит. Ин-та **53** (1968), 47–56.
842. Л. А. ГАЛИН, *Упруго-пластическое кручение призматических стержней*, Прикл. Мат. Мех. **3**, **13** (1949), 285–296.
843. А. А. ГВОЗДЕВ, *Определение разрушающей нагрузки для статически неопределенных систем, претерпевающих пластические деформации*, Проект и Стандарт **8**, 1934.
844. А. А. ГВОЗДЕВ, *Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределенных систем, претерпевающих пластические деформации*, Труды конф. по пласт. деф. 1936, Изд. АН СССР Москва 1938. Engl. ed.: Int. J. Mech. Sci., **4**, **1** (1960), 322–335.
845. А. А. ГВОЗДЕВ, *О предельном равновесии*, Инж. Сборник, 5/1, (1948), 32–57.
846. А. А. ГВОЗДЕВ, *Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия*, Стройиздат, Москва 1949.
847. А. В. ГЕММЕРЛИНГ, *Несущая способность балок двутаврового сечения*, Сборник Статей ЦНИПС „Экспериментальные исследования стальных конструкций“, Стройиздат, 1950.
848. А. В. ГЕММЕРЛИНГ, В. Н. КУЗНЕЦОВ, *Приспособляемость сжато-изогнутых стержней*, Строит. Мех. и расч. сооруж. 1967/6, 21–25.
849. Г. А. ГЕНИЕВ, *К вопросу об условиях пластичности*, Сборник „Исслед. по вопр. стр. мех. и теории пласт.“, Москва 1956, ЦНИПС, 180–187.
850. Г. А. ГЕНИЕВ, *К вопросу об условии прочности бетона*, Иссл. по вопр. теории пласт. и прочн. строит. констр., ЦНИИСК, Москва 1958.
851. В. О. ГЕОГДЖАЕВ, *Некоторые вопросы теории упруго-пластической деформации анизотропных материалов*, Труды МФТИ I (1958), 69–96.
852. В. О. ГЕОГДЖАЕВ, *К вопросу о критерии прочности для анизотропных материалов*, Труды МФТИ 5 (1960), Оборонгиз, 23–29.

853. И. И. Гольденблат, *Некоторые вопросы механики деформируемых сред*, Гостехиздат, Москва 1955.
854. И. И. Гольденблат, *Теория малых упруго-пластических деформаций анизотропных сред*, Изв. АН СССР, ОТН, 1955/2.
855. И. И. Гольденблат, В. А. Копнов, *Критерий прочности анизотропных материалов*, Изв. АН СССР, Механика, 6 (1965), 77–83.
856. И. И. Гольденблат, В. А. Копнов, *Обобщенная теория пластического течения анизотропных сред*, Сборник „Строительная механика”, Стройиздат, Москва 1966, 307–319.
857. И. И. Гольденблат, В. А. Копнов, *Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов*, изд. Машиностроение, Москва 1968.
858. Б. Н. Горбунов, В. Г. Чудновский, *Расчет балок на кривой изгиб при пластической деформации*, Сборник трудов Киевск. Инж.-Строит. Ин-та, Вып. 11, 1935.
859. Б. Н. Горбунов, С. А. Пальчевский, *Расчет балок на кривой изгиб с учетом пластических деформаций*, Строит. Промышл. 1939/9.
860. Д. А. Гохфельд, *О приспособляемости в условиях повторных тепловых воздействий*, Сб. Тепл. Напр. в Элем. Турбомашин, вып. I, Киев 1961, 138–149.
861. Д. А. Гохфельд, *О возможности нарастания пластических деформаций в результате циклических температурных воздействий*, Сб. Расчеты на прочность, 7, Москва (1961), 64–75.
862. Д. А. Гохфельд, К. М. Кононов, *Приспособляемость неравномерно нагретых вращающихся дисков*, Изв. ВУЗ, Машиностроение, 1962, 4, 85–91.
863. Д. А. Гохфельд, П. И. Ермаков, *Приспособляемость толстостенных труб при неравномерном нагреве*, Журн. Прикл. Мех. и Техн. Физ. 1963, 3, 107–110.
864. Д. А. Гохфельд, П. И. Ермаков, *Расчет толстостенных цилиндров на повторные воздействия давления и температуры*, Сб. Тепл. напр. в элем. турбомашин, 3, Киев, АН УССР 1963, 111–119.
865. Д. А. Гохфельд, *Приспособляемость многопараметрических систем при неравномерном нагреве*, Тепл. напр. в элементах турбомашин 4, Киев, Наук. Думка 1964, 191–203.
866. Д. А. Гохфельд, П. И. Ермаков, *Приспособляемость толстостенных сферических сосудов в условиях повторных воздействий теплового поля*, Сб. Расчеты на прочность 10, Москва 1964, 137–147.
867. Д. А. Гохфельд, *Несущая способность турбинных дисков при нестационарных режимах работы*, Машиноведение 1965/6, 61–68.
868. Д. А. Гохфельд, *О расчете на прочность при повторных воздействиях температурного поля и нагрузки*, Сборник „Расчеты на прочность” 11, Машиностр. Москва, 1965, 209–228.
869. Д. А. Гохфельд, О. Ф. Чернявский, *Применение симплекс-метода к задачам теории приспособляемости*, Сборник „Тепловые напр. в элем. конструкции” 6, Киев 1966, 99–108.
870. Д. А. Гохфельд, П. И. Ермаков, И. М. Плагов, *Упруго-пластическое деформирование цилиндрической оболочки при повторных воздействиях движущегося осесимметрического источника тепла*, Сборник Тепл. напряж. в элем. конструкций, 6, Киев 1966, 89–98.
871. Д. А. Гохфельд, *Некоторые задачи теории приспособляемости пластин и оболочек*, Труды Всесоюзной Конф. по теории обол. и пластинок, Москва 1966, 284–291.
872. Д. А. Гохфельд, *О применении теоремы Коутера к задачам приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел*, Прикл. Мех. 8, 3 (1967), 41–49.
873. Д. А. Гохфельд, О. Ф. Чернявский, *Применение методов линейного программирования к некоторым двумерным задачам предельного равновесия и приспособляемости в статической формулировке*, Сборник „Тепловые напр. в элем. конструкций”, вып. 7, Киев 1967, 103–107.
874. Д. А. Гохфельд, *Теоремы и методы теории приспособляемости упруго-пластических тел*, Сборник „Теплов. напр. в элем. констр.” 7, Киев 1967, 93–102.
875. И. Г. Гречухо, *Сжат-изогнутый стержень в упруго-пластической стадии*, Строит. Мех. расчет сооруж., 1960, 6, 23–27.
876. О. А. Григан, В. А. Динцын, В. Л. Лившиц, А. Л. Лившиц, *Упруго-пластическая задача для толстостенного цилиндра под действием произвольной нагрузки*, Инж. Журнал Мех. Т. Т. 1968/1, 142–146.

877. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Об изгибе круглой плиты за пределом упругости*, Прикл. Мат. Мех. I, 16, (1952), 111–115.
878. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Несущая способность растянуто-изогнутых круглых пластин*, Инж. Сб. 15, 24 (1956), 52–61.
879. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех. 6, 21 (1957), 827–832.
880. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Равновесие безмоментной оболочки вращения при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех. 6, 25 (1961), 1083–1090.
881. С. И. ГУБКИН, *Пластическая деформация металлов*, т. I–III, Металлургиздат, Москва 1960.
882. И. В. ДАВИДОВ, П. И. ЗАЙЦЕВ, *Исследование влияния поперечной силы на несущую способность балок из разных марок сталей*, Сборник „Динамика и прочность машин”, вып. 3 (1966), 70–74.
883. В. И. ДАВИДОВ, *Касательные напряжения при пластическом изгибе*, Труды Горьк. Полит. Ин-та, 3, II, (1956), 49–60.
884. А. Ш. ДАДАШЕВ, *Упруго-пластическое равновесие и приспособляемость толстостенной трубы, подвергнутой внутреннему давлению и передаче температур*, Изв. АН Азерб. ССР, Сер. Физ.-техн. и Мат. Наук, 1965/4, 123–132.
885. А. Ш. ДАДАШЕВ, *О приспособляемости неравномерно нагретых вращающихся цилиндров*, Изв. АН Азерб. ССР, Сер. Физ.-техн. и Мат. Наук 1965/5, 50–54.
886. А. Ш. ДАДАШЕВ, *О приспособляемости полого шара при воздействии теплового поля и внутреннего давления*, Уч. Зап. Азерб. Ин-та Сер. Физ.-Мат. 1966/2, 19–22.
887. И. Н. ДАНИЛОВА, *Влияние неравномерного нагрева и сжимаемости материала на несущую способность сплошного ротора*, Изв. АН ССР, ОТН, 1958, 6, 104–106.
888. В. И. ДАНИЛОВСКАЯ, *Упруго-пластическая симметрическая деформация толстостенной трубы с учётом неравномерности распределения температуры вдоль радиуса*, Прикл. Мех. 6, 1 (1965), 8–13.
889. В. В. ДАНИЛОВСКАЯ, *Сравнительный расчет трубопровода на предельное упругое и предельное пластическое состояние*, Тр. Ленингр. Корабл. Ин-та, 1964, вып. 46, 103–111.
890. З. Б. ДАО, *Экспериментальная проверка упрощенных вариантов теории пластичности*, Вестн. Моск. Унив. Матем., Мех. 1966/1, 107–118.
891. И. Л. ДИКОВИЧ, *Статика упруго-пластических балок судовых конструкций*, Судостроение, Ленинград, 1967.
892. Р. ДОБРЕВ, *Гранично состояние на обикновени и сандвичеви цилиндрични черупки под действие на непропорционали осови и напречни товари*, Изв. Ин-та Техн. Мех. Вьлг. АН, 3 (1966), 23–42.
893. А. Г. ДОРФМАН, С. Д. ЛЕЙТЕС, *Упруго-пластические деформации и несущая способность цилиндрического стержня при одновременном действии кручения и растяжения*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж. 1964, 2, 27–31.
894. А. Г. ДОРФМАН, С. Д. ЛЕЙТЕС, *Устойчивость в упруго-пластической области внецентренно сжатых стержней с несимметричным двутавровым и тавровым профилем*, Исслед. по теории сооруж. 14, Москва 1965, 5–22.
895. Г. А. ДОЩИНСКИЙ, В. И. МАКСАК, *Пластическая деформация стали при сложном нагружении с постоянной интенсивностью напряжений*, Инж. Журн. Мех. Т. Т. 1966/3, 153–155.
896. Г. А. ДОЩИНСКИЙ, В. И. МАКСАК, *Экспериментальное исследование пластических деформаций при сложном нагружении*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1966/5, 118–122.
897. Г. А. ДОЩИНСКИЙ, А. М. КОРЕНЕВА, *Исследование прямого и возвратного нагружений с постоянной интенсивностью напряжений в пластической области*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1968/4, 163–165.
898. В. В. ДУДУКАЛЕНКО, *Об условии единственности анизотропно упрочняющегося пластического материала*, Прикл. Мех. 9, 4 (1968), 117–120.
899. М. ДУШЕК, *Пластическое поведение полых сферических оболочек при больших прогибах*, Булл. Польск. Акад. Наук, Сер. Техн. Наук. 9, 15 (1967), 767–777.

900. С. А. ЕЛСУФЬЕВ, *О пластическом деформировании при сложном нагружении*, Тр. Ленингр. Полит. Ин-та 278 (1967), 29–31.
901. С. А. ЕЛСУФЬЕВ, И. Н. ИЗОТОВ, *О связи между напряжениями и пластическими деформациями на некоторых путях сложного нагружения*, Инж. Журн. Мех. Т.Т. 1968/1, 140–142.
902. М. И. ЕРХОВ, *Пластическое состояние оболочек, пластин и стержней из идеально пластического материала*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш. 1960, 6, 151–154.
903. М. И. ЕРХОВ, *Конечное соотношение между силами и моментами при пластической деформации оболочек*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж. 1959, 3, 38–41.
904. М. И. ЕРХОВ, *Несущая способность надземного тонкостенного трубопровода*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж. 1960, 6, 19–32.
905. М. И. ЕРХОВ, *Предельное равновесие идеально-пластических стержней произвольного сечения при сложном напряженном состоянии*, Тр. Центр.-Иссл. Ин-та Строит. Конструк. Акад. Строй. и Арх. СССР, 1961, 4, 151–167.
906. М. И. ЕРХОВ, *Несущая способность безмоментной несимметрично нагруженной цилиндрической оболочки*, Тр. Центр. Н.-И. Ин-та Стр. Констр. 1962, вып. 10, 84–90.
907. М. И. ЕРХОВ, *Предельное равновесие пологих оболочек вращения*, Строит. мех. и расч. сооруж. 1966/4, 18–22.
908. Л. В. ЕРШОВ, Д. Д. ИВЛЕВ, *О приближенном решении осесимметричных упруго-пластических задач методом малого параметра*, Вестн. МГУ, 1958/2.
909. Н. Ф. ЕРШОВ, *Упруго-пластические деформации сложно нагруженных вытянутых жестких пластин*, Тр. Горьк. Полит. Ин-та 3, 22 (1966), 31–41.
910. А. М. ЖУКОВ, Ю. Н. РАБОТНОВ, *Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении*, Инж. Сб. 18 (1954), 105–112.
911. А. М. ЖУКОВ, *Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии*, Инж. Сб. 20 (1954), 37–48.
912. А. М. ЖУКОВ, *Пластические деформации стали при сложном нагружении*, Изв. АН СССР, ОТН, 1954, 11, 53–61.
913. А. М. ЖУКОВ, *Сложное нагружение и теории пластичности изотропных материалов*, Изв. АН СССР, ОТН, 1955, 8, 89–92.
914. А. М. ЖУКОВ, *Некоторые особенности кривой нейтрального нагружения*, Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 8, 32–40.
915. А. М. ЖУКОВ, *Упругие свойства пластически деформированного металла и сложное нагружение*, Инж. Сб. 30 (1960), 3–16.
916. А. М. ЖУКОВ, *Поведение металлов при разгрузке и повторной нагрузке*, Инж. Журн. 1, 1 (1961), 124–133.
917. А. М. ЖУКОВ, *Некоторые особенности поведения металлов при упруго-пластическом деформировании*, Сборник „Вопросы теории пластичности”, Москва 1961, 30–57.
918. А. М. ЖУКОВ, *Пластические деформации сплава АКГ при простом и сложном нагружениях*, Сб. „Расчеты на прочность”, 12, Москва 1966, 260–289.
919. М. А. ЗАДОЯН, *Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности*, Докл. АН Арм. ССР 5, 39 (1964), 265–269.
920. М. А. ЗАДОЯН, *О двух задачах теории идеальной пластичности*, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук 6, 17 (1964), 73–81.
921. М. А. ЗАДОЯН, *О некоторых решениях уравнений пластического течения анизотропной среды*, Инж. Журн. Мех. Т.Т. 1966/2, 91–96.
922. М. Р. ИБРАГИМОВ, *Проектирование оболочки минимального веса при действии независимых нагрузок*, Мат. Научн. Конфер. Мол. Уч. АН Азерб. ССР, Баку 1966, 10–19.
923. О. И. ИБРАЕВ, *Оценка влияния очередности приложения внешних нагрузок на несущую способность стержней*, Докл. АН Узб. ССР, 1964, 3, 9–13.
924. О. И. ИБРАЕВ, *Влияние очередности приложения внешних нагрузок на несущую способность стержней из линейно упрочняющегося упруго-пластического материала*, Изв. ВУЗ Строит. и Арх. 1965, 2, 40–45.
925. С. И. ИВАНОВ, *Решение задач чисто пластического кручения с растяжением призматических*

- стержней методом упругих решений в конечных разностях*, Труды Куйб. Авиац. Ин-та, 1958, вып. 4, 59–67.
926. Г. В. ИВАНОВ, *Аппроксимация конечного соотношения между усилиями и моментами оболочек при условии пластичности Мисеса*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1967/6, 74–75.
927. Д. Д. ИВЛЕВ, *К теории простого деформирования пластических тел*, Прикл. Мат. Мех. 6, 19 (1955), 734–735.
928. Д. Д. ИВЛЕВ, *К исследованию линейной тензорной связи в пластичности*, Прикл. Мат. Мех. 2, 20 (1956), 289–292.
929. Д. Д. ИВЛЕВ, *Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности методом малого параметра*, Докл. АН СССР 2, 113 (1957).
930. Д. Д. ИВЛЕВ, *Приближенное решение плоских упруго-пластических задач теории идеальной пластичности методом малого параметра*, Вестн. МГУ, 1957/5.
931. Д. Д. ИВЛЕВ, *К построению теории идеальной пластичности*, Прикл. Мат. Мех. 6, 22 (1958), 850–855.
932. Д. Д. ИВЛЕВ, *К теории идеальной пластической анизотропии*, Прикл. Мат. Мех. 6, 23 (1959), 1107–1114.
933. Д. Д. ИВЛЕВ, *О постулате изотропии в теории пластичности*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш. 1960/2, 125–127.
934. Д. Д. ИВЛЕВ, *О работе В. С. Ленского „Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении“*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш. 1960/6, 179–181.
935. Д. Д. ИВЛЕВ, *О свойствах соотношений закона анизотропного упрочнения пластического материала*, Прикл. Мат. Мех. 1, 24 (1960), 144–146.
936. Д. Д. ИВЛЕВ, *О кручении винтовых стержней из идеально-пластического материала*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш. 1961, 5, 124–126.
937. Д. Д. ИВЛЕВ, Т. Н. МАРТЫНОВА, *Об учете сжимаемости идеально пластических сред*, Прикл. Мат. Мех. 6, 25 (1961), 1126–1128.
938. Д. Д. ИВЛЕВ, *К теории предельного равновесия оболочек вращения при кусочно-линейных условиях пластичности*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Машин., 1962, 6, 95–102.
939. Д. Д. ИВЛЕВ, Т. Н. МАРТЫНОВА, *К теории сжимаемых идеально пластических сред*, Прикл. Мат. Мех. 3, 27 (1963), 589–592.
940. Д. Д. ИВЛЕВ, Ю. И. ЛИСТРОВА, Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *К теории предельного состояния слоистых пластин и оболочек вращения*, Изв. АН СССР Мех. и Маш. 1964, 4, 77–86.
941. Д. Д. ИВЛЕВ, *Теория идеальной пластичности*, Наука, Москва 1966.
942. Д. Д. ИВЛЕВ, *О деформационных теориях пластичности при сингулярных поверхностях нагружения*, Прикл. Мат. Мех. 5, 31 (1967), 887–889.
943. А. А. ИЛЬЮШИН, *Некоторые вопросы пластических деформаций*, Прикл. Мат. Мех. 4, 7 (1943), 245–272.
944. А. А. ИЛЬЮШИН, *Приближенная теория упруго-пластических деформаций осесимметричной оболочки*, Прикл. Мат. Мех. 6, 8 (1944), 15–24.
945. А. А. ИЛЬЮШИН, *Конечное соотношение между силами и моментами и связь их с деформацией в теории оболочек*, Прикл. Мат. Мех. 1, 9 (1945), 101–110.
946. А. А. ИЛЬЮШИН, *Связь между теорией Сен Вена — Леви — Мизеса и теорией малых упруго-пластических деформаций*, 3, 9 (1945), 207–218.
947. А. А. ИЛЬЮШИН, *К теории малых упруго-пластических деформаций*, Прикл. Мат. Мех. 3, 10 (1946), 347–356.
948. А. А. ИЛЬЮШИН, *Теория пластичности при простом нагружении тел, материал которых обладает упрочнением*, Прикл. Мат. Мех. 2, 11 (1947), 291–296.
949. А. А. ИЛЬЮШИН, *Пластичность*, ГТТИ, 1948.
950. А. А. ИЛЬЮШИН, *Нормальные и касательные напряжения при чистом изгибе балок за пределом упругости и аналогия с задачей об изгибе плит*, Инж. Сб. 19 (1954), 3–12.
951. А. А. ИЛЬЮШИН, *О связи напряжений с малыми деформациями в механике сплошной среды*, Прикл. Мат. Мех. 6, 18 (1954), 641–666.

952. А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов, *О пластических деформациях толстостенной трубы под действием тепловых импульсов и давления*, Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 12, 85–89.
953. А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов, *О прочности оболочек толстостенного цилиндра и полого шара, подвергнутых облучению*, Инж. Сб. **28** (1960), 134–144.
954. А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов, *Упруго-пластические деформации полых цилиндров*, Изд. Московск. Унив., Москва 1960.
955. А. А. Ильюшин, *Вопросы общей теории пластичности*, Прикл. Мат. Мех. **3**, **24** (1960), 399–411.
956. А. А. Ильюшин, *О приращении пластической деформации и поверхности текучести*, Прикл. Мат. Мех. **4**, **24** (1960), 663–666.
957. А. А. Ильюшин, *Об основах общей математической теории пластичности*, Москва 1961, 3–29.
958. А. А. Ильюшин, *О постулате пластичности*, Прикл. Мат. Мех. **25** (1961), 503–507.
959. А. А. Ильюшин, *Еще о постулате изотропии*, Изв. АН СССР, 1962/1, 201–204.
960. А. А. Ильюшин, *Пластичность*, Изд. АН СССР, 1963.
961. А. Ю. Ишлинский, *Гипотеза прочности формоизменения*, Уч. Зап. Моск. Ин-та, Механика **46**, 1940.
962. А. Ю. Ишлинский, *Общая теория пластичности с линейным упрочнением*, Укр. Мат. Журнал **3**, **6** (1954), 314–324.
963. Э. Ёйги, *К расчету упруго-пластических пологих арок*, Уч. Зап. Тартуск. Гос. Унив. **129** (1962), 460–468.
964. Э. Ёйги, *Симметрическая деформация упруго-пластической полой круговой арки*, Уч. Зап. Тартуск. Гос. Унив. **150** (1964), 231–238.
965. М. Г. Кабелевский, *О циклическом неизотермическом деформировании дисков*, Теплов. напрж. в элем. конструкций, вып. **6**, Киев 1966, 29–40.
966. Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов, *Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения*, Прикл. Мат. Мех. **1**, **22** (1958), 78–89.
967. Ю. И. Кадашевич, *О взаимосвязи двух основных задач в теории течения, учитывающей остаточные микронапряжения*, Прикл. Мат. Мех. **27** (1963), 378–379.
968. Ю. И. Кадашевич, *О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности*, Исслед. по упруг. и пласт. **6**, Ленинград 1967, 39–45.
969. Ю. И. Кадашевич, *Обобщенная теория пластического течения*, Сборник „Исслед. по упруг. и пласт.“ **6**, Ленинград 1967, 25–38.
970. Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов, *Об учете микронапряжений в теории пластичности*, Инж. Журнал Мех Т.Т. 1968/3, 82–91.
971. Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов, *О влиянии начальных микронапряжений на макроскопическую деформацию поликристаллов*, Прикл. Мат. Мех. **5**, **32** (1968), 908–922.
972. Ш. Н. Кац, Л. М. Качанов, *О пластической деформации при сложном нагружении*, Изв. АН СССР, ОТН, 1957/11, 172–173.
973. Л. М. Качанов, *Упруго-пластическое равновесие неравномерно нагретых толстостенных цилиндров, находящихся под действием внутреннего давления*, Журн. Техн. Физ. **14**, **10** (1940).
974. Л. М. Качанов, *Вариационные принципы для упруго-пластических сред*, Прикл. Мат. Мех. **2-3**, **6** (1942), 187–196.
975. Л. М. Качанов, *Устойчивость упруго-пластического равновесия сжато-скрученного вала*, Докл. АН СССР, **4**, **88** (1953), 627–630.
976. Л. М. Качанов, *К вопросу о сложном нагружении*, Прикл. Мат. Мех. **3**, **19** (1955), 371–375.
977. Л. М. Качанов, *Основы теории пластичности*, Гостехиздат, Москва 1956.
978. Л. М. Качанов, *Упруго-пластические задачи теории оболочек и пластинок*, Труды VI Всесоюзной Конф. по Теории Оболочек и Пластинок, Москва 1966, 954–959.
979. К. Р. Кенк, *О связи между напряжением и сдвигом при кручении*, Инж. Журнал Мех. Т. Т. 1968/5, 134–139.
980. С. Д. Клячко, *Об оценке теории течения*, Изв. АН СССР, Мех. и Машиностр. 1962/5, 159–164.

981. Ф. Е. Клименко, *Учет влияния поперечной силы на несущую способность сечения балки при изгибе*, Докл. Львовск. Полит. Ин-та, 1–2, **3** (1958), Механика 47–54.
982. В. Д. Ключников, *Об условиях пропорционального изменения девиаторов в теории малых упруго-пластических деформаций*, Изв. АН СССР, ОТН, 1957/6, 138–139.
983. В. Д. Ключников, *О законах пластичности для частного класса путей нагружения*, Прикл. Мат. Мех. 4, **21** (1957), 533–543.
984. В. Д. Ключников, *О законах пластичности для материала с упрочнением*, Прикл. Мат. Мех. 1, **22** (1958), 97–118.
985. В. Д. Ключников, *О возможном пути построения соотношений пластичности*, Прикл. Мат. Мех., 2, **23** (1959), 282–291.
986. В. Д. Ключников, *Новые представления в пластичности и деформационная теория*, Прикл. Мат. Мех. 4, **23** (1959), 722–731.
987. В. Д. Ключников, *Аналитическая теория пластичности*, Изв. АН СССР, Механика, 1965/2, 82–87.
988. К. Ф. Ковалов, *О критерии оценки эффекта Баушингера*, Тр. Ленингр. Полит. Ин-та **278** (1967), 38–41.
989. И. А. Козлов, А. А. Лебедев, В. Л. Ахременко, *Зависимость между напряжениями и деформациями в начальной стадии пластического деформирования при двухосном растяжении*, Прикл. Мех. 12, **3** (1967), 118–121.
990. В. В. Козляков, *К вопросу об упруго-пластическом изгибе двутавровых балок из линейноупрочняющегося материала с учетом сдвига и осевых сил*, Тр. Ленингр. Ин-та, 1964, вып. 46, 25–37.
991. В. О. Колгадин, *Приближенно-пластичні деформації тонкостінного стержня при двовісному згині з крученням*, Прикл. Мех. 1, **10** (1964), 55–63.
992. В. А. Колгадин, *Кручение с растяжением тонкой полоски за пределом упругости*, Прикл. Мех. 7, **1** (1965), 132–135.
993. В. А. Колгадин, *Определение деформаций двутаврового стержня при изгибе с кручением за пределом упругости*, Прикл. Мех. 10, **1** (1965), 72–77.
994. Л. О. Колесников, *Метод дослідження великих переміщень стержня у пружно-пластичній стадії*, Прикл. Мех. 3, **4** (1958), 317–325.
995. В. В. Колокольчиков, *Вращение упруго-пластической изогнутой тонкостенной трубы*, Вестн. Моск. Унив., Матем. Мех. 1968/2, 79–83.
996. В. П. Коломец, *Метод определения напряжений и деформаций в сечении балки при сложном нагружении с учетом действительной диаграммы (σ , ϵ)*, Изв. Уч. Зав. Авиаци. Техн. 1966/1, 63–72.
997. Е. А. Коняев, И. З. Паллей, *Приближенные уравнения для неизотермического деформирования*, Сборник „Вопр. динам. и прочн.“, **13** (1967), 137–140.
998. В. И. Королев, *Малые упруго-пластические деформации пластины и оболочек*, Прикл. Мех. 4, **4** (1968), 16–24.
999. А. Г. Костюк, *Напряжения в сплошном вращающемся цилиндре за пределом упругости*, Прикл. Мат. Мех. 4, **18** (1954), 453–456.
1000. А. Г. Костюк, *Статистическая теория пластичности поликристаллического материала*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1968/6, 60–69.
1001. А. М. Кочетков, *Об изгибе стержней при больших перемещениях*, Инж. Журн. 6, **5** (1965), 1081–1086.
1002. Н. А. Кравцов, *Исследование влияния поперечной силы на предельный момент при подвижной нагрузке на неразрезных балках*, Изв. ВУЗ, Машиностр. **8** (1963), 93–100.
1003. А. С. Кравчук, *О точности деформационной теории при простом нагружении*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1968/6, 111–114.
1004. А. Ф. Крегерс, *Пластические деформации при сложном нагружении растяжением и кручением*, Мех. Полимеров 1966/1, 20–26.
1005. А. Ф. Крегерс, *Влияние третьего инварианта напряжений на характерные кривые материала*, Мех. Полимеров 1968/4, 613–617.

1006. Н. КРИСТЕСКУ, *О распространении упруго-пластических волн при сложном нагружении*, Прикл. Мат. Мех. 6, 23 (1959), 1124–1129.
1007. Ю. А. КРУТКОВ, *Тензор функций напряжений и общие решения*, Изд. АН СССР, Москва 1949.
1008. И. Н. КУДРЯВЦЕВ, *Косой изгиб в области пластических деформаций*, изд. В.И.А. РККА им. Куйбышева 1940.
1009. С. Д. КУДРЯВЦЕВ, *Пластический косой изгиб тонкостенных стержней с развитым сжатым поясом*, Прикл. Мех. 10, 2 (1966), 54–62.
1010. С. Д. КУДРЯВЦЕВ, *Упруго-пластические прогибы при косом изгибе тонкостенных стержней с развитым сжатым поясом*, Изв. ВУЗ, Строит. и Архит., 1968/3, 31–35.
1011. А. И. КУЗИН, *К расчету балок с допуском пластических деформаций при сложном напряженном состоянии*, Тр. Горьковск. Инж.-Строит. Ин-та 45 (1964), 79–90.
1012. А. И. КУЗИН, *К вопросу экспериментального определения предельной нагрузки стальных балок*, Тр. Горьковск. Инж.-Строит. Ин-та 50 (1967), 95–101.
1013. В. Н. КУКУДЖАНОВ, *Упруго-пластический изгиб тонкостенных стержней с учетом касательных напряжений*, Труды Моск. Физ.-Техн. Ин-та, 1958, вып. 1, 97–114.
1014. Л. П. КУНИЦКИЙ, *Несущая способность стальных балок при учете поперечных сил*, Сб. научн. тр. Киевск. Инж. Строит. Ин-та, 1959, 12, 188–217.
1015. Л. П. КУНИЦКИЙ, *Несущая способность стальных балок при подвижной нагрузке с учетом поперечных сил*, Сборник „Сопрот. мат. и теория сооруж.“, вып. 2, Киев 1965, 148–159.
1016. В. В. КУПРИЯНОВ, *Расчет упруго-пластических рам на повторно-переменное нагружение с учетом продольных и поперечных сил*, Тр. Центр. Н.-Иссл. Ин-та Стр. Констр. 1962, вып. 10, 96–107.
1017. Н. С. КУРДИН, *Упруго-пластическое состояние стержня, находящегося под действием центральных сил и крутящего момента*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш. 1959, 3, 152–154.
1018. А. А. ЛАБУТИН, *К методике построения диаграмм предельной пластичности*, Сборник трудов Ленингр. Механ. Ин-та, 54 (1966), 148–155.
1019. Б. Б. ЛАМПСИ, *Несущая способность стальных балок*, Бюлл. Инст. Полит. Ясси 1–2 (1958), 381–394.
1020. Б. Б. ЛАМПСИ, *Прочность двутавровых балок*, Изв. Выс. Уч. Зав. Строит. и Архит. 1959, 1, 66–80.
1021. Н. А. ЛЕБЕДИНЕЦ, *Определение упруго-пластических деформаций бесшарнирных арок*, Сопрот. Мат. и Теория Сооружений I, Изд. Буд. Киев 1965, 145–157.
1022. С. Д. ЛЕЙТЕС, *К вопросу о механизме потери устойчивости*, Инж. Сборник 7 (1950), 123–130.
1023. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Устойчивость сжатых стальных стержней*, Гос. Изд. Лит. Строит. Арх., Москва 1964.
1024. С. Д. ЛЕЙТЕС, *О пространственной устойчивости сжатоизогнутых стержней в упруго-пластической стадии*, Строит. Мех. и расч. Сооруж. 4, 1961, 24–29.
1025. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Приближенное исследование упруго-пластических деформации на основе гипотезы стабилизации напряжений*, 2-ий Всесоюзный Съезд по теор. и прикл. мех. 1964, 244.
1026. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Упруго-пластические деформации цилиндра при сложном нагружении крутящим моментом и растягивающей силой*, Инж. Журн. 2, 5 (1965), 382–387.
1027. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Анализ устойчивости внецентренно сжатых упруго-пластических стержней с помощью ЭЦВМ*, Сборник „Строит. Механика“, Москва 1966, 68–76.
1028. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Исследование конечных деформаций внецентренно сжатых упруго-пластических стержней*, Прикл. Мех. 4, 2 (1966), 72–77.
1029. В. С. ЛЕНСКИЙ, *Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении*, Изв. АН СССР, ОТН, 1958/11, 15–24.
1030. В. С. ЛЕНСКИЙ, *Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш., 1960/5, 93–100.
1031. В. С. ЛЕНСКИЙ, *Некоторые особенности поведения металлов при упруго-пластическом деформировании*, Сборник „Вопросы теории пластичности“, Москва 1961, 58–82.
1032. В. С. ЛЕНСКИЙ, *Об ошибочных замечках Д. Д. Ивлева*, Изв. АН СССР, Мех. 1961/3, 172–175.

1033. В. С. ЛЕНСКИЙ, *Гипотеза локальной определенности в теории пластичности*, Изв. АН СССР, 1962/5, 154–158.
1034. М. Я. ЛЕОНОВ, Н. Ю. ШВАЙКО, *Сложная плоская деформация*, Докл. АН СССР 5, 159 (1964), 1007–1010.
1035. М. Я. ЛЕОНОВ, Н. Ю. ШВАЙКО, *О зависимости между напряжениями и деформациями в окрестности угловой точки траектории нагружения*, Докл. АН СССР 2, 171 (1966), 306–309.
1036. Ю. Р. ЛЕПИК, *Изгиб упруго-пластического стержня в случае предварительного натяжения*. Уч. зап. Тартуского Унив. 1959, вып. 73, 157–167.
1037. Ю. Р. ЛЕПИК, *Пластическое течение гибких круглых пластинок из жестко-пластического материала*, Изв. АН СССР ОТН, Мех.-Маш. 1960/2, 78–87.
1038. Ю. Р. ЛЕПИК, *Большие прогибы круглых жестко-пластических пластинок, заземленных по контуру*, Тр. Конф. по Теории Пластин и Оболочек, Изд. Казанск. Унив., 1961.
1039. Ю. Р. ЛЕПИК, *О несущей способности круглых пластинок подвергнутых облучению*, Уч. Зап. Тартуск. Унив. 1962, вып. 129, 482–486.
1040. Ю. Р. ЛЕПИК, Л. Я. ЛУХТ, *О влиянии сжимаемости на изгиб упруго-пластических пластинок*, Сборник „Теория обол. и пластин“, Ереван 1964, 634–640.
1041. Ю. Р. ЛЕПИК, *Температурные напряжения в гибких неоднородных пластинах за пределом упругости*, Уч. Зап. Тартуск. Унив., вып. 177, 1965, 168–179.
1042. Ю. Р. ЛЕПИК, *Большие прогибы жестко-пластической оболочки под действием внутреннего и внешнего давления*, Труды VI Всес. Конф. по теории обол. и пласт., Москва 1966, 534–541.
1043. Ю. Р. ЛЕПИК, *К осесимметричному изгибу гибких круглых жестко-пластических пластин*, Инжен. Журнал Мех. Т.Т. 1966/4, 104–110.
1044. Ю. П. ЛИСТРОВА, *О предельном равновесии неоднородных пластин и оболочек вращения при кусочнолинейных условиях пластичности*, Изв. АН СССР, Мех. 2 (1965), 88–94.
1045. Ю. П. ЛИСТРОВА, М. А. РУДИС, *Некоторые задачи предельного равновесия оболочек вращения с учетом температурных эффектов*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 5, Киев 1965, 270–278.
1046. Ю. П. ЛИСТРОВА, Н. И. МОКАШОВА, *О предельном равновесии конструкций, выполненных из материала с различными пределами текучести при растяжении и сжатии*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1967/6, 81–85.
1047. В. А. ЛОМАКИН, *Большие деформации трубы и полого шара*, Инж. Сборник 21 (1955), 61–73.
1048. В. А. ЛОМАКИН, *О теории пластичности анизотропных сред*, Вестн. Моск. Унив. Мат.-Мех., 1964/4, 49–53.
1049. Б. В. ЛОПАТИН, *Расчет балок, находящихся в условиях температурного перепада по предельному состоянию*, Сб. науч. тр. Ивановск. Энерг. Ин-та, 1955, 6, 9–15.
1050. Б. И. ЛЮБАРОВ, *Повторно-переменное нагружение внецентрично сжатых упруго-пластических стержней*, Сборник „Иссл. по мат., эксп. физ. и мех.“, Ленинград 1965, 94–104.
1051. Б. И. ЛЮБАРОВ, *Некоторые задачи приспособляемости упруго-пластических тел*, Строит. мех. и расч. сооруж. 1967/1, 31–34.
1052. Б. И. ЛЮБАРОВ, *О приспособляемости сечений при повторно-переменном нагружении стержня*, Сборник „Новые методы расчета строит. конструкций“, Москва, Стройиздат 1968, 177–183.
1053. А. А. МАКАРЕВИЧ, *Об определении напряжений в прямоугольном стержне под действием момента и осевой силы при произвольной диаграмме работы материала*, Изв. ВУЗ строит. и архит. 1967/12, 163–172.
1054. Б. П. МАКАРОВ, *О поведении сжато-изогнутых стержней в упруго-пластической стадии*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж. 1965/5, 35–37.
1055. В. И. МАКСАК, *Пластическая деформация стали при сложном нагружении*, Изв. Томского Полит. Института 139 (1965), 250–253.
1056. Г. Ф. МАЛИКОВ, *Расчет брусов большой кривизны по методу предельного равновесия*, Труды Моск. Энерг. Ин-та 1957, вып. 29, 5–18.
1057. Н. Н. МАЛИНИН, *Прикладная теория пластичности и ползучести*, Машиностроение, Москва 1968.
1058. Н. Н. МАЛИНИН, Ж. Л. ПЕТРОСЯН, *Большие пластические деформации круглой плоской мембраны, нагруженной равномерным давлением*, Изв. ВУЗ, Машиностроение 1968/10, 30–37.

1059. А. К. МАЛМЕЙСТЕР, *Пластичность квазиизотропного тела*, Сборник „Вопросы динамики и динамической прочности”, вып. IV, Рига 1956, 37–48.
1060. А. К. МАЛМЕЙСТЕР, *Геометрия теории прочности*, Мех. Полимеров 1966/4, 519–534.
1061. В. И. МАЛЫЙ, *О постулатах пластичности*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1966/4, 65–69.
1062. В. И. МАЛЫЙ, *О четности компонент вектор—функционала напряжений в теории пластичности*, Вестник Моск. Унив., Мат. Мех. 1966/6, 80–84.
1063. В. И. МАЛЫЙ, *Разложение функционала напряжений по малому параметру*, Вестн. Моск. Унив. Мат.-Мех. 1967/2, 73–80.
1064. В. М. МАЛЫШЕВ, *Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов*, Вестн. Моск. Унив. Серия Мат.-Мех.-Астр. Физ.-Хим. 1958, 55–68.
1065. В. М. МАЛЫШЕВ, *Кручение трубок при ступенчатом изменении крутящего момента в процессе непрерывного растяжения*, Вестн. Моск. Унив. Серия Мат.-Мех. 1958, 2, 33–39.
1066. А. А. МАРКОВ, *Вариационные принципы в теории пластичности*, Прикл. Мат. Мех. 9 (1947), 339–350.
1067. Т. Н. МАРТЫНОВА, *Свойства уравнений теории пластичности при учете сжимаемости тела*, Сб. тр. Воронежск. Инж.-Стр. Ин-та 1, 13 (1967), 93–100.
1068. В. И. МАХНЕНКО, Е. А. ВЕЛИКОИВАНЕНКО, *Задача термопластичности для полой оболочки вращения*, Сборник „Тепл. напр. в элем. констр.” 7, Киев 1967, 57–64.
1069. Р. А. МЕЖЛУМЯН, *О функции поперечной деформации*, Прикл. Мат. Мех. 4, 16 (1952), 491–494.
1070. Р. А. МЕЖЛУМЯН, *Обратные задачи прикладной теории пластичности и несущая способность конструкций, материал которых обладает упрочнением*, Изв. АН СССР, ОТН, 1955, 12, 80–95.
1071. М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *О пластическом течении анизотропных оболочек*, Изв. АН СССР, ОТН 1955/8, 67–80.
1072. М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Общая теория анизотропных жесткопластических оболочек*, Изв. АН СССР, ОТН, 1957, 1, 85–94.
1073. М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Анализ веса и прочности жестко-пластических ортотропных оболочек*, Арх. Мех. Стос. 1, 11 (1959), 17–31 (Варшава).
1074. М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Статика анизотропных пластических оболочек*, Изд. АН Груз. ССР, Тбилиси 1963.
1075. М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Техническая теория пластичных тонких оболочек*, Сообщ. АН Груз. ССР, 3, 40 (1965), 551–558.
1076. И. Е. МИЛЕЙКОВСКИЙ, *О возможном условии пластичности анизотропного тела*, Сборник „Исслед. по вопр. строит. мех. и теории пластичности”, ЦНИПС 1956, 169–179.
1077. И. Н. МИРОЛЮБОВ, *К вопросу об обобщении теории прочности октаэдрических касательных напряжений на хрупкие материалы*, Труды ЛПИ 25 (1953).
1078. И. Н. МИРОЛЮБОВ, *Приближенный расчет на прочность неоднородно напряженных стержней с учетом пластической деформации*, Труды Лен. Вой.-Мех. Ин-та 1957, 6, 28–69.
1079. А. Н. МИТИНСКИЙ, *Касательные напряжения при упруго-пластическом изгибе*, Труды Все-союзн. Научн.-Техн. Общ. Судостр., III/3, 1939.
1080. Н. М. МИТРОХИН, *Влияние вида девиатора напряжений на сопротивление пластическому деформированию никеля при простом нагружении*, Научн.-Техн. Информ. Ленингр. Полит. Ин-та, 1959, 11, 81–89.
1081. Н. М. МИТРОХИН, Ю. И. ЯГН, *О систематическом характере отклонений от законов пластичности*, Докл. АН СССР, 4, 135 (1960) 796–799.
1082. Н. Я. МИХАЙЛОВ, Ю. И. ЯГН, *Экспериментальное исследование предельной несущей способности тонкостенных никелевых трубок при различных путях нагружения растягивающей силой, крутящим моментом и внутренним давлением*, Докл. АН СССР 3, 135 (1960), 545–548.
1083. Е. М. МОРОЗОВ, *Приближенный расчет термопластических напряжений в трубе*, Изв. ВУЗ, Машиностроение 1961, 9, 11–18.

1084. В. В. МОСКВИТИН, *О вторичных пластических деформациях*, Прикл. Мат. Мех. 3, **16** (1952), 323–330.
1085. В. В. МОСКВИТИН, *Упруго-пластические деформации тел при повторных нагружениях*, б, **19** (1955), 714–724.
1086. В. В. МОСКВИТИН, *Об условиях простого повторного нагружения*, Вестн. Моск. Унив. Матем. и Мех. 1962, 2, 72–75.
1087. В. В. МОСКВИТИН, *Пластичность при переменных нагружениях*, Моск. Унив. 1965.
1088. В. В. МОСКВИТИН, Э. ПАЛЬНЕ, *К теореме о переменных нагружениях*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1966/3, 144–147.
1089. В. В. МОСКВИТИН, Ж. И. ТАИРОВА, *Об одной простейшей возможности анализа сложных циклических нагружений*, Вестн. Моск. Унив. Мат.-Мех. 1968/3, 119–122.
1090. И. А. МОТОВИЛОВЕЦ, Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, *Упруго-пластическое напряженное состояние пластин, находящихся в пространственном температурном поле*, Теория обол. и пластин, Ереван, АН Арм. СССР, 1964, 715–723.
1091. Н. Л. МОШЕНСКИЙ, *Опыт применения электронной модели для решения упруго-пластической задачи сложного изгиба стержня*, Труды ЛКИ, вып. 38 (1962), 115–125.
1092. З. Мруз, А. Савчук, *Несущая способность кольцевых пластин*, Изв. АН СССР 3 (1960), 72–78.
1093. К. К. МУХАНОВ, Ю. В. СОБОЛЕВ, *Внецентричное сжатие ступенчатой колонны при разных соотношениях нагрузок*, Сборник „Металлические Констр.” Москва 1966, 307–324.
1094. Л. П. НАТАНСОН, *Конструктивная теория функций*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1949.
1095. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, Ю. Н. РАБОТНОВ, *Предельное равновесие подкрепленных цилиндрических оболочек*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш.-1963, 3, 83–94.
1096. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *О предельном состоянии слоистых и конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1966, 130–138.
1097. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Предельное равновесие цилиндрических вафлеобразных оболочек*, Инж. Журнал Мех. Т. Т. 1967/3, 52–59.
1098. В. В. НОВОЖИЛОВ, *О физическом смысле инвариантов напряжения, используемых в теории пластичности*, Прикл. Мат. Мех. 5, **16** (1952), 617–619.
1099. В. В. НОВОЖИЛОВ, *О классе сложных нагружений, который характеризуется сохранением направлений главных осей*, Прикл. Мат. и Мех. 4, **18** (1954), 415–424.
1100. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория упругости*, Судпромгиз, Ленинград 1958.
1101. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Об одном направлении в теории пластичности*, Изв. АН СССР, Механика, 1961/3, 176–181.
1102. В. В. НОВОЖИЛОВ, *О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений*, Прикл. Мат. Мех. 3, **28** (1964), 393–400.
1103. П. М. ОГИБАЛОВ, *Условия пластичности при сложном напряженном состоянии тела в нестационарном тепловом режиме*, Вестник МГУ, Москва 1949.
1104. П. М. ОГИБАЛОВ, *Большие упруго-пластические симметричные деформации толстостенной трубы*, Научн. Докл. Выс. Школы, Физ.-Мат. Н., 1959, 1, 110–116.
1105. И. ОХАШИ, С. МУРАКАМИ, *Односторонний упруго-пластический изгиб круговой пластинки с радиальным растяжением*, Инж. Журнал 1, **5** (1965), 94–102.
1106. П. А. ПАВЛОВ, *Расчет несущей способности трубчатых валов с фланцами при одновременном растяжении и кручении*, Научн. техн. информ. бюлл. Лен. Пол. Ин-та, 1960, 4, 102–104.
1107. И. З. ПАЛЛЕЙ, *Влияние истории нагружения на напряженное состояние двухслойной оболочки*, Вопр. динам. и прочн. 9, Рига 1962, 115–126.
1108. И. ПАЛЛЕЙ, *Эффект сложного нагружения в неравномерно нагретом вращающемся диске*, Изв. АН Латв. ССР, 2, 1963, 41–45.
1109. И. З. ПАЛЛЕЙ, *Приложение теории остаточных микронапряжений к неизотермическому деформированию*, Изв. АН СССР, Механика 1965/2, 110–113.
1110. С. А. ПАЛЬЧЕВСКИЙ, *Определение несущей способности стальных стержней для некоторых случаев сложного напряженного состояния*, Сборник трудов Киевского Инж.-Строит. Ин-та 8, 1948.

1111. М. В. ПАНКОВА, *О несущей способности кривого бруса*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1969/2, 170–172.
1112. Я. Г. ПАНОВКО, *О критической силе сжатого стержня в неупругой области*, Инж. Сборник 20 (1954), 160–163.
1113. В. М. ПАНФЕРОВ, *О сходимости метода упругих решений теории упруго-пластических деформаций оболочек*, Прикл. Мат. Мех. 1, 13 (1949), 79–94.
1114. В. М. ПАНФЕРОВ, *О применимости вариационных методов к задачам теории малых упруго-пластических деформаций*, Прикл. Мат. Мех. 3, 16 (1952), 319–322.
1115. П. Ф. ПАПКОВИЧ, *Основы теории упруго-пластического изгиба статически определяемых балок*, Труды Всес. Научн. Инж.-Техн. Общ. Судостр. 111, вып. 3, Оборонгиз 1939.
1116. Е. О. ПАТОН, Б. Н. ГОРБУНОВ, *Несущая способность сварных балок при пластических деформациях*, Изв. АН УССР, Киев 1935.
1117. П. П. ПЕТРИЩЕВ, *Применение теории малых упруго-пластических деформаций к анизотропному телу*, Москва, Изд. МГУ, 1951.
1118. Ф. А. ПИВНЕВ, *Способ определения прогибов в упруго-пластической стадии работы стальных двухшарнирных арок*, Тр. Харьк. Ин-та Инж. Ж.-Д. Трансп. 28 (1958), 153–172.
1119. В. В. ПИНАДЖЯН, *К вопросу о предельном состоянии коротких внецентренно сжатых стержней Н-образных сечений при двухосном эксцентризите приложенных сил*, Докл. АН Арм. СССР, т. 21, 2, 1955.
1120. В. В. ПИНАДЖЯН, *Некоторые вопросы предельного состояния сжатых элементов стальных конструкций*, Изд. АН Арм. СССР, Еревань 1956.
1121. Г. С. ПИСАРЕНКО, А. А. ЛЕБЕДЕВ, *Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии*, Изд. Наукова Думка, Киев 1969.
1122. В. В. ПИСКУН, *Упруго-пластическое осесимметричное напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины при нестационарном нагреве*, Сборник „Теплов. напр. в элем. конструкций”, 6, Киев 1966, 79–88.
1123. С. Д. ПОНОМАРЕВ, и др. *Расчеты на прочность в машиностроении*, т. I (1956), т. II (1958), т. III (1959), Машгиз, Москва.
1124. А. М. ПРОЦЕНКО, *Предельное равновесие систем с конечным числом степеней свободы при больших деформациях*, Инж. Журнал МТТ 1968/5, 70–75.
1125. Ц. В. РАБИНОВИЧ, *Графоаналитический способ расчета конструкций по методу предельного равновесия при изгибе с растяжением*, Вестник Машиностр. 1958, 2, 19–22.
1126. Ю. Н. РАБОТНОВ, *Приближенная техническая теория упруго-пластических оболочек*, Прикл. Мат. Мех. 2, 15 (1951), 167–174.
1127. Ю. Н. РАБОТНОВ, *Модель иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела*, Прикл. Мат. Мех. 1, 23 (1959), 164–169.
1128. Ю. Н. РАБОТНОВ, *Ползучесть элементов конструкций*, Изд. „Наука”, Москва 1966.
1129. М. И. РАЗУМИХИН, Ю. Б. ДРОБОТ, *Расчет параметров технологического процесса гибки с растяжением профилейных деталей*, Кузнечно-штамп. Произв. 1965/9, 18–22.
1130. Е. А. РАЕВСКАЯ, *Расчет консольной балки двутаврового профиля методом предельного равновесия на стесненное кручение за пределом упругости*, Инж. Сборник 20 (1954), 93–100.
1131. Е. А. РАЕВСКАЯ, *Несущая способность двутавровых балок при совместном изгибе и кручении*, Автор. дисс. к. тн., Моск. Инж.-Строит. Институт, Москва 1955.
1132. Е. А. РАЕВСКАЯ, *Теоретическая оценка несущей способности двутавровых балок при одновременном изгибе и кручении*, Иссл. по Теории Сооруж. 7, Госстройиздат 1957, 269–298.
1133. Е. А. РАЕВСКАЯ, *Экспериментальное исследование несущей способности двутавровых балок при одновременном изгибе и кручении*, Сб. научн. работ Моск. Ин-та Научн. Хозяйства 1959, вып. 15, 2, 100–120.
1134. Ю. А. РАКОВЩИК, *Совместный изгиб и кручение круглого стержня за пределом упругости*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш. 1959, 3, 158–160.
1135. Х. А. РАХМАТУЛИН, *О распространении упруго-пластических волн при сложном нагружении*, Прикл. Мат. Мех. 6, 22 (1958), 133–137.
1136. И. П. РЕННЕ, *О предельном состоянии при поперечном изгибе балок прямоугольного сечения*, Труды Тульского Мех. Ин-та 1955, 7, 163–174.

1137. А. Р. Ржаницын, *Сложное сопротивление тонкостенных профилей с недеформируемым контуром в пределах и за пределом упругости*, Тр. Лаб. Стр. Мех. ЦНИПС, Стройиздат 1941.
1138. А. Р. Ржаницын, *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*, Стройиздат, Москва 1949 и 1954.
1139. А. Р. Ржаницын, *Приближенные решения задач теории пластичности*, „Исслед. по строит. мех. и теории пласт.“, Москва 1956, 6–65.
1140. А. Р. Ржаницын, *Пластические деформации трубы при осесимметричной нагрузке*, Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 9, 60–65.
1141. А. Р. Ржаницын, *О некоторых соотношениях прямоугольного сечения бруса за пределом упругости*, Изв. АН СССР, Мех. и Маш. 1963, 6, 17–19.
1142. А. Р. Ржаницын, *К вопросу о мгновенной жесткости сечения*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж 1966/2, 7–11.
1143. Г. И. Розенблат, *Некоторые вопросы расчета арок за пределом упругости*, Сб. Трудов Моск. Инж.-Стр. Ин-та 27 (1957), 133–161.
1144. В. В. Рождественский, *К вопросу о предельных состояниях сечений тонких оболочек*, Иссл. по вопр. строит. мех. и теории пластичн., Москва 1956, 223–232.
1145. В. И. Розенблюм, *О приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел*, Изв. АН СССР, ОТН, 1957, 7, 136–138.
1146. В. И. Розенблюм, *К теории приспособляемости упруго-пластических тел*, Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 6, 47–53.
1147. В. И. Розенблюм, *Об условии пластичности для тонкостенных оболочек*, Прикл. Мат. Мех. 2, 24 (1960), 364–366.
1148. В. И. Розенблюм, *О расчете несущей способности идеально пластических осесимметрических оболочек*, Сборник „Исслед. по упругости и пластичности 4“, Ленинград 1965, 207–218.
1149. В. И. Розенблюм, *К анализу приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел*, Журнал Прикл. Мех. и Техн. Физики 1965/5, 98–101.
1150. В. И. Розенблюм, *О влиянии сжимаемости на пластическое течение упруго-пластических тел*, Изв. АН СССР, Механика, 1965/3, 95–101.
1151. В. И. Розенблюм, *О полной системе уравнений пластического равновесия тонкостенных оболочек*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1966/3, 127–132.
1152. В. И. Розенблюм, *О пластических расчетах толстостенных цилиндров*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1966/4, 133–137.
1153. Ф. П. Рыбалко, А. В. Костенко, Л. П. Зеленин, *Влияние растяжения на пластичность при деформировании знакопеременным кручением*, Изв. ВУЗ, Физика, 1961, 1, 24–30.
1154. Я. Рыхлевский, *К общей теории идеально пластических оболочек*, Труды VI Всес. Конф. по теории обол. и пласт., Москва 1966, 873–880.
1155. Б. А. Рычков, Н. Ю. Швайко, *Границы применимости деформационной теории при двухзвенной траектории нагружения линейной анизотропно упрочняющейся среды*, Изв. АН Кирг. ССР, 1967/2, 25–30.
1156. Д. Д. Саввин, *К вопросу об изгибе круглых вращающихся стержней за пределом упругости*, Автореф. дисс. к.т.н., Новочеркасск 1956.
1157. Ю. А. Самойлович, *Об одном упрощенном решении задачи упруго-пластического равновесия цилиндра в неравномерном температурном поле*, Инж.-Физ. Журнал, 5, 9 (1965), 597–602.
1158. В. А. Свешникова, *О пластическом деформировании упрочняющихся металлов*, Изв. АН СССР, ОТН, 1956, 1, 155–161.
1159. В. И. Себекина, *О предельном равновесии анизотропных оболочек при осесимметричных нагрузках*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж. 1966/4, 13–18.
1160. Л. И. Седов, *О понятиях простого нагружения и о возможных путях деформации*, Прикл. Мат. Мех. 2, 23 (1959), 400–402.
1161. С. В. Серенсен, В. П. Когаев, Р. М. Шнейдерович, *Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность*, Изд. 2, Машгиз, Москва 1963.
1162. А. К. Синицкий, *Приближенные решения упруго-пластических задач в предположении о неизменяемости коэффициента Пуассона*, Труды Ленингр. Ин-та но 2, 1950.

1163. А. М. СКУДРА, *Пластические деформации квазиизотропного тела при растяжении с последующим кручением*, Иссл. по бет. и железобет. вып. 5, Рига 1960, 189–197.
1164. Н. К. СНИТКО, *Устойчивость стержневых систем*, Стройиздат М. 1952.
1165. В. М. СОБОЛЕВСКИЙ, *Упругое и упруго-пластическое напряженное состояние круговой цилиндрической трубы в упругой среде под действием внутреннего давления, осевой силы и радиального теплового потока*, Уч. зап. Белорусск. Института нар. хозяйства, 1957, 207–252.
1166. В. М. СОБОЛЕВСКИЙ, *Упругое и упруго-пластическое напряженное состояние полого шара в упругой среде под действием внутреннего давления и радиального теплового потока*, Изв. ВУЗ, Энергетика 1958, 3, 103–110.
1167. В. М. СОБОЛЕВСКИЙ, *Упругое и упруго-пластическое напряженное состояние неравномерно нагретой вращающейся круговой цилиндрической трубы*, Инж.-Физ. Журнал 3, 2 (1959), 52–61, Вестн. АН БССР, сер. Физ.-Техн. Наук; 1959/2, 119–128.
1168. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Об одной форме представления компонент напряжения в теории пластичности*, Доклады АН СССР, 2, 61 (1948).
1169. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Гостехиздат, Москва 1950.
1170. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Некоторые замечания о линеаризации уравнений пластичности*, Прикл. Мат. Мех. 5, 25 (1961), 931–932.
1171. И. В. СТАСЕНКО, *Упруго-пластический изгиб тонкостенной трубы*, Изв. ВУЗ, Машиностр. 1968/4, 41–46.
1172. В. Н. СТЕЛЬМАШУК, *Приближенная техническая теория идеально жестко-пластических оболочек вращения*, Сборник „Тепл. напряж. в элем. констр.“ 7, Киев 1967.
1173. А. И. СРЕЛЬБИЦКАЯ, *Некоторые зависимости между силовыми факторами в предельном состоянии тонкостенного профиля*, Сборник Трудов Ин-та Стр. Мех. АН УССР, 10 (1949), 12 (1950), 14 (1950), 15 (1950).
1174. А. И. СРЕЛЬБИЦКАЯ, *Косой изгиб металлических балок за пределом упругости*, Сборник трудов Ин-та Стр. Мех. АН УССР, Но 18, 1953.
1175. А. И. СРЕЛЬБИЦКАЯ, *Предельные нагрузки тонкостенных балок при совместном действии изгиба и кручения*, Сб. трудов Ин-та Строит. Мех. АН УССР, 19, 1954.
1176. О. І. СРЕЛЬБИЦЬКА, *Формулы для бімоменту в пружнопластичному стані двотавра*, Доповіді АН УРСР, 1954, 6, 435–438.
1177. О. І. СРЕЛЬБИЦЬКА, *Граничний стан тонкостінних профілів із сталі без площадки текучості при згині і крученні*, Прикл. Мех. 1, 1 (1955), 98–117.
1178. А. И. СРЕЛЬБИЦКАЯ, *Исследование работы тонкостенного швеллерного профиля за пределом упругости*, Сб. Трудов Ин-та Стр. Мех. АН УССР, 1956, 21, 14–26.
1179. О. І. СРЕЛЬБИЦЬКАЯ, *Несуча здатність тонкостінних стержнів при складному опорі*, Прикл. Мех. 3, 2 (1956), 306–317.
1180. О. І. СРЕЛЬБИЦЬКА, *Визначення граничного навантаження балок при згині з крученням*, Доповіді АН УРСР, 1957, 6, 543–547.
1181. О. І. СРЕЛЬБИЦЬКА, *Вплив кручення на величину граничного навантаження в безшарнірних рамах*, Доповіді АН УРСР, 1958, 9, 937–942.
1182. А. И. СРЕЛЬБИЦКАЯ, *Исследование прочности тонкостенных стержней за пределом упругости*, Изд. АН УССР, Киев 1958.
1183. О. І. СРЕЛЬБИЦЬКА, *Пластичні моменти опору двотаврів і швелерів при косому згині*, Прикл. Мех. 4, 4 (1958), 453–461.
1184. А. И. СРЕЛЬБИЦКАЯ, *Определение предельной нагрузки балок при изгибе с учетом касательных напряжений*, Изв. ВУЗ, Строит. и Архит. 1959, 3, 119–127.
1185. О. І. СРЕЛЬБИЦЬКА, Ю. Л. БІРЮКОВИЧ, Е. О. ПРЯДКО, *Випробування прокатних балок на косий згин за границю пружності*, Доповіді АН УРСР, 1960, 1, 22–26.
1186. О. І. СРЕЛЬБИЦЬКА, Е. О. ПРЯДКО, Г. І. ЄВСЄЄНКО, *Досліди з стальними балками при пластичному згині з крученням*, Доповіді АН УРСР, 1960, 9, 1174–1179.
1187. О. І. СРЕЛЬБИЦЬКА, Е. О. ПРЯДКО, Г. І. ЄВСЄЄНКО, *Експериментальне вивчення роботи швелера при пластичному згині з крученням*, Доповіді АН УРСР, 1961, 9, 1127–1131.

1188. О. І. СТРЕЛЬБИЦЬКА, *Розрахунок рам за граничним станом при згині з крученням*, Прикл. Мех. 6, 7 (1961), 639–648.
1189. О. І. СТРЕЛЬБИЦЬКА, *Пружно-пластичний напружений стан тонкостінних профілів при згині з крученням*, Прикл. Мех. 3, 8 (1962), 258–270.
1190. О. І. СТРЕЛЬБИЦЬКА, Г. І. ЄВСЄЄНКО, *Двовісний згин з крученням тонкостінних стержнів за границею пружності*, Доповіді АН УРСР, 1962, 10, 1308–1312.
1191. О. І. СТРЕЛЬБИЦЬКА, *Несуча здатність тонкостінних стержнів при косому згині з крученням*, Прикл. Мех. 3, 9 (1963), 275–288.
1192. А. И. СТРЕЛЬБИЦКАЯ, *Предельное состояние тонкостенных профилей при двухосном изгибе с кручением*, Теория пластин и оболочек, Ереван 1964, 921–928.
1193. А. И. СТРЕЛЬБИЦКАЯ, *Предельное состояние рам из тонкостенных стержней при изгибе с кручением*, Киев, Наукова Думка, 1964.
1194. А. И. СТРЕЛЬБИЦКАЯ, Г. И. ЕВСЕЕНКО, *Экспериментальное исследование пластического двухосного изгиба с кручением тонкостенных стержней*, Прикл. Мех. 9, 1 (1965), 65–80.
1195. А. И. СТРЕЛЬБИЦКАЯ, *Пластические деформации и несущая способность металлических конструкций*, Прикл. Мех. 10, 3 (1967), 100–108.
1196. А. И. СТРЕЛЬБИЦКАЯ, Г. И. ЕВСЕЕНКО, *Экспериментальное исследование упруго-пластической работы тонкостенных конструкций*, Наукова Думка, Киев 1968.
1197. СЮЙ БИН-ХАНЬ, *Упруго-пластический изгиб стержней с учетом сдвига и продольных усилий*, Тр. Ленингр. Кораблестр. Ин-та 1962, вып. 35, 21–27.
1198. Ж. И. ТАИРОВА, *Вторичные пластические деформации в кольцевой пластинке при действии давления и момента*, Уч. Зап. Азерб. Унив. Сер. Физ.-Мат. Наук 1967/6, 41–49.
1199. Г. Б. ТАЛЫПОВ, В. Н. КАМЕНЦЕВ, *Исследование границ текучести и некоторых других эффектов при сложном нагружении*, Ученые записки МГУ 280 (1960).
1200. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *Границы текучести и разрушения малоуглеродистой стали в случае простого и сложного нагружения, влияние старения*, Изв. АН СССР, ОТН, 1961/6, 125–130.
1201. Г. Б. ТАЛЫПОВ, А. И. ЧИСТЯКОВ, *Влияние больших предварительных пластических деформаций на границы текучести малоуглеродистой стали*, Исслед. по упр. и пласт. 3, Ленингр. Ун-т 1964, 249–251.
1202. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *Влияние микронапряжений, обуславливающих эффект Баушингера, на границы текучести и устойчивости при чистом сдвиге*, Исслед. по Упруг. и Пласт. 3, Изд. ЛГУ, 1964, 237–245.
1203. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *Исследование эффекта Баушингера*, Изв. АН СССР, Мех. и Маш. 1964/6, 131–137.
1204. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *Анализ экспериментальных данных по эффекту Баушингера и их теоретическое истолкование*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1966/2, 108–115.
1205. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *К теории пластичности, учитывающей эффект Баушингера*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1966/6, 81–88.
1206. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *К теории пластичности начально изотропного упрочняющегося материала*, Сборник „Исслед. по упруг. и пласт.“ 5, Ленинград 1966, 198–203.
1207. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *Пластичность и прочность стали при сложном нагружении*, Ленинград 1968, Лен. Унив.
1208. Р. Г. ТЕРЕХОВ, *Экспериментальное исследование упруго-пластического деформирования вращающихся неравномерно нагретых дисков*, Прикл. Мех. 10, 2 (1966), 100–107.
1209. Л. А. ТОЛОКОННИКОВ, В. В. ШЕВЕЛЕВ, С. П. ЯКОВЛЕВ, *Экспериментальная проверка уравнений пластического течения для анизотропного тела*, Прикл. Мех. 2, 4 (1968), 16–19.
1210. О. Н. ТОЦКИЙ, *Косой изгиб стального бруса в пластической стадии*, Строит. Механ. и Расчет Сооруж. 1964, 6–9.
1211. В. И. ТРОФИМОВ, *Упруго-пластическая работа мягкой строительной стали при простом и сложном нагружении*, Исслед. прочн. пластичн. и ползуч. мат., Москва 1955, 69–84.
1212. Г. С. ТРОФИМОВ, *О прочности гнутых профилей при повторно-переменных нагрузках*, Труды Башкирск. С.-Хоз. Инст. 6, 12 (1966), 74–80.

1213. Е. П. УНКОВ, *Инженерная теория пластичности*, Машгиз, Москва 1959.
1214. С. М. ФЕЙНБЕРГ, *Принцип предельной напряженности*, Прикл. Мат. Мех. 1, 12 (1948), 63–68.
1215. М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ, *Об условиях прочности материалов обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию*, Инж. Сборник 19 (1954), 13–36.
1216. М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ, *Теория упругости*, изд. 4, Физматгиз, Москва 1959.
1217. М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ, *Механические теории прочности*, Изд. Моск. Унив., Москва 1961.
1218. В. Л. ФОМИН, *Упруго-пластическое равновесие неравномерно обогреваемой трубы под действием внутреннего давления*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш. 1960, 3, 55–59.
1219. В. Л. ФОМИН, *Упруго-пластическое равновесие полого цилиндра под действием осесимметрического температурного поля*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш. 1961, 5, 127–128.
1220. В. Л. ФОМИН, *О приспособляемости упруго-пластических труб при воздействии теплового поля и равномерного внешнего давления*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш. 1962, 1, 149–152.
1221. В. Л. ФОМИН, *Плоская деформация упрочняющихся полых цилиндров под действием внутреннего давления и стационарного теплового поля*, Иссл. по теории упруг. и пласт. 3, Ленингр. Унив. 1964, 161–171.
1222. Н. А. ФОРСМАН, *Об упруго-пластическом изгибе пластинок*, Журн. Прикл. Мех. и Техн. Физ. 1960, 4, 79–80.
1223. Л. И. ФРИДМАН, *Приспособляемость неравномерно нагретого вращающегося диска*, Сборник Тепл. напр. в элем. констр. 7, Киев 1967, 108–113.
1224. Я. Б. ФРИДМАН, *Механические свойства материалов*, Оборонгиз, Москва 1946.
1225. С. А. ХРИСТИАНОВИЧ, Е. И. ШЕМЯКИН, *К теории идеальной пластичности*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1967/4, 86–97.
1226. К. Ч. ХУАН, *Об упрочнении жестко-пластического материала*, Прикл. Мат. Мех. 4, 22 (1958), 544–546.
1227. Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, *Упруго-пластическая задача*, Инж. Журнал Мех. Т.Т. 1969/2, 82–91.
1228. Є. Р. ЧОРНА, М. Л. ЧЕРНОВ, *Дослідження деформацій тонкостінних стержнів при косому згині за границею пружності*, Прикл. Мех. 5, 10 (1964), 493–502.
1229. Е. Р. ЧЕРНАЯ, *Исследование деформации тонкостенных стержней при косом изгибе с кручением за пределом упругости*, Прикл. Мех. 11, 1 (1965), 71–80.
1230. Н. Л. ЧЕРНОВ, Е. Р. ЧЕРНАЯ, *Экспериментальное исследование работы тонкостенных стержней на двухосный изгиб с кручением при подвижной нагрузке за пределом упругости*, Прикл. Мех. 2, 2 (1966), 63–69.
1231. Н. Л. ЧЕРНОВ, *Об упруго-пластических перемещениях двутавровых балок при подвижных нагрузках*, Прикл. Мех. 8, 3 (1967), 50–59.
1232. Н. Л. ЧЕРНОВ, Е. Р. ЧЕРНАЯ, *Прочность и деформативность тонкостенных стержней при косом изгибе с кручением за пределом упругости при подвижной нагрузке*, Сборник „Сопротивл. мат. и теория сооруж.“ 6, 1968, 141–149.
1233. Н. Л. ЧЕРНОВ, С. Д. КУДРЯВЦЕВ, *Упруго-пластические деформации тонкостенных стержней при подвижных нагрузках*, Прикл. Мех. 11, 4 (1968), 73–79.
1234. А. И. ЧИСТЯКОВ, *Влияние предварительной пластической деформации на границу текучести стали марки Ст45*, Сборник „Исслед. по упругости и пластичности“ 4, Ленинград 1965, 189–192.
1235. А. И. ЧИСТЯКОВ, *Влияние циклического деформирования на эффект Баушингера и границу текучести стали 20Х*, Сборник „Исслед. по упруг. и пласт.“, 6, Ленинград 1967, 145–149.
1236. Г. С. ШАПИРО, *О предельном и упруго-пластическом состояниях конструкций*, Изв. АН СССР, Мех. и Маш., 1963, 4, 138–144.
1237. Г. С. ШАПИРО, *О поведении пластинок и оболочек за пределами упругости*, Труды Втор. Всесоюзн. Съезда по теоретической и прикладной механике 1964, Москва 1966, 378–386.
1238. Л. А. ШАПОВАЛОВ, *Влияние неравномерного нагрева на устойчивость сжатого стержня*, Прикл. Мат. Мех. 22 (1958), 1, 119–123.
1239. Н. Ю. ШВАЙКО, *Сложная деформация идеально-пластического тела*, Сб. „Вопросы прочности и пластичности“, Фрунзе, АН Кирг. ССР, 1964, 43–64.

1240. Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, *Изгиб диска при неравномерном нагреве и степенном условии пластичности с упрочнением*, Сб. Тепловые напр. в элем. турбомашин, вып. 1, Киев 1961, 103–109.
1241. Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, *Напряженное состояние быстровращающихся неравномерно нагретых дисков при степенном условии пластичности с упрочнением*, Сб. „Тепл. напр. в элем. турбомашин“, вып. 2, Киев, АН УССР, 1962, 75–80.
1242. Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, *Уруго-пластическое напряженное состояние диска, находящегося в осесимметричном температурном поле*, Сб. Теплов. напр. в элем. констр., вып. 3, Киев, АН УССР, 1963, 99–110.
1243. Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, *Уруго-пластическое напряженное состояние диска с учетом истории нагружения*, Тепл. напряж. в элем. констр. вып. 5, Киев 1965, 241–249.
1244. Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, *Теоремы о разгрузке в теории малых уруго-пластических деформаций при неравномерном нагреве*, Прикл. Мех. 7, 2 (1966), 11–21.
1245. Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, *О теориях термопластичности уруго-пластического материала*, Сборник „Теплов. напряж. в элем. констр.“, вып. 6, Киев 1966, 5–22.
1246. Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, *Публицистические методы решения задач термопластичности с учетом истории нагружения*, Сборник „Теплов. напряж. в элем. констр.“, 7, Киев 1967, 37–48.
1247. Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, *Численное определение уруго-пластического напряженного состояния диска с учетом истории нагружения*, Сборник „Динамика и прочность машин“, вып. 5 (1967), 18–25.
1248. Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, И. А. МОТОВИЛОВЕЦ, В. Г. САВЧЕНКО, В. Н. ВАСИЛЕНКО, *Уруго-пластическое напряженное состояние диска несимметричного профиля при повторном нагреве*, Прикл. Мех. 2, 4 (1968), 28–35.
1249. О. А. ШИШМАРЕВ, *Изучение участка границы текучести противоположной точке нагружения*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш. 1962, 4, 159–164.
1250. О. А. ШИШМАРЕВ, *Исследование границ текучести пластически деформированных образцов никеля*, Инж. Журнал 4, 3 (1963), 740–747.
1251. О. А. ШИШМАРЕВ, *Влияние вида девиатора напряжений на пластическое деформирование стали*, Инж. Журнал Мех. Т. Т. 1966/5, 112–118.
1252. Р. М. ШНЕЙДЕРОВИЧ, *Расчет дисков с учетом пластических деформаций*, Вестн. Машин. 1954, 3, 14–20.
1253. Р. М. ШНЕЙДЕРОВИЧ, *Уруго-пластический изгиб стержней и стержневых систем*, Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 3, 130–134.
1254. Р. М. ШНЕЙДЕРОВИЧ, М. Б. ГРОМАН, *Статическая несущая способность валов*, Изв. ВУЗ, Машиностроение, 1958, 9, 71–89.
1255. Р. М. ШНЕЙДЕРОВИЧ, *Уруго-пластическое деформирование бруса круглого сечения при совместном действии изгиба и кручения*, Сборник „Вопр. прочности материалов и конструкций“, АН СССР, 1959, 296–314.
1256. Р. М. ШНЕЙДЕРОВИЧ, *Статическая несущая способность деталей при уруго-пластическом деформировании*, Вестн. Машиностр. 1959, 1, 14–24.
1257. Р. М. ШНЕЙДЕРОВИЧ, *Прочность при статическом и повторнестатическом нагружениях*, Машиностроение, Москва 1968.
1258. О. А. ЮЩЕНКО, *Про один випадок осесимметричної деформації при ідеальній пластичності*, Доповіді АН УРСР, 1957, 1, 18–22.
1259. Ю. И. ЯГН, *Новые методы расчета на прочность*, Вестн. Инж. и Техн. 1931/6.
1260. Ю. И. ЯГН, О. А. ШИШМАРЕВ, *Некоторые результаты исследования границ уругого состояния пластически растянутых образцов никеля*, Докл. АН СССР 1, 119 (1958), 46–48.
1261. Ю. И. ЯГН, О. А. ШИШМАРЕВ, *Исследование пластического деформирования при одновременном растяжении и кручении тонкостенных трубчатых образцов металла*, Заводск. Лаборат. 10, 24 (1958), 1243–1245.
1262. Ю. И. ЯГН, Л. В. ГРЕБНЕВ, *Влияние поворота главных осей напряжений на сопротивление металлов пластическому деформированию и разрушению*, Тр. Ленингр. Полит. Ин-та 278 (1967), 66–69.

SKOROWIDZ AUTORÓW

- Abel, N.H., 222
 Achmierow, A.F., 238, 404
 Achremienko, W.Ł., 165, 412
 Aiello, S., 238, 376
 Airy, G.B., 112
 Alberti, N., 145, 352, 376
 Alblas, J.B., 374, 376
 Aleszinski, Ju.N., 223, 295, 404
 Allen, D.N. de G., 349, 376
 Almansi, E., 56
 Alpert, W.N., 309, 373, 404
 Ambarcumian, S.A., 286, 404
 Andrejew, L.S., 166, 196, 404
 Armen, H., 173, 376
 Arutiunian, R.A., 173, 174, 181
 Augusti, G., 299, 336, 376, 381
 Ayers, K.B., 337, 376
- Bach, C., 68
 Bacikadze, W.I., 274, 404
 Backhaus, G., 175, 376
 Bailey, R.W., 142, 379
 Baker, J.F., 102, 286, 376
 Baltow, A., 174, 376
 Bałandin, P.P., 144, 404
 Barbarito, B., 238, 376, 396
 Barenblatt, G.I., 172, 404
 Barrett, A.J., 217, 242, 290, 376
 Bassett, M.B., 180, 353, 394
 Bastun, W.N., 200, 352, 404
 Basz, Ju.M., 159, 404
 Batdorf, S.B., 176, 181, 193-194, 376, 403
 Bauschinger, J., 73-80, 109, 162, 170-174, 179, 184, 371, 376, 378, 397, 399, 412, 420, 421
 Bażant, Z., 290, 295, 376
 Beadle, C.W., 182, 353, 392
 Beekman, 52
 Beedle, L.S., 102, 236, 238, 376
 Beer, F.J., 371, 380
 Beltrami, E., 143
 Berardi, C., 286, 377
 Berman, I., 149, 202, 377
 Bernoulli, J., 52, 206, 264
 Bertsch, P.K., 182, 352, 377
- Bessel, F.W., 221
 Besseling, I.F., 174, 178, 377
 Biejlin, E.A., 262, 283, 295, 405
 Bielajew, N.M., 349, 405
 Bielankin, F.P., 148, 405
 Bielenkij, L.M., 284, 286, 405
 Bielskij, G. Je., 210, 405
 Biezuchow, N.I., 61, 278-280, 282-284, 285, 286, 287, 294, 295, 404, 405
 Bilobran, B.S., 223, 405
 Birgier, I.A., 119, 197, 198, 210, 373, 405
 Biriukowicz, Ju.Ł., 240, 419
 Biron, A., 316, 377
 Bishop, J.F.W., 103, 194, 377
 Bland, D.R., 156, 170, 351, 377
 Bleich, H.H., 109, 336, 375, 377
 Bloch, W.I., 111, 112, 405
 Boczarowa, S.A., 349, 405
 Boczkow, B.F., 285, 405
 Bodner, S.R., 337, 377
 Bogdanow, A.N., 335, 405
 Bogdanowa, N., 349, 405
 Bohnenblust, H.F., 77, 377
 Boonsukha, B., 276, 377
 Borisjuk, A.I., 321, 405
 Borş, C.I., 148, 377
 Boucher, J.K.G., 275, 382
 Boulton, N.S., 276, 299, 377
 Boyce, W.E., 189, 377
 Bratt, J.F., 140, 181, 372, 377, 384
 Bree, J., 351, 377
 Bridgman, P.W., 86, 87, 377
 Brooks, D.S., 241, 257, 377, 400
 Brotchie, J.F., 326
 Broude, B.M., 286, 285, 405
 Brown, E.H., 244, 377
 Bródka, J., 276, 377
 Brunner, J., 205
 Brutti, C., 141, 377
 Bryant, R.H., 128, 391
 Budiansky, B., 156, 176, 181, 184, 193-194, 353, 376, 377, 403
 Bui, H.D., 182, 378

- Burzyński, W., 38, 45, 47, 136, 137, 139, 143-145, 146, 148-149, 157, 308, 317, 378
- Buzdugan, Gh., 337, 378
- Buzzi Ferraris, G., 129, 397
- Byczkow, P.G., 272, 275, 299, 406
- Bykowcew, G.I., 91, 156, 174, 405, 406
- Campus, F., 290, 378
- Capurso, M., 149, 284, 308, 316, 329, 349, 378
- Castigliano, A., 128, 273
- Cauchy, A., 45, 48, 52, 65, 66, 67, 70, 114, 170
- Cayley, A., 164, 184
- Ceradini, G., 128, 336, 378
- Chen, W., 182, 353, 394
- Christianowicz, S.A., 152, 421
- Chwalla, E., 105, 205, 210, 378
- Clavuot, C., 172, 173, 263, 378
- Clebsch, A., 45, 145, 316
- Coffin, L.F., 349, 389
- Colonnetti, G., 128, 378
- Como, M., 88, 236, 284, 378
- Coon, M.D., 349, 378
- Correia de Araújo, F., 138, 378
- Cosserat, E. i F., 35, 398
- Coulomb C.A., 75, 157, 394
- Cox, A.D., 336, 378
- Cristescu, N., 176, 373, 378, 413
- Crossland, B., 139, 348, 379
- Cunningham, D.M., 166, 180, 379
- Cuomo, S., 337, 379
- Czebyszew, P.L., 133
- Czerepanow, G.P., 118, 421
- Czerna, Je.R., 341, 394, 421
- Czerniak, N.I., 357, 404
- Czerniawski, O.F., 129, 373, 407
- Czernow, N.L. (M.L.), 341, 386, 394, 336, 421
- Czistiakow, A.I., 181, 182, 352, 420, 421
- Czudnowski, W.G., 243, 407
- Czyzak, S.J., 353, 394
- Dadaszew, A.Sz., 351, 352, 408
- D'Alembert, J.L., 51
- Daniłowa, I.N., 336, 408
- Daniłowskaja, W.I., 351, 408
- Daniłowskaja, W.W., 371, 408
- Dao, Z.B., 196, 408
- Davies, J.M., 336, 379
- Davis, E.A., 142, 185, 353, 379
- Dawidienkow, N.N., 146, 182
- Dawidow, I.W., 285, 408
- Dawydow, W.I., 286, 408
- Demianuszko, I.W., 197, 198, 405
- Derrington, M.G., 352, 379
- Derski, W., 75, 76, 379
- Dikowicz, I.L., 210, 217, 232, 236, 281, 284, 295, 408
- Dincyn, W.A., 371, 407
- Dinno, K.S., 275, 299, 379
- Dirichlet, P.G., 343
- Dobrew, R., 349, 374, 408
- Donato, O.de., 128, 198, 379
- Dorfman, A.G., 100, 223, 255, 408
- Dorn, J.E., 166, 180, 185, 379
- Dorn, W.S., 101, 382
- Doszczinski, G.A., 180, 408
- Dow, N.F., 353, 377
- Drobot, Ju.B., 390, 417
- Drucker, D.C., 75, 103, 121, 128, 144, 149-163, 166, 171, 172, 186, 187, 198, 276, 283, 313, 315, 331, 332, 373, 375, 379, 380, 389, 394, 402, 405
- Duddevar, T.D., 146, 380
- Dudukalenko W.W., 91, 174, 175, 406, 408
- Duffy, J., 146, 380
- Duszek, M., 105, 315, 320, 327, 380, 398, 408
- Dutheil, J., 109, 290, 380
- Dutton, V.L., 285, 286
- Duwez, P., 77, 377
- Dwyer, T.J., 223, 380
- Dyrbye, C., 105, 380
- Edelman, F., 99, 101, 171, 380
- Edwards, H.G., 371, 380
- Eichinger, A., 47, 62, 140, 165, 337, 387, 397
- Einstein, A., 44, 48,
- Eisenberg, M.A., 171, 380
- Epain, R., 349, 380
- Eringen, A.C., 35, 45, 52, 57, 58, 64, 74, 75
- Essenburg, F., 181, 182, 352
- Euler, L., 43, 51-65, 116, 175, 209, 221, 222, 269, 288, 356
- Faccioli, E., 309, 380
- Farmer, L.E., 299, 380
- Fava, F. J., 200, 380
- Feigen, M., 353, 380
- Fejnberg, S.M., 121, 312, 313, 421
- Felgar, R.P., 349, 380
- Ferguson, P.M., 299, 380
- Fiesik, S.P., 360, 406
- Filonienko-Borodicz, M.M., 45, 112, 113, 139, 143, 144, 159, 421
- Findley, W.F., 182, 352, 377
- Finzi, L., 185, 210, 380
- Fischer, J.C., 349, 389
- Flügge, W., 315, 374, 380, 381

- Fomin, W.L., 351, 371, 421
 Fontaine, B., 276, 381
 Ford, H., 45, 61, 381
 Forsman, N.A., 374, 421
 Fourier, J.B.J., 268, 269, 273, 364
 Franciosi, V., 284, 285, 295, 381
 Frankland, J.M., 127, 381
 Freiburger, W., 247, 381
 Freudenthal, A.M., 36-38, 44, 49, 51, 52, 61, 164, 181, 381
 Fridman, Ja.B., 146, 182, 421
 Fridman, L.I., 373, 421
 Fritzsche, J., 109, 205, 381
 Fromm, H., 139, 381
 Fukuoka, H., 255, 353, 381, 394
- Gabbasow, R.F., 329, 406
 Gajewski, H., 123, 381
 Galambos, T.V., 223, 380
 Galileo, G., 145, 182, 316
 Galin, L.A., 205, 406
 Galli, A., 284, 285, 381
 Galos, M., 106, 205, 244, 281
 Gandolfi, A., 308, 316, 349, 378
 Garbaccio, D.H., 280, 381
 Gatewood, B.E., 337, 381
 Gavarini, C., 129, 381
 Gaydon, F.A., 254, 274, 381
 Gehring, R.W., 337, 381
 Geiringer, H., 36, 37, 49, 114, 119, 186, 381
 Gemmierling, A.W., 211, 275, 406
 Geniew, G.A., 144, 406
 Geogdzajew, W.O., 149, 200, 201, 406
 Gerard, G., 88, 382
 Gerdeen, J.C., 374, 381
 Ghani, A.F.M., 336, 382
 Giangreco, E., 238, 295, 381, 382
 Giannelli, G., 238, 382
 Gill, S.S., 109, 276, 299, 344, 353, 378, 379, 382
 Girkmann, K., 19, 214, 233, 283, 294, 316, 382
 Gochfeld, D.A., 110, 129, 321, 351, 352, 373, 407
 Goldienblat, I.I., 35, 43, 52, 55, 61, 62, 64, 65, 139, 146, 148, 199, 201, 202, 407
 Goode, C.D., 274, 382
 Gorbunow, B.N., 109, 243, 244, 407, 417
 Gorodcow, W.A., 172, 404
 Goschy, B., 285, 382
 Goyal, S.C., 285, 382
 Gray, G.A., 182, 352, 395
 Grebniew, Ł.W., 170, 422
 Greczucho, I.G., 335, 407
 Green, A.E., 35, 45, 52, 64, 382
 Green, A.P., 284, 285, 286, 295, 373, 382
 Green, G., 55
 Greenberg, H.J., 101, 103, 120, 121, 128, 379, 382
 Greste, O.I., 274, 382
 Grigan, O.A., 371, 407
 Grigoluk, E.I., 375
 Grigoriew, A.S., 106, 307, 374, 382, 408
 Groman, M.B., 273, 422
 Grüning, M., 109, 336, 382
 Gubkin, S.I., 66, 408
 Guerra, G., 359, 382
 Guest, J.J.,
 rozdział II: 85, 117, 121
 rozdział III: 140, 142, 146, 149, 152, 156, 160-163, 172-174, 176, 182, 200, 202
 rozdział IV: 250, 274, 277, 288
 rozdział V: 300, 302, 308, 309, 312-317, 320-322, 326, 327-330
 rozdział VI: 334, 337, 349, 351, 352, 370, 372-373
 bibliografia: 382
 Guo, Zh.H., 50, 65, 382
 Gurfinkel, G., 210, 382
 Gwozdiew, A.A., 102, 121, 126, 128, 236, 238, 244, 288, 289, 290, 353-359, 399, 406
- Haar, A., 128, 383
 Haase, H., 102, 301, 383
 Haigh, B.T., 38, 83, 136, 383
 Hall, A.H., 286, 383
 Hamilton, W.R., 164, 184,
 Handelman, G.H., 99, 128, 190, 192, 257, 263, 265, 273, 274, 290-292, 383, 401
 Hara, Y., 145, 383
 Harrison, H.B., 244, 336, 383
 Hartmann, F., 105, 210, 383
 Hashin, Z., 194, 378
 Haythornthwaite, R.M., 105, 143, 145, 156, 158, 159, 160, 238, 315, 334, 349, 383, 393
 Hazell, C.R., 181, 182, 308, 400
 Helmy, M.A., 274, 382
 Hencky, H.,
 rozdział II: 66, 68, 83, 85-93, 97-100, 110, 114, 115, 119
 rozdział III: 136, 140-145, 147-148, 149, 151-152, 160, 164, 166, 170, 172, 176, 179, 183, 187, 190, 196, 200, 201
 rozdział IV: 250, 251-253, 255, 259, 264, 265, 277, 280, 288, 291, 293
 rozdział V: 300, 302, 304, 308, 309-314, 316, 318-319, 320, 322-324
 rozdział VI: 339, 350, 351, 361, 371
 bibliografia: 383, 390

- Hendry, A.W., 286
- Hermite, Ch., 132, 133, 262, 270–271, 360, 364, 369–370
- Hershey, A.V., 67, 142, 383
- Hertz, H., 38
- Heyman, J., 102, 276, 285, 286, 336, 376, 383, 388
- Higgins, T.R., 237, 238, 383
- Hilbert, D., 43
- Hill, R.,
rozdział II: 34, 49, 102, 105, 123, 128
rozdział III: 134, 143, 147, 156, 160, 169, 186, 187, 188, 189, 192–195, 199, 200, 201, 202
rozdział IV: 258, 263, 264, 265, 272–274, 290–292
rozdział V: 320, 329
rozdział VI: 346, 348, 355
bibliografia: 377, 379, 383, 384
- Hillier, M.J., 349, 383, 384
- Hodge, P.G., Jr.,
rozdział I: 22
rozdział II: 37, 101, 105, 128, 129
rozdział III: 149, 170, 172, 174, 175, 176, 178, 186, 190, 192, 202
rozdział IV: 275, 276, 279, 281, 286, 293
rozdział V: 300–301, 303, 309, 311, 312, 315, 316, 317, 319–321, 329
rozdział VI: 331, 346, 374
bibliografia: 377, 384, 385, 394, 395, 397, 398
- Hoffman, O., 61, 66, 384
- Hohenemser, K., 134, 164, 190, 255, 337, 384
- Hooke, R., 71, 72, 80–82, 85, 87, 107, 122, 151, 207, 252
- Hopkins, H.G., 309, 373, 379, 384
- Horne, M.R., 102, 109, 279, 283, 285, 296, 336, 376, 384
- Hoskin, B.C., 255, 384
- Hsu, T.C., 138, 149, 159, 199, 384
- Hu, L.W., 99, 136, 139, 140, 149, 181, 194, 200, 330, 352, 384, 385, 389
- Huan, K.Cz., 174, 421
- Huber, M.T.,
rozdział I: 26
rozdział II: 83, 85, 86, 89, 98, 117
rozdział III: 136, 139, 140–145, 147–148, 151–152, 159–166, 172, 176, 179, 187, 190, 196
rozdział IV: 250, 251, 259, 265, 277, 280, 284, 288, 291, 293
rozdział V: 300, 302, 304, 308, 309–314, 316, 318–319, 320, 322–327
rozdział VI: 339, 350, 351, 361, 371
bibliografia: 377, 385, 386
- Hundy, B.B., 286, 382
- Ibragimow, M.R., 375, 409
- Ibrajew, O.I., 294, 409
- Igaki, H., 353, 397
- Ikegami, K., 181, 399
- Iliuszin, A.A.,
rozdział I: 18, 27, 31
rozdział II: 37, 41, 45, 46, 61, 62, 68, 71, 88–93, 99–101, 110, 114, 119
rozdział III: 135, 149, 153, 155, 159, 160, 164, 168, 183, 188, 190, 192, 194–196, 201
rozdział IV: 205, 250, 251–253, 255, 259, 264, 292
rozdział V: 300, 304, 310, 311, 321–326, 327, 329
rozdział VI: 339, 349, 351, 352, 361
bibliografia: 410, 411
- Imegwu, E.O., 277, 386
- Ingerslev, A., 102, 386
- Irmay, S., 136, 386
- Isakson, G., 173, 376
- Iszlinski, A.Ju., 143, 162, 172–173, 175, 202, 411
- Ito, M., 79, 142, 388
- Ivey, H.J., 181, 182, 386
- Iwan, W.D., 172, 386
- Iwanow, S.L., 263, 409
- Iwanow, G.W., 326, 410
- Iwlew, D.D., 49, 86, 91, 99, 119, 129, 140, 142, 149, 156, 159, 160, 172, 174, 184, 190, 196, 247, 316, 317, 334, 406, 409, 410, 413
- Izotow, 170, 409
- Jacenko, W.F., 148, 405
- Jaeger, Th., 102, 301, 398
- Jagn, Ju.I., 144, 166, 170, 180, 182, 352, 353, 415, 422
- Jakowlew, S.P., 199, 420
- Jakubowicz, A., 240, 386
- Janas, M., 102, 124, 238, 295, 317, 386, 398
- Jelsufiew, S.A., 166, 170, 409
- Jenkin, C.F., 75, 386
- Jerchow, M.I., 288, 303, 327, 329, 359, 409
- Jermakow, P.I., 321, 351, 352, 407
- Jerszow, Ł.W., 129, 409
- Jerszow, N.F., 217, 373, 409
- Jewsiejenko, G.I., 276, 294, 299, 420
- Ježek, K., 105, 205, 222, 223, 335, 386
- Johansen, K.W., 102, 386
- Johnson, W., 44, 352, 379, 386
- Jones, N., 374, 386
- Josselin de Jong, G.de, 158, 386
- Jōgi, E., 211, 411
- Jung, H., 349, 386
- Justusson, J.W., 180, 386
- Juszczenko, O.A., 372, 422

- Kabcielewski, M.G., 373, 411
 Kac, Sz.N., 353, 411
 Kaczanow, Ł.M., 62, 89, 99, 101, 128, 294, 301, 321, 351, 353, 411
 Kadaszewicz, Ju.I., 74, 76, 171–172, 174, 190, 197, 411
 Kaechele, L., 353, 395
 Kafka, V., 172, 186
 Kaliski, S., 113, 386
 Kamalvand, H., 335, 388
 Kamienczew, W.N., 140, 182, 420
 Kammash, T.B., 351, 386
 Kanan, Ö., 352, 377
 Kao, J.S., 308, 321, 379, 401
 Kármán, T., 44, 45, 128, 383
 Kazinczy, G., 102, 109, 121, 386
 Kelvin (Thomson, W.), 25, 83
 Kemp, K.O., 308, 386
 Kenk, K.R., 181, 411
 Kettlewell, J., 353, 394
 Kirchhoff, G.R., 45, 80, 118, 301, 310, 322
 Klaczko, S.D., 180, 255, 411
 Klepaczko, J., 78, 374, 387, 388
 Kłębowski, Z., 45, 139, 144, 387
 Klimienko, F.E., 283, 412
 Klöppel, K., 148, 295, 296, 387
 Klusznikow, W.D., 23, 99, 176, 180, 188, 191, 192, 195, 412
 Kobayashi, S., 119, 401
 Koczetkow, A.M., 222, 412
 Koff, W., 181, 182, 352
 Kogajew, W.P., 223, 255, 273, 418
 Kóiter, W.T., 109, 124, 126, 128, 152, 191, 387, 389, 407
 Kolař, A., 336, 387
 Kolesnikow, L.O., 210, 222, 412
 Kollbrunner, C.F., 105, 400
 Kołgadin, W.A., (W.O.), 263, 294, 412
 Kołokolczikow, W.W., 371, 412
 Kołomic, W.P., 210, 412
 Komljenović, S., 35, 387
 Koniajew, E.A., 197, 412
 Kōnonow, K.M., 373, 407
 Koopman, D.C.A., 129, 387
 Kopnow, W.A., 139, 146, 148, 199, 202, 407
 Koreniewa, A.M., 180, 408
 Korolew, W.I., 321, 412
 Kostienko, A.W., 352, 418
 Kostiuk, A.G., 195, 351, 412
 Kowalew, K.F., 174, 412
 Kozlakow, W.W., 296, 412
 Kozłow, I.A., 165, 412
 Kozłowski, T., 238, 387
 König, J.A., 28, 110, 163, 204, 300, 308, 321, 374, 387
 Körber, F., 165, 387
 Krawcow, N.A., 286, 412
 Krawczuk, A.S., 184, 346, 412
 Kreger, A.F., 166, 194, 255, 412
 Krisch, A., 349, 387
 Kronecker, L., 39, 80
 Krutkow, Ju.A., 111, 413
 Krzyś, W., 36, 72, 372, 387
 Krupka, V., 299, 387
 Kudriawcew, I.N., 240, 241, 413
 Kudriawcew, S.D., 240, 241, 413, 421
 Kukudżanow, W.N., 284, 285, 413
 Kunicki, Ł.P., 284, 286, 336, 413
 Kuo, Y.H., 132, 401
 Kuprijanow, W.W., 336, 413
 Kurdin, N.S., 336, 413
 Kusuda, T., 295, 387
 Kuzin, A.I., 284, 413
 Kuzniecowa, W.N., 211, 406
 Kwieciński, M.W., 308, 387
 Lagrange, J., 51–65, 205, 219, 280, 288, 289, 356, 358
 Lamé, G., 113
 Lance, R.H., 129, 387
 Landgraf, G., 327, 387
 Lange Hansen, P., 105, 380
 Langendonck, T., 279, 387
 Laning, J.H., 188–189, 191
 Laplace, C.E.P., 262
 Lapunow, A.M., 163
 Latter, A.J., 185, 379
 Lay, M.G., 210, 388
 Lebiediew, A.A., 139, 165, 412, 417
 Lebiediniec, N.A., 211, 413
 Le Boiteux, H., 144, 388
 Leckie, F.A., 376
 Ledziński, J., 106, 388
 Lee, E.H., 102, 123, 379, 384, 388
 Lee, L.C., 182, 353, 394
 Lee, S.L., 128, 308, 315, 321, 388, 391, 401
 Lees, S., 75, 388
 Lehmann, T., 193, 202, 388
 Leipholz, H., 156, 388
 Lejtes, S.D., 100, 105, 210, 222, 223, 255, 283, 335, 336, 408, 413,
 Lenski, W.S., (Lensky, V.S.), 196, 255, 388, 410, 413, 414
 Leon, A., 145, 388
 Leonow, M.Ja., 194, 414

- Lepik, Ju.R., (Lepik, Ü.), 88, 210, 307, 315, 320, 321, 374, 388, 414
- Leth, C.F.A., 285, 388
- Levy, M., 92-94, 95, 110, 114, 117, 124, 149, 150, 157, 158, 164, 173, 250-253, 259, 264, 291, 309, 310, 322, 339, 361, 388, 410
- Lighthill, M.J., 131, 132, 388, 401
- Lin, C.C., 190, 383
- Lin, T.H., 79, 120, 142, 176, 194, 388
- Listrowa, Ju.P., 143, 316, 317, 410, 414
- Litoński, J., 78, 388
- Liwszic, A.Ł., 371, 407
- Liwszic, W.Ł., 371, 407
- Lode, W., 41, 42, 45, 64, 89, 92, 95, 140, 143, 152, 166, 174, 184, 188, 337, 388
- Longbottom, E., 286, 388
- Love, A.E.H., 45, 118, 301, 310, 322
- Lu, Le-Wu, 275, 335, 388
- Lubarow, W.I., 211, 241, 275, 286, 336, 414
- Ludwik, P., 66, 71, 165, 166, 388, 389
- Luht, Ł.Ja., 88, 307, 414
- Łabutin, A.A., 182, 413
- Łampsi, B.B., 286, 335, 413
- Łomakin, W.A., 202, 349, 414
- Łopatin, B.W., 337, 414
- Łubiński, M., 286, 392
- Łurie, A.I., 324
- Mac Gregor, C.W., 349, 389
- Machnienko, W.I., 321, 415
- Machowier, J.W., 199
- Maeda, H., 335, 389
- Maier, G., 128, 129, 198, 389, 394
- Mair, W.M., 181, 182, 389
- Majer, J., 145, 389
- Makarewicz, A.A., 217, 414
- Makarow, W.P., 210, 414
- Makky, S.M., 255, 389
- Maksak, W.I., 180, 408, 414
- Malikow, G.F., 284, 414
- Malinin, N.N., 61, 302, 414
- Malvern, L.E., 274, 292, 391
- Malmejster, A.K., 134, 149, 194, 348, 415
- Małyj, W.I., 155, 196, 415
- Małyszew, W.M., 353, 415
- Mandel, J., 152, 389
- Mansfield, E.H., 337, 389
- Manson, S.S., 373, 389
- Marçal, P.V., 387, 389
- Marciniak, Z., 166, 374, 389, 393
- Margolin, G.G., 148, 405
- Marin, J., 99, 139, 149, 166, 181, 194, 330, 352, 353, 384, 388, 390
- Markow, A.A., 128, 415
- Martynowa, T.N., 158, 159, 410, 415
- Masing, G., 74, 390
- Massey, P.C., 276, 390
- Massonnet, Ch., 205, 211, 237, 301, 390
- Maxwell, J.C., 45, 83, 112
- Mazzarella, C., 317, 390
- McInnis, B.C., 35, 382
- Melan, E., 109, 123, 124, 162, 171-173, 175, 180-181, 202, 335, 390
- Meldahl, A., 136, 138, 140, 141, 390
- Mellor, P.B., 44, 45, 349, 386, 390
- Mendelson, A., 188, 390
- Mendera, Z., 145, 392
- Menditto, G., 308, 390
- Merchant, W., 275, 299, 379
- Merckx, K.R., 351, 371, 390
- Mesnager, A., 66
- Miastowski, J., 140, 180, 181, 352, 390
- Michajłow, N.Ja., 353, 415
- Mieźlumian, R.A., 88, 299, 415
- Mii, H., 255, 275, 390
- Mikieladze, M.Sz., 149, 329-330, 415
- Mikkola, M., 286, 290
- Milejkowski, I.E., 148, 415
- Miller, D.R., 352, 390
- Miller, P.M., 274, 292, 391
- Mirolubow, I.N., 144, 159, 272, 415
- Mises, R.,
rozdział I: 26
rozdział II: 45, 69, 84, 86, 89, 91, 92-94, 95, 110, 114, 124, 136,
rozdział III: 136, 140-145, 147-148, 149-152, 157, 158, 164, 172, 173, 176, 186, 187, 190, 196, 198-199, 202
rozdział IV: 250, 251-253, 259, 264, 265, 277, 280, 288, 291
rozdział V: 300, 302, 304, 308, 309-314, 316, 318-319, 320, 322-327, 330
rozdział VI: 339, 350, 351, 361, 371
bibliografia: 377, 381, 387, 388, 390, 391, 401, 410
- Mitinski, A.N., 279, 415
- Mitrochin, N.M., 166, 353, 415
- Mohr, O., 145, 157, 391
- Mokaszewa, N.I., 317, 414
- Morera, G., 112
- Morozow, Je.M., 351, 415
- Morris, A.J., 27, 391
- Moskwitin, W.W., 74, 110, 173, 184-185, 336, 406, 416

- Moszanski, N.Ł., 335, 416
 Motowiłowicz, I.A., 373, 374, 416, 422
 Mrowiec, M., 133, 238, 303, 360, 370, 391
 Mróz, Z., 79, 106, 134, 157, 164, 176, 180, 184,
 189, 192-193, 309, 315, 316, 391, 393, 416
 Muchanow, K.K., 210, 335, 416
 Mura, T., 128, 308, 391
 Murakami, S., 321, 374, 392, 416
 Murch, S.A., 351, 386
 Murnaghan, F.D., 51, 52, 66, 391
 Murzewski, J., 38, 145, 306, 349, 391, 392, 393,
 399
 Mutermilch, J., 286, 392
- Nadai, A., 46, 66, 80, 117, 128, 183, 185, 205,
 250, 311, 349, 351, 392
 Naghdi, P.M., 26, 35, 74, 176, 182, 187, 198,
 302, 352, 372, 382, 386, 392
 Nakamura, T., 315, 320, 329, 380, 392
 Namikawa, H., 335, 389
 Natanson, L.P., 132, 416
 Navier, C.L.M., 48
 Neal, B.G., 102, 105, 109, 237, 276, 278, 284-286,
 295, 296, 336, 392, 400
 Negisi, H., 217, 400
 Nelson, I., 375, 377
 Newmark, N.M., 286, 383
 Niemirowski, Ju.W., 143, 316, 317, 320, 410, 416
 Niepostyn, D., 102, 301, 392
 Nonaka, T., 238, 292
 Nordgren, R.P., 302, 372
 Nowożiłow, W.W., 51, 52, 56, 74, 76, 85, 90,
 134, 171-172, 174, 196, 197, 324, 411, 416
 Nuttall, H., 274, 281
- Odqvist, F.K.G., 63, 169, 171, 175, 187, 195,
 197, 392
 Ogibałow, P.M., 146, 149, 351, 352, 411, 416
 Ohashi, J., 321, 374, 392, 416
 Okano, H., 181, 399
 Olszak, W., 102, 128, 145, 148, 164, 174, 176,
 182, 193, 199, 300-301, 306, 316, 317, 320,
 329, 330, 349, 392, 393, 397, 398
 Olszewski, E., 286, 392
 Onat, E.T., 105, 106, 238, 274, 284, 313-315,
 319, 321, 393
 Ono, A., 352, 393
 Orkisz, J., 106, 224-228, 317, 393, 394
 Ormerod, A., 240, 394
 Oschatz, A., 327, 394
 Osgood, W.R., 72, 165, 351, 394, 396
 Ota, T., 353, 394
- Palczewski, S.A., 244, 281, 283, 284, 407, 416
 Pallej, I.Z., 197, 321, 373, 406, 412, 416
 Palmer, A.C., 129, 198, 315, 394
 Palne, E., 185, 416
 Panarelli, E.J., 303, 346, 374, 384, 394
 Pandalai, K.A.V., 351, 352, 394
 Panfierow, W.M., 120, 128, 417
 Pankowa, M.W., 217, 417
 Pannell, F.N., 374, 394
 Panowko, Ja.G., 121, 417
 Papkowicz, P.F., 45, 279, 281, 417
 Pardue, T.E., 88, 371, 401
 Parker, J., 166, 180, 353, 382, 394
 Parkes, E.W., 110, 394
 Patel, S.A., 351, 352, 394
 Paton, E.O., 109, 417
 Paul, B., 105, 182, 321, 353, 394
 Pawłow, P.A., 348, 416
 Payne, H., 176, 194, 353, 394
 Pearson, K., 45
 Pelczyński, T., 42, 139, 146, 394
 Perrone, N., 172, 351, 374, 395
 Perzyna, P., 37, 52, 128, 167, 193, 301, 393, 395
 Peters, R.W., 353, 377
 Peterson, D.B., 370, 400
 Philippidis, A.H., 128, 395
 Phillips, A., 128, 171, 177, 180, 182, 211, 352,
 353, 380, 386, 395
 Pian, T.H.H., 312, 395
 Piechnik, S., 130, 133, 263-270, 292, 391, 395
 Pietriszczew, P.P., 201, 417
 Pietrosjan, Ż.Ł., 302, 414
 Pifko, A., 173, 376
 Pilgrim, W.R., 321, 389
 Pinadżjan, W.W., 210, 290, 417
 Pisarenko, G.S., 139, 417
 Piskun, W.W., 321, 417
 Piwniew, F.A., 211, 417
 Płagow, I.M., 321, 407
 Poincaré, H., 129, 132, 401
 Poisson, S.D., 61, 80, 87, 255, 262, 306, 382, 401,
 418
 Poncelet, J. V., 144, 146
 Ponomariew, S.D., 61, 62, 120, 417
 Ponter, A.R.S., 128, 395
 Powell, W.R., 198, 395
 Prager, W.,
 rozdział II: 37, 49, 50, 52, 101, 102, 109,
 119, 120, 121, 128
 rozdział III: 134, 140, 144, 152, 158, 162,
 164, 171-173, 174, 175, 184, 186,
 187, 188-192, 196, 202
 rozdział IV: 204, 238, 247, 279, 286

- rozdział V: 313–315, 317
rozdział VI: 336
bibliografia: 377, 379, 381, 382, 383, 384, 393, 395, 396, 397, 400, 401, 403
- Prandtl, L., 69, 89, 95–100, 107, 108, 110, 112, 114, 119, 149, 150, 157, 160, 161, 164, 168, 196, 254, 257, 262, 263, 265, 291–292, 396, 401
- Priadko, Je.O., 240, 276, 419
- Procenko, A.M., 105, 124, 417
- Pugh, H.L.D., 181, 389
- Qu, S., 329, 396
- Quinney, H., 140, 170, 337, 400
- Rabinowicz, C.W., 237, 417
- Rabotnow, Ju. N., 99, 176, 238, 316, 319, 327, 353, 409, 416, 417
- Rachmatulin, Ch. A., 351, 373, 417
- Radenković, D., 159, 396
- Raithel, A., 238, 396
- Rajewska, Je.A., 275, 299, 417
- Rakowszczyk, Ju.A., 273, 417
- Ramberg, W., 72, 351, 396
- Rankine, W.J.M., 316–317
- Razumichin, M.I., 290, 417
- Reckling, K.A., 45, 61, 77, 200–201, 202, 262, 274, 284, 285, 396
- Reiner, M., 164
- Reitman, M.I., 329, 396
- Rendulic, L., 144, 396
- Renne, I.P., 286
- Reuss, A., 95–100, 107, 108, 110, 114, 149, 150, 152, 154, 160, 161, 164, 168, 188, 196, 254, 257, 396, 401
- Riccati, J.F., 221
- Richter, H., 66, 396
- Rimawi, W.H., 128, 391
- Ritter, G., 290, 397
- Ritz, W., 129
- Roach, R.E., 217, 381
- Robinson, A., 210, 382
- Roderick, J.W., 286
- Rogoziński, M., 352, 397
- Roš, M., 47, 62, 140, 165, 205, 337, 397
- Roushan, A., 336, 382
- Rowley, J.C., 182, 353, 392
- Rozenblum, W.I., 88, 110, 255, 319, 324, 329, 351, 418
- Rozenblat, G.I., 211, 418
- Roźdiestwienski, W.W., 311, 312, 418
- Rudis, M.A., 316
- Ruiz, C., 109, 397
- Rutecki, J., 299, 397
- Rybalko, F.P., 352, 418
- Rychlewski, J., 32, 118, 145, 308, 309, 311, 319, 322, 325, 327, 384, 393, 397, 398, 418
- Ryczkow, B.A., 184, 418
- Ryś, J., 349, 397
- Rżanicyn, A.R., 102, 127, 210, 217, 261, 264, 272, 274, 280–283, 288, 296, 319, 418
- Sacchi, G., 128, 129, 159, 397
- Sachs, G., 61, 66, 74, 384, 397
- Sadowsky, M.A., 128, 397
- Saint-Venant, B.de, 44, 45, 62, 92, 112, 123, 145, 146, 204, 258, 298, 348, 382, 397, 410
- Saitō, K., 353, 397
- Samojłowicz, Ju. A., 351, 418
- Sandel, G.D., 144, 397
- Sanders, J.L., 176, 192, 194, 378, 397
- Sankaranarayanan, R., 275, 293, 316–317, 330, 374, 383, 384, 397
- Sauer, J.A., 352, 389
- Save, M., 128, 159, 204, 205, 211, 237, 301, 308, 309, 336, 375, 390, 397
- Sawczenko, W.G., 373, 422
- Sawczuk, A., 29, 35, 102, 149, 164, 174, 200, 238, 295, 300–301, 308, 309, 311, 316–317, 319, 320, 321, 322, 327–329, 330, 374, 376, 377, 393, 398, 416
- Sawwin, D.D., 336, 418
- Sayir, M., 128, 315, 399
- Säverin, U., 336, 398
- Scheu, L., 166, 389
- Schleicher, F., 143, 144, 399
- Schmidt, R., 143, 165, 170, 399
- Schroeder, J., 326, 327, 398
- Schwarz, H.A., 62
- Schwedler, J.W., 276
- Schweitzer, R., 349, 387
- Scuderi, R., 299, 376
- Seely, F.B., 223, 398
- Serensen, S.W., 223, 255, 273, 418
- Shammamy, M.R., 101, 255, 399
- Shanley, F.R., 121, 399
- Shepherd, R.P., 353, 377
- Sherbourne, A.N., 326, 327, 398
- Shield, R.T., 119, 134, 173, 274, 284, 315, 374, 375, 380, 393, 397, 399
- Shinda, A., 353, 394
- Shiratori, E., 181, 399
- Shoji, H., 74, 397, 399
- Sidebottom, O.M., 101, 255, 399
- Siebel, M.P.L., 264, 272, 274, 359, 399
- Siebiekina, W.I., 330, 418

- Siedow, L.I., 99, 185, 418
 Sierakowski, R.L., 180, 395
 Sinicki, A.K., 88, 349, 405, 418
 Sjuj Bin-Hań, 295, 420
 Skrzypek, J., 130, 133, 344-349, 353-358, 361-370, 399
 Skudra, A.M., 348, 419
 Smith, J.O., 223, 398
 Snitko, N.K., 282, 419
 Sobolew, Ju.W., 210, 335, 416
 Sobolewski, W.M., 351, 352, 419
 Sobotka, Z., 102, 143, 144, 148, 199, 282, 283, 295, 399, 349, 374, 399
 Sokolnikoff, I.S., 45, 52
 Sokolowski, W.W., 46, 62, 115, 119, 160, 311, 349, 371, 419
 Sopwith, D.G., 349, 376
 Southwell, R., 274
 Sparacio, R., 336, 337, 381, 399
 Spencer, A.J.M., 129, 336, 378, 399, 400
 Stasienko, I.W., 371, 419
 Stassi d'Alia, F., 144, 145-146, 308, 317, 390, 400
 Steele, M.C., 274, 400
 Stelmaszuk, W.N., 320, 419
 Stevens, L.K., 211, 217, 223, 400
 Stockton, F.D., 194, 400
 Stokey, W.F., 370, 400
 Strelbicka, A.I., (Strelbyčka, O.I.), 240, 241, 244, 275-276, 284-285, 294, 295, 296-299, 419, 420
 Stutz, P., 164, 398, 400
 Stüssi, F., 104, 278, 400
 Sudzuki, H., 217, 400
 Sun, C.K., 331, 384
 Svéd, G., 257, 400
 Swida, W., 211, 400
 Swiesznikowa, W.A., 353, 418
 Symonds, P.S., 105, 109, 336, 400
 Szapiro, G.S. (Shapiro, G.S.), 284, 301, 323, 326, 327, 399, 421
 Szapowałow, Ł.A., 337, 421
 Szczepiński, W., 62, 74, 105, 119, 123, 140, 180, 351, 352, 390, 393, 400
 Szemiakin, E.I., 152, 421
 Szewczenko, Ju.N., 197, 373, 374, 416, 422
 Szewielew, W.W., 199, 420
 Sziszmariew, O.A., 142, 180, 182, 352, 422
 Szejderowicz, R.M., 185, 210, 223, 255, 273, 373, 418, 422
 Szwajko, N.Ju., 184, 194, 255, 414, 418, 421
 Šmirák, S., 295, 400
 Tairowa, Ž.I., 173, 372, 416, 420
 Takano, E., 217, 400
 Tałypow, G.B., 74, 140, 174, 182, 352, 420
 Tanaka, H., 238, 400
 Taylor, G.I., 140, 156, 170, 193, 337, 400
 Theocaris, P.S., 181, 182, 308, 400
 Thomas, T.Y., 49, 114, 164, 193, 255, 401
 Thomsen, E.G., 119, 166, 180, 379, 401
 Thorn, B.J., 315, 321, 388, 401
 Tiedemann, J.B., 371, 401
 Tierchow, R.G., 373, 420
 Timoszenko, S.P., 44
 Ting, T.W., 349, 401
 Tocki, O, N., 244, 420
 Tołokonnikow, Ł.A., 199, 420
 Torre, C., 144, 159, 401
 Tosyaki, O., 274, 402
 Toupin, R., 52, 401
 Tozawa, Y., 217, 401
 Trefftz, E., 366
 Tresca, H.,
 rozdział II: 85, 93, 117, 121
 rozdział III: 140, 142, 146, 149, 152, 156, 160-163, 172-174, 176, 182, 200, 202
 rozdział IV: 250, 274, 277, 288
 rozdział V: 300, 302, 308, 310, 312-317, 319-322, 326, 327-328, 330
 rozdział VI: 334, 349, 351, 352, 370, 372-373
 bibliografia: 385, 388, 401
 Trifan, D., 178, 190, 401
 Trofimow, G.S., 275, 420
 Trofimow, W.I., 371, 420
 Troost, A., 349, 401
 Truesdell, C., 45, 52, 66, 190, 401
 Tsien, H.S., 132, 401
 Tsuan, W.T., 349, 401
 Unksow, E.P., 61, 421
 Urbanowski, W., 41, 61, 145, 148, 174, 199, 349, 392, 393
 Valalas, D., 286, 401
 Van den Broek, J.A., 102, 121, 401
 Van Iterson, F.K., 83, 401
 Vigness, I., 88, 371, 401
 Wakulenko, A.A., 172, 173, 174, 197, 198, 404, 406
 Walczak, J., 33, 36, 401
 Walter, Ł.Ł., 237, 406
 Wang, A.J., 247, 309, 384, 401
 Warner, W.M., 99, 192, 383, 401

- Wasilenko, W.N., 373, 422
Wasin, R.A., 159, 191, 404, 406
Waszczyszyn, Z., 106, 141, 211, 218–221, 227, 238, 321, 388, 401, 402
Wega, K.Je., 159, 404
Westergaard, H.M., 38, 42, 136, 402
Wetherell, E.H., 101, 382
Whalley, E., 351, 352, 402
White, G.N., 101, 166, 383, 402
Wiejzman, R.I., 351, 406
Wielikoiwanienko, Je.A., 321, 415
Wildhorn, S., 88, 382
Winogradow, A.I., 360, 406
Wiseman, H.A.B., 353, 389
Własow, W.Z., 63, 406
Wnuk, M., 130, 133, 259–263, 402
Wood, R.H., 102, 301, 402
Worley, W.J., 285, 402
Woronkow, W.E., 336, 406
Wölfel, J., 111, 295, 402
Wu, M.H.Lee, 105, 402
Wu, T.T., 194, 378
Wunder, R.A., 370, 400
Xu, Bing–Ye, 315, 391
Yamada, M., 148, 295, 296, 387
Yamamoto, Y., 128, 402
Yamasaki, T., 274, 402
Yang, C.T., 119, 401
Yang, N.S., 353, 402
Ylinen, A., 72, 295, 403
Yoshimura, Y., 66, 176, 194, 403
Young, T., 78
Zadojan, M.A., 288, 294, 342, 346, 404, 409
Zajcew, P.I., 285, 408
Zavelani Rossi, A., 309, 403
Zawadzki, J., 145, 403
Zerna, W., 45, 52, 64, 382
Ziegler, H., 128, 134, 135, 162, 172–173, 193, 204, 263, 309, 378, 398, 399, 403
Zielenin, Ł.P., 352, 418
Ziamba, S., 33, 75, 76, 379
Żukow, A.M., 78, 90, 140, 165, 182, 352, 353, 409
Żurawski, D.I., 276
Życzkowski, M.,
 rozdział I: 18, 19, 22, 27, 30, 33
 rozdział II: 23, 88, 106, 129–133
 rozdział III: 133, 141
 rozdział IV: 205, 218–222, 228–236, 250, 254–258, 262–271
 rozdział V: 302–306
 rozdział VI: 332, 338–351, 353–359, 359–361, 361–370, 372, 373
 bibliografia: 381, 387, 391, 393, 394, 395, 399, 401, 402, 403, 404

SKOROWIDZ RZECZOWY

- Agregat polikrystaliczny 193
 aksjator 39
 — naprężenia 45, 81, 86–87
 — odkształcenia 60, 81, 86–87, 151
 — prędkości naprężenia 50
 — — odkształcenia 65
 aluminium 71, 352
 analogia
 — dachu 205
 — wzgórza piaskowego 205
 — między równaniami Hencky-Iliuszina i Levy-Misesa 93
 — dynamiczna dla zginania sprężysto-plastycznego 210
 — termosprężysta 120
 anizotropia plastyczna 147–149, 198–202, 329–330, 353
 — krzywoliniowa 199
 aproksymacja
 — wykresu rozciągania 68–72
 — doświadczeń nad wyteżeniem 83
 — optymalna Czebyszewa 133
 — typu Hermite'a 132–133
 — — brzegowa 262, 270–272, 360–361
 — — uogólniona 270–272, 364, 369–370
 — jednokrotnie optymalna 133, 237,
 — półliniowa 329
 asymptota 101
- Badania doświadczalne
 — powierzchni czynno-biernych 179–182, 352
 — praw fizykalnych 337, 352–353
 — warunków plastyczności dla płyt 308
 — nośności granicznej prętów cienkościennych 299
 belki 275
 — swobodnie podparte 284, 335
 — statycznie niewyznaczalne 244, 284,
 — na podporach nieprzesuwnych 238
 — nieprzymatyczne 284, 295
 beton 157, 317, 349
 — sprężony 238
 — zbrojony 210, 238, 316
 bifunkcje naprężeń 113
 bimoment 20, 203, 286, 287, 296–299
 binormalna do trajektorii 195
 błąd metody przybliżonej (aproksymacji) 115,
 120, 125, 127, 132, 133, 159–163, 225, 237, 309
- Całki
 — eliptyczne 227, 247, 272, 342, 344, 348, 359
 — hipereliptyczne 342, 344
 całkowanie numeryczne 270
 cecha identyczności punktu 206
 cechy geometryczne przekroju 223
 charakterystyki 118–119, 172, 245, 329
 ciało idealnie sztywne (nieodkształcalne) 52, 93
 — — sprężyste 106
 — — plastyczne 68–69, 82, 84, 86, 88, 92
 — — o izotropii normalnej 86, 138
 — — sprężysto-plastyczne 69, 75, 103, 206, 211,
 222, 223, 226, 252, 263, 303
 — — sztywno-plastyczne 69, 71, 75, 92–94,
 101–103, 124, 252, 309, 331
 — sztywno-plastyczne ze wzmocnieniem liniowym 70, 223
 — polikrystaliczne 74, 142
 — izotropowe 78, 79, 86–101, 139–147, 149–198
 — anizotropowe 78, 85, 98, 147–149, 198–202
 — kruche 145
 — krucho-idealnie plastyczne 284
 ciąg układów równań 256
 — równań 266, 268
 ciecz 76–77
 — lepka 92
 ciężar właściwy 350
 ciśnienie hydrostatyczne 87, 139, 143
 — wewnętrzne w cylindrze (rurze) 103, 341, 367
 — styczne 342, 361
 — normalne ze stycznym 302, 342
 cykl 152
 cykliczna przemiana wskaźników 43, 112
 cylindry cienkościenne 106, 180, 289, 352–361
 — grubościenne 103, 124, 338–352, 361–371
 — wielowarstwowe 106, 349
 czworościan elementarny 46
 czynnik czasu 18, 64, 93, 192

- czynniki wyteżenia 18–33, 83, 90, 97, 132, 139, 153, 178
- na szczepku punktu ciała 18, 134, 145
 - — — przekroju 19–22, 203, 296
 - — — całego ciała 22, 331
 - podstawowe 22, 203, 331
 - uboczne 22, 82, 83, 85, 145, 155, 196
 - bezwymiarowe 212
- Deparametryzacja 118, 130, 230
- dewiator 39
- naprężenia 45, 86, 88–89, 92, 150, 151, 152
 - odkształcenia 60, 86, 88–89, 93, 151, 152
 - prędkości naprężenia 50
 - — odkształcenia 65, 92, 95
 - — odkształceń plastycznych 151
 - długość drogi w przestrzeni naprężeń 50
 - — — odkształceń 64
 - — — — plastycznych 169
- dokładność aproksymacji 72
- droga obciążania 162
- drewno 317
- dylatacja 60, 81
- działania na szeregach potęgowych 130–131, 230, 267
- dźwigary (elementy) liniowe 19, 203
- dźwigary powierzchniowe 19, 300, 303, 322
- Effekt Bauschingera 73–80, 109, 167, 170, 171, 173, 174, 179, 371
- — idealny 73, 75, 77, 78, 171
 - — przy czystym ścinaniu 74
 - — według definicji Naghdiego — Eringena 75
- efekt kolumnowy 374
- efekty reologiczne 68, 78
- gięte brzegowe 303
- elastyka 209, 221, 222, 228
- element dźwigara powierzchniowego 20, 300
- elementy wirujące 105, 336, 351, 371, 373
- elipsa huberowska 140, 160
- — obrocona 148
- elipsoida 143
- energia właściwa odkształcenia 43
- — — postaciowego 83, 85, 174
 - — — rozproszona (dysypowana) 68, 77–80, 170, 179, 204
 - — — mikronaprężeń resztkowych (magazynowana) 78
- Fale sprężysto-plastyczne 255, 351, 373, 375
- fazy pracy przekroju 213
- fizyka ciała stałego 83
- formy kwadratowe 322–330
- funkcja Langrange'a 288
- funkcje Bessela 221
- jednorodne 311
 - naprężeń 111–113, 115, 244, 362
 - — Krutkowa-Blocha 111
 - — Maxwella 112
 - — Morery 112
 - — Airy'ego 112
 - — Prandtla 112, 258, 265, 290–292
 - — Filonienko-Borodiczka 113
- funkcjonał 27, 97, 121, 126, 128, 288, 356
- Gaz 22, 77
- gradient 150, 152, 162, 245
- uogólnionych sił wewnętrznych 276
- gradienty wektora przemieszczenia 57–59
- graniastosłup Treski-Guesta 142, 156
- Iwlewa-Haythornthwaite'a 156
- granica sprężystości 24, 68, 72, 82, 87, 139
- plastyczności 24, 69, 72, 73, 123, 148
 - — dolna 24, 28, 68, 69, 198, 210
 - — górna 24, 28, 68, 69, 198, 210
 - — umowna 68
 - — przy ścinaniu (skręcaniu) 91, 193, 244–249
 - — różna przy rozciąganiu i ściskaniu 86, 143, 240, 308, 317
 - — zredukowana 245
 - — zależna od temperatury 145–146, 337, 351, 373
 - proporcjonalności 69
 - strefowa sprężysto-plastyczna 89, 96, 207, 240, 241, 263, 305
- grunty 157
- gwiazdy naprężeń i odkształceń 42
- Hiperboloida 143
- hipercylindry (hiperwalce) paraboliczne 315, 316
- hiperplaszczyny 319, 328
- hiperpowierzchnie graniczne 28, 287, 311, 328
- hipoteza jednolitej krzywej wzmocnienia 164–166, 183, 321, 353
- — — — w przypadku anizotropii 200–201
 - — — — stabilizacji naprężeń 98–99, 160, 161, 255, 283
 - — — — stałego współczynnika odkształcenia poprzecznego 88, 306
 - — — — wzmocnienia plastycznego izotropowego 166–170, 178
 - — — — kinematycznego 170–173, 178
 - — — — mieszanego 173–174, 179
 - — — — ogólnego anizotropowego 174–176
 - — — — przyjmująca tworzenie się naroży plastycznych 177, 182

- hipoteza wzmocnienia plastycznego wzrostu krzywizny powierzchni czynno-biernej 182
 — — — lokalnej określoności 196
- hipotezy geometryczne 118
 — — Bernoulliego płaskich przekrojów 118, 206, 252, 258, 264, 273
 — — Love'a-Kirchhoffa prostych normalnych 118, 301, 303, 310, 322
 — — odnośnie rozkładu naprężeń 278–280
 — — wyężenia materiału 83, 85, 139, 165, 167, 172, 173, 182, 203, 251, 295, 300
 — — — jednoparametrowa 83, 165
 — — — dwuparametrowa 143, 144
 — — — trójparametrowa 145
 — — — pięcioparametrowa 145
 — — — energii odkształcenia postaciowego (HMH) 83–84, 91, 98, 140, 165, 187, 190, 196, 251, 300, 328
 — — — największych naprężeń stycznych (TG) 85, 141–142, 160–163, 165, 173, 175, 182, 302, 351
 — — — największego naprężenia dewiatorowego 142–143, 165
 — — — największego naprężenia normalnego 182, 316, 329
 — — — największego wydłużenia 182
 — — — Beltramię energii całkowitej 143
 — — — Schleichera 143
 — — — Burzyńskiego 143–144, 157, 308, 317
 — — — aproksymacyjna dla prętów 251
- histereza 69
- historia procesu 51, 202
- Iloczyn skalarny wektorów 53, 134, 155, 189
 — — tensorów 134
 — — diadowy wektorów 190
- impulsy ciepłe 351
- intensywność tensora 41, 135
 — — naprężeń 46–47, 137, 139, 165, 200
 — — uogólniona 200
 — — odkształceń 61–62, 89, 91–92, 165, 200
 — — uogólniona 200
 — — sprężystych 168, 180
 — — plastycznych 167, 168
 — — logarytmicznych 182
 — — prędkości odkształceń 93
 — — zmiany odkształceń plastycznych 180
- iteracja całki podwójnej 246
- izotropia 80, 83, 139–147, 149–198
 — — normalna 86, 138, 139, 143, 167, 308
- Jakobian przekształcenia 246, 248, 272
- jednorodność materiału 32, 99, 247
- jednorodność rozkładu czynników wyężenia 30–32
 — — — — podłużna 30–32, 251, 252–276, 338–352, 361–370
 — — — — poprzeczna 30–32, 301–302
- jednoznaczność rozwiązania 105, 156, 159, 184, 189
- Kąt nachylenia osi obojętnej 240, 241, 290
 — — obrotu przekroju (kąt ugięcia) 206, 218
 — — skręcenia jednostkowy 20, 250, 259, 291, 340, 363
 — — — całkowity 103
- kąty Eulera 43, 116, 175
- kierunki główne tensora 36
 — — naprężeń 45, 46, 116, 136, 141, 149, 151, 175, 199
 — — odkształceń 60, 62
 — — — plastycznych 175
 — — momentów 303
 — — modułów plastyczności 147
 — — ortotropii 149
 — — ustalone 67, 78
- klasyfikacja obciążeń złożonych 31–33
- klin nieograniczony 276
- kolejność przykładania obciążeń 284, 294, 373, 374
- koncentracje lokalne naprężeń 172
- konglomerat podelementów (cząstek) 174
- konstrukcje prętowe 77
 — — trójwarstwowe (sandwiczowe) 21, 309, 317–321, 327–330
 — — żelbetowe 237
- kontur przekroju regularny 233, 244–249
 — — wykazujący osobliwości 233
 — — jednorodny 292
- konwencja sumacyjna 34, 46, 48, 63, 80, 124, 154
 — — płaska 322
- kres mnożnika dla obciążeń
 — — — — górny 121, 128
 — — — — dolny 125, 128
- kryterium dokładności rozwiązań 159
 — — odkształceniowe nośności 217
 — — stateczności procesu odkształcania 153
 — — wyężenia 83, 84, 85, 86
 — — zniszczenia 375
- krzywa centroidalna 244
 — — jednolita wzmocnienia plastycznego 164–166, 183, 321, 353
 — — śrubowa 247
- krzywe graniczne 27, 137
 — — — — — dla zginania z siłą podłużną
 — — — — — prętów o przekroju prostokątnym 214–217

- krzywe graniczne dla zginania z siłą podłużną prętów o dowolnym przekroju 228–244
 — — — — — o przekroju wielopunktowym 225
 — — — — — w płaszczyźnie uogólnionych odkształceń 216–217
 — — — — — nośności sprężystej 332, 334, 351
 — — — — — granicznej 242, 252, 262, 265, 271, 274, 285, 372
 — — — — — dla przekroju dźwigara powierzchniowego 325
 krzywizny osi pręta, belki 20, 118, 215, 240, 290, 291, 362
 — warstwy obojętnej (neutralnej) 216–217
 — płyty główne 303
 — pierwotne powłoki 304
 kształt przekroju 205–211, 222–223, 376
 kształtowanie optymalne 72, 330, 336, 374, 375
 kwadrat Galileusza-Clebscha-Rankine'a 316
- Linearyzacja równań różniczkowych 364
 — wzorów na krzywiznę 222
 linia ugięcia belki 220
 — środkowa profilu 297
 linie największego spadku 245, 247, 248
 — nieciągłości 49, 119
 — — naprężeń 228, 246, 247, 266
 — poślizgów 285, 295
 — załomu 301, 316
 logarytmiczna miara odkształcenia 65–67, 70, 166, 170
- Łuki 211, 238, 216, 295, 336
- Macierz modułów sprężystości 189
 maszyny cyfrowe 210, 241
 materiał rzeczywisty, realny 71, 78, 179
 — nieściśliwy 61, 62, 87, 88, 106–109, 114, 117, 138, 160, 165, 179, 252–255, 258–263, 264–273, 303, 304, 339, 361
 — ściśliwy 61, 87, 88, 114, 115, 129, 205, 250, 255–258, 303, 349
 — idealnie sprężysty 71, 203
 — — — o ograniczonej wytrzymałości 203
 — idealnie sprężysto-plastyczny 69, 75, 80, 88–92, 95–100, 121–123, 160–163, 205–222, 239–241, 252–258, 294
 — sztywno-plastyczny 72, 203
 — idealnie sztywno-plastyczny, 69, 71, 102
 — sztywno-plastyczny ze wzmocnieniem liniowym 71
 — krucho-idealnie plastyczny 284
- materiał ciągliwy 83, 101
 — stateczny w sensie Druckera 153–155, 198
 — — — — — nieograniczenie 155, 156
 — — — — — w pewnych kierunkach 155, 158
 — niestandardowy 159
 — zbrojony 275, 308
 mechanizm uplastycznienia 176
 membrany 302
 metale kolorowe 71, 352
 metody rozwiązywania problemów teorii plastyczności 118–133
 — charakterystyk 118–119, 172, 245, 329
 — energetyczne 336, 337
 — graficzne 237
 — kollokacji 221
 — małego parametru (zakłóceń) 129–131, 261–262, 266–270, 292, 305, 321, 336, 363–369
 — — — — — modyfikowana 131–132
 — numeryczne 210, 223, 274, 292
 — relaksacji 274
 — rozwiązań sprężystych 119–120, 374
 — równych współczynników 230
 — uzupełniających obciążeń 119
 — uzupełniających odkształceń 120
 — Trefftza 366
 — wariacyjne 127–128, 280, 312, 326, 353
 — zmiennych parametrów sprężystości 210
 miara odkształcenia Cauchy'ego 52, 66, 170
 — — logarytmiczna Hencky'ego 65–67, 70, 166, 170
 miary odkształceń skończonych 67
 miedź 353
 mięknienie plastyczne 68, 76, 128, 157, 184, 198, 375
 mikronapężenia resztkowe 74, 75, 170, 180, 190, 197
 mikroniejednorodność materiału 74, 174, 180, 195
 mimośród działania siły 22, 332
 — — — dwuosiowy 290
 mnożenie tensorów 35
 — — skalarne 134
 mnożnik dla obciążeń 111
 — — — statycznie dopuszczalny 121
 — — — kinematycznie dopuszczalny 125
 mnożniki Lagrange'a 288, 356, 358
 moc obciążeń zewnętrznych 124
 — odkształceń 43
 — — plastycznych 93, 95, 124
 modele ciał plastycznych 75–77
 — — — dynamiczne 75–77, 171
 — — — — dwuwymiarowe 76, 171
 — — — — wielowymiarowe 77
 — — — kinematyczne 171

- modele ciał plastycznych konstrukcyjne 177
 — nieograniczonego wzrostu odkształceń 109
 — powierzchni granicznych 136
 moduł Younga 78
 — Kirchhoffa 80
 — ściśliwości 81
 — — uogólniony 200
 — siczny 68, 200
 — — bezwymiarowy 256
 — styczny 68, 72
 — (funkcja) zaawansowania odkształceń plastycznych 89, 326
 — wzmocnienia 70, 179
 — odciążania 78
 — całki eliptycznej 272
 modułów sprężystości zmiana 90, 197
 moduły anizotropii plastycznej 148, 199
 moment bezwładności przekroju 207, 224, 239,
 — statyczny przekroju 207, 224, 239, 242
 — dewiacji przekroju 239
 — obciążający 103
 — główny sił wewnętrznych 19,
 — skracający w pręcie 19, 108, 203, 246, 252, 260, 265, 272, 273, 287, 342, 353, 367
 — giętno-skrętny 20, 203, 286, 287, 296
 momenty zginające w pręcie (belce) 19, 203, 207, 218, 265, 272, 273, 280, 287, 289–290, 353,
 — — w przekroju dźwigara powierzchniowego 21, 303, 305, 310–312, 328
 — skracające w przekroju dźwigara powierzchniowego 21, 303
 monokryształ 142, 163
 mosiądz 78, 353
- Nadwyżka obciążenia 154
 naprężenia 35, 44–50
 — rzeczywiste 67, 70, 166
 — pozorne 67
 — wypadkowe 46
 — normalne 44, 96, 265, 278, 296
 — średnie (normalne) 45, 137, 139, 147, 199, 265
 — promieniowe 256
 — obwodowe 252
 — styczne 44, 91, 244, 278, 296
 — — całkowite w przekroju 47
 — — ekstremalne 47, 85
 — — średnie 85
 — — główne 45, 84, 160
 — — algebraicznie uszeregowane 45, 141, 142
 — oktaedryczne (ośmiościenne) 46–47, 85
 — resztkowe 128, 238, 337
 — montażowe 25
- naprężenia zredukowane (zastępcze) 84, 85, 86
 — momentowe 35
 — uogólnione 19
 — transformowane 199
 naroża na powierzchni granicznej (plastyczne) 142, 176–178, 182, 191, 195
 natężenie strumienia neutronów 19, 145, 331
 nieciągłość funkcji poszukiwanej 131
 — pochodnej 133, 233
 — opisu procesu neutralnego 92
 niejednorodność materiału 74, 172, 245, 248–249, 302, 330, 342, 349
 — — poprzeczna 295
 — — skokowa 285, 308
 — — zastępcza 245
 — stanu fizykalnego podłużna 276, 286, 294, 303
 — — — poprzeczna 316
 — — — skokowa 123, 297
 niejednorodność nośności granicznej przekroju 283
 nieliniowość fizykalna 17, 88
 nieodkształcalność konturu 297
 nieodwracalność procesu 17, 88, 152
 nierozciągliwość osi 209–210, 221–222,
 nierozdzielność odkształceń 62–64
 niestateczność materiału 68, 155, 198
 — konstrukcyjna (konstrukcji) 164, 198, 332
 — ruchu 163
 nieściśliwość materiału 88, 99, 114, 117, 129, 164, 179, 250, 252–255, 258–263, 264–273, 310, 320, 339, 361
 niezależność czynników wyężenia 32–33
 niezmienniki tensorów 34–44
 — — podstawowe 34–36, 46, 50, 62, 64, 149
 — — główne 36–38, 46, 50, 62, 64, 174
 — — walcowe 38–39, 46, 61, 116, 137, 166, 184
 — — ośmiościenne (oktaedryczne) 38, 46–47
 — — symetryczne 43, 85
 — — aksjatora i dewiatora 39–41, 46, 62, 139
 — — naprężenia 46–47, 83
 — — — tablica 47
 — — nieskończenie małych odkształceń 61–62, 83
 — — odkształceń skończonych 62
 — — wspólne dwóch tensorów 43–44, 50, 83, 85, 150, 175
 — — geometryczne trajektorii 195–196
 nikiel 180
 normalna do trajektorii 195
 nośność sprężysta 27, 103, 203, 332
 — — przekroju zginanego 229
 — — — rozciąganego i skręcanego 254
 — — tarczy 160
 — — rury grubościennnej 370

- oznaczanie inżynierskie matematyczne 44
 — — tablica oznaczeń 45
 — — przemieszczeń 50
 — — odkształceń nieskończenie małych 58
 — — współrzędnych, tablica oznaczeń 52
- Paczenie się przekroju pręta 258
- parabola Girkmanna 214, 233, 316
- paraboloida Burzyńskiego 143–144, 157
- paradoks Hu 136
 — Stüssi-Kollbrunnera 104
- parametr mały 129–132, 196, 248, 261–262, 266, 305, 364
 — Lodego 41–42, 45, 64, 89, 92, 95, 152, 166, 174, 184, 188
 — Odqvista 169, 173, 187, 195, 197
 — o charakterze czasu 91
- parametryzacja równania konturu 246
 — warunki plastyczności 97, 107, 115–117, 118, 245, 288–289, 311, 355, 371
- pełzanie 130, 264
- pęknięcie, pęknięcie 139, 182, 255
 — próbki 105
- pierwiastki równania sześciennego 37, 345
 — równań charakterystycznych 367
- plastyczność idealna 28, 68–69, 84, 88–103
- platforma plastyczności 68
- plaszczyna naprężeń 91, 162
 — — Burzyńskiego 137, 143, 146
 — — dewiatorowa (Meldahla) 138, 140, 141, 175
 — — odkształceń 91, 162
 — — dewiatorowa 138
 — — niezmiennicza 138
- platy powierzchni granicznej 302, 308, 315, 319
- plynięcie plastyczne 84, 92–101
- plyty 300, 308, 316
 — ortotropowe 306, 329
- podobieństwo dewiatorów 151, 152, 158, 163, 251, 291, 300, 310, 339, 361
- podprzestrzeń 172
- podstawianie szeregów 230
- pole tensorowe naprężeń 48, 120
 — — — statycznie dopuszczalne 120, 249, 275, 287
 — — — — częściowo dopuszczalne 126, 277, 280, 288–289, 353–359
 — — wektorowe przemieszczeń 51
 — — — prędkości 124
 — — — kinematycznie dopuszczalne 124, 281, 284, 326
- połączenia kołnierzone 348
- pompa ssąco-tłocząca 76
- postać kanoniczna wielomianu trzeciego stopnia 42, 344
 — — normalna cątek eliptycznych 345, 358
- postulat ciągłości na granicy czynno-biernej (ciągłości opisu procesu neutralnego) 86, 92, 97, 99, 164, 167
 — — Druckera 153–164, 198, 331, 375
 — — izotropii Iliuszina 196
 — — plastyczności Iliuszina 155
- poślizgi 176, 193–195
- poślizg wzajemny warstw belki 282
- potencjał sił zewnętrznych 23
 — — plastyczny 149–151, 185–189, 198
- potęgowanie szeregu potęgowego 130
 — — tensora 164
- powierzchnie graniczne 26–29, 82, 118, 203, 331
 — — — — obrotowe 137, 143–145
 — — — — walcowe 137, 139–143, 156
 — — — — wklęsłe 159, 331, 375
 — — — — nośności sprężystej 27, 28, 300, 301
 — — — — — „poprawione” 123, 335
 — — — — — czynno-bierne (plastyczności; obciążania) 28, 29, 82, 90, 93, 154, 166, 171, 202
 — — — — — początkowe 82–84
 — — — — — w przestrzeni odkształceń 90, 93, 178–179
 — — — — — nośności granicznej (plastycznego współdziałania) 29, 203, 287, 289, 290, 300, 301, 311, 345, 357, 370
 — — — — — odcinkowo-liniowe 202, 319
 — — — — — ograniczonego współdziałania 329
 — — — — — wytrzymałości 182–183
 — — — — — nieciągłości 49, 63
 — — — — — niestateczności 255
 — — — — — skupione 223
- powłoki 300, 338
 — — — — małowyniosłe 106, 154
 — — — — osiowo symetryczne 320
 — — — — — walcowe koliste 302, 374
 — — — — — kuliste grubościennie 352
 — — — — — silnie zakrzywione 310, 322, 324, 328
- półki 275, 285, 295
- półkula jednostkowa 194
- praca odkształcenia plastycznego 77–80, 170, 187, 197, 200
 — — — — nadwyżkowa 154, 156, 159
- prawa fizykalne (fizyczne, konstytutywne) 54, 77, 152, 164, 178
 — — — — odkształceń sprężystych 80–82
 — — — — zmiany objętości 81, 86–87, 88, 110, 151, 201, 304
 — — — — postaci 82, 83, 86–101, 110

- przekrój poprzeczny elementu liniowego (pręta)
 pierścieniowy cienkościenny 126, 236, 237, 255
 — — — — — eliptyczny 233, 234, 237, 263, 290
 — — — — — wielopunktowy zastępczy 223–228
 — — — — — czteropunktowy 224
 — — — — — wielospójny 338
 — — — — — niebezpieczny 284, 354
 — — dźwigara powierzchniowego 20, 21, 300
 — — — — — pełnościenny 309–317, 322–327, 329–330
 — — — — — warstwowy 317–231, 327–329
 przekroje powierzchni granicznych 179, 287, 319
 przekształcenie Dirichleta 343
 przemieszczenia 50–52
 — duże (skończone) 103, 105, 106
 — uogólnione 102
 przeskok (przerzut) 103, 106, 154
 przestrzeń czynników wyteżenia (zmiennych niezależnych) 27, 82, 97, 134, 300
 — zmiennych zależnych 27
 — niezmienników tensora 38, 136
 — uogólnionych sił wewnętrznych 287
 — wektorowa pomocnicza 134–139, 188
 — — — dziewięciowymiarowa naprężeń Pragera 134, 150, 155, 178, 188
 — — — — — odkształceń 134, 178
 — — — — — sześciowymiarowa 135
 — — — — — pięciowymiarowa Iliuszina 135–136, 188, 195–196
 — — — — — czterowymiarowa 310–311
 — — — — — trójwymiarowa 136–137, 217
 — — — — — naprężeń głównych 84, 136
 — — — — — ekstremalnych naprężeń stycznych 84
 — — — — — odkształceń głównych 136
 — — — — — dwuwymiarowa (płaszczyzna) 137–139
 przesunięcie poprzeczne jednostkowe 20
 przypadek złożony jednowymiarowy 250
 — — kołowo-symetryczny 337–353
 — — prostszy 311, 325
 przyrosty naprężeń 48
 — odkształceń 64, 102, 106
 — przemieszczeń 102
 — dewiatora naprężeń 175
 — obciążeń zewnętrznych 106
 — krzywizn powłoki 303–304, 310
 przystosowanie się do obciążeń zmiennych konstrukcji 109–110, 204, 321, 333–335, 336, 337, 351
 — — — — — przekroju zginanego i rozciąganego 210
 przystosowanie się do obciążeń zmiennych przekroju zginanego ukośnie 241
 — — — — — — rozciąganego i skręcanego 255
 — — — — — — zginanego i skręcanego 275
 — — — — — — i ścinanego 286
 punkty osobliwe 257, 266
 — regularne 49, 64
 Quasi-cykl naprężeniowy 152–153
 — — odkształceniowy 153, 155
 — — naprężeniowo-temperaturowy 153
 Rachunek wariacyjny 127, 288–289, 353–361
 ramy 238, 336
 — przestrzenne 276
 reakcja plastyczna 204
 redukcja liczby równań teorii plastyczności 110–reologia 68, 75, 110 [–117
 rozciąganie jednoosiowe 65, 67–80, 87–88, 158, 166, 184, 196
 — dwuosiowe 137, 160
 — trójosiowe 137, 146
 — ze skręcaniem 106–109, 177, 180, 181, 194, 250
 — — — prętów o przekrojach okrągłych 250–258
 — — — — — nieokrągłych 258–263
 — — — — — i ciśnieniem wewnętrznym 184, 344–348
 — — z różnicą ciśnień 348–349
 rozkład energii na objętościową i postaciową 148
 — naprężeń w przekroju pręta 207, 244, 250, 252, 253, 257, 259, 267, 270, 279, 285, 295, 296
 — — — — — dźwigara powierzchniowego 303, 305, 312–314, 316
 — — — — — temperatury optymalny 352
 rozpraszanie (dysypacja) energii 23, 68, 76, 109
 rozprężenie układu równań różniczkowych 364
 rozruch optymalny 351
 rozwiązanie statycznie dopuszczalne 120–124, 271, 275
 — — częściowo dopuszczalne 126–127, 280
 — — kinematycznie dopuszczalne 124–126, 271
 rozwinięcie równania krzywej (powierzchni) granicznej w szereg
 — — — — — — wokół czystego zginania 228, 231–233, 235
 — — — — — — — rozciągania lub ściskania 228, 232–233, 235
 — — — — — — — największego momentu zginającego 231
 — — — — — — — ciśnienia wewnętrznego 363
 — — — — — — — czystego skręcania 268

- równania parametryczne krzywej 229
 — przestępne 347
 — sześcienne 36–37, 42
 — różniczkowe zwyczajne typu Abela 222
 — — — — Eulera 269, 364
 — — — — Riccati'ego 221
 — — cząstkowe typu eliptycznego 268, 292
 — — — — — Laplace'a 262
 — — — — — Poissona 262
 — — — — — parabolicznego 266
 — — — — — hiperbolicznego 118, 260
 — — — — — quasiliniowe 245
 — Eulera-Lagrange'a 356
 — fizyczne (konstrytuwne) 17, 86, 164, 183–202
 — — — — teorii idealnej plastyczności 88–101, 164, 198–200
 — — — — — wzmocnienia plastycznego 183–198
 — — — — — ciał plastycznie anizotropowych 198–201
 — nierozdzielności odkształceń 62–64, 110, 339
 — równowagi wewnętrznej 47–49, 126, 252, 265, 326, 339
 — przemieszczeniowe teorii plastyczności 113–115, 258–263, 264–270, 293
 — procesu biernego 73, 89–90
 — podstawowe zginania przy sile podłużnej 207–209, 227
- równanie konturu 230
 — powierzchni nośności granicznej 102, 287, 289, 290, 296, 342, 350, 368, 369
- równań różniczkowo-całkowych układ 218
- równia pochyła 76
- ruch 102
 — obrotowy 125, 336, 349, 373
 — krzywych czynno-biernych 162
- rura cienkościenna 289, 352–361
 — grubościenna 338–352, 361, 371
 — wirująca 336
- rurociąg 338, 348, 371
- ruszty 276
- rzut przekroju powierzchni granicznej 179, 322
- Samonapężenia 124, 335
- schemat (mechanizm) zniszczenia plastycznego 102, 105, 106–109, 111, 204, 327
- schematyzacja wykresu rozciągania (wzmocnienia plastycznego) 67–80, 184
 — — — — — typu Prandtl'a 69, 89, 99
 — — — — — potęgowe 72, 99, 184
 — — — — — specjalne 76–77
- siły zewnętrzne, uogólnione 102, 300, 331
 — masowe 22, 47, 49, 105, 129, 331, 336, 349–351, 373
- siły wewnętrzne, uogólnione 20, 110, 204, 225, 254, 289, 292, 296, 321, 324
 — podłużna w przekroju pręta 21, 205, 207, 218, 252, 260, 281, 287, 295, 333, 344, 353
 — — zredukowana z uwagi na działanie ciśnienia 344, 347
 — poprzeczne w przekroju pręta 19, 203, 246, 281, 287, 295, 296, 353
 — podłużne w przekroju dźwigara powierzchniowego 21, 301–303, 309–312
 — styczne w przekroju dźwigara powierzchniowego 21, 301–303
 — poprzeczne w przekroju dźwigara powierzchniowego 21, 300, 310, 326–327
- składowe tensora 34–44, 134
 — — naprężenia (stanu naprężenia) 44, 84, 97, 111
 — — — — — kontrawariantne 49
 — — — — — kowariantne 49
 — — — — — odkształcenia 55, 57, 59, 97, 111
- skręcanie pręta o dowolnym przekroju 205
 — — — — — swobodne 298
 — — — — — skrępowane 299
 — — o przekroju kołowym 103, 204
 — — rury cienkościennej 67, 106–109, 166
 — — — — — grubościennej 103
 — — ze ścinaniem 203, 244–249
 — — z wirowaniem 351
- smukłość 332
- spaczenie przekroju 258, 265, 274
- spadek powierzchni funkcji naprężeń 245
- sprężyna 75, 247
- sprężność wewnętrzna teorii zginania 209
- stabilizacja naprężeń 98–100, 160, 161, 255
 — — granicy plastyczności 74
- stal 78, 181, 353
 — niskowęglowa 68
- stan graniczny 102
 — — naprężenia 44–45, 67, 76
 — — — — — płaski 91, 116, 138, 284, 300, 304, 307
 — — — — — przestrzenny 82, 84, 300
 — — — — — odkształcenia 52–64, 65
 — — — — — płaski 117, 118–119, 129, 284, 346, 364
 — — — — — przestrzenny 87, 90
- stany czysto tarczowe (blonowe) 300–303
 — — — — — giętne 300, 303–309
- starzenie materiału 79
- stateczność konstrukcji 67, 72, 154, 349, 375
 — — prętów jednocześnie ściskanych i skręcanych 294
 — — słupów mimośrodowo ściskanych 205, 290
 — — łuków 211
 — — ścianki 107

- teoria idealnej plastyczności płynięcia plastycznego Prandtla-Reussa przy odkształceniach skończonych 164
- — — technologiczna 290
 - efektu Bauschingera 74
 - sprężystości 80–82, 111, 113, 120, 151
 - — nieliniowa 87
- teorie wzmocnienia plastycznego 164–198, 200–202
- — — odkształceniowe (holonomiczne) 183–185, 201
 - — — przyrostowe (anholonomiczne) 185–193, 201–202
 - — — fenomenologiczne 183–193
 - — — poślizgowe 175, 178, 181, 193–195, 255
 - — — lokalności odkształceń 194, 255, 349
 - — — analityczna Klusznikowa 23, 180
 - — — geometryczna Iliuszina 195–196
- termodynamika 79, 172, 198
- tłok 77
- trajektorie w przestrzeni (lub płaszczyźnie) odkształceń 94, 195–196
- — — — naprężeń 94, 98, 195
- transformacja tensorowa 34
- — naprężeń 46–47, 139
 - — płaska 21
- twierdzenie Castigliano 128, 273
- Cayley-Hamiltona 164, 184
 - Koitera 126
 - Melana 123, 335
 - o obciążeniu prostym 99
 - o oszacowaniu dolnym 121
 - — — górnym 124–125
 - Schwedlera-Żurawskiego 276
- tworząca powierzchni obrotowej 137, 143
- Ugięcia belek 217–222, 227–228
- — duże (skończone) 208, 210, 217–221, 227, 335
 - — nieskończone małe 222, 228, 240, 241
 - — — — przy uwzględnieniu ścinania 286, 295
 - — o krzywiznie pierwotnej, luków 211, 228
 - płyt 309, 315, 316, 320, 321, 329, 373, 374
 - powłok 316, 320
 - wirujących cylindrów 371
- układ niezmienników 34–44, 136
- — aksjatorowo-dewiatorowych 41, 139
 - — stanu naprężenia 46
 - kratowy 103–106
 - — Misesa 106, 126
 - — odniesienia 34
 - — — — układ odniesienia lokalnie ortogonalny 34, 36, 44, 111, 250, 301
 - — — — kartezjański 44
 - — — — ruchomy 58
 - — — — umowa co do znaku momentu 222
 - — — — uplastycznienie ciała całkowite 106–109, 244, 361
 - — — — niecałkowite 106
 - — — — przeciwzrotne 184–185, 275, 337
 - — — — przekroju jednostronne po stronie rozciągania 207–208, 211–212, 218–220, 221, 240, 290
 - — — — — — — — ściskania 208, 212–213, 218–220, 221
 - — — — — — — — obu stronnie 208–209, 213, 220–221, 222, 239–240,
 - — — — — — — — całkowite 228–238, 257, 265
 - — — — — — — — ustrój statycznie niewyznaczalny 204
 - — — — — — — — uszeregowanie naprężeń głównych 45, 141, 321
 - — — — — — — — utrata spójności cząstek 146
 - — — — — — — — stateczności konstrukcji 153–154
 - — — — — — — — — — — — — — drugiego rodzaju 210
 - — — — — — — — — — — — — — środkowa 296
 - — — — — — — — — — — — — — lokalna 297
- Walec kołowy Hubera-Misesa-Hencky'ego 140, 143, 176, 179
- wały 276
- warstwa obojętna 308
- wartości główne tensora 36, 42
- — — — algebraicznie uporządkowane 36
 - — — — dewiatora 40
- warunek addytywności odkształceń 65
- — — — — — — — — — — — — — niesiściłowości 93, 114, 124, 251, 322, 339, 362
 - — — — — — — — — — — — — — ograniczoności rozwiązania 257, 269
 - — — — — — — — — — — — — — przemieszczeniowy nośności 273
- warunki brzegowe 111, 127, 250
- — — — — — — — — — — — — — naprężeniowe 46, 111, 245, 260, 265, 279, 292, 341, 363
 - — — — — — — — — — — — — — przemieszczeniowe 111, 124
 - — — — — — — — — — — — — — niejednorodne 262
 - — — — — — — — — — — — — — jednorodne 262, 266, 268
 - — — — — — — — — — — — — — ciągłości (zgodności) na powierzchniach nieciągłości 49, 63, 124, 246, 250
 - — — — — — — — — — — — — — na granicy sprężysto-plastycznej 89, 208, 240, 241, 263
 - — — — — — — — — — — — — — Eulera-Lagrange'a 288, 356
 - — — — — — — — — — — — — — idealnej plastyczności 28, 84–86, 89, 91, 110, 107, 139–149, 207, 249–250, 279
 - — — — — — — — — — — — — — — — — — — — ciało izotropowych 84–86, 139–147
 - — — — — — — — — — — — — — — — — — — — Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH) 86, 89, 91, 93, 96, 114, 117, 136, 140–141, 147, 151, 196, 198, 250, 288, 291, 304, 308, 309–312, 318–319, 322–327, 339, 353, 361, 371
 - — — — — — — — — — — — — — — — — — — — odcinkowo-liniowe 170

- warunki idealnej plastyczności Treski-Guesta (TG)
 — 85, 93, 117, 140–141, 149, 152, 160–163, 174,
 198, 202, 250, 274, 288, 308, 312–316, 319–
 —320, 327–328, 334, 349, 370, 372
 — — — największego naprężenia dwiatorowe-
 go 142, 317, 334
 — — — — normalnego 316–317, 328
 — — — Burzyńskiego 143–145, 157, 308, 317
 — — — Coulomba-Mohra 157
 — — — przybliżone 159–163
 — — — ciała anizotropowych 147–149
 — — — — Hilla 147, 329–330
 — — — — Goldienblata-Kopnowa 148
 — — — ciała niejednorodnych 145
 — — — zakres stosowalności 146–147
 — — — dla przekroju płyty lub powłoki 300
 — — — — płyty lub powłoki 300
 — nierozdzielności odkształceń 62–64, 110, 121,
 362
 — poboczne 126
 — równowagi wewnętrznej 47–49, 126, 252,
 264, 326
 — — — we współrzędnych walcowych 49, 244,
 339, 354, 361
 — — — — kulistych 49
 — Schwarza 62,
 — zgodności przemieszczeń 365, 368
 wektor główny sił wewnętrznych 19
 — — — zewnętrznych 218
 — normalny do powierzchni 158
 — — — — jednostkowy 188
 — (pomocniczy) odkształceń 151
 — — prędkości odkształceń plastycznych 151
 — przyporządkowany tensorowi 134–139
 — przemieszczenia 50–52, 59, 110, 115
 — prędkości 64
 weryfikacja doświadczalna teorii powierzchni
 czynno-biernych 179–182, 352
 — — praw fizykalnych 352, 371
 — — teorii dużych ugięć 221
 — — — nośności granicznej przekrojów cienko-
 ściennych 294
 — — warunki plastyczności dla przekroju dźwi-
 garów powierzchniowych 330
 wilgotność 19, 82, 139, 145, 193
 wirowanie 336, 349–351, 373
 wpływ sił poprzecznych 208, 326–327
 wskaźnik sprężysty zginania 224, 230, 333
 — wzmocnienia plastycznego 71
 współczynnik asymetrii cyklu 275
 — kształtu przekroju 230
 — Poissona 61, 80, 87, 255
 — odkształcenia poprzecznego 87–88, 255
 — — — — współrzędna osi obojętnej 206–207
 — — — — graniczna 207
 — — — — współrzędne kartezjańskie 48, 50, 59, 110, 111,
 114–115
 — — — — materiałne (Langrange'a) 50–52, 53–54, 55–
 —59, 206–221
 — — — — przestrzenne (Eulera) 50–52, 54, 55–59,
 — — — — kowariantne 60
 — — — — kontrawariantne 60
 — — — — walcowe 49, 59–60, 112, 244–249, 251–258,
 266–270, 338–350, 361–370
 — — — — kuliste 49, 59–60
 — — — — biegunowe płaskie 276
 wyboczenie sprężysto-plastyczne 72, 121, 296, 332
 wydłużalność osi belki 209–210, 231, 227–228
 wydłużenie jednostkowe osi pręta belki 20, 118,
 215, 253, 259, 291, 341, 362
 wydłużenia względne 53
 — — — — powierzchni środkowej 310
 wykres rozciągania 67–80, 165, 207
 wymiarowanie bezpośrednie przekroju 262
 wypełniacz 317
 wypukłość powierzchni granicznej 121, 155, 159,
 332
 wyróżnik równania sześciennego 345
 wyteżenie materiału 33, 83
 — — — — przekroju 33
 — — — — konstrukcji 33
 wytrzymałość doraźna materiału 182
 — — — — na rozciąganie 68, 71
 — — — — rozdzielcza 105, 182
 — — — — zmęczenia 152
 wyznacznik główny 119
 — — — — utworzony ze składowych tensora 37
 względna zmiana objętości 60
 wzmocnienie plastyczne 68, 69, 75, 76, 82, 98,
 105–106, 109, 164–196, 200–202, 203, 204,
 210–211, 221, 242, 274, 335, 349, 371, 373
 — — — — liniowe 70, 75, 105, 171, 223, 273, 286,
 290, 294, 296, 299, 336, 346, 349, 351
 — — — — odcinkowo-liniowe 71, 106, 175
 — — — — wielokrotnie liniowe 71, 75, 225–226,
 — — — — potęgowe 71, 222, 240, 286, 299, 371
 — — — — jednolita krzywa 164–166, 183, 200–201
 — — — — izotropowe 76, 78, 79, 166–170, 176–177,
 188, 190, 202, 263, 309
 — — — — odkształcenie 76, 169
 — — — — zależne od pracy odkształcenia 76, 170
 — — — — równoważność form opisu 170
 — — — — kinematyczne 162, 170–173, 175, 187, 202,
 263, 309, 321
 — — — — pełne 172
 — — — — bezpośrednie 172

- wzmocnienia plastyczne mieszane 173–174, 179
 — — ogólne anizotropowe 174–176
 — — ponadkinematyczne 180
 — — przy zginaniu z siłą podłużną 210–211, 222, 225–226
- Zagadnienie de Saint-Venanta 259
 — izoperymetryczne 355
- zakres (procesu) idealnie sprężysty 69, 80–84, 87, 88, 103
 — — plastyczny 68, 89
 — — idealnie plastyczny 69, 85
 — — — sztywny 69
 — — sprężysto-plastyczny 103, 207–209, 211–213, 218–222, 226–228, 239–242, 251–258, 274, 286, 294, 299, 305, 349, 371, 373
 — — czysto plastyczny 103, 228–239, 242–250, 259
 — stosowalności odkształceniowej teorii plastyczności 99
- zakresy pracy przekroju 207–209, 222, 240, 301
- zapis matematyczny 45, 52, 59
 — inżynierski 44, 52, 59, 81, 89, 95
 — wektorowy 188–190
- zasada de Saint-Venanta 123
 — zeszywnienia 33, 44, 49, 67, 70, 99, 101, 103–105, 121, 125, 157, 198, 374–375
- zasady doboru przekrojów wielopunktowych 223–225
 — wariacyjne (ekstremalne) 127–128, 156, 159, 280, 288, 353
 — — przy mięknięciu plastycznym 198
- zbieżność poszczególnych teorii plastyczności 97
 — szeregu 131, 267, 270
- zbiornik cieczy 76, 77
 — — wielowarstwowy 106
- zderzenie 373
- zestawienie równań teorii idealnej plastyczności 110–111
- zginanie czyste 32, 103, 205
 zginanie ukośne 205, 239–244
 — — z rozciąganiem lub ściskaniem 289–290
 — — ze skręcaniem 293–294
 — pseudoukośne 176
 — z rozciąganiem lub ściskaniem 203, 205–238
 — — — — sprężysto-plastyczne 205–228
 — — — — — nośność graniczna 228–238
 — z ciśnieniem wewnętrznym 238, 360–361
 — ze skręcaniem 251, 263–276
 — — — prętów o przekroju kołowym 263–273
 — — — — o dowolnym przekroju 273–276
 — — — rur cienkościennych 359
 — ze ścinaniem 276–286
 — — — podstawowe hipotezy 278–282
 — — — — nośność graniczna 282–284
 — — — — przekrojów cienkościennych 284–286
 — — — — zakres sprężysto-plastyczny 286
 — z rozciąganiem i ścinaniem 294–296
 — — — ścinaniem i ciśnieniem wewnętrznym 358–359
 — — — skręcaniem i ciśnieniem wewnętrznym 361–370
 — płyty kuliste 304, 305
 — powłoki obwodowe 303, 359–361
- zmiana długości odcinka 53
 — kąta prostego 53
 — objętości 39, 81, 86–87
 — postaci 39, 82, 86–101
 — kształtu przekroju 204, 211
- zmiany geometrii ciała 101, 103–105, 331, 349
 — długości osi pręta 205
- zrywarka 22, 67
- zszywanie stref, rozwiązań 221, 222, 223
- zweźnianie tensorów 35, 80
- Żebrowanie 308, 316, 320
- żelbet 237, 295, 299
- żeliwo 145, 352
- Źródło ciepła 337, 351



PAŃSTWOWE
WYDAWNICTWO NAUKOWE
ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 400 + 90 egz. Ark. wyd. 39,5.
Ark. druk. 28 + 1 wklejka. Papier druk.
sat. kl. III, 80 g, 70 × 100. Oddano do
składania w grudniu 1971 r. Podpisano do
druku w marcu 1973 r. Druk ukończono
w kwietniu 1973 r. Zam. nr 9657/71 —
K-1/1064. Cena zł 125,—

POZNAŃSKIE ZAKŁ. GRAFICZNE
IM. M. KASPRZAKA W POZNANIU