



POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

WYDZIAŁ MECHANICZNY

INSTYTUT KONSTRUKCJI MASZYN



mgr inż. Paweł Romanowicz

**ANALIZA ZMĘCZENIOWA WYBRANYCH
ELEMENTÓW MASZYN PRACUJĄCYCH W
WARUNKACH KONTAKTU TOCZNEGO**

ROZPRAWA DOKTORSKA

promotor: prof. dr hab. inż. Andrzej P. Zieliński

KRAKÓW 2009



Spis treści:

1. Wstęp.....	6
1.1 Wprowadzenie do tematyki pracy.....	6
1.2 Cel i zakres pracy.....	7
2. Rys historyczny i przegląd literatury.....	8
2.1 Rys historyczny rozwoju nauki o zmęczeniu materiałów.....	8
2.2 Przegląd literatury związanej z wieloosiowym zmęczeniem wysokocyklowym...	9
3. Kryteria wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego.....	11
3.1 Kryterium Crosslanda (C).....	11
3.2 Kryterium Dang Vana	13
3.2.1 Oryginalna wersja hipotezy Dang Vana (DV).....	13
3.2.2 Zmodyfikowana wersja kryterium Dang Vana.....	16
3.3 Kryteria Papadopoulosa.....	18
3.3.1 Kryterium Papadopoulosa 1 (P_1).....	19
3.3.2 Kryterium Papadopoulosa 2 (P_2).....	20
3.4 Kryteria energetyczne Łagody i Machy.....	21
3.5 Porównanie wybranych kryteriów w prostych przypadkach obciążenia na przykładzie stali C60E(T) i C60E(N).....	24
3.6 Porównanie wybranych kryteriów w oparciu o badania doświadczalne wykonane dla stali 30CrNiMo8.....	28
3.6.1 Zakres badań oraz doświadczalne wyznaczenie własności zmęczeniowych stali 30CrNiMo8.....	28
3.6.2 Próba naprzemiennego skręcania ze stałą wartością naprężeń zginających.....	30
3.6.3 Próba naprzemiennego zginania ze stałą wartością naprężeń stycznych...	31
3.6.4 Próba naprzemiennego zginania ze skręcaniem w fazie ($\tau_a = 0,5 \cdot \sigma_a$)...	33
4. Aplikacja kryteriów wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego do wyników analiz numerycznych MES 2D.....	35
4.1 Toczenie bez tarcia.....	35
4.1.1 Model numeryczny 2D dla zagadnienia beztarciowego kontaktu tocznego.....	35
4.1.2 Poszukiwanie płaszczyzny krytycznej na przykładzie hipotezy Dang Vana.....	37
4.1.3 Szczegółowa obserwacja naprężeń zastępczych na przykładzie hipotezy DV.....	41
4.1.4 Porównanie ekstremalnych wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych dla różnych badanych hipotez.....	44
4.2 Wpływ chropowatości na zjawiska toczne.....	48
4.3 Uwzględnienie tarcia w rozwiązaniach zagadnienia kontaktu tocznego.....	50
5. Obliczenia zmęczeniowe koła jezdnego suwnicy $\phi 710$	56
5.1 Wprowadzenie.....	56
5.1.1 Podstawowe informacje dotyczące kół jezdnych suwnicowych.....	56
5.1.2 Obliczenia analityczne dla nienapędzanych suwnicowych kół jezdnych...	58
5.2 Obliczenia zmęczeniowe nienapędzanego koła jezdnego suwnicy.....	59
5.2.1 Model numeryczny 3D dla zagadnienia zwykłego kontaktu tocznego.....	59
5.2.2 Wpływ promienia zaokrąglenia główki szyny na zastępcze naprężenia zmęczeniowe nienapędzanego koła suwnicy.....	63
5.2.3 Analiza kontaktu koła jezdnego suwnicy z szyną o płaskiej główce.....	70
5.2.4 Analiza wpływu niesymetrycznego toczenia koła jezdnego suwnicy względem osi symetrii szyny.....	72
5.3 Obliczenia zmęczeniowe napędzanego koła jezdnego suwnicy.....	73
5.3.1 Model numeryczny 3D dla zagadnienia tarcia trakcyjnego koła suwnicy	73
5.3.2 Wpływ efektów ciernych na zmęczenie koła jezdnego suwnicy.....	74

6.	Obliczenia zmęczeniowe łożyska baryłkowego wzdłużnego o dużych wymiarach.....	77
6.1	Podstawowe informacje	77
6.2	Model numeryczny 3D łożyska baryłkowego wzdłużnego.....	80
6.3	Wpływ promienia zaokrąglenia bieżni na wyężenie zmęczeniowe elementu tocznego łożyska.....	81
7.	Podsumowanie i wnioski końcowe.....	86
Załączniki:		
A.	Analiza teoretyczna naprężeń kontaktowych dla ogólnego przypadku lokalnego kontaktu dwóch ciał.....	88
B.	Wstępne, podstawowe badania numeryczne dwuwymiarowych zagadnień kontaktowych.....	91
B.1	Założenia i struktura modelu.....	91
B.2	Problemy związane z modelowaniem zagadnień kontaktowych.....	92
B.3	Zagadnienie wcisku walca w szeroki pierścień.....	94
B.4	Badania parametrów i algorytmów kontaktowych systemu ANSYS.....	95
B.5	Wpływ podatności modelu koła suwnicy.....	97
C.	Analiza teoretyczna i numeryczna kontaktu dwóch ciał.....	99
C.1	Kontakt dwóch kul oraz kuli z płaszczyzną.....	99
C.1.1	Kontakt kuli z kulą - przypadek osiowosymetryczny.....	99
C.1.2	Kontakt kuli z płaszczyzną - przypadek osiowosymetryczny.....	102
C.2	Kontakt 2D i 3D walców o osiach równoległych – badania numeryczne systemem ANSYS	106
C.2.1	Kontakt 2D walca z płaszczyzną.....	106
C.2.1.1	Model z równomiernym (regularnym) podziałem elementów w obszarze kontaktu.....	107
C.2.1.2	Porównanie PSO i PSN dla modeli z równomiernym podziałem elementów kontaktowych.....	109
C.2.1.3	Model z nierównomiernym podziałem elementów kontaktowych w obszarze kontaktu.....	111
C.2.2	Kontakt 2D i 3D dwóch walców o osiach wzajemnie równoległych... ..	112
C.2.2.a	Kontakt 2D dwóch ciał cylindrycznych – dwóch tarcz oraz dwóch nieskończonych walców.....	113
C.2.2.b	Kontakt 3D dwóch wąskich tarcz o osiach wzajemnie równoległych.....	115
C.2.2.c	Kontakt 3D dwóch długich walców o osiach wzajemnie Równoległych.....	117
C.2.2.d	Wciskanie wąskiej tarczy w szerszy walec.....	118
C.3	Kontakt 3D dwóch walców o osiach wzajemnie prostopadłych.....	119
D.	Uwzględnienie tarcia w modelu numerycznym.....	124
	Bibliografia.....	127

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ:

symbol	znaczenie
t	– czas,
t_p	– okres,
N_f	– okres trwałości elementu,
Z_{GO}	– trwała wytrzymałość na zginanie obustronne,
Z_{SO}	– trwała wytrzymałość na skręcanie obustronne,
τ	– naprężenie styczne,
τ_{ns}	– naprężenie styczne w płaszczyźnie materiałowej określonej wektorami \vec{n} i \vec{s} ,
τ_{TG}	– naprężenie liczone z hipotezy T-G,
$\tau_{r\phi}$	– naprężenie tnące w płaszczyźnie materiałowej określonej kątem $\Theta_{r\phi}$,
τ_{af}	– trwała wytrzymałość zmęczeniowa dla skręcania,
σ_H	– naprężenie hydrostatyczne; pierwszy niezmiennik tensora naprężenia,
σ_{HMH}	– wyteżenie liczone z hipotezy H-M-H; drugi niezmiennik dewiatora naprężenia,
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	– naprężenia główne nieuporządkowane,
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	– naprężenia główne uporządkowane,
σ_{af}	– trwała wytrzymałość zmęczeniowa,
p_o	– maksymalne naciski kontaktowe,
ε	– odkształcenie,
a	– współczynnik przy naprężeniu hydrostatycznym,
Δ	– płaszczyzna materiałowa,
Δ_{KR}	– płaszczyzna krytyczna,
φ, θ	– kąty określające orientację płaszczyzny materiałowej Δ ,
χ	– kąt określający kierunek i zwrot działania naprężenia tnącego na płaszczyźnie Δ ,
\vec{n}	– wektor normalny do płaszczyzny Δ określający kierunek i zwrot działania naprężenia normalnego,
\vec{s}	– wektor na płaszczyźnie Δ określający kierunek i zwrot działania naprężenia tnącego,
P_i	– punkt w przestrzeni obiektu,
T_a	– uogólniona miara amplitudy naprężeń tnących,
$\sqrt{\langle(T_a)\rangle^2}$	– uśredniona miara wartości uogólnionej amplitudy naprężeń tnących,
W	– miara gęstości energii odkształceń,
β, κ, k	– współczynniki w hipotezie energetycznej,
W_{af}	– gęstość energii odkształcenia na poziomie granicy zmęczenia,
W_{eqv}	– parametr gęstości energii zastępczej,
ν	– wsp. Poissona,
R_e	– granica plastyczności,
R_m	– wytrzymałość na rozciąganie,
E	– moduł sprężystości Younga,
δ	– kąt przesunięcia fazowego,
x_Z	– współczynnik bezpieczeństwa,
μ_t	– współczynnik tarcia potoczystego,
f	– promień tarcia potoczystego,
r	– promień elementu tocznego,
r_C	– promień kontaktu,

$a; b$	– półosie elipsy kontaktu,
$F; Q$	– obciążenie,
M_s	– moment napędowy,
R	– promień,
D	– średnica,
R_{Bar}	– promień zaokrąglenia powierzchni toczonej baryłki (większy z dwóch promieni głównych),
R_p	– promień zaokrąglenia bieżni,
ϕ	– kąt obrotu koła; równoważny funkcji czasu,
$\Theta_{r\phi}$	– kątowy obrót rozpatrywanej płaszczyzny względem układu $r - \phi$,
F_a	– obciążenie osiowe,
F_r	– obciążenie promieniowe,
h	– wymiar elementu kontaktowego w obszarze zagęszczenia,
n	– liczba elementów kontaktowych,

INDEKSY:

symbol	znaczenie
C	– hipoteza Crosslanda,
DV	– oryginalna hipoteza Dang Vana,
DV _{mod}	– zmodyfikowana hipoteza Dang Vana,
P ₁	– hipoteza Papadopoulosa oparta na wartości średniej stanu naprężenia,
P ₂	– hipoteza Papadopoulosa oparta na pojęciu płaszczyzny krytycznej,
E ₁	– kryterium maksymalnej wartości parametru gęstości energii odkształceń postaciowych i normalnych w płaszczyźnie Δ maksymalnej gęstości energii odkształceń normalnych,
E ₂	– kryterium maksymalnej wartości parametru gęstości energii odkształceń postaciowych i normalnych w płaszczyźnie Δ maksymalnej gęstości energii odkształceń postaciowych,
a	– amplituda,
m	– wartość średnia,
MAX	– wartość maksymalna,
MIN	– wartość minimalna,
V	– objętość,
aT	– zależne od czasu naprężenie amplitudalne (po odjęciu wartości średniej),
f	– wartość zmęczeniowa,
g	– zginanie,
s	– skręcanie,
B	– punkt Bielajewa,
$P - L$	– punkty Palmgren-Lundberga,
EST	– estymator błędu dyskretyzacji w systemie ANSYS [1],
EX	– rozwiązanie analityczne,

1. WSTĘP

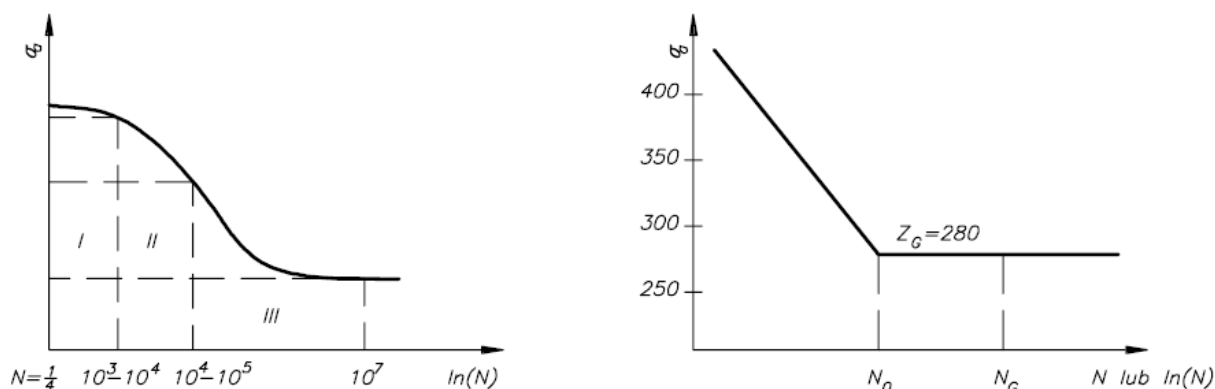
1.1 WPROWADZENIE DO TEMATYKI PRACY

Urządzenia i elementy maszyn często pracują w warunkach obciążeń zmiennych w czasie (cyklicznych, okresowo zmiennych, losowych). Wywołuje to odpowiadające danym obciążeniom zmiany naprężeń i odkształceń nazywanych dalej **naprężeniami** lub **odkształceniami zmęczeniowymi**. W konsekwencji, po przekroczeniu pewnego wyężenia i pewnej granicznej liczby cykli (odpowiadającej progowi naprężenia zmęczeniowego), prowadzi to do wystąpienia złożonego splotu zjawisk i zmian nazywanych **zmęczeniem materiału** (zmianami zmęczeniowymi). Powstające wskutek zmiennych obciążeń mikroszczeliny sukcesywnie rozwijają się i kumulują prowadząc do pęknięcia zmęczeniowego i zniszczenia elementu lub urządzenia. W procesie zmęczenia można wyróżnić dwie charakterystyczne fazy:

- 1) **inicjacja pęknięć** – w której pojawiają się lokalne efekty (szczeliny, pęknięcia) dotyczące ziaren materiału (skala mezoskopowa),
- 2) **rozwój pęknięć i zniszczenie** – w której powstałe zmiany są obserwowalne w skali makroskopowej.

Okres trwałości elementu uzależniony jest od poziomu naprężeń zmęczeniowych. Trwałość N_f liczona jest zazwyczaj w milionach cykli i można wyróżnić trzy jej zakresy – wykres Wöhlera (Rys.1.1) [2]:

- I) $N_f < 10^3 \div 10^4$ cykli - **pękanie quasi-statyczne** (wytrzymałość quasi-statyczna). Zakłada się, że naprężenia niszczące odpowiadają wytrzymałości statycznej. Proces zniszczenia ma najczęściej charakter plastyczny (statyczny) a pękanie następuje przy granicznym odkształceniu plastycznym. Odkształcenie to jest porównywalne z tym, które wystąpiłoby dla obciążenia statycznego. Przykładem takiego zniszczenia jest np. *ratcheting*.
- II) $N_f \in (10^3 \div 10^5)$ cykli – **zmęczenie niskocyklowe** (wytrzymałość niskocyklowa). Ten rodzaj zniszczenia charakteryzuje się występowaniem odkształceń plastycznych spowodowanych wysokim poziomem naprężeń (*alternating plasticity, plastic shakedown*).
- III) $N_f \in (10^5 \div 10^7)$ cykli – **zmęczenie wysokocyklowe** (wytrzymałość wysokocyklowa). Przy zmęczeniu wysokocyklowym złom ma charakter pęknięcia kruchego, co jest spowodowane niskim poziomem naprężeń zmęczeniowych. W skali makroskopowej odkształcenia plastyczne nie występują. Mogą wystąpić tylko w obrębie ziaren materiału (skala mezoskopowa). Zakres powyżej $N_f > 10^7$ cykli nazywa się obszarem **nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej**, która występuje w przypadku większości stali (nie występuje w przypadku stopów aluminium).



Rys.1.1 Pełny (po lewej) i uproszczony (po prawej) wykres Wöhlera z zaznaczonymi zakresami wytrzymałości zmęczeniowej [2]

W zakresie nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej, naprężenia zmęczeniowe są mniejsze od granicznych wartości naprężeń (tzw. **wytrzymałość zmęczeniowa**) wyznaczanych dla konkretnego materiału i charakteru obciążenia (zginanie, skręcanie, itp.). Należy również pamiętać, że wartości zarówno naprężeń dopuszczalnych jak i granicy zmęczenia N_f zależą nie tylko od gatunku materiału lecz także od: struktury materiału wynikającej z obróbki (np.: cieplnej, mechanicznej, technologii wytwarzania), cech geometrycznych, dynamicznych i stanu powierzchni. Uwzględniając dodatkowo losowy lub pseudolosowy charakter obciążenia oraz oddziaływania środowiska (korozja, promieniowanie, wpływ temperatury) **zmęczenie należy traktować jako zagadnienie stochastyczne**.

Granica zmęczenia najczęściej określana jest dla cykli wahadłowych (np. Z_{GO} – trwała wytrzymałość zmęczeniowa na zginanie obustronne), niekiedy także dla cykli odzerowo tętniących wahadłowych (np. Z_{SJ} – trwała wytrzymałość zmęczeniowa na jednostronne odzerowo tętniące skręcanie). W przypadku prostych, harmonicznym obciążeniach, naprężenia graniczne mogą zostać wyznaczone na podstawie odpowiednich wykresów (np. **Smitha, Haigha, Sorensena, Goldmana, Soderberga** [3]) uwzględniających wpływ naprężeń średnich na dopuszczalną amplitudę naprężeń.

Sytuacja komplikuje się w złożonym, wieloosiowym stanie zmiennego naprężenia, szczególnie z nieproporcjonalnymi obciążeniami. Istnieją wprawdzie teorie umożliwiające sumowanie naprężeń na podstawie określonej hipotezy [2,3,4], jednakże dotyczą one głównie jednoczesnego zginania i skręcania czy też rozciągania, skręcania i wewnętrznego ciśnienia. W przypadku bardziej złożonych stanów naprężeń należy korzystać z **hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego**. Bazują one na różnych teoriach: płaszczyzny krytycznej, niezmienników stanu naprężenia lub odkształcenia, wartości średnich naprężeń, energetycznych i empirycznych.

W odróżnieniu od hipotez wyteżenia doraźnego kryteria zmęczeniowe są wyraźnie mniej uniwersalne. Niektóre sprawdzają się lepiej nie tylko dla określonych materiałów, lecz również dla określonych przypadków obciążenia. Dlatego też, jeżeli nie mamy wyraźnych sugestii, korzystnie jest stosować kilka popularnych hipotez zmęczeniowych (np. Crosslanda, Dang Vana, Papadopoulosa, Łagody [5]) porównując ich rezultaty.

Przykładem zjawiska, w którym występuje złożony stan obciążenia z nieproporcjonalnie zmiennymi względem siebie naprężeniami jest **zmęczenie toczne**. Szczególnie istotne jest tutaj przesunięcie w fazie między naprężeniami normalnymi i stycznymi. Sytuację dodatkowo komplikują duże efekty ściskające w potencjalnych miejscach inicjacji pęknięć zmęczeniowych. Do elementów maszyn i urządzeń narażonych na zmęczenie toczne można zaliczyć np.: koła kolejowe i suwnicowe, szyny, elementy toczne w łożyskach, koła zębate oraz różnego rodzaju rolki nośne. Analiza zmęczeniowa wyżej wymienionych elementów jest obecnie możliwa przy użyciu wspomnianych hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego. Wymagane w tych kryteriach przebiegi naprężeń w czasie można wyznaczyć w niebezpiecznych przekrojach przy pomocy programów komputerowych opartych na metodzie elementów skończonych. Istotnym problemem merytorycznym okazuje się być jednak dobór odpowiedniej hipotezy trójosiowego zmęczenia wysokocyklowego.

1.2. CEL I ZAKRES PRACY

Cel pracy:

Przebadanie i porównanie współczesnych hipotez zmęczenia wysoko-cyklowego w stanie wieloosiowym. Analiza trójwymiarowego stanu wyteżenia zmęczeniowego w kontakcie tocznym elementów maszyn przy zastosowaniu tych hipotez. Wykorzystanie takiej analizy do modyfikacji kształtu konkretnych elementów maszyn i urządzeń.

Zakres pracy:

W pracy przedstawiona zostanie aplikacja współczesnych hipotez wieloosiowego zmęczenia wysoko-cyklowego do zjawiska kontaktu tocznego. Zostaną porównane ze sobą najpopularniejsze obecnie hipotezy (Crosslanda, Dang Vana, Papadopoulosa, Łagody) zarówno dla przypadków prostych obciążeń (zginanie; skręcanie; zginanie ze skręcaniem), jak również dla stanu obciążenia panującego w przypadku trakcyjnego tarcia tocznego. W pracy przewidziana jest modyfikacja kształtu przekroju koła suwnicowego pod kątem odporności na zmęczenie oraz analiza zmęczeniowa łożyska baryłkowego. Obliczenia przeprowadzone zostaną przy użyciu programu MES (ANSYS®) zarówno dla przypadku 2D jak i 3D. Zostaną wskazane hipotezy zmęczeniowe zalecane w przypadku analizy elementów maszyn pracujących warunkach kontaktu tocznego.

2. RYS HISTORYCZNY I PRZEGLĄD LITERATURY

2.1 RYS HISTORYCZNY ROZWOJU NAUKI O ZMĘCZENIU MATERIAŁÓW

Pierwsza praca nawiązująca do zjawiska zmęczenia została opublikowana przez Wilhelma Alberta [6] w 1837 roku. Dotyczyła ona testów zmęczeniowych łańcuchów przenośnikowych (*conveyor chains*) ulegających zniszczeniu w kopalniach w Clausthal na maszynie, która została specjalnie skonstruowana do tych badań. Efektem tych prac było wynalezienie liny drucianej.

W latach 1858-1860 August Wöhler [7,8] badał zjawisko niszczenia osi kolejowych dla 4-kołowych i 6-kołowych wagonów towarowych i pasażerskich. W tym celu mierzył obciążenie osi poprzez pomiar jej ugięcia. Na podstawie maksymalnej wartości określał naprężenia gnące i skręcające i porównywał je do obciążenia statycznego otrzymując w ten sposób współczynnik wpływu (*impact factor*) o wartości 1,33. Konkluzją jego pracy była propozycja **projektowania konstrukcji na ograniczoną trwałość zmęczeniową** opartą na określonej skończonej liczbie cykli i poziomie naprężeń maksymalnych.

W kolejnych pracach [9,10,11,12,13] (lata 1860-1870) Wöhler prezentował w postaci tabel wyniki badań zmęczeniowych (osiowe zginanie i skręcanie) dla osi kolejowych, próbek bez karbów oraz próbek z różnymi karbami. Efektem jego prac było sformułowanie „**prawa Wöhlera**”: „materiał może ulec uszkodzeniu wskutek cyklicznych zmian naprężeń, przy czym każde z nich jest mniejsze od wytrzymałości statycznej. Na zniszczenie spójności materiału decydujący wpływ ma amplituda naprężeń. Maksymalne naprężenia wpływają tylko w ten sposób, że im wyższa jego wartość tym mniejsza amplituda naprężenia prowadzącego do zniszczenia zmęczeniowego”. Zasygnalizował również konieczność stosowania dwóch współczynników bezpieczeństwa osobno dla obciążenia statycznego i zmęczeniowego. Pierwsze krzywe SN (nazywane od 1936r. wykresami Wöhlera) drukowane były przez Spangenberg [14,15,16] a następnie przez Basquina [17] w formie $\log \sigma - \log N$.

Po I-wszej wojnie światowej nastąpił gwałtowny wzrost prac i publikacji związanych z wytrzymałością zmęczeniową (w roku 1925 było 225 publikacji, w 1950 było 5000 a w 2000 ponad 20 tys. [18]. Po II-giej zjawisko zmęczenia badane było w każdym uprzemysłowionym kraju. Pod koniec lat 50-tych pojawiły się pierwsze propozycje hipotez uwzględniających złożony wieloosiowy stan naprężenia (Sines [19], Crossland [20]), które są rozwijane do dzisiaj.

W Polsce pierwsze publikacje na temat wytrzymałości zmęczeniowej ukazały się po 1937 roku i dotyczyły zagadnień: spiętrzenia naprężeń wskutek nieciągłości geometrycznych, wytrzymałości zmęczeniowo-kształtowej, obliczeń zmęczeniowych części maszyn. Rozważane zagadnienia opisane zostały w książce W. Moszyńskiego „Wytrzymałość zmęczeniowa części maszyn” [21] wydanej w 1953r. Na przełomie lat 50-tych i 60-tych badania zjawisk zmęczeniowych w metalach prowadziły ośrodki na Politechnice Wrocławskiej i Wojskowej Akademii Technicznej. Pojawiają się prace z makro- i mikrofraktografii prowadzone przez zespół S. Kocańdy [22], oraz publikacje

na temat programowanych badań zmęczeniowych [23,24,25]. W 1971 z inicjatywy S. Kocańdy powstał istniejący do dzisiaj Międzysekcyjny Zespół Zmęczenia i Mechaniki Pękania Materiałów i Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn PAN. Do najważniejszych prac należy zaliczyć:

- książkę S. Kocańdy „Zmęczeniowe pękanie metali” [26]
- książkę K. Sobczyka i B.F. Spencera Jr. „Stochastyczne modele zmęczenia materiałów” [27],
- pracę M. Skorupy „Modele doświadczalne w przewidywaniu wzrostu pęknięć zmęczeniowych w warunkach zmiennych amplitud obciążenia” [28].

W ostatnich latach odbyły się również w Polsce dwa światowe kongresy:

- The 5th International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue & Fracture – Kraków 1997 [29],
- The 14th European Conference on Fracture “FRACTURE MECHANICS BEYOND 2000” – Kraków 2002 [30].

Lista uczelni zajmujących się badaniem zjawisk zmęczenia metali oraz zakres ich specjalizacji wyszczególniona jest w pracy [18]. Badania związane z tematyką pracy doktorskiej (zmęczenie w warunkach wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego) prowadzone są głównie w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki i Politechnice Opolskiej. Badaniami zjawisk zmęczeniowych, w tym również krótkich pęknięć, zajmuje się również Wojskowa Akademia Techniczna.

2.2 PRZEGLĄD LITERATURY ZWIĄZANEJ Z WIELOOSIOWYM ZMĘCZENIEM WYSOKOCYKLOWYM

W urządzeniach i elementach maszyn najczęściej spotykany jest złożony wieloosiowy stan naprężenia. Często również zdarza się, że składowe tensora naprężenia zmieniają się niezależnie względem siebie. Prowadzi to do przesunięć w fazie pomiędzy odpowiednimi składnikami tego tensora. Tak się dzieje również w przypadku kontaktu toczonego, gdzie naprężenia tnące są przesunięte w fazie względem naprężeń normalnych. Fakt ten spowodował gwałtowny rozwój wieloosiowych hipotez wytrzymałości zmęczeniowej. Jako historyczną można tutaj wymienić publikację Sinesa z 1959 roku [19], w której autor zaproponował nowy sposób oceny wytrzymałości zmęczeniowej konstrukcji na podstawie niezmienników stanu naprężenia. Jednakże znaczenie tej pracy jest już wyłącznie historyczne. Kolejne lata to rozwój i pojawianie się nowych hipotez. Mniej więcej w tym samym okresie co Sines - (1956) Crossland sformułował podobne kryterium różniące się tylko wpływem naprężenia hydrostatycznego, które przyjął w swojej formule z wartością maksymalną [31].

Jednym z najbardziej popularnych kryteriów jest hipoteza Dang Vana z 1973 roku [32], która bazuje na pojęciu płaszczyzny krytycznej i zakłada, że uszkodzenie zmęczeniowe wystąpi wówczas, gdy krzywa obciążenia (będąca funkcją naprężenia tnącego $\tau(t)$ i naprężenia hydrostatycznego $\sigma_H(t)$) wykracza poza obszar dopuszczalny. Głównym założeniem tej hipotezy jest fakt, że do inicjacji pęknięć dochodzi wewnątrz ziaren materiału. Jej mezoskopowe ujęcie przewiduje lokalne mikrouplastycznienia (poślizgi) w ziarnach, podczas gdy makroskopowo materiał pozostaje sprężysty. Pracę na temat określania płaszczyzny krytycznej można również znaleźć w polskiej literaturze [33]. Często proponowane do aplikacji do zjawisk toczonego jest również kryterium zaproponowane przez Papadopoulosa z 2001 roku [34]. W pracy analizowano zjawisko zmęczenia toczonego również przy pomocy hipotezy uwzględniającej parametr energetyczny zaproponowany przez Łagodę [35,36]. Wymienione powyżej hipotezy zostaną przedstawione w pracy wraz z aplikacją do prostych obciążeń, jak również do zjawiska tarcia toczonego.

Szczegółowy podział (przedstawiony we wprowadzeniu) wraz z opisami hipotez wieloosiowego zmęczenia wysoko-cyklowego można znaleźć na przykład w pracy B. Webera

[37], natomiast zestawienie i porównanie najpopularniejszych z nich w pracach: Papadopoulosa [38], Bong-Ryul Yoy [39] oraz Qilafku [40].

Bardzo interesującą pozycją jest również książka autorstwa Dahlberga i Ekberga z 2001 [41] na temat zagadnień związanych z wytrzymałością zmęczeniową. W książce zaprezentowane są problemy związane z rozwojem pęknięć, jak również aplikacja kryterium Dang Vana i Crosslanda do konkretnych przypadków.

Z polskich pozycji można tutaj wymienić: prace Machy [42], w tym wymienioną już wcześniej publikację [33], w której można również znaleźć zestawienie hipotez w polskiej wersji językowej, oraz rozprawę doktorską Mrzygłoda (2005) z aplikacją hipotez wieloosiowego zmęczenia wysoko-cyklowego dla obciążeń w fazie [43].

Często się zdarza, że te hipotezy wymagają określenia amplitudy i wartości średnich naprężeń, co w pewnych przypadkach nie jest jednoznaczne i może prowadzić do zakłócenia wyników. Proponowane są trzy metody określania wartości średnich naprężeń: najdłuższej cięciwy (średnicy), najdłuższej projekcji i ograniczającego okręgu. Informacje na ten temat dostępne są w artykułach: Bernasconiego z (2002) [44] i z (2005) roku [45].

Jednym z możliwych zastosowań wymienionych hipotez wieloosiowego zmęczenia wysoko-cyklowego jest ich aplikacja do zjawiska kontaktu tocznego (*rolling contact fatigue*). Zjawisko to w literaturze jest dość popularne, jednakże większość prac dotyczy zmęczenia kół kolejowych; np.: aplikacja kryterium Dang Vana do kół kolejowych [46] [47]; wyniki eksperymentalne badań wytrzymałości zmęczeniowej kół kolejowych oraz porównanie z wynikami analitycznymi uzyskanymi z hipotez Dang Vana, Papadopoulosa oraz Liu [48]; propozycja nowego kryterium wysokocyklowego dla kół kolejowych [49]; aplikacje kryterium Dang Vana do czystego toczenia oraz tarcia tocznego [50], w tym krytyka kryterium Dang Vana [51]; aplikacja hipotezy Dang Vana do zjawiska zmęczenia szyny kolejowej [52] oraz problemy związane z anizotropią i zmęczeniem kół kolejowych [53].

Aplikacja kryteriów wymaga określenia przebiegów naprężeń w funkcji czasu, a nieraz również ich amplitudy. Uzyskanie ich umożliwia zastosowanie Metody Elementów Skończonych (MES). Szczególnie korzystne okazują się tutaj hipotezy bazujące na niezmiennikach stanu naprężenia lub wartościach średnich naprężeń (odkształceń) gdyż mogą one zostać bezpośrednio zaimplementowane do programów numerycznych, co upraszcza i przyspiesza analizy, a w szczególności optymalizację. Jako przykład można tutaj wymienić wspomnianą już wcześniej rozprawę Mrzygłoda [43], w której autor zaproponował metodykę implementacji hipotez Sinesa, Crosslanda i Dang Vana do systemu ANSYS®. Podobnie postąpiono w pracy [54], w której zastosowano hipotezę Dang Vana.

W pracy [55] MES służy jako narzędzie do modelowania rozwoju pęknięć zmęczeniowych w spiekanej stali. MES może być również wykorzystany do analizy różnorodnych zjawisk występujących w elementach maszyn [56].

W zakresie badań na temat inicjacji pęknięć zmęczeniowych w kołach można wymienić następujące prace: analiza numeryczna wpływu uszkodzeń [57]; wpływ wielkości uszkodzenia [58]; wpływ przeciążeń i kumulacji uszkodzeń [59] na zmęczenie koła kolejowego. Wpływ różnych parametrów (korozja, obciążenie termiczne, wpływu smarowania, defektów powierzchniowych) na zmęczenie i rozwój pęknięć w kole i szynie kolejowej zaprezentował A. Ekberg w [60], natomiast sposób modelowania (MES) pęknięć podpowierzchniowych w kole kolejowym można zaobserwować w [61].

W pracy [62] przedstawiony został sposób na przewidywanie pęknięć przy użyciu kryterium Dang Vana i użyciu modelu Chaboche'a do modelu MES. W [63] zaprezentowana została metoda przewidywania trwałości zmęczeniowej dla niskocyklowych zagadnień kontaktu tocznego oparta na koncepcji płaszczyzny krytycznej. Natomiast w [64] przedstawiona została numeryczna procedura przewidywania inicjacji pęknięć zmęczeniowych w elementach będących w kontakcie tocznym.

Istnieją również inne kryteria przeznaczone do aplikacji w zjawiskach kontaktu tocznego jak na przykład zaproponowana w [65] hipoteza dla stali Hadfielda (stosowana na rozjazdy i skrzyżowania kolejowe). Godny uwagi jest też artykuł nie związany jednoznacznie z kontaktem

tocznym [66], jednakże opisuje on sposób przewidywania inicjacji pęknięć zmęczeniowych elementów nieruchomych o zmiennym obciążeniu (*standing contact fatigue*) pracujących w kontakcie. Stosowano tu porównawczo hipotezy Dang Vana, Sinesa, głównych naprężeń Haigha, Lindleya, Mc Diarmida.

3. KRYTERIA WIELOOSIOWEGO ZMĘCZENIA WYSOKOCYKLOWEGO

3.1. KRYTERIUM CROSSLANDA (C)

Kryterium Crosslanda [31] zakłada liniową zależność pomiędzy dopuszczalną amplitudą naprężeń a maksymalną wartością naprężenia hydrostatycznego. Dla liniowej zależności między obciążeniami a naprężeniami równanie Crosslanda jest następujące [43]:

$$\tau_c = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{HMH,a} + a_c \cdot \sigma_{H,MAX} \leq Z_{SO} \quad (3.1.1)$$

gdzie:

$$a_c = \begin{cases} 0 & \text{dla } \frac{3Z_{SO}}{Z_{GO}} \leq \sqrt{3} \\ \left(\frac{3Z_{SO}}{Z_{GO}} - \sqrt{3} \right) & \text{dla } \frac{3Z_{SO}}{Z_{GO}} > \sqrt{3} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

$$\sigma_{HMH,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{x,a} - \sigma_{y,a})^2 + (\sigma_{y,a} - \sigma_{z,a})^2 + (\sigma_{z,a} - \sigma_{x,a})^2 + 6(\tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{zx,a}^2)} \quad (3.1.3)$$

$$\sigma_{H,MAX} = \max_t \left[\frac{\sigma_1(t) + \sigma_2(t) + \sigma_3(t)}{3} \right] \quad (3.1.4)$$

Z_{GO} , Z_{SO} – trwała wytrzymałość zmęczeniowa, odpowiednio na zginanie i skręcanie obustronne

Kryterium to dobrze nadaje się do określania wytrzymałości zmęczeniowej w strukturach o przewadze ścinania. Pewnym jego mankamentem jest znikomy wpływ naprężeń hydrostatycznych dla materiałów charakteryzujących się własnością $Z_{SO} \approx 0,6 \cdot Z_{GO}$ (wskutek małej wartości współczynnika a_c występującego przy naprężeniach hydrostatycznych). Oczywiście wartość a_c nie może być ujemna, ponieważ oznaczałoby to, że rozciąganie wpływa korzystnie na proces zamykania mikroszczelin. W przypadku, gdy $Z_{SO} < \frac{\sqrt{3}}{3} Z_{GO}$ przyjmuje się wartość $a_c = 0$ (3.1.2).

O zniszczeniu obiektu decyduje maksymalne naprężenie zastępcze:

$$\tau_c^{MAX} = \max_V \{ \tau_c \} \leq Z_{SO} \quad (3.1.5)$$

gdzie:

V – przestrzeń badanego obiektu.

Należy zwrócić uwagę, że kryterium Crosslanda jest modyfikacją kryterium Sinesa [67]. W tym pierwotnym kryterium wieloosiowego zmęczenia we wzorze (3.1.1) w miejsce $\sigma_{H,MAX}$ występowało naprężenie średnie $\sigma_{H,m}$. Hipoteza Sinesa była słabiej zgodna z badaniami eksperymentalnymi i została wyparta przez hipotezę Crosslanda.

Dla proporcjonalnych obciążeń, gdy kierunki główne nie ulegają zmianie (naprężenia są zgodne w fazie), drugi niezmiennik ($\sigma_{HMH,a}$) można obliczyć z naprężeń głównych, tak jak w pracy [43]. Natomiast *dla obciążeń nie będących w fazie amplituda poszczególnych naprężeń głównych nie ma sensu fizycznego*. Jest to spowodowane zmiennością kątów orientacji

kierunków głównych dla różnych chwil czasu t . W takiej sytuacji autor niniejszej pracy proponuje w przypadku kryterium Crosslanda postępować następująco:

1. Określamy zmiany składowych stanu naprężenia tzn. tensor $\sigma(t)$ w badanych punktach obiektu w czasie t ,
2. Obliczamy wartość wyężenia zmęczeniowego τ_C w pewnym punkcie P_i badanego obiektu:

- a) Obliczamy tensor wartości średnich naprężeń:

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma_{x,m} & \tau_{xy,m} & \tau_{xz,m} \\ \tau_{yx,m} & \sigma_{y,m} & \tau_{yz,m} \\ \tau_{zx,m} & \tau_{zy,m} & \sigma_{z,m} \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

na podstawie całych przebiegów naprężeń w czasie t , osobno dla każdej składowej (szczegóły w załączniku),

- b) Dla każdej chwili czasu t wyznaczamy zmienny w czasie tensor naprężeń amplitudalnych:

$$\sigma_{aT} \equiv \sigma_{aT}(t) = \sigma(t) - \sigma_m \quad (3.1.7)$$

np. dla naprężenia $\sigma_{x,aT}$:

$$\sigma_{x,aT} \equiv \sigma_{x,aT}(t) = \sigma_x(t) - \sigma_{x,m} \quad (3.1.8)$$

i analogicznie dla pozostałych składowych tensora naprężenia amplitudalnego σ_{aT} .

- c) Następnie obliczana jest wartość amplitudy $\sigma_{HMH,a}$ wg formuły:

$$\sigma_{HMH,a} = \max_t \left[\frac{\sqrt{(\sigma_{x,aT} - \sigma_{y,aT})^2 + (\sigma_{y,aT} - \sigma_{z,aT})^2 + (\sigma_{z,aT} - \sigma_{x,aT})^2 + 6(\tau_{xy,aT}^2 + \tau_{yz,aT}^2 + \tau_{zx,aT}^2)}}{\sqrt{2}} \right] \quad (3.1.9)$$

Niezależnie od $\sigma_{HMH,a}$ szukamy maksymalnej wartości $\sigma_{H,MAX}$ wg formuły:

$$\sigma_{H,MAX} = \max_t \left[\frac{1}{3} (\sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \sigma_z(t)) \right] \quad (3.1.10)$$

- d) Wstawiamy maksymalne wartości $\sigma_{HMH,a}$ i $\sigma_{H,MAX}$ do wzoru (3.1.1), otrzymując τ_C w punkcie P_i ,

UWAGA: Wartości $\sigma_{HMH,a}$ i $\sigma_{H,MAX}$ mogą wystąpić w różnych chwilach czasowych.

3. Poszukujemy maksimum τ_C^{MAX} (3.1.5) w przestrzeni badanego obiektu powtarzając powyższe obliczenia dla innych jego punktów,
4. Porównujemy wartość τ_C^{MAX} z wartością dopuszczalną Z_{SO} .

3.2. KRYTERIUM DANG VANA

3.2.1 ORYGINALNA WERSJA HIPOTEZY DANG VANA (DV)

Do obliczeń zmęczeniowych zastosowano popularne kryterium DV [52,68]. Należy ono do grupy hipotez bazujących na mezoskopowym podejściu płaszczyzny krytycznej [33]. Zakłada, że uszkodzenie zmęczeniowe wystąpi wówczas, gdy krzywa obciążenia (będąca funkcją makroskopowego naprężenia stycznego $\tau(t)$ i naprężenia hydrostatycznego $\sigma_H(t)$) wykracza poza obszar dopuszczalny określony nierównością:

$$\tau_{DV} = \tau(t) + a_{DV} \cdot \sigma_H(t) \leq Z_{SO} \quad (3.2.1)$$

gdzie współczynnik występujący przy naprężeniu hydrostatycznym:

$$a_{DV} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \frac{3Z_{SO}}{Z_{GO}} \leq 1,5 \\ \left(\frac{3Z_{SO}}{Z_{GO}} - 1,5\right) & \text{dla } \frac{3Z_{SO}}{Z_{GO}} > 1,5 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

oraz:

$\tau(t)$ – skalarne naprężenia styczne liczone wg odpowiedniej formuły (3.2.5) lub (3.2.7)

$$\sigma_H = \frac{1}{3}(\sigma_1(t) + \sigma_2(t) + \sigma_3(t)) \quad \text{- naprężenie hydrostatyczne} \quad (3.2.3)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – naprężenia główne

Z_{GO}, Z_{SO} – trwała wytrzymałość zmęczeniowa, odpowiednio na zginanie i skręcanie obustronne

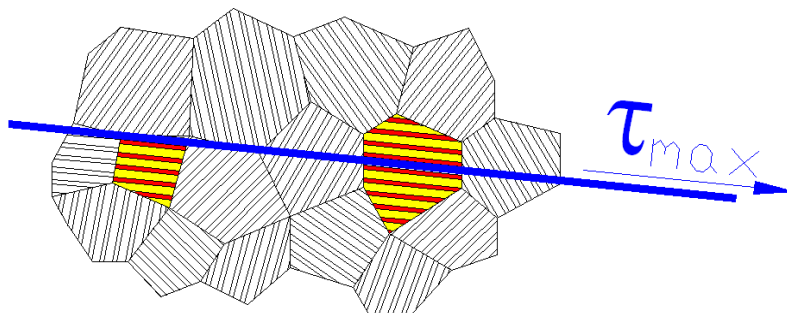
Głównym założeniem tej hipotezy jest fakt, że do inicjacji pęknięć dochodzi wewnątrz poszczególnych ziaren materiału. Może tak się zdarzyć w momencie, gdy wewnątrz ziarna, w kierunku płaszczyzny najłatwiejszego poślizgu (Rys.3.2.1) wartość τ_{max} (sumy zewnętrznych naprężeń stycznych τ_z oraz wewnętrznych naprężeń resztkowych τ_{res}) przekroczy lokalnie granicę plastyczności. Wywołuje to uplastycznienia w skali mezoskopowej, podczas gdy w skali makroskopowej może nadal występować stan sprężysty.

Jak widać, kryterium DV wymaga zazwyczaj określenia płaszczyzny, w której zastępcze naprężenia styczne osiągają maksimum. Ponieważ σ_H jest niezmiennikiem, o położeniu płaszczyzny krytycznej Δ_{KR} decyduje skalarna wartość określająca długość wektora τ_{ns} na przeszukiwanych płaszczyznach (patrz Rys.3.2.2). Dla tej płaszczyzny kryterium przybiera postać [43,69,70,71]:

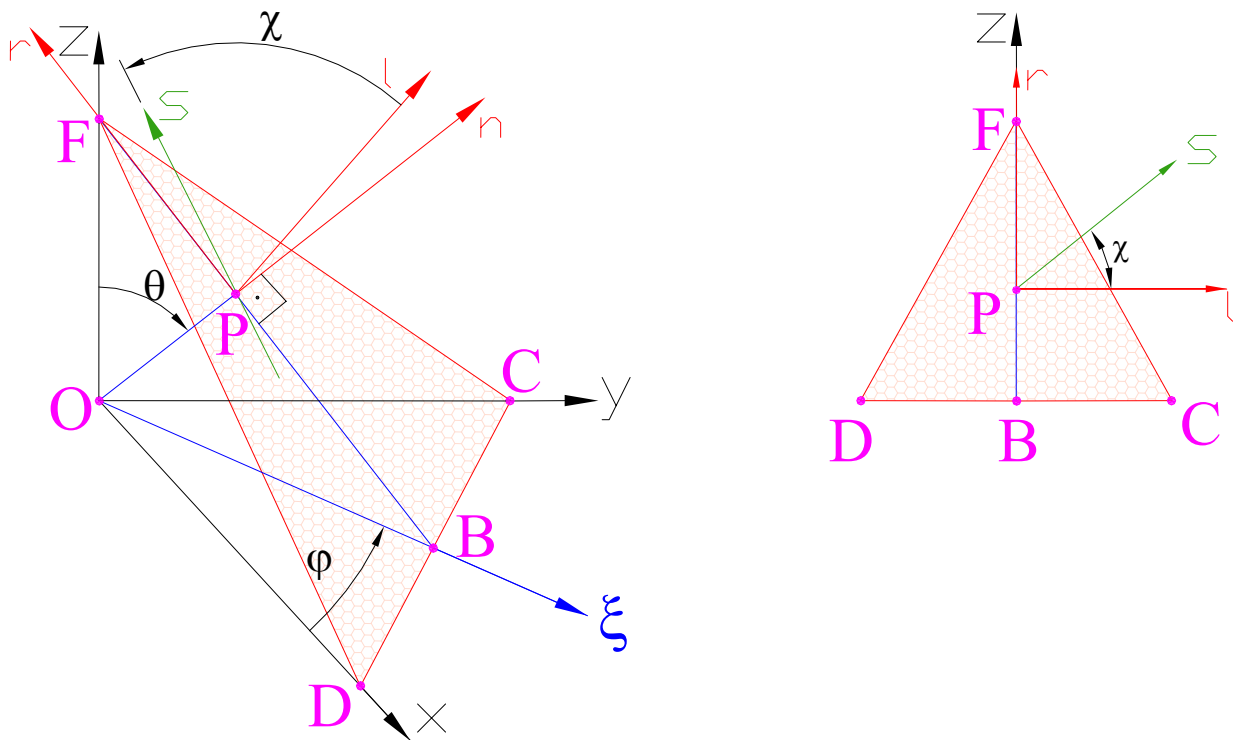
$$\tau_{DV}^{MAX} = \max_{V,t} \{\tau_{DV}\} \leq Z_{SO} \quad (3.2.4)$$

gdzie:

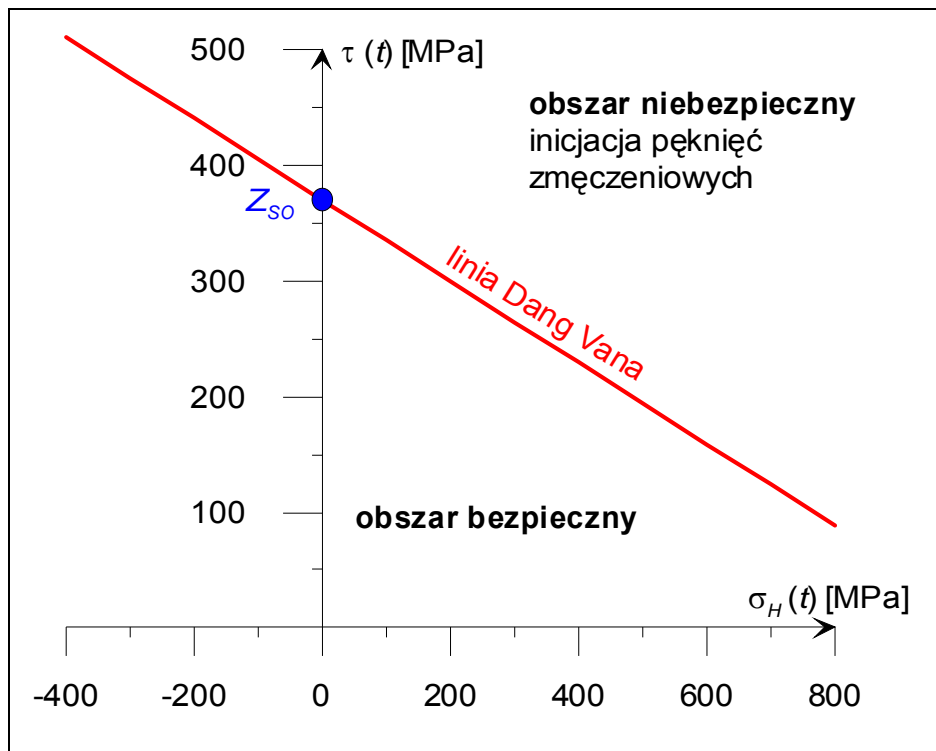
V – badany obszar



Rys.3.2.1 Uplastycznienie ziaren w przypadku przekroczenia dopuszczalnej wartości amplitudy naprężeń stycznych w kierunku płaszczyzny łatwego poślizgu.



Rys.3.2.2 Orientacja płaszczyzny materiałowej $\Delta(CDF)$ przechodzącej przez punkt O (punkt P zmierza do punktu O); orientację Δ definiują dwa kąty: $\Delta(\varphi, \theta)$ a kąt χ definiuje kierunek wektora \vec{s} na płaszczyźnie Δ ; wektor \vec{n} jest prostopadły do płaszczyzny Δ



Rys.3.2.3 Graficzna interpretacja hipotezy DV (3.2.1) na przykładzie stali 30CrNiMo8

Graficzna interpretacja hipotezy DV (3.2.1) została przedstawiona na Rys.3.2.3 w układzie $\tau - \sigma_H$, na przykładzie stali 30CrNiMo8 ($Z_{SO} = 370$ MPa, $Z_{GO} = 549$ MPa, współczynnik występujący przy naprężeniach hydrostatycznych ma wartość $a_{DV} = 0,522$). Czerwona linia Dang Vana opisana jest równaniem (3.2.1) a jej nachylenie zależy od współczynnika a_{DV} . W sensie hipotezy DV obszar pod tą linią jest uznawany jako bezpieczny. Jeżeli jakkolwiek punkt historii obciążenia wyjdzie ponad linię DV, przyjmuje się, że w materiale dojdzie do inicjacji i rozwoju pęknięcia zmęczeniowego.

W trakcie obliczeń wykorzystano dwie interpretacje kryterium DV. W pierwszej (DV_1) do wzoru (3.2.1) w miejsce naprężeń tnących $\tau(t)$ wstawiano funkcję wartości naprężeń amplitudalnych $\tau_{a,T}$ (indeks T oznacza zależność od czasu) wyznaczanych w odpowiednich płaszczyznach materiałowych Δ (Rys. 3.2.2):

$$\tau_{a,T} \equiv \tau_{a,T}(t) = |\tau_{ns}(t) - \tau_{ns,m}| \quad (3.2.5)$$

gdzie:

$\Delta = \Delta(\varphi, \theta)$ - płaszczyzna materiałowa,

$\tau_{ns}(t) = \tau(\varphi, \theta, \chi, t) \Big|_{\Delta, \chi = \text{const}}$ - naprężenie styczne w płaszczyźnie Δ ,
w kierunku zdefiniowanym kątem χ ,

$\tau_{ns,m}$ - wartość średnia naprężenia stycznego $\tau_{ns}(t)$ w płaszczyźnie Δ .

W pracy wartość średnią naprężenia stycznego w płaszczyźnie Δ liczono wg:

$$\tau_{ns,m} = \frac{\max_t\{\tau_{ns}(t)\} + \min_t\{\tau_{ns}(t)\}}{2} \quad (3.2.6)$$

W przypadku bardziej złożonych przebiegów naprężeń (np. zagadnienia 3D) można zastosować do określenia wartości średniej i amplitudy naprężeń jedną z trzech metod: najdłuższej cięciwy (średnicy), najdłuższej projekcji, okręgu ograniczającego. Ich opis można znaleźć np. w pracy [45].

Nie należy mylić funkcji $\tau_{a,T}$ z amplitudą $\tau_a = \max|\tau_{a,T}|$. Funkcja $\tau_{a,T}$ określa przebiegi w czasie naprężeń stycznych $\tau_{ns}(t)$ po odjęciu wartości średnich (patrz wzór 3.2.5) wyznaczonych w konkretnych płaszczyznach krytycznych. Orientacja płaszczyzny krytycznej w tej interpretacji jest tak dobrana, aby suma naprężeń amplitudalnych i hydrostatycznych $\tau_{a,T} + a_{DV} \cdot \sigma_H(t)$ była maksymalna. W przypadku przestrzennego stanu naprężenia można również użyć 9-parametrowej transformacji trójwymiarowej (trzy kąty - względem każdej z osi).

Przy stosowaniu hipotezy DV autor pracy proponuje następujący tok postępowania:

- 1) Określenie zmian składowych stanu naprężenia w badanych punktach w czasie,
- 2) Wyznaczenie $\tau_{DV}^{MAX(P_i)}$ jako maksymalnej wartości $\tau_{DV}(t)$ w badanym punkcie P_i i określenie w jakiej płaszczyźnie materiałowej $\Delta = \Delta(\varphi, \theta)$ tego punktu oraz w jakim kierunku $\tau_{DV}^{MAX(P_i)}$ wystąpi (płaszczyzna Δ_{KR} jest nazywana płaszczyzną krytyczną punktu P_i , a kierunek $\tau_{ns}(t)$ na tej płaszczyźnie określa kąt χ):
 - a) Obliczenie naprężenia tnącego $\tau_{ns}(t)$ w punkcie P_i , w kierunku \vec{s} określonego kątem χ na rozpatrywanej płaszczyźnie materiałowej Δ określonej przez kąty transformacji - φ, θ ,
 - b) Obliczenie w punkcie P_i wartości średniej $\tau_{ns,m}$ naprężenia tnącego (3.2.6) w płaszczyźnie Δ , w kierunku \vec{s} określonego kątem χ

- c) Obliczenie w płaszczyźnie Δ i w kierunku \vec{s} określonego kątem χ , punktu P_i , naprężenia stycznego amplitudalnego $\tau_{a,T}$ w funkcji czasu t według formuły (3.2.5),
 - d) Obliczenie w punkcie P_i naprężenia hydrostatycznego σ_H (3.2.3) w funkcji czasu t ,
 - e) Obliczenie w płaszczyźnie Δ i w kierunku \vec{s} określonego kątem χ , punktu P_i , zastępczego naprężenia zmęczeniowego $\tau_{DV}(t)$ (3.2.1) i porównanie z wartościami uzyskanymi dla innych orientacji płaszczyzny materiałowej Δ oraz innych wartości kąta χ (kątem ten określa kierunek naprężenia $\tau_{\Delta}(t)$) punktu P_i ; obliczenie maksimum naprężenia,
- 3) Obliczenie i porównanie maksymalnych wartości $\tau_{DV}^{MAX(P_i)}$ uzyskanych w różnych punktach badanego obszaru. Określenie miejsca w którym wystąpiło maksymalne zastępcze naprężenie zmęczeniowe $\tau_{DV}^{MAX} = \max\{\tau_{DV}^{MAX(P_i)}\}$, jako punktu inicjacji pęknięcia zmęczeniowego. W ten sposób określona będzie również płaszczyzna materiałowa (krytyczna), w której to pęknięcie nastąpi.

Powyższy tok działania określany będzie dalej jako DV₁. W literaturze można znaleźć również drugą hipotezę DV w formie DV₂. W tym przypadku odchodzi się od pojęcia płaszczyzny krytycznej i do wzoru (3.2.1) w miejsce $\tau(t)$ wstawia się maksymalne, zawsze dodatnie, naprężenia tnące τ_{TG} w sensie hipotezy Tresca - Guesta [46] (estymacja na korzyść pewności):

$$\tau(t) = \tau_{TG}(t) = \frac{\sigma_I(t) - \sigma_{III}(t)}{2} \quad (3.2.7)$$

gdzie:

$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ – naprężenia główne uporządkowane.

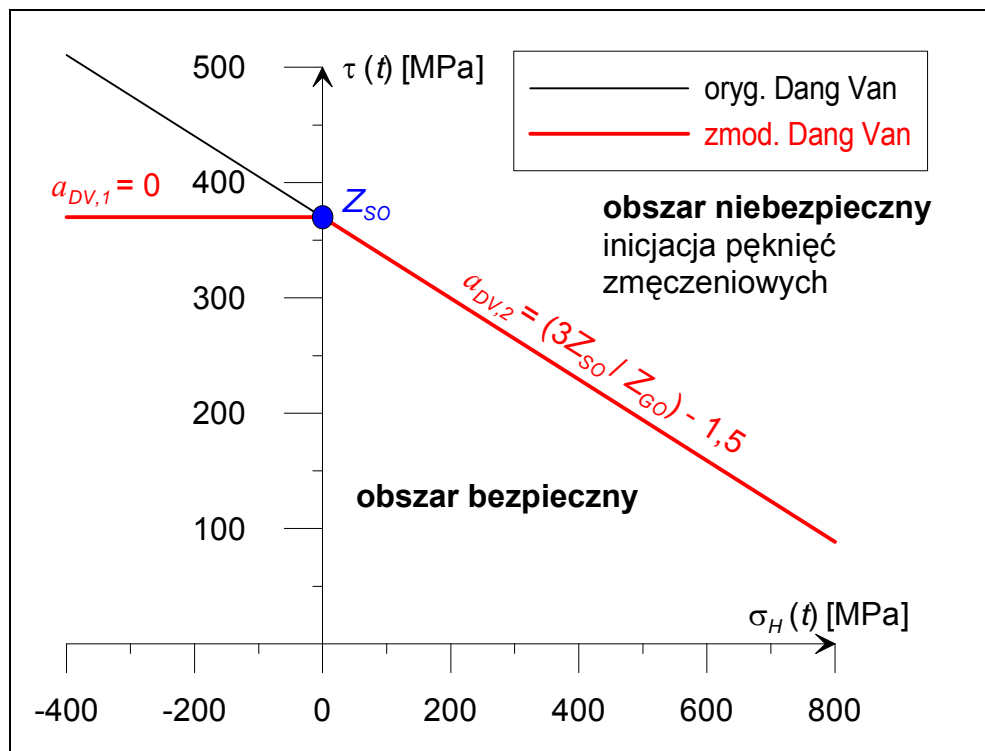
Podstawowa forma hipotezy DV, odnosi się do amplitudy naprężeń tnących, w związku z czym poprawniejsze jest zastosowanie pierwszego sposobu. Czasami jednak zdarza się sytuacja, w której trudno jednoznacznie określić co jest wartością średnią naprężeń tnących a co jest amplitudą. Wtedy bezpieczniejsze wydaje się być podejście DV₂, które oszacowuje wartość naprężeń zmęczeniowych τ_{DV2} od góry.

Wersja ta może okazać się również przydatna w przypadku analizy zmęczeniowej skomplikowanych elementów. Można wtedy przy pomocy DV₂ wstępnie określić potencjalne miejsca inicjacji pęknięć. Zaletą tej wersji metody jest łatwa możliwość zaimplementowania jej do programu ANSYS®.

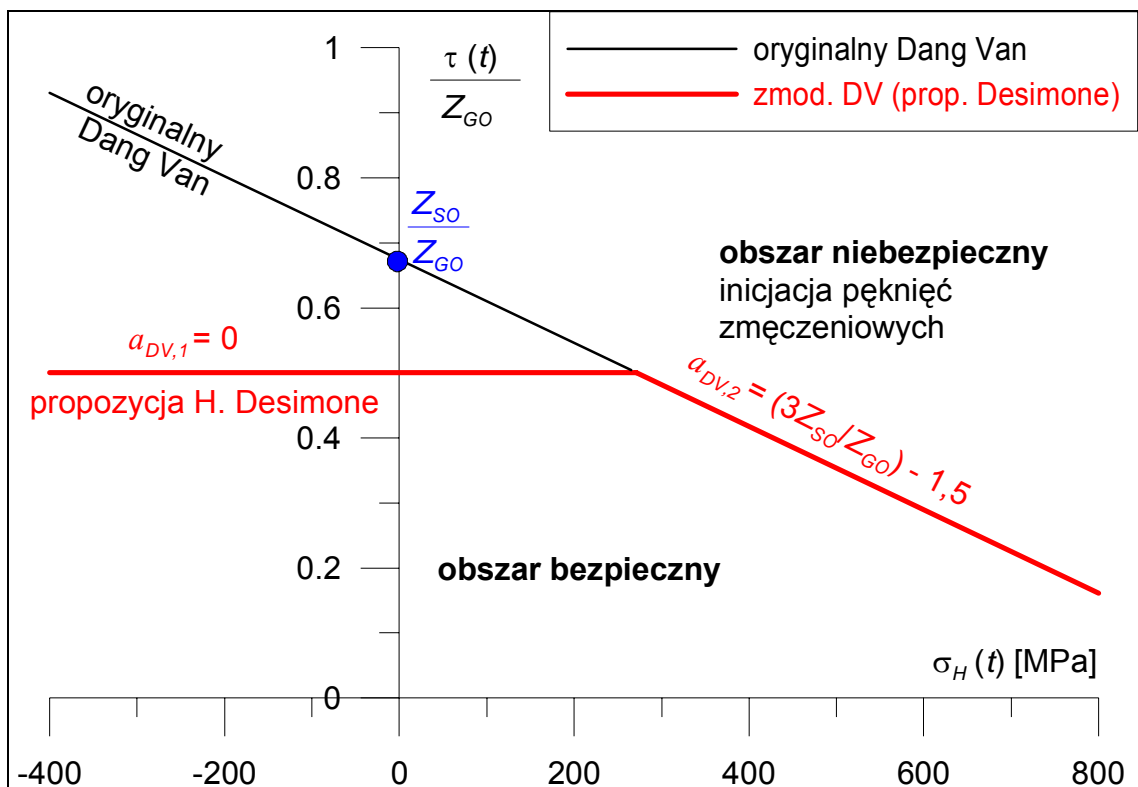
3.2.2 ZMODYFIKOWANA WERSJA KRYTERIUM DANG VANA

Dang Van w swojej hipotezie założył, że ściskanie, zamykając mikroszczeliny, korzystnie wpływa na zjawisko zmęczenia materiału. W zależności od twardości materiału prowadzi to do odpowiedniego zmniejszenia zastępczego wyteżenia zmęczeniowego obiektów pracujących w warunkach wysokiego ściskania. Dotyczy to między innymi elementów maszyn i urządzeń wykonanych z twardych materiałów i pracujących w warunkach wzajemnego kontaktu tocznego. To założenie jest obecnie krytykowane w kilku pracach z ostatnich lat, głównie związanych z analizą kół i szyn kolejowych. Uważa się, że wpływ ściskania został w przypadku kontaktu tocznego przeszacowany [48,51]. Jedną z propozycji modyfikacji hipotezy DV jest pominięcie wpływu efektów ścisających poprzez przyjęcie współczynnika $a_{DV} = 0$ dla ujemnych wartości naprężeń hydrostatycznych $\sigma_H < 0$ (Rys.3.2.4) [51]:

$$\tau_{DVmod}^{MAX} = \max_{V,t} \left\{ \begin{array}{ll} [\tau(t) + a_{DV} \cdot \sigma_H(t)] & \text{dla } \sigma_H \geq 0 \\ \tau(t) & \text{dla } \sigma_H < 0 \end{array} \right\} \leq Z_{SO} \quad (3.2.8)$$



Rys.3.2.4 Modyfikacja hipotezy Dang Vana (DV_{mod}) polegająca na pominięciu ściskających efektów hydrostatycznych w formule DV (3.2.1), na przykładzie stali 30CrNiMo8.



Rys.3.2.5 Modyfikacja hipotezy Dang Vana proponowana przez Desimone [51] na przykładzie stali 30CrNiMo8.

Powyższa zmodyfikowana wersja hipotezy Dang Vana została użyta do obliczeń zmęczenia tocznego koła suwnicy. W przypadku elementów obciążonych w taki sposób, że $\sigma_{H,MAX} = 0$ (np.: toczenie bez tarcia) kryterium DV_{mod} , podobnie jak hipotezy Crosslanda i Papadopoulosa, nie uwzględnia naprężeń hydrostatycznych. W tej sytuacji porównywana jest wartość zastępczego naprężenia tnącego z trwałą wytrzymałością zmęczeniową na skręcanie obustronne (Z_{SO}).

Dalsze ograniczenia proponują autorzy w pracy [51]. W oparciu o badania eksperymentalne dla gładkich próbek ze stali w stanie ulepszonym cieplnie zalecają oni nie tylko pominięcie wpływu ściskających naprężeń hydrostatycznych ($a_{DV} = 0$ dla $\sigma_H < 0$) lecz także ograniczenie obszaru bezpiecznego do wartości związanej z trwałą wytrzymałością na obustronne zginanie - $\frac{\tau_{max}(t)}{Z_{GO}} = 0,5$ (Rys.3.2.5). Należy jednak zauważyć, że dla takich stali proponowana przez Desimone [51] wersja hipotezy DV zakłada niższą wytrzymałość zmęczeniową dla obciążeń z $\sigma_H \approx 0$ niż wynika to z badań (dla stali stosunek $\frac{Z_{SO}}{Z_{GO}}$ zwykle jest większy od 0,5). Wersja ta może być ewentualnie stosowana jako hipoteza z większym zapasem bezpieczeństwa niż oryginalna formuła DV.

3.3. KRYTERIA PAPADOPOULOSA

W zaproponowanych przez siebie hipotezach (P_1 i P_2 – patrz punkty 3.3.1 i 3.3.2) Papadopoulos wprowadził uogólnioną miarę amplitudy naprężeń stycznych (T_a) będącą funkcją kątów φ i θ definiujących położenie płaszczyzny materiałowej Δ (Rys.3.2.2). Jest to znaczącą różnicą w porównaniu z kryterium Dang Vana. W obu przedstawionych hipotezach Papadopoulosa naprężenia hydrostatyczne (3.3.1) przyjmowane są z wartością maksymalną podobnie jak w hipotezie Crosslanda.

$$\sigma_{H,MAX} = \max_{t \in P} \left[\frac{\sigma_1(t) + \sigma_2(t) + \sigma_3(t)}{3} \right] \quad (3.3.1)$$

W celu wyznaczenia wielkości T_a należy najpierw, podobnie jak w hipotezie DV, określić zmianę skalarnej wartości naprężeń stycznych τ w badanej płaszczyźnie materiałowej Δ (\mathbf{n} – wektor jednostkowy normalny do powierzchni Δ , \mathbf{s} – wektor jednostkowy leżący w płaszczyźnie Δ , zdefiniowany kątem χ - Rys.3.2.2):

$$\tau = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s} \quad (3.3.2)$$

co w rozwinięciu można zapisać:

$$\tau(\varphi, \theta, \chi, t) = \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \sigma_x(t) + \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \tau_{yx}(t) + \cos \theta \cdot \tau_{zx}(t) \right) \cdot (-\sin \varphi \cdot \cos \chi - \cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \chi) + \\ &+ \left(\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \tau_{xy}(t) + \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \sigma_y(t) + \cos \theta \cdot \tau_{zy}(t) \right) \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \chi - \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \sin \chi) + \\ &+ \left(\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \tau_{xz}(t) + \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \tau_{yz}(t) + \cos \theta \cdot \sigma_z(t) \right) \cdot (\sin \theta \cdot \sin \chi) \end{aligned}$$

Zależność (3.3.3) określa naprężenie styczne τ w funkcji poszczególnych składowych tensora naprężeń dla dowolnego położenia płaszczyzny materiałowej Δ i wektora \vec{s} . Dla ustalonej płaszczyzny Δ (definiowanej przez φ i θ) można wyznaczyć amplitudę τ_a naprężeń stycznych τ (działających na Δ wzdłuż \vec{s}) przy użyciu formuły:

$$\tau_a(\varphi, \theta, \chi) = \frac{1}{2} \left[\max_{t \in P} \tau(\varphi, \theta, \chi, t) - \min_{t \in P} \tau(\varphi, \theta, \chi, t) \right] \quad (3.3.4)$$

gdzie:

t_p - okres obciążenia

Dla określonej płaszczyzny Δ amplituda naprężenia τ_a jest funkcją kąta χ określającego kierunek naprężenia τ , tzn.: $\tau_{a\Delta} = \tau_{a\Delta}(\chi)$. Odpowiednio uśredniona funkcja τ_a jest składową miary wyężenia zmęczeniowego w hipotezach Papadopoulosa. Zasadniczą różnicą pomiędzy miarą amplitudy DV (3.2.5) a miarą amplitudy Papadopoulosa polega na tym, że amplituda (3.3.4) nie zależy od czasu.

3.3.1 KRYTERIUM PAPADOPOULOSA 1 (P_1) (dla materiałów twardych - $\frac{Z_{SO}}{Z_{GO}} \geq 0,6$)

W pierwszej wersji kryterium Papadopoulosa (P_1) [38] użyta jest uśredniona miara wartości uogólnionej amplitudy naprężeń stycznych $\sqrt{\langle(T_a)\rangle^2}$ w pewnym punkcie A :

$$\tau_{P1} = \sqrt{\langle(T_a)\rangle^2} + a_c \cdot \sigma_{H,MAX} \leq Z_{SO} \quad (3.3.5)$$

gdzie:

$$\sqrt{\langle(T_a)\rangle^2} = \sqrt{\frac{5}{8\pi^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\chi=0}^{2\pi} \tau_a^2(\varphi, \theta, \chi) d\chi \cdot \sin(\theta) d\theta d\varphi} \quad (3.3.6)$$

a_c – zdefiniowane we wzorze (3.1.2)

$\sigma_{H,MAX}$ – maksymalne naprężenie hydrostatyczne (3.3.1)

Według monografii [72] miara (3.3.6) jest równoważna średniej wartości plastycznych odkształceń zsumowanych we wszystkich kryształach w elementarnej objętości RVE (zawierającej dostatecznie dużą ilość ziaren¹ – skala mezoskopowa). Kąty θ i φ zmieniają się odpowiednio w zakresach $[0, \pi]$ i $[0, 2\pi]$ tak aby uwzględnić wszystkie możliwe położenia płaszczyzn krytycznych. Kąt χ określający kierunek naprężenia stycznego na płaszczyźnie Δ zmienia się w zakresie $[0, 2\pi]$ (Rys.3.2.2).

Przy stosowaniu hipotezy P_1 autor proponuje następujący tok postępowania:

- 1) Określenie przebiegów składowych tensora naprężeń w czasie t dla punktu P_i badanego obszaru,
- 2) Wyznaczenie w określonej płaszczyźnie materiałowej $\Delta(\varphi, \theta)$ punktu P_i :
 - a) zmian skalarnego naprężenia τ wg (3.3.3) w czasie t ,
 - b) określenie amplitudy $\tau_a(\varphi, \theta, \chi)$ tego naprężenia wg (3.3.4),
 - c) określenie wartości naprężeń hydrostatycznych:

$$\sigma_H(t) = \frac{\sigma_1(t) + \sigma_2(t) + \sigma_3(t)}{3},$$

- 3) Obliczenie w punkcie P_i wartości uogólnionej amplitudy naprężeń tnących $\sqrt{\langle(T_a)\rangle^2}$ poprzez scałkowanie według formuły (3.3.6) wartości amplitudy naprężenia $\tau_a(\varphi, \theta, \chi)$ dla rozpatrywanych położen płaszczyzn materiałowych $\Delta(\varphi, \theta)$,
- 4) Określenie maksymalnej wartości naprężeń hydrostatycznych $\sigma_{H,MAX}$ (3.3.1) w punkcie P_i ,
- 5) Wstawienie do formuły (3.3.5) uzyskanych wartości $\sqrt{\langle(T_a)\rangle^2}$ i $\sigma_{H,MAX}$,
- 6) Powtórzenie obliczeń dla pozostałych punktów badanego obszaru i określenie punktu, w którym τ_{P1} osiąga wartość maksymalną:

¹ Dla metali objętość elementarna zawiera minimum 1000 ziarn (kryształów) o różnej orientacji, wielkości i kształcie

$$\tau_{P1}^{MAX} = \max_V \{\tau_{P1}\}$$

7) Porównanie τ_{P1}^{MAX} z wartością dopuszczalną Z_{SO} .

3.3.2. KRYTERIUM PAPADOPOULOSA 2 (P_2) (dla materiałów miękkich - $\frac{Z_{SO}}{Z_{GO}} < 0,6$)

Drugie kryterium Papadopoulosa (P_2) [73] (3.3.7) należy do grupy hipotez bazujących na koncepcji płaszczyzny krytycznej. W tej hipotezie zamiast uśrednionej miary wartości uogólnionej amplitudy naprężeń stycznych $\sqrt{\langle (T_a)^2 \rangle}$ wstawiana jest maksymalna wartość uogólnionej amplitudy naprężeń stycznych T_a :

$$\tau_{P2} = \max_{\varphi, \theta} (T_a) + a_{P2} \cdot \sigma_{H,MAX} \leq Z_{SO} \quad (3.3.7)$$

gdzie współczynnik występujący przy naprężeniu hydrostatycznym:

$$a_{P2} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \frac{3Z_{SO}}{Z_{GO}} \leq 1,5 \\ \left(\frac{3Z_{SO}}{Z_{GO}} - 1,5\right) & \text{dla } \frac{3Z_{SO}}{Z_{GO}} > 1,5 \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Wartość tej miary można wyznaczyć następująco:

$$T_a(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau_a^2(\varphi, \theta, \chi) d\chi} \quad (3.3.9)$$

Amplituda naprężeń $\tau_a(\varphi, \theta, \chi)$ wyznaczana jest analogicznie jak dla kryterium P_1 (3.3.4). Wyznaczona maksymalna wartość $T_a(\varphi, \theta)$ wstawiana jest do formuły (3.3.7), natomiast kąty φ i θ definiują wtedy położenie płaszczyzny krytycznej.

Przy stosowaniu hipotezy P_2 autor proponuje następujący tok postępowania:

- 1) Określenie przebiegów naprężeń w czasie t dla punktu P_i badanego obszaru,
- 2) Wyznaczenie miary $T_a(\varphi, \theta)$ w określonej płaszczyźnie materiałowej $\Delta(\varphi, \theta)$ punktu P_i :
 - a) określenie zmian skalarnego naprężenia τ wg (3.3.3) w kierunku wersora \vec{s} (zależnego od kąta χ) w czasie t ,
 - b) określenie amplitudy $\tau_a(\varphi, \theta, \chi)$ tego naprężenia wg (3.3.4) w kierunku wersora \vec{s} ,
 - c) określenie wartości naprężeń hydrostatycznych:

$$\sigma_H(t) = \frac{\sigma_1(t) + \sigma_2(t) + \sigma_3(t)}{3},$$

- d) obliczenie wartości uogólnionej amplitudy naprężeń tnących (T_a) poprzez scałkowanie po kącie χ amplitudy naprężenia τ_a według formuły (3.3.9) dla rozpatrywanego położenia płaszczyzny materiałowej $\Delta(\varphi, \theta)$,
- 3) Powtórzenie obliczeń wg punktu 2 dla innych orientacji płaszczyzn materiałowych w punkcie P_i i określenie płaszczyzny krytycznej Δ_{KR} , w której $T_a(\varphi, \theta)$ osiąga wartość maksymalną,
- 4) Określenie maksymalnej wartości naprężeń hydrostatycznych $\sigma_{H,MAX}$ (3.3.1) w punkcie P_i ,
- 5) Wstawienie do formuły (3.3.7) uzyskanych wartości $\max_{\varphi, \theta} (T_a)$ i $\sigma_{H,MAX}$,
- 6) Powtórzenie obliczeń dla pozostałych punktów obszaru i wyznaczenie maksymalnej wartości:

$$\tau_{P2}^{MAX} = \max_V \{\tau_{P2}\},$$

7) Porównanie τ_{P2}^{MAX} z wartością dopuszczalną Z_{SO} .

3.4. KRYTERIA ENERGETYCZNE ŁAGODY I MACHY

Analizowane w pracy hipotezy bazujące na modelu energetycznym stosują tzw. parametry gęstości energii odkształcenia [35,36]. Wymagają również określenia płaszczyzny krytycznej, w której jeden z tych parametrów osiąga maksimum. Cechą charakterystyczną tych kryteriów energetycznych jest rozróżnienie efektów rozciągających i ściskających (tradycyjnie rozumiana energia jest zawsze dodatnia). Istotną różnicą w odniesieniu do wcześniej opisanych hipotez jest dodatkowa konieczność wyznaczenia odkształceń w badanych punktach konstrukcji, co jednak nie zwiększa trudności obliczeń. Jest to związane z miarą gęstości energii liczoną w zakresie sprężystym i dziedzinie czasu jako:

$$W(t) = \frac{1}{2} \sigma(t) \cdot \varepsilon(t) \cdot \text{sgn}[\sigma(t), \varepsilon(t)] \quad (3.4.1)$$

W przypadku energii naprężeń normalnych rozróżnienie efektów ściskających i rozciągających zostało rozwiązane poprzez funkcję $\text{sgn}[x, y]$ zdefiniowaną następująco:

$$\text{sgn}[x, y] = \frac{\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)}{2} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \text{sgn}(x) = \text{sgn}(y) = 1 \\ 0 & \text{gdy } \text{sgn}(x) = -\text{sgn}(y) \\ -1 & \text{gdy } \text{sgn}(x) = \text{sgn}(y) = -1 \end{cases}, \quad (3.4.2)$$

przy czym:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0, \\ -1 & \text{gdy } x < 0 \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Dla rozpatrywanych hipotez energetycznych przyjęte są następujące założenia [35,36]:

- 1) pęknięcie zmęczeniowe powoduje zarówno część energii odkształceń, która odpowiada pracy naprężenia normalnego $\sigma_n(t)$ na odkształceniu normalnym $\varepsilon_n(t)$ ($W_n(t)$ – gęstość energii odkształceń normalnych):

$$W_n(t) = \frac{1}{2} \sigma_n(t) \cdot \varepsilon_n(t) \cdot \text{sgn}[\sigma_n(t), \varepsilon_n(t)] \quad (3.4.4)$$

jak i pracy naprężenia stycznego $\tau_{ns}(t)$ na odkształceniu postaciowym $\varepsilon_{ns}(t) = 0,5\gamma_{ns}(t)$ w kierunku \vec{s} na płaszczyźnie o normalnej \vec{n} ($W_{ns}(t)$ – gęstość energii odkształceń postaciowych) (Rys.3.2.2):

$$W_{ns}(t) = \frac{1}{2} \tau_{ns}(t) \cdot \varepsilon_{ns}(t) \cdot \text{sgn}[\tau_{ns}(t), \varepsilon_{ns}(t)] \quad (3.4.5)$$

Należy zauważyć, że parametr gęstości energii odkształceń postaciowych może formalnie przyjmować zarówno dodatnie jak i ujemne wartości. W sensie inicjacji pęknięcia istotna jest bezwzględna wartość tego parametru (kierunek ścinania nie gra roli). Przy transformacji naprężeń tnących o $\frac{\pi}{2}$ zmienia się ich znak. Tak więc ekstremum W_{ns} definiuje jednocześnie dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny krytyczne dla W_{ns}^{MAX} i W_{ns}^{MIN} .

- 2) kierunek \vec{s} na płaszczyźnie krytycznej pokrywa się z jednym z dwóch kierunków, w którym parametr $W_{ns}(t)$ przyjmuje wartość maksymalną (W_{ns}^{MAX}) lub stopień uszkodzenia materiału osiąga wartość maksymalną,
- 3) w stanie granicznym wyteżenie materiału określone jest przez maksymalną wartość liniowej kombinacji parametrów $W_{ns}(t)$ oraz $W_n(t)$ według równania:

$$\max_t \{W_{eqv}(t)\} \equiv \max_t \{\beta \cdot W_{ns}(t) + \kappa \cdot W_n(t)\} = W_{af} \quad (3.4.6)$$

gdzie:

$W_{eqv}(t)$ – parametr gęstości energii zastępczej,

β, κ – stałe materiałowe wyznaczone z testów zmęczeniowych,
 W_{af} – gęstość energii odkształcenia na poziomie granicy zmęczenia liczona z zależności:

$$W_{af} = \frac{\sigma_{af}^2}{2E} \quad (3.4.7)$$

σ_{af} – trwała wytrzymałość zmęczeniowa dla zginania Z_{GO} (lub rozciągania-ściskania Z_{RC}),

Należy podkreślić, że hipoteza energetyczna, podobnie jak prezentowane wcześniej kryteria, również wymaga próby obustronnego skręcania – Z_{SO} wchodzi do parametrów β i κ .

W przypadku gdy maksymalna wartość W_{eqv}^{MAX} wyznaczona w określonej płaszczyźnie krytycznej przekracza wartość dopuszczalną (W_{af}) następuje kumulacja uszkodzeń i dochodzi do zniszczenia zmęczeniowego. Orientacja tej płaszczyzny wyznaczana jest tak, aby odpowiedni parametr gęstości energii odkształcenia (normalnego lub postaciowego) miał wartość maksymalną. W zależności od wyboru sposobu jej określania można rozróżnić hipotezy energetyczne na:

1) Kryterium E_1 maksymalnej wartości parametru gęstości energii odkształceń postaciowych i normalnych w płaszczyźnie maksymalnej gęstości energii odkształceń normalnych.

W tej wersji płaszczyzna krytyczna o normalnej \vec{n} wyznaczana jest przez maksymalną wartość parametru gęstości energii odkształceń normalnych (W_n^{MAX}), a położenie wektora \vec{s} określa kierunek naprężenia stycznego w którym parametr gęstości energii odkształceń postaciowych osiąga maksimum (przy czym $\vec{n} \circ \vec{s} = 0$). Wadą tego kryterium jest konieczność wykonania badań przy obciążeniach nieproporcjonalnie zmiennych w celu określenia współczynnika β , którego nie da się określić analitycznie. Mogą to być na przykład stało-amplitudowe badania zmęczeniowe z przesunięciem fazy o $\frac{\pi}{2}$. Kryterium to jest słuszne dla materiałów kruchych takich jak np. żeliwo.

2) Kryterium E_2 maksymalnej wartości parametru gęstości energii odkształceń postaciowych i normalnych w płaszczyźnie maksymalnej gęstości energii odkształceń postaciowych.

W przypadku stali i stopów metali nieżelaznych zaleca się stosowanie kryterium E_2 . W tym przypadku płaszczyzna krytyczna o normalnej \vec{n} i stycznej \vec{s} wyznaczana jest przez maksymalną wartość parametru gęstości energii odkształceń postaciowych (W_{ns}^{MAX}).

Zakłada się, że płaszczyzna krytyczna określona jest jako średnie położenie jednej z dwóch płaszczyzn, w których występuje W_{ns}^{MAX} .

Stałe materiałowe można wyznaczyć poprzez badania zmęczeniowe dla czystego skręcania i czystego zginania (lub rozciągania-ściskania) w warunkach obciążeń stało-amplitudowych. Dla elementów gładkich stosuje się wówczas następujące zależności [35]:

$$\beta = \frac{k}{1 + \nu} \quad \kappa = \frac{4 - k}{1 - \nu} \quad k = \left(\frac{\sigma_{af}}{\tau_{af}} \right)^2 \quad (3.4.8)$$

gdzie:

σ_{af} – trwała wytrzymałość zmęczeniowa dla zginania (Z_{GO}) lub rozciągania-ściskania (Z_{RC}),

τ_{af} – trwała wytrzymałość zmęczeniowa dla skręcania (Z_{SO}).

Przedstawione powyżej obie wersje hipotezy energetycznej nie uwzględniają wpływu wartości średnich naprężeń i odkształceń. W pracy [36] przedstawione zostały różnorodne wersje kryterium energetycznego uwzględniającego wartości średnie naprężeń i/lub odkształceń. Wykazano, że średnie wartości naprężeń mogą być w hipotezach energetycznych pominięte. Tak więc, zgodnie z zaleceniami tej najnowszej publikacji, **w obecnej pracy przyjęto do obliczeń model E_2 z uwzględnieniem średniej wartości odkształceń:**

$$W_n(t) = 0,5\sigma_n(t) \cdot [\varepsilon_n(t) - \varepsilon_{n,m}] \cdot \text{sgn}[\sigma_n(t), (\varepsilon_n(t) - \varepsilon_{n,m})] \quad (3.4.9)$$

$$W_{ns}(t) = 0,5\tau_{ns}(t) \cdot [\varepsilon_{ns}(t) - \varepsilon_{ns,m}] \cdot \text{sgn}[\tau_{ns}(t), (\varepsilon_{ns}(t) - \varepsilon_{ns,m})] \quad (3.4.10)$$

$$W_{eqv}(t) \equiv \beta \cdot W_{ns}(t) + \kappa \cdot W_n(t) \leq W_{af} \quad (3.4.11)$$

gdzie:

$\varepsilon_{n,m}$ – średnia wartość odkształcenia normalnego w rozpatrywanej płaszczyźnie,

$\varepsilon_{ns,m}$ – średnia wartość odkształcenia postaciowego w rozpatrywanej płaszczyźnie.

Autor niniejszej pracy proponuje dla metody E_2 następujący tok postępowania:

1. Określenie przebiegów naprężeń i odkształceń we wszystkich badanych punktach P_i ($i = 1, 2, 3 \dots n$) obiektu lub jego wybranej części w czasie t ,
2. Wyznaczenie w każdym badanym punkcie P_i orientacji płaszczyzny krytycznej Δ_{KR} oraz kierunku \vec{s} naprężenia τ_{ns} na płaszczyźnie²:
 - a) Obliczenie zmian naprężeń i odkształceń w kierunkach \vec{n} i \vec{s} w dowolnej rozpatrywanej płaszczyźnie materiałowej Δ ,
 - b) Wyznaczenie wartości średnich odkształceń w kierunkach \vec{n} i \vec{s} w tej płaszczyźnie oraz obliczenie zmian parametru gęstości energii odkształceń postaciowych $W_{ns}^{P_i}(t)$,
 - d) Przeszukanie w punkcie P_i po kątach (φ, θ, χ) i czasie t wyrażenia na miarę gęstości energii odkształceń postaciowych $W_{ns}^{P_i}(t)$ w celu znalezienia $W_{ns}^{P_i,MAX}$. W ten sposób zdefiniowana zostaje płaszczyzna krytyczna $\Delta_{KR}(\varphi, \theta)$ na której to $W_{ns}^{P_i,MAX}$ wystąpi oraz kierunek \vec{s} naprężenia τ_{ns} na tej płaszczyźnie Δ_{KR} .
3. Obliczenie w badanym punkcie P_i zmian energii zastępczej w rozpatrywanej płaszczyźnie krytycznej Δ_{KR} :
 - a) Określenie wartości średnich odkształceń w kierunkach \vec{n} i \vec{s} w płaszczyźnie krytycznej Δ_{KR} ,
 - b) Obliczenie zmian parametru gęstości energii odkształceń postaciowych $W_{ns}^{P_i}(t)$ i normalnych $W_n^{P_i}(t)$,
 - c) Obliczenie przebiegu ekwiwalentnego $W_{eqv}^{P_i}(t)$ w płaszczyźnie krytycznej Δ_{KR} ,
4. Wyznaczenie z przebiegu $W_{eqv}^{P_i}(t)$ wartości maksymalnej gęstości energii odkształceń $W_{eqv}^{P_i,MAX}$,
5. Wyznaczenie maksymalnych wartości miary gęstości energii odkształceń $W_{eqv}^{P_i,MAX}$ w pozostałych punktach P_i badanego obszaru,
6. Wyznaczenie W_{eqv}^{MAX} jako maksymalnej wartości $W_{eqv}^{P_i,MAX}$:

$$W_{eqv}^{MAX} = \max_{P_i} \{W_{eqv}^{P_i,MAX}\} \quad (3.4.12)$$

7. Odniesienie wartości W_{eqv}^{MAX} do wartości dopuszczalnej W_{af} .

² W przypadku obciążeń stało-amplitudowych obliczenia wystarczy wykonać tylko dla jednego cyklu obciążenia

W wyniku obliczeń hipotezą energetyczną otrzymuje się miarę ekwiwalentnej gęstości energii odkształceń wyrażoną w $\left[\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}\right]$. Maksymalna wartość tej miary może zostać odniesiona do wartości dopuszczalnej W_{af} (3.4.7). Jednym z celów prowadzonych badań było porównanie opisanych hipotez dla różnych rodzajów obciążenia. W tym celu wprowadzono zastępczą miarę wyężenia zmęczeniowego τ_E w [MPa] odnoszoną do granicy dopuszczalnej wyznaczonej testem na skręcanie obustronne – Z_{SO} . Wartość tej miary obliczano z formuły:

$$\tau_{E2} = \frac{Z_{SO}}{\sqrt{\frac{W_{af}}{W_{eqv}^{MAX}}}} \quad (3.4.13)$$

Otrzymano w ten sposób jednoznaczną granicę zmęczenia (Z_{SO}) dla wszystkich prezentowanych hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego.

3.5. PORÓWNANIE WYBRANYCH KRYTERIÓW W PROSTYCH PRZYPADKACH OBCIĄŻENIA NA PRZYKŁADZIE STALI C60E (T) i C60E (N) (DAWNA NAZWA 60G)

W celu porównania przedstawionych kryteriów (Crosslanda, Dang Vana, Papadopoulosa 1, Papadopoulosa 2, Łagody) wykonane zostały obliczenia zmęczeniowe dla prostych przypadków obciążenia (t_p – okres drgań):

- próba obustronnego skręcania (*fully reversed torsion*):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_a \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{t_p}\right), \quad (3.5.1)$$

- próba obustronnego zginania (*fully reversed bending*):

$$\sigma_z = \sigma_a \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{t_p}\right), \quad (3.5.2)$$

- próba zginania ze skręcaniem w fazie:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_a \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{t_p}\right) \\ \sigma_z = \sigma_a \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{t_p}\right) \end{cases}, \quad (3.5.3)$$

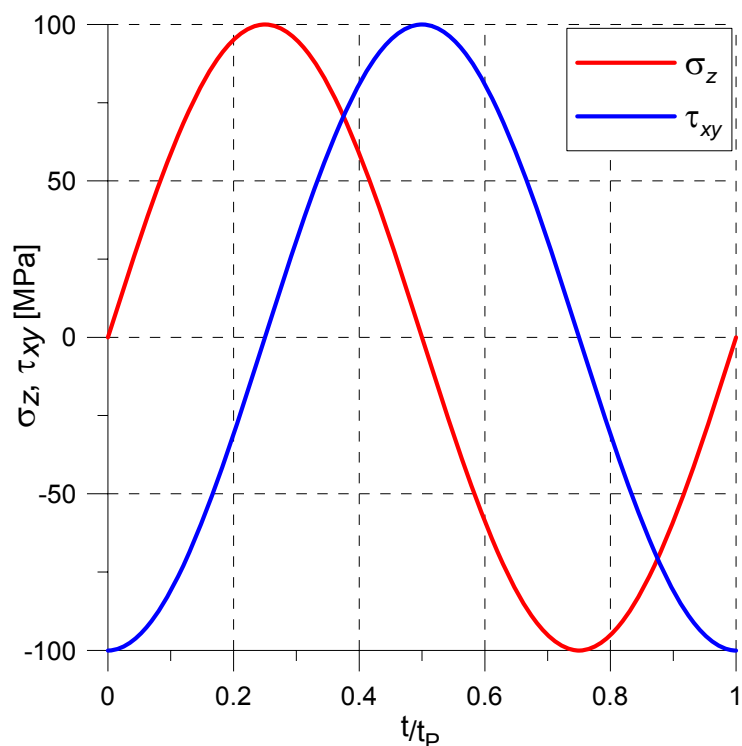
- próba zginania ze skręcaniem z przesunięciem w fazie o kąt $\delta = \frac{\pi}{2}$ (Rys.3.5.1):

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_a \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{t_p} - \delta\right) \\ \sigma_z = \sigma_a \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{t_p}\right) \end{cases}, \quad (3.5.4)$$

dla stali C60E (dawne oznaczenie 60G) w dwóch wariantach: po ulepszeniu cieplnym (hartowaniu i wysokim odpuszczaniu) (C60E (T)) i w stanie normalizowanym (C60E (N)). Własności materiałowe obu materiałów potrzebne do określenia współczynników w równaniach hipotez przyjęto na podstawie tablic wytrzymałościowych [74] i przedstawiono w Tabeli 3.5.1.

Tabela.3.5.1 Zestawienie danych materiałowych dla stali C60E w stanie normalizowanym C60E (N) i ulepszonym cieplnie C60E (T)

material	Z_{SO} [MPa]	Z_{GO} [MPa]	R_e [MPa]	R_m [MPa]	E [MPa]
C60E (T)	360	560	900	1100	$2,1 \cdot 10^5$
C60E (N)	240	460			



Rys.3.5.1 Przebiegi naprężeń w czasie dla próby zginania ze skręcaniem z przesunięciem w fazie o kąt $\delta = \frac{\pi}{2}$

Po podstawieniu danych materiałowych (Z_{SO} i Z_{GO}) do wzorów poszczególnych hipotez otrzymano następujące zależności dla stali C60E (T) ($\frac{Z_{SO}}{Z_{GO}} = 0,64 > 0,6$ – materiał twardy) ulepszonej cieplnie:

- Kryterium Crosslanda (3.1.1):

$$\tau_C (C60E(T)) = 0,577\sigma_{HMH,a} + 0,197\sigma_{H,MAX} \leq 360 \text{ [MPa]} \quad (3.5.5)$$

- Kryterium Dang Vana (3.2.1):

$$\tau_{DV} (C60E(T)) = \tau(t) + 0,429\sigma_H(t) \leq 360 \text{ [MPa]} \quad (3.5.6)$$

- Kryterium Papadopoulosa 1 (3.3.5):

$$\tau_{P1} (C60E(T)) = \sqrt{(\langle T_a \rangle)^2} + 0,197\sigma_{H,MAX} \leq 360 \text{ [MPa]} \quad (3.5.7)$$

- Kryterium Papadopoulosa 2 (3.3.7):

$$\tau_{P2} (C60E(T)) = \max(T_a) + 0,429\sigma_{H,MAX} \leq 360 \text{ [MPa]} \quad (3.5.8)$$

- Kryterium Łagody E_2 (3.4.11) i (3.4.7):

$$\max_t \{1,86 \cdot W_{ns}(t) + 2,26 \cdot W_n(t)\} \leq 0,747 \left[\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3} \right] \quad (3.5.9)$$

Dla stali C60E w stanie normalizowanym ($\frac{Z_{SO}}{Z_{GO}} = \frac{240}{460} = 0,52 < 0,6$ – materiał miękki) w kryterium Crosslanda i Papadopoulosa 1 współczynnik a_C przy naprężeniu hydrostatycznym $\sigma_{H,MAX}$ miał wartość ujemną. Sugerowałoby to, że rozciąganie powoduje domykanie szczelin a ściskanie ich otwieranie, co jest sprzeczne z doświadczeniami. Dlatego przyjmuje się w takim przypadku brak wpływu naprężeń hydrostatycznych i pomija ten człon ($a_C = 0$). Ostatecznie dla stali C60E w stanie normalizowanym otrzymujemy:

- Kryterium Crosslanda (3.1.1):

$$\tau_C (C60E(N)) = 0,577\sigma_{HMH,a} \leq 240 \text{ [MPa]} \quad (3.5.10)$$

- Kryterium Dang Vana (3.2.1):

$$\tau_{DV} (C60E(N)) = \tau(t) + 0,065\sigma_H(t) \leq 240 \text{ [MPa]} \quad (3.5.11)$$

- Kryterium Papadopoulosa 1 (3.3.5):

$$\tau_{P1} (C60E(N)) = \sqrt{((T_a))^2} \leq 240 \text{ [MPa]} \quad (3.5.12)$$

- Kryterium Papadopoulosa 2 (3.3.7):

$$\tau_{P2} (C60E(N)) = \max(T_a) + 0,065\sigma_{H,MAX} \leq 240 \text{ [MPa]} \quad (3.5.13)$$

- Kryterium Łagody E_2 (3.4.11) i (3.4.7):

$$\max_t \{2,83 \cdot W_{ns}(t) + 0,466(t)\} \leq 0,504 \left[\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3} \right] \quad (3.5.14)$$

Wyniki obliczeń zastępczych naprężeń zmęczeniowych wykonanych dla przedstawionych prostych przypadków obciążenia (3.5.1 ÷ 3.5.4) dla stali C60E ulepszonej cieplnie zestawiono w Tabeli.3.5.2, a dla stali C60E w stanie normalizowanym w Tabeli.3.5.3. W przypadku hipotezy energetycznej podano, równoważne rozpatrywanym przypadkom obciążenia, wartości amplitud naprężeń zmęczeniowych dla czystego skręcania. Wartość tego zastępczego naprężenia τ_{E2} wyznaczono przy pomocy formuły 3.4.13. Zrobiono to w celu porównania wyników uzyskanych hipotezą energetyczną z pozostałymi hipotezami.

Tabela.3.5.2 Zastępcze naprężenia zmęczeniowe dla prostych przypadków obciążenia (materiał twardy – stal C60E (T))

skręcanie							
		P ₁	P ₂	DV ₁	DV ₂	C	E ₂
τ_a	σ_a	$\tau_{P1} (C60E(T))$	$\tau_{P2} (C60E(T))$	$\tau_{DV1} (C60E(T))$	$\tau_{DV2} (C60E(T))$	$\tau_C (C60E(T))$	$\tau_{E2} (C60E(T))$
100	0	100	100	100	100	100	100
zginanie							
		P ₁	P ₂	DV ₁	DV ₂	C	E ₂
τ_a	σ_a	$\tau_{P1} (C60E(T))$	$\tau_{P2} (C60E(T))$	$\tau_{DV1} (C60E(T))$	$\tau_{DV2} (C60E(T))$	$\tau_C (C60E(T))$	$\tau_{E2} (C60E(T))$
0	100	64	64	64	64	64	64
zginanie ze skręcaniem w fazie							
		P ₁	P ₂	DV ₁	DV ₂	C	E ₂
τ_a	σ_a	$\tau_{P1} (C60E(T))$	$\tau_{P2} (C60E(T))$	$\tau_{DV1} (C60E(T))$	$\tau_{DV2} (C60E(T))$	$\tau_C (C60E(T))$	$\tau_{E2} (C60E(T))$
100	100	122	126	126	126	122	122
zginanie ze skręcaniem z przesunięciem w fazie o kąt $\delta = 90^\circ$							
		P ₁	P ₂	DV ₁	DV ₂	C	E ₂
τ_a	σ_a	$\tau_{P1} (C60E(T))$	$\tau_{P2} (C60E(T))$	$\tau_{DV1} (C60E(T))$	$\tau_{DV2} (C60E(T))$	$\tau_C (C60E(T))$	$\tau_{E2} (C60E(T))$
100	100	122	114	103	103	107	103

Tabela.3.5.3 Zastępcze naprężenia zmęczeniowe dla prostych przypadków obciążenia (materiał miękki – stal C60E(N))

skręcanie							
		P ₁	P ₂	DV ₁	DV ₂	C	E ₂
τ_a	σ_a	$\tau_{P1} (C60E(N))$	$\tau_{P2} (C60E(N))$	$\tau_{DV1} (C60E(N))$	$\tau_{DV2} (C60E(N))$	$\tau_C (C60E(N))$	$\tau_{E2} (C60E(N))$
100	0	100	100	100	100	100	100
zginanie							
		P ₁	P ₂	DV ₁	DV ₂	C	E ₂
τ_a	σ_a	$\tau_{P1} (C60E(N))$	$\tau_{P2} (C60E(N))$	$\tau_{DV1} (C60E(N))$	$\tau_{DV2} (C60E(N))$	$\tau_C (C60E(N))$	$\tau_{E2} (C60E(N))$
0	100	58	52	52	52	58	52
zginanie ze skręcaniem w fazie							
		P ₁	P ₂	DV ₁	DV ₂	C	E ₂
τ_a	σ_a	$\tau_{P1} (C60E(N))$	$\tau_{P2} (C60E(N))$	$\tau_{DV1} (C60E(N))$	$\tau_{DV2} (C60E(N))$	$\tau_C (C60E(N))$	$\tau_{E2} (C60E(N))$
100	100	116	114	114	114	116	111
zginanie ze skręcaniem z przesunięciem w fazie o kąt $\delta = 90^\circ$							
		P ₁	P ₂	DV ₁	DV ₂	C	E ₂
τ_a	σ_a	$\tau_{P1} (C60E(N))$	$\tau_{P2} (C60E(N))$	$\tau_{DV1} (C60E(N))$	$\tau_{DV2} (C60E(N))$	$\tau_C (C60E(N))$	$\tau_{E2} (C60E(N))$
100	100	116	102	100	100	100	100

Powyższe obliczenia wykonane dla stali C60E(T) wykazały zbieżność badanych hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego dla rozpatrywanych prostych przypadków obciążenia. Ponadto uzyskane wyniki dla prób naprzemiennego zginania i skręcania są zgodne z wartościami wyznaczonymi analitycznie przy pomocy wykresu Smitha.

W przypadku normalizowanej stali C60E(N) różnice w wyężeniu zmęczeniowym liczonym z hipotez Crosslanda i Papadopoulosa 1 dla zginania ze stałą amplitudą σ_a związane są z pominięciem w formułach tych hipotez wpływu efektów hydrostatycznych. Naprężenia hydrostatyczne pominięte zostały ze względu na fakt, że współczynniki a_C występujące przy nich miały wartości ujemne. Powoduje to zwiększenie wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych zarówno w odniesieniu do rozwiązania analitycznego (np. w oparciu o wykres Smitha) jak również do pozostałych hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego. Z tego powodu **nie zaleca się stosowania hipotez Crosslanda i Papadopoulosa 1 do materiałów miękkich** (tzn. dla takich, dla których: $\frac{Z_{SO}}{Z_{GO}} < 0,6$).

Obliczenia wykonane dla próby zginania ze skręcaniem z przesunięciem w fazie o $\delta = 90^\circ$ (Rys.3.5.1) wykazały, że **hipoteza Papadopoulosa 1 bazująca na uśrednionych wartościach stanu naprężenia nie uwzględnia przesunięć w fazie pomiędzy naprężeniami normalnymi i stycznymi** (Tab.3.5.2 i Tab.3.5.3). Prowadzi to do przeszacowania (na korzyść bezpieczeństwa) zastępczego wyężenia zmęczeniowego w hipotezie P₁ dla tego rodzaju obciążeń. Pozostałe rozpatrywane w pracy hipotezy ujmują wpływ tego przesunięcia w fazie. Można to zaobserwować przez odpowiednie zmniejszenie wartości zastępczego wyężenia zmęczeniowego w odniesieniu do próby zginania ze skręcaniem w fazie.

Podobny charakter obciążenia z przesuniętymi względem siebie w fazie efektami ściskającymi i ścinającymi występuje w przypadku zjawisk tocnych. Dlatego też hipoteza Papadopoulosa 1 nie nadaje się do aplikacji do zjawisk zmęczenia toczonego.

3.6 PORÓWNANIE WYBRANYCH KRYTERIÓW W OPARCIU O BADANIA DOŚWIADCZALNE WYKONANE DLA STALI 30CrNiMo8

3.6.1 ZAKRES BADAŃ ORAZ DOŚWIADCZALNE WYZNACZENIE WŁASNOŚCI ZMĘCZENIOWYCH STALI 30CrNiMo8

Weryfikacja wybranych w pracy hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego została zrobiona w oparciu o wybrane wyniki doświadczalnych badań zmęczeniowych wykonanych dla próbek ze stali stopowej 30CrNiMo8 przez Clemensa Sanetra'ę [75] i Alfonsa Esdertsę [76]. Cytowane badania dotyczyły analizy wpływu różnych stanów naprężenia wywołanych zginaniem i/lub skręcaniem na liczbę cykli potrzebnych do zniszczenia próbki. Porównanie wyników analitycznych uzyskanych poszczególnymi hipotezami z badaniami doświadczalnymi wykonane zostało dla następujących przypadków obciążenia próbek:

- Obustronne zginanie (Rys.3.6.1),
- Obustronne skręcanie (Rys.3.6.2),
- Naprzemienne skręcanie ze stałym zginaniem (Rys.3.6.3),
- Naprzemienne zginanie ze stałym skręcaniem (Rys.3.6.4),
- Naprzemienne zginanie ze skręcaniem w fazie - $\tau_a = 0,5 \cdot \sigma_a$ (Rys.3.6.5).

Próby obustronnego zginania i obustronnego skręcania przyjęto jako próby wzorcowe. Są one wymagane (wartości Z_{SO} i Z_{GO}) do określenia współczynników występujących w równaniach hipotez. Wartości Z_{SO} i Z_{GO} można również w przybliżeniu oszacować na podstawie wytrzymałości na rozciąganie (R_m) [74]. Wyniki doświadczalnych badań zmęczeniowych dla próby obustronnego zginania z amplitudą naprężenia $\sigma_{g,a}$ bez wartości średniej $\sigma_{g,m} = 0$ przedstawiono na Rys.3.6.1. Wyznaczona w ten sposób wartość trwałej wytrzymałości na zginanie obustronne wyniosła $Z_{GO} = 549$ MPa. Wytrzymałość na zginanie w zakresie ograniczonej trwałości zmęczeniowej (mniej niż $5 \cdot 10^5$ cykli) można wyznaczyć z formuły empirycznej [76]:

$$\log(\sigma_{g,a}^f) = 3,254 - 0,09 \log(N_f) \quad (3.6.1)$$

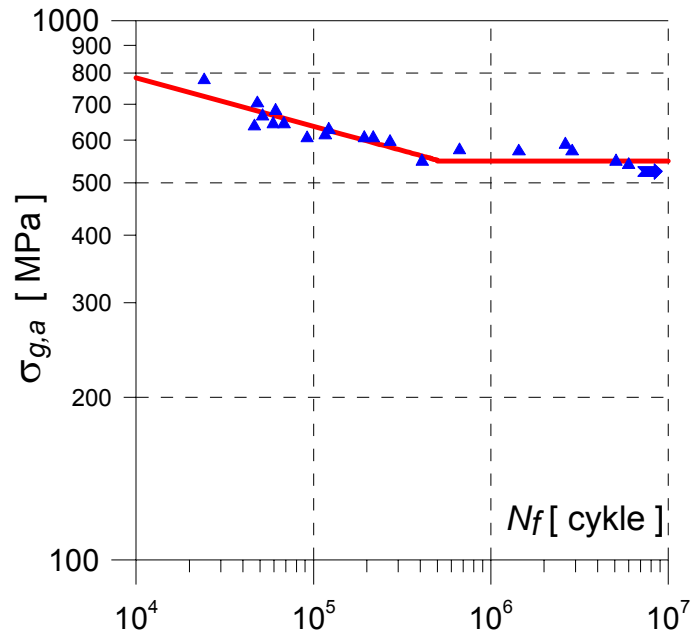
Na Rys.3.6.2 przedstawiono wyniki doświadczalnych badań zmęczeniowych dla obustronnego skręcania z amplitudą $\tau_{s,a}$ i zerową wartością średnią $\tau_{s,m} = 0$. Wartość trwałej wytrzymałości na skręcanie obustronne wyniosła $Z_{SO} = 370$ MPa, natomiast dopuszczalne naprężenia skręcające w zakresie ograniczonej trwałości zmęczeniowej (mniej niż $3 \cdot 10^6$ cykli) można obliczyć z [76]:

$$\log(\tau_{s,a}^f) = 2,791 - 0,034 \log(N_f) \quad (3.6.2)$$

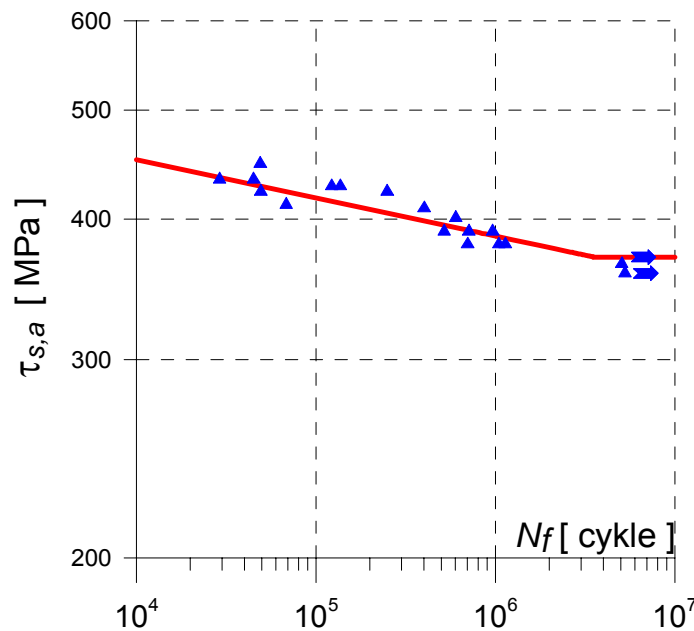
Zestawienie wartości Z_{SO} i Z_{GO} dla rozpatrywanej stali 30CrNiMo8 określonych na podstawie $R_m = 1250$ MPa [74] i z badań doświadczalnych [76] zestawiono w Tabeli.3.6.1.

Tabela.3.6.1 Wybrane własności zmęczeniowe stali 30CrNiMo8 obliczone w oparciu o R_m [74] i na podstawie badań doświadczalnych [76]

Parametr	Wartości wyznaczone na podstawie:	
	wartości $R_m = 1250$ MPa [74]	badania doświadczalnych [76]
Z_{GO}	$0,4 \cdot R_m = 500$ MPa	549 MPa (Rys.3.6.1)
Z_{SO}	$0,6 \cdot Z_{GO} = 300$ MPa	370 MPa (Rys.3.6.2)
E	-	$2,17 \cdot 10^5$ MPa



Rys. 3.6.1 Trwałość zmęczeniowa próbek ze stali 30CrNiMo8 poddanych obustronnemu zginaniu z amplitudą $\sigma_{g,a}$ [76]



Rys.3.6.2 Trwałość zmęczeniowa próbek ze stali 30CrNiMo8 poddanych obustronnemu skręcaniu z amplitudą $\tau_{s,a}$ [76]

Po podstawieniu doświadczalnie wyznaczonych wartości (Tab.3.6.1 - $Z_{SO} = 370$ MPa i $Z_{GO} = 549$ MPa) dla stali 30CrNiMo8 do wzorów poszczególnych hipotez otrzymano następujące zależności:

- Kryterium Crosslanda (3.1.1):

$$\tau_C (30CrNiMo8) = 0,577\sigma_{HMH,a} + 0,29\sigma_{H,MAX} \leq 370 \text{ [MPa]} \quad (3.6.3)$$

- Kryterium Dang Vana (3.2.1):

$$\tau_{DV} (30CrNiMo8) = \tau(t) + 0,522\sigma_H(t) \leq 370 \text{ [MPa]} \quad (3.6.4)$$

- Kryterium Papadopoulosa 1 (3.3.5):

$$\tau_{P1} (30CrNiMo8) = \sqrt{\langle(T_a)\rangle^2} + 0,29\sigma_{H,MAX} \leq 370 \text{ [MPa]} \quad (3.6.5)$$

- Kryterium Papadopoulosa 2 (3.3.7):

$$\tau_{P2} (C30CrNiMo8) = \max(T_a) + 0,522\sigma_{H,MAX} \leq 370 \text{ [MPa]} \quad (3.6.6)$$

- Kryterium Łagody E₂ (3.4.11) i (3.4.7):

$$\max_t \{1,69 \cdot W_{ns}(t) + 2,57 \cdot W_n(t)\} \leq 0,694 \left[\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3} \right] \quad (3.6.7)$$

3.6.2 PRÓBA NAPRZEMIENNEGO SKRĘCANIA ZE STAŁĄ WARTOŚCIĄ NAPRĘŻEŃ ZGINAJĄCYCH

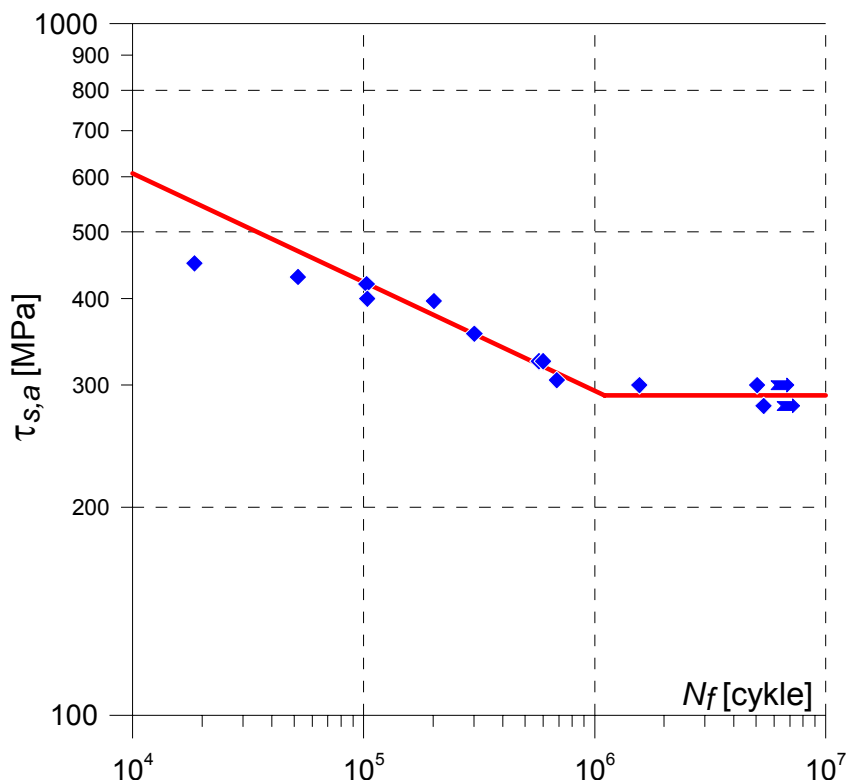
W przypadku złożonego stanu naprężenia, *wyężenie zmęczeniowe zależy zarówno od naprężeń zmiennych w czasie jak również od stałych naprężeń normalnych* nazywanych również statycznymi. W takim złożonym stanie naprężeń, dodatnie normalne (rozciągające) naprężenia statyczne powodują obniżanie granicy zmęczenia a ujemne (ściskające) ją podwyższają. Wykazane natomiast zostało, że *średnie naprężenia styczne nie wywierają żadnego wpływu na poziom wyężenia zmęczeniowego* zarówno przy zmiennych naprężeniach normalnych jak i stycznych [2,19,77].

Wpływ statycznych efektów normalnych na dopuszczalną amplitudę naprężeń stycznych można zaobserwować na Rys.3.6.3. W prezentowanym przykładzie doświadczalnym, dla stałego naprężenia gnącego $\sigma_{g,m} = 555$ [MPa] dopuszczalna wartość amplitudy naprężeń skręcających wyniosła $\tau_{s,a}^f = 290$ [MPa]. W odniesieniu do próby czystego skręcania, dla którego $\tau_{s,a}^f = 370$ [MPa], wartość $\tau_{s,a}^f$ uległa więc zmniejszeniu o $\Delta\tau_{s,a} = 60$ [MPa]. Potwierdza to niekorzystny wpływ statycznych efektów rozciągających na zjawisko zmęczenia materiału.

Podobny charakter wpływu średnich naprężeń normalnych zaobserwowano podczas obliczeń hipotezami wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego. Wyznaczone analitycznie dopuszczalne zmęczeniowe amplitudy naprężeń skręcających wyniosły $\tau_{s,a}^f \in \langle 273, 320 \rangle$ [MPa] (Tab.3.6.2) i były zbliżone do granicy wyznaczonej doświadczalnie - $\tau_{s,a}^f = 290$ [MPa] (Tab.3.6.3). W sytuacji gdy zastępcze naprężenia zmęczeniowe przekraczają dopuszczalną wartość Z_{SO} (dla rozpatrywanej stali 30CrNiMo8 $Z_{SO} = 370$ [MPa]) hipotezy zakładają zniszczenie zmęczeniowe. Przypadki obciążeń prowadzących do złomu zmęczeniowego zostały w tabelach zacięniowane kolorem czerwonym.

Tabela.3.6.2 Wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych wyznaczonych dla stanu naprężeń składającego się ze zmiennego skręcania $\tau_{s,a}$ i stałych naprężeń normalnych $\sigma_{g,m}$. Kolorem czerwonym zaznaczono naprężenia przekraczające wartość dopuszczalną $\tau_{s,a}^f = 370$ [MPa]

$\sigma_{g,m}$	$\tau_{s,a}$	P ₁	P ₂	E ₂	C	DV ₁
[MPa]	[MPa]	τ_{P1} [MPa]	τ_{P2} [MPa]	τ_{E2} [MPa]	τ_C [MPa]	τ_{DV1} [MPa]
555	270	321	367	322	324	367
555	280	330	377	333	334	377
555	290	340	387	343	344	387
555	300	350	397	353	354	397
555	305	355	402	359	359	402
555	310	360	407	364	364	407
555	320	370	417	374	374	417
555	325	375	422	379	379	422
555	356	406	453	411	410	453



Rys.3.6.3 Wyniki badań zmęczeniowych dla skręcania ze stałym zginaniem ($\sigma_{g,m} = 555$ [MPa]) próbek ze stali 30CrNiMo8 [75]

Tabela.3.6.3 Wyznaczone doświadczalnie i analitycznie dopuszczalne wartości naprężeń stycznych $\tau_{s,a}^f$ dla skręcania ze stałym zginaniem próbek ($\sigma_{g,m} = 555$ [MPa]) po przekroczeniu których dojdzie do zniszczenia zmęczeniowego

	Doświadczalne [75]	hipoteza				
		P ₁	P ₂	E ₂	C	DV ₁
$\tau_{s,a}^f$ [MPa]	290	320	273	316	316	273
$x_z = \frac{\tau_{s,a}^f}{290[\text{MPa}]}$	1	1,10	0,94	1,09	1,09	0,94

3.6.3 PRÓBA NAPRZEMIENNEGO ZGINANIA ZE STAŁĄ WARTOŚCIĄ NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH

Jak już wcześniej zostało zaznaczone (patrz rozdział 3.6.2) stała wartość naprężeń stycznych $\tau_{s,m}$ (spowodowanych np.: niezmiennym w czasie momentem skręcającym) nie wpływa na zmianę granicy zmęczenia [19]. W takiej sytuacji w rozpatrywanym przykładzie naprzemiennego zginania ze stałym skręcaniem, decydującym czynnikiem jest amplituda naprężeń zginających.

Doświadczalnie oszacowana dopuszczalna amplituda naprężeń gnących dla $\tau_{s,m} = 500$ [MPa] wyniosła $\sigma_{g,a}^f = 527$ [MPa] (linia przerywana na wykresie – Rys.3.6.4). Sugerowałoby to wpływ statycznych naprężeń stycznych na granicę zmęczenia (w odniesieniu do Z_{GO} różnica wyniosła $\Delta\sigma_{g,a} = 22$ [MPa]). Jednakże wartość ta nie jest wystarczająco dokładna gdyż została wyznaczona w oparciu o 7 prób zmęczeniowych z czego tylko jedna nie uległa zniszczeniu przed $5 \cdot 10^6$ cykli (Rys.3.6.4). Dlatego też wyniki otrzymane hipotezami zmęczeniowymi odniesiono również do wartości $Z_{GO} = 549$ [MPa] (linia ciągła na wykresie – Rys.3.6.4) pomijając wpływ statycznych efektów stycznych na zjawisko zmęczenia. Dodatkowo dla przypadku czystego

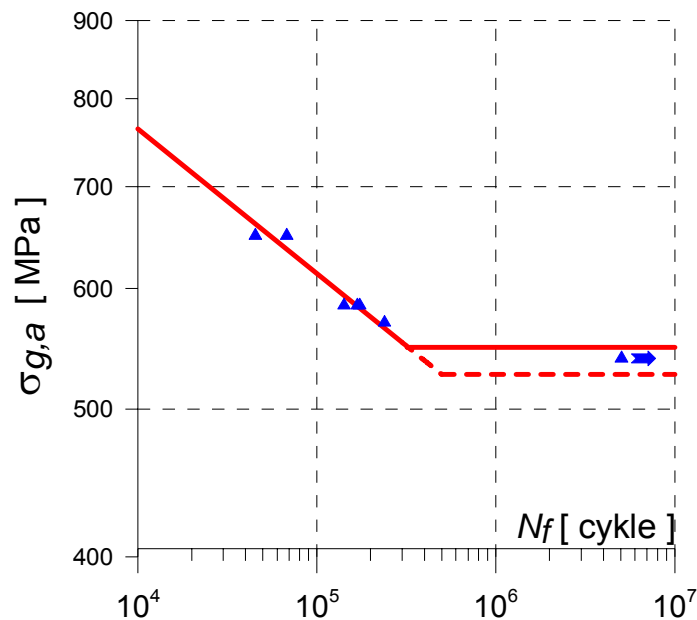
zginania z amplitudą $\sigma_{g,a} = 527$ [MPa] wykonano obliczenia analityczne rozpatrywanymi hipotezami (Tab.3.6.4). Dla otrzymanych wyników oszacowano współczynnik bezpieczeństwa x_Z i porównano go z wartością zastępczego wyężenia zmęczeniowego τ_{eqv} wyznaczonego dla $\sigma_{g,a} = 527$ [MPa], uzyskując podobne rezultaty:

$$x_Z = \frac{Z_{GO}}{\sigma_{g,a}} = \frac{549}{527} \cong 1,04, \quad (3.6.8a)$$

$$x_Z = \frac{Z_{SO}}{\tau_{eqv}(\sigma_{g,a} = 527\text{MPa})} = \frac{370}{355} \cong 1,04 \quad (3.6.8b)$$

Wszystkie rozpatrywane hipotezy prawidłowo oszacowują poziom wyężenia zmęczeniowego dla przypadku obustronnego zginania. Otrzymane wyniki wskazują również, że hipotezy Crosslanda, Dang Vana i obie Papadopoulosa pomijają wpływ statycznych naprężeń stycznych na granicę zmęczenia materiałów, co jest zgodne z dotychczasowymi sugestiami (Tab.3.6.4).

W przypadku rozpatrywanej wersji hipotezy energetycznej znaleziono dwie płaszczyzny krytyczne, w których wyężenie zmęczeniowe było na różnym poziomie. W jednej z nich uzyskane wyniki sugerowałyby znaczący wpływ statycznych naprężeń stycznych na obniżenie granicy zmęczenia $\tau_E = (586 \div 633)$ [MPa]. W drugiej płaszczyźnie krytycznej wynik był zbliżony do rezultatów otrzymanych pozostałymi hipotezami (Tab.3.6.5). W przypadku czystego zginania wynik uzyskany hipotezą energetyczną jest jednoznaczny. Należałoby rozważyć wersję hipotezy energetycznej, w której wyężenie zmęczeniowe liczone jest dla danej, tej samej chwili czasu t , w której W_{ns} osiąga wartość maksymalną w danej płaszczyźnie krytycznej. W takim przypadku zastępcze naprężenie zmęczeniowe τ_E przybiera wyłącznie wartości zamieszczone w Tab.3.6.5.



Rys.3.6.4 Wyniki badań zmęczeniowych dla zginania $\sigma_{g,a}$ ze stałym skręcaniem ($\tau_{s,m} = 500$ [MPa]) próbek ze stali 30CrNiMo8. Linią ciągłą – brak wpływu statycznych naprężeń skręcających, linią przerywaną wynik w oparciu o badania [75]

Tabela.3.6.4 Wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych wyznaczonych dla stanu naprężeń składającego się ze zmiennego zginania $\sigma_{g,a}$ i stałych naprężeń stycznych $\tau_{s,m}$. Kolorem czerwonym zaznaczono naprężenia przekraczające wartość dopuszczalną $\tau_{s,a}^f = 370$ [MPa]

$\tau_{s,m}$	$\sigma_{g,a}$	P ₁	P ₂	E ₂	C	DV ₁
[MPa]	[MPa]	τ_{P1} [MPa]	τ_{P2} [MPa]	τ_{E2} [MPa]	τ_C [MPa]	τ_{DV1} [MPa]
500	527	353,6	355,2	330,0	355,2	355,2
500	540	362,3	363,9	336,0	363,9	363,9
500	570	382,5	384,2	350,0	384,2	384,2
500	585	392,5	394,3	361,0	394,3	394,3
500	650	436,1	438,1	421,3	438,1	438,1
0	527	353,6	355,2	355,2	355,2	355,2

Tabela.3.6.5 Wyznaczone doświadczalnie i analitycznie dopuszczalne wartości naprężeń normalnych $\sigma_{g,a}^f$ dla zginania ze stałym skręcaniem próbek ($\tau_{s,m} = 500$ [MPa]) po przekroczeniu których dojdzie do zniszczenia zmęczeniowego

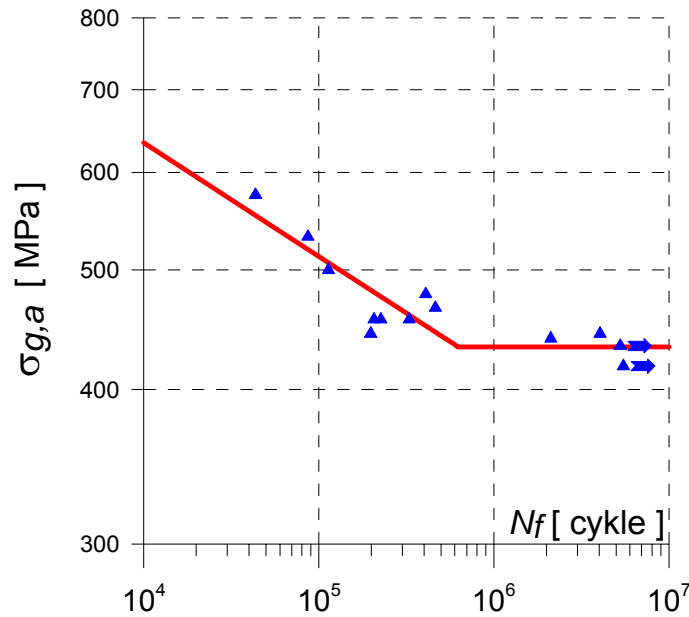
	Doświadczalne [75]	hipoteza				
		P ₁	P ₂	E ₂	C	DV ₁
$\sigma_{g,a}^f$ [MPa]	527	551,4	549	594	549	549
$x_z = \frac{\sigma_{g,a}^f}{549[\text{MPa}]}$	0,96	1,00	1,00	1,08	1,00	1,00

3.6.4 PRÓBA NAPRZEMIENNEGO ZGINANIA ZE SKRĘCANIEM W FAZIE ($\tau_a = 0,5 \cdot \sigma_a$)

Jednoczesne obciążenie zgodnymi w fazie momentem zginającym i skręcającym prowadzi do większego wyęczenia zmęczeniowego. W rozpatrywanym przypadku obciążenia ($\tau_a = 0,5 \cdot \sigma_a$) [76] dopuszczalna doświadczalnie wyznaczona amplituda naprężeń gnących wyniosła $\sigma_a^f = 433$ [MPa] (Rys.3.6.5). Potwierdza to wpływ amplitudowych efektów stycznych na obniżenie granicy zmęczenia. Wykonane przy użyciu hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego obliczenia analityczne również wykazały podobną tendencję (Tab.3.6.6). W Tab.3.6.7 zestawiono dopuszczalne wartości amplitud naprężeń gnących, które w zależności od zastosowanego kryterium wyniosły: $\sigma_a^f \in \{420, 433\}$ [MPa].

Tabela.3.6.6 Wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych wyznaczonych dla stanu naprężeń składającego się z naprzemiennego zginania ze skręcaniem w fazie ($\tau_a = 0,5 \cdot \sigma_a$). Kolorem czerwonym zaznaczono naprężenia przekraczające wartość dopuszczalną $\tau_{s,a}^f = 370$ [MPa]

$\sigma_{g,a}$	P ₁	P ₂	E ₂	C	DV ₁
[MPa]	τ_{P1} [MPa]	τ_{P2} [MPa]	τ_{E2} [MPa]	τ_C [MPa]	τ_{DV1} [MPa]
418	357	368	369	360	367
434	371	382	383	373	381
440	376	388	388	379	387
444	379	391	392	382	390
456	389	402	402	392	401
466	398	418	411	400	409



Rys.3.6.5 Wyniki badań zmęczeniowych dla skręcania ze zginaniem w fazie ($\tau_a = 0,5 \cdot \sigma_a$) próbek ze stali 30CrNiMo8 [76]

Tabela.3.6.7 Wyznaczone doświadczalnie i analitycznie dopuszczalne wartości naprężeń normalnych $\sigma_{g,a}^f$ dla zginania ze skręcaniem próbek ($\tau_a = 0,5 \cdot \sigma_a$) po przekroczeniu których dojdzie do zniszczenia zmęczeniowego

	Doświadczalne [76]	hipoteza				
		P ₁	P ₂	E ₂	C	DV ₁
$\sigma_{g,a}^f$ [MPa]	433	433	420	420	429	423
$x_z = \frac{\sigma_{g,a}^f}{433[\text{MPa}]}$	1	1,00	0,97	0,97	0,99	0,98

W odniesieniu do zmęczeniowych badań doświadczalnych, rozpatrywane w pracy hipotezy dały satysfakcjonujące wyniki. Dotyczy to wykonanych przez autora analitycznych obliczeń zarówno dla prostych (zginanie, skręcanie) jak również złożonych stanów obciążenia (punkt 3.6). Jedynym wyjątkiem jest hipoteza Papadopoulosa 1 (P₁), której autor nie zaleca stosować w przypadku obciążeń nieproporcjonalnych. Kryterium to, bazujące na średnich wartościach stanu naprężenia, nie uwzględnia wpływu przesunięć w fazie pomiędzy poszczególnymi składowymi tensora naprężenia. Prowadzi to do przeszacowania zastępczego wyteżenia zmęczeniowego w tej hipotezie.

4. **APLIKACJA KRYTERIÓW WIELOOSIOWEGO ZMĘCZENIA WYSOKOCYKLOWEGO DO WYNIKÓW ANALIZ NUMERYCZNYCH MES 2D**

4.1. **TOCZENIE BEZ TARCIA**

4.1.1 **MODEL NUMERYCZNY 2D DLA ZAGADNIENIA BEZTARCIOWEGO KONTAKTU TOCZNEGO.**

W przypadku *tarcia tocznego (potoczystego) efekty cierne występujące w obszarze styku są pomijalnie małe* (nieporównywalnie mniejsze niż opory tarcia przy tarcu ślizgowym) a element toczny przemieszcza się w wyniku wykonywanego ruchu obrotowego. Kontakt tego typu występuje w następujących skojarzeniach: koło wagonu kolejowego - szyna, element toczny łożyska – bieżnia czy też krzywka – popychacz z rolką. Przykładowo dla kontaktu stalowego koła ze stalową szyną przeciętna wartość promienia tarcia potoczystego wynosi $f = 0,05$ [cm] ($f = \mu_t \cdot r$, r – promień elementu tocznego) [78]. Przykładowo dla koła o promieniu $r \equiv R_K = 200$ [mm] oznacza to:

$$\mu_t = \frac{f}{r} = \frac{0,5 \text{ [mm]}}{200 \text{ [mm]}} = 2,5 \cdot 10^{-3} \quad (4.1.1)$$

Dla łożyska baryłkowego walcowego średnia wartość współczynnika tarcia potoczystego wynosi $\mu_t = 0,0018$ [79]. W takiej sytuacji efekty cierne mogą zostać pominięte, co znacząco upraszcza obliczenia.

Do analizy zagadnienia kontaktu tocznego została wykorzystana metoda elementów skończonych (MES – ANSYS.11®). Dla przykładu kontaktu tocznego metoda ta pozwala łatwo określić zarówno w 2D jak i 3D m.in.:

- położenia maksymalnych wyiężeń,
- zmiany naprężeń w funkcji czasu,
- deformacje w stykających się obiektach.

Badania dla przypadku 2D zostały przeprowadzone przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia ($u_z = 0$) (uzasadnienie: Załącznik C.2). Model (Rys.4.1.1) został zbudowany przy użyciu 8-węzłowych elementów tarczowych *PLANE82*, oraz elementów kontaktowych: 3-węzłowych *CONTA172* i *TARGE169*³. W celu skrócenia czasu obliczeń zastosowano nieregularną siatkę elementów skończonych ze znacznym zagęszczeniem w obszarze kontaktu. Pełny model koła (pomimo symetrii względem pionowej osi) zastosowano pod kątem przyszłego rozpatrywania naprężeń tnących. Obciążenie zostało zadane w formie liniowej (Rys.4.1.1), w celu uniknięcia punktowych koncentracji naprężeń. Zgodnie z zasadą de Saint-Venanta nie miało to wpływu na rozkłady naprężeń w obszarze kontaktu, będącego w znacznej odległości od miejsca przyłożenia siły.

W przypadku braku tarcia powyższe zagadnienie może zostać rozwiązane analitycznie przy użyciu teorii Hertza (patrz Załącznik A). **Można tu zaobserwować 3 charakterystyczne punkty** (Rys.4.1.2) [80], w których może dojść do inicjacji pęknięć zmęczeniowych:

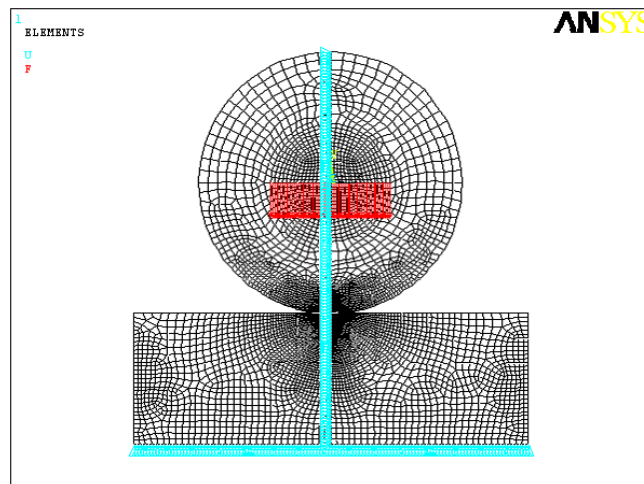
- **punkt Bielajewa** (B) (dla $\phi = 0$), najbardziej wyiężony (w sensie hipotezy HMH) punkt pod powierzchnią,
- dwa **punkty Palmgren-Lundberga** (P–L) w których występuje największa amplituda naprężeń stycznych.

Jak zostanie to wykazane w dalszej części pracy, w przypadku obciążeń cyklicznych powyższe punkty mogą być miejscami potencjalnych inicjacji pęknięć zmęczeniowych. W przypadku kontaktu statycznego (bez obrotu) dwóch ciał obciążonych zmienną, tętniącą siłą najbardziej

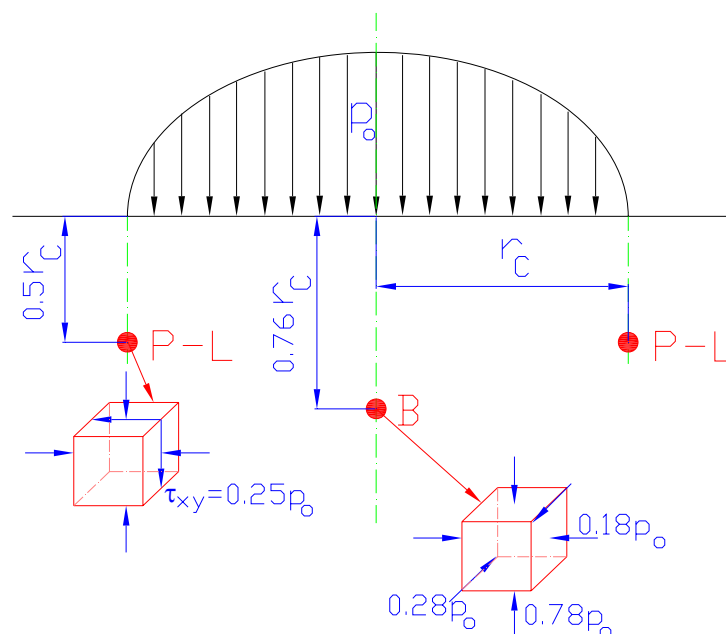
³ Szczegółowe informacje na temat modelowania zagadnień kontaktowych oraz użytych elementów są zamieszczone w załączniku B.

niebezpieczny jest punkt Bielajewa, w którym zarówno naprężenie tnące jak również jego amplituda osiągają wartości ekstremalne (objaśnienie na Rys.4.1.5). Natomiast w przypadku kontaktu tocznego punkty te zataczają okręgi o odpowiednich promieniach: r_B – promień punktu Bielajewa; r_{PL} – promień punktów Palmgren-Lundberga. W takiej sytuacji maksymalna amplituda naprężenia tnącego występuje na promieniu r_{PL} wartość maksymalna tego naprężenia na r_B (szczegóły w rozdziale 4.1.2). W procesie zmęczenia istotną rolę pełni amplituda naprężenia, dlatego też inicjacja pęknięcia wystąpi w okolicach promienia r_{PL} .

Należy podkreślić, że nawet w tym prostym przykładzie numerycznym zastosowanie MES jest korzystne (pomimo, że znane jest rozwiązanie analityczne), ponieważ znacznie ułatwia wyznaczenie przebiegów naprężeń w czasie, operacje transformacyjne i przeszukiwanie badanego obszaru ekstremalnych naprężeń.



Rys.4.1.1 Model numeryczny 2D kontaktu koła z podłożem (bez tarcia).



Rys.4.1.2 Położenie punktów Bielajewa i P-L dla kontaktu dwóch izotropowych nieskończonych walców [80]

4.1.2 POSZUKIWANIE PŁASZCZYZNY KRYTYCZNEJ NA PRZYKŁADZIE HIPOTEZY DANG VANA (DV)

Jak wcześniej wspomniano, kryterium DV należy do grupy hipotez opartych na pojęciu płaszczyzny krytycznej. Do jego aplikacji wymagane jest określenie płaszczyzn, w których kombinacja, wg (3.2.1), naprężeń stycznych $\tau(t)$ i naprężenia hydrostatycznego $\sigma_H(t)$ jest największa. W przypadku kontaktu tocznego bez zjawiska tarcia, zbadano trzy potencjalne miejsca inicjacji pęknięć zmęczeniowych:

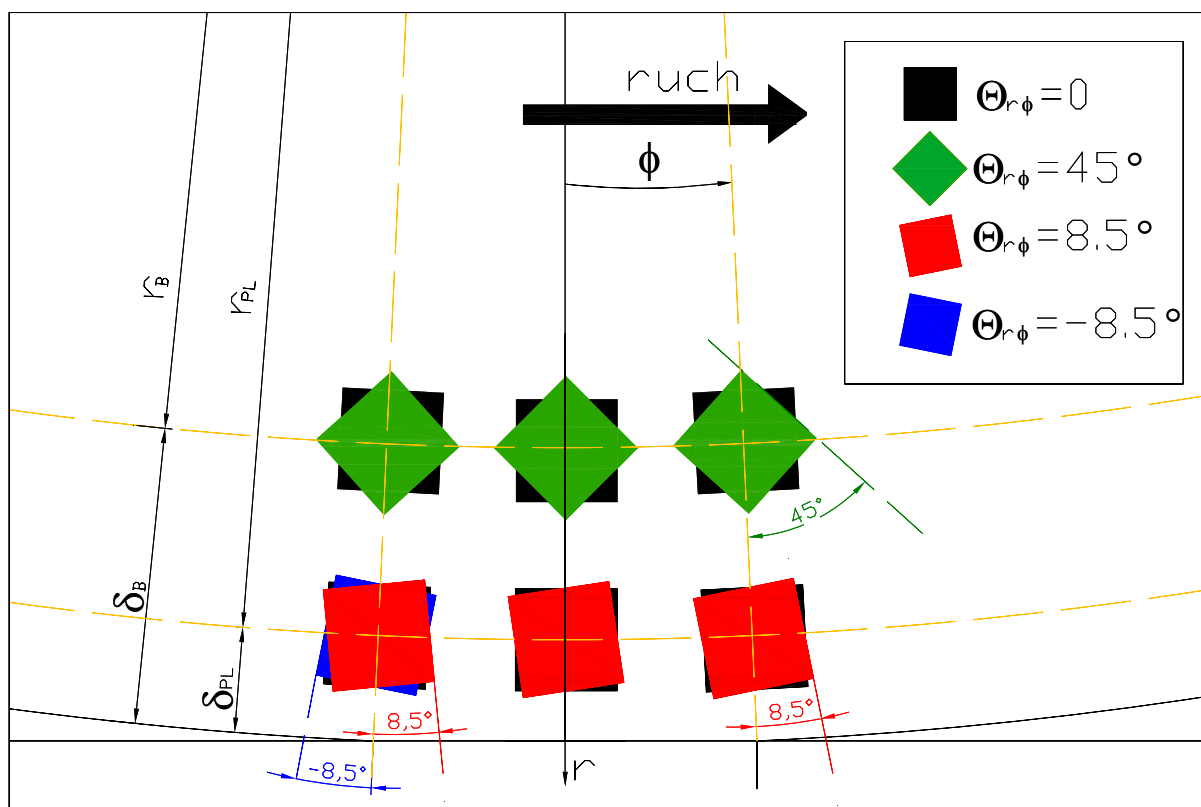
- okrąg o promieniu r_B punktu Bielajewa,
- okrąg o promieniu r_{PL} punktów Palmgrena–Lundberga,
- okrąg o promieniu Dang Vana r_{DV} .

W przeciwieństwie do promieni r_B i r_{PL} wartość promienia r_{DV} , tzn. promienia na którym występują ekstremalne naprężenia zastępcze w sensie DV, zależy od zmęczeniowych właściwości materiałowych (3.2.1). W sensie tej hipotezy wraz ze zmianą materiału zmienia się również położenie punktów najbardziej narażonych na pęknięcie.

Przykładowe obliczenia przeprowadzono dla następujących danych:

- siła obciążająca – $F = 840$ [N/mm],
- promień koła – $R = 200$ [mm],
- materiał – stal C60E w stanie normalizowanym C60E(N) oraz w stanie ulepszonym cieplnie C60E(T).

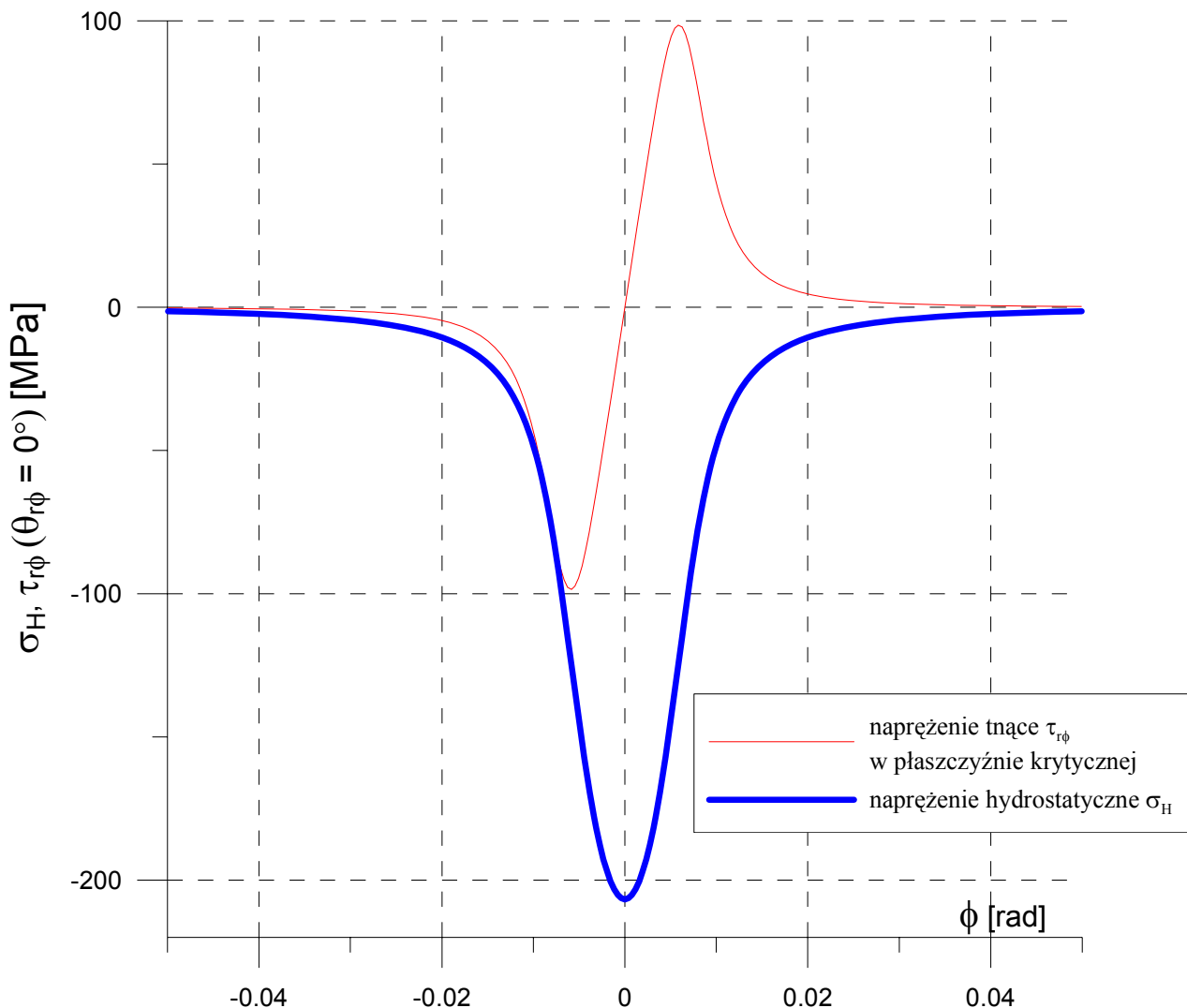
Przy określaniu zmian naprężeń na określonej głębokości (promieniu) wykorzystano układ biegunowy $r - \phi$. Zakładając ruch koła zgodnie z Rys.4.1.3 można przyjąć, że kąt ϕ jest parametrem związanym z funkcją czasu t .



Rys.4.1.3 Układ współrzędnych oraz metodyka wyznaczania naprężeń w odpowiednich płaszczyznach krytycznych. Kąt $\Theta_{r\phi}$ oznacza kątowy obrót rozpatrywanej płaszczyzny względem układu $r - \phi$.

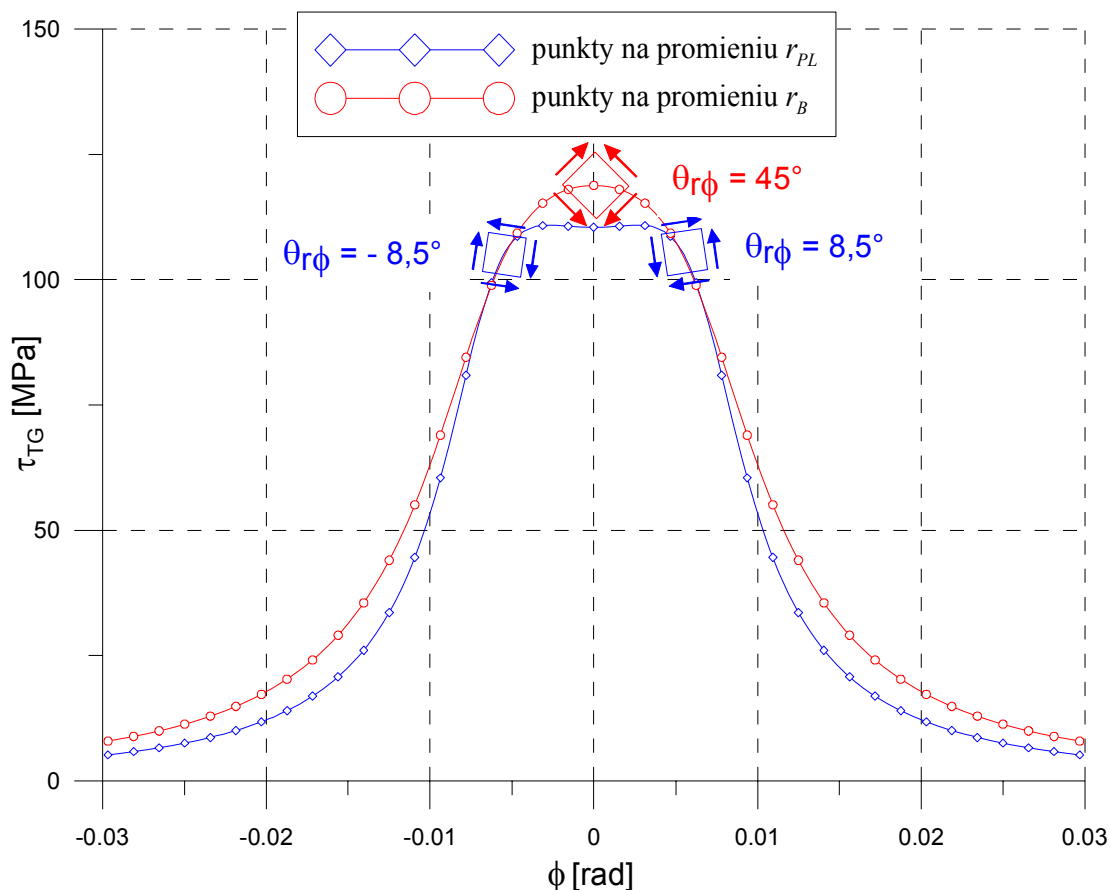
Na Rys.4.1.3 zaznaczono elementarne cząstki w punktach B i P–L w położeniu odczytywanym z ANSYSa® ($\Theta_{r\phi} = 0^\circ$) jak również ich położenie po transformacji o określone kąty $\Theta_{r\phi}$ do płaszczyzn krytycznych. Kąt $\Theta_{r\phi}$ oznacza kątowy obrót rozpatrywanej płaszczyzny względem układu $r - \phi$.

Dla $\Theta_{r\phi} = 0^\circ$ w przypadku punktów na promieniu r_{PL} można zauważyć charakterystyczny antysymetryczny rozkład naprężeń tnących (Rys.4.1.4). Należy jednak zwrócić uwagę, że naprężenia tnące przybierają maksymalne wartości dla innych kątów $\Theta_{r\phi}$ (Rys.4.1.5). W punkcie gdzie naprężenia mają wartość dodatnią (strona prawa), kąt obrotu do płaszczyzny maksymalnego naprężenia tnącego wynosi $\Theta_{r\phi} = 8,5^\circ$. Dla punktu po przeciwnej stronie osi symetrii kąt ten wynosi: $\Theta_{r\phi} = -8,5^\circ$. Jednakże w obu powyższych przypadkach maksymalna wartość naprężenia amplitudalnego $\tau_{a,T}$ (patrz wzór 3.2.5) ulega zmniejszeniu w stosunku do płaszczyzny zorientowanej pod kątem $\Theta_{r\phi} = 0^\circ$. Słuszne wydaje się więc zdefiniowanie płaszczyzny krytycznej właśnie dla tego kąta. W takim przypadku do wzoru DV (3.2.1) wstawiane są wartości naprężeń uzyskane bezpośrednio z programu ANSYS®, co dodatkowo ułatwia analizę.



Rys.4.1.4 Przebieg naprężeń σ_H i $\tau_{r\phi}|_{\Theta_{r\phi} = 0^\circ}$ w punktach na promieniu r_{PL} dla $\Theta_{r\phi} = 0^\circ$.

Uwaga: wykres przedstawia zarówno przebieg naprężeń w jednym punkcie P–L toczącego się koła, jak i rozkład naprężeń w stojącym kole na promieniu r_{PL} .

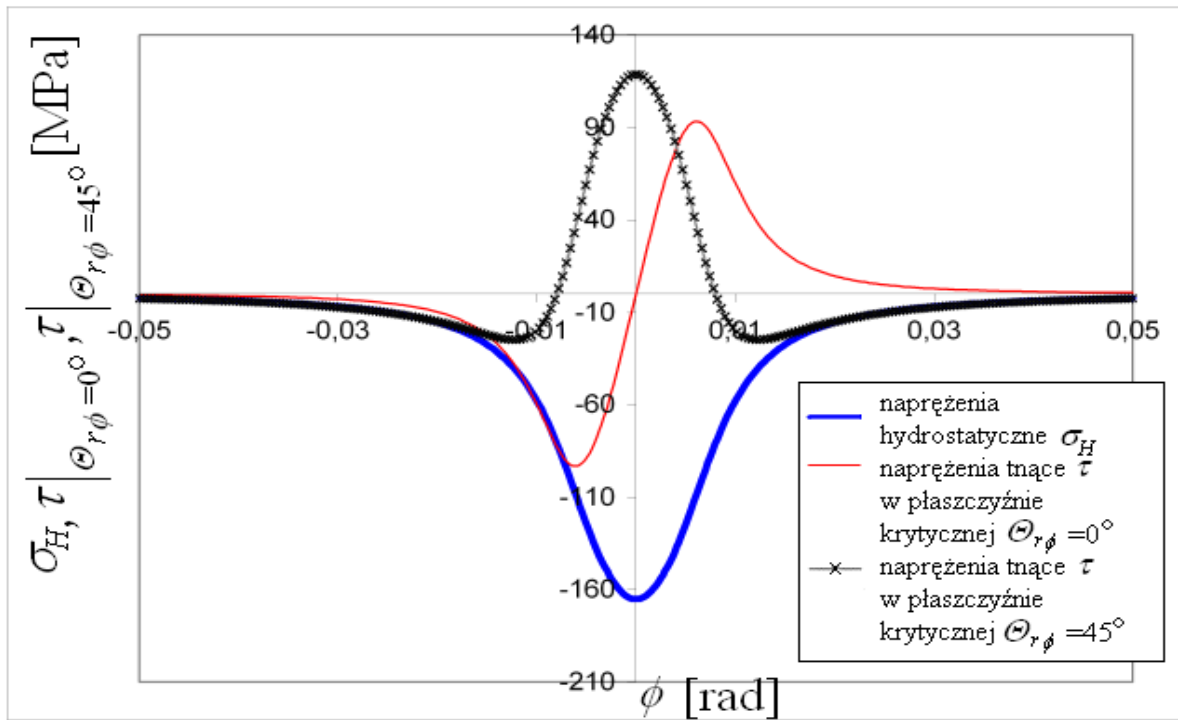


Rys.4.1.5 Ekstremalne naprężenia tnące τ_{TG} w punktach na promieniu r_{PL} i r_B ($\Theta_{r\phi}$ zmienne).

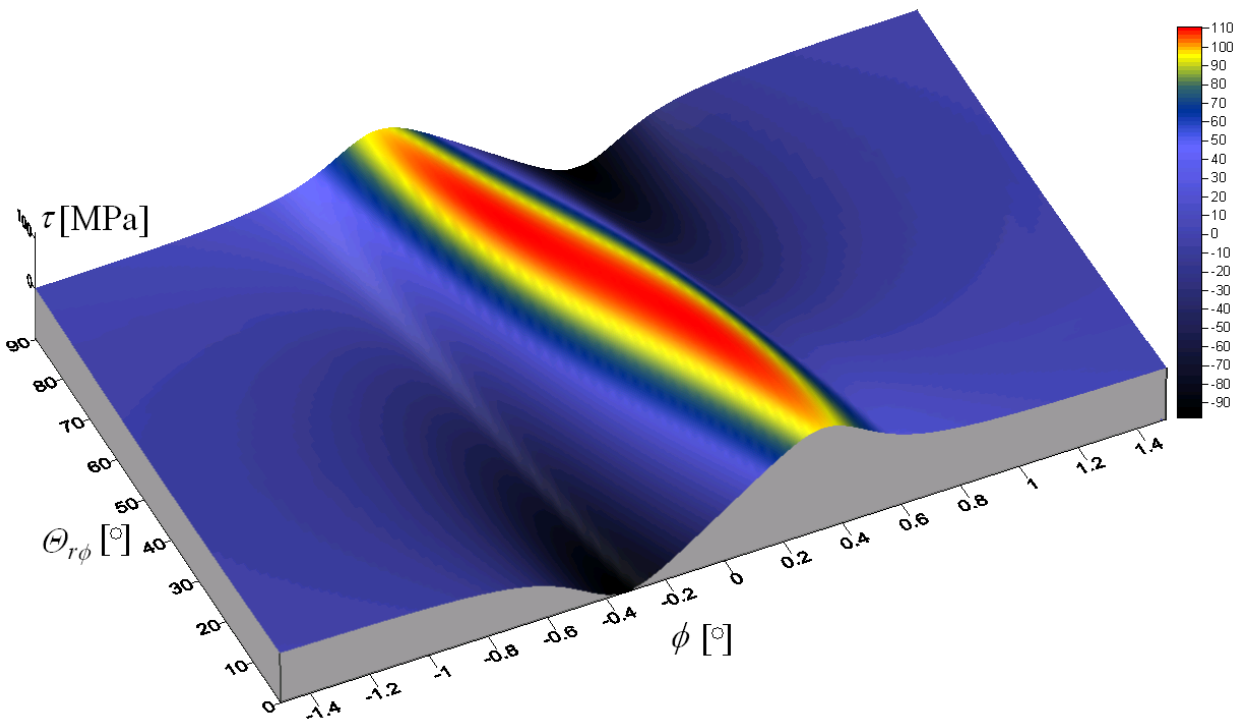
Na Rys.4.1.5, na którym przedstawiono zmiany naprężeń tnących τ_{TG} (patrz wzór 3.2.7) obliczanych wg hipotezy T–G można zauważyć, że w punkcie B dla kąta $\Theta_{r\phi} = 45^\circ$ wartość naprężeń tnących jest największa. Zostały tu również zaznaczone obroty rozpatrywanych płaszczyzn wskazujące położenie ekstremalnych naprężeń tnących dla charakterystycznych punktów (B oraz P–L) oraz zwroty działania tych naprężeń. Można zauważyć, że w pobliżu punktu PL wartość naprężeń tnących τ_{TG} na promieniach r_{PL} i r_B różni się nieznacznie natomiast dla $\phi = 0$ zmiana ta jest o wiele większa.

Nieznacznym zmianom naprężeń tnących w okolicach punktów P–L towarzyszy spore zmniejszenie ściskających naprężeń hydrostatycznych σ_H , co dla zmęczenia materiału jest zjawiskiem niekorzystnym (w sensie hipotezy DV). Natomiast w punkcie B ($\phi = 0$) występuje duże ściskanie, co wpływa na zmniejszenie wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych τ_{DV} . Uzasadnia to sens sprawdzenia naprężeń DV na promieniu r_B i r_{DV} również dla $\Theta_{r\phi} = 45^\circ$. Przebiegi naprężeń tnących na promieniu r_B w badanych płaszczyznach krytycznych (dla $\Theta_{r\phi} = 0^\circ$ i $\Theta_{r\phi} = 45^\circ$) oraz naprężeń hydrostatycznych przedstawiono na Rys.4.1.6. Dodatkowo wyznaczono promień r_{DV} , dla którego wartość naprężeń zmęczeniowych obliczonych ze wzorów (3.2.1, 3.2.7) była największa (do (3.2.1) wstawiono wartość τ_{TG} - patrz wzór 3.2.7 - metoda DV₂).

Obliczone wartości naprężeń amplitudowych τ_a^T wyznaczonych ze wzoru (3.2.5) w określonych płaszczyznach krytycznych (przykładowe przebiegi naprężenia tnącego $\tau_{r\phi} \equiv \tau_{ns}$ przedstawiono na Rys.4.1.4, Rys.4.1.6, Rys.4.1.7) zostały użyte do wyznaczenia zastępczych naprężeń τ_{DV1} . Druga interpretacja hipotezy – DV₂ wymaga wyznaczenia naprężeń tnących τ_{TG} przedstawionych na Rys.4.1.5.



Rys.4.1.6. Przebieg naprężeń hydrostatycznych σ_H oraz naprężeń stycznych $\tau_{r\phi}|_{\Theta_{r\phi} = 0^\circ}$ i $\tau_{r\phi}|_{\Theta_{r\phi} = 45^\circ}$ w punktach na promieniu r_B dla $\Theta_{r\phi} = 0^\circ$ oraz $\Theta_{r\phi} = 45^\circ$.



Rys.4.1.7 Rozkład naprężeń stycznych $\tau_{r\phi}$ w różnych płaszczyznach materiałowych $\Theta_{r\phi}$ na promieniu r_{PL} w funkcji czasu (obrotu ϕ).

4.1.3 SZCZEGÓŁOWA OBSERWACJA NAPRĘŻEŃ ZASTĘPCZYCH NA PRZYKŁADZIE HIPOTEZY DV

Przykładowe rozkłady zastępczych zmęczeniowych naprężeń τ_{DV2} można zaobserwować na Rys.4.1.8 dla stali C60E(T) oraz na Rys.4.1.9 dla stali C60E (N). Należy pamiętać, że *rysunki te prezentują jednocześnie dwa odmienne zjawiska*:

1. wyężenie kontaktowe elementu spoczywającego pod obciążeniem bez ruchu
2. wyężenie kontaktowe na pojedynczym promieniu elementu tocącego się pod obciążeniem.

W tym drugim przypadku kąt ϕ (Rys.4.1.3) ma znaczenie parametru czasowego.

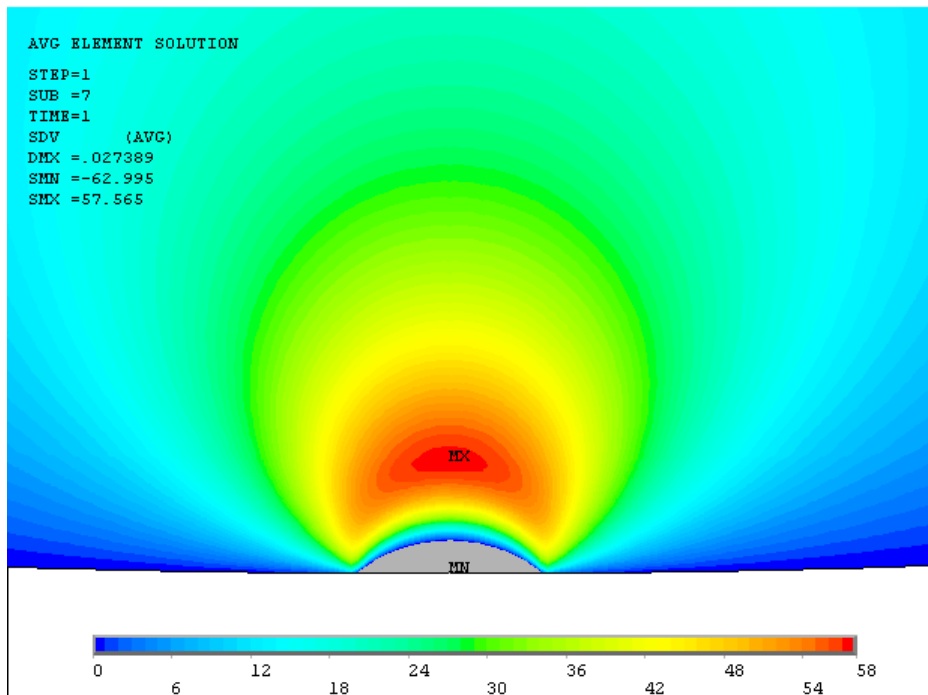
Na zaprezentowanym przykładzie (ten sam materiał, takie same warunki obciążenia, zmieniona jedynie obróbka cieplna stali) można zauważyć wpływ własności materiałowych na wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych liczonych wg hipotezy DV. Zmiana sposobu obróbki dla stali C60E powoduje w tym przypadku prawie dwukrotną zmianę zastępczych naprężeń zmęczeniowych τ_{DV2} ($\tau_{DV2,C60E(T)}^{MAX} = 58$ [MPa]; $\tau_{DV2,C60E(N)}^{MAX} = 108$ [MPa]). Zmianie uległ również promień położenia najbardziej wyężonego punktu, który został oznaczony jako r_{DV} . Powyższy efekt krytykowany jest w ostatnio publikowanych pracach [47,48,51], które sugerują mniejszy wpływ na wyężenie zmęczeniowe naprężeń hydrostatycznych dla $\sigma_H < 0$ (por. rozdz. 3.2.2).

W przypadku punktów na promieniu r_{PL} (Rys.4.1.4) łatwo zauważyć, że wartość średnia naprężeń stycznych wynosi $\tau_{ns,m}^{PL} = 0$, a naprężenie amplitudalne $\tau_{a,T}^{PL} = \tau_{ns}(t)$. Natomiast dla przebiegów naprężeń tnących, w płaszczyźnie krytycznej $\Theta_{r\phi} = 45^\circ$, określenie wartości średniej i amplitudy nie jest jednoznaczne. W badanym zagadnieniu wartość średnia została obliczona ze wzoru (3.2.6).

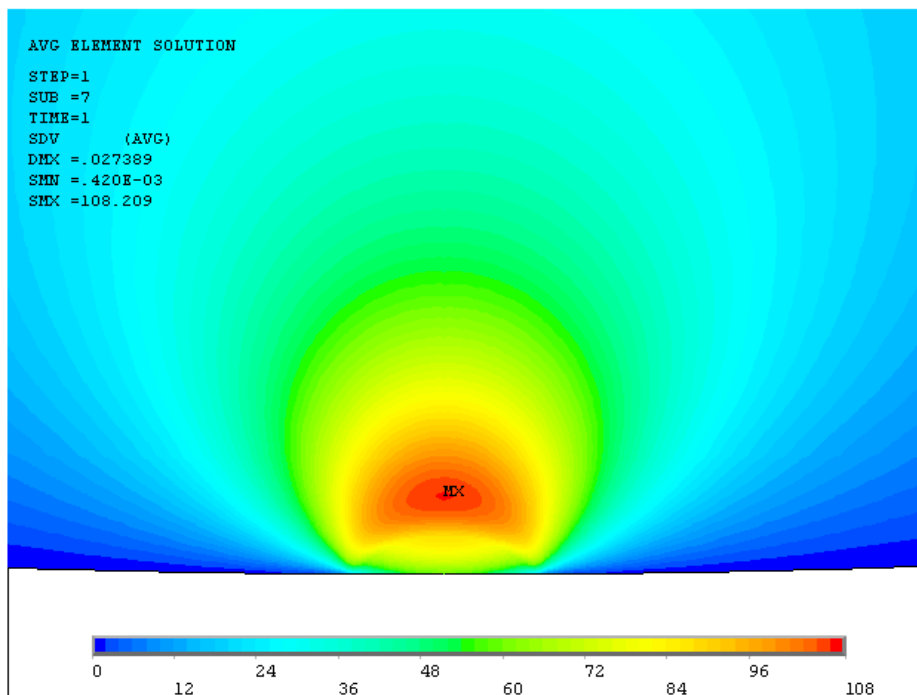
Wyznaczone metodą DV₁ przebiegi τ_{DV1} zostały przedstawione w formie wykresów na Rys.4.1.10 (dla $\Theta_{r\phi} = 0^\circ$) i Rys.4.1.11 (dla $\Theta_{r\phi} = 45^\circ$). W przypadku płaszczyzny krytycznej $\Theta_{r\phi} = 0^\circ$, można zauważyć maksima zastępczych naprężeń zmęczeniowych w okolicy punktów PL. Dla $|\phi| < 0,004$ [rad] obliczone wartości τ_{DV1} są mniejsze od zera. Ujemna wartość τ_{DV1} spowodowana jest występowaniem znacznych naprężeń hydrostatycznych w czasie gdy zmęczeniowe naprężenia tnące maleją do zera. Dla takich relacji efektów zmęczeniowych i statycznych hipoteza DV traci sens fizyczny, dlatego na zaprezentowanych wykresach usunięto ujemne wartości naprężeń zmęczeniowych. Zjawisko to zauważono w literaturze już wcześniej [47,51], a odpowiednie modyfikacje hipotezy DV omówiono w rozdziale 3.2.2.

W przypadku płaszczyzny krytycznej $\Theta_{r\phi} = 45^\circ$, dla $\phi = 0$, naprężenia tnące przyjmują maksymalną wartość, jednakże duże ściskanie sprawia, że w tym punkcie τ_{DV1} nie osiąga maksimum. Pojawia się ono w miejscu gdzie naprężenie $\tau(t)$ (patrz wzór 3.2.1) jest największe. Z uwagi na przyjęcie wartości naprężenia amplitudowego τ_a^T w formie (3.2.5) na Rys.4.1.11 występują nieco sztuczne z fizycznego punktu widzenia znaczne wartości τ_{DV1} w strefach gdzie wyężenie jest bliskie zera ($|\phi| > 0,03$ [rad]). Jest to spowodowane faktem, że dla kąta $\Theta_{r\phi} = 45^\circ$ amplituda τ_a^T przybiera relatywnie duże wartości.

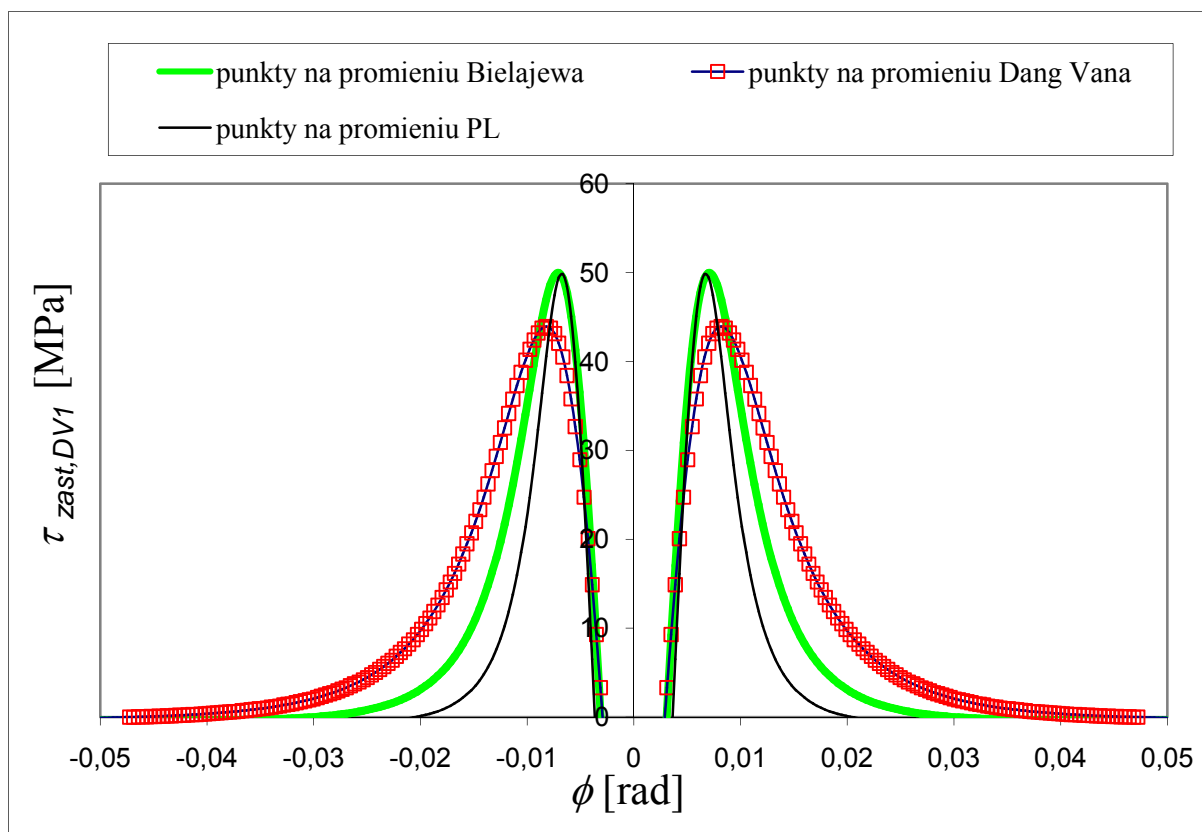
Na Rys.4.1.12 przedstawiono przebieg τ_{DV2} . W tym przypadku maksymalna wartość τ_{DV2}^{MAX} występuje dla promienia r_{DV} i jest ona nieznacznie mniejsza od wartości uzyskiwanych przy zastosowaniu podejścia z płaszczyzną krytyczną.



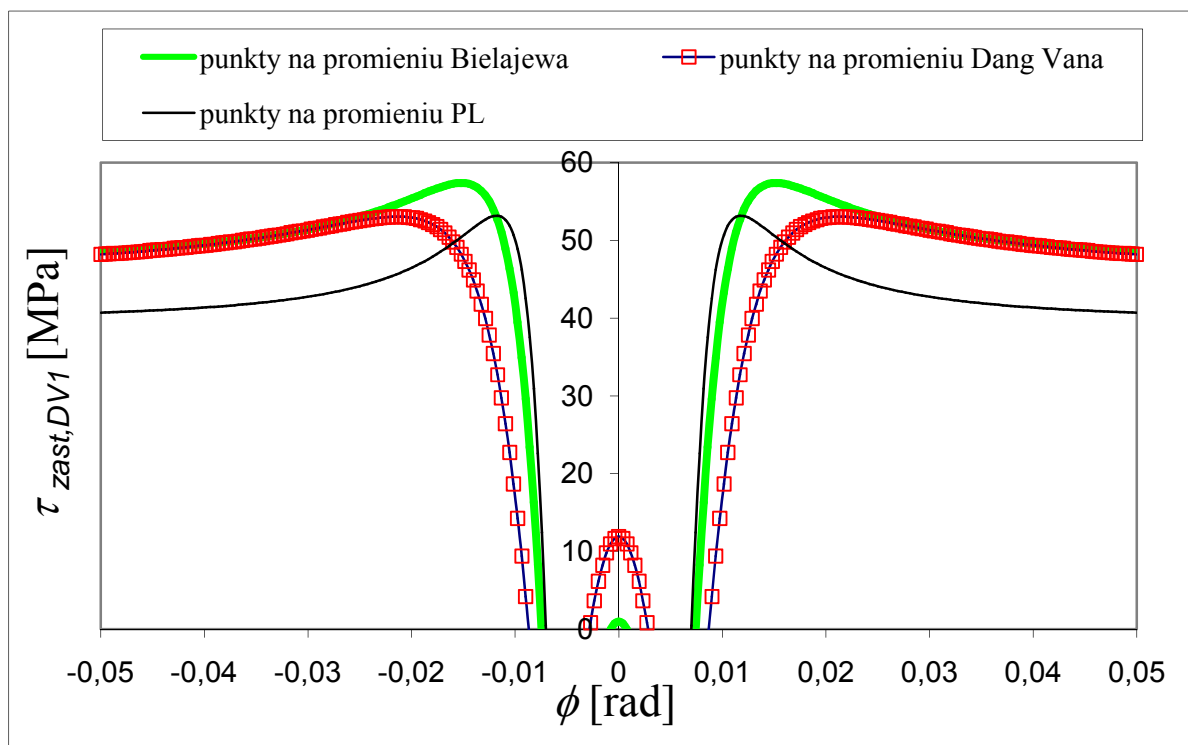
Rys.4.1.8 Rozkład τ_{DV2} dla stali C60E(T), dla kryterium DV_2 (usunięto wyniki w strefie ujemnych naprężeń τ_{DV2})



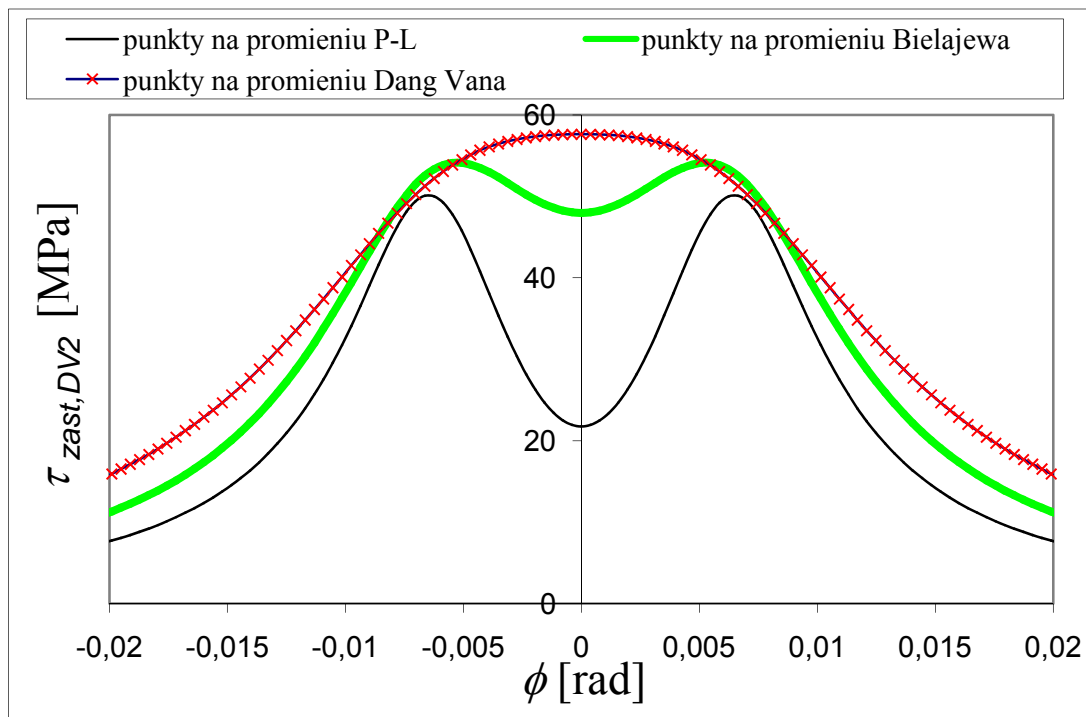
Rys.4.1.9 Rozkład τ_{DV2} dla stali C60E(N), dla kryterium DV_2 .



Rys.4.1.10 Naprężenia τ_{DV1} w płaszczyźnie krytycznej $\theta_{r\phi} = 0^\circ$ (stal C60E(T))



Rys.4.1.11 Naprężenia τ_{DV1} w płaszczyźnie krytycznej $\theta_{r\phi} = 45^\circ$ (stal C60E(T))



Rys.4.1.12 Maksymalne zmęczeniowe naprężenia zastępcze τ_{DV2} ($\Theta_{r\phi}$ zmienne, stal C60E(T))

4.1.4 PORÓWNANIE EKSTREMALNYCH WARTOŚCI ZASTĘPCZYCH NAPRĘŻEŃ ZMĘCZENIOWYCH DLA RÓŻNYCH BADANYCH HIPOTEZ

Dla zdefiniowanych w pracy promieni zbadano wszystkie możliwe orientacje płaszczyzn krytycznych $\Theta_{r\phi}$ z dokładnością do $0,5^\circ$. W tabelach Tab.4.1 i Tab.4.2 zestawiono uzyskane wyniki zastępczych naprężeń zmęczeniowych τ_{DV1} w badanych płaszczyznach krytycznych na promieniach r_{PL} i r_B . W przypadku hipotezy DV₁ podano wyniki obliczeń dla czterech różnych płaszczyzn krytycznych, w których wystąpiły: maksymalna amplituda naprężenia stycznego ($\Theta_{r\phi} = 0$); maksymalne naprężenie styczne ($\Theta_{r\phi} = 45^\circ$); oraz dwie płaszczyzny, w których wystąpiły maksymalne zastępcze wyężenia zmęczeniowe τ_{DV1} na promieniach r_{PL} ($\Theta_{r\phi} = 21,5^\circ$ dla C60E(T) i $\Theta_{r\phi} = 2,0^\circ$ dla C60E(N)) i r_B ($\Theta_{r\phi} = 30,0^\circ$ dla C60E(T) i $\Theta_{r\phi} = 3,0^\circ$ dla C60E(N)).

Wartości maksymalne τ_{DV}^{MAX} uzyskane obiema badanymi metodami DV dla konkretnego materiału są zbliżone. Należy jednak zauważyć, że hipoteza DV przeszacowuje wpływ ściskających naprężeń hydrostatycznych dla materiałów twardych (tutaj stal C60E(T)) [47,48,51]. Dla badanego przypadku dla stali ulepszonej cieplnie obie wersje hipotezy DV dają prawie dwukrotnie mniejsze rezultaty od wyników uzyskanych innymi hipotezami (Tab.4.1).

Maksymalne wartości τ_{DV}^{MAX} na promieniach r_B i r_{PL} (Rys.4.1.13) występują dla odmiennych wartości $\Theta_{r\phi}$ niż przedstawione na wykresach (Rys.4.1.4, Rys.4.1.6). Spowodowane jest to wpływem zmiennych w badanym obszarze naprężeń hydrostatycznych σ_H , co uniemożliwia podanie stałej orientacji płaszczyzn krytycznych. Ostre naroże w punkcie ($\phi = 0, \Theta_{r\phi} = 0$) spowodowane jest faktem, że wartość $\tau_{a,T}$ ma charakter zawsze dodatniej formy amplitudalnej (patrz wzór 3.2.5).

Tabela.4.1 Zestawienie ekstremalnych wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych τ_{eqv}^{MAX} (materiał C60E(T)); $R_K = 200$ [mm]; wyniki hipotezy DV odbiegają wyraźnie od pozostałych.

Metoda	$\Theta_{r\phi}$ [°]	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]		
		$r_{PL} = 199,3$ [mm]	$r_B = 198,9$ [mm]	$r_{DV2} = 198,3$ [mm]
DV ₁	0	49,8*	49,9*	-
	21,5	57,2*	-	-
	30,0	-	58,5*	-
	45	53,3*	57,4*	-
DV ₂		50,1*	54,1*	57,6*
DV _{mod}		98,5	92,4	
P ₁		125,2**	120,7**	-
P ₂		99,3	93,9	-
C		107,2	100,6	-
E ₂		99,5	95,8	-

Tabela.4.2 Zestawienie ekstremalnych wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych τ_{eqv}^{MAX} (materiał C60E(N)); $R_K = 200$ [mm].

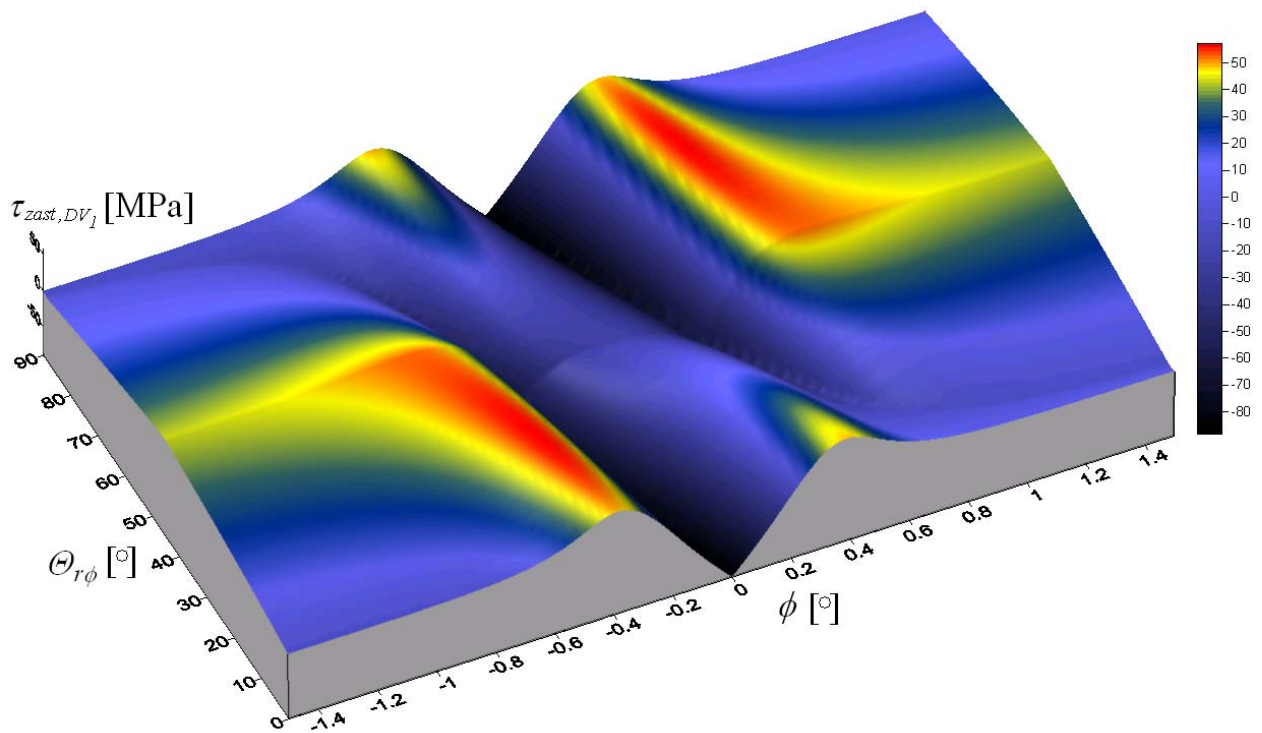
Metoda	$\Theta_{r\phi}$ [°]	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]		
		$r_{PL} = 199,3$ [mm]	$r_B = 198,9$ [mm]	$r_{DV2} = 198,3$ [mm]
DV ₁	0	90,4	86,3	-
	2,0	90,8	-	-
	3,0	-	86,5	-
	45	67,7	69,2	-
DV ₂		99,3	108,1	108,2
DV _{mod}		98,5	92,4	-
P ₁		125,2**	120,7**	-
P ₂		99,3	93,9	-
C		107,5	101,0	-
E ₂		99,7	95,9	-

* oryginalna wersja hipotezy DV przeszacowuje wpływ ściskających naprężeń hydrostatycznych na poziom wyężenia zmęczeniowego,

** hipoteza P₁ nie uwzględnia wpływu przesunięcia fazowego między efektami hydrostatycznymi a ścinającymi co prowadzi do zawyżenia wyężenia zmęczeniowego.

Uwaga: Kolorami zaznaczono maksymalne wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych:

- wartości zaniżone (przeszacowanie efektów ściskających)
- wartości zawyżone
- wyniki poprawne



Rys.4.1.13. Mapa zastępczych naprężeń τ_{DV1} dla toczenia bez tarcia na promieniu r_{PL} , stal C60E(T), płaszczyzna krytyczna – $\Theta_{r\phi} = 21,5[^\circ]$; $\tau_{DV1}^{MAX} = 57,2$ [MPa]

W przypadku stali C60E(N) wpływ naprężeń hydrostatycznych jest znikomy ($a_{DV} = 0,065$). Można więc przyjąć, że maksymalne zastępcze zmęczeniowe naprężenia τ_{DV1}^{MAX} wystąpią w płaszczyźnie $\Theta_{r\phi} = 0^\circ$. Mała wartość mnożnika a_{DV} przy naprężeniach hydrostatycznych (3.2.1; oraz wzory (3.5.6) dla stali C60E(T) i (3.5.11) dla C60E(N)) powoduje również prawie dwukrotny wzrost zastępczych naprężeń zmęczeniowych ($\tau_{DV2}^{MAX} = 108$ [MPa]) w stosunku do stali C60E(T).

W przypadku toczenia bez tarcia w hipotezach Papadopoulosa, Crosslanda i zmodyfikowanej DV człon związany z naprężeniami hydrostatycznymi można pominąć. Dzieje się tak ponieważ hipotezy Papadopoulosa i Crosslanda uwzględniają wyłącznie maksymalną wartość naprężenia hydrostatycznego, które w tym przypadku jest bliskie zeru. W zmodyfikowanej hipotezie DV pominięto natomiast wpływ ściskających naprężeń hydrostatycznych. Z tego powodu na wartość zastępczych naprężeń zmęczeniowych wpływa tylko wartość zastępczych naprężeń stycznych. Stąd też największe wyężenie zmęczeniowe jest na promieniu r_{PL} , na którym występuje największa amplituda naprężenia stycznego. Ostatecznie można stwierdzić, że w przypadku toczenia bez udziału tarcia największe ryzyko inicjacji pęknięć zmęczeniowych występuje na promieniu r_{PL} .

W celu porównania rozpatrywanych w pracy hipotez wykonano dokładniejsze badania wyężenia zmęczeniowego. W tym celu wyznaczono naprężenia zmęczeniowe na różnych promieniach r walca w obszarze koncentracji naprężeń spowodowanej kontaktem walca z płaszczyzną. Obliczenia wykonano dla wszystkich opisanych hipotez, zarówno dla stali ulepszonej cieplnie C60E(T) jak również dla stali normalizowanej C60E(N). Wyznaczono również naprężenia τ_{DV1} dla większej liczby promieni. Wzory dla powyższych materiałów i poszczególnych hipotez podane są w rozdziale 3.5. Wszystkie badane kryteria, z wyjątkiem oryginalnej hipotezy DV, za najbardziej wyężony promień sugerują promień bliski r_{PL} .

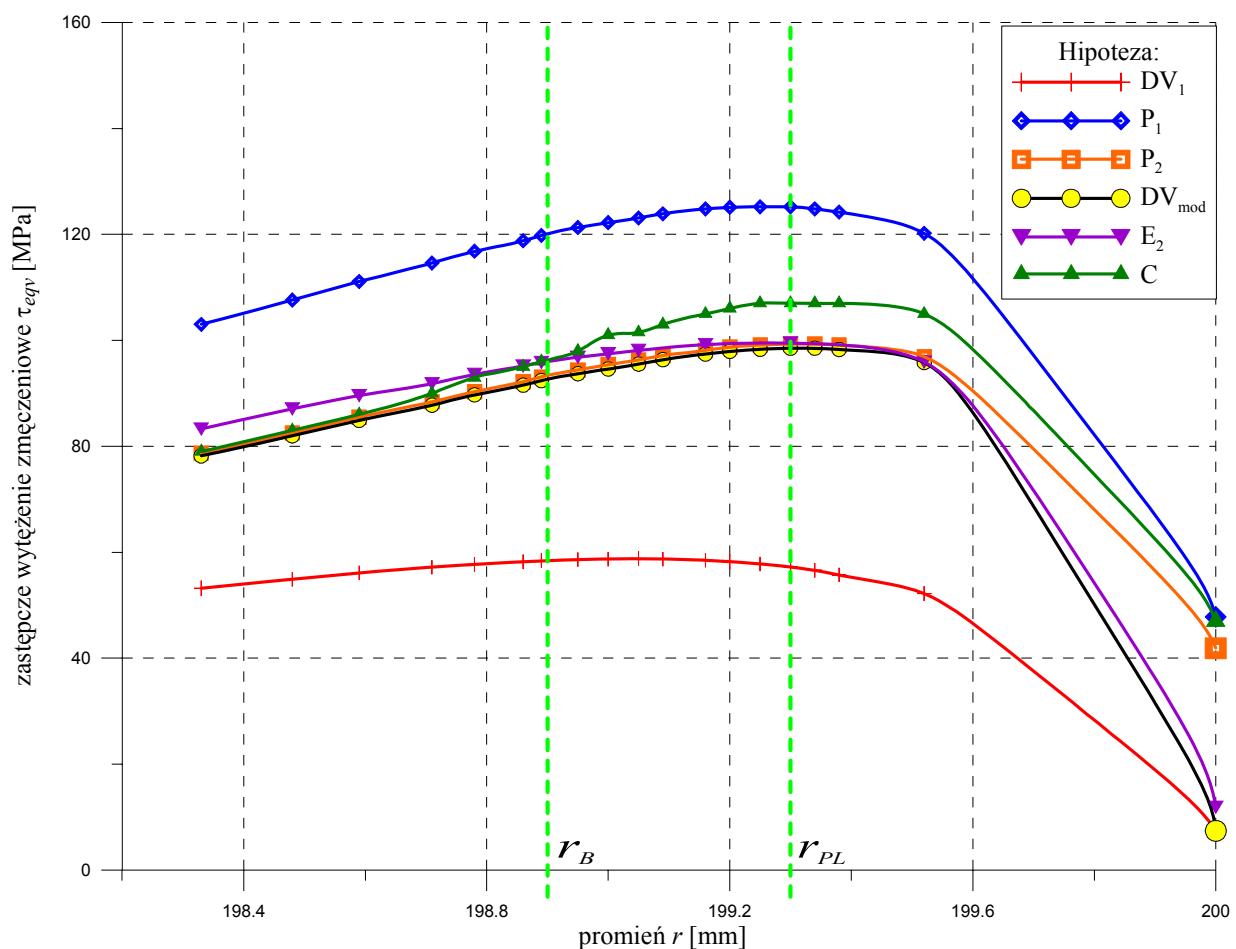
Rozkłady zastępczych naprężeń zmęczeniowych dla stali C60E(T) przedstawiono na Rys.4.1.14. Większe wartości naprężeń zmęczeniowych τ_{P1} , τ_{P2} i τ_C w porównaniu do τ_{DV1} i τ_{DV2} spowodowane są tym, że w przypadku zjawiska kontaktu tocznego hipotezy Papadopoulosa nie uwzględniają wpływu ściskających naprężeń hydrostatycznych. Jest to spowodowane faktem, że dla zjawisk tocznych drugi człon ($\sigma_{H,MAX}$) we wzorach (3.1.1; 3.3.5; 3.3.7) ma wartość równą zeru. Skutkiem tego wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych dla tego zjawiska nie zależą

od własności materiałowych (co było mankamentem hipotezy DV zaobserwowanym ostatnio również w pracach [47,48,51]).

W hipotezach DV efekty ściskające wpływały korzystnie na zmniejszenie zastępczego wyężenia zmęczeniowego. Hipoteza P_1 nie uwzględnia przesunięcia fazowego pomiędzy naprężeniem tnącym a naprężeniami normalnymi, co powoduje zawyżenie wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych względem pozostałych hipotez, w tym również P_2 , która bazuje na pojęciu płaszczyzny krytycznej. Dodatkowo można zauważyć, że własności materiałowe w kryterium DV wpływają nie tylko na wartość zastępczych naprężeń zmęczeniowych lecz także na położenie najbardziej wyężonego promienia (punktu) oraz orientację płaszczyzny krytycznej.

Porównując uzyskane wyniki wszystkimi hipotezami, można zauważyć, że hipotezy P_2 , C, E_2 oraz DV_{mod} podobnie oszacowują poziom i promień maksymalnego wyężenia zmęczeniowego. Pozwala to przyjąć, że rzeczywisty poziom wyężenia zmęczeniowego powinien znajdować się w obrębie wyznaczonego zakresu. Wartość tego wyężenia dla czystego toczenia jest zbliżona do amplitudy naprężenia tnącego w punktach PL. Natomiast dla twardej stali wyniki uzyskane obiema interpretacjami oryginalnej hipotezy DV znacząco różniły się od pozostałych hipotez. Związane jest to z uwzględnieniem znacznych efektów ściskających w formule DV. Trochę lepiej wygląda sytuacja dla stali normalizowanej, która jest materiałem miękkim. Jednakże również tutaj wyężenie zmęczeniowe wyznaczone hipotezą DV_1 miało wartość mniejszą od oczekiwanej (amplitudy naprężenia tnącego w punktach PL).

Podsumowując można stwierdzić, że *oryginalna hipoteza Dang Vana nie nadaje się do stosowania do zjawisk toczenia w szczególności dla materiałów twardych. Nie powinno się również stosować hipotezy Papadopoulou P_1 bazującej na średnich wartościach naprężeń, która zawyża wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych.*



Rys.4.1.14 Zastępcze naprężenia zmęczeniowe uzyskane różnymi hipotezami dla toczenia bez tarcia (materiał C60E(T)), promień koła $R_K = 200$ [mm], $F = 840$ $\left[\frac{N}{mm}\right]$

4.2. WPLYW CHROPOWATOŚCI NA ZJAWISKA TOCZNE

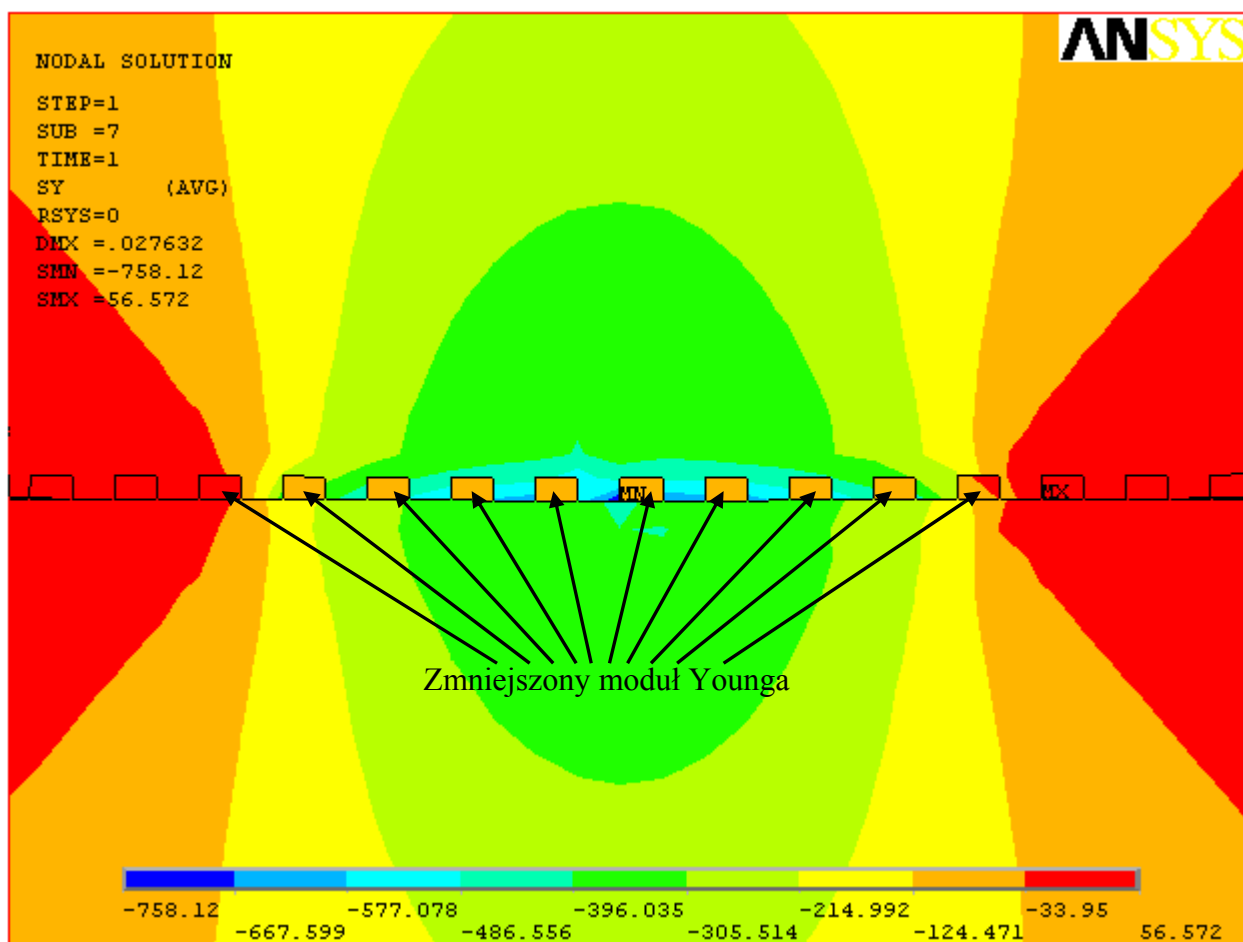
W pracy obliczenia numeryczne 2D i 3D wykonano dla kontaktu ciał o idealnie gładkiej powierzchni. W rzeczywistości profil powierzchni nie jest płaski, lecz pofalowany i chropowaty. Jej kształt geometryczny w głównej mierze zależy od sposobu obróbki. Jednakże nawet najstaranniejsze polerowanie nie usuwa chropowatości. Za technicznie gładką powierzchnię uznaje się taką, która ma nierówności rzędu 0,2 – 3,2 [μm]. W przypadku kontaktu dwóch ciał chropowatych rzeczywisty obszar styku jest znacznie mniejszy. Przykładowo dla kontaktu dwóch ciał z zerowym obciążeniem styk wystąpi w trzech przypadkowych punktach a jego obszar jest nieskończenie mały. Wraz ze wzrostem obciążenia rosną naprężenia kontaktowe prowadząc do uplastycznienia materiału w miejscach styku co powoduje powiększanie obszaru kontaktu. W rzeczywistości jednak tylko mały ułamek powierzchni stykających się ciał przenosi obciążenie [80]. Chropowatość powierzchni powoduje więc zwiększenie pozornego promienia (półosi) kontaktu a także zmniejszenie pozornych naprężeń kontaktowych i maksymalnego wyężenia w punkcie Bielajewa („*Surface roughness increases the apparent contact area. It thus reduces the maximum apparent contact pressure and the maximum shear stress in the bulk material. This effect is inversely related to the normal load and directly related to the roughness*”) [81].

Podobny charakter wpływu chropowatości zaobserwowano w wykonanych obliczeniach numerycznych 2D. Do obliczeń wykorzystano model 2D dla czystego toczenia przedstawiony w punkcie 4.1 (Rys.4.1.1). Różnica polegała na zamodelowaniu walca o chropowatej powierzchni stykającego się z idealnie płaskim podłożem. Chropowatość zamodelowano dwoma sposobami:

- 1) przez zmniejszenie współczynnika sztywności kontaktu – FKN,
- 2) przez zmniejszenie modułu Younga w wybranych elementach o wymiarach 0,156 x 0,0875 [mm] (Rys.4.2.1).

Współczynnik FKN (opis w Załączniku B) domyślnie ma wartość równą 1. Zmniejszenie jego wartości modeluje więc bardziej podatną powierzchnię (w tym przypadku bardziej chropowatą). Obliczenia wykonano dla trzech wartości FKN = 0,5; 0,05 oraz 0,005. We wszystkich przypadkach (Tab.4.3) zmniejszeniu ulegały maksymalne naciski p_o oraz maksymalne wyężenie σ_{HMH} w punkcie Bielajewa a także amplituda naprężeń tnących w punktach P–L. Zwiększaniu podlegał natomiast promień kontaktu r_c .

W przypadku modelowania chropowatości przez zmniejszanie modułu Younga w wybranych elementach na powierzchni walca również wzrastał promień kontaktu oraz zmniejszały się: wyężenie w punkcie Bielajewa oraz amplituda naprężenia tnącego w punktach P–L. Dalsze zmniejszanie modułu Younga prowadzi do powstawania lokalnych koncentracji związanych z karami geometrycznymi. **Są to jednak efekty lokalne nie wpływające istotnie na wyężenie w punktach Bielajewa i P–L.** Różnicą było zwiększanie się maksymalnych nacisków kontaktowych wraz ze zmniejszaniem modułu Younga. Należy również zauważyć, że wymiary elementów, w których zmniejszono moduł Younga są znacznie mniejsze od promienia materiałowego ϱ_m [74]. Dlatego dokładna analiza naprężeń na powierzchni chropowatej powinna być prowadzona w przypowierzchniowej objętości o znacznie mniejszych rozmiarach.



Rys.4.2.1 Próba modelowania chropowatości przez zmniejszenie modułu Younga do $E = 10^4$ [MPa] w wybranych elementach o wymiarach - 0,156 x 0,0875 [mm] przy powierzchni walca oraz mapa naprężenia σ_y (wymiar fragmentu na rysunku ok. 5 x 3,5 [mm])

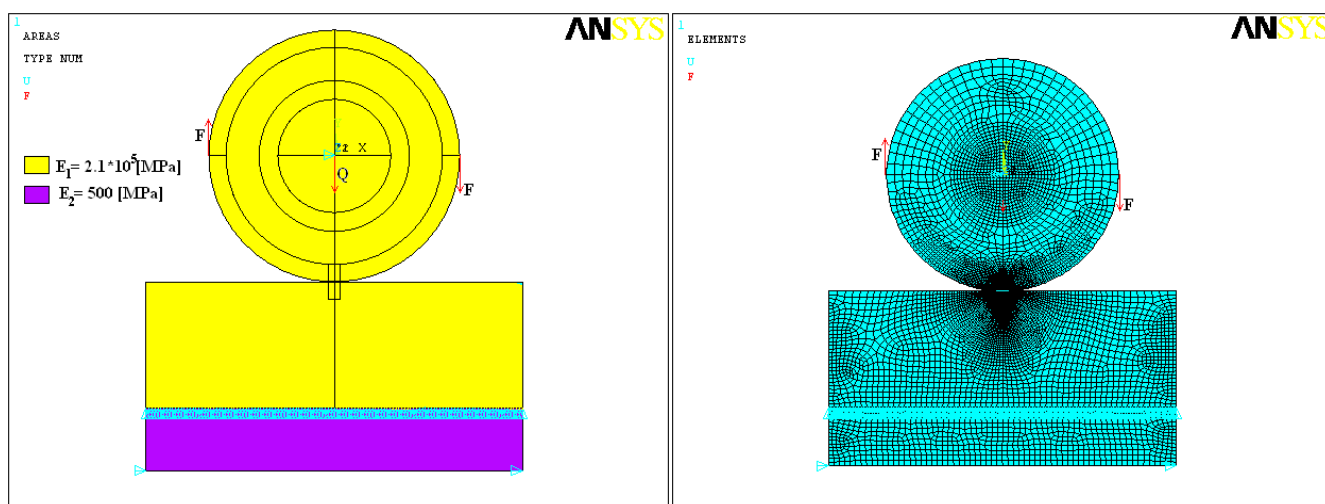
Tabela.4.3 Wyężenie maksymalne w punkcie Bielajewa oraz naprężenia kontaktowe i styczne w punktach P-L, w funkcji chropowatości modelowanej przez zmniejszenie współczynnika FKN i modułu Younga E w wybranych elementach; promień koła $R_K = 200$ [mm], $F = 840 \left[\frac{N}{mm} \right]$

	wartość zmniejszonego modułu Younga E [MPa] w wybranych elementach				wartość współczynnika FKN w wybranych elementach kontaktowych		
	$2,1 \cdot 10^5$	10^5	$5 \cdot 10^4$	10^4	0,5	0,05	0,005
p_o [MPa]	393	397	410	450	392	386	342
σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	220	219	217	214	220	217	190
τ_{xy}^{MIN} [MPa]	-98	-97	-96	-95	-98	-96	-82
τ_{xy}^{MAX} [MPa]	98	97	97	95	98	96	82
r_c [mm]	1,25	1,25	1,41	1,41	1,25	1,41	1,72

4.3 UWZGLĘDNIENIE TARCIA W ROZWIĄZANIACH ZAGADNIENIA KONTAKTU TOCZNEGO

W przypadku kół napędzanych (takich jak koła lokomotywy czy napędowe koła suwnicy) istotne jest rozwiązanie modelu uwzględniającego efekty cierne (tarcie toczone trakcyjne). Moment napędzający koło powoduje wystąpienie naprężeń ciernych w obszarze styku. Do wstępnych obliczeń 2D współczynnik tarcia między kołem a szyną przyjęto $\mu = 0,2$.

Dwuwymiarowe zagadnienie kontaktu z tarcieniem również zostało rozwiązane przy użyciu elementów 8-węzłowych PLANE82 oraz kontaktowych CONTA172 i TARGE169. Zastosowano nieregularną siatkę z zagęszczeniem elementów w obszarze kontaktu. Koło nie miało wspólnych punktów z płaszczyzną i miało odebrany tylko przesuw poziomy w środku. Moment został zadany w postaci pary sił F a obciążenie w postaci pionowej siły Q . Podłoże zostało podzielone na dwa sklejone ze sobą obszary o różnych modułach sprężystości Younga (Rys.4.3.1). Część sztywniejsza miała unieruchomiony ruch pionowy, natomiast podatniejsza, dolna część o module Younga $E_2 = 500$ [MPa] miała zablokowane przemieszczenia w kierunku poziomym w dolnych narożach. Celem tego zabiegu było umożliwienie ruchu poziomego podłoża wskutek działania momentu skręcającego (sił trakcyjnych) oraz uzyskanie poprawnej formy macierzy sztywności MES. Można zauważyć, że dolna podatna część podłoża miała na celu utrzymanie modelu w przestrzeni, co pozwoliło na efektywne obliczenia metodą elementów skończonych (szczegóły w Załączniku D).

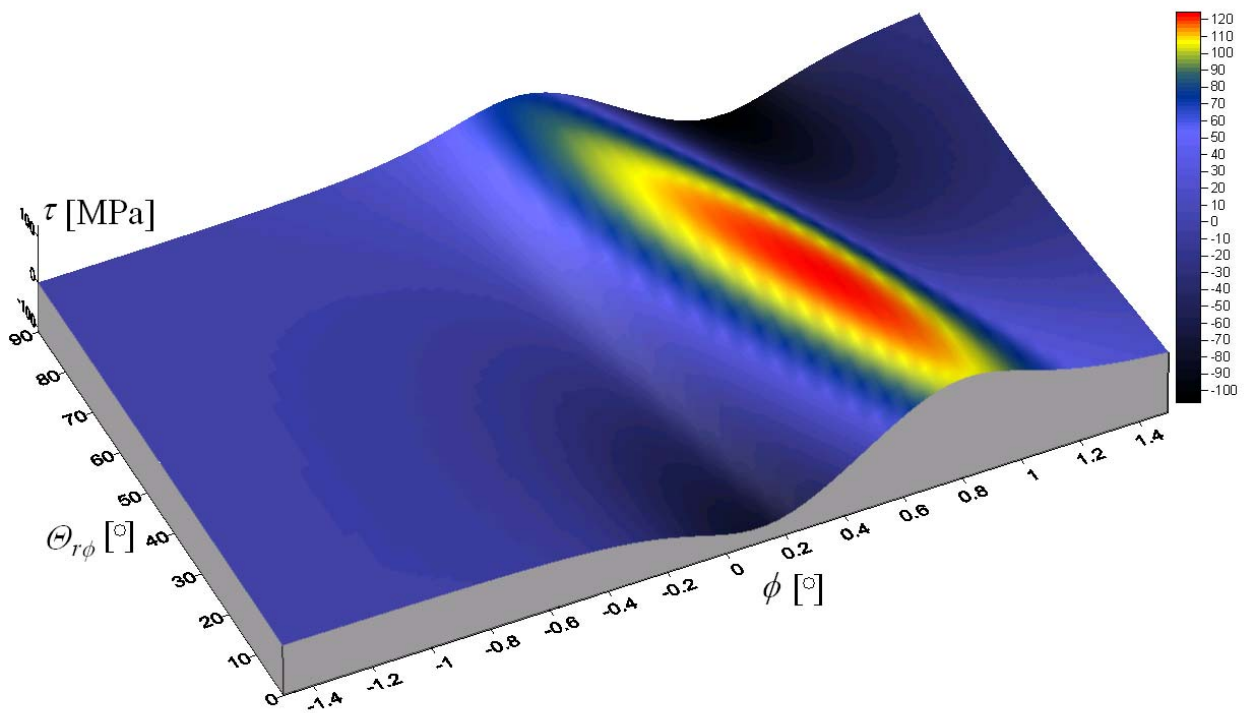


Rys.4.3.1 Model numeryczny – warunki brzegowe oraz siatka elementów skończonych

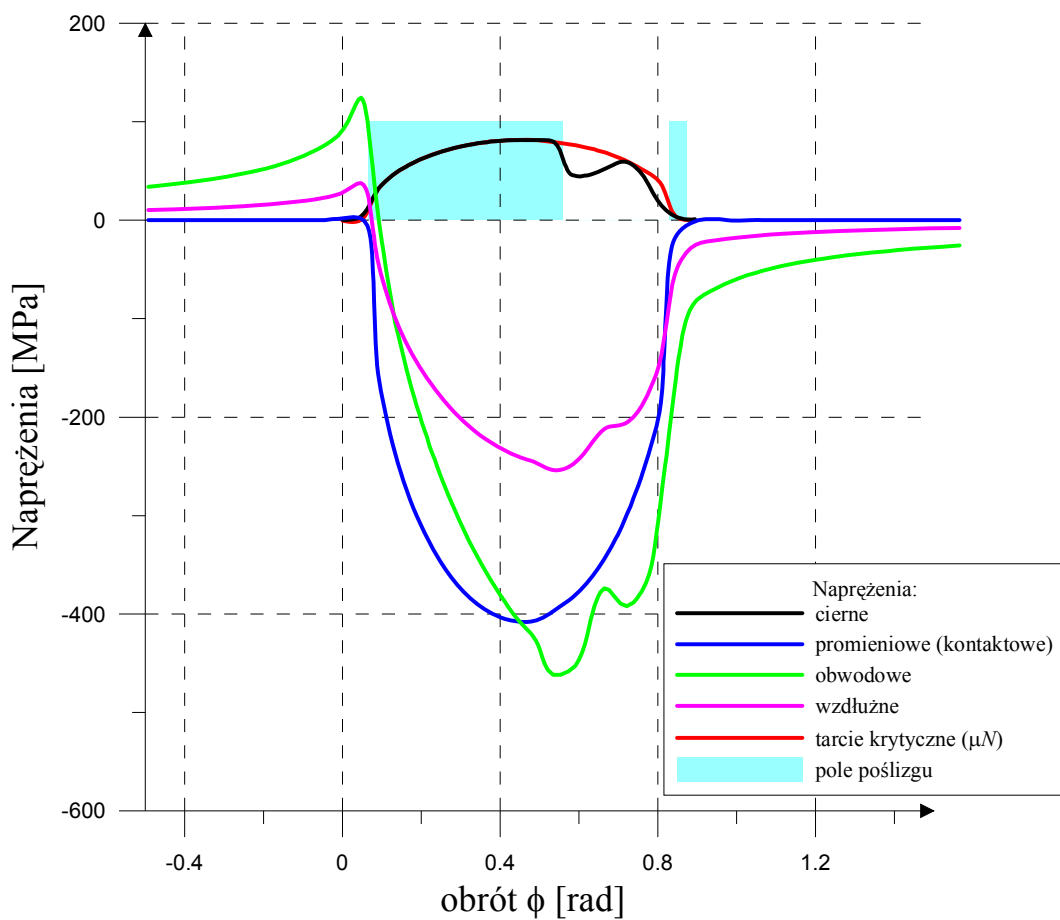
Obliczenia zastępczych naprężeń zmęczeniowych dla zagadnienia tarcia toczonego koła suwnicy wykonanego z dwóch rodzajów stali: ulepszonej cieplnie C60E (T) i normalizowanej C60E (N) przeprowadzono dla dwóch przypadków płaskiego stanu odkształcenia:

- dla ruchu ustalonego: $M_s = 10,8$ [Nm/mm],
- dla rozruchu z przeciążeniem $k = 3$, $M_s = 32,4$ [Nm/mm].

Obciążenie koła przyjęto $Q = 840$ [N/mm]. Powyższe dane odzwierciedlają pracę standardowego koła suwnicy. Siły i momenty odniesione są do jednostki szerokości koła (1 [mm]). Pojawienie się naprężeń stycznych w kontakcie powoduje zmiany rozkładu naprężeń oraz położenia charakterystycznych jego punktów. Zanika również zjawisko antysymetrycznego rozkładu naprężeń tnących. Rozkład naprężenia tnącego w różnych płaszczyznach materiałowych na promieniu $r_{DV2} = 199,0$ [mm] w funkcji czasu dla rozruchu z przeciążeniem przedstawiono na Rys.4.3.2. Wraz ze wzrostem momentu M_s , następuje zwiększanie się strefy poślizgu oraz zmęczeniowych naprężeń DV_2 . W przypadku przeciążenia silnika (moment trzykrotnie większy do nominalnego), poślizg występuje na około 67% obszaru kontaktu (Rys.4.3.3). Na wykresie zaznaczony został również rozkład stycznych naprężeń krytycznych (pełny poślizg). Wystąpi on dla $M_s = 35$ [Nm/mm].

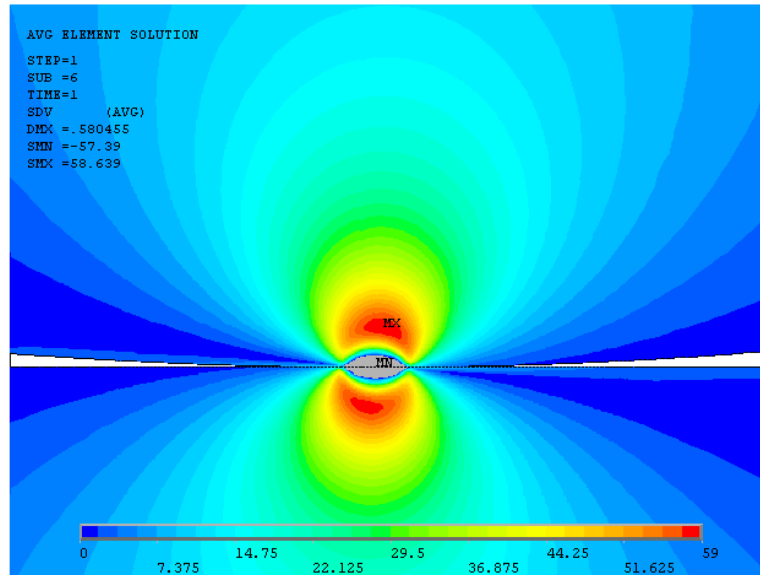


Rys.4.3.2 Rozkład naprężeń tnących τ w różnych płaszczyznach materiałowych $\theta_{r\phi}$ na promieniu $r_{DV2} = 199,0$ [mm] w funkcji czasu (obrotu ϕ); $M_s = 32,4$ [Nm/mm].

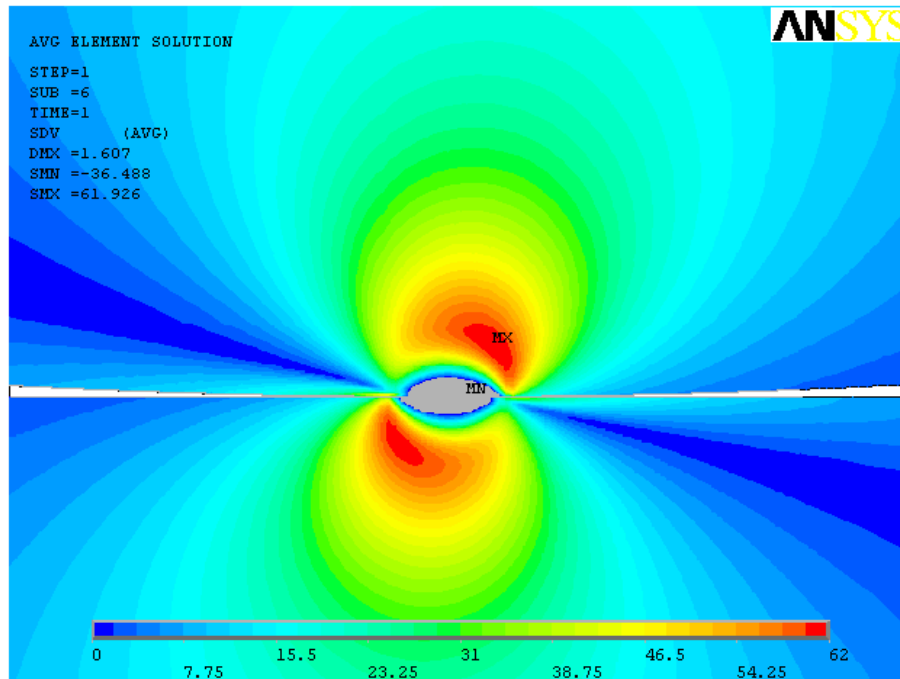


Rys.4.3.3. Naprężenia w kontakcie dla $M_s = 32,4$ [Nm/mm]

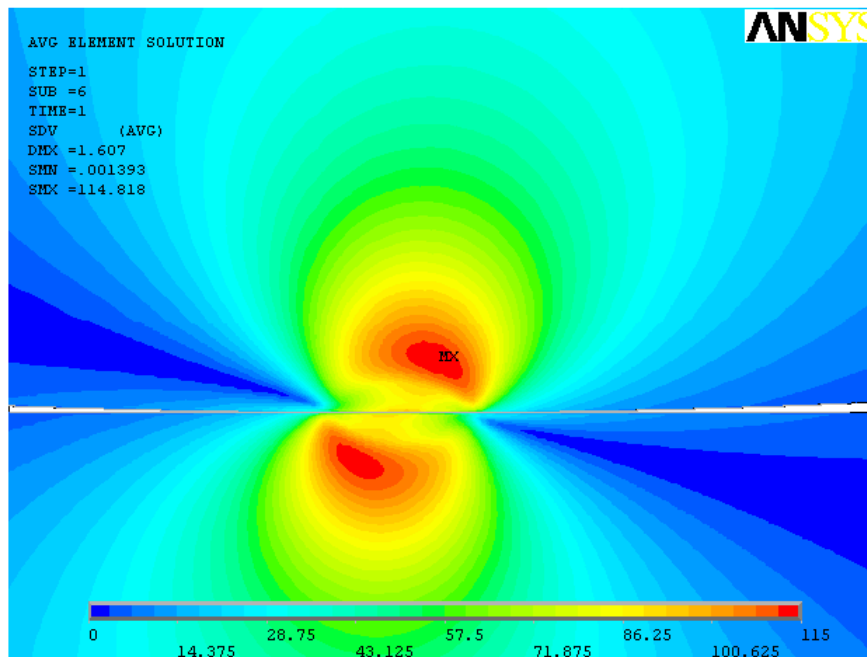
Zastępcze naprężenia DV_2 dla ruchu ustalonego i rozruchu z przeciążeniem dla stali C60E(T) przedstawiono odpowiednio na Rys.4.3.4 i Rys.4.3.5. W przypadku hipotezy DV_2 położenie najbardziej wyężonego punktu zależy od wartości momentu i jest w pobliżu maksymalnego naprężenia tnącego τ_{TG} . Należy jednak zauważyć, że również w przypadku drugiej interpretacji hipotezy DV_2 istotną rolę odgrywają naprężenia hydrostatyczne. Przykładowo dla rozruchu z przeciążeniem maksymalne naprężenie zastępcze τ_{DV2} dla stali C60E(N) (Rys.4.3.6) miało wartość prawie dwukrotnie większą niż dla stali C60E(T) (Rys.4.3.5). Uzasadnia to pominięcie wpływu na zmęczenie toczone ściskających naprężeń hydrostatycznych dla materiałów twardych również w tej wersji hipotezy.



Rys.4.3.4. Naprężenia zastępcze τ_{DV2} dla $M_s = 10,8$ [Nm/mm], materiał C60E(T)



Rys.4.3.5. Naprężenia zastępcze τ_{DV2} dla $M_s = 32,4$ [Nm/mm], materiał C60E(T)



Rys.4.3.6. Naprężenia zastępcze τ_{DV2} dla $M_s = 32,4$ [Nm/mm], materiał C60E(N)

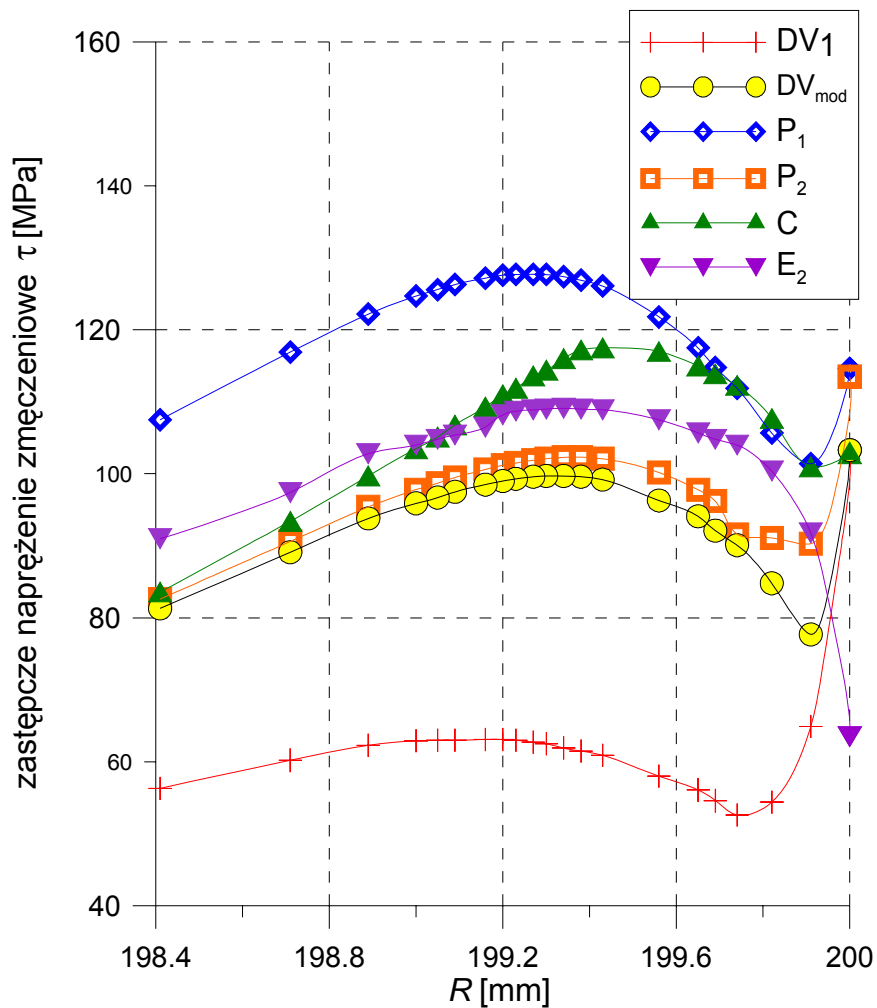
Przedstawione powyżej obliczenia zostały wykonane poprzez wstawienie do równania (3.2.1) naprężeń stycznych τ_{TG} liczonych z hipotezy T–G (metoda DV_2 – wzór 3.2.7). Pominięte w tym przypadku było podejście związane z płaszczyzną krytyczną, co może prowadzić do niedokładnego określenia wartości naprężeń zmęczeniowych. Dlatego w celu dokładnego określenia maksymalnych zastępczych naprężeń DV należy wyznaczyć płaszczyznę krytyczną, w której wystąpi najbardziej niekorzystna kombinacja naprężeń tnących oraz hydrostatycznych. Dokładna analiza przeprowadzona przy użyciu pozostałych hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego wskazała, że do inicjacji pęknięcia może dojść na (Rys.4.3.7):

1. promieniu odpowiadającym położeniu punktów P–L dla czystego toczenia,
2. promieniu zewnętrznej powierzchni walca.

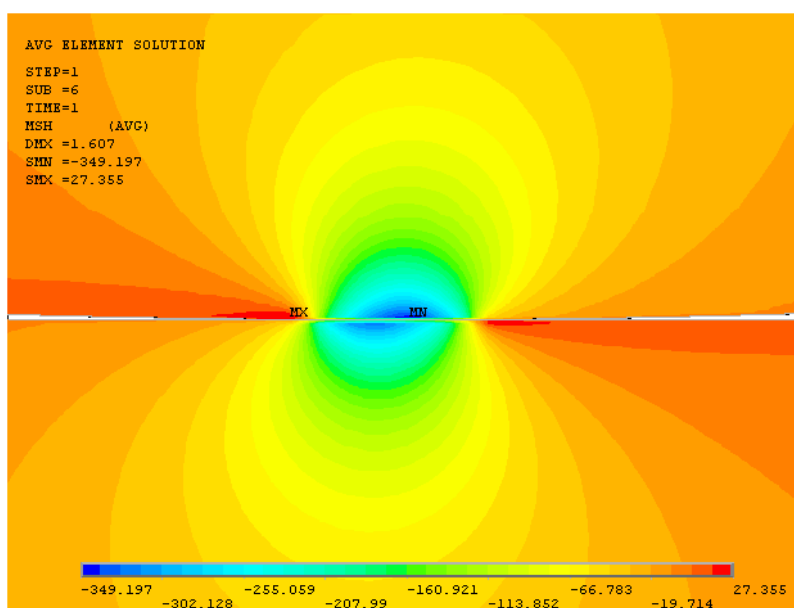
W pierwszym przypadku wyężenie zmęczeniowe pod powierzchnią uzasadnione jest znaczną amplitudą naprężeń stycznych na głębokości odpowiadającej położeniu punktów P–L dla czystego toczenia. Wyjątek stanowi tutaj oryginalna hipoteza DV_1 , która zaniża wartość zastępczych naprężeń zmęczeniowych poprzez przeszacowanie wpływu efektów ściskających (Rys.4.3.7, Rys.4.3.9, Tab.4.4). Naprężenia te osiągają znaczne wartości pod powierzchnią kontaktu a ich rozkład dla rozruchu z przeciążeniem można zaobserwować na Rys.4.3.8.

Wzrost naprężeń zmęczeniowych na powierzchni walca (Rys.4.3.7, Tab.4.5) jest spowodowany przez rozciągające (!) naprężenia obwodowe, powstałe wskutek działania momentu napędzającego. Powoduje to, że drugi człon uwzględniający naprężenia hydrostatyczne we wzorach hipotez dodaje się do zastępczych naprężeń tnących powodując ich zwiększanie. W szczególności dotyczy to hipotez DV i Papadopoulosa, dla których można zaobserwować znaczny wzrost wyężenia zmęczeniowego przy powierzchni kontaktu. Porównując maksymalne wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych (Tab.4.4 i Tab.4.5) można zauważyć, że najbardziej niekorzystnym etapem pracy koła jezdnego jest rozruch (hamowanie) z dużym przeciążeniem. Należy tutaj zauważyć fakt, że również na powierzchni koła występują znaczne wartości naprężeń zmęczeniowych.

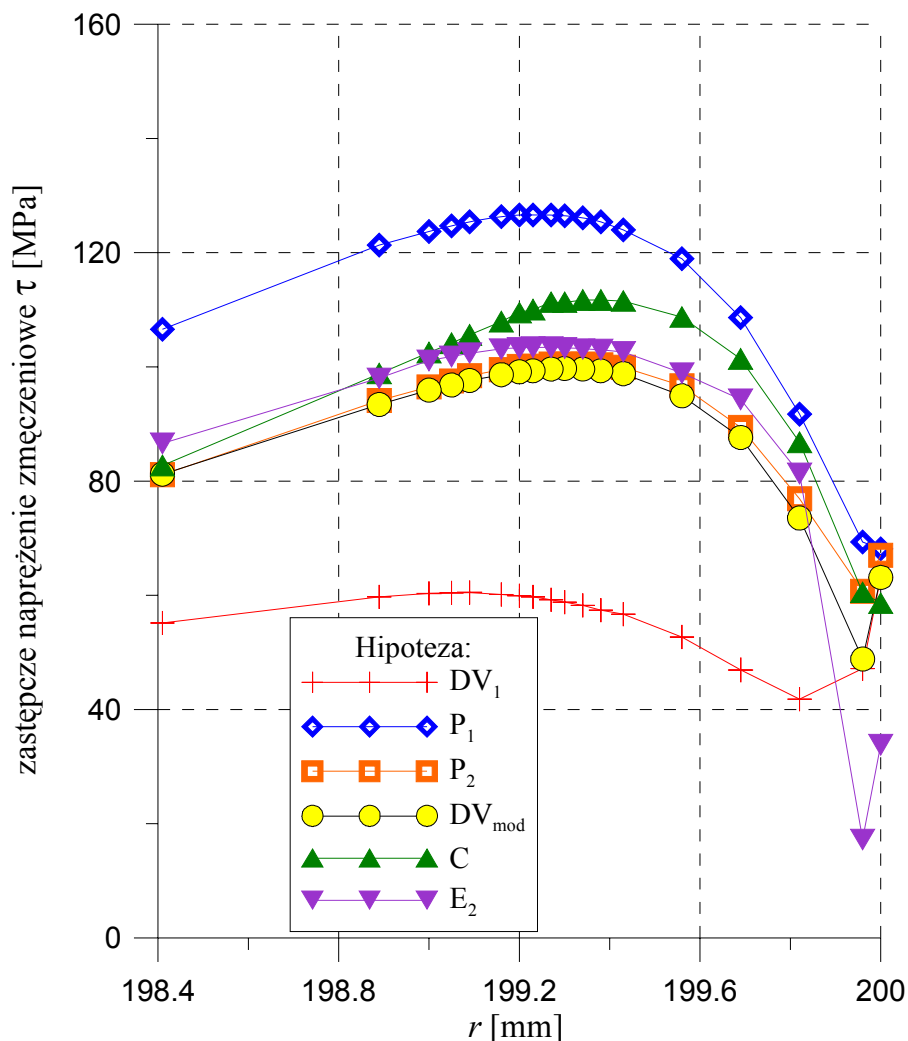
W analizowanych modelach numerycznych pominięto efekty związane z chropowatością powierzchni. W celu dokładnego określenia poziomu wyężenia na powierzchni koła należałoby dla przypadku rozruchu z przeciążeniem uwzględnić wpływ tej chropowatości.



Rys.4.3.7 Zastępcze naprężenia zmęczeniowe uzyskane różnymi hipotezami dla rozruchu z przeciążeniem (materiał C60E(T)), promień koła $R_K = 200$ [mm]



Rys.4.3.8 Mapa naprężeń hydrostatycznych dla rozruchu z przeciążeniem



Rys.4.3.9 Zastępcze naprężenia zmęczeniowe uzyskane różnymi hipotezami dla ruchu ustalonego (materiał C60E(T)), promień koła $R_K = 200$ [mm]

Tabela.4.4 Zestawienie ekstremalnych wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych, ruch ustalony.

Metoda	C60E(T)		C60E(N)	
	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	promień maks. wyężenia [mm]	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	promień maks. wyężenia [mm]
DV ₁	60,4	$R_{DV1} = 199,1$	92,0	$R_{DV1} = 199,3$
DV ₂	58,7	$R_{DV2} = 198,2$	109,8	$R_{DV2} = 198,9$
DV _{mod}	99,7	$R_{DVmod} = 199,3$	99,7	$R_{DVmod} = 199,3$
DV _{2mod}	120,4	$R_{DV2mod} = 199,0$	120,4	$R_{DV2mod} = 199,0$
P ₁	126,6	$R_{P1} \approx 199,3$	126,5	$R_{P1} \approx 199,3$
P ₂	100,5	$R_{P2} = 199,3$	100,3	$R_{P2} = 199,3$
C	111,7	$R_C \approx 199,4$	111,6	$R_C \approx 199,4$
E ₂	103,4	$R_E \approx 199,3$	103,4	$R_E \approx 199,3$

Uwaga: Kolorami zaznaczono maksymalne wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych:

- wartości zaniżone (przeszacowanie efektów ściskających)
- wartości zawyżone
- wyniki poprawne

Tabela.4.5 Zestawienie ekstremalnych wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych, rozruch z przeciążeniem.

Metoda	C60E(T)		C60E(N)	
	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	promień maks. wyteżenia [mm]	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	promień maks. wyteżenia [mm]
DV ₁	103,3	$R_{DV1} = 200$	92,5	$R_{DV1} = 199,3$
DV ₂	62,1	$R_{DV2} = 198,8$	114,9	$R_{DV2} = 199,0$
DV _{mod}	103,3	$R_{DVmod} = 200$	99,7	$R_{DVmod} = 199,3$
DV _{2mod}	125,9	$R_{DV2mod} = 199,1$	125,9	$R_{DV2mod} = 199,1$
P ₁	127,7	$R_{P1} \approx 199,3$	127,1	$R_{P1} \approx 199,3$
P ₂	102,3	$R_{P2} = 199,3$	101	$R_{P2} = 199,3$
C	117,5	$R_C \approx 199,4$	116,7	$R_C \approx 199,4$
E ₂	109,1	$R_E \approx 199,3$	109,1	$R_E \approx 199,3$

Uwaga: Kolorami zaznaczono maksymalne wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych:

- wartości zaniżone (przeszacowanie efektów ściskających)
- wartości zawyżone
- wyniki poprawne

5 OBLICZENIA ZMĘCZENIOWE KOŁA JEZDNEGO SUWNICY $\phi 710$.

5.1 WPROWADZENIE

5.1.1 PODSTAWOWE INFORMACJE DOTYCZĄCE KÓŁ JEZDNYCH SUWNICOWYCH

Mechanizm jazdy jest jednym z głównych elementów maszyn dźwignicowych. Jego podstawową częścią jest koło jezdne, którego wymiary uzależnione są od przenoszonego obciążenia, kształtu i materiału bieżnika i szyny. Najczęściej stosowanymi materiałami na koła jezdne są staliwa stopowe L45G2 (dawniej używano staliwa węglowego 45LII, 35LII), żeliwa sferoidalne (GGG 65, GGG 60) lub stal (np. manganowa C60, C45, C15, C65 – dawna 65G, 40Cr, 40CrNiMo, Cr1320CrMnTi, 42/35/20CrMo). Trwałość powierzchni bieżnych oraz wewnętrznych powierzchni obrzeży zwiększana jest poprzez utwardzanie powierzchniowe (np. hartowanie płomieniowe lub indukcyjne). Prawidłowa twardość (tzn. taka przy której zwiększona jest żywotność koła kosztem nieznacznie większego zużycia szyn) powierzchni roboczej koła powinna zawierać się w zakresie 300 do 350 HB [82].

W przypadku suwnic stosuje się dwa typy kół jezdnych: koła cylindryczne (walcowe) i koła stożkowe z pochyleniem tworzącej powierzchni stożkowej, wynoszącym zazwyczaj 1:20 lub 1:16. Dokładniejszy podział oraz przykłady różnych rodzajów kół jezdnych można znaleźć w pracach [82,78].

Ze względów bezpieczeństwa koła stożkowe posiadają jedno (w przypadku współpracy z szynami kolejowymi) lub dwa obrzeża. Obrzeża te zazwyczaj jednak nie biorą udziału w przenoszeniu bocznych sił poziomych (tzn. prostopadłych do kierunku jazdy) [82]. Szerokość powierzchni bieżnej koła stożkowego jest większa od główki szyny o około 30 do 40 [mm], a w przypadku koła cylindrycznego o 5 - 10 [mm]. Zasadniczą różnicą między kołami cylindrycznymi a stożkowymi jest to, że koła stożkowe mogą pracować zarówno na szynach wypukłych jak i płaskich, natomiast koła cylindryczne prawidłowo współpracują tylko z szynami o główkach płaskich. Przykładowe szyny kolejowe normalnotorowe mają promienie zaokrąglenia główki szyny $R_{SZ} = 250, 300$ [mm] – szyna S49, $R_{SZ} = 400$ [mm] – szyna S42.

Koła cylindryczne mogą nie posiadać obrzeży lub mieć obrzeże jedno- lub obu-stronne. Najczęściej stosowane jest jednak rozwiązanie z dwoma obrzeżami. Najkorzystniejszy wariant

pracy takich kół jest wtedy, gdy odległość osi kół jest dostatecznie duża w stosunku do rozstawu szyn podtorza. W przeciwnym przypadku (dotyczy to głównie suwnic czterokołowych o dużych rozpiętościach mostów, suwnic bramowych, bram lub półbram) może dochodzić do ukosowania suwnicy, co objawia się tym, że przejezdna część suwnicy posiada tendencję do ukośnego ustawiania się na torze a koła odchyłone są od normalnego kierunku toczenia. Prowadzi to do tarcia powierzchni obrzeża o szynę i szybkiego zużywania się obrzeża. Ukosowanie to może być spowodowane przez: niedokładność napędu (niesymetryczny napęd na koła), niedokładność obróbki roboczych powierzchni kół, niedokładność ułożenia szyn i torów, błędy montażu.

Geometria koła wraz ze sposobem jego łożyskowania decyduje o oporach jazdy i momentach obciążenia mechanizmu jazdy. Na całkowity opór jazdy koła składają się:

- opory toczenia,
- tarcie w czopach osi koła,
- tarcie obrzeży (dotyczy kół z obrzeżami),
- opory toczenia koła napędzającego (dotyczy kół napędzających),
- opory wiatru,
- opory wywołane siłami bezwładności,
- opory jazdy po krzywiznie (dotyczy torów łukowych),
- opory jazdy po pochyłościach (np.: dźwignice na torach kolejowych).

Dla nienapędzanego koła bez obrzeży opór tarcia W_j' możemy wyznaczyć uwzględniając moment tarcia w łożysku koła oraz tarcie toczne koła o szynę z zależności [78]:

$$W_j' = \frac{2F}{D_K} \left(f + \mu \frac{d}{2} \right) = F \cdot \rho \quad (5.1.1)$$

gdzie:

- F – wypadkowa siła obciążająca koło (suma obciążenia zewnętrznego i siły ciężkości koła),
- D_K – średnica koła,
- d – średnica czopa osi lub wału,
- f – promień tarcia potoczystego (dla dobrze ułożonych szyn $f = 0,5$ [mm]),
- μ - współczynnik tarcia dla łożysk ($\mu = 0,08$ dla łożysk ślizgowych; $\mu = 0,01$ dla łożysk tocznych),
- ρ - jednostkowy opór toczenia bez tarcia obrzeży i tarcia piasty koła.

W przypadku koła napędzającego należy uwzględnić, że siła napędowa musi równoważyć wszystkie poziome siły działające na układ jezdny, w tym również opory jazdy kół nienapędzanych. Wymagany do pokonania oporów toczenia moment napędowy M_k można obliczyć znając obciążenie koła napędzanego F_n oraz przyjmując współczynnik dodatkowych oporów ψ (np. tarcia obrzeży).

$$M_k = F_n \left(f + \mu \frac{d}{2} \right) (1 + \psi) \quad (5.1.2)$$

Mechanizm jazdy suwnicy projektuje się w taki sposób aby nie nastąpił poślizg kół przy rozruchu. W tym celu określa się liczbę napędzanych kół, tak aby ich siły przyczepności były większe od sił biernych występujących przy rozruchu. Współczynnik przyczepności przyjmuje się w zależności od miejsca pracy dźwignicy i wynosi on $\mu_0 = 0,12$ dla dźwignic pracujących na otwartej przestrzeni albo $\mu_0 = 0,15$ dla dźwignic pracujących w halach zamkniętych.

Metodykę obliczania oporów tarcia obrzeży wywołanych ukosowaniem oraz oporów związanych z działaniem wiatru można znaleźć w obowiązującej normie [83].

W pracy rozpatrywano zjawiska związane wyłącznie z toczeniem koła napędzanego na granicy poślizgu i nienapędzanego w trakcie ruchu ustalonego po szynie. Dodatkowe opory związane z zagadnieniami tarcia w łożyskach czy też oddziaływaniem wiatru zostały pominięte ze względu na mało istotny wpływ na zjawiska zmęczeniowe.

5.1.2 **OBLICZENIA ANALITYCZNE DLA NIENAPĘDZANYCH SUWNICOWYCH KÓŁ JEZDNYCH**

Koła jezdne suwnic projektuje się w ten sposób aby naciski maksymalne na jedno koło nie przekraczały 100 ÷ 120 kN dla torów podkładowych lub 300 ÷ 600 kN dla ciężkich dźwignic przejezdnych na podporach stalowych i żelbetowych [78]. Przykładowe metody obliczeń kół suwnicowych wg dawnej literatury niemieckiej, rosyjskiej i MES przedstawione są w [82]. Obliczenia kół suwnicowych są również tematem obecnie wprowadzanej normy EN13001-3.3 [84] [85].

W pracy analizowano kontakt cylindrycznego koła suwnicy o średnicy $D_K = 710$ [mm] o płaskiej bieżni z szyną A120 o promieniu zaokrąglenia główki $R_{SZ} = 600$ [mm]. Odpowiada to kontaktowi dwóch walców o wzajemnie prostopadłych osiach. W tym przypadku kąt pomiędzy osiami $\varphi = 90^\circ$ i wzory (A.1 oraz A.2; patrz Załącznik A) upraszczają się do postaci:

$$A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D_K} + \frac{1}{R_{SZ}} \right) \quad (5.1.3)$$

$$B - A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D_K} - \frac{1}{R_{SZ}} \right) \quad (5.1.4)$$

Podstawiając do wzorów (Załącznik A wzory nr A.3 ÷ A.5), otrzymuje się:

$$\theta = \arccos \left(\frac{B - A}{A + B} \right) = 75,135^\circ \quad (5.1.5)$$

$$m = 1,200$$

$$n = 0,847$$

Promień zastępczy R_Z :

$$R_Z = \frac{1}{2} (A \cdot B)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{D_K \cdot R_{SZ}} \right)^{\frac{1}{2}} = 462 [\text{mm}] \quad (5.1.6)$$

Koło zostało wykonane ze stali stopowej do ulepszania cieplnego 30CrNiMo8. Właściwości wytrzymałościowe tej stali w przekroju poprzecznym w zależności od średnicy d lub grubości l przedstawiono w Tabeli.5.1.1. Właściwości zmęczeniowe stali określone zostały w oparciu o badania doświadczalne [76] i zamieszczone w Tabeli.5.1.2.

Tabela.5.1.1 Dane materiałowe stali 30CrNiMo8 dla próbek o średnicy d lub grubości l .

gatunek stali	$d \leq 40$ mm; $l \leq 20$ mm				40 mm < $d \leq 100$ mm; 20 mm < $l \leq 60$ mm				100 mm < $d \leq 160$ mm; 60 mm < $l \leq 100$ mm			
	R_e min	R_m	A min	Z min	R_e min	R_m	A min	Z min	R_e min	R_m	A min	Z min
	MPa	MPa	%	%	MPa	MPa	%	%	MPa	MPa	%	%
30CrNiMo8	1050	1250 ÷ 1450	9	40	900	1100 ÷ 1300	10	45	800	1000 ÷ 1200	11	50

Tabela.5.1.2 Własności materiałowe pozyskane z badań doświadczalnych [76]

gatunek stali	Z_{GO} [MPa]	Z_{SO} [MPa]	E [MPa]
30CrNiMo8	549	370	$2,17 \cdot 10^5$

Dla powyższych danych i obciążenia koła $F = 294,3$ [kN] $\equiv 30$ [T] można wyznaczyć półosie elipsy kontaktu (a i b) oraz wartość maksymalnych nacisków p_o :

$$a = 11,26 \text{ [mm]},$$

$$b = 7,95 \text{ [mm]},$$

$$p_o = 1570 \text{ [MPa]},$$

$$\frac{b}{a} = 0,706 \rightarrow \sigma_{HMH}^{MAX} \approx 0,616 \cdot p_o = 967 \text{ [MPa]}.$$

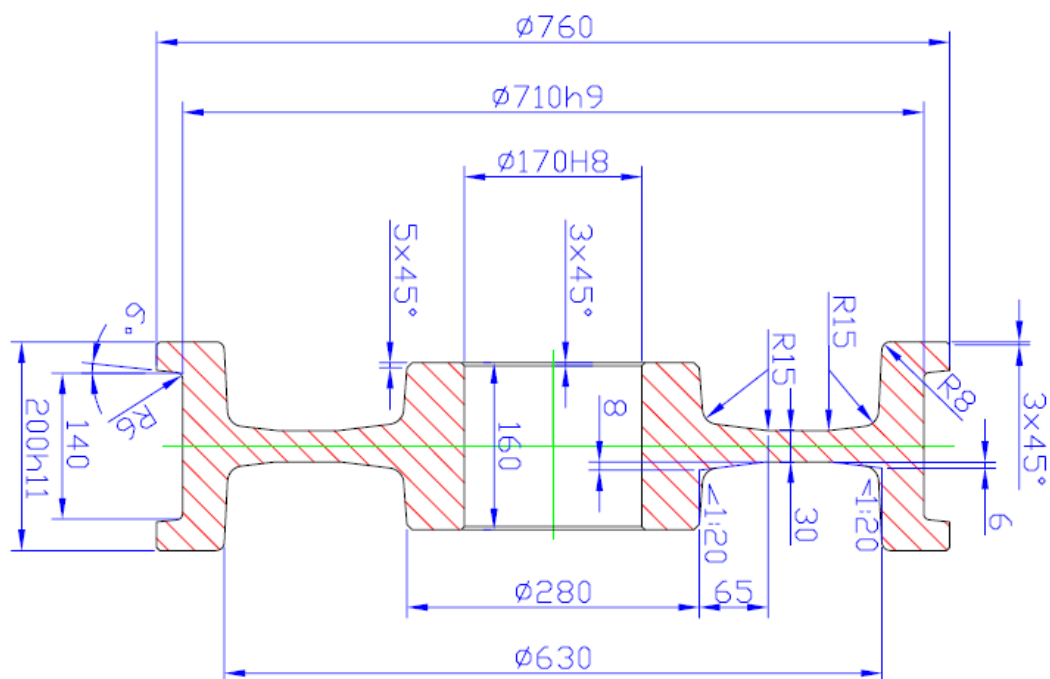
Powyższe obliczenia są jednak niewystarczające do aplikacji wieloosiowych hipotez zmęczenia wysokocyklowego. Mogą one jednak posłużyć do określenia dokładności i zbieżności rozwiązania numerycznego.

5.2 OBLICZENIA ZMĘCZENIOWE NIENAPĘDZANEGO KOŁA JEZDNEGO SUWNICY

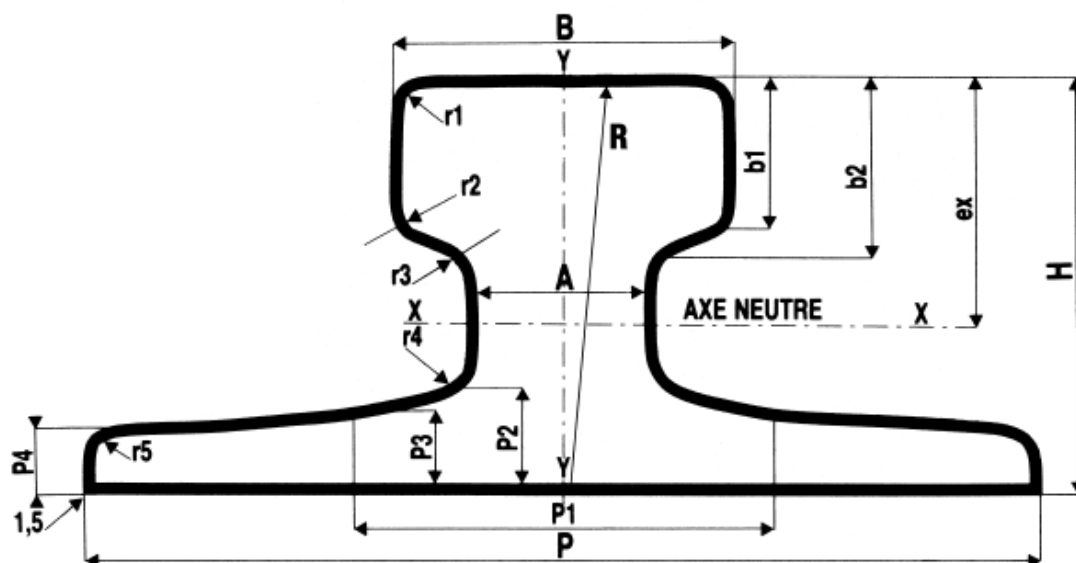
5.2.1 MODEL NUMERYCZNY 3D DLA ZAGADNIENIA ZWYKŁEGO KONTAKTU TOCZNEGO.

Zagadnienia 3D kontaktu tocznego koła suwnicy $\phi 710$ (Rys.5.2.1) i szyny A120 (Rys.5.2.2) rozwiązane zostały przy pomocy metody elementów skończonych (ANSYS®)⁴. W celu uniknięcia zakłóceń rozkładów naprężeń model koła i szyny zbudowano bez punktów wspólnych. Warunki brzegowe przedstawione zostały na Rys.5.2.3. Podstawa szyny została nieruchomo zablokowana we wszystkich trzech kierunkach. W środkowym przekroju, na osi symetrii (płaszczyzna YZ) koło miało unieruchomiony ruch w kierunku osi poziomej x . Dla uproszczenia rozważań pominięto asymetrię koła wywołaną globalną deformacją suwnicy. W kierunku osi z ruch odebrano wyłącznie w osi obrotu koła. Miało to na celu umożliwienie obrotu koła na skutek działania momentu napędowego, którym obciążone jest koło jezdne napędzane (patrz: zagadnienie tarcia trakcyjnego rozdział 5.3). W kierunku pionowym koło nie miało odebranego ruchu, a zadano wyłącznie siłę obciążającą $F = 294,3$ [kN]. Współczynnik tarcia tocznego przyjęto $\mu = 0,01$. Pomimo niepełnego zdeklarowania przemieszczeniowych warunków brzegowych dla koła suwnicy zadanie można rozwiązać poprzez użycie funkcji *AutoCNOF*.

⁴ W modelu 3D zastosowano 20-węzłowe bryłowe elementy *SOLID95* oraz kontaktowe *CONTA174* i *TARGE170*. Włączono automatyczne domykanie szczelin *CNOF* (*KeyOpt(5) = 1* dla *CONTA174*), a parametry - sztywności elementów kontaktowych ustawiono na *FKN = 1* i tolerancji (penetracji) *FTOLN = 0,2*.



Rys.5.2.1. Przekrój i wymiary koła jezdnego suwnicy $\phi 710$



DIN	Profil Section N°	Poids métrique Metric weight KG	Hauteur Height H	Patin Base P	Boudin Head B	Ame Web A	P1	P2	P3	P4	b1	b2	r1	r2	r3	r4	r5	ex	R
A 65	3	43,1	75	175	65	38	78	20	14	10	30	34	6	5	5	6	5	44	400
A 120	6	100	105	220	120	72	120	30	20	14	47,5	55,5	10	6	10	10	6	57	600
A 150	7	150,3	150	220	150	80	-	31,5	-	14	50	-	10	8	35	10	6	77	800

Rys.5.2.2. Przekrój profilu szyny suwnicowej i wymiary dla szyn A65, A120, A150 wg normy DIN 536-91; $R \equiv R_{SZ}$ – promień zaokrąglenia główki szyny (źródło: [86])

W obliczeniach numerycznych zastosowano nieregularną siatkę elementów skończonych z silnym zagęszczeniem elementów sześciociennych w obszarze koncentracji naprężeń spowodowanej naciskami kontaktowymi między kołem a szyną. Na pozostałym obszarze zastosowano rzadszą siatkę z elementów czworociennych. Zagęszczenie siatki w okolicy kontaktu było uzasadnione dwoma czynnikami. Pierwszym było uzyskanie poprawnego i zbieżnego rozwiązania. Drugim było uzyskanie jak największej liczby węzłów, w których wyznaczane były przebiegi naprężeń w funkcji czasu (obrotu koła ϕ).

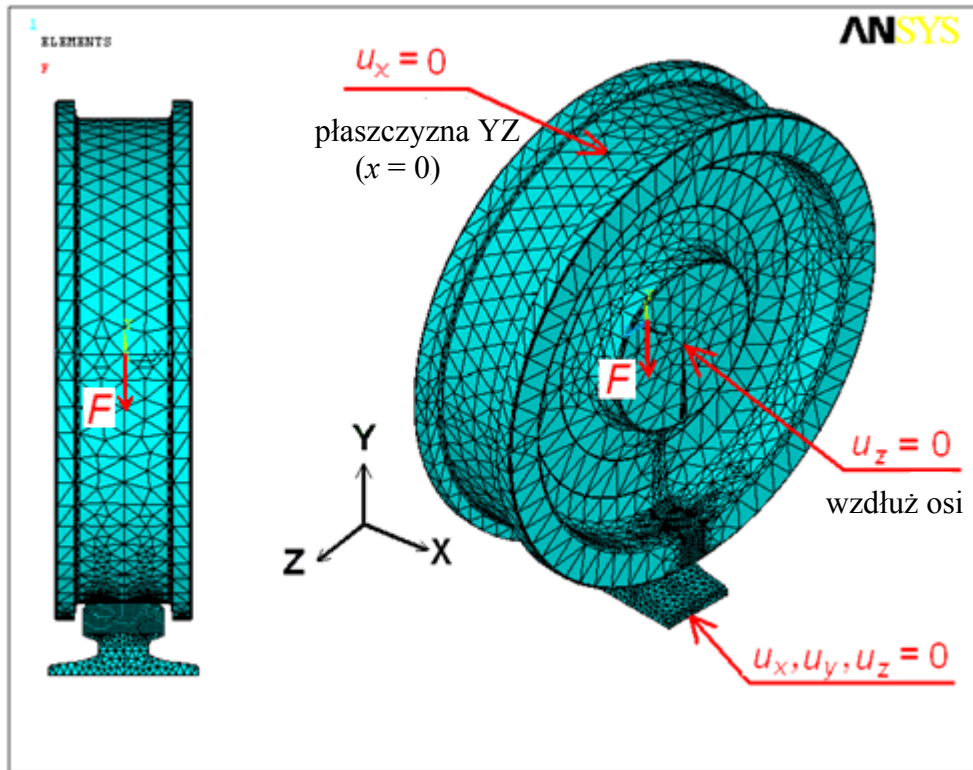
Odpowiednio duże zagęszczenie siatki uzyskano poprzez zastosowanie techniki submodelingu⁵. Zabieg ten umożliwił zwiększenie efektywności poprzez skrócenie czasu obliczeń numerycznych. Obliczenia zgrubne wykonano dla całego modelu kontaktu koła suwnicy z szyną. Liczba elementów kontaktowych w jednolitym modelu M_{jed} (Rys.5.2.3) wynosiła $L_{jed} = 440$, natomiast w submodelu M_{sub} (Rys.5.2.4) była równa $L_{sub} = 784$. Wyniki porównano z analitycznym modelem K_w kontaktu dwóch walców o osiach wzajemnie prostopadłych (patrz załącznik C.3). Sprawdzono również estymator naprężenia wynikający z błędu dyskretyzacji [1] (Tab.5.2.1). Submodel zbudowano wyłącznie przy użyciu sześciociennych elementów wyższego rzędu.

Przebiegi naprężeń potrzebne były do obliczeń wytrzymałości zmęczeniowej i właśnie od gęstości węzłów elementów skończonych uzależniona była dokładność poszukiwania najbardziej wyczerpanego zmęczeniowo promienia.

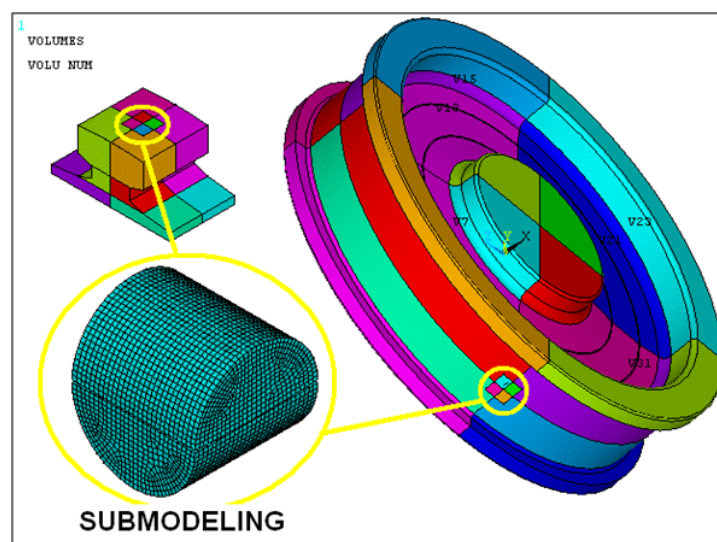
Tabela.5.2.1 Wybrane wartości naprężeń dla modelu jednolitego M_{jed} (Rys.5.2.3) i submodelu M_{sub} (Rys.5.2.4) dla przypadku toczenia koła suwnicy $\phi 710$ (Rys.5.2.1) po szynie A120 (Rys.5.2.2); $F = 294,3$ [kN]; oś zdefiniowano na Rys.5.2.3. Estymator ANSYSa [1] na podstawie między-elementowych skoków naprężeń szacuje granicę, do której zmierza dane naprężenie (patrz Załącznik C.1.1)

typ modelu MES naprężenie	M_{jed}	M_{jed}	M_{sub}	M_{sub}	K_w
	Wartość	Estymator	Wartość	Estymator	
σ_y^{MIN} [MPa]	-1615	-1718	-1581	-1611	-1570
σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	984	1013	981	983	967
τ_{yz}^{MIN} [MPa]	-372	-448	-366	-389	–
τ_{yz}^{MAX} [MPa]	374	447	366	388	–
p_o [MPa]	1597	–	1565	–	1570
$a; b$ [mm]	12,0; 9,1	–	11,4; 7,1	–	11,3; 8,0

⁵ Więcej na temat submodelingu oraz przykładowe badania można znaleźć w załączniku C.3



Rys.5.2.3. Model numeryczny i warunki brzegowe dla kontaktu cylindrycznego koła suwnicy $\phi 710$ z szyną A120 o zaokrąglonej główce



Rys.5.2.4. Model 3D kontaktu koła suwnicy i szyny użyty do submodelingu

5.2.2 WPLYW PROMIENIA ZAOKRĄGLENIA GŁÓWKI SZYNY NA ZASTĘPCZE NAPRĘŻENIA ZMĘCZENIOWE NIENAPĘDZANEGO KOŁA SUWNICY

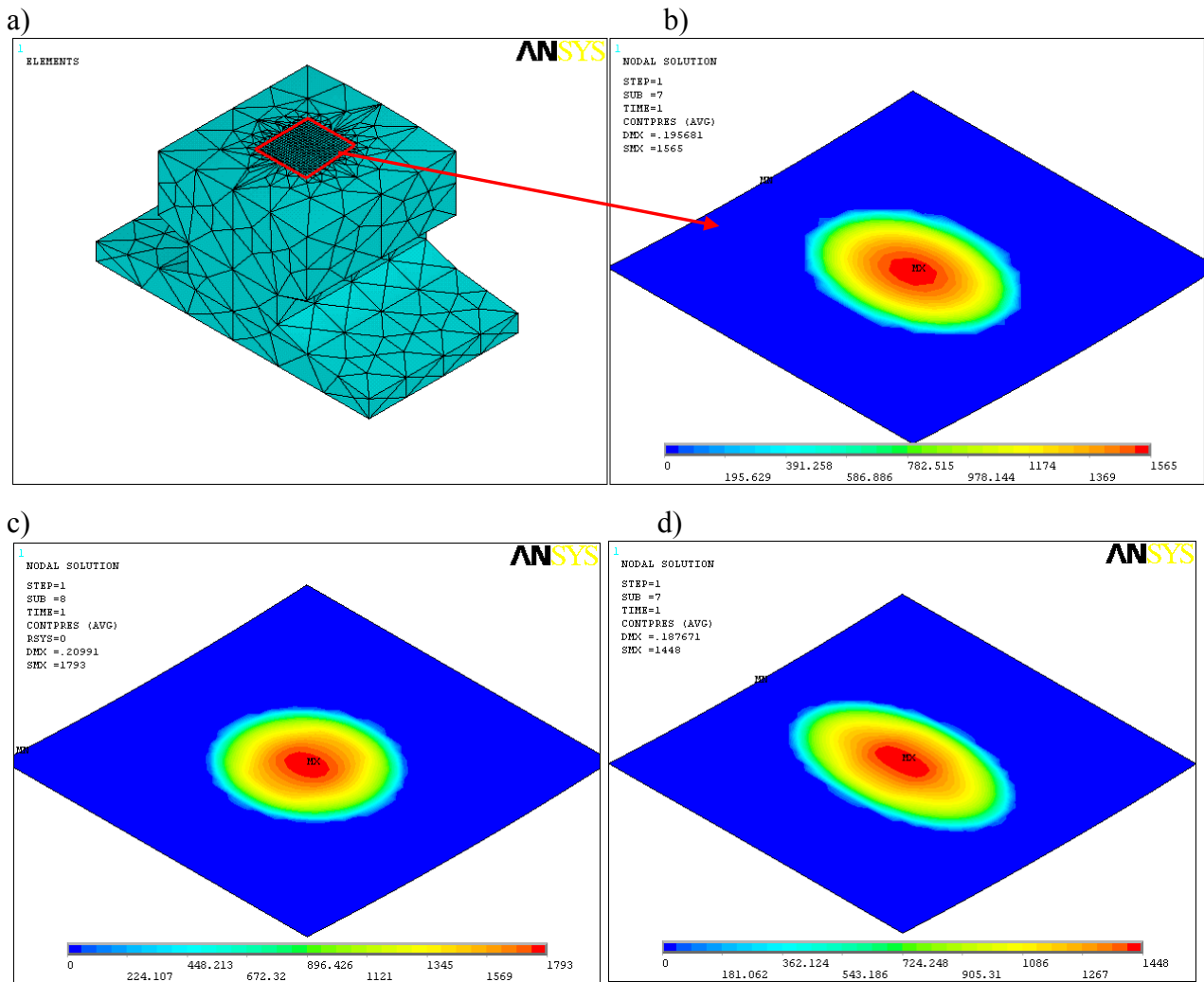
Problem zmęczenia materiału koła jezdnego suwnicy rozpatrywano przy użyciu hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego. Analizę wykonano dla grupy najpopularniejszych kryteriów bazujących na różnych podejściach obliczeniowych (Crossland, Dang Van, Papadopoulos 1, Papadopoulos 2, Łagoda).

W przypadku koła jezdnego cylindrycznego $\phi 710$ o szerokości bieżni $b = 140$ [mm] zalecane jest stosowanie szyn A120 o promieniu zaokrąglenia główki $R_{SZ} = 600$ [mm]. W pracy obliczenia wykonano dla trzech różnych skojarzeń koło – szyna, w których zmianie ulegał promień zaokrąglenia główki szyny R_{SZ} . Wartości tego promienia przyjęto w oparciu o inne rozwiązania konstrukcyjne szyn dźwignicowych (A65, A150). Podstawowy profil szyny był zgodny z wymiarami dla szyny A120 (Rys.5.2.2).

1. koło cylindryczne $\phi 710$ – szyna A120 o promieniu zaokrąglenia główki $R_{SZ} = 600$ [mm],
2. koło cylindryczne $\phi 710$ – szyna A120 o zmienionym promieniu $R_{SZ} = 400$ [mm],
3. koło cylindryczne $\phi 710$ – szyna A120 o zmienionym promieniu $R_{SZ} = 800$ [mm].

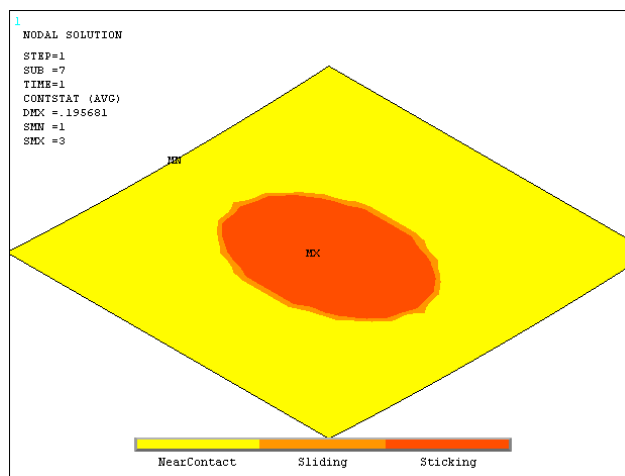
Dogłębna analiza zmęczeniowa dwuwymiarowego beztarciowego kontaktu tocznego walca z płaszczyzną wykazała, że najbardziej niebezpieczne jest otoczenie punktów (promienia) Palmgren–Lundberga. Dlatego w trakcie badań nienapędzanego koła jezdnego suwnicy wyznaczono zastępcze naprężenia zmęczeniowe w okolicach tych punktów. Ponadto analizowano wpływ promienia zaokrąglenia główki szyny na wyężenie w punkcie Bielajewa, naprężenia styczne w punktach P–L oraz na dystrybucję naprężeń kontaktowych wraz z odpowiadającym im obszarem kontaktowym.

Promień zaokrąglenia główki szyny miał zasadniczy wpływ na kształt i wielkość obszaru styku jak również na wartość maksymalnych naprężeń kontaktowych. Ze względu na różne promienie krzywizn koła i szyny pole kontaktu ma kształt eliptyczny (Rys.5.2.5). Mapy naprężeń kontaktowych przedstawiono na Rys.5.2.5. Na Rys.5.2.5a. czerwonym kwadratem zaznaczony został fragment powierzchni szyny, na którym prezentowane są rozkłady naprężeń na Rys.5.2.5b–d. Największe naciski $p_o = 1793$ [MPa] wystąpiły dla promienia $R_{SZ} = 400$ [mm]. Zwiększenie promienia do $R_{SZ} = 600$ [mm] zmniejszyło naciski do wartości $p_o = 1565$ [MPa] (Tab.5.2.2). Pole obszaru styku przedstawiono dla skojarzenia koła $\phi 710$ z szyną A120 (o promieniu zaokrąglenia główki $R_{SZ} = 600$ [mm]) na Rys.5.2.6. Na krawędzi kontaktu można zaobserwować obszar, w którym dochodzi do mikropoślizgów stykających się powierzchni. Dzieje się tak na skutek przekroczenia przez styczne naprężenia kontaktowe wartości naprężeń ciernych krytycznych. Cierne naprężenia krytyczne liczone jako $\mu \cdot p(x, z)$ mają na krawędzi małe wartości, co jest spowodowane dużym gradientem naprężeń kontaktowych $p(x, z)$ tuż przed końcem pola styku. Zastosowanie szyny A65 powoduje powstanie pola styku zbliżonego do kołowego (Rys.5.2.5c), ze względu na zbliżone wartości promieni krzywizn – promienia koła $R_K = 355$ [mm] i szyny $R_{SZ} = 400$ [mm]. Zgodnie z obliczeniami teoretycznymi półosie elipsy kontaktu są tym większe im większy będzie promień zaokrąglenia główki szyny.



Rys.5.2.5. Położenie na szynie oraz rozkłady nacisków kontaktowych między kołem $R_K = 355$ [mm] a szyną o promieniu zaokrąglenia główki R_{SZ}

- a) położenie obszaru kontaktu na szynie
- b) szyna A120 – $R_{SZ} = 600$ [mm] ($p_o = 1565$ [MPa])
- c) $R_{SZ} = 400$ [mm] ($p_o = 1793$ [MPa])
- d) $R_{SZ} = 800$ [mm] ($p_o = 1448$ [MPa])



Rys.5.2.6. Pole mikroślizgów (kolor jasno-pomarańczowy) i kontaktu (kolory pomarańczowe) dla przypadku kontaktu koła suwnicy $R_K = 355$ [mm] z szyną o promieniu zaokrąglenia główki $R_{SZ} = 600$ [mm]

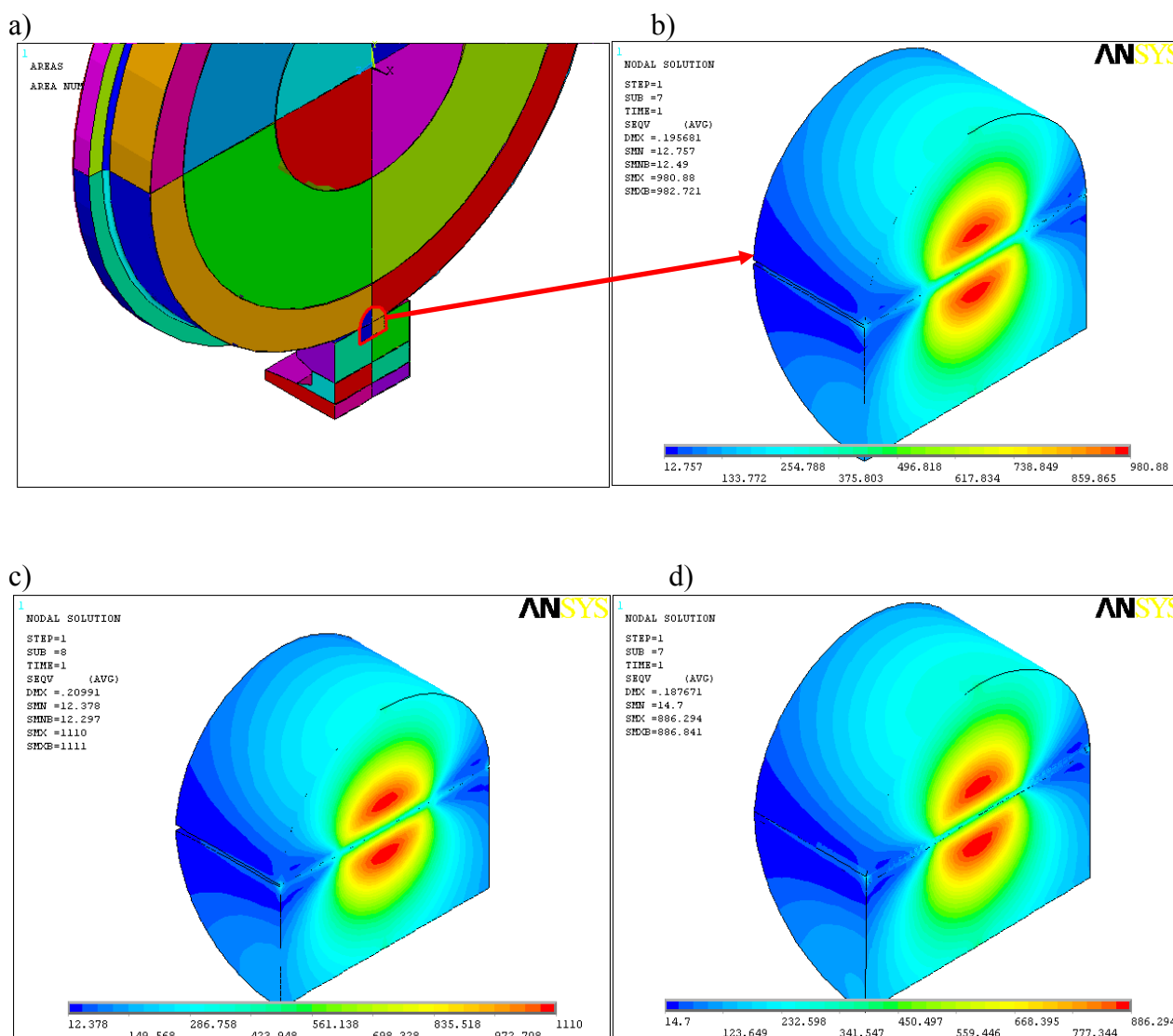
Zmiana promienia zaokrąglenia główki szyny ma również wpływ na wyężenie maksymalne σ_{HMH}^{MAX} w punkcie Bielajewa. Mapy naprężeń w przekroju o normalnej prostopadłej do kierunku jazdy zaprezentowano na Rys.5.2.7. Na Rys.5.2.7.a czerwoną obwódką zaznaczono miejsce położenia wyciętego fragmentu submodelu z pełnego modelu. Rozkłady te przedstawiają jednocześnie dwa przypadki wyężenia koła suwnicy (patrz rozdział 4.1.2):

- 1) wyężenie we wszystkich punktach nieruchomego koła,
- 2) wyężenie na określonych promieniach toczącego się koła.

W tym drugim przypadku kąt ϕ (patrz Rys.4.1.3) jest równoważny funkcji czasu t . Jest to bardzo przydatne w przypadku rozważań zmęczenia tocznego i umożliwia skrócenie czasu obliczeń numerycznych. Dla konkretnej stałej wartości obciążenia i przyjęciu, że koło toczy się po szynie obracając się o kąt ϕ , obliczenie dla jednej chwili czasu pozwala wyznaczyć przebieg naprężeń w danym punkcie w przestrzeni czasu (obrotu). Dzieje się tak dlatego, że dany punkt, na pewnym promieniu r , w układzie biegunowym $r - \phi$, przyjmuje kolejno położenia innych punktów będących na tym samym promieniu. Tak więc rozkład naprężeń na konkretnym promieniu z Rys.5.2.7–5.2.8 można traktować jako wyężenie w punkcie w funkcji czasu t . Jak już zostało wykazane w rozdziale 4.1.4 decydujący wpływ na wyężenie zmęczeniowe ma amplituda naprężeń stycznych $\tau_{yz,a}^{P-L}$ w punktach Palmgrena–Lundberga. Wpływ promienia zaokrąglenia główki szyny na wartości tych naprężeń w punktach P–L można zaobserwować na Rys.5.2.8. Maksymalne wartości naprężeń dla rozważanych skojarzeń koło – szyna zestawiono w Tabeli.5.2.2.

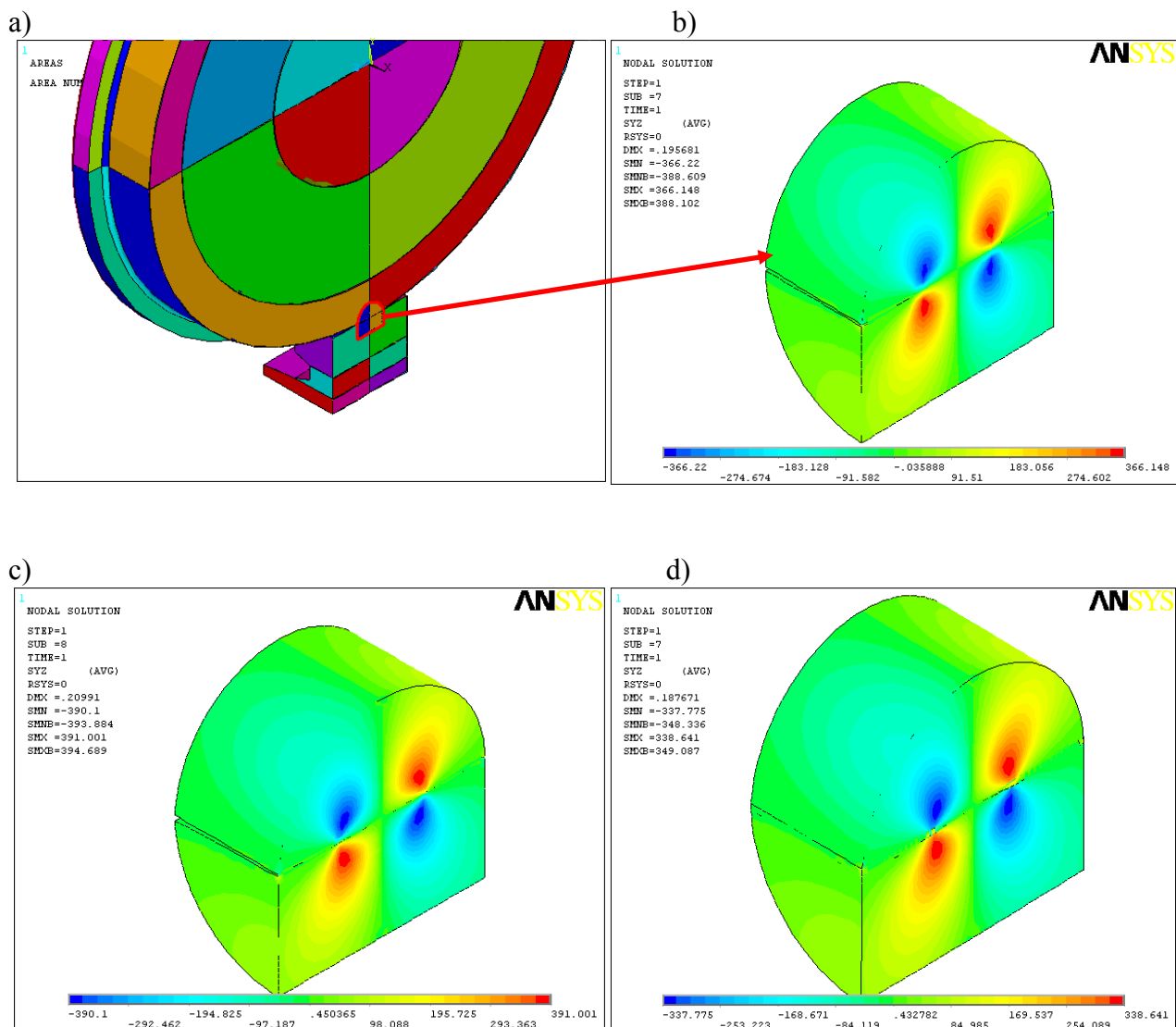
Tabela.5.2.2 Wpływ promienia zaokrąglenia główki szyny na wartości wyężenia σ_{HMH}^{MAX} w punkcie Bielajewa, maksymalnych nacisków kontaktowych p_o oraz amplitudy naprężenia stycznego $\tau_{yz,a}^{P-L}$ w punktach P–L, (obciążenie $F = 294,3$ [kN])

	$R_{SZ} = 400$ [mm]	$R_{SZ} = 600$ [mm]	$R_{SZ} = 800$ [mm]
σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	1110	981	886
p_o [MPa]	1793	1565	1448
$\tau_{yz,a}^{P-L}$ [MPa]	391	366	338



Rys.5.2.7. Mapy wyężenia σ_{HMH} dla toczenia koła suwnicy $R_K = 355$ [mm] po szynie o promieniu zaokrąglenia główki R_{SZ}

- a) położenie przekroju (czerwona obwódka)
- b) szyna A120 – $R_{SZ} = 600$ [mm] ($\sigma_{HMH}^{MAX} = 981$ [MPa])
- c) $R_{SZ} = 400$ [mm] ($\sigma_{HMH}^{MAX} = 1110$ [MPa])
- d) $R_{SZ} = 800$ [mm] ($\sigma_{HMH}^{MAX} = 887$ [MPa])



Rys.5.2.8. mapy naprężeń stycznych τ_{yz} dla toczenia koła suwnicy $R_K = 355$ [mm] po szynie o promieniu zaokrąglenia główki R_{SZ}

- a) położenie przekroju (czerwona obwódka)
- b) szyna A120 – $R_{SZ} = 600$ [mm] ($\tau_{yz,a}^{P-L} = 366$ [MPa])
- c) $R_{SZ} = 400$ [mm] ($\tau_{yz,a}^{P-L} = 391$ [MPa])
- d) $R_{SZ} = 800$ [mm] ($\tau_{yz,a}^{P-L} = 338$ [MPa])

Zmiana promienia zaokrąglenia główki szyny R_{SZ} wpływa również na zmianę poziomu wyężenia zmęczeniowego. W przypadku hipotez DV_{mod}, P₂, C maksymalna wartość zastępczych naprężeń zmęczeniowych jest porównywalna z amplitudą naprężeń stycznych w punktach P–L. Związane jest to z wpływem naprężeń hydrostatycznych, które w przypadku toczenia bez tarcia mają wartość maksymalną niewiele większą od zera (patrz rozdział 4.1.4).

W rozpatrywanym przypadku dla obciążenia $F = 294,3$ [kN] prawie wszystkie hipotezy pokazują przekroczenie wartości dopuszczalnych (dla stali 30CrNiMo8 jest to $Z_{S0} = 370$ [MPa]) dla szyn o promieniu zaokrąglenia główki $R_{SZ} = 600$ [mm]. Zmniejszenie promienia R_{SZ} spowodowało dalsze zwiększenie wyężenia zmęczeniowego, co związane jest ze zmniejszeniem obszaru styku koła z szyną. Zastosowanie szyny o większym promieniu R_{SZ} umożliwia natomiast przenoszenie większych obciążeń niż przyjęto w obliczeniach. We wszystkich trzech analizowanych skojarzeniach koła z szyną hipotezy DV_{2mod} i P₁ dały wartości znacznie przekraczające poziom dopuszczalny. Należy jednak mieć na uwadze fakt, że hipoteza P₁ nie uwzględnia wpływu przesunięcia w fazie między naprężeniami, co prowadzi do zawyżenia zastępczych naprężeń zmęczeniowych. Natomiast kryterium DV_{2mod} uwzględniające modyfikację związaną z pominięciem ściskających naprężeń hydrostatycznych określa maksymalną górną granicę zastępczych naprężeń zmęczeniowych. W tym przypadku określona ona została o maksymalną wartość wyężenia T–G, bez uwzględnienia zmian naprężeń w czasie.

Otrzymane w pracy wyniki potwierdzają miejsce inicjacji pęknięć zmęczeniowych z zaobserwowanymi uszkodzeniami kół jezdnych suwnic przedstawionych na Rys.5.2.9. Na przedstawionych fotografiach można zaobserwować pęknięcia i wyrwania materiału powstałe na niedużej głębokości pod powierzchnią.

Tabela.5.2.4 Wpływ promienia zaokrąglenia główki szyny R_{SZ} na maksymalne wartości zastępczego wyężenia zmęczeniowego dla nienapędzanego koła suwnicy o promieniu $R_K = 355$ [mm]; materiał 30CrNiMo8.

Hipoteza	$R_{SZ} = 400$ [mm]	$R_{SZ} = 600$ [mm]	$R_{SZ} = 800$ [mm]	Uwagi
	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	
DV ₁	276	236	222	Nadmierny wpływ ściskania
DV _{2mod}	547	485	454	Przeszacowanie naprężeń tnących przez τ_{T-G}
DV _{mod}	389	364	338	
P ₁	519	471	439	Brak uwzględnienia przesunięcia w fazie
P ₂	410	373	345	
C	421	386	358	
E ₂	395	376	350	
$\tau_{yz,a}^{P-L}$ [MPa]	391	366	338	

Uwaga: Kolorami zaznaczono maksymalne wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych:

- wartości zaniżone (przeszacowanie efektów ściskających)
- wartości zawyżone
- wyniki poprawne

a)



b)



c)

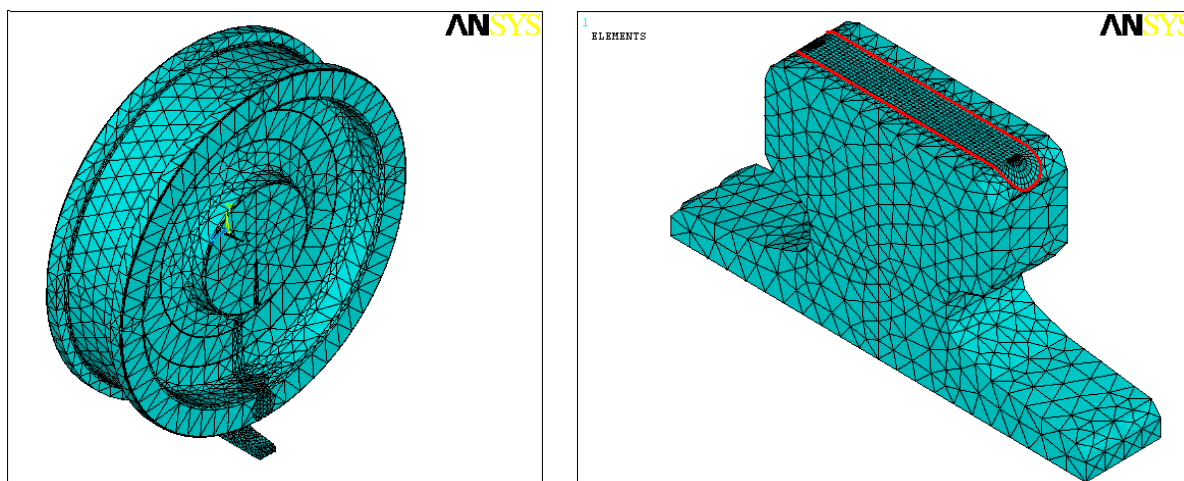


Rys.5.2.9a-c. Zdjęcia uszkodzeń bieżni kół jezdnych suwnicowych

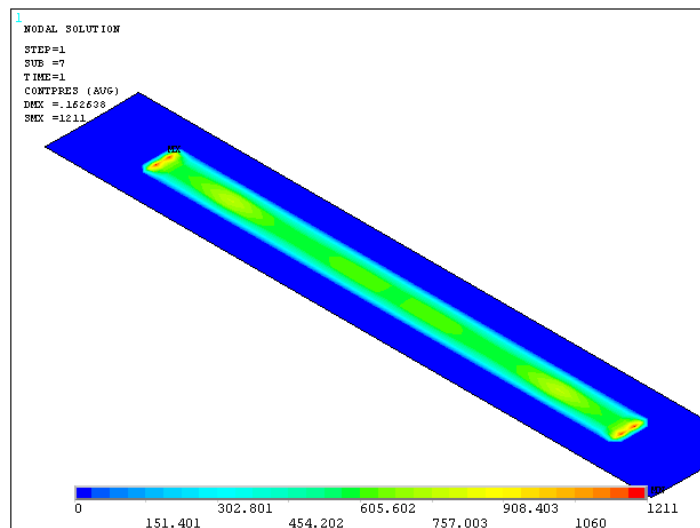
5.2.3 ANALIZA KONTAKTU KOŁA JEZDNEGO SUWNICY Z SZYNĄ O PŁASKIEJ GŁÓWCE.

W pracy analizowano również kontakt cylindrycznego koła suwnicy $\phi 710$ z szyną o idealnie płaskiej głowce $R_{SZ} \rightarrow \infty$. Do obliczeń numerycznych użyto modelu z Rys.5.2.10. Ze względu na inny rozkład naprężeń kontaktowych zwiększony został obszar zagęszczenia elementów kontaktowych. W sytuacji toczenia cylindrycznego koła po szynie z płaską główką dochodzi do spiętrzenia maksymalnych naprężeń kontaktowych na brzegach styku koła z szyną. Wartość tego naprężenia nie jest zbieżna (Rys.5.2.11), co jak zauważono już w pracy [87], spowodowane jest naprężeniami rozciągającymi pod powierzchnią nieobciążonej części bieżni, usiłującymi w strefie styku przywrócić stan nieodkształcony. W rezultacie zwiększają one naprężenia normalne na końcach kontaktu. Podobne zjawiska występują w przypadku wciskania stempla, toczenia elementu wałeczkowego walcowego lub stożkowego o idealnie prostoliniowej tworzącej po bieżni o takim samym profilu etc. Efekt ten może być zminimalizowany przez zaokrąglenie profilu przekroju szyny na jego końcach. Należy więc zauważyć, że współpraca cylindrycznego koła jezdnego z szyną o płaskiej głowce nie jest korzystna, ponieważ w rzeczywistości wykonanie dwóch idealnie płaskich, równoległych do siebie powierzchni nie jest możliwe. Ponadto należy uwzględnić inne zjawiska wynikające z warunków pracy suwnicy (np. jej deformacja) jak również geometrii kół jezdnych suwnicy. Nieprawidłowe jej ustawienie (np. wzajemna nierównoległość osi wszystkich kół jezdnych) prowadzi do szybszego zużywania się kół a także degradacji podtorza (Rys.5.2.12). Spowodowane jest to współpracą koła na krawędzi szyny. Zmniejszeniu wtedy ulega obszar kontaktu co prowadzi do zwiększenia nacisków. W sytuacjach ekstremalnych może nawet dojść do najeżdżania przez koło obrzeżami na szynę.

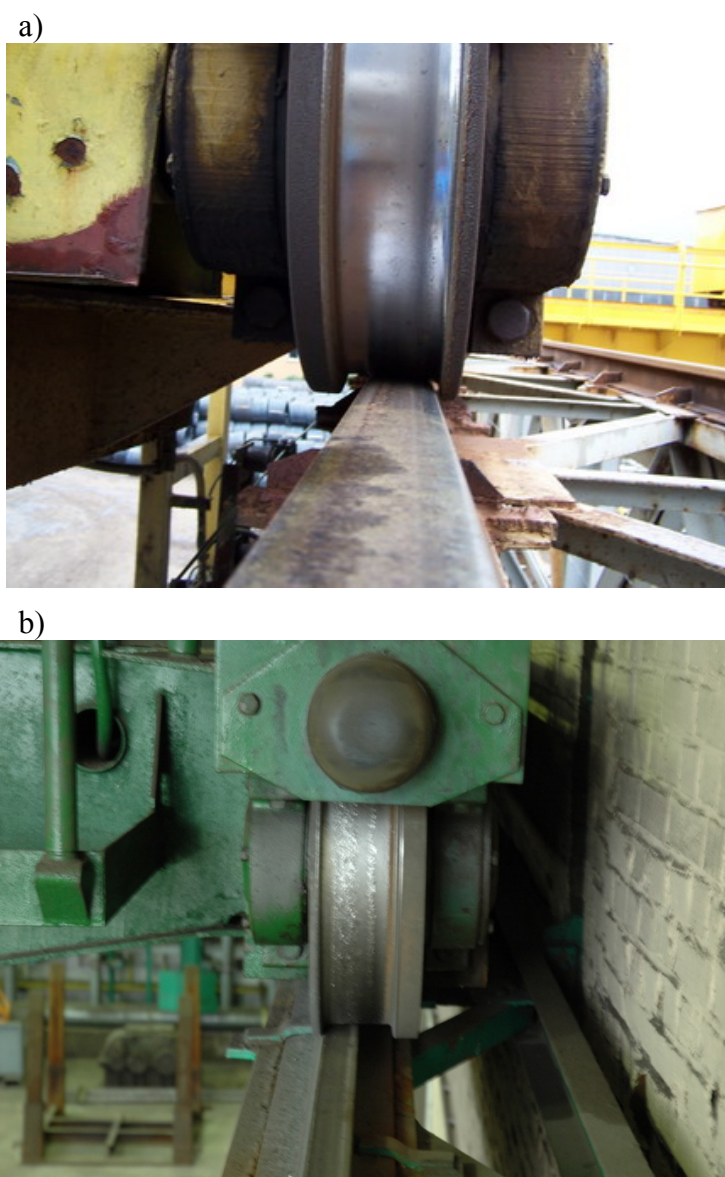
Dlatego w przypadku cylindrycznych kół jezdnych rozsądniejszym jest stosowanie szyn o zaokrąglonej głowce szyny. Promień ten nie powinien być jednak zbyt mały a jego wartość powinna zostać dobrana do przenoszonego obciążenia. Sugestie odnośnie doboru promienia szyny podano w rozdziale 5.2.2.



Rys.5.2.10. Siatka elementów skończonych dla modelu z płaską szyną z zaznaczeniem obszaru elementów kontaktowych na szynie



Rys.5.2.11. Naciski kontaktowe dla toczenia cylindrycznego koła jezdnych suwnicy po szynie z płaską główką.



Rys.5.2.12. Skutki nieprawidłowego ustawienia geometrii kół jezdnych suwnicy;

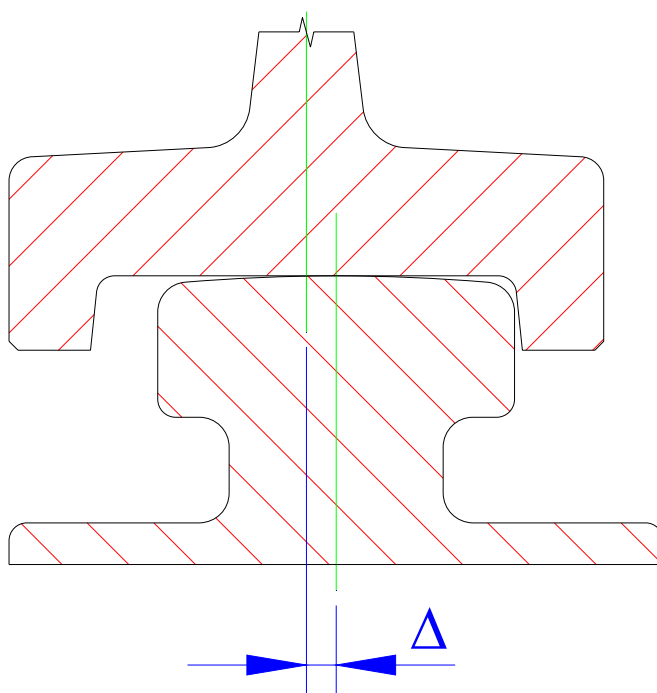
a) źródło: www.optor.pl [86]

b) źródło: Demag Cranes & Components

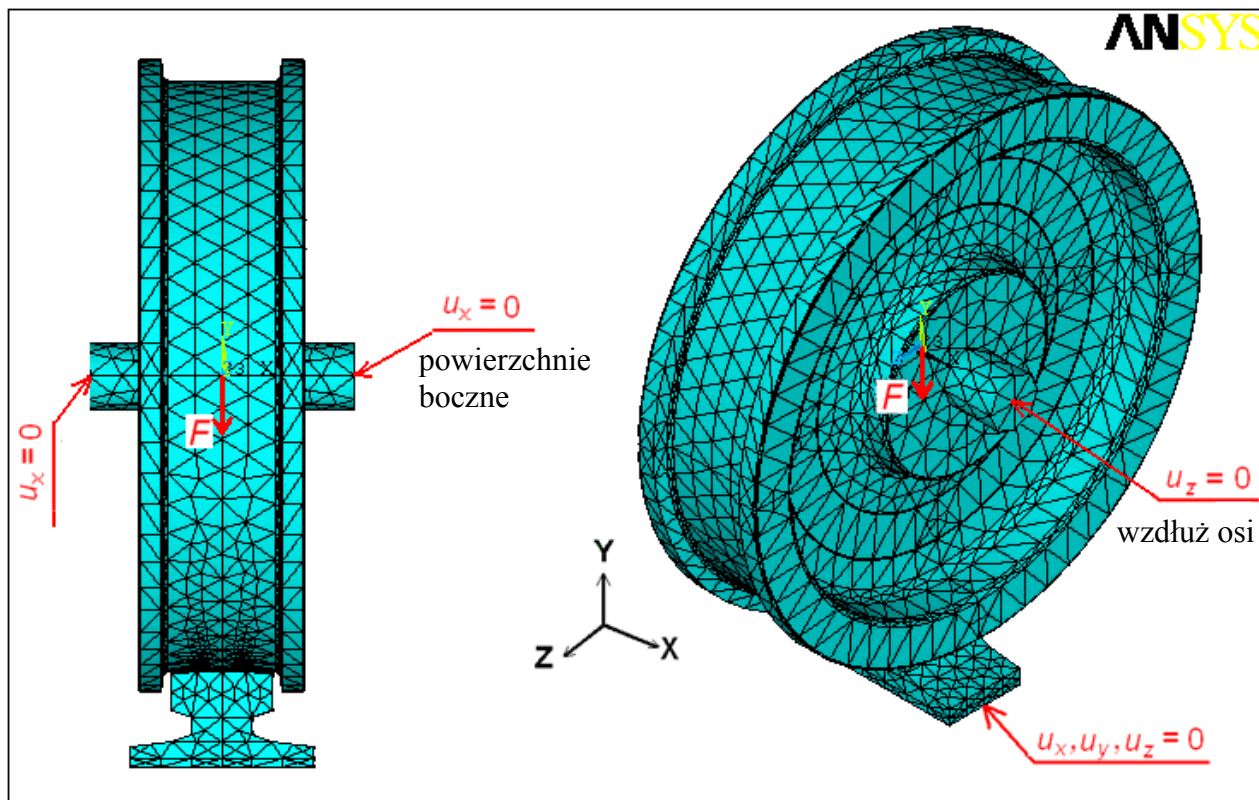
5.2.4 ANALIZA WPLYWU NIESYMETRYCZNEGO TOCZENIA KOŁA JEZDNEGO SUWNICY WZGLĘDEM OSI SYMETRII SZYNY

W pracy zbadano również jak na zjawiska toczne wpływa zmiana położenia koła jezdnego suwnicy względem szyny (Rys.5.2.13). W tym celu zamodelowano toczenie koła po szynie, tak aby odległość między osiami symetrii koła i szyny wynosiła odpowiednio $\Delta = \{0; 5; 10\}$ [mm]. Maksymalna wartość Δ została tak dobrana aby nie dochodziło do styku obrzeża koła z szyną. Należy jednak zauważyć, że pomimo przesunięcia osi symetrii koła względem osi symetrii szyny o odległość Δ , przyjęto, że osie kół jezdnych są równoległe względem siebie. Nie brano więc pod uwagę zjawiska ukosowania koła suwnicy, które może wystąpić na przykład w przypadku złego ustawienia geometrii suwnicy i podtorza, o którym była mowa w rozdziale 5.2.3.

Do obliczeń numerycznych wykorzystano po drobnych zmianach jednolity model nienapędzanego koła jezdnego przedstawiony w rozdziale 5.2.1. Ze względu na brak symetrii zdecydowano się na modyfikację polegającą na dodaniu fragmentów osi (Rys.5.2.14), na której odciętych końcach zablokowane zostały przemieszczenia poziome u_x . Zastosowanie warunków brzegowych z rozdziału 5.2.1 z Rys.5.2.3 powoduje przeszywnienie koła i zaburza rozwiązanie w przypadku przesunięcia osi symetrii koła względem osi symetrii szyny. Dzieje się tak z powodu odchylenia osi symetrii koła od położenia pionowego na wskutek dostosowywania się położenia bieżni koła do profilu główki szyny. Pozostałe przemieszczeniowe warunki brzegowe dla szyny i na przemieszczenia w kierunku osi z pozostały niezmienione. Wykonane obliczenia numeryczne nie wykazały większego wpływu położenia koła względem szyny na rozpatrywane wielkości (Tabela.5.2.4). Sugeruje to również znikomy wpływ na zmianę poziomu wyężenia zmęczeniowego.



Rys.5.2.13. Niesymetryczne toczenie koła suwnicy po szynie wskutek przesunięcia koła względem szyny o odległość Δ ; Δ – odległość między osiami symetrii szyny i koła



Rys.5.2.14. Model numeryczny i warunki brzegowe dla kontaktu cylindrycznego koła suwnicy $\phi 710$ z szyną A120 o zaokrąglonej głowce – $R_{SZ} = 600$ [mm]

Tabela.5.2.4 Wpływ przesunięcia osi symetrii koła względem osi symetrii szyny na naciski maksymalne p_o , wyężenie σ_{HMH}^{MAX} w punkcie Bielajewa i amplitudę naprężeń stycznych $\tau_{yz,a}^{P-L}$ w punktach P-L (brak istotnych efektów przesunięcia)

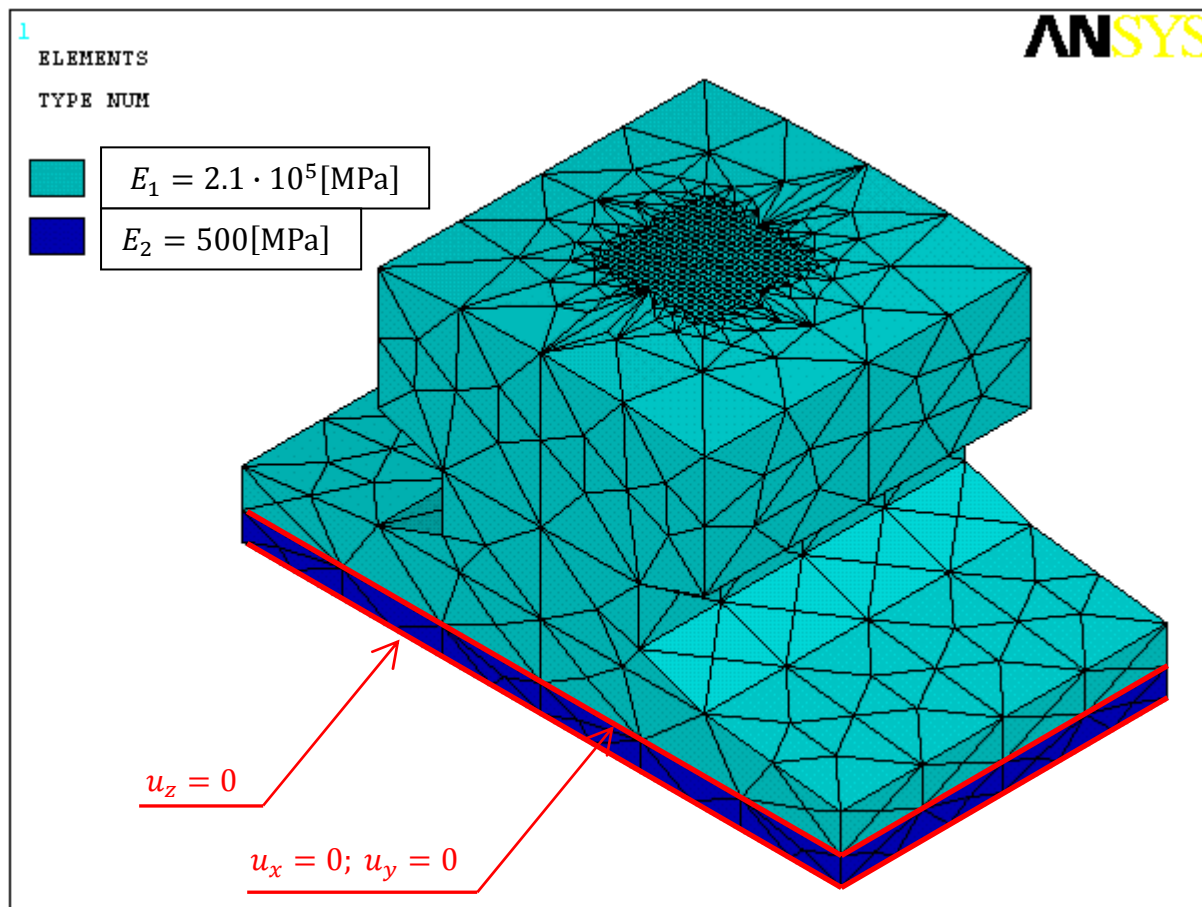
Wielkość	odległość między osiami symetrii szyny i koła	
	$\Delta = 0$	$\Delta = 10$ [mm]
p_o [MPa]	1597	1595
σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	983	980
$\tau_{yz,a}^{P-L}$ [MPa]	373	372

5.3 OBLICZENIA ZMĘCZENIOWE NAPĘDZANEGO KOŁA JEZDNEGO SUWNICY

5.3.1. MODEL NUMERYCZNY 3D DLA ZAGADNIENIA TARCIA TRAKCYJNEGO KOŁA SUWNICY

Do obliczeń zagadnienia tarcia trakcyjnego koła suwnicy suwnicy $\phi 710$ z szyną A120 o promieniu zaokrąglenia $R_{SZ} = 600$ [mm], użyto rozbudowanego modelu przedstawionego na Rys.5.2.3. Zmiana polegała na dodaniu podatniejszego fragmentu szyny z modułem Younga $E = 500$ [MPa] (Rys.5.3.1) umożliwiającą prawidłowe zamodelowanie zjawisk występujących w strefie styku obiektów (patrz - rozdział 4.3). Szynę unieruchomiono w kierunku pionowym y i poziomym x . Ruch poziomy w kierunku osi z odebrano przez zablokowanie podatnego fragmentu, dodanego do podstawy szyny. Pozostałe warunki brzegowe na kole były identyczne jak dla modelu bez tarcia (Rys.5.2.3). Dodano natomiast obciążenie momentem $M = 14,4$ [kNm]

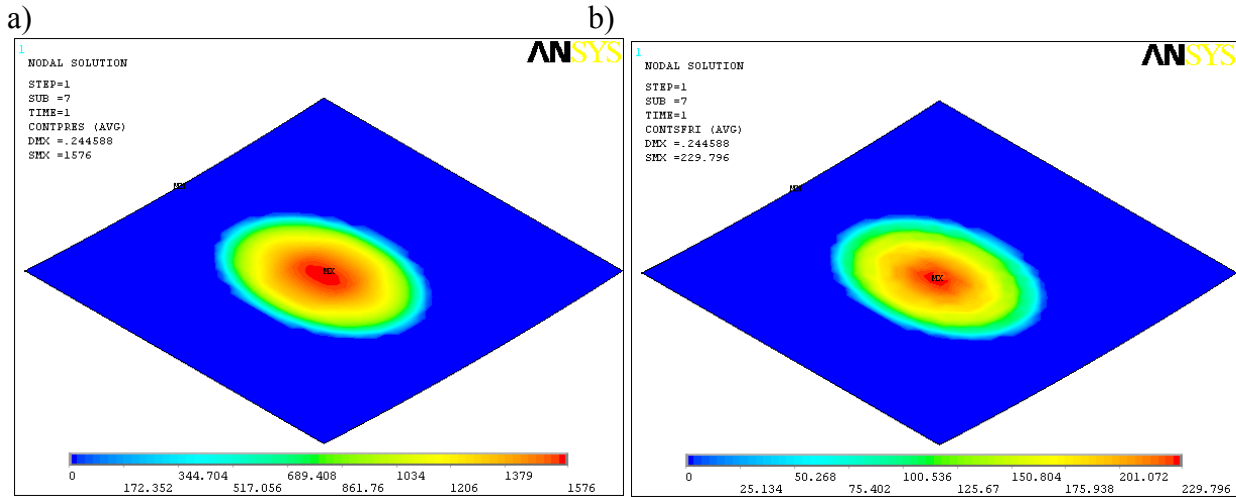
zamodelowanego parą sił. Współczynnik tarcia (przyczepności) przyjęto dla suwnicy pracującej w zamkniętej hali - $\mu_0 = 0,15$. W celu uzyskania dużej dokładności zadanie również zostało rozwiązane przy pomocy techniki submodelingu (Rys.5.2.4).



Rys.5.3.1 Model numeryczny i warunki brzegowe szyny dla zagadnienia tarcia trakcyjnego koła suwnicy

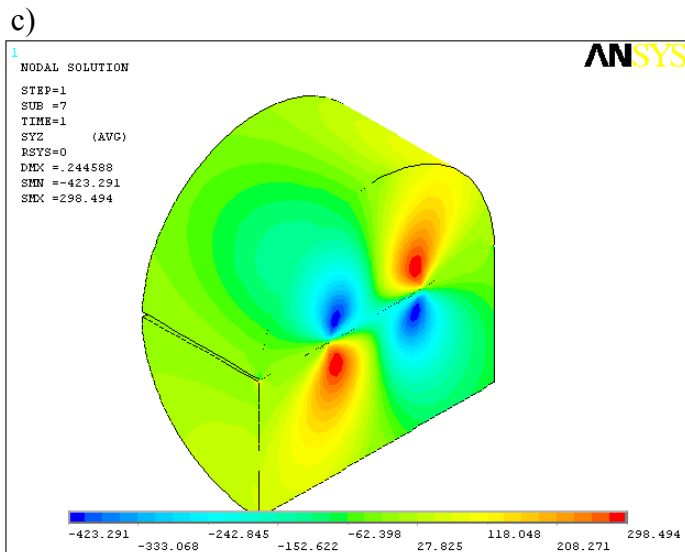
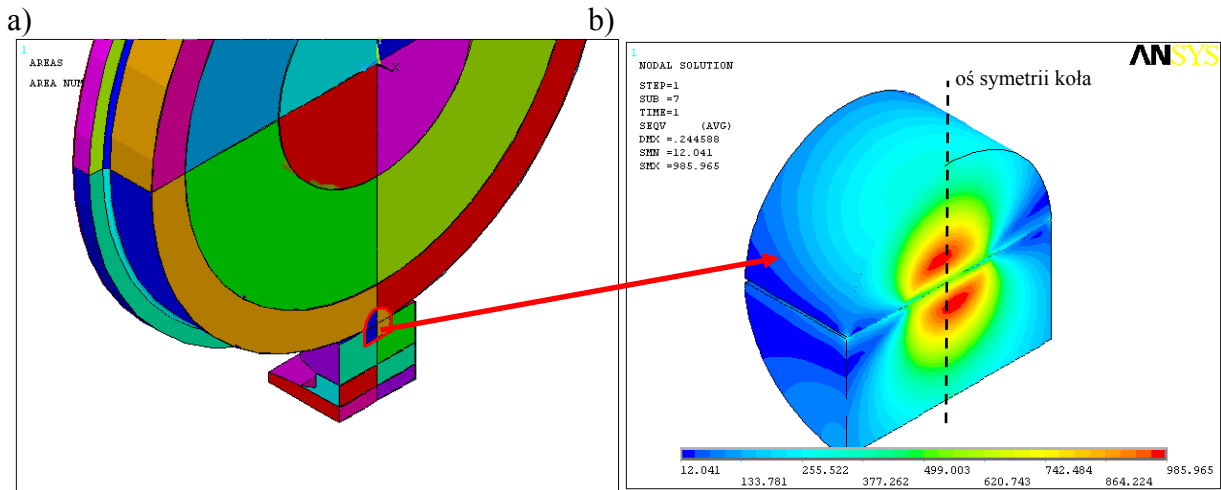
5.3.2. WPŁYW EFEKTÓW CIERNYCH NA ZMĘCZENIE KOŁA JEZDNEGO SUWNIICY.

Przyjęta do obliczeń wartość momentu M była bliska momentowi krytycznemu M_{KR} , przy którym wystąpiłby pełen poślizg koła. Dla analizowanego przypadku (promień koła, przenoszone obciążenie, współczynnik tarcia) wartość momentu krytycznego wynosi $M_{KR} = \mu_0 \cdot F \cdot R_K \approx 15,7 [\text{kNm}]$. W celu uzyskania stabilnego rozwiązania numerycznego zastosowano nieco mniejszą wartość momentu ($M = 14,4 [\text{kNm}]$). Wartość obciążenia koła F przyjęto identyczną jak dla koła nienapędzanego. Umożliwiło to zaobserwowanie wpływu efektów ciernych na wyętwienie koła suwnicy. Otrzymane rozkłady nacisków kontaktowych i ciernych przedstawiono odpowiednio na Rys.5.3.2.a i Rys.5.3.2.b. Otrzymane maksymalne wartości nacisków kontaktowych p_0 w obu przypadkach (koło napędzane i nienapędzane) były prawie równe. Niewielka różnica co do wartości wystąpiła również w przypadku maksymalnego wyętwienia σ_{HMH}^{MAX} w punkcie Bielajewa. Zmieniło się jednak położenie tego punktu, który w przypadku koła napędzanego nie leży na osi symetrii koła (Rys.5.3.3.b), a jego odchylenie zależy od wartości momentu napędzającego koło (patrz Zał. D). Znaczące różnice wystąpiły natomiast w rozkładach naprężeń stycznych. Ekstremalne wartości tych naprężeń znacznie się różnią od tych w punktach P-L dla koła nienapędzanego. Ponadto rozkład tych naprężeń nie jest symetryczny co można zaobserwować na Rys.5.3.3.c. Wyniki obliczeń numerycznych dla obu przypadków – koła nienapędzanego (patrz Tabela.5.2.2 – $R_{Sz} = 600 [\text{mm}]$) oraz koła napędzanego zestawiono w Tabeli.5.3.1.



Rys.5.3.2 Rozkłady nacisków dla tarcie trakcyjnego koła suwnicy; $F = 294,3$ [kN]; $M = 14,4$ [kNm]; $R_{SZ} = 600$ [mm]

- a) naciski kontaktowe ($p_o = 1576$ [MPa])
- b) naprężenia cierne (trakcyjne) ($\tau_{max} = 230$ [MPa])



Rys.5.3.3. mapy naprężeń dla koła napędzanego; $F = 294,3$ [kN]; $M = 14,4$ [kNm]; $R_{SZ} = 600$ [mm]

- a) położenie przekroju na modelu
- b) wyężenie σ_{HMH}^{MAX} ($\sigma_{HMH}^{MAX} = 986$ [MPa])
- c) mapa naprężeń stycznych τ_{yz} ($\tau_{yz}^{MAX} = 298$ [MPa]; $\tau_{yz}^{MIN} = -423$ [MPa])

Tabela.5.3.1 Naciski maksymalne p_o , wyężenie σ_{HMH}^{MAX} w punkcie Bielajewa i amplitudę naprężeń stycznych $\tau_{yz,a}^{P-L}$ w punktach P-L dla przypadku napędzanego i nienapędzanego koła, $F = 294,3$ [kN]; $M = 14,4$ [kNm]; $R_{SZ} = 600$ [mm]

Wielkość	Toczenie bez tarcia	Tarcie trakcyjne
p_o [MPa]	1565	1576
σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	981	986
$\tau_{yz,MIN}^{P-L}$ [MPa]	-366	-423
$\tau_{yz,MAX}^{P-L}$ [MPa]	366	296

Wykonane obliczenia zmęczeniowe dla modeli 3D koła napędzanego i nienapędzanego wykazały podobną tendencję jak obliczenia 2D. Porównując otrzymane maksymalne wartości zastępczego wyężenia zmęczeniowego (Tab.5.3.2) można zauważyć, że koło napędzane jest nieznacznie bardziej wyężone zmęczeniowo od koła nienapędzanego.

Tabela.5.3.2 Maksymalne wartości zastępczego wyężenia zmęczeniowego w kole suwnicy; materiał 30CrNiMo8.

Hipoteza	Koło nienapędzane*	Koło napędzane**	Uwagi
	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	
DV ₁	236	241	Nadmierny wpływ ściskania
DV ₂	227	243	Nadmierny wpływ ściskania
DV _{2mod}	480	504	Przeszacowanie naprężeń tnących przez τ_{T-G}
DV _{mod}	364	360	
P ₁	471	473	Brak uwzględnienia przesunięcia w fazie
P ₂	373	375	
C	386	396	
E ₂	376	393	

* koło nienapędzane: $F = 294,3$ [kN]; $R_{SZ} = 600$ [mm],

** koło napędzane: $F = 294,3$ [kN]; $M = 14,4$ [kNm]; $R_{SZ} = 600$ [mm]

Uwaga: Kolorami zaznaczono maksymalne wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych:

- wartości zaniżone (przeszacowanie efektów ściskających)
- wartości zawyżone
- wyniki poprawne

6 ***OBLICZENIA ZMĘCZENIOWE ŁOŻYSKA BARYŁKOWEGO WZDŁUŻNEGO O DUŻYCH WYMIARACH***

Podstawowe informacje na temat łożysk tocznych można znaleźć w monografiach dotyczących podstaw konstrukcji maszyn [80,88,89,90,91] oraz katalogach takich łożysk [92,93]. Bardziej szczegółowe informacje na temat łożyskowania oraz wybrane dane katalogowe można znaleźć w pracy [94]. Szczegółowa klasyfikacja, analiza teoretyczna (obliczenia odkształceń, naprężeń, obciążeń, zjawisk ciernych oraz trwałości), dobór pasowań oraz zagadnienia związane z projektowaniem układów łożyskowych przedstawione są w monografii [87]. Numeryczną analizę MES dwurzędowego łożyska kulkowego wieńcowego przedstawili autorzy w pracach [95,96]. Zaprezentowali oni metodykę wyznaczania rozkładu obciążenia wewnętrznego w rzędach obliczeniowych łożyska. Metodę elementów skończonych wykorzystali również T.Smolnicki i M.Stańco [97] do prognozowania zużycia wielkogabarytowych łożysk tocznych. Autorzy analizowali zużycie odkształceniowe a wyniki uzyskane z symulacji numerycznych (obciążenia elementów tocznych, zużycie odkształceniowe bieżni) były zgodne z pomiarami eksperymentalnymi.

Z publikacji anglojęzycznych warto wymienić prace U.Olofssona, który analizował zjawiska występujące w łożyskach baryłkowych wzdłużnych (*spherical roller thrust bearings*). W artykule [98] zaprezentował on metodę analityczną obliczania kontaktu baryłki z bieżnią oraz badał trwałość zmęczeniową [99]. W pracy [100] przedstawione są efekty związane ze zjawiskami ciernymi dotyczącymi takich łożysk. W kolejnej publikacji [101] autor badał stan powierzchni zużytych łożysk baryłkowych wzdłużnych a przykłady uszkodzeń bieżni i elementu tocznego przedstawiono w pracy [102]. Dane na temat łożysk baryłkowych wzdłużnych można znaleźć również w katalogach łożysk [92,93,103].

6.1 ***PODSTAWOWE INFORMACJE***

Podstawowymi formami zniszczenia występującymi w łożyskach tocznych są zużycia zmęczeniowe oraz ściernie powierzchni roboczych. Zużycie ściernie powierzchni tocznych narasta podczas całego okresu eksploatacji, natomiast zjawiska zmęczeniowe występują w końcowym okresie trwałości łożyska. Objawiają się one wykruszeniami materiału a następujące zmiany zmęczeniowe zazwyczaj postępują lawinowo. Z tego powodu ***zużycie zmęczeniowe przyjmuje się jako podstawowe kryterium przy obliczaniu łożysk.***

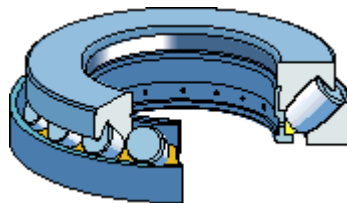
Rozwój pęknięcia może postępować zarówno od powierzchni w głąb materiału jak również inicjować się pod powierzchnią i rozwijać w kierunku warstwy powierzchniowej. Na powierzchni tocznej inicjatorem pęknięcia mogą być różnego rodzaju mikroszczeliny powstałe podczas procesów technologicznych a także podczas pracy łożyska. Rozwój tego typu pęknięć wywołany jest wciskaniem oleju lub smaru w powstałą szczelinę, co w konsekwencji prowadzi do wzrostu w niej ciśnienia i dalszego jej rozwoju. Ostatecznie dochodzi do wyrwania fragmentu materiału [87].

Pęknięcia podpowierzchniowe spowodowane są występującymi tam dużymi gradientami naprężeń oraz osłabieniami struktury materiału (np. wtrąceniami niemetalicznymi). Powstała szczelina rozwija się w kierunku do powierzchni materiału a następnie postępuje podobnie jak pęknięcie powierzchniowe. Krawędzie wyrwanej części materiału stają się inicjatorami kolejnych pęknięć. Dalsza eksploatacja łożyska prowadzi więc do wzrostu hałasu, drgań a także do występowania obciążeń dynamicznych w łożysku, które w konsekwencji mogą doprowadzić do całkowitego jego zniszczenia. Zmęczeniu głównie podlegają wewnętrzne pierścienie łożyskowe, rzadziej, ze względu na równomierne obciążenia zmienne, elementy toczne. Inne formy zużycia łożysk można znaleźć w pracach [87,104].

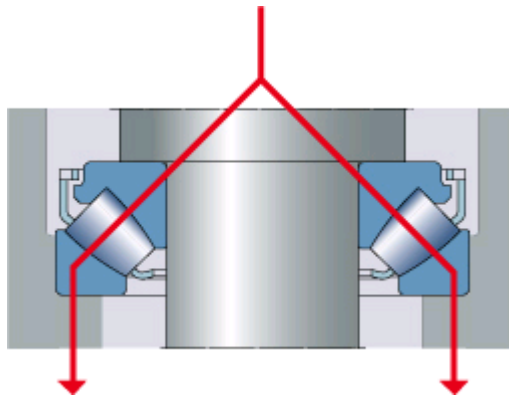
W łożyskach tocznych ruch elementów tocznych jest złożony, co spowodowane jest siłami bezwładności oraz tarcia, które oddziałują na elementy toczne. Ponadto elementy toczne przemieszczają się pomiędzy powierzchniami o krzywoliniowych tworzących. Straty tarcia w łożyskach występują w obszarze współpracy części tocznych z bieżniami, koszykiem czy też ich

brodzeniem w ośrodku smarującym. Moment tarcia uzależniony jest więc od rodzaju i wymiarów łożysk, obciążenia, prędkości obrotowej oraz rodzaju smarowania i własności środka smarującego. Wartości średnich współczynników tarcia łożysk tocznych można znaleźć w pracy [87]. Powyższe zjawiska nie wpływają jednak znacząco na rozważania efektów zmęzeniowych w łożyskach dlatego też w dalszej analizie zostały pominięte. Do obliczeń w p.6.3 przyjęto współczynnik tarcia tocznego $\mu=0,0018$ [87].

W łożyskach baryłkowych wzdłużnych elementem tocznym przenoszącym obciążenie jest niesymetryczna baryłka (Rys.6.1). Dzięki współpracy baryłek z zewnętrzną kulistą powierzchnią pierścienia zewnętrznego jest to łożysko wahlliwe. Obciążenie przekazywane jest z jednej bieżni na drugą pod pewnym kątem względem osi łożyska (Rys.6.2), dlatego też łożyska te przeznaczone są głównie do przenoszenia obciążeń osiowych (F_a) przy jednocześnie działających obciążeniach promieniowych (F_r). Wartość dodatkowego, zewnętrznego obciążenia promieniowego nie powinna przekraczać 55% wartości obciążenia osiowego. Łożyska baryłkowe wzdłużne mogą pracować przy bardzo dużych obciążeniach osiowych jak i stosunkowo dużych prędkościach obrotowych.



Rys.6.1 Łożysko baryłkowe wzdłużne (źródło: www.skf.com)



Rys.6.2 Sposób przenoszenia obciążenia przez łożysko baryłkowe wzdłużne (źródło www.skf.com)

Ze względu na występujące podczas obracania się siły odśrodkowe i żyroskopowe powinny być one zawsze obciążone minimalną siłą osiową $F_{a,MIN}$ [105]:

$$F_{a,MIN} = 1,8F_r + A \left(\frac{n}{1000} \right)^2 \quad \text{dla} \quad 1,8F_r \geq 5 \cdot 10^{-4} C_0 \quad (6.1a)$$

$$F_{a,MIN} = 0,0005C_0 + A \left(\frac{n}{1000} \right)^2 \quad \text{dla} \quad 1,8F_r < 5 \cdot 10^{-4} C_0 \quad (6.1b)$$

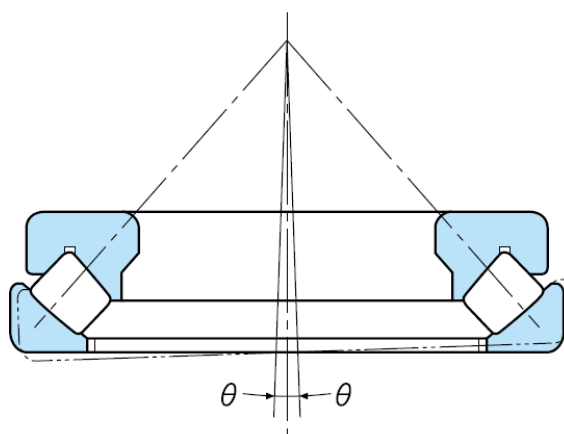
gdzie:

- $F_{a,MIN}$ [kN] - minimalne obciążenie osiowe
- F_r [kN] - składowa promieniowa obciążenia dla łożysk poddawanych obciążeniom złożonym
- C_0 [kN] - nośność statyczna
- A - współczynnik obciążenia minimalnego
- n [obr/min] - prędkość obrotowa

Zaletą tego rodzaju łożysk jest ich samonastawność podczas pracy, dzięki której właściwości łożyska nie zależą od ugięcia wału oraz jego niewspółosiowości względem oprawy. W zależności od konstrukcji łożyskowania, typu uszczelnienia itp. dopuszczalna niewspółosiowość (Rys.6.3) może wynosić od 2 do 3°.

Dla łożysk baryłkowych wzdłużnych optymalne jest smarowanie olejowe. Jest to związane z dużym dociskiem kulistych czoł baryłek do bieżni pomocniczej oraz znacznym poślizgiem, zarówno na niej, jak i na bieżniach głównych. Więcej informacji na temat łożysk baryłkowych wzdłużnych można znaleźć w pracy [103], w tym głównie sprawy techniczne (dobór łożysk wg metody „SKF Life Method”; montaż i demontaż; projektowanie układu łożysk; dobór środka smarnego).

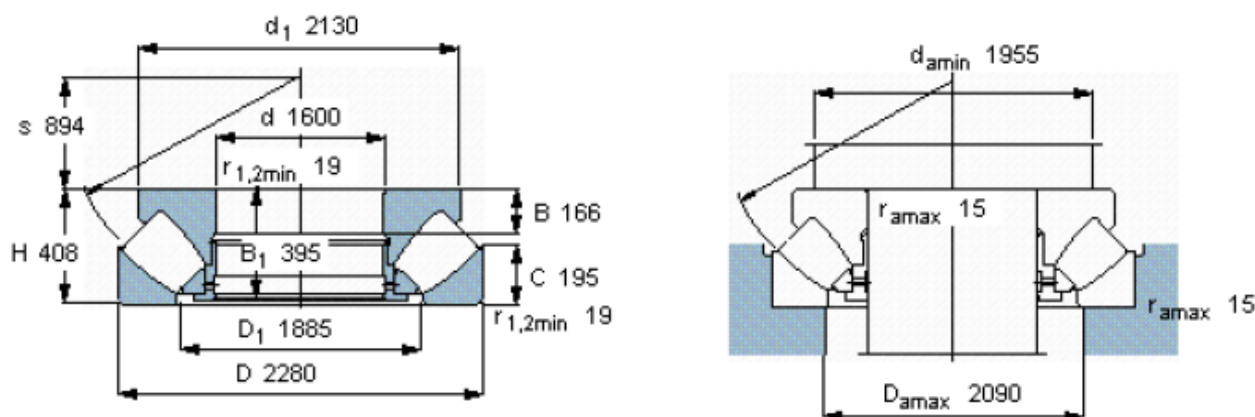
Do obliczeń zmęczeniowych przyjęto łożysko baryłkowe wzdłużne o oznaczeniu 293/1600 EF [92,103] i wymiarach podanych w Tabeli.6.1 i na Rys.6.4 (główne wymiary przyjętego łożyska SKF są zgodne z normą ISO 104:2002).



Rys.6.3 Niewspółosiowość wału względem oprawy (źródło: www.nachi.de)

Tabela.6.1 Wymiary i parametry wybranego łożyska baryłkowego wzdłużnego [92]

Oznaczenie	Wymiary główne			Nośność nominalna		Granica obciążenia zmęczeniowego	Wsp. obciążenia minimalnego
				dynamiczna	statyczna		
	d	D	H	C	C_0	P_u	
	[mm]			[kN]		[kN]	
293/1600EF	1600	2280	408	36800	200000	11800	3800



Rys.6.4 Podstawowe wymiary łożyska baryłkowego wzdłużnego 293/1600EF; źródło: [92]

6.2. MODEL NUMERYCZNY 3D ŁOŻYSKA BARYŁKOWEGO WZDŁUŻNEGO

Analizowano łożysko baryłkowe wzdluzne o duzej srednicy (Rys.6.4). Obciazenie pionowe (osiowe) calego łożyska (o liczbie elementow tocznych $z = 30$) przyjeta rowne granicy obciazenia zmeczeniowego $F_u = 11800$ [kN] (Tabela.6.1). Model numeryczny zbudowano tylko dla wycinka łożyska baryłkowego z polowka jednego elementu tocznego (Rys.6.5). Obciazenie osiowe jednej baryłki przyjeta⁶:

$$F_y = \frac{F_a}{z} = \frac{F_u}{z} = \frac{11800}{30} = 393,3 \text{ [kN]} \quad (6.2)$$

Na wszystkich wyciętych powierzchniach założono symetryczne warunki brzegowe (zablokowane zostały przemieszczenia w kierunkach normalnych do tych powierzchni – Rys.6.5). Zadanie rozwiązano w dwóch etapach. W pierwszym zamiast siły pionowej obciążającej górną bieżnię wprowadzono obciążenie w postaci pionowych przemieszczeń. Miało to na celu skasowanie ewentualnych luzów pomiędzy elementami kontaktowymi bieżni i baryłki. W drugim etapie anulowano obciążenia wprowadzone przez przemieszczenia dane na górnej bieżni i obciążono model siłą osiową $\frac{1}{2}F_y$. Obliczenia numeryczne 3D wycinka łożyska baryłkowego wzdluznego wykonano przy pomocy metody elementow skończonych systemem ANSYS⁷.

W obszarze kontaktu baryłki z bieżniami zastosowano regularną siatkę elementow skończonych z silnym zagęszczeniem elementow sześciociennych. Na pozostałym obszarze zastosowano rzadszą, nieregularną siatkę elementow czworościennych. W celu uzyskania dokładniejszego rozwiązania zastosowano technikę submodelingu.

Do obliczeń zmeczeniowych przyjeta, że zarówno pierścienie łożyska jak też elementy toczne wykonane są z nierdzewnej stali o wysokiej zawartości chromu X105CrMo17 [106]. Skład chemiczny tej stali podano w Tabeli.6.2 a własności wytrzymałościowe po obróbce cieplnej w Tabeli.6.3. Wartości trwałej wytrzymałości na skręcanie i zginanie obustronne (odpowiednio Z_{SO} i Z_{GO}) oszacowano w oparciu o wytrzymałość na rozciąganie R_m [74].

Tabela.6.2 Skład chemiczny stali X105CrMo17 (odpowiednik H18) [107,108,109]

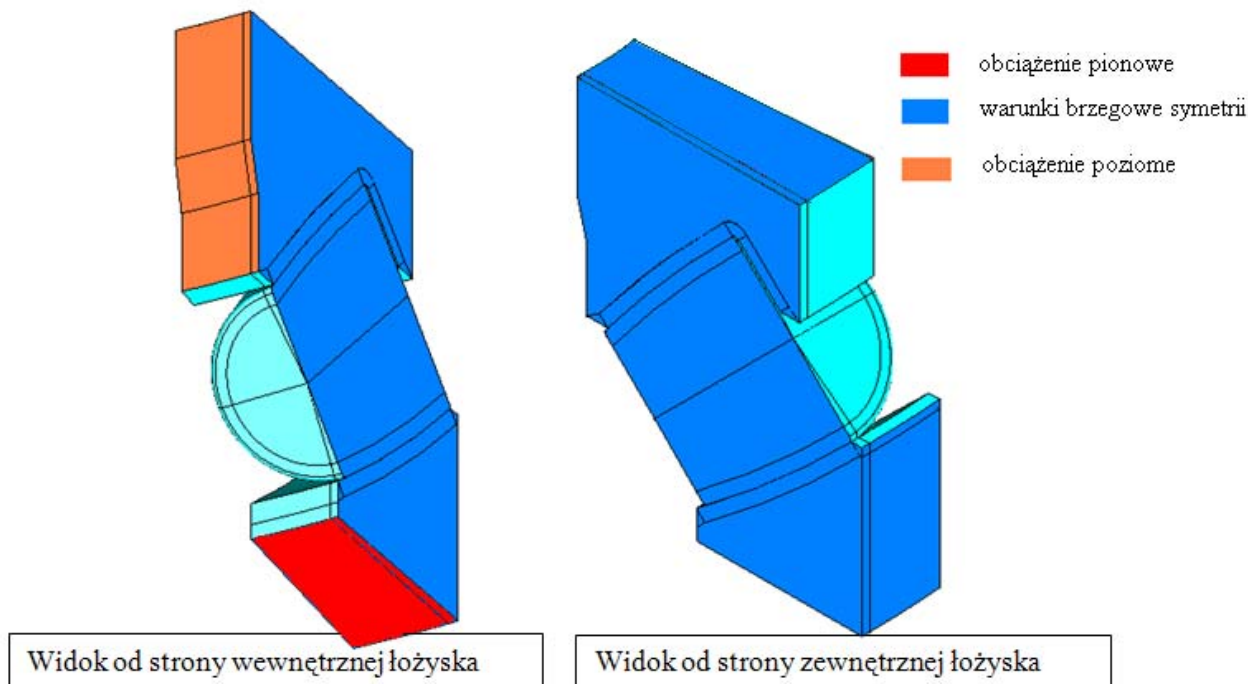
Oznaczenie	Cr [%]	C [%]	Mn [%]	Si [%]	P [%]	S [%]	Mo [%]
X105CrMo17	16 ÷ 18	0,95 ÷ 1,20	≤ 1	≤ 1	≤ 0,04	≤ 0,03	≤ 0,75

Tabela.6.3 Wybrane własności stali X105CrMo17 po obróbce cieplnej (hartowanie w oleju o temp. 1030°C i odpuszczanie w temp. 400°C) obliczone w oparciu o R_m [74] oraz dane katalogowe [109]

Parametr	Wartość [MPa]
E	$2,23 \cdot 10^5$ [MPa]
R_e	1635 [MPa]
R_m	1780 [MPa]
Twardość	56 HRC
Z_{GO}	$0,4 \cdot R_m = 712$ [MPa]
Z_{SO}	$0,6 \cdot Z_{GO} = 427$ [MPa]

⁶ W celu uzyskania rozwiązania numerycznego wprowadzono wstępną siłę promieniową $F_r = 0,05F_y$. Bez niej pojawiały się trudności obliczeniowe.

⁷ Podobnie jak w modelu koła suwnicy 3D zastosowano 20-węzłowe bryłowe elementy SOLID95 oraz kontaktowe CONTA174 i TARGE170. Włączono automatyczne domykanie szczelin CNOF ($KeyOpt(5) = 1$ dla CONTA174), a parametry - sztywności elementow kontaktowych ustawiono na $FKN = 1$ i tolerancji (penetracji) FTOLN = 0,2.



Rys.6.5 Model numeryczny i warunki brzegowe łożyska baryłkowego

6.3. WPLYW PROMIENIA ZAOKRĄGLENIA BIEŻNI NA WYTEŻENIE ZMĘCZENIOWE ELEMENTU TOCZNEGO ŁOŻYSKA

Wpływ promienia zaokrąglenia baryłki na zjawiska występujące w kontakcie oraz na wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych ma charakter zasadniczy i dlatego wymaga szczególnej analizy. Przyjęto promień krzywizny bieżni pierścieni łożyskowych o wartości $R_p = 1580$ [mm]. Promień zaokrąglenia powierzchni tocznej baryłki przyjmowano nieznacznie mniejszy, o wartościach z zakresu $R_{Bar} \in \{1545 \div 1580\}$ [mm].

Obliczenia numeryczne (ANSYS.11®) wykonano przy użyciu modelu przedstawionego na Rys.6.5. Zbieżność rozwiązania numerycznego badano dla baryłki o promieniu $R_{Bar} = 1550$ [mm]. Sprawdzano maksymalne wartości nacisków kontaktowych p_o pomiędzy elementem tocznym i pierścieniami a także maksymalne wyteżenia σ_{HMH}^{MAX} oraz odpowiadające im estymatory błędu dyskretyzacji σ_{HMH}^{EST} . Wyniki zestawiono w Tabeli.6.4. Przykłady z podstawowym wymiarem elementu $h = 2$ [mm] oraz $h = 1,5$ [mm] dotyczą modelu jednolitego. Zagęszczenie siatki z $h = 2$ [mm] do $h = 1,5$ [mm] wpłynęło na zmniejszenie różnic pomiędzy maksymalną wartością wyteżenia σ_{HMH}^{MAX} a estymatorem błędu dyskretyzacji σ_{HMH}^{EST} . Można więc przyjąć, że w zaproponowanym modelu, w pobliżu miejsc maksymalnego wyteżenia nie występują silne brzegowe koncentratory naprężeń. Ze względu na spore czasy nieliniowych obliczeń numerycznych dalsze obliczenia wykonano dla wybranych wycinków obejmujących strefy najbardziej wyteżone. Do obliczeń submodelu wykorzystano rozwiązanie dla elementu o długości boku $h = 1,5$ [mm]. Dokładnie analizowano jedynie kontakt baryłki z bieżnią górną. Kontakt z bieżnią dolną miał charakter podobny.

Tabela.6.4 ukazuje znaczne, lokalne efekty kontaktowe w łożysku baryłkowym. Stosunkowo duże różnice pomiędzy σ_{HMH}^{MAX} a σ_{HMH}^{EST} , można minimalizować stosując gęstszą siatkę elementów skończonych, co jednak znacznie wydłuża i tak już bardzo duży czas obliczeń.

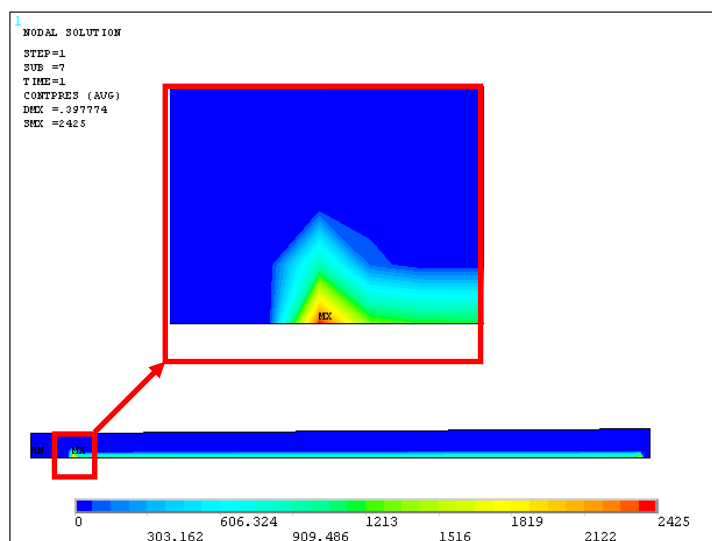
Tabela.6.4 Wyniki zbieżnościowych obliczeń numerycznych dla baryłki; $R_p = 1580$ [mm]; $R_{Bar} = 1550$ [mm]. Definicja σ_{HMH}^{EST} jest w załączniku C.1.1

Wymiar h [mm] boku elementu kontaktowego	p_o [MPa]	σ_{HMH}^{MAX} [MPa]		σ_{HMH}^{EST} [MPa]	
		pierścień	baryłka	pierścień	baryłka
2	1584	762	716	911	1038
1,5	1399	773	804	879	989
1 (submodel)	1439	696	747	789	878

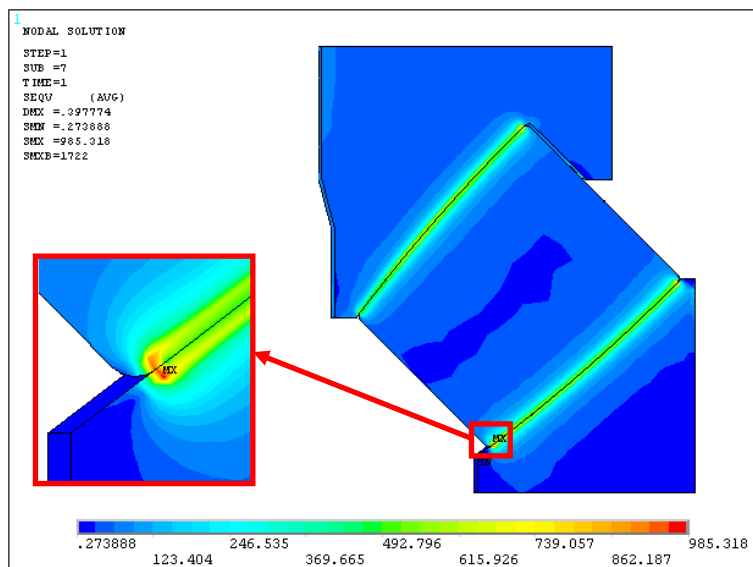
W przypadku nieznacznych różnic pomiędzy promieniami bieżni R_p i baryłki R_{Bar} w rozwiązaniach numerycznych pojawiały się lokalne koncentracje naprężeń kontaktowych p_o na granicy obszaru styku (Rys.6.6) oraz koncentracje wyteżenia σ_{HMH}^{MAX} pod powierzchnią nad końcem obszaru styku (Rys.6.7).

Z rozważanych w pracy skojarzeń promieni R_p , R_{Bar} należy wyróżnić przykład, w którym promienie zaokrąglenia bieżni i baryłki są identyczne $R_p = R_{Bar} = 1580$ [mm]. Z uwagi na deformacje pojawiła się lokalna koncentracja naprężeń kontaktowych $p_o = 2425$ [MPa] (Rys.6.6) i wyteżenia $\sigma_{HMH}^{MAX} = 985$ [MPa] (Rys.6.7). Podobna sytuacja wystąpiła dla modelu z baryłką o promieniu zaokrąglenia $R_{Bar} = 1577$ [mm].

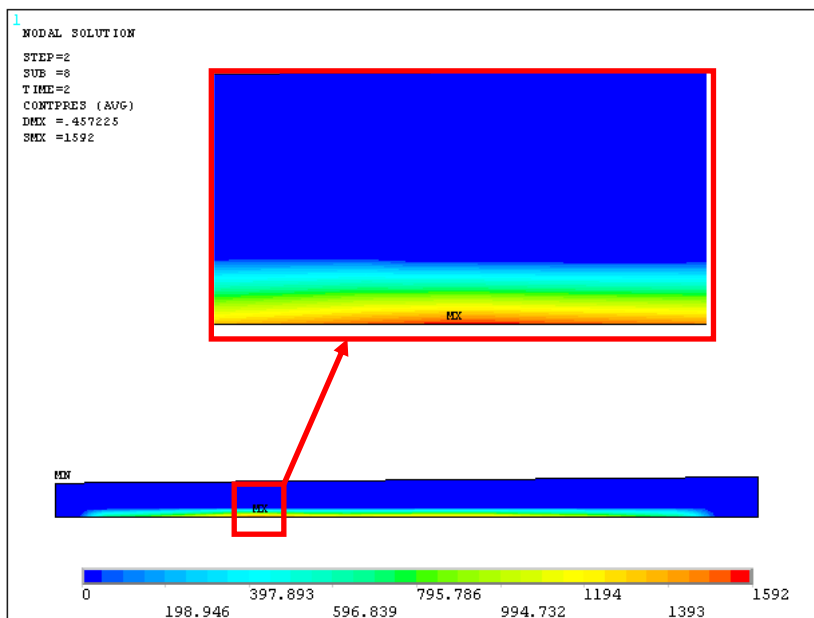
Zwiększenie różnicy pomiędzy promieniami R_p oraz R_{Bar} (promień zaokrąglenia baryłki $R_{Bar} = \{1545; 1550; 1560\}$ [mm]) powoduje istotną zmianę rozkładów naprężeń i strefy kontaktu. Dla powyższych przypadków maksymalne naciski kontaktowe (Rys.6.8 – $R_{Bar} = 1545$ [mm]) oraz maksymalne wyteżenie σ_{HMH} (Rys.6.9 – $R_{Bar} = 1545$ [mm]) występowały w okolicy środkowej części elementu tocznego. Otrzymane ekstremalne wartości tych wielkości były znacznie mniejsze niż we wcześniejszych przykładach ($R_{Bar} \geq 1577$ [mm]) (Tab.6.5).



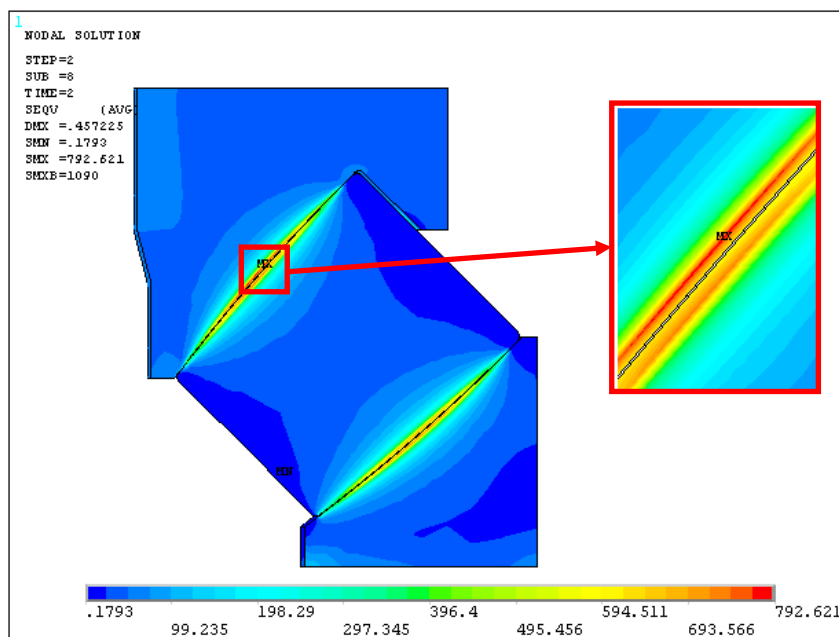
Rys.6.6 Koncentracja nacisków na granicy kontaktu; promień bieżni $R_p = 1580$ [mm]; baryłki $R_{Bar} = 1580$ [mm]; $h = 2$ [mm]; $p_o = 2425$ [MPa]



Rys.6.7 Koncentracja wyężenia σ_{HMH} pod powierzchnią kontaktu; promień bieżni $R_p = 1580$ [mm]; baryłki $R_{Bar} = 1580$ [mm]; $h = 2$ [mm]; $\sigma_{HMH}^{MAX} = 985$ [MPa]



Rys.6.8 Naciski kontaktowe; promień bieżni $R_p = 1580$ [mm]; baryłki $R_{Bar} = 1545$ [mm]; $h = 2$ [mm]; $p_o = 1592$ [MPa]



Rys.6.9 Wytyżenie σ_{HMH} ; promień bieżni $R_P = 1580$ [mm]; baryłki $R_{Bar} = 1545$ [mm]; $h = 2$ [mm]; $\sigma_{HMH}^{MAX} = 793$ [MPa]

Tabela.6.5 Maksymalne naciski kontaktowe oraz maksymalne wytyżenie w wybranych elementach łożyska baryłkowego wzdłużnego dla różnych wartości promieni zaokrąglenia powierzchni toczonej baryłki R_{Bar} [mm]; $R_P = 1580$ [mm]; $F_a = F_u = 11800$ [kN]; model jednolity; $h = 2$ [mm]




		Promień zaokrąglenia powierzchni toczonej baryłki R_{Bar} [mm]				
		1580	1577	1560	1550	1545
p_o [MPa]	baryłka	2015	2170	1578	1584	1592
σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	pierścień	834	902	693	762	793
	baryłka	947	1002	684	716	732

Dla wybranych trzech skojarzeń promieni powierzchni toczonej bieżni ($R_P = 1580$ [mm]) i baryłki ($R_{Bar} = \{1545; 1550; 1560\}$ [mm]) obliczone zostały zastępcze naprężenia zmęczeniowe wg procedur opisanych w rozdziale 3. Obliczenia wykonano dla wewnętrznego pierścienia łożyskowego, który wg literatury jest najbardziej narażony na pęknięcia [87]. Wyznaczono również naprężenia DV_{2mod} z pominięciem ściskających naprężeń hydrostatycznych. Wyniki obliczeń zmęczeniowych zestawiono w Tabeli.6.6. W przypadku łożyska baryłkowego kształt pola styku zbliżony jest do prostokąta. W takiej sytuacji zmniejszeniu ulega maksymalne wytyżenie w punkcie Bielajewa (porównaj Tablica.A.2). W konsekwencji również mniejsze są naprężenia zmęczeniowe τ_{DV2mod} , ponieważ wartość maksymalna tego naprężenia występuje właśnie w punkcie Bielajewa i zależy od maksymalnego naprężenia tnącego τ_{TG}^B .

Tabela.6.6. Maksymalne wartości zastępczego wyężenia zmęczeniowego w górnym pierścieniu łożyska baryłkowego wzdłużnego, w przypadku skojarzeń z baryłkami o promieniu R_{Bar} [mm]; $R_p = 1580$ [mm]; $F_a = F_u = 11800$ [kN]; materiał X105CrMo17.

Hipoteza	$R_{Bar} = 1560$ [mm]	$R_{Bar} = 1550$ [mm]	$R_{Bar} = 1545$ [mm]	Uwagi
	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	τ_{eqv}^{MAX} [MPa]	
DV ₁	233	246	253	Nadmierny wpływ ściskania
DV _{2mod}	354	348	370	
DV _{mod}	329	356	368	
P ₁	410	427	437	Brak uwzględnienia przesunięcia w fazie
P ₂	329	356	368	
C	375	384	392	
E ₂	339	361	373	

Uwaga: Kolorami zaznaczono maksymalne wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych:

	– wartości zaniżone (przeszacowanie efektów ściskających)
	– wartości zawyżone
	– wyniki poprawne

Oryginalna hipoteza DV₁, podobnie jak w przypadku analizy koła jezdnego suwnicy, przeszacowuje wpływ efektów ściskających na zastępczą miarę wyężenia. Hipoteza P₁, bazująca na średnich wartościach stanu naprężenia nie uwzględnia przesunięcia w fazie, co prowadzi do zawyżenia wartości zastępczych naprężeń zmęczeniowych. Pozostałe hipotezy (DV_{mod}; P₂; C; E₂) dały zbliżone rezultaty. Warto zaznaczyć, że te cztery hipotezy dały prawidłowe wyniki również dla zjawiska toczenia bez tarcia i z tarcie koła jezdne suwnicy (porównaj Tab.5.3.2).

Analizując przeprowadzone rozwiązania numeryczne można zauważyć, że zbyt zbliżone wartości promieni krzywizn prowadzą do przenoszenia obciążeń na krawędziach elementu tocznego. Skutkuje to lokalną koncentracją naprężeń, która może być niebezpieczna z punktu widzenia trwałości zmęczeniowej. Korzystniejsze okazuje się zastosowanie nieco mniejszego promienia zaokrąglenia R_{Bar} . W takiej sytuacji baryłka przenosi obciążenie swoją strefą centralną, co skutkuje bardziej regularnym rozkładem naprężeń. Dla $R_{Bar} \leq 1560$ [mm] bardziej wyężony był obszar współpracy górnego pierścienia łożyskowego z baryłką. Dla przyjętych promieni baryłki, obliczenia wskazują na fakt, że dla obciążenia $F_a \leq F_u = 11800$ [kN] i materiału X105CrMo17 nie powinno dojść do zniszczenia zmęczeniowego górnej bieźni łożyska baryłkowego.

7. *PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE*

W przedstawionych w pracy hipotezach wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego występują różnorodne podejścia obliczeniowe. Wszystkie jednak wymagają dwóch klasycznych prób zmęczeniowych - naprzemiennego zginania oraz naprzemiennego skręcania. Kryteria te pozwalają sprowadzić złożony stan naprężenia do zastępczego stanu odnoszonego zazwyczaj do próby naprzemiennego skręcania. Jedynie w hipotezach energetycznych punktem odniesienia jest energia obustronnego zginania lub rozciągania-ściskania. Zaprezentowany w pracy szczegółowy tok postępowania przy obliczeniach zastępczego wyteżenia zmęczeniowego dla kryteriów: Crosslanda (C), Dang Vana (DV), Papadopoulosa (P_1 i P_2) oraz energetycznej (E_2) Łagody, może zostać użyty dla dowolnego stanu obciążenia.

Powyższe hipotezy zostały najpierw porównane dla różnych, prostych stanów naprężenia. Uzyskane wyniki dla testów naprzemiennego czystego zginania, naprzemiennego czystego skręcania, a także zginania ze skręcaniem w fazie, były zbieżne dla wszystkich analizowanych hipotez. Badania autora wykazały jednak, że w przypadku przesunięcia fazowego między naprężeniami hipoteza Papadopoulosa P_1 , której podstawą są uśrednione wartości stanu naprężenia, nie uwzględnia tego wpływu. Efekt ten jest szczególnie istotny w przypadku zjawisk tocnych, gdzie naprężenia normalne i styczne są przesunięte względem siebie w fazie o 90° . Zastosowanie hipotezy P_1 powoduje w tym przypadku uzyskanie zawyżonych wartości wyteżenia zmęczeniowego.

Analizowano też złożone stany naprężenia ze stałymi wartościami naprężeń stycznych i rozciągających. Wyniki otrzymane przy użyciu hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego porównane zostały do wyników badań doświadczalnych dla stali 30CrNiMo8 dostępnych w literaturze [76]. Dla prób

- naprzemiennego zginania ze stałymi naprężeniami stycznymi,
- naprzemiennego skręcania ze stałymi naprężeniami rozciągającymi,
- naprzemiennego zginania ze skręcaniem w fazie,

otrzymane przez autora wyniki analityczne były zbliżone do doświadczalnych.

Na przykładzie hipotezy DV zaproponowano metodykę wyznaczania orientacji płaszczyzny krytycznej dla zjawisk tocnych i obciążonych elementów tocnych siłą tętniącą. Przyjęcie funkcji czasu jako parametru zgodnego z kątem obrotu koła φ umożliwiło znaczne skrócenie komputerowych obliczeń. Zaproponowano specyficzny model z dzielonym podłożem do analizy zjawiska tarcia trakcyjnego. Uzyskane testowe wyniki zarówno 2D jak również 3D były bliskie analitycznym rozwiązaniom obliczonym przy pomocy wzorów Hertza.

W przypadku kontaktu toczonego wystąpiły dwa potencjalne miejsca inicjacji pęknięcia zmęczeniowego – punkt Bielajewa oraz promień punktów Palmgrena-Lundberga. Punkt Bielajewa, w którym występuje maksymalne naprężenie styczne jest niebezpieczny w przypadku kontaktu statycznego (bez obrotu) ciał obciążonych siłami zmiennymi w czasie. Promień punktów Palmgrena-Lundberga jest niebezpieczny w przypadku toczenia się ciał, co jest spowodowane maksymalną amplitudą naprężenia stycznego na tym promieniu.

Przeprowadzone obliczenia 2D kontaktu toczonego wykazały, że oryginalna hipoteza DV przeszacowuje wpływ ściskających naprężeń hydrostatycznych na zastępczą miarę wyteżenia zmęczeniowego. Dotyczy to w szczególności materiałów twardych, w których współczynnik a występujący przy tych naprężeniach jest znaczny. Zauważono, że zastępcze naprężenia DV mogą się istotnie zmienić wraz ze zmianą materiału.

W oparciu o sugestie znalezione w literaturze zaproponowano i zbadano zmodyfikowaną wersję hipotezy DV. Otrzymane wyniki zmodyfikowaną wersją były zbieżne do wyników pozostałych hipotez, dlatego zaleca się stosowanie tej wersji hipotezy do zjawisk, w których występują znaczne efekty ściskające. Nie zaleca się również stosowania hipotezy P_1 , która nie uwzględnia przesunięcia w fazie między naprężeniami. W przypadku czystego toczenia (bez tarcia) zastępcze naprężenia zmęczeniowe miały wartości zbliżone do amplitudy naprężenia stycznego w punktach Palmgrena-Lundberga.

Wykonane próby zamodelowania chropowatości powierzchni nie wykazały większego wpływu na naprężenia podpowierzchniowe w punktach Palmgrena-Lundberga i Bielajewa. Analiza naprężeń na powierzchni chropowatej powinna natomiast zostać wykonana dla zjawisk trakcyjnego tarcia tocznego, w szczególności dla przypadków znacznych przeciążeń (rozruch, hamowanie). W takich przypadkach obciążeń na powierzchni tocznej pojawiają się obwodowe naprężenia rozciągające, które wpływają niekorzystnie na zmęczenie materiału.

Dla przypadku koła jeźdnego suwnicy analizie poddano wpływ promienia zaokrąglenia główki szyny na naprężenia i wyężenie zmęczeniowe. Zwiększanie tego promienia wpływało korzystnie na zmęczenie materiału. Nie można jednak dowolnie zwiększać jego wartości, gdyż dla dużych wartości promieni współpracujących elementów decydującą rolę mogą odgrywać wzajemne nierównoległości powierzchni szyny i koła. Obliczenia numeryczne nie wykazały istotnego wpływu położenia koła względem szyny na naprężenia w punktach Bielajewa i Palmgrena-Lundberga.

Podsumowując, do analizy zjawisk tocznych autor zaleca stosowanie wybranych hipotez wieloosiowego zmęczenia wysokocyklowego (Crosslanda, zmodyfikowanej Dang Vana, drugiej Papadopouloosa i energetycznej Łagody). W rozważanych aplikacjach wyżej wymienione hipotezy, bazujące na różnych podejściach obliczeniowych, dają zbliżone wyniki co umożliwia przyjęcie założenia, że rzeczywiste wyężenie zmęczeniowe znajduje się w granicach przez nie określonych. Dotyczy to również promienia maksymalnego wyężenia, którym w przybliżeniu jest promień punktów Palmgrena-Lundberga.

ZAŁĄCZNIK A: ANALIZA TEORETYCZNA NAPRĘŻEŃ KONTAKTOWYCH DLA OGÓLNEGO PRZYPADKU LOKALNEGO KONTAKTU DWÓCH CIAŁ

W miejscu styku dwóch krzywopowierzchniowych dociskanych do siebie ciał pojawiają się naprężenia kontaktowe, które występują zazwyczaj na małym obszarze i mogą osiągać znaczne wartości. Kontur tego obszaru zależy od kształtu stykających się ciał. Do teoretycznego rozwiązania zagadnienia kontaktu dwóch ciał można wykorzystać metodę przybliżoną, zaprezentowaną w pracy [110]. W analizie przyjęto pewne założenia:

- ciała są wykonane z jednorodnego i izotropowego materiału,
- stykają się powierzchniami gładkimi o regularnej krzywiznie,
- w obszarze styku ciał powstają małe odkształcenia,
- obszar kontaktu jest znacznie mniejszy od pola powierzchni stykających się ciał,
- na powierzchni styku występują tylko naprężenia normalne.

W pracy zamieszczone zostały tylko podstawowe informacje potrzebne do wyznaczenia wymiarów półosi elipsy kontaktu a i b oraz maksymalnych naprężeń kontaktowych p_o . Teoria dotyczy ogólnego przypadku ściskania dwóch ciał sprężystych o promieniach: R_{11} i R_{12} (dotyczy pierwszego ciała) oraz R_{21} i R_{22} (dla drugiego ciała), odnoszących się do głównych krzywizn rozpatrywanych obiektów, przy czym $R_{11} < R_{12}$ oraz $R_{21} < R_{22}$. Promień uważany jest za dodatni jeżeli jego początek znajduje się od strony wnętrza danego ciała. Od najmniejszych i największych wartości krzywizn stykających się powierzchni (tj. $\rho = 1/R$) zawartych w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach oraz od kąta φ zależą dwa współczynniki A i B . Kąt φ określa wzajemne położenie płaszczyzn normalnych zawierających największe krzywizny obu powierzchni. Współczynniki A oraz B można wyznaczyć z zależności:

$$A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$B - A = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right)^2} + 2 \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right) \left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right) \cos(2\varphi) \right) \quad (\text{A.2})$$

Znając wartości tych współczynników można obliczyć wielkości półosi elipsy kontaktu a i b . W tym celu należy określić współczynniki m i n . W oparciu o przykładowe wartości (Tab.A.1) podane w pracy [110] wykonano interpolację dla zakresu $\theta \in \{30^\circ, 90^\circ\}$. Współczynnik m przybliżono wielomianem czwartego stopnia:

$$m = 1,24466 \cdot \theta^4 - 6,51974 \cdot \theta^3 + 13,3336 \cdot \theta^2 - 13,48444 \cdot \theta + 6,97567 \quad (\text{A.3})$$

a współczynnik n wielomianem trzeciego stopnia:

$$n = 0,1026 \cdot \theta^3 - 0,21861 \cdot \theta^2 + 0,57586 \cdot \theta + 0,2366 \quad (\text{A.4})$$

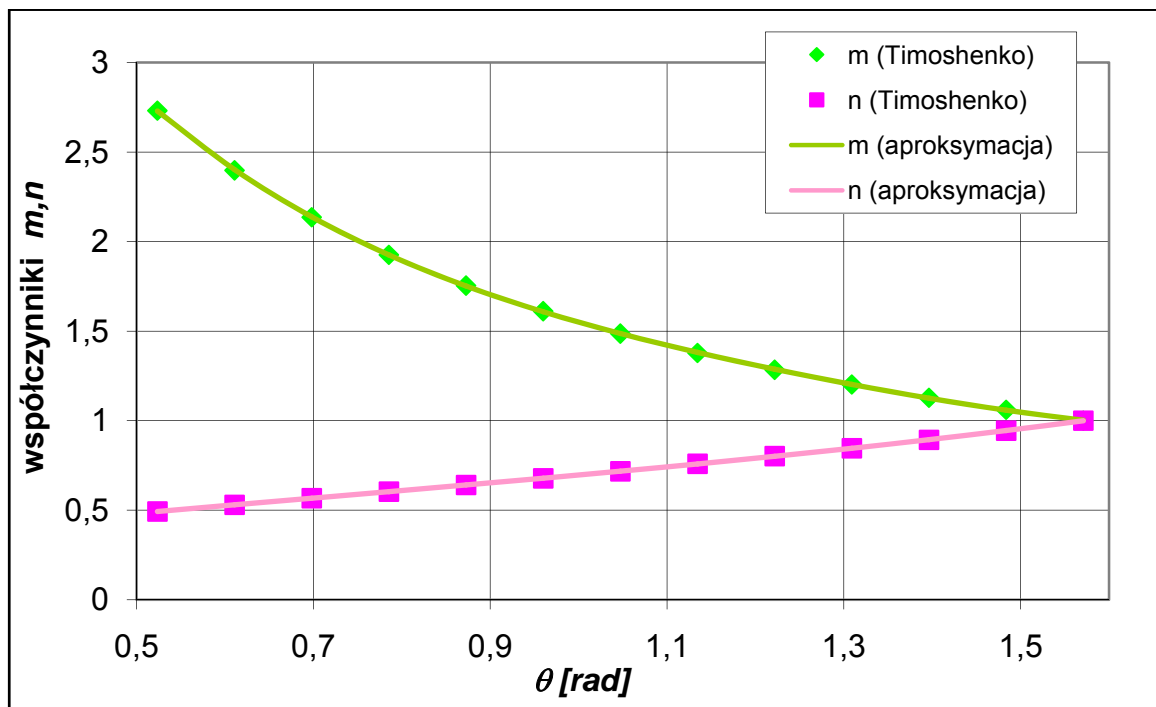
Kąt θ w podanych wzorach na współczynniki m i n należy wstawiać w mierze łukowej. Jego wartość zależy od promieni krzywizn:

$$\theta = \arccos \left(\frac{B - A}{A + B} \right) \quad (\text{A.5})$$

Na Rys.A.1 przedstawiono zależność współczynników m i n w funkcji kąta θ . Punkty odnoszą się do wartości podanych w [110], a liniami przedstawiono przebieg funkcji interpolacyjnych opisanych równaniami (A.3 – A.4).

Tabela.A.1 Wartości współczynników m i n dla różnych wartości θ ⁸.

$\theta =$	0,524	0,611	0,698	0,785	0,873	0,96	1,047	1,134	1,222	1,309	1,396	1,484	1,571
[rad,°]	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
$m =$	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1
$n =$	0,493	0,53	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,759	0,802	0,846	0,893	0,944	1



Rys.A.1 Zależność współczynników m i n w funkcji kąta θ . Wartości współczynników w przedstawionych punktach pochodzą z [110] a linie przedstawiają przebieg funkcji interpolacyjnych.

Ostatecznie półośie elipsy kontaktu:

$$a = m \cdot \sqrt[3]{\frac{3\pi F(k_1 + k_2)}{4(A + B)}} \quad (\text{A.6a})$$

$$b = n \cdot \sqrt[3]{\frac{3\pi F(k_1 + k_2)}{4(A + B)}} \quad (\text{A.6b})$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi \cdot E_1} \quad (\text{A.7a})$$

$$k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi \cdot E_2} \quad (\text{A.7b})$$

ν_i, E_i oznaczają odpowiednio współczynnik Poissona i moduł Younga i -tego ciała.

⁸ Wartości m oraz n dla większej liczby kątów θ zostały podane w pracy [111].

Ostatecznie maksymalne naciski kontaktowe p_o można obliczyć z formuły:

$$p_o = \frac{3}{2\pi} \frac{F}{a \cdot b} \quad (\text{A.8})$$

W wielu przypadkach ściskania dwóch ciał **wyężenie maksymalne występuje na niewielkiej głębokości z_B pod powierzchnią styku w tzw. punkcie Bielajewa**. Głębokość tego punktu zależy od kształtu obszaru styku i w oparciu o badania Bielajewa (hipoteza τ_{MAX}) może wynosić $0,481 \cdot b$ dla kształtu kołowego i $0,78 \cdot b$ dla prostokątnego. Podobne obliczenia wykonał Huber stosując hipotezę energii odkształceń postaciowych uzyskując: $z_B = 0,481 \cdot b$ dla kształtu kołowego i $z_B = 0,687 \cdot b$ dla prostokątnego. Powyższe proporcje podano dla $\nu = 0,3$.

Wartość maksymalnego wyężenia zastępczego w punkcie Bielajewa może zostać oszacowana w oparciu o wartość maksymalnych nacisków p_o . W Tabeli.A.2 przedstawiono wartości tego wyężenia dla kilku wybranych kształtów obszaru kontaktu. Kształt prostokątny dotyczy kontaktu walców o osiach równoległych.

Tabela.A.2. Wartości maksymalnego wyężenia zastępczego w punkcie Bielajewa liczonego w oparciu o hipotezy τ_{MAX} i σ_{HMH} (dla $\nu = 0,3$) [111]

Kształt obszaru styku	$\frac{b}{a}$	$\frac{\sigma_{TG,B}}{p_o}$	$\frac{\sigma_{HMH,B}}{p_o}$
		hipoteza τ_{MAX}	hipoteza σ_{HMH}
koło	1	0,620	0,620
elipsa	$\frac{3}{4}$	0,634	0,617
	$\frac{1}{2}$	0,649	0,611
	$\frac{1}{4}$	0,646	0,587
prostokąt	0	0,608	0,567

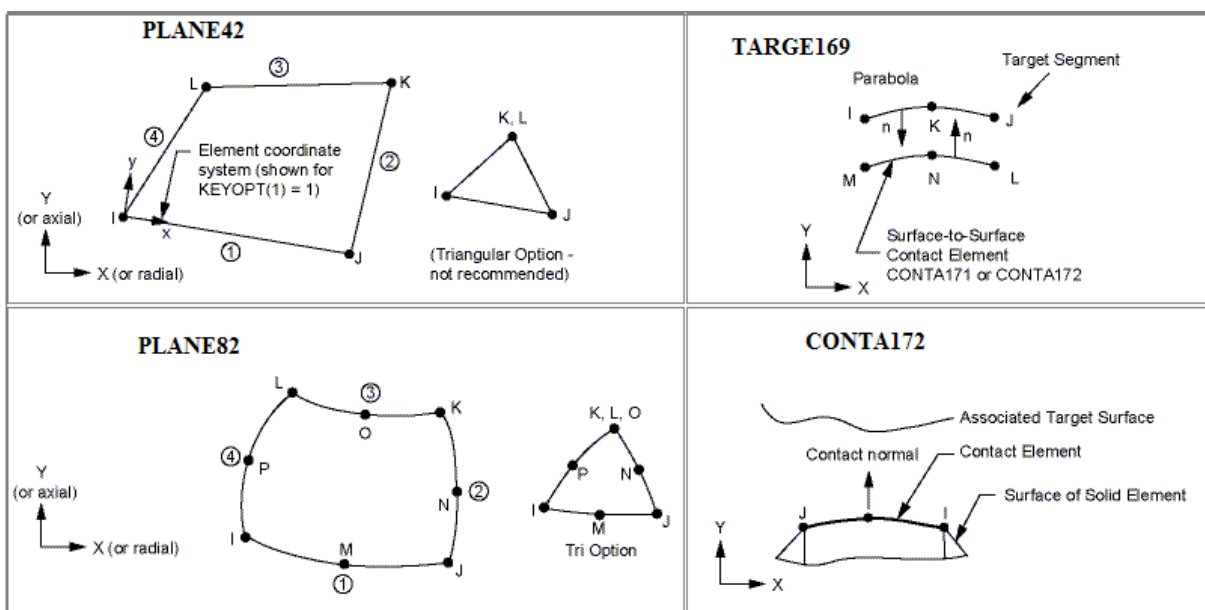
B.1. ZAŁOŻENIA I STRUKTURA MODELU

Porównano wstępnie różne rodzaje zamodelowania kontaktu koło-szyrna przy użyciu programu ANSYS®. Rozwiązano szereg technicznych problemów wynikających ze stosowania elementów kontaktowych w tym systemie. Badano wpływ m. in.:

- rodzaju elementów skończonych,
- gęstości siatki,
- metody rozwiązywania zagadnienia kontaktowego,
- ustawienia parametrów kontaktu (*FKN*, *FTOLN*),
- warunków brzegowych,
- różnorodnych modeli kontaktu 2D.

Porównano również różne sposoby zamodelowania zjawiska kontaktu walca z płaszczyzną oraz dwóch walców. W tym celu stosowano następujące elementy skończone (ANSYS®) (Rys.B.1):

1. *PLANE42* – dwuwymiarowy element tarczowy 4-węzłowy,
2. *PLANE82* – wyższa wersja elementu *PLANE42*; dwuwymiarowy element 8-węzłowy o dwóch stopniach swobody (u_x, u_y) w każdym węźle. Może być stosowany jako element płytowy (PSO, PSN lub PSN z zadaną grubością) lub osiowosymetryczny. Funkcje kształtu elementów wyższego rzędu opisujące przemieszczenia prawidłowo modelują również powierzchnie zakrzywione. Można nim zamodelować m.in.: zjawiska plastyczności, pełzania.
3. *TARGE169* – Trzywęzłowy element stosowany do dyskretyzacji powierzchni celu w dwuwymiarowych zagadnieniach kontaktowych.
4. *CONTA172* – element trójwęzłowy (z węzłem w środku elementu) stosowany do obliczeń 2D. Ma on zastosowanie do opisu kontaktu i poślizgu między odkształcalnymi powierzchniami. Element ten współpracuje z powierzchnią „celu” definiowaną elementami *TARGE169*. Element jest umiejscowiony na powierzchni dwuwymiarowych elementów z węzłem środkowym. Posiada cechy geometryczne powierzchni na której się znajduje. Podczas analizy numerycznej kontakt zostaje wykryty, jeżeli dojdzie do przenikania pomiędzy elementami *CONTA* i *TARGE* o tym samym zestawie stałych materiałowych.



Rys.B.1 Geometria stosowanych elementów dwuwymiarowych w obliczeniach numerycznych; źródło: [1]

Obliczenia zostały przeprowadzone przy użyciu dwuwymiarowych elementów tarczowych 8-węzłowych *PLANE82* i elementów kontaktowych *CONTA172* i *TARGE169*, przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia. Uzasadnieniem użycia elementów 8-węzłowych jest fakt, że przy ich zastosowaniu osiągnano znacznie szybciej zbieżność aniżeli przy stosowaniu elementów 4-węzłowych *PLANE42*.

Ze względu na symetrię, zamodelowana została połowa podłoża i koła. W modelu przyjęto nieregularny rozkład siatki z zagęszczeniem w obszarze styku oraz z użyciem jak najmniejszej ilości elementów trójkątnych (Rys.B.1). Celowość tego zabiegu można uzasadnić koniecznością użycia znacznie gęstszej siatki w rejonie kontaktu aniżeli w innych obszarze modelu oraz faktem, że elementy trójkątne dawały mniej dokładne rezultaty aniżeli elementy czworokątne.

Zbadano trzy przypadki:

1. kontakt walca z podłożem,
2. kontakt dwóch identycznych walców,
3. kontakt z podłożem dwóch walców połączonych z wciskiem.

Założono płaski stan odkształcenia. Odebrany został przesuw podłoża w kierunku pionowym (Rys.B.2). Należy zauważyć, że walec i płaszczyzna nie mają punktów wspólnych. Połączenie elementów wspólnym węzłem powoduje odebranie swobodnego ruchu walca w kierunku pionowym (przemieszczenia jako ciało sztywne), ale prowadzi do zakłócenia rozkładu naprężeń kontaktowych (Rys.B.3a). Dlatego też w pracy analizowano modele z rozdzielonymi ciałami, co pozwoliło uzyskać prawidłowe rozkłady naprężeń kontaktowych (Rys.B.3b). Szczegółowy opis zagadnienia zawarto w pracy [112].

B.2. PROBLEMY ZWIĄZANE Z MODELOWANIEM ZAGADNIEŃ KONTAKTOWYCH

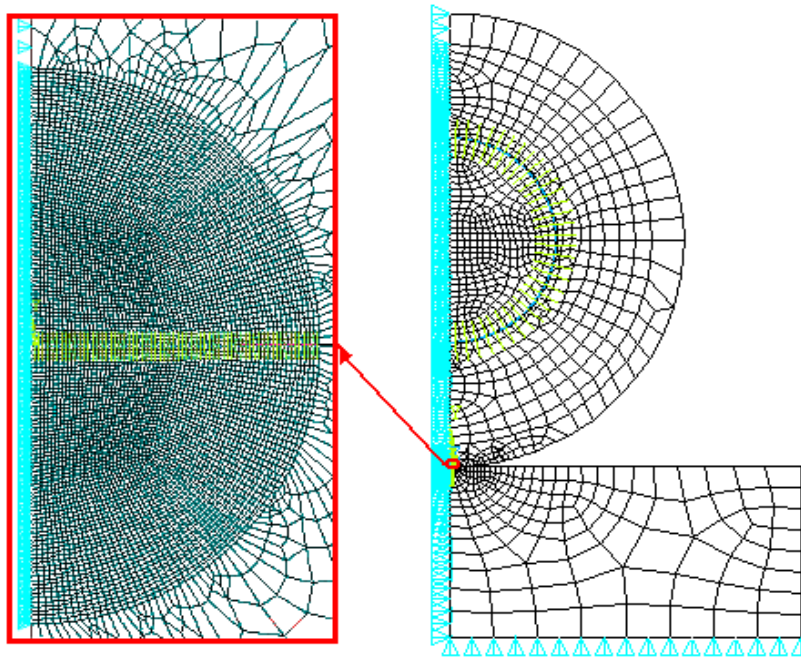
W przypadku braku wspólnego węzła kontaktujących się obiektów i obciążenia w postaci siły (nacisku) pojawia się problem z rozwiązaniem zagadnienia. Prawdopodobnie spowodowane to jest osobliwością macierzy sztywności, gdyż walec nie ma odebranego ruchu pionowego. Jednym ze sposobów rozwiązania zagadnienia kontaktu bez punktów wspólnych jest użycie funkcji *AutoCNOF*. Funkcja ta domyka ewentualne szczeliny kontaktowe a uaktywniana jest poprzez ustawienie *KeyOPT(5)=1* dla elementów kontaktowych. Inne sposoby rozwiązywania tego problemu przedstawiono i omówiono w pracy [112].

Sytuacje znacznie komplikuje zamodelowanie połączenia z wciskiem koła z osią. Brak odebranego przesuwa koła w kierunku pionowym prowadzi do jego odsunięcia od podłoża w trakcie obliczeń. Natomiast zablokowanie przesuwa koła w środkowym punkcie osi powoduje zakłócenie wyników obliczeń wskutek zwiększenia średnicy zewnętrznego pierścienia w wyniku obciążenia powstałego od wcisku. W tym przypadku w celu rozwiązania zagadnienia kontaktu walców połączonych z wciskiem z płaszczyzną zaproponowano następujący algorytm umożliwiający określenie naprężeń i odkształceń od obciążeń powstałych wskutek wcisku i siły dociskającej walce do podłoża:

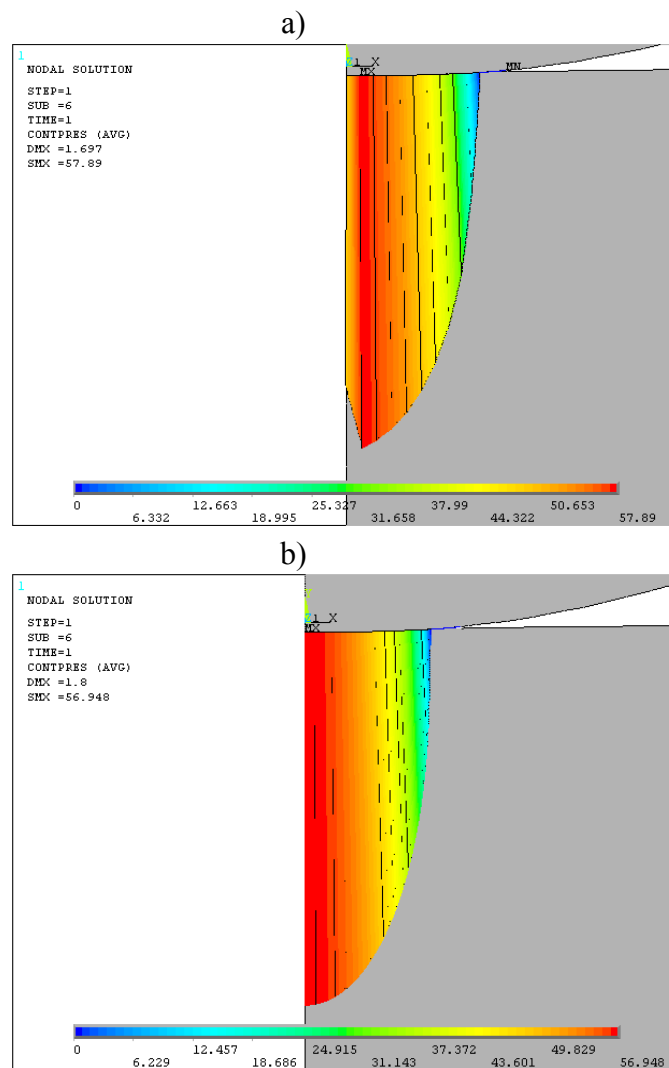
1. odsunięcie walców od płaszczyzny i odebranie ruchu pionowego w środku wewnętrznego walca,
2. rozwiązanie zagadnienia wcisku,
3. obliczenie zwiększenia średnicy walca zewnętrznego,
4. skasowanie luzu między elementami kontaktowymi poprzez dosunięcie płaszczyzny,
5. zadanie obciążenia liniowego przez warunki brzegowe przy uwzględnieniu zwiększonej średnicy walca zewnętrznego⁹.

Powyższy algorytm pozwala na uniknięcie wpływu zmiany średnicy pierścienia na naprężenia kontaktowe.

⁹ Dla walców bez połączenia wciskowego porównano obciążanie poprzez siły i przemieszczenia. Zostało wykazane, że można je stosować naprzemiennie, bez wpływu na wyniki obliczeń.



Rys.B.2 Model numeryczny walców połączonych z wciskiem z płaskim podłożem, siatka elementów skończonych oraz warunki brzegowe



Rys.B.3 Rozkład naprężeń kontaktowych między walcem a płaskim podłożem

- a) Zakłócenie spowodowane wspólnym węzłem
- b) Poprawny uzyskany oddzieleniem walca od podłoża

B.3. ZAGADNIENIE WCISKU WALCA W SZEROKI PIERŚCIEŃ

Pierwszym etapem badań było zbadanie zbieżności rozwiązania zagadnienia wcisku walca w szeroki pierścień i porównanie wyników obliczeń numerycznych¹⁰ z rozwiązaniami teoretycznymi. W przypadku wcisku porównano wyniki zarówno dla płaskiego stanu naprężenia (PSN) jak też płaskiego stanu odkształcenia (PSO). Również w przypadku wcisku ze względu na symetrię zamodelowana została połowa połączenia. Godny uwagi jest fakt, że mimo nieodebrania pionowego ruchu obu obiektów ANSYS® wykonuje obliczenia wcisku a uzyskane naprężenia stanowią dokładne rozwiązanie numeryczne zagadnienia (losowy dobór przemieszczeń ruchu ciała sztywnego przez system). Ostatecznie badania przeprowadzono dla modelu utwierdzonego w środku wewnętrznego walca.

Na podstawie zależności zamieszczonych w pracy [113] określono teoretyczne wartości ciśnienia p_{wcisk} w kontakcie powstałego na wskutek zadanego wcisku względnego w :

$$w = \frac{0,025 \text{ [mm]}}{D_W = 180 \text{ [mm]}} = 0,14 \text{ [‰]} \quad (\text{B.1})$$

między walcem o średnicy $D_W = 180 \text{ [mm]}$ a grubościenną rurą o średnicy zewnętrznej $D_R = 400 \text{ [mm]}$ (Rys.B.4), przemieszczenia u_r , naprężenia radialne σ_r oraz naprężenia obwodowe σ_θ walców wewnętrznego i rury dla $r = R_W = 90 \text{ [mm]}$ i $r = R_R = 200 \text{ [mm]}$ dla płaskiego stanu naprężenia. W oparciu o monografię [113] wyprowadzono również zależności teoretyczne dla płaskiego stanu odkształcenia.

Dla wcześniej określonej siatki elementów skończonych zmieniano gęstość elementów w obszarze wcisku celem zbadania zbieżności. Wyniki obliczeń zestawiono w Tabeli.B.1. Obliczenia wykazały, że zagadnienie wcisku nie wymaga dużej liczby elementów kontaktowych i wyniki były zbieżne do rozwiązań teoretycznych już przy niewielkiej gęstości siatki.

Tabela.B.1 Wyniki obliczeń numerycznych i teoretycznych dla płaskiego stanu naprężenia PSN i odkształcenia PSO (oznaczenia wg Rys.B.4)

liczba elementów w obszarze kontaktu	p_{wcisk} [MPa]	u_r [mm] pierścień zewnętrzny		u_r [mm] walec wewnętrzny	σ_r [MPa]		σ_θ [MPa]		
		$r = 90$ [mm]	$r = 200$ [mm]	$r = 90$ [mm]	$r = 90$ [mm]	$r = 200$ [mm]	$r = 90$ [mm]	$r = 200$ [mm]	
32	23,257	0,01801	0,01124	-0,006974	-23,24	-0,0173	35,1	11,9	PSN
128	23,258	0,01801	0,01124	-0,006974	-23,22	-0,0173	35,0	11,9	
teoria	23,260	0,01802	0,01125	-0,006978	-23,26	0,0000	35,1	11,8	
6	25,837	0,01900	0,01124	-0,005700	-28,00	-0,0149	40,5	13,10	PSO
32	25,557	0,01929	0,01124	-0,005690	-25,60	-0,0149	38,6	13,10	
128	25,557	0,01929	0,01124	-0,005693	-25,54	-0,0149	38,5	13,10	
teoria	25,561	0,01930	0,01125	-0,005696	-25,56	0,0000	38,5	12,98	

¹⁰ Do obliczeń numerycznych użyto elementów 8-węzłowych z kwadratowymi funkcjami aproksymującymi (PLANE82) oraz 3-węzłowych elementów kontaktowych (CONTA172).

B.4. BADANIA PARAMETRÓW I ALGORYTMÓW KONTAKTOWYCH SYSTEMU ANSYS

W czasie obliczeń testowych zmieniano też algorytm rozwiązywania kontaktu wg Tabeli.B.2 oraz współczynnik penetracji $FTOLN$ (od 0,0001 do 1). Współczynniki FKN i $FTOLN$ są parametrami, które mogą mieć duże znaczenie dla dokładności obliczeń jak również ich zbieżności. Poprzez stałą FKN (*normal penalty stiffness factor*) definiuje się współczynnik sztywności kontaktu w kierunku normalnej do powierzchni. Zwykle używa się wartości w zakresie (0,01 – 1,0), przy czym domyślnie ustawione jest 1,0 i ma zastosowanie do małych odkształceń. W przypadku zagadnień, w których występują duże deformacje powierzchni zalecane jest stosowanie współczynnika $FKN = 0,1$. Współczynnik $FTOLN$ (*penetration tolerance factor*) definiuje maksymalną dopuszczalną penetrację w kierunku normalnym do powierzchni kontaktu. Jego wartość zwykle jest mniejsza od 0,2 (domyślnie 0,1). Należy zauważyć, że współczynnik ten ma decydujący wpływ na czas obliczeń. Dzieje się tak, dlatego że zadanie uznane będzie za zbieżne dopiero wtedy, gdy wszystkie zaistniałe penetracje nie będą przekraczać ustalonej wartości przez $FTOLN$. Może się zdarzyć, że wzrosty wszystkich sił jak i przemieszczeń spełniają kryteria zbieżności a zadanie będzie nierozwiązane ze względu na zbyt dużą penetrację.

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } u_n > 0 \\ K_n \cdot u_n & \text{jeżeli } u_n \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

gdzie:

- F_n - normalna siła kontaktowa
- K_n - normalna sztywność kontaktu (FKN)
- u_n - wielkość szczeliny ($u_n > 0$) lub penetracji ($u_n \leq 0$) kontaktowej

Różnice spowodowane stosowaniem różnych algorytmów powodowały zmianę wyników o nie więcej niż o 1% (Tabela.B.3). Nie wykazano natomiast żadnego wpływu współczynnika $FTOLN$ na obliczenia. Zdecydowanie większy wpływ na rozwiązanie miał współczynnik sztywności FKN . Jego zmniejszenie z wartości $FKN=1$ do $FKN=0,1$ spowodowało zmniejszenie wartości naprężeń o około 2,5% na niekorzyść dokładności.

Tabela.B.2 Zestawienie algorytmów obliczeń dla zagadnienia kontaktu [1]

KEYOPT(2)	Nazwa metody
0	Rozszerzona metoda Lagrange'a (<i>Augmented Lagrangian</i>)
1	Czysta funkcja kary (<i>Pure Penalty function</i>)
3	Mnożnik Lagrange'a w kierunku normalnym i funkcja kary w kierunku stycznym (<i>Lagrange multiplier on contact normal and penalty on tangent</i>)
4	Czysta metoda mnożników Lagrange'a w obu kierunkach (<i>Pure Lagrange multiplier on contact normal and tangent</i>)

W metodzie „Penalty” [1,114] penetracja między dwoma powierzchniami zależy od ich sztywności. Jest to pewnym mankamentem tej metody, gdyż wyższe wartości sztywności prowadzące do zmniejszenia głębokości penetracji mogą również prowadzić do źle uwarunkowanej globalnej macierzy sztywności i do problemów ze zbieżnością. Wariacja z części funkcjonału odpowiedzialnego za kontakt jest w tej procedurze sformułowana jako:

$$\delta\Psi = \int_{\Gamma} [(\varepsilon_n \cdot g_n)\delta g_n + (\varepsilon_t \cdot g_t)\delta g_t]d\Gamma \quad (\text{B.3})$$

- gdzie: $\varepsilon_n, \varepsilon_t$ – parametry kary,
 g_n, g_t – funkcje luzu i penetracji.

Metoda „*Pure Lagrange multiplier*” [1] nie wymaga określenia sztywności kontaktu. Wymaga natomiast pewnych parametrów kontrolnych (*FTOLN* i *TNOP*). Teoretycznie narzuca zerową penetrację dla zamkniętego kontaktu i zerowy poślizg dla wbicia. Wadą tej metody jest to, że dodaje ona do modelu dodatkowe stopnie swobody, co prowadzi do konieczności stosowania dodatkowych iteracji w celu ustabilizowania warunków kontaktu. Dodatkowo algorytm ten może powodować częste zmiany stanu kontaktu (otwarty ↔ zamknięty, wbicie ↔ poślizg). W podejściu tym wariacja z części energii potencjalnej odpowiedzialnej za efekty kontaktowe sformułowana jest jako:

$$\delta\Psi = \int_{\Gamma} (\lambda_n \cdot \delta g_n + \lambda_t \cdot \delta \mathbf{g}_t) d\Gamma \quad (\text{B.4})$$

gdzie: λ_n – mnożnik Lagrange’a odpowiadający normalnemu naprężeniu kontaktowemu,
 λ_t – wektor mnożników Lagrange’a odpowiadający wektorowi sił stycznych.

Metoda „*Lagrange multiplier on contact normal and penalty on tangent*” [1] jest połączeniem metod „*Lagrange Multiplier*” i „*Penalty*”. Dzięki jej zastosowaniu można uniknąć problemów z naprzemiennymi zmianami stanów kontaktu. W szczególności metoda ta nadaje się do zagadnień kontaktu z tarcie ślizgowym.

W ANSYSie® domyślnym sposobem rozwiązywania zagadnień kontaktowych jest metoda „*Augmented Lagrangian*” [1,115]. Jest ona kombinacją metody mnożników Lagrange’a i metody funkcji kary:

$$\delta\Psi = \int_{\Gamma} [(\lambda_n + \varepsilon_n \cdot g_n) \delta g_n + (\lambda_t + \varepsilon_t \cdot \mathbf{g}_t) \delta \mathbf{g}_t] d\Gamma \quad (\text{B.5})$$

Polega ona na iteracyjnym uaktualnianiu współczynników kary w celu znalezienia mnożników Lagrange’a. W porównaniu do metody współczynników kary „*Penalty*” prowadzi ona zwykle do lepszego uwarunkowania i jest mało wrażliwa na wielkości współczynników sztywności kontaktu. Wadą może być konieczność wykonywania dodatkowych iteracji w szczególności, gdy siatka deformacji staje się nadmiernie zniekształcona.

Rozumowanie teorii kontaktu jest bardzo rozbudowane matematycznie. Autor niniejszej pracy nie analizował jej równań, natomiast szczegółowo badał wyniki jej aplikacji do zagadnień 2D i 3D. Szczegółowe opisy dotyczące tej teorii można znaleźć w pracy [116].

Tabela.B.3 Wyniki obliczeń numerycznych dla algorytmów wymienionych w Tabeli.B.2

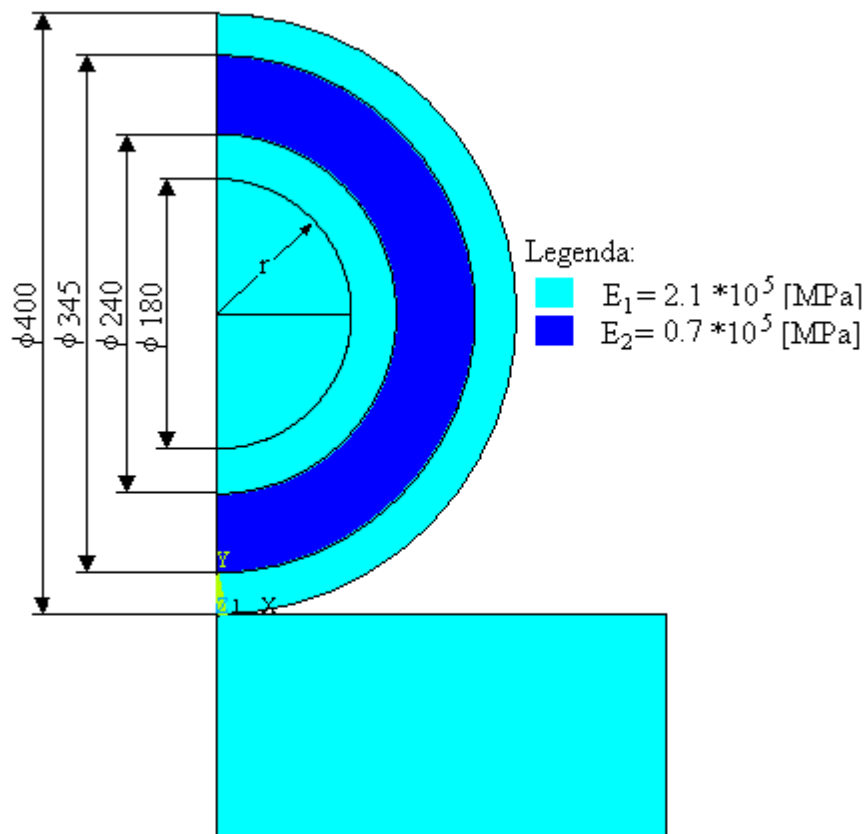
r_w – promień zewnętrzny walca i wewnętrzny pierścienia,

r_z – promień zewnętrzny pierścienia

			algorytm kontaktu			
			0	1	3	4
wcisk dwóch walców	$r_w = 90$ [mm]	σ_r [MPa]	-25,63	-25,63	-25,64	-25,64
		σ_θ [MPa]	38,59	38,59	38,61	38,61
		p_{wcisk} [MPa]	25,54	25,54	25,56	25,56
	$r_z = 200$ [mm]	σ_r [MPa]	0,055	0,055	0,055	0,055
		σ_θ [MPa]	12,92	12,92	12,92	12,92
	kontakt walca z podłożem	punkt styku	p_o [MPa]	294,63	294,63	299,25
P_{HMH}^B		σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	174,88	174,88	177,40	177,40
P_{PL}		τ_{xy}^{PL} [MPa]	-73,81	-73,81	-74,70	-74,70

B.5. WPLYW PODATNOŚCI MODELU KOŁA SUWNICY

Badania numeryczne przeprowadzono dla kontaktu walców połączonych z wciskiem z płaszczyzną (Rys.B.4). Obliczenia wykonano w programie ANSYS® dla różnych wartości wcisku i obciążenia siłą $F = 487$ [N] w środku walca. W Tabeli.B.4 zestawiono wyniki dla przypadku pełnego walca (brak wcisku) oraz dla wcisków $w = 0,14$ [‰] i $w = 1,4$ [‰] dla punktów o największych wyężeniach. Zbadano również wpływ zwiększenia podatności walca na wartości naprężeń dla takich samych warunków obciążenia.



Rys.B.4. Zwiększenie podatności zewnętrznego walca zrealizowane zmniejszonym modulem Younga (uproszczony model koła suwnicy o bardziej podatnym pierścieniu)

Obliczenia wykazały, że wcisk między dwoma walcami powoduje nieznaczną zmianę położenia punktów o największych wyężeniach oraz zmiany naprężeń, co prowadzi do większych wyężień. W celu zmniejszenia naprężeń można dokonać zwiększenia podatności walca (Rys.B.4). Porównując wyężenia podatnego i sztywnego walca dla odpowiadających sobie wcisków można zauważyć korzystny wpływ zmniejszenia sztywności modelu na wyężenie maksymalne.

Tabela.B.4 Wyniki obliczeń numerycznych kontaktu dwóch walców połączonych z wciskiem z płaszczyzną (Rys.B.4).

		$E_1 = 2,1 \cdot 10^5$ [MPa] $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$ [MPa]			$E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^5$ [MPa]		
w [‰]		0	0,14	1,4	0	0,14	1,4
punkt styku	σ_x [MPa]	-297,6	-285,4	-163,3	-292,3	-280,6	-163,0
	σ_y [MPa]	-293,8	-294,6	-293,8	-293,8	-294,7	-293,9
	σ_z [MPa]	-177,4	-174,0	-137,1	-175,9	-172,6	-137,1
	p_o [MPa]	293,7	294,6	293,7	293,8	294,6	293,8
	σ_{HMH} [MPa]	118,3	116,3	145,3	117,2	115,7	145,6
P_{PL}	σ_1 [MPa]	-31,8	-23,0	69,0	-28,1	-20,0	69,1
	σ_2 [MPa]	-64,0	-60,1	-26,3	-62,6	-58,8	-26,3
	σ_3 [MPa]	-181,6	-177,5	-156,5	-179,9	-175,9	-156,6
	τ_{xy}^{PL} [MPa]	-72,7	-73,8	-72,0	-72,7	-73,8	-72,1
	τ_{TG} [MPa]	149,9	154,5	225,5	151,1	155,9	225,6
	σ_{HMH} [MPa]	136,6	139,7	196,1	137,3	140,6	196,2
	x_{PL} [mm]	0,93	0,93	0,91	0,93	0,93	0,91
y_{PL} [mm]	0,56	0,53	0,52	0,56	0,53	0,52	
P_B^{TG}	σ_x [MPa]	-56,4	-43,35	78,4	-54,9	-38,9	78,3
	σ_y [MPa]	-229,2	-230,1	-229,7	-232,6	-230,2	-229,8
	σ_z [MPa]	-85,68	-82,0	-45,37	-86,2	-80,7	-45,4
	τ_{TG}^{MAX} [MPa]	172,8	186,7	308,1	177,7	191,3	308,1
	σ_{HMH} [MPa]	160,1	170,7	268,6	164,3	174,2	268,5
	$y_{B,TG}$ [mm]	0,84	0,84	0,84	0,81	0,84	0,84
P_B^{HMH}	σ_x [MPa]	-67,3	-54,2	75,1	-62,3	-49,7	75,0
	σ_y [MPa]	-239,2	-240,1	-233,0	-239,3	-240,2	-233,1
	σ_z [MPa]	-91,9	-88,3	-47,4	-90,5	-87,0	-47,4
	τ_{TG} [MPa]	172,0	186,0	308,1	177,0	190,5	308,1
	σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	161,1	171,5	268,7	164,7	174,9	268,7
	$y_{B,HMH}$ [mm]	0,75	0,75	0,81	0,75	0,75	0,81

ZAŁĄCZNIK C: ANALIZA TEORETYCZNA I NUMERYCZNA KONTAKTU DWÓCH CIAŁ

Celem wykonanych analiz numerycznych kontaktu dwóch ciał było:

- zapoznanie się ze sposobem modelowania kontaktu dwóch ciał w ANSYSie®,
- określenie szybkości zbieżności rozwiązania ze względu na wartości naprężeń kontaktowych,
- oszacowanie dokładności rozwiązania numerycznego,
- określenie wpływu wielkości elementu na wartość wyznaczonego obszaru styku dwóch ciał,
- wyznaczenie minimalnej ilości elementów będących w kontakcie między dwoma ciałami w celu otrzymania satysfakcjonującej dokładności rozwiązania numerycznego,
- analiza zachowania rozwiązań promienia kontaktu oraz naprężeń w obszarze kontaktu włącznie z parametrem SMNB.

W tym celu wykonano obliczenia teoretyczne i numeryczne dla następujących przypadków:

1. kontakt dwóch kul oraz kuli z płaszczyzną,
2. kontakt 2D i 3D walców o osiach równoległych oraz kontakt 2D walca z płaszczyzną,
3. kontakt 3D walców o osiach prostopadłych.

C.1 KONTAKT DWÓCH KUL ORAZ KULI Z PŁASZCZYZNĄ

C.1.1 KONTAKT KULI Z KULĄ – PRZYPADEK OSIOWOSYMETRYCZNY

Obliczenia kontaktu dwóch stalowych kul ($E = 2,1 \cdot 10^5$ [MPa]; $\nu = 0,3$) o średnicach $D_k = 710$ [mm] zostały wykonane przy założeniu idealnej sprężystości. Obciążenie o wartości $F = 5000$ [N] zostało zadane punktowo w skrajnym punkcie górnej kuli. Ze względu na osiową symetrię zamodelowano połowę modelu z użyciem elementów osiowosymetrycznych¹¹. Na osi symetrii zablokowany został ruch poziomy (warunek symetrii), natomiast przesuw w pionie odebrany miała tylko dolna kula w dolnym punkcie (Rys.C.1.1)¹². Zastosowano siatkę nieregularną z silną koncentracją w obszarze styku. Zagęszczony obszar z regularną siatką został określony poprzez promień $R_g = 4$ [mm], a zmienna n_g określała liczbę elementów kontaktowych na tym promieniu. Wymiar elementów kontaktowych h można obliczyć z zależności:

$$h = \frac{R_g}{n_g} \quad (\text{C.1.1})$$

Dla badanego zagadnienia istnieje rozwiązanie teoretyczne K.L. Johnson [117]:

Dane:

Siła obciążająca: $F = 5 \cdot 10^3$ [N]

Promienie kul: $R_{k1} = R_{k2} = R_k = 355$ [mm]

Współczynnik Poissona: $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0,3$

¹¹ Obliczenia numeryczne przeprowadzono w programie ANSYS® przy użyciu elementów osiowo-symetrycznych PLANE82 ($KeyOPT(3) = 1$) i elementów kontaktowych CONTA172 i TARGE169.

¹² Istniejące luzy geometryczne między ciałami oraz brak odebrania wszystkich stopni swobody uniemożliwiają rozwiązanie zadania przy domyślnych ustawieniach kontaktu. Można temu zapobiec włączając funkcję automatycznego domyknięcia szczelin CNOF poprzez $KeyOPT(5) = 1$.

Moduły Younga kul:

$$E_{k1} = E_{k2} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ [MPa]}$$

Obliczenia:

Promień zastępczy:

$$R = \left(\frac{1}{R_{k1}} + \frac{1}{R_{k2}} \right)^{-1}$$

$$R = \frac{R_k}{2} = 177,5 \text{ [mm]}$$

Zastępczy moduł Younga:

$$E = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_{k1}} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_{k2}} \right)^{-1}$$

$$E = 1,154 \cdot 10^5 \text{ [MPa]}$$

Promień kontaktu:

$$r_c = \sqrt[3]{\left(\frac{3F \cdot R}{4E} \right)}$$

$$r_c = 1,793 \text{ [mm]}$$

Maksymalne naciski kontaktowe:

$$p_o = \left(\frac{3F}{2\pi \cdot r_c^2} \right)$$

$$p_o = 742 \text{ [MPa]}$$

Maksymalne naprężenie styczne w punkcie Bielajewa:

$$\tau_B = 0,31 \cdot p_o = 230 \text{ [MPa]}$$

Maksymalne wyężenie liczone z hipotezy HMMH w punkcie Bielajewa:

$$\sigma_{HMMH}^{MAX} = 0,620 \cdot p_o = 460 \text{ [MPa]}$$

Jednym ze sposobów badania zbieżności i dokładności rozwiązania numerycznego jest analiza estymatora błędu dyskretyzacji σ_j^{EST} . Błąd ten jest oznaczony w ANSYSie jako σ_j^{MXB} (lub SMXB) dla maksimum oraz σ_j^{MNB} (lub SMNB) dla minimum i liczy się go:

$$\sigma_j^{EST} = \begin{cases} \sigma_j^{MNB} = \min(\sigma_{j,n}^a - \Delta\sigma_n) \\ \sigma_j^{MXB} = \max(\sigma_{j,n}^a + \Delta\sigma_n) \end{cases} \quad (C.1.2)$$

gdzie:

$\sigma_{j,n}^a = \sigma_{j,n}^{avg}$ - średnia wartość naprężenia σ_j w węźle n (dotyczy rozwiązań na poziomie węzłów),

$\Delta\sigma_n$ - wartość średnia wszystkich wartości $\Delta\sigma_j$ z elementów związanych z węzłem n ,

$\Delta\sigma_j$ - maksymalna bezwzględna wartość jakiegokolwiek składowej błędu $\{\Delta\sigma_n^i\}$ dla wszystkich węzłów związanych z elementem

Wektor błędu naprężenia $\{\Delta\sigma_n^i\}$ w węźle n , i -tego elementu liczy się jako różnicę wektora uśrednionej wartości naprężenia $\{\sigma_n^a\}$ w węźle n (z wszystkich elementów związanych z węzłem n) i wektora naprężenia $\{\sigma_n^i\}$ w węźle n należącym do i -tego elementu:

$$\{\Delta\sigma_n^i\} = \{\sigma_n^a\} - \{\sigma_n^i\} \quad (C.1.3)$$

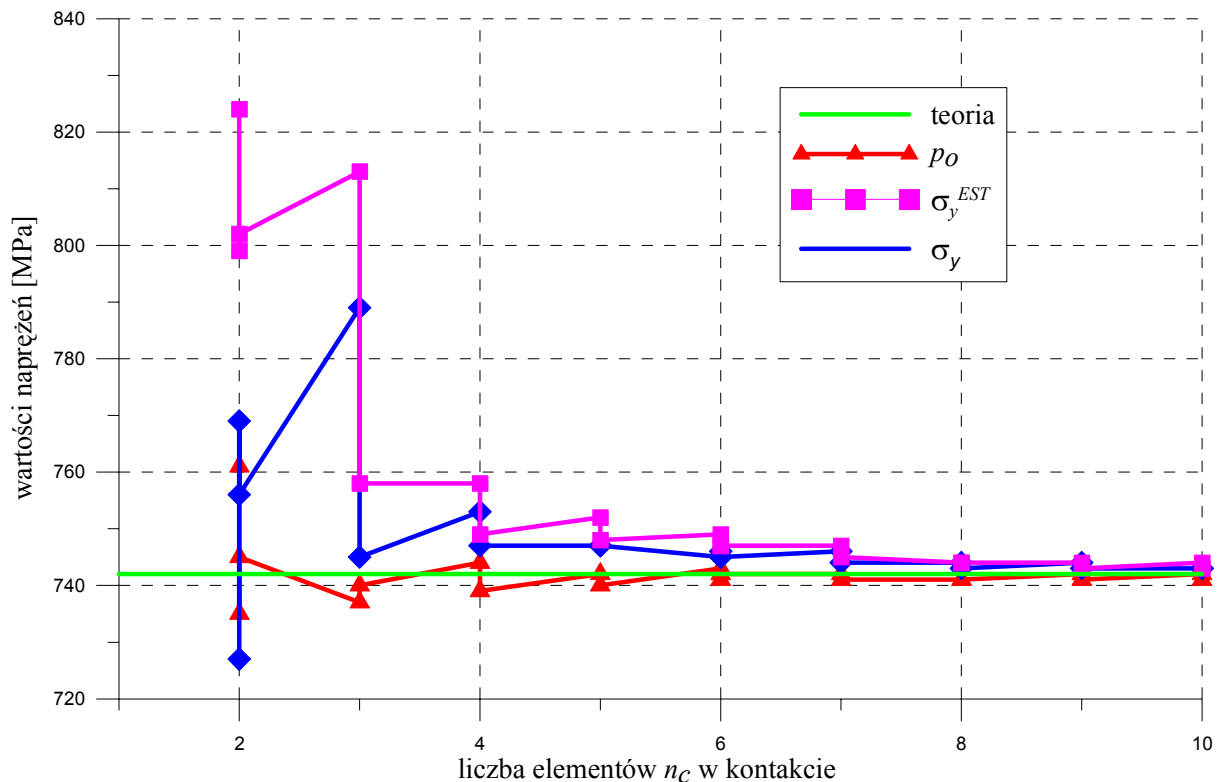


Rys.C.1.1 Model numeryczny oraz warunki brzegowe kontaktu dwóch kul.

Wykresy naprężeń na Rys.C.1.2 przedstawiają zbieżność naprężeń w zależności od liczby elementów kontaktowych będących w kontakcie. Należy tutaj zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku idealnego rozwiązania wszystkie trzy wartości naprężeń powinny być identyczne. Zostało zauważone, że wynik rozwiązania numerycznego zależy nie tylko od liczby elementów w kontakcie, ale również od ich wymiarów (różnice rozwiązań dla dwóch lub trzech elementów w kontakcie). Dla badanego przypadku wystarczającą dokładność rozwiązania numerycznego uzyskano dla czterech elementów w kontakcie (Tabela C.1.1). Analizę wpływu wielkości i liczby elementów kontaktowych na wynik rozwiązania przedstawiono w punkcie C.2 na przykładzie kontaktu walca z płaszczyzną.

Tabela.C.1.1 Zestawienie przykładowych wyników rozwiązania numerycznego z teoretycznym dla kontaktu dwóch identycznych kul.

n_c	n_g	h [mm]	p_o [MPa]	σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	σ_{HMH}^{EST} [MPa]	$ \sigma_y^{MIN} $ [MPa]	$ \sigma_y^{EST} $ [MPa]	r_c [mm]
3	7	0,571	737	484	506	789	813	1,71
4	10	0,400	739	466	469	747	749	1,60
6	13	0,308	743	466	469	745	749	1,85
6	14	0,286	741	464	465	746	747	1,71
6	15	0,267	742	463	465	745	747	1,60
7	16	0,250	742	462	462	746	747	1,75
7	17	0,235	741	461	463	744	745	1,65
8	18	0,222	741	463	463	744	744	1,78
13	30	0,133	742	460	460	742	742	1,73
teoria			742	460	460	742	742	1,79



Rys.C.1.2 Wykres zbieżności maksymalnych naprężeń kontaktowych p_o oraz σ_y (wraz z σ_y^{EST}) w funkcji liczby elementow n_c w kontakcie dla zagadnienia sciskania dwuch jednakowych kul.

C.1.2 KONTAKT KULI Z PŁASZCZYZNĄ – PRZYPADK OSIOWOSYMETRYCZNY

Podobne badania przeprowadzono również dla kontaktu kuli z płaszczyzną. Obliczenia numeryczne wykonano dla modelu osiowosymetrycznego. Promień badanej kuli wynosił $R_k = 355$ [mm] a obciążenie zadano w postaci siły skupionej $F = 6$ [kN]. Ze względu na osiową symetrię względem pionowej osi Y kontakt kuli z płaskim podłożem został zamodelowany dla połowy połączenia¹³. Modelowane elementy nie miały wspólnych węzłów co umożliwiło wyznaczenie prawidłowych rozkładów naprężeń kontaktowych. Na dolnej powierzchni podłoża odebrano przemieszczenia poziome (u_x) oraz pionowe (u_y) (Rys.C.2.1). Na pionowej osi symetrii Y odebrane zostały przemieszczenia w kierunku poziomym (u_x). W kierunku pionowym w kuli nie odebrany został ruch w kierunku Y , a jedynie obciążoną ją siłą F skupioną w górnym jej punkcie¹⁴. Zastosowano nieregularną siatkę z silnym zagęszczeniem elementow w obszarze kontaktu definiowanym przez promień obszaru koncentracji $R_g = 10$ [mm]. Podział siatki został uzależniony od parametru n_g określającego liczbę elementow w obszarze koncentracji. Wymiar elementow skończonych h w tym obszarze można obliczyć z zależności C.1.1 (patrz Rys.C.2.1).

Celem prowadzonych obliczeń było wyznaczenie wpływu wielkości elementow h oraz ich liczby w kontakcie na wartość promienia kontaktu r_c oraz na wartości maksymalne: naprężeń kontaktowych p_o , odpowiadających im naprężeń pionowych σ_y^{MAX} oraz maksymalnego wyężenia σ_{HMH}^{MAX} liczonego z hipotezy H-M-H. Ponadto dla naprężeń σ_y oraz σ_{HMH} sprawdzone zostały

¹³ Do obliczeń systemem ANSYS® zastosowane zostały elementy wyższego rzędu (8-węzłowe *PLANE82*) z założeniem osiowej symetrii (*KeyOpt(3) = 1*). Odpowiednio użyto 3-węzłowych elementow kontaktowych *CONTA172* oraz *TARGE169*

¹⁴ W przypadku wystąpienia luzow geometrycznych między kulą a podłożem zastosowane warunki brzegowe uniemożliwiają rozwiązanie zagadnienia i dochodzi do odsunięcia kuli od podłoża. Jednym ze sposobow uniknięcia tego zjawiska jest domknięcie szczelin między elementami kontaktowymi poprzez automatyczną funkcję *CNOF* (*KeyOpt(5) = 1* dla *CONTA172*).

estymatory błędu dyskretyzacji, odpowiednio σ_y^{EST} oraz σ_{HMH}^{EST} , określające miarę błędów numerycznych¹⁵. Dla rozpatrywanego zagadnienia można wyznaczyć wartości teoretyczne w oparciu o książkę K.L. Johnson [117]:

Dane:

Siła obciążająca:	$F = 6 \cdot 10^3$ [N]
Promień kuli:	$R_k = 355$ [mm]
Promień płaszczyzny:	$R_{pł} = \infty$ [mm]
Współczynnik Poissona:	$\nu = \nu_k = \nu_{pł} = 0,3$
Moduły Younga kul:	$E_k = E_{pł} = 2,1 \cdot 10^5$ [MPa]

Obliczenia:

Promień zastępczy:

$$R = \left(\frac{1}{R_k} + \frac{1}{R_{pł}} \right)^{-1} = R_k = 355 \text{ [mm]}$$

Zastępczy moduł Younga:

$$E = \left(\frac{1 - \nu_k^2}{E_k} + \frac{1 - \nu_{pł}^2}{E_{pł}} \right)^{-1}$$

$$E = 1,154 \cdot 10^5 \text{ [MPa]}$$

Promień kontaktu:

$$r_c = \sqrt[3]{\left(\frac{3F \cdot R}{4E} \right)} = 2,40 \text{ [mm]}$$

Maksymalne naciski kontaktowe:

$$p_o = \left(\frac{3F}{2\pi \cdot r_c^2} \right) = 497 \text{ [MPa]}$$

Maksymalne naprężenie styczne w punkcie Bielajewa:

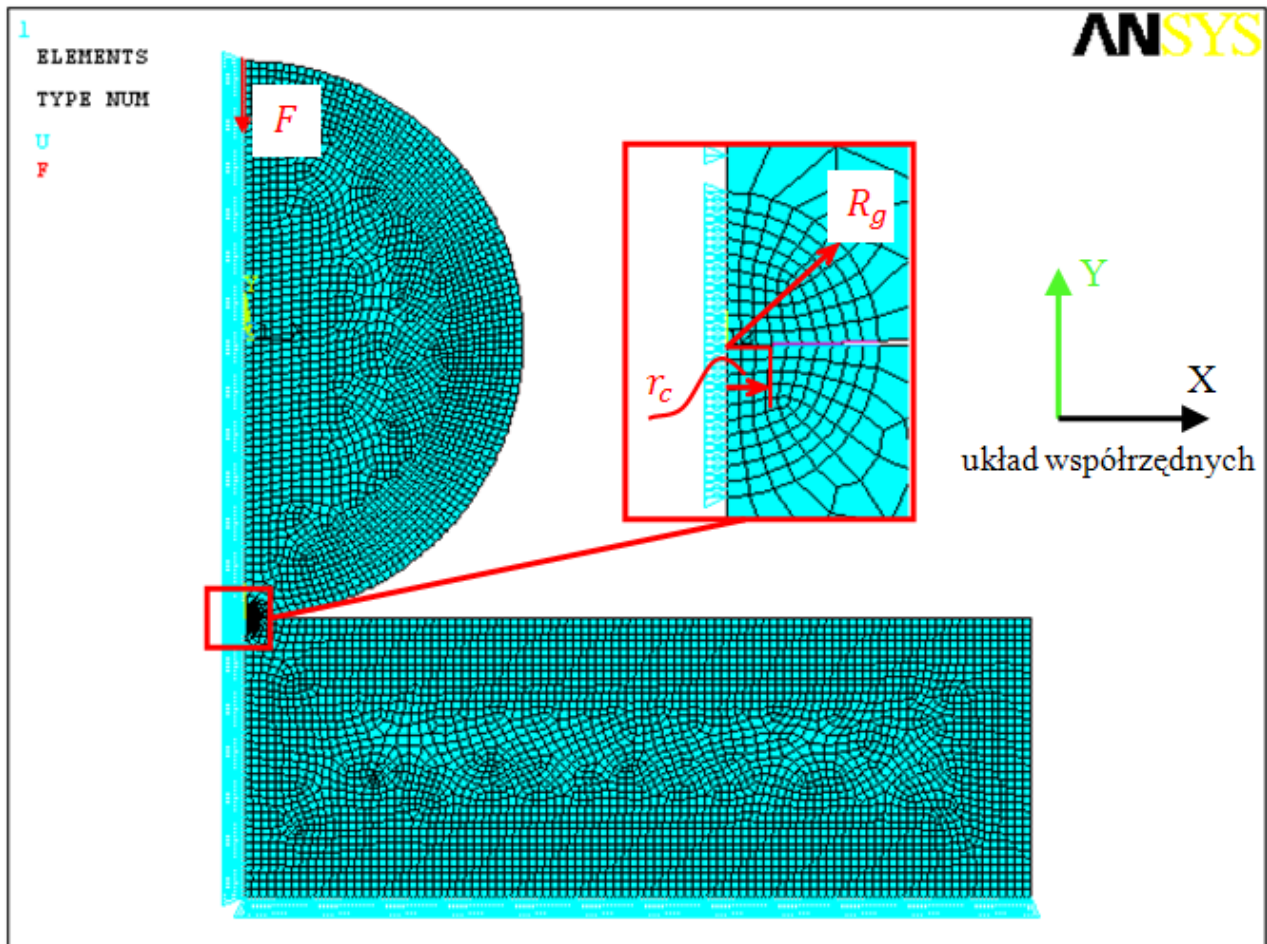
$$\tau_B = 0,31 \cdot p_o = 154 \text{ [MPa]}$$

Maksymalne wyężenie liczone z hipotezy HMH w punkcie Bielajewa:

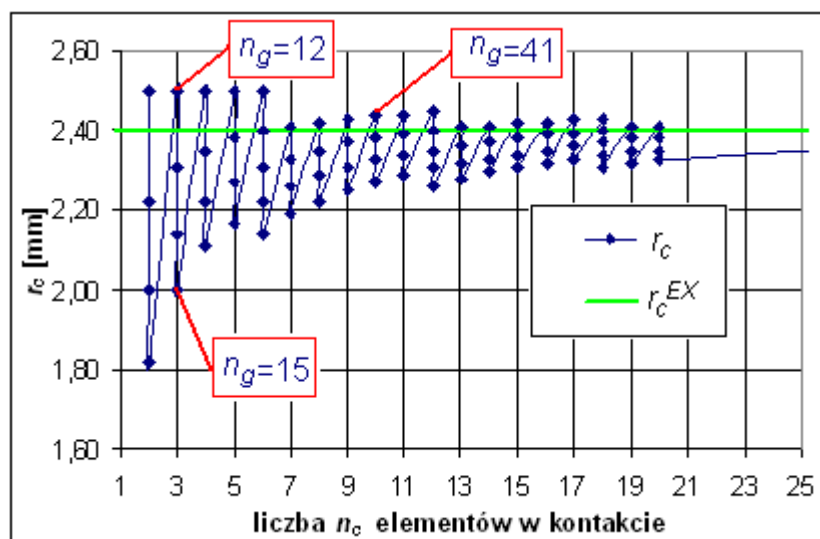
$$\sigma_{HMH}^{MAX} = 0,620 \cdot p_o = 308 \text{ [MPa]}$$

Zależność promienia kontaktu r_c od liczby n_c elementów w kontakcie przedstawiona została na wykresie (Rys.C.2.2). Obliczenia wykonane zostały w ten sposób, aby dla każdej liczby elementów będących w kontakcie były co najmniej 4 próby oszacowania promienia kontaktu (prezentują to pionowe linie na wykresie; na przykład dla trzech elementów w kontakcie otrzymano następujące wyniki: $r_c = 2,50$ [mm] dla $n_g = 12$, $r_c = 2,31$ [mm] dla $n_g = 13$, $r_c = 2,14$ [mm] dla $n_g = 14$, $r_c = 2,00$ [mm] dla $n_g = 15$). Z wykresu można zauważyć, że wartość wyznaczanego promienia kontaktu zależy od wymiaru elementu skończonego (uzyskany wynik jest wielokrotnością wymiaru elementu skończonego), natomiast rozrzut uzyskanych wyników zależy od liczby elementów w kontakcie. Pomimo szybkiej zbieżności naprężeń kontaktowych (Rys.C.2.3), numeryczne określenie dokładnej wartości promienia kontaktu wymaga zastosowania elementów o znacznie mniejszych wymiarach. Należy jednak zauważyć, że przy gęstszych siatkach wpływ wahań promienia kontaktu nie ma znaczącego wpływu na wartości analizowanych w pracy naprężeń.

¹⁵ σ^{EST} w ANSYSie oznaczany jest *SMXB* dla maksimum oraz *SMNB* dla minimum (patrz punkt C.1).

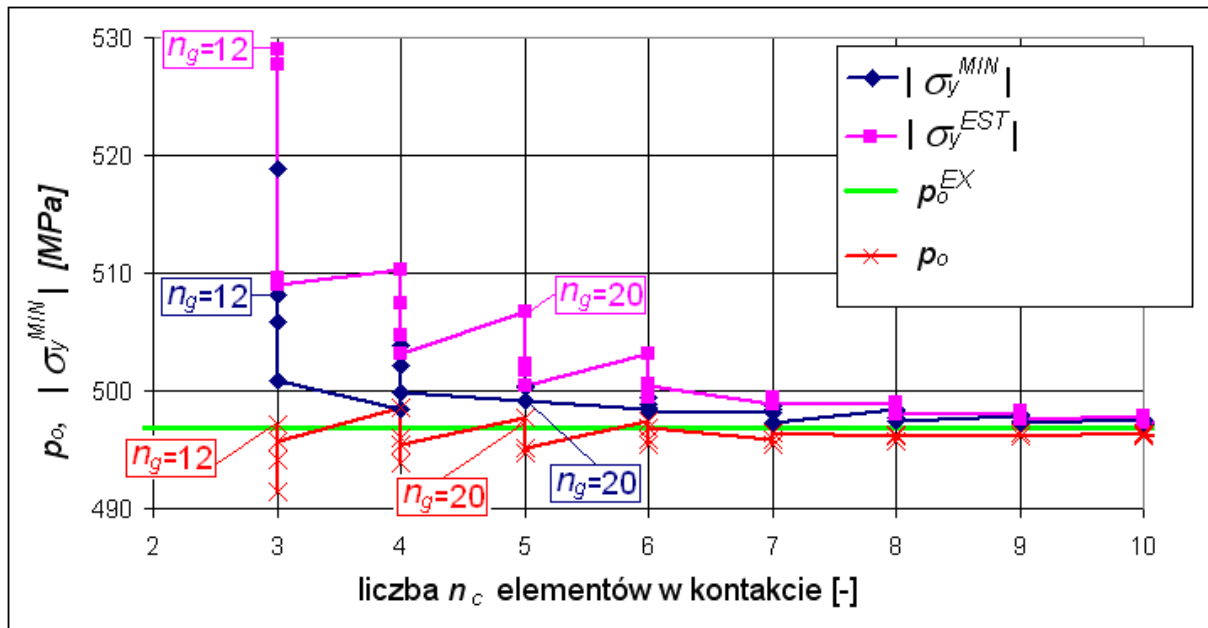


Rys.C.2.1 Model numeryczny oraz warunki brzegowe dla przypadku kontaktu kuli z płaskim podłożem, $n_g = 10$, $n_c = 3$

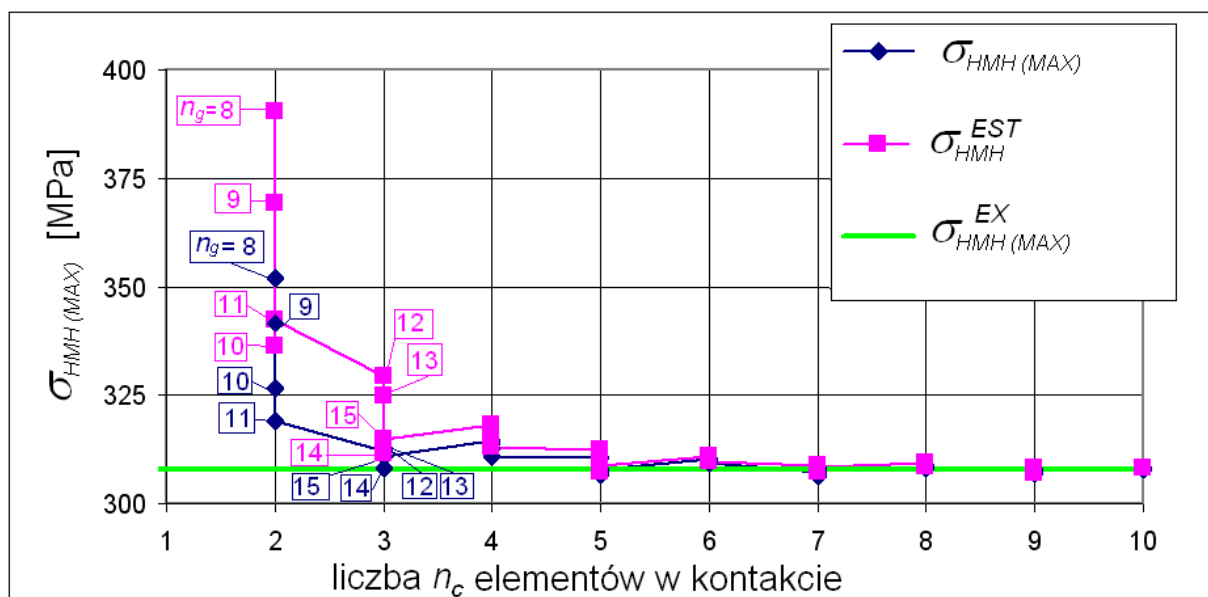


Rys.C.2.2 Wyznaczony numerycznie promień kontaktu r_c w funkcji w odniesieniu do wartości teoretycznej r_c^{EX} (def. n_g i n_c patrz Rys.C.2.1)

Podobnie jak promień kontaktu wyznaczone zostały zależności: maksymalnej wartości wyężenia σ_{HMH}^{MAX} liczonej z hipotezy H-M-H (Rys.C.2.4) oraz maksymalnych naprężeń kontaktowych i odpowiadających im naprężeń pionowych σ_y (Rys.C.2.3) w funkcji liczby elementów w kontakcie. Na wykresach przedstawione są analizowane wielkości oraz wartości parametrów σ_y^{EST} oraz σ_{HMH}^{EST} w odniesieniu do wartości teoretycznych. Identycznie jak dla wykresu promienia kontaktu dla każdej liczby n_c elementów w kontakcie wykonane zostały co najmniej 4 obliczenia z różnymi wymiarami elementów skończonych. Wymiar elementu skończonego h w obszarze kontaktu uzależniony był od parametru n_g , określającego podział zagęszczonego obszaru (R_g) na n_g - elementów skończonych (patrz wzór C.1.1 i Rys.C.2.1).



Rys.C.2.3 Wykres naprężeń kontaktowych p_o oraz σ_y (wraz z σ_y^{EST}) w funkcji liczby elementów n_c w kontakcie; n_g – liczba elementów na promieniu R_g w obszarze zagęszczenia siatki (Rys.C.2.1)



Rys.C.2.4 Zależność maksymalnego wyężenia σ_{HMH}^{MAX} w punkcie Bielajewa liczonego z hipotezy H-M-H oraz σ_{HMH}^{EST} w funkcji liczby n_c elementów w kontakcie w odniesieniu do wartości teoretycznej $\sigma_{HMH}^{MAX, EX}$

Podsumowując uzyskane wyniki numeryczne (Tabela.C.2.1) i porównując je z rozwiązaniem teoretycznym można stwierdzić, że w przypadku modeli 2D minimalna liczba elementów wyższego rzędu (tutaj *PLANE82*) będących w kontakcie nie powinna być mniejsza niż trzy. Analizując zbieżność rozwiązań numerycznych zaobserwowano, że naprężenia kontaktowe p_o są zbieżne od dołu a naprężenia σ_y oraz σ_{HMH} od góry. W przypadku zagadnień kontaktowych korzystne jest również sprawdzenie estymatora σ_y^{EST} określającego wielkość błędu numerycznego. Zbyt duża różnica między maksymalną (minimalną) wartością danego naprężenia a tym parametrem może być spowodowana nieodpowiednio dobraną siatką albo anomalią geometryczną. W przypadku prawidłowo rozwiązanego zagadnienia parametr ten powinien się pokrywać z wyliczonym maksimum (minimum) jak na wykresach (Rys.C.2.3; Rys.C.2.4).

Tabela.C.2.1 Wyniki obliczeń numerycznych i teoretycznych dla kontaktu kuli z płaszczyzną w zależności od gęstości siatki MES

n_c	n_g	h [mm]	p_o [MPa]	σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	σ_{HMH}^{EST} [MPa]	$ \sigma_y^{MIN} $ [MPa]	$ \sigma_y^{EST} $ [MPa]	r_c [mm]
2	8	1,25	498,6	352,0	390,3	481,7	519,9	2,50
2	11	0,91	495,9	319,1	342,3	510,8	532,6	1,82
3	12	0,83	497,2	312,2	329,2	508,2	529,0	2,50
3	15	0,67	495,7	310,9	314,7	500,9	509,0	2,00
4	16	0,63	498,6	314,4	318,2	498,4	510,3	2,50
4	19	0,53	495,5	310,8	313,0	499,8	503,2	2,11
5	20	0,50	497,7	310,5	312,4	499,2	506,7	2,50
5	23	0,43	495,2	307,9	308,9	499,2	500,4	2,17
6	24	0,42	497,5	310,3	310,9	498,5	503,1	2,50
6	28	0,36	496,8	309,3	309,7	498,2	500,4	2,14
7	29	0,34	495,9	307,4	308,9	498,1	498,8	2,41
7	30	0,33	495,9	306,9	307,2	498,7	499,5	2,33
7	31	0,32	495,5	306,2	308,2	498,5	499,1	2,26
7	32	0,31	496,4	308,2	308,5	497,3	498,8	2,19
8	33	0,30	496,1	308,1	309,3	498,5	499,0	2,42
8	36	0,28	496,3	308,4	308,6	497,5	498,0	2,22
9	37	0,27	496,2	307,9	308,2	497,8	498,2	2,43
9	40	0,25	496,2	307,5	307,6	497,3	497,6	2,25
10	41	0,24	496,5	308,1	308,2	497,6	497,8	2,44
teoria			496,9	308,0	308,0	496,9	496,9	2,40

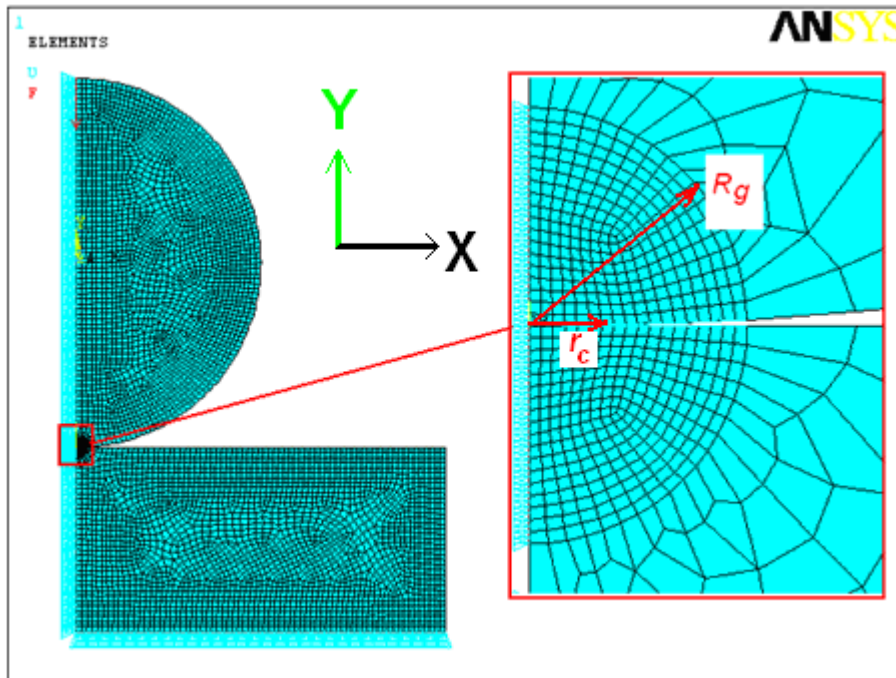
C.2. KONTAKT 2D I 3D WALCÓW O OSIACH RÓWNOLEGŁYCH – BADANIA NUMERYCZNE SYSTEMEM ANSYS®

C.2.1 KONTAKT 2D WALCA Z PŁASZCZYZNĄ

Na przykładzie dwuwymiarowego kontaktu walca z płaszczyzną (walcem o promieniu $R \rightarrow \infty$) zbadana została zbieżność rozwiązania numerycznego w zależności od gęstości siatki, liczonego przy użyciu metody elementów skończonych (ANSYS®) – punkt C.2.1.1. Analizowano również model z nierównomiernym podziałem elementów kontaktowych, w których węzły elementów *contact – target* nie pokrywały się ze sobą – punkt C.2.1.3. Rozważaniu poddano dwa przypadki kontaktu 2D walca z płaszczyzną: z założeniem PSN ($\sigma_z = 0$) a także z PSO ($u_z = 0$).

C.2.1.1 MODEL Z RÓWNOMIERNYM (REGULARNYM) PODZIAŁEM ELEMENTÓW W OBSZARZE KONTAKTU

Ze względu na symetrię zamodelowana została wyłącznie połowa połączenia obciążona siłą $\frac{1}{2}F$ w skrajnym górnym punkcie walca. Przyjęto wartość siły $F = 9810$ [N/mm], co jest równoważne obciążeniu walca o szerokości $b = 60$ [mm] siłą $F = 589$ [kN]. Promień wykonanego ze stali walca miał wartość $R_W = 355$ [mm]. Obliczenia wykonano dla nieregularnej siatki z silnym zagęszczeniem elementów skończonych w obszarze kontaktu¹⁶. Obszar ten był wyznaczony przez promień obszaru koncentracji $R_g = 20$ [mm] (Rys.C.2.5). Wymiar elementu skończonego h w kontakcie był uzależniony od zmiennej n_g , która definiowała liczbę wszystkich elementów kontaktowych na promieniu R_g . Wymiar jego boku można obliczyć ze wzoru C.1.1.



Rys.C.2.5 Model numeryczny dwuwymiarowego kontaktu walca z płaszczyzną (R_g – promień zagęszczenia elementów, r_c – promień kontaktu)

Obliczenia teoretyczne przy założeniu PSO – K.L.Johnson [117]

Dane:

Siła obciążająca:

$$F = 589 \text{ [kN]}$$

Promień walca:

$$R_W = 355 \text{ [mm]}$$

Współczynnik Poissona:

$$\nu = 0,3$$

Moduły Younga:

$$E = E_W = E_{pt} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ [MPa]}$$

Obliczenia:

Siła obciążająca jednostkowa:

$$P = \frac{F}{b} = \frac{589 \text{ [kN]}}{60 \text{ [mm]}} = 9,81 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$$

¹⁶ Stosowano elementy wyższego rzędu *PLANE82* z założeniem zarówno PSO (*KeyOpt(3) = 2*) jak również PSN (*KeyOpt(3) = 0*). Odpowiednio użyte zostały elementy kontaktowe *CONTA172* i *TARGE169* z automatyczną funkcją domyknięcia szczelin (*KeyOpt(5) = 1*).

Promień zastępczy:

$$R = \left(\frac{1}{R_W} + \frac{1}{R_{pt}} \right)^{-1} = 355 \text{ [mm]}$$

Zastępczy moduł Younga:

$$E = \left(\frac{1 - \nu_W^2}{E_W} + \frac{1 - \nu_{pt}^2}{E_{pt}} \right)^{-1}$$

$$E = 1,154 \cdot 10^5 \text{ [MPa]}$$

Promień kontaktu:

$$r_c = \left(\frac{4P \cdot R}{\pi \cdot E} \right)^{\frac{1}{2}} = 6,199 \text{ [mm]}$$

Maksymalne naciski kontaktowe:

$$p_o = \left(\frac{P \cdot E}{\pi \cdot R} \right)^{\frac{1}{2}} = 1007 \text{ [MPa]}$$

Maksymalne naprężenie styczne w punkcie Bielajewa:

$$\tau_B = 0,304 \cdot p_o = 306 \text{ [MPa]}$$

Maksymalne wyteżenie liczone z hipotezy HMM w punkcie Bielajewa:

$$\sigma_{HMM}^{MAX} = 0,567 \cdot p_o = 571 \text{ [MPa]}$$

Obliczenia wykonane zostały dla przypadku 2D przy założeniu idealnej sprężystości. Zbadano zarówno przypadek PSN (stan naprężenia dla elementów o małej szerokości) jak również PSO (stan naprężenia w środku nieskończonego walca) z regularną siatką w obszarze kontaktu. Wybrane wyniki obliczeń zbieżnościowych zaprezentowano w Tabeli.C.2.2. Dodatkowo zamieszczono maksymalne wartości naprężeń pionowych σ_y odpowiadających maksymalnym naciskom kontaktowym p_o oraz estymatory błędu σ^{EST} dla wyznaczanych numerycznie wielkości.

Tabela.C.2.2 Zestawienie wybranych obliczeń teoretycznych i numerycznych dla kontaktu walca z płaszczyzną z regularną siatką w obszarze kontaktu przy założeniu PSO.

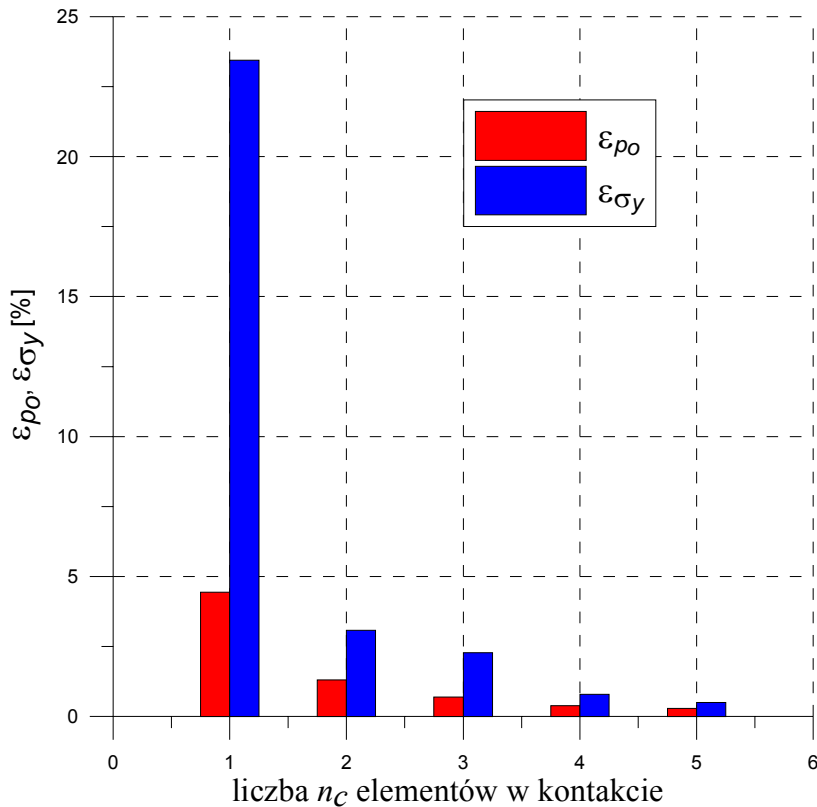
n_c	n_g	h [mm]	p_o [MPa]	σ_{HMM}^{MAX} [MPa]	σ_{HMM}^{EST} [MPa]	$ \sigma_y^{MIN} $ [MPa]	$ \sigma_y^{EST} $ [MPa]	r_c [mm]
3	10	2,000	1001	581	587	1023	1029	6,00
3	11	1,818	1000	573	578	1017	1020	5,46
3	12	1,667	1009	573	577	1017	1031	5,00
4	13	1,538	1004	575	580	1015	1019	6,15
4	14	1,429	1003	573	575	1013	1015	5,71
4	15	1,333	1006	572	574	1013	1018	5,33
5	16	1,250	1006	569	570	1012	1015	6,25
5	17	1,176	1004	571	572	1011	1013	5,88
11	35	0,571	1007	568	568	1008	1008	6,29
teoria			1007	571	571	1007	1007	6,199

Dla oceny badań wprowadzono jako miary błędu względnego:

$$\varepsilon_{p_o} = \left| \frac{p_o - p_o^{EX}}{p_o^{EX}} \right| \cdot 100\% \quad (C.1.4)$$

$$\varepsilon_{\sigma_y} = \left| \frac{\sigma_y - \sigma_y^{EX}}{\sigma_y^{EX}} \right| \cdot 100\% \quad (C.1.5)$$

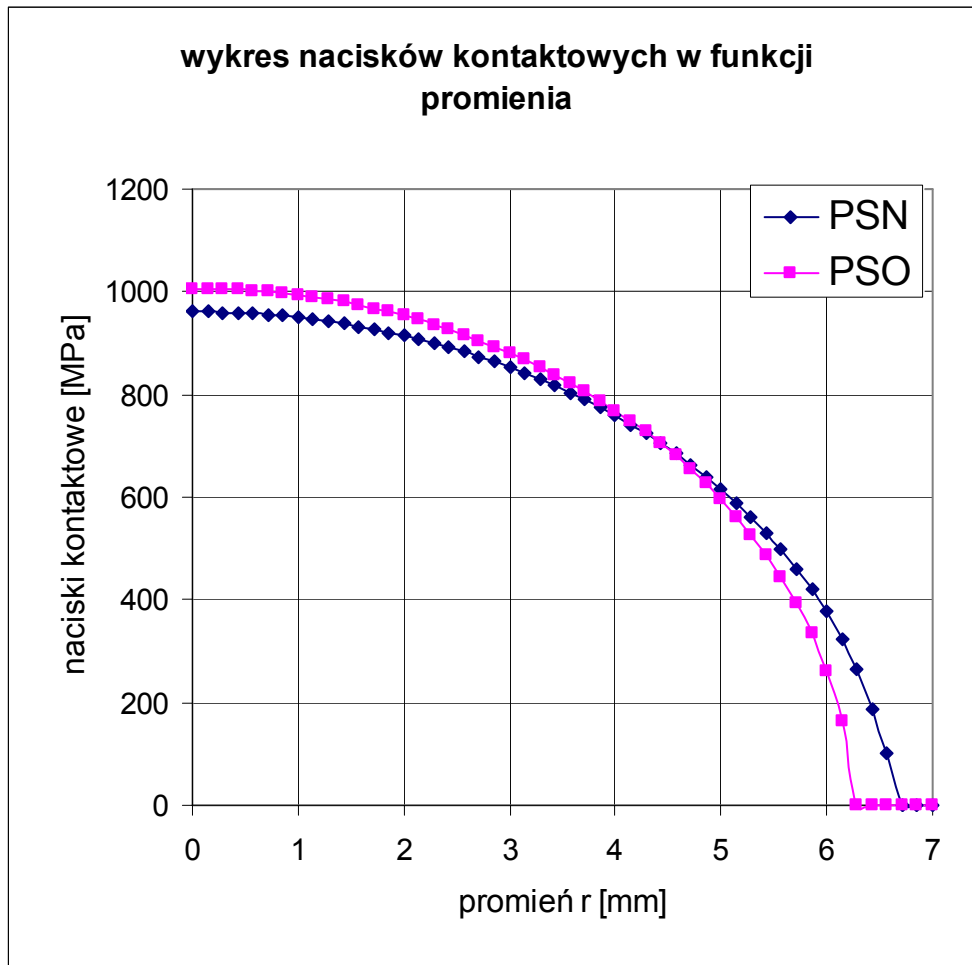
Analiza numeryczna 2D kontaktu walca z płaszczyzną wykazała, że w celu oszacowania rozwiązania z błędem względnym nie przekraczającym 5%, wymiar elementów skończonych h powinien być mniejszy od $0,5r_c$. Aby uzyskać rozwiązanie dokładne z błędem mniejszym od 1 % wymiar elementów skończonych h powinien być mniejszy od $0,25r_c$ (Rys.C.2.6). W rozpatrywanym przypadku oznacza to podział zagęszczonego obszaru tak dobrany aby w kontakcie były co najmniej $n_c = 4$ elementy.



Rys.C.2.6 Procentowy błąd względny rozwiązania numerycznego w odniesieniu do obliczeń teoretycznych.

C.2.1.2 PORÓWNANIE PSO I PSN DLA MODELI Z RÓWNOMIERNYM PODZIAŁEM ELEMENTÓW KONTAKTOWYCH

Wykonane obliczenia wykazały znaczące różnice pomiędzy PSO a PSN kontaktu walca z płaszczyzną. Badane były: rozkład naprężeń kontaktowych, wartość maksymalna wyężenia zastępczego σ_{HMH}^{MAX} a także promień kontaktu r_c (Tabela.C.2.3). W przypadku PSO wartość maksymalnych nacisków kontaktowych była nieznacznie większa niż dla PSN (Rys.C.2.7). W obu przypadkach siła obciążająca F była taka sama a powstała różnica spowodowana była przez większą sztywność modelu z założeniem PSO. Wyjaśnia to zwiększony promień kontaktu dla PSN. Przyjęcie PSN powoduje wyraźną różnicę w rozkładzie wyężenia zastępczego. Wartość maksymalna σ_{HMH}^{MAX} dla tego przypadku jest zdecydowanie większa oraz jest na powierzchni kontaktu w punkcie styku i jest spowodowana zerowym naprężeniem σ_z . W PSO występuje stan wszechstronnego ściskania, różnice między naprężeniami są mniejsze, a maksimum wyężenia σ_{HMH}^{MAX} jest na osi symetrii na pewnej głębokości pod powierzchnią styku.



Rys.C.2.7 Rozkład nacisków kontaktowych w funkcji promienia r dla kontaktu walca z płaszczyzną przy założeniu PSO i PSN

Po przybliżonym scałkowaniu otrzymano wartość przenoszonej przez połączenie siły (dla podziału $n_g = 140$) :

dla PSO ≈ 4913 [N],
dla PSN ≈ 4938 [N],
wartość ściska – 4905 [N].

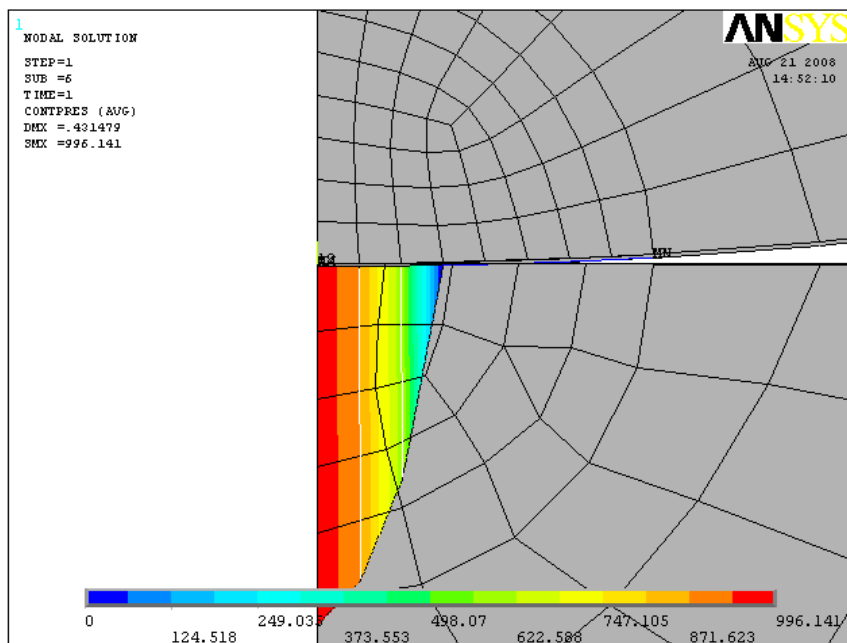
Tabela.C.2.3 Porównanie wyników dla PSO i PSN

n_g	h [mm]	p_o [MPa]	σ_{HMH}^{MAX} [MPa]	σ_{HMH}^{EST} [MPa]	$ \sigma_y^{MIN} $ [MPa]	$ \sigma_y^{EST} $ [MPa]	n_g	UWAGI
35	0,571	1007	568	568	1008	1008	6,29	PSO
35	0,571	960	960	960	962	962	6,29	PSN
140	0,143	1007	568	568	1007	1007	6,14	PSO
140	0,143	961	961	961	961	961	6,43	PSN
teoria		1007	604	604	1007	1007	6,199	PSO

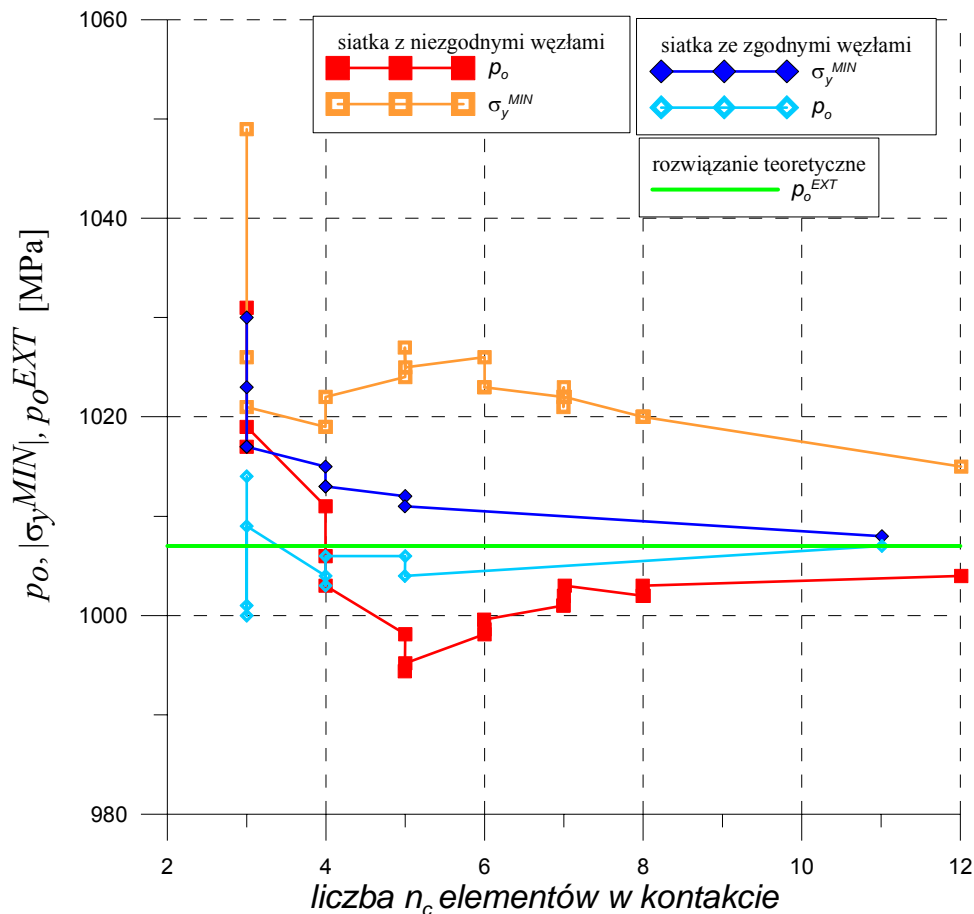
C.2.1.3 MODEL Z NIERÓWNOMIERNYM PODZIAŁEM ELEMENTÓW KONTAKTOWYCH W OBSZARZE KONTAKTU

Przeprowadzono również obliczenia numeryczne dla modeli w których węzły elementów kontaktowych nie pokrywały się ze sobą. W tym celu przyjęto różne podziały obszarów zagęszczenia n_{g1} i n_{g2} . Przez n_{g1} (Rys.C.2.8) oznaczona została liczba elementów kontaktowych w obszarze zagęszczenia walca, a n_{g2} oznacza liczbę elementów kontaktowych w obszarze zagęszczenia płaszczyzny, przy czym $n_{g1} = n_{g2} + 3$. Obliczenia były wykonywane dla liczby n_{g2} z zakresu $2 \leq n_{g2} \leq 35$ i przy założeniu PSO. Uzyskane w ten sposób wyniki z siatką nieregularną porównane zostały z wcześniejszymi obliczeniami dla siatki regularnej (punkt C.2.1.1). W rozpatrywanym przypadku dla zalecanych siatek (co najmniej trzy elementy w kontakcie) lepszą zbieżność uzyskano dla rozwiązań z regularnymi węzłami (odcienie niebieskie - Rys.C.2.9). Pomimo znacznego zagęszczenia węzłów siatki nieregularnej występowała znaczna różnica między wartościami obliczonymi numerycznie i teoretycznie. Natomiast dla identycznej siatki z regularnie rozmieszczonymi węzłami ta różnica była pomijalnie mała.

Podsumowując, w celu uzyskania prawidłowej zbieżności rozwiązania zalecane jest stosowanie regularnych siatek pomiędzy powierzchniami kontaktowymi. W przypadku takich siatek i elementów wyższego rzędu (n.p.: *PLANE82*) błąd rozwiązania poniżej 5% uzyskuje się jeżeli na promień kontaktu przypadają co najmniej 3 elementy kontaktowe.



Rys.C.2.8 Rozkład naprężeń kontaktowych oraz siatka MES dla podziału $n_{g1} = 8$, $n_{g2} = 5$ (n_{g1} – liczba elementów kontaktowych na walcu, n_{g2} – liczba elementów kontaktowych na płaszczyźnie)



Rys.C.2.9 Rozkłady naprężeń w funkcji liczby elementów w kontakcie n_c dla siatek z węzłami regularnymi (odcienie niebieskie) i z węzłami nieregularnymi $n_{g1} = n_{g2} + 3$ (odcienie czerwone)

C.2.2 KONTAKT 2D I 3D DWÓCH WALCÓW O OSIACH WZAJEMNIE RÓWNOLEGLYCH

Celem przeprowadzonych badań było zbadanie i porównanie czterech przypadków kontaktu dwóch walców o osiach równoległych:

- Kontakt 2D dwóch ciał cylindrycznych – dwóch tarcz oraz dwóch nieskończonych walców¹⁷
- Kontakt 3D dwóch wąskich tarcz o osiach wzajemnie równoległych
- Kontakt 3D dwóch długich walców o osiach wzajemnie równoległych
- Wciskanie wąskiej tarczy w szerszy walec

Zagadnienia przestrzennego kontaktu dwóch walców (b - d) zostały obliczone przy pomocy metody elementów skończonych (ANSYS®), przy użyciu 20 węzłowych bryłowych elementów *SOLID95* oraz odpowiadających im elementów kontaktowych *TARGE170* i *CONTA174*. Zastosowano siatkę nieregularną z zagęszczeniem elementów sześciokątnych o wymiarze boku $h = 0,025$ [mm] w strefie koncentracji naprężeń (obszar styku dwóch walców – Rys.C.2.11). Na pozostałych objętościach użyto elementów czworokątnych o większych rozmiarach boków. Celem badań było porównanie rozkładów oraz maksymalnych wartości naprężeń kontaktowych p_o dla trzech powyższych przypadków kontaktu walców o osiach równoległych.

Obliczenia teoretyczne przy założeniu PSO w oparciu o książkę K.L. Johnson [117]

¹⁷ Stosowano elementy wyższego rzędu *PLANE82* z założeniem zarówno PSO (*KeyOpt(3) = 2*) jak również PSN (*KeyOpt(3) = 0*). Odpowiednio użyte zostały elementy kontaktowe *CONTA172* i *TARGE169* z automatyczną funkcją domyknięcia szczelin (*KeyOpt(5) = 1*).

Dane:

Siła obciążająca:

$$F = 50 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$$

Promienie walca:

$$R_{W1} = R_{W2} = 10 \text{ [mm]}$$

Współczynnik Poissona:

$$\nu = 0,3$$

Moduły Younga:

$$E_{W1} = E_{W2} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ [MPa]}$$

Obliczenia:

Promień zastępczy:

$$R = \left(\frac{1}{R_{W1}} + \frac{1}{R_{W2}} \right)^{-1} = 5 \text{ [mm]}$$

Zastępczy moduł Younga:

$$E = \left(\frac{1 - \nu_{W1}^2}{E_{W1}} + \frac{1 - \nu_{W2}^2}{E_{W2}} \right)^{-1}$$

$$E = 1,154 \cdot 10^5 \text{ [MPa]}$$

Promień kontaktu:

$$r_c = \sqrt[3]{\frac{3F \cdot R}{4E}} = 5,252 \cdot 10^{-2} \text{ [mm]}$$

Maksymalne naciski kontaktowe:

$$p_o = \left(\frac{3F}{2\pi \cdot r_c^2} \right) = 606 \text{ [MPa]}$$

Maksymalne naprężenie styczne w punkcie Bielajewa:

$$\tau_B = 0,304 \cdot p_o = 184 \text{ [MPa]}$$

Maksymalne wyężenie liczone z hipotezy HMM w punkcie Bielajewa:

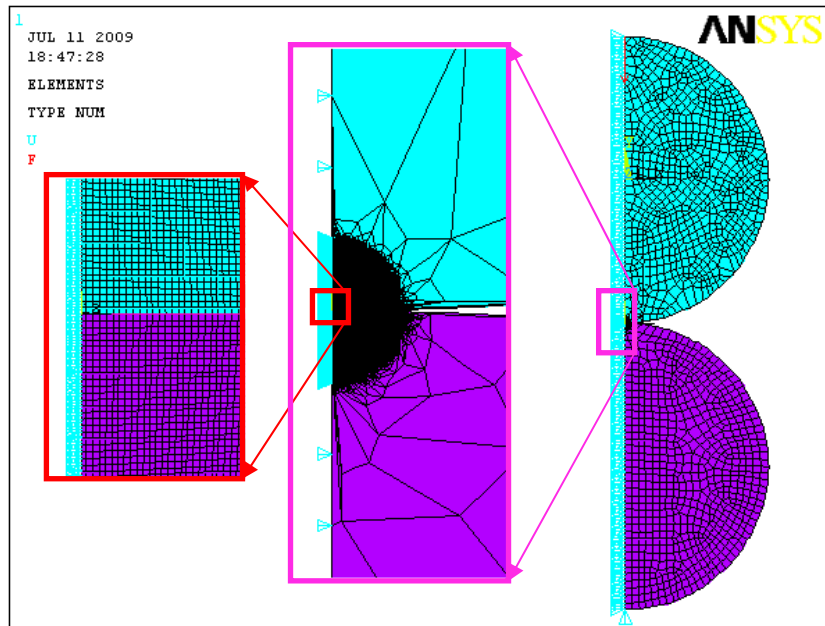
$$\sigma_{HMH}^{MAX} = 0,567 \cdot p_o = 344 \text{ [MPa]}$$

Za wyjątkiem pracy [118] nie znaleziono w literaturze rozwiązania dotyczącego kontaktu walców równoległych z założeniem PSN. Związane jest to z tym, że w rozważanym przypadku idealny PSN naprężenia nie ma sensu fizycznego. Istnieją natomiast rozwiązania opisujące zjawiska występujące na końcach stykających się walców, gdzie naprężenia wzdłużne zdążają do zera. Jedno z takich rozwiązań można znaleźć w pracy [117].

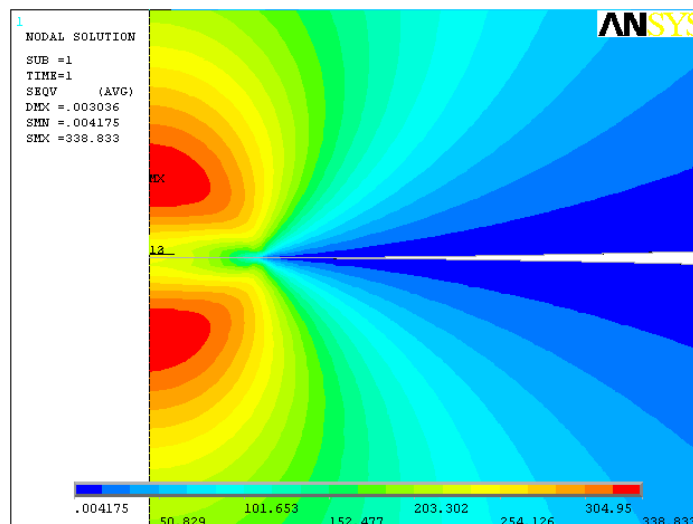
C.2.2.a. KONTAKT 2D DWÓCH CIAŁ CYLINDRYCZNYCH – DWÓCH TARCZ ORAZ DWÓCH NIESKOŃCZONYCH WALCÓW

W dwuwymiarowych obliczeniach numerycznych zagadnień kontaktowych istotne jest przyjęcie odpowiednich warunków dla naprężeń i odkształceń. Przykładowo modelując kontakt dwóch stykających się ciał cylindrycznych możemy rozważyć kontakt dwóch tarcz o małej grubości (zakładając PSN) lub dwóch nieskończonych walców (dla przypadku PSO). Oba rozwiązania różnią się między innymi: wartością maksymalnego wyężenia oraz jego miejsca położenia (Rys.C.2.10), wartością maksymalnych nacisków kontaktowych i promienia kontaktu. Przedstawione wyniki uzyskano dla ciał wykonanych ze stali o średnicach $D_W = 20 \text{ [mm]}$ ściskanych siłą $F = 50 \text{ [N]}$. Model i warunki brzegowe przedstawiono na Rys.C.2.10a. Podział siatki dla obu rozważanych przypadków przyjęto tak aby w kontakcie była duża liczba elementów ($n_c = 42$ dla PSO i $n_c = 45$ dla PSN). Różnice wynikają z mniejszej sztywności modelu przy

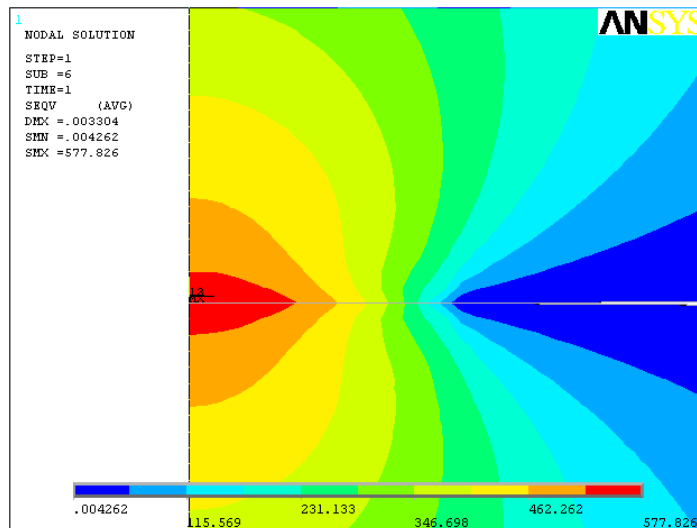
założeniu PSN. W przypadku PSN maksymalne wyężenie σ_{HMH}^{MAX} jest w punkcie styku dwóch ciał i ma wartość $\sigma_{HMH}^{MAX,PSN} = 578$ [MPa], natomiast dla kontaktu dwóch nieskończonych walców (PSO) wyężenie jest na pewnej gębokości pod powierzchnią kontaktu (w punkcie Bielajewa) i ma mniejszą wartość $\sigma_{HMH}^{MAX,PSO} = 339$ [MPa]. Różnica ta jest spowodowana przez założenie $\sigma_z = 0$ w PSN. Maksymalne naciski kontaktowe są większe dla PSO i wynoszą $p_o^{PSO} = 606$ [MPa], podczas gdy dla PSN mają wartość $p_o^{PSN} = 578$ [MPa]. Jest to spowodowane większą sztywnością modelu PSO i sprawia, że mniejszy jest również promień kontaktu.



Rys.C.2.10a Model numeryczny i warunki brzegowe oraz powiększenie siatki w obszarze styku



Rys.C.2.10b wyężenie σ_{HMH} dla przypadku PSO kontaktu dwóch ciał o przekroju kołowym



Rys.C.2.10c wytyczenie σ_{HMH} dla przypadku PSN kontaktu dwóch ciał o przekroju kołowym

C.2.2.b. KONTAKT 3D DWÓCH WĄSKICH TARCZ O OSIACH WZAJEMNIE RÓWNOLEGLYCH

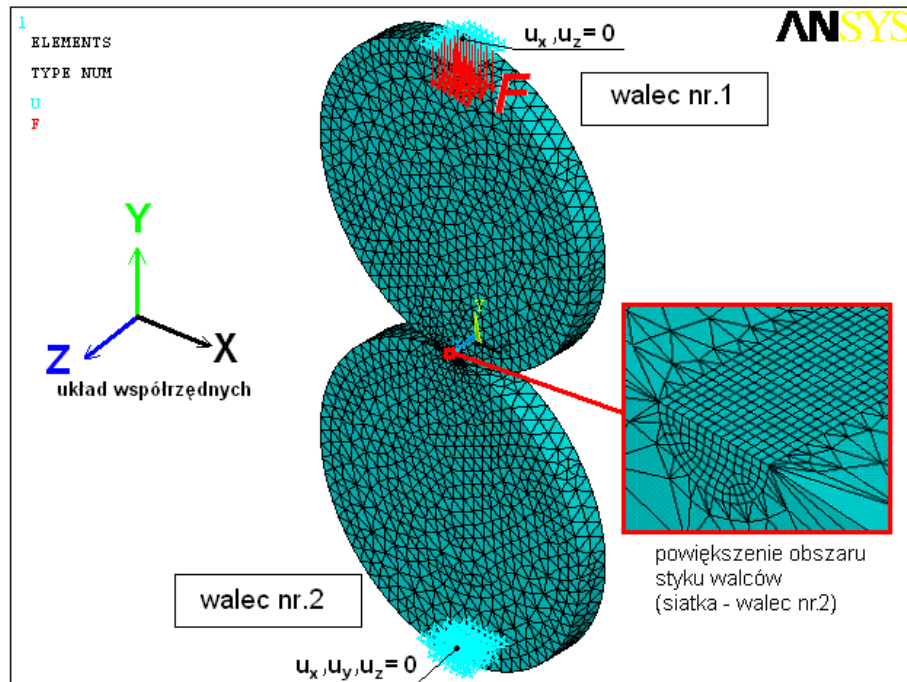
Do obliczeń kontaktu dwóch wąskich walców przyjęto pierwotnie szerokość walców $b = 2$ [mm] o jeden rząd mniejszą od ich średnic $D_W = 20$ [mm]. Ponadto przyjęto moduł Younga dla stali $E = 2,1 \cdot 10^5$ [MPa] oraz współczynnik Poissona $\nu = 0,3$. Obciążenie zadano w postaci siły F ($F/b = 50$ [N/mm] szerokości walca) rozłożonej na pewną liczbę węzłów w górnej części walca nr.1 (Rys.C.2.11). Dodatkowo w tych samych węzłach zablokowano przesuw poziomy w kierunku osi Z oraz osi X¹⁸. W walcu nr.2 odebrane zostały wszystkie przemieszczenia w kilku dolnych węzłach. Rozkład naprężeń kontaktowych można zaobserwować na Rys.C.2.12. Maksymalne naciski wystąpiły w środku obszaru styku walców i miały wartość $p_o^b = 616$ [MPa].

Obliczona numerycznie wartość jest nieznacznie większa od wyniku uzyskanego zarówno na drodze analitycznej przy założeniu PSO (rozwiązanie teoretyczne - $p_o^{PSO} = 606$ [MPa]) jak również numerycznej dla kontaktu dwóch długich walców (patrz punkt C.2.2.c). Wyższa wartość p_o^b spowodowana jest zmniejszeniem nacisków na brzegach walców przy identycznej wartości promienia kontaktu r_c .

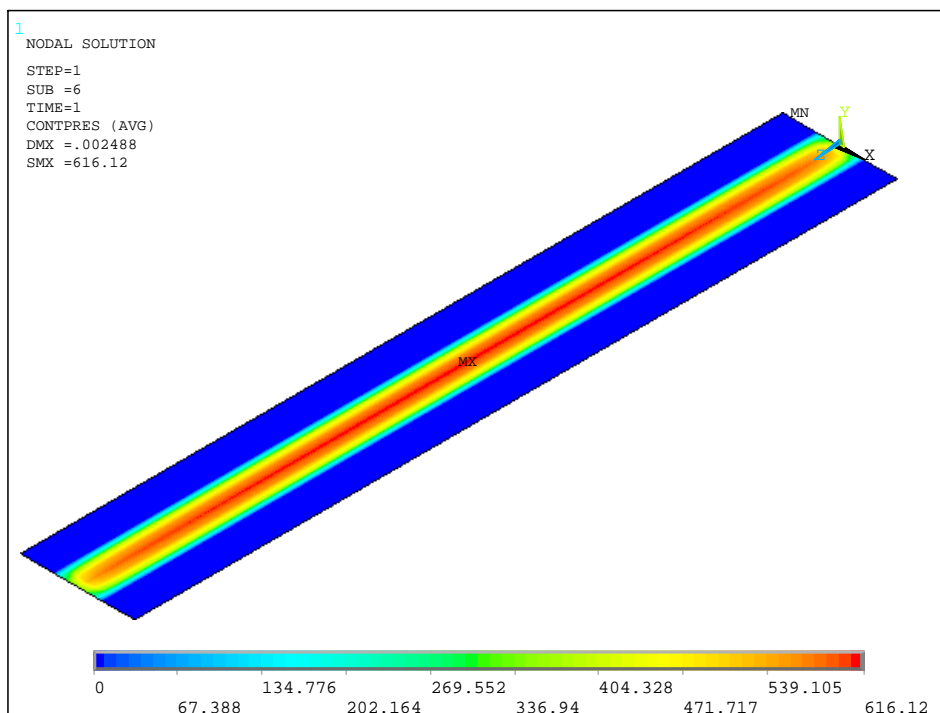
Należy również zauważyć, że pomimo małej szerokości walców b uzyskane wyniki są bardziej zbliżone do rozwiązania z założeniem PSO. Jest to spowodowane tym, że szerokość walców jest jednak znacząco większa od promienia kontaktu r_c i powoduje inny rozkład naprężeń aniżeli dla przypadku PSN. Dalsze zmniejszanie szerokości walców powoduje wzrost maksymalnego wytyżenia σ_{HMH}^{MAX} oraz zmniejszanie σ_z^{MIN} . W Tab.C.2.4 zostało pokazane, że wyniki w analizowanym modelu 3D dwóch wąskich walców są zbieżne do rozwiązania PSN.

Identyczne wartości r_c wynikają z zastosowania rzadkich siatek dla modeli 3D co uniemożliwiło wychwycenie niewielkich różnic w wartościach promieni kontaktu dla prezentowanych przykładów 3D. Dokładnie można to zaobserwować porównując uzyskany rozkład nacisków z mapą naprężeń dla kontaktu dwóch nieskończonych walców (Rys.C.2.13).

¹⁸ Opisane warunki brzegowe zadano ze względów technicznych, ale nie wpływają one na rozwiązanie w kontakcie.



Rys.C.2.11 Model oraz warunki brzegowe dla przypadku kontaktu dwóch walców o osiach wzajemnie równoległych (stan pomiędzy PSN a PSO)



Rys.C.2.12 Rozkład naprężeń kontaktowych w przypadku kontaktu dwóch wąskich walców o osiach wzajemnie równoległych

Tabela.C.2.4 Wyniki rozwiązań numerycznych kontaktu dwóch wąskich walców dla modelu 3D i 2D (b – szerokość walców; z – wzdłuż osi walców)

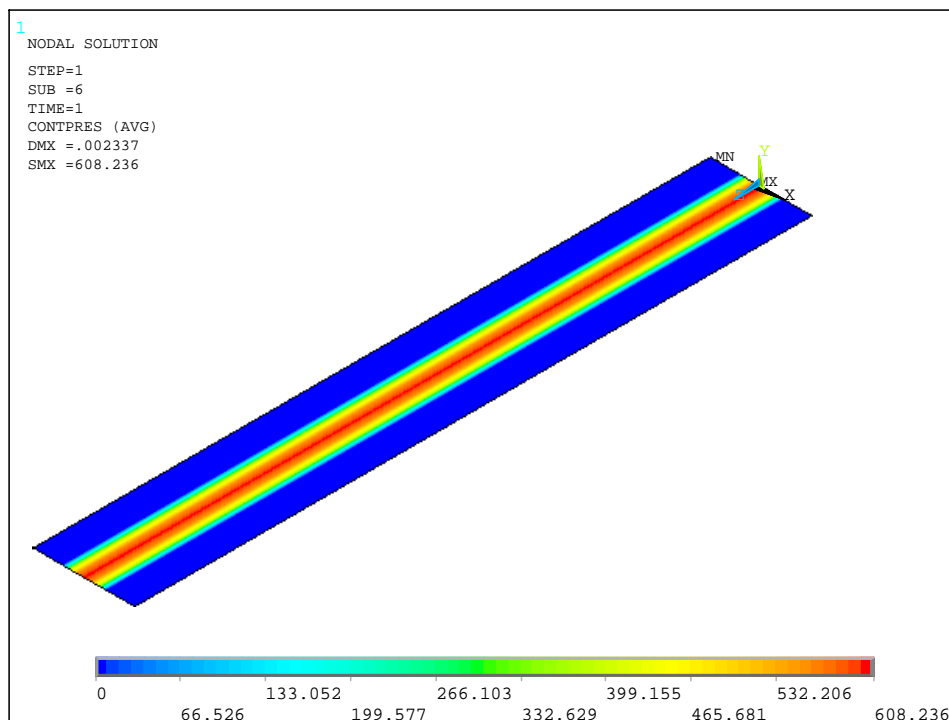
n_c	b	σ_{HMH}^{MAX}	σ_z^{MIN}	p_o	r_c
	[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[mm]
2	10	415	-363	618	4,29E-02
2	4	428	-360	614	4,29E-02
2	2	439	-353	616	4,29E-02
4	0,25	480	-237	623	4,62E-02
4	0,125	516	-144	620	4,62E-02
4	0,1	529	-179	625	4,62E-02
4	0,075	544	-83	657	4,62E-02
11	0,075	539	-81	563	5,32E-02
4*	0,25*	342*	-363*	605*	4,62E-02
2*	2*	349*	-366*	608*	4,29E-02
45	2D - PSN	578	0	578	5,63E-02
42	2D - PSO	339	-363	606	5,25E-02

*) obliczenia według modelu 3D z punktu C.2.2.c (kontakt dwóch nieskończonych walców).

C.2.2.c. KONTAKT 3D DWÓCH DŁUGICH WALCÓW O OSIACH WZAJEMNIE RÓWNOLEGLYCH

Zagadnienie kontaktu dwóch długich walców o wzajemnie równoległych osiach zostało rozwiązane numerycznie przy użyciu modelu z Rys.C.2.11. Podobnie jak w pierwszym przypadku przyjęto identyczne walce o takich samych własnościach, szerokości i promieniach $R_w = 10$ [mm] obciążone siłą $F = 100$ [N]. Zmienione zostały warunki brzegowe tak aby model odpowiadał PSO. W tym celu na bocznych ściankach obu walców zablokowano przemieszczenia u_z , symulując w ten sposób kontakt dwóch nieskończonych walców. W efekcie uzyskano rozkład nacisków przedstawiony na Rys.2.13. Wartości naprężeń kontaktowych są niezmiennie po szerokości walca, a zależą wyłącznie od odległości od osi styku. Obliczona numerycznie maksymalna wartość nacisków wyniosła $p_o^c = 608$ [MPa] (wg. teorii $p_o^{PSO} = 606$ [MPa]) i jest mniejsza niż dla kontaktu dwóch wąskich walców ($p_o^b = 616$ [MPa]). W Tab.C.2.4 (wyniki obliczeń dla kontaktu 3D dwóch długich walców o osiach wzajemnie równoległych zaznaczono *) można zaobserwować, że uzyskane wyniki nie zależą od szerokości walców b , a jedynie od liczby elementów w kontakcie n_c . Ponadto wyteżenie σ_{HMH} zarówno w sensie ilościowym oraz jakościowym odpowiada obliczeniom 2D z założeniem PSO.

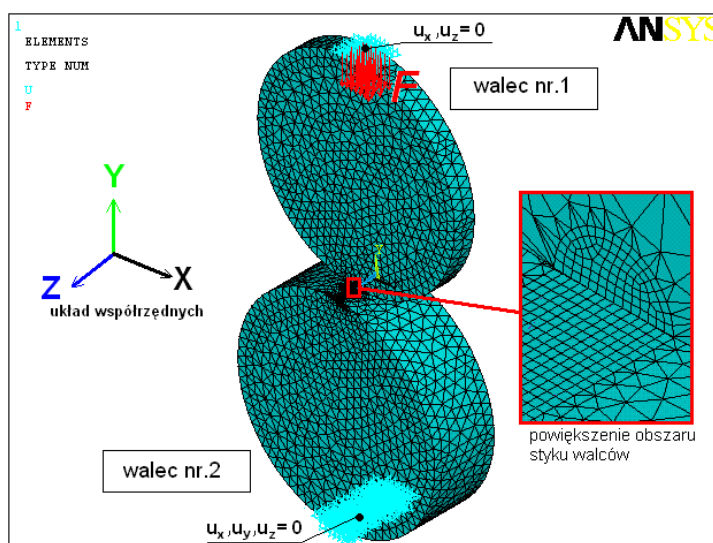
Podsumowując, dwuwymiarowe zagadnienie kontaktu ciał cylindrycznych powinno być rozważane jako zadanie PSO. Związane jest to z faktem, że nawet w przypadku ciał o małej szerokości b względem np. średnicy, promień kontaktu r_c jest albo porównywalny albo mniejszy od tej szerokości. Tak jest w przypadku kół suwnicowych, których szerokość jest znacznie większa od obu półosi elipsy kontaktu. Uzasadnia więc to przyjęcie założenia PSO do obliczeń dwuwymiarowego zagadnienia kontaktu koła suwnicy z szyną.



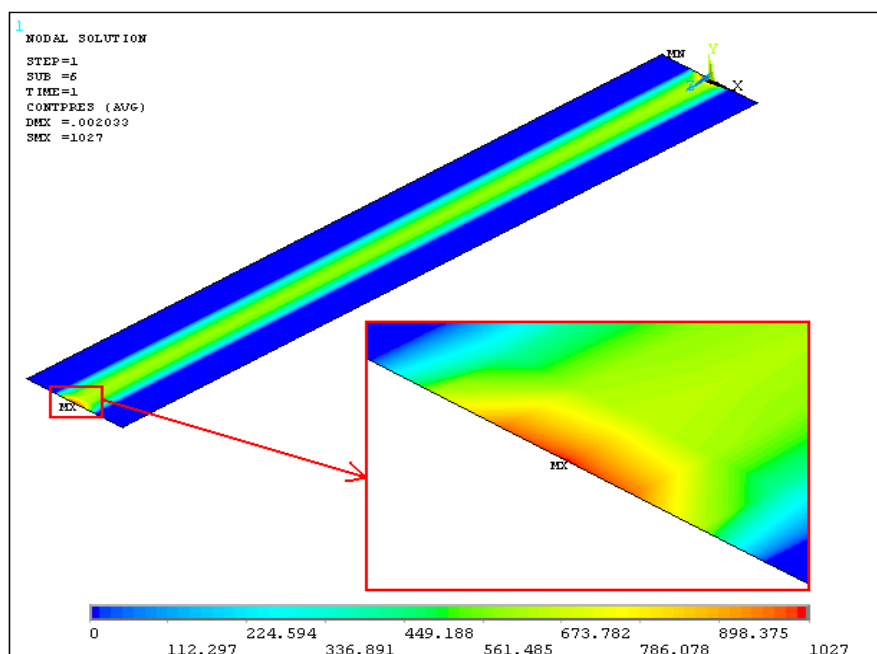
Rys.C.2.13 Rozkład naprężeń kontaktowych w przypadku kontaktu dwóch nieskończonych walców o osiach wzajemnie równoległych (PSO)

C.2.2.d. WCISKANIE WĄSKIEJ TARCZY W SZERSZY WALEC

Zagadnienie wciskania wąskiego walca w szerszy zostało rozwiązane przy zastosowaniu tych samych warunków, wymiarów siatki i elementów skończonych jak poprzednie zagadnienia 3D. Węższy walec miał niezmienną szerokość $b_1 = 2$ [mm] a szerszy pogrubiono do $b_1 = 6$ [mm]. Siła obciążająca kontakt miała wartość $F = 100$ [N]. Model numeryczny wraz z przyjętymi warunkami został przedstawiony na Rys.C.2.14, a uzyskany rozkład nacisków kontaktowych na Rys.C.2.15. Ekstrema $p_o = 1027$ [MPa] pojawiły się na krawędzi styku walców i były znacznie większe co do wartości niż dla kontaktu wąskich lub nieskończonych walców. Uzyskane wartości maksymalne są jednak związane z krawędziami geometrycznymi i zależą od zastosowanej siatki elementów skończonych. Można tego uniknąć wprowadzając zaokrąglenie krawędzi tarczy.



Rys.C.2.14 Model oraz warunki brzegowe dla przypadku wciskania wąskiego walca w szerszy walec



Rys.C.2.15 Rozkład naprężeń kontaktowych w przypadku wciskania wąskiego walca w szerszy walec

C.3. KONTAKT 3D DWÓCH WALCÓW O OSIACH WZAJEMNIE PROSTOPADŁYCH

Na przykładzie kontaktu dwóch walców o osiach wzajemnie prostopadłych zbadano zbieżność rozwiązania numerycznego uzyskanego metodą elementów skończonych (ANSYS®). Problem rozwiązano dwoma sposobami:

- a) zagęszczaniem siatki w obszarze kontaktu,
- b) techniką submodelingu.

Submodeling umożliwił zastosowanie mniejszych elementów skończonych co przy jednoczesnym skróceniu czasu obliczeń zwiększyło efektywność i dokładność obliczeń. Uzyskane wyniki numeryczne porównano z rozwiązaniem teoretycznym [110]. Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla modelu przestrzennego. Walce miały takie same promienie $R_W = 355$ [mm] i szerokości $b = 200$ [mm].

Obliczenia teoretyczne (Zał. A) [110]:

Dane:

Siła obciążająca:	$F = 150$ [kN]
Promień walca:	$R_{W1} = R_{W2} = R_W = 355$ [mm]
Szerokość walców:	$b = 200$ [mm]
Współczynnik Poissona:	$\nu = 0,3$
Moduły Younga:	$E = E_W = E_{pł} = 2,1 \cdot 10^5$ [MPa]

Obliczenia:

Wzajemne położenie płaszczyzn normalnych zawierających największe krzywizny obu powierzchni:

$$\psi = \frac{\pi}{2}$$

Współczynniki A i B :

$$A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{w1}} + \frac{1}{R_{w2}} \right) = 2,817 \cdot 10^{-3} \text{ [mm}^{-1}\text{]}$$

$$B - A = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{R_{w1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_{w2}}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{R_{w1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{R_{w2}}\right) \cos(2 \cdot \psi)} = 0$$

Kąt θ :

$$\theta = \arccos\left(\frac{B - A}{A + B}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

Współczynniki m oraz n (patrz Tab.A.1 Zał. A):

$$m = 1; n = 1$$

Półosie a, b elipsy kontaktu:

$$k_1 = k_2 = \frac{1-\nu^2}{\pi \cdot E} = 1,379 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{N}} \right]$$

$$a = m \cdot \sqrt[3]{\frac{3\pi F(k_1 + k_2)}{4(A + B)}} = 7,02 \text{ [mm]}$$

$$b = n \cdot \sqrt[3]{\frac{3\pi F(k_1 + k_2)}{4(A + B)}} = 7,02 \text{ [mm]}$$

Maksymalne naciski kontaktowe:

$$p_o = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi \cdot a \cdot b} = 1453 \text{ [MPa]}$$

Maksymalne naprężenie styczne w punkcie Bielajewa (Tab zał):

$$\tau_B = \frac{\sigma_{TG}^{MAX}}{2} = 0,31p_o = 450 \text{ [MPa]}$$

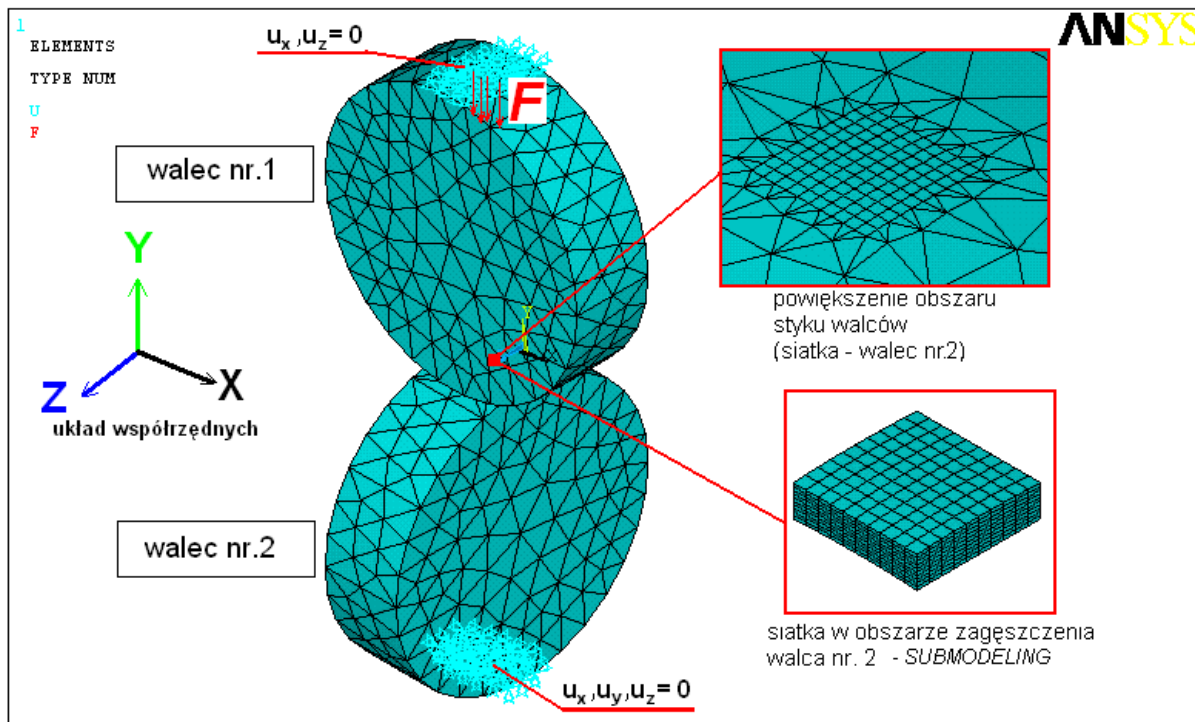
Maksymalne wyężenie liczone z hipotezy H-M-H w punkcie Bielajewa (Tab.zał):

$$\sigma_{HMH}^{MAX} = 0,620p_o = 901 \text{ [MPa]}$$

Obciążenie wprowadzono w kilku górnych węzłach walca nr 1, tak aby kierunek wypadkowej siły przechodził przez środek obszaru kontaktu obu walców. Model numeryczny oraz warunki brzegowe przedstawiono na Rys.C.3.1. Górny walec nr 1 miał odebrany przesuw w obu kierunkach poziomych, a dolny walec nr 2 we wszystkich kierunkach¹⁹. Zastosowano siatkę nieregularną z silnym zagęszczeniem elementów sześciokątnych w obszarze kontaktu. Na pozostałym obszarze użyto elementów czterościennych²⁰. W trakcie obliczeń zmieniano gęstość siatki w obszarze styku.

¹⁹ Opisane warunki brzegowe zadano ze względów technicznych, ale nie wpływają one na rozwiązanie w kontakcie.

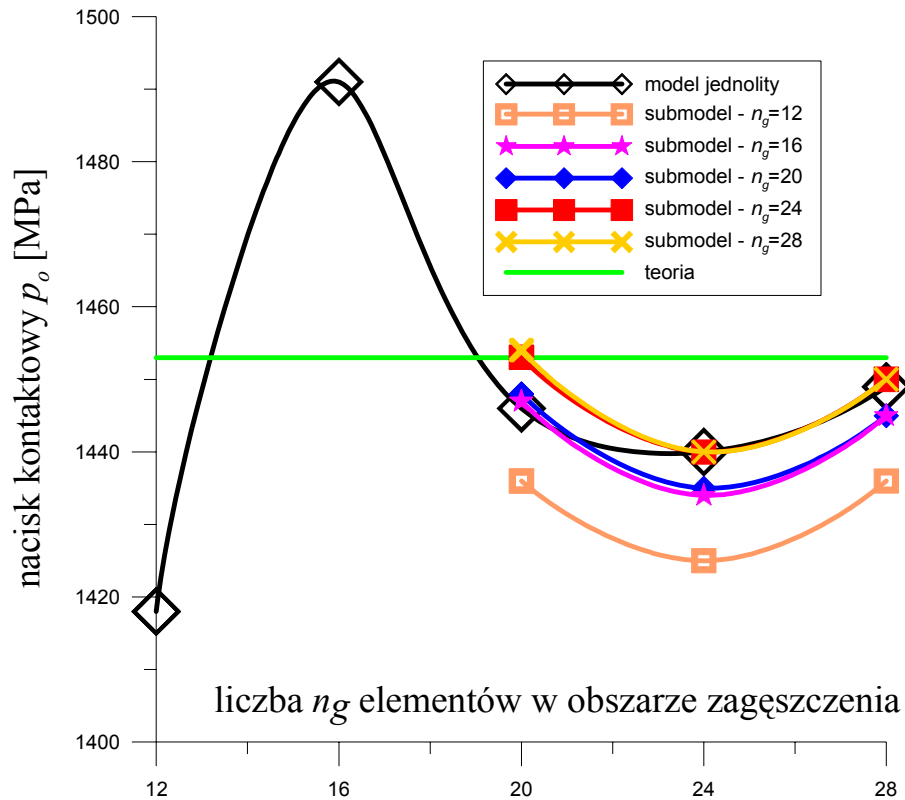
²⁰ Obliczenia wykonane zostały przy zastosowaniu elementów wyższego rzędu *SOLID95* oraz elementów kontaktowych *TARGE170* oraz *CONTA174* z automatyczną funkcją domykania szczelin (*KeyOpt(5) = 1*)



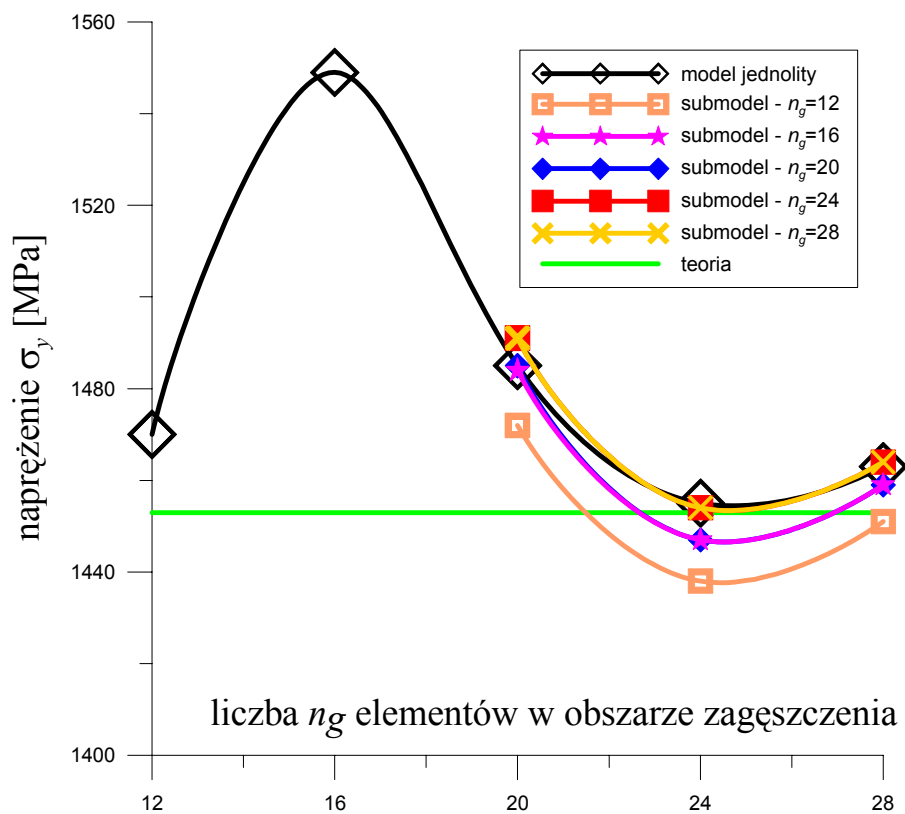
Rys.C.3.1 Model numeryczny oraz warunki brzegowe dla kontaktu dwóch walców o osiach prostopadłych oraz powiększenie obszaru zagęszczenia

Celem prowadzonych badań było określenie wpływu zgrubnej siatki, użytej w pierwszej iteracji (pełny jednolity model dwóch walców prostopadłych) na wyniki uzyskiwane w drugiej iteracji. W iteracji drugiej badano wybrany fragment modelu z zagęszczoną siatką przy pomocy techniki submodelingu. W modelach zgrubnych przyjęto podziały zagęszczonego obszaru na $n_g = \{12; 16; 20; 24; 28\}$ elementów. W przypadku submodeli analizowano tylko siatki z podziałami na $n_g = \{20; 24; 28\}$. Obliczenia wykonywano w ten sposób, że dla każdej siatki rozwiązania modelu jednolitego (czarne linie i romby na wykresach z Rys.C.3.2-C.3.4) obliczano naprężenia w submodelu o wymienionych wyżej zagęszczeniach siatki. Do analizy wybrano maksymalne naciski kontaktowe p_o (Rys.C.3.2), maksymalne naprężenia pionowe σ_y (Rys.C.3.3) oraz maksymalne wyteżenia σ_{HMH}^{MAX} (Rys.C.3.4). Można zauważyć, że wyniki uzyskane techniką submodelingu w znacznej mierze zależą od zastosowanej siatki w modelu zgrubnym.

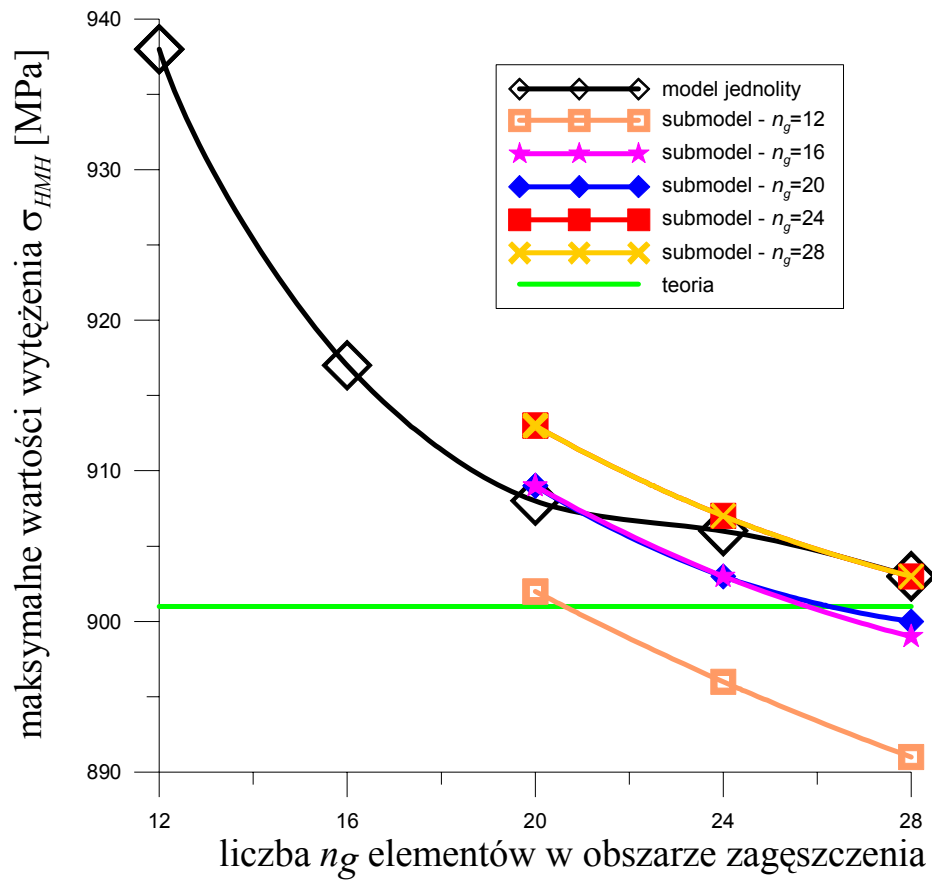
Na szczególną uwagę zasługuje fakt, że w przypadku zagęszczania siatki w submodelu, otrzymane zostaną niższe wartości naprężeń aniżeli dla tej samej siatki z obliczaniem pełnego modelu. Dotyczy to zarówno nacisków kontaktowych jak również naprężeń i wyteżenia. Zastosowanie zbyt rzadkiej siatki w modelu jednolitym może dodatkowo nasilić to zjawisko (w analizowanym przykładzie można to zaobserwować dla wyteżenia σ_{HMH}^{MAX} i rozwiązania submodeli w oparciu o siatkę zgrubną $n_g = 12$ - patrz Rys.C.3.4). Stosując metodę submodelingu należy więc również odpowiednio zagęścić siatkę modelu jednolitego, w szczególności w strefie dużych gradientów naprężeń.



Rys.C.3.2 Wyznaczone maksymalne wartości p_o dla różnych modeli jednolitych ($n_g = \{12; 16; 20; 24; 28\}$) oraz submodeli ($n_g = \{20; 24; 28\}$)



Rys.C.3.3 Maksymalne wartości σ_y dla różnych modeli jednolitych ($n_g = \{12; 16; 20; 24; 28\}$) oraz submodeli ($n_g = \{20; 24; 28\}$)



Rys.C.3.4 Maksymalne wartości σ_{HMH}^{MAX} dla różnych modeli jednolitych ($n_g = \{12; 16; 20; 24; 28\}$) oraz submodeli ($n_g = \{20; 24; 28\}$)

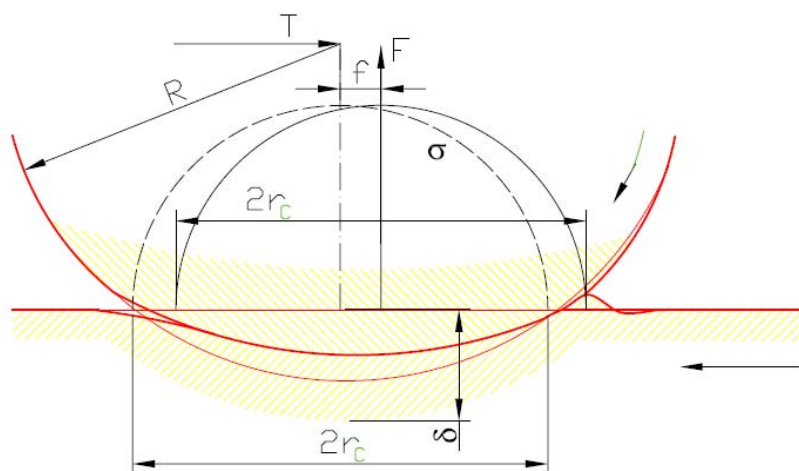
ZAŁĄCZNIK D. UWZGLĘDNIENIE TARCIA W MODELU NUMERYCZNYM

W każdym przypadku ruchu występują zjawiska przyczepności (związane nieodłącznie z tarcieniem) i poślizgu. W zależności od charakteru ruchu względnego przemieszczających się ciał można wyróżnić m.in. takie rodzaje tarcia jak ślizgowe czy toczne. Tarcie toczne może mieć charakter tarcia potoczystego (jak np. w łożyskach, nienapędzane koła wagonów kolejowych) lub tarcia trakcyjnego (koła napędzane) a w skrajnym przypadku tarcia poślizgowego. Do tego ostatniego dochodzi po przekroczeniu pewnej siły krytycznej i objawia się utratą przyczepności i ślizganiem się współpracujących powierzchni po sobie.

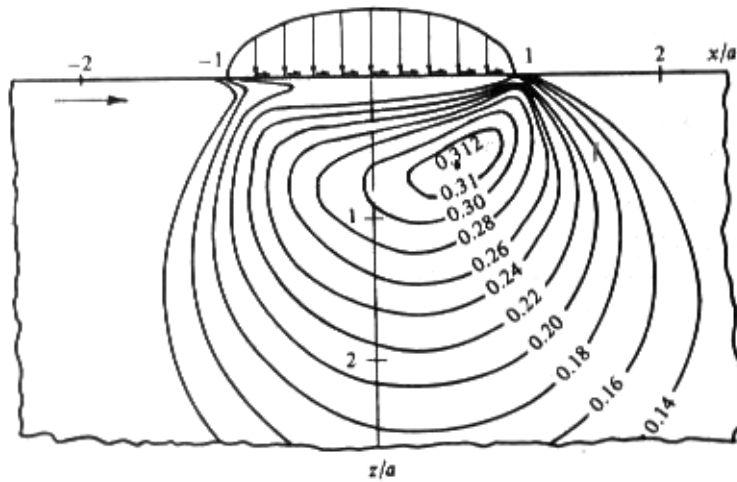
Zarówno w przypadku tarcia potoczystego jak również tarcia trakcyjnego dochodzi do toczenia z mikroślizgami. Wielkość strefy mikroślizgów uzależniona jest od wartości efektów ciernych (np. związanych z momentem napędzającym), nacisków normalnych oraz wartości współczynnika tarcia ruchowego (inaczej nazywanego kinetycznym). Istotne jest, że w przypadku tarcia tocznego straty związane z tym zjawiskiem są znacząco mniejsze niż przy tarcu ślizgowym i są powodowane przez następujące czynniki [87]:

- histerezę odkształceń,
- tarcie wewnętrzne w ośrodku smarującym,
- poślizg oraz mikroślizg wywołany odkształceniami.

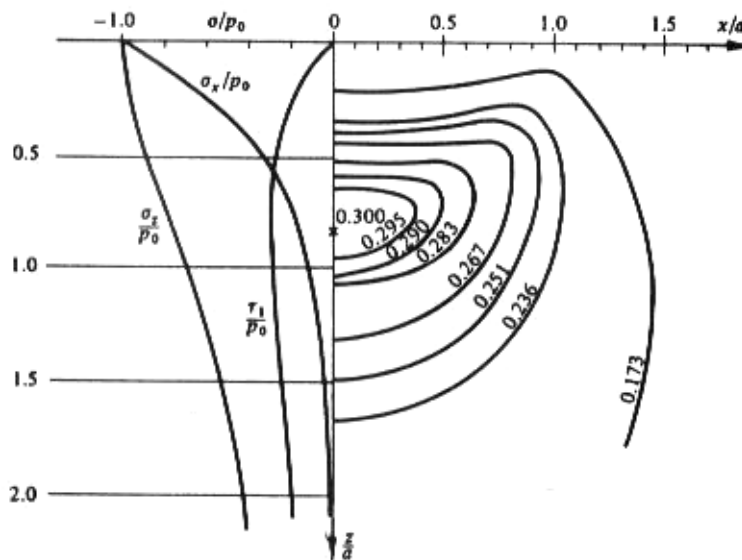
W rzeczywistych warunkach zjawisko czystego toczenia praktycznie nie występuje, dlatego w przypadku analizy zmęczenia tocznego istotne jest rozważenie zjawisk ciernych, w szczególności elementów napędzanych. W takim przypadku moment napędzający koło powoduje wystąpienie naprężeń ciernych w obszarze styku. Wraz ze wzrostem jego wartości zwiększa się strefa mikroślizgów. Ponadto pod wpływem momentu obszar wchodzący w styk jest ściskany co powoduje wybrzuszenie materiału, a obszar wychodzący jest odprężany (Rys.D.1). Wskutek tego rozkład nacisków normalnych staje się asymetryczny względem osi łączącej środki stykających się ciał. Jednakże, w przypadku toczenia ciał o takich samych własnościach sprężystych można przyjąć, że naprężenia cierne nie wpływają na rozkład naprężeń normalnych [117]. Przesunięciu bliżej powierzchni ulega także punkt maksymalnego wyężenia (Rys.D.2a) [117]. W przypadku kontaktu dwóch walców z pominięciem tarcia punkt maksymalnego wyężenia o wartości $0,30p_0$ znajduje się na głębokości $0,78r_c$ pod powierzchnią styku (Rys.D.2b). O tarcu rozwiniętym mówimy jeżeli poślizg wystąpi na całej powierzchni. Naprężenia cierne na powierzchni styku mają wtedy taki sam charakter rozkładu jak naciski normalne.



Rys.D.1 Model toczenia z tarcieniem; f [mm]- promień tarcia potoczystego [87]



Rys.D.2a. Wytężenie τ_{TG} pod powierzchnią styku walca z płaszczyzną dla przypadku kontaktu z tarcieniem trakcyjnym, współczynnik tarcia $\mu = 0,2$; Siła styczna $T = 0,2F$; F - obciążenie pionowe, źródło – [117]



Rys.D.2b. Kontakt dwóch walców. Po lewej stronie pokazano rozkłady naprężeń podpowierzchniowych na osi symetrii. Po prawej stronie wytężenie τ_{TG} pod powierzchnią styku dwóch walców w przypadku pominięcia efektów ciernych. Źródło – [117]

W celu uwzględnienia w obliczeniach numerycznych kontaktu walca z płaszczyzną efektów ciernych stworzony został model z dzielonym podłożem na dwie części o różnych modułach Younga (patrz Rys.4.3.1). Górna - sztywna część o module Younga $E_1 = 2,1 \cdot 10^5$ [MPa] miała za zadanie przenosić obciążenie pionowe, natomiast dolna - podatna o module Younga $E_2 = 500$ [MPa] miała umożliwić ruch poziomy podłoża na wskutek działania sił trakcyjnych. Dolna warstwa miała zablokowane przemieszczenia poziome w dolnych narożach co było konieczne do otrzymania poprawnej formy macierzy sztywności. Natomiast w celu zminimalizowania wpływu powyższych poziomych warunków przemieszczeniowych na efekty cierne w kontakcie, przyjęto małą wartość modułu Younga E_2 .

Należy zauważyć, że użycie do obliczeń z tarcieniem modelu bez dzielonego podłoża prowadzi do uzyskania nieprawidłowych rozkładów naprężeń ciernych. W takim przypadku naprężenia cierne są symetryczne względem osi symetrii walca co nie pokrywa się z teorią (Rys.D.4) [117].

BIBLIOGRAFIA

- [1] Release 11.0 Documentation for ANSYS, 2007.
- [2] S. Kocańda, J. Szala, *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*. Warszawa: PWN Warszawa, 1985.
- [3] A. Skoć, J. Spalek, *Podstawy konstrukcji maszyn T.1*. Warszawa: WNT, 2006.
- [4] M. Dietrich, Ed., *Podstawy konstrukcji maszyn T.1*. Warszawa: WNT, 2008.
- [5] P. Romanowicz, A.P. Zieliński, "Wieloosiowe zmęczenie elementów pracujących w warunkach kontaktu tocznego," *Acta Mechanica et Automatica*, no. vol.3 no.2, pp. 86-89, 2009.
- [6] W. A. J. Albert, "Über Treibseile am Harz. Archiv für Mineralogie, Geognosie," *Bergbau und Hüttenkunde*, no. 10, pp. 215-234, 1837.
- [7] A. Wöhler, "Versuche zur Ermittlung der auf die Eisenbahnwagenachsen einwirkenden Kräfte und die Widerstandsfähigkeit der Wagen-Achsen," *Zeitschrift für Bauwesen*, no. X, pp. 583-616, 1860.
- [8] A. Wöhler, "Bericht über die Versuche, welche auf der königl. Niederschlesisch-märkischen eisenbahn mit Apparaten zum Messen der Biegung und Verdehung von Eisenbahnwagenachsen während der Fahrt angestellt wurden," *Zeitschrift für Bauwesen*, no. VIII, pp. 641-652, 1858.
- [9] A. Wöhler, "Über Versuche zur Ermittlung der Festigkeit von Achsen, welche in den Werkstätten der Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn zu Frankfurt a.d.O. angestellt sind," *Zeitschrift für Bauwesen*, no. XIII, pp. 233-258, 1863.
- [10] A. Wöhler, "Resultate der in der Central-Werkstatt der Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn zu Frankfurt a.d.O. angestellten Versuche über die relative Festigkeit von Eisen, Stahl und Kupfer," *Zeitschrift für Bauwesen*, no. XVI, pp. 67-84, 1866.
- [11] A. Wöhler, "Über die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl," *Zeitschrift für Bauwesen*, no. XX, pp. 73-106, 1870.
- [12] A. Wöhler, "Über die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl. Auf Anordnung des Ministers für Handel, Gewerbe u. öffentl. Arbeiten, Grafen Itzenplitz, angestellt. Berlin, Ernst und Korn," 1870.
- [13] A. Wöhler, "Achsen, deren Dimensionen, Form der Achsschenkel, Material, in Handbuch für Spezielle Eisenbahn-Technik.2. Band. Der Eisenbahn-Wagenbau in seinem ganzen Umfange. E. Heusinger von Waldegg Hrsq. Verlag Wilhelm Engelmann," , Leipzig, 1870.
- [14] L. Spangenberg, "Über das Verhalten der Metalle bei wiederholten Anstrengungen," *Z. Bauw.*, no. 24, 25, 1874.
- [15] L. Spangenberg, *Über das Verhalten der Metalle bei wiederholten Anstrengungen*. Berlin, Ernst and Korn, 1875.
- [16] L. Spangenberg, "Über Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl," *Glaser's Ann. Gew.*, no. 5, pp. 6-15, 1879.
- [17] O. H. Basquin, "The exponential law of endurance tests," *Proc. Annual Meetingm American Society for Testing Materials*, no. Vol. 10, pp. 625-630, 1910.
- [18] J. Szala, "Badania zmęczeniowe materiałów i konstrukcji w Polsce," *Przegląd Mechaniczny*, no. nr 1/2005, pp. 40-46.
- [19] G. Sines, "Behaviour of metals under complex static and alternating stresses," *Metal Fatigue*, pp. 145-169, McGraw Hill, New York, 1959.
- [20] B. Crossland, "Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel," in *In: Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers*, London, 1956, p. 138-149.
- [21] W. Moszyński, *Wytrzymałość zmęczeniowa części maszyn*. Warszawa: PWT, 1953.
- [22] S. Kocańda, D. Kocańda, "Fraktografia. Badania mikrobudowy przełomów zmęczeniowych

- w latach 1954-2004," *Przegląd Mechaniczny*, no. nr 1/2005, pp. 27-37.
- [23] T. J. Pindera, Z. Orłoś, K. Rościszewski, "O pewnych zagadnieniach kształtowania wytrzymałościowego ramy skutera," *Przegląd Mechaniczny*, no. nr 16/1960, pp. 474-479.
- [24] J. Zaskórski, "Przyspieszone badania zmęczeniowe ładowarek kołowych," *Przegląd Mechaniczny*, no. nr 9/1974, pp. 297-302.
- [25] J. Przybylski, "Programowane badania zmęczeniowe ram samochodowych," *Technika Motoryzacyjna*, no. nr 4/1973.
- [26] S. Kocańda, *Zmęczeniowe pękanie metali*. Warszawa: WNT, 1985.
- [27] K. Sobczyk, B. F. Spencer Jr., *Random Fatigue: From Data to Theory*. Boston: Academic Press, Inc., 1992.
- [28] M. Skorupa, *Empirical Trends and Prediction Models for Fatigue Crack Growth under Variable Amplitude Loading*. Petten: Netherlands Energy Research Foundation (ECN), 1996.
- [29] Z. Mróz, E. Macha, "Procendings of the 5th International Conference on Biaxial/Multi-axial Fatigue and Fracture," , Kraków, 1997.
- [30] A. Neimitz, I. V. Rokach, D. Kocańda, K. Gołoś, "ECF 14 Fracture Mechanics Beyond 2000," in *EMAS Publishing*, Sheffield, 2000.
- [31] B. Crossland, "Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel," , London, 1956, p. 138-49.
- [32] K. Dang Van, Sur la resistance a la fatigue des metaux, These de Doctorat en Sciences, Sci. Techniq. L'Armement, 1973.
- [33] A. Karolczuk, E. Macha, *Plaszczyzny krytyczne w modelach wieloosiowego zmęczenia materiałów. Wieloosiowe zmęczenie losowe elementów maszyn i konstrukcji - część VI*, 162nd ed.: Politechnika Opolska, 2004.
- [34] I.V. Papadopoulos, "Long life fatigue under multiaxial loading," *International Journal of Fatigue*, no. 23, pp. 839-849, 2001.
- [35] T. Łagoda, *Trwałość zmęczeniowa wybranych złączy spawanych*. Opole: Politechnika Opolska, 2005.
- [36] K. Kluger, T. Łagoda, *Wpływ wartości średniej obciążenia na trwałość zmęczeniową w opisie energetycznym. Wieloosiowe zmęczenie losowe elementów maszyn i konstrukcji - część XI*. Opole: Politechnika Opolska, 2007.
- [37] B. Weber, Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque [En ligne] Thèse : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1999.
- [38] I. V. Papadopoulos, P. Davoli, C. Gorla, M. Filippini, A. Bernasconi, "A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals," *International Journal of Fatigue*, no. Vol.19, No. 3, pp. 219-235, 1997.
- [39] You Bong-Ryul, Lee Sonn-Bok, "A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals," *International Journal of Fatigue*, vol. No. 4, no. 18, pp. 235-244, 1996.
- [40] G. Qilafku et al., "Fatigue of specimens subjected to combined loading. Role of hydrostatic pressure," *International Journal of Fatigue*, no. 23, pp. 689-701, 2001.
- [41] T. Dahlberg, A. Ekberg, *Failure Fracture Fatigue – An Introduction.*: Linköping and Gothenburg, 2001.
- [42] A. Niesłony, E. Macha, *Wieloosiowe zmęczenie losowe elementów maszyn i konstrukcji. Część V. Metoda spektralna*, 160th ed.: Politechnika Opolska, 2004.
- [43] M. Mrzygłód, Parametryczna optymalizacja konstrukcji pracujących przy obciążeniach wysoko-cyklowych, 2005.
- [44] A. Bernasconi, "Efficient algorithms for calculation of shear stress amplitude and amplitude of second invariant of the stress deviator in fatigue criteria applications," *International*

- Journal of Fatigue*, no. 24, pp. 649-657, 2002.
- [45] A. Bernasconi, I. V. Papadopoulos, "Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria," *Computational Materials Science*, no. 34, pp. 355-368, 2005.
- [46] A. Ekberg, "Rolling contact fatigue of railway wheels – a parametric study," *Wear*, no. 211, 280-288 1997.
- [47] A. Bernasconi, P. Davoli, S. Filippini, S. Foletti, "An integrated approach to rolling contact sub-surface fatigue assessment of railway wheel," *Wear*, no. 258, pp. 973-980, 2005.
- [48] A. Bernasconi, M. Filippini, S. Foletti, D. Vaudo, "Multiaxial fatigue of a railway steel under non-proportional loading," *International Journal of Fatigue*, no. 28, pp. 663-672, 2006.
- [49] Y. Liu, B. Stratman, M. Sankaranm, "Fatigue crack initiation life prediction of railroad wheels," *International Journal of Fatigue*, no. 28, pp. 747-756, 2006.
- [50] M. Ciavarella, F. Monno, G. Demelio, "On the Dang Van fatigue limit in rolling contact fatigue," *International Journal of Fatigue*, no. 28, pp. 852-863, 2006.
- [51] H. Desimone, A. Bernasconi, S. Beretta, "On the application of Dang Van criterion to rolling contact fatigue," *Wear*, no. 260, pp. 567-572, 2006.
- [52] K. Dang Van, M. H. Maitournam, "On some recent trends in modelling of contact fatigue and wear in rail," *Wear*, no. 253, pp. 219-227, 2002.
- [53] A. Ekberg, P. Sotkovszki, "Anisotropy and rolling contact fatigue of railway wheels," *International Journal of Fatigue*, no. 23, pp. 29-43, 2001.
- [54] J. W. Ringsberg, A. Skyttebol, L. Josefson, "Investigation of the rolling contact fatigue resistance of laser clad twin-disc specimens: FE simulation of laser cladding, grinding and a twin-disc test," *International Journal of Fatigue*, no. 27, pp. 702-714, 2005.
- [55] J. B. Delbos, G. Kermouche, J. Rech, H. Hamdi, H. Zahouani, "Numerical modelling of fatigue crack's initiation in rolling contact of sintered steels," *Journal of Materials Processing Technology*, no. 164-165, pp. 1185-1191, 2005.
- [56] Y. B. Guo, M. E. Barkey, "FE-simulation of the effects of machining-induced residual stress profile on rolling contact of hard machined components," *International Journal of Mechanical Sciences*, no. 46, pp. 371-388, 2004.
- [57] E. Kabo, A. Ekberg, "Fatigue initiation in railway wheels – a numerical study of the influence of defects," *Wear*, no. 253, pp. 26-34, 2002.
- [58] E. Kabo, A. Ekberg, "Material defects in rolling contact fatigue of railway wheels – the influence of defect size," *Wear*, no. 258, pp. 1194-1200, 2005.
- [59] E. Kabo, "Material defects In rolling contact fatigue – influence of overloads and defects clusters," *International Journal of Fatigue*, no. 24, pp. 887-894, 2002.
- [60] A. Ekberg, E. Kabo, "Fatigue of railway wheels and rails under rolling contact and thermal loading – an overview," *Wear*, no. 258, pp. 1288-1300, 2005.
- [61] E. Lansler, E. Kabo, "Subsurface crack face displacements in railway wheel," *Wear*, no. 258, pp. 1039-1047, 2005.
- [62] J. W. Ringsberg, M. Loo-Morrey, B. L. Josefson, A. Kapoor, J. H. Benon, "Prediction of fatigue crack initiation for rolling contact fatigue," *International Journal of Fatigue*, no. 22, pp. 205-215, 2000.
- [63] J. W. Ringsberg, "Life prediction of rolling contact fatigue crack initiation," *International Journal of Fatigue*, no. 23, pp. 575-586, 2001.
- [64] M. Šraml, J. Flader, I. Potrč, "Numerical procedure for predicting the rolling contact fatigue crack initiation," *International Journal of Fatigue*, no. 25, pp. 585-595, 2003.
- [65] Y. Jiang, H. Sehitoglu, "A model for rolling contact failure," *Wear*, no. 224, pp. 38-49, 1999.

- [66] B. Alfredsson, M. Olsson, "Applying multiaxial fatigue criteria to standing contact fatigue," *International Journal of Fatigue*, no. 23, pp. 533-548, 2001.
- [67] G. Sines, "Behaviour of metals under complex static and alternating stresses," in *Metal Fatigue*: McGraw Hill, New York, 1959, pp. 145-169.
- [68] K. Dang Van, G. Cailletaud, J. F. Flavenot, H. P. Lieurade, "Criterion for high cycle fatigue failure under multiaxial loading," in *Biaxial and Multiaxial Fatigue EGF 3, Mechanical Engineering Publications*, London, 1989, pp. 459-478.
- [69] M. Mrzygłód, A. P. Zieliński, "Parametric structural optimization with respect to the multiaxial high-cycle fatigue criterion," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, no. 33, pp. 161-171, 2007.
- [70] M. Mrzygłód, A. P. Zieliński, "Numerical implementation of multiaxial high-cycle fatigue criterion to structural optimization," *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, no. 44/3, pp. 691-712, 2006.
- [71] M. Mrzygłód, A. P. Zieliński, "Multiaxial high-cycle fatigue constraints in structural optimization," *International Journal of Fatigue*, no. 29/9-11, pp. 1920-1926, 2007.
- [72] K. Dang Van, I. V. Papadopoulos, *High-cycle metal fatigue. From theory to applications*. Udine: Springer Wien New York, 1999.
- [73] I. V. Papadopoulos, "Long life fatigue under multiaxial loading," *International Journal of Fatigue*, no. 23, pp. 839-849, 2001.
- [74] M. E. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe*. Warszawa: PWN, 1975.
- [75] C. Sanetra, *Untersuchungen zum Festigkeitsverhalten bei mehrachsiger Randombeanspruchung unter Biegung und Torsion*.: Technische Universität Clausthal, 1991.
- [76] A. Esderts, *Betriebfestigkeit bei mehrachsiger Biege- und Torsionsbeanspruchung*.: Technische Universität Clausthal, 1995.
- [77] A. Bernasconi, S. Foletti, I. V. Papadopoulos "A study on combined torsion and axial load fatigue limit tests with stresses of different frequencies," *International Journal of Fatigue*, no. 30, pp. 1430-1440, 2008.
- [78] A. Piątkiewicz, R. Sobolski, *Dźwignice TOM II*. Warszawa: WNT, 1978.
- [79] H. Krzemiński-Freda, *Łożyska toczne*. Warszawa: PWN, 1989.
- [80] M. Dietricha, Ed., *Podstawy konstrukcji maszyn tom 2*. Warszawa: WNT, 2008.
- [81] U. Sellgren, S. Björklund, S. Andersson, "A finite element-based model of normal contact between rough surfaces," *Wear*, no. 254, pp. 1180-1188, 2003.
- [82] K. Pawlicki, *Elementy dźwignic, część II*, piąte ed. Warszawa: PWN, 1971.
- [83] PN-EN 13001-2 Bezpieczeństwo dźwignic. Ogólne zasady projektowania. Część 2: Obciążenia.
- [84] S. Markusik, "Strenght conditions for wheel/rail system according with european standard EN 13001-3.3," *Transport problems*, vol. Tom 2 Zeszyt 1, 2007.
- [85] prCEN/TS 13001-3-3 Cranes - General design - Part 3-3: Limit states and proof of competence of wheel/rail contacts, 2005.
- [86] [Online]. <http://www.patry.fr/rails.html>
- [87] H. Krzemiński-Freda, *Łożyska toczne*. Warszawa, Polska: PWN, 1989.
- [88] E. Mazanek, L. Kania, A. Dziurski, *Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn T.1*.: WNT, 2009.
- [89] A. Skoć, J. Spalek, S. Markusik, *Podstawy konstrukcji maszyn T.2*. Warszawa: WNT, 2008.
- [90] B. Hamrock, S. Schmid, B. Jacobson, *Fundamentals of Machine elements*.: McGraw-Hill International Ed., 2005.

- [91] Robert L. Norton, *Machine design An Integrated Approach.*, 2006.
- [92] Katalog łożysk SKF. [Online]. www.skf.com
- [93] Katalog łożysk FAG. [Online]. www.fag.com
- [94] L. Kurmaz, *Podstawy Konstrukcji Maszyn. Projektowanie.* Warszawa: PWN, 1999.
- [95] E. Mazanek, M. Krynke, "Rozkład obciążenia wewnętrznego w dwurzędowym kulkowym łożysku wieńcowym," *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 3, no. 1, pp. 81-83, 2009.
- [96] L. Kania, E. Mazanek, M. Mruk, "Wpływ postaci konstrukcyjnej struktur nośnych," *Przegląd Mechaniczny*, no. 1, pp. 33-36, 2006.
- [97] T. Smolnicki, M. Stańco, "Prognozowanie zużycia odkształceniowego wielkogabarytowych łożysk tocznych o bieżniach miękkich," *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 3, no. 1, pp. 98-100, 2009.
- [98] U. Olofsson, "Fatigue life reduction due to wear in boundary lubricated spherical roller thrust bearings," *Wear*, no. 207, pp. 74-78, 1997.
- [99] U. Olofsson, "An experimental investigation of wear and fatigue life reduction of a boundary lubricated spherical roller thrust bearings," *Tribology International*, vol. 30, no. 9, pp. 685-692, 1997.
- [100] U. Olofsson, "Characterisation of wear in boundary lubricated spherical roller thrust bearings," *Wear*, no. 208, pp. 194-203, 1997.
- [101] U. Olofsson, S. Björklund, "3-D surface analysis of worn spherical roller thrust bearings," *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, no. 38, pp. 485-493, 1998.
- [102] R. Nilsson, F. Svahn, U. Olofsson, "Relating contact conditions to abrasive wear," *Wear*, no. 261, pp. 74-78, 2006.
- [103] SKF, SKF spherical roller thrust bearings for long lasting performance, 2003.
- [104] SKF, Bearing failures and their causes, 1994.
- [105] Łożyska Toczne, Informator Wydawnictwa Przemysłowe WEMA Spółka z o.o. Warszawa 2002.
- [106] EN 10088-1:1995.
- [107] [Online]. <http://4125.co.uk/>
- [108] Böhler Edelstahl, Böhler N695 extra nichtrostender stahl stainless steel.
- [109] Interlloy Pty Ltd. Interlloy Pty Ltd - własności stali X105CrMo17. [Online]. http://www.interlloy.com.au/data_sheets/stainless_steel/440c.html
- [110] S. Timoshenko, J. N. Goodier, *Teoria sprężystości.*: McGraw-Hill Book Company, 1951.
- [111] Z. Dyląg, A. Jakubowicz, Z. Orłoś, *Wytrzymałość materiałów tom II.* WNT, 1997.
- [112] P. Romanowicz, "Analiza elementów maszyn poddanych obciążeniom cyklicznym w warunkach kontaktu," in *SYMULACJA 2006*, Bełchatów, 2006.
- [113] J. Walczak, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości I plastyczności. Tom II.* Kraków, 1978.
- [114] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1996.
- [115] J. C. Simo, T. A. Laursen, "An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction," *Computers and Structures*, no. 42, pp. 97-116, 1992.
- [116] H. Sanecki, *Numeryczna analiza problemów kontaktu.* Kraków, 2009.
- [117] K. L. Johnson, *Contact mechanics.*: Cambridge university press, 2004.
- [118] P. J. Loisel, Modeling Contact of Two Parallel Cylinders, 2008.
- [119] [Online]. <http://www.optor.pl/geometria.php>
- [120] M. Dietricha, Ed. *Podstawy Konstrukcji Maszyn T.3.* Warszawa: WNT.
- [121] J. Walczak, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności Tom I.* Warszawa: PWN, 1977.

