

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
WYDZIAŁ MECHANICZNY
INSTYTUT POJAZDÓW SAMOCHODOWYCH I SILNIKÓW SPALINOWYCH
KATEDRA BUDOWY POJAZDÓW SAMOCHODOWYCH

MGR INŻ. PAWEŁ ŚLUSARCZYK

PRACA DOKTORSKA

**„ANALIZA WPŁYWU WYBRANYCH PARAMETRÓW KONSTRUKCYJNYCH
NA STATECZNOŚĆ I KIEROWALNOŚĆ MOTOCYKLA”**

Promotor: dr hab.inż. Witold Grzegózek, prof.PK

Kraków, 2007



Spis treści

Najczęściej stosowane symbole.....	4
1.WPROWADZENIE.....	6
1.1 Wstęp.....	6
1.2 Przegląd literatury.....	13
1.3 Podsumowanie przeglądu literatury.....	32
1.4 Cel pracy.....	32
1.5 Teza pracy.....	33
1.6 Zakres pracy.....	33
2. BADANIA EKSPERYMENTALNE MOTOCYKLA.....	34
2.1 Badania stanowiskowe.....	34
2.2 Badania drogowe.....	37
2.2.1 Warunki badań drogowych.....	38
2.2.2 Aparatura badawcza	39
2.2.3 Próba ustalonej jazdy po okręgu	39
2.2.4 Próba pojedynczej zmiany pasa ruchu	40
2.2.5 Próba slalomu	40
2.2.6 Manewr „U”	40
3. BADANIA STATECZNOŚCI MOTOCYKLA	41
3.1 Badania modelowe.....	41
3.1.2 Model motocykla	41
3.1.2 Sformułowanie modelu	43
3.1.3 Analiza wrażliwości	46
3.2 Badania stanowiskowe	54
3.2.1 Analiza wpływu prędkości jazdy na zjawiska drganiowe motocykla	57
3.2.2 Analiza wpływu ciśnienia powietrza w przednim kole na zjawiska drganiowe motocykla	59
3.2.1 Analiza wpływu długości odcinka wyprzedzenia zjawiska drganiowe motocykla ..	61
3.3 Badania drogowe stateczności motocykla	63

4.BADANIA KIEROWALNOŚCI MOTOCYKLA.....	68
4.1 Prezentacja i analiza wyników badań.....	70
4.1.1 Eksperymentalne badania kierowalności motocykla	70
4.1.2 Próba pojedynczej zmiany pasa ruchu	72
4.1.3 Zmiana pasa ruchu przy zmiennych parametrach konstrukcyjnych	75
4.1.4 Slalom	76
4.1.5 Manewr „U”	79
5. MODELOWANIE DYNAMIKI MOTOCYKLA	82
5.1 Przekształcenia jednorodne	82
5.2 Model dynamiki motocykla.....	87
5.3 Wyprowadzenie równań ruchu układu.....	95
5.4 Siły uogólnione	103
5.5 Geometria motocykla, warunki początkowe	112
5.6 Weryfikacja doświadczalna.....	121
5.7 Badania symulacyjne wpływu zmiany parametrów konstrukcyjnych motocykla na jego zachowanie się.....	124
6. PODSUMOWANIE.....	126
7.WNIOSKI.....	128
7.1 Wnioski o charakterze poznawczym.....	128
7.2 Wnioski o charakterze uylitarnym.....	129
7.3 Wnioski dotyczące dalszych badań	130
8.LITERATURA.....	131

Najczęściej stosowane symbole

$\{0\}$ - bazowy układ współrzędnych,

$\{1\} \rightarrow \{7\}$ lokalne układy współrzędnych,

$\mathbf{A}^{(N)}$ - macierz mas w równaniach ruchu,

$\mathbf{B}^{(N)}, \tilde{\mathbf{B}}^{(N)}$ - macierze transformacji z lokalnego układu współrzędnych ciała (N) do bazowego i lokalnego,

$\mathbf{B}_i^{(N)}, \mathbf{B}_{i,j}^{(N)}$ - pochodne macierzy $\mathbf{B}^{(N)}$ względem współrzędnych uogólnionych,

$\mathbf{C}_n^{(k)}$ - macierz transformacji zależna od jednego parametru

$E^{(k)}$ - energia kinetyczna k-tego ciała,

D - funkcja dyssypacji członów,

\mathbf{F}, \mathbf{F}' - siły zewnętrzne w bazowym i lokalnym układzie współrzędnych,

\mathbf{F}_w - siła oporu powietrza w układzie bazowym,

$\mathbf{G}^{(N)}$ - wektor pochodnych potencjalnej energii sił ciężkości względem współrzędnych uogólnionych,

\mathbf{H} - macierz mas 4x4 określana w lokalnych układach współrzędnych,

\mathbf{M}, \mathbf{M}' - momenty sił zewnętrznych w bazowym i lokalnym układzie współrzędnych,

\mathbf{P}_i - siły reakcji jezdni na koło w układzie bazowym,

\mathbf{Q}_i - siły uogólnione,

$\mathbf{R}^{(k)}$ - macierz rotacji ciała (k),

$\mathbf{q}^{(N)}, \tilde{\mathbf{q}}^{(N)}$ - wektor współrzędnych uogólnionych opisujących ruch ciała (N) w układzie bazowym i względem układu związanego z ciałem poprzedzającym,

\mathbf{r}, \mathbf{r}' - wektor współrzędnych punktu w układzie bazowym i odpowiednio lokalnym,

V - energia potencjalna,

V_g^k - energia potencjalna sił ciężkości k- ciała ,

V_s^k - energia potencjalna odkształcenia sprężystego k-elementu,

$\psi_1, \varphi_1, \theta_1$ - kąty ZXY Eulera,

β, φ - kąty odchylenia i pochylenia koła,

λ - kąt znoszenia koła,

$\dot{\theta}$ - prędkość kątowa koła,

r_o - promień opony,

r - promień koła,

c_1, c_r – współczynnik sztywności bocznej i promieniowej opony,

$\bar{\alpha}$ - kąt nachylenia ramy motocykla względem osi x ,

$\bar{\beta}$ - kąt nachylenia widełek motocykla względem osi z ,

a_k, c_k - długości poszczególnych członów motocykla,

l_3 - długość wahacza tylnego motocykla,

Wskaźnik $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ oznacza dane ciało.

1. WPROWADZENIE

1.1. Wstęp

Koncepcja powstania pierwszego pojazdu jednośladowego zrodziła się z konieczności sprawniejszego i szybszego przemieszczania się przy użyciu możliwie prostego oraz powszechnie dostępnego środka transportu. Od momentu powstania przeszedł on ogromną ewolucję. Ewolucję, która doprowadziła nie tylko do rozwoju i doskonalenia konstrukcji, ale zmiany przeznaczenia i sposobu pojmowania zjawisk związanych z ruchem pojazdów jednośladowych, w szczególności zaś motocykli. Wraz z powstawaniem nowych konstrukcji wyłaniają się również nowe problemy, które nie występowały na wcześniejszym etapie rozwoju. Wynikają one między innymi z różnorodności przeznaczenia pojazdu, z konieczności spełnienia wymagań użytkowników a także rosnących wymogów bezpieczeństwa.

W zdecydowanej większości pojazdy jednośladowe posiadają otwartą konstrukcję poprzez co kierowca i pasażer są bezpośrednio narażeni na kontakt z otoczeniem. W odróżnieniu od samochodów w pojazdach jednośladowych nie ma możliwości zastosowania dodatkowych urządzeń, bądź kształtowania konstrukcji w taki sposób, aby mogła spełniać rolę ochrony przed skutkami ewentualnego wypadku. Dlatego też temat bezpieczeństwa czynnego ma bardzo istotne znaczenie i jest jednym z priorytetów prac rozwojowych w dziedzinie jednośladów

Fakt, iż współczesne pojazdy jednośladowe (motocykle) mogą osiągać znaczne prędkości ruchu oraz przyśpieszenia i opóźnienia spowodował, że szczególną uwagę należy zwrócić na zagadnienia dotyczące ogólnie rozumianej stateczności i kierowności tychże pojazdów, co ma ścisły związek z bezpieczeństwem ruchu. Wykorzystanie wyników doświadczeń uzyskanych podczas wieloletnich badań jednośladów może być niewystarczające przy projektowaniu współczesnych pojazdów. W celu wprowadzania dalszych zmian w konstrukcji, poszukiwania rozwiązań optymalnych w bardzo wąskim zakresie zmienności wielu parametrów, konieczne jest wykorzystanie innych sposobów pozyskiwania informacji odnośnie zjawisk związanych z ruchem pojazdu. Informacji, które przyczynią się do ukierunkowania działań zmierzających do osiągnięcia postawionego celu, np. poprawa stateczności i kierowności motocykla. Konieczne jest wykorzystanie już istniejących, lub stworzenie odpowiednich modeli fizycznych i matematycznych pojazdów o różnym stopniu komplikacji. Na ich podstawie, programów

symulacyjnych, które pozwolą na realizację teoretycznych badań wpływu wybranych parametrów konstrukcyjnych na zachowanie się pojazdu w ruchu.

Współczesne komputery umożliwiają analizę bardzo złożonych modeli pojazdów tak, że proces rozwoju konstrukcji może być realizowany przede wszystkim w przestrzeni wirtualnej, bez konieczności budowania prototypów. Pozwala to na obniżenie kosztów, skraca czas badań i jest bezpieczne. Z drugiej zaś strony proste modele pojazdów mogą znaleźć zastosowanie do wspomagania kierowcy w prowadzeniu pojazdu, poprzez ich wykorzystanie w aktywnym sterowaniu ruchem pojazdu w czasie rzeczywistym. Proste modele są również przydatne dla analizy wpływu zmian podstawowych parametrów geometrycznych i masowych na stateczność ruchu pojazdu jednośladowego.

Przegląd literatury przedmiotu wskazuje na bardzo powszechne wykorzystywanie takich właśnie, zlinearyzowanych modeli do analizy stateczności ruchu motocykli. Poprawność i adekwatność do rzeczywistości modeli i programów komputerowych powinna jednak być potwierdzona pomiarami oraz badaniami na obiekcie rzeczywistym

Ostatecznie idea możliwie najprostszego pod względem konstrukcji środka transportu, zyskała skomplikowany opis szeregu zjawisk związanych z ruchem współczesnego motocykla. Aktualnie analiza problemów dynamiki motocykla dotyczy przede wszystkim jego stateczności i kierowalności.

Mówiąc o właściwościach dynamicznych motocykla należy zwrócić uwagę na takie określenia jak:

- manewrowalność (ang. *manoeuvrability*), określającą zdolność pojazdu do wykonywania skomplikowanych manewrów zarówno w warunkach quasi-statycznych jak i dynamicznych. Jest to cecha samego pojazdu wynikająca głównie z jego konstrukcji.
- prowadzenie (ang. *handling*) definiowane jako pewna właściwość w odniesieniu do możliwości ruchowych kierowcy oraz jego odczuć dotyczących jazdy. Określa fizyczne i psychiczne obciążenie kierowcy w czasie wykonywanych manewrów. Oceną prowadzenia pojazdu są w głównej mierze subiektywne odczucia kierowcy. Wynika stąd problem odnośnie sprecyzowania kryteriów obiektywnej oceny prowadzenia pojazdu.

Pojęcie kierowalności łączy w sobie zarówno terminy; manewrowalność jak i prowadzenie

- Stateczność, stabilność (ang. *stability*), będącą jedną z ważniejszych właściwości pojazdów, rozumianą jako jego odporność na działanie zakłóceń czy zaburzeń oraz wystąpienie niepożądanych form ruchu, typowych dla pojazdu jednośladowego.

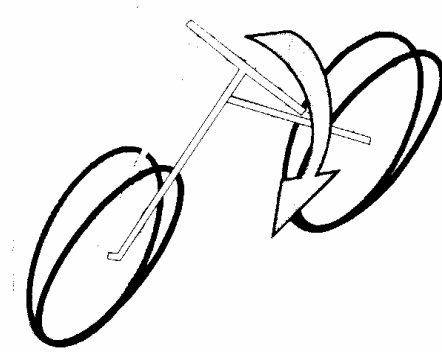
STATECZNOŚĆ RUCHU

Jedną z najważniejszych właściwości współczesnego pojazdu jednośladowego jest stateczność jego ruchu. Przez stateczność ruchu pojazdu rozumiemy jego zdolność powrotu do stanu ruchu ustalonego w określonym czasie po ustąpieniu zaburzeń (Andrzejewski R. 1997, Lozia Z. 1998). Z doświadczeń i wyników badań teoretycznych wynika, że problem stateczności pojazdu jednośladowego jest nierozłącznie związany z prędkością jazdy. Zakresy prędkości wyznaczają granice stateczności pojazdu poprzez występowanie charakterystycznych postaci ruchu, aperiodycznych lub oscylacyjnych, tłumionych pod- lub nad krytycznie. W dynamice pojazdu jednośladowego możemy wyróżnić kilka charakterystycznych postaci ruchu, poprzez które teoretycznie pojazd może utracić stateczność. Postaci te występują zarówno w płaszczyźnie poprzecznej jak i wzdłużnej motocykla. Pomędzy większością tych charakterystycznych postaci ruchu występują większe bądź mniejsze sprzężenia, powodujące, iż mogą one występować równocześnie. Wystąpienie jednej z postaci ruchu pociąga za sobą pojawienie się innej. Sprzężenia takie występują na poziomie siłowym, sztywnościowym oraz kinematycznym.

W praktyce utrata stateczności najczęściej spowodowana jest poprzez wystąpienie jednej z postaci w płaszczyźnie poprzecznej motocykla. Dlatego też w pracy zagadnienie stateczności ograniczone będzie głównie do analizy zjawisk w tej płaszczyźnie .

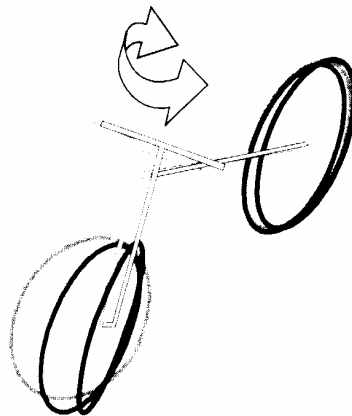
Można wyróżnić trzy główne postaci ruchu motocykla.

- *Capsize*, (odwrócone wahadło), nieoscylacyjna postać występująca przy małych prędkościach jazdy (rys.1). Pojazd poruszający się ruchem prostoliniowym przewraca się.



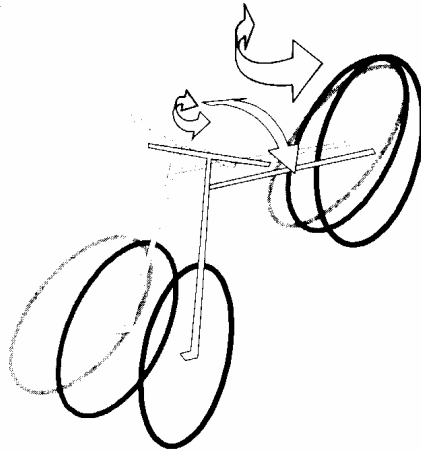
Rys. 1 Capsize (www.mecc.unipd.it)

- *Wobble*, (trzepotanie, chybotanie). Ta postać jest związana przede wszystkim z drganiami układu kierowniczego wokół swojej osi obrotu. Częstotliwość drgań zawiera się w zakresie 6÷10 Hz. Występuje przy większych prędkościach w zależności od parametrów konstrukcyjnych pojazdu i parametrów koła ogumionego (rys.2).



Rys.2 Wobble (www.mecc.unipd.it)

- *Weave* jest trzecią postacią ruchu. (kluczenie, ruch zygzakowy). Charakteryzuje się sprzężonymi ruchami oscylacyjnymi przechyłu poprzecznego i odchylenia pojazdu. Częstotliwość drgań zawiera się w zakresie 1÷5 Hz. (rys.3).

Rys.3 Weave (www.mecc.unipd.it)

Poprzez zmiany parametrów masowych i geometrycznych pojazdu można w znaczący sposób wpływać na prędkość przy której dane postaci ruchu występują i tym samym można wpływać na zakres stabilnej prędkości pojazdu. Realizacja tego typu analizy jest częścią niniejszej pracy. Prowadzący pojazd poprzez swoje działanie może zapobiec występowaniu postaci *capsize*. Przy małych prędkościach jazdy pojazdu prędkość zmian takich wielkości jak kąt obrotu kierownicy, kąt pochylenia jest wystarczająco mała tak, że kierowca może zapobiec występowaniu tej niestabilności. Praktycznie nie możliwym jest, aby kierowca mógł przeciwdziałać postaciom *wobble* oraz *weave*. Energia z jaką występują wspomniane postaci jest na tyle duża, że kierowca nie jest w stanie skutecznie im przeciwdziałać. Przy większych prędkościach ruchu, czas reakcji kierowcy jest już zbyt długi i pojazd musi być tak zaprojektowany aby zabezpieczyć przed wytapieniem tych niestabilności.

Równania ruchu pojazdu mogą być w większości przypadków przedstawione jako równania różniczkowe liniowe ze stałymi współczynnikami. Analiza stabilności dla tak opisanych układów fizycznych nie nastęcza zbyt wielu trudności. Wiele metod jest wykorzystywanych do wyprowadzenia równań ruchu przy zastosowaniu różnych układów współrzędnych, ale uzyskane w badaniach stateczności wartości własne i zakres prędkości dla których pojazd jest stateczny pozostają dla określonych parametrów badanego motocykla niezmiennie.

KIEROWALNOŚĆ

Motocykl w ruchu jest cały czas sterowany przez kierowcę. Zdefiniowanie pojęcia kierowności w przypadku motocykla jest trudne, ponieważ udział kierowcy w sposobie i

przebiegu realizowanego manewru jest znaczący. Przez kierowalność motocykla rozumiemy zatem zdolność pojazdu do wykonania określonych manewrów przy możliwym i określonym wysiłku prowadzącego pojazd. W ruchu prostoliniowym byłaby to naturalna tendencja do zachowania równowagi i podążania torem prostoliniowym.

Z drugiej strony tendencja do zachowania toru prostoliniowego przez motocykl nie może być zbyt duża, aby nie utrudniać prowadzącemu zmiany toru ruchu pojazdu poprzez przyłożenie momentu siły do kierownicy lub przechył kierowcy. Wprowadzenie pojazdu w tor krzywoliniowy wymaga od kierowcy wykonania kolejno manewrów takich jak: przeciwskręt, przechył pojazdu oraz skręt kierownicy w kierunku obranego toru. Wysiłek kierowcy mierzony np. maksymalną wartością momentu przyłożonego do kierownicy nie jest wystarczającym wyznacznikiem odczucia kierowcy. Moment powinien mieć stałą, niewielką lecz odczuwalną wartość i narastać liniowo wraz ze wzrostem przyśpieszenia poprzecznego. Dla poprawy oceny pewności prowadzenia istotne jest również opóźnienie czasowe pomiędzy wymuszeniem przez prowadzącego a reakcją pojazdu.. Im mniejsza wartość tego przesunięcia lub bliska zeru tym lepiej oceniana jest kierowalność tego pojazdu. Kierowca pokonując zadany tor jazdy nie musi wówczas wykonywać dodatkowych, drobnych ruchów korekcyjnych. Dla tych warunków ruchu pojazd posiada najlepszą kierowalność, jak i w odczuciu kierowcy staje się łatwy w prowadzeniu. Zakres prędkości oraz częstotliwości wymuszeń, dla których motocykl posiada najlepsze właściwości kierowalności jest niewielki. Położenie tego zakresu najlepszej kierowalności można zmieniać poprzez konfiguracje parametrów konstrukcyjnych. W procesie projektowania zwraca się więc uwagę na to, aby przypadał on na zakres najczęściej występujących warunków ruchu (przeznaczenie danego pojazdu).

Przy zmianie kierunku ruchu istnieje pewna „optymalna” trajektoria dla której czas realizacji zadania jest najmniejszy. Porównanie toru „optymalnego” z torem rzeczywistym może być również wykorzystane do oceny kierowalności pojazdu.

Wielu autorów (*Cossalter V. 2002, Weir D. i inni 1978, Sharp R.S. 2001*) wskazuje, iż ocenę kierowalności pojazdu jednośladowego można oprzeć na analizie charakterystycznych wskaźników, sformułowanych dla danego manewru. Najczęściej wykorzystywanymi są zależności momentu na kierownicy w odniesieniu do innych parametrów ruchu układu. Są to wskaźniki: przechyłu poprzecznego – M_k/φ , prędkości przechyłu poprzecznego – $M_k/\dot{\varphi}$,

prędkości odchylenia $-\dot{\psi}/\delta$, przyspieszenia dośrodkowego $-M_k/(v^2/R_c)$, oraz przechyłu poprzecznego w funkcji prędkości ruchu $-M_k/\varphi(v)$ (charakterystyki amplitudowe i fazowe). Ponadto definiuje się wskaźniki: odchylenia $-\dot{\psi}/\delta$, indeks Koch'a $-M_{k\max}/v\dot{\varphi}_{\max}$, oraz stałą czasową prędkości odchylenia $-\tau_{\psi}$.

gdzie:

M_k - moment na kierownicy,

$M_{k\max}$ - maksymalna wartość momentu na kierownicy

φ - kąt przechyłu poprzecznego,

$\dot{\varphi}$ - prędkość przechyłu poprzecznego,

$\dot{\varphi}_{\max}$ - maksymalna wartość prędkości przechyłu,

ψ - kąt odchylenia,

$\dot{\psi}$ - prędkość odchylenia,

δ - kąt skrętu kierownicy,

v - prędkość wzdłużna.

Równie ważnym parametrem oceny jest wspomniany czas reakcji motocykla (np.: zdecydowany wzrost wartości prędkości odchylenia) na wymuszenie kierowcy, określane jako; moment przykładany do kierownicy, skręt kierownicy lub zmiana położenia środka masy, dzielona przez wartość kąta przechyłu kierowcy podczas manewrów dynamicznych.

Inne publikacje wykazują, że występuje korelacja pomiędzy opinią kierowcy dotycząca prowadzenia motocykla a czasem opóźnienia prędkości odchylenia pojazdu oraz gęstością widmową mocy prędkości przechyłu (*Cossalter V. 1998*).

Należy zwrócić uwagę, iż spełnienie kryteriów zapewniających dobrą stateczność pojazdu jednośladowego, nie gwarantuje, iż zapewniona będzie również dobra jego kierowność i odwrotnie.

Na podstawie przeprowadzonych wielu badań można stwierdzić, że na ocenę prowadzenia pojazdu jednośladowego przez kierowcę mają decydujący wpływ:

- opóźnienie występujące pomiędzy zmiennym parametrem wejściowym a wyjściowym, tzn. sygnałem zadawanym przez kierowcę jako wymuszenie, a reakcją motocykla

- zmienna wartość tego opóźnienia w funkcji innych parametrów ruchu np. prędkości ruchu
- wartość momentu jaki powinien chwilowo zostać przyłożony do kierownicy przez kierowcę podczas manewrów dynamicznych, oraz jego nieliniowy przebieg wraz ze wzrostem innych parametrów ruchu
- konieczność inicjowania manewru wejścia w łuk kontr-skrętem, będącym przyczyną opóźnienia reakcji pojazdu w stosunku do zamierzenia kierowcy.

Zjawiska te powodują, że prowadzenie pojazdu jednośladowego (motocykla) jest znacznie bardziej uciążliwe niż prowadzenie samochodu. Nawet podświadomie wykonywane manewry powodują po dłuższym czasie uczucie zmęczenia nie tylko fizycznego, ale i psychicznego.

Dużego znaczenia nabiera również w tym przypadku zdobyte wcześniej doświadczenie.

Pożądane jest więc aby układ kierowca-motocykl charakteryzował się :

- liniową zależnością pomiędzy parametrami wejściowymi (sterowania) a reakcją układu,
- opóźnieniem fazowym pomiędzy wymuszeniem a odpowiedzią układu o minimalnej wartości,
- stałą wartością opóźnienia pomiędzy sygnałem wejściowym a wyjściowym w całym zakresie zmienności pozostałych parametrów stanu układu,
- tym, aby wymagana wartość parametrów sterujących mieściła się w zakresie, który odpowiada możliwościom kierowcy.

Głównie ze względu na przeznaczenie pojazdu w taki sposób próbuje się dobrać parametry konstrukcyjne układu aby motocykl mógł posiadać możliwie dobrą stateczność oraz kierowalność w określonych, najczęściej występujących dla niego, warunkach ruchu.

Zmiana niektórych parametrów konstrukcyjnych motocykla rozszerza zakres prędkości dla której pojazd jest stabilny, jednocześnie pogarszając kierowalność. Dokonanie właściwego wyboru parametrów konstrukcyjnych niewątpliwie związane jest z doświadczeniem konstruktora. Analiza wpływu zmian parametrów konstrukcyjnych pojazdu na jego zachowanie w ruchu powinna ułatwić dokonanie takiego wyboru. Należy podkreślić, że badanie wpływu zmian parametrów konstrukcyjnych przedstawione w niniejszej pracy, dotyczy jednego typu motocykla, zakładając tym samym niezmiennosć parametrów masowych, sztywnościowych oraz charakterystyk opon.

Analiza obejmie swoim zakresem; badania stanowiskowe na specjalnie zbudowanym stanowisku bębnowym, badania drogowe oraz symulacyjne przy wykorzystaniu prostego liniowego modelu motocykla. Do dalszych badań kierowności i stateczności zostanie wykorzystany złożony model motocykla, którego równania ruchu będą wyprowadzone metodami stosowanymi w robotyce przy wykorzystaniu współrzędnych złączowych i przekształceń jednorodnych.

Zamieszczony w dalszej części przegląd literatury przedmiotu nie wyczerpuje całości bardzo obszernego zagadnienia. Stanowi jednak wystarczające zdaniem autora pracy uzasadnienie dla sformułowania celu i zakresu niniejszej pracy.

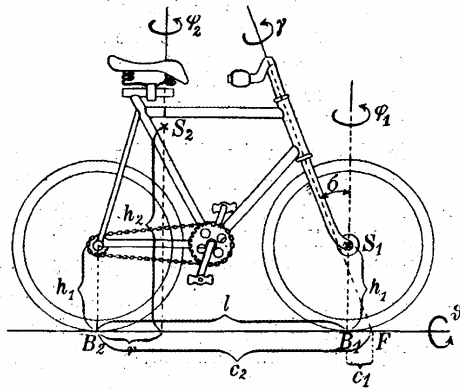
1.2. Przegląd literatury

W roku 1817 Karl von Drais zaprezentował dwukołowy pojazd, jednośladowy napędzany stopami i utrzymywany przez prowadzącego w pozycji stabilnej poprzez sterowanie przednim kołem. Nazwany *velocipede* lub *draisine* może być uznany za przedprototyp roweru i motocykla przedstawiający zasadę działania współczesnego zmechanizowanego osobistego środka transportu. Po roku 1890 pojawiły się pojazdy jednośladowe, które można było nazwać bezpiecznymi rowerami, a na których jazda nie nastęczała zbyt dużych trudności. Zastosowano w nich pochyloną oś obrotu widelca przedniego oraz odcinek wyprzedzenia tak jak to ma miejsce we współczesnych rowerach i motocyklach. Fundamentalne prace dotyczące stabilności ruchu pojazdu jednośladowego, w rozważanych przypadkach roweru, przedstawili Emmanuel Carvallo (1899) i Francis Whipple (1899). Wykorzystując równania dynamiki ciała sztywnego wykazali oni, że przy określonym zakresie prędkości niekierowany rower jest stabilny. Biorąc pod uwagę podobieństwo w głównych założeniach konstrukcyjnych, opis problematyki stabilności ruchu roweru był początkiem analizy zjawisk drganiowych związanych z ruchem motocykla.

Freeman Dyson znany brytyjski fizyk zapytany przez dziennikarzy na temat ruchu roweru odpowiedział: „Nawet teraz, chociaż budujemy go ponad sto lat jest bardzo trudno zrozumieć dokładnie jak rower porusza się, jak również trudno sformułować jego matematyczny model” (J.P. Maljaard 2006). Cytat ten wskazuje jak ciągle są aktualne prace dotyczące modelowania dynamiki ruchu pojazdu jednośladowego. Dokonanie wyboru kryteriów wg których można dokonać przeglądu literatury jest trudne ponieważ wiele modeli pojazdu jednośladowego wykorzystywanych do analizy stateczności w

swojej złożoności jest bliskie sobie niezależnie od czasu ich opracowania. Przykładowo modele o dwu dwóch stopniach swobody z więzami nieholonomicznymi opracowane były w XIX wieku jak i są współcześnie. Rozważając stateczność i kierowność motocykla nie można pominąć prac dotyczących roweru biorąc pod uwagę jego znaczne podobieństwo konstrukcyjne. Przyjęcie wielu uproszczeń tak charakterystycznych dla procesu modelowania jeszcze bardziej zbliża model fizyczny motocykla do modelu roweru.

Jak już wspomniano we wstępie pierwsze fundamentalne prace dotyczące stabilności roweru zostały przedstawione przez Francisca Whipple (*F. Whipple 1899*) w 1899 roku. W pracy rozważany jest ogólny ruch roweru, ruch z niewielkimi pochyleniami kół, ruch po okręgu o dużym promieniu, oscylacje wokół stanu ustalonego przy braku ingerencji prowadzącego oraz analizuje się zachowanie pojazdu przy przyłożeniu do kierownicy momentu proporcjonalnego do różnicy kątów przechyłu kół roweru. Nieliniowe równania ruchu pojazdu zostały wyprowadzone przy wykorzystaniu zasady d'Alemberta zmodyfikowane odpowiednio ze względu na nieholonomiczne więzy i zlinearyzowane wokół pionowego stanu równowagi. Analiza stateczności została przeprowadzona przy wykorzystaniu równania charakterystycznego. Po raz pierwszy określono zakresy stabilnej prędkości (16-20km/h) oraz wartości momentu działającego na kierownicę zapewniającego stabilny ruch pojazdu poza wymienionym zakresie prędkości. Whipple wprowadzając model bezwymiarowy uzyskał niezależność pierwiastków równania charakterystycznego od masy zespołów. Jeżeli masa i momenty bezwładności zespołów zmieniły się w tym samym stosunku to pierwiastki równania charakterystycznego nie ulegały zmianie. W tym sensie można było stwierdzić, że mężczyzna jadący na motocyklu pod względem charakterystyk dynamicznych odpowiada dziecku jadącemu na rowerku. Prowadzi to do wniosku, że motocykl powinien się zachowywać jak rower tzn. należy oczekiwać tych samych niestabilnych postaci ruchu oraz autonomicznej stateczności wskazanej przez Whippla. Sommerfield and Klein w swojej pracy *Theorie des Kreisles(1903)* wskazują na znaczącą rolę momentów żyroskopowych dla zapewnienia autonomicznej stateczności roweru. Dla rozwiązania problemu wykorzystali model roweru składający się z ramy do której przymocowane jest tylne koło oraz zespołu sterowania wraz z przednim kołem. Model wraz zaznaczonymi kątami obrotu i przechyłu został przedstawiony na rys.4.



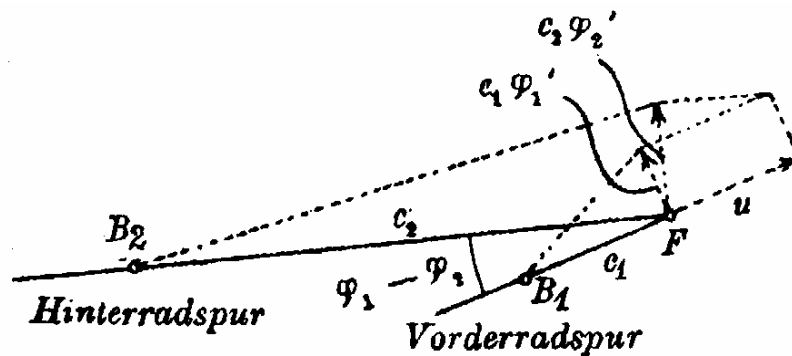
Rys.4 Model fizyczny roweru z zaznaczonymi kątami obrotu i przechyłu (Sommeffeld and Klein 1903)

Jeśli v_2 jest kątem przechyłu koła tylnego, a v_1 odpowiadającym mu kątem przechyłu koła przedniego oraz γ kątem między przednim, a tylnym kołem mierzonym wokół osi obrotu, kąty φ_1 i φ_2 odpowiednio kątami obrotu kół w płaszczyźnie jezdni i ich wartości będą małe to można przyjąć, że

$$v_1 = v_2 - \gamma \sin \delta$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \gamma \cos \delta$$

Są to związki geometryczne.



Rys. 5 Prędkość poprzeczna punktu F. Zależności geometryczne (Sommeffeld and Klein 1903)

Przyjmując, że prędkość wzdłużna roweru wynosi u i parametry odległościowe wynoszą c_1 i c_2 uzyskano (rys.5) nieholonomiczne więzy w postaci:

$$c_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + u \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = c_2 \frac{d\varphi_2}{dt}$$

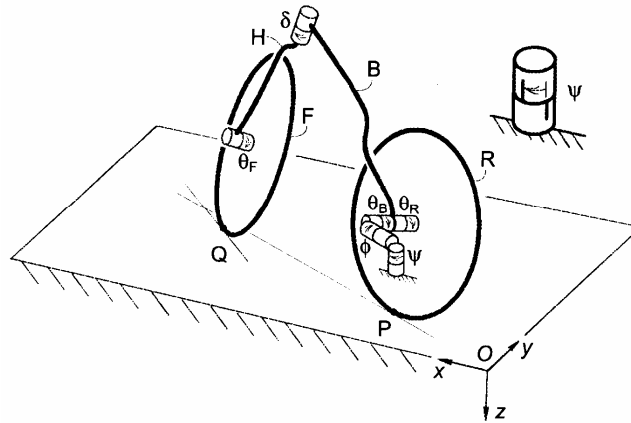
po zlinearyzowaniu uzyskuje się:

$$c_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = c_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + u(\varphi_1 - \varphi_2) .$$

Wykorzystując więzy geometryczne i nieholonomiczne opracowany model matematyczny pojazdu jest modelem o dwu stopniach swobody. Są to; kąt przechyłu ramy pojazdu i kąt obrotu kierownicy. Ten model matematyczny został zastosowany do określenia zakresu stabilnej prędkości prezentowany w pracy Whipple. Uzyskano te same wyniki. Ponadto autorzy wykazali, że uzyskanie autonomicznej stateczności pojazdu było możliwe tylko po uwzględnieniu w równaniach ruchu momentów żyroskopowych. Wyprowadzanie równań i analiza stateczności jest przedstawiona w bardzo przystępny sposób. Model fizyczny pojazdu nie uległ zmianie również w pracy Döhringa (*E.Döhring 1955*). Döhring zastosował do wyprowadzenia równań ruchu pojazdu w formie zlinearyzowanej równania Newtona Eulera. Podobnie jak w omawianych już publikacjach Whipple i Sommerfielda i Kleina wprowadził Döhring więzy nieholonomiczne określające związek między prędkościami poprzecznymi koła przedniego i tylnego. Analiza stateczności dotyczyła trzech znacznie różniących się typów motocykli. Stateczność rozważanych pojazdów autor analizował prezentując przebiegi pierwiastków układu równań w funkcji liczby Frouda. Porównanie własności bardzo różnorodnych motocykli stało się bardziej przejrzyste. Model motocykla w którym uwzględniono siłę napędową oraz siłę oporu powietrza został przedstawiony na Uniwersytecie w Wisconsin jako praca doktorska R.N. Collinsa (*Collins 1963*). Nadal model fizyczny motocykla był bardzo prosty nie uwzględniał systemu zawiesznień, a koła były tak jak i w poprzednio opisywanych pracach traktowane jako cienkie tarcze pozostające w styku z drogą bez poślizgu. Do wyprowadzenia równań ruchu wykorzystane zostały równania Newtona Eulera. Przy założeniu stałej prędkości ruchu model proponowany przez Collinsa posiadał również dwa stopnie swobody. Równania ruchu stanowił układ dwu równań różniczkowych drugiego rzędu gdzie zmiennymi były kąt przechyłu i kąt obrotu kierownicy. Klasycznym przykładem potraktowania roweru jako układu nieholonomicznego jest praca Neimarka i Fufajewa (*Neimark and Fufajew, 1967*) Do wyprowadzenia równań ruchu zastosowali równania Lagrange'a z nieholonomicznymi więzami. Otrzymane równania ruchu zostały zlinearyzowane dla dalszej analizy. W analizie stateczności roweru uwzględnili wpływ podatności opon według teorii Kiełdysza. Przyjęli podobnie jak w większości analizowanych prac rower jako układ mechaniczny o dwu masach traktując kierownicę z widelcem i kołem przednim jako jedną masę, a ramę, rowerzystę i tylne koło jako drugą masę. Pominęli efekty żyroskopowe mas wirujących kół, które jak już udowodniali Sommerfield i Klein mają wpływ na stateczność ruchu

roweru. Dalsze prace nad równaniami ruchu roweru toczącego się bez poślizgu z uwzględnieniem więzów nieholonomicznych przedstawili J. Maryniak i Z. Goraj w roku 1974 (*J. Maryniak, Z. Goraj, 1974*). Równania ruchu wyprowadzili stosując równania Maggiego. Metoda Maggiego pozwala na ominięcie procedury rugowania mnożników Lagrange'a, która może być uciążliwa rachunkowo. Nejmark i Fufajew parametry kinematyczne określające krzywiznę toru koła ogumionego wyznaczyli za Kiełdyszem wyłącznie z zależności geometrycznych. Maryniak i Goraj parametry kinematyczne dla modelu Kiełdysza wyznaczyli doświadczalnie otrzymując wartości parametrów znacznie różniące się od podanych w pracy Nejmarka i Fufajewa. Ponieważ współczynniki charakteryzujące model współpracy koła ogumionego z drogą mają istotny wpływ na zachowanie się całego pojazdu analiza doświadczalna wydaje się być niezbędną. Maryniak i Goraj przeanalizowali wpływ zmian konstrukcyjnych roweru takich jak zmiana promienia koła, długości roweru, kąta pochylenia szyjki, długości odcinka wyprzedzenia oraz wartości tłumienia wiskotycznego w szyjce na współczynniki tłumienia i częstość oscylacji obrotu kierownicy oraz ruchów przechylenia.

Więzy nieholonomiczne są stosowane w wielu współczesnych pracach dotyczących dynamiki ruchu pojazdów jednośladowych, szczególnie w pracach zespołu kierowanego przez J.M Papadopoulos (*J.M Papadopoulos, 1990*). W 1990 roku Papadopoulos przedstawił zlinearyzowane równania ruchu roweru i motocykla wyprowadzone przy wykorzystaniu zasady d'Alamberta. Wprowadzenie więzów nieholonomicznych sprowadziło model matematyczny rozważanego układu do dwu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu. Prace tego zespołu są nadal rozwijane i w 2006 roku zostały przedstawione zlinearyzowane równania dynamiki (*J.P. Meijaarda, 2006*) dla określenia stanu równowagi i sterowania roweru. Do rozważań autorzy wykorzystali model roweru przedstawiony przez Whipple z jego podstawowym założeniem, a mianowicie że poślizg i podatność opon nie są uwzględniane. Model fizyczny pojazdu został przedstawiony na rys.6.



Rys.6 Model fizyczny pojazdu jednośladowego (J.P. Meijaarda, 2006).

W modelu tym wprowadzono fikcyjne pary obrotowe określające wzajemny ruch poszczególnych elementów roweru. Położenie tylnego koła w układzie globalnym określają współrzędne x_p, y_p . Położenie tylnej ramy określa sekwencja kątów Eulera tzn. kąt odchylenia ψ , kąt pochylenia φ i kąt obrotu θ_B , który nie jest zmienną i jest określany przez trygonometryczne relacje, tak aby przednie koło stykało się z podłożem. Kąt obrotu kierownicy δ jest kątem obrotu przedniego zespołu względem tylnej ramy wokół osi układu kierowniczego. Uwzględniając obroty przedniego i tylnego koła względem H i B współrzędne $x_p, y_p, \psi, \varphi, \delta, \theta_F, \theta_R$ opisują przestrzeń konfiguracji. Przedstawiony model charakteryzuje się 7 stopniami swobody. Pozycja i konfiguracja roweru z punktu widzenia dynamiki poprzecznej są określone przez zmienne $y_p, \psi, \varphi, \delta$. Wykorzystując więzy nieholonomiczne autorzy uzyskali dwa zlinearyzowane równania opisujące ruch pojazdu zwane równaniami przechyłu (*lean equation*) i równaniami sterowania (*steer equation*). Są to równania zwyczajne drugiego rzędu o stałych współczynnikach, w których zmiennymi są kąt przechyłu ramy φ oraz kąt obrotu δ . Równania te są przedstawione w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \nu\mathbf{C}_1\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{g}\mathbf{K}_0 + \nu^2\mathbf{K}_2]\mathbf{q} = \mathbf{f}$$

gdzie:

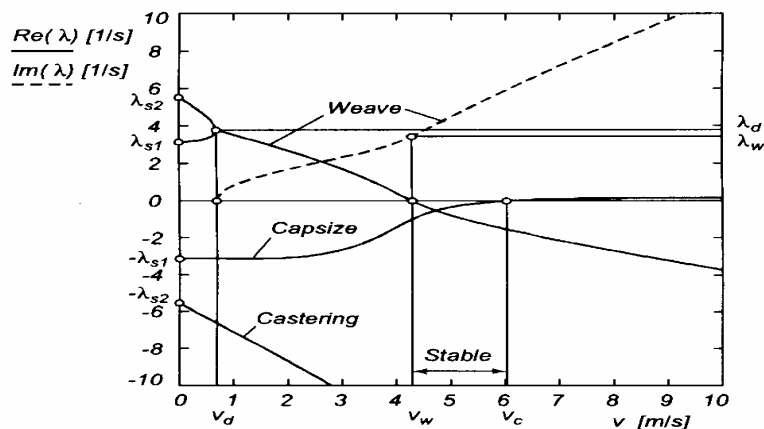
M - macierz mas,

C₁ - pseudo-macierz tłumienia, obejmująca momenty żyroskopowe będące wynikiem prędkości przechyłu i prędkości skrętu, bezwładność ramy będącą wynikiem prędkości odchylenia i bezwładności będącej wynikiem przyspieszenia kąтового odchylenia,

K - macierz sztywności. Jeden z członów jest proporcjonalny do przyspieszenia ziemskiego drugi natomiast zawiera efekty odśrodkowe i żyroskopowe,

ν - prędkość ruchu

Analizę stateczności autorzy wykonali poprzez określenie przebiegu zmian pierwiastków równania charakterystycznego (rys.7).

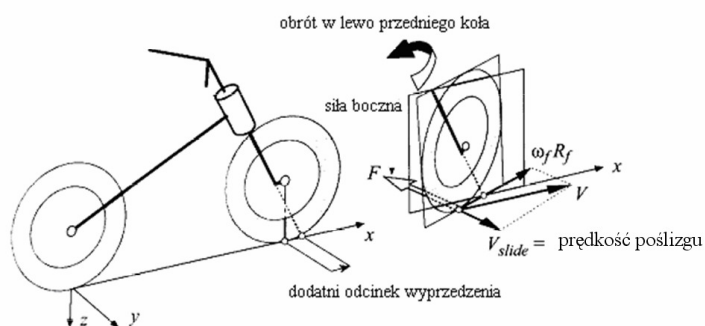


Rys.7 Przebieg zmian wartości pierwiastków równania charakterystycznego w funkcji prędkości wzdłużnej. Część rzeczywista – linia ciągła, Część urojona – linia przerywana (J.P. Meijaarda, 2006).

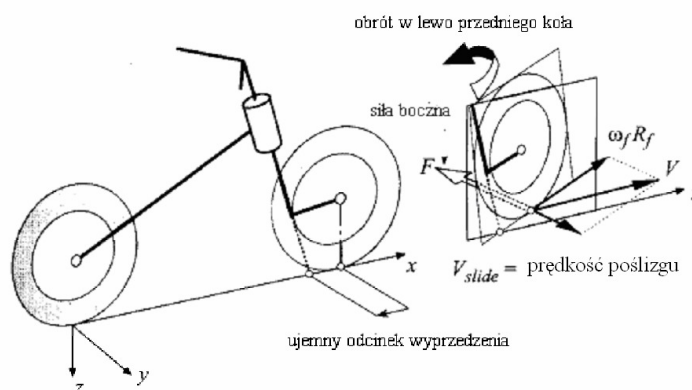
Zakres stabilnej prędkości dla przyjętych parametrów roweru wyniósł 4-6 m/s. Uzyskane rezultaty zostały porównane z wynikami uzyskani dla nieliniowych równań ruchu przy wykorzystaniu programów AutoSim i SPACAR. Wyprowadzone przez Papadapoulosa i innych równania ruchu ze względu na swą prostotę są przydatne w analizie wpływu parametrów konstrukcyjnych na stateczność pojazdu jednośladowego.

Jest wiele różnic między rowerem a motocyklem, przykładowo masa motocykla w stosunku do masy kierowcy, czy też prędkość ruchu, ale postaci ruchu pojazdu takie jak wobble, weave czy capsizes muszą się pojawić i tylko zakres prędkości ich występowania może być inny. Dotychczasowy przegląd literatury zawierał prace w których autorzy jako podstawowe założenie do budowy modelu matematycznego przyjmowali warunek braku poślizgu w punkcie styku koła z drogą. W przypadku rozszerzenia rozważań na motocyklowe koła ogumione takie założenie może prowadzić do błędnych wyników analiz. To rozszerzenie w przypadku motocykla wydaje się ze wszech miar słuszne biorąc pod uwagę wymiary przekroju poprzecznego opony oraz stosowane wielkości ciśnienia powietrza w ogumieniu w porównaniu z oponami rowerowymi. Model współpracy koła ogumionego motocykla z drogą wydaje się być bliższy modelowi współpracy koła ogumionego samochodu. W dalszej części analizy literaturowej zostanie przedstawiona problematyka współpracy koła ogumionego z drogą.

W przypadku pojazdu jednośladowego znaczącą rolę dla jego stateczności i kierowności odgrywają parametry konstrukcyjne. Jednym z istotnych parametrów konstrukcyjnych jest odcinek wyprzedzenia. Jeżeli przykładowo przeanalizujemy układ zaprezentowany na rys.8 i rys.9 to oczywistym staje się stwierdzenie, że odcinek wyprzedzenia ma istotny wpływ na stabilizację lub destabilizację oscylacji wokół osi obrotu układu prowadzenia przedniego koła.



Rys.8. Dodatni odcinek wyprzedzenia (Cossalter 2002)

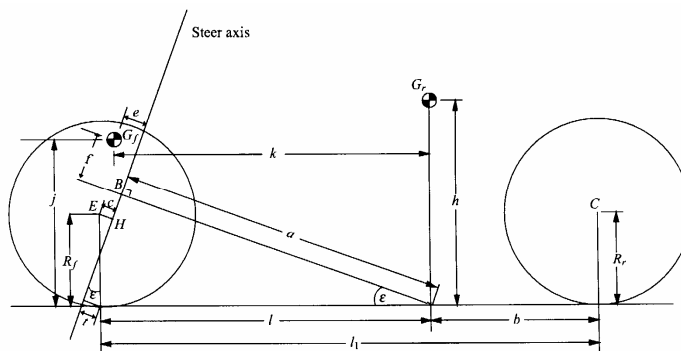


Rys.9. Ujemny odcinek wyprzedzenia

W przypadku dodatniej wartości odcinka wyprzedzenia działanie siły bocznej jest stabilizujące w przeciwnym destabilizujące.

Tematyką wpływu parametrów konstrukcyjnych motocykla, w tym również wpływem długości odcinka wyprzedzenia, na jego zachowanie zajmował się między innymi R.Sharp. Jego prace są ważnym krokiem w rozwoju analizy teoretycznej dynamiki motocykla. (Sharp,1971). J.R.Sharp wyprowadził równania ruchu przy wykorzystaniu równań Lagrange'a II rodzaju dla pojazdu składającego z dwu sztywnych ram połączonych nachyloną osią obrotu z kierowcą sztywno zamocowanym do tylnej ramy. Model o 4 stopniach swobody tzn. boczne przemieszczenie, kąt odchylenia, kąt przechyłu

poprzecznego, kąt obrotu kierownicy rozważano dla małych odchyłeń od ruchu prostoliniowego tak, że układ można było traktować jako liniowy (rys.10).



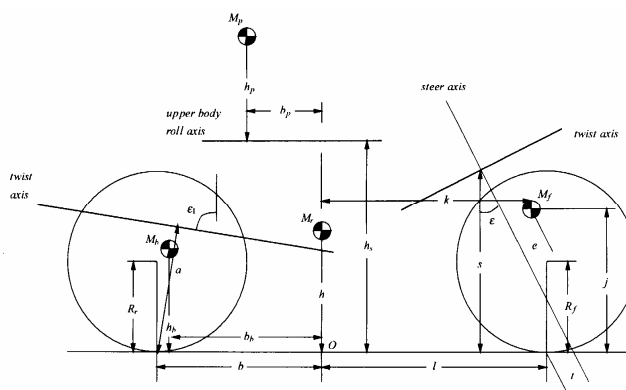
Rys.10 Model motocykla opracowany przez Sharpa (Sharp 1971)

W modelu opony przyjęto liniowe zależności siły bocznej od kąta znoszenia i kąta pochylenia koła. Pominięto efekty aerodynamiczne. Sharp przeprowadził analizę stateczności poprzez obliczenie pierwiastków równania charakterystycznego w funkcji prędkości wzdłużnej. Rozwazał dwa przypadki, gdy kąt obrotu kierownicy był stopniem swobody (free control) i gdy kąt obrotu kierownicy był zadany (fixed control). Analiza stateczności w pierwszym przypadku pozwoliła na określenie postaci ruchu pojazdu i zakresu prędkości w których one występują. Kolejno zostały przez Sharpa nazwane: *capsize*, *weave* i *wobble*. Jak już wspomniano we wstępie pierwsza z postaci występuje przy małych prędkościach i zazwyczaj jest kontrolowana przez moment przyłożony do kierownicy i ruchy ciała prowadzącego. *Weave* charakteryzuje się niską częstotliwością (2-4 Hz) drgań całego motocykla obejmując przechył poprzeczny, odchylenie oraz ruch układu kierowniczego. Jak wynika z analizy wykonanej przez Sharpa, drgania te są dobrze tłumione przy średnich prędkościach, ale tłumienie maleje wraz ze wzrostem prędkości. *Wobble* to drgania skrętne układu prowadzenia przedniego koła o wysokich częstotliwościach (8-10 Hz). Dobrze tłumione przy małych prędkościach i znacznie słabiej przy większych. Wynika to również z analizy prezentowanej w omawianej pracy Sharpa. R. Sharp badał między innymi wpływ przemieszczeń środka mas zespołu tylnego, kąta ustawienia szyjki, odcinka wyprzedzenia czy tłumienia wiskotycznego w układzie kierowniczym. Niektóre ze zmian powodowały przeciwstawne skutki. Przykładowo stabilizujący efekt tłumienia drgań postaci ruchu *wobble* powodował efekt destabilizujący w postaci ruchu *weave*.

W 1974 roku Sharp (*Sharp, 1974*) rozbudował swój model wprowadzając podatność skrętną mocowania tylnego koła w stosunku do ramy motocykla. Wnioski z przeprowadzonej analizy wskazują na ważną rolę wartości sztywności tego mocowania na tłumienie formy ruchu *weave*. G. Jennings w 1974 (*Jennings, 1974*) wskazał na znaczącą rolę tłumienia w zawieszeniu na przebieg oscylacji *weave* podczas jazdy po łuku. Stwierdził, że charakterystyki tłumienia zawieszenia mają znaczny wpływ na stateczność motocykla, głównie postaci *weave*, podczas jazdy po łuku, czyli w przypadku znacznych pochyleń motocykla. Praca G. Jennings dotyczy jazdy po łuku tj. przypadku znacznie bardziej złożonego. Dochodzi bowiem do wzajemnego oddziaływania postaci ruchu na siebie. W konsekwencji proste rodzaje ruchu, takie jak: przechył poprzeczny, odchylenie, skręt kierownicy czy też ugięcia zawieszzeń, występują łącznie tworząc złożone formy. Przykładowo, postać *wobble* podczas jazdy po łuku jest zbliżona jeśli chodzi o jej częstotliwość do postaci *weave* charakterystycznej dla jazdy na wprost przy wysokiej prędkości (*S., Eveangelou, 2003*). Roe i Thorpe w swoich pracach badali wpływ podatności bocznej układu prowadzenia przedniego koła motocykla na występowanie postaci *wobble*. Badania realizowali mierząc zmiany kąta skrętu kierownicy po wymuszeniu impulsowym przy różnych prędkościach jazdy. Stwierdzili, że istotny wpływ na przebieg drgań oprócz podatności bocznej układu prowadzenia koła, ma również sztywność skrętna tylnej ramy oraz obciążenie tyłu motocykla. Oprócz prac związanych z modelowaniem ruchu motocykla prezentowane są również prace dotyczące badań eksperymentalnych. Weir i Zellner (*Zellner and Weir 1978*) wykonali testy pięciu różnego rodzaju motocykli skupiając się głównie na stacjonarnych manewrach tzn. jeździe po okręgu. Wyniki badań przedstawili w formie następujących charakterystyk: stosunku momentu przyłożonego do kierownicy do kąta przechyłu, stosunku momentu przyłożonego do kierownicy do kąta skrętu kierownicy oraz stosunku prędkości odchylenia do kąta skrętu kierownicy w funkcji prędkości jazdy. Pierwsza charakterystyka w zakresie prędkości 30-50 km/h zmienia znak i ma cały czas zmienny gradient. Wskazuje to na istotną rolę momentu przyłożonego do kierownicy w kontrolowaniu kąta przechyłu. Druga jest typową charakterystyką sterowności. Na jej podstawie, podobnie jak w samochodach, można by mówić o podsterowności lub nadsterowności pojazdu. Zmiany stosunku momentu do kąta obrotu kierownicy dla większości pojazdów charakteryzują się stałym gradientem i to miało miejsce również w przypadku badanych motocykli, a zmiana znaku następuje przy prędkości odpowiadającej przejścia formy ruchu *capsize* przez granice stabilności. Autorzy analizują również zachowanie się pojazdów podczas zmiany pasa ruchu. Ogólnie celem

pracy Weir i Zellner było zaproponowanie i rozwinięcie oraz ocena procedur, które mogłyby być przydatne w analizie stateczności i kierowności motocykli.

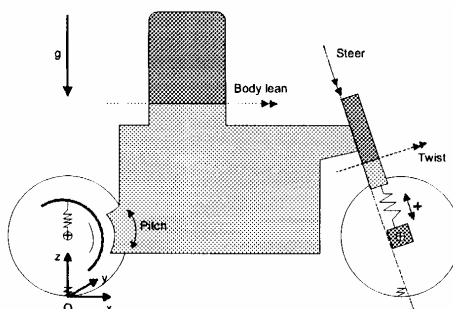
Rozwój możliwości obliczeniowych komputerów umożliwił tworzenie coraz bardziej złożonych modeli matematycznych motocykli. Celem ciągłego rozwoju była chęć wyjaśnienia rozbieżności między wynikami uzyskanymi na drodze teoretycznej, a otrzymanymi w wyniku badań doświadczalnych. Dotyczyło to głównie tłumienia formy ruchu *wobble* i zmiany tego tłumienia z prędkością. Doprowadziło to między innymi do uwzględnienia w modelu fizycznym pojazdu strukturalnej podatności ramy (*Sharp and Alstead, 1980*). W tej pracy autorzy rozważyli wpływ podatności ramy motocykla w trzech wariantach. Wariant „A” uwzględniał podatność poprzeczną przedniego widelca, wariant „B” umożliwiał skręt przedniego widelca wokół osi równoległej do osi obrotu widelca wynikający z podatności układu oraz wariant „C” w którym widelec przedni wraz z kołem i kierownica miał możliwość skrócenia wokół osi prostopadłej do osi obrotu widelca względem ramy tylnej. Symulacje zostały przeprowadzone dla czterech typów motocykli. Wyniki wariantu „C” znalazły potwierdzenie w wynikach eksperymentów potwierdzając małą wartość tłumienia formy *wobble* dla średnich prędkości i wysoką dla dużych prędkości. Dalsze prace Sharpa zaowocowały opracowaniem modelu (*Evangelou, 2003*) w którym wprowadził możliwość skrócenia przedniego układu względem ramy tylnej (rys.11).



Rys.11. Model motocykla opracowany przez Sharpa 1994 (*Evangelou, 2003*).

Współczynniki tłumienia i sztywności reprezentowały momenty wynikające z oddziaływania kierowcy. Ponadto rama tylna mogła przemieszczać się poprzecznie względem łożyskowania widelca i wykonywać obrót wokół osi prostopadłej do osi obrotu widelca. Zespół tylnego koła mógł wykonywać obroty względem ramy. Korpus kierowcy mógł również wykonywać przechyły wokół osi równoległej do osi podłużnej motocykla.

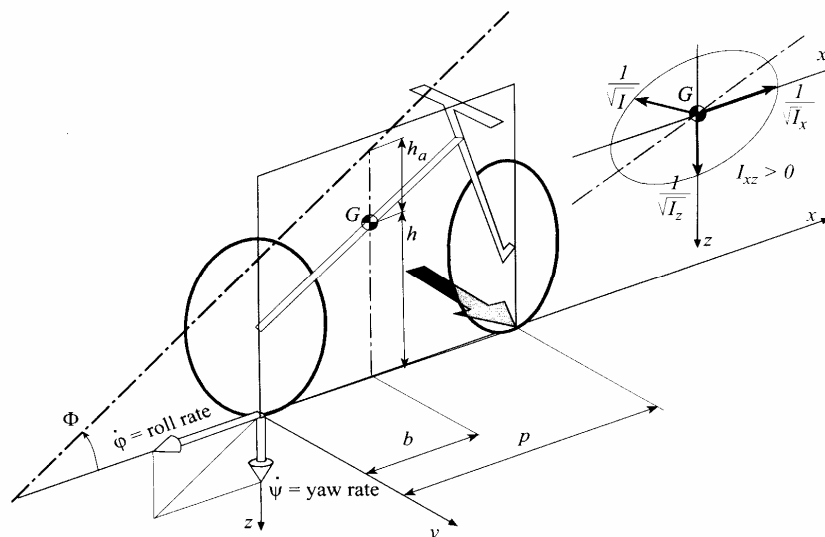
Przedstawiony na rys. 9 układ pozwolił na wyjaśnienie oscylacji typu wobble spowodowanej nierównościami nawierzchni drogi. Analizując literaturę dotyczącą modelowania motocykla nie można pominąć prac Koenena. W 1982 roku (*Koenen i inni, 1982*) przedstawił model fizyczny motocykla (rys.12) w którym uwzględnił podatność układu prowadzącego przednie koło (widelca) oraz możliwość przechylania się korpusu kierowcy.



Rys.12 Model fizyczny motocykla przedstawiony przez Koenena

Tylne zawieszenie motocykla w którym zazwyczaj wykorzystywany jest wahacz podłużny, zostało zastąpione przegubem tak, że pojazd mógł wykonywać ruchy obrotowe względem tylnego koła. Takie uproszczenie pozwoliło na analizę ruchu motocykla bez zastosowania maszyn cyfrowych. Model zaproponowany przez Koenena został zastosowany przez Berritte (*Berritta i inni, 2000*) ale z pominięciem podatności widelca. Wyniki przeprowadzonych przez Berritte badań doświadczalnych charakteryzowały się dobrą zgodnością z wynikami symulacji, co potwierdziło prawidłowość przyjętych założeń upraszczających. Model zaproponowany przez Koenena przy współpracy z Sharpem w roku 2001 został wykorzystany do komputerowej symulacji na platformie AutoSim.

Znacząca liczba prac dotyczących modelowania ruchu motocykla związana jest z Vittore Cossalter. W roku 1999 (*Cossalter i inni, 1999*) przeprowadził analizę prostego matematycznego modelu motocykla podczas jazdy po ustalonym torze krzywoliniowym biorąc przede wszystkim pod uwagę związek między momentem przyłożonym do kierownicy a kierowalnością pojazdu. Stwierdził, że moment zawiera siedem składników a mianowicie wynikających z masy, bezwładności, sił, momentów działających na opony oraz własności żyroskopowych przedniego zespołu, których udział i oddziaływania zmieniają się wraz z prędkością jazdy.. Ruch motocykla może być opisany jako ruch wokół chwilowej osi zwanej osią Mozzi (rys.13).

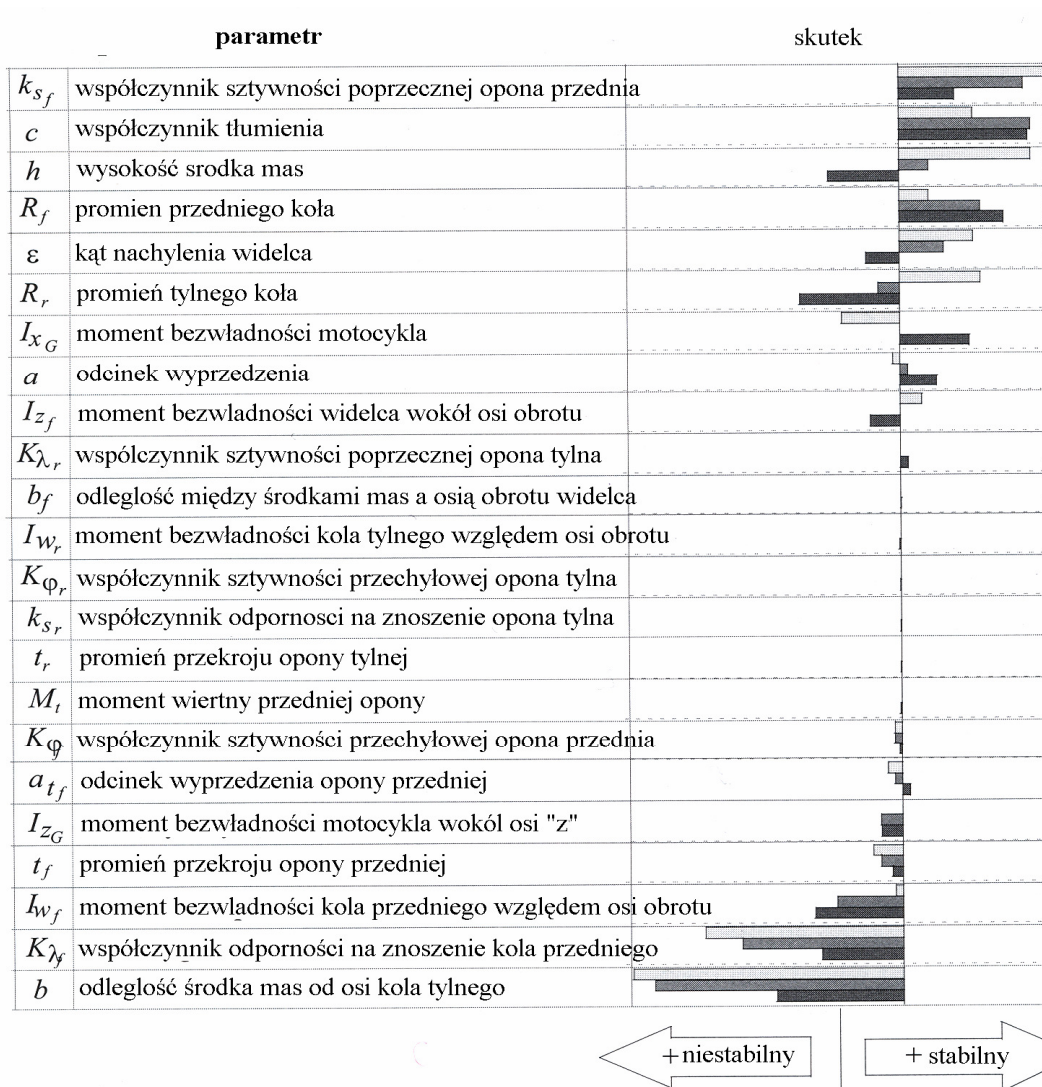


Rys. 13 Chwilowa oś Mozzi.

Cossalter przedstawił koncepcję osi Mozzi dla opisu przemieszczeń liniowych i kątowych motocykla (Cossalter i inni, 2004) i porównał wyniki badań doświadczalnych jazdy slalomowej z wynikami analizy teoretycznej uzyskując dobrą zgodność, co dało asumpt do stwierdzenia przydatności tej koncepcji do analizy innych manewrów. Inne prace Cossaltera dotyczą między innymi badań wpływu podatności ramy i ruchu motocyklisty na stateczność motocykla (Cossalter i inni, 2005). Do analizy został wykorzystany liniowy model motocykla wraz z kierowcą o 12 stopniach swobody. Przedni zespół składający się z widelca i przedniego koła miał możliwość skręcania się zarówno wokół osi prostopadłej jak i równoległej do osi widelca. Zespół tylnego wahacza wraz z kołem miał możliwość skręcania się wokół osi prostopadłych do osi obrotu wahacza. Kierowca, a właściwie jego korpus, mógł wykonywać przechyły poprzeczne i przemieszczać się wzdłuż motocykla. Jednym z wniosków zaprezentowanych przez Cossaltera jest stwierdzenie, że podatność skrętna zespołu prowadzącego przednie koło dla ruchu wokół osi prostopadłej do osi widelca ma istotny wpływ na postać ruchu wobble powodując wystąpienie niestabilności przy prędkościach poniżej 10m/s. Zostało to przedstawione jako wynik uwzględnienia efektu żyroskopowego wynikającego z ruchu skręcania zdecydowanie tłumiącego oscylacje wobble co skutkuje tym, że mogą być one niestabilne tylko przy małych prędkościach. Wpływ drugiej podatności przedniego zespołu na stabilność ruchu jest pomijalnie mały. Uwzględnienie podatności skrętnej wahacza tylnego zmniejsza stopień tłumienia oscylacji typu weave przy dużych prędkościach. Ruchy kierowcy powodują zmniejszenie częstotliwości, a zwiększenie tłumienia oscylacji wobble dla prędkości

poniżej 25m/s. Ponadto ruchy kierowcy stabilizują oscylacje weave przy dużych prędkościach. Przedstawiona analiza pozwala na ocenę przyjętych założeń przy tworzeniu modeli matematycznych motocykla. Cossalter jest również autorem podręcznika Motorcycle Dynamics (Cossalter, 2002) w którym dwa rozdziały dotyczą podstaw stateczności i kierowności motocykla. Między innymi zostały wybrane i opisane parametry konstrukcyjne motocykla mające wpływ na jego stateczność i kierowność oraz przedstawiono wyniki analizy ich wpływu na wartość współczynnika tłumienia oscylacji typu wobble i weave. Wyniki analizy zostały przedstawione w tabelach 1.2 i 1.3.

Tabela 1.2



Wpływ zmian niektórych parametrów motocykla na wartość tłumienia postaci wobble dla różnych prędkości. Kolor jasno szary- 10m/s, szary 30m/s, ciemnoszary 60m/s

(Cossalter 2002)

Tabela 1.3.

parametr		skutek	
b	odległość środka mas od osi koła tylnego		+
ε	kąt nachylenia widelca		+
I_{W_f}	moment bezwładności koła przedniego względem osi obrotu		+
k_{s_r}	współczynnik odporności na znoszenie opona tylna		+
h	wysokość środka mas		+
I_{x_G}	moment bezwładności motocykla		+
I_{z_f}	moment bezwładności widelca wokół osi obrotu		+
I_{W_r}	moment bezwładności koła tylnego względem osi obrotu		+
R_r	promień tylnego koła		+
b_f	odległość między środkami mas a osią obrotu widelca		+
K_{φ_r}	współczynnik sztywności przechyłowej opona tylna		+
a_{t_f}	odcinek wyprzedzenia osi przedniej		+
k_{s_f}	współczynnik sztywności poprzecznej opona przednia		+
K_{λ_f}	współczynnik odporności na znoszenie koła przedniego		+
K_{λ_r}	współczynnik sztywności poprzecznej opona tylna		+
K_{φ_f}	współczynnik sztywności przechyłowej opona przednia		+
t_f	promień przekroju opony przedniej		+
t_r	promień przekroju opony tylnej		+
M_t	moment wiertny opony przedniej		+
c	współczynnik tłumienia		+
a	odcinek wyprzedzenia		+
I_{z_G}	moment bezwładności motocykla wokół osi "z"		+
R_f	promień przedniego koła		+

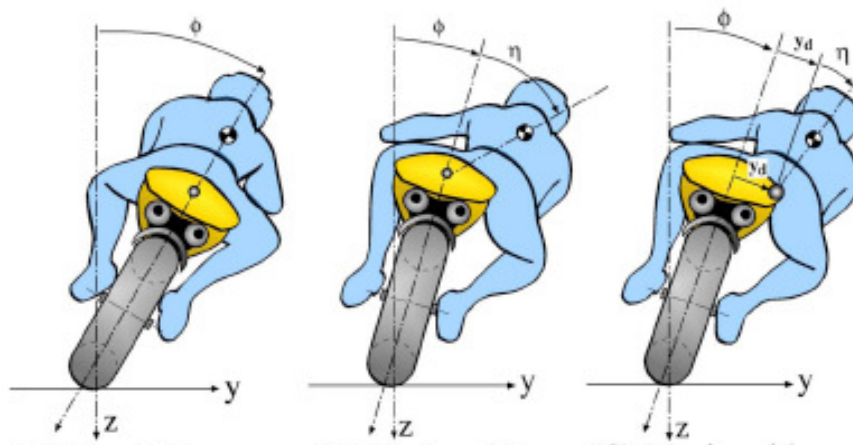
Wpływ zmian niektórych parametrów motocykla na wartość tłumienia postaci weave dla różnych prędkości. Kolor jasno szary- 10m/s, szary 30m/s, ciemnoszary 60m/s

(Cossalter 2002)

Należy zwrócić uwagę, że przedstawione w tabelach wyniki analizy są wynikami analizy jakościowej dotyczącej tylko tłumienia postaci wobble i weave dla motocykla o przeciętnych parametrach konstrukcyjnych. Na ich podstawie można dokonać wyboru parametrów motocykla dla analizy ilościowej jak i jakościowej spodziewając się znaczącego wpływu ich zmienności na zachowanie się motocykla. Przedstawione przez Cossaltera wyniki wskazują również na znaczący wpływ prędkości jazdy na tłumienie postaci *wobble* i *weave*. Zmienność niektórych parametrów np. zwiększanie wysokości środka mas motocykla przy większych prędkościach skutkuje zdecydowanym zmniejszeniem tłumienia postaci wobble, jednocześnie zwiększając tłumienie postaci

weave. Wpływ zmian niektórych parametrów motocykla na tłumienie drgań motocykla jest inaczej oceniany przez Cossaltera, a inaczej przez Sharpa.

W wielu pracach dotyczących kierowności motocykla podkreślany jest wpływ kierowcy, rozumiany jako jego doświadczenie. Kierowca oddziałuje na motocykl w dwojaki sposób. Po pierwsze stanowi jego strukturalną część, swoją masą i momentem bezwładności, po drugie jako osoba prowadząca pojazd. Dla realizacji zadania wykorzystuje nie tylko sprzężenie zwrotne (feedback), ale również strukturę sprzężenia do przodu (feedforward). Kierowca ma do dyspozycji szereg wielkości umożliwiających uzyskanie pożądanego toru jazdy. Są to przede wszystkim; moment przyłożony do kierownicy, kąt obrotu kierownicy, przechył motocykla, przechył kierowcy względem motocykla, przemieszczenie poprzeczne kierowcy oraz regulacja momentu napędowego. Rice w swojej pracy (*Rice 1978*) wykazał, że szybkość przechylania się kierowcy, wartość kąta przechyłu, przesunięcie boczne ciała kierowcy oraz moment przyłożony do kierownicy podczas rozpoczynania manewru np. zmiany pasa ruchu zależą od doświadczenia kierowcy (rys.14)



Rys.14 Model kierowcy dla jazdy po torze krzywoliniowym (*Bertolazzi i inni 2006*)

Niektóre manewry można wykonywać ze znacznym udziałem ruchu ciała kierowcy. Trudno jest ustalić optymalną metodę postępowania kierowcy dla danego manewru, oraz sprecyzować kryterium wg którego można ocenić realizację manewru. W przypadku pojazdów wyścigowych takim kryterium mógłby być czas przejazdu, ale w przeciętnych warunkach drogowych, ze względu na bezpieczeństwo, nie znajduje on zastosowania. W pracy Bertolazzi (*Bertolazzi i inni 2006*) wprowadzono współczynnik ruchliwości zdefiniowany w następujący sposób:

$$C_0 = \frac{H}{\Delta}$$

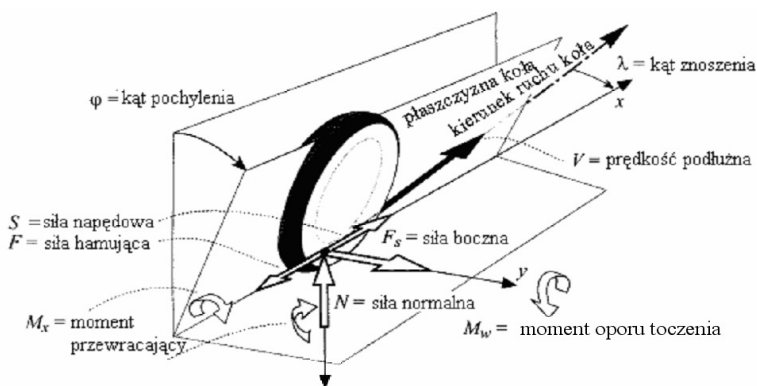
gdzie :

H - prędkość przechylenia,

Δ - prędkość skrętu kierownicą.

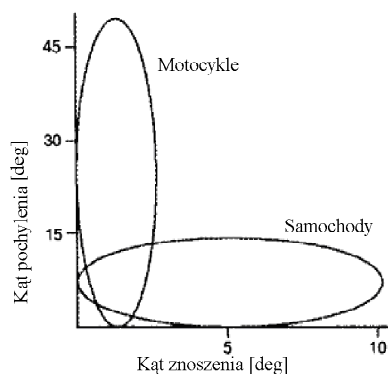
Badano wpływ zmienności C_0 od 0-1 na czas realizacji manewru. Stwierdzono, że przechył kierowcy powoduje wytworzenie sił bocznych na kołach motocykla szybciej niż obrót kierownicy i uzyskuje się dzięki temu skrócenie czasu realizacji manewru.

Jednym z istotnych zespołów motocykla wpływających na jego stateczność i kierowność jest opona. D.V. Singh, jako jeden z pierwszych badaczy zajmujących statecznością motocykla, w analizie stateczności ruchu motocykla uzależnił siły powstające w obszarze styku koła z drogą od wartości kąta skrętu koła. W dalszych pracach dotyczących modelowania ruchu motocykla pojawiają się bardziej zaawansowane modele współpracy koła ogumionego z drogą. Przykładowo Sharp (*Sharp, 1971*) uzależnił powstające w punkcie styku koła ogumionego z drogą siły od kąta znoszenia i kąta pochylenia koła wprowadzając ponadto w przypadku bocznej siły model relaksacyjny pierwszego rzędu. Ogólnie można stwierdzić, że współpraca koła ogumionego z drogą może być reprezentowana przez system składający się z trzech sił i trzech momentów (rys.15). Są to siły wzdłużna, poprzeczna, normalna oraz momenty: stabilizujący, wywracający i moment oporu toczenia. Istnieje wiele modeli współpracy koła ogumionego z drogą np. model Uffelmanna (*Uffelmann, 1978*) czy też bardzo popularny model występujący pod nazwą Magic Formula (*Pacejka i inni, 1987*). Modele te były przygotowane do zastosowania w modelowaniu ruchu samochodów. Modele te wymagają modyfikacji ze względu na dużą wartość kąta przechyłu w przypadku motocykli (rys.16).



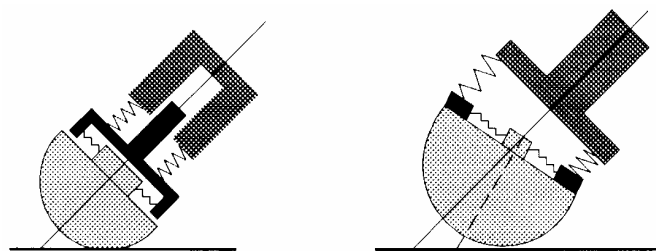
Rys. 15. Siły i momenty w punkcie styku koła ogumionego z drogą

(Cossalter V. 2002)



Rys.16 Porównanie zakresu pracy koła ogumionego w samochodach i motocyklach

Podstawowym problemem jest określenie punktu styku koła ogumionego z drogą. Jeśli przyjąć, że koło ogumione jest nieskończenie cienką tarczą z podatnością promieniową i z punktem styku przemieszczającym się obwodowo przy wzrastającym kącie pochylenia i skrętu to pojawia się problem wyznaczenia wartości momentu wywracającego. Uwzględniając zarys karkasa opony (Cossalter and Lot, 2002) można zauważyć, że punkt styku przemieszcza się w kierunku poprzecznym. Wartość momentu przewracającego jest konsekwencją tego przemieszczenia. Cossalter zastosował prosty model w którym opona mogła przemieszczać się w stosunku do piasty zachowując swój kształt przy czym wprowadzone do modelu sprężyny miały charakterystyki liniowe (rys.17).



Rys.17. Modele współpracy koła ogumionego opracowane przez Cossaltera
(Cossalter i inni 2005)

W bardziej zaawansowanym modelu współpracy pojawiła się możliwość przekręcania karkasa względem piasty koła (prawa część rys17) . W pracy Lot i Cossalter (Cossalter i inni, 2005) został zastosowany prostszy model współpracy koła ogumionego z drogą, a wyniki eksperymentu wykazały dobrą zgodność z wynikami symulacji. Przyjęcie stałego zarysu karkasa pozwala na określenie, poprzez zależności geometryczne rzeczywistego punktu współpracy koła z drogą. Siły w płaszczyźnie drogi zależą od

deformacji karkasa oraz od wartości kąta bocznego znoszenia, poślizgu wzdłużnego, kąta pochylenia i obciążenia pionowego. W wielu pracach dotyczących badań stabilności i kierowności zmienne w czasie odkształcenie karkasa jest pomijane.

1.3. Podsumowanie przeglądu literatury

Przedstawiony przegląd literatury przedmiotu nie wyczerpuje całości bardzo obszernego zagadnienia. Jak wskazano w poprzednim rozdziale w wielu ośrodkach naukowych nadal rozwija się własne modele obliczeniowe do analizy dynamiki pojazdów jednośladowych. Prowadzone są także badania laboratoryjne i drogowe pojazdów jednośladowych. Analiza literatury przedmiotu pozwala na określenie stopnia komplikacji modelu w zależności od postawionego zadania. Pozwala również wywnioskować, które z parametrów charakteryzujących motocykl mają istotny wpływ na jego stabilność i kierowność oraz jakie metody stosowane są do oceny zachowania się motocykla. W wielu pozycjach literaturowych prezentowane są tylko ogólne analizy jakościowe wpływu zmienności parametrów motocykla na jego zachowanie podczas ruchu. Niewiele prac prezentuje temat weryfikacji modelu matematycznego oraz korelacje pomiędzy przyjętym modelem a rzeczywistością. Mimo istnienia komercyjnych pakietów AUTOSIM, DADS, ADAMS, które wymagają odpowiedniego przygotowania obsługi oraz określenia wielu parametrów motocykla, wydaje się, że nadal istnieje potrzeba rozwijania własnych, dokładniejszych modeli do określonych zastosowań. Pociąga to za sobą również konieczność wykonywania badań laboratoryjnych i drogowych na obiekcie rzeczywistym, których wyniki można wykorzystać między innymi do oceny adekwatności modelu. I w tym nurcie mieści się niniejsza praca.

1.4. Cel pracy

Do najważniejszych celów pracy należy zaliczyć:

- ocenę istotności wpływu wybranych parametrów konstrukcyjnych na zachowanie się układu kierowca – motocykl,
- prezentacja metodyki i wykonanie badań stanowiskowych i drogowych stateczności i kierowalności,
- przedstawienie i wybór kryteriów oceny kierowalności i stateczności układu kierowca – motocykl, na podstawie analiz zweryfikowanego modelu matematycznego oraz przeprowadzonych badań drogowych i stanowiskowych,
- analizę wpływu zmian parametrów geometrycznych i masowych przedniego zespołu na charakterystyki stateczności i kierowalności motocykla,
- określenie związków pomiędzy właściwościami statycznymi i dynamicznymi pojazdu, a jego kierowalnością,
- sformułowanie wniosków oraz sposobu postępowania przy doborze parametrów konstrukcyjnych zespołu przedniego jako układu pasywnego, w oparciu o zaproponowane kryteria.

Analizy prowadzone w niniejszej pracy dotyczą zarówno badań teoretycznych jak i doświadczalnych. Przez stateczność ruchu rozumie się zdolność powrotu pojazdu do położenia równowagi w określonym czasie po ustąpieniu zaburzeń. Przez kierowalność motocykla, zdolność pojazdu do wykonania określonych manewrów przy możliwym i określonym wysiłku prowadzącego pojazd. Poddane analizie zostaną tylko parametry związane z konstrukcją motocykla bez uwzględniania w analizie wpływu dodatkowych urządzeń. W celu realizacji badań teoretycznych zostaną zastosowane istniejące oraz opracowane nowe modele matematyczne dynamiki ruchu motocykla.

1.5. Teza pracy

Poprzez odpowiedni dobór parametrów konstrukcyjnych można osiągnąć kompromis pomiędzy dobrą statecznością i kierowalnością pojazdu jednośladowego, dla określonego zakresu warunków ruchu.

1.6. Zakres pracy

Zakres pracy obejmuje:

1. Określenie parametrów geometrycznych i masowych analizowanego pojazdu na specjalnych stanowiskach pomiarowych
2. Analizę stateczności ruchu dla uproszczonego modelu motocykla o 4 stopniach swobody
3. Analizę postaci ruchu motocykla na specjalnym bębnowym stanowisku badawczym
4. Badania drogowe dla różnych wartości parametrów konstrukcyjnych motocykla
5. Porównanie wyników badań teoretycznych, stanowiskowych i drogowych
6. Wyprowadzenie równań ruchu dla modelu o 13 stopniach swobody, weryfikacja doświadczalna modelu
7. Analiza wpływu zmian parametrów konstrukcyjnych na stabilność i kierowność pojazdu przy wykorzystaniu modelu o 13 stopniach swobody
8. Wnioski i kierunki dalszych prac.

2. BADANIA EKSPERYMENTALNE MOTOCYKLA

2.1. Badania stanowiskowe

2.1.1. Wyznaczenie parametrów kinematycznych oraz masowych

Podstawowe wymiary oraz rozkład masy motocykla uzyskano na podstawie badań stanowiskowych. W sposób bezpośredni zmierzono:

- rozstaw kół
- długość kinematycznego odcinka wyprzedzenia
- kąt pochylenia przedniego widelca
- kąt pochylenia główki ramy
- odległość pomiędzy płaszczyzną przedniego widelca a osią koła
- promienie statyczne kół
- długość wahacza, długość przedniego widelca
- wymiary związane z montażem aparatury pomiarowej

a także :

- masę przypadającą na przednie oraz tylne koło (położenie środka masy względem osi wzdłużnej)
- masę przedniego zespołu (przedni widelec, koło, kierownica), masę kierowcy.

Wysokość środka masy wyznaczono za pośrednictwem pomiaru reakcji pionowej tylnego koła na podłoże oraz kąta pochylenia motocykla w płaszczyźnie poprzecznej. Motocykl unoszono za przednie koło. Sposób wyznaczania położenia środka masy przedstawiono na rys.2.1.



Rys.2.1 Wyznaczanie położenia wysokości środka masy motocykla.

Moment bezwładności motocykla względem osi pionowej wyznaczono wykorzystując specjalne karuzelowe stanowisko badawcze (rys.2.2)



Rys.2.2 Wyznaczanie momentu bezwładności motocykla względem osi pionowej na stanowisku karuzelowym.

Wymuszano drgania kątowe stanowiska wraz z motocyklem. Znając częstość drgań własnych stanowiska wraz z motocyklem, moment bezwładności stanowiska oraz sztywność drążka skrętnego na którym zamocowano stanowisko, wyznaczono moment bezwładności motocykla wraz z kierowcą i aparaturą badawczą.

Moment bezwładności motocykla względem osi wzdłużnej (leżącej w płaszczyźnie jezdni) wyznaczono poprzez pomiar okresu drgań motocykla (z kierowcą, oraz bez kierowcy). Motocykl zamocowanego pomiędzy dwiema sprężynami umieszczonymi poziomo. Wymuszono ruchy przechyłowe o niewielkiej amplitudzie. Znając sztywność sprężyn, wysokość ich zamontowania oraz częstość drgań kątowych, wyznaczono wspomniany moment bezwładności na podstawie wzoru:

$$J_x = \frac{c_{ukl}}{\omega_s^2} \quad (2.1)$$

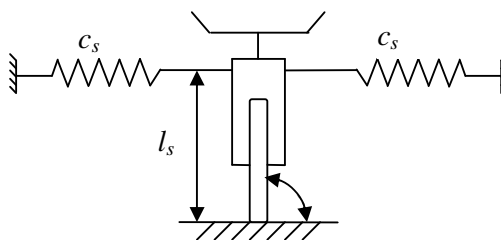
gdzie:

$c_{ukl} = 2c_s l_s^2$, - sztywność kątowa układu

c_s - sztywność sprężyny

l_s - wysokość zamontowania sprężyny

ω_s - częstotliwość drgań.



Rys.2.3 Schemat sposobu wyznaczania momentu bezwładności wokół osi podłużnej motocykla

Sposób pomiaru przedstawiono na 2.4.



Rys. 2.4 Pomiar momentu bezwładności motocykla względem osi wzdłużnej w płaszczyźnie jezdni.

Momenty bezwładności przedniego widelca oraz przedniego koła względem osi obrotu oszacowano na podstawie badań metodą wahadła.

Wszystkie wartości parametrów uzyskane na podstawie badań laboratoryjnych zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 2.1 Podstawowe parametry badawczego motocykla

Masa własna motocykla	185 kg
Masa motocykla wraz kierowcą i aparaturą	320kg
Rozkład mas motocykla badawczego	Przód 150 kg, tył 170 kg
Wysokość środka mas	0,7 m
Moment bezwładności wokół osi „z”	120kgm ²
Moment bezwładności wokół osi „x”	40kgm ²
Moment bezwładności wokół osi „y”	100kgm ²

Moment bezwładności widelca wraz kołem przednim wokół osi obrotu	0,6 kgm ²
Rozstaw osi	1,600 m
Odcinek wyprzedzenia	0,120m
Promień koła	0,33m

Parametry modelu takie jak współczynniki znoszenia opon - C_α , C_γ , współczynnik tarcia wiskotycznego wokół kolumny kierownicy - B , współczynnik wzmocnienia kierowcy - K_ϕ^T zostały wyestymowane na podstawie badań drogowych weryfikacyjnych.

2.2. Badania drogowe

Przeprowadzone badania drogowe można podzielić na dwa rodzaje:

Badania stateczności:

- wymuszenie impulsowe na kierownicy

Badania kierowalności

- ustalona jazda po okręgu
- pojedyncza zmiana pasa ruchu
- wejście w łuk
- jazda slalomowa

Badania kierowalności to próby typu *closed-loop* (w zamkniętej pętli), w których kierowca ingerował w ruch motocykla przede wszystkim poprzez zadawanie momentu siły na kierownicy. W mniejszym stopniu oddziaływał poprzez pochylanie tułowia.

Badania stabilności to głównie próby typu *open-loop* (w otwartej pętli), w których kierowca nie ingerował czynnie w zachowanie się motocykla po wcześniejszym wymuszeniu (głównie impulsem momentu). Badania te zostały wykonane dla motocykla Yamaha XV 1000.

Zarówno wśród prób kierowalności jak i stabilności można wyodrębnić:

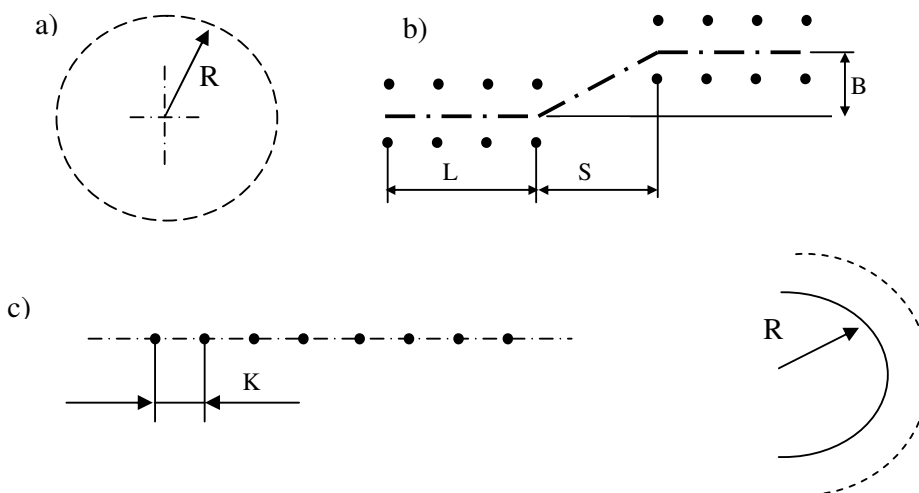
- próby weryfikacyjne, przeprowadzone w celu oceny adekwatności opracowanych modeli matematycznych do rzeczywistość oraz estymacji parametrów których pomiar w warunkach laboratoryjnych był niemożliwy. Są to próby wykonywane w ustalonych warunkach oraz przy nominalnych parametrach konstrukcyjnych motocykla,
- próby zasadnicze, wykonywane dla zmiennych warunków (prędkości, wymuszeń, parametrów konstrukcyjnych), dające możliwość oceny wpływu wprowadzonych zmian konstrukcyjnych na zachowanie się motocykla.

2.2.1. Warunki badań drogowych

Warunki przeprowadzania badań były następujące:

- próby wykonano na płaskim placu o suchej nawierzchni betonowej (wysoki współczynnik przyczepności), przy bezwietrznej pogodzie,
- kierowca (180cm, 75 kg) ma średnie doświadczenie w prowadzeniu motocykli,
- kierowca starał się nie wykonywać ruchów tułowiem podczas manewrów, kontrolował pojazd tylko ruchami kierownicą (z wyjątkiem prób, gdzie dokonywano pomiaru prędkości przechyłu korpusu kierowcy),
- próby przy ustalonych warunkach powtarzano kilkakrotnie, aby wyestymować przebiegi średnie i odchylenia standardowe, lub zidentyfikować występowanie błędów przypadkowych..

Poniższy rysunek przedstawia schematyczne tory przeprowadzonych prób drogowych wraz z charakterystycznymi wymiarami, a) ustalonej jazdy po okręgu, b) pojedynczej zmiany pasa ruchu, c) jazdy slalomowej, d) manewru „U” (wjazd i wyjazd z łuku) (Cossalter 2000).



Rys.2.5. Schemat toru dla manewru: a) ustalonej jazdy po okręgu ($R=12m$), b) pojedynczej zmiany pasa ruchu, c) slalom ($L=30m$, $S=21m$, $B=3.6m$., $K=7,14,21m$), d) wejście w łuk ($R =50m$)

2.2.2. Aparatura badawcza

Tabela 2.2

Mierzona wielkość	Przetwornik	Zakres pomiarowy	Dokładność
δ - kąt obrotu kierownicy	Potencjometr obrotowy	$\pm 30^\circ$	1 %
$\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$ - prędkości kątowe odchylenia i przechyłu poprzecznego	Żyroskopy MURATA	$\pm 90^\circ/\text{s}$	0.5 %
v_x , v_y - prędkość wzdłużna i poprzeczna	Correvit S	v_x : 0.5÷350 km/h, v_y : 0÷40 km/h	0.2 % 1 %
ϕ - kąt przechyłu poprzecznego	Correvit H (dwie sztuki)	$\pm 30^\circ$	0.5 %
M_k – moment na kierownicy	Układ tensometryczny	$\pm 40 \text{ Nm}$, $\pm 100 \text{ Nm}$	0.5 %
ψ_k - prędkość kątowa obrotu kierownicy	Żyroskop MURATA	$\pm 90^\circ/\text{s}$, $\pm 100^\circ/\text{s}$	0.5 %
$\dot{\phi}_{kier}$ - prędkość kątowa przechyłu tułowia kierowcy	Żyroskop MURATA	$\pm 90^\circ/\text{s}$, $\pm 100^\circ/\text{s}$	0.5 %

W tabeli 2.1 zamieszczono opis aparatury badawczej stosowanej podczas badań drogowych. Sygnały z czujników pomiarowych były rejestrowane za pomocą przetwornika analogowo-cyfrowego AD-12 i komputera typu laptop. Przetwornik do akwizycji danych, komputer i dodatkowy akumulator 12 V (sumaryczna masa ok. 30 kg) zostały zamontowane na siedzisku pasażera. Potencjometr do pomiaru kąta skrętu zamontowano do ramy motocykla i połączono z kierownicą za pomocą układu mechanicznego w taki sposób, aby uzyskać jak największe przełożenia układu. Żyroskopy zamontowano na zbiorniku paliwa w prostopadłych do siebie kierunkach (osie x i y). Żyroskop do pomiaru prędkości obrotu kierownicy zamocowano równolegle do osi obrotu przedniego widelca. Głowicę Correvit S zamontowano do ramy motocykla na wysokości 300 mm od jezdni. Głowice Correvit H zamocowano symetrycznie po dwóch stronach w równych odległościach od płaszczyzny podłużnej motocykla na wysokości 400 mm od powierzchni jezdni.

2.2.3. Próba ustalonej jazdy po okręgu

W próbie quasi statycznej kierowca miał za zadanie utrzymywać stały promień toru (poruszał się po zaznaczonym okręgu), stopniowo zwiększając prędkość.

Przeprowadzone próby pozwoliły na wyznaczenie zależności kąta przechyłu poprzecznego $\phi(a_y)$, kąta skrętu kierownicy $\delta(a_y)$, momentu na kierownicy $\tau(a_y)$ w funkcji przyspieszenia dośrodkowego. Wyniki prób wykorzystano przede wszystkim do weryfikacji modelu oraz estymacji wybranych parametrów.

2.2.4. Próba pojedynczej zmiany pasa ruchu

Kierowca miał za zadanie pokonać wyznaczony tor ruchu ze stałą prędkością. Próby wykonano dla różnych prędkości jazdy przy niezmiennych wymiarach toru. Próba pozwalała na zarejestrowanie manewru przeciwskrętu, wartości momentu na kierownicy, czasu reakcji motocykla na wymuszenie od kierowcy. Wykorzystywana przede wszystkim do oceny kierowności. Manewr wykonywano dla zmiennych parametrów kinematycznych.

2.2.5. Próba slalomu

Kierowca miał za zadanie pokonanie slalomu ze stałą prędkością. Próby wykonywano dla różnych rozstawów znaczników oraz różnych prędkości jazdy dobranych w taki sposób, aby uzyskać szeroki zakres zmienności prędkości jazdy oraz częstotliwości wymuszeń przez kierowcę. Próba służy głównie do wyznaczenia wartości opóźnienia pomiędzy wymuszeniem od kierowcy a reakcją pojazdu. Podstawowym parametrem oceny jest wartość przesunięcia pomiędzy maksimum momentu jakim kierowca oddziałuje na kierownicę, a maksimum przechyłu poprzecznego. Manewr powtarzano dla zmiennych parametrów kinematycznych.

2.2.6. Manewr „U”

Kierowca miał za zadanie przejechać wyznaczony tor ze stałą prędkością. Manewr wykorzystywany do oceny kierowności, poprzez pomiar wartości momentu na kierownicy podczas przeciwskrętu przy wejściu i na wyjściu z łuku oraz czasu reakcji motocykla na wymuszenie. Manewr przeprowadzono dla zmiennych parametrów kinematycznych.

3. BADANIA STATECZNOŚCI MOTOCYKLA

W ramach pracy przeprowadzono badania

- modelowe, oparte na linowym modelu o czterech stopniach swobody oraz modelu złożonym o 13 stopniach swobody.
- stanowiskowe, przeprowadzone na specjalnie przygotowanym stanowisku z motocyklem zamontowanym w taki sposób, aby możliwie dokładnie odwzorować układ sił działających na motocykl podczas ruchu
- drogowe, wykonane w warunkach rzeczywistych

Poszczególne rodzaje badań zostały opisane poniżej.

We wszystkich badaniach ruch modelu lub motocykla był zaburzany wymuszeniem impulsowym. Wymuszenie stanowił impuls momentu siły przykładany do kierownicy o podobnej wartości dla wszystkich prób.

Celem badań była ocena wpływu parametrów ruchu oraz konstrukcyjnych na stateczność motocykla, porównanie wyników uzyskanych na podstawie symulacji z wynikami stanowiskowymi oraz drogowymi. Ponadto sformułowanie wniosków dotyczących korelacji pomiędzy różnymi rodzajami badań, które określiłyby możliwość zastąpienia trudnych do przeprowadzenia i niebezpiecznych, drogowych badań stateczności motocykla, badaniami symulacyjnymi lub stanowiskowymi.

3.1. Badania modelowe

3.1.1. Model motocykla (*Sharp 1971*)

Do identyfikacji zjawisk dotyczących stateczności kierunkowej pojazdu jednośladowego można wykorzystać model liniowy. W zakresie odpowiednio przyjętych ograniczeń umożliwia on ocenę wpływu oraz określenie wartości parametrów konstrukcyjnych mających decydujący wpływ na możliwość wystąpienia podczas jazdy krytycznych stanów ruchu. Taka analiza może zostać wykorzystana na etapie projektowania do zapewnienia bezpieczeństwa aktywnego pojazdu.

Sformułowany model rozpatrywanego układu w kolejnych etapach rozwoju został poddany weryfikacji badawczej. Weryfikację przeprowadzono na podstawie wykonanych quasi – statycznych i dynamicznych prób drogowych. Obejmowały one jazdę po okręgu o

stałym promieniu oraz manewr pojedynczej zmiany pasa ruchu. Wyniki weryfikacji modelu przedstawiono w pracy Grzeżek, Ślusarczyk (Grzeżek, Ślusarczyk 2003)

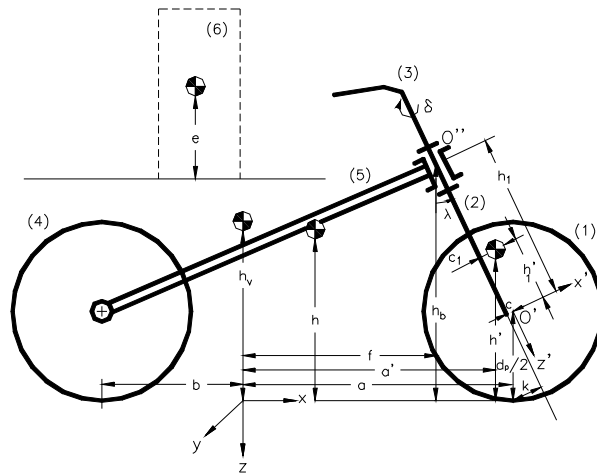
Model fizyczny (Ślusarczyk 2004) motocykla (rys.3.1.1) składa się z dwóch podstawowych zespołów połączonych ze sobą za pomocą pary obrotowej (główka ramy), są to:

- zespół przedni – w skład którego wchodzi: przednie koło (1), widelec (2), kierownica wraz z osprzętem (3),
- zespół tylny – koło tylne (4), rama motocykla (5) (z silnikiem, zbiornikiem paliwa itp.), kierowca (6).

W parze obrotowej łączącej zespoły uwzględniono zjawisko tarcia wiskotycznego, będące substytutem efektu działania tłumika drgań skrętnych.

Model motocykla z kierowcą został sformułowany przy następujących założeniach:

- rozważa się ruch motocykla ze stałą prędkością wzdłużną v_x dla małych kątów pochylenia ϕ i małych ruchów kątowych kierownicy δ . Zakłada się brak sprzężenia ruchów motocykla z ugięciami zawiesznień. Ruch pionowy mas resorowanych i nieresorowanych został pominięty, zawieszzenia są traktowane jako sztywne,



Rys.3.1.1 Parametry geometryczne modelu fizycznego motocykla

- motocykl jest symetryczny względem swojej płaszczyzny wzdłużnej,
- model kierowcy jest uproszczony, bezinercyjny, opisany tylko odpowiednim wzmocnieniem, kierowca jest traktowany jako sztywne ciało przymocowane do zespołu tylnego motocykla, nie wykonujące ruchów wychyłowych z płaszczyzny motocykla,

- koła traktowane są jako sztywne dyski o punktowym styku z podłożem (niezależnie do kąta przechyłu poprzecznego oraz obciążenia), toczące się bez poślizgu wzdłużnego, siły wzdłużne (przyspieszanie, hamowanie) oraz opory toczenia są pominięte,
- siły poprzeczne zostały opisane uproszczonym modelem liniowym jako funkcje kąta znoszenia i pochylenia koła. Dodatkowo pominięto: zjawisko nabiegania opon, moment stabilizacyjny opon (w przypadku układu kierowniczego motocykla, ze względu na duży odcinek wyprzedzenia, ma on niewielki udział w całkowitym momencie stabilizującym), właściwości tłumiące opon,
- zakłada się, że rama motocykla, mocowanie główki, oraz przedni i tylny widelec są w motocyklach na tyle sztywne, że nie wpływają na rozpatrywane zjawiska,
- oś wału korbowego silnika jest ustawiona poprzecznie,
- pominięto efekty aerodynamiczne (zaczynają odgrywać rolę przy dużych prędkościach ruchu – powyżej ok. 100 km/h lub w warunkach np. wiatru bocznego).

3.1.2 Sformułowanie modelu

Model o czterech stopniach swobody został sformułowany dla następującego wektora współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{q} = [y, \psi, \varphi, \delta]^T \quad (3.1)$$

Uzyskany układ równań różniczkowych został zlinearyzowany dla warunków jazdy na wprost ze stałą prędkością wzdłużną, tzn. dla $\varphi = 0$ i $\delta = 0$. W wielu pracach wykazano, że taki liniowy model może być stosowany w szerokim zakresie przyspieszeń poprzecznych (*Sharp 1974*).

Macierzowe równanie ruchu, drugiego rzędu o stałych parametrach ma postać:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{D} \quad (3.2)$$

gdzie:

\mathbf{M} – masowa,

\mathbf{K} – sił dysypacyjnych i giroskopowych,

\mathbf{C} – sił zachowawczych,

\mathbf{D} – macierz kolumnowa wymuszeń

Model został sparametryzowany tzn. opisany minimalną liczbą niezależnych parametrów konstrukcyjnych w taki sposób, aby zmiana poszczególnego parametru powodowała zmianę całej konfiguracji pojazdu.

Pełny zapis macierzowy modelu przedstawia się następująco:

$$M = \begin{bmatrix} m & m'a' & mh & m'c_1 \\ m'a' & I_{zz} & I_{xz} & I_{zz}'\cos\beta + I_{xz}'\sin\beta + c_1a'm' \\ mh & I_{xz} & I_{xx} & I_{xx}'\sin\beta + I_{xz}'\cos\beta + c_1h'm' \\ m'c_1 & I_{zz}'\cos\beta - I_{xz}'\sin\beta + a'c_1m' & I_{xz}'\cos\beta + I_{zz}'\sin\beta + c_1h'm' & I_{zz}'' \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{U_0}(Y_{\alpha 1} + Y_{\alpha 2}) & U_0m + \frac{1}{U_0}(aY_{\alpha 1} - bY_{\alpha 2}) & 0 & \frac{1}{U_0}kY_{\alpha 1} \\ \frac{1}{U_0}(aY_{\alpha 1} - bY_{\alpha 2}) & \frac{1}{U_0}(a^2Y_{\alpha 1} + b^2Y_{\alpha 2} + a'm'U_0^2) & I_{yy1}\frac{U_0}{r_p} + I_{yy2}\frac{U_0}{r_t} + I_{yy3}\Omega_3 & a\frac{k}{U_0}Y_{\alpha 1} \\ 0 & -I_{yy1}\frac{U_0}{r_p} + I_{yy2}\frac{U_0}{r_t} + I_{yy3}\Omega_3 - hmU_0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{U_0}Y_{\alpha 1} & k\frac{a}{U_0}Y_{\alpha 1} - I_{yy1}\frac{U_0}{r_p}\sin\lambda + U_0c_1m' & I_{yy1}\frac{U_0}{r_p}\cos\lambda & \frac{k^2}{U_0}Y_{\alpha 1} + B \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(Y_{\xi 1} + Y_{\xi 2}) & Y_{\alpha 1}\cos\beta + Y_{\xi 1}\sin\beta \\ 0 & 0 & -(aY_{\xi 1} - bY_{\xi 2}) & -(aY_{\alpha 1}\cos\beta + aY_{\xi 1}\sin\beta) \\ 0 & 0 & -mgh & kZ_1 - m'c_1g \\ 0 & 0 & kZ_1 - kY_{\xi 1} - m'c_1g & kY_{\alpha 1}\cos\beta + kY_{\xi 1}\sin\beta - kZ_1\sin\beta + c_1gm'\sin\beta \end{bmatrix}$$

$$D = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$q = \begin{bmatrix} y \\ \varphi \\ \phi \\ \delta \end{bmatrix} \quad \frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix} v \\ r \\ p \\ \frac{d\delta}{dt} \end{bmatrix} \quad \frac{d^2q}{dt^2} = \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \\ \frac{d^2\delta}{dt^2} \end{bmatrix}$$

gdzie:

a [m] – odległość między środkiem masy tylnego zespołu a osią obrotu przedniego kół mierzona wzdłuż osi x,

- a^{\prime} [m] – odległość między środkiem masy tylnego zespołu a środkiem masy przedniego zespołu mierzona wzdłuż osi x ,
 b [m] – odległość między osią obrotu tylnego koła a środkiem masy tylnego zespołu,
 B – tłumienie wiskotyczne
 c [m] – odległość między osią obrotu przedniego zespołu a osią obrotu przedniego koła mierzona wzdłuż osi x^{\prime} ,
 c_1 [m] – odległość między osią obrotu przedniego zespołu a środkiem masy przedniego zespołu mierzona wzdłuż osi x^{\prime} ,
 $d_{(1,2)}$ [m] – średnice kół,
 e [m] – odległość między środkiem masy korpusu kierowcy a osią przechyłu kierowcy,
 h [m] – wysokość środka masy motocykla nad jezdnią,
 h^{\prime} [m] – wysokość środka masy przedniego układu nad jezdnią,
 I [kg*m²] – moment bezwładności,
 k [m] – odcinek wyprzedzenia mierzony wzdłuż osi x^{\prime} ,
 m [kg] – masa motocykla,
 m^{\prime} [kg] – masa przedniego widelca,
 m_R [kg] – masa korpusu kierowcy,
 m_V [kg] – masa tylnego zespołu,
 p [rad/s] – prędkość przechyłu,
 r [rad/s] – prędkość odchylenia,
 s – operator Laplace,
 t [s] – czas,
 T [N*m] – moment na kierownicy,
 U_0 [m/s] – prędkość wzdłużna,
 v [m/s] – prędkość poprzeczna,
 $C_{\alpha(p,t)}$ [N/deg] – współczynnik odporności na znoszenie
 $C_{\gamma(p,t)}$ [N/deg] – gradient siły poprzecznej względem pochylenia koła
 Z_1 [N] – siła działająca w styku przedniego koła z podłożem,
 α [deg] – kąt znoszenia koła,
 δ [deg] – kąt obrotu kierownicy,
 β [deg] – kąt pochylenia przedniego widelca,
 φ [deg] – kąt przechyłu motocykla,
 φ_R [deg] – kąt pochylenia kierowcy w płaszczyźnie yz ,

$\Omega_{(1,2,3)}$ [m/s] – prędkość kątowna kół, wału korbowego silnika.

Dodatkowe oznaczenia

($\dot{\quad}$) – oznacza wielkości fizyczne przedniego zespołu

3.1.3 Analiza wrażliwości

W celu znalezienia parametrów kinematycznych motocykla mających decydujący wpływ na stateczność ruchu motocykla, przeprowadzono analizę wrażliwości modelu na zmianę wartości tychże parametrów. Ze względu na możliwość zapisania równań modelu liniowego w dziedzinie operatorów Laplace'a oraz wprowadzenie odpowiednich transmitancji, analizę wrażliwości można sprowadzić do obserwacji położenia pierwiastków równania charakterystycznego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. W wyniku przeprowadzonej analizy stwierdzono, że parametry konstrukcyjne mające decydujący wpływ na stateczność pojazdów jednośladowych w ruchu prostoliniowym to między innymi.:

- odcinek wyprzedzenia
- kąt pochylenia przedniego widelca
- masowy moment bezwładności koła przedniego
- współczynnik tłumienia wiskotycznego łożyskowania główki ramy (amortyzator skrętu)

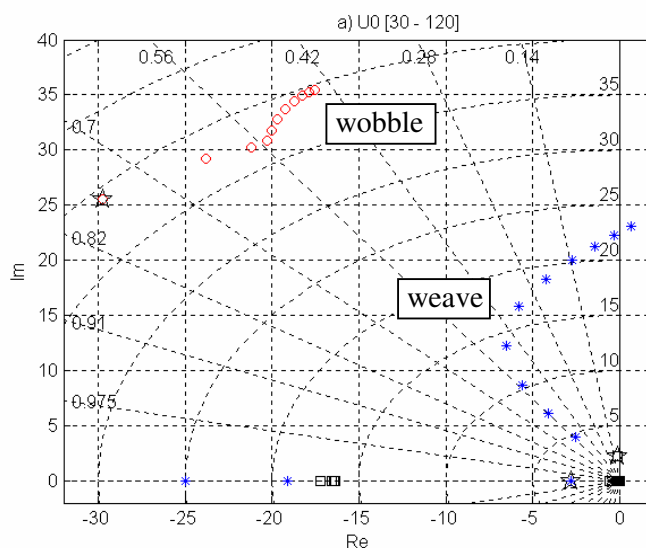
Rozpatrywany jest jakościowy wpływ zmian w/w parametrów konstrukcyjnych na stateczność układu.

Wyniki analizy zobrazowano przedstawiając zmianę położenia biegunów - pierwiastków równania charakterystycznego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w zależności od zmiany danego parametru (Rys.3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4). Dokonywano zmiany parametrów w zakresie $\pm 30\%$ wartości nominalnej.

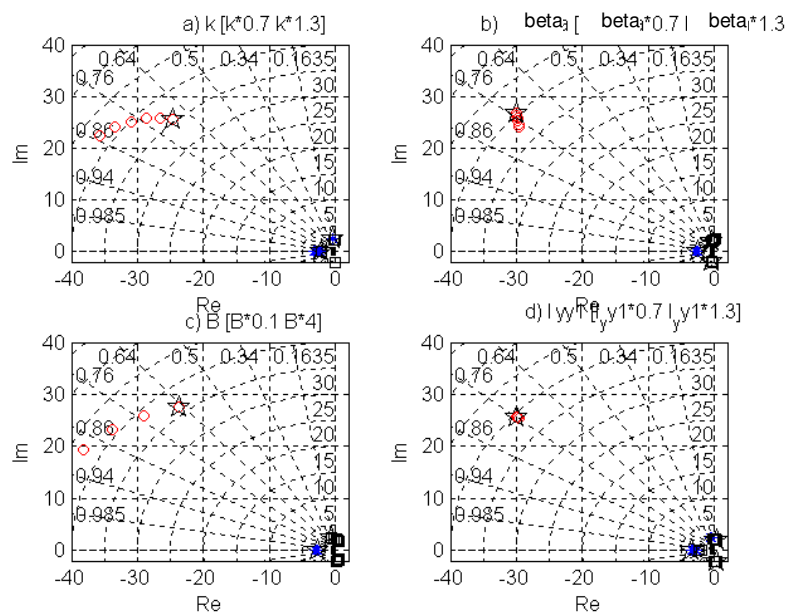
Wykresy zostały sporządzone dla prędkości wzdłużnej 30, 50, 70 km/h. Reprezentacją oscylacyjnych postaci drgań *weave* oraz *wobble* są pierwiastki zespolone, natomiast rzeczywiste odpowiadają ruchom aperiodycznym *capsize* i *side slip*. Dana postać drgań jest stabilna dla ujemnej części rzeczywistej reprezentującego ją pierwiastka. Motocykl traci stateczność ruchu w przypadku wystąpienia niestabilności którejkolwiek postaci drgań.

Na wykresach zamieszczono również krzywe stałej częstości drgań własnych oraz linie stałego tłumienia.

Położenie pierwiastków dla minimalnej wartości parametrów zaznaczono symbolem „☆”.

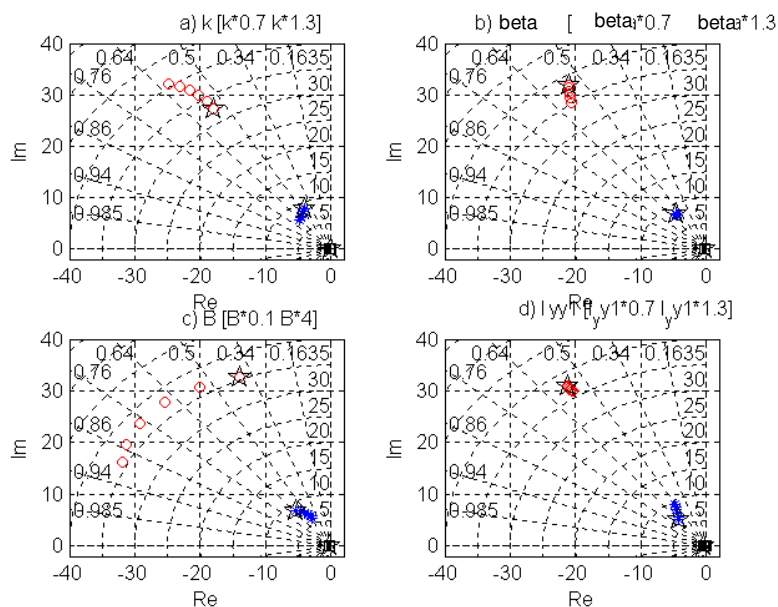


Rys. 3.1.1 Zmiana położenia pierwiastków równania charakterystycznego za zmianą prędkości jazdy (30-120 km/h)



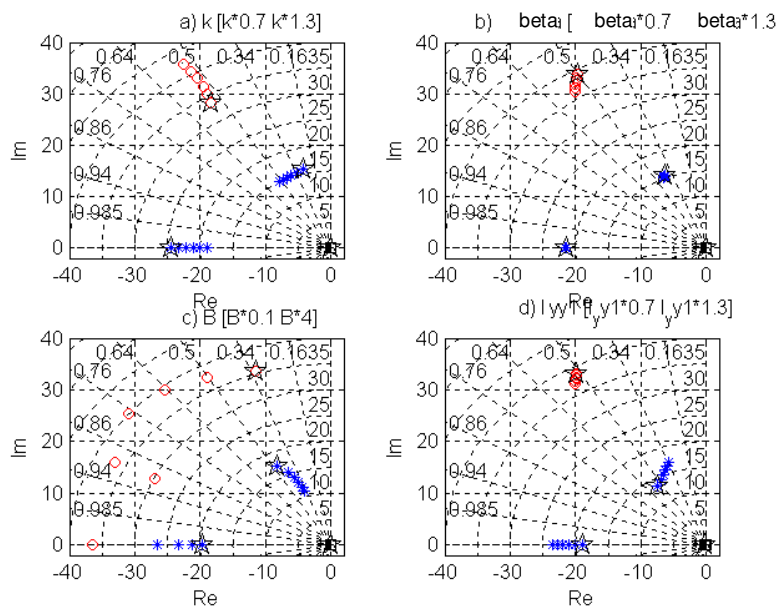
Rys.3.1.2. Zmiana położenia pierwiastków równania charakterystycznego układu dla parametru a) odcinka wyprzedzenia, b) kąta pochylenia widelca przedniego, c) współczynnika tłumienia, d) momentu bezwładności przedniego koła. Prędkości 30 km/h.

○ - wobble, ☆ - weave



Rys.3.1.3 Zmiana położenia pierwiastków równania charakterystycznego układu dla parametru a) odcinka wyprzedzenia, b) kąta pochylenia przedniego widelca, c) współczynnika tłumienia, d) momentu bezwładności przedniego koła. Prędkości 50 km/h.

○ - wobble, * - weave

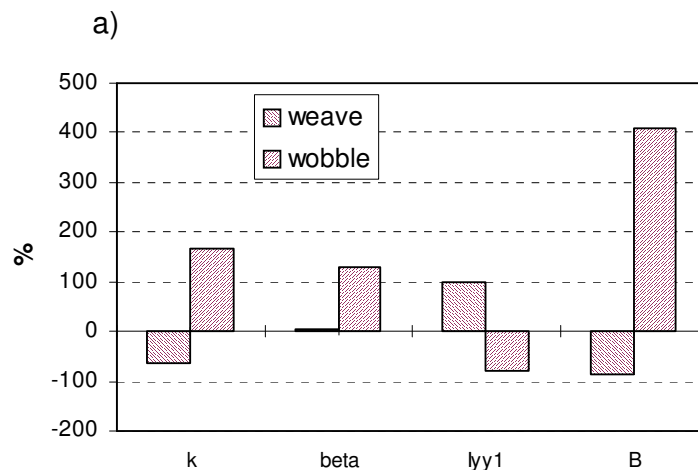


Rys.3.1.4. Zmiana położenia pierwiastków równania charakterystycznego układu dla parametru a) odcinka wyprzedzenia, b) kąta pochylenia przedniego widelca, c) współczynnika tłumienia, d) momentu bezwładności przedniego koła. Prędkości 70 km/h.

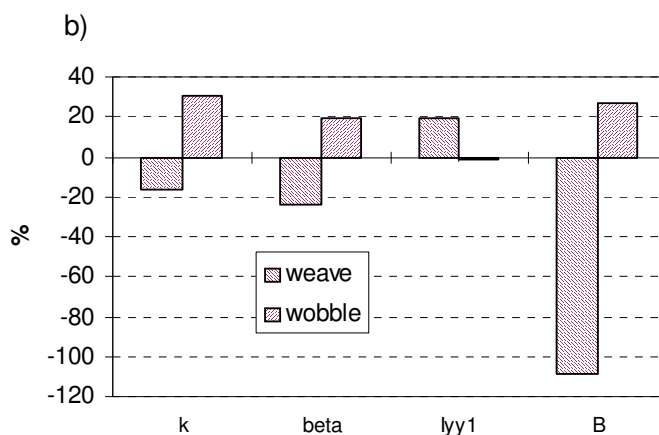
○ - wobble, * - weave

Postacie drgań *weave* i *wobble* są tłumione podkrytycznie. Dla nominalnych parametrów konstrukcyjnych badanego motocykla wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia drgań dla tych postaci mieści się w przedziale $0.12 \div 0.16$. Dla granicznych wartości takich parametrów jak: k , β , a , tłumienie wspomnianych postaci maleje, co może spowodować przy wymuszeniu zewnętrznym o odpowiedniej częstotliwości, utratę stateczności pojazdu. Wpływ *side slip* na stateczność motocykla jest pomijalny ze względu na nadkrytyczne tłumienie tej postaci oraz bardzo małą wartość stałej czasowej. Dla układu kierowca – motocykl postać drgań *capsize* ma zawsze charakter stabilny i aperiodyczny.

Przyjęcie różnych wartości parametrów konstrukcyjnych nie powoduje znacznej zmiany położenia pierwiastka równania charakterystycznego reprezentującego tą postać. Dla lepszego zobrazowania wpływu zmian poszczególnych parametrów na przebieg drgań postaci decydujących o stateczności motocykla sporządzono wykresy zależności wpływu bezwymiarowego współczynnika tłumienia oraz częstotliwości drgań własnych dla różnych konfiguracji wybranych parametrów, z zakresu $\pm 30\%$ dla prędkości 50 km/h. Na osi rzędnych zaznaczono względną zmianę bezwymiarowego współczynnika tłumienia (rys.3.1.5) oraz częstotliwości drgań własnych (rys 3.1.6).



Rys.3.1.5. Wpływ zmian danego parametru na względną zmianę bezwymiarowego współczynnika tłumienia postaci drgań *weave* i *wobble*.



Rys.3.1.6. Wpływ zmian danego parametrów na względną zmianę częstości drgań własnych postaci *weave* i *wobble*.

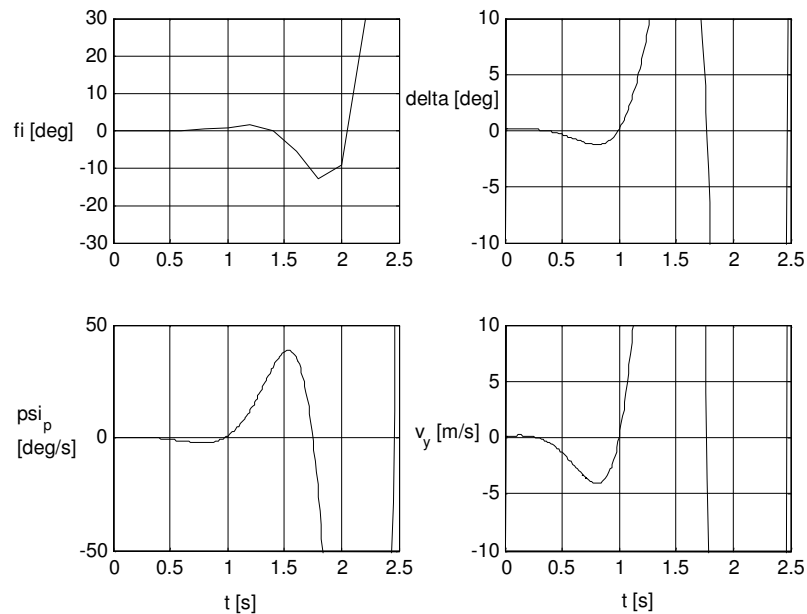
Na podstawie przeprowadzonych analiz wykorzystując model symulacyjny stwierdzono, że wielopoziomowe sprzężenie pomiędzy poszczególnymi postaciami drgań powoduje, iż nie jest możliwy taki dobór parametrów konstrukcyjnych motocykla aby uzyskać możliwie duże wartości tłumienia oraz korzystne częstości drgań własnych równocześnie dla wszystkich postaci. Konieczne jest poszukiwanie optymalnych wartości parametrów konstrukcyjnych w celu zapewnienia dobrej stateczności i kierowalności pojazdu dla całego zakresu osiągniętych prędkości oraz różnych obciążeń.

Wprowadzenie dodatkowego tłumienia wiskotycznego w łożyskowaniu przedniego widelca (zastosowanie amortyzatora skrętu) znacznie zmniejsza możliwość wystąpienia postaci drgań typu *wobble*, natomiast zmniejsza także wartość tłumienia dla postaci *weave*.

Kolejnym etapem symulacyjnej analizy stateczności motocykla była obserwacja zachowania się modelu motocykla po wprowadzeniu do niego zaburzenia. Zaburzenie ruchu prostoliniowego motocykla poruszającego się ze stałą prędkością wzdłużną realizowane było poprzez wprowadzenie do modelu impulsu momentu siły przyłożonego do kierownicy.

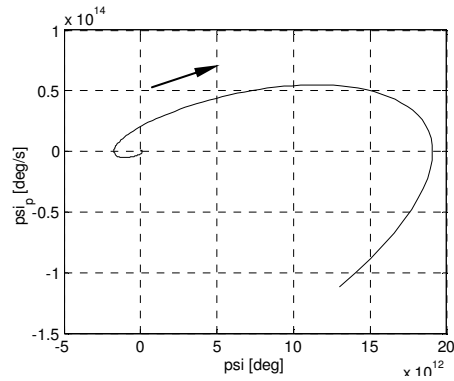
Przeanalizowano wpływ prędkości oraz parametrów kinematycznych układu kierowniczego na charakter odpowiedzi układu na zaburzenie. Jako kryterium oceny stateczności przyjęto wartość tłumienia wyrażonej poprzez logarytmiczny dekrement tłumienia oraz częstość drgań, głównie formy *wobble*. Wartości te były odczytywane z czasowych przebiegów kąta skrętu kierownicy.

Na wykresach przedstawiono przykładowe, czasowe odpowiedzi układu na wymuszenia jednostkowym impulsem momentu przyłożonym do kierownicy, gdzie: φ – przechył poprzeczny motocykla, δ – kąt obrotu kierownicy, $\dot{\psi}$ – prędkość kątowa odchylenia, v_y – prędkość poprzeczna. Wykresy prezentują zmianę charakteru odpowiedzi układu dla różnych prędkości ruchu, kolejno 10, 60, 180 km/h.

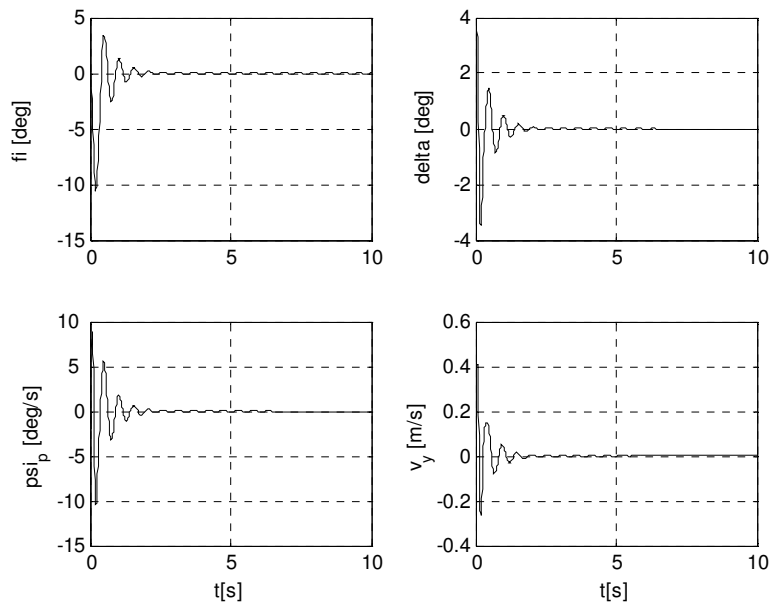


Rys. 3.1.7 Odpowiedź układu na wymuszenie momentem jednostkowym przy prędkości ruchu 10 km/h.

Dla małych prędkości ruchu odpowiedź układu na zaburzenie ma charakter niestateczny. Destabilizacja następuje poprzez oscylacyjną formę ruchu o częstotliwości ok. 0.4 Hz. Dodatkowo na rys.3.1.8 zamieszczono przebieg prędkości kątowej odchylenia w funkcji kąta odchylenia na płaszczyźnie fazowej (portret fazowy). Krzywa nie powraca do punktu startowego (0,0). Układ jest niestateczny.



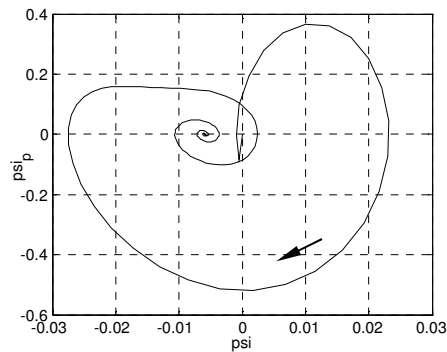
Rys.3.1.8. Wykres fazowy $\dot{\psi}(\psi)$ sporządzony dla wymuszenia impulsowego przy prędkości ruchu 10 km/h.



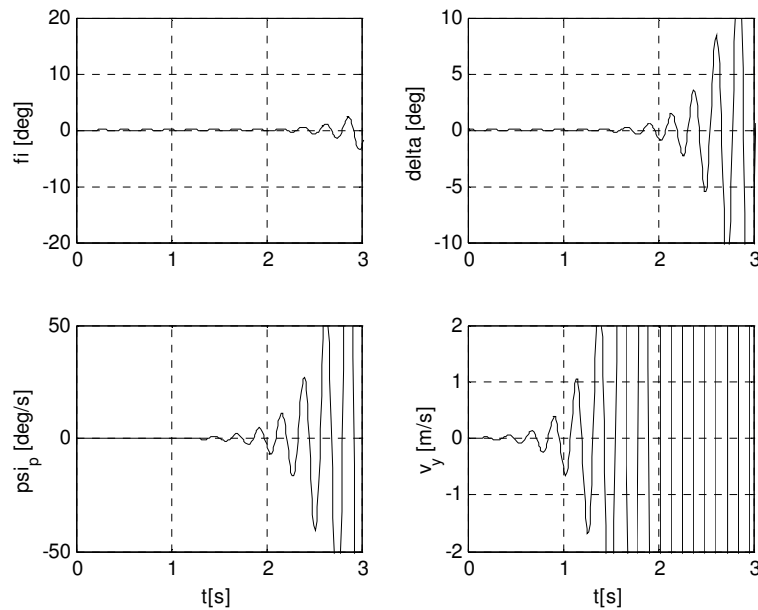
Rys.3.1.9. Odpowiedź układu na wymuszenie momentem jednostkowym dla prędkości ruchu 60 km/h

Dla pewnego zakresu prędkości odpowiedź ma charakter asymptotycznie stateczny (rys.3.1.9). Układ jest tłumiony podkrytycznie. Po wymuszeniu układ powraca do stanu ustalonego (jazdy na wprost).

Na portrecie fazowym (rys.3.1.10.), prędkość odchylenia w zależności od kąta odchylenia powraca do punktu startowego.

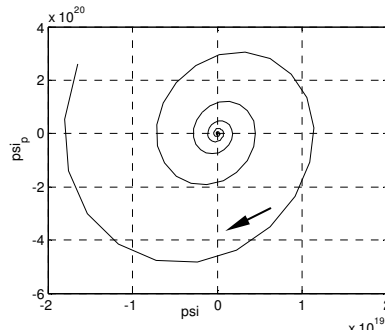


Rys. 3.1.10. Wykres fazowy $\dot{\psi}(\psi)$ sporządzony dla wymuszenia impulsowego dla prędkości ruchu 60 km/h.



Rys. 3.1.11. Odpowiedź układu na wymuszenie momentem jednostkowym przy prędkości ruchu 180 km/h.

Na podstawie przeprowadzonych analiz można stwierdzić, że wraz ze wzrostem prędkości ruchu tłumienie postaci *wobble* jest na tyle małe, iż wymuszenie powoduje wzbudzenie niegasnących oscylacji w układzie (rys.3.1.11). Częstotliwość drgań układu dla tych warunków wynosi ok. 5 Hz. Następuje destabilizacja układu (rys.3.1.12).



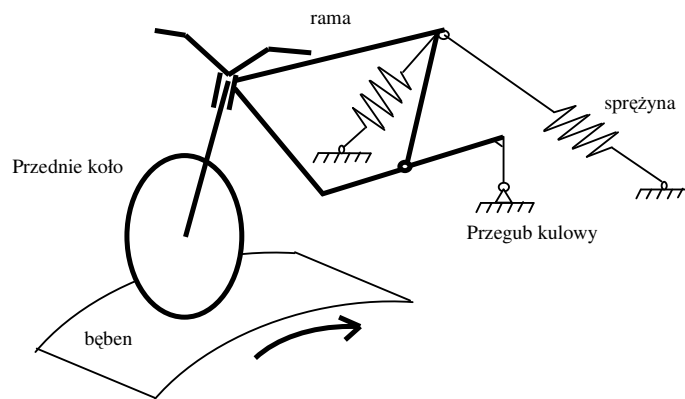
Rys. 3.1.12. Wykres fazowy $\dot{\psi}(\psi)$ sporządzony dla wymuszenia impulsowego dla prędkości ruchu 180 km/h

Prędkość odchylenia w zależności od kąta odchylenia nie powraca do punktu startowego, co oznacza, że układ jest niestabilny.

Wyniki dla zmiany parametrów konstrukcyjnych przedniego zespołu zostały przedstawione w rozdziale zawierającym porównanie modelu z wynikami uzyskanymi na podstawie badań stanowiskowych oraz drogowych.

3.2 Badania stanowiskowe

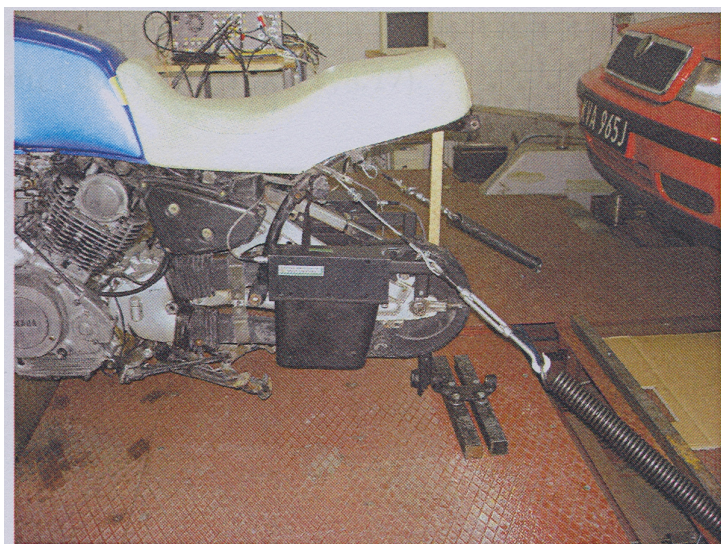
Badania stanowiskowe przeprowadzono na specjalnie skonstruowanym stanowisku. Schemat ideowy stanowiska wraz z motocyklem pokazano na rys. 3.2.1. Sposób mocowania motocykla i zmian odcinka wyprzedzenia przedstawiono na rys. 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 i 3.2.5.



Rys.3.2.1 Schemat ideowy motocykla na stanowisku badawczym.



Rys.3.2.2 Motocykl na stanowisku badawczym



Rys.3.2.3 Mocowanie tylnego zespołu



Rys.3.2.4 .Zmiana odcinka wyprzedzenia - zmniejszenie



Rys.3.2.5. Zmiana odcinka wyprzedzenia – zwiększenie

Próby przeprowadzono na stanowisku rolkowym. Przednie koło motocykla zostało umieszczone na napędzanej rolce mającej możliwość obrotu (rys.3.2.2). Prędkość obrotowa bębna była regulowana w zakresie umożliwiającym uzyskanie prędkości liniowej powierzchni bębna $0 \div 20$ m/s. Motocykl zamontowano na stanowisku za pośrednictwem przegubu kulowego, który znajdował się w miejscu kontaktu tylnego koła z podłożem (rys.3.2.3). Tylne koło wymontowano. Takie utwierdzenie motocykla umożliwiało występowanie ruchów przechyłowych i odchylenia motocykla. Odbierało natomiast możliwość przemieszczenia wzdłuż osi podłużnej pojazdu. Dodatkowo,

motocykl był utrzymywany w pozycji pionowej poprzez dwie sprężyny. Ich sztywność oraz rozmieszczenie zostały dobrane w taki sposób, aby częstość drgań w płaszczyźnie poprzecznej pojazdu wraz z siedzącym kierowcą, odpowiadała rzeczywistym wartościom, spotykanym dla formy ruchu typu *weave*, tj ok. 2 Hz.

W czasie badań, przy obracającym się przednim kole, które spoczywało na bębnie, dokonywano wymuszenia poprzez wprowadzenie impulsu momentu siły na kierownicę. Po wymuszeniu, kierownica pozostawała swobodna. Kierowca nie reagował. Taka metodyka badań gwarantowała, przy poczynionych założeniach, możliwie duża adekwatność warunków przeprowadzania prób na obiekcie badawczym, do rzeczywistości.

Podczas prób rejestrowano:

- kąt obrotu kierownicy [potencjometr obrotowy]
- przyśpieszenie kątowe obrotu kierownicy (pośrednio) [przyśpieszeniomierz]
- prędkość kątową przechyłu poprzecznego [żyroskop Murata]
- prędkość kątową odchylenia [żyroskop Murata]
- prędkość bębna (jazdy) [głowica *Correvit* typu QL]
- kąt przechyłu poprzecznego [głowice *Correvit* typu H]

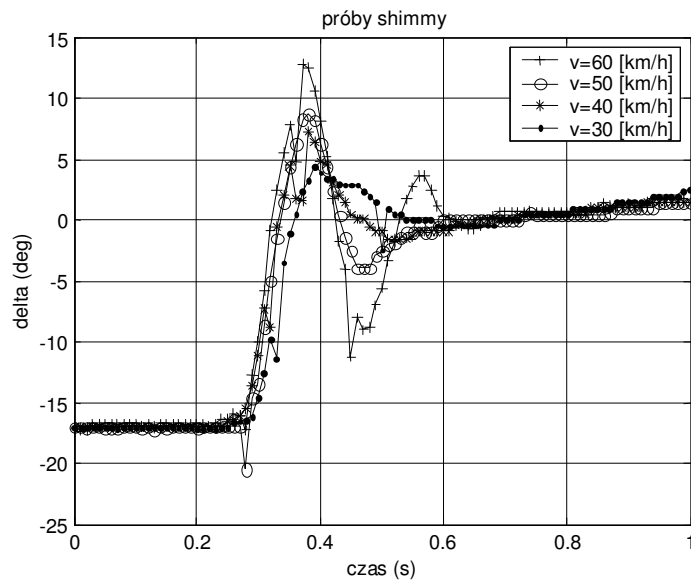
Rejestrowano przebiegi czasowe powyższych parametrów celem oceny wpływu wybranych parametrów ruchu oraz kinematycznych parametrów motocykla, na tłumienie i częstość drgań w układzie kierowniczym motocykla (*shimmy, wobble*).

Dokonywano zmian:

- prędkości bębna (jazdy)
- ciśnienia w oponie koła przedniego (sztywność poprzeczna opony)
- długości odcinka wyprzedzenia

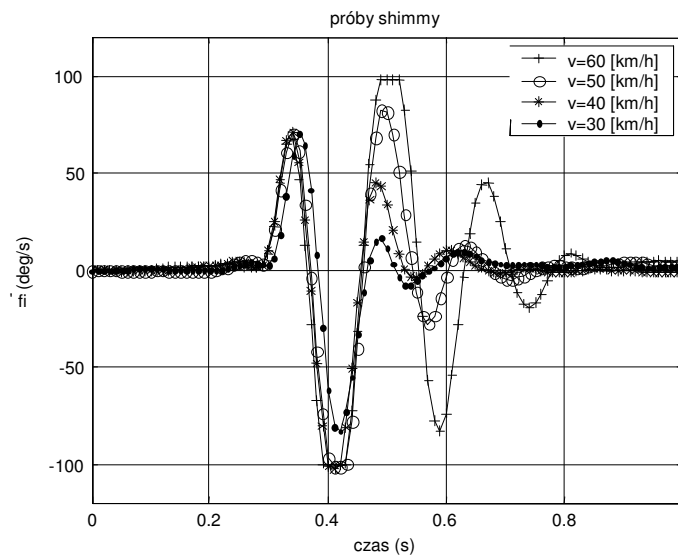
3.2.1 Analiza wpływu prędkości jazdy na zjawiska drganiowe motocykla

Na rysunku 3.2.6 przedstawiono czasowe przebiegi kąta obrotu kierownicy wymuszonego impulsem siły bocznej działającej w styku opony z jezdnią. Wraz ze wzrostem prędkości jazdy rośnie wartość amplitud drgań.

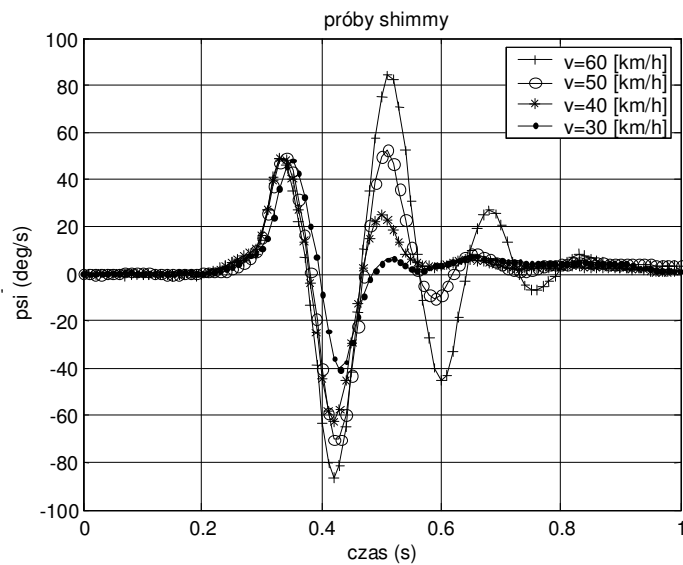


Rys.3.2.6. Przebieg zmian kąta obrotu kierownicy w zależności od prędkości jazdy.

Na kolejnych rysunkach; (rys.3.2.7 i rys.3.2.8), przedstawiono czasowe przebiegi prędkości kątowej przechyłu oraz prędkości kątowej odchylenia dla różnych prędkości jazdy. Podobnie jak dla przebiegu kąta obrotu, amplitudy drgań rosną wraz z prędkością jazdy. W każdym przypadku układ się stabilizuje, drgania się wygaszają.

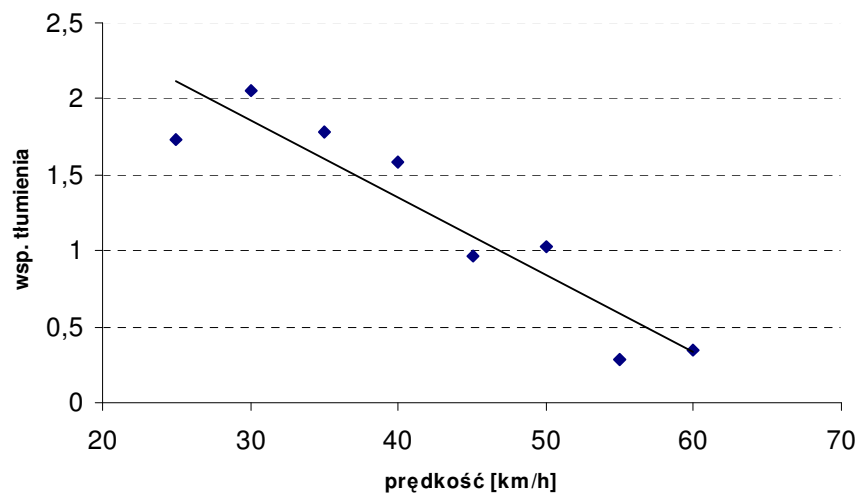


Rys.3.2.7 Przebieg zmian prędkości przechyłu w zależności od prędkości jazdy.



Rys.3.2.8 Przebieg zmian prędkości odchylenia w zależności od prędkości jazdy.

Dla prezentowanych przebiegów czasowych widoczna jest nieznaczna zmiana częstotliwości drgań. Wraz ze zmniejszaniem prędkości, częstość drgań nieznacznie rośnie.

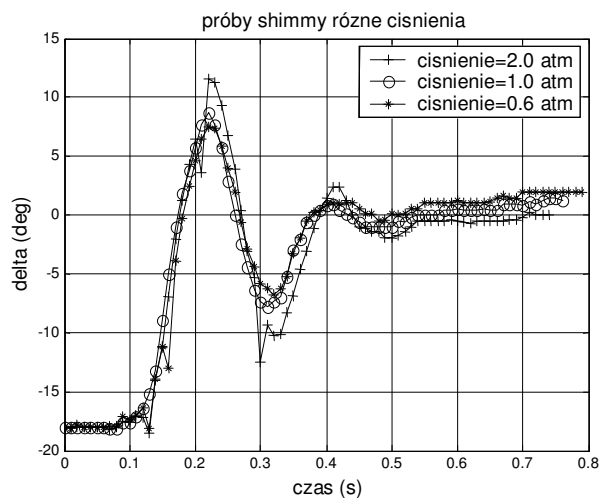


Rys.3.2.9. Zmiana logarytmicznego dekrementu tłumienia w zależności od prędkości jazdy.

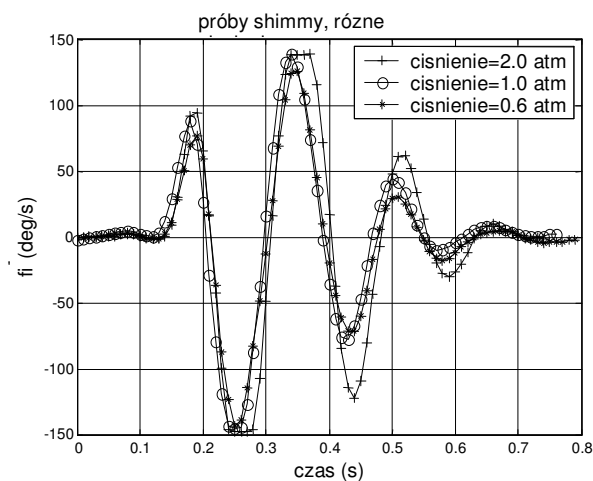
Na rys.3.2.9 przedstawiono zmianę logarytmicznego dekrementu tłumienia w funkcji prędkości jazdy. Wraz ze wzrostem prędkości tłumienie drgań maleje. W zakresie osiągniętych prędkości układ pozostaje stateczny.

3.2.2 Analiza wpływu ciśnienia powietrza w przednim kole na zjawiska drganiowe motocykla.

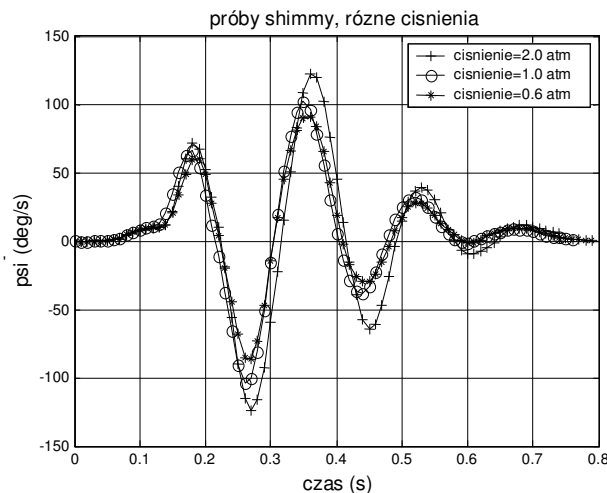
Na rysunkach 3.2.10 oraz 3.2.11 i 3.2.12 przedstawiono wpływ ciśnienia w przednim kole motocykla na wartości mierzonych parametrów na wymuszenie impulsem momentu..



Rys.3.2.10. Przebieg zmian kąta obrotu kierownicy dla różnych wartości ciśnienia powietrza w przednim kole motocykla.



Rys.3.2.11. Przebieg zmian prędkości przechyłu dla różnych wartości ciśnienia powietrza w przednim kole motocykla.



Rys.3.2.12.Przebieg zmian prędkości odchylenia dla różnych wartości ciśnienia powietrza w przednim kole motocykla.

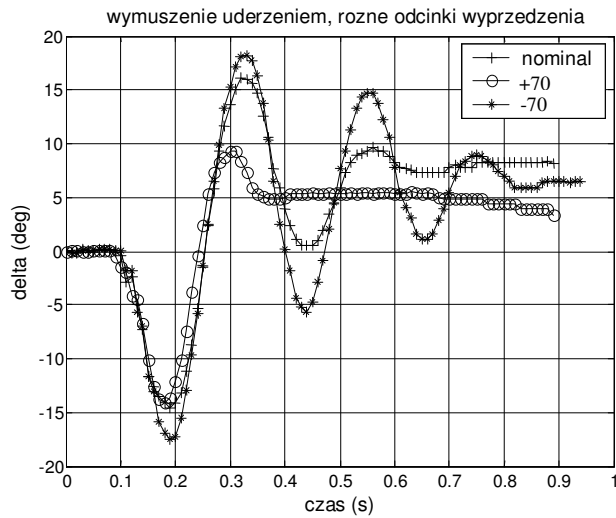
W przypadku przebiegu kąta obrotu kierownicy widoczny jest wzrost tłumienia drgań *wobble* przy zmniejszonym ciśnieniu powietrza w oponie. Zmiana ciśnienia powietrza w oponie nie wpływa znacząco na zmianę częstotliwości drgań przedniego zespołu motocykla.

3.2.3 Analiza wpływu długości odcinka wyprzedzenia na zjawiska drganiowe motocykla.

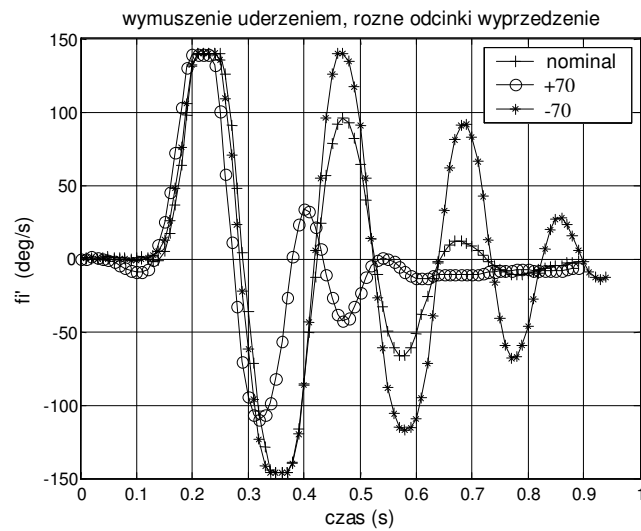
Wartość nominalną długości odcinka wyprzedzenia zmniejszono (oś koła przesunięto do przodu, oznaczono na wykresie - „-70”) i zwiększono (oś koła przesunięto do tyłu, oznaczono - „+70”) o 70 mm.

W tych przypadkach zmianie uległ również moment bezwładności przedniego zespołu względem osi obrotu. Próby przeprowadzono przy prędkości 60 km/h.

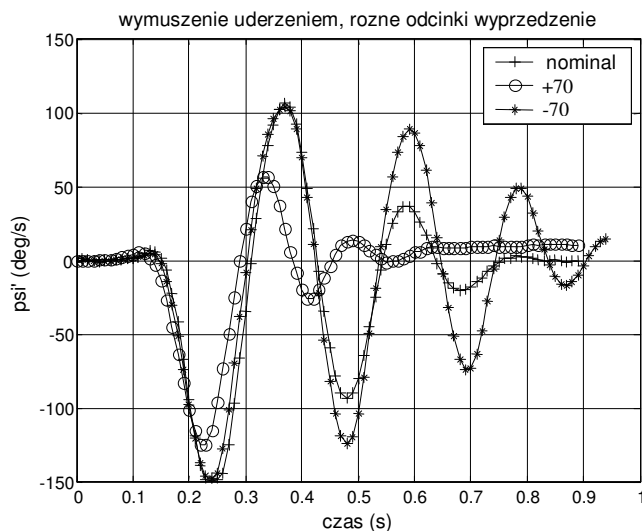
Na rys.3.2.13 przedstawiono przebiegi czasowe kąta obrotu kierownicy dla trzech wartości odcinka wyprzedzenia. Można zauważyć, iż wraz ze zmianą odcinka wyprzedzenia zmianie ulega częstotliwość drgań oraz tłumienie postaci *wobble*. Dla odcinka wyprzedzenia zwiększonego o 70 mm (+70) układ jest najmocniej tłumiony, a częstotliwość drgań jest w tym przypadku największa.



Rys.3.2.13. Przebieg zmian kąta obrotu kierownicy dla różnych odcinków wyprzedzenia. Wymuszenie impulsem momentu.



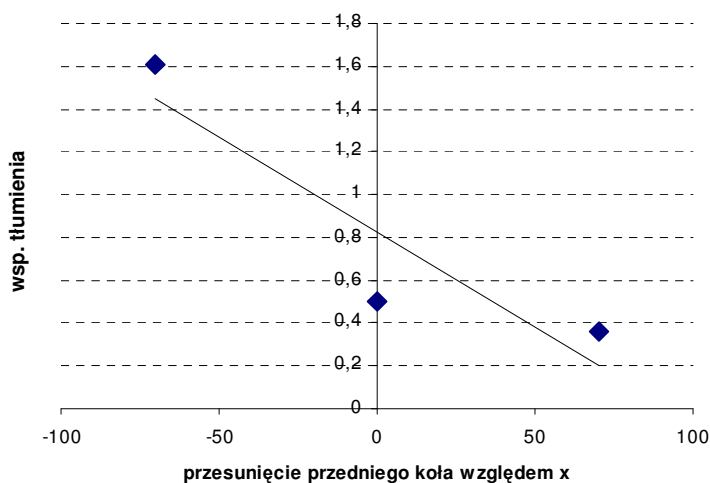
Rys.3.2.14. Przebieg zmian prędkości przechyłu motocykla dla różnych odcinków wyprzedzenia. Wymuszenie impulsem momentu.



Rys.3.2.15. Przebieg zmian prędkości odchylenia motocykla dla różnych odcinków wyprzedzenia.

Wymuszenie impulsem momentu.

Na rysunku 3.2.14 i rys.3.2.15 zaprezentowano przebiegi prędkości przechyłu i prędkości odchylenia dla wymuszenia w postaci impulsu momentu



Rys.3.2.16. Zmiana logarytmicznego dekrementu tłumienia w zależności od przesunięcia przedniego koła względem osi podłużnej.

Na rys. 3.2.16 przedstawiono zmianę tłumienia drgań postaci *wobble* w zależności od zmiany długości odcinka wyprzedzenia. Wraz ze wzrostem długości odcinka wyprzedzenia (przesunięcie osi koła w kierunku tyłu motocykla), tłumienie rośnie. Dla badanego zakresu zmienności długości odcinka wyprzedzenia układ jest stateczny.

Podobnie jak w przypadku postaci drgań *wobble* zmiana długości odcinka wyprzedzenia skutkuje zmianą wartości współczynnika tłumienia drgań przechyłowych i odchylenia. Przy zmianie odcinka wyprzedzenia w kierunku dodatnim (przesunięcie osi koła w kierunku tyłu motocykla) tłumienie drgań przechyłowych i odchylenia wzrasta.

3.3 Badania drogowe stateczności motocykla

Dla potwierdzenia przydatności badań stanowiskowych do oceny wpływu zmian parametrów konstrukcyjnych motocykla na jego stateczność wykonano badania drogowe. W badaniach drogowych starano się odtworzyć warunki realizacji prób laboratoryjnych, a dotyczyło to wymuszenia drgań układu kierowniczego. Tego typu próby realizowane na drodze są niebezpieczne ze względu na możliwość wystąpienia gwałtownie narastającej amplitudy drgań typu *wobble* i *weave* trudnych do opanowania przez kierowcę. Zakres badań ograniczono do analizy wpływu długości odcinka wyprzedzenia oraz ciśnienia powietrza w przednim kole na przebieg drgań typu *wobble*.



Rys. 3.3.1 Motocykl badawczy wraz z aparaturą pomiarową i podporami.

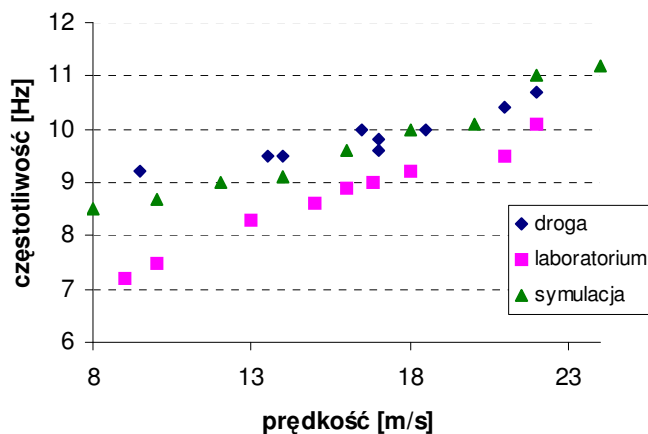
Badania drogowe przeprowadzono na specjalnie przygotowanym motocyklu (rys.3.3.1). Motocykl wyposażono w specjalne podpory uniemożliwiające jego przewrócenie w przypadku, gdy skręty kierownicy byłyby trudne do opanowania przez kierowcę. Próby przeprowadzono na równej płaskiej nawierzchni. Przy stałej prędkości jazdy, kierowca dokonywał impulsowego wymuszenia momentem siły na kierownicy. Po wymuszeniu kierowca nie tłumił drgań. Rejestrowano sygnały jak w przypadku badań

stanowiskowych. Prędkość ruchu motocykla odpowiadała prędkościom uzyskiwanym na stanowisku.

Podstawowymi parametrami oceny stateczności pojazdu jednośladowego jest częstotliwość drgań oraz tłumienie danej postaci drgań. W tym wypadku ocenie podlegała częstotliwość drgań kierownicy (*wobble*) oraz jej tłumienie.

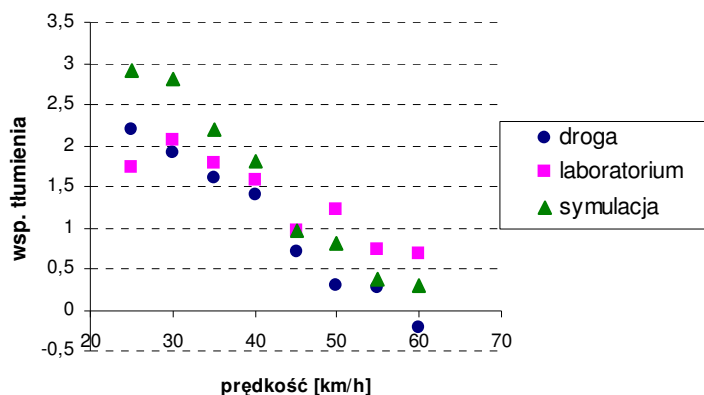
Na podstawie zarejestrowanych przebiegów czasowych dla prób wykonanych na stanowisku oraz prób drogowych wyznaczono dla danych warunków częstotliwości drgań układu kierowniczego wokół osi obrotu kierownicy

Sporządzono wykresy zależności częstotliwości i tłumienia drgań od prędkości motocykla oraz zmian rozpatrywanych parametrów zarówno dla symulacji, badań drogowych i stanowiskowych. Wybrane wyniki przedstawiono na rys. 3.3.2÷3.3.7.



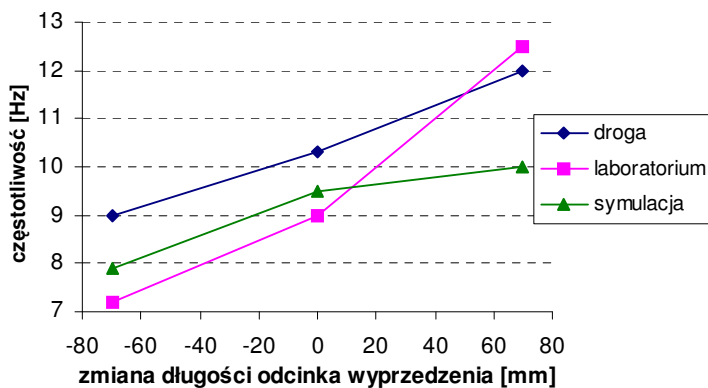
Rys.3.3.2 Zależność częstotliwości drgań postaci *wobble* od prędkości jazdy.

Na rys 3.3.2 przedstawiono zależność częstotliwości postaci *wobble* od prędkości jazdy. Wraz ze wzrostem prędkości jazdy częstotliwość drgań postaci *wobble* rośnie.



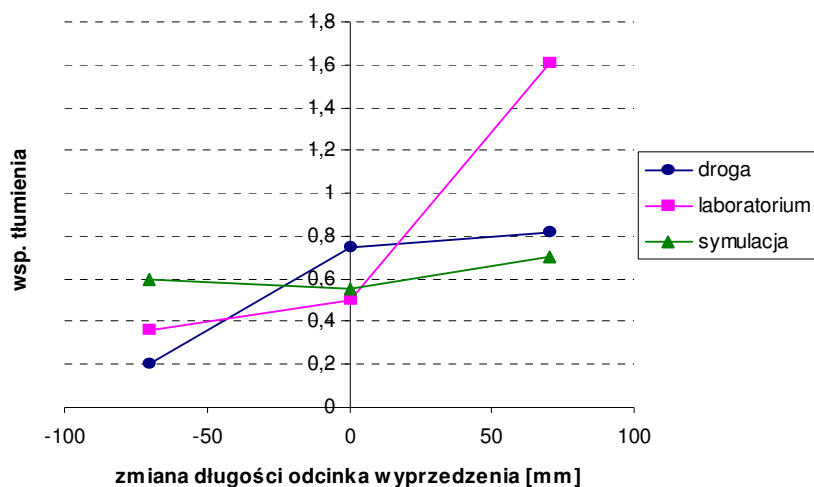
Rys.3.3.3 Zależność tłumienia drgań postaci *wobble* od prędkości jazdy.

Na rys 3.3.3 przedstawiono zależność logarytmicznego współczynnika tłumienia postaci *wobble* w funkcji prędkości jazdy. Dla wszystkich przebiegów tłumienie maleje wraz z prędkością.



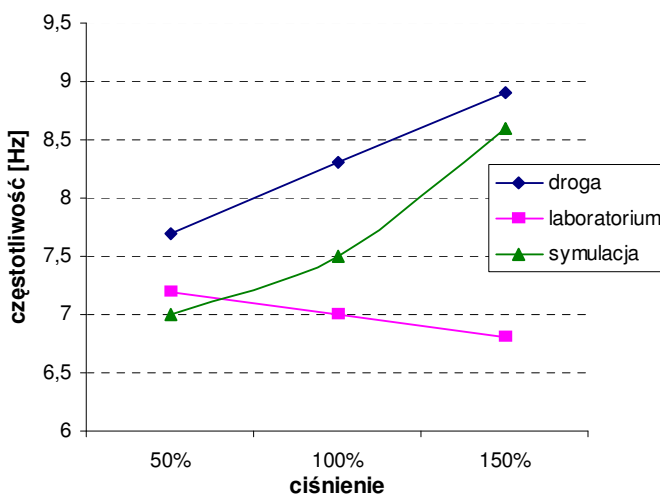
Rys.3.3.4. Zależność częstotliwości drgań postaci *wobble* od zmiany długości odcinka wyprzedzenia

Na rys 3.3.4 przedstawiono zależność częstotliwości drgań postaci *wobble* od zmiany długości odcinka wyprzedzenia. Dla stałej prędkości 20 m/s częstotliwość drgań rośnie wraz ze zwiększeniem parametru.



Rys.3.3.5 Zależność tłumienia drgań postaci *wobble* od zmiany długości odcinka wyprzedzenia

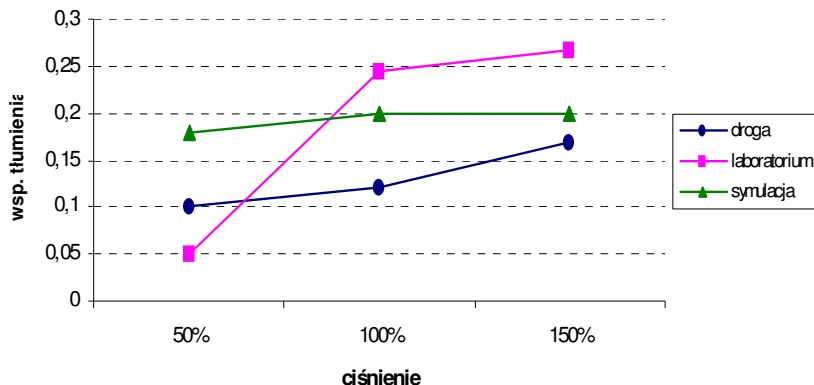
Na rys.3.3.5 zaprezentowano zmianę tłumienia w funkcji długości odcinka wyprzedzenia. Dla przebiegów uzyskanych z badań drogowych oraz obliczeń symulacyjnych, tłumienie jedynie nieznacznie rośnie wraz ze wzrostem odcinka wyprzedzenia. Dla przebiegu uzyskanego z badań stanowiskowych, tłumienie znacznie wzrasta.



Rys.3.3.6. Zależność częstotliwości drgań postaci *wobble* wraz ze zmianą ciśnienia powietrza w przednim kole.

Na rys.3.3.6 i 3.3.7 przedstawiono zależność częstotliwości i tłumienia drgań postaci *wobble* od ciśnienia powietrza w przednim kole. Ciśnienie powietrza zmieniano wokół

wartości nominalnej, tj. ok. 2,0 bar (100 %) o ± 50 %. W modelu matematycznym zmieniano sztywność opony odpowiadającą przyjętej zmianie ciśnienia powietrza.



Rys.3.3.7 Zależność tłumienia drgań postaci *wobble* w zależności od zmiany ciśnienia powietrza w przednim kole.

Można stwierdzić, że występuje dobra zgodność wyników otrzymanych na stanowisku z wynikami badań drogowych i symulacyjnych w zakresie zmian częstotliwości drgań i tłumienia z prędkością jazdy. Podobnie w przypadku zmian wynikających ze zmiany odcinka wyprzedzenia. Zmiana ciśnienia powietrza w ogumieniu w przypadku badań stanowiskowych charakteryzowała się odmienną tendencją, jeśli brać pod uwagę zmiany częstotliwości drgań, niż uzyskana w wyniku prób drogowych i symulacyjnych. Należy przypuszczać, że jest to związane ze zjawiskami powstającymi przy współpracy koła ogumionego z bębnum o określonej średnicy, a nie płaską nawierzchnią drogi. Zmiana ciśnienia powietrza skutkuje zmianą wielkości śladu współpracy koła z bębnum.

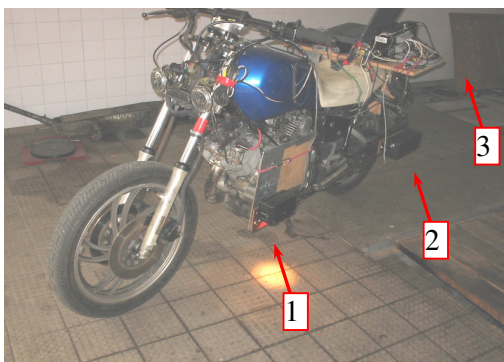
Na podstawie wyników badań i przeprowadzonych porównań można stwierdzić, że prezentowana metoda badań stanowiskowych może być wykorzystana do oceny stateczności motocykla w ograniczonym zakresie. Niemniej jednak biorąc pod uwagę, że badania stanowiskowe charakteryzują się dużym bezpieczeństwem, oraz zapewniają powtarzalność warunków próby, wykorzystanie tej metody wydaje się być w badaniach stateczności motocykli bardzo przydatne. Badania tego typu pozwalają na obiektywną ocenę wpływu zmian parametrów konstrukcyjnych na stateczność motocykla oraz porównanie zachowania się pojazdów o różnej konstrukcji w tych samych warunkach.

4. BADANIA KIEROWALNOŚCI MOTOCYKLA

W ramach badań kierowności motocykla wykonano próby pojedynczej zmiany pasa ruchu oraz próby jazdy slalomowej oraz manewr „U”. Opis stosowanej aparatury, jej zakres oraz dokładność opisano w rozdziale 2. Na rys. 4.1 oraz 4.2 i 4.3 przedstawiono sposób przygotowania motocykla do badań drogowych. W czasie prób rejestrowane były:

- prędkość wzdłużna motocykla,
- prędkość poprzeczna,
- prędkość odchylenia,
- prędkość przechyłu,
- moment obrotowy przyłożony do kierownicy,
- kąt obrotu kierownicy,
- kąt przechyłu motocykla.

W niektórych próbach rejestrowano również prędkość kątową przechyłu kierownicy.

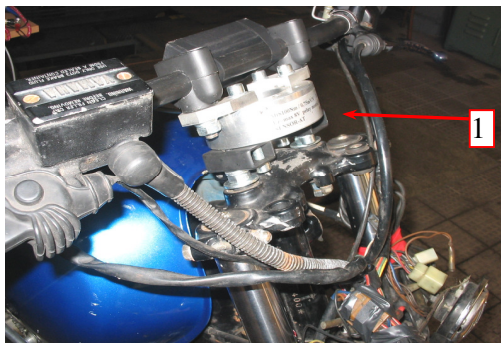


Rys.4.1 Widok ogólny badanego motocykla.

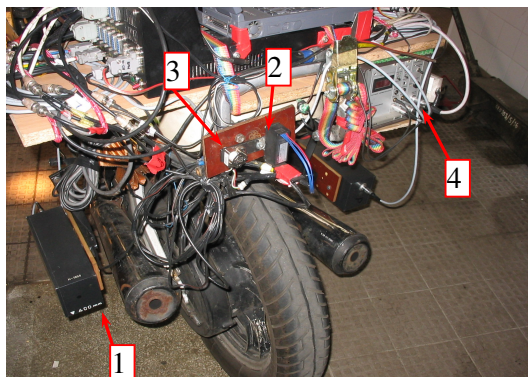
1 - głowica Correvit L – Q ,

2 – głowica Correvit H ,

3 – zestaw przekazująco – rejestrujący



Rys.4.2 Przetwornik momentu obrotowego na kierownicy



Rys.4.3 Wyposażenie badawcze motocykla.

- 1 – głowice Correvit H ,
- 2 – żyroskop do pomiaru prędkości kątowej przechyłu $d\varphi / dt$
- 3 – żyroskop do pomiaru prędkości odchylenia $d\psi / dt$
- 4 – przetwornik sygnałów z głowic Correvit H

4.1 Prezentacja i analiza wyników

4.1.1. Eksperymentalne badania kierowności motocykla

Podstawowym problemem pojawiającym się w obiektywnej ocenie kierowności motocykla jest znaczący wpływ zachowania się kierowcy na ruch motocykla podczas przeprowadzanej próby drogowej. Jego oddziaływanie na motocykl poprzez moment siły przykładany do kierownicy, oddziaływanie dynamiczne ciałem poprzez gwałtowne przechyły oraz pozycja kierowcy, jaką zajmuje podczas pokonywania poszczególnych etapów manewru nie może być jednoznacznie zdefiniowana i opisana. Każdy kierowca prowadzi motocykl w nieco odmienny sposób, a fakt, iż masa kierowcy ma znaczącą wartość w stosunku do masy motocykla powoduje, że może on w różny, przypadkowy sposób wpływać na wartość parametrów oceny kierowności.

Można stwierdzić, że istnieje zależność pomiędzy sposobem prowadzenia pojazdu jednośladowego, a doświadczeniem kierowcy [Zellner, Weir 1978]. Im kierowca posiada większe doświadczenie w prowadzeniu motocykla, tym bardziej przewidywalny i jednoznaczny jest sposób postępowania przy pokonywaniu danego manewru. Również zauważalne są znacznie mniejsze różnice w sposobie prowadzenia motocykla przez różnych kierowców posiadających duże doświadczenie, niż pomiędzy kierowcami z mniejszym doświadczeniem.

W przeprowadzonych próbach drogowych starano się zminimalizować oraz ujednolicić wpływ kierowcy na zachowanie motocykla. Dla wybranych prób, kierowca starał się nie wykonywać ruchów przechyłowych tułowia, lub, jeżeli była taka konieczność, wykonywać je w sposób powtarzalny. Jedynie dla takiego sposobu postępowania zasadne było porównywanie poszczególnych prób oraz wnioskowanie odnośnie wpływu na ruch innych zmiennych parametrów, będące tematem pracy.

Pojęcie kierowalności dotyczy zarówno własności manewrowalności jak i prowadzenia pojazdu. Można więc wyodrębnić wskaźniki oceny efektywności z jaką zostaje wykonany manewr. Mogą to być np.:

- a) wskaźniki określające różnice w przebiegach czasowych pomiędzy manewrem rzeczywistym a idealnym, zdefiniowanym dla określonych kryteriów (np.: minimalizacja czasu pokonania manewru, minimalizacja odchylenia od toru itd.),
- b) wskaźniki określające charakter przebiegu oraz wartości charakterystycznych parametrów stanu poruszającego się pojazdu

oraz wskaźniki określające zachowanie się pojazdu, przekładające się na odczucia kierowcy związane z wysiłkiem wkładanym w jego prowadzenie:

- a) określające stosunek amplitud parametrów wymuszenia oraz reakcji pojazdu
- b) określające czas reakcji pojazdu na wymuszenie.

Dla przeprowadzonych manewrów służących ocenie kierowalności motocykla można zastosować następujące wskaźniki:

- dla manewru pojedynczej zmiany pasa ruchu:

- a) wartość odchylenia od toru idealnego, zdefiniowane jako [Zellner, Weir 1978]:

$$\overline{y^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [y_c - y]^2 dt$$

gdzie:

$$y_c = \frac{-\hat{a}_y (\Delta x)^2}{4\pi^2 V^2} \sin \frac{2\pi V t}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} V t$$

$$T = \frac{\Delta x}{V}$$

$$x = V t$$

$$\hat{a}_y = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^2} 2\pi V^2$$

Δx , Δy - stałe parametry toru

Mniejsza wartość współczynnika \bar{y} określającego odchylenie od toru oznacza lepsze właściwości kierowalności pojazdu.

- b) wskaźnik RRF (roll rate factor), będący ilorazem momentu i prędkości kątowej przechyłu poprzecznego:

$$RRF = \frac{M_k}{\phi}$$

- c) wskaźnik YRF (yaw rate factor) będący ilorazem momentu i prędkości kątowej odchylania:

$$YRF = \frac{M_k}{\psi}$$

Zarówno dla wskaźnika RRF jak i YRF , mała ich wartość oznacza lepszą kierowalność.

- d) wartość oraz przebiegi sił poprzecznych F_{yf} oraz F_{yr} , działających w styku kół z jezdnią. Pod względem oceny kierowalności, korzystniejsze jest, aby osiągnięte siły poprzeczne były jak najmniejsze, a wartość bezwzględna ekstremów była możliwie zbliżona.
- e) przebieg oraz wartość maksymalnego momentu siły przykładanego przez kierowcę do kierownicy $M_{k\ max}$ oraz momentu podczas przeciwskrętu $K_{k\ count}$. Korzystnym jest aby moment osiągał stałą wartość, proporcjonalną do uzyskiwanego przyspieszenia poprzecznego oraz aby ekstrema przebiegu momentu miały wartość minimalną.
- dla manewru jazdy slalomowej:
 - a) wartość przesunięcia pomiędzy przebiegiem wymuszenia a wybranym przebiegiem zmiennej opisującej reakcje pojazdu. Pożądanym jest aby wartość ta była stała oraz minimalna w całym zakresie prędkości ruchu.
 - b) stosunek amplitud wybranych sygnałów. Pożądanym jest aby iloraz amplitud osiągał możliwie stałą wartość w szerokim zakresie, proporcjonalną do prędkości ruchu.
 - dla manewru „U”:
 - a) wartość indeksu Koch’a

$$K_i = \frac{M_{k\ max}}{V \cdot \dot{\phi}_{max}}$$

- b) przytoczone powyżej wskaźniki RRF oraz YRF

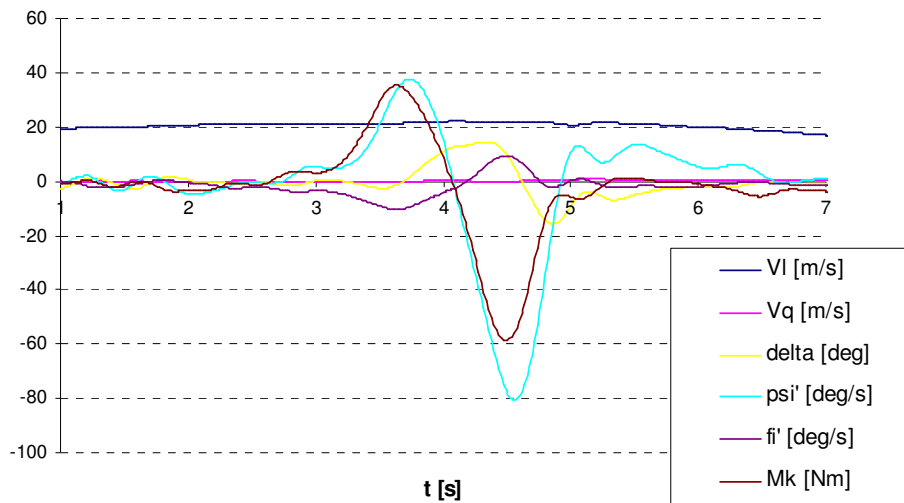
4.1.2. Próba pojedynczej zmiany pasa ruchu

Porównanie toru ruchu środka masy motocykla wyznaczonego na podstawie prób drogowych z torem optymalnym dla próby pojedynczej zmiany pasa ruchu.

Próbie wykonano dla różnych prędkości, zakładając stałe parametry toru. Przyjęto przestawienie środków pasów $\Delta y = 3$ [m], natomiast długość odcinka, na którym następowała zmiana $\Delta x = 21$ [m].

Wykonano próby dla zmiennych, wybranych parametrów kinematycznych przedniego układu.

Tor ruchu środka masy wyznaczono pośrednio, poprzez całkowanie, znając przebiegi czasowe prędkości odchylenia $\dot{\psi}$, prędkości przechyłu poprzecznego $\dot{\phi}$ prędkości wzdłużnej V_l oraz poprzecznej V_q , a także wymagane wartości parametrów konstrukcyjnych motocykla określające położenie układu rejestrującego prędkość liniową względem wcześniej wyznaczonego położenia środka masy motocykla. Rejestrowanie przebiegi czasowe przykładowej próby pojedynczej zmiany pasa ruchu przedstawiono na 4.4



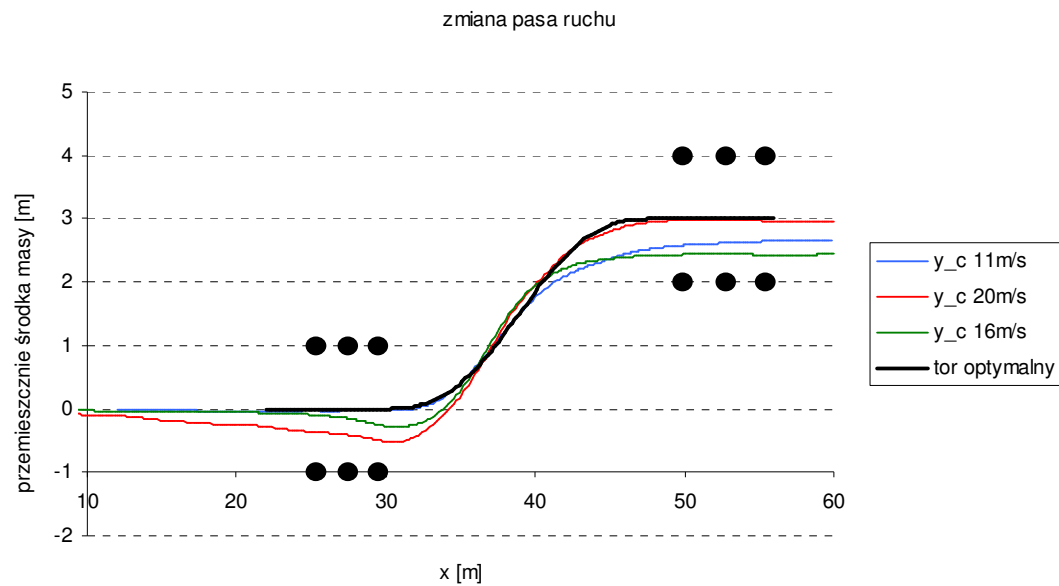
Rys. 4.4. Przykładowe przebiegi czasowe rejestrowane podczas próby pojedynczej zmiany pasa ruchu.

Zarejestrowane przebiegi dla prób wykonanych z różnymi prędkościami V_l , umożliwiły porównanie torów ruchu środka masy. Na ich podstawie oceniano wartość odchylenia od

toru idealnego. Jako parametr oceny zastosowano, zdefiniowaną powyżej, wartość średnią kwadratową odchylenia od toru.

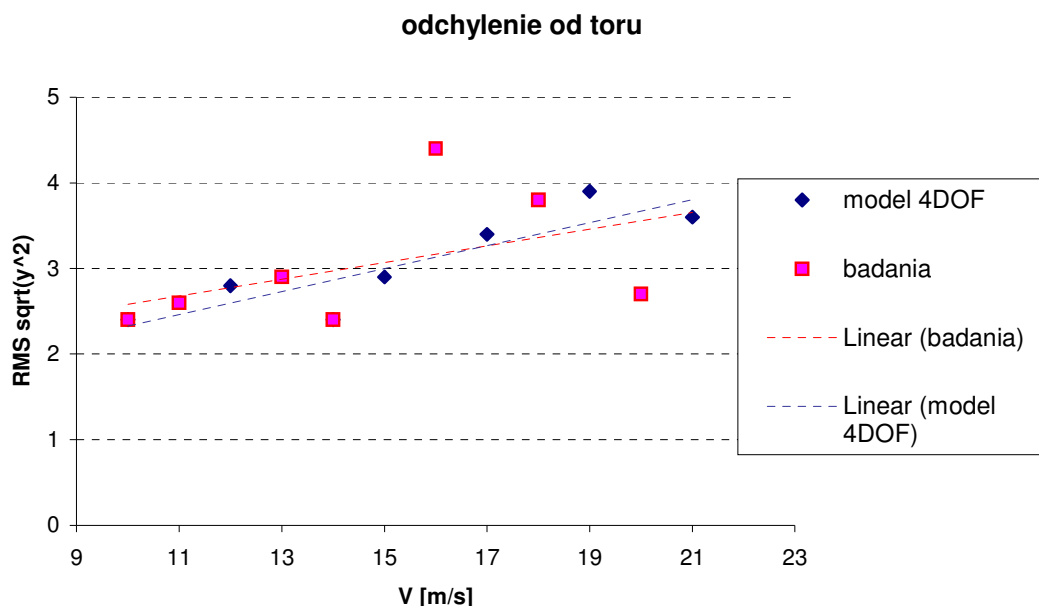
Na rys. 4.5 przedstawiono przykładowe tory ruchu środka masy w funkcji przebytej drogi, uzyskane na podstawie badań drogowych. Wykonano manewr zmiany pasa ruchu dla prędkości wzdłużnej 11, 16 oraz 20 [m/s].

Widoczne są różnice w torach, szczególnie dla etapów rozpoczęcia i zakończenia manewru.



Rys.4.5 Przykładowe przebiegi toru ruchu środka masy motocykla.

Na podstawie wszystkich przeprowadzonych prób, wykonanych dla nominalnych parametrów konstrukcyjnych oraz prędkości ruchu z zakresu około 10-21 [m/s], sporządzono wykres, rys 4.6 wartości odchyłeń od toru, opisanych poprzez funkcję $\sqrt{\bar{y}^2}$, w funkcji prędkości jazdy.

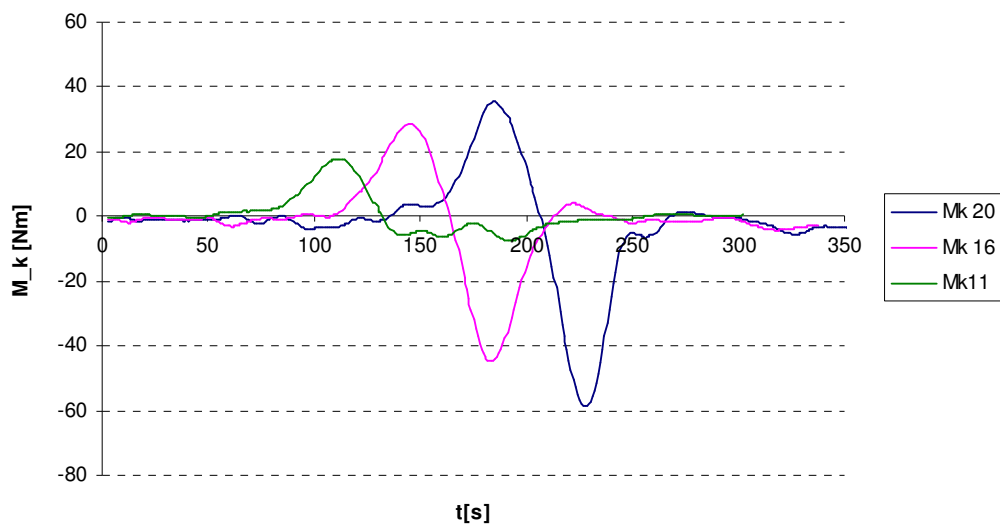


Rys.4.6 Odchylenie od toru dla różnych prędkości ruchu. Porównanie badań doświadczalnych oraz modelu 4 DOF.

Dodatkowo na wykresie zamieszczono wartości funkcji $\sqrt{y^2}$ otrzymane na podstawie modelu o czterech stopniach swobody. Zauważalna jest dobra zgodność prezentowanych wyników.

Wraz ze wzrostem prędkości rośnie wartość odchylenia od toru. Można stwierdzić, że kierowca ma mniejszą możliwość precyzyjnego prowadzenia motocykla. Przyczyną takiego stanu rzeczy jest między innymi wartość momentu siły przykładanego przez kierowcę, jaki konieczny jest do pokonania toru w rozpatrywanym zakresie prędkości (rys.4.7), oraz czas reakcji motocykla na wymuszenie.

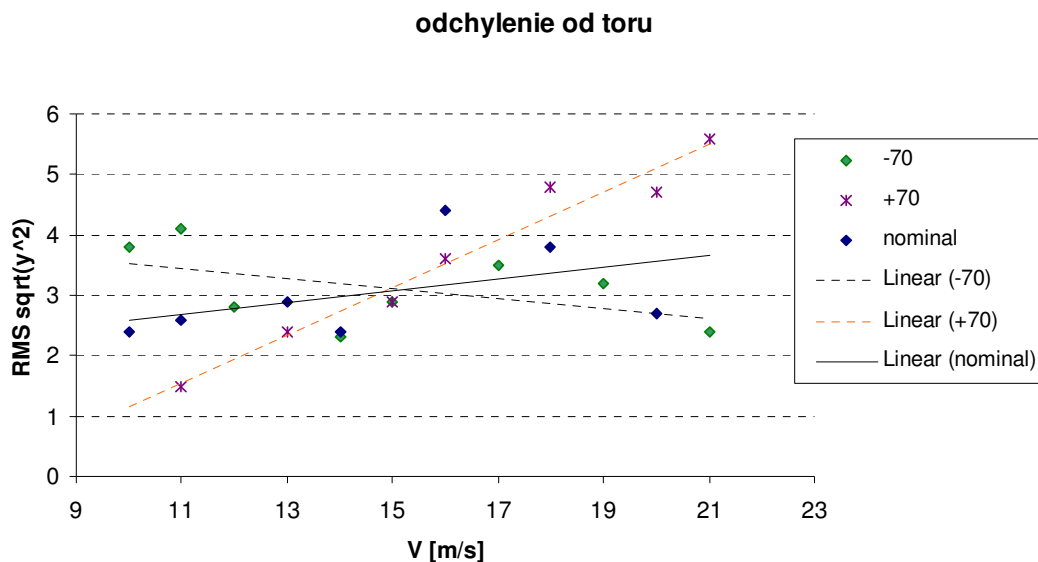
Na rys.4.7 pokazano przykładowe, czasowe przebiegi momentu na kierownicy podczas próby zmiany pasa dla prędkości 11, 16, 20 [m/s].



Rys.4.7 Czasowe przebiegi momentu oporu na kierownicy dla różnych prędkości jazdy

4.1.3 Zmiana pasa ruchu przy zmiennych parametrach konstrukcyjnych.

Na kolejnym etapie eksperymentalnych badań kierowności motocykla przeprowadzono próby zmiany pasa ruchu dla zmiennej wartości odcinka wyprzedzenia. Podobnie jak dla prób wykonanych przy parametrach nominalnych, sporządzono przebiegi odchylenia od toru idealnego. Zmieniano długość odcinka wyprzedzenia o 70 mm w stosunku do wartości nominalnej. Uzyskane wyniki ujęto na wykresie (rys.4.8) wartości parametru oceny odchylenia od toru idealnego $\sqrt{\bar{y}^2}$ w funkcji prędkości jazdy.



Rys 4.8 Odchylenie od toru idealnego dla różnych długości odcinka wyprzedzenia oraz prędkości ruchu..

Przesunięcie przedniego koła w przód, oznaczone symbolem „-70” powoduje zmniejszenie długości odcinka wyprzedzenia. Równocześnie powoduje to zmniejszenie masowego momentu bezwładności przedniego układu względem jego osi obrotu a także zdecydowane zmniejszenie ramienia działania sił bocznych oraz składowych sił ciężkości podczas przechyłu poprzecznego. Pociąga to za sobą zmniejszenie momentu siły przenoszonego na kierownicę. W efekcie do sterowania motocyklem konieczny jest moment siły o znacznie mniejszej wartości. Motocykl jest łatwiejszy w prowadzeniu. Kierowca może prowadzić go bardziej precyzyjnie bez względu na prędkość z jaką się porusza (w rozpatrywanym zakresie).

Dla zwiększenia odcinka wyprzedzenia, tendencja zmian parametru oceny odchylenia od toru jest odwrotna. Wydłużenie odcinka wyprzedzenia powoduje pogorszenie prowadzenia motocykla.

4.1.4 Slalom

Jako parametry oceny kierowności na podstawie próby slalomu zastosowano wartość przesunięcia pomiędzy momentem siły na kierownicy M_k (traktowanym jako podstawowe wymuszenie) a przechyłem poprzecznym motocykla φ oraz stosunek

amplitud wspomnianych sygnałów $\frac{\phi}{M_k}(V)$. Jako przesunięcie pomiędzy sygnałami traktowano czas jaki upłynie od chwili osiągnięcia maksimum zadanego momentu a maksimum przechyłu poprzecznego, będącego reakcją na zadane wymuszenie.

$$\tau = t_{M_k \max} - t_{\phi \max}$$

Próby wykonano dla różnych prędkości ruchu oraz różnych długości odcinka wyprzedzenia.

Rozpatrywano próby wykonane dla ustalonego rozstawu znaczników. Można również przyjąć:

$$v = \frac{V}{2p}$$

gdzie:

p - rozstaw znaczników

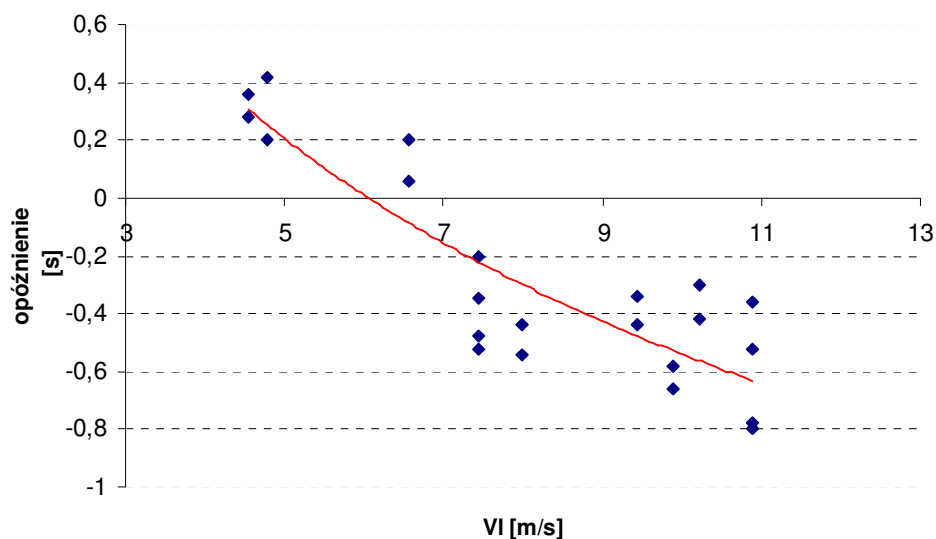
v - częstotliwość wykonywanego slalomu

Na rys 4.9 przedstawiono zmianę wartości opóźnienia przechyłu poprzecznego względem momentu przykładanego do kierownicy w funkcji prędkości jazdy.

Można stwierdzić, że dla małych prędkości moment zadawany przez kierowcę w sposób zbliżony do wymuszenia harmonicznego, wyprzedza reakcje motocykla, ocenianą na podstawie przechyłu poprzecznego.

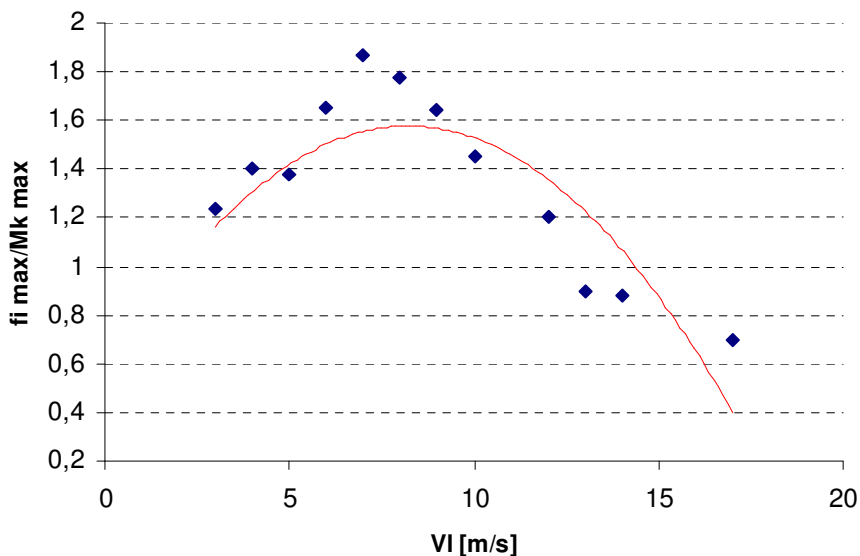
Dla prędkości ruchu ok. 6,2 [m/s] ($v=0,51$ Hz) następuje zmiana znaku wartości opóźnienia.

Dla wartości opóźnienia równej zero kierowca odczuwa najlepsze prowadzenie motocykla. Częstość drgań motocykla wraz z kierowcą w ustalonych warunkach ruchu, jest bliska częstości wymuszeń z jaką oddziałuje on na motocykl. Również dla takich warunków osiągnięcie wymaganego przechyłu poprzecznego możliwe jest najmniejszą wartością wymuszenia (momentu M_k). Można powiedzieć, że układ posiada najmniejsze tłumienie dynamiczne przechyłu poprzecznego.



Rys. 4.9 Zmiana wartości opóźnienia pomiędzy reakcją a wymuszeniem dla układu kierowca-motocykl.

Na rys 4.10 przedstawiono stosunek amplitud przechyłu poprzecznego ϕ do momentu na kierownicy M_k . Iloraz wartości amplitud sygnałów wyjścia do wejścia posiada maksimum dla charakterystycznej prędkości, dla której motocykl odznacza się najlepszą kierownością w ustalonych warunkach ruchu.

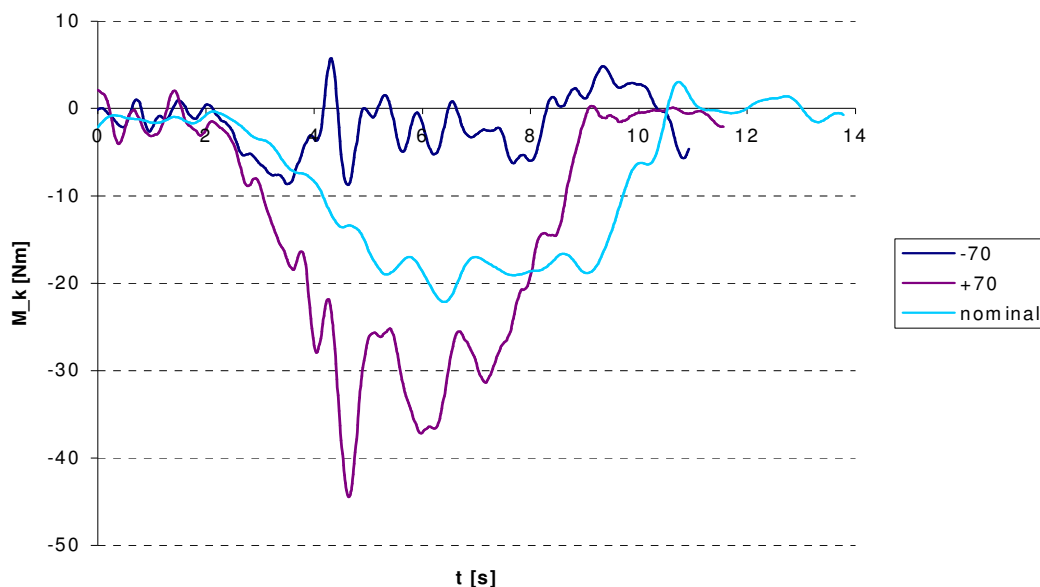


Rys. 4.10 Zmiana wartości ilorazu amplitud przechyłu poprzecznego i momentu na kierownicy w funkcji prędkości ruchu.

4.1.5 Manewr „U”

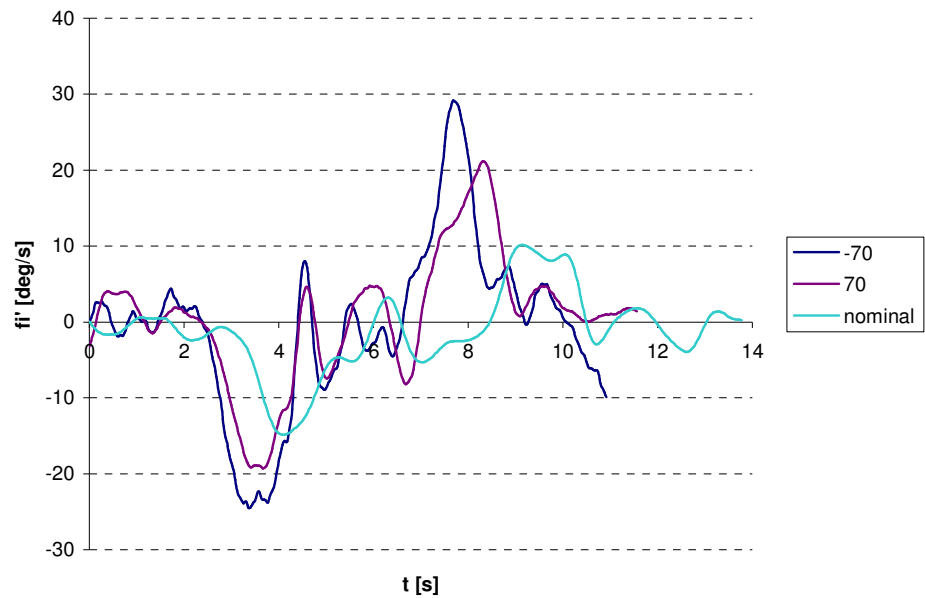
Manewr „U” przeprowadzono dla stałej prędkości ruchu oraz zmiennych parametrów konstrukcyjnych. Na wykresach poniżej przedstawiono przebiegi czasowe rejestrowanych sygnałów, konieczne do wyznaczenia parametrów oceny kierowności na podstawie omawianego manewru. Na rys 4.11 przedstawiono czasowe przebiegi momentu na kierownicy M_k przy zmiennej długości odcinka wyprzedzenia. Można zauważyć znaczącą różnicę osiąganych wartościach momentów. Dla prezentowanego manewru wartość momentu dla ustawień nominalnych maksimum momentu wynosi ok $15 \div 20$ Nm. Zmniejszając odcinek wyprzedzenia, zmniejsza się również moment, jaki kierowca musi przyłożyć do kierownicy.

Zmniejszenie odcinka wyprzedzenia (przesunięcie koła w tył o 70 mm) powoduje wzrost momentu przykładanego do kierownicy w celu pokonania założonego toru. Jego wartość wynosi wówczas ok. $30 \div 40$ Nm.



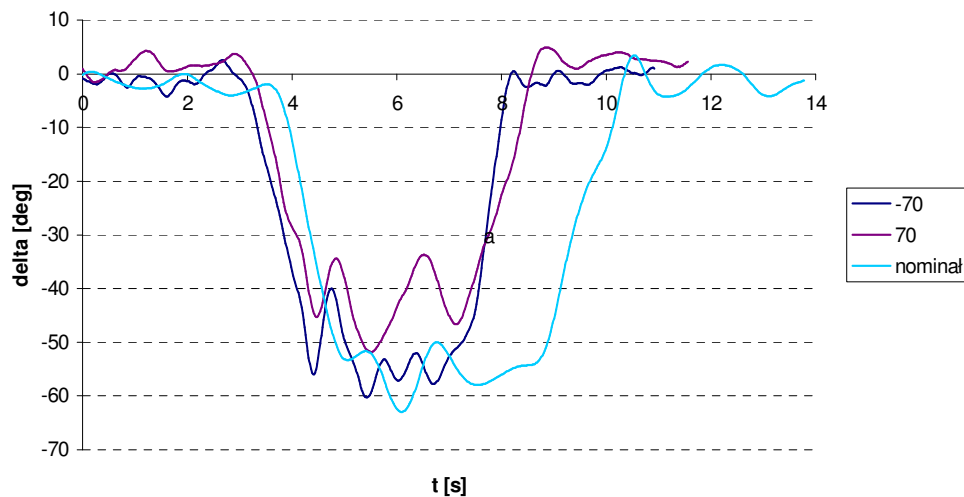
Rys. 4.11 Czasowe przebiegi wartości momentu na kierownicy dla różnych odcinków wyprzedzenia. (manewr „U”)

Na rys. 4.12 przedstawiono przebieg zmian prędkości przechyłu dla różnych długości odcinka wyprzedzenia.



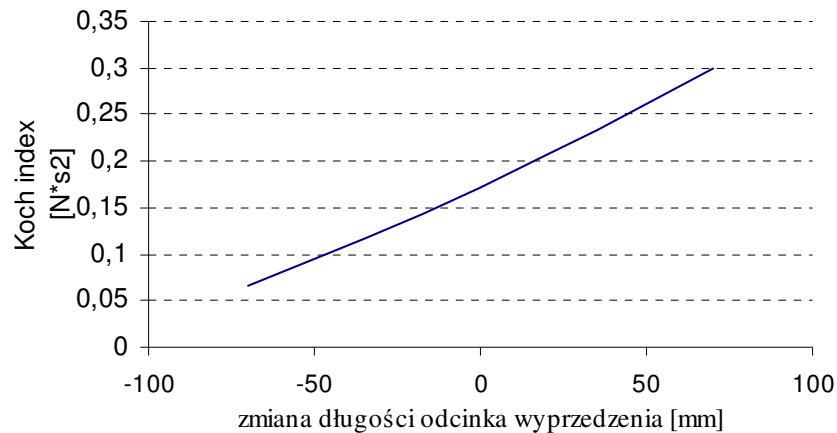
Rys. 4.12. Czasowe przebiegi prędkości przechyłu poprzecznego dla różnych długości odcinka wyprzedzenia.

Dodatkowo, na rys.4.13 przedstawiono czasowy przebieg zmiany kąta skrętu dla manewru „U”. Można zauważyć, że zmiana długości odcinka wyprzedzenia nie powoduje znacznej zmiany kąta skrętu kierownicy



Rys. 4.13 Czasowe przebiegi kąta skrętu kierownicy dla różnych długości odcinka wyprzedzenia.

Korzystając z zarejestrowanych przebiegów wyznaczono zmianę indeksu Kocha w funkcji względnej zmiany długości odcinka wyprzedzenia.



Rys.4.14 Zmiana indeksu Koch'a dla różnych długości odcinka wyprzedzenia. Manewr „U”, stała prędkość ruchu.

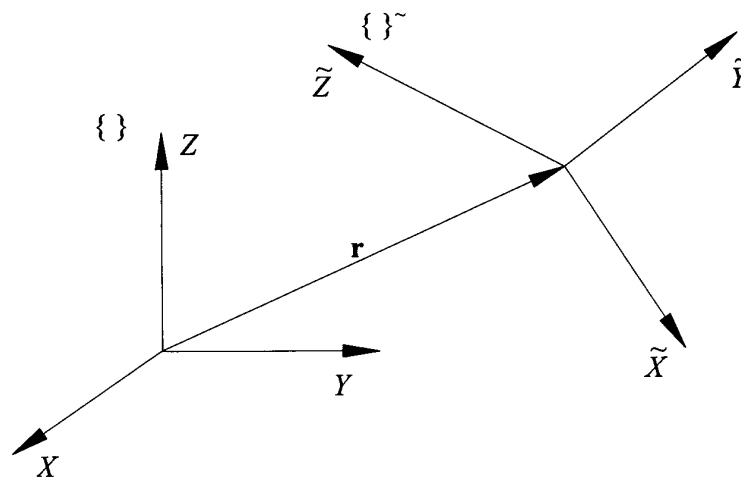
Zwiększając odcinek wyprzedzenia poprzez przemieszczenie przedniego koła w tył, rośnie wartość indeksu Koch'a. Powoduje to, że kierowność motocykla pogarsza się. Kierowca zmuszony jest zadziałać większym momentem, aby osiągnąć taką samą prędkość przechyłu poprzecznego. Prowadzenie motocykla wymaga wówczas od kierowcy znacznie większego wysiłku.

5. MODELOWANIE DYNAMIKI MOTOCYKLA

5.1 Przekształcenia jednorodne

Aby opisać kinematykę i dynamikę systemów wielomasowych należy być przyjąć określoną metodę pozwalającą na zdefiniowanie położenia i orientacji ciał w przestrzeni. W pracy zastosowano metodę przekształceń jednorodnych do opisu położenia i orientacji poszczególnych ciał oraz do wyprowadzania równań ruchu. Przekształcenia jednorodne są powszechnie wykorzystywane w robotyce do opisu względnych pozycji sąsiadujących członów w łańcuchu kinematycznym. Motocykl może być traktowany jako otwarty łańcuch kinematyczny składający się z wielu członów, które pozostają w kontakcie z drogą poprzez koła ogumione.

W celu określenia położenia i orientacji ciała w przestrzeni należy zdefiniować odpowiednie układy współrzędnych, ustalić reguły transformacji współrzędnych, tak aby każde ciało miało znane położenie w inercjalnym układzie współrzędnych. Najprościej jest opisać położenie i orientacja wybranego punktu ciała w układzie współrzędnych związanym z ciałem. Położenie i orientacja wybranego punktu ciała może być określona w dowolnym innym układzie współrzędnych jeśli położenie i orientacja tego układu jest znana w stosunku do układu związanego z ciałem.



Rys.5.1.1 Układy współrzędnych $\{ \}$ i $\{ \}^{\sim}$.

Pozycja i orientacja układu współrzędnych $\{ \}^{\sim}$ określonego przez wektor $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ w stosunku do układu XYZ może być określona przez sześć parametrów (Adamić-Wójcik I.,

2003) Trzy z nich są składowymi wektora \mathbf{r} i określają pozycję początku układu współrzędnych $\{\tilde{\cdot}\}$ w układzie $\{\cdot\}$ (rys.5.1.1). Wykorzystując przekształcenia jednorodnego przemieszczenia początku układu możemy zdefiniować jako:

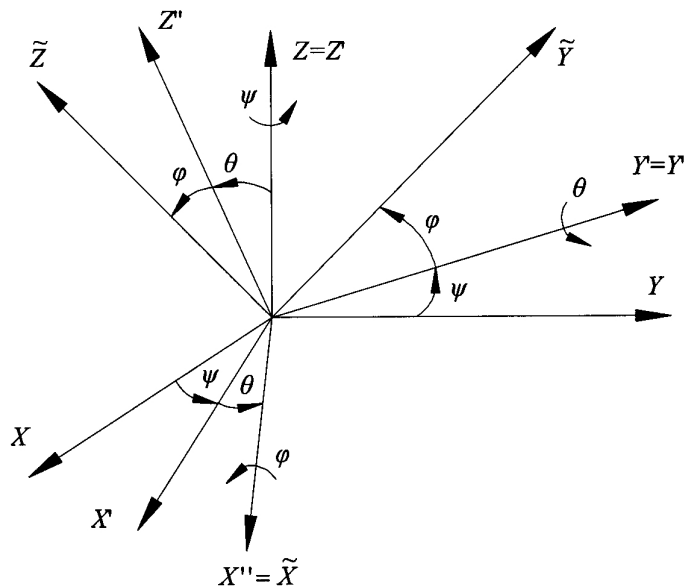
$$\mathbf{T}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1.1)$$

gdzie: $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ wektor położenia układu $\{\tilde{\cdot}\}$ w układzie $\{\cdot\}$,

\mathbf{I} - macierz jednostkowa.

Orientację układu $\{\tilde{\cdot}\}$ w $\{\cdot\}$ określają elementy macierzy rotacji. Macierz rotacji może być jednoznacznie opisana za pomocą trzech parametrów (Grzegózek W. i inni, 2003).

Najczęściej w mechanice pojazdów stosowane są kąty obrotu ZYX Eulera. Kąty Eulera opisują orientację jednego układu względem drugiego poprzez kąty ψ, θ, φ . Najpierw wykonuje obrót o kąt ψ wokół osi Z, następnie obrót o kąt θ wokół nowej osi Y' i wreszcie obrót o kąt φ wokół nowej osi X'' (rys.5.1.2) i w efekcie doprowadza do konfiguracji $\{\tilde{\cdot}\}$.



Rys.5.1.2 Transformacja współrzędnych. Kąty Eulera ZYX

Wykorzystując przekształcenia jednorodnego orientacja układu współrzędnych $\{\tilde{\cdot}\}$ w $\{\cdot\}$ może być określona poprzez macierz transformacji:

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (5.1.2)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie: $c\psi = \cos \psi$, $s\psi = \sin \psi$, $c\theta = \cos \theta$, $s\theta = \sin \theta$, $c\varphi = \cos \varphi$, $s\varphi = \sin \varphi$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\varphi - s\psi c\varphi & c\psi s\theta c\varphi + s\psi s\varphi \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\varphi + c\psi c\varphi & s\psi s\theta c\varphi - c\psi s\varphi \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix}$$

Zatem transformacja współrzędnych z układu współrzędnych $\{ \tilde{\} \}$ do układu współrzędnych $\{ \}$ odpowiadająca zarówno przemieszczeniu (translacji) jak i rotacji może być określona przez:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_T \mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\varphi - s\psi c\varphi & c\psi s\theta c\varphi + s\psi s\varphi & x \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\varphi + c\psi c\varphi & s\psi s\theta c\varphi - c\psi s\varphi & y \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1.3)$$

Macierz transformacji (5.1.3) można przedstawić w formie:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

Przekształcenia jednorodnie umożliwiają realizację transformacji współrzędnych (przemieszczenie i rotacje) jako jednej operacji. Jest to bardzo wygodne przy składaniu kolejnych transformacji.

Jedną z najczęściej stosowanych metod stosowanych w formułowaniu równań ruchu złożonych układów mechanicznych jest metoda wykorzystująca równania Lagrange'a II rodzaju. Jeśli ruch ciała jest opisany za pomocą niezależnych parametrów q_i zwanych współrzędnymi uogólnionymi i znane są funkcjonały E i V określające energię kinetyczną i potencjalną ciała to jego równania ruchu mają następującą postać (Leyko 1996):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_k \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad (5.1.5)$$

gdzie: q_i – współrzędne uogólnione,

\dot{q}_i – prędkości uogólnione,

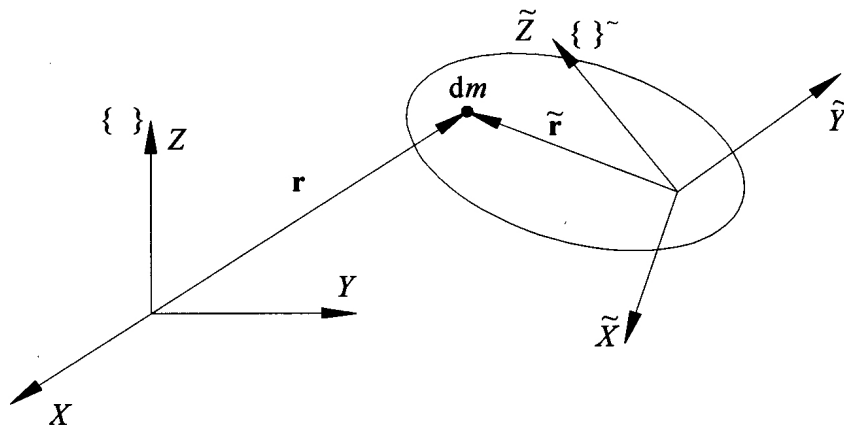
n – liczba współrzędnych uogólnionych,
 Q_i - siły uogólnione (niepotencjalne).

Równania te można zapisać w postaci:

$$\varepsilon_i(E) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (5.1.6)$$

gdzie: $\varepsilon_k(E) = \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial E}{\partial q_k}$ - operatory Lagrange'a.

Gdy do transformacji współrzędnych stosowane są macierze przekształceń jednorodnych sposób obliczania energii kinetycznej układu może być przeprowadzony jak poniżej. Położenie elementarnej masy w układzie współrzędnych inercyjnym może być określone (rys.5.1.3) jeśli znamy jego położenie w układzie lokalnym i macierz transformacji z układu lokalnego do układu inercyjnego.



Rys.5.1.3 Położenie elementarnej masy dm

Jeśli wektor $\tilde{\mathbf{r}}$ określa pozycję masy elementarnej w lokalnym układzie współrzędnych $\{\tilde{\quad}\}$, to współrzędne elementarnej masy w układzie inercyjnym $\{\quad\}$ mogą być określone wzorem:

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{r}} \quad (5.1.7)$$

gdzie: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(q_1, \dots, q_n)$ jest macierzą transformacji współrzędnych układu $\{\tilde{\quad}\}$ do układu $\{\quad\}$.

Czasami macierz \mathbf{B} można przedstawić w postaci iloczynu macierzy z których każda zależy tylko od jednej współrzędnej uogólnionej:

$$\mathbf{B} = \prod_{i=1}^n \mathbf{C}_i(q_i) \quad (5.1.8)$$

Aby obliczyć energię kinetyczną masy elementarnej najlepiej jest wykorzystać koncepcję śladu macierzy (Jurewicz1984):

$$dE = \frac{1}{2} tr \{ \dot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}}^T \} dm = \frac{1}{2} tr \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & 0 \end{bmatrix} \right\} dm = \frac{1}{2} tr \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x}\dot{x} & \dot{x}\dot{y} & \dot{x}\dot{z} & 0 \\ \dot{y}\dot{x} & \dot{y}\dot{y} & \dot{y}\dot{z} & 0 \\ \dot{z}\dot{x} & \dot{z}\dot{y} & \dot{z}\dot{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} dm =$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dm = \frac{1}{2} v^2 dm$$
(5.1.9)

Aby obliczyć energię kinetyczną całego ciała należy obliczyć:

$$E = \int_m dE \quad (5.1.10)$$

Ponieważ współrzędne wektora $\tilde{\mathbf{r}}$ nie zależą od czasu można zapisać:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{r}} \quad (5.1.11)$$

a energia kinetyczna ciała wyniesie:

$$E = \frac{1}{2} \int_m tr \{ \mathbf{B} \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}}^T \mathbf{B}^T \} dm = \frac{1}{2} tr \left\{ \mathbf{B} \int_m \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}}^T dm \mathbf{B}^T \right\} = \frac{1}{2} tr \{ \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \} \quad (5.1.12)$$

gdzie \mathbf{H} nazywana jest macierzą mas (pseudo-bezwładności) i wynosi:

$$\mathbf{H} = \int_m \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}}^T dm = \int_m \begin{bmatrix} \tilde{x}\tilde{x} & \tilde{x}\tilde{y} & \tilde{x}\tilde{z} & \tilde{x} \\ \tilde{y}\tilde{x} & \tilde{y}\tilde{y} & \tilde{y}\tilde{z} & \tilde{y} \\ \tilde{z}\tilde{x} & \tilde{z}\tilde{y} & \tilde{z}\tilde{z} & \tilde{z} \\ \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} & 1 \end{bmatrix} dm = h_{i,j=1,\dots,4} \quad (5.1.13)$$

Jej elementy mogą być obliczone ze wzorów:

$$h_{11} = \int_m \tilde{x}^2 dm ; h_{22} = \int_m \tilde{y}^2 dm ; h_{33} = \int_m \tilde{z}^2 dm ; h_{44} = m,$$

$$h_{12} = h_{21} = \int_m \tilde{x}\tilde{y} dm ; h_{13} = h_{31} = \int_m \tilde{x}\tilde{z} dm ; h_{23} = h_{32} = \int_m \tilde{y}\tilde{z} dm \quad (5.1.14)$$

$$h_{14} = h_{41} = \int_m \tilde{x} dm ; h_{24} = h_{42} = \int_m \tilde{y} dm ; h_{34} = h_{43} = \int_m \tilde{z} dm$$

Elementy macierzy \mathbf{H} są bezpośrednio powiązane z masowymi momentami ciała względem osi $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, zależnościami:

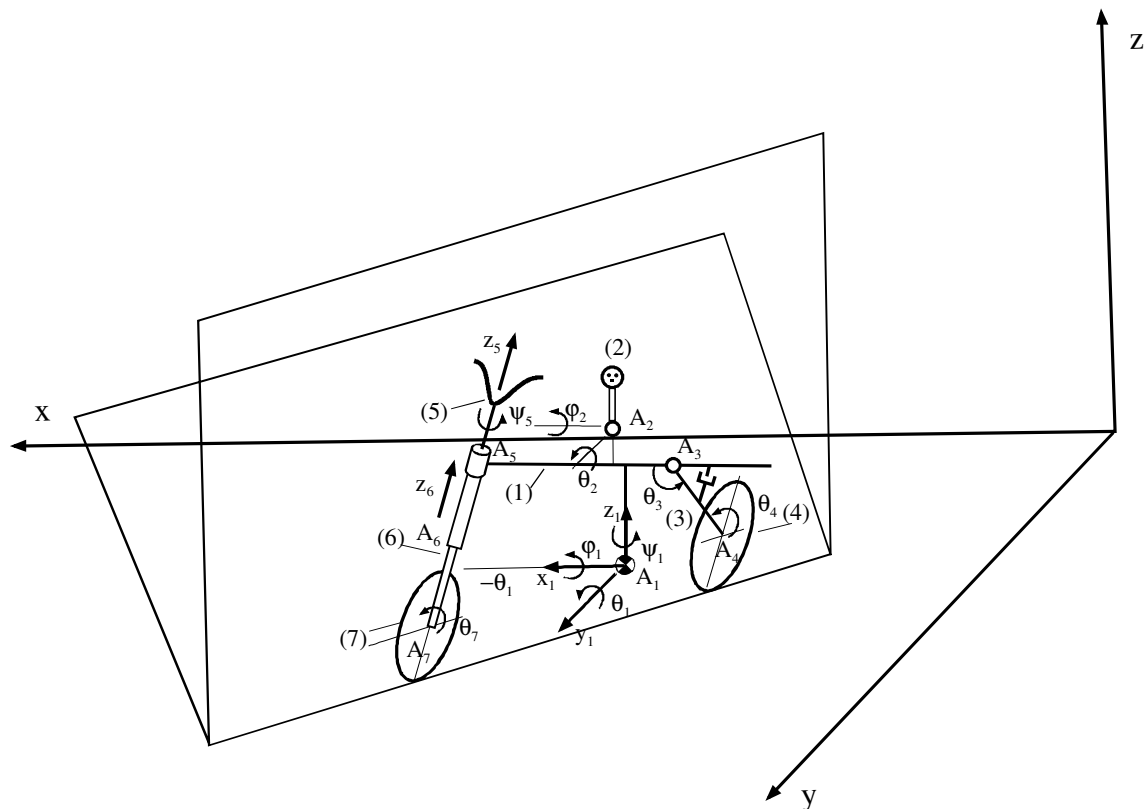
$$\begin{aligned} I_{xx} &= h_{22} + h_{33} & I_{xy} &= h_{12} & m\tilde{x}_c &= h_{14} \\ I_{yy} &= h_{11} + h_{33} & I_{xz} &= h_{13} & m\tilde{y}_c &= h_{24} \\ I_{zz} &= h_{11} + h_{22} & I_{yz} &= h_{23} & m\tilde{z}_c &= h_{34} \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

gdzie: $\tilde{x}_c, \tilde{y}_c, \tilde{z}_c$ - współrzędne środka masy ciała w lokalnym układzie współrzędnych,

m- masa ciała.

5.2 Model dynamiki motocykla

Motocykl wraz z kierownicą traktowany jest jako układ 7 ciał przedstawionych na rys.5.2.1



Rys.5.2.1 Motocykl jako układ 7 ciał

- (1) – rama
- (2) – kierowca
- (3) –wahacz
- (4) - koło tylne
- (5) – kierownica
- (6) – widelec
- (7) – koło przednie

Układem odniesienia zwanym dalej układem bazowym jest układ współrzędnych $Oxyz$ oznaczany jako $\{0\}$. Z poszczególnymi ciałami związane są lokalne układy współrzędnych $\{1\} \div \{7\}$.

Poniżej omówiono szczegółowo poszczególne ciała (podukłady)

1°. Rama

Przyjmuje się, że rama jest ciałem sztywnym mającym względem bazy sześć stopni swobody. Położenie ramy jest znane gdy, gdy znane są współrzędne wektora:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(1)} = [x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad \psi_1 \quad \varphi_1 \quad \theta_1]^T \quad (5.2.1)$$

gdzie: x_1, y_1, z_1 - współrzędne wybranego punktu ramy,

$\psi_1, \varphi_1, \theta_1$ - kąty ZXY Eulera.

Parametry masowe ramy określają:

$m^{(1)}$ - masa

$I_x^{(1)}, I_y^{(1)}, I_z^{(1)}$ - masowe momenty bezwładności ramy w układzie lokalnym $\{1\}$

$I_{xy}^{(1)}, I_{xz}^{(1)}, I_{yz}^{(1)}$ - masowe momenty odśrodkowe ramy w układzie $\{1\}$

$x_c^{(1)}, y_c^{(1)}, z_c^{(1)}$ - współrzędne środka masy ramy w układzie $\{1\}$.

Przy zastosowaniu przekształceń jednorodnych można napisać, że:

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{r}_1' \quad (5.2.2)$$

gdzie: $\mathbf{r}_1' = [x_1' \quad y_1' \quad z_1' \quad 1]^T$ jest wektorem współrzędnych punktu w układzie $\{1\}$

$\mathbf{r} = [x \quad y \quad z \quad 1]^T$ jest wektorem współrzędnych punktu w układzie $\{0\}$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{C}_1^{(1)} \cdot \mathbf{C}_2^{(1)} \cdot \mathbf{C}_3^{(1)} \cdot \mathbf{C}_6^{(1)} \cdot \mathbf{C}_4^{(1)} \cdot \mathbf{C}_5^{(1)} \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{C}_1^{(1)} = \mathbf{C}_1^{(1)}(\tilde{q}_1^{(1)}) = \mathbf{C}_1^{(1)}(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.4.1)$$

$$\mathbf{C}_2^{(1)} = \mathbf{C}_2^{(1)}(\tilde{q}_2^{(1)}) = \mathbf{C}_2^{(1)}(y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.4.2)$$

$$\mathbf{C}_3^{(1)} = \mathbf{C}_3^{(1)}(\tilde{q}_3^{(1)}) = \mathbf{C}_3^{(1)}(z_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.4.3)$$

$$\mathbf{C}_4^{(1)} = \mathbf{C}_4^{(1)}(\tilde{q}_5^{(1)}) = \mathbf{C}_4^{(1)}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi_1 & -s\varphi_1 & 0 \\ 0 & s\varphi_1 & c\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.4.4)$$

$$\mathbf{C}_5^{(1)} = \mathbf{C}_5^{(1)}(\tilde{q}_6^{(1)}) = \mathbf{C}_5^{(1)}(\theta_1) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.4.5)$$

$$\mathbf{C}_6^{(1)} = \mathbf{C}_6^{(1)}(\tilde{q}_4^{(1)}) = \mathbf{C}_6^{(1)}(\psi_1) = \begin{bmatrix} c\psi_1 & -s\psi_1 & 0 & 0 \\ s\psi_1 & c\psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.4.6)$$

$$c\varphi_1 = \cos \varphi_1 \quad c\theta_1 = \cos \theta_1 \quad c\psi_1 = \cos \psi_1$$

$$s\varphi_1 = \sin \varphi_1 \quad s\theta_1 = \sin \theta_1 \quad s\psi_1 = \sin \psi_1$$

2° Kierowca

Niech macierz transformacji z układu {2} do układu {1} przy zerowych wartościach kątów φ_2, θ_2 ma postać:

$$\mathbf{B}_c^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{(1,2)} & \mathbf{r}^{(1,2)} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.5)$$

Przyjmując, że $\mathbf{R}^{(1,2)} = \mathbf{I}$ zakłada się, że przy zerowych wartościach współrzędnych uogólnionych kierowcy:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.2.6)$$

układy współrzędnych {1} i {2} mają osie równoległe.

Macierz transformacji z układu współrzędnych {2} do {1} przyjmuje postać:

$$\tilde{\mathbf{B}}^{(2)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(2)}(\varphi_2, \theta_2) = \mathbf{B}_c^{(1,2)} \cdot \mathbf{C}_4^{(2)} \cdot \mathbf{C}_5^{(2)} \quad (5.2.7)$$

gdzie: $\mathbf{C}_4^{(2)}, \mathbf{C}_5^{(2)}$ określono jak w (5.2.4.4) i (5.2.4.5) przy przyjęciu φ_2, θ_2 w miejsce φ_1, θ_1 .

Współrzędne z układu współrzędnych {2} do układu bazowego {0} można transformować wg wzoru:

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{r}'_2 \quad (5.2.8)$$

gdzie: $\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^{(2)}$

Natomiast wektor współrzędnych uogólnionych ciała (2) przyjmie postać:

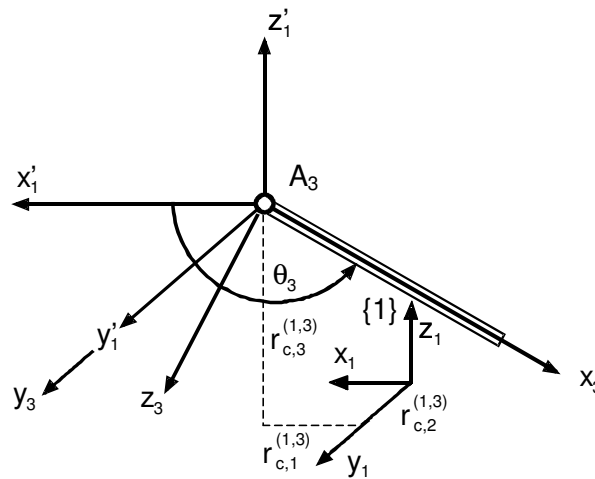
$$\mathbf{q}^{(2)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Zakłada się, że parametry masowe kierowcy (a właściwie jego części ponad siodłem) określają parametry: $m^{(2)}, J_x^{(2)}, J_y^{(2)}, J_z^{(2)}, J_{xy}^{(2)}, J_{xz}^{(2)}, J_{yz}^{(2)}, x_c^{(2)}, y_c^{(2)}, z_c^{(2)}$ o znaczeniu jak w przypadku ramy.

3° Wahacz tylny

Przyjmując, że wahacz tylny leży w płaszczyźnie ramy można początek układu $\{3\}$ umieścić w punkcie A_3 z rys.1 . Przy założeniu, że macierz $\mathbf{B}_c^{(1,3)}$ ma postać:

$$\mathbf{B}_c^{(1,3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c^{(1,3)} & \mathbf{r}_c^{(1,3)} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.10)$$



Rys.5.2. 2. kąt θ_3

x'_1, y'_1, z'_1 - osie układu wsp. || do $\{1\}$

gdzie: $\mathbf{R}_c^{(1,3)} = \mathbf{I}$, $\mathbf{r}^{(1,3)}$ – wektor określający położenie początku układu $\{3\}$ w $\{1\}$ (rys.5.2. 2).

Macierz transformacji z układu $\{3\}$ do układu $\{1\}$ określona jest następująco:

$$\tilde{\mathbf{B}}^{(3)} = \mathbf{B}_c^{(1,3)} \cdot \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.11)$$

a ponadto:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(3)} = [\theta_3] \quad (5.2.12)$$

$$\mathbf{q}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

Transformacji współrzędnych z układu {3} do układu bazowego można dokonać wg wzoru:

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}^{(3)} \cdot \mathbf{r}'_3 \quad (5.2.14)$$

gdzie: $\mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^{(3)}$.

Przyjmuje się, że parametry masowe wahacza określają:

$$m^{(3)}, J_x^{(3)}, J_y^{(3)}, J_z^{(3)}, J_{xy}^{(3)}, J_{xz}^{(3)}, J_{yz}^{(3)}, x_c^{(3)}, y_c^{(3)}, z_c^{(3)}.$$

4° Koło tylne

Zakładając podobnie jak poprzednio, że koło tylne leży w płaszczyźnie ramy i wahacza, można przyjąć, że macierz $\mathbf{B}_c^{(3,4)}$ ma postać:

$$\mathbf{B}_c^{(3,4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c^{(3,4)} & \mathbf{r}_c^{(3,4)} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.15)$$

gdzie: $\mathbf{R}_c^{(3,4)} = \mathbf{I}$, $\mathbf{r}_c^{(3,4)}$ wektor określający położenie punktu A_4 w układzie wsp. {3}.

Ruch koła względem wahacza określany jest przez :

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(4)} = [\theta_4] \quad (5.2.16)$$

a macierz $\tilde{\mathbf{B}}^{(4)}$ przyjmuje postać:

$$\tilde{\mathbf{B}}^{(4)} = \mathbf{B}_c^{(3,4)} \cdot \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.17)$$

Współrzędne z układu {4} do układu bazowego transformuje się wg wzoru:

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}^{(4)} \cdot \mathbf{r}'_4 \quad (5.2.18)$$

gdzie: $\mathbf{B}^{(4)} = \mathbf{B}^{(4)}(\mathbf{q}^{(4)}) = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(3)} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^{(4)}$

$$\mathbf{q}^{(4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(3)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(3)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (5.2.19)$$

Przyjmuje się też, że parametry masowe koła określają:

$$m^{(4)}, J_x^{(4)}, J_y^{(4)}, J_z^{(4)}, J_{xy}^{(4)}, J_{xz}^{(4)}, J_{yz}^{(4)}, x_c^{(4)}, y_c^{(4)}, z_c^{(4)} .$$

5° Kierownica

Przyjmując, że przy zerowej wartości kąta obrotu kierownicy ψ_5 położenie układu współrzędnych $\{5\}$ względem układu $\{1\}$ określa macierz :

$$\mathbf{B}_c^{(1,5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c^{(1,5)} & \mathbf{r}_c^{(1,5)} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.20)$$

można wektory współrzędnych uogólnionych lokalnych i globalnych określić jako:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(5)} = [\psi_5]$$

$$\mathbf{q}^{(5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(5)} \end{bmatrix} \quad (5.2.21)$$

a macierze transformacji z układu $\{5\}$ do układu $\{1\}$ i do układu bazowego $\{0\}$ określić następująco:

$$\tilde{\mathbf{B}}^{(5)} = \mathbf{B}_c^{(1,5)} \cdot \begin{bmatrix} c\psi_5 & -s\psi_5 & 0 & 0 \\ s\psi_5 & c\psi_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.22.1)$$

$$\mathbf{B}^{(5)} = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^{(5)} \quad (5.2.22.2)$$

Podobnie jak poprzednio założono , że parametry masowe tego podukładu

określają: $m^{(5)}, J_x^{(5)}, J_y^{(5)}, J_z^{(5)}, J_{xy}^{(5)}, J_{xz}^{(5)}, J_{yz}^{(5)}, x_c^{(5)}, y_c^{(5)}, z_c^{(5)} .$

6° Widelec

Położenie układu współrzędnych $\{6\}$ względem $\{5\}$ przy zerowej wartości obciążenia układu określa macierz:

$$\mathbf{B}_c^{(5,6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{r}_c^{(5,6)} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.23)$$

co oznacza przyjęcie, że osie układu współrzędnych {5} i {6} są równoległe.

Współrzedną uogólnioną tego podukładu określającą ruch względem {5} jest:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(6)} = [z_6], \quad (5.2.24)$$

a wektor współrzędnych uogólnionych ma postać:

$$\mathbf{q}^{(6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(5)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(5)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(6)} \end{bmatrix}. \quad (5.2.25)$$

Macierze transformacji z układu {6} do układu {5} i {0} mają postaci:

$$\tilde{\mathbf{B}}^{(6)} = \mathbf{B}_c^{(5,6)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.26.1)$$

$$\mathbf{B}^{(6)} = \mathbf{B}^{(5)} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^{(6)} \quad (5.2.26.2)$$

Parametry masowe tego ciała określają:

$$m^{(6)}, J_x^{(6)}, J_y^{(6)}, J_z^{(6)}, J_{xy}^{(6)}, J_{xz}^{(6)}, J_{yz}^{(6)}, x_c^{(6)}, y_c^{(6)}, z_c^{(6)}$$

7° Koło przednie

Położenie lokalnego układu {7} w układzie współrzędnych {6} określa macierz:

$$\mathbf{B}_c^{(6,7)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{r}^{(6,7)} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.27)$$

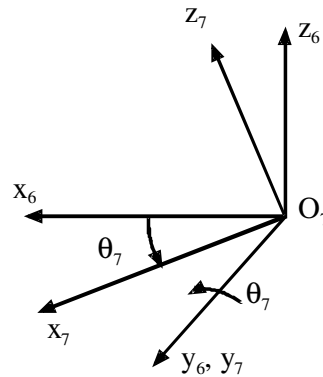
Jeśli kąt θ_7 odmierzany jest jak na rys.5.2.3 to:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(7)} = [\theta_7] \quad (5.2.28.1)$$

$$\text{oraz } \tilde{\mathbf{B}}^{(7)} = \mathbf{B}_c^{(6,7)} \cdot \begin{bmatrix} c\theta_7 & 0 & s\theta_7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_7 & 0 & c\theta_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.28.2)$$

wektor współrzędnych uogólnionych i macierz transformacji do układu bazowego przyjmują postać:

$$\mathbf{q}^{(7)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(6)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(7)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(5)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(6)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(7)} \end{bmatrix} \quad (5.2.29)$$

Rys. 5.2.3. Kąt θ_7

Parametry masowe koła określają :

$$m^{(7)}, J_x^{(7)}, J_y^{(7)}, J_z^{(7)}, J_{xy}^{(7)}, J_{xz}^{(7)}, J_{yz}^{(7)}, x_c^{(7)}, y_c^{(7)}, z_c^{(7)}.$$

Ruch motocykla jest znany gdy znane są składowe wektora współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \psi_1 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \varphi_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \psi_5 \\ z_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(2)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(3)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(4)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(5)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(6)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(7)} \end{bmatrix} \quad (5.2.30)$$

Równania ruchu motocykla wyprowadzone będą z równań Lagrange'a II rodzaju. Wymaga to wcześniejszego określenia energii kinetycznej układu, energii potencjalnej sił ciężkości i odkształcenia elementów sprężysto-tłumiących oraz sił uogólnionych.

5.3 Wyprowadzenie równań ruchu układu

Równania ruchu zostaną wyprowadzone z równań Lagrange'a postaci:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \text{ dla } i=1, \dots, n \quad (5.3.1)$$

gdzie: E, V – odpowiednio energia kinetyczna i potencjalna układu,

$q_1 \div q_n$ współrzędne uogólnione,

n – liczba współrzędnych uogólnionych,

D - funkcja dyssypacji energii,

Q_i – siły uogólnione.

W przypadku modelu motocykla z rys.5.2.1 jest $n=13$ i energia kinetyczna rozważanego układu jest określona jako:

$$E = \sum_{k=1}^7 E^{(k)} \quad (5.3.2)$$

gdzie: E_k energia kinetyczna k-tego ciała

Energię potencjalną można określić wzorem:

$$V = \sum_{k=1}^7 V_g^{(k)} + V_s^{(3)} + V_s^{(6)} \quad (5.3.3)$$

gdzie: $V_g^{(k)}$ - energia potencjalna sił ciężkości ciała k,

$V_s^{(3)}$ - energia odkształcenia sprężystego elementu sprężysto-tłumiącego 3 łączącego wahacz z ramą (podukład (3) z podukładem (1))

$V_s^{(6)}$ - energia odkształcenia sprężystego elementu sprężysto-tłumiącego 6 sprężyn amortyzatora łączącego widełki z kierownicą (podukłady (5) i (6))

Funkcję dyssypacji określa wzór:

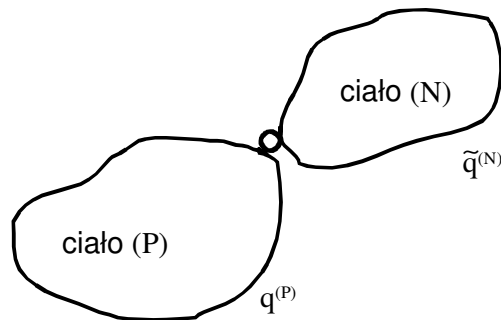
$$D = D^{(3)} + D^{(6)} \quad (5.3.4)$$

gdzie: $D^{(3)}, D^{(6)}$ to funkcje dyssypacji energii członów (3) i (6), a więc elementu sprężysto-tłumiącego 3 i elementu sprężysto-tłumiącego 6.

Siły oddziaływania oporu powietrza , oraz oddziaływania jezdni na koła będą wprowadzone do równań ruchu poprzez siły uogólnione i będą omówione później.

A.1 Energia kinetyczna i potencjalna sił ciężkości ciał.

Rozpatrzmy ciało (N) dołączone do ciała (P) jak na rys.5.3.4



Rys.5.3.4 Ciało (N) dołączone do ciała (P)

$\mathbf{q}^{(P)}$ - wektor współrzędnych uogólnionych ciała poprzedzającego

$\tilde{\mathbf{q}}^{(N)}$ - wektor współrzędnych uogólnionych ciała dołączonego.

Ruch ciała dołączonego (N) jest znany gdy znane są składowe wektora jego współrzędnych uogólnionych :

$$\mathbf{q}^{(N)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(P)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(N)} \end{bmatrix} = [q_1^{(N)} \dots q_{n_N}^{(N)}]^T \quad (5.3.5)$$

gdzie: $\mathbf{q}^{(P)} = [q_1^{(P)} \dots q_{n_p}^{(P)}]^T$ - wektor współrzędnych ciała (P),

$\tilde{\mathbf{q}}^{(N)} = [\tilde{q}_1^{(N)} \dots \tilde{q}_{\tilde{n}_N}^{(N)}]^T$ - wektor współrzędnych ciała (N) w jego ruchu względem ciała (P),

$$n_N = n_p + \tilde{n}_N.$$

Postępując analogicznie jak w (Adamić 2002, Grzeżożek 2000, Grzeżożek i inni, 2003) energię kinetyczną członu (N) można przedstawić w postaci:

$$E^{(N)} = \frac{1}{2} tr \{ \dot{\mathbf{B}}^{(N)} \mathbf{H}^{(N)} \dot{\mathbf{B}}^{(N)T} \} \quad (5.3.6)$$

gdzie: $\mathbf{B}^{(N)}$ macierz transformacji z układu $\{N\}$ do układu inercjalnego $\{ \}$, $\mathbf{H}^{(N)}$ macierz mas (Grzeżożek 2000),

$$\dot{\mathbf{B}}^{(N)} = \frac{d\mathbf{B}^{(N)}}{dt} = \sum_{i=1}^{n_N} \mathbf{B}_i^{(N)} \cdot \dot{q}_i^{(N)}, \quad (5.3.7.1)$$

$$\mathbf{B}_i^{(N)} = \frac{\partial \mathbf{B}^{(N)}}{\partial q_i^{(N)}}, \quad (5.3.7.2)$$

$tr(\mathbf{A})$ – ślad macierzy \mathbf{A} .

Operatory Lagrange'a można przedstawić w postaci (Grzeżożek i inni 2003):

$$\begin{aligned}\varepsilon_k(E^{(N)}) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial E^{(N)}}{\partial \dot{q}_k^{(N)}} - \frac{\partial E^{(N)}}{\partial q_k^{(N)}} = \text{tr} \left\{ \mathbf{B}_k^{(N)} \mathbf{H}^{(N)} \ddot{\mathbf{B}}^{(N)T} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n_N} a_{kj}^{(N)} \ddot{q}_j^{(N)} + h_k^{(N)}\end{aligned}\quad (5.3.8.1)$$

dla $k=1, \dots, n_A$;

gdzie:

$$\begin{aligned}a_{kj}^{(N)} &= \text{tr} \left\{ \mathbf{B}_k^{(N)} \mathbf{H}^{(N)} \mathbf{B}_j^{(N)T} \right\} \\ h_k^{(N)} &= \sum_{i=1}^{n_N} \sum_{j=1}^{n_N} \text{tr} \left\{ \mathbf{B}_k^{(N)} \mathbf{H}^{(N)} \mathbf{B}_{ij}^{(N)T} \right\} \\ \mathbf{B}_{ij}^{(N)} &= \frac{\partial \mathbf{B}_i^{(N)}}{\partial q_j^{(N)}} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}^{(N)}}{\partial q_j^{(N)} \partial q_i^{(N)}}\end{aligned}$$

lub w postaci macierzowej:

$$\varepsilon_{\mathbf{q}^{(N)}}(E^{(N)}) = \mathbf{A}^{(N)} \ddot{\mathbf{q}}^{(N)} + \mathbf{h}^{(N)} \quad (5.3.8.2)$$

gdzie: $\mathbf{A}^{(N)} = (a_{kj}^{(N)})_{kj=1, \dots, n_N}$, $\mathbf{h}^{(N)} = (h_k)_{k=1, \dots, n_N}$

Uwzględniając (5.3.5) można (5.3.8) zapisać w postaci:

$$\varepsilon_{\mathbf{q}^{(N)}}(E^{(N)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{PP}^{(N)} & \mathbf{A}_{PN}^{(N)} \\ \mathbf{A}_{NP}^{(N)} & \mathbf{A}_{NN}^{(N)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^{(P)} \\ \ddot{\mathbf{q}}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_P^{(N)} \\ \mathbf{h}_N^{(N)} \end{bmatrix} \quad (5.3.9)$$

gdzie: $\mathbf{A}_{PP}^{(N)}, \mathbf{A}_{PN}^{(N)} = \mathbf{A}_{NP}^{(N)T}, \mathbf{A}_{NN}^{(N)}$ są odpowiednimi blokami macierzy $\mathbf{A}^{(N)}$,

$\mathbf{h}_P^{(N)}, \mathbf{h}_N^{(N)}$ są odpowiednimi blokami wektora $\mathbf{h}^{(N)}$.

Energię potencjalną sił ciężkości ciała (N), przy założeniu, że oś z układu inercjalnego jest prostopadła do powierzchni Ziemi można zapisać jako (Grzegózek 2000):

$$V_g^{(N)} = m^{(N)} g \cdot z_c^{(N)} \quad (5.3.10)$$

gdzie: $m^{(N)}$ - masa ciała (N)

g – przyspieszenie ziemskie,

$z_c^{(N)}$ współrzędna z-towa środka masy ciała (N) w układzie inercjalnym $\{ \}$.

Współrzędną $z_c^{(N)}$ można określić ze wzoru (Grzegózek i inni 2003):

$$z_c^{(N)} = \mathbf{\theta}_3 \cdot \mathbf{B}^{(N)} \cdot \mathbf{r}_c^{(N)} \quad (5.3.11)$$

gdzie: $\mathbf{\theta}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$,

$\mathbf{B}^{(N)}$ macierz transformacji współrzędnych z układu lokalnego $\{N\}$ do układu inercjalnego $\{ \}$,

$\mathbf{r}_c^{(N)} = [x_c^{(N)} \quad y_c^{(N)} \quad z_c^{(N)} \quad 1]^T$ - wektor współrzędnych środka masy ciała(N) w układzie lokalnym $\{N\}$

Uwzględniając (5.3.10), (5.3.11) można obliczyć:

$$\frac{\partial V_g^{(N)}}{\partial \mathbf{q}_k^{(N)}} = m^{(N)} g \cdot \boldsymbol{\theta}_3 \cdot \mathbf{B}_k^{(N)} \cdot \mathbf{r}_c^{(N)} \quad (5.3.12)$$

dla $k=1, \dots, n_N$

Zależności (5.3.12) można przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial V_g^{(N)}}{\partial \mathbf{q}^{(N)}} = \mathbf{G}^{(N)} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_P^{(N)} \\ \mathbf{G}_N^{(N)} \end{bmatrix} \quad (5.3.13)$$

$$\mathbf{G}^{(N)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_g^{(N)}}{\partial q_1^{(N)}} & \dots & \frac{\partial V_g^{(N)}}{\partial q_{n_N}^{(N)}} \end{bmatrix}^T,$$

gdzie: $\mathbf{G}_P^{(N)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_g^{(N)}}{\partial q_1^{(P)}} & \dots & \frac{\partial V_g^{(N)}}{\partial q_{n_P}^{(P)}} \end{bmatrix}^T,$

$$\mathbf{G}_N^{(N)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_g^{(N)}}{\partial \tilde{q}_1^{(N)}} & \dots & \frac{\partial V_g^{(N)}}{\partial \tilde{q}_{\tilde{n}_N}^{(N)}} \end{bmatrix}^T$$

Wzory (5.3.9), (5.3.13) mogą być teraz zastosowane do obliczenia odpowiednich składników równań Lagrange'a w przedstawiony poniżej sposób.

Ciało (1)

Ponieważ ciało(1) jest pierwszym ciałem rozważanego łańcucha ciał można napisać:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}^{(1)}}(E^{(1)}) = E_{\tilde{\mathbf{q}}^{(1)}}(E^{(1)}) = \mathbf{A}_{1,1}^{(1)} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(1)} + \mathbf{h}_1^{(1)} \quad (5.3.14.1)$$

$$\frac{\partial V_g^{(1)}}{\partial \mathbf{q}^{(1)}} = \frac{\partial V_q^{(1)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(1)}} = \mathbf{G}_1^{(1)} \quad (5.3.14.2)$$

gdzie:

- elementy macierzy $\mathbf{A}_{1,1}^{(1)}$ i wektora $\mathbf{h}_1^{(1)}$ są obliczane jak w (5.3.8), (5.3.9) po przyjęciu $\mathbf{H}^{(N)} = \mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{B}^{(N)} = \mathbf{B}^{(1)},$
- elementy wektora $\mathbf{G}_1^{(1)}$ są obliczane jak w (5.3.12), (5.4.13) po przyjęciu $m^{(N)} = m^{(1)}, \mathbf{B}^{(N)} = \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{r}_c^{(N)} = \mathbf{r}_c^{(1)}.$

Ciało (2)

Ponieważ ciałem poprzedzającym jest ciało (1) to można napisać, że

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}^{(2)}}(E^{(2)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1}^{(2)} & \mathbf{A}_{1,2}^{(2)} \\ \mathbf{A}_{2,1}^{(2)} & \mathbf{A}_{2,2}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{q}}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(2)} \\ \mathbf{h}_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (5.3.15.1)$$

$$\frac{\partial V_g^{(2)}}{\partial \mathbf{q}^{(2)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{(2)} \\ \mathbf{G}_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (5.3.15.2)$$

gdzie: $\mathbf{A}_{1,1}^{(2)}, \mathbf{A}_{1,2}^{(2)}, \mathbf{A}_{2,1}^{(2)}, \mathbf{A}_{2,2}^{(2)}, \mathbf{h}_1^{(2)}, \mathbf{h}_2^{(2)}, \mathbf{G}_1^{(2)}, \mathbf{G}_2^{(2)}$ określone wg (5.3.8),(5.3.9),(5.3.12),(5.3.13)

po przyjęciu $\mathbf{q}^{(P)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{q}}^{(N)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(2)}, \mathbf{B}^{(N)} = \mathbf{B}^{(2)}, \mathbf{H}^{(N)} = \mathbf{H}^{(2)}, m^{(N)} = m^{(2)}, \mathbf{r}_c^{(N)} = \mathbf{r}_c^{(2)}$.

Ciało (3)

Uwzględniając (5.2.12), (5.2.13) można określić zależności:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}^{(3)}}(E^{(3)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1}^{(3)} & \mathbf{A}_{1,3}^{(3)} \\ \mathbf{A}_{3,1}^{(3)} & \mathbf{A}_{3,3}^{(3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{q}}^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(3)} \\ \mathbf{h}_3^{(3)} \end{bmatrix} \quad (5.3.16.1)$$

$$\frac{\partial V_g^{(3)}}{\partial \mathbf{q}^{(3)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{(3)} \\ \mathbf{G}_3^{(3)} \end{bmatrix} \quad (5.3.16.2)$$

gdzie: $\mathbf{A}_{1,1}^{(3)}, \mathbf{A}_{1,3}^{(3)}, \mathbf{A}_{3,1}^{(3)}, \mathbf{A}_{3,3}^{(3)}, \mathbf{h}_1^{(3)}, \mathbf{h}_3^{(3)}, \mathbf{G}_1^{(3)}, \mathbf{G}_3^{(3)}$ określone wg (5.3.8),(5.3.9),(5.3.12),(5.3.13)

po przyjęciu $\mathbf{q}^{(P)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{q}}^{(N)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(3)}, \mathbf{B}^{(N)} = \mathbf{B}^{(3)}, \mathbf{H}^{(N)} = \mathbf{H}^{(3)}, m^{(N)} = m^{(3)}, \mathbf{r}_c^{(N)} = \mathbf{r}_c^{(3)}$.

Ciało (4)

Po uwzględnieniu (5.2.19) i pewnych przekształceniach otrzymano:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}^{(4)}}(E^{(4)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1}^{(4)} & \mathbf{A}_{1,3}^{(4)} & \mathbf{A}_{1,4}^{(4)} \\ \mathbf{A}_{3,1}^{(4)} & \mathbf{A}_{3,3}^{(4)} & \mathbf{A}_{3,4}^{(4)} \\ \mathbf{A}_{4,1}^{(4)} & \mathbf{A}_{4,3}^{(4)} & \mathbf{A}_{4,4}^{(4)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{q}}^{(3)} \\ \ddot{\mathbf{q}}^{(4)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(4)} \\ \mathbf{h}_3^{(4)} \\ \mathbf{h}_4^{(4)} \end{bmatrix} \quad (5.3.17.1)$$

$$\frac{\partial V_g^{(4)}}{\partial \mathbf{q}^{(4)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{(4)} \\ \mathbf{G}_3^{(4)} \\ \mathbf{G}_4^{(4)} \end{bmatrix} \quad (5.3.17.2)$$

gdzie: $\mathbf{A}_{1,1}^{(4)} \dots \mathbf{A}_{4,4}^{(4)}, \mathbf{h}_1^{(4)} \dots \mathbf{h}_4^{(4)}, \mathbf{G}_1^{(4)} \dots \mathbf{G}_4^{(4)}$ są odpowiednimi blokami macierzy i wektorów

z (5.3.9) i (5.3.13) po przyjęciu:

$$\mathbf{q}^{(P)} = \mathbf{q}^{(3)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^{(1)T} & \tilde{\mathbf{q}}^{(3)T} \end{bmatrix}^T, \tilde{\mathbf{q}}^{(N)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(4)}, \mathbf{B}^{(N)} = \mathbf{B}^{(4)}, \mathbf{H}^{(N)} = \mathbf{H}^{(4)}, m^{(N)} = m^{(4)}, \mathbf{r}_c^{(N)} = \mathbf{r}_c^{(4)}$$

Ciało (5)

W tym przypadku można napisać, że:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}^{(5)}}(E^{(5)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1}^{(5)} & \mathbf{A}_{1,5}^{(5)} \\ \mathbf{A}_{5,1}^{(5)} & \mathbf{A}_{5,5}^{(5)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{q}}^{(5)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(5)} \\ \mathbf{h}_5^{(5)} \end{bmatrix} \quad (5.3.18.1)$$

$$\frac{\partial V_g^{(5)}}{\partial \mathbf{q}^{(5)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{(5)} \\ \mathbf{G}_5^{(5)} \end{bmatrix} \quad (5.3.18.2)$$

gdzie: $\mathbf{A}_{1,1}^{(5)} - \mathbf{G}_5^{(5)}$ otrzymuje się z (5.3.9), (5.3.13) po przyjęciu :

$$\mathbf{q}^{(P)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{q}}^{(N)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(5)}, \mathbf{B}^{(N)} = \mathbf{B}^{(5)}, \mathbf{H}^{(N)} = \mathbf{H}^{(5)}, m^{(N)} = m^{(5)}, \mathbf{r}_c^{(N)} = \mathbf{r}_c^{(5)}.$$

Ciało (6)

Uwzględniając (5.2.29) można obliczyć:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}^{(6)}}(E^{(6)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1}^{(6)} & \mathbf{A}_{1,5}^{(6)} & \mathbf{A}_{1,6}^{(6)} \\ \mathbf{A}_{5,1}^{(6)} & \mathbf{A}_{5,5}^{(6)} & \mathbf{A}_{5,6}^{(6)} \\ \mathbf{A}_{6,1}^{(6)} & \mathbf{A}_{6,5}^{(6)} & \mathbf{A}_{6,6}^{(6)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(1)} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(5)} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(6)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(6)} \\ \mathbf{h}_5^{(6)} \\ \mathbf{h}_6^{(6)} \end{bmatrix} \quad (5.3.19.1)$$

$$\frac{\partial V_g^{(6)}}{\partial \mathbf{q}^{(6)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{(6)} \\ \mathbf{G}_5^{(6)} \\ \mathbf{G}_6^{(6)} \end{bmatrix} \quad (5.3.19.2)$$

gdzie: $\mathbf{A}_{1,1}^{(6)} \dots \mathbf{G}_6^{(6)}$ są odpowiednimi blokami macierzy i wektorów z (5.3.9) i (5.3.13) po przyjęciu:

$$\mathbf{q}^{(P)} = \mathbf{q}^{(5)} = [\tilde{\mathbf{q}}^{(1)T} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{(5)T}]^T, \tilde{\mathbf{q}}^{(N)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(6)}, \mathbf{B}^{(N)} = \mathbf{B}^{(6)}, \mathbf{H}^{(N)} = \mathbf{H}^{(6)}, m^{(N)} = m^{(6)}, \mathbf{r}_c^{(N)} = \mathbf{r}_c^{(6)}$$

Ciało (7)

Uwzględniając (5.2.29) można odpowiednie pochodne zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}^{(7)}}(E^{(7)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1}^{(7)} & \mathbf{A}_{1,5}^{(7)} & \mathbf{A}_{1,6}^{(7)} & \mathbf{A}_{1,7}^{(7)} \\ \mathbf{A}_{5,1}^{(7)} & \mathbf{A}_{5,5}^{(7)} & \mathbf{A}_{5,6}^{(7)} & \mathbf{A}_{5,7}^{(7)} \\ \mathbf{A}_{6,1}^{(7)} & \mathbf{A}_{6,5}^{(7)} & \mathbf{A}_{6,6}^{(7)} & \mathbf{A}_{6,7}^{(7)} \\ \mathbf{A}_{7,1}^{(7)} & \mathbf{A}_{7,5}^{(7)} & \mathbf{A}_{7,6}^{(7)} & \mathbf{A}_{7,7}^{(7)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(1)} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(5)} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(6)} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^{(7)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(7)} \\ \mathbf{h}_5^{(7)} \\ \mathbf{h}_6^{(7)} \\ \mathbf{h}_7^{(7)} \end{bmatrix} \quad (5.3.20.1)$$

$$\frac{\partial V_g^{(7)}}{\partial \mathbf{q}^{(7)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{(7)} \\ \mathbf{G}_5^{(7)} \\ \mathbf{G}_6^{(7)} \\ \mathbf{G}_7^{(7)} \end{bmatrix} \quad (5.3.20.2)$$

gdzie: $\mathbf{A}_{1,1}^{(7)} \dots \mathbf{G}_7^{(7)}$ są odpowiednimi blokami macierzy i wektorów z (5.3.9) i (5.3.13) po przyjęciu:

$$\mathbf{q}^{(P)} = \mathbf{q}^{(6)} = [\tilde{\mathbf{q}}^{(1)T} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{(5)T} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{(6)T}]^T, \tilde{\mathbf{q}}^{(N)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(7)}, \mathbf{B}^{(N)} = \mathbf{B}^{(7)}, \mathbf{H}^{(N)} = \mathbf{H}^{(7)}, m^{(N)} = m^{(7)}, \mathbf{r}_c^{(N)} = \mathbf{r}_c^{(7)}$$

Uwzględniając (5.3.2) i (5.3.3) można wobec

(5.3.14),(5.3.15),(5.3.16),(5.3.17),(5.3.18),(5.3.19),(5.3.20) sformułować następującą zależność:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V_q}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{S}} \quad (5.3.21)$$

gdzie:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(2)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(3)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(4)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(5)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(6)} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{(7)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} & \mathbf{A}_{15} & \mathbf{A}_{16} & \mathbf{A}_{17} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{41} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{51} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{55} & \mathbf{A}_{56} & \mathbf{A}_{57} \\ \mathbf{A}_{61} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{65} & \mathbf{A}_{66} & \mathbf{A}_{67} \\ \mathbf{A}_{71} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{75} & \mathbf{A}_{76} & \mathbf{A}_{77} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1 \\ \bar{\mathbf{S}}_2 \\ \bar{\mathbf{S}}_3 \\ \bar{\mathbf{S}}_4 \\ \bar{\mathbf{S}}_5 \\ \bar{\mathbf{S}}_6 \\ \bar{\mathbf{S}}_7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{1,1} = \sum_{j=1}^7 \mathbf{A}_{1,1}^{(j)},$$

$$\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A}_{2,1}^T = \mathbf{A}_{1,2}^{(2)} \quad \mathbf{A}_{1,5} = \mathbf{A}_{5,1}^T = \mathbf{A}_{1,5}^{(5)} + \mathbf{A}_{1,5}^{(6)} + \mathbf{A}_{1,5}^{(7)},$$

$$\mathbf{A}_{1,3} = \mathbf{A}_{3,1}^T = \mathbf{A}_{1,3}^{(3)} + \mathbf{A}_{1,3}^{(4)} \quad \mathbf{A}_{1,6} = \mathbf{A}_{6,1}^T = \mathbf{A}_{1,6}^{(6)} + \mathbf{A}_{1,6}^{(7)},$$

$$\mathbf{A}_{1,4} = \mathbf{A}_{4,1}^T = \mathbf{A}_{1,4}^{(4)} \quad \mathbf{A}_{1,7} = \mathbf{A}_{7,1}^T = \mathbf{A}_{1,7}^{(7)},$$

$$\mathbf{A}_{2,2} = \mathbf{A}_{2,2}^{(2)},$$

$$\mathbf{A}_{3,3} = \mathbf{A}_{3,3}^{(3)} + \mathbf{A}_{3,3}^{(4)}, \quad \mathbf{A}_{3,4} = \mathbf{A}_{4,3}^T = \mathbf{A}_{3,4}^{(4)},$$

$$\mathbf{A}_{4,4} = \mathbf{A}_{4,4}^{(4)},$$

$$\mathbf{A}_{5,5} = \mathbf{A}_{5,5}^{(5)} + \mathbf{A}_{5,5}^{(6)} + \mathbf{A}_{5,5}^{(7)},$$

$$\mathbf{A}_{5,6} = \mathbf{A}_{6,5}^T = \mathbf{A}_{5,6}^{(6)} + \mathbf{A}_{5,6}^{(7)} \quad \mathbf{A}_{5,7} = \mathbf{A}_{7,5}^T = \mathbf{A}_{5,7}^{(7)},$$

$$\mathbf{A}_{6,6} = \mathbf{A}_{6,6}^{(6)} + \mathbf{A}_{6,6}^{(7)} \quad \mathbf{A}_{6,7} = \mathbf{A}_{7,6}^T = \mathbf{A}_{6,7}^{(7)},$$

$$\mathbf{A}_{7,7} = \mathbf{A}_{7,7}^{(7)},$$

$$\bar{\mathbf{S}}_1 = \sum_{j=1}^7 \mathbf{h}_1^{(j)} + \sum_{j=1}^7 \mathbf{G}_1^{(j)},$$

$$\bar{\mathbf{S}}_2 = \mathbf{h}_2^{(2)} + \mathbf{G}_2^{(2)},$$

$$\bar{\mathbf{S}}_3 = \mathbf{h}_3^{(3)} + \mathbf{h}_3^{(4)} + \mathbf{G}_3^{(3)} + \mathbf{G}_3^{(4)},$$

$$\overline{\mathbf{S}}_4 = \mathbf{h}_4^{(4)} + \mathbf{G}_4^{(4)},$$

$$\overline{\mathbf{S}}_5 = \mathbf{h}_5^{(5)} + \mathbf{h}_5^{(6)} + \mathbf{h}_5^{(7)} + \mathbf{G}_5^{(5)} + \mathbf{G}_5^{(6)} + \mathbf{G}_5^{(7)},$$

$$\overline{\mathbf{S}}_6 = \mathbf{h}_6^{(6)} + \mathbf{h}_6^{(7)} + \mathbf{G}_6^{(6)} + \mathbf{G}_6^{(7)},$$

$$\overline{\mathbf{S}}_7 = \mathbf{h}_7^{(7)} + \mathbf{G}_7^{(7)},$$

Energję potencjalną odkształcenia sprężystego est 3 i 6 można wyrazić wzorami:

$$V_s^{(3)} = \frac{1}{2} c_3 (\theta_3 - \theta_3^0)^2 \quad (5.3.22.1)$$

$$V_s^{(6)} = \frac{1}{2} c_6 (z_6 - z_6^0)^2 \quad (5.3.22.2)$$

gdzie: c_3, c_6 współczynniki sztywności est,

θ_3^0, z_6^0 – wartości zmiennych θ_3, z_6 przy braku obciążeń układu.

Uwzględniając (5.3.22) otrzymuje się:

$$\frac{\partial V_s^{(3)}}{\partial \theta_3} = \frac{\partial V_s^{(3)}}{\partial \tilde{q}^{(3)}} = c_3 (\theta_3 - \theta_3^0) \quad (5.3.23.1)$$

$$\frac{\partial V_s^{(6)}}{\partial z_6} = \frac{\partial V_s^{(6)}}{\partial \tilde{q}^{(6)}} = c_6 (z_6 - z_6^0) \quad (5.3.23.2)$$

Możliwe jest zatem sformułowanie wzoru:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S} \quad (5.3.24)$$

gdzie: $\mathbf{A}, \ddot{\mathbf{q}}$ określone jak w (5.3.21),

$$\mathbf{S}_i = \overline{\mathbf{S}}_i \quad \text{dla } i=1,2,4,5,7$$

$$\mathbf{S}_3 = \overline{\mathbf{S}}_3 + \frac{\partial V_s^{(3)}}{\partial \tilde{q}^{(3)}}$$

$$\mathbf{S}_6 = \overline{\mathbf{S}}_6 + \frac{\partial V_s^{(6)}}{\partial \tilde{q}^{(6)}}$$

5.4 Siły uogólnione

Na motocykl działają następujące siły zewnętrzne:

- siła oporu powietrza F_w ,
- siły oddziaływania drogi na koła.

Działa również moment napędowy koła tylnego M_7 .

Ogólnie, zgodnie z (*Grzegózek i inni 2003*), jeśli na ciało (k) którego wektor współrzędnych uogólnionych i macierz transformacji określają :

$$\mathbf{q}^{(k)} = [q_1^{(k)} \quad \dots \quad q_{n_k}^{(k)}]^T \quad (5.4.1)$$

$$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)}(q^{(k)}) \quad (5.4.2)$$

działają siła \mathbf{F} i moment \mathbf{M} określone w układzie inercjalnym $\{ \}$, jak na rys.5.4.5a to siły uogólnione pochodzące od nich wyrażają się wzorami:

$$Q_i^{(k)}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{B}_i^{(k)} \cdot \mathbf{r}_F^{(k)} \quad (5.4.3)$$

$$\begin{aligned} Q_i^{(k)}(\mathbf{M}) = & M'_x \cdot \sum_{i=1}^3 (\mathbf{B}^{(k)})_{4,3} \cdot (\mathbf{B}_i^{(k)})_{1,2} + \\ & M'_y \cdot \sum_{i=1}^3 (\mathbf{B}^{(k)})_{4,1} \cdot (\mathbf{B}_i^{(k)})_{2,3} + \\ & M'_z \cdot \sum_{i=1}^3 (\mathbf{B}^{(k)})_{4,2} \cdot (\mathbf{B}_i^{(k)})_{2,1} \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

dla $i = 1, \dots, n_k$,

gdzie: $\mathbf{r}_F^{(k)}$ - wektor współrzędnych przyłożenia siły \mathbf{F} w układzie lokalnym ciała (k),

$(\mathbf{B}^{(k)})_{\alpha,\beta}, (\mathbf{B}_i^{(k)})_{\alpha,\beta}$ - elementy macierzy $\mathbf{B}^{(k)}, \mathbf{B}_i^{(k)}$,

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{(k)T} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix},$$

M'_x, M'_y, M'_z - składowe momentu w układzie $\{k\}$,

M_x, M_y, M_z - składowe momentu w układzie $\{ \}$,

$\mathbf{R}^{(k)}$ - macierz rotacji ciała (k).

W przypadku gdy dana jest siła \mathbf{F}' określona w układzie lokalnym ciała (k) to można obliczyć:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^{(k)} \cdot \mathbf{F}'$$

a następnie zastosować wzór (5.4.3).

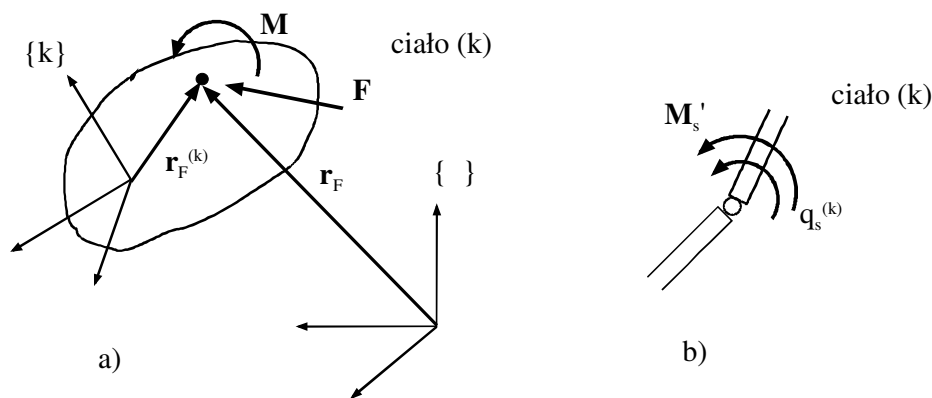
W przypadku gdy moment sił działających na ciało jest określony jako \mathbf{M}' w układzie lokalnym $\{k\}$ można bezpośrednio stosować wzór (4.4) bez potrzeby obliczania

$$\mathbf{M}' = [\mathbf{R}^{(k)}]^T \cdot \mathbf{M}.$$

Warto przy tym zaznaczyć, że:

1° Wektory sił i momentów mają czwartą składową równą zero (a nie 1 jak w przypadku wektorów przemieszczeń);

2° Jeśli współrzędna $q_s^{(k)}$ określa ruch względny ciała (k) względem poprzednika (rys.5.4.5b), a w połączeniu działa siła F_s' lub moment M_s' o kierunku zgodnym z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_s^{(k)}$ to siły uogólnione wywołane nią są równe zero z wyjątkiem odpowiadającej $q_s^{(k)}$ równej wprost sile F_s' lub momentowi M_s' (Szczotka2004).



Rys.5.4. 5 Siła i moment działające na ciało (k)

- wektory $\mathbf{r}_F^{(k)}$ i \mathbf{r}_F
- współrzędna uogólniona $q_s^{(k)}$ i moment M_s' .

Siła oporu powietrza

W obliczeniach przyjmowano, że wypadkowa siła oporu powietrza działa na ciało (1) a więc ramę motocykla. Za (Grzegózek 2000) przyjęto

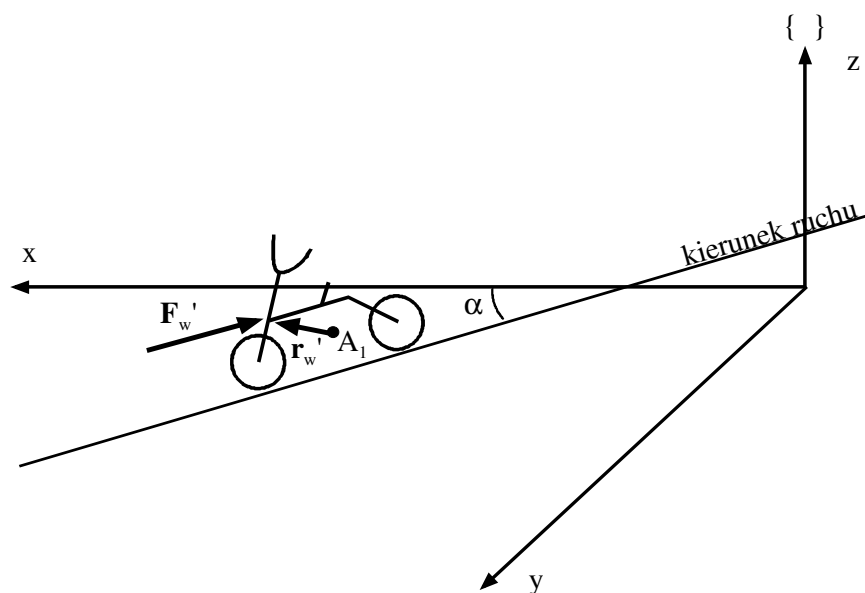
$$F_w' = -k_w (v_w' + v')^2 \quad (5.4.5)$$

gdzie: k_w - współczynnik,

v_w' - składowa prędkości wiatru w kierunku przeciwnym do kierunku jazdy,

v' - składowa prędkości ramy działająca w kierunku ruchu.

Na rys.5.4.6 przedstawiono odpowiednie oznaczenia.



Rys.5.4.6 Siła oporu powietrza

Kierunek α można wyznaczyć ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y^{(1)}}{v_x^{(1)}} \quad (5.4.6)$$

gdzie $v_x^{(1)}, v_y^{(1)}$ składowe poziome prędkości w układzie inercyjnym.

Składowe $v_x^{(1)}, v_y^{(1)}$ są pierwszymi dwiema składowymi wektora:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \sum_{j=1}^6 \mathbf{B}_j^{(1)} \cdot \dot{\tilde{q}}_j^{(1)} \cdot \mathbf{r}_w' \quad (5.4.7)$$

Wielkość v' ze wzoru (5.4.5) można obliczyć jako:

$$v' = \sqrt{(v_x^{(1)})^2 + (v_y^{(1)})^2} \quad (5.4.8)$$

Znając F_w oraz kąt α można obliczyć składowe siły oporu powietrza w układzie inercyjnym:

$$\mathbf{F}_w = \begin{bmatrix} F_w' \cos \alpha \\ F_w' \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.9)$$

a następnie:

$$Q_j^{(1)}(F_w') = \mathbf{F}_w'^T \cdot \mathbf{B}_j^{(1)} \cdot \mathbf{r}_w' \quad j = 1, \dots, 6 \quad (5.4.10)$$

Siły oddziaływania jezdni na koło

Na rys.5.4.7 przedstawiono przyjęte oznaczenia, pomijając indeks członu (k). Przyjmuje się, że opona ma zarys kołowy (promień opony oznaczono przez r_0). Początek układu $\{ \}$ znajduje się na płaszczyźnie xy układu $\{ \}$, w punkcie A będącym rzutem środka opony na płaszczyznę xy .

Kąt φ odchylenia płaszczyzny koła od osi z' można obliczyć następująco. Niech:

$$\theta'_w = [0 \quad 1 \quad 0]^T$$

jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny koła. Składowe tego wektora w układzie inercyjnym są określone wzorem:

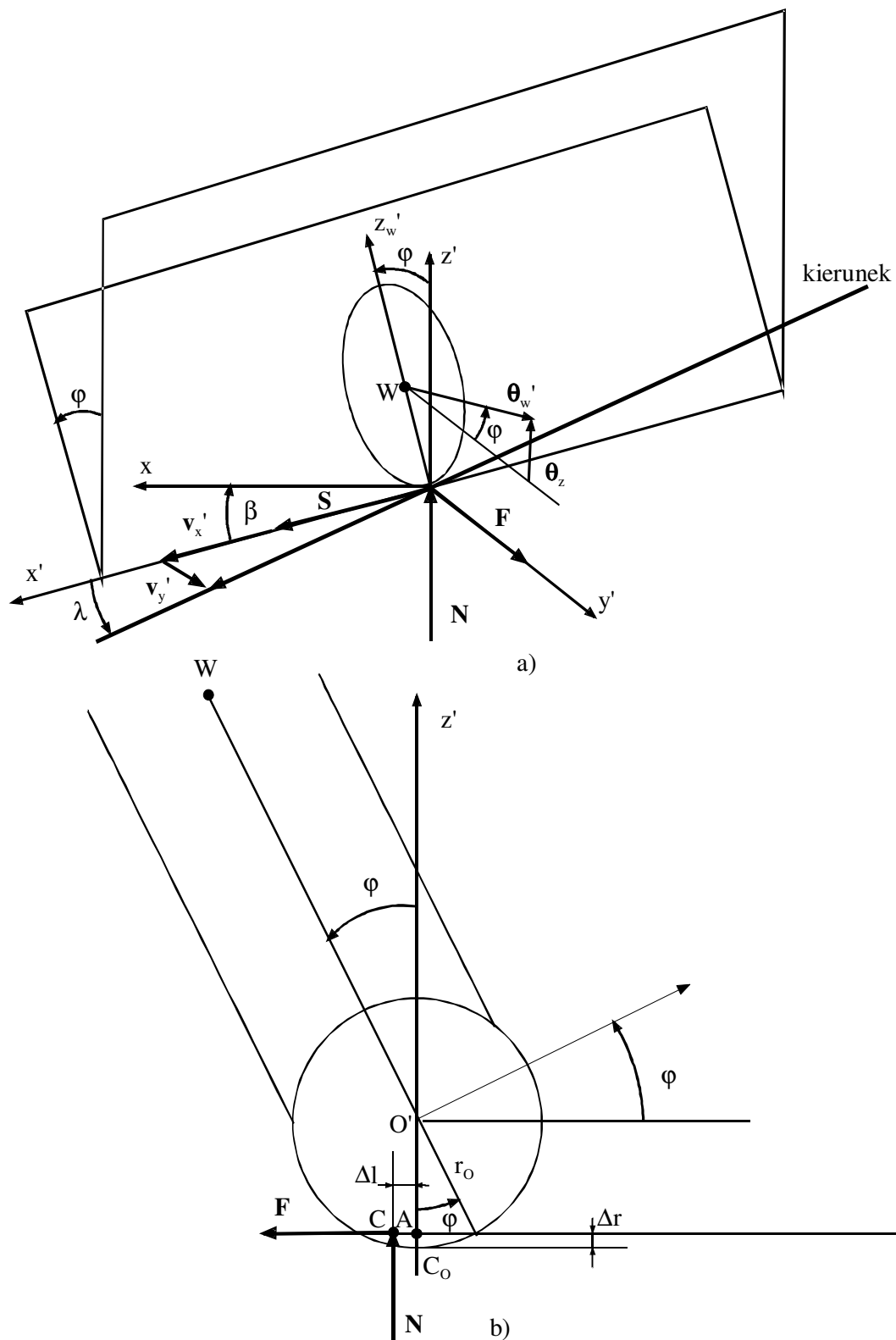
$$\theta_w = \mathbf{R} \cdot \theta'_w = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} \quad (5.4.11)$$

gdzie b_{ij} są elementami macierzy transformacji z układu koła $\{w\}$ do układu inercyjnego.

Kąty φ i β można wyznaczyć ze wzorów (rys.5.4.8):

$$\varphi = \arcsin \theta_{w,3} = \arcsin b_{32} \quad (5.4.12)$$

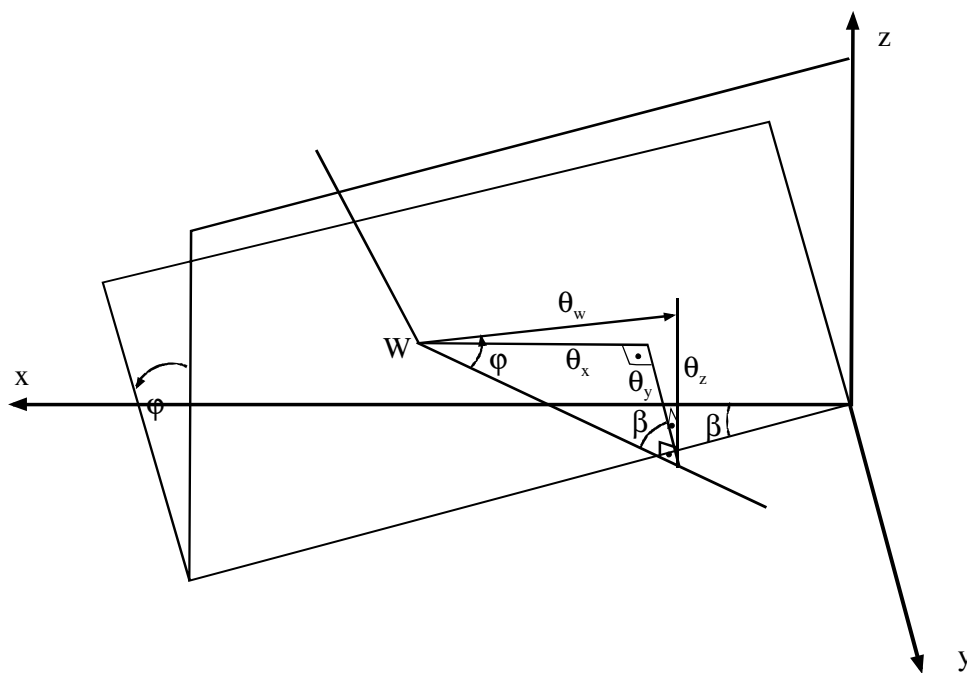
$$\beta = \arctg \frac{-\theta_{w,x}}{\theta_{w,y}} = -\arctg \frac{b_{12}}{b_{22}} \quad (5.4.13)$$



Rys.5.4.7 Siły oddziaływania jezdni na koła

a) widok ogólny

b) płaszczyzna $y'z'$

Rys.5.4.8 Kąty odchylenia β i pochylenia φ koła

Na rys.5.4.7 oznaczono przez C punkt kontaktu opony z jezdnią. Jego współrzędne w układzie $\{ \}$ określa wektor:

$$\mathbf{r}'_c = \begin{bmatrix} f \\ -\Delta l \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.4.14)$$

gdzie: f – współczynnik oporu toczenia,

Δl – odkształcenie boczne opony.

Odkształcenie promieniowe opony Δr z rys.5.4.7b można wyznaczyć ze wzoru:

$$z'_c = z_{0'} - r_0 + \Delta r = 0 \quad (5.4.15)$$

co prowadzi do zależności:

$$\Delta r = r_0 - z_{0'} \quad (5.4.16)$$

gdzie $z_{0'}$ jest współrzędną z –ową środka opony.

Znając Δr można obliczyć składową normalną reakcji jezdni na koło:

$$N = c_r \cdot \Delta r \quad (5.4.17)$$

gdzie c_r – współczynnik sztywności promieniowej opony.

Znając składową normalną można obliczyć siłę wzdłużną ze wzoru:

$$S = -\mu(x) \quad (5.4.18)$$

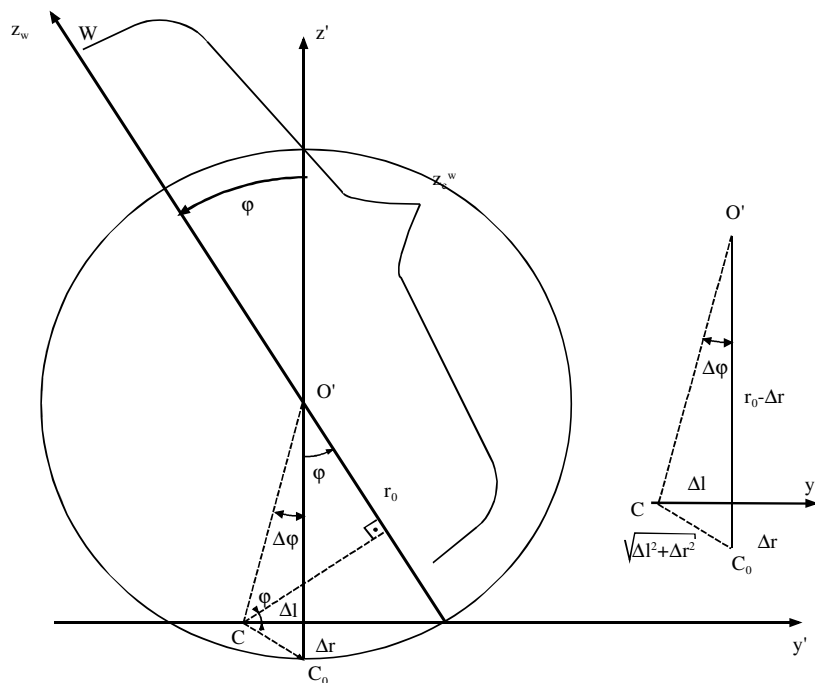
μ – funkcja określona jak w (Cossalter 2000)

$$x = -1 + \frac{z_c^w \cdot \dot{\theta}}{v_x}$$

$$z_c^w = r - r_0 + OC \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi)$$

$OC, \Delta\varphi$ – określone na rys.5.4.9,

$\dot{\theta}$ – prędkość kątowa koła.



Rys. 5.4.9. Odształcenia opony

Sprawa wyznaczenia składowej bocznej reakcji jest bardziej złożona. Zgodnie z (Cossalter 2000, Cossalter, Lot 2002) siłę boczną można przedstawić jako:

$$F = -c_l \cdot \Delta l \quad (5.4.19.1)$$

bądź:

$$F = -N \cdot f(\varphi, \lambda) \quad (5.4.19.2)$$

gdzie : λ - kąt znoszenia,

f - funkcja określona wg badań eksperymentalnych,

c_l – współczynnik sztywności bocznej opony.

Biorąc pod uwagę wzory (5.4.19) i (5.4.17) można obliczyć do tej pory nieokreśloną wielkość:

$$\Delta l = \frac{c_r}{c_l} \cdot \Delta r \cdot f(\varphi, \lambda) \quad (5.4.20)$$

Kąt znoszenia λ można wyznaczyć ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{v'_y}{v'_x} \quad (5.4.21)$$

Składowe v'_x, v'_y prędkości środka koła w układzie $\{ \}$ można obliczyć ze wzorów:

$$v'_x = v_x \cos \beta + v_y \sin \beta$$

$$v'_y = -v_x \sin \beta + v_y \cos \beta$$

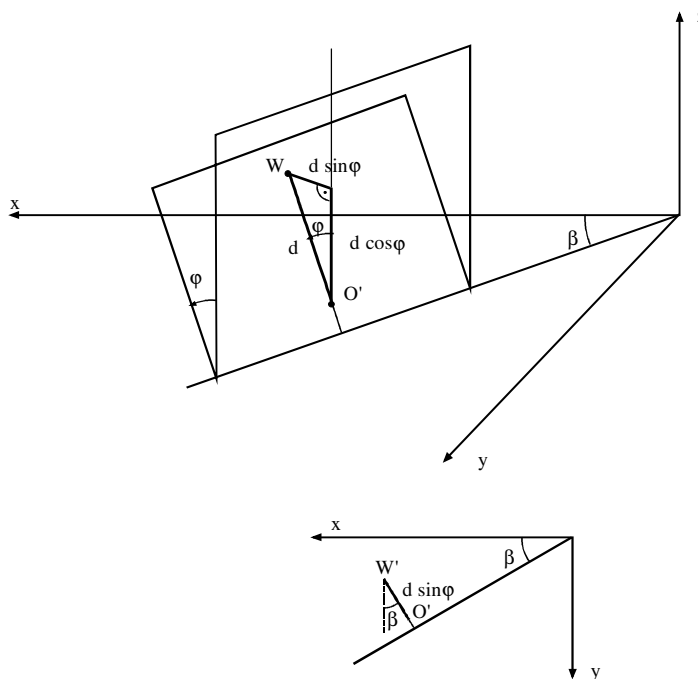
gdzie v_x, v_y są pierwszymi dwiema składowymi prędkości środka koła w układzie inercyjnym $\{ \}$.

Współrzędne środka opony w układzie inercyjnym można obliczyć ze wzorów (rys.5.4.10):

$$\begin{aligned} x_{0'} &= x_w - d \sin \varphi \sin \beta \\ y_{0'} &= y_w + d \sin \varphi \cos \beta \\ z_{0'} &= z_w - d \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

gdzie: $d = r - r_0$

x_w, y_w, z_w współrzędne środka koła w układzie inercyjnym.



Rys. 5.4.10. Wyznaczanie współrzędnych środka opony

Siły reakcji jezdni na koło mają w układzie inercyjnym postać:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} S \cos \beta - F \sin \beta \\ S \sin \beta + F \cos \beta \\ N \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.23)$$

Aby wyznaczyć siły uogólnione pochodzące od reakcji \mathbf{P} , należy uzależnić współrzędne punktu przyłożenia tej siły od współrzędnych uogólnionych koła. Biorąc pod uwagę (5.4.13) i (5.4.22) można określić współrzędne punktu C w układzie inercyjnym wektorem :

$$\mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} x_w - d \sin \varphi \cos \beta + f \cos \beta + \Delta l \sin \beta \\ y_w + d \sin \varphi \sin \beta - f \sin \beta - \Delta l \cos \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.4.24)$$

Współrzędne punktu C w układzie koła określić teraz można ze wzoru:

$$\mathbf{r}_C^w = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{r}_C \quad (5.4.25)$$

Siły uogólnione wywołane oddziaływaniem jezdni na koło można zgodnie (5.4.2) przedstawić jako:

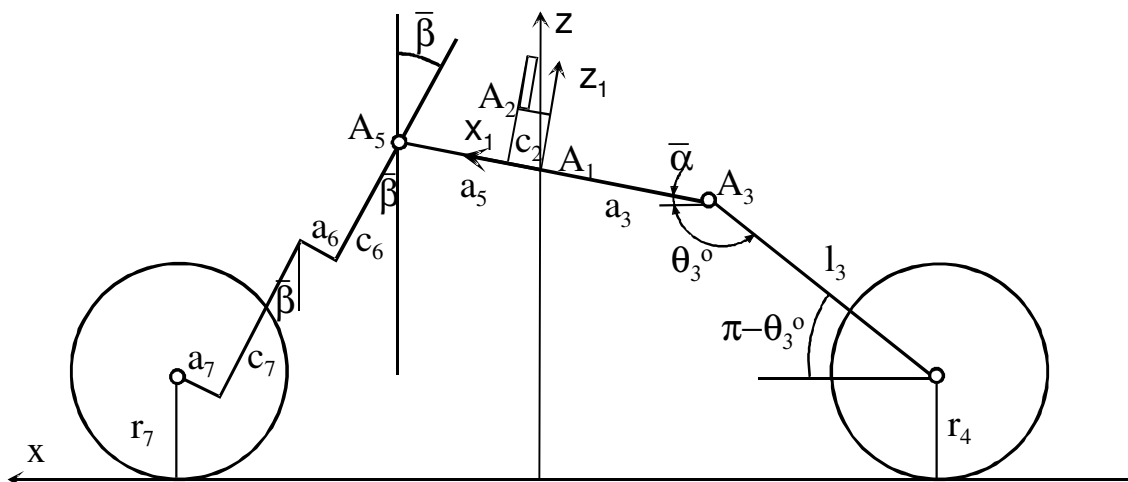
$$Q_j(P) = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{r}_C^w \quad (5.4.26)$$

gdzie: $\mathbf{B}_j = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}_j}$

W opisany wyżej sposób postępowano przy obliczaniu sił uogólnionych pochodzących od reakcji jezdni na koła – ciała (4) oraz (7).

5.5 Geometria motocykla, warunki początkowe

Przyjmuje się, że w chwili początkowej, motocykl opisują parametry przedstawione na rys.5.5.1.



Rys. 5.5.1. Parametry geometryczne

Z rysunku wynika, że kąt :

$$\bar{\alpha} = -\theta_1 \quad (5.5.1)$$

można obliczyć z zależności:

$$\bar{\alpha} = \arcsin \frac{z_{A5} - z_{A3}}{a_3 + a_5} \quad (5.5.2)$$

gdzie: $z_{A5} = r_7 + (c_6 + c_7) \cos \bar{\beta} - (a_6 + a_7) \sin \bar{\beta}$
 $z_{A3} = r_4 + l_3 \sin \theta_3^o$

Układem lokalnym ramy $\{1\}$ jest zatem układ związany z osią przechodzącą przez punkty A_3 i A_5 , a więc połączenie ramy z wahaczem i kierownicą. W tym, lokalnym układzie współrzędnych należy też określić parametry masowe ramy.

Początkową wartość współrzędnej z można określić ze wzoru:

$$z_1 = z_{A3} + a_3 \sin \bar{\alpha} \quad (5.5.3)$$

Przyjęcie oznaczeń z rys.5.5.1 oznacza, że wektory $\mathbf{r}^{(i,j)}$ z (5.2.5), (5.2.10), (5.2.15), (5.2.20), (5.2.23), (5.2.27) mają składowe:

$$\mathbf{r}_c^{(1,2)} = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ c_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5.4.1)$$

$$\mathbf{r}_c^{(1,3)} = \begin{bmatrix} -a_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5.4.2)$$

$$\mathbf{r}_c^{(3,4)} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5.4.3)$$

$$\mathbf{r}_c^{(1,5)} = \begin{bmatrix} a_5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5.4.4)$$

$$\mathbf{r}_c^{(5,6)} = \begin{bmatrix} -a_6 \\ 0 \\ c_6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5.4.5)$$

$$\mathbf{r}_c^{(6,7)} = \begin{bmatrix} -a_7 \\ 0 \\ c_7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5.4.6)$$

Macierz $\mathbf{R}_c^{(1,5)}$ z (5.2.20) określona jest natomiast następująco:

$$\mathbf{R}_c^{(1,5)} = \begin{bmatrix} c_\gamma & 0 & s_\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma \end{bmatrix} \quad (5.5.5)$$

gdzie: $\gamma = \bar{\beta} - \bar{\alpha}$, $c_\gamma = \cos \gamma$, $s_\gamma = \sin \gamma$

$\bar{\beta}$ - kąt pochylenia widełek,

$\bar{\alpha}$ - określone wzorem (5.5.2)

Tak więc przyjęta geometria (rys.5.5.1) powoduje, że wartości współrzędnych uogólnionych są następujące:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= x_1 = 0 \\
 q_2 &= y_1 = 0 \\
 q_3 &= z_1 = z_{A3} + a_3 \sin \bar{\alpha} \\
 q_4 &= \psi_1 = 0 \\
 q_5 &= \varphi_1 = 0 \\
 q_6 &= \theta_1 = -\bar{\alpha} \\
 q_7 &= \varphi_2 = 0 \\
 q_8 &= \theta_2 = \bar{\alpha} \\
 q_9 &= \theta_3 = \bar{\alpha} + \theta_3^0 \\
 q_{10} &= \theta_4 = 0 \\
 q_{11} &= \psi_5 = 0 \\
 q_{12} &= z_6 = c_6 \\
 q_{13} &= \theta_7 = 0
 \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

gdzie: z_{A3}, α określone w (2)*

pozostałe wielkości są zdefiniowane na rys.5.5.1.

Aby rozpocząć całkowanie równań ruchu, które zgodnie z (5.3.24) oraz (5.4.10) i (5.4.26) można zapisać w postaci:

$$A\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{S} + \mathbf{Q}(F_w) + \mathbf{Q}(S_4, F_4, N_4) + \mathbf{Q}(S_7, F_7, N_7) + \mathbf{Q}(M_n) \tag{5.5.7}$$

gdzie: $\mathbf{Q}(F_w)$ - określone w (5.4.10),

$\mathbf{Q}(S_4, F_4, N_4)$ - wektor sił uogólnionych wywołanych siłami S_4, F_4, N_4 działającymi na koło tylne,

$\mathbf{Q}(S_7, F_7, N_7)$ - wektor sił uogólnionych wywołanych siłami S_7, F_7, N_7 działającymi na koło przednie,

$\mathbf{Q}(M_n) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ M_n \ 0 \ 0 \ 0]^T$ -wektor sił uogólnionych od momentu napędowego tylnego koła,

należy wyznaczyć wartości współrzędnych wektora \mathbf{q} odpowiadające chwili $t=0$. W niniejszej pracy przyjmuje się, że w chwili $t=0$ motocykl porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż osi x układu inercjalnego.

Przyjmuje się zatem:

$$\begin{aligned}
q_1^0 &= 0 \\
q_2^0 &= 0 \\
q_4^0 &= 0 \\
q_5^0 &= 0 \\
q_7^0 &= 0 \\
q_8^0 &= 0 \\
q_{10}^0 &= 0 \\
q_{11}^0 &= 0 \\
q_{13}^0 &= 0
\end{aligned} \tag{5.5.8}$$

Tym samym do wyznaczenia pozostają 4 wielkości:

$$\begin{aligned}
q_3^0 &= z_A \\
q_6^0 &= \theta_1 \\
q_9^0 &= \theta_3 \\
q_{12}^0 &= z_6
\end{aligned} \tag{5.5.9}$$

Postępując analogicznie jak w (*Grzeżek i inni, 2003*) można problem wyznaczenia wartości zmiennych z (5.5.9) sprowadzić do zadania rozwiązania układu 4 równań algebraicznych nieliniowych, otrzymanych z (5.5.7) po pominięciu członu $A\ddot{q}$ oraz skreśleniu równań 1,2, 4,5,7,8,10,11 i 13.

Obciążenia układu są spowodowane przez siłę oporu powietrza F_w , siły ciężkości oraz reakcję jezdni, leżące w płaszczyźnie xz układu inercjalnego.

Przyjęto również, że prędkości uogólnione są równe zeru z wyjątkiem:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= v_0 \\
\dot{q}_{10} &= \dot{\theta}_4 \\
\dot{q}_{13} &= \dot{\theta}_7
\end{aligned} \tag{5.5.10}$$

gdzie: v_0 - znana prędkość motocykla,

$\dot{\theta}_4, \dot{\theta}_7$ - prędkości kół odpowiednio tylnego i przedniego.

Prędkości $\dot{\theta}_4, \dot{\theta}_7$ można wyznaczyć ze wzorów (5.4.17), (5.4.18) po przyjęciu zależności pomocniczej:

$$\frac{S_4}{S_7} = \frac{N_4}{N_7} \tag{5.5.11.1}$$

która po uwzględnieniu, że:

$$S_4 + S_7 = F_w \tag{5.5.11.2}$$

umożliwia określenie sił wzdłużnych S_4 i S_7 , a następnie z wzorów (5.4.18) określenie $\dot{\theta}_4$ i $\dot{\theta}_7$.

Wspomniany wyżej układ równań algebraicznych nieliniowych rozwiązywano metoda iteracyjną Newtona. Wartość przyspieszenia ziemskiego g oraz siły F_w zwiększano przy tym co Δg i ΔF_w od zera do końcowych wartości. Wartości startowe stanowiły odpowiednie składowe wektora współrzędnych uogólnionych wynikające z geometrii układu, a więc były to: 3,6,10 i 12 składowe wektora \mathbf{q} z (5.5.6).

Równania ruchu motocykla (5.5.7) można zapisać w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (5.5.12)$$

gdzie: $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_m]^T$,

$m=13$,

q_i - określone w (5.5.6)

$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ -prawa strona równania (5.5.7)*,

\mathbf{A} –określone w(5.3.21).

Układ równań (5.5.12) można sprowadzić do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu postaci:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}) \quad (5.5.13)$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = [x_1, \dots, x_n]^T$$

$n=2m$,

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Po rozpisaniu układ ten można przedstawić w postaci:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(t, \mathbf{X}) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = f_2(t, \mathbf{X}), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = f_n(t, \mathbf{X}) \end{cases} \quad (5.5.14)$$

który można zapisać w postaci macierzowej następująco:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \equiv \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} = (t, \mathbf{X}) \quad (5.5.15)$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Przed przystąpieniem do rozwiązywania równań (5.5.15) należy określić warunki początkowe:

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (5.5.16)$$

gdzie:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_0) \\ \dot{\mathbf{q}}(t_0) \end{bmatrix}$$

jest wektorem znanych wartości początkowych.

Zagadnienie początkowe dla układu równań różniczkowych zwyczajnych postaci:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (5.5.17)$$

można rozwiązywać różnymi metodami. Szczególnie wygodna w programowaniu jest metoda Rungego-Kutty, która w przypadku formuł IV rzędu prowadzi do wzorów:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h\mathbf{F}(t_0, \mathbf{X}_0) \\ \mathbf{K}_2 &= h\mathbf{F}\left(t_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{X}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1\right) \\ \mathbf{K}_3 &= h\mathbf{F}\left(t_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{X}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{K}_2\right) \\ \mathbf{K}_4 &= h\mathbf{F}(t_0 + h, \mathbf{X}_0 + \mathbf{K}_3) \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(t_0 + h) = \mathbf{X}_0 + \frac{1}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \quad (5.5.19)$$

gdzie h jest krokiem całkowania.

Charakterystyka aplikacji

Model numeryczny zaimplementowano w języku programowania Pascal w środowisku Delphi. Aplikację zaprojektowano jako sterowaną zdarzeniami, do pracy w rodzinie systemów operacyjnych Windows przy użyciu biblioteki komponentów wizualnych (kontrolki). Oznacza to, że wszelkie operacje importu i eksportu danych,

wprowadzanie wyników badań eksperymentalnych oraz rozpoczęcia obliczeń dla zadania statyki i dynamiki motocykla wymaga uruchomienia odpowiedniego zdarzenia związanego z danym komponentem wizualnym. Aplikacja umożliwia przechowywanie różnych zbiorów danych wprowadzonych do obliczeń oraz wyników obliczeń. Wprowadzono również kontrole poprawności wprowadzanych danych.

W celu logicznego rozplanowania powiązanych ze sobą grup danych wprowadzono mechanizm zakładek (rys.5.5.12), grupując dane związane z poszczególnymi podukładami. Zastępuje to często używany w takich przypadkach mechanizm okien pochodnych i jest wygodniejszy w użyciu. Zakładki zastosowano także w prezentacji wyników obliczeń podzielonych na dwie grupy. W pierwszej przedstawione są wyniki dotyczące obliczeń sił działających na koło przednie i tylne (rys.5.5.13). W drugiej przedstawiono pozostałe istotne wyniki obliczeń związanych z dynamiką ruchu motocykla (rys.5.5.14). Do pliku wynikowego zapisywane są wyłącznie wyniki dotyczące obliczeń dynamiki. Struktura pliku wynikowego dla obliczeń dynamiki umożliwia export tych danych do dowolnego pakietu np. Excel, Flex Pro, Surfer itp.

Aplikacja udostępnia możliwość wprowadzenia wymuszeń kinematycznych (rys.5.5.15) dla dowolnej z 13 współrzędnych uogólnionych. Wymuszenia te wprowadza się jako odpowiednie funkcje czasu przyjmując stałą wartość współrzędnej albo liniową lub nieliniową zmienność wartości współrzędnej w zależności od czasu. Taką funkcję definiuje się w postaci dyskretnej tj. podając dla wybranych argumentów jej wartości. Zależność nieliniowa realizowana jest poprzez rozwiązanie zadania interpolacji funkcjami sklejonymi 3 stopnia z zapewnieniem ciągłości funkcji oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej. Aplikacja umożliwia także określenie wymuszeń związanych z momentem napędowym działającym na koło tylne oraz momentem przyłożonym do kierownicy (rys.5.5.16). Sposób wprowadzania i dostępne opcje są takie same jak dla wymuszeń kinematycznych. Dla obu rodzajów wymuszeń podczas wprowadzania danych zaimplementowano graficzne przedstawienie wprowadzanych funkcji.

MCD Licz statyka Licz dynamika Zamknij

DANE DO OBLICZEŃ DANE Z PLIKU ZAPISZ DANE

PODGLĄD OBLICZEŃ | PODUKŁADY | WYMUSZENIA | WYNIKI SIŁY NA KOŁACH | POZOSTAŁE WYNIKI

RAMA | KIEROWCA | WAHA CZ | KOŁO TYLNE | KIEROWNICA | WIDEŁKI | KOŁO PRZEDNIE

DANE DODATKOWE

Kąt wahacza [°]	155
Kąt pochylenia kierownicy [°]	38
Początkowe położenie sprężyny [m]	0
Wsp. sztywności wahacz-rama [Nm/rad]	10000
Wsp. tłumienia wahacz-rama [Nm s/rad]	100
Wsp. sztywności amortyzatora [N/m]	10000
Wsp. tłumienia amortyzatora [N s/m]	100

Współrzędne

Środka układu [m]		Środka masy [m]	
X	0	Xm	-0,35
Y	0	Ym	0
Z	0	Zm	-0,2

Momenty

Bezwładności [kg/m ²]		Odśrodkowe [kg/m ²]	
Ix	40	Iyxc	0
Iy	100	Izxc	0
Iz	120	Iyzc	0

Masy

Masa układu 215

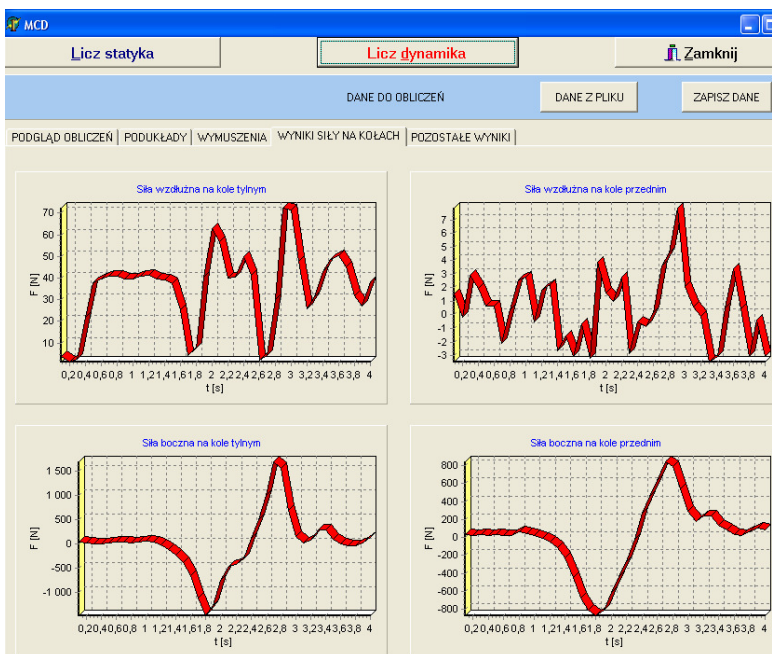
Masy skupione

M [kg]	
xm [m]	
ym [m]	
zm [m]	

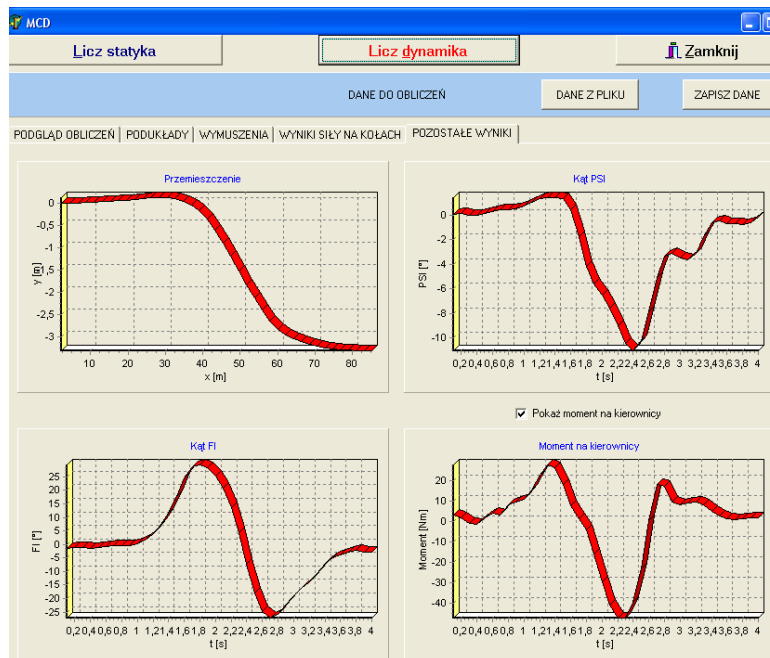
DODAJ USUŃ

DANE SYMULACJI		
CZAS SYMULACJI [s]	4	
KROK CAŁKOWANIA [s]	0,001	
PLIK WYNIKOWY	Wyniki.mcw	
ZAPISZ DO PLIKU		

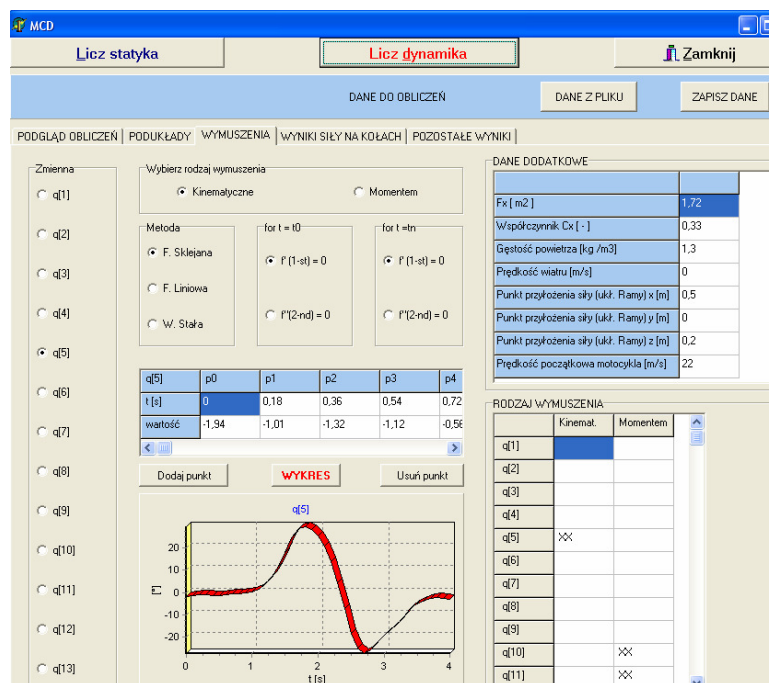
Rys.5.5.12 Zakładka umożliwiająca wprowadzanie parametrów motocykla



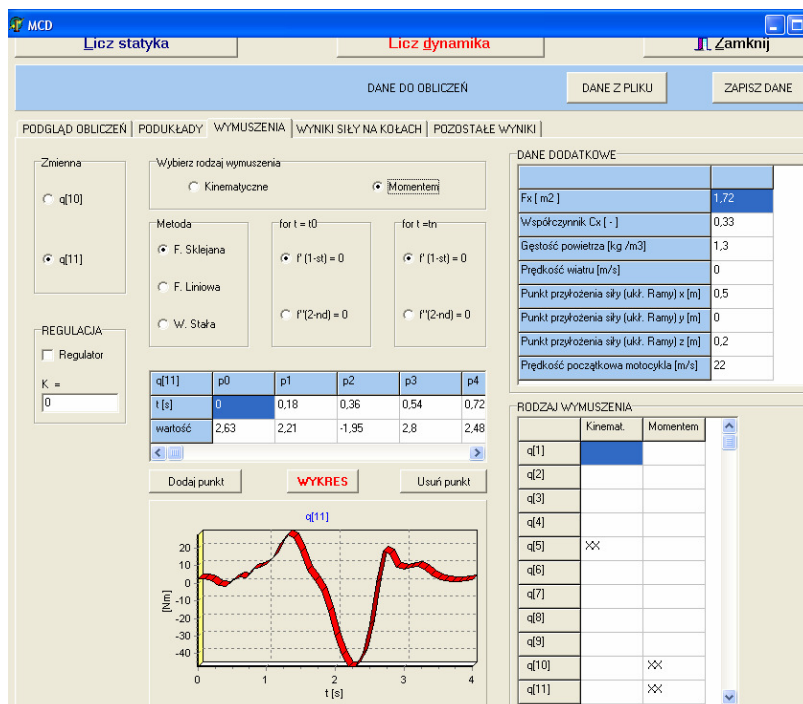
Rys.5.5.13 Prezentacja graficzna obliczonych sił działających na koła motocykla



Rys.5.5.14. Prezentacja graficzna wyników obliczeń wielkości związanych z dynamiką ruchu motocykla



Rys.5.5.15. Zakładka umożliwiająca wprowadzanie wymuszeń kinematycznych



Rys.5.5.16 Zakładka umożliwiająca wprowadzanie wymuszeń momentem działającym na kierownicy

5.6 Weryfikacja doświadczalna

Przydatność analizy symulacyjnej do badania właściwości dynamicznych pojazdu zależy od stopnia zgodności wyników badań eksperymentalnych i symulacyjnych. Na zgodności mogą wpływać ważne przyczyny, np. poprawności sformułowania modelu, poprawności identyfikacji parametrów modelu, dokładności wyników badań. Wyniki symulacji komputerowej porównuje się zazwyczaj z wynikami badań drogowych. Jednak ze względu na przypadkowy charakter zjawisk trybologicznych w miejscu współpracy koła ogumionego z jezdnią, niejednorodność opon, wpływ temperatury, stanu zużycia oraz inne przyczyny, można oczekiwać tylko pewnego podobieństwa wyników eksperymentu i symulacji np. wystąpienia pewnych trendów. Ocena przyjętych założeń i uproszczeń w procesie modelowania powinna wykazać, że opracowany model pozwala poprzez analizę symulacyjną na prognozowanie podstawowych właściwości dynamicznych pojazdu oraz wykazać w jakim stopniu zależą one od parametrów konstrukcyjnych. Ocenę jakości modelu symulacyjnego uzyskuje się na podstawie porównania wyników symulacji i badań eksperymentalnych przeprowadzonych wg znormalizowanych testów. W zakresie badań stateczności i kierowności motocykla testy dzieli się na *zamknięte* ze sprzężeniem zwrotnym kierowca - pojazd - droga oraz *otwarte*, gdzie zadawana jest zmienna w czasie

funkcja sterująca. Dla realizacji ruchu motocykla w badaniach kierowności możliwa jest realizacja testów tylko w układach *zamkniętych* wymagających przyjęcia odpowiedniego modelu kierowcy. Jednym z najprostszych (*Cossalter, Lot 2002*), przyjętym w dalszych rozważaniach, jest model kierowcy który wiąże wartość momentu działającego na kierownicę z kątem przechyłu motocykla. Zależność ta jest opisana w następujący sposób:

$$M_k = M_{km} + k_\varphi (\varphi_m - \varphi)$$

gdzie:

M_k - skorygowany moment działający na kierownicę,

M_{km} - moment działający na kierownicę zmierzony podczas badań drogowych,

φ_m - zmierzony podczas badań kąt przechyłu motocykla,

φ - wyliczony kąt przechyłu motocykla podczas symulacji,

k_φ - współczynnik proporcjonalności regulatora.

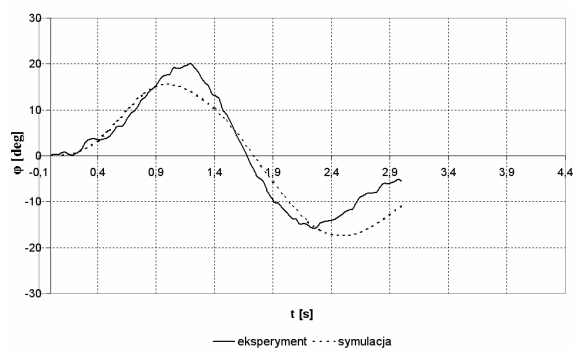
Badania drogowe wykonano dla różnych prędkości wzdłużnych motocykla i dla dwóch przypadków, a mianowicie gdy kierowca przechylał się razem z motocyklem ściśle z nim związany, oraz gdy kierowca przechylał się niezależnie od przechyłu motocykla. Przyjęto do analizy próbę pojedynczej zmiany pasa ruchu.

Na rysunkach 5.6.1 do 5.6.6 przedstawiono przebiegi zmian kąta przechyłu poprzecznego i kąta odchylenia w funkcji czasu dla różnych prędkości wzdłużnych motocykla. Symulacja została wykonana dla tych prędkości pojazdu i przebiegów czasowych momentu działającego na kierownicę, które zarejestrowano w trakcie badań eksperymentalnych. Porównując uzyskane wyniki z badań i symulacji można zauważyć małe różnice w kształcie uzyskanych przebiegów oraz w wartościach maksymalnych kątów przechyłu i kątów odchylenia. Do oceny zgodności wyników symulacji oraz badań eksperymentalnych przyjęto różnice wartości maksymalnych wyznaczonych z odpowiednich przebiegów czasowych kąta przechyłu i kąta odchylenia.

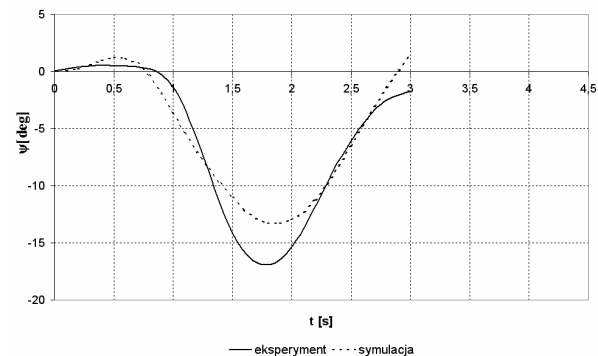
Tabela 5.1

Próba	$ \varphi_m - \varphi $	$ \frac{\varphi_m - \varphi}{\varphi_m} $	$ \psi_m - \psi $	$ \frac{\psi_m - \psi}{\psi_m} $
V=40km/h	4,1°	0,210	3,3°	0,194
V=60km/h	0,9°	0,035	1,4°	0,082
V=80km/h	0,2°	0,007	0,9°	0,056

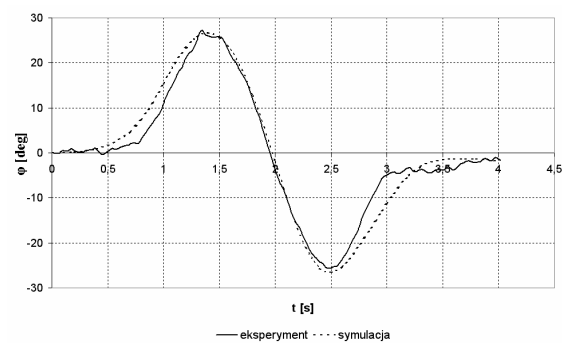
Porównanie wyników pomiarów i symulacji komputerowych



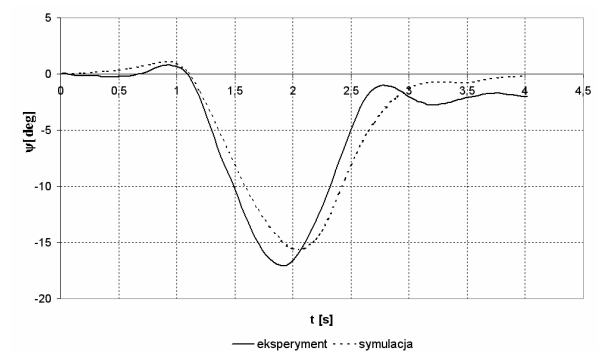
Rys. 5.6.1. Kąt przechyłu poprzecznego motocykla, prędkość wzdłużna 40 km/h



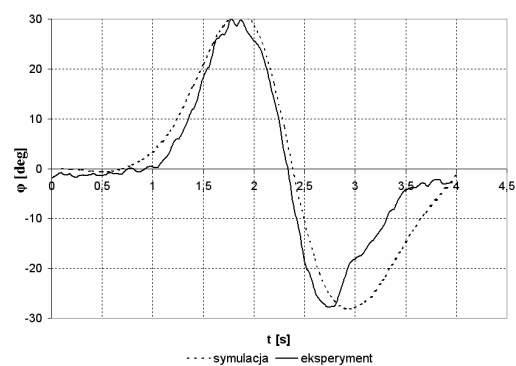
Rys.5.6.2 Kąt odchylenia motocykla, prędkość wzdłużna 40 km/h



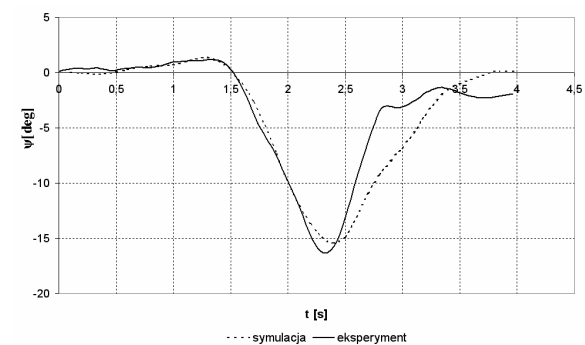
Rys.5.6.3 Kąt przechyłu poprzecznego motocykla , prędkość wzdłużna 60 km/h



Rys. 5.6.4 Kąt odchylenia motocykla , prędkość wzdłużna 60 km/h

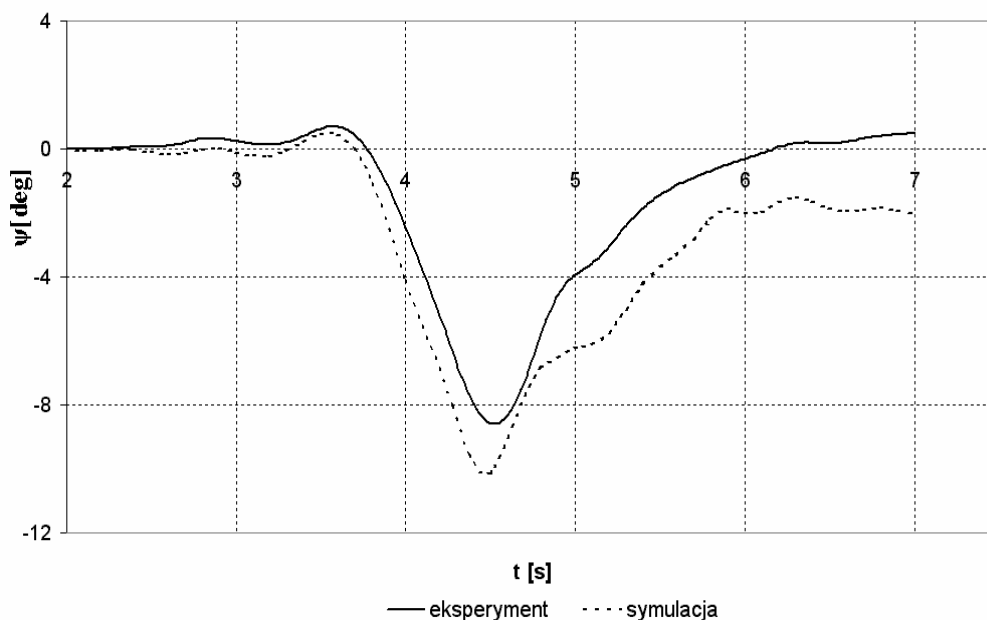


Rys.5.6.5 Kąt przechyłu poprzecznego motocykla, prędkość wzdłużna 80 km/h



Rys. 5.6.6. Kąt odchylenia motocykla , prędkość wzdłużna 80 km/h

Porównanie wyników badań eksperymentalnych i symulacji daje podstawę do sformułowania wniosku o dobrej zgodności ilościowej przebiegów czasowych otrzymanych z symulacji i badań eksperymentalnych, szczególnie w zakresie większych prędkości, co uzasadnia stwierdzenie, że model symulacyjny dobrze odzwierciedla własności obiektu rzeczywistego.



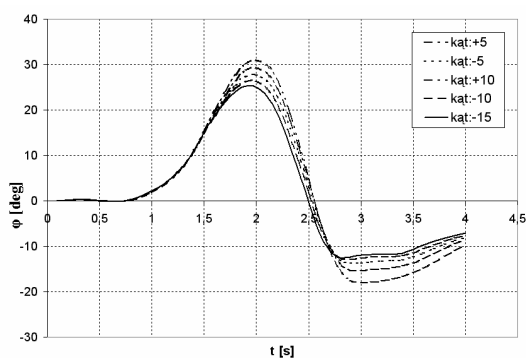
Rys.5.6.7 Kąt odchylenia motocykla, prędkość wzdłużna 80 km/h. Próba z wychyleniem kierowcy.

Realizacja próby zmiany pasa ruchu z przechytem kierowcy charakteryzuje się znacznie mniejszą wartością kąta odchylenia motocykla (rys.5.4.7) niż w przypadku realizacji próby z motocyklistą silnie związanym z pojazdem. Pomiar wartości kąta przechyłu kierowcy podczas realizacji próby drogowej jest bardzo trudny ze względu na złożony ruch kierowcy w czasie manewru. Opracowany program komputerowy umożliwia wprowadzenie przebiegu zmian kąta przechyłu poprzecznego kierowcy jako wielkości sterującej. Uzyskane wyniki symulacji nie odbiegają w istotny sposób od wyników uzyskanych w trakcie badań drogowych.

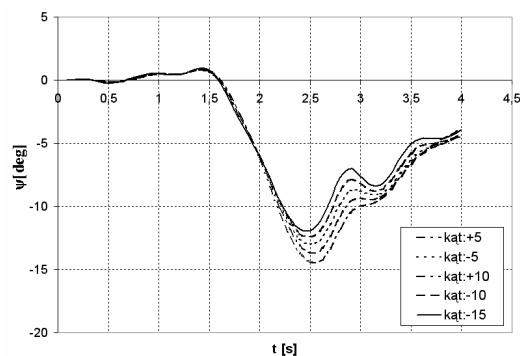
5.7 Badania symulacyjne wpływu zmiany parametrów konstrukcyjnych motocykla na jego zachowanie.

Stosując opisany w niniejszym rozdziale model i program komputerowy przeprowadzono analizę wpływu zmian parametrów konstrukcyjnych motocykla na

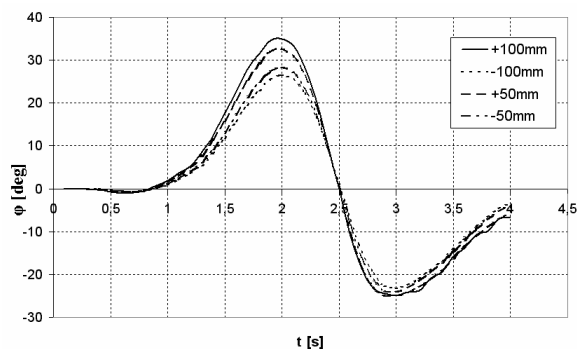
zachowanie się pojazdu, oceniane na podstawie wybranych przebiegów czasowych, takich jak przebieg kąta przechyłu poprzecznego oraz kąta odchylenia. Analizę przeprowadzono dla takiego samego manewru jak w przypadkach realizacji weryfikacji modelu złożonego i zastosowano identyczną regułę wyznaczania wartości momentu skorygowanego działającego na kierownicę. Przebieg czasowy wartości momentu działającego na kierownicę oraz przebieg czasowy kąta przechyłu poprzecznego motocykla przyjęto jako otrzymany z badań drogowych. W prezentowanych wynikach zakres zmian kąta pochylenia widelca wynosił od -15° do $+10^{\circ}$ w stosunku do położenia nominalnego, natomiast zmiana odcinka wyprzedzenia realizowana była w zakresie $\pm 100\text{mm}$ w stosunku do położenia nominalnego. Przebiegi zmian kąta przechyłu poprzecznego i kąta odchylenia przedstawiono na rys.5.7.1-5.7.4. Zmniejszenie wartości kąta pochylenia widelca skutkuje zmniejszeniem wartości obliczonego kąta przechyłu (rys.5.7.1), ale jednocześnie powoduje, że przy końcu manewru zmiany pasa ruchu pojawiają się gwałtowne zmiany wartości kąta odchylenia, trudne do opanowania przez kierowcę. Zwiększanie kąta pochylenia widelca prowadzi do wzrostu kąta przechyłu poprzecznego i jednoczesnego wzrostu wartości kąta odchylenia, pozostawiając jego przebieg bez gwałtownych zmian. Prowadzenie motocykla z tego typu zmianami nie będzie nastęrczać trudności. Zwiększania odcinka wyprzedzenia skutkuje zwiększaniem kąta przechyłu oraz kąta odchylenia. W końcowej części manewru, przy zwiększonej długości odcinka wyprzedzenia pojawiają się zaburzenia w przebiegu kąta odchylenia, które mogą być trudne do opanowania przez prowadzącego. Przyjmując do oceny kierowności manewr zmiany pasa ruchu należałoby stwierdzić, że nominalny kąt pochylenia widelca nie jest optymalny i dla poprawy kierowności powinien ulec zwiększeniu.



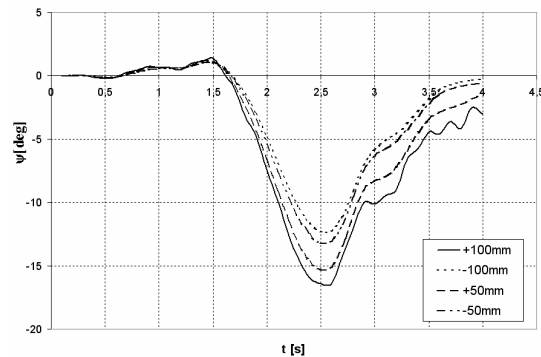
Rys.5.7.1. Porównanie zmian kąta przechyłu poprzecznego dla różnych wartości kąta pochylenia widelca. Prędkość wzdłużna 80 km/h



Rys.5.7.2. Porównanie zmian kąta odchylenia dla różnych wartości kąta pochylenia widelca. Prędkość wzdłużna 80 km/h



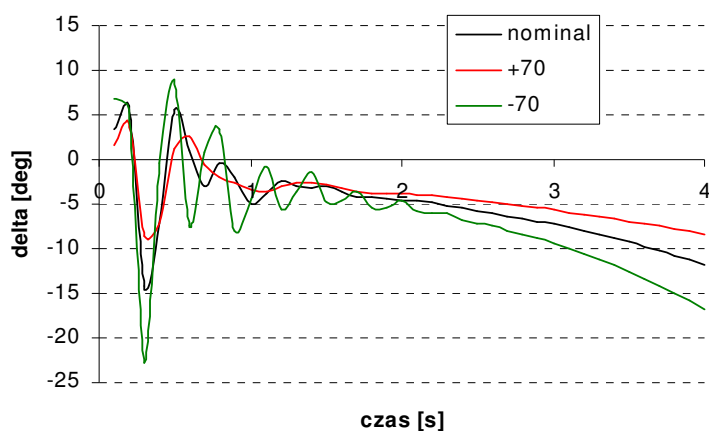
Rys.5.7.3. Porównanie zmian kąta przechyłu poprzecznego dla różnych wartości odcinka wyprzedzenia. Prędkość wzdłużna 80 km/h



Rys.5.7.4. Porównanie zmian kąta odchylenia dla różnych wartości odcinka wyprzedzenia. Prędkość wzdłużna 80 km/h

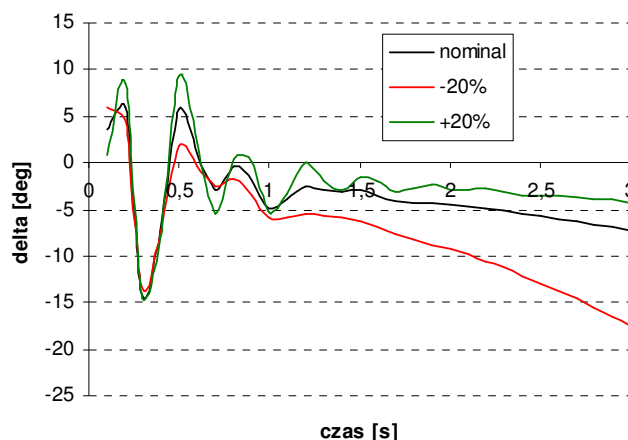
Przedstawione przebiegi posłużyły do wyznaczenia charakterystycznych wskaźników oceny kierowności pojazdu. Zostały one przedstawione w rozdziale 6.

Prezentowany model motocykla posłużył również do przeprowadzenia analizy wpływu zmian parametrów konstrukcyjnych na stateczność ruchu motocykla. Podobnie jak w badaniach symulacyjnych wykonanych na prostym modelu o 4 stopniach swobody, oraz w badaniach stanowiskowych i drogowych, wymuszenie stanowił impuls momentu o siły przyłożony do kierownicy. Ocenie poddawano częstość zmian kąta skrętu kierownicy, jako odpowiadającą postaci drgań *wobble*, oraz częstość zmian kąta odchylenia, jako dominująca częstość postaci *weave*. Na przykładowych wykresach rys.5.7.5-5.7.7 przedstawiono



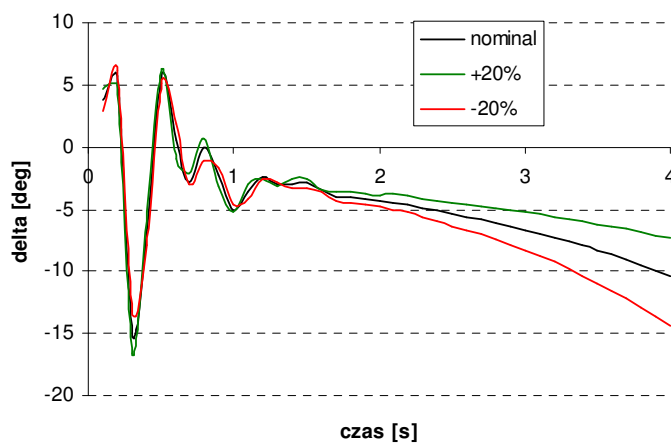
Rys.5.7.5. Przebieg czasowy kąta skrętu kierownicy dla różnych długości odcinka wyprzedzenia. Prędkość 80km/h.

przebiegi czasowe kąta skrętu kierownicy kolejno dla: przemieszczenie przedniego koła wzdłuż osi x o wartości $+70$ i -70 [mm] od nominalnej, zmiany masowego momentu bezwładności przedniego koła oraz sztywności poprzecznej przedniej opony o wartość względną $\pm 20\%$.



Rys.5.7.6. Przebieg czasowy kąta skrętu kierownicy dla różnych wartości momentu bezwładności przedniego koła. Prędkość 80km/h.

Wykorzystując przeprowadzone symulacje zachowania się motocykla, na podstawie przebiegów czasowych wybranych parametrów jego ruchu oceniono tłumienie postaci *wobble* i *weave* wyznaczając wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia, oraz częstotści drgań tych postaci. Częstotści drgań wyznaczono, jak w przypadku badań drogowych i stanowiskowych, na podstawie analizy widmowej sygnałów.



Rys.5.7.7. Przebieg czasowy kąta skrętu kierownicy dla różnych wartości sztywności poprzecznej przedniej opony. Prędkość 80km/h.

Zrealizowane symulacje, z których przedstawiono jedynie przykładowe wyniki, pozwalają na ocenę wpływu wprowadzanych zmian konstrukcyjnych na zachowanie się pojazdu. Możliwości programu są znacznie większe i autor zdaje sobie sprawę, że określenie optymalnych parametrów konstrukcyjnych wymaga realizacji znacznie większego zakresu badań symulacyjnych zarówno pod względem ilości badanych parametrów jak i rodzajów realizowanych manewrów. Opracowany program stanowi narzędzie, które w tego typu analizach może być wykorzystane.

6. PODSUMOWANIE

Zachowanie motocykla w ruchu drogowym zależy od wielu czynników. Inaczej niż w przypadku pojazdów samochodowych dominującą rolę odgrywają czynniki związane z predyspozycjami kierowcy, jego doświadczeniem i umiejętnościami. Niemniej jednak właściwości motocykla nie mogą być potraktowane marginalnie. Wpływ takich parametrów konstrukcyjnych jak kąt pochylenia widelca, odcinek wyprzedzenia, masowe momenty bezwładności poszczególnych układów a także wartości współczynników sztywności ramy, zawieszenia, własności opon itd. jak wskazują na to analizy przeprowadzone w wielu ośrodkach naukowych mają decydujący wpływ na zachowanie się motocykla. Utrudnienie w analizie stanowi również, porównując z samochodami, znacznie większe zróżnicowanie konstrukcyjne motocykla w zależności od jego przeznaczenia. Występujące podczas ruchu motocykla takie postaci drgań jak *wobble* czy *weave* uzależnione są nie tylko od wielu czynników konstrukcyjnych, ale również od prędkości jazdy. Ich tłumienie i częstość własna decyduje o bezpieczeństwie ruchu motocykla. Poprzez odpowiedni dobór parametrów konstrukcyjnych motocykla konstruktor powinien zapewniać to, że prędkości przy których te postaci posiadają najmniejsze tłumienie będą poza zakresem prędkości osiąganych przez analizowany motocykl. Jeżeli wymóg ten nie jest możliwy do spełnienia, wówczas tłumienie tych postaci powinno być na tyle duże, aby w przypadku pojawiania się wymuszenia, nie dochodziło do wystąpienia drgań o zwiększającej się amplitudzie. Zachowanie pojazdu jest wówczas przewidywalne i do opanowania przez kierowcę o przeciętnych umiejętnościach. Analiza wpływu zmian konstrukcyjnych poprzez eksperyment często nastrocza duże trudności, przede wszystkim ze względów bezpieczeństwa. Istotne stają zatem analizy prowadzone przy wykorzystaniu modeli matematycznych motocykli lub analizy

wykorzystujące wyniki badań stanowiskowych. Adekwatność stosowanych modeli matematycznych o różnym stopniu złożoności musi być potwierdzona poprzez weryfikację eksperymentalną. Dotyczy to również badań stanowiskowych, które oprócz swoich zalet, takich jak powtarzalność warunków realizowanych prób i ich bezpieczeństwo mają też wady wynikające ze znacznych trudności w odwzorowaniu warunków rzeczywistych.

W niniejszej pracy przedstawiono analizę wpływu zmian wybranych parametrów konstrukcyjnych motocykla na jego stateczność i kierowność. Analizę wykonano dla określonego motocykla wprowadzając do niego zmiany konstrukcyjne co pozwoliło uniknąć błędów, które pojawiają się przy porównywaniu własności motocykli tego samego przeznaczenia, ale różniących się chociażby podstawowymi parametrami masowymi. Unikalne badania stanowiskowe zrealizowano na specjalnie przygotowanym stanowisku bębnowym stosując mocowanie motocykla do stanowiska umożliwiające podczas badań ruchy odchylenia i przechyłu poprzecznego motocykla. W badaniach drogowych stosowano te same wymuszenia w układzie kierowniczym motocykla jak podczas badań stanowiskowych. Realizując analizę numeryczną wpływu zmian podstawowych parametrów układu prowadzenia przedniego koła na stateczność ruchu wstępnie wykorzystano prosty model motocykla o 4 stopniach swobody. Wyniki analizy numerycznej porównano z wynikami badań drogowych i z wynikami badań stanowiskowych uzyskując zbliżone przebiegi wpływu zmian.

Zrealizowano badania drogowe kierowności motocykla obejmujące swoim zakresem pojedynczą zmianę pasa ruchu, wjazd w łuk (manewr U) oraz próbę slalomu. Uzyskane wyniki prób wskazują na istotne znaczenie dla kierowności pojazdu geometrii układu prowadzenia przedniego koła.

Dla celów realizacji badań dotyczących kierowności i stateczności motocykla opracowano model fizyczny pojazdu składający z 7 ciał sztywnych i 13 stopniach swobody.

Zebrane wyniki analiz wpływu wybranych parametrów na tłumienie oraz częstość drgań postaci *wobble* oraz *weave* przedstawiono w tabeli 6.1.

Tabela 6.1

Zmiana parametru poprzez zwiększenie	Wobble		Weave	
	Tłumienie	Częstotliwość	Tłumienie	Częstotliwość
Prędkość ruchu	↓ ↓ ↓	↑ ↑ ↑	↓ ↓ ↓	↑ ↑ ↑
Kąt pochylenia widelca	↑ ↑	↓ ↓	↑ ↑	↔ ↓
Długość odcinka wyprzedzenia	↑ ↑ ↑	↑ ↑ ↑	↑ ↑ ↑	↓ ↔ ↓
Przesunięcie środka masy do tyłu	↑	↓	↓	
Moment bezwładności przedniego zespołu	↑	↓	↓	↑
Moment bezwładności motocykla wzgl. x	↑		↓	↑
Sztywność przedniej opony	↔ ↑ ↑	↑ ↑ ↓	↓ ↔ ↓	↓ ↓ ↓

Wpływ zmian parametrów na stateczność motocykla. Czarny – symulacja, czerwony – droga, zielony – laboratorium. ↑ - rośnie, rośnie słabo, ↔ -bez zmian.

Równania ruchu zostały wyprowadzone przy wykorzystaniu przekształceń jednorodnych, metodą powszechnie stosowaną w mechanice manipulatorów. Sformułowanie równań ruchu wymagało zdefiniowania energii kinetycznej i potencjalnej układu, operatorów Lagrange'a oraz sił uogólnionych. Dla obliczenia energii kinetycznej układu wykorzystano metodę śladów macierzy. Algorytm dla sformułowaniu równań ruchu wykorzystywał współrzędne złączone, tak, że układ nie wymagał podziału na podukłady i nie było konieczne formułowanie równań więzów. Opracowany model był podstawą do wykonania oprogramowania w Delphi.

Opracowany w ramach niniejszej pracy model, algorytm oraz program komputerowy poddano weryfikacji doświadczalnej uzyskując akceptowalną zgodność wyników. Wykorzystując opracowany program przeprowadzono analizę numeryczną wpływu zmian długości odcinka wyprzedzenia oraz kąta pochylenia widelca na kierowność motocykla.

Opracowany Program pozwala na realizację eksperymentów numerycznych w których można badać wpływ zmian wielu parametrów konstrukcyjnych motocykla takich jak przykładowo, współczynniki sztywności zawiesznień, współczynniki tłumienia w zawieszeniu, położenie środka mas i momentów bezwładności poszczególnych elementów motocykla, współczynniki sztywności opon, ruchy przechyłowe wzdłużne i poprzeczne kierowcy na zachowanie się modelowanego motocykla.

Program komputerowy został wyposażony w interfejs umożliwiający szybkie i łatwe posługiwanie się nim tak, że w efekcie uzyskano narzędzie bardzo przydatne do analiz numerycznych.

7. WNIOSKI

7.1 Wnioski o charakterze poznawczym

Wyniki badań numerycznych, stanowiskowych oraz drogowych wskazują na istotny wpływ parametrów konstrukcyjnych motocykla na jego stateczność i kierowalność. Zmiany takich parametrów jak długość odcinka wyprzedzenia, czy kąta pochylenia widelca powodują zmiany częstotliwości drgań oraz tłumienia postaci *wobble* oraz *weave*. Częstotliwości drgań oraz tłumienia tych postaci są również zależne od prędkości jazdy. Odpowiedni dobór wartości tych parametrów może skutkować przesunięciem maksymalnych amplitud w kierunku większych prędkości jazdy. Realizując badania stanowiskowe stateczności stwierdzono, że zmiana długości odcinka wyprzedzenia w kierunku zwiększenia jego wartości powoduje zwiększenie tłumienia drgań postaci *wobble* z równoczesnym zwiększeniem częstotliwości drgań. Wyniki symulacji numerycznych oraz badań drogowych stateczności potwierdziły występowanie dla tych postaci drgań takich samych tendencji jeśli chodzi o zmiany częstotliwości i tłumienia. Zmiana długości odcinka wyprzedzenia w przeciwnym kierunku powodowała odwrócenie wpływu. Dało to podstawę do przyjęcia wyników badań stanowiskowych dla oceny stateczności motocykla w zakresie drgań postaci *wobble* co umożliwiło rezygnację z niebezpiecznych i trudno powtarzalnych jeśli chodzi o warunki, badań drogowych. Wyniki badań wpływu zmian ciśnienia powietrza w ogumieniu koła przedniego, a poprzez to badanie wpływu zmiany współczynnika sztywności poprzecznej ogumienia, wykazały wzrost częstotliwości drgań postaci *wobble* wraz ze wzrostem ciśnienia powietrza oraz nieznaczną zmianę współczynnika tłumienia. Wpływ zmian kąta pochylenia widelca na częstotliwość i tłumienia drgań postaci *wobble* analizowano teoretycznie oraz na stanowisku badawczym stwierdzając, że wraz ze wzrostem kąta pochylenia następuje znaczny wzrost tłumienia drgań przy niewielkim zmniejszeniu częstotliwości.

Wyniki badań kierowalności motocykla z zmianami długości odcinka wyprzedzenia uzyskane z badań drogowych wskazują na pogorszenie własności decydujących o kierowalności motocykla wraz ze wzrostem wartości odcinka. Wzrasta

wartość odchylenia od idealnego toru w manewrze pojedynczej zmiany pasa ruchu jak i wartość indeksu Koch'a w manewrze „U.” Na podstawie wyników badań drogowych przeprowadzono weryfikację przyjętych założeń do matematycznego modelu motocykla oraz sposobu wyprowadzania równań ruchu uzyskując akceptowalną zgodność wyników badań drogowych i numerycznych. Pozwoliło to na wykorzystanie opracowanego programu implementującego model matematyczny do analiz zachowania się motocykla. Eksperyment numeryczny wykazał również, że zmiana odcinka wyprzedzenia w kierunku zwiększania jego wartości prowadzi do pojawienia się oscylacji w przebiegu kąta odchylenia co może skutkować utratą stateczności. Natomiast na podstawie eksperymentów numerycznych można stwierdzić, że zmiana wartości kąta pochylenia widelca skutkuje przy jej zmniejszaniu pojawieniem się znacznych oscylacji kąta odchylenia motocykla w czasie wykonywania manewru pojedynczej zmiany pasa ruchu, co w efekcie uniemożliwia prowadzenia motocykla przez kierowcę o przeciętnych umiejętnościach. Zmiany kąta przechyłu poprzecznego motocykla zarówno przy zmianach długości odcinka wyprzedzenia jak również zmianach kąta pochylenia widelca nie wykazują w swoich przebiegach tendencji do pojawienia się oscylacji zagrażających stabilnej realizacji manewru zmiany pasa ruchu.

7.2. Wnioski o charakterze użytkowym

Przedstawiony w pracy użytkowy program komputerowy umożliwia przeprowadzenie wielu symulacji dla różnych pojazdów jednośladowych i różnego rodzaju manewrów. Zaimplementowany model matematyczny motocykla składający się z 7 ciał sztywnych o 13 stopniach swobody pozwala na badania numeryczne wpływu zmian konstrukcyjnych na zachowanie się motocykla. Mogą to być zarówno zmiany w geometrii motocykla jak również w położeniu poszczególnych mas, czy też zmiany współczynników sztywności i tłumienia zawiesznień. Przyjęty model został zweryfikowany poprzez porównanie wyników badań drogowych z wynikami symulacji. Uzyskano akceptowalną zgodność wyników.

Opracowana metodyka badań stanowiskowych pozwala na realizację badań stateczności motocykla w zakresie postaci drgań *wobble* na stanowisku badawczym eliminując tym samym niebezpieczne badania drogowe i zapewniając jednocześnie odtwarzalne warunki badań.

7.3 Wnioski dotyczące dalszych badań

Autor niniejszej pracy ma świadomość przyjętych założeń upraszczających przy opracowywaniu modelu matematycznego motocykla. Za szczególnie ważne uważam uwzględnienie niektórych z nich w dalszych pracach. Za kluczowe uważam:

- rozszerzenie przyjętego modelu współpracy koła ogumionego z drogą (w szczególności modelu Magic Formula),
- rozbudowanie modelu pojazdu tak aby uwzględnić sztywność skrętną ramy motocykla,
- wprowadzenie złożonego modelu kierowcy wykorzystującego optymalizację dla określenia momentu działającego na kierownicę w celu uzyskania określonego toru jazdy.

Celowa byłaby również kontynuacja i rozwój badań stanowiskowych dla oceny wpływu zmian parametrów konstrukcyjnych motocykla na jego stateczność. Tak aby móc potwierdzić możliwość zastąpienia niektórych niebezpiecznych badań drogowych badaniami stanowiskowymi.

8. LITERATURA

1. ADAMIEC WÓJCIK I.: *Modelling dynamics of multibody systems using homogenous transformations*. Monografia ATH, Bielsko Biała, 2003
2. ANDRZEJEWSKI R.: *Stabilność ruchu pojazdów kołowych* WNT Warszawa 1997
3. AOKI A.: *Experimental Study on Motorcycle Performance*. SAE Paper, No. 790265, 1979
4. BASSO R., FABBRI L., ZAGATTI E.: *A Method to Analyse the Dynamics Behavior of a Motorcycle Front Suspension Equipped with Sequential Dampers*. Vehicle System Dynamics 29, 1998, pp. 213-230
5. BELLATI A. COSSALTER V., GARBIN S.: *Mechanism of steering control of motorcycles* .Department of Mechanical Engineering, University of Padova www.dinamoto.it
6. BERITA R., BIRAL F., GARBIN S.: *Evaluation of motorcycle handling with multibody modeling and simulation*. 6th International Conference, Modena 2000 www.dinamoto.it
7. BIRAL F., BORTOLUZZI D., COSSALTER V., LIO M. DA.: *Experimental Study of Motorcycle Transfer Functions for Evaluating Handling*. Vehicle System Dynamics, Vol. 39, 2003, pp. 1-25
8. BLAUW G. J., GODTHELP J.: *Riding Behavior of Motorcyclists as Influenced by Pavement Characteristics*. SAE Paper, No. 780314, 1978
9. BORTOLUZZI D., DORIA A., LOT R.: *Experimental Investigation and Simulation of Motorcycle Turning Performance*. <http://www.mecc.unipd.it/>
10. BREUER B.: *Betrachtungen zur Sicherheit von Krafträdern*. ATZ 87, 1985
11. BREUER B., WEIDELE A., PRÄCKEL J.: *Bremsleistungen und Bremsverhalten von Motorrädern*. Dresden Bremsenkolloquium, März 1995
12. BREUER T.: *Advanced Dynamic Motorbike Analysis and Driver Simulation*
13. COLLINS R.N.: *A mathematical analysis of the stability of two-wheeled vehicle* . Ph.D.thesis Dept.of Mechanical Engineering, University of Wisconsin 19631910 <http://ruina.tam.cornell.edu/research>
14. COSSALTER V.: *Study of motorbike handling by means of slalom tests*. <http://www.mecc.unipd.it/>
15. COSSALTER V.: *“High – side” fall due to rear braking*. <http://www.mecc.unipd.it/>

16. COSSALTER V.: *The gyroscopic effects on a motorcycle.*
<http://www.mecc.unipd.it/>
17. COSSALTER V.: *Motorcycle dynamics.* Race Dynamics 2002
18. COSSALTER V., LIO M. DA. *Research on the dynamics behavior of motorcycles with particular reference to safety /handling/ maneuverability.*
<http://www.mecc.unipd.it/>
19. COSSALTER V., LIO M. DA., LOT. R., FABBI L.: *A General Method for the Evaluation of Vehicle Manoeuvrability with Special Emphasis on Motorcycle.* Vehicle System Dynamics 31, 1999
20. COSSALTER V., DORIA A.: *Analysis of Motorcycle Slalom Manoeuvres Using the Mozzi Axis Concept.* 2004 <http://www.dinamoto/>
21. COSSALTER V., DORIA A., LOT R., RUFFO N., SALVADOR M.: *Dynamics Properties of Motorcycle and Scooter Tires: Measurement and Comparison.* Vehicle System Dynamics 39, 2003, pp. 329-352
22. COSSALTER V., DORIA A., LOT R.: *Steady Turning of Two-Wheeled Vehicles.* Vehicle System Dynamics 31, 1999
23. COSSALTER V., DORIA A., LOT R.: *Optimum Suspension Design for Motorcycle Braking.* Vehicle System Dynamics, Vol. 34, 2000, pp. 174-198
24. COSSALTER V., LOT R.: *A Motorcycle Multi – Body Model for Real Time Simulations Based on the Natural Coordinates Approach.* Vehicle System Dynamics, Vol. 37, No. 6, 2002, pp. 423-447
25. COSSALTER V., LOT R.: *About the motorcycle braking.*
<http://www.mecc.unipd.it/>
26. COSSALTER V., LOT R.: *Vibration modes of motorcycle.*
<http://www.mecc.unipd.it/>
27. COSSALTER V., LOT R., MASSARO M.: *The Significance of Frame Compliance and Rider Mobility on the Motorcycle Stability.* Department of Mechanical Engineering, University of Padova www.dinamoto.it
28. DUGOFF H., FANCHER P.S., SEGEL L., *An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamics performance.* SAE Technical Paper 700377

29. DÖHRING E. *Über die Stabilität und die Lenkkräfte von Einspurfahrzeugen*. Ph.D. thesis University of Technology Braunschweig 19531910 <http://ruina.tam.cornell.edu/research>
30. DE VRIES E. J. H., PACEJKA H. B.: *Motorcycle Tyre Measurements and Models*. Vehicle System Dynamics Supplement, Vol. 37, 1998, pp. 280-298
31. EVANGELOU S., LIMEBEER D. J. N.: *Lisp Programming of the „Sharp 1971“ Motorcycle Model*. <http://www.ee.ic.ac.uk/>
32. EVANGELOU S. : *The Control and Stability Analysis of Two-Wheeled Road Vehicle* Ph.D. Thesis University of London 2003 <http://www.3.imperial.ac.uk/portal/pls/portal/ docs/1/50172.PDF>
33. FLENIKEN G. L., RENFROE D. A.: *Modeling of Pitch and Bounce Motions of Single – Passenger Off – Road Vehicles*. University of Arkansas
34. FOLTYN M.: *Budowa modelu pojazdu dwukołowego*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN 75/1972
35. FUJOKA T., GODA K.: *Discrete Brush Tire Model for Calculating Tire Forces with Large Camber Angle*. Vehicle System Dynamics Supplement 25, 1996, pp. 200-216
36. GRZEGOŹEK W. *Modelowanie dynamiki samochodu przy stabilizującym sterowaniu siłami hamowania*. Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej Monografia 275, Kraków 2000
37. GRZEGOŹEK W., ADAMIEC-WÓJCIK I., WOJCIECH S., *Komputerowe modelowanie dynamik pojazdów* Politechnika Krakowska 2003 Książka akademicka
38. GRZEGOŹEK W., ŚLUSARCZYK P. *Wpływ zmian wybranych parametrów pojazdu jednośladowego na stabilność kierunkową układu kierowca – motocykl*. Konstrukcja, badania, eksploatacja, technologia pojazdów samochodowych i silników spalinowych, Teka Komisji Naukowo – Problemowej Motoryzacji, zeszyt nr 26-27 Kraków 2003
39. HIGUCHI A., PACEJKA H. B.: *The Relaxation Length Concept at Large Wheel Slip and Camber*. Vehicle System Dynamics Supplement, Vol. 27, 1997, pp 50-64
40. JAMES S. R.: *Lateral Dynamics of an Offroad Motorcycle by System Identification*. Vehicle System Dynamics, Vol. 38, 2002, No 1, pp 1-22

41. JENNINGS G., *A study of motorcycle suspension damping characteristics*. SAE 740628
42. JUREWICZ E.I.: *Dynamika upravljenija robotami* Nauka Moskwa 1984
43. KAGEYAMA I., YOSHIYUKI O.: *An Analysis of Riding Control Algorithm for Two Wheeled Vehicles with a Neural Network Modeling*. Vehicle System Dynamics Supplement 25, 1996, pp. 317-326
44. KANE T. R.: *Fundamental Kinematical Relationships for Single – Track Vehicles*. Int. J. mech. Sci. Vol. 17, 1975, pp. 499-504
45. KANE T. R.: *The Effect of Frame Flexibility on High Speed Weave of Motorcycles*. SAE Paper, No. 780306, 1978
46. KARNOPP D.: *Tilt Control for Gyro – Stabilized Two – Wheeled Vehicles*. Vehicle System Dynamics, Vol. 37, 2002, No 2, pp. 145-156
47. KLEIN F., SOMMERFIELD A. *Über die Theorie des Kreisels* Section 8, Stabilität des Fahrrads Leipzig 1910 <http://ruina.tam.cornell.edu/research>
48. KOENEN C., *The dynamic behaviour of a motorcycle when running straight ahead and when cornering*. Ph.D. Thesis Delft University of Technology Delft 1983
49. KUROIWA O., BABA M., NAKATA N. *Study of Motorcycle Handling Characteristics and Rider Feeling during LaneChange*. SAE paper 950200
50. LIMEBEER D. J. N., SHARP R. S., EVANGELOU S.: *The stability of motorcycles under acceleration and braking*. Proc. Inst. Mech. Eng. Vol. 215 Part C, 2001
51. LEYKO J.: *Mechanika ogólna T.1 i 2* Warszawa PWN 1996
52. LIU T. S., CHEN. J. S.: *Nonlinear analysis of stability for motorcycle – rider systems*. Int. J. of Vehicle Design. Vol. 13 no. 3, 1992
53. LOT R.: *A Symbolic Approach for Automatic Generation of the Equations of Motion of Multibody Systems*. <http://www.dim.unipd.it/>
54. LOZIA Z.: *Analiza ruchu samochodu dwuosowego na tle modelowania jego dynamiki* Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej Warszawa 1998
55. MAGGIO F.: *Vibrational modes of the motorcycle: coupling between in – plane and out – of – plane modes*. <http://www.mecc.unipd.it/>
56. MAN G. K., KANE T. R.: *Steady Turning of Two – Wheeled Vehicles*. SAE Paper, No. 790187, 1979

57. MANIOWSKI M., ŚLUSARCZYK P.: *Weryfikacja układu kierowca – motocykl pod kątem badań stabilności kierunkowej pojazdu*. VIII Międzynarodowe sympozjum naukowe IPM, zbiór referatów – cz I, Rynia 2002
58. MARYNIAK J., GORAJ Z., *Stateczność pojazdów jednośladowych na kołach pneumatycznych*. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* 4,12(1974) str.513-540
59. J.P. MEIJAARD, J.M.PAPADOPOULOS, A.RUINA, A.L.SCHAWB, : *Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review*. Draft v38, Dec 6, 2006
60. MITSCHKE M.: *Dynamik der Kraftfahrzeuge. Band C. Fahrverhalten*. Springer – Verlag 1990
61. NEIMARK J., FUFARJEV N.A. *Dynamics of Nonholomic Systems*. Providence, RI: A.M.S.
62. PAPADOPOULOS J. M.: *Bicycle and Motorcycle Balance and Steer Dynamics*. Technical Report 7/3/1990, Cornell University <http://ruina.tam.cornell.edu/research/>
63. PACEJKA H.B., BAKKER E.: *The Magic Formula Tyre Model*. Vehicle System Dynamics Supplement 21 1991, pp.1-18
64. RICE R. S.; *Rider Skill Influences on Motorcycle Maneuvering*. SAE Paper, No. 780312, 1978
65. ROE G.E.: *The Oscillations of a Flexible Castor, and the Effect of Front Flexibility on the Stability of Motorcycles*. SAE Paper, No. 780307, 1978
66. SCHWARTZ ROBERT.: *Accident Avoidance Characteristics of Unconventional Motorcycle Configurations*. SAE Paper, No. 790258, 1979
67. SHARP R.S.: *The stability and control of motorcycles*. *Journal of Mechanical Engineering Science* 13(5) pp.313-329
68. SHARP R. S.: *Stability, Control and Steering Response of Motorcycles*. *Vehicle System Dynamics*, Vol. 35, 2001, No 4-5, pp 291-318
69. SINGH D.H.: *Advanced concept of stability of two-wheeled vehicle-application of mathematical analysis to actual vehicles*. Ph.D. thesis Department of Mechanical Engineering, University of Wisconsin 1964/1910 <http://ruina.tam.cornell.edu/research/>
70. ŚLUSARCZYK P.: *Analiza modelowa stateczności pojazdu jednośladowego*. *Czasopismo Techniczne, Wyd. PK, Zeszyt 7-M, Kraków 2004*

71. SZCZOTKA M.: *Modelowanie ruchu pojazdu przy uwzględnieniu różnych układów przeniesienia napędu*. Praca doktorska ATH Bielsko-Biała 2004
72. UFFELMANN F. *Rechenmodell eines Reifens für Seiten-und Umfangskraftübertragung*. TU Braunschweig 1978
73. WEIR D. H., ZELLNER J. W.: *Development of Handling Test Procedures for Motorcycles*. SAE 780313, 1978
74. WEIR D. H., ZELLNER J. W.: *Experimental Investigation of the Transient Behavior of Motorcycles*. SAE Paper, No. 790266, 1979
75. WEIR D. H., ZELLNER J. W.: *Lateral-Directional Motorcycle Dynamics and Rider Control*. SAE 780304, 1978
76. WHIPPLE F.J.W. : *The Stability of the Motion of Bicycle*. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 30 1899
77. WISSELMANN D., IFFELSBERGER L., BRANDLHUBER B.: *Einsatz eines Fahrdynamik – Simulationsmodells in der Motorradentwicklung bei BMW*. ATZ 95, 1993
78. WU J. C., LIU T. S.: *A fuzzy model of rider control for a motorcycle undergoing lane change*. Int. J. of Vehicle Design, Vol. 15, No. 1/2, 1994
79. WU J. C., LIU T. S.: *Stabilization Control for Rider – Motorcycle Model in Hamiltonian Form*. Vehicle System Dynamics, Vol. 26, 1996, pp. 431-448
80. VERSTEDEN W.D.: *Improving a tyre model for motorcycle simulations* Eindhoven University of Technology, June, 2005 Master's thesis www.alexandria.tue.nl
81. YEH E. C., ROAN G. K., YUN I H.: *Development of an Anti – Lock Brake System for Motorcycle*. Vehicle System Dynamics, Vol. 24, 1995, pp. 427-444
82. ZELLNER J. W., WEIR D. H.: *Moped Directional Dynamics and Handling Qualities*. SAE Paper, No. 790260, 1979
83. ZELLNER J.W., WEIR D.H.: *Development of Handling Test Procedures for Motorcycles*. SAE Paper No.780313, 1978