

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
im. Tadeusza Kościuszki

WYDZIAŁ MECHANICZNY

Katedra Maszyn i Urządzeń Energetycznych

ROZPRAWA DOKTORSKA

**Odwrotne zagadnienia wymiany ciepła występujące  
w pomiarach nieustalanej temperatury płynów**

**mgr inż. Magdalena Jaremkiewicz**

**Promotor: prof. dr hab. inż. Jan Taler**

Kraków 2011



*Składam serdeczne podziękowania  
Panu Prof. dr. hab. inż. Janowi Talerowi  
za okazaną pomoc i cierpliwość  
przy realizacji pracy*



## Spis treści:

<b>Spis oznaczeń</b> .....	5
<b>1. Wstęp</b> .....	7
<b>2. Dotychczasowy stan zagadnienia</b> .....	9
<b>3. Cel i zakres pracy</b> .....	11
<b>4. Model czujników temperatury o skupionej pojemności cieplnej</b> .....	13
4.1. Model I-go rzędu .....	13
4.2. Model II-go rzędu .....	15
<b>5. Wyznaczanie niustalanej temperatury czynnika na podstawie czasowego przebiegu temperatury wskazywanego przez termometr</b> .....	21
5.1. Filtracja zmierzonych przebiegów temperatury .....	21
5.2. Wyznaczanie temperatury czynnika przy zastosowaniu modelu I-go i II-go rzędu .....	22
<b>6. Wyznaczenie niustalanej temperatury czynnika z rozwiązań odwrotnych zagadnień wymiany ciepła</b> .....	25
6.1. Wyznaczenie temperatury czynnika na podstawie pomiaru temperatury na zewnętrznej izolowanej powierzchni ścianki cylindrycznej .....	26
6.1.1. Zagadnienie bezpośrednie dla ścianki cylindrycznej.....	26
6.1.1.1. Analityczne wyznaczanie niustalowanego rozkładu temperatury przy skokowej zmianie temperatury czynnika w czasie .....	26
6.1.1.2. Wyznaczanie niustalowanego rozkładu temperatury przy zmiennej w czasie temperaturze czynnika .....	29
6.1.2. Wyznaczanie temperatury czynnika za pomocą metody odwrotnej kroczącej .....	31
6.2. Wyznaczanie temperatury czynnika na podstawie pomiaru temperatury w osi cylindrycznego czujnika pomiarowego .....	36
6.2.1. Zagadnienie bezpośrednie dla pełnego cylindra .....	36
6.2.1.1. Analityczne wyznaczanie niustalowanego rozkładu temperatury przy skokowej zmianie temperatury czynnika w czasie .....	36
6.2.1.2. Wyznaczanie niustalowanego rozkładu temperatury przy zmiennej w czasie temperaturze czynnika .....	40
6.2.2. Obliczenia temperatury czynnika na zewnątrz osłony termopary metodą kroczącą .....	42
<b>7. Korelacje do obliczania współczynników wnikania ciepła</b> .....	49
7.1. Rurociąg cylindryczny .....	50
7.2. Cylinder opływany poprzecznie .....	51

<b>8. Eksperymentalne wyznaczenie stałej czasowej .....</b>	<b>56</b>
8.1. Wyznaczenie stałych czasowych termoelementów płaszczyznych w funkcji prędkości przepływającego powietrza .....	56
8.2. Wyniki pomiarów dla termoelementów płaszczyznych o różnych promieniach zewnętrznych .....	63
<b>9. Przeprowadzenie badań eksperymentalnych w czasie rozruchu kotła parowego przy zastosowaniu termometrów o trzech różnych średnicach .....</b>	<b>66</b>
9.1. Konstrukcja termometrów .....	66
9.2. Wyniki pomiarów w czasie rozruchu kotła parowego .....	68
9.3. Porównanie wyników pomiarów i obliczeń .....	74
<b>10. Wnioski i uwagi końcowe .....</b>	<b>80</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>82</b>

## Spis oznaczeń:

$a$	– współczynnik wyrównywania temperatury, $m^2/s$
$A$	– pole powierzchni przekroju poprzecznego termoelementu, $m^2$
$A_o$	– pole powierzchni przekroju poprzecznego osłony termoelementu, $m^2$
$Bi$	– liczba Biota
$c$	– ciepło właściwe, $J/(kg \cdot K)$
$c_o$	– ciepło właściwe materiału osłony termoelementu, $J/(kg \cdot K)$
$d$	– średnica zewnętrzna termoelementu, $m$
$d_w$	– średnica wewnętrzna rurociągu, $m$
$D_w$	– wewnętrzna obudowy, $m$
$D_z$	– średnica zewnętrzna obudowy, $m$
$f(t)$	– przebieg temperatury, $^{\circ}C$
$f$	– współczynnik tarcia
$Fo$	– liczba Fouriera
$g$	– przyspieszenie grawitacyjne, $m/s^2$
$Gr$	– liczba Grashofa
$J_0$	– funkcja Bessela I rodzaju rzędu zerowego
$J_1$	– funkcja Bessela I rodzaju rzędu pierwszego
$l$	– charakterystyczny wymiar liniowy, $m$
$L$	– długość rury, $m$
$m$	– wykładnik w równaniu przewodzenia ciepła, $m = 0$ dla płyty, $m = 1$ dla cylindra i $m = 2$ dla kuli
$N$	– liczba punktów pomiarowych
$Nu$	– liczba Nusselta
$P_w$	– obwód wewnętrznej powierzchni obudowy, $m$
$Pr$	– liczba Prandtla
$Pr_p$	– liczba Prandtla dla temperatury płynu
$Pr_s$	– liczba Prandtla dla temperatury powierzchni ciała stałego
$\dot{q}_v$	– moc wewnętrznych źródeł ciepła, $W/m^3$
$\dot{q}_w$	– gęstość strumienia ciepła na powierzchni wewnętrznej, $W/m^2$
$\dot{Q}_i$	– strumień ciepła dopływający z sąsiedniej komórki, $W$
$r$	– promień, $m$
$r_z$	– promień powierzchni zewnętrznej, $m$
$r_w$	– promień powierzchni wewnętrznej, $m$
$Re$	– liczba Reynoldsa
$s$	– zmienna zespolona
$s_N$	– błąd średniokwadratowy
$S$	– suma kwadratów różnicy wielkości zmierzonej i obliczonej
$t$	– czas, $s$
$T(t)$	– temperatura, $^{\circ}C$
$T(s)$	– transformata Laplace'a temperatury czujnika termometru
$T_0$	– temperatura początkowa, $^{\circ}C$
$T_{air}$	– temperatura powietrza, $^{\circ}C$
$T_b$	– średnia temperatura płynu, $^{\circ}C$

$T_{cz}(t)$	– temperatura czynnika roboczego, °C
$T_{cz}(s)$	– transformata Laplace’a temperatury czujnika czynnika
$T_i$	– temperatura w i-tym punkcie, °C
$T_{ob}(t)$	– temperatura obudowy termoelementu, °C
$T_P$	– temperatura wewnątrz rozpatrywanej komórki, °C
$T_s$	– temperatura powierzchni omywanej przez płyn, °C
$T_w$	– temperatura drutu, °C
$u(r, t)$	– odpowiedź na skok jednostkowy temperatury, °C
$w$	– prędkość czynnika roboczego, m/s
$v_T$	– prędkość narastania temperatury, 1/K
$X$	– stała
$Y_0$	– funkcja Bessela II rodzaju rzędu zerowego
$Y_1$	– funkcja Bessela II rodzaju rzędu pierwszego

### Oznaczenia greckie:

$\alpha$	– współczynnik wnikania ciepła, W/(m <sup>2</sup> ·K)
$\alpha_k$	– współczynnik wnikania ciepła na zewnętrznej powierzchni termoelementu podczas przepływu laminarnego, W/(m <sup>2</sup> ·K)
$\alpha_T$	– współczynnik wnikania ciepła na zewnętrznej powierzchni termoelementu, W/(m <sup>2</sup> ·K)
$\alpha_w$	– współczynnik wnikania ciepła na wewnętrznej powierzchni obudowy, W/(m <sup>2</sup> ·K)
$\beta$	– współczynnik rozszerzalności objętościowej płynu, 1/K
$\delta_o$	– grubość obudowy termoelementu, m
$\Delta r$	– grubość objętości kontrolnej, m
$\Delta t$	– krok czasowy, s
$\Delta T$	– różnica temperatur w płynie, K
$\Delta V$	– objętość komórki kontrolnej, m <sup>3</sup>
$\varepsilon$	– zadana dokładność obliczeń, K
$\eta$	– lepkość dynamiczna płynu, Pa·s
$\eta_s$	– lepkość dynamiczna płynu przy powierzchni omywanej, Pa·s
$\theta$	– czas, s
$\lambda$	– współczynnik przewodzenia ciepła, W/(m·K)
$\lambda_o$	– współczynnik przewodzenia ciepła obudowy termoelementu, W/(m·K)
$\lambda_p$	– współczynnik przewodzenia ciepła szczeliny powietrznej, W/(m·K)
$\mu$	– pierwiastek równania charakterystycznego
$\nu$	– lepkość kinematyczna, m <sup>2</sup> /s
$\rho$	– gęstość, kg/m <sup>3</sup>
$\rho_o$	– gęstość materiału osłony termoelementu, kg/m <sup>3</sup>
$\tau$	– stała czasowa termometru, s
$\tau_w$	– naprężenie styczne, MPa

## 1. Wstęp

Pomiar temperatury przepływającego płynu, którego temperatura zmienia się w czasie, występuje w wielu dziedzinach techniki. W przypadku maszyn i urządzeń energetycznych dokładny pomiar nieustalanej temperatury wody, pary wodnej lub spalin jest bardzo ważny, szczególnie w warunkach rozruchu, wyłączania z ruchu lub zmiany obciążenia bloku energetycznego.

Znajomość nieustalanej temperatury czynnika jest bardzo ważna przy wyznaczaniu naprężeń cieplnych w elementach ciśnieniowych kotłów i turbin. Do prawidłowego obliczenia naprężeń cieplnych, występujących w elementach ciśnieniowych w warunkach nieustalonych, niezbędna jest znajomość rzeczywistej temperatury czynnika i współczynnika wnikania ciepła na powierzchni wewnętrznej tych elementów. Aby wyznaczyć współczynnik wnikania ciepła potrzebny jest bardzo precyzyjny pomiar nieustalanej temperatury czynnika ze względu na małą różnicę temperatury czynnika znajdującego się pod wysokim ciśnieniem i temperatury wewnętrznej powierzchni elementu. Dynamiczne błędy pomiaru temperatury płynu w urządzeniach ciśnieniowych są jednak bardzo duże. Wynika to z masywnej osłony termometru, niezbędnej przy pomiarach temperatury płynu przepływającego z dużą prędkością i o wysokiej temperaturze, powodującej opóźnienie i tłumienie rzeczywistych zmian temperatury czynnika w czasie. Temperatura wskazywana przez czujnik usytuowany w masywnej osłonie jest opóźniona, a jej wartość zaniżona, w przypadku wzrostu temperatury lub zawyżona, przy obniżaniu temperatury czynnika w czasie. Niedokładny pomiar temperatury czynnika może być zatem przyczyną znacznego obniżenia trwałości elementów ciśnieniowych kotła spowodowanej zbyt wysoką temperaturą czynnika, która przyspiesza zjawisko pełzania elementu ciśnieniowego.

Od poprawnego wyznaczenia rzeczywistej temperatury czynnika zależy prawidłowe działanie układów automatycznej regulacji temperatury, np. układu regulacji temperatury pary przegrzanej w kotle. Głównym problemem wynikającym przede wszystkim z nieznajomości zmian współczynnika wnikania ciepła na zewnętrznej powierzchni termoelementu w czasie jest wyznaczenie dokładnego modelu matematycznego termometru. W warunkach dużych zmian obciążenia zmienia się stała

czasowa termometru i trudno jest dostroić regulator, co z kolei może być przyczyną dużych oscylacji zmian temperatury czynnika w czasie. Oscylacje temperatury czynnika wywołują nieustalone naprężenia cieplne w elemencie ciśnieniowym, które następnie mogą być przyczyną zmęczenia niskocyklicznego.

Dynamiczne błędy pomiaru temperatury są wysokie w przypadku pomiaru temperatury spalin lub temperatury pary przegrzanej, gdyż współczynnik wnikania ciepła dla czynników gazowych na powierzchni termometru jest mały. Jest to przyczyną występowania dużych różnic temperatury między temperaturą czynnika i temperaturą wskazywaną przez czujnik temperatury w czasie pomiaru nieustalonej temperatury czynnika.

Bardzo dużym utrudnieniem we właściwej korekcji dynamicznego pomiaru temperatury jest nieznaną dokładną wartość współczynnika wnikania ciepła na zewnętrznej powierzchni termometru, który decyduje o stałej czasowej termometru o danej konstrukcji. Wartość tego współczynnika zależy głównie od prędkości przepływającego czynnika i jego temperatury, które są często zmienne w czasie.

W niniejszej rozprawie zostaną zaproponowane odznaczające się wysoką dokładnością metody pomiaru nieustalonej temperatury czynnika. Jest to możliwe dzięki rozwiązywaniu odwrotnych zagadnień nieustalonej wymiany ciepła w trybie on-line, które występują przy pomiarze nieustalonej temperatury czynnika.



## 2. Dotychczasowy stan zagadnienia

W literaturze [1-14] dużo uwagi poświęca się pomiarom nieustalonych temperatur różnych czynników. Zazwyczaj mierzona jest odpowiedź czasowa termoelementu przy skokowej zmianie temperatury czynnika [6, 14] i na tej podstawie zostaje wyznaczona stała czasowa termometru, przy założeniu, że jest to element inercyjny I-go rzędu. Proponowane w pracy [6] metody wyznaczania jednej stałej czasowej w przypadku modelu I-go rzędu lub dwóch stałych czasowych dla modelu II-go rzędu są pracochłonne i mało dokładne.

Pomimo wielu starań nie udało się opracować efektywnej metody oceny dynamicznego błędu pomiaru temperatury czynnika. W pracach [11, 12] przedstawiono sposoby wyznaczania nieustalonej temperatury czynnika, jednak niedostatkim wymienionych metod jest przyjmowanie założenia, że stałe czasowe są niezmiennie w czasie. W rzeczywistości stałe czasowe termometru (wyznaczone z modelu I-go lub II-go rzędu) bardzo silnie zależą od współczynnika wnikania ciepła na jego powierzchni, który z kolei jest funkcją ciśnienia, temperatury i prędkości przepływu czynnika. Ponadto, stałą czasową termometru, zależną od prędkości przepływu, daje się zwykle wyznaczyć tylko dla gazów, w tym powietrza, z uwagi na słabą zależność współczynnika wnikania ciepła od temperatury przepływającego gazu.

Z przeglądu literatury wynika, że nie ma odpowiedniej metody do wyznaczania temperatury cieczy lub pary przepływającej przez rurociąg pod wysokim ciśnieniem. Stałej czasowej termometru nie da się wyznaczyć ani w warunkach laboratoryjnych, ani w warunkach przemysłowych ze względu na bardzo dużą jej zależność od ciśnienia, temperatury i prędkości przepływającego czynnika. Dynamiczny błąd pomiaru temperatury można w takim przypadku znacznie zmniejszyć, rozwiązując zagadnienie odwrotne wymiany ciepła, w którym znany jest czasowy przebieg temperatury czynnika, a poszukiwane są zmiany temperatury czynnika w czasie.

W rozprawie tej zaproponowane zostaną dwie metody pomiaru nieustalonej temperatury pary lub gazu np. powietrza lub spalin.

W pierwszej metodzie temperatura czynnika wyznaczana będzie z równania modelu I-go rzędu, w którym stała czasowa jest zależna od prędkości przepływu czynnika.

W drugiej metodzie temperatura czynnika zmienna w czasie wyznaczana będzie na podstawie pomiaru niestabilnych przebiegów temperatury czujnika usytuowanego w środku cylindrycznego termometru, który jest omywany poprzecznie czynnikiem oraz temperatury ścianki rurociągu.

### 3. Cel i zakres pracy

Celem pracy jest opracowanie efektywnej metody pomiaru nieustalonej temperatury przepływającego czynnika o wysokim ciśnieniu. Ze względu na wysokie ciśnienie i dużą prędkość przepływającego czynnika, przemysłowa obudowa termoelementu charakteryzuje się dużą grubością ścianki. Wynika to ze znacznej siły wywieranej przez przepływający czynnik na obudowę termometru. Istnieje również niebezpieczeństwo wywołania drgań obudowy czujnika przez powstające za czujnikiem wiry von Karmana. W tego typu termometrach przemysłowych dynamiczny błąd pomiaru temperatury jest bardzo duży, szczególnie przy przepływie gazu lub pary wodnej. Opóźnienie czasowe i tłumienie zmian temperatury czynnika, spowodowane masowną obudową, zmniejsza dokładność układu automatycznej regulacji temperatury przepływającego czynnika.

W tej rozprawie przedstawione zostaną nowe metody pomiaru nieustalonej temperatury czynnika. Opracowane zostaną dwie grupy, z których pierwsza obejmuje metody odpowiednie do pomiaru nieustalonej temperatury powietrza lub innego czynnika przepływającego z małą prędkością, np. do pomiaru temperatury spalin w kotłach lub temperatury powietrza w instalacjach klimatyzacyjnych. Druga grupa metod odpowiednia jest do pomiarów temperatury czynnika o dużym ciśnieniu, np. pary wodnej, przepływającego z dużą prędkością.

Teza pracy brzmi następująco:

**Sformułowanie odwrotnego problemu nieustalonej wymiany ciepła dla termometru lub termometru i ścianki rurociągu, z rozwiązania którego wyznacza się przebieg nieustalonej temperatury czynnika, umożliwi znaczne zmniejszenia dynamicznych błędów pomiaru temperatury czynnika.**

W przypadku, gdy czynnik przepływa z małą prędkością, jego nieustaloną temperaturę wyznacza się na podstawie przebiegu temperatury czujnika oraz wyznaczonej wcześniej zależności stałej czasowej termometru od prędkości przepływu czynnika.

W przypadku czynnika o dużym ciśnieniu, przepływającego z dużą prędkością, temperatura czynnika wyznaczana jest na podstawie zmierzonych przebiegów temperatury zewnętrznej izolowanej powierzchni rurociągu oraz temperatury mierzonej

w osi termometru w kształcie pełnego walca, który jest omywany poprzecznie czynnikiem. Nieustalone przebiegi temperatury i gęstości strumienia ciepła na wewnętrznej powierzchni rurociągu i zewnętrznej powierzchni termometru cylindrycznego wyznaczone zostaną z rozwiązania zagadnienia odwrotnego, przy zastosowaniu metod kroczących. Wyznaczane będą również rzeczywiste współczynniki wnikania ciepła na wewnętrznej powierzchni rurociągu i zewnętrznej powierzchni termometru. Wartości tych współczynników wpływają istotnie na przebieg dynamicznych błędów pomiaru temperatury czynnika.

Opracowane zostaną algorytmy i programy do wyznaczania nieustalonych przebiegów temperatury czynnika, odpowiednie do zastosowań w trybie on-line. Oprócz testów obliczeniowych, służących do weryfikacji opracowanych metod, przeprowadzone zostaną badania eksperymentalne, ilustrujące efektywność i dokładność opracowanych metod w warunkach laboratoryjnych i przemysłowych.

## 4. Model czujników temperatury o skupionej pojemności cieplnej

W tym rozdziale czujniki temperatury przybliżono do obiektu inercyjnego I-go i II-go rzędu. W obu przypadkach zmiany temperatury termoelementów przedstawione zostały za pomocą równań różniczkowych, do których rozwiązania posłużono się transformacją Laplace'a. Dla obu modeli wyznaczono odpowiedzi na skok jednostkowy temperatury w funkcji czasu oraz przedstawiono metodę wyznaczania stałych czasowych  $\tau$  lub  $\tau_1$  i  $\tau_2$ .

### 4.1. Model I-go rzędu

Przy założeniu, że temperatura termometru jest jedynie funkcją czasu, z pominięciem różnic temperatury występujących wewnątrz czujnika, termometr jest najczęściej modelowany jako element o skupionej pojemności cieplnej. Zmiany temperatury termometru w czasie  $T(t)$  są opisane równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu (model termometru I-go rzędu) [12]:

$$\tau \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = T_{cz}(t), \quad (4.1)$$

gdzie:

$$\tau = mc/(\alpha A).$$

Warunki początkowe mają postać:

$$T(0) = T_o = 0, \quad \left. \frac{dT(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_T = 0. \quad (4.2)$$

Równanie (4.1) zostało rozwiązane dla warunków początkowych (4.2) przy pomocy przekształcenia Lapalce'a. Dokonując transformacji poszczególnych składników równania (4.1) za pomocą całki [11]:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt, \quad (4.3)$$

gdzie funkcja  $f(t)$  jest zdefiniowana dla  $t \geq 0$ , otrzymano:

$$\mathcal{L}\{T(t)\} = T(s),$$

$$\mathcal{L}\{T_{cz}(t)\} = T_{cz}(s),$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dT(t)}{dt}\right\} = sT(s) - T(t)|_{t=0} = sT(s),$$

a równanie (4.1) przyjmuje w rezultacie przekształceń następującą postać:

$$\tau sT(s) + T(s) = T_{cz}(s). \quad (4.4)$$

Transmitancja operatorowa dla modelu z inercją I-go rzędu wynosi zatem:

$$G(s) = \frac{T(s)}{T_{cz}(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (4.5)$$

Dla skokowego wzrostu temperatury czynnika od 0 do stałej wartości  $T_{cz}$  transformata Laplace'a wynosi  $T_{cz}(s) = T_{cz}/s$ , stąd:

$$\frac{T(s)}{T_{cz}} = \frac{1}{s(\tau s + 1)}. \quad (4.6)$$

Rozbijając równanie (4.6) na czynniki pierwsze:

$$\frac{T(s)}{T_{cz}} = \frac{1}{s(\tau s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1} = \frac{(B + A\tau)s + A}{s(\tau s + 1)}, \quad (4.7)$$

otrzymano układ dwóch równań:

$$\begin{cases} B + A\tau = 0 \\ A = 1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest:  $A = 1$ ,  $B = -\tau$ . Po podstawieniu wyznaczonych wartości do równania (4.7) otrzymano:

$$\frac{T(s)}{T_{cz}} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \quad (4.8)$$

lub

$$\frac{T(s)}{T_{cz}} = \frac{1}{s} - \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}. \quad (4.9)$$

Odwrotności funkcji Laplace'a poszczególnych składników równania (4.9) wynoszą

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T(s)}{T_{cz}}\right\} = \frac{T(t)}{T_{cz}},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^{-1}\right\} = e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Na podstawie przeprowadzonego rozwiązania równania (4.1) opisującego model I-go rzędu, określona została odpowiedź termometru na skok jednostkowy:

$$u(t) = \frac{T(t) - T_0}{T_{cz} - T_0} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (4.10)$$

W przypadku termometrów o złożonej budowie, stosowanych do pomiaru temperatury czynnika o wysokim ciśnieniu, dokładność modelu I-go rzędu (4.1) jest niewystarczająca.

Korzystając z równania (4.1) można określić rzeczywistą temperaturę czynnika  $T_{cz}(t)$  na podstawie zmierzonych przebiegów temperatury termometru  $T(t)$  i znanej stałej czasowej termometru  $\tau$ .

W celu wyznaczenia stałej czasowej  $\tau$  z równania (4.10) można zastosować metodę najmniejszych kwadratów. W tej metodzie wartość stałej czasowej jest określona przez znalezienie minimum funkcji  $S$ :

$$S = \sum_{i=1}^N [u_m(t_i) - u(t_i)]^2 = \min, \quad (4.11)$$

gdzie  $u(t)$  jest opisane wyrażeniem (4.10), a  $u_m(t_i)$  oznacza wartość funkcji  $u$  wyznaczoną na podstawie eksperymentu. Symbol  $N$  oznacza liczbę punktów pomiarowych  $(t_i, u_m(t_i))$ . Szukane jest minimum sumy kwadratów różnic wartości zmiennych  $u_m(t_i)$  i odpowiadających im wartości obliczonych  $u(t_i)$ . W celu znalezienia wartości  $S_{min}$  do równania (4.11) zostanie podstawiona wyznaczona stała czasowa  $\tau$ .

Niepewność obliczonej stałej czasowej  $\tau$  jest oszacowana na podstawie błędu średniokwadratowego:

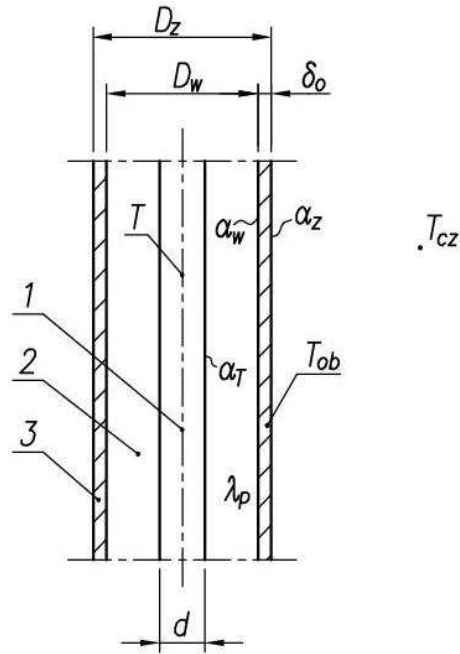
$$s_N = \sqrt{\frac{S_{min}}{N - m}}, \quad (4.12)$$

gdzie  $m$  jest liczbą stałych czasowych ( $m = 1$  dla równania (4.10)).

Na podstawie wyznaczonego błędu średniokwadratowego, który jest przybliżeniem średniego odchylenia standardowego, niepewność stałej czasowej może być obliczona na podstawie wzorów programu TableCurve 2D.

## 4.2. Model II-go rzędu

Pomiędzy obudową zewnętrzną a czujnikiem temperatury może występować szczelina powietrzna (rys. 4.1), której pojemność cieplna  $c \cdot \rho$  zostanie pominięta z uwagi na jej małą wartość.



Rys. 4.1. Przekrój czujnika temperatury z osłoną; 1 – termopara, 2 – szczelina powietrzna, 3 – osłona termopary

Przy analizie wymiany ciepła między obudową a termoelementem pominięta zostanie również wymiana ciepła przez promieniowanie. Wprowadzając współczynnik przenikania ciepła  $k_w$  odniesiony do wewnętrznej powierzchni obudowy

$$\frac{1}{k_w} = \frac{1}{\alpha_w} + \frac{(1 + D_w/d)(D_w - d)}{4\lambda_p} + \frac{D_w}{d} \cdot \frac{1}{\alpha_T}, \quad (4.13)$$

bilans ciepła dla czujnika temperatury usytuowanego wewnątrz obudowy ma postać:

$$A\rho c \frac{dT(t)}{dt} = P_w k_w [T_{ob}(t) - T(t)]. \quad (4.14)$$

Wprowadzając współczynnik przenikania ciepła  $k_z$  dla obudowy odniesiony do jej powierzchni zewnętrznej:

$$\frac{1}{k_z} = \frac{D_w}{D_z} \cdot \frac{1}{\alpha_z} + \frac{1 + D_w/D_z}{2} \cdot \frac{\delta_o}{\lambda_o}, \quad (4.15)$$

równanie bilansu ciepła przedstawia się następująco:

$$A_o \rho_o c_o \frac{dT_{ob}(t)}{dt} = P_z k_z [T_{cz}(t) - T_{ob}(t)] - P_w k_w [T_{ob}(t) - T(t)]. \quad (4.16)$$

Po wyznaczeniu z równania (4.14) temperatury  $T_{ob}$ :

$$T_{ob}(t) = \frac{A\rho c}{P_w k_w} \frac{dT(t)}{dt} + T(t) \quad (4.17)$$

i podstawieniu do równania (4.16) otrzymuje się po przekształceniach:



$$\frac{(A_o \rho_o c_o)(A \rho c)}{(P_w k_w)(P_z k_z)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{A_o \rho_o c_o}{P_z k_z} \left[ 1 + \frac{(P_z k_z)(A \rho c)}{(P_w k_w)(A_o \rho_o c_o)} + \frac{A \rho c}{A_o \rho_o c_o} \right] \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = T_{cz}(t) \quad (4.18)$$

Po przyjęciu w równaniu (4.18) oznaczeń:

$$a_2 = \frac{(A_o \rho_o c_o)(A \rho c)}{(P_w k_w)(P_z k_z)}, \quad a_1 = \frac{A_o \rho_o c_o}{P_z k_z} \left[ 1 + \frac{(P_z k_z)(A \rho c)}{(P_w k_w)(A_o \rho_o c_o)} + \frac{A \rho c}{A_o \rho_o c_o} \right], \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 1,$$

otrzymuje się następujące równanie różniczkowe:

$$a_2 \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = T_{cz}(t). \quad (4.19)$$

Warunki początkowe mają postać:

$$T(0) = T_o = 0, \quad \left. \frac{dT(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_T = 0. \quad (4.20)$$

Dokonując transformacji Laplace'a poszczególnych składników równania (4.19):

$$\mathcal{L}\{T(t)\} = T(s),$$

$$\mathcal{L}\{T_{cz}(t)\} = T_{cz}(s),$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dT(t)}{dt}\right\} = sT(s) - T(t)\Big|_{t=0} = sT(s),$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 T(t)}{dt^2}\right\} = s^2 T(s) - sT(t)\Big|_{t=0} - \left. \frac{dT(t)}{dt} \right|_{t=0} = s^2 T(s),$$

otrzymano:

$$a_2 s^2 T(s) + a_1 s T(s) + T(s) = T_{cz}(s). \quad (4.21)$$

Transmitancja operatorowa modelu inercyjnego II-go rzędu wynosi:

$$G(s) = \frac{T(s)}{T_{cz}(s)} = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + 1} = \frac{1}{a_2 (s - s_1)(s - s_2)}. \quad (4.22)$$

Transmitancję operatorową można zapisać inaczej, wprowadzając stałe czasowe  $\tau_1$  i  $\tau_2$ .

W tym celu obliczono pierwiastki równania kwadratowego z mianownika równania (4.22):

$$s_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2}, \quad s_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2},$$

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2,$$

a następnie podstawiono je do równania (4.22) i po kolejnych przekształceniach otrzymano zależność:

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{2a_2}{a_1 + \sqrt{\Delta}}s + 1\right)\left(\frac{2a_2}{a_1 - \sqrt{\Delta}}s + 1\right)}. \quad (4.23)$$

Wprowadzając stałe:

$$\tau_{1,2} = \frac{2a_2}{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}, \quad (4.24)$$

transmitancję operatorową  $G(s)$  można zapisać w postaci:

$$G(s) = \frac{T(s)}{T_{cz}(s)} = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}. \quad (4.25)$$

Dla skokowego wzrostu temperatury czynnika od 0 do stałej wartości  $T_{cz}$ , transformata Laplace'a wynosi  $T_{cz}(s) = T_{cz}/s$ , stąd:

$$\frac{T(s)}{T_{cz}} = \frac{1}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}. \quad (4.26)$$

Równanie (4.26) rozwiązane zostało przez rozbicie go na czynniki pierwsze:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau_1 s + 1} + \frac{C}{\tau_2 s + 1} = \\ &= \frac{(A\tau_1\tau_2 + B\tau_2 + C\tau_1)s^2 + [A(\tau_1 + \tau_2) + B + C]s + A}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Otrzymany w ten sposób układ równań:

$$\begin{cases} A\tau_1\tau_2 + B\tau_2 + C\tau_1 = 0 \\ A(\tau_1 + \tau_2) + B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

posiada następujące rozwiązanie:

$$A = 1, \quad B = \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}, \quad C = -\frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości do równania (4.25) otrzymuje się równanie:

$$\frac{T(s)}{T_{cz}} = \frac{1}{s} + \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{(\tau_1 s + 1)} - \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{(\tau_2 s + 1)} \quad (4.28)$$

lub

$$\frac{T(s)}{T_{cz}} = \frac{1}{s} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)}. \quad (4.29)$$

Odwrotności funkcji Laplace'a dla poszczególnych składników równania (4.29) wynoszą po kolei:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T(s)}{T_{cz}}\right\} = \frac{T(t)}{T_{cz}},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)^{-1}\right\} = e^{-\frac{t}{\tau_1}},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)^{-1}\right\} = e^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

Postać czasowa odpowiedzi termometru na skok jednostkowy temperatury przedstawia się zatem następująco:

$$u(t) = \frac{T(t) - T_0}{T_{cz} - T_0} = 1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (4.30)$$

Równanie różniczkowe II-go rzędu (4.21) można zapisać również w postaci:

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 T}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{dT}{dt} + T = T_{cz}, \quad (4.31)$$

ponieważ:

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{2a_2}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}} \cdot \frac{2a_2}{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}} = \frac{4a_2^2}{a_1^2 - (a_1^2 - 4a_2)} = \frac{\cancel{4}a_2^{\cancel{2}}}{4\cancel{a_2}} = a_2,$$

$$\begin{aligned} \tau_1 + \tau_2 &= \frac{2a_2}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}} + \frac{2a_2}{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}} = \\ &= \frac{2a_2 \cdot (a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}) + 2a_2 \cdot (a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2})}{(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}) \cdot (a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2})} = \\ &= \frac{2a_2 (a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2} + a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2})}{a_1^2 - (a_1^2 - 4a_2)} = \frac{\cancel{2}a_2 \cdot \cancel{2}a_1}{\cancel{4}a_2} = a_1. \end{aligned}$$

Korzystając z wyznaczonego równania (4.31) można określić rzeczywistą temperaturę czynnika  $T_{cz}(t)$  na podstawie zmierzonych przebiegów temperatury termometru  $T(t)$  i znanych stałych czasowych termometru  $\tau_1$  i  $\tau_2$ .

W celu określenia stałych czasowych  $\tau_1$  i  $\tau_2$  z równania (4.29) można zastosować metodę najmniejszych kwadratów. Wartości stałych czasowych są określone przez znalezienie minimum funkcji  $S$  z równania(4.11).

Niepewności obliczonych stałych czasowych  $\tau_1$  i  $\tau_2$  wyznaczone są na podstawie błędu średniokwadratowego  $s_N$ , określonego równaniem (4.12), gdzie liczba stałych czasowych  $m = 2$ . Błąd średniokwadratowy pozwala na obliczenie niepewności stałych czasowych, wyznaczonych na podstawie wzorów programu TableCurve 2D.

## 5. Wyznaczanie nieustalonej temperatury czynnika na podstawie czasowego przebiegu temperatury wskazywanego przez termometr

W poniższym rozdziale przedstawiono metodykę wyznaczania nieustalonej temperatury czynnika na podstawie wskazań termometru przybliżonego do modelu inercyjnego I-go i II-go rzędu. Zaprezentowano wyniki badań eksperymentalnych, przeprowadzonych dla termoelementu przemysłowego i cienkiego termometru płaszczonego. Porównano dwie metody wygładzania danych pomiarowych zaburzonych przypadkowymi błędami: metodę wykorzystującą filtr 9-punktowy i metodę różnic centralnych.

### 5.1. Filtracja zmierzonych przebiegów temperatury

Temperaturę czynnika zmienną w czasie  $T_{cz}(t)$  można wyznaczyć ze wzoru (4.10) lub ze wzoru (4.30), po uprzednim wyznaczeniu odpowiednio stałej czasowej  $\tau$  lub stałych czasowych  $\tau_1$  i  $\tau_2$ . Przebieg temperatury  $T(t)$ , pierwszą i drugą pochodną po czasie z funkcji  $T(t)$  można wygładzić korzystając z filtrów bazujących na lokalnej aproksymacji za pomocą wielomianu 3-go stopnia [12]:

$$T(t) = \frac{1}{693} \cdot [-63f(t-4 \cdot \Delta t) + 42f(t-3 \cdot \Delta t) + 117f(t-2 \cdot \Delta t) + 162f(t-\Delta t) + 177f(t) + 162f(t+\Delta t) + 117f(t+2 \cdot \Delta t) + 42f(t+3 \cdot \Delta t) - 63f(t+4 \cdot \Delta t)], \quad (5.1)$$

$$T'(t) = \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{1188 \cdot \Delta t} \cdot [86f(t-4 \cdot \Delta t) - 142f(t-3 \cdot \Delta t) - 193f(t-2 \cdot \Delta t) - 126f(t-\Delta t) + 126f(t+\Delta t) + 193f(t+2 \cdot \Delta t) + 142f(t+3 \cdot \Delta t) - 86f(t+4 \cdot \Delta t)], \quad (5.2)$$

$$T''(t) = \frac{d^2T(t)}{dt^2} = \frac{1}{462 \cdot (\Delta t)^2} \cdot [28f(t-4 \cdot \Delta t) + 7f(t-3 \cdot \Delta t) - 8f(t-2 \cdot \Delta t) - 17f(t-\Delta t) - 20f(t) - 17f(t+\Delta t) - 8f(t+2 \cdot \Delta t) + 7f(t+3 \cdot \Delta t) + 28f(t+4 \cdot \Delta t)], \quad (5.3)$$

aby przynajmniej częściowo wyeliminować wpływ przypadkowych błędów pomiaru temperatury termometru  $T(t)$  na wyznaczaną temperaturę czynnika  $T_{cz}(t)$ . Symbol  $f(t)$

we wzorach (5.1-5.3) oznacza temperaturę wskazywaną przez termometr, a  $\Delta t$  - krok czasowy.

Jeśli pomiar temperatury nie jest zaburzony dużymi błędami przypadkowymi, pierwszą i drugą pochodną można być wyznaczyć metodą różnic centralnych:

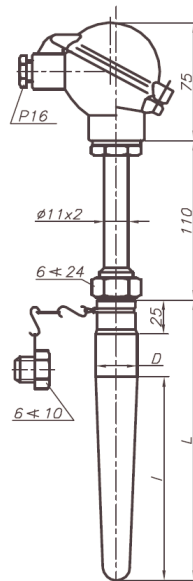
$$T'(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2\Delta t}, \quad (5.4)$$

$$T''(t) = \frac{f(t + \Delta t) - 2f(t) + f(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2}. \quad (5.5)$$

## 5.2. Wyznaczanie temperatury czynnika przy zastosowaniu modelu

### I-go i II-go rzędu

Termometr przemysłowy typu K (NiCr-NiAl) (rys. 5.1), o temperaturze otoczenia, został nagle zanurzony we wrzącej wodzie.

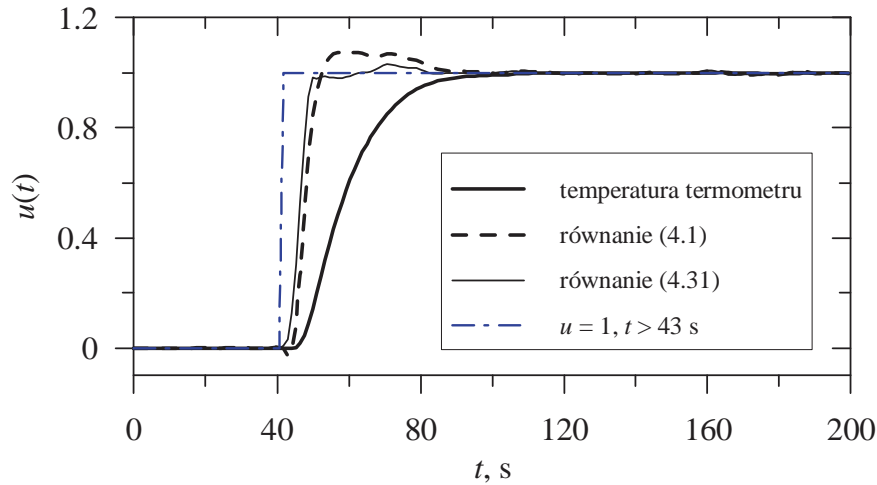


Rys. 5.1. Schemat czujnika temperatury i jego wymiary:  $D = 18$  mm,  
 $l = 65$  mm,  $L = 140$  mm

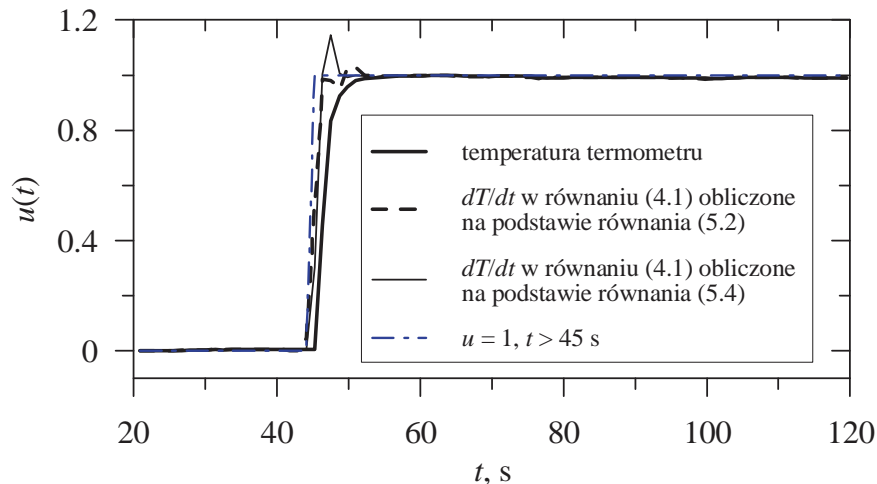
Temperatura termometru rejestrowana była za pomocą układu akwizycji danych typu UPM 100 (klasa dokładności 0,1) firmy Hottinger-Baldwin Messtechnik. Zmierzony przebieg temperatury przybliżony został za pomocą funkcji (4.10) i (4.30). Stała czasowa  $\tau$  we wzorze (4.10) oraz stałe czasowe  $\tau_1$  i  $\tau_2$  w funkcji (4.30) wyznaczone zostały za pomocą programu TableCurve 2D.

Dla termometru przemysłowego stałe czasowe z 95% przedziałem ufności pomiaru wynoszą:  $\tau = 14,07 \pm 0,39$  s,  $\tau_1 = 3,0 \pm 0,165$  s, i  $\tau_2 = 10,90 \pm 0,2$  s.

Następnie wyznaczono przebiegi temperatury czynnika (rys. 5.2) wykorzystując równanie (4.1) w przypadku modelu I-go rzędu oraz równanie (4.31) w przypadku modelu II-go rzędu. Krok czasowy  $\Delta t$  dla obu termoelementów wynosił 1,162 s.



Rys. 5.2. Zmiany temperatury czynnika i termometru przemysłowego określone na podstawie równania I-go rzędu (4.1) oraz równania II-go rzędu (4.31)



Rys. 5.3. Zmiany temperatur czynnika i termometru określone na podstawie równania I-go rzędu (4.1) dla termoelementu płaszczykowego o średnicy zewnętrznej 1,5 mm

Z analizy wyników przedstawionych na rys. 5.2 widać, że model II-go rzędu daje dokładniejsze wyniki.

To samo doświadczenie zostało przeprowadzone dla termoelementu płaszczykowego typu K (NiCr-NiAl) o średnicy zewnętrznej 1,5 mm, wyniki przedstawiono na rys. 5.3. Oszacowana wartość stałej czasowej z 95% przedziałem ufności wynosi  $\tau = 1,54 \pm 0,09$  s. Jeśli termoelement ma małą średnicę, funkcją przybliżającą

odpowieź czasową termoelementu na skok jednostkowy jest równanie (4.10). Wykorzystując pomiary temperatury, temperatura czynnika  $T_{cz}$  obliczona została z równania (4.1), gdzie wartości zmierzone  $T(t)$  zostały wygładzone dzięki zastosowaniu filtra 9-punktowego (5.1), a pierwsza pochodna  $dT/dt$  obliczona została przy wykorzystaniu tej samej metody, równaniem (5.2). Kolejnym krokiem było wyznaczenie z równania (4.1) temperatury czynnika  $T_{cz}$ , przy czym pierwsza pochodna została obliczona za pomocą ilorazu różnicowego centralnego (5.4).

Porównanie wyników przedstawionych na rys. 5.3 wskazuje, że przybliżenie pochodnej względem czasu za pomocą ilorazu centralnego prowadzi do zmniejszenia ich dokładności, ponieważ iloraz różnicowy centralny jest bardziej wrażliwy na przypadkowe błędy danych pomiarowych.

Obie zaproponowane metody określania temperatury czynnika na podstawie temperatury mierzonej w warunkach nieustalonych nadają się do stosowania w trybie on-line dla dowolnych zmian temperatury w funkcji czasu, przy niezmiennych warunkach wymiany ciepła oraz dobrej powtarzalności pomiarów. Traktowanie termoelementu jako obiektu inercyjnego I-go rzędu jest właściwe dla termometrów o małej bezwładności. W takim przypadku opóźnienie wskazań termometru jest niewielkie w stosunku do zmian temperatury czynnika. Gdy ciśnienie czynnika roboczego jest wysokie, pomiary temperatury wykonywane są termometrami przemysłowymi o masywnych osłonach i dużej bezwładności. W takim przypadku termoelementy należy modelować za pomocą równania różniczkowego zwyczajnego II-go rzędu, ponieważ opóźnienie wskazanej temperatury w stosunku do rzeczywistej jest duże. Dużą stabilność i dokładność obliczeń temperatury czynnika na podstawie pomiarów wykonywanych przez termometr można uzyskać stosując 9-punktowy filtr cyfrowy.



## **6. Wyznaczenie nieustalonej temperatury czynnika z rozwiązań odwrotnych zagadnień wymiany ciepła**

W stanie ustalonym, gdy temperatura jest stała oraz nie występuje zjawisko tłumienia i opóźnienia zmian temperatury czynnika przez termometr, pomiary temperatury mogą być dokonane z dużą dokładnością. Jednakże podczas rozruchu, gdy temperatura czynnika ulega gwałtownym zmianom, występują znaczne różnice pomiędzy temperaturą rzeczywistą a zmierzoną, z uwagi na bezwładność masywnej osłony termoelementu [6, 15]. Zaproponowane zostały dwie metody określania temperatury czynnika.

Pierwszą z nich jest pomiar temperatury czynnika przez pomiar temperatury zewnętrznej powierzchni rurociągu lub komory cylindrycznej, które są izolowane cieplnie na powierzchni zewnętrznej. Tego typu pomiar temperatury jest stosowany do pomiaru ustalonej temperatury czynnika płynącego wewnątrz rury, na przykład w przegrzewaczach pary o stosunkowo małych grubościach ścianek rur. W stanie ustalonym pomiar temperatury jest bardzo dokładny, aczkolwiek, gdy temperatura czynnika ulega gwałtownym zmianom w czasie, mierzona temperatura ścianki może znacznie się różnić od rzeczywistej wartości temperatury czynnika. W niniejszej pracy przedstawiona została nowa metoda pomiaru nieustalonej temperatury czynnika przez pomiar temperatury powierzchni zewnętrznej, na podstawie której wyznaczona jest temperatura czynnika przy wykorzystaniu metody odwrotnej kroczącej. Taki sposób pomiaru temperatury ma wiele zalet, między innymi: łatwy dostęp do powierzchni, łatwy sposób zamocowania termoelementu do zewnętrznej powierzchni elementu konstrukcyjnego, możliwość poprowadzenia termoelementu po powierzchni izotermicznej, co znacznie podwyższa dokładność pomiaru temperatury czynnika w stanach nieustalonych.

Druga z metod polega na wyznaczaniu temperatury czynnika na podstawie pomiarów temperatury termometrami przemysłowymi. Termometry te, ze względu na warunki, w jakich dokonywane są pomiary (wysokie temperatury, ciśnienia, duże prędkości czynnika roboczego powodujące drgania termoelementu) często posiadają masywne osłony. Dotyczy to na przykład elementów ciśnieniowych kotłów i turbin [12]. Osłony te cechują się dużą bezwładnością – jej miarą jest stała czasowa  $\tau$ .

Dynamikę termoelementu opisuje równanie (4.1). Zastosowanie w takim przypadku metod odwrotnych w połączeniu z metodami numerycznymi może pozwolić na szybkie odtworzenie faktycznego stanu temperatury.

### **6.1. Wyznaczenie temperatury czynnika na podstawie pomiaru temperatury na zewnętrznej izolowanej powierzchni ścianki cylindrycznej**

W niniejszym podrozdziale przedstawiono metodę wyznaczania nieustalonej temperatury czynnika przepływającego przez rurociąg na podstawie pomiarów temperatury na jego powierzchni zewnętrznej. Temperatura czynnika określona została przy wykorzystaniu metody odwrotnej kroczącej. Przeanalizowano dwa przypadki – skokowej i liniowej zmiany temperatury czynnika. W celu weryfikacji powyższej metody, porównane zostały – temperatura czynnika obliczona za pomocą metody odwrotnej kroczącej z zadaną dokładną temperaturą czynnika oraz przebiegi temperatury w kilku punktach wewnątrz ścianki rurociągu wyznaczone metodą analityczną i odwrotną kroczącą.

#### **6.1.1. Zagadnienie bezpośrednio dla ścianki cylindrycznej**

Najpierw rozwiązano zagadnienie bezpośrednio dla ścianki cylindrycznej izolowanej na powierzchni zewnętrznej. W zagadnieniu bezpośrednim znane są warunki brzegowe oraz warunek początkowy. Wyznaczone rozwiązania analityczne wykorzystane zostaną do generowania „danych pomiarowych”, tj. nieustalonych przebiegów temperatury w zadanych punktach, leżących wewnątrz lub na powierzchni elementu. Na podstawie tych danych wyznaczana będzie temperatura czynnika, która porównana zostanie z temperaturą czynnika przyjętą do rozwiązania z zagadnienia bezpośredniego.

##### **6.1.1.1. Analityczne wyznaczanie nieustalonego rozkładu temperatury przy skokowej zmianie temperatury czynnika w czasie**

W celu uzyskania „dokładnych danych pomiarowych”, do zaproponowanej metody odwrotnej wykorzystano metodę analityczną.

Równanie nieustalonego przewodzenia ciepła w ściance cylindrycznej ma postać:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (6.1)$$

gdzie:

$$r_w \leq r \leq r_z.$$

Równanie przewodzenia ciepła (6.1) rozwiązane zostało dla warunku początkowego:

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (6.2)$$

i następujących warunków brzegowych:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = \alpha (T_{cz} - T|_{r=r_w}), \quad (6.3)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_z} = 0, \quad (6.4)$$

ponieważ powierzchnia zewnętrzna jest izolowana cieplnie.

Rozkład temperatury w ścianie przy  $T_0$  i jednostkowym skokowym wzroście temperatury czynnika:  $T_{cz} = 1^\circ\text{C}$  dla  $t > 0$  obliczony jest z zależności [16]:

$$u(r, t) = \frac{T(r, t) - T_0}{T_{cz} - T_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n M_n e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (6.5)$$

gdzie:

$$A_n = \frac{\pi \frac{Bi}{\mu_n} \left[ J_1(\mu_n) + \frac{Bi}{\mu_n} J_0(\mu_n) \right] J_1(k\mu_n)}{\left[ J_1(\mu_n) + \frac{Bi}{\mu_n} J_0(\mu_n) \right]^2 - \left( 1 + \frac{Bi^2}{\mu_n^2} \right) J_1^2(k\mu_n)},$$

$$M_n = J_1(k\mu_n) Y_0(R\mu_n) - Y_1(k\mu_n) J_0(R\mu_n),$$

$$R = \frac{r}{r_w}, \quad Fo = \frac{at}{r_w^2}, \quad k = \frac{r_z}{r_w}.$$

Pierwiastki  $\mu_n$  wyznaczone są z równania charakterystycznego:

$$\frac{Y_1(k\mu)}{J_1(k\mu)} \frac{J_1(\mu) + \frac{Bi}{\mu_n} J_0(\mu)}{Y_1(\mu) + \frac{Bi}{\mu_n} Y_0(\mu)} = 1, \quad (6.6)$$

gdzie  $Bi = \frac{\alpha r_w}{\lambda}$ .

Przeprowadzono obliczenia wg opisanej metody, przyjęto, że temperatura czynnika roboczego wzrasta skokowo od 20 do 100°C. Założono, że czynnik przepływa przez rurociąg o wymiarach rzeczywistego elementu, na którym przeprowadzono w dalszej kolejności badania eksperymentalne: średnica zewnętrzna rury wykonanej ze stali P91

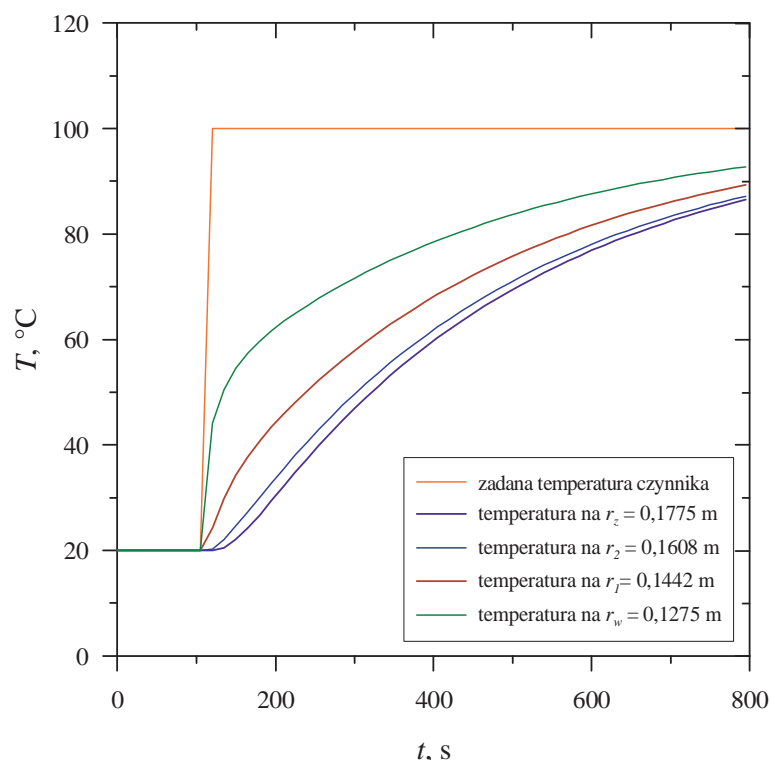
wynosi 355 mm, natomiast grubość jej ścianki – 50 mm. Oprócz rozkładu temperatury na powierzchni zewnętrznej ( $r_z = 0,1775$  m), wyznaczone zostały rozkłady temperatury w dwóch punktach na grubości ścianki:  $r_1 = 0,1442$  m,  $r_2 = 0,1608$  m oraz na powierzchni wewnętrznej ( $r_w = 0,1275$  m).

Wartości własności fizycznych stali P91 to:  $\lambda = 29$  W/(m·K),  $c = 486$  J/(kg·K) i  $a = 7,699 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s. Przyjęto wartość współczynnika wnikania ciepła  $\alpha = 1000$  W/(m<sup>2</sup>K). Obliczenia przeprowadzono w języku programowania FORTRAN.

Pierwiastki równania charakterystycznego (6.6) wyznaczone zostały za pomocą procedury ZREAL z biblioteki IMSL. Wartości pierwiastków wynoszą:

$$\begin{array}{cccc} \mu_1 = 2,41685 & \mu_2 = 9,15241 & \mu_3 = 16,68922 & \mu_4 = 24,49500 \\ \mu_5 = 32,39600 & \mu_6 = 40,34000 & \mu_7 = 48,30161 & \mu_8 = 56,28100 \\ \mu_9 = 64,26700 & \mu_{10} = 72,25800 & \mu_{11} = 80,25300 & \mu_{12} = 88,25100 \end{array}$$

Wyniki obliczeń w których zastosowano metodę analityczną dla zadanej temperatury czynnika przedstawiono na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Zadany skok temperatury czynnika i rozkład temperatury w czterech węzłach na grubości ścianki rurociągu

### 6.1.1.2. Wyznaczanie niestabilnego rozkładu temperatury przy zmiennej w czasie temperaturze czynnika

Wyznaczenie rozkładu temperatury będącego funkcją czasu na grubości ścianki rurociągu w przypadku wzrostu liniowego temperatury czynnika odbywa się za pomocą całki Duhamela. Całkę Duhamela zastosowano przy założeniu równomiernego, niezależnego od położenia rozkładu temperatury początkowej  $T_0$  wewnątrz ciała.

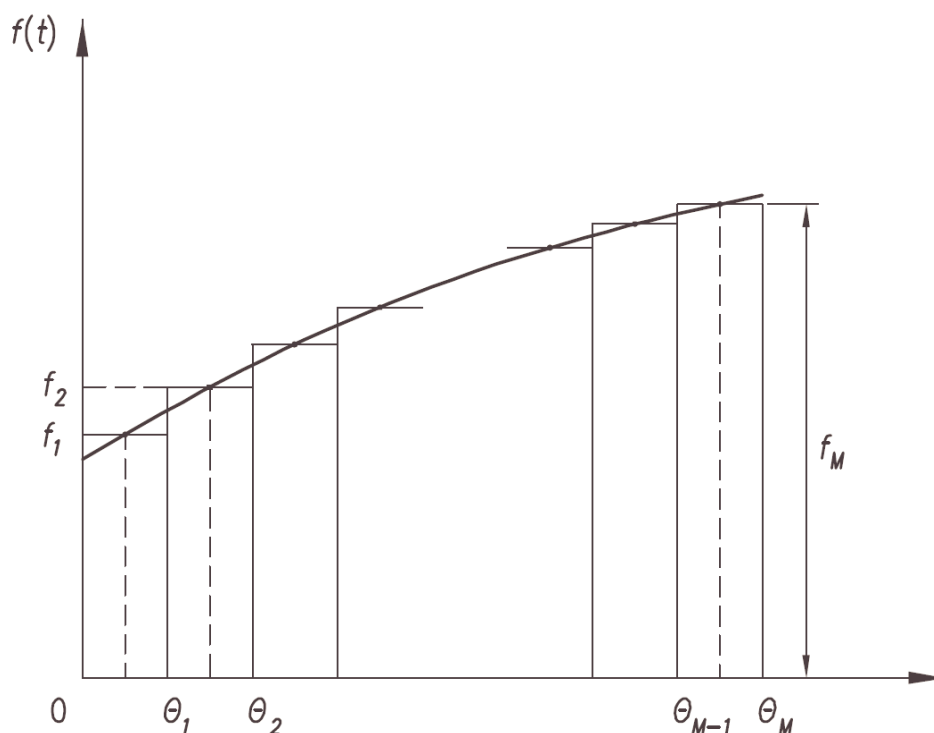
Całka Duhamela przyjmuje następującą postać [12]:

$$T(r, t) = T_0 + \int_0^t f(\theta) \frac{\partial u(r, t - \theta)}{\partial t} d\theta. \quad (6.7)$$

Aby wyznaczyć pole temperatury, skorzystano z wyznaczonej z równania (6.5) funkcji  $u(r, t)$ , która jest odpowiedzią na dowolnym promieniu  $r$  na skok jednostkowy temperatury powierzchni:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Temperaturę powierzchni  $f(t)$  aproksymowano jak na rys. 6.2.



Rys. 6.2. Aproksymacja temperatury powierzchni  $f(t)$  [12]

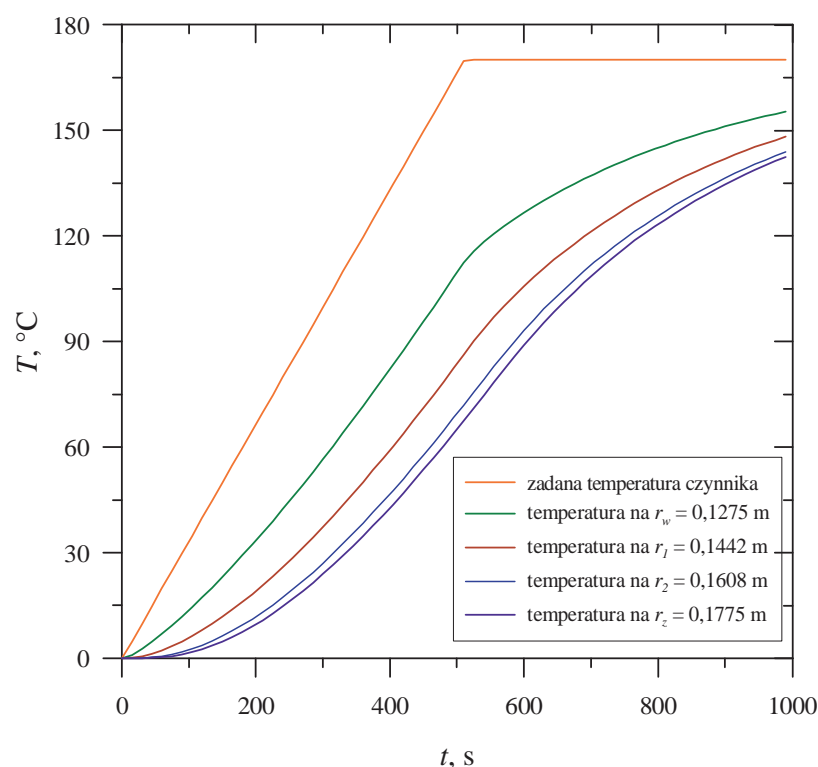
Stosując zasadę superpozycji rozkład temperatury w ciele wyznaczono jako sumę udziałów pochodzących od poszczególnych składowych funkcji  $f(t)$  [12]:

$$\begin{aligned}
T(r, t) - T_0 = & f_1 \cdot [u(r, t_M - \theta_0) - u(r, t_M - \theta_1)] + \\
& + f_2 \cdot [u(r, t_M - \theta_1) - u(r, t_M - \theta_2)] + \\
& \vdots \\
& + f_M \cdot [u(r, t_M - \theta_{M-1}) - u(r, t_M - \theta_M)],
\end{aligned}
\tag{6.9}$$

gdzie:

$$u(r, t_M - \theta_M) = u(r, 0) = 0, \quad \theta_0 = 0.$$

Korzystając z całki Duhamela przeprowadzono obliczenia, w których założono wzrost liniowy temperatury czynnika roboczego od 0 do 170°C, przy prędkości narastania temperatury  $v_T = 0,33333$  1/K. Czynnik przepływa przez rurociąg wykonany ze stali P91, o średnicy zewnętrznej 355 mm i grubości ścianki – 50 mm. Rozkład temperatury wyznaczono na czterech promieniach rury:  $r_z = 0,1775$  m (powierzchnia zewnętrzna),  $r_l = 0,1442$  m,  $r_2 = 0,1608$  m oraz  $r_w = 0,1275$  m (powierzchnia wewnętrzna rurociągu). Wartości własności fizycznych stali P91 to:  $\lambda = 29$  W/(m·K),  $c = 486$  J/(kg·K) i  $a = 7,699 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s. Przyjęto wartość współczynnika wnikania ciepła  $\alpha = 1000$  W/(m<sup>2</sup>K). Obliczenia przeprowadzono przy pomocy języka programowania FORTRAN. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 6.3.



Rys. 6.3. Zadany wzrost liniowy temperatury czynnika i rozkład temperatury w czterech węzłach na grubości ścianki rurociągu

### 6.1.2. Wyznaczanie temperatury czynnika za pomocą metody odwrotnej kroczącej

Na podstawie znanej temperatury na powierzchni zewnętrznej, poszukiwany jest rozkład temperatury w obszarze  $r_w \leq r \leq r_z$  i temperatura czynnika przepływającego wewnątrz rurociągu.

Równanie przewodzenia ciepła ma następującą postać [17]:

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda(T) r^m \frac{\partial T}{\partial r} \right], \quad (6.10)$$

gdzie:

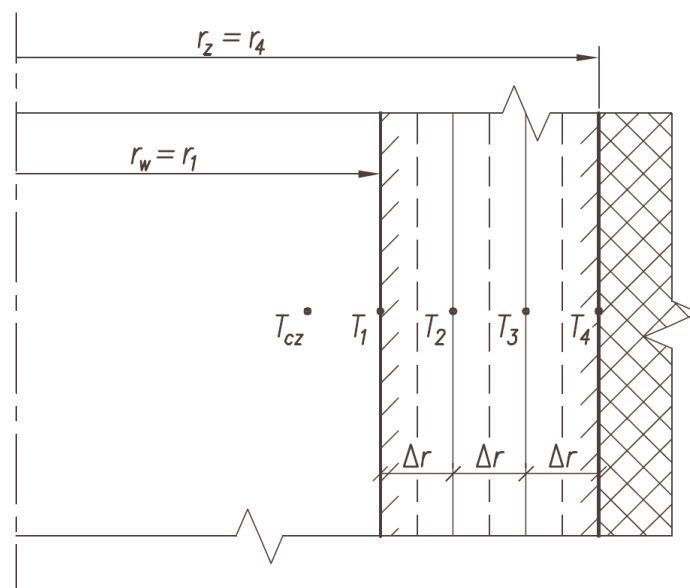
$$r_w \leq r \leq r_z.$$

Zagadnienie odwrotne zostało rozwiązane z wykorzystaniem metody objętości kontrolnej i przy założeniu, że wartości własności fizycznych ciała:  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  są zależne od temperatury.

Równanie bilansu ciepła dla poszczególnych objętości kontrolnych przedstawia się następująco [11]:

$$\Delta V c(T_p) \rho(T_p) \frac{dT_p}{dt} = \sum_{i=1}^4 \dot{Q}_i + \Delta V \dot{q}_v(T_p). \quad (6.11)$$

Badaną ściankę rury grubościennej podzielono na 3 objętości skończone (rys. 6.4). Pomiar temperatury miał miejsce na zewnętrznej powierzchni rury, która została zaizolowana cieplnie.



Rys. 6.4. Przekrój poprzeczny ścianki rury z podziałem na objętości kontrolne

Dla węzła 4-go równanie (6.11) ma postać:

$$\begin{aligned} \pi \left[ r_z^2 - \left( r_z - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] c(T_5) \rho(T_5) \frac{dT_5}{dt} = \\ = 2\pi \left( r_z - \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\lambda(T_4) + \lambda(T_5)}{2} \frac{T_4 - T_5}{\Delta r}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dla węzłów 3- i 2-go:

$$\begin{aligned} \pi \left[ \left( r_w + (2i-1) \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( r_w - (2i-3) \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] c(T_i) \rho(T_i) \frac{dT_i}{dt} = \\ = 2\pi \left( r_w - (2i-3) \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\lambda(T_{i-1}) + \lambda(T_i)}{2} \frac{T_{i-1} - T_i}{\Delta r} + \\ + 2\pi \left( r_w + (2i-1) \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\lambda(T_i) + \lambda(T_{i+1})}{2} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

natomiast dla pierwszej objętości skończonej:

$$\begin{aligned} \pi \left[ \left( r_w + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - r_w^2 \right] c(T_1) \rho(T_1) \frac{dT_1}{dt} = \\ = 2\pi r_w \dot{q}_w + 2\pi \left( r_w + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\lambda(T_1) + \lambda(T_2)}{2} \frac{T_2 - T_1}{\Delta r}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Z równań (6.12) i (6.13) zostały wyznaczone kolejne temperatury:

$$T_3 = T_4 + \frac{r_z^2 - (r_z - \Delta r/2)^2}{r_z - \Delta r/2} \Delta r \frac{c(T_4) \rho(T_4)}{\lambda(T_3) + \lambda(T_4)} \frac{dT_4}{dt} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} T_2 = T_3 + 4(\Delta r)^2 \frac{r_w + 2\Delta r}{2r_w + 3\Delta r} \frac{c(T_3) \rho(T_3)}{\lambda(T_2) + \lambda(T_3)} \frac{dT_2}{dt} - \\ - \frac{2r_w + 5\Delta r}{2r_w + 3\Delta r} \frac{\lambda(T_3) + \lambda(T_4)}{\lambda(T_2) + \lambda(T_4)} (T_4 - T_3) \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} T_1 = T_2 + 4(\Delta r)^2 \frac{r_w + \Delta r}{2r_w + \Delta r} \frac{c(T_2) \rho(T_2)}{\lambda(T_1) + \lambda(T_2)} \frac{dT_2}{dt} - \\ - \frac{2r_w + 3\Delta r}{2r_w + \Delta r} \frac{\lambda(T_2) + \lambda(T_3)}{\lambda(T_1) + \lambda(T_3)} (T_3 - T_2) \end{aligned} \quad (6.17)$$

a z równania (6.14) wyznaczony został strumień  $\dot{q}_w$ :

$$\dot{q}_w = c(T_1) \rho(T_1) \frac{\Delta r}{2} \left( 1 + \frac{\Delta r}{4r_w} \right) \frac{dT_1}{dt} - \frac{\lambda(T_1) + \lambda(T_2)}{2} \frac{T_2 - T_1}{\Delta r} \left( 1 + \frac{\Delta r}{2r_w} \right). \quad (6.18)$$

Ponieważ dla poszczególnych temperatur  $T_i$  (gdzie  $i = 1, 2, 3$ ) wartości  $\lambda(T_i)$  nie były znane, dokonanych zostało  $n$  iteracji, po których uzyskano poszukiwaną



temperaturę  $T_i$ . W pierwszej iteracji ( $n = 0$ ) przyjęto dla poszczególnych węzłów  $\lambda(T_i^{(0)}) = \lambda(T_{i-1})$ . Proces iteracji trwał tak długo, dopóki nie został spełniony warunek [17]:

$$\left| T_{i-1}^{(n+1)} - T_{i-1}^{(n)} \right| \leq \varepsilon, \quad (6.19)$$

gdzie tolerancja  $\varepsilon \approx 0,00001$  [K].

W celu określenia temperatury czynnika przepływającej przez rurę, skorzystano z warunku brzegowego:

$$\dot{q} \Big|_{r=r_w} = \alpha_r \cdot (T_{cz} - T \Big|_{r=r_w}), \quad (6.20)$$

gdzie:

$$T \Big|_{r=r_w} = T_1, \quad \dot{q} \Big|_{r=r_w} = \dot{q}_w. \quad (6.21)$$

Stąd:

$$T_{cz}(t) = T_1(t) + \frac{\dot{q}_w(t)}{\alpha_r}. \quad (6.22)$$

Aby przynajmniej częściowo wyeliminować wpływ przypadkowych błędów pomiaru temperatury termometru  $T(t)$  na wyznaczaną temperaturę, przebieg temperatury i pierwszą pochodną po czasie z funkcji  $T(t)$  wygładzono za pomocą 9-punktowego filtru (5.1-5.2) [12].

Obliczenia wykorzystujące metodę odwrotną kroczącą przeprowadzono w języku programowania FORTRAN dla skoku temperatury czynnika roboczego od 20 do 100°C i dla wzrostu liniowego od 0 do 170°C ( $v_T = 0,33333$  1/K). Wyznaczając temperaturę czynnika wykorzystano obliczenia wykonane metodą bezpośrednią (rozdz. 6.1.1.1 i 6.1.1.2). Czynnik przepływał przez grubościenną rurę, wykonaną z materiału P91.

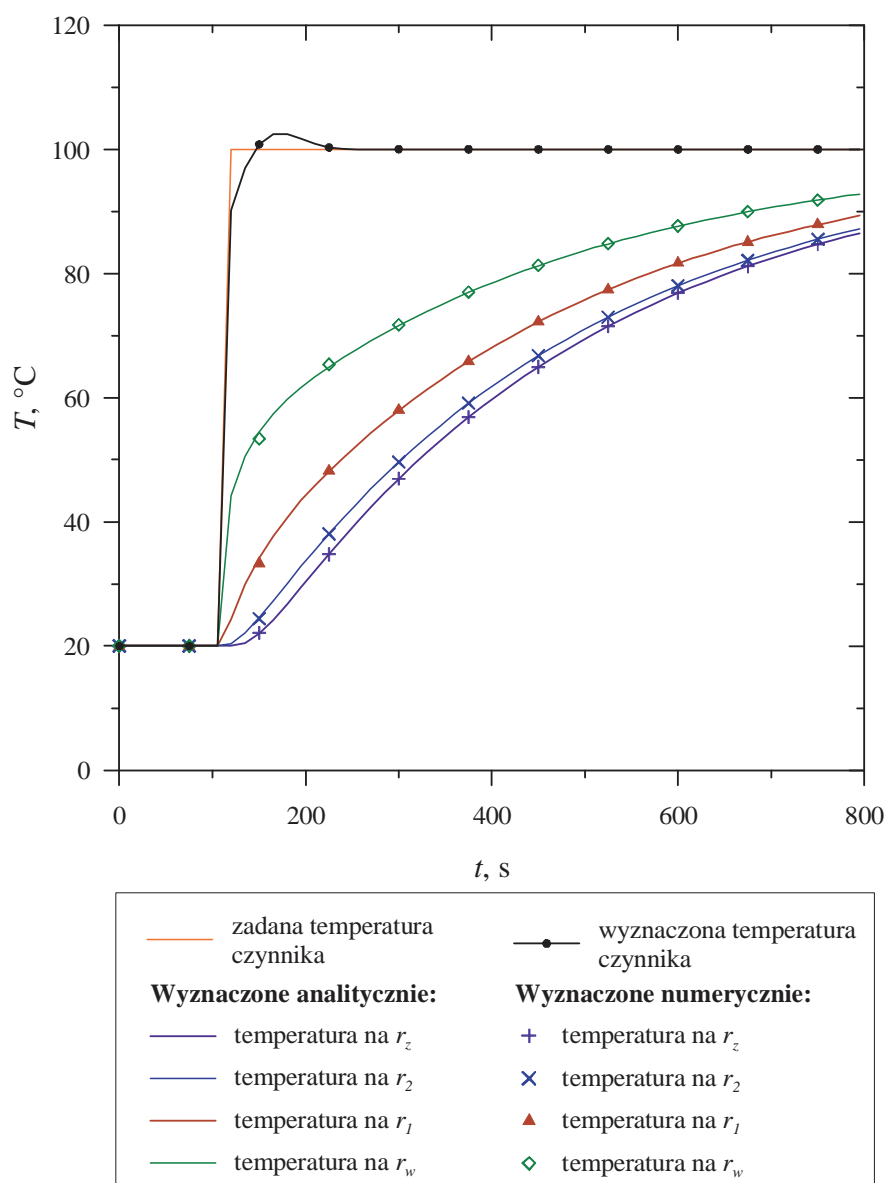
W celu umożliwienia weryfikacji obliczeń wykorzystujących metodę odwrotną kroczącą z obliczeniami wykonanymi metodą analityczną, założono stałe wartości własności fizycznych stali P91:  $\lambda = 29$  W/(m·K),  $c = 486$  J/(kg·K) i  $a = 7,699 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s. Przyjęto również taką samą geometrię badanego rurociągu (średnica zewnętrzna rury - 355 mm, grubość ścianki - 50 mm) oraz taką samą wartość współczynnika wnikania ciepła  $\alpha = 1000$  W/(m<sup>2</sup>·K), jak w metodzie analitycznej. Oprócz temperatury czynnika określona została również temperatura w czterech punktach ścianki rury: na powierzchni zewnętrznej ( $r_z = 0,1775$  m), na powierzchni wewnętrznej ( $r_w = 0,1275$  m) oraz na grubości ścianki ( $r_1 = 0,1442$  m i  $r_2 = 0,1608$  m).

Zastosowana w obliczeniach metoda wygładzania danych za pomocą filtru 9-punktowego jest stabilna i cechuje się dużą dokładnością, jeśli [17]:

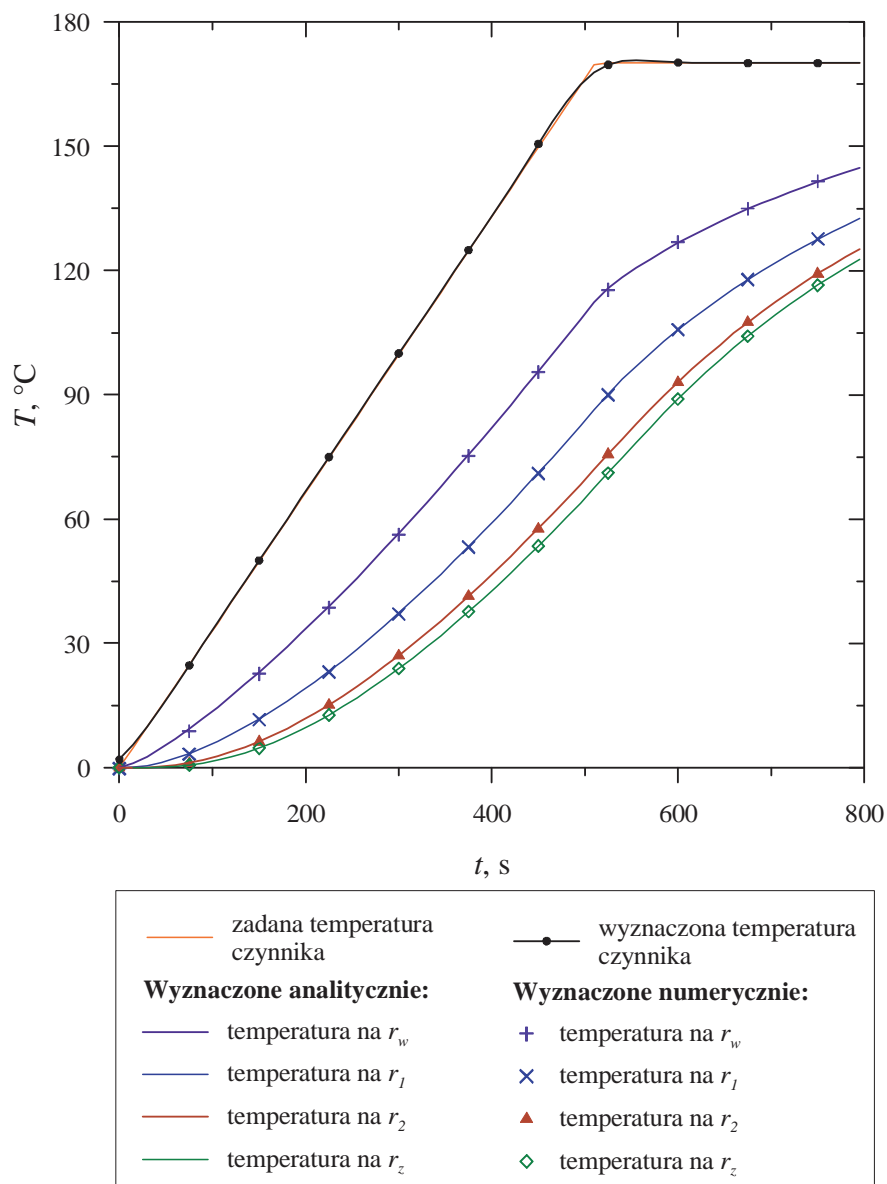
$$\Delta Fo = \frac{a\Delta t}{(r_z - r_w)^2} \geq 0,05. \quad (6.23)$$

W obliczeniach przyjęto krok czasowy  $\Delta t = 15$  s.

Przebiegi temperatury w poszczególnych węzłach wygenerowane metodą analityczną zostały porównane do przebiegów temperatury wyznaczonych w tych samych węzłach metodą odwrotną kroczącą. Wyniki przedstawiono na rys. 6.5 i 6.6.



Rys. 6.5. Wyniki obliczeń dla skoku temperatury czynnika od 20 do 100°C



Rys. 6.6. Wyniki obliczeń dla wzrostu liniowego temperatury czynnika od 0 do 170°C

Otrzymane wyniki świadczą o dużej dokładności wyznaczania nieustalonej temperatury czynnika za pomocą zaproponowanej metody odwrotnej kroczącej. W celu określenia temperatury czynnika roboczego w stanach nieustalonych wystarczy zmierzyć temperaturę na zewnętrznej powierzchni rury, zaizolowanej cieplnie.

Porównanie temperatur wyznaczonych w poszczególnych węzłach na grubości ścianki metodą analityczną i odwrotną kroczącą dało bardzo dobry rezultat, różnice pomiędzy otrzymanymi wynikami są niewielkie.

Do zalet zaproponowanej odwrotnej metody kroczącej zaliczyć należy dużą dokładność i krótki czas uzyskiwania poprawnych wartości temperatury.

Wyznaczanie nieustalonej temperatury czynnika metodą odwrotną kroczącą na podstawie pomiaru temperatury zewnętrznej ścianki rurociągu daje dokładniejsze wyniki niż pomiar temperatury termometrem przemysłowym. Termoelementy przemysłowe mają złożoną budowę, zmniejszenie dynamicznego błędu pomiaru w przypadku takich czujników jest bardzo trudne.

## **6.2. Wyznaczanie temperatury czynnika na podstawie pomiaru temperatury w osi cylindrycznego czujnika pomiarowego**

W tym podrozdziale przedstawiono wykorzystanie metody odwrotnej kroczącej w pomiarach nieustalonej temperatury czynnika za pomocą termoelementu w masywnej osłonie ochronnej. Przeanalizowano termometry o trzech różnych średnicach. Założono, że zostały one umieszczone w rurze w kierunku promieniowym, w ten sposób, że czynnik roboczy omywał je poprzecznie. W celu oceny powyższej metody, zostały zestawione wyniki wygenerowanych pomiarów temperatury termoelementu metodą bezpośrednią i wyniki uzyskane metodą odwrotną kroczącą.

### **6.2.1. Zagadnienie bezpośrednie dla pełnego cylindra**

Najpierw rozwiązano zagadnienia bezpośrednie dla cylindra bez otworu. W zagadnieniu bezpośrednim znane są warunki brzegowe oraz warunek początkowy. Wyznaczone rozwiązania analityczne wykorzystane zostaną do generowania „danych pomiarowych”, tj. nieustalonych przebiegów temperatury w zadanych punktach leżących wewnątrz lub na powierzchni elementu. Na podstawie tych danych będzie wyznaczana temperatura czynnika, która zostanie porównana z temperaturą czynnika przyjętą do rozwiązania z zagadnienia bezpośredniego.

#### **6.2.1.1. Analityczne wyznaczanie nieustalonego rozkładu temperatury przy skokowej zmianie temperatury czynnika w czasie**

Rozkład temperatury wewnątrz cylindra określa równanie przewodzenia ciepła (6.1), które można przedstawić w nieco innej postaci:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right), \quad (6.24)$$

gdzie:

$$0 \leq r \leq r_z.$$

Równanie (6.24) zostało rozwiązane dla warunków brzegowych:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{r=0} = 0, \quad (6.25)$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=r_z} = \alpha \theta \Big|_{r=r_z} \quad (6.26)$$

i warunku początkowego:

$$\theta \Big|_{r=0} = \theta_0, \quad (6.27)$$

gdzie:

$$\theta = T(r, t) - T_{cz}, \quad \theta_0 = T_0 - T_{cz}.$$

Rozkład temperatury określa równanie [16]:

$$\theta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n R) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (6.28)$$

gdzie

$$A_n = \frac{2\theta_0 J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]},$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{r_z^2}, \quad R = \frac{r}{r_w}.$$

Odpowiedź na skok jednostkowy temperatury czynnika wynosi zatem:

$$u(r, t) = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T(r, t) - T_{cz}}{T_0 - T_{cz}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_n) J_0(\mu_n R)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (6.29)$$

Pierwiastki  $\mu_n$  wyznaczone zostały z równania charakterystycznego [16]:

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi}, \quad (6.30)$$

gdzie

$$Bi = \frac{\alpha r_z}{\lambda}.$$

Przeprowadzono obliczenia mające na celu wyznaczenie rozkładu temperatury na grubości elementów o kształcie cylindrycznym dla skoku temperatury czynnika roboczego od 20 do 100 °C. Założono, że czynnik omywa poprzecznie osłony termoelementów, na których zostały przeprowadzone w dalszej kolejności badania

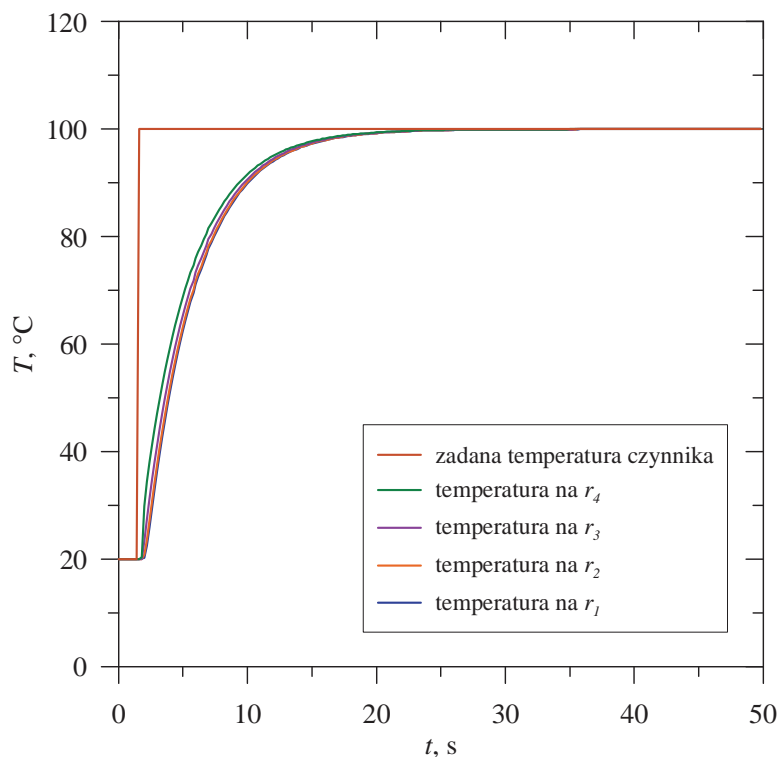
doświadczalne, o średnicach: 7, 15 i 20 mm. Promienie na których wyznaczono rozkład temperatury zostały zestawione dla wszystkich termoelementów w tab. 6.1.

Osłony czujników temperatury wykonane zostały ze stali austenitycznej 1.4541, której wartości własności fizyczne wynoszą:  $\rho = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\lambda = 18 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,  $a = 4,55696 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $c = 500 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ . W obliczeniach przyjęto stałą wartość współczynnika wnikania ciepła  $\alpha = 2000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ .

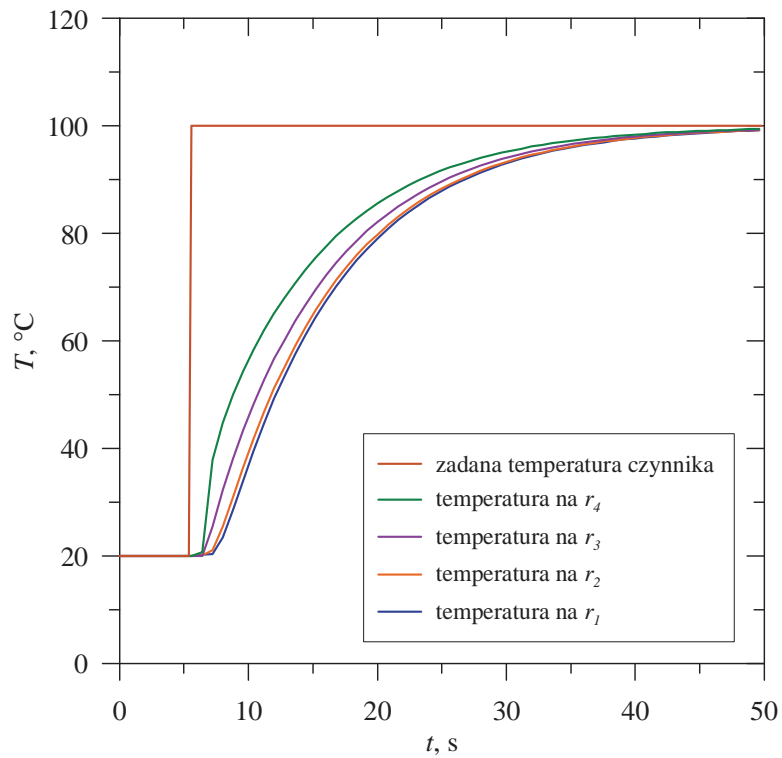
Tabela 6.1. Promienie na których wyznaczony został rozkład temperatury dla poszczególnych termoelementów

średnica zewnętrzna termoelementu $d_z$ [mm]	$r_1$ [mm]	$r_2$ [mm]	$r_3$ [mm]	$r_4$ [mm]	$\Delta r$ [mm]
Ø 7,0	0,0	1,16667	2,33333	3,5	1,16667
Ø 15,0	0,0	2,5	5,0	7,5	2,5
Ø 20,0	0,0	3,33333	6,66667	10,0	3,33333

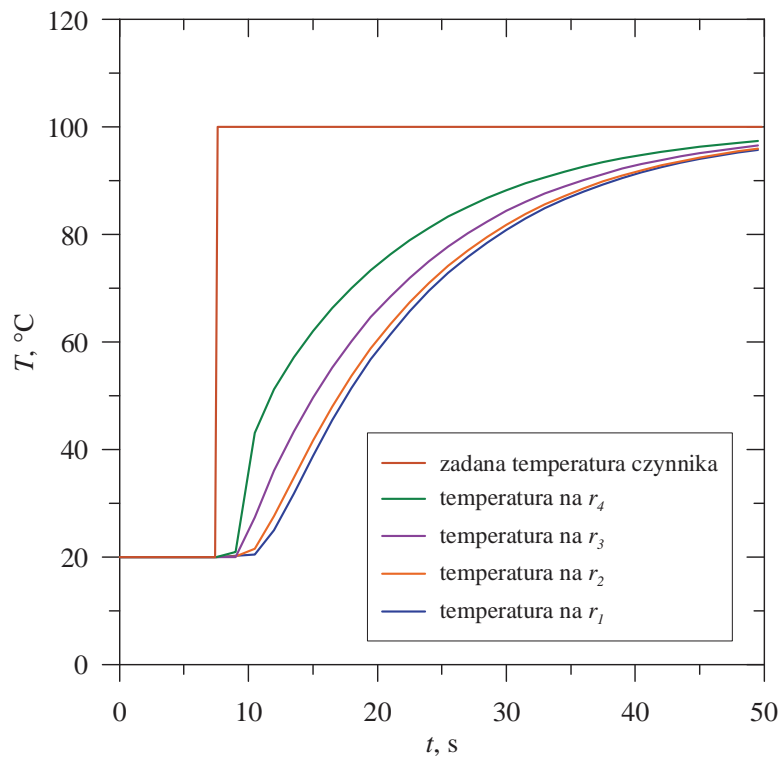
Do obliczeń zastosowano język programowania FORTRAN. Wyniki przedstawiono na rys. 6.7 ÷ 6.9. Rezultaty obliczeń pokazują z jak dużym opóźnieniem termoelementy w masywnych osłonach wskazują rzeczywistą temperaturę czynnika podczas jej gwałtownej zmiany.



Rys. 6.7. Odpowiedź termometru o średnicy zewnętrznej 7 mm na skok temperatury od 20 do 100°C



Rys. 6.8. Odpowiedź termometru o średnicy zewnętrznej 15 mm na skok temperatury od 20 do 100 $^{\circ}\text{C}$



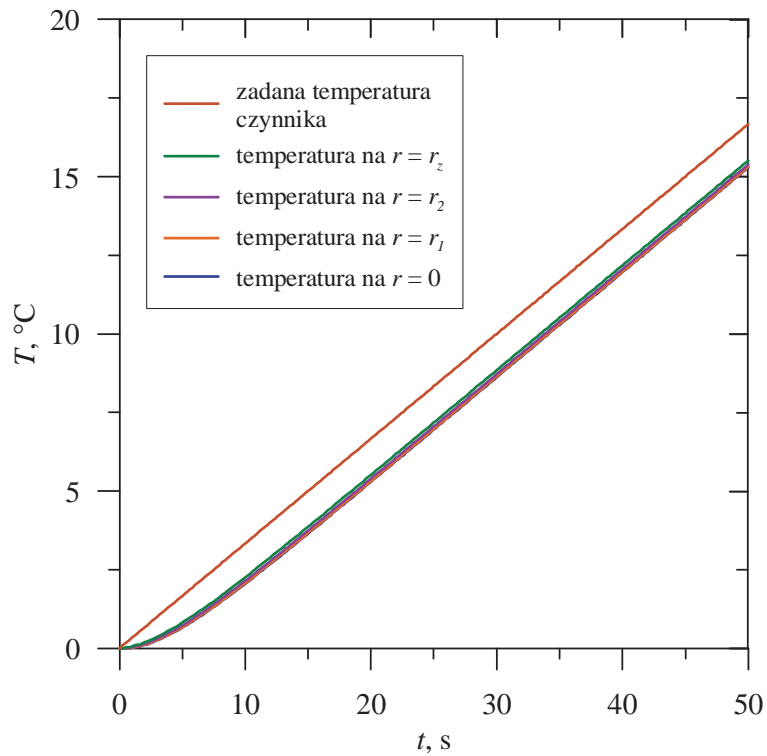
Rys. 6.9. Odpowiedź termometru o średnicy zewnętrznej 20 mm na skok temperatury od 20 do 100 $^{\circ}\text{C}$

### 6.2.1.2. Wyznaczanie nieustalonego rozkładu temperatury przy zmiennej w czasie temperaturze czynnika

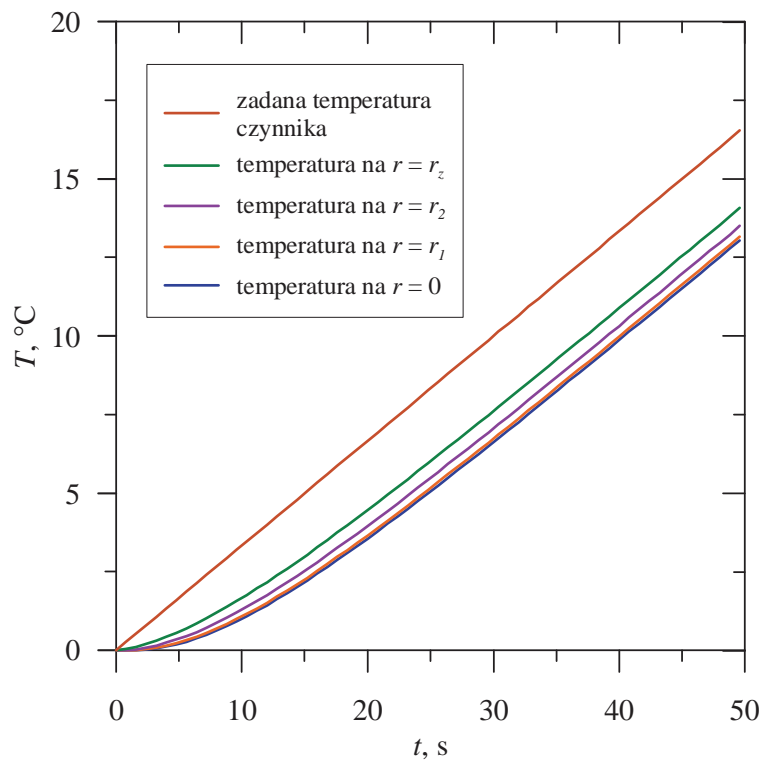
W przypadku liniowego wzrostu temperatury czynnika, rozkład temperatury wewnątrz cylindra wyznaczony został za pomocą całki Duhamela, określonej wzorem (6.7). Całkę Duhamela zastosowano przy założeniu równomiernego, niezależnego od położenia rozkładu temperatury początkowej  $T_0$  wewnątrz rozważanego elementu. Pole temperatury określono na podstawie wyznaczonej z równania (6.29) funkcji  $u(r,t)$ , która jest odpowiedzią na dowolnym promieniu  $r$  na skok jednostkowy temperatury powierzchni  $f(t)$  opisanej równaniem (6.8). Temperatura powierzchni  $f(t)$  została aproksymowana jak na rys. 6.2, a następnie korzystając z zasady superpozycji określono rozkład temperatury za pomocą równania (6.9).

Przeprowadzono obliczenia w których założono wzrost liniowy temperatury czynnika roboczego od 0 do 170°C przy prędkości narastania temperatury  $v_T = 0,33333$  1/K. Przyjęto, że czynnik omywa poprzecznie termoelementy w osłonach o średnicach 7, 15 i 20 mm. Wyznaczono rozkład temperatury na czterech promieniach każdego termoelementu. Wartości promieni zostały zestawione w tab. 6.1. Na materiał osłon czujników temperatury przyjęto stal austenityczną 1.4541, wartości własności fizycznych wynoszą:  $\rho = 7,9 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\lambda = 18$  W/(m·K),  $a = 4,55696 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s,  $c = 500$  J/(kg·K). Przyjęto współczynnik wnikania ciepła  $\alpha = 2000$  W/(m<sup>2</sup>K). Do obliczeń zastosowano język programowania FORTRAN. Wyniki przedstawiono na rys. 6.10 ÷ 6.12.

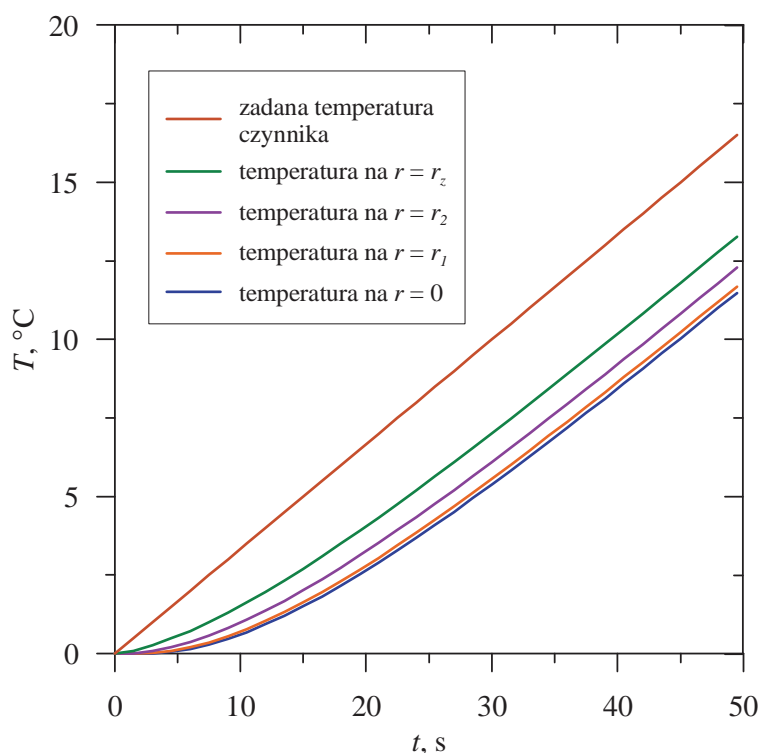




Rys. 6.10. Odpowiedź termometru o średnicy zewnętrznej 7 mm na wzrost liniowy temperatury od 0 do 170°C



Rys. 6.11. Odpowiedź termometru o średnicy zewnętrznej 15 mm na wzrost liniowy temperatury od 0 do 170°C



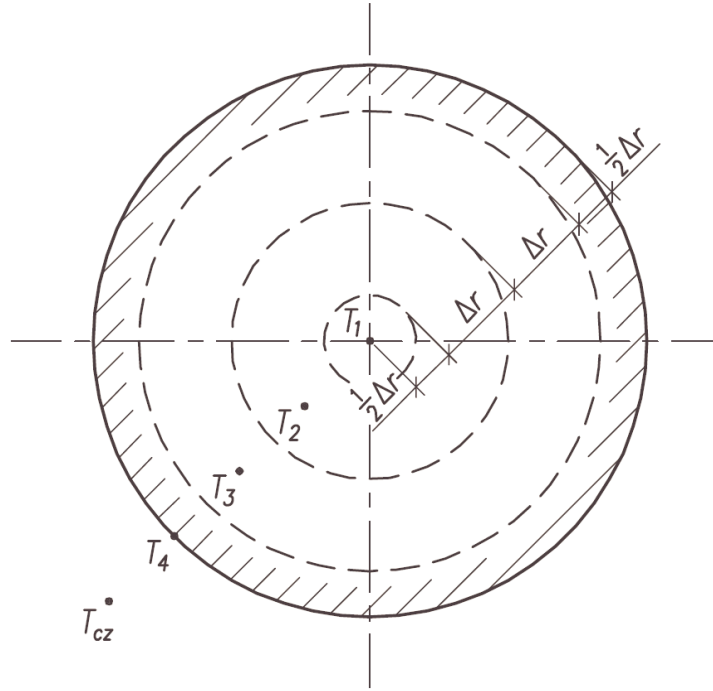
Rys. 6.12. Odpowiedź termometru o średnicy zewnętrznej 20 mm na wzrost liniowy temperatury od 0 do 170°C

### 6.2.2. Obliczenia temperatury czynnika na zewnątrz osłony termopary metodą kroczącą

Poszukiwano rozkładu temperatury w obszarze  $0 \leq r \leq r_z$  oraz temperatury czynnika omywającego cylinder.

Równanie przewodzenia ciepła dla walca ma postać (6.10), przy czym  $0 \leq r \leq r_z$ . Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego wykonano tak jak w rozdz. 6.1.2, za pomocą metody objętości skończonej i przy założeniu, że własności fizyczne ciała:  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  są funkcjami temperatury. Równanie bilansu ciepła dla objętości kontrolnej przedstawia równanie (6.11).

Analizowana osłona termoelementu podzielona została na 4 objętości skończone (rys. 6.13). Założono, że wewnątrz cylindra nie ma otworu. Bilans ciepła dla poszczególnych objętości kontrolnych został wykonany w cylindrycznym układzie współrzędnych. Mierzoną temperaturą była temperatura w punkcie  $r = 0$  (w osi cylindra).



Rys. 6.13. Podział przekroju poprzecznego cylindra na objętości skończone

Równanie dla pierwszej objętości skończonej ma postać:

$$\frac{\pi(\Delta r)^2}{4} c(T_1) \rho(T_1) \frac{dT_1}{dt} = \pi \Delta r \frac{\lambda(T_1) + \lambda(T_2)}{2} \frac{T_2 - T_1}{\Delta r}. \quad (6.32)$$

Dla kolejnych objętości, równania bilansu ciepła ( $i = 2, 3$ ) przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \pi \left[ \left( (i-1)\Delta r + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( (i-1)\Delta r - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] c(T_i) \rho(T_i) \frac{dT_i}{dt} = \\ = 2\pi \left( (i-1)\Delta r + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\lambda(T_{i+1}) + \lambda(T_i)}{2} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} + \\ + 2\pi \left( (i-1)\Delta r - \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\lambda(T_{i-1}) + \lambda(T_i)}{2} \frac{T_{i-1} - T_i}{\Delta r}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Równanie dla objętości kontrolnej nr 4 ma postać:

$$\begin{aligned} \pi \left[ (4\Delta r)^2 - \left( 4\Delta r - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] c(T_4) \rho(T_4) \frac{dT_4}{dt} = \\ = 2\pi \cdot \left( 4\Delta r - \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \frac{\lambda(T_3) + \lambda(T_4)}{2} \cdot \frac{T_3 - T_4}{\Delta r} + \alpha \cdot 2\pi \cdot 4\Delta r (T_5 - T_4), \end{aligned} \quad (6.34)$$

gdzie:

$$T_5 = T_{cz}, \quad \Delta r = \frac{r_z}{4}.$$

Po dokonaniu uproszczeń i przekształceniu powyższych równań, otrzymano dla poszczególnych objętości skończonych kolejno, począwszy od pierwszej:

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} \frac{(\Delta r)^2}{\lambda(T_1) + \lambda(T_2)} c(T_1) \rho(T_1) \frac{dT_1}{dt}, \quad (6.35)$$

$$T_3 = T_2 - \frac{1}{3} \frac{\lambda(T_1) + \lambda(T_2)}{\lambda(T_3) + \lambda(T_2)} (T_1 - T_2) + \frac{4}{3} (\Delta r)^2 \frac{c(T_2) \rho(T_2)}{\lambda(T_3) + \lambda(T_2)} \frac{dT_2}{dt}, \quad (6.36)$$

$$T_4 = T_3 - \frac{3}{5} \frac{\lambda(T_2) + \lambda(T_3)}{\lambda(T_4) + \lambda(T_3)} (T_2 - T_3) + \frac{8}{5} (\Delta r)^2 \frac{c(T_3) \rho(T_3)}{\lambda(T_4) + \lambda(T_3)} \frac{dT_3}{dt}, \quad (6.37)$$

$$T_5 = T_{cz} = T_4 - \frac{7}{16} \frac{\lambda(T_3) + \lambda(T_4)}{\alpha \cdot \Delta r} (T_3 - T_4) + \frac{15}{32} \Delta r \frac{c(T_4) \rho(T_4)}{\alpha} \frac{dT_4}{dt}. \quad (6.38)$$

Podstawiając do pierwszego równania za  $T_1$  temperaturę zmierzoną termoparą, a następnie podstawiając kolejno obliczone temperatury do następnych równań, otrzymano w rezultacie temperaturę czynnika  $T_{cz}$ .

Wartości współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda(T_i)$  dla poszczególnych temperatur  $T_i$  (gdzie  $i = 2, 3, 4$ ) nie są znane. W celu uzyskania temperatury  $T_i$  wykonane zostało  $n$  iteracji. Dla pierwszej z nich w poszczególnych węzłach przyjęto, że:  $\lambda(T_i^{(0)}) = \lambda(T_{i-1})$ . Proces iteracji trwał dopóki nie został spełniony warunek (6.19), gdzie tolerancja  $\varepsilon \approx 0,00001$  K.

Na dokładność otrzymanego rozwiązania odwrotnego w dużym stopniu ma wpływ poprawność obliczenia pochodnych  $dT_i/dt$ . W przeprowadzanych obliczeniach, w celu wygładzenia odczytywanych danych pomiarowych, wykorzystano filtr cyfrowy 9-punktowy (5.1-5.2).

Kolejność rozwiązywania zagadnienia odwrotnego przedstawia się następująco: najpierw za pomocą filtra cyfrowego zostały obliczone wygładzone wartości  $T_1(t)$  i  $dT_1/dt$ , następnie został obliczony przebieg temperatury  $T_2(t)$ , a po wygładzeniu jego oraz jego pochodnej  $dT_2/dt$  obliczano przebieg  $T_3(t)$ ; czynność tę powtarzano, aż do wyznaczenia przebiegu  $T_5(t) = T_{cz}(t)$ .

Obliczenia wykorzystujące metodę odwrotną kroczącą przeprowadzono dla takich samych zmian temperatury jak w podrozdziale 6.1, czyli dla skoku temperatury od 20 do 100 °C i wzrostu liniowego od 0 do 170 °C. Zastosowano język programowania FORTRAN. Założono, że czynnik omywa poprzecznie termoelementy, na których zostały przeprowadzone w dalszej kolejności badania doświadczalne, o średnicach: 7, 15 i 20 mm.

Program wykorzystał dane wygenerowane za pomocą programu napisanego również w języku programowania FORTRAN posługującego się metodą analityczną.

Wszystkie osłony czujników temperatury wykonane są ze stali austenitycznej 1.4541. Aby umożliwić weryfikację obliczeń wykorzystujących metodę odwrotną kroczącą z obliczeniami wykonanymi metodą analityczną założono stałe wartości własności fizycznych stali:  $\rho = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\lambda = 18 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,  $a = 4,55696 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $c = 500 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ . W obliczeniach przyjęto współczynnik wnikania ciepła  $\alpha = 2000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ .

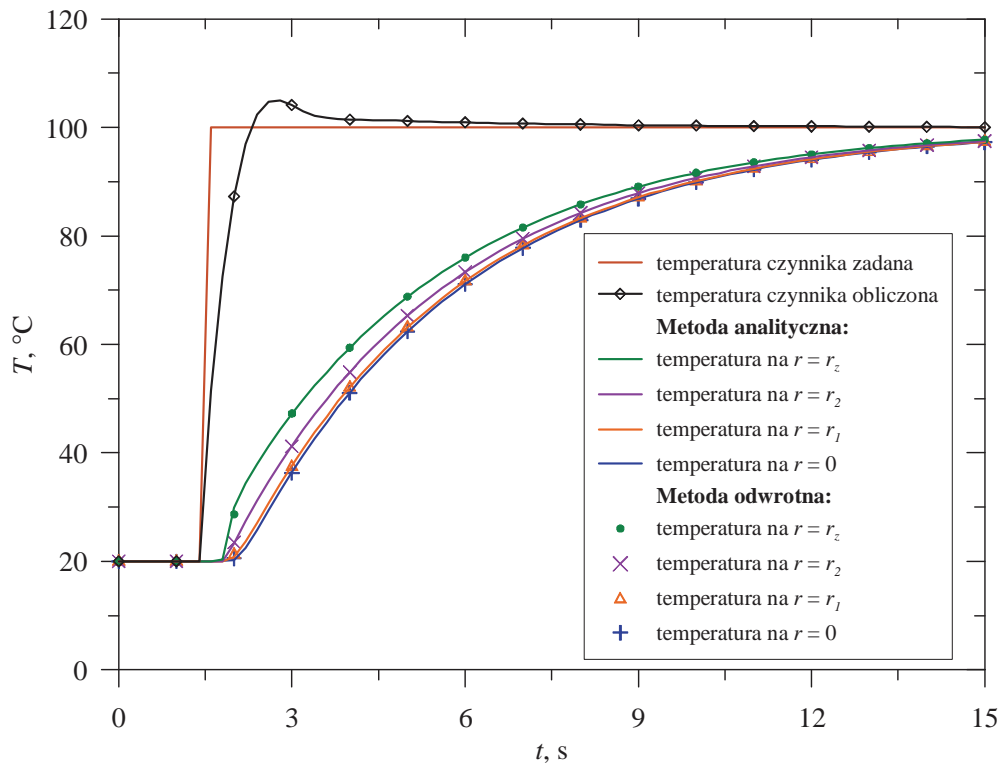
Skok czasowy został wyznaczony z stosowanej w praktycznych obliczeniach zależności [17]:  $\Delta t \geq 0,05 \cdot r_z^2 / a$ , wartości przedstawiono w tab. 6.2.

Tabela 6.2. Skok czasowy wyznaczony dla badanych termometrów

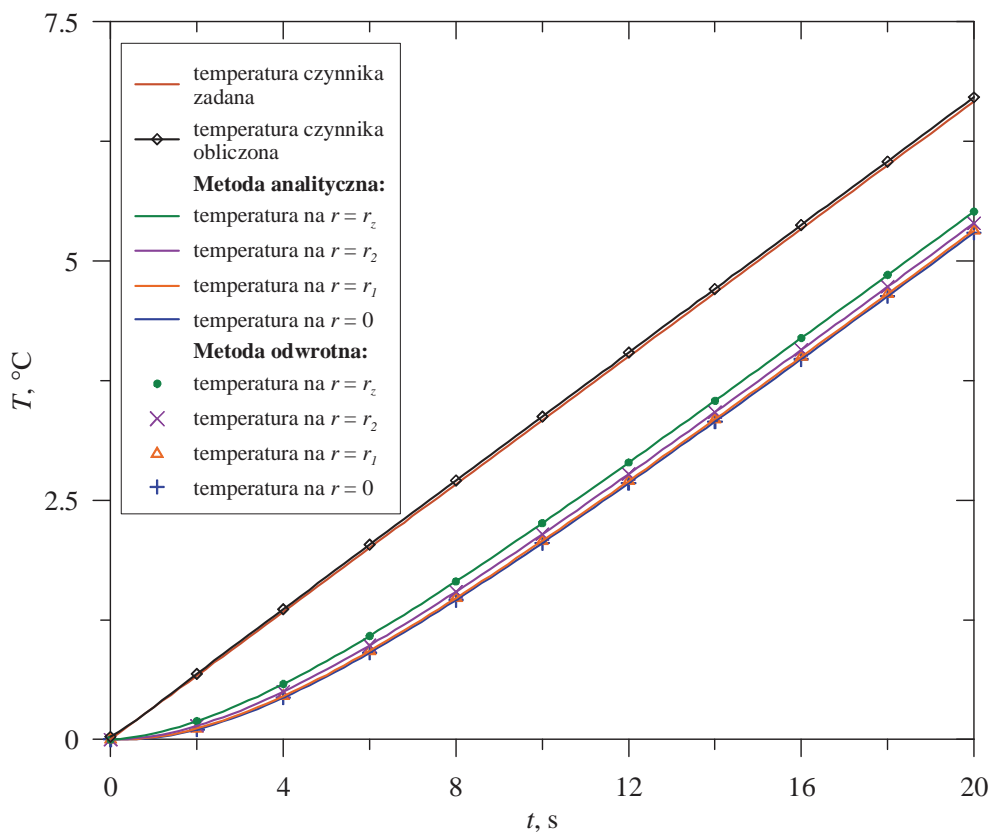
średnica zewnętrzna termometru $d_z$ [mm]	skok czasowy $\Delta t$ [s]
Ø 7,0	0,2
Ø 15,0	0,8
Ø 20,0	1,5

Porównane zostały przebiegi temperatury w czterech węzłach (tab. 6.1) wygenerowane metodą analityczną do przebiegów temperatury wyznaczonych w tych samych węzłach metodą odwrotną kroczącą. Przedstawiono również temperaturę czynnika wyznaczoną jako rozwiązanie rozważanego zagadnienia odwrotnego. Wyniki zaprezentowano na rys. 6.14 ÷ 6.19.

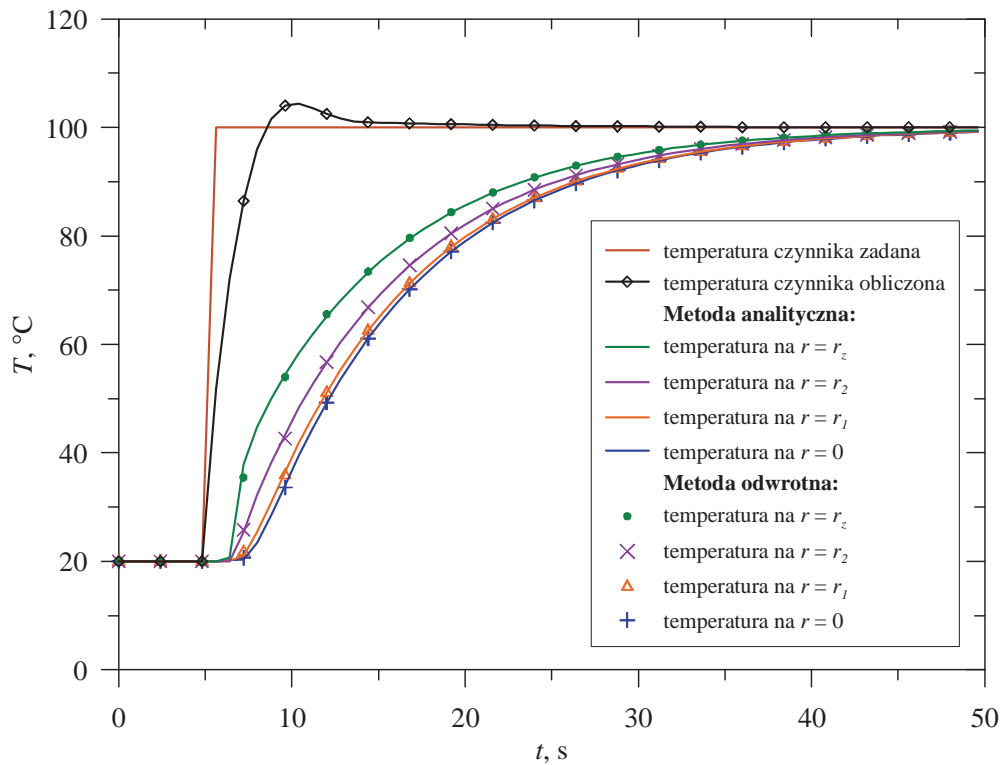
Porównanie pokazuje dokładność metody odwrotnej kroczącej w określaniu temperatury czynnika na podstawie pomiarów wykonanych przez termoelement w masywnej osłonie. Otrzymano bardzo dobre wyniki - bardzo szybko uzyskana zostaje rzeczywista temperatura czynnika, najszybciej w przypadku najcieńszego termometru. Metoda ta może zostać zastosowana w praktyce, pewną trudność stanowi jednak określenie prawidłowej wartości współczynnika wnikania ciepła  $\alpha$  na powierzchni zewnętrznej cylindrycznej osłony. W dalszej części pracy przedstawione zostanie rozwiązanie tego problemu.



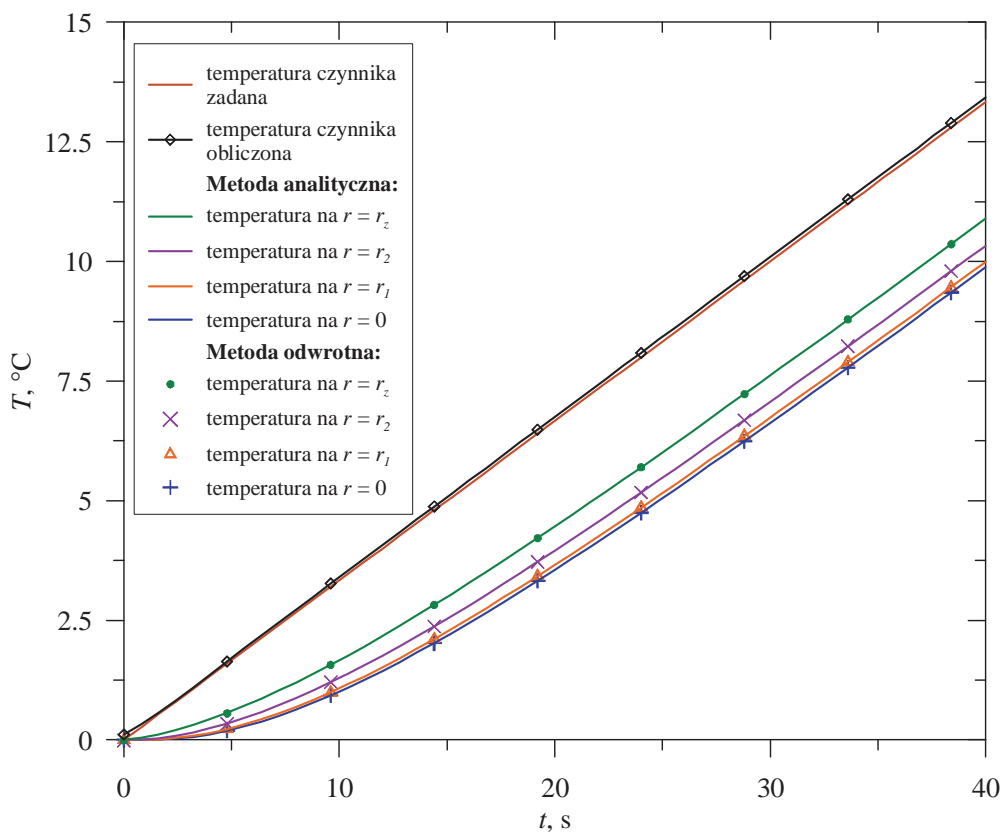
Rys. 6.14. Wyniki obliczeń dla skoku temperatury czynnika od 20 do 100°C dla termoelementu o średnicy zewnętrznej 7 mm



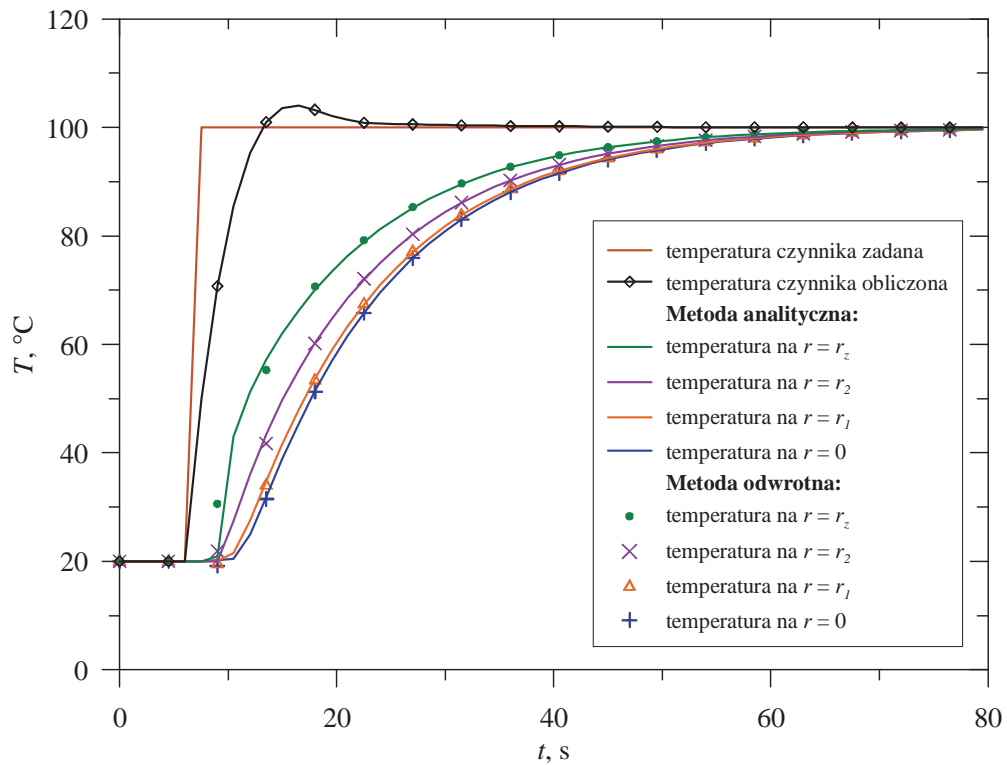
Rys. 6.15. Wyniki obliczeń dla wzrostu liniowego temperatury czynnika od 0 do 170°C dla termoelementu o średnicy zewnętrznej 7 mm



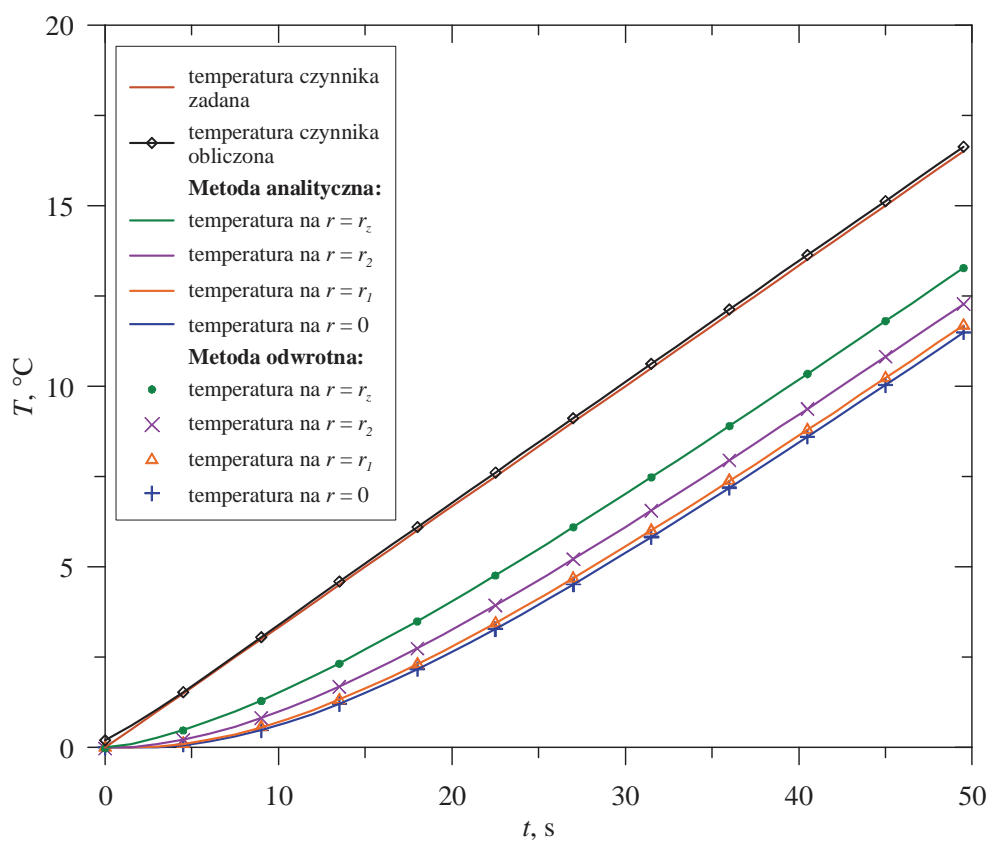
Rys. 6.16. Wyniki obliczeń dla skoku temperatury czynnika od 20 do 100°C dla termoelementu o średnicy zewnętrznej 15 mm



Rys. 6.17. Wyniki obliczeń dla wzrostu liniowego temperatury czynnika od 0 do 170°C dla termoelementu o średnicy zewnętrznej 15 mm



Rys. 6.18. Wyniki obliczeń dla skoku temperatury czynnika od 20 do 100°C dla termoelementu o średnicy zewnętrznej 20 mm



Rys. 6.19. Wyniki obliczeń dla wzrostu liniowego temperatury czynnika od 0 do 170°C dla termoelementu o średnicy zewnętrznej 20 mm



## 7. Korelacje do obliczania współczynników wnikania ciepła

Aby opisać zjawisko wnikania ciepła wykorzystano teorię podobieństwa zjawisk, przy czym jej warunkiem koniecznym jest równość pewnych bezwymiarowych liczb kryterialnych [18]. Metodą pozwalającą na znalezienie modułów podobieństwa jest analiza wymiarowa.

Współczynnik wnikania ciepła występuje w liczbie podobieństwa Nusselta

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda}. \quad (7.1)$$

Liczbę Nusselta w ogólnym przypadku można zapisać jako iloczyn dwóch czynników. Pierwszym z nich jest funkcja liczb podobieństwa:

– Reynoldsa

$$\text{Re} = \frac{wl}{\nu}, \quad (7.2)$$

– Prandtla

$$\text{Pr} = \frac{c_p \rho \nu}{\lambda} = \frac{\nu}{a}, \quad (7.3)$$

– Grashofa

$$\text{Gr} = \frac{gl^3}{\nu^2} \beta \Delta T \quad (7.4)$$

oraz bezwymiarowej liczby podobieństwa geometrycznego (np. stosunek długości walca do jego średnicy), natomiast drugi uwzględnia zmienność własności termofizycznych płynu [14]

$$\text{Nu} = f\left(\text{Re}, \text{Pr}, \text{Gr}, \frac{l}{d}\right) F\left(\frac{\text{Pr}_p}{\text{Pr}_s}\right). \quad (7.5)$$

W przypadku konwekcji wymuszonej liczba Nusselta nie zależy od liczby Grashofa (wpływ pola grawitacyjnego jest pomijalny), a dla konwekcji swobodnej można pominąć zależność od liczby Reynoldsa.

## 7.1. Rurociąg cylindryczny

W przypadku przepływu czynnika przez rurociąg o przekroju kołowym wymiarem charakterystycznym jest średnica wewnętrzna rury.

Sieder i Tate (1936r.) określili korelację dla przepływu laminarnego w obszarze na wlocie do rurociągu [19]:

$$\overline{\text{Nu}} = 1,86 \left( \frac{\text{Re Pr}}{L/d_w} \right)^{1/3} \left( \frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \quad (7.6)$$

i obowiązuje ona dla następujących warunków:

$$\frac{L}{d_w} < \frac{\text{Re Pr}}{8} \left( \frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,42}; \quad 0,48 < \text{Pr} < 16700; \quad 0,0044 < \frac{\eta}{\eta_s} < 9,75.$$

Kreska nad liczbą Nusselta wskazuje, że jest sformułowana dla średniej wartości współczynnika przejmowania ciepła w części wlotowej rurociągu. Własności płynu są wyznaczone dla średniej arytmetycznej temperatur na wlocie i wylocie.

Dla przepływu turbulentnego Gnieliński zaproponował korelację (1976, 1990r.) [19]:

$$\text{Nu} = \frac{(\xi/8)(\text{Re}-1000)\text{Pr}}{1+12,7(\xi/8)^{1/2}(\text{Pr}^{2/3}-1)} \left[ 1 + \left( \frac{d_w}{L} \right)^{2/3} \right], \quad (7.7)$$

gdzie

$$\xi = [0,79 \ln(\text{Re}) - 1,64]^{-2} \quad (7.8)$$

lub

$$\xi = \frac{8\tau_w}{\rho w^2}. \quad (7.9)$$

Wzór (7.7) jest właściwy dla:  $0,6 < \text{Pr} < 2000$ ;  $2300 < \text{Re} < 10^6$  i  $0 < d_w/L < 1$ . Własności termofizyczne wyznaczone są dla średniej temperatury płynu. Aby uwzględnić zmianę własności termofizycznych płynu na skutek zmiany temperatury, liczbę Nusselta mnoży się przez poprawkę  $(T_b/T_s)^{0,45}$  dla gazów, a dla cieczy przez  $(\text{Pr}/\text{Pr}_s)^{0,11}$ .

Prostszą w zastosowaniu korelacją dla  $0,7 \leq \text{Pr} \leq 160$ ,  $\text{Re} > 10\,000$  i  $d_w/L > 10$  jest wzór Dittusa-Boeltera (1930r.) [19]

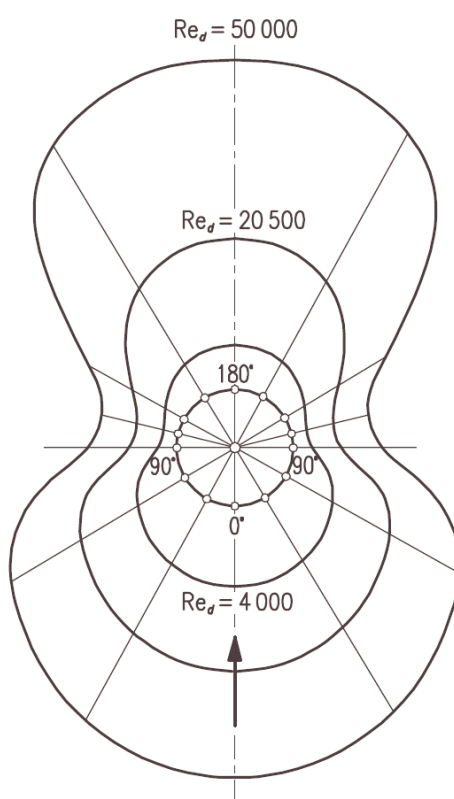
$$\text{Nu} = 0,023 \text{Re}^{4/5} \text{Pr}^n, \quad (7.10)$$

gdzie  $n = 0,4$  dla nagrzewania ( $T_s > T_b$ ), a  $n = 3$  dla chłodzenia ( $T_s < T_b$ ). Własności termofizyczne wyznaczone są dla średniej wartości temperatury płynu.

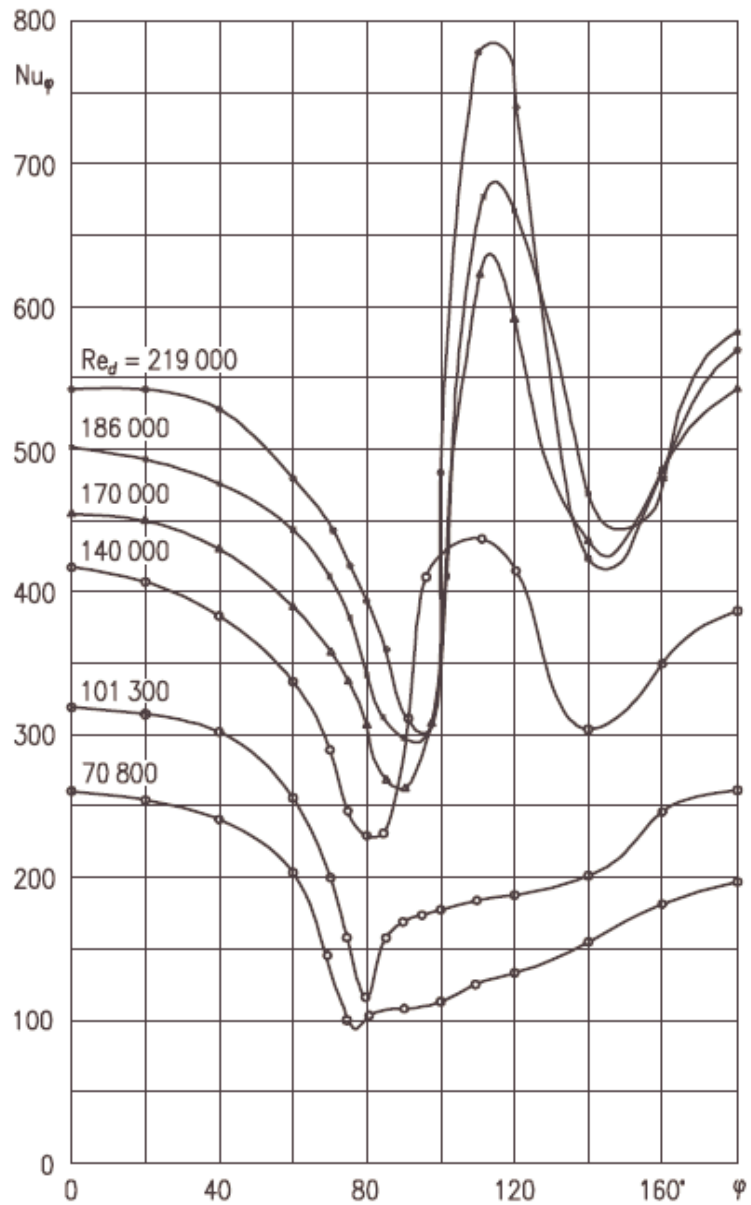
## 7.2. Cylinder opływany poprzecznie

W przypadku przepływu prostopadłego do elementu cylindrycznego wprowadzone zostały wielkości zastępcze. Pojawiają się one zawsze wtedy, gdy przekrój przepływu jest nie kołowy. Dla omawianego tu przepływu wymiarem zastępczym, potrzebnym do obliczenia liczby Reynoldsa  $Re_d$ , jest średnica omywanego cylindra.

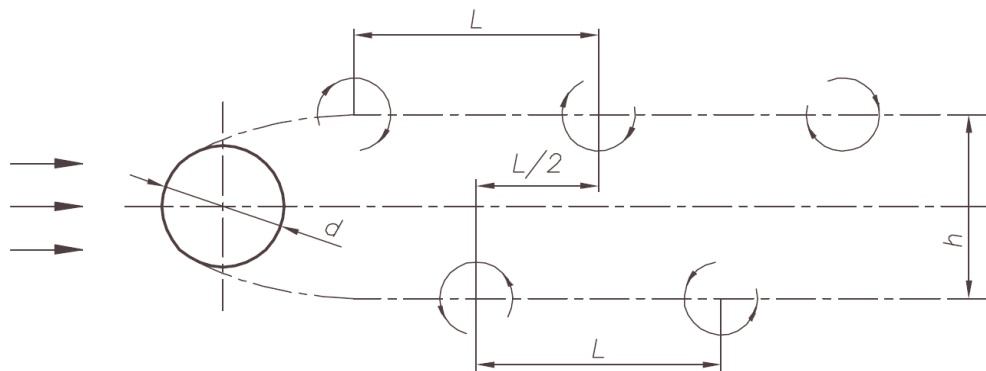
Wnikanie ciepła podczas prostopadłego omywania elementów cylindrycznych jest przypadkiem skomplikowanym. Podczas przepływu czynnika roboczego zmienia się jego pole przekroju, a co za tym idzie również jego prędkość. Współczynnik wnikania  $\alpha$  zmienia się w związku z tym na całym obwodzie elementu, co zostało zobrazowane na rys. 7.1 i 7.2. Od strony frontowej cylindra (względem kierunku przepływu) następuje uderzenie strugi czynnika o rozważany element, natomiast po przeciwnej stronie pojawiają się wiry Karmana (rys. 7.3). Obserwacje Lohrisch'a wykazały [18], że w przypadku małych prędkości czynnika roboczego współczynnik wnikania ciepła osiąga maksymalną wartość w punkcie zderzenia strugi z elementem cylindrycznym, natomiast w przypadku dużych prędkości – po przeciwnej stronie. Minimalne wartości osiąga w miejscach, gdzie struga przepływa równoległe do ścianki elementu.



Rys. 7.1. Rozkład współczynnika wnikania ciepła  $\alpha$  na obwodzie elementu cylindrycznego w zależności od prędkości płynu przy przepływie prostopadłym [18]



Rys. 7.2. Wartość liczby Nusselta wokół elementu omywanego poprzecznie o kształcie cylindrycznym [20]



Rys. 7.3. Mechanizm powstawania wirów Karmana [21]

Wzory opisujące wnikanie ciepła, które można znaleźć w literaturze, odnoszą się w większości przypadków do wartości średnich współczynnika  $\alpha$ .

Jednym z przykładów wzoru na średnią wartość liczby Nusselta dla elementu o przekroju poprzecznym koła, omywanego prostopadle przez gaz lub ciecz jest korelacja wg Holmana (1981r.) [22]:

$$\text{Nu}_d = C \text{Re}_d^n \text{Pr}^{1/3}, \quad (7.11)$$

gdzie wartości stałych  $C$  i  $n$  zależą od przedziału, w którym znajduje się liczba Reynoldsa (tab. 7.1). Własności termofizyczne czynnika przyjmuje się dla temperatury warstwy przyściennej.

Tabela 7.1. Wartości stałych  $C$  i  $n$  dla cylindra omywanego poprzecznie w zależności od liczby Reynoldsa

$\text{Re}_d$	$C$	$n$
0,4 – 4	0,989	0,330
4 – 40	0,911	0,385
40 – 4000	0,683	0,466
4000 – 40 000	0,193	0,618
40 000 – 400 000	0,0266	0,805

Korelacja zaproponowana przez Churchilla i Bernsteina (1977r.) dla omywanego poprzecznie cylindra [19], gdy  $\text{Re}_d \text{Pr} > 0,2$  oraz dla

–  $\text{Re}_d > 400\,000$ :

$$\text{Nu}_d = 0,3 + \frac{0,62 \text{Re}_d^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0,4/\text{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\text{Re}_d}{282\,000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}, \quad (7.12)$$

–  $10\,000 < \text{Re}_d < 400\,000$ :

$$\text{Nu}_d = 0,3 + \frac{0,62 \text{Re}_d^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0,4/\text{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\text{Re}_d}{282\,000}\right)^{1/2}\right], \quad (7.13)$$

–  $\text{Re}_d < 10\,000$ :

$$\text{Nu}_d = 0,3 + \frac{0,62 \text{Re}_d^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0,4/\text{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}}. \quad (7.14)$$

Własności fizyczne czynnika przyjmuje się dla średniej arytmetycznej temperatur czynnika i powierzchni cylindra.

Inną korelacją stosowaną w omawianym przypadku w przedziale liczby Prandtla:  $0,71 < Pr < 350$  jest wzór Żukauskasa [14]:

– dla  $5 < Re_d < 10\ 000$

$$Nu_d = 0,5 Re_d^{0,5} Pr_p^{0,38} \left( \frac{Pr_p}{Pr_s} \right)^{0,25}, \quad (7.15)$$

– dla  $10\ 000 < Re_d < 200\ 000$

$$Nu_d = 0,25 Re_d^{0,6} Pr_p^{0,38} \left( \frac{Pr_p}{Pr_s} \right)^{0,25}. \quad (7.16)$$

Natomiast wg Moffata dla opływu powierzchni walcowych w zakresie liczby Reynoldsa  $10^2 \leq Re \leq 10^4$  właściwe są korelacje [14]:

– przy opływie poprzecznym

$$Nu_d = (0,52 \pm 0,07) Pr^{0,31} Re_d^{0,5}, \quad (7.17)$$

– przy opływie podłużnym

$$Nu_d = (0,1 \pm 0,01) Pr^{0,31} Re_d^{0,674}. \quad (7.18)$$

Na rys. 7.4 przedstawiono porównanie omówionych korelacji: Holmana, Churchilla i Bernasteina, Żukauskasa i Moffata. Liczba Nusselta obliczona została dla powietrza, którego prędkość zmienia się w zakresie od 2 do 29 m/s. Powietrze omywa prostopadle element cylindryczny o średnicy zewnętrznej 20 mm. Przyjęto następujące własności fizyczne powietrza:  $\rho = 0,54 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$  i  $Pr = 0,71$ .

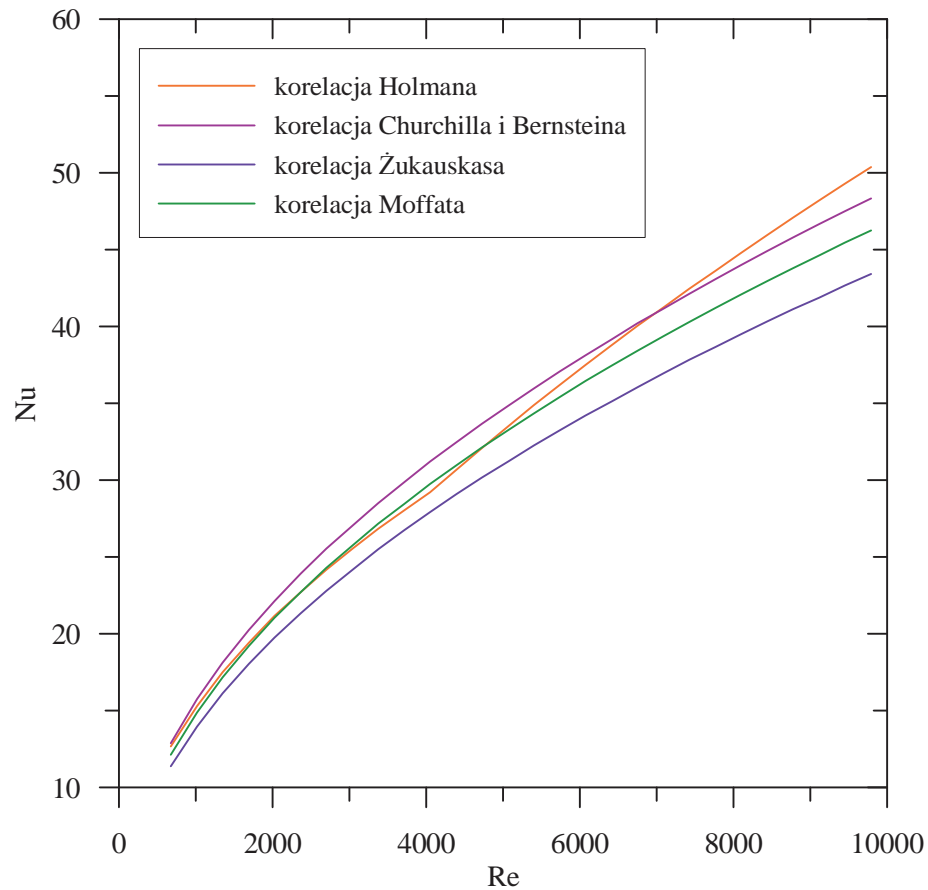
Dla elementów walcowych o bardzo małych średnicach (np. drutów) stosowana jest korelacja Collisa i Williamsa [23]

$$Nu_d = (A + B Re_d^n) \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{T_w + T_{air}}{T_{air}} \right) \right]^{0,17}. \quad (7.19)$$

Wzór (7.19) jest stosowany wyłącznie dla powietrza. Własności są wyznaczone w temperaturze filmu płynu lub temperaturze stagnacji. Wartości stałych  $A$ ,  $B$  i  $n$  są zależne od liczby Reynoldsa (tab. 7.2).

Tabela 7.2. Wartości stałych  $A$ ,  $B$  i  $n$  dla cylindra omywanego poprzecznie w zależności od liczby Reynoldsa

$Re_d$	$A$	$B$	$n$
0,02 – 44	0,24	0,56	0,45
44 – 140	0	0,48	0,51



Rys. 7.4. Porównanie korelacji na liczbę Nu

Bardziej ogólną zależnością stosowaną w przypadku bardzo cienkich drutów omywanych poprzecznie jest przedstawiona przez Kramersa [23]

$$\text{Nu}_d = 0,42 \text{Pr}^{0,26} + 0,57 \text{Pr}^{0,33} \text{Re}_d^{0,50} . \quad (7.20)$$

Korelacja (7.20) jest właściwa dla gazów i cieczy, gdy  $0,71 < \text{Pr} < 525$  i  $2 < \text{Nu} < 20$ . Własności są wyznaczane w temperaturze filmu płynu.



## 8. Eksperymentalne wyznaczenie stałej czasowej

W niniejszym rozdziale zostały wyznaczone, na podstawie przeprowadzonych doświadczeń, stałe czasowe termometrów płaszczowych o różnych średnicach zewnętrznych, w funkcji prędkości przepływającego powietrza. Zaprezentowano możliwość wykorzystania metody wyznaczania nieustalonej temperatury czynnika na podstawie przybliżenia termometru do obiektu inercyjnego I-go rzędu na rzeczywistych danych. Przeprowadzono również weryfikację zastosowanej metody wyznaczania nieustalonej temperatury, przez zmierzenie temperatury czynnika trzema różnymi termometrami i porównanie wyników obliczonych przebiegów temperatur czynnika.

### 8.1. Wyznaczenie stałych czasowych termoelementów płaszczowych w funkcji prędkości przepływającego powietrza

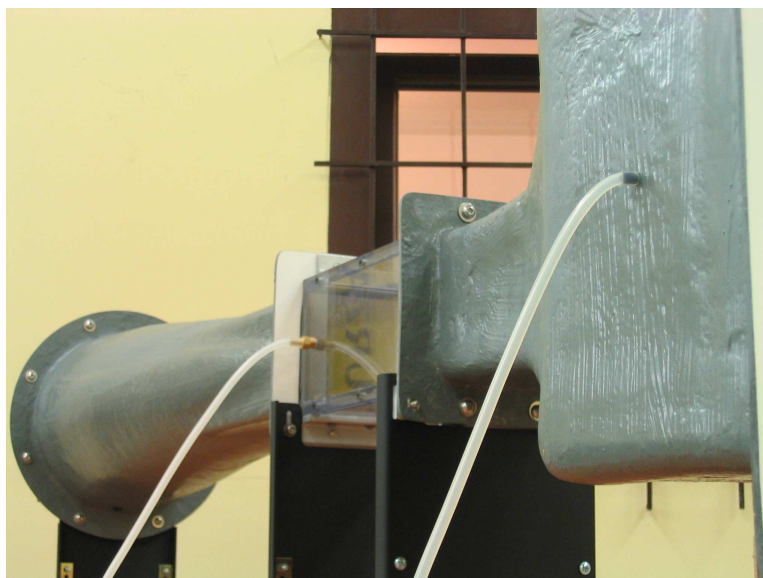
Do wyznaczenia stałych czasowych  $\tau$  termometrów o różnych średnicach zewnętrznych w funkcji prędkości powietrza w wykorzystany został otwarty tunel powietrzny WT 4401-S (rys. 8.1).



Rys. 8.1 Otwarty tunel powietrzny wykorzystany do określenia stałych czasowych termometrów

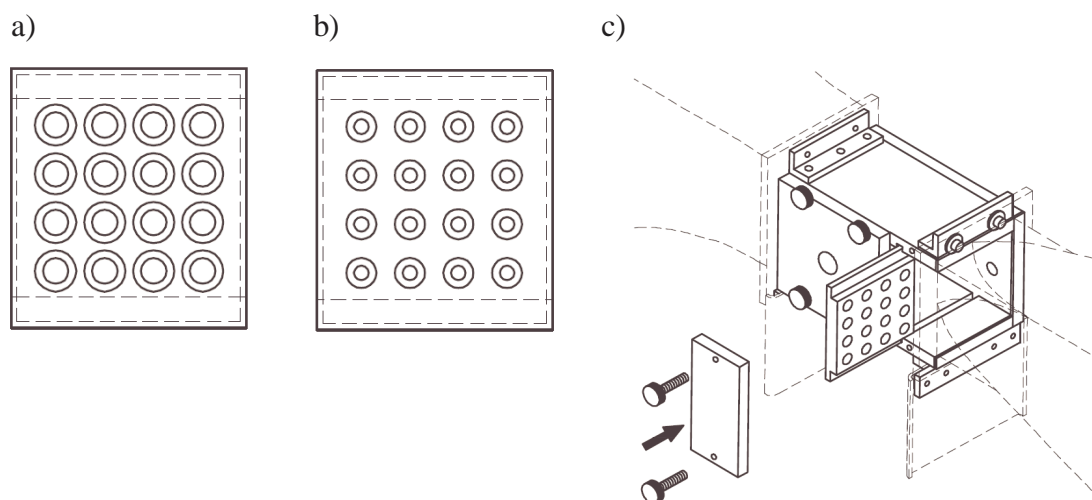


W przekroju o wymiarach 100 mm × 100 mm, w którym wykonywane są pomiary, strumień masy przepływającego powietrza jest jednorodny, a prędkość jest dokładnie znana. Wyznaczona jest na podstawie pomiaru różnicy ciśnień między dwoma punktami pomiarowymi znajdującymi się w przestrzeni roboczej i za nią (rys. 8.2).



Rys. 8.2 Rozmieszczenie punktów pomiarowych na tunelu aerodynamicznym, pomiędzy którymi wyznaczana jest różnica ciśnień

Tunel wyposażony jest w wentylator oraz układ sterowania pozwalający na regulację prędkości obrotowej jego silnika w zakresie 0-10 000 obr/min., a tym samym na regulację prędkości przepływającego powietrza przez przestrzeń roboczą. Aby osiągnąć małe prędkości przepływającego powietrza urządzenie wyposażone jest w płytki ograniczające A i B (rys. 8.3).



Rys. 8.3. Płytki ograniczające: a) płytka A, b) płytka B, c) sposób zamocowania płytek w tunelu powietrznym [24]

Zakresy prędkości przepływu powietrza w zależności od konfiguracji tunelu przedstawione zostały w tab. 8.1 [24].

Tabela 8.1. Zakresy prędkości powietrza osiągnięte w tunelu WT 4401-S

konfiguracja tunelu powietrznego	zakres prędkości	dokładność pomiaru
bez użycia płytek	5,08-38,1	1% odczytanej wartości
z użyciem płytki A	1,27-7,62	2% odczytanej wartości
z użyciem płytki B	0,127-1,52	2% odczytanej wartości

Rejestrator wchodzący w skład stanowiska, oprócz wskazywania różnicy ciśnień, pozwala również na monitorowanie ciśnienia atmosferycznego, temperatury otoczenia i wilgotności powietrza.

Podczas doświadczenia badany termoelement był nagrzewany przez termowentylator, a następnie chłodzony w przekroju pomiarowym tunelu powietrznego, przy znanej prędkości czynnika roboczego. Temperatura była rejestrowana dwoma typami układów akwizycji danych: ALMEMO 2890-9 firmy Ahlborn i UPM100 firmy Hottinger-Baldwin Messtechnik. Wykonano szereg pomiarów dla szerokiego zakresu prędkości powietrza. Dla każdej prędkości, na podstawie przebiegu temperatury zmierzonej czujnikiem, wyznaczono stałą czasową termometru.

Otrzymane wyniki dla termoelementu typu K o średnicy zewnętrznej płaszczka 1,5 mm zostały aproksymowane metodą najmniejszych kwadratów. Uzyskano następującą zależność:

$$\tau = \frac{1}{a + b\sqrt{w}}, \quad (8.3)$$

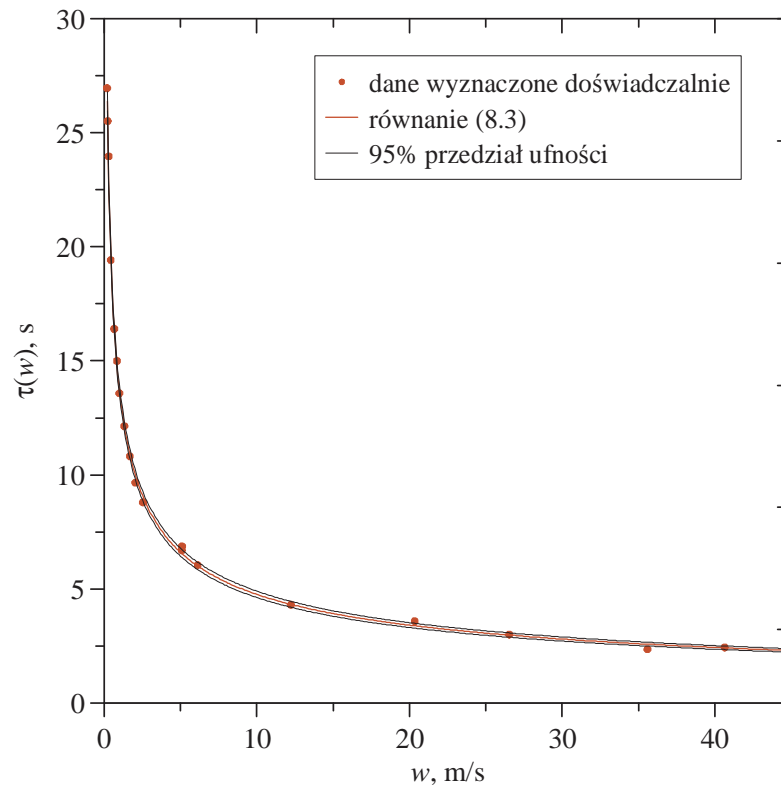
gdzie stała czasowa  $\tau$  wyrażona jest w s, a prędkość powietrza  $w$  w m/s.

Najlepsze oszacowania stałych  $a$  i  $b$  z 95% przedziałem ufności wynoszą:  $a = 0,040425 \pm 0,003301$  1/s i  $b = 0,056850 \pm 0,004479$  (m·s)<sup>-1/2</sup>.

Zależność stałej czasowej termoelementu od prędkości czynnika dla badanego termoelementu płaszczowego została pokazana na rys. 8.4.

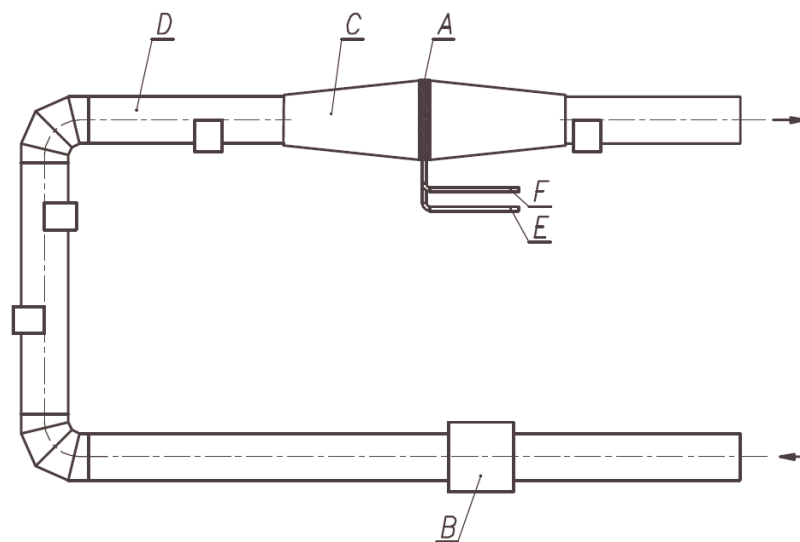
Stała czasowa termoelementu  $\tau = m_T c / (\alpha_T A_T)$  w dużym stopniu zależy od współczynnika wnikania ciepła  $\alpha_T$  na zewnętrznej powierzchni termometru, który z kolei jest funkcją prędkości powietrza. Aby pokazać możliwość zastosowania

przedstawionej metody na rzeczywistych danych, wyznaczono temperaturę czynnika  $T_{cz}(t)$  w tunelu aerodynamicznym.



Rys. 8.4. Stała czasowa  $\tau$  termoelementu płaszczyznowego o średnicy zewnętrznej 1,5 mm w funkcji prędkości przepływającego czynnika  $w$  z obszarem niepewności 95 %

Schemat stanowiska doświadczalnego, na którym zrealizowano pomiar temperatury przedstawia rys. 8.5.



Rys. 8.5. Schemat obiegu powietrznego [25]: A – wymiennik ciepła, B – wentylator, C – komora, D – kanał powietrzny, E – przewód odprowadzający wodę z chłodnicy, E – przewód doprowadzający wodę do chłodnicy

Tunel powietrzny zbudowany jest z kanału typu otwartego o przekroju kołowym, o średnicy zewnętrznej  $d_z = 315$  mm i grubości  $g = 1$  mm [25]. Powietrze w kanale (D) zasysane jest przez wentylator (B). Następnie czynnik roboczy przepływa przez umieszczony w komorze (C) krzyżowo-prądowy lamelowy wymiennik ciepła (A). Całość podwieszona jest do sufitu pomieszczenia laboratoryjnego.

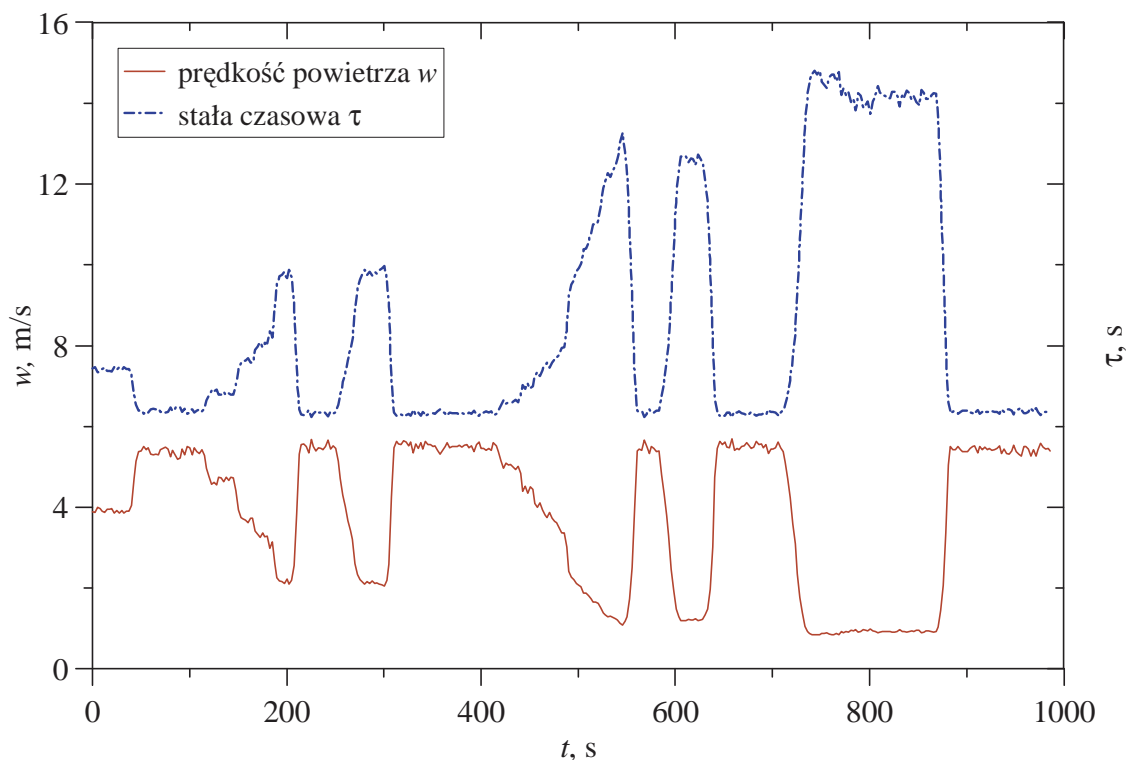
Pomiaru temperatury powietrza przepływającego przez tunel aerodynamiczny dokonano termoelementem płaszczyznowym typu K o średnicy zewnętrznej 1,5 mm, umieszczonym za wymiennikiem ciepła (A) (rys. 8.6). Wykonano również pomiary prędkości przepływającego powietrza za pomocą anemometru skrzydełkowego FV A915 S220. Dane pomiarowe zarejestrowane zostały za pomocą układu akwizycji danych ALMEMO 5990-0 firmy Ahlborn.



Rys. 8.6. Pomiar temperatury powietrza w tunelu aerodynamicznym

Przepływające powietrze było ogrzewane przez wymiennik ciepła z ożebrowanymi rurami. Prędkość powietrza  $w$  i temperatura termoelementu przedstawiono na rys. 8.7 i 8.8. Stała czasowa została określona na podstawie równania (8.3). Temperatura powietrza została określona równaniem (4.1). Pochodną  $dT/dt$  w równaniu (4.1) obliczono korzystając z równania (5.2) (filtr 9-punktowy) oraz (5.4) (metoda różnic centralnych). Obliczenia nieustalonej temperatury powietrza obiema metodami dały

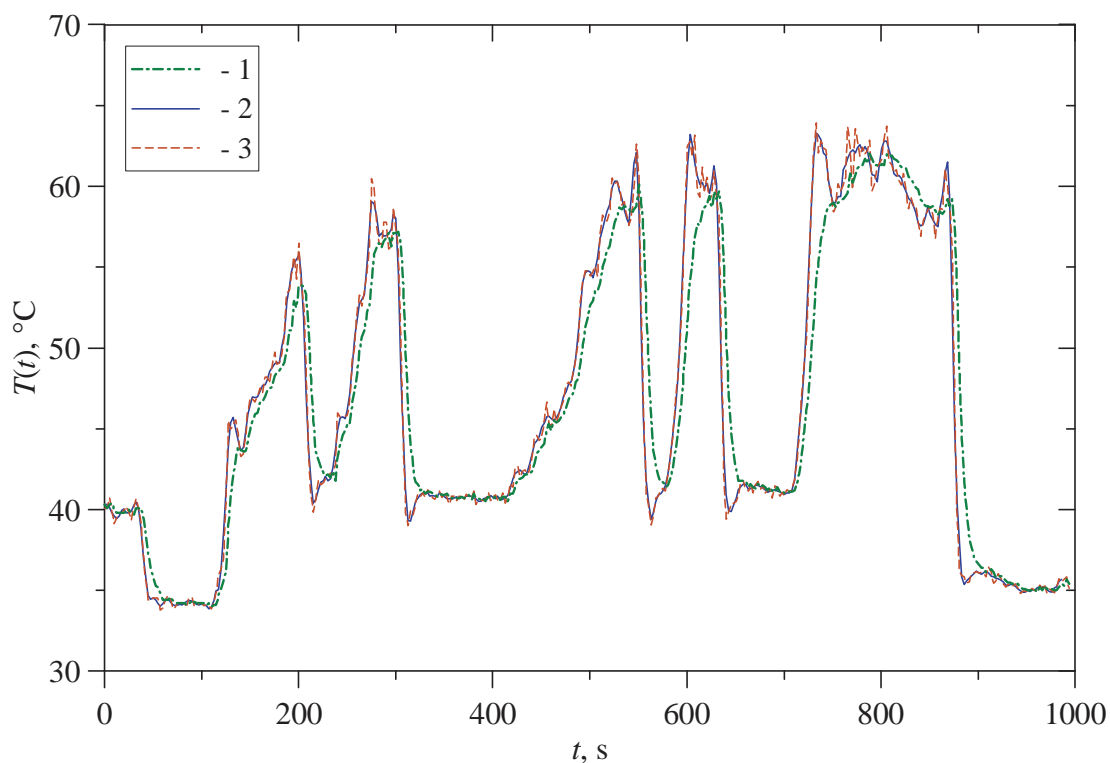
bardzo dobre wyniki (rys. 8.8). Pomiar temperatury  $T(t)$  nie był obarczony dużymi błędami – pochodna  $dT/dt$  w równaniu (4.1) mogła być obliczona na podstawie aproksymacji różnic centralnych w celu otrzymania wygładzonego przebiegu temperatury powietrza (rys. 8.8).



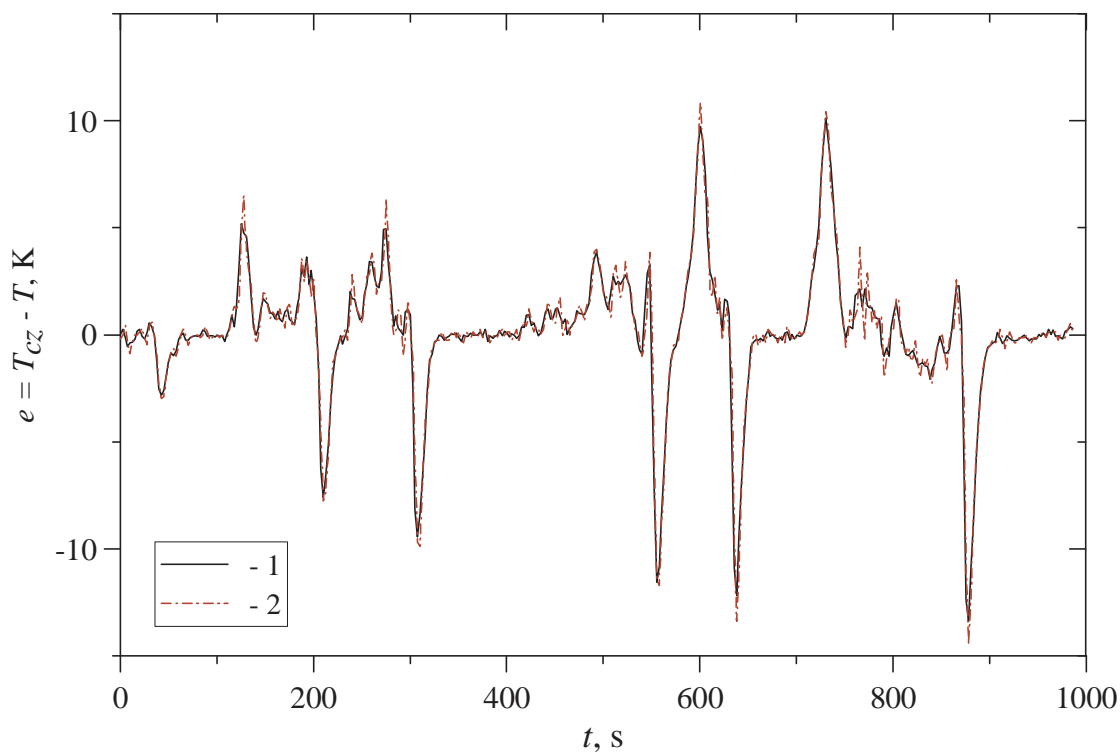
Rys. 8.7. Zależność prędkości czynnika  $w$  i stałej czasowej  $\tau$  od czasu  $t$

Można zauważyć, że obliczona temperatura powietrza  $T_{cz}(t)$  różni się znacząco od temperatury  $T(t)$  wskazanej przez termoelement (rys. 8.9), gdy stała czasowa ma dużą wartość.

Przedstawiona metoda wyznaczania temperatury czynnika na podstawie pomiarów nieustalanej temperatury za pomocą termoelementów nadaje się do zastosowań w trybie on-line. Dzięki wyznaczeniu stałych czasowych termometrów w funkcji prędkości czynnika, opisaną metodę można zastosować, gdy prędkość i temperatura przepływającego czynnika zmieniają się w czasie pomiaru.



Rys. 8.8. Temperatura termoelementu i powietrza: 1 – temperatura termoelementu wskazywana podczas pomiaru; 2 – temperatura powietrza  $T_{cz}(t)$ , pochodna  $dT/dt$  w równaniu (4.1) aproksymowana 9-punktowym filtrem; 3 – temperatura powietrza  $T_{cz}(t)$ , pochodna  $dT/dt$  w równaniu (4.1) aproksymowana ilorazem różnicowym centralnym



Rys. 8.9. Różnica temperatur  $e$  pomiędzy temperaturą  $T_{cz}$  a temperaturą wskazaną przez termoelement: 1 – pochodna  $dT/dt$  w równaniu (4.1) aproksymowana 9-punktowym filtrem; 2 – pochodna  $dT/dt$  w równaniu (4.1) aproksymowana ilorazem różnicowym centralnym



## 8.2. Wyniki pomiarów dla termoelementów płaszczyznych o różnych promieniach zewnętrznych

Dodatkowo przeprowadzono doświadczenie celem oszacowania stałych czasowych dla trzech różnych termometrów o średnicach zewnętrznych: 0,5; 1,0 i 3,0 mm. Stałe czasowe termometrów zostały przedstawione jako funkcje prędkości na podstawie pomiarów w otwartym tunelu powietrznym WT4401-S (rys. 8.1). Dane pomiarowe zostały aproksymowane metodą najmniejszej sumy kwadratów do równania (8.3).

Najlepsze oszacowania stałych  $a$  i  $b$  z 95% przedziałem ufności dla wszystkich przebadanych czujników (łącznie z omówionym wcześniej o  $d_z = 1,5$  mm), wynoszą:

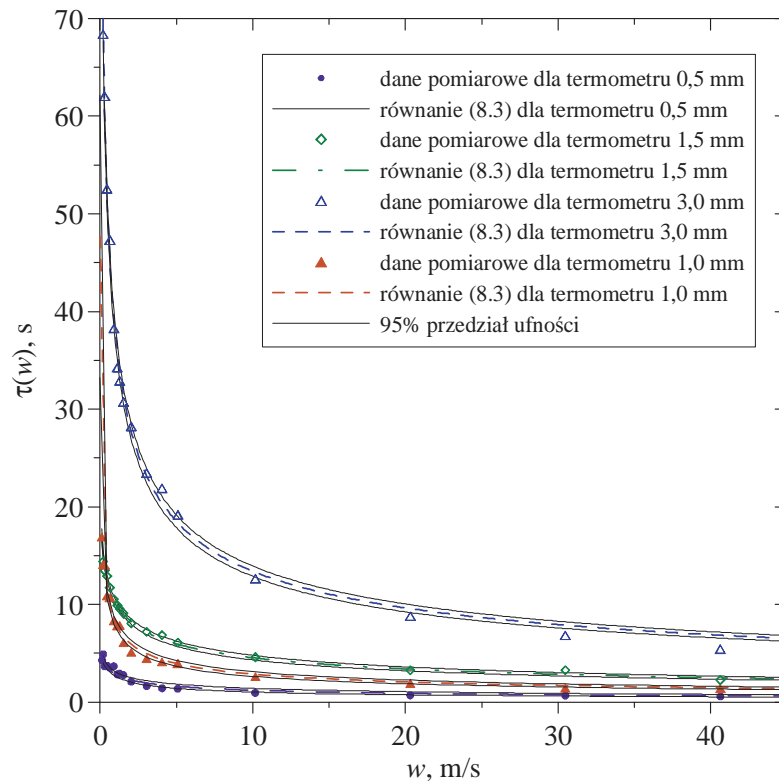
- dla termometru o średnicy 0,5 mm  
 $a = 0,004337 \pm 0,000622$  1/s i  $b = 0,022239 \pm 0,001103$  (m·s)<sup>-1/2</sup>,
- dla termometru o średnicy 1,0 mm  
 $a = 0,020974 \pm 0,006372$  1/s i  $b = 0,103870 \pm 0,011240$  (m·s)<sup>-1/2</sup>,
- dla termometru o średnicy 1,5 mm  
 $a = 0,040425 \pm 0,003301$  1/s i  $b = 0,056850 \pm 0,004479$  (m·s)<sup>-1/2</sup>,
- dla termometru o średnicy 3,0 mm  
 $a = 0,128220 \pm 0,035716$  1/s i  $b = 0,220641 \pm 0,051122$  (m·s)<sup>-1/2</sup>.

Przebiegi stałych czasowych termoelementów płaszczyznych w funkcji prędkości przepływu powietrza przedstawiono na rys. 8.10.

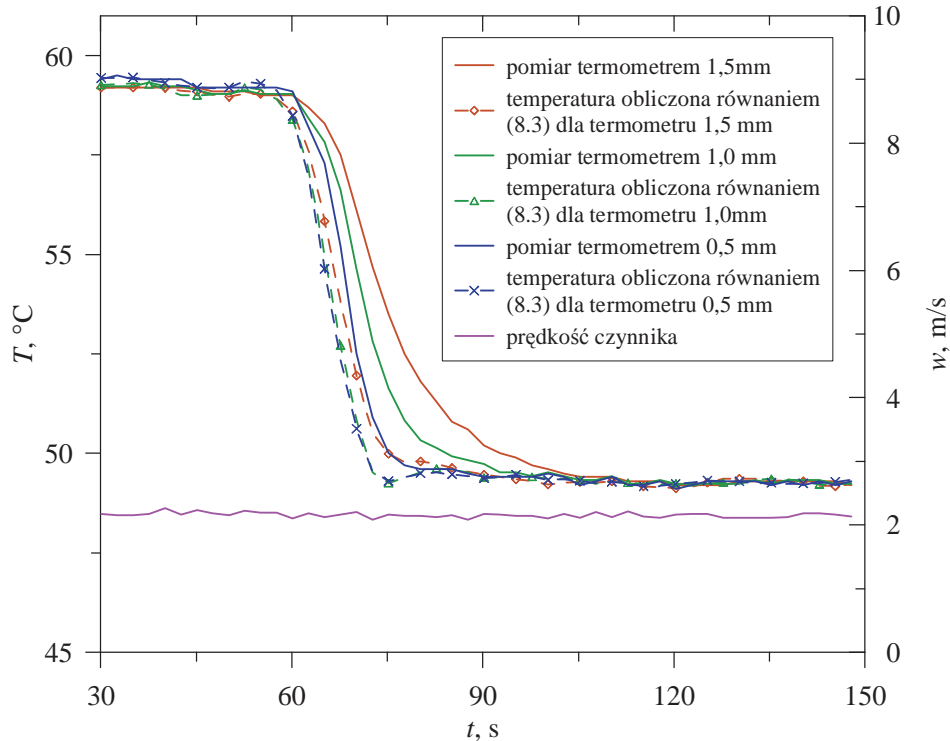
Zaprezentowana metoda pozwala na określanie nieustalonej temperatury w trakcie wykonywania pomiarów, na podstawie wyznaczonej stałej czasowej dla określonego termoelementu, gdy prędkość gazu zmienia się w czasie.

Aby wykazać poprawność przedstawionej metody wyznaczania nieustalonej temperatury, przeprowadzono pomiar temperatury czynnika w tunelu aerodynamicznym termoelementami płaszczyzowymi typu K o trzech różnych średnicach zewnętrznych: 0,5, 1,0 i 1,5 mm. Termometry zostały umieszczone bardzo blisko siebie, tak aby realizowały pomiar tej samej temperatury, ale jednocześnie nie wpływały na siebie nawzajem. Przepływające powietrze było ogrzewane przez wymiennik ciepła z ożebrowanymi rurami.

Stałe czasowe zostały wyznaczone równaniem (8.3). Temperatura powietrza określona została równaniem (4.1), pochodną  $dT/dt$  w równaniu (4.1) obliczono korzystając z 9-punktowego filtru (5.2). Wyniki obliczeń zaprezentowane są na rys. 8.11 i 8.12.

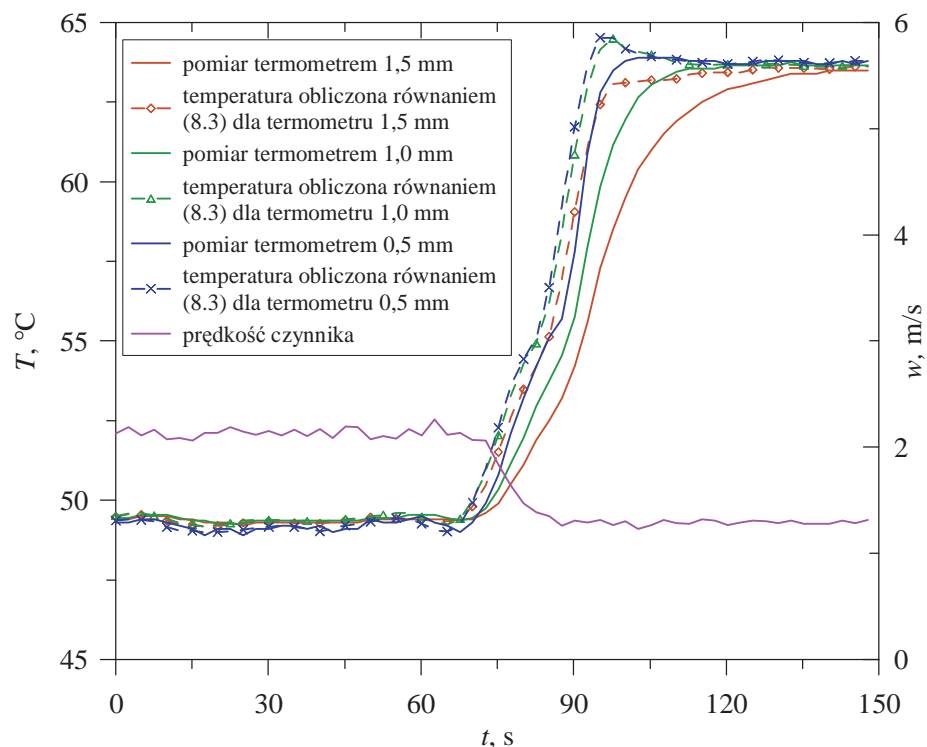


Rys. 8.10. Stałe czasowe  $\tau$  termoelementów płaszczowych w funkcji prędkości przepływającego czynnika  $w$  z obszarem niepewności 95%



Rys. 8.11. Temperatura powietrza zmierzona termometrami o różnych średnicach zewnętrznych i temperatura obliczona dla znanych stałych czasowych termometrów przy stałej prędkości przepływającego czynnika





Rys. 8.12. Temperatura powietrza zmierzona termometrami o różnych średnicach zewnętrznych i temperatura obliczona dla znanych stałych czasowych termometrów przy zmiennej prędkości przepływającego czynnika

Zaprezentowane wyniki pozwalają zaobserwować większą dokładność obliczanej temperatury czynnika dla znanych stałych czasowych termometrów w porównaniu z temperaturą zmierzoną. Zgodność otrzymanych wyników dla czujników o trzech różnych średnicach jest bardzo dobra, szczególnie dla średnic 0,5 i 1,0 mm. W przypadku termometru o średnicy zewnętrznej płaszczka 1,5 mm obliczona temperatura nieco odbiega od temperatury określonej na podstawie pomiarów wykonanych pozostałymi termometrami, jest to spowodowane większą wartością stałej czasowej  $\tau$ .

## **9. Przeprowadzenie badań eksperymentalnych w czasie rozruchu kotła parowego przy zastosowaniu termometrów o trzech różnych średnicach**

W rozdziale omówione zostały badania eksperymentalne wykonane podczas rozruchu kotła parowego. Polegały one na pomiarze temperatury w kolektorze, do którego wpuszczona została para przegrzana. Pomiar temperatury zrealizowany został przez termometry w masywnych osłonach o średnicach: 7, 15 i 20 mm. Następnie, korzystając z metody odwrotnej kroczącej, przeprowadzono korekcję zmierzonej temperatury.

### **9.1. Konstrukcja termometrów**

Podczas badań, jako czujniki temperatury zastosowano termometry płaszczowe firmy Limatherm Sensor z wymiennym wkładem pomiarowym typu K (NiCr-NiAl), klasy 1 (wg PN-EN 60584:1997), spoiną odizolowaną, w osłonie kwasoodpornej 1.4541 o następujących średnicach 7, 15 i 20 mm (rys. 9.1 i 9.2). Zakres pomiarowy termometrów wynosi od 0°C do 250°C.

Skład elektrody minusowej termometru (NiAl) przedstawia się następująco: 95% Ni, 2% Al, 2% Mn i 1% Si, natomiast elektrody plusowej (NiCr): 85% Ni, 12% Cr. Termoelementy typu K charakteryzują się odpornością na atmosferę utleniającą, ale w wyższych temperaturach są wrażliwe na atmosferę redukującą i na obecność związków siarki. Termoelektrody tego typu są najczęściej stosowanymi termoelementami z metali nieszlachetnych. Ich temperatura pracy może mieścić się w zakresie do 1100°C. Posiadają prawie prostoliniową charakterystykę termometryczną [6].

Średnica termopar wynosi 1 mm. Spoinę elektrod odizolowano od płaszcza, co jest pożądane, gdy termometr pracuje w środowiskach agresywnych korozyjnie. Jako materiał izolujący termoelektrody od płaszcza zastosowano sprasowany proszek mineralny [26].

Osłony termometrów posiadają przyłącza procesowe w formie gwintu. Wykonane zostały ze stali kwasoodpornej 1.4541. Jej maksymalna temperatura pracy w powietrzu to 850°C. Materiał charakteryzuje się odpornością na działanie korozji atmosferycznej, wód naturalnych (w tym wody morskiej), roztworów alkalicznych, kwasów

nieorganicznych, z wyjątkiem: kwasu solnego, siarkowego, fluorowodorowego, mieszanin kwasu azotowego i solnego, jodu, bromu i wilgotnego chloru, kwasów organicznych, z wyjątkiem: kwasu mrówkowego (o stężeniach większych niż 5%), wrzącego kwasu mlekowego i gorącego kwasu szczawowego, roztworów soli o dowolnym stężeniu i dowolnej temperaturze, z wyjątkiem bardziej stężonych roztworów chlorków, siarczanów, chloranów itp. oraz wszystkich produktów żywnościowych [26].



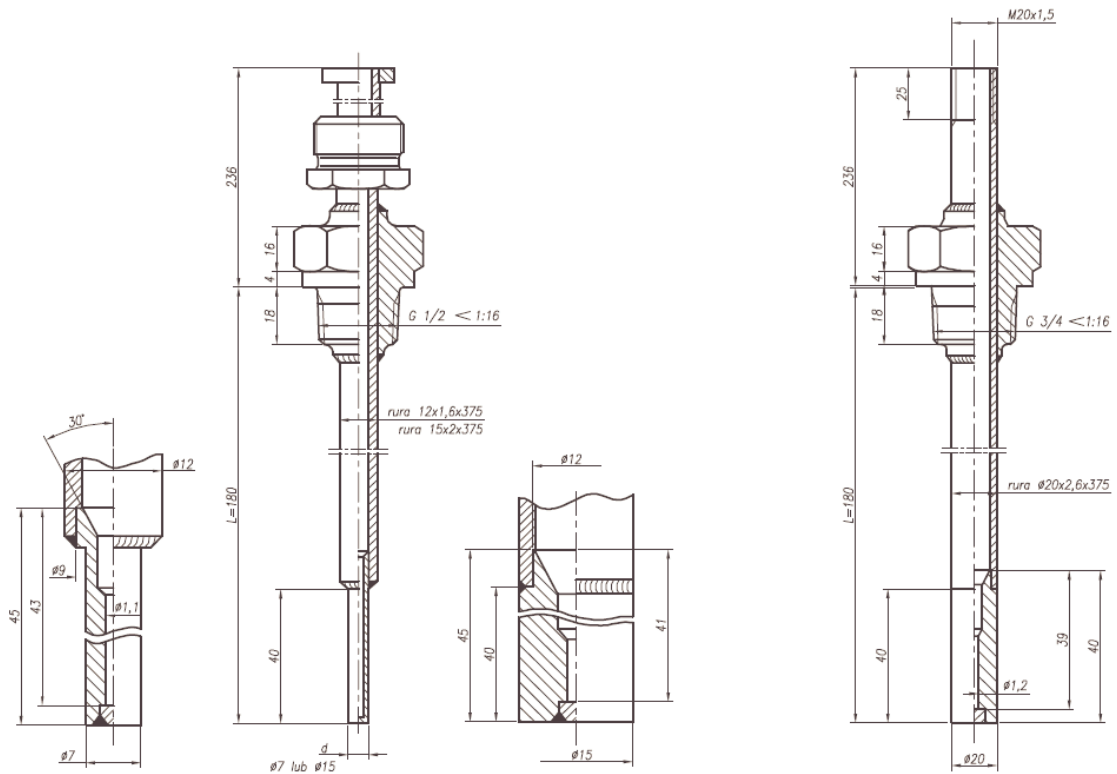
Rys. 9.1. Termoelementy w masywnych osłonach o średnicach (od lewej):  
7 mm, 15 mm i 20 mm

Termoelement połączony jest z zaciskami zewnętrznymi kostki zaciskowej osłoniętej głowicą wykonaną ze stopu aluminium, pokrytą emalią kreodurową. Temperatura pracy głowicy:  $-40^{\circ}\text{C} \div 100^{\circ}\text{C}$  (ze względu na uszczelkę wykonaną z gumy olejoodpornej). Wymiary wewnętrzne głowicy:  $\text{Ø}25 \times 22 \text{ mm}$ .

Ewentualne błędy pomiaru termoelementami płaszczowymi wskazane przez producenta czujników to:

- błędy wynikające z niejednorodności materiału termoelementu (powstałej np. podczas jego zginania lub rozciągania),

- błędy wynikające z niewłaściwego miejsca pomiaru,
- błędy wynikające z dryftu (zachodzącego na skutek np. zanieczyszczenia elektrod pod wpływem temperatury),
- błędy wynikające z zastosowania niewłaściwego przewodu kompensacyjnego.



Rys. 9.2. Konstrukcja osłon termoelementów o średnicach 7, 15 i 20 mm

Należy również uwzględnić błędy spowodowane przewodzeniem ciepła przez obudowę termometru, w którym umieszczony jest termoelement, od punktu pomiaru do otoczenia. W przypadku, gdy temperatura obudowy termometru jest inna niż temperatura ścian rurociągu, należy także uwzględnić błąd spowodowany wymianą ciepła między nimi. W przypadku pomiaru temperatury pary przepływającej w rurociągach błąd ten jest mały z uwagi na niewielką różnicę temperatury pomiędzy obudową a wewnętrzną powierzchnią rurociągu.

## 9.2. Wyniki pomiarów w czasie rozruchu kotła parowego

Badania eksperymentalne przeprowadzone zostały na stanowisku laboratoryjnym „Instalacja do badań komputerowych układów do ciągłego nadzoru eksploatacji energetycznych kotłów parowych”, należącym do Katedry Maszyn i Urządzeń Energetycznych (rys. 9.3).

Stanowisko składa się z [27]:

- kotła parowego Viessmann VITOMAX 200 HS (typ M237) o mocy cieplnej 460 kW i wydajności 700 kg/h (para nasycona o ciśnieniu 10 bar), wyposażonego w trójstopniowy palnik olejowy Weishaupt WM-L10/2-A Monarch, którego moc nominalna jest z przedziału 150-600 kW i zabudowany na wylocie spalin z kotła wymiennikiem ECO
- instalacji przygotowania wody zasilającej kocioł EPURO 91/50 DF,
- odgazowywacza termicznego,
- rozprężacza odmulin,
- stacji redukcyjnej 10/4/2 bary,
- automatyki kotłowej umożliwiającej bezobsługową pracę kotła,
- kolektora parowego.

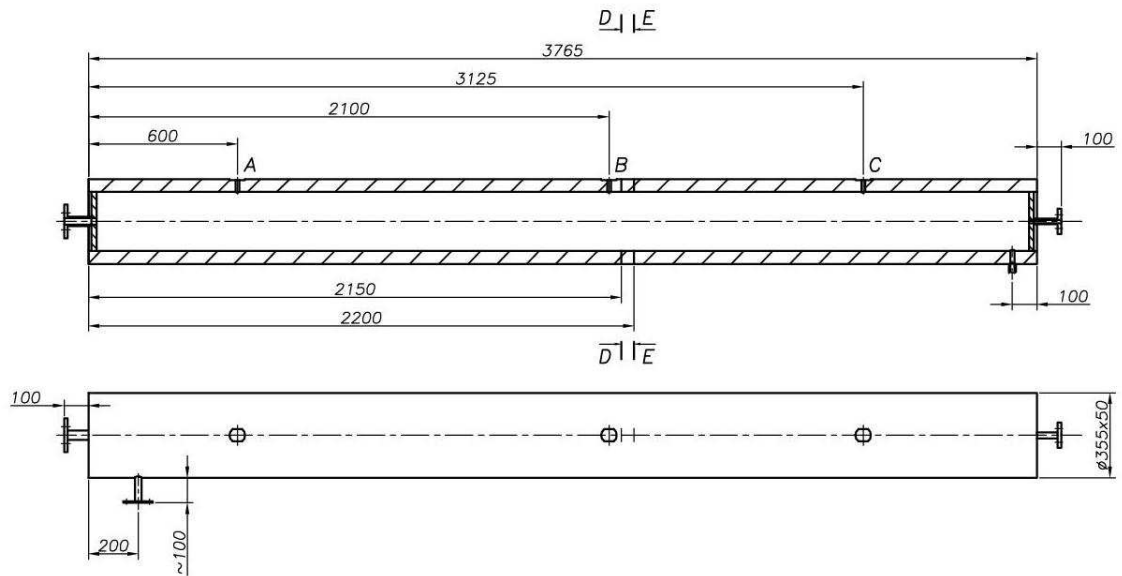


Rys. 9.3. Widok ogólny stanowiska laboratoryjnego [27]

Elementem, na którym zrealizowane zostały badania eksperymentalne prowadzące się do pomiaru temperatury za pomocą termometrów przemysłowych o trzech różnych średnicach, jest kolektor parowy wykonany z nowoczesnej stali martenzytycznej P91. Stanowi on część grubościennej rury o długości  $L = 3765$  mm,



średnicy zewnętrznej  $d_z = 355$  mm i grubości ścianki  $g = 50$  mm z przyspawanymi na końcach dennicami z króćcami (rys. 9.4).



Rys. 9.4. Schemat kolektora parowego z oznaczeniem miejsc (A, B, C) i przekrojów (D-D, E-E) zamontowania czujników temperatury [27]

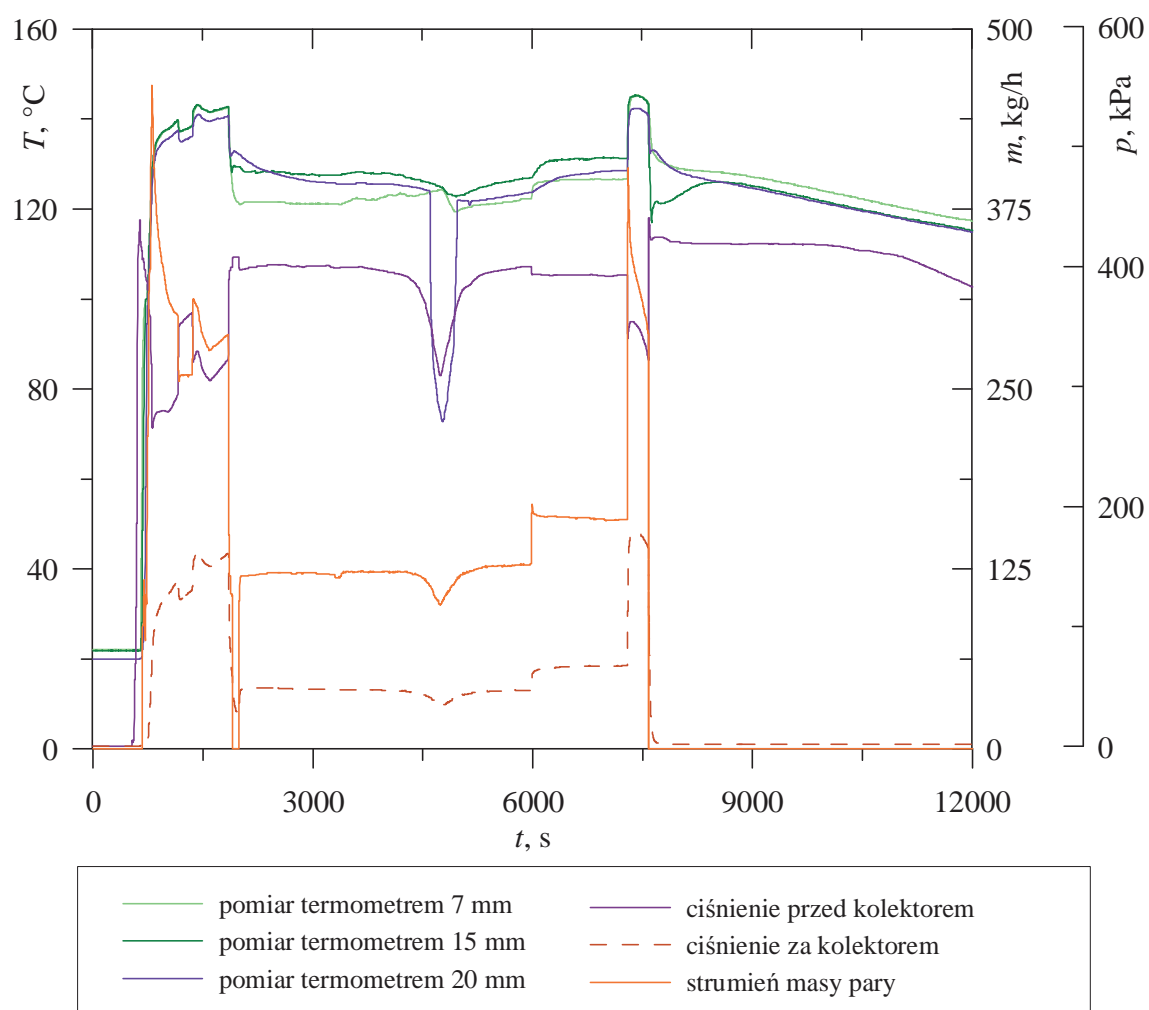


Rys. 9.5. Widok opomiarowanego kolektora parowego przed założeniem izolacji cieplnej [27]

Na rys. 9.4 zaznaczone zostały miejsca rozmieszczenia termoelementów płaszczyzowych (A, B i C), odpowiednio o średnicach 7, 15 i 20 mm. Widok zamocowanych termometrów przed założeniem izolacji na kolektor przedstawia rys. 9.5.

Badania eksperymentalne przeprowadzone zostały podczas rozruchu instalacji. Podczas uruchamiania kotła kolektor parowy został wyłączony z obiegu. Gdy kocioł olejowy osiągnął nominalną moc cieplną, powoli otworzono zawór przed kolektorem, umożliwiając tym samym przepływ pary. Kocioł wytwarza parę nasyconą, ale ponieważ przed kolektorem zamocowano kryzę dławiącą, przez kolektor przepływała para przegrzana.

Podczas badań, oprócz pomiaru temperatury, w kolektorze parowym wykonany został również pomiar ciśnienia przed i za kolektorem oraz strumienia masy pary. Wyniki pomiarów zaprezentowano na rys. 9.6.



Rys. 9.6. Część pomiarów wykonanych podczas rozruchu instalacji

Wykonywane pomiary rejestrowane są na bieżąco przez koncentratory M-800 firmy Metronic. M-800 jest ośmiokanałowym modulem wejść analogowych. Sygnał analogowy mierzony jest przez przetwornik A/C o rozdzielczości 18 bitów. Wejścia umożliwiają podłączenie: rezystancyjnych czujników temperatury typu Pt-100, Pt-1000, Ni-100, Cu-50 Cu-53, KTY-81-1xx, termoelementów typu B, E, J, K, L, N, R, S, T, U (kompensacja temperatury spoiny odniesienia wartością stałą lub czujnikiem Pt-100 podłączonym do kanału 8), przetworników o charakterze rezystancyjnym w dwóch zakresach: 0..400  $\Omega$  lub 0..4000  $\Omega$  z możliwością zaprogramowania zakresu pomiarowego oraz przetwarzania, przetworników o charakterze napięciowym w zakresach -10..+55mV oraz -1,6..1,6mV z możliwością zaprogramowania zakresów, przetworników z wyjściem w standardzie pętli prądowej 0/4-20 mA przez adapter M-800-ADP.

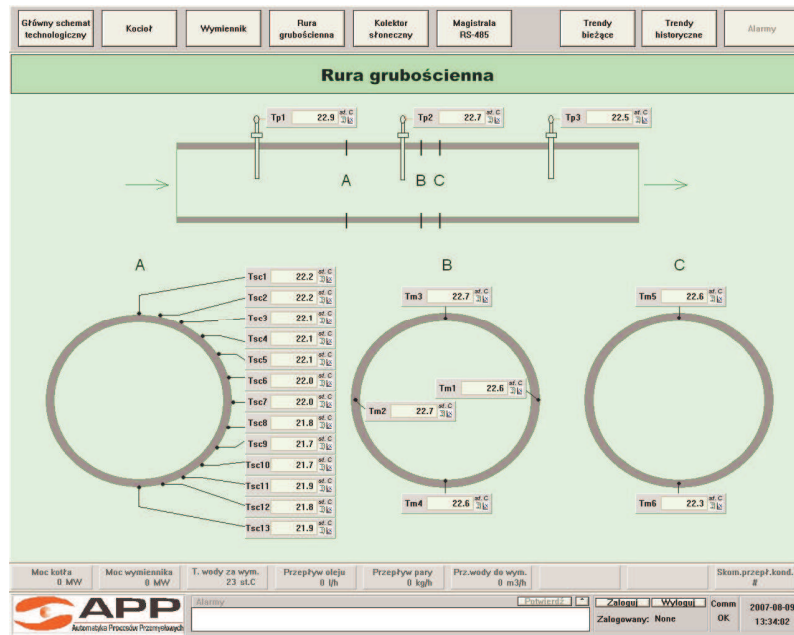
Urządzenie posiada separowany od pozostałej części układów port komunikacji szeregowy RS-485. Ma wbudowany protokół Modbus RTU do odczytu wyników bieżących i sterowania przekaźnikami wyjściowymi, za pośrednictwem którego dane są przekazywane do komputera.

Pomiary rejestrowane są przez układ akwizycji danych co  $\Delta t = 1$  s.

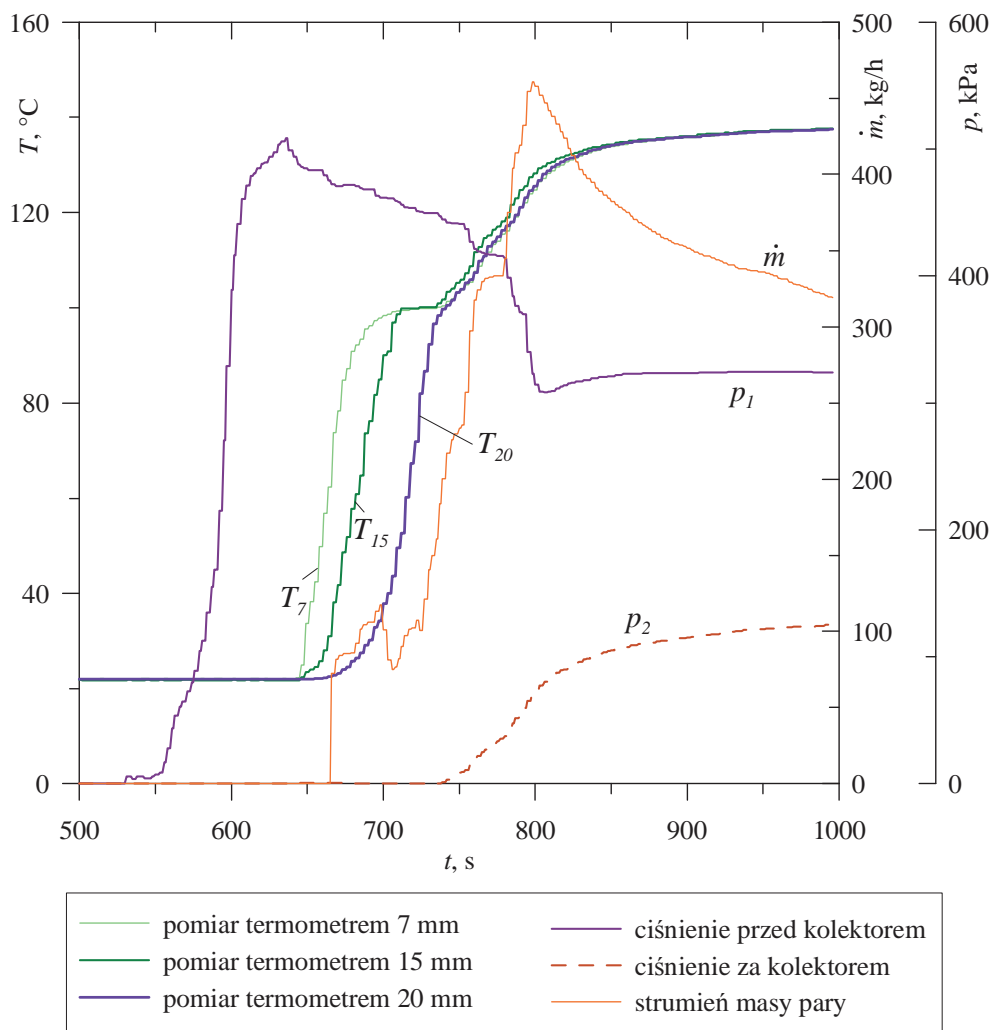
Do wizualizacji i kontroli procesów zachodzących na całej instalacji wykorzystane zostało oprogramowanie InTouch firmy Astor Sp. z o.o. Umożliwia ono obserwację procesów zachodzących na instalacji i jej poszczególnych częściach przedstawionych jako obiekty graficzne na ekranie monitora (rys. 9.7), a także przedstawienie na wykresie przebiegów mierzonych parametrów w danej chwili lub w wybranym okresie czasu.

Obliczenia korygujące temperaturę mierzoną przez trzy termoelementy w masywnych osłonach przeprowadzono dla okresu, w którym nastąpił jej gwałtowny wzrost tj. podczas rozruchu kotła, gdy otworzony zostaje zawór przed kolektorem. Na rys. 9.8 można zaobserwować dwa skoki temperatury – pierwszy, dla  $t = 642$  s do temperatury ok. 100°C, jest spowodowany częściowym otwarciem zaworu przed kolektorem, przy czym cały czas otwarty jest zawór króćca odprowadzania skroplin z kolektora, w rurze panuje zatem ciśnienie atmosferyczne. Następnie w chwili  $t = 730$  s zawór przed kolektorem zostaje całkowicie otworzony, a zaraz potem dla  $t = 739$  s zawór króćca odprowadzającego skropliny zostaje zamknięty, ciśnienie w kolektorze wzrosło, a tym samym wzrosła również temperatura pary do ok. 140°C.





Rys. 9.7. Wizualizacja pomiarów realizowanych na grubościennym kolektorze parowym [27]

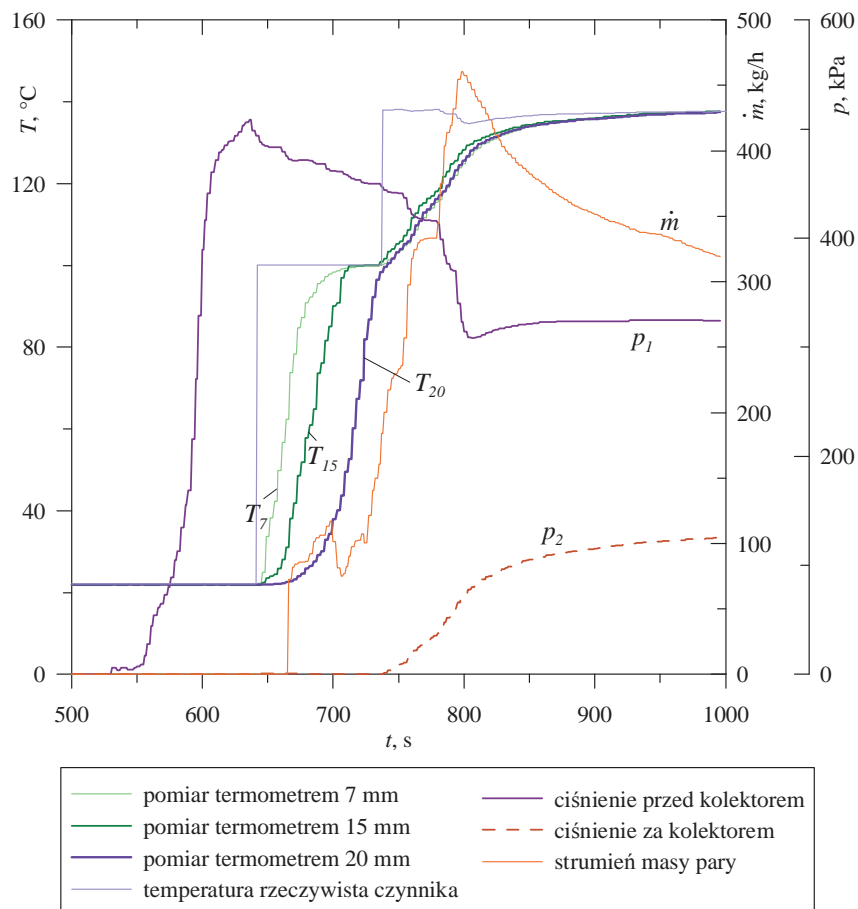


Rys. 9.8. Pomiary wykonane na kolektorze podczas uruchomienia stanowiska

### 9.3. Porównanie wyników pomiarów i obliczeń

W celu zmniejszenia błędu dynamicznego zmierzonej temperatury przez termometry w masywnych osłonach wykorzystano metodę odwrotną kroczącą.

Aby umożliwić weryfikację otrzymanych wyników, przed przystąpieniem do obliczeń określona została rzeczywista temperatura czynnika. Pierwszy skok temperatury w kolektorze dla  $t = 642$  s wynika z otwarcia zaworu przed kolektorem oraz z panującego w nim ciśnienia atmosferycznego  $p = 101,3$  kPa. Para wpływając do kolektora, rozpręża się i kondensuje, a skropliny pokrywają powierzchnię termometrów. Przyjęto, że rzeczywista temperatura w kolektorze wynosi  $T = 100,1^\circ\text{C}$ . Po zamknięciu zaworu króćca odprowadzającego skropliny ciśnienie w kolektorze wzrosło. Aby określić temperaturę pary w kolektorze na podstawie znanego ciśnienia przed kryzą  $p_1$  i stopnia suchości  $x = 1$  określono entalpię pary nasyconej  $i_1(p_1, x)$ . Ponieważ podczas dławienia pary na kryzie jej entalpia się nie zmienia  $i_1 = i_2$ , temperaturę za kryzą wyznaczono na podstawie wyznaczonej entalpii  $i_1$  i ciśnienia panującego za kolektorem  $p_2$ . Wyznaczona temperatura przedstawiona została na rys. 9.9.



Rys. 9.9. Porównanie temperatury rzeczywistej czynnika i zmierzonych termometrami

Obliczenia mające na celu zmniejszenie błędu dynamicznego odczytywanych temperatur za pomocą termometrów przeprowadzono w języku programowania FORTRAN.

Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego wykonano za pomocą metody objętości skończonej i przy założeniu, że własności fizyczne osłon termoelementów są zależne od temperatury.

Obudowy termoelementów podzielone zostały na 4 objętości skończone, temperatury w kolejnych węzłach oraz temperatura czynnika wyznaczone są za pomocą równań (6.35) ÷ (6.38). Ponieważ podczas obliczeń temperatury  $T_i$  nie jest znana wartość współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda(T_i)$  w  $i$ -tym punkcie, wykonanych zostało  $n$  iteracji. Dla pierwszej przyjęto, że  $\lambda(T_i^{(0)}) = \lambda(T_{i-1})$ . Proces iteracji trwał dopóki nie został spełniony warunek (6.19), a tolerancja  $\varepsilon \approx 0,0001$  K.

Aby częściowo wyeliminować wpływ błędów przypadkowych na wyniki obliczeń, zastosowano 9-punktowy filtr cyfrowy, dane pomiarowe zostały wygładzone równaniem (5.1). Za jego pomocą, równaniem (5.2) wyznaczona została również pochodna  $dT_i/dt$ , której poprawna wartość ma istotny wpływ na dokładność rozwiązania zagadnienia odwrotnego.

Osłony czujników temperatury wykonane są ze stali austenitycznej 1.4541. Wyznaczono własności materiału w funkcji temperatury, przedstawiają je równania (9.1) ÷ (9.3):

$$\rho(T) = 7900 + 0 \cdot T, \text{ kg/m}^3, \quad (9.1)$$

$$\lambda(T) = 14,902547 + 0,01197859 \cdot T, \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \quad (9.2)$$

$$c(T) = 489,78959 + 0,21336286 \cdot T, \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}. \quad (9.3)$$

Dla pomiarów wykonywanych, gdy na termoelementach zachodzi kondensacja pary, przyjęto stałą wartość współczynnika wnikania ciepła  $\alpha_k$ . W momencie, gdy przepływ pary przez rurociąg się gwałtownie zwiększa, współczynnik wnikania ciepła wyznaczony zostaje na podstawie liczby Nusselta, określonej dzięki zmodyfikowanej korelacji Churchilla i Bernsteina (7.13). Zależność ta jest stosowana dla omywanego poprzecznie cylindra, gdy  $Re_d Pr > 0,2$  i  $10000 < Re_d < 400000$ . Modyfikacja korelacji polegała na wprowadzeniu zamiast stałej 0,62 wielkości  $X$ :

$$\text{Nu}_d = 0,3 + \frac{X \cdot \text{Re}_d^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0,4/\text{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\text{Re}_d}{282000}\right)^{1/2}\right]. \quad (9.4)$$

W celu określenia wartości stałej  $X$  i współczynnika wnikania ciepła  $\alpha_k$  zastosowano metodę najmniejszej sumy kwadratów. W obu przypadkach minimum zostało znalezione metodą przeszukiwania przedziałów. Otrzymane wyniki dla trzech termometrów o średnicach osłon 7, 15 i 20 mm przedstawiono w tab. 9.1.

Tabela 9.1. Wartości współczynnika wnikania ciepła  $\alpha_k$  i stałej  $X$  dla trzech różnych termometrów

średnica zewnętrzna osłony termoelementu $d_z$ [mm]	$\alpha_k \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$	$X$
Ø 7,0	550	1,13
Ø 15,0	1 500	4,54
Ø 20,0	950	5,78

Skok czasowy został wyznaczony z zależności [17]:  $\Delta t \geq 0,05 \cdot r_z^2 / a$  oraz jest uwarunkowany częstością pobierania danych przez układ akwizycji; jego wartości dla poszczególnych termoelementów przedstawiono w tab. 9.2.

Tabela 9.2. Skok czasowy wyznaczony dla badanych termometrów

średnica zewnętrzna termometru $d_z$ [mm]	skok czasowy $\Delta t$ [s]
Ø 7,0	1,0
Ø 15,0	1,0
Ø 20,0	2,0

Oprócz temperatury czynnika obliczona zostaje temperatura w trzech węzłach znajdujących się na grubości osłony badanych termoelementów, na promieniach zestawionych w tab. 6.1.

Na rys. 9.10–9.12 przedstawiono porównanie temperatury skorygowanej dla kolejnych termoelementów o średnicach osłony ochronnej 7, 15 i 20 mm, temperatury wskazanej przez termometr i temperatury rzeczywistej panującej w kolektorze.

Wyznaczony został błąd średniokwadratowy przeprowadzonego pomiaru temperatury na podstawie równania (9.5)

$$s_N = \sqrt{\frac{S}{N-1}}, \quad (9.5)$$

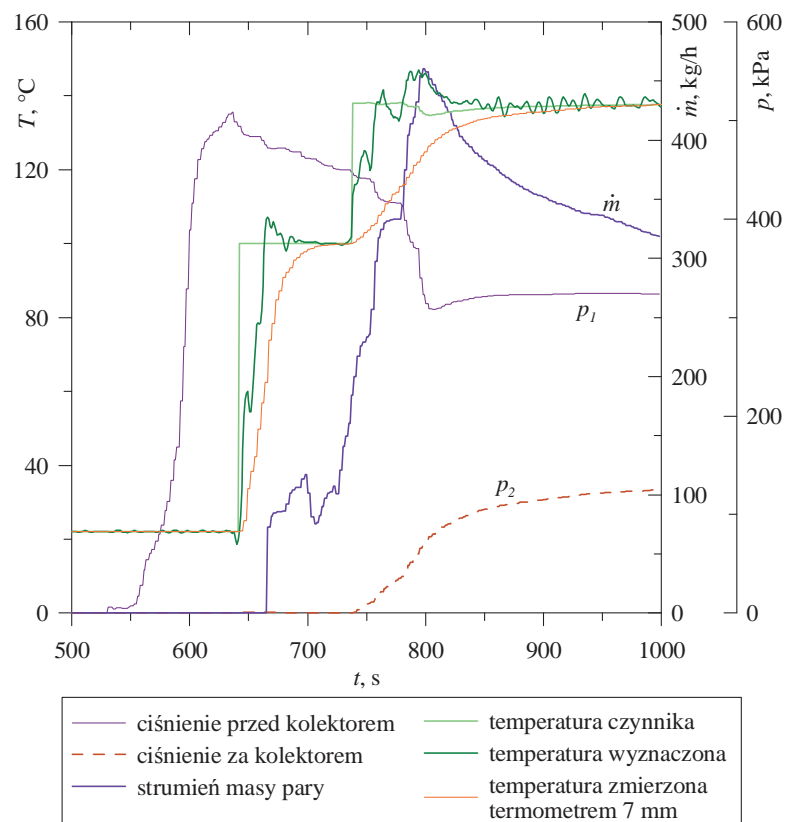
gdzie:

$$S = \sum_{i=1}^N [T_m(t_i) - T(t_i)]^2. \quad (9.6)$$

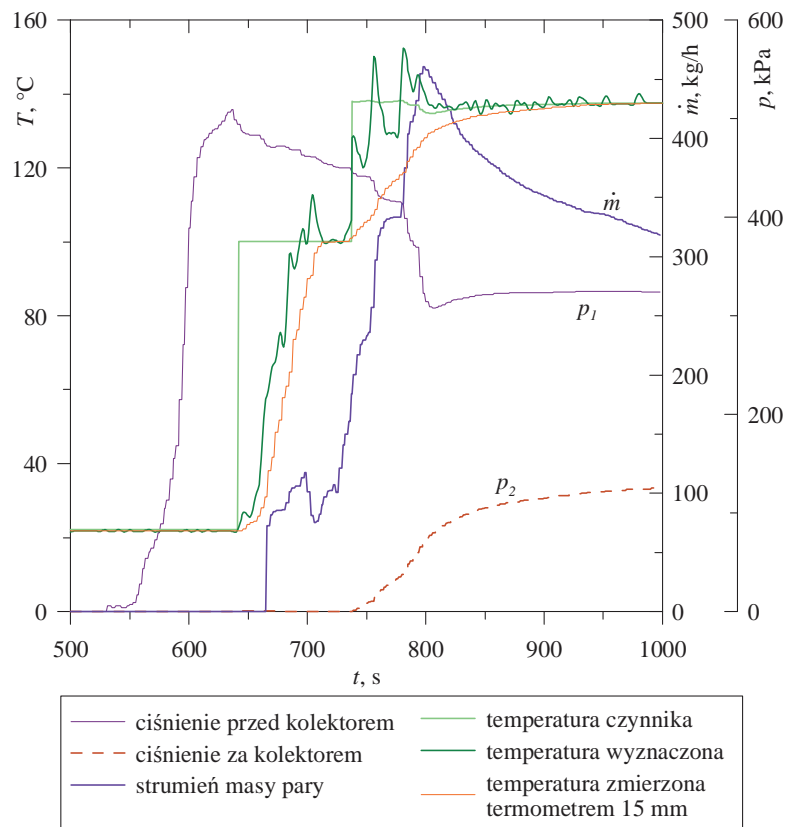
Obliczone wartości błędów dla poszczególnych termometrów zostały zestawione w tab. 9.3.

Tabela 9.3. Wartości błędów średniokwadratowych wyznaczonych dla poszczególnych termoelementów

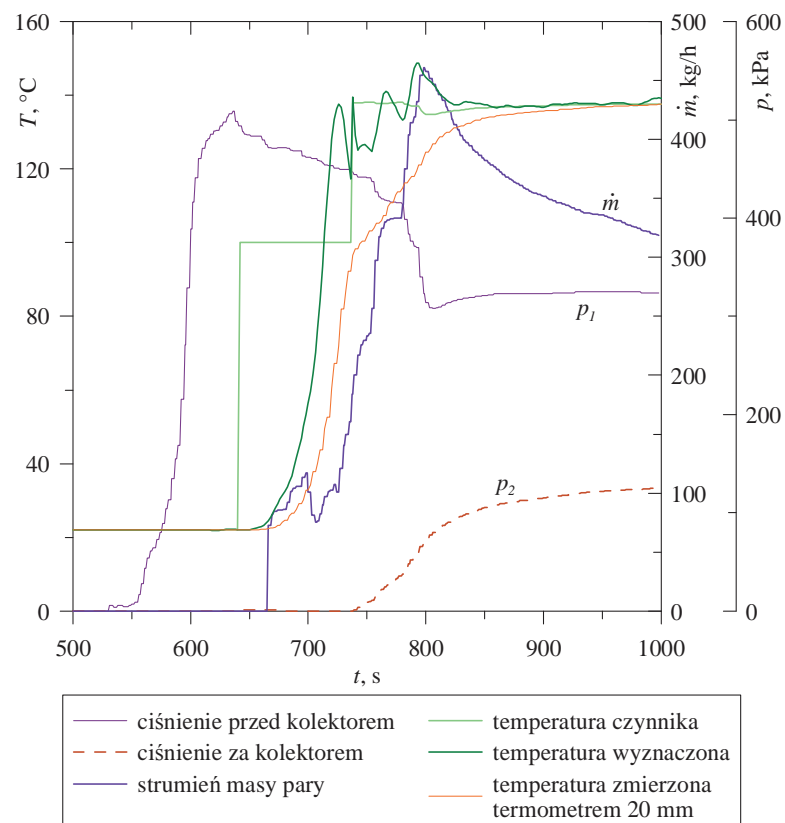
średnica zewnętrzna termometru $d_z$ [mm]	błąd średniokwadratowy $s_N$ [°C]
Ø 7,0	11,77
Ø 15,0	10,59
Ø 20,0	17,17



Rys. 9.10. Korekcja temperatury zmierzonej termometrem o średnicy zewnętrznej  $d_z = 7$  mm dla  $\Delta t = 1$  s



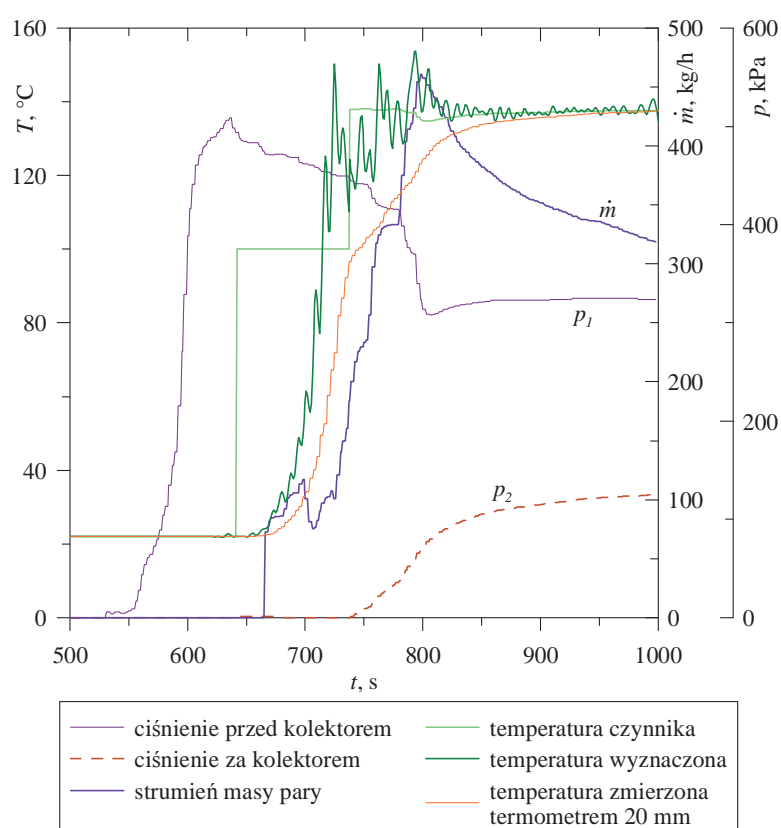
Rys. 9.11. Korekcja temperatury zmierzonej termometrem o średnicy  $d_z = 15$  mm dla  $\Delta t = 1$  s



Rys. 9.12. Korekcja temperatury zmierzonej termometrem o średnicy  $d_z = 20$  mm dla  $\Delta t = 2$  s

Otrzymane wyniki świadczą o dużej dokładności zastosowanej metody odwrotnej kroczącej w obliczeniach nieustalonej temperatury czynnika, jednakże przed przystąpieniem do wyznaczania temperatury należy określić dokładną wartość współczynnika wnikania ciepła. Metoda ta pozwala na przeprowadzanie korekcji mierzonej temperatury w trybie on-line.

W przypadku termometru o średnicy zewnętrznej 20 mm przedstawiono również wyniki obliczeń nieustalonej temperatury czynnika dla krótszego kroku czasowego:  $\Delta t = 1$  s (rys. 9.13). Pozwala to zaobserwować jak duży wpływ na obliczenia ma prawidłowo wyznaczony krok czasowy. W przypadku, gdy jest on za krótki, w otrzymanych wynikach obliczeń pojawiają się przeregulowania.



Rys. 9.13. Korekcja temperatury zmierzonej termometrem o średnicy  $d_z = 20$  mm dla  $\Delta t = 1$  s

## 10. Wnioski i uwagi końcowe

W pracy przedstawiono dwie grupy metod określania nieustalanej temperatury czynnika. Pierwsza z nich, polegająca na wyznaczeniu stałej czasowej  $\tau$  lub stałych czasowych  $\tau_1$  i  $\tau_2$  jest właściwa dla termometrów, które mierzą temperaturę gazów np. powietrza lub spalin. Podstawową trudnością w stosowaniu tej metody jest zależność stałej czasowej termoelementu od prędkości przepływającego czynnika. W pracy zaproponowano rozwiązanie tego problemu, wyznaczając dla termometrów o różnych średnicach zewnętrznych stałe czasowe  $\tau$  jako funkcje prędkości  $w$ . Pozwala to na wyznaczanie nieustalanej temperatury, przy zmiennej prędkości czynnika, gdy stałe czasowe zmieniają się w czasie pomiaru.

Modelowanie termometru jako obiektu inercyjnego I-go rzędu jest właściwe, gdy osłony czujników mają małą bezwładność. W takim przypadku opóźnienie wskazań termometru jest niewielkie w stosunku do temperatury rzeczywistej czynnika. Gdy ciśnienie czynnika roboczego jest wysokie, stosowane są termometry przemysłowe o masywnych osłonach, a opóźnienie czasowe wskazań takich termometrów w stosunku do temperatury czynnika jest duże. W takim przypadku termometr powinien być modelowany jako obiekt z inercją II-go rzędu. Porównano przebiegi temperatury wyznaczone dla termometru o masywnej osłonie, modelowanego jako obiekt inercyjny I-go i II-go rzędu. Na tej podstawie stwierdzono, że w przypadku dużej bezwładności osłony lepsze jest wyznaczenie nieustalanej temperatury z równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu. W pracy zademonstrowano, że dużą stabilność i dokładność wyznaczania rzeczywistej temperatury czynnika na podstawie czasowego przebiegu temperatury wskazywanego przez termometr uzyskuje się dzięki zastosowaniu 9-punktowego filtra cyfrowego. Dzięki wygładzaniu zmierzonych czasowych przebiegów temperatury termometru, wyznaczone zmiany temperatury czynnika nie wykazują oscylacji, których przyczyną są przypadkowe błędy pomiaru temperatury zawarte we wskazaniach termometru.

W przypadku płynów o wysokim ciśnieniu, przepływających z dużą prędkością, stosowane są termometry przemysłowe o masywnej obudowie. W takich przypadkach wyznaczanie temperatury czynnika w warunkach nieustalonych staje się jeszcze bardziej skomplikowane. Do wyznaczania nieustalanej temperatury przepływającego



czynnika zaproponowano dwie metody bazujące na rozwiązaniu odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła. Metody określania nieustalonej temperatury czynnika, wykorzystujące metodę odwrotną kroczącą, znajdują zastosowanie dla pomiarów temperatury np. pary wodnej, gdzie własności czynnika mające wpływ na wielkość współczynnika wnikania ciepła znacznie zmieniają się wraz ze zmianami parametrów pary.

W pierwszej metodzie w celu określenia nieustalonej temperatury czynnika zastosowano metodę kroczącą do rozwiązania odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła występującego przy pomiarze temperatury czynnika za pomocą termometru cylindrycznego. W metodzie drugiej nieustalona temperatura czynnika wyznaczana jest na podstawie pomiaru temperatury ścianki cylindrycznej na zewnętrznej zaizolowanej powierzchni.

W obu metodach trudność stanowi wyznaczenie współczynnika wnikania ciepła  $\alpha$  na powierzchni zewnętrznej termometru lub powierzchni wewnętrznej rurociągu, a który jest niezbędny do obliczenia temperatury czynnika.

Wszystkie przedstawione w niniejszej pracy metody wyznaczania nieustalonej temperatury czynnika nadają się do zastosowań w trybie on-line dla dowolnych zmian temperatury czynnika w funkcji czasu.

W pracy pokazano również jak dużymi błędami dynamicznymi obarczone są pomiary temperatury, szczególnie w przypadku termometrów o masywnych osłonach. Ze względu na wysokie ciśnienie oraz dużą prędkość czynnika roboczego, którego temperatura jest mierzona, tego typu osłony są niezbędne. Należy jednak dążyć do tego, aby ich grubość była możliwie najmniejsza, a to wymaga bardzo precyzyjnych obliczeń wytrzymałościowych.

Przedstawione w pracy metody pomiaru nieustalonej temperatury czynnika odznaczają się dużą dokładnością. Zaletą przedstawionych metod jest łatwość ich stosowania w praktyce przemysłowej.

## Literatura

- [1] Bégot S., Kauffmann J. M.: Estimation of internal fuel cell temperatures from surface temperature measurements. *Journal of Power Sources* 178 (2008) 316-322.
- [2] Childs P. R. N.: *Practical Temperature Measurement*. Butterworth-Heinemann, Oxford 2001.
- [3] Геращенко О. А., Гордов А. Н., Лах В. И., Стаднык Б. И., Ярышев Н.А.: Температурные измерения. Наукова Думка, Киев 1984.
- [4] Kabza Z., Kostyrko K., Zator S., Łobzowski A., Szkolnikowski W.: *Regulacja mikroklimatu pomieszczenia*. Agenda Wydawnicza Pomiarów Automatyka Kontrola, Warszawa 2005.
- [5] Littler D. J. et al.: *Instrumentation, Controls & Testing. Modern Power Station Practice*. Pergamon Press, Oxford 1991.
- [6] Michalski L., Eckersdorf K.: *Pomiary temperatury*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1986.
- [7] Northrop R.B.: *Introduction to Instrumentation and Measurements, Second Edition*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton 2005.
- [8] Pao C. Chau: *Process control, A First Course with MATLAB*. Cambridge University Press, Cambridge 2002.
- [9] Ping-Hei Chen, Pei-Pei Ding, Di Ai: An improved data reduction method for transient liquid crystal thermography on film cooling measurements. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44 (2001) 1379-1387.
- [10] Székely V., Ress S., Poppe A., Török S., Magyar D., Benedek Zs., Torki K., Courtois B., Rencz M.: New approaches in the transient thermal measurements. *Microelectronics Journal* 31 (2000) 727–733.
- [11] Taler J., Duda P.: *Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2003.
- [12] Taler J.: *Teoria i praktyka identyfikacji procesów przepływu ciepła*. Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Wrocław 1995.
- [13] Walker D. G., Allison S. W.: Transient measurements using thermographic phosphors. *ISA Transactions* 46 (2007) 15–20.

- [14] Wiśniewski S.: Pomiary temperatury w badaniach silników i urządzeń cieplnych. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1983.
- [15] Jaremkiewicz M., Taler D., Sobota T.: Measuring transient temperature of the medium in power engineering machines and installations, Applied Thermal Engineering 29 (2009) 3374-3379.
- [16] Carslaw H.S., Jaeger J.C.: Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [17] Taler J.: A new space marching method for solving inverse heat conduction problems. Forschung im Ingenieurwesen 64 (1999): 296-306, © Springer-Verlag 1999.
- [18] Hobler T.: Ruch ciepła i wymienniki. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1986.
- [19] Kreith F.: The CRC Handbook of Mechanical Engineering. CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida 1998.
- [20] Becker M.: Heat Transfer, A Modern Approach. Plenum Press, New York 1986.
- [21] Taler D.: Pomiar ciśnienia, prędkości i strumienia przepływu płynu. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2006.
- [22] Kaminski D.A., Jensen M. K.: Introduction to thermal and fluids engineering. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ 2005.
- [23] John J.E., Keith T.G.: Gas Dynamics. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey 2006.
- [24] WT4401-S & WT4401-D Benchtop Wind Tunnels. Omega, Stamford, CT, USA, [www.omega.com](http://www.omega.com).
- [25] Taler D.: Dynamika rurowych wymienników ciepła. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2009.
- [26] <http://www.limathermsensor.pl>.
- [27] Sobota T.: Stanowisko do badań komputerowych układów do ciągłego nadzoru eksploatacji kotłów energetycznych, rozdział w książce: Współczesne technologie i urządzenia energetyczne pod redakcją Jana Talera. Sekcja Poligrafii PK, Kraków 2007.