

Katedra Wytrzymałości Materiałów
Instytut Mechaniki Budowli
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Krakowska

Mariusz Hebda

ZASTOSOWANIE ENERGETYCZNEGO KRYTERIUM
WYTĘŻENIOWEGO DO ANALIZY WYTRZYMAŁOŚCIOWEJ
KOMPOZYTÓW WŁÓKNISTYCH

Praca doktorska

promotor:
dr hab. inż. Janusz German, prof. PK



Kraków 2006



*Składam serdeczne podziękowania wszystkim tym,
którzy w jakikolwiek sposób pomogli mi w napisaniu tej pracy.
W szczególności chciałbym podziękować następującym osobom:*

*Promotorowi pracy Panu Profesorowi Januszowi Germanowi
za cenne wskazówki i pomoc podczas pisania pracy
i ostatecznego jej redagowania.*

*Panu Profesorowi Ryszardowi Pęcherskiemu
za pomoc udzieloną w pierwszych etapie powstawania pracy,
a szczególnie za podpowiedź tematu i pierwsze publikacje.*

*Panu Profesorowi Marcinowi Chrzanowskiemu
Kierownikowi Katedry Wytrzymałości Materiałów
za stworzenie dobrych warunków pracy i za życzliwość.*



SPIS TREŚCI

1. WPROWADZENIE	11
1.1. WSTĘP.....	11
1.2. CEL I ZAKRES PRACY	12
2. WŁASNOŚCI MATERIAŁÓW KOMPOZYTOWYCH.....	15
2.1. WSTĘP.....	15
2.2. RODZAJE I CECHY WŁÓKIEN.....	16
2.3. RODZAJE I CECHY OSNOWY	18
2.4. WŁAŚCIWOŚCI KOMPOZYTÓW	19
2.5. BUDOWA WŁÓKNISTYCH KOMPOZYTÓW WARSTWOWYCH.....	22
3. PODSTAWY MECHANIKI KOMPOZYTÓW	23
3.1. RÓWNANIA FIZYCZNE DLA MATERIAŁÓW ANIZOTROPOWYCH.....	23
3.2. RÓWNANIA FIZYCZNE DLA WARSTWY ORTOTROPOWEJ.....	25
3.3. RÓWNANIA FIZYCZNE DLA WARSTWY ORTOTROPOWEJ W KONFIGURACJI NIEOSIOWEJ	26
3.4. ANALIZA MECHANICZNA LAMINATÓW.....	27
4. WYTRZYMAŁOŚĆ WARSTWY KOMPOZYTOWEJ	31
4.1. WSTĘP	31
4.2. WARSTWA W ZŁOŻONYM STANIE NAPRĘŻENIA	31
4.3. WARUNKI STAWIANE KRYTERIOM WYŁĘŻENIOWYM.....	32
4.4. KRYTERIA WYŁĘŻENIOWE DLA WARSTWY KOMPOZYTOWEJ	33
4.4.1 Kryterium Tsaia-Hilla (1965).....	33
4.4.2 Kryterium Hoffmana (1967).....	34
4.4.3 Kryterium MDE (1969).....	34
4.4.4 Kryterium Tsaia-Wu (1971)	35
4.5. KRYTERIA WYŁĘŻENIOWE IDENTYFIKUJĄCE MECHANIZM ZNISZCZENIA	36
4.5.1 Kryterium naprężenia / odkształcenia maksymalnego (1920)	36
4.5.2 Kryterium Hashina-Rotema (1973/1980).....	37
4.5.3 Kryterium Pucka (1996)	37
4.6. ANALIZA WYBRANYCH KRYTERIÓW WYŁĘŻENIA.....	40
4.6.1 Porównanie kryteriów	40
4.6.2 Wpływ współczynnika interakcji na kształt krzywej granicznej.....	43
4.7. OGÓLNE UWAGI O STOSOWANIU KRYTERIÓW WYŁĘŻENIOWYCH	48
5. NOŚNOŚĆ KOMPOZYTU WARSTWOWEGO	49
5.1. WSTĘP.....	49
5.2. METODY ANALIZY	49
5.2.1 Metoda FPF	49
5.2.2 Metoda LPF	49
5.3. ANALIZA LAMINATU PO USZKODZENIU PIERWSZEJ WARSTWY	50
5.3.1 Sposoby postępowania z warstwą uszkodzoną	50
5.3.2 Identyfikacja sposobu zniszczenia.....	50
5.4. MODELE DEGRADACJI SZTYWNOŚCI - PRZEGLĄD LITERATURY	51
5.4.1 Zerowanie modułów sztywności	51
5.4.2 Obniżenie sztywności o stałą wartość	51
5.4.3 Uwzględnienie stopnia zniszczenia	53

6. PODSTAWY KRYTERIUM RYCHLEWSKIEGO	57
6.1. WSTĘP.....	57
6.2. STANY ENERGETYCZNIE ORTOGONALNE	58
6.3. GŁÓWNY ROZKŁAD ENERGII SPRĘŻYSTEJ	60
6.4. ENERGETYCZNE KRYTERIUM WYŁĘŻENIA	61
6.5. WYZNACZANIE MODUŁÓW SZTYWNOŚCI I PROJEKTORÓW.....	61
6.6. KRYTERIA WYT. OPARTE NA ROZKŁADZIE SPEKTRALNYM TENSORA PODATNOŚCI	63
7. WYZNACZENIE ENERGETYCZNEGO KRYTERIUM WYŁĘŻENIOWEGO 65	65
7.1. POSTAWIENIE ZADANIA.....	65
7.2. STANY WŁASNE TENSORA PODATNOŚCI	65
7.3. OGÓLNA POSTAĆ KRYTERIUM RYCHLEWSKIEGO.....	69
7.4. GĘSTOŚĆ ENERGII SPRĘŻYSTEJ W POSZCZEGÓLNYCH STANACH WŁASNYCH.....	70
7.5. WYZNACZENIE ENERGII KRYTYCZNYCH.....	71
7.6. KOŃCOWA POSTAĆ KRYTERIUM WYŁĘŻENIA DLA WARSTWY ORTOTROPOWEJ.....	73
7.7. ANALIZA PROPONOWANEGO KRYTERIUM WYŁĘŻENIA	74
7.7.1 Uwzględnienie różnej wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie.....	74
7.7.2 Zakres stosowania	74
7.7.3 Współczynnik interakcji naprężeń F_{12}	76
7.7.4 Zakres stosowania kryterium energetycznego dla rzeczywistych materiałów kompozytowych	78
7.7.5 Wpływ charakterystyk materiałowych na znak i wartość energii krytycznej..	83
7.8. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA	84
7.8.1 Test off-axis	84
7.8.2 Dwuosiowy stan naprężenia.....	90
7.8.3 Wnioski z weryfikacji doświadczalnej	93
8. NOWA METODA DEGRADACJI SZTYWNOŚCI LAMINATU.....	95
8.1. WSTĘP.....	95
8.2. PODSTAWY TEORETYCZNE	95
8.2.1 Sformułowanie metody	95
8.2.2 Algorytm wyznaczania nośności laminatu	97
8.2.3 Możliwość identyfikacji mechanizmu zniszczenia.....	98
8.3. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ	102
8.3.1 Rozciąganie laminatu $[0/90]_s$	102
8.3.2 Rozciąganie laminatu $[\pm 20/-40/\pm 20/+40/\pm 20]_s$	105
8.4. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA	109
8.4.1 Rozciąganie i ściskanie laminatów z materiału węgiel / epoksyd	109
8.4.2 Rozciąganie i ściskanie laminatów z materiału bor / epoksyd.....	111
9. PODSUMOWANIE I WNIOSKI	117
LITERATURA	121
DODATEK	D-1
D.1. OBJAŚNIENIE STOSOWANYCH DZIAŁAŃ NA TENSORACH	D-1
D.2. ZWIĄZKI FIZYCZNE DLA WARSTWY KOMPOZYTOWEJ.....	D-2
D.2.1. Równania fizyczne dla warstwy ortotropowej.....	D-2
D.2.2. Równania fizyczne dla warstwy w konfiguracji nieosiowej.....	D-3
D.3. KLASYCZNA TEORIA LAMINATÓW	D-8
D.4. CHARAKTERYSTYKI MATERIAŁOWE KOMPOZYTÓW	D-12

D.5. TENSOR IV-EGO RZĘDU JAKO MACIERZ DWUWYMIAROWA	D-14
D.6. DOWODY ZALEŻNOŚCI MIĘDZY WSPÓŁCZYNNIKAMI A_{ρ}, B_{ρ}	D-16
D.6.1. Dowód zależności $a_I = b_{II}$	D-17
D.6.2. Dowód zależności $a_{II} = -b_I$	D-18
D.6.3. Dowód zależności $b_I < 0$	D-19
D.6.4. Dowód zależności $a_I < b_I $	D-20
D.6.5. Dowód zależności $a_I b_I = -a_{II} b_{II}$	D-20
D.6.6. Dowód zależności $a_I^2 < a_{II}^2$	D-20
D.7. PORÓWNANIE METODY Z TESTEM PETITA I WADDOUPSA	D-22
D.8. WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY ODWROTNEJ	D-29

SPIS RYSUNKÓW

- Rys. 2.1 Podział kompozytów ze względu na rodzaj zbrojenia
- Rys. 2.2 Wytrzymałość właściwa dla materiałów konwencjonalnych i kompozytowych
- Rys. 2.3 Moduł sprężystości właściwy dla materiałów konwencjonalnych i kompozytowych
- Rys. 2.4 Pojedyncza warstwa kompozytowa i jej układ odniesienia
- Rys. 2.5 Laminat zbudowany z pojedynczych warstw
- Rys. 3.1 Rozkład naprężeń i odkształceń w laminacie
- Rys. 3.2 Siły i momenty wypadkowe w laminacie
- Rys. 4.1 Wieloosiowy stan naprężenia w warstwie kompozytowej
- Rys. 4.2 Obwiednia graniczna dla kryterium Pucka w przestrzeni (σ_2, σ_6) wg [73]
- Rys. 4.3 Obwiednie graniczne dla warstwy z materiału aramid/epoksyd (Kevlar 49/Epoxy)
- Rys. 4.4 Obwiednie graniczne dla warstwy z materiału węgiel/epoksyd (T300/934)
- Rys. 4.5 Obwiednie graniczne dla warstwy z materiału szkło/epoksyd (Silenka E-Glass/MY750)
- Rys. 4.6 Obwiednie graniczne dla warstwy z materiału aramid/epoksyd (Kevlar 49/Epoxy)
- Rys. 4.7 Rezultaty dwuosiowego testu dla warstwy szkło/epoksyd wg [80]
- Rys. 4.8 Krzywe graniczne wg kryterium Tsaia-Wu dla różnych wartości F_{12}^*
- Rys. 4.9 Krzywe graniczne wg kryterium MDE dla różnych wartości ν_{23}
- Rys. 7.1 Obciążenia niszczące działające na warstwę kompozytu
- Rys. 7.2 Kombinacje wytrzymałości X, Y w zależności od kierunku działania naprężeń
- Rys. 7.3 Rozciąganie i ściskanie warstwy kompozytowej w układzie *off-axis*
- Rys. 7.4 Krzywe wytrzymałości porównane z testem rozciągania wg Tsaia, Hahna [91]
- Rys. 7.5 Krzywe wytrzymałości porównane z testem rozciągania wg Pipesa, Cole'a [71]
- Rys. 7.6 Krzywe wytrzymałości porównane z testem ściskania wg Binga, Suna [6]
- Rys. 7.7 Krzywe wytrzymałości porównane z testem ściskania wg Tsaia [93]
- Rys. 7.8 Obwiednie graniczne porównane z testem wg Soden i in. [80]
- Rys. 7.9 Obwiednie graniczne porównane z testem wg Wu i Scheubleina [101]
- Rys. 7.10 Obwiednie graniczne porównane z testem wg Jianga i Tennysona [44]
- Rys. 7.11 Obwiednie graniczne porównane z testem wg Eberhardsteiner [20]
- Rys. 8.1 Algorytm wyznaczania nośności laminatu
- Rys. 8.2 Schemat obciążenia i konfiguracji laminatu
- Rys. 8.3 Zależność $\sigma - \varepsilon$ dla laminatu $[0/90]_s$
- Rys. 8.4 Zależność $\sigma - \varepsilon$ dla laminatu $[\pm 20/-40/\pm 20/+40/\pm 20]_s$
- Rys. 8.5 Zmiana modułu Young'a i współczynnika Poissona podczas rozciągania laminatu $[\pm 20/-40/\pm 20/+40/\pm 20]_s$
- Rys. 8.6 Wyniki rozciągania laminatu $[\pm \theta]_3$ wg [55] i własnych obliczeń.
- Rys. 8.7 Wyniki rozciągania laminatu $[90/(\pm \theta)_2/90]$ wg [55] i własnych obliczeń.
- Rys. 8.8 Wyniki ściskania laminatu $[\pm \theta]_3$ wg [38] i własnych obliczeń.
- Rys. 8.9 Wyniki ściskania laminatu $[90/(\pm \theta)_2/90]$ wg [35] i własnych obliczeń.
- Rys. 8.10 Rozciąganie laminatu $[0/90]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. 8.11 Rozciąganie laminatu $[\pm 20]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. 8.12 Rozciąganie laminatu $[\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. 8.13 Rozciąganie laminatu $[\pm 30]_s$ – eksperyment wg [69].

- Rys. 8.14 Ściskanie laminatu $[\pm 60]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. 8.15 Ściskanie laminatu $[\pm 30]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.1 Dodatnia i ujemna transformacja układu współrzędnych
- Rys. D.2 Ściskanie laminatu $[0/90]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.3 Rozciąganie laminatu $[0/90]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.4 Ściskanie laminatu $[\pm 20]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.5 Rozciąganie laminatu $[\pm 20]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.6 Ściskanie laminatu $[\pm 30]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.7 Rozciąganie laminatu $[\pm 30]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.8 Rozciąganie laminatu $[\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.9 Ściskanie laminatu $[\pm 60]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.10 Rozciąganie laminatu $[\pm 60]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.11 Ściskanie laminatu $[0_3/\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.12 Rozciąganie laminatu $[0_3/\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.13 Rozciąganie laminatu $[0/90/\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.14 Rozciąganie laminatu $[0/\pm 60]_s$ – eksperyment wg [69].
- Rys. D.15 Rozciąganie laminatu $[90_3/\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].

SPIS TABEL

- Tab. 2.1 Właściwości różnych rodzajów włókien
- Tab. 2.2 Właściwości materiału na osnowy kompozytów
- Tab. 2.3 Właściwości kompozytów i materiałów konwencjonalnych
- Tab. 4.1 Współczynnik interakcji F_{12} dla różnych kryteriów wyężeniowych
- Tab. 7.1 Rozkład obciążenia na stany własne
- Tab. 7.2 Zakres stosowania kryterium energetycznego dla wybranych materiałów
- Tab. 7.3 Stałe materiałowe wyznaczone przez Cazeneuve i in. [8]
- Tab. 7.4 Wpływ zmiany stałych materiałowych na wartość energii krytycznej
- Tab. 7.5 Charakterystyki materiałowe kompozytów użytych w testach *off-axis*
- Tab. 7.6 Charakterystyki materiałowe kompozytów użytych w testach dwuosiowych
- Tab. 8.1 Rozkład spektralny tensora podatności dla wybranych materiałów
- Tab. 8.2 Udział sztywności poszczególnych stanów własnych w sztywności całkowitej
- Tab. 8.3 Wyniki analizy wytrzymałościowej laminatu $[0/90]_s$ z materiału IM7/8551-7
- Tab. 8.4 Wyniki analizy wytrzymałościowej laminatu $[\pm 20/-40/\pm 20/+40/\pm 20]_s$
- Tab. 8.5 Zmiana stałych materiałowych kompozytu bor/5505
- Tab. 8.6 Obciążenia niszczące dla laminatów wykonanych z materiału bor/5505 wg [60]
- Tab. D.1 Charakterystyki materiałowe dla jednokierunkowo zbrojonych kompozytów

SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

α	macierz przejścia
ε	tensor odkształceń
φ	współczynnik wyężenia
Φ	ęstość energii sprężystej
Φ_{kr}	wartość krytyczna ęstości energii sprężystej
$\eta_{i,ij}, \eta_{ij,j}$	współczynniki wzajemnego wpływu (Lechnickiego)
λ	moduł sztywności (wartość własna tensora sztywności)
ν_{12}	większy współczynnik Poissona w osiach materiałowych warstwy
ν_{21}	mniejszy współczynnik Poissona w osiach materiałowych warstwy
ν_{xy}, ν_{yx}	współczynniki Poissona w dowolnym układzie odniesienia
σ	tensor naprężeń
ω	tensor własny
a_I, a_{II}	składowe tensora podatności
\mathbf{A}	macierz sztywności tarczowej laminatu
b_I, b_{II}	składowe tensora podatności
\mathbf{B}	macierz sztywności sprzężeń laminatu
\mathbf{C}	tensor sztywności
\mathbf{D}	macierz sztywności giętej laminatu
E_1	podłużny moduł Younga w osiach materiałowych warstwy
E_2	poprzeczny moduł Younga w osiach materiałowych warstwy
E_x, E_y	moduły Younga w warstwie w dowolnym układzie odniesienia
F_{12}	współczynnik interakcji naprężeń w kryteriach wyężeniowych typu kwadratowego
G_{12}	moduł ścinania w osiach materiałowych warstwy
G_{xy}	moduł ścinania w warstwie w dowolnym układzie odniesienia
\mathbf{P}	projektor ortogonalny
\mathbf{Q}	zredukowana macierz sztywności warstwy w osiach materiałowych
$\bar{\mathbf{Q}}$	zredukowana, transformowana macierz sztywności w dowolnym układzie odniesienia
s	dewiator tensora naprężenia
\mathbf{S}	tensor podatności



1. Wprowadzenie

1.1. Wstęp

Człowiek od początku swojej działalności, którą można nazwać inżynierską, miał do czynienia z materiałem konstrukcyjnym. Początkowo był to oczywiście materiał występujący w stanie naturalnym, jak drewno i kamień, później materiały wytworzone sztucznie, takie jak cegła, beton, stal. Rozwój cywilizacyjny i przemysłowy powodował potrzebę tworzenia coraz bardziej odpowiedzialnych i skomplikowanych konstrukcji, a te z kolei wymagały stosowania bardziej zaawansowanych technologicznie materiałów. Starano się zatem ulepszać stosowane materiały, tak przez doskonalenie technologii ich wykonania, jak również przez łączenie różnych materiałów ze sobą.

Na przykład w starożytności wzmocniano cegły ciętą słomą, a w średniowieczu wykonywano miecze zbudowane z wielu warstw różnych materiałów, poprawiając w ten sposób ich wytrzymałość. Powszechnie stosowanym dziś materiałem budowlanym jest żelbet, który dzięki wprowadzonym dodatkowo wkładkom stalowym, ma dużo większą wytrzymałość na rozciąganie, niż sam beton.

Idea wzmocnienia materiału przez połączenie różnych składników doprowadziła do powstania materiałów kompozytowych. W zasadzie wymienione wyżej materiały to są właśnie kompozyty, jednak prawdziwy rozwój materiałów kompozytowych jako dziedziny inżynierii materiałowej, rozpoczął się wraz z opracowaniem metod przemysłowego wytwarzania włókien szklanych oraz powstaniem żywic syntetycznych. Miało to miejsce około 1930 roku, a impulsem do dalszych poszukiwań w tym zakresie były potrzeby przemysłu zbrojeniowego, związane z II wojną światową i wyścigiem zbrojeń po jej zakończeniu. Zapotrzebowanie na lekkie i jednocześnie wytrzymałe materiały w technice lotniczej, okrętowej i raketowej doprowadziło do powstania w latach 60-tych ubiegłego wieku włókien węglowych, w latach 70-tych włókien aramidowych i w latach 80-tych włókien polietylenowych.

Dużą zaletą materiałów kompozytowych, a w szczególności kompozytów włóknistych, jest możliwość wykorzystania ich budowy anizotropowej do ukształtowania danego elementu zgodnie z kierunkami działających w nim sił. Przyjmując odpowiedni kąt ułożenia włókien i sekwencję warstw w kompozycie, projektant konstruuje niejako sam materiał. Mamy zatem do czynienia z rozszerzeniem procesu projektowania konstrukcji o projektowanie materiału, z którego ma być ona zbudowana. Niezbędna jest zatem wiedza z zakresu mechaniki materiałów kompozytowych, a w szczególności umiejętność wyznaczania ich nośności.

Teoretyczne podstawy analizy kompozytów powstały w latach 40-tych dwudziestego wieku i w swoich głównych założeniach obowiązują do dzisiaj. Niestety pomimo ciągłych poszukiwań do chwili obecnej nie powstała jednolita teoria określania wytrzymałości tych materiałów. Teoria, która byłaby powszechnie akceptowana i pozostająca w zgodzie z wynikami badań doświadczalnych. Wpływ na to ma wiele czynników z których najważniejsze wydają się być różnorodność cech fizycznych materiałów wykorzystywanych do wykonywania kompozytów, anizotropia struktury i możliwość uszkodzania się kompozytu na skutek wielu mechanizmów (pękanie włókien, pękanie matrycy, wyboczenie włókien, delaminacja, itd.). Wciąż zatem trwają badania i powstają liczne teorie opisu zniszczenia kompozytów, o czym świadczą ogromna ilość publikacji, jakie ukazały się na ten temat.

1.2. Cel i zakres pracy

Przy określaniu nośności warstwowych kompozytów włóknistych, zwanych także laminatami, występują dwa kluczowe punkty. Pierwszym jest wyznaczenie nośności pojedynczej warstwy składowej kompozytu, a drugim degradacja sztywności w warstwach ulegających stopniowo uszkodzeniu. Zakres niniejszej pracy obejmuje właśnie te dwa punkty analizy wytrzymałościowej.

Celem pracy jest analiza wytrzymałościowa warstwowych kompozytów włóknistych prowadzona z wykorzystaniem energetycznego kryterium wyłężeniowego sprężystych stanów własnych, sformułowanego w sposób ogólny dla materiałów anizotropowych przez Rychlewskiego [76, 77].

Praca składa się z dziewięciu rozdziałów oraz dodatku, w którym zamieszczono niektóre dowody i wyprowadzenia opisywane w zasadniczej części, a także algorytmy obliczeń i charakterystyki fizyczne niektórych materiałów kompozytowych.

Rozdział 2 pracy zawiera podstawowe informacje o materiałach kompozytowych takie jak podział, rodzaje i właściwości mechaniczne składników kompozytu, czyli włókien i osnowy, a także porównanie kompozytów z materiałami konwencjonalnymi. Rozdział ten opracowano w oparciu o dane dostępne w literaturze i w podręcznikach dotyczących materiałów kompozytowych, a w szczególności w pracach [23], [61], [68], [97].

W rozdziale 3 przedstawiono skrótowo podstawy mechaniki kompozytów włóknistych w zakresie niezbędnym do celów niniejszej pracy. Podane w tym rozdziale wzory i uwagi w większości zaczerpnięto z podręczników do mechaniki kompozytów [23] i [45].

W rozdziale 4 traktującym o nośności warstwy kompozytowej omówiono kryteria wyłężeniowe najczęściej stosowane w analizie wytrzymałościowej kompozytów. Dokonano przy tym podziału na kryteria identyfikujące mechanizm zniszczenia i na te, które nie dają tej możliwości. Istotną częścią tego rozdziału są oryginalne autorskie analizy porównawcze dotyczące kryteriów wyłężeniowych, stosowanych w analizie nośności kompozytów. W szczególności zwrócono uwagę na ważny aspekt jakim jest wpływ współczynnika interakcji naprężeń normalnych na stabilność kryterium.

Rozdział 5 dotyczy problemu określania nośności kompozytu warstwowego. Przedstawiono w nim podstawowe metody wyznaczania tej nośności, to jest metody oparte na zniszczeniu pierwszej (FPF) i ostatniej warstwy (LPF). Większą uwagę skoncentrowano na zachowaniu się laminatu po uszkodzeniu pierwszej warstwy i na ocenie degradacji jego sztywności. W oparciu o dostępną literaturę przedstawiono stosowane obecnie modele identyfikacji mechanizmów zniszczenia i degradacji macierzy sztywności laminatu, na skutek uszkodzania się kolejnych jego warstw.

Rozdział 6 dotyczy sformułowania energetycznego kryterium wyłężeniowego sprężystych stanów własnych i jest opracowany na podstawie prac Rychlewskiego [76], [77]. Przedstawiono w nim definicje stanów energetycznie ortogonalnych i głównego rozkładu energii sprężystej na stany własne oraz przedstawiono sposób wyznaczania modułów sztywności i projektorów ortogonalnych.

Kolejne rozdziały, to jest 7 i 8 stanowią zasadniczą i oryginalną część pracy. W rozdziale 7 z ogólnego sformułowania Rychlewskiego zostało wyspecyfikowane kryterium wyłężeniowe dla pojedynczej warstwy ortotropowej kompozytu. Wyznaczono stany własne tensora podatności, których dla płaskiej warstwy ortotropowej jest trzy, a następnie w oparciu o te stany dokonano energetycznie niezależnego rozkładu gęstości energii sprężystej. Energie krytyczne, występujące w ogólnym sformułowaniu kryterium, wyznaczono w oparciu o myślowe eksperymenty, polegające na obciążaniu warstwy aż do zniszczenia w kierunkach głównych osi materiałowych. Dzięki takiemu podejściu kryterium energetyczne przyjęło postać charakterystyczną dla kryteriów stosowanych w analizie kompozytów, to zna-

czy postać, w której występują charakterystyki wytrzymałościowe warstwy w kierunkach osi materiałowych.

W dalszej części rozdziału 7 dokonano analizy stabilności kryterium, badając wpływ współczynnika interakcji naprężeń normalnych na postać krzywej granicznej wytrzymałości. Wykazano przy tym, że matematyczny warunek na uzyskanie zamkniętej krzywej ma w przypadku otrzymanego kryterium sens energetyczny. Przeprowadzono analizę zakresu stosowalności kryterium z uwagi na powyższe warunki dla różnych materiałów kompozytowych.

Końcowa część rozdziału 7 przedstawia weryfikację kryterium w oparciu o dostępne w literaturze dane doświadczalne. Przeanalizowano tak zwane testy off-axis, czyli rozciąganie lub ściskanie pojedynczej warstwy kompozytu siłą przyłożoną pod dowolnym kątem w stosunku do kierunku ułożenia włókien oraz doświadczenia polegające na analizie warstwy w dwuosiowym stanie naprężenia.

Rozdział 8 przedstawia zaproponowaną przez autora metodę degradacji macierzy sztywności kompozytu. Metoda ta została sformułowana w oparciu o kryterium wyężeniowe Rychlewskiego i związany z nim rozkład spektralny tensora podatności. Wprowadzono definicje współczynników wyężenia materiału w każdym ze stanów własnych, przedstawiające stosunek gęstości energii sprężystej zgromadzonej w danym stanie własnym pod wpływem działającego obciążenia, do energii krytycznej w tym stanie. Współczynniki te wykorzystano następnie jako mnożniki modyfikujące macierz sztywności (lub podatności) po rozkładzie tej macierzy na stany własne. Wprowadzone współczynniki pozwalają modyfikować sztywność warstwy bez konieczności identyfikowania sposobu zniszczenia.

Na zakończenie przedstawiono kilka przykładów zastosowania zaproponowanej metody do analizy nośności laminatów oraz dokonano jej weryfikacji w oparciu o dane doświadczalne dostępne w literaturze.

Pewna część zagadnień omawianych w rozdziałach 7 i 8 została opublikowana w pracach [29], [30], [31], [32].



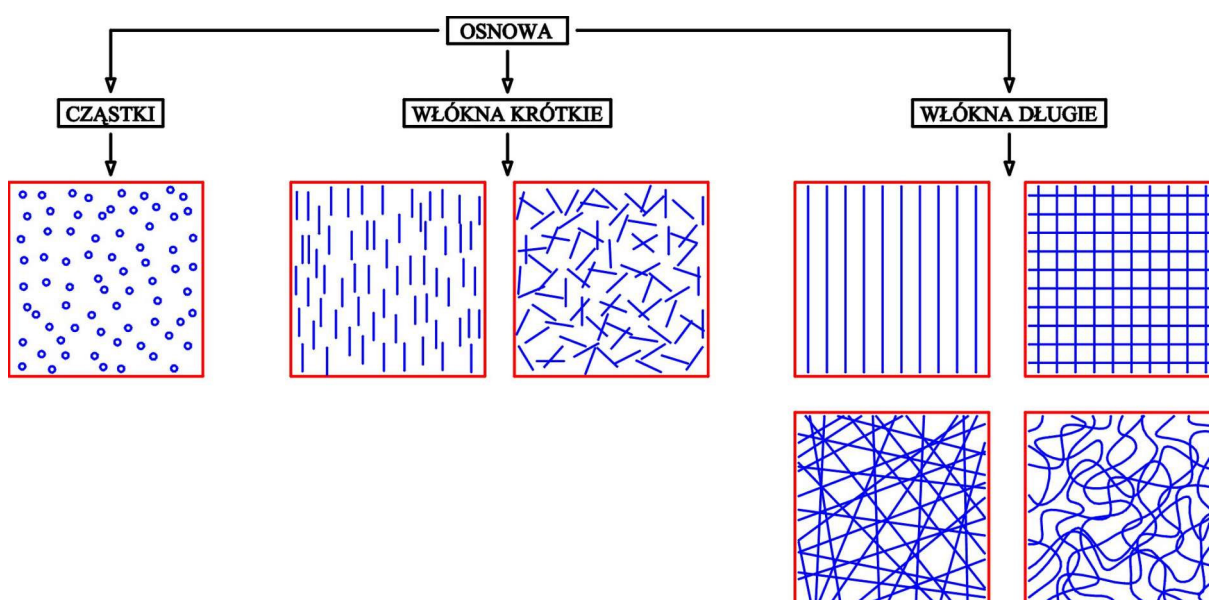
2. Własności materiałów kompozytowych

2.1. Wstęp

Kompozyt jest to materiał, zawierający przynajmniej dwa różne składniki wyraźnie od siebie oddzielone i równomiernie rozłożone w jego objętości, połączone ze sobą w celu uzyskania określonych cech wytrzymałościowych i sztywnościowych, lepszych od własności składników. Połączenie to zachodzi na poziomie makroskopowym, czyniąc kompozyt materiałem niejednorodnym. Zgodnie z powyższą definicją kompozytem nie jest, na przykład stop dwóch metali, których połączenie zachodzi na poziomie mikroskopowym, a w skali makro uzyskujemy materiał jednorodny.

Własności fizykochemiczne składników tworzących kompozyt zazwyczaj istotnie różnią się od siebie, co wynika z różnych funkcji jakie pełnią w materiale. Jeden składnik, zwany osnową pełni rolę wypełniacza, natomiast drugi (może ich być więcej niż jeden), nazywany zbrojeniem, stanowi wzmocnienie materiału.

Podziału kompozytów można dokonać w oparciu o różne kryteria. Jednym z nich jest podział w zależności od materiału z jakiego wykonana jest osnowa. Wyróżniamy kompozyty z osnową polimerową, metalową i ceramiczną. Materiały kompozytowe można również podzielić ze względu na rodzaj wzmocnienia. Występują kompozyty zbrojone cząstkami, włóknami krótkimi i długimi. Podział kompozytów ze względu na rodzaj wzmocnienia przedstawiono schematycznie na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Podział kompozytów ze względu na rodzaj zbrojenia

Mechanizm zbrojenia cząstkami polega na ograniczaniu przez nie odkształceń osnowy, która również uczestniczy w przenoszeniu obciążeń, działających na kompozyt. Cząstkami mogą być puste wewnątrz kulki szklane lub ceramiczne, bardzo krótkie włókna, płatki metaliczne itp. Do tej grupy kompozytów można zaliczyć beton, w którym rolę osnowy pełni zaczyn cementowy, a wzmocnieniem jest kruszywo. Innym znanym z częstych zastosowań kompozytem zbrojonym cząstkami jest materiał do produkcji opon samochodowych, w którym osnowę stanowi guma, a zbrojenie sadza, zbudowana z niemal kulistych cząstek węgla.

W kompozytach włóknistych osnowa pełni rolę spoiwa, wiążącego włókna w jeden scalony element. Stanowi także ochronę dla włókien, tak korozyjną, jak mechaniczną. Osnowa rozkłada w sposób równomierny obciążenia na włókna i tylko w niewielkim stopniu bierze udział w ich przenoszeniu. Włókna długie najczęściej układają się równolegle do siebie w jednym kierunku lub w dwóch kierunkach, tworząc tkaninę, ale występują też rozmieszczenia przypadkowe włókien prostych lub spętłych. Włókna krótkie najczęściej mają w kompozycie układ przypadkowy, ale stosuje się również włókna krótkie ułożone w jednym kierunku. Spośród włókien krótkich spotyka się czasem włókna typu whisker (kryształ nitkowy), otrzymane z monokryształów, które cechują się bardzo wysoką wytrzymałością i wysokim modułem sprężystości. Technologia otrzymywania tego typu włókien jest jednak bardzo kosztowna, stąd zbrojenie nimi kompozytu nie jest jeszcze szeroko rozpowszechnione.

Jednym z naturalnych kompozytów włóknistych jest drewno, które zbudowane jest ze słabej miazgi wypełnionej mocnymi włóknami. Każdy ze składników ma przy tym określone zadania do spełnienia. Włókna przenoszą obciążenia, działające zazwyczaj w kierunku ich ułożenia, natomiast miazga jest wypełnieniem, chroniącym włókna przed uszkodzeniem i wiążącym je w spójną całość.

Omawiane tutaj zagadnienia dotyczą kompozytów zbrojonych włóknami długimi stąd w dalszej części pracy uwaga będzie skoncentrowana na tym właśnie typie materiałów kompozytowych.

2.2. Rodzaje i cechy włókien

Włókna stosowane do zbrojenia kompozytów można podzielić na pięć grup w zależności od rodzaju materiału. Są to włókna nieorganiczne, grafitowe, polimerowe, ceramiczne i metalowe. Spośród cech fizycznych charakteryzujących włókna najczęściej podaje się średnicę, gęstość, wytrzymałość na rozciąganie i moduł sprężystości wzdłużnej (Younga). Przy wyborze materiału z jakiego jest wykonane włókno, bardzo często bierze się pod uwagę tzw. moduł sprężystości właściwy i wytrzymałość właściwą, które przedstawiają te charakterystyki odniesione do gęstości materiału. Wytrzymałość właściwa to wyrażona w km długość włókna przy której niszczy się ono pod własnym ciężarem. Moduł właściwy i wytrzymałość właściwa nowoczesnych włókien stosowanych w materiałach kompozytowych są wielokrotnie większe niż w przypadku włókien metalowych, co jest powodem ich szerokiego stosowania w przemyśle lotniczym i kosmicznym, gdzie szuka się materiałów o wysokiej wytrzymałości i jednocześnie jak najlżejszych. Właściwości różnych rodzajów włókien, należących do wymienionych wyżej pięciu grup, zestawiono w tabeli 2.1.

Wśród włókien nieorganicznych należy wymienić włókna szklane i borowe. Włókna szklane należą do najstarszych (lata 30-te XX wieku) i najczęściej stosowanych. Wyróżnia się dwa typy włókien szklanych, włókna typu E i S. Pierwszy z nich ma gorsze właściwości mechaniczne, ale znacznie niższą cenę. Włókna typu E są stosowane rzadziej w bardziej odpowiedzialnych konstrukcjach. Włókna borowe zaczęto produkować i stosować w latach 60-

tych XX wieku. Ze względu na wysoką cenę stosuje się je do specjalnych konstrukcji, tam gdzie jest wymagana duża sztywność. Moduł Younga włókien borowych wynosi około 400 GPa, czyli jest dwukrotnie większy niż dla stali, a spośród pozostałych materiałów dorównują mu tylko włókna korundowe (z grupy włókien ceramicznych) i grafitowe wysokomodułowe. W tych ostatnich jednak, wysoki moduł osiągnięto kosztem spadku wytrzymałości. Włókien szklanych używa się do zbrojenia kompozytów z osnową polimerową, natomiast włókien borowych do kompozytów z osnową polimerową i metalową.

Tabela 2.1. Właściwości różnych rodzajów włókien

Material	Średnica [μm]	Gęstość [kN/m ³]	Moduł sprężystości wzdłużnej [GPa]	Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	Moduł sprężystości właściwy [km]	Wytrzymałość właściwa [km]
Druty metalowe						
stal	20-1500	78.0	180-200	1500-4400	2560	56.4
aluminium	150	27.0	69	290	2550	10.7
tytan	100-800	45.0	120	1400-1500	2670	33.3
beryl	50-500	18.0	240-310	1100-1450	17200	80.5
Włókna nieorganiczne						
szkło E	7	25.4	70	3450	2756	140.8
szkło S	15	25.0	86	4500	3440	180.0
bor	130	26.0	400	3500	15385	134.6
Włókna grafitowe						
grafit HS	5-11	18.0	150-250	3000-7000	13800	390.0
grafit HM	5-11	19.0	400	1800	21000	94.7
węgiel	5-11	14.0	150	1700	10700	121.4
Włókna polimerowe						
aramidowe	12-15	14.0-14.7	140-180	3500-5500	12800	390.0
polietylenowe	20-40	9.7	120-170	2600-3300	17500	310.0
Włókna ceramiczne						
węgiel krzemu SiC	10-140	28.0-31.0	250	3000	8928	107.1
korund Al ₂ O ₃	5-20	37.0	350-380	1700	10270	45.9

Włókna grafitowe należą do równie często stosowanych jak włókna szklane, przewyższają je jednak parametrami mechanicznymi i co się z tym wiąże, niestety również ceną. Wśród włókien tej grupy występują włókna grafitowe i węglowe. Grafit to również węgiel, ale o bardziej uporządkowanej strukturze. Oprócz regularnej sieci krystalicznej występują obszary gdzie jest ona zaburzona lub w ogóle jej brak. Powoduje to pogorszenie właściwości mechanicznych, ale niska ich cena w porównaniu z włóknami grafitowymi sprawia, że są one często stosowane. Włókna grafitowe dzielą się na wysokomodułowe (HM) i wysokowytrzymałe (HS), odpowiednio o zwiększonej sztywności i wytrzymałości. Wśród tych ostatnich pojawiły się w ostatnich latach włókna o nazwie T1000 o wytrzymałości na rozciąganie 7100 MPa! Zasadniczo jednak wytrzymałość włókien grafitowych HS waha się w granicach 3000 ÷ 4000 MPa. Włókna te stosuje się do zbrojenia kompozytów ze wszystkimi rodzajami osnowy (polimerowa, metalowa i ceramiczna).

Włókna polimerowe wyróżniają się najwyższą wytrzymałością właściwą i właściwym modułem sprężystości. Jako pierwsze zaczęto stosować w latach 70-tych ubiegłego wieku włókna aramidowe, znane pod nazwą handlową Kevlar. Około dziesięć lat później wprowadzono na rynek włókna polietylenowe, które są produkowane pod różnymi nazwami. W USA pod nazwą Spectra, w Japonii Tekmilon i w Holandii pod nazwą Dyneema. Włókna polimerowe mają mniejszą odporność na działanie wysokiej temperatury niż włókna szklane i węglowe. Włókien polimerowych używa się jako wzmocnienie w kompozytach z osnową polimerową.

Ostatnią grupę stanowią włókna ceramiczne. Należą one do najdroższych, ale równocześnie mają bardzo dobre właściwości fizykochemiczne. Cechują się przede wszystkim odpornością na działanie bardzo wysokich temperatur (powyżej 1500°C) i czynników wywołujących korozję chemiczną. Dodatkowo są bardzo sztywne, moduł Young'a wynosi od 250 do 400 GPa. Najczęściej stosowane są włókna korundowe (trójtlenek aluminium Al_2O_3) i włókna z węgla krzemu (SiC).

2.3. Rodzaje i cechy osnowy

Osnowy stosowane w kompozytach włóknistych dzieli się pod względem materiału na polimerowe, metalowe i ceramiczne. Osnowy polimerowe są stosowane najczęściej, ponieważ są tanie i posiadają właściwości fizykochemiczne wystarczające dla większości warunków pracy kompozytu. Jedynie w konstrukcjach pracujących w bardzo wysokich temperaturach lub w wyjątkowo agresywnym środowisku stosuje się kompozyty z osnową metalową i ceramiczną. Kompozyty takie są jednak bardzo drogie, ze względu na złożony proces ich produkcji.

Osnowy polimerowe dzielą się na termo- lub chemoutwardzalne i termoplastyczne. Osnowy termoutwardzalne mają najczęściej postać płynną lub półpłynną i po uformowaniu odpowiedniego kształtu kompozytu są utwardzane w wysokiej temperaturze lub w temperaturze pokojowej po dodaniu utwardzaczy chemicznych. Proces ten jest nieodwracalny. Osnowy termoplastyczne mogą mięknąć w wysokiej temperaturze, a następnie ponownie twardnieć po jej obniżeniu. Osnowa termoutwardzalna wykazuje lepszą odporność na deformację pod wpływem zmian temperatury, na korozję chemiczną i działanie rozpuszczalników, ale jest też krucha. Z kolei osnowa termoplastyczna jest ciągliwa, ale wykazuje słabą stabilność kształtu i sztywności w podwyższonej temperaturze. Wadą obu rodzajów materiału jest ich higroskopijność, co wpływa na pogorszenie charakterystyk sztywnościowych i wytrzymałościowych kompozytów.

Osnowy ceramiczne wykazują bardzo dużą odporność na zmiany kształtu i cech fizycznych i mechanicznych w bardzo wysokich temperaturach (nawet do 3500°C). Posiadają też wysoką odporność na czynniki chemiczne i absorpcję wilgoci. Do wad osnowy ceramicznej należy zaliczyć kruchość, i bardzo wysokie koszty produkcji. Najczęściej stosuje się osnowy z węgla krzemu SiC i trójtlenku aluminium Al_2O_3 .

Podobne zalety jak w przypadku materiałów ceramicznych wykazują osnowy metalowe. Dodatkowo mają lepszą odporność na pękanie i zmęczenie, a także lepiej przewodzą ciepło. Dopuszczalna temperatura pracy wynosi do 1000°C. Osnowy metalowe wykonywane są najczęściej ze stopów różnych metali takich jak aluminium tytan magnez i miedź. Właściwości materiałów na osnowy zestawiono w tabeli 2.2.

Tabela 2.2. Właściwości materiału na osnowy kompozytów

Rodzaj osnowy	Gęstość [kN/m ³]	Moduł sprężystości wzdłużnej [GPa]	Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	Dopuszczalna temperatura [°C]
Polimerowa termoutwardzalna:				
epoksyd	12-14	2.5-5.0	50-110	80-215
fenol	12-14	2.7-4.1	35-60	70-150
poliester	11-14	1.6-4.1	35-95	60-150
Polimerowa termoplastyczna:				
nylon	11	1.3-3.5	55-90	75-100
polietereterketon	13	3.5-4.4	100	120-250
poliester	14	2.1-2.8	55-60	70-120
polietylen	10	0.7-1.4	20-35	50-80
Ceramiczna				
węgiel krzemu SiC	28-31	250	-	1200-3500
korund Al ₂ O ₃	39	350-380	440	1200-3500
Metalowa				
stopy aluminiowe	28	77	420	500
stopy tytanowe	45	105	940-1100	800-1000
stopy magnezowe	18	42	280	800-1000
stopy miedzi	80	-	500-800	-

2.4. Właściwości kompozytów

Kompozyty mają szereg zalet w porównaniu z konwencjonalnymi materiałami konstrukcyjnymi. Do najważniejszych należy wysoka sztywność i wytrzymałość właściwa, co przekłada się na dużą wytrzymałość przy bardzo małym ciężarze własnym. Porównanie w tym zakresie niektórych kompozytów z materiałami konwencjonalnymi podano w tabeli 2.3 i na rysunkach 2.2 i 2.3. Cecha ta powoduje, że kompozyty wykorzystuje się wszędzie tam, gdzie pierwszorzędne znaczenie ma mały ciężar i duża wytrzymałość (przemysł kosmiczny, lotniczy, motoryzacyjny).

Inną zaletą jest możliwość wykorzystania anizotropii cech sztywnościowych i wytrzymałościowych materiału kompozytowego do jego lepszego „dopasowania” do konstrukcji. Wzmocnienie układa się w kierunkach ekstremalnych naprężeń i odkształceń, podobnie jak to się czyni w konstrukcjach żelbetowych, przy czym w przypadku kompozytów efektywność tego zabiegu jest dużo większa.

Tabela 2.3. Właściwości kompozytów i materiałów konwencjonalnych

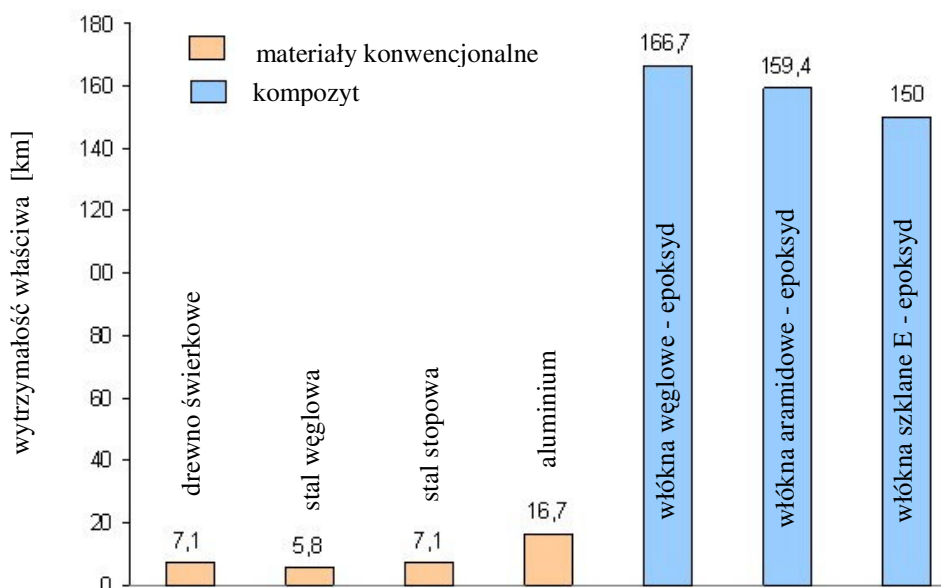
Material	Gęstość [kN/m ³]	Moduł sprężystości wzdłużnej [GPa]	Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	Moduł sprężystości wcięciwy [km]	Wytrzymałość wcięciwa [km]	Dopuszczalna temperatura [°C]
drewno świerkowe	5.5	9	39	1636	7.1	łatwo palne
stal węglowa	78.5	210	370-460	2675	5.8	500-600
stal stopowa	78.5	210	490-560	2675	7.1	500-600
aluminium	27.0	72	450	2667	16.7	150-250
węgiel/epoksyd	13.0-18.0	130-200	1300-3000	11100	166.7	80-215
aramid/epoksyd	13.0-13.8	75-95	1380-2200	6880	159.4	80-215
szkło E/epoksyd	15.0-20.0	45	1200-3000	2250	150.0	80-215

Materiały kompozytowe cechuje też wysoka udurowienie i wytrzymałość zmęczeniowa. Na przykład wytrzymałość zmęczeniowa stali i aluminium wynosi około 50% ich wytrzymałości statycznych, podczas gdy dla jednokierunkowo zbrojonego kompozytu węgiel/epoksyd jest to aż 90%. Większość kompozytów wykazuje też wysoką odporność na korozję chemiczną, nie wymagają zatem stosowania powłok ochronnych, jak to ma miejsce na przykład w przypadku stali.

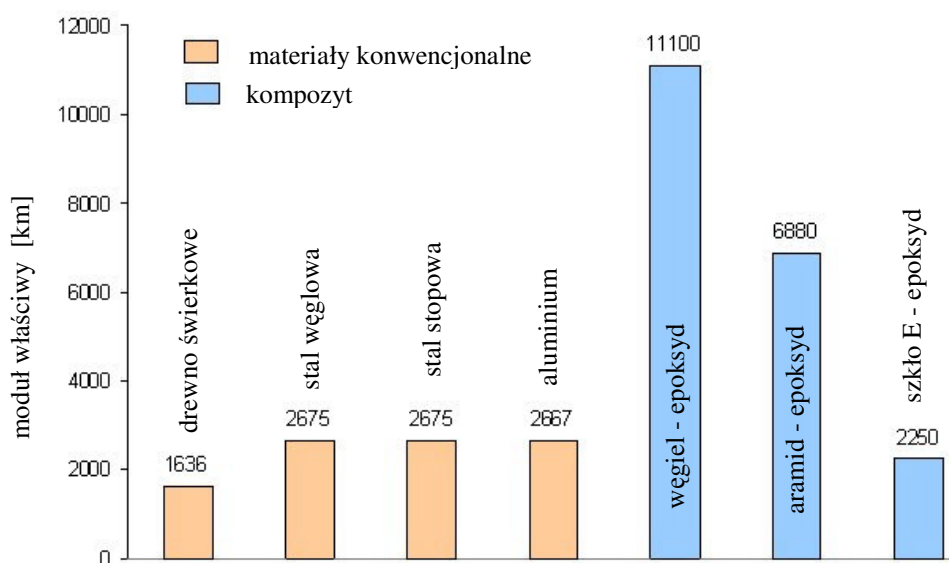
Podstawową wadą kompozytów, która w istotny sposób ogranicza powszechność stosowania tego typu materiałów jest cena. Koszt włókien szklanych wynosi 2.00÷16.00 \$/kg, włókien węglowych 16.00÷80.00 \$/kg, żywica epoksydowa kosztuje 3.00 \$/kg, a gotowe kompozyty w postaci tzw. taśm prepreg – szkło/epoksyd 24.00 \$/kg, węgiel/epoksyd 24.00÷120.00 \$/kg. Dla porównania koszt stali wynosi 0.40÷2.00 \$/kg, a aluminium 1.20÷2.00 \$/kg. Powyższe ceny - z racji braku tego typu danych u polskich dystrybutorów materiałów konstrukcyjnych - podano w dolarach amerykańskich za [60].

Do wad materiałów kompozytowych należy też zaliczyć trudności z konstruowaniem połączeń, szczególnie w konstrukcjach prętowych. Ogranicza to zastosowanie kompozytów w budownictwie, gdzie konstrukcje prętowe występują nader często. Połączenia typu sworznioowego i śrubowego wykazują małą odporność zmęczeniową.

Kompozyty z osnową polimerową posiadają słabą odporność na działanie wysokiej temperatury. Największa temperatura pracy wynosi dla nich około 100÷150°C rzadko dochodzi do 250°C, podczas gdy elementy wykonane ze stali mogą bezpiecznie znieść temperaturę 500÷600°C. Alternatywą jest tu możliwość zastosowania kompozytów z osnową metalową, a jeszcze lepiej ceramiczną, które co prawda są dużo droższe, ale za to mają bardzo dużą odporność na działanie wysokiej temperatury. Kompozyty z osnową metalową i ceramiczną są pozbawione jeszcze jednej wady, charakterystycznej dla osnow polimerowych, a mianowicie skłonności do absorpcji wilgoci.



Rys. 2.2. Wytrzymałość właściwa dla materiałów konwencjonalnych i kompozytowych



Rys. 2.3. Moduł sprężystości właściwy dla materiałów konwencjonalnych i kompozytowych

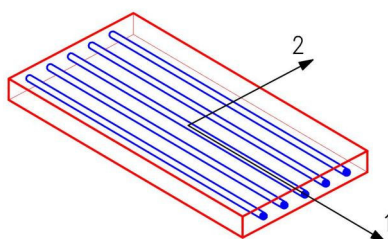
Charakterystyki materiałowe podane w tabelach 2.1 – 2.3 zostały zaczerpnięte z podręczników [61], [68], [97]. Ich wartości podawane w innych źródłach dla tych samych materiałów mogą się istotnie różnić, na co w wielu opracowaniach zwraca się uwagę. German [23] podaje, że różnice w wytrzymałości lub wartości modułu Younga uzyskane z badań laboratoryjnych dwóch identycznych (makroskopowo) próbek mogą wynosić od kilku do kilkudziesięciu procent. Powodem tak dużych różnic jest niejednorodność materiału kompozytowego, wyrażająca się na przykład nadmiernym zagęszczeniem włókien w pewnych rejonach i ich brakiem w innych czy zmiany przekroju włókna po jego długości. Należy zatem z dużą rezerwą podchodzić do tego typu danych, a przy projektowaniu określa się ich miarodajne wartości w oparciu o metody statystyczne.

2.5. Budowa włóknistych kompozytów warstwowych

Kompozyt warstwowy jest elementem konstrukcyjnym zbudowanym z pojedynczych cienkich warstw, zwanych także laminami. Z uwagi na bardzo małą grubość warstwy traktuje się je jako elementy dwuwymiarowe. Elementami składowymi warstwy są włókna stanowiące zbrojenie i osnowa zespalająca włókna ze sobą i nadająca warstwie kształt.

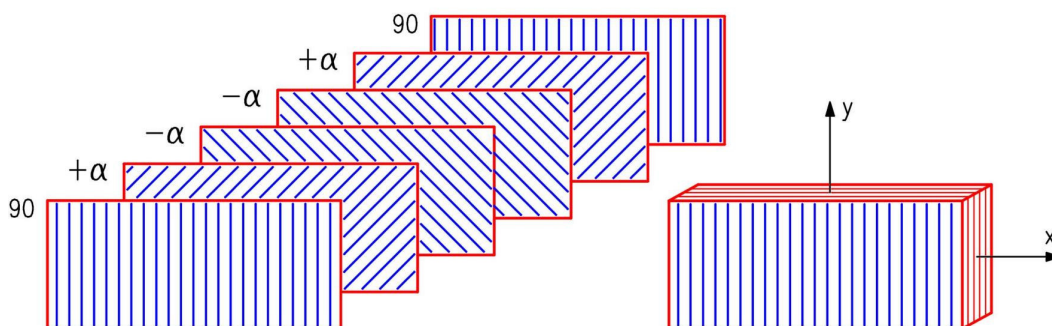
Z punktu widzenia mechaniki warstwa jest materiałem anizotropowym, przy czym równoległy układ włókien i mała grubość nadają jej cechy ortotropii płaskiej.

Do opisu warstwy przyjmuje się układ odniesienia (1, 2) związany z orientacją włókien, przy czym oś 1 jest równoległa do kierunku ułożenia włókien (rys. 2.4). Osie tak przyjętego układu są nazywane głównymi osiami materiałowymi, a konfiguracja geometryczna warstwy względem tego układu – konfiguracją osiową (*on-axis*).



Rys. 2.4. Pojedyncza warstwa kompozytowa i jej układ odniesienia

Kompozyt warstwowy, zwany także laminatem, powstaje przez ułożenie warstw w stosie, jedna na drugiej i trwałe ich zespolenie. Warstwy najczęściej ułożone są tak, aby kierunki włókien były obrócone względem siebie o pewien kąt (rys. 2.5). Dobór tego kąta, a także sekwencja warstw są dobierane w zależności od potrzebnych dla danego zastosowania parametrów sztywnościowych i wytrzymałościowych.



Rys. 2.5. Laminat zbudowany z pojedynczych warstw

Sposób ułożenia warstw w laminacie określa się za pomocą specjalnego kodu, zawierającego informację pod jakim kątem przebiegają kolejno włókna w każdej warstwie w przyjętym układzie odniesienia i ilość warstw. Na przykład dla laminatu przedstawionego schematycznie na rys. 2.5 kod można zapisać $[90/+α/-α/-α/+α/90]$ lub w skróconej formie $[90/+α/-α]_s$, gdzie indeks s oznacza symetrię.

3. Podstawy mechaniki kompozytów

3.1. Równania fizyczne dla materiałów anizotropowych

Do analizy kompozytów wykorzystuje się głównie równania fizyczne liniowej teorii sprężystości, jako że dobrze opisuje ona zachowanie tych materiałów w szerokim zakresie temperatur. W zakresie liniowo-sprężystym obowiązuje prawo Hooke'a, które w ogólnym sformułowaniu przyjmuje postać:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.1a)$$

lub po odwróceniu

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.1b)$$

W powyższych równaniach σ_{ij} , ε_{ij} – elementy tensorów naprężenia i odkształcenia, zaś C_{ijkl} – elementy tensora sztywności, S_{ijkl} – elementy tensora podatności. Tensory naprężenia i odkształcenia to euklidesowe tensory II-ego rzędu, zaś tensory sztywności i podatności są tensorami IV-ego rzędu. Tensory \mathbf{C} i \mathbf{S} są tensorami symetrycznymi spełniającymi zależności:

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C}, \quad \mathbf{S}^T = \mathbf{S}, \quad \mathbf{C} \circ \mathbf{S} = \mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbf{1} \quad (3.2)$$

Symetria tensorów sztywności i podatności wynika z rozważań energetycznych i prowadzi do redukcji ich niezależnych składowych z 36 do 21.

Chęć uproszczenia formy wzorów (3.1) doprowadziła do powstania skróconego zapisu macierzowego, zwanego zapisem Voigta. Tensory naprężenia i odkształcenia przedstawia się w tym zapisie jako macierze jednokolumnowe, a tensory sztywności i podatności jako macierze kwadratowe. Przyjmuje się przy tym następującą zamianę indeksów:

$$\begin{aligned} 11 &\equiv 1 & 23 &\equiv 4 \\ 22 &\equiv 2 & 13 &\equiv 5 \\ 33 &\equiv 3 & 12 &\equiv 6 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Równanie (3.1a) w zapisie Voigta przyjmie zatem następującą postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Powyższy sposób zapisu powoduje, że utracony jest tensorowy charakter macierzy sztywności, podatności oraz macierzy naprężeń i odkształceń.

W tym miejscu należy dodać pewien komentarz krytyczny jeśli chodzi o stosowany w wielu opracowaniach macierzowy sposób zapisu, ale z wykorzystaniem podwójnych „tensorowych” indeksów. Mianowicie bardzo często związek (3.1a) zapisywany jest w postaci:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

W tle takiego sposobu zapisu stoi chęć użycia indeksów wskazujących na rząd tensora, co jednak wydaje się nielogiczne, szczególnie jeśli chodzi o tensory czwartego rzędu, czyli tensory \mathbf{C} i \mathbf{S} . Nie da się bowiem zapisać w sposób płaski (dwuwymiarowy) tensora czwartego rzędu. Zresztą w zapisie (3.5) i tak charakter tensorowy macierzy σ , ε , \mathbf{C} i \mathbf{S} jest utracony, analogicznie jak w przypadku związków (3.4). Pomimo użycia, jak się wydaje odpowiednich indeksów, obydwa sposoby zapisu równań fizycznych - wskaźnikowy (3.1a) i macierzowy (3.5) - nie są równoważne. Obliczając na przykład element σ_{11} , otrzymamy w pierwszym przypadku:

$$\sigma_{11} = C_{1111} \varepsilon_{11} + C_{1122} \varepsilon_{22} + C_{1133} \varepsilon_{33} + 2C_{1112} \varepsilon_{12} + 2C_{1113} \varepsilon_{13} + 2C_{1123} \varepsilon_{23}$$

a w drugim:

$$\sigma_{11} = C_{1111} \varepsilon_{11} + C_{1122} \varepsilon_{22} + C_{1133} \varepsilon_{33} + C_{1112} \varepsilon_{12} + C_{1113} \varepsilon_{13} + C_{1123} \varepsilon_{23}$$

Związek (3.5) będzie równoważny związkowi (3.1a) jeśli wprowadzi się do niego pewne współczynniki korekcyjne przy niektórych elementach równania jak to pokazano poniżej:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1113} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2213} & \sqrt{2}C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3313} & \sqrt{2}C_{3312} \\ \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{3323} & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 2C_{2312} \\ \sqrt{2}C_{1113} & \sqrt{2}C_{2213} & \sqrt{2}C_{3313} & 2C_{2313} & 2C_{1313} & 2C_{1312} \\ \sqrt{2}C_{1112} & \sqrt{2}C_{2212} & \sqrt{2}C_{3312} & 2C_{2312} & 2C_{1312} & 2C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Współczynniki te można również wyprowadzić w oparciu o matematyczne rozumowanie, w którym zauważa się, że tensor II rzędu ma wszystkie własności wektora w 6-cio wymiarowej przestrzeni euklidesowej, a tensor IV rzędu wszystkie własności tensora II rzędu w tej samej przestrzeni. Uzasadnienie powyższego rozumowania, pochodzące z pracy [51] jest przedstawione w dodatku D.5. Według autora stosowanie zapisu w postaci (3.5) bez wprowadzenia współczynników korekcyjnych i bez powołania się na powyższy formalizm matematyczny może prowadzić do wielu nieporozumień.

3.2. Równania fizyczne dla warstwy ortotropowej

W kompozytach warstwowych daje się wyróżnić trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny symetrii, co definiuje kompozyt jako materiał ortotropowy. Symetrie powodują redukcję niezależnych elementów macierzy sztywności i podatności z 21 do 9.

Ponieważ warstwa kompozytu jest konstrukcją dwuwymiarową (jej grubość jest bardzo mała w porównaniu z długością i szerokością) obliczeniowo traktuje się ją jako element płaski. Przyjmuje się zatem, że pomijalnie małe są naprężenia i odkształcenia związane z kierunkiem zgodnym z normalną do płaszczyzny warstwy (kierunek 3 w głównych osiach materiałowych). Założenie to umożliwia analizę warstwy w tak zwanym płaskim stanie naprężenia, w którym:

$$\sigma_{33} \equiv \sigma_3 = 0 \quad \sigma_{23} \equiv \sigma_4 = 0 \quad \sigma_{13} \equiv \sigma_5 = 0 \quad (3.7)$$

Związki fizyczne (3.4) redukują się wówczas do postaci:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Macierz sztywności występująca w równaniu (3.8) jest nazywana zredukowaną macierzą sztywności i oznaczana przez \mathbf{Q} . Liczba niezależnych składowych macierzy podatności i sztywności redukuje się dla płaskiego stanu naprężenia do 4. Elementy tych macierzy można przedstawić w funkcji tak zwanych stałych inżynierskich, które są uogólnionymi modułami sprężystości, ścinania i uogólnionymi współczynnikami Poissona. Sposób określania tych stałych polega na przeprowadzeniu trzech myślowych eksperymentów, tj. jednoosiowego rozciągania w dwóch kierunkach ortotropii i ścinania w płaszczyźnie warstwy (por. [23], [45]).

W płaskim stanie naprężenia macierz podatności w funkcji stałych inżynierskich przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Odwracając macierz podatności \mathbf{S} można otrzymać składowe zredukowanej macierzy sztywności \mathbf{Q} , która w funkcji stałych inżynierskich przyjmuje postać:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} mE_1 & m\nu_{21}E_1 & 0 \\ m\nu_{12}E_2 & mE_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad m = [1 - \nu_{12}\nu_{21}]^{-1} \quad (3.11)$$

Występujące w powyższych równaniach stałe materiałowe to:

- E_1 – podłużny moduł Younga,
- E_2 – poprzeczny moduł Younga,
- G_{12} – moduł ścinania,
- ν_{12} – większy współczynnik Poissona,
- ν_{21} – mniejszy współczynnik Poissona.

Pomimo, że stałych inżynierskich jest pięć, to liczba niezależnych elementów macierzy podatności i sztywności dalej wynosi cztery. Symetria \mathbf{S} i \mathbf{Q} powoduje, że można zapisać:

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} \quad (3.12)$$

Możliwość wyznaczenia wartości mniejszego współczynnika Poissona z zależności (3.12) powoduje, że w specyfikacjach charakteryzujących materiały kompozytowe podaje się tylko cztery charakterystyki, pomijając ν_{21} .

3.3. Równania fizyczne dla warstwy ortotropowej w konfiguracji nieosiowej

Przedstawione w punkcie 3.2 równania fizyczne dla warstwy ortotropowej w płaskim stanie naprężenia, były zapisane w głównych kierunkach ortotropii, czyli w tak zwanej konfiguracji osiowej. Analiza wytrzymałościowa kompozytów wymaga zapisu równań fizycznych również w układzie dowolnie zorientowanym w stosunku do głównych kierunków ortotropii, ponieważ zazwyczaj w tym właśnie układzie opisane jest obciążenie działające na kompozyt. Zachodzi zatem konieczność wielokrotnej transformacji z konfiguracji osiowej do nieosiowej i odwrotnie. Ponieważ macierze $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{S} i \mathbf{Q} są tensorami, ich elementy transformują się przy obrocie układu współrzędnych, zgodnie z prawami transformacji tensorów (odpowiednio II i IV rzędu):

$$a'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} a_{kl} \quad (3.13)$$

$$A'_{ijkl} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq} A_{mnpq} \quad (3.14)$$

W analizie kompozytów wykorzystuje się jedynie pierwsze z powyższych równań, w odniesieniu do tensorów naprężenia i odkształcenia. Praktyczne wykorzystanie równania (3.14) jest możliwe tylko przy użyciu komputera. Dlatego transformacji macierzy podatności i sztywności dokonuje się na drodze przekształceń dokonywanych na macierzach $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{S} i \mathbf{Q} . Przekształcenia te są przedstawione w dodatku D.2.

Po transformacji otrzymujemy następujący związek fizyczny zapisany w konfiguracji nieosiowej:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Występująca w (3.15) macierz jest nazywana transformowaną zredukowaną macierzą sztywności. W analogiczny sposób postępujemy z macierzą podatności, a związek odwrotny do (3.15) z jej użyciem ma postać:

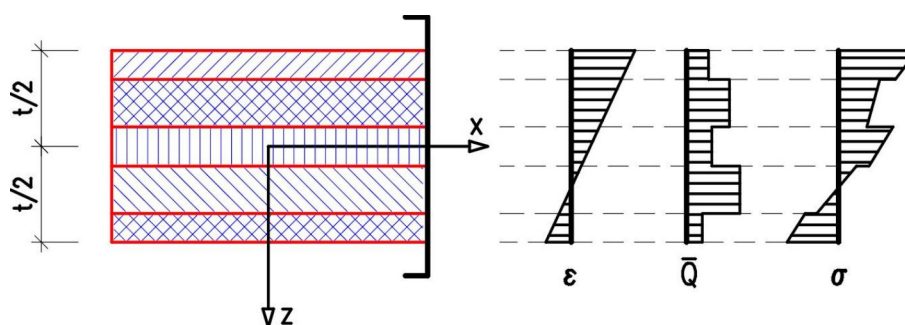
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Wzory pozwalające obliczyć poszczególne elementy transformowanych macierzy sztywności i podatności przedstawiono w dodatku D.2.

W podobny sposób jak to miało miejsce w konfiguracji osiowej, można macierz podatności wyrazić w funkcji stałych inżynierskich. Przeprowadza się przy tym serię trzech myślowych eksperymentów: rozciąganie w kierunku osi x , rozciąganie w kierunku osi y i ścinanie w płaszczyźnie warstwy. Otrzymana w ten sposób macierz podatności w funkcji stałych inżynierskich oraz zależności pomiędzy jej elementami są przedstawione w dodatku D.2.

3.4. Analiza mechaniczna laminatów

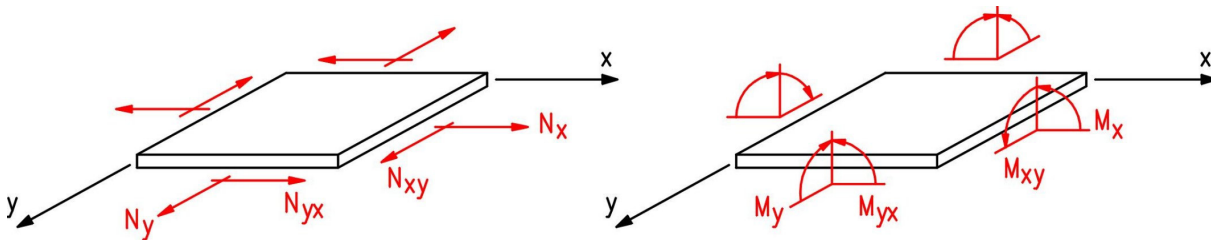
Metoda analizy kompozytów warstwowych, uwzględniająca wpływ właściwości mechanicznych poszczególnych warstw na właściwości całego laminatu, nosi nazwę **klasycznej teorii laminacji** lub **klasycznej teorii płyt laminatowych**. Podstawowe założenia i równania teorii laminacji można znaleźć w podręcznikach [23], [45]. Przedstawiono je również skrótowo w dodatku D.3.



Rys. 3.1. Rozkład naprężeń i odkształceń w laminacie

Na rysunku 3.1 przedstawiono w sposób poglądowy rozkłady naprężeń i odkształceń w laminacie, będące konsekwencją założeń przyjętych w ramach teorii.

Naprężenia w laminacie są definiowane jako wielkość uśredniona z naprężeń warstwowych po grubości laminatu. Następnie, analogicznie jak w teorii płyt cienkich, definiuje się tak zwane siły i momenty wypadkowe (płytkowe), zdefiniowane na jednostkę szerokości przekroju (rys. 3.2).



Rys.3.2. Siły i momenty wypadkowe w laminacie

Wypadkowe siły i momenty w kompozycie warstwowym można przedstawić w postaci:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

lub w skróconej formie symbolicznej:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa}^0 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

gdzie: $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ – tensor odkształceń powierzchni środkowej, $\boldsymbol{\kappa}^0$ – tensor krzywizn powierzchni środkowej.

Macierze występujące w równaniach (3.19) i (3.20) są definiowane w klasycznej teorii laminatów jako:

- macierz sztywności tarczowej:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k t_k \quad (3.22)$$

- macierz sztywności sprzężeń:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k t_k z_k^c \quad (3.23)$$

- macierz sztywności giętej:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \left(\frac{t_k^3}{12} + t_k (z_k^c)^2 \right) \quad (3.23)$$

W powyższych równaniach z_k^c oznacza odległość środka ciężkości k -tej warstwy od płaszczyzny środkowej, a t_k jej grubość.

Macierze \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{D} są symetryczne, co wynika z symetrii transformowanej macierzy sztywności.

Równania (3.19) i (3.20) Wilczyński [99] nazywa swego rodzaju „związkami konstytutywnymi” dla laminatu. Analizując ich postać można zauważyć, że istnieje sprzężenie pomiędzy wszystkimi odkształceniami. Pod wpływem prostego rozciągania wystąpi nie tylko odkształcenie wzdłuż działającej siły i w kierunkach poprzecznych, ale także zginanie i zwichrzenie powierzchni środkowej. Podobnie dla przypadku prostego zginania (na przykład momentem M_x) laminat dozna nie tylko zginania i zwichrzenia, ale wystąpią w nim również odkształcenia charakterystyczne dla stanów tarczowych, czyli rozciągnięcia ze zmianą postaci. W laminatach, dla których zeruje się macierz \mathbf{B} występuje wyraźny podział na stany tarczowe i giętne podobnie jak w materiałach izotropowych.

Dalsze uproszczenia pracy laminatu (przy warunku $\mathbf{B} = \mathbf{0}$) mogą występować po wyzerowaniu się niektórych elementów macierzy \mathbf{A} i \mathbf{D} . Na przykład laminat, dla którego $A_{16} = 0$ i $A_{26} = 0$, dozna podczas prostego rozciągania jedynie zmiany objętości, podczas gdy dla $A_{ij} \neq 0$ dozna również zmiany postaci. Jeżeli w stanie płytowym $D_{ij} \neq 0$, to laminat podczas zginania ulega zwichrzeniu. Brak zwichrzenia przy zginaniu wystąpi wówczas, gdy $D_{16} = 0$ i $D_{26} = 0$.

Można zauważyć, że zerowanie się macierzy \mathbf{B} nastąpi dla tych laminatów, których warstwy składowe są rozmieszczone symetrycznie (zarówno co do konfiguracji jak i materiału) względem powierzchni środkowej. Symetryczne warstwy różnią się jedynie znakiem współrzędnej środka ciężkości z_k^c , co biorąc pod uwagę postać równania (3.23) prowadzi do wyzerowania się sum iloczynów dla warstw symetrycznych.

Jeżeli laminat jest zbudowany z warstw, w których włókna są rozmieszczone tylko pod kątem 0 i 90° (tak zwane laminaty krzyżowe), to wyzerowaniu ulegają elementy A_{16} i A_{26} w macierzy sztywności tarczowej oraz D_{16} i D_{26} w macierzy sztywności giętej.

Podobne lub inne uproszczenia postaci macierzy \mathbf{A} lub \mathbf{D} występują dla wielu innych laminatów, które charakteryzują się pewną regularnością w sekwencji ułożenia warstw. Laminaty te sklasyfikowano i podzielono na pewne grupy oraz określono jakiego rodzaju uproszczenia ich dotyczą. Pełną klasyfikację kompozytów wraz ze szczegółową analizą ich właściwości podano na przykład w [23].



4. Wytrzymałość warstwy kompozytowej

4.1. Wstęp

Wytrzymałość warstwy kompozytowej jest zależna od wytrzymałości elementów jej struktury, czyli włókien i osnowy. Powoduje pewne trudności przy próbie opisu jej wyężenia. Warstwa może się niszczyć przez pękanie włókien przy rozciąganiu lub przez ich wyboczenie przy ściskaniu. Zniszczenie warstwy może również nastąpić na skutek uszkodzenia samej osnowy, co może być wynikiem działania naprężeń ścinających w płaszczyźnie warstwy lub sił prostopadłych do kierunku ułożenia włókien. Zniszczeniu może również ulec warstwa pośrednia między włóknem, a osnową, tak zwane uszkodzenie granicy faz. Oczywiście zniszczenie warstwy może również następować w wyniku działania kombinacji wszystkich lub niektórych z omówionych sposobów uszkodzenia. Podejście do określenia wytrzymałości warstwy kompozytowej w oparciu o właściwości elementów struktury jest przedmiotem zainteresowania tak zwanej mikromechaniki kompozytów. Wspomniane trudności przy tego rodzaju próbie opisu wyężenia powodują, że obecnie dość dobrze rozwinięta jest jedynie analiza wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu w kierunku włókien. Tematyka związana z mikromechaniką kompozytów wykracza poza ramy niniejszej rozprawy.

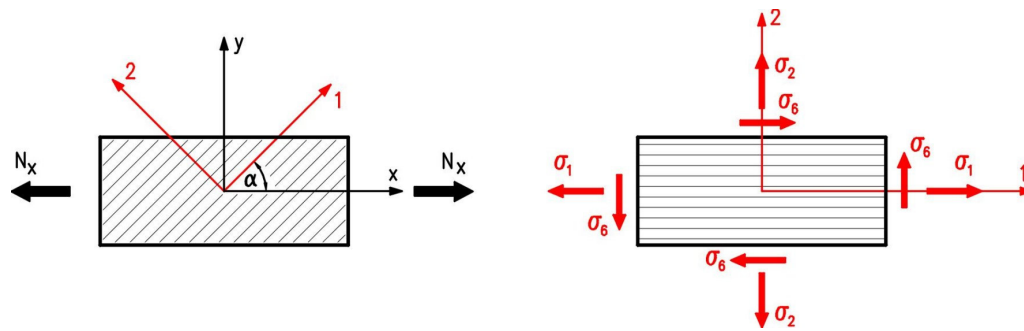
Innym sposobem określenia wytrzymałości warstwy jest potraktowanie jej jako ciała jednorodnego, ale o własnościach ortotropowych. Przez przeprowadzenie testów wytrzymałościowych w głównych kierunkach ortotropii wyznacza się doświadczalnie naprężenia niszczące, które traktuje się jako charakterystyki wytrzymałościowe. Dla warstwy kompozytowej istnieje pięć granic niebezpiecznych. Są to:

- X_t – wytrzymałość na rozciąganie w kierunku włókien,
- X_c – wytrzymałość na ściskanie w kierunku włókien,
- Y_t – wytrzymałość na rozciąganie w kierunku poprzecznym do włókien,
- Y_c – wytrzymałość na ściskanie w kierunku poprzecznym do włókien,
- S – wytrzymałość na ścinanie w płaszczyźnie warstwy.

Projektant znając naprężenia panujące w warstwie porównuje je z odpowiednimi wartościami granicznymi i jest w stanie na tej podstawie określić nośność warstwy nie wnikając w strukturalne mechanizmy zniszczenia. Analogicznie postępuje się przy projektowaniu konstrukcji z materiałów konwencjonalnych, takich jak drewno, beton czy stal.

4.2. Warstwa w złożonym stanie naprężenia

Warstwa kompozytowa w zdecydowanej większości przypadków obciążeniowych pracuje w złożonym stanie naprężenia. Nawet najprostsze obciążenie, jakim jest jednokierunkowe rozciąganie (lub ściskanie), ale o kierunku nie pokrywającym się z żadną z osi głównych materiałowych wywołuje w warstwie wieloosiowy stan naprężenia (rys 4.1). Jest to związane z koniecznością transformacji obciążenia do kierunków głównych osi materiałowych, ponieważ w tych właśnie kierunkach zostały określone wymienione wyżej charakterystyki wytrzymałościowe.



Rys. 4.1. Wieloosiowy stan naprężenia w warstwie kompozytowej

Odpowiedź na pytanie w jakim stanie wyłężenia znajduje się dowolny punkt kompozytu, będący pod działaniem złożonego stanu naprężenia, jest możliwa tylko przy użyciu hipotez wyłężeniowych, podobnie jak to ma miejsce dla materiałów izotropowych. Oczywiście kryteria wyłężeniowe formułowane dla kompozytów muszą uwzględniać występowanie aż pięciu granic niebezpiecznych (lub tylko trzech, jeżeli nie uwzględnia się różnych wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie w kierunkach głównych osi materiałowych).

4.3. Warunki stawiane kryteriom wyłężeniowym

Kwestia sformułowania w prawidłowy sposób kryterium wyłężeniowego wymaga nieco szerszej dyskusji. Powinno ono spełniać szereg warunków, z których najważniejsze można przedstawić następująco [99]:

- 1) kryterium powinno być niezależne od przyjętego układu odniesienia,
- 2) powierzchnia graniczna powinna być zamknięta i wypukła,
- 3) kryterium powinno być alternatywnie wyrażane przez naprężenia i odkształcenia,
- 4) powinno być nieczułe na znak naprężenia stycznego.

Wypukłość powierzchni granicznej jest warunkiem jednoznaczności rozwiązania i oznacza, że zadana trajektoria naprężeń przecina tą powierzchnię dokładnie w jednym punkcie. Z kolei zamknięcie krzywej warunkuje ograniczoność wytrzymałości.

Ważnym przypadkiem stanu naprężenia w warstwie kompozytowej jest stan dwuosiowy, między innymi z powodu możliwości przeprowadzenia weryfikacji doświadczalnej wybranej hipotezy. W dwuosiowym stanie naprężenia obwiednia graniczna przyjmuje kształt krzywej płaskiej. Dla przykładu, jeżeli naprężenia styczne $\sigma_6 = 0$, to kryterium kwadratowe w przestrzeni naprężeń przyjmie następującą ogólną postać:

$$a\sigma_1^2 + 2b\sigma_1\sigma_2 + c\sigma_2^2 + 2d\sigma_1 + 2e\sigma_2 = 1 \quad (4.1)$$

Zależność (4.1) przedstawia równanie krzywej stopnia drugiego (tak zwanej krzywej stożkowej). Współczynniki a , b , c , d i e tego równania zależą od charakterystyk wytrzymałościowych warstwy i dla każdego kryterium są liczbami rzeczywistymi. Wielkość:

$$\delta = b^2 - ac \quad (4.2)$$

jest niezmienna (dla postaci równania 4.1) przy przesunięciu początku układu współrzędnych i przy jego obrocie. W zależności od znaku wyrażenia δ równanie (4.1) może przedstawiać elipsę, hiperbole, a nawet parę prostych. Spełnienie postulatów mówiącego, że obwiednia graniczna ma być krzywą zamkniętą sprawia, że aby wyrażenie (4.1) mogło być przyjęte jako

kryterium wyężeńiowe dla danego materiału, musi przedstawiać sobą równanie elipsy, co jest równoznaczne ze spełnieniem warunku:

$$\delta < 0 \quad (4.3)$$

Ogromna różnorodność materiałów kompozytowych, tak pod względem materiału, jak również sposobu i stopnia wzmocnienia, powoduje, że wartości charakterystyk wytrzymałościowych X_i , Y_i i S mogą przybierać praktycznie dowolne wartości. Ponieważ wyrażenie (4.2) jest funkcją tych charakterystyk, może się okazać, że dla pewnych ich kombinacji warunek (4.3) nie będzie spełniony, co oznacza, że dane kryterium nie opisuje zniszczenia takiego materiału. Dyskusja na ten temat jest przeprowadzona w punkcie 4.4.2 niniejszego rozdziału.

4.4. Kryteria wyężeńiowe dla warstwy kompozytovej

Kryteria wyężeńiowe opisują powierzchnię graniczną materiału, czyli granicę stanu niebezpiecznego w danym punkcie. Dla materiałów kompozytowych jako stan niebezpieczny określa się koniec liniowej sprężystości. Kryteria wyężeńiowe są fenomenologiczne, to znaczy nie określają fizycznych przyczyn zniszczenia, podając jedynie przy jakiej kombinacji naprężeń to zniszczenie nastąpi. Większość kryteriów opisuje granice niebezpieczne jako powierzchnie drugiego stopnia sformułowane w przestrzeni naprężeń (σ_1 , σ_2 , σ_6) lub w przestrzeni odkształceń, co z uwagi na odwrotność równań fizycznych powinno prowadzić do tych samych rozwiązań.

Dokładna liczba kryteriów wyężeńiowych sformułowanych dla materiałów kompozytowych jest praktycznie nie do ustalenia, gdyż wciąż pojawiają się w literaturze nowe propozycje. Spośród prac na ten temat, jakie ukazały się w ostatnim dziesięcioleciu można wymienić [17], [18], [52], [53], [67], [72], [102]. M u c [63] szacuje, że różnych kryteriów wyężeńiowych dla kompozytów może być nawet kilkaset.

Przegląd kryteriów wyężeńiowych stosowanych dla materiałów kompozytowych wraz z ich analizą można znaleźć na przykład w pracach Dą b r o w s k i e g o [19], N e i m i t z a [66] i T h o m a [89]. J e m i o ł o [41] przedstawia w oparciu o przegląd literatury hipotezy wyężeńiowe dla materiałów o symetrii ortotropowej, transwersalnie izotropowej i kubicznej.

Poniżej zostaną przedstawione wybrane kryteria wyężeńiowe, mające zastosowanie dla materiałów ortotropowych. Wybrane zostały kryteria najczęściej stosowane w praktyce projektowej (wykorzystywane w komercyjnych programach inżynierskich), a także często omawiane w podręcznikach ([23], [45], [47], [97]) i artykułach z zakresu mechaniki kompozytów ([8], [11], [46], [68], [83], [89]). Kolejność prezentacji została przyjęta zgodnie z chronologią ich publikacji.

4.4.1 Kryterium Tsaia-Hilla (1965)

Hill [34] uogólnił kryterium wyężenia Hubera-Misesa-Hencky'ego na materiały ortotropowe w 1950 roku, natomiast Tsai [93] przedstawił go w postaci zawierającej wytrzymałości warstwy w kierunkach głównych osi materiałowych. Kryterium to dla płaskiego stanu naprężenia przyjmuje postać:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1 \quad (4.4)$$

Kryterium to uwzględnia interakcję naprężeń σ_1 i σ_2 , nie uwzględnia jednak w sposób bezpośredni różnych wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie w tych samych kie-

runkach. Tsai i Azzi wykazali jednak, że można używać wytrzymałości na rozciąganie lub ściskanie jako funkcji aktualnego stanu naprężenia. Oznacza to że jeżeli warstwa jest ściskana wzdłuż i rozciągana w poprzek włókien to do równania (4.4) należy podstawić X_c i Y_t . Kryterium Tsai-Hilla należy do najbardziej rozpowszechnionych i powszechnie akceptowanych kryteriów.

4.4.2 Kryterium Hoffmana (1967)

By uwzględnić w sposób bezpośredni różnice w wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie w tych samych kierunkach Hoffman [35] dodał do kryterium Tsai-Hilla człony liniowe, przy czym wytrzymałości na ściskanie w obu kierunkach należy uwzględniać z odpowiednim znakiem, to znaczy przyjmować $-X_c$ i $-Y_c$. Dla płaskiego stanu naprężenia kryterium to przyjmuje postać:

$$-\frac{\sigma_1^2}{X_c X_t} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_c X_t} - \frac{\sigma_2^2}{Y_c Y_t} + \frac{X_c + X_t}{X_c X_t} \sigma_1 + \frac{Y_c + Y_t}{Y_c Y_t} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1 \quad (4.5)$$

Dla przypadku, gdy $X_c = -X_t = -X$ i $Y_c = -Y_t = -Y$ kryterium to redukuje się do kryterium Tsai-Hilla (4.4).

4.4.3 Kryterium MDE (1969)

Nazwa kryterium to skrót od *Modified Distortion Energy (MDE) failure criterion*. Kryterium to jest bowiem modyfikacją energetycznego kryterium Tsai-Hilla (4.4). Zostało opracowane w NASA przez Christosa C. Chamisa [9]. Kryterium to zapisane dla płaskiego stanu naprężenia ma postać:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - K_{12} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{XY} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1 \quad (4.6)$$

gdzie:

$$K_{12} = \frac{(1 + 4\nu_{12} - \nu_{13})E_2 + (1 - \nu_{23})E_1}{\sqrt{E_1 E_2 (2 + \nu_{12} + \nu_{13})(2 + \nu_{21} + \nu_{23})}} \quad (4.7)$$

Wspomniana modyfikacja kryterium Tsai-Hilla dotyczy sposobu uwzględnienia interakcji naprężeń σ_1 i σ_2 . W kryterium (4.4) była ona odniesiona do kwadratu wytrzymałości na rozciąganie (ściskanie) w kierunku włókien, tutaj zaś do iloczynu wytrzymałości wzdłuż i w poprzek włókien. Dodatkowo występuje współczynnik K_{12} , który jest funkcją charakterystyk sztywnościowych materiału. Jak widać K_{12} zależy nie tylko od mniejszego i większego współczynnika Poissona ν_{12} i ν_{21} , ale także od współczynników ν_{13} i ν_{23} , związanych z płaszczyznami prostopadłymi do płaszczyzny warstwy (1, 2).

Kryterium MDE nie jest tak rozpowszechnione w praktyce projektowej i literaturze jak kryterium Tsai-Hilla czy Hoffmana, zostało jednak tutaj przytoczone ze względu na swoje podobieństwo do wyspecyfikowanego w niniejszej pracy kryterium zniszczenia warstwy, opartego na ogólnym sformułowaniu Rychlewskiego. Będzie to pokazane szczegółowo w rozdziale 7. W obu tych przypadkach, w kryterium sformułowanym w przestrzeni naprężeń obok charakterystyk wytrzymałościowych X_i , Y_i , S występują także charakterystyki sztywnościowe w postaci stałych inżynierskich. Tak sformułowane kryteria wyężeniowe są spoty-

kane stosunkowo rzadko. Obok kryterium MDE można do nich zaliczyć kryterium energetyczne Sandhu [78] i kryterium Chang-Chang [10].

Kryterium Chamisa zostało wykorzystane w systemie komputerowym ICAN (*Integrated Composite ANalyzer*), służącym do projektowania i analizy konstrukcji wykonanych z materiałów kompozytowych. System ten został stworzony w NASA w 1985 roku [63].

4.4.4 Kryterium Tsaia-Wu (1971)

W 1967 Malmaister [58] sformułował kryterium w postaci nieskończonego wielomianu tensorowego, którego postać, przy uwzględnieniu notacji Voigta jest następująca:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \dots = 1 \quad (4.8)$$

Ponieważ wyrażenie określające funkcję wyęczenia materiału musi być skończone, oraz z powodu trudności jakie wynikają ze stosowania tensorów wyższych rzędów niż czwartego, Tsai i Wu [92] zaproponowali kryterium, w którym ograniczyli się tylko do dwóch pierwszych wyrazów wielomianu (4.8). Kryterium to dla płaskiego stanu naprężenia w warstwie kompozytu redukuje się do postaci:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (4.9)$$

Wszystkie składowe tensorów wytrzymałości, występujące w (4.9) za wyjątkiem F_{12} da się wyznaczyć w prostych próbach wytrzymałościowych. Otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{X_t X_c} & F_1 &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \\ F_{22} &= \frac{1}{Y_t Y_c} & F_2 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \\ F_{66} &= \frac{1}{S^2} & F_6 &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Składowa F_{12} związana z interakcją naprężeń σ_1 i σ_2 jest możliwa do wyznaczenia jedynie w teście dwuosowym. Jeżeli przyjąć $\sigma_6 = 0$, $\sigma_1 / \sigma_2 = B$ to z równania (4.9) otrzymamy:

$$F_{12} = \frac{1 - BF_{11}\sigma_2^2 - F_{22}\sigma_2^2 - BF_1\sigma_2 - F_2\sigma_2}{2B\sigma_2^2} \quad (4.11)$$

Wspomniany test jest jednak bardzo trudny do przeprowadzenia, przez duży wpływ F_{12} na stabilność kryterium i na zamknięcie się krzywej granicznej w dwuosowym stanie naprężenia. Niewielkie różnice w wartościach tego współczynnika mogą powodować bardzo istotne zmiany w kształcie krzywej granicznej, od zbyt wydłużonej elipsy aż do przejścia w dwie hiperbole. Może się okazać, że dla par (σ_1, σ_2) o wartościach różniących się w granicach błędu pomiaru, otrzymamy współczynniki F_{12} , dla których krzywe graniczne będą znacznie różnić się od siebie. Przykład eksperymentalnego wyznaczenia wartości współczynnika F_{12} , dla niektórych materiałów kompozytowych przedstawiają w swoich pracach Benzeggagh i in. [4] oraz Gołaski [24].

Tsai i Wu podają, że jeżeli parametr:

$$F_{12}^* = \frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11} F_{22}}} \quad (4.12)$$

mieści się w granicach $-1 < F_{12}^* < 1$, to kryterium (4.9) jest stabilne i daje zamkniętą obwiednię graniczną, proponują jednak, dla większości materiałów przyjmować $-1 < F_{12}^* \leq 0$. Tsai i Hahn proponują przyjmować $F_{12}^* = -0.5$ i ta propozycja jest najbardziej rozpowszechniona w praktyce, wszędzie tam, gdzie brak jest wiarygodnych danych doświadczalnych do określenia współczynnika F_{12} na drodze eksperymentu.

4.5. Kryteria wyłężeniowe identyfikujące mechanizm zniszczenia

Możliwość identyfikacji sposobu zniszczenia ma istotne znaczenie przy analizie nośności laminatu, czyli kompozytu złożonego z wielu warstw warstw. Analizując laminat warstwa po warstwie aktualizuje się macierz podatności przez redukcję tych jej elementów składowych, które są związane ze sposobem zniszczenia. Kryteria wyłężeniowe omówione w tym punkcie są sformułowane w sposób umożliwiający odpowiedź na pytanie jaki mechanizm uszkodzenia, doprowadził do zniszczenia warstwy.

4.5.1 Kryterium naprężenia / odkształcenia maksymalnego (1920)

Kryterium to jest najstarszym z kryteriów stosowanych w analizie wytrzymałościowej kompozytów i jednocześnie najprostszym. Zostało zaproponowane przez Jenkinsa [43], który niewątpliwie wzorował się na znanej z wytrzymałości materiałów izotropowych hipotezie maksymalnych naprężeń głównych (hipoteza Galileusza). Kryterium to sformułowane w przestrzeni naprężeń przybiera następującą postać:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= X_t \quad (\sigma_1 > 0), & \sigma_1 &= X_c \quad (\sigma_1 < 0) \\ \sigma_2 &= Y_t \quad (\sigma_2 > 0), & \sigma_2 &= Y_c \quad (\sigma_2 < 0) \\ |\sigma_6| &= S \end{aligned} \quad (4.13)$$

W myśl tego kryterium warstwa ulega zniszczeniu, jeżeli którekolwiek z równań (4.13) jest spełnione. Analogicznie można zapisać to kryterium w przestrzeni odkształceń. Widać, że jest możliwość identyfikacji sposobu uszkodzenia, ponieważ każde z równań (4.13) przedstawia warunek wytrzymałości w jednym z kierunków głównych ortotropii. Jeżeli na przykład spełnione będzie równanie $\sigma_1 = X_t$ powiemy, że zniszczenie warstwy nastąpiło przez pęknięcie włókien przy rozciąganiu. Jeżeli $\sigma_2 = Y_t$ wskazanym przez kryterium mechanizmem zniszczenia będzie pęknięcie matrycy.

Kryterium (4.13) ma jednak zasadniczą wadę, mianowicie nie uwzględnia sprzężenia między poszczególnymi naprężeniami, co może prowadzić do niezgodności prognozowanej przez nie nośności z wynikami badań doświadczalnych. Niektórzy współcześni badacze uważają jednak, że to kryterium wcale nie wypada gorzej pod względem zgodności

z doświadczeniem niż inne, bardziej wyrafinowane kryteria wyężeniowe, a jego prostota i możliwość identyfikacji mechanizmu zniszczenia mogą stanowić o jego przewadze. Na przykład Zinoviev i in. w pracy [104] zastosowali to kryterium w zaproponowanej przez siebie metodzie analizy zniszczenia laminatu i uzyskali bardzo dobrą zgodność z wynikami badań doświadczalnych. Swanson i Trask [85] przeprowadzili próby wytrzymałościowe przy dwuosiowym rozciąganiu laminatu z materiału węgiel/epoksyd o kodzie [0/±60]. Porównując wyniki doświadczenia z analizą teoretyczną, przeprowadzoną dla kilku kryteriów, uzyskali zdecydowanie najlepszą zgodność dla kryterium maksymalnych odkształceń.

4.5.2 Kryterium Hashina-Rotema (1973/1980)

Pierwsza wersja tego kryterium została sformułowana przez Hashina i Rotema [27], a później rozwinięta przez Hashina [28]. Dla płaskiego stanu naprężenia kryterium to przyjmuje postać:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1 \quad (\sigma_1 > 0)$$

$$\sigma_1 = X_c \quad (\sigma_1 < 0)$$

$$\frac{\sigma_2^2}{Y_t^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1 \quad (\sigma_2 > 0)$$

$$\frac{\sigma_2^2}{4S_{23}^2} + \left(\frac{Y_c^2}{4S_{23}^2} - 1 \right) \frac{\sigma_2}{Y_c} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1 \quad (\sigma_2 < 0) \quad (4.14)$$

Jak widać kryterium (4.14) to w zasadzie cztery niezależne kryteria wybierane w zależności od znaku naprężeń σ_1 i σ_2 . Kryterium to nie uwzględnia interakcji między naprężeniami σ_1 i σ_2 , a dla przypadku gdy $\sigma_6 = 0$ i $\sigma_2 > 0$ redukuje się do kryterium maksymalnych naprężeń głównych. W równaniu obowiązującym dla $\sigma_2 < 0$ występuje wytrzymałość na ścinanie w płaszczyźnie (2, 3), oznaczona S_{23} . Wytrzymałość ta nie wchodzi w skład standardowych charakterystyk wytrzymałościowych wyznaczanych dla płaskiej warstwy kompozytowej, należy zatem określić ją na drodze dodatkowego eksperymentu. Thom [89] zwraca uwagę, że test taki jest bardzo trudny do przeprowadzenia, podając jednocześnie, że Puck proponuje przy braku danych doświadczalnych przyjmować $S_{23} = Y_t$.

4.5.3 Kryterium Pucka (1996)

Kryterium sformułowane przez Pucka [72] rozróżnia zniszczenie włókien i zniszczenie osnowy. Zakłada przy tym, że na uszkodzenie włókien mają wpływ tylko naprężenia o kierunku zgodnym z ułożeniem włókien, a więc σ_1 . Kryterium przyjęte dla tego sposobu zniszczenia jest połączeniem hipotez maksymalnego naprężenia i maksymalnego odkształcenia i przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{X} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_L} \right) = 1 \quad (4.15)$$

gdzie ε_L oznacza odkształcenie niszczące, przy rozciąganiu (lub ściskaniu) w kierunku włókien. W zależności od znaku naprężeń należy przyjąć X_t lub X_c .

W przypadku osnowy Puck przyjął założenie, że niszczy się ona na skutek działania naprężeń ścinających oraz poprzecznych do włókien. Formułuje przy tym krzywe graniczne w zależności od trzech przypadków uszkodzenia. Pierwszy z nich, oznaczony przez A, dotyczy działania naprężeń ścinających i rozciągających. Przypadek drugi, oznaczony przez B, dotyczy działania naprężeń ścinających i ściskających, ale o niewielkiej wartości. Wreszcie przypadek trzeci, oznaczony przez C, to działanie naprężeń ścinających w połączeniu ze ściskającymi, ale o znacznej wartości. W przypadkach A i B zniszczenia osnowa pęka w płaszczyźnie prostopadłej do naprężeń poprzecznych, natomiast w przypadku C w płaszczyźnie nachylonej (rys. 4.2).

Krzywa graniczna dla przypadku A przedstawia równanie elipsy w postaci:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_6}{S}\right)^2 + \left(1 - p_{12}^+ \frac{Y_t}{S}\right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{Y_t}\right)^2} + p_{12}^+ \frac{\sigma_2}{S} = 1 \quad \sigma_2 > 0 \quad (4.16)$$

W równaniu (4.16) p_{12}^+ przedstawia bezwzględną wartość współczynnika nachylenia stycznej do krzywej granicznej w punkcie przecięcia się tej krzywej z osią naprężeń stycznych σ_6 . Aby lepiej dopasować kształt krzywej do danego materiału współczynnik ten należy wyznaczyć na drodze doświadczalnej. W przypadku braku możliwości przeprowadzenia doświadczenia Puck proponuje przyjmować $p_{12}^+ = 0.3$.

Dla przypadku zniszczenia B krzywa graniczna jest równaniem paraboli w postaci:

$$\frac{1}{S} \left(\sqrt{\sigma_6^2 + (p_{12}^- \sigma_2)^2} + p_{12}^- \sigma_2 \right) = 1$$

$$\left(\sigma_2 < 0, 0 \leq \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_6} \right| \leq \frac{R_{23}}{S \sqrt{1 + 2 p_{23}^-}} \right) \quad (4.17)$$

zaś dla przypadku C przedstawia równanie elipsy w postaci:

$$\left[\left(\frac{\sigma_6}{2(1 + p_{23}^-)S} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y_c} \right)^2 \right] \frac{Y_c}{-\sigma_2} = 1$$

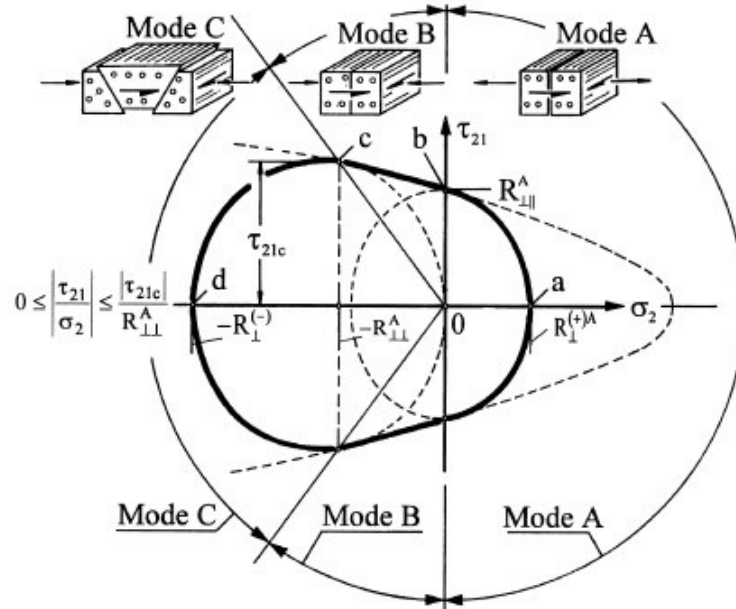
$$\left(\sigma_2 < 0, \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_6} \right| \geq \frac{R_{23}}{S \sqrt{1 + 2 p_{23}^-}} \right) \quad (4.18)$$

Współczynnik p_{12}^- ma taką samą interpretację jak p_{12}^+ przy czym występuje po stronie naprężeń ściskających, stąd znak „minus” w indeksie górnym. Również ten współczynnik należy wyznaczać na drodze eksperymentu, natomiast przy braku danych doświadczalnych można przyjmować $p_{12}^- = 0.2$.

Wielkość R_{23} jest nazwana przez Pucka odpornością materiału na poślizg przy poprzecznym ścinaniu i wyraża się wzorem:

$$R_{23} = \frac{S}{2 p_{12}^-} \left(\sqrt{1 + 2 p_{12}^- \frac{Y_c}{S}} - 1 \right) \quad (4.19)$$

Sens przyjętej nazwy dla R_{23} jest tłumaczony tym, że jest to wartość naprężenia poprzecznego po przekroczeniu którego następuje przejście ze sposobu zniszczenia B do sposobu C, a więc pojawienia się poślizgu na powierzchni pęknięcia.



Rys. 4.2. Obwiednia graniczna dla kryterium Pucka w przestrzeni (σ_2, σ_6) wg [73]

Współczynnik p_{23}^- nie ma interpretacji geometrycznej tak jak p_{12}^+ czy p_{12}^- , jest natomiast związany ze jednym z nich relacją:

$$p_{23}^- = p_{12}^- \frac{R_{23}}{S} \quad (4.20)$$

Tak więc kryterium Pucka w przestrzeni naprężeń (σ_2, σ_6) daje obwiednię graniczną w postaci połączenia trzech krzywych, opisanych równaniami (4.16 – 4.18). Kształt tej obwiedni, wraz z charakterystycznymi jej punktami podano na rysunku 4.2.

Na rysunku 4.2 przyjęto inne oznaczenia niż w niniejszej pracy. Dla jasności podane zostaną odpowiednie relacje: $R_{\perp}^{(+A)} \equiv Y_t$, $R_{\perp}^{(-)} \equiv Y_c$, $R_{\perp\parallel}^A \equiv S$, $R_{\perp\perp}^A \equiv R_{23}$,

$$\tau_{21c} = S \sqrt{1 + 2 p_{23}^-}.$$

Wadą omawianego kryterium jest brak uwzględniania interakcji naprężeń σ_1 i σ_2 , podobnie jak to ma miejsce w przypadku kryterium Hashina-Rotema. Przy $\sigma_6 = 0$ kryterium to redukuje się do kryterium maksymalnych naprężeń.

4.6. Analiza wybranych kryteriów wyłężenia

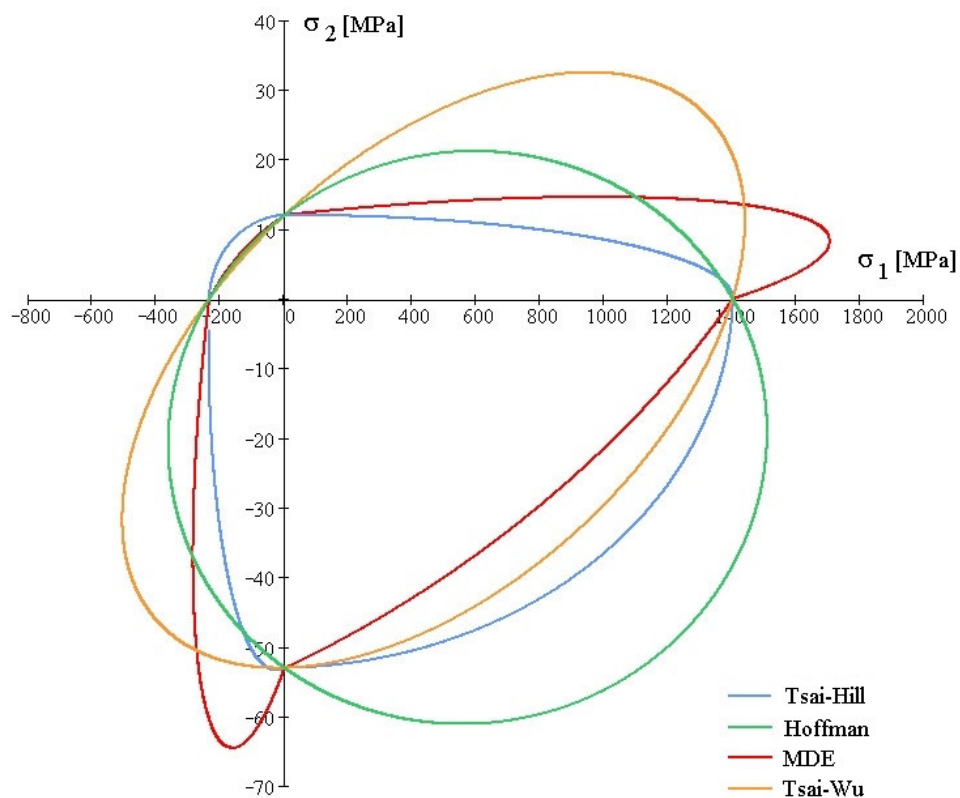
Niniejszy rozdział zawiera oryginalne, autorskie porównanie wymienionych w punkcie 4.3 kryteriów wyłężeniowych dla kilku różnych materiałów kompozytowych. Przedstawiono w nim też analizę stabilności kryteriów, czyli wpływu współczynnika interakcji naprężeń normalnych na postać obwiedni granicznej. Wszystkie obliczenia numeryczne w tym rozdziale, jak również w pozostałej części pracy wykonane zostały przy użyciu programu Mathcad.

4.6.1 Porównanie kryteriów

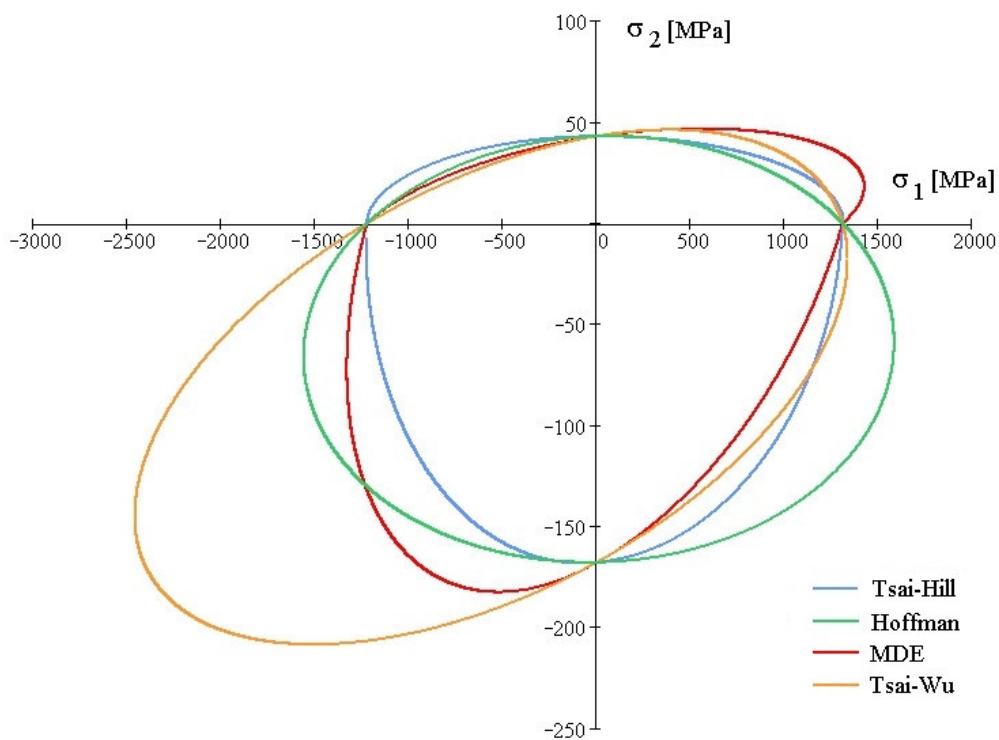
Wymienione w punkcie 4.3 kryteria wyłężeniowe zostaną porównane ze sobą przez wykreślenie obwiedni granicznych dla warstwy kompozytowej, zbrojonej włóknami jednokierunkowymi. Dla uproszczenia rozważone zostaną przypadki dwuosiowego stanu naprężenia, dla których obwiednie graniczne przyjmują kształt krzywych płaskich. Do porównania wybrano kompozyty o osnowie epoksydowej zbrojonej trzema rodzajami włókien, a mianowicie włóknami aramidowymi Kevlar 49, węglowymi T300 oraz szklanymi Silenka E-glass. Charakterystyki wytrzymałościowe i sztywnościowe dla tych materiałów zostały przedstawione w dodatku D.4.

Na rysunkach 4.3 i 4.4 przedstawiono krzywe graniczne wyznaczone według kryteriów Tsaia-Hilla, Hoffmana, MDE i Tsaia-Wu przestrzeni naprężeń (σ_1, σ_2). Równania tych krzywych uzyskano z wyrażen (4.4, 4.5, 4.6, 4.9), podstawiając $\sigma_6 = 0$. Ponieważ kryteria Tsaia-Hilla i MDE nie uwzględniają w sposób bezpośredni różnych wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie wzdłuż i w poprzek włókien, obwiednie graniczne dla tych kryteriów narysowano w postaci czterech różnych krzywych, każda w innej ćwiartce układu (σ_1, σ_2). Równania tych krzywych uzyskano podstawiając w miejsce X i Y do (4.4) i (4.6) odpowiednio X_t dla $\sigma_1 > 0$, X_c dla $\sigma_1 < 0$, Y_t dla $\sigma_2 > 0$ oraz Y_c dla $\sigma_2 < 0$. W przypadku kryterium Tsaia-Wu przyjęto $F_{12}^* = -0.5$ według propozycji Tsaia i Hahna.

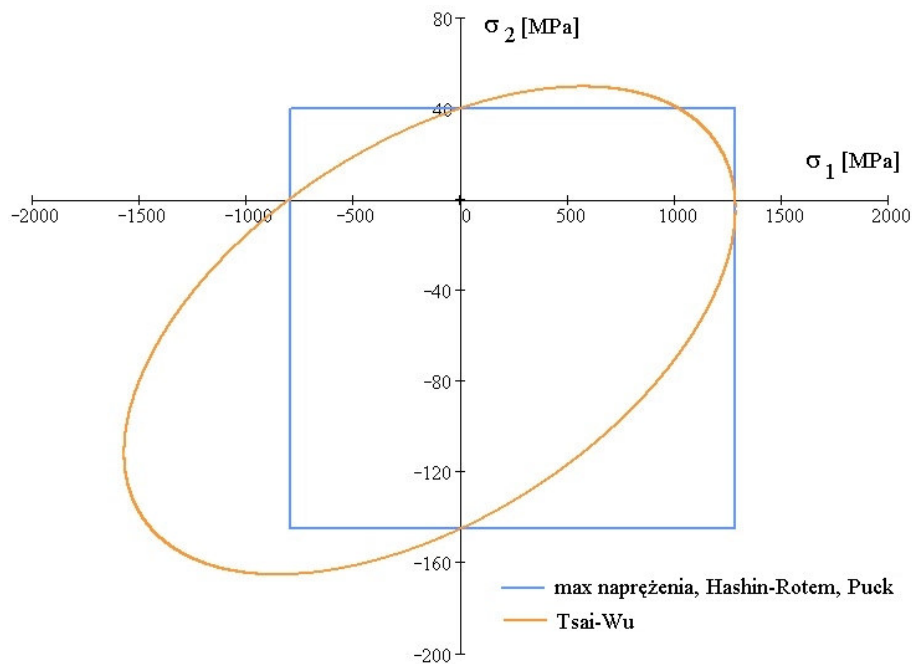
Na rysunku 4.5 przedstawiono krzywe graniczne w przestrzeni (σ_1, σ_2) wyznaczone według kryteriów, maksymalnych naprężeń (4.13), Hashina-Rotema (4.14) i Pucka (4.15), czyli tych, dla których możliwa jest identyfikacja sposobu zniszczenia. Jak widać wszystkie te kryteria dają identyczne obwiednie graniczne w postaci czterech prostych równoległych do osi układu współrzędnych i przechodzących przez punkty charakterystycznych wytrzymałości X_i, Y_i . Ta bardzo prosta postać obwiedni jest konsekwencją nieuwzględniania przez te kryteria interakcji naprężeń σ_1 i σ_2 . Dla porównania przedstawiono obwiednię wyznaczoną dla tych samych danych według kryterium Tsaia-Wu.



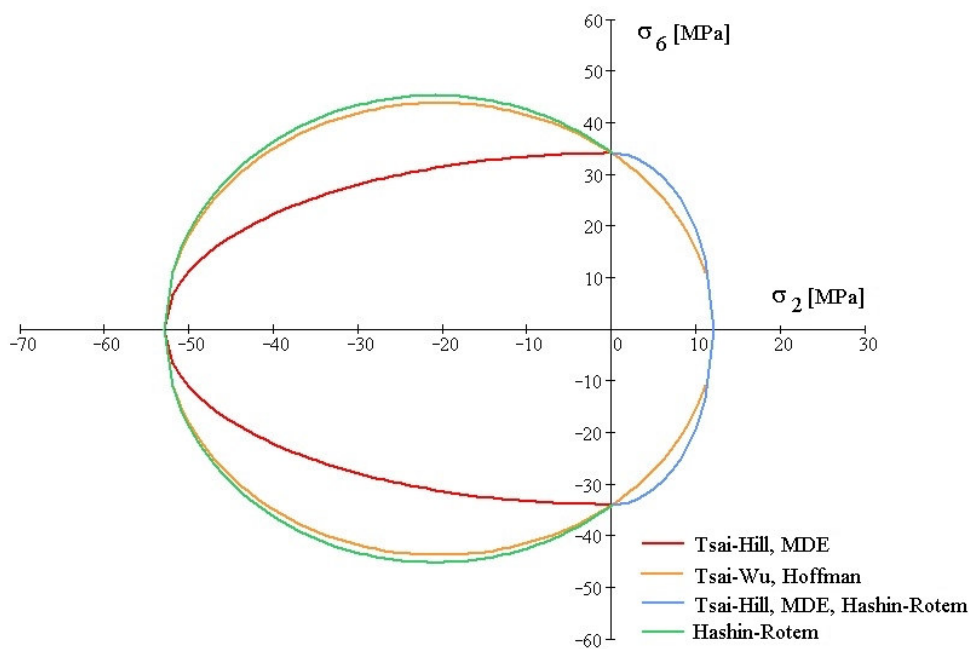
Rys. 4.3. Obwiednie graniczne dla warstwy z materiału aramid / epoksyd (Kevlar 49 / Epoxy)



Rys. 4.4. Obwiednie graniczne dla warstwy z materiału węgiel / epoksyd (T300 / 934)



Rys. 4.5. Obwiednie graniczne dla warstwy z materiału szkło / epoksyd (Silenka E-Glass / MY750)



Rys. 4.6. Obwiednie graniczne dla warstwy z materiału aramid / epoksyd (Kevlar 49 / Epoxy)

Kształt obwiedni granicznych w przestrzeni (σ_2, σ_6) przedstawia rysunek 4.6. W przestrzeni tej wyznaczono krzywe według kryteriów Tsai-Hilla, Hoffmana, MDE, Tsai-Wu oraz Hashina-Rotema. Ponieważ w tym przypadku $\sigma_1 = 0$ i znikają człony związane z interakcją naprężeń normalnych, to kryteria Tsai-Hilla i MDE oraz kryteria Hoffmana i Tsai-Wu przyjmują odpowiednio takie same postacie. Kryterium Hashina-Rotema pokrywa się z kryteriami Tsai-Hilla i MDE dla $\sigma_2 > 0$, czyli w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu

(σ_2, σ_6) natomiast przyjmuje niezależną postać dla $\sigma_2 < 0$. Wyznaczając obwiednię według kryterium Hashina-Rotema przyjęto, zgodnie z zaleceniem Pucka $S_{23} = Y_t$.

Analiza przedstawionych wykresów pokazuje, że kryteria wytrzymałościowe stosowane w analizie wytrzymałościowej kompozytów mogą dawać dla tego samego materiału obwiednie graniczne dość istotnie różniące się między sobą. W przypadku przestrzeni (σ_1, σ_2) różnice te są szczególnie widoczne w ćwiartce I i III, czyli dla interakcji naprężeń o tym samym znaku. W przypadku interakcji ściskania wzdłuż z rozciąganiem w poprzek włókien (ćwiartka II) różnice te są natomiast bardzo małe.

Daje się również zauważyć odmienny kształt krzywych uzyskanych według tych samych kryteriów, ale dla różnych materiałów. Przykładowo elipsa uzyskana z kryterium Tsaia-Hilla dla materiału aramid/epoksyd jest bardziej wydłużona w ćwiartce I aniżeli w III układu (σ_1, σ_2) , natomiast w przypadku materiału węgiel/epoksyd występuje sytuacja odwrotna. Podobna sytuacja występuje dla tego materiału w przypadku kryterium MDE. Należy tutaj zauważyć, że wydłużenie krzywej jakie obserwujemy dla tego kryterium w ćwiartce I i III wydaje się być zbyt duże aby poprawnie opisywało wytrzymałość warstwy (rys. 4.3).

Dla przestrzeni naprężeń (σ_1, σ_6) i (σ_2, σ_6) poszczególne kryteria zazwyczaj dość zgodnie prognozują zniszczenie materiału, chociaż w przypadku przedstawionym na rys. 4.6 dla zakresu $\sigma_2 < 0$ występuje dość znaczna różnica między kryteriami Tsaia-Hilla i MDE, a pozostałymi.

4.6.2 Wpływ współczynnika interakcji na kształt krzywej granicznej

Współczynnik interakcji F_{12} występuje w równaniach poszczególnych kryteriów wytrzymałościowych jako mnożnik przy członie określającym interakcję naprężeń normalnych σ_1 i σ_2 . Wyrażenia określające współczynnik interakcji dla wymienionych w tej pracy kryteriów wytrzymałościowych zestawiono w tabeli 4.1. Dla kryterium Tsaia-Wu podano współczynnik proponowany przez Tsaia i Hahna natomiast w ogólności dla tego kryterium współczynnik interakcji powinien być określony doświadczalnie.

Tabela 4.1. Współczynnik interakcji F_{12} dla różnych kryteriów wytrzymałościowych

Kryterium	Tsai-Hill	Hoffman	MDE	Tsai-Wu
F_{12}	$-\frac{1}{X^2}$	$-\frac{1}{X_c X_t}$	$-\frac{K_{12}}{X Y}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{X_t X_c Y_t Y_c}}$

Jak się okazuje wartość współczynnika F_{12} może mieć istotny wpływ na kształt krzywej granicznej, decydując o przydatności kryterium dla danego materiału. Współczynnik ten występuje bowiem w warunku (4.3) określającym kształt wykresu. Wpływ współczynnika interakcji na stabilność niektórych kryteriów zostanie przedyskutowany w kolejnych punktach.

Kryterium Tsaia-Wu

Kryterium Tsaia-Wu jest najbardziej rozpowszechnione w analizie wytrzymałościowej kompozytów, a także wielu innych materiałów anizotropowych. Badając stabilność kryterium dla przypadku dwuosowego stanu naprężenia w przestrzeni naprężeń (σ_1, σ_2) sprawdzamy warunek (4.3). Ponieważ współczynniki równania (4.1) wynoszą dla kryterium Tsaia-Wu odpowiednio:

$$a = F_{11} \quad b = 2F_{12} \quad c = F_{22} \quad (4.21)$$

to warunek (4.3) można zapisać następująco:

$$F_{12}^2 - F_{11} F_{22} < 0 \quad (4.22)$$

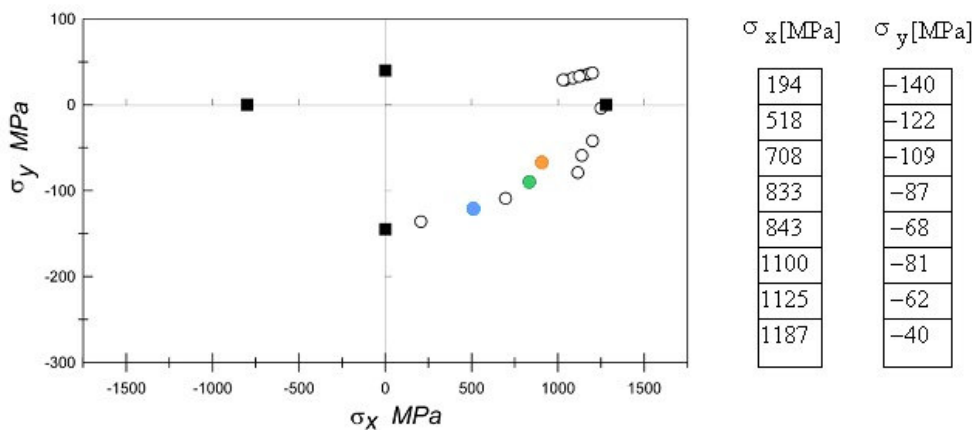
co po wprowadzeniu współczynnika F_{12}^* według wzoru (4.12) prowadzi do nierówności:

$$-1 < F_{12}^* < 1 \quad (4.23)$$

Taki właśnie warunek podają Tsai i Wu jako gwarantujący zamknięcie się obwiedni granicznej. Widać więc, że na stabilność kryterium ma wpływ współczynnik wytrzymałości F_{12} , który powinno się określić na drodze eksperymentu w teście dwuosiowym. Dla pary naprężeń (σ_1, σ_2) niszczących materiał określa się F_{12} z równania (4.11) po przyjęciu $\sigma_1 / \sigma_2 = B$.

Ustalenie wartości parametru B , określającego stosunek przykładanych obciążeń w dwuosiowej próbie wytrzymałościowej, jest sprawą niezwykle trudną, co może obrazować poniższy przykład.

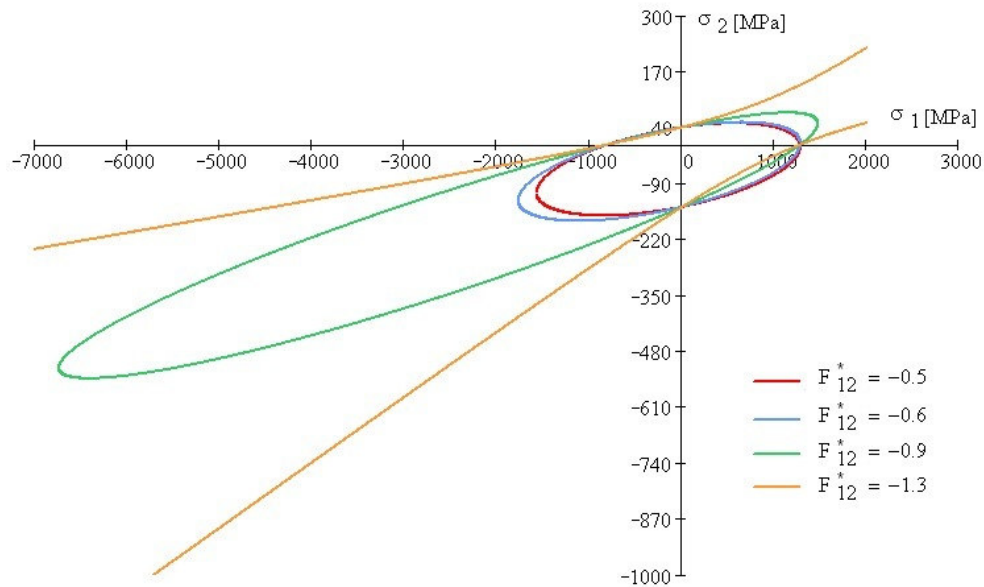
Kompozyt Silenka E-glass/MY759 epoxy poddano działaniu dwuosiowego stanu naprężenia (rozciąganie wzdłuż ze ściskaniem w poprzek włókien). Doświadczenie opisano w [80], a jego wyniki w postaci graficznej i liczbowej pokazuje rysunek 4.7.



Rys. 4.7. Rezultaty dwuosiowego testu dla warstwy szkło/epoksyd wg [80]

Charakterystyki wytrzymałościowe analizowanego kompozytu są następujące: $X_t = 1280 \text{ MPa}$, $X_c = 800 \text{ MPa}$, $Y_t = 40 \text{ MPa}$, $Y_c = 145 \text{ MPa}$.

Celem wykreślenia obwiedni granicznej według kryterium Tsaia-Wu wyznaczono z równań (4.10) wartości współczynników wytrzymałości F_1 , F_2 , F_{11} i F_{22} , a następnie dla każdej pary naprężeń niszczących (σ_x, σ_y) wyznaczonych doświadczalnie obliczono wartości parametru B i współczynnika F_{12} z równania (4.11). Dla każdej z wyznaczonych wartości F_{12} otrzymujemy różne krzywe graniczne, przy czym różnice między tymi krzywymi są znaczące. Na rysunku 4.8 pokazano krzywe otrzymane z trzech wybranych punktów pomiarowych. Punkty i odpowiadające im krzywe zaznaczono na rysunkach 4.7 i 4.8 tymi samymi kolorami. Dla porównania narysowano też krzywą graniczną (kolor czerwony) dla współczynnika $F_{12}^* = -0.5$ według zaleceń Tsaia i Hahna.



Rys. 4.8. Krzywe graniczne wg kryterium Tsai-Wu dla różnych wartości F_{12}^*

Przykład powyższy pokazuje trudności w doświadczalnym wyznaczeniu współczynnika wytrzymałości F_{12} oraz jego duży wpływ na stabilność kryterium. Podobną czułość na zmiany współczynnika interakcji naprężeń σ_1 i σ_2 wykazują też inne kryteria sformułowane w postaci powierzchni i krzywych stożkowych.

Dyskusję na temat wpływu współczynnika F_{12} na kształt obwiedni granicznej dla kryterium Tsai-Wu można znaleźć w pracach [89] i [96].

Kryterium MDE (Chamisa)

Warunek (4.3) na zamknięcie krzywej granicznej przyjmuje dla kryterium MDE następującą postać:

$$\delta = \frac{1}{4} \frac{K_{12}^2}{X^2 Y^2} - \frac{1}{X^2 Y^2} < 0 \quad (4.24)$$

Ponieważ iloczyn kwadratów wytrzymałości $X^2 Y^2$ jest zawsze większy od zera warunek (4.24) upraszcza się do postaci:

$$\frac{1}{4} K_{12}^2 < 1 \quad (4.25)$$

z czego wynika, że kryterium MDE będzie dawało krzywą graniczną w postaci elipsy jeżeli współczynnik K_{12} będzie przyjmował wartości z zakresu:

$$-2 < K_{12} < 2 \quad (4.26)$$

Współczynnik K_{12} jest funkcją charakterystyk sztywnościowych materiału i obliczany jest z zależności (4.7). Obok standardowych charakterystyk sztywnościowych, wyznaczanych w próbach wytrzymałościowych dla płaskiego stanu naprężenia, występują w (4.7) również współczynniki Poissona związane z kierunkiem prostopadłym do płaszczy-

znych warstwy, czyli ν_{13} i ν_{23} . Współczynniki te nie zawsze są podawane przez producenta kompozytu w specyfikacji materiału. W takim przypadku można przyjąć:

$$\nu_{13} = \nu_{12} \quad (4.27)$$

Współczynnik ν_{23} należy wówczas wyznaczyć jedną z metod mikromechaniki kompozytów, które pozwalają określać parametry kompozytu na podstawie właściwości jego składników. Są to tak zwane teorie wzmocnienia kompozytów, których w literaturze można spotkać bardzo dużą ilość. Przykładem może być rozwiązanie opracowane przez Wilczyńskiego [99], z którego można wyznaczyć:

$$G_{23} = G_m \frac{G_m (1 - \sqrt{\nu_f}) + G_f \sqrt{\nu_f}}{G_m [1 - \sqrt{\nu_f} (1 - \sqrt{\nu_f})] + G_f \sqrt{\nu_f} (1 - \sqrt{\nu_f})} \quad (4.28)$$

gdzie: G_m – moduł ścinania osnowy, G_f – moduł ścinania włókien, ν_f – objętościowy udział włókien, a następnie dalej z zależności między stałymi inżynierskimi w liniowej sprężystości:

$$\nu_{23} = \frac{1}{2} \frac{E_2}{G_{23}} - 1 \quad (4.29)$$

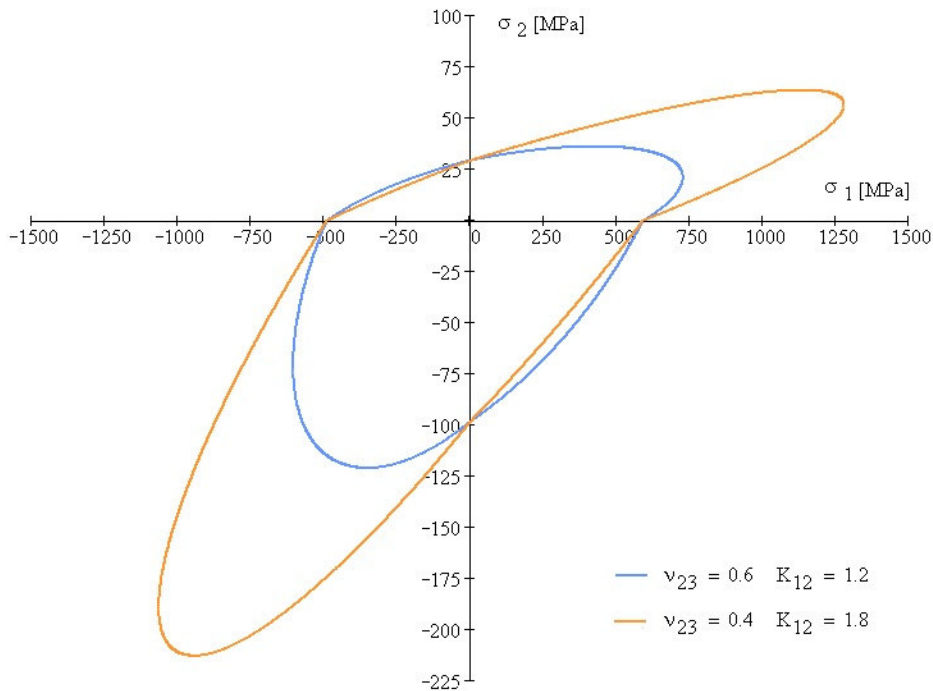
Określanie współczynnika ν_{23} ze wzorów (4.28) i (4.29) może być obarczone błędem dochodzącym do 20% w stosunku do wartości wyznaczonej doświadczalnie. Poniżej zostanie przedstawiony wpływ przyjęcia różnych wartości tego współczynnika na kształt krzywej granicznej wyznaczonej według kryterium MDE.

Dla kompozytu o osnowie epoksydowej zbrojonej włóknami węglowymi o nazwie handlowej GY70/934 zostały wyznaczone krzywe graniczne dla dwóch różnych wartości współczynnika ν_{23} . Charakterystyki sztywnościowe i wytrzymałościowe dla tego materiału przyjęte według [105] wynoszą: $X_t = 589 \text{ MPa}$, $X_c = 491 \text{ MPa}$, $Y_t = 29.4 \text{ MPa}$, $Y_c = 98.1 \text{ MPa}$, $E_1 = 294 \text{ GPa}$, $E_2 = 6.4 \text{ GPa}$, $G_{12} = 4.9 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.23$. W cytowanym źródle brak jest danych dotyczących współczynnika ν_{23} . Przyjęto zatem wartość tego współczynnika przez analogię do podobnych materiałów. Dla większości kompozytów o osnowie epoksydowej zbrojonych włóknami węglowymi współczynnik ν_{23} przyjmuje wartości od 0.4 (kompozyty AS4/3501-6, T300/BSL914C, wg [81]) do 0.6 (kompozyty T300/934, T300/5208 wg [47]). Przyjęto zatem te dwie graniczne wartości i dla nich narysowano krzywe wytrzymałości. Krzywe te przedstawiono na rysunku 4.9.

Kryterium MDE nie uwzględnia w sposób bezpośredni różnych wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie w tych samych kierunkach. Stosując je, wstawiamy odpowiednio wytrzymałość na rozciąganie lub ściskanie w zależności od znaku naprężeń, analogicznie jak dla kryterium Tsaia-Hilla. Prowadzi to do czterech różnych krzywych rysowanych w poszczególnych ćwiartkach układu (σ_1, σ_2).

Otrzymane rezultaty pokazują dużą czułość kryterium MDE na wartości współczynnika interakcji F_{12} . Kształty krzywych granicznych wyznaczonych dla dwóch różnych wartości ν_{23} istotnie różnią się od siebie. Krzywa pomarańczowa jest zbyt wydłużona w ćwiartce I i III aby poprawnie opisywała zniszczenie tego kompozytu. Należy zaznaczyć, że różnice pomiędzy przyjętymi tutaj wartościami współczynnika ν_{23} mieszczą się w granicach podanego wyżej błędu 20% pomiędzy wartością obliczoną, a wyznaczoną doświadczalnie. Również wyniki doświadczeń mogą być obarczone pewnym błędem. Wszystko to sprawia, że dla pewnych materiałów kryterium MDE może dawać wyniki niezgodne z doświadczeniem lub

w ogóle nie opisywać ich wytrzymałości, w przypadku niezamykania się krzywej granicznej (dla $-2 < K_{12} < 2$).



Rys. 4.9. Krzywe graniczne wg kryterium MDE dla różnych wartości ν_{23}

Pozostałe kryteria

Współczynnik interakcji F_{12} dla pozostałych kryteriów wytrzymałościowych wymienionych w niniejszej pracy nie wpływa w istotny sposób na ich stabilność. Dla kryterium Tsaia-Hilla (4.4) warunek (4.3), gwarantujący zamknięcie się krzywej granicznej przyjmuje postać:

$$Y < 2X \quad (4.30)$$

natomiast dla kryterium Hoffmana (4.5):

$$Y_c Y_t < 4 X_c X_t \quad (4.31)$$

Ponieważ dla kompozytów włóknistych wytrzymałość X w kierunku włókien jest zawsze większa od wytrzymałości Y w poprzek włókien (dla mat zbrojonych dwukierunkowo wytrzymałości te mogą być co najwyżej równe), to warunki (4.30) i (4.31) są zawsze spełnione.

W przypadku kryteriów identyfikujących mechanizm zniszczenia współczynnik F_{12} w ogóle nie występuje, ponieważ kryteria te nie uwzględniają interakcji naprężeń normalnych.

W literaturze można znaleźć inne przykłady kryteriów wrażliwych na współczynnik interakcji. Na przykład Dąbrowski [18] opisuje przypadek dużej czułości kryterium Malmeistra na wartość wytrzymałości na ścinanie S , która wchodzi do wzoru określającego w tym kryterium wartość F_{12} . Dla wartości tego współczynnika różniących się na poziomie błęd pomiarowego otrzymuje się krzywe o nieporównywalnie innym wydłużeniu.

4.7. Ogólne uwagi o stosowaniu kryteriów wytrzymałościowych

Przedstawione powyżej porównanie kryteriów wytrzymałościowych oraz analiza ich stabilności pokazują, że o żadnym z nich nie można powiedzieć, że jest ogólnie dobre lub złe. Różnice pomiędzy poszczególnymi kryteriami są na tyle duże, że przed ich zastosowaniem do obliczenia nośności warstwy kompozytowej z konkretnego materiału należy sprawdzić ich przydatność na drodze eksperymentalnej. Kryterium, które dla jednego materiału daje wyniki zgodne z doświadczeniem, dla drugiego może błędnie prognozować wytrzymałość lub wręcz uniemożliwiać jej wyznaczenie (w przypadku niezamykania się obwiedni granicznej). Duża różnorodność typów materiałów kompozytowych (a także innych materiałów o cechach anizotropowych) uzasadnia występowanie w praktyce obliczeniowej tak dużej liczby kryteriów wytrzymałościowych. Uzasadnione jest również, wspomniane na wstępie niniejszego rozdziału, poszukiwanie nowych kryteriów, a także całej teorii zniszczenia kompozytów. Między innymi temu właśnie poświęcona jest dalsza część pracy.

5. Nośność kompozytu warstwowego

5.1. Wstęp

W przypadku laminatu nie funkcjonuje pojęcie wytrzymałości. Jest on bowiem konstrukcją złożoną z pojedynczych warstw i tak jak w przypadku każdej konstrukcji inżynierskiej można mówić tylko o jej nośności. Pojęcie „wytrzymałość” ma natomiast sens w przypadku pojedynczej warstwy kompozytowej, która jest składnikiem budowy laminatu.

W aktualnym stanie wiedzy nie istnieje teoria, pozwalająca na analizę wytrzymałościową kompozytu warstwowego jako całości. Konieczne jest zejście z poziomem obserwacji do pojedynczych warstw składowych i w oparciu o ich wytrzymałość zbudowanie algorytmu analizy wytrzymałościowej całego kompozytu.

Podstawowym krokiem do wyznaczenia nośności laminatu będzie zatem sprawdzenie wytrzymałości każdej warstwy z osobna i określenie, która z nich niszczy się jako pierwsza. Naprężenia i odkształcenia w poszczególnych warstwach wyznacza się przy zastosowaniu **klasycznej teorii laminatów**, opisaney w dodatku D.3. Po wyznaczeniu naprężeń, działających w każdej warstwie i przetransformowaniu ich do głównych osi materiałowych, określa się wyężenie warstw, przy zastosowaniu jednego z wybranych kryteriów wyężeniowych (rozdział 4).

5.2. Metody analizy

5.2.1 Metoda FPF

Metoda **FPF** (*First Ply Failure*), czyli metoda zniszczenia pierwszej warstwy jest najprostszą w analizie nośności kompozytu warstwowego. W metodzie tej uznaje się, że cały kompozyt ulega zniszczeniu, jeżeli zniszczy się choć jedna z jego warstw składowych. Metoda ta nie daje możliwości wykorzystania w pełni nośności kompozytu, który po zniszczeniu jednej, a nawet większej liczby warstw, może z reguły przenosić jeszcze większe obciążenia. Wykorzystuje się ją jednak w praktyce, szczególnie w odpowiedzialnych konstrukcjach, mając na uwadze zapas bezpieczeństwa.

5.2.2 Metoda LPF

Druga metoda stosowana do określania nośności kompozytu to metoda zniszczenia ostatniej warstwy **LPF** (*Last Ply Failure*). W metodzie tej eliminuje się z kompozytu warstwę, która uległa zniszczeniu i obliczenia prowadzi się dalej, aż do wyczerpania nośności ostatniej warstwy. Metoda LPF może występować w kilku odmianach, w zależności od sposobu postępowania z warstwą, która uległa uszkodzeniu. Pierwszy sposób postępowania polega na całkowitym pominięciu w dalszej analizie warstwy uszkodzonej poprzez wyzerowanie wszystkich elementów macierzy sztywności tej warstwy. Drugi sposób uwzględnia mechanizm uszkodzenia warstwy. Przyjmuje się w nim jako zerowe tylko te elementy tensora sztywności, które są związane z danym mechanizmem. Bardziej złożone modele uwzględniają stopień zniszczenia i w jego funkcji częściowo degradują odpowiednie elementy tensora

sztynności. Sposób modyfikacji macierzy sztywności ma podstawowe znaczenie dla oceny nośności laminatów. Warto dodać, że metoda LPF może dawać w porównaniu z FPF nośność wyższą nawet o kilkaset procent [23].

5.3. Analiza laminatu po uszkodzeniu pierwszej warstwy

5.3.1 Sposoby postępowania z warstwą uszkodzoną

Zastosowanie do wyznaczenia nośności laminatu metody zniszczenia ostatniej warstwy oznacza, że zadanie musi być wielokrotnie redefiniowane poprzez uaktualnianie macierzy sztywności dla całego laminatu. Uaktualnienie to polega na modyfikacji macierzy sztywności \mathbf{Q} w warstwie, która w danym cyklu obliczeniowym została uznana za uszkodzoną. Macierz sztywności warstwy w funkcji stałych materiałowych przedstawia równanie (3.11). Można wyróżnić trzy sposoby postępowania z warstwą uszkodzoną:

1. Wyzerowanie wszystkich elementów macierzy \mathbf{Q} .
2. Wyzerowanie tylko tych elementów macierzy \mathbf{Q} , które są związane ze sposobem uszkodzenia.
3. Częściowe zmniejszenie elementów macierzy \mathbf{Q} związanych ze sposobem uszkodzenia, uwzględniające stopień uszkodzenia.

Pierwszy z wymienionych sposobów sprowadza się do całkowitej eliminacji uszkodzonej warstwy z dalszej analizy laminatu i jako taki nie następuje żadnych kłopotów obliczeniowych.

Dwa następne sposoby wymagają znajomości sposobu uszkodzenia warstwy. Jeżeli uszkodzeniu ulega osnowa na skutek rozciągania lub ściskania to wyzerowaniu bądź zmniejszeniu ulegają elementy Q_{12} i Q_{22} , czyli te, które są zależne od poprzecznego modułu Younga. Jeżeli osnowa uszkadza się pod działaniem naprężeń ścinających degradacji ulega element Q_{66} . W przypadku zniszczenia warstwy na skutek pęknięcia włókien lub ich wyboczenia degraduje się element Q_{11} , zależny od podłużnego modułu Younga.

5.3.2 Identyfikacja sposobu zniszczenia

Kryteria wyłężeniowe, omówione w punkcie 4.2, stosowane do wyznaczenia nośności pojedynczych warstw nie pozwalają na identyfikację mechanizmu ich zniszczenia. Prognozują one jedynie przy jakiej kombinacji obciążeń, a nie w jaki sposób dochodzi do zniszczenia materiału. Pewnym rozwiązaniem jest w tym przypadku stosowanie kryteriów identyfikujących sposób zniszczenia. Są to tak zwane kryteria strukturalne, do których, obok wymienionych w punkcie 4.3 można także zaliczyć kryterium Cuntze'a [17] i strukturalno – statystyczne kryterium Dąbrowskiego [18], w którym dodatkowo bierze się pod uwagę losowo zmienny rozkład wytrzymałości włókien. Wadą tego typu kryteriów jest brak uwzględniania interakcji naprężeń normalnych σ_1 i σ_2 , co sprowadza je do kryterium maksymalnych naprężeń (por. rys. 4.5).

Jeżeli zatem degradację macierzy sztywności prowadzi się w sposób 2 lub 3, przy użyciu fenomenologicznych kryteriów wyłężenia z grupy wymienionych w punkcie 4.2, do określenia sposobu zniszczenia należy używać dodatkowych warunków. Warunki te są w zasadzie również kryteriami, przyjętymi w sposób arbitralny, nie mającymi fizycznego uzasadnienia. Przykładem mogą być warunki podane w [16]:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \frac{X}{Y} \quad (5.1)$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_6} > \frac{X}{S} \quad (5.2)$$

gdzie X i Y przybierają wartości X_t , X_c , Y_t i Y_c w zależności od znaku naprężeń σ_1 i σ_2 . Jeżeli zachodzą obie nierówności warstwa niszczy się w wyniku uszkodzenia włókien. Jeżeli spełniona jest tylko pierwsza nierówność - zniszczenie następuje w wyniku ścinania w płaszczyźnie warstwy. Jeżeli spełniona jest wyłącznie druga nierówność, to za uszkodzenie warstwy odpowiedzialne jest zniszczenie osnowy. Wreszcie, gdy obydwie nierówności nie są spełnione uszkodzenie następuje w wyniku kombinacji ścinania i pęknięcia osnowy.

Po określeniu sposobu zniszczenia mamy podstawę do tego aby wyzerować bądź częściowo zredukować odpowiednie elementy macierzy podatności \mathbf{Q} w warstwie.

5.4. Modele degradacji sztywności - przegląd literatury

Teorie zniszczenia laminatu, uwzględniające jego zachowanie się po zniszczeniu pierwszej warstwy, muszą zawierać oprócz kryterium wyteżeniowego do wyznaczania kolejno uszkodzających się warstw także model opisujący sposób degradacji macierzy sztywności w zniszczonej warstwie. Zazwyczaj stosuje się któreś z powszechnie stosowanych kryteriów, najczęściej takie które daje możliwość identyfikacji sposobu zniszczenia. Przy jej braku wprowadza się dodatkowe warunki za pomocą których identyfikowane są sposoby zniszczenia warstwy. Poniżej zostaną przedstawione przykładowe modele degradacji sztywności, które podzielono na trzy grupy. Do pierwszej zaliczono model najczęściej stosowany, polegający na wyzerowaniu elementów macierzy sztywności \mathbf{Q} związanych ze sposobem zniszczenia. Druga grupa to modele które obniżają wartości odpowiednich parametrów sztywnościowych o pewną stałą wartość, niezależną od stopnia uszkodzenia. Wreszcie trzecia grupa to modele w którym wielkość degradacji jest uzależniona od stopnia uszkodzenia.

5.4.1 Zerowanie modułów sztywności

W większości teorii stosowany jest model degradacji polegający na wyzerowaniu elementów macierzy sztywności \mathbf{Q} związanych ze sposobem zniszczenia. Podejście takie zastosowali na przykład Chang i Chang [10], Tan [86], Tolson i Zabaras [90], Reddy i Reddy [75], Wolfe [100], Gotsis i in. [25], a w ostatnich latach Bogetti i in. [7], Huang [36] i Mayes i Hansen [59]. W przypadku pracy [59] wyzerowaniu podlega moduł Younga osnowy E_m , natomiast stałe inżynierskie dla laminatu, czyli E_2 i G_{12} są obliczane metodami mikromechaniki.

5.4.2 Obniżenie sztywności o stałą wartość

Wśród modeli degradacji przyjmujących częściową redukcję sztywności można wyróżnić dwa podejścia. Pierwsze polega na obniżeniu wartości odpowiednich elementów macierzy \mathbf{Q} o jednakową wartość niezależnie od stopnia uszkodzenia i drugie w którym wielkość degradacji jest uzależniona od stopnia uszkodzenia (np. coraz większa gęstość szczelin wewnątrzwarstwowych).

Przykład pierwszego podejścia można znaleźć w pracy Petita i Waddoupsa [69]. W swojej teorii zniszczenia laminatów również wprowadzają metodę skokowej degradacji sztywności. Metoda ta nazwana później metodą ujemnego modułu stycznego [16] polega na założeniu, że warstwa po osiągnięciu granicy plastyczności ulega odciążeniu. Jeżeli przykładowo warstwa ulega zniszczeniu na skutek uszkodzenia osnowy przyjmuje się:

$$E_2^d = (\text{MRF})E_2 \quad (5.3)$$

gdzie MRF (*Modulus Reduction Factor*), $\text{MRF} < 0$. Im większe uszkodzenie tym wartość tego współczynnika powinna być większa. Współczynnik nie ma ustalonej wartości, co jest wadą tej metody o czym pisze Craddock, który w przeprowadzonych przez siebie przykładach obliczeniowych [16] przyjmował $\text{MRF} = -1.0$. Przyjęcie takie oznacza założenie, że doszło do całkowitego uszkodzenia. Craddock zwraca też uwagę, że przyjmowanie ujemnego modułu sztywności w warstwie po degradacji może w efekcie dawać wzrost modułu sztywności laminatu, co nie jest obserwowane doświadczalnie.

Degradację o ustaloną z góry wartość zastosowali też Liu i Tsai [56]. Wprowadzony przez nich sposób degradacji jest związany ze zjawiskiem powstawania tak zwanych mikropęknięć lub szczelin wewnątrzwarstwowych. Szczeliny te pojawiają się w osnowie i przebiegają po całej grubości warstwy, a ich płaszczyzna środkowa jest mniej więcej równoległa do włókien. Liu i Tsai zakładają, że warstwa niszczy się przez powstanie mikropęknięć w osnowie tylko wtedy, gdy odkształcenia w kierunku poprzecznym do włókien są nieujemne (co oznacza rozciąganie). Jeżeli w warstwie uszkodzonej odkształcenia te są równe zeru lub ujemne (ściskanie) to osnowa pozostaje nienaruszona, a mechanizm zniszczenia jest związany z uszkodzeniem włókien. W pierwszym przypadku degradowana jest sztywność osnowy, a w drugim sztywność włókien, przy czym przypadek uszkodzania się włókien jest równoznaczny z ostatecznym zniszczeniem warstwy.

Zmiana sztywności osnowy polega na przyjęciu współczynnika degradacji E_m^* , wyrażającego stopień uszkodzenia osnowy:

$$E_m^* = \frac{E_m^d}{E_m} \quad (5.4)$$

gdzie: E_m - moduł sztywności osnowy nieuszkodzonej, E_m^d - moduł sztywności osnowy uszkodzonej.

Współczynnik degradacji E_m^* wykorzystuje się do obliczenia zdegradowanych charakterystyk sztywnościowych warstwy, to jest poprzecznego modułu Young'a E_2 , modułu ścinania G_{12} i większego współczynnika Poissona ν_{12} , za pomocą jednej z teorii wzmocnienia kompozytu.

Wartość współczynnika E_m^* należy określić doświadczalnie, przy czym zakłada się, że dla osnowy wykonanej z tego samego materiału, współczynnik ten jest stały, niezależnie od rodzaju włókien i stopnia wzmocnienia. Liu i Tsai wykorzystali badania prowadzone przez Highsmitha i Reifsnidera [33], którzy badając laminaty węglowo-epoksydowe i szklano-epoksydowe o różnych konfiguracjach warstw, ustalili, że najlepszą zgodność z doświadczeniem uzyskuje się przyjmując E_m^* w zakresie od $0.1 \div 0.2$. Stąd Liu i Tsai przyjęli w [56] $E_m^* = 0.15$.

Degradację o stałą wartość przyjmuje też McCarthy [62], który zmniejsza odpowiednie charakterystyki inżynierskie uszkodzonej warstwy do poziomu 10% wartości początkowej. W odróżnieniu od podejścia Liu i Tsai zmniejsza do tego samego poziomu, a więc do

10%, również podłużny moduł Younga E_1 , podczas gdy ci drudzy w przypadku uszkodzenia włókien przyjmują wartość tego modułu równą zero (formalnie przyjmują 1% wartości początkowej ze względu na matematyczne ograniczenia związane z odwracaniem macierzy).

5.4.3 Uwzględnienie stopnia zniszczenia

Jeden z pierwszych sposobów degradacji, polegających na stopniowym obniżaniu sztywności, zaproponował Chi u [12]. Jeżeli warstwa ulega zniszczeniu na skutek uszkodzenia włókien to moduł odkształcenia podłużnego jest redukowany do wartości:

$$E_1^d = E_1 \frac{\bar{X}}{X} \quad (5.5)$$

gdzie:

$$\bar{X} = X - \sigma_1 \quad (5.6)$$

W przypadku zniszczenia warstwy na skutek uszkodzenia osnowy, moduł odkształcenia poprzecznego redukuje się do wartości:

$$E_2^d = E_2 \frac{\bar{Y}}{Y} \quad (5.7)$$

gdzie:

$$\bar{Y} = Y - \sigma_2 \quad (5.8)$$

Zniszczenie warstwy na skutek ścinania w jej płaszczyźnie powoduje redukcję modułu ścinania do wartości:

$$G_{12}^d = G_{12} \frac{\bar{S}}{S} \quad (5.9)$$

gdzie:

$$\bar{S} = S - \sigma_6 \quad (5.10)$$

We wzorach (5.5 – 5.10) należy podstawiać w miejsce X i Y odpowiednio X_t dla $\sigma_1 > 0$, X_c dla $\sigma_1 < 0$, Y_t dla $\sigma_2 > 0$ oraz Y_c dla $\sigma_2 < 0$. W przypadku tego modelu należałoby mówić nie o degradacji uwzględniającej stopień uszkodzenia ale raczej stopień wyężenia.

Sposób degradacji uwzględniający stopień zniszczenia jest też przyjęty w pracy C a z e n e u v e ' a i in. [8], przy czym parametr degradacji jest ustalany doświadczalnie. Doświadczenie polega na prostych testach wytrzymałościowych, przeprowadzanych w głównych osiach materiałowych pojedynczej warstwy. W ramach doświadczenia sporządza się wykresy zależności zmian charakterystyk inżynierskich (E_1 , E_2 , G_{12}) od wartości naprężeń. Wykresy takie dają podstawę do wyznaczania stopnia degradacji podczas analizy laminatu. Można je traktować jako swego rodzaju charakterystyki materiałowe wyznaczane dla danego laminatu. Analogiczny sposób postępowania przyjmuje też E d g e [21]. Wadą tego podejścia jest konieczność wykonania dodatkowych doświadczeń dla warstw składowych laminatu.

Model degradacji zastosowany przez S u n a i T a o [82] jest związany z pękaniem wewnątrzwarstwowym osnowy. Wykorzystują oni związek pomiędzy gęstością szczelin

a redukcją sztywności wyprowadzony przez tych samych autorów w [87]. Związek ten oparty jest na metodzie elementów skończonych. Wprowadzają następujące definicje współczynników degradacji

$$\frac{E_2}{E_2^0} = \exp(-\alpha_E \lambda^*) \quad (5.11)$$

$$\frac{G_{12}}{G_{12}^0} = \exp(-\alpha_G \lambda^*) \quad (5.12)$$

gdzie E_2 i G_{12} – moduły sztywności poprzeczny i ścinania po uszkodzeniu, E_2^0 i G_{12}^0 – moduły początkowe, λ^* - znormalizowana gęstość szczelin, α_E i α_G – współczynniki wyznaczone metodą elementów skończonych. Znormalizowaną gęstość szczelin jest wyznaczana przy zastosowaniu podejścia Lee i Daniela [54], które jest oparte na modelu shear-lag.¹

Puck i Schürmann [73] w swojej teorii zniszczenia laminatu również wprowadzają stopniową redukcję sztywności. Ich teoria wykorzystuje kryterium wyłężeniowe Pucka [72], zaś degradacja sztywności zależy od przypadku zniszczenia. Dla przypadku A (por. rozdział 4.5.3) czyli dla rozciągania osnowy przyjmuje się:

$$E_2 = \eta E_2^0, \quad G_{12} = \eta G_{12}^0, \quad \nu_{12} = \eta \nu_{12}^0 \quad (5.13)$$

natomiast dla przypadku B i C, czyli zniszczenia osnowy przez ściskanie:

$$G_{12} = \eta_1 G_{12}^0, \quad \nu_{12} = \eta_1 \nu_{12}^0 \quad (5.14)$$

Parametry degradacji η i η_1 przyjmują wartości od 0.0 do 1.0 przy czym η_1 jest większe od η , ponieważ uszkodzenie osnowy przy ścisaniu obniża sztywność warstwy w mniejszym stopniu niż przy rozciąganiu. Parametry te są funkcją zdefiniowanego w [73] współczynnika bezpieczeństwa związanego z kryterium wyłężeniowym. Można zatem powiedzieć, że degradacji jest tutaj zależna od stopnia wyłężenia, podobnie jak w modelu Chiu.

Zinoviev i in. [104] do opisu degradacji sztywności wprowadzają pojęcia największych wartości naprężeń poprzecznych σ_2^* i stycznych τ_{12}^* oraz odpowiadających im odkształceń liniowych ε_2^* i kątowych γ_{12}^* , jakie występują podczas procesu deformacji warstwy zachodzącego podczas jej pracy w laminacie. Parametry degradacji są definiowane następująco:

$$\psi_2 = \frac{\tilde{E}_2}{E_2^0} \quad \psi_{12} = \frac{\tilde{G}_{12}}{G_{12}^0} \quad (5.15)$$

gdzie: E_2^0 , G_{12}^0 - moduły sztywności dla warstwy nieuszkodzonej, \tilde{E}_2 , \tilde{G}_{12} - tak zwane moduły sieciowe przy odciążeniu, obliczane z następujących zależności:

¹ Shear-lag: model służący do wyznaczenia parametrów sztywności laminatu, zawierającego pęknięcia wewnątrzwarstwowe osnowy. Model ten zakłada, że granica faz pomiędzy dwiema sąsiednimi warstwami o włóknach różnie zorientowanych stanowi zaporę dla propagacji szczelin. Zatem warstwy sąsiednie do tej, która zawiera pęknięcia, pozostają nieuszkodzone. Przyjmuje się cały laminat jako materiał homogeniczny z wtrąceniami, którymi są szczeliny. Przyjmując jako parametry grubość szczelin i odległość między dwiema sąsiednimi szczelinami, oblicza się moduły sztywności poprzecznej i ścinania dla materiału homogenicznego metodami mikromechaniki.

$$\tilde{E}_2 = \frac{\sigma_2^*}{\bar{\varepsilon}_2^* + \nu_{12}^2 \sigma_2^* / E_1} \quad (5.16)$$

$$\tilde{G}_{12} = \frac{\tau_{12}^*}{\gamma_{12}^*} \quad (5.17)$$

Współczynniki (5.15) służą do degradacji odpowiednich elementów macierzy sztywności w warstwie, przy czym rozróżnia się następujące możliwe sytuacje obliczeniowe:

- pęknięcia otwarte, $\sigma_2 > 0$:

$$\text{dla } |\gamma_{12}| < |\gamma_{12}^*|: \quad \bar{\varepsilon}_2 < \bar{\varepsilon}_2^* \quad \rightarrow \quad \psi_2 = E_2 / E_2^0 \quad \psi_{12} = G_{12} / G_{12}^0$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_2^* \quad \rightarrow \quad \psi_2 = 0 \quad \psi_{12} = G_{12} / G_{12}^0$$

$$\text{dla } |\gamma_{12}| = |\gamma_{12}^*|: \quad \bar{\varepsilon}_2 < \bar{\varepsilon}_2^* \quad \rightarrow \quad \psi_2 = E_2 / E_2^0 \quad \psi_{12} = 0$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}_2 > 0 \quad \rightarrow \quad \psi_2 = 0 \quad \psi_{12} = 0$$

- pęknięcia zamknięte, $\sigma_2 < 0$:

$$\text{dla } \bar{\varepsilon}_2 < 0: \quad \Delta |\gamma_{12}| > 0 \quad \rightarrow \quad \psi_2 = 1 \quad \psi_{12} = 0$$

$$|\gamma_{12}| < |\gamma_{12}^*| \quad \rightarrow \quad \psi_2 = 1 \quad \psi_{12} = G_{12} / G_{12}^0$$

W pracy [104] do określenia wytrzymałości warstwy stosowane jest kryterium maksymalnych naprężeń co umożliwia identyfikację sposobu zniszczenia.

Do modeli degradacji uwzględniających stopień uszkodzenia można zaliczyć również model zaproponowany przez Germana [22]. Do opisu zmiany sztywności laminatów wykorzystano tutaj mechanikę pęknięcia i mechanikę uszkodzeń. Zamodelowano zjawisko pęknięcia wewnątrzwarstwowego osnowy za pomocą tensora uszkodzeń II rzędu zaproponowanego przez Vakulenkę i Kaczanowa [95]. Aby wyznaczyć w wielowarstwowym laminacie wektor nieciągłości przemieszczenia brzegów szczeliny, który mechanika pęknięcia wprowadza dla materiałów jednorodnych, zaproponowano koncepcję podziału laminatu na pasma zastępcze.



6. Podstawy kryterium Rychlewskiego

6.1. Wstęp

Gęstość energii w ciele liniowo-sprężystym, przy małych odkształceniach $\boldsymbol{\varepsilon}$, równa jest pracy naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ na odkształceniach $\boldsymbol{\varepsilon}$ i może być zapisana jako:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (6.1)$$

Jeżeli ciało jest izotropowe to gęstość energii sprężystej można przedstawić jako sumę energii odkształcenia objętościowego i energii odkształcenia postaciowego. Wykorzystuje się przy tym standardowy rozkład tensora naprężenia na aksjator $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}$ i dewiator \mathbf{s} :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2K} \sigma^2 + \frac{1}{4G} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \quad (6.2)$$

gdzie: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{1} + \mathbf{s}$, $\sigma \equiv \frac{1}{3} \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, K – moduł odkształcenia objętościowego, G – moduł ścinania.

Możemy zatem zapisać:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1} + \mathbf{s}) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}) + \Phi(\mathbf{s}) \quad (6.3)$$

Powyższy rozkład energii sprężystej jest energetycznie niezależny, co oznacza, że naprężenia aksjatora nie wykonują pracy na odkształceniach wywołanych przez dewiator i odwrotnie – naprężenia dewiatora nie wykonują pracy na odkształceniach spowodowanych przez aksjator.

W 1904 roku M. T. Huber [37] zaproponował kryterium wyężeniowe, w którym stawia hipotezę, że o wyężeniu materiału decyduje ilość nagromadzonej w nim energii odkształcenia postaciowego. Stan naprężenia reprezentowany przez aksjator tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, czyli tak zwany stan hydrostatyczny uznaje się przy tym za bezpieczny. Niezależność energetyczna stanów objętościowego i postaciowego pozwoliła Huberowi zapisać kryterium wyężeniowe w postaci:²

$$\frac{\Phi(\mathbf{s})}{\Phi_{kr}(\mathbf{s})} \leq 1 \quad (6.4)$$

gdzie: $\Phi(\mathbf{s})$ - gęstość energii odkształcenia objętościowego zgromadzonej pod wpływem działającego obciążenia, $\Phi_{kr}(\mathbf{s})$ - krytyczna wartość energii.

Od czasu ukazania się pracy Hubera wielokrotnie podejmowano próby uaktualnienia jego kryterium na liniowo-sprężyste ciała anizotropowe. Próbowano między innymi zastosować dla takich ciał standardowy rozkład tensora naprężenia na aksjator i dewiator.

Rozważmy anizotropowe ciało sprężyste, dla którego gęstość energii sprężystej można zapisać przy wykorzystaniu związku fizycznego Hooke'a, jako:

² Zmieniono tutaj oryginalny zapis Hubera celem powiązania merytorycznego z omawianym kryterium energetycznym Rychlewskiego.

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.5)$$

Stosując rozkład tensora naprężenia na aksjator i dewiator otrzymujemy:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} + \mathbf{s}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} + \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{s} \quad (6.6)$$

Pierwszy wyraz w równaniu (6.6)

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} = \Phi(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{1}) \quad (6.7)$$

to praca hydrostatycznego naprężenia $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{1}$ na odpowiadającej mu deformacji $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}$, trzeci

$$\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{s} = \Phi(\mathbf{s}) \quad (6.8)$$

to praca dewiatora \mathbf{s} na odpowiadającej mu deformacji $\mathbf{S} \cdot \mathbf{s}$. Natomiast wyraz drugi równania (6.6)

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{s} \quad (6.9)$$

przedstawia sumę pracy $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{1}$ na deformacji $\mathbf{S} \cdot \mathbf{s}$ lub ekwiwalentnie równej jej pracy \mathbf{s} na deformacji $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}$. Widać zatem, że naprężenia aksjatora pracują nie tylko na wywołanych przez siebie odkształceniach, ale również na odkształceniach wywołanych przez dewiator. Analogiczna sytuacja występuje w przypadku naprężeń dewiatorowych.

Tak więc rozkład tensora naprężenia na aksjator i dewiator nie jest w ogólnym przypadku ciała anizotropowego, na skutek wspomnianego sprzężenia rozkładem energetycznie niezależnym i nie można wykorzystać gęstości energii odkształcenia postaciowego $\Phi(\mathbf{s})$ jako miary wyłężenia.

Powstaje zatem pytanie, czy dla liniowo-sprężystego ciała anizotropowego istnieje energetycznie niezależny rozkład tensora naprężenia, a jeżeli tak, to jak go wyznaczyć.

Rychlewski w pracach [76], [77] wykazał, że rozkład taki istnieje, a wyznaczyć go można przez wartości własne tensora podatności \mathbf{S} lub sztywności \mathbf{C} . Skrót jego rozumowanie wraz ze sformułowaniem energetycznego kryterium wyłężenia przytoczono w następnych punktach.

6.2. Stany energetycznie ortogonalne

Załóżmy, że naprężenia są odniesione do jakiegoś naprężenia charakterystycznego i dlatego mogą być traktowane jako bezwymiarowe. Możemy więc rozważać $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ jak elementy przestrzeni symetrycznych tensorów euklidesowych drugiego rzędu \mathbf{S} .

Dwa stany naprężeń $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ są energetycznie niezależne dla danego ciała sprężystego, jeżeli energia jest addytywną funkcją tych stanów:

$$\Phi(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \Phi(\boldsymbol{\alpha}) + \Phi(\boldsymbol{\beta}) \quad (6.10)$$

Przedstawmy energię sprężystą (6.5) w następującej postaci:

$$2\Phi = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (6.11)$$

Widać, że warunek energetycznej niezależności przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \quad (6.12)$$

Dla liniowej sprężystości energetyczna niezależność $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ oznacza, że naprężenie $\boldsymbol{\alpha}$ nie wykonuje pracy na deformacji $\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta}$ wywołanej naprężeniem $\boldsymbol{\beta}$ i, na odwrót, $\boldsymbol{\beta}$ nie wykonuje pracy na deformacji $\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\alpha}$.

Przestrzeń symetrycznych tensorów euklidesowych drugiego rzędu \mathcal{S} można rozpatrywać jako 6-cio wymiarową przestrzeń z iloczynem skalarnym

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (6.13)$$

Układ dwóch liniowo niezależnych tensorów drugiego rzędu

$$\mathbf{v}_G, \boldsymbol{\mu}_L \quad G, L = I, II, \dots, VI \quad (6.14)$$

tworzy bazę w \mathcal{S} .

W przestrzeni $\mathcal{T} \equiv \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$ bazą jest układ 36 tensorów czwartego rzędu

$$\mathbf{v}_G \otimes \boldsymbol{\mu}_L \quad G, L = I, II, \dots, VI \quad (6.15)$$

Dowolny tensor $\mathbf{L} \in \mathcal{T}$ jednoznacznie można zapisać w postaci:

$$\mathbf{L} = \sum_{G,L=I}^{VI} L_{GL} \mathbf{v}_G \otimes \boldsymbol{\mu}_L \quad (6.16)$$

Dowolny tensor $\mathbf{L} \in \mathcal{T}$ można rozpatrywać jak liniowy operator z przestrzeni \mathcal{S} w \mathcal{S} , działający według prawa:

$$\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (6.17)$$

Wróćmy teraz do idei rozkładu energii i rozpatrzmy biliniową formę $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta}$. Odwzorowanie

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (6.18)$$

jest formą symetryczną i dodatnio określoną, może być zatem przyjęte jako definicja iloczynu skalarnego, który został nazwany przez Rychlewskiego **energetycznym iloczynem skalarnym** i zapisany w postaci:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (6.19)$$

Warunek energetycznej rozdzielności $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$ otrzymuje geometryczny sens warunku **energetycznej ortogonalności** co oznaczamy $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$, czyli $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = 0$.

Energia sprężysta dla tensora $\boldsymbol{\sigma}$ wyraża się wówczas jako energetyczna norma $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} \quad (6.20)$$

Każdy rozkład przestrzeni \mathcal{S} na sumę prostą

$$\mathcal{S} = \mathcal{E}_1 \oplus, \dots, \oplus \mathcal{E}_\rho, \quad \rho \leq VI \quad (6.21)$$

której dowolne dwa składniki są energetycznie ortogonalne

$$\mathcal{E}_\alpha \perp \mathcal{E}_\beta, \quad \text{dla } \alpha \neq \beta, \quad (6.22)$$

nazywamy **rozkładem energetycznie ortogonalnym** przestrzeni naprężeń dla rozpatrywanego ciała sprężystego.

Rozkładając dowolne naprężenie na podprzestrzenie (6.21)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_I + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\rho, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \quad (6.23)$$

otrzymujemy

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha \times \boldsymbol{\sigma}_\beta = \mathbf{0}, \quad \text{dla } \alpha \neq \beta, \quad (6.24)$$

i energia sprężysta daje się rozłożyć na sumę prostą:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_I + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\rho) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}_I) + \dots + \Phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho) \quad (6.25)$$

6.3. Główny rozkład energii sprężystej

Dla dowolnego ciała sprężystego, określonego tensorem podatności \mathbf{S} , istnieje dokładnie jeden ortogonalny i zarazem energetycznie ortogonalny rozkład w postaci:

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_I \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_\rho, \quad \rho \leq VI \quad (6.26)$$

$$\mathcal{P}_\alpha \perp \mathcal{P}_\beta, \quad \mathcal{P}_\alpha \perp \mathcal{P}_\beta, \quad \text{dla } \alpha \neq \beta \quad (6.27)$$

i dokładnie jeden ciąg parami różnych stałych

$$\lambda_I, \dots, \lambda_\rho \quad \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta, \quad \text{dla } \alpha \neq \beta \quad (6.28)$$

takich, że

$$\mathbf{S} = \lambda_I \mathbf{P}_I + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho \quad (6.29)$$

gdzie \mathbf{P}_α projektor ortogonalny na \mathcal{P}_α , $\alpha = I, \dots, \rho$.

Rozkład (6.26) nazywa się **głównym rozkładem energetycznym** dla rozpatrywanego ciała. Ponieważ \mathbf{S} jest symetrycznym operatorem liniowym działającym w przestrzeni \mathcal{S} z iloczynem skalarnym (6.19), to równanie

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad (6.30)$$

wynikające z definicji stanu własnego dla tensora \mathbf{S} , posiada ortonormalny komplet rozwiązań

$$\boldsymbol{\omega}_I, \dots, \boldsymbol{\omega}_{VI} \quad \boldsymbol{\omega}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_L = \delta_{KL} \quad (6.31)$$

przy czym $\boldsymbol{\omega}_K$ odpowiada wartości własnej λ_K .

Jeżeli równanie (6.30) zapiszemy w postaci

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_K = \lambda_K \boldsymbol{\omega}_K \quad (6.32)$$

i pomnożymy przez $\boldsymbol{\omega}_L$, $L \neq K$ to

$$\boldsymbol{\omega}_L \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_K = \lambda_K \boldsymbol{\omega}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_L = 0 \quad (6.33)$$

A zatem stany własne są energetycznie ortogonalne.

Rozwiązania $\boldsymbol{\omega}$ równania (6.32) nazywamy **sprężystymi stanami własnymi** rozpatrywanego ciała sprężystego, a parametry λ jego **modułami sztywności**.

Przestrzenie \mathcal{P}_α składają się ze sprężystych stanów własnych, przy czym każdej z tych przestrzeni odpowiada jeden moduł sztywności λ_α .

6.4. Energetyczne kryterium wyężenia

Poddamy dowolny stan naprężenia opisany tensorem $\boldsymbol{\sigma}$ głównemu rozkładowi (6.26):

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_I + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\rho \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha \equiv \mathbf{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{P}_\alpha \quad (6.35)$$

$$\text{dla } \alpha \neq \beta \quad (6.36)$$

Energia sprężysta, odpowiadająca α -tej części tensora naprężenia (6.35) wynosi:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_\alpha) \equiv \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha \sigma_\alpha^2}{2} \quad \alpha = I, \dots, VI \quad (6.37)$$

Stąd główny rozkład energii sprężystej przyjmuje następującą postać:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\lambda_I \sigma_I^2}{2} + \dots + \frac{\lambda_\rho \sigma_\rho^2}{2} \quad \rho \leq VI \quad (6.38)$$

Energetyczna niezależność rozkładu (6.35) pozwala przyjąć dla ciała anizotropowego następujące kryterium wyężeniowe:

$$\frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_I)}{\Phi_{Ikr}} + \dots + \frac{\Phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho)}{\Phi_{\rho kr}} = 1 \quad \rho \leq VI \quad (6.39)$$

Liczniki w relacji (6.39) przedstawiają gęstości energii sprężystej w poszczególnych stanach własnych w funkcji rzutów tensora naprężenia na te stany, czyli są funkcją obciążenia. Ich wartości można policzyć z równania (6.37). Z kolei mianowniki w (6.39) to wartości krytycznych energii sprężystych w poszczególnych stanach własnych. Wartości te należy wyznaczyć dla danego materiału na drodze eksperymentu w próbach wytrzymałościowych. Zauważmy, że równanie (6.39) jest uogólnieniem kryterium Hubera (6.4) na ciała anizotropowe.

6.5. Wyznaczanie modułów sztywności i projektorów

Celem zastosowania energetycznego kryterium wyężenia (6.39) dla liniowo-sprężystego ciała określonego tensorem podatności \mathbf{S} należy rozwiązać problem własny w postaci

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad (\mathbf{S} - \lambda \mathbf{1}) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (6.40)$$

Jest to jednorodny układ algebraicznych równań liniowych, który posiada niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad (6.41)$$

Powstaje pytanie jak policzyć wyznacznik dla tensora podatności \mathbf{S} , który jest tensorem IV-ego rzędu.

Przestrzeń \mathcal{S} symetrycznych tensorów II-ego rzędu ma wszystkie własności 6-cio wymiarowej przestrzeni euklidesowej z iloczynem skalarnym

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_{ij} \beta_{ij} \quad (6.42)$$

gdzie α_{ij} , β_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ są składowymi tensorów $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ w pewnej ortonormalnej bazie $\{\mathbf{e}_i\}$ w 3-wymiarowej przestrzeni. Dzięki temu dowolny tensor symetryczny przestrzeni \mathcal{S} ma wszystkie własności wektora w 6-cio wymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Dzięki tej własności przestrzeni \mathcal{S} możliwe jest wybranie w tej przestrzeni podzbioru 6-ciu wzajemnie ortogonalnych i znormalizowanych tensorów $\{\mathbf{v}_K\}$, $K = I, \dots, VI$ które tworzą bazę. W bazie tej dowolny tensor symetryczny II-ego rzędu jest opisany w następujący sposób

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \alpha_K \mathbf{v}_K, \quad K = I, II, \dots, VI \quad (6.43)$$

W konsekwencji liniowe odwzorowanie z przestrzeni \mathcal{S} w \mathcal{S} traktowanej jako 6-cio wymiarowa przestrzeń euklidesowa będzie opisane przez tensor drugiego rzędu należący do iloczynu tensorowego $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$. Rozumowanie to prowadzi do wniosku, że tensor \mathbf{S} , będący tensorem IV-ego rzędu działającym jako liniowy operator z przestrzeni symetrycznych tensorów euklidesowych II-ego rzędu \mathcal{S} w tę samą ma wszystkie własności tensora II-ego rzędu w 6-cio wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Należy tylko jego współrzędne przedstawić w bazie $\{\mathbf{v}_K\}$. Poniżej przedstawiono za [51] jedną z możliwych baz.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_I &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 & \mathbf{v}_{II} &= \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \mathbf{v}_{III} &= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_{IV} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{v}_V &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) & \mathbf{v}_{VI} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Tensor podatności \mathbf{S} przedstawiamy w powyższej bazie następująco

$$\mathbf{S} = S_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = S_{KL} \mathbf{v}_K \otimes \mathbf{v}_L \quad (6.45)$$

Poszczególne elementy macierzy $S_{KL} = \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_L$ mają postać

$$S_{KL} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & \sqrt{2} S_{1123} & \sqrt{2} S_{1113} & \sqrt{2} S_{1112} \\ \cdots & S_{2222} & S_{2233} & \sqrt{2} S_{2223} & \sqrt{2} S_{2213} & \sqrt{2} S_{2212} \\ \cdots & \cdots & S_{3333} & \sqrt{2} S_{3323} & \sqrt{2} S_{3313} & \sqrt{2} S_{3312} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 2S_{2323} & 2S_{2313} & 2S_{2312} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2S_{1313} & 2S_{1312} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2S_{1212} \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Dla macierzy dwuwymiarowej (6.46) bez trudu znajdujemy wartości własne, czyli moduły sztywności λ .

Projektory ortogonalne \mathbf{P}_K występujące w zależności (6.35) są tensorami IV-ego rzędu. Dla jednokrotnych modułów sztywności λ_K projektory \mathbf{P}_K mają postać diady stanów własnych

$$\mathbf{P}_K = \mathbf{w}_K \otimes \mathbf{w}_K \quad (6.47)$$

Projektory służą do wyznaczania rzutów tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ na poszczególne kierunki własne według zależności (6.35), zaś moduły sztywności pozwalają obliczyć gęstość energii sprężystej w poszczególnych stanach własnych według (6.37).

6.6. Kryteria wytrzymałościowe oparte na rozkładzie spektralnym tensora podatności

Rychlewski opublikował swoje prace dotyczące energetycznego kryterium sprężystych stanów własnych w 1984 [76] i w 1995 [77] roku. Niezależnie od niego w 1991 i w 1995 prace dotyczące tego samego tematu opublikowali Cowin i Mehrabadi [13], [14]. Od tego czasu idee te są rozwijane, a na ich bazie powstają teorie zniszczenia dla różnych materiałów, wykazujących cechy anizotropowe. Jako przykład można podać prace Bieglera i Mehrabadi'ego [5], Arramona i in. [2], Mahnkena [57]. Kryterium energetyczne dla materiałów o strukturze komórkowej zostało sformułowane przez Pęcherskiego, Janus-Michalską i Kordzikowskiego [39], [48], [49]. Pęcherski i Nalepka [65] podali fizyczne podstawy energetycznego wytrzymałościowego dla monokryształów. Idee rozkładu spektralnego tensora podatności w odniesieniu do kryteriów wytrzymałościowych dla materiałów anizotropowych można też znaleźć w pracach Jemioły i Kowalczyk [40], [41] oraz Kowalczyk i Ostrowskiej [50]. W niniejszej pracy z ogólnego sformułowania Rychlewskiego zostanie wyspecyfikowane kryterium wytrzymałościowe dla ortotropowej warstwy kompozytowej, a następnie w oparciu o rozkład spektralny tensora sztywności sformułowana zostanie nowa metoda degradacji macierzy sztywności.



7. Wyznaczenie energetycznego kryterium wyłężeniowego

7.1. Postawienie zadania

Przedmiotem rozważań tego rozdziału będzie wyznaczenie energetycznego kryterium wyłężeniowego dla pojedynczej ortotropowej warstwy kompozytowej. Kryterium to zostanie wyspecyfikowane z ogólnego sformułowania Rychlewskiego (6.39) w oparciu o charakterystyki sztywnościowe i wytrzymałościowe warstwy, znajdującej się w płaskim stanie naprężenia.

Sztywność warstwy kompozytowej jest opisana za pomocą zredukowanej macierzy sztywności \mathbf{Q} w postaci (3.11) lub za pomocą macierzy podatności \mathbf{S} (3.10), natomiast jej charakterystyki wytrzymałościowe X_i , Y_i i S zdefiniowano w punkcie 4.1.

7.2. Stany własne tensora podatności

Kryterium Rychlewskiego oparte jest na problemie własnym tensora podatności \mathbf{S} . Energetycznie niezależny rozkład tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ to rozkład na stany wyznaczone przez wartości główne tensora \mathbf{S} . Tylko taki rozkład daje możliwość sformułowania kryterium w postaci (6.39) dla materiałów ogólnie anizotropowych. Pierwszym krokiem w wyznaczeniu kryterium wyłężeniowego z ogólnego sformułowania (6.39) jest wyznaczenie wartości własnych tensora podatności \mathbf{S} , czyli rozwiązanie problemu własnego w postaci:

$$(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{1})\boldsymbol{\omega} = 0 \quad (7.1)$$

Zależność (7.1) to jednorodny układ równań liniowych, który posiada niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad (7.2)$$

Jak pokazano w punkcie 5.5 obliczenie wyznacznika tensora \mathbf{S} , jest możliwe po zapisaniu go w postaci (6.46). Biorąc pod uwagę płaski stan naprężenia w warstwie oraz sposób macierzowego zapisu Voigta, tensor S_{KL} (6.46) przyjmie postać:

$$S_{KL} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2S_{66} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Układ równań (7.2) możemy teraz zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2S_{66} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \sqrt{2} \omega_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

Występowanie mnożnika w postaci pierwiastka z dwóch przy składowej ω_6 jest konsekwencją przedstawienia tensora II-go rzędu jakim jest tensor własny $\mathbf{\omega}$ w postaci wektora w przestrzeni sześciowymiarowej (tutaj przestrzeń trzywymiarowa w konsekwencji płaskiej ortotropii). Szczegóły tego przedstawienia można znaleźć w [51] i w dodatku D.5.

Rozwiązaniem równania (7.4) są trzy wartości własne (nazywane też modułami sztywności):

$$\begin{aligned}\lambda_I &= \frac{S_{11} + S_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4 S_{12}^2} \\ \lambda_{II} &= \frac{S_{11} + S_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4 S_{12}^2} \\ \lambda_{III} &= 2 S_{66}\end{aligned}\quad (7.5)$$

Wartości własne (7.5) są nieujemne co wynika z faktu, że tensor podatności \mathbf{S} jest macierzą dodatnio określoną.

Każdej z tych wartości odpowiada stan własny scharakteryzowany przez jednostkowe tensory własne $\mathbf{\omega}_i$. Dzięki reprezentacji „wektorowej” tych tensorów, widocznej w (7.4), sposób wyznaczenia ich składowych jest formalnie taki sam, jak wyznaczenie wektorów własnych dla macierzy II-go rzędu. Dla pierwszej wartości własnej otrzymujemy zatem:

$$\begin{aligned}(S_{11} - \lambda_I) \omega_1 + S_{12} \omega_2 &= 0 \\ S_{12} \omega_1 + (S_{22} - \lambda_I) \omega_2 &= 0 \\ (2 S_{66} - \lambda_I) \omega_6 &= 0\end{aligned}\quad (7.6)$$

Trzecie równanie z układu (7.6) jest spełnione dla $\omega_6 = 0$, natomiast dwa pozostałe są liniowo zależne. Wybieramy pierwsze z nich i przyjmując $\omega_1 = 1$ otrzymujemy pierwszy wektor własny w postaci:

$$\mathbf{w}_I = [1, (\lambda_I - S_{11})/S_{12}, 0] \quad (7.7)$$

co po unormowaniu daje wektor tego kierunku:

$$\mathbf{e}_I = [a_I, b_I, 0] \quad (7.8)$$

gdzie:

$$a_I = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_I - S_{11}}{S_{12}}\right)^2}} \quad b_I = \frac{\frac{1}{S_{12}}(\lambda_I - S_{11})}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_I - S_{11}}{S_{12}}\right)^2}} \quad (7.9)$$

Przechodząc teraz z postaci wektorowej (7.8) do pierwotnej postaci tensorowej otrzymamy jednostkowy tensor własny wyznaczający kierunek pierwszego stanu własnego:

$$\boldsymbol{\omega}_I = \begin{bmatrix} a_I & 0 & 0 \\ 0 & b_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Analogiczne rozumowanie prowadzi do dwóch następujących tensorów własnych:

$$\boldsymbol{\omega}_{II} = \begin{bmatrix} a_{II} & 0 & 0 \\ 0 & b_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

gdzie:

$$a_{II} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_{II} - S_{11}}{S_{12}} \right)^2}} \quad b_{II} = \frac{\frac{1}{S_{12}} (\lambda_{II} - S_{11})}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_{II} - S_{11}}{S_{12}} \right)^2}} \quad (7.13)$$

Wyznaczenie modułów sztywności i tensorów własnych dla materiałów o innej symetrii niż przedstawiona tutaj płaska ortotropia można znaleźć między innymi w pracach [15], [51], [88].

Otrzymaliśmy zatem dla warstwy ortotropowej trzy wartości własne i odpowiadające im trzy stany własne. Energetycznie ortogonalny rozkład tensora podatności (6.29) przyjmuje postać:

$$\mathbf{S} = \lambda_I \mathbf{P}_I + \lambda_{II} \mathbf{P}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{P}_{III} \quad (7.14)$$

Projektory ortogonalne \mathbf{P}_α na poszczególne stany własne otrzymujemy z zależności (6.47) jako iloczyny diadyczne tensorów własnych:

$$\mathbf{P}_I = \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I = \begin{pmatrix} a_I^2 & a_I b_I & 0 \\ a_I b_I & b_I^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

$$\mathbf{P}_{II} = \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} = \begin{pmatrix} a_{II}^2 & a_{II} b_{II} & 0 \\ a_{II} b_{II} & b_{II}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

$$\mathbf{P}_{III} = \boldsymbol{\omega}_{III} \otimes \boldsymbol{\omega}_{III} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Przy pomocy projektorów można dokonać rozkładu tensora naprężenia, otrzymując równocześnie rozkład całkowitego obciążenia na poszczególne stany własne. Otrzymamy wówczas następujące równanie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_I \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P}_{II} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P}_{III} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_I + \boldsymbol{\sigma}_{II} + \boldsymbol{\sigma}_{III} \quad (7.18a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_I^2 \sigma_1 + a_I b_I \sigma_2 \\ a_I b_I \sigma_1 + b_I^2 \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_{II}^2 \sigma_1 + a_{II} b_{II} \sigma_2 \\ a_{II} b_{II} \sigma_1 + b_{II}^2 \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (7.18b)$$

Jak widać składowa σ_6 przedstawiająca naprężenie styczne w całości jest zawarta w trzecim stanie własnym. Można zatem powiedzieć, że stan ten przedstawia czyste ścinanie. Pozostałe składowe tensora naprężenia, czyli σ_1 i σ_2 rozdzielają się na pierwszy i drugi stan własny. W obu tych stanach jednocześnie występują naprężenia w kierunkach 1 i 2, czyli wzdłuż i w poprzek włókien. Naprężenia te mogą przyjmować różne znaki, przy czym daje się wyróżnić cztery charakterystyczne przypadki, które przedstawiono graficznie w tabeli 7.1, na podstawie opisanego poniżej rozumowania.

Oznaczmy składowe tensora naprężenia w dwóch pierwszych stanach własnych przez:

$$\boldsymbol{\sigma}_I = \begin{Bmatrix} \sigma_1^I \\ \sigma_2^I \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_{II} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^{II} \\ \sigma_2^{II} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.19)$$

Można wykazać (dowód przedstawiony jest w dodatku D.6), że dla współczynników a_ρ, b_ρ , opisanych równaniami (7.9) i (7.13) zachodzą następujące związki:

$$a_I = b_{II}, \quad a_{II} = -b_I, \quad b_I < 0, \quad \text{i} \quad a_I < |b_I| \quad (7.20)$$

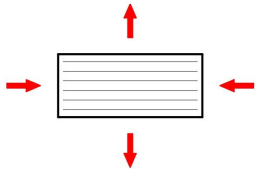
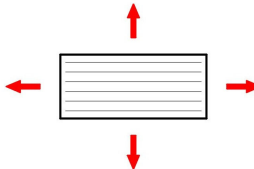
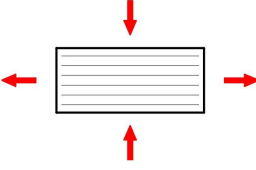
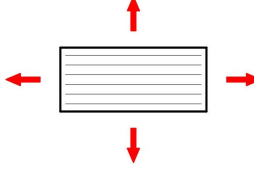
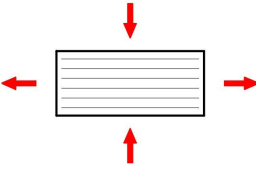
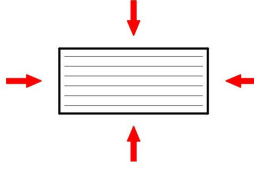
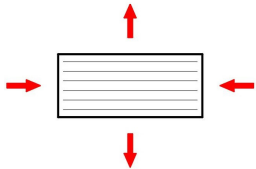
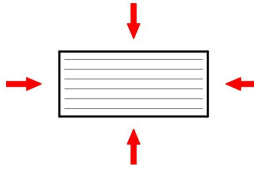
co pozwala zapisać składowe tensorów naprężenia (7.19) w postaci:

$$\sigma_1^I = a_I^2 \sigma_1 + a_I b_I \sigma_2 \quad \sigma_2^I = a_I b_I \sigma_1 + b_I^2 \sigma_2 \quad (7.21a)$$

$$\sigma_1^{II} = b_I^2 \sigma_1 - a_I b_I \sigma_2 \quad \sigma_2^{II} = -a_I b_I \sigma_1 + a_I^2 \sigma_2 \quad (7.21b)$$

Biorąc pod uwagę (7.20), wyznaczono relacje między składowymi tensorów naprężenia w poszczególnych stanach własnych w zależności od znaków naprężeń σ_1 i σ_2 . Wyniki przedstawiono w tabeli 7.1.

Tabela 7.1. Rozkład obciążenia na stany własne

Obciążenie	I stan własny	II stan własny
$\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 > 0$	 $\sigma_1^I < 0$ $\sigma_2^I > 0$	 $\sigma_1^{II} > 0$ $\sigma_2^{II} > 0$
$\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 < 0$	 $\sigma_1^I > 0$ $\sigma_2^I < 0$	 $\sigma_1^{II} > 0$ $\sigma_2^{II} > 0$
$\sigma_1 < 0$ $\sigma_2 < 0$	 $\sigma_1^I > 0$ $\sigma_2^I < 0$	 $\sigma_1^{II} < 0$ $\sigma_2^{II} < 0$
$\sigma_1 < 0$ $\sigma_2 > 0$	 $\sigma_1^I < 0$ $\sigma_2^I > 0$	 $\sigma_1^{II} < 0$ $\sigma_2^{II} < 0$

Analizując rysunki przedstawione w tabeli 7.1 można zauważyć, że naprężenia wzdłuż i w poprzek włókien mają w pierwszym stanie własnym przeciwne znaki, natomiast jednakowe w drugim stanie własnym. W przypadku pierwszego stanu rozciąganie w jednym kierunku występuje zawsze w parze ze ścisaniem w drugim kierunku, natomiast w przypadku stanu drugiego rozciągania i ścisania występują jednocześnie.

7.3. Ogólna postać kryterium Rychlewskiego

Jak pokazano w punkcie 7.2, ortotropową warstwę kompozytową, znajdującą się w płaskim stanie naprężenia, charakteryzują trzy stany własne. Wartości własne wyrażone są zależnościami (7.5) natomiast kierunki własne wyznaczają jednostkowe tensory (7.10)-(7.12). Ogólna postać kryterium Rychlewskiego (6.39) przyjmuje zatem dla pojedynczej warstwy kompozytowej następującą postać:

$$\frac{\Phi(\sigma_I)}{\Phi_{Ikr}} + \frac{\Phi(\sigma_{II})}{\Phi_{IIkr}} + \frac{\Phi(\sigma_{III})}{\Phi_{IIIkr}} = 1 \quad (7.22)$$

Każdy z trzech wyrazów kryterium (7.22) określa część gęstości energii sprężystej jaka jest zgromadzona w danym stanie własnym w stosunku do gęstości energii krytycznej w tym stanie. Gęstość energii sprężystej dla zadanego obciążenia obliczymy z relacji (6.37).

Krytyczne wartości energii, czyli mianowniki w (7.22) podlegają wyznaczeniu na drodze eksperymentalnej.

7.4. Gęstość energii sprężystej w poszczególnych stanach własnych

Gęstość energii sprężystej dla każdego stanu własnego obliczamy z zależności (6.37), jako funkcję wartości własnej i kwadratu rzutu tensora naprężenia na dany stan własny:

$$\Phi(\sigma_\alpha) = \frac{1}{2} \lambda_\alpha \sigma_\alpha^2 \quad (7.23)$$

Tensory naprężenia w poszczególnych stanach własnych, obliczone z relacji (6.35) wynoszą odpowiednio:

$$\sigma_I = \begin{Bmatrix} a_I^2 \sigma_1 + a_I b_I \sigma_2 \\ a_I b_I \sigma_1 + b_I^2 \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.24a)$$

$$\sigma_{II} = \begin{Bmatrix} a_{II}^2 \sigma_1 + a_{II} b_{II} \sigma_2 \\ a_{II} b_{II} \sigma_1 + b_{II}^2 \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.24b)$$

$$\sigma_{III} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (7.24c)$$

Rzuty tensorów naprężenia na poszczególne stany własne obliczamy jako długości wektorów (7.24):

$$\sigma_I = \left[(a_I^2 \sigma_1 + a_I b_I \sigma_2)^2 + (a_I b_I \sigma_1 + b_I^2 \sigma_2)^2 \right]^{1/2} \quad (7.25a)$$

$$\sigma_{II} = \left[(a_{II}^2 \sigma_1 + a_{II} b_{II} \sigma_2)^2 + (a_{II} b_{II} \sigma_1 + b_{II}^2 \sigma_2)^2 \right]^{1/2} \quad (7.25b)$$

$$\sigma_{III} = \sigma_6 \quad (7.25c)$$

Możemy teraz wyznaczyć gęstości energii sprężystej w poszczególnych stanach własnych:

$$\Phi(\sigma_I) = \frac{1}{2} \lambda_I \left[(a_I^2 \sigma_1 + a_I b_I \sigma_2)^2 + (a_I b_I \sigma_1 + b_I^2 \sigma_2)^2 \right] \quad (7.26a)$$

$$\Phi(\sigma_{II}) = \frac{1}{2} \lambda_{II} \left[(a_{II}^2 \sigma_1 + a_{II} b_{II} \sigma_2)^2 + (a_{II} b_{II} \sigma_1 + b_{II}^2 \sigma_2)^2 \right] \quad (7.26b)$$

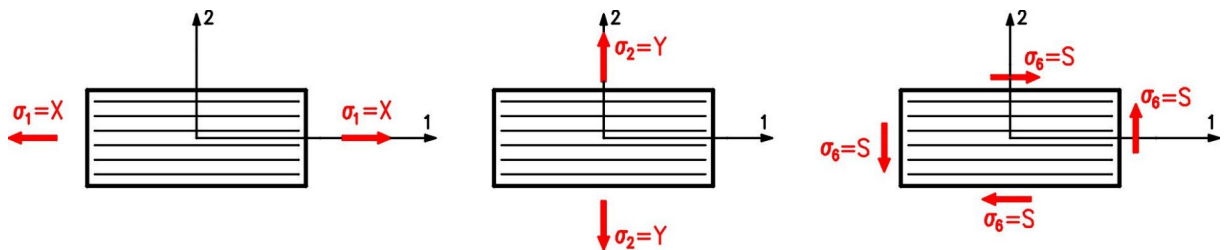
$$\Phi(\sigma_{III}) = \frac{1}{2} \lambda_{III} \sigma_6^2 \quad (7.26c)$$

W powyższych wzorach współczynniki a_i , b_i , to funkcje elementów tensora podatności, wyznaczone z równań (7.9) i (7.13).

7.5. Wyznaczenie energii krytycznych

W poprzednim punkcie zostały wyznaczone gęstości energii sprężystej dla poszczególnych stanów własnych, w funkcji elementów dowolnego tensora naprężenia. Określone zostało zatem, jaka część energii gromadzona jest w każdym ze stanów własnych, gdy w warstwie kompozytu panuje płaski stan naprężenia.

Do praktycznego wykorzystania energetycznego kryterium wyłężeniowego (7.22) konieczna jest jeszcze znajomość wartości energii krytycznych dla każdego z trzech stanów własnych. Wartości te zostaną wyznaczone w oparciu o trzy myślowe eksperymenty, które przedstawiono schematycznie na rysunku 7.1.



Rys. 7.1. Obciążenia niszczące działające na warstwę kompozytu

Analizując pojedynczą warstwę kompozytu włóknistego, w której panują trzy stany naprężenia opisane tensorami:

$$\sigma^L = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^T = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^S = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

doprowadzamy każdorazowo do jej zniszczenia, ponieważ wartości naprężeń X , Y , S to odpowiednio wytrzymałość na rozciąganie (lub ściskanie) wzdłuż i w poprzek włókien oraz wytrzymałość na ścinanie w płaszczyźnie warstwy. Zatem dla każdego z obciążeń (7.27) musi być spełnione równanie (7.22), co daje możliwość zbudowania układu trzech równań, w których niewiadomymi są wartości krytycznych gęstości energii sprężystej w każdym z trzech stanów własnych.

Podstawiając elementy tensora σ^L do równań (7.26) otrzymujemy odpowiadające mu gęstości energii sprężystych w trzech stanach własnych:

$$\Phi_I^L = \frac{1}{2} \lambda_I X^2 (a_I^4 + a_I^2 b_I^2) \quad (7.28a)$$

$$\Phi_{II}^L = \frac{1}{2} \lambda_{II} X^2 (a_{II}^4 + a_{II}^2 b_{II}^2) \quad (7.28b)$$

$$\Phi_{III}^L = 0 \quad (7.28c)$$

Analogicznie dla tensorów σ^T i σ^S otrzymamy:

$$\Phi_I^T = \frac{1}{2} \lambda_I Y^2 (b_I^4 + a_I^2 b_I^2) \quad (7.29a)$$

$$\Phi_{II}^T = \frac{1}{2} \lambda_{II} Y^2 (b_{II}^4 + a_{II}^2 b_{II}^2) \quad (7.29b)$$

$$\Phi_{III}^T = 0 \quad (7.29c)$$

$$\Phi_I^S = 0 \quad (7.30a)$$

$$\Phi_{II}^S = 0 \quad (7.30b)$$

$$\Phi_{III}^S = \frac{1}{2} \lambda_{III} S^2 \quad (7.30c)$$

Otrzymujemy zatem następujący układ równań:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Phi_I^L}{\Phi_{Ikr}} + \frac{\Phi_{II}^L}{\Phi_{IIkr}} + \frac{\Phi_{III}^L}{\Phi_{IIIkr}} &= 1 \\ \frac{\Phi_I^T}{\Phi_{Ikr}} + \frac{\Phi_{II}^T}{\Phi_{IIkr}} + \frac{\Phi_{III}^T}{\Phi_{IIIkr}} &= 1 \\ \frac{\Phi_I^S}{\Phi_{Ikr}} + \frac{\Phi_{II}^S}{\Phi_{IIkr}} + \frac{\Phi_{III}^S}{\Phi_{IIIkr}} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

który po podstawieniu związków (7.28), (7.29) i (7.30) przyjmuje postać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_I X^2 (a_I^4 + a_I^2 b_I^2)}{2\Phi_{Ikr}} + \frac{\lambda_{II} X^2 (a_{II}^4 + a_{II}^2 b_{II}^2)}{2\Phi_{IIkr}} &= 1 \\ \frac{\lambda_I Y^2 (b_I^4 + a_I^2 b_I^2)}{2\Phi_{Ikr}} + \frac{\lambda_{II} Y^2 (b_{II}^4 + a_{II}^2 b_{II}^2)}{2\Phi_{IIkr}} &= 1 \\ \frac{\lambda_{III} S^2}{2\Phi_{IIIkr}} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Po uwzględnieniu dwóch pierwszych zależności z (7.20), czyli $a_I = b_{II}$ i $a_{II} = -b_I$, otrzymamy następujące rozwiązanie układu równań (7.32):

$$\Phi_{Ikr} = \lambda_I B \frac{X^2 Y^2}{2(X^2 b_I^2 - Y^2 a_I^2)} \quad (7.33a)$$

$$\Phi_{II\ kr} = \lambda_{II} B \frac{X^2 Y^2}{2(Y^2 b_I^2 - X^2 a_I^2)} \quad (7.33b)$$

$$\Phi_{III\ kr} = \frac{1}{2} S^2 \lambda_{III} \quad (7.33c)$$

gdzie:

$$B = b_I^6 - a_I^6 + a_I^2 b^4 - a_I^4 b_I^2 \quad (7.34)$$

Wzory (7.33) przedstawiają krytyczne gęstości energii sprężystej w poszczególnych stanach własnych. Ich wartości zależą od charakterystyk wytrzymałościowych i sztywnościowych warstwy. Charakterystyki wytrzymałościowe to wytrzymałości wzdłuż i w poprzek włókien, tzn. X , Y oraz wytrzymałość na ścinanie S – w przypadku energii granicznej w trzecim stanie własnym. Funkcją charakterystyk sztywnościowych, czyli elementów tensora podatności \mathbf{S} , są natomiast wartości własne λ_α (7.5) oraz współczynniki a_I i b_I (7.9).

7.6. Końcowa postać kryterium wyłężenia dla warstwy ortotropowej

Po podstawieniu do równania (7.22) gęstości energii sprężystych wyznaczonych dla dowolnego tensora naprężenia według wzorów (7.26) oraz energii krytycznych według (7.33) otrzymamy, po prostych choć żmudnych przekształceniach (tutaj wykonywanych przy pomocy programu Mathcad), następującą postać energetycznego kryterium wyłężenia dla płaskiej warstwy ortotropowej kompozytu włóknistego:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} A + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{Y^2} A + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1 \quad (7.35)$$

gdzie:

$$A = 2 \frac{a_I b_I}{b_I^2 - a_I^2} \quad (7.36a)$$

Elementy tensora podatności \mathbf{S} , a zatem również współczynniki a_I i b_I można wyrazić przez stałe inżynierskie, wówczas współczynnik A przyjmie postać wygodną do praktycznego zastosowania kryterium, a mianowicie:

$$A = -2\nu_{12} \frac{E_2}{E_1 - E_2} \quad (7.36b)$$

Wyznaczone kryterium przedstawia powierzchnię drugiego stopnia w przestrzeni naprężeń (σ_1 , σ_2 , σ_6) należy zatem do tej samej grupy fenomenologicznych kryteriów wyłężeniowych co wymienione w punkcie 4.2 kryteria Tsaia-Hilla (4.4), Hoffmana (4.5), MDE (4.6) i Tsaia-Wu (4.9). Swoją postacią najbardziej przypomina kryterium MDE, w którym współczynnik interakcji F_{12} jest również funkcją stałych inżynierskich. Jak wspomniano w rozdziale 4, niewiele jest kryteriów wyłężeniowych sformułowanych w przestrzeni naprę-

żeń, w których obok charakterystyk wytrzymałościowych występowałyby charakterystyki sztywnościowe. Oprócz kryterium MDE można wymienić na przykład kryterium energetyczne Sandhu [78] i kryterium Chang-Chang [10], które jednak charakteryzują się znacznie większym stopniem skomplikowania niż to, które proponuje się w niniejszej pracy.

7.7. Analiza proponowanego kryterium wyłężenia

7.7.1 Uwzględnienie różnej wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie

Formułując w punkcie 7.5 równania pozwalające na wyznaczenie gęstości energii krytycznych w poszczególnych stanach własnych, przeprowadzono serię myślowych eksperymentów, polegających na obciążaniu warstwy kolejno naprężeniami o wartościach równych wytrzymałościom w poszczególnych kierunkach (X , Y), nie zaznaczając przy tym czy jest to wytrzymałość na rozciąganie czy na ściskanie. Formalnie nie ma przeciwwskazań, aby przyjmować na tym etapie konkretne wytrzymałości X_t lub X_c i Y_t lub Y_c otrzymując ostatecznie identyczne postacie kryterium energetycznego, różniące się tylko indeksem przy odpowiedniej wytrzymałości. Można zatem, przy określaniu wytrzymałości kompozytu, postępować analogicznie jak w przypadku kryterium Tsai-Hilla, czy MDE, to znaczy podstawiać w miejsce X i Y wartości X_t lub X_c i Y_t lub Y_c , w zależności od znaku naprężeń σ_1 i σ_2 .

Obwiednia graniczna dla danego materiału będzie zatem wykreślona za pomocą czterech oddzielnych funkcji, odpowiadających danej kombinacji znaków naprężeń σ_1 i σ_2 . W przypadku dwuosiowego stanu naprężenia, przy $\sigma_3 = 0$, otrzymamy cztery różne krzywe położone w czterech ćwiartkach układu współrzędnych. W związku z tym krzywe te łącząc się w punktach charakterystycznych wykresu (granice wytrzymałości w odpowiednich kierunkach) nie mają tam ciągłej pochodnej. Sytuacja ta nie jest konsekwencją zastosowanego w niniejszej pracy sposobu wyznaczenia energii krytycznych, a wynika z ogólnego kryterium Rychlewskiego. Kryterium to nie umożliwia uwzględnienia w jednej formule różnych wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie w tym samym kierunku.

Podobne nieciągłości pochodnej można zaobserwować we wszystkich kryteriach, które nie rozróżniają wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie. Wyraźnie widoczne są dla kryterium MDE w przypadku obwiedni dla materiałów przedstawionych na rysunkach 4.4, 4.5 i 4.9.

7.7.2 Zakres stosowania

Rozwiązanie układu równań (7.32), prowadzące do wyznaczenia gęstości energii krytycznych, ma sens tylko wtedy, gdy niewiadome tego równania spełniają warunki:

$$\Phi_{\alpha kr} \neq 0, \quad \alpha = I, II, III \quad (7.37)$$

co wynika z faktu ich występowania w mianownikach członów sumacyjnych w każdym równaniu. Poza tym niewiadome oznaczają z fizycznego punktu widzenia energie, każda z nich musi być zatem liczbą nieujemną co powoduje, że warunki nałożone na rozwiązanie przybierają postać:

$$\Phi_{\alpha kr} > 0, \quad \alpha = I, II, III \quad (7.38)$$

Gęstość energii krytycznej w trzecim stanie własnym:

$$\Phi_{III\ kr} = \frac{1}{2} \lambda_{III} S^2 \quad (7.39)$$

jest zatem zawsze większa od zera, gdyż:

$$\lambda_{III} = 2 S_{66} = 2 \frac{1}{G_{12}} > 0 \quad (7.40)$$

Warunek (7.38) dla gęstości energii krytycznej w pierwszym stanie własnym:

$$\Phi_{I\ kr} = \lambda_I B \frac{X^2 Y^2}{2(X^2 b_I^2 - Y^2 a_I^2)} > 0 \quad (7.41)$$

wobec

$$\lambda_I > 0 \quad (7.42)$$

$$X^2 Y^2 > 0 \quad (7.43)$$

proceedzi do zależności:

$$\frac{B}{X^2 b_I^2 - Y^2 a_I^2} > 0 \quad (7.44)$$

Analogiczna analiza gęstości energii krytycznej w drugim stanie własnym prowadzi do warunku:

$$\frac{B}{Y^2 b_I^2 - X^2 a_I^2} > 0 \quad (7.45)$$

Warunki (7.44) i (7.45) muszą być spełnione jednocześnie co w zależności od znaku współczynnika B prowadzi do następujących warunków:

$$B > 0 \rightarrow X^2 b_I^2 - Y^2 a_I^2 > 0 \vee Y^2 b_I^2 - X^2 a_I^2 > 0 \quad (7.46)$$

$$B < 0 \rightarrow X^2 b_I^2 - Y^2 a_I^2 < 0 \vee Y^2 b_I^2 - X^2 a_I^2 < 0 \quad (7.47)$$

Współczynnik

$$B = b_I^6 - a_I^6 + a_I^2 b_I^4 - a_I^4 b_I^2 = (b_I^2 + a_I^2)(b_I^4 - a_I^4) \quad (7.48)$$

jest większy od zera wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_I < b_I \quad (7.49)$$

zaś mniejszy od zera wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_I > b_I \quad (7.50)$$

Warunki (7.46) i (7.47) przy założeniach (7.49) i (7.50) można zapisać jako

$$\text{jeżeli } a_I < b_I \quad \text{to} \quad \frac{X^2}{Y^2} > \frac{a_I^2}{b_I^2} \quad \vee \quad \frac{X^2}{Y^2} < \frac{b_I^2}{a_I^2} \quad (7.51)$$

$$\text{jeżeli } a_I > b_I \quad \text{to} \quad \frac{X^2}{Y^2} < \frac{a_I^2}{b_I^2} \quad \vee \quad \frac{X^2}{Y^2} > \frac{b_I^2}{a_I^2} \quad (7.52)$$

Zatem, aby dla danego kompozytu można było zastosować kryterium energetyczne, jego charakterystyki wytrzymałościowe i sztywnościowe muszą spełniać warunki (7.51) i (7.52). Warunki te wiążą ze sobą charakterystyki wytrzymałościowe X , Y z charakterystykami sztywnościowymi E_1 , E_2 i ν_{12} ortotropowej warstwy kompozytowej, których funkcjami są współczynniki a_1 i b_1 .

7.7.3 Współczynnik interakcji naprężeń F_{12}

Analizę wpływu współczynnika interakcji naprężeń σ_1 i σ_2 dla kilku wybranych kryteriów wyężeńiowych przedstawiono w punkcie 4.4.2. Formuły określające ten współczynnik zestawiono w tabeli 4.1.

W przypadku kryterium energetycznego (7.35) współczynniki ogólnego równania krzywej drugiego stopnia (4.1) przyjmują następujące postaci:

$$a = \frac{1}{X^2} \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{Y^2} - \frac{A}{X^2} \right) \quad c = \frac{1}{Y^2} \quad (7.53)$$

Warunek (4.3), gwarantujący otrzymanie z (7.35) zamkniętej krzywej wypukłej w postaci elipsy, przyjmuje postać:

$$\left(\frac{A}{Y^2} - \frac{A}{X^2} \right)^2 - \frac{4}{X^2 Y^2} < 0 \quad (7.54)$$

Warunek (7.54) jest równoważny warunkom (7.51) i (7.52), wynikającym z fizycznego sensu gęstości energii krytycznych. Wynika to z pokazanego poniżej rozumowania. Po niewielkich przekształceniach i po podstawieniu w miejsce A zależności (7.36a), warunek (7.54) przyjmuje postać:

$$\frac{X^2}{Y^2} + \frac{Y^2}{X^2} < \frac{b_I^2}{a_I^2} + \frac{a_I^2}{b_I^2} \quad (7.55)$$

Dokonując podstawienia:

$$\frac{X^2}{Y^2} = c \quad \frac{b_I^2}{a_I^2} = d \quad (7.66)$$

otrzymamy nierówność:

$$c^2 - \left(d + \frac{1}{d} \right) c + 1 < 0 \quad (7.67)$$

Rozwiązaniem równania

$$c^2 - \left(d + \frac{1}{d}\right)c + 1 = 0 \quad (7.68)$$

są dwa pierwiastki:

$$c_1 = \frac{1}{d} \quad \text{i} \quad c_2 = d \quad (7.69)$$

Jeżeli

$$\frac{1}{d} < d \quad (7.70)$$

to rozwiązaniem nierówności (7.67) jest zakres:

$$\frac{1}{d} < c < d \quad (7.71)$$

czyli

$$\frac{X^2}{Y^2} > \frac{a_I^2}{b_I^2} \vee \frac{X^2}{Y^2} < \frac{b_I^2}{a_I^2} \quad (7.72)$$

Jeżeli natomiast

$$\frac{1}{d} > d \quad (7.73)$$

to rozwiązaniem nierówności (7.67) jest zakres:

$$d < c < \frac{1}{d} \quad (7.74)$$

czyli

$$\frac{X^2}{Y^2} < \frac{a_I^2}{b_I^2} \vee \frac{X^2}{Y^2} > \frac{b_I^2}{a_I^2} \quad (7.75)$$

Ponieważ

$$\frac{1}{d} < d \Leftrightarrow a_I < b_I \quad (7.76)$$

$$\frac{1}{d} > d \Leftrightarrow a_I > b_I \quad (7.77)$$

to warunki (7.72) i (7.75) są równoważne warunkom (7.51) i (7.52).

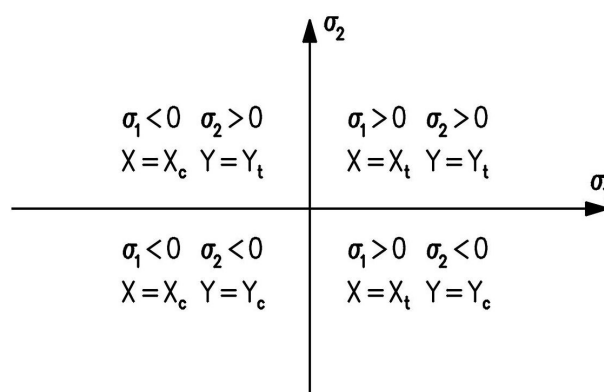
Wykazano zatem, że matematyczny warunek (4.3), gwarantujący uzyskanie w analizie wytrzymałościowej zamkniętej obwiedni granicznej, ma dla kryterium energetycznego sens fizyczny, jest bowiem równoznaczny z warunkami, wynikającymi z analizy energii

krytycznych. Z tego powodu, dla materiałów, dla których można stosować kryterium Ry-chlewskiego, to znaczy dla których gęstości energii krytycznych (7.33) przyjmują wartości dodatnie, sprawdzanie warunku (4.3) jest zbędne, gdyż jest on zawsze spełniony.

7.7.4 Zakres stosowania kryterium energetycznego dla rzeczywistych materiałów kompozytowych

Aby dla danego materiału kompozytowego można było stosować kryterium energetyczne, muszą być spełnione warunki (7.51) i (7.52), wiążące ze sobą wytrzymałości warstwy X i Y z jej charakterystykami materiałowymi E_1 , E_2 i ν_{12} . W warunkach (7.51) i (7.52), charakterystyki materiałowe występują w postaci uwikłanej we współczynnikach a_1 i b_1 . Warunki te są równoważne warunkom (7.38), mówiącym, że wartości gęstości energii krytycznych w każdym ze stanów własnych muszą być większe od zera.

Ponieważ dla większości kompozytów zbrojonych włóknami jednokierunkowymi ich wytrzymałości X i Y przy rozciąganiu i ściskaniu w tych samych kierunkach zazwyczaj różnią się od siebie, to warunki (7.38) należy sprawdzać w zależności od znaku naprężeń, działających wzdłuż i w poprzek włókien. Daje to cztery przypadki analizy, które można przedstawić graficznie na płaszczyźnie wyznaczonej przez kierunki naprężeń σ_1 i σ_2 (rys. 7.2).



Rys. 7.2. Kombinacje wytrzymałości X , Y w zależności od kierunku działania naprężeń

Cechą charakterystyczną materiałów kompozytowych jest to, że różnorodność ich budowy powoduje, iż wartości charakterystyk wytrzymałościowych i sztywnościowych mogą być praktycznie dowolne. Trudno zatem na podstawie analizy warunków (7.38) wyciągać ogólne wnioski co do możliwości stosowania kryterium energetycznego dla dowolnych materiałów kompozytowych. Okazuje się jednak, że stosowane w praktyce materiały kompozytowe, można podzielić na grupy, dla których kryterium to jest lub nie jest spełnione.

Tabela 7.2 przedstawia dopuszczalność stosowania kryterium energetycznego sprężystych stanów własnych dla wybranych materiałów kompozytowych w zależności od sposobu ich obciążenia. Skoncentrowano się tu tylko na dwuosowym stanie naprężenia σ_1 i σ_2 gdyż energia krytyczna (7.39) związana z naprężeniem σ_6 jest dodatnia dla dowolnego materiału (7.40) i jako taka nie wpływa na możliwości stosowania kryterium (7.35). Poszczególne gęstości energii krytycznych obliczono ze wzorów (7.33a) i (7.33b) są w tabeli 7.2 wyrażone w MPa. Wartości charakterystyk wytrzymałościowych i sztywnościowych dla analizowanych materiałów, zestawiono w dodatku D.4.

Tabela 7.2. Dopuszczalność stosowania kryterium energetycznego dla wybranych materiałów

MATERIAŁ	SPOSÓB OBCIĄŻENIA			
	$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$	$\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$	$\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$	$\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$
Włókna węglowe / Osnowa polimerowa				
GY70/934 Carbon/Epoxy [105]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.068	0.068	0.752	0.752
	Φ_{IIkr} 0.596	0.413	0.410	0.590
T300/5208 Carbon/Epoxy [47], [105]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.078	0.078	2.938	2.938
	Φ_{IIkr} 10.327	10.327	6.251	6.251
T300/934 Carbon/Epoxy [47], [105]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.139	0.139	2.122	2.122
	Φ_{IIkr} 7.134	5.962	5.059	5.879
T300/BSL914C Carbon/Epoxy [81]	NIE	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.033	0.033	1.818	1.818
	Φ_{IIkr} -9.951	8.389	2.948	8.369
T300/976 Carbon/Epoxy [26]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.098	0.098	2.202	2.202
	Φ_{IIkr} 11.069	13.960	8.461	7.305
T300/976 Carbon/Epoxy [79]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.077	0.077	2.481	2.481
	Φ_{IIkr} 14.470	17.736	8.201	7.426
T300/174B Carbon/Epoxy [23]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.084	0.084	1.047	1.047
	Φ_{IIkr} 39.286	19.776	7.379	9.057
IM6/SCI081 Carbon/Epoxy [23]	NIE	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.101	0.101	2.547	2.547
	Φ_{IIkr} -97.359	21.893	10.321	24.424
IM6/W Carbon/Epoxy [55]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.180	0.180	3.380	3.380
	Φ_{IIkr} 20.120	7.708	6.071	11.807
IM7/5250-4 Graphite/Epoxy [74]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.216	0.216	3.465	3.465
	Φ_{IIkr} 129.310	4.090	3.587	23.805
IM7/8551-7 Graphite/Epoxy [44]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.320	0.320	1.853	1.853
	Φ_{IIkr} 28.445	3.523	3.323	19.142
ModI/WRD9371 Carbon/Polyimide [44]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.022	0.022	0.504	0.504
	Φ_{IIkr} 1.675	1.063	0.995	1.512
NAS S/NCT321 Carbon/Epoxy [44]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.002	0.002	0.050	0.050
	Φ_{IIkr} 4.494	0.110	0.081	0.290
AS/3501 Carbon/Epoxy [47], [105]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.149	0.149	2.368	2.368
	Φ_{IIkr} 11.414	11.414	7.700	7.700
AS/914 Carbon/Epoxy [3]	TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.746	0.746	0.746	0.746
	Φ_{IIkr} 17.421	7.292	7.292	17.421
AS4/3502 Carbon/Epoxy [79]	NIE	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr} 0.112	0.112	1.797	1.797
	Φ_{IIkr} -100.656	25.908	7.902	12.817

Tabela 7.2. cd Dopuszczalność stosowania kryterium energetycznego dla wybranych materiałów

MATERIAŁ	SPOSÓB OBCIĄŻENIA			
	$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$	$\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$	$\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$	$\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$
Włókna węglowe / Osnowa polimerowa (cd)				
AS4/3501-6 Carbon/Epoxy [81], [98]	NIE	TAK	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.105	0.105	1.818	1.818
Φ_{IIkr}	-82.163	27.021	8.973	16.059
AS4/3501-6 Carbon/Epoxy [105]	TAK	TAK	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.158	0.158	2.523	2.523
Φ_{IIkr}	63.340	10.140	7.388	19.040
AS4/3501-6 Carbon/Epoxy [84]	TAK	TAK	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.162	0.162	2.169	2.169
Φ_{IIkr}	87.034	43.391	15.237	18.493
AS4/APC2 Carbon/PEEK [105]	TAK	TAK	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.350	0.350	2.208	2.208
Φ_{IIkr}	22.253	4.789	4.479	16.838
AS4/PEEK Carbon/PEEK [42]	TAK	TAK	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.458	0.458	2.245	2.245
Φ_{IIkr}	19.438	3.348	3.254	16.644
HTA/6376 Carbon/Epoxy [42]	TAK	TAK	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.245	0.245	3.125	3.125
Φ_{IIkr}	36.155	12.568	9.277	17.894
Graphite/Epoxy [45]	TAK	TAK	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.168	0.168	1.369	1.369
Φ_{IIkr}	2.648	1.157	1.146	2.591
Carbon/Epoxy [97]	TAK	TAK	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.114	0.114	1.314	1.314
Φ_{IIkr}	92.872	7.350	5.247	15.312
Włókna nieorganiczne / Osnowa polimerowa				
Generic E-glass/Epoxy [105]	NIE	NIE	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.088	0.088	0.952	0.952
Φ_{IIkr}	-3.873	-8.461	5.605	26.007
Generic S-glass/Epoxy [105]	NIE	TAK	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.135	0.135	1.401	1.401
Φ_{IIkr}	-7.896	216.543	5.964	27.461
S2/SCI081 S-glass/Epoxy [26]	NIE	NIE	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.133	0.133	1.878	1.878
Φ_{IIkr}	-6.301	-94.892	5.597	32.774
Gevetex/LY556 E-glass/Epoxy [81]	NIE	NIE	TAK	NIE
Φ_{Ikr}	0.034	0.034	0.365	0.365
$8\Phi_{IIkr}$	-0.626	-0.748	5.274	-13.951
Silenka/MY750 E-glass/Epoxy [81]	NIE	NIE	TAK	NIE
Φ_{Ikr}	0.049	0.049	0.644	0.644
Φ_{IIkr}	-0.766	-0.825	20.714	-22.517
E-glass/8084 E-glass/Vinylester [60]	NIE	NIE	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.087	0.087	0.887	0.887
Φ_{IIkr}	-2.362	-2.474	11.594	14.884
S2/Epoxy [55]	NIE	TAK	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.139	0.139	1.422	1.422
Φ_{IIkr}	-8.726	17.570	4.782	26.609
Glass/Epoxy [45]	NIE	NIE	TAK	TAK
Φ_{Ikr}	0.022	0.022	0.526	0.526
Φ_{IIkr}	-0.480	-0.480	64.175	64.175

Tabela 7.2 cd Dopuszczalność stosowania kryterium energetycznego dla wybranych materiałów

MATERIAŁ	SPOSÓB OBCIĄŻENIA				
	$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$	$\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$	$\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$	$\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$	
Włókna nieorganiczne / Osnowa polimerowa (cd)					
E-glass/Epoxy [23]		NIE	NIE	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.040	0.040	0.579	0.579
	Φ_{IIkr}	-1.104	-1.356	5.459	68.007
Glass/Epoxy [97]		NIE	NIE	TAK	NIE
	Φ_{Ikr}	0.061	0.061	0.311	0.311
	Φ_{IIkr}	-2.051	-4.298	5.282	-15.233
Boron/Epoxy [23], [90]		TAK	NIE	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.098	0.098	1.074	1.074
	Φ_{IIkr}	5.373	-143.71	16.916	3.965
Boron/Epoxy [45]		TAK	NIE	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.164	0.164	1.814	1.814
	Φ_{IIkr}	6.653	-68.476	20.544	4.682
Boron/Epoxy [69]		TAK	NIE	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.183	0.183	1.634	1.634
	Φ_{IIkr}	6.245	-111.899	22.526	4.686
Boron/Epoxy [16]		TAK	NIE	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.168	0.168	1.556	1.556
	Φ_{IIkr}	9.480	-16.422	23.332	4.779
B(4)/5505 Boron/Epoxy [47]		TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.101	0.101	1.103	1.103
	Φ_{IIkr}	4.987	129.976	16.563	3.949
B(5.6)/5505 Boron/Epoxy [47]		TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.072	0.072	0.360	0.360
	Φ_{IIkr}	6.350	9.688	6.815	4.975
Włókna polimerowe / Osnowa polimerowa					
Kevlar 149/Epoxy Aramid/Epoxy [105]		TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.082	0.082	2.270	2.270
	Φ_{IIkr}	219.140	0.684	0.641	9.672
Aramid/Epoxy [97]		TAK	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.480	0.480	1.657	1.657
	Φ_{IIkr}	62.125	0.474	0.471	37.874
Kevlar 49/Epoxy Aramid/Epoxy[23],[47]		NIE	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.013	0.013	0.255	0.255
	Φ_{IIkr}	-1.491	0.492	0.365	25.050
Kevlar 49/Epoxy Aramid/Epoxy [26]		NIE	TAK	TAK	TAK
	Φ_{Ikr}	0.051	0.051	1.642	1.642
	Φ_{IIkr}	-6.511	0.733	0.625	12.018
Włókna ceramiczne / Osnowa metalowa					
Al ₂ O ₃ /Al [3]		NIE	NIE	NIE	TAK
	Φ_{Ikr}	0.115	0.114	0.507	0.521
	Φ_{IIkr}	-3.855	-0.685	-3.467	1.095
Al ₂ O ₃ /Al [106]		NIE	NIE	NIE	NIE
	Φ_{Ikr}	0.053	0.053	0.053	0.053
	Φ_{IIkr}	-0.408	-0.404	-0.404	-0.408
Włókna organiczne / Osnowa metalowa					
Boron/Al [3]		NIE	NIE	NIE	NIE
	Φ_{Ikr}	0.066	0.066	0.305	0.306
	Φ_{IIkr}	-0.350	-0.325	-1.836	-3.061

Jak widać, dla kompozytów o osnowie polimerowej zbrojonej włóknami węglowymi w zdecydowanej większości przypadków otrzymujemy dodatnie wartości energii krytycznych. Ujemną energię uzyskano tylko dla kilku kompozytów tej grupy, zawsze w przypadku dwuosowego rozciągania. Z kolei dla kompozytów zbrojonych włóknem szklanym w żadnym przypadku nie uzyskano dodatnich energii we wszystkich ćwiartkach układu (σ_1 , σ_2), w szczególności energia w ćwiartkach I i II prawie zawsze jest dla tych materiałów ujemna. Nieco lepiej niż dla włókien szklanych wygląda sytuacja w przypadku włókien borowych i aramidowych. Dla włókien borowych otrzymano w kilku przypadkach ujemną energię w II ćwiartce, a dla włókien aramidowych w I ćwiartce układu (σ_1 , σ_2).

W tabeli 7.2 zamieszczono tylko trzy przykłady kompozytów o osnowie metalowej, ponieważ tylko dla nich autor odnalazł w literaturze pełen komplet potrzebnych stałych materiałowych, czyli wszystkie wytrzymałości X_t , X_c , Y_t , Y_c i S oraz sztywności E_1 , E_2 , G_{12} i ν_{12} . Danych takich w ogóle nie udało się znaleźć dla kompozytów z osnową ceramiczną³. We wszystkich przypadkach - poza jedną ćwiartką układu (σ_1 , σ_2) otrzymano ujemne energie. Trudno jednak, z powodu zbyt małej liczby danych wyciągać ogólne wnioski co do stosowania kryterium energetycznego w tych materiałach.

Można zauważyć, że dla wszystkich kompozytów z osnową polimerową, niezależnie od rodzaju włókien, dodatnie energie krytyczne otrzymujemy zawsze w ćwiartce III i w większości przypadków w ćwiartce IV układu (σ_1 , σ_2). Można byłoby więc powiedzieć, że kryterium energetyczne (7.35) może być stosowane dla większości materiałów do wyznaczania wytrzymałości warstwy przy dwukierunkowym ściskaniu lub przy rozciąganiu wzdłuż i ściskaniu w poprzek włókien. W praktyce rzadko jednak jako element konstrukcyjny jest stosowana pojedyncza warstwa (jako warstwę pojedynczą rozumie się tu również laminat złożony z wielu warstw, ale o tym samym kierunku ułożenia włókien). Najczęściej stosowane są laminaty złożone z wielu warstw o różnej orientacji włókien. W warstwach takich przy dowolnym obciążeniu, działającym na laminat, kierunki działania naprężeń w głównych osiach materiałowych mogą obejmować swym zakresem wszystkie ćwiartki układu (σ_1 , σ_2). Wynika stąd ważny wniosek aplikacyjny, a mianowicie ten, że do praktycznego wykorzystania kryterium energetycznego do wyznaczania nośności dowolnie obciążonego laminatu, konieczne jest uzyskanie dodatnich wartości energii krytycznych, we wszystkich ćwiartkach.

Analiza tabeli 7.2 oraz powyższe uwagi pozwalają wysnuć następujący wniosek:

- energetyczne kryterium sprężystych stanów własnych (7.35) może być stosowane dla dowolnego obciążenia w większości kompozytów o osnowie polimerowej zbrojonych włóknami węglowymi,
- nieco rzadziej można je stosować dla kompozytów zbrojonych włóknami borowymi i aramidowymi,
- dla kompozytów zbrojonych włóknem szklanym kryterium energetyczne można stosować w szczególnych przypadkach obciążenia warstwy, to jest dwukierunkowe ściskanie i rozciąganie wzdłuż, ze ściskaniem w poprzek włókien.

Należy jednak zwrócić uwagę, że uzyskanie dla danego materiału dodatniej energii krytycznej nie musi oznaczać, że kryterium energetyczne będzie poprawnie opisywało jego wytrzymałość. Może się bowiem okazać, że krzywa wytrzymałości, chociaż zamknięta, będzie jednak nadmiernie wydłużona o czym często może nas przekonywać dopiero weryfikacja doświadczalna kryterium.

³ W artykułach na temat badania charakterystyk materiałowych w kompozytach o osnowie metalowej i ceramicznej (np. [1], [103]) uwaga skupia się na badaniu wytrzymałości (lub sztywności) tylko w jednym wybranym kierunku. Najczęściej jest to rozciąganie wzdłuż włókien. Aby w praktyce można było zastosować teorię laminacji w połączeniu z dowolnym kryterium wyężeniowym, konieczny jest pełen komplet charakterystyk materiałowych. Ich brak w literaturze w odniesieniu do kompozytów z osnową ceramiczną, czy metalową może świadczyć o tym, że materiały te nie są jeszcze powszechnie stosowane w praktyce projektowej.

7.7.5 Wpływ charakterystyk materiałowych na znak i wartość energii krytycznej

Wzory (7.33a) i (7.33b) wyrażające gęstości energii krytycznych w pierwszym i drugim stanie własnym, będące jednocześnie warunkami określającymi możliwość wykorzystania kryterium energetycznego do analizy danego kompozytu, są bardzo czułe na wartości charakterystyk materiałowych. Jako przykład mogą posłużyć wyniki eksperymentu przeprowadzonego przez Cazeneuve'a i in. [8], którzy wyznaczyli charakterystyki materiałowe przy rozciąganiu kompozytu węgiel/epoksyd i aramid/epoksyd. Wyniki tego doświadczenia przedstawiono w tabeli 7.3.

Tabela 7.3. Stałe materiałowe wyznaczone przez Cazeneuve i in. [8]

Materiał	X_t [MPa]	Y_t [MPa]	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}
carbon/epoxy	1100±20	20±2	116.5±0.1	8.10±0.01	4.06±0.06	0.25
aramid/epoxy	810±10	18±2	79.5±1	5.0±0.7	4.06±0.06	0.31

Dla podanych w tabeli 7.3 wartości w przypadku obu materiałów uzyskuje się ze wzorów (7.33a) i (7.33b) ujemne energie krytyczne. Otrzymujemy, odpowiednio dla włókien węglowych i aramidowych:

$$\Phi_{Ikr} = 0.025 \text{ MPa} \quad \Phi_{IIkr} = -94.107 \text{ MPa} \quad (7.78a)$$

$$\Phi_{Ikr} = 0.026 \text{ MPa} \quad \Phi_{IIkr} = -37.797 \text{ MPa} \quad (7.78b)$$

Jeżeli jednak zmodyfikuje się wytrzymałości X i Y o wartości podanego w tabeli 7.3 błędu pomiaru, to znaczy przyjmie dla pierwszego materiału $X_t = 1080$ MPa i $Y_t = 22$ MPa, a dla drugiego $X_t = 800$ MPa i $Y_t = 20$ MPa to odpowiednie energie krytyczne przyjmą wartości:

$$\Phi_{Ikr} = 0.030 \text{ MPa} \quad \Phi_{IIkr} = 31.210 \text{ MPa} \quad (7.79a)$$

$$\Phi_{Ikr} = 0.040 \text{ MPa} \quad \Phi_{IIkr} = 12.978 \text{ MPa} \quad (7.79b)$$

Zatem w przypadku materiałów przebadanych w [8] o możliwości zastosowania do ich opisu kryterium energetycznego (7.35) decydują różnice w wartościach charakterystyk materiałowych, mieszczące się w granicach błędu pomiaru.

Podobna sytuacja występuje również dla kilku kompozytów wymienionych w tabeli 7.2, dla których uzyskano ujemne energie krytyczne, korzystając z danych zamieszczonych w cytowanych w tabeli pozycjach literatury. Tabela 7.4 przedstawia wartości energii krytycznych obliczone przy zmianie wybranych charakterystyk materiałowych. Wielkość tej zmiany została dobrana na podobnym poziomie jak w cytowanym wyżej eksperymencie [8]. Przyjęto zatem zmianę wytrzymałości i sztywności w kierunku włókien nie większą niż 2.0%, a w kierunku prostopadłym do włókien nie większą niż 15.0%.

Tabela 7.4. Wpływ zmiany stałych materiałowych na wartość energii krytycznej

Materiał	Stałe materiałowe					Energie krytyczne	
	X_t [MPa]	Y_t [MPa]	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν_{12}	Φ_{Ikr} [GPa]	Φ_{IIkr} [GPa]
T300/BSL914C według [81] po modyfikacji	1500	27	138	11	0.28	0.033	- 9.951
	1470	31	140	9.5	0.28	0.051	115.263
IM6/SCI081 według [23] po modyfikacji	2875	48	177	11.4	0.27	0.101	- 97.359
	2875	53	177	10	0.27	0.140	100.508
AS4/3502 według [79] po modyfikacji	1862	51.7	143.9	11.9	0.326	0.112	- 100.656
	1862	51.7	143.9	10.5	0.326	0.127	81.169
AS4/3501-6 według [81], [98] po modyfikacji	1950	48	126	11.0	0.28	0.105	- 82.163
	1950	48	126	9.5	0.28	0.121	106.655

Widać, że dla materiałów zamieszczonych w tabeli 7.3 niewielka zmiana charakterystyk materiałowych powoduje uzyskanie dodatnich energii krytycznych, co oznacza możliwość stosowania kryterium energetycznego do opisu wytrzymałości tych materiałów.

W rozdziale 2 pracy podano za Germanem [23], że różnice w wartościach wytrzymałości lub sztywności otrzymanych w badaniach laboratoryjnych dwóch identycznych próbek mogą wynosić od kilku do kilkudziesięciu procent. Spowodowane jest to dużą niejednorodnością materiału kompozytowego, wyrażającą się na przykład nierównomiernym rozmieszczeniem włókien i zmianą przekroju włókna wzdłuż jego długości.

W świetle tych uwag oraz w wyniku przedstawionych powyżej przykładów można sformułować sugestię, że warunki (7.38) otrzymane na drodze rozważań energetycznych mogą być wykorzystane w celu weryfikacji wyników eksperymentalnych dotyczących charakterystyk materiałowych warstwy. Wymaga to jednak przeprowadzenia bardziej szczegółowej analizy porównawczej, przeprowadzonej na większej grupie materiałów.

Warunki dotyczące charakterystyk materiałowych znane są w teorii sprężystości w odniesieniu do elementów tensorów sztywności lub podatności. Przykłady takich warunków dla materiałów ortotropowych można znaleźć na przykład w [23] i [45].

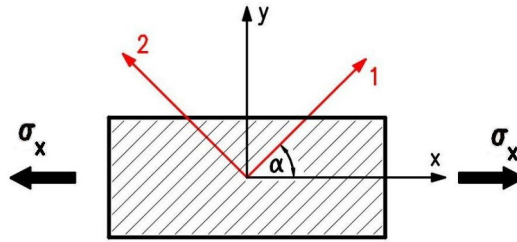
Warunki (7.38), zapisane w postaci (7.51) i (7.52) wiążą ze sobą charakterystyki wytrzymałościowe ze sztywnościowymi (stałymi inżynierskimi). To różni je od wspomnianych wyżej warunków energetycznych, łączących ze sobą tylko charakterystyki sztywnościowe (moduły Younga, ścinania i współczynniki Poissona).

7.8. Weryfikacja doświadczalna

7.8.1 Test off-axis

Test typu *off-axis* polega na rozciąganiu lub ściskaniu pojedynczej warstwy kompozytu siłą przyłożoną pod dowolnym kątem w stosunku do kierunku ułożenia włókien (rys.

7.3). Takie obciążenie powoduje powstanie w układzie głównych osi materiałowych wieloosiowego stanu naprężenia.



Rys. 7.3 Rozciąganie i ściskanie warstwy kompozytowej w układzie *off-axis*

Poniżej przedstawione zostanie porównanie wytrzymałości warstwy w funkcji kąta pod jakim przyłożone jest obciążenie, wyznaczonej doświadczalnie i obliczonej według kryterium energetycznego (7.35) i kilku innych, istniejących kryteriów wyłężeniowych, to jest kryteriów Tsaia-Hilla (4.4), Hoffmana (4.5) i Tsaia-Wu (4.9). Wyniki badań doświadczalnych, użyte do porównania zostały zaczerpnięte z literatury [6], [71], [91] i [93].

Ponieważ analiza wytrzymałościowa warstwy musi być prowadzona w kierunkach głównych osi materiałowych, tensory naprężenia dla rozciągania i ściskania z układu dowolnego (x, y) :

$$\sigma_t = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \sigma_c = \begin{Bmatrix} -\sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.80)$$

należy transformować do układu $(1, 2)$. Stosując prawo transformacji dla tensorów II rzędu:

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{kl} \quad (7.81)$$

otrzymamy dla rozciągania:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \sigma_x \sin^2 \alpha \\ \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (7.82)$$

i dla ściskania:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sigma_x \cos^2 \alpha \\ -\sigma_x \sin^2 \alpha \\ -\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (7.83)$$

Podstawiając elementy tensorów (7.82) i (7.83) do równań przedstawiających poszczególne kryteria wyłężeniowe, a następnie przekształcając je do formy wygodnej do sporządzenia wykresów, otrzymamy kolejno następujące funkcje.

Dla kryterium Rychlewskiego:

$$\sigma_{xR}^t(\alpha) = \left[\frac{\cos^4(\alpha)}{X_t^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{A}{X_t^2} + \frac{A}{Y_t^2} \right) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + \frac{\sin^4(\alpha)}{Y_t^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7.84a)$$

$$\sigma_{xR}^c(\alpha) = \left[\frac{\cos^4(\alpha)}{X_c^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{A}{X_c^2} + \frac{A}{Y_c^2} \right) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + \frac{\sin^4(\alpha)}{Y_c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7.84b)$$

Dla kryterium Tsaia-Hilla:

$$\sigma_{xTH}^t(\alpha) = \left[\frac{\cos^4(\alpha)}{X_t^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X_t^2} \right) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + \frac{\sin^4(\alpha)}{Y_t^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7.85a)$$

$$\sigma_{xTH}^c(\alpha) = \left[\frac{\cos^4(\alpha)}{X_c^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X_c^2} \right) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + \frac{\sin^4(\alpha)}{Y_c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7.85b)$$

W przypadku kryterium Hoffmana naprężenie $\sigma_{xH}(\alpha)$ otrzymujemy jako rozwiązanie równania kwadratowego:

$$\begin{aligned} \sigma_{xH} \left[\frac{X_c + X_t}{X_c X_t} \cos^2(\alpha) + \frac{Y_c + Y_t}{Y_c Y_t} \sin^2(\alpha) \right] + \\ + \sigma_{xH}^2 \left[-\frac{\cos^4(\alpha)}{X_c X_t} - \frac{\sin^4(\alpha)}{Y_c Y_t} + \left(\frac{1}{X_c X_t} + \frac{1}{S} \right) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) \right] = 1 \end{aligned} \quad (7.86)$$

Podobnie w przypadku kryterium Tsaia-Wu naprężenie $\sigma_{xTW}(\alpha)$ otrzymujemy jako rozwiązanie równania kwadratowego:

$$\begin{aligned} \sigma_{xTW} \left[F_1 \cos^2(\alpha) + F_2 \sin^2(\alpha) \right] + \\ + \sigma_{xTW}^2 \left[F_{11} \cos^4(\alpha) + F_{22} \sin^4(\alpha) + (F_{66} + 2F_{12}) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) \right] = 1 \end{aligned} \quad (7.87)$$

gdzie F_i i F_{ij} to elementy tensorów wytrzymałości według (4.10), przy czym współczynnik F_{12} obliczono z (4.12), przyjmując $F_{12}^* = -0.5$.

Weryfikację doświadczalną przeprowadzono w oparciu o rezultaty uzyskane przez różnych autorów w czterech testach *off-axis*, to jest dla rozciągania kompozytu AS/3501 (włókna węglowe/epoksyd) przeprowadzonego przez Tsaia i Hahna [91], dla rozciągania kompozytu B(4)/5505 (włókna borowe/epoksyd) według Pipesa i Cole'a [71], ściskania dla kompozytu AS4/3501-6 (włókna węglowe/epoksyd) wykonanego przez Binga i Suna [6], oraz dla ściskania kompozytu szkło/epoksyd według Tsaia [93]. Wyniki tych doświadczeń wraz z krzywymi wytrzymałości uzyskanymi z równań (7.84 - 7.87) przedstawiono na rysunkach 7.4 - 7.7.

W tabeli 7.5 przedstawiono charakterystyki materiałowe dla kompozytów użytych w omawianych doświadczeniach. Charakterystyki wytrzymałościowe zostały podane w cytowanych pracach [6], [71], [91] i [93], natomiast nie w każdym przypadku podawano stałe materiałowe warstwy (nie są wymagane w większości kryteriów wyłężeniowych). W Takich sytuacjach stałe te wzięto z podręczników [45] lub [47].

Tab. 7.5. Charakterystyki materiałowe kompozytów użytych w testach *off-axis*

Materiał	X_t [MPa]	Y_t [MPa]	X_c [MPa]	Y_c [MPa]	S [MPa]	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}
AS/3501 [91]	1447	52	1447	206	93	138	8.96	7.1	0.30
AS4/3501-6 [6]	—	—	1324	200	79	142	10.3	7.2	0.27
B(4)/5505 [71]	1260	61	2500	202	67	204	18.5	5.59	0.23
glass/epoxy [93]	1035	28	1035	138	41	54	18	9	0.25

Eksperyment przeprowadzony w [6] dla kompozytu AS4/3501-6 dotyczył ściskania warstwy, a w takim przypadku wzdłuż i w poprzek włókien występują naprężenia ściskające (por. 7.83). W cytowanej pracy nie podano zatem wartości wytrzymałości na rozciąganie w obu kierunkach, stąd ich brak w tabeli 7.5.

Możliwość zastosowania kryterium energetycznego do analizy kompozytu szkło/epoksyd według doświadczenia [93] wynika z faktu występowania w badanej próbce naprężeń ściskających w obu kierunkach. Jest to zatem przypadek kombinacji naprężeń z III ćwiartki układu (σ_1, σ_2) , dla której otrzymujemy dodatnie wartości gęstości energii krytycznych dla tego materiału.

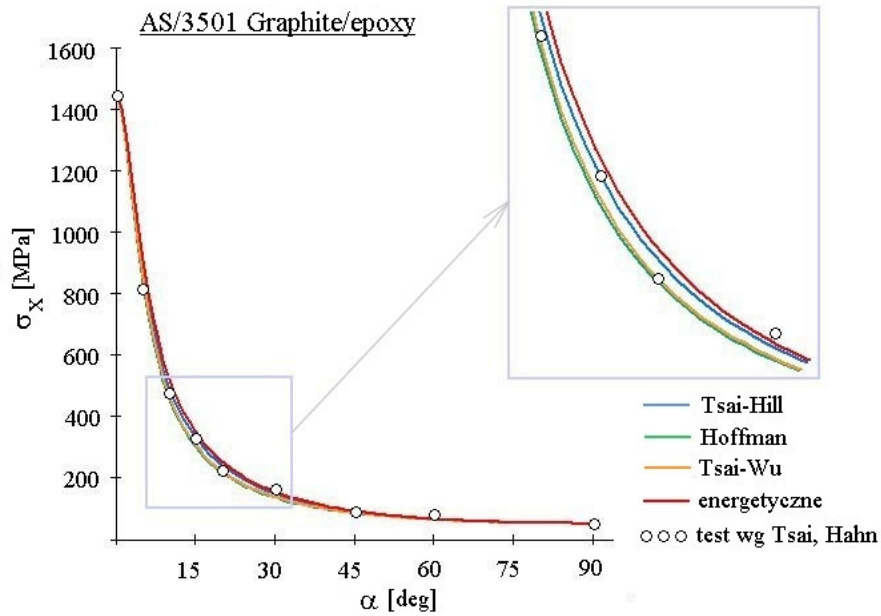
Test *off-axis* pokazuje podobny przebieg funkcji $\sigma_x(\alpha)$ dla wszystkich kryteriów, przy czym podobieństwo to jest większe w przypadku rozciągania (rys. 7.4. i 7.5.) niż ściskania (rys. 7.6. i 7.7.). W tym drugim przypadku naprężenia niszczące wyznaczone dla kompozytu grafit/epoksyd AS4/3501-6 z kryteriów Tsaia-Hilla i Tsaia-Wu dla kąta $\alpha=30^\circ$ wynoszą odpowiednio $\sigma_x=177.3$ MPa i $\sigma_x=244.8$ MPa, czyli różnią się o około 37%.

Daje się też zauważyć podobieństwo krzywych wyznaczonych odpowiednio z kryteriów Tsaia-Hilla i energetycznego oraz Tsaia-Wu i Hoffmana. Dla przypadku ściskania kompozytu grafit/epoksyd (rys. 7.6.) krzywe dla tej pierwszej pary wręcz pokrywają się ze sobą. Wpływ na to podobieństwo może mieć w jednym przypadku występowanie, a w drugim brak w formule kryteriów członów liniowych σ_1 i σ_2 .

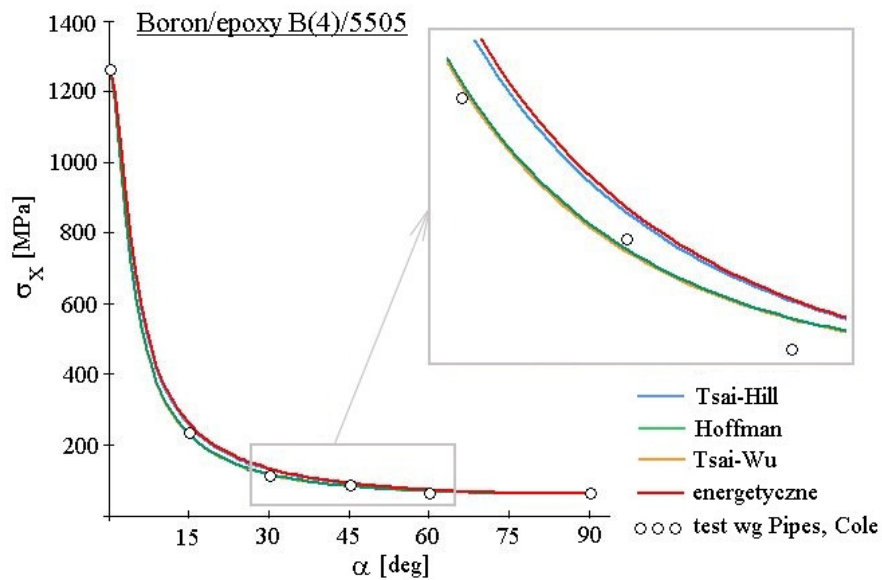
W obu przypadkach rozciągania warstwy kompozytowej występuje bardzo dobra zgodność wszystkich kryteriów z doświadczeniem, przy czym dla kompozytu boron/epoksyd (rys. 7.5.) jest ona nieco lepsza dla krzywych Tsaia-Wu i Hoffmana.

Przypadek ściskania kompozytu szkło/epoksyd (rys. 7.7.) wykazuje dużo lepszą zgodność z wynikami badań doświadczalnych dla krzywych wyznaczonych z kryteriów Tsaia-Wu i Hoffmana. Dla ściskania warstwy grafit/epoksyd AS4/3501-6 lepiej dopasowane wydają się być krzywe otrzymane z kryteriów Tsaia-Hilla i energetycznego (rys. 7.6.). Niestety w tym drugim przypadku dane doświadczalne wyznaczono tylko w trzech punktach, to jest dla kątów 5, 11 i 15°, nie wiadomo zatem, czy podobna zgodność występowała by również dla zakresu kątów większych od 15°.

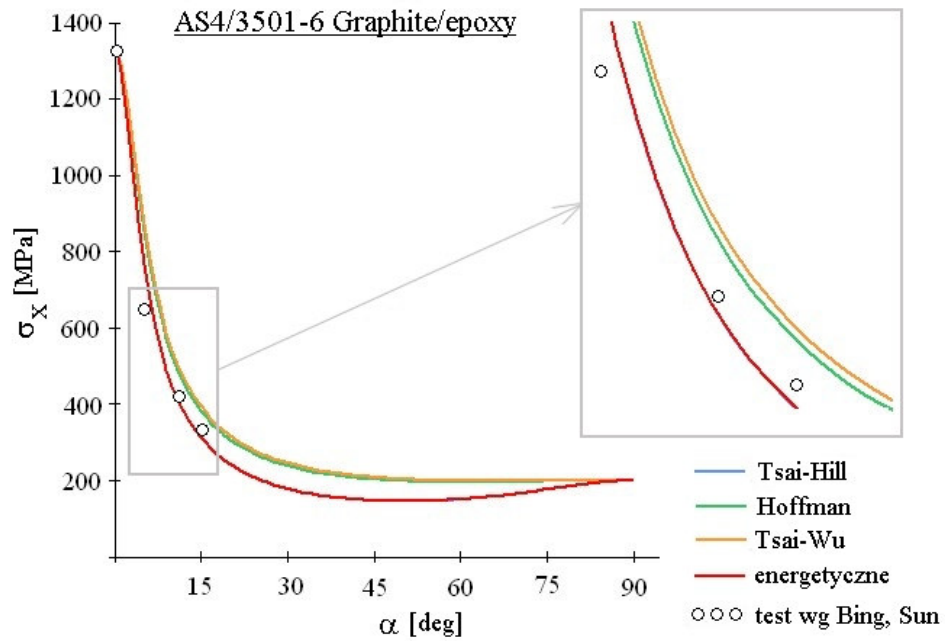
Z przeprowadzonego porównania można wyprowadzić wniosek, że energetyczne kryterium sprężystych stanów własnych (7.35) wykazuje dobrą zgodność z doświadczeniem typu *off-axis*.



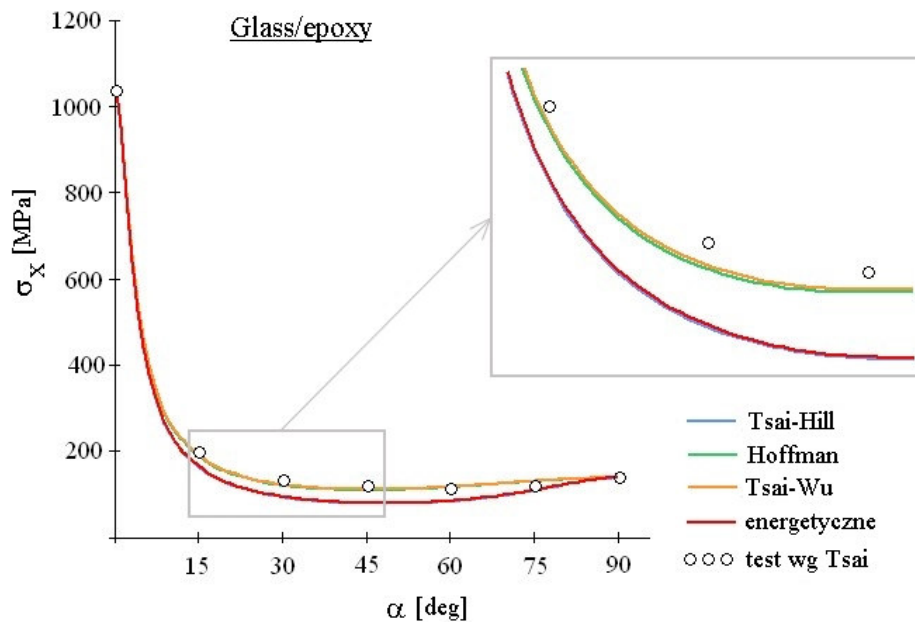
Rys. 7.4. Krzywe wytrzymałości porównane z testem rozciągania wg Tsai, Hahna [91]



Rys. 7.5. Krzywe wytrzymałości porównane z testem rozciągania wg Pipesa, Cole'a [71]



Rys. 7.6. Krzywe wytrzymałości porównane z testem ściskania wg Binga, Suna [6]



Rys. 7.7. Krzywe wytrzymałości porównane z testem ściskania wg Tsai [93]

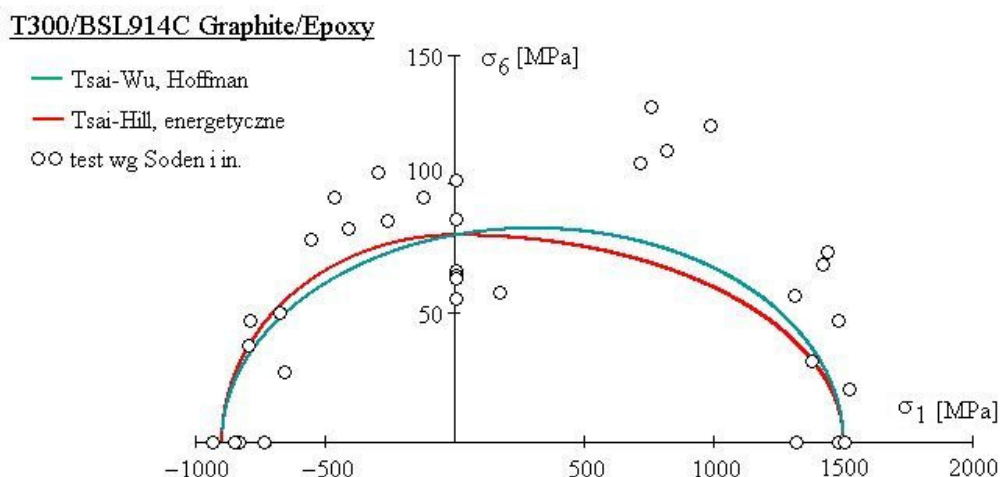
7.8.2 Dwuosiowy stan naprężenia

Weryfikację doświadczalną kryterium energetycznego w dwuosiowym stanie naprężenia przeprowadzono w oparciu o rezultaty czterech doświadczeń, których wyniki zaczerpnięto z literatury [20], [44], [80], [81], [101]. Porównania dokonano, wykreślając obwiednie graniczne wytrzymałości, które w dwuosiowym stanie naprężenia przyjmują kształt krzywych płaskich. Oprócz analizowanego kryterium energetycznego wykreślono również krzywe graniczne według kryteriów Tsaia-Hilla (4.4), Hoffmana (4.5) i Tsaia-Wu (4.9). Charakterystyki materiałowe kompozytów użytych w doświadczeniach zestawiono w tabeli 7.6.

Tab. 7.6. Charakterystyki materiałowe kompozytów użytych w testach dwuosiowych

Materiał	X_t [MPa]	Y_t [MPa]	X_c [MPa]	Y_c [MPa]	S [MPa]	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}
T300/BSL914C [81]	1500	27	900	200	80	138	11	5.5	0.28
Graphite/Epoxy [101]	1027.3	43.4	710.2	125.5	72.4	207	5	2.6	0.25
IM7/8551-7 [44]	2417.39	73.09	1034.94	175.82	183.41	162	8.34	2.07	0.339
świerk [20],[107]	60	4.7	42	7	6	9.1	0.71	—	0.37

Na rysunku 7.8 przedstawiono analizę rozciągania (ściskania) wzdłuż włókien ze ścinaniem dla pojedynczej warstwy kompozytu T300/BSL914C (włókna węglowe/epoksyd). Charakterystyki materiałowe dla tego kompozytu zostały podane przez Soden, Hintona i Kaddoura w [81], a rezultaty doświadczenia, przez tych samych autorów w [80].

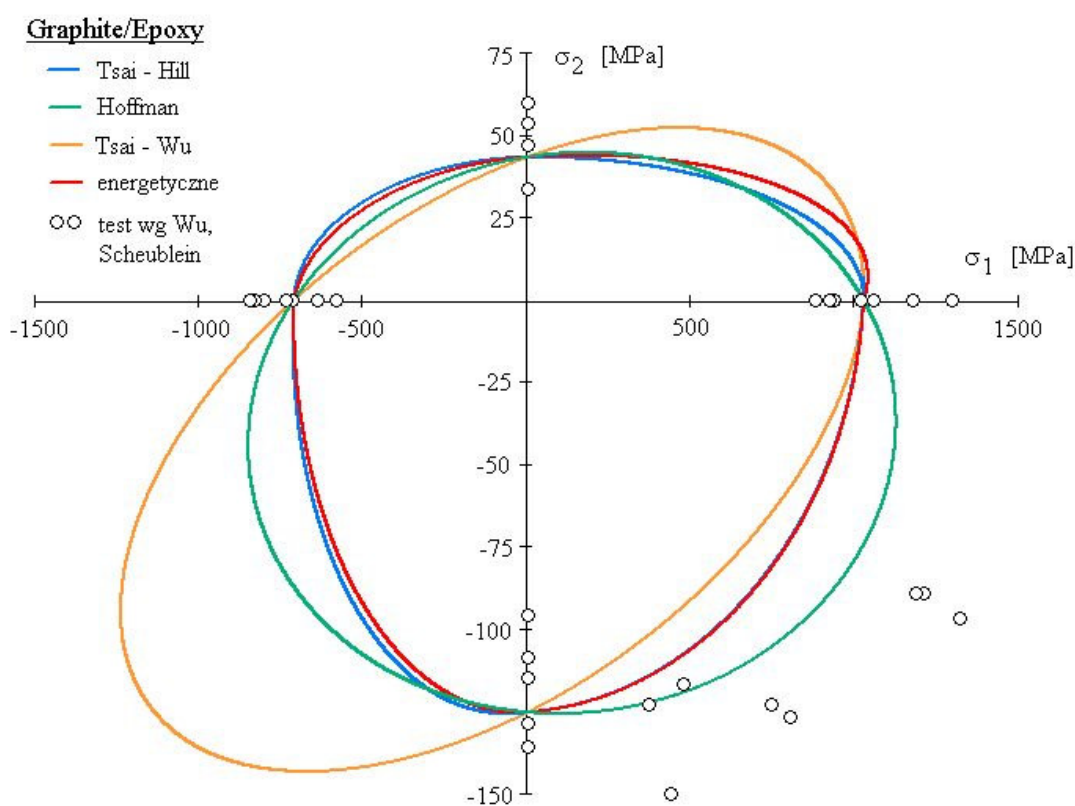


Rys. 7.8. Obwiednie graniczne porównane z testem wg Soden i in. [80]

Ponieważ w tym przypadku naprężenia σ_2 są równe zero, kryterium energetyczne i kryterium Tsaia-Hilla redukują się do tej samej postaci. Podobnie, identyczne formuły przyjmują kryteria Tsaia-Wu i Hoffmana. Różnice pomiędzy poszczególnymi kryteriami są tu stosunkowo niewielkie, natomiast ich zgodności z wynikami doświadczeń nie można ocenić jako dobrej. Szczególnie dla interakcji rozciągania ze ścinaniem, punkty doświadczalne leżą daleko poza krzywymi granicznymi. Nieco lepsza zgodność występuje po stronie ściskania.

Rysunek 7.9 przedstawia przypadek dwuosowego stanu naprężenia w płaszczyźnie (σ_1 , σ_2) dla pojedynczej warstwy kompozytu grafit/epoksyd. Naniesione na nim punkty doświadczalne zostały wyznaczone przez Wu i Scheubleina [101]. Poddali oni kompozyt dwuosowemu rozciąganiu wzdłuż ze ściskaniem w poprzek włókien, a także przebadali wytrzymałość przy jednoosiowym rozciąganiu i ściskaniu w kierunkach głównych osi materiałowych. Ocenę zgodności kryteriów z testem dwuosowym można zatem przeprowadzić tylko w ćwiartce IV układu (σ_1 , σ_2). Zgodności tej nie można ocenić jako dobrej. Jedynie kryterium Hoffmana, w przypadku dwóch punktów doświadczalnych, daje dobre rezultaty. Pozostałe punkty leżą daleko poza obwiedniami nośności.

Różnice między kryteriami Tsai-Hilla i energetycznym są dla tego materiału bardzo małe, może poza wyjątkiem ćwiartki I, gdzie kryterium energetyczne daje krzywą nieco bardziej wydłużoną. Obwiednie graniczne wykreślone z kryteriów Tsai-Wu i Hoffmana są już znacznie różne od siebie i od dwóch pozostałych.

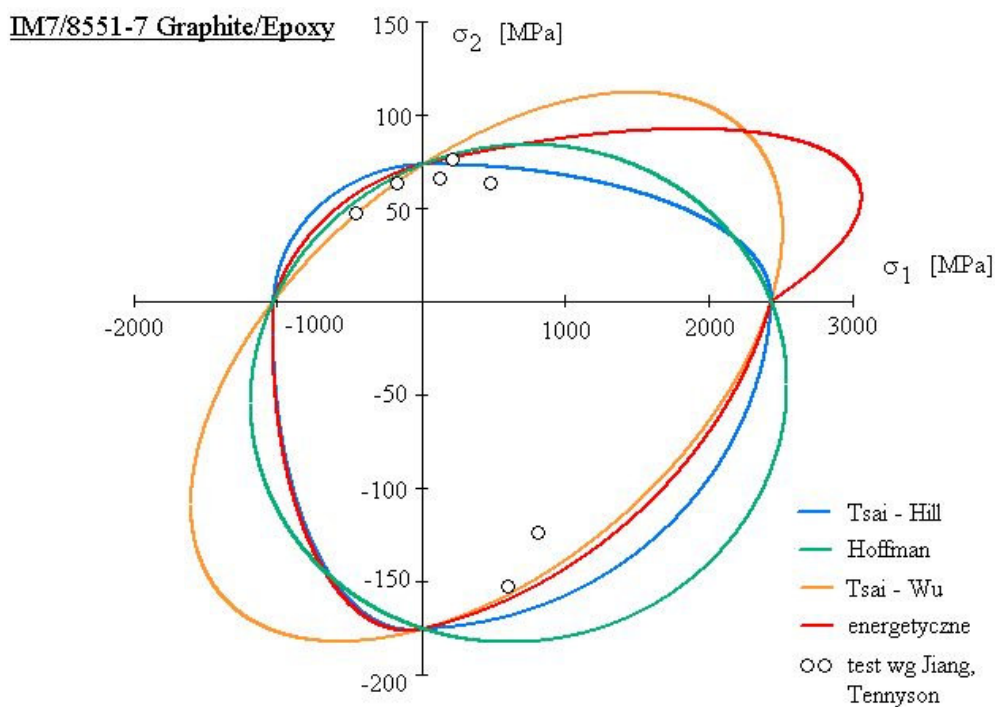


Rys. 7.9. Obwiednie graniczne porównane z testem wg Wu i Scheubleina [101]

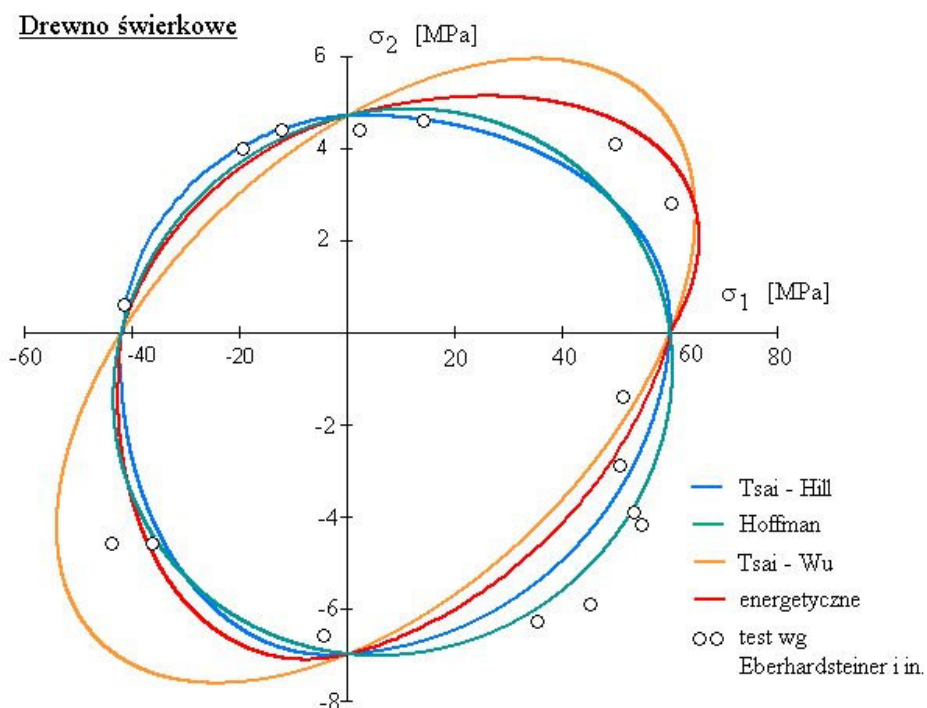
Warto zwrócić uwagę na wyniki testów jednoosiowych, przedstawionych na rys. 7.9. Widoczny jest bardzo duży rozrzut wartości wytrzymałości warstwy w jej głównych kierunkach materiałowych. Przykładowo, skrajne wartości uzyskane przy rozciąganiu w poprzek włókien wynoszą 34 i 60 MPa, a w przypadku rozciągania wzdłuż włókien 878 i 1295 MPa. Różnią się zatem odpowiednio o 77 i 48 %. Potwierdza to uwagi poczynione w punkcie 7.7.5 na temat rozrzut wartości stałych materiałowych.

Na rysunku 6.10 przedstawiono krzywe graniczne na płaszczyźnie (σ_1 , σ_2) i wyniki eksperymentu Jianga i Tennysona [44]. Badali oni pojedynczą warstwę kompozytu IM7/8551-7 (włókna węglowe/epoksyd). Dla danych doświadczalnych z ćwiartki I najlepszą zgodność wykazuje kryterium Tsai-Hilla. W przypadku ćwiartki II bardzo dobrą zgodność wykazuje kryterium Tsai-Wu, chociaż pozostałe kryteria dają też dobre wyniki. Dla ćwiartki

IV, najlepszą zgodność uzyskano w przypadku kryterium Tsaia-Hilla i energetycznego. W przypadku pozostałych kryteriów należy mówić o złej zgodności z wynikami doświadczenia dla tej ćwiartki.



Rys. 7.10. Obwiednie graniczne porównane z testem wg Jianga i Tennysona [44]



Rys. 7.11. Obwiednie graniczne porównane z testem wg Eberhardsteiner [20]

Na rysunku 7.11 pokazano analizę dwuosiowego stanu naprężenia w płaszczyźnie (σ_1, σ_2) dla drewna świerkowego (sitka spruce), dla którego test wytrzymałościowy przeprowadzili Eberhardsteiner i Mackenzie-Helnwein [20]. Ponieważ w [20] nie podano wartości stałych inżynierskich wzięto je z podręcznika [107].

Krzywa graniczna wg Tsiaia-Wu w III ćwiartce jest zdecydowanie bardziej wydłużona niż dla pozostałych kryteriów. Podobnie w ćwiartce I większe wydłużenie wykazują krzywe Tsia-Wu i energetycznego. Najgorzej dopasowana do rezultatów doświadczenia jest krzywa Tsiaia-Wu, pozostałe krzywe leżą dość blisko punktów doświadczalnych, przy czym można stwierdzić, że w ćwiartce I najlepszą zgodność wykazuje kryterium energetyczne, w ćwiartce II kryterium Tsiaia-Hilla, a w III kryterium Hoffmana.

7.8.3 Wnioski z weryfikacji doświadczalnej

Przeprowadzona analiza nie pozwala jednoznacznie stwierdzić w jakim stopniu proponowane kryterium sprężystych stanów własnych poprawnie opisuje wytrzymałość kompozytów włóknistych. W równym stopniu uwaga ta dotyczy jednak także istniejących i powszechnie akceptowanych kryteriów, zależy to bowiem od rodzaju materiału, a także od sposobu obciążenia. Każdorazowo, przed wyborem kryterium do opisu wytrzymałości określonego materiału kompozytowego trzeba dokonać weryfikacji doświadczalnej, tak aby dobrać kryterium możliwie najlepsze.

Dla przypadków obciążenia warstwy kompozytowej przez rozciąganie lub ściskanie w układzie *off-axis*, wszystkie analizowane kryteria dają zbliżone wyniki, przy czym lepsze dla rozciągania. Dwuosiowy stan naprężenia wykazuje już jednak, że nośności graniczne obliczone z kilku różnych kryteriów wyłężeniowych mogą się od siebie bardzo znacząco różnić. Uzasadnione jest zatem poszukiwanie nowych kryteriów i nowych teorii wyłężenia dla materiałów kompozytowych, pomimo że istnieje ich już obecnie tak wiele.



8. Nowa metoda degradacji sztywności laminatu

8.1. Wstęp

Niniejszy rozdział zawiera opis zaproponowanego przez autora sposobu modyfikacji sztywności laminatu, na skutek uszkadzających się kolejno warstw. Sposób ten związany jest z wyznaczaniem nośności laminatu przy zastosowaniu metody zniszczenia ostatniej warstwy (LPF). Zaproponowana metoda oparta jest na rozkładzie spektralnym tensora sztywności i na energetycznym kryterium wyężeniowym wyspecyfikowanym w rozdziale 7.

Przy stosowaniu zaproponowanej metody można redukować elementy macierzy sztywności \mathbf{Q} zniszczonej warstwy z uwzględnieniem stopnia uszkodzenia, ale bez konieczności określania mechanizmu wywołującego to uszkodzenie. Zastosowanie metody zilustrowano przykładami oraz porównano wyniki obliczeń z zaczerpniętymi z literatury wynikami badań doświadczalnych.

8.2. Podstawy teoretyczne

8.2.1 Sformułowanie metody

Energetyczne kryterium wyężeniowe sprężystych stanów własnych (7.22) ma postać sumy trzech wyrażeń, z których każde przedstawia stosunek gęstości energii sprężystej zgromadzonej w danym stanie własnym pod wpływem działającego obciążenia, do gęstości energii krytycznej w tym stanie. Można zatem powiedzieć, że wyrażenia te określają stopień wyężenia materiału w każdym stanie własnym. Proponuje się na tej podstawie zdefiniować współczynniki wyężenia φ_ρ dla każdego stanu własnego w następującej postaci:

$$\varphi_\rho = \frac{\Phi_\rho}{\Phi_{\rho kr}} \quad (8.1)$$

gdzie: Φ_ρ - gęstość energii sprężystej w ρ -tym stanie własnym, $\Phi_{\rho kr}$ - krytyczna wartość gęstości energii sprężystej w ρ -tym stanie własnym.

Występujące w kryterium (7.22) trzy stany własne tensora podatności \mathbf{S} są określone przez tensory własne $\boldsymbol{\omega}_\rho$ i odpowiadające im wartości własne λ_ρ . Rozkład spektralny tensora \mathbf{S} , czyli jego rozkład na stany własne przyjmuje postać:

$$\mathbf{S} = \lambda_I \mathbf{P}_I + \lambda_{II} \mathbf{P}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{P}_{III} = \mathbf{S}_I + \mathbf{S}_{II} + \mathbf{S}_{III} \quad (8.2)$$

gdzie \mathbf{P}_ρ - projektory ortogonalne wyznaczane jako iloczyny diadyczne tensorów własnych $\boldsymbol{\omega}_\rho$, tzn. $\mathbf{P}_\rho = \boldsymbol{\omega}_\rho \otimes \boldsymbol{\omega}_\rho$ (por. rozdział 6.3).

Rozwiązując problem własny dla macierzy odwrotnej do danej, otrzymujemy te same tensory (kierunki) własne i odwrotne niż dla macierzy danej wartości własne (zob. doda-

tek D.8). Zatem analogicznie jak tensor podatności \mathbf{S} można na te same trzy stany własne rozłożyć tensor sztywności \mathbf{Q} , który jest jego odwrotnością:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\lambda_I} \mathbf{P}_I + \frac{1}{\lambda_{II}} \mathbf{P}_{II} + \frac{1}{\lambda_{III}} \mathbf{P}_{III} = \mathbf{Q}_I + \mathbf{Q}_{II} + \mathbf{Q}_{III} \quad (8.3)$$

Rozkład (8.3) oznacza rozdzielanie macierzy sztywności warstwy kompozytowej na poszczególne stany własne. Inaczej mówiąc każdy element macierzy \mathbf{Q}_I , \mathbf{Q}_{II} , \mathbf{Q}_{III} stanowi pewną część odpowiedniego elementu macierzy \mathbf{Q} , związaną z danym stanem własnym. Proponuje się przyjąć zależność, określającą modyfikację sztywności uszkodzonej warstwy z użyciem współczynników (8.1) określających stopień wyężenia w danym stanie własnym w postaci:

$$\mathbf{Q}_d = (1 - \varphi_I) \mathbf{Q}_I + (1 - \varphi_{II}) \mathbf{Q}_{II} + (1 - \varphi_{III}) \mathbf{Q}_{III} \quad (8.4)$$

W analogiczny sposób można dokonać modyfikacji macierzy podatności \mathbf{S} , przy czym tutaj należałoby mówić nie o degradacji wartości jej elementów, a o ich wzroście:

$$\mathbf{S}_d = \frac{1}{(1 - \varphi_I)} \mathbf{S}_I + \frac{1}{(1 - \varphi_{II})} \mathbf{S}_{II} + \frac{1}{(1 - \varphi_{III})} \mathbf{S}_{III} \quad (8.5)$$

Korzystając z równań (7.15 – 7.17) można przedstawić składowe tensora podatności \mathbf{Q} w każdym ze stanów własnych:

$$\mathbf{Q}_I = \frac{1}{\lambda_I} \begin{pmatrix} a_I^2 & a_I b_I & 0 \\ a_I b_I & b_I^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.6a)$$

$$\mathbf{Q}_{II} = \frac{1}{\lambda_{II}} \begin{pmatrix} a_{II}^2 & a_{II} b_{II} & 0 \\ a_{II} b_{II} & b_{II}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.6b)$$

$$\mathbf{Q}_{III} = \frac{1}{\lambda_{III}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.6c)$$

Zaproponowana przez autora niniejszej pracy metoda pozwala na częściową redukcję każdego elementu macierzy sztywności bez wcześniejszej identyfikacji sposobu zniszczenia, co jest jej niewątpliwą zaletą w porównaniu z metodami stosowanymi dotychczas. Ponadto w sposób racjonalny modyfikowana jest cała macierz, a nie - jak to ma miejsce w dotychczasowych modelach - wybrane w oparciu o dość arbitralne kryteria jej elementy.

Pomimo iż nie jest to konieczne do analizy nośności laminatu, można przy pomocy tej metody identyfikować w pewnym stopniu mechanizm zniszczenia, co zostanie pokazane w dalszej części tego rozdziału.

8.2.2 Algorytm wyznaczania nośności laminatu

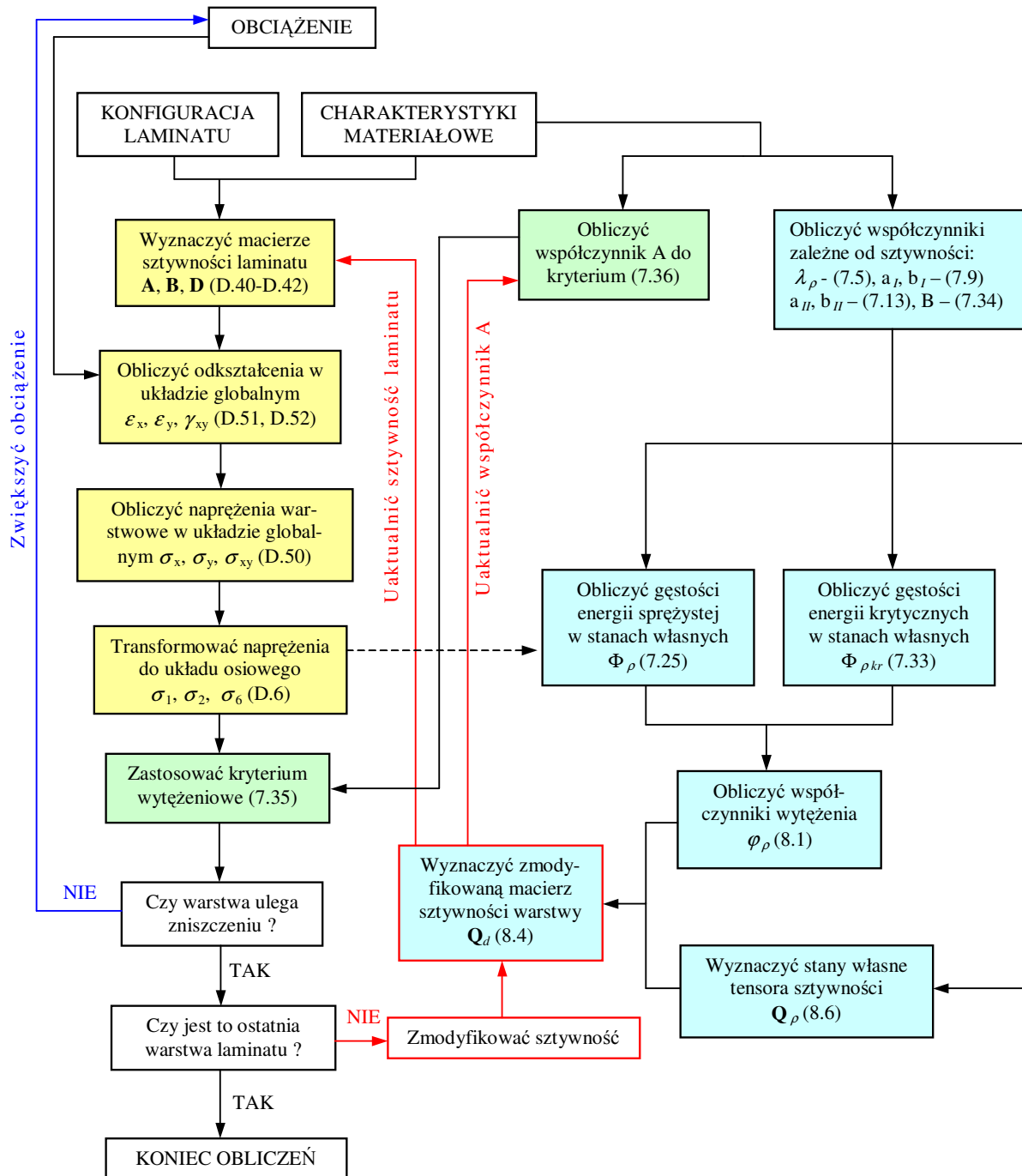
Poniżej zostanie przedstawiony sposób wyznaczania nośności laminatu z wykorzystaniem wyspecyfikowanego w punkcie 7 kryterium wytrzymałościowego oraz przy użyciu zaproponowanej metody modyfikacji sztywności. Podstawowym elementem wyznaczenia nośności laminatu jest analiza wytrzymałościowa każdej z jego warstw składowych z osobna. W pierwszej kolejności należy zatem wyznaczyć naprężenia działające w poszczególnych warstwach pod wpływem obciążenia przyłożonego do laminatu. W tym celu wykorzystujemy klasyczną teorię laminatów, obliczając kolejno macierze sztywności **A**, **B** i **D** z równań (D.40-D.42), odkształcenia laminatu w układzie globalnym z równań (D.51, D.52) i naprężenia w poszczególnych warstwach z równania (D.50). Następnie naprężenia z układu globalnego należy transformować do głównych osi materiałowych warstwy, przy użyciu wzorów transformacyjnych (D.6).

Po wyznaczeniu naprężeń działających w układzie osiowym stosujemy dla każdej warstwy kryterium energetyczne (7.35) i wyznaczamy warstwę, która w danym kroku obliczeniowym została uznana za uszkodzoną. Wpływ uszkodzenia warstwy na sztywność uwzględniamy przez modyfikację sztywności w warstwie uszkodzonej. W tym celu w pierwszej kolejności wyznaczamy parametry rozkładu spektralnego tensora podatności, czyli moduły sztywności λ_I , λ_{II} i λ_{III} z równań (7.5), składowe tensorów własnych a_I , b_I i a_{II} , b_{II} odpowiednio z równań (7.9) i (7.13) oraz współczynnik B z zależności (7.34). Parametry te pozwalają obliczyć gęstości energii sprężystych (7.25) w poszczególnych stanach własnych w warstwie uszkodzonej, gęstości energii krytycznych (7.33) w tych stanach oraz rozkład na stany własne (8.6) tensora sztywności **Q**. W dalszej kolejności wyznaczamy współczynniki wytrzymałości w każdym stanie własnym (8.1), przy pomocy których wyznaczamy zmodyfikowaną macierz sztywności \mathbf{Q}_d (7.4).

Po wyznaczeniu macierzy \mathbf{Q}_d należy dokonać aktualizacji macierzy sztywności laminatu. Po wyznaczeniu nowych sztywności **A**, **B** i **D** ponownie sprawdzamy naprężenia we wszystkich warstwach i postępujemy tak aż do uszkodzenia wszystkich warstw.

W każdym kroku obliczeniowym należy sprawdzić wytrzymałość wszystkich warstw, w tym również warstwy uszkodzonej, może się bowiem zdarzyć, że warstwa uszkodzona jest zdolna do dalszego przenoszenia obciążeń. Dzieje się tak w przypadku gdy zniszczeniu w warstwie ulega osnowa. Aby przy pomocy kryterium energetycznego (7.35) sprawdzić wytrzymałość takiej warstwy lub wyznaczyć obciążenie niszczące ją ostatecznie należy również uaktualnić postać kryterium. Uaktualnienie to dotyczy współczynnika A , który jest zależny od parametrów sztywnościowych (7.36). Jeżeli zatem sztywność warstwy została zmodyfikowana ma to wpływ na tenże współczynnik i powinno być uwzględnione w dalszych obliczeniach.

Opisany powyżej sposób wyznaczania nośności laminatu został przedstawiony w postaci algorytmu na rys. 8.1. Elementy zaznaczone kolorem żółtym dotyczą tej części algorytmu, które są związane z klasyczną teorią laminatów. Kolor zielony dotyczy części związanej z wyprowadzonym kryterium wytrzymałościowym, a niebieski z zaproponowaną metodą degradacji sztywności.



Rys. 8.1. Algorytm wyznaczania nośności laminatu

8.2.3 Możliwość identyfikacji mechanizmu zniszczenia

Jak zaznaczono w punkcie 8.2.1 do przeprowadzenia modyfikacji sztywności laminatu przy użyciu zaproponowanej metody nie jest konieczna znajomość mechanizmu zniszczenia. Modyfikacji dokonuje się bowiem w oparciu o współczynniki wytrzymałości φ_ρ które oblicza się niejako automatycznie na podstawie panującego w warstwie stanu naprężenia. Okazuje się jednak, że w pewnym stopniu mechanizm ten jest możliwy do zidentyfikowania.

Współczynniki φ_ρ przedstawiają stopień wyężenia w poszczególnych stanach własnych. Jeżeli potrafilibyśmy powiązać te stany ze sposobami zniszczenia, można by identyfikować je na podstawie wartości tych współczynników.

Przeprowadzona w punkcie 7.2 analiza tensorów naprężenia w poszczególnych stanach własnych (7.18) wykazała, że trzeci stan własny związany jest ze ścinaniem w płaszczyźnie warstwy. Potwierdzeniem tego faktu jest również postać tensora sztywności w trzecim stanie własnym (8.6c), w którym zgromadzona jest cała sztywność warstwy związana z modułem ścinania G_{12} . Jeżeli zatem wartość współczynnika φ_{III} będzie zmierzać do jedności, będzie można powiedzieć, że mechanizm zniszczenia związany jest z pękaniem osnowy na skutek ścinania.

Na podstawie analizy naprężeń w dwóch pozostałych stanach własnych nie można wskazać sposobu zniszczenia. Naprężenia σ_1 i σ_2 rozkładają się na pierwszy i drugi stan własny. W obu tych stanach jednocześnie występują naprężenia w kierunkach 1 i 2, czyli wzdłuż i w poprzek włókien. Jeżeli jednak podda się analizie rozkład tensora sztywności (8.6) pewne informacje o mechanizmie zniszczenia uzyska się również i dla tych stanów.

Można wykazać (dowód przedstawiony jest w dodatku D.6), że dla współczynników a_ρ, b_ρ , opisanych równaniami (7.9) i (7.13) zachodzi następująca zależność:

$$a_I b_I = -a_{II} b_{II} \quad (8.7a)$$

Dodatkowo (por. dodatek D.6) dla kompozytów zbrojonych włóknami jednokierunkowymi, a więc takich, które charakteryzują się dużą anizotropią cech sztywnościowych w dwóch prostopadłych kierunkach, zachodzą zależności:

$$a_I^2 \ll a_{II}^2 \quad (8.7b)$$

$$b_I^2 \gg b_{II}^2 \quad (8.7c)$$

Zgodnie z rozkładem (8.3) element Q_{11} tensora sztywności \mathbf{Q} ma postać:

$$Q_{11} = Q_{11}^I + Q_{11}^{II} = \frac{a_I^2}{\lambda_I} + \frac{a_{II}^2}{\lambda_{II}} \quad (8.8)$$

Biorąc pod uwagę zależność (8.7b) możemy zapisać:

$$Q_{11}^I \ll Q_{11}^{II} \rightarrow Q_{11} \cong Q_{11}^{II} \quad (8.9)$$

Podobnie analizując element Q_{22} tensora sztywności \mathbf{Q} :

$$Q_{22} = Q_{22}^I + Q_{22}^{II} = \frac{b_I^2}{\lambda_I} + \frac{b_{II}^2}{\lambda_{II}} \quad (8.10)$$

możemy na podstawie zależności (8.7b) zapisać:

$$Q_{22}^I \gg Q_{22}^{II} \rightarrow Q_{22} \cong Q_{22}^I \quad (8.11)$$

Widzimy zatem, że prawie cała sztywność związana z kierunkiem 1, czyli kierunkiem ułożenia włókien jest zgromadzona w drugim stanie własnym. Z kolei w pierwszym stanie własnym zgromadzona jest prawie cała sztywność związana z kierunkiem 2, czyli pro-

stopadłym do włókien. Można na tej podstawie powiedzieć, że dominująca wartość współczynnika wyężenia φ_I będzie oznaczała uszkodzenie osnowy. Z kolei jeśli dominujący będzie współczynnik φ_{II} będzie to oznaczać uszkodzenie włókien.

Do interesujących wniosków może doprowadzić analiza elementu Q_{12} tensora sztywności. Zgodnie z rozkładem (8.3) otrzymamy:

$$Q_{12} = Q_{12}^I + Q_{12}^{II} = \frac{a_I b_I}{\lambda_I} + \frac{a_{II} b_{II}}{\lambda_{II}} \quad (8.12)$$

Uwzględniając warunek (8.7a) możemy zapisać:

$$Q_{12}^I < 0 \rightarrow Q_{12}^{II} > Q_{12} \quad (8.13)$$

Z zależności (8.13) wynika, że dla pewnych kombinacji współczynników wyężenia φ_p można otrzymać wzrost elementu Q_{12} w modyfikowanej macierzy sztywności laminatu. Ponieważ element Q_{12} jest związany ze współczynnikiem Poissona w warstwie – można w konsekwencji, dla niektórych typów konfiguracji warstw, uzyskać wzrost tego współczynnika w laminacie. Stosowane obecnie metody degradacji macierzy sztywności zmniejszają zawsze wszystkie elementy macierzy sztywności, a więc również element Q_{12} przez co w niektórych typach laminatów (na przykład krzyżowych lub innych zawierających warstwy 90°) można nie uzyskać wzrostu współczynnika Poissona po degradacji, co obserwuje się niekiedy w testach.

Należy zaznaczyć, że do teoretycznego wyznaczenia wzrostu współczynnika Poissona w laminacie nie zawsze konieczny jest wzrost elementu Q_{12} w degradowanej warstwie. Na przykład w laminacie $\pm 45^\circ$, a także innych laminatach kątowych, nawet całkowite wyzerowanie elementów macierzy sztywności \mathbf{Q} daje w efekcie wzrost tego współczynnika w laminacie.

Omówione powyżej zjawisko jest obserwowane doświadczalnie w niektórych typach laminatów czego przykładem może być eksperyment wykonany przez Germana [22].

Poniżej, jako przykład ilustrujący omówione powyżej zależności (8.9, 8.11, 8.13), zostanie dokonany rozkład spektralny tensora sztywności dla kompozytu AS/914 (włókna węglowe/epoksyd). Stałe inżynierskie dla tego materiału przyjęte za [3] wynoszą: $E_1 = 140$ GPa, $E_2 = 6.7$ GPa, $G_{12} = 5.23$ GPa, $\nu_{12} = 0.3$.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano kolejno:

- macierz podatności (3.10):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.007143 & -0.002143 & 0 \\ -0.002143 & 0.149254 & 0 \\ 0 & 0 & 0.191205 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{\text{GPa}} \right], \quad (8.14)$$

- moduły sztywności (7.5):

$$\lambda_I = 0.149286 \text{ GPa}, \quad (8.15a)$$

$$\lambda_{II} = 0.007111 \text{ GPa}, \quad (8.15b)$$

- składowe tensorów własnych (7.9, 7.13):

$$a_I = b_{II} = 0.015074, \quad (8.16a)$$

$$b_I = -a_{II} = -0.999886, \quad (8.16b)$$

rozkład spektralny tensora sztywności (8.3, 8.6):

$$\mathbf{Q}_I = \begin{bmatrix} 0.0015 & -0.1010 & 0 \\ -0.1010 & 6.6970 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (8.17a)$$

$$\mathbf{Q}_{II} = \begin{bmatrix} 140.6041 & 2.1197 & 0 \\ 2.1197 & 0.0320 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (8.17b)$$

$$\mathbf{Q}_{III} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.23 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (8.17c)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_I + \mathbf{Q}_{II} + \mathbf{Q}_{III} = \begin{bmatrix} 140.6056 & 2.0187 & 0 \\ 2.0187 & 6.7290 & 0 \\ 0 & 0 & 5.23 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (8.18)$$

Jak widać praktycznie cała wartość elementu Q_{11} jest zgromadzona w drugim, a wartość Q_{22} w pierwszym stanie własnym. Można też zauważyć, że jest prawdziwa relacja (8.13) dotycząca elementu Q_{12} . W tabeli 8.1 podano wartości składowych tensorów \mathbf{Q} , \mathbf{Q}_I i \mathbf{Q}_{II} wyznaczone dla kilku innych materiałów. Wpływ elementów tensorów sztywności w pierwszym i drugim stanie własnym na całkowitą sztywność warstwy podano w tabeli 8.2.

Tab. 8.1. Rozkład spektralny tensora podatności dla wybranych materiałów

MATERIAŁ	Tensor sztywności \mathbf{Q} [GPa]			I stan własny \mathbf{Q}_I [GPa]			II stan własny \mathbf{Q}_{II} [GPa]		
	Q_{11}	Q_{22}	Q_{12}	$Q_{11,I}$	$Q_{22,I}$	$Q_{12,I}$	$Q_{11,II}$	$Q_{22,II}$	$Q_{12,II}$
AS/914 [3]	140.6056	6.7290	2.0187	0.0015	6.6970	-0.1010	140.6041	0.0320	2.1197
S-2/SCI081 [26]	54.9088	11.5919	3.2457	0.0627	11.2873	-0.8411	54.8461	0.3045	4.0868
E-glass/8084 [60]	39.3922	11.9711	3.2681	0.1579	11.4291	-1.3433	39.2343	0.5420	4.6115
B(4)/5505 [47]	204.9834	18.5892	4.2755	0.0097	18.4814	-0.4237	204.9777	0.1077	4.6992
Kevlar 49/SCI081[26]	87.8993	7.7796	2.6451	0.0083	7.6840	-0.2534	87.8910	0.0956	2.8985

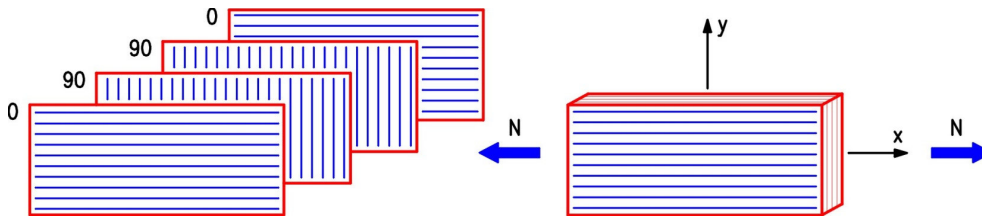
Tab. 8.2. Udział sztywności poszczególnych stanów własnych w sztywności całkowitej

MATERIAŁ	$\frac{Q_{11,I}}{Q_{11}}$	$\frac{Q_{11,II}}{Q_{11}}$	$\frac{Q_{22,I}}{Q_{22}}$	$\frac{Q_{22,II}}{Q_{22}}$	$\frac{Q_{12,I}}{Q_{12}}$	$\frac{Q_{12,II}}{Q_{12}}$
AS/914 [3]	0.000	1.000	0.995	0.005	-0.050	1.050
S-2/SCI081 [26]	0.001	0.999	0.974	0.026	-0.259	1.259
E-glass/8084 [60]	0.004	0.996	0.955	0.045	-0.411	1.411
B(4)/5505 [47]	0.000	1.000	0.994	0.006	-0.099	1.099
Kevlar 49/SCI081[26]	0.000	1.000	0.988	0.012	-0.096	1.096

8.3. Przykłady zastosowań

8.3.1 Rozciąganie laminatu $[0/90]_s$

Pierwszy przykład ilustrujący zaproponowaną metodę degradacji polega na wyznaczeniu nośności laminatu o kodzie $[0/90]_s$ wykonanego z materiału IM7/8551-7 poddanego jednoosiowemu rozciąganiu. Wyznaczona zostanie również zależność $\sigma - \varepsilon$ obrazująca zachowanie się laminatu pod wpływem przyłożonego obciążenia. Na rysunku 8.2 przedstawiony jest schemat obciążenia i konfiguracja laminatu.



Rys. 8.2 Schemat obciążenia i konfiguracji laminatu

Dla porównania przedstawiono również analizę z wykorzystaniem kryteriów Tsaia-Hilla i Tsaia-Wu. W tym przypadku przyjęto metodę degradacji polegającą na wyzerowaniu tych elementów macierzy sztywności, które są związane ze sposobem zniszczenia. W przypadku kryterium Tsaia-Wu przyjęto $F_{12}^* = -0.5$.

Charakterystyki materiałowe, przyjęte według [44] są następujące: $X_t = 2417.39$ MPa, $Y_t = 73.09$ MPa, $X_c = 1034.94$ MPa, $Y_c = 175.82$ MPa, $S = 183.41$ MPa, $E_1 = 162$ GPa, $E_2 = 8.34$ GPa, $G_{12} = 2.07$ GPa, $\nu_{12} = 0.339$.

Przy wyznaczaniu naprężeń w poszczególnych warstwach uwzględniono naprężenia termiczne, wynikające z procesu laminacji. Różnicę pomiędzy temperaturami eksploatacji i laminacji przyjęto $\Delta T = -100^\circ\text{C}$, a współczynniki rozszerzalności termicznej dla warstwy: $\alpha_1 = 3.1 \cdot 10^{-7}$ i $\alpha_2 = 3.1 \cdot 10^{-5}$. Grubość pojedynczej warstwy przyjęto 0.123 mm.

Analizę nośności przeprowadzamy zgodnie z algorytmem przedstawionym na rys. 8.1. Wyniki szczegółowych obliczeń prowadzących do wyznaczenia naprężeń w poszczególnych warstwach nie będą tutaj prezentowane. Zagadnienia te dotyczą klasycznej teorii laminatów, której opis można znaleźć w podręcznikach. Przykłady obliczeń, między innymi także laminatu krzyżowego, można znaleźć na przykład w [23].

Po wyznaczeniu naprężeń warstwowych działających w głównych osiach materiałowych, wyznaczano przy użyciu kryteriów wyłężeniowych Tsaia-Hilla, Tsaia-Wu i energetycznej wartości obciążeń niszczących warstwach. Celem użycia kryterium energetycznego wyznaczono współczynnik A ze wzoru (7.36), który dla analizowanego kompozytu przyjmuje wartość $A = -0.0368$. Według wszystkich kryteriów jako pierwsza ulega zniszczeniu warstwa 90° .

Podstawowe wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 8.3. Jak widać wszystkie kryteria prognozują wartość zniszczenia pierwszej warstwy na podobnym poziomie. W tabeli 8.3 przedstawiono również wartości naprężeń panujących w warstwie uszkodzonej w kierunkach jej głównych osi materiałowych. Analiza tych naprężeń pokazuje, że naprężenie σ_2 , czyli na kierunku poprzecznym do włókien osiąga wartość bliską wytrzymałości warstwy w tym kierunku.

Mamy zatem do czynienia z takim sposobem obciążenia, przy którym można określić sposób zniszczenia – w tym przypadku uszkodzenie osnowy – bez stosowanie dodatko-

wych warunków. Degradację macierzy sztywności przy analizie nośności z użyciem kryteriów Tsai-Hilla i Tsai-Wu przeprowadzono więc przyjmując $Q_{12} = 0$ i $Q_{22} = 0$. Daje to następującą postać zmodyfikowanej macierzy sztywności:

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 162.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.07 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (8.19)$$

Tabela 8.3. Wyniki analizy wytrzymałościowej laminatu [0/90]_s z materiału IM7/8551-7

Kryterium	Zniszczenie pierwszej warstwy				Zniszczenie ostatniej warstwy			
	$E_{x,o}$ [GPa]	$\sigma_{x,FPF}$ [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	$E_{x,d}$ [GPa]	$\sigma_{x,LPF}$ [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]
Tsai - Hill	85.58	519.76	-39.14	72.94	81.46	851.83	1703.66	52.64
Tsai - Wu	85.58	501.32	-38.59	71.15	81.46	1222.40	2444.80	64.94
energetyczne	85.58	513.45	-38.95	72.33	81.41	1485.08	2971.36	70.58

$E_{x,o}$, $E_{x,d}$ – moduły Younga pierwotny i po degradacji, $\sigma_{x,FPF}$, $\sigma_{x,LPF}$ – naprężenia w laminacie przy zniszczeniu pierwszej i ostatniej warstwy, σ_1 , σ_2 – naprężenia w osiach materiałowych warstwy

Aby przeprowadzić modyfikację sztywności przy użyciu proponowanej metody obliczamy kolejno (por. rys. 8.1):

- macierz podatności warstwy (3.10):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.006173 & -0.002093 & 0 \\ -0.002093 & 0.119904 & 0 \\ 0 & 0 & 0.483092 \end{bmatrix} \quad \left[\frac{1}{\text{GPa}} \right] \quad (8.19)$$

- moduły sztywności (7.5):

$$\lambda_I = 0.119943 \quad \text{GPa}, \quad (8.20a)$$

$$\lambda_{II} = 0.006134 \quad \text{GPa}, \quad (8.20b)$$

- składowe tensorów własnych (7.9, 7.13):

$$a_I = b_{II} = 0.018390, \quad (8.21a)$$

$$b_I = a_{II} = -0.999831, \quad (8.21b)$$

- rozkład spektralny tensora sztywności (8.3, 8.6):

$$\mathbf{Q}_I = \begin{bmatrix} 0.0028 & -0.1533 & 0 \\ -0.1010 & 8.3345 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (8.22a)$$

$$\mathbf{Q}_{II} = \begin{bmatrix} 162.9613 & 2.9974 & 0 \\ 2.9974 & 0.0551 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (8.22b)$$

$$\mathbf{Q}_{III} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.07 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (8.22c)$$

- gęstości energii krytycznych (7.33):

$$\Phi_{Ikr}(X_c, Y_t) = 0.320 \text{ MPa} \quad (8.23a)$$

$$\Phi_{IIkr}(X_c, Y_t) = 3.523 \text{ MPa} \quad (8.23b)$$

$$\Phi_{IIIkr}(S) = 8.125 \text{ MPa} \quad (8.23c)$$

- gęstości energii sprężystej od naprężeń działających w zniszczonej warstwie (7.25):

$$\Phi_I = 0.320 \text{ MPa} \quad (8.24a)$$

$$\Phi_{II} = 0.004 \text{ MPa} \quad (8.24b)$$

$$\Phi_{III} = 0.000 \text{ MPa} \quad (8.24c)$$

- współczynniki wyężenia (8.1):

$$\varphi_I = 1.000 \quad \varphi_{II} = 0.000 \quad \varphi_{III} = 0.000 \quad (8.25)$$

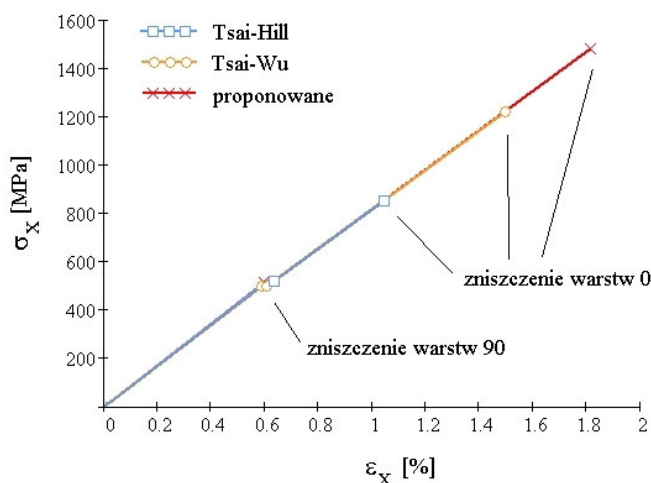
- zmodyfikowaną macierz sztywności warstwy (8.4):

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 162.75 & 2.99 & 0 \\ 2.99 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & 2.07 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (8.26)$$

Wartości współczynników wyężenia (8.25) potwierdzają opisaną w punkcie 8.2.3 możliwość identyfikacji sposobu zniszczenia. Pierwszy stan własny jest związany z uszkodzeniem osnowy na skutek działania naprężeń w kierunku prostopadłym do włókien i taki właśnie sposób uszkodzenia obserwujemy w tym przykładzie. Porównując macierze (8.19) i (8.26) widzimy, że uzyskujemy w obu przypadkach w przybliżeniu taki sam stopień degradacji. Przekłada się to na praktycznie taką samą wartość modułu Younga jaką uzyskujemy po degradacji sztywności (por. tabela 8.3).

Po modyfikacji macierzy sztywności tarczowej \mathbf{A} wyznaczamy nowy rozkład naprężeń w warstwach co daje podstawę do wyznaczenia obciążenia niszczącego ostatnią warstwę.

W tabeli 8.3 podano wartości naprężeń niszczących ostatnią warstwę wyznaczone kolejno z trzech omawianych kryteriów. Tutaj wyniki różnią się dość znacznie od siebie. Najmniejszą wartość naprężenia niszczącego 851.83 MPa podaje kryterium Tsai-Hilla, a największą, wynoszącą 1485.08 MPa, kryterium energetyczne. Należy zaznaczyć, że różnice te nie wynikają z przeprowadzonej modyfikacji sztywności, a tylko z samej postaci kryteriów. Po prostu dla tego przypadku obciążenia (rozciąganie wzdłuż i w poprzek włókien) obwiednie graniczne wyznaczone dla analizowanego materiału z każdego kryterium dość znacznie różnią się od siebie.



Rys. 8.3. Zależność $\sigma - \varepsilon$ dla laminatu $[0/90]_s$

Na rysunku 8.3 przedstawiono wykres zależności między naprężeniami rozciągającymi, a odkształceniami w laminacie. Prawie niezauważalna zmiana nachylenia wykresu po zniszczeniu warstwy 90° wynika ze sposobu zniszczenia, które nie dotyczyło włókien tylko osnowy, podczas gdy o sztywności podłużnej laminatów poprzecznych decydują włókna w warstwach 0° .

8.3.2 Rozciąganie laminatu $[\pm 20/-40/\pm 20/+40/\pm 20]_s$

Przedstawiony w tym rozdziale przykład zastosowania zaproponowanej metody degradacji polega na wyznaczeniu nośności przy jednoosiowym rozciąganiu laminatu o kodzie $[\pm 20/-40/\pm 20/+40/\pm 20]_s$. Przyjęto, że warstwy są wykonane z tego samego materiału co użyty w przykładzie z punktu 8.3.1. Również w tym przypadku, dla porównania przedstawiono analizę nośności z wykorzystaniem kryteriów Tsaia-Hilla i Tsaia-Wu.

Stałe materiałowe, obciążenie temperaturą, współczynniki rozszerzalności termicznej i grubość pojedynczej warstwy przyjmujemy identyczne jak w przykładzie 8.3.1.

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 8.4. Według każdego kryterium jako pierwsze ulegają zniszczeniu warstwy ± 20 . Naprężenie przy zniszczeniu pierwszej warstwy otrzymane z kryterium Tsaia-Hilla jest nieco większe niż w pozostałych dwóch przypadkach, można jednak mówić o ogólnie dobrej zgodności wyników dla wszystkich kryteriów, różnice nie przekraczają bowiem 10%.

Porównując naprężenia działające w zniszczonej warstwie w kierunkach osi materiałowych, zauważamy, że żadne z nich nie osiąga wartości odpowiedniej dla siebie wytrzymałości. Przykładowo dla kryterium Tsaia-Hilla otrzymujemy:

$$\frac{\sigma_1}{X_t} = \frac{1751.17}{2417.39} = 0.724 \quad (8.27a)$$

$$\frac{|\sigma_2|}{Y_c} = \frac{106.77}{175.82} = 0.607 \quad (8.27b)$$

$$\frac{|\sigma_6|}{S} = \frac{50.09}{183.41} = 0.273 \quad (8.27c)$$

Tabela 8.4. Wyniki analizy wytrzymałościowej laminatu [$\pm 20/-40/\pm 20/+40/\pm 20$]_s

Kryterium	Zniszczenie pierwszej warstwy					Zniszczenie laminatu	
	$E_{x,o}$ [GPa]	$\sigma_{x,FPF}$ [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	σ_6 [MPa]	$E_{x,o}$ [GPa]	$\sigma_{x,ULF}$ [MPa]
Tsai - Hill	62.28	955.16	1751.17	-106.77	-50.09	—	—
Tsai – Wu	62.28	867.41	1590.60	-98.28	-45.59	—	—
energetyczne	62.28	877.73	1609.42	-97.51	-46.12	35.43	2141.60

$\sigma_{x,OST}$ – naprężenie niszczące lamiant, pozostałe oznaczenia jak w Tabeli 7.3.

Nie można zatem, tak jak w poprzednim przykładzie, wnioskować o sposobie zniszczenia na podstawie wartości naprężeń. Stosując kryteria Tsai-Hilla i Tsai-Wu, należałoby skorzystać z dodatkowych warunków lub sposobów analizy, wymienionych w rozdziale 4. W tym przykładzie nie uczyniono tego, poprzestając w przypadku tych kryteriów na wyznaczeniu obciążenia niszczącego pierwszą warstwę.

Bez przeszkód można natomiast stosować kryterium energetyczne w połączeniu z zaproponowaną metodą degradacji. Wszystkie parametry potrzebne do wyznaczenia zmodyfikowanej macierzy sztywności \mathbf{Q}_d , z racji tego samego materiału warstwy, przyjmujemy według punktu 8.3.1.

Gęstości energii sprężystej od naprężeń działających w uszkodzonych warstwach ± 20 wynoszą:

$$\Phi_I = 0.969 \text{ MPa} \quad (8.28a)$$

$$\Phi_{II} = 7.924 \text{ MPa} \quad (8.28b)$$

$$\Phi_{III} = 0.514 \text{ MPa} \quad (8.28c)$$

co po uwzględnieniu wartości energii krytycznych (8.23) daje następujące współczynniki wyłężenia:

$$\varphi_I = 0.523 \quad \varphi_{II} = 0.414 \quad \varphi_{III} = 0.063 \quad (8.29)$$

Określona na podstawie (8.29) zmodyfikowana macierz sztywności warstwy ma postać:

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 95.50 & 1.68 & 0 \\ 1.68 & 4.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1.94 \end{bmatrix} \text{ [GPa]} \quad (8.30)$$

Uwzględniając powyższą postać macierzy sztywności w uszkodzonych warstwach ± 20 , przy nie zmienionej macierzy w warstwach ± 40 obliczamy nową sztywność tarczową laminatu i wyznaczamy wartość naprężenia, przy którym niszczą warstwy ± 40 . Wartość ta wynosi:

$$\sigma_{x,LPF} = 1246.35 \text{ MPa} \quad (8.31)$$

Pomimo że jest to ostatnia warstwa w laminacie (stąd oznaczenie LPF) to naprężenie (8.31) nie jest niszczące dla laminatu. Naprężenia panujące w warstwach ± 40 przy ich uszkodzeniu wynoszą:

$$\sigma_1 = 105.55 \text{ MPa} \quad (8.32a)$$

$$\sigma_2 = -89.43 \text{ MPa} \quad (8.32b)$$

$$\sigma_6 = -156.50 \text{ MPa} \quad (8.32c)$$

Kombinacja tych naprężeń doprowadziła do zniszczenia warstwy. Zważywszy jednak na wartość naprężeń σ_1 , czyli w kierunku ułożenia włókien, która jest dużo mniejsza od wytrzymałości w tym kierunku, można wnioskować, że włókna nie uległy uszkodzeniu. Możemy zatem dalej obciążać laminat, analizując go w tak zwanym stanie rozprężonym (włókna nie połączone z osnową). Dokonujemy zatem degradacji macierzy sztywności w warstwach ± 40 , obliczając kolejno:

- gęstości energii sprężystej od naprężeń (8.32):

$$\Phi_I = 0.501 \text{ MPa} \quad (8.33a)$$

$$\Phi_{II} = 0.033 \text{ MPa} \quad (8.33b)$$

$$\Phi_{III} = 5.916 \text{ MPa} \quad (8.33c)$$

- współczynniki wyteżenia:

$$\varphi_I = 0.270 \quad \varphi_{II} = 0.002 \quad \varphi_{III} = 0.728 \quad (8.34)$$

- zmodyfikowaną macierz sztywności warstwy ma postać:

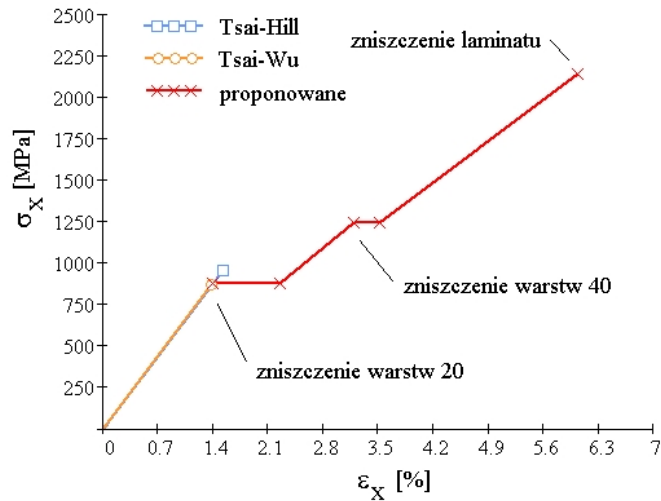
$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 162.68 & 2.88 & 0 \\ 2.88 & 6.14 & 0 \\ 0 & 0 & 0.56 \end{bmatrix} \text{ [GPa]} \quad (8.35)$$

Na podstawie (8.30) i (8.35) wyznaczono po raz kolejny nową macierz sztywności \mathbf{A} laminatu i naprężenie ostatecznie niszczące warstwy ± 40 , a co za tym idzie, również cały laminat (*Ultimate Laminate Failure*). Wartość tego naprężenia niszczącego wynosi:

$$\sigma_{x,ULF} = 2141.60 \text{ MPa} \quad (8.36)$$

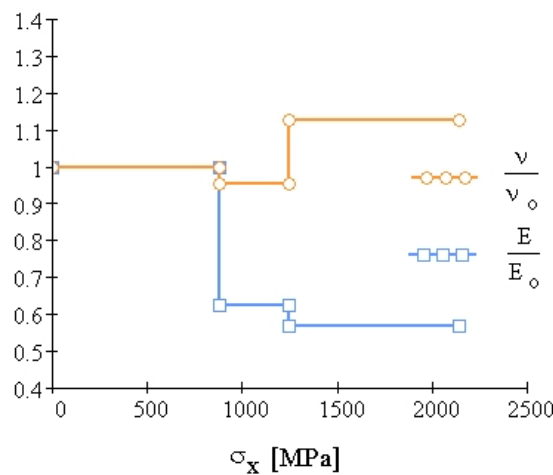
Warto zauważyć, że w stosunku do obciążenia uszkadzającego pierwszą warstwę według kryterium energetycznego, obciążenie ostatecznie niszczące laminat jest o 244.0% większe.

Rysunek 8.4 przedstawia wykres zależności między naprężeniami rozciągającymi, a odkształceniami w laminacie. Część dotycząca kryteriów Tsaia-Hilla i Tsaia-Wu kończy się na wartości wyznaczonej jako obciążenie niszczące pierwszą warstwę. Widoczny jest wpływ degradacji na pogarszanie się sztywności laminatu (coraz mniejsze nachylenie prostej na kolejnych odcinkach). Poziome półki, występujące na wysokości naprężeń niszczących kolejne warstwy, wynikają z degradacji sztywności laminatu. Po modyfikacji sztywności otrzymujemy nowy laminat o zmniejszonej sztywności podłużnej, co przy tym samym naprężeniu prowadzi do skokowego wzrostu odkształceń. Ponieważ w doświadczeniach nie obserwuje się podobnego efektu, niektórzy autorzy rysując wykres „obcinają” półki. Gdyby w ten sposób postąpić w tym przykładzie otrzymalibyśmy odkształcenie przy zniszczeniu na poziomie 4.8%, a nie 6.0% jak na rysunku 8.4.



Rys. 8.4. Zależność $\sigma - \varepsilon$ dla laminatu $[\pm 20/-40/\pm 20/+40/\pm 20]_s$,

Interesujące wyniki uzyskano, analizując przy użyciu proponowanej metody, zmianę modułu Younga i współczynnika Poissona w laminacie podczas jego stopniowego uszkodzania się. Wyniki te przedstawiono na rysunku 8.5. Podłużny moduł Younga cały czas stopniowo maleje, natomiast współczynnik Poissona maleje nieznacznie przy uszkodzeniu warstwy $\pm 20^\circ$, natomiast po uszkodzeniu warstwy $\pm 40^\circ$ wzrasta. Wzrost ten w stosunku do wartości w laminacie nieuszkodzonym wynosi 13 %. Takie zjawisko w laminatach o podobnym układzie warstw zaobserwował German, w przeprowadzonym przez siebie eksperymencie, którego wyniki można znaleźć w pracy [22].



Rys. 8.5. Zmiana modułu Young'a i współczynnika Poissona podczas rozciągania laminatu $[\pm 20/-40/\pm 20/+40/\pm 20]_s$,

W proponowanej metodzie degradacji macierzy sztywności, po jej rozkładzie na stany własne otrzymujemy dla elementu Q_{12} :

$$Q_{12,d} = (1 - \varphi_I) Q_{12}^I + (1 - \varphi_{II}) Q_{12}^{II} \quad (8.37)$$

Biorąc pod uwagę zależność (8.13) widać, że przy pewnej kombinacji współczynników φ_ρ jest możliwe uzyskanie po degradacji wzrostu elementu Q_{12} w warstwie, a w konsekwencji wzrost współczynnika Poissona w laminacie.

Pokazano tutaj dwa wybrane przykłady, ale stworzone dla potrzeb niniejszej pracy procedury obliczeniowe umożliwiają analizę dowolnego laminatu symetrycznego, pracującego w stanie tarczowym.

8.4. Weryfikacja doświadczalna

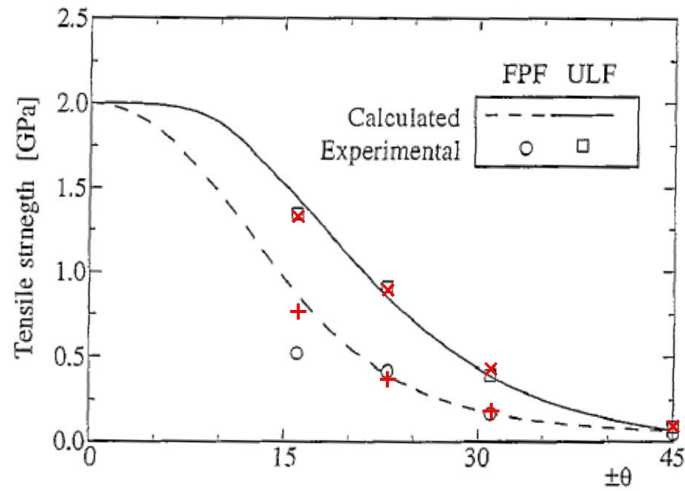
8.4.1 Rozciąganie i ściskanie laminatów z materiału węgiel / epoksyd

Prezentowany przykład opisuje weryfikację zaproponowanej metody z eksperymentem przeprowadzonym przez Levi'ego i Ishaia ze współautorami. Poddawali oni jednoosiowemu rozciąganiu [55] i ścisaniu [38] próbki w kształcie rury, wykonane z dwóch typów laminatów: kątowych o kodzie $[\pm\theta]_3$ oraz mieszanych o kodzie $[90/(\pm\theta)_2/90]$. Warstwy kątowe w obu typach laminatów przyjmowano równe 16, 23, 31 i 45°. Próbki wykonane były z kompozytu o osnowie epoksydowej zbrojonej włóknami węglowymi IM6-W. Charakterystyki materiałowe dla tego kompozytu są następujące: $X_t=1900$ MPa, $Y_t=60$ MPa, $X_c=1370$ MPa, $Y_c=260$ MPa, $S=44$ MPa, $E_1=155.4$ GPa, $E_2=10$ GPa, $G_{12}=4.9$ GPa, $\nu_{12}=0.3$.

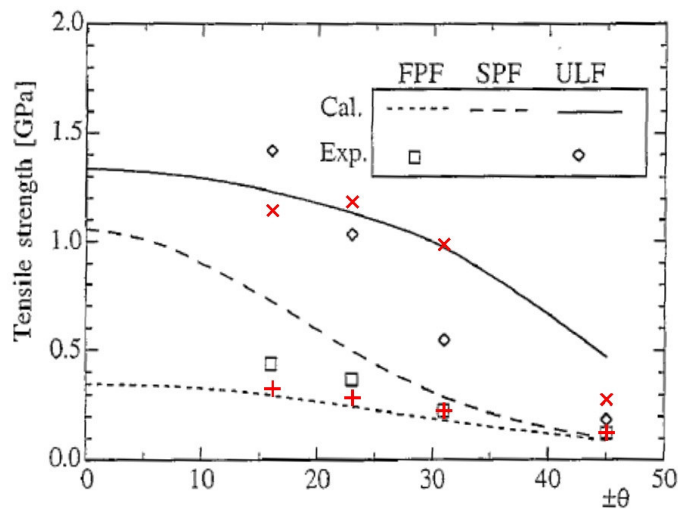
Wyniki badań doświadczalnych porównano w [55] i [38] z obliczeniami wykonanymi z zastosowaniem kryterium Tsaia-Hilla. Podczas eksperymentu stwierdzono, że we wszystkich przypadkach uszkodzenie pierwszej warstwy (także drugiej dla laminatu $[90/(\pm\theta)_2/90]$) następowało przez zniszczenie osnowy. Przyjęto zatem do obliczeń degradację macierzy sztywności przez zerowanie modułu Younga E_2 lub modułu ścinania G_{12} . Określenie sposobu zniszczenia ułatwiło tutaj przeprowadzone doświadczenie. Należy zauważyć, że przy braku danych doświadczalnych, identyfikacja sposobu zniszczenia przy pomocy zastosowanego w [55] i [38] kryterium Tsaia-Hilla byłaby możliwa tylko w dwóch przypadkach. Było by tak dla laminatów $[\pm\theta]_3$ gdzie naprężenia ścinające σ_6 w warstwie uszkodzonej osiągają wytrzymałość na ścinanie S oraz przy określaniu obciążenia FPF w rozciąganych laminatach $[90/(\pm\theta)_2/90]$, gdzie z kolei naprężenia poprzeczne σ_2 osiągają wartość wytrzymałości Y_t . Dla pozostałych przypadków analiza wartości naprężeń w głównych osiach materiałowych uszkodzonych warstw, nie daje podstaw do ustalenia sposobu zniszczenia.

Rysunki 8.6 ÷ 8.9, zaczerpnięte z [55] i [38], przedstawiają wyniki przeprowadzonych tam badań i obliczeń teoretycznych. Skrót na rysunkach oznaczają: FPF – zniszczenie pierwszej warstwy, ULF (*ultimate laminate failure*) – ostateczne zniszczenie laminatu, SPF (*second ply failure*) – zniszczenie drugiej warstwy. Zniszczenie drugiej warstwy nie powodujące zniszczenia laminatu występowało w przypadku laminatów typu $[90/(\pm\theta)_2/90]$.

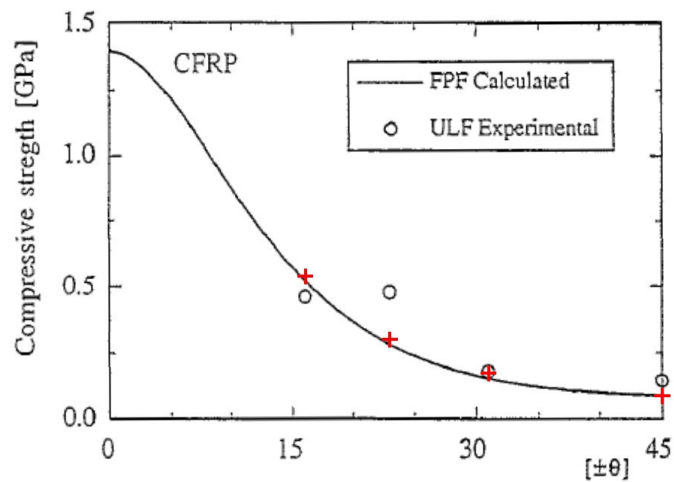
Wyniki obliczeń, przeprowadzonych przez autora w oparciu o proponowaną metodę degradacji sztywności naniesiono na rysunkach 8.6 ÷ 8.9 kolorem czerwonym. Obciążenie niszczące pierwszą warstwę oznaczono przez „+” zaś obciążenie niszczące laminat przez „×”. Bardzo dobrą zgodność wyników z eksperymentem uzyskano dla laminatów kątowych $[\pm\theta]_3$ zarówno w przypadku rozciągania jak i ściskania. W przypadku ściskania zniszczenie pierwszej warstwy było równoznaczne ze zniszczeniem laminatu, co zostało potwierdzone obliczeniowo. Dla rozciągania obciążenie FPF odpowiada zniszczeniu osnowy, przez przekroczenie wytrzymałości na ścinanie, natomiast obciążenie ULF odpowiada zniszczeniu włókien.



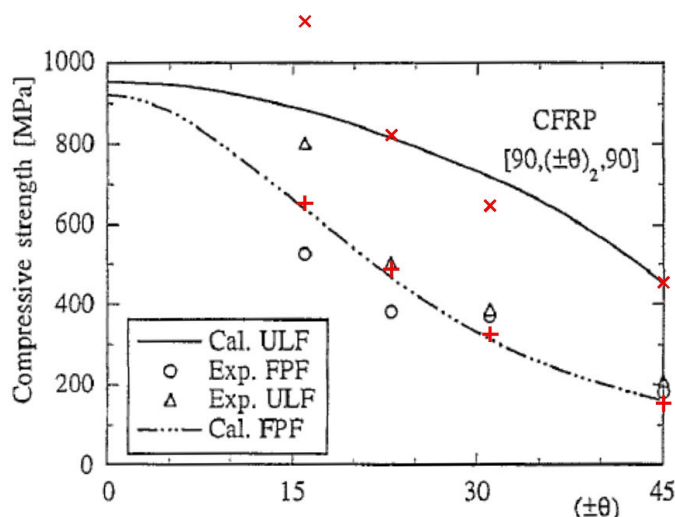
Rys. 8.6. Wyniki rozciągania laminatu $[\pm\theta]_3$ wg [55] i własnych obliczeń.



Rys. 8.7. Wyniki rozciągania laminatu $[90/(\pm\theta)_2/90]$ wg [55] i własnych obliczeń.



Rys. 8.8. Wyniki ściskania laminatu $[\pm\theta]_3$ wg [38] i własnych obliczeń.



Rys. 8.9. Wyniki ściskania laminatu $[90/(\pm\theta)_2/90]$ wg [38] i własnych obliczeń.

W przypadku laminatów mieszanych $[90/(\pm\theta)_2/90]$ o bardzo dobrej zgodności między obliczeniami, a eksperymentem można mówić jedynie w przypadku obciążenia FPF przy ściskaniu i rozciąganiu oraz dla kątów 23 i 45° przy rozciąganiu. Dla pozostałych przypadków naprężenia niszczące obliczone teoretycznie znacznie odbiegają od wyznaczonych doświadczalnie. Szczególnie jest to widoczne przy ściskaniu.

Dla przypadku rozciągania laminatów kątowych $[\pm\theta]_3$ proponowana metoda wykazała lepszą zgodność z doświadczeniem niż podejście z zastosowaniem kryterium Tsai-Wu.

8.4.2 Rozciąganie i ściskanie laminatów z materiału bor / epoksyd

Eksperyment polegający na rozciąganiu i ściskaniu laminatów o różnych konfiguracjach, wykonanych z materiału bor/5505 został wykonany przez Petita i Waddoupsa [69]. Prezentowane w tym rozdziale krzywe $\sigma-\varepsilon$, oraz dane materiałowe zostały zaczerpnięte z pracy Mayesa [60], który, oprócz pracy [69] wykorzystał dodatkowe informacje na temat tego eksperymentu, przedstawione przez Petita w [70].

Dla stałych materiałowych podanych w [60] nie można stosować kryterium energetycznego (7.35) z uwagi na ujemną energię krytyczną, jaką otrzymujemy dla kombinacji naprężeń z II ćwiartki układu σ_1, σ_2 . Biorąc pod uwagę dyskusję przeprowadzoną w rozdziale 7.7.5. o dużej czułości wzorów na energie krytyczne, zdecydowano się zmienić wartości trzech stałych materiałowych, tak jak to pokazuje tabela 8.5.

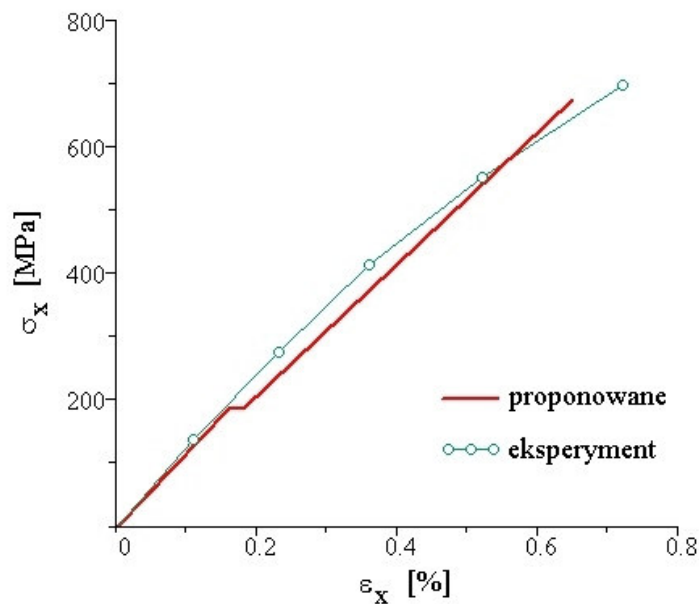
Tabela 8.5 Zmiana stałych materiałowych kompozytu bor/5505

Materiał	Stałe materiałowe			Energie krytyczne	
	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν_{12}	$\Phi_{I\text{kr}}$ [GPa]	$\Phi_{II\text{kr}}$ [GPa]
bor/5505 według [60]	207	21	0.294	0.183	-111.899
po modyfikacji	206	20	0.28	0.192	600.729

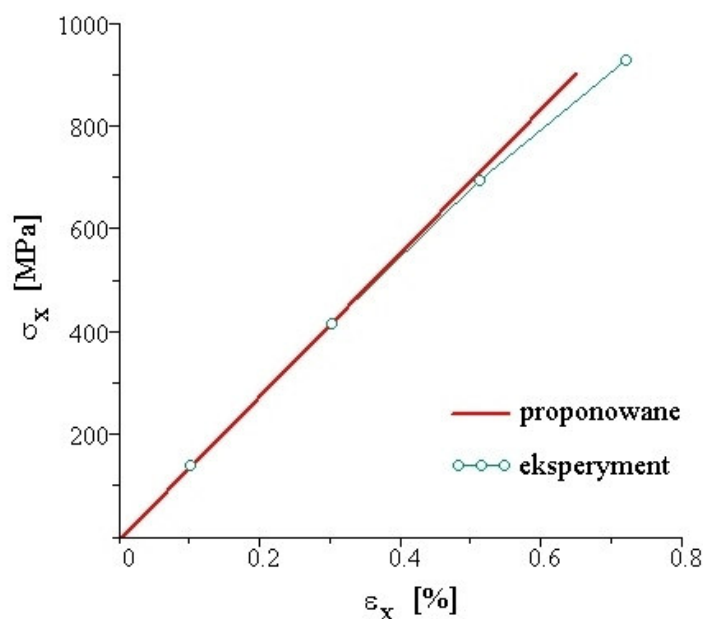
Przyjęte zmiany są bardzo małe. Mieszczą się w granicach błędu pomiaru zmieniających wielkości, nie mają zatem ilościowego wpływu na analizę nośności, a pozwalają formalnie stosować kryterium energetyczne.

Do porównania z eksperymentem przyjęto więc ostatecznie następujące dane materiałowe: $X_t=1379$ MPa, $Y_t=87.6$ MPa, $X_c=2864$ MPa, $Y_c=262$ MPa, $S=125.5$ MPa, $E_1=206$ GPa, $E_2=20$ GPa, $G_{12}=7.71$ GPa, $\nu_{12}=0.28$.

Na rysunkach 8.10 ÷ 8.15 przedstawiono krzywe $\sigma-\varepsilon$ otrzymane w eksperymencie i wyznaczone według proponowanej metody przy użyciu kryterium energetycznego. Krzywe eksperymentalne powstały przez połączenie liniami prostymi dyskretnych punktów pomiarowych (oznaczonych kółeczkami). Wybrano tylko kilka charakterystycznych krzywych, pozostałe zamieszczono w dodatku D.7. Wyniki nośności dla wszystkich laminatów przeanalizowanych w [69] przedstawiono w tabeli 8.6.



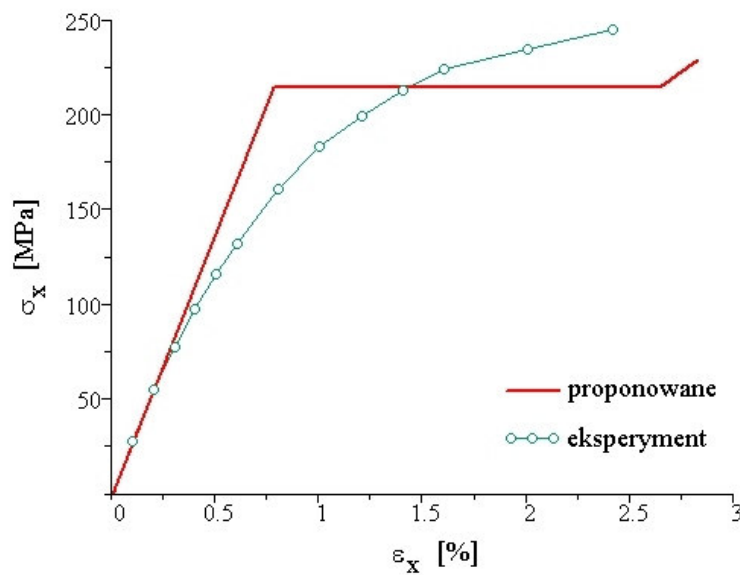
Rys. 8.10. Rozciąganie laminatu $[0/90]_s$ – eksperyment wg [69].



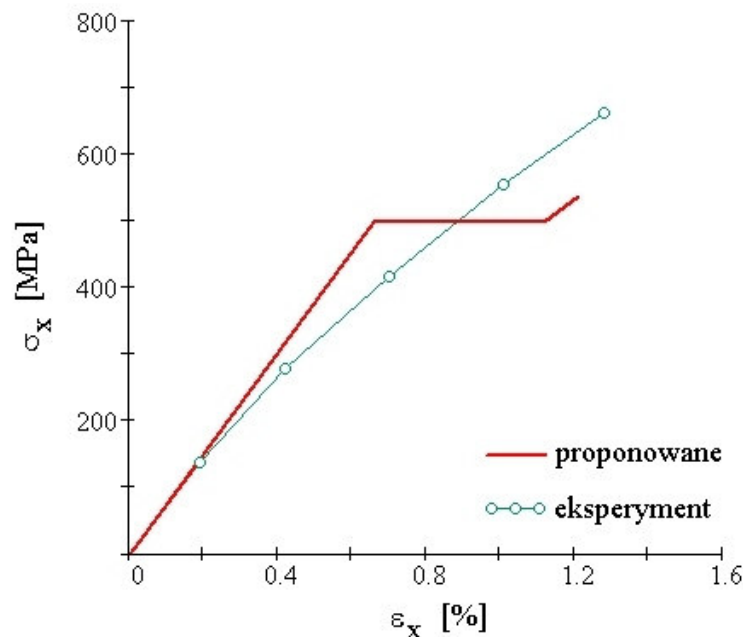
Rys. 8.11. Rozciąganie laminatu $[\pm 20]_s$ – eksperyment wg [69].

Bardzo dobrą zgodność teorii z eksperymentem uzyskano w przypadkach rozciągania laminatów $[0/90]_s$ i $[\pm 20]_s$ (rys. 8.10 i 8.11). Zgodność ta dotyczy zarówno przebiegu zmienności funkcji $\sigma - \varepsilon$ jak i wartości naprężeń i odkształceń niszczących.

Najgorsze wyniki w porównaniu z doświadczeniem uzyskano dla ściskania laminatów $[\pm 60]_s$ i $[\pm 30]_s$ (rys. 8.14 i 8.15). Otrzymano tu największe różnice pomiędzy naprężeniami niszczącymi. W przypadku pierwszym wartość obliczona teoretycznie jest dużo mniejsza, a w przypadku drugim dużo większa, niż wyznaczona doświadczalnie. Dla laminatu $[\pm 30]_s$ równie duże różnice zanotowano dla wartości odkształceń niszczących. Przebieg zmienności funkcji $\sigma - \varepsilon$ jest zgodny z doświadczeniem tylko do pewnego poziomu naprężeń. W przypadku laminatu $[\pm 60]_s$ są to naprężenia, przy których, według obliczeń, zniszczeniu ulega osnowa.



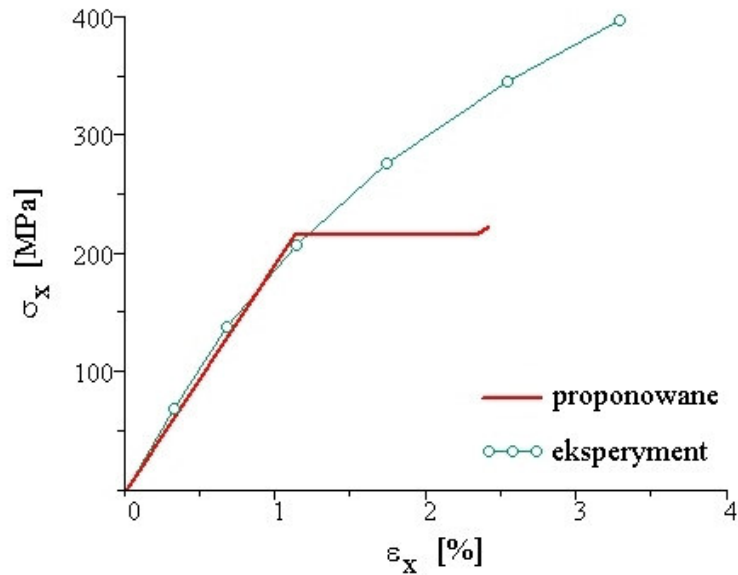
Rys. 8.12. Rozciąganie laminatu $[\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].



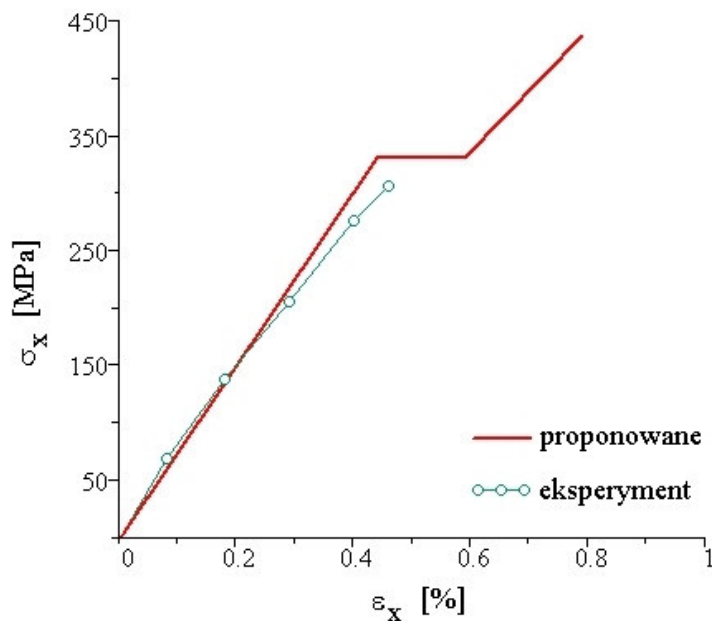
Rys. 8.13. Rozciąganie laminatu $[\pm 30]_s$ – eksperyment wg [69].

Przebieg zmienności funkcji $\sigma-\varepsilon$ wyznaczonych doświadczalnie ma kształt zbliżony do prostej dla tych laminatów, które zawierają warstwy 0° lub odchylone o kąt nie większy od 20° . O nośności takich laminatów decyduje wytrzymałość włókien, a te wykazują cechy liniowej sprężystości aż do zniszczenia. Dla takich laminatów uzyskuje się zbliżony kształt funkcji $\sigma-\varepsilon$ wyznaczonych doświadczalnie i teoretycznie.

Z kolei w laminatach, składających się z warstw, w których włókna ułożone są pod kątem większym od 30° ujawnia się wpływ osnowy na nośność. Zależność $\sigma-\varepsilon$ dla osnowy jest nieliniowa co przekłada się na taki właśnie charakter wykresów dla laminatów $[\pm 30]_s$, $[\pm 45]_s$ czy $[\pm 60]_s$ przedstawionych na powyższych rysunkach.



Rys. 8.14. Ścisnienie laminatu $[\pm 60]_s$ – eksperyment wg [69].



Rys. 8.15. Ścisnienie laminatu $[\pm 30]_s$ – eksperyment wg [69].

Proponowana metoda degradacji sztywności w połączeniu z energetycznym kryterium wyteżeniowym nie jest w stanie opisać nieliniowego charakteru zależności $\sigma-\varepsilon$. Pomiedzy poszczególnymi wartościami naprężeń, wyznaczającymi uszkodzenia kolejnych warstw, otrzymamy zawsze wykres liniowy, gdyż na liniowej teorii sprężystości oparta jest klasyczna teoria laminatów. Jednakże poziome półki jakie występują na wykresach, będące skutkiem zmiany sztywności laminatu, mogą w pewnym stopniu opisać wspomnianą nieliniowość. Przykładem mogą być wyniki obliczeń pokazane na rysunkach 8.12 i 8.13. Wartości naprężeń niszczących i odkształceń przy zniszczeniu są tutaj bliskie tym określonym doświadczalnie, szczególnie w przypadku laminatu $[\pm 45]_s$.

Po analizie wykresów dla wszystkich laminatów, również tych zamieszczonych w załączniku, można stwierdzić, że ogólnie lepsze wyniki uzyskano dla rozciągania. W przypadku ściskania zwraca uwagę fakt, że wykresy $\sigma-\varepsilon$ wyznaczone doświadczalnie i obliczone teoretycznie, już w początkowej fazie nie pokrywają się ze sobą. Świadczyć to może o tym, że materiał ten posiada różne wartości podłużnego modułu Younga przy ściskaniu i rozciąganiu. W obliczeniach teoretycznych, zarówno przy rozciąganiu jak i przy ściskaniu, przyjmowano ten sam moduł Younga wynoszący $E_1 = 206$ GPa.

Tabela 8.6. Obciążenia niszczące dla laminatów wykonanych z materiału bor/5505 wg [60]

Laminat	Eksperyment	Teoria	Eksp/Teor
$[0/90]_s$ Sciskanie	-1814	-1559	0.86
$[0/90]_s$ Rozciąganie	699	676	0.97
$[\pm 20]_s$ S	-766	-712	0.93
$[\pm 20]_s$ R	927	903	0.97
$[\pm 30]_s$ S	-307	-438	1.43
$[\pm 30]_s$ R	664	537	0.81
$[\pm 45]_s$ R	245	229	0.93
$[\pm 60]_s$ S	-397	-223	0.56
$[\pm 60]_s$ R	122	156	1.28
$[0_3/\pm 45]_s$ S	-1833	-1775	0.97
$[0_3/\pm 45]_s$ R	941	905	0.96
$[0/90/\pm 45]_s$ R	497	579	1.16
$[0/\pm 60]_s$ R	499	575	1.15
$[90_3/\pm 45]_s$ R	138	192	1.39

Tabela 8.6 przedstawia wyniki doświadczalne dla wszystkich laminatów zaczerpnięte z pracy [69]. Umieszczono w niej także wartości naprężeń niszczących wyznaczone teoretycznie, przy użyciu proponowanego w niniejszej rozprawie podejścia energetycznego. Zaprezentowane wyniki świadczą o dobrej zgodności proponowanej metody z wynikami badań doświadczalnych. Różnice pomiędzy wartościami pomierzonymi, a przewidywanymi w zdecydowanej większości przypadków nie przekraczają 15%. Najlepsze dopasowanie z błędem wynoszącym 3% uzyskano dla laminatów $[0/90]_s$ i $[\pm 20]_s$ dla rozciągania oraz dla

laminatu $[0_3/\pm 45]_s$ w przypadku ściskania. Największy błąd w przypadku rozciągania wyniósł 39% i wystąpił dla laminatu $[90_3/\pm 45]_s$, natomiast w przypadku ściskania największy błąd wystąpił w laminacie $[\pm 60]_s$, a jego wartość wyniosła 44%. Błąd średni ze wszystkich przypadków obejmujących rozciąganie i ściskanie wyniósł 17.5%.

9. Podsumowanie i wnioski

W pracy przeprowadzono – w zgodzie z założonym celem – analizę wytrzymałościową warstwowych kompozytów włóknistych z wykorzystaniem energetycznego kryterium wyężeniowego sprężystych stanów własnych. Przedstawione w pracy oryginalne rozwiązania autora dotyczą dwóch aspektów analizy wytrzymałościowej kompozytów. Są to kryterium wyężeniowe do określenia wytrzymałości pojedynczej warstwy oraz metoda degradacji sztywności laminatu na skutek uszkodzania się jego kolejnych warstw.

Kryterium wyężeniowe dla pojedynczej warstwy ortotropowej kompozytu w płaskim stanie naprężenia zostało wyspecyfikowane z ogólnego sformułowania Rychlewskiego. Specyfikację kryterium poprzedzono wyznaczeniem dla tensora podatności trzech stanów własnych, w oparciu o które dokonano energetycznie niezależnego rozkładu gęstości energii sprężystej. Energie krytyczne, występujące w ogólnym sformułowaniu kryterium, wyznaczono w oparciu o myślowe eksperymenty, polegające na obciążaniu warstwy aż do zniszczenia w kierunkach głównych osi materiałowych.

Metodę degradacji macierzy sztywności kompozytu sformułowano w oparciu o kryterium wyężeniowe Rychlewskiego i związany z nim rozkład spektralny tensora podatności. Modyfikacji macierzy sztywności dokonuje się przy pomocy współczynników wyężenia, zdefiniowanych jako stosunek gęstości energii sprężystej zgromadzonej w danym stanie własnym pod wpływem działającego obciążenia, do energii krytycznej w tym stanie.

Zaproponowane w pracy zarówno kryterium wyężeniowe jak i metoda degradacji sztywności, zostały zweryfikowane przez autora w oparciu o dostępne w literaturze dane doświadczalne.

Otrzymane w pracy rezultaty pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

1. Przyjęty sposób wyznaczenia energii krytycznych, wykorzystujący charakterystyki wytrzymałościowe warstwy w jej głównych kierunkach ortotropii pozwala zapisać kryterium w postaci uwzględniającej charakterystyki zarówno wytrzymałościowe jak i sztywnościowe, podobnie jak to ma miejsce w wielu powszechnie stosowanych kryteriach.
2. Wyznaczone kryterium jest bardzo czułe na współczynnik interakcji naprężeń normalnych. Nawet niewielka zmiana parametrów sztywnościowych i wytrzymałościowych może prowadzić do znacznego wydłużenia obwiedni granicznej, a nawet do przejścia jej w dwie hiperbole. Ta druga sytuacja oznacza, że nie dla wszystkich materiałów kryterium to może być stosowane. Można stwierdzić, że dla większości kompozytów o osnowie polimerowej zbrojonych włóknami węglowymi kryterium energetyczne może być stosowane. Rzadziej możliwość taka występuje w przypadku kompozytów zbrojonych włóknami borowymi i aramidowymi, a dla kompozytów zbrojonych włóknem szklanym kryterium energetyczne można stosować jedynie w szczególnych przypadkach obciążenia warstwy.
3. W pracy wykazano, że matematyczny warunek na uzyskanie dla danego materiału zamkniętej obwiedni granicznej, ma dla kryterium energetycznego sens fizyczny, jest bowiem równoznaczny z warunkami, wynikającymi z analizy energii krytycznych. Uzyskane warunki energetyczne można wykorzystać do weryfikacji wyników eksperymentu, w którym wyznacza się charakterystyki materiałowe dla warstwy kompozytu.

4. Weryfikacja doświadczalna wykazała, że wyznaczone kryterium wykazuje bardzo dobrą zgodność z doświadczeniami typu off-axis, czyli polegającymi na rozciąganiu lub ściskaniu warstwy kompozytowej siłą o dowolnym kierunku w stosunku do ułożenia włókien. W przypadku dwuosiowego stanu naprężenia zgodność z doświadczeniem nie jest tak dobra jak dla testów off-axis i zależy od rodzaju materiału oraz od kierunków działania naprężeń. Należy jednak zauważyć, że dla dwuosiowego stanu naprężenia również istniejące kryteria wyłężeniowe nie zawsze dobrze prognozują zniszczenie materiału. Wynika stąd wniosek, że każdorazowo, przed wyborem otrzymanego kryterium wyłężeniowego do opisu wytrzymałości kompozytu wykonanego z danego materiału, należałoby dokonać weryfikacji doświadczalnej. Uwaga ta dotyczy również kryteriów istniejących.
5. Zaproponowana metoda degradacji sztywności laminatu pozwala na częściową redukcję każdego elementu macierzy sztywności w uszkodzonej warstwie bez wcześniejszej identyfikacji sposobu zniszczenia. Bardzo ułatwia to proces wyznaczania nośności laminatu. Algorytm obliczeniowy jest przejrzysty i łatwy do zastosowania w obliczeniach komputerowych. Ponadto w sposób racjonalny modyfikowana jest cała macierz, a nie - jak to ma miejsce w dotychczasowych modelach - wybrane w oparciu o dość arbitralne kryteria jej poszczególne elementy. Wszystko to stanowi to o zalecie tej metody w porównaniu ze sposobami obliczeń stosowanymi dotychczas.
6. Zaletą zaproponowanej metody jest również to, że posługując się jednym kryterium wyłężeniowym, można analizować nośność laminatów bez wprowadzania dodatkowych warunków czy hipotez.
7. Pomimo iż nie jest to konieczne do wyznaczenia nośności laminatu, zaproponowana metoda daje, dla kompozytów zbrojonych włóknami jednokierunkowymi, możliwość identyfikacji sposobu zniszczenia. W pracy wykazano, że pierwszy stan własny jest związany z uszkodzeniem się osnowy od poprzecznego pęknięcia (lub zgniatania), drugi stan własny z uszkodzeniem włókien, a trzeci z uszkodzeniem osnowy od ścinania. Ponieważ zdefiniowane współczynniki wyłężenia dotyczą poszczególnych stanów własnych, można na podstawie ich wartości wnioskować o sposobie zniszczenia.
8. Zaproponowana metoda degradacji umożliwia opis obserwowanego doświadczalnie zjawiska, polegającego na wzroście współczynnika Poissona w uszkodzającym się laminacie podczas jego rozciągania. Możliwość ta istnieje dzięki pewnej specyfice rozkładu spektralnego tensora podatności, która powoduje, że w pewnych przypadkach uzyskuje się wzrost elementu Q_{12} po degradacji sztywności w warstwie. Ponieważ element Q_{12} jest związany ze współczynnikiem Poissona można w konsekwencji, dla niektórych typów konfiguracji warstw, uzyskać wzrost tego współczynnika w laminacie. Stosowane obecnie metody degradacji macierzy sztywności zmniejszają zawsze wszystkie elementy macierzy sztywności, a więc również element Q_{12} przez co w niektórych typach laminatów można nie uzyskać teoretycznego uzasadnienia wzrostu współczynnika Poissona po degradacji.
9. Weryfikację doświadczalną zaproponowanej metody przeprowadzono dla dwóch materiałów kompozytowych (węgiel/epoksyd i bor/epoksyd) ale dla stosunkowo dużej liczby różnych konfiguracji warstw. Poza kilkoma wyjątkami można mówić o ogólnie dobrej zgodności pomiędzy teorią, a eksperymentem w przypadku wartości obciążenia niszczącego laminat. Dla kompozytów z materiału bor/epoksyd porównano również krzywe zależności $\sigma-\varepsilon$. Bardzo dobrą zgodność z doświadczeniem uzyskano dla tych laminatów, które wykazują cechy liniowej

sprężystości aż do zniszczenia. Są to laminaty zawierające warstwy 0° lub odchyłone o kąt nie większy od 20° . O ich nośności decyduje wytrzymałość włókien, a te pracują w zakresie liniowo-sprężystym. Laminaty składające się z warstw, w których włókna ułożone są pod kątem większym od 30° wykazują przy rozciąganiu i ściskaniu cechy nieliniowe, co jest skutkiem wpływu osnowy na ich nośność. Proponowana metoda degradacji sztywności w połączeniu z energetycznym kryterium wyężeniowym nie jest w stanie opisać nieliniowego charakteru zależności $\sigma - \varepsilon$. Pomiedzy poszczególnymi wartościami naprężeń, wyznaczającymi uszkodzenia kolejnych warstw, otrzymamy zawsze wykres liniowy, gdyż na liniowej teorii sprężystości oparta jest klasyczna teoria laminatów.



Literatura

- [1] **Aghdam M. M., Pavier M. J., Smith D.J.:** *Micro-mechanics of off-axis loading of metal matrix composites using finite element analysis.* International Journal of Solids and Structures, 2001, t. 38, s. 3905 ÷ 3925.
- [2] **Arramon Y. P., Mehrabadi M. M., Martin D. W., Cowin S. C.:** *A multidimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes.* International Journal of Solids and Structures, 2000, t. 37, s. 2915 ÷ 2935
- [3] **Barker A. J., Balasundaram V.:** *Compression testing of carbon fibre-reinforced plastics exposed to humid environments.* Composites, 1987, t. 18, nr 3, s. 217 ÷ 226.
- [4] **Benzeggagh, M. L., Khellil, K. and Chotard, T.:** *Experimental determination of Tsai Failure Tensorial Terms Fij for unidirectional composite material.* Composites Science and Technology 1995, t. 55, s. 145 – 156.
- [5] **Biegler M. W., Mehrabadi M. M.:** *An energy based constitutive model for anisotropic solids subject to damage.* Mechanics of Materials, 1995, t. 19, s. 151÷ 164.
- [6] **Bing Q., Sun C. T.:** *Modeling and testing strain rate-dependent compressive strength of carbon/epoxy composites.* Composites Science and Technology, 2005, t. 65, s. 2481 ÷ 2491.
- [7] **Bogetti T. A., Hoppel C. P. R., Harik V. M., Newill J. F., Burns B. P.:** *Predicting the nonlinear response and progressive failure of composite laminates.* Composites Science and Technology, 2004, t. 64, s. 329 ÷ 342.
- [8] **Cazeneuve C., Joguet P., Maile J. C., Oytana C.:** *Predicting the mechanical behaviour of Kevlar/epoxy and carbon/epoxy filament-wound tubes.* Composites, 1992, t. 23, nr 6, s. 415 ÷ 424.
- [9] **Chamis C. C.:** *Failure Criteria for Filamentary Composites.* NASA Tu-D-5367, 1967.
- [10] **Chang F.K., Chang K.Y.:** *A progressive damage model for laminated composites containing a stress concentrations.* Journal of Composites Matererials, 1987, t. 21, s. 834 ÷ 855.
- [11] **Chang R. R.:** *Experimental and theoretical analyses of first-ply failure of laminated composite pressure vessels.* Composite Structures, 2000, t. 49, s. 237 ÷ 243.
- [12] **Chiu K. D.:** *Ultimate strength of laminated composites.* Journal of Composites Materials, 1969, t.3, s. 578 ÷ 582.
- [13] **Cowin S. C., Mehrabadi M. M., Sadegh A. M.:** *Kelvin formulation of the anisotropic Hooke's law.* In: Wu J. J., Ting T. C. T., Barnett D. M. (eds.), *Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications.* Philadelphia: SIAM, 1991, s. 340 ÷ 356
- [14] **Cowin S. C., Mehrabadi M. M.:** *Anisotropic symmetries of lineaar elasticity.* Applied Mechanics Reviews, 1995, t. 48, s. 247 ÷ 285
- [15] **Cowin S. C., Yang G.:** *Material symmetry optimization by Kelvin modes.* Journal of Engineering Mathematics 2000, 37, s. 27 ÷ 43.
- [16] **Craddock J. N.:** *Behavior of Composite Laminates After First-Ply-Failure.* Composites Structures, 1985, t. 3, s. 187 ÷ 200
- [17] **Cuntze R. G.:** *Bruchtyp-Festigkeitskriterien, formuliert mit Invarianten, die die Werkstoffsymmetrie des jeweiligen iso-/anisotropen Werkstoffs beinhalten.* Technischer

- Bericht, 04.12.95, MAN-Technologie Informationszentrum Augsburg, in Workshop Comp. Forsch. in der Mech., 1995.
- [18] **Dąbrowski H.:** *Strukturalno – statystyczne kryterium wyłężenia materiałów wielofazowych na przykładzie polimerowych kompozytów włóknistych*. Oficyna Wydawnicza Pol. Wrocławskiej, Wrocław 2003, s. 262.
- [19] **Dąbrowski, H.:** *Wytrzymałość polimerowych kompozytów włóknistych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2002, s. 238.
- [20] **Eberhardsteiner J., Mackenzie-Helnwein P.:** *Biaxial strength test for the macroscopic characterization of clear spruce wood*. 16th ASCE Engineering Mechanics Conference, University of Washington, Seattle, July 16÷18, 2003.
- [21] **Edge E. C.:** *Stress based Grant-Sanders method for predicting failure of composite laminates*. Composites Science and Technology, 1998, t. 58, s. 1033 ÷ 1041.
- [22] **German J.:** *Intralaminar damage in fiber-reinforced polymeric matrix laminates*. Politechnika Krakowska, Seria Inżynieria Lądowa, Monografia 308, Kraków 2004.
- [23] **German J.:** *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*. Wyd. Politechniki Krakowskiej, 1996, s. 282
- [24] **Gołaski L.:** *Failure criteria for laminates under combined loading conditions*, in Joint Seminary on Failure of Advanced Materials, Francois D. and Golaski L. (Editors), Paris – Kielce, Kielce University of Technology, 1996, s. 37 ÷ 61.
- [25] **Gotsis P. K., Chamis C. C., Minnetyan L.:** *Prediction of composite laminate fracture: micromechanics and progressive fracture*. Composites Science and Technology, 1998, t. 58, s. 1137 ÷ 1150.
- [26] **Graff E., Springer G. S.:** *Design of Composites Straps*. Composite Structures, 1991, t. 17, s. 187 ÷ 211
- [27] **Hashin Z., Rotem A.:** *A fatigue failure criterion for fibre reinforced materials*. Journal of Composites Materials, 1973, t. 7, s. 448÷464.
- [28] **Hashin Z.:** *Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites*, Journal of Applied Mechanics, t. 47, June 1980, s. 329÷334
- [29] **Hebda M., German J.:** *Nośność warstwowych kompozytów włóknistych z zastosowaniem nowej metody degradacji sztywności*. II Konferencja Naukowo – Techniczna „Materiały Kompozytowe w Budownictwie Mostowym” Łódź 2006, Zeszyty Naukowe PŁ, praca złożona do redakcji.
- [30] **Hebda M., German J.:** *Zastosowanie energetycznego kryterium wyłężeniowego do oceny degradacji sztywności laminatów kompozytowych*. Konferencja Naukowo-Techniczna „Polimery i kompozyty konstrukcyjne”, Istebna-Gliwice 2006, s. 65÷74.
- [31] **Hebda M., Pęcherski R. B.:** *Energy – Based Criterion of Elastic Limit State in Fibre - Reinforced Composites*. Archives of Metallurgy and Materials, 2005, t. 50, s. 1073 ÷ 1088.
- [32] **Hebda M.:** *Energetyczne kryterium wyłężeniowe dla kompozytów włóknistych – porównanie z wynikami badań doświadczalnych*. Rudy i metale nieżelazne, 2006, R-51, nr 9, s. 537÷545.
- [33] **Highsmith A. L., Reifsnider K. L.:** *Stiffness-Reduction Mechanisms in Composite Laminates*. Damage in Composite Materials, ASTM STP 775, Ed. Reifsnider K. L., American Society for Testing and Materials, 1982, s. 103 ÷ 117
- [34] **Hill R.:** *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, London 1950, s. 318.

- [35] **Hoffman O.:** *The Brittle Strength on Orthotropic Materials*. Journal of Composites Materials, April 1967, s. 200÷206.
- [36] **Huang ZM.** *A bridging model prediction of the tensile strength of composite laminates subjected to biaxial loads*. Composites Science and Technology, 2004, t. 64, s. 395 ÷ 488.
- [37] **Huber M. T.:** *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału*. Czasopismo Techniczne, XXII, Lwów, 1904.
- [38] **Ishai O., Levi H., Altus E., Sheinman I.:** *Mechanical performance of thin-walled tubular composite elements under uniaxial loading part 2: compressive behaviour*. Composites Structures 1995, t. 31, s. 171 ÷ 175.
- [39] **Janus-Michalska M., Pęcherski R. B.:** *Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling*. Technische Mechanik, 2003, t. 23, s. 234 ÷ 244.
- [40] **Jemiolo S., Kowalczyk K.:** *Sformułowanie niezmiennicze i rozkład spektralny anizotropowego warunku plastyczności Hilla*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, 1999, z. 133, s. 87 ÷ 123.
- [41] **Jemiolo S.:** *Warunki plastyczności oraz hipotezy wyężeniowe materiałów ortotropowych i transversalnie izotropowych. Przegląd literatury. Niezmiennicze sformułowanie relacji konstytutywnych*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, 1996, z. 131, s. 5 ÷ 51.
- [42] **Jen M. H. R., Lee C.H.:** *Strength and life in thermoplastic composite laminates under static and fatigue loads. Part I. Experimental*. International Journal of Fatigue, 1998, t. 20, nr 9, s. 605 ÷ 615.
- [43] **Jenkins C.F.:** *Materials of construction used in aircraft and aircraft engines*. Report to the Great Britain Aeronautical Research Committee, 1920.
- [44] **Jiang A., Tennyson R. C.:** *Closure of the Cubic Tensor Polynomial Failure Surface*, Journal of Composite Materials, t. 23, March 1989, s. 208 ÷ 231.
- [45] **Jones R. M.:** *Mechanics of Composite Materials. Second Edition*. Taylor and Francis, 1999, s. 519.
- [46] **Kam T. Y., Sher H. F., Chao T. N.:** *Predictions of deflection and first ply failure load of thin laminated composite plates via the finite element approach*. International Journal of Solids and Structures, 1996, t. 33, nr 3, s. 375 ÷ 398.
- [47] **Kollar P. L., Springer G. S.:** *Mechanics of Composites Structures*. Cambridge University Press, 2003.
- [48] **Kordzikowski P., Janus-Michalska M., Pęcherski R. B.:** *Analiza wpływu wytrzymałości prętów sześcienniej struktury komórkowej na rozkład granicznych energii*. Rudy i metale nieżelazne, 2004, t. 49, nr 3, s. 114 ÷ 120.
- [49] **Kordzikowski P., Pęcherski R. B.:** *Porównanie energetycznych kryteriów wyężenia dla sprzężonych i rozłącznych sprzężystych stanów własnych na przykładzie wybranych materiałów anizotropowych*. Rudy i metale nieżelazne, 2005, r. 50, nr 10-11, s. 566 ÷ 571.
- [50] **Kowalczyk-Gajewska K., Ostrowska-Maciejewska J.:** *Energy-based limit criteria for anisotropic elastic materials with constraints*. Archives of Mechanics, 2005, t. 57.
- [51] **Kowalczyk-Gajewska K., Ostrowska-Maciejewska J.:** *The influence of internal restrictions on the elastic properties of anisotropic materials*. Archives of Mechanics, 2004, t. 56, s. 205 ÷ 232.
- [52] **Lee C. S., Hwang W., Park H. C., Han K. S.:** *Failure of carbon/epoxy composite tubes under combined axial and torsional loading. 1 Experimental results and prediction of biaxial strength by the use of neural networks*. Composites Science and Technology 1999, t. 59, s. 1779 ÷ 1788.

- [53] **Lee C. S., Hwang W.:** Biaxial strength of cross-ply carbon fiber-reinforced composite laminates fabricated by lapped molding technique. *Materials science and engineering*, 1999, t. A271, s. 496 ÷ 502.
- [54] **Lee J. W., Daniel I. M.:** *Progressive transverse cracking of crossply composite laminates*. *Journal of Composites Materials*, 1990, t. 24, s. 1225 ÷ 1243.
- [55] **Levi H., Ishai O., Altus E., Sheinman I.:** *Mechanical performance of thin-walled tubular composite elements under uniaxial loading part 1: tensile behaviour*. *Composites Structures* 1995, t. 31, s. 163 ÷ 170.
- [56] **Liu K. S., Tsai S. W.:** *A progressive quadratic failure criterion for a laminate*. *Composites Science and Technology*, 1998, t. 58, s. 1023 ÷ 1032.
- [57] **Mahnken R.:** *Anisotropic creep modeling based on elastic projection operators with applications to CMSX – superalloy*. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2002, t. 191, s. 1611 ÷ 1637.
- [58] **Malmeister A.:** *Mekh. Polimerov* 1966, 2, 4, s. 324 ÷ 331.
- [59] **Mayes S. J., Hansen A. C.:** *Composite laminate failure analysis using multicontinuum theory*. *Composites Science and Technology*, 2004, t. 64, s. 379 ÷ 394.
- [60] **Mayes S. J.:** *Micromechanics Based Failure Analysis of Composite Structural Laminates*. Naval Surface Warfare Center, Carderock Division, NSWCCD-65-TR-1999/15, September 1999.
- [61] **Mazumdar S. K.:** *Composites Manufacturing. Materials, Product and Process Engineering*. CRC Press, 2002, s. 396.
- [62] **McCarthy C. T., McCarthy M. A., Lawlor V. P.:** *Progressive damage analysis of multi-bolt composite joints with variable bolt-hole clearances*. *Composites: Part B*, 2005, t. 36, s. 290 ÷ 305.
- [63] **Muc, A.,** *Projektowanie kompozytowych zbiorników ciśnieniowych*. Wyd. Politechniki Krakowskiej, 1999.
- [64] **Murthy P. L. N., Chamis C. C.:** *ICAN: integrated composite analyzer user's and programmer's manual*. NASA TP-2515, National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC, 1985.
- [65] **Nalepka K., Pęcherski R. B.:** *Fizyczne podstawy energetycznego kryterium wyłężenia monokryształów*. Pacyno J. (ed.): XXX Szkoła Inżynierii Materiałowej, Kraków-Ustroń-Jaszowiec, 1-4 X 2002, AGH, Kraków, 2002, s. 311 ÷ 316.
- [66] **Neimitz A.:** *The review of the failure criteria for composites*, in *Joint Seminary on Failure of Advanced Materials*, Francois D. and Golaski L. (Editors), Paris – Kielce, Kielce University of Technology, 1996, s. 5 ÷ 25.
- [67] **Nyman U., Gustafsson P. J.:** *Material and structural failure criterion of corrugated board facings*. *Composite Structures*, 2000, t. 50, s. 79 ÷ 83.
- [68] **Ochelski, S.:** *Metody doświadczalne mechaniki kompozytów konstrukcyjnych*. Wyd. Naukowo-Techniczne, 2004, s. 490.
- [69] **Petit P. H., Waddoups M. E.:** *A Method of Prediction the Nonlinear Behavior of Laminated Composites*. *Journal of Composite Materials*, 1969, t. 3, s. 2 ÷ 19.
- [70] **Petit P. H.:** *A Simplified Method of Determining the Inplane Shear Stress-Strain Response of Unidirectional Composites*. ASTMSTP 460, Philadelphia, PA, 1969.
- [71] **Pipes R. B., Cole B. W.:** *On the Off-Axis Strength Test for Anisotropic Materials*. *Journal of Composites Materials* 1973, t. 7, s. 246 ÷ 256.

- [72] **Puck A.**, *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis*, Hanser, München, 1996.
- [73] **Puck A., Schürmann H.**: *Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models*. Composites Science and Technology 1998, t. 58, s. 1045÷1067.
- [74] **Reddy Y. S. N., Dakshina Moorthy C. M., Reddy J. N.**: *Non-Linear Progressive Failure Analysis of Laminated Composite Plates*. International Journal Non-Linear Mechanics, 1995, t. 30, nr 5, s. 629 ÷ 649.
- [75] **Reddy Y. S. N., Reddy J. N.**: *Linear and non-linear failure analysis of composite laminate with transvers shear*. Composites Science and Technology, 1992, t. 44, s. 227 ÷ 255.
- [76] **Rychlewski J.**: *Elastic energy decomposition and limit criteria*. Uspekhi Mekh. – Advances in Mech. 1984, t. 7, s. 51 ÷ 80 (po rosyjsku).
- [77] **Rychlewski J.**: *Unconventional approach to linear elasticity*. Arch. Mech. 1995, t. 47, s. 149÷171.
- [78] **Sandhu R. S.**: *Nonlinear behavior of unidirectional and angle ply laminates*. Journal of Aircraft, 1976, t. 13, s. 104 ÷ 111.
- [79] **Schipperen J.H.A.**: *An Anisotropic damage model for the description of transverse matrix cracking in a graphite-epoxy laminate*. Composite Structures, 2001, t. 53, 295 ÷ 299.
- [80] **Soden P. D., Hinton M. J. and Kaddour. A. S.**: *Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data*. Composites Science and Technology, 2002, t. 62, s. 1489-1514.
- [81] **Soden P. D., Hinton M. J., Kaddour A. S.**: *Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates*. Composites Science and Technology 1998, t. 58, s. 1011÷1022.
- [82] **Sun C. T., Tao J. X.**: *Prediction of failure envelopes and stress strain behaviours of composite laminates*. Composites Science and Technology 1998, t. 58, s. 1125 ÷ 1136.
- [83] **Sun C. T., Quinn B. J., Tao J., Oplinger D. W., Hughes W. J.**: *Comparative Evaluation of Failure Analysis Methods for Composite Laminates*. DOT/FAA/AR-95/109, Office of Aviation Research, Washington, DC, 1996.
- [84] **Sun C. T., Zhou S. G.**: *Failure of Quasi-Isotropic Composite Laminates with Free Edges*. Journal of Reinforced Plastics and Composites, November 1988, t. 7, s. 515 ÷ 557.
- [85] **Swanson S. R., Trask B. C.**: *An examination of failure strength in [0/±60] laminates under biaxial stress*. Composites, 1988, t. 19, nr 5, s. 400 ÷ 406.
- [86] **Tan S. C.**: *A progressive failure model of composite laminates containing openings*. Journal of Composite Materials, 1991, t. 25, s. 556 ÷ 577.
- [87] **Tao J. X., Sun C. T.**: *Effect of matrix cracking on stiffness of composite laminates*. Mechanics of Composite Materials and Structures., 1996, t. 3, s. 225 ÷ 239.
- [88] **Theocaris P. S., Sokolis D. P.**: *Spectral Decomposition of the Compliance Tensor for Anisotropic Plates*. Journal of Elasticity, 1998, t. 51, s. 89 ÷ 103.
- [89] **Thom H.**: *A review of the biaxial strength of fibre-reinforced plastics*. Composites Part A, 1998, t. 29A, s. 869 ÷ 886.
- [90] **Tolson S., Zabarar N.**: *Finite Element Analysis of Progressive Failure in Laminated Composite Plates*. Computers and Structures, 1991, t. 38, nr 3, s. 361 ÷ 376.

- [91] **Tsai S. W., Hahn H. T.:** *Introduction to Composites Materials*. Technomic Publishing Company 1980.
- [92] **Tsai S. W., Wu E. M.:** *A General Theory of Strength for Anisotropic Materials*. Journal of Composites Materials, January 1971, s. 58 ÷ 80.
- [93] **Tsai S. W.:** *Strength Theories of Filamentary Structures*, in Fundamental Aspects on Fibre Reinforced Plastic Composites. Conference Proceedings, R. T. Schwartz and H. S. Schwartz (Editors), Dayton, Ohio, 24 – 26 May 1966, Wiley Interscience, New York 1968, s. 3 ÷ 11.
- [94] **Tsai S. W.:** *Theory of Composites Design*. Think Composites, Palo Alto, 1992
- [95] **Vakulenko A. A., Kachanov M. L.:** *Continuum Theory of Media with Cracks*, Mekh. Tv. Tela, 1971, t. 4, s. 159 ÷ 166.
- [96] **Van Paepegem, W. and Degrieck, J.:** *Calculation of damage-dependent directional failure indices from the Tsai–Wu static failure criterion*. Composites Science and Technology, 2003, t. 63, s. 305 ÷ 310.
- [97] **Vasiliev V. V., Morozov E. V.:** *Mechanics and Analysis of Composite Materials*. Elsevier, 2001, s. 412.
- [98] **Wang J., Callus P. J., Bannister M. K.:** *Experimental and numerical investigation of the tension and compression strength of un-notched and notched quasi-isotropic laminates*. Composite Structures, 2004, t. 64, s. 297 ÷ 306.
- [99] **Wilczyński A. P.:** *Polimerowe kompozyty włókniste*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996, s.227
- [100] **Wolfe W. E., Butalia T. S.:** *A strain energy based failure criterion for nonlinear analysis of composite laminates subjected to biaxial loading*. Composites Science and Technology, 1998, t. 58, s. 1107 ÷ 1124.
- [101] **Wu E. M., Scheublein J. K.:** *Laminate Strength – A Direct Charakterization Procedure*. Composite Materials: Testing and Design (3rd Conference), ASTM STP 546, 1974, s. 188÷206.
- [102] **Yeh H. Y., Kim C. H.:** *The Yeh-Stratton criterion for composite materials*. Journal of Composites Materials 1994, t. 28, s. 926 ÷ 939.
- [103] **You J. H., Bolt H.:** *Overall mechanical properties of fiber-reinforced metal matrix composites for fusion applications*. Journal of Nuclear Materials, 2002, t. 305, s. 14 ÷20.
- [104] **Zinoviev P. A., Grigoriev, S. V., Lebedeva O. V., Tairova L. P.:** *The strength of multilayered composites under a plane-stress state*. Composites Science and Technology 1998, t. 58, s. 1209 ÷ 1223.
- [105] **Internet:** <http://composite.about.com/cs/data/l/blcarbon.htm>
- [106] **Katalog firmy 3M:** *Aluminium Matrix Composite - Typical Properties Data Sheet*. AM-CPROP No 1 Rev 3, May 1998.
- [107] **Praca zbiorowa:** *Wood handbook – Wood as engineering materials*. Forest Product Laboratory 1999, s. 463.

Dodatek

D.1. Objasnienie stosowanych dziaań na tensorach

Poniżej podane zostaną niektóre, zastosowane w pracy, dziaania na tensorach w zapisie macierzowym i wskaźnikowym. W zapisie wskaźnikowym obowiązuje zasada sumowania po powtarzających się wskaźnikach.

$$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}$$

$$\mathbf{1}, \mathbf{s} \leftrightarrow \delta_{ij}, s_{ij}$$

$$\mathbf{C}, \mathbf{S} \leftrightarrow C_{ijkl}, S_{ijkl}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \leftrightarrow \alpha_{ij} \beta_{ij}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \leftrightarrow \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \leftrightarrow s_{ij} s_{ij}$$

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow A_{ijkl} \alpha_{kl}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$

$$\mathbf{C} \circ \mathbf{S} \leftrightarrow C_{ijpq} S_{pqkl}$$

D.2. Związki fizyczne dla warstwy kompozytowej

D.2.1. Równania fizyczne dla warstwy ortotropowej

Ponieważ warstwa kompozytu jest w zasadzie konstrukcją dwuwymiarową (jej grubość jest bardzo mała w porównaniu z długością i szerokością) obliczeniowo traktuje się ją jako element płaski. Przyjmuje się zatem, że pomijalnie małe są naprężenia i odkształcenia związane z kierunkiem zgodnym z normalną do płaszczyzny warstwy (kierunek 3 w głównych osiach materiałowych). Przy tych założeniach związki fizyczne dla warstwy ortotropowej w płaskim stanie naprężenia przyjmują postaci:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Macierz występująca w równaniu (D.1) to zredukowana macierz sztywności. Liczba niezależnych składowych macierzy podatności i sztywności redukuje się dla płaskiego stanu naprężenia do 4. Elementy tych macierzy można przedstawić w funkcji tak zwanych stałych inżynierskich, które są uogólnionymi modułami sprężystości, ścinania i uogólnionymi współczynnikami Poissona, znanymi z materiałów izotropowych.

W płaskim stanie naprężenia macierz podatności w funkcji stałych inżynierskich przyjmuje postać:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

zaś zredukowana macierz sztywności:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} m E_1 & m \nu_{21} E_1 & 0 \\ m \nu_{12} E_2 & m E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad m = [1 - \nu_{12} \nu_{21}]^{-1} \quad (\text{D.4})$$

Występujące w powyższych równaniach stałe materiałowe to:

- E_1 – podłużny moduł Younga,
- E_2 – poprzeczny moduł Younga,
- G_{12} – moduł ścinania,
- ν_{12} – większy współczynnik Poissona,
- ν_{21} – mniejszy współczynnik Poissona.

Symetria \mathbf{S} i \mathbf{Q} powoduje, że można zapisać:

$$v_{21} = \frac{E_2}{E_1} v_{12} \quad (\text{D.5})$$

D.2.2. Równania fizyczne dla warstwy w konfiguracji nieosiowej

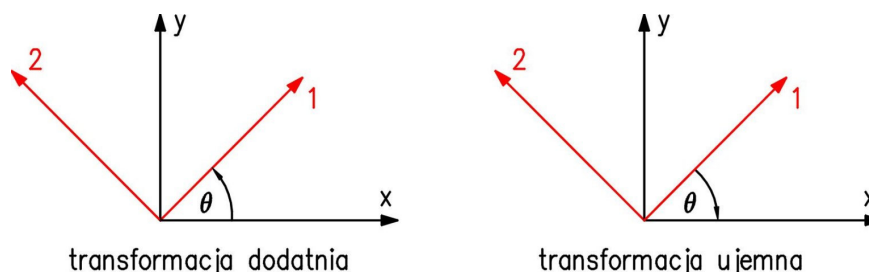
Analiza wytrzymałościowa kompozytów wymaga zapisu równań fizycznych również w układzie dowolnie zorientowanym w stosunku do głównych kierunków ortotropii. Zachodzi zatem konieczność wielokrotnego „przechodzenia” z konfiguracji osiowej do nieosiowej i odwrotnie. Ponieważ macierze $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{S} i \mathbf{Q} są tensorami, ich elementy transformują się przy obrocie układu współrzędnych, zgodnie z prawami transformacji tensorów (odpowiednio II i IV rzędu):

$$a'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} a_{kl} \quad (\text{D.6})$$

$$A'_{ijkl} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq} A_{mnpq} \quad (\text{D.7})$$

W mechanice kompozytów korzysta się tylko z równania (D.6). Natomiast transformacji macierzy podatności i sztywności dokonuje się na drodze przekształceń dokonywanych na macierzach $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{S} i \mathbf{Q} , które zostaną opisane poniżej.

Macierze naprężeń i odkształceń transformuje się pomiędzy układami osiowym (1, 2) i nieosiowym (x, y) zgodnie z prawem (D.6), przy czym obrót wyjściowego układu może następować zgodnie lub przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. W pierwszym przypadku mówi się o transformacji dodatniej, a w drugim o transformacji ujemnej (rys. D.1).



Rys. D.1 Dodatnia i ujemna transformacja układu współrzędnych

Macierze przejścia dla obu transformacji mają postać:

$$\mathbf{a}_+ = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbf{a}_- = \begin{bmatrix} m & -n \\ n & m \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

gdzie: $m = \cos \theta$, $n = \sin \theta$. Korzystanie ze wzoru (D.6) można uprościć, rozpisując wcześniej iloczyny odpowiednich elementów macierzy przejścia. Otrzymamy wtedy, kolejno dla transformacji dodatniej i ujemnej, następujące postacie macierzy transformacyjnych:

$$\mathbf{T}_+ = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

$$\mathbf{T}_- = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Wzajemne położenie układów (1, 2) i (x, y) zależy od orientacji włókien w warstwie. Możemy wyróżnić dwa charakterystyczne przypadki tego położenia i dla każdego z nich zapisać równania transformacyjne. Dla przypadku pokazanego na rys. D.1 równania transformacyjne przyjmują następującą postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_n = \mathbf{T}_- \begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_o \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_o = \mathbf{T}_+ \begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_n \quad (\text{D.13})$$

gdzie indeksy oznaczają: o – tensor określony w konfiguracji osiowej, n – tensor określony w konfiguracji nieosiowej.

Należy tutaj zwrócić uwagę na składowe tensora odkształcenia występujące w równaniach (D.12) i (D.13). W zapisie Voigta składowe te są następujące:

$$\varepsilon_n = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad \varepsilon_o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6/2 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

Jak widać składowa, przedstawiająca odkształcenie kątowe, jest tutaj inna niż w związkach fizycznych (3.9) i (3.10). Różnica wynika z tego, że w związkach fizycznych występują tzw. składowe inżynierskie, a we wzorach transformacyjnych składowe tensorowe. Zależność między tymi składowymi można wyrazić przy pomocy macierzy Reutera \mathbf{R} w następujący sposób:

$$\varepsilon_n^R = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \varepsilon_n \quad \varepsilon_o^R = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \varepsilon_o \quad (\text{D.15})$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

Chcąc wyznaczyć zredukowaną macierz sztywności \mathbf{Q} dla warstwy ortotropowej w układzie nieosiowym, przy pomocy jej składowych w układzie osiowym, postępuje się według następującego algorytmu:

1. Transformacja odkształceń z konfiguracji nieosiowej do konfiguracji osiowej, za pomocą tensorowego prawa (D.6):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6/2 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_+ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_+ \cdot \mathbf{R}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.17})$$

2. Zapisanie równań fizycznych w konfiguracji osiowej:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6/2 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.18})$$

3. Transformacja naprężeń z konfiguracji osiowej do nieosiowej za pomocą prawa transformacji (D.6):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_- \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_- \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6/2 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.19})$$

4. Zapisanie równań fizycznych w konfiguracji nieosiowej:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_- \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_+ \cdot \mathbf{R}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

Otrzymaliśmy zatem macierz sztywności w układzie nieosiowym, wyrażoną następującą zależnością:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}_- \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_+ \cdot \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{T}_- \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_+^T \quad (\text{D.21})$$

Macierz ta jest nazywana transformowaną, zredukowaną macierzą sztywności. Jest ona macierzą symetryczną, a związek fizyczny w konfiguracji nieosiowej, zapisany z jej wykorzystaniem, przyjmuje postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.22})$$

Po rozpisaniu równania (D.21) można wyznaczyć elementy transformowanej macierzy sztywności w postaci jawnej:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{22} &= n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{12} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66} \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

$$\bar{Q}_{66} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66}$$

$$\bar{Q}_{16} = m^3 n Q_{11} - m n^3 Q_{22} + (m n^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(m n^3 - m^3 n) Q_{66}$$

$$\bar{Q}_{26} = m n^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + (m^3 n - m n^3) Q_{12} + 2(m^3 n - m n^3) Q_{66}$$

Transformacja macierzy podatności z konfiguracji osiowej do nieosiowej przebiega w sposób analogiczny do transformacji macierzy sztywności. Związek fizyczny odwrotny do (D.22) ma postać:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.24})$$

Elementy transformowanej macierzy podatności można wyliczyć ze wzoru:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{T}_+^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_+ \quad (\text{D.25})$$

co po rozpisaniu daje następujące wzory transformacyjne:

$$\bar{S}_{11} = m^4 S_{11} + n^4 S_{22} + 2m^2 n^2 S_{12} + m^2 n^2 S_{66}$$

$$\bar{S}_{22} = n^4 S_{11} + m^4 S_{22} + 2m^2 n^2 S_{12} + m^2 n^2 S_{66}$$

$$\bar{S}_{12} = m^2 n^2 S_{11} + m^2 n^2 S_{22} + (m^4 + n^4) S_{12} - m^2 n^2 S_{66} \quad (\text{D.26})$$

$$\bar{S}_{66} = 4m^2 n^2 S_{11} + 4m^2 n^2 S_{22} - 8m^2 n^2 S_{12} + (m^2 - n^2)^2 S_{66}$$

$$\bar{S}_{16} = 2m^3 n S_{11} - 2m n^3 S_{22} + 2(m n^3 - m^3 n) S_{12} + (m n^3 - m^3 n) S_{66}$$

$$\bar{S}_{26} = 2m n^3 S_{11} - 2m^3 n S_{22} + 2(m^3 n - m n^3) S_{12} + (m^3 n - m n^3) S_{66}$$

W podobny sposób jak to miało miejsce w konfiguracji osiowej, można macierz podatności wyrazić w funkcji stałych inżynierskich. Przeprowadza się przy tym serię trzech myślowych eksperymentów: rozciąganie w kierunku osi x , rozciąganie w kierunku osi y i ścinanie w płaszczyźnie warstwy. Otrzymana w ten sposób macierz podatności w funkcji stałych inżynierskich przyjmuje postać:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{xy,x}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{xy,y}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{x,xy}}{E_x} & \frac{\eta_{y,xy}}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (\text{D.27})$$

przy czym macierz ta jest symetryczna zachodzą zatem następujące równości:

$$\begin{aligned}
 \frac{V_{yx}}{E_y} &= \frac{V_{xy}}{E_x} \\
 \frac{\eta_{xy,x}}{G_{xy}} &= \frac{\eta_{x,xy}}{E_x} \\
 \frac{\eta_{xy,y}}{G_{xy}} &= \frac{\eta_{y,xy}}{E_y}
 \end{aligned}
 \tag{D.28}$$

Jak widać macierz podatności (podobnie jak macierz sztywności) jest formalnie taka sama jak dla ciała ogólnie anizotropowego, to znaczy ma niezerowe wszystkie elementy. Jednak macierz ta dalej charakteryzuje ciało ortotropowe, ponieważ liczba niezależnych składowych wynosi cztery. Dodatkowe elementy, które pojawiły się w macierzy (D.27) w stosunku do macierzy w konfiguracji osiowej, to tak zwane współczynniki Lechnickiego. Są to:

- $\eta_{i,ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\varepsilon_i}$ - współczynniki wzajemnego wpływu II rodzaju, charakteryzują ścinanie w płaszczyźnie (i, j) wywołane obciążeniem działającym w kierunku i ,
- $\eta_{ij,i} = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{ij}}$ - współczynniki wzajemnego wpływu I rodzaju, charakteryzują ściskanie (rozciąganie) w kierunku osi i wywołane ścinaniem w płaszczyźnie warstwy (i, j) .

W przypadku konfiguracji nieosiowej mamy zatem do czynienia z takim przypadkiem ortotropii, w którym występuje sprzężenie naprężeń normalnych z odkształceniami stycznymi, naprężeń stycznych z odkształceniami normalnymi oraz naprężeń stycznych z odkształceniami stycznymi, ale przynależnymi do innych płaszczyzn. Sprzężenia te nie występują w konfiguracji osiowej warstwy.

D.3. Klasyczna teoria laminatów

Metoda analizy kompozytów warstwowych, uwzględniająca wpływ właściwości mechanicznych poszczególnych warstw na właściwości całego laminatu, nosi nazwę **klasycznej teorii laminacji** lub **klasycznej teorii płyt laminatowych**.

Podstawowe założenia teorii laminacji są następujące:

- warstwy tworzące laminat są połączone ze sobą w sposób nierozzerwalny, a połączenia są nieskończenie cienkie i nie zezwalają na ścinanie międzywarstwowe,
- obowiązuje teoria płyt cienkich (hipoteza Kirchhoffa – Love’a), która mówi, że linia prosta i prostopadła do powierzchni środkowej przed przyłożeniem obciążenia, pozostaje prosta i prostopadła również po przyłożeniu obciążenia, a odcinek normalny do powierzchni środkowej nie zmienia swej długości,
- obowiązuje założenie o małych przemieszczeniach.

Można wykazać, że na mocy powyższych założeń tensor odkształceń dowolnego punktu w laminacie przyjmuje postać:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.29})$$

gdzie: ε^0 – tensor odkształceń powierzchni środkowej, κ^0 – tensor krzywizn powierzchni środkowej. Jak widać z postaci równania (D.29) odkształcenia zmieniają się liniowo po grubości, a dla stanu tarczowego, dla którego $\kappa^0 = \mathbf{0}$ są stałe po grubości.

Podstawiając (D.29) do (D.22) otrzymamy równania fizyczne dla k -tej warstwy laminatu w postaci:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{Q}}_k z \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.30})$$

Naprężenia w laminacie są definiowane jako wielkość uśredniona z naprężeń warstwowych po grubości laminatu, czyli:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (\text{D.31})$$

gdzie: $\bar{\sigma}$ – tensor naprężeń średnich w laminacie, σ_k – tensor naprężeń w k -tej warstwie, t – grubość laminatu. Po zdefiniowaniu naprężeń średnich wprowadza się, analogicznie jak w teorii płyt, tak zwane siły i momenty wypadkowe (płytkowe), zdefiniowane na jednostkę szerokości przekroju. Siły te określa się następującymi równaniami:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} t = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (\text{D.32})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (\text{D.33})$$

Po uwzględnieniu równania (D.30), przedstawiającego związek fizyczny dla k -tej warstwy równania (D.32) i (D.33) przyjmą następujące postaci:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_k dz + \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}_k z dz \quad (\text{D.34})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_k z dz + \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}_k z^2 dz \quad (\text{D.35})$$

Transformowana macierz sztywności jest stała dla każdej warstwy, można ją zatem wyłączyć przed znak całki. Podobnie można postąpić z tensorami odkształceń i krzywizn powierzchni środkowej, które są niezależne od zmiennej z . Jeżeli poza tym zauważymy, że:

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} dz = F_k = t_k \quad (\text{D.36})$$

to pole powierzchni warstwy o jednostkowej szerokości,

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz = S_k = t_k z_k^c \quad (\text{D.37})$$

to moment statyczny warstwy o jednostkowej szerokości względem płaszczyzny środkowej,

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz = I_k = \frac{t_k^3}{12} + t_k (z_k^c)^2 \quad (\text{D.38})$$

to moment bezwładności warstwy o jednostkowej szerokości względem płaszczyzny środkowej, to równania (D.34) i (D.35) będzie można zapisać w postaci:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k t_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k t_k z_k^c \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.38})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k t_k z_k^c \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k \left(\frac{t_k^3}{12} + t_k (z_k^c)^2 \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.39})$$

W powyższych równaniach z_k^c oznacza odległość środka ciężkości k -tej warstwy od płaszczyzny środkowej. Wyrażenia występujące w równaniach (D.38) i (D.39) są definiowane w klasycznej teorii laminacji jako:

- macierz sztywności tarczowej:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k t_k \quad (\text{D.40})$$

- macierz sztywności sprzężeń:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k t_k z_k^c \quad (\text{D.41})$$

- macierz sztywności giętej:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \left(\frac{t_k^3}{12} + t_k (z_k^c)^2 \right) \quad (\text{D.42})$$

Macierze **A**, **B** i **D** są symetryczne, co wynika z symetrii transformowanej macierzy sztywności. Ostatecznie wypadkowe siły i momenty w kompozycie warstwowym można przedstawić w postaci:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.43})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.44})$$

lub w skróconej postaci symbolicznej:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.45})$$

Końcowy proces wykonywania laminatów polega na połączeniu warstw ze sobą za pomocą żywic termoutwardzalnych. Proces utwardzania tych żywic wymaga użycia temperatury powyżej 100°C. Ponieważ w większości przypadków konstrukcje kompozytowe pracują w temperaturze znacznie niższej, pojawiają się dodatkowe naprężenia od efektów termicznych, które należy uwzględnić w analizie. W liniowej teorii sprężystości całkowite odkształcenia są sumą odkształceń mechanicznych i termicznych:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j + \alpha_i \Delta T \quad (\text{D.46})$$

$$\Delta T = T_e - T_l \quad (\text{D.47})$$

gdzie: T_e – temperatura eksploatacji, T_l – temperatura laminacji, α_i – współczynniki rozszerzalności termicznej. Związek odwrotny do (D.46) ma postać:

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j - Q_{ij} \alpha_j \Delta T \quad (\text{D.48})$$

co w postaci macierzowej możemy zapisać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.49})$$

a w konfiguracji nieosiowej dla k -tej warstwy laminatu:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix}_k \quad (\text{D.50})$$

Współczynniki rozszerzalności termicznej α_x , α_y i α_{xy} nie są charakterystykami fizycznymi warstwy, a jedynie wynikiem transformacji z układu osiowego do nieosiowego współczynników α_1 i α_2 .

Wykorzystując związek (D.50) w klasycznej teorii laminacji dochodzimy do następujących równań, określających wypadkowe siły i momenty w laminacie:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} \quad (\text{D.51})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} \quad (\text{D.52})$$

gdzie:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} = \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k t_k \quad (\text{D.53})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} = \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k t_k z_k^c \quad (\text{D.54})$$

D.4. Charakterystyki materiałowe kompozytów

Poniżej zostaną podane charakterystyki wytrzymałościowe i sztywnościowe niektórych materiałów kompozytowych zbrojonych jednokierunkowymi włóknami długimi ze wskazaniem źródła danych.

Tab. D.1 Charakterystyki materiałowe dla jednokierunkowo zbrojonych kompozytów

Materiał	V_f [%]	X_t [MPa]	Y_t [MPa]	X_c [MPa]	Y_c [MPa]	S [MPa]	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}
Włókna węglowe / Osnowa polimerowa										
GY70/934 Carbon/Epoxy [105]	57	589	29.4	491	98.1	49.1	294	6.4	4.9	0.23
T300/5208 Carbon/Epoxy [47], [105]	70	1500	40	1500	246	68	181	10.3	7.17	0.28
T300/934 Carbon/Epoxy [47], [105]	60	1314	43	1220	168	48	148	6.65	4.55	0.30
T300/BSL914C Carbon/Epoxy [81]	60	1500	27	900	200	80	138	11	5.5	0.28
T300/976 Carbon/Epoxy [26]		1482	48	1593	227	110	152	11.7	6.96	0.23
T300/976 Carbon/Epoxy [79]		1516.8	44.54	1592.7	253	106.7	156.5	12.9	6.96	0.23
T300/174B Carbon/Epoxy [23]		1531	41	1390	145	98	137	10.04	4.8	0.30
IM6/SCI081 Carbon/Epoxy [23]		2875	48	1896	241	83	177	11.4	4.48	0.27
IM6/W Carbon/Epoxy [55]		1900	60	1370	260	44	155.4	10	4.9	0.30
IM7/5250-4 Graphite/Epoxy [74]		2709.7	64.5	1075.6	258.6	67.6	161.3	9.65	6	0.34
IM7/8551-7 Graphite/Epoxy [44]		2417.39	73.09	1034.96	175.82	183.41	162	8.34	2.07	0.339
ModI/WRD9371 Carbon/Polyimide[44]	45	807	15	655	71	22	216	5	4.5	0.25
NAS S/NCT321 Carbon/Epoxy [44]	64	268.06	5.95	143.98	28.3	19.76	128.5	8.07	3.79	0.321
AS/3501 Carbon/Epoxy [47], [105]	66	1447	51.7	1447	206	93	138	8.96	7.1	0.30
AS/914 Carbon/Epoxy [3]	60	2100	100	1400	100	110	140	6.7	5.23	0.30
AS4/3502 Carbon/Epoxy [79]		1862	51.7	1482	206.8	64.8	143.9	11.9	6.7	0.326
AS4/3501-6 Carbon/Epoxy [81], [98]	60	1950	48	1480	200	79	126	11	6.6	0.28
AS4/3501-6 Carbon/Epoxy [105]	63	2280	57	1440	228	71	142	10.3	7.2	0.27
AS4/3501-6 Carbon/Epoxy [84]		2206	56.5	2013	206.8	110.3	138.9	9.86	5.24	0.30
AS4/APC2 Carbon/PEEK [105]	58	2060	78	1080	196	157	131	8.7	5	0.28
AS4/PEEK Carbon/PEEK [42]		2128	93	954.6	205.9	133	140.35	9.44	5.4	0.253
HTA/6376 Carbon/Epoxy [42]		2200	70	1600	250	120	140	10	5.2	0.30
Graphite/Epoxy [45]		1035	41	689	117	69	207	5	2.6	0.25
Carbon/Epoxy [97]		2000	50	1200	170	70	140	11	5.5	0.27
Włókna nieorganiczne / Osnowa polimerowa										
Generic E-glass/Epoxy [105]	55	1080	39	620	128	89	39	8.6	3.8	0.28
Generic S-glass/Epoxy [105]	50	1280	49	690	158	69	43	8.9	4.5	0.27
S2/SCI081 S-glass/Epoxy [26]		1572	55	758	207	76	54	11.4	5.3	0.28
Gevetex/LY556 E-glass/Epoxy [81]	62	1140	35	570	114	72	53.48	17.7	5.83	0.278
Silenka/MY750 E-glass/Epoxy [81]	60	1280	40	800	145	73	45.6	16.2	5.83	0.278

Tab. D.1 (cd) Charakterystyki materiałowe dla jednokierunkowo zbrojonych kompozytów

Material	v_f [%]	X_t [MPa]	Y_t [MPa]	X_c [MPa]	Y_c [MPa]	S [MPa]	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	v_{12}
Włókna nieorganiczne / Osnowa polimerowa (cd)										
E-glass/8084 E-glass/Vinylester [60]	51	817.5	45.26	759.7	144.3	60.8	38.5	11.7	4.74	0.273
S2/Epoxy [55]		1430	50	700	160	44	54	9	5.46	0.31
Glass/Epoxy [45]		1035	28	1035	138	41	54	18	9	0.25
E-glass/Epoxy [23]		1062	31	610	118	72	45	12	5.5	0.28
Glass/Epoxy [97]	65	1800	40	650	90	50	60	13	3.4	0.30
Boron/Epoxy [23], [90]		1260	61	2500	202	76	204	19	5.6	0.25
Boron/Epoxy [45]		1380	83	2760	276	124	207	21	7	0.30
Boron/Epoxy [69]	50	1379	87.6	2864	262	125.5	207	21	7.71	0.294
Boron/Epoxy [16]		1378.9	86.2	2757.9	262	120.7	206.84	22.06	7.24	0.38
B(4)/5505 Boron/Epoxy [47]	50	1260	61	2500	202	67	204	18.5	5.59	0.23
B(5.6)/5505 Boron/Epoxy [47]	50	1380	56	1600	125	62	201	21.7	5.4	0.17
Włókna polimerowe / Osnowa polimerowa										
Kevlar 149/Epoxy Aramid/Epoxy [105]	60	1280	30	335	158	49	87	5.5	2.2	0.34
Aramid/Epoxy [97]	60	2500	70	300	130	30	95	5.1	1.8	0.34
Kevlar 49/Epoxy [23], [47]	60	1400	12	235	53	34	76	5.5	2.3	0.34
Kevlar 49/Epoxy Aramid/Epoxy [26]		1393	28	331	159	48	87	7.7	2.1	0.34
Włókna ceramiczne / Osnowa metalowa										
Al_2O_3/Al [3]	60	700	190	3400	400	120	260	150	60	0.24
Al_2O_3/Al [105]	60	1200	120	1700	120	70	240	130	50	0.24
Włókna organiczne / Osnowa metalowa										
Boron/Al [3]	50	1300	140	2000	300	90	260	140	60	0.30

D.5. Tensor IV-ego rzędu jako macierz dwuwymiarowa

Ten rozdział załącznika został opracowany na podstawie pracy Kowalczyk i Ostrowskiej [51]. Przestrzeń \mathcal{S} symetrycznych tensorów II-ego rzędu ma wszystkie własności 6-cio wymiarowej przestrzeni euklidesowej z iloczynem skalarnym

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_{ij} b_{ij} \quad (\text{D.55})$$

gdzie a_{ij} , b_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ są składowymi tensorów \mathbf{a} i \mathbf{b} w pewnej ortonormalnej bazie $\{\mathbf{e}_i\}$ w 3-wymiarowej przestrzeni. Dzięki temu dowolny tensor symetryczny przestrzeni \mathcal{S} ma wszystkie własności wektora w 6-cio wymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Dzięki tej własności przestrzeni \mathcal{S} możliwe jest wybranie w tej przestrzeni podzbioru 6-ciu wzajemnie ortogonalnych i znormalizowanych tensorów $\{\mathbf{v}_K\}$, $K = I, \dots, VI$ które tworzą bazę. W bazie tej dowolny tensor symetryczny II-ego rzędu jest opisany w następujący sposób:

$$\mathbf{a} = a_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = a_K \mathbf{v}_K, \quad K = I, II, \dots, VI \quad (\text{D.56})$$

Zależności między reprezentacjami a_{ij} i a_K są następujące:

$$\begin{aligned} a_I &= a_{11}, & a_{II} &= a_{22}, & a_{III} &= a_{33} \\ a_{IV} &= \sqrt{2} a_{23}, & a_V &= \sqrt{2} a_{13}, & a_{VI} &= \sqrt{2} a_{12} \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

W konsekwencji liniowe odwzorowanie z przestrzeni \mathcal{S} w \mathcal{S} traktowanej jako 6-cio wymiarowa przestrzeń euklidesowa będzie opisane przez tensor drugiego rzędu należący do iloczynu tensorowego $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$. Rozumowanie to prowadzi do wniosku, że tensor \mathbf{S} , będący tensorem IV-ego rzędu działającym jako liniowy operator z przestrzeni symetrycznych tensorów euklidesowych II-ego rzędu \mathcal{S} w przestrzeń symetrycznych tensorów euklidesowych II-ego rzędu \mathcal{S} ma wszystkie własności tensora II-ego rzędu w 6-cio wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Należy tylko jego współrzędne przedstawić w bazie $\{\mathbf{v}_K\}$. Poniżej przedstawiono jedną z możliwych baz.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_I &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 & \mathbf{v}_{II} &= \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \mathbf{v}_{III} &= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_{IV} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{v}_V &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) & \mathbf{v}_{VI} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

Tensor IV-ego rzędu \mathbf{A} przedstawiamy w powyższej bazie następująco:

$$\mathbf{A} = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = A_{KL} \mathbf{v}_K \otimes \mathbf{v}_L \quad (\text{D.58})$$

Poszczególne elementy macierzy $A_{KL} = \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_L$ mają postać:

$$A_{KL} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & \sqrt{2} A_{1123} & \sqrt{2} A_{1113} & \sqrt{2} A_{1112} \\ \cdots & A_{2222} & A_{2233} & \sqrt{2} A_{2223} & \sqrt{2} A_{2213} & \sqrt{2} A_{2212} \\ \cdots & \cdots & A_{3333} & \sqrt{2} A_{3323} & \sqrt{2} A_{3313} & \sqrt{2} A_{3312} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 2A_{2323} & 2A_{2313} & 2A_{2312} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2A_{1313} & 2A_{1312} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2A_{1212} \end{bmatrix} \quad (\text{D.59})$$

Następujące iloczyny mogą być otrzymane na dwa alternatywne, ale całkowicie równoważne sposoby:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leftrightarrow a_{ij} b_{ij} \quad \text{lub} \quad a_K b_K$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \leftrightarrow b_{ij} = A_{ijkl} a_{kl} \quad \text{lub} \quad b_K = A_{KL} a_L \quad (\text{D.60})$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} \leftrightarrow D_{ijkl} = A_{ijpq} B_{pqkl} \quad \text{lub} \quad D_{KL} = A_{KM} B_{ML}$$

gdzie a_{ij} , b_{ij} , A_{ijkl} , B_{ijkl} , D_{ijkl} , i a_K , b_K , A_{KL} , B_{KL} , D_{KL} są związane zależnościami (D.57) i (D.59).

D.6. Dowody zależności między współczynnikami a_ρ , b_ρ

Współczynniki a_ρ , b_ρ są elementami tensorów własnych ω_ρ określonych równaniami 7.10 i 7.11. Ponieważ stany własne są wzajemnie ortogonalne zachodzą między nimi następujące zależności:

$$\begin{aligned}\omega_I \cdot \omega_I &= 1 \\ \omega_{II} \cdot \omega_{II} &= 1 \\ \omega_I \cdot \omega_{II} &= 0\end{aligned}\tag{D.61}$$

Z zależności D.61 wynikają następujące warunki jakie muszą spełniać współczynniki a_ρ , b_ρ :

$$a_I^2 + b_I^2 = 1\tag{D.62a}$$

$$a_{II}^2 + b_{II}^2 = 1\tag{D.62b}$$

$$a_I a_{II} + b_I b_{II} = 0\tag{D.62c}$$

Współczynniki a_ρ , b_ρ są funkcjami elementów tensora sztywności S_{ij} według zależności:

$$a_I = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_I - S_{11}}{S_{12}}\right)^2}}\tag{D.63a}$$

$$b_I = \frac{\frac{1}{S_{12}}(\lambda_I - S_{11})}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_I - S_{11}}{S_{12}}\right)^2}}\tag{D.63b}$$

$$a_{II} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_{II} - S_{11}}{S_{12}}\right)^2}}\tag{D.63c}$$

$$b_{II} = \frac{\frac{1}{S_{12}}(\lambda_{II} - S_{11})}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_{II} - S_{11}}{S_{12}}\right)^2}}\tag{D.63d}$$

gdzie λ_I, λ_{II} wartości własne tensora sztywności \mathbf{S} , określone zależnościami:

$$\lambda_I = \frac{S_{11} + S_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4 S_{12}^2} \quad (\text{D.64a})$$

$$\lambda_{II} = \frac{S_{11} + S_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4 S_{12}^2} \quad (\text{D.64b})$$

Z pierwszego niezmiennika transformacji tensorowej wynika zależność:

$$\lambda_I + \lambda_{II} = S_{11} + S_{22} \quad (\text{D.65})$$

Poniżej zostaną udowodnione niektóre zależności pomiędzy współczynnikami a_ρ, b_ρ .

D.6.1. Dowód zależności $a_I = b_{II}$

Obliczając z równania (D.65):

$$\lambda_{II} = S_{11} + S_{22} - \lambda_I \quad (\text{D.66})$$

i podstawiając do (D.63d) otrzymujemy:

$$b_{II} = \frac{\frac{1}{S_{12}}(S_{22} - \lambda_I)}{\sqrt{1 + \left(\frac{S_{22} - \lambda_I}{S_{12}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{S_{12}}{S_{22} - \lambda_I}\right)^2}} \quad (\text{D.67})$$

Porównując (D.67) z (D.63a) stwierdzamy, że aby $a_I = b_{II}$ to:

$$\left(\frac{\lambda_I - S_{11}}{S_{12}}\right)^2 = \left(\frac{S_{12}}{S_{22} - \lambda_I}\right)^2 \quad (\text{D.68})$$

co prowadzi do zależności:

$$(\lambda_I - S_{11})^2 (S_{22} - \lambda_I)^2 = S_{12}^4 \quad (\text{D.69})$$

Podstawiając do (D.69) zależność (D.64a) otrzymujemy:

$$\left(\frac{S_{22} - S_{11}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4 S_{12}^2}\right)^2 \left(\frac{S_{22} - S_{11}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4 S_{12}^2}\right)^2 = S_{12}^4$$

$$\left(S_{22} - S_{11} + \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4 S_{12}^2}\right)^2 \left(S_{22} - S_{11} - \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4 S_{12}^2}\right)^2 = 16 S_{12}^4$$

$$\begin{aligned} & (2S_{11}^2 + 2S_{22}^2 + 4S_{12}^2 - 4S_{11}S_{22} + 2\sqrt{A}S_{22} - 2\sqrt{A}S_{11}) \cdot \\ & \cdot (2S_{11}^2 + 2S_{22}^2 + 4S_{12}^2 - 4S_{11}S_{22} + 2\sqrt{A}S_{11} - 2\sqrt{A}S_{22}) = 16S_{12}^4 \end{aligned}$$

gdzie:

$$A = S_{11}^2 - 2S_{11}S_{22} + S_{22}^2 + 4S_{12}^2 \quad (\text{D.70})$$

Wykonując mnożenie po lewej stronie równania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & 4S_{11}^4 + 4S_{11}^2S_{22}^2 + 8S_{11}^2S_{12}^2 - 8S_{11}^3S_{22} + 4\sqrt{A}S_{11}^2S_{22} - 4\sqrt{A}S_{11}^3 + \\ & + 4S_{11}^2S_{22}^2 + 4S_{22}^2 + 8S_{22}^2S_{12}^2 - 8S_{11}S_{22}^3 + 4\sqrt{A}S_{22}^3 - 4\sqrt{A}S_{11}S_{22}^2 + \\ & + 8S_{11}^2S_{12}^2 + 8S_{22}^2S_{12}^2 + 16S_{12}^4 - 16S_{11}S_{22}S_{12}^2 + 8\sqrt{A}S_{22}S_{12}^2 - 8\sqrt{A}S_{11}S_{12}^2 + \\ & - 8S_{11}^3S_{22} - 8S_{11}S_{22}^3 - 16S_{11}S_{22}S_{12}^2 + 16S_{11}^2S_{22}^2 - 8\sqrt{A}S_{11}S_{12}^2 + 8\sqrt{A}S_{11}^2S_{22} + \\ & + 4\sqrt{A}S_{11}^3 + 4\sqrt{A}S_{11}S_{22}^2 + 8\sqrt{A}S_{11}S_{12}^2 - 8\sqrt{A}S_{11}^2S_{22} + 4\sqrt{A}\sqrt{A}S_{11}S_{22} - 4\sqrt{A}\sqrt{A}S_{11}^2 + \\ & - 4\sqrt{A}S_{11}^2S_{22} - 4\sqrt{A}S_{22}^3 - 8\sqrt{A}S_{22}S_{12}^2 + 8\sqrt{A}S_{11}S_{12}^2 - 4\sqrt{A}\sqrt{A}S_{22}^2 + 4\sqrt{A}\sqrt{A}S_{11}S_{22} = \\ & = 16S_{12}^4 \end{aligned}$$

Dalej, podstawiając wyrażenie (D.70) i redukując wyrazy podobne otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & 4S_{11}^4 + 24S_{11}^2S_{22}^2 + 16S_{11}^2S_{12}^2 - 16S_{11}^3S_{22} + 4S_{22}^4 + 16S_{22}^2S_{12}^2 + \\ & - 16S_{11}S_{22}^3 + 4S_{12}^4 - 32S_{11}S_{22}S_{12}^2 + 8(S_{11}^2 - 2S_{11}S_{22} + S_{22}^2 + 4S_{12}^2)S_{11}S_{22} + \\ & - 4(S_{11}^2 - 2S_{11}S_{22} + S_{22}^2 + 4S_{12}^2)S_{11}^2 - 4(S_{11}^2 - 2S_{11}S_{22} + S_{22}^2 + 4S_{12}^2)S_{22}^2 = 16S_{12}^4 \end{aligned}$$

Ostatecznie po redukcji wyrażen po prawej stronie równania otrzymujemy:

$$16S_{12}^4 = 16S_{12}^4$$

co kończy dowód.

D.6.2. Dowód zależności $a_{II} = -b_I$

Korzystając z zależności (D.62c):

$$a_I a_{II} + b_I b_{II} = 0$$

oraz z udowodnionej powyżej zależności:

$$a_I = b_{II}$$

możemy napisać:

$$a_I a_{II} + b_I a_I = 0$$

$$a_{II} + b_I = 0$$

$$a_{II} = -b_I$$

co kończy dowód.

D.6.3. Dowód zależności $b_I < 0$

Aby

$$b_I = \frac{\frac{1}{S_{12}}(\lambda_I - S_{11})}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_I - S_{11}}{S_{12}}\right)^2}} < 0$$

musi być spełniony warunek:

$$\frac{1}{S_{12}}(\lambda_I - S_{11}) < 0$$

Ponieważ (porównaj zależność (D.3))

$$S_{12} < 0$$

to aby $b_I < 0$ musi zachodzić: $\lambda_I - S_{11} > 0$.

Podstawiając do powyższej nierówności zależność (D.64a) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{S_{22} - S_{11}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2} &> 0 \\ \frac{(S_{22} - S_{11})^2}{4} + \frac{1}{4} [(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2] &> 0 \\ \frac{(S_{22} - S_{11})^2}{2} + S_{12}^2 &> 0 \end{aligned}$$

Lewa strona powyższej nierówności jest zawsze większa od zera, co kończy dowód.

D.6.4. Dowód zależności $a_I < |b_I|$

Porównując ze sobą zależności (D.63a) i (D.63b) stwierdzamy, że aby $a_I < |b_I|$ musi zachodzić zależność:

$$\frac{\lambda_I - S_{11}}{|S_{12}|} > 1$$

Podstawiając do powyższej nierówności zależność (D.64a) otrzymujemy:

$$\frac{1}{|S_{12}|} \left[\frac{S_{22} - S_{11}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2} \right] > 1$$

$$\frac{S_{22} - S_{11}}{2|S_{12}|} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(S_{11} - S_{22})^2}{S_{12}^2} + 4} > 1$$

$$\frac{(S_{22} - S_{11})^2}{4S_{12}^2} + \frac{1}{4} \frac{(S_{11} - S_{22})^2}{S_{12}^2} + 1 > 1$$

$$\frac{(S_{22} - S_{11})^2 + (S_{11} - S_{22})^2}{4S_{12}^2} > 0$$

Prawa strona powyższej nierówności jest zawsze większa od zera co kończy dowód.

D.6.5. Dowód zależności $a_I b_I = -a_{II} b_{II}$

Korzystając z udowodnionych powyżej zależności $a_I = b_{II}$ i $a_{II} = -b_I$ otrzymujemy natychmiast:

$$a_I b_I = -a_{II} b_{II}$$

$$b_{II} (-a_{II}) = -a_{II} b_{II}$$

$$L = P$$

co kończy dowód.

D.6.6. Dowód zależności $a_I^2 \ll a_{II}^2$

Zależność $a_I^2 \ll a_{II}^2$ zachodzi dla kompozytów włóknistych zbrojonych włóknami jednokierunkowymi, czyli takich dla których sztywność wzdłuż jest wielokrotnie większa niż w poprzek włókien.

Spełnienie tej zależności jest równoznaczne z warunkiem:

$$\frac{a_I^2}{a_{II}^2} \rightarrow 0 \quad (\text{D.71})$$

który po rozpisaniu przyjmuje postać:

$$\frac{1 + \left(\frac{\lambda_{II} - S_{11}}{S_{12}} \right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda_I - S_{11}}{S_{12}} \right)^2} = \frac{S_{12}^2 + (\lambda_{II} - S_{11})^2}{S_{12}^2 + (\lambda_I - S_{11})^2} \rightarrow 0$$

Podstawiając do zależności powyżej relację (D.66) otrzymujemy:

$$\frac{S_{12}^2 + (S_{22} - \lambda_I)^2}{S_{12}^2 + (\lambda_I - S_{11})^2} \rightarrow 0$$

co można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} S_{12}^2 + (S_{22} - \lambda_I)^2 &\ll S_{12}^2 + (\lambda_I - S_{11})^2 \\ (S_{22} - \lambda_I)^2 &\ll (\lambda_I - S_{11})^2 \end{aligned}$$

Powyższa relacja jest prawdziwa wtedy gdy

$$S_{11} \ll S_{22} \quad (\text{D.72})$$

Zależność (D.72) jest spełniona dla większości kompozytów włóknistych, mamy bowiem:

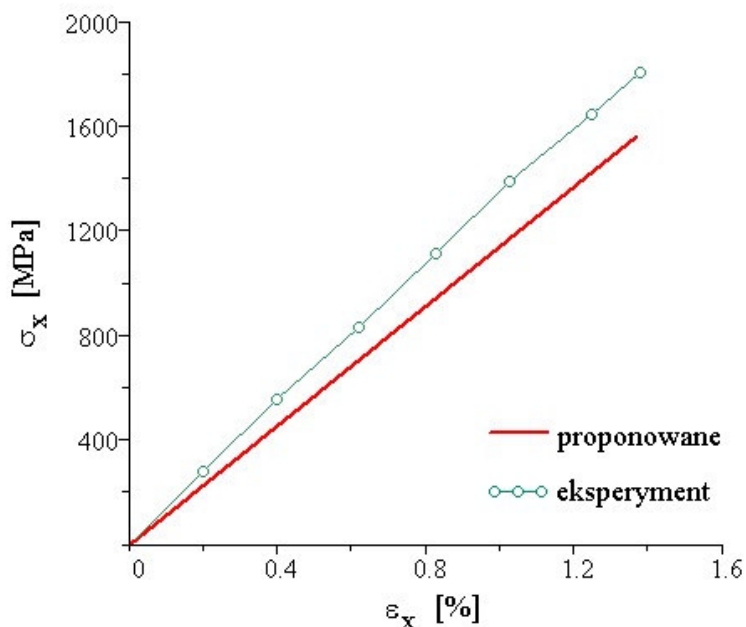
$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}$$

a $E_1 \gg E_2$.

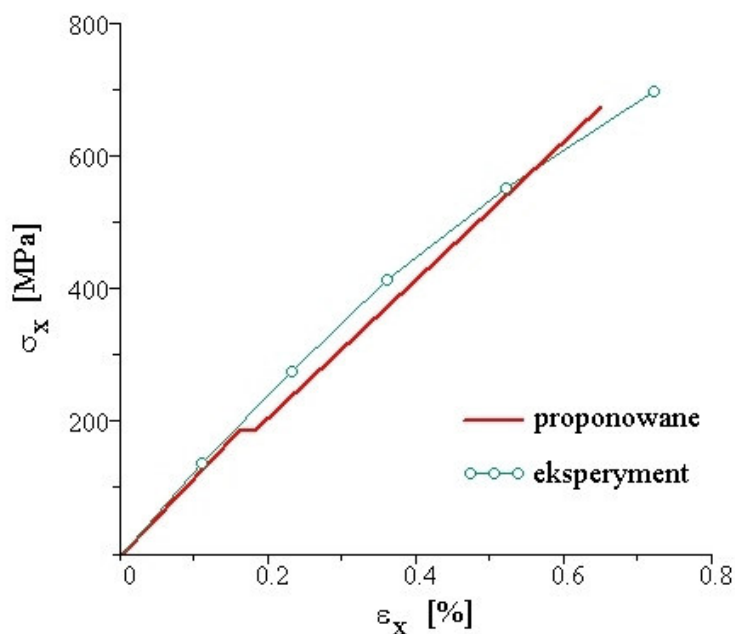
Biorąc pod uwagę, że $a_I = b_{II}$ i $a_{II} = -b_I$ automatycznie udowodnić można zależność $b_I^2 \gg b_{II}^2$.

D.7. Porównanie metody z testem Petita i Waddoupsa

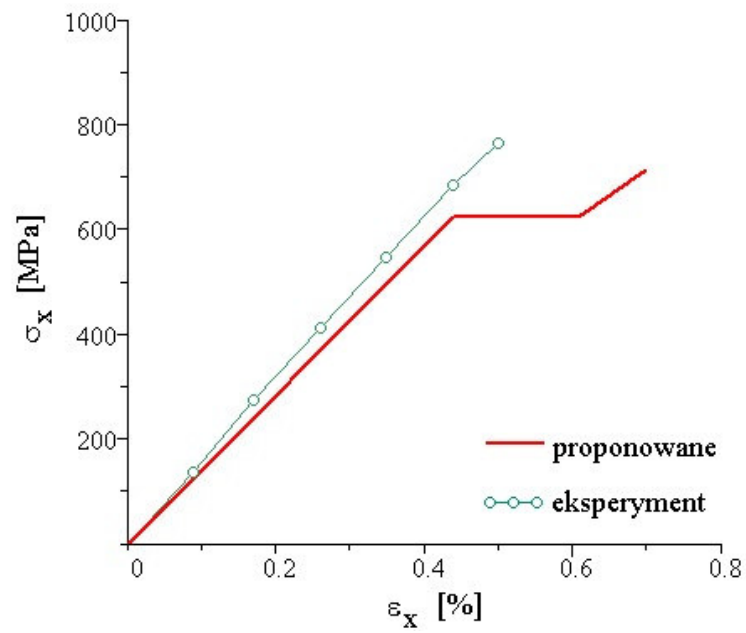
Poniżej przedstawione zostaną wykresy zależności $\sigma - \varepsilon$ porównujące zaproponowaną metodę z eksperymentem przeprowadzonym przez Petita i Waddoupsa [69]. Szczegółowe omówienie porównania zostało przedstawione w rozdziale 8.4.2. Tam też zamieszczono kilka charakterystycznych wykresów spośród zamieszczonych poniżej.



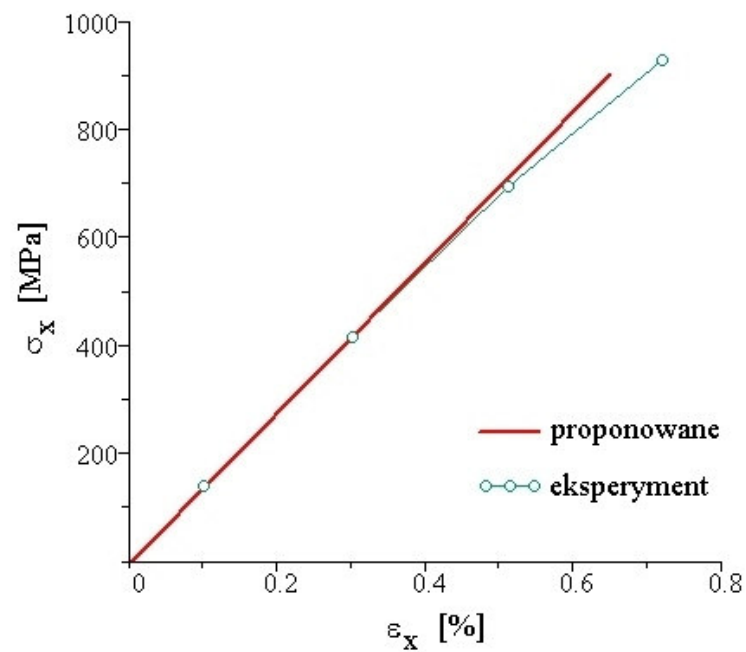
Rys. D.2. Ściskanie laminatu $[0/90]_s$ – eksperyment wg [69].



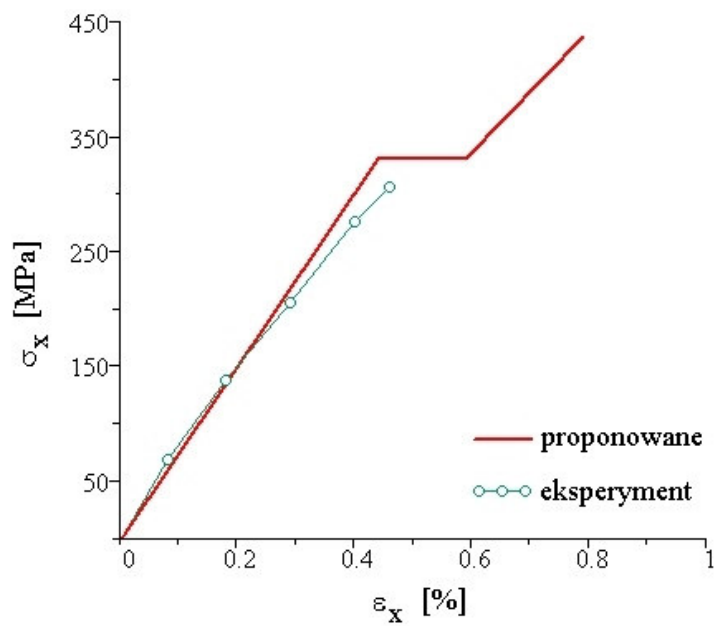
Rys. D.3. Rozciąganie laminatu $[0/90]_s$ – eksperyment wg [69].



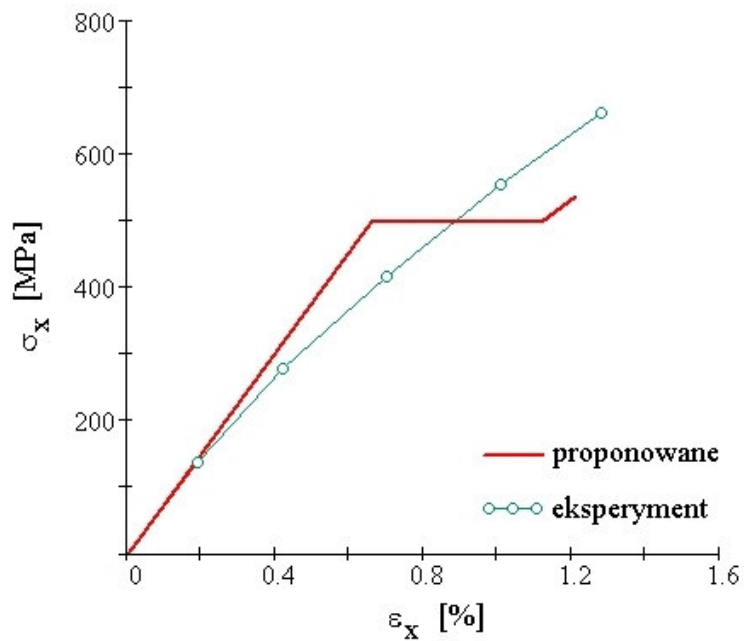
Rys. D.4. Ściskanie laminatu $[\pm 20]_s$ – eksperyment wg [69].



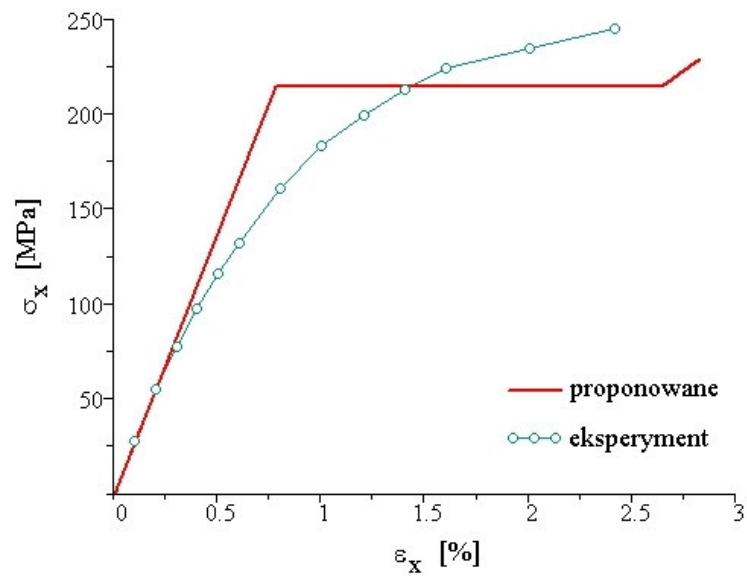
Rys. D.5. Rozciąganie laminatu $[\pm 20]_s$ – eksperyment wg [69].



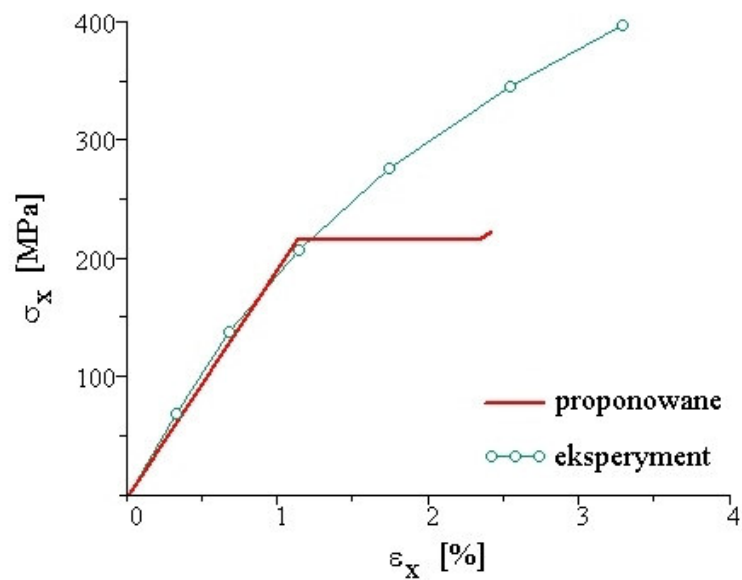
Rys. D.6. Ściskanie laminatu $[\pm 30]_s$ – eksperyment wg [69].



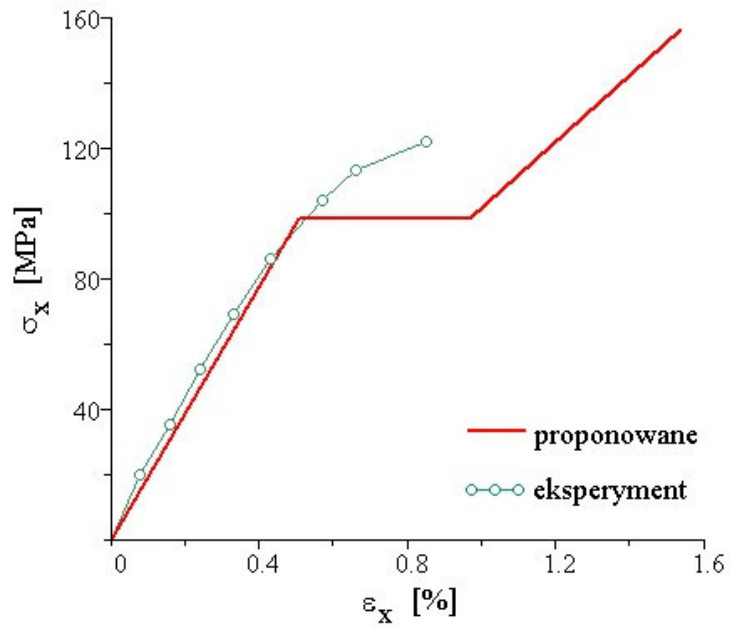
Rys. D.7. Rozciąganie laminatu $[\pm 30]_s$ – eksperyment wg [69].



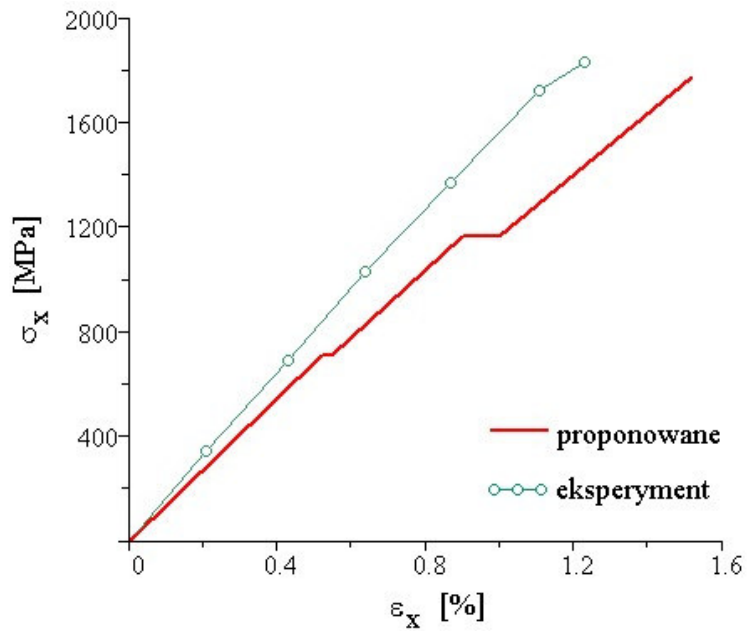
Rys. D.8. Rozciąganie laminatu $[\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].



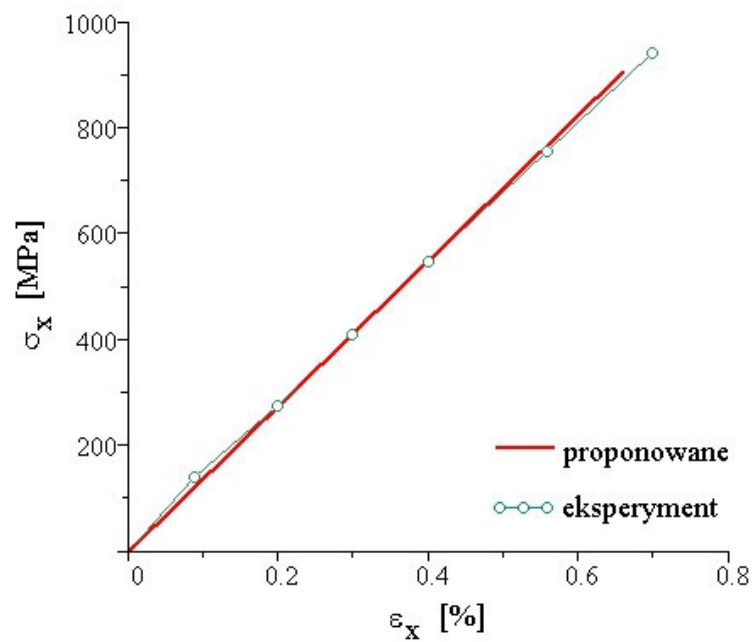
Rys. D.9 Ściskanie laminatu $[\pm 60]_s$ – eksperyment wg [69].



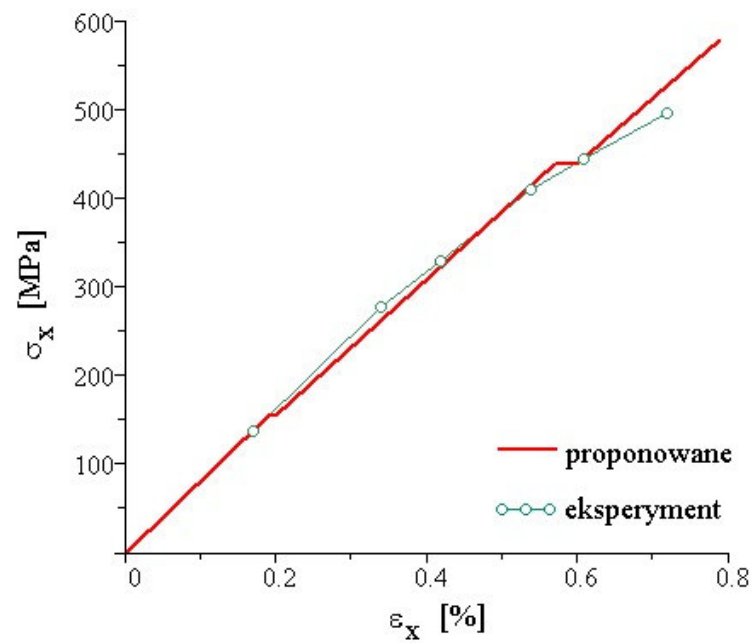
Rys. D.10. Rozciąganie laminatu $[\pm 60]_s$ – eksperyment wg [69].



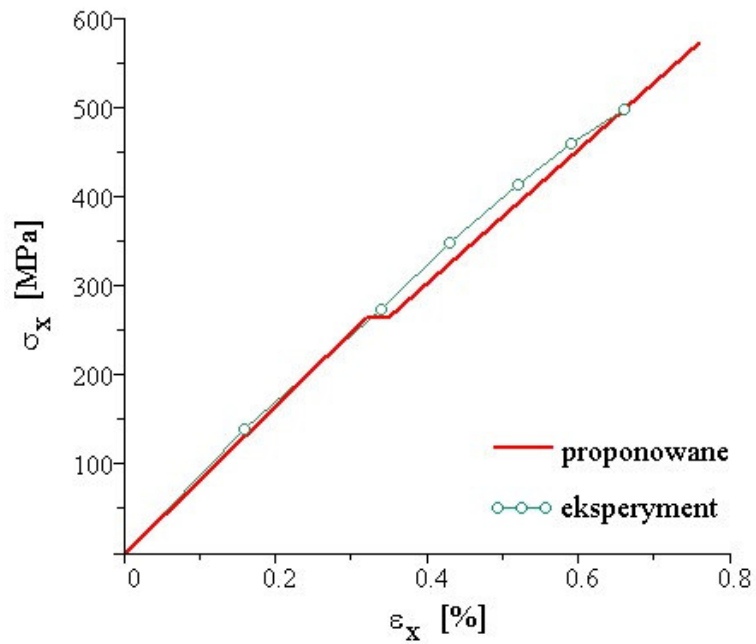
Rys. D.11. Ściskanie laminatu $[0_3/\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].



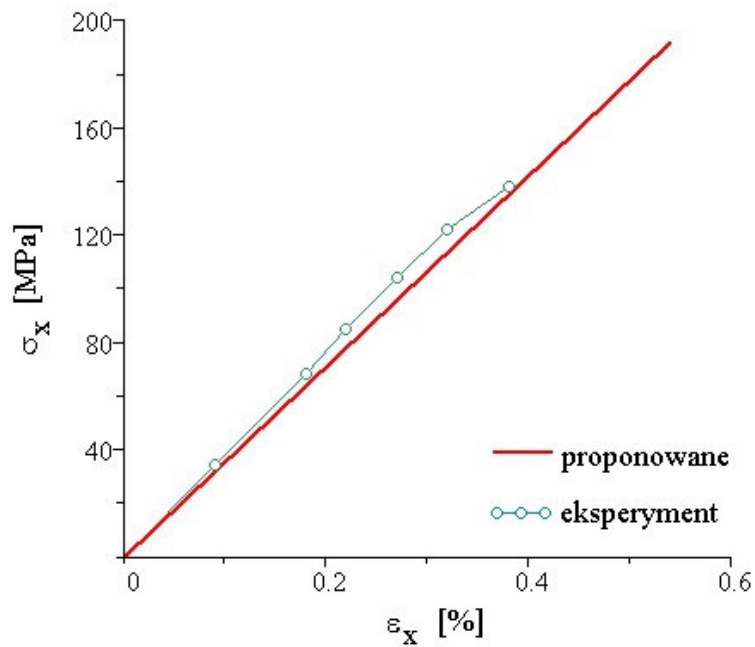
Rys. D.12. Rozciąganie laminatu $[0_3/\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].



Rys. D.13. Rozciąganie laminatu $[0/90/\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].



Rys. D.14. Rozciąganie laminatu $[0/\pm 60]_s$ – eksperyment wg [69].



Rys. D.15. Rozciąganie laminatu $[90_3/\pm 45]_s$ – eksperyment wg [69].

D.8. Wartości własne macierzy odwrotnej

Problem własny dla tensora IV-ego rzędu \mathbf{S} ma postać:

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad (\text{D.73})$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}$ – jednostkowe tensory własne II-ego rzędu, λ – wartości główne tensora \mathbf{S} . Mnożąc obie strony przez macierz odwrotną do \mathbf{S} otrzymujemy kolejno:

$$\left(\mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{S}\right) \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda \mathbf{S}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (\text{D.74})$$

$$\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda \mathbf{S}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (\text{D.75})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda \mathbf{S}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (\text{D.76})$$

Dzieląc obie strony równania (D.76) przez λ , otrzymamy ostatecznie:

$$\mathbf{S}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\omega} \quad (\text{D.77})$$

Zależność (D.77) przedstawia problem własny dla tensora odwrotnego do \mathbf{S} . Jak widać rozwiązaniem tego problemu są te same tensory (kierunki) własne i odwrotne wartości własne. Analogiczne zależności zachodzą też dla zagadnienia własnego tensorów (macierzy) II-ego rzędu.