

Politechnika Krakowska  
im. Tadeusza Kościuszki  
Wydział Mechaniczny  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków



mgr inż. **Rafał Nogowczyk**

## Zastosowanie programowania symbolicznego do analizy stateczności i drgań struktur sandwiczowych

Praca doktorska wykonana  
pod kierunkiem  
prof. dr hab. inż. **Aleksandra Muca**

# SPIS TREŚCI

<b>WYKAZ WAŻNIEJSZYCH SYMBOLI I SKRÓTÓW UŻYTYCH W PRACY</b> .....	4
<b>1. WSTĘP</b> .....	5
1.1. Wprowadzenie, zalety i wady stosowania struktur sandwichowych .....	5
1.2. Porównanie właściwości struktury sandwichowej i struktury litej .....	7
1.3. Laminaty oraz materiały hybrydowe .....	8
1.4. Rodzaje wypełniaczy i materiały stosowane do ich wytwarzania .....	9
1.5. Homogenizacja właściwości wypełniacza o strukturze siatkowej.....	11
1.6. Przykładowe materiały kompozytowe stosowane do wytwarzania okładzin .....	12
1.7. Cel i zakres pracy .....	12
1.8. Przegląd literatury .....	15
<b>2. WPROWADZENIE DO ANALIZY WIELOWARSTWOWYCH STRUKTUR</b>	
<b>2-W</b> .....	18
2.1. Zasada Hamiltona i minimum energii potencjalnej układu .....	18
2.2. Związki fizyczne dla wielowarstwowych struktur kompozytowych.....	19
2.3. Transformacja układu współrzędnych .....	22
2.4. Relacje dwuwymiarowe .....	25
2.5. Zastępcze sztywności w podejściu 2-W.....	28
2.6. Związki geometryczne dla struktur cienkościennych .....	30
2.7. Hipotezy kinematyczne.....	31
2.8. Metoda Rayleigha-Ritza – analiza wyboczenia i częstotliwości drgań swobodnych .....	33
2.9. Rodzaje warunków brzegowych .....	34
2.10. Drgania swobodne struktur 2-W .....	36
<b>3. PROGRAMOWANIE SYMBOLICZNE</b> .....	37
3.1. Wprowadzenie .....	37
3.2. Sposoby wyznaczania siły krytycznej i drgań swobodnych.....	38
3.3. Obliczenia w programie Mathematica .....	39
<b>4. WYNIKI OBLICZEŃ TEORETYCZNYCH</b> .....	41
4.1. Porównanie wartości siły krytycznej dla płyt z izotropowym wypełniaczem i okładzinami .....	41
4.2. Dane .....	44
4.3. Ubezwymiarowanie wyników .....	44
4.4. Liczba półfal $m$ i $n$ dla płyt i powłok sandwichowych.....	45
4.5. Analiza wyboczenia struktur.....	46
4.5.1. Wpływ teorii na wartość siły krytycznej dla płyt o stosunku $a/b=1$ .....	46

4.5.2.	Wpływ warunków brzegowych na wartość siły krytycznej dla płyt o stosunku $a/b=1$ .....	48
4.5.3.	Wpływ teorii na wartość siły krytycznej dla płyt o stosunku $a/b=1/2$ .....	50
4.5.4.	Wpływ warunków brzegowych na wartość siły krytycznej dla płyt o stosunku $a/b=1/2$ .....	52
4.5.5.	Wpływ teorii na wartość siły krytycznej dla powłok cylindrycznych o stosunku $L/r=1$ .....	53
4.5.6.	Wpływ warunków brzegowych na wartość siły krytycznej dla powłok cylindrycznych o stosunku $L/r=1$ .....	54
4.6.	Analiza drgań swobodnych.....	57
4.6.1.	Wpływ teorii na częstotliwość drgań swobodnych dla płyt o stosunku $a/b=1$ .....	57
4.6.2.	Wpływ warunków brzegowych na częstotliwość drgań swobodnych dla płyt o stosunku $a/b=1$ .....	58
4.6.3.	Wpływ teorii na częstotliwość drgań swobodnych dla płyt o stosunku $a/b=1/2$ .....	59
4.6.4.	Wpływ warunków brzegowych na częstotliwość drgań swobodnych dla płyt o stosunku $a/b=1/2$ .....	60
4.6.5.	Wpływ teorii na częstotliwość drgań swobodnych dla powłok cylindrycznych o stosunku $L/r=1$ .....	61
4.6.6.	Wpływ warunków brzegowych na częstotliwość drgań swobodnych dla powłok cylindrycznych o stosunku $L/r=1$ .....	62
4.7.	Porównanie wyników z literaturą .....	63
4.8.	Optymalny układ włókien.....	64
<b>5.</b>	<b>BADANIA DOŚWIADCZALNE</b> .....	68
5.1.	Przygotowanie i opis przebiegu doświadczenia.....	68
5.2.	Porównanie uzyskanych wyników z obliczeniami analitycznymi.....	71
<b>6.</b>	<b>WNIOSKI I KIERUNKI DALSZYCH PRAC</b> .....	74
6.1.	Wnioski .....	74
6.2.	Kierunki dalszych prac.....	75
<b>DODATKI</b>	.....	76
Aneks A	– materiały FGM jako struktury warstwowe .....	76
Aneks B	– optymalne wartości półfal $m$ i $n$ .....	78
<b>7.</b>	<b>LITERATURA</b> .....	84

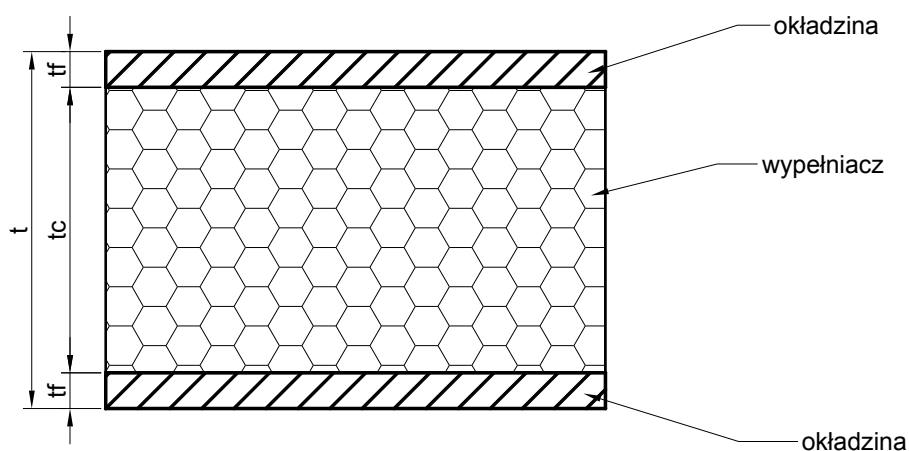
# WYKAZ WAŻNIEJSZYCH SYMBOLI I SKRÓTÓW UŻYTYCH W PRACY

- $a$  – długość boku płyty w kierunku  $x$   
 $b$  – długość boku płyty w kierunku  $y$   
 $d$  – średnica okręgu wpisanego w komórkę wypełniacza o strukturze siatkowej  
 $E_c$  – wartość modułu Younga materiału, z którego wykonany jest wypełniacz  
 $E_f$  – wartość modułu Younga materiału, z którego wykonane są okładziny  
FSDT – oznacza teorię poprzecznego ścinania pierwszego rzędu  
 $G_f$  – wartość modułu Kirchhoffa materiału, z którego wykonane są okładziny  
 $G_c$  – wartość modułu Kirchhoffa materiału, z którego wykonany jest wypełniacz  
HSDT - oznacza teorię poprzecznego ścinania trzeciego rzędu  
 $L$  – długość powłoki cylindrycznej  
 $L_{AB}$  – długość łuku badanej paneli cylindrycznej  
L-K – oznacza teorię Love’a–Kirchhoffa  
 $N_x$  – siła krytyczna  
 $r$  – promień powłoki cylindrycznej o przekroju kołowym  
 $t$  – grubość struktury  
 $t_c$  – grubość wypełniacza  
 $t_f$  – grubość okładziny  
 $t_r$  – grubość ścianki wypełniacza o strukturze siatkowej  
11p – oznacza teorię 11-to parametrową  
 $\nu_c$  – współczynnik Poissona materiału, z którego wykonany jest wypełniacz  
 $\nu_f$  – współczynnik Poissona materiału, z którego wykonane są okładziny  
 $\rho_c$  – gęstość materiału, z którego wykonany jest wypełniacz  
 $\rho_f$  – gęstość materiału, z którego wykonane są okładziny  
 $\theta$  – kąt orientacji włókien w okładzinach  
 $\omega$  – częstotliwość drgań swobodnych

# 1. WSTĘP

## 1.1. Wprowadzenie, zalety i wady stosowania struktur sandwiczowych

Struktura sandwiczowa (rys. 1.1), zwana również warstwową lub przekładkową, składa się z okładzin i z wypełniacza, zwanego także rdzeniem. Okładziny wykonuje się z materiałów charakteryzujących się dobrymi właściwościami mechanicznymi – np. materiałów kompozytowych o osnowie polimerowej, a wypełniacz to bardzo lekkie tworzywa o niskich właściwościach mechanicznych (szczególnie istotna jest niska wartość modułu Kirchhoffa poprzecznego ścinania). Okładziny mają za zadanie przenosić głównie obciążenia rozciągające lub ściskające (w ten sposób realizowane jest również przenoszenie momentów zginających), a rdzeń przenosi głównie obciążenia poprzeczne. Wypełniacz spełnia w konstrukcji różnorodne funkcje: oddziela od siebie okładziny, zwiększa sztywność konstrukcji w przypadku cienkich okładzin, poprawia właściwości tłumiące i w istotny sposób zmniejsza ciężar konstrukcji przy identycznych jak dla konstrukcji litej właściwościach wytrzymałościowych.



Rys 1.1. Przekrój poprzeczny struktury sandwiczowej

Pierwsza znana, stworzona przez człowieka, struktura sandwiczowa została wykonana w 1845 roku – rdzeniem były wyłącznie materiały naturalne – drewno i jajko [1]. Gwałtowny rozwój technologii nastąpił podczas II Wojny Światowej. Obecnie struktury sandwiczowe są stosowane w wielu gałęziach przemysłu. Związane jest to z ich licznymi zaletami do których z całą pewnością należą: lekkość, wysoka wytrzymałość i sztywność, duża energoabsorbencja, możliwość kształtowania konstrukcji o gładkich powierzchniach zewnętrznych i wewnętrznych, dobra izolacja cieplna i akustyczna, możliwość stosowania materiałów ognioodpornych i niewrażliwych na działanie

czynników zewnętrznych, możliwość uniknięcia ostrych korbów, otworów pod nity itp. Niektóre struktury sandwiczowe wyróżniają również bardzo dobre właściwości tłumiące. Obecnie sandwicze wykonuje się z najbardziej zaawansowanych technologicznie materiałów. Konstrukcje takie znajdują zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu: kosmicznym (np. jako zbiorniki paliwa), lotniczym (kabiny samolotów, czy ogony), samochodowym, wydobywczym, energetycznym, telekomunikacyjnym i wielu innych (przykładowe zastosowania – patrz: rys 1.2 i 1.3).



Rys 1.2 Przykładowe zastosowanie struktur sandwiczowych – kokpit bolidu Formuły 1 [2]

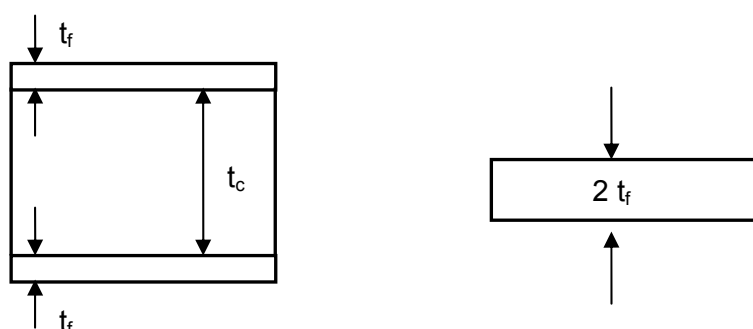


Rys 1.3 Przykładowe zastosowanie struktur sandwiczowych – kabina samolotu Airbus A380 [3]

Jednakże niejednorodna struktura konstrukcji (wypełniacz i okładziny) powoduje, iż w zasadniczy sposób wzrasta liczba możliwych form zniszczenia. Z uwagi na to najbardziej istotną kwestią jest możliwość wyznaczenia w sposób dokładny wartości naprężeń krytycznych prowadzących do zniszczenia struktury. Zasadniczą rolę odgrywa ocena, czy w przypadku struktur cienkościennych, jakimi są sandwicze możliwy jest uproszczony opis 2-W, czy też konieczne jest stosowanie podejścia 3-W.

## 1.2. Porównanie właściwości struktury sandwichowej i struktury litej

Porównanie przedstawione w niniejszym rozdziale bazuje na założeniach, że zarówno materiały okładziny, jak i rdzenia są liniowo sprężyste oraz że rdzeń jest jednorodny. W porównaniu z okładzinami wypełniacz charakteryzuje się dużą podatnością, zapewniając jednocześnie stały odstęp pomiędzy okładzinami. Siły styczne oraz momenty są przenoszone wyłącznie przez okładziny, jedynie siły ścinające są przenoszone przez rdzeń. Ponadto należy przyjąć, że ugięcie wszystkich warstw oraz przemieszczenie w kierunku normalnym jest identyczne [4].



Rys. 1.4 Geometria struktury sandwichowej i litej

W celu porównania właściwości mechanicznych struktury sandwichowej i litej wykonanej z materiału jednorodnego (wymiary – patrz: rys 1.4) obliczono podstawowe parametry mechaniczne, jakimi są sztywność błonowa i giętna. W przypadku materiałów izotropowych okładzin charakteryzujących się modułem Younga  $E_f$  sztywność na rozciąganie  $K$  wyraża się wzorem:

$$K = 2E_f t_f / (1 - \nu_f^2) \quad (1.1)$$

Oba typy struktur (sandwichowa i lita) charakteryzują się identyczną sztywnością na ściskanie.

Dla struktury litej sztywność na zginanie wyraża się wzorem:

$$D_{lit} = \frac{E_f (2t_f)^3}{12(1 - \nu_f^2)} = \frac{2E_f t_f^3}{3(1 - \nu_f^2)} \quad (1.2)$$

a dla sandwichowej:

$$D_{sand} = \frac{2E_f t_f (t_c/2)^2}{(1 - \nu_f^2)} = \frac{E_f t_f t_c^2}{2(1 - \nu_f^2)} \quad (1.3)$$

W strukturach sandwichowych zawsze zakłada się, iż  $t_f/t_c \ll 1$ .

Stosunek sztywności na zginanie struktury sandwiczowej do sztywności na zginanie struktury litej wynosi:

$$\frac{D_{sand}}{D_{lit}} = \frac{3}{4} \left( \frac{t_c}{t_f} \right)^2 \quad (1.4)$$

Zatem np. gdy  $t_f/t_c = 1/20$ , to sztywność na zginanie struktury sandwiczowej jest 300 krotnie wyższa niż sztywność struktury litej.

W przypadku porównania struktur obciążonych siłą osiową  $N_x$ :

$$\sigma_f = \frac{N_x}{2t_f} \quad (1.5)$$

naprężenie są identyczne dla obu przypadków.

Jeżeli obciążymy strukturę litą momentem zginającym  $M$  to otrzymamy wartości naprężeń:

$$\sigma_{lit} = \pm \frac{6M}{(2t_f)^2} = \pm \frac{3}{2} \frac{M}{t_f^2} \quad (1.6)$$

a dla struktury sandwiczowej obciążonej identycznym momentem otrzymamy:

$$\sigma_{sand} = \pm \frac{M}{t_f t_c} \quad (1.7)$$

Zatem stosunek naprężeń wynosi:

$$\frac{\sigma_{sand}}{\sigma_{lit}} = \frac{2t_f}{3t_c} \quad (1.8)$$

Gdy  $t_f/t_c = 1/20$ , to naprężenia struktury sandwiczowej są 30 krotnie mniejsze niż w przypadku struktury litej.

### 1.3. Laminaty oraz materiały hybrydowe

Najprostszym przykładem struktury wielowarstwowej jest laminat. Składa się on z kilku warstw o identycznych właściwościach materiałowych, mogących się różnić orientacją włókien oraz grubością. Innym przykładem są materiały hybrydowe, spośród których można wyróżnić materiały FGM (z angielskiego – functionally graded materials) oraz analizowane w niniejszej pracy struktury sandwiczowe. Materiały hybrydowe



charakteryzują się odmiennymi właściwościami materiałowymi poszczególnych warstw (mogą się również różnić grubością i orientacją włókien). Ciekawym przypadkiem materiałów hybrydowych są materiały FGM, które zostały omówione poniżej.

Pomysł stworzenia materiałów FGM po raz pierwszy pojawił się w Japonii w 1984 roku podczas projektowania konstrukcji statku kosmicznego. Naukowcy musieli opracować materiał, który wytrzyma temperaturę 2000 K na powierzchni oraz gradient temperatury wynoszący 1000 K na grubości 10 mm.

Materiał FGM jest dwu składnikowym kompozytem o zmiennej zawartości składników. Zmienność ta umożliwia uzyskanie oczekiwanych właściwości bez konieczności uwzględniania wspólnych właściwości składników. Przykładowo można połączyć ciągliwość metalu z ogniotrwałością materiału ceramicznego bez obniżenia jakiegokolwiek właściwości poszczególnych składników. Jest to możliwe dzięki stopniowej zmianie zawartości jednego materiału w drugim (w omawianym przypadku zawartości ceramiki w metalu). Po stronie, która ma charakteryzować się ogniotrwałością zawartość ceramiki wynosi 100%, dzięki czemu materiał w tym miejscu ma właściwości takie jak jeden ze składników – w tym przypadku ceramika. Zawartość ceramiki zmniejsza się stopniowo aż osiągnie wartość 0% - w tym miejscu materiał ma właściwości czystego metalu. Dzięki temu nie trzeba szukać odpowiednich proporcji, co zawsze wiąże się z obniżeniem właściwości obydwu składników, jak to ma miejsce w przypadku kompozytów metalowych.

Materiały FGM znajdują zastosowanie tam, gdzie wymagana jest odporność na ciężkie warunki. Jako przykładowe zastosowania można tu wymienić osłony cieplne promów kosmicznych, przetworniki termoelektryczne itp.

Materiały FGM można z pewnym przybliżeniem traktować jako struktury warstwowe. Dzięki temu można je analizować za pomocą teorii stosowanych w analizie struktur kompozytowych i sandwiczowych. Takie podejście zostało opisane w pracy [5] oraz w aneksie A.

#### **1.4. Rodzaje wypełniaczy i materiały stosowane do ich wytwarzania**

Bardzo istotny wpływ na właściwości konstrukcji ma materiał, z których został wykonany rdzeń.

Rdzenie pierwszych konstrukcji sandwiczowych były wykonywane z materiałów organicznych, takich jak drewno korkowe, czy balsa [6]. Jednak ze względu na to, że są to materiały naturalne, produkcja na skalę masową była trudna i kosztowna. Wynikiem tego był wysoki koszt konstrukcji.

Obecnie balsa również znajduje zastosowanie jako wypełniacz struktur sandwiczowych, ale znacznie częściej stosowane są materiały syntetyczne, takie jak np. pianki, czy rdzenie komórkowe. Łatwość produkcji i niska cena tych materiałów pozwoliły na znaczne obniżenie kosztów gotowych konstrukcji.

Zasadniczo możemy wyróżnić trzy rodzaje typowych materiałów używanych do produkcji wypełniaczy (patrz: rys. 1.5):

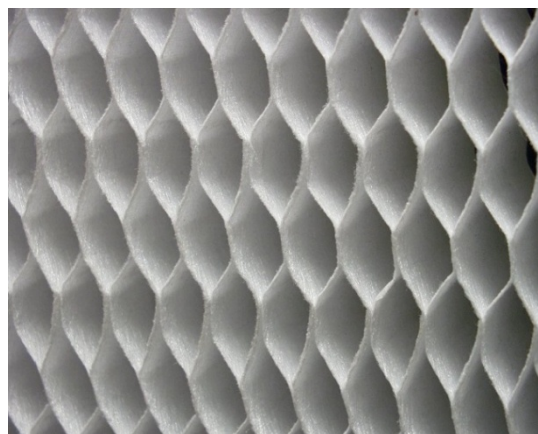
1. Struktury siatkowe (komórkowe) – np. struktura plastra miodu
2. Struktury niejednorodne – np. pianki
3. Struktury jednorodne – np. balsa.

Należy tu podkreślić, że struktury siatkowe również są niejednorodne, jednakże skala niejednorodności jest większa, niż w przypadku pianek, które można z pewnym przybliżeniem traktować jako materiał izotropowy. W przypadku struktury siatkowej należy wyznaczyć zastępcze stałe materiałowe, co opisano w rozdziale 1.5.

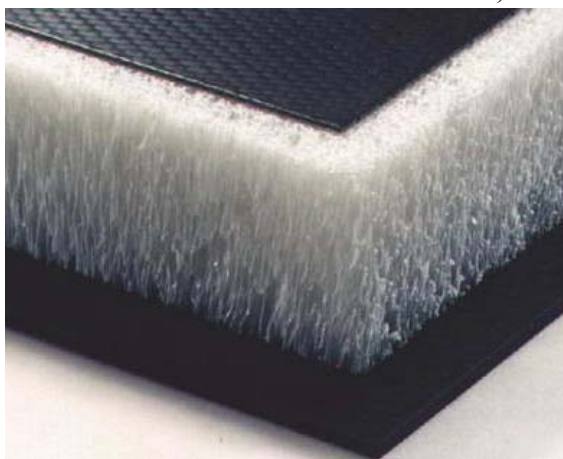
Struktury siatkowe mają zastosowanie w najbardziej obciążonych konstrukcjach. Mogą być produkowane z różnych materiałów, np. aluminium, tworzyw sztucznych itp. Charakteryzują się właściwościami anizotropowymi. Ponadto są łatwe zarówno w wytwarzaniu, jak i w obróbce [6]. Struktury niejednorodne są najlżejszym i najtańszym rodzajem wypełniacza. Do ich produkcji stosuje się pianki PCV i pianki poliuretanowe. Podobnie jak w przypadku struktur siatkowych, łatwo się je wytwarza oraz obrabia. Właściwości mechaniczne rdzenia o strukturze niejednorodnej zależą przede wszystkim od gęstości zastosowanego tworzywa.



a) Drewno balsa



b) struktura siatkowa

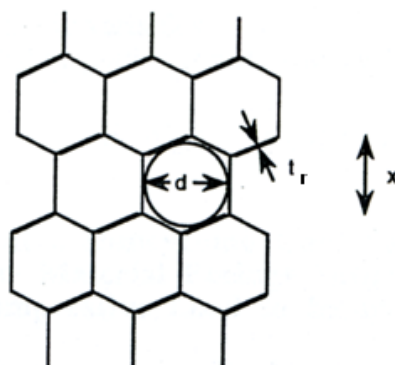


c) pianka

Rys 1.5 Przykłady materiałów stosowanych do wytwarzania rdzeni [4]

## 1.5. Homogenizacja właściwości wypełniacza o strukturze siatkowej

W przypadku rdzeni o strukturze siatkowej do obliczeń należy przyjąć zastępcze stałe materiałowe, które pozwolą z pewnym przybliżeniem traktować go jako materiał jednorodny. W wyznaczaniu zastępczych stałych materiałowych znaczenie mają wymiary komórek (patrz: rys. 1.6).



Rys. 1.6 Struktura plastra miodu [7]

Wzory do obliczania zastępczych stałych materiałowych zaproponowano w pracy [7]. Znając przedstawione na powyższym rysunku wartości, tj.  $d$  i  $t_r$  oraz stałe materiałowe materiału użytego do produkcji rdzenia (gęstość  $\rho_c$ , moduł Kirchhoffa  $G_c$  oraz moduł Younga  $E_c$ ) zastępcze stałe materiałowe dla wypełniacza można obliczyć za pomocą wzorów (1.9) – (1.12).

$$\rho_c' = k_2(t_r/d)\rho_c \quad (1.9)$$

$$G_{cx}' = k_3(t_r/d)G_c \quad (1.10)$$

$$G_{cy}' = k_4(t_r/d)G_c \quad (1.11)$$

$$E_c' = k_2(t_r/d)E_c \quad (1.12)$$

gdzie  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$  to odpowiednie współczynniki, mające różne wartości w zależności od struktury wypełniacza (np. sześciokątnej lub kwadratowej). Jak można zauważyć, wielkości te są wielkościami empirycznymi bazującymi na podstawowych stałych komórki, jakimi jest jej średnica i grubość – patrz rys. 1.6. Wartości współczynników  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$  przedstawiono w tabeli 1.1.

Rodzaj wypełniacza	$k_2$	$k_3$	$k_4$
komórka sześciokątna (wg Keachele)	8/3	5/3	1
komórka sześciokątna (wg MIL HDBK-23)	8/3	4/3	8/15
komórka kwadratowa (wg Keachele)	2	1	1
komórka kwadratowa (wg MIL HDBK-23)	2	1	1

Tabela 1.1 Współczynniki  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$  dla wypełniaczy siatkowych [7]

## 1.6. Przykładowe materiały kompozytowe stosowane do wytwarzania okładzin

Na właściwości mechaniczne konstrukcji sandwiczowej wpływ ma rodzaj materiału zastosowanego na okładziny. W tabeli 1.2 przedstawiono wybrane właściwości mechaniczne wybranych materiałów kompozytowych o osnowie polimerowej.

Materiał	Moduł Younga $E_I$ [GPa]	Moduł Younga $E_I$ [GPa]	Moduł Kirchhoffa $G_{I2}$ [GPa]	Gęstość $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]
szkło E	16,8	16,8	3,35	2,715
bor	204	18,5	5,59	2,76
kevlar 49	76	5,5	2,3	1,45
węgiel	74	74	4,55	1,80

Tabela 1.2 Porównanie właściwości mechanicznych wybranych materiałów kompozytowych [8]

Do wytwarzania okładzin, oprócz materiałów kompozytowych można również stosować inne materiały, takie jak np. stal, czy stopy aluminium. Przeciętna stal ma gęstość około 7,8 g/cm<sup>3</sup> oraz moduł Younga 210 GPa. Moduł Younga jest większy niż w przypadku kompozytów wymienionych w tabeli 1.2, jednakże porównanie stosunków tego modułu do gęstości wypada zdecydowanie na korzyść kompozytów. Stopy aluminium charakteryzują się modułem Younga około 70 GPa oraz gęstością około 2,7 g/cm<sup>3</sup>. Zatem stosunek modułu Younga do gęstości mają podobny do stali.

Porównując stosunek modułu Younga do gęstości, materiały kompozytowe wypadają lepiej zarówno od stali jak i stopów aluminium.

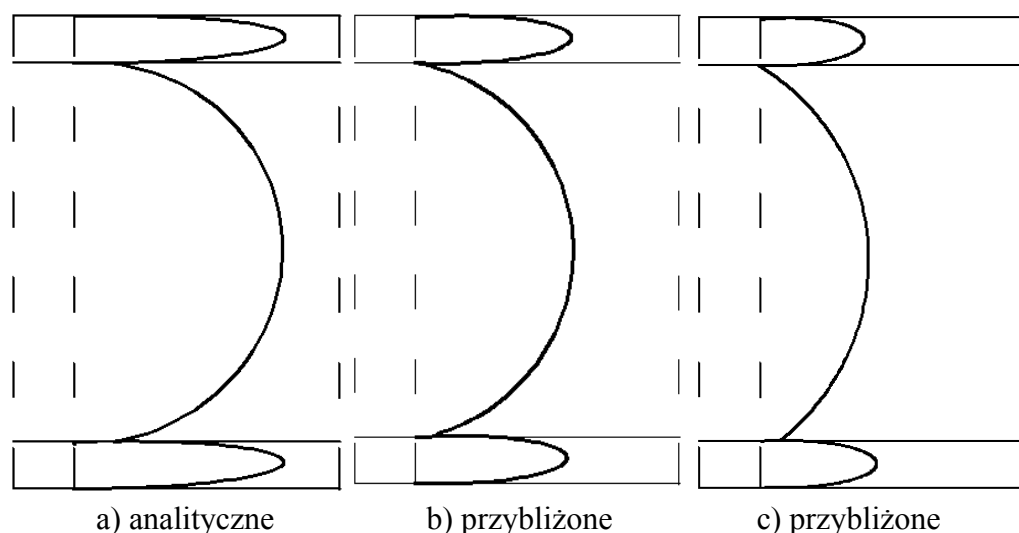
## 1.7. Cel i zakres pracy

Pomimo, iż struktury sandwiczowe są znane i powszechnie stosowane w różnorodnych konstrukcjach inżynierskich, można nadal zaobserwować lawinowo rosnącą liczbę prac z tej dziedziny. Spowodowane jest to wieloma czynnikami, z których jako najważniejsze można wymienić:

- rozwój inżynierii materiałowej, co powoduje konieczność uwzględniania różnych typów materiałów (o różnych właściwościach) w projektowaniu, np. możliwości stosowania: a) materiałów FGM jako wypełniacza lub materiału okładzin, b) różnorodnych typów materiału wypełniacza, c) różnorodnej konfiguracji wielowarstwowego materiału okładzin itp.;
- poszukiwanie odpowiedzi na pytanie w jakim stopniu teorie 2-W (płyt, powłok) pozwalają na dokładne oszacowanie wartości obciążeń / odkształceń odpowiadających zniszczeniu konstrukcji;

- określenie jakie materiały powinny być stosowane jako okładziny i wypełniacz – jest to równoważne rozwiązywaniu różnorodnych zadań optymalizacji wielokryterialnej, z różnorodnymi postaciami cząstkowych funkcji celu i różnymi ograniczeniami w formie równościowej i / lub nierównościowej.

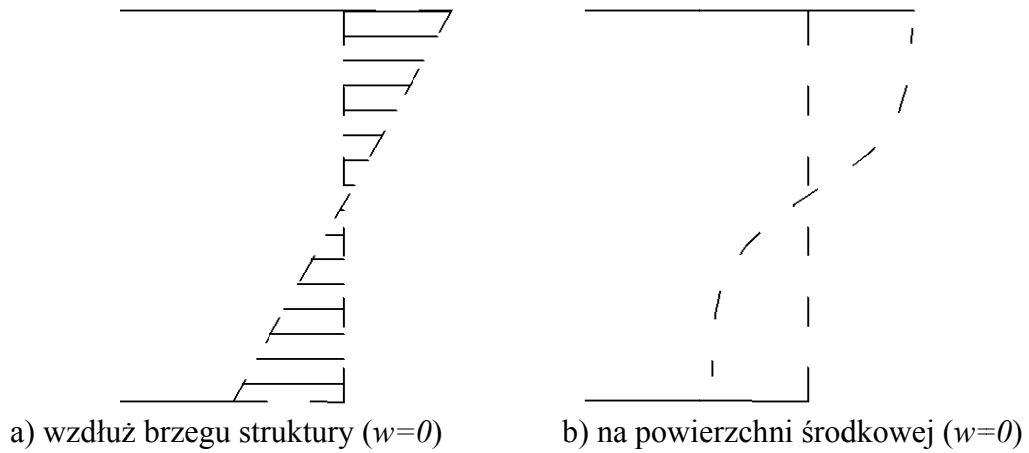
Odpowiedź na powyższe kwestie jest prosta. Należy opracować odpowiedni model teoretyczny, który pozwala na otrzymanie wyników zgodnych z rezultatami eksperymentu. Zazwyczaj budowa modelu teoretycznego wiąże się z opracowaniem właściwego dla danego typu sandwicz elementu skończonego (2-W lub 3-W). W ten sposób w literaturze obserwujemy rosnącą liczbę prac polegającą na sprawdzaniu na ile proponowany model numeryczny jest zgodny z innymi wynikami prezentowanymi w literaturze. Najczęściej jednak poszczególne rodzaje elementów skończonych nie są dostępne w komercyjnych pakietach MES i projektant / inżynier nie jest w stanie ich wykorzystać. Można więc próbować twierdzić, iż jedynym rozwiązaniem jest zastosowanie podejścia 3-W z wykorzystaniem pakietów MES. Nie jest to jednak zadanie łatwe bowiem sprowadza się do budowania modeli MES dla każdego rodzaju właściwości materiałowych niezależnie w celu uwzględnienia w sposób właściwy warunków brzegowych oraz rozkładu naprężeń poprzecznego ścinania. W modelach MES naprężenia poprzecznego ścinania są uśredniane na granicach ES. Tak więc zamiast poszukiwanego rozkładu przedstawionego na rys. 1.7a, możemy otrzymywać różnorodne jego przybliżenia – rys. 1.7b,c. Jednak stopień aproksymacji nie jest uzależniony tylko od dokładności podziału, ale także od przyjętego modelu – stąd powstają np. tzw. hierarchiczne ES.



Rys. 1.7 Rozkłady naprężeń poprzecznego ścinania

Odrębnym zagadnieniem pozostaje sposób modelowania warunków brzegowych. Dla struktur 2-W warunki brzegowe zadajemy na powierzchni środkowej. W modelu 3-W warunki określamy dla każdego przekroju  $z$ . Nie jest jednak wiadomo, czy w podejściu 3-W powinno się zadawać warunki brzegowe identyczne wzdłuż całego brzegu (rys. 1.8a), czy też tylko na powierzchni środkowej (rys. 1.8b). W każdym z przypadków

warunków brzegowych uzyskujemy różne rozkłady przemieszczeń, odkształceń i naprężeń.



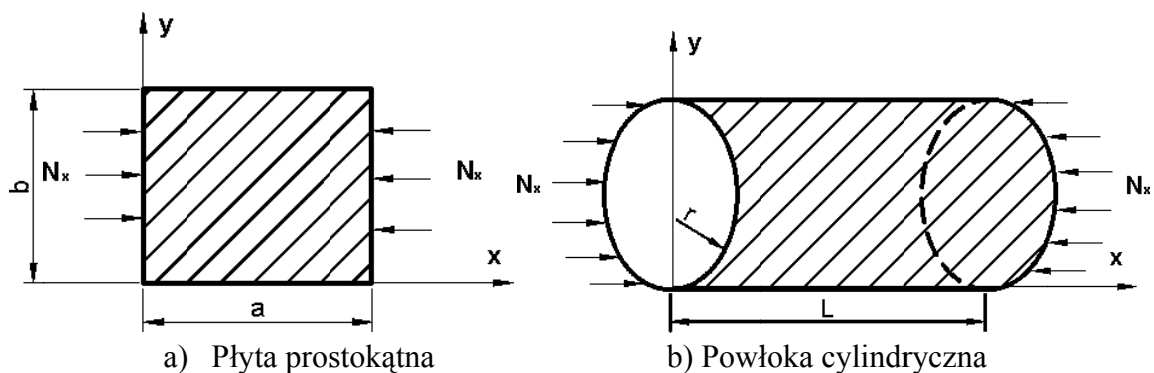
Rys. 1.8 Warunki brzegowe w podejściu 3-W

W ten sposób dochodzimy do zasadniczego celu pracy, jakim jest:

**„Opracowanie metodyki programowania symbolicznego do analizy dwuwymiarowej struktur sandwichowych dla dowolnych struktur i warunków brzegowych.”**

Generalnie, badania prowadzone w pracy doktorskiej dotyczą dwóch kierunków działań:

1. modelowania symbolicznego / numerycznego zniszczenia konstrukcji sandwichowej w sensie:
  - globalnego wyboczenia,
  - częstotliwości drgań swobodnych,
2. badań doświadczalnych dla obciążeń statycznych:
  - próba ściskania paneli cylindrycznych,



Rys. 1.9 Analizowane struktury

W pracy omówiono struktury sandwichowe oraz porównano ich wybrane właściwości ze strukturami litymi (rozdział 1). Szczególną uwagę poświęcono wypełniaczom – zostały przedstawione materiały, z których są wykonywane oraz opisano metodę homogenizacji rdzenia o strukturze plastra miodu. W rozdziale 2 zaprezentowano

podejścia stosowane w analizie utraty stateczności oraz omówiono metodę tworzenia i transformacji macierzy sztywności dla struktur warstwowych. Rozdział 3 poświęcono przedstawieniu idei programowania symbolicznego. Zaprezentowano sposób wyznaczania wartości siły krytycznej oraz częstotliwości drgań swobodnych za pomocą stworzonego programu przy zastosowaniu pakietu Mathematica. W rozdziale 4 przedstawiono i omówiono wyniki analizy utraty stateczności i drgań swobodnych dla płyt i powłok cylindrycznych (patrz: rys 1.9). Otrzymane wyniki zweryfikowano z podejściem opisanym w literaturze (rozdział 4.7). Rozdział 5 opisuje przeprowadzone badania doświadczalne oraz porównanie otrzymanych wyników z analizą teoretyczną. Wnioski oraz kierunki dalszych prac zostały przedstawione w rozdziale 6.

## 1.8. Przegląd literatury

Pierwszą monografią poświęconą strukturom sandwiczowym była wydana w roku 1966 praca Plantemy [9]. Autor poruszył w niej problemy wyboczenia belek, płyt oraz powłok. W analizie zastosował on klasyczną teorię bazującą na metodzie energetycznej. Więcej informacji na temat sandwicy przedstawił Vinson [10]. W monografii można znaleźć informacje na temat homogenizacji rdzenia, budowy struktur sandwiczowych, występujących form zniszczenia, oraz porównanie właściwości sandwicy ze strukturami litymi. Oprócz analizy obciążeń statycznych przedstawił on również analizę drgań oraz obciążeń dynamicznych dla belek, płyt i paneli. W kolejnej pracy Vinson [11] przedstawił analizę wyboczenia płyt sandwiczowych metodą energetyczną oraz metody optymalizacji pozwalające uzyskać minimalną wagę struktury. W monografii Gibsona i Ashby'ego [12] można znaleźć opisy wszystkich rodzajów rdzeni, materiałów służących do ich produkcji, a także sposoby na homogenizację. W pracy Daviesa [13] poświęconej w całości strukturom sandwiczowym, autor opisał metody produkcji, dokonał przeglądu materiałów, przeanalizował właściwości akustyczne, odporność na wodę i ogień. Ponadto w monografii znalazł się opis metod testowania struktur oraz przykłady obliczeń wyboczenia. Podobne informacje można też znaleźć w pracy Bitzera [1]. Monografia Altenbacha i Kissinga [14] została w całości poświęcona mechanice struktur kompozytowych, również z uwzględnieniem struktur sandwiczowych. Przedstawiono tam obliczenia wyboczenia zarówno przy pomocy klasycznej teorii, jak i teorii poprzecznego ścinania pierwszego i wyższych rzędów. Opisano również modelowanie oraz zastosowanie metody elementów skończonych.

Pierwsze artykuły na temat struktur sandwiczowych pojawiły się znacznie wcześniej niż monografie – już początkiem ubiegłego stulecia [15]. Ze względu na złożoność struktury, różne zachowania lokalne i globalne, na przestrzeni lat powstało bardzo dużo metod obliczeniowych i teorii stosowanych do obliczeń struktur sandwiczowych. Pierwszą pracę na temat skończonych przemieszczeń w analizie struktur sandwiczowych przedstawił Reissner [16]. Większość dostępnych opracowań zakłada nieściślność rdzenia, jednak według Frostiga [17], ich stosowanie w przypadku ściśliwych rdzeni wykonanych z pianki daje wątpliwe wyniki. W ostatnim okresie

pojawiło się w literaturze wiele opracowań przeglądowych dotyczących opisu różnych wariantów teorii 2-W, które mogą być stosowane w analizie deformacji, wyboczenia, drgań swobodnych i tłumienia w strukturach sandwichowych. Jako najważniejsze z nich można wymienić opracowania Noora [18], Frostiga [17], Altenbacha [19].

Noor w przeglądowej pracy [18] przedstawił podział modeli używanych do opisu struktur sandwichowych:

- dokładny model 3-W, bazujący na metodzie elementów skończonych; takie podejście zostało opisane w pracach [20, 21, 22];
- model 3-W – do opisu stosuje się uproszczenie polegające na homogenizacji okładzin i rdzenia - problematyka ta została opisana w pracach [23, 24];
- model 2-W płyt i powłok; w opisie stosuje się różne teorie – klasyczną Love’a-Kirchhoffa, czy poprzecznego ścinania pierwszego i wyższych rzędów. Można stosować ujęcie lokalne [25, 26] oraz globalne [16, 27].

Obecnie do obliczeń struktur sandwichowych najczęściej stosuje się teorie wyższych rzędów [17], które pozwalają na otrzymanie wyników o większej dokładności.

W zakresie badań dotyczących analizy struktur sandwichowych można wymienić następujące kierunki zainteresowań:

- opracowanie metod homogenizacji do opisu właściwości mechanicznych wypełniaczy – w literaturze dostępne są pozycje opisujące badania doświadczalne [28, 29], metody analityczne [30, 31] oraz analizę MES [20, 24, 32];
- wyznaczanie rozkładów naprężeń termomechanicznych w płytowych i powłokowych strukturach sandwichowych – na podstawie modelu 3-W [23, 33], teorii FSDT [34, 35, 36], teorii HSDT [37, 38], teorii klasycznej [39, 40] oraz przeprowadzonych eksperymentów [41, 42];
- drgania swobodne i tłumienie płyt oraz powłok sandwichowych – stosowane podejścia opisane w literaturze są podobne jak dla poprzedniego podpunktu, tj. – model 3-W [43, 44], teoria FSDT [45, 46, 47], teoria HSDT [46, 47, 48, 49] oraz przeprowadzone badania doświadczalne [50, 51];
- opis zachowania lepko-sprężystego płyt i powłok sandwichowych – przy użyciu teorii FSDT [52, 53], teorii HSDT [54], jak również na podstawie przeprowadzonych badań [55, 56];
- globalne i lokalne wyboczenie płyt i powłok – można tu wyróżnić podejście lokalne oraz globalne; w literaturze problem wyboczenia analizuje się na podstawie modelu 3-W (w ujęciu lokalnym [21, 57, 58] lub globalnym [59, 60, 61]), teorii FSDT (w ujęciu lokalnym [62] lub globalnym [63, 64, 65, 66]), teorii HSDT (w ujęciu lokalnym [67] lub globalnym [68, 69]), teorii klasycznej (w ujęciu lokalnym [70] lub globalnym [64, 71]) oraz przeprowadzonych eksperymentów (w ujęciu lokalnym [72] lub globalnym [73, 74, 75, 76])
- opis form zniszczenia struktur sandwichowych (delaminacja, zniszczenie w sensie pęknięcia warstw indywidualnych) – formy zniszczenia zostały omówione w pracach [4, 77];



- opis nieliniowych deformacji struktur – na podstawie modelu 3-W [33], teorii FSDT [78, 79], teorii HSDT [33, 37], teorii klasycznej [40] oraz przeprowadzonych eksperymentów [67, 78, 80].

Można zaobserwować, że w literaturze nie ma zbyt wiele pozycji poświęconych dogłębnemu porównaniu kilku różnych teorii. Wyjątkiem tutaj jest praca Zhen, Wanji [81], dotyczy ona jednak belek. Brakuje również pozycji poświęconych analizie wpływu różnych warunków brzegowych na wartość siły krytycznej oraz częstotliwość drgań swobodnych struktur sandwichowych w zależności od stosowanej teorii 2-W. Tu wyjątkiem jest praca Pinna i Ronaldsa [82] oraz Pandita, Singha i Sheikha [83].

Generalnie można zauważyć iż do opisu wymienionych powyżej problemów stosowanych jest wiele różnorodnych wariantów 2-W i 3-W teorii płyt i powłok. W celu uzyskania konkretnych rozwiązań zastosowano różnorodne metody obliczeniowe, poczynając od metod analitycznych typu R-R, Bubnova-Galerkina, metody różnic skończonych i elementów skończonych. Nadal jednak pozostaje sprawą otwartą kwestia możliwości stosowania konkretnego typu teorii do ścisłego opisu deformacji struktur sandwichowych. Jest to bowiem zależne od właściwości mechanicznych sandwicha oraz od rodzaju materiału zastosowanego na okładziny i wypełniacz. Stanowi to bezpośrednio uzasadnienie podjęcia w rozprawie doktorskiej badań zmierzających do przedstawienia możliwości ogólnego zapisu różnorodnych wariantów teorii 2-W.

## 2. WPROWADZENIE DO ANALIZY WIELOWARSTWOWYCH STRUKTUR 2-W

### 2.1. Zasada Hamiltona i minimum energii potencjalnej układu

Punktem wyjścia do określenia relacji podstawowych równań równowagi (zarówno w stanie przedkrytycznym, jak i krytycznym wyboczenia lub częstotliwości drgań swobodnych) jest funkcjonal Hamiltona. Następnie stosując zasadę wariacyjną Hamiltona otrzymuje się równania przemieszczeń dla konstrukcji sandwiczowej. Zasada wariacyjna Hamiltona ma postać:

$$\delta H = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} (K - \Pi) d\tau = 0 \quad (2.1)$$

gdzie  $K$  jest energią kinetyczną układu, a  $\Pi$  energią potencjalną. Energia kinetyczna wyrażana jest za pomocą wzoru:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(z) \frac{dU_i}{d\tau} \frac{dU_i}{d\tau} d\Omega \quad (2.2)$$

gdzie  $\rho(z)$  to funkcja określająca gęstość struktury.

Dla struktur wielowarstwowych gęstość wyraża się zależnością:

$$\{\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}\} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho_{(k)} \{1, z, z^2\} dz \quad (2.3)$$

gdzie  $\rho_{(k)}$  oznacza gęstość k-tej warstwy.

Energia potencjalna wyraża się za pomocą zależności:

$$\Pi(U_i) = \int_{\Omega} W d\Omega - \int_{S_T} T_i U_i dS = \Pi_{int} - \int_{S_T} T_i U_i dS \quad (2.4)$$

gdzie  $W$  oznacza funkcję gęstości odkształcenia, która z kolei wyraża się zależnością:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33}) + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \varepsilon_{23} \quad (2.5)$$

$\Omega$  oznacza pole powierzchni środkowej, a całkowanie odbywa się po  $dx$  i  $dy$ .  $T_i$  jest rzutem składowej obciążenia powierzchniowego na i-ty kierunek układu współrzędnych –

obciążenia te działają na powierzchni bocznej  $S_T$ . W analizie płyt i powłok zakłada się, że obciążenia te są przykładane do powierzchni środkowej struktury.

Twierdzenie o minimum energii potencjalnej układu można sformułować w następujący sposób [84]:

Ze wszystkich pól przemieszczeń spełniających warunki brzegowe i warunki zgodności jedynie te, które spełniają warunki równowagi prowadzą do minimum funkcjonału  $\Pi$ .

Matematycznie twierdzenie to zapisuje się w następujący sposób:

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.6)$$

Symbol  $\delta$  oznacza wariację. W rozważanych przypadkach konieczne jest zastosowanie dwóch operacji:

$$\frac{d(\delta y)}{dx} = \delta \frac{dy}{dx},$$

$$\delta(y^2) = 2y\delta y \quad (2.7)$$

W przypadku płyt i powłok element objętości ciała  $d\Omega$  przedstawia się jako  $A_1A_2dxdydz$ . Dla materiałów kompozytowych zasadniczym elementem w obliczeniu funkcjonału  $\Pi$  jest obliczenie energii odkształcenia dla każdej warstwy niezależnie i następnie zsumowanie po liczbie warstw:

$$\Pi_{int} = \sum_{j=1}^N \Pi_{int}^{(j)} = \sum_{j=1}^N \int_{z_{j-1}}^{z_j} \iint_{S_\Omega} W^{(j)} A_1A_2dxdydz \quad (2.8)$$

Podstawiając zależność (2.8) i (2.5) do równania (2.4) oraz wykorzystując związki fizyczne otrzymuje się funkcjonal zależny od funkcji  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $w(x, y)$ ,  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$ ,  $u^{(j)}(x, y)$ ,  $v^{(j)}(x, y)$ ,  $w^{(j)}(x, y)$ .

## 2.2. Związki fizyczne dla wielowarstwowych struktur kompozytowych

W pracy analizujemy struktury sandwichowe, których okładziny są wykonane z kompozytów. Z uwagi na to, rozważania rozpoczniemy od opisu właściwości materiałów anizotropowych w celu dokładnego przedstawienia uproszczeń i przybliżeń stosowanych w 2-W opisie wielowarstwowych materiałów kompozytowych i sandwichów.

Prawo Hooke'a dla materiału anizotropowego można zapisać w następującej postaci:

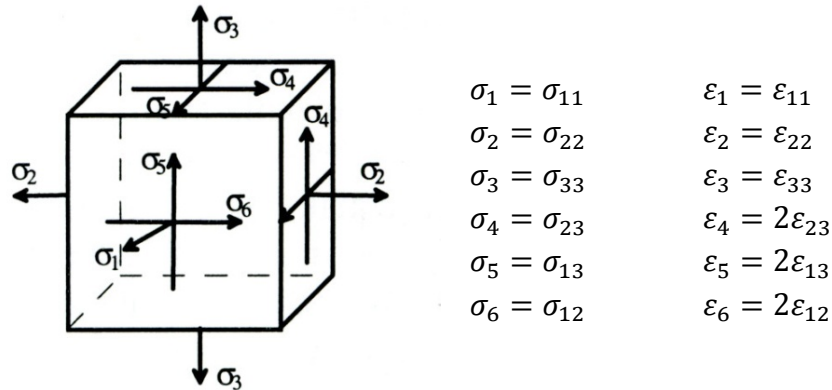
$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.9)$$

Lub w postaci odwrotnej:

$$\sigma_i = S_{ij}\varepsilon_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.10)$$

gdzie  $\sigma_i$  określają składowe tensora naprężenia,  $\varepsilon_j$  składowe tendora odkształcenia,  $C_{ij}$  oznacza elementy macierzy sztywności, a  $S_{ij}$  - elementy macierzy podatności.

W równaniu zastosowano uproszczoną notację Kelvina – Voigta, której postać przedstawiono na rysunku 2.1.



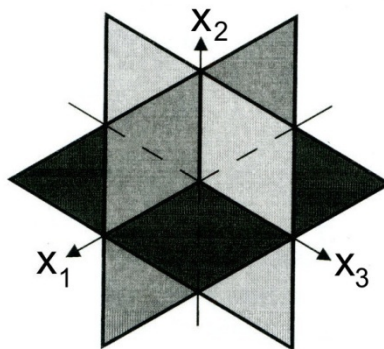
Rys. 2.1 Składowe tensora naprężenia – uproszczona notacja Kelvina – Voigta [84]

Tak zdefiniowany materiał ma 36 niezerowych stałych materiałowych. Jednak liczba ta jest zbyt duża dla inżyniera, zatem w celu jej zmniejszenia należy przyjąć pewne uproszczenia. W przypadku lokalnego układu współrzędnych  $(x_1, x_2, x_3)$ , kierunek warstwy indywidualnej  $x_1$  odpowiada kierunkowi włókna,  $x_2$  jest kierunkiem prostopadłym do włókna,  $x_3$  oznacza kierunek prostopadły do warstwy.

Poprzez przyjęcie klasycznej postaci energii odkształceń sprężystych, automatycznie zostaje spełniony warunek symetrii elementów macierzy sztywności (oraz podatności):

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (2.11)$$

Uproszczenie to prowadzi do redukcji liczby niezależnych stałych materiałowych do 21. Poprzez analizę przypadków istotnych z praktycznego punktu widzenia, można dokonać dalszych uproszczeń.



Rys. 2.2 Płaszczyzny symetrii [84]

Po przeprowadzeniu analizy dla materiału posiadającego trzy ortogonalne płaszczyzny symetrii w układzie  $x_1, x_2, x_3$  (patrz: rys. 2.2) otrzymuje się następującą postać macierzy sztywności:

$$[C] = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Taki materiał nosi nazwę materiału ortotropowego. Liczba niezależnych stałych materiałowych wynosi 9.

Po wprowadzeniu w miejsce poszczególnych elementów macierzy sztywności (oraz podatności) stałych inżynierskich (modułów Younga, modułów Kirchhoffa oraz współczynników Poissona), elementy macierzy podatności wyrażają się za pomocą następujących zależności (przy wprowadzeniu normalizacji kolumnowej, oraz przy założeniu że  $E_1 > E_2$ ):

$$[S] = \begin{Bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_6} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Moduły Younga wyrażone są za pomocą zależności:

$$E_1 = \frac{1}{s_{11}}, E_2 = \frac{1}{s_{22}}, E_3 = \frac{1}{s_{33}} \quad (2.14)$$

moduły Kirchhoffa:

$$E_4 = G_{23} = \frac{1}{s_{44}}, E_5 = G_{13} = \frac{1}{s_{55}}, E_6 = G_{12} = \frac{1}{s_{66}} \quad (2.15)$$

współczynniki Poissona:

$$\nu_{21} = \frac{-S_{12}}{S_{11}}, \nu_{12} = \frac{\nu_{21}E_2}{E_1} = \frac{-S_{12}}{S_{22}}, \nu_{21} > \nu_{12} \quad (2.16)$$

Przedstawienie elementów macierzy sztywności za pomocą stałych inżynierskich jest bardziej skomplikowane, ze względu na konieczność utworzenia macierzy odwrotnej. Dla materiału ortotropowego elementy macierzy wyrażają się w następujący sposób:

$$C_{11} = \Delta E_1 (1 - \nu_{23}\nu_{32}),$$

$$C_{22} = \Delta E_2 (1 - \nu_{31}\nu_{13}),$$

$$C_{33} = \Delta E_3 (1 - \nu_{21}\nu_{12}),$$

$$C_{12} = \Delta E_1 (\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{32}) = \Delta E_2 (\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{31}),$$

$$C_{13} = \Delta E_1 (\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}) = \Delta E_3 (\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{21}),$$

$$C_{23} = \Delta E_2 (\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}) = \Delta E_3 (\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{12}),$$

$$C_{44} = G_{23},$$

$$C_{55} = G_{13},$$

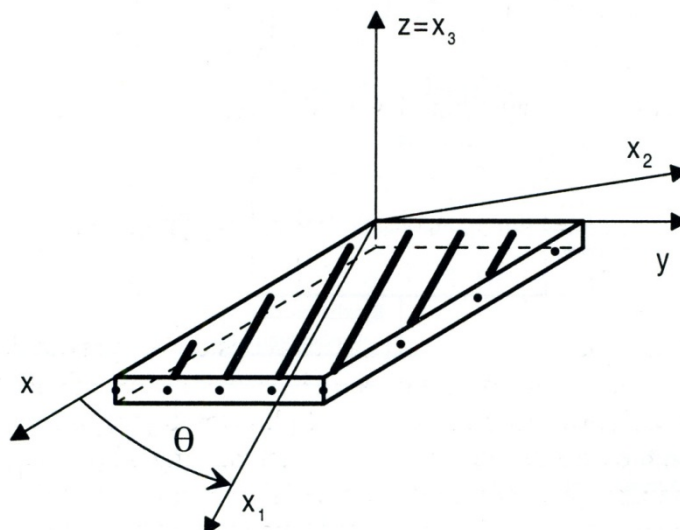
$$C_{66} = G_{12},$$

$$\Delta = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32}} \quad (2.17)$$

### 2.3. Transformacja układu współrzędnych

Większość struktur sandwiczowych ma niewielką grubość. Cała struktura składa się z pewnej ilości połączonych ze sobą warstw. Ze względu na anizotropowe właściwości materiałów kompozytowych okładziny mogą posiadać różne orientacje w globalnym układzie współrzędnych (odnoszącym się do całej struktury), który oznaczono jako  $x, y, z$ .

Naprężenia i odkształcenia definiowane w określonym punkcie zależą od położenia. Zależności przedstawione w rozdziale 2.2 odnosiły się do lokalnego układu współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$ . Przy konstruowaniu struktury sandwiczowej poszczególne warstwy są składane razem w taki sposób, że współrzędna lokalna każdej warstwy  $x_3$  odpowiada współrzędnej globalnej całej struktury  $z$  – zostało to przedstawione na rysunku 2.3.



Rys. 2.3 Globalny i lokalny układ współrzędnych [84]

Jednakże pozostałe dwie współrzędne lokalne  $x_1, x_2$  zazwyczaj nie są zgodne ze współrzędnymi globalnymi  $x, y$  i dlatego należy wykonać transformację układu. Jest to transformacja obrotu względem osi  $z$ . Przejścia z układu lokalnego  $x_1, x_2$  do globalnego  $x, y$  dokonano poprzez obrót o kąt  $\theta$  względem osi  $z$ , zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Zależność taką wyraża się następująco:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Transformacja ta sprawdza się w przypadku struktur płaskich, takich jak np. płyty, jednakże dla struktur o określonej krzywiznie (powłok), geometria elementu konstrukcyjnego i kierunek włókien jest zależny od położenia, tj.  $\theta = \theta(x,y)$ . Wówczas w obliczeniach należy uwzględnić zmianę położenia włókien. Można tego dokonać poprzez:

- analityczne wyznaczenie jawnej postaci funkcji  $\theta(x,y)$
- numerycznie poprzez zadanie wartości kąta orientacji włókien  $\theta$  w każdym węźle elementu skończonego oraz zastosowanie funkcji kształtu do interpolacji położień pośrednich.

Transformacje pomiędzy składowymi tensora naprężeń i odkształceń wyraża się za pomocą relacji (indeksy z cyframi arabskimi dotyczą układu lokalnego, natomiast litery układu globalnego):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & -\frac{1}{2}\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

W zwartym zapisie macierzowym powyższe zależności można zapisać w następujący sposób (wielkości oznaczone symbolem prim odnoszą się do globalnego układu współrzędnych):

$$\begin{aligned} \{\sigma'\} &= [J]\{\sigma\}, & \sigma'_i &= J_{ij}\sigma_j \\ \{\varepsilon'\} &= [J^T]^{-1}\{\varepsilon\}, & \varepsilon'_i &= J_{ij}^{-1}\varepsilon_j, \quad i,j=1,2,\dots,6 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Macierz  $[J]$  jest przedstawiona w zależności (2.19).

Stosując zależność (2.21) oraz wyrażając prawo Hooke'a (2.9) i (2.10) w układzie globalnym w postaci:

$$\{\sigma'\} = [C']\{\varepsilon'\} \text{ lub } \{\varepsilon'\} = [S']\{\sigma'\} \quad (2.22)$$

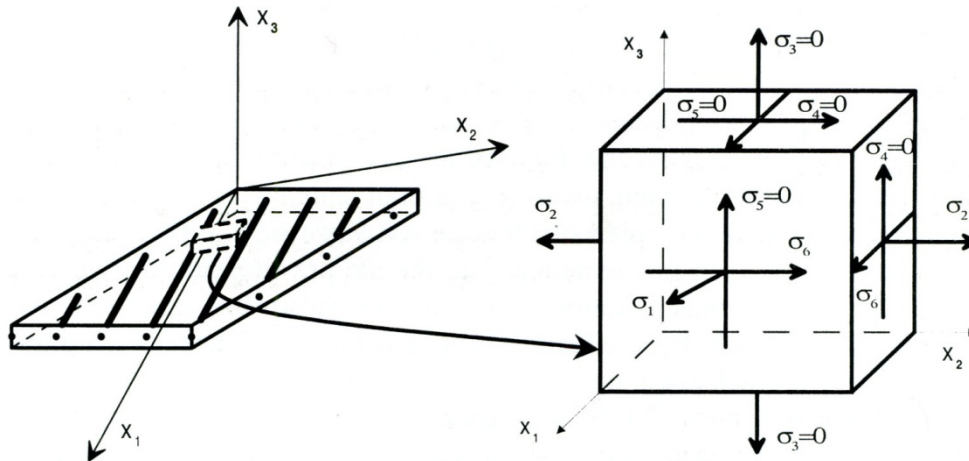
otrzyma się zależności, które wiążą ze sobą macierze sztywności i podatności w obydwóch układach – lokalnym i globalnym:

$$[C'] = [J][C][J^T] \text{ lub } [S'] = [J^T]^{-1}[S][J]^{-1} \quad (2.23)$$



## 2.4. Relacje dwuwymiarowe

Pewnym uproszczeniem w analizie struktur sandwiczowych jest analiza naprężeń w dwóch wymiarach. Stan 2-W prowadzi przede wszystkim do znacznego uproszczenia związków fizycznych. Zazwyczaj analiza jest przeprowadzana dla płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie  $x_1, x_2$  (dla lokalnego układu współrzędnych), co przedstawiono na rysunku 2.4.



Rys. 2.4 Założenia upraszczające w analizie płaskiego stanu naprężeń [85]

W przypadku teorii 11 parametrowej, uwzględniającej dodatkowo oprócz efektów poprzecznego ścinania, ścisłość elementu normalnego, należy analizować pełną macierz sztywności o wymiarach  $6 \times 6$ . Macierz taka została opisana zależnością (2.12).

W przypadku teorii poprzecznego ścinania pierwszego rzędu (FSDT) oraz wyższych rzędów (HSDT) nie uwzględnia się ścisłości elementu normalnego. Zatem macierz sztywności będzie miała postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

$$Q_{ij} = \frac{c_{ij} - c_{i3}c_{j3}}{c_{33}} \quad (2.25)$$

$Q_{ij}$  to sztywności zredukowane do płaszczyzny warstwy indywidualnej (w układzie lokalnym). Wielkości  $Q_{ij}$  są zdefiniowane w następujący sposób:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$\begin{aligned}
Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\
Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\
Q_{66} &= G_{12}, \\
Q_{44} &= G_{23}, \\
Q_{55} &= G_{13}, \\
Q_{33} &= \frac{E_3}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Dla teorii Love'a-Kirchhoffa dodatkowo eliminuje się naprężenie poprzecznego ścinania, tj.:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \tag{2.27}$$

Z warunku  $\sigma_{33} = 0$  określa się wartość odkształceń  $\varepsilon_{33}(\varepsilon_3)$ , tj.:

$$\varepsilon_3 = \frac{-(C_{31}\varepsilon_1 + C_{32}\varepsilon_2 + C_{36}\varepsilon_6)}{C_{33}} \tag{2.28}$$

W tym przypadku macierz sztywności dla warstwy indywidualnej redukuje się do postaci:

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

Powyższe relacje (2.23) – (2.29) są podane w lokalnym układzie współrzędnych. Po dokonaniu transformacji do globalnego układu współrzędnych (2.23) elementy macierzy przyjmują postać:

$$q_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta,$$

$$q_{12} = Q_{12}\cos^4\theta + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}\sin^4\theta,$$

$$q_{22} = Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{11}\sin^4\theta,$$

$$q_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta,$$

$$\begin{aligned}
q_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta, \\
q_{66} &= Q_{66}\cos^4\theta + 2(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}\sin^4\theta, \\
q_{44} &= Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta, \\
q_{55} &= Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta, \\
q_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{2.30}$$

gdzie  $\theta$  jest kątem orientacji włókien w pojedynczej warstwie.

Zależności (2.30) można zapisać w prostszej postaci wyrażając je za pomocą parametrów:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\
U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}), \\
U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}), \\
U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\
U_5 &= \frac{1}{2}(U_1 - U_4), \\
U_6 &= \frac{1}{2}(Q_{55} - Q_{44}), \\
U_7 &= \frac{1}{2}(Q_{44} + Q_{55})
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Przy wykorzystaniu zależności (2.31) można zapisać elementy macierzy sztywności w układzie globalnym w uproszczonej postaci:

$$\begin{aligned}
q_{11} &= U_1 + U_2\cos 2\theta + U_3\cos 4\theta, \\
q_{22} &= U_1 - U_2\cos 2\theta + U_3\cos 4\theta, \\
q_{33} &= Q_{33}, \\
q_{12} &= U_4 - U_3\cos 4\theta, \\
q_{66} &= U_5 - U_3\cos 4\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{16} &= \frac{1}{2}U_2\sin 2\theta + U_3\sin 4\theta, \\
q_{26} &= \frac{1}{2}U_2\sin 2\theta - U_3\sin 4\theta, \\
q_{44} &= U_7 - U_6\cos 2\theta, \\
q_{45} &= U_6\sin 2\theta, \\
q_{55} &= U_7 + U_6\cos 2\theta
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Macierz sztywności dla wypełniacza buduje się w analogiczny sposób, jednakże ze względu na charakter materiału (w przypadku pianek zakłada się izotropię, natomiast dla struktur siatkowych oblicza się zastępcze stałe materiałowe) liczba stałych materiałowych jest mniejsza, ponadto przy transformacji do globalnego układu współrzędnych, jako wartość kąta  $\theta$  należy przyjąć 0.

Aby otrzymać macierz sztywności dla całej struktury sandwichowej należy zsumować elementy macierzy dla każdej warstwy.

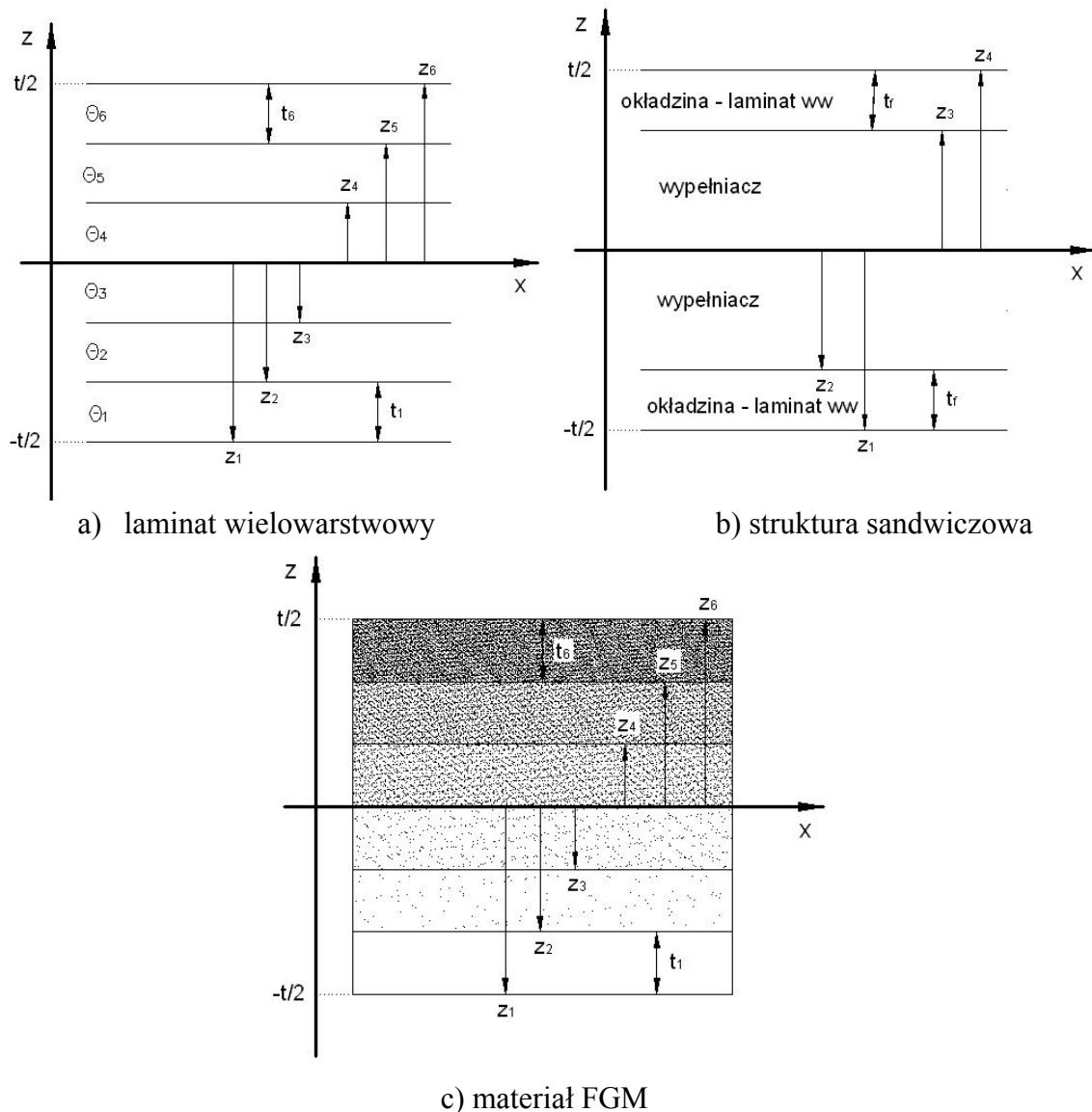
W tabeli 2.1 przedstawiono liczbę niezależnych i niezerowych stałych materiałowych dla różnych rodzajów materiałów 3-W.

Rodzaj materiału	Liczba niezerowych współczynników	Liczba niezależnych współczynników
Anizotropia	36	21
Ortotropia	12	9
Materiał poprzecznie izotropowy	12	5
Izotropia	12	2

Tabela 2.1 Liczba stałych materiałowych dla materiałów 3-W

## 2.5. Zastępcze sztywności w podejściu 2-W

Struktura warstwowa może być zbudowana z  $N$  warstw indywidualnych. Każda z warstw laminatu stanowiącego okładziny może mieć różną orientację włókien w globalnym układzie współrzędnych, różne właściwości materiałowe oraz różną grubość  $t_k = z_k - z_{k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) – rys 2.5 (patrz także: Aneks A).



Rys. 2.5 Przekroje poprzeczne struktur warstwowych

Poszczególne składowe macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych można zdefiniować w następujący sposób:

$$A_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} q_{ij}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^N q_{ij}^{(k)} t_k \quad (2.33)$$

$$B_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} q_{ij}^{(k)} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.34)$$

$$D_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} q_{ij}^{(k)} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N q_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.35)$$

$$H_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} q_{ij}^{(k)} z^3 dz = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N q_{ij}^{(k)} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \quad (2.36)$$

Gdzie  $(k)$  oznacza numer warstwy.  $q_{ij}^{(k)}$  wyraża się wzorami (2.32).

Powyższe zależności można stosować w analizie każdego typu struktur warstwowych. Struktury tych materiałów zostały przedstawione na rysunku 2.5: a) laminat wielowarstwowy, b) struktura sandwiczowa z okładzinami wykonanymi z laminatu wielowarstwowego, c) materiał FGM.

Najprostszym przykładem struktury warstwowej jest laminat wielowarstwowy. Poszczególne warstwy różnią się od siebie tylko orientacją włókien kompozytu, co ma wpływ na właściwości mechaniczne każdej warstwy. We wzorze (2.32) kąt  $\theta$  parametryzuje orientację włókien i wyraża się poprzez  $\theta_k$ , gdzie  $k$  oznacza numer danej warstwy.

Innym przykładem jest struktura sandwiczowa, w której wartości  $\theta$  we wzorze (2.32) będą równe 0 dla wypełniacza oraz  $\theta_1$  dla okładzin (znaczenie ma tu kąt orientacji włókien w okładzinach).

Trzecim przykładem są materiały FGM. Kąt orientacji przyjmuje się jako 0, jednakże poszczególne warstwy różnią się od siebie właściwościami mechanicznymi.

## 2.6. Związki geometryczne dla struktur cienkościennych

Wszystkie relacje wyprowadzane są przy zastosowaniu współrzędnych powłokowych. Określa się powierzchnię, na której definiowany jest układ współrzędnych. Powierzchnię taką nazywa się powierzchnią środkową.

Typ struktury, Współrzędne powłokowe	Parametry Lamé	Promienie krzywizny
Powłoka cylindryczna o przekroju kołowym $x, y = \varphi, z$	$A_1 = 1, A_2 = r$	$r_1 = \infty, r_2 = r = const.$
Płyta $x, y, z$	$A_1 = A_2 = 1$	$r_1 = r_2 = \infty$

Tabela 2.2 Parametry geometryczne dla analizowanych struktur 2-W

Analizując tylko teorię geometrycznie liniową powłok, można wyrazić kowariantne składowe tensora odkształceń w funkcji fizycznych składowych wektora przemieszczeń w następującej postaci:

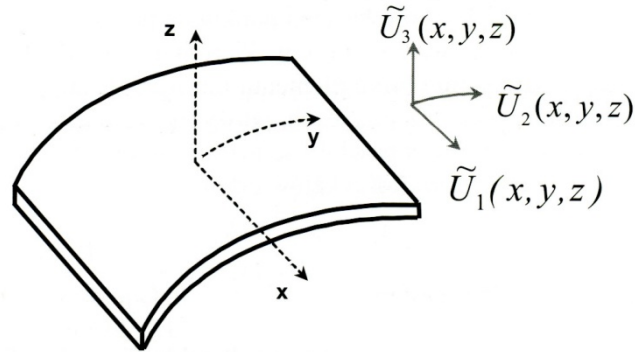
$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial y} U_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial z} U_3 \right),$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{U_1}{H_1} \right) \quad (2.37)$$

gdzie  $H_\gamma = A_\gamma(1 + \frac{z}{R_\gamma})$ ,  $H_3=1$ ,  $\gamma=1,2$ .

Dla wzorów (2.37) stosuje się cykliczną zmianę wskaźników 1,2,3. Regułą tą stosuje się również dla współrzędnych:  $x - 1, y - 2, z - 3$ .

## 2.7. Hipotezy kinematyczne



Rys. 2.6 Składowe wektora przemieszczenia [85]

Większość teorii można traktować jako szczególne przypadki teorii bazującej na następującej formie rozwinięcia 3-W wektora przemieszczeń w szereg:

$$U_1(x, y, z) = u(x, y) + z\psi_1(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} u^{(k)}(x, y)\Psi_1^{(k)}(z) \quad (2.38)$$

$$U_2(x, y, z) = v(x, y) + z\psi_2(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}(x, y)\Psi_2^{(k)}(z) \quad (2.39)$$

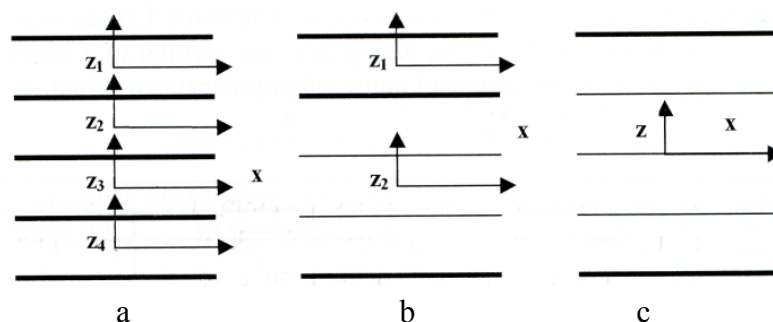
$$U_3(x, y, z) = w(x, y) + z\psi_3(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} w^{(k)}(x, y)\Phi^{(k)}(z) \quad (2.40)$$

Gdzie  $u, v, w$  to przemieszczenia punktu na powierzchni środkowej w kierunkach: południkowym, obwodowym i normalnym do powierzchni środkowej. Natomiast  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  to kąty obrotu elementu normalnego po powierzchni środkowej w płaszczyznach  $x$ - $z$ ,  $y$ - $z$ ,  $x$ - $y$ .

Rozwinięcia (2.38) – (2.40) można wprowadzać w trzech różnych ujęciach:

- lokalnym (dyskretnym) – dla każdej warstwy indywidualnie wprowadza się rozwinięcia wektora przemieszczeń – rys. 2.7a,
- globalno-lokalnym – strukturę dzieli się na sublaminaty i dla nich wprowadza się rozwinięcia wektora przemieszczeń (liczba sublaminatów jest mniejsza niż liczba warstw indywidualnych) – rys. 2.7b,

- globalnym – rozwinięcia wektora przemieszczeń wprowadza się dla jednego układu współrzędnych dla całej struktury – rys. 2.7c.



Rys. 2.7 Podejścia stosowane do opisu rozkładu przemieszczeń [84]

W niniejszej pracy dokonujemy analizy stosując globalny układ współrzędnych. Rozwinięcia w tym układzie mają one różną postać w zależności od stosowanej teorii, co przedstawiono w tabeli 2.3.

Rodzaj hipotezy	Parametry
Love'a-Kirchhoffa	$u(x, y), v(x, y), w(x, y),$ $\psi_1(x, y) = \frac{u(x, y)}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x},$ $\psi_2(x, y) = \frac{v(x, y)}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w(x, y)}{\partial y},$ $\Psi_1^{(k)}(z) = \Psi_2^{(k)}(z) = \Phi^{(k)}(z) = 0$
FSDT	$u(x, y), v(x, y), w(x, y), \psi_1(x, y), \psi_2(x, y),$ $\psi_3(x, y) = 0,$ $\Psi_1^{(k)}(z) = \Psi_2^{(k)}(z) = \Phi^{(k)}(z) = 0$
HSDT	$u(x, y), v(x, y), w(x, y), \psi_1(x, y), \psi_2(x, y),$ $\psi_3(x, y) = 0,$ $\Psi_1^{(1)}(z) = \Psi_2^{(1)}(z) = \frac{4z^3}{3t^2},$ $u^{(1)}(x, y) = \psi_1(x, y), v^{(1)}(x, y) = \psi_2(x, y),$ $\Phi^{(k)}(z) = 0$
Teoria 11-to parametrowa	$u(x, y), v(x, y), w(x, y), \psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \psi_3(x, y),$ $u^{(1)}(x, y) = \delta_1(x, y), v^{(1)}(x, y) = \delta_2(x, y),$ $w^{(1)}(x, y) = \delta_3(x, y),$ $\Psi_1^{(1)}(z) = \Psi_2^{(1)}(z) = \Phi^{(1)}(z) = z^2,$ $u^{(2)}(x, y) = \zeta_1(x, y), v^{(2)}(x, y) = \zeta_2(x, y),$ $w^{(2)}(x, y) = 0$ $\Psi_1^{(2)}(z) = \Psi_2^{(2)}(z) = z^3,$ $\Phi^{(2)}(z) = 0$

Tabela 2.3 Parametry rozwinięć dla analizowanych teorii w układzie globalnym

Jak wynika z tabeli 2.3 teorię L-K opisują 3 niezależne parametry:  $u, v, w$ . Pozostałe elementy rozwinięcia są wyrażone za pomocą tych parametrów, bądź są równe



0. W przypadku teorii poprzecznego ścinania I rzędu, kąty obrotu elementu normalnego po powierzchni środkowej w płaszczyznach  $x$ - $z$ ,  $y$ - $z$  są zmiennymi niezależnymi oraz brak jest pozostałych wyrazów szeregu. Teorie poprzecznego ścinania wyższych rzędów definiuje się przez założenie, że funkcje  $u^{(j)}(x, y)$ ,  $v^{(j)}(x, y)$ ,  $w^{(j)}(x, y)$  są różne od 0.  $(j)$  określa rząd teorii, a  $\Psi_1^{(j)}(z)$ ,  $\Psi_2^{(j)}(z)$ ,  $\Phi^{(j)}(z)$  to znane funkcje zmiennej  $z$ . Funkcje te mogą mieć różne postacie, jednakże są zależne od siebie, ponieważ muszą spełniać warunek zgodności rozkładów odkształceń i naprężeń poprzecznych, które muszą zostać spełnione dla każdej wartości  $j$ . Warunki zgodności odkształceń narzucają ograniczenia:

$$\Psi_1^{(j)}(z) = \Psi_2^{(j)}(z),$$

$$\Phi^{(j)}(z) = \frac{d\Psi_1^{(j)}(z)}{dz} \quad (2.41)$$

a warunek zgodności naprężeń poprzecznych:

$$\left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \frac{d\Psi_\alpha^{(j)}(z)}{dz} - \frac{d\Psi_\alpha^{(j)}(z)}{R_\alpha} = \Phi^{(j)}(z) \quad , \quad \alpha = 1,2 \quad (2.42)$$

W teorii 11 parametrowej nie zakłada się ciągłości naprężeń poprzecznego ścinania.

## 2.8. Metoda Rayleigha-Ritza – analiza wyboczenia i częstotliwości drgań swobodnych

W analizie wyboczenia płyt i powłok można stosować metodę energetyczną Rayleigha-Ritza (R-R). Jest to metoda przybliżona. Można ją traktować jako szczególny przypadek rozwijania w szeregi, ale w metodzie R-R szereg jest obcięty do skończonej liczby wyrazów i następnie wstawiony do funkcjonału energii potencjalnej układu. Następnie stosuje się rachunek wariacyjny, pozwalający na wyznaczenie nieznanymi współczynników rozwinięcia. Rozwinięcie to dokonywane jest dla wektora przemieszczeń. Funkcje muszą spełniać narzucone warunki brzegowe. Wektor przemieszczeń powierzchni środkowej wyraża się za pomocą rozwinięć w szeregi skończone:

$$u^{(\alpha)}(x, y, t) = e^{i\omega t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J P_{\alpha ij} X_{\alpha i}(x) Y_{\alpha j}(y) \quad (2.43)$$

$P_{\alpha ij}$  to nieznanne współczynniki (ich ilość oznaczona jako  $\alpha$  zależy od rzędu teorii). Każda ze składowych przemieszczeń  $(u, v, w)$  rozwijana jest w podwójny szereg, którego wyrazy spełniają narzucone przemieszczeniowe warunki brzegowe. Wyrażenie (2.43) podstawiane jest do funkcjonału całkowitej energii potencjalnej układu (2.4). W przypadku analizy utraty stateczności funkcjonał ten redukuje się do postaci:

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext} \quad (2.44)$$

gdzie:

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \end{Bmatrix}^{Tr} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \end{Bmatrix} dx dy \quad (2.45)$$

$\Pi_{ext}$  oznacza pracę sił zewnętrznych.

Po scałkowaniu wyrażenia funkcjonału (2.44) poszukuje się jego ekstremum z uwagi na współczynniki  $P_{\alpha ij}$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_{\alpha ij}} = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, I; j = 0, 1, \dots, J) \quad (2.46)$$

Układ równań (2.46) można zapisać w postaci macierzowej:

$$([K] - N_x[F])\{P_{\alpha ij}\} = 0 \quad (2.47)$$

Macierze  $K$  i  $F$  są macierzami kwadratowymi o wymiarach odpowiadających stosowanej teorii. Siła krytyczna  $N_x$  jest wartością własną problemu (2.47).

Metoda R-R ma szereg zalet w stosunku do klasycznego podejścia polegającego na rozwinięciu w szeregi:

- umożliwia uwzględnienie dowolnych warunków brzegowych poprzez przyjęcie odpowiedniej postaci rozwinięcia w szeregi (2.43)
- umożliwia określenie obciążeń dla dowolnych konfiguracji laminatu okładzin, nawet w przypadku istnienia niezerowych elementów giętno-skrętnych w macierzy sztywności
- umożliwia stosowanie różnych postaci rozwinięć w szeregi
- umożliwia przeprowadzenie obliczeń dla dowolnych kształtów płyt i powłok.

Analizę za pomocą metody R-R można zalgorytmizować poprzez zastosowanie pakietów programowania symbolicznego, takich jak np. Mathematica.

## 2.9. Rodzaje warunków brzegowych

Przyjmując szeregi  $X_{\alpha i}(x)$  i  $Y_{\alpha j}(y)$  w postaci szeregów trygonometrycznych możemy uzyskać rozwiązanie w postaci zamkniętej. Spełnia ono jeden z rodzajów warunków brzegowych – warunek swobodnego podparcia (S3). Dla innych typów warunków brzegowych konieczne jest uwzględnienie konkretnych postaci szeregu.

Narita [86] zaproponował ogólną postać szeregu, który pozwala na wprowadzenie zarówno warunków w postaci brzegów swobodnych, utwierdzonych lub swobodnie podpartych. Proponuje on wprowadzenie następującej postaci szeregów:

$$u^{(\alpha)}(\zeta, \eta) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J P_{aij} \zeta^{ai} (\zeta + 1)^{B_1} (\zeta - 1)^{B_3} \eta^{aj} (\eta + 1)^{B_2} (\eta - 1)^{B_4} \quad (2.48)$$

gdzie  $B_1, B_2, B_3, B_4$  oznaczają indeksy rodzajów warunków brzegowych,  $\zeta = \frac{x-L_x/2}{L_x/2}$ ,  $\eta = \frac{y-L_y/2}{L_y/2}$ . Ich wartości dla różnych typów warunków brzegowych przedstawiono w tabeli 2.4.

Wartości indeksów $B_i$	0	1	2
$u(\zeta, \eta), u(\zeta, \eta)$	swobodne podparcie	dotatkowe więzy	-
$w(\zeta, \eta)$	swobodne podparcie	brzegi swobodne	utwierdzenie

Tabela 2.4 Wartości indeksów  $B_i$  dla różnych warunków brzegowych

W celu uproszczenia zapisu przedstawiono te zależności tylko dla płyt prostokątnych. Rozwiązaniem zagadnienia jest macierz, której wymiar zależy od liczby wyrazów rozwinięcia w przedstawionych szeregach (2.43). Stosując instrukcję *VariationalBound* można zagadnienie to rozwiązać w sposób niejako automatyczny, dla dowolnej liczby wyrazów szeregu oraz dowolnego typu teorii płyt i powłok i dowolnego typu struktur 2-W. Jednakże w przypadku bardziej złożonych funkcji opisujących warunki brzegowe, podejście to wymaga dużej mocy obliczeniowej komputera.

Rozwiązaniem prostszym jest opis warunków brzegowych za pomocą szeregów trygonometrycznych zaproponowanych przez Pinna i Ronaldsa [82].

W przypadku utwierdzenia muszą zostać spełnione następujące warunki:

1. Składowa wektora przemieszczenia w kierunku normalnym  $w$  musi być równa 0.
2. Kąt obrotu  $\psi$  musi być równy 0.

Warunek swobodnego podparcia narzuca następujące warunki:

1. Składowa wektora przemieszczenia w kierunku normalnym  $w$  musi być równa 0.
2. Pochodna kąta obrotu  $\psi$  musi być równa 0.

W obliczeniach zaproponowano następujące szeregi, spełniające wyżej wymienione założenia:

- dla swobodnie podpartego brzegu:

$$w(x) = \text{Sin} \frac{m\pi x}{a} \quad (2.49)$$

- dla utwierdzonego brzegu:

$$w(x) = \text{Cos} \frac{2m\pi x}{a} - 1 \quad (2.50)$$

Szeregi opisujące warunki brzegowe na brzegu  $y$  tworzy się analogicznie.

## 2.10. Drgania swobodne struktur 2-W

Punktem wyjścia do sformułowania równań podstawowych płyt i powłok jest wykorzystanie zasady wariacyjnej Hamiltona – zależność (2.1).

Równania podstawowe wyprowadza się w identyczny sposób jak dla analizy utraty stateczności, jednakże energia kinetyczna  $K$  jest różna od 0, natomiast energia zewnętrzna  $\Pi_{ext}$  jest równa 0.

W niniejszym rozdziale przykładowo przedstawiono analizę drgań dla teorii L-K.

Równania ruchu dla struktur sandwichowych przyjmują postać:

$$L_{ij}r_j = M_{ij}\ddot{r}_j, \quad i, j = 1, \dots, 3 \quad (2.51)$$

gdzie:

$$[M] = \begin{bmatrix} \rho^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{(0)} & \rho^{(1)} \\ 0 & \rho^{(1)} & \rho^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Przy wykorzystaniu związku (2.51) otrzyma się następujący układ równań dla płyt:

$$\begin{aligned} L_{1j}r_j &= \rho^{(0)}\ddot{r}_1 - \rho^{(1)}\frac{\partial \ddot{r}_3}{\partial x}, \\ L_{2j}r_j &= \rho^{(0)}\ddot{r}_2 - \rho^{(1)}\frac{\partial \ddot{r}_3}{\partial y}, \\ L_{3j}r_j &= \rho^{(0)}\ddot{r}_3 + \rho^{(1)}\left(\frac{\partial \ddot{r}_1}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{r}_2}{\partial y}\right) - \rho^{(2)}\nabla^2 \ddot{r}_3 \end{aligned} \quad (2.53)$$

gdzie  $[r]^{Tr} = [u, v, w]$

Oraz układ równań dla powłok cylindrycznych:

$$\begin{aligned} L_{1j}r_j &= \rho^{(0)}\ddot{r}_1 - \rho^{(1)}\frac{\partial \ddot{r}_3}{\partial x}, \\ L_{2j}r_j &= \left(\rho^{(0)} + \frac{1}{R}\rho^{(1)}\right)\ddot{r}_2 - \rho^{(1)}\frac{1}{R}\frac{\partial \ddot{r}_3}{\partial \theta}, \\ L_{3j}r_j &= \rho^{(0)}\ddot{r}_3 + \rho^{(1)}\left(\frac{\partial \ddot{r}_1}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial \ddot{r}_3}{\partial \theta}\right) - \rho^{(2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\ddot{r}_3 + \rho^{(2)}\frac{1}{R^2}\frac{\partial \ddot{r}_2}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.54)$$

## 3. PROGRAMOWANIE SYMBOLICZNE

### 3.1. Wprowadzenie

Rozwój technik obliczania przy pomocy programów komputerowych doprowadził do wynalezienia programowania symbolicznego. Liczby zostały pierwszy raz użyte przez Babilończyków około 4000 lat temu. Jednakże dla rozwoju nowoczesnych programów komputerowych kluczowym odkryciem było wyrażenie obliczeń za pomocą jednego wzoru algebraicznego i wygenerowanie kolejnych wzorów na jego podstawie, dokonane po raz pierwszy w XVI wieku. Podczas trwającej 40 lat ewolucji języków programowania, programowanie symboliczne umożliwiło wykorzystanie kilkusetletniej spuścizny matematyki i logiki do stworzenia nowoczesnych programów obliczeniowych do zastosowań inżynierskich. Idea ta została wykorzystana około 10 lat temu przy opracowaniu języka programowania symbolicznego programu Mathematica. Większość języków komputerowych wykorzystuje formuły, jednakże proces przekształcania formuł, tak aby generować za ich pomocą nowe, nie jest już tak powszechny.

W języku tego programu wszystkie dane są wyrażane w taki sam, jednolity sposób tzn. w postaci grafu wyrażen. Przykładowy graf zapisany w formie liniowej ma postać:  $f[e_1, \dots, e_n]$ , w której  $e_i$  jest wyrażeniem (przykładowe obliczenia – patrz: rys. 3.1). Jednolita forma zapisu umożliwia sprowadzenie obliczeń do jednej podstawowej operacji: przekształcania jednego wyrażenia w drugie. Jednorodność ta pozwala na łączenie ze sobą różnych stylów programowania.

Do istniejącego oprogramowania są tworzone aplikacje, które mają za zadanie rozwinięcie języka symbolicznego do zastosowań w systemach optycznych, elektrycznych, mechanicznych i innych.

Niewątpliwą zaletą programowania symbolicznego jest możliwość wprowadzenia danych bez dokonywania uproszczeń, co jest istotne np. przy rozwiązywaniu równań różniczkowych. Jest możliwe uzyskanie wyniku w postaci numerycznej, otrzymanie rozwiązań o uproszczonej postaci, zawierających parametry do wykorzystania w dalszych obliczeniach, optymalizacji itd.

W programowaniu symbolicznym można przeprowadzać działania na symbolach bez konieczności ich definiowania. Przykładowo działanie  $y + y$  nie może być wykonane w języku Java bez uprzedniego zdefiniowania wartości  $y$ . W pakietach symbolicznych takie działanie zostanie wykonane bez problemu. Również stałe matematyczne, takie jak np.  $\Pi$ , czy  $e$ , są traktowane jako symbole. Pozwala to na przedstawienie pewnych wyników bez przybliżania ich dokładności do skończonego miejsca po przecinku. Istnieje również możliwość definiowania funkcji, co pozwala na przeprowadzanie ogólnych obliczeń. W ten sposób zostały zdefiniowane szeregi określające warunki

brzegowe analizowanej struktury. Dzięki temu można było przeprowadzać obliczenia dla różnych wymiarów i materiałów, bez potrzeby kolejnego definiowania warunków brzegowych.

```

FSDT-opt.nb
u[x_, y_, z] := P * Cos[ $\frac{\pi x}{L}$ ] Sin[n * y];
u[x_, y_, 2] := Q * Sin[ $\frac{\pi * H + x}{L}$ ] Cos[n * y];
u[x_, y_, 3] := R * Sin[ $\frac{\pi * H + x}{L}$ ] Sin[n * y];
phi[x_, y_, z] := S * Cos[ $\frac{\pi * H + x}{L}$ ] Sin[n * y];
phi[x_, y_, 2] := T * Sin[ $\frac{\pi * H + x}{L}$ ] Cos[n * y];

phi[x[1], x[2], 3] = 0;
For[i = 1, i <= 3,
  vi[x[1], x[2], x[3], i] = u[x[1], x[2], i] + phi[x[1], x[2], i] + (x[3])^i;
  e1[1, 1] = D[vi[x[1], x[2], x[3], 1], x[1]];
  e1[1, 2] = D[vi[x[1], x[2], x[3], 2], x[1]] + (1/x) * D[vi[x[1], x[2], x[3], 1], x[2]];
  e1[1, 3] = D[vi[x[1], x[2], x[3], 3], x[1]] + D[vi[x[1], x[2], x[3], 1], x[3]];
  e1[2, 2] = (1/x) * D[vi[x[1], x[2], x[3], 2], x[2]] + vi[x[1], x[2], x[3], 3];
  e1[2, 3] = (1/x) * D[vi[x[1], x[2], x[3], 3], x[2]] + D[vi[x[1], x[2], x[3], 2], x[3]] - (vi[x[1], x[2], x[3], 2])/x;
  e1[3, 3] = D[vi[x[1], x[2], x[3], 3], x[3]];
  Thread[{x[1], x[2], x[3]} -> {x, y, z}];
  eps1 = FullSimplify[Array[e1, {3, 3}]/. %];
  MatrixForm[eps1];
  Dimensions[eps1];
  ArrayDepth[eps1];
  epsn1 = {e1[1, 1], e1[2, 2], e1[3, 3], 2 * e1[2, 3], 2 * e1[1, 3], 2 * e1[1, 2]}/. {x[1] -> x, x[2] -> y, x[3] -> z};
  ArrayDepth[epsn1];
  Dimensions[epsn1];
  MatrixForm[epsn1];
  eptr1 = Transpose[epsn1, {1}];
  General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "epn1" is similar to existing symbol "ep1". More...
  {
    -P * pi * Sin[pi * x] * Sin[2 * y] - pi * S * z * Sin[pi * x] * Sin[2 * y]
    2 * (-2 * Q * Sin[pi * x] * Sin[2 * y] + R * Sin[pi * x] * Sin[2 * y] - 2 * T * z * Sin[pi * x] * Sin[2 * y])
    0
    2 * (4 * R * Cos[2 * y] * Sin[pi * x] + T * Cos[2 * y] * Sin[pi * x] - 2 * (Q * Cos[2 * y] * Sin[pi * x] + T * z * Cos[2 * y] * Sin[pi * x]))
    2 * (pi * R * Cos[pi * x] * Sin[2 * y] + S * Cos[pi * x] * Sin[2 * y])
    2 * (pi * Q * Cos[pi * x] * Cos[2 * y] + pi * T * z * Cos[pi * x] * Cos[2 * y] + 2 * (2 * P * Cos[pi * x] * Cos[2 * y] + 2 * S * z * Cos[pi * x] * Cos[2 * y]))
  }
  
```

Rys 3.1 Przykładowe obliczenia w programie Mathematica

Ponadto w programowaniu symbolicznym jest możliwość wyeksportowania danych zapisanych w innym języku, np. C++.

Obecnie na rynku istnieje kilka pakietów wykorzystujących programowanie symboliczne – Mathematica, Maple, Matlab i inne. W pracy doktorskiej zdecydowałem się na wykorzystanie programu Mathematica ze względu na wcześniejszą znajomość tego programu oraz na łatwość i dogodność aplikacji.

### 3.2. Sposoby wyznaczania siły krytycznej i drgań swobodnych

Wyznaczania siły krytycznej przy pomocy programu Mathematica można dokonać na dwa sposoby. W obu przypadkach do opisu deformacji przed wyboczeniem stosuje się podejście geometrycznie liniowe, a w przypadku wyboczenia do zbioru relacji podstawowych dołączamy efekty geometrycznie nieliniowe. Jest to podejście akceptowalne i zgodne z wynikami badań eksperymentalnych.

W pierwszym z przypadków funkcjonal energii rozdzielamy na dwie części. Pierwsza z nich opisuje energię odkształceń wewnętrznych w ujęciu geometrycznie liniowym, a druga część charakteryzuje pracę sił zewnętrznych w punkcie krytycznym ścieżki deformacji. W tym przypadku uwzględniono efekty geometrycznie nieliniowe w postaci dużych obrotów elementu normalnego. Punktem wyjścia do wyznaczenia

obciążenia krytycznego jest funkcjonal zawierający energię wewnętrzną oraz pracę sił zewnętrznych w punkcie krytycznym (bifurkacji).

Drugie z podejść wykorzystywane w programie Mathematica bazuje na zastosowaniu relacji geometrycznie nieliniowych w funkcjonale opisującym energię wewnętrzną struktury. Następnie możemy wykorzystać funkcję (instrukcję) *VariationalD*, która pozwala na otrzymanie układu przemieszczeniowych zależności podstawowych (tzw. równania Eulera-Lagrange'a). Zakładając następnie, iż siła wewnętrzna w punkcie bifurkacji jest równa obciążeniu zewnętrznemu otrzymujemy układ równań różniczkowych umożliwiających określenie siły krytycznej. Podejście to przedstawione jest na rys 3.2, gdzie dodatkowa opcja obliczania wariancji funkcjonala zaznaczona jest kolorem czerwonym.

W obu omówionych wyżej przypadkach stosujemy metodę Rayleigha-Ritza do określenia wartości siły krytycznej. Szczegółowy sposób postępowania został przedstawiony w rozdziale 2.8. Dokładną wartość siły krytycznej możemy wyznaczyć dla różnych rodzajów warunków brzegowych. Warunki te muszą zostać zdefiniowane przez zastosowanie odpowiednich szeregów, co zostało omówione w rozdziale 2.9. Innym sposobem wyznaczania siły krytycznej dla różnych typów warunków brzegowych jest zastosowanie instrukcji *VariationalBound*.

Częstotliwość drgań swobodnych oblicza się w identyczny sposób, za pomocą tego samego programu.

Zasada wariacyjna Ritza pozwala wyznaczyć przybliżone rozwiązanie wartości własnych macierzy lub operatora  $Au = \lambda wu$ , gdzie  $A$  jest operatorem,  $w(x,y,...)$  jest funkcją wagową, oraz zagadnień związanych z wyrażeniem  $Bu(x,y,...) = h(x,y,...)$ , gdzie  $B$  jest operatorem określonym dodatnio, a  $h$  jest dane. Funkcja próbna  $u_i(x,y,...)$ , która spełni zadane warunki brzegowe oraz jest zależna od parametrów  $\{a, b, \dots\}$  musi zostać dobrana. *VariationalBound*[ $\{f, g\}, u[x, y, \dots], \{x, xmin, xmax\}, \{y, ymin, ymax\}, \dots\}, u_b, \{a, amin, amax\}, \{b, bmin, bmax\}, \dots]$  pozwala wyznaczyć górny warunek brzegowy oraz optymalne wartości  $a, b, \dots$  w zadanym zakresie  $\{\{amin, amax\}, \{bmin, bmax\}, \dots\}$  [87].

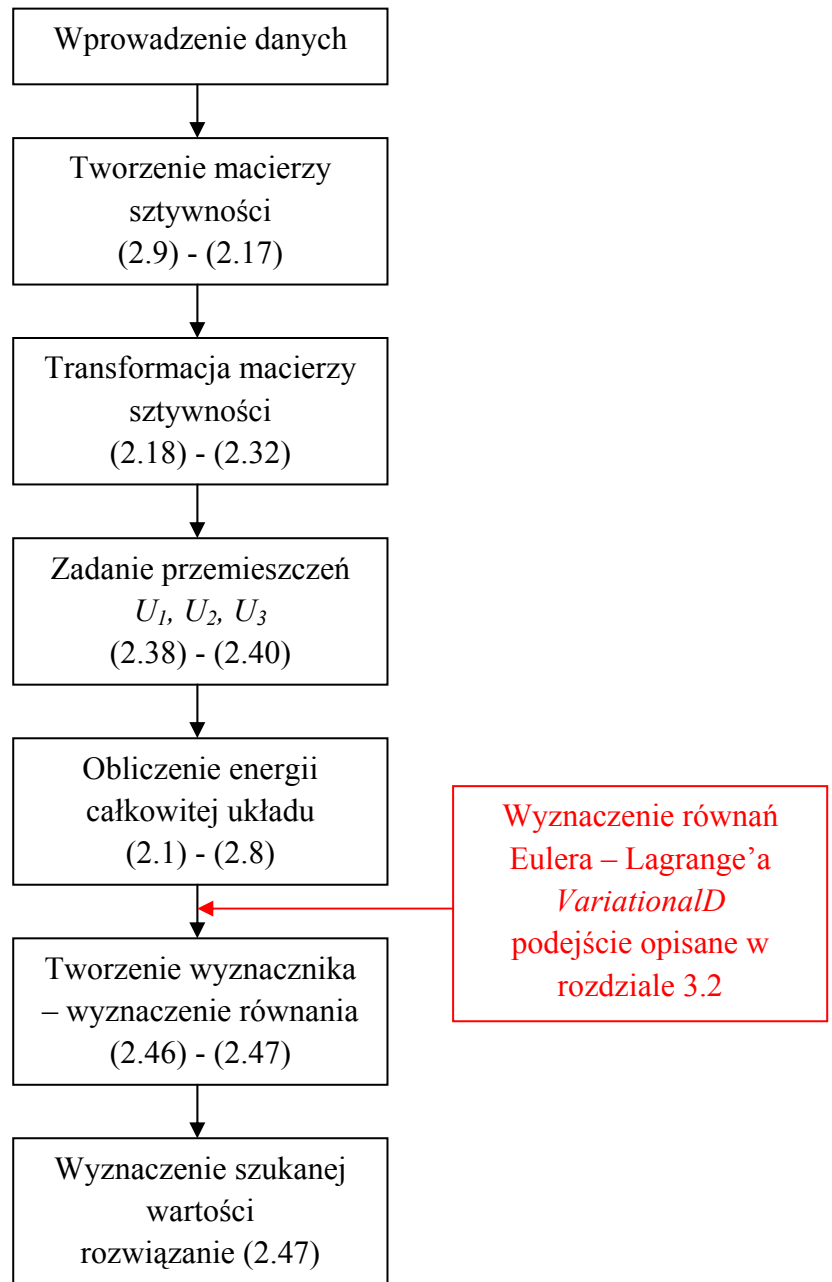
### 3.3. Obliczenia w programie Mathematica

Obliczenia symboliczne 2-W, które zostaną przedstawione w dalszych rozdziałach niniejszej pracy, zostały wykonane za pomocą programu Mathematica.

W celu przeprowadzenia obliczeń zostały wprowadzone następujące dane:

- ilość warstw struktury sandwichowej
- stałe materiałowe dla okładzin i dla wypełniacza
- parametry Lamé  $A_1, A_2$  oraz promienie krzywizny – parametry te pozwalają automatycznie określić rodzaj analizowanej struktury (patrz: tabela 2.2)
- kąt orientacji włókien w okładzinach
- wymiary struktury
- szeregi opisujące dane warunki brzegowe

Po wprowadzeniu wymienionych danych obliczenia zostały przeprowadzone według schematu przedstawionego na rysunku 3.2.



Rys. 3.2 Schemat obliczeń w programie Mathematica



## 4. WYNIKI OBLICZEŃ TEORETYCZNYCH

### 4.1. Porównanie wartości siły krytycznej dla płyt z izotropowym wypełniaczem i okładzinami

Wartości siły krytycznej (oraz częstotliwości drgań swobodnych) są uzależnione od wielu parametrów:

$$N_x(t/a, a/b, t_f/t, \theta, \text{rodzaj teorii 2-W, warunki brzegowe, } m \text{ i } n) \quad (4.1)$$

W pracy skoncentruję się na analizie wpływu liczby półfał  $m$  i  $n$ , rodzaju teorii 2-W oraz warunków brzegowych, co zostało opisane w dalszych rozdziałach.

W celu zobrazowania zmiany wartości siły krytycznej w zależności od stosunków:  $t/a$ ,  $a/b$  i  $t_f/t$ , wykonano obliczenia dla struktur wykonanych z materiału izotropowego o właściwościach okładzin:

$$E_f = 28 \text{ GPa}$$
$$\nu_f = 0,29$$

i wypełniacza:

$$E_c = 2,8 \text{ MPa}$$
$$\nu_c = 0,29$$

Dla teorii L-K wartość siły krytycznej wyraża się wzorem:

$$N_x = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[ \frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{bm} \right]^2 \quad (4.2)$$

przy czym sztywność  $D$  dla struktury sandwiczowej można zapisać za pomocą zależności:

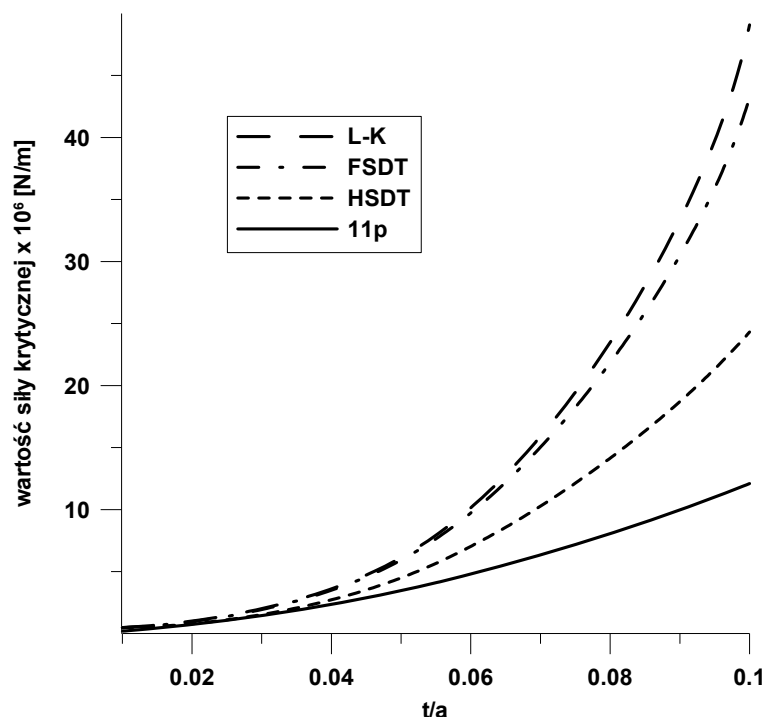
$$D_{sand} = \frac{E_f}{6(1-\nu_f^2)} t_f (t^2 + t t_c + t_c^2) \quad (4.3)$$

a dla struktury izotropowej:

$$D_{izo} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.4)$$

Wzory dla innych teorii mają bardziej złożoną postać.

Można zauważyć znaczne różnice w obliczonej wartości siły krytycznej w zależności od stosunku  $t/a$ . Różnice te uwidaczniają się zwłaszcza dla grubszych płyt, co ilustruje wykres (rys. 4.1). Przy obliczaniu wpływu stosunku  $t/a$  na wartość siły krytycznej przyjęto stałą wartość  $t_f/t$  wynoszącą 0,1 oraz  $a/b = 1$ . Dla każdej teorii wartość półfal wyboczenia  $m$  i  $n$  wynosi 1. Z rys. 4.1 wynika, że dla stosunku  $t/a = 0,1$  można zaobserwować największe różnice pomiędzy analizowanymi teoriami. Można stwierdzić, że wraz ze zwiększaniem się grubości płyt (stosunek  $t/a$ ), zwiększają się różnice w wartości siły krytycznej wynikające z zastosowania różnych teorii.

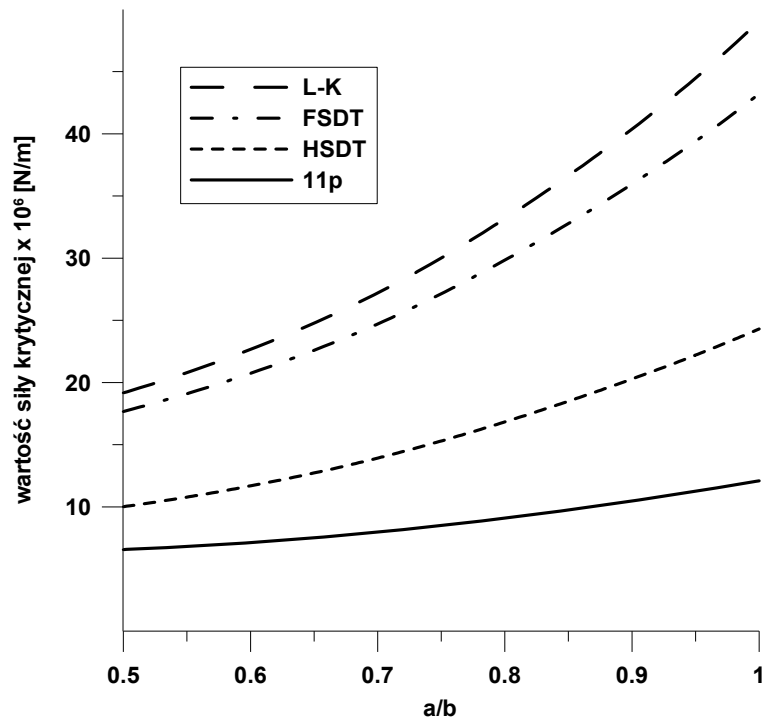


Rys. 4.1. Zależność wartości siły krytycznej od  $t/a$  dla sandwiczowej płyty kwadratowej ( $a/b=1$ )

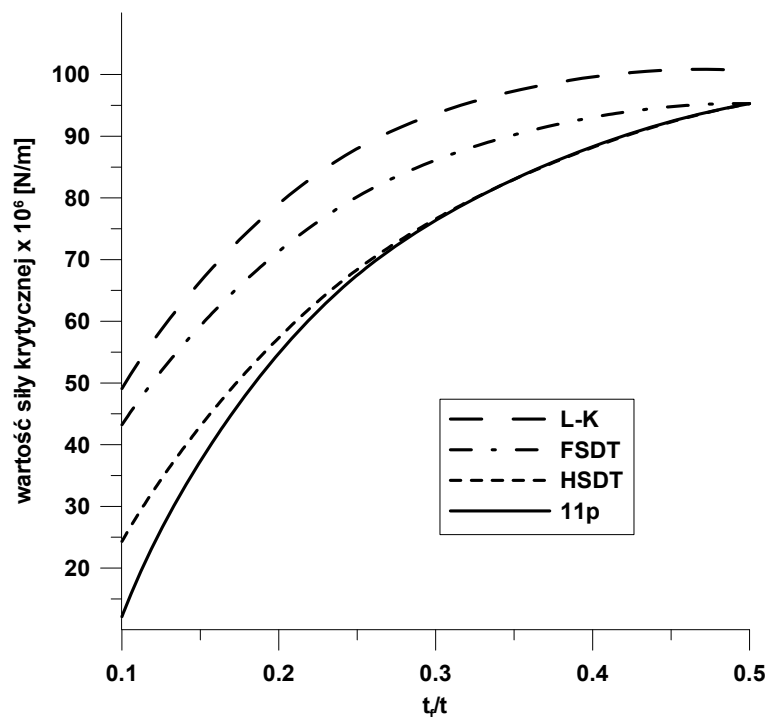
Drugą zależnością, która ma wpływ na wartość siły krytycznej jest stosunek długości boków płyty  $a/b$ . Tak jak w przypadku  $t/a$ , obliczeń dokonano dla  $t_f/t = 0,1$ . Liczba półfal wyboczenia  $m$  i  $n$  wynosiła 1, z wyjątkiem teorii 11-parametrowej dla  $a/b = 0,7$ , gdzie liczba półfal  $m$  wynosiła 2. Analizując wykres (rys. 4.2) można stwierdzić, że wraz ze zmniejszaniem się  $a/b$ , zmniejszają się różnice pomiędzy wartościami siły krytycznej otrzymanymi dla różnych teorii. Największe różnice można zaobserwować dla płyty kwadratowej.

Zmianę wartości siły krytycznej można obserwować w zależności od  $t_f/t$  (patrz: rys. 4.3). Badając wpływ tej wielkości, wzięto pod uwagę płytę kwadratową ( $a/b = 1$ ). Liczba półfal  $m$  i  $n$  wyboczenia we wszystkich przypadkach wynosiła 1. Największe różnice pomiędzy teoriami obserwujemy dla stosunku  $t_f/t < 0,1$ . Dla większych stosunków  $t_f/t$  obserwowane różnice są coraz mniejsze. Można zauważyć, że większe wartości otrzymuje się stosując teorię L-K. Od  $t_f/t = 0,25$  do  $0,5$  występuje duża zbieżność wyników w przypadku teorii HSDT i 11p. Dla  $t_f/t = 0,5$  dla teorii FSDT,

HSDT, 11p otrzymane wartości są niemal identyczne. Zatem można wywnioskować, że dla płyt o stosunku  $t_f/t = 0,5$  (płyta izotropowa bez wypełniacza) z powodzeniem można stosować mniej skomplikowane teorie (FSDT).



Rys. 4.2. Zależność wartości siły krytycznej od  $a/b$  dla płyt sandwiczowych



Rys. 4.3. Zależność wartości siły krytycznej od  $t_f/t$  ( $t=2t_f+t_c$ ) dla płyty kwadratowej ( $a/b=1$ )

## 4.2. Dane

Dla zobrazowania metodyki stosowanego podejścia analizowano dwa typy struktur – płyty prostokątne oraz powłoki cylindryczne (patrz: rys. 1.9). W przypadku wyboczenia struktury zostały obciążone siłą osiową działającą w kierunku  $x$ . Obliczenia wykonano dla płyt o stosunkach boków  $a/b = 1$ ,  $a/b = 1/2$  i stosunku  $t/a = 0,10$  oraz dla powłok cylindrycznych  $L/r = 1$  i stosunku  $t/r = 0,10$ . Dla struktur sandwichowych przyjęto symetrię okładzin względem powierzchni środkowej i stosunek  $t_f/t = 0,1$ .

Stałe materiałowe dla okładzin wynoszą:

$$\begin{aligned}E_{f1} &= 28 \text{ GPa} \\E_{f2} &= 8,2 \text{ GPa} \\E_{f3} &= 2,8 \text{ GPa} \\G_{f12} &= 2,8 \text{ GPa} \\G_{f13} &= 1,5 \text{ GPa} \\G_{f23} &= 1,5 \text{ GPa} \\v_{f12} &= 0,29 \\ \rho_f &= 1400 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

Dla wypełniacza (założono izotropię) stałe materiałowe wynoszą:

$$\begin{aligned}E_c &= 2 \text{ GPa} \\G_c &= 0,1 \text{ GPa} \\v_c &= 0,2 \\ \rho_c &= 30 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

## 4.3. Ubezwymiarowanie wyników

W celu uproszczenia sposobu oceny wyników, wartość siły krytycznej została ubezwymiarowana poprzez podzielenie jej przez wartość otrzymaną dla teorii L-K dla identycznej struktury (płyta lub powłoka cylindryczna) swobodnie podpartej, wykonanej w całości z materiału kompozytowego o właściwościach:

$$\begin{aligned}E_1 &= 28 \text{ GPa} \\E_2 &= 8,2 \text{ GPa} \\G_{12} &= 2,8 \text{ GPa} \\G_{13} &= 1,5 \text{ GPa} \\G_{23} &= 1,5 \text{ GPa} \\v_{12} &= 0,29 \\ \rho &= 1400 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

Przyjęto kąt orientacji włókien wynoszący  $45^\circ$  (tzw. quasi izotropia). Uwzględniono również optymalną liczbę półfal  $m$  i  $n$ , których wartości przedstawiono w tabeli 4.1.

	$m$	$n$
Płyta o stosunku boków $a/b = 1$	1	1
Płyta o stosunku boków $a/b = 1/2$	1	1
Powłoka cylindryczna o stosunku $L/r = 1$	2	1

Tabela 4.1 Optymalna liczba półfal  $m$  i  $n$  dla ubezwymiarowania

Stosując powyższe dane otrzymano następujące wartości, przez które podzielono wyniki omówione w rozdziałach 4.5 i 4.6:

Wartości siły krytycznej:

- dla płyty kwadratowej ( $a/b = 1$ ) –  $6,10502 \times 10^7$  N/m
- dla płyty prostokątnej ( $a/b = 1/2$ ) –  $2,14145 \times 10^7$  N/m
- dla powłoki cylindrycznej ( $L/r = 1$ ) –  $7,01006 \times 10^7$  N/m

Wartości częstotliwości drgań swobodnych:

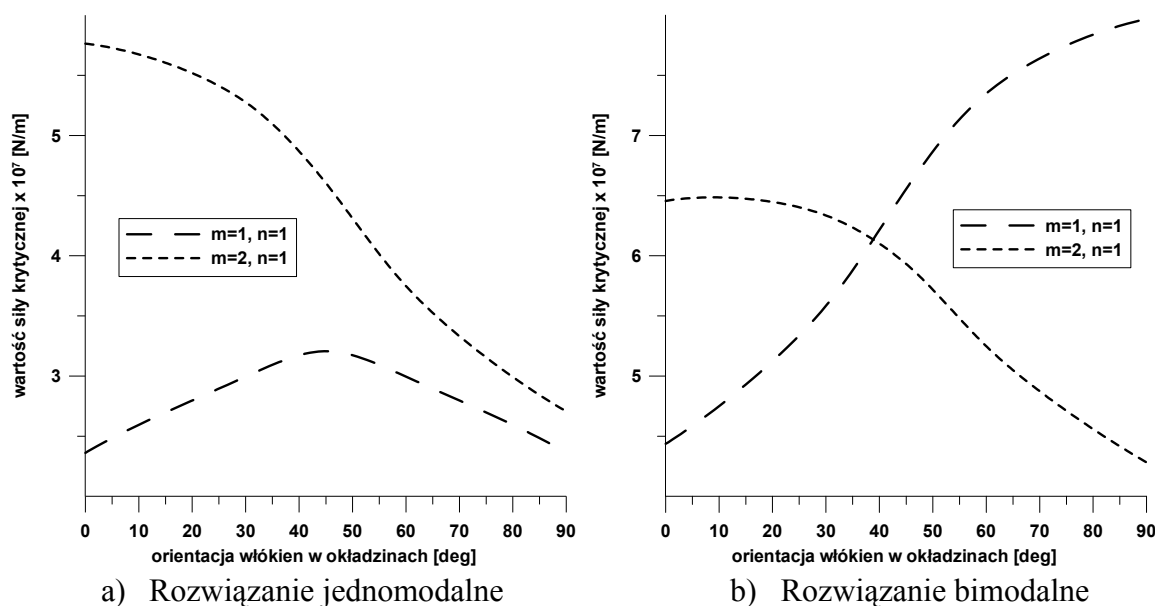
- dla płyty kwadratowej ( $a/b = 1$ ) –  $14535,80$  1/s
- dla płyty prostokątnej ( $a/b = 1/2$ ) –  $5098,69$  1/s
- dla powłoki cylindrycznej ( $L/r = 1$ ) –  $16690,60$  1/s

#### 4.4. Liczba półfal $m$ i $n$ dla płyt i powłok sandwichowych

Wartość siły krytycznej wyznaczona za pomocą każdej z analizowanych teorii różni się w zależności od przyjętej liczby półfal  $m$  i  $n$ .  $m$  jest liczbą półfal w kierunku  $x$ ,  $n$  – w kierunku  $y$ . W celu znalezienia optymalnej wartości siły (oraz częstotliwości drgań swobodnych), należy odpowiednio dobrać  $m$  i  $n$ . Dobór półfal to pierwszy etap optymalizacji, którą przeprowadzono w niniejszej pracy. Drugim etapem jest optymalizacja ze względu na orientację włókien w okładzinach, co zastało omówione w rozdziale 4.8.

$$Max_{\theta} Min_{m,n} N_x \quad (4.5)$$

Należy podkreślić, że w przypadku drgań swobodnych w zależności (4.5) zamiast wartości siły krytycznej  $N_x$  występuje częstotliwość drgań swobodnych  $\omega$ . Dobór jest dokonywany przy pomocy metody obliczeniowej, polegającej na porównaniu wartości siły krytycznej dla różnych wartości  $m$  i  $n$ , co przedstawiono na rysunku 4.4 (rys 4.4a – płyta kwadratowa swobodnie podparta – teoria L-K, rys 4.4b - płyta kwadratowa, utwierdzenie boku  $y$  – teoria L-K).



Rys 4.4 Wpływ liczby półfal na wartość siły krytycznej dla płyty kwadratowej ( $a/b = 1$ ) - dane: patrz rozdział 4.2

Na rysunku 4.4 przedstawiono dwie możliwości doboru półfal  $m$  i  $n$ . Pierwszym przypadkiem jest rozwiązanie jednomodalne – dla każdej orientacji włókien w okładzinach siła krytyczna dla liczby półfal  $m = 1$  jest niższa od siły krytycznej dla  $m = 2$ . W drugim przypadku mamy do czynienia z rozwiązaniem bimodalnym. W pewnym zakresie minimum można zaobserwować dla wartości  $m = 1$ , w innym zakresie minimum występuje przy wartości  $m = 2$ . Rozwiązanie bimodalne występuje częściej dla powłok cylindrycznych, niż dla płyt.

$m$  i  $n$  mogą przyjmować różne wartości, w zależności od: przyjętej teorii, grubości struktury, czy orientacji włókien w okładzinach – co przedstawiono w tabelach B.1 – B.6.

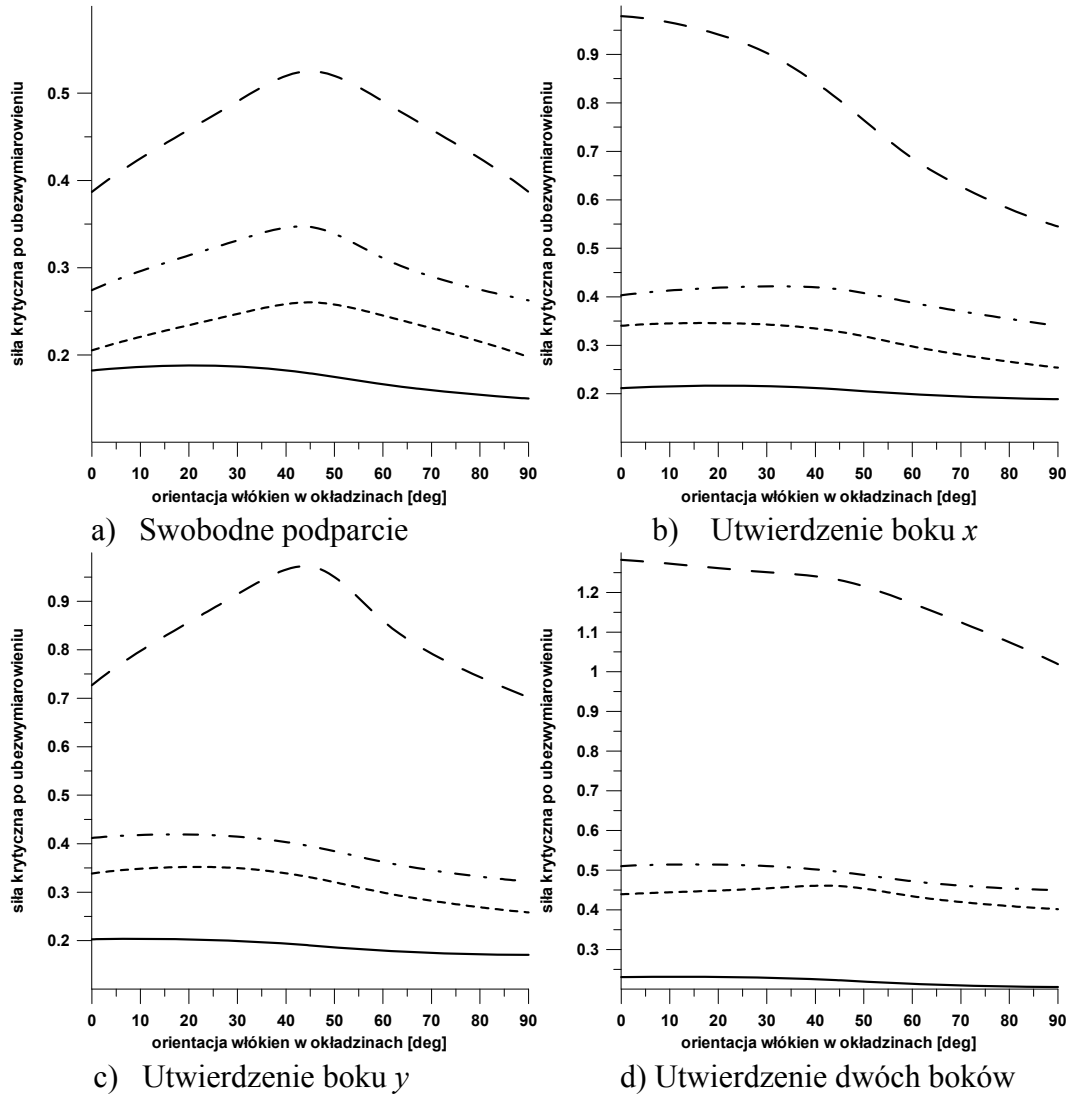
Analizując liczby półfal przedstawione w tabelach B.1 – B.6, można zauważyć, że otrzymane wyniki są identyczne dla wyboczenia i drgań swobodnych. Dla płyt o stosunku boków  $a/b = 1$  można zaobserwować wzrost liczby półfal  $m$  w przypadku utwierdzenia boku  $y$  oraz obydwóch boków. Wyjątkiem jest teoria L-K. Dla płyt o stosunku boków  $a/b = 1/2$ , liczba półfal wynosi 1 dla wszystkich warunków brzegowych i teorii. W przypadku powłok cylindrycznych zmianie ulegają półfal  $m$  i  $n$ . Liczba półfal  $m$  zwiększa się wraz ze wzrostem rzędu teorii.

## 4.5. Analiza wyboczenia struktur

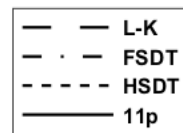
### 4.5.1. Wpływ teorii na wartość siły krytycznej dla płyt o stosunku $a/b=1$

W przypadku płyt o stosunku boków  $a/b = 1$  można zauważyć, że wyniki otrzymane dla teorii L-K są znacznie większe niż dla pozostałych trzech teorii. Różnica ta zwiększa się wraz z utwierdzaniem boków. Najmniejsze różnice pomiędzy teoriami

można zaobserwować w przypadku swobodnego podparcia, największe w przypadku utwierdzenia dwóch boków. Dla wszystkich warunków brzegowych i wszystkich teorii najmniejsze wartości siły krytycznej otrzymuje się dla orientacji włókien w okładzinach  $90^\circ$ .



Rys. 4.5 Wykresy przedstawiające wpływ teorii na wartość siły krytycznej dla płyty o stosunku boków  $a/b = 1$



Dla swobodnego podparcia (rys 4.5a) można zaobserwować inny przebieg wykresu otrzymanego dla teorii 11p (maksimum przy  $30^\circ$ ) niż dla trzech pozostałych teorii, w których maksimum siły krytycznej występuje przy orientacji  $45^\circ$ . We wszystkich czterech teoriach najmniejszą wartość siły krytycznej otrzymuje się przy orientacji  $90^\circ$ . Dla teorii L-K, FSDT i HSDT wykresy są prawie symetryczne względem orientacji  $45^\circ$  i podobną wartość otrzymuje się przy orientacji  $0^\circ$ . Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla L-K jako 100%, to wartość dla teorii FSDT wynosi 65-70%, dla HSDT: 50%, a dla 11p: 30-45%, w zależności od orientacji włókien w okładzinach.

Dla utwierdzenia boku  $x$  (rys 4.5b) przebieg wykresu dla teorii L-K (maksimum przy  $0^\circ$ ) różni się od pozostałych, w których maksimum występuje przy  $30^\circ$ . Dla wszystkich teorii minimum występuje przy orientacji  $90^\circ$ . Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla L-K jako 100%, to wartość dla teorii FSDT wynosi 40-65%, dla HSDT: 35-45%, a dla 11p: 20-35%, przy czym największe różnice występują przy orientacji  $0^\circ$ , a najmniejsze – przy  $90^\circ$ . W tym przypadku warto podkreślić dużą zmianę wartości w zależności od orientacji dla L-K – różnica pomiędzy minimum, a maksimum wynosi prawie 50%.

Dla utwierdzenia boku  $y$  (rys 4.5c) można zaobserwować podobieństwo w przebiegu wykresów dla teorii FSDT, HSDT (maksimum przy  $30^\circ$ , minimum przy  $90^\circ$ ). Wyraźnie inny jest przebieg wykresu dla L-K – maksimum przy  $45^\circ$ , minimum przy  $90^\circ$  oraz prawie symetryczny przebieg względem maksimum. Dla teorii 11p maksimum występuje przy orientacji  $0^\circ$ . Również dla tego przypadku najmniejsza wartość siły krytycznej występuje przy orientacji  $90^\circ$  dla wszystkich teorii. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla L-K jako 100%, to wartość dla teorii FSDT wynosi 40-50%, dla HSDT: 35%, a dla 11p: 20-25%, przy czym największe różnice występują przy orientacji  $45^\circ$ . Można również zaobserwować dość dużą różnicę pomiędzy teorią L-K, a pozostałymi trzema teoriami.

Dla utwierdzenia obydwóch boków (rys 4.5d) podobny przebieg można zaobserwować dla teorii L-K i 11p – maksimum przy  $0^\circ$ , minimum przy  $90^\circ$ . Dla teorii FSDT maksimum występuje przy orientacji  $30^\circ$ , a dla HSDT przy  $45^\circ$ , minimum w obu przypadkach występuje przy  $90^\circ$ . Na wykresie widać wyraźną różnicę pomiędzy teorią L-K, a pozostałymi teoriami. Można również zaobserwować, że wartości otrzymane dla teorii 11p są dużo niższe od pozostałych. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla L-K jako 100%, to wartość dla teorii FSDT wynosi 45-55%, dla HSDT: 40%, a dla 11p: 20%.

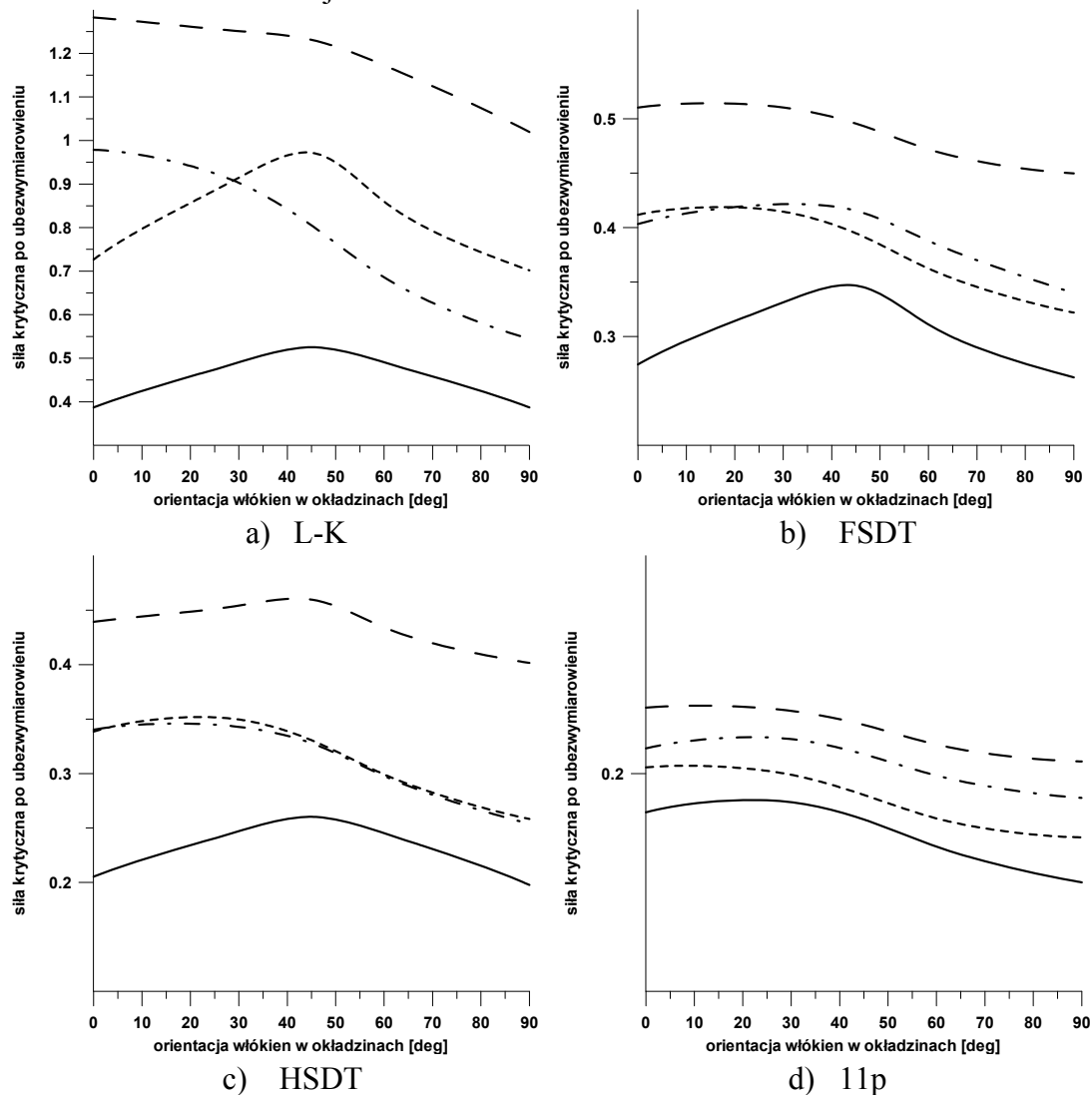
#### **4.5.2. Wpływ warunków brzegowych na wartość siły krytycznej dla płyt o stosunku $a/b=1$**

W przypadku wszystkich analizowanych teorii można zauważyć, że największą wartość siły krytycznej otrzymuje się dla utwierdzenia obydwóch boków, a najmniejszą - dla swobodnego podparcia. Największe różnice pomiędzy różnymi warunkami brzegowymi można zaobserwować dla teorii L-K, a najmniejsze dla teorii 11p. Minimum siły krytycznej zawsze występuje przy orientacji  $90^\circ$ .

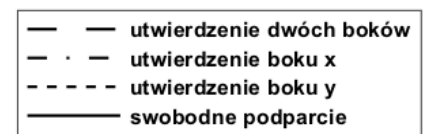
W przypadku teorii L-K (rys 4.6a) można zaobserwować podobny przebieg wykresu dla swobodnego podparcia i utwierdzenia boku  $y$  – maksimum przy  $45^\circ$  oraz prawie symetryczny przebieg wykresu względem maksimum. Dla utwierdzenia boku  $x$  i boku  $y$  przebieg wykresu ma zupełnie inny charakter. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia dwóch boków jako 100% to wartość dla utwierdzenia boku  $x$



wynosi 55-75%, dla utwierdzenia boku  $y$ : 55-80%, dla swobodnego podparcia: 30-45%, w zależności od orientacji włókien w okładzinach.



Rys. 4.6 Wykresy przedstawiające wpływ warunków brzegowych na wartość siły krytycznej dla płyty o stosunku boków  $a/b = 1$



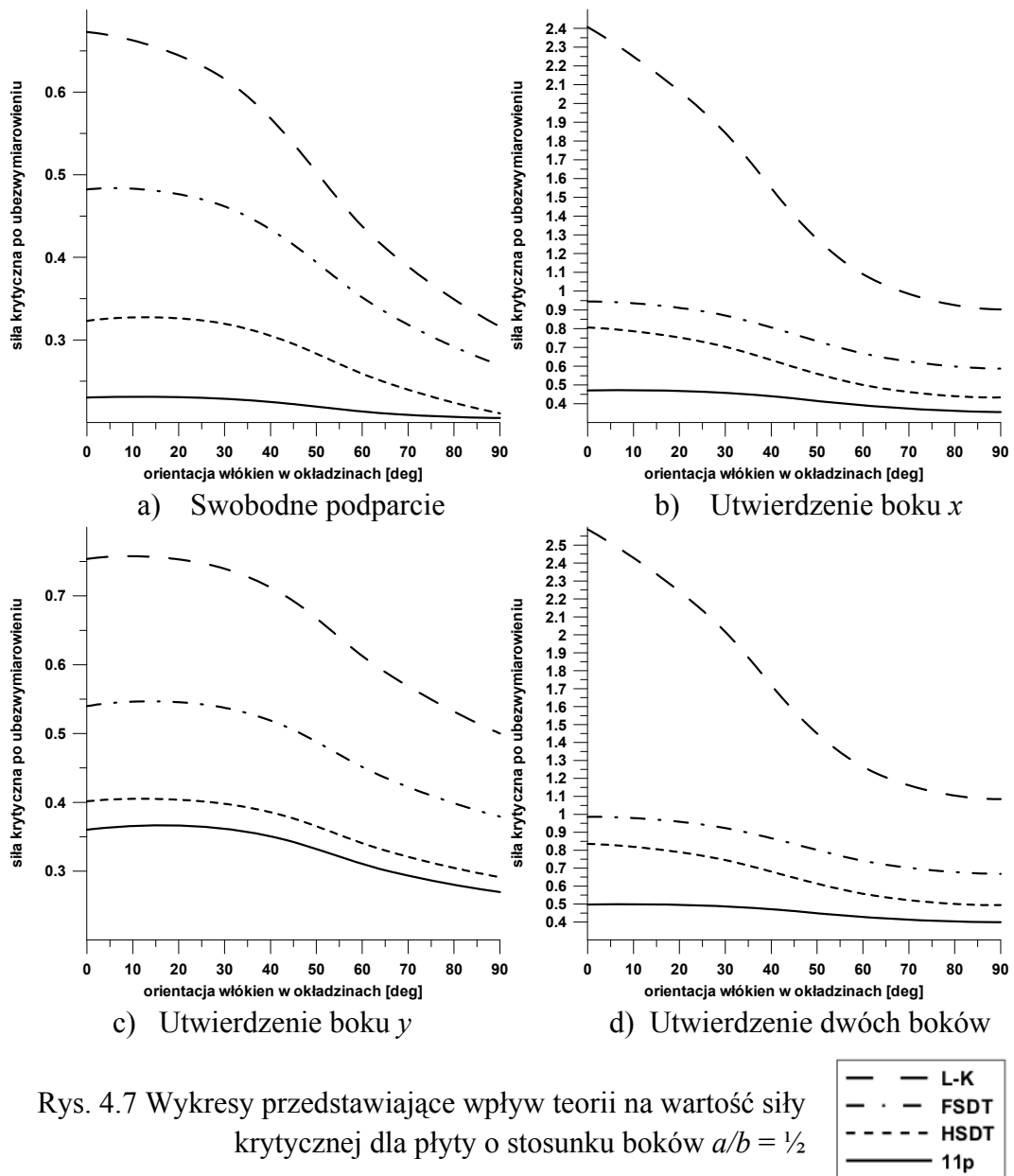
W przypadku teorii FSDT (rys 4.6b) można zauważyć podobny przebieg dla wszystkich wykresów (maksimum przy 30°, brak symetrii) z wyjątkiem swobodnego podparcia, dla którego maksimum występuje przy orientacji włókien 45°. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia dwóch boków jako 100% to wartość dla utwierdzenia boku  $x$  wynosi 75-90%, dla utwierdzenia boku  $y$ : 70-80%, dla swobodnego podparcia: 50-75%, w zależności od orientacji włókien w okładzinach. Najmniejsze różnice występują przy orientacji 45°, co wynika to z przebiegu wykresu dla swobodnego podparcia.

W przypadku teorii HSDT (rys 4.6c) można zaobserwować podobny przebieg wykresu dla utwierdzenia dwóch boków i dla swobodnego podparcia – maksimum przy orientacji 45°. Przebiegi dla utwierdzenia boku  $x$  i boku  $y$  niemal pokrywają się. Jeżeli

przyjmiemy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia dwóch boków jako 100% to wartość dla utwierdzenia boku  $x$  oraz boku  $y$  wynosi 65-75%, dla swobodnego podparcia: 45-55%, w zależności od orientacji włókien w okładzinach.

W przypadku teorii 11p (rys 4.6d) przebieg wykresów dla wszystkich warunków brzegowych jest prawie identyczny, jednakże dla utwierdzenia boku  $x$  i swobodnego podparcia maksimum siły krytycznej występuje przy  $30^\circ$ , a dla utwierdzenia boku  $y$  oraz utwierdzenia dwóch boków przy orientacji  $0^\circ$ . Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia dwóch boków jako 100% to wartość dla utwierdzenia boku  $x$  wynosi 80-95%, dla utwierdzenia boku  $y$ : 85%, dla swobodnego podparcia: 75-80%, w zależności od orientacji włókien w okładzinach.

### 4.5.3. Wpływ teorii na wartość siły krytycznej dla płyt o stosunku $a/b=1/2$



Rys. 4.7 Wykresy przedstawiające wpływ teorii na wartość siły krytycznej dla płyty o stosunku boków  $a/b = 1/2$

W przypadku płyt o stosunku boków  $a/b = 1/2$  można zauważyć podobieństwo w otrzymanych wartościach dla swobodnego podparcia i utwierdzenia boku  $y$  oraz dla utwierdzenia dwóch boków i utwierdzenia boku  $x$ . Wyniki otrzymane dla teorii L-K są większe niż dla pozostałych trzech, jednakże różnica ta jest dużo większa dla utwierdzenia dwóch boków i utwierdzenia boku  $x$ , niż dla swobodnego podparcia i utwierdzenia boku  $y$ . Dla wszystkich warunków brzegowych i wszystkich teorii najmniejsze wartości siły krytycznej otrzymuje się dla orientacji włókien w okładzinach  $90^\circ$ . Warto także podkreślić, że w niektórych przypadkach siła krytyczna przy orientacji włókien  $90^\circ$  dla teorii mniej złożonej jest mniejsza niż dla  $0^\circ$  dla teorii o wyższym rzędzie.

Porównując płytę  $a/b = 1/2$  z płytą  $a/b = 1$ , można zauważyć, że różnice pomiędzy wartościami są mniejsze w przypadku płyty kwadratowej. W przypadku prostokąta ( $a/b = 1/2$ ) przebiegi wykresów dla wszystkich warunków brzegowych i teorii są bardzo podobne, w przeciwieństwie do płyty kwadratowej ( $a/b = 1$ ), gdzie przebiegi znacznie różnią się między sobą (patrz: rys. 4.5).

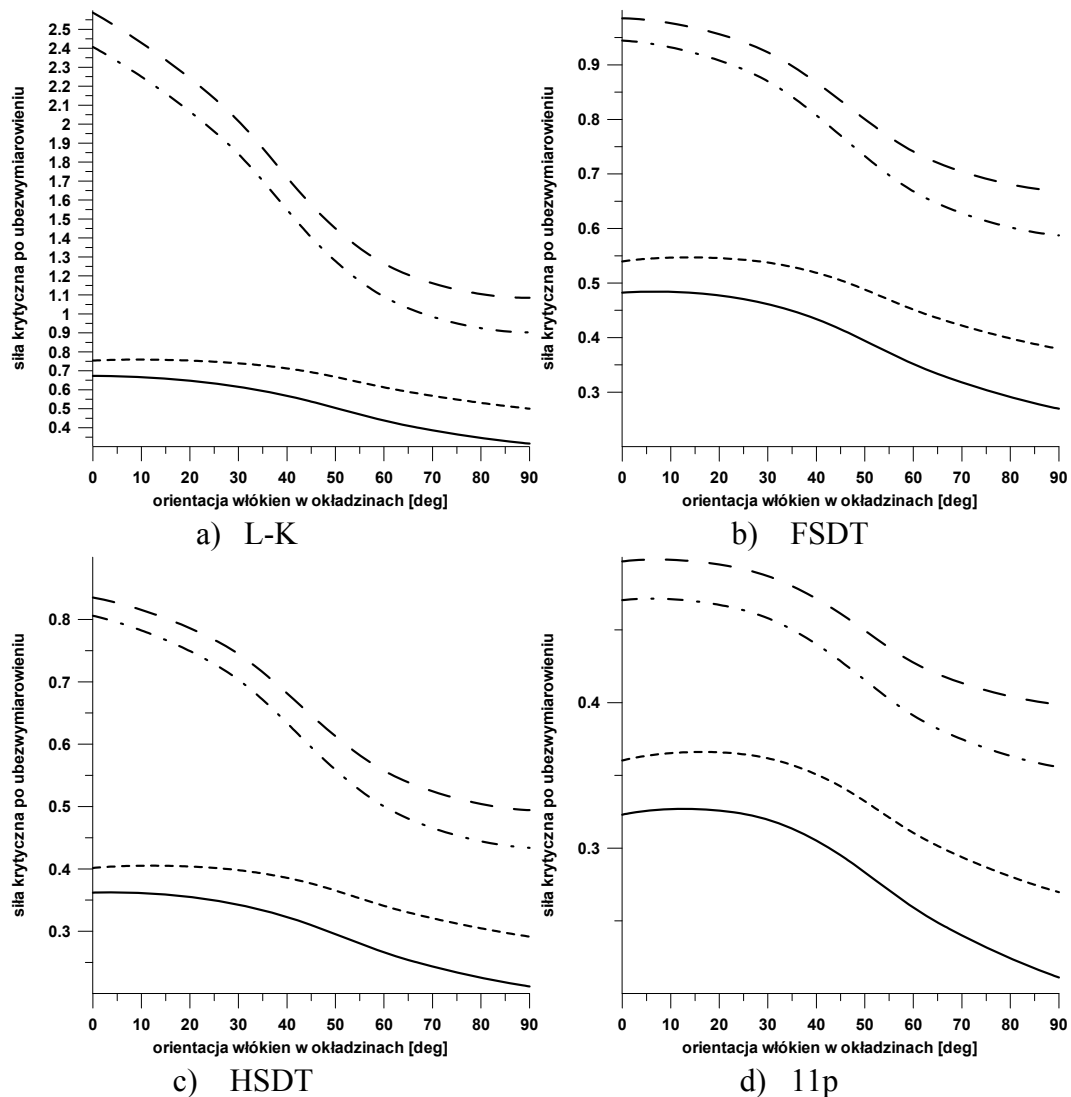
Dla swobodnego podparcia (rys 4.7a) można zaobserwować podobne przebiegi wykresów dla wszystkich teorii. Maksimum siły krytycznej występuje przy  $0^\circ$ , a minimum przy  $90^\circ$ . Jeżeli przyjmujemy wartość siły krytycznej dla L-K jako 100%, to wartość dla teorii FSDT wynosi 80-85%, dla HSDT: 50-65%, a dla 11p: 35-65%, przy czym największe różnice występują przy orientacji  $0^\circ$ , a najmniejsze przy  $90^\circ$ .

Dla utwierdzenia boku  $x$  (rys 4.7b) przebiegi wykresów dla wszystkich czterech teorii są identyczne. Można zaobserwować podobieństwo do przebiegów otrzymanych dla swobodnego podparcia. Maksimum siły krytycznej występuje przy  $0^\circ$ , minimum przy  $90^\circ$ . Jeżeli przyjmujemy wartość siły krytycznej dla L-K jako 100%, to wartość dla teorii FSDT wynosi 40-75%, dla HSDT: 35-55%, a dla 11p: 25-45%, przy czym największe różnice występują przy orientacji  $0^\circ$ , a najmniejsze przy  $90^\circ$ . W tym przypadku warto podkreślić dużą zmianę wartości w zależności od orientacji dla L-K – różnica pomiędzy minimum, a maksimum wynosi około 65%.

Dla utwierdzenia boku  $y$  (rys 4.7c), podobnie jak dla dwóch poprzednio omawianych warunków brzegowych, można zaobserwować podobne przebiegi wykresów – maksimum siły krytycznej przy  $0^\circ$ , minimum przy  $90^\circ$ . Jednakże nieco inny przebieg można zauważyć dla teorii 11p – maksimum występuje przy orientacji  $30^\circ$ . Jeżeli przyjmujemy wartość siły krytycznej dla L-K jako 100%, to wartość dla teorii FSDT wynosi 70-75%, dla HSDT: 55-60%, a dla 11p: 50%. Warto tu podkreślić, że najmniejsze różnice występują pomiędzy teorią HSDT i 11p.

Dla utwierdzenia obydwóch boków (rys 4.7d) przebiegi wykresów również nie odbiegają od poprzednich przypadków. Dla wszystkich teorii maksimum siły krytycznej występuje przy orientacji  $0^\circ$ , a minimum przy  $90^\circ$ . Wykresy są bardzo podobne do otrzymanych dla utwierdzenia boku  $x$ . Widać wyraźną różnicę pomiędzy teorią L-K, a pozostałymi. Jeżeli przyjmujemy wartość siły krytycznej dla L-K jako 100%, to wartość dla teorii FSDT wynosi 35-65%, dla HSDT: 30-50%, a dla 11p: 20-40%.

#### 4.5.4. Wpływ warunków brzegowych na wartość siły krytycznej dla płyt o stosunku $a/b=1/2$



Rys. 4.8 Wykresy przedstawiające wpływ warunków brzegowych na wartość siły krytycznej dla płyty o stosunku boków  $a/b = 1/2$

W przypadku wszystkich analizowanych teorii można zauważyć, że największą wartość siły krytycznej otrzymuje się dla utwierdzenia obydwóch boków, a najmniejszą dla swobodnego podparcia. Największe różnice pomiędzy różnymi warunkami brzegowymi można zaobserwować dla teorii L-K, a najmniejsze – dla teorii 11p. Minimum siły krytycznej zawsze występuje przy orientacji 90°.

W przypadku teorii L-K (rys 4.8a) można zaobserwować podobny przebieg wykresów dla wszystkich warunków brzegowych. Można zauważyć podobne wartości siły krytycznej dla utwierdzenia boku x i utwierdzenia dwóch boków oraz dla utwierdzenia boku y i swobodnego podparcia. Jeżeli przyjmimy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia dwóch boków jako 100% to wartość dla utwierdzenia boku x wynosi

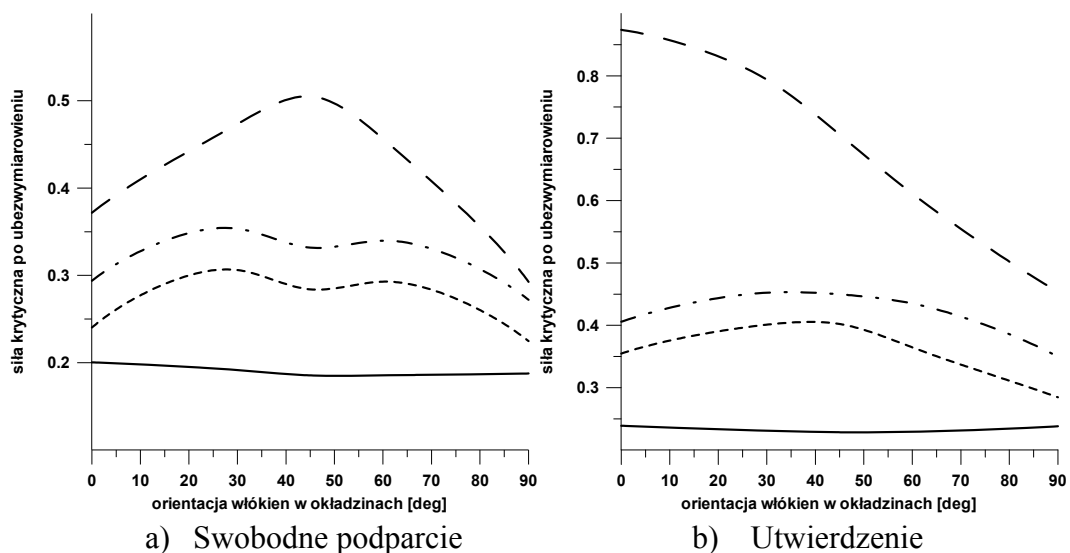
85-90%, dla utwierdzenia boku  $y$ : 30-50%, dla swobodnego podparcia: 20-25%, w zależności od orientacji włókien w okładzinach.

W przypadku teorii FSDT (rys 4.8b) przebiegi wykresów mają podobny charakter jak przebiegi uzyskane dla teorii L-K, jednakże otrzymane wartości są niższe. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia dwóch boków jako 100% to wartość dla utwierdzenia boku  $x$  wynosi 90-95%, dla utwierdzenia boku  $y$ : 55%, dla swobodnego podparcia: 40-50%, w zależności od orientacji włókien w okładzinach.

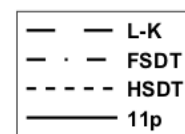
W przypadku teorii HSDT (rys 4.8c) przebiegi wykresów są niemalże identyczne jak w przypadku teorii FSDT, jedynie otrzymane wartości są minimalnie niższe. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia dwóch boków jako 100% to wartość dla utwierdzenia boku  $x$  wynosi 75-95%, dla utwierdzenia boku  $y$ : 50%, dla swobodnego podparcia: 35-40%, w zależności od orientacji włókien w okładzinach.

W przypadku teorii 11p (rys 4.8d) przebiegi wykresów również mają podobny charakter do przebiegów uzyskanych przy pomocy innych teorii, jednakże różnice pomiędzy wartościami siły krytycznej dla utwierdzenia boku  $x$  i dwóch boków oraz dla utwierdzenia boku  $y$  i swobodnego podparcia nie są już takie duże. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia dwóch boków jako 100% to wartość dla utwierdzenia boku  $x$  wynosi 90-95%, dla utwierdzenia boku  $y$ : 65-75%, dla swobodnego podparcia: 55-65%, w zależności od orientacji włókien w okładzinach.

#### 4.5.5. Wpływ teorii na wartość siły krytycznej dla powłok cylindrycznych o stosunku $L/r=1$



Rys. 4.9 Wykresy przedstawiające wpływ teorii na wartość siły krytycznej dla powłoki cylindrycznej o stosunku  $L/r = 1$



Podobnie jak w przypadku płyt, również i dla powłok cylindrycznych największe wartości siły otrzymuje się stosując teorię L-K, a najmniejsze – stosując teorię 11p. Warto tu zaznaczyć, że w przypadku teorii 11p orientacja włókien w okładzinach nie ma tak dużego wpływu na wartość siły krytycznej, jak to ma miejsce w przypadku pozostałych analizowanych teorii.

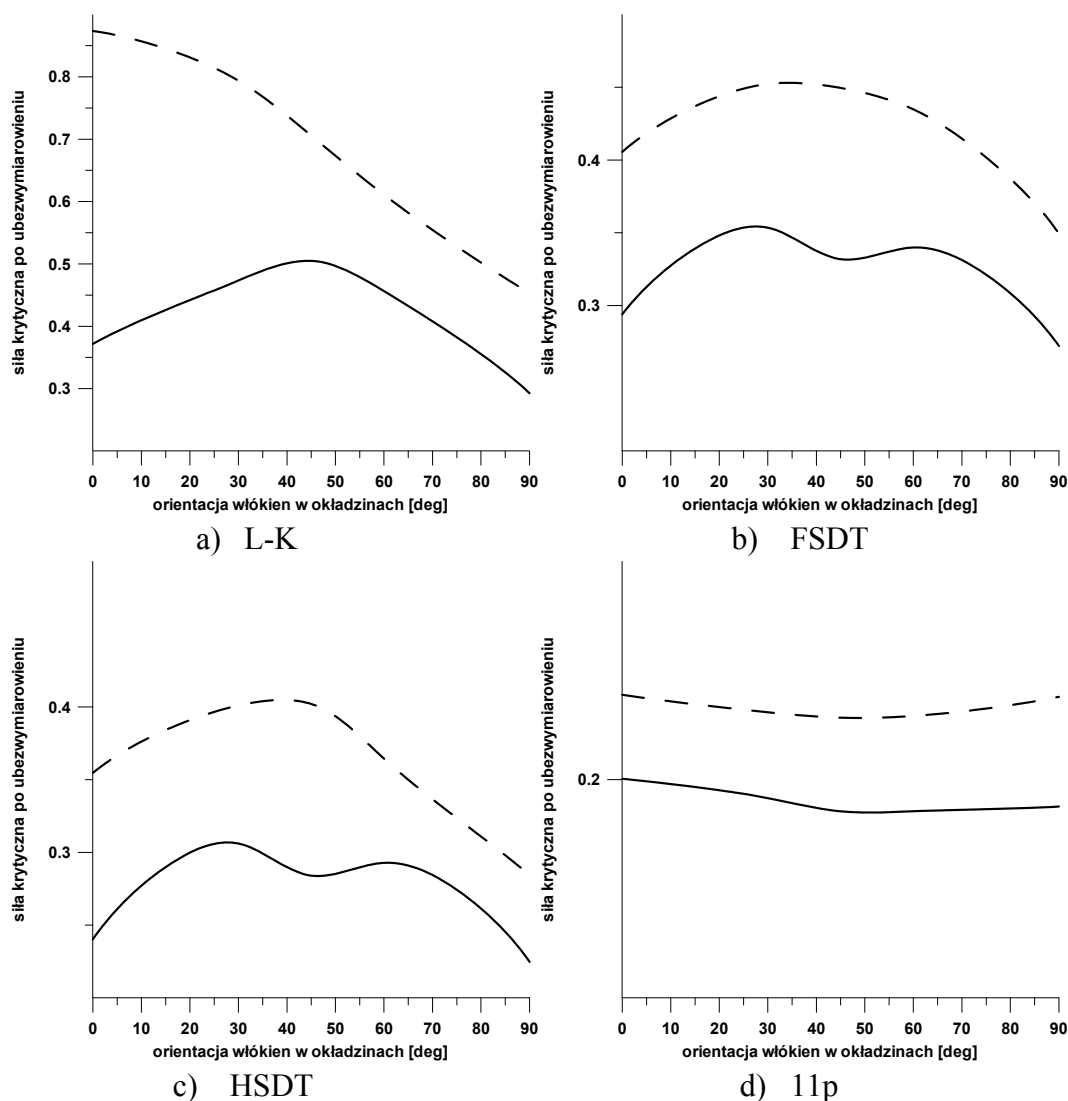
Dla swobodnego podparcia (rys 4.9a) można zaobserwować podobne przebiegi wykresów dla teorii FSDT i HSDT – mają one charakterystyczne „siodło” przy orientacji  $45^\circ$  i są względem niego prawie symetryczne. Dla teorii L-K wykres również jest prawie symetryczny względem kąta  $45^\circ$ , jednakże kształt przebiegu nie przypomina charakterystycznego „siodła”. Zupełnie inny przebieg ma wykres otrzymany dla teorii 11p – minimalna wartość siły krytycznej występuje przy orientacji  $45^\circ$ . Dla pozostałych teorii minimum notuje się przy orientacji  $90^\circ$ . Dla teorii L-K maksimum występuje przy  $45^\circ$ , dla FSDT i HSDT przy  $30^\circ$ . Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla L-K jako 100%, to wartość dla teorii FSDT wynosi 55-95%, dla HSDT: 45-75%, a dla 11p: 30-70%, w zależności od orientacji. Warto tu zaznaczyć, że największe różnice pomiędzy L-K, a pozostałymi teoriami występują przy orientacji  $45^\circ$ . Największe różnice pomiędzy FSDT i HSDT, a 11p można zaobserwować przy orientacji  $30^\circ$ .

Dla utwierdzenia (rys 4.9b) można zaobserwować różne przebiegi wykresów dla wszystkich teorii. Maksimum dla FSDT występuje przy  $30^\circ$ , natomiast dla HSDT przy orientacji  $45^\circ$ . Minimum występuje przy  $90^\circ$ . Dla teorii L-K maksimum występuje przy orientacji  $0^\circ$ , minimum przy  $90^\circ$  - widoczny jest wyraźny spadek wartości siły krytycznej. Wykres otrzymany dla teorii 11p ma podobny przebieg jak dla swobodnego podparcia – minimalna wartość siły krytycznej występuje przy orientacji  $45^\circ$  i wykres jest prawie symetryczny względem tej orientacji. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla L-K jako 100%, to wartość dla teorii FSDT wynosi 45-60%, dla HSDT 40-50%, a dla 11p 30-45%, w zależności od orientacji. Największe różnice pomiędzy teoriami występują przy orientacji  $0^\circ$ , najmniejsze przy  $90^\circ$ .

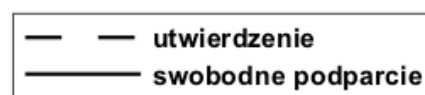
#### **4.5.6. Wpływ warunków brzegowych na wartość siły krytycznej dla powłok cylindrycznych o stosunku $L/r=1$**

W przypadku wszystkich analizowanych teorii można zauważyć, że większą wartość siły krytycznej otrzymuje się dla utwierdzenia. Największe różnice pomiędzy różnymi warunkami brzegowymi można zaobserwować dla teorii L-K, a najmniejsze dla teorii 11p.

W przypadku teorii L-K (rys 4.10a) przebieg wykresów jest inny dla utwierdzenia i inny dla swobodnego podparcia. Dla utwierdzenia maksimum występuje przy orientacji  $0^\circ$ , minimum dla  $90^\circ$ . Dla swobodnego podparcia maksimum występuje dla  $45^\circ$  i wykres jest prawie symetryczny względem maksimum. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia 100% to wartość dla swobodnego podparcia wynosi 45-60%, przy czym największą różnicę obserwujemy dla  $0^\circ$ .



Rys. 4.10 Wykresy przedstawiające wpływ warunków brzegowych na wartość siły krytycznej dla powłoki cylindrycznej stosunku boków  $L/r = 1$



W przypadku teorii FSDT (rys 4.10b) przebiegi wykresów są bardzo podobne do siebie, jednakże dla swobodnego podparcia występuje charakterystyczne „siodło” przy orientacji 45°. W obu przypadkach maksimum wartości siły krytycznej występuje przy orientacji 30°. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia 100% to wartość dla swobodnego podparcia wynosi 75%.

W przypadku teorii HSDT (rys 4.10c) przebieg wykresu dla swobodnego podparcia jest niemalże identyczny jak w przypadku teorii FSDT, jedynie otrzymane wartości są minimalnie niższe. Dla utwierdzenia maksimum występuje przy kącie 45°. Jeżeli przyjmiemy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia 100% to wartość dla swobodnego podparcia wynosi 65-80%, przy czym największą różnicę obserwujemy dla 0°.

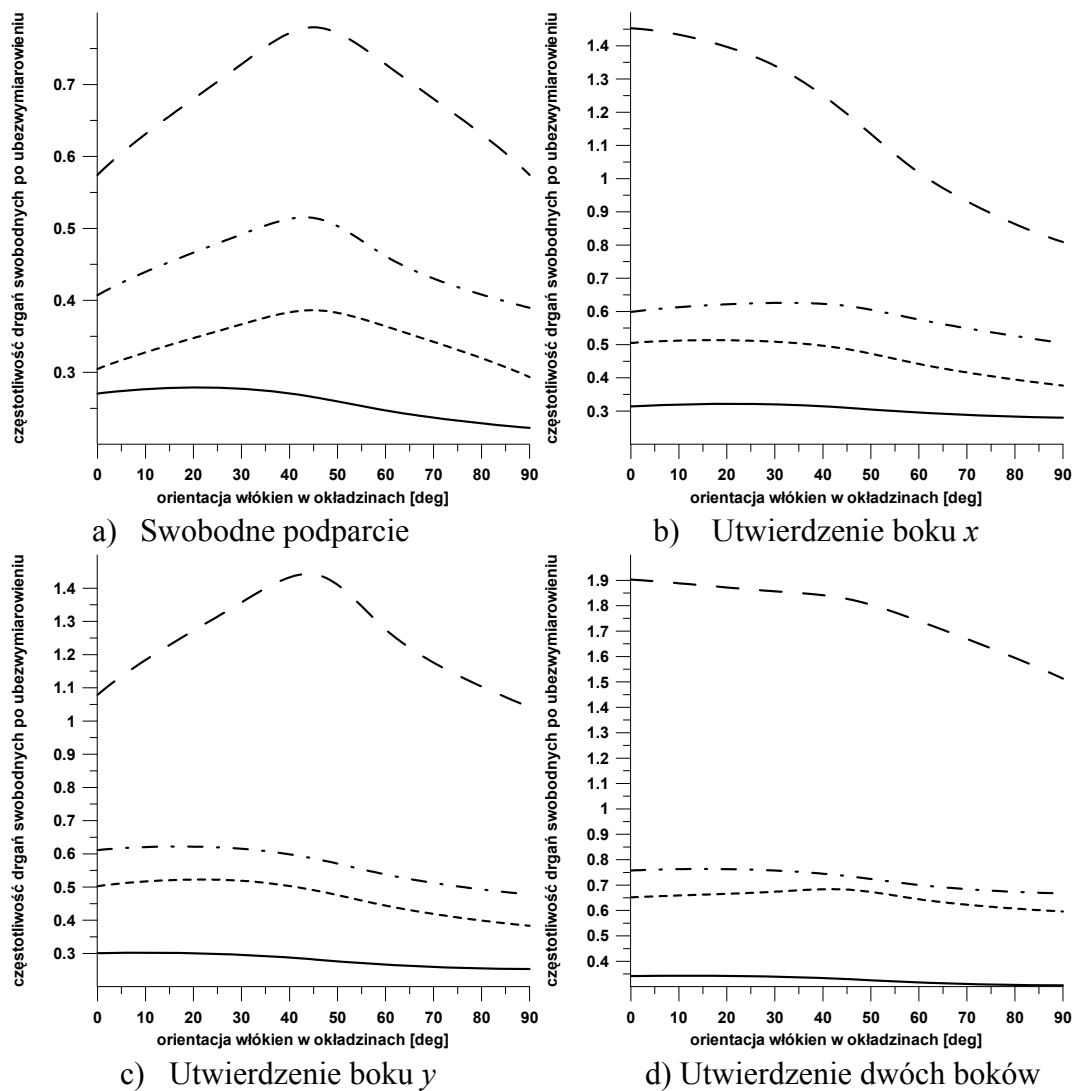
W przypadku teorii 11p (rys 4.10d) przebieg wykresów dla obydwóch warunków brzegowych jest bardzo podobny – w obu przypadkach minimum można zaobserwować dla kąta  $45^\circ$ . Różnice pomiędzy wartościami siły krytycznej dla utwierdzenia i swobodnego podparcia nie są już takie duże. Jeżeli przyjmimy wartość siły krytycznej dla utwierdzenia 100% to wartość dla swobodnego podparcia wynosi 80-95%, przy czym największą różnicę obserwujemy dla  $90^\circ$ , a najmniejszą dla  $0^\circ$ .



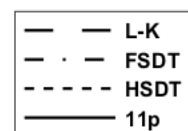
## 4.6. Analiza drgań swobodnych

W przypadku drgań swobodnych przebiegi wszystkich wykresów są identyczne jak przebiegi uzyskane w wyniku analizy wybożenia – taki sam jest kształt krzywych, położenie minimów i maksimów, takie same są różnice procentowe pomiędzy poszczególnymi wartościami. Jediną różnicą są otrzymane wartości, a wiąże się to z przedstawieniem wyników w postaci kwadratowej –  $\omega^2$ . Dlatego w tym rozdziale pominię dokładne omawianie wyników, a zaprezentuję jedynie otrzymane wykresy.

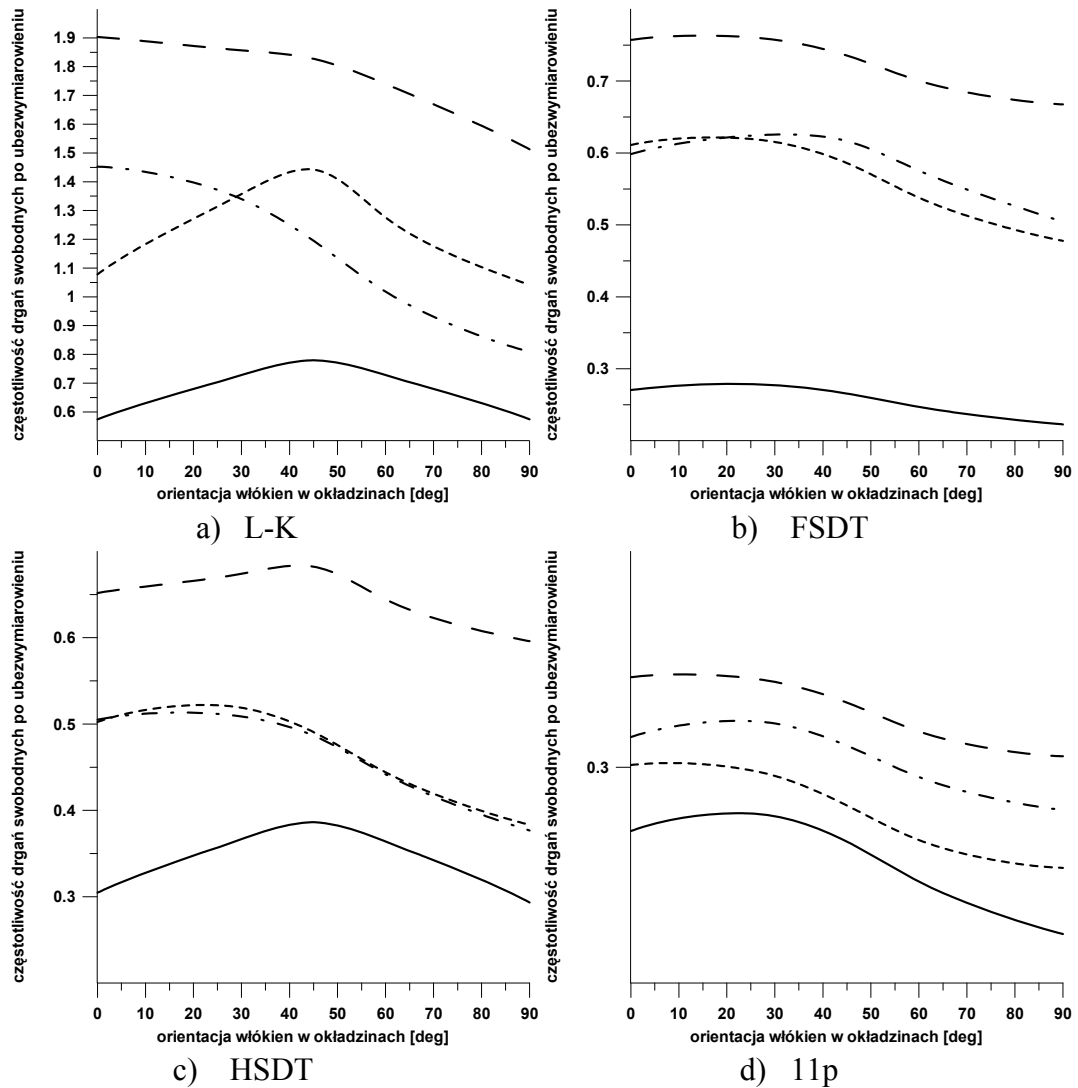
### 4.6.1. Wpływ teorii na częstotliwość drgań swobodnych dla płyt o stosunku $a/b=1$



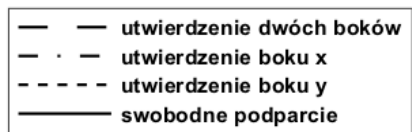
Rys. 4.11 Wykresy przedstawiające wpływ teorii na częstotliwość drgań swobodnych dla płyty o stosunku boków  $a/b = 1$



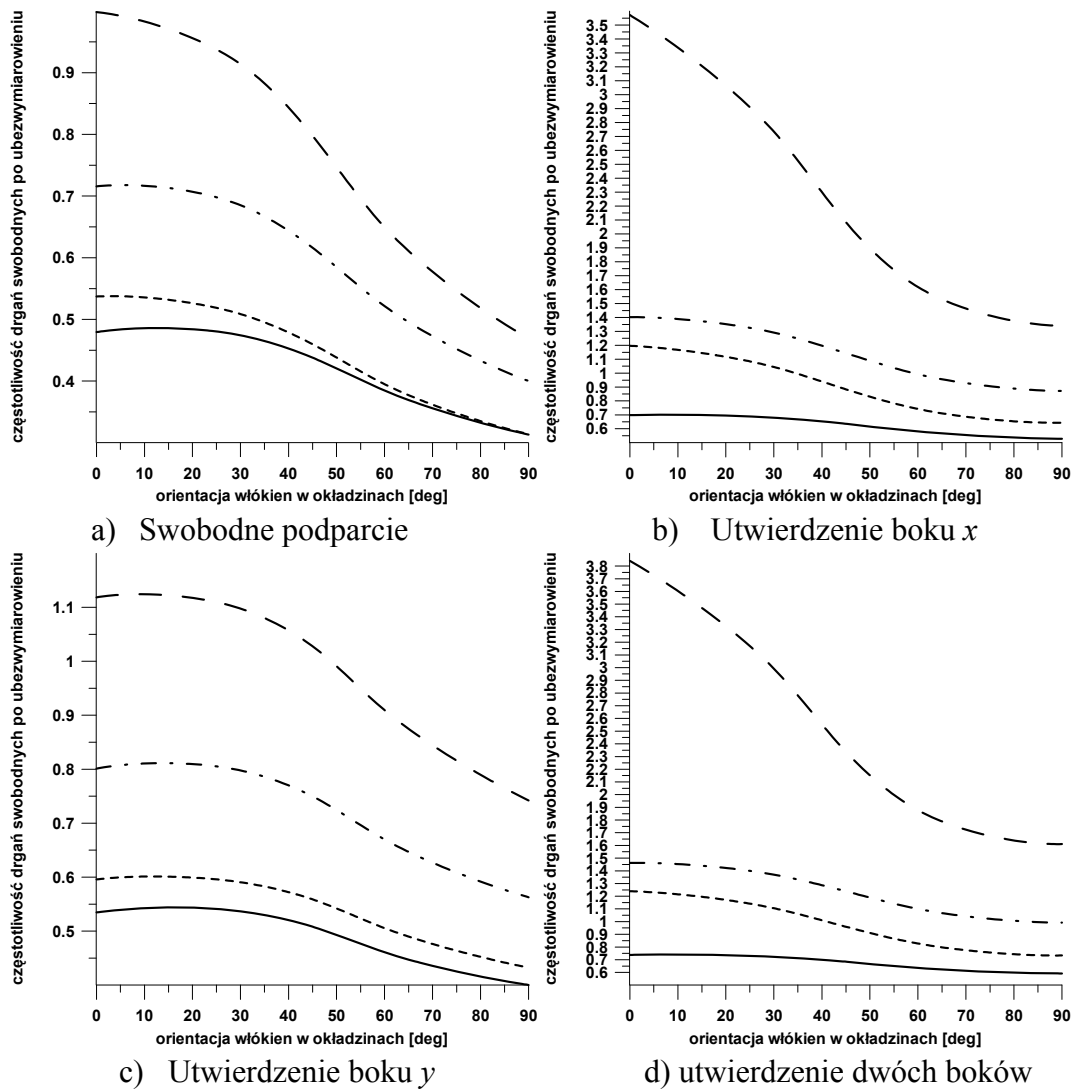
#### 4.6.2. Wpływ warunków brzegowych na częstotliwość drgań swobodnych dla płyt o stosunku $a/b=1$



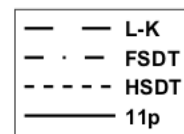
Rys. 4.12 Wykresy przedstawiające wpływ warunków brzegowych na częstotliwość drgań swobodnych dla płyty o stosunku boków  $a/b = 1$



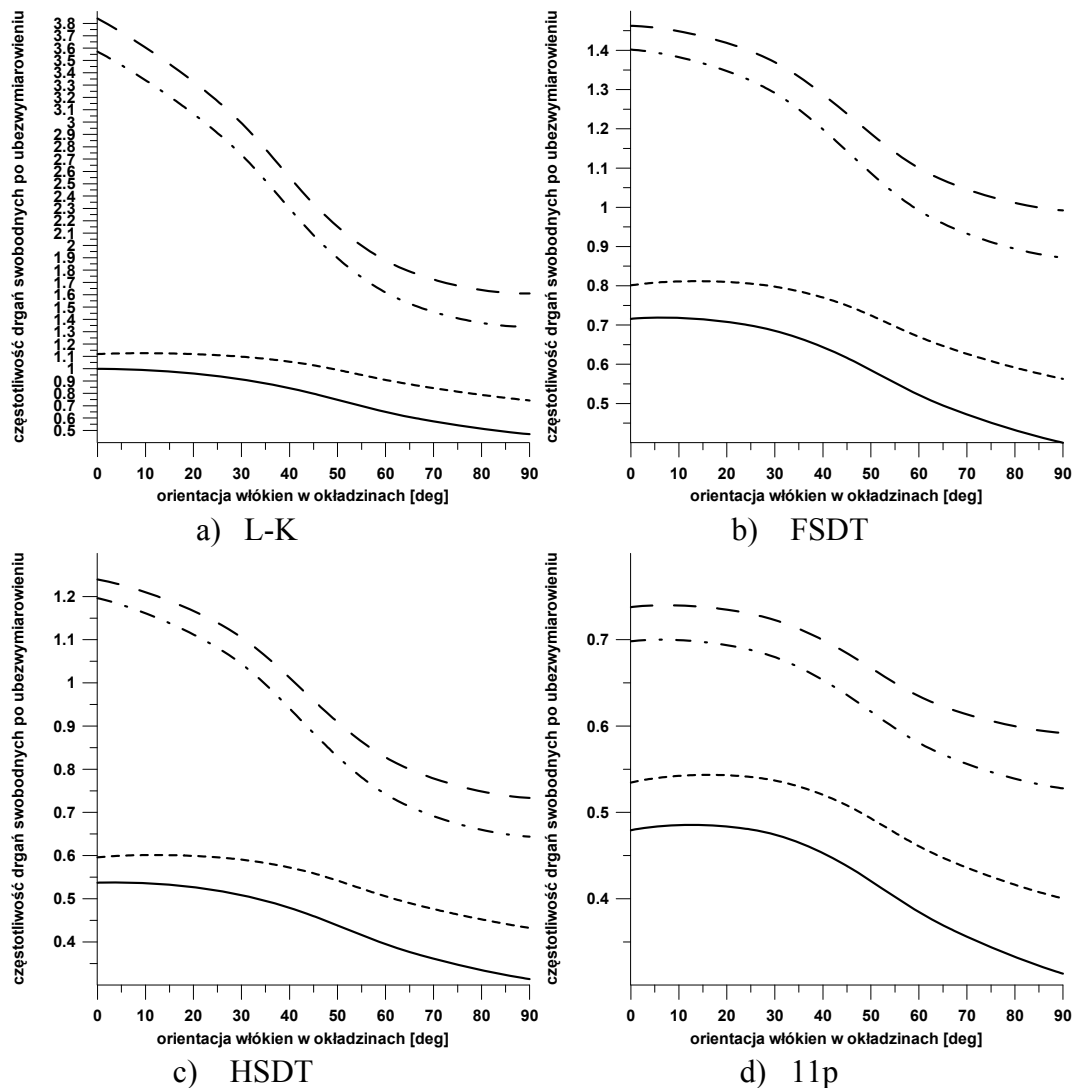
### 4.6.3. Wpływ teorii na częstotliwość drgań swobodnych dla płyt o stosunku $a/b=1/2$



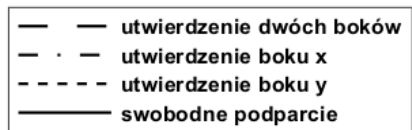
Rys. 4.13 Wykresy przedstawiające wpływ teorii na częstotliwość drgań swobodnych dla płyty o stosunku boków  $a/b = 1/2$



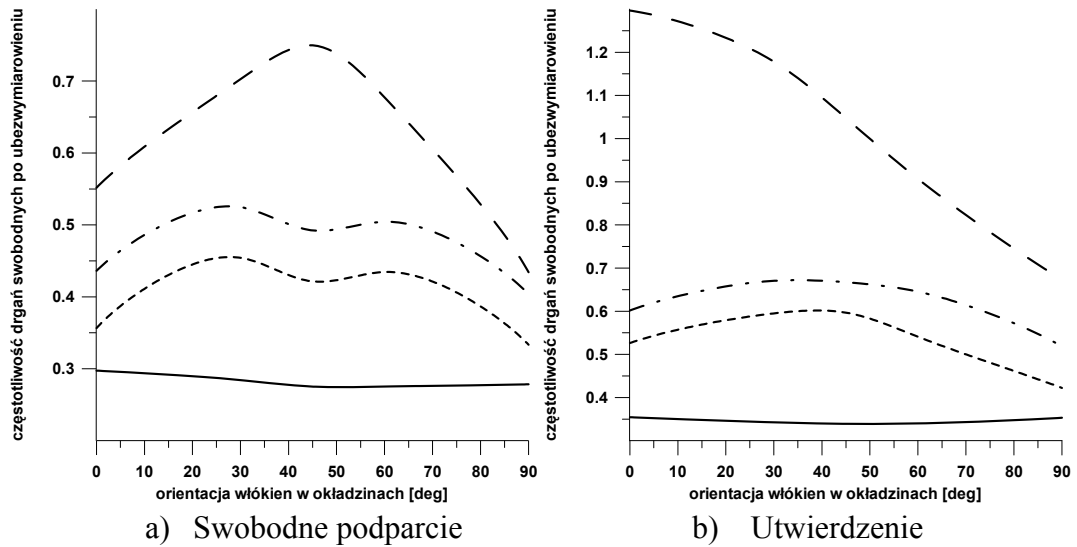
#### 4.6.4. Wpływ warunków brzegowych na częstotliwość drgań swobodnych dla płyt o stosunku $a/b=1/2$



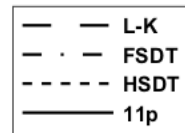
Rys. 4.14 Wykresy przedstawiające wpływ warunków brzegowych na częstotliwość drgań swobodnych dla płyty o stosunku boków  $a/b = 1/2$



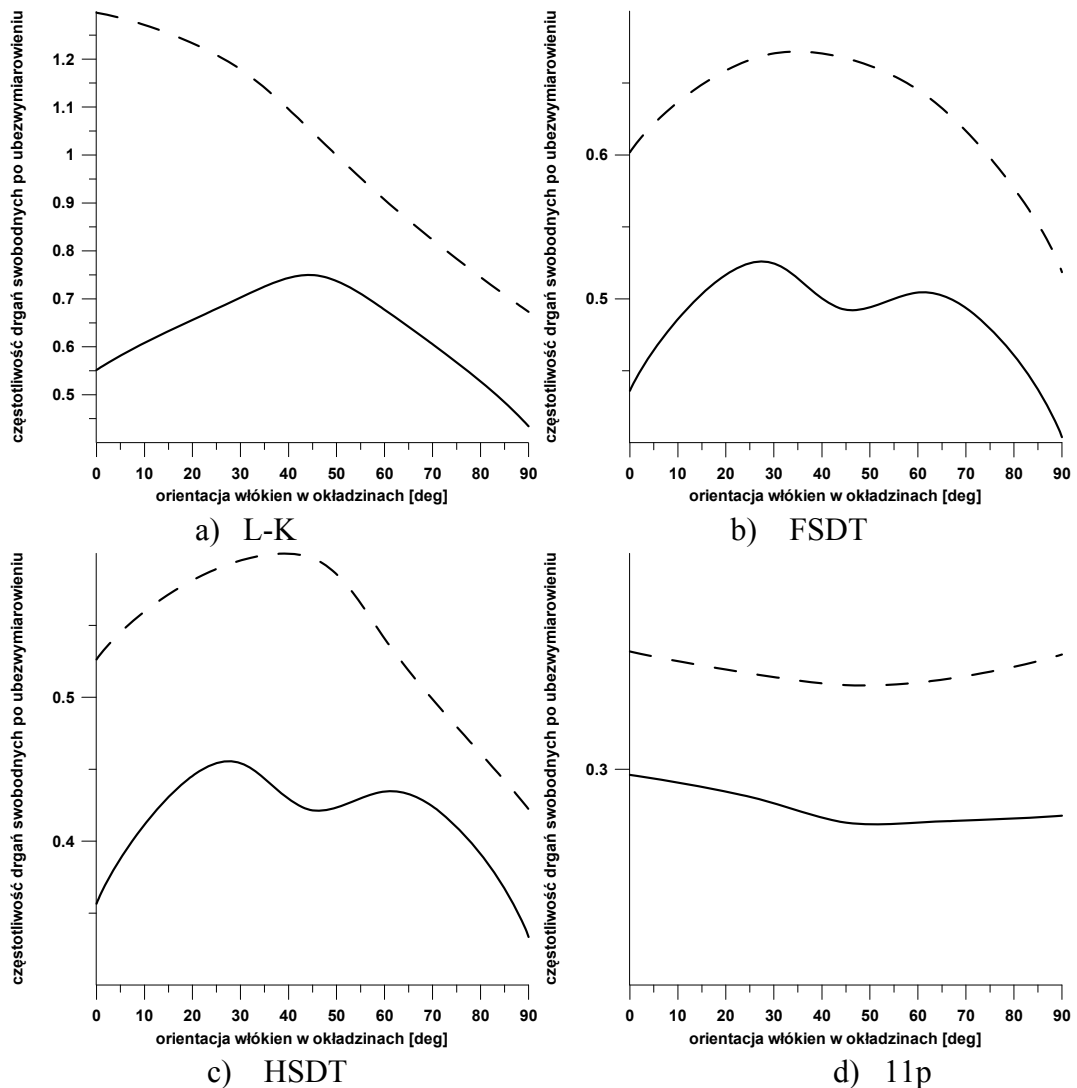
#### 4.6.5. Wpływ teorii na częstotliwość drgań swobodnych dla powłok cylindrycznych o stosunku $L/r=1$



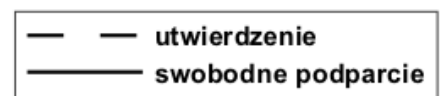
Rys. 4.15 Wykresy przedstawiające wpływ teorii na częstotliwość drgań swobodnych dla powłoki cylindrycznej o stosunku  $L/r = 1$



#### 4.6.6. Wpływ warunków brzegowych na częstotliwość drgań swobodnych dla powłok cylindrycznych o stosunku $L/r=1$



Rys. 4.16 Wykresy przedstawiające wpływ warunków brzegowych na częstotliwość drgań swobodnych dla powłoki cylindrycznej o stosunku  $L/r = 1$



#### 4.7. Porównanie wyników z literaturą

W celu sprawdzenia obiektywności otrzymanych wyników dokonano porównania z wynikami opublikowanymi w pracach [83, 88, 89]. Dane wykorzystane do obliczeń (przyjęto okładziny z materiału izotropowego) pochodzą z pracy [83].

Stałe materiałowe dla okładzin wynoszą:

$$E_{f1} = 65,5 \text{ GPa}$$

$$E_{f2} = 65,5 \text{ GPa}$$

$$E_{f3} = 65,5 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0,25$$

dla wypełniacza:

$$E_c = 6,55 \times 10^{-6} \text{ GPa}$$

$$G_{c12} = 0,000262 \times 10^{-6} \text{ GPa}$$

$$G_{c13} = G_{c23} = 0,000131 \times 10^{-6} \text{ GPa}$$

$$\nu_c = 0,25$$

Przyjęto wymiary:

$$b = 596,9 \text{ mm}$$

$$t_c = 4,569 \text{ mm}$$

$$t_f = 0,5334 \text{ mm}$$

Napężenie krytyczne (wyrażone w MPa) zostało wyliczone przy założeniu, że siła ściskająca jest przenoszona tylko przez okładziny.

Porównanie wykonano dla swobodnie podpartych płyt prostokątnych o stosunkach  $a/b = 0,5$ ,  $a/b = 0,7$ ,  $a/b = 1$ .

	$a/b = 0,5$	$a/b = 0,7$	$a/b = 1$
Pandit, Singh, Sheikh [83]	73,1925	54,8968	49,3671
Khatua, Cheung [88]	73,3050	54,9240	49,3730
Yuan, Dawe [89]	73,2270	54,8770	49,3340
L-K – wyniki autora	79,5165	57,6440	50,8906
FSDT – wyniki autora	79,2845	57,5415	50,8311
HSDT – wyniki autora	74,3194	55,4299	49,6972
11p – wyniki autora	73,8285	55,0637	49,3689

Tabela 4.2 Porównanie otrzymanych wyników z wynikami z literatury

Analizując tabelę 4.2 można zauważyć duże podobieństwo wyników z literatury z teorią 11p. W każdym z trzech rozpatrywanych przypadków różnica jest nieduża i zmniejsza się wraz ze wzrostem wartości stosunku  $a/b$ . Dla  $a/b = 0,5$  wynosi ona od 0,7 do 0,9%, dla  $a/b = 0,7$  – od 0,3 do 0,2 %, a dla  $a/b = 1$  wynik jest całkowicie zgodny. Nieco większe różnice można zaobserwować dla teorii HSDT – od 1,5% dla  $a/b = 0,5$  do 0,7% dla  $a/b = 1$ . Dość duże różnice występują przy teorii FSDT i L-K – od 8,5% dla

$a/b = 0,5$  do 3,2% dla  $a/b = 1$ . W przypadku każdej analizowanej teorii stwierdzono, że różnice zmniejszają się wraz ze wzrostem stosunku  $a/b$ .

Ponieważ obliczenia wykonano za pomocą programu umożliwiającego automatyczne rozwiązywanie podobnych zagadnień dla różnych struktur i warunków brzegowych, określając je poprzez odpowiednie parametry, można przyjąć, że dla pozostałych warunków brzegowych i struktur zbieżność wyników będzie podobna.

Wykazana zgodność wyników pozwala stwierdzić, że obliczenia zaprezentowane w niniejszej pracy cechują się dużą dokładnością. Wyniki otrzymane dla teorii 11p można uznać za odpowiadające rzeczywistym wartościom.

#### 4.8. Optymalny układ włókien

Zgodnie z zależnością (4.5) po znalezieniu minimalnych wartości siły krytycznej i częstotliwości drgań swobodnych ze względu na liczbę półfal  $m$  i  $n$ , przeprowadzono poszukiwania maksymalnych wartości ze względu na kąt orientacji włókien w okładzinach. Optymalne wartości kątów dla wszystkich analizowanych przypadków przedstawiono w tabelach 4.3 – 4.5.

Rodzaj warunku brzegowego	Rodzaj stosowanej teorii	Optymalna orientacja włókien w okładzinach
Swobodne podparcie	L-K	45°
	FSDT	45°
	HSDT	45°
	11p	30°
Utwierdzenie boku x	L-K	0°
	FSDT	30°
	HSDT	30°
	11p	30°
Utwierdzenie boku y	L-K	45°
	FSDT	30°
	HSDT	30°
	11p	0°
Utwierdzenie dwóch boków	L-K	0°
	FSDT	30°
	HSDT	45°
	11p	0°

Tabela 4.3 Optymalne wartości kąta orientacji włókien w okładzinach dla płyty  $a/b = 1$  przy analizie wyboczenia i drgań swobodnych



Dla płyt kwadratowych ( $a/b = 1$ ) optymalne wartości kąta  $\theta$  przyjmują różne wartości w zależności od teorii i rodzaju warunków brzegowych – nie można określić ogólnej zasady opisującej wpływ teorii, czy warunków brzegowych na optymalny kąt  $\theta$ . Dla swobodnego podparcia optymalną orientacją jest kąt  $45^\circ$ , jedynie dla teorii 11p przyjmuje on wartość  $30^\circ$ . Dla utwierdzenia boku  $x$  optymalny jest kąt  $30^\circ$ , z wyjątkiem teorii L-K, dla której optimum występuje przy  $0^\circ$ . W przypadku utwierdzenia boku  $y$  – optimum dla teorii L-K występuje przy  $45^\circ$ , dla teorii FSDT i HSDT przy  $30^\circ$ , a dla 11p przy  $0^\circ$ . Dla utwierdzenia dwóch boków – dla teorii L-K optimum występuje przy kącie  $0^\circ$ , dla teorii FSDT przy  $30^\circ$ , dla teorii HSDT przy  $45^\circ$ .

Rodzaj warunku brzegowego	Rodzaj stosowanej teorii	Optymalna orientacja włókien w okładzinach
Swobodne podparcie	L-K	$0^\circ$
	FSDT	$0^\circ$
	HSDT	$0^\circ$
	11p	$0^\circ$
Utwierdzenie boku $x$	L-K	$0^\circ$
	FSDT	$0^\circ$
	HSDT	$0^\circ$
	11p	$0^\circ$
Utwierdzenie boku $y$	L-K	$0^\circ$
	FSDT	$0^\circ$
	HSDT	$0^\circ$
	11p	$30^\circ$
Utwierdzenie dwóch boków	L-K	$0^\circ$
	FSDT	$0^\circ$
	HSDT	$0^\circ$
	11p	$0^\circ$

Tabela 4.4 Optymalne wartości kąta orientacji włókien w okładzinach dla płyty  $a/b = 1/2$  przy analizie wyboczenia i drgań swobodnych

W przypadku płyt prostokątnych ( $a/b = 1/2$ ) optymalny kąt  $\theta$  wynosi  $0^\circ$  dla każdej teorii i każdego warunku brzegowego, z wyjątkiem teorii 11p dla utwierdzenia boku  $y$ . Dla tego przypadku optymalną orientacją jest kąt  $30^\circ$ , jednakże różnica pomiędzy wartością siły krytycznej (i częstotliwością drgań swobodnych) dla tej orientacji, a dla orientacji  $0^\circ$  wynosi mniej niż 0,5%.

W przypadku powłok cylindrycznych, podobnie jak w przypadku płyt kwadratowych ( $a/b = 1$ ) optymalny kąt  $\theta$  przyjmuje różne wartości. Można jednak zauważyć, że dla teorii 11p zawsze wynosi on  $0^\circ$ , a dla teorii FSDT  $30^\circ$ , niezależnie od przyjętych warunków brzegowych. Dla teorii L-K przyjmuje on wartość  $45^\circ$  dla swobodnego podparcia oraz  $0^\circ$  dla utwierdzenia. Dla teorii HSDT –  $30^\circ$  dla swobodnego podparcia i  $45^\circ$  dla utwierdzenia.

Rodzaj warunku brzegowego	Rodzaj stosowanej teorii	Optymalna orientacja włókien w okładzinach
Swobodne podparcie	L-K	45°
	FSDT	30°
	HSDT	30°
	11p	0°
Utwierdzenie	L-K	0°
	FSDT	30°
	HSDT	45°
	11p	0°

Tabela 4.5 Optymalne wartości kąta orientacji włókien w okładzinach dla płyty  $a/b = 1/2$  przy analizie wybożenia i drgań swobodnych

Biorąc pod uwagę wyniki opisane w rozdziale 4.7 można założyć, że optymalne wartości kąta  $\theta$  wyznaczone dla teorii 11p są zgodne z rzeczywistością.

W celu zweryfikowania otrzymanych wartości optymalnego kąta  $\theta$  przeprowadzono porównanie z literaturą wartości siły krytycznej dla różnych orientacji włókien w okładzinach (patrz: rys. 4.17). Aby można było dokonać bezpośredniego porównania dane zaczerpnięto z pracy [83]. Obliczenia wykonano dla płyt kwadratowych o boku  $a = 225$  mm. Grubość wypełniacza  $t_c$  wynosiła 10 mm, a grubość okładziny  $t_f = 0,2$  mm. Przyjęto następujące stałe materiałowe dla okładzin:

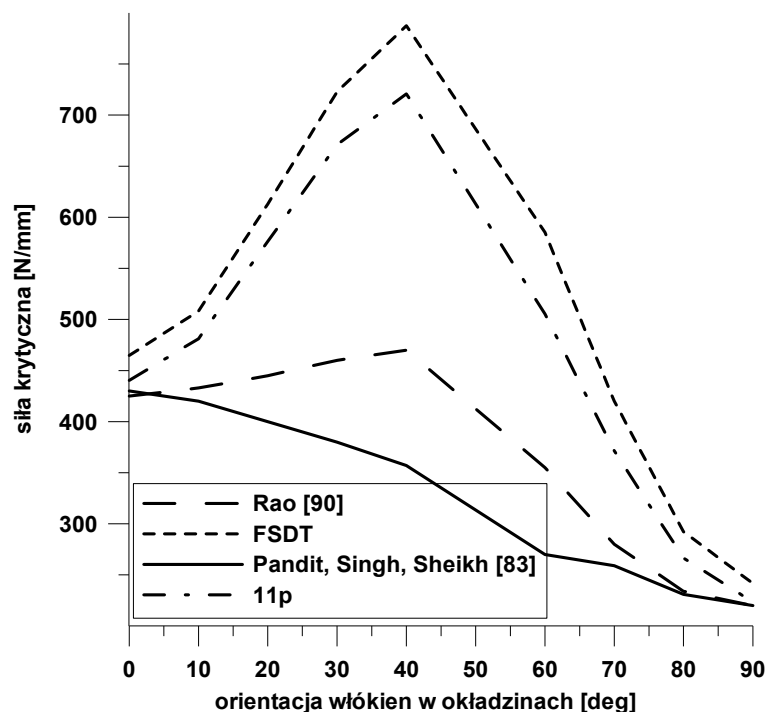
$$\begin{aligned}
 E_{f1} &= 229 \text{ GPa} \\
 E_{f2} &= 13,35 \text{ GPa} \\
 E_{f3} &= 22,9 \text{ GPa} \\
 G_{f12} &= 5,25 \text{ GPa} \\
 G_{f13} &= 3,15 \text{ GPa} \\
 G_{f23} &= 3,15 \text{ GPa} \\
 \nu_{f12} &= 0,3151
 \end{aligned}$$

i dla wypełniacza:

$$\begin{aligned}
 E_{c1} &= 0,02 \text{ GPa} \\
 E_{c2} &= 0,02 \text{ GPa} \\
 E_{c3} &= 0,2 \text{ GPa} \\
 G_{c12} &= 0,0146 \text{ GPa} \\
 G_{c13} &= 0,146 \text{ GPa} \\
 G_{c23} &= 0,0904 \text{ GPa} \\
 \nu_{c12} &= 0,3
 \end{aligned}$$

W obliczeniach autora uwzględniono optymalną liczbę półfal  $m$  i  $n$ . Dla orientacji  $\theta$  w przedziale od 0° do 40°, obie liczby wynosiły 1, natomiast w przedziale od 60° do

$90^\circ$ ,  $m=2$ ,  $n=1$  dla obydwu analizowanych teorii. Wyniki autora porównano z pracą [83], w której stosowano teorię zig-zag oraz z pracą [90], w której wartość siły krytycznej otrzymano stosując metodę Rayleigha-Ritza z uwzględnieniem ścinania poprzecznego elementu normalnego.



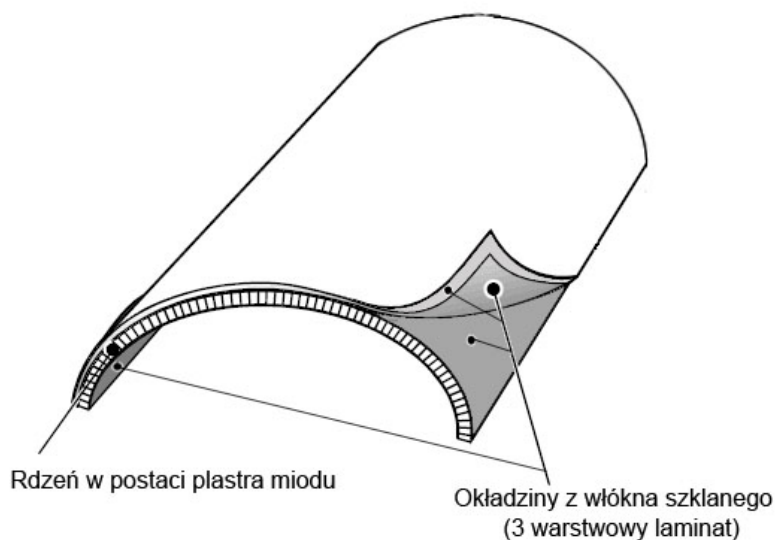
Rys. 4.17 Porównanie wartości siły dla różnych orientacji kąta  $\theta$ .

Analizując rys. 4.17 można zaobserwować zbieżność wyników dla orientacji  $0^\circ$  i  $90^\circ$  dla wszystkich czterech podejść. Jednakże dla pozostałych orientacji różnice są dość duże – największe zaobserwowano przy kącie  $\theta = 40^\circ$  (dla tej orientacji w obliczeniach autora oraz w podejściu stosowanym w pracy [90] występuje maksymalna wartość siły krytycznej). Można również zauważyć inny charakter przebiegu wykresu, a co za tym idzie inną maksymalną wartość siły krytycznej w podejściu stosowanym w pracy [83], niż w trzech pozostałych przypadkach – tu maksimum można zaobserwować przy orientacji  $0^\circ$ . Bez przeprowadzenia dodatkowej analizy, nie można jednoznacznie stwierdzić, które z zastosowanych podejść jest bliższe rzeczywistości.

## 5. BADANIA DOŚWIADCZALNE

### 5.1. Przygotowanie i opis przebiegu doświadczenia

Badania polegały na poddaniu jednoosiowemu ściskaniu próbek w postaci sandwichowych powłok cylindrycznych, umocowanych w specjalnych talerzach zapobiegających ich przemieszczaniu.



Rys. 5.1 Schematyczny rysunek modelu doświadczenia – sandwichowy panel cylindryczny

Do wykonania próbek wykorzystano następujące materiały:

okładziny:

- kompozyt tekstylny - włókno szklane (typ E) / żywica epoksydowa (po 3 warstwy tkaniny o splocie płóciennym na każdą z okładzin)
- żywica epoksydowa: Epidian 52 (Zakłady chemiczne „Organika-Szarzyna”)
- utwardzacz: Typ ET ( w proporcji 20 na 100 cząsteczek wagowych żywicy)

rdzeń:

- papier aramidowy nasączony żywicą fenolową, formowany na wzór plastra miodu

Proces przygotowania próbek można przedstawić w czterech etapach:

- I. Nakładanie oddzielnika na formę



Rys. 5.2 Nakładanie silikonu w aerozolu



Rys. 5.3 Nakładanie folii

## II. Laminowanie ręczne okładzin



Rys. 5.4 Laminowanie ręczne



Rys 5.5 Laminowanie ręczne cd

## III. Składanie elementów sandwicha, zamykanie formy



Rys. 5.6 Nakładanie laminatu na formę



Rys. 5.7 Model w silikonowej formie z podłączoną pompą próżniową

## IV. Przyspieszona wulkanizacja w piecu



Rys. 5.8 Wulkanizacja żywicy w piecu

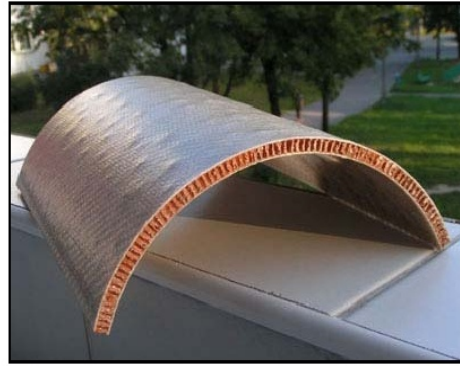


Rys. 5.9 Temperatura wulkanizacji - 120°C

Gotowa próbka – panel cylindryczny:



Rys. 5.10 Gotowa próbka – stan surowy



Rys. 5.11 Gotowa próbka – obrobiona mechanicznie

Gotowa próbka miała następujące wymiary:

$$t_f = 0,5 \text{ mm}$$

$$t_c = 6,5 \text{ mm}$$

$$r = 92 \text{ mm}$$

$$L = 298 \text{ mm}$$

$$L_{AB} = 240,85 \text{ mm}$$

Stałe materiałowe dla okładzin wynoszą:

$$E_{f1} = 13,142 \text{ GPa}$$

$$E_{f2} = 13,142 \text{ GPa}$$

$$E_{f3} = 1,3142 \text{ GPa}$$

$$G_{f12} = 9,621 \text{ MPa}$$

$$G_{f13} = 4,811 \text{ MPa}$$

$$G_{f23} = 4,811 \text{ MPa}$$

$$\nu_{f12} = \nu_{f21} = 0,25$$

Stałe materiałowe dla wypełniacza wynoszą:

$$E_{c1} = 1,15 \text{ GPa}$$

$$E_{c2} = 1,15 \text{ GPa}$$

$$E_{c3} = 115 \text{ MPa}$$

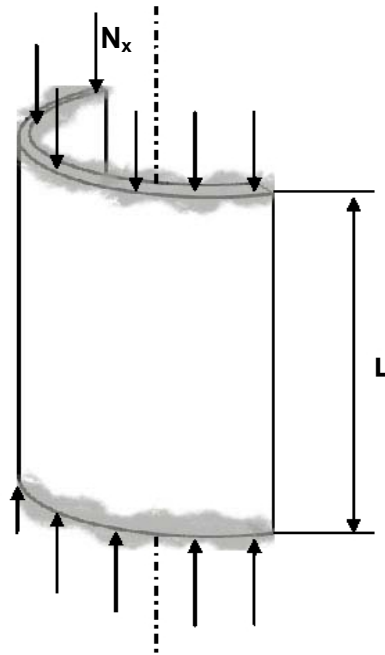
$$G_{c12} = 4,38 \text{ MPa}$$

$$G_{c13} = 7,30 \text{ MPa}$$

$$G_{c23} = 7,30 \text{ MPa}$$

$$\nu_{c12} = 0,2$$

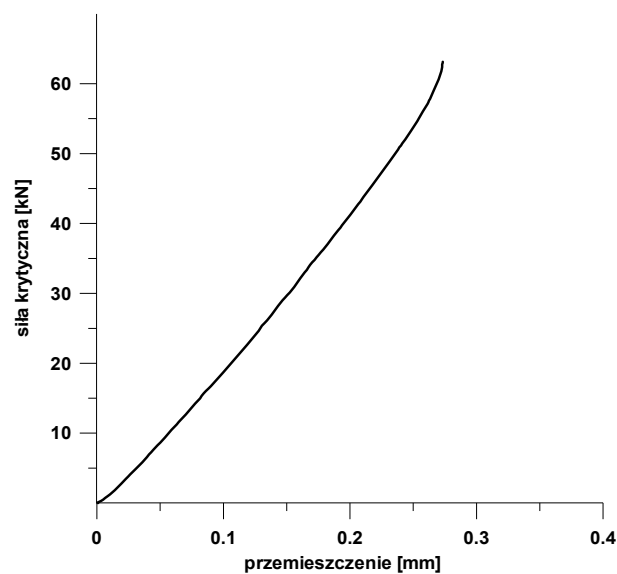
Maszyna wytrzymałościowa realizująca docisk (Instron 4505), obciążała próbki ze stałą prędkością 2 mm/min. Przebieg próby ściskania rejestrował podłączony do stanowiska komputerowy system akwizycji danych, następnie mierzone były wartości siły i przemieszczenia. Model przedstawiono na rysunku 5.12. Za każdym razem w maszynie umieszczano dwie próbki naprzeciwko siebie. Wykonano 3 próby ściskania – zniszczono 6 próbek.



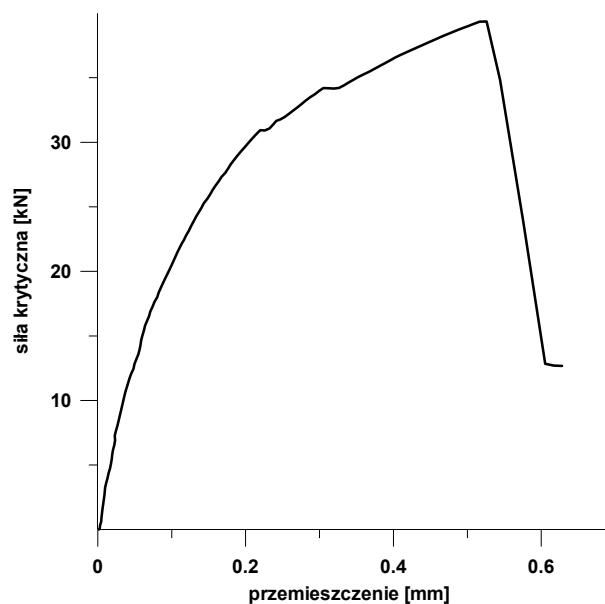
Rys. 5.12 Model doświadczalny struktur sandwichowych – utwierdzony panel cylindryczny

## 5.2. Porównanie uzyskanych wyników z obliczeniami analitycznymi

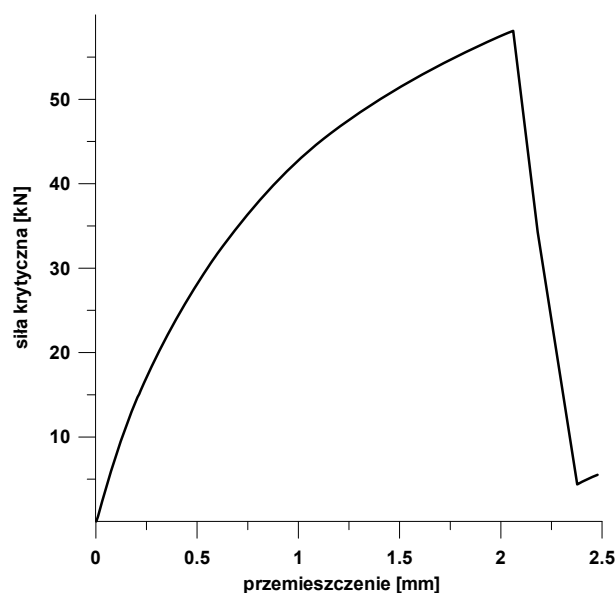
Za każdym razem w maszynie umieszczano dwie próbki naprzeciwko siebie. Wykonano 3 próby ściskania – zniszczono 6 próbek. Rysunki 5.13 – 5.15 przedstawiają zależności siły krytycznej od przemieszczenia dla wykonanych prób.



Rys. 5.13 Zależność siły krytycznej od przemieszczenia dla próby 1.



Rys. 5.14 Zależność siły krytycznej od przemieszczenia dla próby 2.



Rys. 5.15 Zależność siły krytycznej od przemieszczenia dla próby 3.

W próbach otrzymano następujące wartości siły krytycznej:

- próba 1 – 63,14 kN
- próba 2 – 39,35 kN
- próba 3 – 58,10 kN

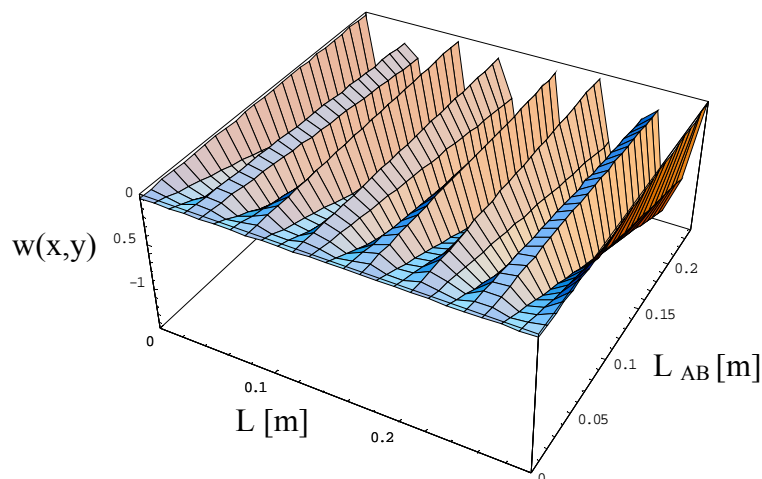
Największą wartość otrzymano w próbie 1. Należy tu podkreślić, że zależność siły krytycznej od przemieszczenia (patrz: rys. 5.13) jest liniowa. W dwóch pozostałych próbach otrzymano mniejsze wartości (zwłaszcza dla próby 2). Na rysunkach 5.14 i 5.15 można zauważyć nieliniową zależność siły krytycznej od przemieszczenia, szczególnie dla próby 2. Taki przebieg wykresów sugeruje wady powstałe podczas wykonywania próbek – tzw. imperfekcje. Warto również zaznaczyć, że za każdym razem pęknięcie próbek następowało w innym miejscu.



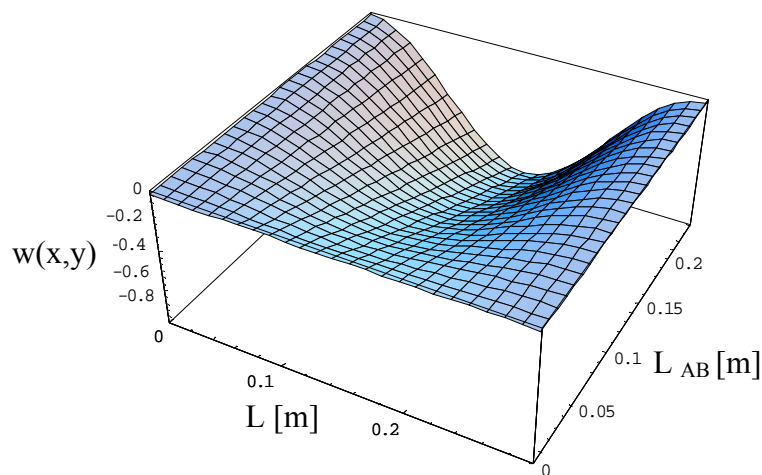
Celem weryfikacji wyników doświadczenia, wartość siły krytycznej obliczono analitycznie. Zastosowano teorię 11p, ponieważ wyniki otrzymane dla tej teorii są najbliższe wynikom rzeczywistym. Wykazano to w rozdziale 4.7. Liczba półfal wyboczenia  $m$  wynosiła 17, a  $n = 1$ . Otrzymana wartość siły krytycznej to 99,40 kN. Tak duża różnica pomiędzy wynikami teoretycznymi, a eksperymentalnymi wynika z niedoskonałego wykonania próbek.

Wysoka liczba półfal  $m$  powoduje, że zniszczenie może wystąpić w różnych miejscach próbki. Na rysunku 5.16 pokazano  $w(x,y)$  dla optymalnej liczby półfal –  $m=17$ ,  $n=1$  dla wymiarów badanej struktury – w punktach przegięcia może wystąpić utrata stateczności. Doświadczenie potwierdziło poprawność tego opisu, ponieważ wyboczenie próbek nastąpiło w różnych miejscach. Można zatem przyjąć, że wykres przedstawiony na rys. 5.16 dobrze odzwierciedla stan rzeczywisty.

W przypadku pozostałych trzech analizowanych teorii (L-K, FSDT i HSDT) liczba półfal jest inna –  $m=1$ ,  $n=2$ . Po przedstawieniu tego w formie graficznej można stwierdzić (patrz: rys. 5.17), że dla tych teorii zniszczenie próbki powinno zawsze występować w połowie długości. Jednak, jak wykazało doświadczenie, takie podejście jest błędne.



Rys. 5.16  $w(x,y)$  dla optymalnej liczby półfal wyboczenia dla teorii 11p.



Rys. 5.17  $w(x,y)$  dla optymalnej liczby półfal wyboczenia dla teorii L-K, FSDT i HSDT.

## 6. WNIOSKI I KIERUNKI DALSZYCH PRAC

### 6.1. Wnioski

W pracy przedstawiono metodykę budowania relacji 2-W do opisu deformacji, wyboczenia i drgań swobodnych płyt i powłok sandwiczowych z okładzinami wykonanymi z materiałów kompozytowych. Omówiono także możliwości zastosowania proponowanego podejścia do opisu struktur wielowarstwowych wykonanych z materiałów ceramicznych (FGM). Analizę teoretyczną przeprowadzono przy zastosowaniu pakietu symbolicznego MATHEMATICA. Przedstawiono również opis badań doświadczalnych dla paneli cylindrycznych.

Zdaniem autora, jako najważniejsze osiągnięcia tej pracy należy wymienić:

1. zbudowanie programu pozwalającego na obliczenie energii swobodnej dla dowolnego typu: a) 2-W hipotez kinematycznych, b) hipotez statycznych, c) relacji fizycznych oraz d) kształtu struktur wielowarstwowych;
2. zastosowanie powyższego sformułowania pozwala na utworzenie w sposób analityczny (symboliczny): potencjału Hamiltona lub potencjału całkowitej energii potencjalnej układu dla dowolnego typu obciążeń zewnętrznych, tzn.: sił osiowych, sił stycznych, ciśnienia zewnętrznego lub obciążenia złożonego stanowiącego kombinację powyższych składników;
3. wyznaczenie w sposób analityczny obciążeń powodujących utratę stateczności dla płyt prostokątnych i powłok cylindrycznych o przekroju kołowym oraz częstotliwości drgań swobodnych; badania przeprowadzono dla teorii Love'a-Kirchhoffa (3 parametry kinematyczne), teorii poprzecznego ścinania I rzędu (5 parametrów kinematycznych), teorii poprzecznego ścinania III rzędu (5 parametrów kinematycznych) oraz teorii 11 parametrowej uwzględniającej ściśliwość elementu normalnego;
4. wykazanie dokładności poszczególnych sformułowań poprzez porównanie z wynikami dostępnymi w literaturze dla teorii 3-W; najmniejsze błędy otrzymano dla teorii 11 parametrowej – wyniki te są uzależnione od wartości ilorazu: grubość wypełniacza do grubości struktury oraz wartości modułów Kirchhoffa  $G_{13}$  i  $G_{23}$ ;
5. wykazano, że optymalne orientacje ułożenia włókien w okładzinach uzależnione są od rodzaju stosowanej hipotezy kinematycznej;
6. przeprowadzono badania doświadczalne dla ściskanych, sandwiczowych paneli cylindrycznych; zauważono, że teoria 11p dość dokładnie opisuje deformacje rzeczywistego modelu; rozrzut wyników doświadczalnych spowodowany jest, zdaniem autora, wpływem imperfekcji geometrycznych i materiałowych.

Uważam, że opracowana metodyka umożliwia łatwą ocenę wpływu poszczególnych sformułowań na wyniki. Otrzymane rozwiązania mają formę analityczną, dzięki czemu ich implementacja do różnego typu sformułowań normalizacyjnych jest prosta oraz możliwa jest analiza parametryczna wpływu parametrów geometrycznych i/lub materiałowych na wyniki.

## 6.2. Kierunki dalszych prac

Badania zaprezentowane w niniejszej rozprawie można kontynuować i rozwijać w wielu kierunkach. Kontynuacja i rozwój mogą być realizowane zarówno poprzez udoskonalanie zaproponowanego modelu numerycznego opisu relacji kinematycznych i fizycznych, jak również przez rozszerzenie podejścia optymalizacyjnego.

Poniżej zaproponowano kilka kierunków prac badawczych, które można realizować w przyszłości:

1. sprawdzenie przydatności proponowanego modelu do opisu zjawisk, w których możliwa jest lokalna delaminacja połączona z wyboczeniem sublaminatu; przykłady tego typu nie zostały zbadane w pracy ani teoretycznie, ani doświadczalnie;
2. porównanie metod oceny niepewności i niejednoznaczności w opisie stałych geometrycznych i właściwości materiałowych konstrukcji w ujęciu teorii zbiorów rozmytych oraz statystyki matematycznej – przede wszystkim wyjaśnienie: czy i w jakim stopniu jest to możliwe;
3. dołączenie do opisu możliwości modelowania właściwości mechanicznych wypełniacza w postaci plastra miodu, w zależności od jego budowy geometrycznej;
4. uwzględnienie innej postaci relacji fizycznych, przede wszystkim lepko-sprężystości i/lub lepko-plastyczności do opisu zachowania okładzin;
5. przeprowadzenie większej ilości badań doświadczalnych dla konstrukcji i/lub wykorzystanie istniejących wyników badań do oceny poprawności proponowanego modelu;
6. dołączenie algorytmu optymalizacyjnego do opracowanych procedur w celu określenia optymalnych konfiguracji okładzin kompozytowych oraz grubości wypełniacza dla konkretnych postaci funkcji celu.

# DODATKI

## Aneks A – materiały FGM jako struktury warstwowe

W ostatniej dekadzie opracowano nowy rodzaj struktur warstwowych – materiały FGM (z angielskiego – functionally graded materials). Jak wynika z nazwy, właściwości materiału zmieniają się funkcjonalnie (patrz: rys. 2.5c), tak aby struktura mogła mieć jednocześnie np. wysokie właściwości mechaniczne oraz charakteryzowała się ognioodpornością. Materiały te, podobnie jak struktury sandwiczowe, mają zmienne właściwości w przekroju  $z$ . Należy tu jednak podkreślić, że w przeciwieństwie do sandwiczów, materiały FGM zmieniają właściwości stopniowo. Właściwości obydwóch rodzajów materiałów można opisać za pomocą zależności:

$$p(z) = (p_t - p_b)V(z) + p_b \quad (\text{A.1})$$

gdzie  $p$  oznacza dowolną właściwość materiału,  $p_t$  i  $p_b$  odnoszą się do właściwości w górnej i dolnej części przekroju, a  $V(z)$  jest funkcją opisującą zmiany właściwości. Funkcję  $V(z)$  można zdefiniować w następujący sposób:

$$V(z) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N [1(z - z_{i-1}) - 1(z - z_i)] & \text{dla sandwiczów} \\ \left(\frac{z}{t} + \frac{1}{2}\right)^n & z \in [-t/2, t/2] \text{ dla FGM} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

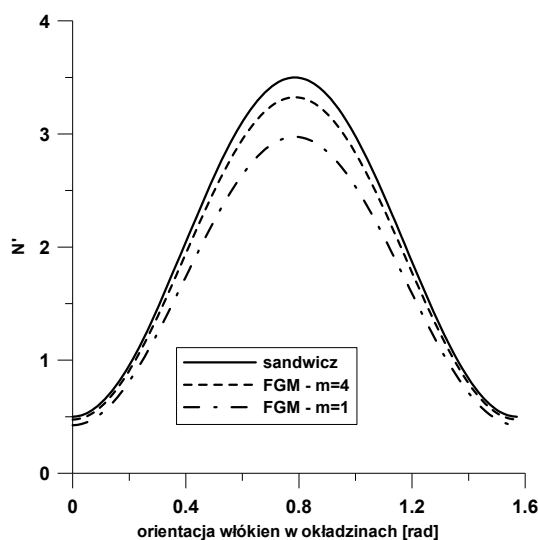
Jednakże dokładne opisanie wybożenia dla materiałów FGM, szczególnie dla struktur 2-W, wciąż stanowi problem – patrz [91, 92, 93].

W pracy [5] wykazano, że przy pomocy specjalnie stworzonego pakietu w ramach programu Mathematica, materiały FGM można z pewnym przybliżeniem traktować jako struktury sandwiczowe.

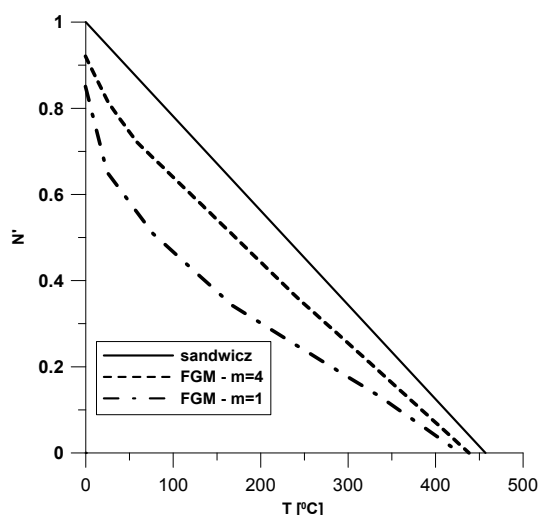
Dla teorii L-K dokonano porównania obciążonej osiowo w kierunku  $x$  płyty kwadratowej o stosunku  $t/a = 0,1$ . Jak można zaobserwować na rysunku A.1, otrzymano niewielkie różnice pomiędzy sandwiczem, a materiałem FGM. Jednakże należy tu podkreślić, że wyniki są funkcją liczby półfal wybożenia  $m$ . Można zaobserwować, że wraz ze wzrostem liczby półfal wybożenia  $m$  zmniejszają się różnice pomiędzy materiałem FGM, a sandwiczem.

W przypadku obciążenia złożonego (obciążenie siłą osiową oraz obciążenie termiczne) również można zaobserwować, że wraz ze wzrostem liczby półfal  $m$ ,

zmniejszają się różnice pomiędzy wynikami dla sandwicz, a wynikami dla materiału FGM. Na rysunku A.2 przedstawiono wykres porównujący sandwicz z materiałem FGM w przypadku obciążenia złożonego. Podobnie jak w pierwszym analizowanym przypadku, są to wyniki dla płyty kwadratowej o stosunku  $t/a = 0,1$ .  $N'$  oznacza ubezwymiarowane obciążenie złożone. W celu ubezwymiarowania podzielono otrzymane wyniki przez wartość siły krytycznej dla laminatu o identycznych wymiarach.



Rys. A.1 Wykres przedstawiający porównanie siły krytycznej dla kwadratowej płyty sandwiczowej i FGM



Rys. A.2 Wykres przedstawiający porównanie obciążenia złożonego dla kwadratowej płyty sandwiczowej i FGM

W aneksie A przestawiono krótkie porównanie struktur sandwiczowych z materiałami FGM. Zaprezentowano również ich przykładowe właściwości. Jednakże, aby móc z całą pewnością stwierdzić, że dla materiałów FGM można stosować identyczne przybliżenia jak dla sandwicz i laminatów wielowarstwowych, należało by przeprowadzić dodatkowe obliczenia i badania, które mogłyby być materiałem na kolejną rozprawę doktorską.

## Aneks B – optymalne wartości półfal $m$ i $n$

Teoria	Kąt orientacji włókien w okładzinach	Płyta kwadratowa $a/b = 1$							
		Swobodne podparcie		Utwierdzenie boku $x$		Utwierdzenie boku $y$		Utwierdzenie obydwóch boków	
		$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$
L-K	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	1	1	1	1
	45°	1	1	1	1	2	1	1	1
	60°	1	1	1	1	2	1	1	1
	90°	1	1	1	1	2	1	1	1
FSDT	0°	1	1	1	1	2	1	2	1
	30°	1	1	1	1	2	1	2	1
	45°	2	1	1	1	2	1	2	1
	60°	2	1	1	1	2	1	2	1
	90°	2	1	1	1	2	1	2	1
HSDT	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	2	1	1	1
	45°	1	1	1	1	2	1	1	1
	60°	2	1	1	1	2	1	2	1
	90°	2	1	1	1	2	1	2	1
11p	0°	1	1	1	1	3	1	2	1
	30°	2	1	2	1	3	1	2	1
	45°	2	1	2	1	3	1	2	1
	60°	2	1	2	1	3	1	2	1
	90°	2	1	2	1	3	1	2	1

Tabela B.1 Wartości półfal  $m$  i  $n$  dla płyty kwadratowej  $a/b = 1$  dla wyboczenia

Teoria	Kąt orientacji włókien w okładzinach	Płyta prostokątna $a/b = 1/2$							
		Swobodne podparcie		Utwierdzenie boku $x$		Utwierdzenie boku $y$		Utwierdzenie obydwóch boków	
		$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$
L-K	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	1	1	1	1
	45°	1	1	1	1	1	1	1	1
	60°	1	1	1	1	1	1	1	1
	90°	1	1	1	1	1	1	1	1
FSDT	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	1	1	1	1
	45°	1	1	1	1	1	1	1	1
	60°	1	1	1	1	1	1	1	1
	90°	1	1	1	1	1	1	1	1
HSDT	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	1	1	1	1
	45°	1	1	1	1	1	1	1	1
	60°	1	1	1	1	1	1	1	1
	90°	1	1	1	1	1	1	1	1
1lp	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	1	1	1	1
	45°	1	1	1	1	1	1	1	1
	60°	1	1	1	1	1	1	1	1
	90°	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela B.2 Wartości pól  $m$  i  $n$  dla płyty prostokątnej  $a/b = 1/2$  dla wyboczenia

Teoria	Kąt orientacji włókien w okładzinach	Powłoka cylindryczna $L/r = 1$			
		Swobodne podparcie		Utwierdzenie	
		m	n	m	n
L-K	0°	1	2	1	2
	30°	1	2	1	2
	45°	2	1	1	2
	60°	2	1	1	2
	90°	1	2	1	2
FSDT	0°	1	3	1	3
	30°	2	1	3	1
	45°	2	1	4	1
	60°	3	1	1	3
	90°	3	1	1	2
HSDT	0°	1	3	1	3
	30°	2	1	1	3
	45°	2	1	1	3
	60°	3	1	1	3
	90°	1	3	1	3
11p	0°	4	1	3	1
	30°	4	1	3	1
	45°	4	1	3	1
	60°	5	1	4	1
	90°	4	4	4	1

Tabela B.3 Wartości półfal  $m$  i  $n$  dla powłok cylindrycznych  $L/r = 1$  dla wyboczenia



Teoria	Kąt orientacji włókien w okładzinach	Płyta kwadratowa $a/b = 1$							
		Swobodne podparcie		Utwierdzenie boku $x$		Utwierdzenie boku $y$		Utwierdzenie obydwóch boków	
		$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$
L-K	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	1	1	1	1
	45°	1	1	1	1	2	1	1	1
	60°	1	1	1	1	2	1	1	1
	90°	1	1	1	1	2	1	1	1
FSDT	0°	1	1	1	1	2	1	2	1
	30°	1	1	1	1	2	1	2	1
	45°	2	1	1	1	2	1	2	1
	60°	2	1	1	1	2	1	2	1
	90°	2	1	1	1	2	1	2	1
HSDT	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	2	1	1	1
	45°	1	1	1	1	2	1	1	1
	60°	2	1	1	1	2	1	2	1
	90°	2	1	1	1	2	1	2	1
1lp	0°	1	1	1	1	3	1	2	1
	30°	2	1	2	1	3	1	2	1
	45°	2	1	2	1	3	1	2	1
	60°	2	1	2	1	3	1	2	1
	90°	2	1	2	1	3	1	2	1

Tabela B.4 Wartości półfal  $m$  i  $n$  dla płyty kwadratowej  $a/b = 1$  dla drgań swobodnych

Teoria	Kąt orientacji włókien w okładzinach	Płyta prostokątna $a/b = 1/2$							
		Swobodne podparcie		Utwierdzenie boku $x$		Utwierdzenie boku $y$		Utwierdzenie obydwóch boków	
		$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$
L-K	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	1	1	1	1
	45°	1	1	1	1	1	1	1	1
	60°	1	1	1	1	1	1	1	1
	90°	1	1	1	1	1	1	1	1
FSDT	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	1	1	1	1
	45°	1	1	1	1	1	1	1	1
	60°	1	1	1	1	1	1	1	1
	90°	1	1	1	1	1	1	1	1
HSDT	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	1	1	1	1
	45°	1	1	1	1	1	1	1	1
	60°	1	1	1	1	1	1	1	1
	90°	1	1	1	1	1	1	1	1
11p	0°	1	1	1	1	1	1	1	1
	30°	1	1	1	1	1	1	1	1
	45°	1	1	1	1	1	1	1	1
	60°	1	1	1	1	1	1	1	1
	90°	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela B.5 Wartości pól  $m$  i  $n$  dla płyty prostokątnej  $a/b = 1/2$  dla drgań swobodnych

Teoria	Kąt orientacji włókien w okładzinach	Powłoka cylindryczna $L/r = 1$			
		Swobodne podparcie		Utwierdzenie	
		$m$	$n$	$m$	$n$
L-K	0°	1	2	1	2
	30°	1	2	1	2
	45°	2	1	1	2
	60°	2	1	1	2
	90°	1	2	1	2
FSDT	0°	1	3	1	3
	30°	2	1	3	1
	45°	2	1	4	1
	60°	3	1	1	3
	90°	3	1	1	2
HSDT	0°	1	3	1	3
	30°	2	1	1	3
	45°	2	1	1	3
	60°	3	1	1	3
	90°	1	3	1	3
11p	0°	4	1	3	1
	30°	4	1	3	1
	45°	4	1	3	1
	60°	5	1	4	1
	90°	4	4	4	1

Tabela B.6 Wartości półfal  $m$  i  $n$  dla powłok cylindrycznych  $L/r = 1$  dla drgań swobodnych

## 7. LITERATURA

- [1] Bitzer T., Bitzer T.N., *Honeycomb Technology: Materials, Design, Manufacturing, Applications and Testing*, Springer, 2006
- [2] Materiały reklamowe Scuderia Ferrari
- [3] Materiały reklamowe Singapore Airlines
- [4] Muc A., Nogowczyk R., Formy zniszczenia konstrukcji sandwichowych z okładzinami wykonanymi z kompozytów, *Kompozyty*, nr 4/2005, s. 31-35
- [5] Muc A., Nogowczyk R., Influence Of 2-D Approximations On Buckling Loads For Sandwich Structures Having Frp Faces, *ICEE/16, 2008*, CD – 2 str.
- [6] Romanów F., *Wytrzymałość konstrukcji warstwowych*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Zielonej Górze, Zielona Góra 1995
- [7] Vinson J.R., *The Behaviour of Shells Composed of Isotropic and Composite Materials*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993
- [8] Muc A., *Projektowanie kompozytowych zbiorników ciśnieniowych*, Politechnika Krakowska, Kraków 1999
- [9] Plantema F.J., *Sandwich Constructions The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates and Shells*, John Wiley & Sons Inc. 1966
- [10] Vinson J.R., *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*, Technomic Publishing Company, 1999
- [11] Vinson J.R., *Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials, Including Sandwich Construction (Solid Mechanics and Its Applications)*, Springer, 2005
- [12] Gibson L.J., Ashby M., *Cellular Solids: Structure and Properties*, wydanie 2, Cambridge University Press, 1999
- [13] Davies J. M., *Lightweight Sandwich Construction*, Blackwell Publishing Limited, 2001
- [14] Altenbach H., Altenbach J., Kissing W., *Mechanics of Composite Structural Elements*, Springer, 2004
- [15] Ehrenstein G.W., *Faserverbund-Kunststoffe*, Hanser, 1992
- [16] Reissner E., *Finite deflections of sandwich plates*. J Aeronaut Sci 1948
- [17] Frostig Y., Classical and high-order computational models in the analysis of modern sandwich panels, *Composites Part B: Engineering* Volume: 34, Issue: 1, 2003, s. 83-100
- [18] Noor A.K., Burton W.S., Bert C.W., Computational models for sandwich panels and shells. *Appl Mech Rev* 49, 1996, s. 155–99
- [19] Altenbach H., Theories for laminated and sandwich plates, A review, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 34(3), 1998, s. 243-252

- [20] Chamis C.C., Aiello R.A., Murphy P.L.N., Composite sandwich thermostructural behaviour: computational simulation, *Proc 27<sup>th</sup> Struct, Structural Dyn and Mat Conf, San Antonio TX, May 19-21, 1986*, Technical Papers, Part 1, s. 370-381
- [21] Muc A.; Zuchara P., Buckling and failure analysis of FRP faced sandwich plates, *Composite Structures*, Volume 48(1-3), 2000, s. 145-150
- [22] Ohga M., Wijenayaka A.S., Croll G.A.J., Lower bound buckling strength of axially loaded sandwich cylindrical shell under lateral pressure, *Thin-Walled Structures* Vol. 44, 2006, s. 800–807
- [23] Burton W.S., Noor A.K., Three-dimensional solutions for thermomechanical stresses in sandwich panels and shells, *Comp Meth Appl Mech Eng* 124(1-2), 1994, s. 125-151
- [24] Chamis C.C., Aiello R.A., Murphy P.L.N., Fiber composite sandwich thermostructural behaviour: computational simulation, *J Composites Tech Res* 10(3), 1988, s. 93-99
- [25] Lee K.H., Xavier P.B., Chew C.H., Static response of unsymmetric sandwich beams using an improved zig-zag model, *Composites Eng* 3(3), 1993, s. 235-248
- [26] Ivanov V.A., Paimushin V.N., Polyakova T.V. (1995), Improved stability theory of three-layered structures (linearised buckling equations and reduction to one dimensional problems), *Izvestia Vishchix Utschebnikh Zavedenii, Matematika, Nautchno-Teoreticheskii Zhurnal*, Izdatelstvo Fort dialog, Kazan 3(394), 1995, s. 15-24 (po rosyjsku)
- [27] Wang C.T., *Principle and Application of Complementary Energy Method for Thin Homogeneous and Sandwich Plates and Shells with Finite Deflections*, NACA TN-2620, 1952
- [28] Adams R.D., Maheri M.R., The dynamic shear properties of structural honeycomb materials, *Comp Science Tech* 47(1), 1993, s. 15-23
- [29] Kuenzi E.W., *Mechanical Properties of Aluminum Honeycomb Cores*, US Forest Products Lab, Madison WI, FPL-1849, 1955
- [30] Ueng C.E.S., Kim T.D., Shear modulus of core materials with arbitrary polygonal shape, *Comput Struct* 16(1-4), 1983, s. 21-25
- [31] Kobelev V.N., Ustarkhanov O.M., Bulgakov A.I., Reduced characteristics of sandwich structure pyramidal filler, *Izvestiya Aviatsionnaya Tekhnika* 34(1), 1991, s. 3-6
- [32] Grediac, A finite element study of the transverse shear in honeycomb cores, *Int J Solids Struct* 30(13), 1993, s. 1777-1788
- [33] Jeusette J.P., Laschet G., Pre- and postbuckling finite element analysis of curved composite and sandwich panels, *AIAA J* 28(7), 1990, s. 1233-1239
- [34] Roy A.K., Verchery G., Approximate methods of predicting interlaminar shear stiffness of laminated sandwich beams, *SAMPE Quarterly* 24(2), 1993, s. 22-27
- [35] Rotschild Y., Nonlinear finite elements analysis of uniformly loaded GRP sandwich panel, *Composites – Design, Manufacture and Application (proc 8<sup>th</sup> Int Conf on Composite Mat)*, Tsai S.W., Springer G.S. (eds), SAMPE, Covina CA, 1991, 3-E-11 do 3-F-10

- [36] Peng L.X., Kitipornchai S., Liew K.M., Bending analysis of folded plates by the FSDT meshless method, *Thin-Walled Structures* Volume 44(11), 2006, s. 1138-1160
- [37] Kant T., Kommineni J.R., C0 finite element geometrically nonlinear analysis of fibre reinforced composite and sandwich laminates based on higher-order theory, *Comput Struct* 45(3), 1992, s. 511-520
- [38] Pandya B.N., Kant T., Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates – finite element evaluations, *Int J Solid Struct* 24(12), 1988, s. 1267-1286
- [39] Didenko N.I., Samsonov A.M., Optimization of elastic Reissner plates and three-layer plates under complex loading, *Prikl Mekh* 24(7), s. 89-95 (po rosyjsku), tłumaczenie angielskie, *Sov Appl Mech* 24, 1989, s. 712-717
- [40] Kamiya N., Sawaki Y., Nakamura Y., Nonlinear bending analyses of heated sandwich plates and shells by the boundary element method, *Res Mechanica* 8(1), 1983, s. 29-38
- [41] Borsellino C., Calabrese L., Valenza A., Experimental and numerical evaluation of sandwich composite structures, *Composites Science and Technology* Volume 64(10-11), 2004, s. 1709-1715
- [42] Kim J.H., Lee Y.S., Park B.J., Kim D.H., Evaluation of durability and strength of stitched foam-cored sandwich structures, *Composite Structures* Volume 47(1-4), 1999, s. 543-550
- [43] Noor A.K., Burton W.S., Peters J.M., Hierarchical adaptive modeling of structural sandwiches and multilayered composite panels, *Appl Num Math* 14, 1994, s. 69-90
- [44] Rao K.M., Meyer-Piening H.-R., Vibration analysis of FRP faced sandwich plates using hybrid-stress finite element method, *Comput Struct* 41(2), 1991, s. 177-188
- [45] Dong S.B., Chun C.K., Shear constitutive relations for laminated anisotropic shells and plates: Part 1 – methodology, *J Appl Mech*, ASME 59, 1992, s. 372-379
- [46] Kant T., Mallikarjuna, A higher order theory for free vibration of unsymmetrically laminated composite and sandwich plates – finite element evaluations, *Comput Struct* 32(5), 1989, s. 1125-1132
- [47] Hu H., Belouettar S., Potier-Ferry M., El Mostafa D., Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites, *Composite Structures* vol. 84, 2008, s. 282-292
- [48] Mallikarjuna, Kant T., Free vibration of symmetrically laminated plates using a higher-order theory with finite element technique, *Int J Num Meth Eng* 28, 1989, s. 1875-1889
- [49] Khare R.K., Kant T., Garg A.K., Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element, *Composite Structures* vol. 65, 2004, s. 405-418
- [50] Chung Y.C., Yu R.H., Chiang D.M., Wu S.L., Finite element model of composite sandwich plates for bending and vibration analysis, *How Concept ... Becomes Reality (proc 36<sup>th</sup> Int SAMPE Symp and Exhib)*, Stinson J., Adsit R., Gordaninejad F. (eds), April 15-18, 1991, San Diego CA, SAMPE, Covina CA, Vol 36, s. 681-692

- [51] Kanematsu H.H., Hirano Y., Iyama H., Bending and vibration of CFRP-faced rectangular sandwich plates, *Composite Structures* 10(2), 1988, s. 145-163
- [52] Liebowitz M., Lifshitz J.M., Experimental verification of modal parameters for three-layered sandwich beams, *Int J Solids Struct* 26(2), 1990, s. 175-184
- [53] Rikards R.B., Chate A.K., Koryakin A.V., Damping analysis of laminated composite plates by finite element method, *Mekhanika Kompozitnykh Materialov* 30(1), 1994, s. 91-104 (po rosyjsku)
- [54] Kant T., Arora C.P., Varaiva J.H., Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and a mode superposition method, *Composite Struct* 22(2), 1992, s. 109-120
- [55] Maheri M.R., Adams R.D., Steady-state flexural vibration damping of honeycomb sandwich beams, *Composites* 14(4), 1994, s. 383-386
- [56] Heuer R., Irschik H, Erzwungene schwingungen elastischer sandwichplatten mit dicken deckschichten, *Zeitschrift fur Angewandte Math und Mech* 71(4), 1991, s. T86-T88
- [57] Watanabe N., Teranishi K., Stiffness and buckling analysis for sandwich plates with thermal buckling CFRP face sheets: Qualitative approach, *Proc 35<sup>th</sup> Struct, Structural Dyn and Mat Conf*, Hilton Head SC, April 18-22, 1994, *AIAA*, s. 2019-2027
- [58] Léotoing L., Drapier S., Vautrin A., First applications of a novel unified model for global and local buckling of sandwich columns, *European Journal of Mechanics A/Solids* 21, 2002, s. 683-701
- [59] Heder M., Buckling of sandwich panels with different boundary conditions – A comparison between FE-analysis and analytical solutions, *Composite Structures* 19(4), 1991, s. 313-332
- [60] Noor A.K., Peters J.M., Burton W.S., Three-dimensional solutions for initially stressed structural sandwiches, *J Eng Mech* 120(2), 1994, s. 284-303
- [61] Liang S, Chen H.L., Investigation on the square cell honeycomb structures under axial loading, *Composite Structures* Vol. 72, 2006, s. 446-454
- [62] Hwu C., Hu J.S., Delamination buckling of honeycomb sandwich with laminated faces, *Composites – Design, Manufacture and Application (Proc 8<sup>th</sup> Int Conf Composite Mat (ICCM/8))*, Honolulu, July 15-19, 1988, Tsai S.W., Springer G.S. (eds), SAMPE, Covina CA, 3-B-1 do 3-B-10
- [63] Bert C.W., Cho K.N., Uniaxial compressive and shear buckling in orthotropic sandwich plates by an improved theory, *Mech Struct Machines* 17(3), 1989, s. 283-302
- [64] Di Sciuva M., Carrera E., Static buckling of moderately thick, anisotropic, laminated, and sandwich cylindrical shell panels, *AIAA J* 28(10), 1990, s. 1782-1793
- [65] Bert C.W. Shear deformation and sandwich configuration, *Buckling and postbuckling of composite plates*, Turvey G.J., Marshall I.H. (eds), Chapman & Hall, 1995, s. 157-189
- [66] Mondal B., Ganapathi M., Kalyani A., On the elastic stability of simply supported anisotropic sandwich panels, *Composite Structures* vol. 80, 2007, s. 631-635

- [67] Peck S.O., Springer G.S., The behavior of delaminations in composite plates – analytical and experimental results, *J Composite Mat* 25, 1991, s. 907-929
- [68] Nayak A.K., Moy S.S.J., Shenoj R.A., A higher order finite element theory for buckling and vibration analysis of initially stressed composite sandwich plates, *Journal of Sound and Vibration* Volume 286(4-5), 2005, s. 763-780
- [69] Dafedar J.B., Desai Y.M., Mufti A.A., Stability of sandwich plates by mixed, higher-order analytical formulation, *International Journal of Solids and Structures* Volume 40(17), 2003, s. 4501-4517
- [70] Bushnell D., Truss-core sandwich design via PANDA2, *Comput Struct* 44(5), 1990, s. 1091-1119
- [71] Rao K.P., Buckling of composite sandwich rectangular panels (grid core), *J Reinforced Plastics and Composites* 7(1), 1988, s. 72-89
- [72] Askerov S.A., Experimental and theoretical study of sandwich structure skin stability, *Sov Aeronautics* 34(2), 1991, s. 1-4
- [73] Mahfuz H., Islam S., Saha M., Carlsson L., Jeelani S., Buckling of Sandwich Composites; Effects of Core–Skin Debonding and Core Density, *Applied Composite Materials* Volume 12(2), 2005, s. 73-91
- [74] Boyle M.P., Roberts J.C., Wienhold P.D., Bao G., White G.J., Experimental, numerical, and analytical results for buckling and post-buckling of orthotropic rectangular sandwich panels, *Composite Structures* Volume 52(3-4), 2001, s. 375-380
- [75] Arman Y., Zor M., Aksoy S., Determination of critical delamination diameter of laminated composite plates under buckling loads, *Composites Science and Technology* Vol. 66, 2006, s. 2945–2953
- [76] Roberts J.C., Boyle M.P., Wienhold P.D., White G.J., Buckling, collapse and failure analysis of FRP sandwich panels, *Composites Part B* 33, 2002, s. 315-324
- [77] Muc A., Nogowczyk R., Failure Modes of Sandwich Structures with FRP Faces, *Proc International Conference "Fibrous Materials - XXI Century"*, 2005, CD 8 str.
- [78] Minguet P., Dugundji J., Lagace P.A., Buckling and failure of sandwich plates with graphite-epoxy faces and various cores, *J Aircraft* 25(4), 1988, s. 372-379
- [79] Nordstrand T.M., Parametric study of the post-buckling strength of structural core sandwich panels, *Composite Struct* 30, 1995, s. 441-451
- [80] Othman A.R., Barton D.C., Failure initiation and propagation characteristics of honeycomb sandwich composites, *Composite Structures* vol. 85, 2008, s. 126–138
- [81] Zhen W., Wanji C., An assessment of several displacement-based theories for the vibration and stability analysis of laminated composite and sandwich beams, *Composite Structures* Volume 84, 2008 s. 337–349
- [82] Pinna R., Ronalds B.F., Hydrostatic buckling of shells with various boundary conditions, *Journal of Constructional Steel Research* Vol 56, 2000, s. 1–16
- [83] Pandit M.K., Singh B.N., Sheikh A.H., Buckling of laminated sandwich plates with soft core based on an improved higher order zigzag theory, *Thin-Walled Structures* 46, 2008, s. 1183– 1191



- [84] Muc A., *Mechanika kompozytów włóknistych*, Księgarnia Akademicka, Kraków, 2003
- [85] Muc A., *Optymalizacja struktur kompozytowych i procesów technologicznych ich wytwarzania*, Księgarnia Akademicka, Kraków 2005
- [86] Narita Y. Series and Ritz-type buckling, *Buckling and postbuckling of composite plates*, ed. Turvey G.J., Marshall I.H., Chapman & Hall, 1995, s. 33-57
- [87] Wolfram S., *The Mathematica Book*, wydanie 5, Wolfram Media, 2003
- [88] Khatua T.P., Cheung Y.K., Stability analysis of multilayer sandwich plates. *AIAA J* 1973;11(9): s. 1233–1234
- [89] Yuan W.X., Dawe D.J., Overall and local buckling of sandwich plates with laminated faceplates, part II: Applications, *Comput Methods Appl Mech Eng* 190, 2001, s. 5215–5231
- [90] Rao K.M., Buckling analysis of anisotropic sandwich plates faced with fibre-reinforced plastics. *AIAA J* 1985;23(8), s. 1247–1253
- [91] Reddy, J.N. ,Chin, C.D. Thermoelastical analysis of functionally graded cylinders and plates, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 21, 1998, s. 593-626
- [92] Shiota I., Miyamoto Y. *Functionally Graded Materials* , Ed., Elsevier, 1997, s.137-141
- [93] Abrate S., Functionally graded plates behave like homogeneous plates, *Composites: Part B* 39, 2008, s. 151–158