Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki

Wydział Mechaniczny

mgr inż. Marcin Cegielski

Efekt ciągłej deaktywacji uszkodzeń w kontynualnej mechanice zniszczenia

Promotor
dr hab. inż Artur Ganczarski, prof. PK

Kraków 2011

Spis treści

Spis oznaczeń

górne indeksy x^{e}, x^{p}, x^{D} odnoszą się do wielkości związanych z sprężystością, plastycznością oraz uszkodzeniem
górne indeksy $x^{\pm}$ odnoszą się odpowiednio do rozciągania oraz ściskania
tylda $\widetilde{x}$ nad symbolem oznacza wielkość efektywną, zmodyfikowaną przez uszkodzenie
nadkreślenie $\overline{x}$ symbolu oznacza wielkość w strefie lokalizacji odkształcenia
$\langle x \rangle = \frac{1}{2}\left(|x| + |x|\mathrm{sgn}x\right) = \begin{cases} x & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$ oznacza nawias Mac Auleya

a	–	parametr geometryczny szyjki
b	–	parametr materiałowy wzmocnienia izotropowego
c	–	parametr materiałowy we wzorze Ylinena
$\mathrm{diag}\{\ldots\}$	–	postać diagonalna macierzy reprezentacji tensora
$D, \boldsymbol{D}$	–	parametr uszkodzenia oraz tensor uszkodzenia
$\boldsymbol{e}$	–	tensor odkształcenia Greena
$E, \boldsymbol{E}$	–	moduł Younga oraz tensor Hooke'a
f	–	potencjał plastyczności
F, F^{D}	–	potencjały dyssypacji oraz uszkodzenia
$\mathbf{F}$	–	wektor sił węzłowych oraz wektor niedokładności (discrepancy vector)
h, h_{c}	–	parametr deaktywacji uszkodzenia oraz jego krytyczna wartość
$H(x)$	–	funkcja Heaviside'a
$J_2(\boldsymbol{\sigma})$	–	drugi niezmiennik tensora naprężenia
$\mathbf{J}$	–	macierz jakobianu
$\mathbf{K}$	–	macierz sztywności
$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})$	–	tensor wpływu uszkodzenia
n, N	–	liczba cykli
p	–	kumulowane odkształcenie plastyczne
r	–	promień próbki oraz zmienna odkształceniowa wzmocnienia izotropowego
R, R_{∞}	–	parametr wzmocnienia izotropowego oraz jego asymptotyczna wartość
$\mathbf{R}$	–	wektor sił rezydualnych
$\boldsymbol{s}$	–	dewiator naprężenia
S	–	wytrzymałość materiału na uszkodzenie
$\boldsymbol{S}$	–	drugi tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa

$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$	–	pierwszy niezmiennik tensora naprężenia
$\mathbf{U}$	–	wektor przemieszczeń przywęzłowych
$\mathbf{V}$	–	wektor startowy
X, X_∞	–	zmienna wzmocnienia kinematycznego oraz jej asymptotyczna wartość
$\boldsymbol{X}$	–	tensor wzmocnienia kinematycznego (back stress tensor)
$\mathbf{y}$	–	wektor startowy
Y	–	gęstość uwalnianej energii sprężystości (siła termodynamicznie sprzężona z uszkodzeniem)
$\mathbf{1}$	–	tensor jednostkowy
α	–	zmienna odkształceniowa wzmocnienia kinematycznego
β	–	współczynnik w zależności Hayhursta ($0 \leqslant \beta \leqslant 1$)
$\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}$	–	odkształcenie oraz tensor odkształcenia
γ	–	parametr materiałowy wzmocnienia kinematyczego
λ	–	mnożnik plastyczny
ν	–	współczynnik Poissona
ρ	–	promień krzywizny szyjki próbki
ϱ	–	gęstość masy
$\sigma, \boldsymbol{\sigma}$	–	naprężenie oraz tensor naprężenia
$\sigma_{\mathrm{y}}, \sigma_0$	–	granica plastyczności oraz jest wartość asymptotyczna
ψ	–	energia swobodna Helmholtza
$\chi(\boldsymbol{\sigma})$	–	funkcja naprężenia Hayhursta

1. Wstęp

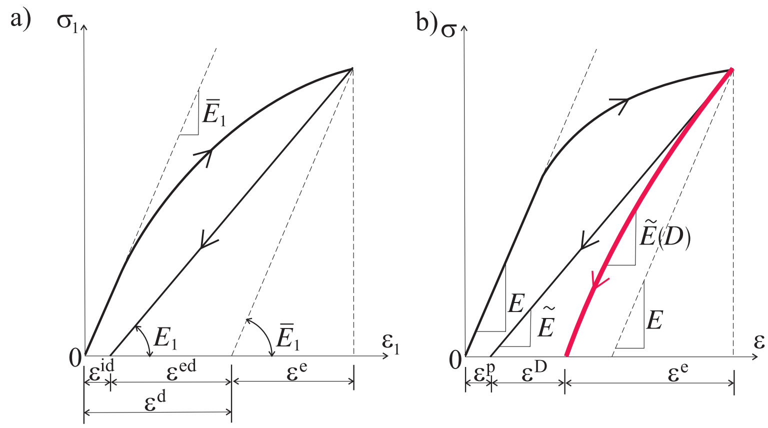
Uszkodzenie materiałów jest progresywnym, nieodwracalnym, fizycznym mikro-procesem zależnym od czasu w sposób bądź jawny (materiały lepko-sprężyste), bądź niejawny poprzez np. naprężenie/odkształcenie (materiały kruche typu beton). Uszkodzenie materiału skutkuje utratą tych właściwości, które są niezbędne do jego prawidłowej eksploatacji. Kruche uszkodzenie większości materiałów stosowanych w praktyce inżynierskiej, takich jak stale węglowe, beton, materiały ceramiczne i kompozyty jest na ogół związane z zarodkowaniem i wzrostem mikropęknięć. Złożona natura mechanizmów zarodkowania mikropęknięć, charakter ich propagacji do momentu koalescencji oraz tworzenie się makro-defektów wymaga stosowania różnych podejść w opisie materiału. Zwięzłą ich klasyfikację podano w pracach Chaboche'a [14], Skrzypka i Ganczarskiego [66] oraz Tikchomirova [70].

Zjawisko unilateralnego uszkodzenia, zwane również deaktywacją uszkodzenia bądź efektem zamykania/otwierania mikro-uszkodzeń, jest typowe dla sprężysto-plastycznych materiałów metalicznych poddanych naprzemiennym cyklom rozciągania-ściskania. W najprostszym przypadku, gdy na próbkę wykonaną ze sprężysto-plastycznego materiału metalicznego działa jednoosiowe obciążenie cykliczne, mikro-pustki pozostają otwarte pod wpływem rozciągania oraz zamykają się częściowo lub całkowicie pod wpływem ściskania, powodując że materiał uszkodzony zaczyna zachowywać się jak nieuszkodzony odzyskując tym samym pierwotną sztywność.

1.1. Motywacja – konieczność budowy modeli zawierających efekt unilateralny

Dotychczas rozwijane modele opisujące proces odciążania próbki materiału sprężysto-plastycznego z uszkodzeniami, np. model zaprezentowany w pracy Abu Al-Rub i Voyiadjis [4], nie uwzględniają zmiany kąta nachylenia ścieżki odciążania i przyjmują taką samą charakterystykę jak dla liniowo-sprężystej ścieżki odciążania, tzn. $\overline{E}_1$. Podejście takie charakteryzuje się znacznym przeszacowaniem odkształceń resztkowych $\varepsilon^{\mathrm{d}} = \varepsilon^{\mathrm{id}} + \varepsilon^{\mathrm{ed}}$ co przedstawiono na Rys. 1a. Przyjmując natomiast, że nachylenie ścieżki odciążania na Rys. 1a jest scharakteryzowane modułem E_1, uwzględniającym aktualny stan uszkodzenia, uzyskujemy wyniki bliższe rzeczywistym. W tym przypadku odkształcenie resztkowe wynosi $\varepsilon^{\mathrm{id}}$ zaś model był z powodzeniem stosowany przez Ganczarskiego [30, 31] w problemie grubościennej sfery.

Rozwiązaniem najbliższym rzeczywistemu zachowaniu materiału, jest pro-



Rysunek 1 Modelowanie ścieżki odciążenia w przypadku materiału sprężysto-plastycznego z uszkodzeniem: a) Abu Al-Rub i Voyiadjis [4], b) Ganczarski [32]

pozycja Ganczarskiego [32] polegająca na wprowadzeniu krzywoliniowej ścieżki odciążenia, której nachylenie jest zależne od aktualnego stopnia zamknięcia mikro-pustek (ang. opening-closure effect) $\widetilde{E}(D)$ – porównaj linia czerwona na Rys. 1b. Odpowiednie wartości odkształcenia resztkowego wynoszą kolejno $\varepsilon^{\mathrm{p}} = \varepsilon^{\mathrm{id}}$ natomiast $\varepsilon^{\mathrm{D}} < \varepsilon^{\mathrm{ed}}$. W konsekwencji można obserwować charakterystyczny efekt umocnienia towarzyszącego procesowi odciążenia. Jest on następstwem stopniowego zamykania się mikro-pustek czemu towarzyszy stopniowe odzyskiwanie pierwotnej sztywności, co będzie przedmiotem szczegółowej analizy w następnych rozdziałach pracy.

1.2. Krytyczny przegląd literatury w zakresie modelowania efektu unilateralnego

Matematyczny opis uszkodzenia unilateralnego jest oparty na dekompozycji tensora naprężenia lub odkształcenia na dodatnie oraz ujemne projektory zaproponowanej przez Ortiza [58]

$$\boldsymbol{a} = \underbrace{\begin{bmatrix} H(a_1) & & \\ & H(a_2) & \\ & & H(a_3) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Q}^{a+}} \cdot \boldsymbol{a} - \underbrace{\begin{bmatrix} H(-a_1) & & \\ & H(-a_2) & \\ & & H(-a_3) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Q}^{a-}} \cdot \boldsymbol{a} \quad (1)$$

W pracach Ladeveze i Lemaitre'a [49], Litewki [52], Mazarsa [53], Krajcinovica [46] odpowiednie definicje naprężenia bądź odkształcenia efektywnego zawierają funkcję Heaviside'a zerującą ich ujemne wartości własne

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{Q}^{\sigma+} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{Q}^{\varepsilon+} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

Oznacza to, że ujemne wartości własne tensorów naprężenia bądź odkształcenia pozostają nieaktywne w procesie uszkodzenia tak długo, aż warunki obciążenia spowodują ich ponowne uaktywnienie (porównaj Litewka [52]).

W bardziej ogólnym podejściu Murakami i Kamiya [57], Hayakawa i Murakami [42] zarówno dodatnie jak i częściowo ujemne wartości własne tensorów odkształcenia lub naprężenia mają wpływ na ewolucję uszkodzenia

$$\boldsymbol{\sigma}^* = (\boldsymbol{Q}^{\sigma+} - \zeta \boldsymbol{Q}^{\sigma-}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^* = (\boldsymbol{Q}^{\varepsilon+} - \boldsymbol{Q}^{\varepsilon-}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3}$$

gdzie $\zeta \in [0, 1]$.

Dodatnie części tensorów odkształcenia lub naprężenia mogą zostać wyrażone poprzez dodatnie operatory tensorowe czwartego rzędu określone na ich wektorach własnych (porównaj Krajcinovic [46], Hansen i Schreyer [41])

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{P}^{\sigma+} : \boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^+ = \boldsymbol{P}^{\varepsilon+} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{P}^{\sigma+} = \boldsymbol{Q}^{\sigma+} \otimes \mathbf{Q}^{\sigma+}$ oraz $\boldsymbol{P}^{\varepsilon+} = \boldsymbol{Q}^{\varepsilon+} \otimes \mathbf{Q}^{\varepsilon+}$, skąd wynika $\boldsymbol{P}^{\sigma+} = \boldsymbol{P}^{\varepsilon+} = \mathbf{I}$ jeśli tylko $\boldsymbol{Q}^{\sigma+} = \boldsymbol{Q}^{\varepsilon+} = \mathbf{1}$. Zdefiniowane powyżej projektory stanowią podstawę do wprowadzenia tensorów efektu uszkodzenia charakteryzujących się przykładową postacią

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{P}^{\sigma+} : \boldsymbol{D}, \tag{5}$$

które z kolei odgrywają fundamentalną rolę w budowie efektywnych tensorów sztywności bądź podatności

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{E} : \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}), \tag{6}$$

gdzie $\boldsymbol{E}$ jest tensorem sztywności Hooke'a o reprezentacji danej macierzą

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ograniczenia związane z konsystentnością unilateralnego uszkodzenia w świetle kontynualnej mechaniki uszkodzeń zostały szczegółowo przedyskutowane przez Chaboche'a i współpracowników [15, 16, 19]. Autorzy wykazali, że istniejące teorie rozwinięte przez Ramtani [63], Ju [45] czy Krajcinovica i Fonsekę [47] prowadzą w przypadku ogólnych wieloosiowych i nieproporcjonalnych ścieżek obciążenia do utraty symetrii przez tensor sztywności $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ bądź do nie fizycznych nieciągłości pojawiających się na krzywej naprężenie–odkształcenie Tablica 1.

Tablica 1 Utrata symetrii bądź brak ciągłości dwóch pierwszych składowych tensora sztywności $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ w klasycznych sformułowaniach wektorowych i tensorowych 2-go rzędu w porównaniu ze sformułowaniem konsystentnym (wg. Chaboche [18] oraz Welemane i Cormery [74])

Sformułowanie	Znaki składowych odkształcenia		
wektorowe	$\varepsilon_1 > 0$	$\varepsilon_2 > 0$	
Krajcinovica	$\lambda + 2\mu + 2(C_1 + C_2)\omega_1^2$	$\boxed{\lambda + C_1(\omega_2^2 + \omega_1^2)}$	
i Fonseki [47]	$\lambda + C_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)$	$\lambda + 2\mu + 2(C_1 + C_2)\omega_2^2$	brak
(zmienne uszko-	$\varepsilon_1 < 0$	$\varepsilon_2 > 0$	ciągłości
dzenia ω_1, ω_2)	$\lambda + 2\mu$	$\boxed{\lambda + C_1\omega_2^2}$	
	$\lambda + C_1\omega_2^2$	$\lambda + 2\mu + 2(C_1 + C_2)\omega_2^2$	
tensorowe	$\varepsilon_1 > 0$	$\varepsilon_2 > 0$	
2-go rzędu	$h_{11}^{+2} + \lambda(1-\delta)$	$h_{12}^{+2} + \lambda(1-\delta)$	
Ramtani [63]	$h_{12}^{+2} + \lambda(1-\delta)$	$h_{22}^{+2} + \lambda(1-\delta)$	
(zmienna	$\varepsilon_1 < 0$	$\varepsilon_2 > 0$	
uszkodzenia δ)	$h_{11}^{-2} + \lambda(1-\delta)$	$\boxed{h_{12}^{+2} + \lambda(1-\delta)}$	brak
	$\boxed{h_{12}^{-2} + \lambda(1-\delta)}$	$h_{22}^{+2} + \lambda(1-\delta)$	symetrii
tensorowe	$\varepsilon_1 > 0$	$\varepsilon_2 > 0$	
2-go rzędu	$\boxed{(\lambda + 2\mu)(1-d_1)^2}$	$\lambda(1-d_1)(1-d_2)$	
Cordebois i	$\lambda(1-d_1)(1-d_2)$	$(\lambda + 2\mu)(1-d_2)^2$	brak
Sidoroff [22]	$\varepsilon_1 < 0$	$\varepsilon_2 > 0$	ciągłości
(zmienne uszko-	$\boxed{\lambda + 2\mu}$	$\lambda(1-d_1)(1-d_2)$	
dzenia d_1, d_2)	$\lambda(1-d_1)(1-d_2)$	$(\lambda + 2\mu)(1-d_2)^2$	
tensorowe 4-go	$\varepsilon_1 > 0$	$\varepsilon_2 > 0$	
rzędu Halma i	$\lambda + 2\mu + 2(\alpha + 2\beta + \delta)d$	$\lambda + (\alpha + 2\delta)d$	
Dragona [39, 40]	$\lambda + (\alpha + 2\delta)d$	$\lambda + 2\mu + 2\delta d$	
(zmienna uszko-	$\varepsilon_1 < 0$	$\varepsilon_2 > 0$	
dzenia d, para-	$\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}\chi d$	$\lambda - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\chi d$	
metry deakty-	$\lambda - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\chi d$	$\lambda + 2\mu - \chi d$	
wacji: α, β, δ)	$\chi = \dfrac{(\lambda+\mu)^2(\alpha^2 - 8\beta\delta)}{2[2(\lambda+\mu)^2\beta + \mu^2\delta + \mu(\lambda+\mu)\alpha]}$		

Łatwo wykazać, że jeśli warunki unilateralne wpływają zarówno na diagonalne jak i pozadiagonalne składowe tensorów sztywności bądź podatności, to nieciągłość naprężenia pojawia się w momencie, gdy choćby jedna z wartości własnych tensora odkształcenia zmienia znak podczas, gdy pozostałe pozostają ustalone (Skrzypek i Kuna-Ciskał [68]).

W modelu zaproponowanym przez Chaboche'a [16] tylko diagonalne składowe odpowiadające ujemnym składowym normalnym odkształcenia są zastępowane przez początkowe (nieuszkodzone) wartości. Konsystentny opis efektu unilateralnego został podany przez Halma i Dragona [39, 40]. Wprowadzając nowy tensor uszkodzenia czwartego rzędu określony na wektorach własnych tensora uszkodzenia drugiego rzędu, autorzy uzyskali efekt zamykania/otwierania mikro-szczelin zgodny z ogólnymi warunkami ciągłości narzuconymi na odpowiedź rejestrowaną na krzywej naprężenie-odkształcenie (ostatnia pozycja w Tablicy 1).

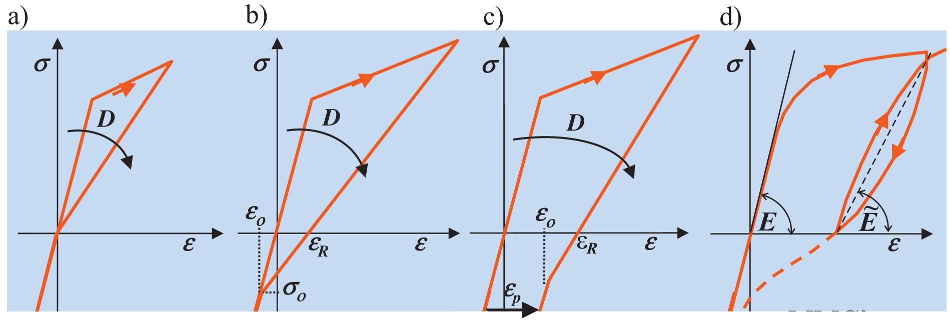
1.3. Cel i zakres pracy

Celem pracy jest z jednej strony wykazanie ułomności dotychczas stosowanych opisów, które zostały szczegółowo omówione w poprzednim punkcie, oraz z drugiej strony postulat wprowadzenia nowego a zarazem oryginalnego opisu zawierającego analizę kolejnych faz procesu stopniowego (progresywnego) zamykania mikro-pustek w materiale z uszkodzeniami. Istotnym elementem pracy będzie wykazanie przydatności proponowanego modelu do modelowania zniszczenia towarzyszącego procesom cyklicznym w wybranych materiałach konstrukcyjnych.

Realizacja celu pracy wymaga dokonania pogłębionej analizy, wykraczającej poza ocenę stanu wiedzy, zachowania próbek w warunkach obciążeń zewnętrznych odpowiadających otoczeniu punktu deaktywacji uszkodzenia. Metodykę opracowania tego fragmentu rozprawy oparto o analizę, zaproponowanych przez Chaboche'a [18], hierarchicznych modeli deaktywacji uszkodzenia pokazanych na Rys. 2.

Pierwszy z nich, przedstawiający materiał sprężysty z deaktywacją uszkodzenia (Rys. 2a), charakteryzuje się tym, że deaktywacja uszkodzenia następuje w momencie zmiany znaku naprężenia z rozciągania na ściskanie. Towarzyszy temu wyraźny efekt odzyskania pierwotnej sztywności zaś odpowiednia pętla histerezy wykazuje dodatnie pole (równe rozpraszanej energii) wyłącznie dla dodatnich wartości odkształcenia oraz naprężenia.

W drugim przypadku, materiału sprężystego z uszkodzeniem oraz trwałym odkształceniem (Rys. 2b), całkowitemu odciążeniu odpowiada dodatnie



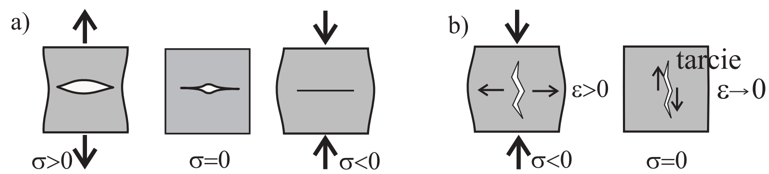
Rysunek 2 Hierarchiczne modele deaktywacji uszkodzenia wg. Chaboche'a [18]: a) sprężysty z deaktywacją uszkodzenia, b) sprężysty z uszkodzeniem oraz trwałym odkształceniem, c) sprężysto-plastyczny z uszkodzeniem, d) sprężysto-lepkoplastyczny z uszkodzeniem wykazujący histezę

odkształcenie resztkowe $\varepsilon_{\mathrm{R}} > 0$, natury sprężysto-uszkodzeniowej (porównaj Rys. 1). Natomiast do uruchomienia procesu deaktywacji uszkodzenia jest niezbędne przyłożenie ujemnego co do znaku odkształcenia $\varepsilon_0 < 0$, korespondującego zwykle z osiągnięciem granicy plastyczności na ściskanie. Pętla histerezy ograniczona jest w tym przypadku dużym co do wartości polem odpowiadającym stanowi rozciągania oraz niewielkim polem przypisanym stanowi ściskania.

Materiał sprężysto-plastyczny z uszkodzeniem przedstawiony na Rys. 2c również wykazuje dodatnie odkształcenie resztkowe $\varepsilon_{\mathrm{R}} > 0$ przy całkowitym odciążeniu, tym razem jednak o naturze plastyczno-uszkodzeniowej (porównaj Rys. 1). Aby uruchomić proces deaktywacji uszkodzenia wystarcza obecnie osiągnięcie przez odkształcenie wartości $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_{\mathrm{R}}$, co w konsekwencji prowadzi do przyjęcia przez część pętli histerezy odpowiadającej ściskaniu postaci trapezu o średniej szerokości równej ε_{p}.

Ostatni z modeli pokazanych na Rys. 2d odnosi się do materiału sprężysto-lepkoplastycznego z uszkodzeniem wykazującego histezę lecz pod względem jakościowym nadaje się również do opisu uszkodzenia w materiałach kruchych typu beton. Jego właściwości sprężysto-lepkoplastyczne powodują, że praktycznie już od samego początku jest on nieliniowy, a ponadto ścieżki odciążenia oraz ponownego sprężystego obciążenia różnią się wypukłością, ograniczając pętlę histerezy o średnim nachyleniu zależnym od uszkodzenia.

Innym aspektem związanym ściśle z deaktywacją uszkodzenia jest zależność tego ostatniego od stanu naprężenia bądź stanu odkształcenia. Ogólnie w większości materiałów wykazujących właściwości sprężysto-plastyczne (materiały metaliczne) mikro-pustki doznają pełnego otwarcia przy rozciąganiu. Po całkowitym odciążeniu zazwyczaj ulegają one częściowemu zamknięciu. Natomiast w celu całkowitego ich domknięcia konieczne jest wprowadzenie ściskania (Rys. 3a). Zatem uszkodzenie w materiałach sprężysto-plastycznych zależy zazwyczaj od naprężenia.



Rysunek 3 Fazy odciążania materiału: a) sprężysto-plastycznego, b) kruchego

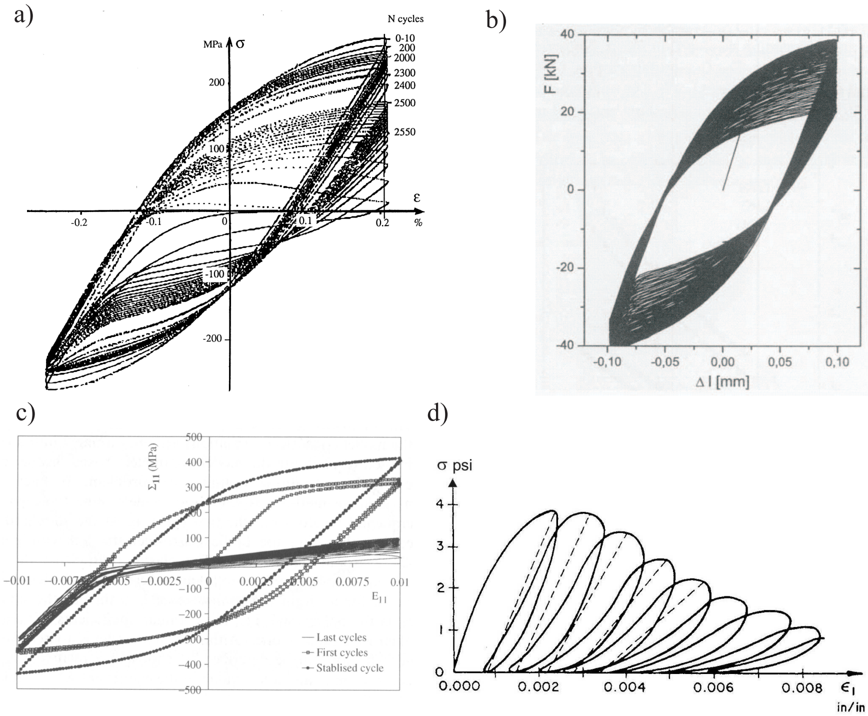
W materiałach kruchych o znikomej wytrzymałości na rozciąganie (beton, skała) mikro-pustki towarzyszące ściskaniu są bezpośrednio wywołane przez dodatnie odkształcenie w kierunku poprzecznym. Z uwagi na zazwyczaj bardzo silną chropowatość krawędzi mikro-pustek ich zamykanie w procesie odciążania jest praktycznie niemożliwe, a ewentualnemu przemieszczaniu po sobie towarzyszy tarcie (Rys. 3b).

Graficzne przedstawienie na wykresach odkształcenie–naprężenie bądź przemieszczenie–siła powyższego prostego modelu mechanicznego prowadzi do biliniowej ścieżki odciążenia. Rzeczywiste materiały nie wykazują takiej charakterystyki.

W zakresie pracy mieszczą się zatem zarówno wprowadzenie nowego opisu tzw. ciągłej deaktywacji mikro-pustek, pozwalającego na wyeliminowanie nieciągłości pomiędzy częściami ścieżki odciążenia odpowiadającymi stanom aktywacji i deaktywacji uszkodzenia, jak również weryfikacja z szeregiem obserwacji doświadczalnych dotyczących zachowania się różnych materiałów konstrukcyjnych takich jak: stale konstrukcyjne, stopy aluminium oraz beton, poddanych obciążeniom cyklicznym (Rys. 4).

Wszystkie te materiały wykazują unilateralny, czyli inny dla rozciągania a inny dla ściskania, spadek amplitudy siły (lub naprężenia) oraz spadek modułu sprężystości towarzyszący procesowi uszkodzenia. Jak dotychczas efekty tego typu nie zostały jeszcze dokładnie ujęte w opisach teoretycznych powszechnie stosowanych dla powyższych materiałów.

Pierwszy z rysunków (Rys. 4a) przedstawia wyniki testu niskocyklowego dla stali stopowej AISI 316L przeprowadzonego przez Dufailly [28]. Materiał poddany cyklom o stałej amplitudzie odkształcenia wykazuje równoczesne wzmocnienie typu mieszanego podczas każdego z cykli wraz z równoczesnym osłabieniem z cyklu na cykl wywołanym narastającym uszkodzeniem. Spadek



Rysunek 4 Wyniki prób zniszczenia niskocyklowego materiałów konstrukcyjnych: a) stal stopowa 316L (Dufailly [28]), b) stal ferrytyczna (Brocks i Steglich [9]), c) stop Al-2024 (Abdul-Latif i Chadli [1]), d) beton (Sinha i inni [65])

amplitudy naprężenia oraz modułu sprężystości wykazuje silny efekt unilateralny, co jest widoczne na przykładzie wyraźnej asymetrii zakresu rozciągania i ściskania. W końcowej fazie, bezpośrednio poprzedzającej zerwanie próbki, po stronie rozciągania następuje pojawienie się punktu niestateczności z jednoczesnym utworzeniem się punktu przegięcia na gałęzi histerezy odpowiadającej ściskaniu. W celu jak najwierniejszego oddania powyższego zachowania zastosowany zostanie model hierarchiczny deaktywacji uszkodzenia przedstawiony na Rys. 2a i uwzględniający wpływ dwóch niezależnych zmiennych uszkodzenia sterowanych naprężeniem.

Na kolejnym rysunku (Rys. 4b) pokazano wyniki testu zniszczenia niskocyklowego próbki z karbem wykonanej ze stali ferrytycznej 20MnMoNi55 przeprowadzonego przez Brocksa i Steglicha [9]. Testy o stałej amplitudzie przemieszczenia ujawniają wyraźny efekt Buschingera towarzyszący plastycznemu osłabieniu w miarę wzrostu liczby cykli. W porównaniu do testu dla stali stopowej AISI 316L nie daje się zauważyć powstawania punktu niestateczności siły natomiast można zaobserwować utworzenie punktu przegięcia w części histerezy odpowiadającej zakresowi ściskania. Numeryczne modelowanie takiego procesu zostanie przeprowadzone w oparciu o model hierarchiczny deaktywacji uszkodzenia jak w przypadku poprzednim, jednak ograniczony do pojedynczej zmiennej uszkodzenia i uogólniony na przypadek skończonych deformacji.

Wyniki testu zniszczenia niskocyklowego dla stopu Al-2024 przeprowadzonego przez Abdul-Latifa i Chadli [1] zademonstrowano na Rys. 4c. Próba naprzemiennego rozciągania-ściskania o stałej amplitudzie odkształcenia wykonana na cienkościennych próbkach walcowych wykazała wzmocnienie plastyczne typu mieszanego dążące do osiągnięcia cyklu ustabilizowanego. Następnie na skutek wzrostu uszkodzenia doszło do usłabienia materiału z cyklu na cykl z coraz silniej zaznaczającą się asymetrią spadku siły oraz wartości modułu sprężystości pomiędzy zakresami rozciągania i ściskania. W procesie tym obserwowane jest również stopniowe zmniejszanie się pola ograniczonego kolejnymi pętlami histerezy oraz przejście na wklęsłą dolnej jej gałęzi. W modelowaniu materiału tego typu zostanie użyty model hierarchiczny deaktywacji uszkodzenia pokazany na Rys. 2c (przy $\varepsilon < 0$) z pojedynczą zmienną uszkodzenia sterowaną naprężeniem.

Ostatni z rysunków (Rys. 4d) dotyczy wyników próby jednoosiowego cyklicznego ściskania betonu Sinha i inni [65] przez co wymaga odrębnego omówienia. Beton zaliczany jest do klasy materiałów kruchych o znikomej, w przypadku braku zbrojenia, wytrzymałości na rozciąganie w stosunku do wytrzymałości na ściskanie. W związku z powyższym wykorzystując konwencję znakowania naprężenia oraz odkształcenia zaczerpniętą z teorii materiałów kruchych oraz sypkich cały wykres odnoszący się do ściskania został umieszczony w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Występowanie pewnej liczby mikro-uszkodzeń w betonie w stanie pierwotnym powoduje, że wykazuje on od samego początku nieliniową charakterystykę. W początkowym zakresie jest to charakterystyka wznosząca (nieliniowe umocnienie odkształceniowe), która po osiągnięciu maksimum naprężenia przechodzi w opadającą (nieliniowe osłabienie odkształceniowe). Próba cyklicznego ściskania betonu ujawnia występowanie krzywoliniowych ścieżek odpowiadających kolejnym odciążeniom i ponownym obciążeniom sprężystym, które są pętlami zmieniającymi wymiary oraz średnie pochylenie. Zatem do modelowania materiału typu beton zostanie zastosowany model hierachiczny deaktywacji uszkodzenia zaprezentowany na Rys. 2d z pojedynczą zmienną uszkodzenia sterowaną odkształceniem.

2. Koncepcja efektu ciągłej deaktywacji mikro-pustek

2.1. Główne założenia sformułowania

Omawianie klasycznego (nieciągłego) efektu deaktywacji uszkodzenia rozpocząć należy od podania koncepcji zaproponowanej przez Lemaitre'a [50].

W przypadku jednoosiowego naprężenia rozciągającego oraz uszkodzenia typu skalarnego, naprężenie efektywne zdefiniowane jest w następujący sposób

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \tag{8}$$

podczas gdy odpowiedni efektywny moduł sprężystości przyjmuje postać

$$\widetilde{E} = E\,(1-D)\,. \tag{9}$$

Powyższe zależności zachowują swoją ważność również w przypadku, gdy uszkodzenia pozostają otwarte pod działaniem jednoosiowego naprężenia ściskającego. Jednakże dla pewnej klasy materiałów oraz obciążeń uszkodzenia mogą ulegać zamknięciu przy ściskaniu. Efekt ten jest cechą charakterystyczną materiałów kruchych.[1] W przypadku, gdy uszkodzenia ulegają całkowitemu zamknięciu należy zdefiniować dwa komplety warunków, odrębnie dla rozciągania oraz ściskania

$$\widetilde{\sigma} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{1-D} \\ \sigma \end{cases} \qquad \widetilde{E} = \begin{cases} E\,(1-D) & \text{gdy} \quad \sigma > 0 \\ E & \text{gdy} \quad \sigma < 0\,. \end{cases} \tag{10}$$

Uszkodzenia występujące w rzeczywistym materiale posiadają zwykle skomplikowany kształt nie pozwalający im na całkowite zamknięcie. W celu uwzględnienia tego efektu do warunków obwiązujących dla ściskania wprowadza się parametr zamknięcia mikro-pustek (crack closure parameter) h $(0 \leqslant h \leqslant 1)$. W związku z czym odpowiednie warunki dla rozciągania oraz ściskania przyjmują następującą postać

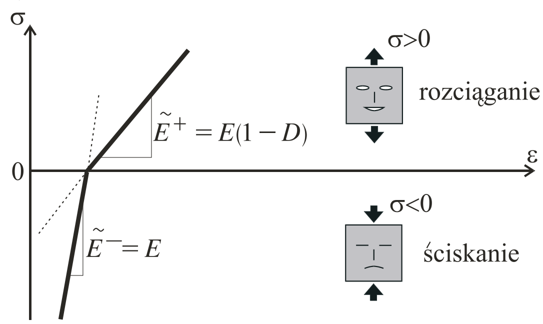
$$\widetilde{\sigma} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{1-D} \\ \dfrac{\sigma}{1-Dh} \end{cases} \qquad \widetilde{E} = \begin{cases} E\,(1-D) & \text{gdy} \quad \sigma > 0 \\ E\,(1-Dh) & \text{gdy} \quad \sigma < 0\,. \end{cases} \tag{11}$$

[1] Należy w tym miejscu wyraźnie podkreślić, iż chodzi o całkowite zamykanie mikro-pustek powstających w materiale kruchym na skutek rozciągania (efekt pękania) w przeciwieństwie do mikro-pustek towarzyszących ściskaniu (efekt kruszenia), rządzonych zupełnie innym mechanizmem

W ogólności parametr zamknięcia mikro-pustek h zależy zarówno od rodzaju materiału jak również od wielkości obciążenia, jednak w celu uproszczenia obliczeń zakłada się jego stałą wartość, która dla szerokiej klasy materiałów jest przyjmowana jako uniwersalna stała równa $h_\mathrm{c} = 0.2$ – krytyczna wartość domknięcia mikro-pustek (porównaj Lemaitre [50])

$$\widetilde{\sigma} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{1 - D} \\ \dfrac{\sigma}{1 - Dh_\mathrm{c}} \end{cases} \qquad \widetilde{E} = \begin{cases} E\,(1 - D) & \text{gdy} \quad \sigma > 0 \\ \\ E\,(1 - Dh_\mathrm{c}) & \text{gdy} \quad \sigma < 0\ . \end{cases} \tag{12}$$

Zastosowanie takiego modelu do opisu ścieżki odciążenia prowadzi do liniowej zależności pomiędzy spadkiem naprężenia oraz spadkiem odkształcenia scharakteryzowanej modułem $\widetilde{E}^+$. Przejście do zakresu ściskania powoduje przeskok na drugą gałąź ścieżki odciążenia-obciążenia scharakteryzowanej modułem $\widetilde{E}^-$ (Rys. 5).



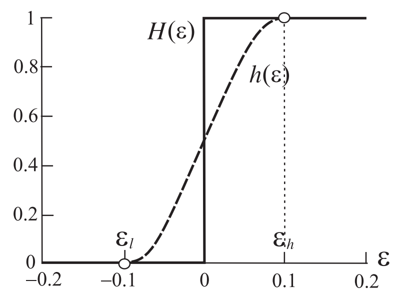
Rysunek 5 Koncepcja biliniowej ścieżki odciążenia

Rzeczywisty materiał nie wykazuje takiej biliniowej charakterystyki. Koncepcja ciągłej deaktywacji mikro-pustek zaproponowana przez Hansena i Schreyera [41], pozwalająca na wyeliminowanie załomu pomiędzy $\widetilde{E}^+$ i $\widetilde{E}^-$, polega oryginalnie na zastąpieniu parametru h funkcją $h(\varepsilon)$ według wzoru

$$h\,(\varepsilon) = \begin{cases} 0.0 & \text{gdy} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_l \\ 0.5\left[1 - \cos\left(\pi \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_l}{\varepsilon_h - \varepsilon_l}\right)\right] & \text{gdy} \quad \varepsilon_l < \varepsilon < \varepsilon_h \\ 1.0 & \text{gdy} \quad \varepsilon_h \leq \varepsilon\ , \end{cases} \tag{13}$$

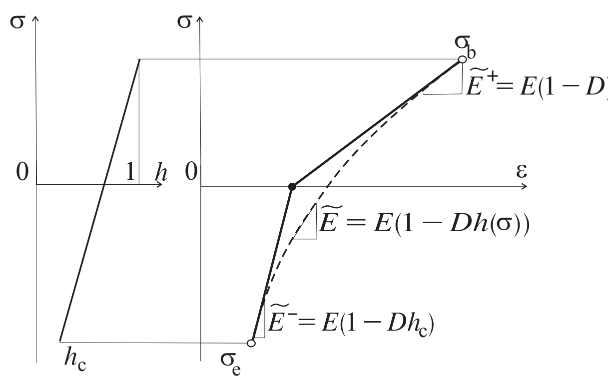
co graficznie odpowiada zastąpieniu funkcji Heaviside'a przez funkcję ciągłą pokazaną na Rys. 6. Natomiast w rozważanym przypadku proponowana jest liniowa zależność od naprężenia opisana wzorem

$$h\,(\sigma) = h_\mathrm{c} + (1 - h_\mathrm{c})\,\frac{\sigma - \sigma_\mathrm{e}}{\sigma_\mathrm{b} - \sigma_\mathrm{e}}\ , \tag{14}$$



Rysunek 6 Koncepcja ciągłej deaktywacji mikro-pustek Hansena i Schreyera [41]

gdzie σ_b, σ_e oznaczają odpowiednio wartość naprężenia, przy której następuje początek oraz koniec procesu deaktywacji uszkodzenia. Zależność (14) posiada fizyczną interpretację polegającą na tym, że mikro-uszkodzenia zamykają się nie w sposób natychmiastowy lecz stopniowo (Rys. 7).



Rysunek 7 Koncepcja ciągłej deaktywacji mikro-uszkodzeń

2.2. Propozycja nowych równań konstytutywnych zawierających efekt ciągłej deaktywacji mikro-pustek

Rozróżnienie rozciągania od ściskania, będące kluczem do wyprowadzenia zależności rządzących efektem deaktywacji mikro-uszkodzeń, jest proste w przypadku jednowymiarowym lecz analogiczna partycja tensora naprężenia w przypadku 3D wcale nie jest trywialna. Jeśli posłużyć się reprezentacją tensora naprężenia (poprzez jego wartości własne) nawiązującą do koncepcji Ortiza [58] (1), to można wykonać następującą dekompozycję zaproponowaną przez

Lemaitre'a [50]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\} = \langle\boldsymbol{\sigma}^+\rangle - \langle\boldsymbol{\sigma}^-\rangle \\ &= \begin{bmatrix} \langle\sigma_1\rangle & & \\ & \langle\sigma_2\rangle & \\ & & \langle\sigma_3\rangle \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle-\sigma_1\rangle & & \\ & \langle-\sigma_2\rangle & \\ & & \langle-\sigma_3\rangle \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{15}$$

która w przypadku uszkodzenia typu skalarnego oraz zasady równoważności odkształceń pozwala wyprowadzić następujące wzory określające naprężenie efektywne

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\pm} = \begin{cases} \dfrac{\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle}{1-D} + \dfrac{\frac{\nu}{1-2\nu}\left[\mathrm{Tr}\,\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle - \langle\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle\right]}{1-D}\mathbf{1} \\ -\dfrac{\langle-\boldsymbol{\sigma}\rangle}{1-Dh_\mathrm{c}} - \dfrac{\frac{\nu}{1-2\nu}\left[\mathrm{Tr}\,\langle-\boldsymbol{\sigma}\rangle - \langle-\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle\right]}{1-Dh_\mathrm{c}}\mathbf{1}\,. \end{cases} \tag{16}$$

Ze struktury wzoru (16) wynika, iż wyrazy poprzedzone mnożnikiem $\nu/(1-2\nu)$ wprowadzają sprzężenie znikające w przypadku gdy wartości własne tensora naprężenia są tego samego znaku

$$\begin{array}{lllllll} \text{jesli} & \sigma_1>0 & \wedge & \sigma_2>0 & \wedge & \sigma_3>0 & \text{to} \quad \mathrm{Tr}\,\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \langle\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle \\ \text{jesli} & \sigma_1<0 & \wedge & \sigma_2<0 & \wedge & \sigma_3<0 & \text{to} \quad \mathrm{Tr}\,\langle-\boldsymbol{\sigma}\rangle = \langle-\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle \end{array} \tag{17}$$

a w konsekwencji uproszczone definicje naprężenia efektywnego oraz tensora efektywnych modułów sprężystości opisane są wzorami

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\pm} = \begin{cases} \dfrac{\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle}{1-D} \\ -\dfrac{\langle-\boldsymbol{\sigma}\rangle}{1-Dh_\mathrm{c}} \end{cases} \qquad \widetilde{\boldsymbol{E}}^{\pm} = \begin{cases} \boldsymbol{E}\,(1-D) \\ \\ \boldsymbol{E}\,(1-Dh_\mathrm{c})\,. \end{cases} \tag{18}$$

Oryginalną propozycją autora jest próba uwzględnienia efektu ciągłej deaktywacji mikro-uszkodzeń (14) na przypadek naprężenia efektywnego oraz tensora efektywnych modułów sprężystości opisanych wielkościami tensorowymi. Ponieważ parametr efektu ciągłej deaktywacji mikro-uszkodzeń h podany zależnością (14) dotyczy jednoosiowego stanu naprężenia jego uogólnienie na stan trójosiowy wymaga wprowadzenia dodatkowej hipotezy wiążącej h ze skalarną miarą tensora naprężenia

$$h\,(\boldsymbol{\sigma}) = h_\mathrm{c} + (1-h_\mathrm{c})\,\frac{\chi\,(\boldsymbol{\sigma}) - \chi\,(\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{e})}{\chi\,(\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{b}) - \chi\,(\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{e})}\ , \tag{19}$$

w której użyto znanej funkcji Hayhursta

$$\chi\left(\boldsymbol{\sigma}\right)=\beta \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)+\left(1-\beta\right)J_2\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\ . \tag{20}$$

Ostatecznie odpowiedni tensor efektywnych modułów sprężystości przyjmuje postać

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}\left\{1-D\left[h_{\mathrm{c}}+\left(1-h_{\mathrm{c}}\right)\frac{\chi\left(\boldsymbol{\sigma}\right)-\chi\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}}\right)}{\chi\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{b}}\right)-\chi\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}}\right)}\ .\right]\right\} \tag{21}$$

W bardziej ogólnym przypadku, gdy uszkodzenie opisane jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu typu Murakami–Ohno reprezentowanym przez swoje wartości własne

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\left\{D_1,D_2,D_3\right\} \tag{22}$$

oraz przy założeniu, iż wektory własne tensorów uszkodzenia i naprężenia pokrywają się, tensor naprężenia efektywnego przyjmuje następującą postać (porównaj Lemaitre [50])

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\pm}=\begin{cases}\left\langle\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(1-\boldsymbol{D}\right)^{-1}\right\rangle+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\mathrm{Tr}\left\langle\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(1-\boldsymbol{D}\right)^{-1}\right\rangle\right.\\ \qquad\left.-\left\langle\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(1-\boldsymbol{D}\right)^{-1}\right]\right\rangle\right)\mathbf{1}\\ -\left\langle-\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(1-\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{h}\right)^{-1}\right\rangle-\frac{\nu}{1-\nu}\left(-\mathrm{Tr}\left\langle\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(1-\boldsymbol{D}\right)^{-1}\right\rangle\right.\\ \qquad\left.-\left\langle\mathrm{Tr}\left[-\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(1-\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{h}\right)^{-1}\right]\right\rangle\right)\mathbf{1}\ ,\end{cases} \tag{23}$$

gdzie $\boldsymbol{h}$ oznacza tensor drugiego rzędu $\boldsymbol{h}=\mathrm{diag}\left\{h_{1\mathrm{c}},h_{2\mathrm{c}},h_{3\mathrm{c}}\right\}$. Tak jak poprzednio, w przypadku gdy wartości własne tensora naprężenia są tego samego znaku, wyrazy poprzedzone mnożnikiem $\nu/(1-2\nu)$ znikają i tensor naprężenia efektywnego przyjmuje uproszczoną postać

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\pm}=\begin{cases}\left\langle\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(1-\boldsymbol{D}\right)^{-1}\right\rangle\\ -\left\langle-\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(1-\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{h}\right)^{-1}\right\rangle\ .\end{cases} \tag{24}$$

Uwzględnienie w modelu efektu ciągłej deaktywacji mikro-uszkodzeń odbywa się poprzez wprowadzenie zmodyfikowanego tensora sprężystości w postaci addytywnej

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}:\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{D}\right)+\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{D}\right):\boldsymbol{E}\right] \tag{25}$$

wykorzystującą następującą definicję zmodyfikowanego tensora efektu uszkodzenia

$$\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{D}\right)=\begin{bmatrix} M_{11} & & & & & \\ & M_{22} & & & & \\ & & M_{33} & & & \\ & & & M_{13} & & \\ & & & & M_{32} & \\ & & & & & M_{21} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

gdzie

$$M_{ij}=\frac{1-D_i\left(h_{\mathrm{c}}+\left(1-h_{\mathrm{c}}\right)\frac{\sigma_i-\sigma_{i\mathrm{e}}}{\sigma_{i\mathrm{b}}-\sigma_{i\mathrm{e}}}\right)+1-D_j\left(h_{\mathrm{c}}+\left(1-h_{\mathrm{c}}\right)\frac{\sigma_j-\sigma_{j\mathrm{e}}}{\sigma_{j\mathrm{b}}-\sigma_{j\mathrm{e}}}\right)}{2} \tag{27}$$

albo w postaci multiplikatywnej

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{D}\right):\boldsymbol{E}:\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{D}\right) \tag{28}$$

o definicji zmodyfikowanego tensora efektu uszkodzenia analogicznej do (26) lecz składowych wyrażonych zależnością

$$M_{ij}=\sqrt{\left[1-D_i\left(h_{\mathrm{c}}+\left(1-h_{\mathrm{c}}\right)\frac{\sigma_i-\sigma_{i\mathrm{e}}}{\sigma_{i\mathrm{b}}-\sigma_{i\mathrm{e}}}\right)\right]\left[1-D_j\left(h_{\mathrm{c}}+\left(1-h_{\mathrm{c}}\right)\frac{\sigma_j-\sigma_{j\mathrm{e}}}{\sigma_{j\mathrm{b}}-\sigma_{j\mathrm{e}}}\right)\right]} \tag{29}$$

3. Adaptacja metod numerycznych do rozwiązywania problemów brzegowych zawierających efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia

Problemy brzegowe rozpatrywane w pracy to układy równań różniczkowych zwyczajnych oraz układy równań różniczkowych cząstkowych. Z punktu widzenia metod numerycznych takie rozróżnienie jest istotne ponieważ w pierwszym przypadku naturalnym narzędziem rozwiązania problemu jest numeryczne całkowanie równań stanu metodą strzału, natomiast w przypadku drugim najbardziej rozpowszechnioną jest metoda elementów skończonych.

Należy w tym miejscu wyraźnie podkreślić, że gdy chodzi o standardowe algorytmy numeryczne obu metod to zostały one wielokrotnie opublikowane w specjalistycznej literaturze i nie stanowią przedmiotu tej pracy. Istotą tego rozdziału jest natomiast ich modyfikacja pozwalająca na wprowadzenie efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia wraz z sygnalizacją ewentualnych pułapek związanych z jego implementacją.

3.1. Numeryczne całkowanie równań stanu metodą strzału (Press i inni [62])

W standardowym sformułowaniu dwu-punktowego problemu poszukujemy rozwiązania układu N sprzężonych równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} = g_i\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_N\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{30}$$

spełniających n_1 warunków brzegowych w punkcie startowym x_1

$$B_{1j}\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_N\right) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n_1 \tag{31}$$

oraz pozostałe $n_2 = N - n_1$ warunków brzegowych w punkcie końcowym x_2

$$B_{2k}\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_N\right) = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n_2\ . \tag{32}$$

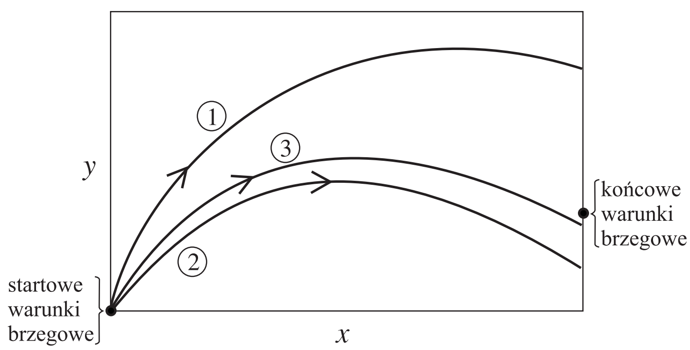
Numeryczna implementacja całkowania metodą strzału oparta jest na wielowymiarowej, globalnie zbieżnej metodzie Netwona–Raphsona, poszukiwania rozwiązania n_2 równań z n_2 niewiadomymi. W punkcie startowym x_1 jest N wartości startowych y_i ale tylko n_1 warunków brzegowych, zatem pozostaje $n_2 = N - n_1$ wartości „dowolnych”. Przyjmując, że te „dowolne” wartości są współrzędnymi wektora $\mathbf{V}$, określonego w przestrzeni n_2 wymiarowej, użytkownik w procedurze *load.for* generuje kompletny wektor startowy $\mathbf{y}$, spełniający n_1 warunków brzegowych w punkcie x_1 uzupełniony wektorem $\mathbf{V}$

$$y_i\left(x;V_1,V_2,\ldots,V_{n_2}\right) \qquad i=1,2,\ldots,N \tag{33}$$

Wybierając pewien wektor $\mathbf{V}$ definiujemy wektor startowy $\mathbf{y}(x_1)$, który następnie poprzez całkowanie układu równań (30) traktowanego jako problem początkowy prowadzi do rozwiązania $\mathbf{y}(x_2)$. Jeśli zdefiniować wektor „niedokładności" (discrepancy vektor) $\mathbf{F}$ również określony w przestrzeni n_2 wymiarowej, w taki sposób iż jego współrzędne są miarą oddalenia rozwiązania od warunków brzegowych w x_2

$$F_k=B_{2k}\left(x,\mathbf{y}\right) \qquad k=1,2,\ldots,n_2 \tag{34}$$

to użytkownik w procedurze *score.for* zamienia N wymiarowy wektor rozwiązań $\mathbf{y}(x_2)$ na n_2 wymiarowy wektor $\mathbf{F}$. W powyższy sposób, z punktu widzenia metody Newtona–Raphsona, problem został sprowadzony do zadania polegającego na poszukaniu wartości wektora $\mathbf{V}$ zerującego wartości wektora $\mathbf{F}$ (Rys. 8). Stosując algorytm numeryczny *newt.for* rozwiązywany jest układ



Rysunek 8 Graficzny schemat metody strzału (Press i inni [62])

równań liniowych z n_2 niewiadomymi

$$\mathbf{J}\cdot\delta\mathbf{V}=-\mathbf{F} \tag{35}$$

a następnie dodawana poprawka

$$\mathbf{V}^{\mathrm{new}}=\mathbf{V}^{\mathrm{old}}+\delta\mathbf{V} \tag{36}$$

Formuła (35) zawiera macierz jakobianu $\mathbf{J}$ posiadającą następującą reprezentację

$$J_{ij}=\frac{\partial F_i}{\partial V_j} \tag{37}$$

w ogólnym przypadku bardzo skomplikowaną jeśli chodzi o analityczne obliczenia odpowiednich pochodnych cząstkowych, zatem wykorzystuje się procedurę $fdjac.for$ obliczającą przybliżoną wartość jakobianu w sposób numeryczny

$$\frac{\partial F_i}{\partial V_j} \approx \frac{F_i\left(V_1, \ldots, V_j + \Delta V_j, \ldots\right) - F_i\left(V_1, \ldots, V_j, \ldots\right)}{\Delta V_j} \; . \tag{38}$$

Kody źródłowe procedur CYCLET oraz DERIVS, które posłużyły między innymi do rozwiązania zagadnienia zniszczenia niskocyklowego stopu Al-2024 omówionego z rozdziale 4.2, wykorzystujące omawiany algorytm numerycznego całkowanie równań stanu metodą strzału zostały zamieszczone w Dodatku.

3.2. Metoda elementów skończonych (Hinton i Owen [59])

Zastosowanie metody elementów skończonych do szerokiej klasy nieliniowych wiąże się z problemem rozwiązania układu równań w postaci

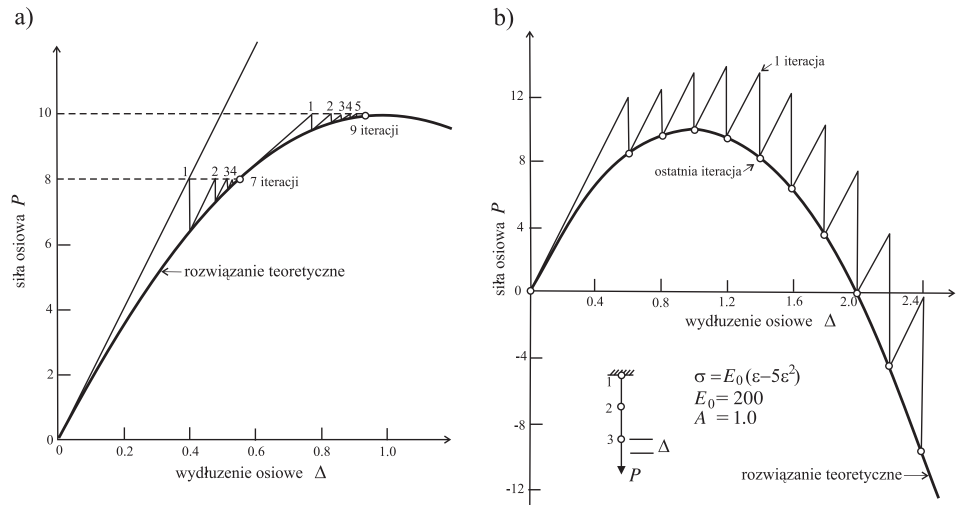
$$\mathbf{KU} + \mathbf{F} = 0 \; , \tag{39}$$

gdzie $\mathbf{U}$ oznacza wektor niewiadomych, $\mathbf{F}$ jest wektorem przyłożonych obciążeń, a $\mathbf{K}$ globalną macierzą sztywności. W przypadku, gdy macierz $\mathbf{K}$ zależy od niewiadomych $\mathbf{U}$ lub ich pochodnych, problem staje się nieliniowy i układ (39) należy rozwiązywać iteracyjnie. W literaturze znanych jest szereg metod opartych na bezpośredniej iteracji, zastosowaniu metody Newtona–Raphsona wraz z modyfikacjami, czy sformułowaniu wykorzystującym macierz ściśle styczną. Niestety wszystkie one nie nadają się do rozwiązywania zadań charakteryzujących się plastycznym osłabieniem materiału, dla których na ścieżce przemieszczenie–siła pojawia się punkt niestateczności (Rys. 9a).

Powyższe spostrzeżenie ma ogromne znaczenie dla dalszych rozważań dotyczących modelowania materiału typu beton (Rys. 2d), gdyż omawiane algorytmy są zbieżne jedynie dla początkowego zakresu krzywej $\sigma - \varepsilon$, natomiast zupełnie zawodzą w przypadku przekroczenia punktu odpowiadającego maksimum naprężenia nie wspominając już o próbie podążania ścieżką odciążenia.

W przypadkach, gdy materiał wykazuje niestateczność bardzo efektywny okazuje się algorytm oparty na macierzy początkowej sztywności (ang. initial stiffness method). Proces iteracyjny rozpoczyna się od znalezienia wartości startowej $\mathbf{U}^0$ tak, aby macierz ściśle styczna $\mathbf{K}(\mathbf{U}^0)$ odpowiadająca stanowi przemieszczenia była określona przez rezydualne siły

$$\mathbf{RU}^0 = \mathbf{KU}^0 + \mathbf{F} \neq 0 \tag{40}$$



Rysunek 9 Porówanie zbieżności rozwiązań nieliniowego zagadnienia: a) modyfikowana metoda Newtona–Raphsona, b) metoda macierzy początkowej sztywności w przypadku materiału wykazującego niestateczność (Hinton i Owen [59])

nowe poprawione rozwiązanie $\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}^0 + \Delta\mathbf{U}^0$ budowane jest w oparciu o poprawkę obliczoną następującą formułą

$$\Delta\mathbf{U}^r = -\left[\mathbf{K}\left(\mathbf{U}^0\right)\right]^{-1}\mathbf{R}\left(\mathbf{U}^r\right) \ . \tag{41}$$

Metoda jest bezwarunkowo zbieżna i może być stosowana do przypadków, gdy materiał wykazuje nawet ujemną sztywność (Rys. 9b). Liczba iteracji niezbędnych do uzyskania zbieżności metodą macierzy początkowej sztywności jest oczywiście znacznie większa (w przybliżeniu dwukrotnie) w stosunku do analogicznej liczby iteracji w metodach macierzy stycznej.

3.3. Rozkład macierzy według wartości osobliwych (Press i in. [62])

Numeryczne rozwiązanie problemów brzegowych zawierających uszkodzenie prowadzone w oparciu o klasyczne metody eliminacji Gaussa bądź LU dekompozycji jest możliwe tak długo, aż układ równań lub macierz sztywności nie staną się osobliwe w sensie matematycznym albo numerycznie źle uwarunkowane. Oznacza to dokładnie tyle, że możliwe jest zbliżenie się z uszkodzeniem D do wartości krytycznej 1.0 jedynie z pewną „tolerancją" TOL, na przykład $1.0 - D \leq$TOL=5%, gdyż naprężenie efektywne (8) zaczyna zdążać do nieskończoności zaś odpowiedni efektywny moduł sprężystości (9) do zera. Prowadzenie dalszej analizy uszkodzenia, związanej z tzw. propagacją frontu uszkodzenia nie jest zatem możliwe, o ile nie stosuje się specjalnych technik związanych z np. „odpinaniem” elementów całkowicie uszkodzonych bądź zastępowaniem ich elementami o bardzo małej lecz niezerowej sztywności (patrz Skrzypek i Kuna-Ciskał [68]). We wszystkich takich przypadkach, gdy macierz sztywności w metodzie elementów skończonych staje się numerycznie osobliwa, dobrze spisuje się algorytm rozkładu macierzy według wartości osobliwych (ang. singular value decomposition SVD).

Metoda SVD opiera się na następującym twierdzeniu algebry liniowej: każda macierz kawadratowa $\mathbf{A}$ o wymiarach $N \times N$ może zostać zapisana jako iloczyn ortogonalnej macierzy $\mathbf{B}$, diagonalnej macierzy $\mathbf{W}$ posiadającej dodatnie bądź zerowe elementy (wartości osobliwe) oraz transponowanej ortogonalnej macierzy $\mathbf{C}$ według wzoru

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & w_N \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \ , \tag{42}$$

gdzie macierze $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ oraz $\mathbf{W}$ są oczywiście kwadratowymi macierzami o wymiarach $N \times N$. Każda z macierzy $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ jest ortogonalna zatem ich wiersze oraz kolumny są ortonormalne

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{1} \tag{43}$$

Rozkład (42) może zostać zawsze przeprowadzony bez względu na to z jak osobliwą macierzą mamy do czynienia. Obliczenie macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$ jest elementarne: z uwagi na ortogonalność macierzy $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ macierze do nich odwrotne są równe ich macierzom transponowanym, natomiast z uwagi na diagonalność macierzy $\mathbf{W}$, macierz do niej odwrotna jest również macierzą diagonalną o elementach równych odwrotnościom elementów w_i

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & & & \\ & \frac{1}{w_2} & & \\ & & \ldots & \\ & & & \frac{1}{w_N} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \ . \tag{44}$$

Jedyną pułapką, którą niesie za sobą stosowanie powyższego schematu jest to, że gdy któryś z elementów w_i jest równy zero (osobliwość macierzy $\mathbf{W}$) lub bliski zeru tzn. $|w_i| < 10^{-6}$ w przypadku stosowania zmiennych typu REAL albo $|w_i| < 10^{-12}$ w przypadku stosowania zmiennych typu DOUBLE PRECISION (złe uwarunkowanie macierzy $\mathbf{W}$), wtedy jego odwrotność $1/w_i \to \infty$. W takich przypadkach w algorytmie SVD nieskończona wartość zastępowana jest zerem.

Rozpatrzmy zastosowanie metody SVD do rozwiązania układu równań liniowych

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \ , \tag{45}$$

w którym $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową o wymiarze $N \times N$, natomiast $\mathbf{b}$ i $\mathbf{x}$ odpowiednio wektorami prawej strony oraz niewiadomych, każdy o wymiarze N. Rozwiązaniem układu równań (45) jest wektor

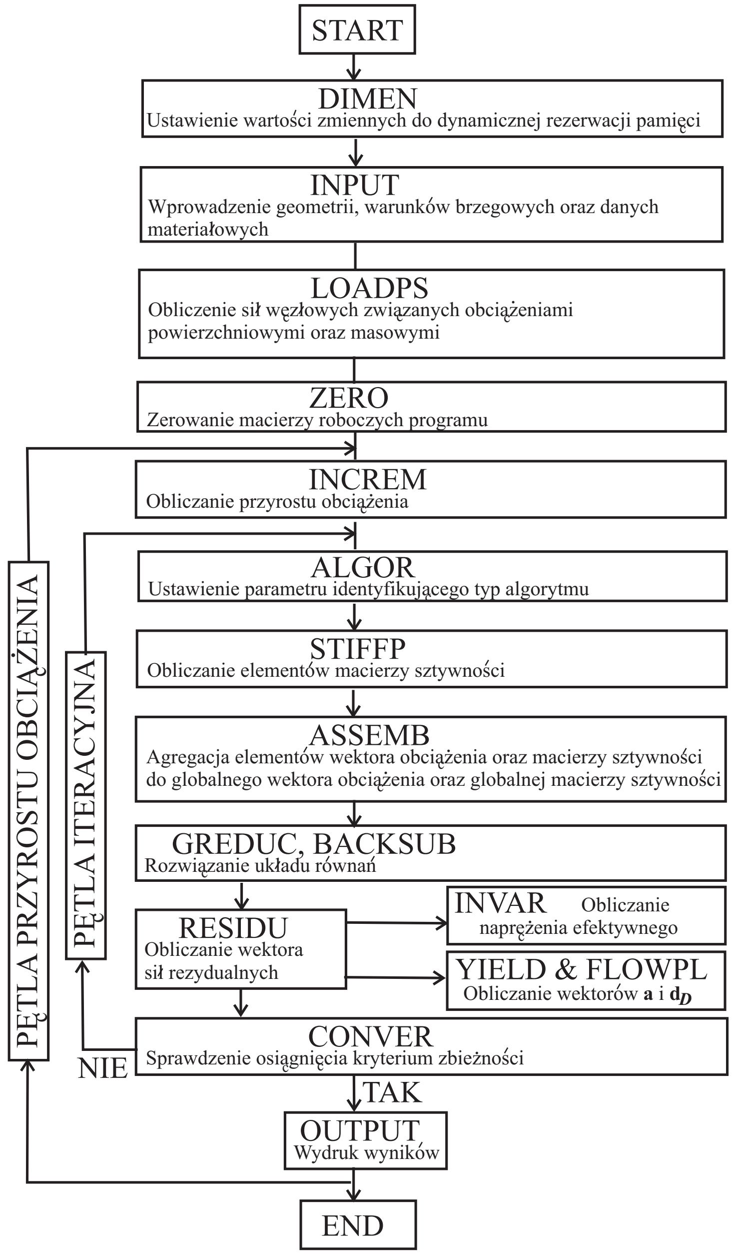
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{C} \cdot [\mathrm{diag}\,(1/w_i)] \cdot \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}\right) \tag{46}$$

mający zero na pozycji j odpowiadającej elementowi zerowemu w_i w macierzy $\mathbf{W}$ albo wypełniony całkowicie zerami gdy wektor prawej strony jest wektorem zerowym $\mathbf{b} = 0$ (układ równań jednorodnych).

Gotowe procedury numeryczne rozkładu macierzy według wartości osobliwych *svdcmp.for* oraz „podstawiania wstecz" (ang. back substitution) *svbksb.for* zastępujące tradycyjnie używane w kodzie elementów skończonych procedury eliminacji Gaussa *greduc.for* oraz *baksub.for* według Hintona i Owena [59] zaczerpnięto z książki Press i in. [62].

3.4. Algotrytm odwzorowania powrotnego

W metodzie elementów skończonych (Rys. 10) szczególną rolę odgrywa procedura odwzorowania powrotnego (ang. return mapping), która w zastosowaniu do problemów związanych z uszkodzeniem wymaga dodatkowych modyfikacji. W swej klasycznej wersji algorytm odwzorowania powrotnego oparty jest na założeniu o roszerzaniu się aktualnej powierzchni plastyczności. Jednak w nawiązaniu do problemów związnych z uszkodzeniem towarzyszącym procesowi wzmocnienia plastycznego powyższe założenie obowiązuje jednynie w początkowym zakresie, bezpośrednio poprzedzającym osiągnięcie progu inicjacji uszkodzenia. W dalszym etapie, po uruchomieniu procesu uszkodzenia, kolejne powierzchnie plastyczności będą podlegać sukcesywnemu zwężaniu (w sektorach odpowiadających rozciąganiu) oraz równoczesnej utracie wypukłości (porównaj rozdział 5.1). Pomimo, że drugi z efektów może zostać wyeliminowany poprzez wprowadzenie efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia to fakt zwężania aktualnej powierzchni plastyczności musi zostać uwzględniony w algorytmie odwzorowania powrotnego. Przedstawiony schemat procedury



Rysunek 10 Schemat programu dwuwymiarowych sprężysto-plastycznych elementów skończonych PLAST Owen i Hinton [59], Ganczarski i Skrzypek [36]

RESIDU (porównaj Owen i Hinton [59], Ganczarski i Skrzypek [36]), zawierający algorytm odwzorowania powrotnego oraz obliczania sił węzłowych na podstawie wartości naprężenia w punktach Gaussa, został zapisany poniżej.

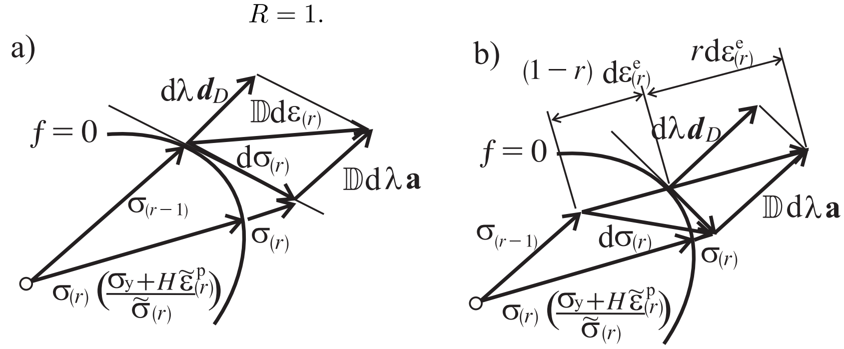
1. Obciążeniem w r-tej iteracji są siły rezydulane $\boldsymbol{\psi}_{(r-1)}$, powodujące przyrost przemieszczeń $\mathrm{d}\mathbf{d}_{(r)}$ oraz odpowiadający im przyrost odkształceń $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{(r)}$.

2. Obliczenie przyrostu naprężenia pod założeniem liniowej sprężystości materiału $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{(r)}$.

3. Akumulacja całkowitego naprężenia w każdym punkcie Gaussa $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} = \boldsymbol{\sigma}_{(r-1)} + \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)}$, gdzie $\boldsymbol{\sigma}_{(r-1)}$ jest wyiterowanym naprężeniem z $r-1$ iteracji.

4. Następny krok zależy od tego czy dany punkt Gaussa podlegał plastycznemu płynięciu w poprzedniej $(r-1)$-tej iteracji i czy jego zachowanie było sprężyste. Sprawdzany jest warunek $\widetilde{\sigma}_{(r-1)} > \sigma_{\mathrm{y}} = \sigma_{\mathrm{y}0} + H\widetilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{(r-1)}$, gdzie $\widetilde{\sigma}_{(r-1)}$ oznacza naprężenie efektywne, σ_{y} granicę plastyczności przy jednosiowym rozciąganiu, H parametr umocnienia odkształceniowego zaś $\widetilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{(r-1)}$ jest efektywnym odkształceniem plastycznym na końcu $(r-1)$-tej iteracji.
   Następnie sprawdzany jest warunek analogiczny jak w przypadku jednowymiarowym, jeśli odpowiedzią jest:

<table>
<tr><td colspan="2">tak</td><td colspan="2">nie</td></tr>
<tr><td colspan="2">oznacza to, iż punkt Gaussa podlegał plastycznemu płynięciu w poprzedniej iteracji zatem sprawdzany jest warunek $\widetilde{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} > \widetilde{\sigma}_{(r-1)}$. Jeśli odpowiedzią jest:</td><td colspan="2">oznacza to, iż punkt Gaussa nie podlegał plastycznemu płynięciu w poprzedniej iteracji i sprawdzany jest warunek $\widetilde{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} > \sigma_{\mathrm{y}0}$. Jeśli odpowiedzią jest:</td></tr>
<tr><td>nie</td><td>tak</td><td>nie</td><td>tak</td></tr>
<tr><td>punkt Gaussa podlega odciążeniu, przejdź do punktu 7.</td><td>punkt Gaussa uplastycznił się w poprzedniej iteracji i naprężenie w nim stale rośnie, zatem cała nadwyżka $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} - \boldsymbol{\sigma}_{(r-1)}$ musi zostać zredukowana do wartości granicy plastyczności jak pokazano na Rys. 11a. W tym celu przyjmuje się współczynnik $R = 1$.</td><td>punkt Gaussa jest ciągle sprężysty przejdź do punktu 7.</td><td>punkt Gaussa uplastycznił się podczas przyrostu obciążenia w obecnej iteracji Rys. 11b, zatem część naprężenia ponad granicę plastyczności musi ulec redukcji, w tym celu przyjmuje się współczynnik $R = \dfrac{\widetilde{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} - \sigma_{\mathrm{y}}}{\widetilde{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} - \widetilde{\sigma}_{(r-1)}}$.</td></tr>
</table>



Rysunek 11 Zmiana przyrostu naprężenia: a) w punkcie uprzednio uplastycznionym, b) w punkcie pozostającym poprzednio w stanie sprężystym

5. Obliczenie przyrostu naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_{(r-1)} + (1 - R)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)}$ dla punktów Gaussa uplastycznionych.

6. Pozostała część naprężenia $R\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)}$ musi zostać wyeliminowana w po-

dany niżej sposób. Z uwagi na konieczność spełnienia warunku plastyczności, naprężenie nie może wyjść poza powierzchnię plastyczności, zatem przyrost jego wartości zostaje obliczony w procesie iteracyjnym tak, aby spełnić jednocześnie warunki równowagi oraz równanie konstytutywne

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{(r)} = \mathbb{D}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{(r)} - \mathrm{d}\lambda \mathbf{d}_D \tag{47}$$

lub

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \boldsymbol{\sigma}_{(r-1)} + \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} - \mathrm{d}\lambda \mathbf{d}_D \tag{48}$$

Często koniec wektora naprężenia może nie trafiać w powierzchnię plastyczności, w związku z tym wprowadza się współczynnik skalujący

$$\boldsymbol{\sigma}_{(r)} = \boldsymbol{\sigma}_{(r)} \left(\frac{\sigma_{\mathrm{y}0} + H\widetilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{(r)}}{\widetilde{\sigma}_{(r)}} \right) \tag{49}$$

7. Dla punktów Gaussa, które cały czas pozostawały w stanie sprężystym obliczamy

$$\boldsymbol{\sigma}_{(r)} = \boldsymbol{\sigma}_{(r-1)} + \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} \tag{50}$$

8. Ostatecznie, obliczamy równoważne naprężeniu siły w węzłach elementów

$$(\mathbf{f}_{(\mathrm{el})})_{(r)} = \int\limits_{V_{(\mathrm{el})}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}_{(r)} \mathrm{d}V \tag{51}$$

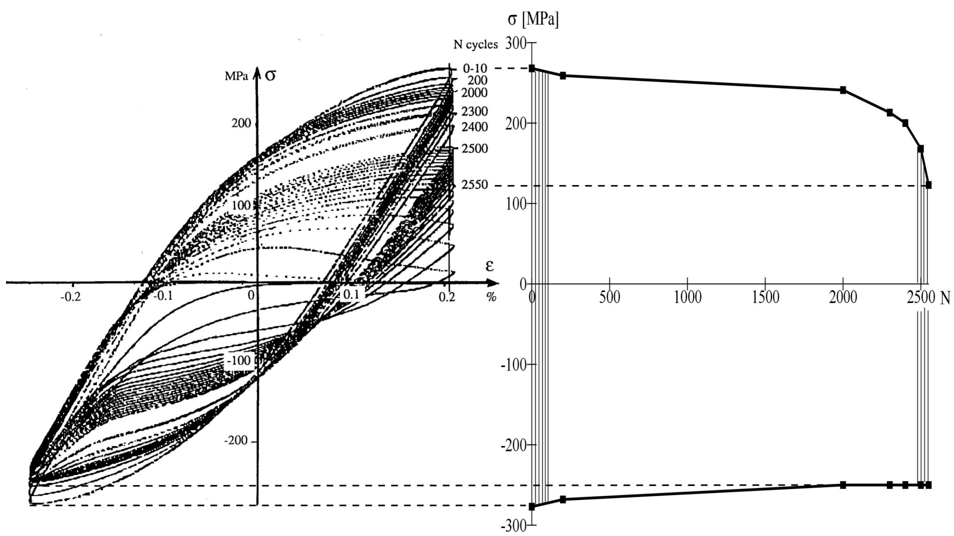
Źródłowy kod elementów skończonych dla procedury RESIDU, wchodzącej w skład programu *plast.for* (por. Owen i Hinton [59], Ganczarski i Skrzypek [36]) został zamieszczony w Dodatku.

4. Przykłady modelowania zniszczenia materiałów metalicznych w jednoosiowym stanie naprężenia

4.1. Asymetryczne zniszczenie niskocyklowe stali AISI 316L przy użyciu modelu Ylinena (Ganczarski i Cegielski [34])

4.1.1 Wyniki eksperymentalne Dufailly [28] oraz próba modelowania Lemaitre [50]

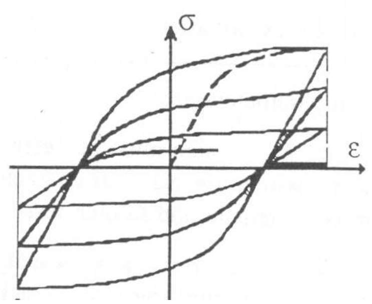
Materiał poddany cyklom rozciągania–ściskania o wysokiej wartości naprężenia bądź odkształcenia wykazuje wzrost uszkodzenia towarzyszący odkształceniom plastycznym. W przypadku gdy materiał jest poddany cyklom o stałej amplitudzie odkształcenia, narastające uszkodzenie powoduje spadek amplitudy naprężenia oraz spadek wartości modułu sprężystości. Wyniki eksperymentu Dufailly i Lemaitre'a [28] dla próbki wykonanej ze stali stopowej AISI 316L poddanej obciążeniu cyklicznemu o stałej amplitudzie odkształcenia przeprowadzonej w temperaturze pokojowej pokazano na Rys. 12.



Rysunek 12 Test niskocyklowy dla stali stopowej AISI 316L wg. Dufailly i Lemaitre'a [28]

Szczegółowa analiza kolejnych pętli odkształcenie–naprężenie ujawnia istnienie trzech faz procesu osłabienia towarzyszących wzrostowi uszkodzenia. W pierwszej fazie ($0 < N < 2000$ cykli) uszkodzenie rozwija się w taki sposób, że odpowiada mu identyczny spadek amplitudy naprężenia oraz modułu sprężystości po stronie rozciągania oraz ściskania. Dla wyższej liczby cykli ($2000 < N < 2400$ cykli) aktywowany zostaje drugi mechanizm unilateralnego uszkodzenia, w którym spadek amplitudy naprężenia oraz modułu sprężystości przebiega szybciej po stronie rozciągania niż ściskania. Wreszcie w trzeciej fazie, bezpośrednio poprzedzającej zerwanie ($2400 < N < 2556$ cykli), pojawia się mechanizm związany z lokalizacją odkształceń plastycznych. Obserwowane jest równoczesne tworzenie się niestateczności naprężenia po stronie rozciągania jak również pojawienie się charakterystycznego punktu przegięcia na części histerezy odpowiadającej zakresowi ściskania.

Próba numerycznego modelowania tak skomplikowanego zachowania materiału zaproponowana przez Lemaitre'a [50], w o oparciu klasyczną kinetyczną teorię uszkodzenia bez uwzględnienia efektu deaktywacji uszkodzenia, daje rezulaty zupełnie nie przystające do wyników eksperymentu (Rys. 13).



Rysunek 13 Numeryczne modelowanie zniszczenia niskocyklowy dla stali stopowej AISI 316L wg. Lemaitre'a [50]

Główne niedostatki przedstawionego rozwiązania to przede wszystkim jednakowe co do wartości bezwzględnej spadki amplitudy naprężenia i modułu sprężystości po stronie rozciągania oraz ściskania. Ponadto, zupełny brak przejścia do fazy lokalizacji odkształceń plastycznych i związanego z tym faktem pojawienia się punktu niestateczności naprężenia na gałęzi histerezy odpowiadającej rozciąganiu.

4.1.2 Koncepcja podwójnej miary uszkodzenia z efektem unilateralnym

Istotnym i koniecznym punktem modelowania zachowania materiału, zdolnym jakościowo oraz ilościowo poprawić zgodność modelu numerycznego Lemaitre'a [50] z wynikami eksperymentalymi Dufailly [28], jest wprowadzenie efektu deaktywacji uszkodzenia. Równocześnie sama unilateralna natura uszkodzenia wymaga przedefiniowania zmiennej go opisującej.

W najbardziej ogólnym przypadku uszkodzenie ma anizotropowy charakter, nawet w przypadku, gdy materiał jest początkowo izotropowy. Zatem tensor uszkodzenia drugiego rzędu $\boldsymbol{D}$ jest zmienną najczęściej używaną do opisu efektów anizotropii w materiałach oryginalnie izotropowych. W wielu przypadkach uszkodzenie może być opisane tensorem izotropowym rzędu zerowego (skalarem) D. Ten uproszczony model jest adekwatny wyłącznie w odniesieniu do pewnych materiałów poddanych obciążeniom typu propocjonalnego (Betten [7]). Główną niedogodnością w stosowaniu sformułowania opartego na skalarnej mierze uszkodzenia jest fakt, iż nie ma ona wpływu na współczynnik Poissona. W celu eliminacji powyższego defektu Chow i Wei [21] zaproponowali sformułowanie oparte na zmiennej uszkodzenia określonej dwoma skalarmi D_1 i D_2.

W obecnym przykładzie występowanie trzech faz uszkodzenia wymaga zastosowania analogicznego opisu zawierającego dwie niezależne skalarne zmienne uszkodzenia: izotropową D_{s} działająca na dewiatorową część tensora naprężenia oraz unilateralną D_{v} działającą na część kulistą tensora naprężenia (Ladeveze [48], Vereecke i Billardon [72]). Zatem jednoosiowe naprężenie efektywne wyrażone jest następującą zależnością

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma_{\mathrm{s}}}{1 - D_{\mathrm{s}}} + \frac{\sigma_{\mathrm{v}}}{1 - D_{\mathrm{v}} h} \ . \tag{52}$$

4.1.3 Model Ylinena uwzględniający efekt uszkodzenia

Gładka zależność pomiędzy odkształceniem i naprężeniem, zarówno w zakresie sprężystym jak i nieliniowym zakresie plastycznym, sugeruje użycie nieliniowej aproksymacji dla opisu początkowej pętli histerezy. Spośród najczęściej stosowanych modeli typu Ramberga–Osgooda, tangensa hiperbolicznego Pragera czy Ylinena tylko ten ostatni daje najlepszą zgodność z danymi doświadczalnymi. W klasycznym nieliniowym modelu sprężysto-plastycznym zaproponowanym przez Ylinena [76] obowiązuje następująca relacja pomiędzy jednoosiowym naprężeniem i odkształceniem

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[c\sigma - (1-c)\,\sigma_0 \ln\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0}\right)\right] \ , \tag{53}$$

gdzie c, σ_0 oznaczają stałe materiałowe ($0 \leqslant c \leqslant 1$).

W przypadku materiału podlegającego uszkodzeniu proponowane jest, aby oryginalny jednoosiowy model Ylinena (53) został zmodyfikowany poprzez zastąpienie naprężenia nominalnego σ przez naprężenie efektywne $\widetilde{\sigma}$ (52) zawierające efekt unilateralny. Po wykonaniu różniczkowania względem naprężenia jednoosiowa aproksymacja Ylinena uogólniona o efekty związane z uszkodzeniem i cyklicznym charakterem działania obciążenia przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = \begin{cases} \widetilde{E}^{\pm} \dfrac{\widetilde{\sigma}_0^{\pm} - |\sigma|}{\widetilde{\sigma}_0^{\pm} - c|\sigma|} & \text{obciążenie} \\ \widetilde{E}^{\pm} & \text{odciążenie} \end{cases}, \tag{54}$$

w której efektywne moduły sprężystości $\widetilde{E}^{\pm}$ oraz efektywne asymptotyczne granice plastyczności $\widetilde{\sigma}_0^{\pm}$ są określone w następujący sposób

$$\begin{aligned} \widetilde{E}^{+} &= E\frac{(1-D_{\mathrm{s}})(1-D_{\mathrm{v}})}{1-\frac{2}{3}D_{\mathrm{v}}-\frac{1}{3}D_{\mathrm{s}}} & \widetilde{E}^{-} &= E\frac{(1-D_{\mathrm{s}})(1-D_{\mathrm{v}}h)}{1-\frac{2}{3}D_{\mathrm{v}}h-\frac{1}{3}D_{\mathrm{s}}} \\ \widetilde{\sigma}_0^{+} &= \sigma_0\frac{(1-D_{\mathrm{s}})(1-D_{\mathrm{v}})}{1-\frac{2}{3}D_{\mathrm{v}}-\frac{1}{3}D_{\mathrm{s}}} & \widetilde{\sigma}_0^{-} &= \sigma_0\frac{(1-D_{\mathrm{s}})(1-D_{\mathrm{v}}h)}{1-\frac{2}{3}D_{\mathrm{v}}h-\frac{1}{3}D_{\mathrm{s}}} \; . \end{aligned} \tag{55}$$

Poprawne zastosowanie powyższych definicji efektywnych modułów sprężystości wymaga spełnienia dodatkowego warunku w postaci

$$\frac{1-D_{\mathrm{s}}}{1-D_{\mathrm{v}}h_{\mathrm{c}}} > \sqrt{\frac{1-2\nu}{1+\nu}} \tag{56}$$

tak aby wyeliminować niefizyczne zachowanie materiału polegające na wydłużeniu w kierunku poprzecznym w stosunku do kierunku jedoosiowego rozciągania (Ganczarski i Barwacz [33]).

4.1.4 Kinetyczna teoria ewolucji uszkodzenia

Wybór teorii ewolucji uszkodzenia zdolnej modelować eksperyment staje się łatwiejszy po uwzględnieniu założenia, że uszkodzenie jest zależne od kumulowanego odkształcenia plastycznego. Oparta na termodynamice procesów nieodwracalnych teoria tego typu jest autorstwa Lemaitre'a i Chaboche'a [15, 50]. W przystosowanym do potrzeb obecnego przykładu sformułowaniu, podobnie jak w sformułowaniu oryginalnym, potencjał dyssypacji F jest sumą dwóch części: pierwsza odpowiada warunkowi plastycznego płynięcia typu Hubera–Misesa–Hencky'ego f, w której uszkodzenie występuje poprzez naprężenie efektywne oraz druga F^{D} związana jest z potensjałem uszkodzenia. W przypadku jednoosiowego stanu naprężenia potencjał dyssypacji przyjmuje uproszczoną postać

$$F = f(\sigma, D) + F^{\mathrm{D}}(Y, D), \qquad f = |\widetilde{\sigma}| - \sigma_{\mathrm{y}} \; , \tag{57}$$

w której dla prostoty pominięte zostały wpływy wzmocnienia typu izotropowego i kinematycznego, natomiast efekty te zawarte są w modelu Ylinena poprzez parametry σ_0 i c. Zastosowanie klasycznego formalizmu stowarzyszonej plastyczności prowadzi do następującej formuły dla jednoosiowego odkształcenia plastycznego

$$\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma}\mathrm{d}\lambda = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{\mathrm{s}}}\mathrm{d}\lambda = \mathrm{sign}\left(\sigma_{\mathrm{s}}\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{1-D_{\mathrm{s}}} \tag{58}$$

podczas gdy kumulowane odkształcenie plastyczne jest równe

$$\mathrm{d}p = \left|\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}\right| = \frac{\mathrm{d}\lambda}{1-D_{\mathrm{s}}}\ . \tag{59}$$

Z punktu widzenia termodynamiki procesów nieodwracalnych zmienną stowarzyszoną z uszkodzeniem jest prędkość uwalnianej energii sprężystej Y. W uproszczonym wyrażeniu na potencjał dyssypacji F^{D} bazującym na kinetycznej teorii uszkodzenia występują jej dwie niezależne zmienne (Ladeveze [48])

$$F^{\mathrm{D}} = \frac{Y_{\mathrm{s}}^2}{2S_{\mathrm{s}}\left(1-D_{\mathrm{s}}\right)} + \frac{Y_{\mathrm{v}}^2}{2S_{\mathrm{v}}\left(1-D_{\mathrm{v}}h\right)} \tag{60}$$

gdzie S_{s}, S_{v} oznaczają wytrzymałości materiału na uszkodzenie odpowiednio typu dewiatorowego oraz objętościowego, a prędkość uwalnianej energii sprężystej wynosi

$$Y = Y_{\mathrm{s}} + Y_{\mathrm{v}} = \frac{\frac{2}{3}\sigma^2}{2E\left(1-D_{\mathrm{s}}\right)^2} + \frac{\frac{1}{3}\sigma^2}{2E\left(1-D_{\mathrm{v}}h\right)^2}\ . \tag{61}$$

Z uwagi na fakt, iż przyrosty uszkodzenia są obliczane jako pochodne potencjału dyssypacji F^{D}

$$\mathrm{d}D_{\mathrm{s}} = \frac{\partial F^{\mathrm{D}}}{\partial Y_{\mathrm{s}}}\mathrm{d}\lambda \qquad \mathrm{d}D_{\mathrm{v}} = \frac{\partial F^{\mathrm{D}}}{\partial Y_{\mathrm{v}}}\mathrm{d}\lambda \tag{62}$$

oraz wykorzystując (59) równania ewolucji uszkodzenia dla przypadku jednoosiowego naprężenia dają się przedstawić w następującej postaci

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}D_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}p} &= \frac{\frac{2}{3}\sigma^2}{2ES_{\mathrm{s}}\left(1-D_{\mathrm{s}}\right)^2} g\left(p\right) \\ \frac{\mathrm{d}D_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}p} &= \frac{\frac{1}{3}\sigma^2}{2ES_{\mathrm{v}}\left(1-D_{\mathrm{v}}h\right)^2}\left(\frac{1-D_{\mathrm{s}}}{1-D_{\mathrm{v}}h}\right) H\left(p-p^{\mathrm{D}}\right)\ . \end{aligned} \tag{63}$$

Zgodnie z założeniem kinetycznej teorii uszkodzenia, równania ewolucji D_{s}, D_{v} są zależne od akumulowanego odkształcenia plastycznego p. Dodatkowo ewolucja uszkodzenia typu izotropowego D_{s} jest sterowana funkcją $g(p) = e^{-ap}$ tak aby modelować jego gasnący charakter. Podobnie ewolucja uszkodzenia unilateralnego D_{v} jest aktywowana tylko wtedy gdy akumulowane odkształcenie plastyczne osiągnie wartość progową p^{D} (Lemaitre [50]).

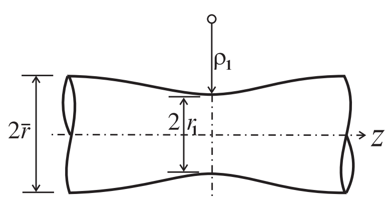
4.1.5 Uogólnienie równań ewolucji uszkodzenia na przypadek trójosiowego stanu naprężenia towarzyszącego lokalizacji odkształcenia

Poprawny opis fazy po lokalizacji odkształcenia wymaga analizy trójosiowego stanu naprężenia. Równocześnie prostota całkownia numerycznego jednoosiowego stanu naprężenia sugeruje posłużenie się sformułowaniem hubrydowym, w którym faza przed lokalizacją odkształcenia jest modelowana równaniami (54, 63), podczas gdy faza po lokalizacji odkształcenia opisana jest przybliżonym rozwiązaniem dla trójosiowego stanu naprężenia, uzależnionym od wartości równomiernego naprężenia poza strefą szyjki i podstawionego do składowej osiowej odkształcenia wyprowadzonej z ogólnego trójosiowego rówania konstytutywnego.

Najprostsza aproksymacja trójosiowego stanu naprężenia towarzyszącego osiowo symetrycznej lokalizacji odkształcenia jest autorstwa Davidenkowa i Spiridonovej [24]. Zakładając nieściśliwość materiału, równość składowych obwodowej oraz promieniowej odkształcenia logarytmicznego w minimalnym przekroju jak również przyjmując krzywiznę trajektorii naprężenia głównego w dnie szyjki równą $1/\rho = r/(r_1\rho_1)$, autorzy wykazali, że intensywność odkształcenia logarytmicznego jest równa co do wartości jego składowej osiowej. Następnie zostały wyprowadzone zależności na składowe naprężenia w dowolnym punkcie leżącym na dnie szyjki na jej osi symetrii

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_{\mathrm{i}}\frac{r_1}{2\rho_1}, \quad \sigma_z = \sigma_{\mathrm{i}}\left(1+\frac{r_1}{2\rho_1}\right), \quad \sigma_{\mathrm{i}} = \left(\frac{\overline{r}}{r_1}\right)^2 \frac{\sigma}{1+r_1/(4\rho_1)} \tag{64}$$

gdzie $\sigma_{\mathrm{i}} = \sigma_z - \sigma_r$ jest naprężeniem zredukowanym Misesa, natomiast symbol σ oznacza równomierne naprężenie poza strefą lokalizacji odkształcenia. Stan naprężenia zależy od dwóch współczynników określających geometrię $\overline{r}/r_1$ oraz r_1/ρ_1. Wartość współczynnika będącego stosunkiem promienia próbki $\overline{r}$ do promienia na dnie szyjki r_1 (Rys. 14) wynika z założenia o nieściśliwości



Rysunek 14 Geometria szyjki

oraz definicji odkształcenia logarytmicznego $\overline{r}/r_1 = \sqrt{1+\langle\varepsilon\rangle}$ i jest aproksymowana jedynką dla zastosowanej amplitudy odkształcenia $\varepsilon_{\max} = 2.1\times 10^{-3}$.

Przeciwnie, wartość współczynnika będącego stosunkiem promienia próbki na dnie szyjki do promienia krzywizny $r_1/\rho_1 \cong \overline{r}/\rho_1$ nie może zostać zaniedbana i jest zakładana w postaci

$$\overline{r}/\rho_1 = a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\ . \tag{65}$$

Odkształcenie występujące pod pierwiastkiem jest ujęte w nawiasy Mac Auleya ponieważ tylko jego dodatnia wartość powoduje powstanie szyjki. Podstawienie powyższej aproksymacji do równań (64) daje ostateczne formuły na osiowo symetryczny stan naprężenia w strefie lokalizacji odkształcenia uzależniony od wartości naprężenia nominalnego σ

$$\overline{\sigma}_r = \sigma\frac{0.5a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}{1+0.25a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}},\quad \overline{\sigma}_z = \sigma\frac{1+0.5a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}{1+0.25a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}},\quad \overline{\sigma}_{\mathrm{i}} = \frac{\sigma}{1+0.25a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}\ . \tag{66}$$

Postulowane jest następujące uogólnienie zmodyfikowanego prawa Ylinena (53)

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}_{ij} = c\left[\frac{1}{2G}\frac{\overline{s}_{ij}}{1-D_{\mathrm{s}}} + \frac{3}{K}\frac{\overline{\sigma}_{\mathrm{v}}\delta_{ij}}{1-D_{\mathrm{v}}h}\right] - (1-c)\,\frac{\sigma_0}{2G}\ln\left(1-\frac{\overline{\sigma}_{\mathrm{i}}}{\sigma_0}\right)\times \\ \frac{3\overline{s}_{ij}}{2\sigma_0\left(1-D_{\mathrm{s}}\right)}\ ,\end{aligned} \tag{67}$$

w którym człon sprężysty jest ściśliwy, natomiast człon niesprężysty jest nieściśliwy, zaś wielkość $\overline{s}_{ij}$ oznacza dewiator naprężenia. Ograniczając równanie (67) do składowej osiowej otrzymuje się przybliżoną wartość dla $\overline{\varepsilon}_z$ zawierającą efekt trójosiowości naprężenia w strefie lokalizacji odkształcenia

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}_z = c\left[\frac{1}{2G}\frac{\overline{s}_z}{1-D_{\mathrm{s}}} + \frac{3}{K}\frac{3\overline{\sigma}_{\mathrm{v}}}{1-D_{\mathrm{v}}h}\right] - (1-c)\ln\left(1-\frac{\overline{\sigma}_{\mathrm{i}}}{\sigma_0}\right)\times \\ \frac{3\overline{s}_z}{2\sigma_0\left(1-D_{\mathrm{s}}\right)}\ .\end{aligned} \tag{68}$$

Obliczając $\overline{s}_z$ oraz naprężenie średnie $\overline{\sigma}_{\mathrm{v}}$ na postawie zależności (66) dostajemy

$$\begin{aligned}\overline{s}_z &= \frac{2\overline{\sigma}_z - 2\overline{\sigma}_r}{3} = \frac{2\sigma}{3\left(1+0.25a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\right)}\ ,\\ \overline{\sigma}_{\mathrm{v}} &= \frac{2\overline{\sigma}_r + \overline{\sigma}_z}{3} = \frac{\sigma}{3}\frac{1+1.5a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}{1+0.25a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}\ .\end{aligned} \tag{69}$$

Uwzględniając następnie wielkości $\overline{s}_z$, $\overline{\sigma}_{\mathrm{v}}$ dane (69) oraz $\overline{\sigma}_{\mathrm{i}}$ dane (66) w (68) oraz wykonując pewne uproszczenia dochodzimy do przybliżonego uogólnienia zmodyfikowanego prawa Ylinena (54) dla przypadku osiowo symetrycznego stanu naprężenia

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = \begin{cases} \overline{E}^{\pm} \dfrac{\overline{\sigma}_0^{\pm} - |\sigma|}{\overline{\sigma}_0^{\pm} - c\,|\sigma|} & \text{obciążenie} \\ \overline{E}^{\pm} & \text{odciążenie}\ , \end{cases} \tag{70}$$

w którym odpowiednie efektywne moduły sprężystości oraz efektywne asymptotyczne granice plastyczności przyjmują postać

$$\overline{E}^{\pm} = \widetilde{E}^{\pm} \frac{1 + 0.25a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}{1 + 0.5a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}\ , \qquad \overline{\sigma}_0^{\pm} = \widetilde{\sigma}_0^{\pm} \frac{1 + 0.25a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}{1 + 0.5a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}\ . \tag{71}$$

Warto zauważyć, że w przypadku braku lokalizacja odkształcenia wartość współczynnika $\overline{r}/\rho_1 \to 0$ i w konsekwencji wzory (71) przechodzą w zależności (63).

Uogólnienie (57) na przypadek trójosiowego stanu naprężenia przyjmuje postać

$$F = f\left(\boldsymbol{\sigma}, D\right) + F^{\mathrm{D}}\left(Y, D\right), \qquad f = \frac{\overline{\sigma}_{\mathrm{i}}}{1 - D_{\mathrm{s}}} - \sigma_{\mathrm{y}} \tag{72}$$

podczas gdy przybliżone wartości przyrostów odkształcenia plastycznego są równe

$$\mathrm{d}\overline{\varepsilon}_z^{\mathrm{p}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}\mathrm{d}\overline{\lambda} = \frac{\mathrm{d}\overline{\lambda}}{1 - D_{\mathrm{s}}}, \qquad \mathrm{d}\overline{\varepsilon}_r^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\overline{\varepsilon}_t^{\mathrm{p}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_r}\mathrm{d}\overline{\lambda} = \frac{-\mathrm{d}\overline{\lambda}}{1 - D_{\mathrm{s}}} \tag{73}$$

Jeśli użyć sformułowania Davidenkova i Spiridonowej to kumulowane odkształcenie plastyczne daje się wyrazić wzorem

$$\mathrm{d}\overline{p} = \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\overline{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}\overline{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{d}\overline{\lambda}}{1 - D_{\mathrm{s}}}\ . \tag{74}$$

Prędkość uwalnianej enegii sprężystej stowarzyszona z unilateralnym uszkodzeniem przyjmuje postać

$$\begin{aligned} Y_{\mathrm{s}} &= \frac{\overline{\sigma}_{\mathrm{i}}^2}{2E\left(1 - D_{\mathrm{s}}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{2E\left(1 - D_{\mathrm{s}}\right)^2} \frac{1}{\left(1 + 0.25a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\right)^2} \\ Y_{\mathrm{v}} &= \frac{3\overline{\sigma}_{\mathrm{v}}^2}{2E\left(1 - D_{\mathrm{v}}h\right)^2} = \frac{\sigma^2\left(1 - D_{\mathrm{s}}\right)}{6E\left(1 - D_{\mathrm{v}}h\right)^3} \left(\frac{1 + 1.5a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}{1 + 0.25a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}\right)^2 H\left(\overline{p} - p^{\mathrm{D}}\right) \end{aligned} \tag{75}$$

a w konsekwencji uogólnienie równań ewolucji uszkodzenia (63) na przypadek trójosiowego stanu naprężenia można zapisać następująco

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}D_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}\overline{p}} &= \frac{\sigma^2}{3\sqrt{2}ES_{\mathrm{s}}\left(1-D_{\mathrm{s}}\right)^2}\frac{1}{\left(1+0.25a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\right)^2}g\left(\overline{p}\right) \\ \frac{\mathrm{d}D_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}\overline{p}} &= \frac{\sigma^2}{6\sqrt{2}ES_{\mathrm{v}}\left(1-D_{\mathrm{v}}h\right)^2}\frac{1-D_{\mathrm{s}}}{1-D_{\mathrm{v}}h}\left(\frac{1+1.5a\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}{1+0.25a_1\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}\right)^2 H\left(\overline{p}-p^{\mathrm{D}}\right)\ . \end{aligned} \tag{76}$$

Ostatecznie, cały proces jest modelowany równaniami (54, 63) w fazie poprzedzającej lokalizację odkształceń oraz równaniami (70, 76) w fazie uwzględniającej lokalizację. Tak zdefiniowany układ równań pozwala na numeryczną symulację wyników doświadczalnych uzyskanych przez Dufailly w jednoosiowej próbie cyklicznego rozciągania–ściskania. Zostanie również pokazane, że powyższe sformułowanie pozwala modelować pełny zakres zniszczenia niskocyklowego włącznie z utworzeniem się niestateczności związanej z lokalizacją odkształcenia.

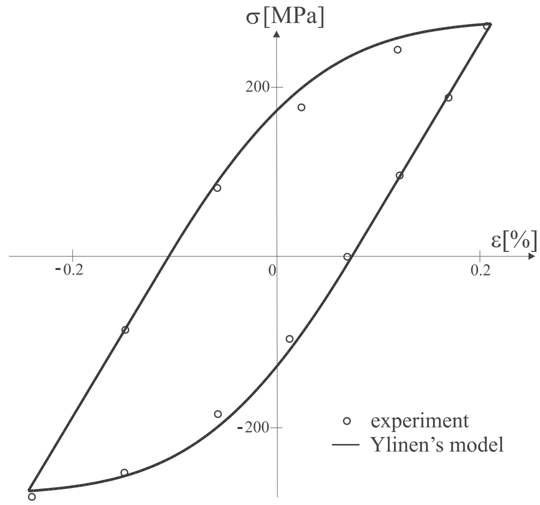
4.1.6 Identyfikacja stałych materiałowych modelu

Wartości stałych materiałowych odpowiadających zakresowi sprężystemu oraz plastycznemu E, ν i σ_{y} podaje Lemaitre [50]. Wartości stałych materiałowych modelu Ylinena zostały ustalone w następujący sposób: wartość stałej c została dobrana tak, aby zamknąć pierwszą pętlę histerezy, podczas gdy wartość asymptotycznej granicy plastyczności σ_0 wyznaczono przez porównanie pierwszych pętli histerezy uzyskanych w eksperymencie oraz numerycznej symulacji a następnie minimalizację odpowiednich odchyleń (Rys. 15).

Identyfikacja stałych materiałowych odpowiadających kinetycznej teorii uszkodzenia h_{c}, a, S_{v}, S_{s}, p^{D} jest oparta na procedurze zaproponowanej przez Lemaitre'a [50] w przypadku uszkodzenia izotropowego a następnie uogólnionej przez Gariona i Skoczenia [38] na przypadek uszkodzenia ortotropowego. Pełny wykaz stałych materiałowych dla stali AISI 316L w temperaturze pokojowej podany został w Tabeli 9.

4.1.7 Wyniki obliczeń

Układ trzech równań różniczkowych (54, 63) dla fazy poprzedzającej lokalizację odkształceń oraz równań (70, 76) dla fazy po lokalizacji podlega numerycznemu całkowaniu dla odkształceń zmieniających się w zakresie od $\varepsilon_{\min} =$



Rysunek 15 Kalibracja parametrów modelu Ylinena na podstawie pierwszej pętli histerezy

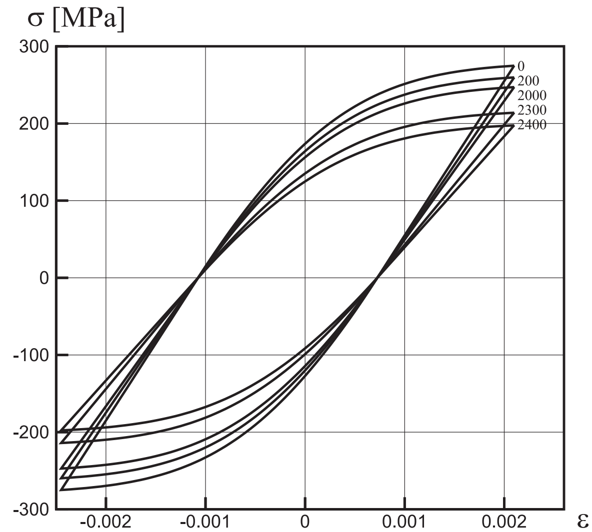
Tablica 2 Stałe materiałowe dla stali AISI 316L w temperaturze pokojowej

a	b	c	E [GPa]	ν	p^{D}	S_{v} [MPa]	S_{s} [MPa]	σ_0 [MPa]	σ_{y} [MPa]
2.5	5.0	0.5773	200	0.3	3.2	0.151	0.25	280	260

-2.45×10^{-3} do $\varepsilon_{\max} = 2.1 \times 10^{-3}$ za pomocą procedury $odeint.for$ wykorzystującą schemat Rungego–Kutty IV powiązany z adaptacyjnym sterowaniem długością kroku (Press i inni [62]).

Wyniki numerycznej symulacji opartej na wzorcowym modelu nie zawierającym efektu deaktywacji uszkodzenia ($h = 1.0$), oryginalnie zaproponowanym przez Lemaitre'a [50], pokazano na Rys. 16.
Model powyższy wykazuje izotropowe osłabienie pod wpływem zarówno rozciągania jak i ściskania co dyskwalifikuje go jeśli chodzi o poprawne modelowanie wyników eksperymentalnych.

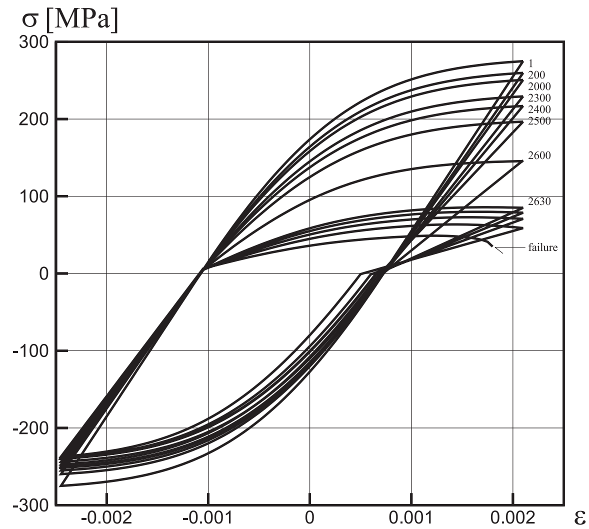
Wyniki otrzymane w oparciu o bardziej zaawansowany klasyczny model deaktywacji uszkodzenia ($h = 1.0$ gdy $\sigma > 0$ oraz $h = h_{\mathrm{c}}$ gdy $\sigma \leq 0$) dają jedynie ilościowo dobrą zgodność z wynikami eksperymentu (Rys. 17).
Mianowicie, rozpatrywany model numeryczny poprawnie odwzorowuje unilateralny charakter osłabienia towarzyszącego uszkodzeniom w takim sensie, że rzędne amplitud naprężenia kolejnych pętli histerezy odpowiadają odpowied-



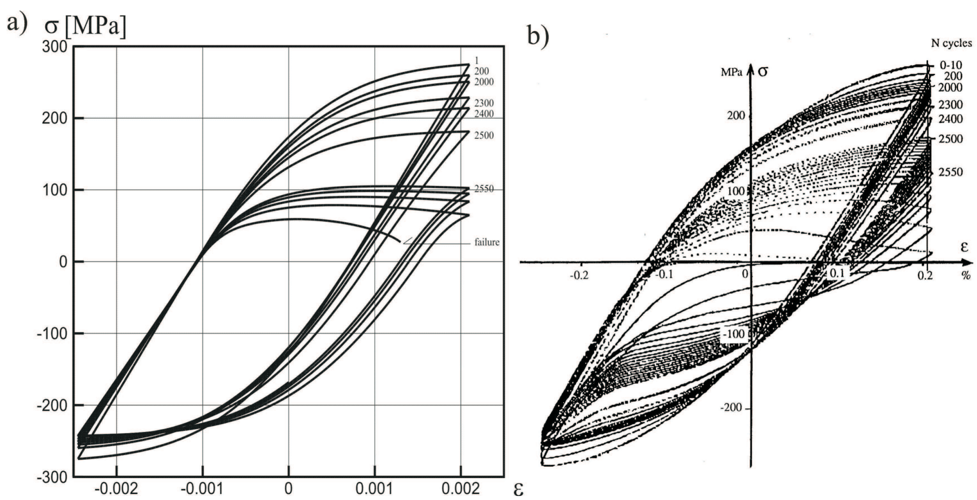
Rysunek 16 Numeryczna symulacja modelem z wzorcowym bez efektu deaktywacji uszkodzenia ($h = 1.0$)

nim punktom na krzywych eksperymentalnych. Jednakże nieciągłość $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ w punkcie $\sigma = 0$, szczególnie silnie zaznaczona w fazie po lokalizacji odkształcenia, prowadzi do drastycznej niezgodności z wynikami eksperymentalnymi.

W przeciwieństwie do powyższego modelu zastosowanie koncepcji ciągłej deaktywacji uszkodzenia ($h(\sigma)$ określone wzorem (14), w którym $\sigma_e = 0$) wykazuje nie tylko ilościową ale także jakościową zgodność z wynikami eksperymentalnymi (Rys. 18). Istotny defekt klasycznego modelu, polegający na niegładkiej, biliniowej charakterystyce oddzielającej zakres rozciągania od ściskania, został skutecznie wyeliminowany. Warunek (56) jest spełniony ponieważ końcowe wartości zmiennych uszkodzenia $D_s = 0.1$, $D_v = 0.91$ dają wartość ułamka $(1-D_s)/(1-D_v h_c) = 1.1$ która jest większa niż 0.554 odpowiadająca wartości obliczonej w oparciu o współczynnik Poissona $\nu = 0.3$. Jedyną ułomnością modelu jest niedokładne odwzorowanie tej części histerezy, która odpowiada zakresowi ściskania i na której nie obserwuje się charakterystycznego punktu przegięcia. Zastosowanie efektu deaktywacji uszkodzenia sterowanego całkowitym odkształceniem plastycznym, jak w propozycji Chaboche'a [17], poprawiłoby rozwiązanie, jednak bez gwarancji powstania punktu przegięcia, ścisłe modelowanie zjawisk zachodzących po lokalizacji odkształ-



Rysunek 17 Numeryczna symulacja modelem z klasycznym efektem deaktywacji uszkodzenia ($h = 1.0$ gdy $\sigma > 0$ oraz $h = h_c$ gdy $\sigma \leqslant 0$)



Rysunek 18 Porównanie wyników: a) numerycznej symulacji modelem z ciągłym efektem deaktywacji uszkodzenia ($h(\sigma)$ dane wzorem (14) w którym $\sigma_e = 0$) Ganczarski i Cegielski [34] b) eksperymentalnych Dufailly [28]

cenia wymaga bowiem pełnego trójwymiarowego sformułowania.

4.2. Zniszczenie niskocyklowe stopu Al-2024 przy użyciu modelu Lemaitre'a-Chaboche'a

Celem tego przykładu jest modelowanie efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia w aluminium Al-2024.

4.2.1 Próba zmęczenia niskocyklowego Abdul-Latifa i Chadliego [1]

Opis próby zmęczenia niskocyklowego wykonanej przez Abdul-Latifa i Chadli na próbkach ze stopu aluminium opublikowano w pracy [1]. Do eksperymentu użyto stopu aluminium o handlowym symbolu Al-2024 i składzie chemicznym podanym w Tabeli 3. Testy zmęczenia niskocyklowego przeprowadzono

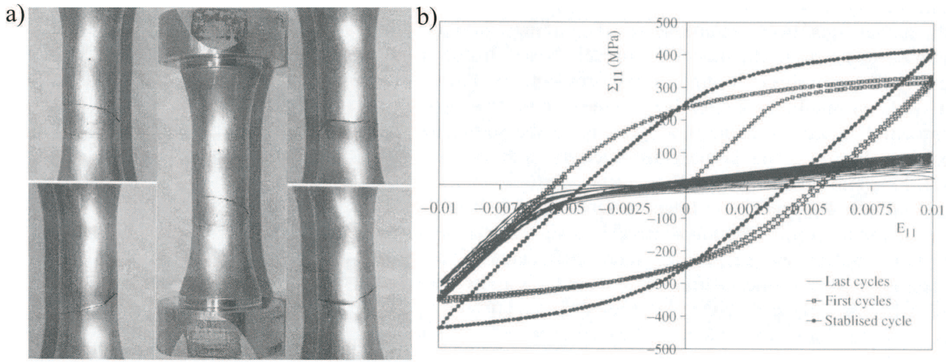
Tablica 3 Skład chemiczny stopu aluminium Al-2024 (udział wagowy [%])

Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Ni	Zn	Ti	Zr	Pb
0.11	0.28	4.33	0.75	1.31	0.01	0.01	0.10	0.03	0.14	0.0021

w temperaturze pokojowej na maszynie INSTRON typ 1340 używając cienkościennych próbek walcowych o wymiarach: średnica wewnętrzna 15mm, średnica zewnętrzna 18mm, wyciętych z okrągłego pręta o średnicy 42mm. Proces obróbki wykańczającej próbek obejmował polerowanie ich powierzchni a następnie obróbkę termiczną polegającą na starzeniu w temperaturze 495°C i hartowaniu w kąpieli wodnej.

Próbki testowano poddając je różnym programom obciążenia przy różnych poziomach wymuszenia typu odkształceniowego. Najciekawsze i jednocześnie najbardziej reprezentatywne rezultaty uzyskano w przypadku zastosowania programu jednoosiowego rozciągania–ściskania o amplitudzie $\Delta\varepsilon_{11} = \pm 1\%$. Test prowadzono do momentu zerwania próbki po 291 cyklach a jego wyniki zaprezentowano na Rys. 19.

Szczegółowa analiza kolejnych pętli histerezy potwierdza sprężysto-plastyczne zachowanie materiału z bardzo silnym wypływem uszkodzenia o unilateralnym charakterze. W początkowych cyklach materiał wykazuje wzmocnienie plastyczne prowadzące do osiągnięcia cyklu ustabilizowanego by następnie w miarę narastania uszkodzenia zacząć ujawniać coraz silniejszą asymetrię spadku amplitudy oraz wartości modułu sprężystości pomiędzy zakresem



Rysunek 19 Test zniszczenia niskocyklowego dla stopu Al-2024 wg. Abdul-Latifa i Chadli [1]

odpowiadającym rozciąganiu i ściskaniu. Procesowi temu towarzyszy stopniowe zawężanie pola ograniczonego kolejnymi pętlami histerezy związane ze zmianą charakteru dolnej gałęzi histerezy z wypukłej na wklęsłą, czemu w konsekwencji odpowiada zmniejszanie się zdolność materiału do dyssypacji energii.

4.2.2 Modelowanie procesu plastycznego płynięcia z efektami uszkodzenia

Opis plastycznego płynięcia z degradacją własności materiałowych wywołaną uszkodzeniem, zdolny modelować eksperyment, oparty jest na teorii kinetycznej zaproponowanej przez Lemaitre'a–Chaboche'a [15, 50] i wyprowadzonej z potencjału dyssypacji. W przypadku jednoosiowego naprężenia zarówno potencjał plastyczności jak i potencjał uszkodzenia przyjmują uproszczoną postać

$$F = |\widetilde{\sigma} - X| - R - \sigma_{\mathrm{y}} + \frac{3X^2}{4X_\infty}, \qquad F^{\mathrm{D}} = \frac{Y^2 H\left(p - p^{\mathrm{D}}\right)}{2S\left(1 - Dh\right)} \tag{77}$$

gdzie potencjał uszkodzenia jest funkcją akumulowanego odkształcenia plastycznego p aktywowaną dopiero po osiągnięciu pewnej wartości progowej p^{D}, natomiast gęstość uwalnianej energii odkształcenia wynosi odpowiednio

$$Y = \frac{\widetilde{\sigma}^2}{2E} \tag{78}$$

Zastosowanie formalizmu stowarzyszonej plastyczności prowadzi do następujących równań dla odkształcenia plastycznego, akumulowanego odkształcenia plastycznego, zmiennych odkształceniowych stowarzyszonych z wzmocnieniem izotropowym i kinematycznym oraz uszkodzeniem

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma}\mathrm{d}\lambda = \operatorname{sgn}\left(\widetilde{\sigma} - X\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{1 - Dh} \\
&\mathrm{d}p = \left|\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}\right| = \frac{\mathrm{d}\lambda}{1 - Dh} \\
&\mathrm{d}r = -\frac{\partial F}{\partial R}\mathrm{d}\lambda = (1 - Dh)\,\mathrm{d}p \\
&\mathrm{d}\alpha = -\frac{\partial F}{\partial X}\mathrm{d}\lambda = (1 - Dh)\,\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}} - \frac{3X}{2X_{\infty}}\mathrm{d}\lambda \\
&\mathrm{d}D = \frac{\partial F^{\mathrm{D}}}{\partial Y}\mathrm{d}\lambda = \frac{Y}{S}H\left(p - p^{\mathrm{D}}\right)\mathrm{d}p\ .
\end{aligned}
\tag{79}
$$

Znając wartości powyższych zmiennych wewnętrznych typu odkształceniowego oraz postać potencjału energii swobodnej Helmholtza

$$
\psi = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{1}{2}E\left(\varepsilon^{\mathrm{e}}\right)^{2}(1 - Dh) + R_{\infty}\left[r + \frac{1}{b}\exp\left(-br\right)\right] + \frac{1}{3}X_{\infty}\gamma\alpha^{2}\right\}
\tag{80}
$$

przechodzimy na stowarzyszone z nimi zmienne wewnętrzne typu naprężeniowego

$$
\begin{aligned}
&\sigma = \rho\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^{\mathrm{e}}} = E\varepsilon^{\mathrm{e}}(1 - Dh)\,, &&X = \rho\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \frac{2}{3}X_{\infty}\gamma\alpha \\
&R = \rho\frac{\partial \psi}{\partial r} = R_{\infty}\left[1 - \exp\left(-br\right)\right], &&Y = -\rho\frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{1}{2}E\left(\varepsilon^{\mathrm{e}}\right)^{2}h\ .
\end{aligned}
\tag{81}
$$

Uwzględniając następnie zależności (79) w równaniach (81) oraz zapisując te ostatnie w dogodniejszej z punktu widzenia obliczeń numerycznych formie przyrostowej dochodzimy równań Lemitre'a i Chaboche'a [50]

$$
\begin{array}{ll}
\text{zakres sprężysty} & \text{zakres plastyczny} \\
\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = E\,(1-Dh) & \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}p} = (1-Dh)^2\left\{\left[X_\infty\gamma + b\,(R_\infty - R)\right]\right. \\
 & \qquad \left.\times \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma} - X) - \gamma X\right\} - \dfrac{\widetilde{\sigma}^3}{2ES} H\left(p - p^{\mathrm{D}}\right) \\
 & \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p} = b\,(R_\infty - R)\,(1-Dh) \\
 & \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}p} = \gamma\left[X_\infty \operatorname{sgn}(\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}) - X\right](1-Dh) \\
 & \dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}p} = \dfrac{\sigma^2}{2ES\,(1-Dh)^2} H\left(p - p^{\mathrm{D}}\right)
\end{array}
\tag{82}
$$

zawierających efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia (Ganczarski i Cegielski [10]) ograniczony dodatkowym założeniem, że wartość naprężenia odpowiadająca początkowi procesu deaktywacji uszkodzenia wynosi $\sigma_{\mathrm{b}} = 0$. Pierwsze z równań (82) dla zakresu plastycznego wynika z warunku zgodności (pozostawania naprężenia na aktualnej powierzchni plastyczności). Natomiast ostatnie z równań (82) definiuje ewolucję uszkodzenia w stopach aluminium, w ogólnym przypadku zależną od drugiego niezmiennika naprężenia, zgodnie z obserwacjami Hayhursta [43], a więc generowaną zarówno przez strefy plastycznego rozciągania jak i ściskania, lecz w przypadku tej ostatniej zmodyfikowaną wygaszającym wpływem efektem ciągłej deaktywacji uszkodzenia.

4.2.3 Wyniki obliczeń

Przedstawiony układ czterech równań różniczkowych (82) jest numerycznie całkowany dla amplitudy odkształcenia zmieniającego się w zakresie ±1% przy pomocy procedury *odeint.for* wykorzystującej schemat Runge–Kutty IV powiązany z adaptacyjnie sterowaną długością kroku (Press i inni [62]).

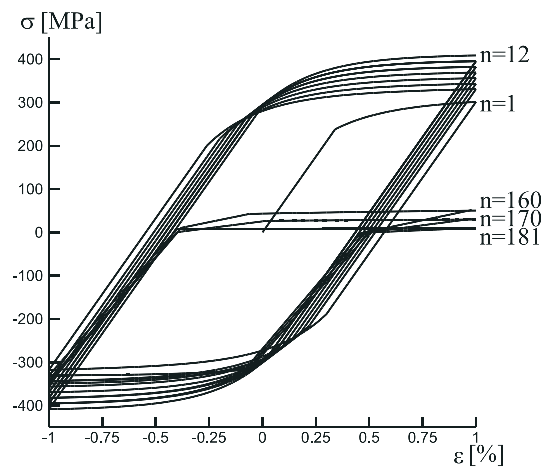
Identyfikacja stałych materiałowych występujących w modelu (82) została wykonana częściowo w oparciu o wyniki doświadczalne oraz częściowo na drodze numerycznej. Wielkości stałych materiałowych sprężystości oraz plastyczności E, σ_{y} zostały podane przez Abdul-Latifa i Chadli w pracy [1]. Wartości stałych materiałowych opisujące umocnienie plastyczne typu mieszanego b, R_∞, γ, X_∞ zostały dobrane w taki sposób aby zminimalizować różnice pomiędzy początkowymi pętlami histerezy (do osiągnięcia cyklu ustabilizowanego) otrzymanymi z eksperymentu oraz z symulacji numerycznej. Identyfikacja parametrów materiałowych opisujących kinetyczne prawo ewolucji uszkodzenia h_{c}, S, p^{D} oparta jest na procedurze zaproponowanej przez

Lemaitre'a [34]. Wartość naprężenia odpowiadająca końcowi procesu deaktywacji uszkodzenia wynosi σ_e przyjęto równą aktualnej granicy plastyczności po stronie ściskania. Wartości wszystkich stałych materiałowych występujących w modelu podano w Tabeli 4.

Tablica 4 Wartości stałych materiałowych dla stopu Al-2024

E [GPa]	σ_y [MPa]	b	R_∞ [MPa]	γ	X_∞ [MPa]	S [MPa]	p^D
70	230	0.1	120	4.0	60	3500	0.248

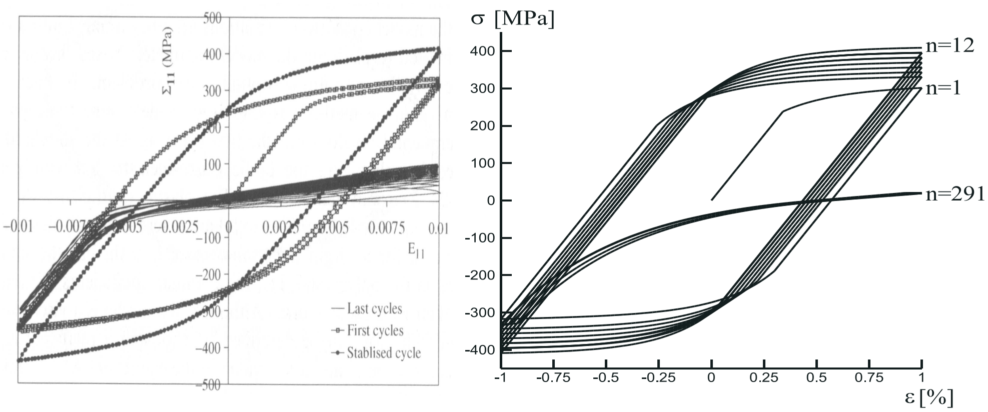
Wyniki otrzymane w oparciu o klasyczny nieciągły model deaktywacji uszkodzenia ($h = 1.0$ gdy $\sigma > 0$ oraz $h = h_\mathrm{c}$ gdy $\sigma \leqslant 0$) dają jedynie ilościowo dobrą zgodność z wynikami eksperymentu (Rys. 20).



Rysunek 20 Numeryczna symulacja procesu zniszczenia niskocyklowego dla stopu Al-2024 z nieciągłym efektem deaktywacji uszkodzenia (Ganczarski, Cegielski [35], Cegielski i inni [11])

Rozpatrywany model materiałowy poprawnie odwzorowuje unilateralny charakter osłabienia towarzyszącego uszkodzeniu w takim sensie, że rzędne amplitud naprężenia w kolejnych pętlach histerezy korespondują z odpowiednimi punktami na krzywych eksperymentalnych. Jednakże nieciągłość $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ w punkcie $\sigma = 0$, szczególnie silne zaznaczona w końcowych cyklach ($n \geqslant 160$), prowadzi do drastycznej niezgodności z wynikami eksperymentalnymi.

W przeciwieństwie do powyższego modelu wyniki otrzymane w oparciu o zastosowanie modelu z ciągłym efektem deaktywacji uszkodzenia ($h(\sigma)$ określone wzorem (14)) wykazują bardzo dobrą ilościową oraz jakościową zgodność z wynikami doświadczalnymi (Rys. 21). Istotny defekt modelu klasycznego, polegający na niegładkiej, biliniowej charakterystyce oddzielającej zakres rozciągania od ściskania, został skutecznie wyeliminowany. Udało się również doskonale odwzorować stopniowe zawężanie pola ograniczonego kolejnymi pętlami histerezy wraz z towarzyszącą mu zmianą wypukłości dolnej gałęzi histerezy.



Rysunek 21 Numeryczna symulacja procesu zniszczenia niskocyklowego dla stopu Al-2024 z ciągłym efektem deaktywacji uszkodzenia (Ganczarski, Cegielski [35], Cegielski i inni [11])

5. Przykłady modelowania zniszczenia materiałów metalicznych w dwu- oraz trójosiowym stanie naprężenia

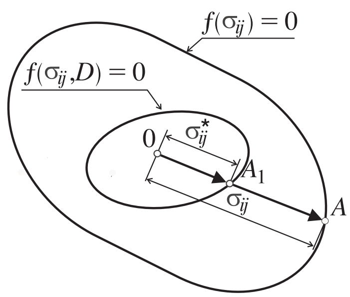
5.1. Wpływ uszkodzenia na powierzchnię plastyczności

Równania ewolucji uszkodzenia zastosowane do modelowania zniszczenia niskocyklowego stali AISI 316L oraz stopu Al-2024 zostały wyprowadzone w oparciu o kinetyczną teorię ewolucji uszkodzenia Lemaitre'a i Chaboche'a. Kluczem to tej teorii jest potencjał dyssypacji przyjęty w postaci sumy potencjału plastycznego płynięcia, nawiązującego do teorii stowarzyszonej plastyczności, oraz potencjału dyssypacji uszkodzenia. Powierzchnie graniczne służące do budowy potencjałów odgrywają fundamentalną rolę w ogólnych teoriach wiążących plastyczność z uszkodzeniem (Lemaitre i Chaboche [51], Lemaitre [50]) jak również w zjawiskach uszkodzenia towarzyszącego pełzaniu (Litewka [52]).

Deagradacja materiału prowadzi do zmiany takich właściwości mechanicznych jak: spadek sztywności na skutek wpływu uszkodzenia na moduł sprężystości, spadek wytrzymałości materiału opisany odpowiednimi kryteriami wytrzymałościowymi oraz wzrost anizotropii wynikający z kierunkowej natury uszkodzenia. W ślad za tym równania konstytutywne materiału uszkodzonego muszą zawierać powyższe efekty i równocześnie dać się redukować do równań obowiązujących dla stanu początkowego, w którym materiał jest nieuszkodzony i izotropowy. Uznając zatem spełnienie warunku wytrzymałości jako stanu, w którym zachodzi osiągnięcie bądź warunku plastyczności bądź warunku zniszczenia może on zostać przedstawiony w postaci następującego równania

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}, D\right) = 0 \ , \tag{83}$$

w którym $\boldsymbol{\sigma}$ jest tensorem naprężenia, a D skalarnym parametrem uszkodzenia, znikającym w przypadku, gdy materiał jest nieuszkodzony. Graficzna interpretacja równania (83) pokazana schematycznie na Rys. 22, przedstawia pewną zamkniętą powierzchnię zdefiniowaną w przestrzeni naprężenia, która kurczy się i deformuje w skutek wzrostu uszkodzenia. Spadek wytrzymałości materiału następujący w ślad za wzrostem uszkodzenia może być objaśniony w taki sposób, iż do osiągnięcia powierzchni granicznej w materiale nieuszkodzonym wystarcza naprężenie σ_{ij} (wektor $0A$), podczas gdy w materiale uszkodzonym odpowiednie naprężenie σ^*_{ij} (wektor $0A_1$) jest istotnie mniejsze. W związku z deformacją powierzchni granicznej, która ma stanowić podstawę



Rysunek 22 Ewolucja powierzchni granicznej na skutek uszkodzenia

do budowy odpowiedniego potencjału dyssypacji podlegającego dalej formalizmowi stowarzyszonej plastyczności, spełnienie dwóch podstawowych postulatów decyduje o jej ewentualnej przydatności: f musi być skalarną, ciągłą oraz gładką lub częściowo gładką (mającą co najwyżej skończoną liczbę naroży) i wypukłą funkcją swoich argumentów.

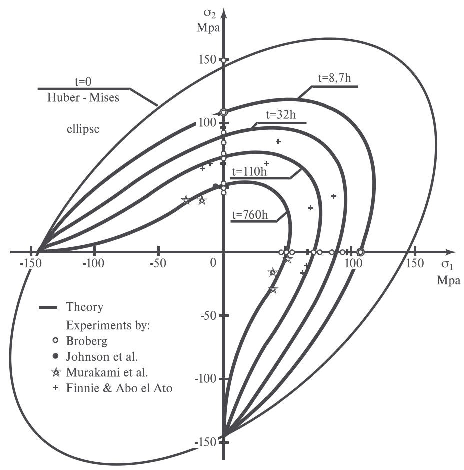
5.1.1 Przegląd danych eksperymentalnych

Izochroniczne krzywe pełzania, lub innymi słowy krzywe identycznego czasu zniszczenia, są bardzo wygodną, graficzną interpretacją osiągnięcia kryterium zniszczenia przy pełzaniu. Zwykle tego typu krzywe są kreślone w układzie współrzędnych określonych przez wartości główne tensora naprężenia, a każdy punkt na odpowiedniej krzywej reprezentuje poziom naprężenia niezbędny do zniszczenia materiału po upływie czasu charakterystycznego dla danej krzywej.

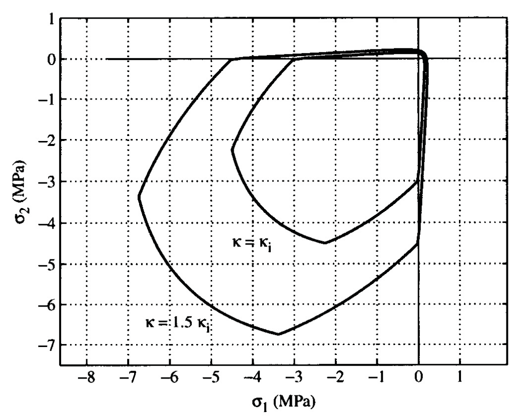
Stosunkowo duża liczba eksperymentów dotyczących zniszczenia towarzyszącego pełzaniu w warunkach dwuosiowego stanu naprężenia została przeprowadzona dla miedzi w temperaturze 523 K (Finnie i Abo el Ata [29], Johson i inni [44], Murakami i Sonomura [55], Murakami i inni [56]), które pozwoliły Litewce [52] porównać wyniki dla różnych czasów do zniszczenia (Rys. 23).

Szczegółowa analiza kolejnych krzywych izochronicznych, przeprowadzona oryginalnie przez Broberga [8], nie potwierdziła niezmienniczości ich kształtu i pozwoliła Litewce [52] sformułować hipotezę, w myśl której zależnie od poziomu naprężenia mogą one zbliżać się bądź do elipsy Hubera–Misesa–Hencky'ego (wysoki poziom naprężenia), bądź do sześciokąta Tresci–Guesta (niski poziom naprężenia).

Badanie zachowania zaprawy murarskiej było przedmiotem serii eksperymentów przeprowadzonych przez Page'a [60, 61], Dhanasekara i innych [25],



Rysunek 23 Izochroniczne krzywe pełzania dla miedzi w temperaturze 523 K wg. Litewki [52]



Rysunek 24 Powierzchnie zniszczenia zaprawy murarskiej wg. Page'a [60, 61], Dhanasekara i inych [25], Rotsa [64] oraz van der Pluijma [71]

Rotsa [64] oraz van der Pluijma [71]. Kształt powierzchni zniszczenia otrzymanej w wyniku prób: jednoosiowego rozciągania, jednoosiowego ściskania, dwuosiowego ściskania przy ustalonym naprężeniu średnim, trójosiowego ściskania przy ustalonym naprężeniu średnim oraz ściskaniu hydrostatyczym zostały zaprezentowane na Rys. 24. Powierzchnia zniszczenia wykazuje o wiele większą wrażliwość na rozciąganie niż na ściskanie (k jest stosunkiem wytrzymałości na ściskanie do rozciągania).

5.2.3 Powierzchnie plastyczności Tresci–Guesta oraz Hubera–Misesa–Hencky'ego zawierające efekt uszkodzenia

Modelowanie wpływu uszkodzenia na powierzchnie plastyczności Tresci–Guesta lub Hubera–Misesa–Hencky'ego jest bezpośrednio związane z kinetyczną teorią ewolucji uszkodzenia, w której obie powierzchnie traktowane są jako potencjały plastyczności zbudowane w oparciu o naprężenie efektywne. W ogólnym przypadku uszkodzenie ma charakter anizotropowy, co wymaga użycia tensora drugiego rzędu $\boldsymbol{D}$. Jednakże aby możliwie uprościć wyprowadzenia, w najprostszym przypadku uszkodzenia izotropowego zakłada się, że naprężenie efektywne przyjmuje postać określoną wzorem (18).

Bezpośrednie podstawienie (18) do (83) pokazuje, że postać warunku plastyczności

$$f\left(\frac{\sigma_1}{1-Dh}, \frac{\sigma_2}{1-Dh}, \frac{\sigma_3}{1-Dh}\right) = 0 \tag{84}$$

istotnie różni się w przypadku rozciągania, gdy uszkodzenie jest aktywne, od przypadku ściskania, gdy uszkodzenia pozostaje nieaktywne.

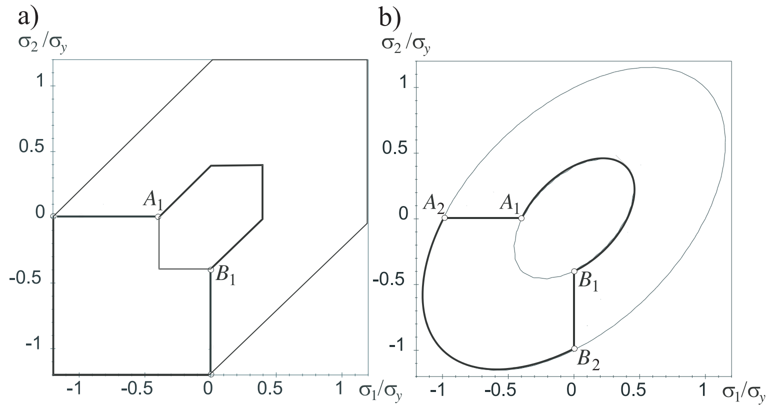
W konsekwencji w przypadku płaskiego stanu naprężenia i przy założeniu, iż uszkodzenie jest aktywne jeśli przynajmniej jedna ze składowych naprężenia jest dodatnia ($\sigma_1 > 0$ i/lub $\sigma_2 > 0$), lub innymi słowy aktywacja uszkodzenia $h = 1$ zależy od pierwszego niezmiennika dodatnich wartości własnych tensora naprężenia $\mathrm{Tr}\,\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \langle\sigma_1\rangle + \langle\sigma_2\rangle$. Warunek plastyczności Tresci–Guesta przyjmuje postać

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\sigma_1}{1-D} = \sigma_\mathrm{y}, \quad \dfrac{\sigma_2}{1-D} = \sigma_\mathrm{y} & \text{I ćwiartka:} & \sigma_1 > 0 \text{ i } \sigma_2 > 0 \\
\sigma_1 - \dfrac{\sigma_2}{1-D} = -\sigma_\mathrm{y} & \text{II ćwiartka:} & \sigma_1 < 0 \text{ i } \sigma_2 > 0 \\
\sigma_1 = -\sigma_\mathrm{y}, \quad \sigma_2 = -\sigma_\mathrm{y} & \text{III ćwiartka:} & \sigma_1 < 0 \text{ i } \sigma_2 < 0 \\
\dfrac{\sigma_1}{1-D} - \sigma_2 = -\sigma_\mathrm{y} & \text{IV ćwiartka:} & \sigma_1 > 0 \text{ i } \sigma_2 < 0
\end{array} \tag{85}$$

podczas gdy warunek plastyczności Hubera–Misesa–Hencky'ego

$$\begin{array}{lll}
\left(\dfrac{\sigma_1}{1-D}\right)^2 - \dfrac{\sigma_1\sigma_2}{(1-D)^2} + \left(\dfrac{\sigma_2}{1-D}\right)^2 = \sigma_\mathrm{y}^2 & \text{I ćw.:} & \sigma_1 > 0 \text{ i } \sigma_2 > 0 \\
\sigma_1^2 - \sigma_1\dfrac{\sigma_2}{1-D} + \left(\dfrac{\sigma_2}{1-D}\right)^2 = \sigma_\mathrm{y}^2 & \text{II ćw.:} & \sigma_1 < 0 \text{ i } \sigma_2 > 0 \\
\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_\mathrm{y}^2 & \text{III ćw.:} & \sigma_1 < 0 \text{ i } \sigma_2 < 0 \\
\left(\dfrac{\sigma_1}{1-D}\right)^2 - \dfrac{\sigma_1}{1-D}\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_\mathrm{y}^2 & \text{IV ćw.:} & \sigma_1 > 0 \text{ i } \sigma_2 < 0
\end{array} \tag{86}$$

zatem oba warunki okazują się być zarówno niegładkie jak i niewypukłe (Rys. 25). Mianowicie, dla każdego niezerowego uszkodzenia ($D = 0.6$ na Rys. 25)



Rysunek 25 Postać powierzchni plastyczności: a) Tresci–Guesta (85) b) Hubera–Misesa–Hencky'ego (86) w przypadku nieciągłej deaktywacji uszkodzenia ($D = 0.6$) Cegielski, Ganczarski [10]

istnieją dwa liniowe segmenty ($0A_1$ i $0B_1$ dla sześciokąta Tresci–Guesta lub A_1A_2 i B_1B_2 dla elipsy Hubera–Misesa–Hencky'ego) odpowiadające natychmiastowej deaktywacji uszkodzenia, które łączą odpowiednie segmenty odpowiednio drugiej i trzeciej lub trzeciej i czwartej ćwiartki układu współrzędnych.

Powyższa niedoskonałość powierzchni plastyczności może być jednakże wyeliminowana poprzez wprowadzenie efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia. Ograniczając rozważania do uproszczonego przypadku, gdy funkcja Hayhursta zależy jedynie od pierwszego niezmiennika dodatnich wartości własnych tensora naprężenia ($\beta = 1$ i $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{Tr}\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$) oraz zakładając dodatkowo, iż uszkodzenie doznaje pełnej aktywacji przy maksymalnej wartości rozciągania

$$\sigma_{\mathrm{b}} = \begin{cases} (1-D)\sigma_{\mathrm{y}} & \text{punkty } C_1 \text{ i } C_2 \text{ na sześciokącie Tresci–Guesta} \\ \frac{2(1-D)}{\sqrt{3}}\sigma_{\mathrm{y}} & \text{punkty } C_1 \text{ i } C_2 \text{ na elipsie Hubera–Misesa} \end{cases} \tag{87}$$

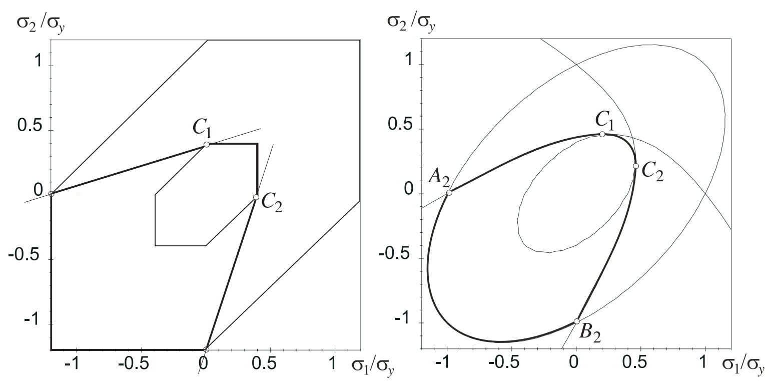
oraz deaktywuje się całkowicie przy ściskaniu ($h_{\mathrm{c}} = 0$ w punktach 0 lub odpowiednio A_2 i B_2), powierzchnie plastyczności określone są zależnościami:
powierzchnia Tresci–Guesta

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\sigma_1}{1-D} = \sigma_{\mathrm{y}}, \quad \dfrac{\sigma_2}{1-D} = \sigma_{\mathrm{y}} & \text{segment } C_1C_2 \\ \sigma_1 = -\sigma_{\mathrm{y}}, \quad \sigma_1 = -\sigma_{\mathrm{y}} & \text{III ćwiartka} \\ \sigma_1 - \left(1 + \frac{D}{1-D}\right)\sigma_2 = -\sigma_{\mathrm{y}} & \text{segment } 0C_1 \\ \left(1 + \frac{D}{1-D}\right)\sigma_1 - \sigma_2 = -\sigma_{\mathrm{y}} & \text{segment } 0C_2 \end{array} \tag{88}$$

powierzchnia Hubera–Misesa–Hencky'ego

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \begin{cases} \sigma_{\mathrm{y}}^2\,(1-D)^2 & \text{łuk } C_1C_2 \\ \sigma_{\mathrm{y}}^2 \left(1 - \frac{D}{1-D}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sigma_2}{\sigma_{\mathrm{y}}}\right)^2 & \text{łuk } C_1A_2 \\ \sigma_{\mathrm{y}}^2 \left(1 - \frac{D}{1-D}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sigma_1}{\sigma_{\mathrm{y}}}\right)^2 & \text{łuk } C_2B_2 \\ \sigma_{\mathrm{y}}^2 & \text{łuk } A_2B_2 \end{cases} \tag{89}$$

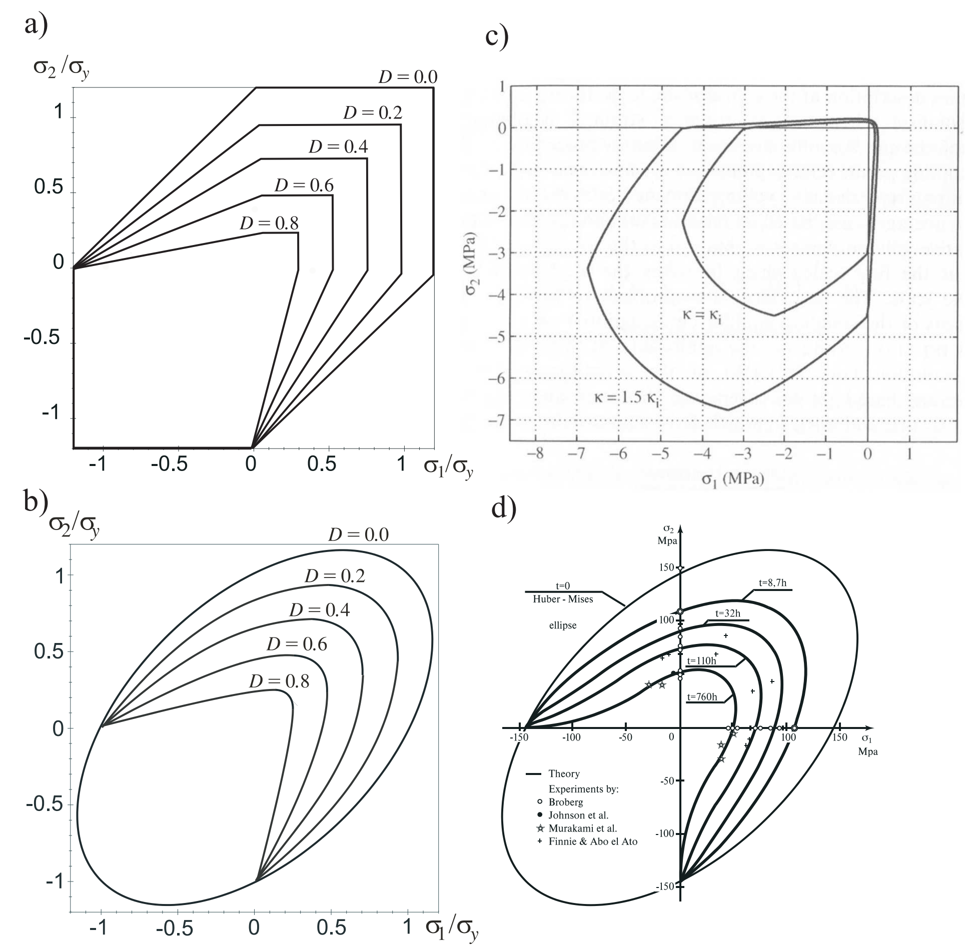
schematycznie pokazane na Rys. 26. Zmodyfikowane powierzchnie plastycz-



Rysunek 26 Postać powierzchni plastyczności: a) Tresci–Guesta (88) b) Hubera–Misesa–Hencky'ego (89) w przypadku ciągłej deaktywacji uszkodzenia ($D = 0.6$) Cegielski, Ganczarski [10]

ności są utworzone albo z dwóch segmentów sześciokąta Tresci–Guesta połączonych dwoma liniami prostymi, albo dwóch łuków elipsy Hubera–Misesa–Hencky'ego połączonych dwoma łukami hiperboli, która w szczególnym przypadku $D = \frac{2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} \approx 0.5358$ przechodzi w parabolę.

Kolejne powierzchnie plastyczności odpowiadające postępującemu uszkodzeniu wykazujące dobrą zgodność zarówno pod waględem jakościowym i ilościowym wynikami eksperymentalnymi podanymi przez Litewkę [52] na Rys. 27. W porówaniu do powierzchni plastyczności zaprezentowanych na Rys. 25 ich wypukłość oraz gładkość (z wyjątkiem skończonej liczby naroży) została przywrócona, zatem mogą służyć jako potencjały dyssypacji: zmodyfikowany sześciokąt Tresci–Guesta do modelowania materiałów metalicznych poddanych naprężeniom o niskich wartościach oraz zmodyfikowana powierzchnia Hubera–Misesa–Hencky'ego do modelowania zarówno materiałów metalicznych poddanych naprężeniom o wysokich wartościach jak również materiałów kruchych typu beton lub kamień.



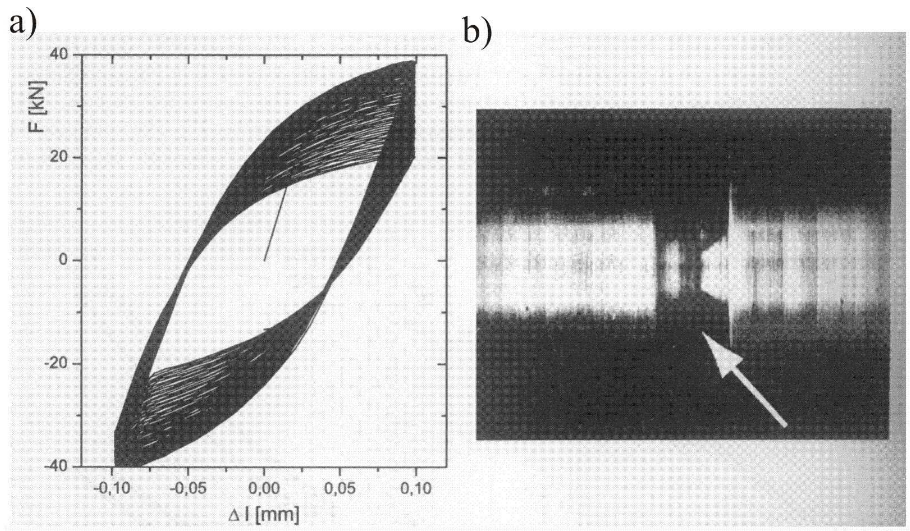
Rysunek 27 Kolejne powierzchnie plastyczności modyfikowane uszkodzeniem: a) Tresci–Guesta (88) Cegielski i Ganczarski [10], b) Hubera–Misesa–Hencky'ego (89) Cegielski i Ganczarski [10], c) wyniki doświadczalne Page'a [60, 61], Dhanasekara i inych [25], Rotsa [64] oraz van der Pluijma [71], d) wyniki eksperymentalne zebrane przez Litewkę [52]

5.2. Zniszczenie niskocyklowe próbki z karbem wykonanej ze stali ferrytycznej 20MnMoNi55

Zakończone sukcesem próby numerycznego modelowania wpływu ciągłej deaktywacji uszkodzenia na przebieg procesu zniszczenia niskocyklowego stali AISI 316L oraz stopu Al-2024 jak również wykazanie wypukłości i ciągłości powierzchni plastyczności modyfikowanej ciągłym warunkiem deaktywacji uszkodzenia pozwalają na przejście do bardziej zaawansowanego przykładu modelowania na szczeblu ciała, które wymaga pełnej analizy trójosiowej stanu naprężenia oraz odkształcenia.

5.2.1 Wyniki testów zniszczenia niskocyklowego próbki z karbem wg. Brocksa i Steglicha [9]

Brocks i Steglich [9] przeprowadzili serię testów zniszczenia niskocyklowego dla próbek wykonanych ze stali ferrytycznej 20MnMoNi55. Testy o stałej amplitudzie wydłużenia $\Delta l = \pm 0.1$mm zostały przeprowadzone na próbkach cylindrycznych z karbem o promieniu $r = 2$mm. Testy były przerywane po 83 cyklach w celu pomiaru zaawansowania uszkodzenia. Zaobserwowano inicjację pęknięcia na powierzchni dna karbu, która następnie obejmowała cały jego przekrój poprzeczny. Wyniki testów, pokazane na Rys. 28, przedsta-



Rysunek 28 Zniszczenie niskocyklowe próbki z karbem: a) kolejne pętle histerezy w układzie $\Delta l - F$, b) pęknięcie w dnie karbu (Brocks i Steglich [9])

wiają rodzinę pętli histezy o wyraźnie zaznaczonym unilateralnym efektem Bauschingera (silniejszy spadek amplitudy siły F po stronie rozciągania niż ściskania) towarzyszącym plastycznemu osłabieniu narastającemu z liczbą cykli (brak fazy początkowej związanej z efektem wzmocnienia izotropowego) prowadzącego do osiągnięcia cyklu ustabilizowanego jak w przykładzie dotyczącym stopu Al-2024).

5.2.2 Numeryczna symulacja zniszczenia niskocyklowego próbki z karbem modelem Gursona–Tvergaarda–Needelmana wg. Brocksa i Steglicha [9]

Przeprowadzona przez Brocksa i Steglicha [9] seria testów zniszczenia niskocyklowego dla próbek wykonanej ze stali ferrytycznej 20MnMoNi55 posłużyła nastepnie do przeprowadzenia symulacji numerycznej wykorzystującej model Gursona–Tvergaarda–Needelmana. Autorzy zastosowali opis niesprężystej deformacji materiału oparty na funkcji plastyczności w postaci

$$\Phi = \frac{3\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}{2R^2(\overline{\varepsilon})} + 2q_1 f^* \cosh\left(q_2 \frac{\sigma_{kk}}{2R^2(\overline{\varepsilon})}\right) - \left(1 + q_3 f^{*2}\right) = 0 \ , \tag{90}$$

w którym 'naprężenie efektywne' σ'_{ij} jest zdefiniowane jako różnica pomiędzy naprężeniem Cauchy'ego σ_{ij} oraz 'back stress' α_{ij} dla wzmocnienia kinematycznego

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_{ij} \ , \tag{91}$$

natomiast efekt wzmocnienia kinematycznego jest uwzględniony przez istnienie wiekości $R(\overline{\varepsilon})$ zależnej od kumulowanego odkształcenia plastycznego

$$\overline{\varepsilon} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{ij}\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{ij}}\mathrm{d}\tau \ . \tag{92}$$

Prędkość odkształcenia została zdekompowana na część sprężystą oraz plastyczną

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \ , \tag{93}$$

co jest rówanoważne z multiplikatywną dekompozycją odpowiednich gradientów przemieszczenia w teorii małych deformacji. Prawo Hooke'a zostało założone dla prędkości sprężystej deformacji oraz obiektywnej prędkości naprężenia według wzoru

$$\overset{\triangledown}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}_{kl} = C_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{kl}\right) \ . \tag{94}$$

Autorzy za Chabochem przyjmują następujące reguły wzmocnienia plastycznego: dla części izotropowej

$$R(\overline{\varepsilon}) = R_0 + R_\infty\left[1 - \exp\left(-b\overline{\varepsilon}\right)\right] \tag{95}$$

dla części kinematycznej uogólnione prawo typu Zieglera

$$\overset{\triangledown}{\alpha}_{ij} = \left(\frac{C}{R(\overline{\varepsilon})}\sigma'_{ij} - \gamma\alpha_{ij}\right)\dot{\overline{\varepsilon}} \tag{96}$$

Prawo ewolucji uszkodzenia jest sformułowane w oparciu o teorię plastyczności niezależną od prędkości deformacji (ang. rate-independent plasticity) ale równocześnie zależną od ciśnienia (ang. pressure-dependent plasticity). Założono mianowicie prędkość zmiany udziału objętościowego pustek (ang. void-volume fraction) jako sumę części związanej z wzrostem oraz nukleacją

$$\dot{f} = \dot{f}_{\mathrm{growth}} + \dot{f}_{\mathrm{nucl}} \quad \text{gdzie} \quad f(t_0) = f_0 \ , \tag{97}$$

z których część odpowiadająca wzrostowi uszkodzenia wynika z prawa zachowania masy

$$\dot{f}_{\mathrm{growth}} = (1 - f)\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{kk} \ . \tag{98}$$

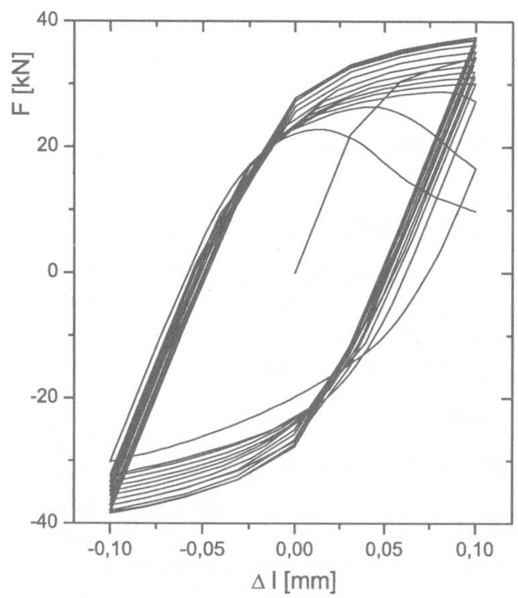
Modyfikacja wprowadzona przez Gursona–Tvergaarda–Needelmana uwzględnia trzy dodatkowe parametry materiałowe q_i $(i = 1, 2, 3)$, wpływające zarówno na warunki płynięcia plastycznego jak i uszkodzenia f^*, równe udziałowi objętościowemu pustek f, aż do osiągnięcia watości krytycznej f_{c} dla początku łączenia się pustek, poza którą uszkodzenie jest przyspieszane przez mnożnik $\kappa > 1$

$$f^* = \begin{cases} f & \text{gdy} \quad f \le f_{\mathrm{c}} \\ f_{\mathrm{c}} + \kappa(f - f_{\mathrm{c}}) & \text{gdy} \quad f > f_{\mathrm{c}} \ . \end{cases} \tag{99}$$

Takie podejście w przypadku implementacji do kodu elementów skończonych nawiązuje wyraźnie do sformułowania uaktualnionego lagranżianu (ang. updated lagrangian formulation) dla sprężysto-plastycznego materiału podlegającego izotropowemu uszkodzeniu.

Wyniki numerycznej symulacji modelem Gursona–Tvergaarda–Needelmana o początkowej wartości objętościowego udziału pustek $f_0 = 0.001$ zostały pokazane na Rys. 29.

Zatem próba zastosowania modelu Gursona–Tvergaarda–Needelmana oraz klasycznych modeli plastyczności z izotropowym lub kinematycznym wzmocnieniem jest skazana na niepowodzenie ponieważ w przypadku złożonych ścieżek obciążenia jakie towarzyszą obciążeniom cyklicznym, modele te nie są w stanie prawidłowo opisać skomplikowanych zmian kolejnych pętli histerezy.



Rysunek 29 Symulacja niskocyklowego zniszczenia próbki z karbem modelem Gursona–Tvergaarda–Needelmana z mieszanym wzmocnieniem plastycznym i początkową wartością objętościowego udziału uszkodzenia $f_0 = 0.001$ (Brocks i Steglich [9])

5.2.3 Kinetyczna teoria ewolucji uszkodzenia w ogólnym trójosiowym stanie naprężenia

Opis niesprężystej deformacji materiału jest oparty na oryginalnych założeniach kinetycznej teorii ewolucji uszkodzenia Lemaitre'a i Chaboche'a [50, 51] uogólnionej następnie przez Ganczarskiego i Cegielskiego [37] na przypadek skończonych deformacji oraz efektu unilateralnego. Z uwagi na możliwość wystąpienia skończonych deformacji na dnie karbu oraz w celu porównania wyników z rozwiązaniem otrzymanym przez Brocksa i Steglicha [9], którzy używali modelu Gursona–Tvergaarda–Needelmana, potencjał dyssypacji przyjęty jest w ogólnej postaci

$$F = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{S}}' - \boldsymbol{X}'\right) : \left(\widetilde{\boldsymbol{S}}' - \boldsymbol{X}'\right)} - R - \sigma_{\mathrm{y}} + \frac{3}{4X_\infty}\boldsymbol{X}' : \boldsymbol{X}' + F^{\mathrm{D}}\left(Y, D\right) \quad (100)$$

$\widetilde{\boldsymbol{S}}'$ oznacza efektywny dewiator drugiego tensora naprężenia Pioli–Kirchhoff'a

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}' = \frac{\boldsymbol{S} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{1}}{1 - Dh}\ , \quad (101)$$

natomiast $\boldsymbol{X}'$ jest dewiatorem tensora wzmocnienia kinematycznego. Tensor odkształcenia Green'a jest przedstawiony jako suma części sprężystej oraz plastycznej, co jedynie w przybliżeniu odpowiada multiplikatywnej dekompozycji odpowiednich gradientów deformacji $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$, lecz analogiczny rozkład został użyty przez Brocksa i Steglicha (93)

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{\mathrm{e}} - \boldsymbol{e}^{\mathrm{p}} \; . \tag{102}$$

Zakłada się, że prawo Hooke'a pozostaje słuszne dla deformacji sprężystej

$$\boldsymbol{S} = \widetilde{\boldsymbol{E}} : \left(\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}\right) \; , \tag{103}$$

gdzie efektywny tensor sprężystości $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ wyrażony jest zależnością (21), natomiast stowarzyszone prawo płynięcia definiuje deformację plastyczną

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{S}} = \frac{3}{2} \frac{\widetilde{\boldsymbol{S}}' - \boldsymbol{X}'}{J_2\left(\widetilde{\boldsymbol{S}}' - \boldsymbol{X}'\right)} \frac{\mathrm{d}\lambda}{1 - Dh} \; . \tag{104}$$

Przyrost kumulowanego odkształcenia plastycznego jest równy

$$\mathrm{d}p = \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}} : \mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{(1 - Dh)} \tag{105}$$

natomiast wartości odkształceniowych zmiennych wzmocnienia izotropowego oraz kinematycznego wynoszą

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r &= -\frac{\partial F}{\partial R}\mathrm{d}\lambda = (1 - Dh)\,\mathrm{d}p \\ \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} &= -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{X}'}\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\,(1 - Dh) - \frac{3}{2X_\infty}\boldsymbol{X}'\mathrm{d}\lambda \; . \end{aligned} \tag{106}$$

Po wykorzystaniu potencjału energii swobodnej Helmholtza

$$\psi = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}\,(1 - Dh) + R_\infty\left[r + \frac{1}{b}\exp\left(-br\right)\right] + \frac{X_\infty\gamma}{3}\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha}\right\} \tag{107}$$

daje się przejść na wartości naprężeniowych zmiennych wzmocnienia izotropowego oraz kinematycznego

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R &= b\left(R_\infty - R\right)\mathrm{d}\lambda \\ \mathrm{d}\boldsymbol{X}' &= \gamma\left[\frac{2}{3}X_\infty\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\,(1 - Dh) - \boldsymbol{X}'\mathrm{d}\lambda\right] \end{aligned} \tag{108}$$

zależnych od uszkodzenia poprzez dλ określone zależnością (105). Wartość mnożnika plastycznego obliczana jest na podstawie warunku zgodności

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{S}'} : \mathrm{d}\boldsymbol{S}' + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{X}'} : \mathrm{d}\boldsymbol{X}' + \frac{\partial F}{\partial R} : \mathrm{d}R = 0 \tag{109}$$

i wynosi

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{\frac{3}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{S}}' - \boldsymbol{X}'\right)\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{(1-Dh)\,J_2\left(\widetilde{\boldsymbol{S}}' - \boldsymbol{X}'\right)\left[X_\infty\gamma + b\,(R_\infty - R)\right.} \ldots$$
$$\ldots \overline{\left. -\frac{3}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{S}}' - \boldsymbol{X}'\right)\left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{S}}'}{1-Dh}\frac{\partial F^{\mathrm{D}}}{\partial Y} + \gamma\boldsymbol{X}'\right)\right]} \tag{110}$$

będącym uogólnieniem pierwszego z równań (82), nie pozwalajacym jednak z uwagi na ogólny trójosiowy stan naprężenia na jednoznaczne wyrażenie kolejnych składowych tensora naprężenia w funkcji mnożnika plastycznego. Prędkość uwalnianej energii właściwej odkształcenia będąca uogólnieniem formuły (78) jest równa

$$Y = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{-1} : \widetilde{\boldsymbol{S}} : \widetilde{\boldsymbol{S}} \tag{111}$$

w związku z czym prawo ewolucji uszkodzenia przyjmuje następującą postać

$$\mathrm{d}D = \frac{\partial F^{\mathrm{D}}}{\partial Y}\mathrm{d}\lambda = \frac{Y}{S}H\left(p - p^{\mathrm{D}}\right)\mathrm{d}p = \frac{\boldsymbol{E}^{-1} : \boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}}{2S\,(1-Dh)^2}H\left(p - p^{\mathrm{D}}\right)\mathrm{d}p \tag{112}$$

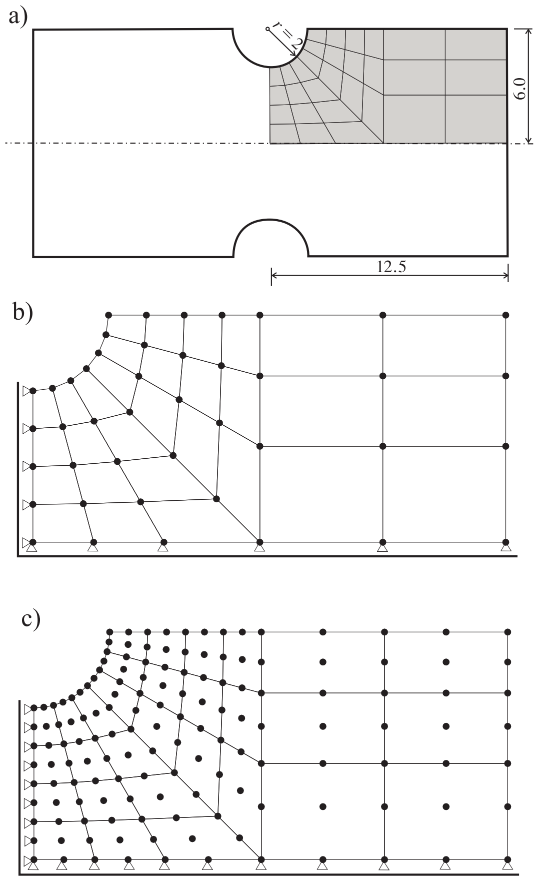
w której parametr deaktywacji uszkodzenia h określony jest zależnością (19).

5.2.4 Wyniki obliczeń

Układ równań (102, 103, 104, 105, 108, 110 i 112) nawiązujący do sformułowania pełnego lagrażianu (ang. full lagrangian formulation) jest implementowany do kodu czworokątnych obrotowo-symetrycznych elementów skończonych *plast- .for* (por. Owen i Hinton [59], Ganczarski i Skrzypek [36]). Z uwagi na pełną symetrię osiową siatka elementów skończonych pokrywa tylko ćwiartkę całkowitego przekroju poprzecznego próbki (Rys. 30a). Obliczenia numeryczne przeprowadzane są z zastosowaniem siatek dwóch typów elementów skończonych: 4-węzłowych oraz 9-węzłowych lagrange'owskich (Rys. 30b, c). Wartości wszystkich stałych materiałowych występujących w modelu, zidentyfikowanych przez Brocksa i Steglicha [9], podano w Tabeli 5.

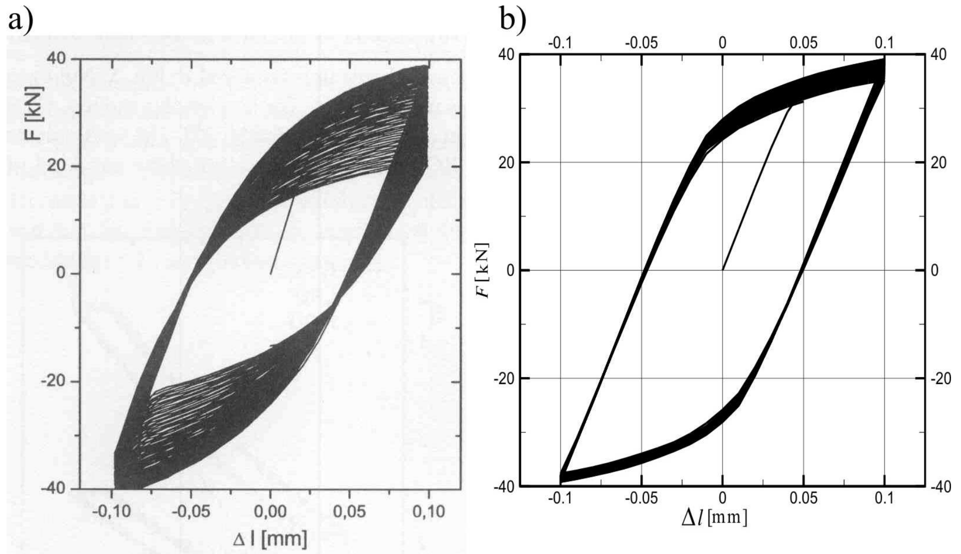
Tablica 5 Wartości stałych materiałowych dla stali ferrytycznej 20MnMoNi55

E [GPa]	ν	σ_y [MPa]	b [MPa]	R_∞	X_∞ [MPa]	γ	S [MPa]
210	0.3	470	75	8.0	7500	70	5.0

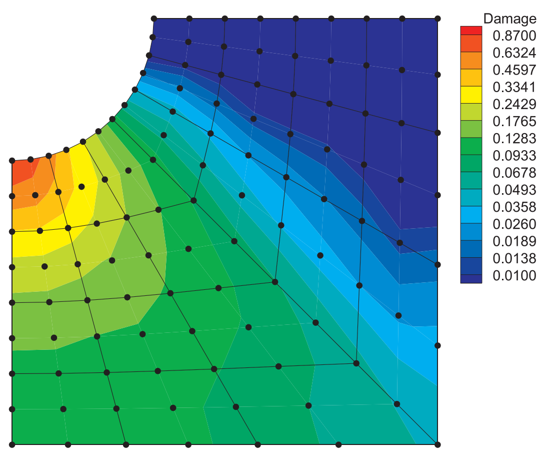


Rysunek 30 Geometria próbki a) oraz siatka elementów skończonych: 4-węzłowych b), 9-węzłowych lagrange'owskich c)

Wyniki uzyskane w wyniku numerycznej symulacji potwierdzają pod względem jakościowym wszystkie zjawiska związane ze spadkiem siły w miarę wzrostu uszkodzenia najsilniej zlokalizowanego w dnie karbu (Rys. 31b) w porównaniu do wyników eksperymentu. Osiągnięcie przez parametr uszkodzenia wartości $D \geqslant 0.87$ odpowiada zupełnemu wyczerpaniu nośności przez dany element skończony i tym samym jego pęknięcie (Rys. 32). Liczba cykli do zniszczenia jest w przybliżeniu równa połowie liczby cykli zanotowanych podczas eksperymentu.

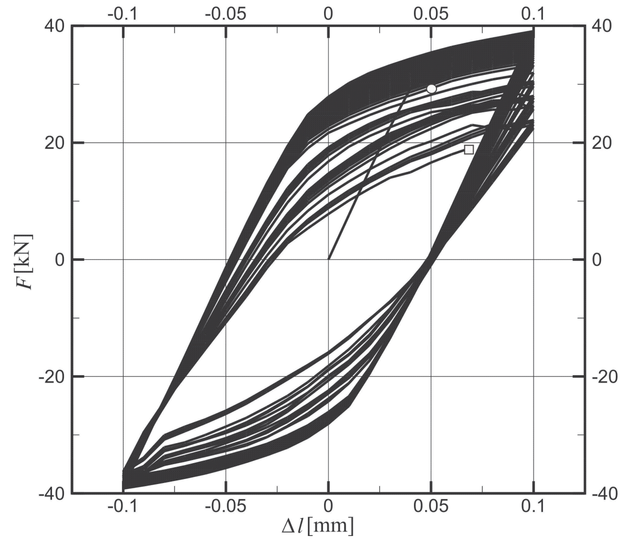


Rysunek 31 Zniszczenie niskocyklowe próbki z karbem wykonanej ze stali ferrytycznej 20MnMoNi55: a) wyniki eksperymentu Brocks'a i Steglich'a [9], b) numeryczna symulacja Ganczarski i Cegielski [37] – faza do pierwszego makrouszkodzenia



Rysunek 32 Mapa parametru uszkodzenia D w otoczeniu dna karbu w momencie wyczerpania nośności

Prowadzenie dalszej analizy uszkodzenia, związanej z śledzeniem propagacji frontu uszkodzenia w głąb materiału jest możliwe o ile stosuje się specjalne techniki związane z numerycznym rozwiązaniem problemów brzegowych zawierających osobliwości. Stosowanie klasycznych metod eliminacji Gaussa bądź LU dekompozycji jest możliwe tak długo, aż układ równań lub macierz sztywności nie staną się osobliwe w sensie matematycznym, albo numerycznie źle uwarunkowane. Oznacza to dokładnie tyle, że możliwe jest zbliżenie się z uszkodzeniem D do wartości krytycznej 1.0 jedynie z pewną tolerancją, gdyż naprężenie efektywne (18_1) zaczyna zdążać do nieskończoności, zaś odpowiedni efektywny moduł sprężystości (18_2) do zera. We wszystkich takich przypadkach, gdy macierz sztywności w metodzie elementów skończonych staje się numerycznie osobliwa, dobrze spisują sią specjalne techniki związane z np. odpinaniem elementów całkowicie uszkodzonych, bądź zastępowaniem ich elementami o bardzo małej lecz niezerowej sztywności (patrz Skrzypek i Kuna-Ciskał [67]), jak również z użyciem algorytmu rozkładu macierzy sztywności według wartości osobliwych (ang. singular value decomposition SVD). Zastosowanie ostatniej z technik wydaje się najbardziej ogólne i jednocześnie efektywne. W analizowanym przykładzie uszkodzenia próbki z karbem kierunek propagacji frontu uszkodzenia jest łatwy do przewidzenia, gdyż następuje on od dna karbu w kierunku osi symetrii elementu, czyli wzdłuż odpowiedniego brzegu siatki elementów skończonych. Powyższe spostrzeżenie leży u podstaw zastosowania uproszczonej techniki polegającej na odpinaniu kolejnych więzi podporowych w miarę jak wartość parametru uszkodzenia D w odpowiednich punktach Gaussa elementu skończonego osiąga wartość krytyczną 0.9. Wyniki poprowadzonej w taki sposób analizy numerycznej zostały pokazane na Rys. 33. W kolejnych pętlach histerezy można zaobserwować między innymi, dalsze pogłębienie dysproporcji pomiędzy spadkiem amplitudy siły po stronie rozciągania oraz ściskania, jak również pojawienie się charakterystycznego punktu przegięcia na gałęzi odpowiadającej zakresowi ściskania. Ostatni z efektów jest ściśle związany z wejściem w kontakt obu brzegów uszkodzonego elementu, następnie deaktywacją uszkodzenia wskutek znacznego ściskania i w konsekwencji z odzyskaniem pierwotnej sztywności.



Rysunek 33 Numeryczna symulacja zniszczenia niskocyklowego próbki z karbem wykonanej ze stali ferrytycznej 20MnMoNi55 – faza od pierwszego makrouszkodzenia (○) do pierwszego makropęknięcia (□)

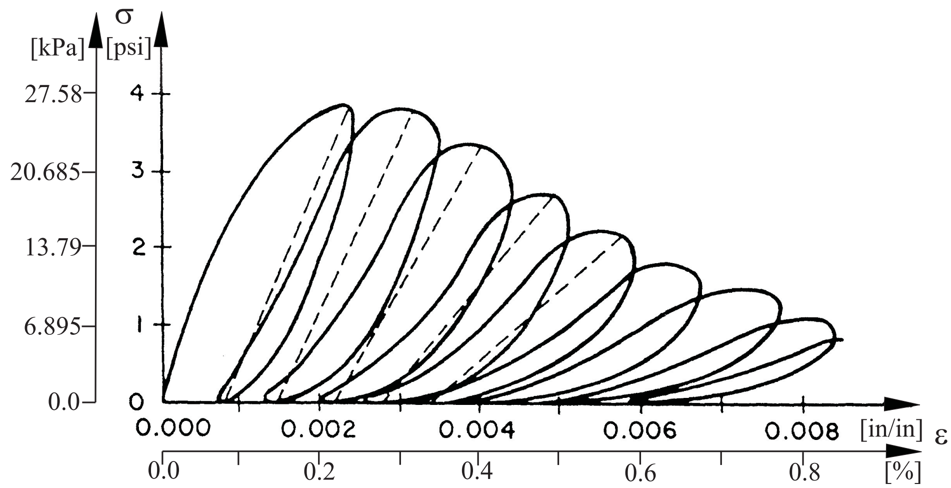
6. Zniszczenie próbki betonowej poddanej cyklicznemu ściskaniu

Beton jest materiałem kompozytowym złożonym z kruszywa oraz zaprawy cementowej, która z kolei jest mieszaniną cementu i piasku. Fizyczne zachowanie betonu jest bardzo złożone i zależy głównie od jego struktury zdeterminowanej współczynnikami: objętości wody do cementu, objętości cementu do kruszywa, kształtem i wymiarami kruszywa oraz gatunkiem użytego cementu. Z punktu widzenia mechaniki ośrodków ciągłych struktura betonu jest ignorowana i w związku z powyższym jest on traktowany jako materiał jednorodny oraz zazwyczaj początkowo izotropowy.

Beton należy do klasy materiałów kruchych, dla których krzywa odkształcenie–naprężenie silnie zależy od koncentacji mikro-uszkodzeń (w sensie kontynulanej mechaniki uszkodzeń) i makro-uszkodzeń (pęknięć w sensie mechaniki zniszczenia) istniejących wewnątrz oraz na powierzchni materiału. W szczególności beton zawierający początkowo dużą liczbę mikro-uszkodzeń, ulokowanych głównie na granicach pomiędzy ziarnami kruszywa i zaprawą wykazuje bardzo silną segragację, skurcz oraz termiczną rozszerzalność zaprawy cementowej. Pod wpływem przyłożonego obciążenia powstają dalsze mikrouszkodzenia na granicach ziaren kruszywa i zaprawy objawiające się makroskopowo jako nieliniowe zachowanie, ostatecznie prowadzące do powstawania pęknięć.

6.1. Próba jednoosiowego cyklicznego ściskania betonu Sinha i inni [65]

Na Rys. 34 zaprezentowano typową krzywą $\varepsilon - \sigma$ dla jednoosiowej próby cyklicznego ściskania próbki betonowej. Posługując się tradycyjną konwencją przyjętą w teorii materiałów kruchych oraz sypkich, naprężnie oraz odkształcenie odpowiadające stanowi ściskania zostały uznane za dodatnie, w związku z czym cały wykres przeniesiono z trzeciej do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych. Krzywe odpowiadające kolejnym odciążeniom i ponownym obciążeniom sprężystym nie są segmentami złożonymi z linii prostych, lecz pętlami zmieniającymi wymiary oraz charakteryzującymi się coraz mniejszym średnim pochyleniem. Jeśli założyć, że średnie pochylenie jest pochyleniem linii prostej łączącej punkty zwrotu na jednym cyklu oraz, że zachowanie materiału przy odciążeniu i ponownym obciążeniom jest liniowo sprężyste (linia punktowa na Rys. 34), to moduł sprężystości malej wraz ze wzrostem odkształcenia. Zjawisko degradacji sztywności jest ściśle związane ze wzrostem mikro-uszkodzenia, szczególnie silnie widocznym po przekroczeniu maksimum naprężenia.

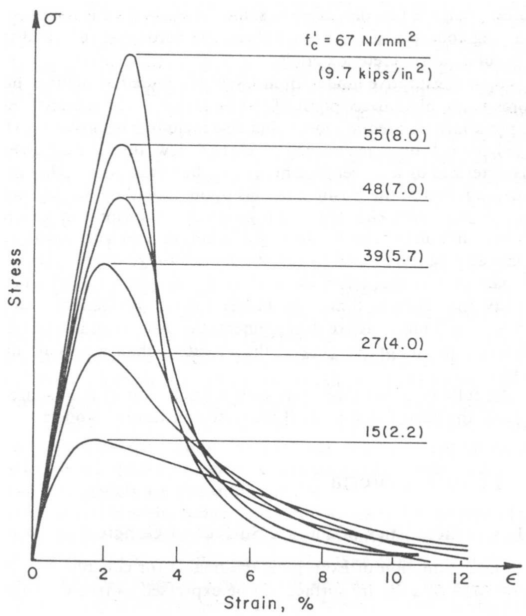


Rysunek 34 Jednoosiowa próba cyklicznego ściskania próbki betonowej (Sinha i inni [65])

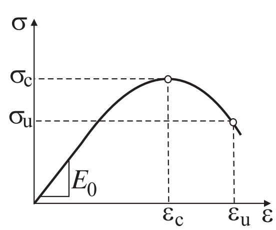
6.2. Model konstytutywny materiału z osłabieniem odkształceniowym

Wiele materiałów inżynierskich takich jak betony, skały czy grunty wykazuje znaczący efekt osłabiena odkształceniowego po przekroczeniu maksimum naprężenia. Na Rys. 35 pokazano typowe krzywe $\varepsilon - \sigma$ jednoosiowego ściskania próbek betonowych w przypadku wymuszenia typu kinematycznego otrzymane przez Wischersa [75]. Każda z krzywych charakteryzuje się tym silniejszym spadkiem naprężenia na jej prawej gałęzi, im wyższa była wartość maksymalnego naprężenia ściskającego f'_{c}. Jest to ściśle związane z powstaniem lokalizacji odkształcenia i jak zauważył van Mier [54] gałąź odpowiadająca osłabieniu nie oddaje rzeczywistego zachowania materiału lecz raczej odpowiedź całej próbki.

Pomimo słuszności powyższych uwag w typowym sformułowaniu metody elementów skończonych stosowanym do opisu betonu, efekty związane z lokalizacją odkształcenia nie są opisywane odrębną teorią, lecz uwzględnia się je w równaniu jednolitej krzywej pierwotnego obciążenia. Na krzywej tej wyróżnia się dwa zakresy odkształceń odpowiadające kolejno początkowi kruszenia $|\varepsilon| \geqslant |\varepsilon_{\mathrm{c}}|$ oraz granicznemu odkształceniu ściskającemu $|\varepsilon| \geqslant |\varepsilon_{\mathrm{u}}|$ (Rys. 36) i w ślad



Rysunek 35 Krzywe $\varepsilon - \sigma$ jednoosiowego ściskania próbek betonowych (Wischers [75])



Rysunek 36 Schematyzacja krzywej pierwotnego obciążenia (obwiedni) betonu

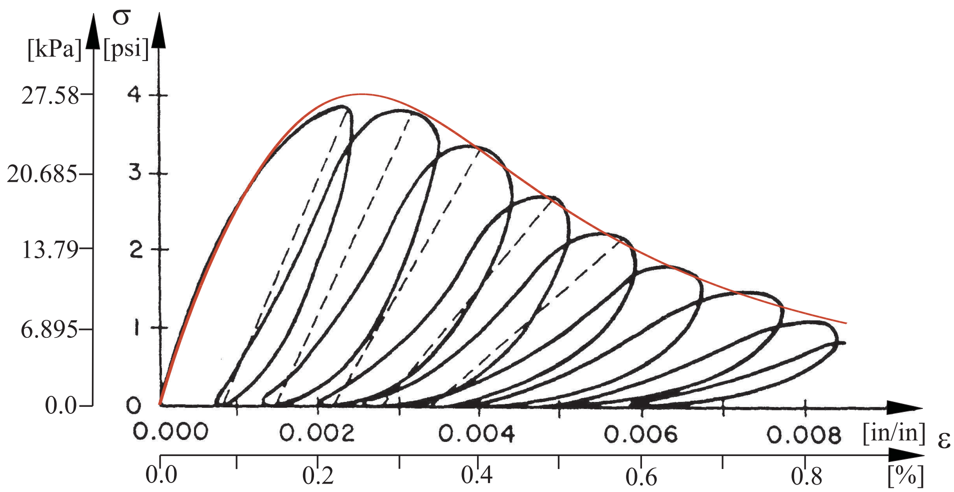
za tym przyjmuje następującą postać relacji do jej opisu (Bathe [5])

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = E_0 \frac{1 - B\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^2 - 2C\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^3}{\left[1 + A\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right) + B\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^2 + C\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^3\right]^2} \\
&A = \frac{\frac{E_0}{E_u} + \left(p^3 - 2p^2\right)\frac{E_0}{E_s} - \left(2p^3 - 3p^2 + 1\right)}{p\left(p^2 - 2p + 1\right)} \\
&B = 2\frac{E_0}{E_s} - 3 - 2A, \; C = 2 - \frac{E_0}{E_s} + A \\
&E_s = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c}, \quad E_u = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}, \quad p = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c}
\end{aligned}
\tag{113}
$$

Przyjmując wartości stałych materiałowych zaprezentowane w Tablicy 6 dostajemy dopasowanie krzywej pierwotnego obciążenia, podanej wzorem (113), do wyników próby Sinha i innych [65] pokazane na Rys. 37.

Tablica 6 Wartości stałych materiałowych opisujących krzywą pierwotnego obciążenia betonu

E_0 [MPa]	ε_c [%]	ε_u [%]	σ_c [kPa]	σ_u [kPa]
24.8	−0.25	−0.85	−27.2	−6.3

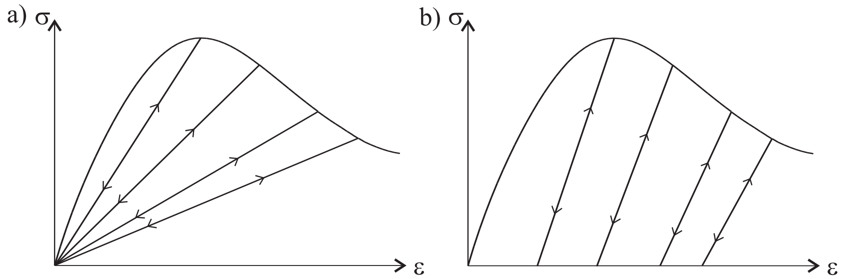


Rysunek 37 Dopasowanie krzywej pierwotnego obciążenia (linia czerwona) do wyników próby (Sinha i inni [65])

6.3. Równanie ewolucji uszkodzenia

Beton jako materiał wykazuje zarówno zachowanie plastyczne jak i degradację sztywności, dlatego zaliczany jest do kategorii materiałów z plastycznym osłabieniem. W celu uwzględnienia obu tych zachowań Bažant i Kim [6] sformułowali teorię określaną jako progresywne plastyczne pękanie (ang. progressively plastic fracturing), w której deformacja plastyczna definiowana jest w oparciu o tradycyjną teorię płynięcia, zaś degradacja sztywności modelowana jest tak jak w teorii Dougilla [26, 27] (Rys. 38a). Stosowanie tego sformułowania jest jednak skomplikowane, gdyż warunek plastyczności definiowany jest w przestrzeni naprężeń, natomiast warunek pękania w przestrzeni odkształceń.

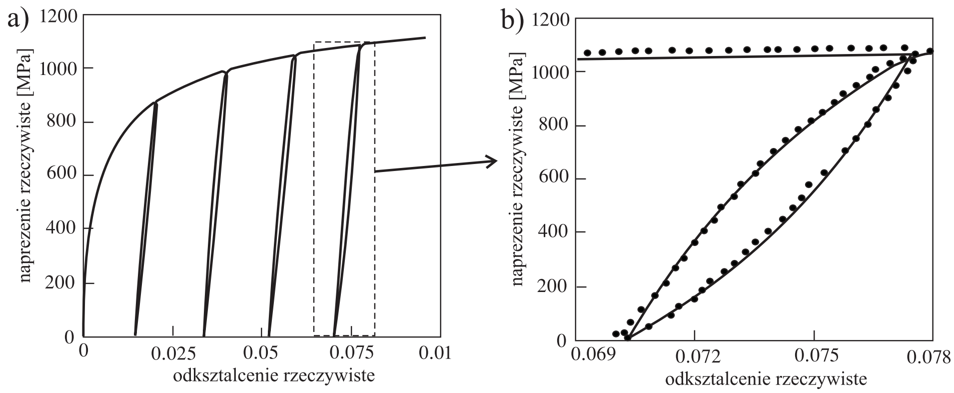
W celu ominięcia powyższego problemu Han i Chen [20] zaproponowali konsystentne podejście do opisu materiałów sprężysto-plastycznych z degradacją sztywności towarzyszącą zarówno umocnieniu jak i odkształceniowemu osłabieniu (ang. plastic-fracturing solid), w którym oba warunki są definiowane w przestrzeni odkształceń (Rys. 38b). Odpowiednie równanie ewolucji uszkodzenia, analogicznie jak w teorii Lemaitre'a–Chaboche'a, może zostać wyprowadzone w oparciu o potencjał Gibbsa (Murakami i Kamiya [57], Al-Gadhib i inni [3], Skrzypek i Kuna-Ciskał [68], Voyiadjis i inni [73]). Wszystkie omawiane w tym miejscu modele są doskonale przystosowane do bardzo precyzyjnego odwzorowania krzywej pierwotnego obciążenia betonu, natomiast ścieżka odciążenia/ponownego sprężystego obciążenia pozostaje liniowa (Rys. 38).



Rysunek 38 Typowe modele dla cyklicznego ściskania betonu: a) progresywne plastyczne pękanie, b) sprężysto-plastyczny z degradacją sztywności towarzyszącą zarówno umocnieniu jak i odkształceniowemu osłabieniu

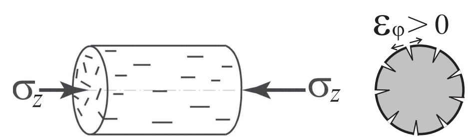
Rozróżnienie ścieżek odciążenia oraz ponownego sprężystego obciążenia jest natomiast możliwe w bardzo oryginalnym modelu dle betonu zbrojonego wkładkami stalowymi o wysokiej wytrzymałości, poddanego cykliczemu rozciąganiu przedstawionym przez Suna i Wagonera [69]. Autorzy opierając się na koncepcji Chaboche'a mieszanego wzmocnienia izotropowo-kinematycznego zaproponowali jej uogólnionienie na przypadek dwóch powierzchni granicznych zdefiniowanych w przestrzeni naprężenia. Potencjał plastyczności był zatem związany energią swobodną Helmholtza, a nie jak jest to tradycyjnie przyjmowane dla betonu z energią dopełniającą Gibbsa. Wyniki numerycznych symulacji porównane z doświadczalnymi rezultatami testów cyklicznych pokazano na Rys. 39.

Zaprezentowane powyżej sformulowania są zazwyczaj bardzo ogólne, a tym samym zbyt skomplikowane w stosunku do rozwiązywanego zagadnienia – jednosiowego cyklicznego ściskania, ale równocześnie zbyt ubogie jeśli chodzi o poprawane modelowanie nieliniowego zachowania materiału na ścieżce odciążenia/ponownego obciążenia sprężystego. Proponowane zatem uproszone sfor-



Rysunek 39 Wyniki Sun i Wagonera [69] modelowania cyklicznego rozciągania betonu zbrojonego

mułowanie opiera się na wynikach eksperymentów wykonywanych na ściskanych próbkach betonowych wykazujących tworzenie się siatki mikro-pęknięć w kierunku prostopadłym do ściskania σ_z i wywołanych dodatnim odkształceniem obwodowym ε_φ (Rys. 40). Stosowne równanie ewolucji uszkodzenia



Rysunek 40 Siatka mikro-pęknięć w ściskanej próbce betonowej

zostało zaproponowane przez Chaboche'a [13, 14] w następującej postaci

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon} = \begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^s & \text{gdy} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_\mathrm{c} \\ 0 & \text{gdy} \quad \varepsilon > \varepsilon_\mathrm{c}\ , \end{cases} \tag{114}$$

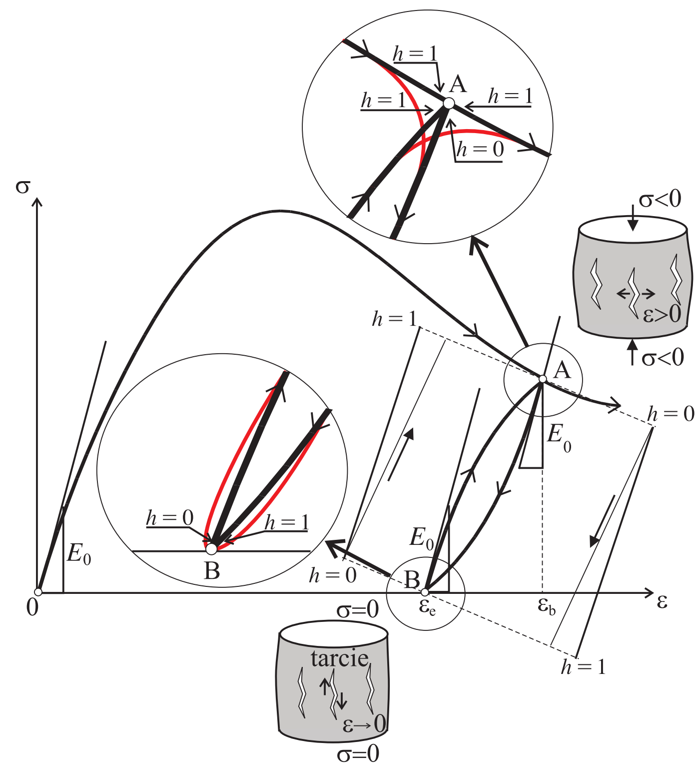
która obowiązuje dla dodatnich odkształceń ε_φ. Adaptacja wzoru (114) do przypadku modelowania mechanizmu powstawania siatki mikro-pęknięć jak na Rys. 40, które zależą od wymuszenia wywołanego naprężeniem σ_z, daje

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon} = \begin{cases} -\left(\dfrac{-\nu\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^s & \text{gdy} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_\mathrm{c} \\ 0 & \text{gdy} \quad \varepsilon > \varepsilon_\mathrm{c} \end{cases} \tag{115}$$

gdzie przyjęto $\varepsilon = \varepsilon_z$ oraz $\varepsilon_\varphi = -\nu\varepsilon_z$.

6.4. Efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia w betonie

Efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia w zastosowaniu do betonu ma bardziej złożoną naturę w porównaniu do materiałów metalicznych. Z uwagi na fakt iż mikro-pustki są wywoływane przez dodatnie odkształcenie w kierunku poprzecznym do osi ściskanej próbki i z reguły ich krawędzie są bardzo szorstkie efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia jest charakteru tarciowego, który jest ściśle związany zarówno z ujemnym odkształceniem ε jak i znakiem jego przyrostu $\mathrm{d}\varepsilon$. Graficzna interpretacja proponowanego opisu efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia w betonie została przestawiona na Rys. 41, natomiast odpowiednie zależności matematyczne podano poniżej



Rysunek 41 Graficzna interpretacja efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia w betonie

$$
h(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_\mathrm{b}}{\varepsilon_\mathrm{b} - \varepsilon_\mathrm{b}} & \text{odciążenie} \\ \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_\mathrm{b}}{\varepsilon_\mathrm{b} - \varepsilon_\mathrm{e}} & \text{ponowne obciążenie sprężyste} \end{cases} \tag{116}
$$

Prześledźmy zatem szczegółowo przebieg zjawisk modelowanych przez kolejne segmenty na krzywej $\varepsilon - \sigma$. W stanie początkowym materiał jest wolny od uszkodzenia $D = 0$, co manifestuje się nachyleniem stycznej w punkcie 0 równym E_0. Następnie, w miarę stopniowego wzrostu obciążenia obserwowane jest coraz bardziej nieliniowe zachowanie, któremu towarzyszy oczywiście wzrost uszkodzenia $D > 0$. Po osiągnięciu maksimum krzywa pierwotnego obciążenia betonu zaczyna wykazywać charakter opadający. Na odcinku tym zarówno odkształcenie $\varepsilon < 0$ jak i jego przyrost $\mathrm{d}\varepsilon < 0$ są ujemne[2], czemu odpowiada stan aktywacji uszkodzenia $h = 1$. W przypadku rozpoczęcia procesu odciążania rzeczywisty materiał wykazuje pewną "bezwładność" polegającą na tym, że przyrost odkształcenia jest nadal ujemny $\mathrm{d}\varepsilon < 0$, chociaż mniejszy od przyrostu wynikającego z poruszania się po krzywej pierwotnego obciążenia. W rezultacie początkowy odcinek procesu odciążania przebiega po łuku zaznaczonym kolorem czerwonym w górnym oknie na Rys. 41. Natomiast z punktu widzenia ciągłego efektu deaktywacji uszkodzenia tego typu zachowanie jest modelowane w sposób dyskretny, polegający na tym, że za początek procesu odciążania przyjmuje się punkt A, po osiągnięciu którego przyrost odkształcenia gwałtownie zmienia znak $\mathrm{d}\varepsilon > 0$, czemu odpowiada przejście uszkodzenia w stan deaktywacji $h = 0$ i równoczesne odzyskanie przez materiał początkowej sztywności E_0. Dalszy ciąg procesu odciążenia odbywa się po łuku $\widehat{\mathrm{AB}}$ z liniowym wzrostem parametru deaktywacji uszkodzenia, który osiąga wartość $h = 1$ w punkcie B. Od punktu B rozpoczyna się proces ponownego obciążenia sprężystego, czemu towarzyszy zmiana znaku przyrostu odkształcenia $\mathrm{d}\varepsilon < 0$ oraz natychmiastowe przejście uszkodzenia w stan deaktywacji $h = 0$ (patrz szczegół w dolnym oknie na Rys. 41). W rezultacie dla punktu B zaczynają obowiązywać wszystkie warunki, które zostały poprzednio opisane dla punktu A. Dalszy ciąg procesu ponownego obciążenia sprężystego odbywa się po łuku $\widehat{\mathrm{BA}}$ z liniowym wzrostem parametru deaktywacji uszkodzenia, który osiąga wartość $h = 1$ w punkcie A, łączącym się z krzywą pierwotnego obciążenia bez zmiany wartości h, gdyż przyrost odkształcenia $\mathrm{d}\varepsilon < 0$ nie zmienia znaku.

Zastosowanie powyższego opisu wielokrotnie prowadzi do otrzymania kolejnych pętli odciążenia/ponownego obciążenia sprężystego charakteryzujących się malejącym średnim pochyleniem, zależnym od aktualnej wartości uszkodzenia

$$E_0 < \widetilde{E}_1 = E_0(1 - D_1) < \widetilde{E}_2 = E_0(1 - D_2) < \ldots < \widetilde{E}_4 = E_0(1 - D_4) \quad (117)$$

oraz progresywnie wzrastającym polem powierzchni, odpowiadającym co do

[2] na oryginalnym wykresie leżącym w III ćwiartce układu współrzędnych

wartości energii właściwej dysypowanej na i-tej pętli

$$\begin{aligned}\Phi_i = \oint_{\widehat{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i}}^{\widehat{\mathrm{B}_i\mathrm{A}_i}} \sigma \mathrm{d}\varepsilon = \int_{\varepsilon_{\mathrm{b}i}}^{\varepsilon_{\mathrm{e}i}} E_0 \left(1 - D_i \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{b}i}}{\varepsilon_{\mathrm{b}i} - \varepsilon_{\mathrm{e}i}}\right) \varepsilon \mathrm{d}\varepsilon \\ + \int_{\varepsilon_{\mathrm{e}i}}^{\varepsilon_{\mathrm{b}i}} E_0 \left(1 - D_i \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{e}i}}{\varepsilon_{\mathrm{e}i} - \varepsilon_{\mathrm{b}i}}\right) \varepsilon \mathrm{d}\varepsilon = E_0 D_i \frac{\varepsilon_{\mathrm{b}i}^2 - \varepsilon_{\mathrm{e}i}^2}{2}\end{aligned} \tag{118}$$

zaś po wprowadzeniu wyników z Tabeli 7

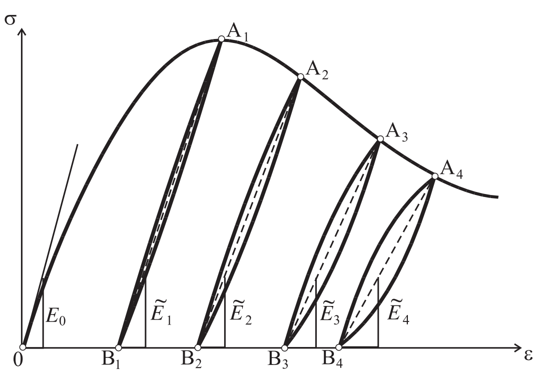
Tablica 7 Wartości odkształcenia w punkcie początkowym $\varepsilon_{\mathrm{b}i}$ i końcowym $\varepsilon_{\mathrm{e}i}$ pętli odciążania/ponownego obciążania sprężystego oraz aktualnego uszkodzenia D_i

Nr pętli i	$\varepsilon_{\mathrm{b}i}$ [%]	$\varepsilon_{\mathrm{e}i}$ [%]	D_i
1	-0.25×10^{-2}	-0.12×10^{-2}	0.26352
2	-0.35×10^{-2}	-0.22×10^{-2}	0.43653
3	-0.45×10^{-2}	-0.33×10^{-2}	0.63640
4	-0.55×10^{-2}	-0.42×10^{-2}	0.85991

daje

$$\Phi_1 = 21.68 \text{ Pa} < \Phi_2 = 40.10 \text{ Pa} < \Phi_3 = 73.86 \text{ Pa} < \Phi_4 = 134.44 \text{ Pa} \tag{119}$$

jak pokazano na Rys. 42.



Rysunek 42 Ewolucja średniego pochylenia oraz energii dysypowanej w kolejnych pętlach odciążenia/ponownego obciążenia sprężystego

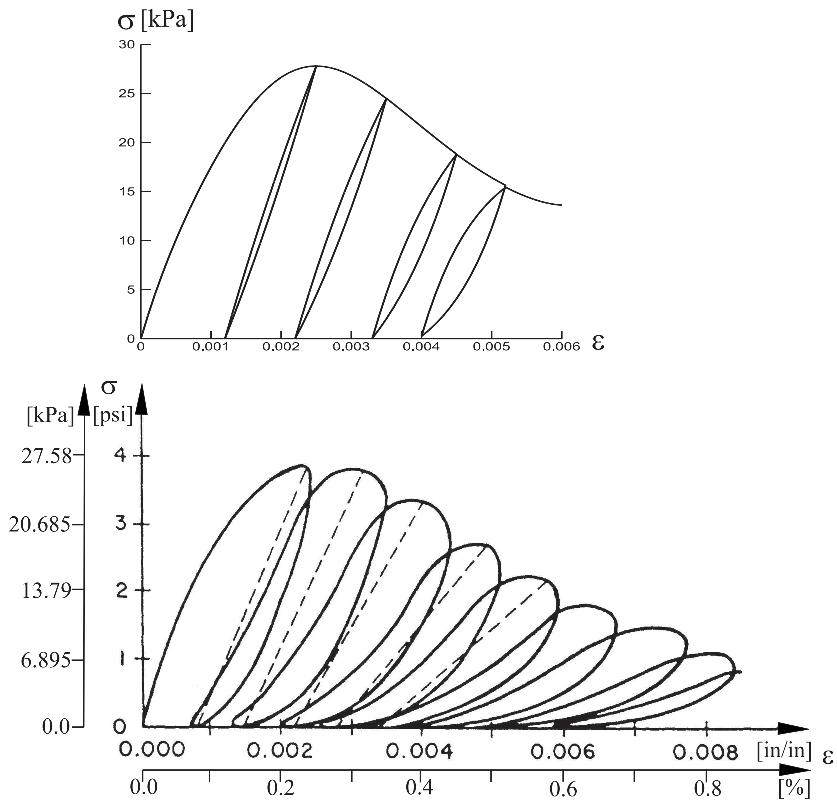
6.5. Wyniki obliczeń

Zarówno numeryczne całkowanie układu równań (113, 114) przy pomocy procedury *odeint.for* (Press i inni [62]) jak i ich implementacja do kodu elementów skończonych *bar.for* (Owen i Hinton [59], Ganczarski i Skrzypek [36]), wykorzystującego algorytm rozwiązywania nieliniowego zagadnienia metodą macierzy początkowej sztywności, dla danych materiałowych (częściowo cytowanych przez Bathe'go [5]) podanych w Tabeli 8 pozwala modelować krzywą $\varepsilon-\sigma$ dla jednoosiowej próby cyklicznego ściskania próbki betonowej, jak pokazano na Rys. 43.

Tablica 8 Wartości stałych materiałowych uszkodzenia betonu

ν	ε_0 [%]	s
0.25	2.5×10^{-6}	0.5

Można zaobserwować wierne odwzorowanie charakteru zarówno krzywej pierwotnego obciążenia $\varepsilon - \sigma$, stanowiącej obwiednię do wykresu przedstawionego na Rys. 34, jak rownież kolejnych pętli obciążenia i ponownego obciążenia sprężystego, wykazujących postępujący za uszkodzeniem wzrost pola powierzchni oraz spadek średniego pochylenia linii łączącej punkty zwrotu.



Rysunek 43 Krzywa $\varepsilon - \sigma$ dla jednoosiowej próby cyklicznego ściskania próbki betonowej z zastosowaniem efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia (115) (Ganczarski i Cegielski [35])

7. Podsumowanie uzyskanych wyników

Podsumowując wyniki przedstawione w rozprawie, można postawić co najmniej dwa pytania. Pierwsze dotyczy tego – co proponowany model ciągłej deaktywacji uszkodzenia wnosi do kontynualnej mechaniki uszkodzeń? Drugie z pytań natomiast brzmi: jakie są dalsze perspektywy rozwoju omawianej tematyki?

Najlepszą odpowiedzią na pierwsze pytanie jest systematyczne uszeregowanie przedstawionych oryginalnych problemów. W zakresie modelowania materiałów sprężysto-plastycznych podlegających unilateralnemu uszkodzeniu w warunkach obciążeń cyklicznych są to:

- propozycja wprowadzenia efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia w przypadku jednoosiowego oraz trójosiowego stanu naprężenia wraz z definicje naprężenia efektywnego oraz zmodyfikowanego tensora sprężystości opartymi na zasadzie równoważności odkształceń,
- budowa modelu opartego na uogólnieniu materiału typu Ylinena przez wprowadzenie dwóch niezależnych zmiennych uszkodzenia do równań ewolucji Lemaitre'a–Chaboche'a, a następnie propozycja jego uogólnienia na przypadek trójosiowego stanu naprężenia towarzyszącego lokalizacji odkształcenia do modelowania zaniszczenia niskocyklowego stali typu AISI 316L,
- adaptacja jednoosiowego wariantu kinetycznej teorii uszkodzenia Lemaitre'a–Chaboche'a do modelowania zniszczenia niskocyklowego stopu Al-2024,
- budowa powierzchni plastyczności typu Tresci–Guesta oraz Hubera–Misesa–Hencky'ego uwzględniających wpływ uszkodzenia a jednocześnie zachowujących wypukłość oraz ciągłość,
- uogólnienie kinetycznej teorii uszkodzenia Lemaitre'a–Chaboche'a na przypadek skończonych deformacji w celu modelowania zniszczenia niskocyklowego próbki z karbem, wykonanej ze stali ferrytycznej 20MnMoNi55.

Natomiast w zakresie modelowania materiałów niemetalicznych typu np. beton, podlegających uszkodzeniu w warunkach cyklicznego ściskania wynika z poniższego zestawienia:

- oryginalna propozycja sterowanego odkształceniem efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia zastosowana do modelowania ścieżek odciążenia oraz ponownego obciążenia sprężystego,

- budowa modelu uwzględniającego plastyczne osłabienie oraz ewolucję uszkodzenia typu Chaboche'a do modelowania cyklicznego ściskania betonu.

Wiele miejsca w pracy poświęcono indentyfikacji parametrów nowych modeli materiałowych w celu uzyskania przez nie najlepszej zgodności z wynikami eksperymentalnymi, zarówno pod względem jakościowym jak i ilościowym:

- asymetryczny spadek amplitudy naprężenia oraz wartości modułu sprężystości po stronie rozciągania i ściskania,

- powstanie punktów maksimum naprężenia oraz przegięcia na odpowiednich gałęziach pętli histerezy w wyniku lokalizacji odkształceń plastycznych,

- rozejście się ścieżek odciążenia oraz ponownego obciążenia sprężystego tworzących pętle o malejącym średnim nachyleniu.

Opracowano także oryginalne algorytmy i procedury numerycznego całkowania równań stanu metodą strzału oraz metody elementów skończonych pozwalające na rozwiązywanie złożonych zagadnień cyklicznej plastyczności z efektami uszkodzenia.

W związku z odpowiedzią na drugie z pytań to atrakcyjnym tematem wydaje się być szczegółowa analiza potencjału plastyczności zaproponowanego przez Lemaitre'a i Chaboche'a w kinetycznej teorii uszkodzenia

$$F = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \boldsymbol{X}'\right) : \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \boldsymbol{X}'\right)} - R - \sigma_{\mathrm{y}} + \underline{\frac{3}{4X_\infty}\boldsymbol{X}' : \boldsymbol{X}'} \,. \tag{120}$$

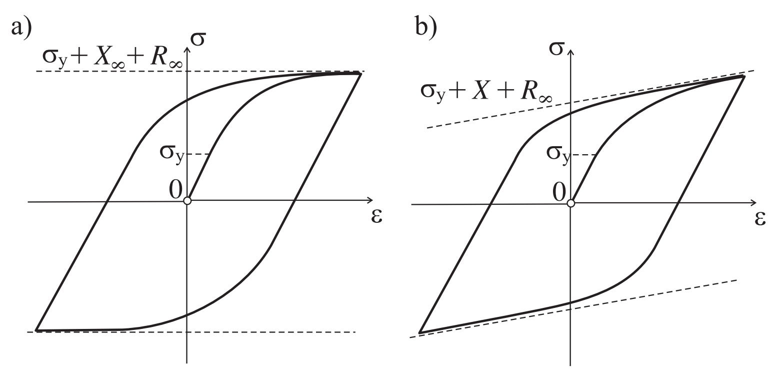
W istocie wywodzi się on wprost z rozszerzenia równań Armstronga i Fredericka [2]

$$\begin{aligned} & f\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, r\right) = J_2\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}'\right) - R - \sigma_{\mathrm{y}} = 0 \\ & J_2\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}'\right) = \sqrt{\tfrac{3}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}'\right) : \left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}'\right)} \\ & \mathrm{d}R = b\left(R_\infty - R\right)\mathrm{d}p \\ & \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \tfrac{2}{3}C\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - \underline{\gamma\boldsymbol{X}\mathrm{d}p} \end{aligned} \tag{121}$$

o wpływ uszkodzenia i prowadzi do niestowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego z uwagi na obecność podkreślonego wyrażenia w (120). Niestowarzyszenie prawa płynięcia plastycznego $F \neq f$ burzy automatycznie regułę normalności a w konsekwencji postulat stateczności Druckera. Te poważne konsekwencje zazwyczaj nie stanowią większego problemu dla użytkowników posługujących sie standadowymi procedurami numerycznymi. Bowiem w przypadku rozwiązywania zagadnienia opisanego potencjałem (77) za pomocą numerycznego całkowania równań stanu metodą strzału, problem niejako sam się rozwiązuje przez przyjęcie jednoosiowści stanu naprężenia. Natomiast w przypadku ogólnego zagadnienia trójwymiarowego (100) rozwiązywanego przy użyciu metody elementów skończonych należy się liczyć z pojawieniem się niesymetrycznej macierzy sztywności (porównaj Chen i Han [20]). Jednak i w tym przypadku tradycyjne solvery MES, oparte na klasycznej metodzie eliminacji Gaussa bądź LU dekompozycji, operują jedynie na górnej lub dolnej części trójkątnej i symetrycznej macierzy sztywności. Ewentualny brak symetrii macierzy sztywności, spowodowany implementacją niestowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego, jest zatem automatycznie usuwany przez odpowiednią procedurę symetryzującą, poprzedzającą każdorazowe uruchomienie solvera.

Jedną z propozycji pozwalających na rozwiązanie powyższego zagadnienia w oryginalnej, niesymetrycznej postaci jest użycie specjalnego solvera przystosowanego do tego typu problemów, a wykorzystywanego tradycyjnie w pakietach MES adresowanych do mechaniki płynów.

Inna propozycja polega na przywróceniu potencjałowi plastyczności własności stowarzyszenia, czyli pominięciu wyrażenia $3\boldsymbol{X}' : \boldsymbol{X}'/4X_\infty$. W konsekwencji nowy model oparty na tak zmodyfikowanym, stowarzyszonym potencjale plastyczności będzie wykazywać gasnące asymptotycznie wzmocnienie izotropowe (121_3) lecz liniowe wzmocnienie kinematyczne (121_4) – bez członu podkreślonego, co razem nawiązuje do zachowania typowego dla modelu typu Dafalias i Popov [23], pokazanego schematycznie na Rys. 44b.



Rysunek 44 Porównanie pierwszych pętli histerezy otrzymanych w oparciu o kinetyczną teorię uszkodzenia Lemaitre'a–Chaboche'a w przypadku prawa płynięcia: a) niestowarzyszonego (120), b) stowarzyszonego z warunkiem plastyczności

Bibliografia

[1] Abdul–Latif A., Chadli M. (2007), Modeling of the heterogeneous damage evolution at the granular scale in polycrystals under complex cyclic loadings, *Int. J. Damage Mech.*, **16**(2), 133–158.

[2] Armstrong, P.J., Frederick, C.O. (1966): A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, *C.E.G.B. Report* RD/B/N 731.

[3] Al-Gadhib A.H., Baluch M.H., Shaalan A., Khan A.R. (2000): Damage model for monotonic and fatigue response of high strength concrete, *Int. J. Damage Mech.*, 9, 57–74.

[4] Abu Al-Rub R.K., Voyjiadjis G.Z. (2003): On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials, *Int. J. Solids Struct.*, 40, 2611–2643.

[5] Bathe K.J. (1992): ADINA, Theory and Modeling Guide, *Report ARD*, 92–8.

[6] Bažant Z.P., Kim S.S. (1979): Plastic-fracturing theory for concrete, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 105(EM3), 407–428.

[7] Betten, J. (2002) *Creep mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[8] Broberg H. (1975) *Creep damage and rupture, a phenomenological study*, PhD Thesis, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg.

[9] Brocks W., Steglich, D. (2003): Damage models for cyclic plasticity, *Key Engineering Materials Vols.*, 251–252, 389–398.

[10] Cegielski M., Ganczarski A. (2007): Effect of continuous damage deactivation on yield and failure surfaces, *Acta Mechanica et Automatica*, **1**(2), 11–14.

[11] Cegielski M., Hernik S., Kula M., Oleksy M. (2010): Enhanced Numerical Tools for Computer Simulation of Coupled Physical Phenomena and Design of Components Made of Innovative Materials, in *Innovative Technological Materials, Structural Properties by Neutrons Scattering, Synchrotron Radiation and Modeling*, Eds. F. Rustichelli and J.J. Skrzypek, Springer Berlin-Heidelberg, Chapter 7, 225–254.

[12] Cegielski M., Ganczarski A. (2011): Modelowanie zniszczenia niskocyklowego próbki ze stali 20MnMoNi55, *Materiały Konf. VI Międzynarodowego Sympozjum Mechaniki Materiałów i Konstrukcji*, Augustów, 30.05-2.06.2011, 1–6.

[13] Chaboche J.-L. (1985): *Méchanique des matériaux solides*, Bordas, Paris.

[14] Chaboche J.-L. (1988): Continuum damage mechanics: Part I: General concepts, Part II: Damage growth, crack initiation, and crack growth, *J. Appl. Mech.*, **55**(3), 59–71.

[15] Chaboche J.-L. (1992): Damage induced anisotropy: On the difficulties associated with the active/passive unilateral condition, *Int. J. Damage Mechanics*, **1**(2), 148–171.

[16] Chaboche J.-L. (1993): Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage, *Int. J. Damage Mechanics*, 2, 311–329.

[17] Chaboche J.-L. (1999): Thermally founded CDM models for creep and other conditions, in *Creep and damage in materials and structures*, Eds. H. Altenbach and J.J. Skrzypek, CISM Courses and Lectures No. 399, 209–283.

[18] Chaboche J.-L. (2006): Constituive modelling and damage of materials and structures, KMM-NoE Integrated Post-Graduate School Doctoral Path, First Intensive Session, Cracow, Poland, Feb. 6–17, 2006, *Experimental techniques and modelling of advanced materials*, Eds. Skoczeń B., Pamin J.

[19] Chaboche J.-L., Lesne, P.M. Moire, J.F. (1995): Continuum damage mechanics, anisotropy and damage deactivation for brittle materials like concrete and ceramic composites, *Int. J. Damage Mechanics*, 4, 5–21.

[20] Chen X.F., Han D.J. (1988): *Plasticity for structural engineering*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

[21] Chow C.L., Wei Y. (1999) Constitutive modelling of material damage for fatigue failure prediction, *Int. J. Damage Mech.*, 8, 355–375.

[22] Cordebois J.P., Sidoroff F. (1979): Damage induced elastic anisotropy, Coll. Euromech 115, Villard de Lans, also in *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, Ed. Boehler, J. P., Martinus Nijhoff, Boston, 1983, 761–774.

[23] Dafalias Y.F., Popov E.P. (1975): A model for nonlinearly hardening materials for complex loading, *Acta Mechanica*, **21**(3), 173–192.

[24] Давиденков Н.Н., Спиридонова Н.Е. (1945): Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца, Заводская лаборатория, XI, 6.

[25] Dhanasekar M., Page A.W., Kleeman P.W. (1985), The failure of brick masonry under biaxial stresses, in *Proc. Instn. Civ. Engrs.*, Part 2, 295–313.

[26] Dougill J.W. (1975): Some remarks on path independence in the small in plasticity, *Quaterly of Applied Mathematics*, 32, 233–243.

[27] Dougill J.W. (1976): On stable progressively fracturing solids, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 27, 423–437.

[28] Dufailly J.,Lemaitre J. (1995): Modeling of low cycle fatigue, *Int. J. Damage Mech.*, 4, 153–170.

[29] Finnie I., Abo el Ata M.M. (1971), Creep and creep-rupture of copper tubes under multiaxial stress, in *Advances in Creep Design*, Eds. Smith A.J., Nicolson A.M., Willey, New York, 329–352.

[30] Ganczarski A. (1999): Thermal anisotropy introducing brittle damage, *Technische Mechanik*, **19**(4), 321–330.

[31] Ganczarski A. (1999): Effect of brittle damage on thermal expansion tensor, Proc. *Thermal Stresses′*99, 267–270.

[32] Ganczarski A. (2001): *Problemy nabytej anizotropii w ujęciu sprzężonej termomechniki uszkodzeń*, Zeszyty Naukowe PK, nr 25.

[33] Ganczarski A., Barwacz, L. (2004) Notes on damage effect tensors of two-scalar variables, *Int. J. Damage Mech.*, **13**(3), 287–295.

[34] Ganczarski A., Cegielski M. (2007): Efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia, *Acta Mechanica et Automatica*, **1**(1), 35–38.

[35] Ganczarski A., Cegielski M. (2008): Continuous damage deactivation in modelling of low cycle fatigue of metallic and concrete materials, Proc. *WCCM8 ECCOMAS* 2008, (na CD ROM).

[36] Ganczarski A., Skrzypek J. (2009): *Plastyczność materiałów inżynier–skich*, Wydawnictwo PK, Kraków.

[37] Ganczarski A., Cegielski M. (2010): Continuous damage deactivation in modeling of cycle fatigue of engineering materials, *Procedia Engineering*, 2 (2010), 1057–1066, www.elsevier.com/locate/procedia.

[38] Garion C., Skoczeń B. (2003) Combined model of strain induced phase transformation and orthotropic damage in ductile materials at cryogenic temperatures, *Int. J. Damage Mech.*

[39] Halm D., Dragon A. (1996): A model of anisotropic damage by mesocrack growth; unilateral effect, *Int. J. Damage Mechanics*, 5, 384–402.

[40] Halm D., Dragon A. (1998): An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **17**(3), 439–460.

[41] Hansen N.R., Schreyer H.L. (1995): Damage deactivation, *Trans. ASME*, 62, 450–458.

[42] Hayakawa K., Murakami S. (1998): Space of damage conjugate force and damage potential of elastic-plastic-damage materials, *Damage Mechanics in Engineering Materials*, Eds. Voyiadjis G.Z. i in., Elsevier, Amsterdam, 27–44.

[43] Hayhurst D.R. (1998): Data bases and mechanisms-based constitutive equations for use in design, CISM Course 187, Udine, 7–11 September, *Creep and Damage in Materials and Structures*, Eds. Altenbach H. and Skrzypek J., Springer Viena, 167–208.

[44] Johson A.E., Henderson J., Mathur V.D. (1956), Combined stress fracture of commercial copper at 250°C, *The Engineer*, 24, 261–265.

[45] Ju J.W. (1989): On energy based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects, *Int. J. Solids and Structures*, **25**(7), 803–833.

[46] Krajcinovic D. (1996): *Damage Mechanics*, Elsevier, Amsterdam.

[47] Krajcinovic D., Fonseka G.U. (1981): The continuous damage theory of brittle materials, part I and II, *J. Appl. Mechanics*, ASME, 18, 809–824.

[48] Ladeveze P. (1983): On an anisotropic damage theory, in *Failure criteria of structural media*, CNRS Int. Coll. No 351, Villard-de-Lans, ed. Boehler, Balkema, Rotterdam.

[49] Ladeveze P., Lemaitre J. (1984): Damage effective stress in quasi-unilateral conditions. Proc. *IUTAM Congress*, Lyngby, Denmark.

[50] Lemaitre J. (1992): *A course on damage mechanics*, Springer-Verlag.

[51] Lemaitre J., Chaboche J.-L. (1985): *Mécanique des matériaux solides*, Bordas, Paris.

[52] Litewka A. (1991): *Creep damage and creep rupture of metals*, Wydawnictwa Politechniki Poznańskiej.

[53] Mazars J. (1986): A model of unilateral elastic damageable material and its application to concrete, in *Energy Toughness and Fracture Energy of Concrete*, Ed. F.H. Wittmann, Elsevier Sci. Publ., Amsterdam, The Netherlands, 61–71.

[54] van Mier J.G. (1984): Complete stress-strain behavior and damaging status of concrete under multiaxial condititons, RILEM-CEB-CRNS, *Internationl Conference On Concrete Under Multiaxial Conditions*, Presses de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France, vol. 1, 75–85.

[55] Murakami S., Sanomura Y. (1985), Creep and creep damage of copper under multiaxial states of stress, in *Plasticity today*, Eds. Sawczuk A., Bianchi G., Elsevier, London, 535–551.

[56] Murakami S., Sanomura Y., Saitoh K. (1986), Formulation of cross-hardening in creep and its effect on the creep damage process of copper, *J. Eng. Mat. Techn.*, 108, 167–173.

[57] Murakami S., Kamiya K. (1997): Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics, *Int. J. Solids Structures*, **39**(4), 473–486.

[58] Ortiz M. (1985): A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete, *Mechanics of Materials*, 4, 67–93.

[59] Owen D.R.J., Hinton E. (1980): *Finite elements in plasticity : Theory and Practice*, Pineridge Press Ltd., Swansea

[60] Page A.W. (1981), The biaxial compressive strength of brick masonry, Proc.*Instn. Civ. Engrs.*, Part 2, 71, 893–906.

[61] Page A.W. (1983), The strength of brick masonry under biaxial tension-compression, *Int. J. Masonry Constr.*, 3, 26–31.

[62] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. (1993): *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge Press.

[63] Ramtani S. (1990): *Contribution á la Modelisation du Comportement Multiaxial du Beton Endommagé avec Description du Caractere Uni–lateral*, PhD Thesis, Univ. Paris VI.

[64] Rots J.G. (1997), *Structural masonry – an experimental – numerical basis for practical design rules*, Balkema, Rotterdam.

[65] Sinha B.P., Gerstle K.H., Tulin L.G. (1964): Stress-strain relations for concrete under cyclic loading, *ACI Journal*, **61**(2), 195–211.

[66] Skrzypek J., Ganczarski A. (1999): *Modeling of material damage and failure of structures*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[67] Skrzypek J., Kuna-Ciskał H. (2001): Symulacja rozwoju uszkodzeń i pęknięć w materiałach sprężysto-kruchych w ujęciu kontynualnym, *Zeszyty Naukowe Polit. Białostockiej*, 23, 403–44.

[68] Skrzypek J.J., Kuna-Ciskał H. (2003): Anisotropic elastic-brittle-damage and fracture models based on irreversible thermodynamic, in *Anisotropic Behaviour of Damaged Materials*, Eds. J.J. Skrzypek and A. Ganczarski, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 143–184.

[69] Sun L., Wagoner R.H. (2011): Complex unloading behavior: Nature of the deformation and its consistent constitutive representation, *Int. J. Plasticity*, 27, 1126–1144.

[70] Tikchomirov D., Niekamp R., Stein E. (2000): On three-dimensional micro-crack density distribution, *ZAMM*, **81**(1), 3–7.

[71] van der Pluijm R. (1999): *Discontinuous modelling of strain localisation and failure*, PhD Thesis, Delft Univ. Techn.

[72] Vereecke B., Billardon R. (2004): An elasto-viscoplastic model coupled to damage and grain growth to take account of material variability, Proc. *XXI ICTAM*, 15-21 August 2004, Warsaw, Poland (on CD ROM).

[73] Voyiadjis G.Z., Taqieddin Z.N., Kattan P.I. (2008): Anisotropic damage-plasticity model for concrete, *Int. J. Plasticity*, 24, 1946–1965.

[74] Welemane H., Cormery F. (2002): Some remarcks on the damage unilateral effect modelling for microcracked materials, *Int. J. Damage Mech.*, 11, 65–86.

[75] Wischers G. (1978): Application of effects of compressive loads on concrete, *Betonthech.*, Berlin, Nr. 2, 3, Düsseldorf.

[76] Ylinen A. (1956): A method of determining the buckling stress and required cross-sectional area for centrally loaded straight columns in elastic and inelastic range, *Mémoires Association Internationale des Ponts et Charpents*, Zürich, 16, 529–550.

Streszczenie

Rozprawa dotyczy problematyki efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia w kontynualnej mechanice zniszczenia. Trzon rozprawy stanowi siedem rozdziałów poświęconych kolejno: omówieniu aktualnego stanu wiedzy i krytycznemu przeglądowi literatury w zakresie modelowania efektu unilateralnego, sformułowaniu nowych równań konstytutywnych zawierających efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia, adaptacji metod numerycznych na potrzeby zagadnień brzegowych dotyczących ciągłego zaykania mikro-pustek oraz przykładów modelowania konkretnych materiałów metalicznych oraz kruchych pracujących w warunkach obciążeń cyklicznych. Cała rozprawy została zamknięta posumowaniem uzyskanych wyników oraz bibligrafią.

Effect of continuous damage deactivation in CDM

Summary

Thesis deals with the problem of continuous damage deactivation in Continuum Damage Mechanics. The heart of the thesis are seven chapters referring to: actual state of knowledge and critical review of literature in the field of unilateral damage, formulation of new constitutive equations comprizing effect of continuous damage deactivation, adaptation of numerical methods in order to solve boundary problems including effect of continuous crack closure and, examples of modeling of popular engineering metallic and britlle materials subjected to cyclic loadings. Final remarks and bibligraphy close the thesis.

Dodatek

Kody procedur CYCLET oraz DERIVS

```
C       ————————————————-
C       PROGRAM ANALIZUJACY KOLEJNE PETLE
C       HISTERZY DLA MATERIALU LEMAITRE’A
C       ————————————————-
C
        PROGRAM CYCLET
        INTEGER I,ID,INDEX,ipl,NC,NP,NOK,NBAD,NVAR,LU
        PARAMETER (NP=100,NVAR=5)
        REAL hc,yield
        REAL DEPS,EPSMAX,EPSMIN,H1,HMIN,xmult,X1,X2,YSTART(NVAR)
        EXTERNAL derivs,rkqs
        COMMON /caller/ INDEX,ipl,LU,NC,hc,yield
C
        xmult=sqrt(3.0)
        EPSMIN=-1.47
        EPSMAX=1.47
        yield=2.3E2
        hc=0.2
        WRITE(*,*)’Wydruk:histerezy-0, uszkodzenia-1’
        READ(*,*)ID
C
        DEPS=(EPSMAX-EPSMIN)/NP
        H1=DEPS/100.
        HMIN=0.
C
C       OTWORZ ZBIOR .DAT
C
        OPEN (10,FILE=’WYNIKI.DAT’,STATUS=’UNKNOWN’)
C
        X1=0.0
        YSTART(1)=0.0
        YSTART(2)=0.0
        YSTART(3)=0.0
        YSTART(4)=0.0
        YSTART(5)=0.0
```

```
C
      WRITE(10,10)X1,YSTART(1)
   10 FORMAT(2(E12.4))
C
C      PIERWOTNE OBCIAZENIE
C
      INDEX=0
      LU=1
      ipl=0
C
      DO 20,I=1,50
      X2=X1+DEPS
      IF(xmult*(YSTART(1)/(1.0-YSTART(4))-YSTART(3)).GE.yield+YSTART(2))
     *THEN
      ipl=1
      ENDIF
      CALL ODEINT(ystart,nvar,x1,x2,1.E-6,h1,hmin,nok,nbad,derivs,
     *rkqs)
      IF(ID.EQ.0)THEN
      WRITE(10,30)X2,YSTART(1)
   30 FORMAT(2(E12.4))
      ENDIF
      X1=X2
   20 CONTINUE
C
C      petla po wszystkich cyklach
C
      DO 100,NC=1,300
      WRITE(*,*)'Cykl nr=',NC
c      25 FORMAT(8HCykl nr=,I4)
C
C      ODCIAZENIE + SCISKANIE
C
      INDEX=0
      LU=0
      ipl=0
      DO 40,I=1,NP
      X2=X1-DEPS
      IF(YSTART(1).LE.0.0)THEN
```

```
      INDEX=1
      LU=1
C     IF(YSTART(1)/(1.0-YSTART(4)*hc)-YSTART(3).LE.-yield-YSTART(2))
      IF(xmult*(YSTART(1)/(1.0-YSTART(5))-YSTART(3)).LE.-yield-YSTART(
     * 2))THEN
      ipl=1
      ENDIF
      ENDIF
      CALL ODEINT(ystart,nvar,x1,x2,1.E-6,h1,hmin,nok,nbad,derivs,
     *rkqs)
      IF(ID.EQ.0)THEN
      IF(NC.LE.10 .OR. NC.GE.240)THEN
      WRITE(10,50)X2,YSTART(1)
   50 FORMAT(2(E12.4))
      ENDIF
      ENDIF
      X1=X2
   40 CONTINUE
C
C     ODCIAZENIE + ROZCIGANIE
C
      LU=0
      ipl=0
C
      DO 60,I=1,NP
      X2=X1+DEPS
      IF(YSTART(1).GE.0.0)THEN
      INDEX=0
      LU=1
      IF(xmult*(YSTART(1)/(1.0-YSTART(4))-YSTART(3)).GE.yield+YSTART(2
     *))THEN
      ipl=1
      ENDIF
      ENDIF
      CALL ODEINT(ystart,nvar,x1,x2,1.E-6,h1,hmin,nok,nbad,derivs,
     *rkqs)
      IF(ID.EQ.0)THEN
      IF(NC.LE.10 .OR. NC.GE.240)THEN
      WRITE(10,70)X2,YSTART(1)
```

```
   70 FORMAT(2(E12.4))
      ENDIF
      ENDIF
      X1=X2
   60 CONTINUE
C
      IF(ID.EQ.1)THEN
      WRITE(10,90)NC,YSTART(4),YSTART(5)
   90 FORMAT(I3,2(E12.4))
      ENDIF
C
  100 CONTINUE
C
C     ZAMKNIJ ZBIOR .DAT
C
      CLOSE(9)
C
      END
C     ******************************************************
      SUBROUTINE derivs(x,y,dydx)
      INTEGER INDEX,ipl,LU
      REAL dydx(5),x,y(5)
      REAL b,E,G,gamma,h,hc,poiss,Rinfty,S,xmult,Xinfty,yield
      COMMON /caller/ INDEX,ipl,LU,NC,hc,yield
C
C     Evaluates derivatives dy/dx for ODEINT.
C
      xmult=sqrt(3.0)
      b=0.1
      E=7.0E2
      poiss=0.3
      G=E/(2.0*(1.0+poiss))
      gamma=4.0
      Rinfty=1.2E2
      S=3.5E4
      Xinfty=6.0E1
C
      IF(y(4).GE.0.95 .OR. y(5).GE.0.95)THEN
C
```

```
C       jesli uszkodzenie osiagnie 95C
        write(*,*)y(4),y(5)
        write(*,*)'koniec procesu'
        stop
        ENDIF
C
        IF(LU.EQ.1 .AND. INDEX.EQ.0)THEN
        dydx(1)= G*SQRT((1.0-y(4))*(1.0-y(5)*hc))
        IF(ipl.EQ.0)THEN
        dydx(2)= 0.0
        dydx(3)= 0.0
        dydx(4)= 0.0
        ELSE
        temp0=1.0-y(4)
        temp1=temp0*temp0
        temp2=y(1)/temp0
        temp3=temp2*temp2
        temp4=1.0-y(5)*hc
        temp5=y(1)/temp4
        temp6=temp5*temp5
        dydx(1)= temp1*(2.0*(gamma*Xinfty+b*(Rinfty-y(2)))/3.0
      * *sign(1.0,temp2-y(3))-gamma*y(3)/xmult)
        dydx(2)= b*(Rinfty-y(2))*temp0/xmult
        dydx(3)= gamma*(Xinfty/3.0-y(3)/xmult)*temp0
        IF(NC.LT.12)THEN
        dydx(4)= 0.0
        dydx(5)= 0.0
        ELSE
        dydx(4)= temp3/(2.0*xmult*G*S)
        dydx(5)= temp6/(2.0*xmult*G*S)
        dydx(1)= dydx(1)-dydx(4)*temp2
        ENDIF
        ENDIF
        ENDIF
C
        IF(LU.EQ.0)THEN
        IF(INDEX.EQ.0)THEN
        dydx(1)= G*SQRT((1.0-y(4))*(1.0-y(5)*hc))
        ELSE
```

```
      dydx(1)= G*SQRT((1.0-y(4)*hc)*(1.0-y(5)))
      ENDIF
      dydx(2)= 0.0
      dydx(3)= 0.0
      dydx(4)= 0.0
      dydx(5)= 0.0
      ENDIF
C
      IF(LU.EQ.1 .AND. INDEX.EQ.1)THEN
      dydx(1)= G*SQRT((1.0-y(4)*hc)*(1.0-y(5)))
      IF(ipl.EQ.0)THEN
      dydx(2)= 0.0
      dydx(3)= 0.0
      dydx(4)= 0.0
      dydx(5)= 0.0
      ELSE
      temp0=1.0-y(5)
      temp1=temp0*temp0
      temp2=y(1)/temp0
      temp3=temp2*temp2
      temp4=1.0-y(4)*hc
      temp5=y(1)/temp4
      temp6=temp5*temp5
      dydx(1)=-temp1*(2.0*(gamma*Xinfty+b*(Rinfty-y(2)))/3.0
     * *sign(1.0,temp2-y(3))-gamma*y(3)/xmult)
      dydx(2)=-b*(Rinfty-y(2))*temp0/xmult
      dydx(3)= gamma*(Xinfty/3.0+y(3)/xmult)*temp0
      IF(NC.LT.12)THEN
      dydx(4)= 0.0
      dydx(5)= 0.0
      ELSE
      dydx(4)=-temp6/(2.0*xmult*G*S)
      dydx(5)=-temp3/(2.0*xmult*G*S)
      dydx(1)= dydx(1)-dydx(4)*temp2
      ENDIF
      ENDIF
      ENDIF
      return
      END
```

Kod procedury RESIDU

```
      SUBROUTINE RESIDU(ASDIS,COORD,DAMAG,EFFST,ELOAD,LNODS,JINCS,
     .                  LPROP,MATNO,MELEM,MMATS,MPOIN,MTOTG,MTOTV,NDOFN,
     .                  NELEM,NEVAB,NGAUS,NLAPS,NNODE,NSTR1,NTYPE,POSGP,
     .                  PROPS,NSTRE,NCRIT,STRSG,WEIGP,EPSTN)
C*******************************************************************
C
C**** THIS SUBROUTINE REDUCES THE STRESSES TO THE YIELD SURFACE AND
C     EVALUATES THE EQUIVALENT NODAL FORCES
C
C*******************************************************************
      DIMENSION ASDIS(MTOTV),AVECT(4),CARTD(2,9),COORD(MPOIN,2),
     .          DEVIA(4),DVECT(4),DLCOD(2,9),DJACM(2,2),
     .          EFFST(MTOTG),ELCOD(2,9),ELDIS(2,9),
     .          ELOAD(MELEM,18),LNODS(MELEM,9),POSGP(4),PROPS(MMATS,8),
     .          TRAN(4),STRES(4),STRSG(4,MTOTG),DAMAG(MTOTG),
     .          WEIGP(4),DESIG(4),SIGMA(4),SGTOT(4),
     .          DMATX(4,4),DERIV(2,9),SHAPE(9),GPCOD(2,9),
     .          EPSTN(MTOTG),MATNO(MELEM),BMATX(4,18)
      ROOT3=1.73205080757
      TWOPI=6.283185308
      NDIME=2
      DO 10 IELEM=1,NELEM
      DO 10 IEVAB=1,NEVAB
   10 ELOAD(IELEM,IEVAB)=0.0
      KGAUS=0
      DO 20 IELEM=1,NELEM
      LPROP=MATNO(IELEM)
      YOUNG=PROPS(LPROP,1)
      POISS=PROPS(LPROP,2)
      UNIAX=PROPS(LPROP,5)
      HARDS=PROPS(LPROP,6)
      FRICT=PROPS(LPROP,7)
      DAMST=PROPS(LPROP,8)
      IF(NCRIT.EQ.3) UNIAX=PROPS(LPROP,5)*COS(FRICT*0.017453292)
      IF(NCRIT.EQ.4) UNIAX=6.0*PROPS(LPROP,5)*COS(FRICT*0.017453292)/
     .       (ROOT3*(3.0-SIN(FRICT*0.017453292)))
C
```

```
C**** COMPUTE COORDINATE AND INCREMENTAL DISPLACEMENTS OF THE
C     ELEMENT NODAL POINTS
C
      DO 30 INODE=1,NNODE
      LNODE=IABS(LNODS(IELEM,INODE))
      NPOSN=(LNODE-1)*NDOFN
      DO 30 IDOFN=1,NDOFN
      NPOSN=NPOSN+1
      ELCOD(IDOFN,INODE)=COORD(LNODE,IDOFN)
      DLCOD(IDOFN,INODE)=COORD(LNODE,IDOFN)+ASDIS(NPOSN)
   30 ELDIS(IDOFN,INODE)=ASDIS(NPOSN)
C     CALL MODPS(DMATX,DAMG1,LPROP,MMATS,NTYPE,PROPS)
      THICK=PROPS(LPROP,3)
      KGASP=0
      DO 40 IGAUS=1,NGAUS
      DO 40 JGAUS=1,NGAUS
      EXISP=POSGP(IGAUS)
      ETASP=POSGP(JGAUS)
      KGAUS=KGAUS+1
      KGASP=KGASP+1
      DAMG1=DAMAG(KGAUS)
      CALL MODPS(DMATX,DAMG1,LPROP,MMATS,NTYPE,PROPS)
      CALL SFR2(DERIV,ETASP,EXISP,NNODE,SHAPE)
      CALL JACOB2(CARTD,DERIV,DJACB,ELCOD,GPCOD,IELEM,KGASP,
     .            NNODE,SHAPE)
      CALL JACOBD(CARTD,DLCOD,DJACM,NDIME,NLAPS,NNODE)
      DVOLU=DJACB*WEIGP(IGAUS)*WEIGP(JGAUS)
      IF(NTYPE.EQ.3) DVOLU=DVOLU*TWOPI*GPCOD(1,KGASP)
      IF(THICK.NE.0.0) DVOLU=DVOLU*THICK
      CALL BLARGE(BMATX,CARTD,DJACM,DLCOD,GPCOD,KGASP,NLAPS,
     .            NNODE,NTYPE,SHAPE)
      CALL LINGNL(CARTD,DJACM,DMATX,ELDIS,GPCOD,KGASP,KGAUS,
     .            NDOFN,NLAPS,NNODE,NSTRE,NTYPE,POISS,SHAPE,
     .            STRAN,STRES)
C     CALL BMATPS(BMATX,CARTD,NNODE,SHAPE,GPCOD,NTYPE,KGASP)
C     CALL LINEAR(CARTD,DMATX,ELDIS,LPROP,MMATS,NDOFN,NNODE,NSTRE,
C    .            NTYPE,PROPS,STRAN,STRES,KGASP,GPCOD,SHAPE)
      PREYS=UNIAX+EPSTN(KGAUS)*HARDS
      DO 150 ISTR1=1,NSTR1
```

```
      DESIG(ISTR1)=STRES(ISTR1)
  150 SIGMA(ISTR1)=STRSG(ISTR1,KGAUS)+STRES(ISTR1)
      CALL INVAR(DEVIA,LPROP,MMATS,NCRIT,PROPS,SINT3,STEFF,SIGMA,
     .                  THETA,VARJ2,YIELD,DAMG1)
      ESPRE=EFFST(KGAUS)-PREYS
      IF(ESPRE.GE.0.0) GO TO 50
      ESCUR=YIELD-PREYS
      IF(ESCUR.LE.0.0) GO TO 60
      RFACT=ESCUR/(YIELD-EFFST(KGAUS))
      GO TO 70
   50 ESCUR=YIELD-EFFST(KGAUS)
      IF(ESCUR.LE.0.0) GO TO 60
      RFACT=1.0
   70 MSTEP=ESCUR*8.0/UNIAX+1.0
      ASTEP=MSTEP
      REDUC=1.0-RFACT
      DO 80 ISTR1=1,NSTR1
      SGTOT(ISTR1)=STRSG(ISTR1,KGAUS)+REDUC*STRES(ISTR1)
   80 STRES(ISTR1)=RFACT*STRES(ISTR1)/ASTEP
      DO 90 ISTEP=1,MSTEP
      CALL INVAR(DEVIA,LPROP,MMATS,NCRIT,PROPS,SINT3,STEFF,SGTOT,
     .                  THETA,VARJ2,YIELD,DAMG1)
      CALL YIELDF(AVECT,DEVIA,LPROP,MMATS,NCRIT,NSTR1,
     .                   PROPS,SINT3,STEFF,THETA,VAJ2)
      CALL FLOWPL(AVECT,ABETA,DAMG1,DVECT,NTYPE,PROPS,SIGMZ,LPROP,
     .                   NSTR1,MMATS)
      AGASH=0.0
      DO 100 ISTR1=1,NSTR1
  100 AGASH=AGASH+AVECT(ISTR1)*STRES(ISTR1)
      DLAMD=AGASH*ABETA
      IF(DLAMD.LT.0.0) DLAMD=0.0
      BGASH=0.0
      DO 110 ISTR1=1,NSTR1
      BGASH=BGASH+AVECT(ISTR1)*SGTOT(ISTR1)
  110 SGTOT(ISTR1)=SGTOT(ISTR1)+STRES(ISTR1)-DLAMD*DVECT(ISTR1)
      EPSTN(KGAUS)=EPSTN(KGAUS)+DLAMD*BGASH/YIELD
   90 CONTINUE
      CALL INVAR(DEVIA,LPROP,MMATS,NCRIT,PROPS,SINT3,STEFF,SGTOT,
     .                  THETA,VARJ2,YIELD,DAMG1)
```

```
      CURYS=UNIAX+EPSTN(KGAUS)*HARDS
      BRING=1.0
      IF(YIELD.GT.CURYS) BRING=CURYS/YIELD
      DO 130 ISTR1=1,NSTR1
  130 STRSG(ISTR1,KGAUS)=BRING*SGTOT(ISTR1)
      EFFST(KGAUS)=BRING*YIELD
C
C     DAMAGE EVOLUTION LAW
C
      EFSTD=YIELD/(1.0-DAMG1)
      ESTD2=EFSTD*EFSTD
      DDAMG=ESTD2*DLAMD/(YOUNG*DAMST)
      DAMAG(KGAUS)=DAMAG(KGAUS)+DDAMG
      IF(DAMAG(KGAUS).GE.0.9) THEN
      WRITE(*,*)'PROGRAM ENDED - DAMAGE REACHED CRITICAL LEVEL ≥ 0.9'
      WRITE(*,*)'NUMBER LOAD INCREMENTS TO END=',JINCS
      STOP
      ENDIF
C
C**** ALTERNATIVE LOCATION OF STRESS REDUCTION LOOP TERMINATION
C  90 CONTINUE
C****
      GO TO 190
   60 DO 180 ISTR1=1,NSTR1
  180 STRSG(ISTR1,KGAUS)=STRSG(ISTR1,KGAUS)+DESIG(ISTR1)
      EFFST(KGAUS)=YIELD
C
C**** CALCULATE THE EQUIVALENT NODAL FORCES AND ASSOCIATE WITH THE
C     ELEMENT NODES
  190 MGASH=0
      DO 140 INODE=1,NNODE
      DO 140 IDOFN=1,NDOFN
      MGASH=MGASH+1
      DO 140 ISTRE=1,NSTRE
  140 ELOAD(IELEM,MGASH)=ELOAD(IELEM,MGASH)+BMATX(ISTRE,MGASH)*
     . STRSG(ISTRE,KGAUS)*DVOLU
   40 CONTINUE
   20 CONTINUE
      RETURN
```

```
154       END
155 C
```

linie 1-18	defnicja procedury, jej parametrów aktualnych oraz definicje tablic i wektorów
linie 19-20	obliczenie $\sqrt{3}$ oraz 2π
linia 21	ustawienie parametru wymiaru elementu skończonego NDIME=2
linie 22-24	zerowanie tablicy zawierającej równoważniki sił węzłowych, obliczonych w kroku h
linia 25	zerowanie licznika punktu Gaussa we wszytkich elementach
linia 26	pętla wokół każdego elementu
linia 27	identyfikowanie numeru właściwości materiałowych elementu
linie 28-33	indentyfikowanie wartości początkowej granicy plastyczności $\sigma_{\mathrm{y}0}$ (c dla kryterium Coulomba–Mohra lub Druckera–Pragera), wartości parametru wzmocnienia plastycznego H, kąta tarcia wewnętrznego ϕ dla materiałów typu Coulomb–Mohr lub Drucker–Prager, wartości odporności na uszkodzenie S
linia 34	obliczenie równoważnego naprężenia uplastyczniającego $c\cos\phi$ dla materiału Coulomba–Mohra
linie 35-36	obliczenie równoważnego naprężenia uplastyczniającego k' dla materiału Druckera–Pragera
linie 41-48	magazynowanie współrzędnych węzłowych elementów w tablicy ELCOD oraz przemieszczeń węzłowych wywołanych działaniem sił rezydualnych w tablicy ELDIS
linia 50	identyfikowanie grubości elementu
linia 51	zerowanie lokalnego licznika punktu Gaussa
linie 52-55	wejście w pętle numerycznego całkowania o obliczania lokalnych współrzędnych (ξ, η) w bieżącym punkcie
linie 56-57	przyrost lokalnego i globalnego licznika punktu Gaussa
linia 58	wartość parametru uszkodzenia D w punkcie Gaussa
linia 59	obliczenie macierzy sprężystej $\mathbb{D}$
linia 60	obliczenie wartości funkcji kształtu N_i oraz ich pochodnych $\partial N_i/\partial\xi, \partial N_i/\partial\eta$
linie 61-62	Obliczenie współrzednych punktu Gaussa GPPCOD(IDIME, KGASP), wyznacznika macierzy Jakobianu $\lvert\mathbf{J}\rvert$ oraz pochodnych kartezjańskich funkcji kształtu $\partial N_i/\partial x, \partial N_i/\partial y$ (lub

	$\partial N_i/\partial r, \partial N_i/\partial z$ dla problemu osiowo-symetrycznego)
linia 63	wywołanie procedury obliczającej macierz Jakobianu w przypadku skończonych deformacji
linie 64-66	obliczenie objętości elementu $\lvert\mathbf{J}\rvert W_\xi W_\eta$ dla całkowania numerycznego pamiętając o mnożeniu odpowiednio przez grubość lub $2\pi r$ dla problemu osiowo-symetrycznego (program domyślnie przyjmuje grubość elementu równą 1.0)
linie 67-68	obliczenie macierzy odkształcenia $\mathbf{B}$ dla skończonych odkształceń w punkcie Gaussa
linie 69-74	obliczenie przyrostu naprężenia STRESS(ISTR1) zakładając sprężyste zachowanie $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} = \mathbb{D}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{(r)}$
linia 75	obliczenie granicy plastyczności dla $(r-1)$-tej iteracji jako $\sigma_{\mathrm{y}0} + H\widetilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{(r-1)}$
linie 76-78	magazynowanie $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)}$ w DSIG(ISTR1) oraz $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)}$ w SIGMA (ISTR1)
linie 79-80	obliczenie naprężenia efektywnego wg. Tablicy 9 oraz magazynowanie jako YIELD
linie 81-82	sprawdzenie czy punkt Gaussa płynął plastycznie w poprzedniej iteracji, tzn. sprawdzenie relacji $\widetilde{\sigma}_{(r-1)} > \sigma_{\mathrm{y}0} + H\widetilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{(r-1)}$ która jest pierwszą operacją w kroku 4 algorytmu przedstawionego w podrozdziale 3.4
linie 83-84	sprawdzenie czy punkt Gaussa poprzednio sprężysty płynie plastycznie w aktualnej iteracji
linia 85	obliczenie $R = \dfrac{\widetilde{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} - \sigma_{\mathrm{y}}}{\widetilde{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} - \widetilde{\sigma}_{(r-1)}}$ dla punktu Gaussa, który płynie plastycznie w aktualnej iteracji
linie 87-88	sprawdzenie czy punkt Gaussa, który poprzednio płynął plastycznie jest, odciążony w aktualnej iteracji, jeśli tak to przejście do instrukcji o etykiecie 60
linia 89	przyjęcie $R = 1$ w przeciwnym przypadku
linie 90-91	oblicznie liczby kroków, na którą należy podzielić nadwyżkę naprężenia $R\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)}$
linia 92	obliczenie $(1-R)$
linie 93-95	obliczenie $\boldsymbol{\sigma}_{(r-1)} + (1-R)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)}$ zgodnie z krokiem 5 algorytmu przedstawionego w podrozdziale 3.4 oraz magazynowanie w SGTOT(ISTR1) oraz obliczenie $\dfrac{R\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)}}{m}$ oraz magazynowanie w STRES(ISTR1)
linia 96	pętla po wszystkich krokach redukcji naprężenia
linie 97-101	obliczenie wektorów $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{d}_D$

linie 102-106	obliczenie $\mathrm{d}\lambda$ oraz magazynowanie jako DLAMD
linie 107-110	obliczenie $\boldsymbol{\sigma}_{(r)} = \boldsymbol{\sigma}_{(r-1)} + (1-R)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} + R\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)}}{m} - \frac{\mathrm{d}\lambda \mathbf{d}_D}{m}$. W przypadku gdy proces sumowania od 1 do m w pętli DO o etykiecie końcowej 90 zostanie zakończony wynik będzie równy $\boldsymbol{\sigma}_{(r)} = \boldsymbol{\sigma}_{(r-1)} + \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} + R\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)} - \mathrm{d}\lambda \mathbf{d}_D$
linia 111	obliczenie efektywnego odkształcenia plastycznego $\widetilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{(r)} = \widetilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{(r-1)} + \frac{\mathrm{d}\lambda \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}}{\widetilde{\sigma}}$
linia 112	powrót w pętli do następnego kroku redukcji
linie 113-114	obliczenie naprężenia efektywnego $\widetilde{\sigma}_{(r)}$
linia 115	obliczenie $\sigma_{\mathrm{y}0} + H\widetilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{(r)}$
linie 116-119	skalowanie naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_{(r)}$ tak aby leżało na aktualnej powierzchni plastyczności $\boldsymbol{\sigma}_{(r)} = \boldsymbol{\sigma}_{(r)}(\sigma_{\mathrm{y}0} + H\widetilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{(r)})/\widetilde{\sigma}_{(r)}$
linia 120	magazynowanie naprężenia efektywnego $\widetilde{\sigma}_{(r)}$ w EFFST
linie 121-132	obliczenie przyrostu uszkodzenia $\mathrm{d}D_{(r)} = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_{(r)}}{1-Dh}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\lambda}{ES}$ kumulacja uszkodzenia $D_{(r)} = D_{(r-1)} + \mathrm{d}D_{(r)}$ oraz jego magazynowanie w tablicy DAMAG gdy $D_{(r)} \leq 0.9$
linie 133-136	koniec pętli DO
linie 138-140	obliczenie $\boldsymbol{\sigma}_{(r)} = \boldsymbol{\sigma}_{(r-1)} + \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}_{(r)}$ dla sprężystych punktów Gaussa oraz magazynowanie w EFFST
linie 141-150	obliczenie równoważnych sił węzłowych $(f^{\mathrm{e}})_{(r)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{(r)}\mathrm{d}\Omega$
linie 151-152	zakończenie pętli numerycznego całkowania po wszystkich elementach
linie 153-155	instrukcje zakończenia procedury

Tablica 9 Naprężenie efektywne oraz wartość granicy plastyczności dla wybranych kryteriów

kryterium plastyczności	naprężenie efektywne	granica plastyczności
Tesca–Guest	$2\sqrt{J_2'}\cos\theta$	σ_{y}
von Mises	$\sqrt{3J_2'}$	σ_{y}
Mohr–Coulomb	$\frac{1}{3}J_1 \sin\phi + \sqrt{J_2'}(\cos\theta - \sin\theta\sin\phi/\sqrt{3})$	$c\cos\phi$
Drucker–Prager	$\alpha J_1 + \sqrt{J_2'}$	k'