

POLITECHNIKA KRAKOWSKA im. Tadeusza Kościuszki

Wydział Inżynierii Lądowej - Instytut Mechaniki Budowli

Henryk Laskowski

PRACA DOKTORSKA

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE STALOWO – BETONOWYCH DŹWIGARÓW ZESPOLONYCH W KATEGORIACH TEORII STEROWANIA

Promotor: dr hab. inż. Leszek Mikulski, prof. PK

Kraków 2006





Podziękowania

*Pragnę podziękować za pomoc i rady
przy przygotowaniu niniejszej rozprawy
Promotorowi dr hab. inż. Leszkowi Mikulskiemu, prof. PK.
Dziękuję również mojej żonie Grażynie
za cierpliwość i wyrozumiałość*

Henryk Laskowski





SPIS TREŚCI

1. Wstęp	7
1.1. Uzasadnienie podjęcia badań	7
1.2. Cel i zakres badań	8
2. Podstawy teoretyczne	10
2.1. Metodyka badań	10
2.2. Zasada maksimum w optymalizacji elementów konstrukcyjnych	10
2.2.1. Równania stanu	10
2.2.2. Ograniczenia	11
2.2.3. Funkcja celu	12
2.2.4. Sformułowanie zadania optymalizacji	12
2.2.5. Warunki konieczne optymalizacji	12
2.2.6. Warunki zmiennych stanu	13
2.2.7. Warunki zmiennych sprzężonych	13
3. Programy numeryczne	14
4. Istotne problemy projektowe w modelu matematycznym	15
4.1. Fazy pracy ustroju	15
4.2. Przedziały charakterystyczne	16
4.3. Analiza stanów obiektu	17
4.3.1. Stany montażowe dźwigara stalowego	17
4.3.1.1. Montaż na podporach	17
4.3.1.2. Metoda wspornikowa	20
4.3.1.3. Metoda nasuwania podłużnego	24
4.3.2. Stany montażowe płyty pomostu	29
4.3.2.1. Betonowanie odcinkowe	29
4.3.2.2. Sprężenie płyty pomostu	33
4.3.3. Stan montażu wyposażenia	35
4.3.4. Stan eksploatacji	35
4.3.4.1. Obciążenie samochodami q	35
4.3.4.2. Obciążenie pojazdem ponadnormatywnym K	36
4.3.4.3. Obciążenie tłumem pieszych p	39
4.4. Zjawiska reologiczne w optymalizacji dźwigarów zespolonych	40
4.4.1. Metoda efektywnego modułu sprężystości w fazach montażowych	40
4.4.2. Skurcz betonu w fazach montażowych	41
4.4.3. Metoda zmodyfikowanego efektywnego modułu sprężystości Trosta w fazie eksploatacji	43
4.5. Obciążenia termiczne	45
5. Optymalizacja dźwigarów zespolonych – przykłady	46
5.1. Przykład 1 – optymalizacja dźwigara zespolonego trzyprzęsłowego mostu drogowego	46
5.1.1. Założenia i dane	47
5.1.2. Stany montażowe i eksploatacyjne dźwigara zespolonego	48
5.1.3. Równania stanu	55
5.1.4. Warunki zmiennych stanu	60
5.1.5. Ograniczenia w zadaniu optymalizacji	64
5.1.6. Sformułowanie zadania optymalizacji	66
5.1.7. Wyniki obliczeń w programie dircol–2.1 – wyznaczenie rozwiązania optymalnego	67
5.1.8. Rozwiązanie praktyczne i wyniki obliczeń sprawdzających	90

5.2. Przykład 2 – stany montażowe nasuwania podłużnego	102
5.2.1. Założenia i dane	102
5.2.2. Równania stanu	103
5.2.3. Warunki zmiennych stanu	104
5.2.4. Ograniczenia w zadaniu optymalizacji	105
5.2.5. Sformułowanie zadania optymalizacji	106
5.2.6. Wyniki obliczeń w programie dircol-2.1 – wyznaczenie rozwiązania optymalnego .	106
6. Zakończenie i wnioski	113
Literatura	114

1. Wstęp

1.1. Uzasadnienie podjęcia badań

Przedmiotem badań prowadzonych w ramach pracy doktorskiej jest optymalne kształtowanie ustrojów prętowych o stalowo-betonowym przekroju zespolonym, a w szczególności dźwigarów mostów zespolonych, metodami teorii sterowania. Idea mostów zespolonych polega na włączeniu płyty pomostu do współpracy z dźwigarami stalowymi przez zespolenie tych elementów. Pierwsze obiekty tego typu wybudowano na początku XX-go wieku. W Polsce budowę mostów zespolonych rozpoczęto dopiero w latach czterdziestych. Od tego czasu trwa ciągły rozwój w tej dziedzinie budownictwa.

Rozbudowa sieci komunikacyjnej w Polsce oraz jej dostosowanie do standardów Unii Europejskiej będzie w najbliższych latach koniecznością. Koszty obiektów mostowych, wznoszonych w ciągach tras komunikacyjnych, stanowią około 50% całkowitych kosztów budowy dróg. Dlatego, o wyborze konstrukcji, najczęściej decyduje rachunek ekonomiczny. Okazuje się, że w przypadku obiektów małej i średniej rozpiętości obiekty o konstrukcji zespolonej są tańsze niż obiekty o konstrukcji sprężonej. Również w przypadku prefabrykacji dźwigary zespolone są konkurencyjne w stosunku do dźwigarów sprężonych z uwagi na niższe koszty produkcji, mniejszy ciężar przy tej samej rozpiętości i większe możliwości kształtowania. Biorąc pod uwagę zaznaczające się tendencje można przypuszczać, że wiele obiektów w ciągach komunikacyjnych będzie realizowanych jako konstrukcje zespolone. Poszukiwanie rozwiązań prowadzących do zmniejszenia kosztów inwestycji w tym zakresie jest jak najbardziej celowe.

W elementach zespolonych łączone są materiały o bardzo zróżnicowanych własnościach i właściwościach. Zespolenie betonu i stali z jednej strony umożliwia najlepsze wykorzystanie własności wytrzymałościowych tych materiałów a z drugiej prowadzi do wielu problemów, które w procesie projektowania powinny być uwzględnione i rozwiązane [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Należą do nich: skurcz i pęcznienie betonu, zjawiska termiczne, rysy. Dodatkowym problemem są zjawiska zachodzące w strefie kontaktu betonu i stali związane z poślizgiem w płaszczyźnie styku i podatnością łączników. Największe korzyści wynikają z zespolenia wtedy, gdy beton znajduje się w strefie ściskanej a stal w rozciąganej. Taka sytuacja występuje w przypadku obiektów jednoprzęsłowych. W obiektach wieloprzęsłowych, ciągłych, w strefie występowania ujemnych momentów zginających, niezbędne jest stosowanie różnych zabiegów technologicznych zapewniających wyłącznie naprężenia ściskające w betonie.

Obiekt mostowy jest poddany złożonemu układowi obciążeń. Są to obciążenia stałe, takie jak: ciężar własny obiektu i wyposażenia, obciążenia wynikające ze zjawisk reologicznych i termiczne, oraz obciążenia ruchome związane z poruszającymi się pojazdami. W projektowaniu należy uwzględnić również obciążenia dynamiczne występujące podczas hamowania pojazdów, wyjątkowe oraz obciążenia związane z działaniem wiatru.

Oddzielnym, ważnym zagadnieniem, jakie należy rozważyć w procesie projektowania jest analiza stanów montażowych obiektu. W czasie montażu elementy obiektu pracują w innych schematach statycznych niż w czasie eksploatacji. Mogą ulegać zmianie również charakterystyki geometryczne przekrojów.

Wymienione problemy sprawiają, że projektowanie obiektów mostowych a szczególnie obiektów zespolonych jest procesem bardzo złożonym. Ich jednoczesne uwzględnienie w projektowaniu sprawia, że przyjęcie rozwiązania optymalnego, bez specjalistycznych metod optymalizacji, nie jest możliwe.

Jedną z metod optymalizacji jest zasada maksimum, która jest podstawą teorii optymalnego sterowania [27]. Znajduje ona zastosowanie w optymalizacji obiektów, których model matematyczny jest sformułowany w postaci równań różniczkowych zwyczajnych. Ustroje prętowe można opisać układem takich równań, co umożliwia zastosowanie zasady maksimum. Zasada maksimum formułuje warunki konieczne optymalizacji i pozwala wyznaczyć rozwiązania, które te warunki spełniają. Spośród tych rozwiązań można wytypować rozwiązanie optymalne w sensie matematycznym.

Metody oparte na teorii optymalnego sterowania w projektowaniu konstrukcji są rzadko stosowane. Badania w tym zakresie, w odniesieniu do ustrojów prętowych, prowadzone są m. in. w Zakładzie Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego. Ich wyniki były publikowane w czasopiśmie krajowych i zagranicznych oraz w materiałach konferencyjnych [22, 23, 24, 32, 33, 34]. W literaturze niewiele jest prac poświęconych rozwiązaniu praktycznych problemów. Problem optymalnego kształtowania, w odniesieniu do złożonych obiektów inżynierskich, wymaga dalszych prac.

Optymalne kształtowanie dźwigarów zespolonych z kryterium minimum kosztów jest więc uzasadnione ze względów ekonomicznych. Zastosowana metoda pozwala na wyznaczenie rozwiązań optymalnych, w których uwzględnione są ograniczenia wynikające z analizy modelu fizycznego ustroju. Zadania optymalizacji, w odniesieniu do obiektów inżynierskich są bardzo złożone, a ich rozwiązanie zależy od właściwego sformułowania problemu. Powinny być poprzedzone głęboką analizą fizyczną projektowanego obiektu, prowadzącą do sformułowania modelu matematycznego, uwzględniającego najbardziej istotne problemy projektowe. Różnorodność zagadnień uwzględnianych w projektowaniu mostów zespolonych, wynikających z licznych, często specyficznych dla danego obiektu metod i technologii montażu, charakteru zjawisk fizycznych i złożonego układu obciążeń wymaga analizy, obejmującej całość problemu.

1.1. Cel i zakres badań

Celem pracy było zastosowanie matematycznych metod optymalnego sterowania w projektowaniu stalowo – betonowych dźwigarów zespolonych obiektów mostowych. W wyniku przeprowadzonych badań zaproponowano metody formułowania problemów optymalnego kształtowania w kategoriach teorii sterowania, umożliwiające wyznaczenie rozwiązania spełniającego warunki konieczne optymalizacji a następnie wytypowanie rozwiązania optymalnego.

W badaniach uwzględniono problemy istotne w procesie projektowania. Dokonano analizy, umożliwiającej uwzględnienie tych problemów w budowanych modelach matematycznych. Uwzględniono: stany montażowe, zjawiska reologiczne, obciążenia normowe, stany graniczne nośności i użytkowania.

Stany montażowe

W formułowanych zadaniach optymalizacji, oprócz stanu docelowego uwzględniono stany montażowe, w których montowane elementy pracują przy innych schematach statycznych niż w czasie eksploatacji. Sposoby montażu są bardzo zróżnicowane i są opracowywane dla każdego mostu indywidualnie [35, 36, 38, 39]. Dlatego wyróżniono pewne podstawowe rozwiązania. Uwzględniono następujące stany montażowe płyty pomostu:

- betonowanie z wykorzystaniem dźwigara stalowego jako konstrukcji wsporczej bez podpór montażowych,
- betonowanie z zastosowaniem podpór montażowych w przęśle,
- betonowanie ze sprężeniem płyty za pomocą kabli,
- betonowanie ze sprężeniem płyty przez obniżenie podpór.

W modelu matematycznym uwzględniono zasady związane z kolejnością betonowania poszczególnych odcinków płyty pomostu. Rozważono również stany montażowe występujące w trakcie montażu części stalowej dźwigara zespolonego w przypadku ustrojów ciągłych ze szczególnym uwzględnieniem następujących metod:

- metoda nasuwania podłużnego,
- montaż na podporach elementów prefabrykowanych,
- montaż metodą wspornikową,

Ujęcie w modelu matematycznym tych podstawowych metod montażu umożliwia ich dowolną modyfikację w analizie stanów montażowych rzeczywistego obiektu inżynierskiego.

Zjawiska reologiczne

Zjawiska reologiczne zachodzące w betonie (skurcz i pełzanie) mają istotny wpływ na wielkość sił wewnętrznych i rozkład naprężeń w przekroju zespolonym. Zjawiska te występują jednocześnie, choć z różną intensywnością w kolejnych okresach eksploatacji. W różnych teoriach są ujmowane razem lub osobno. Podczas montażu obiektu o konstrukcji zespolonej stosuje się różne zabiegi technologiczne, które ograniczają skurcz betonu i zmniejszają jego negatywne skutki, np. betonowanie etapami kolejnych odcinków płyty, betonowanie kolejnych warstw płyty itp. Dominujący wpływ na wartość sił wewnętrznych i rozkład naprężeń w przekroju zespolonym ma pełzanie. Istnieje wiele metod ujęcia zjawiska pełzania. W pracy zostaną zastosowane:

- metoda efektywnego modułu sprężystości,
- metoda zmodyfikowanego modułu sprężystości (metoda Trosta).

Analiza układu obciążeń

W formułowanych modelach matematycznych uwzględniono obciążenia zgodnie z normą [43]. Ze względu na zjawiska reologiczne rozważano oddzielnie obciążenia krótkotrwałe i długotrwałe. Opracowano również metodę pozwalającą ująć w optymalizacji obciążenie ciężarem własnym poruszającego się pojazdu.

Stany graniczne nośności i użytkowania

W zamieszczonych w pracy przykładach obliczeniowych sformułowano ograniczenia wynikające ze stanów graniczne nośności i użytkowania określonych normami technicznymi [40, 41, 42, 44, 45]. Opracowano sposób formułowania ograniczeń, zapewniający spełnienie w rozwiązaniu optymalnym stanów granicznych nośności i użytkowania w każdej sytuacji obliczeniowej, jaka może wystąpić w czasie montażu i eksploatacji obiektu.

W projektowaniu poszukuje się rozwiązania optymalnego ze względu na wiele kryteriów (materiałochłonność rozwiązania, pracołłonność, energochłonność, równomierność wyężenia materiału, czas trwania inwestycji, estetykę i inne). Niektóre z tych kryteriów można sprowadzić do kryterium kosztów, które wydaje się najważniejsze, jednak problem optymalnego kształtowania jest problemem wielokryterialnym. W pracy zamieszczono przykłady optymalizacji dźwigarów zespolonych formułowane jako jednokryterialne z kryterium minimum objętości materiału, które w wielu przypadkach jest równoznaczne z kryterium minimum kosztów.

Rozwiązanie optymalne może być wyznaczone przez podjęcie różnych decyzji polegających m. in. na wyborze koncepcji, doborze materiałów konstrukcyjnych, przyjęciu wymiarów przekroju poprzecznego, technologii montażu. Mamy więc do czynienia z wieloma zmiennymi decyzyjnymi. W projektowaniu należy uwzględnić również różne ograniczenia. Wynikają one z obowiązujących norm, przepisów technicznych, praktyki projektowej oraz z decyzji inwestora. W pracy będą więc formułowane jednokryterialne problem optymalizacji z kryterium minimum kosztów, z wieloma zmiennymi decyzyjnymi i ograniczeniami. Problemy te będą rozwiązane z zastosowaniem zasady maksimum za pomocą specjalistycznych metod matematycznych i numerycznych.

2. Podstawy teoretyczne

2.1. Metodyka badań

Zasada maksimum jest stosowana najczęściej do rozwiązywania zadań czasoptymalnych. Została sformułowana w odniesieniu do obiektów sterowanych, które można opisać układem równań różniczkowych typu $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$ gdzie $x(t)$, $u(t)$ są wektorami zmiennych stanu i zmiennych decyzyjnych a zmienna niezależna t oznacza czas [16, 26]. Metodę tę można zastosować również do rozwiązywania zadań optymalnego kształtowania konstrukcji, które mogą być analizowane jako ustroje prętowe. Można bowiem dla ustroju prętowego sformułować układ równań różniczkowych o takiej postaci. Układ ten zawiera związki pomiędzy wymiarami przekroju poprzecznego, cechami materiałowymi, obciążeniami i uogólnionymi siłami wewnętrznymi a zmienną niezależną, którą jest współrzędna odmierzana wzdłuż osi ustroju prętowego.

Zasada maksimum pozwala sformułować warunki konieczne optymalizacji z ograniczeniami zmiennych stanu oraz sprowadzić problem do tzw. wielopunktowego problemu brzegowego (WPPB). Sprowadzenie problemu optymalizacji do WPPB wymaga zastosowania toku postępowania, który w ogólnym zarysie przedstawia się następująco:

- analiza fizyczna ustroju (zdefiniowanie schematów statycznych, cech materiałowych, charakterystyk geometrycznych przekroju, obciążeń w poszczególnych fazach pracy),
- sformułowanie modelu matematycznego ustroju w postaci układu równań różniczkowych,
- wybór zmiennych decyzyjnych,
- wybór kryterium optymalizacji (sformułowanie funkcji celu),
- sformułowanie warunków brzegowych i wewnętrznych warunków punktowych,
- sformułowanie ograniczeń zmiennych stanu i zmiennych decyzyjnych,
- sformułowanie ograniczeń wynikających z SGN i SGU,
- sformułowanie układu równań zmiennych sprzężonych,
- sformułowanie warunków zmiennych sprzężonych,
- rozwiązanie powstałego układu równań różniczkowych w obecności ograniczeń i wyznaczenie przebiegu zmiennych decyzyjnych zapewniających minimum przyjętej w optymalizacji funkcji celu.

Przedstawiony wyżej tok postępowania pozwala na wyznaczenie rozwiązań, które spełniają warunki konieczne optymalności. Szczegółowa analiza tych rozwiązań pozwoli wyznaczyć rozwiązanie optymalne. Do rozwiązania zadań optymalizacji zostanie zastosowana bezpośrednia metoda kolokacji.

2.2. Zasada maksimum w optymalizacji elementów konstrukcyjnych

Zadania optymalizacji, formułowane w kategoriach teorii sterowania z zastosowaniem zasady maksimum, powinny mieć ściśle określoną strukturę formalną, niezależnie od przedmiotu optymalizacji. Podstawowymi elementami tej struktury są równania stanu, ograniczenia oraz funkcja celu optymalizacji.

2.2.1. Równania stanu

W mechanice konstrukcji można wyróżnić dwie grupy wielkości opisujących obiekt. Są to parametry konstrukcyjne, określające własności i właściwości konstrukcji oraz parametry określające aktualny stan układu - zmienne stanu.

Parametry konstrukcyjne to: parametry geometryczne, fizyczne, parametry określające relacje pomiędzy konstrukcją a otoczeniem, takie jak stan początkowy układu, obciążenie, temperatura. Pewne parametry konstrukcyjne mogą być ustalone a inne przyjęte jako zmienne. Zmienne parametry konstrukcyjne są zmiennymi decyzyjnymi w procesie optymalizacji. Zmiennymi decyzyjnymi mogą być np. wymiary geometryczne przekroju poprzecznego, parametry osi geometrycznej pręta, obciążenie, położenie podpór. Można je zdefiniować jako funkcje zmiennej niezależnej x , którą w przypadku ustrojów prętowych, będzie współrzędna odmierzana wzdłuż osi geometrycznej. Zmienne decyzyjne nie mogą być dowolne. Ich wartości muszą się mieścić w zakresie wartości dopuszczalnych, wynikających z przepisów technicznych i praktyki projektowej:

$$\mathbf{u}(x) \in \{U_{\text{dop}}\}, \quad \mathbf{u}(x) \in R^m \quad (2.1)$$

gdzie: $\mathbf{u}(x)$ – wektor zmiennych decyzyjnych,

$\{U_{\text{dop}}\}$ – dopuszczalny obszar zmiennych decyzyjnych,

m – liczba zmiennych decyzyjnych.

Należy podkreślić, że zależność (2.1) jest spełniona, gdy zmienne decyzyjne należą również do brzegu obszaru dopuszczalnego. Zmienne decyzyjne są funkcjami przedziałami ciągłymi, tzn. mogą być nieciągłe w skończonej liczbie punktów. Wymienione własności charakteryzuje wiele zmiennych decyzyjnych przyjmowanych w mechanice konstrukcji.

Zmiennymi stanu w mechanice konstrukcji są: przemieszczenie, odkształcenie, naprężenie, uogólnione siły wewnętrzne. Ich wartości również nie mogą być dowolne i muszą mieścić się w zakresie wartości dopuszczalnych.

$$\mathbf{y}(x) \in \{\mathbf{Y}_{\text{dop}}\}, \quad \mathbf{y}(x) \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

gdzie: $\mathbf{y}(x)$ – wektor zmiennych stanu,

$\{\mathbf{Y}_{\text{dop}}\}$ – dopuszczalny obszar zmiennych stanu,

n – liczba zmiennych stanu.

Zmienne stanu są funkcjami zmiennej niezależnej x , mogą być nieciągłe w skończonej liczbie punktów i w pewnych przypadkach, mogą przyjmować wartości z brzegu obszaru dopuszczalnego.

Stan układu jednoznacznie zależy od wartości parametrów konstrukcyjnych. Dla każdego obiektu można sformułować równania, określające tę zależność. W optymalizacji, zależności pomiędzy zmiennymi stanu, zmiennymi decyzyjnymi i ustalonymi parametrami konstrukcyjnymi są formułowane w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x], \quad \mathbf{y}(x) \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{u}(x) \in \mathbb{R}^m \quad x \in \langle x_0, x_k \rangle \quad (2.3)$$

$$y_i(x_{wi}) = y_{wi} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

gdzie: $\mathbf{y}(x)$ – wektor zmiennych stanu,

x_0, x_k – początkowa i końcowa wartość zmiennej niezależnej,

y_{wi} – wartość zmiennej stanu w ustalonym punkcie x_{wi} .

Przy ustalonym przebiegu zmiennych decyzyjnych, układ równań (2.3) wraz z warunkami (2.4) ma jednoznaczne rozwiązanie w sensie matematycznym. Nie każde rozwiązanie będzie spełniało ograniczenia zmiennych stanu (2.2), mimo że zmienne decyzyjne należą do zbioru dopuszczalnego, określonego zależnością (2.1).

2.2.2. Ograniczenia

Ograniczenia zmiennych stanu i zmiennych decyzyjnych mogą być formułowane jako nierówności o ogólnej postaci:

$$\mathbf{G}[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)] \geq 0 \quad \mathbf{G}[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)] \in \mathbb{R}^r \quad (2.5)$$

gdzie: r – liczba ograniczeń.

Przykładem może być ograniczenie maksymalnych naprężeń normalnych, stycznych lub naprężeń w złożonym stanie naprężenia. Ograniczenia zmiennych decyzyjnych (2.1) i zmiennych stanu (2.2) również można sprowadzić do postaci (2.5).

Można wyróżnić trzy przypadki ograniczeń (2.5), a mianowicie:

$$\text{ograniczenie zależne wyłącznie od zmiennych stanu} \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}[\mathbf{y}(x)] \quad (2.5.1)$$

$$\text{ograniczenie zależne wyłącznie od zmiennych decyzyjnych} \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}[\mathbf{u}(x)] \quad (2.5.2)$$

$$\text{ograniczenie zależne od zmiennych stanu i zmiennych decyzyjnych} \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)] \quad (2.5.3)$$

Ograniczenie zależne jawnie od zmiennych decyzyjnych (2.5.2), (2.5.3) jest ograniczeniem zerowego rzędu. Natomiast rząd ograniczenia (2.5.1) jest najniższym stopniem pochodnej funkcji G , w której pojawia się zależność od zmiennych decyzyjnych. Jeżeli funkcja G lub jej pochodna nie zależy jawnie jednocześnie od wszystkich zmiennych decyzyjnych, to należy formułować pojęcie rzędu ograniczenia ze względu na poszczególne zmienne decyzyjne.

Jeżeli pewne ograniczenie G przyjmuje wartość zerową, to mówimy, że jest ono aktywne. Ograniczenia, w zależności od ich natury fizycznej, mogą być aktywne w punkcie lub w pewnym przedziale. Aktywność ograniczenia w przedziale, ma bezpośredni wpływ na przebieg zmiennych decyzyjnych w tym przedziale, ponieważ na tej podstawie można sformułować równanie

$$G_k[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)] = 0, \quad k \in \langle 1, r \rangle \quad (2.6)$$

które musi być uwzględnione w procesie optymalizacji. Aktywność ograniczenia w punkcie nie ma bezpośredniego wpływu na przebieg zmiennych decyzyjnych. Ich wartości, w tym przypadku, są wyznaczone z innej zależności, która wynika z zasady maksimum.

2.2.3. Funkcja celu

O wyborze rozwiązania decydują przyjęte kryteria. W optymalizacji, na ich podstawie, formułuje się funkcję celu, która w ogólnym przypadku jest funkcjonałem postaci:

$$J[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] = f_k[\mathbf{y}(x_k), x_k] + \int_{x_0}^{x_k} f_0[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] dx \quad (2.7)$$

gdzie: $f_k[\mathbf{y}(x_k), x_k]$, $f_0[\mathbf{y}(x), x]$ – funkcje skalarne.

Zadanie optymalizacji z funkcjonałem (2.7) nosi nazwę problemu Boltz'a. Jeżeli $f_k = 0$ to jest to problem Lagrange'a. Jeżeli natomiast $f_0 = 0$ to problem nosi nazwę problemu Mayer'a. Problemy Boltz'a i Lagrange'a można sprowadzić do problemu Mayer'a wprowadzając dodatkową zmienną stanu określoną równaniem różniczkowym (2.8) wraz z warunkiem początkowym (2.9).

$$v'[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] = f_0[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] + f_k'[\mathbf{y}(x), x] \quad (2.8)$$

$$v[\mathbf{y}(x_0), \mathbf{u}(x_0), x_0] = f_k[\mathbf{y}(x_0), x_0] \quad (2.9)$$

Wtedy funkcja celu przyjmuje postać:

$$J[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] = v[\mathbf{y}(x_k), \mathbf{u}(x_k), x_k] \quad (2.10)$$

2.2.4. Sformułowanie zadania optymalizacji

Sformułowanie zadania jest najbardziej istotnym elementem procesu optymalizacji. Obejmuje ono przyjęcie modelu fizycznego analizowanego obiektu i zbudowanie właściwej struktury formalnej. Zadanie optymalizacji polega na wyznaczeniu przebiegu zmiennych decyzyjnych, zapewniających rozwiązanie układu równań (2.3) wraz z warunkami (2.4), spełniające ograniczenia (2.5), przy których przyjęta funkcja celu (2.7) osiągnie wartość minimalną. Wprowadzając oznaczenia:

$\mathbf{u}_{opt}(x)$ – wektor zmiennych decyzyjnych w rozwiązaniu optymalnym,

$\mathbf{y}_{opt}(x)$ – wektor zmiennych stanu odpowiadający \mathbf{u}_{opt}

zadanie optymalizacji można sformułować w postaci wyrażenia:

$$J[\mathbf{y}_{opt}(x), \mathbf{u}_{opt}(x), x] = \min_{\mathbf{u}} J[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] \quad (2.11)$$

Rozwiązanie zadania zależy przede wszystkim od poprawnego sformułowania problemu od strony fizycznej i formalnej.

2.2.5. Warunki konieczne optymalizacji

Do sformułowania warunków koniecznych optymalizacji służy zasada maksimum w wersji rozszerzonej uwzględniająca ograniczenia zmiennych stanu i ich nieciągłości w skończonej liczbie punktów. Sposób sformułowania problemu musi być zgodny z założeniami zasady maksimum.

1. Optymalizowany obiekt jest opisany równaniami stanu (2.3)
2. Zmienne stanu i zmienne decyzyjne spełniają ograniczenia (2.5)
3. W analizowanym problemie można sformułować funkcję Hamiltona zależną od zmiennych stanu, zmiennych decyzyjnych oraz zmiennych sprzężonych będących funkcjami zmiennej niezależnej x :

$$H = f_0 + \lambda^T f[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] + \mu G[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)] \quad (2.12)$$

4. Za pomocą funkcji H można zapisać układ równań różniczkowych zmiennych sprzężonych (układ równań sprzężonych):

$$\lambda_i' = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad i = 1 \div n \quad (2.13)$$

Jeżeli wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{u}(x)$ oraz odpowiadający mu wektor zmiennych stanu $\mathbf{y}(x)$ są wyznaczone w rozwiązaniu optymalnym to istnieje nietrywialne rozwiązanie układu równań sprzężonych, które zapewnia maksimum funkcji Hamiltona dla każdego x

$$H[\lambda(x), \mu(x), \mathbf{y}(x), \mathbf{u}_{opt}(x)] = \max_{\mathbf{u}} H[\lambda(x), \mu(x), \mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)] \quad (2.14)$$

W powyższym sformułowaniu występuje $2n + m$ niewiadomych: n zmiennych stanu, n zmiennych sprzężonych odpowiadających zmiennym stanu oraz m zmiennych decyzyjnych. Równania stanu

i równania sprzężone stanowią $2n$ zależności. Jeżeli żadna ze zmiennych decyzyjnych nie należy do brzegu obszaru dopuszczalnego, określonego ograniczeniami (2.5), to warunek (2.14) rozwiązania optymalnego dostarcza m równań wynikających z konieczności zerowania się pochodnych cząstkowych funkcji Hamiltona względem poszczególnych zmiennych decyzyjnych

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1 \div m \quad (2.15)$$

Jeśli niektóre spośród ograniczeń (2.5) są aktywne w przedziale, to pewne zmienne decyzyjne należą do brzegu obszaru dopuszczalnego i mogą być wyznaczone z równań

$$G_p[y(x), u(x)] = 0, \quad p \in \langle 1, r \rangle \quad (2.16)$$

gdzie: p – liczba aktywnych ograniczeń.

Pozostałe zmienne decyzyjne będą wyznaczone z $m - p$ warunków zerowania się pochodnych cząstkowych funkcji Hamiltona względem tych zmiennych.

Zasada maksimum pozwala wytypować rozwiązania, które spełniają warunki konieczne optymalności. Jeżeli rozwiązanie jest jedno, to jest to rozwiązanie optymalne. Jeżeli jest więcej rozwiązań spełniających warunki konieczne, to spośród nich można wytypować rozwiązanie optymalne przeprowadzając dodatkową analizę polegającą na badaniu funkcji celu optymalizacji, której wartość w rozwiązaniu optymalnym jest najmniejsza.

2.2.6. Warunki zmiennych stanu

Równania stanu (2.3), opisujące ustrój prętowy, są formułowane i rozwiązywane w poszczególnych przedziałach całkowania. Granice tych przedziałów są ustalone w pewnych punktach charakterystycznych, którymi w szczególności mogą być: początek lub koniec ustroju prętowego, podpora, przegub, miejsce skokowej zmiany parametrów przekroju poprzecznego, początek lub koniec obciążenia ciągłego, punkt przyłożenia siły skupionej lub momentu skupionego. W dalszej części pracy zaproponowano metodę, która znacznie ogranicza ilość punktów charakterystycznych. Przy ustalonym przebiegu zmiennych decyzyjnych, równania stanu (2.3) mają jednoznaczne rozwiązanie, jeśli są sformułowane warunki zmiennych stanu. Całkowita ilość warunków jest równa iloczynowi liczby równań stanu i liczby przedziałów całkowania. Warunki zmiennych stanu formułuje się w postaci warunków punktowych na granicach przedziałów całkowania. Wynikają one z przyjętego modelu fizycznego ustroju. Są to:

1. warunki geometryczne wynikające z rodzaju więzów (sposobu podparcia),
2. warunki geometryczne wynikające z ciągłości lub skoku przemieszczeń liniowych i kątowych,
3. warunki równowagi sił w najbliższym otoczeniu punktu charakterystycznego (warunki ciągłości lub skoku sił przekrojowych).

Jeżeli w analizowanym zadaniu nie jest możliwe sformułowanie odpowiedniej ilości warunków punktowych to należy sformułować warunki dodatkowe w postaci warunków równowagi sił oraz warunków geometrycznych w odniesieniu do części lub całego ustroju.

2.2.7. Warunki zmiennych sprzężonych

Warunki zmiennych sprzężonych formułuje się na granicach przedziałów całkowania. Są to warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe wynikające z warunków transwersalności. Jeżeli warunki punktowe zmiennych stanu są sformułowane w postaci warunków 1, 2 lub 3 (pkt 2.2.6), to warunki transwersalności sprowadzają się do następujących związków pomiędzy zmiennymi sprzężonymi i zmiennymi stanu:

w punktach brzegowych

$$y_i(x_b) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i(x_b) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad y_i(x_b) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i(x_b) = 0 \quad (2.17)$$

gdzie: x_b – współrzędna początku lub końca belki,

w ustalonych punktach wewnętrznych

$$y_i(x_w) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i(x_w^+) = \lambda_i(x_w^-) + L_i, \quad (2.18)$$

$$y_i(x_w^+) = y_i(x_w^-) + Q_i \Leftrightarrow \lambda_i(x_w) = 0 \quad (2.19)$$

gdzie: x_w – ustalony punkt wewnętrzny.

Gdy nie zachodzi żadna z dwóch relacji w ustalonych punktach wewnętrznych to zmienne sprzężone są w tych punktach ciągłe.

3. Programy numeryczne

Istnieje wiele algorytmów numerycznych i programów, ale tylko niektóre z nich pozwalają rozwiązać numerycznie praktyczne problemy optymalnego kształtowania. Jednym z programów bazujących na matematycznej teorii optymalnego sterowania jest program DIRCOL-2.1 (A Direct Collocation Method for the Numerical Solution of Optimal Control Problems) autorstwa Prof. Oskara von Stryka z TU Darmstadt [31]. Zakład Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego ma możliwość stosowania tego programu do celów naukowych. Program ten jest dobrym i skutecznym narzędziem do rozwiązywania zadań sformułowanych w sposób opisany powyżej. Istnieją również inne programy komputerowe, za pomocą których można rozwiązać problemy optymalnego kształtowania sformułowane w kategoriach teorii sterowania. Na szczególną uwagę zasługuje tu program NUDOCCCS-9.0 (Numerical Discretization Method for Optimal Control Problems with Constraints in Control and State) autorstwa Prof. Christofa Büskensa z U. Bremen, który obecnie nie jest dostępny w Zakładzie Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego.

Sformułowane w pracy problemy optymalnego kształtowania zostały rozwiązane za pomocą programu Dircol-2.1. Komunikacja pomiędzy użytkownikiem a blokiem obliczeniowym w tym programie odbywa się za pomocą trzech podprogramów: user.f, DATDIM, DATLIM.

user.f

Ten podprogram zawiera szereg procedur, za pomocą których wprowadza się model matematyczny optymalizowanego obiektu a mianowicie:

- dane (procedura DIRCOM),
- początkowe wartości zmiennych stanu (procedura USRSTV),
- funkcję celu (procedura USROBJ),
- prawe strony równań stanu (procedura USRDEQ),
- warunki brzegowe zmiennych stanu w postaci wartości tych zmiennych odpowiadające prawej granicy zmiennej niezależnej (procedura USRNBC),
- warunki punktowe zmiennych stanu w postaci prawostronnych granic zmiennych stanu w ustalonych punktach wewnętrznych (procedura USRNBC),
- warunki uwikłane zmiennych stanu w ustalonych punktach wewnętrznych (procedura USRNBC),
- warunki uwikłane zmiennych stanu zwierające wartości tych zmiennych odpowiadające prawej i lewej granicy zmiennej niezależnej (procedura USRNBC),
- ograniczenia jednostronne zadania optymalizacji (procedura USRNIC),
- ograniczenia dwustronne zadania optymalizacji (procedura USRNEC),

DATDIM

Za pomocą podprogramu DATDIM określa się m. in.:

- metodę obliczeń,
- dopuszczalny błąd rozwiązania,
- sposób dyskretyzacji,
- wymiar zadania optymalizacji,
- sposób przyjmowania wartości startowych,
- nazwy zmiennych i funkcji ograniczeń.

DATLIM

W podprogramie DATLIM deklaruje się:

- dopuszczalne zakresy zmiennych stanu,
- dopuszczalne zakresy zmiennych decyzyjnych,
- dopuszczalne zakresy parametrów sterowania.

Ponadto określa się, które spośród warunków zmiennych stanu zdefiniowanych w procedurze USRNBC mają być uwzględnione w obliczeniach oraz definiuje się wartości lewostronnych granic zmiennych stanu w otoczeniu ustalonych punktów wewnętrznych i wartości zmiennych stanu odpowiadające zerowej wartości zmiennej niezależnej.

Pewne elementy struktury formalnej zadania optymalizacji są w programie dircol formułowane automatycznie. Są to równania sprzężone, warunki zmiennych sprzężonych i funkcja Hamiltona. Wyniki obliczeń otrzymuje się w formie cyfrowej w postaci zbiorów danych a w tym m. in.

- DATRES – zestawienie wszystkich wyników oraz informacji dotyczących zadania optymalizacji,
- GDATU – dyskretne wartości zmiennych decyzyjnych,
- GDATX – dyskretne wartości zmiennych stanu.

Program umożliwi również wyprowadzenie wyników obliczeń w formie graficznej. O skuteczności programu Dircol-2.1 świadczą wyniki obliczeń w zakresie optymalnego kształtowania przekroju poprzecznego prowadzonych w Zakładzie Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego.

4. Istotne problemy projektowe w modelu matematycznym

Model matematyczny powinien uwzględniać najbardziej istotne problemy projektowe. Nadmierne uszczegółowienie modelu prowadzi do bardzo rozbudowanych zadań optymalizacji. Budowa modelu matematycznego powinna być poprzedzona szczegółową analizą fizyczną obiektu obejmującą ustalenie faz pracy, wydzielenie przedziałów charakterystycznych, identyfikację charakterystyk geometrycznych przekroju oraz obciążeń w poszczególnych fazach pracy a także analizę istotnych zjawisk fizycznych. O wielkości zadania optymalizacji decyduje przede wszystkim ilość uwzględnionych faz pracy obiektu oraz ilość wydzielonych przedziałów charakterystycznych.

4.1. Fazy pracy ustroju

Najbardziej ogólnie fazy pracy dzielą się na fazy montażowe i fazę eksploatacji. Można wyróżnić dwa czynniki, które decydują o fazie pracy ustroju. Są to: schemat statyczny i obciążenie lub układ obciążeń. Schemat statyczny może ulegać zmianie w trakcie montażu. Każda zmiana schematu statycznego prowadzi do odrębnej fazy pracy. W trakcie montażu zostaje ustalony ostateczny schemat statyczny ustroju. Ilość faz pracy charakteryzujących się różnymi schematami statycznymi zależy od technologii montażu obiektu.

W pewnych przypadkach schemat statyczny nie ulega zmianie, np. obiekty mostowe małych rozpiętości o docelowym schemacie statycznym belki wolnopodpartej, gdy nie stosuje się podpór montażowych, pracują w trakcie montażu w schemacie docelowym. W przypadku zastosowania podpory montażowej schematem statycznym tych obiektów w trakcie montażu jest belka ciągle dwuprzęsłowa. Obiekty wieloprzęsłowe ciągle, montowane z elementów prefabrykowanych na podporach stałych i montażowych, mogą pracować w fazie montażu do momentu uciągnięcia jako belki jednoprzęsłowe wolnopodparcie lub jako belki gerberowskie. W powyższych przypadkach można wyróżnić najwyżej dwie fazy montażowe ustalone ze względu na zmianę schematu statycznego: faza ze schematem przejściowym, faza ze schematem docelowym.

Największą ilość faz pracy ze względu na zmianę schematu statycznego trzeba ustalić w przypadku montażu wspornikowego. Każda zmiana geometrii (montaż kolejnego segmentu) powoduje zmianę fazy pracy ustroju. W przypadku obiektów o dużej rozpiętości montowanych metodą wspornikową, w celu ograniczenia wielkości zadania optymalizacji, kolejną fazę pracy ustroju można ustalić po zamontowaniu każdych dwóch lub trzech segmentów.

Na szczególną uwagę zasługują stany montażowe obiektów montowanych metodą nasuwania podłużnego. W tym przypadku schemat statyczny obiektu w trakcie montażu ulega ciągłej zmianie a praktyczne znaczenie w projektowaniu ma obwiednia momentów i sił poprzecznych. Dlatego podstawowy układ równań opisujących obiekt w tej fazie pracy powinien umożliwiać wyznaczenie obwiedni sił przekrojowych.

Z każdą fazą ustaloną ze względu na schemat statyczny związany jest układ obciążeń obiektu. Zmiana układu obciążeń przy ustalonym schemacie statycznym wymusza odrębną fazę pracy. Układ obciążeń działający w danej fazie powinien zawierać obciążenia o tym samym charakterze. Można wyróżnić następujące grupy obciążeń, które powinny być uwzględnione w odrębnych fazach pracy:

- obciążenia nieruchome długotrwałe,
- obciążenia nieruchome krótkotrwałe,
- obciążenia ruchome,
- obciążenia geometryczne,
- obciążenia termiczne,
- obciążenia wymuszone skurczem betonu.

W wymiarowaniu konstrukcji często zachodzi konieczność uwzględnienia kombinacji pewnych obciążeń. Wtedy niezbędne jest ustalenie odrębnej fazy pracy w odniesieniu do każdego z tych obciążeń lub do każdej kombinacji oddzielnie.

W każdej fazie pracy można sformułować podstawowy układ równań różniczkowych. Tak więc model matematyczny opisujący obiekt we wszystkich fazach pracy zawiera liczbę równań równą iloczynowi liczby równań w układzie podstawowym i liczby wyodrębnionych faz pracy. W przypadku niektórych obiektów inżynierskich, zwłaszcza obiektów mostowych o bardzo zróżnicowanych schematach statycznych w trakcie montażu, poddanych złożonemu układowi obciążeń w fazach montażowych i w fazie eksploatacji, liczba równań różniczkowych opisujących obiekt może być duża a sformułowany problem optymalizacyjny trudny do rozwiązania. Dlatego należy ustalać możliwie najmniejszą liczbę faz pracy pomijając fazy montażowe oraz układy i kombinacje obciążeń, które nie mają praktycznego znaczenia ze względu na wyznaczane wielkości w projektowaniu danego obiektu.

4.2. Przedziały charakterystyczne

Ilość przedziałów charakterystycznych to drugi czynnik decydujący o wielkości zadania optymalizacji co wynika z faktu, że układ równań opisujących dźwigar musi spełniać warunki brzegowe oraz warunki punktowe na granicach tych przedziałów. W ujęciu tradycyjnym granicami przedziałów charakterystycznych są początek i koniec dźwigara, punkty podparcia, punkty przyłożenia sił skupionych, początek lub koniec obciążenia ciągłego, przegub, skokowa zmiana geometrii osi, skokowa zmiana geometrii przekroju poprzecznego. W celu zmniejszenia ilości przedziałów charakterystycznych wprowadzono pewną funkcję skokową w [19], [20], [21]:

$$w(x, a, b) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin (a, b) \\ 1 & \text{gdy } x \in (a, b) \end{cases} \quad (4.1)$$

Funkcja w umożliwia zapisanie każdej funkcji nieciągłej w skończonej liczbie punktów jednym równaniem postaci obowiązującej wzdłuż osi dźwigara. Nieciągłe w skończonej liczbie punktów mogą być

- obciążenie rozłożone,
- skokowo zmienne w trakcie montażu charakterystyki geometrycznej przekroju poprzecznego,
- skokowo zmienne w trakcie montażu własności fizyczne i mechaniczne materiału.

W celu zapisania za pomocą funkcji skokowej w każdej z powyższych wielkości należy zdefiniować tę funkcję w przedziałach, w których dana wielkość jest ciągła.

$$w_i(x, x_{i-1}, x_i) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin \langle x_{i-1}, x_i \rangle \\ 1 & \text{gdy } x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

gdzie x – zmienna niezależna,
 n – ilość przedziałów, w których opisywana wielkość jest ciągła,
 x_i – punkt nieciągłości (x_0, x_n odpowiadają odpowiednio początkowi i końcowi zakresu zmiennej niezależnej x).

$$\text{Wtedy} \quad F(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x, x_{i-1}, x_i) \cdot F_i(x) \quad (4.3)$$

gdzie $F_i(x)$ – funkcja opisywanej wielkości ciągła w przedziale i ,
 $F(x)$ – funkcja opisywanej wielkości nieciągła w skończonej liczbie punktów.

W przypadku gdy dźwigar jest obciążony siłami skupionymi możliwe są dwa toki postępowania prowadzące do uniezależnienia granic przedziałów charakterystycznych od punktów przyłożenia tych sił. Pierwszy polega na zastąpieniu sił skupionych zastępczym obciążeniem rozłożonym na możliwie najmniejszej przestrzeni i sformułowaniu funkcji obciążenia nieciągłej w skończonej liczbie punktów jak wyżej. Drugi tok postępowania wymaga ustalenia dla obciążenia skupionego oddzielnej fazy pracy i sformułowania podstawowego układu równań opisujących obiekt w tej fazie. Jeżeli obciążenie skupione jest jedynym obciążeniem w ustalonej fazie pracy to siła poprzeczna spowodowana tym obciążeniem jest funkcją odcinkowo stałą nieciągłą w punktach przyłożenia sił skupionych i w punktach podparcia. Za pomocą funkcji w można zapisać funkcję siły poprzecznej nieciągłą w skończonej liczbie punktów.

$$w_j(x, x_{j-1}, x_j) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin \langle x_{j-1}, x_j \rangle \\ 1 & \text{gdy } x \in \langle x_{j-1}, x_j \rangle \end{cases} \quad j = 1, \dots, m \quad (4.4)$$

gdzie m – ilość przedziałów, w których siła poprzeczna jest ciągła,
 x_j – punkt przyłożenia siły skupionej lub punkt podparcia (x_0, x_m odpowiadają odpowiednio początkowi i końcowi zakresu zmiennej niezależnej x).

$$\text{Wtedy} \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{m-1} w_j(x, x_j, x_{j+1}) \cdot Q_j(x) \quad (4.5)$$

gdzie $Q_0(x) = \begin{cases} P_0 & \text{gdy punkt } 0 \text{ nie jest punktem podparcia} \\ P_0 + R_0 & \text{gdy punkt } 0 \text{ jest punktem podparcia} \end{cases}$
 $Q_j(x) = \begin{cases} Q_{j-1}(x) + P_j & \text{gdy punkt } j \text{ nie jest punktem podparcia} \\ Q_{j-1}(x) + P_j + R_j & \text{gdy punkt } j \text{ jest punktem podparcia} \end{cases}$

- P_j – siła skupiona przyłożona w punkcie j ,
 R_j – reakcja w punkcie j gdy jest to punkt podparcia.

Wprowadzenie funkcji w umożliwia podział ustroju na przedziały charakterystyczne, których granicami są wyłącznie początek i koniec ustroju, punkt podparcia, przegub oraz skokowa zmiana geometrii osi co znacznie zmniejsza rozmiar zadania optymalizacji.

4.3. Analiza podstawowych stanów montażowych

4.3.1. Stany montażowe dźwigara stalowego

W zależności od wielkości obiektu, warunków terenowych, możliwości technicznych wykonawcy i względów ekonomicznych stosuje się różne metody montażu dźwigarów stalowych. W pracy zostaną poddane analizie montaż na podporach, metoda wspornikowa oraz metoda nasuwania podłużnego. Ujęcie w modelu matematycznym tych podstawowych metod montażu umożliwi ich dowolną modyfikację w analizie stanów montażowych rzeczywistego obiektu inżynierskiego.

- Montaż na podporach – elementy stalowe układa się na podporach stałych i montażowych a następnie łączy się je w belkę ciągłą. W celu wywołania stanu naprężenia korzystnego w fazie eksploatacji wprowadza się odpowiednie deformacje elementów podczas montażu. W tej metodzie, przy obliczaniu sił wewnętrznych, należy uwzględnić schematy statyczne elementów stalowych przed połączeniem oraz schemat statyczny dźwigara stalowego ciągłego.
- Montaż metodą wspornikową – na podporze pośredniej jest montowany pierwszy element, do którego następnie są montowane kolejne elementy stalowe jednocześnie z obu stron (metoda wspornikowa symetryczna) lub na przemian (metoda wspornikowa asymetryczna).
- Metoda nasuwania podłużnego – elementy stalowe montuje się w miejscu wydzielonym na przedłużeniu obiektu a następnie nasuwa się zmontowaną część dźwigara na podpory stałe i ewentualnie montażowe. W metodzie tej schemat statyczny dźwigara stalowego ulega ciągłej zmianie.

Jednocześnie z montażem części stalowej może się odbywać częściowe betonowanie płyty pomostu w celu jej wcześniejszego włączenia do współpracy z dźwigarem stalowym. W tego typu montażu stosuje się też pewne zabiegi (podniesienia) w celu wywołania wstępnych naprężeń, korzystnych w fazie eksploatacji mostu. Sposób formułowania równań stanu i warunków zmiennych stanu w przypadku trzech ww. metod montażu został przedstawiony na prostych przykładach, w których uwzględniono podpory montażowe bierne i aktywne oraz betonowanie płyty pomostu i płyty dolnej w trakcie montażu dźwigara stalowego.

4.3.1.1. Montaż na podporach

Przeanalizowano stany montażowe dźwigara stalowego występujące w trakcie montażu obiektu mostowego przy podanych niżej założeniach.

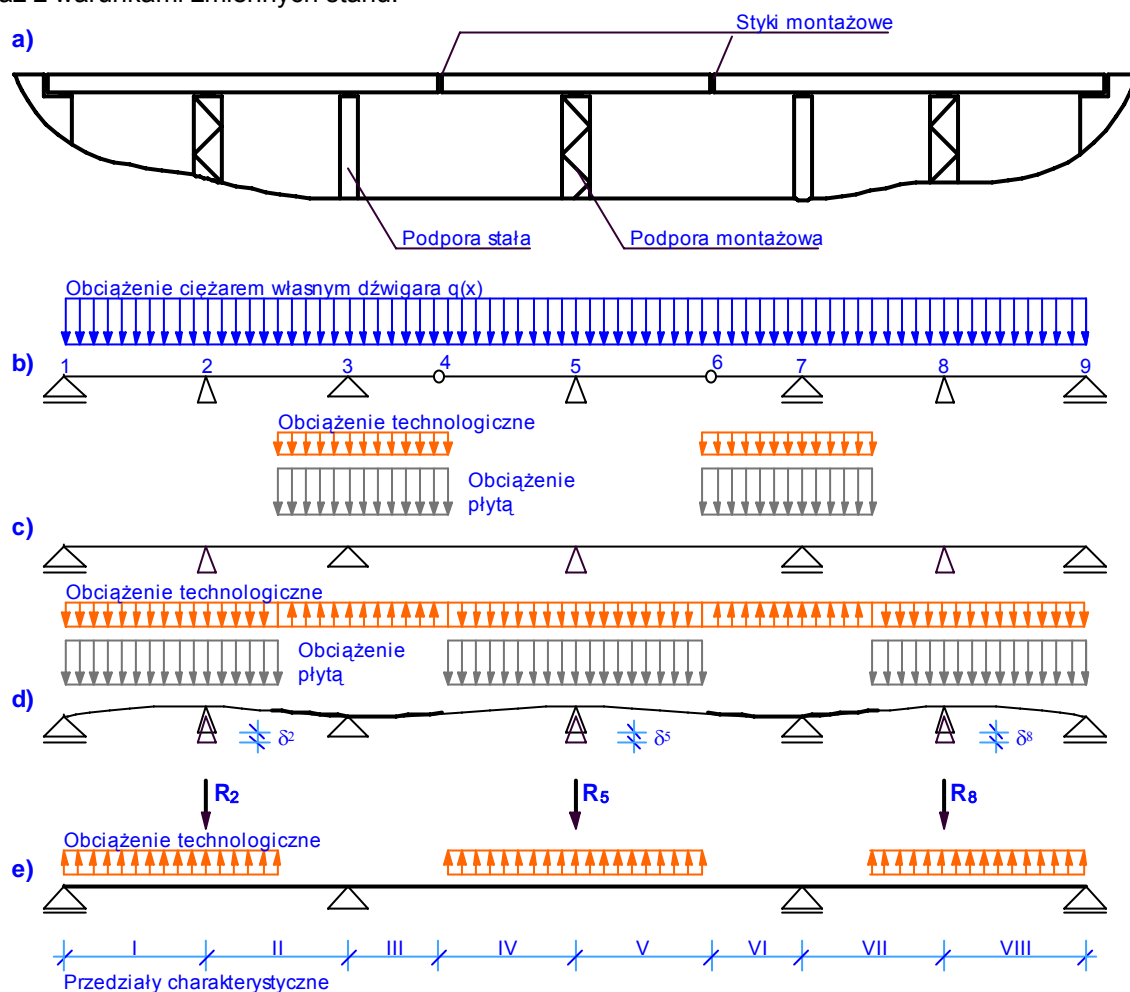
1. Montowany dźwigar stalowy jest elementem stalowo betonowego dźwigara zespolonego, którego docelowym schematem statycznym jest belka wieloprzęsłowa ciągła,
2. Dźwigar stalowy jest montowany z elementów prefabrykowanych o długościach umożliwiających wykonanie styków montażowych w strefie występowania momentów zerowych,
3. W okresie montażu, do czasu osiągnięcia pełnej wytrzymałości przez dźwigar zespolony, w połowie rozpiętości każdego przęsła zastosowano podpory montażowe,
4. Demontaż podpór montażowych następuje po wykonaniu płyty pomostu i stwardnieniu betonu. Założono następujące etapy betonowania płyty:
 - po zakończeniu montażu dźwigara stalowego następuje betonowanie płyty pomostu w strefie występowania momentów ujemnych nad podporami stałymi,
 - po stwardnieniu betonu następuje sprężenie płyty przez podniesienie podpór montażowych,
 - po sprężeniu odcinków podporowych płyty betonuje się odcinki przęsłowe.
5. Dźwigar jest zabezpieczony przed zwichrzeniem.

W przykładzie omówiono fazę montażu dźwigara stalowego oraz sformułowano równania i warunki punktowe zmiennych stanu w fazach montażu płyty pomostu.

W pierwszej fazie montażu poszczególne elementy dźwigara stalowego spoczywają na podporach stałych i montażowych i są tymczasowo połączone ze sobą w miejscu występowania styków w sposób umożliwiający swobodny obrót. Schematem statycznym dźwigara stalowego w tej fazie pracy jest belka gerberowska oparta na podporach stałych i montażowych z przegubami w miejscach występowania

styków montażowych. Schemat statyczny w fazie montażu dźwigara stalowego decyduje o podziale na przedziały charakterystyczne. Granicami tych przedziałów są początek i koniec belki, położenie styków montażowych, położenie podpór stałych i podpór montażowych. Podział na przedziały charakterystyczne, ustalony w pierwszej fazie pracy, obowiązuje we wszystkich kolejnych fazach montażowych i w fazie eksploatacji niezależnie od zmiany schematu statycznego (rys. 1). W każdej fazie pracy w punktach odpowiadających granicom przedziałów charakterystycznych należy sformułować warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe.

Podstawowym obciążeniem dźwigara stalowego w fazie montażu jest ciężar własny. Jest to obciążenie długotrwałe, jednak zakłada się, że nie wywołuje ono w tym przypadku zjawisk reologicznych w stali. W pierwszej fazie montażu i w następnych, dopóki podpory montażowe nie są zdemontowane, ciężar własny dźwigara stalowego przenosi sam dźwigar i podpory montażowe. Po wykonaniu części betonowej i osiągnięciu przez dźwigar zespolony pełnej wytrzymałości podpory montażowe są demontowane a obciążenie przenoszone przez te podpory w postaci sił skupionych przyłożonych w miejscu ich zamontowania równych co do wartości reakcjom tych podpór musi przenieść dźwigar zespolony. Część tego obciążenia spowodowana jest ciężarem własnym dźwigara stalowego. Tak więc długotrwałe obciążenie ciężarem własnym dźwigara stalowego, w przypadku stosowania podpór montażowych, ma wpływ na zjawiska reologiczne w części betonowej dźwigara zespolonego. To obciążenie nie może być uwzględniane jednocześnie z obciążeniem o charakterze krótkotrwałym występującym w tym samym czasie, którym jest obciążenie technologiczne działające wyłącznie w fazie montażu. Najczęściej w omawianym sposobie montażu dźwigara stalowego obciążenie technologiczne jest niewielkie i nie ma wpływu na wymiarowanie. Uwzględnienie tego obciążenia wymagałoby ustalenia dodatkowej fazy pracy dźwigara stalowego i sformułowania dla tej fazy podstawowego układu równań wraz z warunkami zmiennych stanu.



Rys. 1. Przykład montażu dźwigara stalowego na podporach stałych i montażowych;
 a – schemat ideowy montażu, b – schemat statyczny w pierwszej fazie montażowej,
 c – schemat statyczny w drugiej fazie montażowej, d – schemat statyczny w trzeciej fazie montażowej, e – schemat statyczny docelowy

Podstawowy układ równań opisujących dźwigar w pierwszej fazie pracy ma postać

$$y' = \varphi, \quad \varphi' = \frac{M}{E_a I_a}, \quad M' = Q, \quad Q' = -q \quad (4.6)$$

gdzie: y – ugięcie, φ – kąt ugięcia, M – moment zginający, Q – siła poprzeczna,
 q – obciążenie rozłożone w fazie I (ciężar własny dźwigara stalowego)
 E_a – moduł Younga stali, I_a – moment bezwładności przekroju dźwigara stalowego

Aby układ równań (4.6) miał jednoznaczne rozwiązanie zmienne stanu y, φ, M, Q muszą spełniać warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe w granicach przedziałów charakterystycznych. Ilość warunków zmiennych stanu jest równa iloczynowi liczby równań i liczby przedziałów charakterystycznych. W przykładzie przedstawionym na rysunku 1, w którym wydzielono 8 przedziałów charakterystycznych, sformułowano 32 warunki zmiennych stanu (tab. 1).

Tablica 1. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazie montażowej I

	Granice przedziałów charakterystycznych															
	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4 ⁻	4 ⁺	5 ⁻	5 ⁺	6 ⁻	6 ⁺	7 ⁻	7 ⁺	8 ⁻	8 ⁺	9
y	0	0	0	0	0	c		0	0	c		0	0	0	0	0
φ	-	c		c		-		c		-		c		c		-
M	0	c		c		0	0	c		0	0	c		c		0
Q	-	-		-		c		-		c		-		-		-

Oznaczenia: 0 – ustalona wartość z lewej lub prawej strony punktu, c – warunek ciągłości

Po wykonaniu styków montażowych następuje betonowanie odcinków podporowych płyty pomostu (rys. 1c). Jest to pierwsza faza montażu płyty pomostu, w której dźwigar stalowy o schemacie belki wieloprzęsłowej ciągłej przenosi obciążenie ciężarem własnym, ciężarem mieszanki betonowej oraz obciążenie technologiczne. Obciążenie ciężarem własnym zostało uwzględnione w poprzedniej fazie i choć działa stale nie może wystąpić w równaniach podstawowych innych faz. Ta zasada dotyczy każdego obciążenia. Pozostałe obciążenia uwzględniane w tej fazie i w następnych fazach montażowych zostaną omówione w części dotyczącej betonowania odcinkowego płyty. Dźwigar w tej fazie jest opisany układem równań postaci (4.6) wraz z warunkami punktowymi zmiennych stanu zamieszczonymi w tablicy 2.

Tablica 2. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazie montażowej II

	Granice przedziałów charakterystycznych															
	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4 ⁻	4 ⁺	5 ⁻	5 ⁺	6 ⁻	6 ⁺	7 ⁻	7 ⁺	8 ⁻	8 ⁺	9
y	0	0	0	0	0	c		0	0	c		0	0	0	0	0
φ	-	c		c		c		c		c		c		c		-
M	0	c		c		c		c		c		c		c		0
Q	-	-		-		c		-		c		-		-		-

Przeniesienie obciążeń z pierwszej fazy montażowej do faz, w których obciążenia przenosi dźwigar zespolony jest korzystne ze względu na stan naprężeń w fazie eksploatacji. Jak już wspomniano wyżej uzyskuje się to przez zastosowanie podpór montażowych. Efekt ten jest większy gdy zamiast podpór montażowych biernych stosuje się podpory aktywne umożliwiające odkształcenie dźwigara stalowego powodujące korzystny stan naprężeń. Ponadto wywołanie momentów dodatnich w strefach przypodporowych pozwala uniknąć niekorzystnych momentów ujemnych w tych strefach po zdemonstrowaniu podpór montażowych. Uwzględnienie tego przypadku w zadaniu optymalizacji wymaga ustalenia trzeciej fazy montażowej dźwigara (rys. 1d). Odkształcenie przez podniesienie podpór montażowych odbywa się bowiem przy innym niż w fazie poprzedniej przekroju poprzecznym dźwigara. Dźwigar w tej fazie jest częściowo zespolony z płytą pomostu. Ten zabieg technologiczny może być zastosowany jednorazowo po wykonaniu wszystkich styków montażowych lub wielokrotnie (w przypadku dużych obiektów mostowych) po zmontowaniu części dźwigara. Jeśli jest stosowany wielokrotnie to trzeba ustalić odpowiednią ilość dodatkowych faz montażowych umożliwiających jego ujęcie w modelu matematycznym. W każdej z tych faz należy sformułować podstawowy układ równań postaci (4.6), warunki zmiennych stanu i warunki postaci (4.7). Jednocześnie z podniesieniem podpór w trzeciej fazie montażu można uwzględnić obciążenia związane z betonowaniem odcinków

przęsłowych płyty. Obciążenie mieszanką i inne obciążenia ciągłe występują po prawej stronie czwartego równania układu (4.6) natomiast obciążenie geometryczne jest zdefiniowana poprzez warunki punktowe zmiennych stanu sformułowane w odniesieniu do przemieszczenia y punktów odpowiadających położeniu aktywnych podpór montażowych (tab. 3). Formułując podstawowy układ równań należy uwzględnić przekrój dźwigara, który w tej fazie jest na odcinkach przypadkowych zespolony. Sposób zapisu skokowo zmiennych charakterystyk geometrycznych przekroju dźwigara opisano w dalszej części pracy.

Tablica 3. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazie montażowej III

	Granice przedziałów charakterystycznych															
	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4 ⁻	4 ⁺	5 ⁻	5 ⁺	6 ⁻	6 ⁺	7 ⁻	7 ⁺	8 ⁻	8 ⁺	9
y	0	$\bar{\delta}_2$	$\bar{\delta}_2$	0	0	c		$\bar{\delta}_5$	$\bar{\delta}_5$	c		0	0	$\bar{\delta}_8$	$\bar{\delta}_8$	0
φ	-	c		c		c		c		c		c		c		-
M	0	c		c		c		c		c		c		c		0
Q	-	-		-		c		-		c		-		-		-

Obciążenie dźwigara zespolonego po zdemontowaniu podpór montażowych siłami skupionymi równymi reakcjom tych podpór wymaga ich wyznaczenia w fazach wcześniejszych. Siły te można wyznaczyć formułując w fazach, w których podpory montażowe są zastosowane, dodatkowe warunki

$$Q(x_j^+) = Q(x_j^-) + R_j \quad (4.7)$$

gdzie x_j – współrzędna punktu podparcia,
 R_j – reakcja podpory w punkcie j .

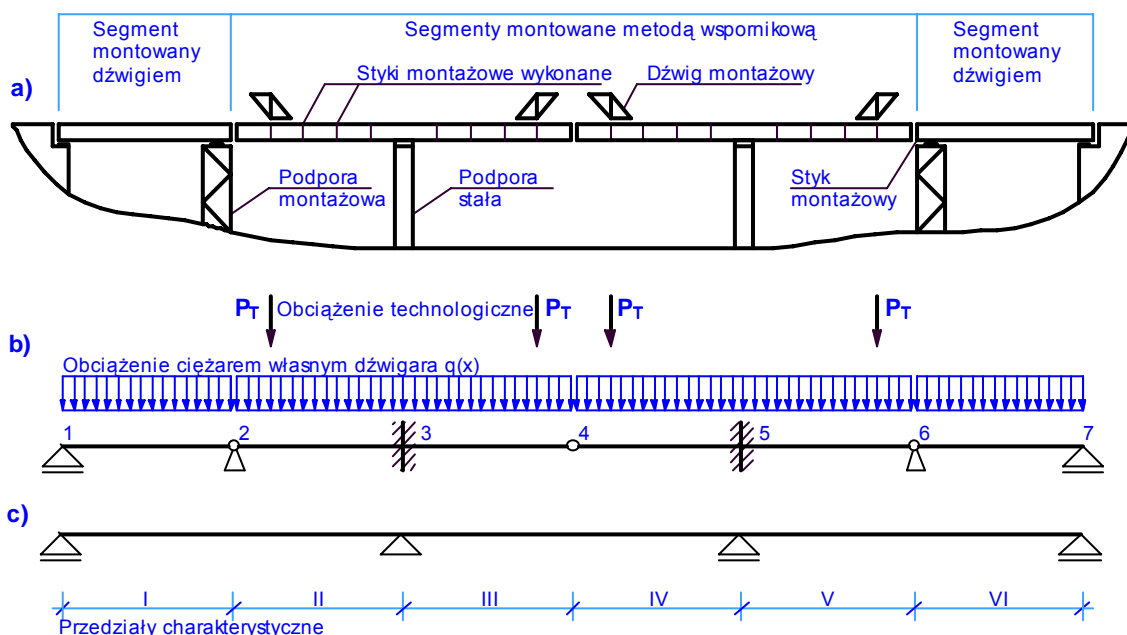
R_j jest wielkością stałą i w zadaniu optymalizacji występuje jako parametr sterowania. W przytoczonym przykładzie (rys. 1e) należy sformułować warunki typu (4.7) w punktach 2, 5, 8. Umożliwią one wyznaczenie trzech parametrów sterowania jako reakcji podpór montażowych. W odniesieniu do tej sytuacji obliczeniowej należy ustalić fazę IV, w której dźwigar opisany jest równaniami postaci (4.6) wraz z odpowiednimi warunkami punktowymi. Przekrój dźwigara w tej fazie jest na całej długości zespolony jednak własności fizyczne betonu odcinków wykonywanych w różnym czasie nie są takie same. Dlatego, podobnie jak w poprzedniej fazie, fakt ten należy uwzględnić w równaniach zmiennych stanu sformułowanych w odniesieniu do tej fazy montażowej.

4.3.1.2. Metoda wspornikowa

Montaż dźwigara stalowego w metodzie wspornikowej rozpoczyna się od zamontowania przy użyciu dźwigu elementu podporowego na podporze stałej i utwierdzeniu go w miejscu podparcia na czas montażu. Montaż, w zależności od możliwości technicznych wykonawcy, może być prowadzony na jednej podporze lub jednocześnie na wielu podporach. Montaż na każdej podporze odbywa się w sposób całkowicie niezależny co oznacza, że wartości zmiennych stanu charakteryzujące dany segment nie zależą od montażu innych segmentów do czasu łączenia segmentów ze sobą. Z tego powodu, niezależnie od kolejności rozpoczęcia montażu na poszczególnych podporach, można w modelu matematycznym przyjąć, że montaż wspornikowy odbywa się jednocześnie na wszystkich podporach. Przeanalizowano dwa przypadki montażu wspornikowego części stalowej dźwigara zespolonego, którego docelowym schematem statycznym jest belka wieloprzęsłowa ciągła: przypadek bez płyty dolnej i z płytą dolną.

Po zamontowaniu elementu podporowego instaluje się na nim jeden lub dwa dźwigi montażowe w zależności od tego, czy realizowana jest metoda asymetryczna czy symetryczna. Schematem statycznym etapu montażu kolejnego elementu jest dwustronny wspornik obciążony ciężarem własnym i obciążeniem technologicznym (ciężarem dźwigu montażowego) przyłożonym na końcu ostatniego elementu. W przypadku, gdy nie stosuje się płyty dolnej ten schemat statyczny obowiązuje do chwili zakończenia montażu na danej podporze jednak obciążenie skupione jest przyłożone wtedy na końcu przedostatniego elementu. Największe co do wartości bezwzględnej siły przekrojowe występują w sytuacji gdy wszystkie elementy są zamontowane i jednocześnie nie są zdemontowane dźwigi montażowe. Z tego powodu nie jest celowe rozpatrywanie stanów pośrednich montażu jako mało istotnych w wymiarowaniu przekroju poprzecznego. W przypadku montażu części stalowej dźwigara zespolonego bez płyty dolnej jedyna faza montażowa dźwigara stalowego, ustalona ze względu na schemat statyczny, może obejmować przypadek gdy na każdej podporze montaż wszystkich elementów jest zakończony, zmontowane segmenty nie są ze sobą połączone i są obciążone ciężarem dźwignów montażowych na końcu przedostatnie go elementu. Przykład montażu metodą

wspornikową przedstawiono na rysunku 2. Schemat statyczny fazy montażu uwzględnia sposób podparcia na podporach stałych i montażowych (podparcie przegubowe lub utwierdzenie) oraz przeguby w miejscach łączenia poszczególnych segmentów. Przedziały charakterystyczne są wyznaczone przez punkty podparcia i styki montażowe pomiędzy segmentami. Obciążeniem w tej fazie montażu jest ciężar własny dźwigara stalowego oraz obciążenie technologiczne. Są to obciążenia o różnym charakterze. Jeśli w montażu wspornikowym stosuje się dodatkowo podpory montażowe a zwłaszcza podpory czynne (rys. 2) to obciążenie ciężarem własnym będzie miało wpływ na zjawiska reologiczne w betonie dźwigara zespolonego. Obciążenie technologiczne działa tylko w fazie montażu i ze względu na znaczną wartość ma istotny wpływ na stan naprężeń w tej fazie. Ze względu na obciążenie należy ustalić dwie fazy montażowe – fazę z długotrwałym obciążeniem ciężarem własnym dźwigara i fazę z krótkotrwałym obciążeniem technologicznym.



Rys. 2. Przykład montażu dźwigara stalowego metodą wspornikową – wariant bez płyty dolnej
a – schemat ideowy montażu, b – schemat statyczny fazy montażowej, c – schemat docelowy

W fazie z obciążeniem ciężarem własnym dźwigar jest opisany podstawowym układem równań postaci (4.6) wraz z warunkami zmiennych stanu. W tej fazie należy dodatkowo wyznaczyć reakcje podpór montażowych z warunków (4.7). W przytoczonym przykładzie (rys. 2) wydzielono 6 przedziałów charakterystycznych, na granicach których sformułowano 24 warunki zmiennych stanu zamieszczone w tabelicy 4.

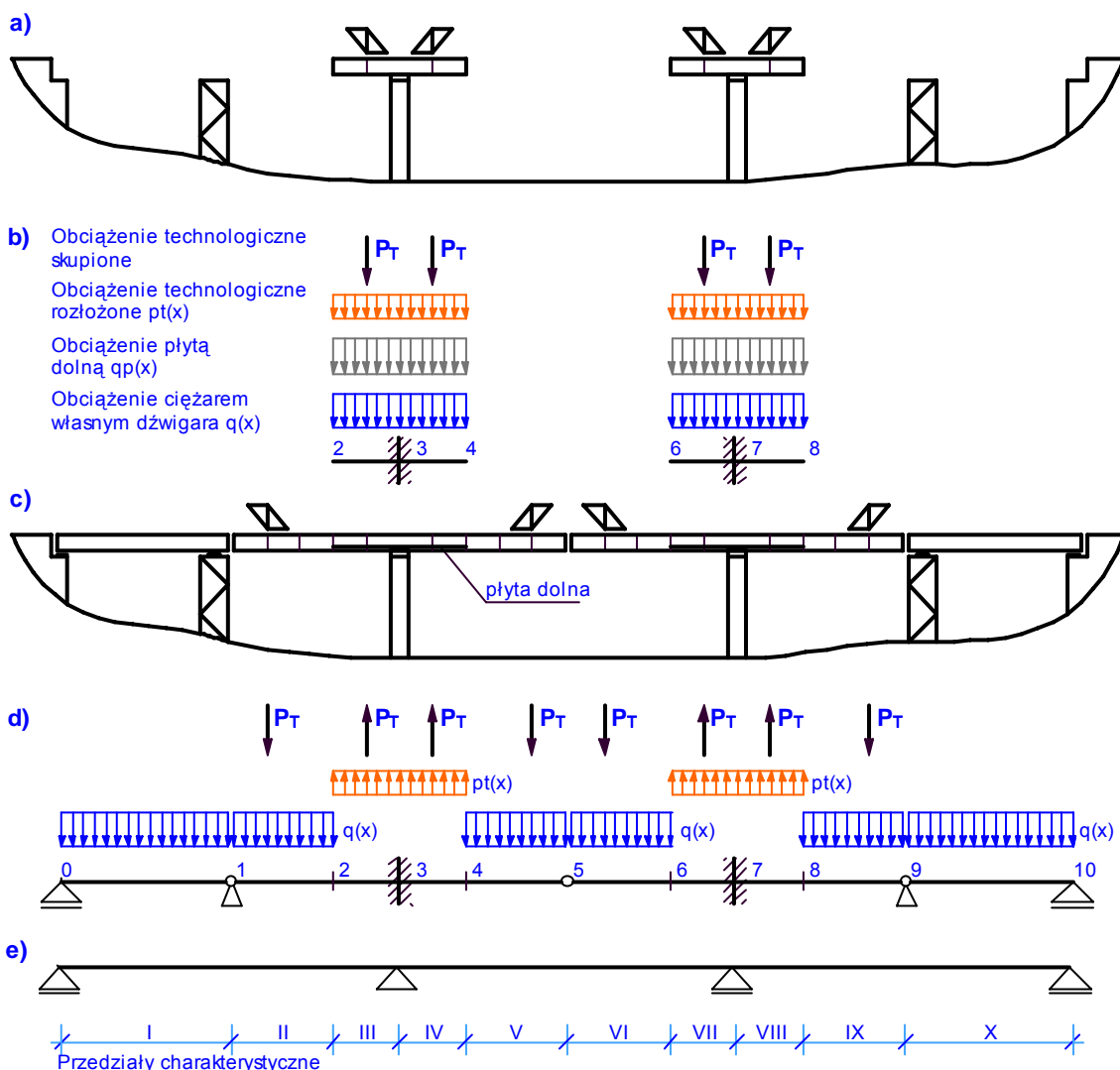
Tablica 4. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazie montażowej I z obciążeniem ciężarem własnym i technologicznym

	Granice przedziałów charakterystycznych											
	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4 ⁻	4 ⁺	5 ⁻	5 ⁺	6 ⁻	6 ⁺	7
y	0	0	0	0	0	c		0	0	0	0	0
φ	-	-		0	0	-		0	0	-		-
M	0	0	0	-		0	0	-		0	0	0
Q	-	-		-		c		-		-		-

Kolejna faza montażu dźwigara następuje po wykonaniu styków montażowych i usunięciu podpór tymczasowych. Jest to pierwsza faza montażu płyty pomostu, w której dźwigar stalowy przenosi obciążenia mieszkanką, technologiczne oraz obciążenie dwiema siłami skupionymi w punktach 2 i 6 równymi reakcjom podpór montażowych.

Jeżeli w strefie momentów ujemnych przewiduje się płytę dolną w dźwigarze zespolonym to może ona być wykonywana w całości lub w części gdy tylko odpowiedni odcinek dźwigara stalowego jest zmontowany. Włączenie płyty dolnej do współpracy z dźwigarem stalowym w trakcie jego montażu jest korzystne ze względu na stan naprężeń w fazie eksploatacji. W tym przypadku należy ustalić dodatkową fazę montażową ze względu na schemat statyczny w trakcie betonowania płyty dolnej. Jeśli płyta dolna jest wykonywana w dwóch etapach to należy ustalić dwie dodatkowe fazy montażowe. Przykład montażu wspornikowego z płytą dolną przedstawiono na rysunku 3.

W fazie montażowej odpowiadającej betonowaniu płyty dolnej są zmontowane odcinki dźwigara stalowego, na których układa się mieszankę betonową (rys. 3a). Zmontowane odcinki dźwigara stalowego pracują jako dwustronne wsporniki utwierdzone tymczasowo w punktach podparcia (rys. 3b). W tej fazie pracy dźwigar o przekroju stalowym przenosi obciążenie ciężarem własnym, ciężarem mieszanki betonowej, ciężarem deskowania oraz ciężarem dźwigarów montażowych. Na ciężar mieszanki betonowej składa się ciężar betonu wraz ze zbrojeniem oraz ciężar części wody zarobowej, która ulegnie odparowaniu. Krótkotrwałe obciążenie ciężarem odparowującej wody wygodnie jest dodać do krótkotrwałego obciążenia deskowaniem. Na rysunku 3b te obciążenia występują pod nazwą obciążenia technologicznego $pt(x)$. Ze względu na obciążenia trzeba ustalić w ramach tej fazy dwie fazy montażowe: fazę z obciążeniem długotrwałym i fazę z obciążeniem krótkotrwałym.



Rys. 3. Przykład montażu dźwigara stalowego metodą wspornikową – wariant z płytą dolną
 a – schemat ideowy montażu w trakcie betonowania płyty dolnej, b – schemat statyczny w fazie betonowania płyty dolnej, c – schemat ideowy montażu dźwigara zespolonego z płytą dolną, d – schemat statyczny w fazie montażu dźwigara zespolonego z płytą dolną, e – schemat docelowy

Drugą fazę montażową ze względu na schemat statyczny należy ustalić jak w wersji bez płyty dolnej pomijając pośrednie fazy montażu jako nieistotne. W drugiej fazie dźwigar przenosi obciążenia ciężarem części stalowej, ciężarem płyty dolnej oraz obciążenie skupione dźwigami montażowymi przyłożone na końcu przedostatnich elementów stalowych każdego segmentu (rys. 3d). Zgodnie z zasadą uwzględniania każdego obciążenia tylko raz na części dźwigara rozważanej w fazie betonowania płyty dolnej obciążenia ciężarem własnym dźwigara stalowego i betonu płyty w drugiej fazie nie uwzględnia się ponieważ zostały one uwzględnione w fazie pierwszej. W tej fazie pracy następuje odciążenie dźwigara spowodowane demontażem deskowania i odparowaniem części wody zarobowej. Następuje również przemieszczenie dźwigów montażowych z położenia jakie zajmowały podczas montażu płyty dolnej co jest równoznaczne z przyłożeniem w punktach odpowiadających temu położeniu dwóch sił skupionych skierowanych do góry równych ciężarowi dźwigów. Odciążenia uwzględnione w drugiej fazie montażu dźwigara stalowego są siłami przeciwnymi do obciążeń technologicznych uwzględnionych w fazie montażu płyty dolnej. Skutki działania tych dwóch przeciwnych układów sił nie znoszą się ponieważ działają na dźwigar, który w obu sytuacjach ma różny charakterystyki przekroju poprzecznego. W fazie pierwszej dźwigar ma przekrój stalowy natomiast w fazie drugiej zespolony. Podobnie jak poprzednio konieczne jest ustalenie ze względu na obciążenia oddzielnych fazy pracy z obciążeniem długotrwałym i krótkotrwałym. W przykładzie (rys. 3) należy ustalić:

- fazę montażu płyty dolnej z obciążeniem ciężarem własnym dźwigara stalowego i płyty dolnej,
- fazę montażu płyty dolnej z obciążeniem technologicznym skupionym i rozłożonym,
- fazę montażu dźwigara zespolonego z płytą dolną z obciążeniem ciężarem własnym części stalowej montowanej po wykonaniu płyty dolnej,
- fazę montażu dźwigara zespolonego z płytą dolną z układem sił odciążających.

Dźwigar stalowy montowany metodą wspornikową w wersji z płytą dolną dzieli się na przedziały charakterystyczne, których granicami, oprócz wymienionych wyżej, są dodatkowo punkty odpowiadające końcom odcinków dźwigara zmontowanych i rozważanych w fazie betonowania płyty.

W przykładzie przedstawionym na rys. 3 wydzielono 10 przedziałów charakterystycznych. W granicach tych przedziałów sformułowano warunki punktowe zmiennych stanu. Równania stanu opisujące dźwigar we wszystkich fazach pracy mają postać (4.6), jednak w fazach montażowych płyty dolnej w przedziałach, w których dźwigar nie jest jeszcze zmontowany nie mają one praktycznego znaczenia. Zmienne stanu w tych przedziałach przyjmują wartości zerowe. Mimo to, ze względów formalnych, niezbędne jest sformułowanie warunków punktowych we wszystkich punktach charakterystycznych (tab. 5, 6).

Tablica 5. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazach montażowych płyty dolnej

	Granice przedziałów charakterystycznych																			
	0	1 ⁻	1 ⁺	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4 ⁻	4 ⁺	5 ⁻	5 ⁺	6 ⁻	6 ⁺	7 ⁻	7 ⁺	8 ⁻	8 ⁺	9 ⁻	9 ⁺	10
y	0	0	0	0	-	0	0	-	0	0	0	0	-	0	0	-	0	0	0	0
φ	-	-	-	-	-	0	0	-	-	-	-	-	-	0	0	-	-	-	-	-
M	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0
Q	-	-	-	-	0	-	0	-	-	-	-	-	0	-	0	-	-	-	-	-

Tablica 6. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazach montażowych następujących po zmontowaniu płyty dolnej

	Granice przedziałów charakterystycznych																			
	0	1 ⁻	1 ⁺	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4 ⁻	4 ⁺	5 ⁻	5 ⁺	6 ⁻	6 ⁺	7 ⁻	7 ⁺	8 ⁻	8 ⁺	9 ⁻	9 ⁺	10
y	0	0	0	c	0	0	c	c	c	0	0	c	0	0	c	0	0	0	0	
φ	-	-	-	c	0	0	c	-	c	0	0	c	-	-	c	-	-	-	-	
M	0	0	0	c	-	c	0	0	c	-	c	0	0	c	0	0	0	0	0	
Q	-	-	-	c	-	c	c	c	c	-	c	-	-	c	-	-	-	-	-	

4.3.1.3. Metoda nasuwania podłużnego

W metodzie nasuwania podłużnego dźwigar jest przesuwany po podporach stałych i montażowych w sposób ciągły. W tej metodzie stany montażowe mają istotny wpływ na wymiarowane przekroju ponieważ w trakcie montażu w każdym przekroju występują momenty zginające zarówno dodatnie jak i ujemne. W tym przypadku w obliczeniach wygodnie jest posługiwać się obwiednią momentów i obwiednią sił poprzecznych. Wyznaczenie tych obwiedni wymaga przeprowadzenia obliczeń sił przekrojowych dźwigara w pewnej ilości położeniach w trakcie nasuwania. W odniesieniu do dźwigara w każdym rozważanym położeniu należy ustalić odrębną fazę pracy. Ze względu na charakter obwiedni momentów i sił poprzecznych wystarczy rozważyć kilka położeniach w trakcie nasuwania dźwigara pomiędzy przedostatnią i ostatnią podporą pomijając wszystkie wcześniejsze sytuacje jako mało istotne. W każdym rozważanym położeniu dźwigar opisują równania różniczkowe (4.6), które muszą spełniać warunki punktowe w granicach przedziałów charakterystycznych. W punkcie 4.2 stwierdzono, że granice przedziałów charakterystycznych są wyznaczone m. in. przez punkty podparcia. W rozważanych położeniach montażowych chwilowe punkty podparcia nie odpowiadają ostatecznemu położeniu podpór i zgodnie z punktem 4.2 powinny wyznaczać granice dodatkowych przedziałów charakterystycznych. Takie sformułowanie jest niekorzystne ze względu na wielkość zadania optymalizacji. Niżej przedstawiono metodę pozwalającą uniknąć konieczności ustalania granic przedziałów charakterystycznych w chwilowych punktach podparcia.

Istotą tej metody jest sposób formułowania warunków punktowych wewnątrz przedziału charakterystycznego. W chwilowych punktach podparcia powinny być spełnione następujące warunki:

- przemieszczenie pionowe po obu stronach punktu podparcia równe 0,
- równe kąty obrotu po obu stronach punktu podparcia,
- równe momenty zginające po obu stronach punktu podparcia,
- skok siły poprzecznej w punkcie podparcia o wartość reakcji.

Warunki ciągłości wewnątrz przedziału charakterystycznego są realizowane automatycznie więc istotne znaczenie mają warunki zerowania się przemieszczenia i warunki skoku siły poprzecznej. Warunek zerowania się przemieszczenia ma postać

$$w_{p_k} \cdot u - u = 0 \quad (4.8)$$

gdzie: u – przemieszczenie pionowe,
 w_{p_k} – funkcja zdefiniowana w przedziale charakterystycznym

$$w_{p_k}(x, x_k) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = x_k \\ 1 & \text{gdy } x \neq x_k \end{cases} \quad x_k - \text{współrzędna chwilowego punktu podparcia.} \quad (4.9)$$

Warunek (4.8) jest zawsze spełniony poza punktami podparcia natomiast w punktach podparcia jest spełniony tylko wtedy gdy przemieszczenie pionowe w tych punktach jest równe zero. Warunek skoku siły poprzecznej o wartość reakcji można sformułować wykorzystując funkcję w (4.1). Ma on następującą postać:

$$-V \cdot \gamma + \sum_k w_k \cdot R_k + Q = 0 \quad (4.10)$$

gdzie: V – objętość materiału dźwigara po lewej stronie rozważanego przekroju,
 γ – ciężar właściwy,
 w_k – funkcja (4.1) doznająca skoku w punkcie podparcia k ,
 R_k – reakcja podpory k ,
 Q – funkcja siły poprzecznej.

Warunek (4.10) odpowiada sytuacji obliczeniowej, w której jedynym obciążeniem w trakcie nasuwania podłużnego jest ciężar własny dźwigara. Wprowadzenie powyższego warunku wymaga sformułowania dodatkowego równania stanu opisującego objętość

$$V' = A \quad (4.11)$$

gdzie A jest powierzchnią przekroju poprzecznego dźwigara.

Wprowadzenie funkcji w i w_p umożliwiło sformułowanie wewnątrz przedziału charakterystycznego warunków zmiennych stanu odpowiadających warunkom formułowanym w granicach przedziałów. Rozwiązanie numeryczne tak sformułowanego problemu sprawia jednak pewne trudności. Wynikają one z faktu, że rozwiązanie jest wyznaczane w skończonej ilości punktów a nie w sposób ciągły. Warunek zerowania się przemieszczenia (4.8) jest aktywny w punkcie natomiast skok siły poprzecznej określony warunkiem (4.10) odbywa się w przedziale pomiędzy dwoma kolejnymi punktami, w których

rozwiązanie jest wyznaczane. W tym właśnie przedziale warunek (4.10) nie jest spełniony co w konsekwencji prowadzi do rozwiązania obarczonego błędem większym od dopuszczalnej tolerancji obliczeń.

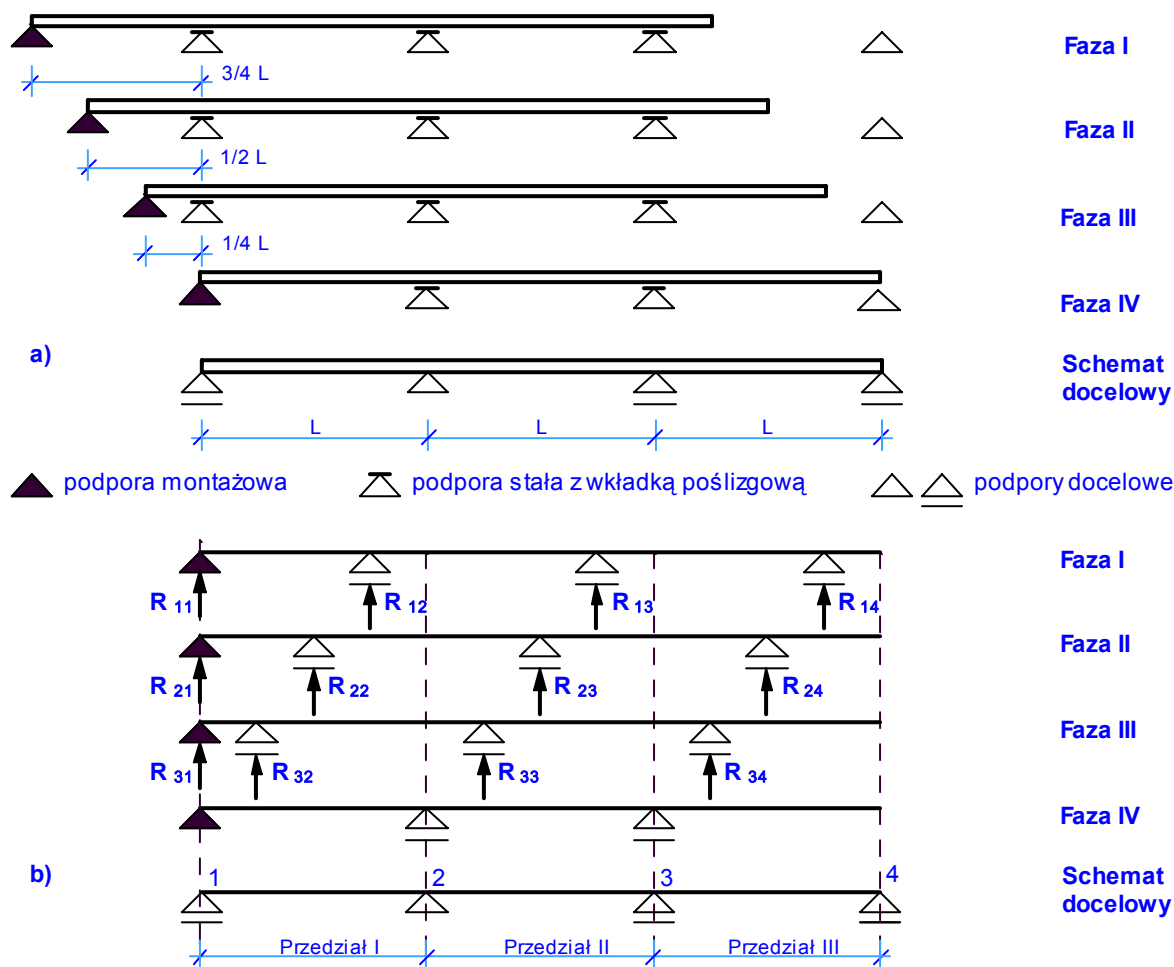
Problemów tych można uniknąć jeśli warunki wewnątrz przedziału charakterystycznego są formułowane wyłącznie w odniesieniu do ciągłych zmiennych stanu w punkcie podparcia. W tym przypadku w układzie równań (4.6) można zrezygnować z równia 4 modyfikując jednocześnie odpowiednio równanie 3

$$y' = \varphi, \quad \varphi' = \frac{M}{EI}, \quad M' = -V\gamma + \sum_k w_k R_k \quad (4.12)$$

Aby równania (4.12) miały jednoznaczne rozwiązanie należy sformułować warunki punktowe w granicach przedziałów charakterystycznych oraz k warunków dodatkowych umożliwiających wyznaczenie reakcji podpór R_k . Dodatkowych warunków dostarcza równanie (4.8) obowiązujące w całym przedziale a więc również w każdym punkcie chwilowego podparcia. Zastosowanie tego sformułowania wymaga tak jak poprzednio wprowadzenia dodatkowego równania na objętość (4.11). Pewną niedogodnością jest brak siły poprzecznej. Lecz jeśli w rozwiązaniu zostaną wyznaczone reakcje podpór oraz objętość to siłę poprzeczną można obliczyć analitycznie. To sformułowanie zostanie zastosowane w analizie stanów montażowych w trakcie nasuwania podłużnego w kolejnym przykładzie.

Przeanalizowano stany montażowe w trakcie nasuwania podłużnego dźwigara stalowego w dwóch przypadkach – bez awanbeka i z zastosowaniem awanbeka. W każdym przypadku przyjęto założenia:

1. Analizowane stany montażowe obejmują etap nasuwania ostatniego przęsła mostu.
2. Dźwigar pracuje docelowo w schemacie trzyprzęsłowej belki ciągłej.
3. Wysokość przekroju poprzecznego dźwigara jest stała.
4. Koniec belki od strony prasy jest oparty na podporze montażowej.
5. W analizie pominięto siły osiowe.



Rys. 4. Fazy montażowe w metodzie nasuwania podłużnego bez awanbeka, a) schemat ideowy montażu, b) podział na przedziały charakterystyczne

Rysunek 4a przedstawia schemat ideowy nasuwania ostatniego przęsła dźwigara. W przykładzie ustalono 4 fazy montażowe, przy czym w ostatniej fazie dźwigar nie jest oparty na prawej skrajnej podporze. Jedynym obciążeniem we wszystkich fazach montażu jest ciężar własny dźwigara. Na podstawie schematu ideowego w każdej fazie montażu przyjęto odpowiednie schematy statyczne (rys. 4b). Przedziały charakterystyczne ustalono ze względu na docelowe położenie podpór i dlatego w fazach montażowych I, II i III chwilowe punkty podparcia wypadają wewnątrz tych przedziałów. W odniesieniu do trzech pierwszych faz montażowych należy zastosować opisaną wcześniej metodę formułowania warunków punktowych wewnątrz przedziałów charakterystycznych. W pozostałych dwóch fazach równania różniczkowe i warunki zmiennych stanu zostaną sformułowane w tradycyjny sposób. W każdej z trzech pierwszych faz montażowych dźwigar jest opisany układem równań postaci (4.12).

$$y_m' = \varphi_m, \quad \varphi_m' = \frac{M_m}{EI}, \quad M_m' = -V_m\gamma + \sum_k w_{m,k} R_{m,k}, \quad m = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.13)$$

gdzie: $w_{m,k} = w_{m,k}(x, x_{m,k}, 3L)$

$$x_{m,k} = \{0, \Delta_m, \Delta_m + L, \Delta_m + 2L\}$$

$$\Delta_m = \left\{0, \frac{3}{4}L, \frac{1}{2}L, \frac{1}{4}L\right\}$$

W fazie IV i w fazie ze schematem docelowym dźwigar jest opisany układem równań postaci (4.6)

$$y_m' = \varphi_m, \quad \varphi_m' = \frac{M_m}{EI}, \quad M_m' = Q_m, \quad Q_m' = -A\gamma, \quad m = 4, 5 \quad (4.14)$$

Ponadto niezbędne jest sformułowanie równania na objętość (4.11). Do równań (4.13, 4.14) sformułowano warunki punktowe (tab. 7). W każdym przypadku ich liczba jest równa iloczynowi liczby równań i liczby faz całkowania. Dodatkowo w odniesieniu do faz I, II i III należy sformułować warunki wewnątrz przedziałów całkowania postaci (4.8)

$$wp_{m,k} \cdot u_m - u_m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \quad (4.15)$$

gdzie: $wp_{m,k} = wp_{m,k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = x_{m,k} - \{0\} \\ 1 & \text{gdy } x \neq x_{m,k} - \{0\} \end{cases}$

Warunek (4.15) jest aktywny w trzech punktach każdej z trzech faz co daje ogółem 9 warunków, natomiast do wyznaczenia pozostaje 12 reakcji podpór. Brakujące warunki to warunki równowagi globalnej

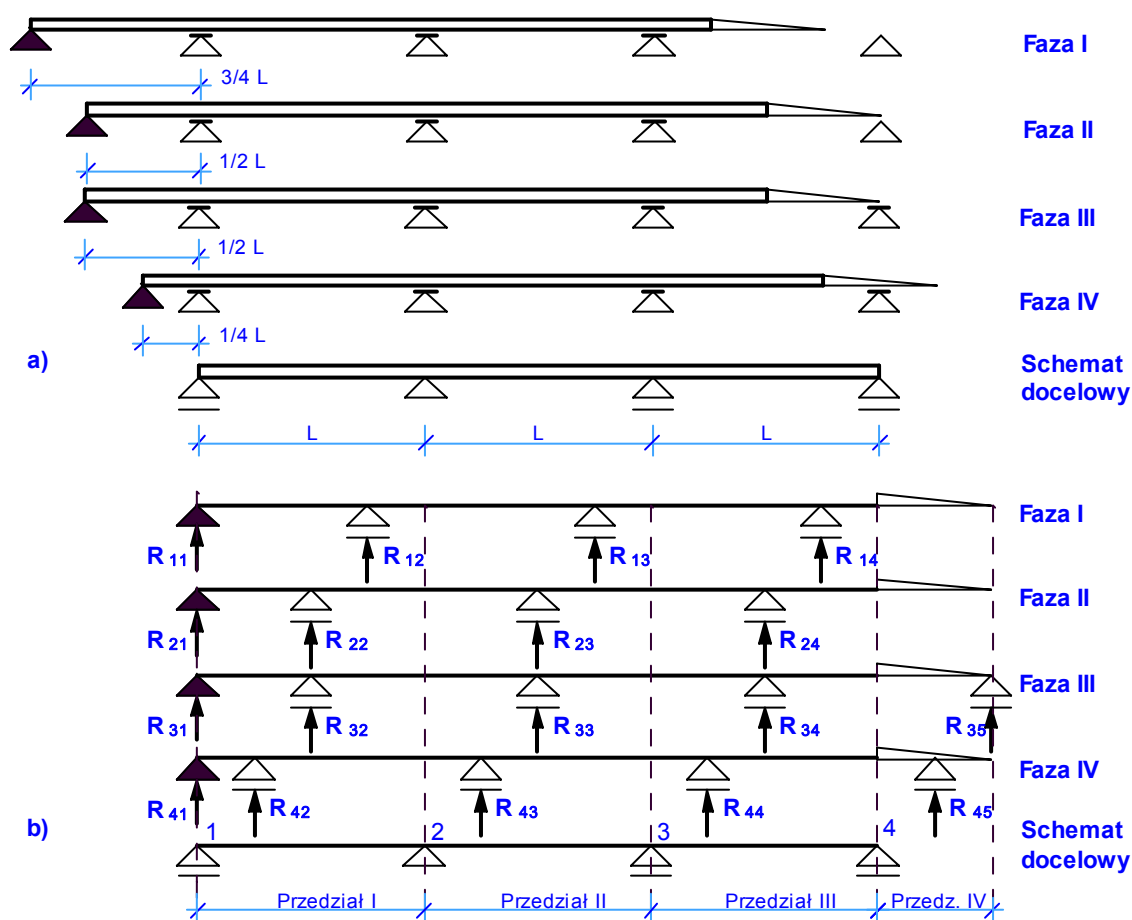
$$\sum_{k=1}^3 R_{m,k} - V_d\gamma = 0, \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.16)$$

gdzie: V_d jest całkowitą objętością dźwigara

Tablica 7. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazach montażu dźwigara metodą nasuwania podłużnego bez awanbeka

	Granice przedziałów charakterystycznych																	
	Fazy I, II, III						Faza IV						Faza V					
	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4
y	0	c		c		-	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0
φ	-	c		c		-	-	c		c		-	-	c		c		-
M	0	c		c		0	0	c		c		0	0	c		c		0
Q	/						-	-		-		0	-	-		-		-
V	0	c		c		-	0	c		c		-	0	c		c		-

Przypadek z zastosowaniem awanbeka przedstawiono na rysunku 5. Awanbek, w tym przykładzie długości połowy przęsła, wcześniej opiera się na podporze skrajnej niż dźwigar analizowany w przykładzie pierwszym co znacznie zmniejsza wartość momentu zginającego na przedostatniej podporze. Rozważenie czterech położen w trakcie nasuwania ostatniego przęsła dźwigara Wymaga, tak jak poprzednio, ustalenia pięciu faz montażowych (rys. 5b). W sytuacjach, które obejmują fazy I i II koniec dźwigara z zamontowanym awanbkiem nie jest podparty i ma możliwość swobodnego przemieszczania się. W fazie III i IV awanbek jest oparty na podporze skrajnej. W tych dwóch fazach występuje zerowanie się ugięcia poza, wyznaczonymi przez podpory stałe w położeniu docelowym, przedziałami charakterystycznymi. Sformułowanie odpowiednich warunków w takim przypadku jest dość uciążliwe, wymaga bowiem analitycznego wyznaczenia osi ugiętej awanbeka, w odniesieniu do każdego rozważanego położenia, w funkcji wyznaczanych zmiennych stanu na końcu dźwigara. W pracy zaproponowano rozwiązanie prostsze, polegające na wprowadzeniu dodatkowego przedziału charakterystycznego



Rys. 5. Fazy montażowe w metodzie nasuwania podłużnego z zastosowaniem awanbeka, a) schemat ideowy montażu, b) podział na przedziały charakterystyczne

W fazach I – IV dźwigar można opisać równaniami stanu postaci (4.12)

$$y_m' = \varphi_m, \quad \varphi_m' = \frac{M_m}{EI}, \quad M_m' = -V\gamma + \sum_k w_{m,k} R_{m,k}, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} m = 1, 2, & \quad k = 1, 2, 3, 4 \\ m = 3, 4, & \quad k = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

gdzie: I – moment bezwładności przekroju poprzecznego, zmienny wzdłuż osi dźwigara, określony zależnością

$$I = w(x, 0, 3L) \cdot I_d + w(x, 3L, 3L + L_a) \cdot I_a$$

V – objętość po lewej stronie rozważanego przekroju określona równaniem $V' = A$ gdzie A jest polem powierzchni przekroju poprzecznego dźwigara wraz z awantkiem, określonym zależnością

$$A = w(x, 0, 3L) \cdot A_d + w(x, 3L, 3L + L_a) \cdot A_a$$

A_d, I_d – pole powierzchni i moment bezwładności przekroju poprzecznego dźwigara

A_a, I_a – pole powierzchni i moment bezwładności przekroju poprzecznego awantka

$$w_{mk} = w_{mk}(x, x_{mk}, 3L + L_a),$$

$$x_{mk} = \{0, \Delta_m, \Delta_m + L, \Delta_m + 2L\}, \quad \text{gdy } m = 1, 2, 3$$

$$x_{mk} = \{0, \Delta_m, \Delta_m + L, \Delta_m + 2L, \Delta_m + 3L\} \quad \text{gdy } m = 4$$

$$\Delta_m = \left\{0, \frac{3}{4}L, \frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L, \frac{1}{4}L\right\}$$

W fazie ze schematem docelowym należy sformułować układ równań postaci (4.6) uwzględniając skokowo zmienne charakterystyki geometryczne przekroju. Układ ten obowiązuje w przedziałach całkowania 1, 2 i 3. Ze względu formalnych, w przedziale 4 należy sformułować układ równań

$$y_5' = 0, \quad \varphi_5' = 0, \quad M_5' = 0, \quad Q_5' = 0, \quad V' = 0$$

Warunki punktowe zmiennych stanu zestawiono w tabelicy 8. W jednym przypadku a mianowicie w fazie III występuje jeden ponadwymiarowy warunek. Jest to jeden z dodatkowych warunków służących do wyznaczenia reakcji podpór. Pozostałe warunki dodatkowe to warunki zerowania się ugięcia dźwigara w chwilowych punktach podparcia oraz warunki równowagi globalnej.

$$wp_{mk} \cdot u_m - u_m = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad wp_{mk} = wp_{mk}(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = x_{mk} - \{0\} \\ 1 & \text{gdy } x \neq x_{mk} - \{0\} \end{cases} \quad (4.18)$$

Warunek (4.18) jest aktywny w trzech punktach każdej z trzech pierwszych faz co daje 9 warunków oraz w czterech punktach fazy IV. Pozostałe warunki to równania równowagi globalnej

$$\sum_k R_{mk} - V_{da} \gamma = 0 \quad (4.19)$$

gdzie: $m = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, 4$
 $m = 3, 4, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$

V_{da} – całkowita objętość dźwigara wraz z awanbkiem

Sformułowano 13 warunków postaci (4.18), 4 warunki postaci (4.19) i jeden ponadwymiarowy warunek punktowy co daje ogółem 18 warunków dodatkowych. Liczba ta jest równa liczbie pozostających do wyznaczenia reakcji podpór.

Tablica 8. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazach montażu dźwigara metodą nasuwania podłużnego z zastosowaniem awanbeka

	Granice przedziałów charakterystycznych																								
	Fazy I, II, IV								Faza III								Schemat docelowy								
	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4 ⁻	4 ⁺	5	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4 ⁻	4 ⁺	5	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4 ⁻	4 ⁺	5	
y	0	c	c	c	c	c	-	0	c	c	c	c	c	c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
φ	-	c	c	c	c	c	-	-	c	c	c	c	c	c	-	-	c	c	c	c	c	-	0	-	
M	0	c	c	c	c	c	0	0	c	c	c	c	c	c	0	0	0	c	c	c	c	0	0	-	
Q	/																-	-	-	-	-	0	-		
V	0	c	c	c	c	c	-	0	c	c	c	c	c	c	-	0	c	c	c	c	c	c	c	-	

4.3.2. Stany montażowe płyty pomostu

4.3.2.1. Betonowanie odcinkowe

Montaż płyty pomostu następuje po całkowitym lub częściowym zmontowaniu dźwigara stalowego. W przypadku obiektów jednoprzęsłowych o niewielkiej rozpiętości płytę pomostu betonuje się w jednym etapie. W przypadku obiektów wieloprzęsłowych stosuje się betonowanie odcinkowe. Ten sposób betonowania zmniejsza niekorzystne efekty wywołane skurczem betonu. Jedną z zasadniczych korzyści jakie przynoszą konstrukcje zespolone jest wykorzystanie dźwigara stalowego jako elementu wsporczej deskowania płyty pomostu. Aby zmniejszyć naprężenia w dźwigarze wywołane obciążeniem w tej najbardziej niekorzystnej sytuacji obliczeniowej, w zależności od możliwości technicznych, stosuje się podpory montażowe. Etapy betonowania powinny być tak zaplanowane by betonowanie kolejnych odcinków nie wywoływało naprężeń rozciągających w betonie wykonanym wcześniej. Dlatego w pierwszej kolejności wykonuje się odcinki przęsłowe a następnie podporowe (w tym nad podporami montażowymi). W trakcie betonowania pierwszych odcinków całkowite obciążenie mieszanką oraz obciążenie technologiczne przenosi dźwigar stalowy. Po osiągnięciu przez beton odpowiedniej wytrzymałości dźwigar na tych odcinkach jest zespolony. W ten sposób realizuje się współpracę dźwigara stalowego z płytą pomostu już w trakcie montażu płyty co jest korzystne ze względu na stan naprężeń w przekroju stalowym. Betonowanie odcinkowe po częściowym montażu dźwigara stalowego umożliwi sprężenie płyty na odcinkach podporowych przez odpowiednie przemieszczenie podpór. Stosuje się również sprężenie za pomocą kabli sprężających.

Fazy montażowe rozważane w modelu matematycznym powinny odpowiadać kolejnym etapom betonowania płyty ze względu na stopniową zmianę przekroju dźwigara ze stalowego na zespolony, przy czym schemat statyczny w kolejnych fazach nie musi ulegać zmianie. Jeżeli betonowanie odbywa się na dwóch niezależnych odcinkach dźwigara w różnym czasie to można je rozważać w ramach jednej fazy montażowej. Każdy zabieg technologiczny jak sprężenie płyty przez przemieszczenie podpór, sprężenie kablami, usunięcie podpór montażowych, montaż kolejnego odcinka dźwigara stalowego, wymaga ustalenia odrębnej fazy pracy ze względu na zmianę schematu statycznego ustroju. Nie ma natomiast potrzeby ustalania odrębnych faz pracy w odniesieniu do obciążeń długotrwałych i krótkotrwałych. Obciążenia w fazie betonowania płyty to

- ciężar własny dźwigara stalowego, który powinien być uwzględniony w fazach montażu dźwigara,
- ciężar własny betonu płyty jako obciążenie długotrwałe,
- obciążenie technologiczne, na które składa się ciężar deskowania i ciężar wody zarobowej, jako obciążenie krótkotrwałe,
- obciążenie przeciwne do technologicznego.

Jeżeli obciążenie ciężarem własnym dźwigara stalowego zostało uwzględnione w fazach montażowych dźwigara to obciążenia w fazach montażu płyty należy przyjmować w następujący sposób:

- odcinki dźwigara stalowego, na których nie odbywa się betonowanie nieobciążone,
- odcinki dźwigara stalowego, na których odbywa się betonowanie obciążone ciężarem własnym płyty oraz obciążeniem technologicznym,
- odcinki dźwigara zespolonego, betonowane w poprzedniej fazie obciążone obciążeniem przeciwnym do technologicznego,
- odcinki dźwigara zespolonego, betonowane w fazach wcześniejszych niż poprzednia nieobciążone.

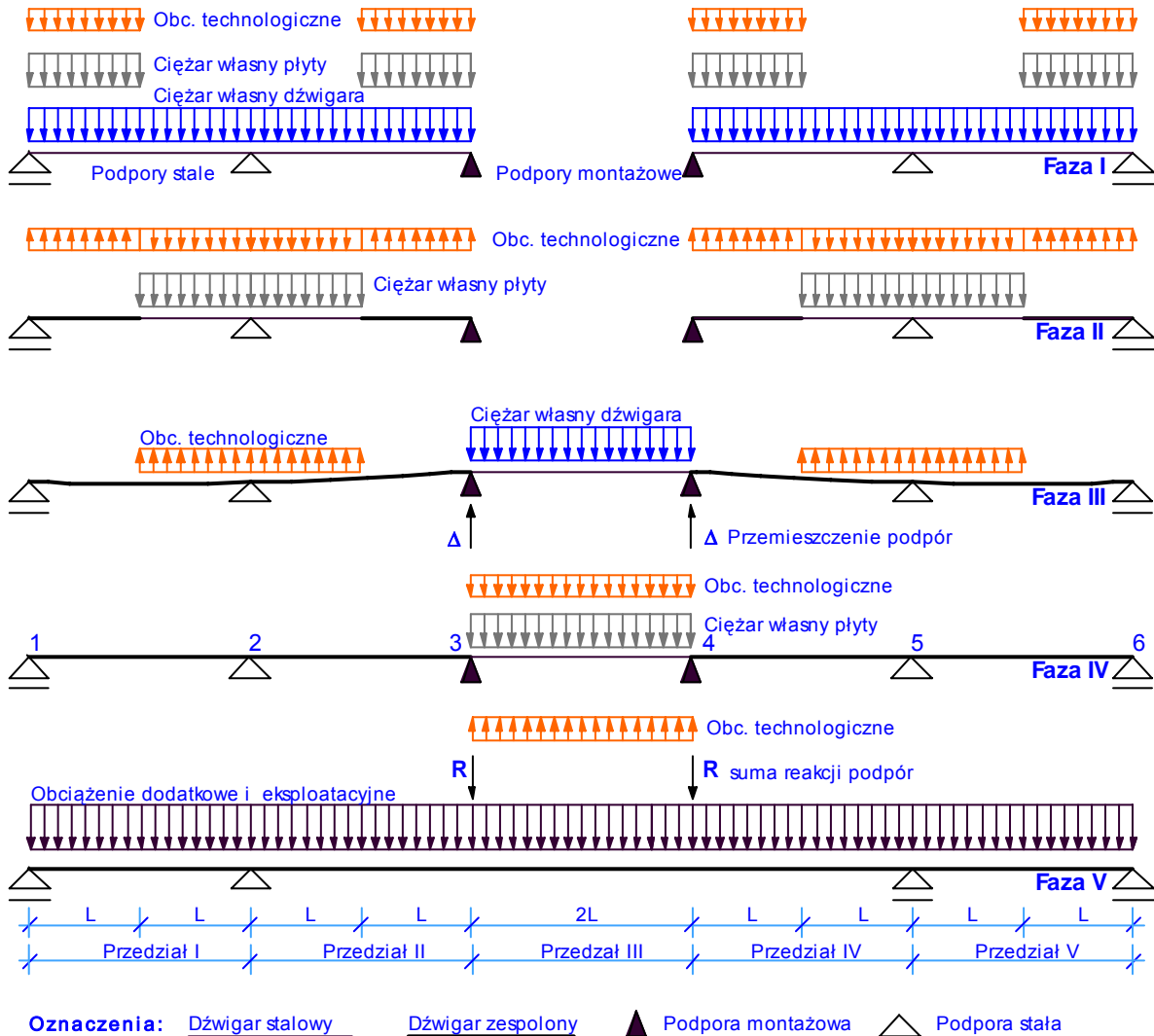
Obciążenie technologiczne podczas betonowania i obciążenie przeciwne do technologicznego w następnej fazie nie znoszą się ponieważ działają przy różnych przekrojach poprzecznych dźwigara w związku z czym skutki ich działania nie są przeciwne. Mają jednak wpływ na długotrwały stan naprężeń dlatego działanie tych obciążeń należy rozważać razem z obciążeniem długotrwałym.

Przedziały charakterystyczne są wyznaczone przez położenie podpór stałych i montażowych. W związku z tym do opisu obciążenia w poszczególnych fazach oraz przekroju poprzecznego dźwigara niezbędne jest zastosowanie funkcji w (4.1).

Jeżeli montaż płyty odbywa się jednocześnie z montażem dźwigara stalowego to budowa modelu matematycznego opisującego kolejne fazy montażowe powinna być poprzedzona wnikliwą analizą planowanego procesu technologicznego pod względem schematów statycznych, charakterystyk geometrycznych, układów obciążeń itp. Ogólne zasady dotyczące ustalania faz montażu, przedziałów charakterystycznych, sposobu formułowania równań i warunków zmiennych stanu, zapisu wielkości skokowo zmiennych podane w punkcie 4.3.1 i niniejszym pozwalają na budowę modelu matematycznego opisującego etap montażu obiektu, który umożliwi zastosowanie zasady maksimum. Niżej przedstawiono przykład montażu płyty metodą betonowania odcinkowego połączonego z montażem

dźwigara stalowego na podporach z zastosowaniem podpór montażowych oraz sprężeniem płyty betonowej przez podniesienie podpór. W przykładzie położono nacisk na problemy związane z betonowaniem płyty ograniczając do niezbędnego minimum montaż dźwigara stalowego.

Przykład dotyczy dźwigara, który docelowo pracuje w schemacie belki ciągłej trzyprzęsłowej. Obejmuje montaż dźwigara stalowego na podporach oraz płyty pomostu metodą betonowania odcinkowego. Montaż odbywa się w pięciu etapach objętych pięcioma fazami pracy (rys. 6).



Rys. 6. Montaż płyty pomostu metodą betonowania odcinkowego z jednoczesnym montażem dźwigara stalowego

Faza I

Po zmontowaniu każdej z dwóch części dźwigara stalowego na dwóch podporach stałych i dodatkowej podporze montażowej następuje betonowanie płyty pomostu na czterech odcinkach przy podporach skrajnych. W tej fazie obciążenia montażowe przenosi dźwigar, którego przekrój w całości jest przekrojem stalowym. Obciążenia te to ciężar własny dźwigara stalowego, ciężar płyty betonowej oraz obciążenie technologiczne. Środkowa część dźwigara stalowego nie jest jeszcze zmontowana. Schematem statycznym obu części obiektu w fazie I jest belka ciągła dwuprzęsłowa.

Faza II

Po osiągnięciu przez beton wykonany w fazie I wymaganej wytrzymałości następuje betonowanie dwóch odcinków nad podporami pośrednimi. Obciążenie płytą betonową, technologiczne oraz przeciwnie do technologicznego w tej fazie przenosi dźwigar, którego przekrój na odcinkach betonowanych jest stalowy a na odcinkach zabetonowanych w poprzedniej fazie zespolony. Schematy statyczne w tej fazie montażu nie ulegają zmianie.

Faza III

Ta faza obejmuje sprężenie płyty pomostu na części zabetonowanej przez podniesienie podpór montażowych. Zabieg ten ma na celu wprowadzenie do części betonowej przekroju wstępnych naprężeń ściskających na odcinkach, gdzie w dalszych etapach i w czasie eksploatacji mogą wystąpić ujemne momenty zginające. Po podniesieniu podpór montażowych następuje również montaż części przęsłowej dźwigara stalowego. W fazie III oprócz obciążeń spowodowanych wymuszonym odkształceniem uwzględnione jest obciążenie ciężarem własnym montowanej części dźwigara oraz obciążenie przeciwne do technologicznego działające na odcinkach betonowanych w fazie II. Schemat statyczny odcinków o przekroju zespolonym nie ulega zmianie, natomiast schematem statycznym montowanego odcinka dźwigara stalowego jest swobodnie podparta belka jednoprzęsłowa. Schematy te są zachowane również po trwałym połączeniu wszystkich części dźwigara, które nastąpiło po wcześniejszym przyłożeniu obciążeń.

Faza IV

Faza IV obejmuje betonowanie ostatniego odcinka płyty. Obciążenie ciężarem własnym płyty betonowej oraz obciążenie technologiczne na tym odcinku są jedynymi obciążeniami uwzględnionymi w tej fazie montażu. Dźwigar w fazie IV pracuje jako belka ciągła pięcioprzęsłowa o przekroju stalowym na odcinku pomiędzy podporami montażowymi oraz zespolonym w pozostałej części.

Faza V

W fazie V, po osiągnięciu przez beton wymaganej wytrzymałości, następuje demontaż podpór montażowych. Po usunięciu podpór, przenoszone przez nie obciążenia przekazują się na dźwigar zespolony. W tej fazie dźwigar jest więc obciążony dwiema siłami skupionymi, przeciwnymi do reakcji usuniętych podpór. Na ostatnim betonowanym odcinku działa obciążenie przeciwne do technologicznego. Faza V jest jednocześnie pierwszą fazą eksploatacji. Schemat statyczny w tej fazie – belka trzyprzęsłowa ciągła – jest schematem docelowym obiektu.

Tablica 9. Obciążenie w poszczególnych etapach montażu q_m .

Faza	0 – L	L – 2L	2L – 3L	3L – 4L	4L – 6L	6L – 7L	7L – 8L	8L – 9L	9L – 10L
I	p + d + t	g	g	p + d + t	–	p + d + t	g	g	p + d + t
II	– t	p + t	p + t	– t	–	– t	p + t	p + t	– t
III	0	– t	– t	0	d	0	– t	– t	0
	Sprężenie płyty					Sprężenie płyty			
IV	0	0	0	0	p + t	0	0	0	0
V	0	0	0	0	– t	0	0	0	0
	Obc. dwiema siłami skupionymi po usunięciu podpór montażowych + obc. dodatkowe								

Oznaczenia: d – obciążenie ciężarem własnym dźwigara stalowego
 p – obciążenie ciężarem własnym płyty pomostu
 t – obciążenie technologiczne

Tablica 10. Przekrój dźwigara w pięciu etapach betonowania odcinkowego

Faza	0 – L	L – 2L	2L – 3L	3L – 4L	4L – 6L	6L – 7L	7L – 8L	8L – 9L	9L – 10L
I	stalowy				–	stalowy			
II	zesp.	stalowy		zesp.	–	zesp.	stalowy		zesp.
III	zespolony				stalowy	zespolony			
IV	zespolony								
V	zespolony								

Dźwigar w każdej fazie jest opisany podstawowym układem równań różniczkowych postaci (4.6)

$$y_m' = \varphi_m, \quad \varphi_m' = \frac{M_m}{EI_m}, \quad M_m' = Q_m, \quad Q_m' = -q_m, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (4.20)$$

gdzie: E – współczynnik sprężystości podłużnej materiału odniesienia, w tym przypadku stali,
 q_m – obciążenie ciągłe zdefiniowane za pomocą funkcji w zgodnie z tab. 8.
 I_m – moment bezwładności przekroju poprzecznego dźwigara zdefiniowany wzdłuż osi za pomocą funkcji w zgodnie z tab. 9.

Rozwiązanie układu 20 równań różniczkowych w pięciu przedziałach charakterystycznych wymaga sformułowania 100 warunków zmiennych stanu. W tablicy 10 zestawiono 98 warunków jakie można sformułować w punktach podparcia dźwigara. Dwa dodatkowe warunki będą sformułowane w fazie V w punktach przyłożenia sił skupionych po usunięciu podpór montażowych. W tych punktach siła poprzeczna doznaje skoku o wartość przyłożonej siły skupionej przeciwnej do reakcji podpory montażowych. Siły R_3, R_4 zostaną wyznaczone jako suma reakcji podpór montażowych w fazach od I do IV. W obu punktach sformułowane warunki mają postać:

$$Q_5(4L^+) = Q_5(4L^-) - R_3 \quad Q_5(6L^+) = Q_5(6L^-) - R_4 \quad (4.21)$$

gdzie: $R_3 = R_{13} + R_{23} + R_{33} + R_{43}$ – siła skupiona w punkcie 3
 $R_4 = R_{14} + R_{24} + R_{34} + R_{44}$ – siła skupiona w punkcie 4

Reakcje R_{mk} zostaną wyznaczone z warunków

$$R_{m3} = Q_m(4L^+) - Q_m(4L^-), \quad R_{m4} = Q_m(6L^+) - Q_m(6L^-), \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.22)$$

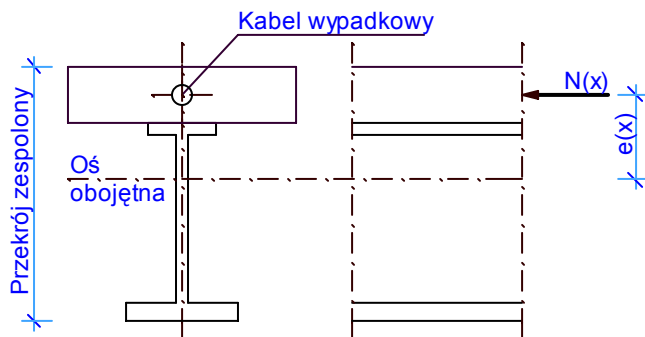
Tablica 11. Wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu

Fazy	Zmienne stanu	Granice przedziałów charakterystycznych									
		0	2L ⁻	2L ⁺	4L ⁻	4L ⁺	6L ⁻	6L ⁺	8L ⁻	8L ⁺	10L
I	y_1	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0
	φ_1	-	c		-	0	-	-	c		-
	M_1	0	c		0	0	-	0	c		0
	Q_1	-	-		-	0	-	-	-		-
II	y_2	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0
	φ_2	-	c		-	0	-	-	c		-
	M_2	0	c		0	0	-	0	c		0
	Q_2	-	-		-	0	-	-	-		-
III	y_3	0	0	0	Δ	Δ	Δ	Δ	0	0	0
	φ_3	-	c		-		-		c		-
	M_3	0	c		0	0	0	0	c		0
	Q_3	-	-		-		-		-		-
IV	y_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	φ_4	-	c		c		c		c		-
	M_4	0	c		c		c		c		0
	Q_4	-	-		-		-		-		-
V	y_5	0	0	0	c	c	c	c	0	0	0
	φ_5	-	c		c		c		c		-
	M_5	0	c		c		c		c		0
	Q_5	-	-		-		-		-		-

Oznaczenia: 0 lub Δ – ustalona wartość, c – warunek ciągłości

4.3.2.2. Sprężenie płyty pomostu

Spośród różnych rodzajów sprężenia, jakie stosuje się w przypadku mostów zespolonych, w pracy omówiono najczęściej spotykane sprężenie płyty pomostu po zespoleniu z dźwigarem stalowym. Na odcinkach, na których następuje sprężenie, dźwigar zespolony można rozważać jako mimośrodowo ściskany siłą sprężającą N (rys. 7). Siła sprężająca jest funkcją zmiennej x i można ją obliczyć stosując algorytmy opracowane w odniesieniu do konstrukcji sprężonych.



Rys. 7. Mimośrodowe ściskanie dźwigara zespolonego siłą sprężającą N

Mimośród e siły sprężającej N , w ogólnym przypadku, nie jest wielkością stałą ze względu na zmienne położenie osi obojętnej przekroju zespolonego. Sprężenie płyty pomostu stosuje się na odcinkach, na których mogą wystąpić ujemne momenty zginające a więc nad podporami pośrednimi. W ustrojach statycznie niewyznaczalnych, jakimi są wieloprzęsłowe obiekty mostowe, sprężenie płyty ma wpływ na zmianę reakcji podpór.

Sprężenie płyty w zadaniu optymalizacji omówiono na przykładzie trzyprzęsłowej belki zespolonej (rys. 8). W zadaniu położono nacisk na problem montażu płyty z uwzględnieniem sprężenia i betonowania odcinkowego pomijając montaż dźwigara stalowego. Przyjęto następującą technologię montażu.

Faza I

Po zakończeniu montażu dźwigara stalowego betonowane są odcinki podporowe płyty pomostu nad podporami pośrednimi. W tej fazie montażu dźwigar stalowy przenosi obciążenie ciężarem własnym i płyty pomostu na betonowanych odcinkach oraz obciążenie technologiczne.

Faza II

Po osiągnięciu przez beton odpowiedniej wytrzymałości następuje sprężenie wykonanych odcinków płyty kablami. W tej fazie dźwigar o przekroju stalowym i zespolonym na zabetonowanych odcinkach jest poddany obciążeniu przeciwnemu do technologicznego z poprzedniej fazy oraz sprężeniu. Aby w tej fazie analizować wyłącznie sprężenie płyty obciążenie przeciwne do technologicznego przeniesiono do fazy III

Faza III

Faza III obejmuje betonowanie pozostałych odcinków płyty. W tej fazie dźwigar o przekroju jak w fazie II jest poddany obciążeniu ciężarem własnym płyty, obciążeniu technologicznemu na betonowanych odcinkach oraz obciążeniu przeciwnemu do technologicznego przeniesionemu z fazy II.

faza IV

Jest to faza montażu wyposażenia, w której obciążeniem, oprócz ciężaru wyposażenia, jest obciążenie przeciwne do technologicznego z fazy III. W fazie IV uwzględniono w sposób uproszczony (jak w punkcie 4.3.2.1) obciążenie eksploatacyjne.

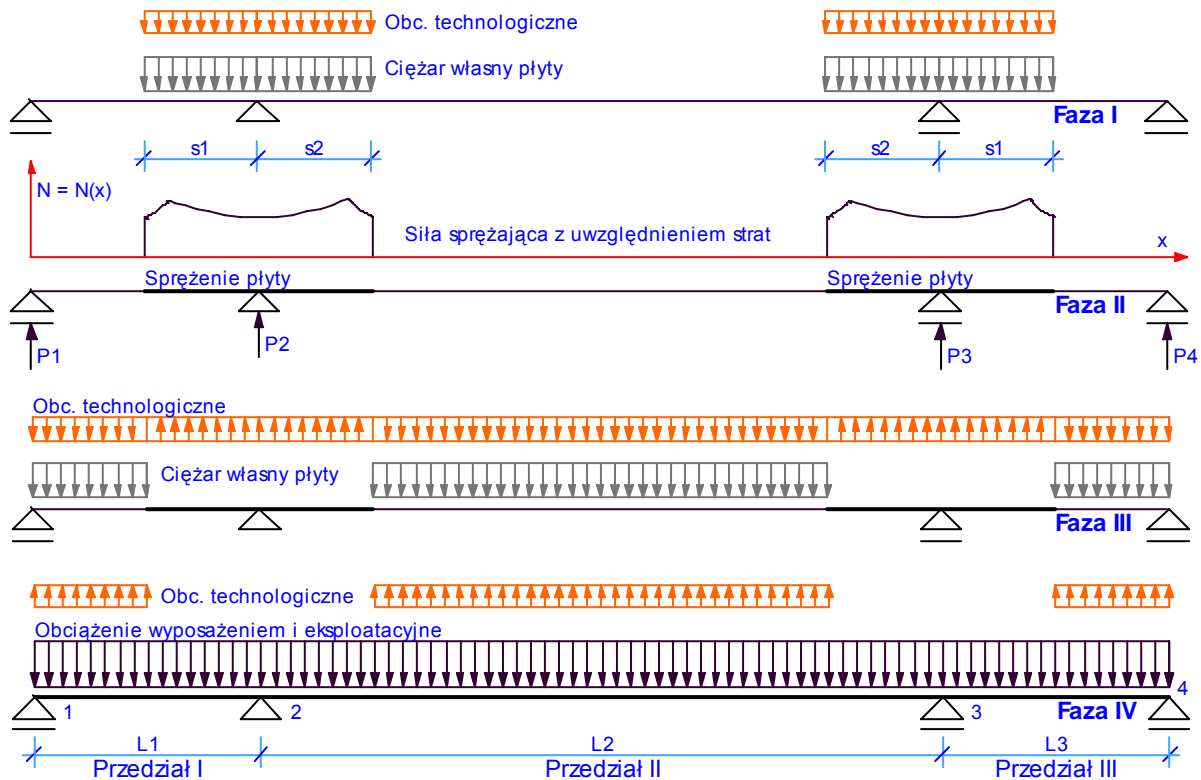
Tablica 12. Obciążenie w poszczególnych fazach montażu q_m .

Faza	$0 \div L_1-s_1$	$L_1-s_1 \div L_1+s_2$	$L_1+s_2 \div L_1+L_2-s_2$	$L_1+L_2-s_2 \div L_1+L_2+s_1$	$L_1+L_2+s_1 \div L_1+L_2+L_3$
I	(s) d	(s) d + p + t	(s) d	(s) d + p + t	(s) d
II	(s)	(z) $N = N(x)$	(s)	(z) $N = N(x)$	(s)
III	(s) p + t	(z) - t	(s) p + t	(z) - t	(s) p + t
IV	(z) - t + qe	(z) qe	(z) - t + qe	(z) qe	(z) - t + qe

Oznaczenia jak w tablicy 9 a ponadto: qe – obciążenie wyposażeniem i eksploatacyjne

(s) – przekrój stalowy

(z) – przekrój zespolony



Rys. 8. Montaż płyty pomostu metodą betonowania odcinkowego z fazą sprężenia płyty kablami po zespoleniu z dźwigarem stalowym

W każdej z faz I, III i IV dźwigar można opisać układem równań podstawowych postaci (4.6), z uwzględnieniem skokowo zmiennych wartości obciążenia i charakterystyk geometrycznych przekroju zapisanych w postaci zależności obowiązujących wzdłuż osi dźwigara z zastosowaniem funkcji w . Podstawowy układ równań w fazie II to dwa równania

$$y_2' = \varphi_2, \quad \varphi_2' = \frac{M_2}{EI_2}, \quad (4.23)$$

gdzie M_2 jest momentem wywołanym siłą sprężającą N , który w poszczególnych przedziałach charakterystycznych wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \text{przedział I:} \quad & M_2 = P_1 \cdot x + N(x) \cdot e(x), \\ \text{przedział II:} \quad & M_2 = P_1 \cdot x + P_2 \cdot (x - L_1) + N(x) \cdot e(x), \\ \text{przedział III:} \quad & M_2 = P_1 \cdot x + P_2 \cdot (x - L_1) + P_3 \cdot (x - L_2) + N(x) \cdot e(x), \end{aligned} \quad (4.24)$$

P_1, P_2, P_3, P_4 – reakcje podpór wywołane siłą sprężającą w ustroju statycznie niewyznaczalnym.

Tablica 13. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazach montażu płyty pomostu z uwzględnienie sprężenia płyty kablami

	Granice przedziałów charakterystycznych											
	Fazy I, III, IV						Faza II (sprężenie)					
	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
φ	-	c		c		-	-	c		c		-
M	0	c		c		0						
Q	-	-	-	-	-	-						

W fazie II sformułowano dwa ponadliczbowe warunki punktowe, które wraz z warunkami równowagi globalnej (4.25) pozwalają wyznaczyć reakcje podpór występujące w równaniu momentów (4.24).

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0, \quad P_2 \cdot L_1 + P_3 \cdot (L_1 + L_2) + P_4 \cdot (L_1 + L_2 + L_3) = 0. \quad (4.25)$$

4.3.3. Stan montażu wyposażenia

Po zakończeniu montażu płyty pomostu następuje etap prac wykończeniowych, podczas których montowane są warstwy jezdni oraz dodatkowe wyposażenie. Te elementy stanowią obciążenie układu nośnego obiektu. Obciążenie ciężarem własnym wyposażenia jest obciążeniem długotrwałym, rozłożonym wzdłuż osi dźwigarów zespolonych, pracujących w tej fazie w docelowym schemacie statycznym. Ze względu na to obciążenie etapowi prac wykończeniowych powinna odpowiadać dodatkowa faza montażowa, w której dźwigar zespolony jest opisany układem równań podstawowych. Jeżeli bezpośrednio przed montażem wyposażenia odbywał się montaż płyty pomostu metodą betonowania odcinkowego to w tej fazie należy również uwzględnić odciążenia związane z odparowaniem wody i demontażem deskowania. Obciążenie technologiczne w fazie betonowania odcinkowego i odciążenie po ustąpieniu obciążenia technologicznego mają charakter krótkotrwały lecz wywołują długotrwały skutek dlatego mogą być rozważane razem z obciążeniami długotrwałymi. Kolejnym obciążeniem w fazie montażu wyposażenia mogą być siły skupione związane z demontażem podpór montażowych. Obciążenie ciężarem własnym wyposażenia w tej fazie montażu powinno odpowiadać sytuacji obliczeniowej, w której budowa jest całkowicie zakończona i obiekt jest przygotowany do przyjęcia obciążeń eksploatacyjnych. Rozważanie stanów przejściowych, jako małoistotnych w wymiarowaniu jest niepotrzebne.

4.3.4. Stan eksploatacji

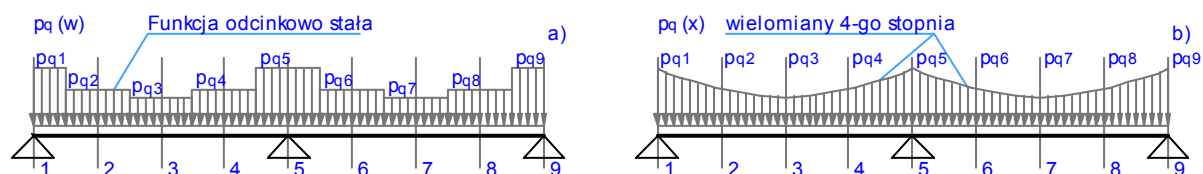
W stanach poprzedzających etap eksploatacji zostały uwzględnione wszystkie istotne obciążenia występujące podczas montażu obiektu. Obciążeniami rozważanymi w stanach eksploatacji będą wyłącznie normowe obciążenia eksploatacyjne takie jak:

- obciążenie pojazdami,
- obciążenie pojazdem ponadnormatywnym,
- obciążenie tłumem pieszych,
- obciążenie wywołane skurczem betonu,
- obciążenie termiczne.

Pozostałych obciążeń normowych (od hamowania pojazdów, od osiadania podpór, wiatrem i innych) w niniejszej pracy nie analizowano. Poniżej przedstawiono fazy eksploatacji ustalone w odniesieniu do drogowych obiektów mostowych poddanych wymienionym obciążeniom normowym.

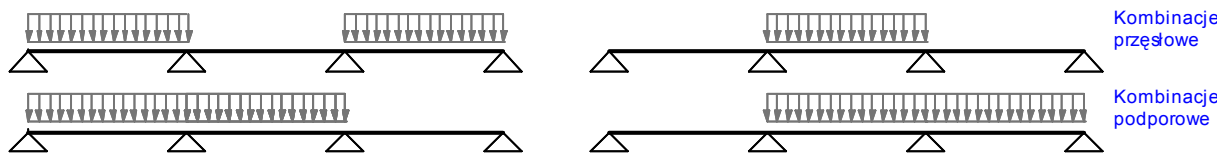
4.3.4.1. Obciążenie pojazdami q

Jest to obciążenie powierzchniowe o stałej intensywności zależnej od klasy obciążenia ustalonej do danego obiektu, które może wystąpić na całej lub części powierzchni przeznaczonych do ruchu pojazdów. W podstawowym układzie równań fazy eksploatacji ustalonej ze względu na to obciążenie występuje obciążenie liniowe p_q przyłożone do dźwigara zespolonego wywołane obciążeniem powierzchniowym q . Jest to obciążenie o zmiennej intensywności, które można wyznaczyć po założeniu wstępnych wymiarów przekroju poprzecznego dźwigara zespolonego. W pracy [21] do wyznaczenia obciążenia p_q zastosowano metodę siły jednostkowej w określonej liczbie punktów a następnie zapisano to obciążenie jako odcinkowo stałe za pomocą funkcji w . Możliwa jest również aproksymacja wyznaczonych wartości obciążenia w każdym przęśle za pomocą wielomianów stopnia $n - 1$, gdzie n jest ilością punktów w danym przęśle, w których zastosowano metodę siły jednostkowej.



Rys. 9. Aproksymacja obciążenia p_q przenoszonego przez dźwigar;
a) aproksymacja funkcją odcinkowo-stałą, b) aproksymacja wielomianem $n-1$ stopnia

Zgodnie z normą [43] obciążenie q należy uwzględnić w sposób najbardziej niekorzystny dla obliczanej wielkości. Aby sprostać wymaganiom normy należy rozważyć w przypadku dźwigara n przęsłowego 2 kombinacje obciążeń, w których momenty zginające przęsłowe osiągają wartości maksymalne oraz $n-1$ kombinacji obciążeń najbardziej niekorzystnych ze względu na minimalne momenty podporowe.

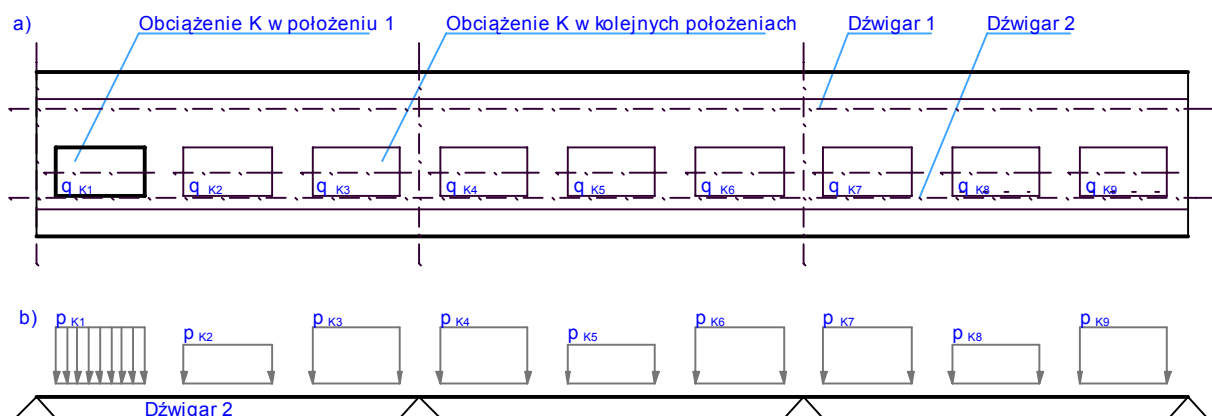


Rys. 10. Kombinacje obciążenia q w belce trzyprzęsłowej

4.3.4.2. Obciążenie pojazdem ponadnormatywnym K

Obciążenie ponadnormatywne K norma [43] definiuje jako nacisk 8 kół ustawionych w dwóch rzędach w odległości 2.7 m po cztery koła co 1.2 m w każdym rzędzie na powierzchni 0.2×0.6 m o wartości zależnej od klasy obciążenia. To obciążenie, w wymiarowaniu elementów głównych mostu, należy uwzględniać razem z obciążeniem q , może ono wystąpić tylko jeden raz a jego położenie powinno być najbardziej niekorzystne ze względu na obliczaną wielkość. Spełnienie określonych wyżej ogólnych założeń sprowadza się do uwzględnienia w wymiarowaniu elementów głównych obwodni momentów zginających i sił poprzecznych wywołanych ruchomym obciążeniem K. W pracy [21] zastosowano następujący tok postępowania w celu spełnienia założeń normowych.

1. Założono wstępne wymiary przekroju poprzecznego dźwigara zespolonego.
2. Przyjęto obciążenie q_K równoważne obciążeniu K w postaci siły powierzchniowej o stałej intensywności rozłożonej na powierzchni 4.8×2.7 m.
3. Ustalono położenie obciążenia K w przekroju poprzecznym mostu, które jest najbardziej niekorzystne w odniesieniu do wymiarowanego dźwigara.
4. Ustalono położenia obciążenia q_K wzdłuż mostu, przy których będą wyznaczane wartości sił przekrojowych w dźwigarze zespolonym.
5. Stosując metodę siły jednostkowej i wykorzystując program do statyki obliczono, w odniesieniu do każdego rozważanego położenia obciążenia q_K , wartość przenoszonego przez dźwigar zespolony obciążenia ciągłego p_K wywołanego tym obciążeniem w punkcie osi odpowiadającym położeniu wypadkowej obciążenia q_K .
6. Przyjęto, że wartość tego obciążenia jest stała wzdłuż osi na odcinku odpowiadającym położeniu obciążenia q_K w rozważanej sytuacji obliczeniowej.
7. W każdej sytuacji obliczeniowej, za pomocą funkcji w , zapisano obciążenie p_K jako funkcję odcinkowo stałą.



Rys. 11. Przykładowe obciążenie mostu trzyprzęsłowego pojazdem ponadnormatywnym w sytuacjach bardziej niekorzystnych z uwagi na wartość sił przekrojowych dźwigara 2;
 a) Rozmieszczenie obciążenia q_K w kolejnych sytuacjach obliczeniowych,
 b) Obciążenie p_K dźwigara 2 w pierwszym położeniu obciążenia q_K .

W odniesieniu do każdego rozważanego położenia K należy ustalić odrębną fazę pracy dźwigara zespolonego. W sytuacji przedstawionej na rysunku 11 należałoby ustalić 9 dodatkowych faz. W każdej z tych faz dźwigar jest poddany działaniu obciążenia ciągłego równomiernie rozłożonego p_K w przedziale, w którym działa obciążenie q_K natomiast poza tym przedziałem na dźwigar nie działa żadne

obciążenie. Stosując funkcję w to odcinkowo stałe obciążenie w n-tej sytuacji obliczeniowej można zapisać w postaci

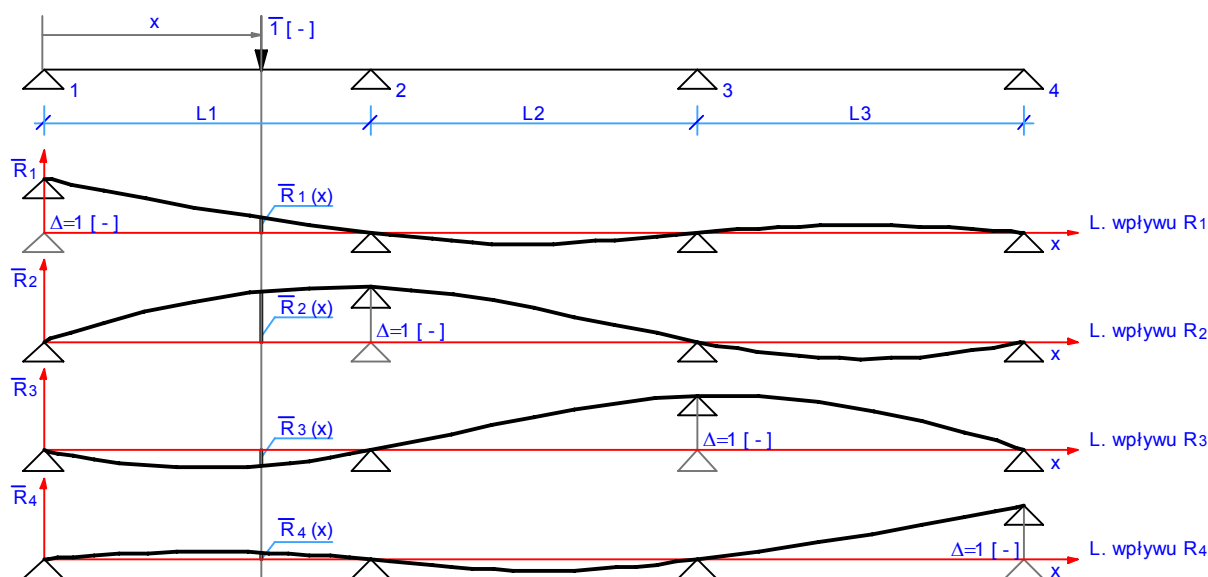
$$q_n(x) = w(x, a_n, b_n) \cdot q_{Kn} \quad (4.26)$$

gdzie: a_n, b_n – współrzędne początku i końca przedziału, w którym występuje obciążenie q_{Kn} .

Uwzględnienie w obliczeniach tą metodą obciążenia poruszającym się pojazdem K jest tym dokładniejsze im więcej położzeń będzie rozważanych. Z każdym takim położeniem związana jest jednak oddzielna faza pracy. Niezbędne jest więc przyjęcie pewnego kompromisu pomiędzy dokładnością obliczeń a wielkością zadania optymalizacji. Przedstawiona metoda jest niewygodna do zastosowania gdy optymalizacji jest poddany dźwigar mostu wieloprzęsłowego. W takich przypadkach liczba faz montażowych wynikających ze złożonej zwykle technologii montażu jest już duża i rozważenie odpowiedniej ze względu na dokładność obliczeń ilości położzeń obciążenia K nie jest możliwe.

W pracy, w odniesieniu do obiektów wieloprzęsłowych, zaproponowano znacznie wygodniejszą i dokładniejszą metodę uwzględnienia przemieszczającego się obciążenia. Ma ona jednak zastosowanie wyłącznie wtedy gdy tym obciążeniem jest siła skupiona. Zaproponowana metoda bazuje na trzeciej zasadzie wzajemności Betty'ego, zgodnie z którą reakcja podpory wywołana siłą jednostkową przyłożoną w danym punkcie belki jest równa przemieszczeniu belki w tym punkcie wywołanemu jednostkowym przemieszczeniem podpory. Trzecia zasada wzajemności pozwala w prosty sposób wyznaczyć linie wpływu reakcji podpór. W przypadku ciągłej belki n przęsłowej wymaga to rozważenia $n+1$ sytuacji obliczeniowych, w których kolejne podpory doznają przemieszczenia jednostkowego. Każdą sytuację opisuje podstawowy układ równań (4.27) wraz z warunkami punktowymi (tab. 14). Jedynym obciążeniem w sytuacjach obliczeniowych przedstawiających linie wpływu poszczególnych reakcji na rysunku 12 jest obciążenie geometryczne (przemieszczenie podpór), które jest zdefiniowane poprzez warunki punktowe zmiennych stanu

$$y_i' = \varphi_i, \quad \varphi_i' = \frac{M_i}{EI}, \quad M_i' = Q_i, \quad Q_i' = 0, \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (4.27)$$



Rys. 12. Linie wpływu reakcji podpór belki trzyprzęsłowej

Tablica 14. Warunki punktowe zmiennych stanu do równań linii wpływu belki trzyprzęsłowej

	Granice przedziałów charakterystycznych																							
	Linia wpływu R_1					Linia wpływu R_2					Linia wpływu R_3					Linia wpływu R_4								
	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4
y	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
φ	-	c		c	-	-	c		c	-	-	c		c	-	-	c		c	-	-	c		c
M	0	c		c	0	0	c		c	0	0	c		c	0	0	c		c	0	0	c		c
Q	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

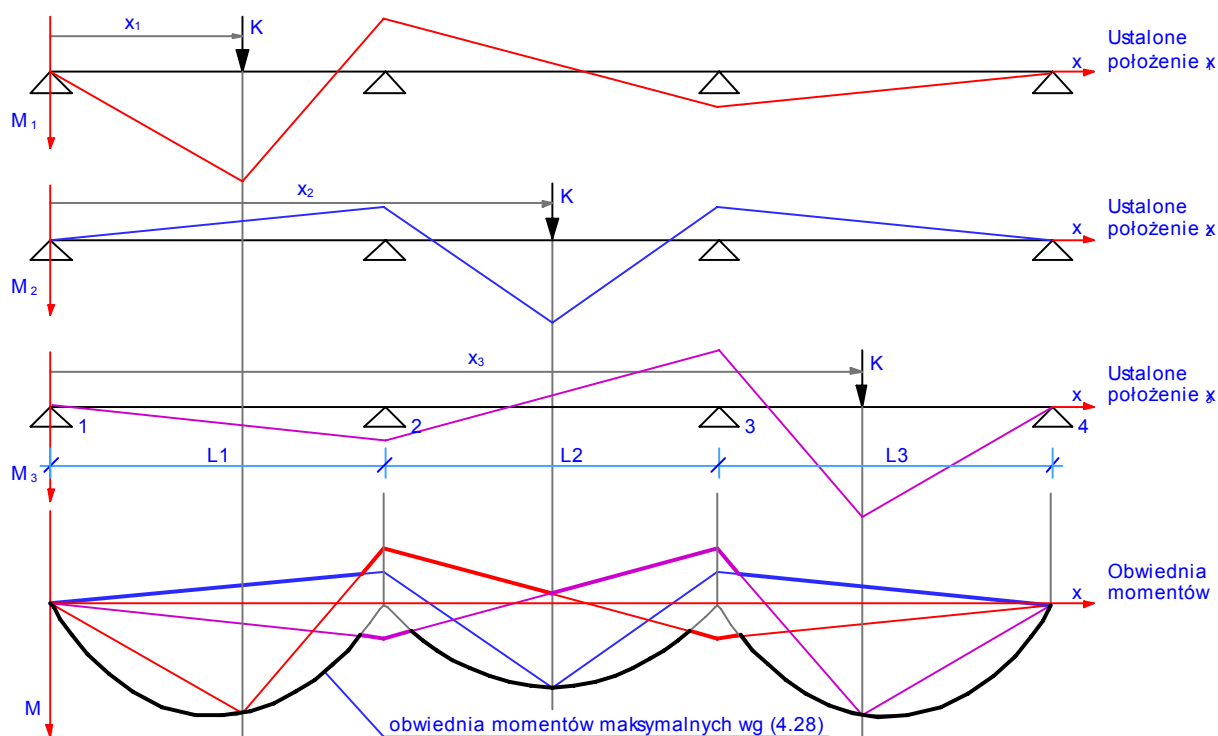
Znajomość linii wpływu umożliwia analityczne wyznaczenie równań momentów zginających i sił poprzecznych w punkcie przyłożenia siły skupionej K .

$$M_j(x) = K \cdot \sum_{i=1}^j y_i(x) \cdot (x - L_{i-1}) \quad (4.28)$$

$$Q_j(x^-) = K \cdot \sum_{i=1}^j y_i(x) \quad j = 1, \dots, n \quad (4.29)$$

$$Q_j(x^+) = K \cdot \sum_{i=1}^j (y_i(x) - 1) \quad (4.30)$$

Równania (4.29) i (4.30) są równaniami obwiedni sił poprzecznych wywołanych działaniem ruchomego obciążenia skupionego K . Równanie (4.28) jest równaniem obwiedni momentów maksymalnych tylko na pewnych odcinkach przęsłowych. Pozostają więc do wyznaczenia równania obwiedni momentów maksymalnych na odcinkach podporowych oraz równania momentów minimalnych na całej długości belki. Okazuje się, że poszukiwane odcinki obwiedni momentów leżą na wykresach momentów odpowiadających kilku charakterystycznym położeniom obciążenia skupionego. Te położenia można ustalić analitycznie przy założeniu stałej sztywności belki. Jednak w zadaniu optymalizacji przekrój belki nie jest znany i dlatego tak wyznaczone najbardziej niekorzystne położenia siły skupionej ze względu na moment minimalny na całej długości belki oraz maksymalny na odcinkach podporowych są obciążone pewnym błędem. Aby znaleźć poszukiwane odcinki obwiedni momentów należy wyznaczyć siły przekrojowe w belce przy ustawieniach siły skupionej w jednym położeniu w przęsłach skrajnych i w jednym lub najwyżej w dwóch położeniach w przęsłach pośrednich.



Rys. 13. Obwiednia momentów zginających przy ruchomym obciążeniu K

Na rysunku 13 przedstawiono przykład wyznaczenia obwiedni momentów zginających z wykorzystaniem wykresu na podstawie równania momentów maksymalnych (4.28) oraz wykresów otrzymanych przy pewnych ustalonych położeniach siły skupionej. Wyznaczenie całej obwiedni momentów w przykładzie przedstawionym na rysunkach 12 i 13 wymagało rozważenia trzech sytuacji obliczeniowych z przemieszczeniem jednostkowym poszczególnych podpór oraz trzech sytuacji z różnymi ustawieniami siły skupionej K . Nigdzie przy tym sformułowaniu nie wykorzystano wartości zmiennych stanu występujących w sytuacji obliczeniowej z przemieszczeniem prawej podpory. Tę sytuację można w budowanym modelu matematycznym pominąć. Tak więc w proponowanej metodzie uwzględnienia

w optymalizacji obciążenia ruchomego należy rozważyć n sytuacji obliczeniowych z przemieszczeniem podpór oraz co najmniej n a najwyżej 2n-2 sytuacje z ustalonymi położeniami obciążenia K (n – liczba przęseł). Ogólna liczba rozważanych sytuacji jest znacznie mniejsza niż w metodzie poprzedniej i jest obciążona znacznie mniejszym błędem. Jej wadą jest konieczność zastąpienia rozłożonego obciążenia ruchomego siłą skupioną co prowadzi do większych momentów maksymalnych głównie na odcinkach przęsłowych.

Dotychczas każdą fazę pracy obiektu opisywano jednym układem równań postaci (4.6). W przypadku obciążenia ruchomego K, niezależnie od zastosowanej metody, trzeba rozważyć wiele sytuacji obliczeniowych, z których następnie należy wybrać tę, która w danej chwili jest najbardziej niekorzystna ze względu na obliczaną wielkość. Tego wyboru dokonuje się na etapie formułowania ograniczeń.

W sytuacji, w której rozważa się siłę skupioną w ustalonym położeniu trzeba zastosować tok postępowania opisany w punkcie 4.2 w celu uniknięcia dodatkowego punktu charakterystycznego. Przedstawiony niżej przykład dotyczy sytuacji obliczeniowej na rysunku 13 przy ustalonym położeniu siły skupionej w przęśle 1.

1. Wartości siły poprzecznej w przedziałach, w których ta siła jest ciągła

$$\begin{aligned} Q_{1,1-x} &= P_1 \\ Q_{1,x-2} &= P_1 - K \\ Q_{1,2-3} &= P_1 + P_2 - K \\ Q_{1,3-4} &= P_1 + P_2 + P_3 - K \end{aligned} \quad (4.31)$$

gdzie: P_1, P_2, P_3 – reakcje podpór 1, 2, 3.

2. Funkcja siły poprzecznej zapisana w postaci obowiązującej wzdłuż całej belki

$$Q_1(x) = w(x, 0, x_1)Q_{1,1-x} + w(x, x_1, L_1)Q_{1,x-2} + w(x, L_1, L_1 + L_2)Q_{1,2-3} + w(x, L_1 + L_2, L_1 + L_2 + L_3)Q_{1,3-4} \quad (4.32)$$

3. Podstawowy układ równań stanu

$$y_1' = \varphi_1, \quad \varphi_1' = \frac{M_1}{EI}, \quad M_1' = Q_1(x), \quad Q_1' = 0 \quad (4.33)$$

4. Warunki punktowe zmiennych stanu (P_4 – reakcja podpory 4) (tab. 15).

Tablica 15. Warunki punktowe zmiennych stanu

	Granice przedziałów charakterystycznych					
	1	2 ⁻	2 ⁺	3 ⁻	3 ⁺	4
y	0	0	0	0	0	0
φ	-	c		c		-
M	0	c		c		0
Q	P_1	$Q_1^{2+} = Q_1^{2-} + P_2$		$Q_1^{3+} = Q_1^{3-} + P_3$		$-P_4$

Powyższa tablica zawiera 16 warunków punktowych tj. tyle ile potrzeba do jednoznacznego rozwiązania układu równań (4.33) w trzech przedziałach charakterystycznych oraz czterech reakcji podpór.

4.3.4.3. Obciążenie tłumem pieszych p

Obciążenie tłumem pieszych p to równomiernie rozłożone obciążenie powierzchniowe, przyłożone do powierzchni chodników po jednej lub po obu stronach obiektu. Podobnie jak obciążenie samochodami obciążenie tłumem pieszych przenosi się na dźwigary w postaci obciążenia liniowego p_p , które należy wyznaczyć dowolną metodą zakładając najbardziej niekorzystne położenie tego obciążenia w profilu w odniesieniu do danego dźwigara. Zgodnie z normą [43] należy rozważyć sytuacje obliczeniowe, w których obciążenie p działa najbardziej niekorzystnie ze względu na obliczaną wielkość. Charakter obciążenia tłumem pieszych jest podobny do obciążenia samochodami, również wymagania normowe są podobne. Można więc obydwie to obciążenia rozpatrywać razem w tych samych sytuacjach obliczeniowych.

4.4. Zjawiska reologiczne w optymalizacji dźwigarów zespolonych

Zjawiska reologiczne zachodzące w betonie (skurcz i pełzanie) mają istotny wpływ na wielkość sił wewnętrznych i rozkład naprężeń w przekroju zespolonym. Zjawiska te występują jednocześnie choć z różną intensywnością w kolejnych okresach eksploatacji. W różnych teoriach są ujmowane razem lub osobno. Podczas montażu obiektu o konstrukcji zespolonej stosuje się różne zabiegi technologiczne, które ograniczają skurcz betonu i zmniejszają jego negatywne skutki, np. betonowanie etapami kolejnych odcinków płyty, betonowanie kolejnych warstw płyty itp. Dominujący wpływ na wartość sił wewnętrznych i rozkład naprężeń w przekroju zespolonym ma pełzanie. Istnieje wiele metod ujęcia tego zjawiska. W praktyce projektowej najczęściej znajdują zastosowanie:

- metoda efektywnego modułu sprężystości,
- metoda zmodyfikowanego efektywnego modułu sprężystości (metoda Trosta).

4.4.1. Metoda efektywnego modułu sprężystości w fazach montażowych

Metoda ta jest mało dokładna, jednak jest zalecana do stosowania przez PN-91/S-10042. Jest prosta w zastosowaniu i może być stosowana do obliczeń przybliżonych. Podstawowe równanie opisujące zależność pomiędzy odkształceniami i naprężeniami ma postać

$$\varepsilon_{co}(\tau) + \varepsilon_p(t, \tau) = \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_{co}} \cdot \sigma_c(\tau), \quad (4.34)$$

$$E_{co,ef} = \frac{E_{co}}{1 + \varphi(t, \tau)} \quad (4.35)$$

gdzie: $\varepsilon_{co}(\tau)$ – odkształcenie sprężyste betonu w czasie przyłożenia obciążenia,
 $\varepsilon_p(t, \tau)$ – odkształcenie betonu obciążonego w czasie τ spowodowane pełzaniem w czasie t ,
 $\varphi(t, \tau)$ – współczynnik pełzania betonu,
 $\sigma_c(\tau)$ – naprężenie w betonie w chwili obciążenia,
 $E_{co,ef}$ – efektywny moduł sprężystości.

Wyznaczona wartość efektywnego modułu sprężystości jest wykorzystywana przy obliczaniu sprawdzonych charakterystyk przekroju zespolonego. Podstawową wadą tej metody jest założenie o całkowitej odwracalności odkształceń pełzania.

W pracy, metodę efektywnego modułu sprężystości również zastosowano w obliczeniach sprawdzonych charakterystyk geometrycznych przekroju dźwigara zespolonego, jednak wyłącznie w stanach montażowych. Takie postępowanie pozwoliło uwzględnić pełzanie betonu w podstawowych układach równań sformułowanych w poszczególnych fazach montażowych bez konieczności ustalania dodatkowych faz pracy. Normy dotyczące konstrukcji zespolonych PN-86/B-03300 [41] oraz PN-86/B-03301 [42] zawierają zależności pozwalające wyznaczyć współczynnik sprężystości podłużnej betonu odpowiadający końcowej wartości współczynnika pełzania i końcowej wartości skurczu. Normy te nie umożliwiają wyznaczenia wartości pośrednich odpowiadających sytuacjom obliczeniowym analizowanym w fazach montażowych. Z tego m. in. powodu współczynnik sprężystości podłużnej betonu wyznaczono na podstawie normy PN-B-03264 [40] dotyczącej konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych.

Sposób obliczania efektywnego współczynnika sprężystości betonu na podstawie normy [40] jest bardzo uproszczony w stosunku do innych opracowań. W pracy [6], uwzględniając wpływy reologiczne według metody efektywnego modułu sprężystości betonu, współczynniki redukcyjne oraz funkcje określające przebieg pełzania w czasie uzależniono od sił wewnętrznych w części stalowej i betonowej przekroju zespolonego. Są to zależności nieliniowe. W przedstawionym w pracy modelu matematycznym opisującym stany montażowe wyznacza się siły wewnętrzne wywołane tym obciążeniem, które w danym stanie jest rozważane. Jednak pełzanie zachodzi pod wpływem rzeczywistych sił wewnętrznych, które są wywołane przez całkowite obciążenie oddziałujące na obiekt w danej chwili. Uwzględnienie tego w modelu matematycznym wymagałoby obliczenia naprężeń w przekroju zespolonym w rozważanym stanie i w stanach poprzednich, zsumowania tych naprężeń a następnie wyznaczenia rzeczywistych sił przekrojowych. Takie rozbudowanie i skomplikowanie modelu, w którym w każdym stanie montażowym pierwsze pochodne zmiennych stanu są nieliniowymi, bardzo złożonymi funkcjami wszystkich zmiennych występujących w tym stanie montażowym i w stanach poprzednich sprawia, że zadanie optymalizacji jest bardzo trudne lub nawet niemożliwe do rozwiązania. Z tego powodu zdecydowano się na metodę wg normy [40], w której funkcja określająca przebieg pełzania w czasie, a tym samym efektywny współczynnik sprężystości betonu, nie zależy od sił wewnętrznych.

Zgodnie z tą normą, przy założeniu naprężeń ściskających w betonie nie przekraczających 45% średniej wytrzymałości betonu na ściskanie w chwili obciążenia, współczynnik pełzania betonu obciążonego w czasie t_0 odpowiadający chwili t oblicza się z zależności

$$\varphi(t, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \cdot \beta_c(t - t_0) \quad (4.36)$$

gdzie: $\varphi(\infty, t_0)$ – współczynnik pełzania betonu obciążonego w chwili t_0 w czasie t^∞ ,
 $\beta_c(t - t_0)$ – funkcja określająca przyrost pełzania po przyłożeniu obciążenia.

Powyższe wielkości można obliczyć na podstawie załącznika A cytowanej normy. Zależą one od klasy betonu, wilgotności względnej, miarodajnego wymiaru przekroju, rodzaju cementu, temperatury dojrzewania betonu.

Sposób obliczania i zapisu efektywnego modułu sprężystości betonu przedstawiono na przykładzie omawianym w punkcie 4.3.2.1. W tym celu wprowadzono następujące oznaczenia:

- t_m – czas rozpoczęcia fazy m odpowiadający chwili rozpoczęcia prac przygotowawczych, poprzedzających operację technologiczną, ze względu na którą faza m została ustalona. Jednocześnie jest to czas zakończenia fazy $m - 1$ gdy $m \geq 2$.
 $E_{m,n}$ – współczynnik sprężystości betonu wykonanego w fazie n , obciążonego w fazie $n+1$ odpowiadający czasowi rozpoczęcia fazy m .

$$E_{m,n} = \frac{E_{co}}{1 + \varphi(t_m - t_n, t_{n+1} - t_n)} \quad (4.37)$$

E_m – współczynnik sprężystości betonu w fazie m

Z równań (4.36) i (4.37) wynika, że gdy $m = n+1$ to $E_{m,n} = E_{co}$. Stosując funkcję w współczynnik sprężystości podłużnej betonu E_m w poszczególnych fazach montażowych można zapisać w postaci obowiązującej wzdłuż całej belki.

$$\begin{aligned} E_2 &= E_{2,1} [w(x,0,L) + w(x,3L,4L) + w(x,6L,7L) + w(x,9L,10L)] \\ E_3 &= E_{3,1} [w(x,0,L) + w(x,3L,4L) + w(x,6L,7L) + w(x,9L,10L)] + E_{3,2} [w(x,L,3L) + w(x,7L,9L)] \\ E_4 &= E_{4,1} [w(x,0,L) + w(x,3L,4L) + w(x,6L,7L) + w(x,9L,10L)] + E_{4,2} [w(x,L,3L) + w(x,7L,9L)] \\ E_5 &= E_{5,1} [w(x,0,L) + w(x,3L,4L) + w(x,6L,7L) + w(x,9L,10L)] + E_{5,2} [w(x,L,3L) + w(x,7L,9L)] + \\ &+ E_{5,4} w(x,4L,6L) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Tak wyznaczone współczynniki E_m (4.38) zostaną wykorzystane do obliczenia sprowadzonych charakterystyk geometrycznych przekroju zespolonego: powierzchni przekroju A_m , momentu statycznego S_m , położenia osi obojętnej i momentu bezwładności I_m . W konsekwencji powyższego sformułowania wielkości te będą nieciągłymi funkcjami doznającymi skoku w punktach nieciągłości funkcji E_m . Przyjęty sposób obliczeń efektywnego współczynnika sprężystości betonu wymaga, aby spełniona była relacja

$$\sigma_c < 0.45f_{cm}(t_0) \quad (4.39)$$

gdzie: σ_c – naprężenia ściskające w betonie od obciążeń długotrwałych,
 $f_{cm}(t_0)$ – średnia wytrzymałość betonu na ściskanie w chwili obciążenia.

Relacja (4.39) powinna być uwzględniona w jednym z ograniczeń zadania optymalizacji. Niezależnie od wpływu na przyjęcie sposobu obliczeń spełnienie relacji (4.39) zapewnia nie przekroczenie naprężeń krytycznych σ_i , powyżej których następuje rozwój istniejących i powstawanie nowych mikrorys. Sformułowanie ograniczenia na podstawie tej relacji jest więc uzasadnione.

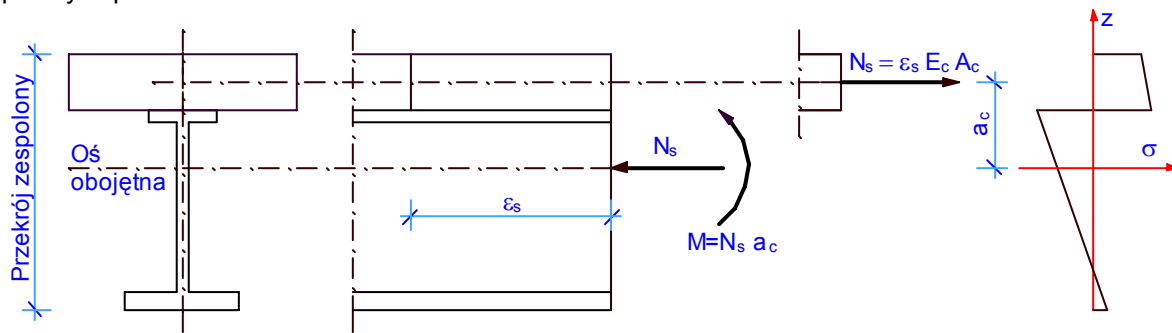
4.4.2. Skurcz betonu w stanach montażowych

Schemat do obliczania naprężeń spowodowanych skurczem betonu w przekroju zespolonym przedstawiono na rysunku 14. Naprężenia w przekroju stalowym można obliczać jak w dźwigarze zespolonym ściskanym mimośrodowo siłą N_s natomiast w przekroju betonowym do naprężeń obliczonych jak w przekroju zespolonym ściskanym mimośrodowo należy dodać naprężenia od rozciągania przekroju betonowego siłą osiową N_s . N_s jest hipotetyczną siłą z jaką należałoby rozciągnąć swobodną płytę betonową, która doznała skurczu, aby jej długość była równa długości nieobciążonego dźwigara stalowego.

$$N_s = \varepsilon_s E_c A_c \quad (4.40)$$

gdzie: ε_s – całkowite odkształcenie skurczowe swobodnej płyty betonowej.

Współczynnik sprężystości betonu w równaniu (4.40) powinien uwzględniać wpływ pełzania w sposób opisany w punkcie 4.4.1.



Rys. 14. Schemat do obliczania naprężeń w przekroju zespolonym od skurczu betonu

W wieloprzęślowych urządzeniach statycznie niewyznaczalnych skurcz betonu spowoduje zmianę reakcji podpór. Jeśli łożyska umożliwiają swobodny przesuw dźwigarów wzdłuż osi to moment zginający wywołany skurczem płyty betonowej można obliczyć w sposób omówiony w punkcie dotyczącym sprężenia płyty. Uwzględnienie wpływu skurczu betonu na naprężenia w przekroju zespolonym we wszystkich fazach montażowych, w których występuje skurcz, wymaga sformułowania w każdej z tych faz dwóch dodatkowych równań.

$$y_m' = \varphi_m, \quad \varphi_m' = \frac{M_m}{E_a I_m}, \quad (4.41)$$

gdzie M_m jest momentem w fazie m wywołanym siłą N_s , który wyraża się wzorem

$$M_m = \sum_{j=1}^n w(x, L_j, L_{j+1}) \left[\sum_{i=1}^j P_{mi} \cdot (x - L_i) + N_{mj} \cdot a_c(x) \right], \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.42)$$

gdzie: n – liczba przedziałów charakterystycznych,

P_{mi} – reakcja podpory i w fazie m po lewej stronie rozważanego przekroju w przedziale j ,

L_i – położenie podpory i ,

N_{mj} – siła osiowa w fazie m spowodowana skurczem w przedziale j ,

a_c – położenie środka ciężkości przekroju betonowego względem osi obojętnej przekroju zespolonego (zależne od x ze względu na zmienne charakterystyki geometryczne przekroju zespolonego).

W przypadku wieloprzęślowej belki wolnopodpartej warunki punktowe zmiennych stanu sformułowane do równań (4.41) to:

– zerowe ugięcie na podporach skrajnych i po obu stronach podpór pośrednich ($2n$ warunków),

– równe kąty ugięcia po obu stronach podpór pośrednich ($n - 1$ warunków).

$n - 1$ warunków ponadliczbowych oraz dwa warunki równowagi globalnej (4.43)

$$\sum_{j=1}^{n+1} P_{mj} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} P_{mj} L_j = 0 \quad (4.43)$$

umożliwia wyznaczenie $n + 1$ niewiadomych reakcji podpór.

W pracy, podobnie jak w przypadku współczynnika pełzania, odkształcenie skurczowe wyznaczono na podstawie normy [40], zgodnie z którą całkowite odkształcenie skurczowe ε_s jest efektem skurczu od wysychania oraz skurczu autogenicznego.

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{csd}(t, t_s) + \varepsilon_{csa}(t) \quad (4.44)$$

gdzie: $\varepsilon_{csd}(t, t_s)$ – odkształcenie skurczowe spowodowane wysychaniem,

$\varepsilon_{csa}(t)$ – odkształcenie skurczowe spowodowane skurczem autogenicznym.

$$\varepsilon_{csd}(t, t_s) = \varepsilon_{csd,\infty} \cdot \beta_{ds}(t - t_s) \quad (4.45)$$

$$\varepsilon_{csa}(t) = \varepsilon_{csa,\infty} \cdot \beta_{as}(t) \quad (4.46)$$

Końcowe odkształcenia skurczowe ($\varepsilon_{csd,\infty}$, $\varepsilon_{csa,\infty}$) oraz funkcje określające przebieg skurczu w czasie ($\beta_{ds}(t - t_s)$, $\beta_{as}(t)$) będą wyznaczone wg załącznika B normy [40].

4.4.3. Metoda zmodyfikowanego efektywnego modułu sprężystości Trosta w fazie eksploatacji

Metoda Trosta jest jedną z modyfikacji metody efektywnego modułu sprężystości i eliminuje jej wady. Metoda ta jest bardzo często stosowana w obliczeniach dźwigarów zespolonych ciągłych. Podstawowe równanie tej metody ma postać:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_{co}}{E_{co}}[1 + \varphi(t)] + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_{co}}{E_{co}}[1 + \rho\varphi(t)] + \varepsilon_s(t), \quad E_{c0,m} = \frac{E_{co}}{1 + \rho\varphi(t)} \quad (4.47)$$

gdzie: $\varepsilon_c(t)$ – odkształcenie po czasie t ,
 σ_{co} – naprężenie w betonie w chwili przyłożenia obciążenia,
 $\sigma_c(t)$ – naprężenie w betonie po czasie t ,
 E_{co} – moduł sprężystości betonu,
 $\varepsilon_s(t)$ – odkształcenie spowodowane skurczem w czasie t ,
 ρ – współczynnik relaksacji,
 $E_{c0,m}$ – zmodyfikowany moduł sprężystości betonu.

Przyjmując założenie zgodności odkształceń płyty betonowej i dźwigara stalowego w metodzie tej wyprowadza się zależności określające zmiany sił wewnętrznych w przekroju betonowym w czasie spowodowane pęczaniem i skurczem betonu:

$$N_{c\varphi} = -\frac{\alpha_N \varphi}{1 + \rho_N \alpha_N \varphi} \left(N_{co} + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} E_{co} A_c \right) \quad (4.48)$$

$$M_{c\varphi} = -\frac{\alpha_M \varphi}{1 + \rho_M \alpha_M \varphi} M_{co} + \frac{1 - \alpha_M}{1 + \rho \alpha_M \varphi} a N_{c\varphi} \quad (4.49)$$

gdzie: $\alpha_N = \frac{1}{\frac{1}{E_{co} A_c} + \frac{1}{E_a A_a} + \frac{a^2}{E_a I_a}}$, $\alpha_M = \frac{1}{\frac{1}{E_{co} I_c} + \frac{1}{E_a I_a}}$

a – odległość pomiędzy środkami ciężkości części stalowej i betonowej,
indeksy a, c – oznaczenie dźwigara stalowego i płyty betonowej,
 N_{co}, M_{co} – siły przekrojowe w chwili rozpoczęcia procesu pęczania.

W pracy metoda Trosta została zastosowana do wyznaczenia zmian sił wewnętrznych spowodowanych pęczaniem betonu w fazie eksploatacji. Skurcz betonu w fazie eksploatacji został opisany oddzielnym układem równań podstawowych zgodnie z punktem 4.4.2. Równania (4.48) i (4.49) pozwalają wyznaczyć zmianę sił przekrojowych w betonie gdy znana jest wartość tych sił (N_{co}, M_{co}) w chwili obciążenia bez uwzględnienia pęczania. W modelu matematycznym, opisującym stany montażowe, wartości N_{co} i M_{co} nie są znane. Ich wyznaczenie wymagałoby wprowadzenia do modelu podstawowych układów równań opisujących wszystkie stany montażowe bez uwzględnienia pęczania. Niżej przedstawiono tok postępowania, który pozwala uniknąć nadmiernego rozbudowania modelu i uzależnić zmiany sił przekrojowych od ich wartości w dowolnym czasie a więc również w czasie odpowiadającym końcowi montażu obiektu.

Wartość siły osiowej w czasie t odpowiadającym początkowi stanu eksploatacji oraz w czasie t_∞ można przedstawić jako sumę wartości siły osiowej w chwili obciążenia oraz przyrostu tej siły spowodowanego pęczaniem:

$$N_{ct} = N_{co} + N_{c\varphi} \quad (4.50)$$

$$N_{c\infty} = N_{co} + N_{c\varphi\infty} \quad (4.51)$$

Wykorzystując zależności (4.48) i (4.49) równania (4.50) i (4.51) przyjmują postać

$$N_{ct} = N_{co} \frac{1 + \rho_N \alpha_N \varphi - \alpha_N \varphi}{1 + \rho_N \alpha_N \varphi} \quad (4.52)$$

$$N_{c\infty} = N_{co} \frac{1 + \rho_{N\infty} \alpha_N \varphi_\infty - \alpha_N \varphi_\infty}{1 + \rho_{N\infty} \alpha_N \varphi_\infty} \quad (4.53)$$

Z równań (4.52) i (4.53), po wyeliminowaniu N_{co} , otrzymuje się wartość siły osiowej w czasie t_∞ zależnej od wartości siły osiowej w czasie t

$$N_{c\varphi\infty} = N_{ct} \frac{1 + \rho_{N\infty} \alpha_N \varphi_\infty - \alpha_N \varphi_\infty}{1 + \rho_{N\infty} \alpha_N \varphi_\infty} \cdot \frac{1 + \rho_N \alpha_N \varphi}{1 + \rho_N \alpha_N \varphi - \alpha_N \varphi} \quad (4.54)$$

Znajomość sił osiowych w czasie t i t_∞ pozwala wyznaczyć jej przyrost ΔN_c w czasie eksploatacji

$$\Delta N_c = N_{c\varphi\infty} - N_{ct} \quad (4.55)$$

Odpowiednie zależności i przekształcenia w odniesieniu do momentu zginającego w czasie t i t_∞ mają postać

$$M_{ct} = M_{co} + M_{c\varphi} \quad (4.56)$$

$$M_{c\varphi\infty} = M_{co} + M_{c\varphi\infty} \quad (4.57)$$

Po wprowadzeniu zależności (5.49) otrzymuje się

$$M_{ct} = M_{co} - \frac{\alpha_M \varphi}{1 + \rho_M \alpha_M \varphi} M_{co} + \frac{1 - \alpha_M}{1 + \rho_M \alpha_M \varphi} a(N_{ct} - N_{co}) \quad (4.58)$$

$$M_{c\varphi\infty} = M_{co} - \frac{\alpha_M \varphi_\infty}{1 + \rho_{M\infty} \alpha_M \varphi_\infty} M_{co} + \frac{1 - \alpha_M}{1 + \rho_{M\infty} \alpha_M \varphi_\infty} a(N_{c\varphi\infty} - N_{co}) \quad (4.59)$$

Z równania (4.58) można wyznaczyć M_{co}

$$M_{co} = \left(M_{ct} - \frac{(1 - \alpha_M)}{1 + \rho_M \alpha_M \varphi} a(N_{ct} - N_{co}) \right) \frac{1 + \rho_M \alpha_M \varphi}{1 + \rho_M \alpha_M \varphi - \alpha_M \varphi} \quad (4.60)$$

a następnie z równania (4.59) $M_{c\varphi\infty}$. Siły N_{co} i $N_{c\varphi\infty}$ w równaniach (4.58) i (4.59) można wyznaczyć z równań (4.52) i (4.54). Przyrost momentu zginającego w czasie eksploatacji ΔM_c wynosi

$$\Delta M_c = M_{c\varphi\infty} - M_{ct} \quad (4.61)$$

Przyrost siły osiowej i momentu zginającego spowodowany pełzaniem w czasie eksploatacji należy obliczyć oddzielnie w odniesieniu do każdej rozważanej fazy montażowej ze względu na różne wartości współczynnika pełzania, współczynnika relaksacji oraz współczynników pomocniczych. Wypadkowy przyrost sił przekrojowych jest sumą przyrostów wyznaczonych w każdej fazie montażowej.

$$\Delta N_c = \sum_m \Delta N_{cm}, \quad \Delta M_c = \sum_m \Delta M_{cm} \quad (4.62)$$

Siły wewnętrzne N_{ct} i M_{ct} na początku fazy eksploatacji, występujące w równaniach (4.50) ÷ (4.61), są efektem działania obciążeń długotrwałych rozważanych we wszystkich stanach montażowych. Ich wartość można obliczyć jako sumę sił osiowych i sumę momentów zginających działających w przekroju betonowym w poszczególnych fazach montażowych. W tym celu, w każdym stanie montażowym, należy dokonać rozdziału siły osiowej i momentu zginającego w przekroju zespolonym na odpowiednie siły wewnętrzne w przekroju betonowym i stalowym.

Jeśli dźwigar zespolony w fazie m jest obciążony siłą osiową N_m to:

$$N_{cm} = N_m \frac{E_m}{E_a} \frac{A_c}{A} \quad (4.63)$$

$$N_{am} = N_m \frac{A_a}{A} \quad (4.64)$$

Jeśli dźwigar zespolony w fazie m jest obciążony momentem zginającym M_m to:

$$N_{cm} = -N_{am} \quad (4.65)$$

$$N_{am} = A_a \frac{M_m}{I} a_a \quad (4.66)$$

$$M_{cm} = M_m \frac{E_m}{E_a} \frac{I_c}{I} \quad (4.67)$$

$$M_{am} = M_m \frac{I_a}{I} \quad (4.68)$$

gdzie: M_m, N_m – moment zginający i siła osiowa w przekroju zespolonym w fazie m ,
 N_{cm}, N_{am} – siły osiowe w przekroju betonowym i stalowym w fazie m ,
 M_{cm}, M_{am} – momenty zginające w przekroju betonowym i stalowym w fazie m ,
 A, I – charakterystyki geometryczne przekroju zespolonego,
 A_c, A_a – pola przekroju betonowego i stalowego,
 I_c, I_a – centralne momenty bezwładności przekroju betonowego i stalowego,
 a_a – odległość pomiędzy środkiem ciężkości przekroju stalowego i zespolonego.

Występujące w równaniach (4.63) i (4.67) współczynniki sprężystości betonu E_m są wyznaczonymi w poszczególnych fazach funkcjami, w których uwzględniono pełzanie. Wypadkowe siły wewnętrzne w przekroju betonowym po zakończeniu montażu wynoszą

$$N_{ct} = \sum_m N_{cm}, \quad M_{ct} = \sum_m M_{cm} \quad (4.69)$$

Odpowiednie zależności sformułowane w odniesieniu do przekroju stalowego mają postać

$$N_{at} = \sum_m N_{am}, \quad M_{at} = \sum_m M_{am} \quad (4.70)$$

Zmiany sił przekrojowych w części stalowej dźwigara zespolonego ΔN_a i ΔM_a można wyznaczyć z warunków równowagi sił w przekroju (4.71)

$$\begin{aligned} \Delta N_c + \Delta N_a &= 0 \\ \Delta M_c + \Delta M_a + N_a a &= 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

W belkach statycznie niewyznaczalnych należy dodatkowo uwzględnić zmianę reakcji podpór spowodowaną pełzaniem i ich wpływ na ostateczną wartość momentu zginającego i siły podłużnej.

4.5. Obciążenia termiczne

Obciążenia termiczne w pracy zostały uwzględnione w sposób podobny jak obciążenie skurczem. Schemat do obliczania naprężeń wywołanych różnicą temperatur pomiędzy częścią stalową i betonową przekroju zespolonego jest identyczny jak przedstawiony na rysunku 14, przy czym odkształcenie skurczowe należy zastąpić odpowiednio wyznaczonym odkształceniem spowodowanym różnicą temperatur. Uwzględniając obciążenia termiczne dźwigara zespolonego przyjęto następujące założenia:

1. założono równomierny rozkład temperatur w części stalowej i betonowej dźwigara,
2. przyjęto normową temperaturę zespolenia 10°C ,
3. rozważając ogrzanie dźwigara stalowego w stosunku do płyty pomostu przyjęto maksymalne normowe temperatury obu części przekroju,
4. rozważając oziębienie dźwigara stalowego w stosunku do płyty pomostu przyjęto minimalne normowe temperatury obu części przekroju.

Uwzględniając powyższe założenia wyznaczono współczynniki odkształceń termicznych w odniesieniu do dwóch sytuacji obliczeniowych

Sytuacja 1 – ogrzanie dźwigara stalowego względem płyty pomostu

$$\Delta T_{a1} = T_{a.\max} - T_z \quad \Delta T_{c1} = T_{c.\max} - T_z \quad \varepsilon_{T1} = \alpha_{Ta} \Delta T_{a1} - \alpha_{Tc} \Delta T_{c1} \quad (4.72)$$

Sytuacja 2 – oziębienie dźwigara stalowego względem płyty pomostu

$$\Delta T_{a2} = T_{a.\min} - T_z \quad \Delta T_{c2} = T_{c.\min} - T_z \quad \varepsilon_{T2} = \alpha_{Ta} \Delta T_{a2} - \alpha_{Tc} \Delta T_{c2} \quad (4.73)$$

gdzie: T_z – temperatura zespolenia,

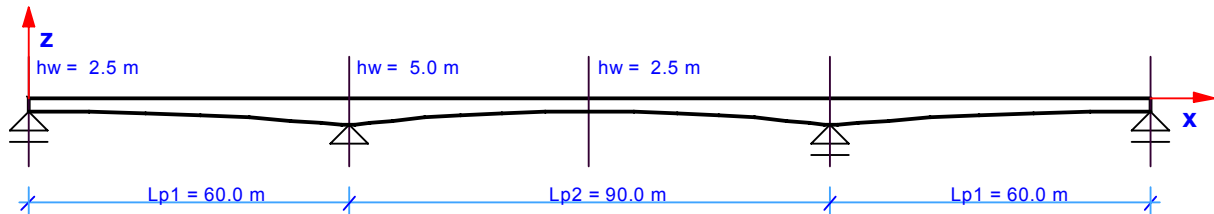
$T_{a.\min}, T_{a.\max}$ – minimalna i maksymalna temperatura normowa dźwigara stalowego,
 $T_{c.\min}, T_{c.\max}$ – minimalna i maksymalna temperatura normowa płyty pomostu

Wszystkich zależnościach wprowadzonych w odniesieniu do skurczu betonu znajdują zastosowanie w obliczeniach dźwigara zespolonego z obciążeniem termicznym po zastąpieniu współczynnika skurczu współczynnikami ε_{T1} i ε_{T2} .

5. Optymalizacja dźwigarów zespolonych – przykłady

5.1. Przykład 1 – optymalizacja dźwigara trzyprzęsłowego mostu drogowego

W przykładzie został wyznaczony optymalny, ze względu na kryterium minimum objętości stali, przekrój poprzeczny dźwigara zespolonego, który jest jednym z dwóch elementów głównych trzyprzęsłowego mostu drogowego o rozpiętości przęseł 60 – 90 – 60 m. Dźwigar pracuje w schemacie belki ciągłej. Część stalowa dźwigara jest blachownicą o przekroju dwuteowym. Środek blachownicy wykonany jest z blach o różnej grubości. Jego górna krawędź jest prostoliniowa, natomiast dolna ma kształt paraboliczny. Pas górny blachownicy posiada stały i z góry ustalony przekrój, natomiast wymiary przekroju pasa dolnego mogą ulegać zmianie i nie są z góry ustalone. Blachownica jest zespolona z żelbetową płytą pomostu, sprzężoną na odcinkach podporowych (rys. 15, 16).



Rys. 15. Schemat dźwigara

Wyznaczony przekrój poprzeczny dźwigara powinien spełniać ograniczenia wynikające z przepisów technicznych i praktyki projektowej. Oznacza to, że w żadnym stanie montażowym i w żadnej prawdopodobnej sytuacji obliczeniowej w okresie eksploatacji nie mogą być przekroczone stany graniczne nośności i użytkowania. Uwzględnienie wszystkich ograniczeń prowadzi do nadmiernego rozbudowania zadania optymalizacji, przy którym wyznaczenie rozwiązania optymalnego jest trudne lub rozwiązanie takie nie istnieje. W prezentowanym przykładzie sformułowano ograniczenia wynikające ze stanów granicznych nośności polegające na nieprzekroczeniu dopuszczalnych naprężeń normalnych w betonie i stali dźwigara, dopuszczalnych naprężeń stycznych w stali dźwigara oraz dopuszczalnych naprężeń w złożonym stanie naprężenia. Sformułowano również ograniczenie wynikające ze stanu granicznego użytkowania polegające na nieprzekroczeniu dopuszczalnego ugięcia.

Zgodnie z punktem 4.1 w okresie montażu i eksploatacji, w odniesieniu do każdej prawdopodobnej sytuacji obliczeniowej, ustalono oddzielną fazę pracy. W takim sformułowaniu, naprężenia w pewnej chwili czasu odpowiadającej danej sytuacji obliczeniowej, są sumą naprężeń we wszystkich sytuacjach obliczeniowych rozważanych do tej chwili. Tak wyznaczone naprężenia powinny spełniać ograniczenia wynikające ze stanów granicznych nośności. Jeśli w obliczeniach uwzględnia się pełzanie to w przypadku stanów montażowych pojawia się problem związany z wyznaczeniem naprężeń w rozważanych sytuacjach obliczeniowych w określonym czasie. Z powodu pełzania, naprężenia od obciążenia w danej sytuacji obliczeniowej zależą od czasu, w którym są wyznaczane i dlatego każdą sytuację obliczeniową, w której występuje pełzanie, należałoby opisać taką ilością podstawowych układów równań jaka odpowiada liczbie sytuacji, w których sprawdzane są naprężenia. W prezentowanym przykładzie należałoby dodatkowo sformułować 32 równania stanu. Z tego powodu w ograniczeniach uwzględniono naprężenia wyznaczone w chwili odpowiadającej końcowi etapu montażu obiektu. Tak więc naprężenia odpowiadające tej chwili są wyznaczone dokładnie, natomiast naprężenia odpowiadające chwili zakończenia każdej wcześniejszej fazy montażu są obciążone pewnym błędem.

Rozwiązanie zadania optymalizacji polega na wyznaczeniu wymiarów przekroju poprzecznego dźwigara zespolonego, przy których spełnione są warunki konieczne optymalności. Praktyczna realizacja wyznaczonego rozwiązania nie jest możliwa. Znając rozwiązanie optymalne i dysponując określonymi materiałami można wykonać dźwigar o przekroju jedynie zbliżonym do optymalnego. Wtedy jednak niezbędne jest przeprowadzenie obliczeń sprawdzających czy przy zaproponowanym przekroju nie są przekroczone stany graniczne nośności i użytkowania. Obliczenia sprawdzające należy wykonać na każdym etapie montażu i w każdej prawdopodobnej sytuacji obliczeniowej. Proponując rozwiązanie praktyczne na podstawie rozwiązania optymalnego należy wziąć pod uwagę również te ograniczenia, których uwzględnienie w zadaniu optymalizacji, ze względów formalnych, nie było możliwe. W tym przykładzie należałoby więc sprawdzić dźwigar ze względu na możliwość utraty stateczności miejscowej środnika i pasa dolnego.

Zastosowano trzy grupy kabli sprężających w połowie wysokości płyty żelbetowej:

- grupa 1 – na odcinku 60 m symetrycznie po obu stronach podpory pośredniej,
6 kabli 7 L 15.5, $A_{s1} = 849 \text{ mm}^2$, $N_{s1} = 5000 \text{ kN}$;
- grupa 2 – na odcinku 40 m symetrycznie po obu stronach podpory pośredniej,
6 kabli 7 L 15.5, $A_{s2} = 849 \text{ mm}^2$, $N_{s2} = 5000 \text{ kN}$;
- grupa 3 – na odcinku 20 m symetrycznie po obu stronach podpory pośredniej,
6 kabli 7 L 15.5, $A_{s3} = 849 \text{ mm}^2$, $N_{s3} = 5000 \text{ kN}$;

Średnica osłonek kabli $d_o = 55 \text{ mm}$

Przyjęto zbrojenie miękkie: – na odcinkach sprężanych $A_{z1} = 200 \text{ cm}^2$,
– na pozostałych odcinkach $A_{z2} = 100 \text{ cm}^2$.

Dane materiałowe

Stal blachownicy 18G2A	$R = 280 \text{ MPa}$,	$R_t = 170 \text{ MPa}$,	$E_a = 206 \text{ GPa}$
Stal sprężająca			$E_s = 190 \text{ GPa}$
Stal miękka			$E_z = 210 \text{ GPa}$
Beton klasy B35	$R_b = 20.2 \text{ MPa}$,	$R_{bt0.50} = 1.6 \text{ MPa}$,	$E_c = 34.6 \text{ GPa}$

Dane dotyczące obciążeń

Ciężar właściwy stali	- $\gamma_a = 78.5 \text{ kN/m}^3$
Ciężar właściwy betonu suchego	- $\gamma_c = 24.0 \text{ kN/m}^3$
Ciężar wody zarobowej	- $\gamma_w = 1.0 \text{ kN/m}^3$ betonu
Obciążenie deskowaniem	- $g_d = 3.6 \text{ kN/m}$
Obciążenie nawierzchnią	- $q_n = 10.0 \text{ kN/m}$
Obciążenie samochodami q	- $q_q = 7.5 \text{ kN/m}$
Obciążenie tłumem pieszych p	- $q_p = 5.0 \text{ kN/m}$
Obciążenie pojazdem K	- $Q_K = 200 \text{ kN}$

5.1.2. Stany montażowe i eksploatacyjne dźwigara zespolonego

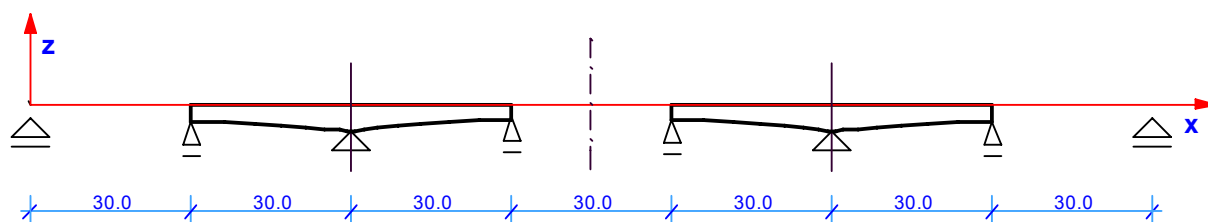
Model matematyczny dźwigara zespolonego uwzględniający przyjętą technologię montażu obiektu wymaga praktycznego zastosowanie metod i toków postępowania opisanych w punkcie 4. W zadaniu zawarto następujące elementy montażu:

- montaż dźwigara stalowego na podporach,
- podpory montażowe,
- betonowanie odcinkowe płyty pomostu,
- sprężenie płyty przez podniesienie podpór,
- sprężenie płyty pomostu kablami,
- montaż wyposażenia.

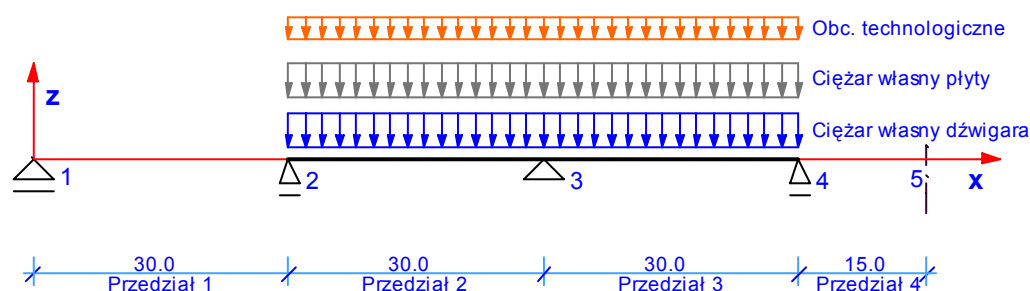
W modelu matematycznym stanów montażowych uwzględniono zjawiska reologiczne zachodzące w betonie metodą zastępczego modułu sprężystości. Ustalono 5 faz montażowych zawierających ww. elementy.

Faza I

Faza I obejmuje montaż dźwigara stalowego na podporach stałych i montażowych z elementów wysyłkowych o długości 30 m wykonanych w zakładzie prefabrykacji oraz betonowanie płyty pomostu na zmontowanych odcinkach dźwigara. Obciążenia w tej fazie montażu przenosi dźwigar stalowy. Fazę pracy dźwigara stalowego przed wykonaniem styków montażowych, w której poszczególne odcinki dźwigara pracują w schemacie belki wolnopodpartej pominięto. Schematem statycznym zmontowanych odcinków dźwigara analizowanego w fazie I jest belka ciągła dwuprzęsłowa oparta na podporze stałej i dwóch podporach montażowych (rys. 17). Założono, że most jest obiektem symetrycznym zarówno pod względem geometrii jak i układu obciążeń. Wobec tego założenia, poszukiwane będzie symetryczne rozwiązanie zadania optymalizacji. Dlatego w dalszym ciągu, w celu ograniczenia wielkości zadania, model matematyczny dźwigara zespolonego będzie obejmował jego lewą połowę, której schemat statyczny będzie odpowiedni do analizowanej sytuacji obliczeniowej. W fazie I połówkowy schemat statyczny dźwigara zespolonego przedstawiono na rysunku 18. Jest to dwuprzęsłowa, swobodnie podparta belka ciągła. Położenie podpór stałych, podpór montażowych oraz oś symetrii obiektu wyznaczają przedziały charakterystyczne obowiązujące we wszystkich analizowanych stanach pracy.



Rys. 17. Schemat ideowy montażu w fazie I



Rys. 18. Schemat dźwigara w fazie I

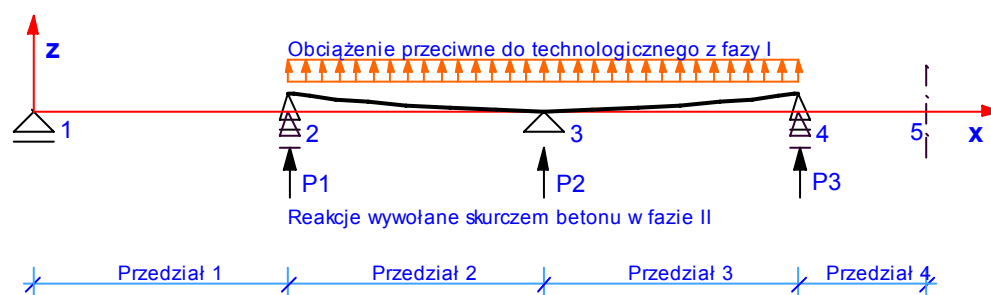
Obciążenia w fazie I:

- ciężar własny dźwigara stalowego wraz ze zbrojeniem miękkim,
- ciężar własny płyty betonowej,
- obciążenie technologiczne (deskowanie i woda, która ulegnie odparowaniu).

Faza II

W tej fazie, po osiągnięciu przez beton pełnej wytrzymałości, następuje sprężenie płyty betonowej przez podniesienie podpór montażowych o $\delta = 10$ cm (rys. 19). Obciążenia w fazie II to:

- obciążenie geometryczne przez podniesienie podpór,
- obciążenie przeciwne do technologicznego z fazy I,
- obciążenie wywołane skurczem betonu w fazie II.



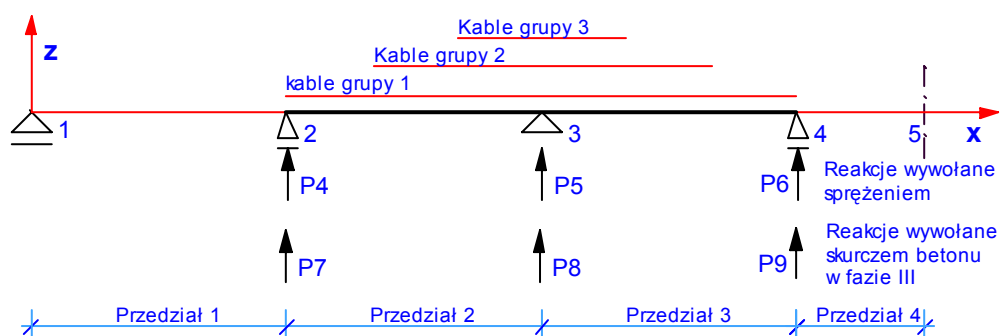
Rys. 19. Schemat dźwigara w fazie II

Faza III

W fazie III uwzględniono sprężenie płyty pomostu kablami o trasie prostoliniowej na wysokości połowy płyty. Zastosowano 3 grupy kabli sprężających po 6 kabli 7 L 15.5 w każdej grupie prowadzonych w osłonkach o średnicy 55 mm. Kable grupy pierwszej zakotwiono w blokach czołowych wykonanej płyty pomostu, natomiast kable grupy 2 i 3 o długościach odpowiednio 40 i 20 m zakotwiono w bosach usytuowanych symetrycznie po obu stronach podpory pośredniej (rys. 20). Obciążenia w fazie III to:

- obciążenie siłą sprężającą N_{s1} na długości wykonanej płyty,
- obciążenie siłą sprężającą N_{s2} na długości 40 m,
- obciążenie siłą sprężającą N_{s3} na długości 20 m,
- obciążenie wywołane skurczem betonu w fazie III.

Schematem statycznym dźwigara zespolonego w tej fazie pracy jest belka ciągła trzyprzęsłowa o osi prostoliniowej choć w rzeczywistości jest odkształcona w wyniku podniesienia podpór montażowych w poprzedniej fazie. Takie sformułowanie wynika z faktu, że w każdej fazie pracy analizowane są wyłącznie obciążenia i ich skutki, ze względu na które dana faza została ustalona.



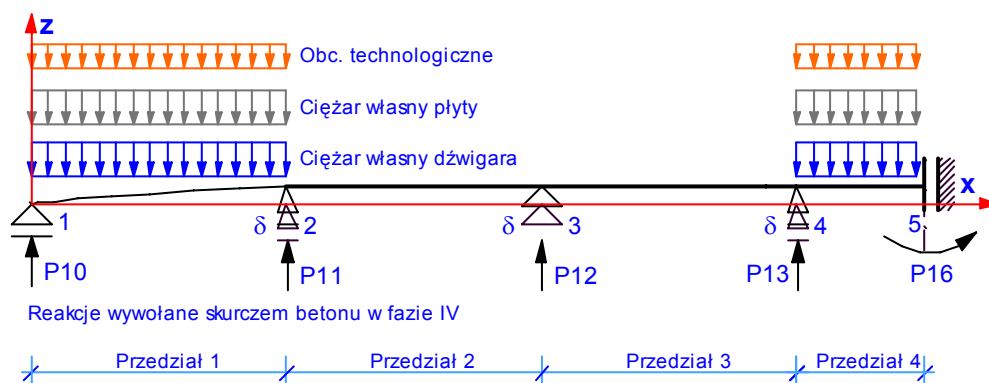
Rys. 20. Schemat dźwigara w fazie III

Faza IV

Faza IV obejmuje montaż pozostałych odcinków dźwigara stalowego oraz betonowanie płyty na tych odcinkach po wykonaniu styków montażowych. Podobnie jak w przypadku fazy I pominięto sytuację obliczeniową, w której montowane odcinki dźwigara stalowego pracują w schemacie statycznym belki wolnopodpartej. Styki montażowe w punktach 2 i 4 (rys. 21) w fazie IV znajdują się na wysokości 10 cm względem punktu 1. Ze względu na ciągłość rzeczywistych przemieszczeń będących sumą przemieszczeń wyznaczanych w poszczególnych fazach pracy w fazie IV przyjęto schemat statyczny dźwigara jako belkę ciągłą, czteroprzęsłową, opartą na podporach stałych i montażowych z utwierdzeniem z możliwością pionowego przesuwu w osi symetrii obiektu, w której podpory 2, 3 i 4 są podniesione o 10 cm względem podpory 1. Przyjęto również ciągłość kątów obrotu dźwigara zespolonego i stalowego w punktach odpowiadających stykom montażowym. W praktyce powyższe założenia byłyby spełnione gdyby dźwigar stalowy był zmontowany w całości w pierwszej fazie montażowej. Wtedy jednak w fazie II i III należałoby uwzględnić trzy dodatkowe reakcje w podporze skrajnej. Warunki punktowe zmiennych stanu w punkcie 2 i 4, formułowane w dalszej części pracy, zapewniają ciągłość kątów obrotów i momentów zginających, przemieszczenie δ montowanej części stalowej oraz zerowe przemieszczenie dźwigara zespolonego, ponieważ jego rzeczywiste przemieszczenie o δ zostało uwzględnione w fazie II. Obciążenia w fazie IV to:

- ciężar własny dźwigara stalowego wraz ze zbrojeniem na montowanych odcinkach,
- ciężar własny montowanej płyty betonowej,
- obciążenie technologiczne na betonowanych odcinkach,
- obciążenie wywołane skurczem betonu w fazie IV na odcinku wykonanym w fazie I.

Obciążenia na odcinkach montowanych w fazie IV przenosi dźwigar stalowy, natomiast na pozostałej części dźwigar zespolony.



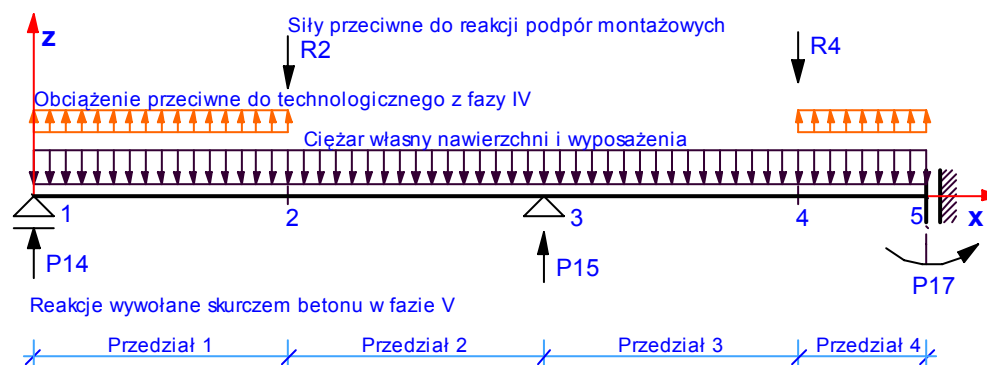
Rys. 21. Schemat dźwigara w fazie IV

Faza V

W fazie V następuje demontaż podpór montażowych oraz montaż nawierzchni i wyposażenia mostu (rys. 22). Obciążenia w fazie V to:

- obciążenie dwiema siłami skupionymi przeciwnymi do reakcji demontowanych podpór,
- obciążenie nawierzchnią i wyposażeniem,
- obciążenie przeciwne do technologicznego z fazy IV,
- obciążenie wywołane skurczem betonu w fazie V na całej długości dźwigara.

Obciążenia w fazie V przenosi dźwigar zespolony.



Rys. 22. Schemat dźwigara w fazie V

Faza V jest ostatnią fazą montażową dźwigara. Wszystkie obciążenia oddziałujące na dźwigar w czasie montażu są traktowane jako obciążenia długotrwałe. Zjawiska reologiczne zachodzące w betonie pod wpływem tych obciążeń zostały uwzględnione we wszystkich fazach montażowych. Pełzanie betonu uwzględniono w obliczeniach charakterystyk geometrycznych przekroju wprowadzając współczynnik sprężystości podłużnej betonu obliczony metodą zastępczego modułu sprężystości. Charakterystyki te są funkcjami odcinkowo stałymi, nieciągłymi w granicach przedziałów charakterystycznych. Skurcz betonu został uwzględniony przez wprowadzenie do modelu dodatkowych równań stanu, w których obciążeniem dźwigara jest siła wywołana skurczem, który ma miejsce w danej fazie montażowej.

Faza pracy z obciążeniem samochodami q i tłumem pieszych p

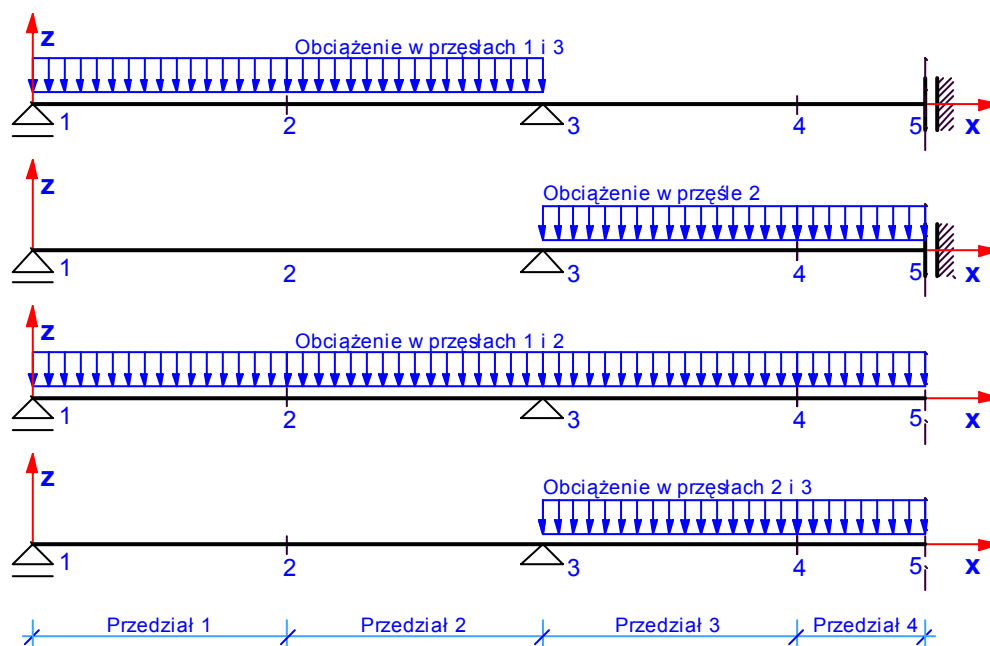
W tej fazie należy rozważyć wszystkie najbardziej niekorzystne sytuacje obliczeniowe ze względu na ekstremalne momenty zginające przęsłowe i podporowe. W przypadku ciągłej belki trzypręsłowej są to cztery sytuacje:

- obciążenie wywołane samochodami q i tłumem pieszych p ($q_q + q_p$) w przęsłach 1 i 3,
- obciążenie ($q_q + q_p$) w przęsle 2,
- obciążenie ($q_q + q_p$) w przęsłach 1 i 2,
- obciążenie ($q_q + q_p$) w przęsłach 2 i 3.

Niesymetryczne obciążenie w trzeciej i czwartej sytuacji obliczeniowej, w przypadku, gdy przyjęty jest połówkowy schemat statyczny dźwigara, wymaga rozłożenia tego obciążenia na część symetryczną i antysymetryczną. W tym przypadku możliwe jest inne sformułowanie, w którym wykorzystuje się fakt, że obciążenie w sytuacji trzeciej jest symetryczne do obciążenia w sytuacji czwartej. To sformułowanie polega na przyjęciu schematu statycznego dźwigara bez podpory w punkcie odpowiadającym osi symetrii oraz sformułowania w tym punkcie odpowiednich warunków punktowych zmiennych stanu, a mianowicie:

- ugięcie w punkcie 5 w obu sytuacjach obliczeniowych są równe,
- kąty obrotu w punkcie 5 w obu sytuacjach obliczeniowych są przeciwne,
- siły poprzeczne w punkcie 5 w obu sytuacjach obliczeniowych są równe,
- momenty zginające w punkcie 5 w obu sytuacjach obliczeniowych są przeciwne.

Jest to pierwsza faza etapu eksploatacji obiektu. Zarówno w tej fazie, jak i w fazach następnych, wszystkie obciążenia traktowane są jako krótkotrwałe. W związku z tym nie wywołują one pełzania w betonie. W czasie eksploatacji zjawiska reologiczne jednak zachodzą, lecz wpływ na nie ma stan naprężeń wywołany obciążeniami w czasie montażu. Efekty tych zjawisk zostały uwzględnione w oddzielnych fazach obliczeniowych – w fazie skurczu w czasie eksploatacji oraz w fazie pełzania. W fazach z obciążeniami krótkotrwałymi, charakterystyki geometryczne przekroju są stałe wzdłuż osi dźwigara i zostały obliczone z zastosowaniem normowego współczynnika sprężystości betonu.



Rys. 23. Schematy dźwigara zespolonego w fazie obciążenia samochodami q i tłumem pieszych p

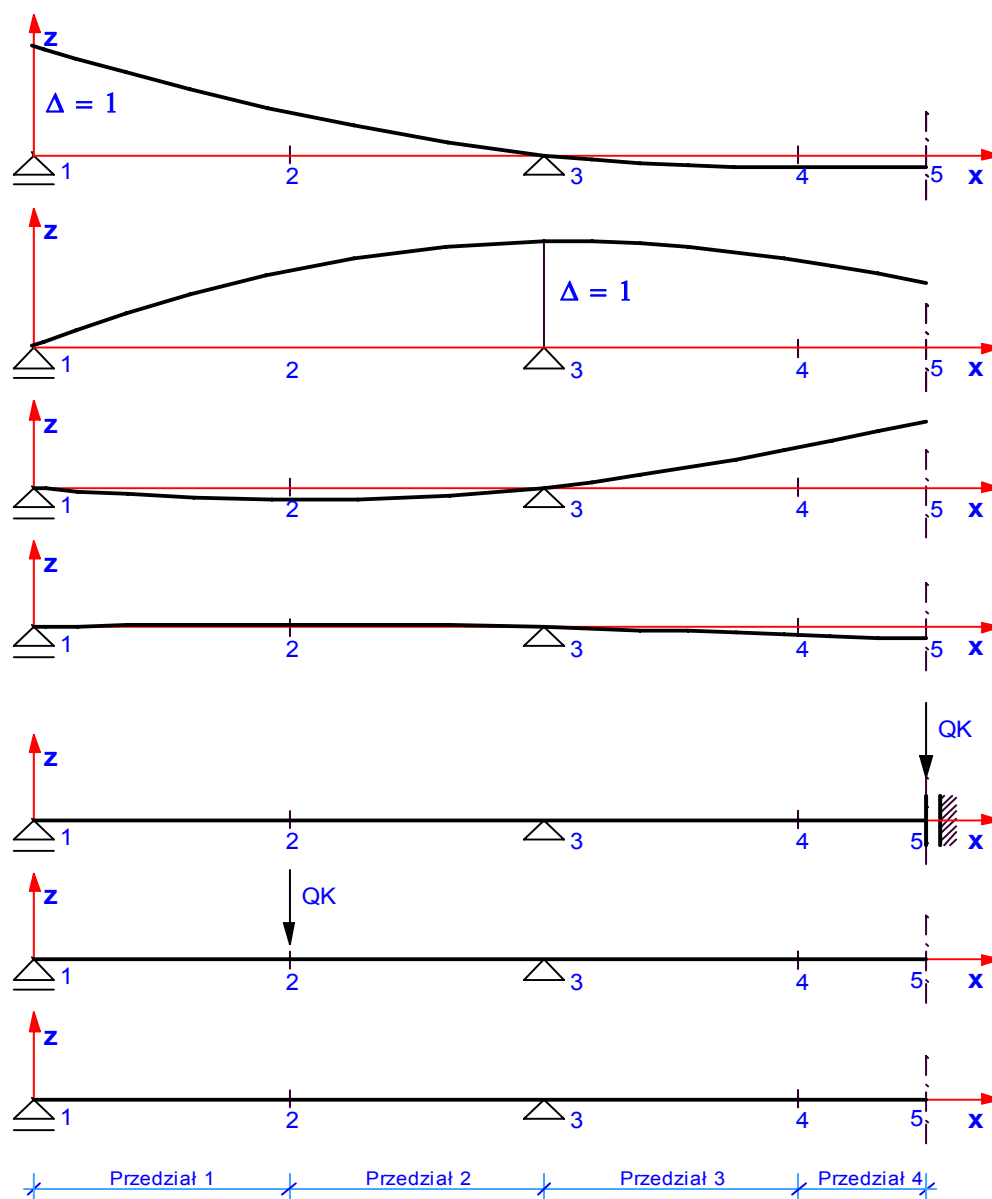
Faza pracy z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym K

Obciążenie pojazdem ponadnormatywnym K uwzględniono metodą opisaną w punkcie 4.3.4.2. W przypadku belki ciągłej trzyprzęsłowej wymaga ona rozważenia siedmiu sytuacji obliczeniowych – czterech sytuacji z jednostkowym przemieszczeniem kolejnych podpór oraz trzech z obciążeniem wywołanym pojazdem ponadnormatywnym K w trzech kolejnych położeniach (rys. 24). W sytuacji 5, odpowiadającej symetrycznemu obciążeniu dźwigara przyjęto schemat statyczny z przesuwym utwierdzeniem w osi symetrii. W pozostałych przypadkach przyjęto schemat połówkowy bez podpory w punkcie 5 formułując w tym punkcie odpowiednie warunki punktowe wiążące odkształcenia i siły przekrojowe symetrycznych względem siebie sytuacji obliczeniowych jak w fazie opisanej wyżej. Tak więc obciążenia w tej fazie to:

- w pierwszej sytuacji obliczeniowej przemieszczenie podpory skrajnej o 1 oraz odkształcenia i siły przekrojowe w osi symetrii związane z tymi samymi wielkościami odpowiadającymi czwartej sytuacji obliczeniowej (symetrycznej do pierwszej),
- w drugiej sytuacji obliczeniowej przemieszczenie podpory pośredniej o 1 oraz odkształcenia i siły przekrojowe w osi symetrii związane z tymi samymi wielkościami odpowiadającymi trzeciej sytuacji obliczeniowej (symetrycznej do drugiej),
- w trzeciej sytuacji obliczeniowej odkształcenia i siły przekrojowe w osi symetrii związane z tymi samymi wielkościami odpowiadającymi drugiej sytuacji obliczeniowej (symetrycznej do trzeciej),
- w czwartej sytuacji obliczeniowej odkształcenia i siły przekrojowe w osi symetrii związane z tymi samymi wielkościami odpowiadającymi pierwszej sytuacji obliczeniowej (symetrycznej do czwartej),
- w piątej sytuacji obliczeniowej obciążenie siłą skupioną $Q_K/2$ w osi symetrii wywołaną obciążeniem ponadnormatywnym K ,
- w szóstej sytuacji obliczeniowej obciążenie siłą skupioną Q_K w punkcie 2 oraz odkształcenia i siły przekrojowe w osi symetrii związane z tymi samymi wielkościami odpowiadającymi siódmej sytuacji obliczeniowej (symetrycznej do szóstej),
- w siódmej sytuacji obliczeniowej odkształcenia i siły przekrojowe w osi symetrii związane z tymi samymi wielkościami odpowiadającymi szóstej sytuacji obliczeniowej (symetrycznej do siódmej).

Wszystkie ww. obciążenia (również geometryczne) są przyłożone w punktach charakterystycznych i zostaną zdefiniowane w odpowiednich warunkach punktowych zmiennych stanu. Pierwsze cztery sytuacje obliczeniowe umożliwiają wyznaczenie linii wpływu reakcji podpór a następnie wartości momentów i sił poprzecznych w punktach przyłożenia obciążenia. W sytuacji 5, 6 i 7 wprost wyznacza się wartości sił przekrojowych. Formułując odpowiednie ograniczenia zmiennych stanu wyznacza się ekstremalne wartości sił przekrojowych w rozważanym przekroju a więc obwiednie tych sił. Maksymalne momenty zginające wyznaczone analitycznie wywołane siłą skupioną Q_K są większe niż wywołane

obciążeniem rozłożonym odpowiadającym normowemu obciążeniu K. Wyznaczone zaproponowaną metodą siły przekrojowe wymagają więc pewnej korekty, np. poprzez wprowadzenie pewnych współczynników redukcyjnych, której w pracy nie przeprowadzono ponieważ nie ma ona wpływu na stosowaną metodykę obliczeń w kategoriach teorii optymalnego sterowania.



Rys. 24. Schematy statyczne w sytuacji obliczeniowych z obciążeniem wywołanym pojazdem ponadnormatywnym K

Faza pełzania w czasie eksploatacji

W tej fazie wyznaczono zmiany momentu zginającego, jakie powstają w dźwigarze stalowym statycznie niewyznaczalnym, obciążonym zmianą momentu zginającego wywołaną pełzaniem w czasie eksploatacji i wyznaczoną w odniesieniu do belki statycznie wyznaczalnej zgodnie z punktem 4.4.3. Na rysunku 25 przedstawiono schemat statyczny belki statycznie wyznaczalnej oraz zmianę momentu wywołanego pełzaniem i moment jednostkowy w podstawowym układzie metody sił. Podstawowe równanie metody sił ma postać:

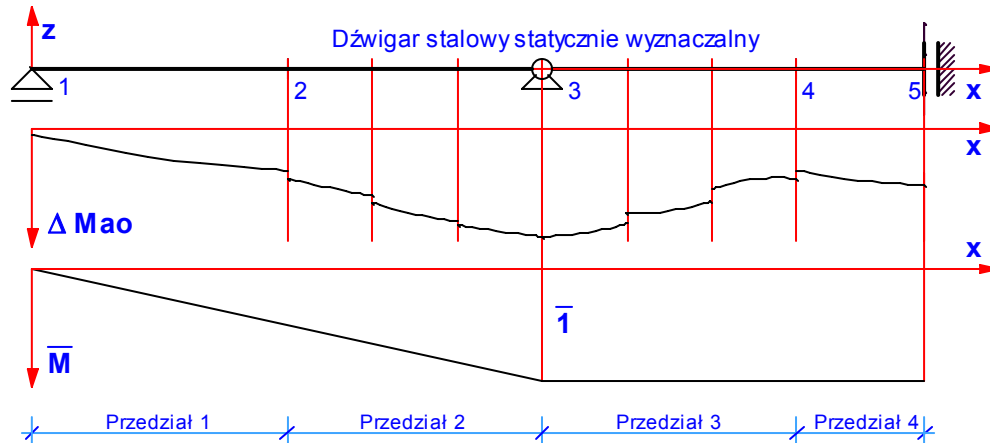
$$\delta_{11}X + \delta_{1P} = 0 \quad (5.1)$$

$$\text{gdzie: } \delta_{11} = \int_x \frac{\overline{M}\overline{M}}{E_a I} dx, \quad \delta_{1P} = \int_x \frac{\overline{M} \cdot \Delta M_{ao}}{E_a I} dx \quad (5.2)$$

Zmiany momentu zginającego w dźwigarze stalowym statycznie niewyznaczalnym zostaną obliczone z zależności:

$$\Delta M_a = \Delta M_{a0} + X\bar{M} \quad (5.3)$$

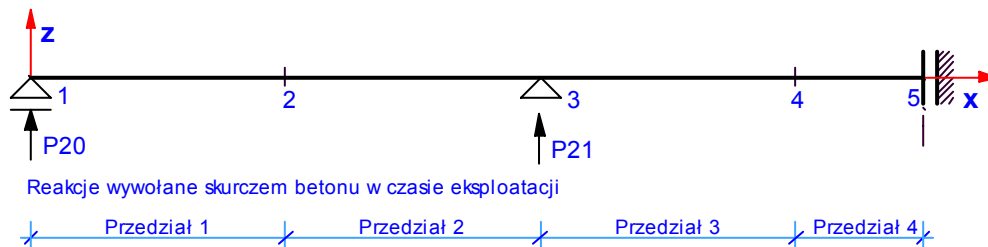
Dodatkowe zmiany sił przekrojowych w części betonowej przekroju zostaną wyznaczone analitycznie zgodnie z [6].



Rys. 25. Układ podstawowy metody sił

Faza skurczu w czasie eksploatacji

Stosując metodę zmodyfikowanego modułu sprężystości Trosta w fazie pełzania w czasie eksploatacji nie uwzględniono skurczu. W związku z tym wydzielono dodatkową fazę. Jedynym obciążeniem w tej fazie jest skurcz betonu, który zachodzi w czasie eksploatacji obiektu po zakończeniu jego montażu. Schematem statycznym w tej fazie jest schemat połówkowy belki symetrycznej i symetrycznie obciążonej (rys. 26).



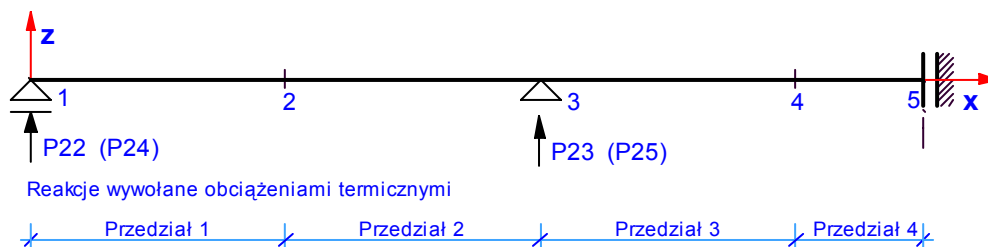
Rys. 26. Schemat statyczny dźwigara w fazie skurczu betonu w czasie eksploatacji

Faza obciążeń termicznych

W tej fazie rozważono dwa przypadki – oziębienia i ogrzanie dźwigara stalowego względem płyty pomostu przy założeniu skrajnych temperatur normowych i normowej temperaturze zespolenia.

W przypadku 1: $T_{a1} = -25^{\circ}\text{C}$, $T_{c1} = -15^{\circ}\text{C}$, $\Delta T_{a1} = -35 \text{ deg}$, $\Delta T_{c1} = -25 \text{ deg}$.

W przypadku 2: $T_{a2} = 55^{\circ}\text{C}$, $T_{c2} = 30^{\circ}\text{C}$, $\Delta T_{a2} = 45 \text{ deg}$, $\Delta T_{c2} = 20 \text{ deg}$.



Rys. 27. Schemat statyczny w fazie obciążeń termicznych

5.1.3. Równania stanu

W odniesieniu do dźwigara w każdej sytuacji obliczeniowej wprowadzono zmienne stanu (tab. 16) oraz sformułowano podstawowe układy równań różniczkowych (tab. 17 ÷ 20). W równaniach stanu występują wielkości wymagające dodatkowego opisu, a mianowicie: współczynniki sprężystości betonu wyznaczone metodą zastępczego modułu sprężystości, sprowadzone charakterystyki geometryczne przekroju wyznaczone z uwzględnieniem tych współczynników oraz odkształcenia skurczowe betonu.

Współczynnik sprężystości betonu

Pełzanie w stanach montażowych zostało uwzględnione metodą efektywnego modułu sprężystości zgodnie z punktem 4.4.1. Efektywny moduł sprężystości w fazach montażowych 2 ÷ 5 zapisano jako funkcje postaci obowiązującej w każdym przedziale charakterystycznym

$$\begin{aligned} E_2 &= w(x, L_{m1}, L_{m2})E_{1,2} \\ E_3 &= w(x, L_{m1}, L_{m2})E_{1,3} \\ E_4 &= w(x, L_{m1}, L_{m2})E_{1,4} \\ E_5 &= w(x, L_{m1}, L_{m2})E_{1,5} + [w(x, 0, L_{m1}) + w(x, L_{m2}, L)]E_{4,5} \end{aligned} \quad (5.4)$$

gdzie: E_{ij} – efektywny współczynnik sprężystości betonu wykonanego w fazie i , obciążonego w fazie j , obliczony z zastosowaniem współczynnika pełzania wyznaczonego w czasie odpowiadającym chwili zakończenia montażu obiektu.

W każdej fazie montażowej wyznaczono współczynniki redukcyjne:

$$\text{w fazie montażowej } m \quad n_m = E_m / E_a \quad (5.5)$$

$$\text{w okresie eksploatacji} \quad n_e = E_c / E_a \quad (5.6)$$

Pola przekroju części stalowej i betonowej

Wprowadzono następujące oznaczenia powierzchni części betonowej i stalowej przekroju zespolonego w sytuacjach, jakie mogą wystąpić podczas montażu obiektu.

- A_{co} – pole przekroju betonu z wyłączeniem powierzchni zbrojenia miękkiego oraz z uwzględnieniem otworów do wprowadzenia kabli sprężających (przed iniekcją),
- A_{io} – pole przekroju betonu z wyłączeniem powierzchni zbrojenia miękkiego oraz powierzchni kabli sprężających (po iniekcji),
- A_{a1} – pole przekroju dźwigara stalowego bez uwzględnienia zbrojenia,
- A_{a2} – pole przekroju dźwigara stalowego wraz ze zbrojeniem miękkim,
- A_{a3} – pole przekroju dźwigara stalowego wraz ze zbrojeniem miękkim i kablami sprężającymi.

Obliczając powyższe wielkości uwzględniono skokowe zmiany intensywności zbrojenia miękkiego oraz powierzchni kabli sprężających. W analogiczny sposób zdefiniowano i oznaczono momenty statyczne, położenie środków ciężkości oraz momenty bezwładności części betonowej i stalowej przekroju zespolonego.

Sprowadzone charakterystyki geometryczne przekroju

W każdej fazie montażu i w fazie eksploatacji wyznaczono charakterystyki geometryczne przekroju jako funkcje postaci obowiązującej w każdym przedziale charakterystycznym.

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{a1} & S_1 &= S_{a1} & I_1 &= I_{ac1} \\ A_2 &= A_{a2} + n_2 A_{co} & S_2 &= S_{a2} + n_2 S_{co} & I_2 &= I_{ac2} + A_{a2}(z_2 - z_{a2})^2 + n_2 [I_{coc} + A_{co}(z_2 - z_{co})^2] \\ A_3 &= A_{a3} + n_3 A_{co} & S_3 &= S_{a3} + n_3 S_{co} & I_3 &= I_{ac3} + A_{a3}(z_3 - z_{a3})^2 + n_3 [I_{coc} + A_{co}(z_3 - z_{co})^2] \\ A_4 &= A_{a3} + n_4 A_{ci} & S_4 &= S_{a3} + n_4 S_{ci} & I_4 &= I_{ac3} + A_{a3}(z_4 - z_{a3})^2 + n_4 [I_{cic} + A_{ci}(z_4 - z_{ci})^2] \\ A_5 &= A_{a3} + n_5 A_{ci} & S_5 &= S_{a3} + n_5 S_{ci} & I_5 &= I_{ac3} + A_{a3}(z_5 - z_{a3})^2 + n_5 [I_{cic} + A_{ci}(z_5 - z_{ci})^2] \\ A_e &= A_{a3} + n_e A_{ci} & S_e &= S_{a3} + n_e S_{ci} & I_e &= I_{ac3} + A_{a3}(z_e - z_{a3})^2 + n_e [I_{cic} + A_{ci}(z_e - z_{ci})^2] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dodatkowy indeks c w momentach bezwładności oznacza, że jest to moment centralny

Współczynnik skurczu betonu w fazach montażowych i w fazie eksploatacji

Na podstawie normy [40] wyznaczono odkształcenie skurczowe betonu w czasie od jego wykonania do chwili, w której obciążenie wywołane skurczem jest uwzględniane. Wprowadzono następujące oznaczenia:

$\epsilon_{csi,j}$ – odkształcenie skurczowe betonu wykonanego w fazie i w okresie od wykonania do czasu zakończenia fazy j,

ϵ_{csie} – całkowite odkształcenie skurczowe betonu w czasie t – nieskończoność.

Analizując obciążenia wywołane skurczem, w każdej fazie uwzględniono tylko przyrost odkształcenia skurczowego, jaki nastąpił w danej fazie.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{cs2} &= w(x, L_{m1}, L_{m2})\epsilon_{cs2.1} \\
 \epsilon_{cs3} &= w(x, L_{m1}, L_{m2})(\epsilon_{cs3.1} - \epsilon_{cs2.1}) \\
 \epsilon_{cs4} &= w(x, L_{m1}, L_{m2})(\epsilon_{cs4.1} - \epsilon_{cs3.1}) \\
 \epsilon_{cs5} &= w(x, L_{m1}, L_{m2})(\epsilon_{cs5.1} - \epsilon_{cs4.1}) + [w(x, 0, L_{m1}) + w(x, L_{m2}, L)]\epsilon_{cs5.4} \\
 \epsilon_{cse} &= w(x, L_{m1}, L_{m2})(\epsilon_{cse} - \epsilon_{cs5.1}) + [w(x, 0, L_{m1}) + w(x, L_{m2}, L)](\epsilon_{cse} - \epsilon_{cs5.4})
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

Tablica 16. Opis zmiennych stanu

		Zmienne stanu w rozważanych sytuacjach obliczeniowych						
		Ugięcie	Kąt obrotu	Moment zginający	Siła poprzeczna	δ_{11}	δ_{1P}	V
Faza montażowa I		y_1	y_2	y_3	y_4			
Faza montażowa II		y_5, y_9	y_6, y_{10}	y_7	y_8			
Faza montażowa III		y_{11}, y_{13}	y_{12}, y_{14}					
Faza montażowa IV		y_{15}, y_{19}	y_{16}, y_{20}	y_{17}	y_{18}			
Faza montażowa V		y_{21}, y_{25}	y_{22}, y_{26}	y_{23}	y_{24}			
Faza pracy z obciążeniem samochodami q i tłumem pieszych p	q1	y_{27}	y_{28}	y_{29}	y_{30}			
	q2	y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}			
	q3	y_{35}	y_{36}	y_{37}	y_{38}			
	q4	y_{39}	y_{40}	y_{41}	y_{42}			
Faza pracy z pojazdem ponad-normatywnym K	K1	y_{43}	y_{44}	y_{45}	y_{46}			
	K2	y_{47}	y_{48}	y_{49}	y_{50}			
	K3	y_{51}	y_{52}	y_{53}	y_{54}			
	K4	y_{55}	y_{56}	y_{57}	y_{58}			
	K5	y_{59}	y_{60}	y_{61}	y_{62}			
	K6	y_{63}	y_{64}	y_{65}	y_{66}			
	K7	y_{67}	y_{68}	y_{69}	y_{70}			
Faza pełzania						y_{71}	y_{72}	
Faza skurczu		y_{73}	y_{74}					
Faza obciążeń termicznych	T1	y_{75}	y_{76}					
	T2	y_{77}	y_{78}					
Objętość								y_{79}

Tablica 17. Równania stanu w stanach montażowych

Równania stanu w przedziałach charakterystycznych		
Przedział 1	Przedział 2 i 3	Przedział 4
Faza montażowa I		
$\dot{y}_1 = 0$	$\dot{y}_1 = y_2$	$\dot{y}_1 = 0$
$\dot{y}_2 = 0$	$\dot{y}_2 = y_3 / (E_a I_1)$	$\dot{y}_2 = 0$
$\dot{y}_3 = 0$	$\dot{y}_3 = y_4$	$\dot{y}_3 = 0$
$\dot{y}_4 = 0$	$\dot{y}_4 = -A_{al} \gamma_a - g_m - q_t$	$\dot{y}_4 = 0$
Faza montażowa II		
$\dot{y}_5 = 0$	$\dot{y}_5 = y_6$	$\dot{y}_5 = 0$
$\dot{y}_6 = 0$	$\dot{y}_6 = y_7 / (E_a I_2)$	$\dot{y}_6 = 0$
$\dot{y}_7 = 0$	$\dot{y}_7 = y_8$	$\dot{y}_7 = 0$
$\dot{y}_8 = 0$	$\dot{y}_8 = q_t$	$\dot{y}_8 = 0$
$\dot{y}_9 = 0$	$\dot{y}_9 = y_{10}$	$\dot{y}_9 = 0$
$\dot{y}_{10} = 0$	$\dot{y}_{10} = \left[\frac{w_2 P_1 (x - L_{m1}) + w_3 P_2 (x - L_{p1}) +}{\varepsilon_{s2} E_{c2} A_{co} (-z_{co} + z_2)} \right] / (E_a I_2)$	$\dot{y}_{10} = 0$
Faza montażowa III		
$\dot{y}_{11} = 0$	$\dot{y}_{11} = y_{12}$	$\dot{y}_{11} = 0$
$\dot{y}_{12} = 0$	$\dot{y}_{12} = \left[\frac{w_2 P_4 (x - L_{m1}) + w_3 P_5 (x - L_{p1}) +}{(w_{s1} N_{s1} + w_{s2} N_{s2} + w_{s3} N_{s3}) \left(h_s + \frac{h_c}{2} + z_3 \right)} \right] / (E_a I_3)$	$\dot{y}_{12} = 0$
$\dot{y}_{13} = 0$	$\dot{y}_{13} = y_{14}$	$\dot{y}_{13} = 0$
$\dot{y}_{14} = 0$	$\dot{y}_{14} = \left[\frac{w_2 P_7 (x - L_{m1}) + w_3 P_8 (x - L_{p1}) +}{\varepsilon_{s3} E_{c3} A_{co} (-z_{co} + z_3)} \right] / (E_a I_3)$	$\dot{y}_{14} = 0$
Faza montażowa IV		
$\dot{y}_{15} = y_{16}$	$\dot{y}_{15} = y_{16}$	$\dot{y}_{15} = y_{16}$
$\dot{y}_{16} = y_{17} / (E_a I_4)$	$\dot{y}_{16} = y_{17} / (E_a I_4)$	$\dot{y}_{16} = y_{17} / (E_a I_4)$
$\dot{y}_{17} = y_{18}$	$\dot{y}_{17} = y_{18}$	$\dot{y}_{17} = y_{18}$
$\dot{y}_{18} = -A_{al} \gamma_a - g_m - q_t$	$\dot{y}_{18} = 0$	$\dot{y}_{18} = -A_{al} \gamma_a - g_m - q_t$
$\dot{y}_{19} = y_{20}$	$\dot{y}_{19} = y_{20}$	$\dot{y}_{19} = y_{20}$
$\dot{y}_{20} = \left[w_1 P_{10} x + w_2 P_{11} (x - L_{m1}) + w_3 P_{12} (x - L_{p1}) + w_4 P_{13} (x - L_{m2}) + \varepsilon_{s4} E_{c4} A_{ci} (-z_{ci} + z_4) \right] / (E_a I_4)$		

Tablica 17. Równania stanu w stanach montażowych (cd.)

Przedział 1	Przedział 2 i 3	Przedział 4
Faza montażowa V		
$\dot{y}_{21} = y_{22}$	$\dot{y}_{21} = y_{22}$	$\dot{y}_{21} = y_{22}$
$\dot{y}_{22} = y_{23}/(E_a I_5)$	$\dot{y}_{22} = y_{23}/(E_a I_5)$	$\dot{y}_{22} = y_{23}/(E_a I_5)$
$\dot{y}_{23} = y_{24}$	$\dot{y}_{23} = y_{24}$	$\dot{y}_{23} = y_{24}$
$\dot{y}_{24} = -q_n + q_t$	$\dot{y}_{24} = -q_n$	$\dot{y}_{24} = -q_n + q_t$
$\dot{y}_{25} = y_{26}$	$\dot{y}_{25} = y_{26}$	$\dot{y}_{25} = y_{26}$
$\dot{y}_{26} = [w_1 P_{14} x + w_3 P_{15} (x - L_{pl}) + \varepsilon_{s5} E_{c5} A_{ci} (-z_{ci} + z_5)] / (E_a I_5)$		

Tablica 18. Równania stanu w fazie z obciążeniem samochodami q i tłumem pieszych p

Równania stanu w przedziałach charakterystycznych			
Przedział 1	Przedział 2	Przedział 3	Przedział 4
Obciążenie w przęśle 1 i 3			
$\dot{y}_{27} = y_{28}$	$\dot{y}_{27} = y_{28}$	$\dot{y}_{27} = y_{28}$	$\dot{y}_{27} = y_{28}$
$\dot{y}_{28} = y_{29}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{28} = y_{29}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{28} = y_{29}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{28} = y_{29}/(E_a I_e)$
$\dot{y}_{29} = y_{30}$	$\dot{y}_{29} = y_{30}$	$\dot{y}_{29} = y_{30}$	$\dot{y}_{29} = y_{30}$
$\dot{y}_{30} = -q_q - q_p$	$\dot{y}_{30} = -q_q - q_p$	$\dot{y}_{30} = 0$	$\dot{y}_{30} = 0$
Obciążenie w przęśle 2			
$\dot{y}_{31} = y_{32}$	$\dot{y}_{31} = y_{32}$	$\dot{y}_{31} = y_{32}$	$\dot{y}_{31} = y_{32}$
$\dot{y}_{32} = y_{33}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{32} = y_{33}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{32} = y_{33}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{32} = y_{33}/(E_a I_e)$
$\dot{y}_{33} = y_{34}$	$\dot{y}_{33} = y_{34}$	$\dot{y}_{33} = y_{34}$	$\dot{y}_{33} = y_{34}$
$\dot{y}_{34} = 0$	$\dot{y}_{34} = 0$	$\dot{y}_{34} = -q_q - q_p$	$\dot{y}_{34} = -q_q - q_p$
Obciążenie w przęśle 1 i 2			
$\dot{y}_{35} = y_{36}$	$\dot{y}_{35} = y_{36}$	$\dot{y}_{35} = y_{36}$	$\dot{y}_{35} = y_{36}$
$\dot{y}_{36} = y_{37}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{36} = y_{37}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{36} = y_{37}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{36} = y_{37}/(E_a I_e)$
$\dot{y}_{37} = y_{38}$	$\dot{y}_{37} = y_{38}$	$\dot{y}_{37} = y_{38}$	$\dot{y}_{37} = y_{38}$
$\dot{y}_{38} = -q_q - q_p$	$\dot{y}_{38} = -q_q - q_p$	$\dot{y}_{38} = -q_q - q_p$	$\dot{y}_{38} = -q_q - q_p$
Obciążenie w przęśle 2 i 3			
$\dot{y}_{39} = y_{40}$	$\dot{y}_{39} = y_{40}$	$\dot{y}_{39} = y_{40}$	$\dot{y}_{39} = y_{40}$
$\dot{y}_{40} = y_{41}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{40} = y_{41}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{40} = y_{41}/(E_a I_e)$	$\dot{y}_{40} = y_{41}/(E_a I_e)$
$\dot{y}_{41} = y_{42}$	$\dot{y}_{41} = y_{42}$	$\dot{y}_{41} = y_{42}$	$\dot{y}_{41} = y_{42}$
$\dot{y}_{42} = 0$	$\dot{y}_{42} = 0$	$\dot{y}_{42} = -q_q - q_p$	$\dot{y}_{42} = -q_q - q_p$

Tablica 19. Równania stanu w fazie z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym K
(jednakowa postać równań we wszystkich przedziałach charakterystycznych)

Sytuacje obliczeniowe do wyznaczenia linii wpływu reakcji podpór				
Przemieszczenie podpory	Równania stanu			
1	$y'_{43} = y_{44}$	$y'_{44} = y_{45}/(E_a I_e)$	$y'_{45} = y_{46}$	$y'_{46} = 0$
2	$y'_{47} = y_{48}$	$y'_{48} = y_{49}/(E_a I_e)$	$y'_{49} = y_{50}$	$y'_{50} = 0$
3	$y'_{51} = y_{52}$	$y'_{52} = y_{53}/(E_a I_e)$	$y'_{53} = y_{54}$	$y'_{54} = 0$
4	$y'_{55} = y_{56}$	$y'_{56} = y_{57}/(E_a I_e)$	$y'_{57} = y_{58}$	$y'_{58} = 0$
Sytuacje obliczeniowe z siłą skupioną w środku rozpiętości kolejnych przęseł				
Położenie siły skupionej	Równania stanu			
Przęsło 2	$y'_{59} = y_{60}$	$y'_{60} = y_{61}/(E_a I_e)$	$y'_{61} = y_{62}$	$y'_{62} = 0$
Przęsło 1	$y'_{63} = y_{64}$	$y'_{64} = y_{65}/(E_a I_e)$	$y'_{65} = y_{66}$	$y'_{66} = 0$
Przęsło 3	$y'_{67} = y_{68}$	$y'_{68} = y_{69}/(E_a I_e)$	$y'_{69} = y_{70}$	$y'_{70} = 0$

Tablica 20. Równania stanu w fazie eksploatacji – pełzanie, skurcz i obciążenia termiczne

Faza pełzania – wyznaczenie współczynników podstawowego równania metody sił	
$y'_{71} = M_1^2/(E_a I_{ac3})$	$y'_{72} = M_1 \Delta M_a/(E_a I_{ac3})$
Faza skurczu w okresie eksploatacji	
$y'_{73} = y_{74}$	$y'_{74} = \left[\frac{w_1 P_{20} x + w_3 P_{21} (x - L_{p1}) +}{\varepsilon_{se} E_c A_{ci} (-z_{ci} + z_e)} \right] / (E_a I_e)$
Faza obciążeń termicznych – oziębienie dźwigara stalowego	
$y'_{75} = y_{76}$	$y'_{76} = \left[\frac{w_1 P_{22} x + w_3 P_{23} (x - L_{p1}) +}{\varepsilon_{t1} E_c A_{ci} (-z_{ci} + z_e)} \right] / (E_a I_e)$
Faza obciążeń termicznych – ogrzanie dźwigara stalowego	
$y'_{77} = y_{78}$	$y'_{78} = \left[\frac{w_1 P_{24} x + w_3 P_{25} (x - L_{p1}) +}{\varepsilon_{t2} E_c A_{ci} (-z_{ci} + z_e)} \right] / (E_a I_e)$
Objętość	
$y'_{79} = A_{a1}$	

5.1.4. Warunki zmiennych stanu

Do jednoznacznego rozwiązania równań stanu niezbędne jest sformułowanie warunków zmiennych stanu. Składają się na nie warunki punktowe (tab. 21 ÷ 24) oraz, gdy ich liczba w odniesieniu do danej fazy nie jest wystarczająca, warunki dodatkowe zestawione w dalszej części tego punktu. Liczba niezbędnych warunków jest równa sumie iloczynu liczby równań sformułowanych w danej fazie i przedziałów charakterystycznych oraz liczby dodatkowych niewiadomych występujących w tych równaniach w postaci parametrów sterowania.

Tablica 21. Warunki punktowe zmiennych stanu w fazach montażowych

Faza pracy	Rodzaj obciążenia	Zmienne stanu	Oznaczenie punktów charakterystycznych							
			1	2		3		4		5
				-	+	-	+	-	+	
Faza montażowa I	Siły rozłożone	y ₁	0	-	0	0	0	0	0	-
		y ₂	0	-	-	C		-	0	-
		y ₃	0	-	0	C		0	0	-
		y ₄	0	-	-	-	-	-	0	-
Faza montażowa II	Siły rozłożone	y ₅	0	-	δ	0	0	δ	0	-
		y ₆	0	-	-	C		-	0	-
		y ₇	0	-	0	C		0	0	-
		y ₈	0	-	-	-	-	-	0	-
	Skurcz betonu	y ₉	0	-	0	0	0	0	0	-
		y ₁₀	0	-	-	C		-	0	-
Faza montażowa III	Sprężenie	y ₁₁	0	-	0	0	0	0	0	-
		y ₁₂	0	-	-	C		-	0	-
	Skurcz betonu	y ₁₃	0	-	0	0	0	0	0	-
		y ₁₄	0	-	-	C		-	0	-
Faza montażowa IV	Siły rozłożone	y ₁₅	0	δ	0	0	0	0	δ	-
		y ₁₆	-	C		C		C		0
		y ₁₇	0	C		C		C		-
		y ₁₈	-	-	-	-	-	-	-	0
	Skurcz betonu	y ₁₉	0	0	0	0	0	0	0	-
		y ₂₀	-	C		C		C		0
Faza montażowa V	Siły rozłożone	y ₂₁	0	C		0	0	C		-
		y ₂₂	-	C		C		C		0
		y ₂₃	0	C		C		C		-
		y ₂₄	-	W (5.14)		-	-	W (5.15)		0
	Skurcz betonu	y ₂₅	0	C		0	0	C		-
		y ₂₆	-	C		C		C		0

Warunki dodatkowe w fazach montażowych

Warunki równowagi globalnej dźwigara obciążonego skurczem w fazie II

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0 \quad P_1 L_{m1} + P_2 L_{p1} + P_3 L_{m2} = 0 \quad (5.9)$$

Warunki równowagi globalnej dźwigara obciążonego siłą sprężającą w fazie III

$$P_4 + P_5 + P_6 = 0 \quad P_4 L_{m1} + P_5 L_{p1} + P_6 L_{m2} = 0 \quad (5.10)$$

Warunki równowagi globalnej dźwigara obciążonego skurczem w fazie III

$$P_7 + P_8 + P_9 = 0 \quad P_7 L_{m1} + P_8 L_{p1} + P_9 L_{m2} = 0 \quad (5.11)$$

Warunki równowagi globalnej dźwigara obciążonego skurczem w fazie IV

$$P_{10} + P_{11} + P_{12} + P_{13} = 0 \quad P_{11} L_{m1} + P_{12} L_{p1} + P_{13} L_{m2} + P_{16} = 0 \quad (5.12)$$

Warunki równowagi globalnej dźwigara obciążonego skurczem w fazie V

$$P_{14} + P_{15} = 0 \quad P_{15} L_{p1} + P_{17} = 0 \quad (5.13)$$

Warunki w punkcie 2 i 4 po usunięciu podpór montażowych w fazie V

$$y_4(L_{m1}^+) + y_8(L_{m1}^+) + y_{18}(L_{m1}^+) + y_{24}(L_{m1}^+) - y_{18}(L_{m1}^-) - y_{24}(L_{m1}^-) + P_1 + P_4 + P_7 + P_{11} = 0 \quad (5.14)$$

$$y_{18}(L_{m2}^+) + y_{24}(L_{m2}^+) - y_4(L_{m2}^-) - y_8(L_{m2}^-) - y_{18}(L_{m2}^-) - y_{24}(L_{m2}^-) + P_3 + P_6 + P_9 + P_{13} = 0 \quad (5.15)$$

Tablica 22. Warunki punktowe zmiennych stanu w fazie z obciążeniem samochodami q i tłumem pieszych p

Sytuacja obliczeniowa	Zmienne stanu	Oznaczenie punktów charakterystycznych							
		1	2		3		4		5
			-	+	-	+	-	+	
Obciążenie w przęśle 1 i 3	y_{27}	0	C		0	0	C		-
	y_{28}	-	C		C		C		0
	y_{29}	0	C		C		C		-
	y_{30}	-	C		-	-	C		0
Obciążenie w przęśle 2	y_{31}	0	C		0	0	C		-
	y_{32}	-	C		C		C		0
	y_{33}	0	C		C		C		-
	y_{34}	-	C		-	-	C		0
Obciążenie w przęśle 1 i 2	y_{35}	0	C		0	0	C		-
	y_{36}	-	C		C		C		-
	y_{37}	0	C		C		C		-
	y_{38}	-	C		-	-	C		-
Obciążenie w przęśle 2 i 3	y_{39}	0	C		0	0	C		-
	y_{40}	-	C		C		C		-
	y_{41}	0	C		C		C		-
	y_{42}	-	C		-	-	C		-

Warunki dodatkowe w fazie z obciążeniem samochodami q i tłumem pieszych p

$$y_{35}(L) = y_{39}(L), \quad y_{36}(L) = -y_{40}(L), \quad y_{37}(L) = y_{41}(L), \quad y_{38}(L) = -y_{42}(L) \quad (5.16)$$

Tablica 23. Warunki punktowe zmiennych stanu w fazie z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym K

Sytuacja obliczeniowa	Zmienne stanu	Oznaczenie punktów charakterystycznych							
		1	2		3		4		5
			-	+	-	+	-	+	
Przemieszczenie podpory 1	y ₄₃	1	C		0	0	C		-
	y ₄₄	-	C		C		C		-
	y ₄₅	0	C		C		C		-
	y ₄₆	-	C		-	-	C		-
Przemieszczenie podpory 2	y ₄₇	0	C		1	1	C		-
	y ₄₈	-	C		C		C		-
	y ₄₉	0	C		C		C		-
	y ₅₀	-	C		-	-	C		-
Przemieszczenie podpory 3	y ₅₁	0	C		0	0	C		-
	y ₅₂	-	C		C		C		-
	y ₅₃	0	C		C		C		-
	y ₅₄	-	C		-	-	C		-
Przemieszczenie podpory 4	y ₅₅	0	C		0	0	C		-
	y ₅₆	-	C		C		C		-
	y ₅₇	0	C		C		C		-
	y ₅₈	-	C		-	-	C		-
Obciążenie K w przęśle 2	y ₅₉	0	C		0	0	C		-
	y ₆₀	-	C		C		C		0
	y ₆₁	0	C		C		C		-
	y ₆₂	-	C		-	-	C		QK/2
Obciążenie K w przęśle 1	y ₆₃	0	C		0	0	C		-
	y ₆₄	-	C		C		C		-
	y ₆₅	0	C		C		C		-
	y ₆₆	-	S		-	-	C		-
Obciążenie K w przęśle 3	y ₆₇	0	C		0	0	C		-
	y ₆₈	-	C		C		C		-
	y ₆₉	0	C		C		C		-
	y ₇₀	-	C		-	-	C		-

Warunki dodatkowe w fazie z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym K

Warunki dodatkowe w sytuacjach K1 i K4

$$y_{43}(L) = y_{55}(L), \quad y_{44}(L) = -y_{56}(L), \quad y_{45}(L) = y_{57}(L), \quad y_{46}(L) = -y_{58}(L) \quad (5.17)$$

Warunki dodatkowe w sytuacjach K2 i K3

$$y_{47}(L) = y_{51}(L), \quad y_{48}(L) = -y_{52}(L), \quad y_{49}(L) = y_{53}(L), \quad y_{50}(L) = -y_{54}(L) \quad (5.18)$$

Warunki dodatkowe w sytuacjach K6 i K7

$$y_{63}(L) = y_{67}(L), \quad y_{64}(L) = -y_{68}(L), \quad y_{65}(L) = y_{69}(L), \quad y_{66}(L) = -y_{70}(L) \quad (5.19)$$

Tablica 24. Warunki punktowe zmiennych stanu w fazie eksploatacji – pełzanie, skurcz i obciążenia termiczne

Sytuacja obliczeniowa		Zmienne stanu	Oznaczenie punktów charakterystycznych							
			1	2		3		4		5
				-	+	-	+	-	+	
Faza pełzania		y_{71}	0	C		C		C		-
		y_{72}	0	C		C		C		-
Skurcz w okresie eksploatacji		y_{73}	0	C		0	0	C		-
		y_{74}	-	C		C		C		0
Obciążenia termiczne	T1	y_{75}	0	C		0	0	C		-
		y_{76}	-	C		C		C		0
	T2	y_{77}	0	C		0	0	C		-
		y_{78}	-	C		C		C		0
Objętość		y_{79}	0	C		C		C		-

Warunki dodatkowe w fazie eksploatacji – pełzanie, skurcz i obciążenia termiczne

Warunki dodatkowe w fazie pełzania

$$y_{71}(L) = P_{18}, \quad y_{72}(L) = P_{19} \quad (5.20)$$

Warunki dodatkowe w fazie skurczu

$$P_{20} + P_{21} = 0, \quad (5.21)$$

Warunki dodatkowe w fazie obciążeń termicznych

$$P_{22} + P_{23} = 0, \quad P_{24} + P_{25} = 0 \quad (5.21)$$

5.1.5. Ograniczenia w zadaniu optymalizacji

W zadaniu sformułowano ograniczenia typu (2.5.2), wynikające z praktyki projektowej, nałożone bezpośrednio na zmienne decyzyjne oraz ograniczenia typu (2.5.3) wynikające ze stanu granicznego nośności i użytkowania zależne od zmiennych stanu i zmiennych decyzyjnych.

Ograniczenia nałożone bezpośrednio na zmienne decyzyjne

Te ograniczenia, w programie dircol-2.1, polegają na zdefiniowaniu dopuszczalnego zakresu zmian poszczególnych zmiennych decyzyjnych. Zostały one określone w następujący sposób:

$$1. \text{ Grubość dolnego pasa dźwigara stalowego} \quad U_1 \in \langle 0.020, 0.120 \rangle \text{ m} \quad (5.22)$$

$$2. \text{ Szerokość dolnego pasa dźwigara stalowego} \quad U_2 \in \langle 0.500, 1.000 \rangle \text{ m} \quad (5.23)$$

$$3. \text{ Grubość środnika dźwigara stalowego} \quad U_3 \in \langle 0.010, 0.020 \rangle \text{ m} \quad (5.24)$$

Ograniczenia wynikające ze stanu granicznego nośności i użytkowania

Ograniczenia zależne od zmiennych stanu i zmiennych decyzyjnych, w programie dircol-2.1, definiuje się wprost w postaci zależności (2.5).

1. Ograniczenie maksymalnych naprężeń normalnych na dolnej powierzchni pasa dolnego dźwigara

$$G_1 = R - \sigma_{ad} \quad (5.25)$$

gdzie: $\sigma_{ad} = \max(|\sigma_{ad.min}|, |\sigma_{ad.max}|)$

$\sigma_{ad.min}, \sigma_{ad.max}$ – ekstremalne wartości naprężeń, które mogą wystąpić w jednej z możliwych sytuacji obliczeniowych w okresie montażu i eksploatacji

$$\sigma_{ad.min} = \min(\sigma_{ad.1}, \sigma_{ad.2}, \sigma_{ad.3}, \sigma_{ad.4}, \sigma_{ad.5}, \sigma_{ad.0.min}, \sigma_{ad.e.min})$$

$$\sigma_{ad.max} = \max(\sigma_{ad.1}, \sigma_{ad.2}, \sigma_{ad.3}, \sigma_{ad.4}, \sigma_{ad.5}, \sigma_{ad.0.max}, \sigma_{ad.e.max})$$

$\sigma_{ad.0.min}, \sigma_{ad.0.max}$ – ekstremalne wartości naprężeń, które mogą wystąpić w jednej z możliwych sytuacji obliczeniowych w początkowym okresie eksploatacji

$$\sigma_{ad.0.min} = \sigma_{ad.5} + \sigma_{ad.q.min} + \sigma_{ad.K.min} + \sigma_{ad.T.min}$$

$$\sigma_{ad.0.max} = \sigma_{ad.5} + \sigma_{ad.q.max} + \sigma_{ad.K.max} + \sigma_{ad.T.max}$$

$\sigma_{ad.e.min}, \sigma_{ad.e.max}$ – ekstremalne wartości naprężeń, które mogą wystąpić w jednej z możliwych sytuacji obliczeniowych w końcowym okresie eksploatacji

$$\sigma_{ad.e.min} = \sigma_{ad.5} + \sigma_{ad.q.min} + \sigma_{ad.K.min} + \Delta\sigma_{ad} + \sigma_{ad.e.s} + \sigma_{ad.T.min}$$

$$\sigma_{ad.e.max} = \sigma_{ad.5} + \sigma_{ad.q.max} + \sigma_{ad.K.max} + \Delta\sigma_{ad} + \sigma_{ad.e.s} + \sigma_{ad.T.max}$$

$\sigma_{ad.q.min}, \sigma_{ad.q.max}$ – ekstremalne wartości naprężeń, które mogą wystąpić w fazie obciążenia samochodami q i tłumem pieszych p

$$\sigma_{ad.q.min} = \min(\sigma_{ad.q1}, \sigma_{ad.q2}, \sigma_{ad.q3}, \sigma_{ad.q4})$$

$$\sigma_{ad.q.max} = \max(\sigma_{ad.q1}, \sigma_{ad.q2}, \sigma_{ad.q3}, \sigma_{ad.q4})$$

$\sigma_{ad.K.min}, \sigma_{ad.K.max}$ – ekstremalne wartości naprężeń, które mogą wystąpić w fazie obciążenia pojazdem ponadnormatywnym K

$$\sigma_{ad.K.min} = \min(\sigma_{ad.K1}, \sigma_{ad.K2}, \sigma_{ad.K3}, \sigma_{ad.K4}, \sigma_{ad.K5}, \sigma_{ad.K6}, \sigma_{ad.K7})$$

$$\sigma_{ad.K.max} = \max(\sigma_{ad.K1}, \sigma_{ad.K2}, \sigma_{ad.K3}, \sigma_{ad.K4}, \sigma_{ad.K5}, \sigma_{ad.K6}, \sigma_{ad.K7})$$

$\sigma_{ad.T.min}, \sigma_{ad.T.max}$ – ekstremalne wartości naprężeń w fazie obciążeń termicznych

$$\sigma_{ad.T.min} = \min(\sigma_{ad.T1}, \sigma_{ad.T2}) \quad \sigma_{ad.T.max} = \max(\sigma_{ad.T1}, \sigma_{ad.T2})$$

$\Delta\sigma_{ad}, \sigma_{ad.e.s}$ – zmiany naprężeń spowodowane pelzaniem i skurczem w fazie eksploatacji

$\sigma_{ad1} = \sigma_{ad01}$	– naprężenia normalne w fazie 1,
$\sigma_{ad2} = \sigma_{ad01} + \sigma_{ad02}$	– naprężenia normalne w fazie 2,
$\sigma_{ad3} = \sigma_{ad01} + \sigma_{ad02} + \sigma_{ad03}$	– naprężenia normalne w fazie 3,
$\sigma_{ad4} = \sigma_{ad01} + \sigma_{ad02} + \sigma_{ad03} + \sigma_{ad04}$	– naprężenia normalne w fazie 4,
$\sigma_{ad5} = \sigma_{ad01} + \sigma_{ad02} + \sigma_{ad03} + \sigma_{ad04} + \sigma_{ad05}$	– naprężenia normalne w fazie 5,
$\sigma_{ad01} \div \sigma_{ad05}$	– naprężenia od obciążeń uwzględnianych w danej fazie montażowej.

2. Ograniczenie ekstremalnych naprężeń w złożonym stanie naprężenia na dolnej krawędzi środnika

$$G_2 = 1.1R - \sqrt{\sigma_{sd}^2 + 3\tau_{sd}^2} \quad (5.26)$$

3. Ograniczenie ekstremalnych naprężeń w złożonym stanie naprężenia na górnej krawędzi środnika

$$G_3 = 1.1R - \sqrt{\sigma_{sg}^2 + 3\tau_{sg}^2} \quad (5.27)$$

4. Ograniczenie ekstremalnych naprężeń stycznych na dolnej krawędzi środnika

$$G_4 = R_t - \tau_{sd} \quad (5.28)$$

5. Ograniczenie ekstremalnych naprężeń stycznych na górnej krawędzi środnika

$$G_5 = R_t - \tau_{sg} \quad (5.29)$$

6. Ograniczenie maksymalnych naprężeń ściskających na górnej powierzchni płyty pomostu

$$G_6 = R_b - \sigma_{cgmin} \quad (5.30)$$

7. Ograniczenie maksymalnych naprężeń rozciągających na górnej powierzchni płyty pomostu

$$G_7 = 10 \text{ MPa} - \sigma_{cgmax} \quad (5.31)$$

Ograniczenie maksymalnych naprężeń rozciągających w betonie do wartości dopuszczalnych jest trudne do spełnienia i dlatego wprowadzono do zadania optymalizacji ograniczenie fikcyjne G_7 , które nie ma wpływu na przebieg optymalizacji (nie powinno być przekroczone) a jedynie pozwoli wyznaczyć maksymalne naprężenia rozciągające w betonie.

8. Ograniczenie maksymalnego ugięcia

$$G_8 = y_{dop} - y \quad (5.32)$$

gdzie: σ_{sd} , τ_{sd} – ekstremalne naprężenia normalne i styczne na dolnej krawędzi środnika,
 σ_{sg} , τ_{sg} – ekstremalne naprężenia normalne i styczne na górnej krawędzi środnika,
 σ_{cgmin} – maksymalne naprężenia ściskające w betonie na górnej powierzchni płyty,
 σ_{cgmax} – maksymalne naprężenia rozciągające w betonie na górnej powierzchni płyty,
 y – maksymalne ugięcie dźwigara.

Ekstremalne naprężenia w ograniczeniach 2 ÷ 7 zostały wyznaczone w analogiczny sposób jak w przypadku dokładnie opisanego ograniczenia G_1 . Ugięcie y zostało wyznaczone jako suma maksymalnych ugięć jakie mogą wystąpić w możliwych sytuacjach obliczeniowych.

Sformułowanie ograniczeń z użyciem funkcji max (min) pozwala na znaczące zmniejszenie ich liczby i umożliwia uwzględnienie najbardziej niekorzystnych kombinacji obciążeń. Wadą tak sformułowanego ograniczenia jest to, że w przypadku gdy jest ono aktywne nie wiadomo, w którym stanie pracy naprężenie (czy ugięcie) osiągnęło wartość graniczną.

Zgodnie z założonym planem, na podstawie rozwiązania optymalnego zostanie przyjęte rozwiązanie możliwe do zrealizowania w praktyce po dokonaniu obliczeń sprawdzających. W trakcie prowadzonych badań okazało się jednak, że w rozwiązaniach praktycznych, przyjętych na podstawie rozwiązań optymalnych, które są wyznaczone przy tak sformułowanych ograniczeniach, najczęściej nie są spełnione stany graniczne nośności. Tego problemu można uniknąć, gdy rozwiązanie optymalne zostanie wyznaczone przy skorygowanych (obniżonych) wartościach dopuszczalnych naprężeń. W prezentowanym przykładzie, w odniesieniu do wytrzymałości stali dźwigara na rozciąganie i ścinanie, zastosowano współczynnik korekcyjny 0.85. Wytrzymałości betonu nie korygowano.

5.1.6. Sformułowanie zadania optymalizacji

W zadaniu poszukiwane jest rozwiązanie optymalne polegające na wyznaczeniu przekroju poprzecznego dźwigara stalowego, przy którym funkcja celu optymalizacji przyjmuje wartość minimalną. Przyjętą w prezentowanym przykładzie funkcją celu jest objętość stali użytej do wykonania blachownicy dźwigara zespolonego. Właśnie ze względu na tę funkcję celu wprowadzono zmienną stanu $y_{79} = V_{a1}$ oraz równanie stanu [19]

$$y'_{79} = A_{a1} \quad (5.33)$$

gdzie: $a1$ – oznaczenie części stalowej dźwigara zespolonego bez zbrojenia.

Wprowadzenie tej zmiennej umożliwiło sprowadzenie problemu optymalizacji z ogólnym funkcjonałem Lagrange'a (2.7), który w tym zadaniu ma postać

$$J[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] = \int_{x_0}^{x_k} A_{a1}[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] dx \quad (5.34)$$

do problemu Majera z funkcjonałem (2.10) postaci

$$J[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] = V[\mathbf{y}(x_k), \mathbf{u}(x_k), x_k] \quad (5.35)$$

przy czym funkcja skalarna f_k w (2.7) zależna wyłącznie od stanu w funkcjonałe (5.34) nie występuje ($f_k[\mathbf{y}(x), x] = 0$) oraz spełniony jest warunek początkowy $V[\mathbf{y}(x_0), \mathbf{u}(x_0), x_0] = 0$

Równania stanu, ograniczenia oraz funkcja celu optymalizacji stanowią część niezbędnej struktury formalne umożliwiającej zastosowanie zasady maksimum, która formułuje warunki konieczne optymalizacji (pkt. 2.2.5).

1. Optymalizowany dźwigar opisano układem równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$y'_i = f_i[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] \quad i = 1 \div 79 \quad (5.36)$$

2. W odniesieniu do zmiennych stanu i zmiennych decyzyjnych określono obszary dopuszczalne oraz sformułowano ograniczenia

$$G_s[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] \geq 0 \quad s = 1 \div 8 \quad (5.37)$$

3. Funkcja Hamiltona w analizowanym problemie ma postać

$$H = \lambda^T \mathbf{f}[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] + \mu \mathbf{G}[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x)] \quad (5.38)$$

gdzie: $\mu_s(x) = 0$ gdy $G_s(\mathbf{y}, \mathbf{u}) > 0$

$\mu_s(x) \neq 0$ gdy $G_s(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = 0$

4. Układ równań zmiennych sprzężonych (2.13) ma postać

$$\lambda'_i = - \sum_{k=1}^{79} \lambda_k \frac{\partial f_k(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{\partial y_i} - \sum_{s=1}^8 \mu_s \frac{\partial G_s(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{\partial y_i} \quad i = 1 \div 79 \quad (5.39)$$

5. Układ równań wynikający z warunku maksimum funkcji Hamiltona (2.14) ma postać

$$0 = \sum_{k=1}^{79} \lambda_k \frac{\partial f_k(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{\partial u_j} + \sum_{s=1}^8 \mu_s \frac{\partial G_s(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \quad j = 1 \div 3 \quad (5.40)$$

Rozwiązanie optymalne zostanie wyznaczone z różniczkowo algebraicznego układu równań (5.36), (5.39) i (5.40) z uwzględnieniem następujących wyjątków.

1. Jeżeli dana zmienna decyzyjna przyjmie wartości z brzegu zdefiniowanego obszaru dopuszczalnego to z układu równań (5.40) wyłączone jest równanie sformułowane ze względu na tę zmienną.
2. Jeżeli występuje aktywność jednego z ograniczeń (5.37) to z powyższego układu równań jest wyłączone jedno z równań (5.40) a na jego miejscu obowiązuje równanie

$$G_m[\mathbf{y}(x), \mathbf{u}(x), x] = 0 \quad m - \text{numer aktywnego ograniczenia} \quad (5.41)$$
3. Rozwiązanie problemu jest możliwe tylko wtedy, gdy liczba przypadków opisanych w punkcie 1 i 2 nie przekracza liczby równań (5.40).

W prezentowanym zadaniu liczba ograniczeń znacznie przekracza liczbę równań postaci (5.40) co zwiększa prawdopodobieństwo wystąpienia okoliczności, w których rozwiązanie optymalne nie istnieje.

5.1.7. Wyniki obliczeń w programie Dircol – 2.1 – wyznaczenie rozwiązania optymalnego

Stosując zasadę maksimum sprowadzono zadanie optymalizacji do wielopunktowego problemu brzegowego, który został rozwiązany za pomocą programu Dircol – 2.1. W zadaniu wyznaczono:

- 79 zmiennych stanu (rys. 32 ÷ 51),
 - 79 zmiennych sprzężonych (rys. 32 ÷ 51),
 - 3 zmienne decyzyjne (rys. 28, 29, 30),
 - 25 parametrów sterowania (23 reakcje podpór i 2 współczynniki równania sił),
 - 8 mnożników Lagrange'a związanych z ograniczeniami zmiennych stanu,
 - 135 stałych odpowiedzialnych za skoki zmiennych stanu w punktach podparcia i w osi symetrii,
 - 144 stałe odpowiedzialne za skoki zmiennych sprzężonych w punktach podparcia i w osi symetrii,
 - 5 stałych odpowiedzialnych za skoki funkcji Hamiltona w punktach podparcia i w osi symetrii (rys. 31).
- Ogółem wyznaczono 478 wielkości. Wyznaczono rozwiązanie, które spełnia warunki konieczne optymalności. Na rysunkach 32 ÷ 59 przedstawiono kompletne wyniki obliczeń w postaci graficznej.

Obliczenia w programie Dircol-2.1 muszą być poprzedzone wprowadzeniem startowych wartości zmiennych stanu, które w kolejnych iteracjach są automatycznie korygowane aż do wyznaczenia rozwiązania spełniającego warunki konieczne optymalności. Często, w zależności od wartości startowych, otrzymuje się różne rozwiązania. Spośród tych rozwiązań należy wybrać to, które charakteryzują się najmniejszą wartością funkcji celu. Nigdy nie ma jednak pewności, że nie istnieje rozwiązanie lepsze. W prezentowanym przykładzie, wprowadzając różne wartości startowe zmiennych stanu, otrzymywano zawsze takie samo rozwiązanie. Można więc przypuszczać, że przy wprowadzonych ograniczeniach i przyjętych założeniach jest to rozwiązanie jedyne a więc optymalne ze względu na kryterium minimum objętości stali.

Rysunki 28, 29, 30 przedstawiają wyznaczone w procesie optymalizacji wymiary przekroju poprzecznego blachownicy. Obydwa wymiary przekroju pasa dolnego zwiększają się w strefie podpory pośredniej oraz na odcinkach przęsłowych. Trzeci wyznaczony wymiar – grubość środnika praktycznie nie ulega zmianie i osiąga minimalną wartość zdefiniowanego w zadaniu dopuszczalnego zakresu zmienności.

Na odcinkach, gdzie wszystkie zmienne decyzyjne osiągają wartości z brzegu obszaru dopuszczalnego (0 ÷ 12m, 24 ÷ 51m, 69 ÷ 84m), wszystkie równania (5.40) zostały wyłączone z procesu optymalizacji.

Na odcinkach, gdzie dwie zmienne decyzyjne osiągają wartość z brzegu obszaru dopuszczalnego (12 ÷ 15m, 21 ÷ 24m, 96 ÷ 105m), z układu równań (5.40) zostały wyłączone dwa równania. Jeśli na tych odcinkach ma miejsce aktywność jednego z ograniczeń G_s , to również trzecie równanie jest wyłączone z procesu optymalizacji i ta zmienna, której wartości nie leżą na brzegu obszaru dopuszczalnego jest wyznaczona z aktywnego ograniczenia. Wykresy funkcji ograniczeń G_s przedstawiono na rysunkach 52 ÷ 59. Wynika z nich, że tylko pierwsze ograniczenie na pewnych odcinkach jest aktywne. Są to odcinki 15 ÷ 21m, 51 ÷ 69m, 84 ÷ 105m.

Na odcinkach, gdzie tylko jedna zmienna decyzyjna osiąga wartość z brzegu obszaru dopuszczalnego (15 ÷ 21m, 48 ÷ 72m, 84 ÷ 96m), z układu równań (5.40) jest wyłączone jedno równanie. Kolejne z dwóch pozostałych równań jest wyłączone wtedy gdy zachodzi aktywność pierwszego ograniczenia. Jeśli z układu równań (5.40) jest wyłączone tylko jedno równanie to zmienne, których wartości nie leżą na brzegu obszaru dopuszczalnego są wyznaczone z tych równań. Jeśli natomiast z powodu aktywności pierwszego ograniczenia z układu (5.40) wyłączone jest drugie równanie to zmienne, których wartości nie leżą na brzegu obszaru dopuszczalnego są wyznaczone z aktywnego ograniczenia oraz z jednego z równań (5.40). Nie można jednak stwierdzić, na którą zmienną decyzyjną ma bezpośredni wpływ aktywność ograniczenia. Powyższe zależności w odniesieniu do analizowanego zadania przedstawiono w postaci struktury sterowania w tablicy 25.

Funkcji Hamiltona, której wykres przedstawiono na rysunku 31 jest nieciągła w punktach podparcia i nie jest odcinkowo stała. Stałość funkcji Hamiltona występuje tylko w problemach autonomicznych, w których zmienne stanu nie zależą jawnie od zmiennej niezależnej. W prezentowanym przykładzie niektóre zmienne zależą od x ze względu na zmienną, z góry określoną, wysokość środnika dźwigara stalowego. Zmienna x występuje wszędzie tam, gdzie są wykorzystywane charakterystyki geometryczne przekroju. Od x zależą więc wszystkie zmienne stanu, które są przemieszczeniem kątowym dźwigara w poszczególnych stanach montażowych.

Tablica 25. Struktura rozwiązania optymalnego

Przedział	U_1	U_2	U_3
0 ÷ 15	$U_{1.min}$	$U_{2.min}$	$U_{3.min}$
12 ÷ 15	$U_{1.min}$	$U_{2.opt} \Leftarrow (5.40.2)$	$U_{3.min}$
15 ÷ 21	$(U_{1.opt}, U_{2.opt}) \Leftarrow \begin{cases} G_1 = 0 \\ (5.40.1) \cup (5.40.2) \end{cases}$		$U_{3.min}$
21 ÷ 24	$U_{1.min}$	$U_{2.opt} \Leftarrow (5.40.2)$	$U_{3.min}$
24 ÷ 51	$U_{1.min}$	$U_{2.min}$	$U_{3.min}$
51 ÷ 69	$(U_{1.opt}, U_{2.opt}) \Leftarrow \begin{cases} G_1 = 0 \\ (5.40.1) \cup (5.40.2) \end{cases}$		$U_{3.min}$
69 ÷ 84	$U_{1.min}$	$U_{2.min}$	$U_{3.min}$
84 ÷ 96	$(U_{1.opt}, U_{2.opt}) \Leftarrow \begin{cases} G_1 = 0 \\ (5.40.1) \cup (5.40.2) \end{cases}$		$U_{3.min}$
96 ÷ 105	$U_{1.opt} \Leftarrow G_1 = 0$	$U_{2.max}$	$U_{3.min}$

Rysunki 32 ÷ 51 przedstawiają wykresy zmiennych stanu oraz wykresy odpowiadających im zmiennych sprzężonych. pomiędzy zmiennymi stanu i zmiennymi sprzężonymi zachodzą następujące związki:

- jeżeli w granicy przedziału charakterystycznego jest ustalona wartość zmiennej stanu (0 lub δ) oraz jeżeli w tym punkcie nie jest sformułowany warunek, w którym ta zmienna występuje, to zmienna sprzężona doznaje w tym punkcie skoku;
- jeżeli w granicy przedziału charakterystycznego zmienna stanu doznaje skoku, który jest wyznaczany w procesie optymalizacji oraz jeżeli w tym punkcie nie jest sformułowany warunek, w którym ta zmienna występuje, to zmienna sprzężona przyjmuje w tym punkcie wartość 0;
- jeżeli w granicy przedziału charakterystycznego zmienna stanu doznaje skoku oraz jeżeli w tym punkcie jest sformułowany warunek, w którym ta zmienna występuje, to zmienna sprzężona również doznaje w tym punkcie skoku;
- Jeżeli w granicy przedziału charakterystycznego zmienna sprzężona jest ciągła oraz jeżeli w tym punkcie nie jest sformułowany warunek, w którym ta zmienna występuje, to zmienna sprzężona również jest w tym punkcie ciągła.

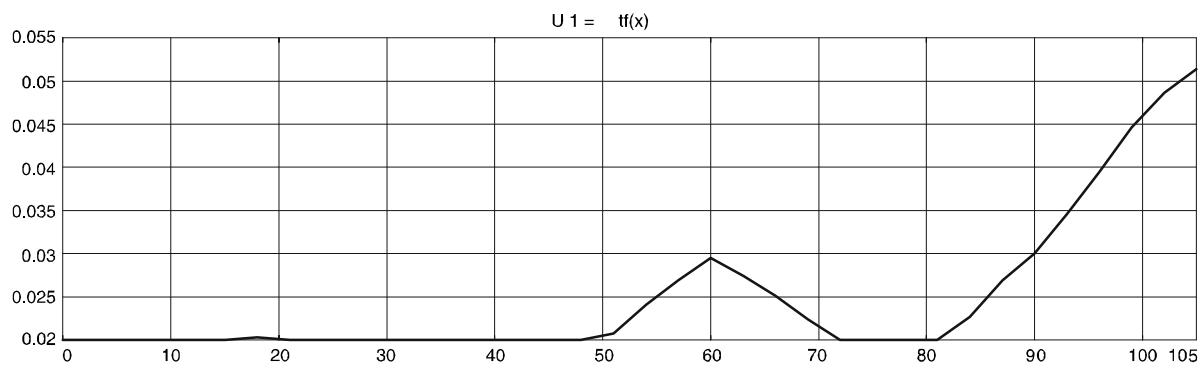
Powyższe zależności zachodzą we wszystkich rozważanych fazach pracy, jednak w pierwszych trzech fazach montażowych, z uwagi na fikcyjne równania stanu w przedziałach, w których dźwigar jeszcze nie istnieje, niektóre z tych zależności są trudne do stwierdzenia. W niektórych przypadkach wyznaczane są skoki zmiennych stanu i zmiennych sprzężonych o zerowej wartości. Zestawienie wyznaczanych w zadaniu wielkości, zamieszczone na początku niniejszego punktu, zawiera wszystkie skoki zmiennych stanu i zmiennych sprzężonych, łącznie z tymi zerowymi.

Rysunki 52 ÷ 59 przedstawiają wykresy funkcji ograniczeń w zadaniu optymalizacji. Tylko jedno spośród wszystkich ośmiu sformułowanych ograniczeń jest aktywne – ograniczenie ekstremalnych naprężeń normalnych na dolnej powierzchni pasa dolnego dźwigara stalowego. Ograniczenie to jest aktywne w trzech przedziałach i ma bezpośredni wpływ na rozwiązanie zadania optymalizacji. Pozostałe ograniczenia nie są aktywne.

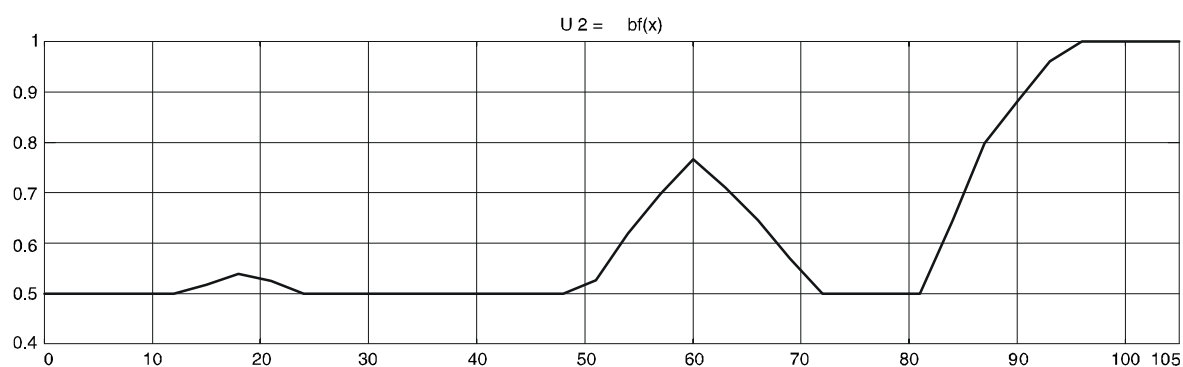
Wykresy przedstawione w dalszej części pracy zostały wykonane przez program Dircol-2.1 i opracowane w programie graficznym. Jedynie jeden wykres – wykres funkcji ograniczenia maksymalnych naprężeń rozciągających w betonie (rys. 58) został wykonany w całości w programie graficznym na podstawie wyznaczonego przebiegu fikcyjnego ograniczenia G_7 (5.31) wprowadzonego do optymalizacji. Ograniczenie G_7 na rysunku 58 jest postaci $G_7 = R_{bt0.50} - \sigma_{cgmax}$

Wykresy wykonano w następujących jednostkach:

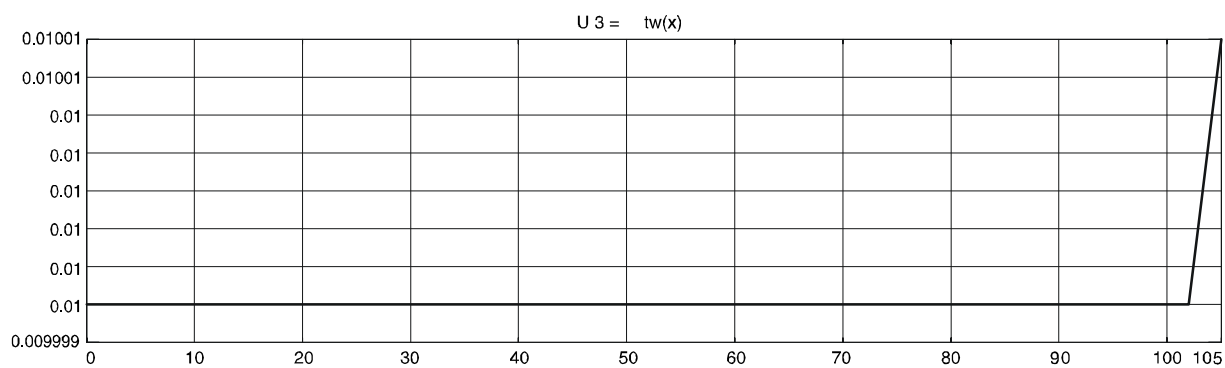
wymiary, przemieszczenia – [m], kąty – [rad], siły – [kN],
momenty zginające – [kNm], naprężenia – [KPa], objętość – [m³]



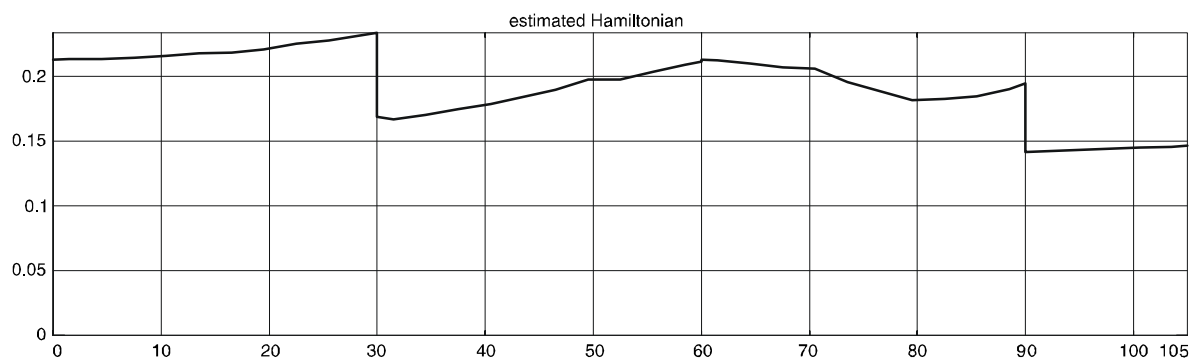
Rys. 28. Optymalna grubość dolnego pasa blachownicy – zmienna decyzyjna U_1



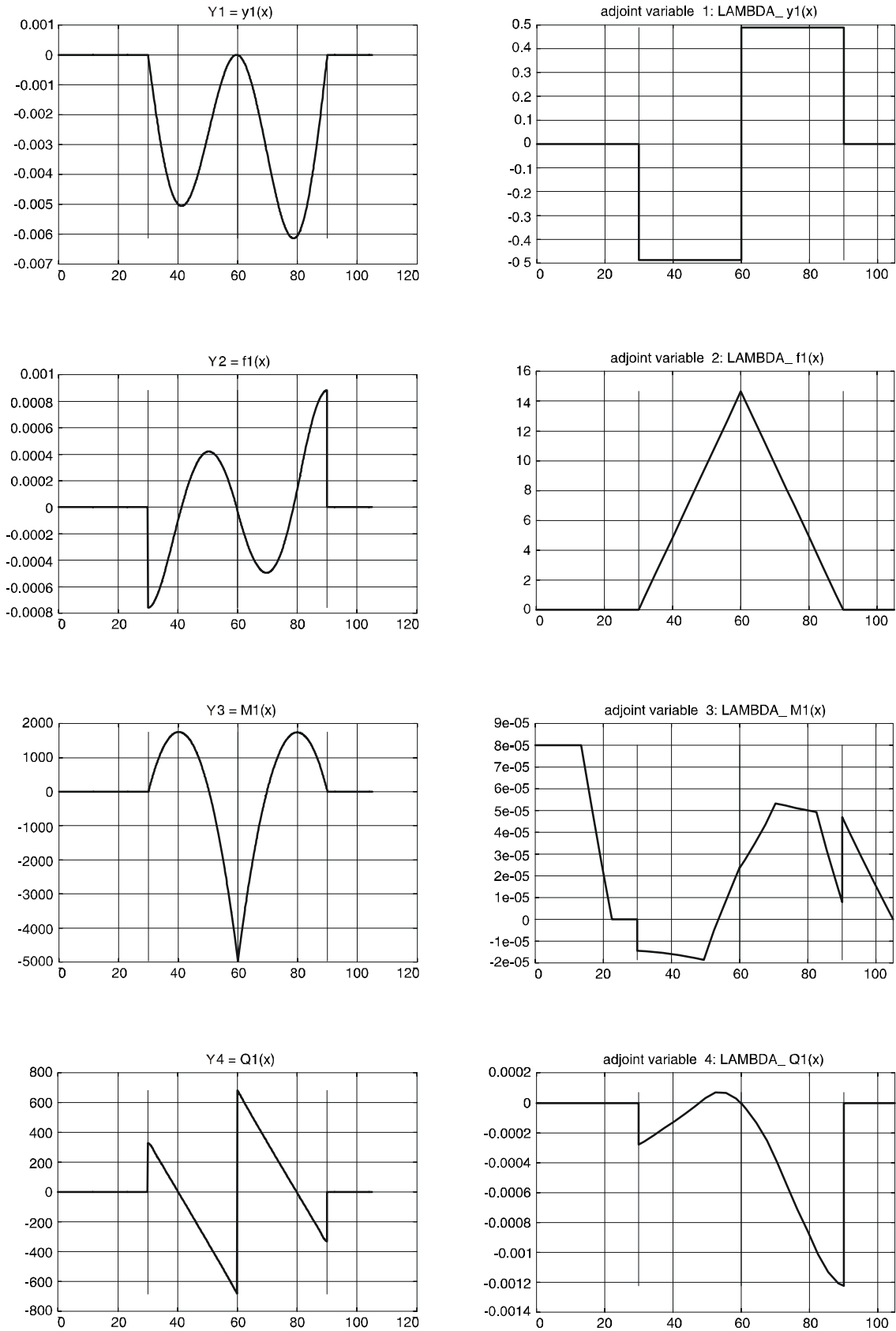
Rys. 29. Optymalna szerokość dolnego pasa blachownicy – zmienna decyzyjna U_2



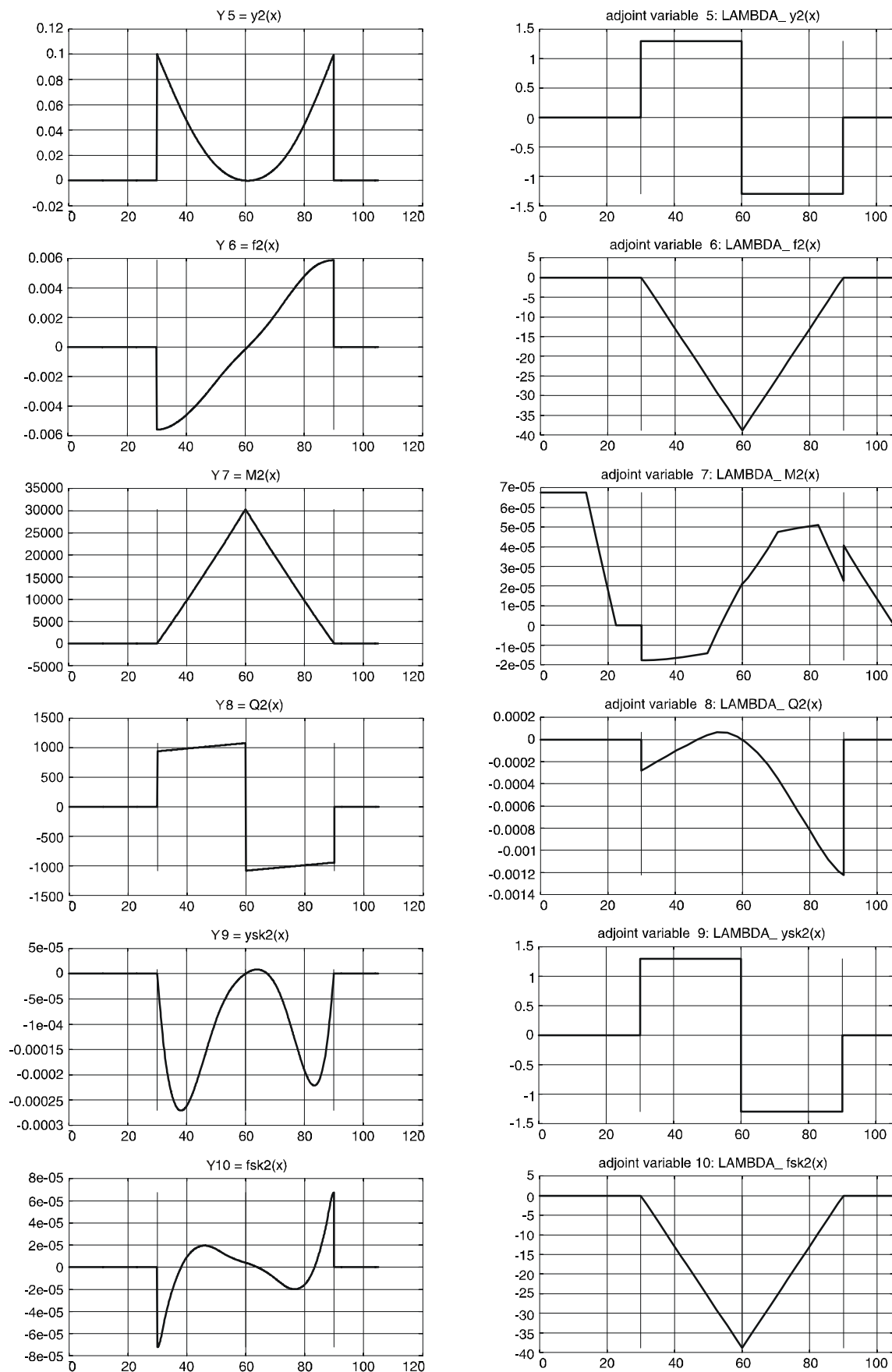
Rys. 30. Optymalna grubość środknika blachownicy – zmienna decyzyjna U_3



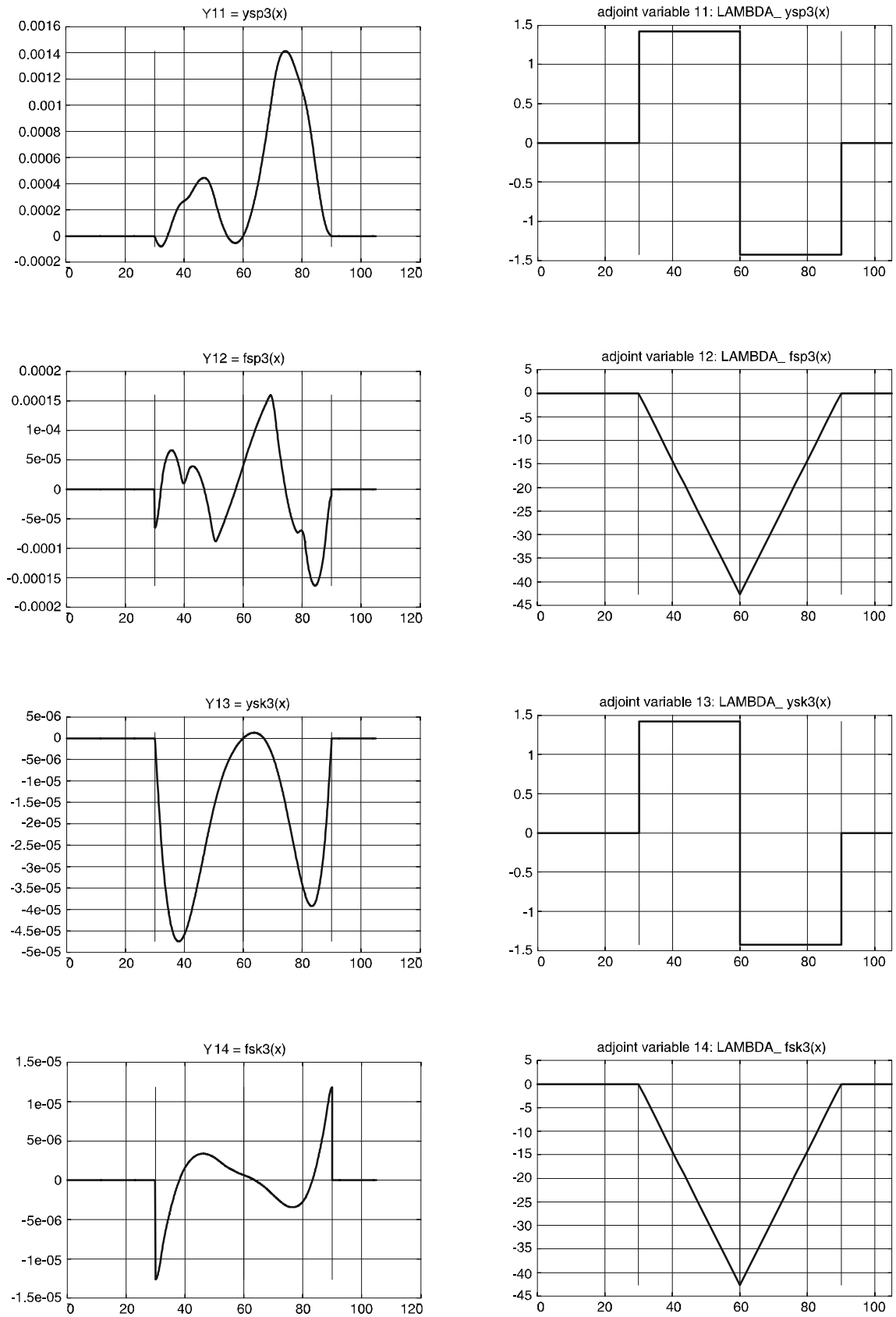
Rys. 31. Funkcja Hamiltona zadania optymalizacji



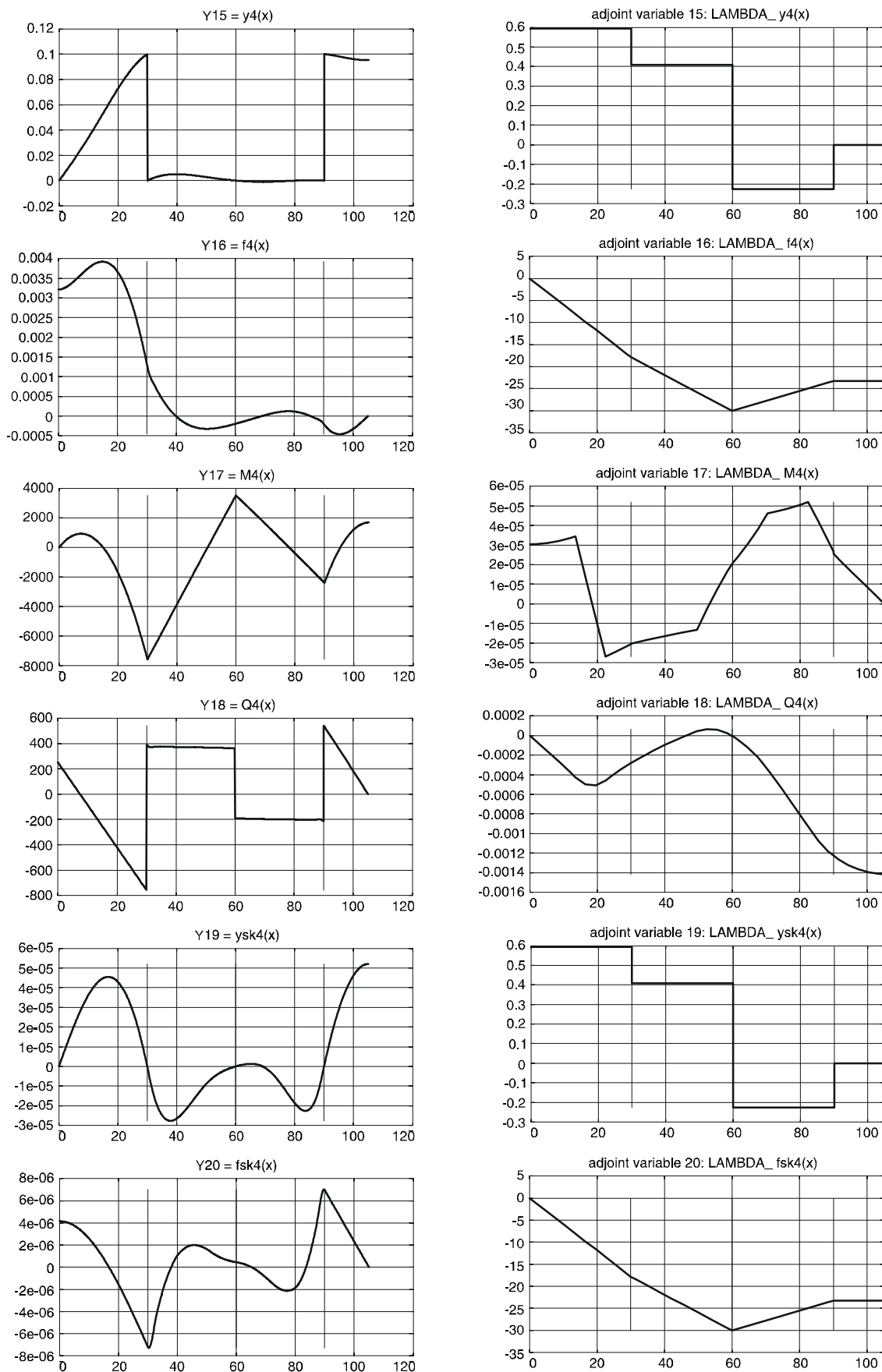
Rys. 32. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie montażowej I



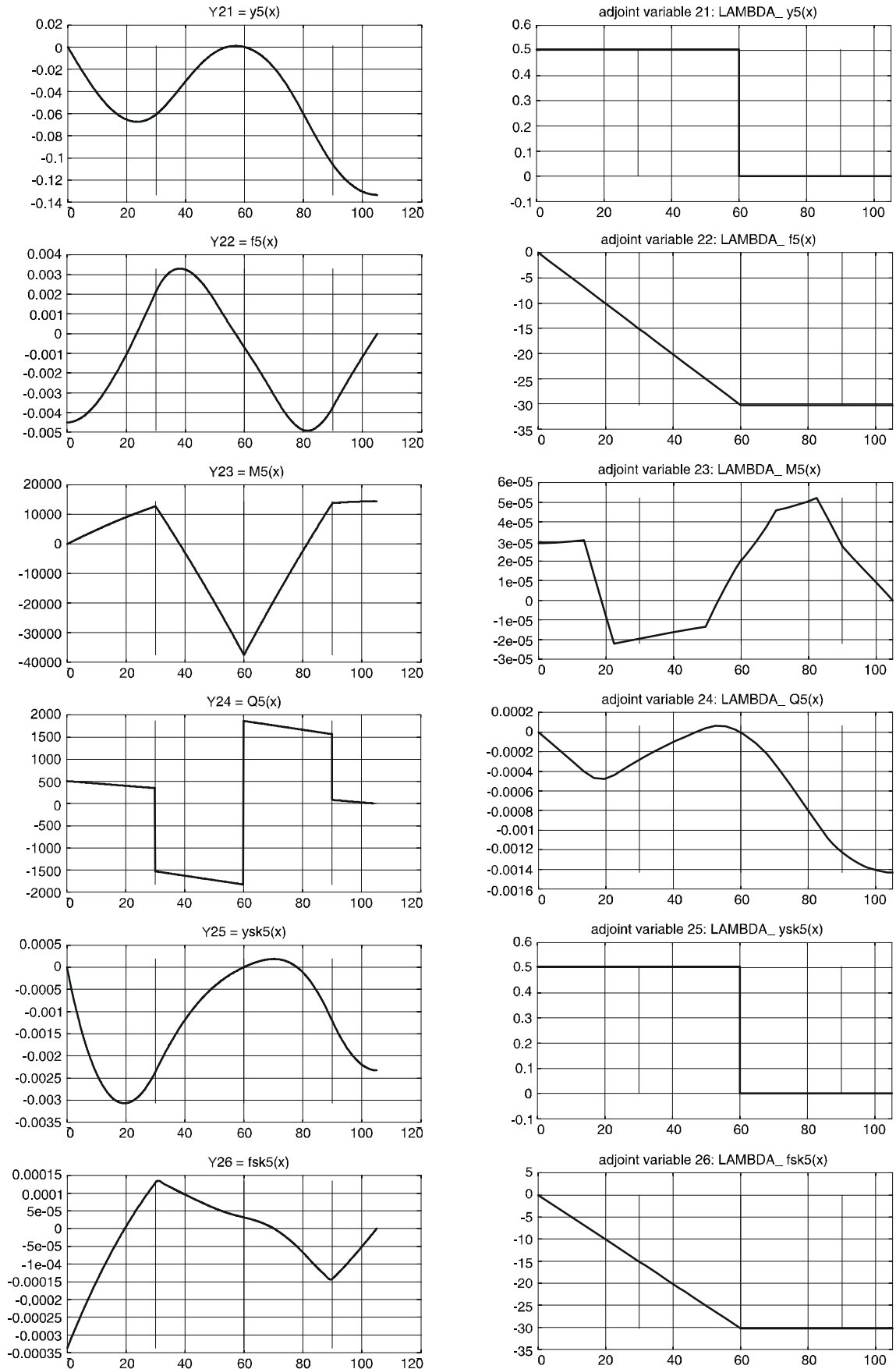
Rys. 33. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie montażowej II



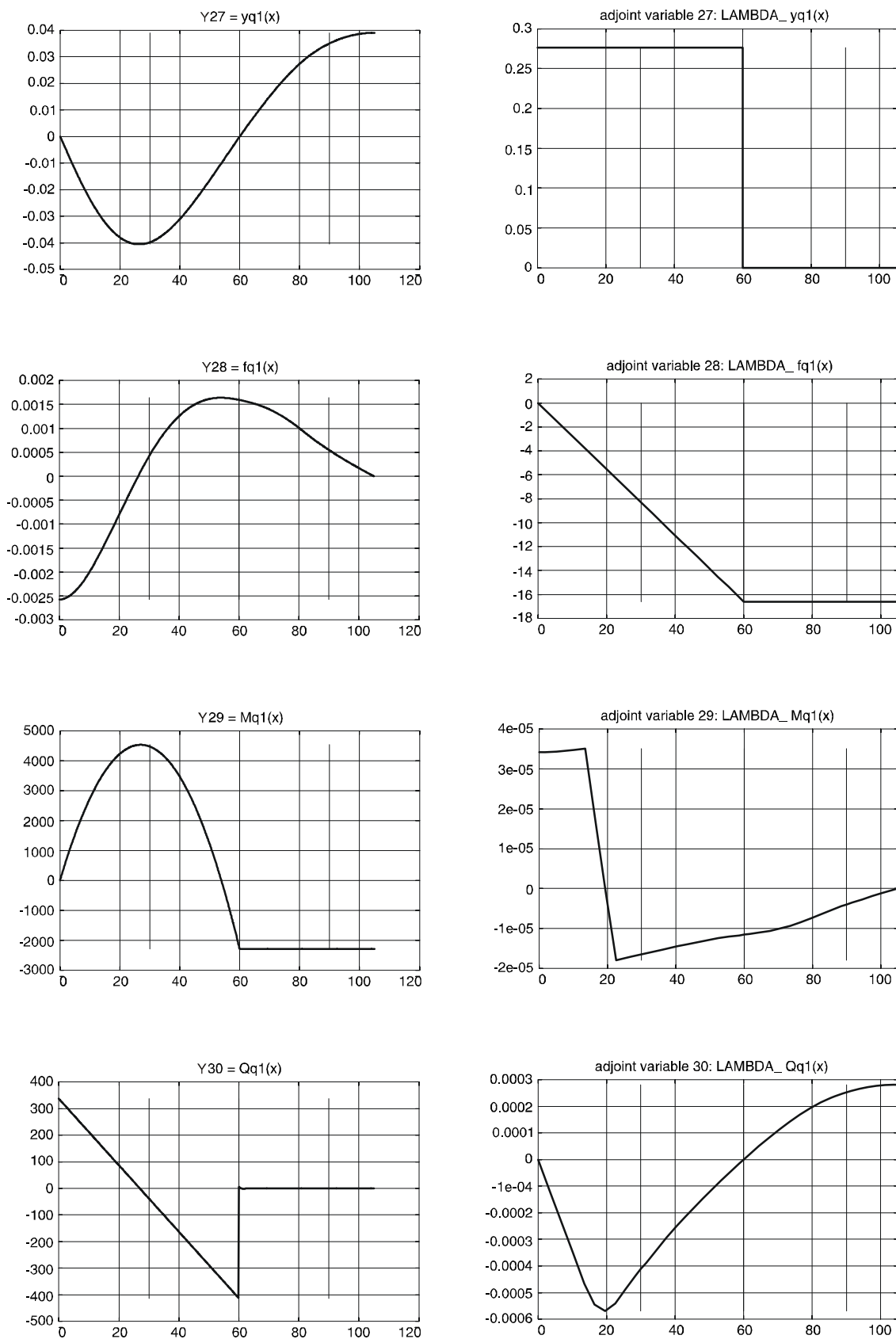
Rys. 34. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie montażowej III



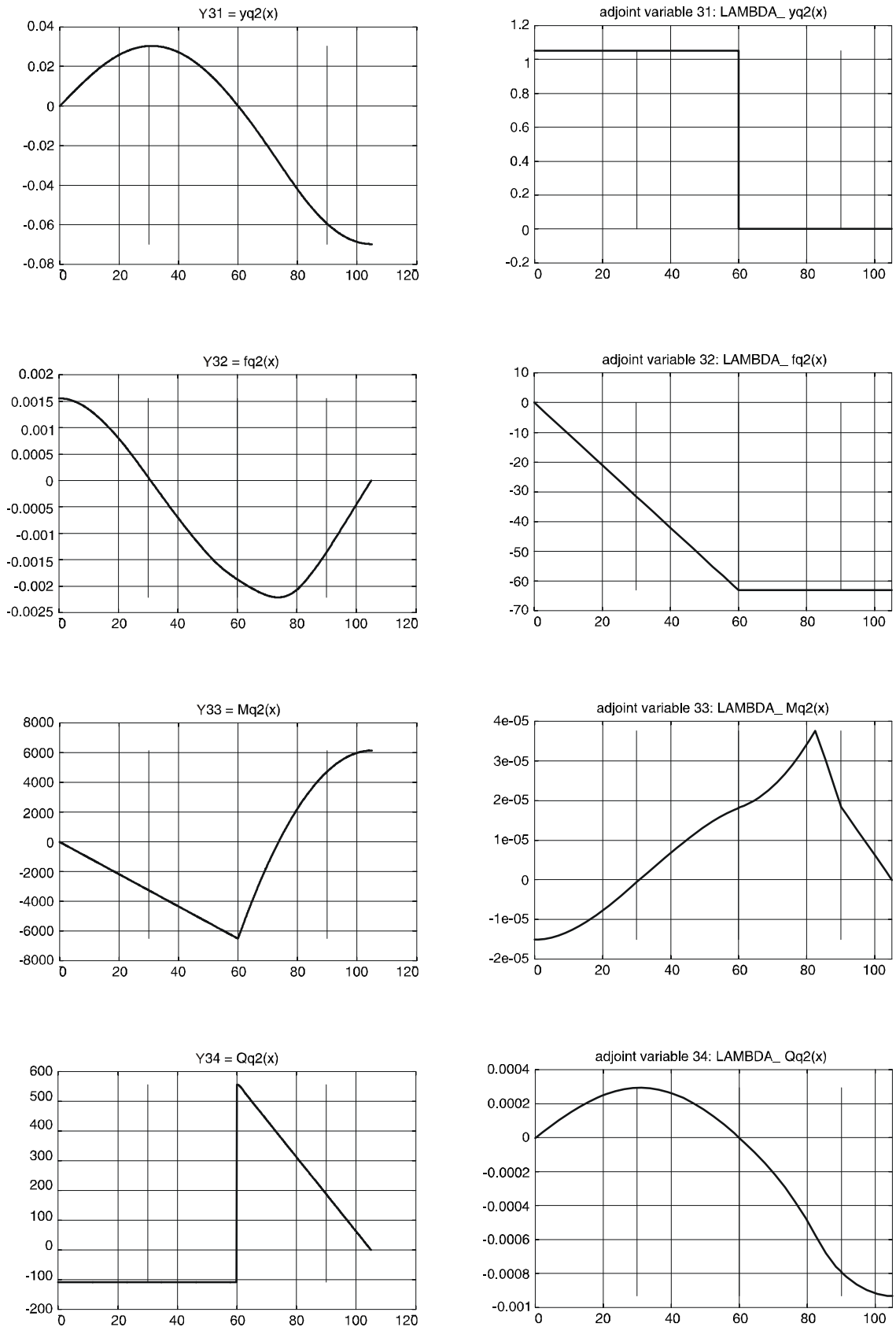
Rys.35. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie montażowej IV



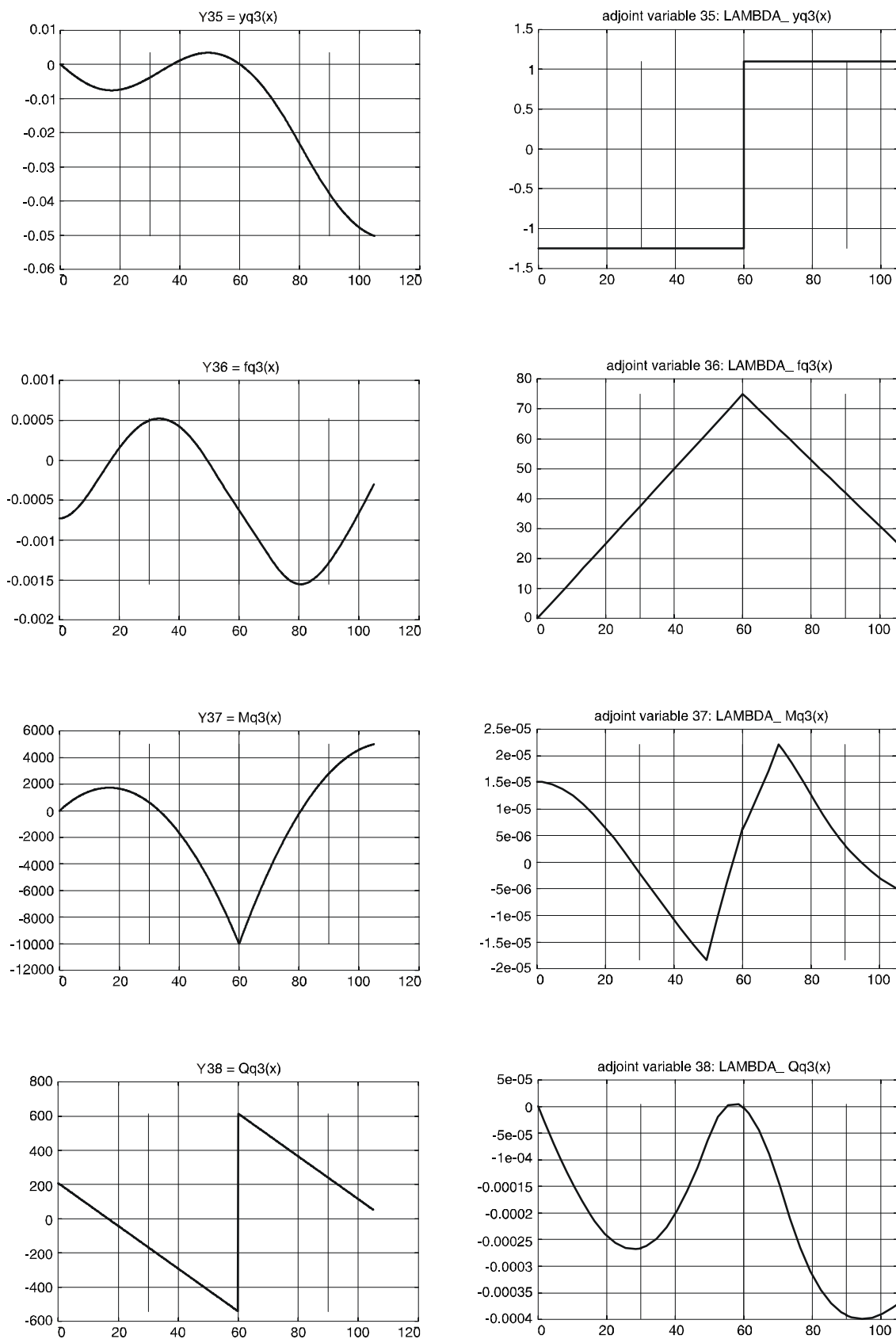
Rys. 36. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie montażowej V



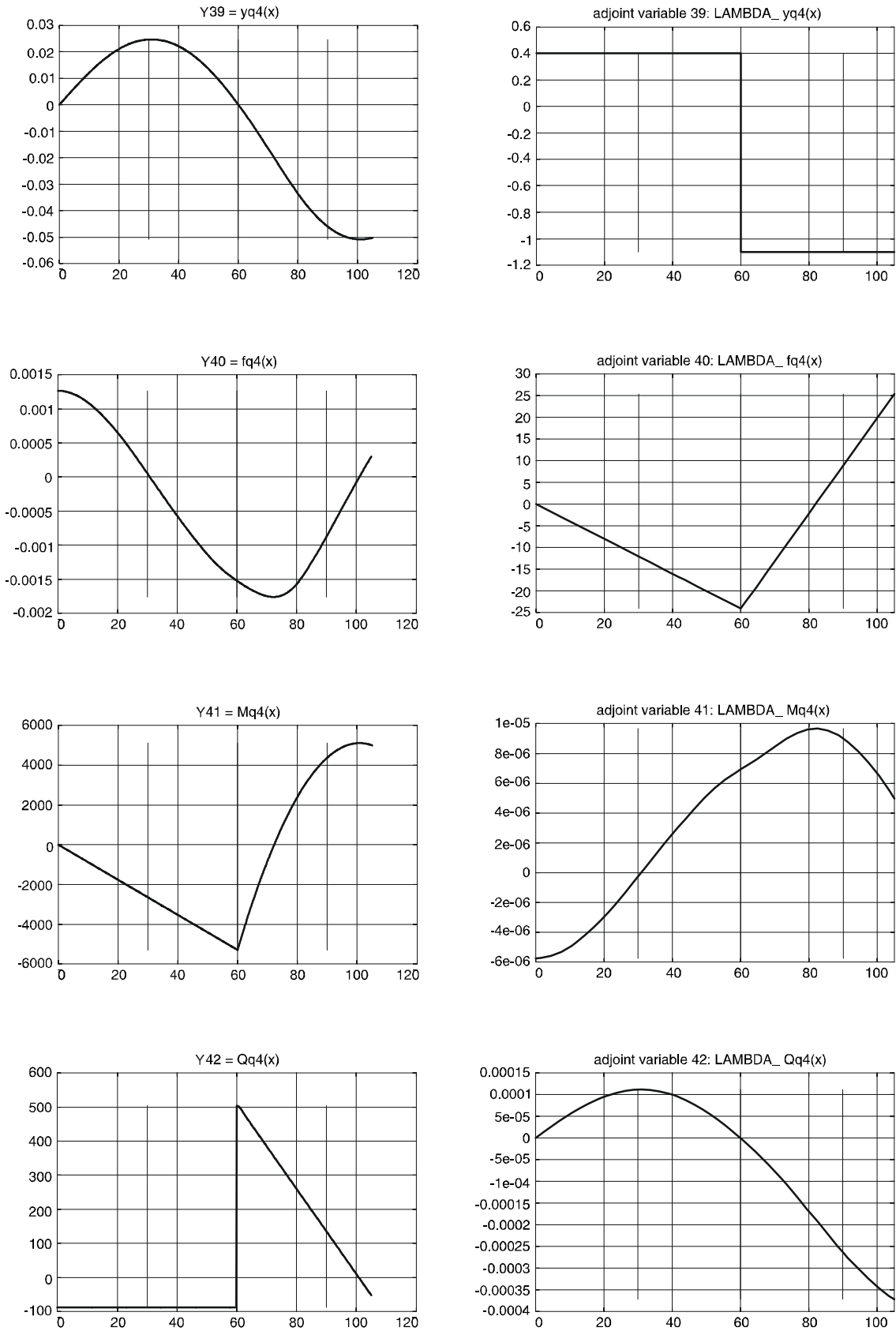
Rys. 37. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem samochodami q i tłumem pieszych p – obciążenie w przeszłe 1 i 3



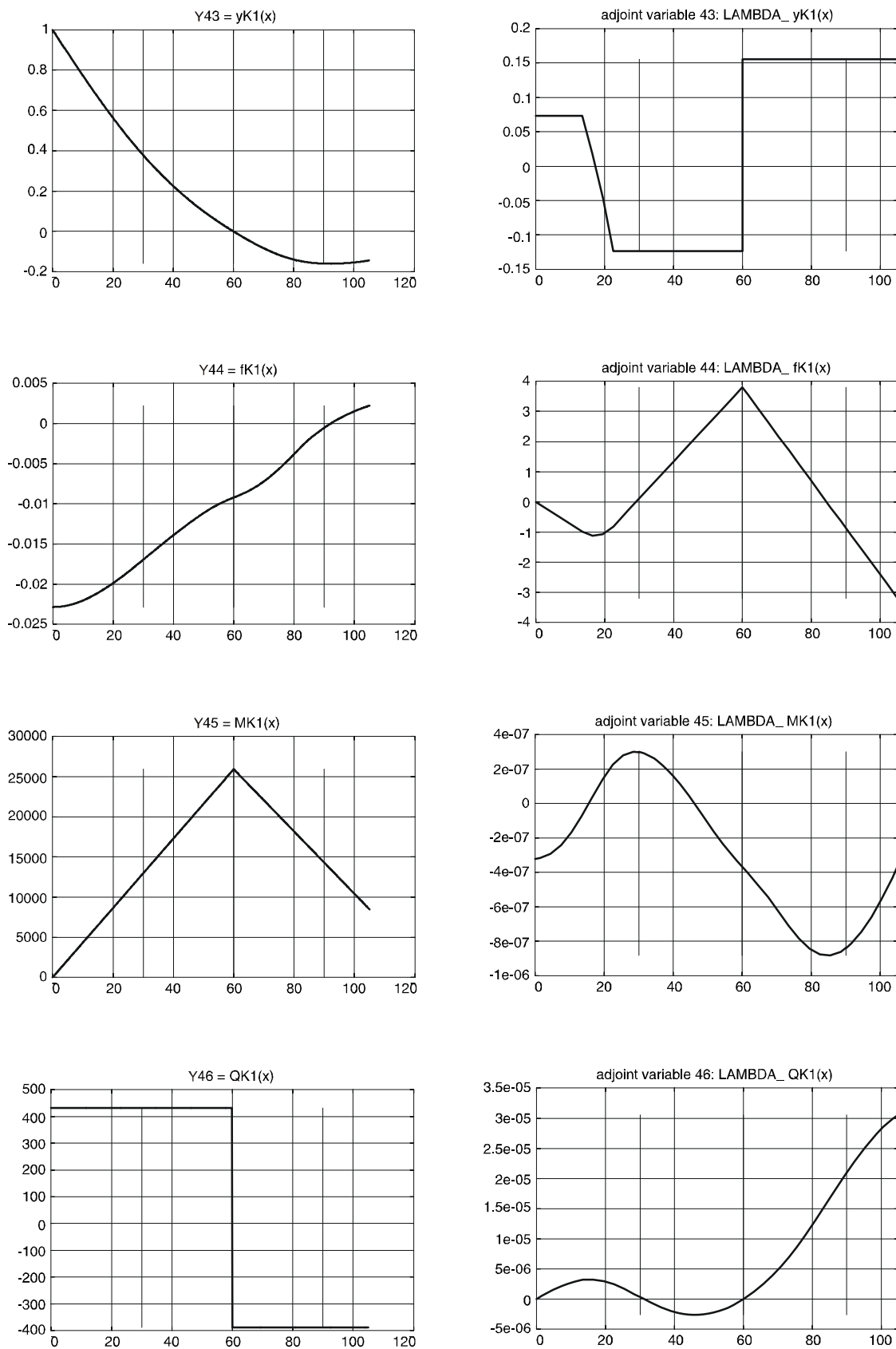
Rys. 38. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem samochodami q i tłumem pieszych p – obciążenie w przeszłe 2



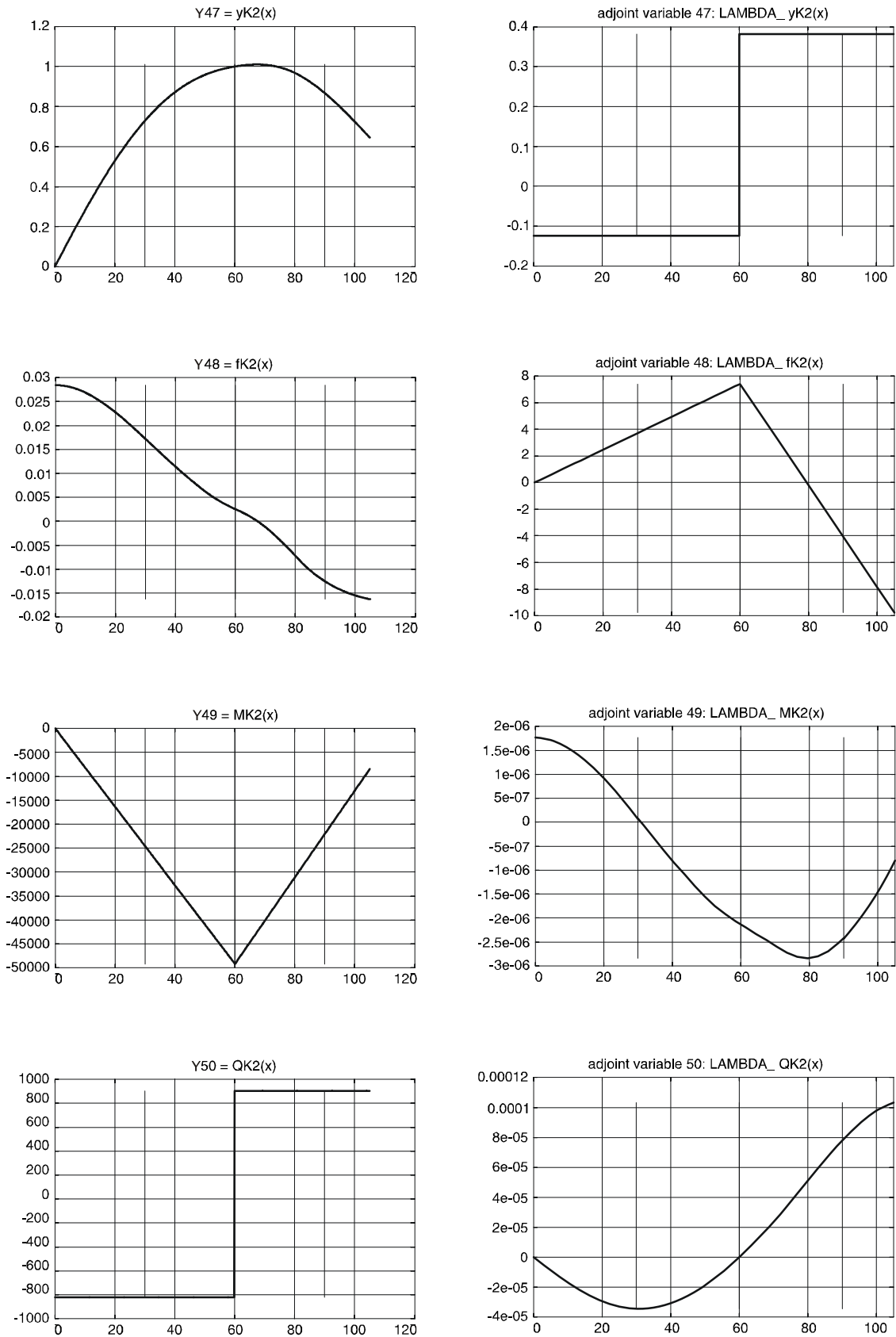
Rys. 39. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem samochodami q i tłumem pieszych p – obciążenie w przeszłe 1 i 2



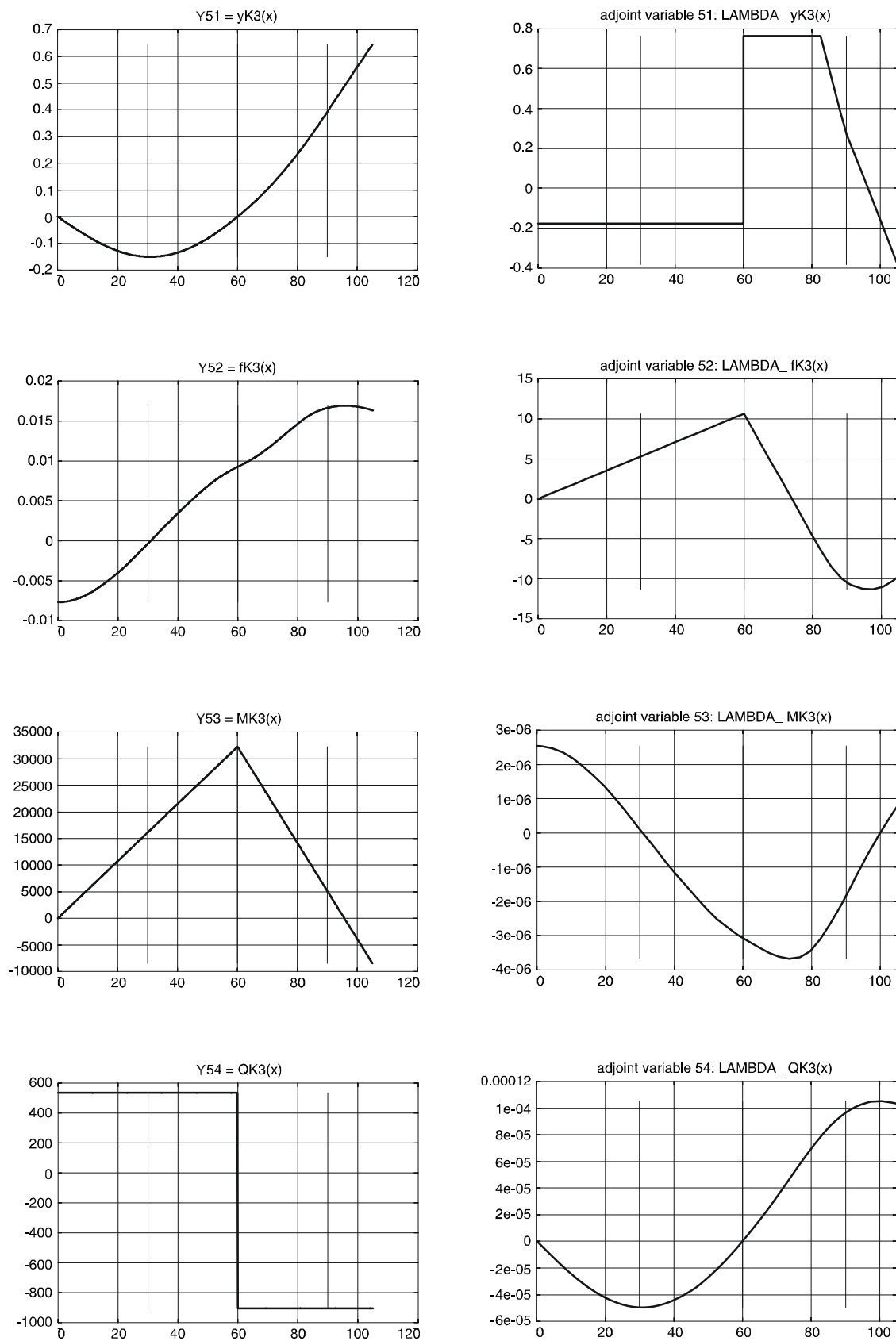
Rys. 40. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem samochodami q i tłumem pieszych p – obciążenie w przeszłe 2 i 3



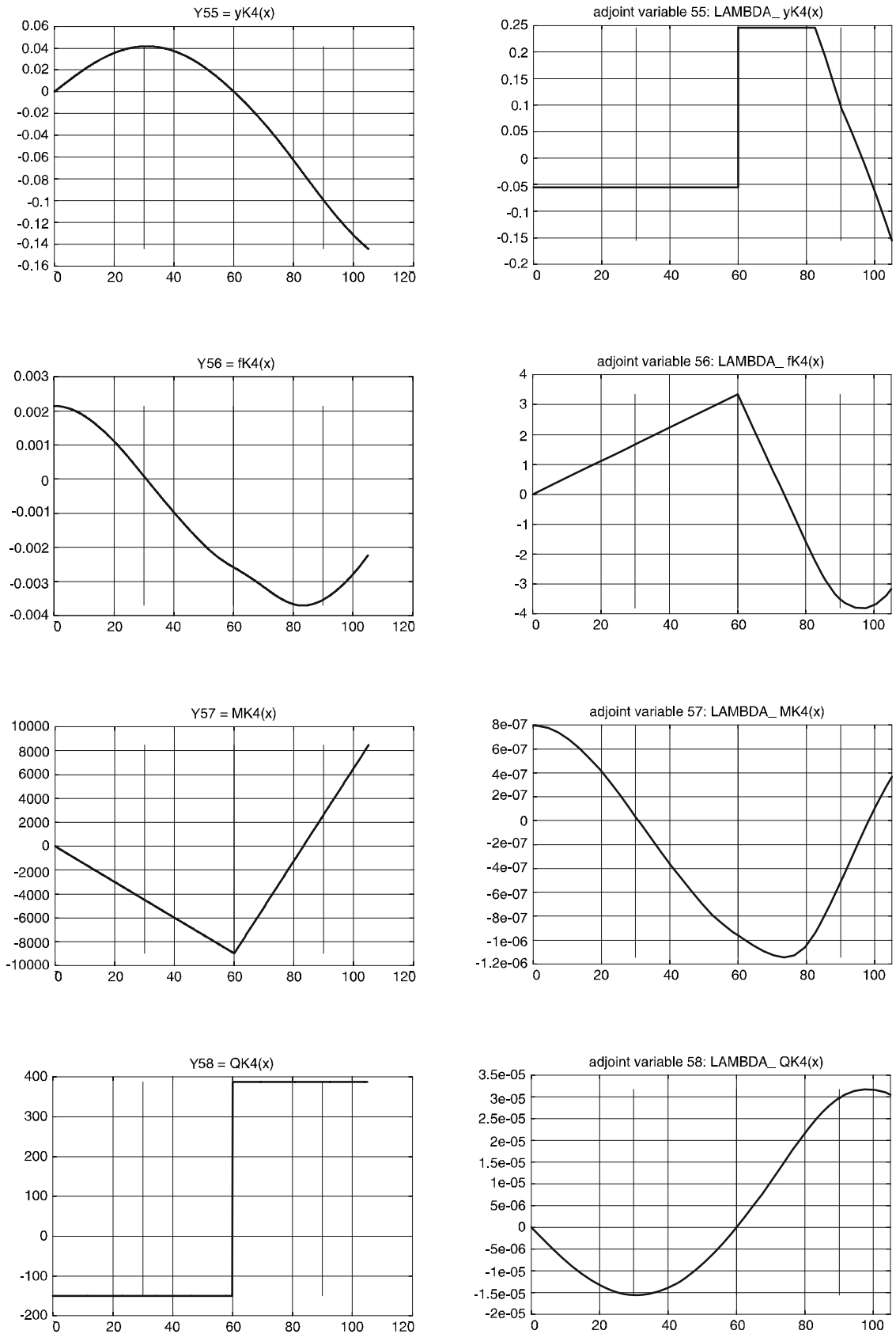
Rys. 41. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym – jednostkowe przemieszczenie podpory 1



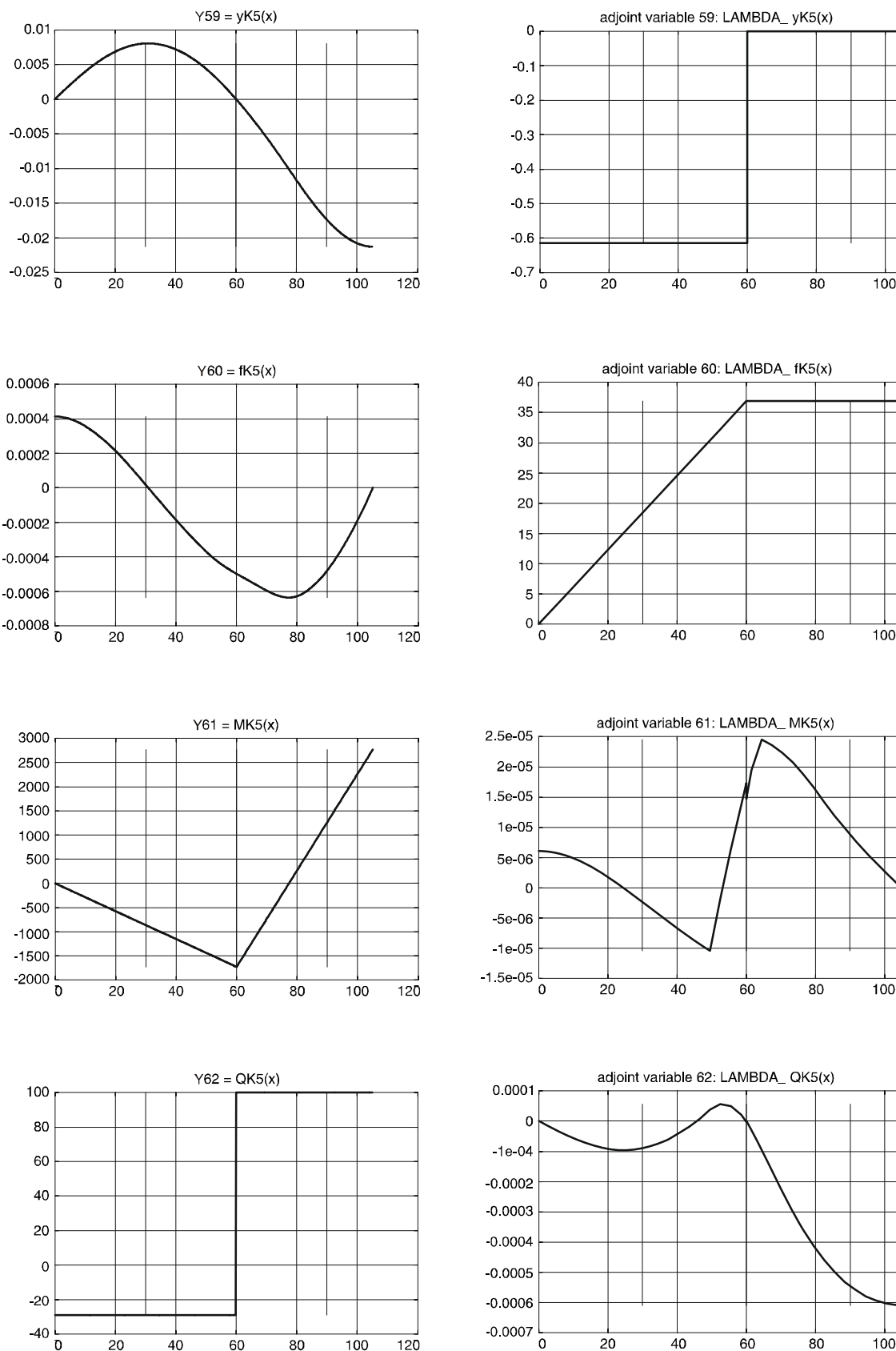
Rys. 42. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym – jednostkowe przemieszczenie podpory 2



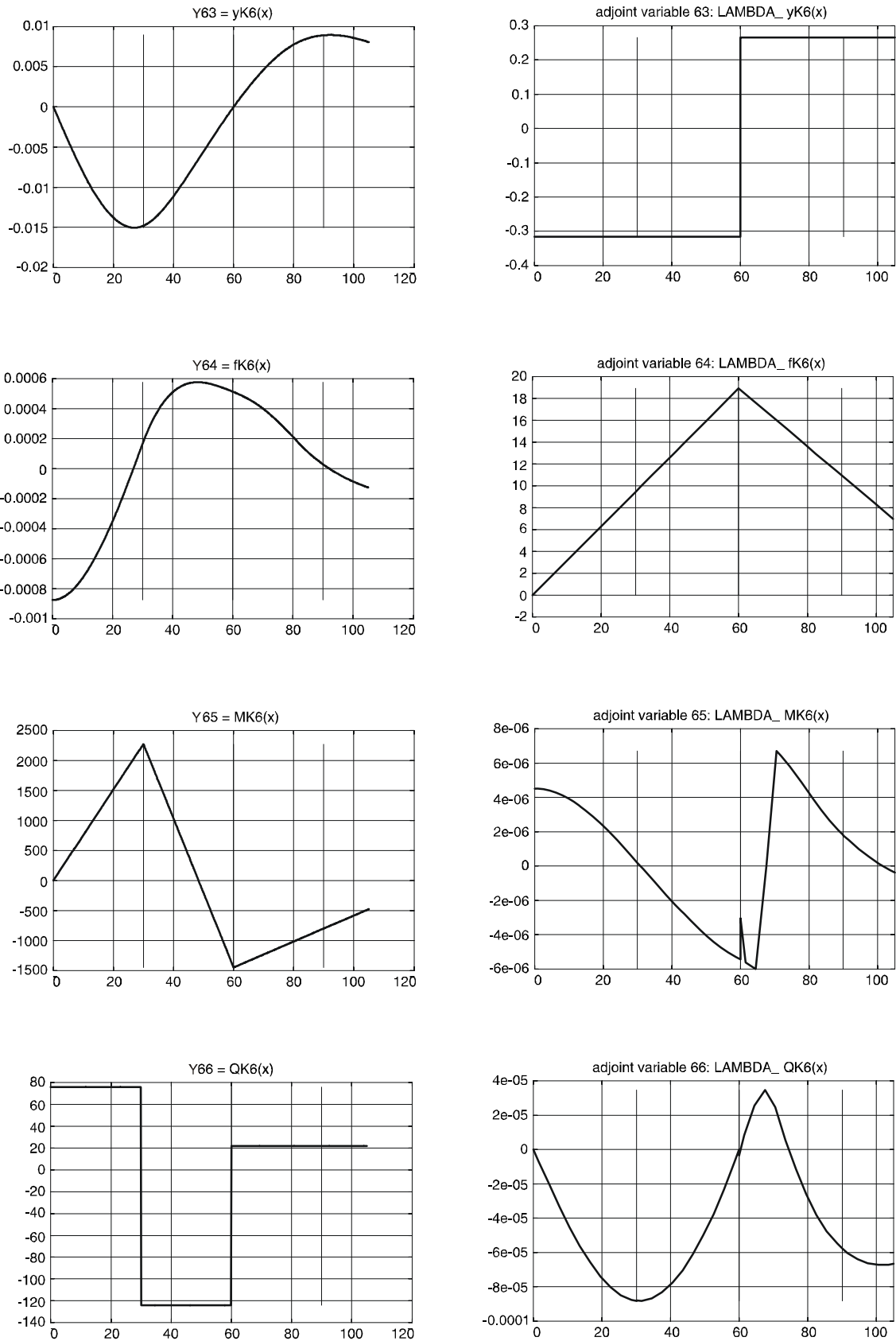
Rys. 43. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym – jednostkowe przemieszczenie podpory 3



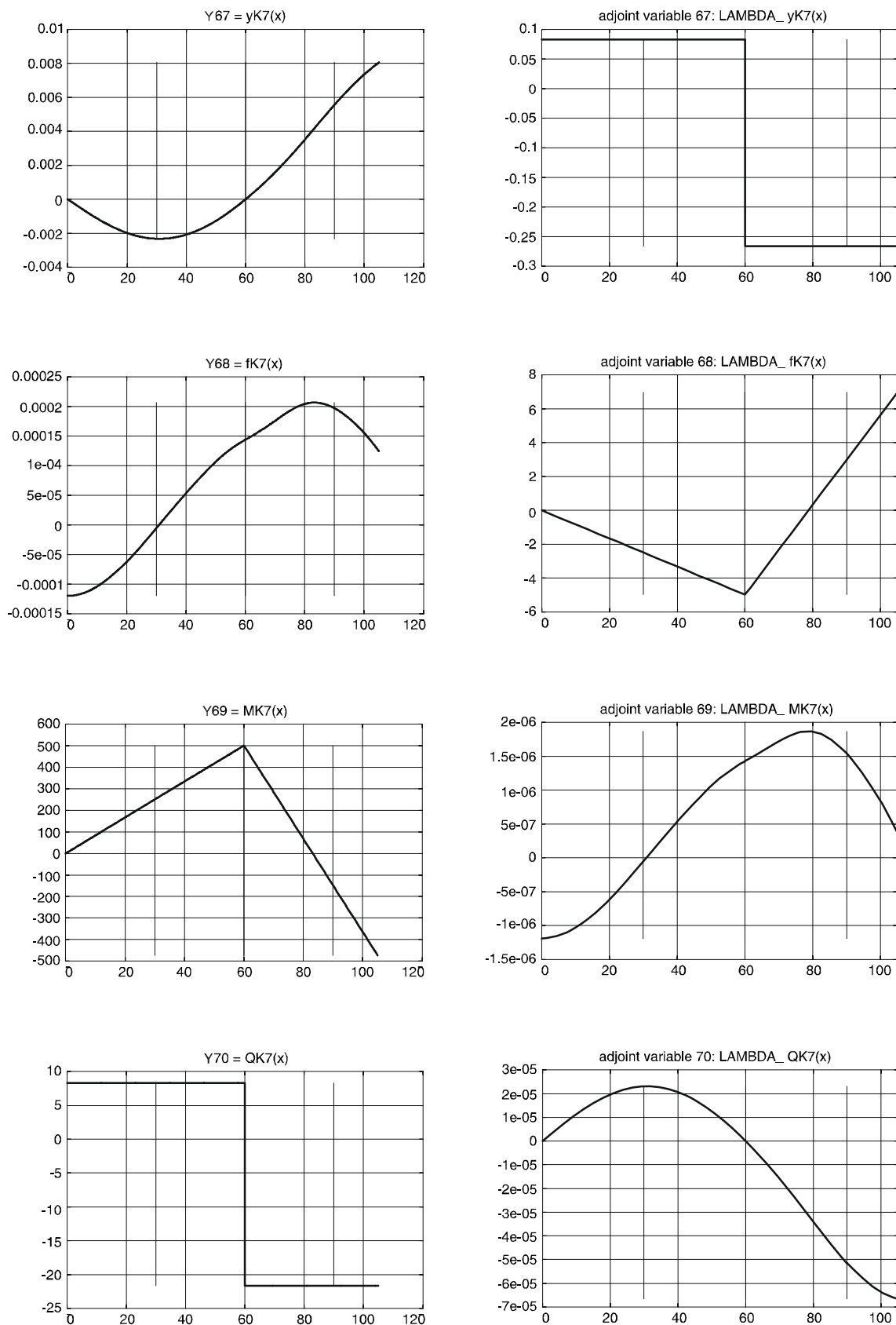
Rys. 44. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym – jednostkowe przemieszczenie podpory 4



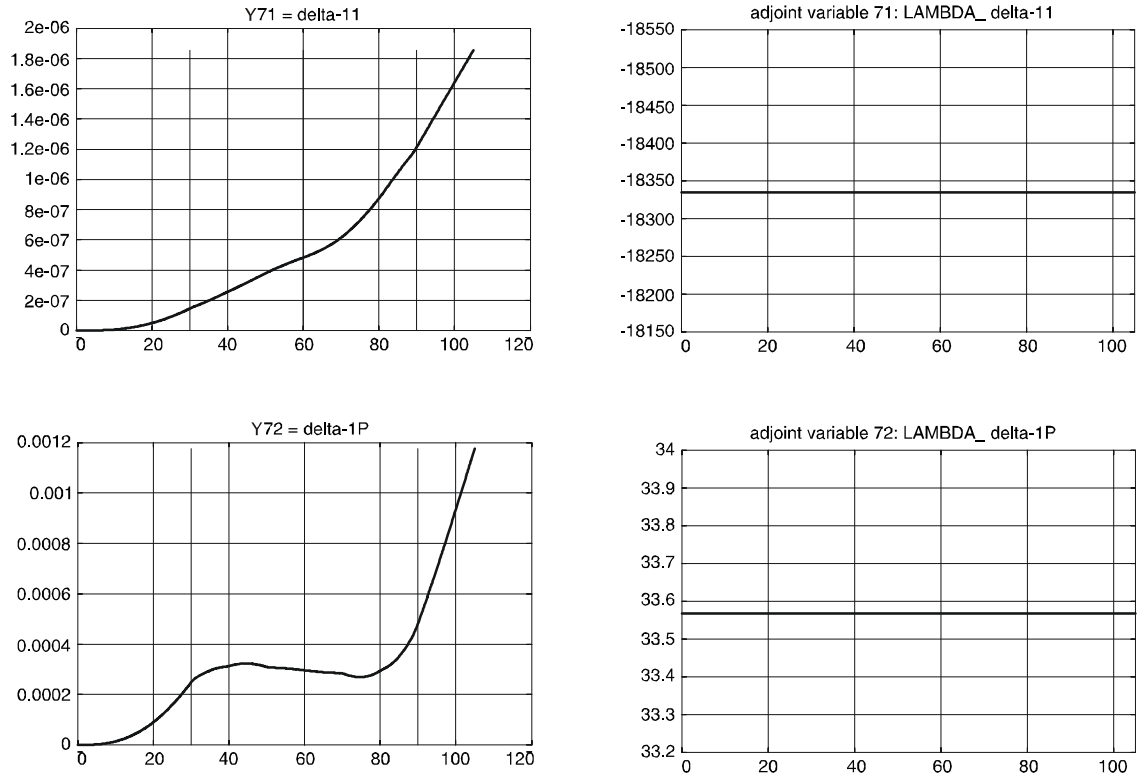
Rys. 45. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym – obciążenie K w środku rozpiętości przęsła 1



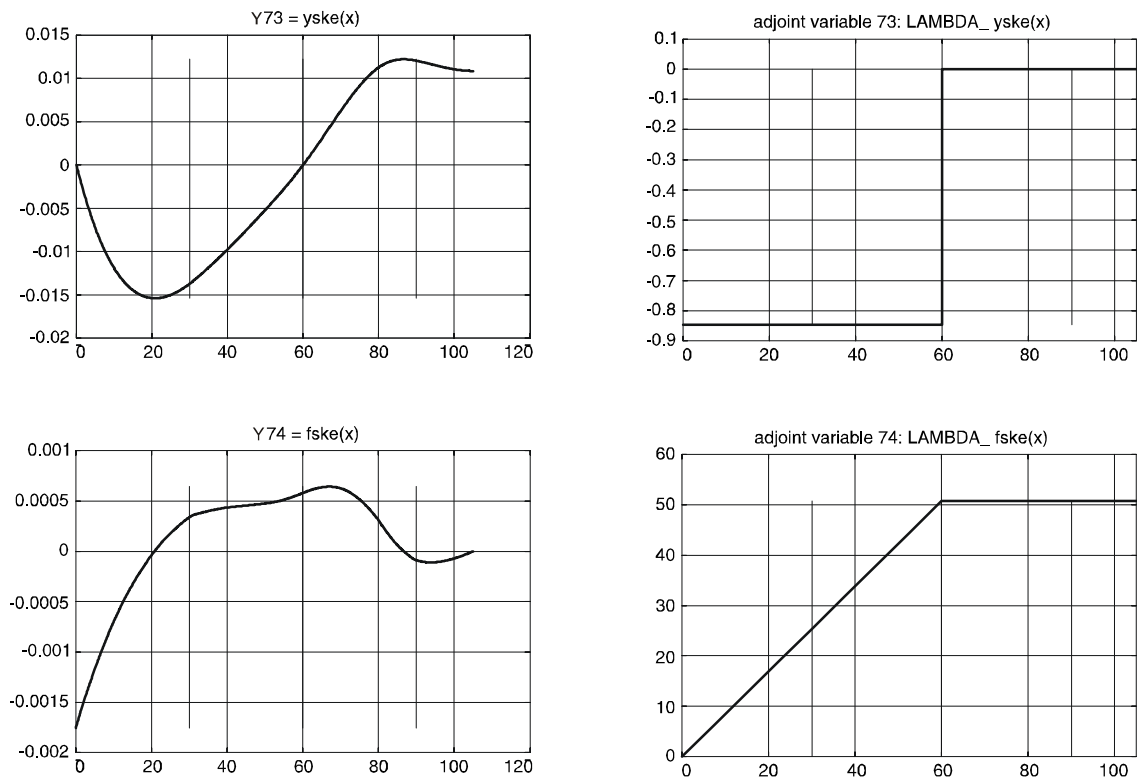
Rys. 46. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym – obciążenie K w środku rozpiętości przęsła 2



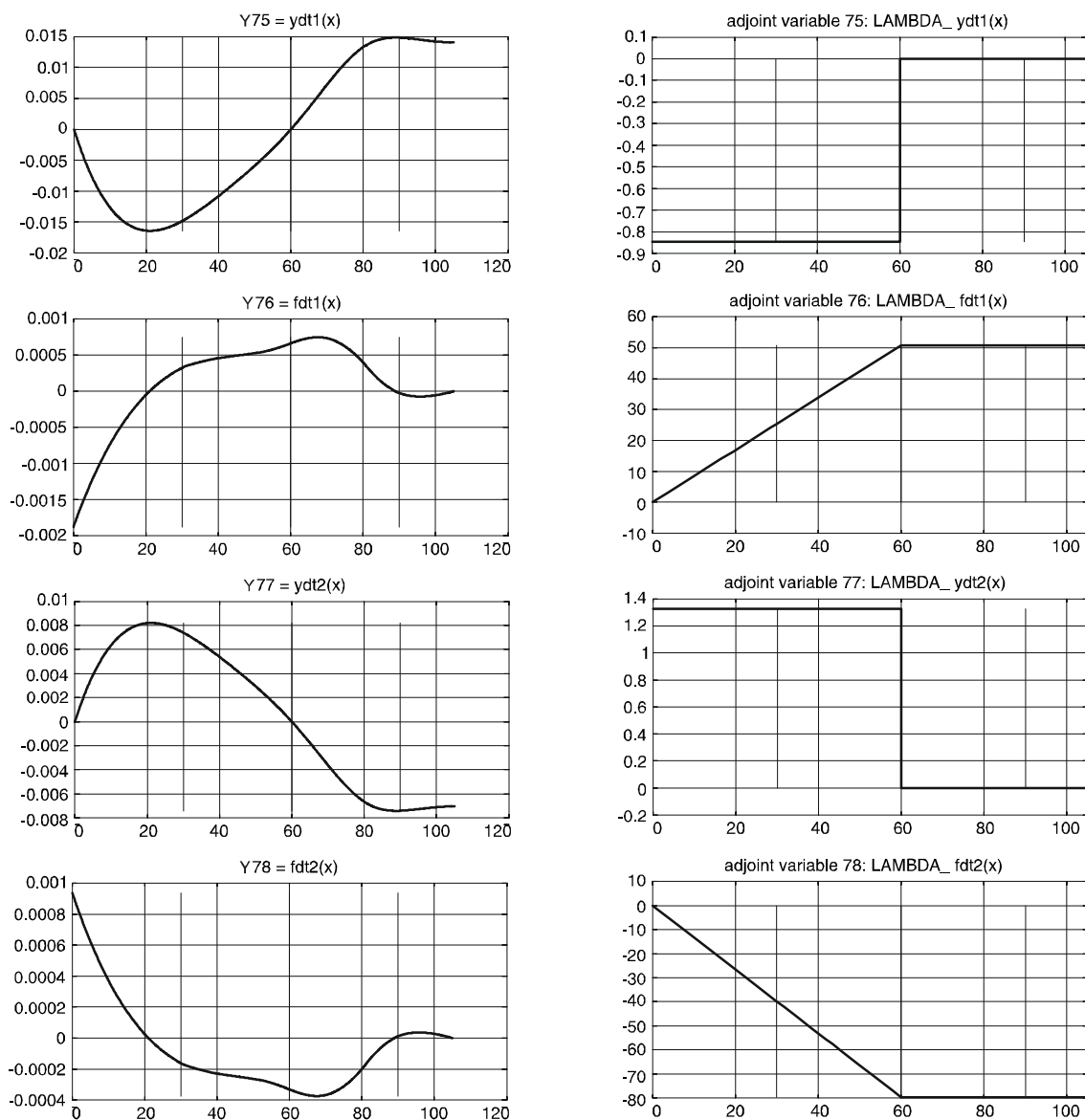
Rys. 47. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie z obciążeniem pojazdem ponadnormatywnym – obciążenie K w środku rozpiętości przęsła 3



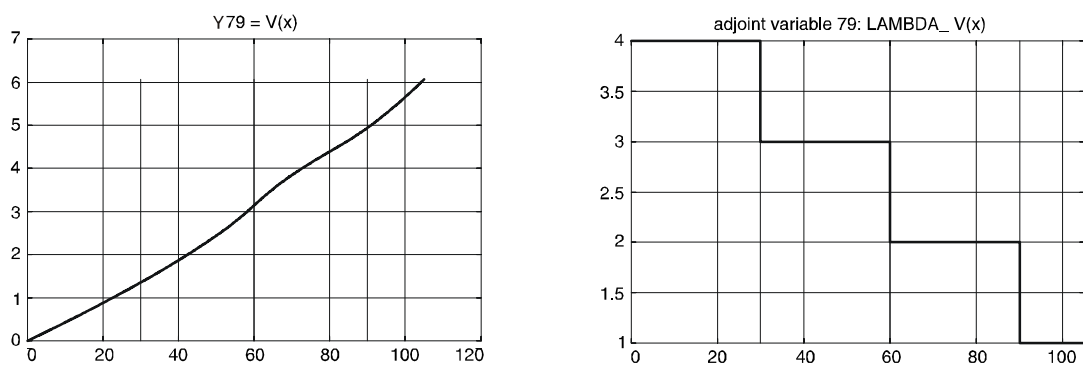
Rys. 48. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie pełzania w okresie eksploatacji – współczynniki równania metody sił



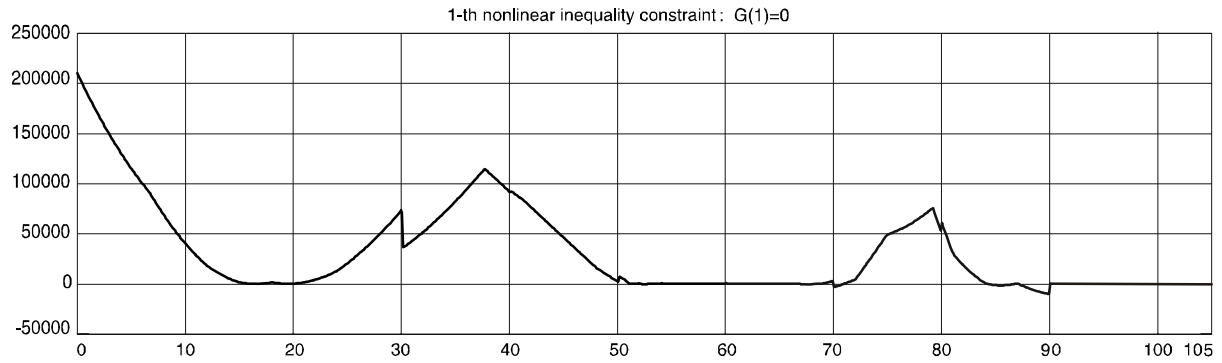
Rys. 49. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie skurczu w okresie eksploatacji



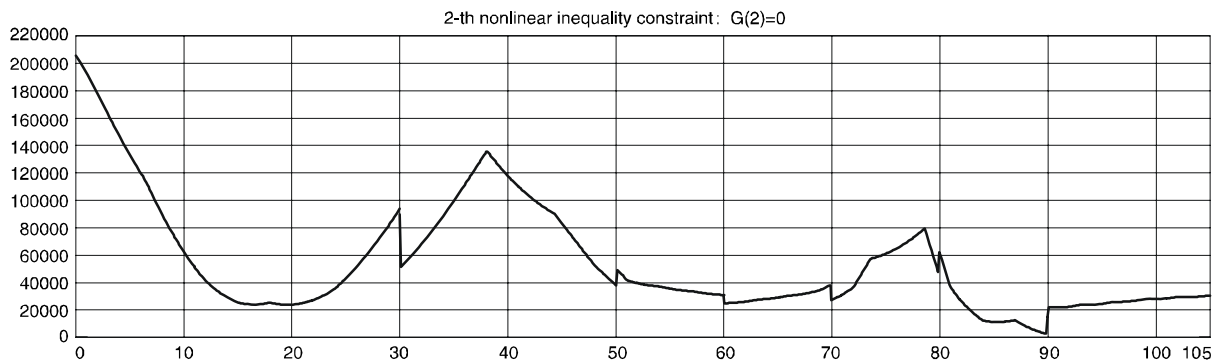
Rys. 50. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie obciążeń termicznych



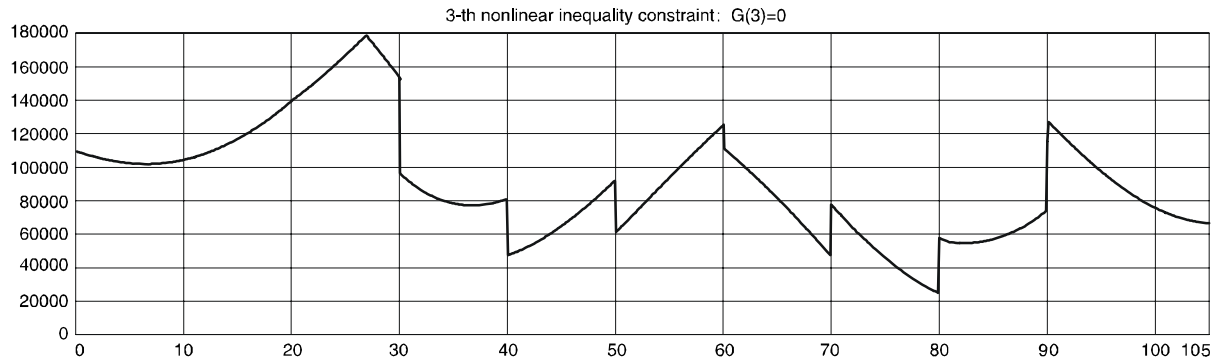
Rys. 51. Objętość dźwigara i odpowiadająca jej zmienna sprzężona



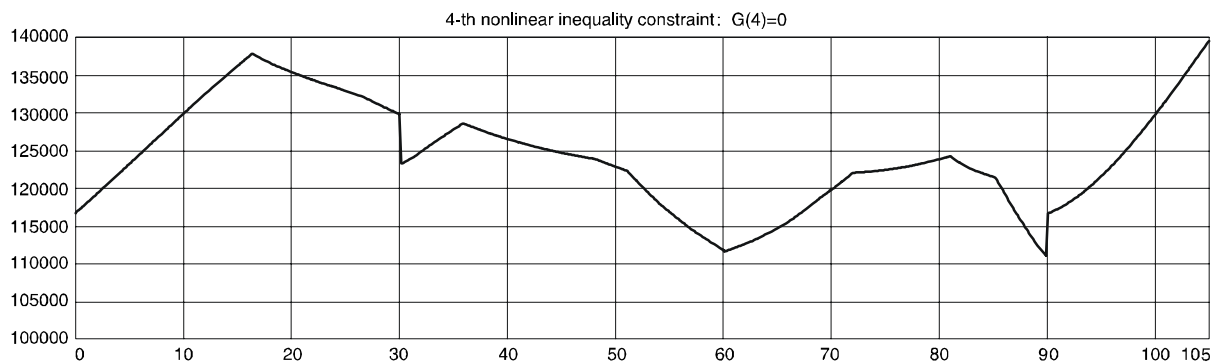
Rys. 52. Funkcja ograniczenia G_1 w zadaniu optymalizacji



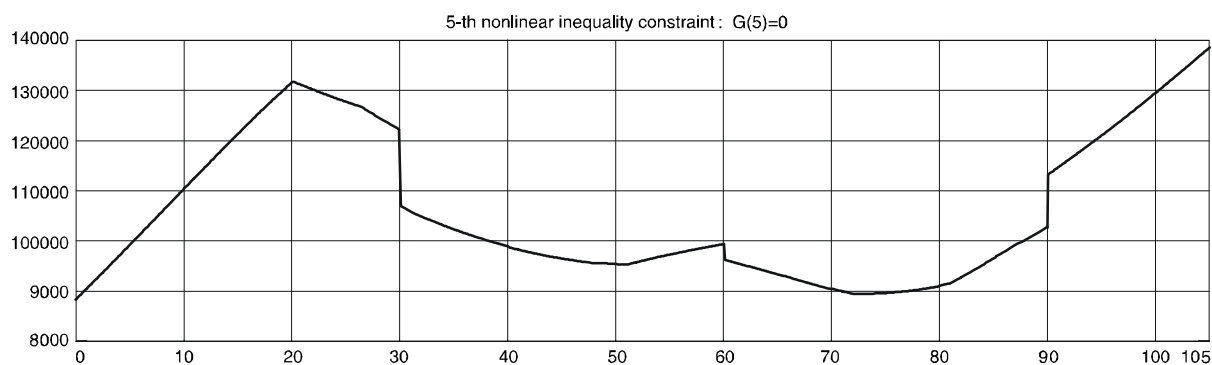
Rys. 53. Funkcja ograniczenia G_2 w zadaniu optymalizacji



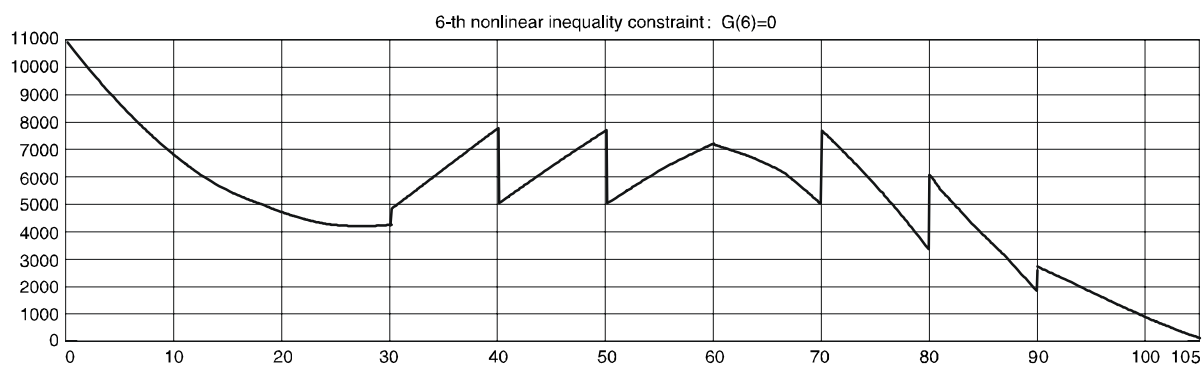
Rys. 54. Funkcja ograniczenia G_3 w zadaniu optymalizacji



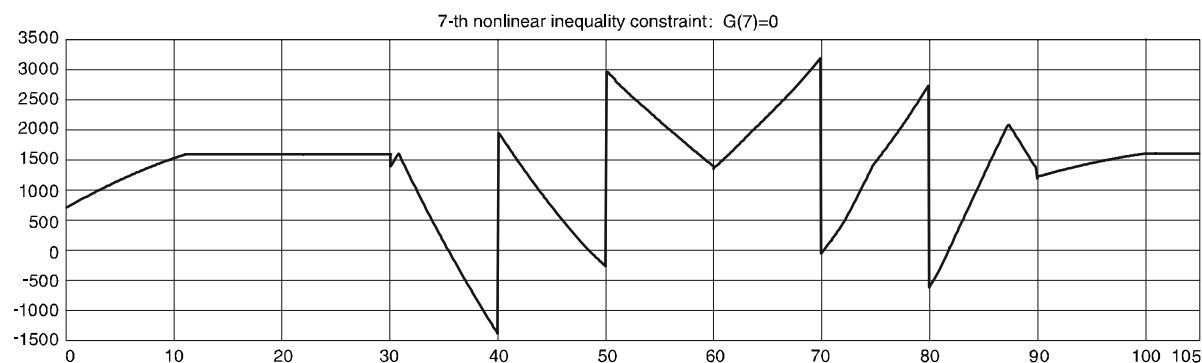
Rys. 55. Funkcja ograniczenia G_4 w zadaniu optymalizacji



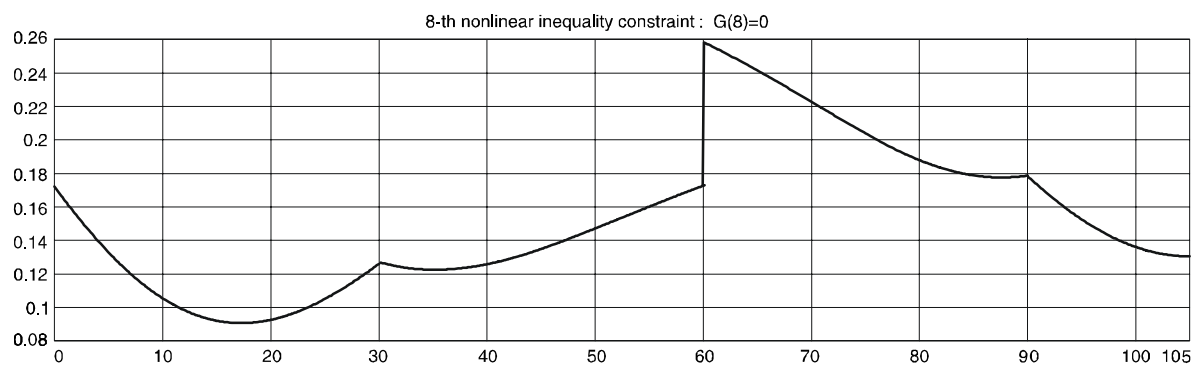
Rys. 56. Funkcja ograniczenia G_5 w zadaniu optymalizacji



Rys. 57. Funkcja ograniczenia G_6 w zadaniu optymalizacji



Rys. 58. Funkcja ograniczenia G_7 w zadaniu optymalizacji



Rys. 59. Funkcja ograniczenia G_8 w zadaniu optymalizacji

5.1.8. Rozwiązanie praktyczne i wyniki obliczeń sprawdzających

Na podstawie rozwiązania optymalnego można, uwzględniając grubości walcowanych blach, przyjąć wymiary przekroju poprzecznego blachownicy możliwej do wykonania w praktyce. Proponując wymiary przekroju poprzecznego należy uwzględnić dodatkowe uwarunkowania, które nie zostały zastosowane w zadaniu optymalizacji a więc problemy związane z możliwością utraty stateczności miejscowej, zwichrzenie, obciążenie środka siłami skupionymi itp. Analizę tych problemów w niniejszej pracy pominięto. Wymiary przekroju poprzecznego ustalono w następujący sposób:

1. Zachowano stopniowanie wymiarów
 - grubość pasa dolnego co 20 mm,
 - szerokość pasa dolnego co 100 mm,
 - grubość środka co 2 mm.
2. Poszczególne wymiary ustalono tak, by w każdym punkcie przekroju wymiar przyjęty był większy od optymalnego.
3. Długości odcinków o stałych wymiarach są wielokrotnością 3 metrów.

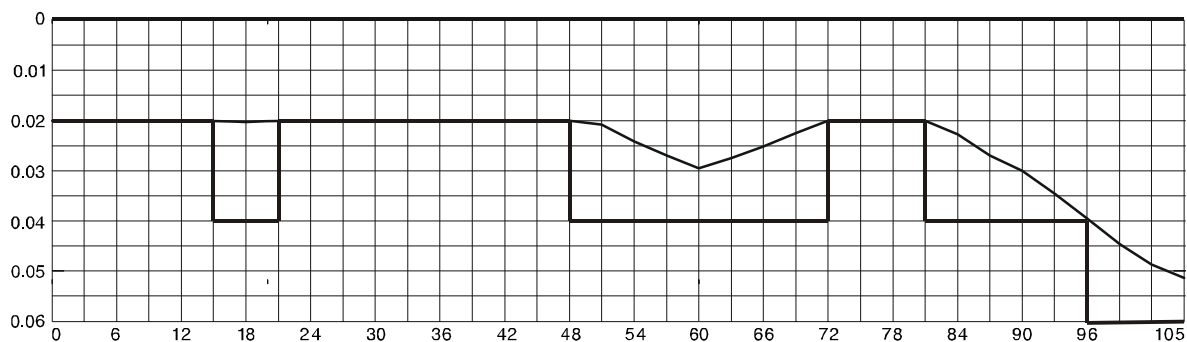
Ustalone wymiary przedstawiono na rysunkach 60, 61, 62.

Obliczenia sprawdzające wykonano z zastosowaniem zmodyfikowanych procedur programu dircol napisanych w celu wyznaczenia rozwiązania optymalnego. Modyfikacja ta polegała na wprowadzeniu w miejsce trzech zmiennych decyzyjnych ustalonych wymiarów przekroju poprzecznego oraz na przyjęciu nowej zmiennej decyzyjnej, której wartość w każdym przekroju powinna być stała. Jako nową zmienną decyzyjną przyjęto grubość górnego pasa blachownicy. W odniesieniu do tej zmiennej określono dopuszczalny obszar zmienności, którego dolną granicą jest ustalona grubość pasa górnego (20 mm). Przy założonych wymiarach wyznaczono przebieg zmiennych stanu, nowej zmiennej decyzyjnej oraz funkcji ograniczeń sformułowanych w zadaniu optymalizacji. W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano rozwiązania optymalne ze względu na kryterium minimum objętości stali a więc takie, które m. in. spełniają ograniczenia sformułowane w oparciu o stany graniczne nośności i użytkowania. Przyjęta zmienna decyzyjna w tych rozwiązaniach, w każdym przekroju dźwigara, przyjmuje wartość równą dolnej granicy obszaru dopuszczalnego. Oznacza to, że dźwigar o zaproponowanych wymiarach przekroju poprzecznego spełnia wymagania wynikające ze stanów granicznych nośności i użytkowania. Obliczenia sprawdzające przeprowadzono w pięciu przypadkach.

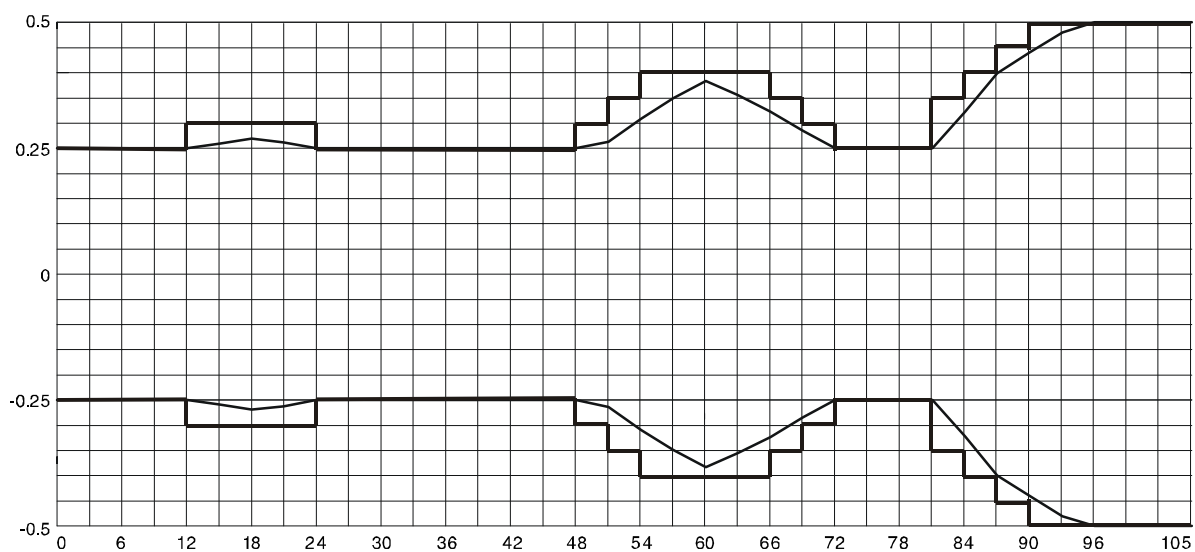
1. Przypadek pierwszy obejmuje wszystkie sytuacje obliczeniowe jakie były uwzględnione w stanie eksploatacji w okresie od chwili zakończenia montażu do czasu t_{∞} z uwzględnieniem stanów montażowych. W tym przypadku uwzględniono wszystkie zmienne decyzyjne występujące w zadaniu optymalizacji – $y_1 \div y_{79}$.
2. Przypadek drugi obejmuje sprawdzenie stanów granicznych nośności i użytkowania dźwigara zespolonego w stanie po zakończeniu fazy montażowej IV z uwzględnieniem wcześniejszych stanów montażowych. W obliczeniach uwzględniono skurcz i pełzanie betonu odpowiadające chwili zakończenia fazy IV. Do opisu dźwigara użyto zmienne stanu $y_1 \div y_{20}$ oraz y_{79} .
3. Przypadek trzeci jw. lecz w odniesieniu do stanu dźwigara w chwili zakończenia fazy III. Do opisu dźwigara użyto zmienne stanu $y_1 \div y_{14}$ oraz y_{79} .
4. Przypadek czwarty jw. lecz w odniesieniu do stanu dźwigara w chwili zakończenia fazy II. Do opisu dźwigara użyto zmienne stanu $y_1 \div y_{10}$ oraz y_{79} .
5. W przypadku piątym dokonano sprawdzenia dźwigara stalowego w chwili zakończenia fazy I. Do opisu dźwigara użyto zmiennych stanu $y_1 \div y_4$ oraz y_{79} .

W obliczeniach wykazano, że w każdym stanie montażu i w okresie eksploatacji, przy ustalonym przekroju poprzecznym, nie są przekroczone stany graniczne nośności i użytkowania (rys. 63 \div 100).

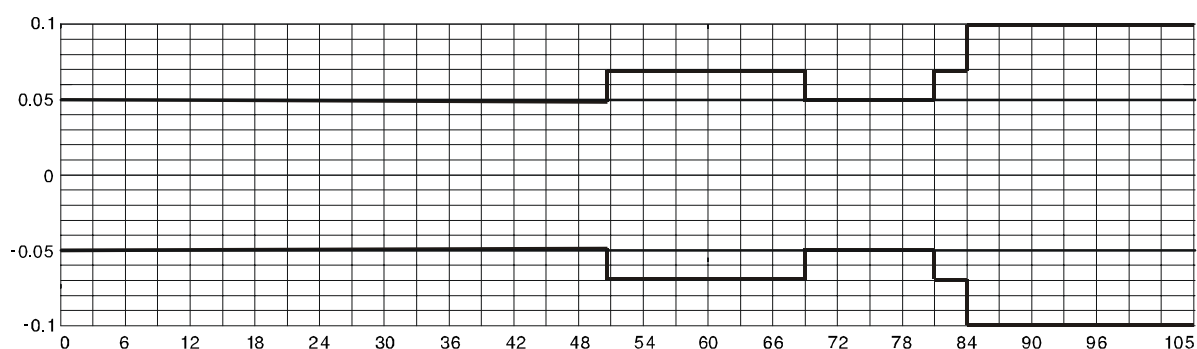
Rozwiązań praktycznych opartych na rozwiązaniu optymalnym może być wiele. Zależą one od przyjętego współczynnika korekcyjnego zastosowanego do granicznych wytrzymałości stali w zadaniu optymalizacji (w tym zadaniu 0.85) oraz od sposobu stopniowania wymiarów przekroju poprzecznego. Wzrost współczynnika korekcyjnego umożliwi zaproponowanie rozwiązania rzeczywistego bardziej zbliżonego do rozwiązania optymalnego. Jednak korzyści wynikające z oszczędności materiału mogą wtedy przekroczyć koszty związane z wykonaniem dźwigara.



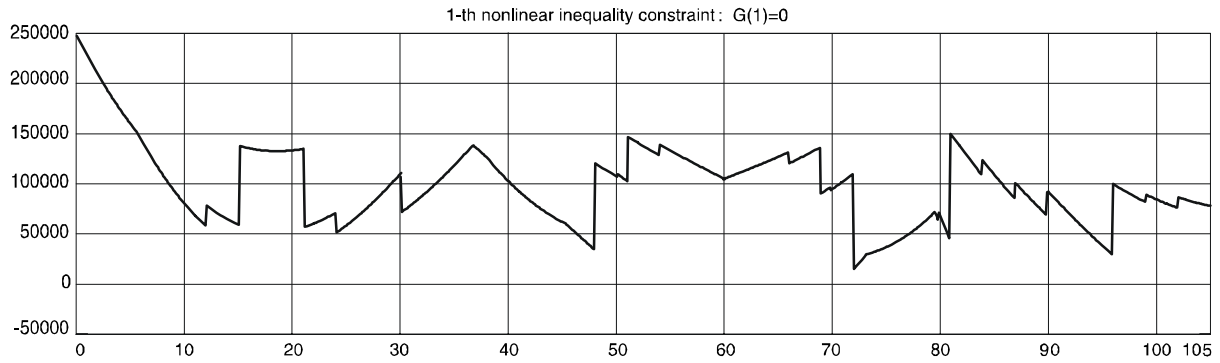
Rys. 60. Przyjęta grubość pasa dolnego blachownicy



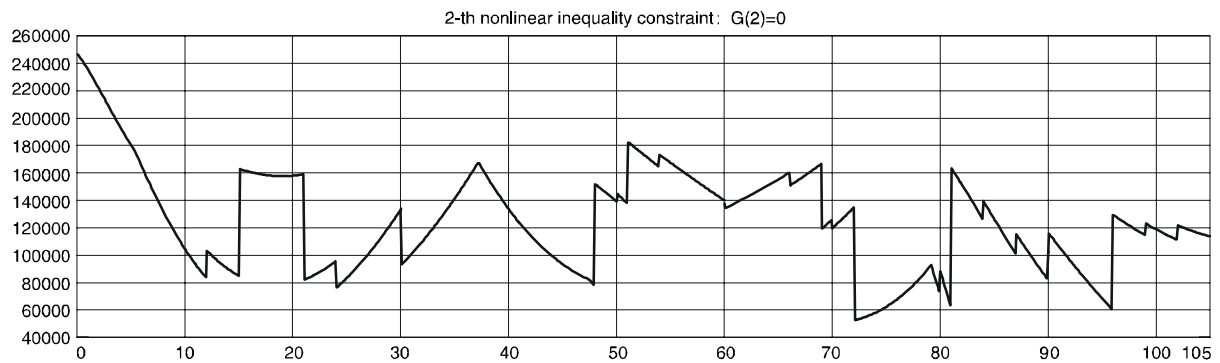
Rys. 61. Przyjęta szerokość pasa dolnego blachownicy



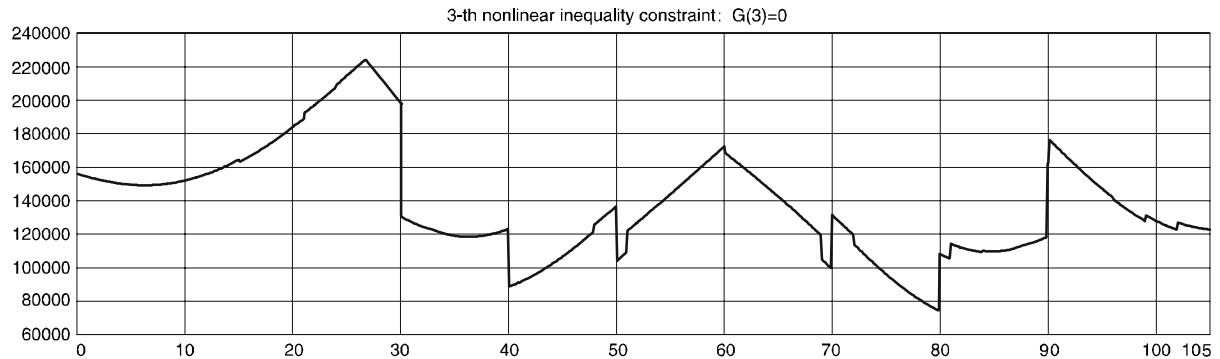
Rys. 62. Przyjęta grubość środka blachownicy



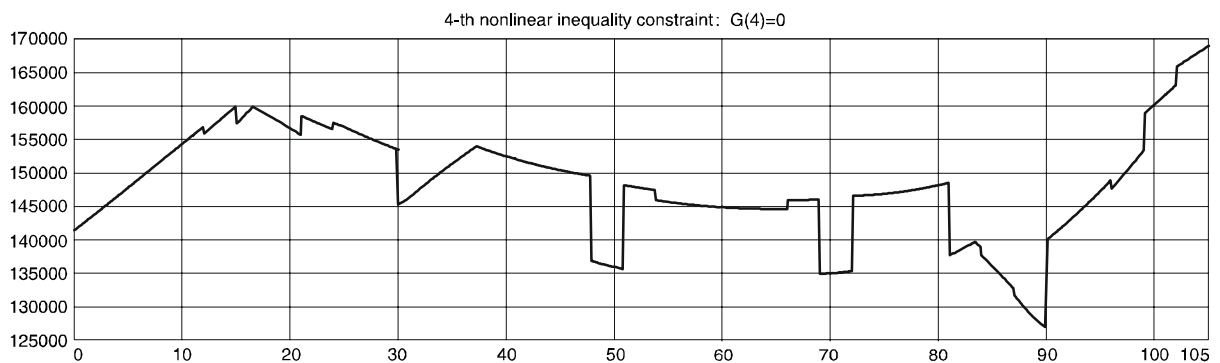
Rys. 63. Funkcja ograniczenia G_1 w obliczeniach sprawdzających w fazach montażowych i eksploatacji



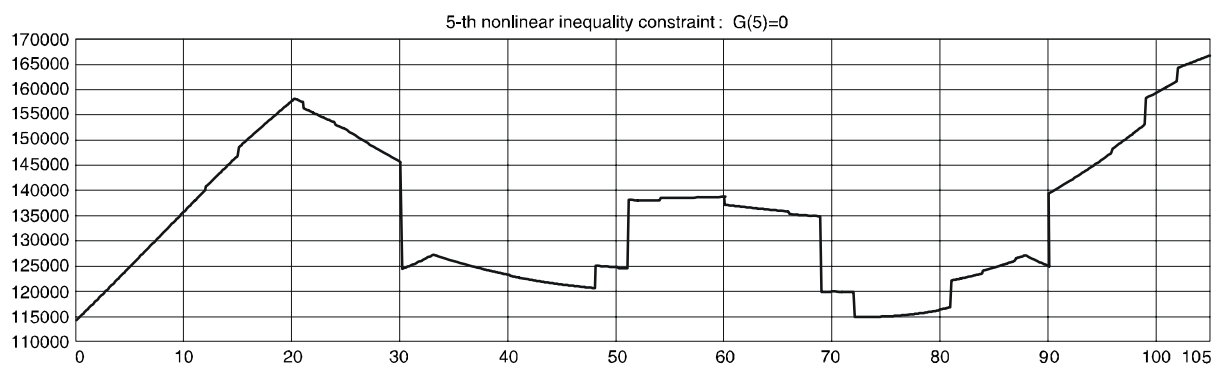
Rys. 64. Funkcja ograniczenia G_2 w obliczeniach sprawdzających w fazach montażowych i eksploatacji



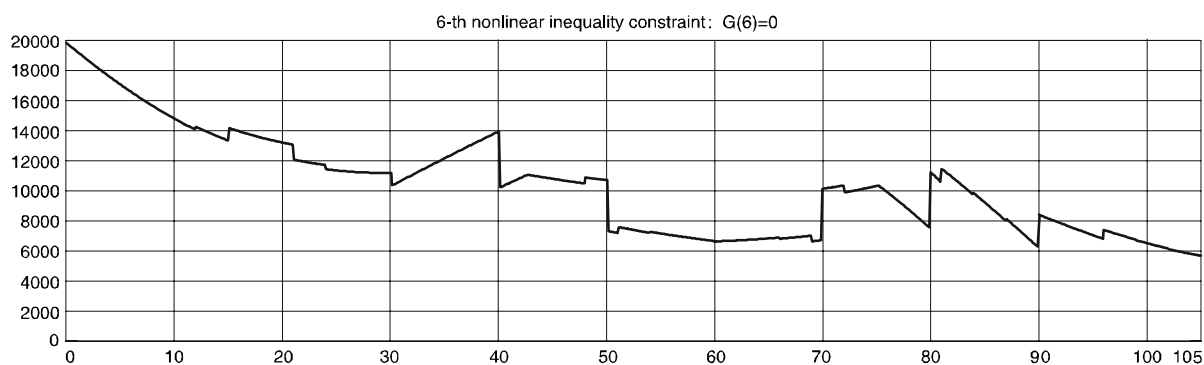
Rys. 65. Funkcja ograniczenia G_3 w obliczeniach sprawdzających w fazach montażowych i eksploatacji



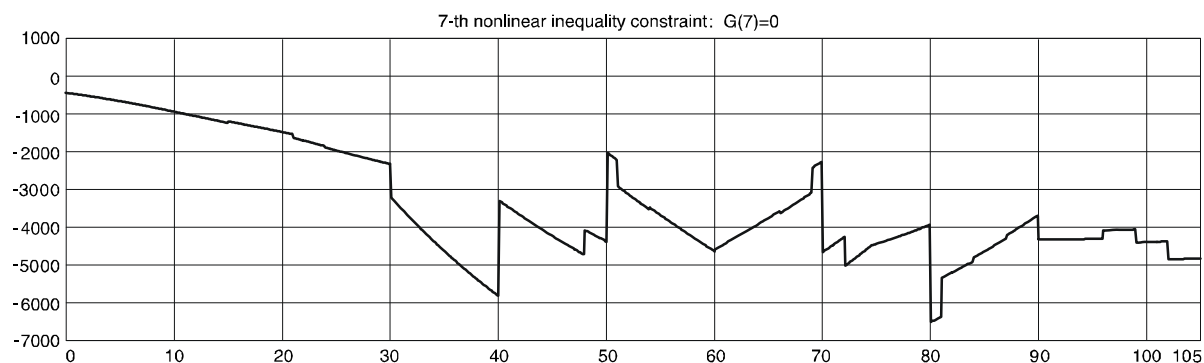
Rys. 66. Funkcja ograniczenia G_4 w obliczeniach sprawdzających w fazach montażowych i eksploatacji



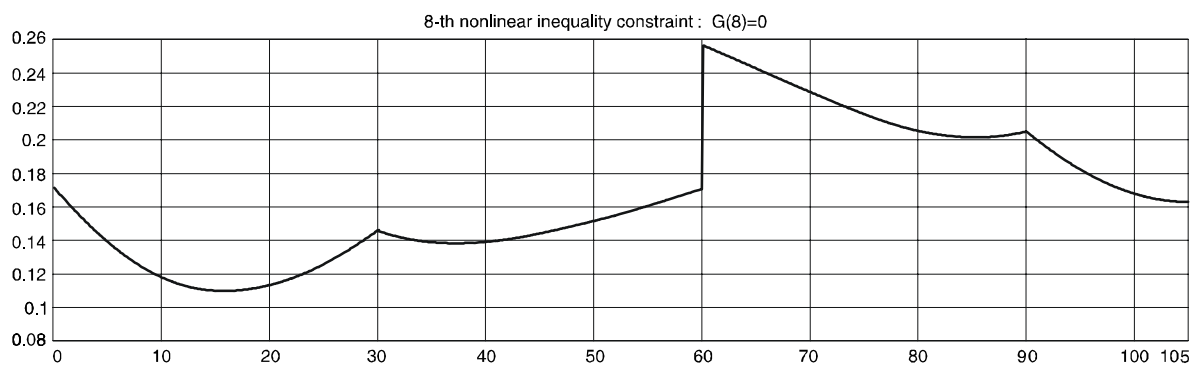
Rys. 67. Funkcja ograniczenia G_5 w obliczeniach sprawdzających w fazach montażowych i eksploatacji



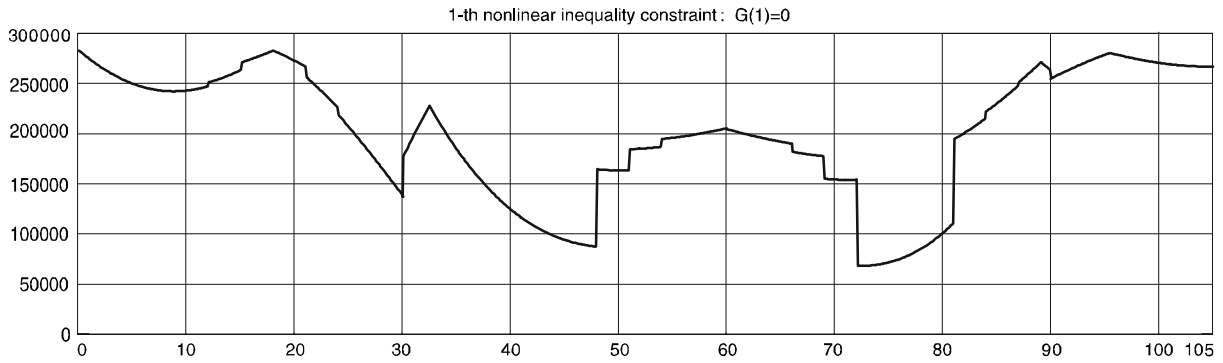
Rys. 68. Funkcja ograniczenia G_6 w obliczeniach sprawdzających w fazach montażowych i eksploatacji



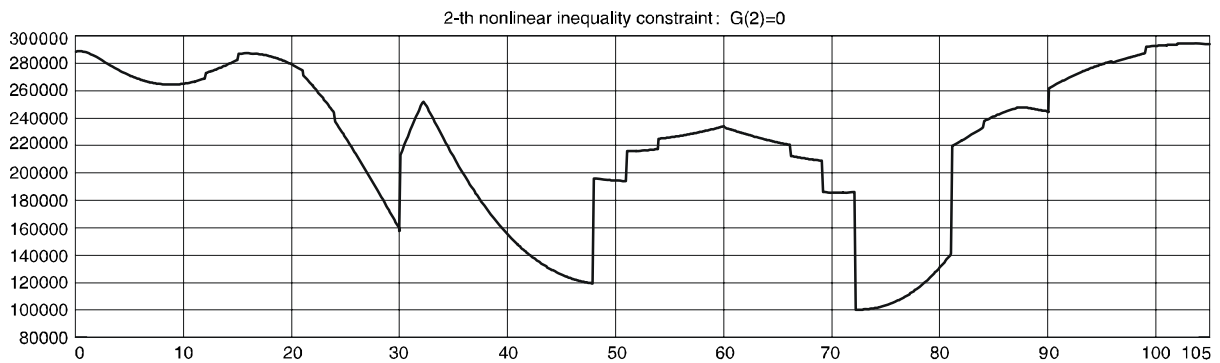
Rys. 69. Funkcja ograniczenia G_7 w obliczeniach sprawdzających w fazach montażowych i eksploatacji



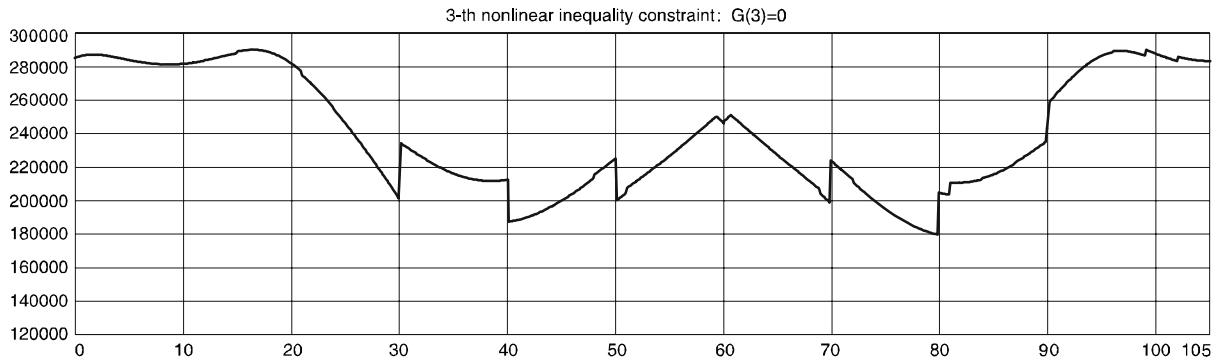
Rys. 70. Funkcja ograniczenia G_8 w obliczeniach sprawdzających w fazach montażowych i eksploatacji



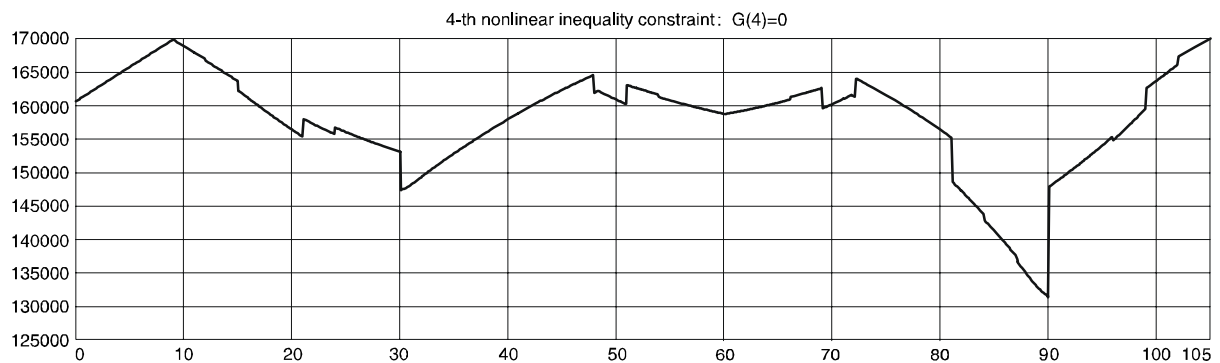
Rys. 71. Funkcja ograniczenia G_1 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej IV



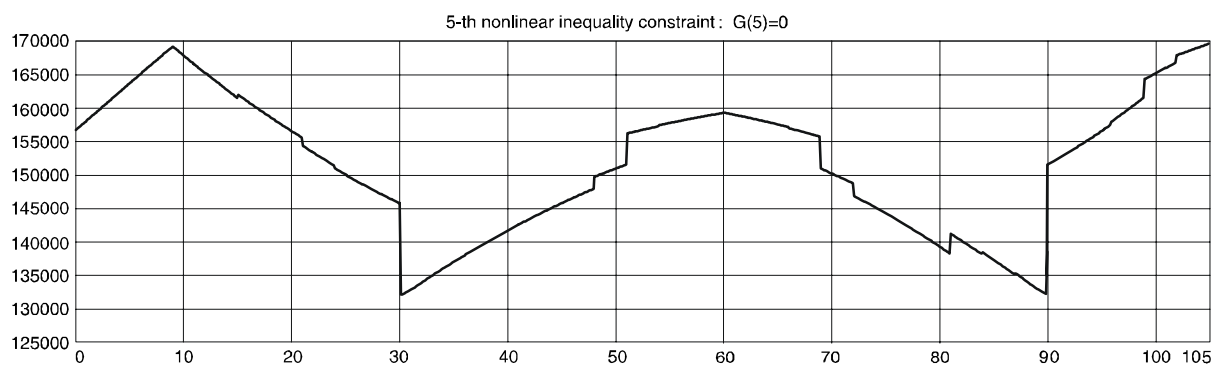
Rys. 72. Funkcja ograniczenia G_2 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej IV



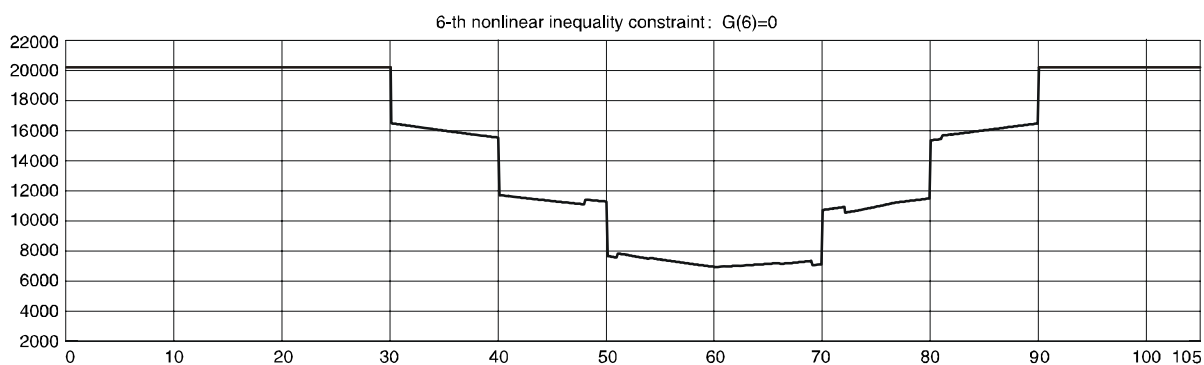
Rys. 73. Funkcja ograniczenia G_3 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej IV



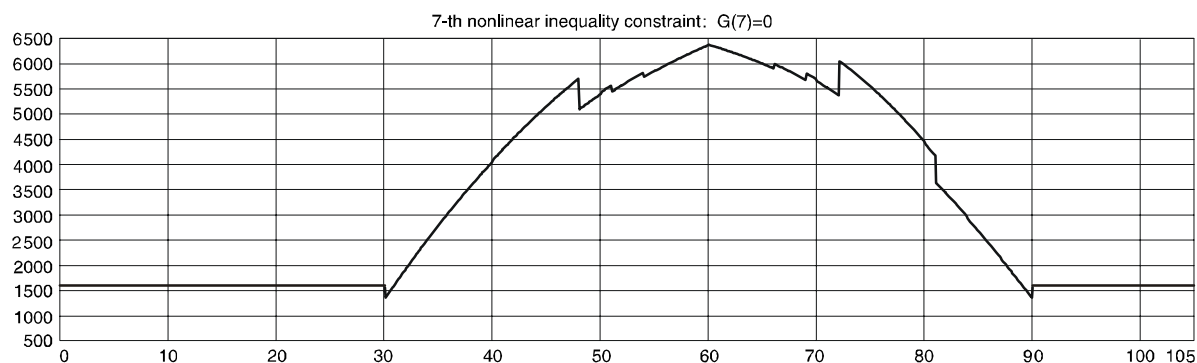
Rys. 74. Funkcja ograniczenia G_4 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej IV



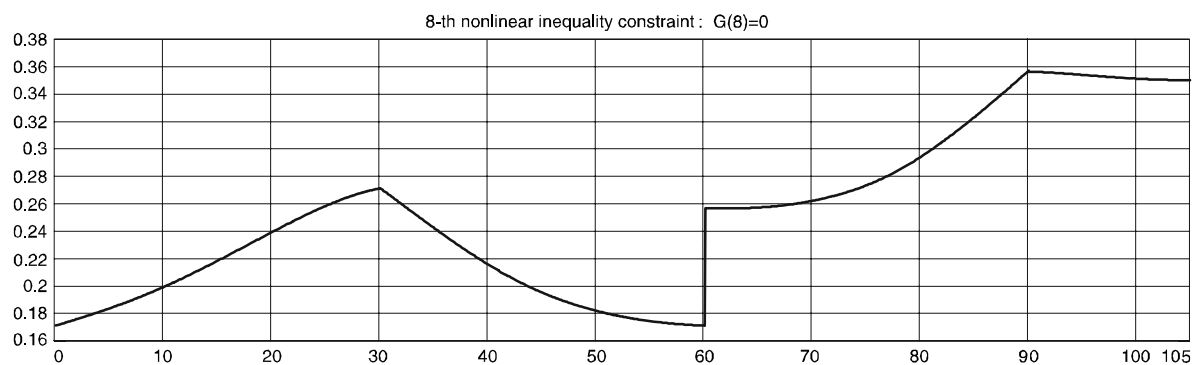
Rys. 75. Funkcja ograniczenia G_5 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej IV



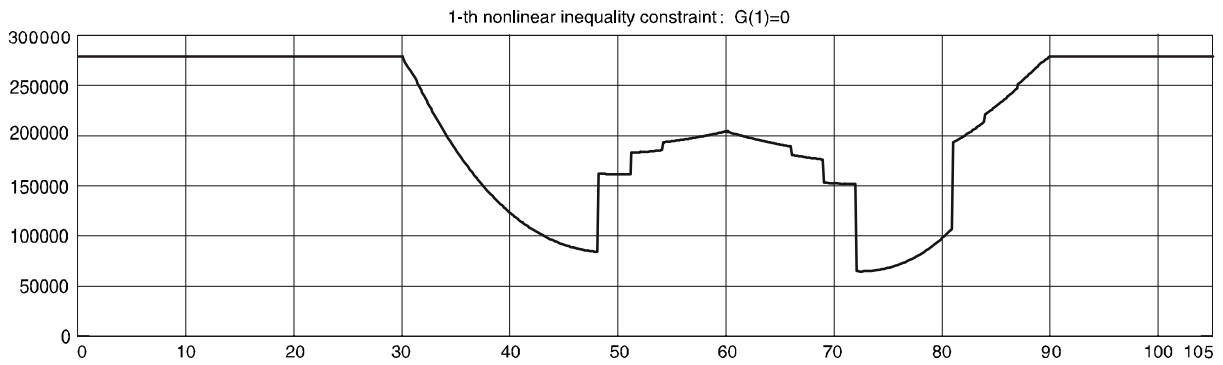
Rys. 76. Funkcja ograniczenia G_6 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej IV



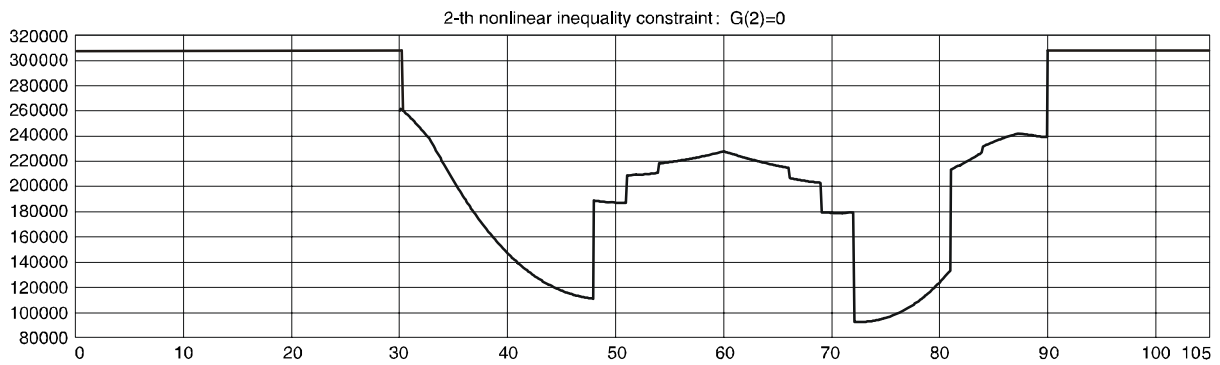
Rys. 77. Funkcja ograniczenia G_7 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej IV



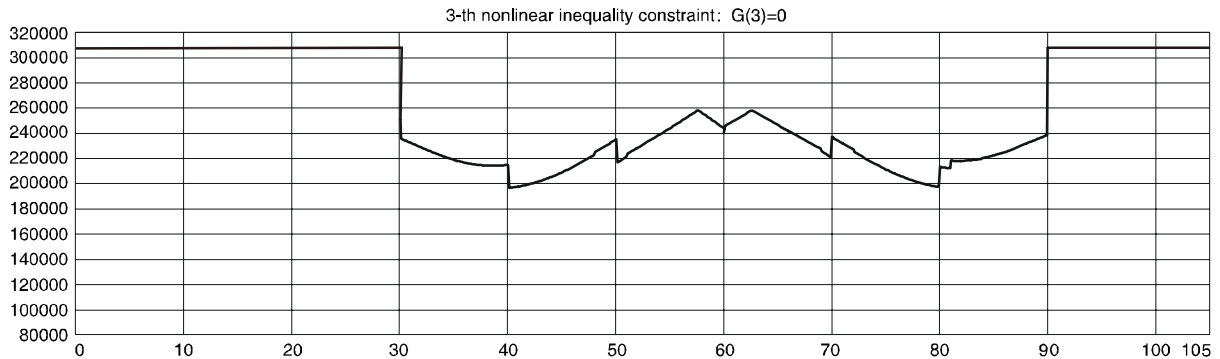
Rys. 78. Funkcja ograniczenia G_8 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej IV



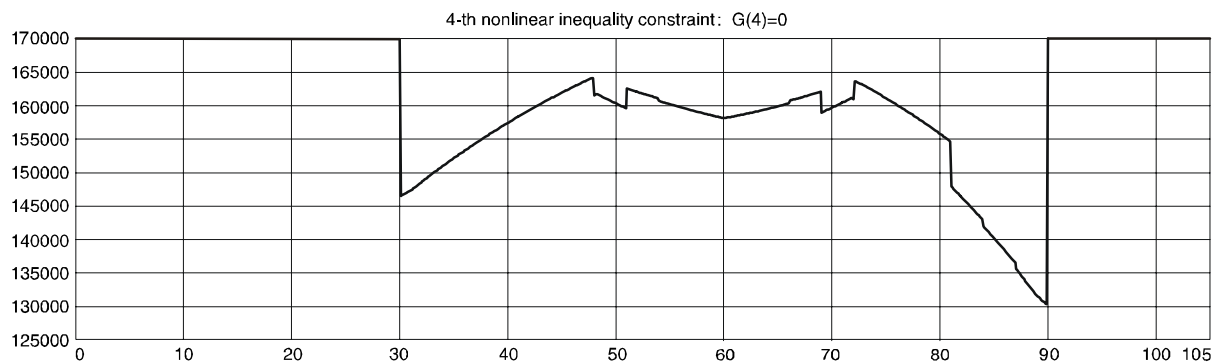
Rys. 79. Funkcja ograniczenia G_1 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej III



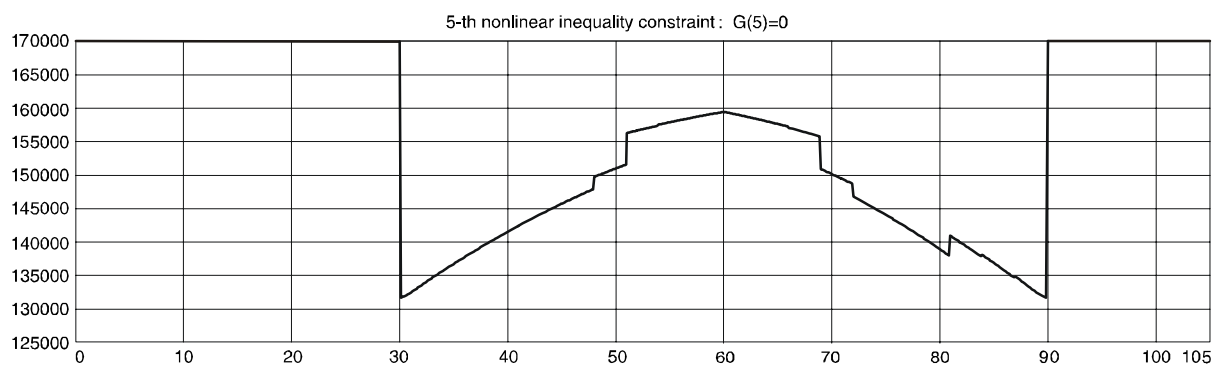
Rys. 80. Funkcja ograniczenia G_2 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej III



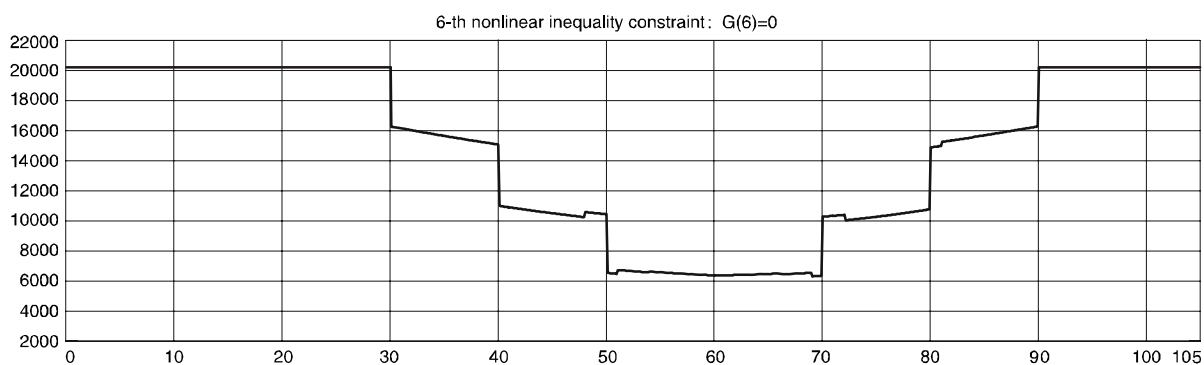
Rys. 81. Funkcja ograniczenia G_3 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej III



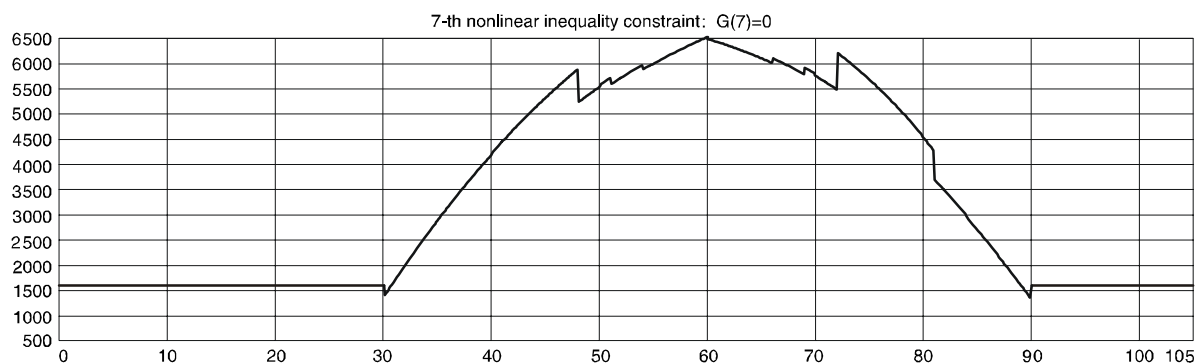
Rys. 82. Funkcja ograniczenia G_4 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej III



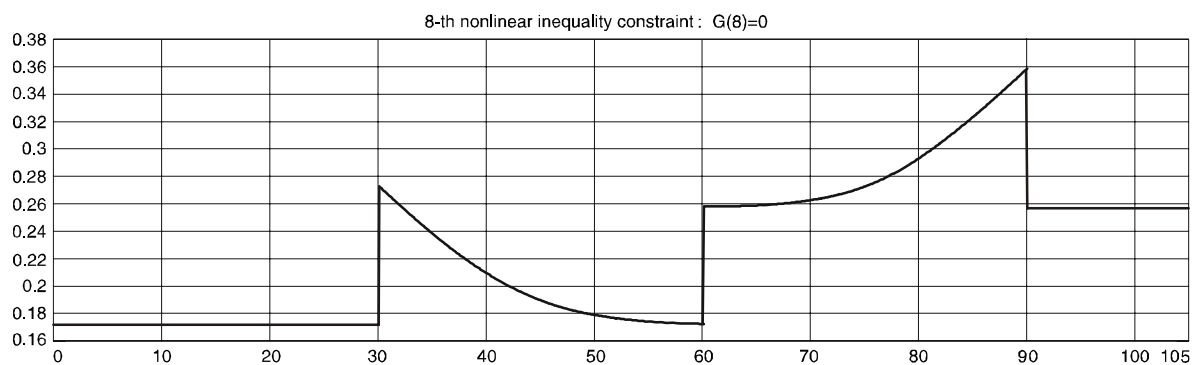
Rys. 83. Funkcja ograniczenia G_5 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej III



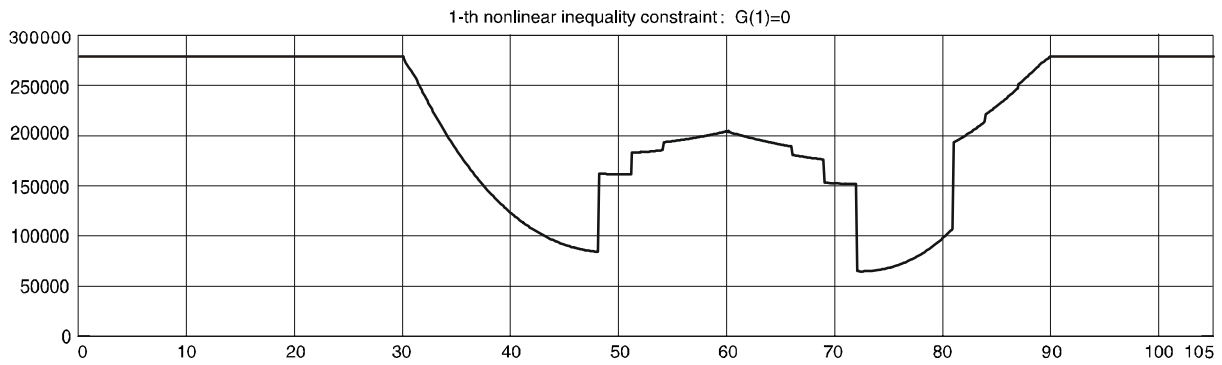
Rys. 84. Funkcja ograniczenia G_6 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej III



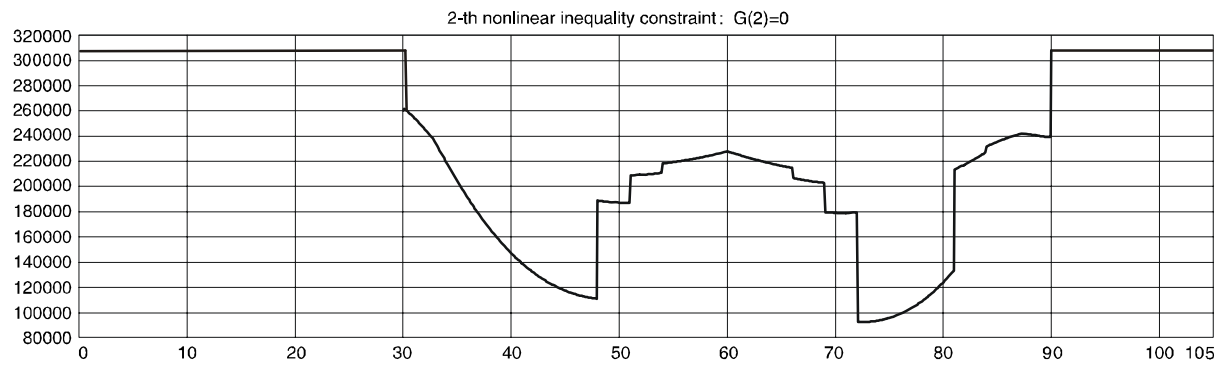
Rys. 85. Funkcja ograniczenia G_7 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej III



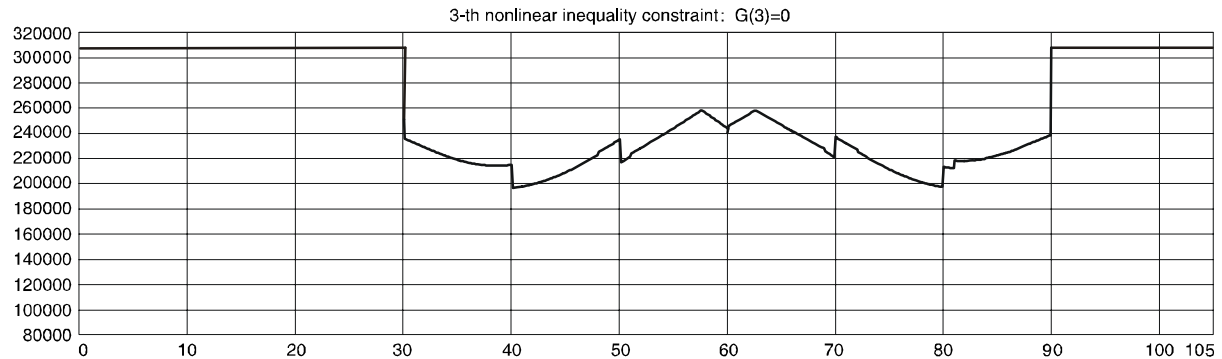
Rys. 86. Funkcja ograniczenia G_8 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej III



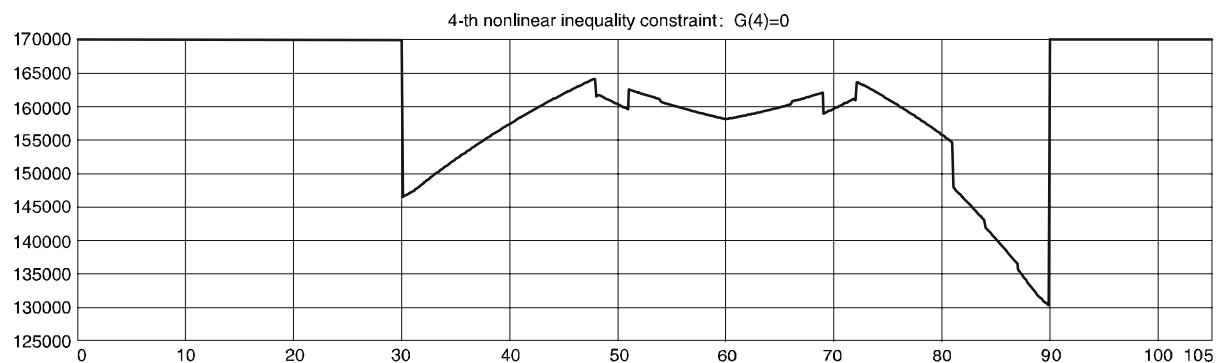
Rys. 87. Funkcja ograniczenia G_1 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej II



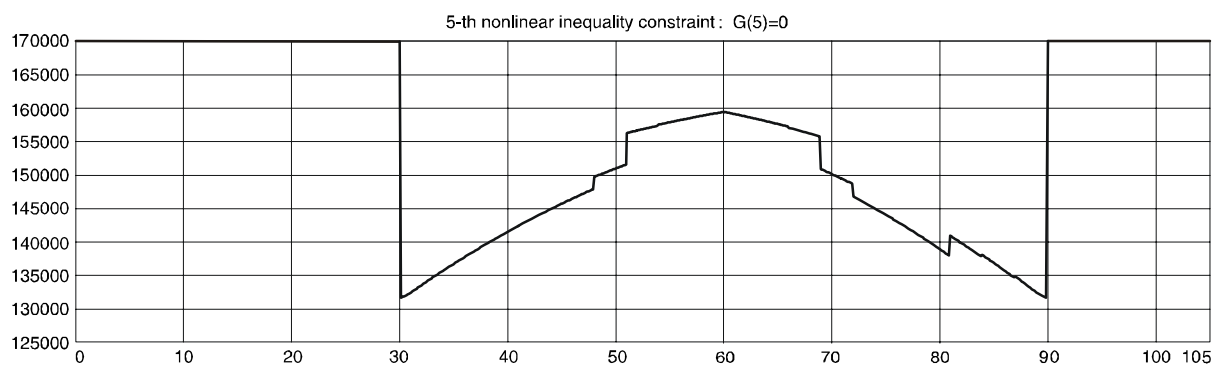
Rys. 88. Funkcja ograniczenia G_2 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej II



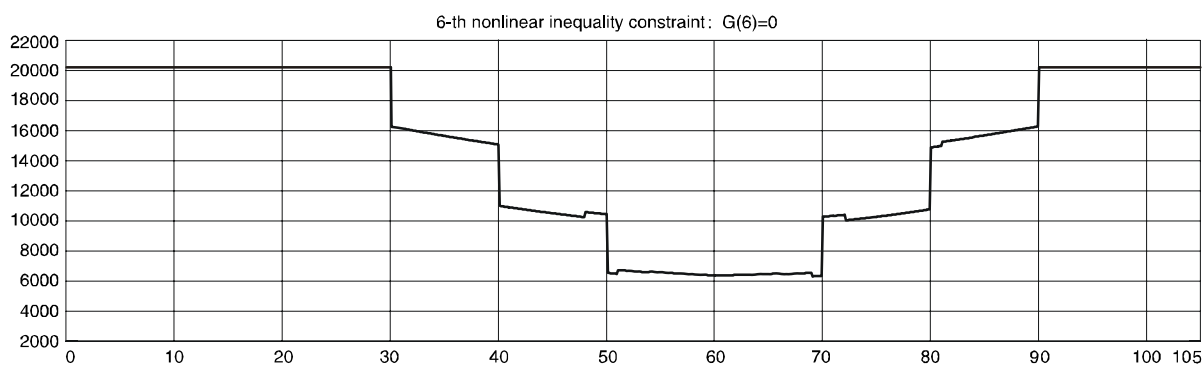
Rys. 89. Funkcja ograniczenia G_3 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej II



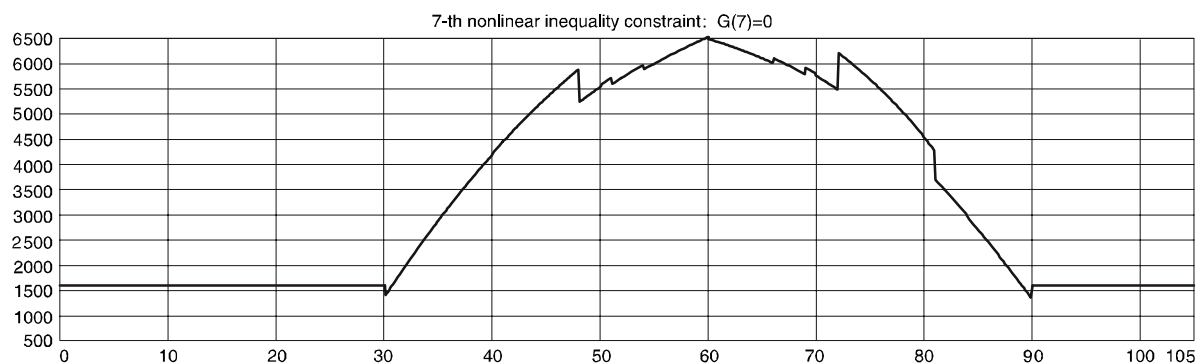
Rys. 90. Funkcja ograniczenia G_4 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej II



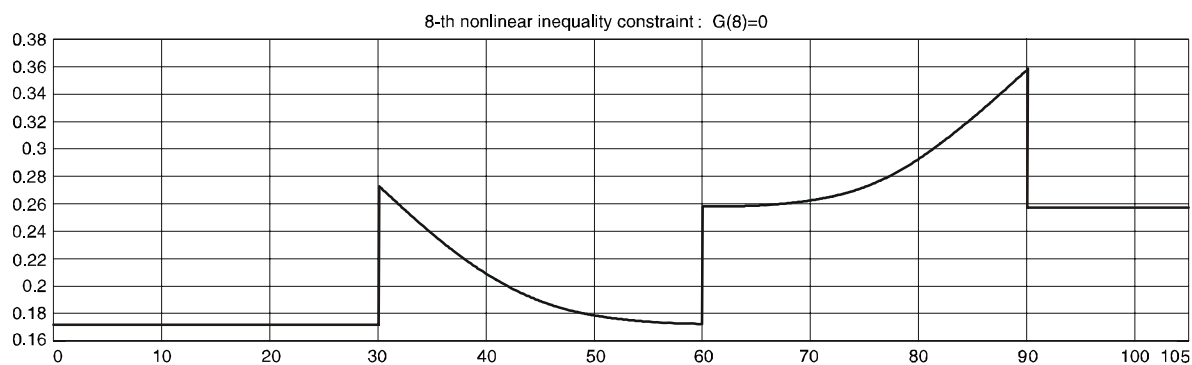
Rys. 91. Funkcja ograniczenia G_5 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej II



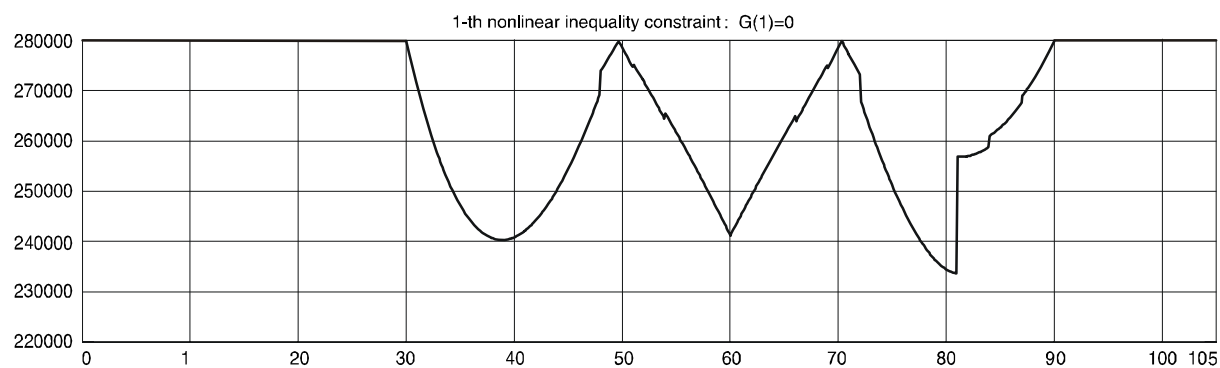
Rys. 92. Funkcja ograniczenia G_6 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej II



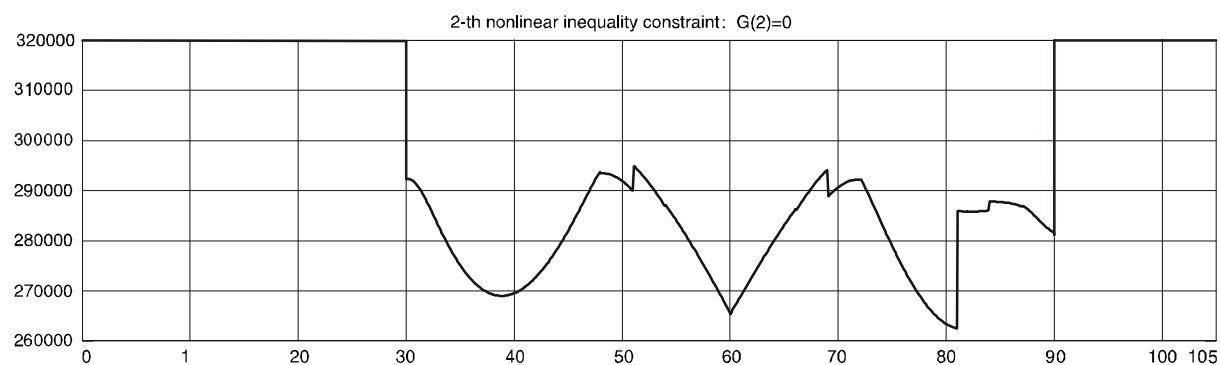
Rys. 93. Funkcja ograniczenia G_7 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej II



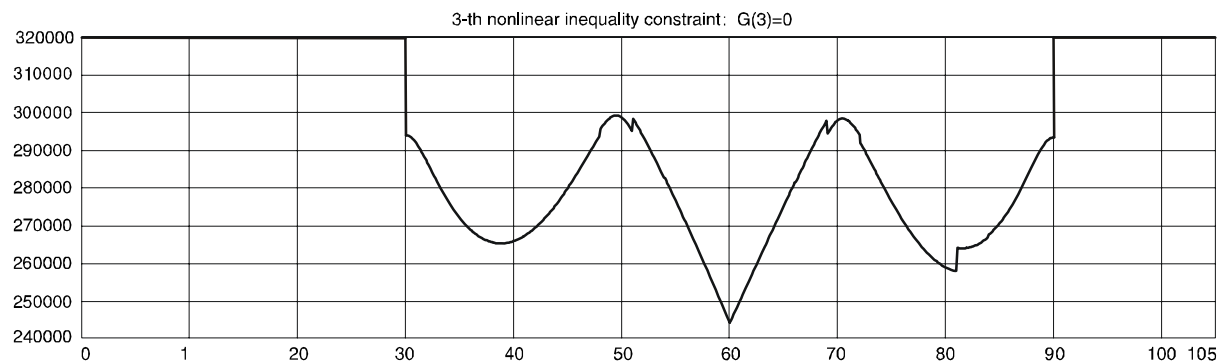
Rys. 94. Funkcja ograniczenia G_8 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej II



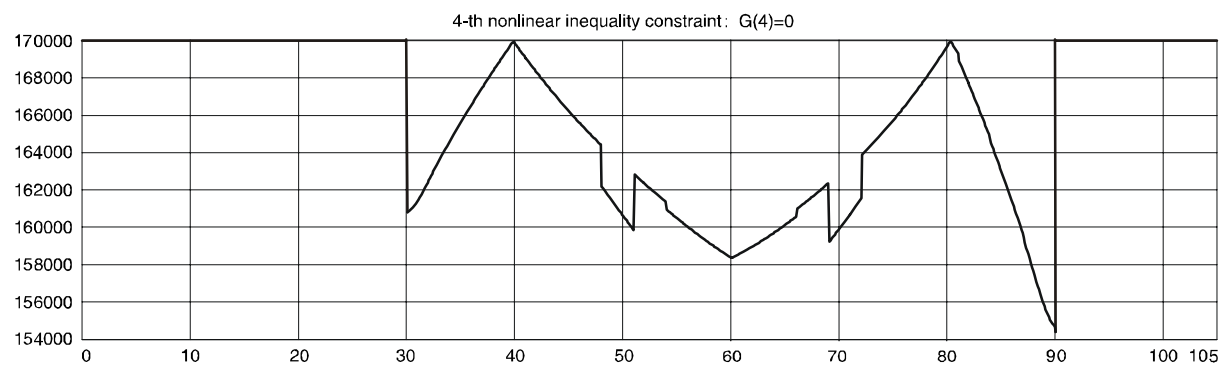
Rys. 95. Funkcja ograniczenia G_1 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej I



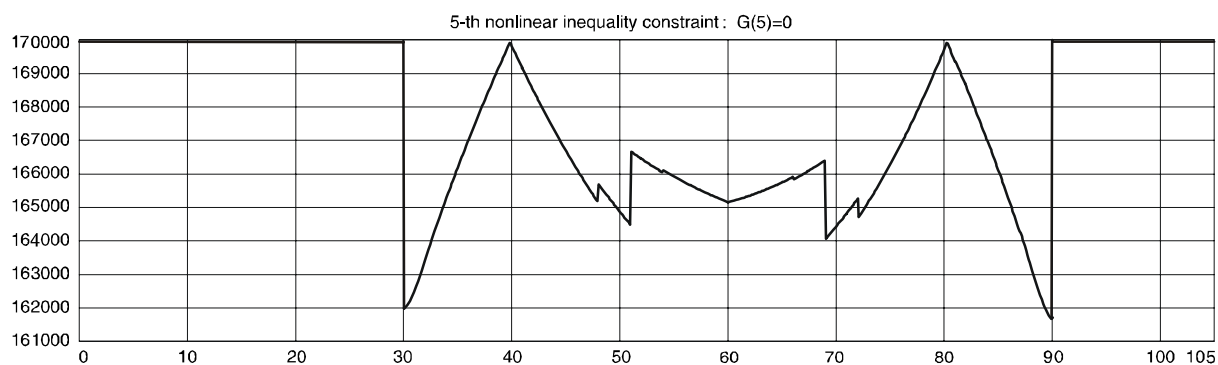
Rys. 96. Funkcja ograniczenia G_2 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej I



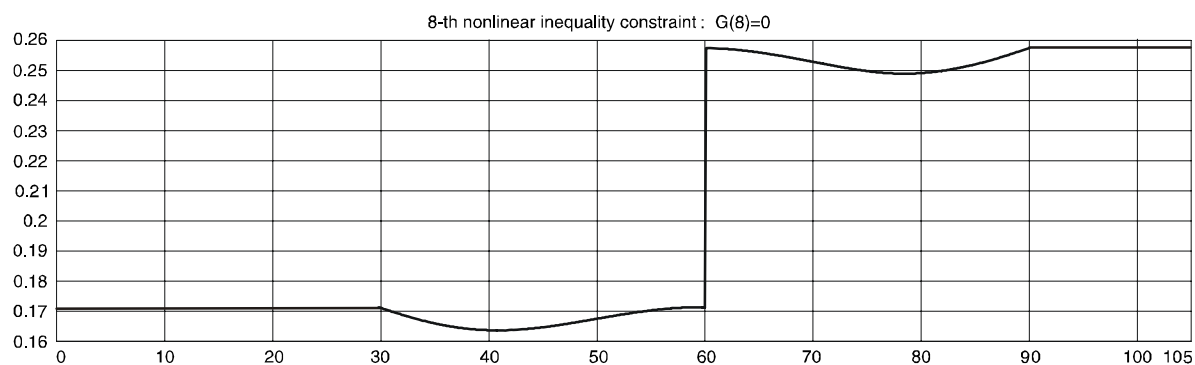
Rys. 97. Funkcja ograniczenia G_3 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej I



Rys. 98. Funkcja ograniczenia G_4 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej I



Rys. 99. Funkcja ograniczenia G_5 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej I



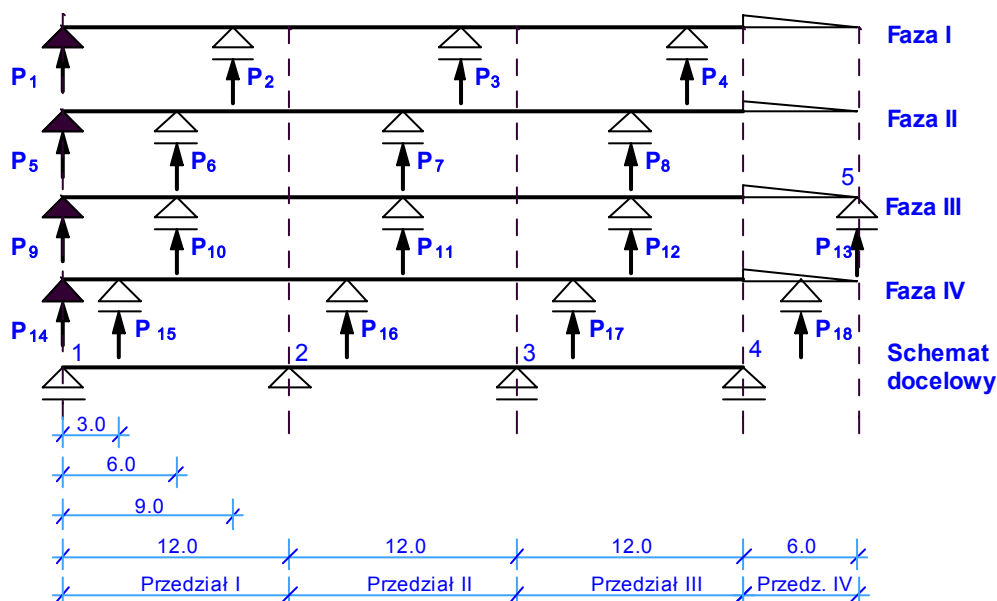
Rys. 100. Funkcja ograniczenia G_8 w obliczeniach sprawdzających w fazie montażowej I

5.2. Przykład 2 – stany montażowe dźwigara stalowego montowanego metodą nasuwania podłużnego

W przykładzie 2 zamieszczono pełne sformułowanie zadania optymalizacji dźwigara stalowego w fazie montażu metodą nasuwania podłużnego. Tak sformułowane zadanie może być częścią zadania optymalizacji dźwigara zespolonego z uwzględnieniem wszystkich faz montażowych i eksploatacyjnych, którego dźwigar stalowy jest montowany analizowaną w tym zadaniu metodą.

5.2.1. Założenia i dane

Sformułowano problem optymalizacji dźwigara stalowego opisanego w punkcie 4.3.1.3 w przykładzie z zastosowaniem awanbeka (rys. 5). Optymalizowany dźwigar to blachownica o przekroju dwuteowym pracująca docelowo w schemacie belki ciągłej trzyprzęsłowej. Dźwigar jest montowany poza przyczółkiem i stopniowo przesuwany na kolejne podpory. W zadaniu rozważono etap nasuwania ostatniego przęsła belki (rys. 101).



Rys. 101. Schematy statyczne dźwigara stalowego w metodzie nasuwania podłużnego

Oznaczenia i dane

rozpiętość przęsła	$L = 12.0$ m		
długość awanbeka	$L_a = 6.0$ m		
grubość pasów blachownicy	$t_p = 12$ mm		
grubość środnika	$t_w = 10$ mm		
wysokość środnika	$h_w = 914$ mm		
odległość podpory montażowej od lewej podpory stałej		w fazie I	$x_1 = 9.0$ m
		w fazie II i III	$x_2 = 6.0$ m
		w fazie IV	$x_3 = 3.0$ m

Przyjęto stałe charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego awanbeka

pole powierzchni	$A_a = 0.01$ m ²
moment bezwładności	$I_a = 0.1$ m ⁴

Przyjęto stal dźwigara 18G2

moduł Younga stali	$E = 206$ GPa
wytrzymałość obliczeniowa	$F_d = 280$ MPa
ciężar właściwy stali	$\gamma = 78.5$ kN/m ³

Obciążenia

W fazie montażu metodą nasuwania podłużnego podstawowym obciążeniem jest ciężar własny. Jednak, ze względu na konieczność sprawdzenia działania algorytmu wprowadzono obciążenie dodatkowe $q = 100$ kN/m, przy którym zmienna decyzyjna przyjmuje wartości większe od minimalnej.

5.2.2. Równania stanu

Opis zmiennych stanu oraz równania stanu w rozważanych sytuacjach obliczeniowych przedstawiono w tablicach 26, 27.

Tablica 26. Opis zmiennych stanu

	Zmienne stanu w rozważanych sytuacjach obliczeniowych				
	Ugięcie	Kąt obrotu	Moment zginający	Siła poprzeczna	V
Faza montażowa I	y_1	y_2	y_3		y_{17}
Faza montażowa II	y_4	y_5	y_6		
Faza montażowa III	y_7	y_8	y_9		
Faza montażowa IV	y_{10}	y_{11}	y_{12}		
Schemat docelowy	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	

Tablica 27. Równania stanu w stanach montażowych

	Równania stanu w przedziałach charakterystycznych	
	Przedział 1, 2 i 3	Przedział 4
Faza montażowa I	$y_1' = y_2$	$y_1' = y_2$
	$y_2' = y_3/(EI)$	$y_2' = y_3/(EI)$
	$y_3' = -y_{17}\gamma - qx + P_1 + w_{11}P_2 + w_{12}P_3 + w_{13}P_4$	$y_3' = -y_{17}\gamma - (x - 3L)A_a\gamma_a + P_1 + w_{11}P_2 + w_{12}P_3 + w_{13}P_4 - 3qL$
Faza montażowa II	$y_4' = y_5$	$y_4' = y_5$
	$y_5' = y_6/(EI)$	$y_5' = y_6/(EI)$
	$y_6' = -y_{17}\gamma - qx + P_5 + w_{21}P_6 + w_{22}P_7 + w_{23}P_8$	$y_6' = -y_{17}\gamma - (x - 3L)A_a\gamma_a + P_5 + w_{21}P_6 + w_{22}P_7 + w_{23}P_8 - 3qL$
Faza montażowa III	$y_7' = y_8$	$y_7' = y_8$
	$y_8' = y_9/(EI)$	$y_8' = y_9/(EI)$
	$y_9' = -y_{17}\gamma - qx + P_9 + w_{21}P_{10} + w_{22}P_{11} + w_{23}P_{12}$	$y_9' = -y_{17}\gamma - (x - 3L)A_a\gamma_a + P_9 + w_{21}P_{10} + w_{22}P_{11} + w_{23}P_{12} - 3qL$
Faza montażowa IV	$y_{10}' = y_{11}$	$y_{10}' = y_{11}$
	$y_{11}' = y_{12}/(EI)$	$y_{11}' = y_{12}/(EI)$
	$y_{12}' = -y_{17}\gamma - qx + P_{14} + w_{31}P_{15} + w_{32}P_{16} + w_{33}P_{17} + w_{34}P_{18}$	$y_{12}' = -y_{17}\gamma - (x - 3L)A_a\gamma_a + P_{14} + w_{31}P_{15} + w_{32}P_{16} + w_{33}P_{17} + w_{34}P_{18} - 3qL$
Schemat docelowy	$y_{13}' = y_{14}$	$y_{13}' = 0$
	$y_{14}' = y_{15}/(EI)$	$y_{14}' = 0$
	$y_{15}' = y_{16}$	$y_{15}' = 0$
	$y_{16}' = -A\gamma - q$	$y_{16}' = 0$
Objętość	$y_{17}' = A$	$y_{17}' = 0$

5.2.3. Warunki zmiennych stanu

Tablica 28. Warunki punktowe zmiennych stanu w fazach montażowych

Faza pracy	Zmienne stanu	Oznaczenie punktów charakterystycznych							
		1	2		3		4		5
			-	+	-	+	-	+	
Faza montażowa I	y_1	0	C		C		C		-
	y_2	-	C		C		C		-
	y_3	0	C		C		C		0
Faza montażowa II	y_4	0	C		C		C		-
	y_5	-	C		C		C		-
	y_6	0	C		C		C		0
Faza montażowa III	y_7	0	C		C		C		-
	y_8	-	C		C		C		-
	y_9	0	C		C		C		0
Faza montażowa IV	y_{10}	0	C		C		C		-
	y_{11}	-	C		C		C		-
	y_{12}	0	C		C		C		0
Schemat docelowy	y_{13}	0	0	0	0	0	0	0	-
	y_{14}	-	C		C		-	0	-
	y_{15}	0	C		C		0	0	-
	y_{16}	-	-	-	-	-	-	0	-
Objętość	y_{17}	0	C		C		C		-

Funkcje w_{mn} występujące w równaniach stanu zostały zdefiniowane w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 w_{11} &= w(x, x_1, 3L + L_a) & w_{12} &= w(x, x_1 + L, 3L + L_a) & w_{13} &= w(x, x_1 + 2L, 3L + L_a) \\
 w_{21} &= w(x, x_2, 3L + L_a) & w_{22} &= w(x, x_2 + L, 3L + L_a) & w_{23} &= w(x, x_2 + 2L, 3L + L_a) \\
 w_{31} &= w(x, x_3, 3L + L_a) & w_{32} &= w(x, x_3 + L, 3L + L_a) & w_{33} &= w(x, x_3 + 2L, 3L + L_a) \\
 w_{34} &= w(x, x_3 + 3L, 3L + L_a)
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Zdefiniowano również funkcje wp_m występujące w warunkach wewnątrz przedziałów:

$$\begin{aligned}
 wp_1 &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } (x = x_1 \cup x = x_1 + L \cup x = x_1 + 2L) \\ 1 & \text{gdy } (x \neq x_1 \cup x \neq x_1 + L \cup x \neq x_1 + 2L) \end{cases} \\
 wp_2 &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } (x = x_2 \cup x = x_2 + L \cup x = x_2 + 2L) \\ 1 & \text{gdy } (x \neq x_2 \cup x \neq x_2 + L \cup x \neq x_2 + 2L) \end{cases} \\
 wp_3 &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } (x = x_3 \cup x = x_3 + L \cup x = x_3 + 2L \cup x = x_3 + 3L) \\ 1 & \text{gdy } (x \neq x_3 \cup x \neq x_3 + L \cup x \neq x_3 + 2L \cup x \neq x_3 + 3L) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Warunki dodatkowe w fazach montażowych

Warunek równowagi globalnej dźwigara w fazie I

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - y_{17}(3L)\gamma - L_a A_a \gamma_a - 3qL = 0 \quad (5.43)$$

Warunek równowagi globalnej dźwigara w fazie II

$$P_5 + P_6 + P_7 + P_8 - y_{17}(3L)\gamma - L_a A_a \gamma_a - 3qL = 0 \quad (5.44)$$

Warunek równowagi globalnej dźwigara w fazie III

$$P_9 + P_{10} + P_{11} + P_{12} + P_{13} - y_{17}(3L)\gamma - L_a A_a \gamma_a - 3qL = 0 \quad (5.45)$$

Warunek równowagi globalnej dźwigara w fazie IV

$$P_{14} + P_{15} + P_{16} + P_{17} + P_{18} - y_{17}(3L)\gamma - L_a A_a \gamma_a - 3qL = 0 \quad (5.46)$$

Warunki wewnątrz przedziałów charakterystycznych

Warunek zerowania się ugięcia w chwilowych punktach podparcia w fazie I

$$wp_1 y_1 - y_1 = 0 \quad (5.47)$$

Warunek zerowania się ugięcia w chwilowych punktach podparcia w fazie II

$$wp_2 y_4 - y_4 = 0 \quad (5.48)$$

Warunek zerowania się ugięcia w chwilowych punktach podparcia w fazie III

$$wp_2 y_7 - y_7 = 0 \quad (5.49)$$

Warunek zerowania się ugięcia w chwilowych punktach podparcia w fazie IV

$$wp_3 y_{10} - y_{10} = 0 \quad (5.50)$$

5.2.4. Ograniczenia w zadaniu optymalizacji

W prezentowanym zadaniu zdefiniowano dopuszczalny zakres wartości zmiennej decyzyjnej, którą jest szerokość pasów dźwigara stalowego.

$$U_1 \in \langle 0.200, 0.500 \rangle \text{ m} \quad (5.51)$$

Ponadto sformułowano 5 ograniczeń postaci 2.5 Są to ograniczenia ekstremalnych naprężeń krawędziowych w czterech fazach montażowych i w fazie ze schematem docelowym.

$$G_1 = R - \left| \frac{y_3}{I} \left(\frac{h_w}{2} + t_p \right) \right| \quad G_2 = R - \left| \frac{y_6}{I} \left(\frac{h_w}{2} + t_p \right) \right| \quad G_3 = R - \left| \frac{y_9}{I} \left(\frac{h_w}{2} + t_p \right) \right| \quad (5.52)$$

$$G_4 = R - \left| \frac{y_{12}}{I} \left(\frac{h_w}{2} + t_p \right) \right| \quad G_5 = R - \left| \frac{y_{15}}{I} \left(\frac{h_w}{2} + t_p \right) \right|$$

5.2.5. Sformułowanie zadania optymalizacji

Zadanie optymalizacji w przykładzie 2 polega na wyznaczeniu przebiegu szerokości pasów dźwigara, przy którym funkcja celu optymalizacji przyjmuje wartość minimalną. Funkcją celu, podobnie jak w przykładzie 1, jest objętość stali użytej do wykonania dźwigara. Zadanie posiada strukturę formalną umożliwiającą zastosowanie zasady maksimum.

1. Sformułowano równania stanu dźwigara w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\dot{y}_i = f_i[y(x), u_1(x), x] \quad i = 1 \div 17 \quad (5.53)$$

2. W odniesieniu do zmiennych stanu i zmiennej decyzyjnej określono obszary dopuszczalne oraz sformułowano ograniczenia

$$G_s[y(x), u_1(x), x] \geq 0 \quad s = 1 \div 5 \quad (5.54)$$

3. Funkcja Hamiltona w analizowanym problemie ma postać

$$H = \lambda^T f[y(x), u_1(x), x] + \mu G[y(x), u_1(x)] \quad (5.55)$$

4. Układ równań zmiennych sprzężonych (2.13) ma postać

$$\lambda'_i = - \sum_{k=1}^{17} \lambda_k \frac{\partial f_k(y, u_1)}{\partial y_i} - \sum_{s=1}^5 \mu_s \frac{\partial G_s(y, u_1)}{\partial y_i} \quad i = 1 \div 17 \quad (5.56)$$

5. Równanie wynikające z warunku maksimum funkcji Hamiltona (2.14) ma postać

$$0 = \sum_{k=1}^{17} \lambda_k \frac{\partial f_k(y, u_1)}{\partial u_1} + \sum_{s=1}^5 \mu_s \frac{\partial G_s(y, u_1)}{\partial u_1} \quad (5.57)$$

Rozwiązanie optymalne zostanie wyznaczone z różniczkowo algebraicznego układu równań (5.53), (5.56) i (5.57) z uwzględnieniem następujących wyjątków.

1. Jeżeli zmienna decyzyjna przyjmie wartości z brzegu zdefiniowanego obszaru dopuszczalnego to równanie (5.57) jest wyłączone z optymalizacji.
2. Jeżeli występuje aktywność jednego z ograniczeń (5.52) to równanie (5.57) jest wyłączone a na jego miejscu obowiązuje równanie

$$G_m[y(x), u(x), x] = 0 \quad m - \text{numer aktywnego ograniczenia} \quad (5.58)$$

3. Rozwiązanie problemu jest możliwe tylko wtedy, gdy ma miejsce aktywność co najwyżej jednego ograniczenia.

5.2.6. Wyniki obliczeń w programie Dircol – 2.1 – wyznaczenie rozwiązania optymalnego

Sformułowany wyżej wielopunktowy problem brzegowy został rozwiązany za pomocą programu Dircol-2.1. W zadaniu wyznaczono:

- 17 zmiennych stanu (rys. 109 ÷ 112),
- 17 zmiennych sprzężonych (rys. 109 ÷ 112),
- 1 zmienną decyzyjną (rys. 102),
- 18 parametrów sterowania,
- 5 mnożników Lagrange'a związanych z ograniczeniami zmiennych stanu,
- 19 stałych odpowiedzialnych za skoki zmiennych stanu w punktach podparcia i na końcu,
- 19 stałych odpowiedzialnych za skoki zmiennych sprzężonych w punktach podparcia i na końcu,
- 4 stałe odpowiedzialne za skoki funkcji Hamiltona (rys. 103).

Ogółem wyznaczono 100 wielkości. Wyznaczono rozwiązanie, które spełnia warunki konieczne optymalności. Na rysunkach 102 ÷ 111 przedstawiono kompletne wyniki obliczeń w postaci graficznej.

Przedstawiona na rysunku 102 optymalna szerokość pasów dźwigara stalowego wynika ze sformułowania modelu fizycznego, w którym rozważano kilka ustalonych położenia dźwigara w trakcie nasuwania ostatniego przęsła. Przyjęcie innych lub większej liczby ustalonych położenia prowadzi do innego rozwiązania. Jednak wszystkie te rozwiązania zawierają się w pewnej obwiedni, którą można w przybliżeniu wyznaczyć na podstawie wykresu przedstawionego na rysunku 102. Realizacja

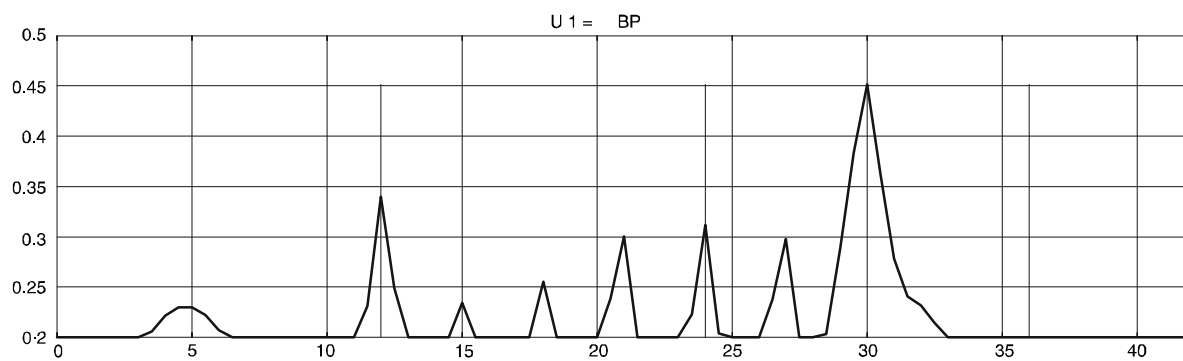
wyznaczonego rozwiązania w praktyce powinna uwzględniać wymiary dostępnych materiałów podobnie jak w przykładzie pierwszym oraz powinna być poprzedzona obliczeniami sprawdzającymi z uwzględnieniem wszelkich ograniczeń wynikających z norm.

Funkcja Hamiltona przedstawiona na rysunku 103 ma przebieg charakterystyczny zadania autonomicznego, w którym zmienne stanu nie zależą jawnie od zmiennej niezależnej x .

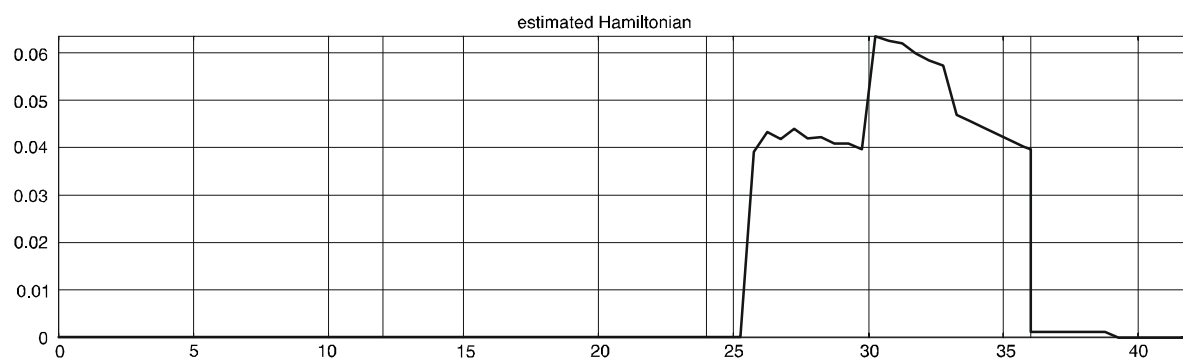
Rysunki 104 ÷ 108 przedstawiają funkcje ograniczeń. Na ich podstawie w przybliżeniu, lub dokładniej na podstawie wyników wyprowadzonych w postaci danych liczbowych, można wskazać przedziały, w których poszczególne ograniczenia są aktywne. W prezentowanym przykładzie wystąpiła aktywność wszystkich ograniczeń w różnych przedziałach. W każdym z tych przedziałów, ze względu na liczbę zmiennych decyzyjnych, mogła wystąpić aktywność najwyżej jednego ograniczenia.

Na rysunkach 109 ÷ 112 zestawiono wykresy zmiennych stanu i odpowiadających im zmiennych sprzężonych. Można zauważyć charakterystyczne zależności pomiędzy tymi zmiennymi, które dokładnie wyszczególniono w analizie rozwiązania optymalnego w przykładzie pierwszym. W tym przykładzie występuje dodatkowo zależność pomiędzy pewnymi zmiennymi stanu i odpowiadającymi im zmiennymi sprzężonymi w punktach aktywności warunków zerowania się ugięcia sformułowanych wewnątrz przedziałów charakterystycznych. W ww. warunkach występują jawnie zmienne stanu odpowiadające ugięciu dźwigara. Te warunki mogą być aktywne wyłącznie punktowo i w punktach, w których są aktywne zmienne sprzężone odpowiadające występującym jawnie ugięciom doznają skoku.

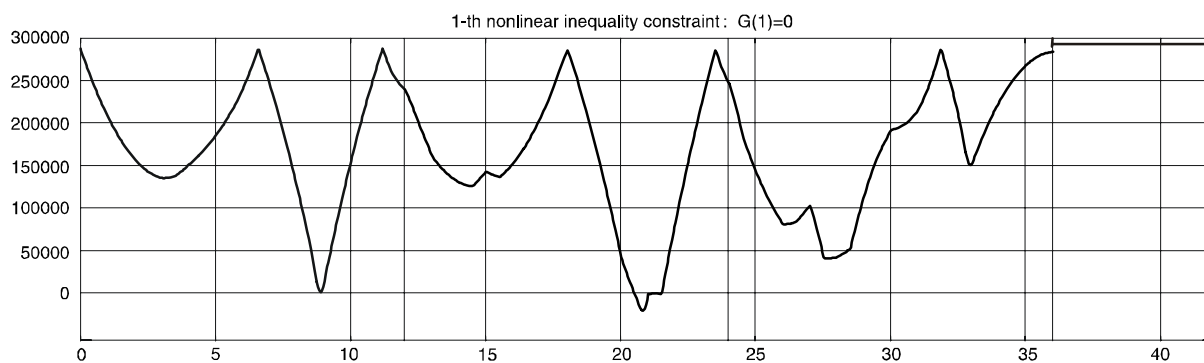
W przykładzie drugim nie zaproponowano rozwiązania praktycznego wraz z obliczeniami sprawdzającymi ponieważ nie uwzględniono w nim wszystkich faz pracy, które mają wpływ na rozwiązanie optymalne. Przykład ten ma na celu jedynie wykazanie, że zaproponowane sformułowanie może być zastosowane do optymalizacji obiektów montowanych metodą nasuwania podłużnego.



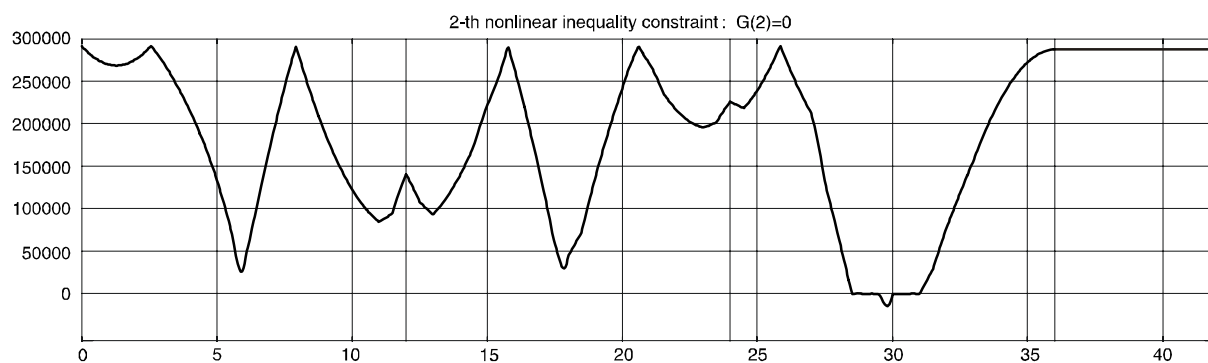
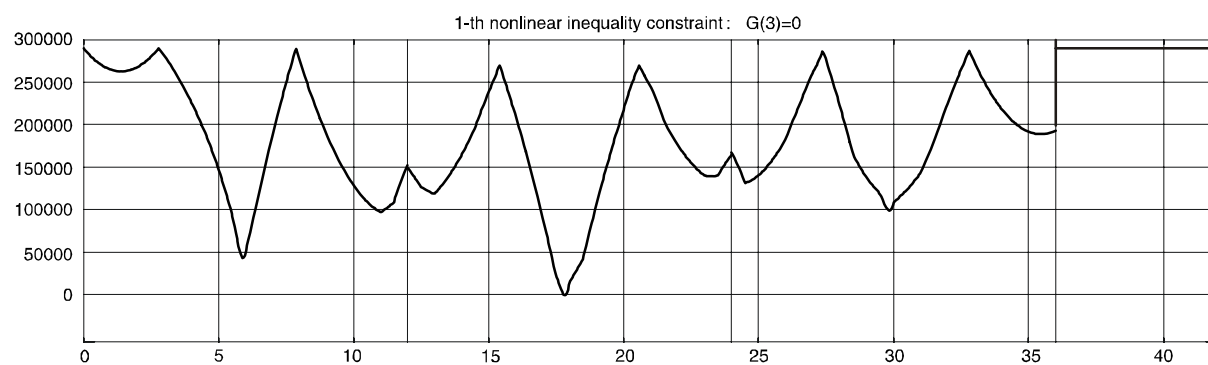
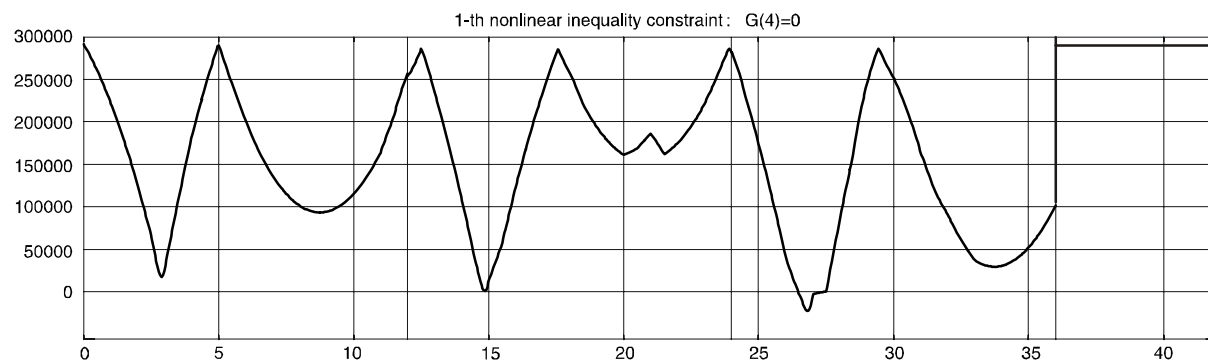
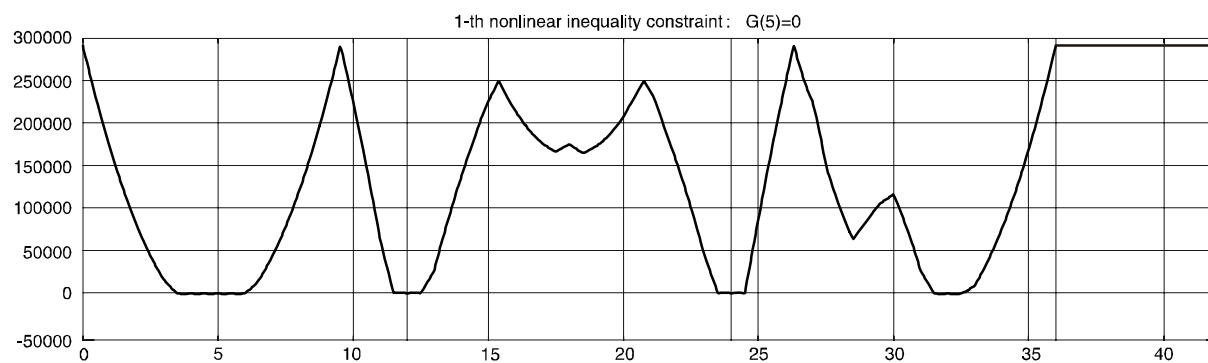
Rys. 102. Optymalna szerokość pasów dźwigara stalowego

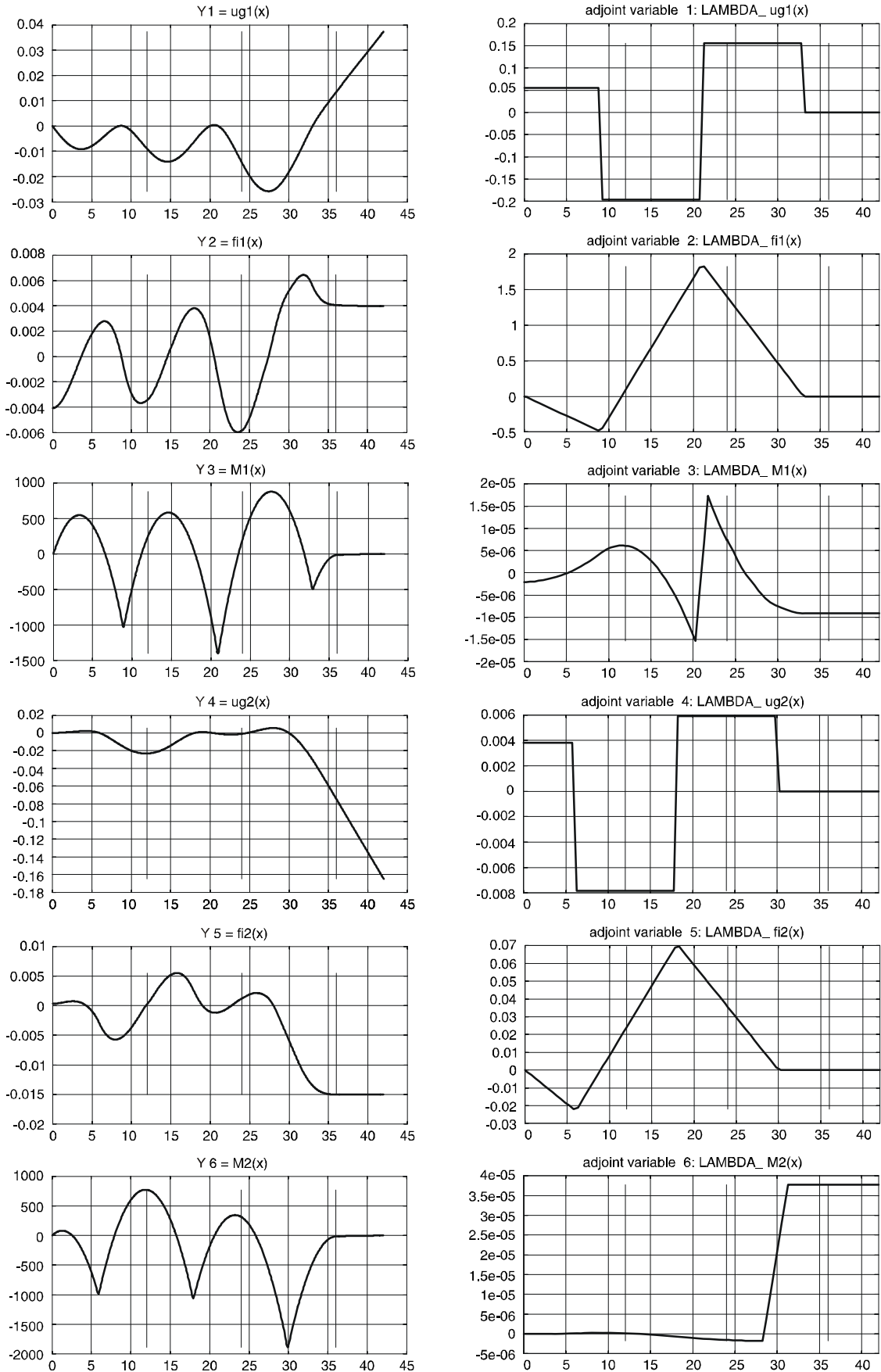


Rys. 103. Funkcja Hamiltona zadania optymalizacji

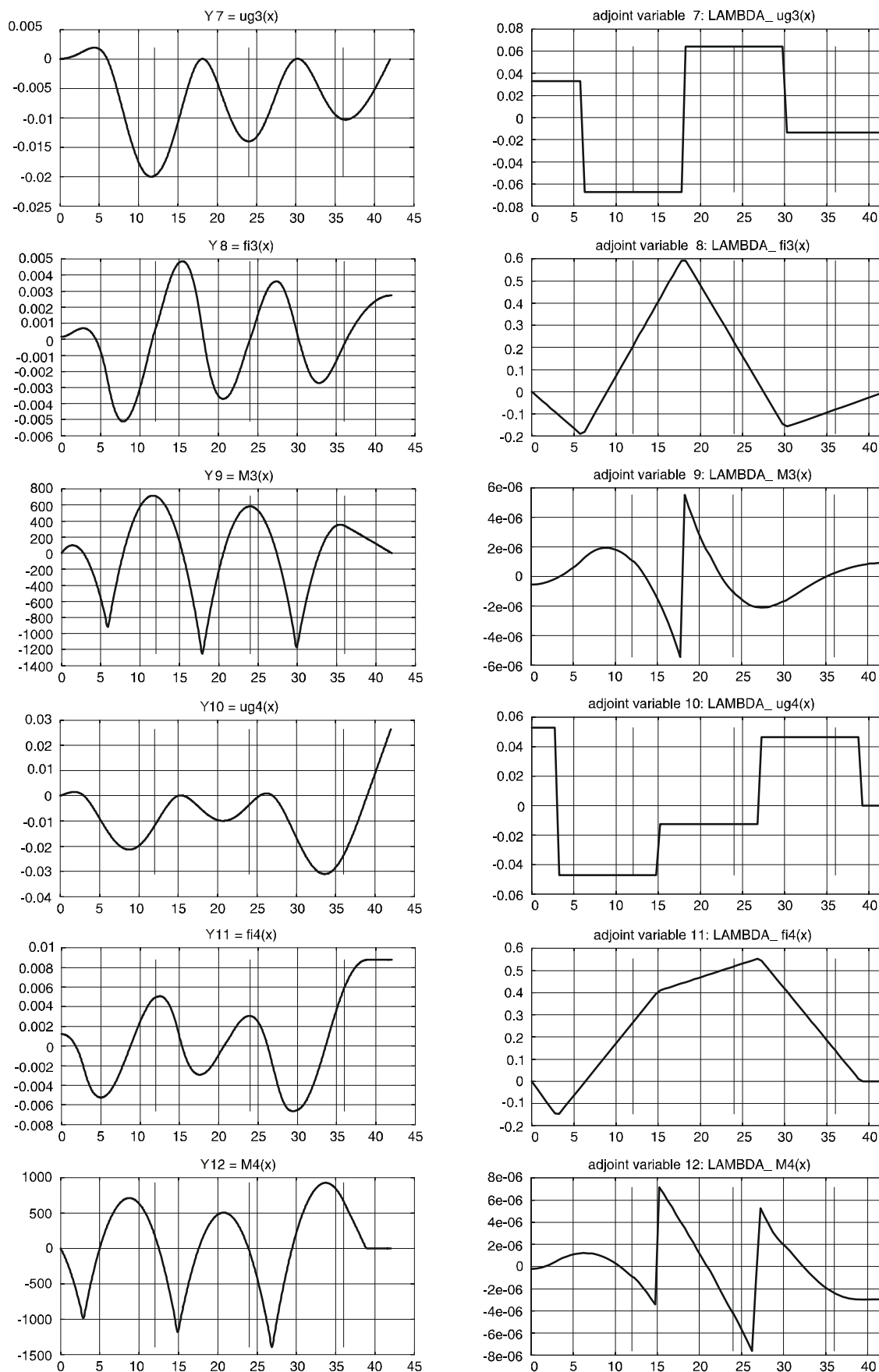


Rys. 104. Funkcja ograniczenia G_1

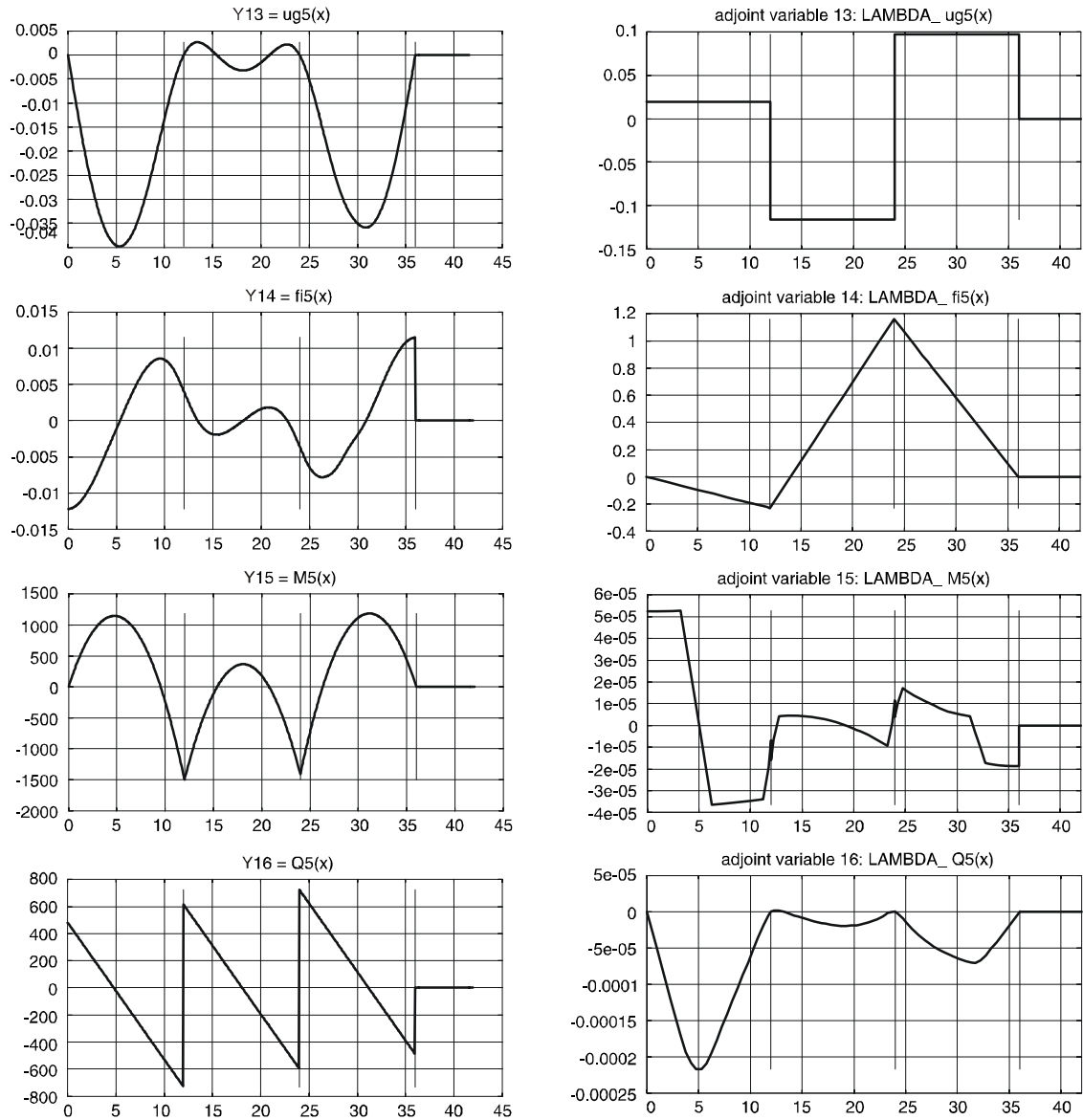
Rys. 105. Funkcja ograniczenia G_2 Rys. 106. Funkcja ograniczenia G_3 Rys. 107. Funkcja ograniczenia G_4 Rys. 108. Funkcja ograniczenia G_5



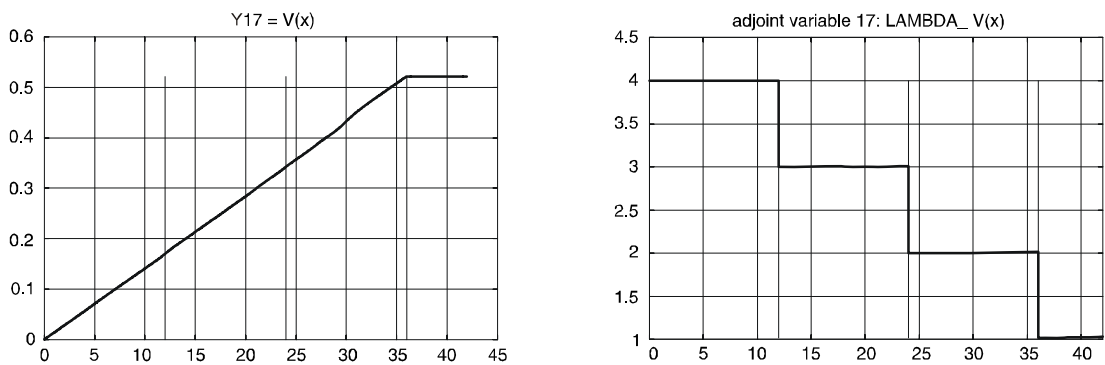
Rys. 109. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazach montażowych I i II



Rys. 110. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazach montażowych III i IV



Rys. 111. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w fazie ze schematem docelowym



Rys. 112. Objętość dźwigara i odpowiadająca jej zmienna sprzężona

6. Zakończenie i wnioski

W pracy dokonano analizy podstawowych zagadnień związanych z projektowaniem dźwigarów zespolonych pod kątem praktycznego zastosowania teorii sterowania do optymalnego kształtowania przekroju. W efekcie tej analizy zaproponowano metody formułowania modeli matematycznych opisujących dźwigar zespolony w sytuacjach obliczeniowych, jakie mogą wystąpić w okresie od rozpoczęcia budowy obiektu do końca okresu eksploatacji. Formułowane modele matematyczne posiadają strukturę formalną umożliwiającą zastosowanie zasady maksimum i sprowadzenie problemu optymalizacji do wielopunktowego problemu brzegowego, który może być rozwiązany metodami numerycznymi. W ten sposób wyznacza się przekrój poprzeczny, który spełnia warunki konieczne optymalności.

Zasadniczym problemem jaki występuje w optymalizacji dźwigarów zespolonych metodami teorii sterowania jest złożoność i ilość istotnych zagadnień, które trzeba w optymalizacji uwzględnić. Sformułowanie zadań optymalizacji w odniesieniu do rzeczywistych obiektów było możliwe dzięki opracowaniu własnych rozwiązań.

1. Do optymalizacji wprowadzono funkcję $w(x, a, b)$ osiągającą wartość równą 1 w przedziale (a, b) i 0 poza tym przedziałem. Wprowadzenie funkcji umożliwia zapisanie funkcji nieciągłych w skończonej liczbie punktów takich jak obciążenie rozłożone, siły poprzeczne, charakterystyki geometryczne itp. w postaci obowiązującej wzdłuż osi ustroju prętowego, dzięki czemu w istotny sposób zmniejsza się liczba przedziałów całkowania. Wprowadzenie tej funkcji umożliwiło sformułowanie i rozwiązanie szeregu problemów optymalizacji, niemożliwych lub trudnym do rozwiązania przy tradycyjnym sformułowaniu.
2. Drugą funkcją wprowadzoną do optymalizacji jest funkcja $w_p(x, a)$ osiągająca wartość 0 w punkcie $x = a$ i 1 w punkcie $x \neq a$. Funkcja w_p umożliwia sformułowanie warunku punktowego wewnątrz przedziału charakterystycznego.
3. Warunki punktowe wewnątrz przedziałów charakterystycznych umożliwiły uwzględnienie w procesie optymalizacji wielu sytuacji obliczeniowych, w których dźwigar jest przesunięty w stosunku do docelowego położenia, bez konieczności ustalania dodatkowych przedziałów charakterystycznych.
4. Zaproponowano metodę uwzględnienia w optymalizacji obciążenia pojazdem ponadnormatywnym K poprzez wyznaczenie obwiedni momentów zginających i sił poprzecznych wywołanych tym obciążeniem. Ta metoda pozwala uwzględnić poruszające się obciążenie skupione w sposób ciągły. Wymaga rozważenia znacznie mniejszej liczby sytuacji obliczeniowych niż w sformułowaniu tradycyjnym, w którym rozważa się obciążenie skupione w ustalonych położeniach.
5. Uwzględniono w optymalizacji zjawiska reologiczne zachodzące w betonie. Zastosowano metodę zastępczego modułu sprężystości w stanach montażowych oraz metodę Trosta w stanach eksploatacji.
6. W pierwszym przykładzie obliczeniowym, w którym analizowano dźwigar symetryczny, przyjęto połówkowy schemat statyczny. W sytuacjach obliczeniowych, w których występują obciążenia niesymetryczne, sformulowano warunki punktowe w osi symetrii bez konieczności rozkładu obciążenia na część symetryczną i antysymetryczną.
7. Ograniczenia w zadaniu optymalizacji prezentowanym w przykładzie pierwszym sformulowano z zastosowaniem funkcji \max i \min . Takie sformułowanie umożliwia uwzględnienie wszystkich rozważanych stanów montażowych i stanów eksploatacji bez konieczności formułowania ograniczeń w każdym stanie oddzielnie. Takie postępowanie jest równoznaczne z zastosowaniem obwiedni sił przekrojowych. Ponadto zastosowanie tych funkcji w istotny sposób zmniejsza ilość ograniczeń.

Ponadto w pracy dokonano analizy stanów montażowych dźwigara stalowego montowanego na podporach, metodą wspornikową i nasuwania podłużnego, dokonano analizy stanów montażowych płyty pomostu montowanej metodą betonowania odcinkowego. Uwzględniono obciążenia ciężarem własnym, obciążenia normowe, zjawiska reologiczne, sprężenie płyty przez przemieszczenie podpór, sprężenie kablami i obciążenia termiczne.

Literatura

Literatura ogólna

1. Bodnar A.: *Wytrzymałość materiałów*, Skrypt Politechniki Krakowskiej, Kraków 2003;
2. Jamróży Z.: *Beton i jego technologie*, PWN, Warszawa - Kraków 2001;
3. Piechnik S.: *Wytrzymałość materiałów*, Skrypt Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999;
4. Starosolski W.: *Konstrukcje żelbetowe*, PWN, Warszawa 2000.

Teoria mostów zespolonych

5. Czudek H.: *Konstrukcje zespolone w budownictwie metalowym*, Prace naukowe Politechniki Warszawskiej nr 11, Warszawa 1969;
6. Furtak K.: *Mosty zespolone*, PWN, Kraków 1999;
7. Furtak K.: *Podstawy mostów zespolonych*, skrypt Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999;
8. Furtak K.: *Wprowadzenie do projektowania mostów*, skrypt Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999;
9. Koreleski J.: *Zespolone konstrukcje mostowe*, PWN, Warszawa - Kraków 1967;
10. Madaj J.: *Sztywność giętna stalowo-betonowego przekroju zespolonego z rozciąganą częścią betonową*, Konferencja naukowo-techniczna „Mosty zespolone”, Kraków 1998;
11. Radoń M.: *Ugięcie belek zespolonych typu stal – beton pod obciążeniami doraźnymi i zmiennymi*, Praca doktorska, Kraków 2004;
12. Ryż K.: *Wpływ wybranych procesów długotrwałych na stan mechaniczny zespolonych konstrukcji mostowych typu beton – stal*, Praca doktorska, Kraków 1990;
13. Zobel H.: *Naturalne zjawiska termiczne w mostach*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2003.

Teoria sterowania

14. Bryson A. E., Ho Y.-C.: *Applied Optimal Control. Printing*. Hemisphere Publishin Corporation, New York, 1975;
15. Bulirsch R., *Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung*, Report, Carl-Cranz Gesellschaft, 1971;
16. Chudej K.: *Optimale Steuerung des Aufstieges eines zweistufigen Hyperschall-Raumtransporters*, Mathematisches Institut der Technischen Universität München, Dissertation, München 1994;
17. Gajewski A., Życzkowski M.: *Optymalne kształtowanie ustrojów prętowych przy warunkach stateczności*. Wybrane zagadnienia stateczności konstrukcji, 133-226, 1987;
18. Hartl R., Sethi S. P. Vickson R. G.: *A Survey of The Maksimum Principles for Control Problems with State Constraints*. SIAM Review Vol. 17. No. 2, 181-218, 1995;
19. Laskowski H., Mikulski L.: *Optymalne kształtowanie konstrukcji w kategoriach teorii sterowania na przykładzie belki zespolonej*. Inżynieria i Budownictwo 8/2005, 448-453;
20. Laskowski H., Mikulski L.: *Optymalne kształtowanie stalowej ramy portalowej*. Inżynieria i Budownictwo 12/2005, 681-684;
21. Laskowski H.: *Projekt mostu zespolonego z elementami optymalizacji*, Politechnika Krakowska, Instytut Mechaniki Budowli, praca dyplomowa, Kraków 2004;
22. Mikulski L.: *Gestaltoptimierung von elastischen Trägern bei Verzerrung der Bogenachse*. ZAMM Z. angew. Math. Mech. 71, 719-722, 1993;

23. Mikulski L.: *Optimale Gestaltung elastischer Stabe mit Zustandsbeschränkungen*. ZAMM Z. angew. Math. Mech. 73, 788-792, 1991;
24. Mikulski L.: *Optymalne kształtowanie sprężystych układów prętowych*, monografia 259, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999;
25. Oberle H. J., Grimm W.: BNDSCO – A Program for the Numerical Solution of Optimal Control Problems. DLR IB 515. 1989;
26. Pesch H. J.: *A Practical Guide to the Solution of Real-life Optimal Control Problems*. Control and Cybernetics 23, 1/2, 1994, s. 7-60;
27. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. B., Gamkrelidze V., Mischenko E. F.: *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*. München, Wien, Oldenburg, 1964;
28. Stoer J., Bulirsch R.: *Numerische Mathematik 2*. Springer-Verlag, 1990;
29. Stoer J., Bulirsch R.: *Wstęp do analizy numerycznej*. PWN, Warszawa, 1987;
30. Stryk O. von: *Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, nr 441, Düsseldorf: VDI-Verlag, 1995;
31. Stryk O. von: *User's Guide DIRCOL A Direct Collocation Method For The Numerical Solution Of Optimal Control Problem*, Technischen Universität München, Zentrum Mathematik, Version 2.1 April 2002;
32. Szefer G., Mikulski L.: *Optimal design of elastic arches with rectangular cross section*. SM Archives 10, 171-185, 1985;
33. Szefer G., Mikulski L.: *Optimal design of elastic arches with I cross section*. Eng. Trans. 32, 4, 467-480, 1984;
34. Szefer G.: *Konzeption der adjungierten Gleichung in der Optimalen Steuerung elastischer Systeme*. TH Leipzig, Wissensch. Zeitsch. 1984.

Przykłady rozwiązań technicznych

35. Bąk J.: Gej K., Sałach W., *Most drogowy przez rzekę Bug w Broku*, Inżynieria i Budownictwo 1995 nr 4, s. 220-223;
36. Bednarski R.: *Betonowanie płyt mostów zespolonych przez Odrę w ciągu autostrady A6 koło Szczecina*, Inżynieria i Budownictwo 3/1999, s. 160-163;
37. Furtak K., Sobczyk M., Wąchalowski K.: *Nowa generacja łączników w mostach zespolonych* Inżynieria i Budownictwo 5/1998, s.239-243;
38. Łałowski M., Pilujski B.: *Most w Wyszogrodzie – najdłuższy nowy most w Polsce*, Drogownictwo 11/1997, s. 351-357;
39. Pilujski B.: *Montaż konstrukcji stalowej mostu drogowego przez Wisłę w Wyszogrodzie*, Inżynieria i Budownictwo 5/1998, s. 231-235.

Normy

40. PN-B-03264:2002, *Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie*;
41. PN-82/B-03300, *Konstrukcje zespolone stalowo-betonowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. Belki zespolone krępe*;
42. PN-86/B-03301, *Konstrukcje zespolone stalowo-betonowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. Belki zespolone smukłe*;
43. PN-85/S-10030, *Obiekty mostowe. Obciążenia*;
44. PN-91/S-10042, *Obiekty mostowe. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Projektowanie*;
45. PN-82/S-10052, *Obiekty mostowe. Konstrukcje stalowe. Projektowanie*.

