Politechnika Krakowska

mgr inż. Szymon Hernik

Projektowanie elementów konstrukcyjnych z materiałów gradientowych



Promotor: dr hab. inż Artur Ganczarski, prof. PK

PRACA DOKTORSKA

Kraków 2009

SPIS TREŚCI

Podziękowania	1
Rozdział 1. Wstęp	2
1.1 Motywacja	3
1.2. Cel i zakres pracy	5
Rozdział 2. Aktualny stan wiedzy	6
2.1 Wprowadzenie do problematyki materiałów gradientowych	6
2.2. Rys historyczny	7
2.3 Przegląd literatury	8
Rozdział 3. Techniki wytwarzania materiałów gradientowych	10
3.1 Metody technologii proszkowej	10
3.1.1. Metody wytwarzania przy pomocy suchego proszku	10
3.1.2 Metoda odlewania z mas lejnych i filtracji ciśnieniem	11
3.1.3. Metoda odlewania folii	11
3.1.4. Proces infiltracji	12
3.1.5. Formowanie wtryskowe proszków	13
3.1.6. Samopostepujaca wysokotemperaturowa metoda syntezy	13
3.2. Metody osadzania	15
3.2.1. Osadzanie elektrolityczne i elektroforetyczne	15
3.2.2. Powlekanie zawiesinowe	16
3.2.3. Metoda osadzania warstw poprzez ablacie laserowa	16
3.2.4. Natrysk plazma	16
3.3. Metody in-situ	18
3.3.1. Spiekanje laserowe	18
3.3.2. Formowanie natryskowe	18
3 3 3 Odlewanie odśrodkowe	18
3.4 Rapid prototyping	19
3.4.1 Metoda MIS	19
34.2 Drukowanie 3D	19
	1)
Rozdział 4. Koncepcja materiału kompozytowego funkcjonalnie zmiennego	21
4.1. Główne założenia sformułowania	21
4.2. Metody homogenizacji	22
4.3 Równania termosprężystości dla materiałów gradientowych	27
4.3.1 Identyfikacja modułów konstytutywnych dla termosprężystości	30
4.4 Sposoby rozwiązywania równań termosprężystości	32
4.4.1 Równania termosprężystości niejednorodnej cienkiej obrotowo -	
symetrycznej płyto – tarczy Kirchhoffa – Love'a	33
4.4.2 Równania termosprężystej powłoki cylindrycznej wykonanej z materiału	
gradientowego podlegającej procesowi zużycia	36
4.4.3 Proces zużycia konstrukcji	38
4.5 Identyfikacja stałych materiałowych w funkcji temperatury w oparciu o istniejące	
wyniki doświadczeń	40



Rozdział 5. Adaptacja metod numerycznych do rozwiązywania problemów	
brzegowych dla materiałów gradientowych	45
5.1 Przegląd algorytmów numerycznych rozwiązywania zagadnienia początkowo –	
brzegowego	45
5.1.1 Metoda strzału	45
5.1.2 Metoda różnic skończonych	47
5.1.3 Metoda objętości skończonej	50
5.1.4 Klasyczna metoda elementów skończonych	52
5.1.5. Metody bezsiatkowe	57
5.2 Analiza dynamiczna. Metody numerycznego rozwiązywania równania	
różniczkowego typu parabolicznego	58
5.3 Wpływ niejednorodności na błąd rozwiązania w klasycznej metodzie elementów	
skończonych	62
5.3.1 Metoda bezpośredniego numerycznego całkowania równań stanu metodą	
strzału	62
5.3.2. Metoda różnic skończonych	63
5.3.3. Klasyczna metoda elementów skończonych	63
5.3.4. Wyniki otrzymane w oparciu o klasyczne metody: NC, MRS i MES	64
5.4. Metoda elementow skonczonych uwzględniająca niejednorodnosc materiału	66
5.4.1. Przykład ilustrujący korzysci płynące z zastosowania MES	69
	08
Rozdział 6. Przykłady zastosowań proponowanego opisu do modelowania materiałów	
i konstrukcji	75
6.1 Modelowanie gradientowej tarczy hamulcowej przeciwko zjawisku globalnej	
utraty stateczności <i>hot – spots</i>	75
6.1.1. Sformułowanie problemu	77
6.1.2 Warunki początkowo – brzegowe	81
6.1.3. Algorytm numeryczny	82
6.1.4. Wyniki	83
6.2. Modelowanie procesu zużycia tulei cylindra silnika spalinowego	96
6.2.1. Sformułowanie problemu	97
6.2.2. Sformulowanie procesu zuzycia dla tulei cylindra	100
$0.2.3. \mathbf{Wyn}\mathbf{K}\mathbf{I} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots $	100
Rozdział 7. Wnioski i kierunki dalszych badań	107
Bibliografia	111
Dodatek A. Twierdzenia energetyczne. Zasada prac wirtualnych	123
Spis rysunków	124
Spis tablic	127

PODZIĘKOWANIA

Praca została zrealizowana dzięki środkom uzyskanym w ramach projektów europejskich:

- UE Network of Excellence Project KMMNoE, Knowledge-based Multicomponent Materials for Durable and Safe Performance, No NMP3-CT-2004-502243,
- program Unii Europejskiej finansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego oraz budżetu państwa w ramach Zintegrowanego Programu Operacyjnego Rozwoju Regionalnego, projekt "InnoGrant - program wspierania innowacyjnej działalności doktorantów".

Chciałbym złożyć serdeczne podziękowania promotorowi Panu dr hab. inż. Arturowi Ganczarskiemu, prof. PK za cenne wskazówki udzielone przy pisaniu niniejszej pracy.

Ponadto składam podziękowania wszystkim członkom Sieci KMM-NoE, w szczególności członkom pakietu WPR2, także pragnę je przekazać dr inż. Pedrowi Egizabalowi i wszystkim pracownikom firmy Inasmet "Tecnalia" z San Sebastian w Hiszpannii za owocną współpracę, cenne uwagi oraz życzliwość i miłą atmosferę w trakcie mojego pobytu w wyżej wymienionej firmie.

Szczególnie podziękowania składam mojej żonie za motywację, wsparcie i cierpliwość.



1. WSTĘP

Współczesne konstrukcje, począwszy od wahadłowców kosmicznych, poprzez stosowane w przemyśle lotniczym, samochodowym, a kończąc na przedmiotach codziennego użytku, stają się coraz bardziej skomplikowane. Dążenie do zwiększenia czasu użytkowania danej konstrukcji oraz zmniejszenia kosztów związanych z konserwacją i naprawami przyczyniły się do gwałtownego rozwoju inżynierii materiałowej pod koniec ubiegłego stulecia. Oprócz znanych i powszechnie stosowanych klasycznych materiałów czy polimerów, zaczęto stosować w konstrukcjach elementy wykonane z materiałów kompozytowych. Stało się to możliwe, ponieważ zostały odkryte efektywne metody wytwarzania materiałów kompozytowych (por. rozdział 3.3.1).

Materiał kompozytowy rozumiany jako materiał wieloskładnikowy, czyli powstający poprzez połączenie minimum dwóch składników (faz) charakteryzujących się odmiennymi właściwości fizyko – chemicznymi, jest bardzo atrakcyjny dla konstruktorów. Umożliwia powstanie materiału, który byłby, np. barierą termiczną z jednej strony (cecha materiałów ceramicznych), czyli chronił konstrukcję przed działaniem ekstremalnych temperatur oraz cechował się wysoką wytrzymałością czy elastycznością z drugiej strony (cecha materiałów metalicznych). Idealnym przykładem konstrukcyjnym może być tutaj łopatka turbiny, która jednocześnie musi być odporna na duży cykliczny strumień ciepła i przenosić duże wartości naprężenia, które są wywołane ruchem obrotowym z dużą prędkością kątową.

Szczególnym przypadkiem materiału kompozytowego są materiały gradientowe FGM (ang. Functionally Graded Materials). Cechą charakterystyczną materiałów FGM jest ciągłe i gładkie przejście pomiędzy różnymi składnikami. Przykładowo, pomiędzy materiałem ceramicznym o bardzo dużej odporności termicznej (bardzo mały współczynnik przewodności termicznej oraz bardzo niski współczynnik rozszerzalności termicznej), a metalem, który jest dobrym przewodnikiem ciepła (duży współczynnik przewodności termicznej i wysoki współczynnik rozszerzalności termicznej) istnieje faza przejściowa (interface), w którym następuje gładkie, ciągłe przejście, eliminując powstawanie mikrouszkodzeń czy rozwarstwienia materiału na granicy faz. Gładkie przejście jest realizowane poprzez zmianę udziału objętościowego poszczególnych składników kompozytu, co zostało w sposób schematyczny zaprezentowane na rys. 1.1, powodując, że efektywne właściwości termomechaniczne zmieniają się gładko począwszy od jednego składnika (np. metalu lub stopu metali), do drugiego skladnika (np. materiału ceramicznego). W przypadku barier termicznych (ang. thermal barrier coating TBC) grubość interfejsu FGM jest mała w stosunku do całej objętości materiału (kilkaset mikrometrów) [149]. Oprócz systemów TBC, materiały gradientowe są stosowane jako warstwy przejściowe pomiędzy materiałem porowatym (np. kość), a stopem metali (np. stopy tytanu) przy produkcji implantów, czy jako warstwy pomiędzy materiałem mającym chronić konstrukcję przed szkodliwym oddziaływaniem środowiska, przed skutkami tarcia, przeciwko zużyciu warstwy wierzchniej materiału, a materiałem dziewiczym.

W klasycznych materiałach kompozytowych nie istnieje warstwa przejściowa a zmiana materiału pomiędzy składnikami kompozytu realizowana jest w sposób skokowy, prowa-



Rysunek 1.1. Schemat materiału funkcjonalnie zmiennego (Skrzypek, Ganczarski, i in. [149])

dząc do koncentracji naprężeń na granicy warstw, co może być przyczyną powstawania mikropęknięć, których konsekwencją może być powstanie szczeliny, która w końcu doprowadzi do przerwania ciągłości materiału. W opisanym powyżej przykładzie (łopatki turbiny), zastosowanie klasycznego materiału kompozytowego nawet o doskonałych właściwościach termomechanicznych, doprowadziłoby do koncentracji naprężeń termomechanicznych, które spowodowałyby zniszczenie łopatki. Natomiast zastosowanie warstwy przejściowej z materiału gradientowego FGM nie będzie prowadziło do powstawania koncentracji naprężeń na granicy faz. Czas użytkowania takiej konstrukcji będzie dłuższy a koszty eksploatacji dużo niższe.

Gwałtowny rozwój inżynierii materiałowej zmusza naukowców do stworzenia odpowiedniego aparatu fenomenologicznego i numerycznego, który pozwoli na przeprowadzanie realnych analiz konstrukcji wykonanych z materiałów gradientowych. Dotychczasowe algorytmy numeryczne służące do analizy konstrukcji, w szczególności metoda elementów skończonych (MES), nie są przystosowane do analizy materiałów niejednorodnych. W przypadku materiałów gradientowych, gdy gradient zmian właściwości materiałowych często jest bardzo duży, analiza numeryczna dla materiałów jednorodnych prowadzi do powstania dużych błędów i nierzeczywistych wartości naprężeń na granicach elementów (rozdział 5).

1.1 Motywacja

Większość materiałów występujących w naturze jest niejednorodna. Pomijanie tego zjawiska w dotychczasowych obliczeniach konstrukcji spowodowane jest głównie brakiem specjalistycznego oprogramowania oraz komputerów o odpowiedniej mocy obliczeniowej (szczegółowe informacje można znaleźć w [61]). Równania uwzględniające niejednorodność materiału są z natury nieliniowe i bardziej skomplikowane, dlatego rzadko podejmowane są próby ich rozwiązania, nawet przy użyciu dostępnych algorytmów numerycznych, czy komercyjnych programów służących do analizy konstrukcji ze względu na brak implementacji odpowiednich modułów, które mogły by przeprowadzić takie obliczenia w sposób poprawny. Z tego względu dostępne na rynku komercyjne programy analizy konstrukcji wykorzystujące algorytmy metody elementów skończonych (MES), metody różnic skończonych (MRS) czy metody elementów brzegowych (MEB) opierają się na równaniach dotyczących materiałów jednorodnych. W komercyjnych pakietach obliczeniowych ze wzgledu na unikanie zbytniej komplikacji modelu numerycznego, w szczególności modelu materiału, stosowane jest założenie stałych właściwości materiałowych na poziomie elementu skończonego. W dalszej części pracy (por. rozdział 5) zostanie pokazane, że takie założenie w przypadku materiałów gradientowych o silnej niejednorodności prowadzi do dużych błędów i braku dostosowania modelu numerycznego do analizowanej konstrukcji.

W latach 2005 – 2008 uczestniczyłem w pracach europejskiego projektu KMM-NoE (ang. *Network of Excellence "Knowledge-based multicomponent materials for durable and safe performance"*) koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki (IPPT PAN), który zrzeszał trzydzieści sześć placówek naukowo-badawczych oraz korporacji przemysłowych. Celem Sieci Doskonałości KMM-NoE było stworzenie europejskiego porozumienia placówek naukowo-badawczych oraz korporacji przemysłowych materiałów wielofunkcyjnych wyspecjalizowanych na potrzeby przemysłu do zastosowań w zaawansowanych konstrukcjach. Pod koniec 2008 roku Sieć Doskonałości KMM-NoE przekształciła się w *KMM Virtual Institute (KMM VIN)*, tworząc międzynarodowy obszar badawczy.

Udział w powyższym projekcie pozwolił mi poznać najnowsze trendy i osiągnięcia związane z wytwarzaniem, testowaniem i modelowaniem nowoczesnych materiałów wielofunkcyjnych. W ramach Sieci uczestniczyłem w cyklu dwutygodniowych szkoleń dla doktorantów z różnych krajów *Intensive Session of KMM-NoE Post-Graduate School (IPGS)*. Ponadto brałem udział w spotkaniach roboczych Sieci, w czasie których prezentowałem swoje dokonania. Dzięki cennym uwagom specjalistów w dziedzinach wytwarzania, testowania czy modelowania materiałów mogłem zweryfikować swoje osiągnięcia oraz ulepszać modele teoretyczne i numeryczne tak, aby stały się bliższe rzeczywistości. Wszystkie przykłady numeryczne prezentowane w niniejszej pracy zostały zrealizowane w ramach współpracy z Secią KMM-NoE. Modele wykonane przeze mnie były tworzone na potrzeby konkretnej konstrukcji wykonanej z konkretnego materiału. Wyniki uzyskane z symulacji numerycznych wykonanych w ramach mojej pracy naukowej znalazły częściowe zastosowanie w aplikacjach, które zostały wykorzystane przez korporacje przemysłowe współpracujące z KMM-NoE.

Kwintesencją mojej współpracy z Siecią KMM-NoE był dwumiesięczny staż zagraniczny (wrzesień – październik 2007) w firmie *Inasmet "Tecnalia"* w San Sebastian w Hiszpanii [67]. W czasie stażu miałem okazję skonfrontować moją wiedzę teoretyczną z zastosowaniem praktycznym. Moim opiekunem naukowym w Hiszpanii był doktor nauk chemicznych Pedro Egizabal, którego bardzo cenne uwagi pozwoliły mi na przystosowanie moich modeli numerycznych do zastosowań przemysłowych dla konstrukcji wykonanych z nowoczesnych materiałów wielofunkcyjnych. Ponadto mogłem obserwować proces technologiczny produkcji powyższych materiałów. Całość współpracy z Siecią KMM-NoE pozwoliła mi poznać zalety stosowania nowoczesnych materiałów kompozytowych, w szczególności materiałów gradientowych FGM i stała się motywacją do podjęcia pracy badawczej w tej dziedzinie. Owocem powyższej współpracy są przykłady zastosowań konstrukcyjnych zaprezentowane w rozdziale 6, cykl publikacji oraz udział w tworzeniu dwóch monografii. Pierwsza z nich ukazała się na początku 2008 roku [149], druga jest aktualnie wysłana do redakcji. Planowany termin publikacji to styczeń 2010 roku.

1.2 Cel i zakres pracy

Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie kompleksowego modelu fenomenologicznego, potrafiącego w poprawny sposób opisać materiały niejednorodne, w szczególności materiały gradientowe FGM oraz implementacja poprawnego modelu numerycznego opartego na metodzie elementów skończonych wykorzystującego specjalne niejednorodne elementy skończone. Charakteryzują one się istnieniem podwójnej funkcji aproksymacyjnej. Pierwsza z nich służy do przybliżenia niewiadomej funkcji i geometrii elementu dla elementów izoparametrycznych, druga natomiast interpoluje właściwości materiałowe na poziomie elementu skończonego. W ostatnim rozdziale (por. rozdział 6) opisane zostanie zastosowanie powyższego modelu teoretycznego i numerycznego do wybranych przykładów analizy konstrukcji wykonanych z materiałów gradientowych FGM.



2. AKTUALNY STAN WIEDZY

2.1 Wprowadzenie do problematyki materiałów gradientowych

Względy ekonomiczne oraz rozwój techniki zmuszają współczesnych inżynierów – konstruktorów do stosowania bardziej zaawansowanych materiałów niż dwadzieścia czy trzydzieści lat temu. Coraz szersze zastosowanie znajdują materiały kompozytowe, które charakteryzują się bardzo dobrymi właściwościami termomechanicznymi w przeciwieństwie do klasycznych materiałów powszechnie stosowanych w przemyśle.

Szczególnym przykładem kompozytów są materiały gradientowe (ang. *functionally graded materials, FGM*), charakteryzujące się ciągłą zmianą właściwości fizyko – chemicznych pomiędzy składnikami. Modelowanie tego typu materiałów wymaga uwzględnienia niejednorodności materiałowej w równaniach konstytutywnych, otwierając jednocześnie nowe możliwości w projektowaniu konstrukcji, szczególnie jeżeli do budowy modelu fizycznego zastosujemy termodynamikę procesów nieodwracalnych, która uwzględnia zmianę makrowłaściwości materiału [146, 147]. Przykład materiału gradientowego został zaprezentowany na Rys. 2.1, gdzie możemy zaobserwować warstwę interfejsu FGM, będącego ciągłym przejściem pomiędzy materiałem kompozytowym węgiel–węgiel (CFC), a miedzią.



Rysunek 2.1. Przykład zastosowania warstwy przejściowej FGM pomiędzy kompozytem węgiel – węgiel (CFC) a miedzią [161]

Obecnie materiały gradientowe są stosowane głównie w przemyśle lotniczym, kosmicznym, motoryzacyjnym oraz w elektronice (np. materiały super odporne na ciepło do stosowania w barierach termicznych, silnikach samochodowych, silnikach odrzutowych, układach scalonych pracujących w temperaturze do 2000 K). Ponadto ze względu na wysoką obojętność chemiczną i biologiczną powyższe materiały są chętnie stosowane jako implanty (Rys. 2.2). Oprócz tego ich główną zaletą jest bardzo niska gęstość (ok. 3,5 g/cm³) skutkująca małą masą konstrukcji przy bardzo dobrych właściwościach termomechanicznych [82, 161]. Niska masa konstrukcji to także niższe koszty eksploatacji. Dla przykładu, obniżenie masy samochodu 10% skutkuje zmniejszeniem ilości zużywanego paliwa, w przybliżeniu 1 litr na 100 km, a także zmniejsza emisję szkodliwych gazów do atmosfery chroniąc środowisko naturalne.



Rysunek 2.2. Zastosowanie materiałów FGM w medycynie do produkcji implantów [82]

2.2 Rys historyczny

Pierwsza wzmianka o materiałach gradientowych FGM pojawiła się w 1972 roku, w którym został przyznany patent w Stanach Zjednoczonych o numerze 3694530 pod tytułem Method of producing an integral skin polyurethane foam, w którym zostało opisane wytworzenie materiału o strukturze piankowej ze zmienną porowatością. Sam wniosek patentowy został złożony w roku 1969 [1]. W 1971 roku w MIT (Massachusetts Institute of Technology) w Bostonie ukazała się publikacja pod tytułem Preliminary work on Functionally Graded Materials (Wstępne rozważania o materiałach funkcjonalnie zmiennych) [103]. Jednak problemy związane z wytwarzaniem tego typu materiałów wstrzymały ich rozwój przez kolejne siedemnaście lat. Dopiero w 1984 roku w Japonii, w Japońskim Narodowym Laboratorium Lotniczym (Japanese National Aerospace Laboratory), została sformułowana koncepcja materiałów FGM [88, 94, 98, 168]. W następnym roku został zatwierdzony pierwszy patent dotyczący materiałów gradientowych w Japonii [103, 168]. W tym samym roku zostało otworzone pierwsze laboratorium w Szwajcarii zajmujące się koncepcją niniejszych materiałów. W roku 1986 powstały pierwsze patenty w Szwecji oraz w Niemczech. Widząc korzyści płynące z nowej technologii, Japończycy w kolejnym roku uruchamiają Pierwszy Narodowy Program Badawczy

dotyczący materiałów gradientowych. W 1990 roku odbyła się pierwsze konferencja międzynarodowa dotycząca materiałów funkcjonalnie zmiennych w Sendai, w Japonii. Trzy lata później zostaje uruchomiony w Japonii Drugi Narodowy Program Badawczy nad materiałami FGM. W 1995 roku Niemieckie Stowarzyszenie Badawcze (DFG), jako pierwsze w Europie rozpoczyna własny program badawczy zajmujący się tematyką materiałów gradientowych. Rok później, w Japonii, liczbę projektów dotyczących materiałów FGM ocenia się na sześćdziesiąt siedem. A w 1997 roku już setki laboratoriów na całym świecie pracują nad nowymi materiałami [103].

2.3 Przegląd literatury

W latach 1984-1989 w Japonii [185] rozpoczęto prace nad materiałami gradientowymi w celu zmniejszenia wpływu procesu uszkodzenia wywołanego ekstremalnymi obciążeniami termomechanicznymi. W klasyczny sposób zostało to zrealizowane poprzez wprowadzenie dodatkowej warstwy pomiędzy materiałem ceramicznym a materiałem metalicznym o grubości $10 \div 100 \mu$ m, dającej ciągłe przejście pomiędzy fazami. Później odkryto wiele technik służących do wytwarzania warstwy przejściowej FGM [92, 93, 142] (por. rozdział 3.3). W kolejnych latach N. Noda i Y. Obata [112, 113] pracowali nad zagadnieniem naprężeń termicznych w stanie nieustalonym oraz jego optymalizacją dla warstw FGM, natomiast G.N. Praveen i J.N. Reddy [126] nad nieliniową nieustaloną analizą funkcjonalnie zmiennych warstw ceramik – metal.

Materiały FGM znajdują coraz większe zastosowanie w konstrukcjach pracujących w ekstremalnych temperaturach (3500 K [143] turbiny, silniki rakietowe, części samolotów [104, 107] czy przy tworzeniu akceleratorów, pracujących w warunkach kriogenicznych – temperatura 4 K). Konieczne było sformułowanie równań pozwalających opisać powyższe materiały kompozytowe wykorzystując dostępny formalizm matematyczny. W pierwszej kolejności spróbowano opisać sposób zmiany właściwości materiałowych przy pomocy funkcji matematycznych. Okazało się, że funkcjami najlepiej oddającymi charakter zmian są funkcje potęgowe i eksponencjalne.

Wprowadzenie niejednorodności materiałowej zmusza do wprowadzenia zmian w dotychczasowych metodach analizy konstrukcji, którymi z reguły są metoda elementów skończonych MES, metoda różnic skończonych MRS czy metoda elementów brzegowych MEB. Tematyką tą zajmowali się J. Aboudi, M.J. Pindera i S.M. Arnold, którzy stworzyli dobrą, ale czasochłonną metodę zwaną *High Order Theory of FGM, HOTFGM* [3–5, 7]. Jest to metoda przystosowana do zagadnień jedno- i dwuwymiarowych kołowo – symetrycznych.

Dla zagadnień izotropowej liniowej sprężystości zastosowano prostsze podejście, używając transformaty Fouriera albo Laplace'a, która redukuje równania różniczkowe cząstkowe do układu równań całkowych, rozwiązywanych następnie metodami nume-rycznymi, np. metodą elementów skończonych. Zastosowanie klasycznej wersji elementów skończonych operującej stałymi wartościami parametrów materiałowych na poziomie elementu wymusza modelowanie konstrukcji jako ciała wielowarstwowego, co może prowadzić do nierealnych wartości naprężeń na granicach elementów. Podejście takie

zastosowali: Z.H. Jin i N. Noda [70–73], L.J. Gray, T. Kaplan, J.D. Richardson, G.H. Paulino [53, 74], K.A. Khor, Y.W. Wu [78], Y.D. Lee, F. Erdogan [90], J. Yang, K.M. Liew, S. Kitipornchai [186].

Alternatywnym podejściem jest zastosowanie elementów gradientowych (niejednorodnych). Ich szczególną cechą jest wprowadzenie dodatkowej funkcji aproksymującej na poziomie elementu, która aproksymuje właściwości materiałowe. Podejście takie wprowadzili do metody elementów skończonych J.H. Kim, G.H. Paulino i M.C. Walters [79, 80, 108, 176]. Podobne sformułowanie wykorzystał V. Sladek, J. Sladek oraz C. Zhang w metodzie elementów brzegowych [150–152]. W publikacjach G.H. Paulino [80], B.L. Wanga [177], A. Kawasaki i R. Watanabe [76] zastosowano elementy ortotropowe homogeniczne z proporcjonalnie zmiennymi właściwościami materiałowymi, natomiast N. Noda w publikacji [104] oraz S. Pitakthapanaphong w artykule [124] zastosowali elementy ortotropowe homogeniczne, ale z nieproporcjonalną zmianą właściwości materiału (por. rozdział 4.1). Bardziej zaawansowaną analizę zastosowali J. Aboudi [7] oraz M. Nematt - Alla [102] stosując zmienne parametry materiałowe w dwóch wymiarach, ograniczając się jednak tylko do homogenicznych (jednorodnych) elementów skończonych.

Szczegółowe informacje na temat materiałów gradientowych, w szczególności dotyczących ich wytwarzania, numerycznego modelowania czy zastosowania w aplikacjach można znaleźć w pracach [135, 149] oraz na stronie internetowej Sieci Doskonałości Knowledge-based Multicomponent Materials for Durable and Safe Performance KMM -NoE [82].

3. TECHNIKI WYTWARZANIA MATERIAŁÓW GRADIENTOWYCH

Każdy z procesów wytwarzania materiałów kompozytowych, a w szczególności materiałów gradientowych jest przystosowany do odpowiedniego rodzaju materiału, kształtu, rozmiaru, wartości gradientu zmian materiałowych czy mikrostruktury gradientowych komponentów. W dalszej części pragnę scharakteryzować najważniejsze techniki wytwarzania materiałów FGM, klasyfikując je ze względu na charakter i rodzaj materiału pierwotnego.

3.1 Metody technologii proszkowej

W tej części opiszę pokrótce najważniejsze metody wytwarzania wykorzystujące technologie proszkowe. Sposoby wytwarzania można podzielić na kilka kategorii: metoda upakowania suchego proszku (ang. *dry powder compaction*) [30, 103], metoda odlewania z mas lejnych i filtracji (ang. *slip casting and filtration*) [25, 95, 98, 103, 160], metoda odlewania folii (ang. *tape casting*) [33, 103, 187, 191], ale także poprzez procedury infiltracji (ang. *infiltration procedures*) [96, 98, 125] czy przygotowanie preformy ze zmienną porowatością materiału [26, 69, 98].

Dla wszystkich metod proszkowych stosowane są proszki pochodzące od metali, różnego rodzaju stopów, materiałów ceramicznych czy innego typu komponentów. Pozwalają one na stworzenia struktury gradientowej ciągłej lub zmiennej skokowo. Obecnie dostępne na rynku rozmiary cząstek proszku wahają się od kilku nanometrów po setki mikrometrów.

3.1.1 Metody wytwarzania przy pomocy suchego proszku

Metoda wytwarzania oparta na technologii suchego proszku (ang. *dry powder me-thods*) jest podstawową techniką, polegającą na przygotowaniu odpowiednio różnych mieszanek proszkowych z poszczególnych składników i nakładaniu tych mieszanek warstwami, jedna na drugiej. Minimalna grubość warstwy jaka może zostać uzyskana to 0.2 [mm] [103]. Zaczynając od sproszkowanego materiału możliwe jest uzyskanie opty-malnych warunków dotyczących odpowiedniej zmienności właściwości materiału gradientowego tak na poziome całego kompozytu, jak i na poziomie mikrostruktury (por. rys. 3.2).

Po utworzeniu warstw z materiałów sproszkowanych następuje kolejny etap technologiczny spiekania składników (ang. *sintering step*), polegający na zastosowaniu odpowiedniego pola temperatury w celu zagęszczenia odpowiednich warstw proszkowych prowadzący do powstania zmiennej struktury FGM. Czynnikami decydującymi o powstaniu materiału kompozytowego o odpowiednich właściwościach są odpowiednio długi czas konsolidacji materiału prowadzący do rozrostu ziaren oraz zastosowanie zmiennego pola temperatury (por. rys. 3.1).





Rysunek 3.2. Schematyczne przedstawienie metody wytwarzania z suchego proszku z wykorzystaniem ciśnienia [161]

Technika ta pozwala na wyprodukowanie gotowego komponentu, w którym udział poszczególnych składników materiału kompozytowego może wahać się w przedziale od 0-100% [30].

3.1.2 Metoda odlewania z mas lejnych i filtracji ciśnieniem

Metoda odlewania z mas lejnych (ang. *slip casting*) jest jedną z metod proszkowych tradycyjnie stosowaną do produkcji materiałów ceramicznych. Przykładowy komponent w oryginalnych rozmiarach został przedstawiony na rys. 3.3. W ogólności jest to metoda filtracji, w której zawiesina proszkowa jest odlewana w gipsowy odlew, skąd następnie odprowadzany jest płyn pozostawiając cząstki materiałów proszkowych na ściankach odlewu. Zmienność materiału może być kształtowana poprzez zmianę składników kompozytu lub poprzez modyfikację rozmiaru ziaren podczas odlewania. Technika filtracji ciśnieniem bazuje na tej samej zasadzie jak metoda odlewania mas z lejnych, z tą różnicą, że forma proszkowa jest tworzona w odlewie gipsowym pod ciśnieniem. W obydwu technikach konieczny jest proces konsolidacji materiału (*sintering step*), podczas którego proszki są odpowiednio zagęszczane tworząc strukturę gradientową.

Ciągła zmienność materiału kompozytowego metal – ceramik z nieliniowym profilem jest uzyskiwana poprzez dodatkowe przemieszanie komponentów w trakcie procesu sedymentacji. W powyższym procesie duże znaczenie ma różny rozmiar cząstek, gęstość i/lub lepkość masy odlewniczej [25, 160].

3.1.3 Metoda odlewania folii

Metoda odlewania folii została schematycznie przedstawiona na rys. 3.4. Masa odlewnicza (ang. *slip*) oraz mieszanina proszków jest doprowadzana poprzez podajnik na



Rysunek 3.3. Gotowy komponent wytworzony metoda odlewania mas lejnych w oryginalnych rozmiarach z formą odlewniczą [41]

taśmę z cienką warstwą folii. Minimalna grubość folii mieści się generalnie w przedziale od 25 [μ m[do 1 [mm].





Rysunek 3.4. Schemat procesu odlewania folii [172]

Rysunek 3.5. Zastosowanie metody odlewania folii w komercyjnym przemyśle [41]

Masa odlewnicza zawiera wodę, cząstki materiałów proszkowych oraz spoiwo. Całość jest osuszana tworząc tzw. "zieloną taflę" (*green body*), z której w procesie konsolidacji jest otrzymywany gotowy produkt. Na rys. 3.5 została zaprezentowana produkcja materiałów kompozytowych metodą odlewania folii w sposób komercyjny.

W przypadku materiałów FGM produkowanych tą techniką, tworzone są taśmy (folie) z różnych składników, które są następnie nakładane na siebie.

3.1.4 Proces infiltracji

Istnieje kilka rodzajów procesów infiltracji służących do produkcji materiałów gradientowych. Wszystkie zaczynają się od wytworzenia materiału porowatego, który stanowi rodzaj preformy. Technika produkcji preformy jest podobna do procesu wytwarzania przy użyciu suchego proszku z jednokierunkowym rozciąganiem i/lub izostatycznym ciśnieniem oraz z wykorzystaniem preutwardzania w celu otrzymania porowatego komponentu. Cały proces prowadzony jest dotąd, dopóki nie zostanie otrzymana struktura skokowych lub ciągłych zmian porowatości materiału. W powyższym procesie niezbędne są tzw. infiltranty, które umieszczane są w formie wstępnej i wchodzą z nią w reakcję budując kolejne warstwy materiału FGM. Profil gradientu zmian jest ograniczony ze względu na użycie gradientowej preformy.



Rysunek 3.6. Schemat procesu infiltracji wywołanej magnetohydrodynamicznym rezonansem matrycy [173]

3.1.5 Formowanie wtryskowe proszków

W produkcji seryjnej technika formowania wtryskowego proszków (ang. *powder injection molding*) jest stosowana do tworzenia zarówno metali jak i komponentów ceramicznych [24]. Odpowiedni proszek jest mieszany z organicznymi spoiwami dopóki nie zostanie uzyskana jednorodna konsystencja. Następnie powyższa mieszanka jest dostarczana do klasycznych wtryskarek używanych do produkowania komponentów polimerowych. Otrzymany w ten sposób produkt jest termicznie utwardzany. Podczas procesu nagrzewania produkt jest także pozbawiany spoiwa. W następnej kolejności wytworzony porowaty materiał poddawany jest kolejnej obróbce termicznej, zazwyczaj w temperaturze 2/3 temperatury topnienia (ang. *sintering*), prowadzącej do utwardzenia materiału poprzez zwiększenie jego gęstości. Istnieje możliwość wytworzenia gotowych elementów 3D, jednak funkcjonalna zmienność materiału jest ograniczona [56, 66, 136] (por. rys. 3.7).

3.1.6 Samopostępująca wysokotemperaturowa metoda syntezy

Samopostępująca wysokotemperaturowa metoda syntezy (ang. *Self – propagating High – temperature Synthesis – SHS*) jest metodą bazującą na bardzo gwałtownej egzotermicznej samopodtrzymującej się reakcji chemicznej, która spontanicznie propaguje się w ciele zmieniając wstępny materiał w gotowy produkt. Metoda SHS została odkryta



Rysunek 3.7. Schemat wtryskarki służącej do produkcji materiałów gradientowych metodą formowania wtryskowego proszków; A. Śrubowa, B. Tłokowa wtryskarka [41]

przez Merzhanova i jego współpracowników w latach sześćdziesiątych XX wieku. Jest bardzo atrakcyjna ze względu na bardzo krótki czas potrzebny do wytworzenia gotowego produktu (kilka sekund w porównaniu do kilkunastu godzin w przypadku innych metod). Muszą być jednak spełnione trzy podstawowe kryteria, aby reakcja mogła w ogóle zostać wywołana. Po pierwsze, proces jest silnie egzotermiczny, czyli oddający ciepło do otoczenia, temperatura może sięgać nawet do 3000 K (ilość ciepła oddawanego do otoczenia to 167 [kJ/g mol]), dlatego muszą być spełnione specjalne warunki otoczenia dające możliwość odprowadzania tak dużych ilości ciepła. W przeciwnym wypadku front reakcji może się zatrzymać przed przekształceniem całego wyrobu w gotowy produkt. Po drugie, jeden ze składników musi być w stanie płynnym lub gazowym aby mogło dojść do dyfuzji składników. Po trzecie, strumień odprowadzania ciepła musi być mniejszy niż strumień generacji ciepła.

Jedyną wadą powyższej metody jest duża porowatość otrzymanego produktu (30 – 50%) [24, 34, 159].

Największe zasługi w pracy nad wytworzeniem materiałów gradientowych metodą SHS mają Feng i Moore'a którzy odkryli następującą reakcję [40]

$$3\text{TiO}_2 + 3\text{C} + (4 + x)\text{Al} + y\text{Ni} + z\text{Al}_2\text{O}_3 = 3\text{TiC} + (2 + z)\text{Al}_2\text{O}_3 + x\text{Al}$$

lub

$$[(x+y)/2]$$
NiAl





Rysunek 3.8. Wytworzenie komponentu ceramicznego metodą SHS w CSM (fotografia zrobiona przez Johna Moore'a) [169]

gdzie x i y mogą być zmiennymi pozwalającymi wytworzyć zarówno kompozyty ceramiczne, kompozyty metaliczno – ceramiczne (ang. *metal ceramic composite*) czy kompozyty ceramiczne o właściwościach intermetalicznych.

Feng i Moore [39] odkryli także inną reakcję

$$3\text{TiO}_2 + 3\text{B}_2\text{O}_3 + (10 + x)\text{Al} = 3\text{TiB}_25\text{Al}_2\text{O}_3 + x\text{Al}$$

pozwalającą na produkowanie materiału FGM zbudowanego z czterech różnych warstw dla x = 0, 5, 10, 17.

3.2 Metody osadzania

Metody osadzania (ang. *deposition method*) służą głównie do produkcji cienkich warstw mających chronić materiał przed ekstremalnymi warunkami, takimi jak: wy-soka/niska temperatura, utlenianie czy zużycie. Głównym problemem technicznym jest odkrycie odpowiedniej metody wytwarzania pozwalającej na produkcję materiałów FGM ze zmienną mikrostrukturą materiału. W dalszej części zostaną zaprezentowane najważ-niejsze metody służące do produkcji cienkich warstw gradientowych [143].

3.2.1 Osadzanie elektrolityczne i elektroforetyczne

Osadzanie elektrolityczne i elektroforetyczne (ang. *Electrophoretic Deposition – EPD*) są bardzo atrakcyjnymi technikami służącymi do wytwarzania materiałów gradientowych FGM i są chętnie stosowane przez wiele zespołów badawczych [13, 17, 18, 20, 50, 128–132, 137, 141, 174, 175, 192].

Metoda elektroforetycznego osadzania jest procesem koloidalnym polegającym na wykorzystaniu zjawiska ruchu naładowanych cząstek fazy rozproszonej układu koloidalnego, znajdującego się w polu elektrycznym, względem fazy rozpraszającej. W przypadku zawiesin wieloskładnikowych, każdy ze składników charakteryzuje się inną ruchliwością, stąd w czasie trwania procesu, stężenie cząstek bardziej ruchliwych spada, natomiast stężenie pozostałych komponentów w zawiesinie wzrasta.

Powyższa metoda jest z reguły wykorzystywana do produkcji materiału gradientowego Cu-Ni z kontrolowaną koncentracją zmian właściwości materiału do 30% finalnego produktu (1 μ m), gdzie nakładana jest cienka warstwa sproszkowanego tlenku glinu Al₂O₃ [141].

EPD i metoda osadzania elektrolitycznego wykorzystywana jest do wytwarzania określonych ilości materiałów FGM oraz kompozytów warstwowych. Została odkryta pod koniec poprzedniego stulecia i opisana w pracy Gasika i Zhanga [50]. Dalsze badania pozwoliły na zastosowanie powyższej techniki do produkcji gradientowych materiałów ceramicznych oraz kompozytów metalowo-ceramicznych (MMC). Szczegółowy opis tej techniki przedstawili w cyklu swoich publikacji Put ze współpracownikami [128–131].

3.2.2 Powlekanie zawiesinowe

Powlekanie zawiesionowe (ang. *slurry deposition*) polega na wymieszaniu odpowiedniego materiału (materiał metaliczny, ceramiczny lub szkło) w postaci proszku z organicznym płynem aż do otrzymania zawiesiny, umieszczeniu powstałej mieszaniny w maszynie natryskującej, odparowaniu z niej płynów lub doprowadzenie do substancji o konsystencji żelowej oraz ogrzaniu do odpowiedniej temperatury do ustabilizowania struktury i zwiększenia gęstości materiału. Metoda może być stosowana zarówno do elementów wielkogabarytowych jak i do elementów o małej objętości [24].

3.2.3 Metoda osadzania warstw poprzez ablację laserową

Metoda osadzania warstw poprzez ablację laserową, w skrócie technika PLD (ang. *Pulsed Laser Deposition*), opiera się ona na procesie laserowej ablacji (utrata masy z powierzchni poruszającego się ciała na skutek parowania, tarcia, sublimacji [116]. Nanose-kundowa wiązka lasera impulsowego uderza w materiał matrycy (*substrat*) umieszczony w komorze próżniowej. W wyniku absorpcji promieniowania laserowego następuje podgrzanie, stopienie i częściowe odparowanie materiału. Powstałe pary ulegają jonizacji oraz tworzy się plazma. W plazmie powstaje fala uderzeniowa, czyli wąski obszar wysokiego ciśnienia i temperatury powstający w wyniku absorpcji promieniowania laserowego przez plazmę. W efekcie następuje ekspansja plazmy, a następnie jej rekondensacja na podłożu oraz formowanie powłoki [181].

Powyższa metoda posiada bardzo bogate opracowania teoretyczne z punktu widzenia fizyki i jest szeroko stosowana nie tylko do produkcji materiałów gradientowych, ale także do tworzenia cienkich warstw na komponentach biomedycznych lub warstw trybologicznych na metalicznych lub niemetalicznych podłożach [23, 84, 86, 87, 134].

3.2.4 Natrysk plazmą

Metoda natrysku plazmą polega na wprowadzeniu w strumień plazmy materiału w postaci sproszkowanej, gdzie następuje jego nadtopienie lub całkowite stopienie, po czym zostaje on z dużą prędkością naniesiony na podłoże (*substrat*) (rys. 3.9). Plazma termiczna jest gęstym silnie zjonizowanym gazem o bardzo wysokiej entalpii potrafiącym "przetransportować" cząstki materiału do dowolnego stopu metali czy materiału ceramicznego poprzez proces dyfuzji w wysokich temperaturach. W tradycyjnych pistoletach plazmowych plazma z cząstkami materiału jest wystrzeliwana z prędkością powyżej 200 m/s.



Rysunek 3.9. Zautomatyzowany pistolet do natrysku plazmą [170]



Rysunek 3.10. Pięciowarstwowy funkcjonalnie zmienny kompozyt ZrO₂/NiCoCrAlY wytworzony za pomocą natrysku plazmą [170]

W wyniku procesu, otrzymujemy finalny produkt zawierający podobnej wielkości ziarna bez dodatkowych kolumnowych krawędzi (rys. 3.10). Możliwa jest także nie tylko depozycja metalu, ale także stworzenie ciągłej zmiennej struktury począwszy od czystego metalu poprzez wymieszanie materiału metalicznego i materiału ceramicznego, aż do uzyskania czystego materiału ceramicznego poprzez wykorzystanie automatyzacji procesu i ciągły natrysk plazmy [54, 78, 123, 153, 183]. Jednym z głównych zastosowań

natrysku plazmą jest tworzenie tzw. warstw TBC (ang. *Thermal Barrier Coating*), których zadaniem jest ochrona materiału przed ekstremalnymi warunkami otoczenia.

3.3 Metody in-situ

3.3.1 Spiekanie laserowe

W metodzie spiekania laserowego (ang. *laser cladding*), pod wpływem działania wiązki laserowej, materiał lokalnie, powierzchniowo zmienia fazę ze stałej w ciekłą. Na tak powstały obszar materiału w fazie płynnej w sposób ciągły dostarczany jest sproszkowane zbrojenie. Następnie wiązka laserowa jest przesuwana do kolejnego punktu, a w poprzednim miejscu materiał krzepnie, wiążąc ze sobą dodane cząstki materiału wzmacniającego. W ten sposób tworzone są kolejne warstwy materiału [157]. Metoda laserowego spiekania jest bardzo wygodna w zastosowaniu ze względu na dużą automatyzację procesu oraz możliwość szerokiej kontroli procesu.

3.3.2 Formowanie natryskowe

Schemat procesu formowania natryskowego (ang. *spray forming*) został zaprezentowany na rys.3.11. W pierwszym kroku następuje atomizacja gazu argonu Ar lub azotu N₂ w celu wyprodukowania substancji natryskowej, która będzie zawierała cząstki – pastylki (*droplets*) o wymiarach 10-500 [μ m]. Następnie pastylki są natryskiwane na preformę, skąd odprowadzana zostaje w sposób powolny jakakolwiek pozostałość płynów, prowadząc do utwardzenia materiału [52].

Główną zaletą powyższej metody jest duża gęstość otrzymywanego produktu (teoretycznie do 98%) oraz duża prędkość depozycji (do 2 [kg/s]) [89]. Jako pierwsi wspomnianą metodę wykorzystali do produkcji materiału FGM na bazie miedzi, aluminium i berylu Richardson i McKechnie przy produkcji części do reaktorów [133].

3.3.3 Odlewanie odśrodkowe

Metoda odlewania odśrodkowego (ang. *centrifugal casting*) polega na wykorzystaniu sił odśrodkowych do formowania gradientu materiału kompozytowego w fazie metalicznej płynnej, zawierającego także fazę stałą. Produkcja intermetalicznych materiałów FGM może być podzielona na dwie kategorie w zależności od temperatury topnienia materiału intermetalicznego. Jeżeli temperatura topnienia będzie niższa niż temperatura procesu to siły odśrodkowe będą oddziaływały na obydwie fazy materiału i obydwie fazy będą podlegały procesowi utwardzania. Natomiast w sytuacji odwrotnej, faza intermetaliczna pozostanie w stanie stałym i siły odśrodkowe nie będą w sposób znaczny modyfikować jej podczas trwania procesu.

Powyższa metoda była szeroko dyskutowana w pracach zespołów badawczych z Japonii [100, 115, 180, 184], jednak mechanizm in-situ dla materiałów FGM nie jest jeszcze do końca dobrze poznany.



Rysunek 3.11. Schemat procesu formowania natryskowego [52]

3.4 Rapid prototyping

Komponenty używane w seryjnych produkcjach posiadają zazwyczaj skomplikowaną geometrię, dlatego ich proces wytwarzania sprzęgnięty jest zazwyczaj z komputerem za pomocą systemów CAD/CAM. Cały proces wytwarzania części, począwszy od projektu komputerowego 3D w programie CAD do wytworzenia gotowego wyrobu poprzez sprzęgnięcie maszyny wytwarzającej z komputerem przy pomocy technologii CAM, nazywany jest *Rapid Prototyping* (szybkie wykonywanie prototypów). W dzisiejszym przemyśle niezbędna jest możliwość wytwarzania komponentów w sposób seryjny ze względu na konieczność minimalizacji kosztów produkcji. Jest to najważniejszy problem nowych technologii.

3.4.1 Metoda MJS

Metoda MJS (ang. *Multiphase Jet Solidification*) była pierwszą z technik Rapid Prototyping wytwarzającą gotowy produkt [51]. W technice MJS mikstura gorących cząstek spoiwa w postaci proszku z odpowiednio dobranymi właściwościami lepkimi jest umieszczana we wtryskarce pracującej w dwóch wymiarach. W trakcie procesu chłodzenia mikstura zostaje utwardzona oraz zostaje uformowany gotowy wyrób.

3.4.2 Drukowanie 3D

Metoda drukowania 3D została wynaleziona i opatentowana przez MIT (Massachusetts Institute of Technology w Bostonie). Technologia procesu wytwarzania jest bardzo

podobna do zasady działania klasycznej domowej drukarki atramentowej. Różnica polega jedynie na tym, że nie drukujemy na płaskiej kartce papieru (2D) tylko w przestrzeni, a "atramentem" są odpowiednie cząstki materiałów (rys. 3.12. W jednym cyklu maszyna jest w stanie wytworzyć warstwę o grubości 20-200 [µm].



Rysunek 3.12. Zdjęcie maszyny służącej do drukowania 3D [82]



4. KONCEPCJA MATERIAŁU KOMPOZYTOWEGO FUNKCJONALNIE ZMIENNEGO

4.1 Główne założenia sformułowania

W najogólniejszym ujęciu, istnieją dwa podejścia do modelowania właściwości materiału gradientowego zależne od stopnia powiązania pomiędzy skalami mikro i makro.

W podejściu niepowiązanym zaniedbywany jest efekt gradientu mikrostruktury przez przyjęcie specjalnego rozkładu właściwości efektywnych, który jest albo zakładany a priori albo otrzymywany w wyniku lokalnej homogenizacji jedną z metod: Reussa lub Voigta, Mori-Tanaka czy techniką konsystentną [99]. Efekt gradientu jest zatem definiowany w analizie makroskopowej przez podanie odpowiedniej funkcji matematycznej lub w analizie numerycznej przez podanie wartości dyskretnych. Najczęściej jako funkcje reprezentujące przyjmowane są aproksymacje liniowe, kwadratowe, wielomiany kubiczne, funkcje eksponencjalne oraz schodkowe. Podejście makroskopowe jest szeroko stosowane ze wzgledu na swoją prostotę, niemniej pozostaje uproszczeniem, gdyż nie wnika w lokalną mikrostrukturę.

Z drugiej strony podejścia powiązane uwzględniają efekt zmienności mikrostruktury i nie zaniedbują wzajemnej interakcji na szczeblach lokalnym i globalnym pomiędzy różnymi fazami. Są one jednak czasochłonne i ograniczone do szczególnych rozkładów. Aboudi, Pindera i Arnold [4, 5, 7] wprowadzili teorię wyższego rzędu materiałów gradientowych nazwaną HOTFGM wiążącą bezpośrednio właściwości w skali mikro z właściwościami w skali makro. W modelu określanym jako efektywny HOTFGM, (opublikowanym przez Bansala i Pinderę [12]), uśrednione po objętości parametry używane w oryginalnym podejściu HOTFGM zostały zastąpione przez właściwości wiednione po powierzchni. Większość prac dotyczy jednak przypadku zmienności właściwości w jednym kierunku, zaś próby rozszerzenia na przypadek dwukierunkowy są bardzo rzadkie [6].

Najprostsza aproksymacja jednokierunkowej ciągłej zmienności modułu sprężystości, współczynników rozszerzalności termicznej oraz współczynników przewodności termicznej funkcjami eksponencjalnymi pochodzi od Nody i Jin [106]

$$E = E_0 e^{\beta x} \qquad \alpha = \alpha_0 e^{\gamma x} \qquad \lambda = \lambda_0 e^{\delta x} \tag{4.1}$$

W przypadku jednokierunkowo gradowanych kompozytów ceramik-metal (stop metali) bardzo często stosowana jest aproksymacja udziału objętościowego fazy metalicznej funkcją potęgową rys. 4.1

$$V_{\rm m} = \left(\frac{x}{l}\right)^m \tag{4.2}$$



Rysunek 4.1. Profile kompozytów o niejednorodności jednokierunkowej [43]

Rozważając materiał ortotropowy o zmienności gradientowej w jednym kierunku, Kim i Paulino [80] zaproponowali następującą aproksymację składowych tensora sprężystości dla przypadku płaskiego stanu naprężenia

$$E_{11}(x_1) = E_{11}^0 e^{\alpha x_1} \qquad E_{22}(x_1) = E_{22}^0 e^{\beta x_1} \qquad G_{12}(x_1) = G_{12}^0 e^{\gamma x_1} \tag{4.3}$$

gdzie E_{11}^0 , E_{22}^0 and G_{12}^0 oznaczają stałe sprężystości dla materiału jednorodnego (referencyjnego). Propozycja ta pozwala rozważać trzy przypadki szczególne:

materiał ortotropowy jednorodny: $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$

materiał ortotropowy z proporcjonalnym gradowaniem: $(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha,\alpha,\alpha)$

materiał ortotropowy z nieproporcjonalnym gradowaniem: ($\alpha \neq \beta \neq \gamma$)

Dodatkowo, w przypadku jednokierunkowej zależności od pola temperatury relacje (4.3) są uogólniane do postaci

$$E_{11}(x_1,T) = E_{11}^0(T)e^{\alpha x_1} \qquad E_{22}(x_1,T) = E_{22}^0(T)e^{\beta x_1} \qquad G_{12}(x_1,T) = G_{12}^0(T)e^{\gamma x_1}$$
(4.4)

4.2 Metody homogenizacji

Efektywne właściwości termomechaniczne niejednorodnego dwufazowego kompozytu zależą od udziału procentowego obu faz oraz od fizycznych parametrów każdego z komponentów w danej temperaturze. Najprostsza z reguł mieszania bazuje na liniowym podejściu znanym jako oszacowanie Voigta [35, 144, 163, 166]

$$\overline{P}(T, \mathbf{x}) = P_{\mathrm{A}}(T, \mathbf{x})V_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}) + P_{\mathrm{B}}(T, \mathbf{x})V_{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$$
(4.5)

Alternatywna reguła, w której właściwości efektywne podlegają średniej harmonicznej, znana jest jako oszacowanie Reussa

$$\frac{1}{\overline{P}(T,\mathbf{x})} = \frac{V_{\rm A}(\mathbf{x})}{P_{\rm A}(T,\mathbf{x})} + \frac{V_{\rm B}(\mathbf{x})}{P_{\rm B}(T,\mathbf{x})}$$
(4.6)

Jednakże, powyższe reguły znajdują ograniczone zastosowanie z uwagi na fakt, że dla udziałów objętościowych bliskich 0 lub 1 oszacowanie Voigta znacznie się różni od oszacowania Reussa. Aby wyeliminować tego typu różnice, Tomota i in. [19, 21] zaproponowali zmodyfikowaną regułę mieszania, w której używa się empirycznego współczynnika *q* charakteryzującego zależność pomiędzy jednoosiowym naprężeniem oraz odkształceniem dla obu: faz A-ceramika oraz B-metalu lub stopu metali. Efektywny moduł sprężystości jest dany następującą zależnością

$$\overline{E} = \frac{eV_{\rm m}E_{\rm m} + V_{\rm c}E_{\rm c}}{eV_{\rm m} + V_{\rm c}} \quad \text{gdzie} \qquad e = \frac{q + E_{\rm c}}{q + E_{\rm m}} \quad q = \frac{\sigma_{\rm c} - \sigma_{\rm m}}{\varepsilon_{\rm m} - \varepsilon_{\rm c}} \quad (0 < q < \infty) \quad (4.7)$$

Efektywny współczynnik przewodności cieplnej wyraża się wzorem [19, 74]

$$\bar{\lambda} = \lambda_{\rm m} + \frac{\lambda_{\rm m} V_{\rm c} (\lambda_{\rm c} - \lambda_{\rm m})}{\lambda_{\rm m} + (\lambda_{\rm m} - \lambda_{\rm c}) V_{\rm m}/3}$$
(4.8)

podczas gdy efektywny współczynnik rozszerzalności termicznej wzorem

$$\bar{\alpha} = \alpha_{\rm m} \frac{(1/\overline{K} - 1/K_{\rm m})(\alpha_{\rm c} - \alpha_{\rm m})}{1/K_{\rm m} - 1/K_{\rm c}}$$
(4.9)

natomiast efektywne moduły ściśliwości oraz ścinania wynoszą odpowiednio

$$\overline{K} = K_{\rm m} \frac{aV_{\rm c}K_{\rm m}(K_{\rm c} - K_{\rm m})}{V_{\rm m}K_{\rm c} + aV_{\rm c}K_{\rm m}} \qquad \overline{G} = G_{\rm m} + \frac{bV_{\rm c}G_{\rm m}(G_{\rm c} - G_{\rm m})}{V_{\rm m}G_{\rm c} + bV_{\rm c}G_{\rm m}}$$
(4.10)

gdzie

$$a = \frac{K_{\rm c}(3K_{\rm m} + 4G_{\rm m})}{K_{\rm m}(3K_{\rm c} + 4G_{\rm c})} \qquad b = \frac{(1+c)G_{\rm c}}{G_{\rm m} + cG_{\rm c}} \qquad c = \frac{9K_{\rm m} + 8G_{\rm m}}{6K_{\rm m}12G_{\rm m}}$$
(4.11)

W przypadku kompozytu cyrkonowo-tytanowego $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ Noda sugeruje stosowanie następujących reguł mieszania

$$\overline{E} = E_{\rm c} \left[\frac{E_{\rm c} + (E_{\rm m} - E_{\rm c})V_{\rm m}^{2/3}}{E_{\rm c} + (E_{\rm m} - E_{\rm c})(V_{\rm m}^{2/3} - V_{\rm m})} \right] \qquad \overline{\lambda} = \lambda_{\rm c} \left[1 + \frac{3(\lambda_{\rm m} - \lambda_{\rm c})V_{\rm m}}{3\lambda_{\rm c} + (\lambda_{\rm m} - \lambda_{\rm c})V_{\rm c}} \right] \overline{\alpha} = \frac{\alpha_{\rm m}V_{\rm m}E_{\rm m}/(1 - \nu_{\rm m}) + \alpha_{\rm c}V_{\rm c}E_{\rm c}/(1 - \nu_{\rm c})}{V_{\rm m}E_{\rm m}/(1 - \nu_{\rm m}) + V_{\rm c}E_{\rm c}/(1 - \nu_{\rm c})} \quad \overline{c} = \frac{c_{\rm m}\rho_{\rm m}V_{\rm m} + c_{\rm c}\rho_{\rm c}V_{\rm c}}{\rho_{\rm m}V_{\rm m} + \rho_{\rm c}V_{\rm c}}$$

$$(4.12)$$

Bazując na teorii mikromechanicznej Gasik i Lilius [49] wyprowadzają bardziej zaawansowane zależności ważne dla materiałów kompozytowych zbudowanych na bazie wolframu i miedzi

$$\overline{E} = E_{\rm Cu} \left(1 + \frac{V_{\rm w}}{\frac{E_{\rm w}}{E_{\rm w} - E_{\rm Cu}} - \sqrt[3]{V_{\rm w}}} \right) \quad \bar{\lambda} = \lambda_{\rm Cu} \left(1 + \frac{V_{\rm w}}{\frac{\lambda_{\rm w}}{E_{\rm w} - E_{\rm Cu}} - \sqrt[3]{V_{\rm w}}} \right) \quad (4.13)$$

podczas gdy dla $\bar{\alpha}$ proponowana jest bardziej skomplikowana formuła.

Omawiane dotychczas metody uśredniania nie pozwalają prawidłowo opisać kompozytu o strukturze segmentowej (por. rys. 4.2) wykazującego silne nieciągłości stałych materiałowych obu komponentów, gdzie parametr λ zaprezentowany na rys. 4.2 oznacza stały okres zmienności składników kompozytu, $\lambda > a^*$. Cykl prac Woźniaka [138, 182] został poświęcony technice modelowania tego typu klasy periodycznie zmiennych materiałów o niejednorodności zmieniającej się bardzo wolno. W pracy [63] zaprezentowano inne rozwiązanie tego problemu opartej na koncepcji metody elementów skończonych z uwzględnieniem dodatkowej materiałowej funkcji kształtu.



Rysunek 4.2. Fragment funkcjonalnie zmiennego materiału kompozytowego o strukturze periodycznej wzdłuż zmiennej ξ (Ganczarski, Hernik [63])

Autorzy pracy [97] poddali analizie cylinder grubościenny zbudowany z opisywanych powyżej materiałów funkcjonalnie zmiennych. Przedmiotem rozważań był problem przewodzenia ciepła opisany równaniem (4.21a), w którym zostały przyjęte nastepujące założenia:

— rozważany problem jest ustalony w czasie ($\frac{\partial}{\partial \tau} \equiv 0$)

— brak sprzężenia równań mechanicznych z równaniami termicznymi ($\eta = 0$)

— brak wewnętrznych źródeł ciepła (\dot{q}_v)

— konstrukcja jest kołowosymetryczna ($\frac{\partial}{\partial \phi} \equiv 0$) redukując oryginalny problem do równania

$$\nabla \left(\mathbf{k} \nabla \theta \right) = 0 \tag{4.14}$$

^{*} W prezentowanym przykładzie, ze względu na zgodność oznaczeń z cyklem artykułów Woźniaka i in., k oznacza tensor przewodności termicznej, natomiast pramater λ został zdefiniowany powyżej

Autorzy posługują się specjalną techniką uśredniania pól tensorowych [97] w następującej postaci

$$<\mathbf{H}>(\xi,\eta) = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda/2}^{-\lambda/2} \mathbf{H}(\xi+\zeta,\eta) \,\mathrm{d}\zeta$$
 (4.15)

W pierwszej kolejności pole temperatury θ jest rozkładane na część odpowiadającą za średnią wartość ϕ oraz część odpowiadającą za fluktuacje ψ

$$\theta(\xi,\eta) = \phi(\xi,\eta) + g_A(\xi,\eta)\psi_A(\xi,\eta) \tag{4.16}$$

gdzie g_A jest wektorem powiązanym ze współrzędną ξ . Podstawiając (4.16) do (4.14) otrzymujemy uśrednione sformułowanie postaci

$$\langle \operatorname{div} (\mathbf{k} \nabla \theta) \rangle (\xi, \eta) = 0$$
 (4.17a)

$$\langle g_A \operatorname{div} (\mathbf{k} \nabla \theta) \rangle (\xi, \eta) = 0$$
 (4.17b)

Uwzględniając w uśrednionych równaniach (4.17) podstawienie (4.16) mamy

$$- \left(\langle \mathbf{k} \rangle \operatorname{grad}\phi + \langle \mathbf{k} \partial g_A \rangle \psi_A + \langle \mathbf{k} g_A \rangle \partial \psi_A\right) = 0$$

$$- \partial \left(\langle g_A g_B \mathbf{k} \rangle \partial \psi_B + \langle g_A \mathbf{k} \rangle \operatorname{grad}\phi\right) + \langle \partial g_B \mathbf{k} \partial g_A \rangle \psi_B + \langle \partial g_A \mathbf{k} \rangle \operatorname{grad}\phi + \langle \partial g_A \mathbf{k} g_B - g_A \mathbf{k} \partial g_B \rangle \partial \psi_B + \partial \langle g_A \mathbf{k} \partial g_B \rangle \psi_B = 0$$

$$(4.18a)$$

$$(4.18b)$$

zawierające współczynniki o rzędzie $O(\lambda)$ lub $O(\lambda^2)$, które są ciągłe i wolno zmienne w porównaniu do oryginalnego problemu zdefiniowanego równaniem (4.14). Ostatecznie autorzy różniczkując uproszczony model redukują oryginalny problem opisany równaniem przewodnictwa typu Fouriera-Kirchhoffe'a do problemu jednorodnego, w którym istota materialnej periodyczności przejawia się jedynie poprzez uśrednioną wartość współczynnika przewodności cieplnej < k >=const

$$\nabla \left(< k > \nabla \theta \right) = 0 \tag{4.19}$$

Tego typu aproksymacja zerowego rzędu prowadzi do rozwiązania, które straciło cechy funkcjonalnej zmienności materiału gradientowego, zatem proponowane zostało zastosowanie aproksymacji wyższego rzędu opartej na funkcji trygonometrycznej

$$< k > = < k >_0 + k_f / 2 \{ 1 - \cos \left[2n\pi \left(\xi - \xi_0 \right) \right] / l \}$$
 (4.20)

Uzyskanie poprawnych wyników na gruncie MES wymaga zastosowania elementów skończonych specjalnego typu [79], dopuszczających dodatkową aproksymację właściwości materiałowych. W celu weryfikacji modelu konstrukcja została zamodelowana jako warstwowa w komercyjnym pakiecie metody elementów skończonych ANSYS (por. rys. 4.3). Zestawienie rozwiązań problemu oryginalnego (4.15) – ANSYS, uśrednionego w sensie aproksymacji (4.16) – Woźniak, oraz uśrednionego na drodze aproksymacji wyższego rzędu (4.16) – FEM na podstawie elementu Kim-Paulino zawierającego dodatkową funkcję aproksymacyjną przy warunkach brzegowych Dirichleta $\theta(x_1 = 400^{\circ}\text{C}), \ \theta(x_2 = 100^{\circ}\text{C})$ zaprezentowano na rys. 4.4.



Rysunek 4.3. Rozwiązanie problemu termicznego dla cylindra grubościennego wykonanego z warstwowego, periodycznie zmiennego materiału kompozytowego przy pomocy pakietu ANSYS (Hernik, Ganczarski [63])



Rysunek 4.4. Przykład rozwiązania problemu termicznego w ośrodku periodycznie funkcjonalnie zmiennym [62]

Na rys. 4.4 czerwona linia oznacza rozwiązanie wykonane przy pomocy pakietu ANSYS, które można uznać za bliskie rozwiązaniu analitycznemu. Zielona linia oznacza aproksymację zerowego rzędu zaproponowaną przez Woźniaka i in. [97], natomiast niebieska linia to aproksymacja wyższego rzędu zaproponowana przez Hernika i Ganczarskiego [63]. Dokładniejsza analiza pokazuje, że rozwiązanie zaproponowane przez Woźniaka i in. stanowi tylko rozwiązanie uśrednione, tracąc wszystkie właściwości materiału funkcjonalnie zmiennego. Aproksymacja wyższego rzędu zaproponowana przez autorów pracy [63] w sposób dokładniejszy aproksymuje rozwiązanie traktowane jako dokładne (ANSYS). Powyższy przykład w sposób ewidentny pokazuje zalety i zysk stosowania elementów gradientowych z podwójną funkcją aproksymacyjną.

4.3 Równania termosprężystości dla materiałów gradientowych

Typowe kompozyty funkcjonalnie gradowane to materiały charakteryzujące się z jednej strony anizotropią i z drugiej silną niejednorodnością podstawowych właściwości termomechanicznych takich jak moduły sprężystości, współczynniki rozszerzalności termicznej, współczynniki przewodności cieplnej itp. od współrzędnych materialnych oraz temperatury. Równania reprezentujące zagadnienie brzegowe termosprężystości wraz z warunkami brzegowymi wyrażone są poprzez układy równań różniczkowych cząstkowych (4.21) i (4.23) [44, 46, 110, 155]. Pierwszy z nich przedstawia zapis równań stanu mechanicznego w sformułowaniu przemieszczeniowym, natomiast drugi (4.23) opisuje stan mechaniczny w naprężeniach. W obu przypadkach układy zostały podane w dwóch równorzędnych metodach zapisu: w notacji wskaźnikowej oraz notacji absolutnej.

notacja wskaźnikowa

$$[\lambda_{ij}(x_i, T)T_{,j}(x_i, \tau)]_{,i} + \eta \dot{u}_{i,i}(x_i, T) + \dot{q}_v(x_i, T) = \varrho(T)c_v(T)\dot{T}(x_i, \tau)$$
(4.21a)

$$\begin{cases} T(x_i, \tau = 0) = T_0 \\ \lambda_{ij}(x_i, T)T_{,j}(x_i, \tau)n_j|_{\Sigma} = \beta \left(T(x_i, \tau)|_{\Sigma} - T_{\infty}\right) \end{cases}$$
(4.21b)

$$\left\{E_{ijkl}(x_i,T)\left[\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)-\alpha_{kl}(x_i,T)\theta\delta_{qq}\right]\right\}_{,j}+X_i=0$$
(4.21c)

$$\begin{cases} u_{i|_{\Sigma_{1}}} = u_{i} \\ E_{ijkl}(x_{i}, T) \left[\frac{1}{2} \left(u_{k,l} + u_{l,k} \right) - \alpha_{kl}(x_{i}, T) \theta \delta_{pq} \right] n_{j} \Big|_{\Sigma_{2}} = S_{i}^{0} \end{cases}$$
(4.21d)



- notacja absolutna

div
$$\left[\boldsymbol{\lambda}^{T}(\boldsymbol{x},T)\nabla T(\boldsymbol{x},\tau)\right] + \eta \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{u}} + \dot{q}_{v}(\boldsymbol{x},\tau) = \varrho(T)c_{v}(T)\dot{T}(\boldsymbol{x},\tau)$$
 (4.22a)

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{x}, \tau = 0) = T_0 \\ \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{x}, \tau) \nabla T(\boldsymbol{x}, \tau) \boldsymbol{n} \Big|_{\Sigma} = \beta \left(T(\boldsymbol{x}, \tau) \right|_{\Sigma} - T_{\infty} \right) \end{cases}$$
(4.22b)

div
$$\left\{ \mathbb{E}(\boldsymbol{x},T) : \left[\frac{1}{2} \left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u} \right) - \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{x},T) \boldsymbol{\theta} \right] \right\} + \boldsymbol{X} = 0$$
 (4.22c)

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{|\Sigma_1} = \boldsymbol{u}^{\circ} \\ \mathbb{E}(\boldsymbol{x}, T) \colon \left[\frac{1}{2} \left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u} \right) - \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{x}, T) \boldsymbol{\theta} \right] \boldsymbol{n} \Big|_{\Sigma_2} = \boldsymbol{S}^0 \end{cases}$$
(4.22d)

Równania (4.21a) i (4.23a) wraz z warunkami początkowo – brzegowymi są identyczne dla obu sformułowań (przemieszczeniowego i naprężeniowego), co jest oczywiste ze względu na istnienie różnorodności zapisu stanu mechanicznego, przy braku podobnego rozróżnienia w przypadku równań przewodzenia ciepła Fouriera – Kirchhoffa, które opisują stan termodynamiczny układu. W powyższych równaniach $\lambda_{ij}(\boldsymbol{x},T)$ jest tensorem o walencji II opisanym wzorem (4.35a) zawierającym współczynniki przewodności termicznej zdefiniowane dla każdego z kierunków głównych. Każda ze składowych tensora zależy od aktualnej temperatury $T(\boldsymbol{x},\tau)$, a ponadto, w przypadku materiałów gradientowych, zależy także od wektora położenia \boldsymbol{x} . Symbol $\dot{q}_v(\boldsymbol{x},T)$ oznacza wewnętrzne źródła ciepła, które także mogą być zależne od aktualnej temperatury oraz wektora położenia, $\rho(T)$ – oznacza gęstość materiału zależną od temperatury, $c_v(T)$ – ciepło właściwe przy stałej objętości, które podobnie jak i gęstość też jest funkcją aktualnej temperatury. Gdy parametr $\eta \neq 0$, następuje sprzężenie równań mechanicznych z równaniem termicznym. Powyższa sytuacja może nastąpić w przypadku, gdy w trakcie deformacji konstrukcji następuje dysypacja energii związana z powstaniem tarcia na granicach poślizgu, prowadząca do generacji ciepła i zmiany równowagi termicznej materiału. Może to nastąpić w przypadku dużych odkształceń plastycznych (uderzenia) lub w trakcie procesu uszkodzenia przy tworzeniu się mikropustek i mikropęknięć.

Ze względu na rozkład funkcji temperatury analizowany jest proces nieustalony. Dlatego konieczne jest podanie jednego warunku początkowego oraz dwóch warunków brzegowych związanych z funkcją temperatury $T(x_i, \tau)$. Pierwsze z równań układu (4.21b) lub układu (4.23b) jest warunkiem początkowym, w którym prawa strona równania reprezentuje zadana temperaturę T_0 w chwili $\tau = 0$. Drugie z równań określa warunek brzegowy III rodzaju (warunek Robbina), w którym symbol β określa współczynnik swobodnej/wymuszonej konwekcji, n_j jest wektorem normalnym skierownym na zewnątrz powierzchni Σ , który jest brzegiem obszaru. Symbol T_{∞} oznacza temperaturę odniesienia w dowolnie dalekiej odległości od źródła ciepła. W przypadku, gdy prawa strona strona równania jest równa \dot{q}_0 otrzymujemy warunek brzegowy II rodzaju (warunek von Neumana), gdzie \dot{q}_0 jest zadanym strumieniem ciepła dopływającym do obszaru lub oddawanym do otoczenia. W przypadku, gdy lewa strona równania jest równa zeru otrzymujemy warunek brzegowy I rodzaju (warunek Dirichleta), w którym zadana jest znana temperatura na brzegu obszaru Σ .

Równanie (4.21c) reprezentuje stan mechaniczny układu i jest sprzężone z równaniem przewodzenia ciepła poprzez funkcję temperatury w sformułowaniu przemieszczenio-

wym (sformułowanie Lamè). Wektor u_i oznacza szukany rozkład funkcji przemieszczenia, $E_{ijkl}(x_i, T)$ reprezentuje tensor konstytutywny o walencji IV, zależny od aktualnej temperatury oraz współrzędnych położenia, którego dokładniejsza interpretacja jest przedyskutowana w dalszej części niniejszego rozdziału. $\alpha_{ij}(x_i, T)$ jest tensorem o walencji II zawierającym współczynniki rozszerzalności termicznej, które także mogą być funkcjami temperatury i współrzędnych położenia, a szczegółowo przedstawiony równaniem (4.35b) w postaci macierzowej. Wektor X_i oznacza siły masowe. Symbol u_i^0 oznacza wektor znanych wartości przemieszczeń na wycinku brzegu Σ_1 , natomiast wektor S_i^0 reprezentuje zadane obciążenia powierzchniowe na wycinku brzegu Σ_2 . $\theta = T(x_i, \tau) - T_{ref}$ jest różnicą temperatur, gdzie T_{ref} jest zadaną temperaturą odniesienia.

notacja wskaźnikowa

$$[\lambda_{ij}(x_i, T)T_{,j}(x_i, \tau)]_{,i} + \eta \dot{u}_{i,i}(x_i, T) + \dot{q}_v(x_i, T) = \varrho(T)c_v(T)\dot{T}(x_i, \tau)$$
(4.23a)

$$\begin{cases} T(x_i, \tau = 0) = T_0 \\ \lambda_{ij}(x_i, T)T_{,j}(x_i, \tau)n_j|_{\Sigma} = \beta \left(T(x_i, \tau)|_{\Sigma} - T_{\infty}\right) \end{cases}$$
(4.23b)

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} \left[E_{knpq}^{-1}(x_i, T)\sigma_{pq} + \alpha_{kn}(x_i, T)\theta\delta_{rr} \right]_{lm} = 0$$
(4.23c)

$$\sigma_{ij}n_j|_{\Sigma} = S_i^0 \tag{4.23d}$$

- notacja absolutna

div
$$[\boldsymbol{\lambda}^{T}(\boldsymbol{x},T)\nabla T(\boldsymbol{x},\tau)] + \eta \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{u}} + \dot{q}_{v}(\boldsymbol{x},\tau) = \varrho(T)c_{v}(T)\dot{T}(\boldsymbol{x},\tau)$$
 (4.24a)

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{x},\tau=0) = T_0 \\ \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{x},T) \nabla T(\boldsymbol{x},\tau) \boldsymbol{n} \Big|_{\Sigma} = \beta \left(T(\boldsymbol{x},\tau) \Big|_{\Sigma} - T_{\infty} \right) \end{cases}$$
(4.24b)

$$\nabla^2 \left\{ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left[\mathbb{E}^{-1}(\boldsymbol{x}, T) : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{x}, T) \boldsymbol{\theta} \right] \right\} = 0$$
(4.24c)

$$\{ \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n}|_{\Sigma} = \boldsymbol{S}^0 \tag{4.24d}$$

Równanie (4.23c) opisuje stan mechaniczny układu sprzężonego ze stanem termicznym poprzez funkcję rozkładu temperatury $T(x_i, \tau)$ w sformułowaniu naprężeniowym (sformułowanie Beltramiego – Michella), gdzie wielkość ϵ_{ijk} oznacza symbol permutacyjny Levi-Civity [155]. Oznaczenia pozostałych wielkości są identyczne, jak w przypadku sformułowania przemieszczeniowego.

Jeżeli przyjmiemy, że materiał jest izotropowy i jednorodny, to wtedy możemy zapisać prawo konstytutywne możemy zapisać za pomocą związków Duhamela – Nuemanna

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} - \alpha \theta\right) \delta_{ij} \tag{4.25}$$

Wykonując odpowiednie różniczkowania oraz przemnażając odpowiednie człony przez tensory Levi-Civita, a następnie wykorzystując równanie równowagi

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \tag{4.26}$$

otrzymamy znane z literatury [44, 110] równania Beltramiego - Michella postaci

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} X_{k,k} - (X_{i,j} + X_{j,i})$$
(4.27)



w którym pojawiają się odpowiednie pochodne po jednostkowych siłach masowych.

W przypadku materiału gradientowego (niejednorodnego) ortotropowego czy anizotropowego dekompozycja prawa konstytutywnego na człony odpowiadające za czystą zmianę postaci oraz czystą zmianę objętości nie jest możliwy. Ponadto, ze względu na anizotropowe właściwości materiału niemożliwe jest skorzystanie z pewnych klas symetrii tensora konstytutywnego, co powoduje brak możliwości wykorzystania równania równowagi w celu wyrugowania pewnych członów równania związanych z naprężeniami ze znakiem minus. Stąd w powyższym zapisie brak członów reprezentujacych odpowiednie pochodne po jednostkowych siłach masowych.

Warto jeszcze dodać, że w przypadku klasycznych sformułowaniach termosprężystości moduły konstytutywne λ_{ij} , α_{ij} , E_{ijkl} można wyłączyć przed operatory pola, ponieważ składowe tych tensorów są zależne tylko od aktualnej temperatury. W przypadku materiałów gradientowych (niejednorodnych) taka operacja jest niedozwolona ze względu na zależność powyższych tensorów od współrzędnych przestrzeni. Wskutek tego istnieje konieczność przeformułowania równań konstytutywnych, w których konieczne jest uwzględnienie gradientów modułów konstytutywnych.

4.3.1 Identyfikacja modułów konstytutywnych dla termosprężystości

Sprężysty tensor sztywności E_{ijkl} o walencji IV (lub sprężysta macierz sztywnosci \mathbb{E}) czy sprężysty tensor podatności C_{ijkl} (lub sprężysta macierz podatności \mathbb{C}) definiują właściwości materiałowe stanu mechanicznego, gdzie została przyjęta definicja $E_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$. W przypadku pełnej anizotropii materiału reprezentacja tensora konstytutywnego (lub macierzy) zależy od przyjętego układu współrzędnych. W przypadku, gdy tensory odkształcenia i naprężenia są symetryczne, tensor konstytutywny musi posiadać klasy symetrii ($C_{ijkl} = C_{jikl}, C_{ijkl} = C_{ijlk}, C_{ijkl} = C_{klij}$) i może być zredukowany do macierzy o wymiarach 6 × 6, jednak ilość niezależnych elementów macierzy wynosi 21 [148].

W przypadku zastosowania zapisu wektorowo-macierzowego otrzymujemy [91]

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{xz}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{yz(x)}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{zx(x)}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{xy(x)}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{xy(x)}}{E_{xx}} \\ \frac{1}{E_{yy}} & -\frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{yz(y)}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{zx(y)}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{xy(y)}}{E_{yy}} \\ & & \frac{1}{E_{zz}} & \frac{\eta_{yz(z)}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{zx(z)}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{xy(z)}}{E_{zz}} \\ & & & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\eta_{zx(yz)}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{xy(yz)}}{G_{yz}} \\ & & & & \frac{1}{G_{xx}} & \frac{\eta_{xy(x)}}{G_{xx}} \\ & & & & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \end{cases} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$
(4.28)

W przypadku sprężystej ortotropii zakładamy, że istnieją trzy kierunki główne (1, 2, 3) definiujące trzy charakterystyczne płaszczyzny w materiale. W takim przypadku ilość

niezależnych składowych macierzy sprężystej redukuje się do 9 [64]

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_3} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{array} \right\}$$
(4.29)

gdzie zostały uwzględnione dodatkowe warunki postaci

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1} \qquad \frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3} \qquad \frac{\nu_{32}}{E_2} = \frac{\nu_{23}}{E_3}$$
(4.30)

W przypadku pełnej ortotropii zdefiniowanej poprzez macierz podatności, powyższe równanie można zapisać w równoważnej formie jako

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{23} & 0 & 0 \\ & & & & G_{13} & 0 \\ & & & & & G_{12} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{cases}$$
(4.31)

z podstawieniem

$$\Delta = 1 - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{13}\nu_{32}$$
(4.32)

oraz

$$E_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta}E_1 \quad E_{12} = \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{\Delta}E_1 \quad E_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta}E_1 \quad (4.33)$$
$$E_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta}E_2 \quad E_{23} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta}E_3 \quad E_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta}E_3$$

gdzie macierz \mathbb{E} posiada symetrię $E_{ij} = E_{ji}$. Ilość niezależnych składowych macierzy konstytutywnej w przypadku ortotropii wynosi 9, wśród których są trzy podłużne moduły (Younga) E_1 , E_2 oraz E_3 , trzy moduły ścinania (Kirchhoffa) G_{12} , G_{13} oraz G_{23} oraz trzy współczynniki Poissona ν_{12} , ν_{13} and ν_{23} .

W przypadku, gdy właściwości ortotropwego materiału zależą od temperatury, odkształcenia termiczne są proporcjonalne do temperatury w następujący sposób

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_{22}^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_{33}^{\mathrm{T}} \end{cases} = \begin{cases} \alpha_{11}\Delta T \\ \alpha_{22}\Delta T \\ \alpha_{33}\Delta T \end{cases}$$
 (4.34)



Poprzeczne odkształcenia termiczne nie mogą zależeć od temperatury, ponieważ w sytuacji występowania jedynie pola temperatury traktowanego jako obciążenia zewnętrznego, nie powstają odkształcenia postaciowe [148].

Odpowiednie moduły termiczne w reprezentacji macierzowej dla pełnej ortotropii materiału można przedstawić w następujący sposób

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & & \\ & \lambda_{22} & \\ & & \lambda_{33} \end{bmatrix}$$
(4.35a)
$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & & \\ & \alpha_{22} & \\ & & & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$
(4.35b)

W przypadku materiałów gradientowych naturalnym opisem na gruncie teorii sprężystości jest model ośrodka ortotropowego, ze wzgledu na odmienne właściwości materiału dla kierunku zgodnego z włóknami i dla kierunku prostopadłego do nich.

4.4 Sposoby rozwiązywania równań termosprężystości

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego zdefiniowanego poprzez układ równań (4.21) czy (4.23) jest niezwykle trudne. Próby takie były podejmowane przez Ganczarskiego [46] czy Cegielskiego [16], jednak w przypadku pewnej klasy zagadnień istnieje możliwość uproszczenia modelu mechanicznego.

Pierwszym z uproszczeń jest sformułowanie, które Kączkowski nazywa teorią płyt średniej grubości w której uwzgledniony jest wpływ sił poprzecznych na ugięcia płyty [85], natomiast w literaturze znana jest także pod nazwą teorii Reissnera [111]. Reissner przyjął następujace założenia:

- element prosty i normalny do powierzchni środkowej przed deformacją pozostaje prosty lecz niekoniecznie normalny po deformacji,
- brak wydłużalności elementu normalnego do powierzchni środkowej ($\frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0$),
- składowe σ_z oraz τ_{zi} przyjmują nastepujacą postać

$$\sigma_z = -\frac{3q_z}{4} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right]$$

$$\tau_{zi} = \frac{3Q_i}{2h} \left[1 - 4\left(\frac{z}{h}\right)^2 \right], \qquad i = x, y$$

gdzie Q_i jest wektorem sił poprzecznych, natomiast q_z jest obciążeniem zewnętrznym w kierunku współrzędnej z.

Biorąc pod uwagę powyższe założenia można sformułować równania stanu tarczowego w przemieszczeniach ze zmienną sztywnością oraz uwzglednieniem członów termicznych w następującej postaci

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{B} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\nu \left(1 + \nu \right)}{2E} q_z \right) \right] + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mathcal{B} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + q_x =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{B} \alpha \Delta T \right)$$

$$\frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{B} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mathcal{B} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\nu \left(1 + \nu \right)}{2E} q_z \right) \right] + q_y =$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{B} \alpha \Delta T \right)$$
(4.36b)

Równanie stanu giętnego z uwzglednieniem wpływu sił tarczowych (tzw. równania typu Brayana) można przedstawić jako [85, 111]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\mathcal{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\mathcal{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + 2 \left(1 - \nu \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\mathcal{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q_z - \frac{h^2}{10} \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \nabla^2 q_z - \nabla^2 \left[\mathcal{D} \left(1 + \nu \right) \alpha \frac{\Delta T}{h} \right]$$

$$(4.37)$$

W przypadku, gdy sztywność płytowa D jest liniową funkcją współrzędnych x, y wtedy równanie (4.37) przyjmuje postać

$$\nabla^{2} \left(D \nabla^{2} w \right) + N_{x} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + 2N_{xy} \frac{\partial^{2}}{\partial x \partial y} + N_{y} \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} = q_{z} - \frac{h^{2}}{10} \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \nabla^{2} q_{z} - \nabla^{2} \left[\mathcal{D} \left(1 + \nu \right) \alpha \frac{\Delta T}{h} \right]$$

$$(4.38)$$

4.4.1 Równania termosprężystości niejednorodnej cienkiej obrotowo – symetrycznej płyto – tarczy Kirchhoffa – Love'a

Wprowadzając układ współrzędnych walcowych o początku w środku tarczy, formułujemy zadanie przy następujących założeniach:

- obciążenia są zredukowane do powierzchni środkowej,
- przemieszczenia warstwy środkowej są małe w stosunku do grubości płyty, ale odchodzi się od zasady zesztywnienia,
- całkowite odkształcenie jest sumą odkształceń sprężystych, podlegających prawu Hooke'a oraz odkształceń termicznych: $\varepsilon_{r/\varphi} = \varepsilon_{r/\varphi}^e + \alpha T$,
- w płycie panuje płaski stan naprężenia.

W modelu płyto – tarczy Kirchhoffa – Love'a zakłada się, że wszystkie obciążenia są redukowane do powierzchni środkowej redukując w ten sposób analizowany problem 3D do problemu 2D (brak grubości). Pociąga to za sobą pewne konskwencje. W pierwszej kolejności, w przypadku materiałów gradientowych, oprócz zmiany właściwości materiałowych w kierunku promieniowym, korzystne by było wprowadzenie także zmienności w kierunku osiowym. Przyjęcie modelu Kirchhoffa – Love'a uniemożliwia takie podejście. Kolejną konsekwencją są warunki brzegowe, które formułowane są tylko dla powierzchni środkowej wprowadzając w ten sposób pewne ograniczenia.
Model matematyczny niejednorodnej cienkiej obrotowo – symetrycznej płyto – tarczy

Jako model matematyczny opisujący płyto – tarczę Kirchhoffa – Love'a zostało przyjęte sformułowanie przemieszczeniowe (kinematyczne). W przypadku równania Fouriera – Kirchhoffa (4.21a) przyjmowane jest założenie, że nie istnieje sprzężenie równań mechanicznych z równaniami termicznymi ($\eta = 0$).

Kolejne równania zostaną sformułowane przy założeniach podanych wcześniej przez autora oraz w oparciu o hipotezy Kirchhoffa – Love'a, które najkrócej można wyrazić w następujący sposób:

- 1. Odcinek prostoliniowy, prostopadły do nieodkształconej powierzchni środkowej pozostaje prostoliniowy, niewydłużalny i prostopadły do powierzchni środkowej po deformacji (por. rys. 4.5),
- 2. Naprężenie σ_z jest małe w porównaniu z pozostałymi składowymi tensora naprężenia w szczególności $\sigma_z \ll \sigma_x$ i $\sigma_z \ll \sigma_y$, że można je pominąć w związkach fizycznych, tzn.: $\sigma_z(\xi_1, \xi_2, z) \equiv 0$ [179].



Rysunek 4.5. Charakterystyczne wymiary zwiazane z powierzchnią środkową [179]

Zastosowanie hipotezy Kirchhoffa – Love'a prowadzi do tożsamości $q_z \equiv 0$ dla stanu tarczowego oraz $\nabla^2 q_z \equiv 0$ dla stanu gietnego. Uwzględniając powyższe założenia w równaniach (4.36), (4.37) oraz zamieniając współrzędne układu kartezjańskiego na układ cylindryczny otrzymujemy równania płyto – tarczy Kirchhoffa – Love'a w następującej postaci:

— dwa równania stanu tarczowego w sformułowaniu przemieszczeniowym [111, 179]

$$\mathcal{B}\overline{\nabla}_{1}^{2}u + \frac{\mathrm{d}\mathcal{B}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{u}{r}\right) + q_{r}h = (1+\nu)\,\alpha\left[\mathcal{B}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{B}}{\mathrm{d}r}\left(T(r,\tau) - T_{\mathrm{ref}}\right)\right]$$

(4.39a)

$$\frac{1-\nu}{2}\mathcal{B}\overline{\nabla}_{1}^{2}v + \frac{1-\nu}{2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{B}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} - \frac{v}{r}\right) + q_{\varphi}h = 0$$
(4.39b)



 równanie stanu giętnego z uwzględnieniem wpływu sił tarczowych (równanie typu Brayan'a) [154]

$$\mathcal{D}\nabla^{4}w + \frac{\mathrm{d}\mathcal{D}}{\mathrm{d}r}\left(2\frac{\partial^{3}w}{\partial r^{3}} + \frac{2+\nu}{r}\frac{\partial^{2}w}{\partial r^{2}} - \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^{2}}\frac{\partial^{3}w}{\partial r\partial\varphi^{2}} - \frac{3}{r^{3}}\frac{\partial^{2}w}{\partial\varphi^{2}}\right) + \frac{\mathrm{d}^{2}\mathcal{D}}{\mathrm{d}r^{2}}\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial r^{2}} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^{2}}\frac{\partial^{2}w}{\partial\varphi^{2}}\right) - \frac{1}{\Lambda}\left[N_{r}\frac{\partial^{2}w}{\partial r^{2}} + N_{\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}w}{\partial\varphi^{2}}\right) - 2N_{r\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^{2}w}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) + q_{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{q_{\varphi}}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right] - q_{z} = 0$$

$$(4.40)$$

gdzie jednostkowe siły masowe wyrażone są nastepującymi wzorami

$$q_r = \varrho \omega^2 r, \qquad q_\varphi = \varrho \varepsilon r$$

$$\tag{4.41}$$

operator różniczkowy jest równy

$$\overline{\nabla}_{1}^{2} = ()'' + ()' / r - () / r^{2}$$
(4.42)

natomiast symbol \mathcal{B} oznacza sztywność tarczową, a symbol \mathcal{D} oznacza sztywność płytową, które są wyrażone nastepującymi wzorami

$$\mathcal{B} = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \qquad \mathcal{D} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$
 (4.43)

Równanie stanu giętnego (4.40) jest równaniem różniczkowym cząstkowym IV rzędu, aby zamienić je na układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych wystarczy zastosować podstawienie Fedehofera – Eggera [38]

$$w(r,\varphi) = w_1(r)\sin(k\varphi) + w_2(r)\cos(k\varphi)$$

co w konsekwencji prowadzi do układu dwóch równań na nieznane funkcje przemieszczeń osiowych $w_1(r)$ i $w_2(r)$

$$\overline{\nabla}_{k}^{2} \left(\mathcal{D}\overline{\nabla}_{k}^{2} w_{1/2} \right) - \frac{1}{\Lambda} \left[N_{r} \frac{\mathrm{d}^{2} w_{1/2}}{\mathrm{d}r^{2}} + \frac{N_{\varphi}}{r} \left(\frac{w_{1/2}}{r} - \frac{k^{2}}{r} w_{1/2} \right) \right]$$

$$\mp \frac{2k N_{r\varphi}}{r} \left(\frac{\mathrm{d}w_{2/1}}{\mathrm{d}r} - \frac{w_{2/1}}{r} \right) - q_{r} h \frac{w_{1/2}}{r} \pm q_{\varphi} h \frac{k}{r} w_{2/1} - q_{z} = 0, \qquad (4.44)$$

w którym k oznacza numer kolejnego modu wyboczeniowego występujący również w definicji operatora różniczkowego będącego uogólnieniem (4.42)

$$\overline{\nabla}_{k}^{2} = \left(\right)'' + \left(\right)'/r - k^{2}\left(\right)/r^{2}$$
(4.45)

Układ równań ((4.21a), (4.39), (4.44)) opisuje zagadnienie utraty stateczności płyto – tarczy Kirchhoff'a – Love'a, gdzie $1/\Lambda$ oznacza mnożnik Lagrange'a dla zespołu obciążeń. W przypadku analizy stateczności konstrukcji poddanej działaniu zespołu n niezależnych obciążeń konserwatywnych, wystąpienie stanu krytycznego warunkowane jest spełnieniem przybliżonej zależności Schaefera – Papkowicza

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{P_{i\mathbf{k}\mathbf{r}}} = \Lambda = 1 \tag{4.46}$$



4.4.2 Równania termosprężystej powłoki cylindrycznej wykonanej z materiału gradientowego podlegającej procesowi zużycia

Rozważana jest powłoka cylindryczna przy wcześniejszych założeniach (por. rozdział 4.4.1) oraz dodatkowych, sformułowanych następująco:

- obciążenia masowe i ciśnienie są stałe na obwodzie, a więc kołowosymetryczne i mogą być zmienne wzdłuż tworzącej, obciążenia te sprowadza się do warstwy środkowej, która jest powierzchnią cylindryczną o promieniu R,
- przemieszczenia promieniowe są niewielkie w porównaniu z grubością h,
- powłoka jest nagrzana, a temperatura zmienia się na grubościach h i wzdłuż osi x, spełniając warunek osiowej symetrii,
- pomija się niewielki wpływ sił osiowych na momenty gnące w powłoce,
- E, ν, α nie zależą od temperatury.



Rysunek 4.6. Powłoka cylindryczna w stanie giętnym: a. geometria, b. siły wewnętrzne, c. przebiegi naprężeń, d. odkształcenia warstwy środkowej [194]

Równanie mechaniczne powłoki cylindrycznej w stanie giętnym wyrażone w przemieszczeniach

Niech na powłokę działają ciśnienie p_n , siły styczne do powierzchni środkowej o natężeniu p_s oraz siły masowe o zmiennym natężeniu $p_m = \rho \omega^2 h R$ wzdłuż osi x. Na ścianki elementu wyciętego z powłoki, rys. 4.6b, działają siły przekrojowe wzdłużne n, obwodowe t, poprzeczne q i momenty gnące m_t wzdłuż tworzącej oraz obwodowe m_x , wszystkie odniesione do jednostki długości przekroju. Przy takich założeniach równania równowagi wewnętrznej powłoki prowadzą do układu trzech równań różniczkowych

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} + p_s = 0 \tag{4.47a}$$

$$\frac{dq}{dx} + \frac{t}{R} - (p_n + p_m) = 0$$
 (4.47b)

$$\frac{\mathrm{d}m_x}{\mathrm{d}x} + q = 0 \tag{4.47c}$$

Symbol w(x) oznacza przemieszczenie promieniowe punktu A warstwy środkowej, rys. 4.6d, w odległości x od początku układu współrzędnych wprowadzonych w przekroju początkowym, wtedy pochodna $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ wobec małych ugięć jest w przybliżeniu kątem ϑ nachylenia stycznej do krzywej w punkcie A_1 . Ze względu na kołową symetrię tensor odkształcenia posiada dwie składowe niezerowe, odkształcenie wzdłużne i obwodowe, a równania Couchy'ego przedstawiają się następująco

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + y \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x} = \varepsilon_0 + y \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}$$
 (4.48a)

$$\varepsilon_t = \frac{w}{R} \tag{4.48b}$$

Uwzględniając nagrzanie powłoki ($T \neq 0$), zmianę grubości ścianki (h = h(x, N)) oraz założenie, że moduł Younga E, współczynnik Poissona ν oraz współczynnik rozsze-rzalności termicznej α są stałe, z uogólnionego prawa Hooke'a otrzymujemy związki na naprężenia

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_0 + y \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + \nu \frac{w}{R} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} T(x,y)$$
(4.49a)

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\nu \varepsilon_0 + \nu y \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{w}{R} \right) - \frac{E\alpha}{1 - \nu} T(x, y)$$
(4.49b)

Działania powyższych naprężeń sprowadzają się do sił przekrojowych wzdłużnych i obwodowych

$$n = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dy, \qquad t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t dy$$
(4.50)

oraz momentów gnących

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y \mathrm{d}y, \qquad m_t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t y \mathrm{d}y$$
 (4.51)

Zakładając brak sił osiowych $n \equiv 0$ oraz wstawiając równania fizyczne (4.49) wyrażone w przemieszczeniach poprzez równania geometryczne (4.48) do równań równowagi wewnętrznej (4.47) otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left[\mathcal{D}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} - \alpha \frac{T}{h}\right) \right] + \frac{Eh}{R^2} w = p + \frac{Eh\alpha T_x}{R} - \frac{n\nu}{R}$$
(4.52)



4.4.3 Proces zużycia konstrukcji

Proces zużycia może być klasyfikowany według różnych kryteriów. W najprostszym ujęciu jest to proces polegający na usuwaniu cienkiej warstwy materiału z powierzchni [140]. Z powyższej definicji wynika, że jest to zjawisko lokalne i w bardzo dużym stopniu zależy od struktury, typu materiału czy jakości wykonania warstwy powierzchniowej. W szczególności zjawisko zużycia można opisać jako zmianę prędkości usuwania materiału na jednostkowy dystans poślizgu, która musi być funkcją objętości dostępnego materiału w otoczeniu połączenia materiałów. Powyższą definicję można matematycznie zapisać jako

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = -nV \tag{4.53}$$

gdzie V oznacza objętość materiału, S jest dystansem poślizgu, a n jest stałą, która opisuje obciążenia zewnętrzne przyłożone do konstrukcji. Minus oznacza, że objętość materiału ulega zmniejszeniu wraz ze wzrostem dystansu poślizgu [140].

Holm [65] zaproponował podejście, w którym w trakcie poślizgu atomy kontaktują się ze sobą powodując usuwanie atomów z powierzchni, prowadząc do straty objętości materiału. Można to wyrazić przy pomocy następującego równania

$$V = ZA_t S \tag{4.54}$$

gdzie A_t oznacza powierzchnię kontaktową, natomiast Z jest liczbą atomów usuwanych w przy pojedyńczym kontakcie. Powierzchnię kontaku można opisać jako

$$A_t = \frac{L}{\sigma_y} \tag{4.55}$$

gdzie L jest przyłożonym obciążeniem, a σ_y jest granicą plastyczności materiału.

Burwell i Strang [15] przeprowadzili testy weryfikujące równanie Holma (4.54). Test polegał na umieszczeniu mosiężnego stożka na stalowej, obracającej się tarczy i zbadaniu jaka ilość materiału zostanie usunięta, tzw. "*pin-on-disk test*". Burwell i Strang zaobserwowali, że ilość usuniętego materiału (prędkość zużycia) jest proporcjonalna do wielkości obciążenia normalnego dopóki nie zostanie osiągnięta granica plastyczności w materiale stożka.

Uwzględniając powyższe wnioski, Burwell i Strang sformułowali zmodyfikowane prawo zużycia, zastępując Z w równaniu (4.54) wielkością β_1 , która oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia procesu zużycia przy jednym kontakcie. Można to zapisać w następującej postaci

$$V = \beta_1 \frac{L}{\sigma_y} S \tag{4.56}$$

Alternatywne podejście zaproponował Archard [9]. Analizując dwie płaskie szorstkie powierzchnie stykające się ze sobą i prowadzące lokalnie do powstania efektu plastycznego płynięcia, ze względu na dużą koncentrację naprężeń w tym miejscu. Przy najmniejszym możliwym obciążeniu powodującym kontakt, powierzchnie stykają się ze sobą tylko w trzech punktach. Gdy obciążenie zewnętrzne wzrasta, kontakt pomiędzy powierzchniami też staje się większy, wtedy sprzężenie pomiędzy powierzchniami wzrasta oraz szczelina pomiędzy nimi ulega pomniejszeniu, w konsekwencji zwiększając powierzchnię kontaktu.

W ten sposób teoria usuwania pojedyńczych atomów została zastąpiona przez założenie, że zużycie powoduje usuwanie części materiału z powierzchni. Zakładając, że usunięta część materiału będzie miała kształt półkuli o średnim wymiarze średnicy 2r, powierzchnię kontaku można opisać wzorem

$$A_t = n\pi r^2 = \frac{L}{\sigma_y}$$

W ten sposób otrzymujemy prawo zużycia opisane następującym wzorem

$$n = \frac{A_t}{\pi r^2} = \frac{L}{\sigma_t \pi r^2} \tag{4.57}$$

Dla połączeń w kształcie okręgu o nominalnym wymiarze równym 2r, w których przesunięcie prowadzące do zniszczenia jednej spoiny przy stycznym obciążeniu także równe jest 2r, poziom chropowatości powierzchni można określić jako n. Chropowatość jako miarę przypadającą na jednostkowy dystans poślizgu można opisać wzorem

$$n_u = \frac{n}{2r}$$

oraz wykorzystując wzór (4.57) możemy miarę chropowatości wyrazić jako

$$n_u = \frac{L}{2\sigma_t \pi r^3} \tag{4.58}$$

Założyliśmy ponadto, że istnieje prawdopodobieństwo β , że dla n_u spoin przypadających na jednostkowy dystans poślizgu, określona wielkość materiału zostanie usunięta. Zakładając, że dystans poślizgu *d* może być duży, oraz oznaczając całkowitą objętość materiału, który został usunięty przez *V*, prędkość zużycia przypadającą na jednostkowy dystans poślizgu można wyrazić przy pomocy następującej formuły

$$V = \beta n_u S \frac{2}{3} \pi r^3 \tag{4.59}$$

gdzie $\frac{2}{3}\pi r^3$ jest objętością oderwanego fragmentu materiału w kształcie półkuli. Podstawiajac następnie za n_u z równania (4.58) otrzymujemy

$$V = \beta \frac{L}{3\sigma_y} S \tag{4.60}$$

W równaniu (4.60) mianownik może być wyrażony poprzez wielkość reprezentującą lokalną twardość H materiału.

Rówanie (4.60) jest powszechnie znanym prawem Archarda dotyczącym zużycia materiałów [9].

4.5 Identyfikacja stałych materiałowych w funkcji temperatury w oparciu o istniejące wyniki doświadczeń

Typowe system TBC (ang. *thermal barrier coating*) zawiera materiał ceramiczny (np. związki cyrkonu lub matariały mulitowe) oddzielone warstwą materiału gradientowego FGM (np. intermetalik) od matrycy (np. stopy stali, niklu, tytanu).

Jednym z przykładowych materiałów kompozytowych stosowanych do systemów TBC jest materiał gradientowy, w którym rolę materiału ceramicznego pełni tlenek cyrkonu ZrO₂, a matrycą jest stop tytanu Ti6Al4V, którego właściwości zostały szczegółowo przedstawione w tabeli 4.1 (Fujimoto i Noda [43], Ootao i in. [118], Noda i in. [105]).

Tablica 4.1. Właściwości stopu cyrkon-tytan w temperaturze pokojowej (Fujimoto i Noda [43], Ootao i in. [118], Noda i in. [105])

skład kompozytu		E [GPa]	$\alpha \ [10^{-6} \ 1/K]$	λ [W/mK]	c [J/kgK]
ceramik oparty	A,C	117.0	7.11	2.036	615.6
na cyrkonie	В	119.1	8.14	1.78	445.0
stop tytanu	A,C	66.2	10.3	18.1	808.3
Ti-6Al-4V	В	107.3	8.91	5.74	526.0

Większość z najważniejszych właściwości termomechanicznych takich jak: moduł sprężystości, współczynniki przewodności oraz rozszerzalności cieplnej, ciepło właściwe są silne zależne od temperatury. Natomiast zależność od temperatury takich wielkości jak: gęstość masy czy współczynnik Poissona nie jest istotna i z reguły bywa pomijana.

Parametry materiałowe kompozytu zaprezentowanego szczegółowo powyżej także zależą od temperatury. Szczegółowe wzory (4.61) wyznaczone eksperymentalnie podaje Ootao i in. [118], które mogą być stosowane w przedziale temperatur $300K \leq T \leq 1300K$. Reprezentacja wzorów (4.61) w postaci graficznej została zaprezentowana na rys. 4.7 oraz 4.8

ceramik – tlenek cyrkonu ZrO₂ (rys. 4.7)

$$E_{\rm c} = 132.2 - 50.3 \cdot 10^{-3}T - 8.1 \cdot 10^{-6}T^2 \,[{\rm GPa}] \tag{4.61a}$$

$$\alpha_{\rm c} = 13.3 \cdot 10^{-6} - 18.9 \cdot 10^{-9} T + 12.7 \cdot 10^{-12} T^2 [1/\text{K}]$$
(4.61b)

$$\lambda_{\rm c} = 1.71 + 0.21 \cdot 10^{-3}T + 0.116 \cdot 10^{-6}T^2 \,[{\rm W/mK}]$$
(4.61c)

$$c_{\rm c} = 2.74 \cdot 10^2 + 7.95 \cdot 10^{-1} x - 6.19 \cdot 10^{-4} T^2 + 1.71 \cdot 10^{-7} T^3 \left[\text{J/kgK} \right]$$
(4.61d)



Rysunek 4.7. Zależność właściwości materiałowych tlenku cyrkonu od temperatury

metal – stop tytanu Ti6Al4V (rys. 4.8)

$$E_{\rm m} = 122.7 - 0.0565T \,[{\rm GPa}]$$
 (4.62a)

$$\alpha_{\rm m} = \begin{cases} 7.43 \cdot 10^{-6} + 5.56 \cdot 10^{-9}T - 2.69 \cdot 10^{-12}T^2 \ [1/{\rm K}] \\ 10.291 \cdot 10^{-6} \ [1/{\rm K}] \end{cases}$$
(4.62b)

$$\lambda_{\rm m} = 1.1 + 0.017T \, [W/{\rm mK}]$$
(4.62c)

$$c_{\rm m} = 3.5 \cdot 10^2 + 8.78 \cdot 10^{-1}T - 9.74 \cdot 10^{-4}T^2 + 4.43 \cdot 10^{-7}T^3 \, [\rm J/kgK] \qquad (4.62d)$$

Materiały kompozytowe na bazie aluminium (Al_2O_3) wykazują wyższą przewodność cieplną od kompozytów na bazie cyrkonu. Najczęściej łączone są ze stopami niklu Ni-Al₂O₃ lub aluminium Al-Al₂O₃. Porównanie termomechanicznych właściwości obu typów kompozytów na bazie Al₂O₃ zaprezentowano w tabeli 4.2 (Chen i Tong [17], Cho i Shin [22] dla Ni-Al₂O₃ i Wang i in. [177] dla Al-Al₂O₃)

Materiał kompozytowy Ni $-AL_2O_3$ lub wielowarstwowy materiał kompozytowy Ni $-FGM - AL_2O_3$ są wytwarzane przy użyciu metod osadzania (por. rozdział 3.2) w temperaturach z przedziału 20°C do 800°C (Finot i in. [42]). W trakcie analizy termicznych obciążeń cyklicznych zostało wykazane, że dla czystego aluminium zachodzi kruche pęknięcie przy temperaturze 1000°C. Dlatego zastosowanie warstwy przejściowej FGM opartej na niklu powoduje, że pęknięcia powstałe od obciążeń termicznych nie pojawią



Rysunek 4.8. Zależność właściwości materiałowych stop tytanu Ti6Al4V od temperatury

dopóki temperatura nie przekroczy wartości 750°C. Powyższy przykład pokazuje, z jakich względów dla dużych zakresów temperatur stosowane są wielowarstwowe systemy TBC, gdzie warstwa ochrona oparta jest na bazie cyrkonu dając wyższą odporność termiczną.

W przeciwieństwie do kompozytów ceramik – metal, stanowiących doskonałą barierę termiczną, w niektórych zastosowaniach technologii reaktorowej wymagana jest możliwie wysoka przewodność strumienia ciepła. Kompozyty wolfram (warstwa) - miedź (podłoże) zapewniają doskonałą przewodność termiczną przy jednoczesnej redukcji naprężeń termicznych [163–167]. Właściwości termomechaniczne kompozytu W-Cu zakresie temperatur $293K \leq T \leq 1300K$ podaje Ueda [165]

wolfram (rys. 4.9)

$$E_{\rm w}(T) = 423.4 - 0.044T \,[{\rm GPa}]$$
 (4.63a)

$$\alpha_{\rm w}(T) = 4.610^{-6} \, [1/{\rm K}] \tag{4.63b}$$

$$\lambda_{\rm w}(T) = 162.3 + 0.07T + 2.0 \cdot 10^{-5}T^2 \,[{\rm W/mK}]$$
 (4.63c)

$$c_{\rm w}(T) = 10.011\sqrt{T - 0.1362T} \, [\rm J/kgK]$$
 (4.63d)

Z wykresów 4.9 możemy wyciągnąć kilka interesujących wniosków. Warto tu zauważyć, że współczynnik rozszerzalnosci termicznej dla wolframu nie ulega zmianie wraz

skład kompozytu	E[GPa]	$\lambda [W/mK]$	$\alpha \cdot 10^{-6} [1/\mathrm{K}]$	c[J/kgK]	$ ho [{ m g/cm}^3]$
Ni	199.5	90.7	13.3	444	8.9
Al_2O_3	393.0	30.7	8.8	775	3.97
Al	73	154	23	963	2.8
Al_2O_3	380	46	8.5	765	3.96

Tablica 4.2. Porównanie termomechanicznych właściwości kompozytów Ni-Al₂O₃ oraz Al-Al₂O₃ [19, 21, 178]

z temperaturą. Ponadto możemy zauważyć, że ciepło właściwe w wysokich temperaturach osiąga pewien punkt nasycenia. Z uwagi na interpretację fizyczną tej wielkości oznacza to, że powyżej pewnej wartości temperatury, materiał nie jest w stanie magazynować więcej energii w postaci ciepła.



Rysunek 4.9. Zależność właściwości materiałowych wolframu od temperatury

miedź (rys. 4.10)

$$E_{\rm cu}(T) = 135.9 - 0.029T \,[{\rm GPa}]$$
 (4.64a)

$$\alpha_{\rm cu}(T) = 15.37 + 7.18 \cdot 10^{-3}T - 4.0 \cdot 10^{-6}T^2 \left[10^{-6} \cdot 1/\mathrm{K}\right]$$
(4.64b)

$$\lambda_{\rm cu}(T) = 401.4 + 0.0625T \, [W/mK] \tag{4.64c}$$

$$c_{\rm cu}(T) = 36.675\sqrt{T} - 0.8333T \,[{\rm J/kgK}]$$
 (4.64d)





Rysunek 4.10. Zależność właściwości materiałowych miedzi od temperatury

Połączenie W-Cu w doskonały sposób pokazuje, że można zredukować naprężenia termiczne przy jednoczesnym zachowaniu bardzo dobrego przewodzenia termicznego od warstwy W do matrycy opartej na miedzi [165].

Zaprezentowane wykresy 4.10 stanowią najpełniejszą, a zarazem najlepszą ilustrację silnej zależności parametrów materiałowych miedzi od temperatury. Szczególnie interesująco prezentuje się zależność od temperatury współczynnika rozszerzalnosci termicznej i ciepła właściwego, w których możemy zauważyć punkt ekstremalny na krzywych. Ciepło właściwe powyżej 600°C w znaczny sposób maleje, natomiast taką granicą dla współczynnika rozszerzalnosci termicznej jest temperatura 1000°C.

5. ADAPTACJA METOD NUMERYCZNYCH DO ROZWIĄZYWANIA PROBLEMÓW BRZEGOWYCH DLA MATERIAŁÓW GRADIENTOWYCH

5.1 Przegląd algorytmów numerycznych rozwiązywania zagadnienia początkowo – brzegowego

5.1.1 Metoda strzału

Matematyczną reprezentacją zagadnienia brzegowego jest zazwyczaj układ m sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych rzędu n. Stosując zasadę separacji zmiennych, istnieje możliwość zamiany każdego z m równań różniczkowych rzędu n na równoważny układ n równań różniczkowych pierwszego rzędu, co prowadzi w rezultacie do układu $m \times n$ równań.

Przykładowo, równanie różniczkowe II rzędu w następującej postaci

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = r(x) \tag{5.1}$$

możemy zamienić na układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych I rzędu w następujący sposób

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z(x) \tag{5.2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = r(x) - q(x)z(x) \tag{5.2b}$$

gdzie została wprowadzona nowa zmienna z(x) [127].

Wykorzystując powyższy schemat możemy zawsze sprowadzić równanie różniczkowe dowolnie wysokiego rzędu do równoważnego układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Mając na uwadze powyższe przekształcenie, dwupunktowy problem brzegowy możemy sformułować w następujący sposób: mamy do rozwiązania układ N sprzężonych równań różniczkowych I rzędu, spełniających n_1 warunków brzegowych w punkcie startowym x_1 oraz $n_2 = N - n_1$ warunków brzegowych w punkcie końcowym x_2 . Możemy to wyrazić za pomocą następującego równania

$$\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} = g_i\left(x, y_1, \dots, y_N, \Lambda\right) \tag{5.3}$$

w którym mnożnik Lagrange'a spełnia rolę dodatkowej N+1 zmiennej

$$y_{N+1} \equiv \Lambda \tag{5.4}$$



spełniającej trywialne równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}y_{N+1}}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{5.5}$$

z n_1 warunkami brzegowymi w punkcie startowym x_1

$$B_{1j}(x, y_1, \dots, y_N) = 0$$
(5.6)

oraz pozostałymi $n_2 = N - n_1$ warunkami brzegowymi w punkcie końcowym x_2

$$B_{2k}(x, y_1, \dots, y_N) = 0$$
(5.7)

Numeryczna implementacja całkowania metodą strzału oparta jest na wielowymiarowej, globalnie zbieżnej metodzie Newtona-Raphsona, poszukiwania rozwiązania n_2 równań z n_2 niewiadomymi. W punkcie startowym x_1 danych jest N wartości startowych y_i ale tylko n_1 warunków brzegowych, zatem pozostaje $n_2 = N - n_1$ wartości "dowolnych". Idea metody strzału została schematycznie zaprezentowana na rys. 5.1, na którym zostały zaprezentowane przykładowe pierwsze trzy kroki całkowania. We wszystkich krokach startujemy z zadanego warunku brzegowego w punkcie startowym, próbując "wstrzelić się" w warunek brzegowy zadany w punkcie końcowym z zadaną dokładnością, zmieniając kąt nachylenia krzywej rozwiązania w punkcie startowym.



Rysunek 5.1. Idea metody strzału przedstawiona w sposób schematyczny. Trzy kolejne całkowania równań spełniają w sposób dokładny warunki brzegowe w punkcie startowym. Niedokładność spełnienia warunku brzegowego w punkcie końcowym jest minimalizowana, aż do osiągnięcia satysfakcjonującego rezultatu.

Przyjmując, za "dowolne" wartości współrzędne wektora V określonego w przestrzeni n_2 wymiarowej, użytkownik w procedurze load.for generuje kompletny wektor startowy y, spełniający n_1 warunków brzegowych w punkcie x_1 uzupełniony wektorem V

$$y_i(x, V_1, \dots, V_{n_2}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$
(5.8)

Wybierając pewien wektor V definiujemy wektor startowy $y(x_1)$, który następnie poprzez całkowanie układu równań (5.3), traktowanego jako problem początkowy prowadzi do

rozwiązania $y(x_2)$. Jeśli zdefiniować wektor "niedokładności" (ang. *discrepancy vector*) F również określony w przestrzeni n_2 wymiarowej, w taki sposób, iż jego współrzędne są miarą oddalenia rozwiązania od warunków brzegowych w x_2

$$F_k = B_{2k}(x_2, y) \quad k = 1, 2, \dots, n_2$$
 (5.9)

to użytkownik w procedurze score.for zamienia N wymiarowy wektor rozwiązań $\boldsymbol{y}(x_2)$ na n_2 wymiarowy wektor \boldsymbol{F} . W powyższy sposób, z punktu widzenia metody Newtona-Raphsona, problem został sprowadzony do zadania polegającego na poszukaniu wartości wektora V zerującego wartości wektora F. Stosując algorytm numeryczny newt.for rozwiązywany jest układ równań liniowych z n_2 niewiadomymi

$$\boldsymbol{J} \cdot \delta \boldsymbol{V} = -\boldsymbol{F} \tag{5.10}$$

a następnie dodawana jest poprawka

$$\boldsymbol{V}^{new} = \boldsymbol{V}^{old} + \delta \boldsymbol{V} \tag{5.11}$$

Formuła (5.11) zawiera macierz jakobianu J posiadającą następującą reprezentację

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial V_j} \tag{5.12}$$

w ogólnym przypadku, bardzo skomplikowaną jeśli chodzi o analityczne obliczenia odpowiednich pochodnych cząstkowych, zatem wykorzystuje się procedurę fdjac.for obliczającą przybliżoną wartość jakobianu w sposób numeryczny

$$\frac{\partial F_i}{\partial V_j} \cong \frac{F_i \left(V_1, V_2, \dots, V_j + \Delta V_j, \dots \right)}{\Delta V_j}$$
(5.13)

5.1.2 Metoda różnic skończonych

Główną ideą zastosowania metody różnic skończonych (ang. Finite Difference Method) do zadanego problemu brzegowego w sformułowaniu różniczkowym (lokalnym) lub całkowym (globalnym) jest zamiana operatorów różniczkowych na operatory różnicowe oraz obliczenie wartości funkcji (w sformułowaniu lokalnym) lub wartości funkcjonału (w sformułowaniu globalnym) w wybranych punktach węzłowych. Powyższe przekształcenie zamienia zagadnienie brzegowe wyrażone operatorami różniczkowymi w niejednorodny układ równań algebraicznych - metoda kolokacji.

Metoda różnic skończonych w sformułowaniu lokalnym

Rozpatrzmy lokalne zagadnienie brzegowe opisane równanie operatorowe

$$\mathcal{L}u = f \qquad \text{dla} \qquad P \in \Omega \tag{5.14}$$

we wnętrzu obszaru Ω , wraz z warunkami brzegowymi

$$\mathcal{B}u = g \qquad \text{dla} \qquad P \in \partial \Omega \tag{5.15}$$



BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

na brzegu obszaru $\partial\Omega$, gdzie u = u(P) jest poszukiwaną funkcją punktu obszaru P, zaś \mathcal{L} i \mathcal{B} są operatorami różniczkowymi.

Operacje $\mathcal{L}u$ oraz $\mathcal{B}u$ oraz dowolne inne operacje różniczkowania można złożyć z prostych operacji $\mathcal{D}u$ obliczania pochodnych funkcji, gdzie przez \mathcal{D} oznaczono liniowy operator różniczkowania.

Dla dokonania dyskretyzacji równań (5.14), (5.15) w całym obszarze Ω i na jego brzegu $\partial\Omega$ wybieramy zbiór Γ punktów $P_k \in \Omega, k = 1, 2, \ldots, r$ zwanych węzłami wewnętrznymi oraz zbiór $\partial\Gamma$ punktów punktów $P_k \in \partial\Omega, k = r + 1, r + 2, \ldots, r + m$ leżących na brzegu $\partial\Omega$ lub też w jego otoczeniu zewnętrznym, zwanymi węzłami zewnętrznymi (5.2a).



Rysunek 5.2. Siatka węzłów w obszarze $\partial \Omega$ (a) oraz typowa gwiazda węzłów (b) [27]

Punkty P_k , zwane węzłami, tworzą konfigurację zwaną gwiazdą (5.2b). Jej węzłem centralnym (punktem centralnym) jest punkt P_k . Kształt gwiazdy zależy od postaci i rzędu operatora różniczkowego zamienianego na operator (schemat) różnicowy, od przyjętych stopni swobody, założonej dokładności aproksymacji oraz od siatki, czyli zbioru wszyst-kich węzłów.

Wartość liniowego operatora \mathcal{D} w punkcie P_k przedstawia się jako liniową kombinację wartości funkcji w punktach P_{k+i} wybranych z otoczenia punktu P_k

$$\mathcal{D}u(P_k) = \sum a_i u(P_{k+i}) \tag{5.16}$$

Wyrażenie (5.16) nazywamy schematem różnicowym operatora \mathcal{D} w punkcie P_k .

Jeśli wykorzystamy operatory różnicowe (5.16) aby zapisać równania (5.14) w postaci dyskretnej dla wszystkich r węzłów wewnętrznych oraz dla m węzłów brzegowych, to otrzymamy układ równań algebraicznych, przedstawiony w zapisie macierzowym jako

$$Au = f \tag{5.17}$$

w którym niewiadomymi są wartości węzłowe $u(P_k), k = 1, 2, ..., n = r + m$. Są to równania liniowe lub nieliniowe zależnie od postaci operatorów \mathcal{L} i \mathcal{B} [27].

Metoda różnic skończonych w sformułowaniu globalnym

W sformułowaniu globalnym (całkowym) poszukujemy ekstremum funkcjonału lub rozwiązania równania wariacyjnego. Po dyskretyzacji operatorów w wybranych punktach numerycznego całkowania, dokonujemy całkowania, a następnie agregacji równań, podobnie jak w metodzie elementów skończonych (patrz rozdział 5.1.4), wykorzystując funkcjonał, który możemy w najogólniejszej formie zapisać jako

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} F(u) \mathrm{d}\Omega$$
(5.18)

Całkując numerycznie funkcjonał otrzymujemy

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{N} F(u_i)|_{x_i} \Delta \Omega_i = \Phi(u_1, \dots, u_N)$$
(5.19)

gdzie $\Delta\Omega_i$ jest powierzchnią (wagą) przypisaną węzłowi P_i , a x_i położeniem *i*-tego punktu całkowania. Układ równań, z którego oblicza się nieznane wartości węzłowe funkcji u_i otrzymuje się z warunku stacjonarności funkcji

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{5.20}$$

W przypadku globalnego sformułowania, określonego przez równanie wariacyjne postaci

$$(\mathcal{L}u, v)_{\Omega} = (f, v)_{\Omega} \quad (\mathcal{L}_b u, v)_{\partial\Omega} = (g, v)_{\partial\Omega} \tag{5.21}$$

gdzie v jest funkcją testową, zaś u funkcją próbną, również dokonujemy dyskretyzacji operatorów oraz całkowania numerycznego, otrzymując odpowiedni układ równań [27].

W klasycznym podejściu metody różnic skończonych stosowane są regularne siatki węzłów, najczęściej z równoodległymi węzłami oraz sformułowania lokalne ze względu na brak konieczności tworzenia funkcjonału lub równania wariacyjnego. Operatory różnicowe można wyprowadzić korzystając z rozwinięcia operatorów różniczkowych w szereg Taylora (metoda współczynnika nieoznaczonego) lub używając metody najmniejszych kwadratów lub też metody najmniejszych ważonych kwadratów (MWLS) [27, 127]. Takie podejście jest bardzo chętnie stosowane oraz wysoce użyteczne ze względu na swoją prostotę, tak w przypadku sformułowania, jak i w algorytmizacji komputerowej. Posiada jednak sporo wad, ujawniających się w szczególności w przypadku obszarów o nieregularnych kształtach. W najprostszym sformułowaniu funkcje aproksymacyjne są z reguły wielomianami stopnia pierwszego, jednak nie ma przeciwwskazań do stosowania wielomianów wyższych stopni. Szczególnie użyteczna przy wyprowadzaniu współczynników gwiazd różnicowych dla wielomianów aproksymacyjnych wyższych stopni jest metoda MWLS*.

^{*} Obszerne informacje na temat metody MWLS oraz uogólnionej metody różnic skończonych, w szczególności dla obszarów o dowolnym kształcie opisują Cichoń, Cecot, Krok i Pluciński [27]

5.1.3 Metoda objętości skończonej

Metoda objętości skończonej, zwana też metodą objętości kontrolnej lub metodą bilansów elementarnych, jest uniwersalną i efektywną metodą rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła [156]. Równanie bilansu ciepła jest opisane równaniem (4.21a), w którym zostało uwzględnione prawo Fouriera postaci

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\lambda} \nabla T \tag{5.22}$$

Analizowany obszar dzielimy na objętości kontrolne o wymiarach: Δx , Δy i d. Następnie całkujemy stronami równanie (4.21a) po objętości kontrolnej dla każdej komórki (rys. 5.3)

$$\int_{CV} c_v(T)\varrho(T)\dot{T}dV = -\int_{CV} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{q}} dV + \int_{CV} \dot{q}_v dV$$
(5.23)

gdzie CV oznacza objętość kontrolną (ang. Control Volume).



Rysunek 5.3. Schemat podziału analizowanego obszaru na objętości skończone [156]

Do pierwszej całki po prawej stronie równania (5.23) stosujemy twierdzenie Greena – Gaussa – Ostrogradzkiego zamieniając całkę po objętości na całkę po powierzchni. Jeżeli przez ΔV oznaczymy objętość komórki kontrolnej, to równanie (5.23) można w przybliżony sposób zapisać jako

$$\Delta V c_v(T_p) \varrho(T_p) \dot{T}_p = \sum_{i=1}^4 \dot{Q}_i + \Delta V \dot{q}_v(T_p)$$
(5.24)

gdzie Q_i oznacza strumień ciepła dopływający z sąsiedniej komórki.

Na rys. 5.3 została zaprezentowana pojedyncza komórka kontrolna wraz z sąsiadującymi komórkami. Objętość pojedynczej komórki wynosi: $\Delta V = \Delta x \Delta y d$, gdzie d jest



grubością komórki. Strumienie ciepła dopływające od węzłów: W, N, E i S do węzła P w układzie kartezjańskim określone są następującymi wzorami

$$\dot{Q}_{W-P} = \Delta y d\dot{q}_{W-P} = \Delta y d \frac{\lambda_{11}(T_W, x_W) + \lambda_{11}(T_P, x_P)}{2} \frac{T_W - T_P}{\Delta x}$$
(5.25a)

$$\dot{Q}_{N-P} = \Delta x d\dot{q}_{N-P} = \Delta x d \frac{\lambda_{22}(T_N, y_N) + \lambda_{22}(T_P, y_P)}{2} \frac{T_N - T_P}{\Delta y}$$
(5.25b)

$$\dot{Q}_{E-P} = \Delta y d\dot{q}_{E-P} = \Delta y d\frac{\lambda_{11}(T_E, x_E) + \lambda_{11}(T_P, x_P)}{2} \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$$
(5.25c)

$$\dot{Q}_{S-P} = \Delta x d\dot{q}_{S-P} = \Delta x d \frac{\lambda_{22}(T_S, x_S) + \lambda_{22}(T_P, x_P)}{2} \frac{T_S - T_P}{\Delta y}$$
 (5.25d)

gdzie zostało przyjęte założenie, że $\lambda = \lambda(T, x, y)$ jest tensorem w przestrzeni dwuwymiarowej zawierającym funkcje trzech zmiennych: temperatury oraz współrzędnych położenia x i y. Wielkości x_W , x_P , itd. oznaczają odpowiednie koordynaty przestrzeni przynależące do odpowiednich węzłów. λ_{11} i λ_{22} są funkcjami określającymi przewodność termiczną materiału w zależności od kierunku (materiał anizotropowy), gdzie oznaczenie 11 odpowiada kierunkowi x, a 22 oznacza kierunek y w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Przyjmując założenie, że materiał jest izotropowy ($\lambda = \lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda$ – wielkość skalarna) oraz współczynnik przewodności termicznej jest tylko funkcją temperatury otrzymujemy

$$\dot{Q}_{W-P} = \Delta y d\dot{q}_{W-P} = \Delta y d \frac{\lambda(T_W) + \lambda(T_P)}{2} \frac{T_W - T_P}{\Delta x}$$
(5.26a)

$$\dot{Q}_{N-P} = \Delta x d\dot{q}_{N-P} = \Delta x d \frac{\lambda(T_N) + \lambda(T_P)}{2} \frac{T_N - T_P}{\Delta y}$$
(5.26b)

$$\dot{Q}_{E-P} = \Delta y d\dot{q}_{E-P} = \Delta y d \frac{\lambda(T_E) + \lambda(T_P)}{2} \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$$
(5.26c)

$$\dot{Q}_{S-P} = \Delta x d\dot{q}_{S-P} = \Delta x d \frac{\lambda(T_S) + \lambda(T_P)}{2} \frac{T_S - T_P}{\Delta y}$$
(5.26d)

Po uwzględnieniu równań (5.26) w (5.24) otrzymujemy

$$\Delta x \Delta y dc_v(T_P) \varrho(T_P) \frac{dT_P}{dt} = \Delta y d \frac{\lambda(T_W) + \lambda(T_P)}{2} \frac{T_W - T_P}{\Delta x} + \Delta x d \frac{\lambda(T_N) + \lambda(T_P)}{2} \frac{T_N - T_P}{\Delta y} + \Delta y d \frac{\lambda(T_E) + \lambda(T_P)}{2} \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + \Delta x d \frac{\lambda(T_S) + \lambda(T_P)}{2} \frac{T_S - T_P}{\Delta y} + \Delta x \Delta y d\dot{q}_v(T_P)$$
(5.27)

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\lambda_p = \lambda(T_P), \qquad c_p = c_v(T_P), \qquad \dots \qquad , \qquad a_p = \frac{\lambda_p}{c_p \varrho_p}$$

z (5.27) otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}T_P}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\lambda_W - \lambda_P}{2\lambda_P}\frac{T_W - T_P}{(\Delta x)^2} + \frac{\lambda_N - \lambda_P}{2\lambda_P}\frac{T_N - T_P}{(\Delta y)^2} + \frac{\lambda_E - \lambda_P}{2\lambda_P}\frac{T_E - T_P}{(\Delta x)^2} + \frac{\lambda_S - \lambda_P}{2\lambda_P}\frac{T_S - T_P}{(\Delta y)^2}\right] + \frac{\dot{q}_{v,P}}{c_P \varrho_P}$$
(5.28)



Dla zagadnień ustalonych ($dT_p/dt \equiv 0$), siatki równomiernie rozłożonej ($\Delta x = \Delta y$) oraz dla stałych i niezależnych od temperatury własności cieplnych i mocy źródła ciepła równanie (5.28) zostają uproszczone do postaci [156]

$$T_W + T_N + T_E + T_S - 4T_P = -\frac{\dot{q}_v (\Delta x)^2}{\lambda}$$
(5.29)

Podobne rozumowanie można przeprowadzić nie tylko dla równania Fouriera – Kirchhoffa w układzie kartezjańskim, ale także dla innych typów równań różniczkowych cząstkowych zapisanych w układach współrzędnych: cylindrycznym, sferycznym oraz dla zagadnień jedno- dwu- i trójwymiarowych.

Analizując uważniej równanie (5.29) możemy zauważyć, że otrzymujemy wynik identyczny jak w przypadku metody różnic skończonych w sformułowaniu lokalnym dla zagadnienia Poissona, którym jest równanie Fouriera-Kirchhoffa w stanie ustalonym. Wynika stąd, że metoda objętości kontrolnej jest uogólnieniem metody różnic skończonych.

Algorytm tej metody jest stosowany w komercyjnych programach służących do analizy procesów cieplnych, takich jak: Fluent, CFX.

5.1.4 Klasyczna metoda elementów skończonych

Historia metody elementów skończonych sięga połowy XX wieku. Za protoplastę MES-u (ang. *Finite Element Method*) można uznać matematyka Couranta, który w 1943 roku zastosował odcinkową aproksymację wielomianową w połączeniu z metodą wariacyjną do rozwiązywania problemu skręcania [29]. Rozwój metody i jej nazwa pojawiły się w latach pięćdziesiątych XX wieku [28, 162]. Obecnie jest to najpopularniejsza i najczęściej stosowana metoda służąca, nie tylko do rozwiązywania numerycznego zagadnień związanych z modelowaniem konstrukcji, ale także do symulacji procesów przemiany ciepła, zagadnień związanych z elektrycznością, magnetyzmem, czy elektromagnety-zmem.

W metodzie elementów skończonych wymaga się, aby równanie opisujące problem brzegowy miało postać całkową – funkcjonał lub zasada wariacyjna. Następnie obszar rozwiązywania zostaje podzielony na skończoną liczbę małych obszarów o regularnych kształtach (prostokąt, trójkąt, wielokąt) zwanych elementami skończonymi, w których rozwiązanie może być z dużą dokładnością aproksymowane przez proste funkcje (wielomiany, funkcje trygonometryczne), zwane funkcjami kształtu [55]. Z drugiej strony dobór funkcji kształtu do analizowanego zadania jest największą wadą tej metody, ze względu na bardzo dużą wrażliwość poszukiwanego rozwiązania w zależności od doboru odpowiedniej funkcji aproksymującej. Po przeprowadzeniu dyskretyzacji obszaru (podziału na elementy skończone), problem jest rozwiązywany na poziomie każdego z elementów, zamieniając problem zapisany przy pomocy równań różniczkowych na układ równań algebraicznych. W następnej kolejności dodawane są poszczególne rozwiązania, tworząc kompletny układ równań algebraicznych na nieznane wartości funkcji poszukiwanej w punktach węzłowych.

Algorytm metody elementów skończonych przedstawia się następująco:

- Dyskretyzacja obszaru zastąpienie obszaru ciągłego obszarem zbudowanym z elementów skończonych; numeracja węzłów; wybór stopni swobody; ustalenie relacji przylegania elementów skończonych (stworzenie macierzy incydencji),
- 2. Analiza na poziomie elementu wybór funkcji aproksymacyjnych związanych z rodzajem elementu; obliczenie macierzy sztywności na poziomie elementu $k_{ij}^{e^{**}}$ i macierzy obciążeń f_i^e w układzie lokalnym elementu; transformacja do układu globalnego,
- 3. Agregacja macierzy sumacja rozwiązań z poszczególnych elementów i utworzenie globalnego układu równań, który można zapisać w postaci macierzowej jako

$$[K]\{Q\}=\{F\},$$

- 4. Uwzględnienie warunków brzegowych,
- 5. Rozwiązanie układu równań, czyli znalezienie wektora wartości węzłowych $\{Q\}$,
- 6. Postprocesing obliczenie reakcji, naprężeń, odkształceń na poziomie elementu,
- 7. Prezentacja wyników dla całej konstrukcji.

Charakterystyka wybranych elementów skończonych

W metodzie elementów skończonych, dla każdej klasy zagadnień istnieją różne typy elementów skończonych, począwszy od geometrii elementu, a skończywszy na doborze odpowiedniej funkcji kształtu. Jak już akcentowano, dobór funkcji aproksymującej na poziomie elementu jest kluczowy, aby uzyskać zadowalający wynik. Ponadto wszystkie funkcje kształtu muszą spełniać dwa założenia:

- muszą być co najmniej klasy C¹, tak aby była zachowana ciągłość funkcji na granicach elementów,
- funkcja kształtu musi być dobrana w taki sposób aby spełniała założenie stałych pierwszych pochodnych (ruch sztywny ciała) [193].

Elementy izoparametryczne

Elementy izoparametryczne są specjalną klasą elementów skończonych charakteryzujących się tym, iż geometria elementu jest aproksymowana tymi samymi funkcjami co poszukiwana funkcja

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\boldsymbol{\xi}) x_i \tag{5.30a}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\boldsymbol{\xi}) u_i \tag{5.30b}$$

gdzie n jest liczbą funkcji aproksymacyjnych. Elementy są definiowane w swoim własnym lokalnym układzie współrzędnych (naturalny układ współrzędnych barycentrycznych) i transformowane do układu globalnego poprzez aproksymację geometrii funkcjami

^{**} wszystkie wielkości z indeksem górnym e odnoszą się do pojedynczego elementu skończonego

kształtu. Aby element był poprawnie zdefiniowany, funkcja kształtu musi spełniać dodatkowe warunki oprócz podanych w paragrafie 5.1.4:

$$\sum_{i} N_i = 1 \tag{5.31a}$$

$$\sum_{i} N_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x} \tag{5.31b}$$

$$\det \boldsymbol{J} > 0 \tag{5.31c}$$

gdzie x_i jest wektorem zawierającym współrzędne *i*-tego węzła w układzie globalnym, J jest macierzą jakobianu wynikającą z transformacji z układu naturalnego elementu do układu globalnego.

Czterowęzłowy izoparametryczny element skończony

Jeżeli założymy, że poszukiwana funkcja u(x) jest wektorem przemieszczenia oraz rozpatrywanym zagadnieniem jest płaski stan to tensor odkształcenia w zapisie macierzowym ma następującą postać

$$\begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{cases} u \\ v \end{cases} = L^e N u_i^e = B^e u_i^e$$
(5.32)

Dla elementu czworokątnego czterowęzłowego funkcjami kształtu są wielomiany Lagrange'a postaci [55]

$$N_i(\xi,\eta) = (1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i), \quad i = 1,\dots,4$$
(5.33)

gdzie (ξ, η) są koordynatami stowarzyszonymi z elementem skończonym zmieniające się w przedziale [-1, 1], natomiast (ξ_i, η_i) są współrzędnymi *i*-tego węzła elementu.

Równanie konstytutywne dla płaskiego stanu można zapisać jako

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbb{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e \tag{5.34}$$

Wykorzystując zasadę prac wirtualnych (dodatek A) dostajemy układ równań algebraicznych dla elementu skończonego na nieznane przemieszczenia węzłowe postaci

$$\boldsymbol{k}^{e}\boldsymbol{u}^{e} = \boldsymbol{f}_{N}^{e} + \boldsymbol{f}_{T}^{e} + \boldsymbol{f}_{B}^{e}$$

$$(5.35)$$

gdzie poszczególne elementy równania opisane są wzorami:

macierz sztywności elementu

$$\boldsymbol{k}^{e} = \iint_{\Omega} \boldsymbol{B}^{T} \mathbb{C} \boldsymbol{B} h \mathrm{d}\Omega = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \boldsymbol{B}^{T}(\xi, \eta) \mathbb{C}(\xi, \eta) \boldsymbol{B}(\xi, \eta) \det(\boldsymbol{J}) h \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

gdzie Ω jest powierzchnią elementu, a h jego grubością,



- poszukiwany wektor przemieszczeń węzłowych,

— wektor obciążeń skupionych przyłożonych w węzłach, f_N^e

— wektor obciążeń powierzchniowych

$$\boldsymbol{f}_T^e = \iint_S \boldsymbol{N}^T q(x, y)$$

gdzie S jest długością boku elementu, na który działa obciążenie q(x, y),

— wektor sił masowych.

$$\boldsymbol{f}_B^e = \iint\limits_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Ze względu na założenie stałego odkształcenia (odwzorowanie ruchu sztywnego bryły), macierz *B* nie zależy od zmiennych przestrzennych. W przypadku materiałów jednorodnych macierz konstytutywna \mathbb{C} jest stała, dlatego w klasycznych algorytmach metody elementów skończonych wzór definiujący macierz sztywności wygląda następująco

$$\boldsymbol{k}^{e} = \boldsymbol{B}^{T} \mathbb{C} \boldsymbol{B} \det(\boldsymbol{J}) h \Omega$$
(5.36)

Metoda residuów ważonych Bubnowa – Galerkina

W poprzednim paragrafie (por. 5.1.4) na przykładzie płaskiego stanu została opisana metoda obliczania macierzy sztywności elementowej k^e oraz wektora obciążeń f^e przy wykorzystaniu sformułowania zagadnienia brzegowego w postaci zasady wariacyjnej z wykorzystaniem zasady prac wirtualnych. Dyskretyzację zagadnienia brzegowego można sformułować w alternatywny sposób, wykorzystując sformułowanie słabe. To podejście znane jest pod nazwą metody residuów ważonych lub metody Bubnowa – Galerkina. Jest bardzo często wykorzystywana w komercyjnych algorytmach metody elementów skończończych, np. w pakietach ANSYS czy ABAQUS [2, 8].

Metoda Galerkina zostanie przedstawiona na przykładzie równania Poissona postaci

$$\nabla(K\nabla u) = f \qquad \text{w} \quad \Omega$$
$$u = g \qquad \text{na} \quad \partial\Omega \qquad (5.37)$$

Równanie Poissona nie zostało wybrane przez autora przypadkowo. Równanie (5.37) opisuje wiele problemów mechanicznych, np. skręcanie pręta o przekrojach niekołowych, przewodzenie ciepła w stanie ustalonym, itp.

Rozwiązania przybliżonego \hat{u} poszukujemy w postaci kombinacji liniowej

$$\hat{u} = \phi_0 + \sum_{i=1}^n C_i \phi_i$$
(5.38)

gdzie funkcje ϕ_i są liniowo niezależne oraz na brzegu obszaru przyjmują wartość 0. Funkcja ϕ_0 odpowiada za spełnienie niezerowego warunku brzegowego. Ze względu na fakt, iż funkcja \hat{u} jest tylko przybliżeniem rozwiązania analitycznego, mamy $\nabla(K\nabla u) - f = R$, gdzie R jest pewnym residuum.

Celem jest wyznaczenie współczynników C_i tak, aby zminimalizować residuum R. Z punktu widzenia teorii rachunku wariacyjnego metoda Galerkina jest sformułowana w przestrzeni energetycznej Sobolewa D_2 , gdzie iloczyn skalarny dwóch wektorów definiowany jest jako

$$(u,v) = \int_{\Omega} u \cdot v \mathrm{d}\Omega \tag{5.39}$$

Jeżeli istnieje możliwość dobrania współczynników C_i tak, aby dwa wektory były wzajemnie do siebie ortogonalne, gdzie jednym z wektorów jest residuum R, a drugim ciąg funkcji wagowych $w_i, i = 1, 2, ..., n$, to wartość residuum osiąga minimum. Prowadzi to do spełnienia następującego warunku

$$\int_{\Omega} Rw_i \mathrm{d}\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{5.40}$$

Galerkin w swojej pracy opublikowanej w 1915 roku jako funkcje wagowe przyjął funkcje aproksymacyjne ϕ_i . Podobną prace opublikował Bubnow w 1913 roku.

W sytuacji, gdy za funkcje wagowe przyjmiem
y $w_i = \delta(x - x_i)$ otrzymujemy metodę kolokacji.

Podstawiając do warunku (5.40) za residuum $R = \nabla(K\nabla u) - f$ oraz stosując twierdzenie Greena do pierwszej całki otrzymujemy

$$\int_{\Omega} K \nabla \hat{u} \nabla \phi_i \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} f \phi_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} K \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} \phi_i \mathrm{d}\gamma$$
(5.41)

Zakładamy, że funkcje aproksymacyjne ϕ_i zerują się na brzegu obszaru, wtedy ostatnia całka w równaniu (5.41) znika. Uwzględniając (5.38) w równaniu (5.41) otrzymujemy układ równań liniowych na nieznane współczynniki C_i

$$\sum_{i=1}^{n} C_{i} \int_{\Omega} \nabla \phi_{i} K \nabla \phi_{j} d\Omega = \int_{\Omega} f \phi_{j} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \phi_{0} K \nabla \phi_{j} d\Omega, \quad j = 1, \dots, n$$
(5.42)

Jeżeli $u|_{\Gamma} = 0$ to ostatni człon w równaniu (5.42) jest równy zeru [119, 193].

Równanie (5.42) jest identyczne z równaniem (5.35) przy założeniu braku sił masowych i obciążeń węzłowych. Wyniki uzyskane przy pomocy metody Ritza są identyczne z wynikami otrzymanymi z metody Galerkina, pod warunkiem, że funkcje aproksymacyjne będą identyczne. Jednak metoda Ritza wymaga od funkcji aproksymacyjnych spełnienia tylko kinematycznych warunków brzegowych (funkcja i gradient funkcji). W przypadku metody residuów ważonych konieczne jest spełnienie kinematycznych i statycznych warunków brzegowych. Ponadto nie zawsze istnieje możliwość stworzenia funkcjonału energii, a wyprowadzenie sformułowania słabego przy zadanym sformułowaniu mocnym jest zawsze możliwe. Mając na uwadze powyższe, metoda residuów ważonych jest znacznie częściej wykorzystywana.

5.1.5 Metody bezsiatkowe

- 1. Metody bazujące na aproksymacji metodą ustalonych i ruchomych najmniejszych kwadratów.
 - Metoda elementów rozmytych (MER); bardzo duże podobieństwo do metody różnic skończonych w sformułowaniu wariacyjnym.
 - Bezelementowa metoda Galerkina (BMG). Jest to metoda, w której funkcje aproksymacyjne są wyprowadzane przy pomocy metody najmniejszych kwadratów, a sformułowanie słabe jest uzyskiwane z wykorzystaniem metody Bubnowa – Galerkina. Narzuca się także ścisłe spełnienie warunków brzegowych typu Dirichleta, co powoduje lokalny brak gładkości funkcji ze względu na brak zbieżności w strefie gdzie nałożone takie warunki.
 - Metoda punktu skończonego. Jest to wariacyjna metoda różnic skończonych z wprowadzoną koncepcją całkowania dookoła węzłów. Funkcje aproksymacyjne są wyprowadzane przy użyciu metody ustalonych najmniejszych kwadratów, ruchomych najmniejszych kwadratów oraz wielokrotnie ustalonych najmniejszych kwadratów.
- 2. Metody cząstek.

Można wyróżnić trzy warianty tej metody:

- Komórkowa metoda cząstek
- Hydrodynamiczna metoda wygładzonych cząstek
- Metoda cząstek z samoreprodukującym się jądrem

Aproksymacja w tej metodzie jest formułowana w postaci całkowej

$$u_h(x) = \int_{\Omega} w_h(x-y)u(y)dy$$
(5.43)

gdzie $w_h(x)$ jest funkcją wagową spełniającą warunki:

- $w_h \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ do przestrzeni C_0^{∞} należą funkcje określone na nośniku zwartym o mierze *h*, dla których istnieją dowolne pochodne. Pochodne te są ponadto ciągłe,
- sup $w_h(x) = \{y : |y| \le h\}$ waga jest zdefiniowana w pewnej kuli (w \mathbb{R}^2 może to być okrąg albo kwadrat),
- $w_h(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ waga jest funkcją nieujemną lub dodatnią albo zerową, jeżeli to jest brzeg kuli,
- $h^{-n} \int_{\Omega} w_h(x) dx = 1$ waga jest funkcją znormalizowaną. Stąd wynika, że wraz ze zmierzaniem wymiaru nośnika do h, funkcja wagowa zmierza do delty Diraca. gdzie n jest wymiarem przestrzeni.

Całkę (5.43) aproksymujemy przez sumę

$$u_{h}(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{h}(x - x_{i})u(x_{i})\Delta\Omega_{i}$$
(5.44)

Pochodne funkcji obliczane są według następującego wzoru

$$\nabla u_h(x) \approx \int_{\Omega} w_h(x-y) \nabla u(y) dy = -\int_{\Omega} \nabla w_h(x-y) u(y) dy$$
(5.45)



który jest aproksymowany według następującej zależności

$$\nabla u_h(x) \approx \sum_{i=1}^n \nabla w_h(x - x_i) u(x_i) \Delta \Omega_i$$
(5.46)

Do równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych podstawiane są odpowiednie pochodne u_h obliczone według (5.46). Całość rozwiązywana jest przy pomocy metody kolokacji.

Metody podziału jedności.
 W metodzie tej wykorzystuje się warunek kompletności rzędu zerowego dla funkcji bazowych

$$\sum_{i} \widetilde{N}_{i} = 1 \tag{5.47}$$

Mnożąc równanie (5.47) przez pewne funkcje bazowe ψ_k otrzymujemy

$$\psi_k \sum_i \widetilde{N}_i = \psi_k \tag{5.48}$$

Funkcje bazowe są specjalnie dobierane.

4. Metoda chmur typu h-p.

W tej metodzie konstruuje się aproksymację zarówno w adaptacji h, jak i w h-p. W ten sposób stworzona została w pełni adaptacyjna metoda, zarówno poprzez zagęszczanie węzłów (adaptacja typu h), jak i zmianę stopnia wielomianów aproksymacyjnych (adaptacja typu p). Wielomiany aproksymacyjne są konstruowane z wykorzystaniem zasady podziału jedności.

5. Metoda elementów naturalnych.

Metoda ta opiera się na podziale obszaru na wielokąty Voronoi w celu wyznaczenia obszarów do całkowania. Algorytm obliczania całek opiera się na metodzie całkowania dookoła węzłów.

5.2 Analiza dynamiczna. Metody numerycznego rozwiązywania równania różniczkowego typu parabolicznego

Z punktu widzenia teorii równań różniczkowych równanie przewodnictwa cieplnego Fouriera – Kirchhoffa (4.21a) należy do grupy równań liniowych parabolicznych o zmiennych współczynnikach. Według klasyfikacji fizycznej termiczny problem brzegowy traktowany jest jako zagadnienie dyfuzji, które ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{5.49}$$

gdzie D jest współczynnikiem dyfuzji. Do rozwiązania równania (5.49) stosowany jest zazwyczaj jeden z trzech następujących algorytmów schematycznie zaprezentowanych na rys. 5.4 [127]:

- schemat *fully explicit*
- schemat fully implicit zwany inaczej backward time
- schemat Cranka-Nicolsona



Rysunek 5.4. Schematy numerycznego rozwiązywania równania dyfuzji; a. schemat *fully explicit*, b. schemat *fully implicit*, c. schemat Cranka – Nicolsona (Press, Teukolsky, i in. [127])

Schemat fully explicit

Algorytm *fully explicit* zakłada, iż wartość funkcji w następnym kroku czasowym jest obliczana na podstawie trzech wartości funkcji z poprzedniego kroku czasowego (5.51). Zamieniając operatory różniczkowe w równaniu (5.49) na operatory różnicowe mamy

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta \tau} = D \frac{T_{j-1}^k - 2T_j^k + T_{j+1}^k}{(\Delta x)^2}$$
(5.50)

gdzie j = 1, 2, ..., nx, $k = 1, 2, ..., n\tau$, a T_j^k oznacza wartość funkcji dla *j*-tego węzła na siatce współrzędnej przestrzennej w *k*-tej iteracji czasowej, natomiast nx – ilość węzłów na siatce przestrzennej w danym kroku czasowym, $n\tau$ – ilość kroków czasowych, Δx – długość kroku przestrzennego, $\Delta \tau$ – długość kroku czasowego.

Porządkując człony w równaniu (5.50) mamy

$$a T_{j-1}^{k} + (1 - 2a) T_{j}^{k} + a T_{j+1}^{k} = T_{j}^{k+1}$$
(5.51)

gdzie $a = D \frac{\Delta \tau}{(\Delta x)^2}$ jest wielkością charakterystyczną dla równania parabolicznego znaną w literaturze pod nazwą liczby kryterialnej Fouriera [127].

Schemat fully implicit

Schemat *fully implicit* jest przeciwieństwem algorytmu *fully explicit*. Na podstawie wartości funkcji w węźle *j*-tym na *k*-tym kroku czasowym obliczane są wartości funkcji w węźlach (j - 1), (j) oraz (j + 1) dla (k + 1) kroku czasowego. Powyższe podejście jest bardziej korzystne z punktu widzenia stabilności rozwiązania oraz możliwości doboru długości kroku czasowego w stosunku do poprzedniego algorytmu, jednak dalej krok czasowy nie może być dowolny.

Rozpisując schemat różnicowy dla algorytmu fully implicit otrzymujemy:

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta \tau} = D \frac{T_{j-1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}$$
(5.52)

Po uporządkowaniu równania (5.52) otrzymujemy

$$-aT_{j-1}^{k+1} + (1+2a)T_j^{k+1} - aT_{j+1}^{k+1} = T_j^k$$
(5.53)

gdzie współczynnik a jest zdefiniowane identycznie jak w poprzednim algorytmie.

Warto zauważyć, że znaczącą wadą tego schematu jest konieczność rozwiązywania liniowego układu równań algebraicznych, z którego wyliczamy nieznane wartości funkcji dla (k + 1) kroku czasowego.

Stabilność rozwiązania zagadnienia dyfuzji

Stabilność rozwiązania problemu dyfuzji jest związana z wielkością kroku czasowego $\Delta \tau$, który nie może być dowolnie duży. Definicja liczby Fouriera sugeruje od razu odpowiednie ograniczenie. Gdyby przyjąć, że krok czasowy może być nieskończenie duży, czyli $\Delta \tau \rightarrow \infty$, to wtedy $\alpha \rightarrow \infty$ a zatem $\Delta T \rightarrow 0$. Wynika stąd, że $\Delta \tau$ musi być ograniczone. Interpretacja fizyczna tego spostrzeżenia jest więc następująca: dyfuzja w ciele stałym musi zachodzić w miarę wolno, aby można było ten proces opisać równaniem różniczkowym liniowym.

Klasyczny warunek stabilności, który jest jednakowy dla obu schematów: *fully explicit* oraz *fully implicit*, przy założeniu że współczynnik dyfuzji D =const jest następujący [127]

$$\alpha = D \frac{\Delta \tau}{(\Delta x)^2} \le \frac{1}{2} \tag{5.54}$$

Stabilność rozwiązania dla równania Fouriera – Kirchhoffa

Równanie Fouriera – Kirchhoffa (4.21a) jest równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego, jednak o bardziej złożonej postaci niż (5.49). Po pierwsze, współczynnik dyfuzji $D = \frac{\lambda}{\varrho c_v} \neq \text{const}$, po drugie, istnieje dodatkowy człon \dot{q}_v . Konieczne jest sformułowanie ogólniejszego warunku stabilności niż (5.54).

W pierwszej kolejności konieczna jest zamiana operatorów różniczkowych równania (4.21a) na operatory różnicowe. Po wykonaniu powyższego przekształcenia otrzymujemy

$$\lambda \frac{T_{j-1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j+1}^{k+1}}{(\Delta r)^2} + \left(\frac{\lambda}{r_j} + \frac{\partial \lambda}{\partial r}\right) \frac{T_{j+1}^{k+1} - T_{j-1}^{k+1}}{2\Delta r} + \dot{q}_v = \varrho c_v \frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta \tau} \quad (5.55)$$

Warunek stabilności jest określany na podstawie członów stojących przy wyrażeniu T_j^{k+1} [75]. Wynika stąd, że wewnętrzne źródła ciepła mogą mieć wpływ na warunek stabilności w przypadku, gdy będą funkcją zależną od aktualnej temperatury.

Porządkując odpowiednie człony w równaniu (5.55) oraz przyjmując, że $\dot{q}_v = \dot{q}_v(T)$ otrzymujemy

$$\frac{\Delta\tau}{c_{v}\varrho} \left[\frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{\lambda}{r_{j}} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} \right) - \frac{\lambda}{(\Delta r)^{2}} \right] T_{j-1}^{k+1} + \left[\left(\frac{2\lambda}{(\Delta r)^{2}} + \dot{q}_{v}(T_{j}^{k+1}) \right) \frac{\Delta\tau}{c_{v}\varrho} + 1 \right] T_{j}^{k+1} - \frac{\Delta\tau}{c_{v}\varrho} \left[\frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{\lambda}{r_{j}} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{(\Delta r)^{2}} \right] T_{j+1}^{k+1} - 2\frac{\beta(\omega)}{h} T_{\infty} = T_{j}^{k}$$
(5.56)



Na podstawie wcześniejszych założeń stabilność zagadnienia możemy oszacować przy pomocy nierówności

$$\left(\frac{2\lambda(r)}{(\Delta r)^2} + \dot{q}_v(T_j^{k+1})\right)\frac{\Delta\tau}{c_v\varrho} + 1 \ge 0$$
(5.57)

Oszacowanie w równaniu (5.57) może być niewystarczające, ponieważ współczynnik przewodności termicznej jest funkcją. Konieczne jest znalezienie wartości minimalnej, dla której warunek będzie spełniony. W takim przypadku równanie (5.57) należy przekształcić do postaci

$$\Delta \tau \le \min_{j} \left[\frac{c_{v}\varrho}{\frac{2\lambda(r_{j})}{(\Delta r)^{2}} + \dot{q}_{v}} \right]$$
(5.58)

Warto nadmienić, że w przypadku gdy $\dot{q}_v \equiv 0$ to równanie (5.58) przyjmuje postać

$$\Delta \tau \le \min_{j} \left[\frac{\varrho c_v (\Delta r)^2}{2\lambda(r_j)} \right]$$
(5.59)

Ponadto gdy przyjmiemy, że $\lambda(r) = \lambda = \text{const równanie (5.58)}$ przyjmuje postać klasycznego warunku stabilności danego wzorem (5.54)

Schemat Cranka – Nicolsona

Algorytmy numeryczne oprócz stabilności rozwiązania wymagają także dużej dokładności. Schematy zaprezentowane w poprzednich paragrafach (por. rozdział 5.2 i 5.2) oparte są na schematach różnicowych aproksymujących pierwszą pochodną na dwóch węzłach. Warto zauważyć, że największa dokładność schematu różnicowego pierwszej pochodnej zachowana jest w przypadku aproksymacji na trzech węzłach (tzw. iloraz centralny). Ponadto w punkcie centralnym schematu istnieje największa dokładność przybliżenia.

Powstaje zatem pytanie: czy nie można stworzyć takiego schematu, który stanowiłby rozwiązanie pośrednie pomiędzy wcześniej omawianymi schematami, tak aby centralny punkt gwiazdy różnicowej na kierunku osi czasowej i przestrzennej był ten sam? Takim algorytmem jest właśnie schemat Cranka-Nicolsona. Można go zapisać w następujący sposób:

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta \tau} = \frac{D}{2} \left[\frac{T_{j-1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j+1}^{k+1} - T_{j-1}^k - T_j^k - T_{j+1}^k}{(\Delta x)^2} \right]$$
(5.60)

Poza dokładnością, największą zaletą prezentowanego schematu jest stabilność. Algorytm Cranka – Nicolsona jest stabilny dla dowolnie niedużego kroku czasowego $\Delta \tau$. Jednak na każdym korku czasowym konieczne jest rozwiązywanie liniowego układu równań algebraicznych.

5.3 Wpływ niejednorodności na błąd rozwiązania w klasycznej metodzie elementów skończonych

Problem adaptacji metod numerycznych do rozwiązywania problemów brzegowych dla materiałów niejednorodnych został szeroko omówiony w artykule [61], gdzie przeprowadzono porównanie trzech najczęściej stosowanych algorytmów: metody elementów skończonych (MES), metody różnic skończonych (MRS) i bezpośredniego numerycznego całkowania równań stanu (NC).

Jako przykład dobrze oddający charakter problemu przyjęto zagadnienie termosprężystości opisane następującym układem równań różniczkowych (4.23).

W klasycznym sformułowaniu MES zakłada się, że właściwości termomechaniczne materiału pozostają stałe na szczeblu elementu skończonego, co oznacza, iż zamiast układu równań (4.23) rozwiązywany jest problem uproszczony

$$\lambda_{ij}T|_{ij} = 0$$

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} c_{kmpq} \left(\sigma_{pq} + \alpha \delta_{kn}T\right)|_{lm} = 0$$
(5.61)

Wraz z rozwiązaniem problemu (5.61) nasuwa się pytanie o wpływ pominiętych członów na zbieżność rozwiązania. W związku z powyższym przedmiotem dalszej analizy jest badanie warunków niezbędnych do tego aby problem uproszczony (5.61) mógł poprawnie aproksymować problem oryginalny (4.23). Aby uprościć zagadnienie jednocześnie zachowując możliwie dokładnie jego ogólność rozważa się osiowo symetryczny problem z warunkami typu Dirichleta

$$(r\lambda_{11}T')' = 0$$
 $T(a) = T_a$ $T(a) = T_b$ (5.62a)

$$(rc_{2222}F')' + [r(c_{2211})' - c_{1111}]F/r + \alpha rT' = 0 \quad F(a) = 0 \quad F(a) = 0 \quad (5.62b)$$

gdzie ()' oznacza różniczkowanie względem zmiennej promieniowej, natomiast F jest funkcją naprężeń zdefiniowaną następująco

$$\sigma_r = F/r, \qquad \sigma_\varphi = F'$$

Problem został rozwiązany trzema najczęściej używanymi metodami: metodą strzału opartą na całkowaniu numerycznym równań różniczkowych metodą Runge-Kutta IV rodzaju (por. 5.1.1), metodą różnic skończonych w sformułowaniu lokalnym (por. 5.1.2) oraz klasyczną metodą elementów skończonych opartą na sformułowaniu residuów ważonych (por. 5.1.4).

5.3.1 Metoda bezpośredniego numerycznego całkowania równań stanu metodą strzału

Układ (5.62) został sprowadzony do układu czterech równań różniczkowych pierwszego rzędu

 $dy_{1}/dr = y_{2}$ $dy_{2}/dr = -(1/r + 1/\lambda_{11}d\lambda_{11}/dr) y_{2}$ $dy_{3}/dr = y_{4}$ $dy_{4}/dr = -1/c_{2222} \left[(rdc_{2222}/dr + c_{2222}) y_{4}/r + (rdc_{2211}/dr - c_{1111}) y_{3}/r^{2} + \alpha y_{2} \right]$ (5.63)

spełniającego dwa warunki brzegowe w punkcie startowym $r_1 = a$, a dwa pozostałe w punkcie końcowym $r_2 = b$

$$y_1(r_1) = T_a, \quad y_1(r_2) = T_b$$

 $y_3(r_1) = 0, \quad y_3(r_2) = 0$
(5.64)

5.3.2 Metoda różnic skończonych

W metodzie różnic skończonych został przyjęty stały wymiar siatki węzłów $\Delta r = r^{(i)} - r^{(i-1)}$. Operatory różniczkowe zostały zamienione na operatory różnicowe, tworząc gwiazdę postaci

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta r} - \frac{1}{2r^{(i)}} - \frac{-\lambda_{11}^{(i-1)} + \lambda_{11}^{(i-1)}}{4\lambda_{11}^{(i)}\Delta r} \end{pmatrix} \frac{T^{(i-1)}}{\Delta r} - 2\frac{T^{(i)}}{(\Delta r)^2} \\ + \left(\frac{1}{\Delta r} + \frac{1}{2r^{(i)}} + \frac{-\lambda_{11}^{(i-1)} + \lambda_{11}^{(i-1)}}{4\lambda_{11}^{(i)}\Delta r} \right) \frac{T^{(i-1)}}{\Delta r} = 0 \\ \begin{bmatrix} \frac{c_{2222}^{(i)}}{2\Delta r} - \left(\frac{-c_{2222}^{(i-1)} + c_{2222}^{(i+1)}}{4\Delta r} + \frac{c_{2222}^{(i)}}{2r^{(i)}} \right) \end{bmatrix} \frac{F^{(i-1)}}{\Delta r} \\ + \left[-\frac{2}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r^{(i)}} \left(\frac{-c_{2211}^{(i-1)} + c_{2211}^{(i+1)}}{2\Delta r} - \frac{c_{1111}^{(i)}}{r^{(i)}} \right) \right] F^{(i)} \\ + \left[\frac{c_{2222}^{(i)}}{\Delta r} + \left(\frac{-c_{2222}^{(i-1)} + c_{2222}^{(i+1)}}{4\Delta r} + \frac{c_{2222}^{(i)}}{2r^{(i)}} \right) \right] \frac{F^{(i+1)}}{\Delta r} = -\alpha \frac{-T^{(i-1)} + T^{(i+1)}}{2\Delta r} \end{cases}$$
(5.65b)

Z uwagi na częściowe sprzężenie równań w omawianym zagadnieniu proponowane jest użycie tzw. *stagger algorithm*, w którym w pierwszej kolejności rozwiązywane jest równanie (5.65a) z uwagi na temperaturę $T^{(i)}$, która w następnym kroku podstawiana jest do prawej strony równania (5.65b).

5.3.3 Klasyczna metoda elementów skończonych

Z punktu widzenia klasycznej MES równanie Fouriera-Kirchhoffa (5.62a) oraz mechaniczne równanie stanu (5.62b) są quasi-harmonicznymi równaniami opisującymi materiał, którego niejednorodność podlega skokowej zmianie od elementu do elementu [119, 193]

$$\left(Ku'\right)' = -f \tag{5.66}$$

w którym u jest nieznanym rozwiązaniem, natomiast K i f są znanymi funkcjami r. Oznacza to, że w przypadku problemu termicznego należy podstawić $K = r\lambda$ oraz f = 0, podczas gdy w przypadku problemu mechanicznego podstawiamy K = 1/r oraz $f = E\alpha T'$. Równanie (5.66) nie zawiera pochodnych modułów termomechanicznych ponieważ klasyczne sformułowanie MES nie dopuszcza aproksymacji zmiennych właściwości materiałowych dodatkowymi funkcjami kształtu.

Równanie (5.66) jest identyczne jak równanie (5.37), z tego względu autor w tym miejscu nie będzie szczegółowo omawiał dyskretyzacji problemu na drodze residuów ważonych. Po przeprowadzeniu identycznego rozumowania jak w rozdziale 5.1.4 otrzymujemy typowe elementy macierzy sztywności elementu oraz wektory sił przywęzłowych przyjmują następującą postać

$$k_{ij}^{e} = \int_{\Omega} K \frac{\mathrm{d}N_{i}^{e}}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}N_{j}^{e}}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r$$
(5.67a)

$$f_i^e = \int\limits_{\Omega} f N_i^e \mathrm{d}r \tag{5.67b}$$

Jako funkcje kształtu przyjmuje się liniowe wielomiany Lagrange'a $N_1^e = 1/2 - r/L$ i $N_2^e = 1/2 + r/L$, gdzie L jest długością elementu.

Podobnie do przypadku MRS stosuje się procedurę stagger algorithm.

5.3.4 Wyniki otrzymane w oparciu o klasyczne metody: NC, MRS i MES

Rozważany problem termosprężystości staje się szczególnie prosty w przypadku, gdy stałe materiałowe są funkcjami potęgowymi promienia, zgodnie z propozycją Eslami [36] i Ootao [117]

$$\lambda_{ij} = \lambda \delta_{ij} r^{-n}, \qquad C_{ijkl} = C^0_{ijkl} r^{-n} \tag{5.68}$$

wówczas problem (5.62) posiada elementarne rozwiązanie [91].

Na rys. 5.5 przedstawiono wykresy temperatury, natomiast na rys. 5.6 został zaprezentowany wykres funkcji naprężeń w zależności od wykładnika potęgi n dla wcześniej opisywanych metod całkowania zagadnienia brzegowego (rozdz. 5.2, 5.2, 5.2) w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym.



Rysunek 5.5. Rozkłady temperatury w zależności od wykładnika potęgi *n* (Hernik, Ganczarski [61]

Analiza wykresów potwierdza fakt, że w wypadku numerycznego całkowania i MRS wyniki są zgodne z rozwiązaniem ścisłym. Wyniki MES charakteryzują się dobrą dokład-

nością jedynie przy niezbyt wysokich potęgach n = 1, 0, -1 natomiast dla wyższych wartości n = -2, -3 uwidoczniają się rozbieżności. Należy wyraźnie zaznaczyć, że w przypadku metody elementów skończonych wartości parametrów materiałowych na poziomie elementu skończonego są stałe, prowadząc do schodkowej aproksymacji niejednorodności. Jest to tylko pewnego rodzaju uśrednienie, którego efekty można zaobserwować na przedstawionych wykresach. Związane jest to z procedurą *stagger algorithm*, w wyniku której błędy aproksymacji powstałe w trakcie rozwiązywania problemu termicznego są kumulowane w rozwiązaniu problemu mechanicznego, ponieważ rozwiązanie problemu termicznego (razem z błędami) jest podstawiane jako prawa strona równania w problemie mechanicznym.



Rysunek 5.6. Rozkład funkcji naprężenia w zależności od wykładnika potęgi *n* (Hernik, Ganczarski [61])

Oczywiście w sytuacji niskich wykładników potęgi *n* powyższy problem nie ma większego znaczenia i z powodzeniem są stosowane klasyczne elementy skończone. Jednak w przypadku materiałów gradientowych zmiana niejednorodności w bardzo wielu przypadkach jest gwałtowna (np. stosunek współczynnika przewodności termicznej dla materiału ceramicznego i metalu wynosi 75). W takiej sytuacji uśrednienie wartości współczynników materiałowych na poziomie elementu wiąże się z grubymi błędami na poziomie analizy numerycznej powodując niedostosowanie modelu numerycznego do analizowanej konstrukcji. Aby uniknąć tego typu kumulacji błędów należy użyć elementów skończonych specjalnego typu, które zostaną dokładniej omówione w następnym rozdziale.

5.4 Metoda elementów skończonych uwzględniająca niejednorodność materiału

W klasycznym sformułowaniu MES, omówionym w poprzednim paragrafie (5.4), macierz sztywności na poziomie elementu wyraża się wzorem

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathrm{d}\Omega^{(e)}$$
(5.69)

Macierz konstytutywna $D^{(e)}$ nie zależy od współrzędnych przestrzennych a zatem nie podlega całkowaniu i jest traktowana jako stała na poziomie elementu. Takie podejście do zagadnienia okazuje się zbyt uproszczone w przypadku materiałów FGM, w których niejednorodność materiału cechuje duży gradient. W związku z powyższym Kim i Paulino [80] zaproponowali nową koncepcję

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \left(\mathbf{x}\right) \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{d}\Omega^{(e)}$$
(5.70)

w której nie tylko pole przemieszczenia ale również właściwości materiałowe podlegają aproksymacji funkcjami kształtu na poziomie elementu [80]

$$E = \sum_{i=1}^{N} N_i E_i, \qquad \nu = \sum_{i=1}^{n} N_i \nu_i$$
(5.71)



Rysunek 5.7. Koncepcja izoparametrycznego elementu skończonego dla materiału FGM [80]

Na rys. 5.7 został zaprezentowany schemat elementu skończonego, w którym powierzchnia P(x) reprezentuje aproksymację właściwości materiałowych, oprócz klasycznej aproksymacji funkcji niewiadomej. Tego typu element skończony jest specjalnie dedykowany do materiałów gradientowych, gdzie niejednorodność zmienia się w sposób gwałtowny. Pozwala modelować materiał w sposób dokładniejszy. Ponadto użycie elementów skończonych zaproponowanych przez Kim i Paulino pozwala na zastosowanie rzadszej siatki przyczyniając się do skrócenia czasu obliczeń, ponieważ nie ma konieczności stosowania bardzo gęstej siatki, aby w dostatecznie dokładny sposób modelować warstwę przejściową FGM. Symulacja numeryczna zaprezentowana w rozdziale 5.4.1 w sposób szczegółowy uwypukli korzyści wynikające z zastosowanie elementu skończonego z podwójną funkcją aproksymacyjną.

W oryginalnym sformułowaniu Kim - Paulino używają tej samej funkcji kształtu do aproksymacji właściwości materiałowych jak i do aproksymacji pola przemieszczeń. Jednak nic nie stoi na przeszkodzie, aby zastosować funkcje kształtu modelujące właściwości materiałowe odpowiadające indywidualnemu charakterowi niejednorodności tzn. funkcji potęgowej [36, 117] czy eksponencjalnej [107] zgodnie z regułami mieszania omówionymi w rozdziale 4.1.



5.4.1 Przykład ilustrujący korzyści płynące z zastosowania MES z niejednorodnością materiałową

Analizie została poddana płaska tarcza przedstawiona schematycznie na rys. 5.8. Konstrukcja na jednym z boków jest utwierdzona, natomiast drugi bok jest poddany działaniu równomiernego ciśnienia o wartości p. Tarcza zbudowana jest z materiału gradientowego FGM w taki sposób, że w miejscu przyłożenia obciążenia jest materiał ceramiczny, którego zadaniem jest ochrona konstrukcji. Materiał ceramiczny za pomocą warstwy przejściowej FGM połączony jest z materiałem dziewiczym (metalem). Tarcza ma wymiary $a \times b$ oraz grubość jednostkową. Jako materiał, z którego zbudowana jest konstrukcja został przyjęty kompozyt gradientowy Al-Al₂O₃. Szczegółowe dane materiałowe oraz parametry geometryczne i startowe zaprezentowano w tabeli 5.1



Rysunek 5.8. Schemat tarczy przyjęty do analizy

Tablica 5.1. Parametry materiałowe, geometryczne i startowe tarczy wykonanej z materiału gradientowego

skladnik materiału	E [GPa]	ν[-]	a [mm]	<i>b</i> [mm]	$p \left[\text{N/m}^2 \right]$
ceramik – Al_2O_3	380	0.3	4	3	1000
metal – Al	73	0.3	4	3	1000

Weryfikacja modelu

W celu weryfikacji napisanego przeze mnie kodu metody elementów skończonych z elementami gradientowymi, w pierwszej kolejności analizie poddany zostanie przykład zawierający materiał jednorodny, który został obliczony przy pomocy komercyjnego pakietu metody elementów skończonych ANSYS oraz mojego kodu. W obu przykadach zostały użyte dokładnie te same wartosci parametrów materiałowych, geometrycznych i wartosci obciążeń. Prezentowane wyniki zostały zaprezentowane podczas konferencji *II International Interdyscyplinary Technical Conference of Youg Scientists InterTech 2009* [59], która odbyła się w Poznaniu. Aby poprawnie zamodelować warstwę przejściową FGM w przypadku jednorodnych elementów skończonych, obszar na którym on się znajduje został podzielony na warstwy, w których moduł Younga zmienia się w sposób schodkowy, począwszy od wartosci przypisanej do materiału ceramicznego, a skończywszy na wartości przypisanej do metalu. Z tego powodu w obszarze, gdzie istnieje warstwa przejściowa wymagane jest znaczne zagęszczenie siatki elementów skończonych aby móc w miarę dokładnie aproksymować zmianę właściwości materiałowych (por. rys. 5.9).



Rysunek 5.9. Siatka jednorodnych elementów skończonych wykonana w programie Ansys

Warto zaznaczyć, że siatka elmentów skończonych przedstawiona na rys. 5.9 zawiera 434 elementy.

Porównanie wyników

Na rys. 5.10 i 5.11 zostały przedstawione mapy przemieszczeń w kierunku x. Rys. 5.10 przedstawia mapę wykonaną przy pomocy programu ANSYS, natomiast rys. 5.11 mapę z wyników otrzymanych przy pomocy mojego kodu metody elementów skończonych. Porównanie obu wykresów pokazuje, że ich charakter jest identyczny oraz maksymalne i minimalne przemieszczenia mają identyczne wartości.

Kolejne dwa rysunki (rys. 5.12 i 5.13) prezentują porównanie wyników dla funkcji przemieszczenia w kierunku y. I w tym przypadku oba wykresy są identyczne.

Powyższe wykresy potwierdzają, że sformułowanie modelu numerycznego oraz wyniki otrzymywane dzięki niemu są poprawne.




Rysunek 5.10. Rozkład funkcji przemieszczenia w kierunku x wykonany w programie ANSYS



Rysunek 5.11. Rozkład funkcji przemieszczenia w kierunku x obliczony za pomocą własnego kodu MES



Rysunek 5.12. Rozkład funkcji przemieszczenia w kierunku y wykonany w programie ANSYS



Rysunek 5.13. Rozkład funkcji przemieszczenia w kierunku y obliczony za pomocą własnego kodu MES

Wyniki otrzymane dla niejednorodnej tarczy z wykorzystaniem elementów skończonych z dodatkową funkcją aproksymacyjną

Aby pokazać ogromny zysk zastosowania elementów gradientowych analizie poddana została konstrukcja z rzadszą siatką elementów skończonych przedstawioną na rys. 5.15, w której zmniejszono ilość elementów w obszarze interfejsu FGM, natomiast w pozostałych obszarach pozostawiona została taka sam ilość elementów jak w przykładzie poprzednim. W konsekwencji cała konstrukcja została podzielona na 288 elementów, co stanowi liczbę prawie dwukrotnie mniejsza niż dla siatka wykorzystywana w klasycznej metodzie elementów skończoncyh.

Niejednorodność materiałowa została opisana funkcją potęgową, zgodnie z regułą mieszania reprezentowaną przez funkcję wyrażoną wzorem (4.2). Biorąc powyższe pod uwagę funkcja opisująca moduł Younga w obszarze warstwy przejściowej opisana jest nastepujacą formułą

$$E(x) = E_{Al_2O_3}x^m$$
, gdzie $m = \log_2 \frac{E_{Al}}{E_{Al_2O_3}} = -2.38$ (5.72)

Wykres modułu Younga dla całej konstrukcji został zaprezentowany na rys. 5.14.



Rysunek 5.14. Wykres moduły Younga E(x) dla tarczy wykonanej z materiału gradientowego

Na wykresie (rys. 5.16) został przedstawiony rozkład przemieszczeń w kierunku x. Szczegółowa analiza pokazuje, że został zachowany charakter zmian, jednak maksymalna wartość przemieszczenia jest niższa niż w analogicznym przykładzie przezentowanym wcześniej. Kolejny wykres (rys. 5.17) w dokładniejszy sposób przedstawia porównanie klasycznej metody elementów skończonych oraz metody elementów skończonych z elementami gradientowymi. Na rysunku została naniesiona funkcja przemieszczenia w kierunku x dla jednego z przekrojów y dla wszystkich trzech analizowanych przypadków: wyniki otrzymane przy pomocy komercyjnego pakietu metody elementów skończonych



Rysunek 5.15. Siatka elementów skończonych dla analizy uwzgledniającej elementy niejednorodne

ANSYS, wyniki uzyskane przy pomocy kodu metody elementów skończonych jednorodnych oraz wyniki dla metody elementów skończoncyh z elementami gradientowymi. Na podstawie zaprezentowanego wykresu możemy zauważyć, że wyniki otrzymane przy pomocy programu ANSYS i MES z klasycznymi jednorodnymi elementami skończonymi są identyczne, co jest dodatkowym potwierdzeniem poprawności działania programu. W przypadku wyników dla elementów gradientowych widzimy, że wartości przemieszczeń w strefie materiału ceramicznego i warstwy przejściowej są nieznacznie niższe. Wynika to z dokładniejszej aproksymacji niejednorodności materiałowej (funkcja ciągła, która w sposób dokładny opisuje niejednorodność w przeciwieństwie do funkcji schodkowej będącej tylko pewnym uśrednieniem). Jest to kolejna korzyść wynikająca z zastosowania szczególnego typu elementów do analizy materiałów gradientowych. Natomiast w obszarze materiału dziewiczego możemy zauważyć idealną zgodność wyników dla wszystkich trzech analizowanych przykładów.

Warto jeszcze zaznaczyć, że dla przypadku elementów gradientowych liczba elementów skończonych była prawie o połowę mniejsza niż w przypadku klasycznej metody. Oczywiście w tak prostym przykładzie zysk czasu obliczeniowego jest niewielki, jednak w przypadku prawdziwych elementów konstrukcyjnych, których skomplikowanie jest o wiele wyższe oraz czas obliczeń jest bardzo długi jest to bardzo istotna uwaga. Zastosowanie elementów gradientowych pozwala na stworzenie modelu numerycznego, który w bardzo dokładny sposób opisuje analizowany materiał przy jednoczesnym skróceniu czasu obliczeń.



Rysunek 5.16. Rozkład funkcji przemieszczenia w kierunku x dla elementów niejednorodnych



Rysunek 5.17. Porównanie wyników klasyczego MES oraz MES z elementami niejednorodnymi

6. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ PROPONOWANEGO OPISU DO MODELOWANIA MATERIAŁÓW I KONSTRUKCJI

6.1 Modelowanie gradientowej tarczy hamulcowej przeciwko zjawisku globalnej utraty stateczności *hot – spots*

Tarcze hamulcowe montowane w samochodach lub pociągach mogą podlegać ekstremalnym warunkom podczas gwałtownego hamowania. Podczas procesu następuje generacja ciepła wynikająca z działania sił tarcia, która może doprowadzić do globalnej utraty stabilności (ang. *hot – spot*) ze względu na drastyczne zwiększenie dysypowanej energii przez system. Na rys. 6.1 zostały zaprezentowane eksperymentalne zdjęcia utraty stateczności tarczy hamulcowej w pociągu TGV zarejestrowane przez kamerę na podczerwień. Nie tylko tarcze hamulcowe są narażone na podobne niepożądane zjawiska. Na rys.6.2 zostało zaprezentowane zjawisko *hot – spot* na tarczy sprzęgła.



Rysunek 6.1. *Hot-spot* zarejestrowane na tarczach hamulcowych pociągu TGV za pomocą kamery na podczerwień przez Paniera, Dufrénoy'a i Weicherta [122]

Prezentowana symulacja numeryczna została wykonana w ramach współpracy z Siecią Doskonałości KMM-NoE [82]. Korporacje przemysłowe zintegrowane w ramach KMM-NoE wykazywały szczególne zainteresowanie częściami układu hamulcowego samochodów, a w szczególności konstrukcją klocków i tarcz hamulcowych. Sugestie ze strony firm dotyczyły próby stworzenia materiału dedykowanego do tarcz i klocków hamulcowych, który byłby z jednej strony wytrzymały i odprony na ścieralnie oraz gwałtowne zmiany temperatury, a jednocześnie charakteryzował się niską masą. Ponadto istniała potrzeba przeprowadzenia badań, które doprowadziły by do wyeliminowania niekorzystnych i bardzo niebezpiecznych zjawisk w trakcie procesu hamowania. Jednym z takich zjawisk jest właśnie globalna utrata stateczności nazywana *hot – spot*.



Rysunek 6.2. *Hot-spot* zarejestrowane na tarczy sprzęgła przez Yi, Barbera i Zagrodzkiego [188]

Z uwagi na ten fakt, pierwszym z celów mojej symulacji numerycznej było stworzenie modelu, który byłby z jednej strony możliwie nieskomplikowany, a z drugiej strony w najlepszy możliwy sposób oddawał rzeczywistą naturę zjawiska. Drugim celem było znalezienie odpowiednich proporcji składników oraz charakteru materiału gradientowego, który potrafił by zapobiegać groźnemu zjawisku jakim jest *hot – spot*.

Wyniki otrzymane z poniżej prezentowanej symulacji przyczyniły się do stworzenia takiego materiału oraz zostały częściowo wykorzystane przez jedną z korporacji przemysłowych zintegrowanych w ramach Sieci Doskonałości KMM-NoE.

Analiza zjawiska *hot* – *spot* była podejmowana przez kilku badaczy. Dufrénoy i in. [122] zaproponowali klasyfikację kilku różnych typów utraty globalnej stateczności obserwowanej w przypadku tarcz hamulcowych stosowanych w pociągach. Zjawisko globalnej utraty stateczności *hot* – *spot* jest obserwowane w momencie powstania dużego gradientu temperatury w strefie tarcia pomiędzy tarczą a klockami hamulcowymi, który prowadzi do powstania dużego strumienia ciepła, gwałtownego wzrostu naprężeń obwodowych, prowadzących do powstania fal wyboczeniowych po obwodzie tarczy [121]. Jest to niezwykle groźne zjawisko, a cały system hamulcowy nie może być dalej użytkowany.

Zjawisko *hot – spot* jest zazwyczaj opisywane za pomocą sprężystej lub plastycznej utraty stateczności [37] lub według koncepcji TEI (ang. *thermoelastic instability*) [189]. Według teorii opartej na sformułowaniu globalnej utraty stateczności otrzymujemy zazwyczaj większe wartości obciążenia krytycznego niż w przypadku sformułowania opartego na koncepcji TEI [31], jednak sformułowanie TEI znacznie lepiej opisuje zagadnienie kontaktu w strefie tarcia dla różnych typów *hot – spot* w połączeniu z rozszerzalnością termiczną, ciepłem generowanym poprzez tarcie oraz przewodzeniem ciepła w poza strefą kontaktu [121]. Wyjaśnienie tego niebezpiecznego zjawiska jest w dalszym ciągu tematem dyskusji. Istnieje jedynie kilka prac podejmujących zagadnienie w sposób kompleksowy, m.in.: Dufrénoy, Panier, Weichert i in. [32, 120–122], Yi, Zagrodzki, Barber i in. [188–190], Asfour [10].

W pracy [58] zostało zaproponowane nowe podejście zwiększające bezpieczeństwo użytkowania tego typu konstrukcji poprzez zastosowanie materiałów gradientowych. W analizowanym przykładzie autor przeprowadził symulację numeryczną dla tarczy hamulcowej skonstruowanej z trzech materiałów: jednorodnej stali ASTM321, jednorodnego materiału kompozytowego opartego na bazie stopu aluminium zbrojonego cząstkami borku tytanu TiB₂ A356R oraz funkcjonalnie zmiennego materiału kompozytowego A356R. Symulacja została oparta na wcześniejszych pracach autora [57, 62].

6.1.1 Sformułowanie problemu

Jako model tarczy hamulcowej została przyjęta płyto – tarcza Kirchhoffa – Love'a (por. rys. 6.3 z równaniami typu Brayan'a, które został szczegółowo omówiony w rozdziale 4.3. W modelu zostało przyjęte założenie pełnej obrotowej symetrii. W przypadku modelowania procesu hamowania, założenie pełnej obrotowej symetrii jest prawdziwe, dopóki analiza dotyczy fazy przedwyboczeniowej (por. rys. 6.1 lub rys. 6.4). Podobnie sytuacja wygląda w przypadku sił tarcia. Istnieje możliwość analizowania fazy powyboczeniowej, tzw *hot–bending*, jednak nie jest to tematem niniejszego przykładu.



Rysunek 6.3. Model płyto – tarczy z klockami hamulcowymi

W stosunku do wszystkich obciążeń termo – mechanicznych także przyjmowane jest założenie upraszczające dotyczące ich obrotowej symetrii. Jednostkowe siły masowe odpowiednio w kierunku promieniowym i obwodowym spełniają to założenie w sposób ścisły, natomiast pole sił tarcia oraz wywołane nim pole termiczne jedynie w sposób przybliżony, ponieważ para klocków hamulcowych działa na łuku o skończonej długości $< 2\pi$. Odnośnie tych ostatnich, mając na względzie unikanie zbytniej komplikacji modelu matematycznego, postuluje się również ich obrotową symetrię homogenizując wpływ działania pary klocków hamulcowych na pełnym obwodzie tarczy.



Rysunek 6.4. *Hot-spots* zarejestrowane kamerą na podczerwień na tarczach hamulcowych TGV [120]

Ponadto zakładamy, że proces hamowania przebiega ze stałym opóźnieniem kątowym ε =const, skutkując liniową zależnością prędkości kątowej od czasu $\omega = \omega_0 - \varepsilon \tau$. Powyższe założenie zostało potwierdzone wynikami doświadczalnymi (por. rys. 6.5).



Rysunek 6.5. Zależność ciśnienia p [MPa] i prędkości kątowej ω [s⁻¹] od czasu w trakcie procesu hamowania (Gao i Lin [48])

Duża wartość prędkości obrotowej oraz siły tarcia pomiędzy tarczą, a klockami prowadzą do wytworzenia ciepła w trakcie procesu hamowania, powodując powstanie symetrycznego pola temperatury. Szukane pole temperatury jest wyznaczane za pomocą równania (4.21a) i stanowi wymuszenie w równaniach stanu mechanicznego (4.39). Powstałe pole temperatury oraz siły masowe zawierające prędkość kątową ω oraz przyspieszenie kątowe ε powodują powstanie deformacji konstrukcji, która prowadzi do powstania kołowo-symetrycznego pola naprężeń obwodowych powodujących powstanie niesymetrycznych modów wyboczeniowych w tarczy. Wartość krytycznego obciążenia jako wartość własna jest obliczana z równań stanu giętnego (4.40). Powyższy algorytm obliczania *hot – spot* był szeroko dyskutowany w pracach Paniera i Dufrénoy'a [120]. Podobny mechanizm był także dyskutowany przez Sadeghi [139] oraz przez Krempaszky [83].

Intensywność wewnętrznych źródeł ciepła

W równaniu (4.21a) człon \dot{q}_v oznacza intensywność wewnętrznych źródeł ciepła. Analizowany przykład wymaga podania szczegółowej definicji tej wielkości.

Strefa generacji ciepła. Na podstawie definicji, intensywność wewnętrznych źródeł ciepła jest dana wzorem

$$\dot{q}_v = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} \tag{6.1}$$

gdzie d $V = 2\pi rhdr$ – element objętości klocka hamulcowego. Przyjmując, że klocek naciska na tarczę z pewnym ciśnieniem p, na promieniu r, tarcza obraca się z prędkością kątową ω oraz współczynnik tarcia jest równy μ , to wielkość \dot{Q} możemy zdefiniować jako

$$\dot{Q} = 2p\mu r \omega \eta \mathrm{d}A \tag{6.2}$$

gdzie p jest ciśnieniem nacisku klocka na tarczę, μ – współczynnikiem tarcia pomiędzy tarczą a klockami, ω – prędkością kątową, η – współczynnikiem sprawności w przedziale [0, 1] opisującym wielkość dysypowanej energii, d $A = 2\pi r dr$ – element powierzchni, dV = h dA.

Całkowita energia generowana w trakcie procesu hamowania zostaje zużyta dwojako: na sam proces hamowania oraz na generację ciepła. W niniejszym zadaniu brana jest pod uwagę tylko ta druga część energii. Parametr η jest mnożnikiem podającym procentowy udział energii zużytej w proces hamowania na generację ciepła. Fizycznie można go interpretować jako $1 - \eta_{max}$, gdzie η_{max} jest sprawnością. Mnożnik dwa odnosi się do pary klocków hamulcowych.

Uwzględniając d \hat{Q} w równaniu (6.1) otrzymujemy formułę definiującą intensywność wewnętrznych źródeł ciepła w strefie kontaktu (generacji ciepła)

$$\dot{q}_v = \frac{2p\mu r\omega dA}{2\pi rh dr} \eta = 2\frac{pr\mu\omega}{h} \eta$$
(6.3)

W powyższej definicji ciśnienie w jednej chwili osiąga wartość maksymalną. Jest to pewne uproszczenie wynikające z przyjęcia stałego ciśnienia nacisku. Jednak badania eksperymentalne (por. rys. 6.5) potwierdzają, że założenie stałego ciśnienia jest słuszne po pewnej, bardzo krótkiej chwili od momentu rozpoczęcia procesu hamowania.

Ponadto zostało przyjęte, że klocki hamulcowe oddziałują na całym obwodzie tarczy. Jest to kolejne założenie upraszczające, ponieważ klocki hamulcowe działają na skończonej długości $< 2\pi$. Ze względu na unikanie zbytniej komplikacji modelu wprowadzono homogenizację rozmywając klocki hamulcowe na cały obwód tarczy. Powyższe założenie jest prawdziwe w przypadku stosunkowo dużej prędkości kątowej ω . Jednak w analizowanym przykładzie największe siły krytyczne powstają w pierwszej fazie procesu hamowania, z tego powodu przyjęcie powyższego uproszenia jest uzasadnione.

Strefa chłodzenia. Klocki hamulcowe posiadają skończoną szerokość $r_1 \le r_4 - r_3 \le r_2$, gdzie r_1 oznacza promień wewnętrzny, a r_2 promień zewnętrzny tarczy. W strefie braku

kontaktu, tarcza chłodzona jest opływającym ją gazem, co można opisać klasycznym równaniem konwekcji swobodnej lub wymuszonej Newtona znanym z termodynamiki (6.4), gdzie β jest współczynnikiem swobodnej/wymuszonej konwekcji, T – aktualną temperaturą, natomiast T_{∞} – temperaturą odniesienia w dostatecznie dużej odległości od źródła ciepła (poza warstwą przyścienną) [44].

$$\dot{q}_v = \frac{2\beta \left(T - T_\infty\right) 2\pi r dr}{2\pi h r dr} = 2\frac{\beta}{h} \left(T - T_\infty\right) \tag{6.4}$$

Wartość współczynnika β jest silnie uzależniona od prędkości strumienia płynu opływającego ciało. W początkowej fazie hamowania prędkość kątowa tarczy ω jest duża, powodując, że prędkość kątowa gazu opływającego tarczę również jest duża. W związku z tym konwekcja jest konwekcją wymuszoną. W trakcie procesu hamowania prędkość kątowa oraz prędkość płynu maleje zmieniając konwekcję na swobodną. Biorąc pod uwagę powyższe współczynnik swobodnej/wymuszonej konwekcji został przyjęty jako funkcja prędkości kątowej ω .

Uwzględniając wszystkie powyższe założenia i definicje równanie przewodnictwa cieplnego Fouriera – Kirchhoffa można zapisać jako

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\lambda(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right] + \left\{\begin{array}{l} \underbrace{\underbrace{strefa \ tarcia}}_{+2\frac{\mu p\omega r}{h}\eta} \\ \underbrace{\underbrace{-2\frac{\beta(\omega)}{h}\left(T-T_{\infty}\right)}}_{\text{poza \ strefa \ tarcia}}\right\} = \varrho c_{v}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{6.5}$$

Stan mechaniczny

Stan mechaniczny opisują równania (4.39) oraz równanie (4.40). Ze względu na istnienie sił tarcia równowaga wewnętrznych sił obwodowych (4.39b) musi zostać zmodyfikowana. Konieczne jest uwzględnienie siły tarcia w strefie kontaktu, prowadząc do zmodyfikowanego równania (4.39b) do postaci

$$\frac{1-\nu}{2}\mathcal{B}\overline{\nabla}_{1}^{2}v + \frac{1-\nu}{2}\mathcal{B}'\left(v'-v/r\right) + q_{\varphi}h = 0 \quad \text{poza strefą tarcia}$$

$$\frac{1-\nu}{2}\mathcal{B}v'' + \left(\frac{1}{r} + \mathcal{B}'\right)N_{0} + q_{\varphi}h = 0 \quad \text{w strefie tarcia}$$
(6.6)

gdzie ${\it N}_0$ jest siłą tarcia pomiędzy klockami hamulcowymi a tarczą daną wzorem

$$N_0 = \int_{r_3}^{r_4} 2p\mu dr$$
 (6.7)

W modelu matematycznym zostały jeszcze uwzględnione siły masowe w kierunku osiowym q_z modelujące sprężystość układu hamulcowego według następującej formuły

$$q_z = \begin{cases} 0 & \text{poza strefa tarcia} \\ -\gamma f_{1,2} & \text{w strefie tarcia} \end{cases}$$
(6.8)

Jako model sprężystości układu hamulcowego zostało przyjęte sprężyste podłoże Winklera, opisujące zagadnienie kontaktu klocek – tarcza hamulcowa, które charakte-ryzuje się współczynnikiem odporu podłoża proporcjonalnym do wartości ugięcia w,

w którym rolę współczynnika proporcjonalności pełni parametr γ znany w literaturze jako współczynnik sprężystości podłoża Winklera [111]. Został on wyliczony za pomocą empirycznego wzoru (6.9) zbudowanego na podstawie badań, w których wykazano zależność γ od rozszerzania się przewodów elastycznych w układzie hamulcowym samochodu [81].

$$\gamma = 2.7 \times 10^4 \frac{\Delta V_N}{l_p^2} \tag{6.9}$$

gdzie ΔV określa zmianę objętości w przewodach elastycznych układu hamulcowego, a l_p oznacza długość tych przewodów.

Należy nadmienić, że układ równań ((4.21a), (4.39), (4.44)) jest jednostronnie rozprzęgnięty (temperatura występuje jako wymuszenie w układzie równań stanu mechanicznego, ale siły stanu membranowego nie występują w równaniu Fouriera – Kirchhoffa). Wynika stąd, że na każdym kroku czasowym można stosować tzw. *stagger algorithm*, który polega na obliczaniu rozkładu temperatury poprzez rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego (4.21a), a następnie podstawieniu obliczonego rozkładu temperatury jako prawej strony (wymuszenie) do równań tarczowych (4.39). Na podstawie obliczonych rozkładów przemieszczeń: radialnego i obwodowego, obliczane są siły przekrojowe: N_r , N_{φ} , $N_{r\varphi}$, które stanowią wymuszenie w równaniu stanu giętnego (4.44), skąd z kolei obliczane są kolejne wartości własne Λ_i , będące kolejnymi mnożnikami obciążeń krytycznych prowadzących do globalnej utraty stateczności konstrukcji. W bardziej ogólnym sformułowaniu von Kármána występuje sprzężenie pomiędzy stanem giętnym a tarczowym (por. [44, 45]).

6.1.2 Warunki początkowo – brzegowe

Jednoznaczność rozwiązania problemu opisanego układem równań różniczkowych (6.5), (4.39a), (6.6), (4.44) wymaga sformułowania odpowiednich warunków początkowo – brzegowych, których liczba zależy od ilości i rzędu poszczególnych równań różniczkowych.

Ze wskazanych względów (4.21a) jest równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego, wymaga podania jednego warunku początkowego oraz dwóch warunków brzegowych postaci

warunek początkowy :

$$T(r,0) = T_{\text{ref}} \tag{6.10}$$

warunki brzegowe typu von Neumana

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_1} = -q_0 \tag{6.11a}$$

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_2} = 0 \tag{6.11b}$$

gdzie r_1 jest wewnętrznym, a r_2 zewnętrznym promieniem tarczy, q_0 oznacza strumień ciepła oddawany do wału. Na przeciwległym brzegu został przyjęty adiabatyczny warunek brzegowy, ze względu na kontakt tarczy z powietrzem. Jest to pewne uproszczenie wynikające z przyjęcia sformułowania Kirchhoffa – Love'a jako modelu tarczy. W przypadku przyjęcia modelu 3D na brzegu zewnętrznym musiałby zostać zaimplementowany warunek konwekcyjny ze względu na zgodność warunku brzegowego z wewnętrznymi źródłami ciepła i obciążeniem termicznym.

Z punktu widzenia stanu mechanicznego, ze względu na brak brzegowych obciążeń mechanicznych w kierunku promieniowym, zostało przyjęte założenie zerowania się sił promieniowych na obu brzegach tarczy (6.12a), (6.12b). W przypadku obciążeń obwodowych na brzegu wewnętrznym został przyjęty warunek brzegowy zerowania się przemieszczeń obwodowych (6.12c). Z punktu widzenia stanu giętnego zakładamy, że tarcza jest utwierdzona do wału (6.12e), (6.12f), natomiast brzeg zewnętrzny jest brzegiem swobodnym (6.12g), (6.12h), co prowadzi do warunku zerowania się momentu radialnego i siły poprzecznej dla $r = r_2$.

$$N_r(r_1,\tau) = \mathcal{B}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \nu \frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha \left(T(r,\tau) - T_{\mathrm{ref}}\right)\right]\Big|_{r=r_1} = 0$$
(6.12a)

$$N_r(r_2,\tau) = \mathcal{B}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \nu \frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha \left(T(r,\tau) - T_{\mathrm{ref}}\right)\right]\Big|_{r=r_2} = 0$$
(6.12b)

$$v(r,\tau)|_{r=r_1} = 0$$
 (6.12c)

$$N_{r\phi}(r_2,\tau) = \frac{1-\nu}{2} \mathcal{B}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} + \frac{v}{r}\right)\Big|_{r=r_2} = 0$$
(6.12d)

$$w_i(r,\tau)|_{r=r_1} = 0$$
 (6.12e)

$$\left. \frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}r} \right|_{r=r_1} = 0 \tag{6.12f}$$

$$M_r(r_2,\tau) = \left[\frac{\mathrm{d}^2 w_i}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}r} - k^2 \frac{w_i}{r}\right)\right]\Big|_{r=r_2} = 0$$
(6.12g)

$$\bar{Q}_{r}(r_{2},\tau) = \left[\frac{\mathrm{d}^{3}w_{i}}{\mathrm{d}r^{3}} + \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}^{2}w_{i}}{\mathrm{d}r^{2}} - \frac{1 + k^{2} (2 - \nu)}{r^{2}} \frac{\mathrm{d}w_{i}}{\mathrm{d}r} + \frac{k^{2} (3 - \nu)}{r^{3}} w_{i} \right] \Big|_{r=r_{2}} = 0, \quad i = 1, 2$$
(6.12h)

6.1.3 Algorytm numeryczny

Aby numeryczne rozwiązanie problemu było stabilne i jednoznaczne konieczne jest podanie warunku stabilności. Warunek stabilności zależy od definicji funkcji wewnętrznych źródeł ciepła. W analizowanym przykładzie funkcja \dot{q}_v została zdefiniowana na przedziałach. W strefie tarcia jest funkcją zależną od współrzędnej promieniowej, wówczas warunek stabilności określony jest równaniem (5.59).

W strefie chłodzenia wewnętrzne źródła ciepła są funkcją zależną od aktualnej temperatury. W takim przypadku warunek stabilności należy wyznaczyć na podstawie równania (5.58) i przyjmuje postać

$$\Delta \tau \le \min_{j} \left[\frac{c_{v}\varrho}{\frac{2\lambda(r_{j})}{(\Delta r)^{2}} + 2\frac{\beta(\omega)}{h}} \right]$$
(6.13)



Zagadnienie zostało rozwiązane stosując metodę strzału (por. rozdział 5.1.1) na każdym kroku czasowym z wykorzystaniem *stagger algorithm*. Zgodnie z procedurą numeryczną, konieczna jest zamiana układu *m* sprzężonych równań różniczkowych rzędu *n*, na równoważny układ *n* równań różniczkowych pierwszego rzędu, co prowadzi do definicji nowych zmiennych postaci

 $x = r, y_1 = T, y_2 = \frac{dT}{dr}, y_3 = u, y_4 = \frac{du}{dr},$ $y_5 = v, y_6 = \frac{dv}{dr}, y_7 = w_1, y_8 = \frac{dw_1}{dr}, y_9 = \frac{d^2w_1}{dr^2}, (6.14)$ $y_{10} = \frac{d^3w_1}{dr^3}, y_{11} = w_2, y_{12} = \frac{dw_2}{dr}, y_{13} = \frac{d^2w_2}{dr^2}, y_{14} = \frac{d^3w_2}{dr^3},$

otrzymując układ N = 14 równań różniczkowych pierwszego rzędu oraz dodatkowe piętnaste trywialne równanie różniczkowe (5.4) służące do wyznaczenia wartości własnej.

6.1.4 Wyniki

Numeryczna analiza wymaga podania odpowiednich danych materiałowych i geometrycznych oraz parametrów startowych. Geometria tarczy zastosowana w symulacji numerycznej została zaprezentowana na rys. 6.6, natomiast parametry startowe zostały podane w tabeli 6.1.4. Przedstawiona geometria oraz parametry startowe zostały użyte we wszystkich przykładach dotyczących modelowania tarczy hamulcowej.



Rysunek 6.6. Geometria tarczy hamulcowej (Yi, Barber i Hartsock [188])

Tablica 6.1. Parametry startowe w analizie stabilności tarczy hamulcowej (Dufrénoy i Weichert [32], Asfour i in. [10], Panier i in. [121])

$\beta [W/m^2K]$	$q_0 [\mathrm{W/m^2}]$	η [-]	$T_{\infty} [^{\circ}C]$	T_{ref} [°C]
5.0÷250.0	30.0	10.0^{-3}	20.0	20.0
ε [1/s ²]	μ[–]	p [MPa]	γ [MPa/m ²]	
10.08	0.4	4.0	870.0	

W analizowanym przykładzie startowa prędkość kątowa $\omega_0 = 800.0$ [1/min] na podstawie badań eksperymentalnych wykonanych przez Yi, Barbera, i Hartsocka [188].

Stabilność jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej ze stali ASTM-321

W pierwszym przykładzie numerycznym, materiałem tarczy hamulcowej jest stal nierdzewna ASTM-321 (walcowana 18 Cr, 8 Ni, 0.45 Si, 0.4 Mn, 0.1 C, Ti/Nb stabilizowana, austenityczna, wyżarzana w temperaturze 1070°C, chłodzona powietrzem) o właściwościach materiałowych zaprezentowanych w tabeli 6.2.

Tablica 6.2. Właściwości materiałowe tarczy hamulcowej wykonanej ze stali nierdzewnej ASTM-321 (Odqvist [114])

E_0 [GPa]	σ_0 [MPa]	ν[-]	<i>ρ</i> [kg/m ³]	α [1/K]	$\lambda_0 [W/mK]$	c [J/kgK]
170.0	120.0	0.33	7850.0	1.85×10^{-5}	20.0	478.0

Analiza numeryczna jednorodnej tarczy hamulcowej (E = const, $\lambda = \text{const}$) wykonanej z nierdzewnej stali ASTM-321 jest przykładem referencyjnym służącym do weryfikacji modelu w porównaniu do danych eksperymentalnych wykonanych przez Dufrénoy'a, Weicherta, Paniera i in. [32, 120, 121]. Na rys. 6.7 został zaprezentowany rozkład pola temperatury. W wypadku tarcz hamulcowych instalowanych w pociągach energia dysypowana, wymiary tarczy oraz prędkość kątowa są większe, jednak z drugiej strony ciśnienie hamulców jest mniejsze wydłużając czas hamowania [120]. Panier i in. badali eksperymentalnie tarcze hamulcowe montowane w pociągu TGV. Wynik pomiaru temperatury za Panierem został zaprezentowany na rys. 6.8. Wykres pokazuje zależność temperatury od czasu hamowania dla jednego z przekrojów tarczy. Warto zaznaczyć, że chociaż w mojej symulacji numerycznej analizowana była tarcza hamulcowa montowana w samochodach, to maksymalna temperatura jest porównywalna z wynikami eksperymentalnymi otrzymanymi przez Paniera i współpracowników. Różny jest tylko czas trwania procesu ze wzgledu na niższą prędkość kątową wystepująca w pociągach.

Ponadto szczegółowa analiza wyników numerycznych pokazuje wyraźnie widoczną strefę generacji ciepła w centralnej części tarczy oraz strefę chłodzenia przy brzegach. Temperatura osiąga maksymalną wartość w początkowej fazie procesu, a następnie wartość maksymalna temperatury maleje w kolejnych krokach, co wiąże się z zamianą charakteru konwekcji z wymuszonej na swobodną.

Rozkład naprężeń promieniowych N_r został zaprezentowany na rys. 6.9. Wartości maksymalnego naprężenia radialnego są dodatnie i znacznie mniejsze niż naprężenia obwodowego, dlatego powyższa wielkość nie ma znaczącego wpływu na wystąpienie zjawiska globalnej utraty stateczności *hot – spot*. Wielkością decydującą o utracie stateczności przez konstrukcję jest naprężenie obwodowe, które zostało zaprezentowane na rys. 6.10. W przypadku jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej ze stali nierdzewnej ASTM-321 wystąpiło negatywne zjawisko globalnej utraty stateczności *hot-spot*. Przykładowy trzeci mod wyboczeniowy został zaprezentowany na rys. 6.11. Warto nadmienić, iż pierwsza wartość własna dla tarczy wykonanej z nierdzewnej stali wynosi $\Lambda_1 = 0.761$.



Rysunek 6.7. Rozkład temperatury dla jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej ze stali ASTM-321



Rysunek 6.8. Rozkład pola temperatury na tarczy hamulcowej na podstawie pomiarów doświadczalnych w trakcie procesu hamowania (Panier i in. [120])



Rysunek 6.9. Rozkład naprężeń promieniowych jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej ze stali ASTM-321



Rysunek 6.10. Rozkład naprężeń obwodowych jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej ze stali ASTM-321



Rysunek 6.11. Mod wyboczeniowy k = 3 dla jednorodnej tarczy hamulcowej

Stabilność jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej z materiału kompozytowego A356R

Skład chemiczny materiału kompozytowego A356R to stop aluminium Al-Si₇Mg_{0.3} zbrojony cząstkami materiału ceramicznego TiB₂, których udział procentowy wynosi 6% objętości materiału. Stop aluminium jest specjalnie dedykowany do produkcji tarcz hamulcowych, a cząstki TiB₂ w znaczny sposób poprawiają własności termiczne materiału. Kompozyt A356R wytwarzany jest z reguły przy pomocy techniki SHS (por. rozdział 3.1.6). Materiał A356R został opracowany i stworzony w trakcie współpracy w Sieci Doskonałości KMM-NoE. Główny trzon badań nad wspomnianym materiałem prowadził Pedro Egizabal z firmy Inasmet "Tecnalia" w San Sebastian w Hiszpanii [34]. W ramach programu wymiany międzynarodowej finansowanego przez KMM-NoE miałem możliwość przebywania w wyżej wymienionym ośrodku przez okres dwóch miesięcy (wrzesień – październik 2007). W trakcie pobytu miałem okazję zapoznać się z technikami wytwarzania i wszelkimi danymi eksperymentalnymi dotyczącymi materiału A356R. Chociaż powyższy materiał stanowi grupę materiałów innowacyjnych, w dalszym ciągu pozostaje materiałem jednorodnym. Właściwości materiałowe A356R

Tablica 6.3. Właściwości materiałowe tarczy hamulcowej wykonanej z materiału kompozytowego A356R (Egizabal [34])

E_0 [GPa]	σ_0 [MPa]	ν [–]	$\varrho [\text{kg/m}^3]$	α [1/K]	$\lambda_0 [W/mK]$	c [J/kgK]
79.0	195.0	0.33	2670.0	22.4×10^{-6}	183.51	963.0

Na rys. 6.12 został zaprezentowany rozkład temperatury. W pierwszej kolejności warto zauważyć, iż maksymalna temperatura jest znacznie mniejsza w porównaniu do temperatury referencyjnej. Ponadto wzrost temperatury jest wolniejszy, prowadząc do przejmowania mniejszej ilości strumienia ciepła przez materiał. Ponadto możemy również zauważyć, że ogólny kształt krzywych jest porównywalny z wcześniejszym przykładem (por. rys. 6.7).



Rysunek 6.12. Rozkład temperatury jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej z materiału A356R

Maksymalne wartości naprężenia radialnego, rys. 6.13 oraz naprężenia obwodowego, rys. 6.14 są znacznie niższe dla tarczy hamulcowej wykonanej z materiału A356R w porównaniu do tarczy wykonanej ze stali ASTM-321 (por. 6.1.4). Prowadzi to do sytuacji, gdzie pierwsza wartość własna jest większa od jedności, $\Lambda_1 = 126.451$, gwarantując, że stabilność tarczy hamulcowej zostaje zachowana.

89



Rysunek 6.13. Rozkład naprężeń promieniowych jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej z materiału A356R



Rysunek 6.14. Rozkład naprężeń obwodowych jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej z materiału A356R

Stabilność niejednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej z materiału kompozytowego gradientowego FGM A356R

W prezentowanym przykładzie analizowana tarcza hamulcowa została wykonana z materiału gradientowego, którego udział procentowy poszczególnych składników, tj. stopu aluminium i materiału ceramicznego został przedstawiony na rys. 6.15.

	0% ceramika	50% ceramika	100% ceramika
i	100%	50%	0%
i	metalu	metalu	metalu

Rysunek 6.15. Schemat udziału procentowego poszczególnych składników w materiale gradientowym A356R; faza 1 – stop aluminium, faza 2 – materiał ceramiczny

Funkcjonalna zmienność została opisana równaniem (4.1) (funkcja eksponencjalna), jednak współczynnik rozszerzalności termicznej w analizowanym przykładzie dalej pozostaje stały (α =const). Współczynniki $\beta = k_1$ i $\delta = k_2$ w równaniu (4.1) zostały obliczone na podstawie wzorów (6.15) (Kim i Paulino [80]) oraz ich rozkłady zostały zaprezentowane na rys. 6.16 (współczynnik przewodności termicznej) oraz rys. 6.17 (moduł Younga).



Rysunek 6.16. Funkcji aproksymacyjna współczynnika przewodności termicznej dla tarczy z materiału FGM



Rysunek 6.17. Funkcja aproksymacyjna modułu Younga dla tarczy z materiału FGM

A356 jest stopem aluminium (Al-Si₇Mg_{0.3}), natomiast A356R posiada dodatkowe zbrojenie cząstkami TiB₂. Właściwości termiczne cząstek TiB₂ są lepsze w porównaniu do stopu A356, stąd współczynnik przewodności termicznej materiału A356R jest wyższy, co prowadzi do znacznie lepszych właściwości termicznych kompozytu A356R. Funkcjonalna zmienność została wprowadzona jako zmiana materiału począwszy od A356 na wewnętrznym promieniu, aż do A356R na zewnętrznym promieniu. Jako wartości startowe współczynnika przewodności termicznej zostało przyjęte $\lambda_0 = \lambda_{A356} =$ 151 [W/mK], natomiast modułu Younga $E_0 = E_{A356} = 72.4$ [GPa].



Rysunek 6.18. Rozkład temperatury w tarczy hamulcowej wykonanej z materiału gradientowego

Maksymalna temperatura tarczy hamulcowej z materiału gradientowego (por. rys. 6.18) jest także niższa niż temperatura w przykładzie referencyjnym, ale także niższa niż w poprzednim przykładzie (por. rys. 6.12), a jest to konsekwencją lepszej odporności termicznej materiału poprzez zastosowanie inteligentnego modelowania jego składu chemicznego, w szczególności współczynnika przewodności termicznej.

W przypadku rozkładu naprężeń obwodowych, ponownie możemy zauważyć korzyści płynące z zastosowania materiałów funkcjonalnych, ponieważ maksymalna wartość jest niższa oraz nastąpiła redystrybucja rozkładu naprężeń, która w jeszcze większym stopniu przyczynia się do zachowania stabilności konstrukcji (rys. 6.19, rys. 6.20).



Rysunek 6.19. Rozkład naprężeń promieniowych w tarczy hamulcowej wykonanej z materiału gradientowego

W analizowanym przykładzie pierwsza wartość własna wynosi $\Lambda_1 = -430.917$, zgodnie z definicją podaną przez Schaefera – Papkovicha, równanie (4.46). Oznacza to, że oba obciążenia – prędkość kątowa oraz temperatura – nie prowadzą do globalnej utraty stabilności. Warto także dodać że kolejna wartość własna jest także w bezpiecznym zakresie.

Należy dodać ponadto, iż znak minus przy wartości własnej nie ma znaczenia fizycznego, jednakże może być interpretowany jako hipotetyczna wartość obciążenia prowadząca do utraty stabilności konstrukcji, po zmianie charakteru z rozciągania na ściskanie.



Rysunek 6.20. Rozkład naprężeń obwodowych w tarczy hamulcowej wykonanej z materiału gradientowego

6.2 Modelowanie procesu zużycia tulei cylindra silnika spalinowego

Tuleja cylindra jest jednym z najważniejszych elementów silnika spalinowego. Razem z tłokiem i pierścieniami uszczelniającymi stanowi jedną z najbardziej rozpowszechnionych par trących [77]. Tuleja cylindra pracuje w gwałtownie zmieniających się warunkach (wysokie gradienty temperatury, tarcie, zużycie oraz zmieniające się cyklicznie obciążenia mechaniczne), z tego względu powyższa konstrukcja jest tematem wielu badań [68, 145].

Powyższa konstrukcja była kolejnym z obszarów, którym w szczególny sposób interesowały się korporacje przemysłowe stowarzyszone w ramach Sieci KMM-NoE. Moje badania na tą konstrukcją wraz z Pedrem Egizabalem zostały zapoczątkowane w trakcie mojego pobytu w Hiszpanii. Obszarem szczególnych zainteresowań członków KMM-NoE była analiza procesu zużycia. Z powyższego powodu moja uwaga została skupiona właśnie na tym aspekcie w trakcie symulacji numerycznej, a otrzymane wyniki stały się podstawą publikacji [60] oraz zostały zaprezentowane na międzynarodowym kongresie *Thermal Stresses'09*, który odbył się w Urbana-Champain w USA.



Rysunek 6.21. a. b. - tuleja cylindra, c. - zespół tłok - pierścień - cylinder

Na rys. 6.21 zostały zaprezentowane zdjęcia tulei cylindra oraz zespołu tłok – pierścień – cylinder. Zespół tłok–pierścień-cylinder pracuje w warunkach obciążeń mechanicznych, chemicznych, zmęczeniowych, korozyjnych. W związku z tym występują tutaj niemalże wszystkie postacie zużycia. Wśród nich można wyróżnić: zużycie adhezyjne, w tym skrawanie i odkształcenia, zużycie ścierne, zużycie korozyjne.

Zużycie adhezyjne, w tym skrawanie i odkształcenia są powodowane przerwaniem filmu olejowego przez szczyty nierówności powierzchni pierścienia tłokowego i tulei cylindrowej oraz ich wzajemnym tarciem. Procesy te powodują usuwanie szczytów nierówności w strefie wierzchołków powierzchniowych, co może doprowadzić do całkowitego ich zaniku. Owe zjawiska te występują silnie w początkowej fazie ruchu, a zwłaszcza w procesie docierania. Zużycie cierne jest również wywołane przez różne zanieczyszczenia i materiały ścierne, które dostały się między tuleję cylindrową a pierścień tłokowy. Zależność zużycia ściernego pary trącej zależy od koncentracji cząstek ściernych. Decydujący wpływ na wartość zużycia mają wymiary, kształt i twardość cząstek.

Zużycie korozyjne stanowi mechanizm, w wyniku którego na powierzchni tulei lub pierścienia tłokowego powstają związki chemiczne, niemetaliczne, które zostają usunięte w wyniku współpracy elementów. Korozja w silnikach spalinowych może być wywołana przez różne czynniki, między innymi koncentrację wody oraz różnych kwasów pochodzących od gazów spalinowych, składu paliwa, stopnia spalania paliwa i innych [77].

W analizowanym przykładzie zamierzam przeprowadzić analizę numeryczną tulei cylindrowej wykonanej z materiału kompozytowego A356R ze szczególnym uwzględnieniem procesu zużycia. W następnej kolejności pragnę zaprezentować wzrost efektywności pracy konstrukcji, w szczególności odporności na ścieranie, które jest jedną z podstawowych przyczyn zużycia, poprzez zastosowanie cienkiej warstwy materiału ceramicznego silnie odpornego na ścieranie oraz warstwy przejściowej (*interface*) gradientowej pomiędzy cienką warstwą, a materiałem dziewiczym. Wprowadzenie warstwy przejściowej pozwala zniwelować lub wręcz uniknąć niepożądanych efektów (delaminacja, koncentracja naprężeń na granicy faz, mikropęknięcia i mikrouszkodzenia prowadzące do powstania szczeliny, a w konsekwencji do pęknięcia) związanych z połączeniem dwóch materiałów o bardzo różnych właściwościach.

6.2.1 Sformułowanie problemu

Jako model mechaniczny tulei cylindra została przyjęta osiowo – symetryczna cienkościenna powłoka cylindryczna z uwzględnieniem obciążeń termicznych oraz zmiennej grubości (por. rozdział 4.4.2). Stan giętny powłoki został opisany równaniem różniczkowym zwyczajnym (4.52), w którym poszukiwaną funkcją jest przemieszczenie promieniowe w(x).

Pole temperatury w powłoce cylindrycznej

Zakładamy, że rozkład temperatury w kierunku osiowym x jest kołowo – symetryczny i liniowy wzdłuż grubości h ścianki

$$T(x) = T_x + \frac{T}{h}y \tag{6.16}$$

gdzie T_x oznacza średnią temperaturę wzdłuż grubości h ścianki, T – różnicę temperatury powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej ścianki. Temperatury T_x i T są funkcjami zmiennej x.

Wyniki eksperymentalne zaprezentowane na rys. 6.22 potwierdzają, że strumień ciepła wnika do tłoka w górnej strefie, a następnie przechodzi przez pierścienie uszczelniające oraz tuleję cylindra, ponieważ w dolnej części tłoka występuje adiabatyczny warunek termiczny. Z drugiej strony, rozkład temperatury w górnej części tłoka nie jest jednorodny



Rysunek 6.22. Rozkład temperatury w tulei cylindrycznej: 1 – silnik czterosuwowy (silnik Otto), 2 – silnik dwusuwowy (silnik Diesela), (Ganczarski, Skrzypek [47]

[47]. W takim przypadku rozkład temperatury w tulei cylindra może być z dużą dokładnością aproksymowany przy pomocy wielomianów drugiego stopnia postaci

$$T(x) = 150x^2 - 300x + 250 \tag{6.17}$$

$$T_x(x) = 75x^2 - 150x + 175 (6.18)$$

Zakładając, że na brzegu wewnętrznym $T_w = 100^{\circ}C$ – w przybliżeniu temperatura wrzenia cieczy chłodzącej pod ciśnieniem, a na brzegu zewnętrznym temperatura wynosi $T_z = 250^{\circ}C$.

Warunki brzegowe

Aby zagadnienie brzegowe (4.52) zostało poprawnie postawione należy je również uzupełnić o cztery warunki brzegowe, po dwa na każdym brzegu dla x = 0 i x = l. Klasyczne sformułowanie warunków brzegowych nie może być tutaj zastosowane ze względu na brak dopasowania termicznych i mechanicznych warunków brzegowych. Klasyczne sformułowanie powoduje powstanie nierzeczywistych koncentracji naprężeń na brzegach. Rozwiązaniem tego problemu jest dodanie dwóch kołowo – symetrycznych sprężystych żeber, rys. 6.24 zlokalizowanych w górnej x = 0 i dolnej x = l części tulei, gdzie l jest długością.

Zakładając, że temperatura w żebrach jest stała ze względu na ich niewielkie wymiary w stosunku do całej konstrukcji, przemieszczenie promieniowe żeber jest funkcją temperatury θ i siły poprzecznej q postaci

$$u(r) = \alpha \theta r_1 - \frac{qr_1}{Eh} \frac{(1-\nu)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + (1+\nu)}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = f_b(\theta, q, r)$$
(6.19)

gdzie: $r_1 = R, r_2 = R + H, H$ – wysokość żebra, R – promień zewnętrzny tulei.



Biorąc pod uwagę powyższe, warunki brzegowe przedstawiają się następująco

$$w(0) = f_b(\theta, q, r = r_1)$$
 (6.20)

$$m_x(0) = 0$$
 (6.21)

$$w(l) = f_b(\theta, q, r = r_1)$$
 (6.22)

$$w'(l) = 0 (6.23)$$

6.2.2 Sformułowanie procesu zużycia dla tulei cylindra

W trakcie pracy silnika spalinowego tłok wykonuje ruchy posuwisto - zwrotne, podczas których pierścienie trą o tuleję prowadząc do degradacji jej grubości. Pewne źródła eksperymentalne pokazują specjalny charakter procesu zużycia w kształcie klina, rys. 6.23. Do opisu tego procesu zostało zastosowane równanie konstytutywne oparte na prawie Archarda (4.60).



Zużycie w kształcie klina

Rysunek 6.23. Zużycie tulei cylindra w kształcie klina

Uwzględniając powyższe, funkcję zmiany grubości można zapisać jako

$$\begin{cases} h(x, N) = h_0 & \text{dla } x < x_0 \\ h(x, N) = h_0 - \delta h(x, N) & \text{dla } x \ge x_0 \end{cases}$$
(6.24)

gdzie $\delta h(x, N)$ jest infinitezymalnie małą zmianą grubości na każdym cyklu obciążenia zależną od zmiennej x. Zakładając liniową zmianę funkcji grubości

$$\frac{\mathrm{d}\delta h}{\mathrm{d}\tilde{x}} = -a\delta h \quad \Rightarrow \quad \delta h(x,N) = C(N)\mathrm{e}^{-a\tilde{x}} \tag{6.25}$$

gdzie $\tilde{x} = x - x_0$, całkowitą objętość usuwanego materiału możemy wyrazić za pomocą następującej formuły

$$\Delta V = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi R \delta h(x, N) \mathrm{d}x \tag{6.26}$$



Przekształcając równanie (6.26) i wykorzystując fakt, że $\exp[-a(x_1 - x_0)] \approx 0$, na podstawie prawa Archarda (4.60) otrzymujemy

$$\Delta V = 2R\pi \frac{C(N)}{a} = \beta \frac{Ld}{H}$$
(6.27)

Przyjmując, że $d = n(x_1 - x_0)$ znajdujemy stałą całkowania według wzoru

$$C(N) = \frac{a}{2R\pi} \beta \frac{L}{H} N \left(x_1 - x_0 \right)$$
(6.28)

Podstawiając (6.26) z uwzględnieniem (6.28) do równania (6.24) otrzymujemy funkcję zmiany grubości zależną od właściwości materiałowych, przyłożonego obciążenia, cyklu obciążenia oraz dystansu poślizgu postaci

$$h(x, N) = h_0 \quad dla \quad x < x_0$$
 (6.29)

$$h(x,N) = h_0 - \frac{a}{2\pi R} \beta \frac{L}{H} N(x_1 - x_0) e^{-a(x - x_0)} \quad dla \quad x \ge x_0$$
(6.30)

Parametr zużycia β jest eksperymentalnie wyznaczany i we wszystkich przykładach numerycznych został podstawiony na podstawie normy ASM [11] oraz badań doświad-czalnych Natarajana [101].

6.2.3 Wyniki

Zagadnienie zostało rozwiązane numerycznie przy pomocy analizy krokowej metodą strzału (por. rozdział 5.1.1). Parametry geometryczne tulei użyte we wszystkich przykładach numerycznych zostały zaprezentowane na rys.6.24



Rysunek 6.24. Parametry geometryczne tulei cylindra zastosowane w symulacjach numerycznych

Jednorodna tuleja cylindra wykonana ze stali chromowo - niklowej

Pierwszy przykład numeryczny jest problemem wzorcowym niezbędnym do przeprowadzenia kalibracji modelu. W przykładzie wzorcowym tuleja cylindra została wykonana ze stali chromowo – niklowej, która jest najczęstszym materiałem używanym do produkcji tego typu konstrukcji. Właściwości materiałowe stali zostały zaprezentowane w tabeli 6.4.

moduł	liczba	współczynnik	
Younga	Poissona	rozszerzalności	twardość
		termicznej	
E_0 [GPa]	ν [–]	α [1/K]	H [MPa]
170.0	0.33	18.5×10^{-4}	66.9

Tablica 6.4. Właściwości materiałowe stali Cr-Ni [171]

Z doświadczalnego punktu widzenia, maksymalne zużycie (ubytek grubości tulei) wynosi 0.10 [mm]. Jeżeli zostanie osiągnięta tak wielkość zużycia, tuleja cylindra nie może być już dłużej użytkowana. Powyższa wartość została użyta w numerycznej symulacji autora jako wartość graniczna.

Na rys. 6.25 został przedstawiony rozkład funkcji grubości na kolejnych cyklach obciążeń. W pierwszej kolejności możemy zauważyć wyraźnie zużycie w kształcie klina, zgodne z oczekiwaniami. Ponadto warto zaznaczyć, że graniczna wartość zużycia została osiągnięta po $N = 0.22 \cdot 10^8$ cyklach.



Rysunek 6.25. Rozkład funkcji grubości dla tulei cylindra wykonanej ze stali chromowo-niklowej

Tuleja cylindra wykonana z materiału kompozytowego A356R

Materiał kompozytowy A356R został szczegółowy omówiony w poprzedniej części (por. rozdział 6.2.3). W tabeli 6.5 zostały przedstawione właściwości materiałowe kompozytu A356R.

moduł	liczba	współczynnik	
Younga	Poissona	rozszerzalności	twardość
		termicznej	
E_0 [GPa]	ν [–]	α [1/K]	H [MPa]
79.0	0.33	22.4×10^{-6}	338.0

Tablica 6.5.	Właściwości	materiałowe	materiału kom	pozvtowego A	A356R	(Egizabal	[34])
						(

Ubytek grubości został zaprezentowany na rys. 6.26. Kształt i charakter krzywych jest identyczny jak w poprzednim analizowanym przykładzie (por. rys. 6.25). Tak samo bardzo dobrze widoczne jest zużycie w kształcie klina, jednak warta uwagi jest liczba cykli $(N = 0.106 \cdot 10^9)$, po której została osiągnięta wartość graniczna zużycia prowadząca do zniszczenia konstrukcji. Wartość ta jest znacznie wyższa w porównaniu do poprzedniego przykładu, co potwierdza korzyści płynące z zastosowania innowacyjnych materiałów kompozytowych.



Rysunek 6.26. Rozkład zmiany grubości dla tulei cylindra wykonanej z materiału A356R

Kolejny rysunek (rys. 6.27) przedstawia wykres naprężeń zredukowanych według hipotezy HMH. Szczegółowa analiza pokazuje, że w pobliżu powstawania klina zużycia następuje koncentracja naprężeń powodująca utratę gładkości funkcji. Jest to niebezpieczne zjawisko, które może prowadzić do powstawania mikropęknięć, które w konsekwencji

doprowadzą do skrócenia czasu użytkowania konstrukcji. Rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie warstwy przejściowej z materiału gradientowego FGM.



Rysunek 6.27. Rozkład naprężenia zredukowanego HMH dla tulei wykonanej z materiału A356R



Tuleja cylindra wykonana z materiału kompozytowego A356R z cienką warstwą materiału ceramicznego antyścieralnego

W poprzednich rozdziałach przedstawione zostało porówananie konstrukcji wykonanej z klasycznej stali chromowo – niklowej i materiału kompozytowego A356R. Chociaż kompozyt A356R należy do grupy materiałów innowacyjnych, to jego własności ścieralne nie są doskonałe. Jednak charakteruzuje się doskonałymi własnościami termicznymi oraz stosunkowo niską gestością (2.67 g/cm³). Rozwiazaniem tego problemu jest zastosowanie cienkiej warstwy z materiału antyścieralnego. Powyższe rozwiązanie nie jest wystarczająco doskonałe, ponieważ połączenie dwóch materiałów o bardzo różnych właściwościach może doprowadzić do powstania mikropęknięć na granicy warstw, a w konsekwencji do delaminacji. Dlatego w takich przypadkach konieczne jest zastosowanie warstwy przejściowej z materiału gradientowego w celu zagwarantowania gładkiego, ciągłego przejścia pomiędzy składnikami. Na rys. 6.28 został zaprezentowany schemat materiału, który został zastosowany w symulacji numerycznej.



Rysunek 6.28. Schemat materiału zastosowany w symulacji numerycznej

Od wewnętrznej strony tulei, w miejscu kontaktu została zastosowana cienka warstwa z żeliwa sferoidalnego, którego szczegółowe parametry zostały zaprezentowane w tabeli 6.6. Jako materiał dziewiczy został przyjęty kompozyt A356R, szczegółowo omówiony w poprzednim rozdziale.

Identycznie jak w poprzednich symulacjach numerycznych, jako warunek zakonczenia symulacji przyjęto zużycie na poziomie 0.10 [mm]. Z punktu widzenia praktyki inżynierskiej maksymalne zużycie nie powinno być większe niż grubość cienkiej warstwy. Jednak w niniejszym przykładzie, ze względu na cele poznawcze, grubość warstwy antyścieralnej została przyjęta jako $h_{wear} = 0.09$ [mm]. Grubość warstwy materiału gradientowego została załozona jako $h_{FGM} = 0.03$ [mm].



Tablica 6.6. Właściwości materiałowe żeliwa sferoidalnego [171]

Rysunek 6.29. Wykres funkcji twardosci H(y) dla materiału warstwowego

W przypadku procesu zużycia wielkośćią determinującą szybkość postępowania tego procesu jest lokalna twardość materiału. W zwiazku z powyższym w warstwie przejściowej z materiału gradientowego FGM właśnie ten parametr materiałowy został przyjęty wedlug nastepującej zależności funkcyjnej

$$H(y) = H_c - H \left(1 + \operatorname{tgh}(y - y_0)\right)$$
(6.31)

gdzie zostały użyte następujące podstawienia

$$\tilde{H} = \frac{H_c - H_{VM}}{2}$$
$$y_0 = h_{wear} + \frac{1}{2}h_{FGM}$$

Symbol H_c oznacza twardość materiału, z którego została wykonana warstwa antyścieralna, natomiast H_{VM} jest twardość materiału dziewiczego. Wykres funkcji H(y) został zaprezentowany na rys. 6.29.

Zgodnie z oczekiwaniami zastosowanie cienkiej warstwy z materiału antyścieralnego zwiększyło odporność konstrukcji na zużycie (por. rys.6.30). Liczba cykli, po których zużycie osiągnęło wartość graniczną wynosi $N = 1.66 \cdot 10^8$. Warto ponadto zauważyć, że w momencie, gdy proces degradacji grubości osiągnął wartość wyższą niż warstwa antyścieralna, proces zużycia zaczął postępować w sposób gwałtowny. Powyższy wniosek jest także zgodny z oczekiwaniami.


Rysunek 6.30. Rozkład funkcji grubości tulei cylindra z cienką warstwą antyścieralną oraz warstwą przejściową FGM

Kolejny wykres (rys. 6.31) przedstawia rozkład naprężeń zredukowanych według hipotezy HMH. Szczegółowa analiza pokazuje, że w momencie gdy głębokość degradacji przekracza grubość cienkiej warstwy zmienia sie rozkład naprężeń w konstrukcji. Spowodowane to jest zmianą materiału, a w konsekwencji zmianą właściwościami materiałowych. Następuje gwałtowny wzrost naprężeń we wrażliwych przekrojach konstrukcji, co może doprowadzić do jej calkowitego zniszczenia.



Rysunek 6.31. Rozkład naprężeń zredukowanych HMH tulei cylindra z cienką warstwą antyścieralną oraz warstwą przejściową FGM

7. WNIOSKI I KIERUNKI DALSZYCH BADAŃ

Celem pracy było zbudowanie poprawnego modelu fenomenologicznego dla materiałów niejednorodnych opartego na gruncie teorii termosprężystości oraz na jego podstawie zbudowanie poprawnego modelu numerycznego dedykowanego materiałom gradientowym.

W pracy został przedstawiony kompletny układ równań różniczkowych termosprężystości dla materiałów niejednorodnych w sformułowaniu przemieszczeniowym oraz w sformułowaniu naprężeniowym. Następnie zostały zaprezentowane sformułowania dla konstrukcji obrotowo – symetrycznych (płyta Reissnera, płyto – tarcza Kirchhoffa – Love'a, powłoka cylindryczna), w których została uwzględniona niejednorodność materiałowa. Ponadto zostało sformułowane równanie konstytutywne wiążące prawo zużycia według Archarda z równaniami termosprężystości.

Zostały ponadto szczegółowo opisane metody homogenizacji, które są szczególnie chętnie stosowane. Jednak homogenizacja zawsze jest uproszczeniem i w konsekwencji może prowadzić do błędnych wyników. Przykład numeryczny dotyczący materiałów gradientowych okresowo zmiennych uwidocznił niedoskonałości zastosowanej metody homogenizacji. Została zaproponowana aproksymacja wyższego rzędu, a wyniki otrzymane były bliższe rozwiązaniu dokładnemu niż w przypadku zastosowania proponowanej metody homogenizacji.

W pracy zostało wiele miejsca poświęcone na charakterystykę obecnie używanych metod numerycznych służących do analizy konstrukcji oraz ich użyteczności w przypadku materiałów niejednorodnych. Szczególna uwaga została zwrócona na dwie najbardziej popularne metody: metoda różnic skończonych oraz metoda elementów skończonych. Porównanie powyższych metod wykazało, że klasyczne sformułowanie metody elementów skończonych zastosowane do materiałów gradientowych z silną niejednorodnością jest nieprawidłowe. Następnie zostało zaproponowane rozwiazanie tego problemu poprzez zastosowanie specjalnego rodzaju elementu skończonego z dodatkową funkcją kształtu służącą do aproksymacji własności materiałowych na poziomie każdego elementu skończonego. Zasugerowano odpowiednie materiałowe funkcje kształtu, odpowiadajace odpowiednim regułom mieszania, wynikające z metod wytwarzania materiałów gradientowych, które zostały szczegółowo scharakteryzowane. W następnej kolejności pokazano zmodyfikowane sformułowanie metody elementów skończonych oraz na przykładzie numerycznym pokazano korzyści wynikające z zastosowania niejednorodnych elementów skończonych w przypadku modelowania materiałów gradientowych.

Zaprezentowany model fenomenologiczny oraz numeryczny został wykorzystany w przykładach konstrukcyjnych. Pierwszym z przykładów był model tarczy hamulcowej. W pracy został stworzony kompleksowy model służący do opisu niebezpiecznego zjawiska, jakim jest globalna utrata statecznosci *hot-spot*. Model został oparty na teorii Kirchhoffa – Love'a. Wykazano poprawność zaprezentowanego modelu numerycznego poprzez porównanie wyników symulacji numerycznej z wynikami eksperymentalnymi dostępnymi w literaturze. Autor pracy skupił się nie tylko na stworzeniu poprawnego modelu numerycznego analizowanej konstrukcji, ale także przeprowadził porównanie wyników dla różnego rodzaju materiałów. Rezultaty otrzymane w wyniku symulacji numerycznej tarczy hamulcowej dla trzech typów materiałów: jednorodnej stali ASTM-321, jednorodnego materiału kompozytowego A356R oraz niejednorodnego materiału gradientowego A356R przedstawiono w tabeli 7.1. Zastosowanie innowacyjnego materiału, jakim jest kompozyt A356R do budowy tarczy hamulcowej, zabezpieczyło konstrukcję przed groźnym zjawiskiem globalnej utraty stateczności, jednak jeszcze większe bezpieczeństwo zostało uzyskane w przypadku konstrukcji wykonanej z materiału gradientowego. Wartości własne odpowiadajace obciążeniu krytycznemu zaprezentowane w ta-

	jednorodna	jednorodny materiał	gradientowy materiał
	stal	kompozytowy A356R	kompozytowy A356R
pierwsza wartość	0.761	126.451	-430.917
własna			
minimalna wartość			
naprężenia	-0.113839	-0.002554	-0.001550
obwodowego [MPa]			

Tablica 7.1. Porównanie wyników symulacji numerycznej tarczy hamulcowej dla różnego typu materiałów

beli 7.1 w dostateczny sposób potwierdzają zalety materiałów gradientowych. W przypadku konstrukcji z jednorodnej stali ASTM-321 pierwsza wartość własna jest mniejsza od jedności, co oznacza, że konstrukcja utraciła stateczność. W przypadku jednorodnego materiału kompozytowego A356R stabilność tarczy została zachowana. Zastosowanie materiału FGM A356R także pozwoliło zachować stabilność konstrukcji, jednak uzyskany wynik jest w znacznym oddaleniu od powierzchni granicznej. Ponadto wartość własna zmieniła znak na przeciwny, oznaczając, że hipotetyczne obciążenia prowadzące do globalnej utraty stateczności zmieniły swój zwrot ze ściskajacego na rozciągający. Jest to kolejny dowód potwierdzający ogromne korzyści z zastosowania materiałów gradientowych.

Kolejnym przykładem konstrukcyjnym poddanym analizie w niniejszej pracy była tuleja cylindra. W tym przypadku autor skupił szczególną uwagę na procesie zużycia konstrukcji. Ponownie analiza została przeprowadzona tulei wykonanej z trzech typów materiałów: jednorodnej stali chromowo – niklowej, jednorodnego materiału kompozytowego A356R oraz z materiału warstwowego, w którym rdzeniem pozostał materiał A356R, pokryty cienką warstwę antyścieralną, a pomiędzy materiałem dziewiczym a cienką warstwą została zastosowana warstwa przejściowa z materiału gradientowego. Porównanie uzyskanych wyników dla powyższych trzech materiałów zaprezentowano w tabeli 7.2. Wyniki przedstawione w tabeli 7.2 jednoznacznie potwierdzają zalety stosowania materiałów FGM w projektowaniu konstrukcji. Zastosowanie materiałów gradientowych powoduje zwiększenie czasu użytkowania, przyczyniając się do zwiększenia bezpieczeństwa i obniżenia kosztów produkcji.

	jednorodna	jednorodny materiał	warstwowy materiał
	stal	kompozytowy A356R	kompozytowy A356R
liczba cykli	$0.22 \cdot 10^{8}$	$0.106 \cdot 10^{9}$	$0.166 \cdot 10^{9}$
prowadząca do zużycia			

Tablica 7.2. Porównanie wyników symulacji numerycznej tulei cylindra dla różnego typu materiałów

Powyższe przykłady są tylko wybranymi z wielu możliwych, gdzie mogą znaleźć zastosowanie materiały gradientowe. Stworzony model teoretyczny na gruncie termosprężystości w wielu przypadkach analizy konstrukcji może stać się niewystarcząjacy. Konstrukcje stosowane w systemach TBC mogą być narażone na temperatury sięgające 3000 °C. W takich przypadkach konieczne jest uwzglednienie w równaniach konstytutywnych własności lepkich materiału, tj. efektów pełzania lub relaksacji. Ponadto bardzo często w analizowanych materiałach zachodzi zjawisko przemiany fazowej, które także powinno być uwzględnione w modelu teoretycznym.

Warto również nadmienić, że w trakcie badań nad materiałami gradientowymi, ze względu na brak komercyjnych programów wykorzystujących elementy skończone z podwójną funkcją aproksymacyjną, został napisany program wykorzystujący algorytm metody elementów skończonych dla konstrukcji termosprężystych jedno- i dwuwymiarowych. Program stworzono wykorzystując najnowszą technikę programowania zorientowanego obiektowo przy wykorzystaniu języka programowania Delphi. W związku z tym rozbudowa programu nie powinna nastręczać dodatkowych trudności, ze wzgledu na możliwość stosowania struktury hierarchicznej, technik dziedziczenia i polimorfizmu oraz możliwośc łatwej implementacji bibliotek dll. W dalszej pracy badawczej autor pragnie zoptymalizować i rozbudować kod metody elementów skończonych o inne typy elementów, w szczególności dotyczące modeli trójwymiarowych. Dodatkowym atutem stworzonego programu byłoby rozbudowanie kodu o elementy zawierające bardziej zaawansowane równania konstytutywne, np. modele sprężysto – lepko – plastyczne z uszkodzeniem. W szczególności uwzględnienie niejednorodnych elementów skończonych mogłoby być bardzo użyteczne w przypadku analizy mechaniki zniszczenia, ponieważ proces ewolucji uszkodzenia prowadzi do degradacji modułów konstytutywnych. Na gruncie kontynualnej mechaniki uszkodzeń proces ten opisywany jest poprzez wprowadzenie niejednorodności materiałowej.

Materiały gradientowe są wykorzystywane w konstrukcjach narażonych na ekstremalne warunki, np. gwałtowne zmiany temperatury. Dlatego poprawny model teoretyczny i numeryczny powinien uwzględniać zależność parametrów materiałowych od temperatury. Stworzony kod metody elementów skończonych posiada taką możliwość, jednak brak danych eksperymentalnych dotyczących innowacyjnych materiałów kompozytowych uniemożliwił autorowi uwzględnienie powyższych zależności w przeprowadzonych symulacjach numerycznych. W dalszej pracy badawczej autor pragnie pogłębić współpracę z firmą Inasmet "Tecnalia" oraz z innymi ośrodkami badawczymi stowarzyszonymi w ramach Sieci KMM-NoE w celu uzyskania dokładniejszych danych eksperymentalnych.

Podsumowując, w swojej pracy badawczej autor wykazał niedoskonałość obecnie stosowanych metod numerycznych w przypadku analizy konstrukcji wykonanych z materiałów gradientowych na podstawie szeregu symulacji numerycznych wykorzystujących komercyjne pakiety metody elementów skończonych. Autor stworzył kod MES zawierający elementy skończone z podwójną funkcją aproksymacyjną dedykowane do analizy konstrukcji wykonanych z materiałów FGM. Skuteczność zastosowania nowego typu elementu została potwierdzona w szeregu symulacji numerycznych. Analizie zostały poddane rzeczywiste elementy konstrukcyjne (tarcza hamulcowa, tuleja cylindra), w których zostały przedstawione korzyści wynikające z zastosowania materiałów FGM. Autor ma nadzieję, że w dalszej pracy badawczej, dzięki dokładniejszym danym eksperymentalnym, będzie mógł rozbudować zaproponowany model fenomenologiczny i numeryczny w celu lepszego dopasowania do rzeczywistych konstrukcji.



BIBLIOGRAFIA

- [1] Method of producing an integral skin polyurethane foam (1972): United States, 3694530.
- [2] ABAQUS (dostępne na dzień 1.06.2009): http://www.abaqus.com. Informacje na temat pakietu elementów skończonych ABAQUS.
- [3] Aboudi, J., Arnold, S., i Pindera, M. (1994): Response of a functionally graded composites to thermal gradients. *Composites Engineering*, 4, 1–18.
- [4] Aboudi, J., Pindera, M., i Arnold, S. (1994): Thermo-inelastic analysis of functionally graded materials: inapplicability of the classical micromechanical approaches. *Inelasticity and Micromechanics of Metal Matrix Composites*, 273–305.
- [5] Aboudi, J., Pindera, M., i Arnold, S. (1995): Thermo-inelastic response of functionally graded composites. *International Journal of Solids and Structures*, 32, 1675–1710.
- [6] Aboudi, J., Pindera, M., i S.M., A. (1996): Thermoelastic theory for the response of materials functionally graded in two directions. *International Journal of Solids and Structures*, 33, 931–966.
- [7] Aboudi, J., Pindera, M., i S.M., A. (1997): Microstructural optimization of functionally graded composites subjected to a thermal gradient via the higher-order theory. *Composites Engineering Part B*, 28, 93–108.
- [8] Ansys (1994–2004): Manual Ansys, ver. 11.0 oraz informacje na temat pakietu, www.ansys.com.
- [9] Archard, J. (1953): Contact and rubbing of flat surfaces. *Journal of Applied Physics*, 24, 981–988.
- [10] Asfour, S., Eltoukhy, M., Almakky, M., i Hung, C. (2006): Thermoelastic instability in disk brakes: Simulation of heat generation problem. [w:] *Proceeding of COMSOL*, Boston.
- [11] ASM (dostępne na dzień 1.06.2009): ASM international norm.
- [12] Bansal, Y. i Pindera, M. (2003): Efficient formulation of the thermoelastic higher–order theory for functionally graded materials. *Journal of Thermal Stresses*, 26, 1055–1092.
- [13] Boccaccini, A. i Zhitomirsky, I. (2002): Application of electrophoretic and electrolytic deposition techniques in ceramic processing. *Current Opinion in Solid State and Material Science*, 6, 251–260.
- [14] Boccaccini, A. R., Chen, Q., i Bretcanu, O. (2006): Overview of bioactive/bioresorbable tissue engineering scaffolds based on bioactive glass foams. [w:] *KMM-Second Summer School*, Udine, Italy. CISM - International Centre for Mechanical Sciences.
- [15] Burwell, J. i Strang, C. (1952): On the empirical laws of adhesive wear. *Journal of Applied Physics*, 23, 18–28.
- [16] Cegielski, M. (2007): Numeryczne modelowanie denka tłoka silnika spalinowego z kompozytu metalowo–ceramicznego. Praca magisterska, Politechnika Krakowska.
- [17] Chen, B. i Tong, L. (2004): Thermomechanically coupled sensitivity analysis and

design optimization of functionally graded materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 1891–1911.

- [18] Chen, Y., Li, T., i Ma, J. (2003): Investigation on the electrophoretic deposition of a FGM piezoelectric monomorph actuator. *Journal of Materials Science*, 38(13), 2803–2807.
- [19] Chen, Y., Li, T., i Ma, J. (2004): Electrophoretic deposition and characterization of a piezoelectric FGM monomorph actuator. *Ceramics International*, 30(7), 1807–1809.
- [20] Chen, Y., Li, T., i Ma, J. (2004): A functional gradient ceramic monomorph actuator fabricated using electrophoretic deposition. *Ceramics International*, 30(5), 683–687.
- [21] Cho, J. i Ha, D. (2002): Volume fraction optimization for minimizing thermal stress in Ni–Al₂O₃ functionally graded materials. *Materials Science and Engineering A*, 334, 147–155.
- [22] Cho, J. i Shin, S. (2004): Material composition optimazation for heat–resistnig FGMs by artificial neural network. *Composites*, A 35, 585–594.
- [23] Chrisey, D. i Hubler, G. (1994): *Pulsed laser deposition of thin films*. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore.
- [24] Chrysanthou, A., Delverdier, O., García-Lecina, E., Sereni, S., Rödel, J., i Rota, A. (2006): Technology and controlled tailoring of FGM. [w:] Rota, A., ed., *Functionally* graded materials. Properties, modelling and applications, volume 3, rozdział: Powder technology methods, 99–130. KMM-NoE, Knowledge-based Multicomponent Materials, Warszawa, Poland.
- [25] Chu, J., Ishibashi, H., Hayashi, K., Takebe, H., i Moringa, K. (1993): Slip casting of countinuous functionally graded material. *Journal of the Ceramic Society of Japan*, 101, 818–820.
- [26] Cichocki, F., Trumble, K., i Rödel, J. (1998): Tailored porosity gradients via colloidal infiltration of compression-molded sponges. *Journal of American Ceramic Society*, 81(6), 1661–1664.
- [27] Cichoń, C., Krok, J., Cecot, W., i Pluciński, P. (2003): *Metody komputerowe w linio-wej mechanice konstrukcji: wybrane zagadnienia*. Politechnika Krakowska, Kraków.
- [28] Clough, R. W. (1980): The finite element method after twenty-five years: a personal view. *Computers & Structures*, 12, 361–370.
- [29] Courant, R. (1943): Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7, 574–575.
- [30] Delfosse, D. i Ilschner, B. (1992): Pulvermetallurgische Herstellung von Gradientenwerkstoffen. *Matt.-wiss.*, 23, 235–240.
- [31] Dufrénoy, P., Panier, S., i Weichert, D. (1998): Etude sur les points chauds dans les freins à disques ferroviaires. [w:] *European Braking Conference*, Lille.
- [32] Dufrénoy, P. i Weichert, D. (2001): A thermomechanical model for the analysis of disk brakes fracture. [w:] *Proceedings of The Sixth International Congress of Thermal Stresses*, 463–466, Osaka.
- [33] Dumont, A.-L., Bonnet, J.-P., Chartier, T., i Ferreira, J. (2001): MoSi₂/Al₂O₃ FGM: elaboration by tape casting and SHS. *Journal of the European Ceramic Society*, 21, 2353–2360.
- [34] Egizabal, P. (2007): Influence des particules sz TiB_2 sur la microstructure et les

propriétés des alliages Al-Si₇ $Mg_{0.3}$ et Al-Cu₅MgTi renforcés, pour des applications de fonderie á la cire perdue avec des moules en plâtre. Rozprawa doktorska, Institut de Chimie de la Matiére Condensèe de Bordeaux.

- [35] Elperin, T. i Rudin, G. (2002): Thermal stresses in functionally graded materials caused by thermal shock. *Heat and Mass Transfer*, 38, 625–630.
- [36] Eslami, M., Bagri, A., i Samsam-Shariat, B. (2005): Coupled thermoelasticity of functionally graded layer. [w:] *Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses*, volume II, 721–724, Viena.
- [37] Fan, X. i Lippmann, H. (1996): *Elastic-Plastic Buckling of Plates under Residual Stress, Advances in Engineering Plasticity and its Applications.* Pergamon Press.
- [38] Fedehofer, K. i Egger, H. (1943): Knickung der auf Scherung beanspruchten Kreisringplatte mit veränderlicher Dicke. *Archive of Applied Mechanics*, 155–166.
- [39] Feng, H. i Moore, J. (1993): Effect of preassure on the combustion synthesis of a functionally-graded material: TiB₂-Al₂O₃-Al ceramic-metal composite system. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2, 645.
- [40] Feng, H. i Moore, J. (1994): Design of an affordable, one-step process for the production of a functionally graded material (FGM). *Journal of Materials Synthesis* and Processing, 2, 367.
- [41] Ferraris, M. (2007): Processing of functionally graded materials. [w:] Processing of advanced materials, Integrated Post-Graduate School, Doctoral Path, Third Intensive Session, London. Imperial College.
- [42] Finot, L., Suresh, S., Bull, C., i Sampath, S. (1996): Curvature changes during thermal cycling of a compositionally graded Ni–Al₂O₃ multi–layered material. *Materials Science and Engineering*, A205, 59–71.
- [43] Fujimoto, T. i Noda, N. (2000): Crack propagation in functionally graded plate under thermal shock. Archive of Applied Mechanics, 70, 377–386.
- [44] Fung, Y. (1969): *Podstawy mechaniki ciała stałego*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- [45] Ganczarski, A. (1993): Analiza kruchego zniszczenia oraz kształtowanie obrotowo symetrycznych sprężonych elementów konstrukcyjnych w warunkach pełzania, pod działaniem obciążeń złożonych. Rozprawa doktorska, Politechnika Krakowska.
- [46] Ganczarski, A. (2001): Problemy nabytej anizotropii w ujęciu sprzężonej termodynamiki uszkodzeń. Politechnika Krakowska, Kraków.
- [47] Ganczarski, A. i Skrzypek, J. (1999): Thermo mechanical damage of piston.
 [w:] Proceedings of The Third International Congress of Thermal Stresses, 271–274, Cracow.
- [48] Gao, C. H. i Lin, X. Z. (2002): Transient temperature field analysis of a brake in a non-axisymmetric three-dimmensional model. *Journal of Materials Processing Technology*, 129, 513–517.
- [49] Gasik, M. i Lilius, K. (1994): Evolution of properties of W–Cu functional gradient materials by micromechanical model. *Computational Materials Science*, 3, 41–49.
- [50] Gasik, M., Zhang, B., van der Biest, O., i et al. (2003): Design and fabrication of symmetric FGM plates. *Materials Science Forum*, 423(4), 23–28.
- [51] Geiger, M., Steger, W., Greul, M., i Sindel, M. (1994): Multiphase jet solidification -

a new process towards metal prototypes and a new data interface. [w:] *Solid Freeform Fabrication Proceedings*, 9–16, Texas, USA.

- [52] Grant, P., Palmer, I., i Stone, I. (1999): Spray formed aerospace alloys. *Materials World*, 7(6), 331–333.
- [53] Gray, L., Kaplan, T., Richardson, J., i Paulino, G. (2003): Green's functions and boundary integral analysis for exponentially graded materials: heat conduction. ASME Transactions, Journal of Applied Mechanics, 70, 543–549.
- [54] Hamatani, H., Shimoda, N., i Kitaguchi, S. (2003): Effect of the composition profile and density of LPPS sprayed functionally graded coating on the thermal shock resistance. *Science and Technology of Advanced Materials*, 4(2), 197–203. KMM - state of the art - FGM, Part II.
- [55] Hartley, G. J. (1986): *Fundamentals of Finite Element Method*. Macmillan Publishing Company, New York.
- [56] Heaney, D. i et al. (2002): Two-color injection molding of hard and soft metal alloys. [w:] *Proceedings of the 2002 International Conference on Functional Graded Materials*, USA. Princeton N.J.
- [57] Hernik, S. (2006): Stability analysis of MMC brake disk under thermomechanical loadings. Praca magisterska, Politechnika Krakowska, promotor: A. Ganczarski.
- [58] Hernik, S. (2009): Modelling FGM brake disk against global thermoelastic instability (hot–spot). Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, ZAMM, 89(2), 88–106.
- [59] Hernik, S. (2009): Modelling of FGM thermoelastic plate by use of nonhomogeneous FE. [w:] Karpiuk, W. i Wiśniewski, K., eds., *II International Interdyscyplinary Technical Conference of Youg Scientists InterTech 2009*, 68–72, Poznań.
- [60] Hernik, S. (2009): Modelling wear resistance of piston sleeve made of MMC A356R. [w:] Proceedings of The Eighth International Congress of Thermal Stresses, 353–356, Urbana, USA.
- [61] Hernik, S. i Ganczarski, A. (2005): Influence of damage acquired nonhomogeneity on convergence of certain axially symmetric thermomechanical problem. [w:] *Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses*, volume 1, 245–248, Viena.
- [62] Hernik, S. i Ganczarski, A. (2006): Modelling of FGM disk brake against hot-spots.[w:] 6th European Solid Mechanics Conference ESMC 2006, number (CD-ROM), Budapeszt.
- [63] Hernik, S. i Ganczarski, A. (2007): Notes on averaging of slowly-varying periodic functionally graded heat conductors. [w:] *Proceedings of The Seventh International Congress on Thermal Stresses*, volume 1, 287–290.
- [64] Hetnarski, R. i Ignaczak, J. (2004): *Mathematical theory of elasticity*. Taylor & Francis Books, Inc, New York–London.
- [65] Holm, R. (1946): *Electrical contacts*. H Gerbers, Sztokholm.
- [66] Imgrund, P. i Rota, A. (2003): Multifunctional microparts by metal injection molding. [w:] *Proceedings of Micro System Technologies*, 218–225, München.
- [67] Inasmet "Tecnalia" (dostępne na dzień 1.06.2009): http://www.inasmet.es.

- [68] Iskra, A. (1997): Współzależność oporów tarcia w grupach tłok–cylinder oraz pierścienie–cylinder. *Journal of KONES*'97, 98–104.
- [69] Jedamzik, R., Neubrand, A., i Rödel, J. (2000): Functionally graded materials by electrochemical processing and infiltration: application to tungsten/cooper composites. *Journal of Material Science*, 35, 477–486.
- [70] Jin, Z. (2004): Effect of thermal property gradients on the edge cracking in a functionally graded coating. *Surface and Coatings Technology*, 179, 210–214.
- [71] Jin, Z. i Noda, N. (1992): Thermal stress intensity factors for a crack in a strip of a functionally gradient material. *International Journal of Solids and Structures*, 30, 1039–1056.
- [72] Jin, Z. i Noda, N. (1993): An internal crack parallel to the boundary of a nonhomogeneous half plane under thermal loading. *International Journal of Engineering Science*, 31, 793–806.
- [73] Jin, Z. i Noda, N. (1994): Transient thermal stress intensity factors for a crack in a semi-infinite plate of a functionally gradient material. *International Journal of Solids* and Structures, 31, 203–218.
- [74] Jin, Z.-H. i Paulino, G. (2001): Transient thermal stresses analysis of an edge crack in a functionally graded material. *International Journal of Fracture*, 107, 73–98.
- [75] Kapturkiewicz, W. (2006): Modelowanie komputerowe przemian fazowych w stanie stałym stopów ze szczególnym uwzględnieniem odlewów ADI. Raport techniczny, IPPT PAN.
- [76] Kawasaki, A. i Watanabe, R. (2002): Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 1713–1728.
- [77] Kaźmierczak, A. (2005): *Tarcie i zużycie zespołu tłok–pierścienie–cylinder*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [78] Khor, K. i Gu, Y. (2000): Effects of residual stress on the performance of plasma sprayed functionally graded ZrO₂NiCoCrAlY coatings. *Materials Science and Engineering*, A277, 64–76.
- [79] Kim, J.-H. i Paulino, G. (2002): Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 69, 502–514.
- [80] Kim, J.-H. i Paulino, G. (2002): Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and modified crack closure method. *Engineering fracture mechanics*, 1557–1586.
- [81] Kleczkowski, A. (1960): Przepływy w układzie hydraulicznym hamulców samochodowych. *Czasopismo Techniczne*, 7(33), 4–12.
- [82] KMM-NoE (dostępne na dzień 1.06.2009): http://www.kmm-noe.org. Strona internetowa Knowledge-based Multicomponent Materials for Durable and Safe Performance, Network of Excellence.
- [83] Krempaszky, C. i Lippmann, H. (2005): Frictionally excited thermoelastic instabilities of annular plates under thermal pre-stress. ASME Journal of Tribology, 127, 756–765.
- [84] Kustosz, R., Major, R., Wierzchoń, T., i Major, B. (2004): *Designing a new heart*. Academia.

- [85] Kączkowski, Z. (1988): *Płyty. Obliczenia statyczne*. Wydawnictwo Arkady, Warszawa.
- [86] Lackner, J., Waldhauser, W., Ebner, R., Major, B., i Schöberl, T. (2004): Pulsed laser deposition of titanium oxide coatings at room temperature–structural, mechanical and tribological properties. *Surface and Coatings Technology*, 180/181, 585–590.
- [87] Lackner, J., Waldhauser, W., Ebner, R., Major, B., i Schöberl, T. (2004): Structural, mechanical and tribological investigations of pulsed laser deposited titanium nitride coatings. *Thin Solid Films*, 453/454, 195–202.
- [88] Lakshminarayanan, R., Shetty, D., i Cutler, R. (1996): Toughening of layered ceramic composites with residual surface compression. *Journal of the American Ceramic Society*, 79, 79–87.
- [89] Lawley, A. i Doherty, R. (1998): *ASM handbook A, powder metal technologies and applications*, rozdział: Spray forming, 408–419.
- [90] Lee, Y. i Erdogan, F. (1998): Interface cracking of FGM coatings under steady state heat flow. *Engineering Fracture Mechanics*, 59, 361–380.
- [91] Lekknitskii, S. (1981): *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Mir Publishers, Moskwa.
- [92] Li, J. i Watanabe, R. (1990): Synthesis of SiC-AlN ceramic alloy by the combination of reaction sintering and hip. *Transaction Materials Research Society in Japan*, 1, 147–153.
- [93] Li, J. i Watanabe, R. (1991): Preparation and mechanical properties of SiC-AlN ceramic alloy. *Journal of Materials Science*, 26, 4813–4817.
- [94] Lin, J. i Miyamoto, Y. (2000): Notch effect of surface compression and the toughening of graded Al₂O₃ /TiC/Ni materials. *Acta Materialia*, 48, 767–775.
- [95] Marple, B. i Boulanger, J. (1994): Graded casting of materials with continuous gradients. *Journal of American Ceramic Society*, 77(10), 2747–2750.
- [96] Marple, B. i Green, D. (1993): Graded compositions and microstuctures by infiltration processing. *Journal of Material Science*, 28, 4637–4643.
- [97] Michalak, B., Woźniak, C., i Woźniak, M. (2006): Modelling and analysis of certain functionally graded heat conductors. *Archive of Applied Mechanics*, 77(11), 823–834.
- [98] Mortensen, A. i Suresh, S. (1995): Functionally graded metals and metal-ceramic composites: Part I. Processing. *International Materials Reviews*, 40, 239–265.
- [99] Mura, T. (1987): *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- [100] Nai, S., Gupta, M., i Lim, C. (2003): Synthesis and wear characterization of Al based, free standing functionally graded materials: effect of diffrent matrix compositions. *Composites Science and Technology*, 63, 1895–1909.
- [101] Natarajan, N., Vijayarangan, S., i Rajendran, I. (2006): Wear behaviour of A356/25SiCp aluminium matrix composites sliding against automobile friction material. *Wear*, 261, 812–822.
- [102] Nemat-Alla, M. (2003): Reduction of thermal stresses by developing two-dimensional functionally graded materials. *International Journal of Solids* and Structures, 40, 7339–7356.

- [103] Neubrand, A. i J., R. (1997): Gradient materials: an overview of a novel concept,. *Zeitschrift für Metallkunde*, 88, 358–371.
- [104] Noda, N. (1999): Thermal stresses in functionally graded materials. *Journal of Thermal Stresses*, 24, 477–512.
- [105] Noda, N., Ishihara, M., i Yamamoto, N. (2004): Two-crack propagation paths in a functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 27, 457–469.
- [106] Noda, N. i Jin, Z. H. (1993): Thermal stress intensity factors for a crack in a strip of a functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 31, 1039–1056.
- [107] Noda, N., Manabu, O., i Masayuki, I. (2005): Steady thermal stresses in the functionally graded finite strip with the oblique boundary to the functionally gradation.
 [w:] *Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses*, volume II, 741–744, Viena.
- [108] Noda, N. i Wang, B. (2002): Transient thermoelastic responses of functionally graded materials containing collinear cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 1791–1809.
- [109] Nowacki, W. (1970): Teoria sprężystości. Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- [110] Nowacki, W. (1972): Termosprężystość. Ossolineum, Warszawa.
- [111] Nowacki, W. (1980): *Dźwigary powierzchniowe*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [112] Obata, Y nad Noda, N. (1993): Transient thermal stresses in a plate of functionally gradient material. *Ceramic Transactions*, 34, 403–410.
- [113] Obata, Y. i Noda, N. (1996): Optimum material design for functionally gradient material plate. *Archive of Applied Mechanics*, 66, 581–589.
- [114] Odqvist, F. K. G. (1966): *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*. Clarendon Press, Oxford.
- [115] Oike, S. i Watanabe, Y. (2001): Development of in-situ Al-Al₂Cu functionally graded materials by a centrifugal method. *International Journal of Materials and Product Technology*, 16, 1/2/3.
- [116] Olesiejuk, J. i Olesiejuk, K., eds. (2008): Popularna encyklopedia. Collins.
- [117] Ootao, Y., Akai, T., i Tanigawa, Y. (2005): Piezothermoelastic analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical panel due to nonuniform heat supply in the circumferential direction. [w:] *Proceedings of The Sixth International Congress of Thermal Stresses*, volume II, 709–712, Viena.
- [118] Ootao, Y., Tanigawa, Y., i O., I. (2000): Optimization of material composition of functionaly graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm. *Journal of Thermal Stresses*, 23, 257–271.
- [119] Owen, D. i Hilton, E. (1980): *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Press.
- [120] Panier, S., Dufrénoy, P., Brunel, J., i Weichert, D. (2005): Progressive waviness distortion: a new approach of hot spotting in disc brakes. *Journal of Thermal Stresses*, 28(1), 47–62.
- [121] Panier, S., Dufrénoy, P., i Weichert, D. (2001): Macroscopic hot-spots occurance

in frictional organs. [w:] *Proceedings of The Fifth International Congress of Thermal Stresses*, 621–624, Osaka.

- [122] Panier, S., Dufrénoy, P., i Weichert, D. (2004): An experimental investigation of hot spots in railway disc brakes. *Wear*, 256, 764—-773.
- [123] Pintsuk, G., Brünings, S., Döring, J.-E., Linke, J., Smid, I., i Xue, L. (2003): Development of W/Cu-functionally graded materials. *Fusion Engineering and Design*, 66/68, 237–240. KMM-state of the art - FGM, Part II.
- [124] Pitakthapanaphong, S. i Busso, E. (2002): Self-consistent elastoplastic stress solutions for functionally graded material systems subjected to thermal transients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50, 695–716.
- [125] Pratapa, S., Low, I., i O'Connor, B. (1998): *Infiltration-processed, continuously graded aluminium titanate/zirconia-alumina composite*, volume 33, rozdział: Part I. Microstructural characterization and physical properties, 3037–3045. Journal of Material Science.
- [126] Praveen, G. i Reddy, J. (1998): Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35, 4457–4476.
- [127] Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., i Flannery, B. (2007): *Numerical Recipes, Third edition.* Cambridge University Press.
- [128] Put, S., Anné, G., i Vleugels, J. (2002): Functionally graded ZrO₂-WC composites processed by electrophoretic deposition. *Key Engineering Materials*, 206(2), 189–192.
- [129] Put, S., Anné, G., i Vleugels, J. (2003): Functionally graded ceramic and ceramic-metal composites shaped by electrophoretic deposition. *Colloid Surface*, A 222(1/3), 223–232.
- [130] Put, S., Anné, G., i Vleugels, J. (2003): Functionally graded hardmetals with a continuously graded symmetrical profile. *Materials Science Forum*, 423(4), 33–38.
- [131] Put, S., Anné, G., i Vleugels, J. (2003): Gradient profile prediction in functionally graded materials processed by electrophoretic deposition. *Acta Materialia*, 51(20), 6303–6317.
- [132] Put, S., Anné, G., i Vleugels, J. (2003): Microstructural engineering of functionally graded materials by electrophoretic deposition. *Journal of Materials Processing Technology*, 143(20), 572–577.
- [133] Richardson, E. i McKechnie, T. (1995): Continuous spray forming of functionally graded materials. *Advanced Thermal Spray Science and Technology*, OH, 737–742.
- [134] Rickerby, D. i Matthews, A., eds. (1991): *Advanced surface coatings: a handbook of surface enginering*. Chapman and Hall, USA.
- [135] Rödel, J., ed. (2006): Functionally graded materials. Properties, modelling and application. KMM-NoE, Knowledge-based Multicomponent Materials, Warszawa, Poland.
- [136] Rota, A., Imgrund, P., i Petzoldt, P. (2004): Micro MIM a production process for micro components with enhanced material properties. [w:] *Proceedings of Powder Metalurgy World Congress*, volume 1, 467–472, Vienna.
- [137] Ruys, A., Kerdic, J., i Sorrel, C. (1996): Thixotropic casting of ceramic-metal functionally gradient materials. *Journal of Materials Science*, 31(16), 4347–4355.

- [138] Rychlewska, J., Szymczyk, J., i Woźniak, C. (2004): On the modelling of the hyperbolic heat transfer problems in periodic lattice-type conductors. *Journal of Thermal Stresses*, 27, 825–843.
- [139] Sadeghi, F., Krousgrill, C. M., i Davis, C. L. (2002): Effect of temperature on thermoelastic instability in thin disks. *ASME Journal of Tribology*, 124, 429–437.
- [140] Sarkar, A. D. (1976): Wear of metals. Pergamon Press, Oxford.
- [141] Sarkar, P., Datta, S., i Nicholson, P. (1997): Functionally graded ceramic/ceramic and metal/ceramic composites by electrophoretic deposition. *Composites Part B*, 28(1/2), 49–56.
- [142] Sasaki, M., Wang, Y., Hirano, T., i Hirai, T. (1989): Design of SiC/C functionally gradient material and its propagation by chemical vapour deposition. *Journal Ceramic Society in Japan*, 97, 539–543.
- [143] Schulz, U., Bach, F., i Tegeder, G. (2003): Graded coating for thermal, wear and corrosion barriers. *Materials Science and Engineering*, A362(1/2), 61–80.
- [144] Shashiah, R. i Eslami, M. (2003): Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell. *Journal of Thermal Stresses*, 26, 277–294.
- [145] Sitnik, L. (1998): Kinetyka zużycia. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [146] Skrzypek, J. i Ganczarski, A. (1998): Modeling of damage effect on heat transfer in time – dependent nonhomogeneous solids. *Journal of Thermal Stresses*, 21(3-4), 205–231.
- [147] Skrzypek, J. i Ganczarski, A. (1999): *Modelling of Material Damage and Failure of Structures*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [148] Skrzypek, J. i Ganczarski, A. (2009): A study on coupled thermo elasto plastic damage dissipative phenomena: models and application to some innovative materials. *Journal of Thermal Stresses*, (in print).
- [149] Skrzypek, J., Ganczarski, A., Rustichelli, F., i Egner, H. (2008): Advanced materials and structures for extreme operating conditions. Springer-Verlag, Berlin-Hidelberg.
- [150] Sladek, J., Sladek, V., i C., Z. (2003): Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method. *Computational Materials and Science*, 28, 494–504.
- [151] Sladek, J., Sladek, V., Krivacek, J., i Zhang, C. (2003): Local BEM for transient heat conduction analysis in 3-D axisymmetric functionally graded solids. *Computational Mechanics*, 32, 169–176.
- [152] Sladek, J., Sladek, V., i Zhang, C. (2004): A local BEM for analysis of transient heat conduction with nonlinear source terms in FGMs. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28, 1–11.
- [153] Stewart, S., Ahmed, R., i Itsukaichi, T. (2004): Contact fatigue failure evaluation of post-treated WC-NiCrBSi functionally graded thermal spray coatings. *Wear*, 257(9/10), 962–983.
- [154] Коваленко, А.Д. (1976): Избранные труды. Наукова думка, Киев.
- [155] Победря, Б.Е.. (1984): Механика композиционных материалов. Издательство московского университета, Москва.

- [156] Taler, J. i Duda, P. (2003): *Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [157] Theiler, C., Seefeld, T., i Sepold, G. (2001): Deposition of graded metal matrix composites by laser beam cladding. [w:] Geiger, M. i Otto, A., eds., *Proceedings of the LANE 2001*, Laser Assisted Net Shape Engineering 3, 421–430, Erlangen, Germany. Meisenbach-Verlag Bamberg.
- [158] Timoshenko, S. i Goodier, J. (1951): Teoria sprężystości. Wydawnictwo Arkady.
- [159] Tjong, S. i Ma, Z. (2000): Microstructural and mechanical characteristics of in situ metal matrix comoposite. *Material Science and Engineering*, 29(3–4), 49–114.
- [160] Tomsia, A., Saiz, E., Ishibashi, H., Diaz, M., Requena, J., i Moya, J. (1998): Powder processing of Mullite/Mo functionally graded materials. *Journal of the European Ceramic Society*, 18, 1365–1371.
- [161] Trumble, K. (2005): Technology and controlled tailoring of functional graded materials. [w:] *KMM - First integration summer school*, Udine, Italy. CISM - International Centre for Mechanical Sciences.
- [162] Turner, M., Clough, R., Martin, H., i Topp, L. (1956): Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 2(9), 805–823.
- [163] Ueda, S. (2001): Elastoplastic analysis of W–Cu functionally graded materials subjected to a thermal shock by micromechanical model. *Journal of Thermal Stresses*, 24, 631–649.
- [164] Ueda, S. (2001): Thermal shock fracture in a W–Cu divertor plate with a functionally graded nonhomogeneous interface. *Journal of Thermal Stresses*, 24, 1021–1041.
- [165] Ueda, S. (2001): Thermoelastic analysis of W–Cu functionally graded materials subjected to a thermal shock using a micromechanical model. *Journal of Thermal Stresses*, 24, 19–46.
- [166] Ueda, S. (2002): Transient thermal singular stresses of multiple cracking in a W–Cu functionally graded plate. *Journal of Thermal Stresses*, 25, 83–95.
- [167] Ueda, S. i Gasik, M. (2000): Thermal–elasto–plastic analysis of W–Cu functionally graded materials subjected to a uniform heat flow by micromechanical model. *Journal* of Thermal Stresses, 23, 395–400.
- [168] http://fgmdb.kakuda.jaxa.jp/e_index.html (dostępne na dzień 1.06.2009):.
- [169] http://inside.mines.edu/research/ccacs/research.html
 (dostępne na dzień 1.06.2009):.
- [170] http://www3.ntu.edu.sg/mae/research/programmes/adv_materials/FGM. (dostepne na dzień 1.06.2009):.
- [171] http://www.matweb.com (dostępne na dzień 1.06.2009): baza internetowa własności materiałowych.
- [172] http://www.sci.se/eng/pdf/tape_casting.pdf(2003):.
- [173] http://www.tms.org/pubs/journals/JOM/9802/Vives/Vives-9802.fig.6. (dostepne na dzień 1.06.2009):.
- [174] Vanmeensel, K., Anne, G., Jiang, D., Vleugels, J., i van der Biest, O. (2004): Homogeneous and functionally graded Si₃N₄-TiCN composites shaped by electrophoretic deposition. *Silicates industriels*, 69(7/8), 233–239.

- [175] Vleugels, J., Anné, G., Put, S., i van der Biest, O. (2003): Thick plate-shaped Al₂O₃/ZrO₂ composites with continuous gradient processed by electrophoretic deposition. *Materials Science Forum*, 423(4), 171–176.
- [176] Walters, M., Paulino, G., i Dodds, Jr., R. (2004): Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*, 41, 1081–1118.
- [177] Wang, B., Han, J., i Du, S. (2000): Crack problems for functionally graded materials under transient thermal loading. *Journal of Thermal Stresses*, 23, 143–168.
- [178] Wang, B.-L., Mai, Y.-W., i Zhang, X.-H. (2004): Thermal shock resistance of functionally graded materials. *Acta Mechanica*, 52, 4961–4972.
- [179] Waszczyszyn, Z. i Radwańska, M. (1996): Ustroje powierzchniowe. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.
- [180] Watanabe, Y., Sato, R., i Matsuda, K. (2004): Evaluation of particle size and particle shape distributions in Al-Al₃Ni FGMs fabricated by a cetrifugal in-situ method. *Science and Engineering of Composite Materials*, 11, 2–3.
- [181] Willmott, P. i Huber, J. (2000): Pulse laser vaporization and deposition. *Reviews of Modern Physics*, 72, 315–328.
- [182] Woźniak, C. i Wierzbicki, E. (2000): Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization. Wydawnictow Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa.
- [183] Xiong, H.-P., Kawasaki, A., Kang, Y.-S., i Watanabe, R. (2005): Experimental study on heat insulation performance of functionally graded metal/ceramic coatings and their fracture behavior at high surface temperatures. *Surface and Coatings Technology*, 194(2/3), 203–214. KMM - state of the art - FGM, Part II.
- [184] Yamagiwa, K., Watanabe, Y., Fukui, Y., i Kapranos, P. (2003): Novel recycling system of aluminium and iron wastes in-situ Al-Al₃Fe functionally graded material manufactured by a cetrifugal method. *Materials Transactions*, 44(12), 2461–2467.
- [185] Yamanouchi, M., Hirai, T., i Schiota, I. (1990): Overall view of the P/M fabrication of functionally graded materials. [w:] Yamanouchi, e. a., ed., *First International Sympozium on Functionally Graded Materials*, 59–64, Sendai.
- [186] Yang, J., Liew, K., i Kitipornchai, S. (2003): Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher – order shear deformation theory. *Computational Mechanics*, 33, 305–315.
- [187] Yeo, J.-G., Y.-G., J., i Choi, S.-C. (1998): Zirconia-stainless steel functionally graded material by tape casting. *Journal of the European Ceramic Society*, 18, 1281–1285.
- [188] Yi, Y.-B., Barber, J. R., i Hartsock, D. L. (2002): *Contact Mechanics*, rozdział: Thermoelastic instabilities in automotive disk brakes - finite element analysis and experimental verification, 187–202. Kluwer, Dordrecht.
- [189] Yi, Y.-B., Barber, J. R., i Zagrodzki, P. (2000): Eigenvalue solution of thermoelastic instability problems using Fourier reduction. [w:] *Proceedings of thr Royal Society of London Series A*, volume 456, 2799–2821.
- [190] Zagrodzki, P., Lam, K. B., Bahkali, E. A., i Barber, J. R. (2001): Nonlinear transient behaviour of a sliding system with frictionally excited thermoelastic instability. *Journal of Tribology*, 123, 699–708.

- [191] Zeng, Y.-P. i Jiang, D.-L. Watanabe, T. (2000): Fabrication and properties of tape-casting laminated and functionally gradient alumina-titanium carbide materials. *Journal of American Ceramic Society*, 83, 2999–3003.
- [192] Zhao, C., Vandeperre, L., Vleugels, J., i van der Biest, O. (2000): Cylindrical Al₂O₃/TZP functionally graded materials by EPD. [w:] *Conference and Exhibition* of the European Ceramic Society, volume 99, 284–287. British Ceramic Transactions.
- [193] Zienkiewicz, O. i Taylor, R. (2000): *Finite Element Method*. Butterworth Heinemann Limited.
- [194] Życzkowski, M., ed. (1988): *Mechanika techniczna, wytrzymałość elementów konstrukcyjnych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.



A. TWIERDZENIA ENERGETYCZNE. ZASADA PRAC WIRTUALNYCH

Rozpatrzmy ciało sprężyste, poddane działaniu obciążeń zmiennych w czasie. W ciele tym powstaje pole przemeiszczeń $u_i(\boldsymbol{x}, t)$. Do przemieszczeń u_i dodajemy przyrosty wirtualne δu_i . Przez przyrosty wirtualne należy rozumieć bardzo małe, ale dowolne przyrosty zgodne jednak z warunkami ograniczającymi ciało (nałożone więzy). Zakładamy, że przyrosty wirtualne są funkcjami klasy C^2 . Na tej części powierzchni ciała, na której zadane są przemieszczenia, przyjmujemy $\delta u_i = 0$. Na pozostałej części powierzchni przemieszczenia wirtualne są dowolne.

Pracę wirtualną sił zewnętrznych można zdefiniować w następujący sposób

$$\delta L = \int_{V} X_i \delta u_i \mathrm{d}V + \int_{A} p_i \delta u_i \mathrm{d}A \tag{A.1}$$

Biorąc pod uwagę, że $p_i = \sigma_{ij}n_j$, oraz przekształcając całkę powierzchniową na całkę po objętości za pomocą twierdzenia Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego mamy

$$\delta L = \int_{V} \left(X_i + \sigma_{ji,j} \right) \delta u_i \mathrm{d}V + \int_{V} \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V \tag{A.2}$$

Wykorzystując równanie równowagi wewnętrznej

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \varrho \ddot{u}_i$$

oraz porównując ze sobą wzory (A.1) i (A.2) otrzymujemy

$$\int_{V} (X_i - \varrho \ddot{u}_i) \,\delta u_i \mathrm{d}V + \int_{A} p_i \delta u_i \mathrm{d}A = \int_{V} \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V \tag{A.3}$$

Równanie (A.3) zwane jest zasadą prac wirtualnych. Jest prawdziwe zarówno dla ciała sprężystego jak i dla ciała niesprężystego, dla materiałów liniowych oraz nieliniowych [109, 158].

SPIS RYSUNKÓW

1.1.	Schemat materiału funkcjonalnie zmiennego (Skrzypek, Ganczarski, i in. [149])	3
2.1.	Przykład zastosowania warstwy przejściowej FGM pomiędzy kompozytem węgiel – węgiel (CFC) a miedzią [161]	6
2.2.	Zastosowanie materiałów FGM w medycynie do produkcji implantów [82]	7
3.1. 3.2.	Schematyczny wykres zależności temperatury od czasu w procesie utwardzania [14] Schematyczne przedstawienie metody wytwarzania z suchego proszku	11
	z wykorzystaniem ciśnienia [161]	11
3.3.	Gotowy komponent wytworzony metoda odlewania mas lejnych w oryginalnych rozmiarach z formą odlewniczą [41]	12
3.4.	Schemat procesu odlewania folii [172]	12
3.5.	Zastosowanie metody odlewania folii w komercyjnym przemyśle [41]	12
3.6.	Schemat procesu infiltracji wywołanej magnetohydrodynamicznym rezonansem matrycy [173]	13
3.7.	Schemat wtryskarki służącej do produkcji materiałów gradientowych metodą formowania wtryskowego proszków; A. Śrubowa, B. Tłokowa wtryskarka [41]	14
3.8.	Wytworzenie komponentu ceramicznego metodą SHS w CSM (fotografia zrobiona przez Johna Moore'a) [169]	15
39	Zautomatyzowany pistolet do natrysku plazma [170]	17
3.10.	Pieciowarstwowy funkcionalnie zmienny kompozyt ZrO ₂ /NiCoCrAlY wytworzony	1,
	za pomocą natrysku plazmą [170]	17
3.11.	Schemat procesu formowania natryskowego [52]	19
3.12.	Zdjęcie maszyny służącej do drukowania 3D [82]	20
4.1.	Profile kompozytów o niejednorodności jednokierunkowej [43]	22
4.2.	Fragment funkcjonalnie zmiennego materiału kompozytowego o strukturze periodycznej wzdłuż zmiennej \mathcal{E} (Ganczarski, Hernik [63])	24
4.3.	Rozwiązanie problemu termicznego dla cylindra grubościennego wykonanego z warstwowego, periodycznie zmiennego materiału kompozytowego przy pomocy pakietu ANSYS (Hernik, Ganczarski [63])	26
4.4.	Przykład rozwiązania problemu termicznego w ośrodku periodycznie funkcjonalnie zmiennym [62]	26
4.5.	Charakterystyczne wymiary zwiazane z powierzchnią środkową [179]	34
4.6.	Powłoka cylindryczna w stanie giętnym: a. geometria, b. siły wewnętrzne, c. przebiegi napreżeń d. odkształcenia warstwy środkowej [194]	36
4.7.	Zależność właściwości materiałowych tlenku cyrkonu od temperatury	41
4.8.	Zależność właściwości materiałowych stop tytanu Ti6Al4V od temperatury	42
4.9	Zależność właściwości materiałowych wolframu od temperatury	43
4.10	Zależność właściwości materiałowych miedzi od temperatury	44



5.1.	Idea metody strzału przedstawiona w sposób schematyczny. Trzy kolejne całkowania	
	równań spełniają w sposób dokładny warunki brzegowe w punkcie startowym.	
	Niedokładność spełnienia warunku brzegowego w punkcie końcowym jest	
	minimalizowana, aż do osiągnięcia satysfakcjonującego rezultatu.	46
5.2.	Siatka węzłów w obszarze $\partial \Omega$ (a) oraz typowa gwiazda węzłów (b) [27]	48
5.3.	Schemat podziału analizowanego obszaru na objętości skończone [156]	50
5.4.	Schematy numerycznego rozwiązywania równania dyfuzji; a. schemat <i>fully explicit</i> ,	
	b. schemat <i>fully implicit</i> , c. schemat Cranka – Nicolsona (Press, Teukolsky, i in. [127])	59
5.5.	Rozkłady temperatury w zależności od wykładnika potęgi <i>n</i> (Hernik, Ganczarski [61]	64
5.6.	Rozkład funkcji naprężenia w zależności od wykładnika potęgi n (Hernik,	
	Ganczarski [61])	65
5.7.	Koncepcja izoparametrycznego elementu skończonego dla materiału FGM [80]	66
5.8.	Schemat tarczy przyjęty do analizy	68
5.9.	Siatka jednorodnych elementów skończonych wykonana w programie Ansys	69
5.10.	Rozkład funkcji przemieszczenia w kierunku <i>x</i> wykonany w programie ANSYS	70
5.11.	Rozkład funkcji przemieszczenia w kierunku <i>x</i> obliczony za pomoca własnego kodu	
	MES	70
5.12.	Rozkład funkcji przemieszczenia w kierunku y wykonany w programie ANSYS .	71
5.13.	Rozkład funkcji przemieszczenia w kierunku u obliczony za pomoca własnego kodu	
	MES	71
5.14.	Wykres moduły Younga $E(x)$ dla tarczy wykonanej z materiału gradientowego	72
5.15.	Siatka elementów skończonych dla analizy uwzgledniajacej elementy niejednorodne	73
5.16.	Rozkład funkcji przemieszczenia w kierunku x dla elementów niejednorodnych	74
5.17.	Porównanie wyników klasyczego MES oraz MES z elementami niejednorodnymi	74
6.1.	Hot-spot zarejestrowane na tarczach hamulcowych pociągu TGV za pomocą kamery	
	na podczerwień przez Paniera, Dufrénoy'a i Weicherta [122]	75
6.2.	Hot-spot zarejestrowane na tarczy sprzęgła przez Yi, Barbera i Zagrodzkiego [188] .	76
6.3.	Model płyto – tarczy z klockami hamulcowymi	77
6.4.	Hot-spots zarejestrowane kamerą na podczerwień na tarczach hamulcowych TGV	
	[120]	78
6.5.	Zależność ciśnienia p [MPa] i prędkości kątowej ω [s ⁻¹] od czasu w trakcie procesu	
	hamowania (Gao i Lin [48])	78
6.6.	Geometria tarczy hamulcowej (Yi, Barber i Hartsock [188])	83
6.7.	Rozkład temperatury dla jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej ze stali	
	ASTM-321	85
6.8.	Rozkład pola temperatury na tarczy hamulcowej na podstawie pomiarów	
	doświadczalnych w trakcie procesu hamowania (Panier i in. [120])	85
6.9.	Rozkład naprężeń promieniowych jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej ze	
	stali ASTM-321	86
6.10.	Rozkład naprężeń obwodowych jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej ze stali	
	ASTM-321	87
6.11.	Mod wyboczeniowy $k = 3$ dla jednorodnej tarczy hamulcowej	88
6.12.	Rozkład temperatury jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej z materiału A356R	89
6.13.	Rozkład naprężeń promieniowych jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej	
	z materiału A356R	90



6.14.	Rozkład naprężeń obwodowych jednorodnej tarczy hamulcowej wykonanej	
	z materiału A356R	91
6.15.	Schemat udziału procentowego poszczególnych składników w materiale	
	gradientowym A356R; faza 1 – stop aluminium, faza 2 – materiał ceramiczny	91
6.16.	Funkcji aproksymacyjna współczynnika przewodności termicznej dla tarczy	
	z materiału FGM	92
6.17.	Funkcja aproksymacyjna modułu Younga dla tarczy z materiału FGM	92
6.18.	Rozkład temperatury w tarczy hamulcowej wykonanej z materiału gradientowego	93
6.19.	Rozkład naprężeń promieniowych w tarczy hamulcowej wykonanej z materiału	
	gradientowego	94
6.20.	Rozkład naprężeń obwodowych w tarczy hamulcowej wykonanej z materiału	
	gradientowego	95
6.21.	a. b. – tuleja cylindra, c. – zespół tłok – pierścień – cylinder	96
6.22.	Rozkład temperatury w tulei cylindrycznej: 1 – silnik czterosuwowy (silnik Otto),	
	2 – silnik dwusuwowy (silnik Diesela), (Ganczarski, Skrzypek [47]	98
6.23.	Zużycie tulei cylindra w kształcie klina	99
6.24.	Parametry geometryczne tulei cylindra zastosowane w symulacjach numerycznych .	100
6.25.	Rozkład funkcji grubości dla tulei cylindra wykonanej ze stali chromowo-niklowej .	101
6.26.	Rozkład zmiany grubości dla tulei cylindra wykonanej z materiału A356R	102
6.27.	Rozkład naprężenia zredukowanego HMH dla tulei wykonanej z materiału A356 R $$.	103
6.28.	Schemat materiału zastosowany w symulacji numerycznej	104
6.29.	Wykres funkcji twardosci $H(y)$ dla materiału warstwowego $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	105
6.30.	Rozkład funkcji grubości tulei cylindra z cienką warstwą antyścieralną oraz warstwą	
	przejściową FGM	106
6.31.	Rozkład naprężeń zredukowanych HMH tulei cylindra z cienką warstwą	
	antyścieralną oraz warstwą przejściową FGM	106

SPIS TABLIC

4.1.	Właściwości stopu cyrkon-tytan w temperaturze pokojowej (Fujimoto i Noda [43],	
	Ootao i in. [118], Noda i in. [105])	40
4.2.	Porównanie termomechanicznych właściwości kompozytów Ni-Al $_2O_3$ oraz	
	$Al-Al_2O_3$ [19, 21, 178]	43
5.1.	Parametry materiałowe, geometryczne i startowe tarczy wykonanej z materiału	
	gradientowego	68
6.1.	Parametry startowe w analizie stabilności tarczy hamulcowej (Dufrénoy	
	i Weichert [32], Asfour i in. [10], Panier i in. [121])	83
6.2.	Właściwości materiałowe tarczy hamulcowej wykonanej ze stali nierdzewnej	
	ASTM-321 (Odqvist [114])	84
6.3.	Właściwości materiałowe tarczy hamulcowej wykonanej z materiału kompozytowego	
	A356R (Egizabal [34])	88
6.4.	Właściwości materiałowe stali Cr-Ni [171]	101
6.5.	Właściwości materiałowe materiału kompozytowego A356R (Egizabal [34])	102
6.6.	Właściwości materiałowe żeliwa sferoidalnego [171]	105
7.1.	Porównanie wyników symulacji numerycznej tarczy hamulcowej dla różnego typu	
	materiałów	108
7.2.	Porównanie wyników symulacji numerycznej tulei cylindra dla różnego typu	
	materiałów	109