

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki
Wydział Inżynierii Środowiska

mgr inż. Elżbieta Jarosińska

**WIELOMODALNOŚĆ PRZEPLYWÓW MAKSYMALNYCH
ROCZNYCH RZEK POLSKI**

Praca doktorska

Promotor
Dr hab. Stanisław Węglarczyk, prof. PK

Kraków 2005

*Składam bardzo gorące podziękowania
dr hab. Stanisławowi Węglarczykowi, prof. PK
za cenne wskazówki, wielką pomoc
oraz
ogromną cierpliwość wykazaną
podczas tworzenia tej pracy*

SPIS TREŚCI

1. WPROWADZENIE	4
1.1 TŁO PRACY	4
1.2 CEL PRACY	6
1.3 ZAKRES PRACY	7
1.4 WYKAZ OZNACZEŃ.....	8
2. ESTYMACJA NIEPARAMETRYCZNA	11
2.1 FUNKCJA JĄDROWA I ESTYMATOR JĄDROWY	11
2.2 SYMETRYCZNE FUNKCJE JĄDROWE	13
2.3 ASYMETRYCZNE FUNKCJE JĄDROWE	15
2.4 METODY WYBORU WSPÓŁCZYNNIKA GŁADKOŚCI.....	18
2.4.1 Metoda praktyczna obliczania h	19
2.4.2 Metoda LSCV oceny krzyżowej za pomocą najmniejszych kwadratów.....	20
2.5 TESTY WIELOMODALNOŚCI.....	22
2.5.1 Metoda wygładzania krytycznego	23
2.5.2 Metoda nadwyżki masy	24
3. WYBÓR NAJLEPSZEGO NIEPARAMETRYCZNEGO ESTYMATORA FUNKCJI GĘSTOŚCI – EKSPERYMENT NUMERYCZNY	27
3.1 PRZYJĘTE DO EKSPERYMENTU MONTE CARLO „RZECZYWISTE” ROZKŁADY POPULACJI 29	
3.2 ESTYMACJA JĄDROWA Z SYMETRYCZNĄ (GAUSSOWSKĄ) FUNKCJĄ JĄDROWĄ I ASYMETRYCZNYMI FUNKCJAMI JĄDROWYMI	31
3.3 MIARY JAKOŚCI DOPASOWANIA ZASTOSOWANYCH ESTYMATORÓW JĄDROWYCH DO PRZYJĘTYCH RZECZYWISTYCH FUNKCJI GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIENSTWA	33
3.3.1 Współczynnik determinacji R^2	35
3.3.2 Względny błąd kwantyla δq_p	40
3.3.3 Liczba maksimumów L_{max} estymatora funkcji gęstości	46
3.4 PODSUMOWANIE	53
4. WYKORZYSTANE DANE PRZEPIWÓW MAKSYMALNYCH W ROKU....	54
5. IDENTYFIKACJA WIELOMODALNOŚCI FUNKCJI GĘSTOŚCI PRZEPIWÓW MAKSYMALNYCH W ROKU.....	58
5.1 WIELOMODALNOŚĆ BADANYCH PRZEPIWÓW MAKSYMALNYCH W ROKU SUGEROWANA PRZEZ ESTYMATOR GAUSSOWSKI	58
5.2 TESTOWANIE WIELOMODALNOŚCI ROZKŁADÓW PRZEPIWÓW MAKSYMALNYCH W ROKU	66
5.2.1 Testowanie hipotezy o wielomodalności rozkładów przepływów maksymalnych w roku metodą wygładzania krytycznego (test Silvermana).....	66
5.2.2 Testowanie hipotezy o wielomodalności rozkładów przepływów maksymalnych w roku metodą nadwyżki masy	72
5.2.3 Podsumowanie.....	76

6.	ANALIZA CHARAKTERU WIELOMODALNOŚCI ROZKŁADÓW BADANYCH PRZEPIYWÓW MAKSYMALNYCH W ROKU	79
6.1	ANALIZA LINIOWA (W DÓŁ RZEKI)	79
6.1.1	Odra	80
6.1.2	Kłodnica.....	82
6.1.3	Mała Panew	82
6.1.4	Nysa Kłodzka.....	83
6.1.5	Ścinawka.....	84
6.1.6	Warta.....	84
6.1.7	Noteć.....	86
6.1.8	Wisła	87
6.1.9	Dunajec	90
6.1.10	Poprad	90
6.1.11	San	91
6.1.12	Wieprz.....	92
6.1.13	Narew.....	93
6.1.14	Bug.....	94
6.2	ANALIZA OBSZAROWA	94
6.3	PODSUMOWANIE	96
7.	PODSUMOWANIE I WNIO SKI	98
8.	LITERATURA	101

1. WPROWADZENIE

1.1 Tło pracy

Identyfikacja rozkładu maksymalnych rocznych przepływów rzecznych w zadanym przekroju wodowskazowym to jedno z ważniejszych zadań hydrologii. Pomimo kilkudziesięciu lat badań, problem ten jest nadal w stadium intensywnych prac, choć praktyka wymusza pewne rozwiązania. Nie istnieje niestety żadna teoria hydrologiczna pozwalająca na wskazanie jaki rozkład w jakich warunkach powinien zostać użyty oraz jaką metodę estymacji należałoby wtedy zastosować. Mechanizm przyczynowy zjawisk i procesów hydrologicznych jest bardzo skomplikowany i obiektywne określenie funkcji rozkładu nie jest łatwe. Fakt ten oznacza, że poza pewnymi heurystycznymi wskazówkami, przedmiotowa identyfikacja maksymalnych rocznych przepływów to zagadnienie w przeważającej części statystyczne.

Najpowszechniej stosowane podejście w rozwiązywaniu tego zagadnienia polega na przyjęciu pewnego rozkładu prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku, estymacji parametrów tego rozkładu przyjętą metodą estymacji na podstawie posiadanych danych i (ewentualnie) weryfikacji uzyskanego rozkładu przyjętym testem zgodności. Podejście takie można nazwać podejściem globalnym – rozkład prawdopodobieństwa jest zadany z góry a dane empiryczne służą tylko do znalezienia parametrów tego rozkładu. Metody takie noszą też nazwę metod parametrycznych.

Dobór funkcji rozkładu oparty na zgodności założonego rozkładu prawdopodobieństwa z danymi (Kaczmarek, 1970) oraz metody estymacji określających ją parametrów (na podstawie próby losowej) zależne są od subiektywnego wyboru osoby badającej i/lub pewnej tradycji aplikacyjnej w danym kraju. Jednakże przyjęte założenie nie musi być słuszne, co może w konsekwencji powodować mniej czy bardziej istotne błędy w estymacji

przepływów miarodajnych. Funkcje rozkładów, które wykazują dobre dopasowanie do danych obserwacyjnych, często wykazują znaczne różnice w obszarach dolnego i górnego ogona danych rozkładów (Adamowski, 1985). Nie znane są też jednoznaczne kryteria, co do stosowania jednego określonego rozkładu, wybranego jako najlepszego z pewnej grupy rozkładów (Feluch, 1994).

W olbrzymiej większości przypadków przyjmuje się, że zadawany rozkład prawdopodobieństwa jest rozkładem jednomodalnym, choć istnieją pewne przesłanki, że (przynajmniej niekiedy) jest inaczej. Np. Waylen i Woo (1982) twierdzą, że istnieją różne mechanizmy generujące przepływy na wielu rzekach w Kanadzie, co może powodować wielomodalność rozkładów przepływów na tych rzekach. W podobnym duchu wypowiada się też Adamowski (1989, 2000), zwraca też na to uwagę Klemeš (2000a, b). W estymacji parametrycznej fakt niejednomodalności nie jest brany w ogóle pod uwagę, co wynika z powodu wzmiankowanego już wyżej: skoro nie ma teorii pozwalającej na jednoznaczne ustalenie jaki rozkład stosować, to należy stosować rozkłady jak najprostsze. Wynika stąd, że podejście parametryczne nie jest przygotowane do badania wielomodalności.

Rozwój technik komputerowych pozwolił na praktyczne zastosowanie metod identyfikacji rozkładu prawdopodobieństwa już dawniej teoretycznie możliwych oraz rozwój metod nowych. Opierają się one na dużo słabszych założeniach od metod parametrycznych i pozwalają intensywniej wykorzystać informację zawartą w danych. Zasadniczym wyróżnikiem tych metod jest brak założenia o postaci funkcyjnej rozkładu prawdopodobieństwa – rozkład ten jest tworzony lokalnie na podstawie danych i pewnych koniecznych procedur. Podejście takie jest więc podejściem lokalnym, a metody tutaj stosowane są nazywane metodami nieparametrycznym, a najczęściej – estymacją nieparametryczną.

Estymacja nieparametryczna jest pewną alternatywą metod parametrycznych (Hall, 2001) uzupełniając je w pewnych miejscach lub dającą nowe możliwości poszukiwania rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa, który niekoniecznie jest jednomodalny. Jest ona coraz szerzej stosowana w wielu

dziedzinach nauki, również w hydrologii (Azzalini, 1981; Bowman, 1985; Adamowski, 1985, 1989, 2000; Adamowski i Feluch, 1987; Adamowski i Labatiuk, 1987; Bardsley, 1989; Guo, 1993; Moon i Lall, 1994; Ali, 1998; Tarboton i in., 1998; Kulig, 2001; Kim i Heo, 2002). Pozwala ona danym w „mówić za siebie” (Silverman, 1986), co niejako w naturalny sposób umożliwia ujawnianie wielomodalności, jaka może charakteryzować rozkłady prawdopodobieństwa niektórych badanych zmiennych. Możliwość taką zapewnia fakt, że estymacja nieparametryczna pozwala na bezpośrednie tworzenie estymatora funkcji gęstości, co w przypadku podejścia parametrycznego nie było możliwe. Estymator ten wykorzystuje tzw. funkcję jądrową, stąd ta wersja estymacji bywa też nazywa estymacją jądrową.

W większości zastosowań dotyczących estymacji rozkładu prawdopodobieństwa za pomocą estymacji jądrowej jest ona dokonywana z wykorzystaniem symetrycznej funkcji jądrowej, najczęściej funkcji Gaussa (Silverman, 1986; Wand i in., 1991; Feluch, 1994; Mammen i Marron, 1997; Sharma i in., 1997; Tarboton i in., 1998). Należy jednak pamiętać, że technika ta nie jest lepszym zamiennikiem technik parametrycznych, chociaż są takie obszary jej zastosowań, do których jej naturalne własności ją predestynują. Takim obszarem jest niewątpliwie problem modalności rozkładów prawdopodobieństwa.

1.2 Cel pracy

Głównym celem niniejszej pracy jest właśnie identyfikacja wielomodalności przepływów maksymalnych rocznych, a dotyczyć będzie wybranych rzek polskich. Jest to zagadnienie interesujące z teoretycznego i praktycznego punktu widzenia. Stwierdzenie istotnej dwu (lub ew. więcej) modalności byłoby wskazówką do poszukiwania mechanizmów generujących różne mody (mogłoby też wpłynąć w istotny sposób na obliczane wartości najwyższych przepływów maksymalnych rocznych, co wszakże nie należy do zasadniczego wątku pracy). Wyraźne podobieństwo funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa w dwu lub więcej przekrojach wodowskazowych może

być skutkiem podobieństwa hydrologicznego, co nie jest bez znaczenia przy poszukiwaniu zależności regionalnych i wyróżniania obszarów jednorodnych.

Realizacja postawionego celu staje się w pewnym stopniu realna dzięki możliwościom, jakie zapewniają metody nieparametryczne. W kontekście analizy przepływów maksymalnych, najpowszechniej stosowana wersja estymacji (estymacja z gaussowską funkcją jądrową) ma jednak pewną wadę. Przepływy maksymalne są zmiennymi losowymi nieujemnymi a funkcja Gaussa jest określona na całej osi rzeczywistej. Może to prowadzić do „wycieku” znacznej ilości prawdopodobieństwa (nawet powyżej 5%) w obszar ujemnych przepływów, co oczywiście jest niedopuszczalne. Dlatego wykonana zostanie analiza użyteczności estymacji jądrowej z asymetryczną funkcją jądrową, która automatycznie nie dopuszcza do powstania opisanej wyżej sytuacji. Po przeprowadzonej analizie i porównaniu jakości estymatorów z asymetryczną funkcją jądrową z jakością estymatorów z symetryczną funkcją jądrową wybrany zostanie najlepszy estymator i on właśnie zostanie zastosowany do zbadania wielomodalności rozkładów prawdopodobieństwa rocznych przepływów maksymalnych wybranych rzek Polski.

1.3 Zakres pracy

Cel niniejszej pracy realizowany będzie w zakresie obejmującym następujące zagadnienia.

Po pierwsze: wybrane zostaną – oprócz estymatora gaussowskiego (tj. estymatora z symetryczną funkcją jądrową) – estymatory z asymetrycznymi funkcjami jądrowymi; dokonana zostanie selekcja metod obliczania współczynnika gładkości tych estymatorów oraz wybrane zostaną metody statystycznego testowania wielomodalności rozkładów.

Po drugie: przeprowadzona zostanie analiza porównawcza estymacji nieparametrycznej z symetryczną funkcją jądrową i z asymetrycznymi funkcjami jądrowymi. Zadanie to zostanie zrealizowane poprzez kontrolowany

eksperyment Monte Carlo ze starannie wybranymi miarami jakości odtwarzania znanych rozkładów przez kandydackie estymatory nieparametryczne.

Po trzecie: wybrany estymator (ew. estymatory) zostanie zastosowany do identyfikacji wielomodalności rozkładów rzeczywistych przepływów maksymalnych wybranych rzek Polski w wybranych przekrojach wodowskazuowych. Identyfikacja ta obejmować też będzie testowanie wielomodalności.

Po czwarte: dokonana zostanie analiza porównawcza uzyskanych estymatorów nieparametrycznych (tj. empirycznych funkcji gęstości) rzeczywistych przepływów maksymalnych wybranych rzek w celu znalezienia podobieństw i/lub różnic charakteru modalności tych rozkładów. Analiza ta będzie prowadzone przede wszystkim w dół rzek (jako analiza liniowa), ale poszukiwane będą także wzorce obszarowe.

1.4 Wykaz oznaczeń

$AMISE$	średni asymptotyczny błąd kwadratowy (<i>asymptotic mean integrated squared error</i>),
b, \hat{b}	współczynnik gładkości i jego estymator w przypadku asymetrycznej funkcji jądrowej,
C_S	współczynnik skośności,
C_V	współczynnik zmienności,
$E_m(\lambda)$	nadwyżka masy prawdopodobieństwa (<i>excess mass</i>) rzędu m ,
$f(x), f_A(x), f_F(x)$	rzeczywista funkcja rozkładu prawdopodobieństwa, funkcja gęstości (oryginał),
$\hat{f}(x)$	estymator funkcji gęstości (postać przybliżająca funkcję gęstości dla konkretnej próby losowej),
$\hat{f}_{-i}(x)$	estymator funkcji gęstości utworzony na podstawie wszystkich punktów x danych z wyjątkiem punktu x_i ,
h, \hat{h}	współczynnik gładkości i jego estymator w przypadku symetrycznej funkcji jądrowej,

h_{kryt}	najmniejszy współczynnik gładkości, dla którego estymator nieparametryczny funkcji gęstości jest jeszcze jednomodalny,
H_0	hipoteza zerowa,
H_1	hipoteza alternatywna,
\widehat{IRQ}	odchylenie międzykwartkowe (międzykwartyłowe) w próbie losowej,
$IRQ(R^2)$	odchylenie międzykwartkowe współczynników determinacji (przyjęte jako miara jakości estymacji),
$IRQ(\delta q_p)$	odchylenie międzykwartkowe względnych błędów kwantyla (przyjęte jako miara jakości estymacji),
ISE	scalkowany błąd kwadratowy (<i>integrated squared error</i>),
$K(\cdot)$	funkcja jądrowa (np. Gaussa),
L_{max}	liczba maksimumów w estymatorze funkcji gęstości,
$LSCV$	metoda oceny krzyżowej za pomocą najmniejszych kwadratów (<i>least squares cross validation</i>),
$MISE$	średni scalkowany błąd kwadratowy (<i>mean integrated squared error</i>),
$Me(R^2)$	mediana współczynników determinacji (przyjęta jako miara jakości estymacji),
$Me(\delta q_p)$	mediana względnych błędów kwantyla q_p (przyjęta jako miara jakości estymacji),
MSE	średni błąd kwadratowy (<i>mean squared error</i>),
n	liczba elementów w próbie,
N	liczba prób wygenerowanych z rozkładu rzeczywistej funkcji gęstości,
N_{ef}	liczba prób, w których powiodła się estymacja jądrowa, np. obliczone zostały współczynniki gładkości,
q_p	kwantyl rzędu p ,
$R(\hat{f}), \hat{R}(\hat{f})$	wskaźnik błędu ISE i jego estymator,

R^2	współczynnik determinacji liczony w punktach położonych w regularnych odstępach w obrębie zmienności próby,
δq_p	względny błąd kwantyla q_p ,
Δ_{n2}	statystyka testowa testu wielomodalności opartego na nadwyżce masy,
λ	poziom gęstości prawdopodobieństwa, od którego liczona jest tzw. nadwyżka masy,
$\hat{\sigma}$	odchylenie standardowe w próbie losowej,
$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	próba losowa.

2. ESTYMACJA NIEPARAMETRYCZNA

Estymacja nieparametryczna, której synonimem będzie w niniejszej pracy termin *estymacja jądrowa*, została zapoczątkowana przez Rosenblatta (1956) i Parzena (1962) pół wieku temu. Pozwala ona na bezpośrednią estymację funkcji rozkładu prawdopodobieństwa na podstawie zaobserwowanych wartości badanej zmiennej losowej (próby losowej) (Scott, 1979; Bowman, 1985; Terrel i Scott, 1985; Silverman, 1986; Devroye, 1989; Terrel, 1990; Sheather, 1992; Marron i Wand, 1992; Devroye, 1994; Devroye i Krzyżak, 2002). Dwa pojęcia ogrywają tutaj zasadniczą rolę: *funkcja jądrowa* oraz *współczynnik gładkości*.

2.1 Funkcja jądrowa i estymator jądrowy

Jeśli $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jest prostą n -elementową próbą losową niezależnych od siebie i identycznie rozłożonych obserwacji uzyskanych z nieznanego rozkładu o funkcji gęstości $f(x)$, to konstrukcja estymatora jądrowego $\hat{f}(x)$ funkcji gęstości $f(x)$ zmiennej losowej X polega na przypisaniu każdemu elementowi próby x_i pewnej funkcji $K(x_i, t)$ zwanej funkcją jądrową w sposób następujący (Silverman, 1986):

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(x_i, t). \quad (2.1)$$

Funkcją jądrową może być każda funkcja $K(x, t)$ nieujemna:

$$K(x, t) \geq 0 \text{ dla każdego } x, y, \quad (2.2)$$

przyjmująca wyłącznie skończone wartości oraz taka, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) dt = 1. \quad (2.3)$$

Równość (2.3) zapewnia normalizację estymatora jądrowego bo z (2.3) i (2.1) wynika, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) dt = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n K(x_i, t) dt = 1. \quad (2.4)$$

Najczęstszym praktycznym przypadkiem jest estymacja jądrowa z użyciem symetrycznych funkcji jądrowych; ostatnio coraz częściej stosowane są funkcje asymetryczne (Chen, 2000; Scaillet, 2001; Jin i Kawczak, 2003).

Oczywiście, w każdym konkretnym przypadku istnieje różnica pomiędzy wartością estymatora $\hat{f}(x)$ a rzeczywistą funkcją gęstości $f(x)$. Dla oceny tej rozbieżności zdefiniowano wiele miar. Dalej wymienione zostaną tylko najczęstsze. Należą do nich średni błąd kwadratowy (MSE), średni scałkowany błąd kwadratowy (MISE) (Silverman, 1986), scałkowany błąd kwadratowy (ISE) oraz średni asymptotyczny (lub: przybliżony) błąd kwadratowy (AMISE). Wszystkie mają tę własność, że są nieujemne i tym mniejsze im bliżej rzeczywistej funkcji gęstości $f(x)$ znajduje się estymator $\hat{f}(x)$.

Jeśli interesująca jest różnica w pojedynczym punkcie x to odpowiedni jest wtedy średni błąd kwadratowy MSE (*mean squared error*)

$$\text{MSE}_x(\hat{f}) = E\left[\left(\hat{f}(x) - f(x)\right)^2\right] \quad (2.5)$$

który po prostych przekształceniach można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} \text{MSE}_x(\hat{f}) &= \left(E\hat{f}(x) - f(x)\right)^2 + \text{var} \hat{f}(x) \\ &= \left[\text{obciążenie} \hat{f}(x)\right]^2 + \text{var} \hat{f}(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

czyli jako sumę kwadratu obciążenia estymatora $\hat{f}(x)$ oraz wariancji estymatora $\hat{f}(x)$ w punkcie x . MSE jest miarą lokalną, dlatego powszechniej używaną miarą zgodności estymatora z rzeczywistą funkcją gęstości jest średni scałkowany błąd kwadratowy MISE (*mean integrated squared error*):

$$\text{MISE}(\hat{f}) = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(x) - f(x)\right)^2 dx\right] \quad (2.7)$$

który jest miarą globalną. Wykorzystując zależność (2.6) dostaniemy:

$$\begin{aligned} \text{MISE}(\hat{f}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{MISE}_x(\hat{f}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\text{obciążenie } \hat{f}(x)]^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \text{var } \hat{f}(x) dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

MISE jest miarą wykorzystywaną do estymacji współczynnika gładkości estymatora jądrowego.

Jeśli estymator funkcji gęstości jest zgodny, to $\text{MISE} \rightarrow 0$, gdy liczebność próby $\rightarrow \infty$ a współczynnik gładkości $\rightarrow 0$.

W praktyce stosowana jest też przybliżona wersja MISE, zwana AMISE (*asymptotic* lub *approximation MISE*) powstała przez rozwinięcie MISE w szereg Taylora i zatrzymaniu tylko najważniejszych członów (Ledl, 2004), co oznacza ułatwienia obliczeniowe.

Scałkowany błąd kwadratowy, ISE (*integrated squared error*), jest czymś pośrednim pomiędzy MISE a MSE:

$$\text{ISE}(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \quad (2.9)$$

Warto zwrócić uwagę na następująca ciekawą okoliczność. Z prostej równości

$$E\hat{f}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EK(x_i, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)f(x)dx \quad (2.10)$$

wynika, że obciążenie $E\hat{f}(t) - f(t)$ nie zależy bezpośrednio od rozmiaru próbki (Silverman, 1986) ale od kształtu funkcji jądrowej, co oznacza, że samo zwiększanie liczebności próbki nie zapewni redukcji obciążenia; uzyskamy je bardziej przez odpowiedni wybór funkcji jądrowej.

2.2 Symetryczne funkcje jądrowe

W tym przypadku funkcja jądrowa $K(x, t)$ (2.2) przyjmuje prostszą postać:

$$K(x, t) = \frac{1}{h} K_{sym} \left(\frac{x-t}{h} \right) \quad (2.11)$$

gdzie $K_{sym}(-y)=K_{sym}(y)$, a parametr h nazywa się *współczynnikiem gładkości* lub *szerokością okna*. Estymator (2.1) można teraz zapisać w innej nieco postaci:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K_{sym} \left(\frac{x_i - x}{h} \right). \quad (2.12)$$

Symetryczne funkcje jądrowe to najczęstszy przypadek spotykany w praktyce. Jest to spowodowane zarówno tym, że ich własności są najlepiej zbadane, jak też łatwością ich aplikacji.

W tym przypadku wybór postaci funkcji jądrowej, choć ma wpływ na kształt estymatora, nie jest czynnikiem decydującym działania metody. Na podstawie porównania tzw. efektywności pięciu symetrycznych funkcji jądrowych dokonanego przez Silvermana (1986) można stwierdzić, że postać symetrycznej funkcji jądrowej w niewielkim stopniu wpływa na kształt estymatora. Czynnikiem mającym znacznie większy wpływ na jakość estymatora nieparametrycznego jest wartość współczynnika gładkości h . Gdy wartość ta jest zbyt mała, estymator może wykazywać wiele nieistotnych z punktu widzenia rzeczywistej funkcji szczegółów, a w przypadku zbyt dużej wartości h – estymator będzie ukrywał zbyt wiele istotnych szczegółów. Konieczny jest pewien kompromis.

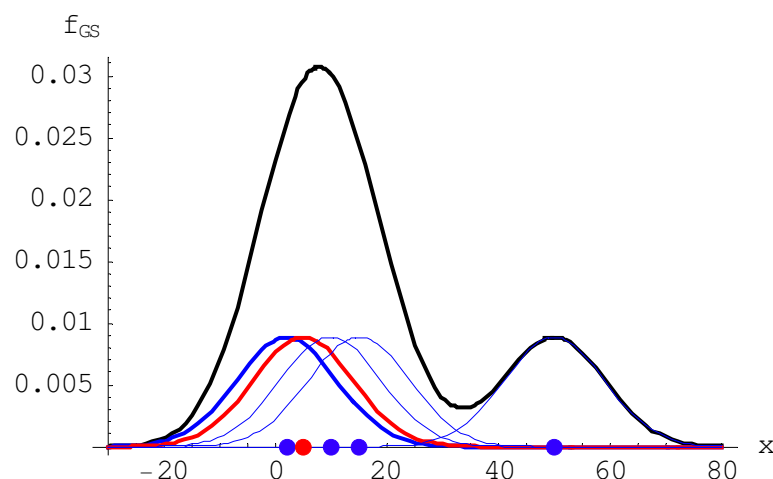
Najczęstszą symetryczną funkcją K_{sym} jest funkcja Gaussa K_{GS} :

$$K_{GS}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad (2.13)$$

co daje estymator jądrowy

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2h^2}\right] \quad (2.14)$$

Typową postać estymatora nieparametrycznego z symetryczną funkcją jądrową K_{GS} obrazuje rys. 2.1.



Rys. 2.1. Przykładowa postać estymatora z symetryczną funkcją jądrową K_{GS} (2.13) rozłożoną nad punktami próby $x = 2, 5, 10, 15$ i 50 przy współczynniku gładkości $h = 9.0$.

Dobór współczynnika gładkości h został szczegółowo omówiony i uzasadniony w punkcie 2.4.1.

2.3 Asymetryczne funkcje jądrowe

Od niecałych dziesięciu lat coraz popularniejsze stają się asymetryczne funkcje jądrowe (Bouezmarni i Scaillet, 2003) w sposób naturalny znajdujące zastosowanie tam, gdzie badane zmienne są jednostronnie ograniczone. W niniejszej pracy rozpatrzonych zostanie sześć takich funkcji: dwie funkcje gamma K_{GAM1} i K_{GAM2} , funkcje jądrowe K_{IG} i K_{RIG} oparte na transformowanym rozkładzie Gaussa, tzw. funkcja Birnbauma-Sandersa K_{BS} oraz logarytmiczno-normalna funkcja jądrowa K_{LN} .

Niech $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ będzie n -elementową próbą losową uzyskaną z rozkładu zmiennej X o nieznannej funkcji gęstości $f(x)$, określonej na przedziale $[0, +\infty)$. Poniżej definiujemy badane w pracy asymetryczne funkcje jądrowe. We wszystkich definicjach parametr b jest współczynnikiem gładkości ($b > 0$), którego wartość ma istotny wpływ na ilość wygładzenia a przez to na końcowy kształt uzyskanej funkcji gęstości.

1. Funkcja jądrowa gamma GAM1 (Chen, 2000):

$$K_{GAM1}(x, b; t) = \frac{t^{x/b} e^{-t/b}}{b^{x/b+1} \Gamma(x/b + 1)} \quad (2.15)$$

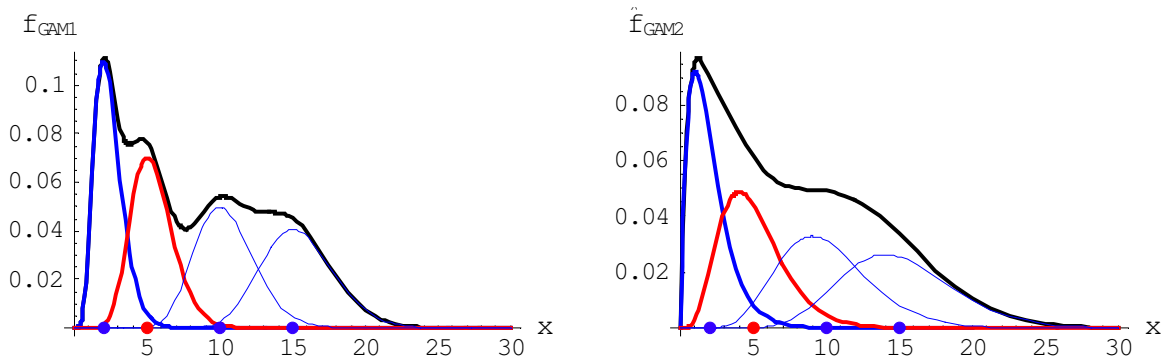
2. Funkcja jądrowa gamma GAM2 (Chen, 2000):

$$K_{GAM2}(\rho_b(x), b; t) = \frac{t^{\rho_b(x)-1} e^{-t/b}}{b^{\rho_b(x)} \Gamma(\rho_b(x))} \quad (2.16)$$

gdzie funkcja $\rho_b(x)$ ma postać

$$\rho_b(x) = \begin{cases} x/b & \text{gdy } x \geq 2b \\ \frac{1}{4}(x/b)^2 + 1 & \text{gdy } x \in [0, 2b) \end{cases} \quad (2.17)$$

Postaci estymatorów z asymetrycznymi funkcjami jądrowymi K_{GAM1} i K_{GAM2} obrazują wykresy na rys. 2.2.



Rys. 2.2. Przykładowe postaci estymatorów z asymetrycznymi funkcjami jądrowymi K_{GAM1} (2.15) i K_{GAM2} (2.16) o współczynnikach gładkości odpowiednio $b_{GAM1}=0.4$ i $b_{GAM2}=1.0$, rozłożonymi nad punktami $x = 2, 5, 10$ i 15 .

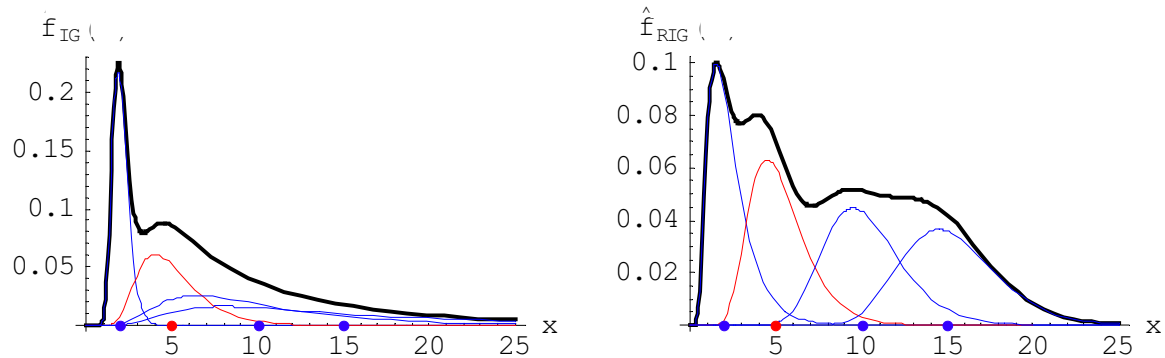
3. Funkcja jądrowa IG (*inverse gaussian*, funkcja odwrotna gaussowska) (Scaillet, 2001):

$$K_{IG}(x, b; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b t^3}} \exp \left[-\frac{1}{2bx} \left(\frac{t}{x} - 2 + \frac{x}{t} \right) \right] \quad (2.18)$$

4. Funkcja jądrowa RIG (*reciprocal inverse gaussian*, podwójnie odwrotna funkcja gaussowska), otrzymana z K_{IG} za pomocą transformacji $t \rightarrow 1/t$ (Scaillet, 2001):

$$K_{RIG}(x, b; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi bt}} \exp \left[-\frac{x-b}{2b} \left(\frac{t}{x-b} - 2 + \frac{x-b}{t} \right) \right] \quad (2.19)$$

Postaci estymatorów z asymetrycznymi funkcjami jądrowymi K_{IG} (2.18) i K_{RIG} (2.19) obrazują wykresy na rys. 2.3.



Rys. 2.3. Przykładowe postaci estymatorów z asymetrycznymi funkcjami jądrowymi K_{IG} (2.18) i K_{RIG} (2.19) o współczynnikach gładkości odpowiednio $b_{IG}=0.03$ i $b_{RIG}=0.5$ rozłożonymi nad punktami $x=2, 5, 10$ i 15 .

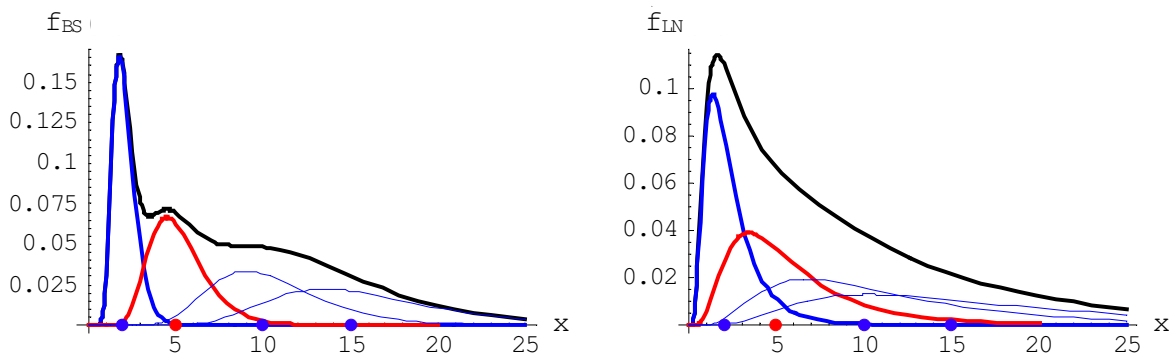
5. Funkcja jądrowa BS (Birnbauma-Sandersa) (Jin i Kawczak, 2003):

$$K_{BS}(x, b; t) = \frac{1}{2\sqrt{2b\pi}} \left(\sqrt{\frac{1}{xt}} + \sqrt{\frac{x}{t^3}} \right) \exp \left[-\frac{1}{2b} \left(\frac{t}{x} - 2 + \frac{x}{t} \right) \right] \quad (2.20)$$

6. Funkcja jądrowa logarytmiczno-normalne LN (Jin i Kawczak, 2003):

$$K_{LN}(x, b; t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi \ln(1+b)t}} \exp \left[-\frac{(\ln t - \ln x)^2}{8 \ln(1+b)} \right] \quad (2.21)$$

Odporodnie wykresy na rys. 2.4 obrazują postaci estymatorów z funkcjami jądrowymi K_{BS} (2.20) i K_{LN} (2.21).



Rys. 2.4. Przykładowe postaci estymatorów z asymetrycznymi funkcjami jądrowymi K_{BS} (2.20) i K_{LN} (2.21) o współczynnikach gładkości odpowiednio $b_{BS} = b_{LN} = 0.1$, rozłożonymi nad punktami $x = 2, 5, 10$ i 15 .

Jak pokazują kolejne rysunki rys. 2.2 – rys. 2.4, rola współczynnika gładkości b w jądrowych funkcjach jest nieco inna niż w przypadku symetrycznej funkcji jądrowej i ich interpretacja nie jest tak intuicyjnie jasna chociaż generalnie wzrost ich wartości powoduje większe wygładzanie estymatora.

2.4 Metody wyboru współczynnika gładkości

Istnieje bardzo wiele metod wyboru współczynnika gładkości. Wielość ta świadczy w pewnym stopniu o braku metody wyraźnie lepszej od pozostałych.

W przypadku symetrycznych funkcji jądrowych wybór kształtu funkcji jądrowej $K(y)$ nie ma istotnego wpływu na postać estymatora (Silverman, 1986; Hall i Marron, 1987), natomiast – jak to już było wzmiankowane wyżej w tekście – współczynnik gładkości jest tym czynnikiem, który ma zawsze istotny wpływ na kształt estymatora funkcji rozkładu prawdopodobieństwa gdyż decyduje on o stopniu wygładzenia estymatora $\hat{f}(x)$. Zbyt małe wartości h czy b powodują, że estymator funkcji gęstości jest mocno „pofałdowany” i zawiera nieistotne szczegóły. Zbyt duże wartości h lub b powodują znaczne wygładzenie postaci estymatora funkcji gęstości, co może powodować maskowanie pewnych jego cech charakterystycznych, np. wielomodalności rzeczywistej funkcji gęstości.

Wybór optymalnego współczynnika gładkości oparty jest na formułach minimalizujących omówione wyżej funkcje kryterialne, głównie ISE (Sain 1994), MISE (Marron i Nolan, 1988) i AMISE (Bowman i in., 1998; Silverman, 1986; Turlach, 1993; Feluch, 1994; Choi i Hall, 1999; Marron i Wand, 1992). Wszystkie one zależą od nieznannej funkcji gęstości $f(x)$, stąd pewne dodatkowe założenia są nieuniknione.

Poniżej omówione zostały dwie metody obliczania współczynnika gładkości – jedna dla przypadku symetrycznej funkcji jądrowej

(gaussowskiej), druga dla przypadku dowolnej funkcji jądrowej – które zostały wybrane ze względu na swoją powszechność stosowania. Metody te będą wykorzystywane w dalszej części pracy.

Nie będą natomiast omawiane dosyć powszechne metody typu *plug-in* i wygładzonego bootstrapu, jako że wymagają one symetrycznej funkcji jądrowej, a więc nie są dość ogólne do celów niniejszej pracy.

2.4.1 Metoda praktyczna obliczania h

Według Turlacha (1993) metoda praktyczna (*rule-of-thumb method*) wraz z metodą maksymalnego wygładzenia (*maximum smoothing principle*) należy do metod, które dają dobre rezultaty w przypadku rozkładów jednomodalnych. W przypadku rozkładów np. dwumodalnych otrzymuje się gorsze rezultaty z powodu zbytniego wygładzenia estymatora funkcji gęstości (Silverman, 1986). Obie metody stosuje się do symetrycznych funkcji jądrowych, w szczególności do estymacji jądrowej z gaussowską funkcją jądrową.

Metoda praktyczna bazuje na asymptotycznym błędzie średniokwadratowym $AMISE(h)$, skąd Silverman (1986) dostaje dla gaussowskiej funkcji jądrowej prosty przepis na obliczanie współczynnika gładkości h :

$$\hat{h}_{ROT} = 1.06 \cdot \min\left(\hat{\sigma}, \frac{\widehat{IRQ}}{1.34}\right) \cdot n^{-1/5} \quad (2.22)$$

gdzie $\hat{\sigma}$ jest odchyleniem standardowym w próbie, n liczbą elementów w próbie a \widehat{IRQ} – odchyleniem międzykwartkowym (międzykwartylowym) w próbie. Silverman (1986) uważa, że wartość (2.22) za bardzo wygładza rozkłady więcej niż jednomodalne i – jako jedno z remediów – proponuje nieco zmniejszoną wartość współczynnika gładkości (2.22):

$$\hat{h}_{ROT} = 0.9 \cdot \min\left(\hat{\sigma}, \frac{\widehat{IRQ}}{1.34}\right) \cdot n^{-1/5} \quad (2.23)$$

Wartość (2.23) będzie stosowana w dalszej części niniejszej pracy.

2.4.2 Metoda LSCV oceny krzyżowej za pomocą najmniejszych kwadratów

Metoda wzajemnej oceny (ew. oceny krzyżowej – nazwa polska nie jest ustalona) za pomocą najmniejszych kwadratów (*least squares cross validation*, LSCV) jest najpopularniejszą i cieszącą się największym zainteresowaniem (Hall i in., 1991; Turlach, 1993; Chiu, 1991, 1992, 1996) oraz zupełnie automatyczną (Silverman, 1986) metodą wyboru parametru wygładzającego – współczynnika gładkości. Wprowadzona została przez Rudemo (1982) i Bowmana (1984).

Mając dany estymator $\hat{f}(x)$ funkcji gęstości $f(x)$, można scałkowany błąd kwadratowy *ISE* wyrazić wzorem (Silverman, 1986):

$$\begin{aligned} ISE(h) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^2(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \cdot f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ostatni człon wyrażenia (2.24) nie zależy od estymatora $\hat{f}(x)$ (jest wartością stałą), wobec tego wybór współczynnika gładkości (w sensie minimalizacji błędu *ISE*) będzie odpowiadał wyborowi, który minimalizuje wielkość zdefiniowaną za pomocą równania:

$$R(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^2(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \cdot f(x) dx \quad (2.25)$$

Podstawą metody wzajemnej oceny za pomocą najmniejszych kwadratów (metody LSCV) jest konstrukcja estymatora $\hat{R}(\hat{f})$ na podstawie danych, a następnie jego minimalizacja względem współczynnika gładkości tak, aby otrzymać optymalną wartość tego współczynnika. Człon $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^2(x) dx$ obliczany jest na podstawie znajomości estymatora $\hat{f}(x)$ tj. funkcji (2.1). Natomiast drugi człon (2.25) zostanie oszacowany za pomocą następującej wielkości

$$\hat{f}_{-i}(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} K(x, x_j) \quad (2.26)$$

będącą estymatorem funkcji gęstości utworzonym na podstawie wszystkich punktów x danych z wyjątkiem punktu x_i . Dostajemy wtedy funkcję kryterialną

$$LSCV(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^2(x) dx - \frac{2}{n} \sum_i \hat{f}_{-i}(x_i) \quad (2.27)$$

która zależy wyłącznie od danych (i oczywiście od kształtu funkcji jądrowej i współczynnika gładkości). Za optymalny współczynnik gładkości h_{LSCV} przyjmuje się tę wartość, przy której funkcja $LSCV(h)$ osiąga minimum.

$LSCV(h)$ jest estymatorem wielkości $R(\hat{f})$, prawdziwa jest bowiem następująca równość:

$$E[R(\hat{f})] = E[LSCV(h)] \quad (2.28)$$

(Silverman, 1986). Całkę w równaniu (2.27) można dla celów minimalizacyjnych zastąpić wyrażeniem:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^2(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_i K(x, x_i) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, x_i) K(x, x_j) dx \end{aligned} \quad (2.29)$$

Tak więc ogólna, przygotowana już do minimalizacji, funkcja $LSCV$ (2.27) ma postać następującą:

$$LSCV(h) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, x_i) K(x, x_j) dx - \frac{2}{n(n-1)} \sum_i \sum_{j \neq i} K(x_i, x_j) \quad (2.30)$$

Jest to postać wyjściowa: w podanej powyżej postaci metoda $LSCV$ stosuje się do każdej funkcji jądrowej, zarówno symetrycznej jak i asymetrycznej.

Niestety, oprócz swych zalet, metoda $LSCV$ posiada również wady: wariancja otrzymanych współczynników gładkości obliczanych dla prób wylosowanych z tego samego rozkładu jest duża (Turlach, 1993). Poza tym, zdarza się, że funkcja $LSCV(h)$ posiada kilka minimów, często fałszywych i daleko po stronie zbyt małego wygładzenia (Hall i Marron, 1991b).

Symulacje pokazują, że problem ten może być rozwiązany poprzez wybór największych wartości h , dla których pojawiają się minima lokalne. Czasami zdarza się, że funkcja $LSCV(h)$ w ogóle nie posiada minimów (Sheather, 1992; Turlach, 1993).

Istnieją też inne wersje oceny krzyżowej, np. obciążona ocena krzyżowa (*biased cross-validation*, BCV) czy wygładzona ocena krzyżowa (*smoothed cross-validation*, SCV) i inne; nie będą jednak tutaj omawiane.

2.5 Testy wielomodalności

Naturalną „skłonnością” estymacji jądrowej jest wykazywanie wielomodalności funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Fakt ten stanowi wyraźną zaletę tego typu estymacji i z tego powodu jest ona coraz częściej stosowana wszędzie tam, gdzie istnieją powody by przypuszczać, że taka wielomodalność istnieje. W przypadku, gdy wynik estymacji jądrowej taką możliwość sugeruje, zachodzi pytanie, czy uzyskany obraz pokazuje fakty czy artefakty, a więc, czy uzyskane mody są modami rzeczywiście istniejącymi, czy stanowią jedynie obraz posiadanej próby (Chaudhuri i Marron, 1999; Godtliobsen i in., 1999). Wielomodalność w przypadku rozkładu przepływów maksymalnych w roku mogłaby potwierdzać pewne przypuszczenia o istnieniu co najmniej dwu różnych mechanizmów generowania przepływów maksymalnych w roku.

Aby przekonać się, czy występujące w estymatorze mody nie są jedynie efektem losowości próby należy poddać je testowaniu. Niestety, hipoteza zerowa, jaką można postawić – np. taka: H_0 (rozkład jest jednomodalny) przeciwko hipotezie alternatywnej H_1 (rozkład jest więcej niż jednomodalny) – jest niezwykle szeroka, stąd trudno spodziewać się, że moc takich testów będzie wysoka i okażą się one wyraźnie konkluzywne (Silverman, 1986).

Testów tych nie jest wiele i mają one swoje poważne ograniczenia. Jednym z najstarszych jest metoda wygładzania krytycznego zaproponowana przez Silvermana w 1981 roku (Silverman, 1986). Metoda ta w zasadzie nie nadaje się do testowania wielomodalności w przypadku estymacji

z asymetrycznymi funkcjami jądrowymi. Inna metoda – nadwyżki masy – jest bardziej ogólna i nie ma takich ograniczeń. Obie zostaną omówione dalej. Jednak już w tym miejscu należy zastrzec, że z powodu niezwykle szerokiego kontekstu, jaki istniejące testy wielomodalności obejmują, uzyskane wyniki należy traktować bardziej jako ilustracja działania metody niż jako wyraźne wsparcie hipotezy alternatywnej (tj. hipotezy o wielomodalności)

2.5.1 Metoda wygładzania krytycznego

Test wielomodalności zapoczątkowany przez Silvermana (1981, 1986) bazuje na idei krytycznego wygładzania i wykorzystania bootstrapu do oceny poziomu istotności stawianej hipotezy zerowej (Mammen i in., 1992; Fisher i in., 1994; Hall i in., 2004).

Niech próba losowa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pochodzi z populacji o funkcji gęstości $f(x)$, a k będzie liczbą mód funkcji $f(x)$. Testowana jest hipoteza H_0 , że $f(x)$ jest jednomodalną funkcją gęstości ($k=1$) przeciwko hipotezie H_1 o wielomodalności tej funkcji ($k>1$). Na podstawie próby losowej budowany jest estymator nieparametryczny z symetryczną funkcją jądrową $K(\cdot)$ i z optymalnym współczynnikiem gładkości h_0 . Postać $\hat{f}(x)$ tego estymatora będzie najczęściej wielomodalna. Wygładzanie krytyczne opiera się na zasadzie, że liczba mód jest malejącą funkcją współczynnika gładkości h . Jeśli wartość h będzie zwiększana coraz bardziej poczynając od wartości h_0 estymator $\hat{f}(x)$ będzie coraz bardziej wygładzany i liczba mód zacznie się zmniejszać dochodząc w pewnym momencie do jednomodalności dla $h = h_{kryt}$. Jeśli rzeczywisty rozkład był rozkładem wielomodalnym, wartość h_{kryt} będzie duża, w przeciwnym przypadku – mała. Należy teraz stwierdzić, czy h_{kryt} to wartość na tyle duża, aby istniały podstawy do odrzucenia hipotezy o jednomodalności. Do tego celu Silverman wykorzystuje bootstrap, a konkretnie jego wersję nazywaną wygładzonym bootstrapem. Technika ta polega na N -krotnym losowaniu „wygładzonych” n -elementowych prób z rozkładu $\hat{f}(x)$ z $h = h_{kryt}$, badaniu jednomodalności uzyskanej funkcji gęstości i zliczaniu przypadków niejednomodalności. Niech liczba takich

przypadków wyrażona ułamkiem liczby N losowań wynosi p . Jeśli hipoteza o jednomodalności jest prawdziwa, to h_{kryt} powinno być małe, czyli bootstrap powinien dostarczyć dużo przypadków wielomodalności. Jeśli tych przypadków jest mało, to można stąd wnioskować, że h_{kryt} jest duże, czyli, że funkcja $f(x)$ jest wielomodalna. Wielkość p może być traktowana jako tzw. wartość p (p -value) testu i porównywać z przyjętym poziomem α istotności testu. Jeśli $p < \alpha$ to hipoteza H_0 zostaje odrzucona.

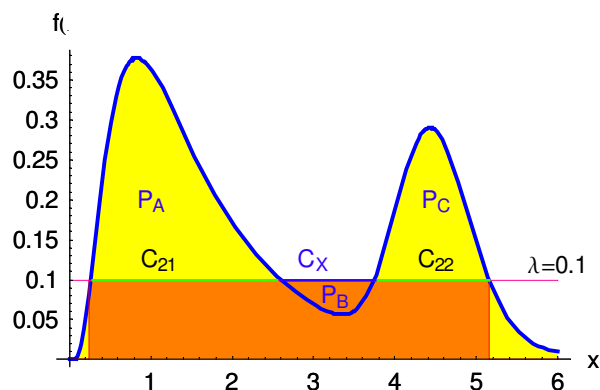
Fisher i Marron (2001) twierdzą, że metoda ta wymaga pewnych ulepszeń ze względu na to, że jedną z przyczyn powstawania mód mogą być wartości odstające w próbie. Po drugie, w metodzie tej nie określa się jak duża masa prawdopodobieństwa związana jest z każdą modą.

2.5.2 Metoda nadwyżki masy

Test wielomodalności proponowany przez Müllera i Sawitzkiego (1991) a rozwijany dalej i aplikowany w m.in. w pracach Müllera (1992), Minnotte (1997), Sawitzkiego (1998), Chenga i Halla (1998), Chaudhuri i Marrona (1999), Halla i Ooi (2004), Choudhuri (2005), bazuje na tzw. nadwyżce $E(\lambda)$ masy (*excess mass*) prawdopodobieństwa estymowanej na podstawie próby. Mierzy ona masę prawdopodobieństwa przewyższającej poziom λ gęstości prawdopodobieństwa, odzwierciedlając w ten sposób różnorodność mód funkcji gęstości $f(x)$. Precyzując: nadwyżka $E_m(\lambda)$ masy prawdopodobieństwa rzędu m jest zdefiniowana nieco skomplikowanym wzorem (Müller i Sawitzki, 1991, Hall i Ooi, 2004):

$$E_m(\lambda) = \sup_{C_1, \dots, C_m} \sum_{j=1}^m \int_{C_j(\lambda)} (f(x) - \lambda) dx, \quad 0 \leq \lambda \leq \max_x f(x) \quad (2.31)$$

Symbol C_j oznacza spójny zbiór (przedział) na osi x , jeśli jest ich więcej są one zawsze rozłączne. Rys. 2.5 wyjaśnia sens wzoru (2.31) ilustrując pojęcia $E_2(\lambda)$ i $E_1(\lambda)$. Należy pamiętać, że $E_m(\lambda)$ jest funkcją nieujemną, P_B z rys. 2.5 nie może być dowolnie duże.



Rys. 2.5. Ilustracja pojęcia *nadwyżka masy rzędu m* , $E_m(\lambda)$. Nadwyżka masy rzędu pierwszego, $E_1(\lambda)$ (2.31), dla $\lambda=0.1$ oznacza sumę pól $P_A-P_B+P_C$; wyrażenie (2.31) redukuje się do całki po przedziale $C = C_{21} \cup C_X \cup C_{22}$. Nadwyżka masy rzędu drugiego, $E_2(\lambda)$, dla $\lambda=0.1$ to suma pól $P_A + P_C$. Zwróćmy uwagę, że $E_2(\lambda)-E_1(\lambda)=P_B$.

Zbiory $\{x: f(x) > \lambda\}$ nazywają się skupieniami funkcji gęstości na poziomie λ (λ -skupieniami). W miarę wzrostu wartości λ skupienia te koncentrują się na modach (lokalnych maksimach funkcji $f(x)$). W szczególności, dla dowolnego λ , rozkład z m modami ma najwyżej m λ -skupień.

Całka we wzorze (2.31) da się dla ustalonego j przedstawić następująco:

$$\int_{C_j(\lambda)} (f(x) - \lambda) dx = P - \lambda \cdot \|C_j\| \quad (2.32)$$

gdzie P oznacza prawdopodobieństwo $P(X \in C_j)$ a $\|C_j\|$ jest długością przedziału C_j (por. rys. 2.5). Wprowadzając oznaczenie

$$H_\lambda(C) = P - \lambda \cdot \|C\| \quad (2.33)$$

możemy napisać krócej:

$$E_m(\lambda) = \sup \sum_{j=1}^m H_\lambda(C_j) \quad (2.34)$$

Mając próbę losową $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pochodzącą z rozkładu f można zastąpić prawdopodobieństwo P prawdopodobieństwem empirycznym P_n i zbudować estymator $H_{n\lambda} = P_n - \lambda \cdot \|C\|$. Dostajemy wtedy estymator nadwyżki masy

$$E_{nM}(\lambda) = \sup \sum_{j=1}^M H_{n,\lambda}(C_j) \quad (2.35)$$

gdzie M jest założoną liczbą mód.

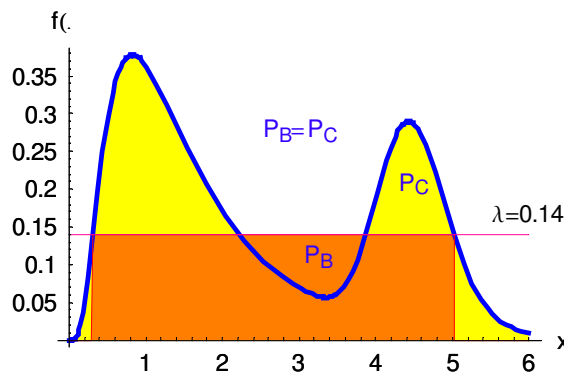
Nadwyżka masy służy do konstrukcji statystyki testowej testu wielomodalności. Poniżej problem ten omówiony zostanie na przykładzie testu dwumodalności. Testowana będzie hipoteza H_0 : (rozkład jest jednomodalny) przeciwko hipotezie alternatywnej H_1 : (rozkład jest dwumodalny). Do tego celu stosowana będzie statystyka testowa

$$\Delta_{n2} = \sup_{\lambda > 0} D_{n2}(\lambda) \quad (2.36)$$

gdzie D_{n2} jest różnicą nadwyżek dwu i jednomodalnych dla zadanego poziomu λ :

$$D_{n2}(\lambda) = E_{n2}(\lambda) - E_{n1}(\lambda) \quad (2.37)$$

Wielkość (2.37) jest łatwo interpretowalna. Jeśli wrócimy do rys. 2.5, to oznacza ona estymator różnicy $E_2(\lambda) - E_1(\lambda)$, czyli pole P_B . Natomiast statystyka testowa Δ_{n2} (2.36) zilustrowana na rysunku poniżej jest interpretowana jako to prawdopodobieństwo, które należy zabrać mniejszej modzie, aby w rezultacie otrzymać rozkład jednomodalny.

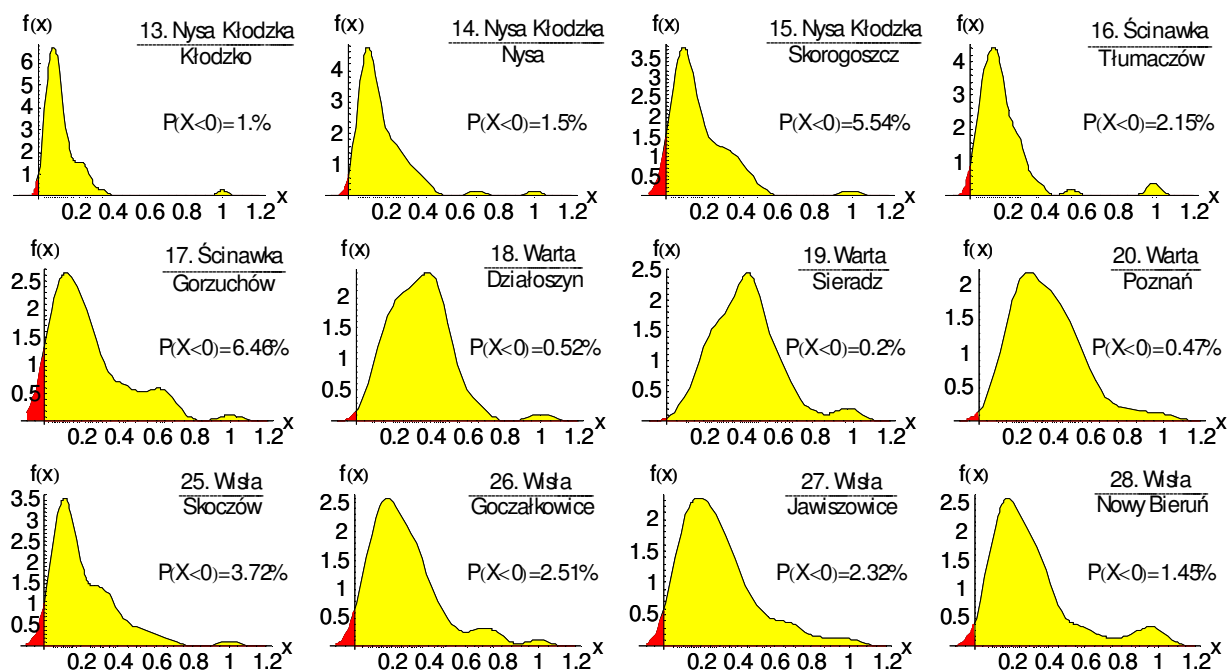


Rys. 2.6. Ilustracja wielkości Δ_{n2} (2.36). Jeśli obszarem P_C wypełnimy obszar P_B rozkład dwumodalny stanie się rozkładem jednomodalnym.

Hipoteza H_0 zostanie odrzucona jeśli obliczona wartość statystyki Δ_{n2} będzie zbyt duża. Ustalenie znaczenia „zbyt duża” jest osobnym problemem, który zostanie praktycznie rozwiązany w rozdziale 5.2.2.

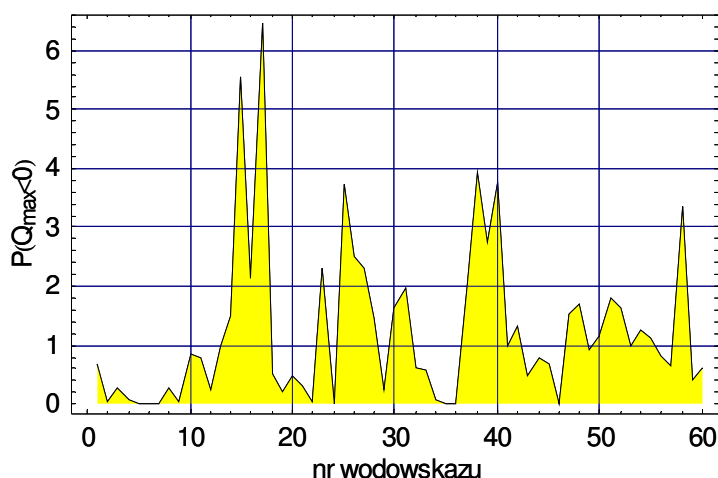
3. WYBÓR NAJLEPSZEGO NIEPARAMETRYCZNEGO ESTYMATORA FUNKCJI GĘSTOŚCI – EKSPERYMENT NUMERYCZNY

Zasadniczy cel pracy – wielomodalność przepływów maksymalnych rocznych rzek Polski – realizowany za pomocą estymacji jądrowej, wymaga przyjęcia określonej funkcji jądrowej. Bez wątpienia funkcją najczęściej stosowaną i zbadaną jest w tym przypadku funkcja Gaussa. Jest ona jednak określona na całej osi rzeczywistej, podczas gdy badane przepływy są dodatnie, co prowadzić może (i prowadzi czasami) do pojawienia się pewnych problemów brzegowych związanych z faktem, że zastosowanie gaussowskiej estymacji jądrowej generuje niezaniebnywalne czasami prawdopodobieństwa ujemnych przepływów maksymalnych. Przedstawione poniżej rysunki (rys. 3.1 i rys. 3.2) ilustrują ten problem przekonująco.



Rys. 3.1. Ilustracja problemu „wycieku” prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych rocznych do obszaru ujemnych przepływów dla kilku rzeczywistych przekrojów wodowskazowych (obszary czerwone) opisanych bliżej w rozdziale 4 ($x =$

$Q_{max}/\max(Q_{max})$); zastosowano jądrowy estymator gaussowski (2.14) ze współczynnikiem gładkości estymowanym wzorem (2.23).



Rys. 3.2. Prawdopodobieństwo wystąpienia ujemnych przepływów maksymalnych w roku, $P(Q_{max} < 0)$ (w %) dla rzeczywistych przepływów maksymalnych we wszystkich badanych w pracy przekrojach wodowskazowych opisanych bliżej w rozdziale 4; jądrowy estymator gaussowski (2.14) ze współczynnikiem gładkości (2.23).

Problem ten nie występuje w przypadku asymetrycznych funkcji jądrowych określonych na dodatniej półosi rzeczywistej, a więc funkcji jądrowych opisanych w rozdziale 2.3. Zanim jednak aplikacja asymetrycznych funkcji może mieć miejsce, należy jakość takiej aplikacji porównać z jakością estymacji gaussowskiej, gdyż teoretyczny zysk, jaki zapewniają asymetryczne funkcje jądrowe niekoniecznie musi się przekładać na praktyczne korzyści, które zależą od celu, w jakim dana aplikacja została implementowana. Dlatego zaprojektowany został i wykonany eksperyment numeryczny polegający na analizie Monte Carlo jakości estymatorów jądrowych: symetrycznego (gaussowskiego) i asymetrycznych. Zastosowanym generatorem liczb pseudolosowych był program komputerowy napisany w środowisku obliczeniowym *Mathematica 4.0* pozwalający na uzyskiwanie zbiorów syntetycznych wartości przepływów maksymalnych rocznych z populacji o założonym rozkładzie $f(x)$.

Jako znane rzeczywiste funkcje rozkładu $f(x)$ przyjęto dwie dwumodalne funkcje gęstości, zwane dalej oryginałami A i F , które posłużyły do wygenerowania 1000 n -elementowych prób losowych o zadanych liczeb-

nościach $n=30, 50, 80$ i 100 sensownych z punktu widzenia rozmiarów rzeczywistych zbiorów danych. Na podstawie tych prób konstruowane były jądrowe estymatory $\hat{f}(x)$ funkcji $f(x)$, a następnie badana była jakość uzyskanych estymatorów za pomocą określonych uprzednio kryteriów jakości.

3.1 Przyjęte do eksperymentu Monte Carlo „rzeczywiste” rozkłady populacji

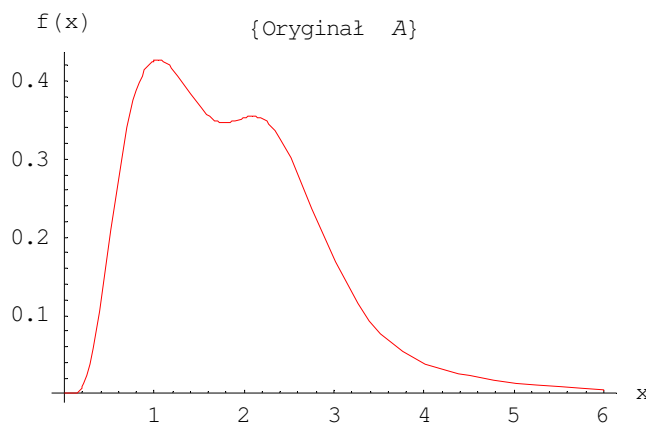
Przyjęte „rzeczywiste” rozkłady populacji, to dwie mieszaniny (noszące dalej nazwy *oryginał A* i *oryginał F*) dwóch dwuparametrowych rozkładów logarytmiczno-normalnych:

$$f_M(x; a, \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2) = a \cdot f_1(x; \mu_1, \sigma_1) + (1-a) \cdot f_2(x; \mu_2, \sigma_2) \quad (3.1)$$

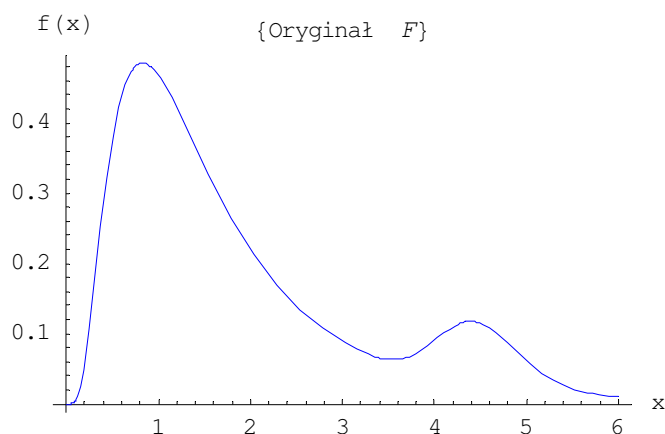
gdzie $M = A, F$, a odpowiednie wartości parametrów μ i σ lognormalnych gęstości $f_i, i=1,2$, oraz parametru $a, 0 < a < 1$, są podane w tabeli 3.1. Rys. 3.3 i rys. 3.4 zawierają wykresy uzyskanych gęstości f_A i f_F .

Tabela 3.1. Wartości parametrów rozkładu (3.1) przyjęte w eksperymencie Monte Carlo.

	a	μ_1	σ_1	μ_2	σ_2
oryginał A	0.8	0.4	0.6	0.9	0.2
oryginał F	0.9	0.3	0.7	1.5	0.1



Rys. 3.3. „Rzeczywista” funkcja gęstości $f_A(x)$

Rys. 3.4. „Rzeczywista” funkcja gęstości $f_F(x)$

Przyjęte gęstości $f_A(x)$ i $f_F(x)$ reprezentują dwa rodzaje dość typowych dwumodalności, jakie można było zobaczyć w empirycznych funkcjach gęstości analizowanych w rozdziale 4, odpowiednio: mody blisko siebie o podobnej wielkości i mody dość znacznie rozdzielone o wyraźnie różniące się wielkości. Rozkłady $f_A(x)$ i $f_F(x)$ zostały tak dobrane, aby ich kształt w pewnym stopniu odtwarzał informację zawartą w badanym zbiorze rzeczywistych przepływów maksymalnych w roku (omówionych bliżej w rozdziale 4), co wyraża się w wartościach niektórych charakterystyk prób losowych generowanych z rozkładów f_A i f_F zbliżonych do wartości charakterystyk posiadanych prób losowych przepływów maksymalnych (rozdział 4).

W toku licznych prób parametry obu oryginałów były tak dobierane, aby kształty ich rozkładów były jak najbardziej typowe oraz aby liczbowe wartości powyższych charakterystyk zbliżone były do ich odpowiedników obliczonych na podstawie rzeczywistych wartości przepływów maksymalnych rocznych.

Przyjęte do eksperymentu rzeczywiste funkcje rozkładu A i F posłużyły do wygenerowania $N=1000$ n -elementowych prób losowych $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o „hydrologicznych” liczebnościach: $n=30, 50, 80$ i 100 . Tak więc podstawą dalszej analizy było 8 zbiorów prób losowych. Dla ułatwienia obliczeń i większej porównywalności wyników, każda próba była normowana poprzez

podzielenie wszystkich jej wartości x_i , $i=1,2,\dots,n$, przez wartość maksymalną w próbie: $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Wynikowe wartości próby zawierały się więc w prawostronnie domkniętym przedziale $(0,1]$.

3.2 Estymacja jądrowa z symetryczną (gaussowską) funkcją jądrową i asymetrycznymi funkcjami jądrowymi

Dla każdej n -elementowej próby losowej ze zbioru $N=1000$ takich prób wylosowanych z rozkładu A lub F obliczano siedem estymatorów jądrowych $\hat{f}(x)$ funkcji $f(x)$: jeden z symetryczną funkcją jądrową (gaussowską), K_{GS} , według wzoru (2.14) i sześć z asymetryczną funkcją jądrową: K_{GAM1} (2.15), K_{GAM2} (2.16), K_{IG} (2.18), K_{RIG} (2.19), K_{BS} (2.20) i K_{LN} (2.21). Współczynnik gładkości h dla estymatora GS był liczony wzorem (2.22), natomiast wartości b współczynników gładkości dla estymatorów z asymetryczną funkcją jądrową liczone były metodą krzyżowej oceny poprzez minimalizację funkcji $LSCV(b)$ (2.30).

Obliczenie h zawsze było możliwe, co oznacza, że końcowym wynikiem dla estymacji z jądrem gaussowskim było 1000 wartości h na 1000 prób. Przypadek ten nie zachodził niestety w sytuacji poszukiwania optymalnego b dla estymacji z asymetryczną funkcją jądrową. Wiązało się to z faktem, że optymalna wartość współczynnika gładkości była w tym przypadku uzyskiwana poprzez minimalizację funkcji kryterialnej (2.30), która to funkcja nie zawsze posiadała minimum.

Bardziej szczegółowo napisana, funkcja $LSCV(b)$ (2.30) ma postać następującą:

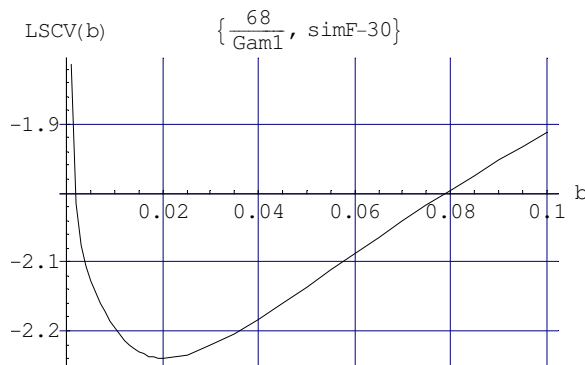
$$LSCV(b) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} K(x, x_i, b) K(x, x_j, b) dx - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n K(x_i, x_j, b) \quad (3.2)$$

Zasadniczym problemem obliczeniowym było tutaj znalezienie możliwie szybkiej metody minimalizacji funkcji $LSCV(b)$. Po wielu próbach cel ten został zrealizowany w ten sposób, że najpierw znaleziono analityczną postać całki występującej w powyższym wzorze, a potem dokonywano zwykłego

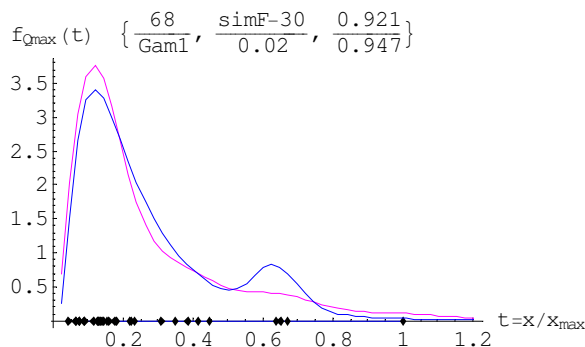
poszukiwania minimum funkcji $LSCV(b)$ na pewnym odcinku b , na ogół $(0, b)$, $b < 1$. Przykładowo, pierwszy człon funkcji $LSCV(b)$ dla funkcji jądrowej GAM1 miał postać następującą:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} K_{GAM1}(x, x_i) K_{GAM1}(x, x_j) dx = \\ = \frac{1}{2n^2 b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{x_i + x_j}{b} + 1\right)}{2^{\frac{x_i + x_j}{b}} \Gamma\left(\frac{x_i}{b} + 1\right) \Gamma\left(\frac{x_j}{b} + 1\right)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie $\Gamma(\cdot)$ jest funkcją gamma Eulera. Typowy wykres funkcji $LSCV(b)$ jest pokazany na rys. 3.5.



Rys. 3.5. Funkcja $LSCV(b)$ (3.2) (funkcja jądrowa GAM1) dla 30-elementowej próby losowej nr 68 wylosowanej z rozkładu F



Rys. 3.6. Przykładowy estymator jądrowy (linia różowa) rozkładu F (linia niebieska); funkcja jądrowa: GAM1 ze współczynnikami gładkości $b=0.02$ (znalezionymi wg rys. 3.5). Czarne punkty na osi rzędnych pokazują położenie wartości elementów próby losowej nr 68.

Jak pokazuje tabela 3.2 (wartości N_{ef}), metoda oceny krzyżowej LSCV znajdowała optymalne b praktycznie zawsze w mniej niż 100% przypadków (N_{ef} było mniejsze od 1000 zawsze poza BS dla $n=80$) – efektywność tej metody była więc prawie zawsze mniejsza od 100%. Najgorzej wypadła estymacja z funkcją jądrową BS, która dla oryginału F była efektywna w najwyżej nieco ponad 50% przypadków. Wyraźnie efektywniejszą była estymacja z funkcją jądrową GAM2 – średnio ok. 80% i (co dziwniejsze) malała z liczebnością próby. Również trochę niespodzianie zachowywała się efektywność LSCV z funkcją jądrową IG: o ile dla oryginału A wynosiła ona przeciętnie ponad 95%, to dla oryginału F była dużo niższa i wahała się w granicach od 68% do 87%. W pozostałych trzech przypadkach – tj. dla funkcji jądrowych GAM1, RIG i LN – estymacja wzajemna LSCV zapewniała znalezienie optymalnego współczynnika gładkości b w przeciętnie ponad 95% przypadków, niezależnie od oryginału.

Efektywności osiągnięte przez LSCV z funkcjami jądrowymi BS, GAM2 i IG na pewno dyskwalifikują jądro BS a dla funkcji jądrowych GAM2 i IG stanowią ich wyraźną wadę. Jest wszakże na pewno rzeczą ważną, aby sprawdzić w jakim stopniu zastosowane estymatory imitują swoje oryginały. W tym celu niezbędne jest zdefiniowanie narzędzi pomiaru jakości takiej imitacji.

3.3 Miary jakości dopasowania zastosowanych estymatorów jądrowych do przyjętych rzeczywistych funkcji gęstości prawdopodobieństwa

Miary jakości dopasowania jednej funkcji do drugiej to zawsze kwestia dokonania wyboru a więc kwestia subiektywna. W niniejszej pracy przyjęte zostały trzy takie miary: (1) współczynnik determinacji R^2 , (2) względny błąd δq_p kwantyla q_p dla zadanego prawdopodobieństwa przewyższenia p oraz (3) liczba l_{max} maksimów estymatora. Miary te – jako funkcje próby losowej – są oczywiście zmiennymi losowymi.

Współczynnik determinacji R^2 oryginału i estymatora jądrowego obliczonego na podstawie n -elementowej próby losowej $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ przyjęty został w następującej postaci (Węglarczyk, 1998)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - \hat{f}(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - \overline{f(x)})^2} \quad (3.4)$$

gdzie

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (3.5)$$

Należy zaznaczyć, że wartości x_i w równaniach (3.4) i (3.5) to nie wartości próby losowej lecz wartości regularnie rozmieszczone na przedziale $(0, x_{max})$ według wzoru $x_i = i \cdot x_{max} / n$, gdzie n jest liczebnością próby losowej.

Wbrew swojemu oznaczeniu, współczynnik R^2 może w przypadku szczególnie wielkich różnic pomiędzy porównywanymi funkcjami przyjmować wartości ujemne. W idealnym przypadku równości obu funkcji mamy $R^2 = 1$ a więc tylko wartości R^2 w pobliżu jedności świadczą o wysokiej jakości estymacji. Wartości R^2 zostały obliczone dla wszystkich prób losowych, dla których estymacja jądrowa powiodła się (N_{ef} razy na 1000 przypadków, zob. tabela 3.2) tj. dla których otrzymano współczynnik gładkości dla danego estymatora spośród siedmiu estymatorów jądrowych i dla danej liczebności próby losowej spośród czterech liczebności (ze względu na dwa oryginały, stanowiło to łącznie 2×28 przypadków). Uzyskano w ten sposób 56 zbiorów danych, które poddane zostały analizie opisanej w rozdziale 3.3.1.

Względny błąd δq_p kwantyla q_p zdefiniowany został następującym wzorem

$$\delta q_p = \frac{\hat{q}_p - q_p}{q_p} \quad (3.6)$$

gdzie górne kwantyle q_p oryginałów $f_A(x)$ i $f_F(x)$ oraz górne kwantyle \hat{q}_p estymatorów $\hat{f}(x)$ określone są zwykłymi wzorami:

$$q_p : \int_{q_p}^{\infty} f(x) dx = p \quad (3.7)$$

oraz

$$\hat{q}_p : \int_{\hat{q}_p}^{\infty} \hat{f}(x) dx = p \quad (3.8)$$

Przyjęto dwa rzędy kwantyli: $p=1\%$ oraz $p=0.5\%$, co ma uzasadnienie hydrologiczne (takie kwantyle są wymagane dla wielu zadań inżynierskich). Analogicznie jak dla R^2 obliczone zostały wartości względnego błędu δ_{q_p} kwantyla z tą różnicą, że dwa rodzaje kwantyla spowodowały dwukrotne zwiększenie liczby zbiorów danych: do 2×56 . Analiza błędu δ_{q_p} jest zamieszczona w rozdziale 3.3.2.

Liczba L_{max} maksimum estymatora to z punktu widzenia celów niniejszej pracy najważniejsza charakterystyka estymatora jądrowego. Każdy estymator $\hat{f}(x)$ oryginału A lub F , z daną funkcją jądrową, obliczony na podstawie danej n -elementowej próby losowej był badany ze względu na liczbę maksimum. Wyniki analizy są zamieszczone w rozdziale 3.3.3.

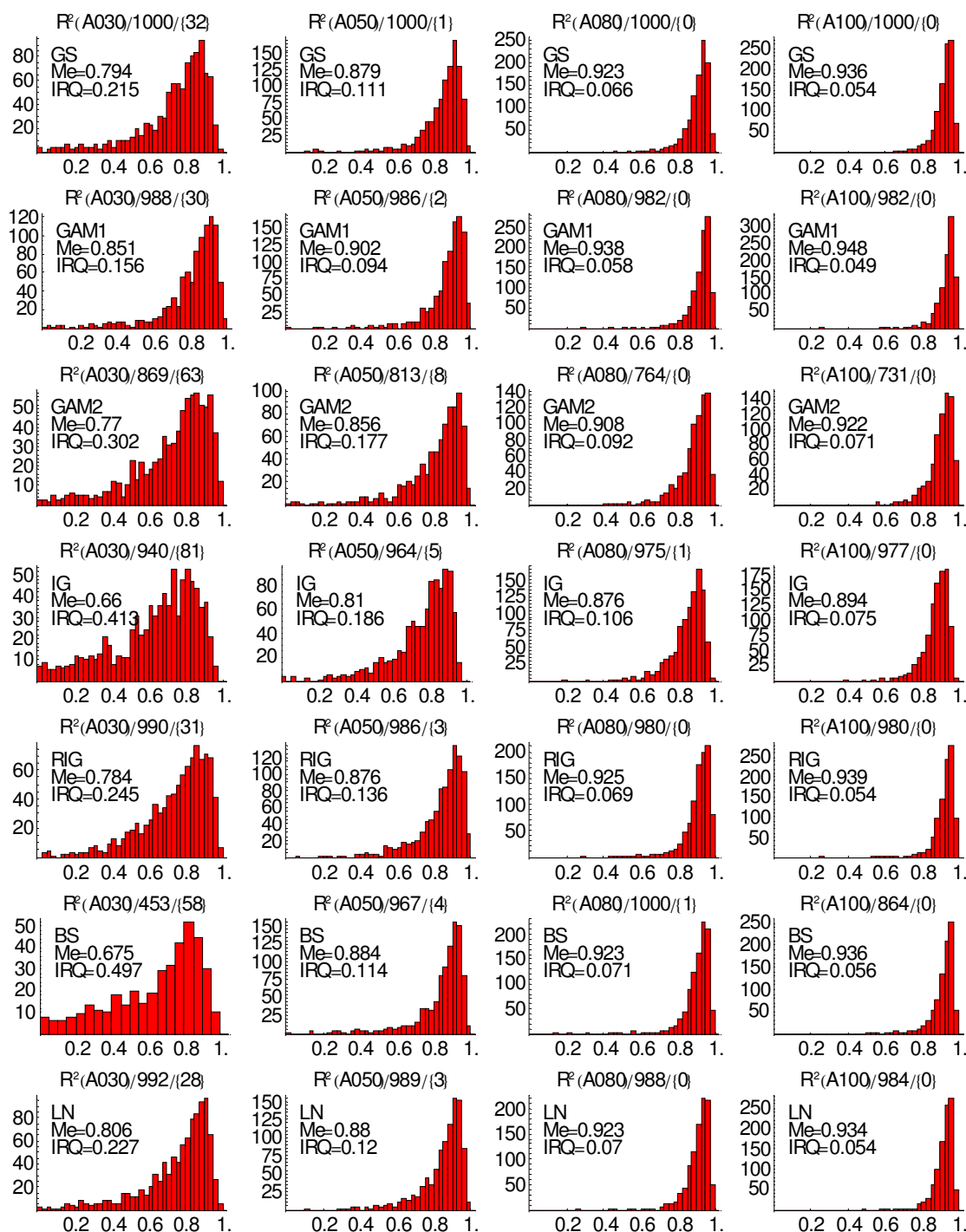
Każda miara jakości (R^2 , δ_{q_p} oraz L_{max}) dostarczyła N_{ef} -elementowe zbiory wartości R^2 , δ_{q_p} i L_{max} dla każdej funkcji jądrowej, każdej liczebności próby n i obu oryginałów. Ocena jakości estymacji danego estymatora jądrowego polega więc na ustaleniu pewnych krytycznych charakterystyk zbiorów wartości danej miary jakości i porównanie wartości takich charakterystyk z ich odpowiednikami dla innych estymatorów jądrowych.

3.3.1 Współczynnik determinacji R^2

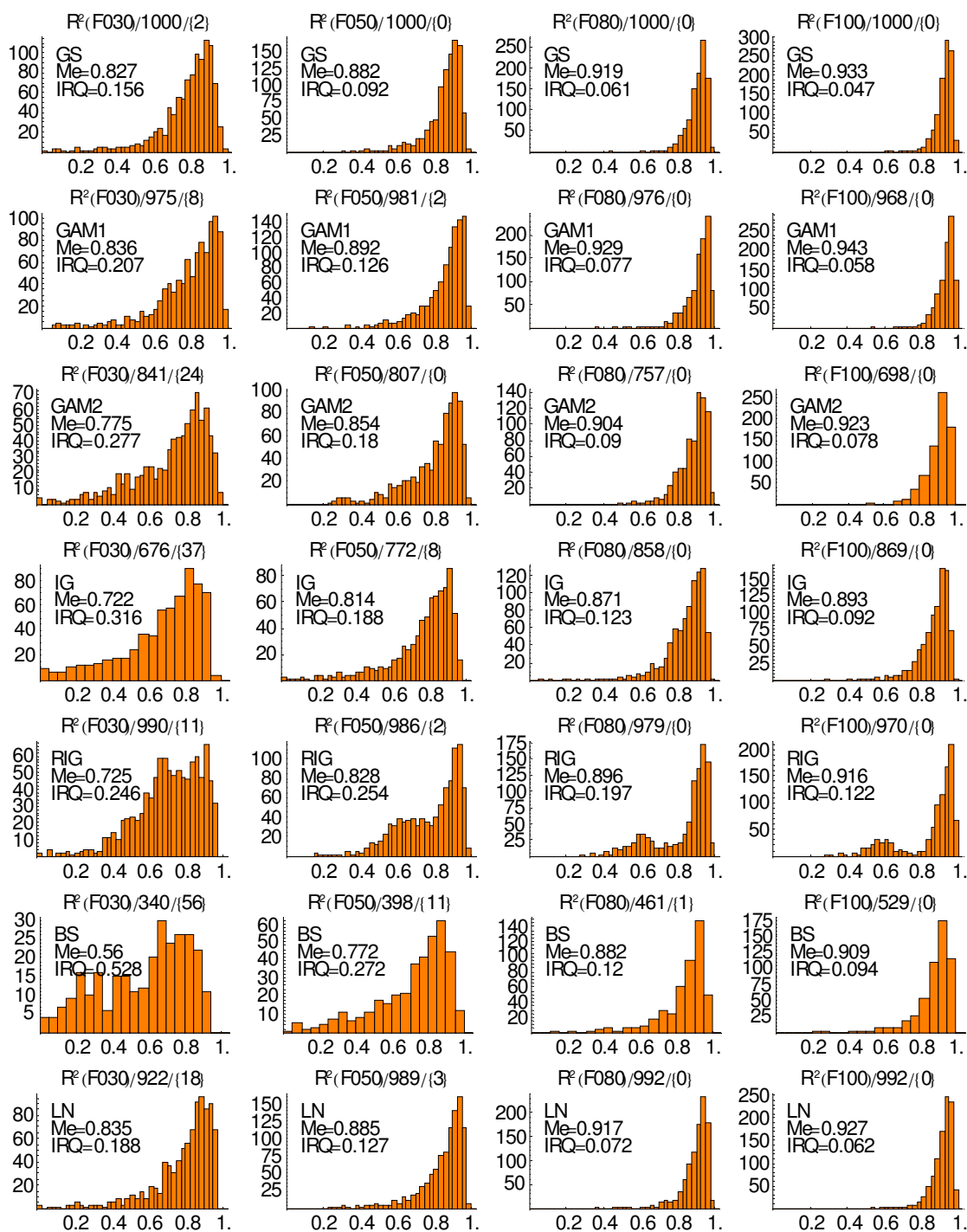
Tabela 3.2 zawiera pewne charakterystyki uzyskanych zbiorów współczynników determinacji. Ponieważ – jak pokazują rys. 3.7 i rys. 3.8 – uzyskane zbiory współczynników determinacji są silnie asymetryczne, takie standardowe charakterystyki, jak średnia czy odchylenie standardowe nie są dobrymi charakterystykami. Zamiast nich wybrane zostały: mediana MeR^2 i odchylenie międzykwartylowe (międzykwartyłowe) $IRQ(R^2)$

Tabela 3.2. Wybrane charakterystyki współczynnika determinacji R^2 jako miary jakości estymacji badanych funkcji jądrowych – oryginały A i F .

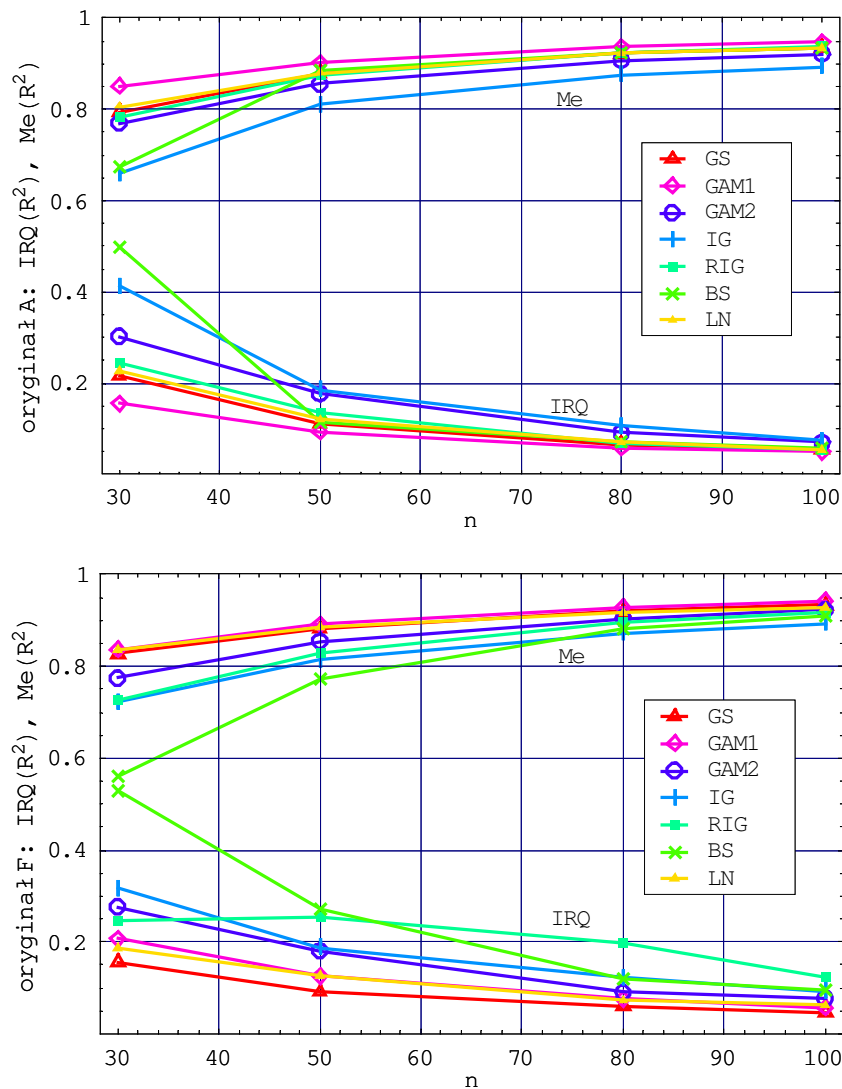
Jądro	Liczebność próby, n	Liczba N_{ef} wartości R^2 na 1000		Liczba wartości $R^2 < 0$		A		F	
		A	F	A	F	MeR^2	$IRQR^2$	MeR^2	$IRQR^2$
K_{GS}	30	1000	1000	32	2	0.794	0.215	0.827	0.156
	50	1000	1000	1	0	0.879	0.111	0.882	0.092
	80	1000	1000	0	0	0.923	0.066	0.919	0.060
	100	1000	1000	0	0	0.936	0.054	0.933	0.047
K_{GAM1}	30	988	975	30	8	0.851	0.156	0.836	0.207
	50	986	981	2	2	0.902	0.094	0.892	0.126
	80	982	976	0	0	0.938	0.058	0.929	0.077
	100	982	968	0	0	0.948	0.049	0.943	0.058
K_{GAM2}	30	869	841	63	24	0.770	0.302	0.775	0.277
	50	813	807	8	0	0.856	0.177	0.854	0.180
	80	764	757	0	0	0.908	0.092	0.904	0.090
	100	731	698	0	0	0.922	0.071	0.923	0.078
K_{IG}	30	940	676	81	37	0.660	0.413	0.722	0.316
	50	964	772	5	8	0.810	0.186	0.814	0.188
	80	975	858	1	0	0.876	0.106	0.871	0.123
	100	977	869	0	0	0.894	0.075	0.893	0.092
K_{RIG}	30	990	990	31	11	0.784	0.245	0.725	0.246
	50	986	986	3	2	0.876	0.136	0.828	0.254
	80	980	979	0	0	0.925	0.069	0.896	0.197
	100	980	970	0	0	0.939	0.054	0.916	0.122
K_{BS}	30	453	340	58	56	0.675	0.497	0.560	0.528
	50	967	398	4	11	0.884	0.114	0.772	0.272
	80	1000	461	1	1	0.923	0.071	0.882	0.120
	100	864	529	0	0	0.936	0.056	0.909	0.094
K_{LN}	30	992	922	28	18	0.806	0.227	0.835	0.188
	50	989	989	3	3	0.880	0.120	0.885	0.127
	80	988	992	0	0	0.923	0.070	0.917	0.072
	100	984	992	0	0	0.934	0.054	0.927	0.062



Rys. 3.7. Histogramy wartości współczynników determinacji R^2 dla badanych funkcji jądrowych – oryginał A. Kolejne liczby przy literze A w nagłówku każdego wykresu oznaczają kolejno: liczebność próby n , liczbę N_{ef} skutecznych estymacji współczynnika gładkości i liczbę ujemnych wartości współczynników determinacji R^2 . Me oznacza medianę a IRQ odchylenie międzykwartyłowe zbioru N_{ef} wartości R^2 .



Rys. 3.8. Histogramy wartości współczynników determinacji R^2 dla badanych funkcji jądrowych – oryginał F . Kolejne liczby przy literze F w nagłówku każdego wykresu oznaczają kolejno: liczebność próby n , liczbę N_{ef} skutecznych estymacji współczynnika gładkości i liczbę ujemnych wartości współczynników determinacji R^2 . Me oznacza medianę a IRQ odchylenie międzykwartylowe zbioru N_{ef} wartości R^2 .



Rys. 3.9. Mediany $Me(R^2)$ (wykresy górne) i odchylenia międzykwartylowe $IRQ(R^2)$ (wykresy dolne) zbiorów obliczonych współczynników determinacji R^2 dla badanych funkcji jądrowych i oryginałów: A i F w funkcji liczebności próby n .

Najlepszym estymatorem jądrowym ze względu na R^2 byłby taki estymator, który miałby największą wartość mediany $Me(R^2)$ oraz najmniejszą wartość odchylenia międzykwartylowego $IRQ(R^2)$. Niestety, jak pokazują tabela 3.3 i rys. 3.9, taki wynik nie został osiągnięty przez żadnego z 7 estymatorów. Najbliżej znalazł się estymator z jądrem GAM1, a zaraz potem estymator gaussowski. GAM1 jest najlepszy przy estymacji oryginału A i prawie najlepszy przy estymacji oryginału F. Estymator gaussowski daje absolutnie najmniejsze $IRQ(R^2)$ przy estymacji oryginału F i drugie najmniejsze $IRQ(R^2)$ przy estymacji oryginału A pozostając jednocześnie jako drugi

lub trzeci najlepszy estymator ze względu na $Me(R^2)$. Estymator LN wydaje się wyraźnie plasować na trzecim miejscu, a tuż za nim GAM2 i RIG, choć ten ostatni estymator jest gorszy dla oryginału F zwłaszcza ze względu na $IRQ(R^2)$.

Rys. 3.9 dodaje jeszcze jeden argument przeciwko estymatorowi z jądrem BS: jego jakość zarówno ze względu na $Me(R^2)$ jak i $IRQ(R^2)$ jest zdecydowanie najgorsza ze wszystkich estymatorów a jest to szczególnie ostro widoczne w przypadku oryginału F . Nieco lepiej, ale również w sposób raczej dyskwalifikacyjny prezentuje się estymator IG, szczególnie w przypadku oryginału A .

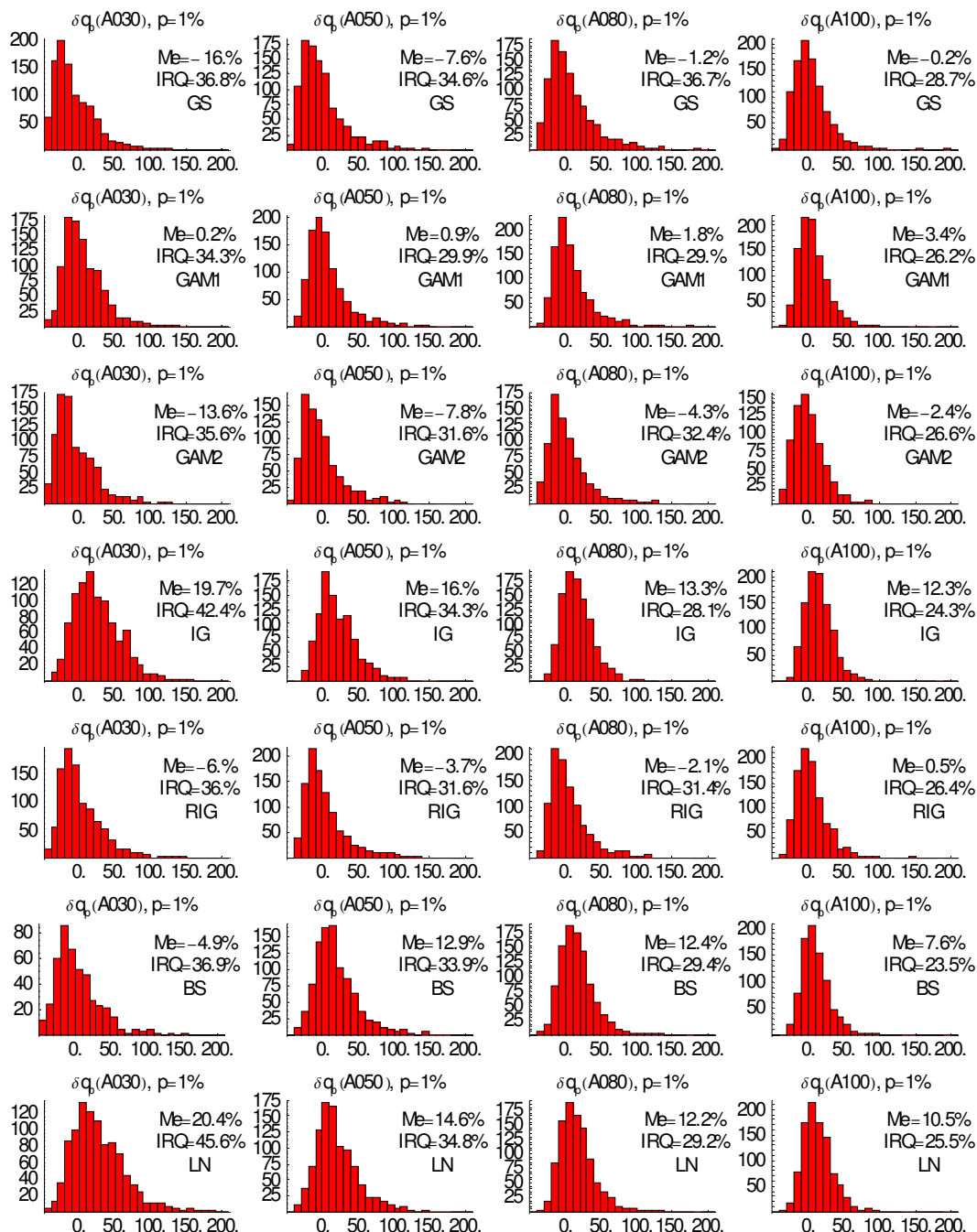
3.3.2 Względny błąd kwantyla δq_p

Obliczone wartości względnego błędu kwantyla (3.6) stanowią indywidualny wskaźnik jakości danego estymatora jądrowego obliczonego dla danej n -elementowej próby uzyskanej z oryginałów A i F . Natomiast miarą jakości danego estymatora jądrowego dla danej liczebności n i danego oryginału będą – jak poprzednio dla współczynnika determinacji – mediana $Me(\delta q_p)$ i odchylenie międzykwartkowe $IRQ(\delta q_p)$ obliczone na podstawie N_{ef} -elementowego zbioru tych błędów. Podobnie bowiem, choć nie tak konsekwentnie jak dla R^2 , rozkłady empiryczne otrzymanych wartości δq_p są asymetryczne, co pokazują przykładowo rys. 3.10 i rys. 3.11.

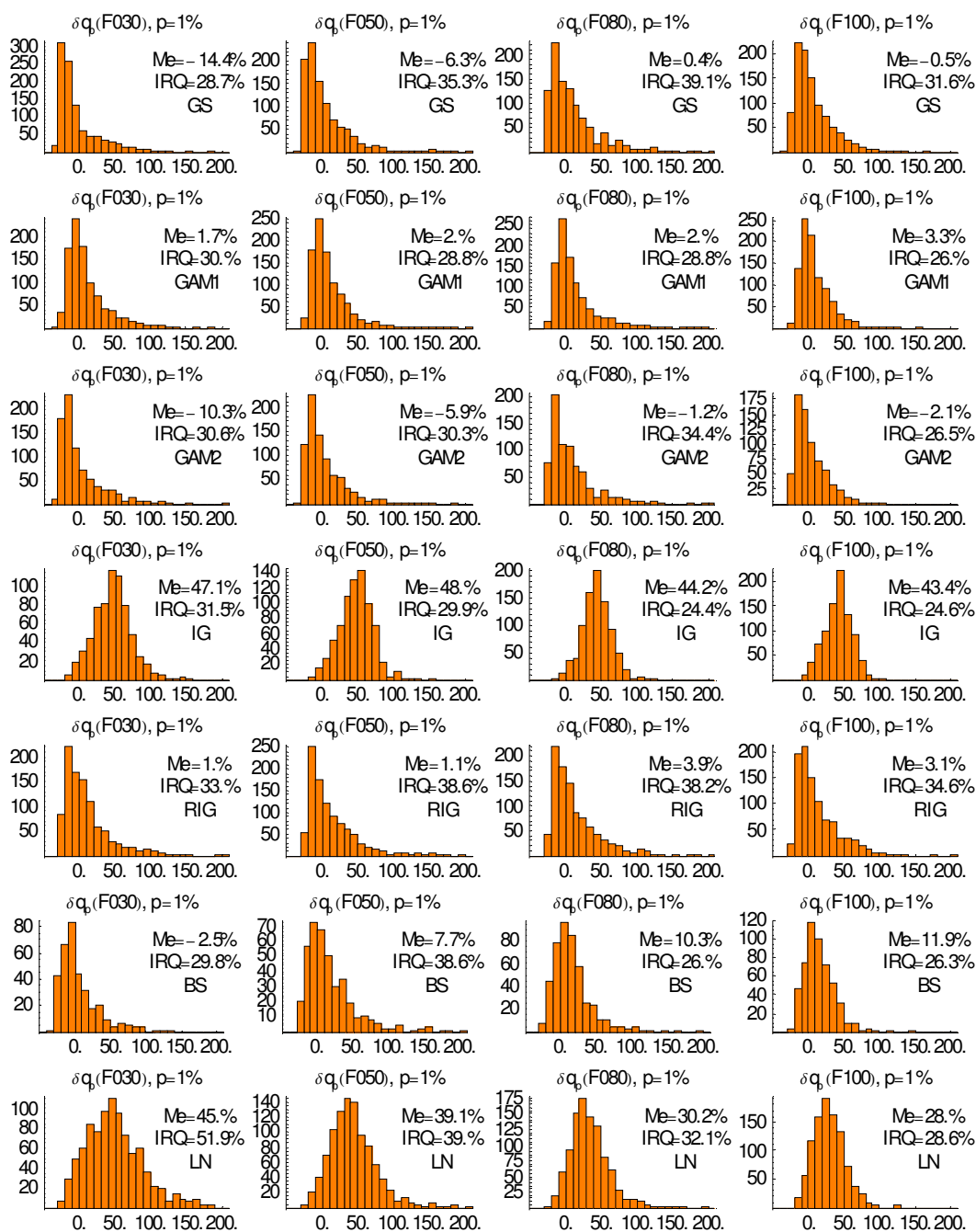
Rozkłady te są tym razem na ogół prawostronnie asymetryczne, co oznacza, że użyte estymatory jądrowe przejawiają większą zmienność w zakresie wyższych wartości estymowanego kwantyla 1%. Tabela 3.3 zawiera zbiorczą informację analogiczną do informacji zawartych w tabeli 3.2 a graficzna prezentacja głównych treści tabeli 3.3 zawarta jest na rys. 3.12 i rys. 3.13.

Najlepszy estymator jądrowy ze względu na względny błąd δq_p kwantyla to taki estymator, który charakteryzuje się najmniejszą (co do wartości bezwzględnej) ze wszystkich estymatorów wartością mediany względnych

błędów kwantyla ($\min |Me \delta q_p|$ bliskie zeru) przy jednoczesnym najmniejszym rozrzucie wartości δq_p tj. najmniejszym $IRQ(\delta q_p)$.



Rys. 3.10. Histogramy wartości względnego błędu δq_p 1%-kwantyla dla badanych funkcji jądrowych i liczebności próby – oryginał A. Wartości błędu δq_p na osi rzędnych podano w procentach. Me oznacza medianę a IRQ odchylenie międzykwantylowe zbioru N_{ef} wartości δq_p .



Rys. 3.11. Histogramy wartości względnego błędu δq_p 1%-kwantyla dla badanych funkcji jądrowych i liczebności próby – oryginał F . Wartości błędu δq_p na osi rzędnych podano w procentach. Me oznacza medianę a IRQ odchylenie międzykwartyłowe zbioru N_{ef} wartości δq_p .

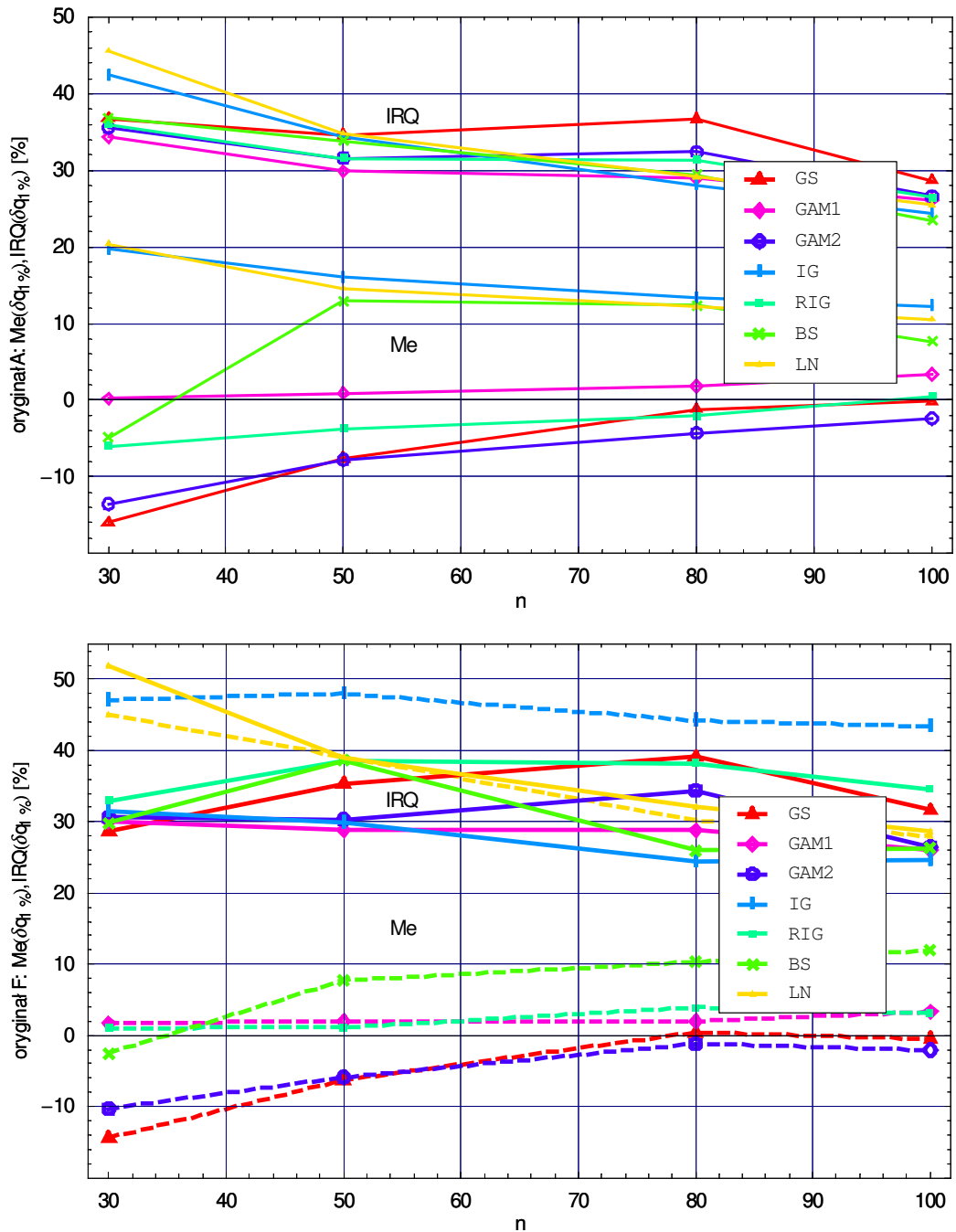
Rys. 3.12 i rys. 3.13 pokazują, że generalnie rzecz biorąc wszystkie estymatory zachowują się poprawnie, tj. IRQ maleje z liczebnością próby, a mediany zbliżają się – chociaż w różny sposób – do zera.

Najlepszym estymatorem z tego punktu widzenia jest (ponownie) GAM1: daje on najbliższą zeru medianę błędu δq_p i to dla obu rzędów kwantyla: 1% i 0.5% oraz obu oryginałów, chociaż w przypadku oryginału F obciążenie (mierzone medianą) jest większe i ujemne. Estymator ten wyraźnie góruje nad pozostałymi.

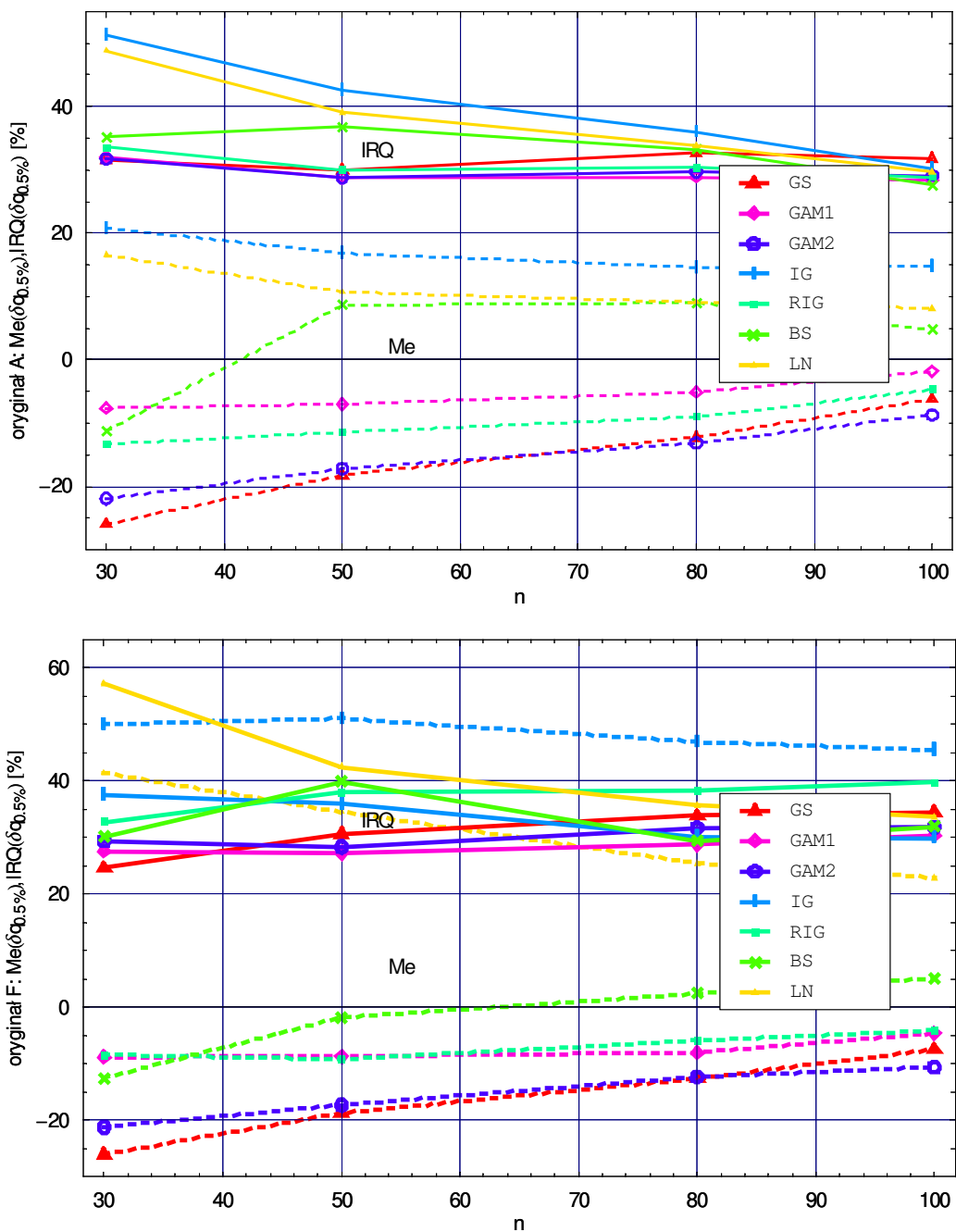
Tabela 3.3. Mediana $Me\delta q_p$ i odchylenie międzykwantylowe $IRQ\delta q_p$ (w %) względnych błędów δq_p kwantyli 1% i 0.5% estymatorów jądrowych dla badanych funkcji jądrowych, liczebności próby n oraz oryginałów A i F.

Jądro	Liczebność próby, n	Liczba N_{ef} wartości δq_p		oryginał A				oryginał F			
		A	F	$p=1\%$		$p=0.5\%$		$p=1\%$		$p=0.5\%$	
				$Me\delta q_p$	$IRQ\delta q_p$	$Me\delta q_p$	$IRQ\delta q_p$	$Me\delta q_p$	$IRQ\delta q_p$	$Me\delta q_p$	$IRQ\delta q_p$
K_{GS}	30	1000	1000	-16	37	-26	32	-14	29	-26	25
	50	1000	1000	-8	35	-18	30	-6	35	-19	31
	80	1000	1000	-1	37	-12	33	0	39	-13	34
	100	1000	1000	0	29	-6	32	0	32	-7	34
K_{GAM1}	30	988	975	0	34	-8	32	2	30	-9	28
	50	986	981	1	30	-7	29	2	29	-9	27
	80	982	976	2	29	-5	29	2	29	-8	29
	100	982	968	3	26	-2	28	3	26	-5	30
K_{GAM2}	30	869	841	-14	36	-22	32	-10	31	-21	29
	50	813	807	-8	32	-17	29	-6	30	-17	28
	80	764	757	-4	32	-13	30	-1	34	-12	32
	100	731	698	-2	27	-9	29	-2	26	-11	32
K_{IG}	30	940	676	20	42	21	51	47	31	50	37
	50	964	772	16	34	17	43	48	30	51	36
	80	975	858	13	28	15	36	44	24	47	30
	100	977	869	12	24	15	30	43	25	45	30
K_{RIG}	30	990	990	-6	36	-13	33	1	33	-8	33
	50	986	986	-4	32	-11	30	1	39	-9	38
	80	980	979	-2	31	-9	30	4	38	-6	38
	100	980	970	0	26	-5	29	3	35	-4	40
K_{BS}	30	453	340	-5	37	-11	35	-3	30	-13	30
	50	967	398	13	34	9	37	8	39	-2	40
	80	1000	461	12	29	9	33	10	26	2	29
	100	864	529	8	24	5	28	12	26	5	32
K_{LN}	30	992	922	20	46	16	49	45	52	41	57
	50	989	989	15	35	11	39	39	39	35	42
	80	988	992	12	29	9	34	30	32	25	36
	100	984	992	11	26	8	30	28	29	23	34

Estymator RIG plasuje się na drugim miejscu, szczególnie jest to widoczne na krzywych median; Gauss i GAM2 zajmują miejsca środkowe. Gauss zachowuje się nieźle dopiero od liczebności $n=80$.



Rys. 3.12. Mediany $Me\delta q_p$ i odchylenia międzykwartyłowe $IRQ\delta q_p$ (w %) w zbiorach względnych błędów δq_p 1% kwantyli dla badanych funkcji jądrowych i oryginałów A i F w funkcji liczebności próby n .

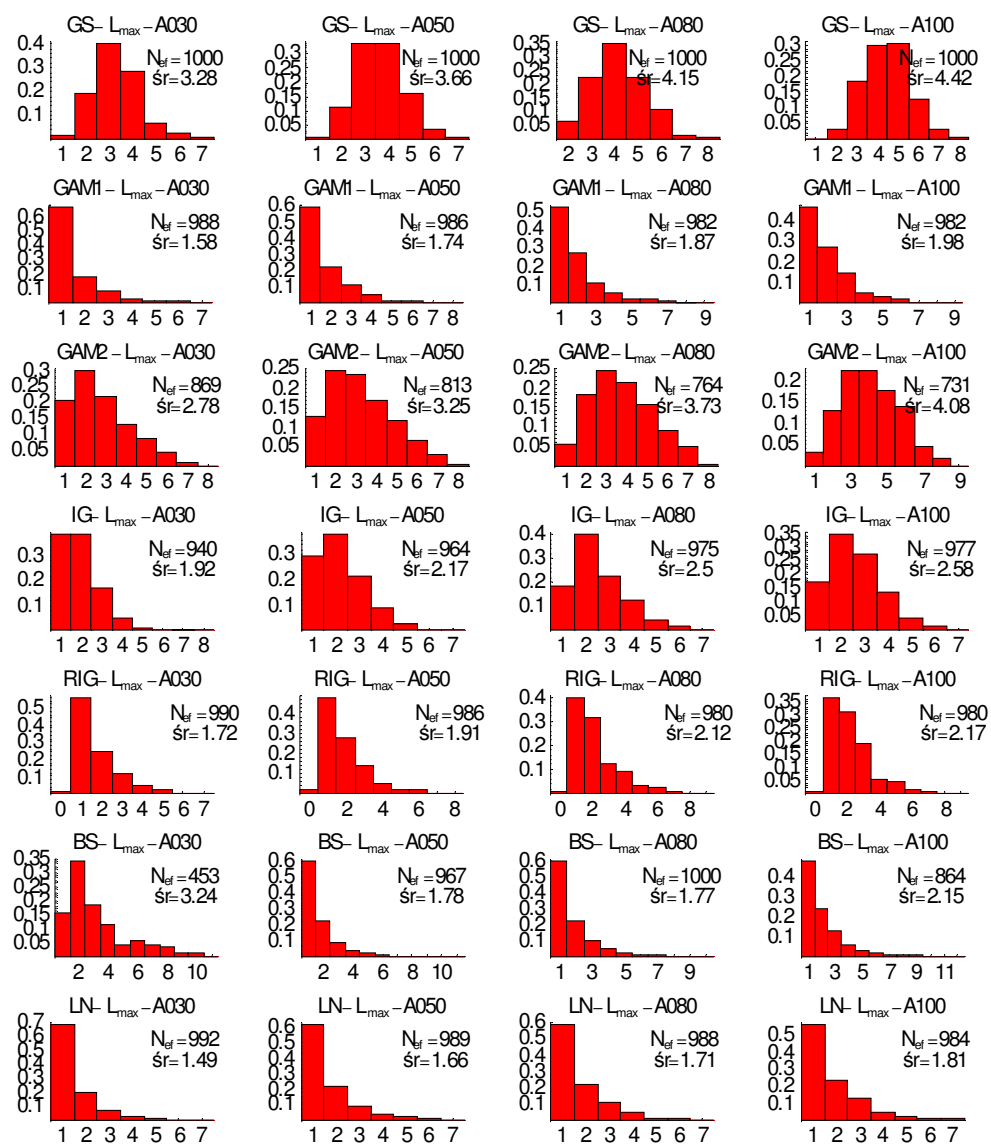


Rys. 3.13. Mediany $Me\delta_{q_p}$ i odchylenia międzykwartylowe $IRQ\delta_{q_p}$ (w %) w zbiorach względnych błędów δ_{q_p} 0.5% kwantyli dla badanych funkcji jądrowych i oryginałów A i F w funkcji liczebności próby n .

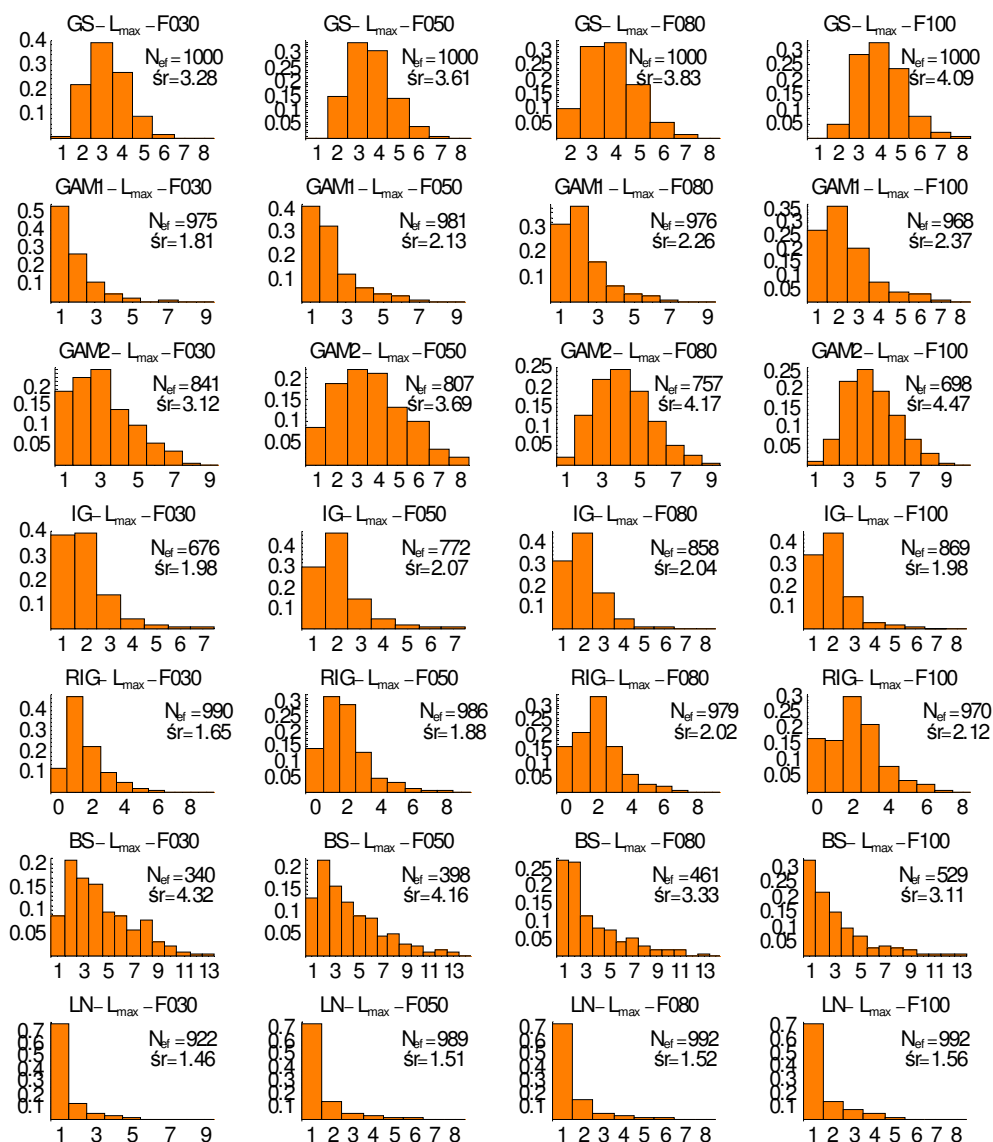
Rys. 3.12 i rys. 3.13 pokazują, że estymatory IG i LN są wyraźnie najgorsze: mają najwyższe mediany i najwyższe odchylenia międzykwartylowe błędu δ_{q_p} a estymator BS zachowuje się bardzo nieregularnie.

3.3.3 Liczba maksimumów L_{max} estymatora funkcji gęstości

Z punktu widzenia celów niniejszej pracy rzeczą najbardziej interesującą jest liczba mód generowanych przez dany estymator jądrowy. Dla zbadania tego aspektu estymacji nieparametrycznej policzone zostały wszystkie maksima każdej z N_{ef} funkcji $\hat{f}(x)$ znalezionej dla każdej liczebności próby n , każdej funkcji jądrowej K i obu oryginałów.

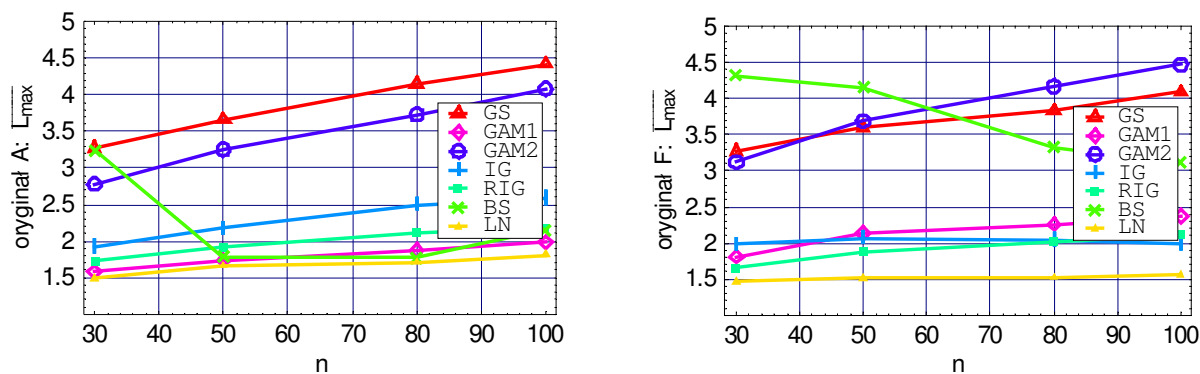


Rys. 3.14. Empiryczne rozkłady prawdopodobieństwa uzyskania liczby L_{max} mód estymatora jądrowego dla badanych liczebności próby n i badanych funkcji jądrowych (oryginał A).



Rys. 3.15. Empiryczne rozkłady prawdopodobieństwa uzyskania liczby L_{max} mód estymatora jądrowego dla badanych liczebności próby n i badanych funkcji jądrowych (oryginał F).

Wyniki w postaci empirycznych rozkładów prawdopodobieństwa uzyskania $L_{max} = 0, 1, 2, \dots$ mód przez zastosowanie danego estymatora są przedstawione na rys. 3.14 i rys. 3.15 a rys. 3.16 charakteryzuje wyniki w zbiorczy sposób.



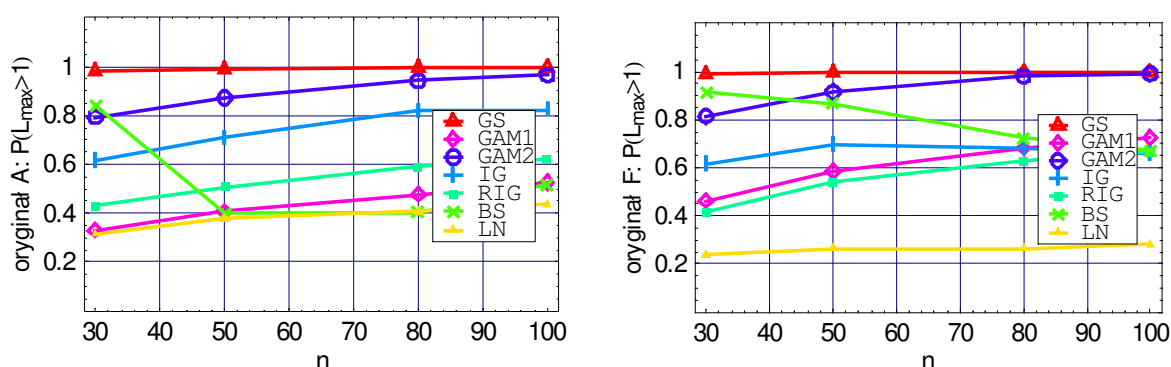
Rys. 3.16. Średnia liczba $\overline{L_{max}}$ mód badanych estymatorów jądrowych w funkcji liczebności próby n i dla obu oryginałów (A i F).

Jeśli wykluczmy jądrowy estymator BS z powodu jego nieregularnego zachowania, to pozostałe estymatory wyraźnie dzielą się na dwie grupy ze względu na wartość $\overline{L_{max}}$ (rys. 3.16). Pierwszą z nich stanowią estymatory GS i GAM2, drugą – GAM1, IG, RIG i LN. Estymatory pierwszej grupy produkują średnio więcej niż dwa maksima, co oznacza, że wykazują one maksima nieistniejące w oryginale (przy założeniu, oczywiście, że dwa maksima znajdują się blisko położenia maksimum rzeczywistych). Natomiast estymatory drugiej grupy wykazują średnio nieco mniej niż dwa maksima dla prób 30-elementowych, a dla prób liczniejszych – w pobliżu 2 (od góry albo od dołu). Co ciekawe, obraz ten jest z grubsza niezależny od oryginału (pomijając znowu nieregularne zachowanie się estymatora BS), a przecież oryginał F ma wyraźniej rozdzielone maksima od oryginału A.

Oprócz estymatora BS na pewno należy zdyskwalifikować estymator LN: jak pokazują histogramy na rys. 3.14 i rys. 3.15 estymator ten ma silną tendencję do wygładzania prawego ogona rozkładu i moda 2 (tj. dalsza) oryginału F praktycznie nie jest odzwierciedlana przez LN.

Najwyższe prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie dwu mód zapewnia estymator IG i prawdopodobieństwo to, wynoszące ok. 0.4, nie zależy praktycznie ani od liczebności próby ani oryginału. Nieco podobna sytuacja zachodzi dla estymatora RIG, choć w tym wypadku pojawia się niezerowe prawdopodobieństwo uzyskania zera maksimum, tzn. rozkładu antyJ-kształtnego z maksimum na lewym brzegu badanego zakresu. Chociaż

na ogół w miarę jak rośnie liczebność próby średnia liczba produkowanych przez estymatory jądrowe mód rośnie, to jednak procent przypadków jednomodalnych (dla RIG nawet zeromodalnych) jest u większości estymatorów dość znaczny, a nawet, jak w przypadku LN, bardzo znaczny. Z tego punktu widzenia estymator gaussowski jest bezkonkurencyjny. Jak pokazuje rys. 3.17, zapewnia on praktycznie w 100% co najmniej dwie mody. Oczywiście, fakt ten rodzi nowe pytanie: czy mody te oznaczają (oczywiście z pewnym przybliżeniem) mody rzeczywiście istniejące w oryginale.



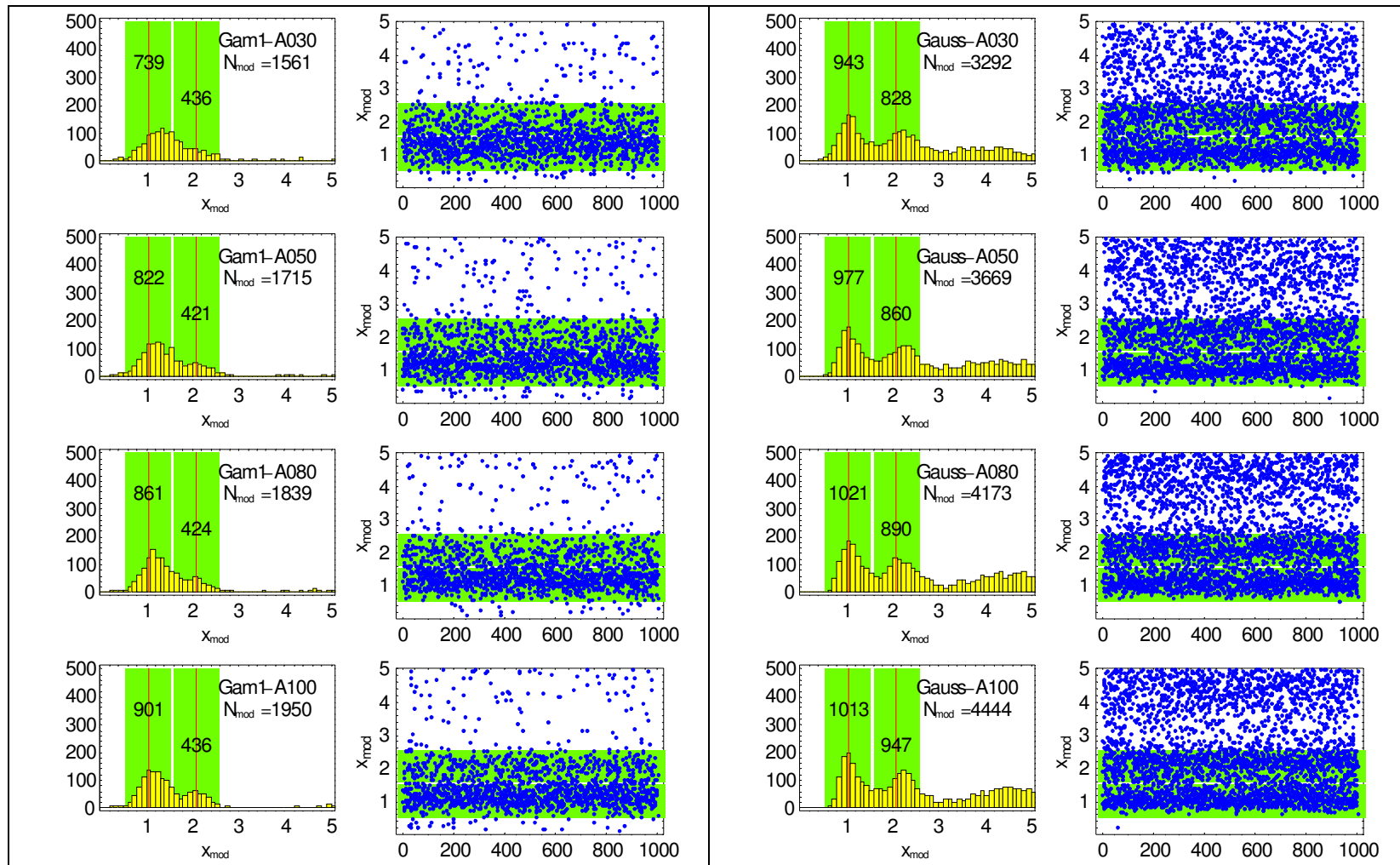
Rys. 3.17. Prawdopodobieństwo $P(L_{max} \geq 2)$ uzyskania co najmniej dwu mód przez badane estymatory jądrowe w funkcji liczebności próby n dla obu oryginałów.

Rys. 3.17 jest bardzo ważny – wręcz kluczowy – dla celów niniejszej pracy: pokazuje on, że pomimo swoich nieco (czasami trochę więcej niż nieco) gorszych badanych charakterystyk, estymator gaussowski najskuteczniej zapewnia co najmniej dwie mody. W związku z tym, estymator ten najbardziej się nadaje do poszukiwania wielomodalności (dwumodalności). Z pozostałych estymatorów, GAM1 zbliża się do GS dla $n \geq 80$ a reszta (poza LN, który jest zdecydowanie najgorszy) są dużo gorsze i lepiej sobie radzą niejednomodalnością w przypadku oryginału A niż oryginału F.

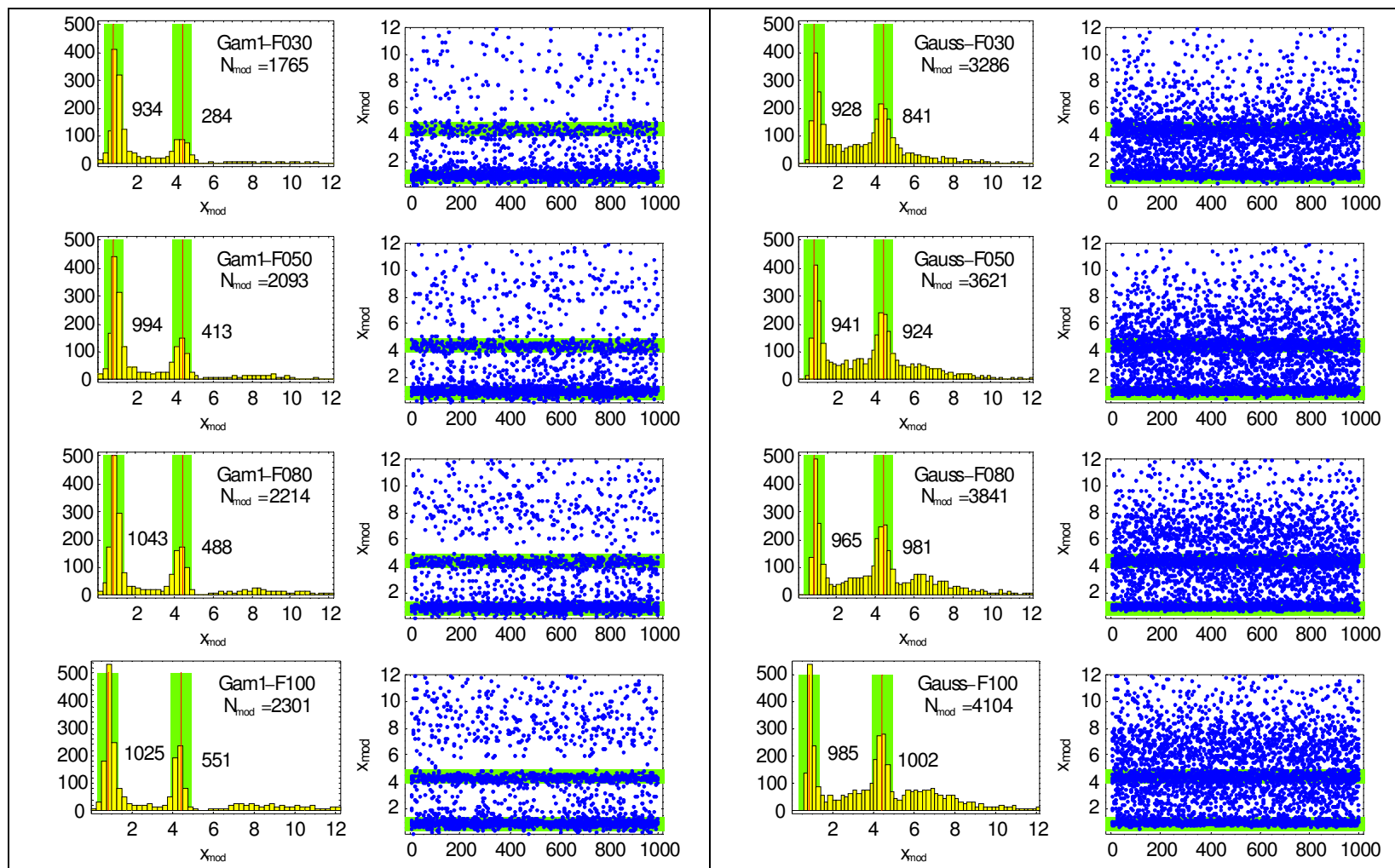
Zamieszczony na następnych stronach rys. 3.18 i rys. 3.19 ilustrują nieco bardziej szczegółowo porównanie dwu najważniejszych estymatorów, jakie wydają się wyłaniać z przeprowadzonej analizy: GAM1 i Gauss. Jak widać na rys. 3.19, GAM1 generuje początkowo (dla $n=30$) mniej a potem nieco więcej niż oczekiwane 2000 mód i w większości analizowanych

przypadków nie zapewnia imitacji drugiego maksimum (4.39) – dopiero dla liczebności próby $n=100$ szansa powstania mody estymatora GAM1 w prawym zielonym pasku przekracza 50%.

Inaczej jest w przypadku estymatora gaussowskiego. „Nadwrażliwość” tego estymatora na fluktuacje częstości w próbie losowej powoduje co prawda „nadprodukcję” mód, ale jednocześnie porównywalną wykrywalność obu mód oryginału F . Spośród wszystkich badanych estymatorów, jest to niewątpliwie najlepsze narzędzie do badania wielomodalności (a konkretnie dwumodalności).



Rys. 3.18. Skuteczność imitowania mód oryginalu A (1.04 i 2.09) przez estymatory GAM1 i gaussowski. Chmury punktów oznaczają położenia x_{mod} mód. N_{mod} oznacza liczbę mód; pionowe zielone paski o szerokości 1 z centrum w modzie rzeczywistej oryginalu A zawierają podane obok liczby mód; te same paski w poziomie pokazują rozkład x_{mod} w funkcji numeru próby losowej.



Rys. 3.19. Skuteczność imitowania mód oryginału F (0.83 i 4.39) przez estymatory GAM1 i gaussowski. Chmury punktów oznaczają położenia x_{mod} mód. N_{mod} oznacza liczbę mód; pionowe zielone paski o szerokości 1 z centrum w modzie rzeczywistej oryginału F zawierają podane obok liczby mód; te same paski w poziomie pokazują rozkład x_{mod} w funkcji numeru próby losowej.

3.4 Podsumowanie

Zastosowanie nieparametrycznego estymatora z symetryczną funkcją jądrową Gaussa do estymacji funkcji gęstości często wiąże się ze zjawiskiem „wycieku” prawdopodobieństwa w obszar poniżej dolnego ograniczenia zmiennej losowej, co jest wadą tego estymatora. Problem ten jest automatycznie rozwiązany, jeśli zastosowany zostanie estymator nieparametryczny z asymetryczną funkcją jądrową o ograniczeniu takim jak badana zmienna losowa. Aby porównać jakość estymacji przy użyciu estymatorów jądrowych: symetrycznego (gaussowskiego) i asymetrycznych wykonany został eksperyment Monte Carlo, w którym po przyjęciu dwu syntetycznych rozkładów prawdopodobieństwa, wygenerowano z nich 1000-elementowe zbiory 30-, 50- 80- i 100-elementowych prób losowych. Jakość badanych estymatorów rozpatrywana była pod względem trzech miar jakości: (1) współczynnika determinacji R^2 , (2) względnego błędu δq_p kwantyla q_p dla zadanego prawdopodobieństwa przewyższenia p oraz (3) liczby L_{max} maksimów estymatora.

Najlepszym estymatorem jądrowym ze względu na R^2 i δq_p okazał się estymator GAM1; estymator gaussowski wypadł nieznacznie gorzej.

Ze względu na liczbę maksimów L_{max} , które to kryterium ma najwyższy priorytet z uwagi na cel pracy, estymator gaussowski jest zdecydowanie najlepszy spośród wszystkich badanych estymatorów, gdyż wykazywał on co najmniej dwie mody z prawdopodobieństwem bliskim jedności. W tym przypadku estymator GAM1 jest wyraźnie gorszy.

Z uwagi na powyższy rezultat należy stwierdzić, że estymator gaussowski najlepiej wykrywa wielomodalność (dwumodalność). Z tego względu został on zastosowany do estymacji funkcji gęstości przepływów maksymalnych rocznych na rzekach Polski w dalszej części pracy. Dodatkowo – dla porównania i ze względu na swoje wykazane w eksperymencie zalety – użyty został także estymator GAM1.

4. WYKORZYSTANE DANE PRZEPIYWÓW MAKSYMALNYCH W ROKU

Do badania wielomodalności wybrane zostały 52-letnie serie rocznych przepływów maksymalnych z lat 1951-2002 w 60 przekrojach wodowskazowych głównych rzek Polski i ich dopływów (dane z IMGW). Wybrano wodowskazy położone na Wiśle i Odrze oraz na ich kilku dopływach tak, by na jednym cieku usytuowanych było po kilka posterunków od źródeł do ujścia (rys. 4.1) z obserwacjami prowadzonymi w rozpatrywanym okresie.

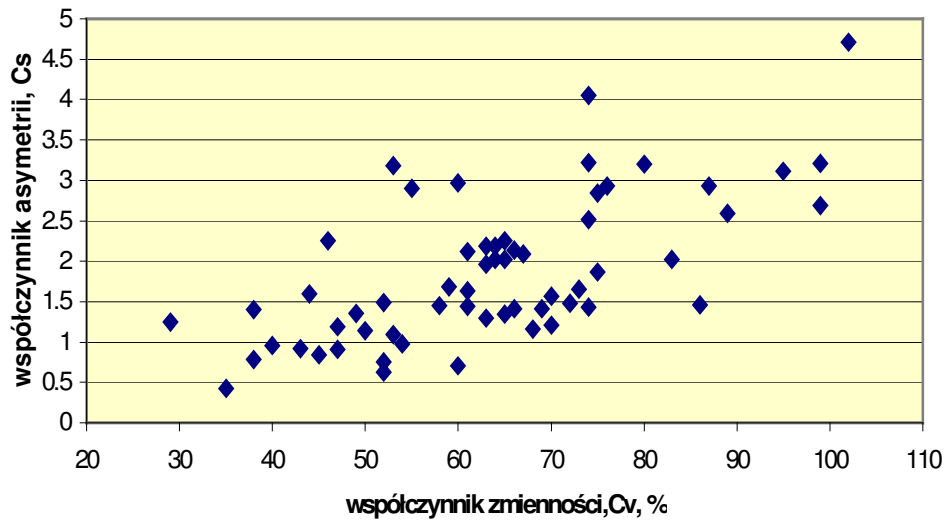


Rys. 4.1. Rozmieszczenie wybranych posterunków wodowskazowych na Odrze i Wiśle oraz na ich dopływach

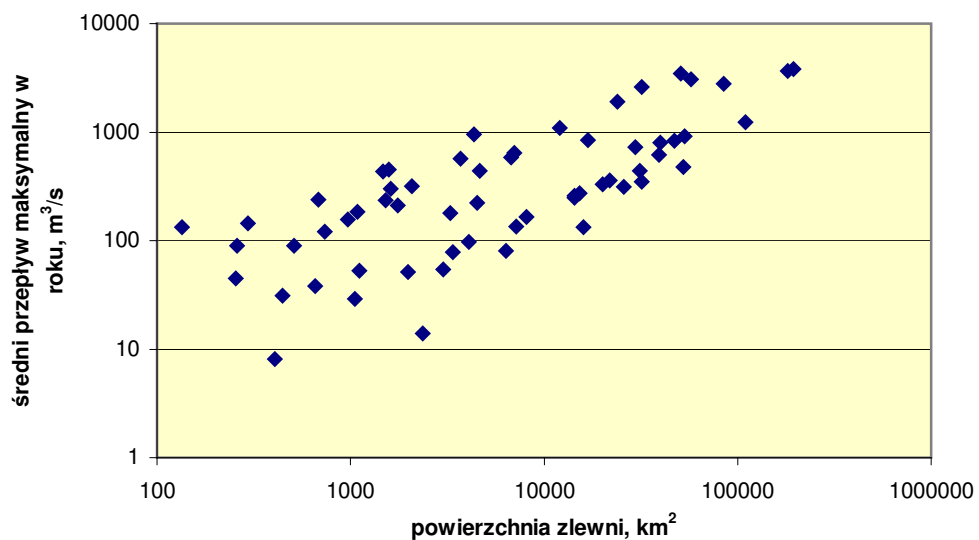
Tabela 4.1 zawiera niektóre istotne dane dotyczące zbiorów badanych przepływów, a rys. 4.2 i rys. 4.3 ilustrują te dane w bardziej syntetyczny sposób.

Tabela 4.1. Niektóre charakterystyki badanych serii przepływów maksymalnych rocznych

L.p.	RZEKA/wodowskaz	Pow. zlewni [km ²]	\bar{x} , m ³ /s	S_x , m ³ /s	C_v , %	C_s
1	ODRA/Chałupki	4 666,0	437,1	324,2	74	3,22
2	ODRA/Racibórz/ Miedonia	6 744,0	588,2	436,7	74	4,05
3	ODRA/Scinawa	29 583,0	730,6	441,0	60	2,97
4	ODRA/Cigacice	39 888,0	797,3	437,6	55	2,90
5	ODRA/Polęcko	47 152,0	837,6	443,0	53	3,18
6	ODRA/Słubice	53 382,0	917,6	424,0	46	2,25
7	ODRA/Gozdowice	109 729,0	1236,8	476,1	38	1,40
8	KŁODNICA/Gliwice	444,0	30,9	16,0	52	1,49
9	KŁODNICA/Lenartowice	1 054,0	29,1	13,7	47	0,91
10	MAŁA PANEW/Krupski Młyn	655,0	37,9	20,3	53	1,09
11	MAŁA PANEW/Staniszczce Wielkie	1 107,4	53,0	32,2	61	2,12
12	NYSA KŁODZKA/Bystrzyca	260,0	89,1	71,0	80	3,20
13	NYSA KŁODZKA/Kłodzko	1 083,0	184,8	189,2	102	4,71
14	NYSA KŁODZKA/Nysa	3 276,0	180,1	156,6	87	2,93
15	NYSA KŁODZKA/Skorogoszcz	4 514,5	224,1	200,5	89	2,59
16	ŚCINAWKA/Tumaczów	256,2	45,1	44,6	99	3,21
17	ŚCINAWKA/Gorzuchów	511,0	89,8	77,4	86	1,46
18	WARTA/Działoszyn	4 088,5	97,4	45,7	47	1,19
19	WARTA/Sieradz	8 139,0	166,1	71,5	43	0,92
20	WARTA/Poznań	25 910,9	312,3	154,8	50	1,14
21	WARTA/Skwierzyna	32 053,0	350,3	171,4	49	1,35
22	WARTA/Gorzów Wielkopolski	52 404,3	478,8	189,9	40	0,96
23	NOTEĆ/Pakość	2 356,2	14,0	10,7	76	2,93
24	NOTEĆ/Nowe Drezdenko	15 970,1	133,7	38,4	29	1,25
25	WISŁA/Skoczów	296,0	144,4	120,0	83	2,02
26	WISŁA/Goczałkowice	738,0	120,6	84,9	70	1,57
27	WISŁA/Jawiszowice	970,0	157,6	108,4	69	1,41
28	WISŁA/Nowy Bieruń	1 747,7	211,8	154,9	73	1,65
29	WISŁA/Jagodniki	12 049,0	1086,7	659,6	61	1,63
30	WISŁA/Szczucin	23 900,0	1917,5	1246,7	65	1,34
31	WISŁA/Sandomierz	31 846,5	2599,5	1565,4	60	0,71
32	WISŁA/Zawichost	50 731,0	3456,9	1802,6	52	0,63
33	WISŁA/Puławy	57 263,0	3060,3	1582,6	52	0,75
34	WISŁA/Warszawa/Nadwilanówka	84 539,5	2776,2	1245,0	45	0,84
35	WISŁA/Toruń	181 033,0	3662,1	1268,3	35	0,43
36	WISŁA/Tczew	194 376,0	3805,6	1435,7	38	0,78
37	RABA/Proszówki	1 470,4	431,2	284,5	66	1,41
38	DUNAJEC/Nowy Targ/Kowaniec	681,0	239,5	171,6	72	1,48
39	DUNAJEC/Krościenko	1 580,0	448,8	303,4	68	1,16
40	DUNAJEC/Nowy Sącz	4 341,0	954,5	711,0	74	1,43
41	POPRAD/Muszyna	1 514,0	234,1	174,5	75	2,84
42	POPRAD/Stary Sącz	2 071,0	317,7	201,4	63	1,96
43	SAN/Lesko	1 614,0	301,9	200,1	66	2,14
44	SAN/Przemyśl	3 686,5	572,1	306,5	54	0,98
45	SAN/Jarosław	7 040,0	645,7	371,6	58	1,45
46	SAN/Radomyśl	16 823,8	846,4	369,3	44	1,60
47	WIEPRZ/Zwierzyniec	405,0	8,1	6,0	75	1,87
48	WIEPRZ/Krasnystaw	3 001,0	54,4	53,7	99	2,69
49	WIEPRZ/Lubartów	6 363,0	80,6	76,5	95	3,11
50	WIEPRZ/Kośmin	134,7	132,9	98,7	74	2,51
51	NAREW/Narew	1 978,0	51,4	32,4	63	1,30
52	NAREW/Suraż	3 376,5	78,8	48,1	61	1,44
53	NAREW/Strękowa Góra	7 182,0	135,7	91,5	67	2,09
54	NAREW/Wizna	14 324,0	258,8	167,5	65	2,02
55	NAREW/Piątnica/Łomża	15 296,0	274,7	175,1	64	2,02
56	NAREW/Nowogród	20 109,0	330,2	215,8	65	2,25
57	NAREW/Ostrołęka	21 862,2	360,0	227,5	63	2,19
58	BUG/Włodawa	14 410,0	247,2	172,7	70	1,21
59	BUG/Frankopol	31 335,0	440,3	259,8	59	1,68
60	BUG/Wyszków	39 119,4	614,4	394,2	64	2,19

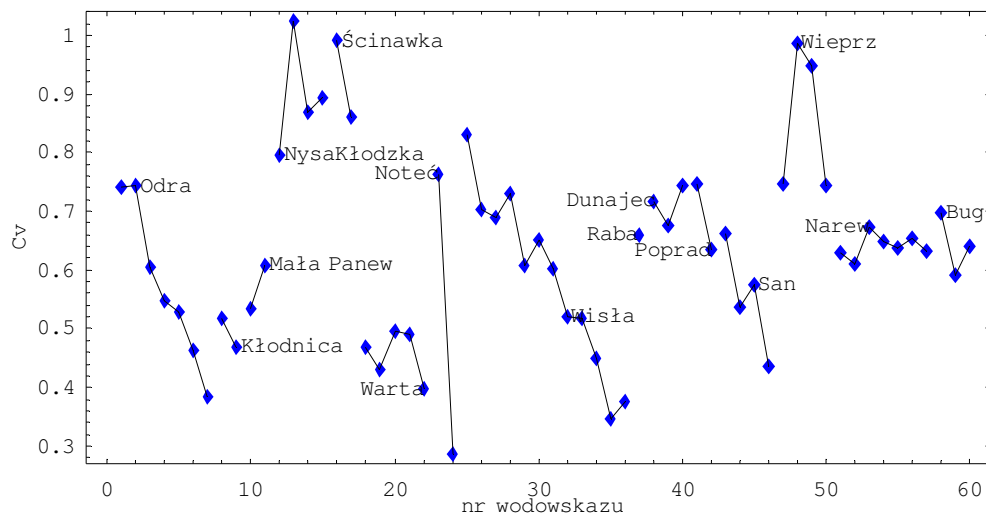


Rys. 4.2. Wykres C_s – C_v dla badanych 60 prób przepływów maksymalnych w roku



Rys. 4.3. Zależność średniego przepływu maksymalnego w roku w badanych 60 przekrojach wodowskazowych od powierzchni zlewni

Rys. 4.2 i rys. 4.3 pokazują zakres zmienności niektórych charakterystyk zbiorów rzeczywistych przepływów, jakie są badane z dalszych rozdziałach. Obie chmury punktów są dosyć zwarte; druga z nich pokazuje potęgową zależność średniego przepływu maksymalnego w roku od powierzchni zlewni zamykanej przekrojem wodowskazowym, z którego pochodzą dane.



Rys. 4.4. Współczynnik zmienności przepływów maksymalnych rocznych w badanych przekrojach wodowskazowych (kolejne przekroje danej rzeki są ustawione zgodnie z jej biegiem).

Na rys. 4.4 widać spodziewaną na ogół strukturę zmienności przepływów maksymalnych rocznych badanych rzek: współczynnik zmienności maleje w miarę jak rzeka przechodzi od charakteru górskiego do nizinnego. Widać to wyraźnie na wykresie C_V dla Odry, Wisły i Sanu. Inne większe rzeki: Warta i Narew takiej konsekwencji nie wykazują – ich reżim przepływu nie jest tak zmienny. Na tym tle zwraca uwagę bardzo wysoka rozpiętość C_V Noteci i bardzo duże wartości C_V Wieprza.

5. IDENTYFIKACJA WIELOMODALNOŚCI FUNKCJI GĘSTOŚCI PRZEPLYWÓW MAKSYMALNYCH W ROKU

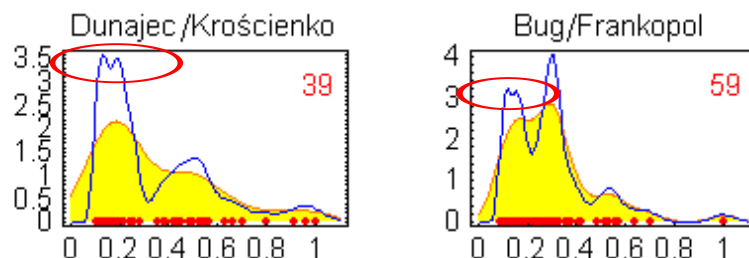
5.1 Wielomodalność badanych przepływów maksymalnych w roku sugerowana przez estymator gaussowski

Przeprowadzona w rozdziale 3 analiza jakości estymacji nieparametrycznej na materiale syntetycznym z użyciem symetrycznej funkcji jądrowej i jądrowych funkcji asymetrycznych wykazała zarówno zalety jak i wady obu wariantów estymacji jądrowej. Okazało się, że niektóre estymatory asymetryczne (zwłaszcza GAM1) wyraźnie górują nad estymatorem symetrycznym (gaussowskim) ze względu na kwantyle 1% i 0.5%, są porównywalnej jakości ze względu na współczynnik determinacji a gorsze jeśli jako kryterium jakości weźmiemy prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej co najmniej dwumodalnego estymatora jądrowego któregoś z badanych dwu oryginałów (por. rys. 3.17). W tym ostatnim przypadku estymator gaussowski zapewnia z prawdopodobieństwem bliskim jedności znalezienie co najmniej dwu mód w dwumodalnym rozkładzie rzeczywistym i to prawie niezależnie od liczebności próby, co powoduje, że jest on bezkonkurencyjny dla celów niniejszej pracy.

Dlatego do finalnej implementacji estymacji jądrowej do identyfikacji modalnej struktury przepływów maksymalnych w roku użyty został estymator gaussowski (2.14) ze współczynnikiem gładkości (2.23). Ze względów porównawczych zastosowano także estymator dodatkowy tj. estymator GAM1 jako najlepiej się spisujący pod względem kryteriów R^2 i δq_p . Rys. 5.2 zawiera zbiorczo wyniki tej estymacji.

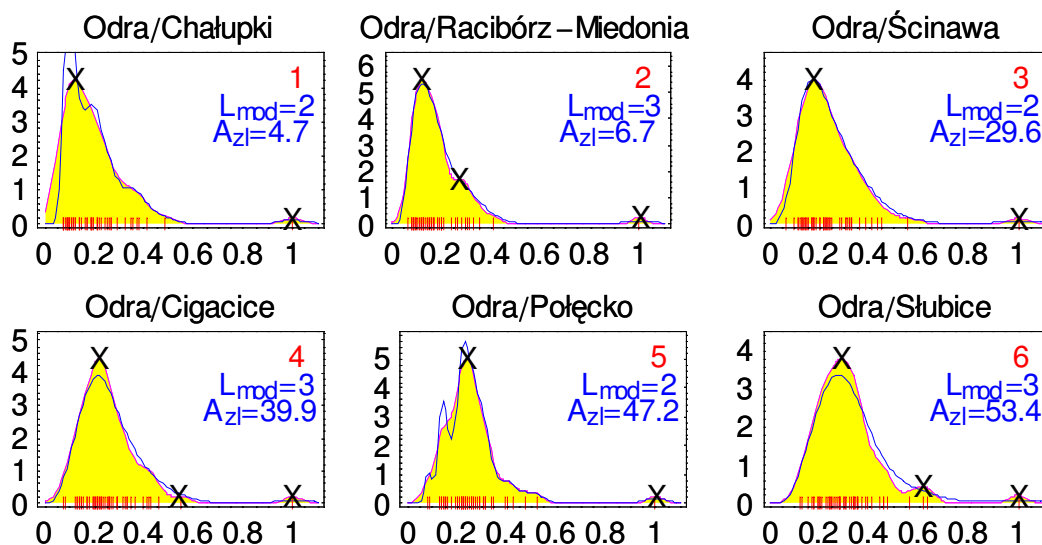
Estymator z funkcją jądrową GAM2 – który według rys. 3.17 jest tuż po estymatorze gaussowskim – nie został wykorzystany z dwu powodów. Pierwszym z nich jest fakt, że na 60 prób losowych estymacja krzyżowa zawodziła (funkcja LSCV(b) (3.2) nie miała minimum) w 18 przypadkach;

drugim natomiast – pewna skłonność do tworzenia maksimów wyższych rzędów (tj. „maksimów na maksimach”), co ilustruje rys. 5.1.

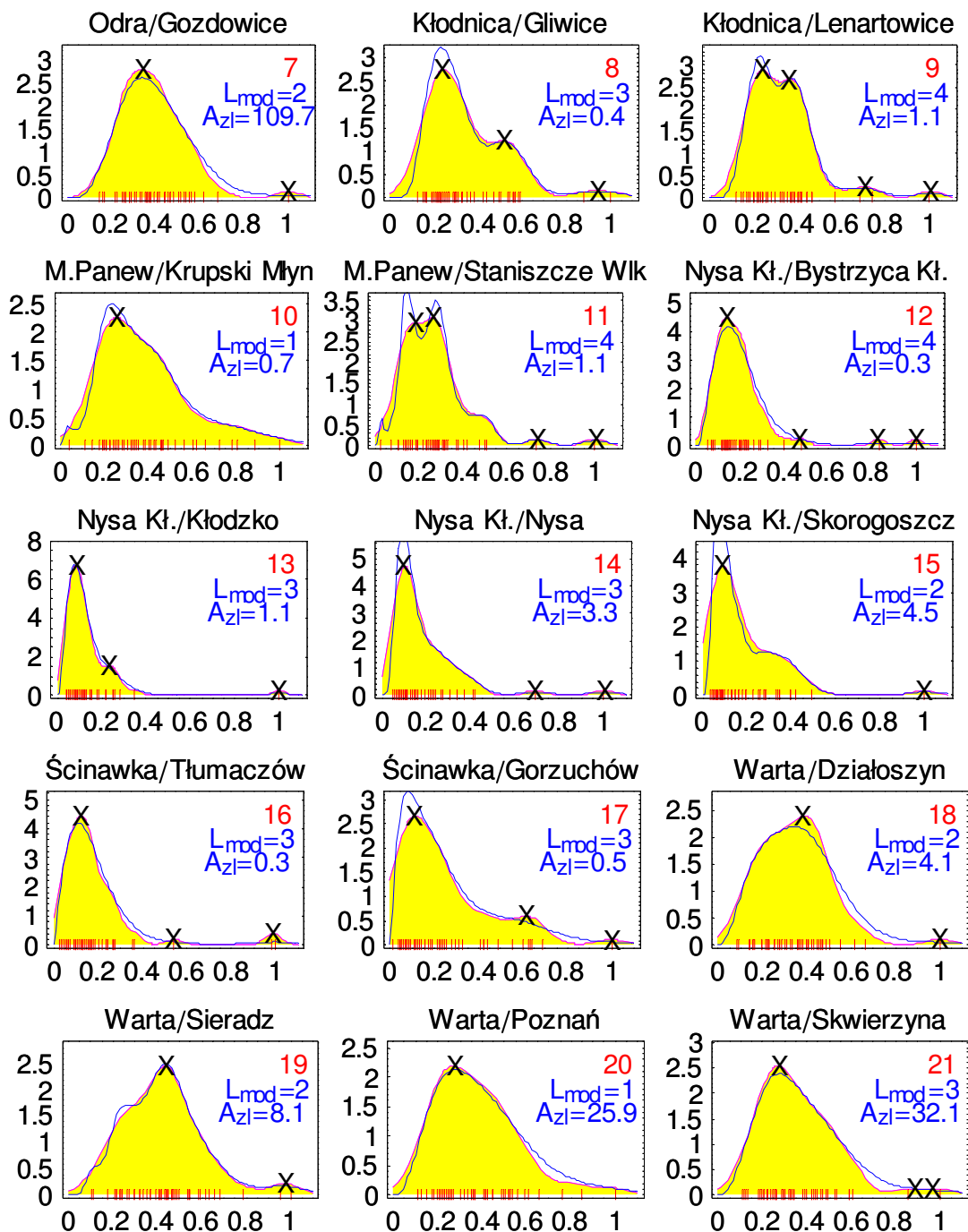


Rys. 5.1. Maksima drugiego rzędu tworzone przez estymator GAM2.

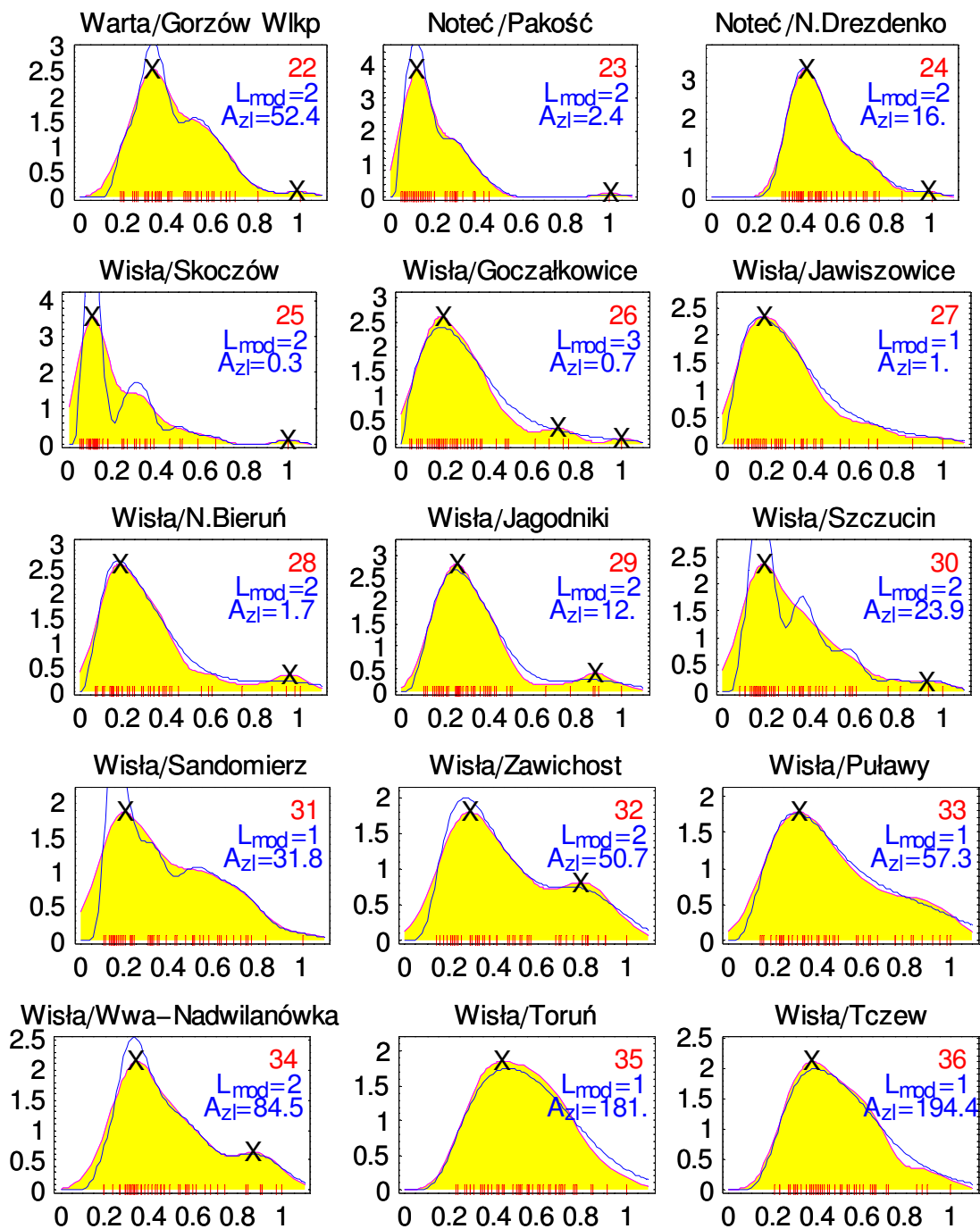
Fakt ten ma znaczenie, gdyż wskazuje na wyraźną nadczułość tego estymatora w zakresie wykrywania mód, a w przypadku automatycznego badania modalności funkcji gęstości prawdopodobieństwa, takie nieznaczące mody są wykrywane i wchodzą do ogólnego obrazu modalności badanej funkcji.



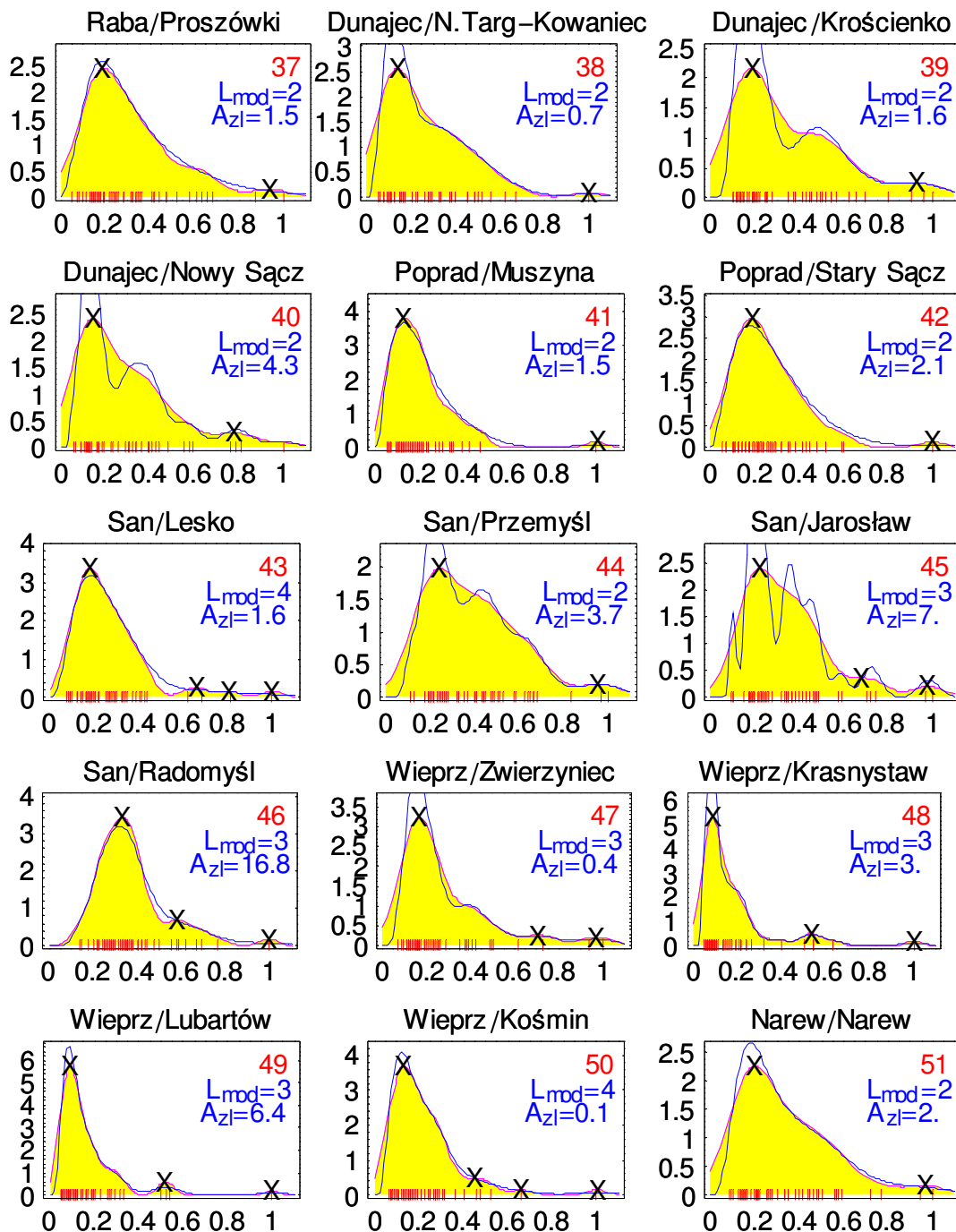
Rys. 5.2. Estymator GS (żółte pole) i GAM1 (linia niebieska) rzeczywistej funkcji gęstości przepływów maksymalnych rocznych (czerwone kreski); 1 lokalizuje najwyższą wartość Q_{max} w kolejnych przekrojach wodowskazowych; L_{mod} oznacza liczbę mód (zaznaczonych X), A_{zl} – powierzchnię zlewni w tysiącach km^2 (c.d. na następnej stronie).



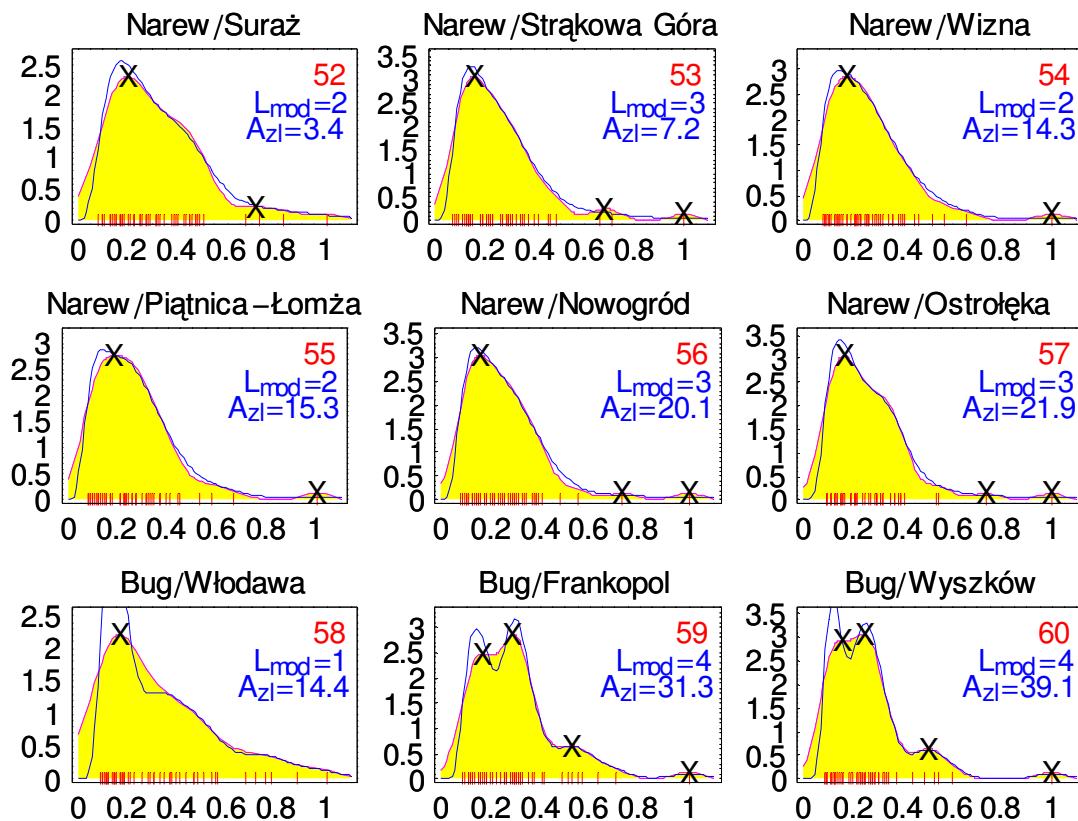
Rys. 5.2 (kontynuacja). Estymator GS (żółte pole) i GAM1 (linia niebieska) rzeczywistej funkcji gęstości przepływów maksymalnych rocznych (czerwone kreski); 1 lokalizuje najwyższą wartość Q_{max} w kolejnych przekrojach wodowskazowych; L_{mod} oznacza liczbę mód (zaznaczonych X), A_{zl} – powierzchnię zlewni w tysiącach km² (c.d. na następnej stronie).



Rys. 5.2 (kontynuacja). Estymator GS (żółte pole) i GAM1 (linia niebieska) rzeczywistej funkcji gęstości przepływów maksymalnych rocznych (czerwone kreski); 1 lokalizuje najwyższą wartość Q_{max} w kolejnych przekrojach wodowskazowych; L_{mod} oznacza liczbę mód (zaznaczonych X), A_{zl} – powierzchnię zlewni w tysiącach km² (c.d. na następnej stronie).



Rys. 5.2 (kontynuacja). Estymator GS (żółte pole) i GAM1 (linia niebieska) rzeczywistej funkcji gęstości przepływów maksymalnych rocznych (czerwone kreski); 1 lokalizuje najwyższą wartość Q_{max} w kolejnych przekrojach wodowskazowych; L_{mod} oznacza liczbę mód (zaznaczonych X), A_{zi} – powierzchnię zlewni w tysiącach km² (c.d. na następnej stronie).



Rys. 5.2 (kontynuacja). Estymator GS (żółte pole) i GAM1 (linia niebieska) rzeczywistej funkcji gęstości przepływów maksymalnych rocznych (czerwone kreski); 1 lokalizuje najwyższą wartość Q_{max} w kolejnych przekrojach wodowskazowych; L_{mod} oznacza liczbę mód (zaznaczonych X), A_{zl} – powierzchnię zlewni w tysiącach km².

Ogólny obraz, jaki się wyłania na podstawie 60 wykresów na rys. 5.2, potwierdza postawione na wstępie pracy przypuszczenie o niejednomodalności przepływów maksymalnych rocznych. Sumaryczną informację na ten temat zawiera tabela 5.1.

Wyraźna jednomodalność jest obrazem spotykanym stosunkowo rzadko; najmocniejszym „klasycznym” przykładem jest Wisła/Toruń (rys. 5.2, wykres 35). Inne podobne wykresy, takie jak Mała Panew/Krupski Młyn (nr 10), Warta/Poznań (nr 20) czy Wisła/Jawiszowice (nr 27), przedstawiają rozkłady z mniej czy bardziej wykształconym tzw. grubym ogonem, tj. tą krańcową (w tym wypadku prawostronną) częścią funkcji gęstości, która maleje wolniej, niżby to sugerowała główna część wykresu. Być może, gruby ogon to nieco rozmazana moda, która w innych przypadkach jest widoczna

wyraźniej, np. w przekrojach: Kłodnica/Gliwice (nr 8), Ścinawka/Gorzuchów (nr 17), Wisła/Zawichost (32) i innych.

Tabela 5.1. Rozkład wielomodalności w badanych wodowskazach

Liczba mód, L_{mod}	Liczba estymatorów jądrowych z liczbą mód L_{mod}
1	8
2	27
3	18
4	7

Niejednomodalność badanych rozkładów przepływów maksymalnych występuje zdecydowanie częściej niż wyraźna jednomodalność i pojawia się głównie jako dwu- lub trójmodalność. Porównanie wykresów z dwiema i więcej modami sugeruje ich podział na trzy grupy.

Pierwszą grupę stanowią rozkłady z wyraźnie wykształconymi dwiema modami, czego przykładem mogą być wykresy Ścinawka/Gorzuchów (17), Wisła/Zawichost (32), Wisła/Warszawa-Nadwilanówka (34) czy San/Radomyśl (46). Pierwsza moda jest większa, druga nieco mniejsza, ale obie są nie tylko wyraźne, ale również poparte – każda z osobna – dużą procentowo liczebnością elementów próby tworzących je. Taką dwumodalność można bez dodatkowego testowania statystycznego uznać za rzeczywistą, tj. odzwierciedlającą w stopniu wysoce prawdopodobnym rzeczywisty rozkład prawdopodobieństwa. Uznanie tego faktu może uzasadniać poszukiwanie hydrometeorologicznych (lub innych) przyczyn takiej dwumodalności.

Druga grupa rozkładów niejednomodalnych obejmuje te przypadki, w których druga lub trzecia moda (a czasami obie) są bardzo wątpliwe z powodu faktu, że uzasadnia je tylko jedna wartość próby i znaczne oddalenie od pozostałych elementów próby (mody „jednopunktowe”). Przykładami mogą być wszystkie wykresy dotyczące Odry (nry 1–7) i prawie wszystkich pozostałych przekrojów wodowskazowych. Nie ulega wątpliwości, że takie mody są niesłychanie wątpliwe i powinny być traktowane jako artefakty losowości, a nie jako informacja o rzeczywiście istniejącej modzie. Być może estymator

gaussowski z rosnącym współczynnikiem gładkości nieco by zaradził temu problemowi; zagadnienie to nie było jednak badane. Niekiedy – zwłaszcza gdy najwyższa wartość w próbie jest stosunkowo niewiele oddzielona od reszty próby – estymator GAM1 „likwiduje” takie mody (por. np. wykres nr 7, Odra/Gozdowice i podobne).

Trzecią grupę ilustrują najlepiej wykresy nr 9 (Kłodnica/Lenartowice) oraz 59 (Bug/Frankopol) i 60 (Bug/Wyszków). Najistotniejszym wyróżnikiem tej grupy jest rozdwojenie głównego maksimum na dwie mody. Nie sposób tutaj zająć wyraźne stanowisko. Z jednej strony może być kwestia przypadkowości próby, z drugiej wszakże może być tak, że istnieją dwa niemal równoprawdopodobne mechanizmy generujące przepływy maksymalne o bardzo zbliżonych średnich wartościach. To drugie jest w pewien sposób poparte wykresem GAM1.

Estymator GAM1 został wykreślony na rys. 5.2 dla celów porównawczych. Jak pokazuje rysunek, estymator ten w większości przekrojów zgadza się w dużym stopniu w swoim przebiegu z estymatorem gaussowskim stanowiąc w tych obszarach pewne potwierdzenie rezultatów estymacji gaussowskiej. Niekiedy jednak różnice pomiędzy tymi estymatorami są bardzo wyraźne. Dotyczy to głównie obszaru w pobliżu dolnego ograniczenia i GAM1 produkuje tutaj dodatkowe mody (np. Odra/Połęcko (5)). Nierzadko zdarza się, że mody wykryte czy prawdopodobne sugerowane przez estymator gaussowski są „wzmacniane” czy „uwidaczniane” przez GAM1, jak to np. widać na wykresach 22, 25 czy 40. Wydaje się, że taki fakt może mieć znaczenie dla problemu identyfikacji maksimum rozkładu. W rzadkich przypadkach, jak np. przekrój nr 45 (San/Jarosław) GAM1 generuje mnóstwo mód, zdecydowanie więcej niż Gauss. Jest jasne, że wartość poznawcza takiego wykresu jest bardzo niska.

Niezależnie od tego, do której grupy z wymienionych wyżej zostanie zaliczony dany estymator gaussowski, jest rzeczą interesującą zbadać, czy istniejące metody statystyczne badania wielomodalności wspomogą decyzję o uznaniu wielomodalności tego konkretnego estymatora. Analiza taka jest przedmiotem następnego rozdziału.

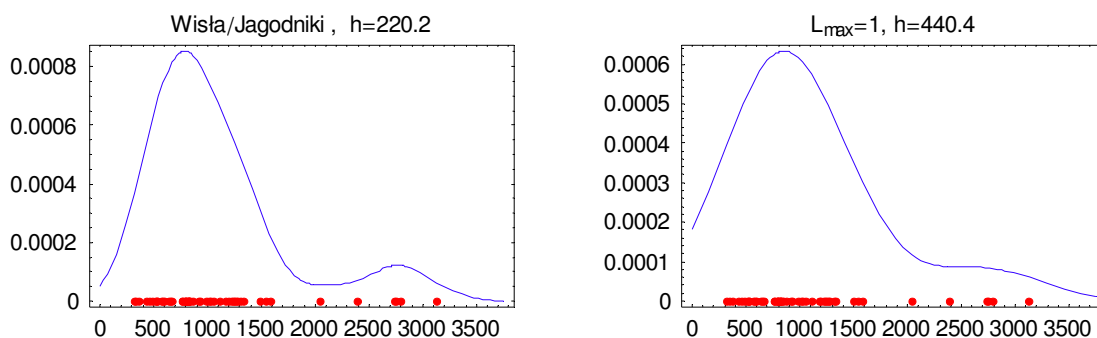
5.2 Testowanie wielomodalności rozkładów przepływów maksymalnych w roku

Naturalnym problemem, jaki się pojawia w przypadku stwierdzenia dwu- lub więcejmodalności, jest czy modalność ta jest rzeczywista (czy naprawdę istnieje) czy też jest to rzecz przypadkowa, związana tylko z aktualnie posiadanymi danymi. W niektórych przypadkach, kiedy obie mody są związane z wysokimi prawdopodobieństwami, można uznać, że ten problem nie istnieje, natomiast wszędzie tam, gdzie druga (czy następna) moda została wygenerowana na skutek pojawienia się jednego przepływu (czy nawet dwóch) problem realności tej mody staje z całą mocą.

Najnowsza statystyka dostarcza pewnych narzędzi testowania wielomodalności; dwa z nich opisano pokrótce w rozdziałach 2.5.1 i 2.5.2: metoda wygładzania krytycznego i metoda nadwyżki masy. Obie te metody zostały zastosowane do wszystkich 60 badanych przekrojów.

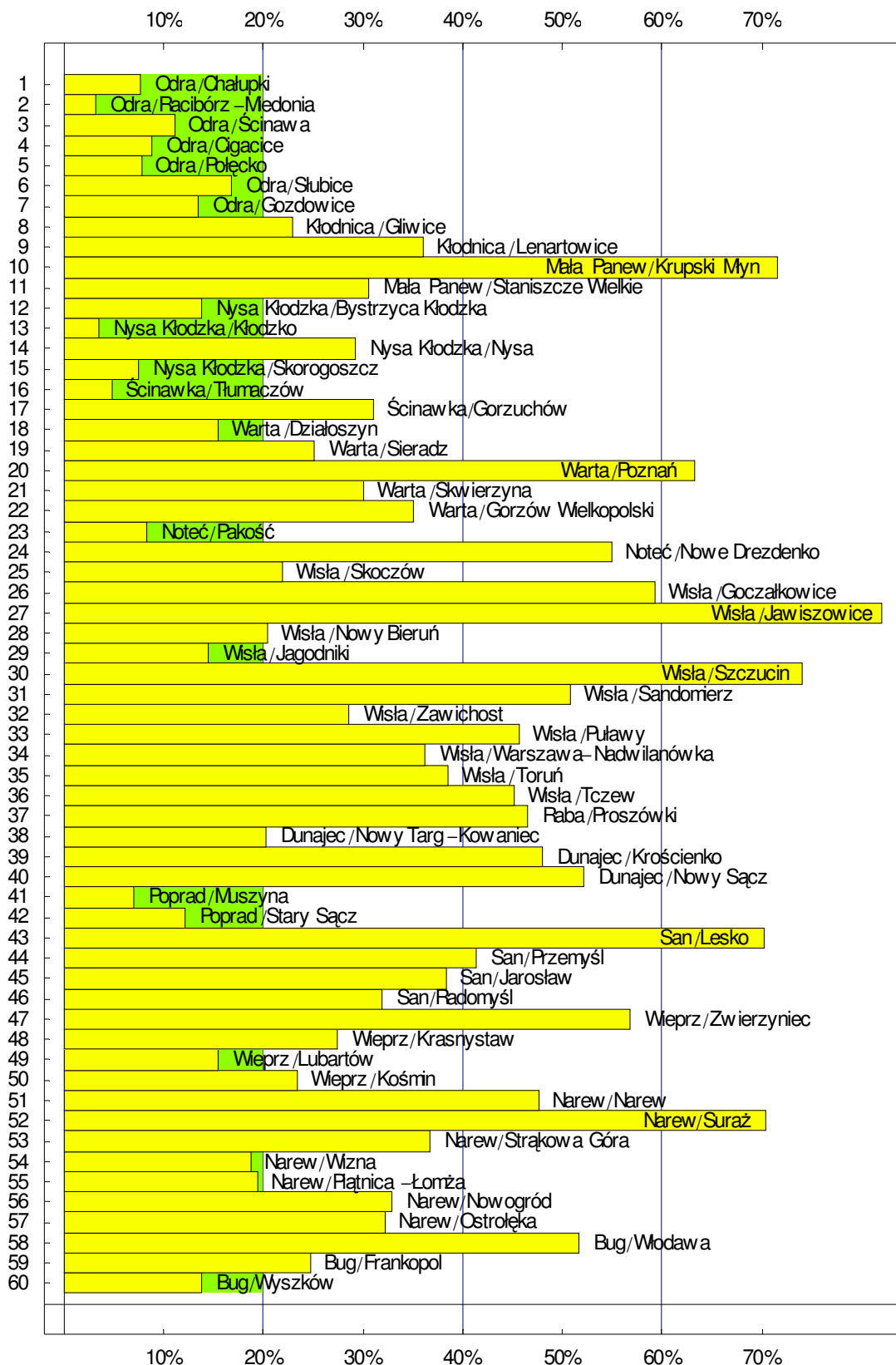
5.2.1 Testowanie hipotezy o wielomodalności rozkładów przepływów maksymalnych w roku metodą wygładzania krytycznego (test Silvermana)

Komputerowa implementacja tej metody nie przedstawia większych trudności. Obliczony wzorem (2.23) współczynnik gładkości h estymatora gaussowskiego pozwala na wykreślenie z reguły wielomodalnej funkcji gęstości. Należy teraz tak długo zwiększać wartość współczynnik gładkości i badać liczbę mód uzyskanej funkcji gęstości aż funkcja ta stanie się jednomodalna. Uzyskana w ten sposób wartość graniczna współczynnika gładkości, h_{kryt} , zwana krytyczną wartością tego współczynnika, jest tym większa im bardziej niejednomodalny jest badany rzeczywisty rozkład prawdopodobieństwa. Mówiąc bardziej precyzyjnie, Silverman (1986) oparł się na pewnej równoważności: Liczba mód estymatora gaussowskiego maleje monotonicznie z wartością współczynnika gładkości. Na przykład (zob. rys. 5.3) obliczona wzorem (2.23) wartość współczynnika gładkości h wynosiła dla przepływów w przekroju Wisła/Jagodniki 220.2 (m³/s) a krytyczna wartość tego współczynnika h_{kryt} była dwa razy większa.



Rys. 5.3. Estymator gaussowski gęstości prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych rocznych i jego wersja z krytycznym współczynnikiem gładkości ($h=440.4$) (tj. najmniejszym h , dla którego estymator gaussowski daje jednomodalną funkcję gęstości).

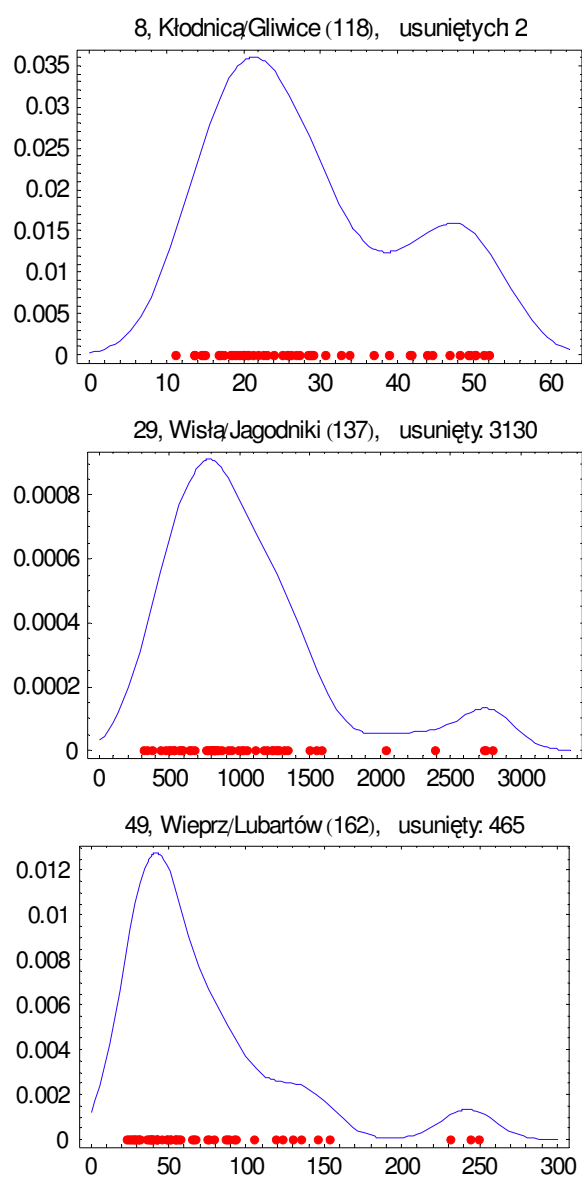
Empiryczny poziom istotności testu, tzw. wartość p , (ang. p -value) związany z h_{kryt} i pozwalający na stwierdzenia jak duże jest h_{kryt} znajdowano zgodnie z metodą wygładzonego bootstrapu opisaną przez Silvermana (1986) z liczbą 1000 powtórzeń potrzebnych do ustalenia wartości p . Wyniki tej metody przedstawione są na rys. 5.4. Przyjęto tutaj dość nietypowy poziom istotności testu ($\alpha=20\%$) a to ze względu na bardzo szeroki kontekst hipotezy. Ponieważ praca niniejsza jest według naszej najlepszej wiedzy jedną z pierwszych w polskiej hydrologii prac dotyczących badania wielomodalności, przedstawione wyniki i założenia są siłą rzeczy jeszcze niewystarczająco zweryfikowane i przedyskutowane i na pewno wymagają dalszej rozszerzonej i pogłębionej analizy.



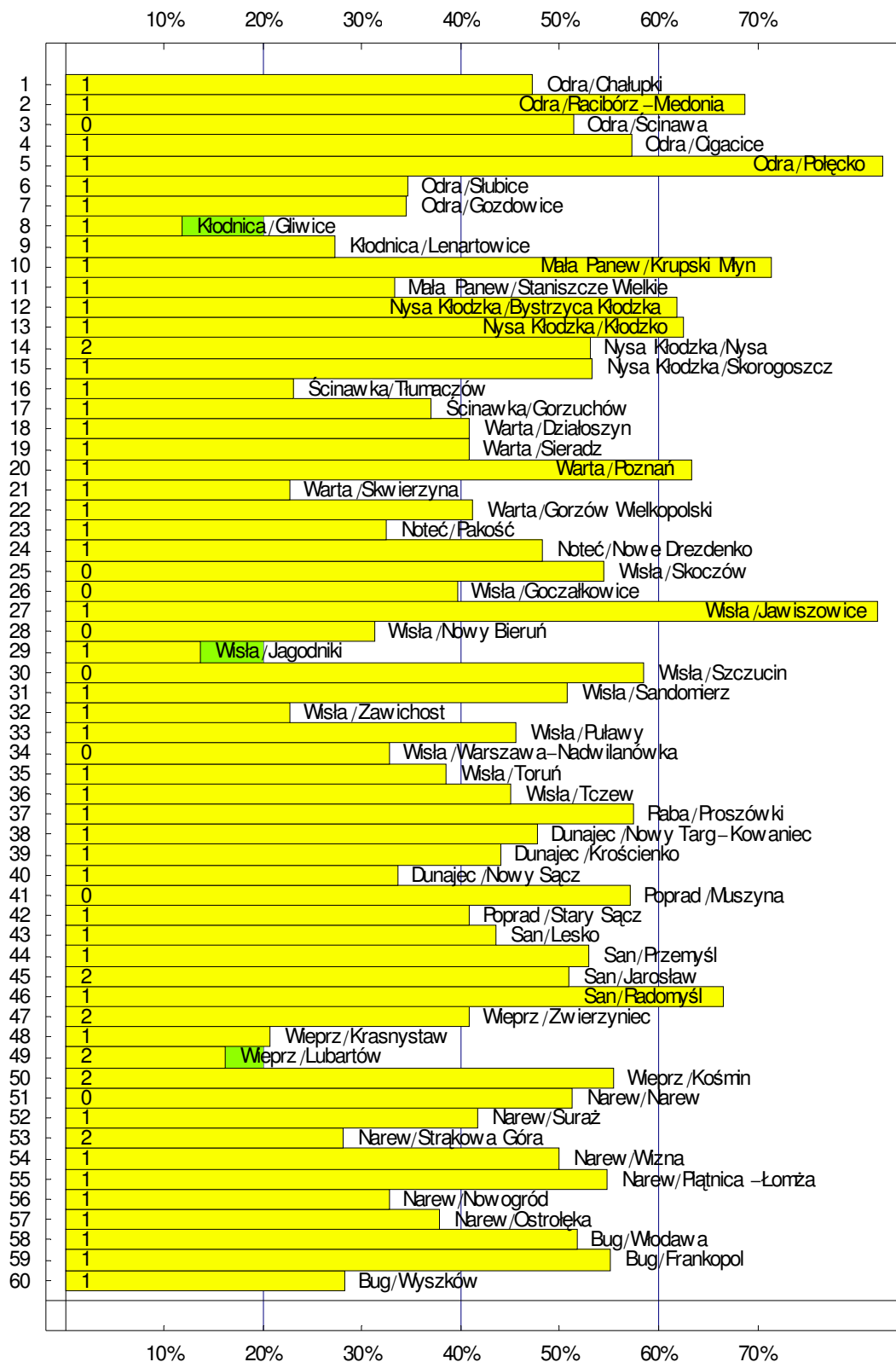
Rys. 5.4. Wartości p testu o jednomodalności przeciwko hipotezie o wielomodalności rozkładów przepływów maksymalnych rocznych w badanych przekrojach wodowskazowych. Obszar zielony zaznacza przyjęty poziom istotności testu (20%).

Przedstawione na rys. 5.4 wyniki odrzucają na poziomie istotności 20% hipotezę o jednomodalności dla dwudziestu z sześćdziesięciu wodowskazów. Bliższy ogląd kształtu wyróżnionych w ten sposób przekrojów (zob. rys. 5.2) ujawnia, że większość z tych niednomodalności to przypadki z jedną wysoką lub bardzo wysoką (niekiedy więcej niż jedną) wartością przepływu stanowiącą osobną modę. Wartość takiej mody jest bardzo mała (z powodu bardzo małego prawdopodobieństwa z nią związanego) a najprawdopodobniej właśnie ta moda daje duży wkład do wartości krytycznej współczynnika gładkości. Stąd niektórzy autorzy (np. Minnotte, 1997) proponują obcięcie próby losowej i usunięcie w ten sposób takich wysokich wartości. Metoda ta została zastosowana w niniejszej pracy: usunięto 1 lub 2 najwyższe wartości z wybranych prób i ponownie zastosowano metodę Silvermana wygładzania krytycznego (liczebność próby zostawała niezmienną, jeśli było tylko jedno maksimum). Rys. 5.6 – analogiczny do rys. 5.4 – prezentuje uzyskane wyniki.

Powstały obraz jest zdecydowanie inny: usunięcie najwyższych wartości spowodowało w większości przypadków znaczne zmniejszenie krytycznej wartości współczynnika gładkości i brak wskazania o niejednomodalności rzeczywistej funkcji gęstości. Liczba statystycznie uzasadnionych niejednomodalności zmniejszyła się z dwudziestu do trzech: Kłodnica/Gliwice (8), Wisła/Jagodniki (29) i Wieprz/Lubartów (49). Jak pokazuje rys. 5.5, obraz pozostał niemal taki sam (por. rys. 5.2), tylko w pierwszym przypadku usunięcie dwu najwyższych wartości „wyostrzyło” znacznie drugą modę.



Rys. 5.5. Estymatory gaussowskie z modami istotnymi statystycznie na poziomie 20% testowanymi testem Silvermana po usunięciu z próby odpowiednio dwu, jednej i jednej najwyższej wartości.



Rys. 5.6. Wartości p testu o jednomodalności przeciwko hipotezie o wielomodalności rozkładów przepływów maksymalnych rocznych w badanych przekrojach wodowskazowych o liczebności $n=52-x$; gdzie x (kolumna liczb 0,1,2) jest liczbą najwyższych elementów w próbie usuniętych z niej. Obszar zielony zaznacza przyjęty poziom istotności testu (20%).

Uzyskane wyniki testowania testem Silvermana hipotezy zerowej *rozkład rzeczywisty badanych przepływów jest jednomodalny* przeciwko hipotezie alternatywnej *rozkład rzeczywisty badanych przepływów jest więcej niż jednomodalny* wskazują na niską moc tego testu. Jak zostało pokazane empirycznie test ten jest bardzo czuły na wartości odstające (na płaskie obszary funkcji gęstości). Jego ewentualnie szersze zastosowanie wymaga pogłębionej analizy wskazującej zalecane i nie zalecane obszary jego aplikacji.

5.2.2 Testowanie hipotezy o wielomodalności rozkładów przepływów maksymalnych w roku metodą nadwyżki masy

Metoda ta, opisana w rozdziale 2.5.2, jest trudniejsza do implementacji komputerowej niż wygładzanie krytyczne, ale jej czasochłonność obliczeniowa nie jest wyraźnie większa. Dla przypadku testu hipotezy zerowej H_0 [rozkład rzeczywisty jest jednomodalny] przeciwko hipotezie alternatywnej H_1 [rozkład rzeczywisty jest dwumodalny] algorytm obliczeniowy jest następujący.

Najpierw obliczane są empiryczne wersje funkcji $E_{nM}(\lambda)$ (2.35) dla $M=1$ i $M=2$:

$$\begin{aligned} E_{n1}(\lambda) &= \max_{C_1} H_{n,\lambda}(C_1) \\ E_{n2}(\lambda) &= \max_{C_1, C_2} [H_{n,\lambda}(C_1) + H_{n,\lambda}(C_2)] \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie dla danego λ wielkość H jest szacowana wzorem:

$$H_{n\lambda}(C) = \frac{\#(x_i \in C)}{n+1} - \lambda \cdot \|C\| \quad (5.2)$$

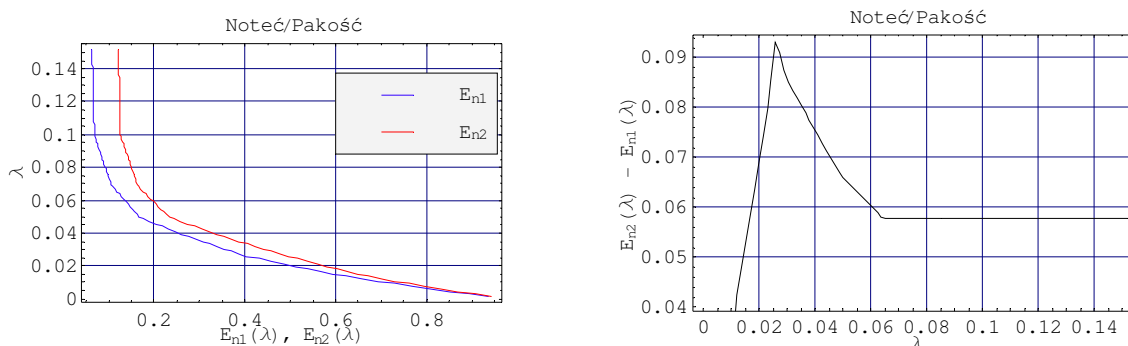
Zapis „ $\#(x_i \in C)$ ” oznacza „liczbę elementów x_i próby należących do przedziału C ” a C_i , $i=1,2$ oznacza wszystkie jednoczesne rozłączne przedziały na osi wartości przepływów maksymalnych w roku.

Następnie obliczana jest wartość statystyki testowej (2.36):

$$\Delta_{n2} = \max_{\lambda > 0} [E_{n2}(\lambda) - E_{n1}(\lambda)] \quad (5.3)$$

i albo jest porównywana z jej wartością krytyczną na danym poziomie istotności albo znajduje się dla niej empiryczny poziom istotności (tj. wartość p), którą porównuje się z ustalonym poziomem istotności α . Rys. 5.7 ilustruje

typowe postacie wykresów $E_{ni}(\lambda)$ i $\Delta_{n2}(\lambda)$ jak też wykres różnicy $E_{n2}(\lambda) - E_{n1}(\lambda)$, którego wartość maksymalna jest wartością statystyki testowej $\Delta_{n2}(\lambda)$.



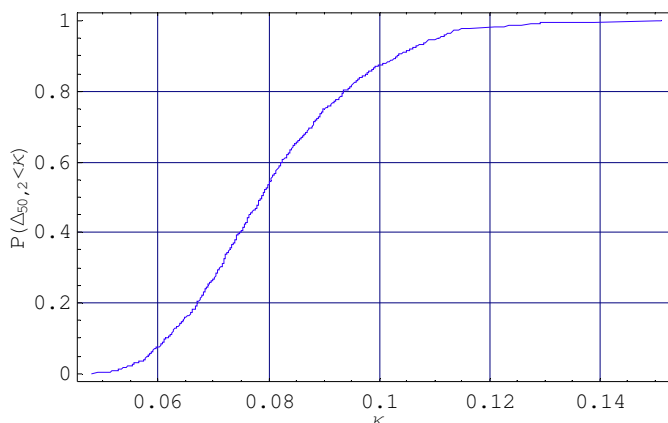
Rys. 5.7. Przykładowe wykresy nadwyżki masy (5.1) oraz różnicy Δ_{n2} (5.3) w funkcji poziomu odcięcia λ ($\max\Delta_{n2}=0.093$). Zachowany oryginalny układ osi wykresów $E_{ni}(\lambda)$ stosowany przez Müllera i Sawitzkiego (1991).

Hipoteza H_0 jest odrzucana jeśli obliczona wartość statystyki Δ_{n2} jest zbyt duża lub przypisana jej wartość p zbyt mała, tj. niższa od przyjętego poziomu istotności α testu. Ustalenie znaczenie „zbyt duża” lub „zbyt mała” jest problemem, który tutaj zostanie rozwiązany według sugestii podanych w pracy Müllera i Sawitzkiego (1991). Otóż aby uzyskać krytyczną wartość κ_α statystyki Δ_{n2} dla zadanego poziomu istotności α udowadniają oni następującą nierówność

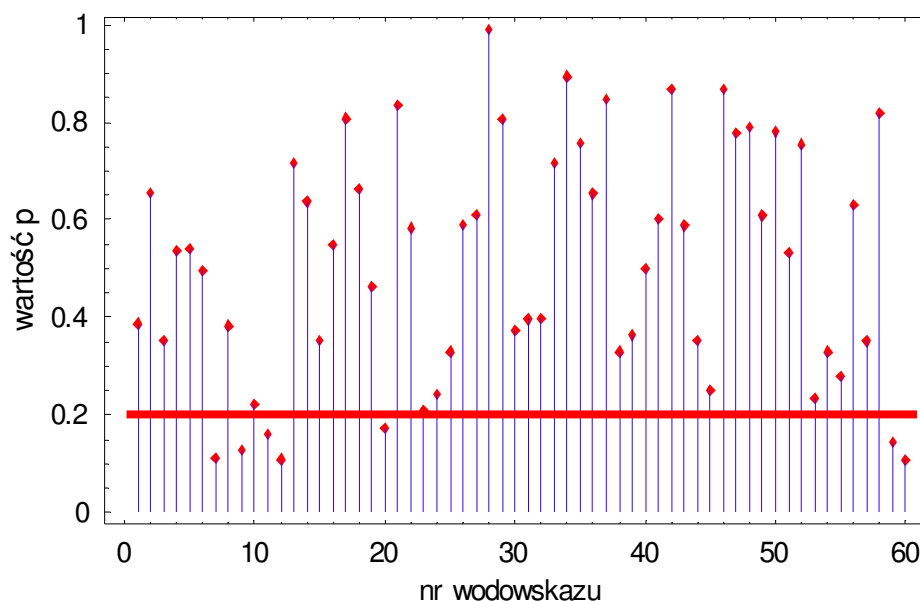
$$P(\Delta_{n2} \geq \kappa) < P\left(\max_c |(U_n - U)(C)| \geq \kappa\right) \quad (5.4)$$

gdzie U oznacza rozkład jednostajny statystyki Δ_{n2} na przedziale $(0,1)$ a U_n jest empiryczną wersją tego rozkładu. Na podstawie dokonanych 30 000 symulacji komputerowych autorzy podają wartości krytyczne κ_α dla kilku wybranych α od 0.01 do 0.99 i czterech liczebności próby $n=10, 50, 75$ i 100 . Rozkład stosowany w prawej stronie nierówności (5.4) nie musi być jednostajny – wspomniani autorzy badali także przypadki, gdy wartości statystyki Δ_{n2} pochodziły z rozkładów o wyraźnej modzie, takich jak np. rozkład normalny, co wydaje się bardziej sensowne niż przyjęcie rozkładu jednostajnego. W niniejszej pracy to ostatnie podejście zostało wykorzystane. Ponieważ Müller i Sawitzki (1991) nie podali wartości krytycznych dla tego

przypadku, niezbędne było wygenerowanie rozkładu statystyki Δ_{n2} . Praca ta została wykonana na próbie 1000 symulacji a wynik ilustruje rys. 5.8.



Rys. 5.8. Empiryczna dystrybuanta statystyki Δ_{n2} ($n=50$) odpowiadająca prawej stronie równania (5.4) dla Δ_{n2} generowanych z populacji normalnej. Wykres odpowiada dystrybuancie z Fig. 9 pracy Müllera i Sawitzkiego (1991).

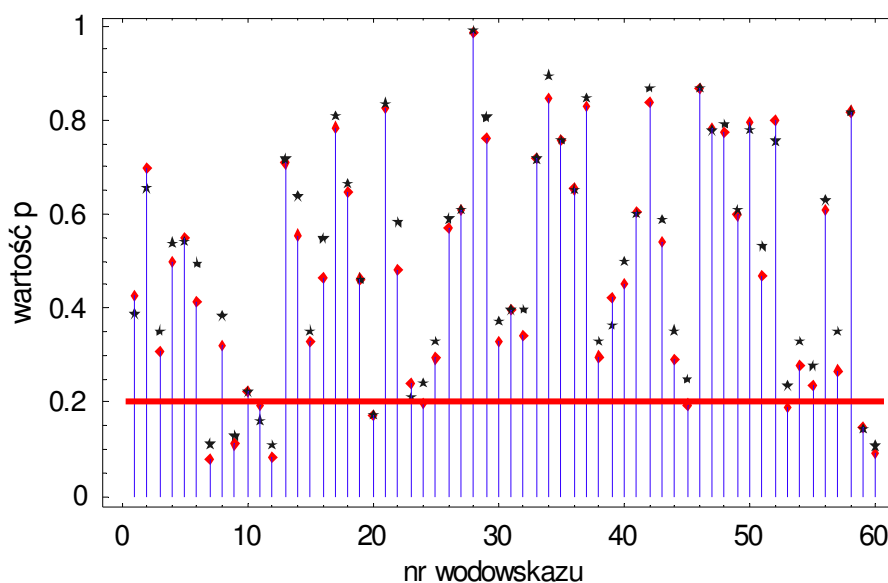


Rys. 5.9. Wartości p testu hipotezy H_0 (funkcja gęstości przepływów maksymalnych w roku w przekroju *nr wodowskazu* jest jednomodalna) przeciwko hipotezie o dwumodalności tego rozkładu. Linia $p=0.2$ zaznacza przyjętą wartość krytyczną testu identyczną jak w przypadku testu Silvermana wygładzania krytycznego.

Uzyskany rozkład był źródłem wartości p testu hipotezy o jednomodalności badanych rozkładów przepływów maksymalnych rocznych. Obliczo-

ne wartości p dla wszystkich 60 badanych Q_{max} przedstawia rys. 5.9 będący odpowiednikiem rys. 5.4 zawierającego wyniki testu Silvermana.

Rys. 5.9 pokazuje, że zastosowany test nadwyżki masy jest nieco bardziej czuły na dwumodalność niż test Silvermana na wielomodalność: siedem przekrojów: 7, 9, 11, 12, 20, 59 i 60 wykazuje istnienie dwóch mód na poziomie $p < 20\%$. Jest rzeczą ciekawą, że wśród tych przekrojów wodowskazowych nie było żadnego z trzech, gdzie test Silvermana wskazywał na wielomodalność. Fakt ten sugeruje inny sposób działania testu nadwyżki masy niż test wygładzania krytycznego. Zachodzi przy tym pytanie, czy wartości odstające (albo bardzo duże) w próbie mają tak wyraźny wpływ na wyniki testu. Aby to zbadać jeszcze raz przeprowadzono test nadwyżki masy z próbami zmniejszonymi liczebnie w taki sam sposób jak w przypadku testu Silvermana (por. rys. 5.6). Wyniki przedstawione są na rys. 5.10.



Rys. 5.10. Wartości p testu hipotezy H_0 (funkcja gęstości przepływów maksymalnych w roku w przekroju $nr\ wodowskazu$ jest jednomodalna) przeciwko hipotezie o dwumodalności tego rozkładu po zmniejszeniu liczebności próby o x najwyższych elementów, $x=0,1,2$ jak dla testu Silvermana. Linia $p=0.2$ zaznacza przyjętą wartość krytyczną testu. Czarne punkty odpowiadają punktom na rys. 5.9.

Rys. 5.10 wykazuje, że usunięcie jednej lub dwu wartości najwyższych w próbie powoduje w ok. 2/3 badanych prób niewielkie zmniejszenie wartości p testu nadwyżki masy, co w kilku przypadkach daje wartość p mniejszą od

przyjętego poziomu istotności 20%. Są to przekroje nr 24 (Noteć/Nowe Drezdenko), 45 (San/Jarosław) i 53 (Narew/Strękowa Góra). Usunięcie wartości najwyższych nie powoduje jednak w tym przypadku tak drastycznych zmian, jak to miało miejsce w przypadku testu Silvermana. Czulość testu nadwyżki masy na istnienie mód leży w zdecydowanie innym miejscu niż czulość testu wygładzania krytycznego.

5.2.3 Podsumowanie

Zastosowane testy wielomodalności: test nadwyżki masy i test wygładzania krytycznego okazały się raczej mało rozstrzygające w przypadku badanych rozkładów rzeczywistych przepływów maksymalnych w roku. Uzyskane w obu testach wyniki są zbiorczo zaprezentowane w tabeli 5.2.

Na 60 badanych rozkładów test Silvermana sugerował odrzucenie hipotezy o wielomodalności rzeczywistego rozkładu przepływów maksymalnych w roku tylko w trzech przypadkach: Kłodnica/Gliwice (8), Wisła/Jagodniki (29) i Wieprz/Lubartów (49) a test nadwyżki masy robił to samo w 7 przypadkach: Odra/Gozdowice (7), Kłodnica/Lenartowice (9), Mała Panew/Staniszczce Wlk (11), Nysa Kłodzka/Bystrzyca (12), Warta/Poznań (20), Bug/Frankopol (59) i Bug/Wyszków (60). Usunięcie jednej najwyższej wartości z próby uzupełnia ten drugi zbiór o dalsze trzy przekroje wodowskazowe: nr 24 (Noteć/Nowe Drezdenko), nr 45 (San/Jarosław) i nr 53 (Narew/Strękowa Góra). Jest rzeczą zastanawiającą, że zbiory statystycznie istotnych modalności otrzymane za pomocą zastosowanych testów są rozłączne. Testy te „widzą” modalność rozkładów w zdecydowanie odmienny sposób.

Tabela 5.2. Zbiorcze wyniki testowania wielomodalności metodą Silvermana wygładzania krytycznego i nadwyżki masy. Kolorowe pola oznaczają empiryczne poziomy istotności testu (wartość p) mniejszą od 20%.

nr	L_{mod}	wygładzanie kryt.			RZEKA/wodowskaz	nadwyżka masy		
		wartość p testu				wartość p testu		
		$n=52$	$n=52-x$	x		$n=52$	$n=52-x$	x
1	2	7.7%	47.3%	1	ODRA/Chałupki	38.7%	42.5%	1
2	3	3.2%	68.7%	1	ODRA/Racibórz-Miedonia	65.5%	69.6%	1
3	2	11.1%	51.4%	1	ODRA/Ścinawa	35.2%	30.9%	1
4	3	8.8%	57.3%	1	ODRA/Cigacice	53.8%	49.7%	1
5	2	7.8%	82.7%	1	ODRA/Połęcko	54.2%	54.9%	1
6	3	16.8%	34.6%	1	ODRA/Słubice	49.6%	41.3%	1
7	2	13.5%	34.5%	1	ODRA/Gozdowice	11.1%	8.0%	1
8	3	22.9%	11.8%	2	KŁODNICA/Gliwice	38.3%	31.9%	2
9	4	36.0%	27.3%	1	KŁODNICA/Lenartowice	12.9%	11.1%	1
10	1	71.5%	-	0	M.PANEW/Krupski Młyn	22.2%	-	0
11	4	30.6%	33.2%	2	M.PANEW/Staniszczce Wlk	16.1%	19.4%	2
12	4	13.8%	61.9%	2	NYSA KŁ./Bystrzyca	10.9%	8.3%	2
13	3	3.5%	62.6%	1	NYSA KŁ./Kłodzko	71.7%	70.8%	1
14	3	29.3%	53.1%	2	NYSA KŁ./Nysa	63.7%	55.5%	2
15	2	7.5%	53.3%	1	NYSA KŁ./Skorogoszcz	35.2%	33.0%	1
16	3	4.8%	23.1%	2	ŚCINAWKA/Thumaczów	54.8%	46.3%	2
17	3	31.0%	37.0%	1	ŚCINAWKA/Gorzuchów	80.8%	78.4%	1
18	2	15.4%	40.9%	1	WARTA/Działoszyn	66.4%	64.8%	1
19	2	25.1%	40.8%	1	WARTA/Sieradz	46.2%	46.2%	1
20	1	63.3%	-	0	WARTA/Poznań	17.3%	-	0
21	3	30.0%	22.7%	1	WARTA/Skwierzyna	83.5%	82.5%	1
22	2	35.1%	41.2%	1	WARTA/Gorzów Wlkp	58.3%	48.0%	1
23	2	8.3%	32.5%	1	NOTEĆ/Pakość	21.1%	24.1%	1
24	2	54.9%	48.3%	1	NOTEĆ/Nowe Drezdenko	24.1%	19.9%	1
25	2	21.9%	54.5%	1	WISŁA/Skoczów	33.0%	29.3%	1
26	3	59.2%	39.6%	1	WISŁA/Goczałkowice	59.0%	57.1%	1
27	1	82.1%	-	0	WISŁA/Jawiszowice	60.9%	-	0
28	2	20.4%	31.2%	1	WISŁA/Nowy Bieruń	99.1%	98.6%	1
29	2	14.5%	13.7%	1	WISŁA/Jagodniki	80.6%	76.0%	1
30	2	74.1%	58.5%	1	WISŁA/Szczucin	37.2%	32.8%	1
31	1	50.8%	-	0	WISŁA/Sandomierz	39.6%	-	0
32	2	28.6%	22.7%	1	WISŁA/Zawichost	39.8%	34.0%	1
33	1	45.6%	-	0	WISŁA/Puławy	71.7%	-	0
34	2	36.2%	32.7%	1	WISŁA/Wwa Nadwilanówka	89.4%	84.7%	1
35	1	38.5%	-	0	WISŁA/Toruń	75.7%	-	0
36	1	45.1%	-	0	WISŁA/Tczew	65.3%	-	0
37	2	46.5%	57.4%	1	RABA/Proszówki	84.7%	82.8%	1
38	2	20.3%	47.7%	1	DUNAJEC/N.Targ-Kowaniec	33.0%	29.7%	1
39	2	48.0%	44.0%	1	DUNAJEC/Krościenko	36.3%	42.2%	1
40	2	52.2%	33.6%	1	DUNAJEC/Nowy Sącz	49.9%	45.1%	1
41	2	7.0%	57.1%	1	POPRAD/Muszyna	60.1%	60.4%	1
42	2	12.2%	40.8%	1	POPRAD/Stary Sącz	86.8%	83.7%	1
43	4	70.2%	43.6%	1	SAN/Lesko	58.8%	54.2%	1
44	2	41.4%	53.0%	1	SAN/Przemyśl	35.2%	29.2%	1
45	3	38.3%	51.0%	1	SAN/Jarosław	24.9%	19.5%	1
46	3	31.9%	66.5%	1	SAN/Radomyśl	86.8%	86.8%	1
47	3	56.8%	40.8%	2	WIEPRZ/Zwierzyniec	77.7%	78.1%	2
48	3	27.4%	20.7%	1	WIEPRZ/Krasnystaw	79.1%	77.3%	1
49	3	15.5%	16.2%	1	WIEPRZ/Lubartów	60.8%	59.8%	1
50	4	23.4%	55.4%	1	WIEPRZ/Kośmin	78.0%	79.6%	1
51	2	47.6%	51.3%	1	NAREW/Narew	53.2%	47.0%	1
52	2	70.4%	41.7%	1	NAREW/Suraż	75.5%	79.9%	1
53	3	36.7%	28.1%	1	NAREW/Strękowa Góra	23.5%	18.9%	1
54	2	18.7%	50.0%	1	NAREW/Wizna	33.0%	27.8%	1
55	2	19.4%	54.8%	1	NAREW/Piątnica-Łomża	27.8%	23.5%	1
56	3	32.9%	32.7%	1	NAREW/Nowogród	62.9%	60.9%	1
57	3	32.2%	37.9%	1	NAREW/Ostrołęka	35.1%	26.7%	1
58	1	51.7%	-	0	BUG/Włodawa	81.8%	-	0
59	4	24.7%	55.2%	1	BUG/Frankopol	14.3%	14.6%	1
60	4	13.8%	28.2%	1	BUG/Wyszaków	10.7%	9.1%	1

Niektóre wyniki testu nadwyżki masy przynoszą kłopoty interpretacyjne. Dotyczy to przede wszystkim przekrojów: Odra/Gozdowice (7), Warta/Poznań (20) i Noteć/Nowe Drezdenko (24). Patrząc na postać estymowanych funkcji gęstości przepływów w tych przekrojach wydaje się, że są one ewidentnie jednomodalne, a test sugeruje co innego. Możliwość popełnienia błędu w algorytmie testowania czy jego implementacji jest znikoma, gdyż problemy te były starannie analizowane a implementacja testu na danych stosowanych przez innych autorów dawała bardzo zbliżone wyniki statystyki testowej. Zagadnienie to wymaga bliższej analizy.

W podsumowaniu należy stwierdzić, że oba zastosowane testy badania wielomodalności rozkładu prawdopodobieństwa wykazały ograniczoną użyteczność w zbiorze rozkładów badanych przepływów maksymalnych w roku chociaż stwierdzenie, że są one nieprzydatne jest fałszywe. Wyjaśnienie tego faktu tkwi w obszerności stawianej hipotezy zerowej. Potwierdza to już porównanie skuteczności testu Silvermana ze skutecznością testu Müllera i Sawitzkiego. W przyjętej w niniejszej pracy implementacji ten drugi częściej przynosi rozstrzygnięcie (pomijając oczywiście nietypowy przyjęty poziom istotności testu) a co można tłumaczyć większą konkretnością hipotezy alternatywnej: w teście Silvermana dotyczy ona wielomodalności rozkładu rzeczywistego, podczas gdy w teście nadwyżki masy – dwumodalności tego rozkładu. Dalsza konkretyzacja może skutkować większą mocą testu. Badanie tego problemu leży jednak poza zakresem niniejszej pracy.

6. ANALIZA CHARAKTERU WIELOMODALNOŚCI ROZKŁADÓW BADANYCH PRZEPLÝWÓW MAKSYMALNYCH W ROKU

Opierając się na zasadniczym dla celów niniejszej pracy wyniku analizy przydatności poszczególnych estymatorów nieparametrycznych (rozdział 3.3.3), tj. na fakcie, że estymator gaussowski (2.14) ze współczynnikiem gładkości (2.23) zapewnia prawie 100% prawdopodobieństwo wykazania co najmniej dwu maksimów rozkładu dwumodalnego oraz wspierając się (ewentualnie) wynikami przeprowadzonych w rozdziale 5.2 testów statystycznych można dokonać analizy przestrzennej – liniowej i obszarowej – zmienności charakteru modalności przepływów maksymalnych w roku. Analizę taką zawierają następujące podrozdziały.

Praca niniejsza jest najprawdopodobniej pierwszą w polskim piśmiennictwie hydrologicznym pracą poruszającą w tak szerokim zakresie problem badania wielomodalności rozkładów w hydrologii i analizy tego problemu. Stąd przedstawiona poniżej analiza nie jest wyczerpująca i nie rości sobie pretensji do rozstrzygnięcia postawionych pytań. Jest bowiem jasne, że w miarę pełna analiza postawionego w tytule pracy problemu wymagałaby dokonania subtelniejszego wyboru materiału empirycznego i to w dużo większym zakresie oraz szczegółowego zbadania hydrologii stojącą za tym materiałem.

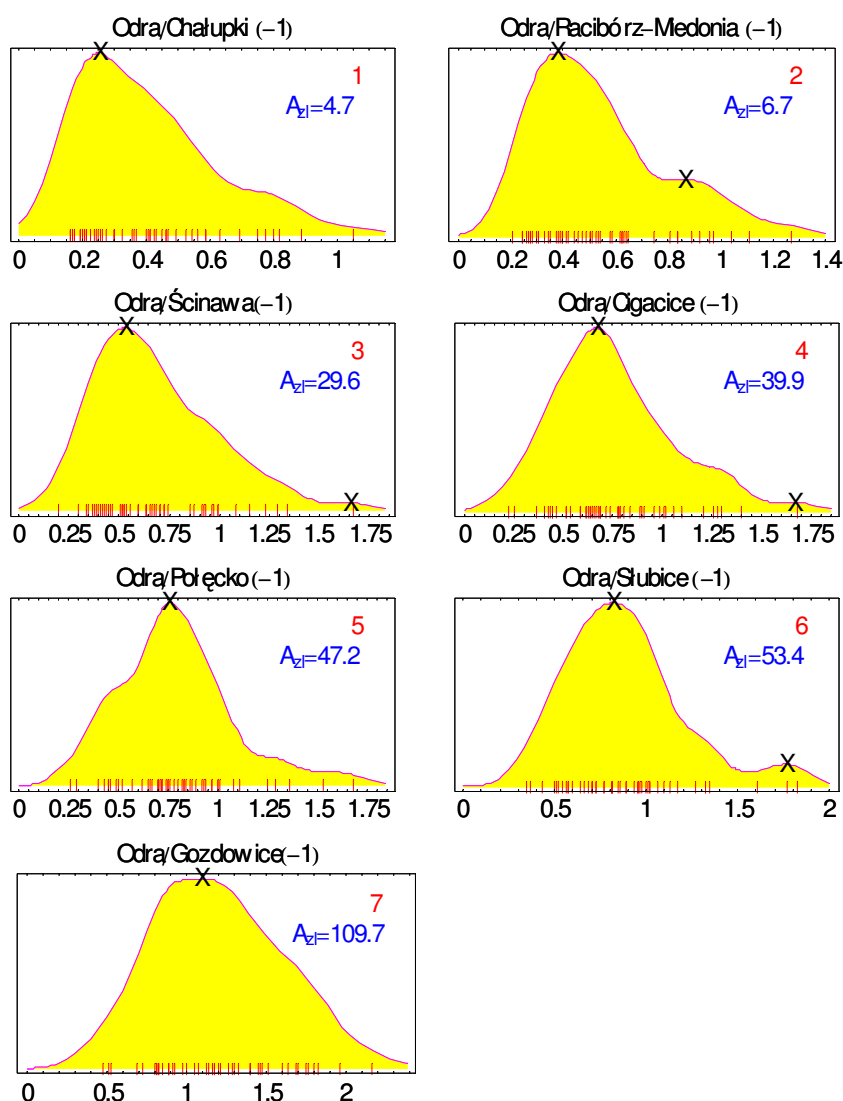
6.1 Analiza liniowa (w dół rzeki)

Rozkład prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku w danym przekroju rzeki odzwierciedla w pewien sposób reżim hydrometeorologiczny (być może zmieniony przez człowieka) obszaru zamykanego tym przekrojem. W miarę jak położenie przekroju zamykającego przemieszcza się w dół rzeki powierzchnia tego obszaru rośnie i rzeka zmienia swój charakter, niekiedy bardzo wyraźnie, zwłaszcza gdy zwiększeniu powierzchni towarzyszy wyraźna

zmiana spadku rzeki. Można więc się spodziewać, że fakt ten znajdzie odzwierciedlenie w kształcie rozkładu prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku. Jest rzeczą interesującą czy i jak przepływy maksymalne na dopływach zmieniają rozkład prawdopodobieństwa przepływów na rzece głównej.

6.1.1 Odra

Rys. 6.1 przedstawia empiryczne funkcje gęstości prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku w 7 badanych przekrojach Odry.

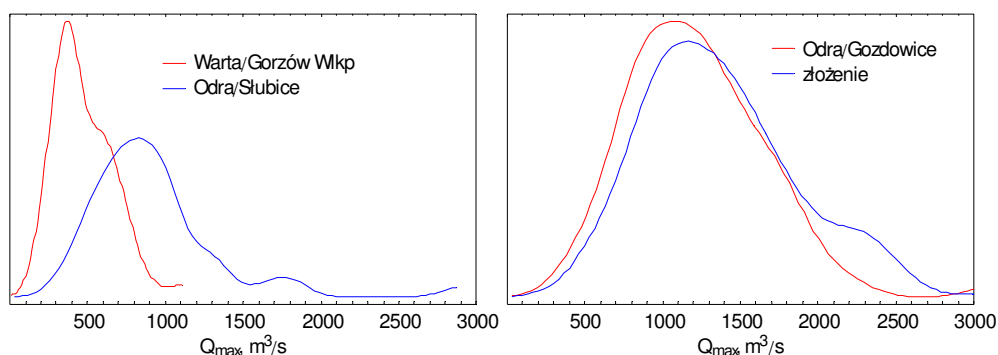


Rys. 6.1. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Odry. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

Przedstawione rozkłady nie są wyraźnie dwumodalne, chociaż zjawisko to zostało zaobserwowane w 4 na 7 przypadków. Dwumodalność jest najwyraźniej widoczna w przekroju Racibórz-Miedonia, ale obie mody leżą stosunkowo blisko (brak jest też pomiędzy nimi jakiegoś znaczącego dopływu – rzeka Psina dostarcza pomijalne ilości wody) a antymoda pomiędzy nimi jest praktycznie niewidoczna. Mody w Ścinawie i Cigacicach są bez znaczenia; moda w Słubicach jest wyraźna, wspierają ją jednak tylko trzy przepływy, co obniża jej wiarygodność.

Znaczny udział w wielkości przepływów maksymalnych rocznych w przekroju Gozdowice ma Warta. Mając dane przepływy na Warcie w Gorzowie Wielkopolskim i na Odrze powyżej Gozdowic w Słubicach, można pokusić się o złożenie rozkładów prawdopodobieństwa w tych dwu przekrojach, aby zobaczyć jak dalece powstałe złożenie różni się od pomierzonego rozkładu w Gozdowicach.

Dla zweryfikowania tego przypuszczenia dokonano złożenia rozkładów prawdopodobieństwa na Warcie w Gorzowie Wielkopolskim i Odrze w Słubicach a otrzymany wynik został wykreślony wraz z rozkładem pomierzonym na Odrze w Gozdowicach, co pokazuje rys. 6.2. Złożenie rozkładów zostało dokonane przy założeniu, że przepływy maksymalne w Gorzowie Wielkopolskim i w Słubicach są synchroniczne z przepływami maksymalnymi w roku w Gozdowicach.

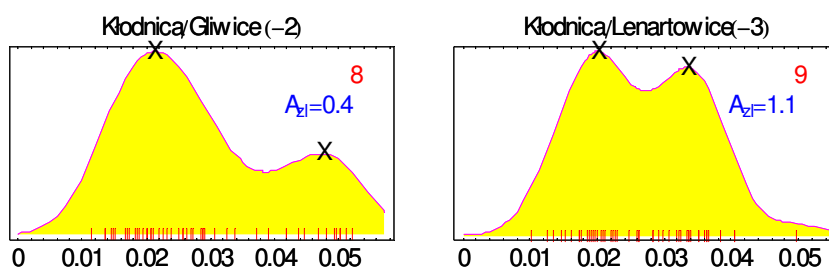


Rys. 6.2. Rozkłady prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku na Warcie w Gorzowie Wielkopolskim i Odrze w Słubicach (wykresy po lewej) dają po złożeniu (wykresy po prawej) rozkład przepływów poniżej ujścia Warty do Odry nieco podobny do rozkładu przepływów maksymalnych na Odrze w Gozdowicach.

Rys. 6.2 pokazuje, że zgodność rozkładów złożonego i pomierzonego nie jest bardzo wysoka, co może być spowodowane niecałkowitą synchronizacją przepływów i/lub innymi lokalnymi przyczynami.

6.1.2 Kłodnica

Przedstawione na rys. 6.3 rozkłady mogą być ilustracją wpływu działalności człowieka na reżim rzeki. Jak informuje RZGW Gliwice na swojej stronie internetowej¹: „Przepływy rzeki Kłodnicy to podstawowe źródło zasilania Kanału Gliwickiego umożliwiające prowadzenie żeglugi na tej drodze wodnej”. Znajdujący się pomiędzy badanymi przekrojami zbiornik wodny Dzierżno zaopatruje w wodę Górnośląski Okręg Przemysłowy. Stąd można tłumaczyć obniżenie drugiej mody w Gliwicach (poniżej $50 \text{ m}^3/\text{s}$) do wartości ok. $35 \text{ m}^3/\text{s}$ w Lenartowicach przy niezmienionej wartości pierwszej mody.



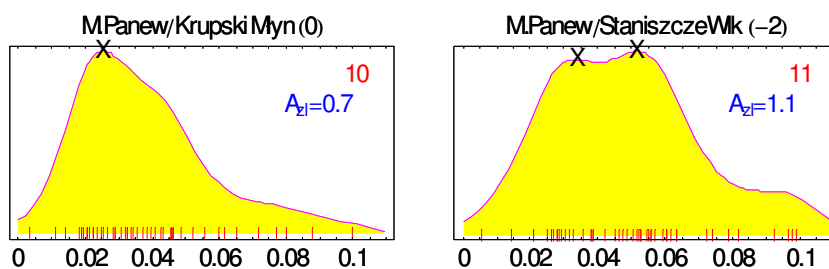
Rys. 6.3. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3 \text{ m}^3/\text{s}$) z biegiem Kłodnicy. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3 km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

6.1.3 Mała Panew

Zwiększeniu powierzchni zlewni Małej Panwi o 0.4 tys. km^2 w przekroju Staniszcze Wielkie (rys. 6.4) towarzyszy poszerzenie mody prowadzące do jej podziału na dwa dość słabo zaznaczone maksima. Fakt ten może być spowodowany przez maksymalne przepływy na licznych prawostronnych

¹ <http://www.rzgw.gliwice.pl/modules.php?name=News&file=article&sid=18>

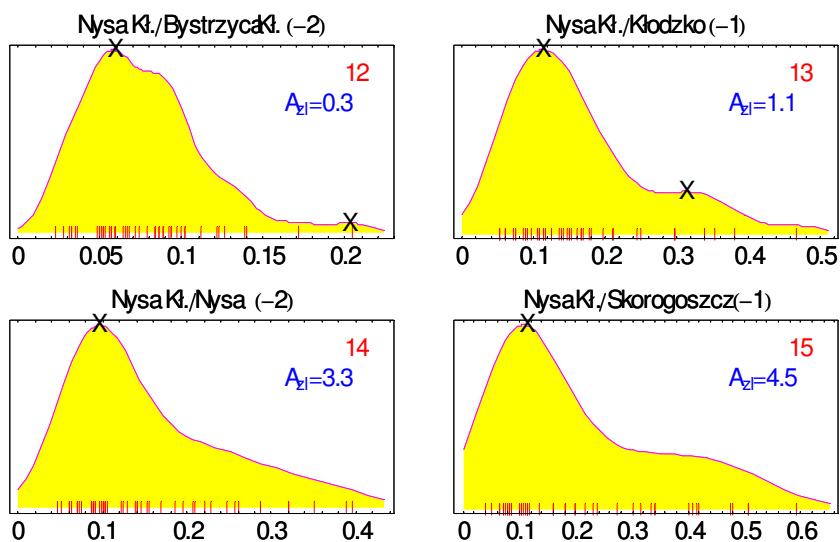
dopływach głównej rzeki niezynchronizowane z przepływami maksymalnymi na rzece głównej.



Rys. 6.4. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Małej Panwi. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2)

6.1.4 Nysa Kłodzka

Nysa Kłodzka to rzeka o jednym z najwyższych w Polsce potencjałów powodziowych. Znaczący przyrost zlewni pomiędzy Bystrzycą Kłodzką a Kłodzkiem (rys. 6.5) (z mnóstwem szybkich dopływów) powoduje istotną zmianę kształtu funkcji gęstości. Oba maksima znacznie zwiększają swoją wartość, przy czym drugie się wyraźnie się rozbudowało.

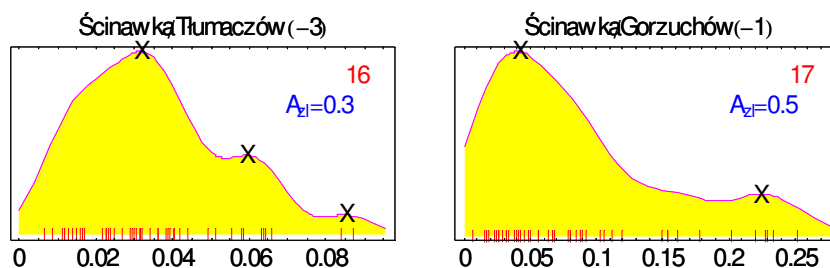


Rys. 6.5. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Nysy Kłodzkiej. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

Przekrój Nysa wykazuje bardzo wyraźny wpływ jezior Otmuchowskiego i Głębinowskiego: wielkość najwyższych przepływów maksymalnych wyraźnie się zmniejszyła pomimo prawie trzykrotnego w stosunku do przekroju Kłodzko zwiększenia powierzchni zlewni a druga moda zniknęła. Rozkład przepływów w ostatnim przekroju (Skorogoszcz) utrzymał zasadniczy kształt rozkładu w Kłodzku chociaż prawy ogon sugeruje możliwość powstania drugiej mody.

6.1.5 Ścinawka

Ścinawka jest najmniejszą ze wszystkich rzek analizowanych w niniejszej pracy. Dwukrotnemu zwiększeniu powierzchni zlewni pomiędzy przekrojami Tłumaczów i Gorzuchów towarzyszy ok. czterokrotne zwiększenie przepływów maksymalnych (rys. 6.6). Jest to rzeka góraska o średnich spadkach odpowiednio 1.0% i 0.8%, co może tłumaczyć wyraźne rozsuniecie mód w Gorzuchowie w porównaniu z Tłumaczowem.

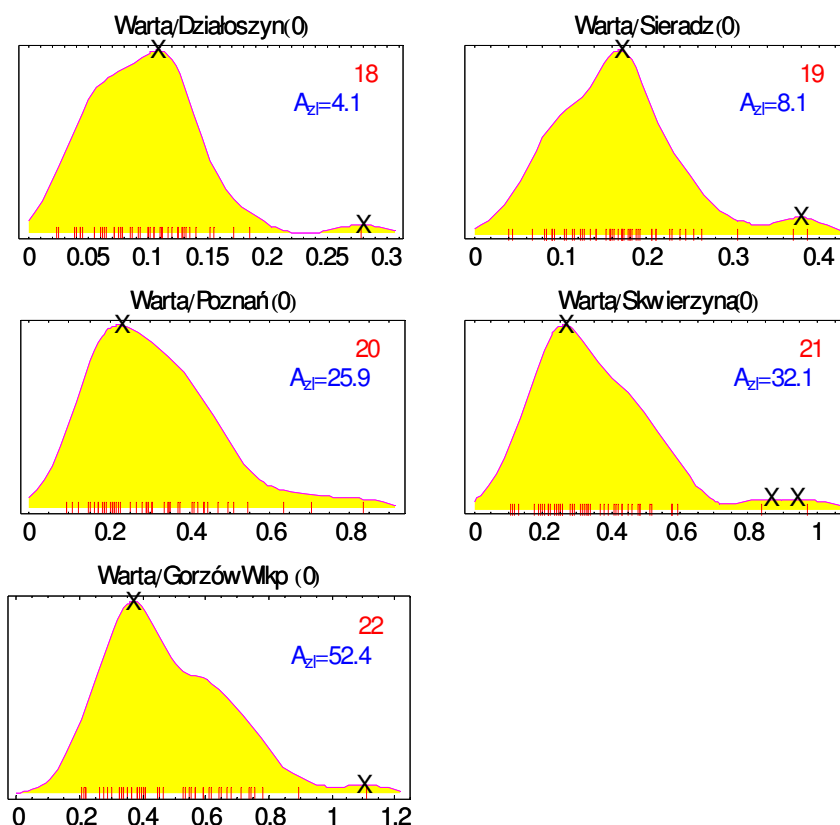


Rys. 6.6. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Ścinawki. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

6.1.6 Warta

Pięć kolejnych wykresów na rys. 6.7 przedstawia funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku rzeki nizinnej. Średni spadek rzeki tylko w Działoszynie nieznacznie przekracza 1‰ i z biegiem rzeki maleje do 0.5‰ w Gorzowie Wielkopolskim. Wszystkie przedstawione rozkłady są zasadniczo jednomodalne chociaż jeden czy dwa

najwyższe przepływy tworzą bardzo słabe drugie mody. Jest ciekawe, że położenie pierwszej mody rośnie bardzo powoli natomiast środek ciężkości zasadniczej masy prawdopodobieństwa przemieszcza się w stosunku do niej z lewej strony (por. Działoszyn) na prawą (por. Gorzów Wielkopolski). Ruch ten sprawia wrażenie jakby druga moda przemieszczała się w stosunku do mody głównej będąc z powodu bliskości obu mód prawie niewidoczna.

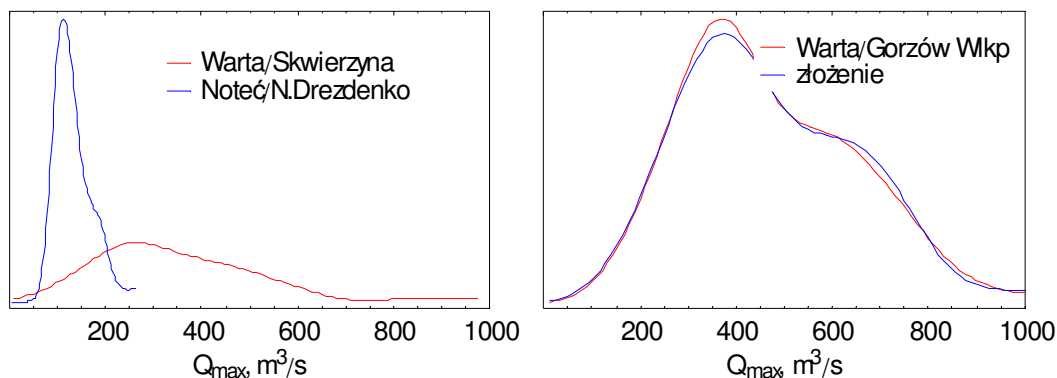


Rys. 6.7. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Warty. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

Fakt ten niekoniecznie musi mieć jednorodne wyjaśnienie hydrologiczne, gdyż można np. przypuszczać, że kształt funkcji rozkładu w Gorzowie Wielkopolskim wynika najprawdopodobniej ze złożenia rozkładów Noteci i Warty zlewających się powyżej tego wodowskazu.

Aby zweryfikować to przypuszczenie dokonano złożenia rozkładów prawdopodobieństwa na Warcie i na Noteci a otrzymany wynik został

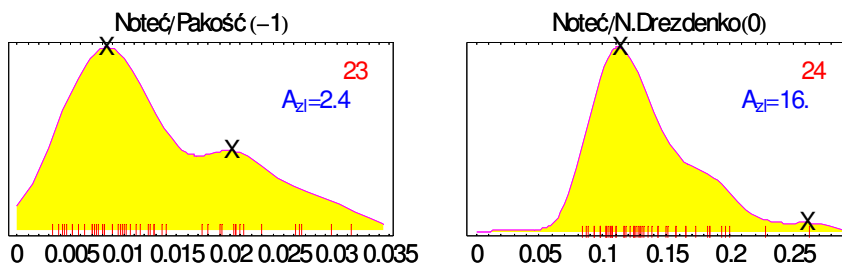
wykreślony wraz z rozkładem pomierzonym w Gorzowie Wielkopolskim, co pokazuje rys. 6.8. Zgodność rozkładów złożonego i pomierzonego jest bardzo wysoka.



Rys. 6.8. Rozkłady prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku w Skwierzynie i Nowym Dreźnie (wykresy po lewej) dają po złożeniu (wykresy po prawej) rozkład przepływów poniżej ujścia Noteci do Warty podobny do rozkładu w Gorzowie Wielkopolskim.

6.1.7 Notec

Przekroje wodowskazowe Pakość i Nowe Dreźnie na Noteci (rys. 6.9) zamykają bardzo różniące się wielkością zlewnie a najwyższe przepływy maksymalne utrzymują w przybliżeniu tę proporcję. Funkcja gęstości przepływów w Pakości jest wyraźnie dwumodalna, co może mieć związek ze skomplikowaną hydrografią tego obszaru i gospodarką wodną prowadzoną na Jeziorze Pakoskim.

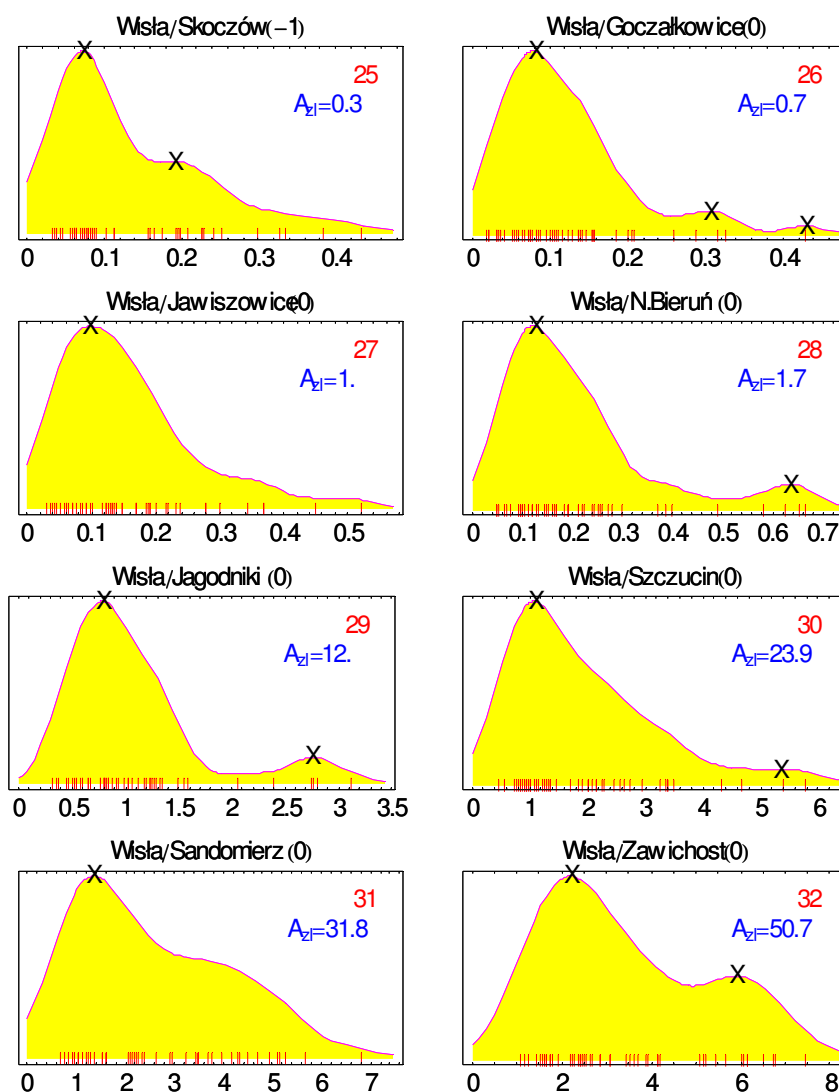


Rys. 6.9. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Noteci. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

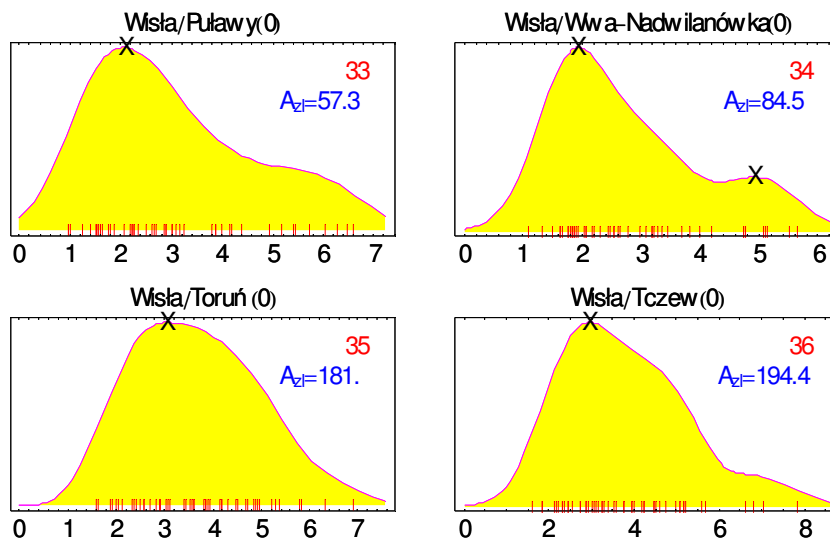
6.1.8 Wisła

Wisła (rys. 6.10) jest reprezentowana przez największą liczbę przekrojów wodowskazowych, bo aż 12, i obejmuje największy zakres przepływów, powierzchni zlewni cząstkowych itp.

Najwyraźniejszą jednomodalność wykazują rozkłady przepływów w Toruniu i Tczewie; najpiękniejszą niejednomodalność – Zawichost.



Rys. 6.10. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Wisły. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_z oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2) (kontynuacja na stronie następczej).

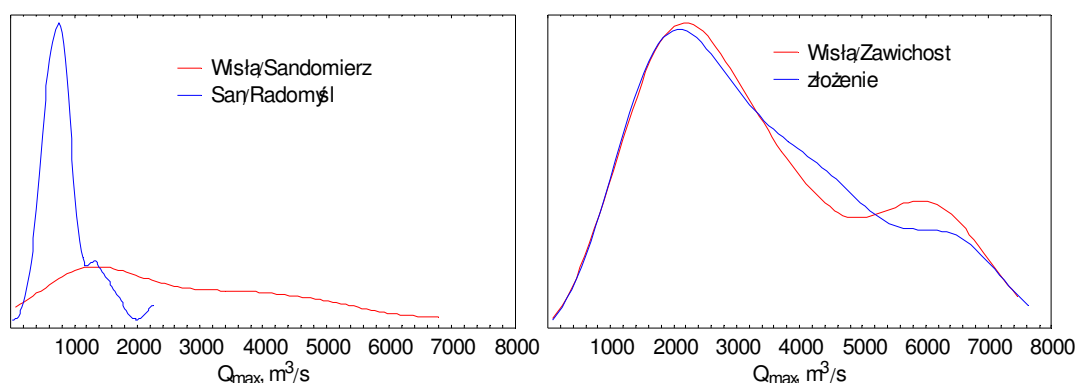


Rys. 6.10 (kontynuacja). Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Wisły. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

Skoczów wykazuje słabą (w sensie słabej antymody) dwumodalność. Rozkład ten jest bardzo podobny do rozkładu przepływów na Ścinawce w Tłumaczowie (rys. 6.6). Obie zlewnie cząstkowe zajmują porównywalne powierzchnie, odpowiednio: 297 i 256 km^2), ale średni spadek zlewni skoczowskiej jest prawie 2.5 raza większy a przepływy – ok. 5 razy. Zbiornik w Goczałkowicach wyraźnie redukuje (ale nie do końca) najwyższe przepływy. Rozkład rocznych przepływów maksymalnych w Jawiszowicach jest wyraźnie podobny do rozkładu w Goczałkowicach. Nowy Bieruń i Jagodniki wykazują podobne rozkłady, chociaż dzieli je ok. 150 km biegu Wisły. Test Silvermana wskazuje na poziomie istotności 20% na niejednomodalność w Jagodnikach nawet po usunięciu najwyższe wartości w próbie. Nida i Dunajec wyraźnie podwyższyły przepływy w Szczucinie i spowodowały praktycznie zanik mody widocznej w Jagodnikach. Po dojściu przepływów maksymalnych Czarnej i Wisłoki rozkład przepływów w Sandomierzu zmienia się wyraźnie w stosunku do swojego odpowiednika w Szczucinie i sugeruje istnienie ukrytej mody bliskiej modzie głównej.

Patrząc na rozkład przepływów w Zawichoście i mapkę (rys. 4.1), można stwierdzić, że przepływy maksymalne na Sanie w połączeniu z przepływami

w Sandomierzu stworzyły w Zawichoście drugą modę. Ponieważ te dwa przekroje i Radomyśl na Sanie leżą blisko i nie ma pomiędzy nimi większych dopływów wykonana została symulacja złożenia rozkładów w Sandomierzu i Radomyślu w rozkład w Zawichoście przy założeniu pełnej synchronizacji (tj. występowanie przepływów maksymalnych w roku w tym samym dniu w roku) przepływów maksymalnych w roku w obu przekrojach. Rys. 6.11 pokazuje, dobrą zgodność złożenia z rozkładem w Zawichoście; różnice można przypisać niecałkowitej synchroniczności przepływów maksymalnych i – w drugiej kolejności – błędami krzywej przepływu.



Rys. 6.11. Rozkłady prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku w Sandomierzu i Radomyślu (wykresy po lewej) dają po złożeniu (wykresy po prawej) rozkład przepływów poniżej ujścia Sanu do Wisły podobny do rozkładu w Zawichoście.

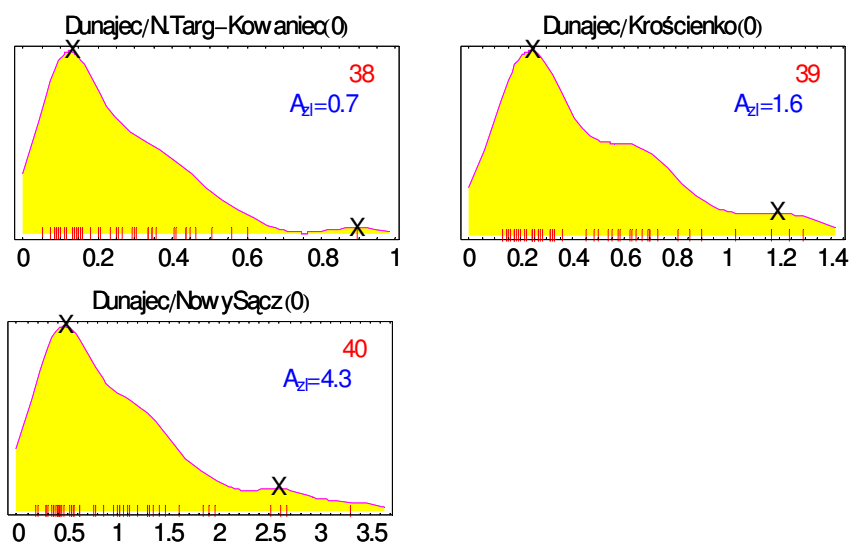
Rozkład prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku w Puławach wyraźnie traci drugą modę jak i obniża najwyższe wartości (o ok. 1000 m³/s). Przepływy te są dalej obniżane z biegiem Wisły, co widać w przekroju Warszawa-Nadwilanówka, ale rozkład jest tam znowu dwumodalny. Być może jakiś wpływ na ten fakt mają przepływy maksymalne Wieprza i Pilicy.

Niezwykle wysoka regularność rozkładu przepływów maksymalnych w Toruniu wynika nie tylko z naturalnego charakteru Wisły na tym odcinku ale także z istnienia zbiornika wrocławskiego silnie wpływającego na przepływy w tym przekroju, co niewątpliwie pociąga za sobą wpływ również na przepływy

maksymalne. Rozkład przepływów w Tczewie jest już nieco mniej regularny chociaż niewątpliwie jednomodalny.

6.1.9 Dunajec

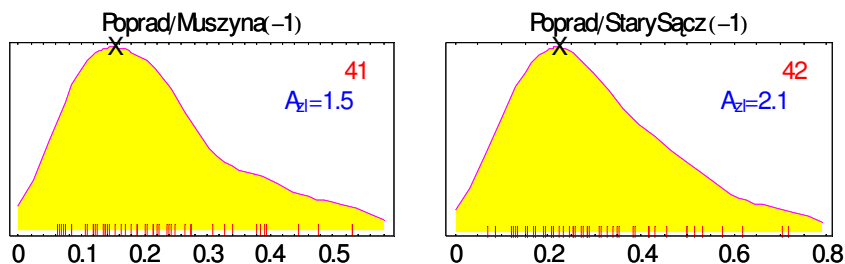
Rozkłady przepływów maksymalnych Dunajca reprezentowane są w trzech przekrojach (rys. 6.12). Rozkład w Nowym Targu jest praktycznie jednomodalny; druga moda w Nowym Sączu jest już bardziej uzasadniona (statystycznie). Przepływy w Krościenku są na pewno niejednorodne z powodu zbiornika w Czorszynie oddanego do eksploatacji w 1997 r. Nie zostało jednak zbadane jak i w jakim stopniu fakt ten ukształtował przedstawiony rozkład.



Rys. 6.12. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Dunajca. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

6.1.10 Poprad

Obie przedstawione na rys. 6.13 gęstości prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych rocznych są bardzo podobne: jednomodalne z bardzo wyraźnie ukształtowaną prawostronną asymetrią.

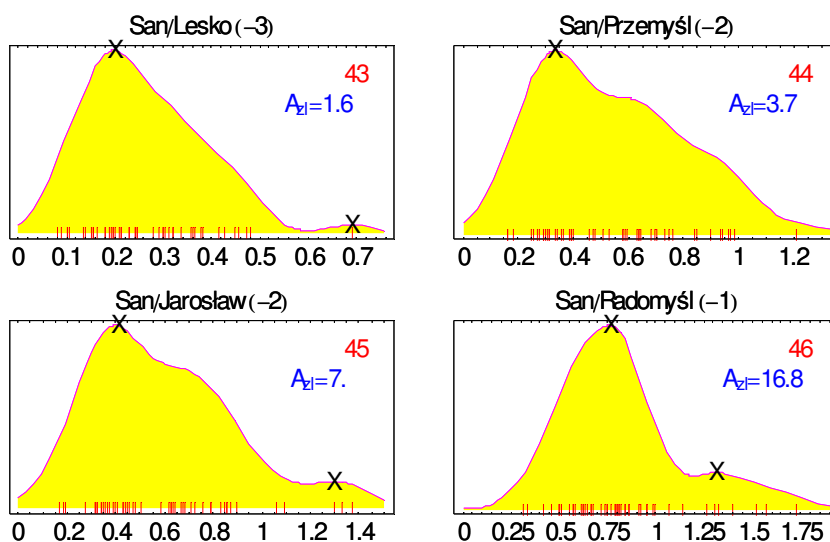


Rys. 6.13. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Popradu. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_z oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 ; (por. odpowiednie wykresy na rys. 5.2).

Rozkład przepływów maksymalnych Popradu w Starym Sączu obejmuje podobny zakres przepływów (tj. do ok. $800\text{ m}^3/\text{s}$, por. rys. 6.12.) jak rozkład przepływów Dunajca w Kowańcu pomimo trzykrotnie większej powierzchni zlewni..

6.1.11 San

Można przypuszczać, że trójkątny i przez to trochę nienaturalny kształt rozkładu przepływów maksymalnych na Sanie w Lesku (rys. 6.14) jest częściowo(?) spowodowany przez działalność zbiorników Myczkowce i Solina powodującą redukcję najwyższych przepływów.

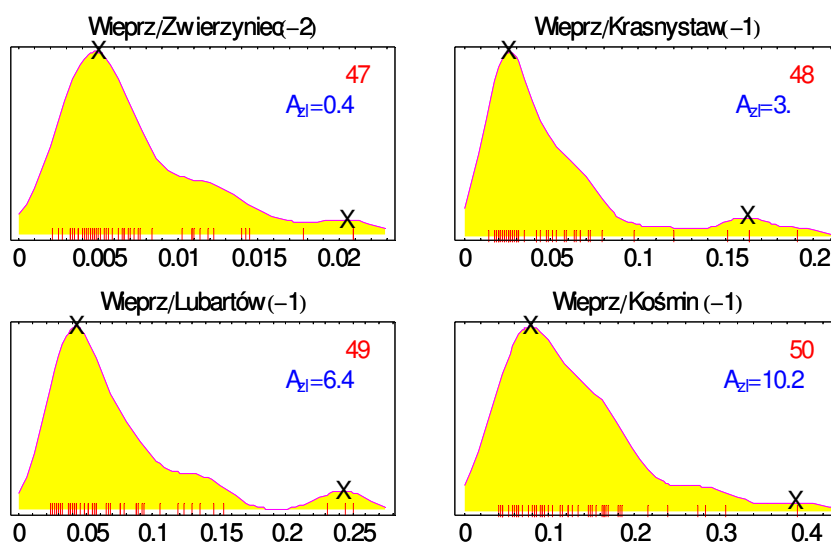


Rys. 6.14. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Sanu. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_z oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

Rozkład w Przemyślu wykazuje podobieństwo do rozkładu w Lesku, ale już bez tej nienaturalnej regularności. Kształt ten w zasadniczym stopniu posiada również rozkład przepływów w Jarosławiu choć estymator gaussowski pokazuje drugą modę. Rozkład przepływów maksymalnych zmienia się bardzo wyraźnie dopiero w Radomyślu, co może być spowodowane dużym wkładem Wisłoka do przepływów na Sanie. Inaczej niż w przekrojach poprzednich na Sanie, przepływy maksymalne w Radomyślu są wyraźnie w większości skupione wokół głównej mody, a pozostałe tworzą stosunkowo wyraźną drugą modę.

6.1.12 Wieprz

Charakter przedstawionych na rys. 6.15 rozkładów przepływów Wieprza jest dosyć podobny we wszystkich czterech przedstawionych przekrojach.

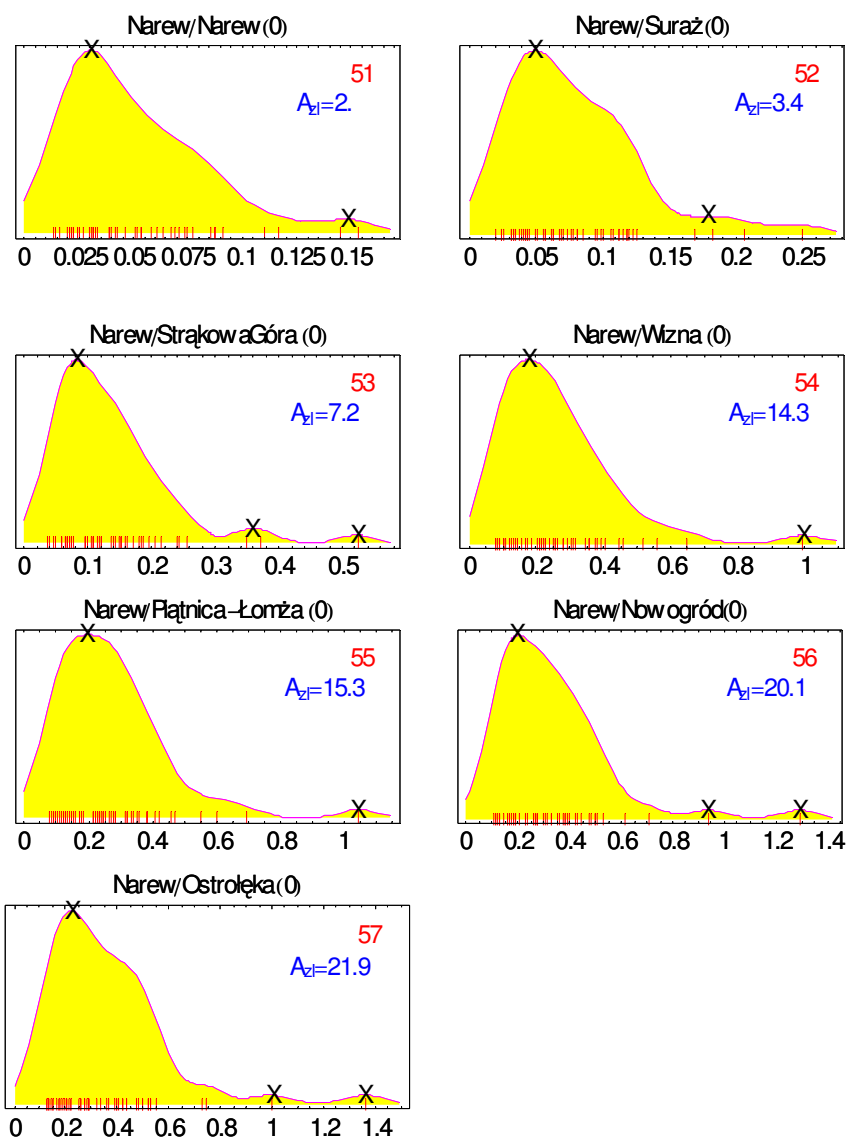


Rys. 6.15. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Wieprza. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

Druga moda, jaka się pojawia, jest utworzona przez najwyżej kilka przepływów i dlatego jest raczej mało prawdopodobna. Uwagę zwraca brak wyraźnego zwiększenia przepływów z ponad dwukrotnym zwiększeniem powierzchni zlewni w Lubartowie.

6.1.13 Narew

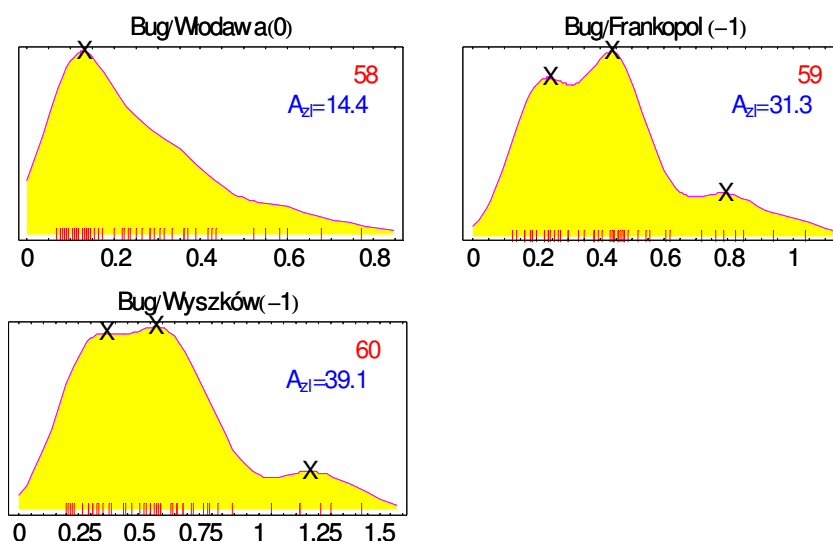
Rozkłady prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych rocznych w siedmiu wybranych przekrojach Noteci (rys. 6.16) są dosyć podobne do rozkładów przepływów Wieprza: wyraźna moda główna i dosyć długi, zawierający najwyżej kilka wartości, przedział najwyższych przepływów maksymalnych. Brak wyraźnej struktury dwumodalnej.



Rys. 6.16. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Narwi. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

6.1.14 Bug

Rozkład przepływów maksymalnych w roku Bugu we Włodawie (rys. 6.17) to przykład wyraźnie ukształtowanego jednomodalnego asymetrycznego rozkładu. Pozostałe dwa rozkłady są niezwykle podobne, chociaż dzieli je ok. 130 km biegu rzeki. Wszystkie trzy mody we Frankopolu i Wyszkwowie są relatywnie w tych samych miejscach, translacja rozkładu zmniejszyła tylko wyrazistość dwu pierwszych mód. Trudno stwierdzić jakie są przyczyny tego faktu, choć można go uznać oznakę podobieństwa transformacji opadodopływ maksymalny przez zlewnie zamykane tymi przekrojami.



Rys. 6.17. Zmienność rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych w roku (w $10^3\text{m}^3/\text{s}$) z biegiem Bugu. Wartości z minusem podają ile najwyższych wartości próby zostało pominiętych w konstrukcji przedstawionych rozkładów; A_{zl} oznacza powierzchnię zlewni w 10^3km^2 , X – mody (por. wykresy na rys. 5.2).

6.2 Analiza obszarowa

U podstaw analizy obszarowej wielomodalności leży przypuszczenie o możliwości wyodrębnienia na terenie Polski pewnych obszarów o wyraźnie innym charakterze modalności przepływów maksymalnych. Przypuszczenie to niekoniecznie musi być prawdziwe (choć wydaje się, że dychotomia „rzeki górskie–rzeki nizinne” powinna znaleźć odzwierciedlenie w dychotomii rozkładów); niekoniecznie też może zostać jednoznacznie zweryfikowane na podstawie danych wziętych w niniejszej pracy do analizy. Jednakże nie ulega

wątpliwości, że jest to ciekawe zagadnienie, a wyodrębnienie pewnych regionów pozwoliłoby uzasadniać regionalizację niektórych zależności związanych z przepływami maksymalnymi. Na pewno wyniki niniejszej pracy pozwolą na postawienie bardziej precyzyjnych pytań dotyczących regionalizacji rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych.

Do analizy wzięte zostały rozkłady z usuniętymi modami nieznaczącymi tj. modami jednopunktowymi, tj. rozkłady przedstawione na rysunkach zamieszczonych w podrozdziałach 6.1.1÷6.1.14, zmodyfikowane przez usunięcie drugiej i/lub trzeciej mody ze wszystkich rozkładów (poza Bugiem) ze względu na ich słabe uzasadnienie.



Rys. 6.18. Jedno-, dwu- i trójmodalność rozkładów przepływów maksymalnych rocznych w badanych przekrojach (kolory odpowiednio: niebieski, czerwony i zielony); liczba mód według rozdziału 6.1 z usuniętą drugą i/lub trzecią, praktycznie nieistotną, modą.

Rys. 6.18 ilustruje przestrzennie tylko jedną charakterystykę wielomodalności rozkładów: liczbę mód, które można uznać za prawdopodobne. Otrzymany obraz nie wyróżnia w zdecydowany sposób jakiegoś regionu, chociaż więcej rozkładów dwumodalnych znalazło się w obszarach wyżej położonych niż na nizinach. Fakt ten upoważnia jednak do zdecydowanej konkluzji, gdyż (oprócz zbyt małej liczby przekrojów i być może nieadekwatnego ich wyboru) wcześniej należałoby ustalić na ile przepływy w danym przekroju znajdują się pod wpływem działalności antropogenicznej, na co nawet analizowane w pracy dane wskazują w niektórych przypadkach.

W konkluzji należy stwierdzić, że posiadane dane nie pozwalają na jednoznaczne wyodrębnienie jakiegokolwiek regionu ze względu na charakter jego modalności. Zadanie to wymaga bardzo precyzyjnego sformułowania i powinno być analizowane na podstawie starannie wybranych danych po ich uprzedniej analizie hydrologicznej.

6.3 Podsumowanie

Na podstawie wyników estymacji nieparametrycznej z gaussowską funkcją jądrową zastosowanej do przepływów maksymalnych rocznych w 60 wybranych przekrojach wodowskazowych na rzekach Polski przeprowadzona została analiza zmienności uzyskanych empirycznych funkcji gęstości przepływów maksymalnych zarówno wzdłuż rzek (analiza liniowa) jak i na terenie całej Polski (analiza obszarowa).

Analiza liniowa wykazała zmienność postaci (w tym również modalności) funkcji gęstości prawdopodobieństwa i posiadając bardzo elementarną informację hydrologiczną można w wielu przypadkach podawać bardzo prawdopodobne powody zmiany modalności (czy kształtu) rozkładu. Na pewno jednym z nich jest intensywny wpływ działalności człowieka zmieniający reżim przepływu (zbiorniki wodne, kanały itp.) dający wyraźną zmianę postaci rozkładu prawdopodobieństwa. Innym powodem zmiany postaci rozkładu jest znaczący dopływ, który – jak zostało pokazane w trzech przypadkach – może spowodować zmianę modalności rozkładu.

Interesujące są nie tylko zmiany postaci rozkładu z biegiem rzeki, ale także brak zmian, który również wymaga wyjaśnienia. Jest oczywiste, że rozkład prawdopodobieństwa powinien zmieniać się z biegiem rzeki tym wyraźniej im dłuższy odcinek rzeki jest rozważany, im więcej dopływów (zwłaszcza dużych) wpada na tym odcinku do rzeki głównej, itp. Nie bez znaczenia jest też charakter samej zlewni zmieniający się (lub nie) z biegiem rzeki. Najciekawsze podobieństwo rozkładów wykazuje Bug w przekrojach wodowskazowych Frankopol i Wyszaków, gdzie odległość 130 km spowodowała jedynie zwiększenie wielkości przepływów maksymalnych a nie spowodowała zmiany trójmodalnej postaci funkcji gęstości.

Analiza obszarowa nie ujawniła żadnej wyraźnej regionalizacji rozkładów przepływów maksymalnych, chociaż na podstawie rys. 6.18 można stwierdzić, że niejednomodalność ujawnia się bardziej na południu Polski niż na północy. Należy jednakże mieć na uwadze, że tak szeroka analiza – nie ograniczająca w żaden sposób branych pod uwagę rozkładów – nie musi prowadzić do wyraźnych wniosków i powinna być poprzedzona staranną analizą wstępną obejmującą m.in. analizę przyczyn zmian rozkładu prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych.

7. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Stosowane obecnie powszechnie parametryczne (globalne) podejście do identyfikacji rozkładu maksymalnych rocznych przepływów rzecznych w danym przekroju wodowskazowym jest obarczone bardzo silnym założeniem: identyfikowany rozkład jest znany, nieznane są tylko jego parametry. Rozkład ten jest prawie zawsze jednomodalny. Tymczasem istnieją podnoszone przez wielu badaczy mniej czy bardziej uzasadnione przypuszczenia, że przepływy maksymalne są generowane przez więcej niż jeden mechanizm przyczynowy skutkiem czego założenie o jednomodalności rozkładu tych przepływów może nie być spełnione.

Estymacja nieparametryczna – pozbawiona owego silnego założenia – w naturalny sposób ujawnia wielomodalność. Najczęściej stosowana wersja tej estymacji używa gaussowskiej funkcji jądrowej, co w przypadku przepływów maksymalnych prowadzi do wycieku prawdopodobieństwa (nawet powyżej 5%) w obszar ujemnych przepływów (por. r3.2ys. 3.1). Dlatego w pracy wykonany został (rozdział 3) odpowiedni eksperyment Monte Carlo i na podstawie uzyskanych wyników przeprowadzona została analiza porównawcza estymacji z symetryczną (gaussowską) funkcją jądrową z estymacją „asymetryczną”, gdzie użyto sześć asymetrycznych funkcji jądrowych. Analiza wykazała, że asymetryczne funkcje – automatycznie eliminując wspomniany wyciek prawdopodobieństwa – dają też lepszy obraz rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa w sensie wyższego współczynnika determinacji, czy mniejszego absolutnego błędu kwantyla jednoprocentowego czy półprocentowego (zob. rys. 3.9, rys. 3.12 i rys. 3.13). Okazało się też, że gaussowska wersja estymacji nieparametrycznej zapewnia najwyższe – bliskie jedności – prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej dwu mód (rys. 3.17). Tutaj użyte estymatory asymetryczne wyraźnie są gorsze. Z tego właśnie powodu do analizy wielomodalności rozkładów rzeczywistych przepływów maksymalnych rocznych został wybrany estymator gaussowski.

Zbiór danych przepływów maksymalnych rocznych obejmował sześćdziesiąt 52-letnich szeregów czasowych przepływów na różnych rzekach w różnych ich przekrojach i jest w jakimś stopniu reprezentatywny dla ogółu rzek w Polsce bardziej przez przypadkowość niż przez systematyczność dokonanego wyboru. Tym niemniej obejmuje on bardzo różne reżimy hydrologiczne oraz wielkości zlewni.

Generalnie można stwierdzić (rozdział 5.1), że ogólny obraz, jaki się wyłania na podstawie 60 wykresów na rys. 5.2, potwierdza postawione na wstępie pracy przypuszczenie o niejednomodalności przepływów maksymalnych rocznych. Niejednomodalność przyjmuje różną postać, od bardzo wyraźnej do bardzo słabej. Wyrazistość mody może być wsparta dużą częścią elektów próby (wysokim prawdopodobieństwem z nią związanym, jak np. Kłodnica/Gliwice, rys. 6.3, czy Wisła/Zawichost, rys. 6.10), może też polegać na tym, że wśród przepływów w danym przekroju znajduje się jeden przepływ o bardzo wysokiej wartości i tworzy on modę („jednopunktową”). Moda taka – często obecna, jak pokazuje rys. 5.2 – jest praktycznie niewiarygodna jako obraz mody rzeczywistej. Z kolei, słaba wyrazistość mody może wynikać z faktu jej bliskości w stosunku do mody głównej. Takie przypuszczenie można mieć np. do rozkładu na Noteci w Pakości (rys. 6.9), czy na Wiśle w Skoczowie (rys. 6.10). Na tej podstawie można też zakładać istnienie mody nawet tam, gdzie estymator gaussowski jej *explicite* nie wykrywa, jak np. rozkład na Wiśle w Sandomierzu (rys. 6.10), czy na Dunajcu w Krościenku (rys. 6.12).

Aby stwierdzić, czy zidentyfikowana wielomodalność jest wielomodalnością rzeczywistą, czy jest tylko wynikiem losowości użytych danych, została poddana testowaniu. Do wszystkich 60 badanych przekrojów zastosowane zostały dwa testy wielomodalności: metoda wygładzania krytycznego Silvermana (rozdział 5.2.1) i metoda nadwyżki masy (rozdział 5.2.2). Uzyskane wyniki są raczej rozczarowujące: oba testy rzadko prowadzą do odrzucenia hipotezy o jednomodalności i to na tak liberalnym poziomie istotności jak 20%! Istota tak słabej mocy obu testów wynika z bardzo szerokiej treści hipotezy zerowej i alternatywnej: nie precyzuje się tam ani liczby mód ani ich położenia itp. fakt ten prowadzi do wniosku o małej

przydatności użytych testów do celów niniejszej pracy i podobnych. Tak więc głównym argumentem za niejednomodalnością wykazaną przez zastosowany estymator jest jego wysoka skuteczność wykrywania mód (jest to silny argument) oraz pewne argumenty heurystyczne.

Argumenty takie pojawiły się w rozdziale 6, zwłaszcza w podrozdziale 6.1, gdzie przeprowadzona została analiza rozkładów w dół rzeki („analiza liniowa”). Jej efektem było w niektórych przypadkach bardzo wiarygodne wyjaśnienie zmiany kształtu rozkładu prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych rocznych w przekroju drugim, leżącym niżej na danej rzece, w stosunku do rozkładu przepływów w przekroju pierwszym, leżącym wyżej. Dotyczy to m.in. sytuacji, gdy przepływy w przekroju drugim znajdują się pod wpływem zbiornika retencyjnego (np. Nysa Kłodzka/Kłodzko – Nysa Kłodzka/Nysa (rozdział 6.1.4), czy Wisła/Skoczów – Wisła/Goczałkowice (rozdział 6.1.8)). Bardzo interesujące okazało się odkrycie, że złożenie dwu rozkładów prawdopodobieństwa przepływów maksymalnych rocznych w przekroju na rzece głównej i znaczącym dopływie bardzo dobrze zgadza się z pomierzonym rozkładem prawdopodobieństwa przepływów w przekroju poniżej zbiegu rzeki głównej i tego dopływu. Ta własność estymacji nieparametrycznej czyni ją bardzo atrakcyjnym narzędziem konstrukcji rozkładów przepływów poniżej zbiegu rzek, jeśli znane są rozkłady powyżej. Szczególnie dobrym przykładem jest złożenie rozkładów przepływów w Skwierzynie na Warcie i Nowym Drezdenku na Noteci praktycznie identyczne z rozkładem przepływów maksymalnych Warty w Gorzowie Wielkopolskim (rys. 6.8). Innym ciekawym odkryciem jest wysokie podobieństwo rozkładów przepływów maksymalnych w dwu przekrojach na Bugu: Frankopolu i Wyszokowie (rys. 6.17), pomimo dzielących je 130 km, które stanowi pewnego rodzaju ilustrację niezmienności reżimu tej rzeki na tym jej odcinku.

8. LITERATURA

- Adamowski K., 1985, *Nonparametric kernel estimation of flood frequencies*, Water Resources Research, Vol. 21, No. 11, str.1585-1590.
- Adamowski K., 1989, *A Monte Carlo comparison of parametric and nonparametric estimation of flood frequencies*, Elsevier Journal of Hydrology, 108, str.295-308.
- Adamowski K., 2000, *Regional analysis of annual maximum and partial duration flood data by nonparametric and L-moment methods*, Elsevier Journal of Hydrology 229, str.219-231.
- Adamowski K., Feluch W.,1987, *Porównanie metod parametrycznych i nieparametrycznych obliczania przepływów maksymalnych rocznych o określonym prawdopodobieństwie przewyższenia*, Wiadomości Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej, T. X (XXXI), z. 2-3.
- Adamowski K., Labatiuk C., 1987, *Estimation of flood frequencies by a nonparametric density procedure in Hydrologic Frequency Modelling*, edited by V.P. Singh, str. 97-106, D. Reidel, Norwell, Mass.
- Ali A., 1998, *Nonparametric spatial rainfall characterization using adaptive kernel estimator*, Journal of Geographic Information and Decision Analysis, vol. 2, no.2, str.34-43.
- Atlas posterunków wodowskazowych dla potrzeb Państwowego Monitoringu Środowiska, 1995-1996, Biblioteka Monitoringu Środowiska, Warszawa.
- Azzalini A., 1981, *A note on the estimation of the distribution function and quantiles by a kernel method*, Biometrika 68, str.326-328.
- Bardsley W.E., 1989, *Using historical data in nonparametric flood estimation*, Elsevier Journal of Hydrology 108, str.249-255.
- Bouezmarni T., Scaillet O., 2003, *Consistency of asymmetric kernel density estimators and smoothed histograms with application to income data*, UCL DP.
- Bowman A., 1984, *An alternative method of cross-validation for the smoothing of density estimates*, Biometrika 71, str.353-360.
- Bowman A., 1985, *A comparative study of some kernel-based nonparametric density estimators*, Journal of Stat. Comp. Simul. 21, str.313-327.
- Bowman A., Hall P., Prvan T., 1998, *Bandwidth selection for the smoothing of distribution functions*, Biometrika 85, 4, str.799-808.
- Chaudhuri P., Marron J.S., 1999, *SiZer for exploration of structures in curves*, Journal of the American Statistical Association, 94, str.807-823.

- Chen S.X., 2000, *Probability density function estimation using gamma kernels*, Annals Of The Institute of Statistical Mathematics, Vol. 52, No.3, str.471-480.
- Cheng M.Y., Hall P., 1998, *Calibrating the excess mass and dip tests of modality*, J.R. Statist. Soc. B, 60, Part 3, str.579-589.
- Chiu S.T., 1991, *Bandwidth selection for kernel density estimation*, The Annals of Statistics, Vol.19, No.4, str.1883-1905.
- Chiu S.T., 1992, *An automatic bandwidth selector for kernel density estimation*, Biometrika 79, 4, str.771-782.
- Chiu S.T., 1996, *A comparative review of bandwidth selection for kernel density estimation*, Statistica Sinica 6, str.129-145.
- Choi E., Hall P., 1999, *Miscellanea. Data sharpening as a prelude to density estimation*, Biometrika 86, Issue 4, str.941-947.
- Choudhuri N., 2005, "A histogram smoothing approach in multivariate density level set estimation." <http://stat.cwru.edu/~nidhan/onlinepaper/denhist.pdf>
- Devroye L., 1989, *The double kernel in density estimation*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, vol. 25, str.533-580.
- Devroye L., 1994, *On the non-consistency of an estimate of Chiu*, Statistics and Probability Letters, vol. 20, str.183-188.
- Devroye L., Krzyżak A., 2002, *New multivariate product density estimators*, Journal of Multivariate Analysis, vol. 82, str.88-110.
- Feluch W., 1987, *Nieparametryczna estymacja funkcji gęstości na przykładzie przepływów maksymalnych rocznych*, Seminaria Instytutu Inżynierii Środowiska, Politechnika Warszawska.
- Feluch W., 1994, *Wybrane metody jądrowej estymacji funkcji gęstości prawdopodobieństwa i regresji w hydrologii*, Prace Naukowe PW, z.15, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- Fisher N.I, Mammen E., Marron J.S., 1994, *Testing for multimodality*, Comput.Stat. & Data Analysis 18, str.499-512.
- Fisher N.I, Marron J.S., 2001, *Mode testing via the excess mass estimate*, Biometrika 88, 2, str.499-517.
- Godtliebsen F., Marron J.S., Chaudhuri P., 1999, *Significance in scale space for density estimation*, przesłane do *Journal of Computational and Graphical Statistics* (http://www.stat.unc.edu/faculty/marron/marron_papers.html)
- Guo S.L., 1993, *Parametric and nonparametric mixture density estimation with historical floods and palaeoflood information*, Extreme Hydrological Events: Precipitation, Floods and Droughts, Proceedings of the Yokohama Symposium, IAHS Publ. No. 213.

- Hall P., 2001, *Biometrika Centenary: Nonparametrics*, *Biometrika* 88, str.143-165.
- Hall P., Marron J.S., 1987a, *Extent to which least-squares cross-validation minimizes integrated squared in nonparametric density estimation*, *Probability Theory and Related Fields* 74, str.567-581.
- Hall P., Marron J.S., 1987b, *Estimation of integrated squared density derivatives*, *Statistics & Probability Letters* 6, str.109-115.
- Hall P., Marron J.S., 1987, *On the Amount of noise Inherent in bandwidth selection for a kernel density estimator*, *The Annals of Statistics*, Vol.15, No.1, str.163-181.
- Hall P., Marron J.S., 1991b, *Local minima in cross-validation functions*, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 53, str.245-252.
- Hall P., Sheather S.J., Jones M.C., Marron J.S., 1991, *On optimal data-based bandwidth selection in kernel density estimation*, *Biometrika*, 78, 2, str.263-269.
- Hall P., Minnotte C., Zhang Ch., 2004, *Bump hunting with non-gaussian kernels*, *The Annals of Statistics*, vol.32, No. 5, str.2124-2141.
- Hall P., Ooi H., 2004, *Attributing a probability to the shape of a probability density*, *The Annals of Statistics*, vol. 32, No.5, str.2098-2123.
- Jin X., Kawczak J., 2003, *Birnbaum-Saunders and Lognormal kernel estimators for modelling durations in high frequency financial data*, *Annals of Economics and Finance* 4, str.103-124.
- Kaczmarek Z., 1970, *Metody statystyczne w hydrologii i meteorologii*, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa.
- Kajetanowicz Z., 1962, *Genetyczne podstawy obliczeń hydrologicznych*, Budownictwo Wodne, zeszyt naukowy 11, Wydawnictwo PK.
- Kim K.-D., Heo J.-H., 2002, *Comparative study of flood quantiles estimation by nonparametric models*, *Elsevier Journal of Hydrology* 260, str.176-193.
- Klemeš, V. (2000a). *Tall tales about tails of hydrological distributions*. I. *J.of Hydrol. Eng.*, V.5, No.3, 227-231.
- Klemeš, V. (2000b). *Tall tales about tails of hydrological distributions*. II. *J.of Hydrol. Eng.*, V.5, No.3, 232-239.
- Kulig M., 2001, *Zastosowanie nieparametrycznej estymacji funkcji gęstości do konstruowania krzywej częstości przepływów dobowych*, *Czasopismo Techniczne Z.3-B/2001*, str. 148-157 , Wydawnictwo PK.
- Ledl T., 2004, *Kernel Density Estimation: Theory and Application in Discriminant Analysis*, *Austrian Journal of Statistics*, 33 (3), str. 267-279
- Mammen E., Marron J.S., Fisher N.I., 1992, *Some asymptotics for multimodality tests based on kernel density estimates*, *Probability Theory and Related Fields* 91, str.115-132.

- Mammen E., Marron J.S., 1997, *Mass recentred kernel smoothers*, *Biometrika* 84, 4, str.765-777.
- Markowski A., 2003, *Nowy słownik poprawnej polszczyzny*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Marron J.S., Nolan D., 1989, *Canonical kernels for density estimation*, *Statistics and Probability Letters* 7, str.195-199.
- Marron J.S., Wand M.P., 1992, *Exact mean integrated squared errors*, *Annals of Statistics* 20, str.712-736.
- Minnotte M.C, 1997, *Nonparametric testing of the existence of modes*, *Ann. Stat.*, 25(4), 1646-1660
- Moon Y., Lall U., 1994, *Kernel quantile function estimator for flood frequency analysis*, *Water Resources Research*, Vol. 30, No. 11, str.3095-3103.
- Müller D.W., Sawitzki G., 1991, *Excess mass estimates and tests for multimodality*, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 86, No. 415, str.738-746.
- Müller H.G., 1992, *The excess mass approach in statistics*, Universität Heidelberg, *Beträge zur Statistik* Nr. 3, 14str.
- Parzen E., 1962, *On estimation of a probability density function and mode*, *Annals of Mathematical Statistics*, 33, str.1065-1076.
- PIHM, *Wodowskazy na rzekach Polski, Cz. II, 1972, Wodowskazy w dorzeczu Wisły i na rzekach Przymorza na wschód od Wisły*, Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa.
- Rosenblatt M., 1956, *Remarks on some non-parametric estimates of a density function*, *Annals of Mathematical Statistics* 27, str.832-837.
- Rudemo M., 1982, *Empirical choice of histograms and kernel density estimators*, *Scand. Journal of Statistics* 9, str.65-78.
- Sain S.R., 1994, *Adaptive kernel density estimation*, Houston, Texas.
- Sawitzki G., 1998, *The excess mass approach and the analysis of multimodality*, <ftp://statlab.uni-heidelberg.de/pub/reports/by.series/report.17.pdf>
- Scaillet O., 2001, *Density estimation using inverse and reciprocal inverse gaussian kernels*, IRES Discussion Paper 17, Université Catholique de Louvain.
- Scott D.W., 1979, *On optimal and data-based histograms*, *Biometrika* 66, str.605-610.
- Sharma A., Tarboton D.G., Lall U., 1997, *Streamflow simulation: a nonparametric approach*, *Water Resources Research*, Vol.33, No. 2, str.291-308.
- Sheather S.J., 1992, *The performance of six popular bandwidth selection methods on some real data set*, *Computational Statistics* 7, str.225-250.

- Silverman B.W., 1981, *Using kernel density estimates to investigate multimodality*, Journal of the Royal Statistical Society B. 43, No.1., str.97-99.
- Silverman B.W., 1986, *Density estimation for statistics and data analysis*, Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, London.
- Tarboton D.G., Sharma A., Lall U., 1998, *Disaggregation procedures for stochastic hydrology based on nonparametric density estimation*, Water Resources Research, Vol. 34, No. 1, str.107-119.
- Terrel G.R., Scott D.W., 1985, *Oversmoothed nonparametric density estimates*, Journal of the American Statistical Association 80, No.389, Theory and Methods, str.209-214.
- Terrel G.R., 1990, *The maximal smoothing principle in density estimation*, Journal of the American Statistical Association 85, str.470-477.
- Turlach B.A., 1993, *Bandwidth selection in kernel density estimation: A Review*, Discussion Paper, C.O.R.E. and Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain-la-Neuve, Belgium.
- Wand M.P., Marron J.S., Ruppert D., 1991, *Transformations in density estimation*, Journal of the American Statistical Association 86, str.343-361 (with discussion).
- Waylen P., Woo M.K., 1982, *Prediction of annual floods generated by mixed processes*, Water Resources Research, Vol.18, No.4, str.1283-1286.
- Węglarczyk S., 1998, *Wybrane problemy hydrologii stochastycznej*, Seria Inżynieria Sanitarna i Wodna, Monografia 235, Politechnika Krakowska.