

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki  
Wydział Mechaniczny  
Instytut Mechaniki Stosowanej  
Katedra Dynamiki Układów Materialnych

## **PRACA DOKTORSKA**

### **Drgania regularne i chaotyczne dyskretnych układów mechanicznych z ograniczeniami przemieszczeniowymi**

Autor: **mgr inż. Urszula Ferdek**

Promotor: **dr hab. inż. Jan Łuczko, prof.PK**

Kraków 2007



## SPIS TREŚCI

<b>Spis treści</b> .....	1
<b>Wykaz ważniejszych oznaczeń</b> .....	3
<b>1. Wprowadzenie</b> .....	5
1.1. Przegląd literatury .....	6
1.2. Cel i zakres pracy .....	10
<b>2. Wybrane narzędzia i wskaźniki oceny drgań</b> .....	13
2.1. Wykładniki Lapunowa .....	13
2.2. Wymiar fraktalny .....	17
2.3. Szybka transformata Fouriera .....	18
2.4. Mapy Poincare'go .....	20
<b>3. Metody analizy</b> .....	22
3.1. Metody uzyskiwania rozwiązań .....	22
3.1.1 Metoda Rungego-Kutty .....	22
3.1.2 Metoda bazująca na rozwiązaniach analitycznych .....	23
3.2. Analiza jakościowa .....	25
3.2.1 Warunki okresowości .....	25
3.2.2 Analiza widma .....	26
<b>4. Model procesu zderzenia</b> .....	30
4.1. Ruch ograniczony płaszczyzną .....	30
4.2. Ruch ograniczony powierzchnią walcową .....	34
<b>5. Układy udarowe</b> .....	37
5.1. Układ udarowy odcinkami liniowy .....	37
5.1.1. Model układu .....	37
5.1.2. Analiza jakościowa .....	39
5.2. Analiza mechanizmu wspomaganie udaru wiertarki .....	45
5.2.1. Model układu .....	46
5.2.2. Wskaźniki jakości .....	50
5.2.3. Dobór parametrów konstrukcyjnych .....	51
5.3 Wnioski .....	58
<b>6. Wpływ zderzeń na drgania układu wirnik – stojan</b> .....	60
6.1 Wirnik ze sztywno zamocowanym stojanem .....	60

6.1.1	Model układu .....	60
6.1.2	Rezultaty obliczeń .....	64
6.2	Wirnik z podatnie zamocowanym stojanem .....	71
6.2.1	Model układu .....	71
6.2.2	Rezultaty obliczeń .....	74
6.2.3	Wnioski .....	78
<b>7.</b>	<b>Drgania chaotyczne w procesach szlifowania</b> .....	<b>79</b>
7.1	Symulacja procesu szlifowania .....	79
7.1.1	Model układu operator-narzędzie-przedmiot obrabiany .....	79
7.1.2	Rezultaty symulacji numerycznej .....	84
7.2	Dobór pasywnego układu wibroizolacji szlifierki .....	89
7.2.1	Model wibroizolowanej szlifierki .....	89
7.2.2	Rezultaty symulacji numerycznej .....	94
7.3	Wnioski .....	97
<b>8.</b>	<b>Podsumowanie</b> .....	<b>99</b>
8.1	Ogólne wnioski .....	99
8.2	Kierunki dalszych badań .....	100
<b>9.</b>	<b>Literatura</b> .....	<b>102</b>
	<b>Streszczenie</b> .....	<b>109</b>

## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

### Wielkości wektorowe

$\mathbf{z}$	wektor stanu
$\mathbf{F}$	wektor prawych stron równań różniczkowych
$\mathbf{v}$	wektor zaburzeń
$\mathbf{u}$	bezwymiarowy wektor stanu
$\mathbf{f}$	wektor bezwymiarowych wymuszeń
$\mathbf{J}$	macierz Jacobiego
$\Theta$	macierz fundamentalna rozwiązań
$\mathbf{I}$	macierz jednostkowa
$\mathbf{M}$	macierz bezwładności
$\mathbf{G}$	macierz żyroskopowa
$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$	macierze sztywności

### Wielkości skalarne

$u_j, u'_j$	bezwymiarowe współrzędne i prędkości uogólnione
$z(t), Z(f)$	sygnał ciągły i jego transformata
$z(n), Z(k)$	sygnał dyskretny i jego transformata
$f, f_0$	częstotliwość, częstotliwość próbkowania
$S(\nu)$	gęstość widmowa
$\nu$	bezwymiarowa częstość (w analizie widmowej)
$t, \tau$	czas, bezwymiarowy czas
$T$	bezwymiarowy okres drgań
$\omega_0$	częstość odniesienia
$\Omega$	częstość wymuszenia, prędkość kątowa wału
$\omega$	bezwymiarowa częstość wymuszenia
$e$	amplituda wymuszenia
$x, y, x_k, y_k$	przemieszczenia w kierunku osi x i y
$\alpha_k, \beta_k$	kąty obrotu wokół osi x i y
$V^-, V_r^-, \dot{x}_k^-, \dot{y}_k^-$	prędkości przed zderzeniem
$V^+, V_r^+, \dot{x}_k^+, \dot{y}_k^+$	prędkości po zderzeniu
$R$	współczynnik restytucji
$\Delta, \delta$	odległość ogranicznika lub luz, bezwymiarowy luz

$d, \sigma$	ugięcie statyczne, bezwymiarowe ugięcie statyczne
$\mu_0$	współczynnik tarcia
$\lambda_k$	wykładniki Lapunowa
$D_F, D_L$	wymiar fraktalny, wymiar Lapunowa
$N_u$	liczba zderzeń
$S_x, S_y, S_r, S_t$	składowe impulsu siły udarowej w układzie kartezjańskim i biegunowym
$F_x, F_y, F_r, F_t$	składowe sił w układzie kartezjańskim i biegunowym
$f_x, f_y, f_r, f_t$	składowe bezwymiarowych sił w układzie kartezjańskim i biegunowym
$F_p, F_u, F_{1u}, F_{2u}$	siła parcia, siły udarowe
$T, N$	składowa styczna i normalna siły skrawania
$Q, Q_x, Q_y, M_\alpha, M_\beta$	siły i momenty statyczne, oddziaływanie operatora
$q$	bezwymiarowa siła statyczna
$M_{G\alpha}, M_{G\beta}$	momenty żyroskopowe
$B_n, B_\tau$	składowe siły bezwładności
$m_0, e_0$	parametry określające niewyważenie
$m_j, \mu_j$	masy, bezwymiarowe masy
$c_j, c_{jk}, \gamma_j$	współczynniki sztywności, bezwymiarowe współczynniki
$k_j, \kappa_j$	współczynniki sztywności skrętnej, bezwymiarowe współczynniki
$b_j, \zeta_j$	współczynniki tłumienia, bezwymiarowe współczynniki
$c_s, b_s, I_s$	współczynnik sztywności, tłumienia i moment bezwładności wału
$\gamma_s, \zeta_s$	bezwymiarowe współczynniki sztywności i tłumienia wału
$c_u, b_u, t_u, \omega_u$	parametry określające proces zderzenia
$\gamma_u, \zeta_u$	bezwymiarowe parametry procesu zderzenia
$l_j, h_{jk}$	odległości
$I_{kx}, I_{ky}$	moment bezwładności k-tego elementu względem osi x i y
$I_0$	moment bezwładności elementów wirujących
$E_w, E_u$	energia wibracji, energia udaru
$J, J_v, J_a$	wskaźniki jakości
$H(\cdot)$	funkcja Heaviside'a
$\eta(x, \dot{x})$	funkcja przełączająca

## 1. WPROWADZENIE

Drgania są jedną z najczęściej spotykanych w przyrodzie form ruchów. Rozróżniamy drgania zdeterminowane i drgania przypadkowe. W niniejszej pracy ograniczymy się do badania drgań deterministycznych, generowanych przez równania różniczkowe, opisujące ruch dyskretnych układów mechanicznych.

Ogólnie drgania deterministyczne można podzielić na regularne: okresowe i prawie okresowe oraz nieregularne, czyli chaotyczne. W badanych układach najczęściej będą się wzbudzać drgania okresowe o okresie wymuszenia oraz drgania podharmoniczne typu  $1:n$ , czyli o okresie drgań  $n$  razy większym od okresu wymuszenia. Rzadziej występować będą drgania chaotyczne, natomiast drgania prawie okresowe będą pojawiały się tylko w sporadycznych przypadkach. Drgania prawie okresowe powstają poprzez złożenie co najmniej dwóch drgań okresowych o częstościach niewspółmiernych – niekiedy drgania te trudno jest odróżnić od drgań podharmonicznych wysokiego rzędu.

Do określenia drgań chaotycznych nie ma precyzyjnej definicji. W przypadku drgań chaotycznych rozwiązania równań różniczkowych są niezwykle czułe na zmianę warunków początkowych. Może się zdarzyć, że mała różnica warunków początkowych, wnikająca przykładowo z zaokrąglenia wartości pomiarowych lub zastosowanie różnych metod całkowania, a także innych kompilatorów, doprowadzi po pewnym czasie do olbrzymich różnic rozwiązań. Jedną z charakterystycznych cech drgań chaotycznych są ich portrety stroboskopowe na płaszczyźnie fazowej, które mają postać fraktala. Także widmo sygnału chaotycznego jest wyraźnie inne niż widma sygnałów regularnych – charakteryzuje się ono bardzo dużą liczbą „pików”.

Drgania chaotyczne występują tylko w układach nieliniowych. Ponieważ wszystkie rzeczywiste układy są z natury nieliniowe, w większości układów mogą się, przy odpowiednim doborze parametrów, wzbudzić drgania chaotyczne. W procesach modelowania układów mechanicznych wprowadza się jednak pewne założenia upraszczające – najczęściej w celu zastąpienia modelu nieliniowego modelem liniowym. Takie podejście do modelowania wynika z faktu, że metody analizy układów liniowych są dobrze opracowane, skuteczne i niezawodne, a ponadto w wielu przypadkach dają prawidłowe rezultaty. Jednak przy takim

podejściu traci się możliwość wyjaśnienia ważnych zjawisk fizycznych, występujących tylko w układach nieliniowych. Taka sytuacja zachodzi między innymi w przypadku układów z ograniczeniami geometrycznymi.

Efektom ograniczeń nałożonych na ruch układu są siły reakcyjne – zderzeniowe (udarowe) o charakterystykach silnie nieliniowych, wpływających istotnie na ruch układu. Uwzględnienie w modelu nieliniowości pozwala przykładowo wytłumaczyć fakt wzbudzenia pod wpływem wymuszenia harmonicznego drgań o złożonym charakterze, w tym drgań podharmonicznych, prawie okresowych i chaotycznych.

Jednak nieliniowości komplikują znacznie model matematyczny układu, utrudniając stosowanie metod analitycznych do jego analizy. Metody takie mogą być wykorzystywane tylko do badania specyficznych modeli, najczęściej układów o niewielkiej liczbie stopni swobody, w których dodatkowo procesy zderzenia są opisywane współczynnikami restytucji. Przy uwzględnieniu czasu trwania zderzenia do rozwiązywania równań różniczkowych mogą być praktycznie zastosowane tylko metody, bazujące na procedurach numerycznego całkowania.

W badaniach modeli układów nieliniowych ważnym zagadnieniem jest opracowanie skutecznych metod numerycznych, umożliwiających ich analizę jakościową, pod którą będziemy dalej rozumieć badanie wrażliwości rozwiązań równań różniczkowych na zmianę wartości parametrów układu. Ważnym problemem jest też wyznaczanie wartości bifurkacyjnych parametrów, rozdzielających zakresy drgań podharmonicznych różnego rzędu.

Rezultaty analizy jakościowej mogą być wykorzystane przy projektowaniu układów udarowych. Po wprowadzeniu kryterium jakości działania można, analizując wpływ parametrów na odpowiednio zdefiniowane wskaźniki jakości, oszacować optymalne w sensie przyjętego kryterium wartości parametrów układu. Należy tu zwrócić uwagę na fakt, że wskaźniki jakości w przypadku wzbudzenia się drgań chaotycznych zmieniają się w sposób nieregularny i z tego względu metody optymalizacji są raczej nieefektywne.

## 1.1. PRZEGLĄD LITERATURY

Literatura dotycząca poruszanych w pracy zagadnień jest bardzo obszerna. Dokonując przeglądu, zwrócono uwagę na wybrane prace, poświęcone głównie problemom modelowania i analizy jakościowej układów wibrodarowych oraz układów typu wirnik-stojan.

Podstawy teoretyczne do analizy nieliniowych układów są podane w wielu monografiach; interesujące są tu zarówno starsze wydania, przykładowo prace Minorskiego [66] i Hayashego [34], jak i nowsze pozycje np. prace Seydela [78],

Awrejcewicza [4-6], Kapitaniaka [40] lub Bakera i Golluba [7], opisujące dodatkowo przydatne w analizach jakościowych metody numeryczne oraz zawierające szeroki przegląd prac, dotyczących między innymi układów uderowych. Przy ocenie drgań wskazane jest również zastosowanie innych narzędzi przedstawionych przykładowo w pracach [45], [68] i [69].

Dobre omówienie wybranych zagadnień analizy widmowej, w tym także pewnych problemów, występujących przy stosowaniu szybkiej transformaty Fouriera, można znaleźć w monografii Zielińskiego [93].

Możliwości wykorzystania metod przybliżonych, w tym głównie metody Bogolubowa-Kryłowa, do analizy układów samowzbudno-parametrycznych pokazano w pracy Warmińskiego [89]. Badano układy o jednym i kilku stopniach swobody, stosując również metody numeryczne i symulację analogową. W pracy [85] uwzględniono oprócz wzbudzenia parametrycznego wymuszenie zewnętrzne, a w pracy [90] wprowadzono model silnika o ograniczonej mocy.

Do wykrywania drgań chaotycznych często są wykorzystywane wykładniki Lapunowa. Podstawową pracą, w której został podany algorytm wyznaczania tych wykładników jest praca Wolfa i innych [91]. Algorytm ten po odpowiedniej modyfikacji został wykorzystany do analizy badanych w pracy układów. Metodę wyznaczania największego wykładnika Lapunowa dla układów z nieciągłościami, w tym uderowych, opracował Stefański [81], [82], bazując na zjawisku synchronizacji chaotycznych układów dynamicznych. Nieco inne podejście do problemu obliczania wykładników Lapunowa dla układów uderowych prezentują de Souza i Caldas w pracy [20] oraz Jin, Lu i Twizell w pracy [39].

Pierwsze prace, dotyczące zachowań chaotycznych układów uderowych, opublikowali w latach osiemdziesiątych Shaw i Holmes [46], [47]. Od tego czasu ukazała się ogromna liczba prac [9-12, 16, 17, 35-36, 46-49, 51-55, 71-73, 75-80, 86-87, 92], w których opisywane są zjawiska, wywołane działaniem sił zderzeniowych. Przykładowo, Lu i Lu [52] badają układ uderowy, przyjmując dla siły zderzeniowej charakterystykę odcinkowo liniową, model taki jest też analizowany w pracach [49], [79] i [92]. Błażejczyk-Okolewska [10] uwzględnia dodatkowo wpływ tarcia suchego, analizuje również zachowanie się eliminatora uderowego [11]. Drgania eliminatorów uderowych badane są także w pracach [9, 12, 58]. W pracach Luo i innych [53-55] rozpatrywany jest układ o dwóch stopniach swobody, w pracy [54] badany jest wpływ dwustronnego symetrycznego ogranicznika ruchu, a w pracy [55] zakłada się idealne zderzenie plastyczne. Wagg i Bishop [87] wykorzystują do analizy układu o większej liczbie stopni swobody metody analityczne, opisując proces zderzenia współczynnikiem restytucji. Jerrelind i Stensson [38] podają przykłady modeli inżynierskich konstrukcji, w których występuje duże



prawdopodobieństwo wzbudzenia się drgań chaotycznych. Także prace [30] i [44] dotyczą praktycznych zastosowań – badane są w nich pewne modele pneumatycznych narzędzi o działaniu udarowym.

Interesujące podejście do analizy jakościowej układów wibrudarowych prezentuje Peterka [71-73]. Stosując metody analityczno-numeryczne wyznacza zakresy parametrów, w których obserwowane są różne typy drgań. Wyznaczana jest liczba zderzeń w jednym okresie siły wymuszającej. Podobny sposób podejścia do analizy jakościowej jest prezentowany w pracy Czołczyńskiego i Kapitaniaka [17]. Czołczyński w pracy [16], badając wpływ częstości wymuszenia i położenia ogranicznika, określa dla układu o jednym stopniu swobody obszary rozwiązań okresowych. Dla ustalonych wartości parametrów wyznacza dodatkowo baseny przyciągania.

Lee i inni [47] wykorzystuje do wyznaczenia obszarów drgań regularnych i chaotycznych wykładniki Lapunowa. Badając znak największego wykładnika Lapunowa, określają wartości amplitud i częstości wymuszenia, dla których wzbudzają się drgania chaotyczne.

Agarwal, Blockley i Woodman [1], prowadząc analizę jakościową, badają liczbę punktów na fazowych płaszczyznach stroboskopowych, oceniając w ten sposób rząd drgań podharmonicznych. Przykład dotyczy równania różniczkowego typu Duffinga.

W pracy autora [26] poddano analizie jakościowej dwumasowy układ udarowy. Zbadano wpływ częstości wymuszenia i luzu na typ wzbudzanych drgań oraz liczbę zderzeń w okresie wymuszenia. W pracach [28] i [61] przeprowadzono analizę jakościową modelu wiertarki elektropneumatycznej. W pracy [61] badano uproszczony model mechanizmu wspomaganie udaru, przyjmując do analizy układ o jednym stopniu swobody. Oszacowano zakresy parametrów konstrukcyjnych, w których układ pracuje w sposób regularny. W pracy [28] rozważano dokładniejszy model układu, uwzględniający ruch korpusu narzędzia oraz procesy termodynamiczne, zachodzących w komorach narzędzia. Ruch układu opisano układem sześciu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Zbadano wpływ parametrów na wprowadzone wskaźniki jakości, charakteryzujące zarówno efektywność pracy urządzenia, jak i poziom emitowanych przez nie drgań.

Podobny model jest badany w pracy [30], przy czym autorzy ograniczają się do analizy ilościowej, przeprowadzając numeryczną symulację dla ustalonych wartości parametrów konstrukcyjnych narzędzia. Dla sił udarowych przyjęto charakterystyki odcinkowo liniowe, a dla sił parcia powietrza na bijak nieliniowe charakterystyki, wyznaczone w oparciu o założenie przemiany izotermicznej w odpowiednich komorach narzędzia.

W pracach dotyczących zagadnień zderzeń w układach z elementem wirującym badany jest najczęściej uproszczony model wirnika typu Jeffcott, pomijający efekty żyroskopowe oraz wpływ tłumienia wewnętrznego [2, 13, 15, 19, 21-23, 25, 27, 29, 33, 41-43, 50, 67, 70, 76, 84]. Pomimo tych uproszczeń analiza takiego modelu pozwala wyjaśnić szereg interesujących zjawisk wywołanych zderzeniami elementów układu. Zjawiska te są potwierdzane w pracach o charakterze doświadczalnym [14, 18, 74, 88]

Pierwsze prace należą tu do Muszyńskiej i Goldmana [29,67], którzy wykazali możliwość wzbudzenia się drgań chaotycznych w układzie wirnik-stojan. Model wirnika typu Jeffcott jest także badany w pracach Karpenki i innych [41-43, 70]. Analizowany jest wpływ ugięcia statycznego oraz amplitudy i częstości wymuszenia. Podobne problemy są rozpatrywane w pracach innych autorów. Dla ustalonych wartości parametrów są analizowane przebiegi czasowe i portrety fazowe, często są też wyznaczane diagramy bifurkacyjne, pozwalające badać wpływ wybranego parametru układu.

Przykładowo, Sun, Xu i Zhou [84] badają wpływ częstości wymuszenia oraz sztywności ogranicznika na typ drgań. Chu i Zhang [15] analizują wpływ siły ciężkości, Edwards i inni [23] badają wpływ sztywności skrzętnej wału, natomiast Feng i Zhang [25] zwracają większą uwagę na formy wzbudzanych drgań.

W pracy autora [62] przeprowadzono analizę nieliniowego modelu układu o czterech stopniach swobody, opisującego drgania wirnika z uwzględnieniem zderzeń ze stojanem. Założono, że na układ oprócz obciążeń statycznych działają wymuszenia bezwładnościowe, będące efektem niewyważenia. Natomiast w pracy [64] analizowano model układu o sześciu stopniach swobody, uwzględniający ruch przestrzenny wirnika oraz ruch ogranicznika. Wykorzystując metody numerycznego całkowania i analizy widmowej, zbadano wpływ amplitudy i częstości wymuszenia, obciążeń statycznych oraz położenia ogranicznika na typ oraz formę wzbudzanych drgań. Analizę modelu wirnika ze sztywno zamocowanym stojanem przeprowadzono w pracy [27], badając w tym przypadku wpływ drgań poprzecznych na drgania skrzętne wału.

Innym modelem układu, w którym na element wirujący działają siły typu udarowego, może być model układu operator – szlifierka ręczna – przedmiot obrabiany. W pewnych warunkach, pod wpływem wymuszeń bezwładnościowych i kinematycznych oraz sił skrawania, w układzie mogą się wzbudzić drgania chaotyczne.

Prace, dotyczące problemów szlifowania, są najczęściej pracami o charakterze teoretyczno-doświadczalnym [3]. W przeciwieństwie do innych procesów obróbki, np. frezowania [24, 32, 37, 56, 57], nie są tworzone modele fizyczne

i matematyczne, pozwalające wyjaśniać wzbudzenie się drgań o bardziej złożonym charakterze.

W pracach autora [59,60], [63] zaproponowano model układu uwzględniający między innymi chwilowy brak kontaktu ściernicy z obrabianym elementem. Określono wpływ zmiennych podczas procesu szlifowania parametrów układu (np. prędkości obrotowej i siły docisku) na charakterystyki dynamiczne układu. W pracy [59] poddano jakościowej analizie model wibroizolowanej szlifierki ręcznej. Założono, że zarówno korpus szlifierki, jak i wibroizolowana rękojeść narzędzia wykonuje ruch przestrzenny z pominięciem drgań skrętnych i osiowych. Uwzględniono wpływ wymuszeń bezwładnościowych oraz efekty żyroskopowe. Zarówno w pracy [63] jak i [59] wyznaczono wartości parametrów, dla których nie następuje utrata kontaktu ściernicy z obrabianym materiałem, a także obszary drgań okresowych i chaotycznych.

Podobne zjawiska, można spotkać podczas procesu frezowania [65] i toczenia [77]. Łuczko [56] przedstawił model procesu frezowania walcowego, bazując na liniowej zależności sił skrawania od grubości warstwy skrawanej. W pracy tej zbadano wpływ prędkości obrotowej, prędkości posuwu oraz głębokości skrawania na poziom emitowanych drgań oraz na stan obrabianej powierzchni. Wykazano możliwość wzbudzenia się w pewnych zakresach prędkości obrotowej drgań nieregularnych – prawie okresowych i chaotycznych. W pracy [57] analizowano wpływ wybranych parametrów skrawania na wartość skuteczną prędkości oraz chropowatość obrabianej powierzchni. W analizie przyjętego modelu układu uwzględniono nieliniowe charakterystyki modelu zamocowania freza. Podobnie jak w pracach [8, 24, 32, 37], rozpatrzono frez o stosunkowo małej liczbie ostrzy, który jest stosowany podczas frezowania z wysokimi prędkościami skrawania.

## 1.2. CEL I ZAKRES PRACY

Zasadniczym celem pracy jest analiza jakościowa dyskretnych układów mechanicznych z ograniczeniami geometrycznymi. Przedmiotem badań są układy z elementami podlegającymi zderzeniom, w szczególności układy wibroudarowe oraz układy z elementem wirującym. Celem pracy jest również wykazanie prawdziwości następującej tezy:

Tylko właściwie dobrane metody analizy jakościowej pozwalają poprawnie i efektywnie badać wpływ parametrów na charakter drgań oraz dobierać optymalne w sensie przyjętego kryterium wartości parametrów układu.

Do realizacji postawionego zadania wskazane jest:

- Zbudowanie modeli wybranych układów ze szczególnym uwzględnieniem procesów zderzeń, zachodzących w układach mechanicznych
- Opracowanie efektywnych metod numerycznych analizy jakościowej, umożliwiających badanie wpływu parametrów układu na charakter drgań oraz na pewne wskaźniki jakości
- Zbadanie zjawisk fizycznych, będących rezultatem oddziaływań udarowych
- Wskazanie możliwości wykorzystania rezultatów analizy jakościowej do optymalnego, w sensie przyjętego kryterium, doboru parametrów badanych układów.

Praca składa się z ośmiu rozdziałów oraz spisu cytowanej literatury. W rozdziale pierwszym, będącym wprowadzeniem, zamieszczono przegląd literatury dotyczącej tematu pracy oraz sformułowano cel i zakres pracy.

W rozdziale drugim omówiono podstawowe wskaźniki przydatne do określenia charakteru wzbudzanych drgań omawianych dalej układów mechanicznych. Do podstawowych wskaźników i narzędzi zaliczono wykładniki Lapunowa, wymiar fraktalny, widmo sygnału oraz mapy Poincare'go.

Trzeci rozdział pracy poświęcono dwóm metodom uzyskiwania rozwiązań równań różniczkowych opisujących ruch układów. W ogólnym przypadku stosowano metodę Rungego-Kutty, a w przypadku, gdy ruch układu w pewnych przedziałach czasu jest opisany liniowymi równaniami różniczkowymi, metodę wykorzystującą rozwiązania analityczne. W rozdziale tym przedstawiono również metody analizy otrzymanych rozwiązań, ze zwróceniem szczególnej uwagi na przydatność metod analizy widmowej.

W rozdziale czwartym przedstawiono model matematyczny procesu zderzenia. Uwzględniono tutaj dwa rodzaje ograniczników różniących się kształtem, a mianowicie ogranicznik o płaskiej powierzchni oraz ogranicznik o powierzchni walcowej. Do opisu procesu zderzenia przy pominięciu jego czasu trwania wykorzystano współczynnik restytucji, natomiast w celu uwzględnienia czasu kontaktu zderzających się elementów, wprowadzono odpowiedni model sił udarowych.

Kolejne trzy rozdziały pracy dotyczą układów udarowych, w tym także układów z elementem wirującym.

W punkcie 5.1 zaprezentowano w celach poznawczych model wielomasowego układu udarowego, opisany równaniami różniczkowymi odcinkowo liniowymi. Korzystając z omówionych wcześniej metod analizy zbadano wpływ podstawowych parametrów układu na typ wzbudzanych drgań. W punkcie 5.2 rozpatrzono

zagadnienie inżynierskie projektowania mechanizmu wspomaganego udaru, stosowanego w wiertarkach wibracyjnych. Bazując na rezultatach analizy jakościowej dobrano optymalne wartości parametrów konstrukcyjnych układu. Stosowano różne kryteria jakości działania układu zapewniające regularność pracy narzędzia oraz dostatecznie dużą energię udaru.

Rozdział szósty zawiera rezultaty obliczeń numerycznych przeprowadzonych dla układów typu wirnik-stojan. W punkcie 6.1 badano wpływ częstości wymuszenia oraz ugięcia statycznego na drgania poprzeczne i skrętne wału. W kolejnych punktach tego rozdziału badano wpływ niesymetryczności zamocowania wirnika oraz podatności zamocowania stojanu na charakter oraz formę wzbudzanych drgań.

Rozdział siódmy jest poświęcony badaniom wpływu drgań na proces szlifowania podczas obróbki ręcznymi narzędziami. W punkcie 7.1 przeanalizowano wpływ siły docisku, prędkości obrotowej oraz amplitudy wymuszenia kinematycznego i bezwładnościowego na charakterystyki dynamiczne układu. Problem wibroizolacji badanej szlifierki został przedstawiony w kolejnym punkcie tego rozdziału. Oszacowano optymalne wartości parametrów pasywnego układu wibroizolacji wprowadzonego pomiędzy rękojeść i korpus narzędzia.

W rozdziale ósmym przedstawiono ogólne wnioski oraz wskazano kierunki prowadzenia dalszych badań związanych z tematyką pracy.

## 2. WYBRANE NARZĘDZIA I WSKAŹNIKI OCENY DRGAŃ

Do badania układów dynamicznych można wykorzystać wiele narzędzi pozwalających określić charakter wzbudzonych drgań. Do najbardziej skutecznych i jednocześnie najczęściej wykorzystywanych w literaturze, możemy zaliczyć: wykładniki Lapunowa, szybką transformację Fouriera (FFT), wymiar fraktalny oraz mapy Poincare'go. Wykładniki Lapunowa określają miarę wrażliwości rozwiązania na warunki początkowe, która jest charakterystyczna dla zachowań chaotycznych [7]. Wymiar fraktalny przyjmuje wartości niewymierne wskazując, w jaki sposób, fraktal wypełnia przestrzeń, w której jest osadzony. Proste fraktale wykazują „samopodobieństwo” – obrazy ich struktury są takie same w każdej skali. FFT jest algorytmem wyznaczania dyskretnej transformaty Fouriera, natomiast mapa Poincare'go zwana również przekrojem Poincare'go powstaje w chwili okresowego przecinania atraktora w regularnych odstępach czasu.

Poniżej zostaną omówione nieco bardziej szczegółowo wskaźniki, wykorzystywane w pracy do analizy jakościowej badanych układów.

### 2.1. WYKŁADNIKI LAPUNOWA

Rozważmy dalej układ dynamiczny, opisany układem równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu w następującej macierzowej postaci:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Współrzędnymi wektora stanu  $\mathbf{z}$  są współrzędne wektorów przemieszczeń  $\mathbf{x}$  i prędkości uogólnionych  $\dot{\mathbf{x}}$ . Ewolucja układu jest jednoznacznie określona przez równania stanu (2.1) oraz warunki początkowe:

$$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \quad (2.2)$$

Krzywa, określona w przestrzeni fazowej, lub bardziej ogólnie, w przestrzeni stanu, będąca zbiorem punktów, których współrzędne wyznaczają równania stanu, nazywana jest trajektorią fazową [69].

Oznaczmy przez  $\bar{\mathbf{z}}(t)$  rozwiązanie szczególne równania (2.1) spełniające warunek początkowy (2.2) oraz przez  $\tilde{\mathbf{z}}(t)$  tzw. rozwiązanie zaburzone, spełniające warunek początkowy  $\tilde{\mathbf{z}}(t_0) = \mathbf{z}_0 + \Delta\mathbf{z}_0$ . Będziemy zakładać, że odległość  $\|\Delta\mathbf{z}_0\|$  jest dostatecznie mała, czyli inaczej mówiąc będziemy rozpatrywać dwie sąsiednie trajektorie, startujące z dostatecznie bliskich sobie punktów. Wrażliwość rozwiązania  $\bar{\mathbf{z}}(t)$  na zmianę warunków początkowych określa odległość  $\|\Delta\mathbf{z}(z_0, t)\|$ , którą w przybliżeniu opisuje funkcja wykładnicza:

$$\|\Delta\mathbf{z}(z_0, t)\| \approx \|\Delta\mathbf{z}_0\| e^{\lambda t} \quad (2.3)$$

Dla układu jednowymiarowego (w przestrzeni stanu) wzór (2.3) wykorzystuje się bezpośrednio do zdefiniowania wykładnika Lapunowa w następujący sposób:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\Delta\mathbf{z}(z_0, t)\|}{\|\Delta\mathbf{z}_0\|} \quad (2.4)$$

Dla układów wielowymiarowych liczba wykładników Lapunowa jest równa wymiarowi przestrzeni fazowej. W takim przypadku definicja oraz sposób wyznaczania wykładników Lapunowa nieco się komplikuje [5,7,91].

Ogólnie można powiedzieć, że wykładniki Lapunowa są współczynnikami liczbowymi wykładniczego wzrostu odległości między blisko położonymi trajektoriami potoku fazowego. Określają one średnie tempo zbieżności lub rozbieżności rozwiązań równań różniczkowych. W przypadku, gdy trajektorie zbiegają się, wszystkie wykładniki są mniejsze od zera. Mamy więc do czynienia z nie chaotyczną ewolucją układu lub inaczej z asymptotycznie stabilnym atraktorem. Im mniejsze są wartości wykładników Lapunowa tym szybciej zanikają w układzie procesy przejściowe i jest większy tak zwany zapas stabilności.

W przypadku, gdy jeden z wykładników ma wartość zerową mamy do czynienia z punktem osobliwym, charakterystycznym dla układów zachowawczych. Taka wartość wykładnika może informować, że układ dynamiczny znajduje się w stanie ustalonym. Ewolucje chaotyczną charakteryzuje dodatnia wartość jednego z wykładników Lapunowa – wówczas punkty początkowe trajektorii blisko położone w przestrzeni fazowej generują rozbiegające się trajektorie, zupełnie do siebie nie podobne. Im większa jest wartość dodatniego wykładnika, tym ruch jest bardziej chaotyczny, a odległość między początkowo sąsiednimi dwoma punktami zwiększa się w sposób wykładniczy [69].

W przypadku układów wielowymiarowych istnieje więc zbiór lub spektrum wykładników Lapunowa, a każdy z nich charakteryzuje orbitalną rozbieżność w pewnym kierunku. Może się zatem zdarzyć, że oddalenie sąsiednich trajektorii następuje wyłącznie wzdłuż niektórych wymiarów. Ponieważ oddalenie następuje

znacznie szybciej niż zbliżanie się, jeden dodatni wykładnik Lapunowa odpowiedzialny za oddalanie się powoduje zwiększenie się globalnej odległości, jeśli nawet we wszystkich pozostałych wymiarach zjawisko charakteryzuje się ujemnymi wykładnikami.

Wszystkie dziwne atraktory w trójwymiarowej przestrzeni fazowej posiadają następujący typ spektrum  $(+, 0, -)$ . Poszczególne spektra, przykładowo w trójwymiarowych układach dysypatywnych, opisują:  $(-, -, -)$  – punkt równowagi,  $(0, -, -)$  – cykl graniczny,  $(0, 0, -)$  – dwuwymiarowy torus,  $(+, 0, -)$  – dziwny atraktor.

W celu wyznaczenia wykładników Lapunowa dla układów wielowymiarowych należy rozpatrzyć dodatkowo układ równań wariacyjnych. Wprowadźmy zmienną wektorową:

$$\mathbf{v}(t) = \tilde{\mathbf{z}}(t) - \bar{\mathbf{z}}(t) \quad (2.5)$$

charakteryzującą odległość rozwiązania zaburzonego  $\tilde{\mathbf{z}}(t)$  od rozwiązania  $\bar{\mathbf{z}}(t)$ . Po wykorzystaniu równań (2.1) oraz linearyzacji otrzymamy następujące równanie wariacyjne:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{J}(t)\mathbf{v} \quad (2.6)$$

gdzie  $\mathbf{J}$  jest macierzą Jacobiego o postaci:

$$\mathbf{J}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z_1} & \frac{\partial F_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_1} & \frac{\partial F_n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Równanie (2.6) jest równaniem różniczkowym liniowym o zmiennych współczynnikach. Posiada ono (przy spełnionym warunku:  $\det \mathbf{J}(t) \neq 0$ )  $n$  liniowo niezależnych rozwiązań  $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_n$ , tworzących tzw. fundamentalną macierz rozwiązań  $\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_n]$ . Macierz  $\boldsymbol{\Theta}$  można numerycznie wyznaczyć rozwiązując równanie macierzowe:

$$\frac{d\boldsymbol{\Theta}(t)}{dt} = \mathbf{J}(t)\boldsymbol{\Theta}(t) \quad (2.8)$$

z następującym warunkiem początkowym:

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{z}_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (2.9)$$



Do badania stabilności, w tym także do wyznaczania wykładników Lapunowa, wykorzystuje się wartości macierzy  $\Theta$  w zadanych chwilach czasu  $t_k$ . W przypadku badania stabilności rozwiązań okresowych o okresie  $kT$  wystarczy wyznaczyć tzw. macierz monodromii  $\mathbf{M} = \Theta(\mathbf{z}_0, t_0 + kT)$ . Wartości własne tej macierzy (mnożniki charakterystyczne) decydują o stabilności rozwiązania okresowego.

W przypadku badania ruchów chaotycznych układ nieliniowych równań (2.1) oraz układ równań wariacyjnych (2.8) należy całkować w dostatecznie długim przedziale czasu. Ze wzrostem czasu rosną szybko wartości funkcji  $\theta_m$  ( $m=1,2,\dots,n$ ), co powoduje zwiększanie się błędów całkowania, uniemożliwiając wręcz po pewnym czasie dalsze całkowanie układu równań (2.8). Z tego względu w algorytmach numerycznych, służących do wyznaczania współczynników Lapunowa, jest stosowany proces iteracyjny.

W kolejnych iteracjach całkuje się układ równań (2.1) i (2.8) w zadanym, niezbyt dużym przedziale czasu  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ . Do obliczeń startuje się z warunków początkowych (2.2) i (2.9).

W  $k$ -tej iteracji wyznacza się w chwili  $t = t_k$  wszystkie elementy macierzy:

$$\Theta^k = \Theta(\mathbf{z}_0, t_k) \quad (2.10)$$

Oznaczmy dalej  $\Theta^k = [\theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_n^k]$ . Dla zbioru liniowo niezależnych wektorów  $\theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_n^k$  istnieje zawsze zbiór ortonormalny  $\mathbf{u}_1^{k+1}, \mathbf{u}_2^{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n^{k+1}$ , wykorzystywany w algorytmach numerycznych, jako zbiór warunków początkowych do całkowania równań (2.8) w przedziale czasu  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ .

Do wyznaczenia wektorów ortonormalnych stosuje się najczęściej ortogonalizację Grama-Schmidta, konstruując te wektory według następujących rekurencyjnych wzorów:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^{k+1} &= \frac{\theta_1^k}{\|\theta_1^k\|} \\ \mathbf{u}_2^{k+1} &= \frac{\theta_2^k - (\mathbf{u}_1^{k+1}, \theta_2^k)\mathbf{u}_1^{k+1}}{\|\theta_2^k - (\mathbf{u}_1^{k+1}, \theta_2^k)\mathbf{u}_1^{k+1}\|} \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_l^{k+1} &= \frac{\theta_l^k - \sum_{i=1}^{l-1} (\mathbf{u}_i^{k+1}, \theta_l^k)\mathbf{u}_i^{k+1}}{\|\theta_l^k - \sum_{i=1}^{l-1} (\mathbf{u}_i^{k+1}, \theta_l^k)\mathbf{u}_i^{k+1}\|} \end{aligned} \quad (2.11)$$

We wzorach (2.11) wyrażenia typu  $(\mathbf{u}_i^{k+1}, \boldsymbol{\theta}_i^k)$  są iloczynami skalarnymi odpowiednich wektorów, natomiast  $\|\cdot\|$  jest normą wektora. Do wyznaczenia wykładników Lapunowa wykorzystuje się mianowniki ułamków występujących we wzorach (2.11). Po przyjęciu oznaczenia:

$$\mu_l^k = \left\| \boldsymbol{\theta}_l^k - \sum_{i=1}^{l-1} (\mathbf{u}_i^{k+1}, \boldsymbol{\theta}_l^k) \mathbf{u}_i^{k+1} \right\| \quad (2.12)$$

wykładniki Lapunowa są wyliczane ze wzoru:

$$\lambda_l = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^M \ln \mu_l^k \quad (2.13)$$

gdzie  $T$  jest całkowitym czasem analizy.

Przedstawiony powyżej sposób postępowania przy wyznaczaniu wykładników Lapunowa został po raz pierwszy zaproponowany w pracy Wolfa [91].

W pracy, bazując na wzorach (2.1-2.13), opracowano algorytm obliczeń numerycznych oraz program, umożliwiający badanie wpływu wybranego parametru na wartości wykładników Lapunowa.

## 2.2. WYMIAR FRAKTALNY

Dla pełniejszego opisu geometrycznego odpowiedzi układów nieliniowych, szczególnie pojęcia dziwnego atraktora, wprowadzono za Mandelbrotem (1983) pojęcie wymiaru fraktalnego. Definicja tego wymiaru opiera się na definicji  $n$ -wymiarowej objętości i można ją zapisać za pomocą następującego wzoru:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} \quad (2.14)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest wymiarem charakterystycznym elementu podstawowego (sześcián, kula, itp.), natomiast  $N(\varepsilon)$  oznacza najmniejszą liczbę elementów podstawowych niezbędnych do całkowitego pokrycia atraktora [40]. W przypadku, gdy wartość  $D_F$  jest różna dla różnych rodzajów elementów podstawowych, to wymiar fraktalny przyjmuje minimalną wartość.

Wymiar fraktalny posiada własności zbioru Cantora, i dlatego w dalszych rozważaniach omówiona zostanie jego konstrukcja. Zbiór ten tworzy się w następujący sposób: odcinek o długości 1 dzieli się na trzy równe części i usuwa środkową część. Operacje tą powtarza się w nieskończoność otrzymując za każdym razem coraz to większą liczbę odcinków o coraz mniejszej długości. W rezultacie

powstaje zbiór nieskończenie wielu punktów, który ma zerową długość. Jeśli punkt ma wymiar zerowy, a odcinek wymiar jeden, wobec tego zbiór Cantora posiada wymiar niecałkowity (równy 0.631) większy od zera, ale mniejszy od jedności.

W przypadku dziwnego atraktora chaotycznego, jego wymiar jest większy od wymiaru orbity prawie okresowej, czyli 2, a jednocześnie mniejszy od wymiaru odpowiadającemu atraktorowi przestrzennemu, czyli 3.

Innymi matematycznymi przykładami fraktali są: płatek śniegowy von Kocha ( $D_F=1.262$ ), uszczelka Sierpińskiego ( $D_F=1.585$ ), kostka Mengera ( $D_F=2.727$ ). W nawiasach podano tu przybliżoną wartość wymiaru fraktalnego.

Wiele obiektów i zjawisk spotykanych w przyrodzie może być modelowanych za pomocą geometrii fraktali. Typowymi przykładami są np. linia brzegowa, zbocza górskie, systemy komórkowe, chmury, powierzchnia białek.

Wymiar można również wyznaczyć przy pomocy wykładników Lapunowa, pierwszy raz dokonali tego Kaplan i Yorke w 1979 roku. Związek pomiędzy wymiarem a wykładnikami Lapunowa można przedstawić za pomocą następującego wzoru:

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|} \quad (2.15)$$

przy czym  $\lambda_j$  są uporządkowane malejąco ( $\lambda_1$  największy wykładnik), natomiast  $j$  jest indeksem przy najmniejszym nieujemnym wykładniku Lapunowa.

### 2.3. SZYBKA TRANSFORMATA FOURIERA

Fourierowska reprezentacja sygnału umożliwia analizę sygnału w dziedzinie częstotliwości. W reprezentacji fourierowskiej sygnał pierwotnie określony w dziedzinie czasu otrzymuje nową reprezentację w postaci transformaty.

Rozważając problem analizy widmowej możemy mieć do czynienia z czterema różnymi metodami analizy fourierowskiej. Są to przekształcenie Fouriera (częstotliwość zmienia się w sposób ciągły) i szereg Fouriera (dyskretna częstotliwość) odpowiednio dla sygnałów ciągłych (ciągły czas) oraz sygnałów dyskretnych (dyskretny czas).

Prostą i odwrotną transformację Fouriera dla sygnału ciągłego można zdefiniować przez następującą parę równań:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(f)e^{j2\pi ft} df \quad (2.16)$$

przy czym  $Z(f)$  jest zespolonym widmem Fouriera sygnału  $z(t)$ .

Przyjmijmy, że analizowany sygnał został poddany procesowi próbkowania w dziedzinie czasu i posiadamy  $N$  próbek tego sygnału  $z(n)$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ ) w chwilach czasu  $t_n = n \Delta t$ , odległych od siebie o czas próbkowania  $\Delta t = 1/f_0$  ( $f_0$  jest częstotliwością próbkowania). Wówczas para transformacji Fouriera dla sygnałów dyskretnych przyjmuje postać:

$$Z(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t_n) e^{-j2\pi f t_n} \quad z(t_n) = \frac{1}{f_p} \int_{-f_p/2}^{f_p/2} Z(f) e^{j2\pi f t_n} df \quad (2.17)$$

Współczynniki szeregu Fouriera oraz szereg Fouriera dla okresowych sygnałów ciągłych (o okresie  $T$ ) przedstawiają równania:

$$Z(kf_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z(kf_0) e^{j2\pi k f_0 t} \quad (2.18)$$

gdzie  $f_0 = 1/T = 1/N\Delta t$  jest częstotliwością podstawowej składowej harmoniczej. Dla sygnałów dyskretnych  $z(n)$  odpowiednikami wzorów (2.18) są następujące równania (dla  $0 \leq k \leq N-1$ ):

$$Z(kf_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(t_n) e^{-j2\pi k f_0 t_n} \quad z(t_n) = \sum_{k=0}^{N-1} Z(kf_0) e^{j2\pi k f_0 t_n} \quad (2.19)$$

gdzie  $k$  jest indeksem częstotliwości natomiast  $n$  jest indeksem czasu. Wykorzystując związek  $f_0 t_n = n/N$  otrzymujemy znaną dobrze z literatury parę równań transformacji Fouriera dla sygnałów dyskretnych  $z(n)$  nazywaną dyskretną transformacją Fouriera (DFT):

$$Z(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \quad z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \quad (2.20)$$

Wzory (2.20) na przekształcenie proste oraz odwrotne DFT można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \mathbf{z} \quad \mathbf{z} = \mathbf{W} \mathbf{Z} \quad (2.21)$$

gdzie symbol „\* ” oznacza zespolone sprzężenie elementów macierzy.

Wektory  $\mathbf{z}$  i  $\mathbf{Z}$  są zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z(0) \\ z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(N-1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Macierz  $\mathbf{W}$  ma postać:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

gdzie:

$$w = e^{j\frac{2\pi}{N}} \quad (2.24)$$

Wykładniki, występujące w wyrażeniach opisujących elementy macierzy  $\mathbf{W}$ , są iloczynami numeru  $k$  prążka widma  $Z(k)$  oraz numeru  $n$  próbki sygnału  $z(n)$ .

Wyznaczenie DFT polega na numerycznym rozwiązaniu równania macierzowego (2.21). W tym celu, przy założeniu, że sygnał wejściowy jest zespolony, należy wykonać  $N^2$  mnożeń zespolonych ( $N$  wierszy po  $N$  mnożeń) oraz  $N(N-1)$  dodawań zespolonych. Można łatwo zauważyć jak duża jest to liczba operacji, która szybko rośnie wraz ze wzrostem wymiaru wektora danych. Dla przypadku, gdy liczba próbek jest potęgą liczby dwa opracowany został algorytm, który wymaga wykonania znacznie mniejszej liczby operacji ( $M\log_2 N$  dodawań i  $(N/2)\log_2 N$  mnożeń zespolonych). Algorytm ten opracowany został przez Cooleya i Tukeya w 1965 roku i obecnie znany jest pod nazwą szybkiej transformaty Fouriera (FFT). Negatywne zjawiska, jakie mogą pojawić się przy stosowaniu metody DFT i FFT związane z efektem rozmycia widma zostaną omówione w punkcie 3.2.2.

## 2.4. MAPY POINCARÉ'GO

Wykorzystując metodę Poincaré'go można łatwo i szybko przeanalizować trajektorie nawet złożonych układów. W metodzie tej nie musi się badać całych trajektorii, ale jedynie punkty, w których przecinają one wybraną płaszczyznę. Płaszczyznę wybiera się w ten sposób, aby mieć jak najwięcej informacji o badanym ruchu. Jest oczywiste, że w ten sposób pominiętych zostaje dużo informacji

o rozwiązaniach badanych równań, ale można dowiedzieć się czy dany rodzaj ruchu ma atraktor i jaka jest jego struktura.

W tym momencie należy określić, czym jest atraktor. Atraktoem może być punkt, trajektoria lub obszar w przestrzeni fazowej, do którego w miarę upływu czasu zbiegają rozwiązania równań, czyli trajektorie rozpoczynające się w różnych obszarach przestrzeni fazowej.

W przypadku, gdy trajektoria jest krzywą zamkniętą o okresie równym okresowi wymuszenia (drżania  $1T$ - okresowe), to przecina ona płaszczyznę Poincare'go tylko w jednym punkcie. Dla ruchu okresowego, ale o okresie innym niż  $T$ , otrzymuje się kilka punktów i punkty te powtarzają się w ustalonej kolejności. Trajektorie dla ruchów chaotycznych są nieregularne i dlatego przecinają płaszczyznę w coraz to nowych punktach tworząc skomplikowane kształty zawierające nieskończoną liczbę punktów [7]. Otrzymane w ten sposób przekroje Poincare'go są matematycznymi zbiorami o niecałkowitym wymiarze i zwane są fraktalami.

### 3. METODY ANALIZY

Badanie wpływu parametrów, występujących w równaniach różniczkowych, na ich rozwiązanie wymaga wielokrotnych całkowań oraz analiz otrzymanych przebiegów. Należy więc dysponować skutecznymi i dostatecznie szybkimi algorytmami uzyskiwania rozwiązań oraz metodami ich analizy.

Poniżej podano kilka propozycji algorytmów, wykorzystujących między innymi wprowadzone w rozdziale 2 wskaźniki.

#### 3.1. METODY UZYSKIWANIA ROZWIĄZAŃ

Analizowane w pracy modele układów są modelami silnie nieliniowymi, przede wszystkim z uwagi na nieliniowe charakterystyki sił zderzeniowych, zastępujących oddziaływanie ograniczników ruchu. Z tego powodu do otrzymania rozwiązań odpowiednich równań różniczkowych ruchu mogą być wykorzystane praktycznie tylko metody numeryczne.

W ogólnym przypadku będziemy stosować metodę Rungego-Kutty, której idea zostanie omówiona poniżej. W przypadku, gdy ruch układu pomiędzy zderzeniami jest opisany równaniami różniczkowymi liniowymi, warto zastosować szybszą metodę, bazującą na rozwiązaniach częściowo analitycznych (punkt 3.1.2).

##### 3.1.1. Metoda Rungego-Kutty

Spośród wielu metod numerycznego całkowania jedną z najdokładniejszych i zarazem najczęściej wykorzystywanych przez wielu autorów, jest metoda Rungego – Kutty. W niniejszej pracy do całkowania równań różniczkowych stosowano wszędzie metodę Rungego – Kutty 7 rzędu, za wyjątkiem przypadku wyznaczania wykładników Lapunowa. Tutaj zastosowano nieco mniej dokładną, ale znacznie szybszą metodę Rungego – Kutty 4 rzędu. Było to spowodowane koniecznością całkowania zwiększonej o równania wariacyjne (2.8) liczby równań różniczkowych.

Rozpatrzmy równanie różniczkowe (2.1) z warunkiem początkowym (2.2). W metodzie Rungego-Kutty rzędu  $n$  zakłada się w chwili  $t_{i+1}$  rozwiązanie przybliżone w postaci:

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{z}_i + \Phi(\mathbf{z}_i, t_i, h)h \quad (3.1)$$

gdzie  $h$  jest krokiem całkowania,  $\mathbf{z}_i = \mathbf{z}(t_i)$  a  $\Phi$  jest tzw. funkcją przyrostową o ogólnej postaci:

$$\Phi = a_1 \mathbf{k}_1 + a_2 \mathbf{k}_2 + \dots + a_n \mathbf{k}_n \quad (3.2)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_i, t_i) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_i + q_{11} \mathbf{k}_1 h, t_i + p_1 h) \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_i + q_{21} \mathbf{k}_1 h + q_{22} \mathbf{k}_2 h, t_i + p_2 h) \\ &\vdots \\ \mathbf{k}_n &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_i + q_{n-1,1} \mathbf{k}_1 h + q_{n-1,2} \mathbf{k}_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} \mathbf{k}_{n-1} h, t_i + p_{n-1} h) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nieznane współczynniki  $a_i$ ,  $p_i$ ,  $q_{ij}$  znajduje się przez porównanie wyrazów z tymi samymi potęgami  $h$  rozwinięć w szereg Taylora rozwiązania dokładnego  $\mathbf{z}(t)$  oraz przybliżonego (3.1). Błąd rozwiązania na każdym kroku jest mały rzędu  $h^{n+1}$ .

### 3.1.2. Metoda bazująca na rozwiązaniach analitycznych

Założmy, że w pewnych przedziałach czasu ruch układu opisują równania różniczkowe liniowe o następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{f}(t) \quad (3.4)$$

Z takim równaniem będziemy mieć do czynienia w przypadku opisywania procesu zderzenia współczynnikiem restytucji (pomijając czas zderzenia) przy założeniu, że pozostałe siły mają charakterystyki liniowe. Elementy macierzy  $\mathbf{A}$  zależą od elementów macierzy sztywności, tłumienia i bezwładności, a także czasami od elementów macierzy żyroskopowej (modele wirników, szlifierek). Wektor  $\mathbf{f}$  zależy od wektora sił wymuszających drgania układu. Założymy, że  $\mathbf{f}(t)$  jest funkcją harmoniczną (ewentualnie okresową).

Po wprowadzeniu transformacji liniowej ( $\mathbf{T}$  – macierz modalna):

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{w} \quad (3.5)$$



równanie (3.4) można doprowadzić do postaci:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{w} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{f}(t) \quad (3.6)$$

gdzie macierz:  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$  jest w przypadku jednokrotnych wartości własnych macierzą diagonalną. Macierze  $\mathbf{T}$  i  $\mathbf{\Lambda}$  można prosto wyznaczyć, wykorzystując numeryczne procedury, rozwiązujące zagadnienia własne  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ .

Założmy dalej, że na układ działają wymuszenia okresowe. Wektor  $\mathbf{f}$  można, bez utraty ogólności rozważań, przyjąć w postaci:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g} \cos \omega t + \mathbf{h} \sin \omega t + \mathbf{q} \quad (3.7)$$

uwzględniając, oprócz wymuszeń harmonicznyc, obciążenia stałe. Całka szczególna układu (3.6) ma postać:

$$\mathbf{w}_s(t) = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t + \mathbf{c} \quad (3.8)$$

przy czym współrzędne wektorów  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  określają zależności:

$$\mathbf{a}_j = \frac{-[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}]_j \lambda_j - [\mathbf{T}^{-1}\mathbf{h}]_j \omega}{(\lambda_j^2 + \omega^2)} \quad \mathbf{b}_j = \frac{[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}]_j \omega - [\mathbf{T}^{-1}\mathbf{h}]_j \lambda_j}{(\lambda_j^2 + \omega^2)} \quad (3.9)$$

natomiast wektor stałych odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru:

$$\mathbf{c} = -\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{q} \quad (3.10)$$

Po wprowadzeniu macierzy:

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}\mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{T}^{-1} \quad (3.11)$$

gdzie fundamentalna macierz rozwiązań  $\mathbf{\Gamma}$  jest macierzą diagonalną o postaci:

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \text{diag}[\exp(\lambda_1 t), \exp(\lambda_2 t), \dots, \exp(\lambda_{2N} t)] \quad (3.12)$$

otrzymamy następujący wzór:

$$\mathbf{z}(t+h) = \mathbf{G}(h)[\mathbf{z}(t) - \mathbf{T}\mathbf{w}_s(t)] + \mathbf{T}\mathbf{w}_s(t+h) \quad (3.13)$$

przydatny do rekurencyjnego określania rozwiązań układu równań (3.4). Rozwiązania (3.13) są słuszne w przedziale czasu pomiędzy kolejnymi zderzeniami wybranych elementów podukładów.

## 3.2. ANALIZA JAKOŚCIOWA

Przez analizę jakościową będziemy rozumieć badanie wpływu parametrów na charakter wzbudzanych drgań, a także na zdefiniowane dalej wskaźniki jakości działania układu. Wskaźniki te będą często związane z energią udaru oraz energią emitowanych przez układ drgań.

Oceniając charakter rozwiązań, skupimy się głównie na zbadaniu, czy drgania są okresowe, prawie okresowe czy też chaotyczne. W przypadku drgań okresowych, ale o okresie różnym od okresu wymuszenia, będziemy wyznaczać dodatkowo rząd drgań podharmonicznych. Podstawą takich analiz będą rezultaty analizy widmowej. Sposób ich wykorzystania zostanie omówiony w punkcie 3.2.2.

Ponieważ do wyznaczenia widma badanego sygnału należy dysponować ustalonym przebiegiem, a to z kolei jest związane z dostatecznie długim czasem całkowania w celu wyeliminowania procesów przejściowych, wskazane jest wykorzystanie prostszych metod, zwłaszcza w przypadku rozwiązań okresowych. Temu problemowi poświęcono punkt 3.2.1.

### 3.2.1. Warunki okresowości

Badając odpowiedzi układu na wymuszenia harmoniczne należy w pierwszej kolejności sprawdzić, czy analizowane rozwiązania nie są też okresowe. Najprostszą metodą jest badanie warunków okresowości. W przypadku rozwiązań okresowych można dodatkowo wyznaczyć okres drgań.

Wprowadźmy wskaźnik, określający różnicę pomiędzy rozwiązaniem  $z(t)$ , a rozwiązaniem  $z(t-T_k)$  przesuniętym w czasie nieznanym okresie drgań  $T_k$ , zdefiniowany następująco:

$$B_k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [z(t_m) - z(t_m - T_k)]^2} \quad (3.14)$$

W powyższym wzorze  $z(t_m)$  są wartościami wybranej współrzędnej wektora stanu w chwilach czasu  $t_m$ , rozmieszczonych równomiernie w przedziale czasu, równym okresowi drgań. Założono też, że poszukiwany okres drgań jest wielokrotnością okresu wymuszenia (czyli  $T_k=kT$ ). Liczba  $M$  jest liczbą próbek w omawianym przedziale czasu. W przypadku ustalonych drgań okresowych o okresie  $kT$  wskaźnik (3.14) powinien przyjąć wartość zerową. W praktyce, z uwagi na błędy całkowania oraz nie do końca wyeliminowane procesy przejściowe, wprowadzony wskaźnik zawsze jest różny od zera – można go traktować, jako błąd bezwzględny wyznaczanego rozwiązania okresowego. W obliczeniach

numerycznych wygodniejszy jest wskaźnik bezwymiarowy, który można zdefiniować następująco:

$$W_k = B_k / \tilde{z} \quad (3.15)$$

gdzie:

$$\tilde{z} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M z^2(t_m)} \quad (3.16)$$

można traktować jako wartość skuteczną sygnału  $z(t)$ .

Przyjmujemy dalej, że w przypadku spełnienia, dla pewnego  $k$ , warunku:

$$W_k < \varepsilon \quad (3.17)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest dostatecznie małą liczbą, mamy do czynienia z drganiami okresowymi o okresie  $T_k$  (czyli drganiami podharmonicznymi rzędu  $1:k$ ). Jeśli warunek (3.17) zachodzi równocześnie dla różnych wartości liczby  $k$ , należy przyjąć, że okresem drgań jest okres odpowiadający najmniejszej liczbie  $k$ .

W algorytmie do analizy jakościowej przewidziano sprawdzanie warunku (3.17) w trakcie całkowania równań różniczkowych (co pewien zadany przedział czasu). W przypadku, gdy wszystkie współrzędne wektora stanu spełniają omawiany warunek, można przerwać proces całkowania, zakładając, że drgania są okresowe. W ten sposób ulega skróceniu czas analizy. W przeciwnym przypadku należy dalej całkować równania w zadanym z góry przedziale czasu, a następnie otrzymane rozwiązania poddać analizie widmowej.

### 3.2.2. Analiza widma

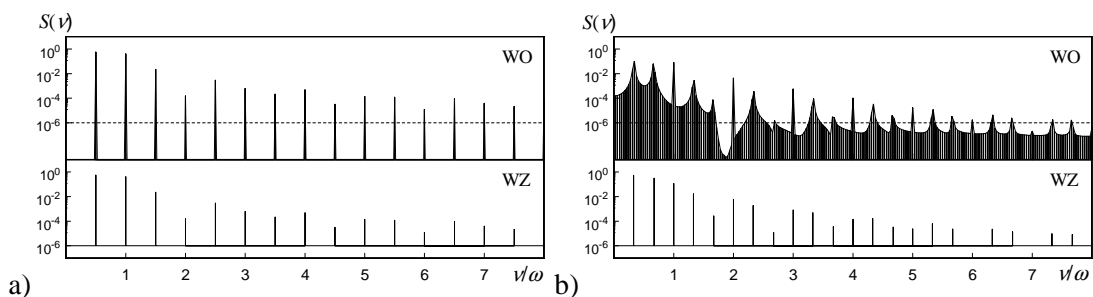
Wykorzystując algorytm FFT do analizy numerycznych rozwiązań należy określić przedział czasu, z którego będą wybierane próbki badanego sygnału. W celu wykrycia drgań podharmonicznych przedział czasu powinien być dostatecznie dużą wielokrotnością okresu wymuszenia. W każdym okresie wymuszenia liczba próbek też musi być odpowiednio duża. Przykładowo, ograniczając liczbę próbek do  $N=1024$  (ogólnie do  $2^n$ ), w celu wykrycia  $N_p=64$  podharmonicznych, należy przyjąć do analizy rozwiązanie w przedziale czasu, równym 64 okresom wymuszenia. W każdym okresie należy więc wybrać 16 próbek. Próbki powinny być rozmieszczone równomiernie w zadanym przedziale czasu.

W analizie widmowej będziemy bazować na faktach, że w przypadku drgań regularnych widma mają niezbyt dużą liczbę „prążków”, natomiast w przypadku

drgań chaotycznych liczba ta jest bliska teoretycznie maksymalnej. Dodatkowo, dla drgań okresowych prążki powinny być rozmieszczone regularnie, w przeciwieństwie do przypadku drgań prawie okresowych.

W celu zwrócenia uwagi na pewne problemy przeanalizujemy poniżej widma czterech przebiegów, otrzymanych w wyniku numerycznego całkowania badanego w punkcie 5.1.2 równania różniczkowego (5.8). Przebiegi te odpowiadają wybranym punktom diagramu, przedstawionego na rys. 5.6, a opisują odpowiednio drgania  $2T$ -okresowe ( $\mu_2=0.5$  – rys. 3.1a), drgania  $3T$ -okresowe ( $\mu_2=2.9$  – rys.3.1b), drgania prawie okresowe ( $\mu_2=2.37$  – rys.3.2a) oraz drgania chaotyczne ( $\mu_2=0.85$  – rys.3.2b). W celu uwypuklenia pików o mniejszych wartościach na rys. 3.1 i 3.2 zastosowano na osiach pionowych skalę logarytmiczną.

Widmo sygnału  $kT$ -okresowego powinno mieć (po filtracji amplitudowej w celu eliminacji szumów) wyraźnie maksima w punktach  $m\omega/k$ , gdzie  $m$  jest dowolną liczbą całkowitą, a  $k$  jest rzędem drgań podharmonicznych. Okazuje się, że taka sytuacja ma miejsce tylko dla  $k$ , będącego potęgą liczby 2 (rys. 3.1a). W pozostałych przypadkach widmo jest rozmyte (rys. 3.1b). Wynika to z faktu, że przedział czasu, z którego pobrano próbki, nie jest wielokrotnością okresu drgań. W związku z tym sygnał okresowy, nawet zbliżony do harmonicznego, musi być przedstawiony, jako suma większej liczby sygnałów harmonicznnych.



Rys. 3.1. Widmo przemieszczeń: a)  $\mu_2=0.5$  – drgania  $2T$ -okresowe, b)  $\mu_2=2.9$  – drgania  $3T$ -okresowe

Z powyższych powodów wskazane jest skonstruować widmo „zastępcze” (WZ), zawierające tylko lokalne maksima widma oryginalnego. Należy też wyznaczyć odcięte tych maksimów. Można tu zaproponować metodę, polegającą na aproksymacji parabolą krzywej przechodzącą przez trzy kolejne prążki w pobliżu lokalnego maksimum. Odcięte prążków widma zastępczego są bardzo zbliżone do wartości  $m\omega/k$  ( $k=3$  – rys. 3.1b). Do dalszych rozważań wygodnie jest unormować wszystkie widma w ten sposób, aby suma rzędnych była równa jedności.

Zauważmy też, że liczba prążków w widmie zastępczym ulega zmniejszeniu, z uwagi na eliminację minimów. Można teraz teoretycznie wykryć drgania

podharmoniczne rzędu  $L_p^{\max}=N_p/2$ . Liczba wszystkich prążków też się zmniejsza. Ponieważ część rzeczywista widma oraz moduł są symetryczne względem prążka  $N/2$ , natomiast część urojona jest asymetryczna względem tego punktu, do analizy wykorzystuje się praktycznie  $N/2$  prążków. Po eliminacji minimów maksymalna liczba prążków jest równa  $L^{\max}=N/4$ .

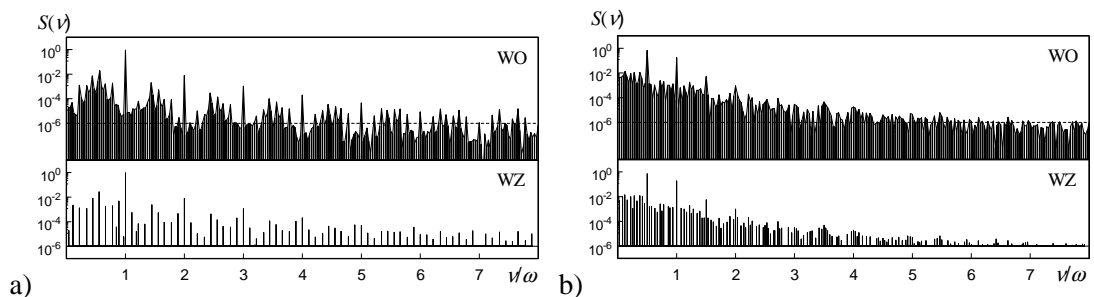
W celu wykazania drgań podharmonicznych rzędu  $1:k$  ( $k < L_p^{\max}$ ) należy, po zanotowaniu współrzędnych  $\omega_j$  ( $j=1,2,\dots,J$ ) „pików” widma zastępczego, sprawdzać dla kolejnych  $m$  ( $m < L^{\max}$ ) następujący warunek:

$$|\omega_j - m\omega/k| \leq \varepsilon_1 \quad (3.18)$$

Jeśli dla wszystkich  $\omega_j$  można dobrać odpowiednie liczby całkowite  $m$ , zapewniające spełnienie warunku (3.18) z zadaną dokładnością  $\varepsilon_1$  to mamy do czynienia z drganiami  $kT$ -okresowymi. Ponieważ w praktyce, pomimo filtracji amplitudowej, pozostają czasami „niepasujące” do nierówności (3.18) „piki” o niewielkich amplitudach, wskazane jest wprowadzić słabszy warunek, aby suma amplitud  $S_j$  pików, spełniających warunek (3.18), była bliska jedności, tzn.:

$$1 - \sum_{j=1}^{J_0} S_j \leq \varepsilon_2 \quad (3.19)$$

Rys. 3.2 ilustruje, w sposób podobny jak rys. 3.1, drgania prawie okresowe (rys.3.2a) i chaotyczne (rys.3.2b).



Rys. 3.2. Widmo przemieszczeń: a)  $\mu_2=2.37$  – drgania prawie okresowe, b)  $\mu_2=0.85$  – drgania chaotyczne

Liczba  $L$  pików widma zastępczego w całym przedziale częstości, a zwłaszcza liczba pików  $L_p$  w przedziale  $(0, \omega)$  jest dla drgań prawie okresowych znacząco mniejsza od odpowiednich liczb dla drgań chaotycznych. Ten fakt jest dość charakterystyczny dla omawianych typów drgań.

Na podstawie obserwacji widm wielu różnych sygnałów prawie okresowych i chaotycznych stwierdzono, że współczynnik  $\theta_p$ , zdefiniowany następująco:

$$\theta_p = \frac{L_p}{L_p^{\max}} \quad (3.20)$$

w przypadku drgań prawie okresowych rzadko kiedy przekracza wartość 0.3. Z kolei w przypadku drgań chaotycznych wartość tego współczynnika jest najczęściej większa od 0.6. Można więc przyjąć pośrednią wartość, np.  $\theta_0=0.4$ , jako rozgraniczającą oba typy drgań. Wartość współczynnika  $\theta_0$  można nieznacznie korygować w oparciu o obserwacje rezultatów analizy konkretnie badanego modelu układu.

W prowadzonych dalej analizach jakościowych przyjęto warunki:

$$\theta_p < \theta_0 \quad (3.21)$$

dla drgań prawie okresowych i przeciwny:

$$\theta_p > \theta_0 \quad (3.22)$$

dla drgań chaotycznych. Warunki te są sprawdzane dopiero po wykluczeniu drgań okresowych, czyli po sprawdzeniu warunków (3.18), (3.19).

W obliczeniach numerycznych warunki (3.18-3.22) należy sprawdzać dla wszystkich składowych wektora stanu. W większości przypadków otrzymuje się ten sam rezultat. W przypadku różnych wyników można przyjąć, że o charakterze drgań decydują przeważające rezultaty.

## 4. MODEL PROCESU ZDERZENIA

Najprostszym podejściem do badania procesu zderzenia dwóch elementów układu jest opis, wykorzystujący współczynnik restytucji. Stosując dodatkowo zasadę zachowania pędu można, na podstawie znajomości prędkości elementów przed zderzeniem, wyznaczyć odpowiednie prędkości po zderzeniu. Pomija się w ten sposób czas trwania zderzenia, nie ma też konieczności wprowadzania modelu sił udarowych. W przypadku, gdy pozostałe siły mają charakterystyki liniowe, ruch układu pomiędzy zderzeniami opisuje model liniowy.

W celu uwzględnienia czasu trwania zderzenia należy wprowadzić odpowiedni model sił udarowych. Z uwagi na stosunkowo krótki czas kontaktu zderzających się elementów można do opisu sił zderzeniowych przyjąć model liniowy, uwzględniający jednak zjawisko rozpraszania energii w trakcie zderzenia.

Zaletą modelu liniowego jest możliwość zastosowania w niektórych przypadkach (układy odcinkami liniowe) ścisłych metod uzyskiwania rozwiązań równań różniczkowych.

Ponieważ w badanych dalej układach zderzające się elementy mają powierzchnię płaską bądź walcową (ewentualnie kulistą), poniżej rozważono dwa elementarne przypadki zderzenia, różniące się kształtem powierzchni ograniczającej ruch wybranego elementu układu.

Przypadek ogranicznika w postaci płaszczyzny będzie dotyczyć głównie układów wibrodarowych, natomiast ogranicznik w postaci powierzchni walcowej występuje przykładowo w układzie wirnik-stojan.

### 4.1. RUCH OGRANICZONY PŁASZCZYZNĄ

Założymy dalej, że do zderzenia dwóch elementów o masach  $m_k$  i  $m_l$  (rys. 4.1) dochodzi w chwilach, wyznaczanych z warunków:

$$x - \Delta = x_k - x_l - \Delta = 0 \quad (4.1)$$

gdzie  $x_k$  i  $x_l$  są bezwzględными przemieszczeniami zderzających się elementów układu, natomiast  $x = x_k - x_l$  określa przemieszczenie względne.

Przy pominięciu czasu trwania zderzenia, zmianie ulegają tylko prędkości zderzających się elementów. Prędkości po zderzeniu można obliczyć, wykorzystując zasadę pędu oraz związek:

$$V^+ = -RV^- \quad (4.2)$$

gdzie  $V = \dot{x} = \dot{x}_k - \dot{x}_l$ , a  $R$  jest współczynnikiem restytucji. Po wyznaczeniu wartości impulsu siły udarowej:

$$S = m(1+R)V^- \quad (4.3)$$

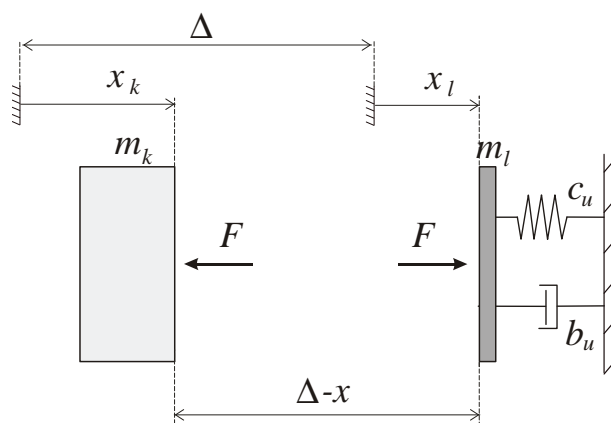
przy czym:

$$m = \frac{m_k m_l}{m_k + m_l} \quad (4.4)$$

należy zmodyfikować prędkości w sposób następujący:

$$\dot{x}_k^+ = \dot{x}_k^- - S/m_k \quad \dot{x}_l^+ = \dot{x}_l^- + S/m_l \quad (4.5)$$

W celu znalezienia pewnych związków pomiędzy parametrami modelu siły udarowej oraz współczynnikiem restytucji i czasem trwania zderzenia wprowadzono dalej prosty model, przedstawiony na rys. 4.1.



Rys. 4.1. Model procesu zderzenia – ruch ograniczony płaszczyzną

W trakcie zderzenia (dla  $x > \Delta$ ) pominięto wpływ wszystkich sił działających na oba elementy, za wyjątkiem siły, wynikającej ze zderzenia. Przyjęto również hipotezę, że siła reakcyjna nie zmienia zwrotu. Zakładając dodatkowo opis liniowy przyjęto następującą charakterystykę siły udarowej:



$$F = \begin{cases} 0 & x \leq \Delta \quad \vee \quad c_u(x - \Delta) + b_u \dot{x} \leq 0 \\ c_u(x - \Delta) + b_u \dot{x} & x > \Delta \quad \wedge \quad c_u(x - \Delta) + b_u \dot{x} > 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Po zdefiniowaniu funkcji przełączającej:

$$\eta(x, \dot{x}) = H(x - \Delta) H[c_u(x - \Delta) + b_u \dot{x}] \quad (4.7)$$

gdzie  $H(\cdot)$  jest funkcją typu Heaviside'a, siłę uderową można zapisać następująco:

$$F(x, \dot{x}, \Delta, c_u, b_u) = \eta(x, \dot{x}) [c_u(x - \Delta) + b_u \dot{x}] \quad (4.8)$$

Zapisy (4.7) i (4.8) oznaczają, że siłę uderową opisuje w procesie zderzenia model Voigta-Kelvina, przy czym siła ta nie może przyjmować wartości ujemnych (ogranicznik jest więzem jednostronnym).

Rezultaty badań modeli układów z charakterystyką (4.8) sił uderowych powinny być dla dostatecznie dużych wartości  $c_u$  zbliżone do wyników analiz modeli, w których proces zderzenia opisany jest tylko współczynnikiem restytucji. Muszą być jednak spełnione odpowiednie zależności między współczynnikiem  $b_u$  i współczynnikiem restytucji  $R$ , zapewniające w przybliżeniu takie same związki prędkości przed i po zderzeniu. Związki te można znaleźć, rozpatrując uproszczone równanie:

$$m\ddot{x} = -F(x, \dot{x}) \quad (4.9)$$

opisujące, przy pominięciu wpływu pozostałych sił, ruch względny obu elementów. Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\omega_u = \sqrt{c_u/m} \quad 2\omega_u \zeta_u = b_u / m \quad (4.10)$$

równanie (4.9) przyjmuje (dla  $F > 0$ ) postać:

$$\ddot{x} + 2\omega_u \zeta_u \dot{x} + \omega_u^2(x - \Delta) = 0 \quad (4.11)$$

Wykorzystując powszechnie znane rozwiązania równania (4.11):

$$\begin{aligned} x &= \Delta + \exp(-\zeta_u \omega_u t) [A \cos(\omega_u \sqrt{1 - \zeta_u^2} t) + B \sin(\omega_u \sqrt{1 - \zeta_u^2} t)] \quad , \quad \zeta_u < 1 \\ x &= \Delta + \exp(-\zeta_u \omega_u t) [A \exp(-\omega_u \sqrt{\zeta_u^2 - 1} t) + B \exp(\omega_u \sqrt{\zeta_u^2 - 1} t)] \quad , \quad \zeta_u > 1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

oraz warunki (założono tu, że do zderzenia dochodzi w chwili  $t=0$ ):

$$x(0) = \Delta$$

$$\dot{x}(t_u) = -R\dot{x}(0) \quad (4.13)$$

$$2\omega_u \zeta_u \dot{x}(t_u) + \omega_u^2 [x(t_u) - \Delta] = 0$$

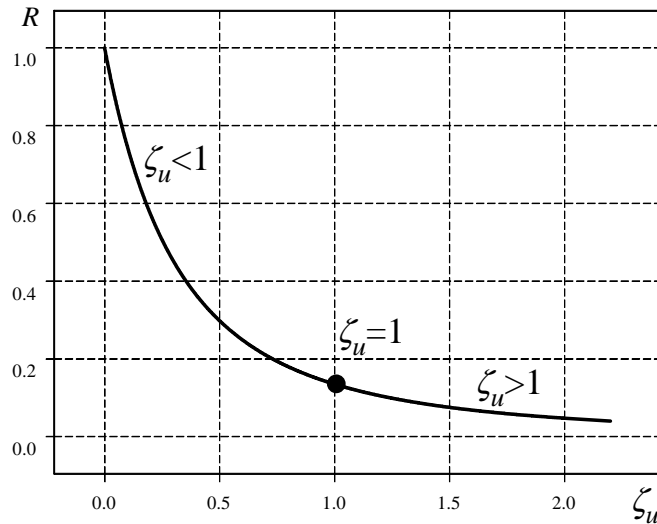
można po wyrugowaniu stałych  $A$  i  $B$  wykazać, że powinien być spełniony warunek:

$$R = \exp(-\zeta_u \omega_u t_u) \quad (4.14)$$

przy czym

$$t_u = \frac{1}{\omega_u} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta_u^2}} \arccos(2\zeta_u^2 - 1) & \zeta_u < 1 \\ 2 & \zeta_u = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{\zeta_u^2 - 1}} \ln(\zeta_u + \sqrt{\zeta_u^2 - 1}) & \zeta_u > 1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Pomimo, że do wyznaczenia  $t_u$  dla  $\zeta_u=1$  powinno być przyjęte nieco inne rozwiązanie równania (4.11), do określenia wartości  $\omega_u t_u=2$  można wykorzystać rozwiązanie dla  $\zeta_u > 1$ , stosując odpowiednie przejście graniczne. Zależności (4.14), (4.15) przedstawiono graficznie na rys. 4.2.



Rys. 4.2. Zależność współczynnika restytucji  $R$  od bezwymiarowego współczynnika tłumienia  $\zeta_u$

## 4.2. RUCH OGRANICZONY POWIERZCHNIĄ WALCOWĄ

Rys. 4.3 przedstawia przypadek zderzenia centralnego dwóch elementów, potraktowanych jako punkty materialne o masach  $m_k$  i  $m_l$ .

Założono, że powierzchnie obu elementów mają kształt walcowy. Przyjęto też, że ruch elementu  $k$  w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach opisują współrzędne  $x_k$  i  $y_k$ .

Do zderzenia dochodzi w chwilach czasu, wyznaczanych z warunków:

$$r - \Delta = \sqrt{x^2 + y^2} - \Delta = \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2} - \Delta = 0 \quad (4.16)$$

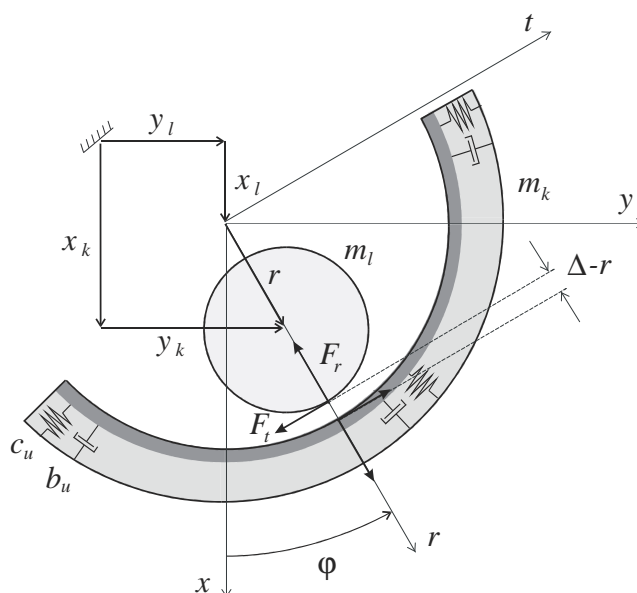
W celu określenia impulsu siły uderowej wyznaczmy pomocniczo składowe prędkości względnej w układzie biegunowym:

$$V_r = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = (\dot{x}_k - \dot{x}_l) \cos \varphi + (\dot{y}_k - \dot{y}_l) \sin \varphi \quad (4.17)$$

$$V_t = -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi = -(\dot{x}_k - \dot{x}_l) \sin \varphi + (\dot{y}_k - \dot{y}_l) \cos \varphi$$

przy czym kąt  $\varphi$  jest zdefiniowany związkami (rys. 4.3):

$$\cos \varphi = x/\Delta = (x_k - x_l)/\Delta \quad \sin \varphi = y/\Delta = (y_k - y_l)/\Delta \quad (4.18)$$



Rys. 4.3. Model procesu zderzenia – ruch ograniczony powierzchnią walcową

Po wykorzystaniu zasady pędu oraz następującego związku dla składowych radialnych prędkości względnej w punkcie styku:

$$V_r^+ = -RV_r^- \quad (4.19)$$

można wyznaczyć składową radialną impulsu siły udarowej:

$$S_r = m(1+R)V_r^- \quad (4.18)$$

gdzie  $m$  jest zdefiniowane wzorem (4.4). Po przyjęciu hipotezy tarcia suchego:

$$S_t = \mu_0 S_r \operatorname{sgn} V_t^- \quad (4.20)$$

następujące wzory określają składowe impulsu w układzie kartezjańskim:

$$S_x = S_r \cos \varphi - S_t \sin \varphi \quad S_y = S_r \sin \varphi + S_t \cos \varphi \quad (4.21)$$

Prędkości odpowiednich elementów po zderzeniu wyrażają się poprzez składowe  $S_x$  i  $S_y$  następująco:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k^+ &= \dot{x}_k^- - S_x / m_k & \dot{y}_k^+ &= \dot{y}_k^- - S_y / m_k \\ \dot{x}_l^+ &= \dot{x}_l^- + S_x / m_l & \dot{y}_l^+ &= \dot{y}_l^- + S_y / m_l \end{aligned} \quad (4.23)$$

W celu uwzględnienia czasu trwania zderzenia można wprowadzić model siły udarowej w sposób podobny jak w punkcie 4.1. Składowe kartezjańskie  $F_x$ ,  $F_y$  sił zderzeniowych można zapisać za pomocą składowych w układzie biegunowym  $F_r$ ,  $F_t$  następująco:

$$F_x = F_r \cos \varphi - F_t \sin \varphi \quad F_y = F_r \sin \varphi + F_t \cos \varphi \quad (4.24)$$

Składowa radialna siły udarowej wyraża się wzorem analogicznym do (4.8):

$$F_r(r, V_r) = \eta[c_u(r - \Delta) + b_u V_r] \quad (4.25)$$

przy czym funkcja przełączająca:

$$\eta(r, V_r) = H(r - \Delta) H[c_u(r - \Delta) + b_u V_r] \quad (4.26)$$

zależy teraz od współrzędnej  $r$  i prędkości  $V_r$ . Składową transwersalną można wyznaczyć ze wzoru:

$$F_t = \mu F_r \quad (4.27)$$

przy czym:

$$\mu = \mu_0 \operatorname{sgn} V_t \quad (4.28)$$

gdzie  $\mu_0$  jest współczynnikiem tarcia suchego. Występujące w związkach (4.25), (4.26) i (4.28) składowe prędkości w układzie biegunowym wyznacza się z następujących wzorów:

$$V_r = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \qquad V_t = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r} \qquad (4.29)$$

W przypadku elementu wirującego z prędkością kątową  $\dot{\Theta}$ , przy uwzględnieniu jego wymiarów (np. problem zderzeń w układzie wirnik – stojan), współczynnik  $\mu$  jest funkcją prędkości  $V_s = V_t + \dot{\Theta}R$  w punkcie styku tego elementu z ogranicznikiem. Czasami, głównie ze względów numerycznych, wygodnie jest przyjąć, że  $\mu$  jest funkcją ciągłą, np. w postaci proponowanej w pracy [5]:

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 \operatorname{sgn} V_s & \text{dla } |V_s| > V_{s0} \\ \mu_0 V_s / V_{s0} & \text{dla } |V_s| \leq V_{s0} \end{cases} \qquad (4.30)$$

gdzie  $V_s$  jest dostatecznie małą liczbą (0.001m/s).

Niektórzy autorzy, przykładowo Muszyńska w pracy [67], zakładają, że składowa  $F_t$  siły udarowej jest sumą siły tarcia suchego (współczynnik  $\mu$ ) i wiskotycznego (współczynnik  $b_t$ ):

$$F_t = \eta[\mu F_r + b_t(V_t + \dot{\psi}R)] \qquad (4.31)$$

gdzie  $\dot{\psi} = \dot{\Theta} - \Omega$  jest prędkością kątową wynikłą z drgań ( $\Omega$  jest tu ustaloną prędkością wirnika).

## 5. UKŁADY UDAROWE

Zaprezentowany wyżej model procesu zderzenia zostanie wykorzystany w pierwszej kolejności w badaniach układów uderowych. Analizowane będą układy, których elementy wykonują ruch tylko w jednym kierunku (układy jednowymiarowe). Przykładem takich układów mogą być różne modele narzędzi o działaniu uderowym [28], [61] lub modele eliminatorów uderowych [58]. We wszystkich rozważanych przypadkach przyjęto założenie, że wymuszająca siła (lub wymuszenie kinematyczne) jest opisana funkcją harmoniczną. Zostanie zbadany wpływ wybranych parametrów układu na charakter wzbudzanych drgań, liczbę zderzeń w jednym okresie wymuszenia oraz na pewne wskaźniki jakości działania układu.

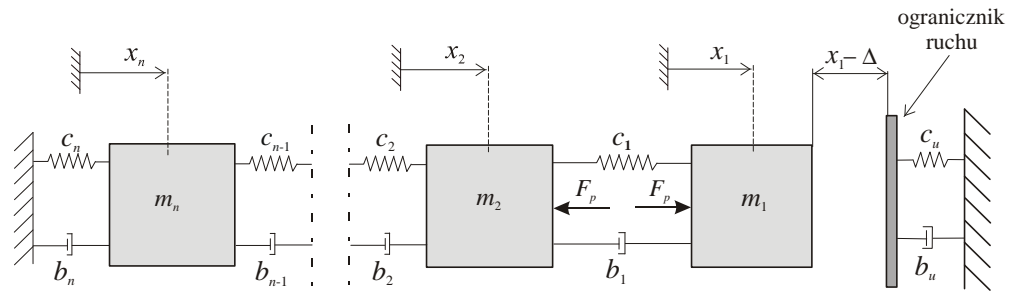
### 5.1. UKŁAD UDAROWY ODCINKAMI LINIOWY

Poniżej poddano analizie model wielomasowego układu uderowego (rys. 5.1). Ruch układu pomiędzy zderzeniami opisano układem równań różniczkowych liniowych, natomiast do opisu procesu zderzenia wykorzystano model zaprezentowany w punkcie 4.1 pracy. Drgania układu są wymuszane siłą harmoniczną.

#### 5.1.1. Model układu

Przyjęty model będzie badany głównie w celach poznawczych. Można go jednak również traktować jako uproszczony model pewnych narzędzi o działaniu uderowym, np. ręcznych narzędzi pneumatycznych takich, jak młoty wyburzeniowe, ubijaki formierskie lub wiertarki uderowe. Wówczas elementy układu o masach  $m_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) reprezentują poszczególne części narzędzia np.: tłok, bijak czy jego korpus. Działająca na pierwsze dwie masy siła wymuszająca  $F_p$  jest wtedy siłą wewnętrzną, np. siłą parcia powietrza. Parametry  $c_j$ ,  $b_j$ , opisujące własności sprężysto-tłumiące odpowiednich połączeń, mogą określać przykładowo model poduszki powietrznej lub model operatora narzędzia.

W modelu dopuszczono możliwość uderzeń elementu o masie  $m_1$  w sztywną lub podatnie zamocowaną ostoję, nazywaną dalej ogranicznikiem ruchu. Przyjęto, że przemieszczenia  $x_j$  są mierzone od położenia równowagi statycznej, w związku z czym parametr  $\Delta$  określający położenie ogranicznika, uwzględnia również siły statyczne (grawitacyjne, siły docisku) działające na rzeczywisty układ. Parametr  $\Delta$  może, dla dostatecznie dużych wartości sił statycznych, przyjmować również wartości ujemne.



Rys. 5.1. Model układu uderowego

Zakładając dalej liniowy związek  $b_j = \epsilon c_j$ , ruch układu można opisać układem równań różniczkowych II rzędu o następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \mathcal{E}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1(x_1 - x_2) &= F_p(t) - F(\dot{x}_1, x_1) \\
 m_2 \ddot{x}_2 - c_1 \mathcal{E}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_2 \mathcal{E}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - c_1(x_1 - x_2) + c_2(x_2 - x_3) &= -F_p(t) \\
 m_3 \ddot{x}_3 - c_2 \mathcal{E}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + c_3 \mathcal{E}(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) - c_2(x_2 - x_3) + c_3(x_3 - x_4) &= 0 \\
 \dots\dots\dots \\
 m_n \ddot{x}_n - c_{n-1} \mathcal{E}(\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n) + c_n \mathcal{E} \dot{x}_n - c_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + c_n x_n &= 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Siła wymuszająca zmienia się tu harmonicznie:  $F_p(t) = P \cos \Omega t$ , a siłę uderową  $F(\dot{x}_1, x_1)$  opisuje wzór (4.8). W przypadku pominięcia czasu trwania zderzenia należy w równaniach (5.1) przyjąć  $F = 0$ . W trakcie numerycznego całkowania równań różniczkowych ruchu należy dodatkowo sprawdzać, czy nie zachodzi warunek  $x_1 = \Delta$ . Po wyznaczeniu z zadaną dokładnością chwili zderzenia należy skokowo zmienić wartość prędkości  $\dot{x}_1$  zgodnie ze wzorem (4.2)

W celu zmniejszenia liczby parametrów mających wpływ na rozwiązania badanych równań różniczkowych wprowadzimy dalej wielkości bezwymiarowe. Bezwymiarowy czas zdefiniujemy następująco:

$$\tau = \omega_0 t \tag{5.2}$$

przy czym  $\omega_0$  jest częstością drgań własnych układu jednomasowego:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} \quad (5.3)$$

Wprowadzimy także bezwymiarowe współrzędne  $u_j = x_j/e$ ,  $j=1,2,\dots,n$ , odnosząc przemieszczenia  $x_j$  do wartości  $e = P/m_1\omega_0^2$ . W nowych zmiennych układ równań różniczkowych (5.1) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} u_1'' + 2\zeta(u_1' - u_2') + u_1 - u_2 + f(u_1, u_1') &= \cos \omega\tau \\ \mu_2 u_2'' - 2\zeta(u_1' - u_2') + 2\gamma_2\zeta(u_2' - u_3') - u_1 + u_2 + \gamma_2(u_2 - u_3) &= -\cos \omega\tau \\ \mu_3 u_3'' - 2\gamma_2\zeta(u_2' - u_3') + 2\gamma_3\zeta(u_3' - u_4') - \gamma_2(u_2 - u_3) + \gamma_3(u_3 - u_4) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \mu_n u_n'' - 2\gamma_{n-1}\zeta(u_{n-1}' - u_n') + 2\gamma_n\zeta u_n' - \gamma_{n-1}(u_{n-1} - u_n) + \gamma_n u_n &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Równania (5.4) zależą od następujących bezwymiarowych parametrów:

$$\omega = \Omega/\omega_0 \quad \gamma_j = c_j/c_1 \quad \mu_j = m_j/m_1 \quad \zeta = \varepsilon\omega_0/2 \quad (5.5)$$

Występującą w równaniach (5.4) bezwymiarową siłę uderową można, po wykorzystaniu wzoru (4.8), zapisać następująco:

$$f(u_1, u_1') = \eta(u_1, u_1')[\gamma_u(u_1 - \delta) + 2\zeta\gamma_u\sqrt{\gamma_u}u_1'] \quad (5.6)$$

przy czym:

$$\delta = \Delta/e \quad \gamma_u = \omega_u^2/\omega_0^2 = c_u/c_1 \quad (5.7)$$

Zdefiniowane wzorami (4.10) parametry  $\omega_u$ ,  $\zeta_u$  zależą poprzez wzory (4.14), (4.15) od współczynnika restytucji  $R$  oraz czasu trwania zderzenia  $t_u$ .

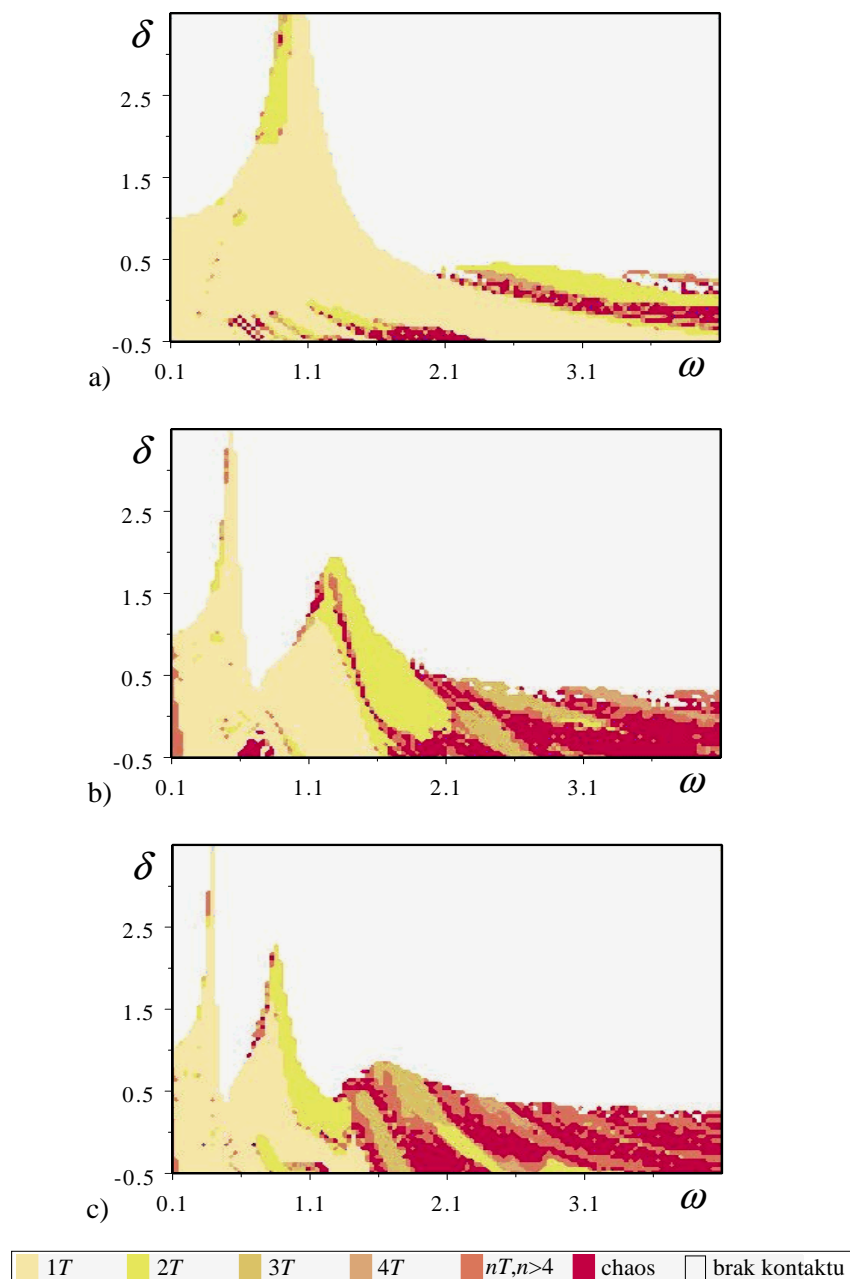
### 5.1.2. Analiza jakościowa

Poniżej przedstawiono wybrane rezultaty analizy jakościowej. Badano wpływ bezwymiarowych parametrów (5.5) i (5.7) na liczbę uderzeń oraz na typ wzbudzanych drgań (okresowe, podharmoniczne, chaotyczne).

Skupiono się na zbadaniu wpływu częstości wymuszenia  $\omega$  i położenia ogranicznika  $\delta$ . W przypadku układu dwumasowego przeanalizowano również wpływ stosunku mas  $\mu_2$  i stosunku sztywności  $\gamma_2$ . W obliczeniach ustalono wartość



bezwymiarowego współczynnika tłumienia, zakładając  $\zeta=0.1$ . Pominięto również czas trwania zderzenia, wykorzystując do opisu procesu zderzenia współczynnik restytucji (przyjęto  $R=0.8$ ). Model (5.6) siły udarowej zostanie wykorzystany w następnym punkcie pracy.



Rys. 5.2. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\delta$  na typ drgań ( $\gamma=1$ ):

a)  $s=1$ , b)  $s=2$  ( $\mu_2=2$ ); c)  $s=3$  ( $\mu_2=1, \mu_3=3$ )

Rys. 5.2 pokazuje wpływ parametrów  $\omega$  i  $\delta$  na typ wzbudzanych drgań odpowiednio dla układu o jednym ( $s=1$ ), dwóch ( $s=2$ ) i trzech stopniach swobody ( $s=3$ ). Dla dużych wartości parametru  $\delta$  obserwujemy w szerokim zakresie częstotści

drżania okresowe, podczas których nie dochodzi do zderzenia masy  $m_1$  z ogranicznikiem (brak kontaktu). W takim przypadku amplitudy drżania mogą zostać wyznaczone na podstawie analizy układu liniowego.

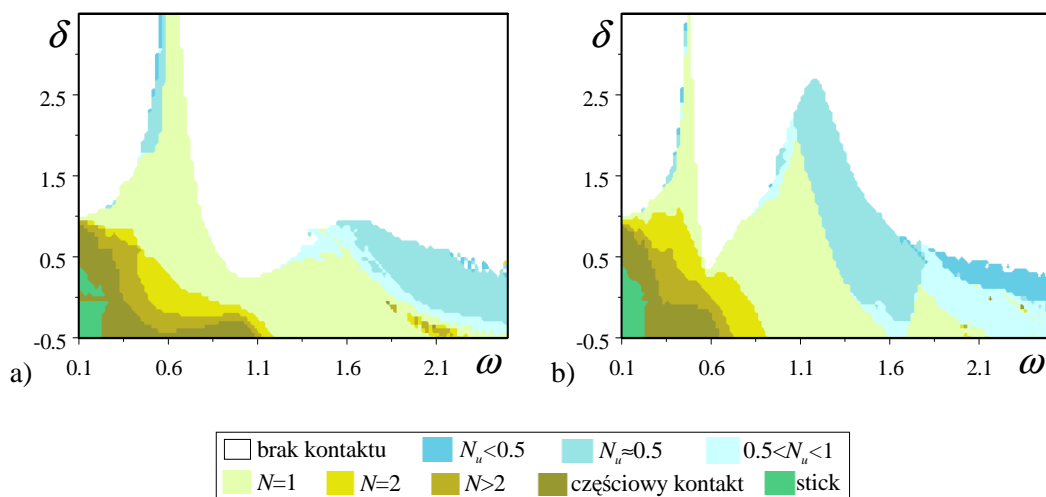
Uderzenia występują dla dostatecznie małych wartości  $\delta$ , a także dla nieco większych w zakresach rezonansowych. Ze wzrostem liczby stopni swobody (liczby mas w układzie) zwiększa się liczba tych zakresów, w kolejnych zakresach obserwuje się coraz to bardziej skomplikowany typ drżania.

W zakresie pierwszego rezonansu (a także częściowo drugiego) przeważają drżania z częstotliwością wymuszenia (drżania  $1T$ -okresowe), chociaż można także zaobserwować inne typy drżania, głównie  $2T$ -okresowe.

Najbardziej złożona sytuacja ma miejsce za ostatnim rezonansem, najczęściej ze wzrostem wartości  $\omega$  drżania  $1T$ -okresowe przechodzą kolejno w drżania podharmoniczne drugiego, trzeciego i wyższych rzędów, drżania te oddzielone są jednak od siebie zakresami drżania chaotycznych.

W celu zbadania wpływu parametrów  $\mu_2 = m_2 / m_1$  i  $\gamma_2 = c_2 / c_1$  na typ drżania i liczbę zderzeń do analizy przyjęto model układu o dwóch stopniach swobody, którego ruch pomiędzy zderzeniami opisuje układ równań różniczkowych o postaci:

$$\begin{aligned} u_1'' + 2\zeta(u_1' - u_2') + u_1 - u_2 &= \cos \omega \tau \\ \mu_2 u_2'' - 2\zeta(u_1' - u_2') + 2\gamma_2 \zeta u_2' - u_1 + u_2 + \gamma_2 u_2 &= -\cos \omega \tau \end{aligned} \quad (5.8)$$

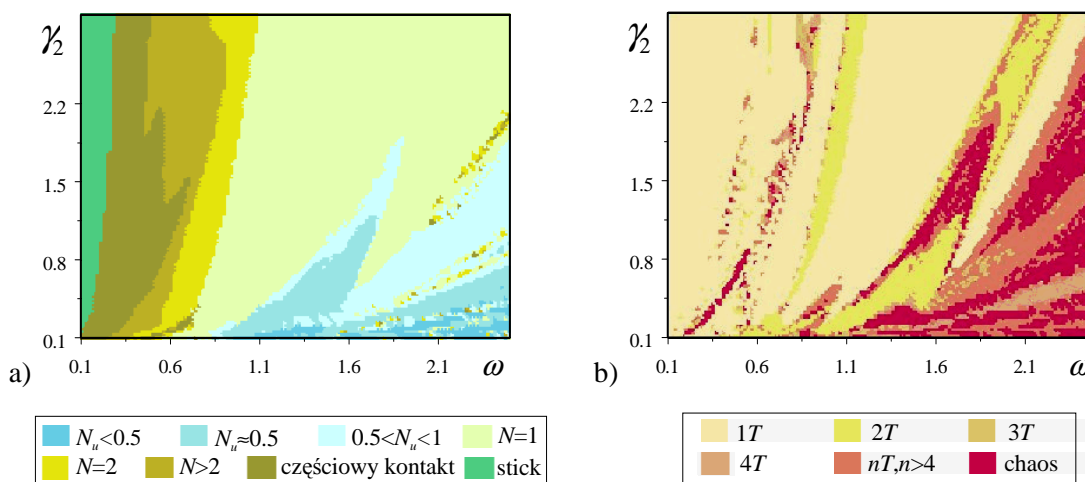


Rys. 5.3. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\delta$  na liczbę uderzeń  $N_u$ : a)  $\gamma_2 = 1, \mu_2 = 1$ , b)  $\gamma_2 = 1, \mu_2 = 3$

Rys. 5.3 ilustruje wpływ parametrów  $\omega$  i  $\delta$  na liczbę uderzeń. Największe prawdopodobieństwo zderzenia masy  $m_1$  z ogranicznikiem występuje w zakresach rezonansowych, tzn. w pobliżu częstotliwości własnych  $\omega_1, \omega_2$  układu liniowego (5.8).

Wartości tych częstości są odpowiednio równe:  $\omega_1=0.617$ ,  $\omega_2=1.597$  dla  $\gamma_2=\mu_2=1$  (rys. 5.3a) oraz  $\omega_1=0.482$ ,  $\omega_2=1.189$  dla  $\gamma_2=1$ ,  $\mu_2=3$  (rys. 5.3b). W zakresach rezonansowych przeważają drgania  $1T$ -okresowe, podczas których w jednym okresie wymuszenia dochodzi do pojedynczych uderzeń ( $N_u=1$ ) masy  $m_1$  w ogranicznik. Ze zwiększeniem  $\delta$  liczba uderzeń maleje, przy zbyt dużej wartości  $\delta$ , masa  $m_1$  w ogóle nie uderza w ogranicznik. Także ze zwiększaniem częstości  $\omega$  zmniejsza się liczba uderzeń. Z kolei dla bardzo małych częstości liczba zderzeń się zwiększa. Zderzenia te nie występują regularnie, najczęściej w pewnych ograniczonych przedziałach dochodzi w bardzo krótkich odstępach czasu do dużej liczby uderzeń z coraz to mniejszymi prędkościami. Praktycznie w tych przedziałach czasu zachodzi stały kontakt masy  $m_1$  z ogranicznikiem (zjawisko *stick* – przyklejenie). Do dokładniejszego zbadania zjawiska *stick* przydatniejszy jest model, uwzględniający czas trwania zderzenia (czyli podatnie zamocowany ogranicznik).

Porównując rys. 5.3a i 5.3b można zauważyć, że wraz ze zwiększaniem stosunku mas  $\mu_2$  w okolicach drugiej częstości własnej zwiększa się zakres drgań okresowych z pojedynczymi uderzeniami. W przypadku modeli narzędzi udarowych ich parametry konstrukcyjne powinny być tak dobrane, aby bezwymiarowe parametry  $\omega$  i  $\delta$  leżały w obszarze pojedynczych uderzeń ( $N_u=1$ ).

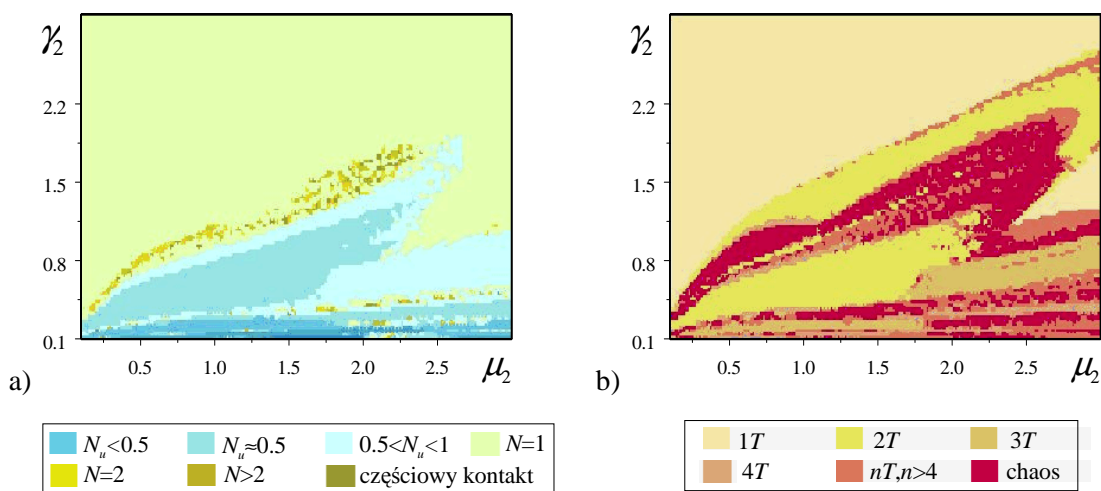


Rys. 5.4. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\gamma_2$  na: a) liczbę uderzeń  $N_u$ , b) typ drgań

Na rys. 5.4a i 5.4b porównano wpływ parametrów  $\omega$  i  $\gamma_2$  na liczbę uderzeń oraz typ drgań. W obliczeniach przyjęto  $\delta=0.2$  i  $\mu_2=3$ , sugerując się analizą wybranych modeli narzędzi udarowych. W zakresach parametrów, w których występują pojedyncze uderzenia ( $N_u=1$ ) dominują drgania  $1T$ -okresowe. Dla małych wartości częstości okres drgań jest także najczęściej równy okresowi wymuszenia, jednak ulega zwiększeniu liczba uderzeń ( $N_u > 1$ ). Dla większych częstości uderzenia są rzadsze ( $N_u < 1$ ) i często nieregularne, co wpływa wyraźnie na charakter drgań.

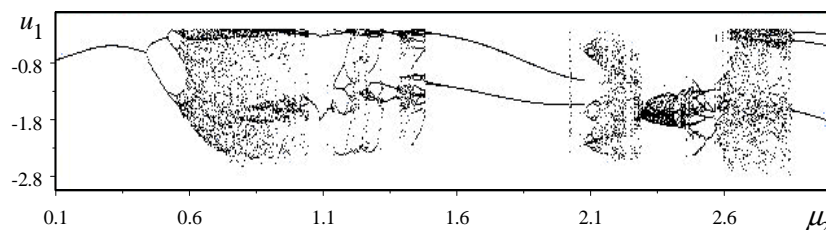
W tych zakresach częstości występują zarówno drgania okresowe, ale o okresie większym od okresu wymuszenia (podharmoniczne), jak i nieokresowe, głównie chaotyczne.

Rys. 5.5a i 5.5b ilustrują wpływ parametrów  $\mu_2$  i  $\gamma_2$  na liczbę zderzeń oraz typ drgań. Analizę przeprowadzono dla ustalonej wartości częstości wymuszenia  $\omega=2$ , w pobliżu drugiej częstości własnej układu liniowego (np.  $\omega_2=2.029$  dla  $\gamma_2=3$ ,  $\mu_2=1$ ). Przyjęto też  $\delta=-0.2$ .



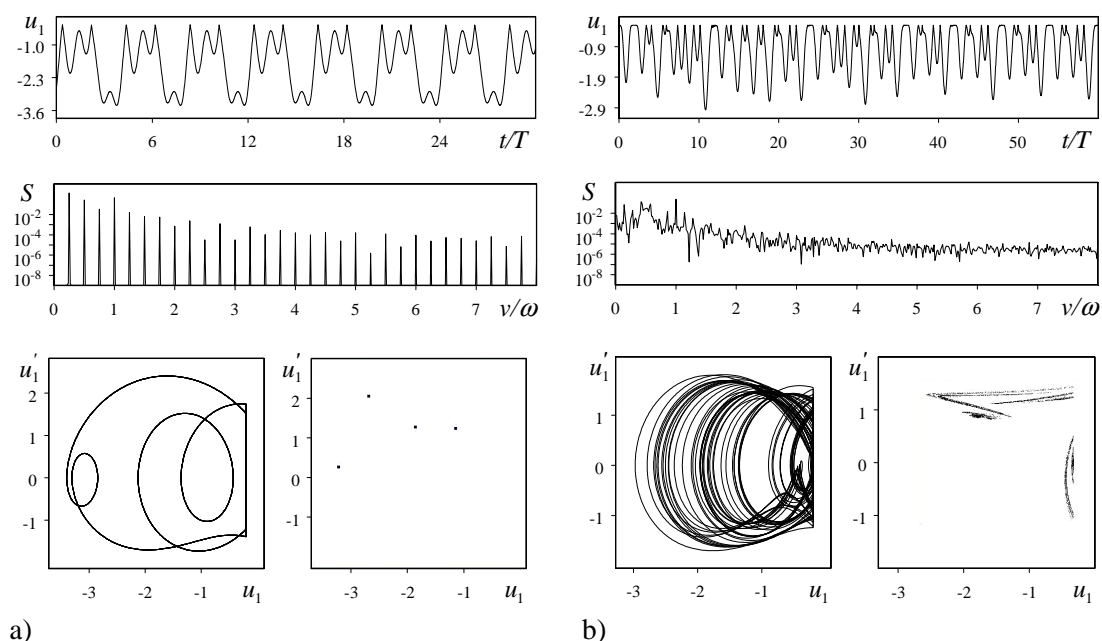
Rys. 5.5. Wpływ parametrów  $\mu_2$  i  $\gamma_2$  na: a) liczbę uderzeń  $N_u$ , b) typ drgań

Dotychczasowe rezultaty wskazywały, że charakter drgań (typ, liczba zderzeń) zależy wyraźnie od częstości wymuszenia i częstości własnych odpowiedniego układu liniowego. Na te ostatnie duży wpływ mają parametry  $\mu_2$  i  $\gamma_2$ . Ten fakt prawdopodobnie powoduje złożony charakter przedstawionych na rys. 5.5 „obszarów”. Dla dużych wartości parametru  $\gamma_2$  obserwuje się drgania 1T-okresowe, które ze zmniejszaniem wartości  $\gamma_2$  przechodzą najpierw w drgania podharmoniczne drugiego rzędu, a dalej w drgania chaotyczne. Nieregularne obszary drgań chaotycznych są od siebie oddzielone wąskimi obszarami drgań podharmonicznych wyższych rzędów. Przedstawione rezultaty potwierdzają fakt, że w przypadku rzadkich uderzeń wzbudzają się najczęściej drgania podharmoniczne lub chaotyczne.



Rys. 5.6. Diagram bifurkacyjny – wpływ parametru  $\mu_2$  ( $\gamma_2 = 1$ ,  $\delta = -0.2$ ,  $\omega = 2$ )

Rys. 5.6 przedstawia diagram bifurkacyjny sporządzony metodą stroboskopową, a odpowiadający przekrojowi obszaru, pokazanemu na rys. 5.5b dla  $\gamma_2=1$ . W zakresach wartości  $\mu_2$ , w których obserwuje się układy pojedynczych linii ruch jest okresowy, przy czym liczba tych linii określa rząd drgań podharmonicznych. Układ udarowy powinien pracować w zakresach  $\mu_2$ , w których okres drgań jest równy okresowi wymuszenia (pojedyncza linia na wykresie). Dla wartości  $\mu_2 \approx 0.45$  można zaobserwować bifurkację rozwiązań  $1T$ -okresowych w  $2T$ -okresowe, następnie dla  $\mu_2 \approx 0.53$  w  $4T$ -okresowe, po czym następuje kaskada bifurkacji prowadząca w efekcie finalnym do drgań chaotycznych. Dla  $\mu_2 \approx 1.5$  drgania chaotyczne przechodzą ponownie w drgania  $2T$  okresowe. W zakresie drgań chaotycznych widoczne są wąskie przedziały częstości, w których występują drgania innego typu.



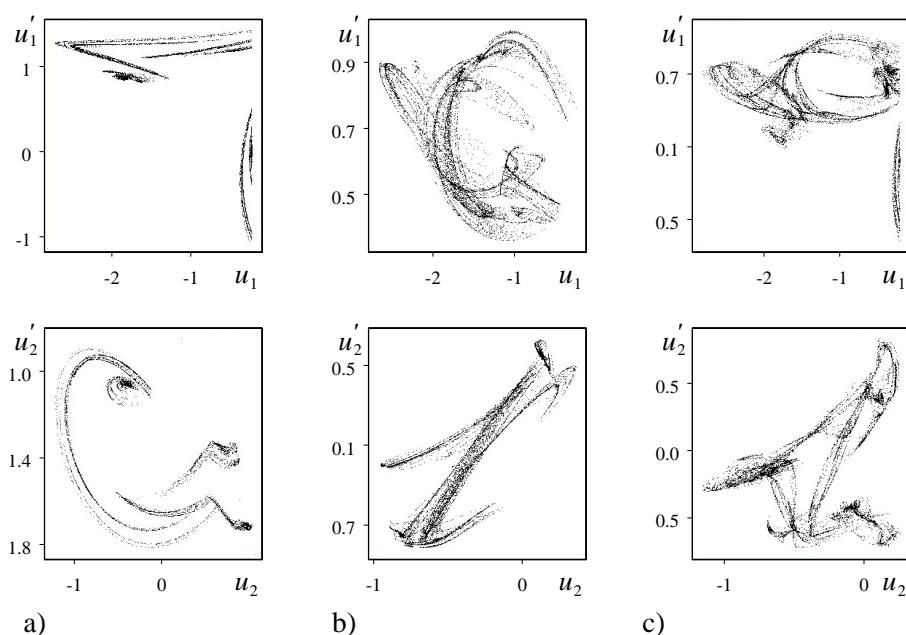
Rys. 5.7. Przebieg czasowy, widmo, płaszczyzna fazowa i przekrój Poincaré'go ( $\omega=2$ ,  $\delta=-0.2$ ,  $\mu_2=0.8$ ): a)  $\gamma_2 = 0.3417$ ; drgania  $4T$  okresowe, b)  $\gamma_2 = 1$ ; drgania chaotyczne

Rys. 5.7 przedstawia przebiegi czasowe zmiennej  $u_1(t)$ , widmo sygnału oraz odpowiednie płaszczyzny fazowe i przekroje Poincaré'go. Wykresy ilustrują drgania podharmoniczne typu 1:4 (rys. 5.7a) i chaotyczne (rys. 5.7b).

W przypadku drgań podharmonicznych okres drgań jest 4 razy większy od okresu wymuszenia, na płaszczyznach fazowych obserwuje się zamknięte krzywe, a widmo ma wyraźnie widoczne cztery maksima w jednostkowym przedziale bezwymiarowej częstości.

Diametralnie inna sytuacja zachodzi w przypadku drgań chaotycznych (rys. 5.7b); tutaj przebieg czasowy jest nieregularny, na płaszczyźnie fazowej jest widoczna nie zamykająca się krzywa, a widmo ma charakter zbliżony do ciągłego.

Na rys. 5.8 pokazano fazowe płaszczyzny stroboskopowe czyli przekroje Poincare'go dla pierwszej ( $u_1, u_1'$ ) i drugiej masy ( $u_2, u_2'$ ). Ilustrują one wpływ parametru  $\mu_2$  na kształt fraktala i odpowiadają wybranym punktom diagramu pokazanemu na rys. 5.6.



Rys. 5.8. Przekroje Poincare'go ( $\gamma_2 = 1, \delta = -0.2, \omega = 2$ ): a)  $\mu_2=0.8$ , b)  $\mu_2=2.27$ , c)  $\mu_2=2.7$

## 5.2. ANALIZA MECHANIZMU WSPOMAGANIA UDARU WIERTARKI

Poniżej rozpatrzono wybrany model narzędzia o działaniu udarowym (wiertarki udarowej) w celu pokazania możliwości wykorzystania rezultatów analizy jakościowej do doboru parametrów konstrukcyjnych narzędzia.

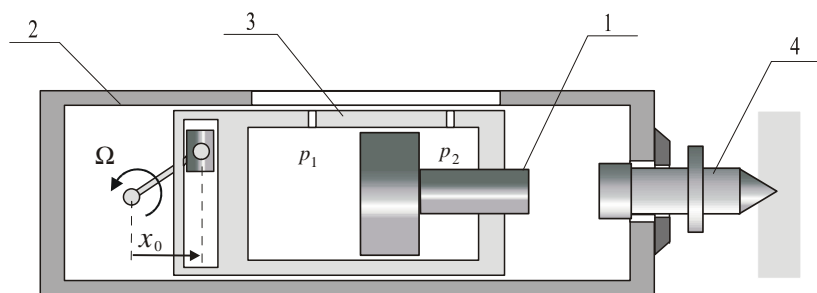
Poprawnie zaprojektowane narzędzie udarowe powinno zapewniać dostatecznie dużą energię udaru oraz pracować regularnie dla różnych sposobów pracy i warunków kontaktu narzędzia roboczego z obrabianym materiałem. Nieregularność ruchu podnosi zazwyczaj poziom emitowanych drgań przekazywanych na operatora narzędzia; rezultatem zakłóceń ruchu mogą być także dodatkowe zderzenia elementów konstrukcji [28], prowadzące w efekcie finalnym do zniszczenia mechanizmu wspomaganie udaru.

W oparciu o rezultaty analizy jakościowej można często lepiej oszacować „optymalne” parametry układu, niż w przypadku stosowania metod optymalizacji.

Uwzględnienie w kryterium optymalizacji wszystkich wskaźników jakości, odpowiedzialnych nie tylko za minimalizację drgań oraz efektywność pracy, ale także wskaźników uwzględniających czułość układu na zmianę wartości pewnych jego parametrów, związanych ze zmiennymi podczas pracy warunkami (np. pozycja narzędzia) jest w praktyce niemożliwe.

### 5.2.1. Model układu

Na rys. 5.9 przedstawiono schemat ideowy mechanizmu wspomaganego uderu stosowanego w wiertarkach elektro-pneumatycznych firmy Hilti. Uwzględniono tutaj następujące elementy: tłok-bijak 1, korpus narzędzia 2, cylinder z komorami 3, narzędzie robocze, nazywane dalej ogranicznikiem ruchu 4 oraz układy sterujące przepływem powietrza między komorami.



Rys. 5.9. Schemat mechanizmu wspomaganego uderu: 1 – bijak, 2 – korpus, 3 – cylinder, 4 – ogranicznik

Cylinder, napędzany mechanizmem jarzmowym, spręża powietrze w komorach narzędzia i poprzez siłę parcia wprawia w ruch bijak, który z kolei uderza w końcówkę narzędzia roboczego, przekazując mu swoją energię.

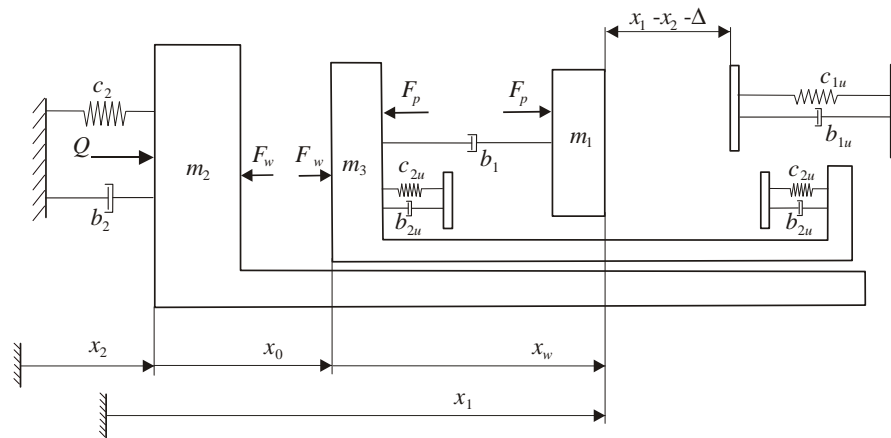
Pomimo pewnych różnic w zasadzie działania i szczegółach konstrukcyjnych układów stosowanych w innych narzędziach udarowych, zaproponowane poniżej podejście do ich analizy jakościowej może być zastosowane w analogiczny sposób.

Do badań przyjęto model układu o dwóch stopniach swobody, wprowadzając wektor stanu, którego współrzędnymi są przemieszczenia bezwzględne bijaka  $x_1$  i korpusu  $x_2$  oraz odpowiednie prędkości  $\dot{x}_1$  i  $\dot{x}_2$ . Ruch bijaka opisano równaniem różniczkowym:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -F_p(x_w) - F_{1u} - F_{2u} - b_1 \dot{x}_w + m_1 g \sin \alpha \quad (5.9)$$

uwzględniając siłę parcia powietrza  $F_p$ , siły udarowe  $F_{1u}$  i  $F_{2u}$ , opisujące odpowiednio procesy zderzenia bijaka z ogranicznikiem i cylindrem, siłę oporów wiskotycznych oraz siłę grawitacyjną. Kąt  $\alpha$  określa tu pozycję narzędzia podczas

pracy,  $m_1$  jest masą bijaka, a  $b_1$  współczynnikiem tłumienia pomiędzy cylindrem i tłokiem.



Rys. 5.10. Model fizyczny układu

Działająca na bijak wypadkowa siła parcia powietrza  $F_p$  zależy od ciśnień  $p_1$  i  $p_2$  w obu komorach narzędzia, a te z kolei zależą głównie od przemieszczenia bijaka względem cylindra. Wartości ciśnień  $p_1$  i  $p_2$  można wyznaczyć rozpatrując równania przemian termodynamicznych. Równania te zależą od zastosowanego układu sterowania przepływem powietrza, w związku z czym na rozwiązanie finalnego układu równań różniczkowych ma wpływ znaczna liczba parametrów, między innymi parametry określające położenia kanalików, ich wymiary oraz szerokość tłoka  $h$ . Analiza jakościowa takiego modelu została przeprowadzona w pracy autora [28]. W pracy tej wykazano, że największy wpływ na rozwiązania ma położenie ogranicznika, częstość wymuszenia oraz długość całkowita cylindra, nieco mniejszy natomiast, parametry odpowiedzialne za sterowanie przepływem powietrza. Z tego powodu, a także dla większej przejrzystości rozważań, poniżej zaproponowano uproszczony model siły parcia powietrza.

Pominięto przepływ powietrza między komorami, zakładając przemiany politropowe. Dodatkowo zastąpiono, wyznaczoną przy tych założeniach, charakterystykę siły parcia jej rozwinięciem w szereg Taylora z ograniczeniem się do wyrazów stopnia trzeciego. Przyjęto dalej:

$$F_p(x_w) = \alpha_1 x_w + \alpha_2 x_w^2 + \alpha_3 x_w^3 \quad (5.10)$$

przy czym  $x_w = x_1 - x_2 - x_0$ . określa przemieszczenie bijaka względem cylindra. Założono też, że ruch cylindra względem korpusu jest znaną funkcją czasu  $x_0(t)$  o postaci:



$$x_0(t) = e \sin \Omega t \quad (5.11)$$

Występujące we wzorze (5.10) współczynniki  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  zależą głównie od powierzchni  $S_1, S_2$  tłoka oraz długości  $2l=l_1+l_2$  (rys. 5.9). Określają je następujące wzory:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \kappa p_0 (S_1 + S_2) / l \\ \alpha_2 &= \kappa(\kappa+1) p_0 (S_1 - S_2) / 2l^2 \\ \alpha_3 &= \kappa(\kappa+1)(\kappa+2) p_0 (S_1 + S_2) / 6l^3 \end{aligned} \quad (5.12)$$

przy czym  $p_0$  jest ciśnieniem atmosferycznym, a  $\kappa$  współczynnikiem politropy.

Założono, że uderzenie bijaka w ogranicznik zachodzi dla  $x_1-x_2=\Delta$  (pominięto tu ruch wiertła względem korpusu) i opisano siłę uderową wzorem (4.8), przyjmując  $F_{1u}(x_1, \dot{x}_1) = F(x_1, \dot{x}_1, \Delta, c_{1u}, b_{1u})$ . W przypadku pominięcia czasu zderzenia należy postępować w sposób opisany w poprzednim punkcie pracy.

Z uwagi na fakt, że charakterystyka (5.10) dopuszcza możliwość zderzeń w układzie cylinder – bijak, w modelu wprowadzono ograniczniki ruchu (rys. 5.10), zabezpieczające przed zbyt dużymi przemieszczeniami względnymi bijaka. Włączenie tych ograniczników wnosi dodatkową informację o niepożądanych zderzeniach w układzie. Oddziaływanie tych ograniczników opisuje siła uderowa  $F_{2u}(x_w, \dot{x}_w) = F(x_w, \dot{x}_w, l, c_{2u}, b_{2u}) - F(-x_w, -\dot{x}_w, l, c_{2u}, b_{2u})$ .

Do wyznaczenia równania różniczkowego opisującego drgania korpusu wygodnie jest wykorzystać zasadę ruchu środka masy:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + m_3 \ddot{x}_0 = -b_2 \dot{x}_2 - c_2 x_2 + (m_1 + m_2) g \sin \alpha - F_{1u}(x_1, \dot{x}_1) + Q \quad (5.13)$$

gdzie  $m_2$  jest sumą mas cylindra i korpusu,  $m_3$  jest masą cylindra, natomiast parametry  $c_2, b_2$  i  $Q$  opisują przyjęty model operatora (sztywność, tłumienie i stała siła docisku). Wykorzystując równanie (5.9) i związek (5.11), ruch korpusu można opisać równaniem różniczkowym:

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_p(x_w) + F_{2u}(x_w, \dot{x}_w) + b_1 \dot{x}_w - b_2 \dot{x}_2 - c_2 x_2 + m_0 e \Omega^2 \sin \Omega t + m_2 g \sin \alpha + Q \quad (5.14)$$

Po wprowadzeniu bezwymiarowego czasu  $\tau = \omega_0 t$  ( $\omega_0 = \sqrt{c_1/m_1}$ ,  $c_1 = \alpha_1$ ) oraz bezwymiarowych współrzędnych  $u_1 = x_1/e$  i  $u_2 = x_2/e$  model układu jest opisany układem dwóch nieliniowych równań różniczkowych drugiego rzędu o następującej postaci:

$$\begin{aligned}
u_1'' &= -f_p(u_w) - f_{1u}(u_1, u_1') - f_{2u}(u_w, u_w') - 2\zeta_1 u_w' + q_0 \\
u_2'' &= (f_p(u_w) + f_{2u}(u_w, u_w') + 2\zeta_1 u_w' - \gamma_2 u_2 - 2\zeta_2 u_2' + \mu_3 \omega^2 \sin \omega \tau + q) / \mu_2 + q_0
\end{aligned}
\tag{5.15}$$

przy czym  $u_w$  jest bezwymiarowym przemieszczeniem bijaka względem tulei i wyraża się wzorem:

$$u_w = u_1 - u_2 - \sin \omega \tau \tag{5.16}$$

Siłę udarową  $f_u(u_1, u_1')$  opisuje wzór (5.6). Bezwymiarową siłę parcia  $f_p(u_w)$  można, po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\beta_1 = \sigma(\kappa + 1)/2 \quad \beta_2 = (\kappa + 1)(\kappa + 2)/6 \quad \sigma = (S_1 - S_2)/(S_1 + S_2) \tag{5.17}$$

zapisać następująco:

$$f_p = u_w \left[ 1 + \beta_1 (u_w / \lambda) + \beta_2 (u_w / \lambda)^2 \right] \tag{5.18}$$

Pozostałe bezwymiarowe parametry, występujące w równaniach (5.15), określają wzory:

$$\begin{aligned}
\omega &= \Omega / \omega_0 & \lambda &= l / e & \gamma_u &= c_u / c_1 \\
\delta &= \Delta / e & \gamma_2 &= c_2 / c_1 & \zeta_u &= b_u / 2m_1 \omega_0 \\
\mu_2 &= m_2 / m_1 & \mu_3 &= m_3 / m_1 & \zeta_{u0} &= b_{u0} / 2m_1 \omega_0 \\
\zeta_1 &= b_1 / 2m_1 \omega_0 & \zeta_2 &= b_2 / 2m_1 \omega_0 & \gamma_{u0} &= c_{u0} / c_1 \\
q_0 &= g \sin \alpha / e \omega_0^2 & q &= Q / m_1 e \omega_0^2
\end{aligned}
\tag{5.19}$$

Najistotniejszy wpływ na rozwiązania równań różniczkowych (5.15) mają parametry  $\omega$ ,  $\lambda$  i  $\delta$ . W miejsce parametru  $\delta$  wygodnie jest wprowadzić parametr  $\rho$ , zdefiniowany następująco:

$$\rho = (\delta - 1) / \lambda \tag{5.20}$$

Parametr  $\rho$ , określający położenie ogranicznika, powinien być zawarty w przedziale (-1,1). Przy założeniu, że cylinder znajduje się w skrajnym prawym położeniu, dla  $\rho=1$  następuje uderzenie bijaka w ściankę prawej komory, zamiast w ogranicznik. Z kolei przy podobnym założeniu dla  $\rho=-1$  bijak uderza w ściankę lewej komory. Tak, więc ograniczenie zmian parametru  $\rho$  do podanego przedziału zapobiega częściowo niepożądanym zderzeniom elementów mechanizmu udarowego.

### 5.2.2. Wskaźniki jakości

Do oceny poziomu drgań wprowadzono dalej wskaźnik jakości:

$$E_w = \frac{1}{2NT} \int_{\tau_0}^{\tau_0+NT} \mu_2 u_2'^2 d\tau \quad (5.21)$$

określający średnią energię kinetyczną drgań korpusu narzędzia ( $T$  – okres wymuszenia kinematycznego,  $N$  – liczba okresów).

W celu ocenienia efektywności pracy narzędzia wprowadzono wskaźniki zależne od energii udaru. W przypadku pominięcia czasu trwania zderzenia energia udaru zależy od prędkości  $v_{1k}$  i  $w_{1k}$  bijaka przed i po zderzeniu. Można ją, dla  $k$ -go uderzenia, zdefiniować następująco:

$$E_u^{(k)} = \frac{1}{2} \mu_1 (v_{1k}^2 - w_{1k}^2), \quad k=1, \dots, K \quad (5.22)$$

W przypadku uwzględnienia czasu zderzenia można dla uproszczenia obliczeń przyjąć podobną definicję, przy czym  $v_{1k}$  i  $w_{1k}$  są teraz prędkościami notowanymi w chwilach włączenia się i wyłączenia charakterystyki siły zderzeniowej (energia tracona przez bijak).

Podczas ustalonych drgań o okresie równym okresowi wymuszenia w przedziale czasu ( $\tau_0, \tau_0+NT$ ) liczba uderzeń  $K$  jest najczęściej równa liczbie okresów  $N$ , czyli w jednym okresie następuje jedno uderzenia bijaka w ogranicznik. Wtedy wzór (5.22) mierzy prawidłowo efektywność pracy narzędzia. W przypadku drgań okresowych o innym okresie może dochodzić do rzadszych lub też wielokrotnych uderzeń, a podczas drgań chaotycznych dodatkowo ulega zmianom wartość energii wyliczanej ze wzoru (5.22). Na podstawie zanotowanych wartości (5.22) dla kolejnych uderzeń można wyznaczyć wartość średnią energii udaru:

$$\bar{E}_u = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E_u^{(k)} \quad (5.23)$$

Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że sama wartość średnia niezbyt dobrze opisuje efektywność pracy narzędzia. Podczas drgań chaotycznych bardzo często osiąga ona dużą wartość na skutek sporadycznych uderzeń bijaka w ogranicznik z dużymi prędkościami. Dodatkową informację o procesie zderzeń wnosi wariancja:

$$\sigma_{E_u}^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (E_u^{(k)} - \bar{E}_u)^2 \quad (5.24)$$

Duża wartość wyrażenia (5.24) świadczy o dużych wahaniami energii uderu (o nieregularnej pracy), przy czym zarówno zbyt mała jak i zbyt duża wartość (5.22) nie jest wskazana z uwagi na efektywność pracy oraz możliwość uszkodzenia narzędzia roboczego. Z tego względu nałożono pewną karę na wskaźnik (5.23), przyjmując ostatecznie jako wskaźnik efektywności wyrażenie:

$$E_u = \bar{E}_u - \sigma_{E_u} \quad (5.25)$$

które można interpretować jako minimalną wartość oczekiwaną energii uderu.

Prawidłowo zaprojektowany układ powinien charakteryzować się maksymalnie dużą wartością wyrażenia (5.25) i równocześnie minimalną wartością (5.21). Można jako wskaźnik jakości działania  $J$  przyjąć stosunek wartości (5.25) oraz (5.21), a następnie poszukiwać jego maksimum.

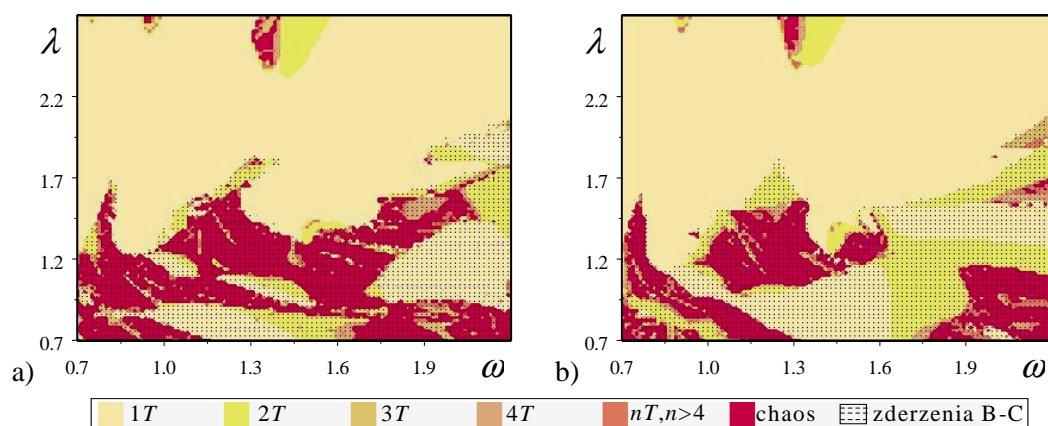
### 5.2.3. Dobór parametrów konstrukcyjnych

Poniżej przedstawiono wybrane rezultaty analizy jakościowej układu, prowadzonej pod kątem optymalnego doboru niektórych parametrów konstrukcyjnych urządzenia. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń numerycznych dla różnych zestawów bezwymiarowych parametrów, a także na podstawie rezultatów prezentowanych w pracy [28], wyselekcjonowano parametry istotnie wpływające na zachowanie badanego układu – są to parametry  $\omega$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  i  $R$ . Stwierdzono niezbyt duży wpływ na jakościowe rezultaty parametrów charakteryzujących model operatora ( $\gamma_2$ ,  $\zeta_2$ ,  $q$ ), a także niektórych parametrów konstrukcyjnych ( $q_0$ ,  $\zeta_1$ ). Wartości pewnych parametrów ( $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\sigma$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ) przyjęto na podstawie analizy istniejących rozwiązań konstrukcyjnych.

W obliczeniach numerycznych ustalono wartości następujących parametrów:  $\mu_1=1.0$ ,  $\mu_2=40$ ,  $\mu_3=0.5$ ,  $\beta_1=0.24$ ,  $\beta_2=1.36$ ,  $\sigma=0.2$ ,  $\zeta_1=0.01$ ,  $\zeta_2=1.6$ ,  $\gamma_2=2$ ,  $q_0=0$ . Parametr  $\sigma$  wpływa nieznacznie na rezultaty analizy, przykładowo podobne w sensie jakościowym wyniki otrzymuje się dla  $\sigma=0$  (jednakowe powierzchnie bijaka). Przyjęto również  $q=0$  (pozycja pozioma). Parametr  $q$  ma wpływ na położenie równowagi statycznej, a więc pośrednio, w przetransformowanym odpowiednio równaniu, wpływa na wartości nowych bezwymiarowych parametrów, określających np. położenie ogranicznika lub bezwymiarową częstość pracy. Wartości parametrów  $\omega$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  i  $R$  podlegały w trakcie obliczeń zmianie.

Rys. 5.11a i 5.11b przedstawiają obszary różnego typu drgań w płaszczyźnie  $(\omega, \lambda)$  odpowiednio dla modelu zderzenia opisanego współczynnikiem restytucji ( $\tau_u=0$ ) i modelu (4.8). W drugim przypadku wartości parametrów  $\gamma_u$  i  $\zeta_u$  siły

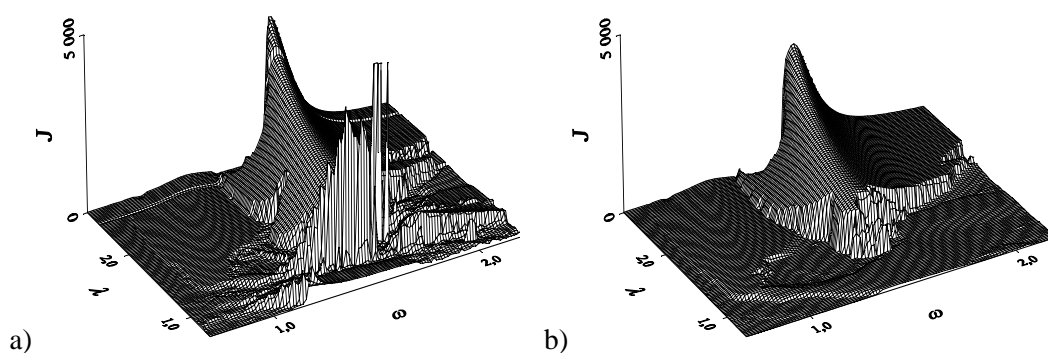
udarowej (4.8) dobrano z warunków (4.14) i (4.15), przyjmując  $R=0.7$  i zakładając relatywnie długi czas zderzenia  $\tau_u=0.02$ . Ponadto przyjęto  $\rho = -0,4$ .



Rys. 5.11. Obszar  $(\omega, \lambda)$ ;  $\rho=-0,4, R=0.7$ : a)  $\tau_u=0$ , b)  $\tau_u=0.02$

Porównując rys. 5.11a i 5.11b można stwierdzić pewne podobieństwo w sensie jakościowym wyznaczonych obszarów (dla mniejszych wartości  $\tau_u$  analogie są jeszcze większe).

Największe różnice występują dla małych wartości parametru  $\lambda$ , określającego długość komory cylindra. W zakresach tych dochodzi najczęściej do niepożądanych zderzeń pomiędzy bijakiem a cylindrem (zderzenia B-C). Można zaobserwować stosunkowo duże obszary drgań chaotycznych, drgań okresowych wyższych rzędów i nieco mniejsze drgań  $1T$ -okresowych. Ze zwiększaniem wartości parametru  $\lambda$ , zwiększa się zakres drgań o okresie wymuszenia, a więc właściwej pracy układu.

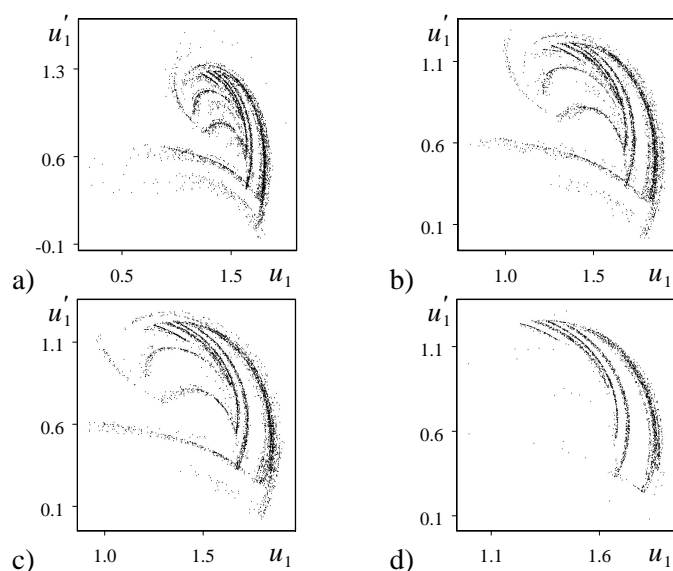


Rys. 5.12. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\lambda$  na wskaźnik jakości  $J$  ( $\rho=-0,4, R=0.7$ ):

a)  $\tau_u=0$ , b)  $\tau_u=0.02$

Jeszcze większe analogie można stwierdzić, porównując wskaźnik jakości  $J$ , wyznaczony z pominięciem czasu zderzenia (rys.5.12a) oraz z jego uwzględnieniem (rys. 5.12b). Dla przyjętej wartości parametru  $\rho$  obszar zdecydowanie większych

wartości  $J$  występuje dla  $\lambda > 1.4$  i  $\omega > 1.5$ . Ze wzrostem wartości  $\lambda$  rośnie wyraźnie wartość  $J$ . Jednak z uwagi na występujące w praktyce ograniczenia konstrukcyjne należy ograniczyć zakres zmian parametru. Kierując się analizą istniejących mechanizmów wspomaganie udaru zakres ten ograniczono od góry wartością 2.7.



Rys. 5.13. Wpływ czasu trwania impulsu na kształt fraktala ( $\lambda=1.4$ ,  $\rho=0.2$ ,  $\omega=0.6$ ):

- a)  $\tau_u=0.015$ ,  $\lambda_1=0.076$ ,  $\lambda_2=-0.032$ ,  $\lambda_3=-0.046$ ,  $\lambda_4=-0.115$ ,  $D_L=2.949$ ,
- b)  $\tau_u=0.020$ ,  $\lambda_1=0.061$ ,  $\lambda_2=-0.033$ ,  $\lambda_3=-0.045$ ,  $\lambda_4=-0.099$ ,  $D_L=2.625$ ,
- c)  $\tau_u=0.250$ ,  $\lambda_1=0.051$ ,  $\lambda_2=-0.034$ ,  $\lambda_3=-0.044$ ,  $\lambda_4=-0.086$ ,  $D_L=2.384$ ,
- d)  $\tau_u=0.030$ ,  $\lambda_1=0.049$ ,  $\lambda_2=-0.036$ ,  $\lambda_3=-0.043$ ,  $\lambda_4=-0.082$ ,  $D_L=2.300$ .

Na rys. 5.13 pokazano przekroje Poincaré'go ( $u_1$ ,  $u_1'$ ) dla różnych czasów trwania zderzenia. Można zauważyć, że nawet dla stosunkowo dużych wartości parametru  $\tau_u$  utrzymują się drgania chaotyczne, a kształt charakteryzującego je fraktala tylko nieznacznie się zmienia.

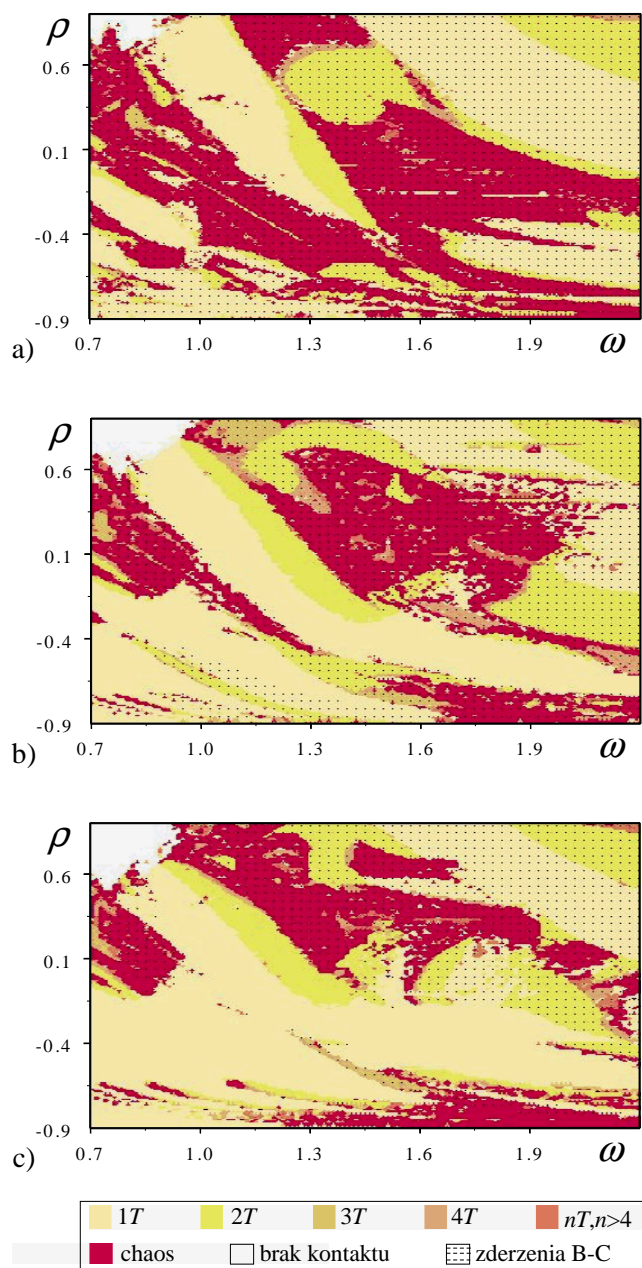
Dla przedstawionych portretów stroboskopowych wyznaczono również wykładniki Lapunowa oraz obliczono zgodnie ze wzorem 2.15 wymiar Lapunowa  $D_L$ . Wartości te podano w opisie rys.5.13.

Dalsze rezultaty otrzymano wykorzystując prostszy model procesu zderzenia, bazujący na współczynniku restytucji.

Na rys. 5.14 przedstawiono obszary drgań chaotycznych i okresowych w płaszczyźnie ( $\omega$ ,  $\rho$ ) dla różnych wartości parametru  $\lambda$ .

Można tu również zauważyć, że wraz ze wzrostem długości komory (dla większych wartości parametru  $\lambda$ ), zwiększa się obszar prawidłowej pracy układu (drgań  $1T$ -okresowych bez zderzeń bijaka z cylindrem). Dla mniejszych wartości  $\lambda$  (rys. 5.14a) obszar ten występuje tylko w zakresie częstości  $0.9 < \omega < 1.3$ , dla

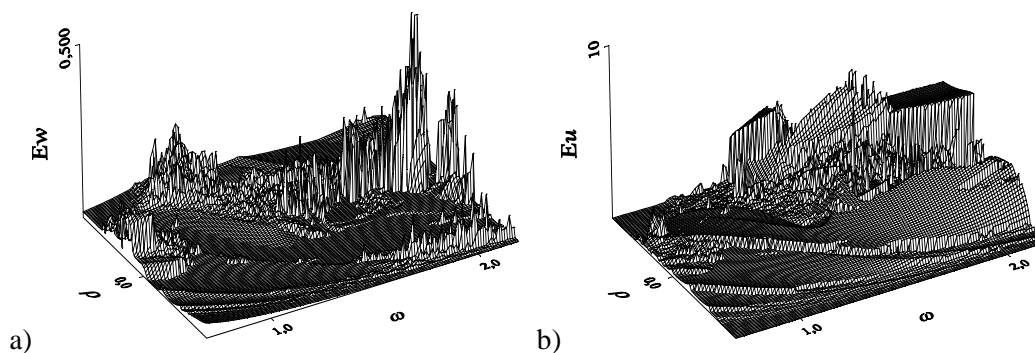
większych  $\lambda$  (rys. 5.14c) zakres dopuszczalnych częstotliwości znacznie się zwiększa, przy czym szerszy obszar leży w zakresie wyższych częstotliwości.



Rys. 5.14. Obszar  $(\omega, \rho)$ ;  $R=0.7$ ,  $\tau_u=0$ : a)  $\lambda=1.3$ , b)  $\lambda=1.6$ , c)  $\lambda=1.8$

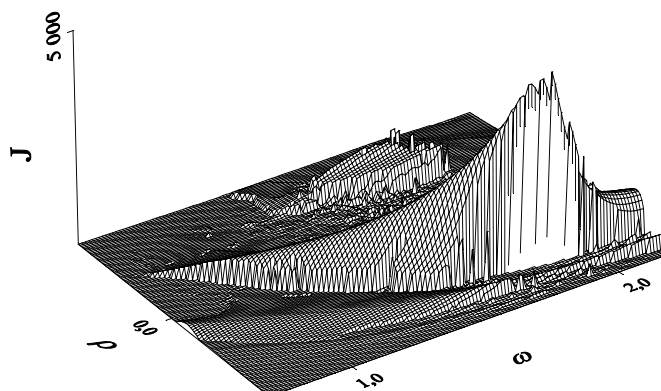
Dobór „optymalnych” wartości parametrów  $\omega$  i  $\rho$  nie jest tu całkiem jednoznaczny. Zakładając większe wartości parametru  $\omega$  należy przyjąć odpowiednio mniejsze wartości parametru  $\rho$ . Zbyt duże wartości parametru  $\rho$  nie są wskazane z uwagi na fakt, że dla małych częstotliwości nie dochodzi w ogóle do uderzeń bijaka w ogranicznik (brak kontaktu), a dla większych częstotliwości występują niepożądane zderzenia bijaka z cylindrem.

Rozpatrzmy dokładniej przypadek pokazany na rys. 5.14c (dla  $\lambda=1.8$ ).



Rys 5.15. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\rho$  na wskaźniki jakości ( $\lambda=1.8$ ,  $R = 0.7$ ):  
a) energia drgań  $E_w$ , b) energia uderu  $E_u$

Na rys. 5.15 pokazano zależność wskaźników jakości  $E_w$  i  $E_u$  od parametrów  $\omega$  i  $\rho$ . W zakresach parametrów, dla których drgania są okresowe (rys. 5.14c), oba wskaźniki zmieniają się w sposób ciągły wraz ze zmianą parametrów. Diametralnie inna sytuacja zachodzi w obszarach drgań chaotycznych; tutaj zmiany wskaźników mają charakter nieregularny, zbliżony do przypadkowego. Przy takich nieciągłych zmianach omawianych wskaźników znalezienie maksimum wskaźnika  $J=E_w/E_u$  (rys. 5.16) numerycznymi metodami optymalizacji jest praktycznie niemożliwe.



Ryc. 5.16. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\rho$  na wskaźnik jakości  $J$  ( $\lambda = 1.8$ ,  $R=0.7$ )

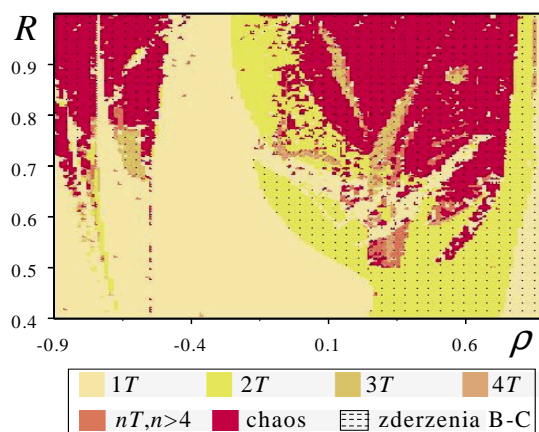
Analizując rezultaty pokazane na rys. 5.15 i 5.16 można oszacować zakresy wartości parametrów  $\omega$  i  $\rho$ , dla których badany układ pracuje prawidłowo. W zakresach tych oba wskaźniki powinny się zmieniać w sposób regularny, przy czym energia drgań powinna być zbliżona do minimalnej, a energia uderu musi być dostatecznie duża. Są to najczęściej pewne podobszary drgań  $1T$ -okresowych (rys. 5.14c).

Energia uderu rośnie wyraźnie ze wzrostem częstości wymuszenia zarówno w obszarach drgań regularnych i chaotycznych, jednak w tych ostatnich zwiększa się równocześnie energia drgań. W przypadku drgań chaotycznych, pomimo



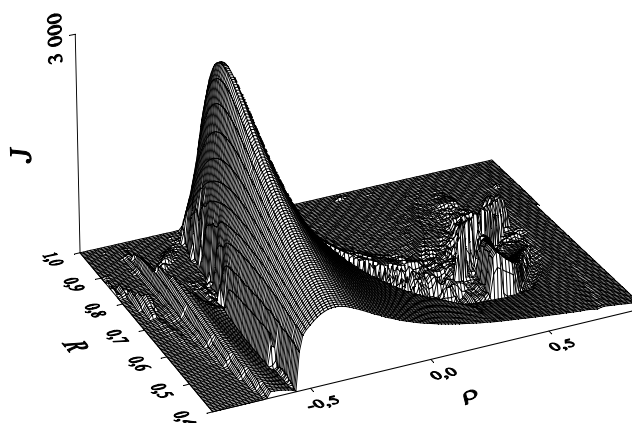
stosunkowo dużych wartości wskaźnika  $E_u$ , wskaźnik  $J$  (rys. 5.16) nie osiąga wartości maksymalnych. Wskaźnik ten ma maksimum na granicy obszarów drgań okresowych i chaotycznych, przy czym po wejściu w obszar drgań nieregularnych jego wartość gwałtownie maleje.

Dla zapewnienia bezpiecznej pracy mechanizmu, wartości badanych parametrów powinny znajdować się w pewnej odległości od tej granicy. Przykładowo, zakładając wartość parametru  $\rho = -0.4$  „optymalna” wartość parametru  $\omega$  jest bliska wartości  $\omega = 1.5$ .



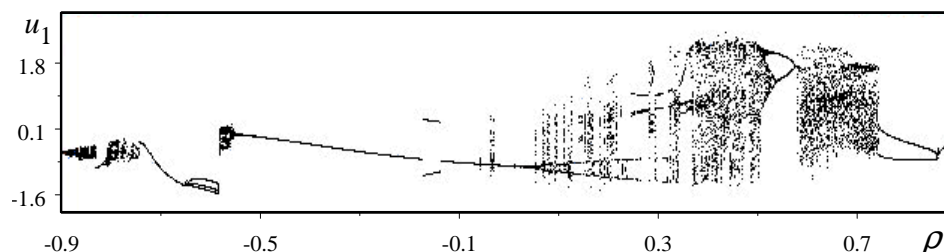
Rys. 5.17. Wpływ parametrów  $\rho$  i  $R$  na typ drgań ( $\lambda=1.8$ ,  $\omega=1.5$ )

Na rys. 5.17 przedstawiono obszary drgań chaotycznych i okresowych w płaszczyźnie  $(\rho, R)$ . Parametry  $\rho$  i  $R$  mogą podczas pracy narzędziem ulegać pewnym zmianom. Współczynnik  $R$  zależy od rodzaju obrabianego materiału, z kolei parametr  $\rho$ , powiązany z parametrem  $\delta$  wzorem (5.20), uwzględnia częściowo obciążenia statyczne (a więc również pozycję pracy narzędziem). Analiza rezultatów wskazuje, że w dużym otoczeniu punktu  $R=0.7$  i  $\rho=-0.4$  układ pracuje prawidłowo; drgania są  $T$ -okresowe, występuje jedno w okresie uderzenie w ogranicznik i nie dochodzi do zderzeń bijaka z cylindrem.



Rys. 5.18. Wpływ parametrów  $\rho$  i  $R$  na wskaźnik jakości  $J$  ( $\lambda=1.8$ ,  $\omega=1.5$ )

Rys. 5.18 ilustruje wpływ omawianych parametrów na wskaźnik jakości  $J$ . Odpowiada on rys. 5.17. Tutaj jeszcze wyraźniej widać, że prawidłowo oszacowano wartość parametru  $\rho$ . Dla  $\rho \approx -0.4$  wartości wskaźnika  $J$  są bliskie wartościom maksymalnym i w małym stopniu zależą od współczynnika restytucji.



Rys. 5.19. Diagram bifurkacyjny – wpływ parametru  $\rho$  ( $\lambda=1.8$ ,  $\omega=1.5$ ,  $R=0.7$ )

Rys. 5.19 przedstawia diagram bifurkacyjny, odpowiadający przekrojowi obszaru pokazanemu na rys. 5.14c dla  $\omega=1.5$ . Sporządzając taki diagram należy podczas numerycznego całkowania równań różniczkowych (5.15) notować wartości współrzędnych wektora stanu (tutaj przemieszczenie bezwzględne bijaka  $u_1$ ) w chwilach odległych od siebie o okres wymuszenia.

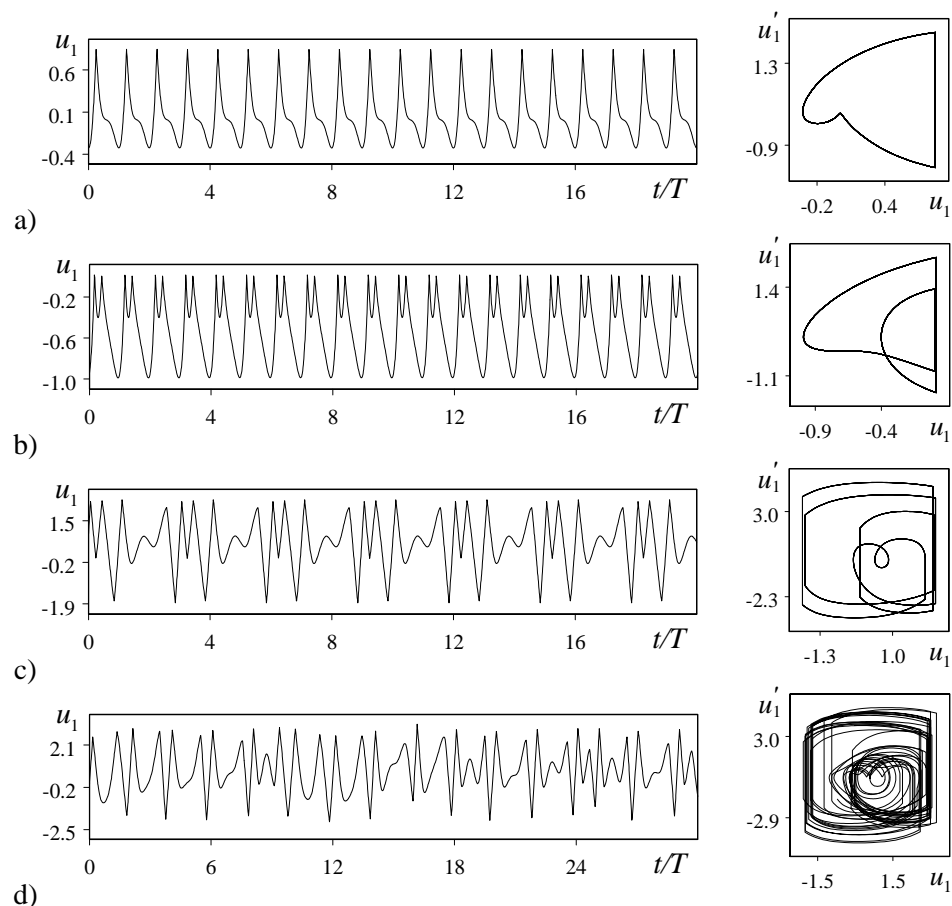
Pokazany diagram bifurkacyjny ilustruje wpływ położenia ogranicznika (parametru  $\rho$ ) na typ wzbudzanych drgań. W przedziale  $(-0.55, -0.20)$ , zawierającym oszacowaną wcześniej wartość  $\rho \approx -0.4$  obserwuje się pojedynczą linię na wykresie, co jest typowe dla drgań  $1T$ -okresowych. Poza tym przedziałem drgania mają charakter drgań chaotycznych lub podharmonicznych wyższego rzędu.

Rys. 5.20 ilustruje ruch bijaka dla typowych przypadków drgań okresowych i chaotycznych. Pokazane przebiegi czasowe i odpowiednie płaszczyzny fazowe odpowiadają 20 okresom wymuszenia w przypadku drgań okresowych oraz 30 okresom dla drgań chaotycznych.

W pierwszych dwóch przypadkach mamy do czynienia z drganiami  $1T$ -okresowymi, przy czym w jednym okresie dochodzi do pojedynczych (rys. 5.20a) lub podwójnych (rys. 5.20b) uderzeń bijaka w ogranicznik.

W trzecim przypadku (rys. 5.20c) drgania też są okresowe, ale okres drgań jest trzykrotnie większy od okresu wymuszenia. Ponadto dochodzi do dodatkowych uderzeń w ścianki komór narzędzia, co jest wyraźnie widoczne na płaszczyźnie fazowej.

Ostatni przypadek (rys. 5.20d) ilustruje drgania chaotyczne, zbliżone częściowo do drgań  $3T$ -okresowych (rys. 5.20c). Tu także można zaobserwować niepożądane zderzenia elementów mechanizmu wspomaganie udaru.



Rys. 5.20. Przebiegi czasowe i portrety fazowe ( $\lambda=1.8$ ,  $\omega=1.5$ ,  $R=0.7$ ):  
a)  $\rho=-0.4$ , b)  $\rho=-0.7$ , c)  $\rho=0.3$ , d)  $\rho=0.6$

### 5.3. WNIOSKI

Przeprowadzone obliczenia numeryczne oraz uzyskane rezultaty pozwalają wyciągnąć następujące wnioski dotyczące zachowania się układów uderowych, interesujące z punktu widzenia poznawczego oraz wnioski bardziej szczegółowe odnośnie rozważanego modelu mechanizmu wspomaganie udaru.

- Największy wpływ na charakter rozwiązań mają parametry wymuszenia (częstość i amplituda), parametr określający położenie ogranicznika oraz parametry istotnie wpływające na częstości własne układu zlinearyzowanego.
- Model siły uderowej, uwzględniający czas trwania impulsu, wpływa nieznacznie na rezultaty analizy jakościowej.
- Obszary drgań podharmonicznych wyższych rzędów występują najczęściej w zakresie wyższych częstości wymuszenia. Są one oddzielone od siebie

zakresami drgań chaotycznych. Ze zwiększeniem okresu drgań zmniejsza się zwykle liczba zderzeń, występujących w jednym okresie wymuszenia.

- W przypadku drgań chaotycznych wprowadzone wskaźniki jakości zmieniają się w sposób nieregularny. Z tego względu bardziej właściwym podejściem do problemu optymalnego doboru parametrów układu jest wykorzystanie metod analizy jakościowej niż stosowanie metod optymalizacji parametrycznej.
- Analiza jakościowa modelu mechanizmu wspomagania udaru pozwala wyznaczyć zakresy wartości parametrów, zapewniających dostatecznie dużą efektywność pracy urządzenia, mały poziom drgań oraz zmniejszone ryzyko wystąpienia niepożądanych zderzeń bijaka z komorą narzędzia.
- Istotny wpływ na rozwiązania mają parametry  $\omega$ ,  $\lambda$  oraz  $\rho$ , związane odpowiednio z częstością wymuszenia, długością komory oraz położeniem ogranicznika. Duży wpływ ma też charakterystyka siły parcia. Uwzględnienie nieliniowości ogranicza dodatkowo zakresy wartości parametrów, dla których badany mechanizm działa prawidłowo.
- Dla oszacowanych wartości parametrów konstrukcyjnych badanego urządzenia układ jest mało wrażliwy na zmianę parametrów związanych z warunkami pracy (współczynnik restytucji, położenie ogranicznika).
- Zaproponowane metody analizy mogą być stosowane w analogiczny sposób do badania bardziej złożonych modeli różnego typu narzędzi udarowych. Rezultaty przedstawionych analiz mogą być częściowo wykorzystane do badania modeli ręcznych narzędzi udarowych (ubijaków formierskich, młotów pneumatycznych, wiertarek udarowych), można na podstawie takich analiz odpowiednio dobierać parametry, np. z warunku, aby w okresie wymuszenia dochodziło do pojedynczych uderzeń bijaka w ogranicznik.

## 6. WPŁYW ZDERZEŃ NA DRGANIA UKŁADU WIRNIK- STOJAN

Przyczyną drgań w układach typu wirnik – stojan są najczęściej resztkowe niewyważenia. W przypadku wirników, których obroty przekraczają wartości krytyczne, może dochodzić podczas procesów przejściowych do zderzeń pomiędzy niektórymi elementami układu, przykładowo między wirnikiem i stojanem. W pewnych warunkach mogą się pod wpływem sił uderowych wzbudzić drgania okresowe, prawie okresowe lub chaotyczne.

W niniejszym rozdziale podjęto próbę zbadania wpływu zderzeń na drgania ustalone w układach wirnik – stojan. W pierwszej kolejności analizowano ruch wirnika przy sztywno zamocowanym stojanie, uwzględniając drgania poprzeczne i skrętne wału. Następnie przebadano bardziej złożony model, dopuszczający dodatkowo ruch stojanu.

Do wyznaczenia rozwiązań odpowiednich równań różniczkowych wykorzystano metody numerycznego całkowania, a do określenia typów drgań omówione w punkcie 3.2 metody, bazujące na algorytmach szybkiej transformaty Fouriera. W trakcie całkowania sprawdzano, czy podczas zderzenia nie zachodzi stały kontakt wirnika z ogranicznikiem oraz jaka jest forma drgań (współbieżna, przeciwbieżna). Wyznaczono obszary parametrów, dla których układ zachowuje się w sensie jakościowym podobnie.

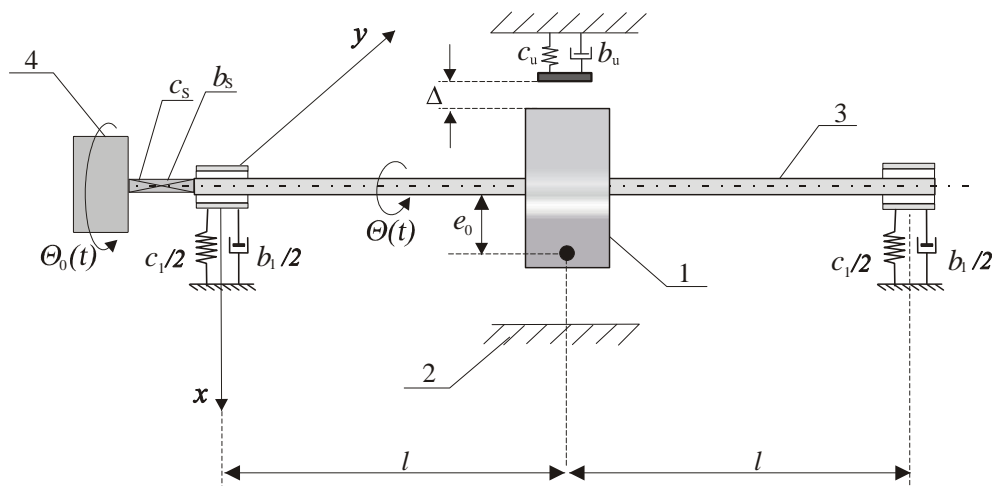
### 6.1. WIRNIK ZE SZTYWNO ZAMOCOWANYM STOJANEM

#### 6.1.1. Model układu

W celu zbadania wpływu zderzeń na drgania wirnika przyjęto model, przedstawiony na rys. 6.1.

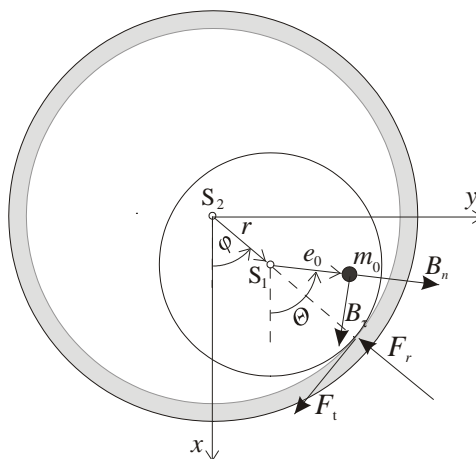
Wirnik 1 w kształcie sztywnego dysku o masie  $m_1$  i promieniu  $R$  zamocowano na bezmasowym wale 3, którego końce podtrzymują elastyczne podpory. Odległości wirnika od podpór są jednakowe i wynoszą  $l$ . Pomiedzy wirnikiem a nieruchomym stojanem (zwanym dalej ogranicznikiem ruchu) występuje luz  $\Delta$ . Parametry  $b_1$  i  $c_1$

określają odpowiednio tłumienie i sztywność podpór wału,  $b_s$  i  $c_s$  tłumienie i sztywność skrętną wału, natomiast  $b_u$  i  $c_u$  to parametry określające proces zderzenia wirnika ze stojanem.



Rys.6.1. Model fizyczny układu: 1- wirnik, 2- stojan, 3- wał, 4 – silnik

Drgania poprzeczne opisują współrzędne  $x_1$  i  $y_1$  środka masy wirnika, natomiast drgania skrętne kąt  $\psi = \Theta - \Theta_0$ . W modelu uwzględniono ugięcie statyczne wirnika  $d$  w kierunku pionowym oraz wpływ sił bezwładnościowych, wynikłych z niewyważenia (parametry  $m_0$ ,  $e_0$ ). Założono także, że prędkość obrotowa silnika  $\Omega$  napędzającego wirnik jest stała.



Rys. 6.2. Związki kinematyczne

Na podstawie analizy układu sił działających na wirnik jego ruch można opisać układem trzech równań różniczkowych drugiego rzędu o następującej postaci:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 &= -S_x - F_x + B_n \cos \Theta + B_r \sin \Theta \\
m_1 \ddot{y}_1 &= -S_y - F_y + B_n \sin \Theta - B_r \cos \Theta \\
I_s \ddot{\Theta} &= -M_s - F_t R
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Po wykorzystaniu wzorów, określających składowe siły bezwładności w układzie naturalnym:

$$B_n = m_0 e_0 \dot{\Theta}^2 \qquad B_r = m_0 e_0 \ddot{\Theta} \tag{6.2}$$

wyrażeń opisujących oddziaływanie podpór:

$$S_x = b_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 \qquad S_y = b_1 \dot{y}_1 + c_1 y_1 \tag{6.3}$$

oraz związku na moment skręcający:

$$M_s = b_s (\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_0) + c_s (\Theta - \Theta_0) \tag{6.4}$$

równania (6.1) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + F_x &= m_0 e_0 (\dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \ddot{\Theta} \sin \Theta) \\
m_1 \ddot{y}_1 + b_1 \dot{y}_1 + c_1 y_1 + F_y &= m_0 e_0 (\dot{\Theta}^2 \sin \Theta - \ddot{\Theta} \cos \Theta) \\
I_s \ddot{\Theta} + b_s (\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_0) + c_s (\Theta - \Theta_0) + F_t R &= 0
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Kąt  $\Theta = \Theta_0 + \psi$  jest tu całkowitym kątem obrotu wirnika,  $R$  jest promieniem wirnika, a  $I_s$  jest jego momentem bezwładności względem jego osi symetrii (osi  $z$ ). Przyjęto też założenie  $\Theta_0(t) = \Omega t$  (model silnika o nieograniczonej mocy).

Układ (6.5) jest układem równań nieliniowych ze względu na występujące w nich siły zderzeniowe, opisane w ogólnym przypadku związkami (4.14-4.33). Siły udarowe zależą od przemieszczeń względnych zderzających się elementów.

W przypadku nieruchomego stojanu, przy uwzględnieniu ugięcia statycznego  $d$  w kierunku osi  $y$ , siły te zależą od współrzędnych  $x = x_1 + d$  i  $y = y_1$ . Do wyznaczenia składowej radialnej  $F_r(r, V_r)$  siły udarowej można wykorzystać związek (4.25):

$$F_r(r, V_r) = \eta(r, V_r) [c_u (r - \Delta) + b_u V_r] \tag{6.6}$$

obliczając  $r$  i  $V_r$  z następujących wzorów:

$$r = \sqrt{(x_1 + d)^2 + y_1^2} \tag{6.7}$$

$$V_r = \frac{(x_1 + d)\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1}{r} \quad (6.9)$$

Występująca we wzorze (6.6) funkcja przełączająca  $\eta(r, V_r)$  jest opisana wzorem (4.26). Uwzględniając dodatkowo związki (4.18), (4.24) i (4.27) otrzymamy następujące zależności:

$$F_x = F_r[x_1 + d - \mu y_1]/\Delta \quad F_y = F_r[y_1 - \mu(x_1 + d)]/\Delta \quad (6.9)$$

na składowe siły  $F$  w układzie kartezjańskim. Współczynnik  $\mu$  zależy poprzez wzór (4.28) od prędkości  $V_s = V_t + (\dot{\psi} + \Omega)R$ , przy czym:

$$V_t = \frac{(x_1 + d)\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1}{r} \quad (6.10)$$

Wprowadźmy dalej zmienne bezwymiarowe, odnosząc przemieszczenia do luzu  $\Delta$ . Po zdefiniowaniu bezwymiarowego czasu  $\tau = \omega_0 t$  (gdzie  $\omega_0 = \sqrt{c_1/m_1}$  jest częstością drgań własnych wirnika) oraz bezwymiarowego wektora:

$$\mathbf{u} = [x_1/\Delta, \quad y_1/\Delta, \quad \psi]^T \quad (6.11)$$

równania różniczkowe ruchu (6.1) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} u_1'' + 2\zeta_1 u_1' + u_1 + f_x &= e[(\omega + u_3')^2 \cos(\omega\tau + u_3) + u_3'' \sin(\omega\tau + u_3)] \\ u_2'' + 2\zeta_2 u_2' + u_2 + f_y &= e[(\omega + u_3')^2 \sin(\omega\tau + u_3) - u_3'' \cos(\omega\tau + u_3)] \\ u_3'' + 2\omega_s \zeta_s u_3' + \omega_s^2 u_3 + \mu g f_r &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

przy czym zmienna  $\mu$  zależy poprzez wzór (4.33) od współczynnika  $\mu_0$ . We wzorach (6.12) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \omega &= \Omega/\omega_0 & \zeta_1 &= b_1/2\sqrt{m_1 c_1} & g &= m_1 R \Delta / I_s \\ e &= m_0 e_0 / m_1 \Delta & \zeta_u &= b_u/2\sqrt{m_1 c_u} & \gamma_u &= c_u / c_1 \\ \sigma &= d/\Delta & \zeta_s &= b_s/2\sqrt{I_s c_s} & \gamma_s &= \omega_s^2 = c_s m_1 / c_1 I_s \end{aligned} \quad (6.13)$$

Po wykorzystaniu związków (6.9) bezwymiarowe składowe siły uderowej można wyrazić wzorami:

$$f_x = f_r[u_1 + \sigma - \mu u_2] \quad f_y = f_r[u_2 - \mu(u_1 + \sigma)] \quad (6.14)$$

przy czym:



$$f_r = \eta[\gamma_u(\rho-1) + 2\zeta_u v_r] \quad (6.15)$$

Przyjęto tu oznaczenie  $\rho=r/\Delta$ . Bezwymiarową prędkość  $v_r$  należy wyznaczyć ze wzoru:

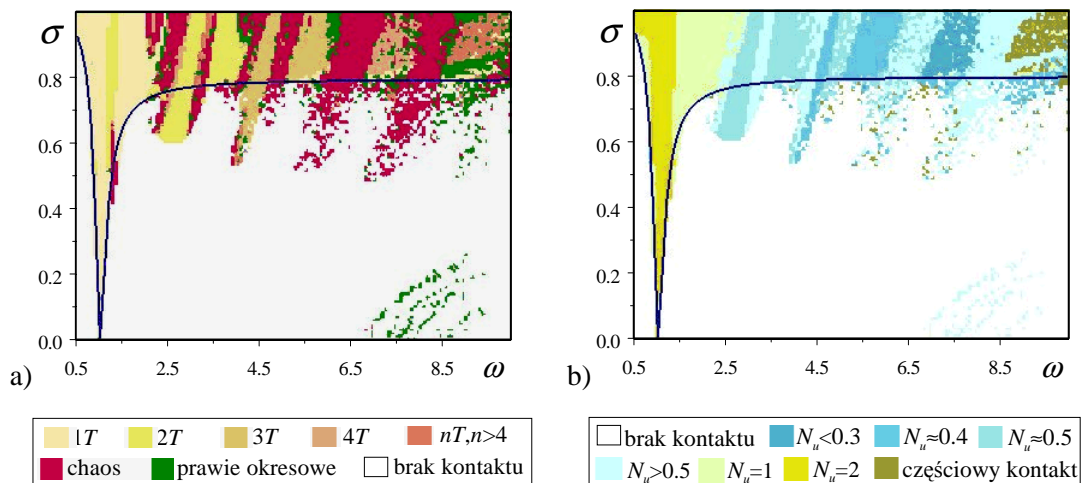
$$v_r = \frac{(u_1 + \sigma)u_1' + u_2 u_2'}{\rho} \quad (6.16)$$

### 6.1.2. Rezultaty obliczeń

Przedstawiając poniżej wyniki obliczeń numerycznych zdecydowano się na jednakowy sposób prezentacji, pokazując wpływ częstości wymuszenia  $\omega$  i ugięcia statycznego  $\sigma$  na typ drgań oraz liczbę zderzeń dla różnych wartości parametrów  $\zeta_1$ ,  $\zeta_u$  i  $\gamma_u$ . Parametry  $\omega$  i  $\sigma$ , a także amplituda wymuszenia  $e$ , decydują najczęściej o charakterze wzbudzanych drgań. W obliczeniach zostały przyjęte następujące wartości ustalonych parametrów:  $e=0.2$ ,  $\zeta_s=0.05$ ,  $\gamma_s=2$ ,  $\mu_0=0.1$ ,  $g=0.1$ .

Na rys. 6.3 przedstawiono wpływ częstości wymuszenia  $\omega$  i ugięcia statycznego  $\sigma$  na typ drgań (rys. 6.3a) oraz liczbę zderzeń (rys. 6.3b). Przyjęto  $\zeta_1=0.1$ ,  $\zeta_u=0.1$  oraz  $\gamma_u=50$ . Liczbę zderzeń zdefiniowano tutaj, jako liczbę włączeń (lub wyłączeń) funkcji przełączającej (4.26) w jednym okresie wymuszenia.

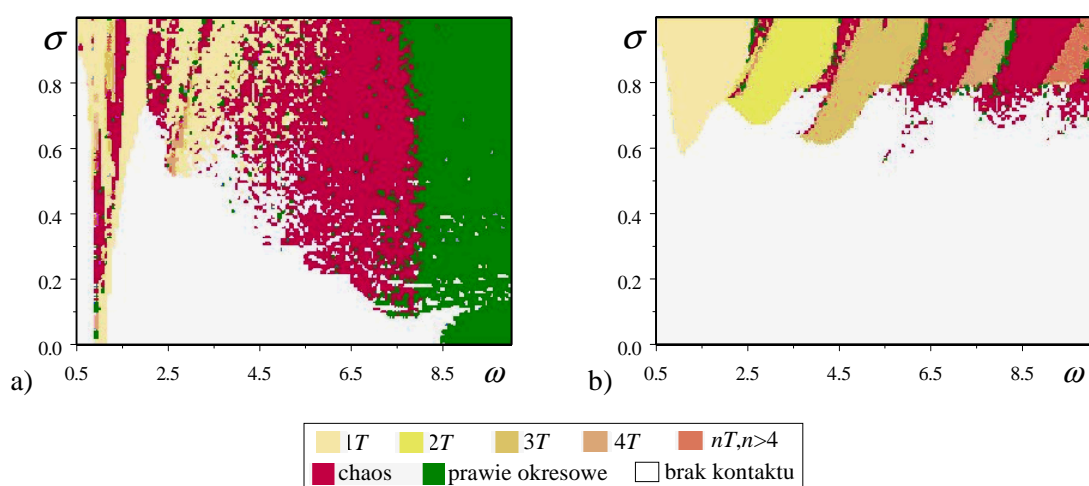
Na rys. 6.3 naniesiono również krzywą  $k$ , wyznaczoną w oparciu o analizę układu liniowego (bez ogranicznika), a określającą ugięcie statyczne  $\sigma$ , dla którego wartość maksymalnego wychylenia w stanach ustalonych drgań jest równa luzowi  $\Delta$  (bezwymiarowa współrzędna  $\rho_{\max}=r_{\max}/\Delta=1$ ). W obszarach leżących poniżej krzywej  $k$  analiza liniowa sugeruje brak zderzeń wirnika z ogranicznikiem, czyli w stanie ustalonym powinno się obserwować drgania harmoniczne.



Rys.6.3. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\sigma$  na: a) typ drgań, b) liczbę zderzeń

Badania układu nieliniowego wykazują jednak występowanie w tych obszarach innych typów ustalonych drgań, podczas których wirnik uderza w sposób regularny lub nieregularny w ogranicznik. Jest to rezultat procesów przejściowych; sporadyczne początkowo uderzenia wirnika w stojan przechodzą z czasem w systematycznie powtarzające się zderzenia, wywołujące drgania o złożonym charakterze. Drgania takie zależą od warunków początkowych oraz od luzu  $\Delta$ . W efekcie finalnym obszar drgań bez zderzeń jest oddzielony od pozostałych obszarów nieregularną krzywą.

W szerokim zakresie rezonansowym (dla  $0.5 < \omega < 2.3$ ) dominują drgania z częstością wymuszenia (drgania  $1T$ -okresowe) – w jednym okresie wymuszenia najczęściej obserwuje się pojedyncze uderzenia wirnika w ogranicznik ruchu ( $N_u=1$ ). W węższym zakresie, w pobliżu wartości  $\omega=1$ , dochodzi także do częstszych zderzeń ( $N_u > 1$ ). Ze wzrostem wartości  $\omega$  liczba uderzeń maleje, równocześnie drgania  $1T$  – okresowe przechodzą kolejno w drgania podharmoniczne drugiego, trzeciego i czwartego rzędu. Drgania podharmoniczne oddzielone są od siebie zakresami drgań chaotycznych.



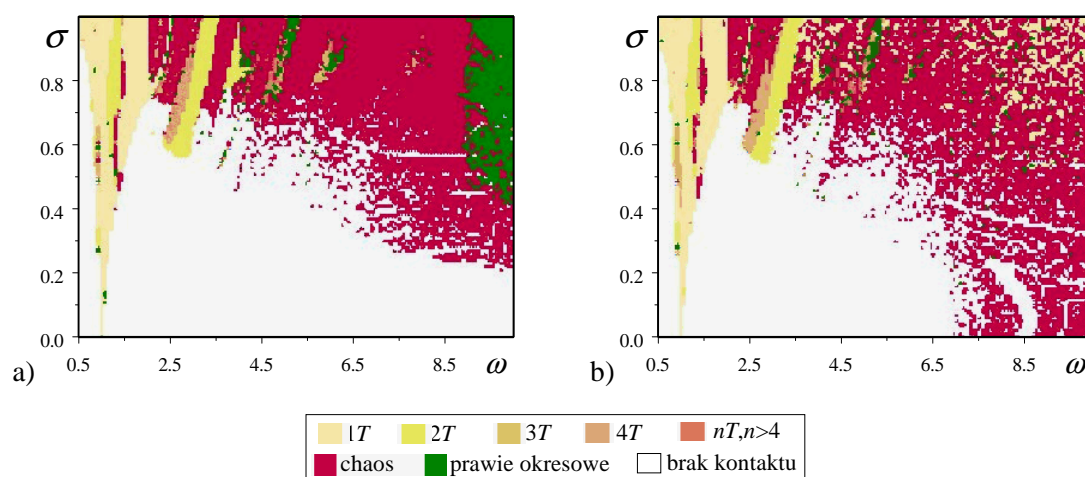
Rys.6.4. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\sigma$  na typ drgań  $\gamma_u=500$ : a)  $\zeta_1=0.05$ , b)  $\zeta_1=0.25$

Dla wyższych wartości  $\omega$  pojawiają się niewielkie obszary drgań prawie okresowych lub podharmonicznych wysokiego rzędu (rys. 6.3a) – w tych obszarach liczba zderzeń jest najmniejsza (rys. 6.3b). Równocześnie wzrasta czas kontaktu wirnika z ogranicznikiem (częściowy kontakt) – wirnik toczy się praktycznie w pewnych przedziałach czasu po wewnętrznej powierzchni stojanu.

Rys. 6.4 ilustruje wpływ tłumienia w podporach wału (parametru  $\zeta_1$ ) na typ drgań. Założono  $\gamma_u=500$  i  $\zeta_u=0.1$ . Takim wartościom  $\gamma_u$  i  $\zeta_u$  odpowiada, według wzorów (4.12), (4.13) współczynnik restytucji  $R \approx 0.74$  oraz czas zderzenia  $t_u \approx 0.02T_0$  ( $T_0$  – okres drgań własnych wirnika).

Dla małych wartości  $\zeta_1$  (rys. 6.4a), zwłaszcza w zakresie wyższych częstotliwości wymuszenia, obserwuje się głównie obszary drgań chaotycznych i prawie okresowych. Podczas drgań prawie okresowych zachodzi najczęściej stały kontakt wirnika z ogranicznikiem – wirnik toczy się ze stosunkowo dużą prędkością po wewnętrznej powierzchni stojanu w kierunku przeciwnym do prędkości obrotowej, obserwuje się więc formę przeciwbieżną drgań. Efektem tego zjawiska są duże wartości siły nacisku wirnika na stojan – jest to więc szczególnie niebezpieczny przypadek, grożący zniszczeniem układu.

Dla wartości  $\zeta_1 = 0.1 \div 0.2$  zaczynają się uwidaczniać obszary drgań podharmonicznych – są one podobne do pokazanych na rys. 6.3a. Z dalszym wzrostem wartości parametru  $\zeta_1$  (rys. 6.4b) obszary drgań podharmonicznych wyraźnie się powiększają i są one bardziej regularne – regularna jest też liczba uderzeń wirnika w stojan. Przykładowo, w obszarze drgań  $1T$ -okresowych dochodzi praktycznie zawsze do pojedynczych uderzeń ( $N_u=1$ ) w jednym okresie wymuszenia. Ze zwiększaniem tłumienia zwiększa się bardzo wyraźnie obszar drgań bez zderzeń.

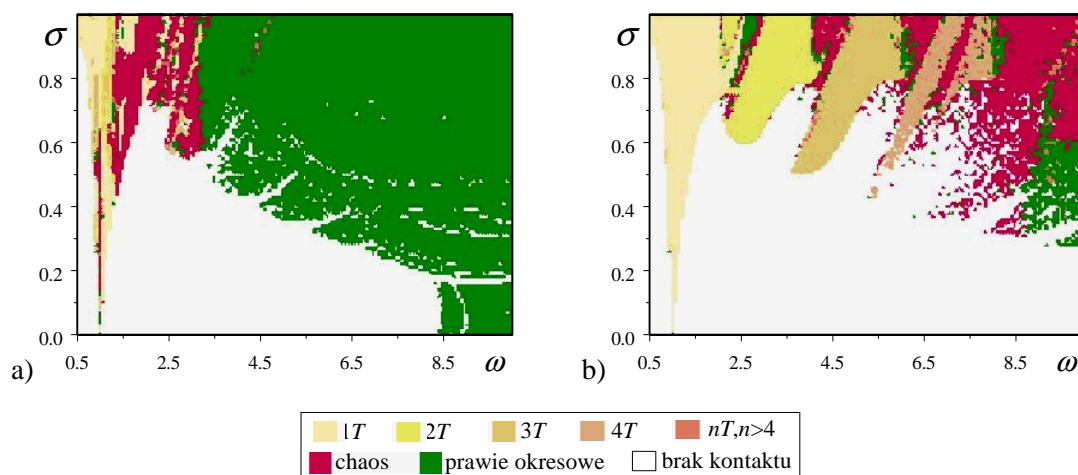


Rys.6.5. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\sigma$  na typ drgań: a)  $\gamma_u = 500$ , b)  $\gamma_u = 5000$

Rys. 6.5 przedstawia wpływ parametrów  $\omega$  i  $\sigma$  na typ drgań dla różnych wartości parametru  $\gamma_u$ , charakteryzującego przyjęty model zderzenia ( $\zeta_1 = \zeta_u = 0.1$ ). Ze zwiększaniem wartości  $\gamma_u$  zwiększają się głównie obszary drgań chaotycznych (w stosunku do rezultatów pokazanych na rys. 6.3a dla  $\gamma_u = 50$ ); kształty tych obszarów są tutaj bardzo nieregularne. W zakresach wysokich częstotliwości, a więc daleko poza rezonansem, dochodzi także do zderzeń nawet dla bardzo małych wartości ugięć statycznych.

Drugim parametrem, określającym model zderzenia, jest parametr  $\zeta_u$ , decydujący o rozpraszaniu energii w czasie zderzenia. Wpływ tego parametru

ilustruje rys. 6.6, pokazujący obszary jednakowego typu drgań w płaszczyźnie  $(\omega, \sigma)$  dla dwóch znacznie różniących się od siebie wartości parametru  $\zeta_u$ .



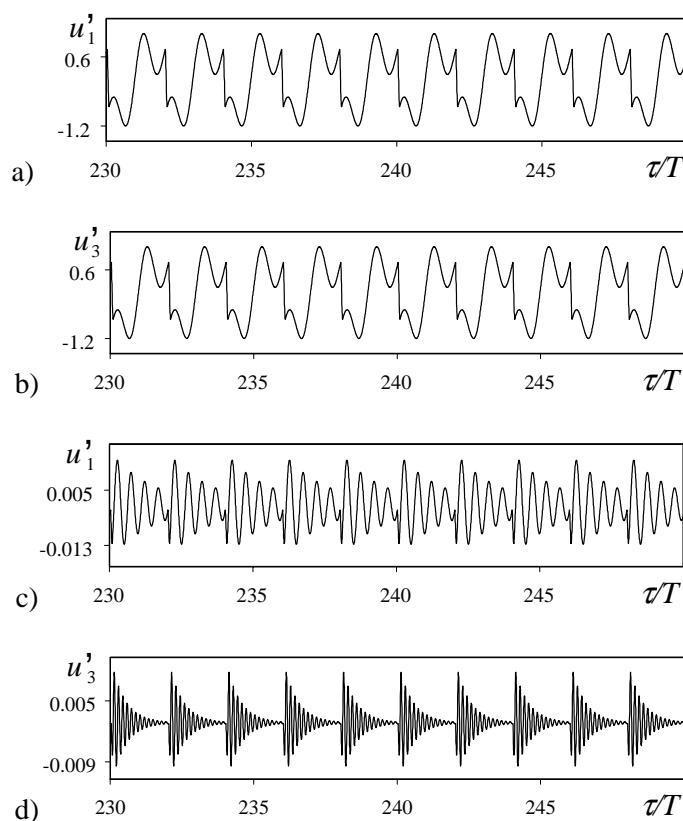
Rys.6.6. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\sigma$  na typ drgań: a)  $\zeta_u=0$ , c)  $\zeta_u=0.75$

Wartość  $\zeta_u=0$  odpowiada zderzeniu sprężystemu ( $R=1$ ), natomiast  $\zeta_u=0.75$  charakteryzuje zderzenie zbliżone do plastycznego ( $R \approx 0.2$ ). Dla porównania wcześniejsze rezultaty, uzyskane dla  $\zeta_u=0.1$  (np. rys. 6.3), odpowiadają modelowi zderzenia chwilowego, określonego współczynnikiem restytucji  $R \approx 0.74$ .

W przypadku bardzo małych, niezbyt realnych, wartości parametru  $\zeta_u$  (rys. 6.6a), wyraźnie powiększa się obszar drgań prawie okresowych, którym odpowiada omówiona wcześniej forma przeciwbieżna drgań, groźna z punktu widzenia zniszczenia układu.

Ze zwiększaniem wartości parametru  $\zeta_u$  drgania prawie okresowe ustępują miejsca drganiom chaotycznym lub podharmonicznym. Wpływ tego parametru jest więc częściowo podobny do wpływu współczynnika tłumienia  $\zeta_1$  w podporach wału; nie ogranicza on jednak w sposób zdecydowany możliwości zderzeń wirnika ze stojanem.

Parametry  $\gamma_s$ ,  $\zeta_s$ , a także  $g$ , decydujące o drganiach skrętnych wału, mają znikomy wpływ na przedstawiane powyżej rezultaty analizy jakościowej. O typie drgań decydują zderzenia, których wystąpienie zależy od drgań poprzecznych. Drgania skrętne mają niewielki wpływ na składowe siły bezwładności, w związku z czym dwa pierwsze równania układu (6.12) są słabo sprzężone z trzecim równaniem tego układu. W rezultacie drgania poprzeczne w małym stopniu zależą od drgań skrętnych. Fakt ten potwierdzają wyniki, przedstawione na rys. 6.7. Mamy tu przypadek drgań okresowych ( $\zeta_1=0.1$ ,  $\zeta_u=0.1$ ,  $\gamma_u=500$ ,  $\omega=3$ ,  $\sigma=0$ ). Przebiegi czasowe drgań poprzecznych, otrzymane dla znacznie różniących się wartości parametru  $\gamma_s$ , zależnego od sztywności skrętnej wału, praktycznie są takie same (rys. 6.7a dla  $\gamma_s=40$  i rys. 6.7b dla  $\gamma_s=400$ ).

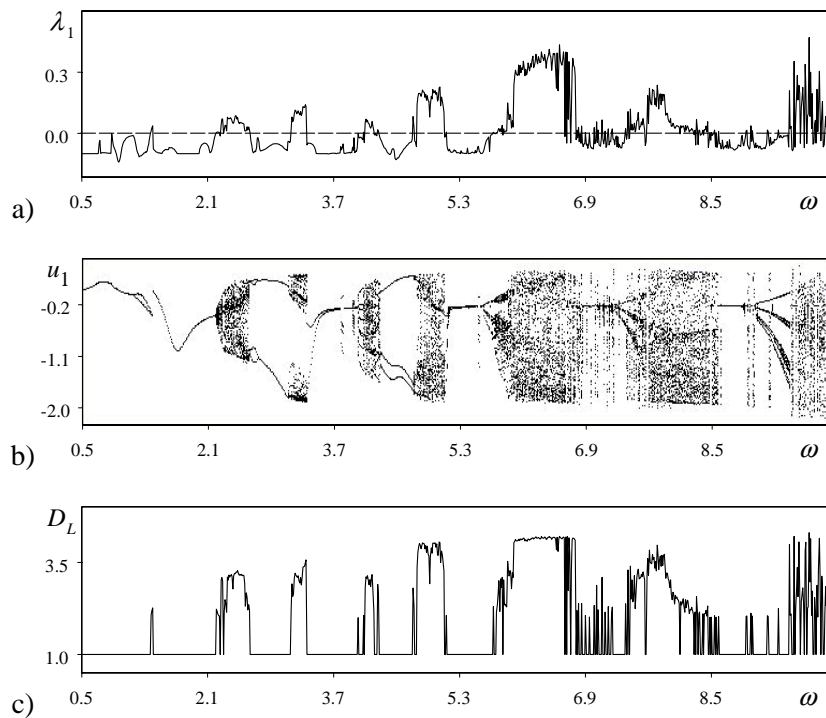


Rys.6.7. Wpływ parametru  $\gamma$  na kształt przebiegów czasowych:  
a) i b) drgania gięte, c) i d) drgania skrętne

Wpływ parametru  $\gamma$  uwidacznia się dopiero na wykresach drgań skrętnych (rys.6.7c i d odpowiednio dla  $\gamma=40$  i  $\gamma=400$ ). Cyklicznie powtarzające się zderzenia wywołują zanikające wykładniczo drgania skrętne. Częstość tych drgań zależy wyraźnie od parametru  $\gamma$ , który może być tu interpretowany jako kwadrat bezwymiarowej częstości skrętnej. W związku z tym okres drgań tłumionych, pokazanych na rys. 6.7d jest 10 razy mniejszy od okresu przebiegu na rys. 6.7c.

Rys. 6.8 przedstawia porównanie wykresu największego wykładnika Lapunowa z diagramem bifurkacyjnym oraz zależność wymiaru Lapunowa od częstości wymuszenia. Do wyznaczenia wykładników wykorzystano zmodyfikowany odpowiednio algorytm Wolfa [91], natomiast diagram sporządzono metodą stroboskopową, notując wartości przemieszczeń co okres wymuszenia. Diagram ten odpowiada przekrojowi obszaru  $(\omega, \sigma)$  dla  $\sigma=0.8$  (rys. 6.3).

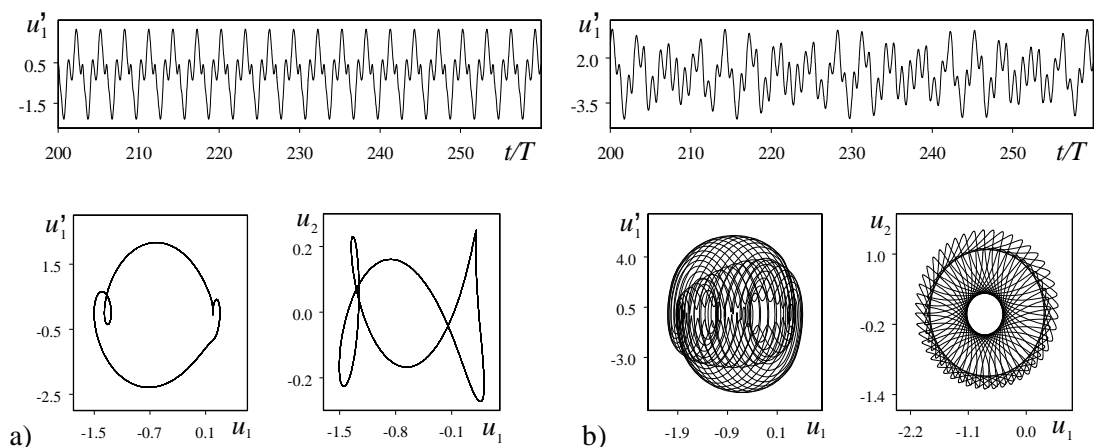
Wartość ujemna wykładnika Lapunowa (rys. 6.8a) świadczy o nie chaotycznej ewolucji układu, w odpowiednich zakresach częstości  $\omega$ , na diagramie można zaobserwować układy pojedynczych linii. Liczba linii  $n$  określa rząd drgań podharmonicznych ( $nT$  – okresowe).

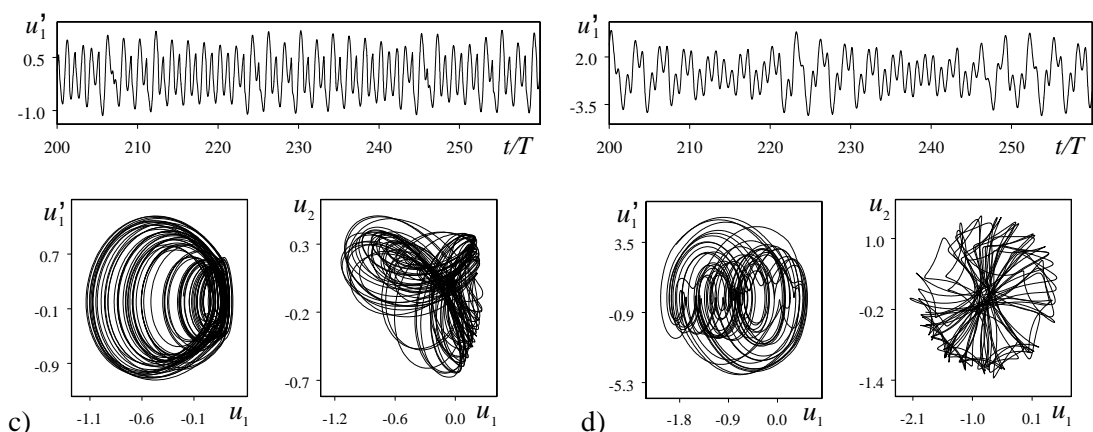


Rys.6.8. Wpływ częstości  $\omega$ : a) wykładnik Lagunowa, b) diagram bifurkacyjny, c) wymiar Lapunowa

Chaos występuje w przypadku dodatniego wykładnika Lapunowa, wówczas na diagramie rozkład punktów jest zbliżony do losowego, a wymiar Lapunowa przyjmuje wartość większą od jedności ( $D_L > 1$ ).

Na rys. 6.9 przedstawiono przebiegi czasowe zmiennej  $u_1'(t)$ , płaszczyzny fazowe  $(u_1, u_1')$  oraz trajektorie  $(u_1, u_2)$  dla drgań okresowych typu 1:3 (rys. 6.9a), prawie okresowych (rys. 6.9b) oraz dwóch typów drgań chaotycznych (rys. 6.9c i 6.9d).

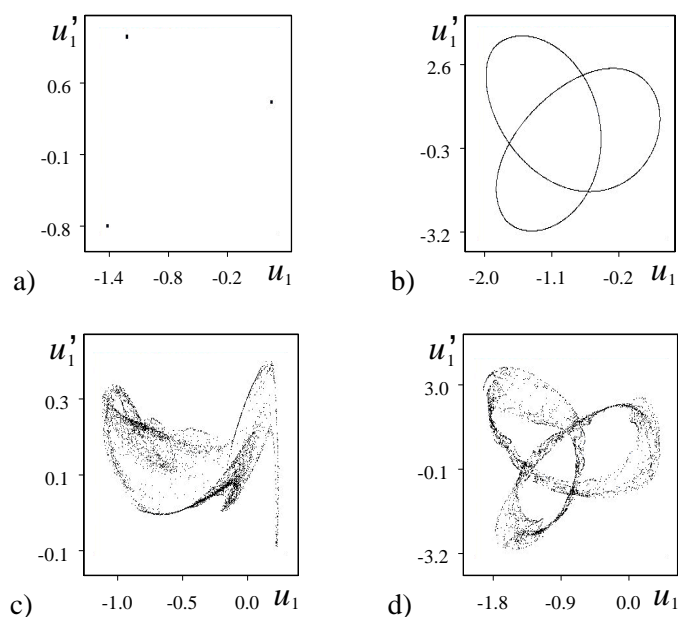




Rys. 6.9. Przebiegi czasowe, płaszczyzny fazowe i trajektorie ( $\sigma = 0.8$ ):  
a)  $\omega = 4.5$ , b)  $\omega = 9.5$ , c)  $\omega = 2.5$ , d)  $\omega = 8$

Trajektorie fazowe oraz trajektorie ruchu (tor środka masy wirnika) są krzywymi zamkniętymi tylko w przypadku drgań okresowych (rys. 6.9a), w pozostałych przypadkach wypełniają one dość szczelnie pewne fragmenty odpowiednich płaszczyzn (w celu większej przejrzystości na rys. 6.9 pokazano trajektorie w ograniczonym przedziale czasu).

Różne są też fazowe portrety stroboskopowe (w płaszczyźnie  $u_1, u_1'$ ) dla omawianych typów drgań – są to odpowiednio: pojedyncze punkty (rys. 6.10a), krzywa zamknięta (rys. 6.10b) oraz fraktale w przypadku drgań chaotycznych (rys. 6.10c i d).



Rys. 6.10. Mapy Poincaré ( $\sigma = 0.8$ ): a)  $\omega = 4.5$ , b)  $\omega = 9.5$ , c)  $\omega = 2.5$ , d)  $\omega = 8$

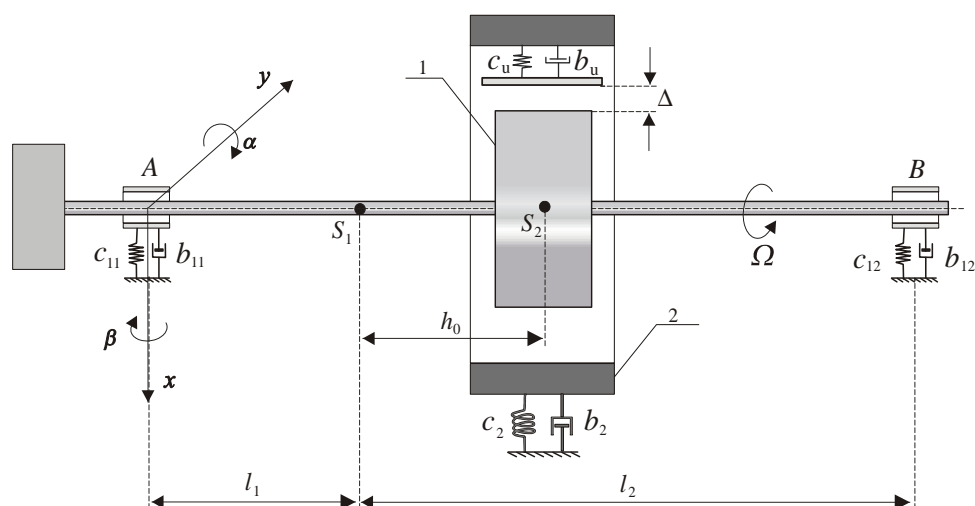
Dla drgań chaotycznych obliczono w oparciu o wzór (2.15) wymiar Lapunowa, który wynosi odpowiednio  $D_L=2.47$  (rys.6.10c) i  $D_L=1.78$  (rys.6.10d).

## 6.2. WIRNIK Z PODATNIE ZAMOCOWANYM STOJANEM

### 6.2.1. Model układu

Poniżej zostanie zbadany model układu o 6 stopniach swobody (rys.6.11). Ruch układu wał-wirnik opisują współrzędne  $x_1$ ,  $y_1$  jego środka masy  $S_1$  oraz dodatkowo kąty obrotu  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  odpowiednio wokół osi  $x_1$  i  $y_1$ , przechodzących przez punkt  $S_1$ . Ruch stojanu określają współrzędne  $x_2$  i  $y_2$  jego środka masy  $S_2$ . Pominięto drgania skrętne wału. Odległość środków mas  $S_1$  i  $S_2$  określa parametr  $h_0$ . Ugięcie statyczne  $d$  jest teraz różnicą ugięć statycznych wirnika i ogranicznika.

Dopuszczono możliwość niesymetrii podatnego podparcia osi wału (parametry  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  i odległości  $l_1$ ,  $l_2$ ). Przyjęto oznaczenia:  $m_1$  i  $I_1$  dla masy i momentu bezwładności względem osi  $x$  (lub  $y$  – symetria osiowa) układu wirnik-wał oraz  $m_2$  dla masy stojanu. Parametry  $c_2$  i  $b_2$  określają własności lepko-sprężyste zamocowania stojanu.



Rys.6.11. Model układu: 1 – wirnik, 2 – ogranicznik

Wychodząc z zasady pędu i zasady krętu względem środka masy wirnika, ruch układu można opisać układem 6 równań różniczkowych II rzędu o następującej postaci:



$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 &= -S_{11x} - S_{12x} - F_x + B_n \cos \Omega t \\
m_1 \ddot{y}_1 &= -S_{11y} - S_{12y} - F_y + B_n \sin \Omega t \\
I_1 \ddot{\alpha}_1 &= M_{G\alpha} + S_{11x} l_1 - S_{12x} l_2 - F_x h_0 \\
I_1 \ddot{\beta}_1 &= M_{G\beta} - S_{11y} l_1 + S_{12y} l_2 + F_y h_0 \\
m_2 \ddot{x}_2 &= -S_{2x} + F_x \\
m_2 \ddot{y}_2 &= -S_{2y} + F_y
\end{aligned} \tag{6.17}$$

przy czym  $F_x, F_y$  są tu składowymi siły uderowej. Występujące w równaniach (6.17) składowe momentu żyroskopowego określają wzory:

$$M_{G\alpha} = I_0 \Omega \dot{\beta}_1 \qquad M_{G\beta} = -I_0 \Omega \dot{\alpha}_1 \tag{6.18}$$

gdzie  $I_0$  jest momentem bezwładności układu wirnik-wał względem osi  $z$ .

Oddziaływanie podatnych podpór wału reprezentują siły:

$$\begin{aligned}
S_{11x} &= b_{11} \dot{x}_A + c_{11} x_A & S_{11y} &= b_{11} \dot{y}_A + c_{12} y_A \\
S_{12x} &= b_{12} \dot{x}_B + c_{12} x_B & S_{12y} &= b_{12} \dot{y}_B + c_{12} y_B
\end{aligned} \tag{6.19}$$

przy czym przemieszczenia wału  $x_A, y_A, x_B, y_B$  w punktach jego podparcia można w przypadku małych drgań wyrazić poprzez współrzędne  $x_1, y_1, \alpha_1$  i  $\beta_1$  następująco:

$$x_A = x_1 - l_1 \alpha_1 \qquad y_A = y_1 + l_1 \beta_1 \tag{6.20}$$

$$x_B = x_1 + l_2 \alpha_1 \qquad y_B = y_1 - l_2 \beta_1 \tag{6.21}$$

Siły od podatnego zamocowania stojanu określają wzory:

$$S_{2x} = b_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 \qquad S_{2y} = b_2 \dot{y}_2 + c_2 y_2 \tag{6.22}$$

Przyjęto dalej, że współczynniki tłumienia wiskotycznego  $b_{11}, b_{12}, b_2$  są proporcjonalne do odpowiednich współczynników sztywności ( $b_{1k} = \varepsilon_1 c_{1k}, b_2 = \varepsilon_2 c_2$ ).

Dla stałej wartości prędkości obrotowej  $\dot{\Theta} = \Omega$  składowa normalna siły bezwładności wyraża się wzorem:

$$B_n = m_0 e_0 \Omega^2 \tag{6.23}$$

Ponieważ niewyważenie zostało zredukowane do punktu  $S_1$ , w równaniach (6.17) nie występują momenty sił bezwładności względem osi, przechodzących przez środek masy układu wał-wirnik (punkt  $S_1$ ). Przy uwzględnieniu wymuszeń

momentowych, mających duży wpływ na współrzędne kątowe, trudno jest zbadać wpływ niesymetrycznego zamocowania stojanu oraz porównać prezentowane poniżej wyniki z rezultatami, przedstawionymi w poprzednim punkcie.

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\begin{aligned}c_1 &= c_{11} + c_{12} \\h_1 &= (c_{11}l_1 - c_{12}l_2)/(c_{11} + c_{12}) \\k_1 &= c_{11}c_{12}(l_1 + l_2)^2/(c_{11} + c_{12})\end{aligned}\quad (6.24)$$

równania różniczkowe (6.17) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + c_1x_1 - c_1h_1(\alpha_1 + \varepsilon_1\dot{\alpha}_1) + F_x &= m_0e_0\Omega^2 \cos \Omega t \\m_1\ddot{y}_1 + b_1\dot{y}_1 + c_1y_1 + c_1h_1(\beta_1 + \varepsilon_1\dot{\beta}_1) + F_y &= m_0e_0\Omega^2 \sin \Omega t \\I_1\ddot{\alpha}_1 - I_0\Omega\dot{\beta}_1 + (k_1 + c_1h_1^2)(\varepsilon_1\dot{\alpha}_1 + \alpha_1) - c_1h_1(\varepsilon_1\dot{x}_1 + x_1) + F_x h_0 &= 0 \\I_1\ddot{\beta}_1 + I_0\Omega\dot{\alpha}_1 + (k_1 + c_1h_1^2)(\varepsilon_1\dot{\beta}_1 + \beta_1) + c_1h_1(\varepsilon_1\dot{y}_1 + y_1) - F_y h_0 &= 0 \\m_2\ddot{x}_2 + c_2(\varepsilon_2\dot{x}_2 + x_2) - F_x &= 0 \\m_2\ddot{y}_2 + c_2(\varepsilon_2\dot{y}_2 + y_2) - F_y &= 0\end{aligned}\quad (6.25)$$

Do wyznaczenia wartości składowych kartezjańskich  $F_x$ ,  $F_y$  siły uderowej należy wykorzystać wzory (4.24-4.30), podstawiając do nich  $x = x_1 + h_0\alpha_1 - x_2 + d$  oraz  $y = y_1 - h_0\beta_1 - y_2$ .

Po wprowadzeniu bezwymiarowego czasu  $\tau$  oraz bezwymiarowego wektora:

$$\mathbf{u} = [x_1/\Delta, y_1/\Delta, l\alpha_1/\Delta, l\beta_1/\Delta, x_2/\Delta, y_2/\Delta]^T \quad (6.26)$$

przy czym  $l=(l_1+l_2)/2$ , układ równań (6.25) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}u_1'' + 2\zeta_1 u_1' + u_1 - \lambda_1(2\zeta_1 u_3' + u_3) + f_x &= e\omega^2 \cos \omega\tau \\u_2'' + 2\zeta_1 u_2' + u_2 + \lambda_1(2\zeta_1 u_4' + u_4) + f_y &= e\omega^2 \sin \omega\tau \\\rho_1 u_3'' - \rho_0 \omega u_4' + (\kappa_1 + \lambda_1^2)(2\zeta_1 u_3' + u_3) - \lambda_1(2\zeta_1 u_1' + u_1) + f_x \lambda_0 &= 0 \\\rho_1 u_4'' + \rho_0 \omega u_3' + (\kappa_1 + \lambda_1^2)(2\zeta_1 u_4' + u_4) + \lambda_1(2\zeta_1 u_2' + u_2) - f_y \lambda_0 &= 0 \\\mu_2 u_5'' + \gamma_2(2\zeta_2 u_5' + u_5) - f_x &= 0 \\\mu_2 u_6'' + \gamma_2(2\zeta_2 u_6' + u_6) - f_y &= 0\end{aligned}\quad (6.27)$$

W równaniach (6.27) wielkości bezwymiarowe opisują związki (6.13) oraz dodatkowo:

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= m_2/m_1 & \zeta_2 &= b_2/2m_1\omega_0 & \gamma_2 &= c_2/c_1 \\
\kappa_1 &= k_1/c_1 l^2 & \lambda_1 &= h_1/l & \lambda_0 &= h_0/l \\
\rho_1 &= I_1/m_1 l^2 & \rho_0 &= I_0/m_1 l^2
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Bezwymiarowe siły  $f_x$  i  $f_y$  można wyznaczyć ze wzorów:

$$\begin{aligned}
f_x &= f_r [u_1 + \lambda_0 u_3 - u_5 + \sigma - \mu(u_2 - \lambda_0 u_4 - u_6)] \\
f_y &= f_r [u_2 - \lambda_0 u_4 - u_6 - \mu(u_1 + \lambda_0 u_3 - u_5 + \sigma)]
\end{aligned} \tag{6.29}$$

przy czym  $f_r$  wyraża się wzorem (6.15), do którego należy podstawić:

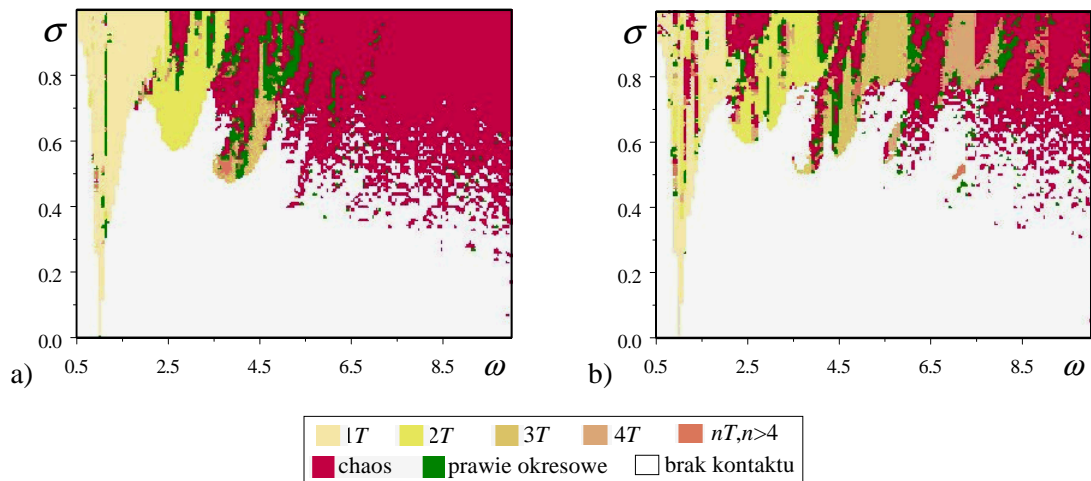
$$\rho = \sqrt{(u_1 + \lambda_0 u_3 - u_5 + \sigma)^2 + (u_2 - \lambda_0 u_4 - u_6)^2} \tag{6.30}$$

oraz:

$$v_r = \rho' = \frac{1}{\rho} [(u_1 + \lambda_0 u_3 - u_5 + \sigma)(u_1' + \lambda_0 u_3' - u_5') + (u_2 - \lambda_0 u_4 - u_6)(u_2' - \lambda_0 u_4' - u_6')] \tag{6.31}$$

### 6.2.2. Rezultaty obliczeń

Poniżej skupiono się na zbadaniu wpływu parametrów zamocowania stojanu (głównie sztywności  $\gamma_2$ ) oraz parametru  $\lambda_0$ , określającego położenie wirnika względem środka masy układu wirnik-wał. W obliczeniach numerycznych ustalono wartości następujących parametrów:  $\rho_0=0.01$ ,  $\rho_1=0.05$ ,  $\mu_2=2$ ,  $\gamma_u=500$ ,  $\zeta_1=0.1$ ,  $\zeta_2=0.05$ ,  $\zeta_u=0.1$ ,  $\mu_0=0.1$ .



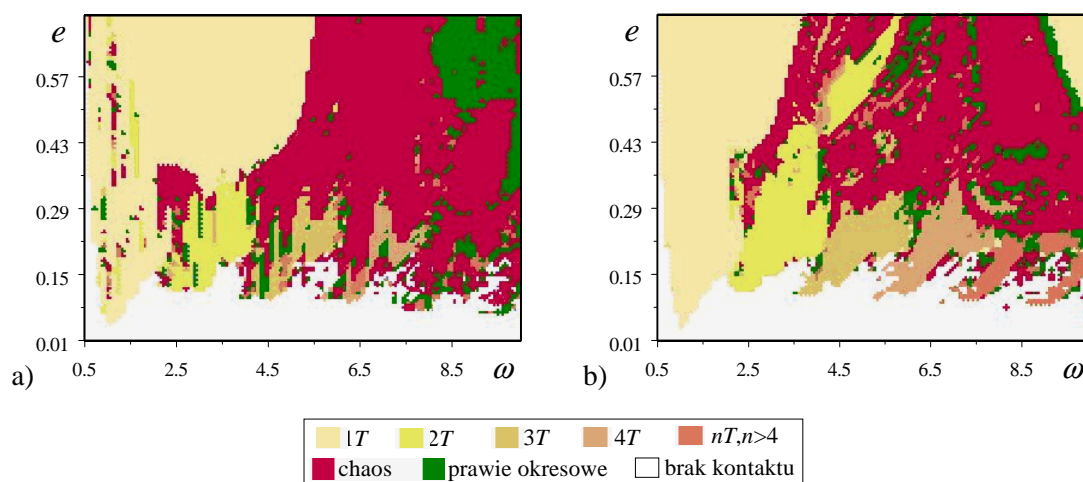
Rys. 6.12. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\sigma$  na typ drgań ( $e=0.2$ ,  $\lambda_0=0$ ): a)  $\gamma_2=10$ , b)  $\gamma_2=100$

Rozpatrzmy najpierw wariant symetrycznego zamocowania wirnika ( $l_1=l_2$ ,  $c_{11}=c_{12}$ ,  $\lambda_0=0$ ). Ponieważ w takim przypadku zachodzi  $\lambda_1=0$ , trzecie i czwarte równanie układu (6.27) nie zależy od pozostałych, współrzędne  $u_3$  i  $u_4$  (kąty obrotu  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ ) przyjmują w stanie ustalonym drgań wartości zerowe. Można więc praktycznie analizować uproszczony model układu o 4 stopniach swobody.

Na rys. 6.12 przedstawiono rezultaty analizy w sposób analogiczny, jak w punkcie 6.1.2. Ilustrują one wpływ parametru  $\gamma_2$  (sztywności zamocowania ogranicznika) na typ wzbudzanych drgań.

Dla małych wartości parametru  $\gamma_2$  (rys. 6.12a) rezultaty są bardzo podobne do uzyskanych dla przypadku sztywno zamocowanego stojanu (rys. 6.5a); znikają tylko obszary drgań prawie okresowych, a w ich miejscu pojawiają się najczęściej obszary drgań chaotycznych. Podatne zamocowanie ogranicznika nie zmniejsza tutaj ryzyka występowania zderzeń. Może to wynikać z faktu, że częstość drgań własnych stojanu zawiera się w analizowanym przedziale częstości; dla  $\gamma_2=10$  i  $\mu_2=2$  jest ona równa  $\sqrt{5} \approx 2.24$ . Dla  $\gamma_2=100$  (rys.6.12b) zwiększa się nieznacznie obszar drgań bez zderzeń, ponadto drgania chaotyczne ustępują częściowo drganiom podharmonicznym. Przy dalszym zwiększaniu wartości parametru  $\gamma_2$  należy się spodziewać podobnej sytuacji, jak w przypadku nieruchomego ogranicznika. Reasumując, poprzez odpowiedni dobór parametrów zamocowania stojanu można tylko nieznacznie ograniczyć występowanie zderzeń między wirnikiem i stojanem.

Analizowany dotychczas model układu nie zawsze opisuje dostatecznie dobrze drgania układu rzeczywistego. Bardzo często na wale są rozmieszczone dodatkowe elementy, czego efektem może być między innymi przesunięcie środka masy względem środka geometrycznego wirnika ( $\lambda_0 \neq 0$ ). Nie zawsze też jest możliwe spełnienie pożądanego warunku  $\lambda_1 = 0$ .



Rys. 6.13. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $e$  na typ drgań ( $\sigma=0.8$ ,  $\gamma_2=100$ ,  $\kappa_1=1$ ):

a)  $\lambda_0=\lambda_1=0$ , b)  $\lambda_0=0.2$ ,  $\lambda_1=0.1$

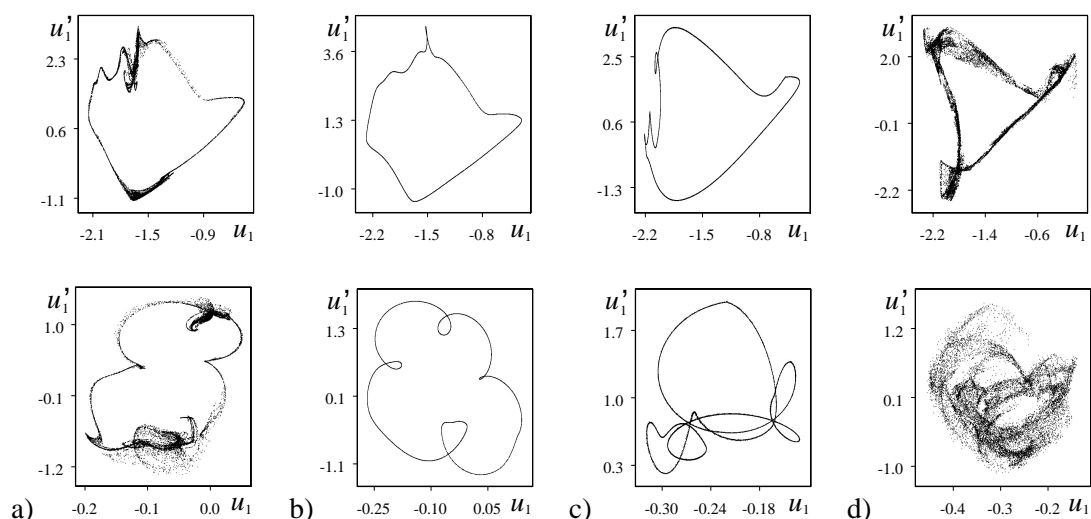
Poniżej sprawdzimy, czy niewielkie zakłócenie warunków  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$  powoduje duże zmiany w zachowaniu się układu wirnik-stojan. Założymy dalej, że podpory są rozmieszczone niesymetrycznie ( $l_1=1.1l$ ,  $l_2=0.9l$  oraz  $c_{11}=c_{12}=0.5c_1$ ), co powoduje, że wszystkie równania układu (6.27) są ze sobą sprzężone ( $\lambda_1=0.1$ ,  $\kappa_1=1$ ). Zbadamy wpływ parametrów  $\omega$  i  $e$  na typ wzbudzanych drgań (rys. 6.13b) oraz liczbę zderzeń i formę drgań (rys. 6.14b).

Porównanie przykładowych rezultatów analizy jakościowej, przedstawionych na rys. 6.13a (układ symetryczny) i 6.13b (układ niesymetryczny), wykazuje nieznaczny wpływ parametru  $\lambda_0$  na kształt obszaru bez zderzeń. Wpływ ten uwidacznia się dopiero dla większych amplitud wymuszeń, dla których dochodzi do zderzeń między wirnikiem i stojanem. Z uwagi na fakt, że w rzeczywistych układach nie powinny w ogóle występować zderzenia, z punktu widzenia praktycznego rezultaty analizy są bardzo do siebie zbliżone.

Jednak przedstawione wyżej wyniki są również interesujące z punktu widzenia poznawczego – z tego względu zostaną one omówione nieco dokładniej.

Dla  $\lambda_0 \neq 0$  (rys.6.13b) ulega zmniejszeniu obszar drgań  $1T$ -okresowych, obszary drgań podharmonicznych są bardziej regularne, a w obszarze drgań chaotycznych zaczynają się pojawiać niewielkie obszary drgań prawie okresowych.

Można wykazać numerycznie, że ze zwiększaniem wartości  $\lambda_0$  obszary drgań prawie okresowych ulegają dalszemu powiększeniu. Tak więc efektem niesymetryczności układu, powodującej sprzężenia między wszystkimi równaniami układu (6.27), jest tu tendencja przechodzenia drgań prawie okresowych w podharmoniczne, a chaotycznych w prawie okresowe.



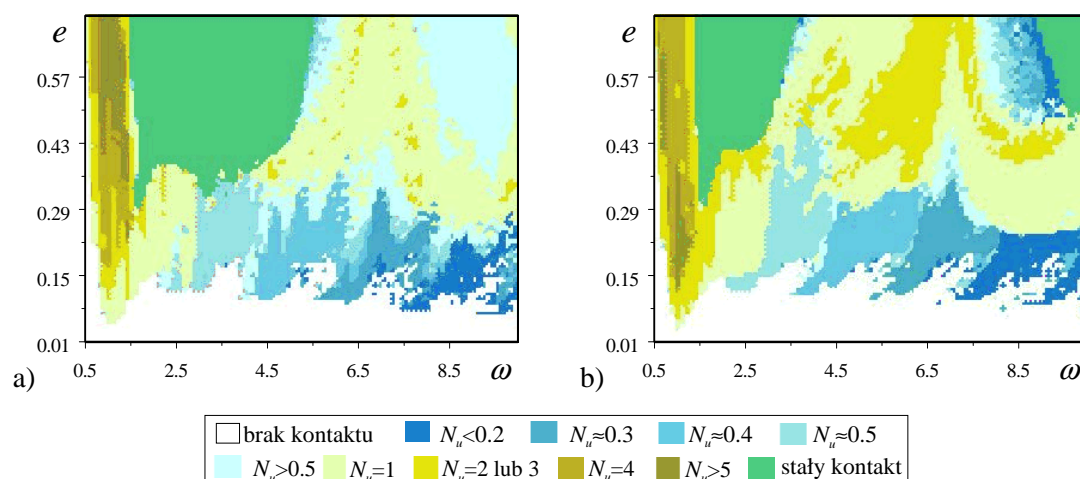
Rys. 6.14. Przekroje Poincaré'go: a)  $\omega=4.75$ ,  $e=0.65$ , b)  $\omega=5.1$ ,  $e=0.65$ ,  
c)  $\omega=6.3$ ,  $e=0.7$ , d)  $\omega=7$ ,  $e=0.7$

Różnice między drganiami prawie okresowymi i chaotycznymi, a także często między podharmonicznymi i prawie okresowymi nie są duże. Mogą o tym świadczyć, pokazane na rys. 6.14 (dla  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0.1$ ) portrety stroboskopowe płaszczyzn fazowych  $u_1, u_1'$  (wirnik) oraz  $u_5, u_5'$  (stojan), sporządzone dla przypadku drgań prawie okresowych (rys. 6.14b,c) i chaotycznych (rys. 6.14a,d).

W takich przypadkach mogą wystąpić trudności w prawidłowym zinterpretowaniu widma analizowanego sygnału (zwłaszcza w analizie numerycznej), co może z kolei prowadzić do pewnych błędów prowadzonej analizy jakościowej. Jednak, przy dostatecznie gęstym podziale badanych zakresów parametrów, najczęściej otrzymuje dość dobrą w sensie globalnym ocenę, pozwalającą przewidywać, dla ustalonych już wartości parametrów układu, z dużym prawdopodobieństwem oczekiwany charakter drgań.

Rys. 6.15 ilustruje wpływ parametrów  $\omega$  i  $e$  na liczbę zderzeń. Porównując rezultaty z wynikami, pokazanymi na rys. 6.13, można zauważyć analogie z układami udarowymi, badanymi w rozdziale 5 pracy. Tu również coraz rzadszym zderzeniom odpowiadają drgania podharmoniczne coraz wyższego rzędu.

W obszarze rezonansowym dla dużych amplitud (a dla  $\lambda_0 \neq 0$  także dla dużych częstości) zachodzi stały kontakt wirnika z ogranicznikiem, jednak inna jest tu forma drgań niż w przypadkach analizowanych w podrozdziale 6.1.2. Jest to forma współbieżna; oś wirnika obraca się w kierunku zgodnym z prędkością wirowania.



Rys. 6.15. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $e$  na liczbę zderzeń i formę drgań ( $\sigma=0.8$ ,  $\gamma_2=100$ ,  $\kappa_1=1$ ): a)  $\lambda_0=\lambda_1=0$ , b)  $\lambda_0=0.2$ ,  $\lambda_1=0.1$

### 6.3. WNIOSKI

Przeprowadzone obliczenia numeryczne oraz uzyskane rezultaty pozwalają wyciągnąć następujące wnioski, dotyczące zachowania się układów typu wirnik – stojan:

- Stwierdzono istotny wpływ procesów przejściowych na drgania ustalone badanego układu. W przypadku małych wartości luzu między wirnikiem i stojanem ustalają się drgania, podczas których dochodzi do zderzeń między elementami układu.
- Charakter ruchu układu zależy istotnie od amplitudy wymuszenia  $e$ , częstości  $\omega$  oraz od ugięcia statycznego  $\sigma$ . Pozostałe parametry mają znacznie mniejszy wpływ na rezultaty analizy. Dla dostatecznie dużych wartości  $e$  w zakresie rezonansowym ustala się forma współbieżna drgań, podczas której zachodzi stały kontakt wirnika z ogranicznikiem. Dla dużych częstości wymuszeń jest także możliwy stały kontakt wirnika ze stojanem, ale inna jest forma drgań – forma przeciwbieżna, groźna z uwagi na możliwość zniszczenia układu.
- Drgania podharmoniczne wyższych rzędów wzbudzają się w zakresie wyższych częstości wymuszenia. Występuje związek między rzędem drgań podharmonicznych i liczbą zderzeń, podobny do zaobserwowanego podczas analizy układów udarowych. Najczęściej ze wzrostem rzędu maleje liczba zderzeń.
- Drgania skrętne praktycznie nie mają wpływu na rezultaty analizy jakościowej.
- Przy przyjętym modelu tłumienie w podporach wpływa pozytywnie, zwiększając obszar drgań bez zderzeń. Zmniejszają się równocześnie obszary drgań chaotycznych.
- Ryzyko występowania w stanie ustalonym zderzeń wirnika ze stojanem w małym stopniu zależy od parametrów  $\gamma_u$ ,  $\zeta_u$ , charakteryzujących model zderzenia. Dla bardzo dużych wartości  $\gamma_u$  oraz małych  $\zeta_u$  ryzyko to nieco się zwiększa.
- Niesymetryczność zamocowania wału oraz położenia wirnika nie wpływa jakościowo na zachowanie się układu. Prawdopodobieństwo wzbudzenia się drgań prawie okresowych zamiast chaotycznych jest tu nieco większe.
- Rezultaty analizy jakościowej potwierdzają skuteczność zastosowanych metod analizy.
- Zakresy drgań regularnych i chaotycznych wyznaczone na podstawie diagramów bifurkacyjnych i wykładników Lapunowa są do siebie zbliżone. Analizując wykładniki Lapunowa nie można jednak określić rzędu drgań podharmonicznych. Dodatkowo czas wyznaczania wykładników jest znacznie większy z powodu konieczności całkowania układu równań ruchu zaburzonego.

## **7. DRGANIA CHAOTYCZNE W PROCESACH SZLIFOWANIA**

Drgania wzbudzające się podczas procesów obróbki (szlifowania, frezowania) ręcznymi narzędziami są niewskazane zarówno z uwagi na jakość procesu szlifowania, jak również ze względu na ich szkodliwe oddziaływanie na człowieka. Bezpośrednią przyczyną drgań są wymuszenia kinematyczne i bezwładnościowe, wynikające najczęściej z bicia promieniowego ściernicy lub freza [1], [65]. W przypadku dużych amplitud wymuszeń może nastąpić utrata kontaktu ściernicy z obrabianym materiałem, czego efektem jest nieciągły – udarowy charakter sił skrawania, prowadzący często do drgań chaotycznych [28], [31], [83]. Opracowanie modelu procesu szlifowania, uwzględniającego możliwość odrywania się ściernicy od podłoża, ma duże znaczenie praktyczne przy rozwiązywaniu problemów wibroizolacji ręcznych elektro-narzędzi.

W podrozdziale 7.1 podjęto próbę zbadania wybranych zjawisk fizycznych, wynikających z nieliniowego opisu sił skrawania. Prowadząc analizę jakościową układu, z wykorzystaniem algorytmów numerycznego całkowania oraz szybkiej transformaty Fouriera, zbadano wpływ parametrów układu na rozwiązania odpowiednich równań różniczkowych. Wykazano, że w pewnych zakresach parametrów wzbudzają się drgania o okresie większym od okresu wymuszenia, a w niektórych przypadkach drgania chaotyczne. W takich obszarach parametrów obserwuje się zwykle podwyższony poziom drgań emitowanych przez szlifierkę.

W następnym podrozdziale poddano jakościowej analizie nieliniowy model, opisujący drgania wibroizolowanej szlifierki ręcznej. Zbadano wpływ parametrów na charakter drgań oraz wyznaczono pewne wskaźniki jakości działania zastosowanego układu wibroizolacji.

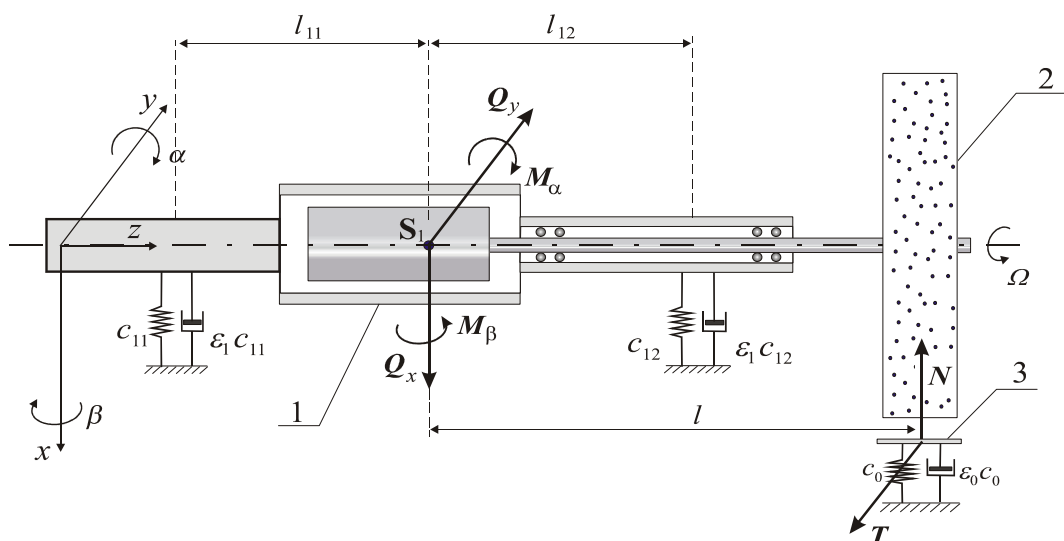
### **7.1. SYMULACJA PROCESU SZLIFOWANIA**

#### **7.1.1. Model układu operator-narzędzie-przedmiot obrabiany**

Na rys. 7.1 przedstawiono model fizyczny badanego układu. Założono, że układ wirnik – wrzeciono – ściernica obraca się względem korpusu narzędzia ze stałą



prędkością obrotową  $\Omega$ . Do opisu ruchu wprowadzono układ lokalny, związany ze środkiem masy; położenie początku tego układu oraz orientację jego osi wyznaczają, przy pominięciu drgań osiowych i skrętnych, współrzędne  $x_1$  i  $y_1$  oraz kąty obrotu  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ .



Rys. 7.1. Model fizyczny układu: 1 – korpus, 2 – element wirujący, 3 – ogranicznik ruchu

Oddziaływanie operatora zastąpiono układem dwóch podatnych połączeń typu Voigta-Kelvina (parametry  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $\epsilon_1$ ) zamocowanych w odległościach  $l_{11}$  i  $l_{12}$  od środka masy układu. Ponadto założono, że podczas procesu szlifowania, w czasie którego zachodzi kontakt ściernicy z obrabianym materiałem (ogranicznikiem), operator działa na narzędzie układem stałych sił ( $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_\alpha$ ,  $M_\beta$  – uogólnione siły zredukowane do punktu  $S$ ), równoważących składowe stałe siły skrawania  $N$  i  $T$ .

W przypadku oderwania się ściernicy od ogranicznika operator zachowuje się jak układ aktywny, starając się z jednej strony doprowadzić narzędzie do ponownego kontaktu z ogranicznikiem (niezmienione wartości  $Q_x$ ,  $M_\alpha$ ), z drugiej zaś przeciwdziała nagłym ruchom narzędzia, zwłaszcza w kierunku stycznym do obrabianej powierzchni, zmniejszając w momencie oderwania znacznie siłę  $Q_y$  oraz moment  $M_\beta$ .

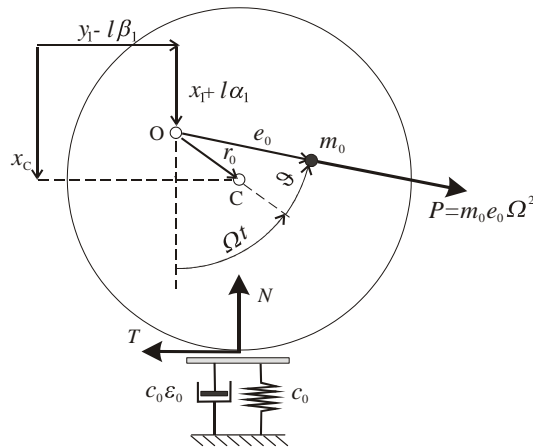
Przyjęto dalej uproszczoną zależność między składowymi  $Q_x$  i  $Q_y$ :

$$Q_y = \begin{cases} \mu_0 Q_x & N > 0 \\ 0 & N \leq 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

W celu zapewnienia równowagi statycznej założono:

$$M_\alpha = Q_x l \qquad M_\beta = Q_y l \qquad (7.2)$$

Rozpatrzono przypadek obróbki elementu w kształcie płaskiej powierzchni (rys. 7.2). Założono, że ściernica w kształcie koła jest osadzona mimośrodowo ( $r_0$  – odległość osi obrotu od środka geometrycznego ściernicy); uwzględniono również niewyważenie poprzez wprowadzenie umownej masy  $m_0$ , której położenie określają parametry  $e_0$  i  $\vartheta$ .



Rys. 7.2. Związki kinematyczne

Ponieważ składowa normalna  $N$  reakcji ogranicznika zależy od głębokości skrawania przyjęto dalej, że w przypadku kontaktu ściernicy z ogranicznikiem siła  $N$  jest funkcją przemieszczenia  $x_c$  środka geometrycznego ściernicy. Uwzględniono również wpływ prędkości zmian  $x_c$  zakładając, że w procesie szlifowania (dla  $x_c > 0$ ) reakcję normalną ogranicznika opisuje model Voigta-Kelvina, przy czym siła  $N$  nie może przyjmować wartości ujemnych (więzy jednostronne). Można ją zapisać następująco:

$$N = \begin{cases} 0 & x_c \leq 0 \vee x_c + \varepsilon_0 \dot{x}_c \leq 0 \\ c_0(x_c + \varepsilon_0 \dot{x}_c) & x_c > 0 \wedge x_c + \varepsilon_0 \dot{x}_c > 0 \end{cases} \qquad (7.3)$$

lub, po wykorzystaniu funkcji Heaviside'a, w postaci:

$$N(x_c, \dot{x}_c) = c_0(x_c + \varepsilon_0 \dot{x}_c) H(x_c) H(x_c + \varepsilon_0 \dot{x}_c) \qquad (7.4)$$

gdzie (rys. 7.2):

$$x_c = x_1 + l \alpha_1 + r_0 \cos \Omega t \qquad (7.5)$$

Wprowadzony opis (7.4) reakcji normalnej jest analogiczny do opisu (4.5-4.6) siły udarowej. Różnice ujawniają się w wartościach parametrów modelu, dotyczy to przede wszystkim współczynnika  $c_0$ , który jest tu znacząco mniejszy od współczynnika  $c_u$ .

Przyjęto także, że między składową styczną i normalną siły skrawania zachodzi liniowy związek:

$$T = \mu_0 N \quad (7.6)$$

Po wykorzystaniu zasady pędu i zasady krętu względem środka masy  $S$ , ruch układu można opisać układem czterech równań różniczkowych II rzędu o postaci częściowo podobnej do (6.17):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -S_{11x} - S_{12x} - N + Q_x + B_n \cos(\Omega t + \vartheta) \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -S_{11y} - S_{12y} - T + Q_y + B_n \sin(\Omega t + \vartheta) \\ I_1 \ddot{\alpha}_1 &= M_{G\alpha} + S_{11x} l_1 - S_{12x} l_2 - Nl + M_\alpha + m_0 e_0 \Omega^2 l \cos(\Omega t + \vartheta) \\ I_1 \ddot{\beta}_1 &= M_{G\beta} - S_{11y} l_1 + S_{12y} l_2 + Tl - M_\beta + m_0 e_0 \Omega^2 l \sin(\Omega t + \vartheta) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Na podstawie zależności (6.18) i (6.19) mamy następujące wzory  $M_{G\alpha} = I_0 \Omega \dot{\beta}_1$ ,  $M_{G\beta} = -I_0 \Omega \dot{\alpha}_1$  dla momentów żyroskopowych oraz  $B_n = m_0 e_0 \Omega^2$  dla siły odśrodkowej bezwładności. Składowe siły  $S_{11}$ ,  $S_{12}$  określają wzory (6.20-6.22). Po wprowadzeniu oznaczeń (6.24), tzn.:

$$c_1 = c_{11} + c_{12} \quad h_1 = (c_{11} l_1 - c_{12} l_2) / (c_{11} + c_{12}) \quad k_1 = c_{11} c_{12} (l_1 + l_2)^2 / (c_{11} + c_{12}) \quad (7.8)$$

i wykorzystaniu związków  $b_{1k} = \varepsilon_1 c_{1k}$  ( $k=1,2$ ) równania (7.7) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (\varepsilon_1 \dot{x}_1 + x_1) - c_1 h_1 (\varepsilon_1 \dot{\alpha}_1 + \alpha_1) &= -N + Q_x + m_0 e_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \vartheta) \\ m_1 \ddot{y}_1 + c_1 (\varepsilon_1 \dot{y}_1 + y_1) + c_1 h_1 (\varepsilon_1 \dot{\beta}_1 + \beta_1) &= -T + Q_y + m_0 e_0 \Omega^2 \sin(\Omega t + \vartheta) \\ I_1 \ddot{\alpha}_1 - I_0 \Omega \dot{\beta}_1 - c_1 h_1 (\varepsilon_1 \dot{x}_1 + x_1) + (k_1 + c_1 h_1^2) (\varepsilon_1 \dot{\alpha}_1 + \alpha_1) &= -Nl + M_\alpha + m_0 e_0 \Omega^2 l \cos(\Omega t + \vartheta) \\ I_1 \ddot{\beta}_1 + I_0 \Omega \dot{\alpha}_1 + c_1 h_1 (\varepsilon_1 \dot{y}_1 + y_1) + (k_1 + c_1 h_1^2) (\varepsilon_1 \dot{\beta}_1 + \beta_1) &= Tl - M_\beta - m_0 e_0 \Omega^2 l \sin(\Omega t + \vartheta) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Parametry (7.8) można traktować, jako rezultat redukcji dwóch podatnych połączeń do punktu odległego od środka masy o odległość  $h_1$ ; parametry  $c_1$  i  $k_1$  są odpowiednio sztywnością liniową i skrętną. Wprowadzenie parametrów typu (7.8) jest przydatne w analizach jakościowych (zwłaszcza, gdy w układzie występuje większa liczba podatnych połączeń, np. przy badaniu wibroizolowanego narzędzia – punkt 7.2), ponieważ ulega zmniejszeniu liczba parametrów mających wpływ na rozwiązanie równań różniczkowych ruchu. Liczba parametrów, występujących

w równaniach różniczkowych ruchu, ulega dodatkowej redukcji po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych. Bezwymiarowy czas można zdefiniować następująco:

$$\tau = \omega_0 t \quad (7.10)$$

gdzie  $\omega_0$  jest określona wzorem:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} \quad (7.11)$$

Przemieszczenia wygodnie jest odnieść do zredukowanego mimośrodru:

$$e = e_0 m_0 / m_1 \quad (7.12)$$

a kąty do wartości  $e/l$ . Po wprowadzeniu wektora:

$$\mathbf{u} = [x_1/e, y_1/e, l\alpha_1/e, l\beta_1/e]^T \quad (7.13)$$

równania ruchu zależą od następujących bezwymiarowych parametrów:

$$\begin{aligned} \omega &= \Omega / \omega_0 & q &= Q_x / c_1 e \\ \rho_1 &= I_1 / m_1 l^2 & \chi &= I_0 / I_1 \\ \kappa_1 &= k_1 / c_1 l^2 & \gamma_0 &= c_0 / c_1 \\ \zeta_1 &= \varepsilon_1 \omega_0 / 2 & \zeta_0 &= \varepsilon_0 \omega_0 / 2 \\ \lambda_1 &= h_1 / l & \sigma &= r_0 / e \end{aligned} \quad (7.14)$$

oraz od parametrów  $\mu_0$  i  $\vartheta$ . Równania różniczkowe (7.9), zapisane w zmiennych bezwymiarowych, przyjmują postać:

$$\begin{aligned} u_1'' + 2\zeta_1 u_1' + u_1 - \lambda_1(2\zeta_1 u_3' + u_3) &= -n + q + \omega^2 \cos(\omega\tau + \vartheta) \\ u_2'' + 2\zeta_1 u_2' + u_2 + \lambda_1(2\zeta_1 u_4' + u_4) &= -\mu_0 n + \mu_0 q H(n) + \omega^2 \sin(\omega\tau + \vartheta) \\ \rho_1 u_3'' - \chi \rho_1 \omega u_4' - \lambda_1(2\zeta_1 u_1' + u_1) + (\kappa_1 + \lambda_1^2)(2\zeta_1 u_3' + u_3) &= -n + q + \omega^2 \cos(\omega\tau + \vartheta) \\ \rho_1 u_4'' + \chi \rho_1 \omega u_3' + \lambda_1(2\zeta_1 u_2' + u_2) + (\kappa_1 + \lambda_1^2)(2\zeta_1 u_4' + u_4) &= \mu_0 n - \mu_0 q H(n) - \omega^2 \sin(\omega\tau + \vartheta) \end{aligned} \quad (7.15)$$

przy czym  $n$  jest bezwymiarowym odpowiednikiem siły  $N$ . Można tu wykorzystać wzory (7.4) i (7.5), podstawiając do nich w miejsce  $c_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $r_0$  oraz  $x_C$  wielkości bezwymiarowe  $\gamma_0$ ,  $2\zeta_0$ ,  $\sigma$  oraz  $u_C = x_C / e$ . Otrzymamy:

$$n(u_C, u_C') = c_0(u_C + 2\zeta_0 u_C') H(u_C) H(u_C + 2\zeta_0 u_C') \quad (7.16)$$

przy czym:

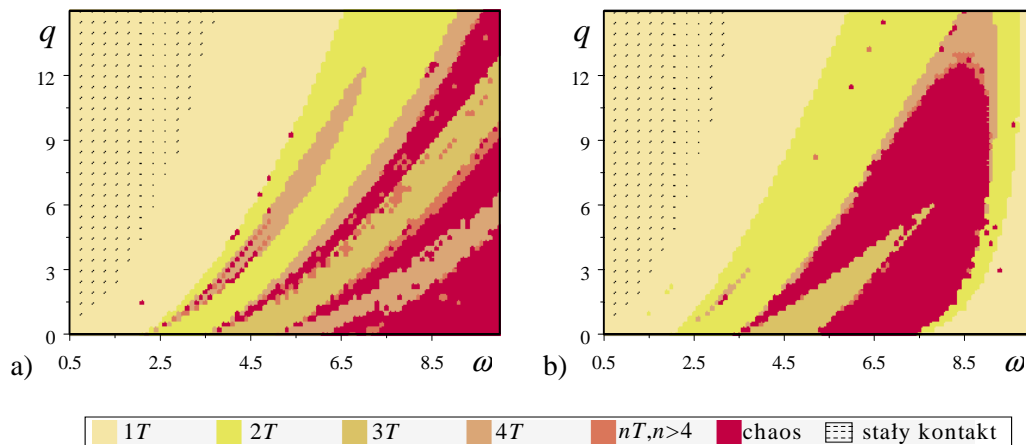
$$u_c = u_1 + u_3 + \sigma \cos \omega \tau \quad (7.17)$$

### 7.1.2. Rezultaty symulacji numerycznej

Układ równań różniczkowych (7.15) jest układem nieliniowym, głównie z uwagi na przyjęty model procesu szlifowania oraz model oddziaływania operatora. W przypadku dużych amplitud sił wymuszających (duże wartości mimośrodków  $e$ ,  $\sigma$  oraz częstości  $\omega$ ) dostatecznie dokładne rezultaty można uzyskać tylko w drodze numerycznego całkowania.

Ważnym problemem jest zbadanie wpływu parametrów (7.14) na uzyskane rozwiązania, zwłaszcza w sensie jakościowym. Okazuje się, że w pewnych zakresach parametrów, pomimo wymuszenia harmonicznego, w układzie wzbudzają się drgania podharmoniczne lub drgania chaotyczne.

Do zbadania typu drgań można wykorzystać metody analizy widmowej, omówione w pracy [28]; zwłaszcza przydatne są tu algorytmy szybkiej transformaty Fouriera. Bazując na takich metodach wyznaczono obszary różnych typów drgań (rys.7.3 i 7.9) w płaszczyznach  $(\omega, q)$  oraz  $(\omega, \sigma)$ .



Rys. 7.3. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $q$  na typ drgań:

a)  $\gamma_0=100$ , b)  $\gamma_0=20$ ; ( $\sigma=0$ )

Parametry  $\gamma_0$ ,  $\zeta_0$ ,  $\mu_0$ , charakteryzujące proces szlifowania, a także parametry inercyjne  $\rho_1$ ,  $\chi$  w nieznacznym stopniu wpływają na jakościowe rezultaty analizy. Spośród parametrów  $q$ ,  $\kappa_1$ ,  $\zeta_1$ ,  $\lambda_1$ , określających model operatora, zdecydowanie największy wpływ na typ drgań ma bezwymiarowa siła docisku  $q$ . Ważną rolę odgrywają również parametry wymuszenia  $\omega$  i  $\sigma$ . W obliczeniach numerycznych

ustalono, na podstawie analizy istniejących rozwiązań konstrukcyjnych szlifierek, wartości następujących parametrów:  $\gamma_0=100$ ,  $\zeta_0=0.05$ ,  $\mu_0=0.5$ ,  $\kappa_1=1$ ,  $\zeta_1=0.5$ ,  $\lambda_1=0.0$ ,  $\rho_1=1.5$ ,  $\chi=0.1$ . Zmianie podlegały wartości parametrów  $q$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$  i  $\vartheta$ .

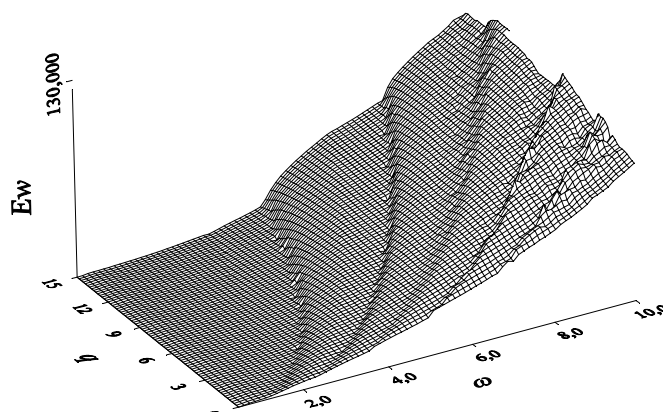
Rys. 7.3 ilustruje wpływ parametrów  $\omega$  i  $q$  na typ emitowanych przez szlifierkę drgań, natomiast rys. 7.4 wpływ wymienionych parametrów na średnią (bezwymiarową) energię drgań, zdefiniowaną następująco:

$$E_w = \frac{1}{2NT} \int_{\tau_0}^{\tau_0+NT} [u_1'^2 + u_2'^2 + \rho_1(u_3'^2 + u_4'^2)] d\tau \quad (7.18)$$

gdzie  $N$  jest zadaną liczbą bezwymiarowych okresów wymuszenia  $T$ . W obliczeniach przyjęto  $\sigma=0$ , pomijając w ten sposób wpływ wymuszenia kinematycznego.

Obserwując obszary na płaszczyźnie  $(\omega, q)$  – rys. 7.3 można zauważyć, że tylko dla małych wartości bezwymiarowej prędkości obrotowej  $\omega$  proces szlifowania przebiega bez odrywania się ściernicy od ogranicznika; zakres tego typu drgań nieco się powiększa ze wzrostem wartości bezwymiarowej siły docisku  $q$ . Dla większych wartości  $\omega$ , co ma miejsce w praktyce, występują obszary drgań podharmonicznych coraz wyższego rzędu, przedzielane wąskimi pasmami drgań podharmonicznych jeszcze wyższego rzędu lub drgań chaotycznych.

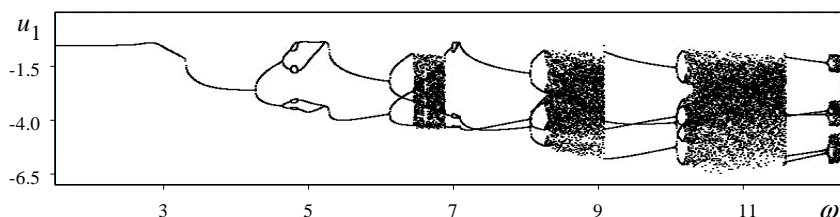
Ze zwiększaniem wartości  $\gamma_0$  sytuacja nie ulega jakościowej zmianie. Pewne różnice uwidaczniają się dopiero dla stosunkowo małych wartości  $\gamma_0$  (rys. 7.3b). Zakres wzbudzania się drgań chaotycznych jest teraz ograniczony; dla większych wartości prędkości obrotowej obserwuje się ponownie drgania  $1T$ -okresowe, podczas których jednak zachodzi chwilowa utrata kontaktu narzędzia z obrabianym materiałem.



Rys. 7.4. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $q$  na energie drgań ( $\sigma=0$ ,  $\gamma_0=100$ )

Energia drgań (rys. 7.4) rośnie ze wzrostem prędkości obrotowej, przy czym w obszarach odpowiadających drganiom podharmonicznym wysokiego rzędu lub drganiom chaotycznym (rys. 7.3a) wzrost energii drgań jest wyraźniejszy.

Na rys. 7.5 przedstawiono diagram bifurkacyjny, ilustrujący wpływ częstości na charakter drgań. Sporządzono go, notując co okres wymuszenia wartości przemieszczenia  $u_1$ . Diagram ten odpowiada przekrojowi obszaru  $(\omega, q)$  dla  $q = 5$  (rys. 7.3a). Jego analiza pozwala łatwo określić typ drgań.



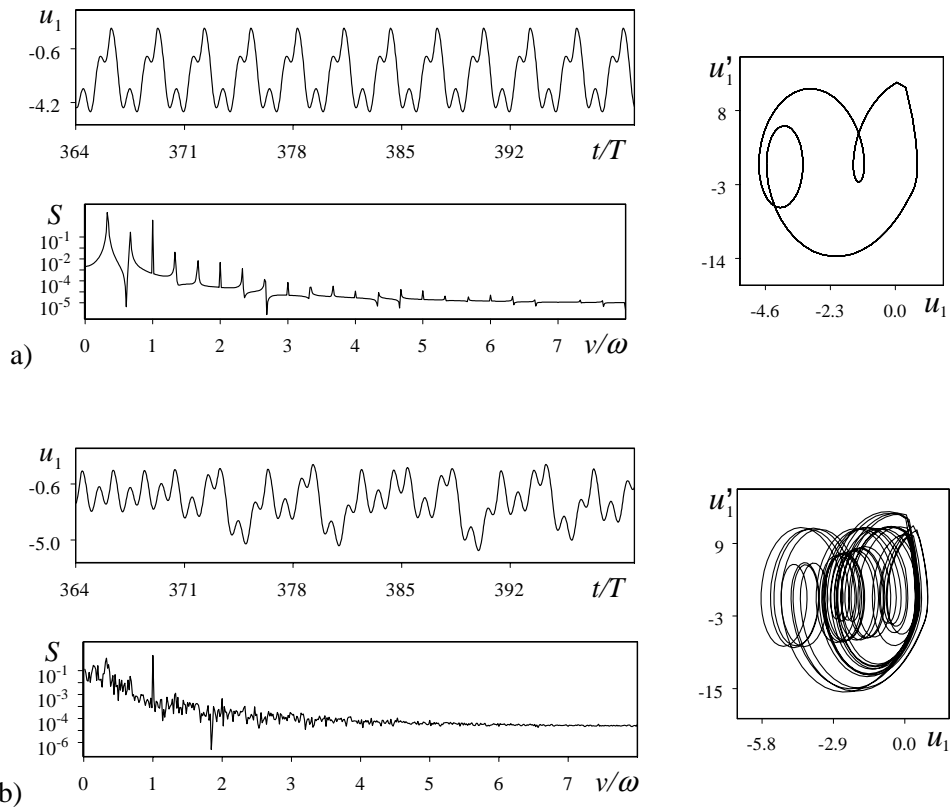
Rys. 7.5. Diagram bifurkacyjny – wpływ częstości ( $\sigma=0, q=5, \zeta_0=0.05$ )

Obserwacja diagramu potwierdza wnioski wyciągnięte z analizy rys. 7.3a, a mianowicie kolejne zakresy drgań chaotycznych rozdzielają stosunkowo duże zakresy drgań podharmonicznych coraz wyższego rzędu.

Przykładowo, w przedziale częstości (5.2-6.1) okres drgań jest dwukrotnie większy od okresu wymuszenia, są to więc drgania podharmoniczne typu 1:2. Dla częstości  $\omega \approx 6.1$  obserwujemy bifurkację rozwiązań  $2T$ -okresowych w  $4T$ -okresowe. Podobnie w przedziale częstości (6.85-8.0) wzbudzają się drgania  $3T$ -okresowe, które przechodzą następnie drgania  $6T$ -okresowe, czyli znowu ulega podwojeniu okres drgań. Analogiczną sytuację mamy w przedziałach (9.1-10.1) oraz (11.6-12.2), w których zauważa się bifurkacje, podwajające okres drgań. Sporządzając dokładniej wybrane fragmenty diagramu można wykryć kolejne punkty bifurkacji rozwiązań – w efekcie finalnym kaskada bifurkacji, podwajających okres drgań prowadzi do drgań chaotycznych.

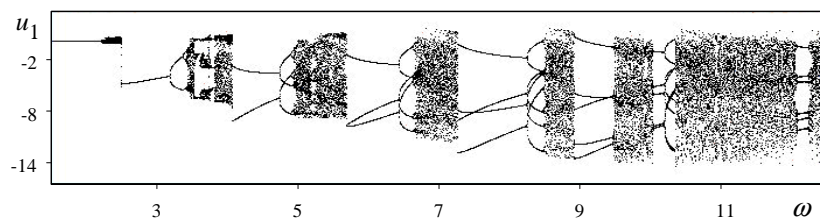
Na rys. 7.6 przedstawiono przebiegi czasowe przemieszczenia  $u_1(t)$ , płaszczyzny fazowe  $(u_1, u'_1)$  oraz widmo sygnału  $u_1$  dla dwóch wartości częstości wymuszenia  $\omega$ .

W pierwszym przypadku okres drgań jest trzykrotnie większy od okresu wymuszenia (drgania podharmoniczne 1:3), widmo ma wyraźnie widoczne maksima w punktach  $\nu/\omega=k/3$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, a na płaszczyźnie fazowej obserwuje się zamkniętą krzywą. W drugim przypadku drgania są chaotyczne, o czym świadczy zarówno nieregularny przebieg czasowy, widmo o charakterze ciągłym, jak i trajektorie fazowe.



Rys. 7.6. Przebieg czasowy, płaszczyzna fazowa i widmo:  
 a)  $\omega=7.6$ , b)  $\omega=8.4$

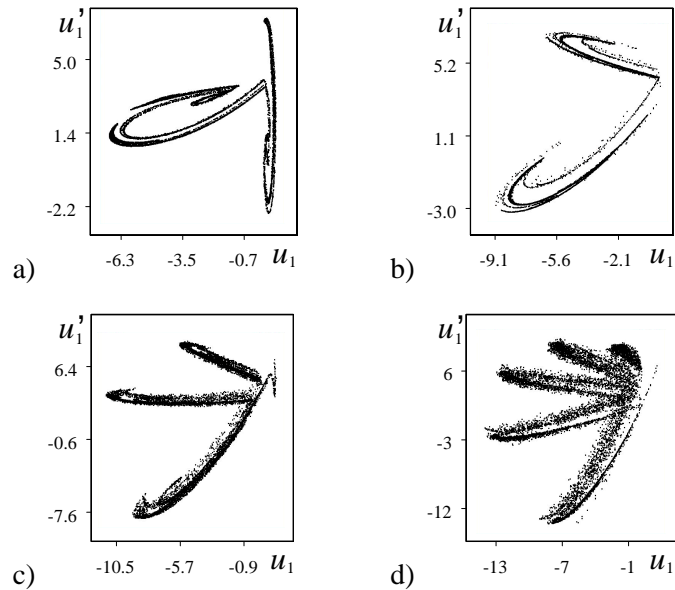
Interesującym jest fakt, że kształt obszarów przedstawionych na rys. 7.3a, a także diagramy bifurkacyjne (rys. 7.5), nie ulegają jakościowym zmianom dla innych wartości parametrów  $\gamma_0$ ,  $\zeta_0$ ,  $f$ , opisujących model sił skrawania. Zwiększanie wartości parametrów  $f$  i  $\gamma_0$  oraz zmniejszenie wartości  $\zeta_0$  powoduje zazwyczaj zwiększenie zakresów drgań chaotycznych.



Rys. 7.7. Diagram bifurkacyjny – wpływ częstości ( $\sigma=0$ ,  $q=5$ ,  $\zeta_0=0$ )

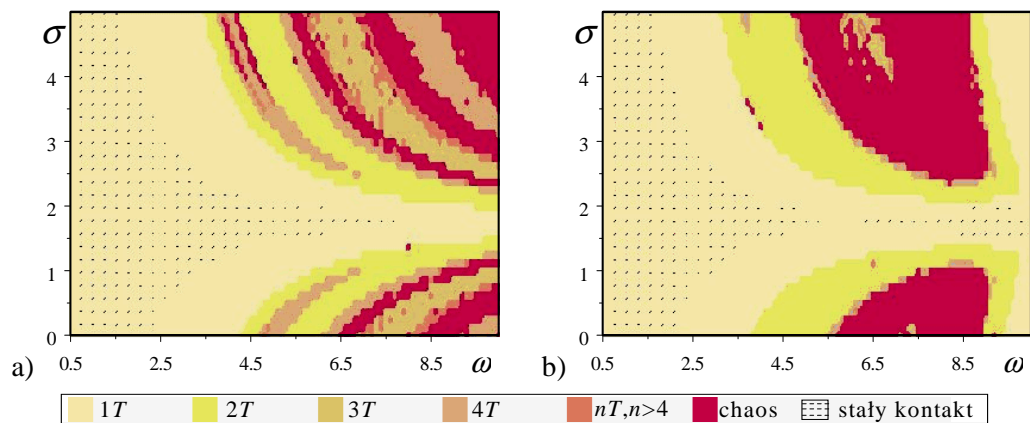
Można się o tym przekonać, porównując diagram przedstawiony na rys. 7.5 z diagramem, wyznaczonym przy pominięciu wpływu tłumienia na składową normalną siły skrawania (rys. 7.7). Dodatkowo odpowiednie zakresy drgań podharmonicznych i chaotycznych przesuwają się w kierunku niższych częstości.





Rys. 7.8. Przekroje Poincaré: a)  $\omega=3.9$ , b)  $\omega=5.0$ , c)  $\omega=7.0$ , d)  $\omega=9.8$

W przypadku drgań chaotycznych portrety fazowe są mało czytelne, zdecydowanie lepszą informację uzyskuje się, sporządzając stroboskopowe portrety fazowe, czyli przekroje Poincaré. W kolejnych zakresach drgań chaotycznych (rys. 7.7) zmienia się kształt odpowiedniego fraktala (rys. 7.8).

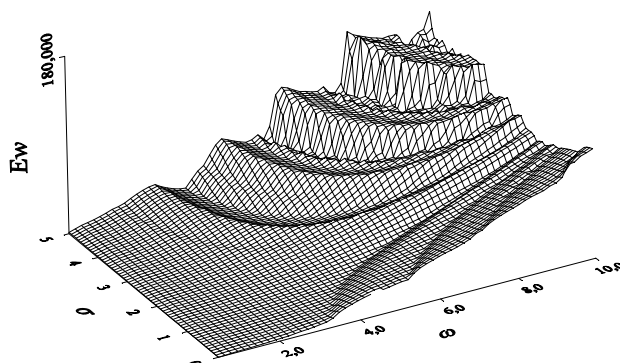


Rys. 7.9. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\sigma$  na typ drgań: a)  $\gamma=100$ , b)  $\gamma=20$

Rys. 7.9 i 7.10 ilustrują, w analogiczny sposób jak rys. 7.3 i 7.4, wpływ parametrów  $\omega$  i  $\sigma$  na typ drgań oraz wartość wskaźnika (7.19). Prezentowane rezultaty uzyskano, przyjmując wartość parametru  $q=5$ . Dla  $\sigma \approx 1.75$  obserwuje się drgania podharmoniczne niskiego rzędu, a dla niezbyt dużych wartości  $\omega$  zachodzi dodatkowo cały czas kontakt ściernicy z obrabianym materiałem.

Energia emitowanych drgań (rys. 7.10) jest bliska wartości minimalnej. Jest to przypadek korzystny z punktu widzenia minimalizacji drgań przekazywanych na operatora narzędzia. Przypadek taki ma między innymi miejsce, gdy niewyważenie

wynika tylko z mimośrodowego osadzenia ściernicy ( $r_0=e_0$ ,  $\vartheta=0$ ). Wtedy wartość parametru  $\sigma$ , zgodnie z wzorami (7.12) i (7.14), zależy od stosunku masy szlifierki  $m$  do masy ściernicy  $m_0$  ( $\sigma=m_1/m_0$ ); jest więc większa od jedności i dla realnych ściernic jest bliska oszacowanej wartości optymalnej 1.75.



Rys. 7.10. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\sigma$  na energie drgań ( $\gamma_0=100$ )

Podobnie, jak poprzednio (rys. 7.4), w obszarach drgań chaotycznych (rys.7.9) wartość wskaźnika (7.18) – rys. 7.10 jest duża i zmienia się w sposób nieciągły ze zmianą parametrów  $\omega$  i  $\sigma$ . Funkcja  $E_w(\omega, \sigma)$  w tych obszarach jest zbliżona do funkcji losowej.

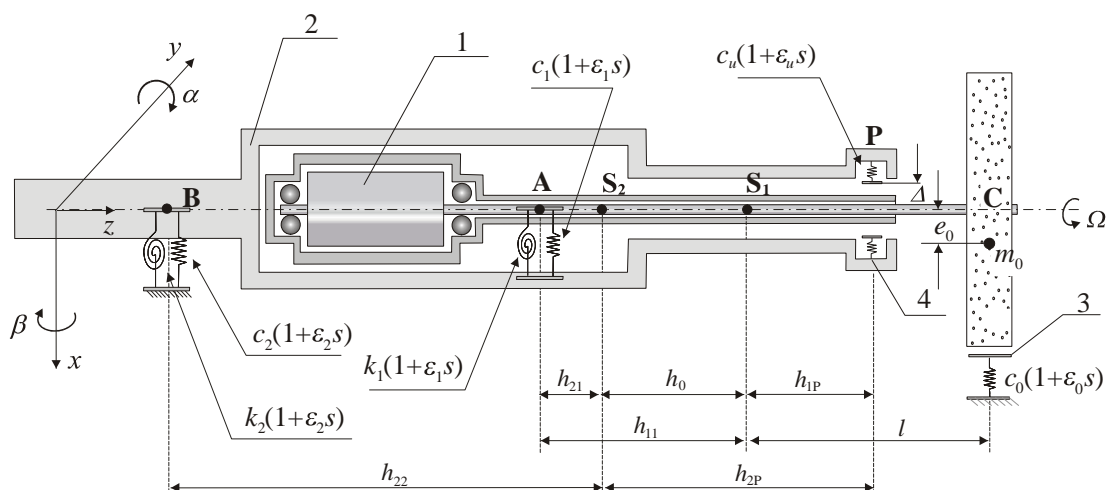
## 7.2. DOBÓR PASYWNEGO UKŁADU WIBROIZOLACJI SZLIFIERKI

W celu zmniejszenia poziomu drgań, emitowanych przez szlifierkę i przekazywanych na operatora, są stosowane układy wibroizolacji, montowane najczęściej między korpusem i rękojeścią narzędzia. W przypadku wykorzystywania układów pasywnych ich parametry są zwykle dobierane na podstawie analizy modelu liniowego. Nie uwzględnia się wpływu procesu skrawania, a także zmiennych warunków pracy (np. prędkości obrotowej, siły docisku) na charakterystyki dynamiczne układu.

Poniżej zaproponowano inne podejście do problemu optymalnego doboru parametrów wprowadzonego układu wibroizolacji, bazujące na rezultatach analizy jakościowej.

### 7.2.1. Model wibroizolowanej szlifierki

Na rys. 7.11 przedstawiono model wibroizolowanej szlifierki ręcznej. Uwzględniono tu następujące elementy: korpus narzędzia 1 (z uwzględnieniem podukładu silnik-wrzeciono-ściernica), rękojeść 2 oraz obrabiany element 3.



Rys. 7.11. Model układu: 1 – korpus, 2 – rękojeść, 3 – obrabiany element, 4 – ogranicznik ruchu

Parametry  $m_1$  i  $m_2$  są masami odpowiednich podukładów,  $I_1$  i  $I_2$  momentami bezwładności względem osi  $x_1$  i  $x_2$  (symetria osiowa), przechodzących odpowiednio przez punkty  $S_1$  i  $S_2$ , a  $I_0$  jest momentem bezwładności elementów wirujących względem ich osi symetrii.

Podatne połączenie korpusu z rękojeścią reprezentuje pasywny układ wibroizolacji, natomiast elementy podatne mocujące rękojeść z otoczeniem są uproszczonym modelem oddziaływania operatora. Wprowadzono zastępcze układy podatnych połączeń, złożone ze sprężyn liniowych (sztywności zespolone  $c_j(1+\varepsilon_j s)$ ,  $j=1,2$ ) i skrętnych (sztywności  $k_j(1+\varepsilon_j s)$ ,  $j=1,2$ ). Parametry  $c_j$ ,  $k_j$  należy traktować, jako rezultat redukcji dowolnych połączeń podatnych do punktu odległego o  $h_{1j}$  lub  $h_{2j}$  od środka masy  $S_1$  lub  $S_2$ ; mogą one zostać wyznaczone np. według wzorów (7.8).

Analogicznie można zdefiniować parametry charakteryzujące rozpraszanie energii. Przy założeniu, że macierz tłumienia jest proporcjonalna do macierzy sztywności, tłumienie opisuje dla wybranego połączenia jeden współczynnik  $\varepsilon_j$ . W celu ograniczenia przemieszczeń rękojeści względem korpusu wprowadzono dodatkowo ogranicznik ruchu 4, którego własności oraz położenie określają parametry  $c_u$ ,  $\Delta$ ,  $h_{1P}$ ,  $h_{2P}$ .

Założono dalej, że korpus narzędzia i rękojeść mogą wykonywać ruch ogólny z pominięciem drgań osiowych i skrętnych. Pominięto wymuszenia kinematyczne ( $r_0=0$ ), uwzględniono natomiast wymuszenia bezwładnościowe (parametry  $m_0$ ,  $e_0$ ), zakładając, że prędkość obrotowa ściernicy  $\Omega$  jest stała.

Po wprowadzeniu ruchomych układów współrzędnych, związanych ze środkami mas  $S_n$  podukładów: korpus wraz z elementami wirującymi ( $n=1$ ) oraz rękojeść ( $n=2$ ), ruch można opisać, podając współrzędne  $x_n$  i  $y_n$  punktów  $S_n$  oraz kąty  $\alpha_n$  i  $\beta_n$ .

określające dla małych drgań obroty odpowiednich osi układów lokalnych. Rozważono, jak poprzednio, przypadek obróbki płaskiej powierzchni. Przyjęto, że w przypadku kontaktu ściernicy z podłożem (dla  $x_c = x_1 + l\alpha_1 > 0$ ) zachodzi liniowy związek  $T=fN$  między składową styczną i normalną siły skrawania. Ponadto założono, że reakcję normalną  $N$  opisuje wzór (7.4). W analogiczny sposób opisano składową normalną reakcji ogranicznika:

$$R(r_p, \dot{r}_p) = c_u(r_p + \varepsilon_u \dot{r}_p) H(r_p - \Delta) H(r_p + \varepsilon_u \dot{r}_p) \quad (7.19)$$

przy czym założono tu, że zderzenie zachodzi dla  $r_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} > \Delta$ , gdzie:

$$x_p = (x_1 + h_{1p}\alpha_1) - (x_2 + h_{2p}\alpha_2) \quad y_p = (y_1 - h_{1p}\beta_1) - (y_2 - h_{2p}\beta_2) \quad (7.20)$$

Składowe kartezjańskie reakcje ogranicznika określają związki:

$$R_x = R x_p / r_p \quad R_y = R y_p / r_p \quad (7.21)$$

Wychodząc z zasad pędu i krętu względem środków mas  $S_n$ , ruch układu można opisać układem 8 równań różniczkowych II rzędu o następującej postaci:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -S_{1x} - R_x - N + B_n \cos \Omega t \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -S_{1y} - R_y - T + B_n \sin \Omega t \\ I_1 \ddot{\alpha}_1 &= M_{G\alpha} + S_{1x} h_{11} - M_{1\alpha} - R_x h_{1p} - Nl + m_0 e_0 \Omega^2 l \cos \Omega t \\ I_1 \ddot{\beta}_1 &= M_{G\beta} - S_{1y} h_{11} - M_{1\beta} + R_y h_{1p} + Tl - m_0 e_0 \Omega^2 l \sin \Omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 &= S_{1x} - S_{2x} + R_x + Q_x \\ m_2 \ddot{y}_2 &= S_{1y} - S_{2y} + R_y + Q_y \\ I_2 \ddot{\alpha}_2 &= -S_{1x} h_{21} + S_{2x} h_{22} + M_{1\alpha} - M_{2\alpha} + R_x h_{2p} + M_\alpha + Q_x h_0 \\ I_2 \ddot{\beta}_2 &= S_{1y} h_{21} - S_{2y} h_{22} + M_{1\beta} - M_{2\beta} - R_y h_{2p} - M_\beta - Q_y h_0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

przy czym momenty żyroskopowe  $M_{G\alpha}$ ,  $M_{G\beta}$  w dalszym ciągu określają wzory (6.18) i (6.19). Siły uogólnione  $S_{1x}$ ,  $S_{1y}$ ,  $M_{1\alpha}$ ,  $M_{1\beta}$ , zastępujące oddziaływanie podatnego połączenia elementów układu w punkcie A, zależą od przemieszczeń i kątów obrotu korpusu względem rękojeści. Wyrażają się one wzorami:

$$S_{1x} = c_1(x_A + \varepsilon_1 \dot{x}_A) \quad S_{1y} = c_1(y_A + \varepsilon_1 \dot{y}_A) \quad (7.23)$$

$$M_{1\alpha} = k_1(\alpha_1 - \alpha_2) + \varepsilon_1 k_1(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) \quad M_{1\beta} = k_1(\beta_1 - \beta_2) + \varepsilon_1 k_1(\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2) \quad (7.24)$$

gdzie przemieszczenia względne  $x_A, y_A$  w przypadku małych drgań wyrażają się wzorami:

$$x_A = (x_1 - h_{11}\alpha_1) - (x_2 - h_{21}\alpha_2) \quad y_A = (y_1 + h_{11}\beta_1) - (y_2 + h_{21}\beta_2) \quad (7.25)$$

Podobnie można zapisać uogólnione siły  $S_{2x}, S_{2y}, M_{2\alpha}, M_{2\beta}$ . Zależą one następująco:

$$S_{2x} = c_2(x_B + \varepsilon_2\dot{x}_B) \quad S_{2y} = c_2(y_B + \varepsilon_2\dot{y}_B) \quad (7.26)$$

$$M_{2\alpha} = k_2\alpha_2 + \varepsilon_2k_2\dot{\alpha}_2 \quad M_{2\beta} = k_2\beta_2 + \varepsilon_2k_2\dot{\beta}_2 \quad (7.27)$$

od przemieszczeń  $x_B, y_B$  w punkcie B rękojeści:

$$x_B = x_2 - h_{22}\alpha_2 \quad y_B = y_2 + h_{22}\beta_2 \quad (7.28)$$

Pomiędzy uogólnionymi siłami  $Q_x, Q_y, M_\alpha$  i  $M_\beta$ , reprezentującymi oddziaływanie operatora zredukowane do punktu  $S_1$ , zachodzą w dalszym ciągu związki (7.1) i (7.2).

Wprowadzono dalej bezwymiarowe wielkości, odnosząc przemieszczenia do zredukowanej amplitudy wymuszenia bezwładnościowego  $e = m_0e_0/(m_1+m_2)$ , kąty do wartości  $e/l$  oraz wiążąc bezwymiarowy czas  $\tau = \omega_0 t$  z częstością własną  $\omega_0 = \sqrt{c_2/(m_1+m_2)}$  modelu liniowego (rękojeść sztywno połączona z korpusem narzędzia). Równania w bezwymiarowej postaci zależą od następujących parametrów:

$$\begin{aligned} \omega &= \Omega/\omega_0 & \delta &= \Delta/e & q &= Q_x/c_2e \\ \mu_n &= m_n/(m_1+m_2) & \rho_n &= I_n/m_n l^2 & \chi &= I_0/I_1 \\ \gamma_j &= c_j/c_2 & \gamma_u &= c_u/c_2 & \gamma_0 &= c_0/c_2 \\ \zeta_j &= \varepsilon_j\omega_0/2 & \zeta_u &= \varepsilon_u\omega_0/2 & \zeta_0 &= \varepsilon_0\omega_0/2 \\ \lambda_{nj} &= h_{nj}/l & \lambda_0 &= h_0/l & \lambda_{nP} &= h_{nP}/l \\ \kappa_j &= k_j/c_2 l^2 & & & & \end{aligned} \quad (7.29)$$

oraz od współczynnika  $\mu_0$ . We wzorach (7.29) wskaźnik  $n$  jest numerem podukładu ( $n=1,2$ ), a wskaźnik  $j$  numerem elementu podatnego ( $j=1,2$ ). Zachodzą dodatkowo związki  $\gamma_2=1, \lambda_{21}=\lambda_{11}-\lambda_0, \lambda_{2P}=\lambda_0+\lambda_{1P}$  oraz  $\mu_1+\mu_2=1$ . Po wprowadzeniu wektora:

$$\mathbf{u} = [x_1/e, y_1/e, l\alpha_1/e, l\beta_1/e, x_2/e, y_2/e, l\alpha_2/e, l\beta_2/e]^T \quad (7.30)$$

układ równań (7.22) można zapisać w zwartej, macierzowej postaci:

$$\mathbf{M}\mathbf{u}'' + (\mathbf{G} + 2\zeta_1\mathbf{C}_1 + 2\zeta_2\mathbf{C}_2)\mathbf{u}' + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)\mathbf{u} = \mathbf{f}(\tau) + \mathbf{q} + \mathbf{r} + \mathbf{s} \quad (7.31)$$

gdzie macierze  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{C}_1$  i  $\mathbf{C}_2$  są odpowiednio macierzami bezwładności, żyroskopową oraz sztywności,  $\mathbf{f}(\tau)$  jest wektorem wymuszeń bezwładnościowych:

$$\mathbf{f}(\tau) = \omega^2 [\cos \omega\tau, \sin \omega\tau, \cos \omega\tau, -\sin \omega\tau, 0, 0, 0, 0]^T \quad (7.32)$$

wektory  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  reprezentują składniki nieliniowe równań, związane z modelem operatora:

$$\mathbf{q} = [0, 0, 0, 0, q, \mu_0 q H(n), q(1 + \lambda_0) - \mu_0 q(1 + \lambda_0) H(n)]^T \quad (7.33)$$

modelem ogranicznika:

$$\mathbf{r} = [-r_x, -r_y, -\lambda_{1P} r_x, \lambda_{1P} r_y, r_x, r_y, \lambda_{2P} r_x, -\lambda_{2P} r_y]^T \quad (7.34)$$

oraz modelem sił skrawania:

$$\mathbf{s} = [-n, -\mu_0 n, -n, \mu_0 n, 0, 0, 0, 0]^T \quad (7.35)$$

Siła  $n$  jest określona wzorami (7.16), (7.17), natomiast w celu wyznaczenia sił  $r_x$  i  $r_y$  należy wykorzystać związki (7.19-7.21), wstawiając do nich bezwymiarowe współrzędne wektora (7.30) oraz odpowiednie bezwymiarowe parametry (w miejsce  $c_u$ ,  $\varepsilon_u$  i  $\Delta$  parametry  $\gamma_u$ ,  $2\zeta_u$  i  $\delta$ ). Macierz  $\mathbf{M}$  jest macierzą diagonalną o postaci:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mu_1, \mu_1, \mu_1\rho_1, \mu_1\rho_1, \mu_2, \mu_2, \mu_2\rho_2, \mu_2\rho_2) \quad (7.36)$$

Niezerowymi elementami macierzy  $\mathbf{G}$  są elementy  $G_{43} = -G_{34} = \chi\mu_1\rho_1\omega$ . W celu określenia macierzy sztywności wprowadźmy pomocniczo macierz:

$$\mathbf{\Gamma}_j(\lambda_{nj}, \lambda_{mj}) = \begin{bmatrix} \gamma_j & 0 & -\gamma_j\lambda_{mj} & 0 \\ 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_j\lambda_{mj} \\ -\gamma_j\lambda_{nj} & 0 & \kappa_j + \gamma_j\lambda_{nj}\lambda_{mj} & 0 \\ 0 & \gamma_j\lambda_{nj} & 0 & \kappa_j + \gamma_j\lambda_{nj}\lambda_{mj} \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

Macierze sztywności  $\mathbf{C}_1$  i  $\mathbf{C}_2$ , reprezentujące podane połączenia, można teraz zapisać w postaci macierzy blokowych:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_1(\lambda_{11}, \lambda_{11}) & -\Gamma_1(\lambda_{11}, \lambda_{21}) \\ -\Gamma_1(\lambda_{21}, \lambda_{11}) & \Gamma_1(\lambda_{21}, \lambda_{21}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_2(\lambda_{22}, \lambda_{22}) \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

### 7.2.2. Rezultaty obliczeń

Poniżej przedstawiono wybrane rezultaty analizy jakościowej układu, prowadzonej pod kątem doboru pewnych parametrów, charakteryzujących zastosowany układ wibroizolacji rękojeści narzędzia.

Wprowadzono dalej wskaźniki jakości działania układu wibroizolacji, zależne od wartości skutecznych przyspieszeń lub prędkości w wybranym punkcie rękojeści. Ponieważ z badań doświadczalnych [65], prowadzonych w Katedrze Dynamiki Układów Materialnych Politechniki Krakowskiej wynika, że zazwyczaj największe przekroczenia dopuszczalnych przez normy poziomów drgań występują na przedniej rękojeści, wybrano punkt P leżący blisko ściernicy, w którym to punkcie jest też zamocowany ogranicznik (rys. 7.9). Wartości skuteczne prędkości można wyznaczyć ze wzoru:

$$J_v^0 = \sqrt{\frac{1}{NT} \int_{\tau_0}^{\tau_0+NT} [(u'_5 + \lambda_{2p} u'_7)^2 + (u'_6 - \lambda_{2p} u'_8)^2] d\tau} \quad (7.39)$$

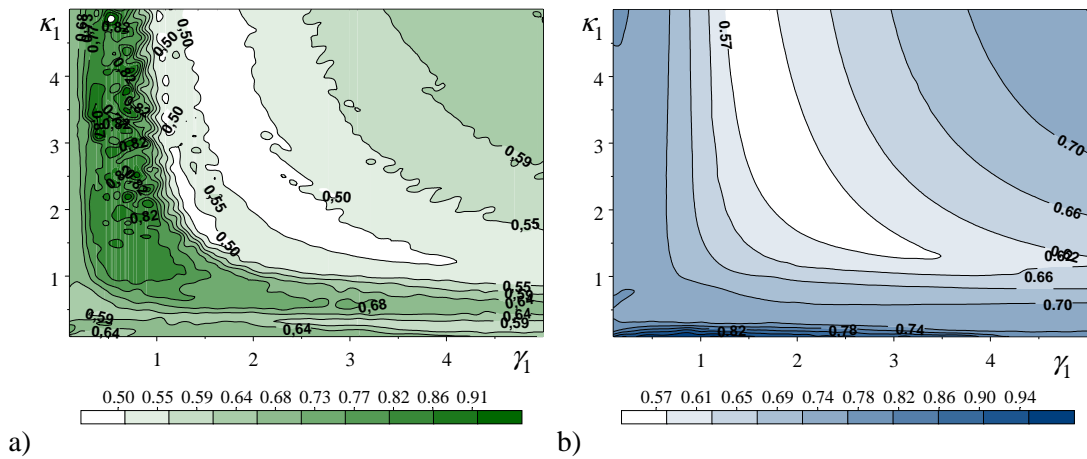
Podobnie też można obliczyć wartość skuteczną przyspieszenia:

$$J_a^0 = \sqrt{\frac{1}{NT} \int_{\tau_0}^{\tau_0+NT} [(u''_5 + \lambda_{2p} u''_7)^2 + (u''_6 - \lambda_{2p} u''_8)^2] d\tau} \quad (7.40)$$

Jak widać, wskaźniki te zależą od wszystkich współrzędnych określających ruch rękojeści narzędzia ( $u_5, u_6, u_7, u_8$ ). Oznaczmy dalej przez  $\tilde{J}_v^0, \tilde{J}_a^0$  wartości wskaźników (7.39) i (7.40), obliczone dla narzędzia bez układu wibroizolacji (rękojeść sztywno połączona z korpusem). Efektywność układu wibroizolacji będzie mierzona wskaźnikami, zdefiniowanymi następująco:

$$J_v = \frac{J_v^0}{\tilde{J}_v^0} \quad J_a = \frac{J_a^0}{\tilde{J}_a^0} \quad (7.41)$$

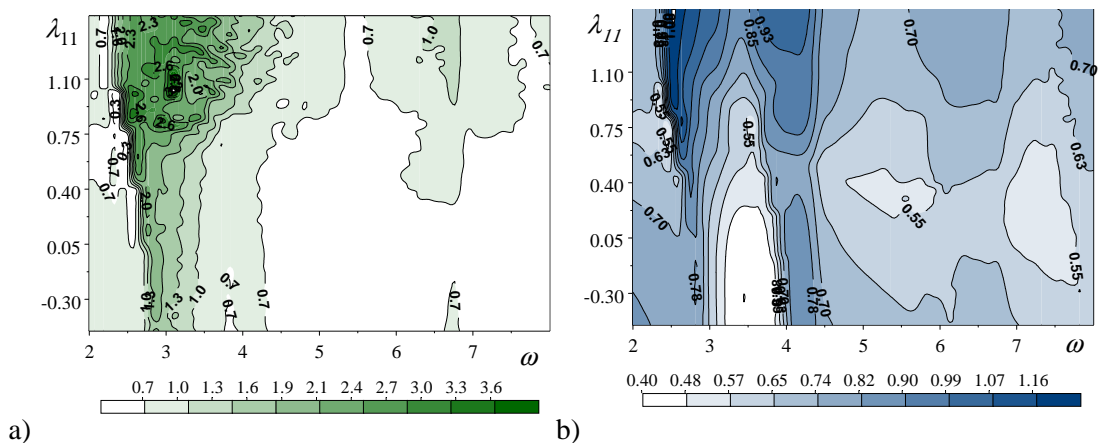
W prowadzonych niżej obliczeniach numerycznych ustalono wartości następujących parametrów:  $\mu_1=0.8, \rho_1=1.5, \mu_2=0.2, \rho_2=0.5, \chi=0.1, \lambda_0=0.5, \zeta_1=0.1, \gamma_2=1, \kappa_2=1, \lambda_{22}=0, \zeta_2=0.5, \gamma_0=100, \zeta_0=0.05, \mu_0=0.5, \gamma_u=40, \zeta_u=0.05, \lambda_{1p}=0.5, \lambda_{2p}=1.0, \delta=10$ . Dobierano wartości parametrów  $\gamma_1, \kappa_1, \lambda_{11}$ . Badano też wpływ parametrów  $q$  i  $\omega$ , charakteryzujących proces szlifowania.



Rys. 7.12. Wpływ parametrów  $\gamma$  i  $\kappa_1$  ( $\omega=5$ ,  $q=10$ ,  $\lambda_{11}=0.25$ ) na:  
a) wskaźnik  $J_a$ , b) wskaźnik  $J_v$

Na rys. 7.12 przedstawiono zależność wskaźników  $J_a$  i  $J_v$  od parametrów  $\gamma$ ,  $\kappa_1$  (dla  $\omega=5$  i  $q=10$ ). Analizując wpływ parametrów  $\gamma$ ,  $\kappa_1$  na wartości wprowadzonych wskaźników można oszacować ich wartości optymalne z punktu widzenia minimalizacji drgań.

Zarówno wskaźnik  $J_a$ , ważny z punktu widzenia odpowiednich norm, jak wskaźnik  $J_v$ , osiągają minimum w otoczeniu punktu  $\gamma=2$ ,  $\kappa_1=3$ . Dla małych wartości parametrów  $\gamma$  i  $\kappa_1$ , a więc dla miękkiego podatnego połączenia rękojeści z korpusem obserwuje się, zwłaszcza w przypadku wskaźnika  $J_a$  (przyspieszenie) dużą jego zmienność – fakt ten wynika między innymi z uderzeń rękojeści w ogranicznik. Dzięki dużym wartościom wskaźnika  $J_a$ , osiąganym dla małych wartości parametrów  $\gamma$ ,  $\kappa_1$ , nie ma konieczności wprowadzania dodatkowych ograniczeń na te wartości, jak to ma miejsce przy rozwiązywaniu podobnym problemom dla układów liniowych.



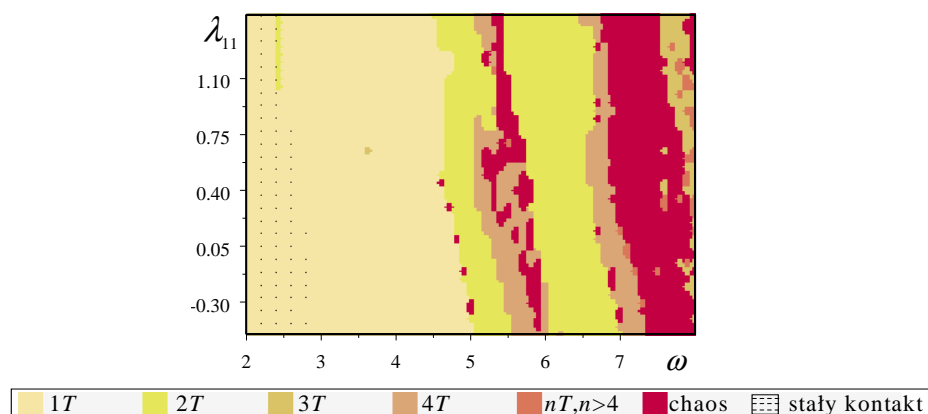
Rys. 7.13. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\lambda_{11}$  ( $\gamma=2$ ,  $\kappa_{11}=3$ ,  $q=10$ ) na:  
a) wskaźnik  $J_a$ , b) wskaźnik  $J_v$



Trzecim parametrem określającym układ wibroizolacji jest parametr  $\lambda_{11}$ , określający położenie punktu A. Wpływ tego parametru na wskaźniki  $J_a$  i  $J_v$ , dla różnych częstości wymuszeń, ilustruje rys. 7.13. W obliczeniach przyjęto oszacowane wcześniej wartości parametrów  $\gamma_1=2$  i  $\kappa_1=3$ .

Zmiany wskaźników są tu bardzo nieregularne. Dla wartości  $\lambda_{11}$  z przedziału (0.05, 0.40), w zakresie wyższych częstości  $\omega$ , oba wskaźniki mają wartości zbliżone do minimalnych. W bliskim otoczeniu prostej  $\lambda_{11}=0.25$  leżą lokalne minima wskaźnika  $J_v$ , a wskaźnik  $J_a$  osiąga stosunkowo małe wartości.

Wskaźniki jakości przyjmują duże wartości w zakresie niskich częstości, należy jednak pamiętać, że analizowane wskaźniki są wskaźnikami względnymi (odniesionymi do wskaźników obliczonych dla szlifierki bez układu wibroizolacji). Jak zostanie pokazane niżej, bezwzględne wartości przyspieszeń są w tym zakresie częstości małe.

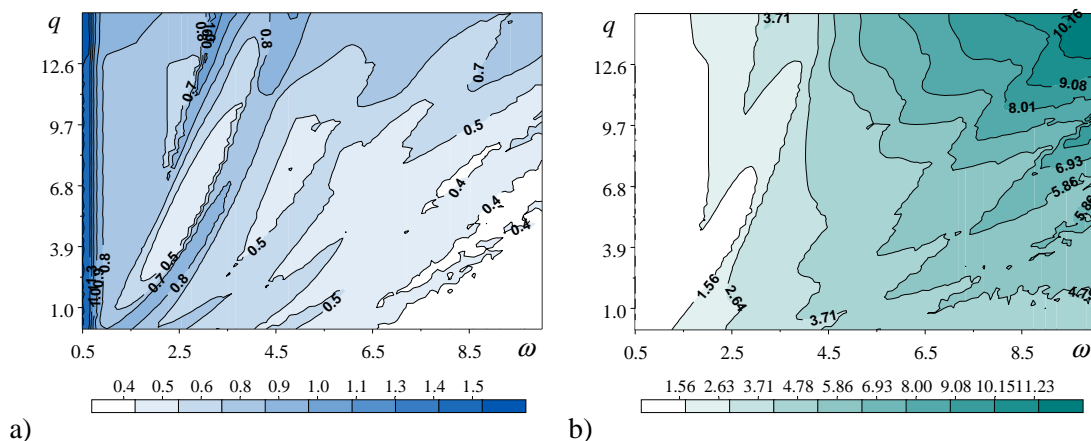


Rys. 7.14. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $\lambda_{11}$  na typ drgań ( $\gamma_1=2$ ,  $\kappa_1=3$ ,  $q=10$ )

Efektywność działania układu wibroizolacji jest większa dla wyższych częstości pomimo faktu, że dla dużych wartości  $\omega$  drgania mają charakter drgań podharmonicznych lub chaotycznych (rys. 7.14).

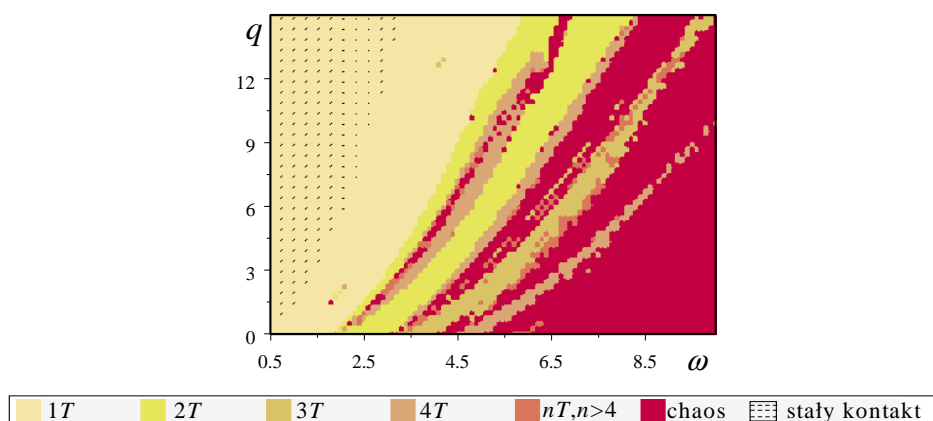
Można podać pewną interpretację fizyczną dla przyjętej wartości  $\lambda_{11}$ . Wtedy  $\lambda_{21}=\lambda_{11}-\lambda_0=-0.25$ , a więc punkt A (rys. 7.11) leży w środku odcinka  $S_1S_2$ , czyli blisko środka masy całego układu.

Wartość wskaźników jakości zależy od pozostałych parametrów, charakteryzujących zarówno model wibroizolowanego narzędzia, jak i model procesu szlifowania. Prawidłowy dobór układu wibroizolacji wymaga oceny wrażliwości rozwiązań na zmiany tych parametrów. Poniżej ograniczono się do zbadania wpływu prędkości obrotowej i siły docisku; te dwa parametry wpływają najbardziej na stan dynamiczny układu: operator – narzędzie – przedmiot obrabiany. Operator steruje procesem szlifowania, zmieniając głównie siłę docisku  $q$ , także zmienna jest prędkość obrotowa  $\omega$  na skutek ograniczonej w praktyce mocy silnika.



Rys. 7.15. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $q$  ( $\gamma_1=2$ ,  $\kappa_{11}=3$ ,  $\lambda_{11}=0.25$ ) na:  
 a) wskaźnik  $J_a$ , b) wskaźnik  $J_a^0$

Rys. 7.15a 7.15b pokazują wpływ wymienionych parametrów na wskaźniki jakości odpowiednio  $J_v$  i  $J_v^0$ . Analiza rezultatów pokazanych na rys. 7.15a potwierdza wcześniejszy wniosek, że układ działa efektywniej w zakresie wyższych częstotliwości. Nie oznacza to jednak, że w tym zakresie jest niższy poziom drgań; wartości bezwzględnych przyspieszeń są tam znacząco większe (rys. 7.15b).



Rys. 7.16. Wpływ parametrów  $\omega$  i  $q$  na typ drgań ( $\gamma_1=2$ ,  $\kappa_{11}=3$ ,  $\lambda_{11}=0.25$ )

Typ wzbudzanych drgań praktycznie nie zależy od parametrów układu wibroizolacji. Wykazują to rezultaty analizy, przedstawione na rys. 7.16 oraz wcześniejsze, pokazane na rys. 7.3a.

### 7.3. WNIOSKI

Na podstawie rezultatów przeprowadzonych obliczeń numerycznych można wyciągnąć następujące wnioski:

- Przyjęty model procesu szlifowania wyjaśnia zjawisko wzbudzania się drgań podharmonicznych i chaotycznych. Są one efektem udarowego charakteru sił skrawania. W przypadku stałego kontaktu ściernicy z obrabianym materiałem dominują drgania okresowe.
- Istotny wpływ na zachowanie się układu mają parametry  $\omega$  i  $q$ , związane odpowiednio z częstotliwością wymuszenia oraz siłą docisku operatora. Drgania nieokresowe, w tym chaotyczne, mają miejsce dla dużych częstotliwości i małych sił docisku.
- Wpływ parametrów, opisujących proces szlifowania ( $\mu_0, \gamma_0, \zeta_0$ ) jest raczej ilościowy. Ulegają pewnemu przesunięciu zakresy parametrów, w których obserwowany jest ten sam typ drgań.
- Parametr  $\sigma$ , odpowiedzialny za wymuszenie kinematyczne, ma duży wpływ, podobnie jak amplituda wymuszenia bezwładnościowego  $e$ . Równoczesne występowanie wymuszenia kinematycznego i bezwładnościowego może zwiększać lub zmniejszać poziom emitowanych drgań, zależy to między innymi od parametru  $\vartheta$  (rys. 7.2). W przypadku, gdy wymuszenie bezwładnościowe jest rezultatem mimośrodowego osadzenia ściernicy, efekty obu wymuszeń częściowo się kompensują. Z tego powodu, badając układ wibroizolacji, można rozważyć groźniejszy (a zarazem prostszy w analizie) przypadek działania na układ tylko wymuszenia bezwładnościowego.
- Analizując wprowadzone wskaźniki jakości można łatwo oszacować wartości optymalnych parametrów  $\gamma_1, \kappa_1, \lambda_{11}$ , określających układ wibroizolacji. Przy jego realizacji należy wykorzystać wzory typu (7.8), wiążące te parametry z parametrami konstrukcyjnymi.
- Uwzględnienie w modelu układu wibroizolacji ogranicznika ruchu zapobiega z jednej strony zbyt dużym ugięciom statycznym rękojeści względem korpusu, z drugiej zaś pozwala w sposób efektywny dobierać parametry pasywnego układu wibroizolacji bez nakładania na ich wartości dodatkowych ograniczeń.
- Wprowadzenie układu wibroizolacji nie zmienia w sensie jakościowym charakteru wzbudzanych drgań. Działa on efektywnie także w tych zakresach częstotliwości i siły docisku, w których mamy do czynienia z drganiami podharmonicznymi lub chaotycznymi.
- W podobny sposób można analizować inne procesy obróbki np. skrawania lub frezowania. Pomimo, że równania różniczkowe takich układów są jakościowo różne od analizowanych powyżej (np. równania różniczkowe z opóźnionym argumentem), to stosowane metody powinny być nadal skuteczne.

## 8. PODSUMOWANIE

W niniejszej pracy podjęto problem analizy jakościowej wybranych modeli, opisujących drgania układów mechanicznych z ograniczeniami przemieszczeniowymi. Zaproponowane metody numeryczne analizy rozwiązań odpowiednich równań różniczkowych pozwoliły skutecznie zbadać wpływ parametrów układów na charakter wzbudzanych drgań oraz na wprowadzone wskaźniki jakości. Rezultaty obliczeń numerycznych przedstawiono w postaci obszarów różnych typów drgań, diagramów bifurkacyjnych, wykładników Lapunowa, przekrojów Poincare'go, widm oraz wykresów przebiegów czasowych i na płaszczyznach fazowych.

### 8.1. OGÓLNE WNIOSKI

Opracowane modele matematyczne układów mechanicznych, przeprowadzona analiza jakościowa oraz wyniki symulacji komputerowej pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- Zaproponowane metody analizy jakościowej są bardzo skuteczne – pozwalają one przewidywać charakter odpowiedzi układu na wymuszenia harmoniczne. Wyznaczone przy ich pomocy „obszary” jednakowego typu drgań (lub jednakowej liczby zderzeń), pomimo ich nieregularnych kształtów, wykazują pewne cechy prawidłowości. Przykładowo obszary drgań podharmonicznych coraz to wyższych rzędów występują zazwyczaj kolejno po sobie. Najczęściej na granicach tych obszarów pojawiają się wąskie obszary drgań prawie okresowych lub chaotycznych.
- Nieregularność kształtów obszarów jest prawdopodobnie cechą dość charakterystyczną dla układów nieliniowych. Podobne efekty obserwuje się przy sporządzaniu tzw. basenów przyciągania, ilustrujących wpływ warunków początkowych na uzyskiwane rozwiązania. Należy tu wspomnieć, że w badaniach wpływu parametrów na charakter rozwiązań warunki początkowe także odgrywają niepoślednią rolę. W przedstawianych rezultatach analizy jakościowej zakłada się warunki początkowe bliskie zerowym ewentualnie odpowiadające stanom równowagi.

- Nieregularność kształtów obszarów jest też częściowo rezultatem zbyt małej liczby punktów, w których badany jest typ drgań. Jednak trzeba tu wyraźnie podkreślić, że przy zagęszczaniu tych punktów czas obliczeń numerycznych drastycznie wzrasta. Badając rozwiązania odpowiednich równań różniczkowych należy mieć pewność, że opisują one stan ustalony drgań, a to z kolei powoduje konieczność całkowania numerycznego tych równań w dostatecznie długim przedziale czasu w celu wyeliminowania procesów przejściowych.
- Obserwując obszary jednakowego typu drgań oraz odpowiadające im obszary jednakowej liczby zderzeń można zauważyć pewne podobieństwa. W przypadku drgań okresowych, niekoniecznie o okresie wymuszenia, liczba zderzeń przypadających na jeden okres wymuszenia jest stała – jest to liczba całkowita lub liczba wymierna, najczęściej ułamek, którego mianownik jest niewielką liczbą całkowitą.
- Rzadkim nieregularnym zderzeniom odpowiadają zwykle drgania chaotyczne.
- Dobre informacje o charakterze ruchu wnoszą również odpowiednio zdefiniowane wskaźniki jakości. Mogą to być wskaźniki, charakteryzujące energię udaru lub wibracji, ewentualnie w ogólnym przypadku wartości skuteczne współrzędnych wektora stanu. Regularna zmiana tych wskaźników wraz ze zmianą parametrów świadczy o ruchu okresowym, w przeciwnym przypadku mamy do czynienia z ruchem chaotycznym.
- Analiza modeli układów udarowych o różnej liczbie stopni swobody wskazuje, że bardziej skomplikowany charakter drgań występuje za kolejnymi rezonansami, w zakresach rezonansowych zazwyczaj drgania są regularne, przy czym ich okres jest równy okresowi wymuszenia lub dwa razy większy

## **8.2. KIERUNKI DALSZYCH BADAŃ**

Tematyka drgań regularnych i chaotycznych w układach udarowych jest bardzo obszerna, o czym może świadczyć ogromna liczba ukazujących się w tym zakresie prac. Jest jednak jeszcze wiele obszarów badań, z których wybrane zasugerowano poniżej:

- Opracowane metody jakościowej były stosowane do badania nieliniowych układów z harmonicznym wymuszeniem zewnętrznym. Można podjąć próbę ich zastosowania do analizy układów z zewnętrznym wymuszeniem poliharmonicznym lub z wymuszeniem parametrycznym oraz do analizy

układów samowzbudnych. Takie modele często lepiej opisują zachowanie się rzeczywistych układów.

- Rozwijanie metod optymalnego doboru parametrów poprzez wprowadzanie nowych kryteriów jakości działania układu oraz stosowanie tych metod do analizy bardziej złożonych modeli.
- Wykorzystanie metod przybliżonych (np. metody bilansu harmonicznego) skojarzonych z metodami analizy bifurkacyjnej do wyjaśnienia zjawiska wzbudzania się drgań podharmonicznych (zjawiska rezonansu podharmonicznego).

## LITERATURA

- [1] Agarwal J., Blockley D.I., Woodman N.J., *Qualitative analysis of non linear dynamical systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 145, 1997, 135-145.
- [2] Al-Bedoor B.O., *Transient torsional and lateral vibrations of unbalanced rotors with rotor-to-stator rubbing*, Journal of Sound and Vibration, 229, 2000, 627–645.
- [3] Alfares M., Elsharkawy A., *Effect of grinding forces on the vibration of grinding machine spindle system*, International Journal of Machine Tools & Manufacture, 40, 2002, 2003–2030.
- [4] Awrejcewicz J., *Chaos i synchronizacja w układach fizycznych*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Monografie, Łódź 1995.
- [5] Awrejcewicz J., *Drgania deterministyczne układów dyskretnych*, Wydawnictwo Naukowo – Techniczne, Warszawa 1996.
- [6] Awrejcewicz J., Lamarque C.-H., *Bifurcation and Chaos in Non-Smooth Mechanical Systems*, World Scientific Series of Nonlinear Science, Series A, Vol 45, Singapore 2003.
- [7] Baker G. L., Gollub J. P., *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [8] Balachandran B., *Nonlinear Dynamics of Milling Processes*, Philosophical Transactions of the Royal Society, 359, 2001, 793-819.
- [9] Bapat C.N., *Periodic motions of an impact oscillator*, Journal of Sound and Vibration, 209, 1998, 43–60.
- [10] Błażejczyk-Okolewska B. *Study of the impact oscillator with elastic coupling of masses*, Chaos, Solitons & Fractals, 11, 2000, 2487-2492.
- [11] Błażejczyk-Okolewska B., *Analysis of an impact damper of vibrations*, Chaos, Solitons & Fractals, 12, 2001, 1983-1988.
- [12] Cheng C.C., Wang J.Y., *Free Vibration Analysis of a Resilient Impact Damper*, International Journal of Mechanical Sciences, 45, 2003, 589 –604.
- [13] Choy F.K., Padovan J., *Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events*, Journal of Sound and Vibration, 113, 1987, 529–545.

- [14] Chu F., Lu W., *Experimental observation of nonlinear vibrations in a rub-impact rotor system*, Journal of Sound and Vibration 283, 2005, 621–643
- [15] Chu F., Zhang Z., *Bifurcation and chaos in a rub-impact Jeffcott rotor system*, Journal of Sound and Vibration, 210, 1, 1998, 1-18.
- [16] Czolczynski K., *On the existence of a stable periodic solution of an impacting oscillator with damping*, Chaos, Solitons and Fractals, 19, 2004, 1291–1311.
- [17] Czołczyński K., Kapitaniak T., *Influence of the mass and stiffness ratio on a periodic motion of two impacting oscillators*, Chaos, Solitons & Fractals, 17, 2003, 1–10.
- [18] Dai X., Jin Z., Zhang X., *Dynamic behavior of the full rotor/stop rubbing: Numerical simulation and experimental verification*, Journal of Sound and Vibration, 251, 2002, 807–822.
- [19] Dai X., Zhang X., X. Jin X., *The partial and full rubbing of a flywheel rotor-bearing-stop system*, International Journal of Mechanical Sciences, 43, 2001, 505-519.
- [20] de Souza S.L.T., Caldas I.L., *Calculation of Lyapunov exponents in systems with impacts*, Chaos, Solitons and Fractals, 19, 2004, 569–579
- [21] Ding Q., Chen Y.S., *Nonstationary motion and instability of a shaft/casing system with rubs*, Journal of Vibration and Control, 7, 2001, 327–338.
- [22] Ding Q., Leung A.Y.T., *Non-stationary processes of rotor/bearing system in bifurcations*, Journal of Sound and Vibration, 268, 2003, 33–48.
- [23] Edwards S., Lees A.W., Friswell M.I. *The influence of torsion on rotor/stator con-tact in rotating machinery*, Journal of Sound and Vibration 225, 4, 1999, 767-778.
- [24] Faassen R.P.H., van de Wouw N., Oosterling J.A.J., Nijmeijer H., *Prediction of Regenerative Chatter by Modelling and Analysis of High-Speed Milling*, International Journal of Machine Tools & Manufacture, 43, 2003, 1437-1446.
- [25] Feng Z.C., Zhang X.Z., *Rubbing phenomena in rotor – stator contact*, Chaos, Solitons and Fractals, 14, 2002, 257-267.
- [26] Ferdek U., *Analiza jakościowa dwumasowego układu udarowego*, Czasopismo Techniczne, Z. 5-M/2004, 107-114.
- [27] Ferdek U., *Wpływ zderzeń na drgania ustalone układu wirnik – stojan*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika, Z.65, 2005, 109-116.



- [28] Ferdek U., Łuczko J. *Analiza jakościowa układów uderowych*, Czasopismo Techniczne, Z. 6-M/2003, 1-16.
- [29] Goldman G., Muszyńska A., *Rotor-to-stator, rub-related, thermal/mechanical effects in rotating machinery*, Chaos Solitons and Fractals, 5, 1995, 1579–1601.
- [30] Golycheva E.V., Babitsky V.I., Vepruk A.M. *Dynamic correction of excitation in hand-held electro-pneumatic percussion machines*, Journal of Sound and Vibration, 259, 4, 2003, 829–843.
- [31] Gradišek J., Govekar E., Grabec I., *Chatter onset in non-regenerative cutting: A numerical study*, Journal of Sound and Vibration, 242, 5, 2001, 829-838.
- [32] Gradišek J., Kalveram M., Insperger T., Weinert K., Stepan G., Govekar E., Grabec I., *On stability prediction for milling*, International Journal of Machine Tools & Manufacture, 45, 2005, 769-781.
- [33] Grapis O., Tamuzs V., Ohlson N.-G., Andersons J., *Overcritical high-speed rotor systems, full annular rub and accident*, Journal of Sound and Vibration, 290, 2006, 910–927.
- [34] Hayashi Ch., *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*, Wydawnictwo Naukowe – Techniczne, Warszawa 1968.
- [35] Hinrichs N., Oestreich M., Popp K., *Dynamics of oscillators with impact and friction*, Chaos, Solitons and Fractals, 8, 1997, 535–558.
- [36] Hossain MD. Z., Mizutani K., Sawai H., *Chaos and multiple periods in an unsymmetrical spring and damping system with clearance*, Journal of Sound and Vibration, 250, 2, 2002, 229-245
- [37] Insperger T., Stepan G., Bayly P.V., Mann B.P., *Multiple Chatter Frequencies in Milling Processes*, Journal of Sound and Vibration, 262, 2003, 333-345.
- [38] Jerrelind J., Stensson A., *Nonlinear dynamics of parts in engineering systems*, Chaos, Solitons & Fractals, 11, 2000, 2413-2428.
- [39] Jin L., Lu Q.-S., Twizell E.H., *A method for calculating the spectrum of Lyapunov exponents by local maps in non-smooth impact-vibrating systems*, Journal of Sound and Vibration, 298, 2006, 1019–1033.
- [40] Kapitaniak T., Wojewoda J., *Bifurkacje i chaos*, Politechnika Łódzka, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa - Łódź 2000.
- [41] Karpenko E., Pavlovskaja E., Wiercigroch M., *Bifurcation analysis of a preloaded Jeffcott rotor*, Chaos, Solitons and Fractals, 15, 2003, 407-416.

- [42] Karpenko E., Wiercigroch M., Cartmell M., *Regular and chaotic dynamics of a discontinuously nonlinear rotor system*. Chaos, Solitons and Fractals, 13, 2002, 1231-1242.
- [43] Karpenko E.V., Wiercigroch M., Pavlovskaja E.E., Neilson R.D., *Experimental verification of Jeffcott rotor model with preloaded snubber ring*, Journal of Sound and Vibration, 298, 2006, 907–917.
- [44] Kember S.A., Babitsky V.I., *Excitation of vibro-impact systems by periodic impulses*, Journal of Sound and Vibration, 227, 2, 1999, 427-447.
- [45] Kozień M.S., *Ćwiczenia laboratoryjne z miernictwa dynamicznego*, Politechnika Krakowska, Kraków 2000.
- [46] Lamarque C.H., Janin O., *Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal superposition*, Journal of Sound and Vibration, 235, 4, 2000, 567-609.
- [47] Lee C.-M., Goverdovskiy V.N., Samoilenko S.B., *Prediction of non-chaotic motion of the elastic system with small stiffness*, Journal of Sound and Vibration, 272, 2004, 643–655.
- [48] Lenci S., Rega G., *Regular nonlinear dynamics and bifurcations of an impacting system under general periodic excitation*, Nonlinear Dynamics, 34, 2004, 249–268.
- [49] Li J.C., Hansen C.H., *Approximate solutions and chaotic motions of a piecewise nonlinear–linear oscillator*, Chaos, Solitons and Fractals, 20, 2004, 1121–1133.
- [50] Lin F., Schoen M.P., Korde U.A., *Numerical investigation with rub-related vibration in rotating machinery*, Journal of Vibration and Control, 7, 2001, 833–848.
- [51] Lin W., Qiao N., Yuying H., *Bifurcations and chaos in a forced cantilever system with impacts*, Journal of Sound and Vibration, 296, 2006, 1068–1078.
- [52] Lu L.Y., Lu Z.H., *The periodicity of chaotic impact oscillators in Hausdorff phase spaces*, Journal of Sound and Vibration, 235, 1, 2000, 105-116.
- [53] Luo G.W., Xie J.H., *Hopf bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom vibro-impact system in two strong resonance cases*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 37, 2002, 19-34.
- [54] Luo G.W., Xie J.H., *Stability of periodic motion, bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom vibratory system with symmetrical rigid stops*, Journal of Sound and Vibration, 273, 2004, 543–568.

- [55] Luo G.W., Xie J.H., Guo S.H.L., *Periodic motions and global bifurcations of a two-degree-of-freedom system with plastic vibro-impact*, Journal of Sound and Vibration, 240, 5, 2001, 837-858.
- [56] Łuczko J., *Wpływ drgań na proces frezowania*, Czasopismo Techniczne, Z. 13-M, 2004, 75-83.
- [57] Łuczko J., *Wpływ parametrów procesu frezowania na jakość obrabianej powierzchni oraz poziom drgań*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika, Z.65, 2005, 273-280.
- [58] Łuczko J., *Zastosowanie metody modalnej do analizy eliminatorów uderowych*, Czasopismo Techniczne, Z. 5-M, 193-204, 2004
- [59] Łuczko J., Cupiał P., Ferdek U., *Regular and chaotic vibration in the manual grinding process*, Proc. of the 7<sup>th</sup> Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications, vol. 1, 2003, 207-214.
- [60] Łuczko J., Cupiał P., Ferdek U., *Regular and chaotic vibrations of a vibration-isolated hand grinder*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 45, 1, 2007, 61-72.
- [61] Łuczko J., Ferdek U., *Drgania chaotyczne w mechanizmach wibroudarowych*, X Konferencja Naukowa Wibrotechniki i Wibroakustyki, Kraków, 2003, 8 str.
- [62] Łuczko J., Ferdek U., *Symulacja numeryczna zderzeń w układzie wirnik – ogranicznik ruchu*, Symulacja w badaniach i rozwoju, (pod red. Tylikowski A., Grzyb A.), Kraków 2004, 175-182.
- [63] Łuczko J., Ferdek U., *Symulacja procesu szlifowania ręcznymi elektro-narzędziami*, Symulacja w badaniach i rozwoju, (pod red. Tylikowski A., Grzyb A.), Kraków 2004, 183-190.
- [64] Łuczko J., Ferdek U., Cupiał P., *Influence of geometrical restraints on the vibration of rotors*, Proc. of the 7<sup>th</sup> Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications, vol. 2, 2003, 605-612.
- [65] Łuczko J., Markiewicz M., *Analiza dynamiczna układu: narzędzie-przedmiot obrabiany-operator w przypadku frezowania ręcznymi szlifierkami pneumatycznymi*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, 31, Mechanika Z.12, 1986, 51-55.
- [66] Minorsky N., *Drgania nieliniowe*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1967.

- [67] Muszyńska A., Goldman P., *Chaotic Responses of unbalanced rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs*, Chaos, Solitons & Fractals, 5, 9, 1995, 1683-1704.
- [68] Nizioł J., *Podstawy drgań w maszynach*, Politechnika Krakowska 1996.
- [69] Nizioł J.(red), *Dynamika układów mechanicznych*, Komitet Mechaniki PAN, Warszawa 2005.
- [70] Pavlovskaja E.E., Karpenko E.V, Wiercigroch M., *Non-linear dynamic interactions of a Jeffcott rotor with preloaded snubber ring*, Journal of Sound and Vibration, 276, 2004, 361–379.
- [71] Peterka F., *Bifurcation and transition phenomena in an impact oscillator*, Chaos, Solitons and Fractals, 7, 10, 1996, 1635-1647.
- [72] Peterka F., *Dynamics of double impact oscillators*, Mechanics Automatic Control and Robotics, vol. 2, No. 10, 2000, 1177-1190.
- [73] Peterka F., Vacík J. *Transition to Chaotic Motion in Mechanical Systems with Impacts*, Journal of Sound and Vibration, 154, 1, 1992, 95-115.
- [74] Piccoli H.C., Weber H.I., *Experimental observation of chaotic motion in a rotor with rubbing*, Nonlinear Dynamics, 16, 1998, 55–70.
- [75] Pilipchuk V.N., *Impact modes in discrete vibrating systems with rigid barriers*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 36, 2001, 999-1012.
- [76] Pust L., *Oscillations of rotor supported on magnetic bearings with impacts in retainer bearings*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 45, 1, 2007, 99-118.
- [77] Rusinek R., Warmiński J., Szabelski K., *Drgania nieliniowe w procesie skrawania toczeniem*, Lublin 2006
- [78] Seydel R., *From Equilibrium to Chaos*, Elsevier, New York, 1988
- [79] Shaw S.W., Holmes P.J., *A periodically forced piecewise linear oscillator*, Journal of Sound and Vibration, 90, 1, 1983, 129–155.
- [80] Shaw W.W., Holmes P.J., *A periodically forced impact oscillator with large dissipation*, Journal of Applied Mechanics, 50, 1983, 894-857.
- [81] Stefański A., *Estimation of the largest Lyapunov exponent in systems with impacts*, Chaos, Solitons and Fractals, 11, 2000, 2443-2451.

- [82] Stefański A. Kapitaniak T., *Estimation of the dominant Lyapunov exponent of non-smooth systems on the basis of maps synchronization*, Chaos, Solitons and Fractals, 15, 2003, 233-244.
- [83] Suh C.S., Khurjekar P.P., Yang B., *Characterisation and identification of dynamic instability in milling operation*, Mechanical Systems and Signal Processing, 16, 5, 2002, 853–872.
- [84] Sun Z., Xu J., Zhou T., *Analysis on complicated characteristics of a high-speed rotor system with rub-impact*, Mechanism and Machine Theory, 37, 2002, 659-672.
- [85] Szabelski K., Warmiński J., *Self-excited system vibrations with parametric and external excitations*, Journal of Sound and Vibration, 187, 4, 1995, 595-607.
- [86] Wagg D.J., *Periodic sticking motion in a two-degree-of-freedom impact oscillator*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 40, 2005, 1076 – 1087.
- [87] Wagg D. J., Bishop S. R., *A note on modelling multi-degree-of-freedom vibro-impact systems using coefficient of restitution models*, Journal of Sound and Vibration, 236, 1, 2000, 176-184.
- [88] Wang Q., Chu F., *Experimental determination of the rubbing location by means of acoustic emission and wavelet transform*, Journal of Sound and Vibration, 248, 2001, 91–103.
- [89] Warmiński J., *Drgania regularne i chaotyczne układów parametryczno-samowzbudnych z idealnymi i nieidealnymi źródłami energii*, Politechnika Lubelska, Lublin 2001.
- [90] Warmiński J., Balthazar J.M., Brasil R.M.L.R.F., *Vibrations of a non-ideal parametrically and self-excited model*, Journal of Sound and Vibration, 245, 2, 2001, 363-374.
- [91] Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A., *Determining Lyapunov Exponents From A Time Series*, Physica, 16D, 1985, 285-317.
- [92] Xu L., Lu M.W., Cao Q., *Bifurcation and chaos of a harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method*, Journal of Sound and Vibration, 264, 2003, 873–882.
- [93] Zieliński T., *Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków 2002.

## STRESZCZENIE

Praca dotyczy problemów modelowania i analizy jakościowej dyskretnych układów mechanicznych z geometrycznymi ograniczeniami. Do badania wpływu parametrów równań różniczkowych na charakter drgań zostały wykorzystane metody numeryczne, bazujące na algorytmach metody Rungego-Kutty oraz szybkiej transformaty Fouriera. Określono zakresy parametrów, w których w układzie wzbudzają się drgania okresowe, prawie okresowe lub chaotyczne. Analizowane przykłady dotyczą praktycznych zastosowań. Badane są między innymi drgania narzędzi o działaniu udarowym, ręcznych szlifierek podczas procesu obróbki oraz drgania w układach typu wirnik-stojan.

Wprowadzono również pewne wskaźniki jakości działania, umożliwiające oszacowanie optymalnych parametrów konstrukcyjnych badanych układów. Do badania zjawisk fizycznych, wynikających z nieliniowego opisu sił zderzeniowych, wykorzystano rezultaty licznych analiz, w tym przebiegów czasowych, portretów fazowych, widm, wykresów wykładników Lapunowa oraz diagramów bifurkacyjnych.

## SUMMARY

The thesis is concerned with the problems of the modelling and qualitative analysis of lumped-parameter mechanical systems with geometrical constraints. Numerical methods based on algorithms of the Runge-Kutta method and the Fast Fourier Transform have been applied to investigate the influence of the parameters of the governing differential equations on the character of vibrations. The ranges of the parameters have been determined for which periodic, quasi-periodic and chaotic vibrations take place. The examples analysed in the text concern practical applications, including: the vibrations of vibro-impact tools, of hand grinders in the grinding process as well as the vibrations in rotor-stator systems.

Several quality criterion indices have been introduced enabling the estimation of the optimal constructional parameters of the studied systems. Results of different analyses have been used in the study of physical phenomena brought about by the non-linear character of impact forces. These include the analysis of the time histories, phase portraits, frequency spectra, the plots of Lyapunov exponents and bifurcation diagrams.