

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki  
Wydział Inżynierii Lądowej  
Instytut Metod Komputerowych w Inżynierii Lądowej

**Piotr Romanowski**

**Analiza numeryczna trwałości elementów  
konstrukcji betonowych poddanych obciążeniom  
chemiczno-mechanicznym**

**Praca doktorska**

**Promotor**  
**prof. zw. dr hab. inż. Czesław Cichoń**

Kraków, wrzesień 2005



*Składam serdeczne podziękowania  
prof. zw. dr hab. inż. Czesławowi Cichoniowi  
za pomoc i cenne uwagi udzielone  
przy pisaniu tej pracy.*



# Spis treści

Spis rysunków	5
Spis tabel	9
Spis ważniejszych oznaczeń	10
<b>1 WSTĘP</b>	<b>14</b>
1.1 Cel i zakres pracy . . . . .	14
1.2 Podstawowe założenia . . . . .	19
1.3 Układ pracy . . . . .	20
<b>2 SFORMUŁOWANIE MODELU MATEMATYCZNEGO</b>	<b>22</b>
2.1 Elektro – chemiczna korozja zbrojenia . . . . .	22
2.1.1 Struktura betonu . . . . .	22
2.1.2 Etapy korozji . . . . .	23
2.1.3 Próg korozji . . . . .	24
2.2 Mechanizmy transportu materii w betonie . . . . .	25
2.2.1 Dyfuzyjność . . . . .	26
2.2.2 Transport płynu . . . . .	27
2.2.3 Transport jonów wapnia . . . . .	29
2.2.4 Transport jonów chloru . . . . .	33

2.3	Podstawowe równania mechaniki dla betonu . . . . .	36
2.3.1	Lokalizacja zniszczenia . . . . .	36
2.3.2	Równania równowagi i równania geometryczne . . . . .	37
2.3.3	Dwuwymiarowy stan naprężenia/odkształcenia . . . . .	38
2.3.4	Wpływ porowatości na naprężenia spowodowane ciśnieniem pływu . . . . .	41
2.4	Mechanika zniszczenia chemiczno – mechanicznego betonu . . . . .	43
2.4.1	Parametr skalarny zniszczenia chemicznego . . . . .	43
2.4.2	Parametry skalarne zniszczenia mechanicznego betonu . . . . .	44
2.4.3	Wpływ degradacji chemicznej na własności mechaniczne ma- teriału . . . . .	45
2.4.4	Wpływ degradacji mechanicznej i stanu odkształcenia na po- rowatość materiału . . . . .	47
2.5	Model matematyczny opisu zniszczenia chemiczno - mechanicznego betonu . . . . .	49
2.5.1	Zestawienie równań problemu brzegowego . . . . .	49
2.5.2	Słabe sformułowanie wariacyjne . . . . .	50

### **3 SFORMUŁOWANIE MODELU SKOŃCZENIE ELEMENTOWE- GO** **52**

3.1	Przyrostowy układ równań słabego sformułowania wariacyjnego . . .	52
3.2	Przyrosty wektora naprężeń i strumieni . . . . .	53
3.2.1	Przyrost wektora naprężeń . . . . .	53
3.2.2	Przyrost strumienia płynu . . . . .	57
3.2.3	Przyrost strumienia jonów wapnia . . . . .	58
3.2.4	Przyrost strumienia jonów chloru . . . . .	59
3.3	Dyskretyzacja MES po zmiennych przestrzennych . . . . .	60

3.4	Układ równań przyrostowych MES . . . . .	60
3.5	Dyskretyzacja w czasie . . . . .	64
3.6	Metody iteracyjne rozwiązywania nieliniowych równań MES . . . . .	66
3.6.1	Metoda Newtona-Raphsona dla sterowania obciążeniem . . . . .	66
3.6.2	Równanie więzów . . . . .	67
3.7	Uproszczony model obliczeniowy MES . . . . .	69
<b>4</b>	<b>PRZYKŁADY</b>	<b>72</b>
4.1	Uwagi wstępne . . . . .	72
4.2	Opis modyfikacji systemu FEAP . . . . .	73
4.3	Przykład 1 - teoretyczny . . . . .	75
4.4	Przykład 2 - wyznaczenie czasu inicjacji korozji zbrojenia w płycie uszkodzonej mechanicznie . . . . .	80
4.4.1	Uszkodzenie mechaniczne . . . . .	81
4.4.2	Działanie agresywnego środowiska . . . . .	84
4.5	Przykład 3 - analiza trwałości płyty przy sprzężonym obciążeniu mechaniczno-chemicznym . . . . .	90
4.6	Przykład 4 - porównanie pełnego i uproszczonego modelu obliczenio- wego . . . . .	94
<b>5</b>	<b>ZAKOŃCZENIE</b>	<b>100</b>
5.1	Podsumowanie . . . . .	100
5.2	Elementy oryginalne pracy . . . . .	101
5.3	Kierunki rozwoju tematu . . . . .	102
	<b>Literatura</b>	<b>104</b>
	<b>DODATEK</b>	<b>111</b>

# Spis rysunków

	8
2.1	Etapy degradacji konstrukcji żelbetowej. . . . . 24
2.2	Zmiany wilgotności i koncentracji jonów chloru otuliny betonowej konstrukcji poddanej cyklicznemu nawilżaniu i suszeniu, Martin-Perez [34]. . . . . 27
2.3	$C_{Ca}^b(C_{Ca}^f)$ - ilustracja formuły (2.23). . . . . 32
2.4	Jednoosiowe ściskanie-rozciąganie materiału kruchego $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . . . . . 37
2.5	Geometria poru w elementarnej objętości. . . . . 42
2.6	Wpływ parametru zniszczenia chemicznego na zależność $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ w klasycznym zastosowaniu. . . . . 46
2.7	Wpływ parametru zniszczenia chemicznego na relację $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ przy zastosowaniu równania (2.78). . . . . 47
2.8	Wpływ parametru zniszczenia chemicznego na relację $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ przy uwzględnieniu degradacji modułu sprężystości i zastosowaniu równania (2.78). . . . . 48
3.1	Schemat kroku obliczeniowego standardowej metody Newtona-Raphsona, Jirasek i wsp. [25] . . . . . 67
4.1	Przykład 1 - Tarcza betonowa, wymiary, obciążenie i dyskretyzacja. . . 76

4.2	Przykład 1 - Obraz ubytku koncentracji jonów wapnia po upływie pięciu lat [ $kg/m^3$ ]. . . . .	77
4.3	Przykład 1 - Obraz koncentracji jonów chloru po upływie pięciu lat [ $kg/m^3$ ]. . . . .	77
4.4	Przykład 1 - Rozkład ciśnienia płynu wypełniającego pory po upływie pięciu lat [ $N/m^2$ ]. . . . .	78
4.5	Przykład 1 - Obraz ubytku koncentracji jonów wapnia po upływie pięciu lat przy występującej konwekcji [ $kg/m^3$ ]. . . . .	79
4.6	Przykład 1 - Obraz koncentracji jonów chloru po upływie pięciu lat przy występującej konwekcji [ $kg/m^3$ ]. . . . .	79
4.7	Przykład 1 - Ugięcia punktu $A$ - porównanie wariantów z występowaniem (kolor granatowy) i bez występowania (kolor fioletowy) konwekcji.	80
4.8	Przykład 2 - Wycinek płyty. . . . .	81
4.9	Przykład 2 - Zależność obciążenie/ugięcie $w$ punktu $A$ . . . . .	82
4.10	Przykład 2 - Rozkład skalaru zniszczenia mechanicznego $\omega^+$ przy utwierdzonej krawędzi, dla poziomów obciążenia $P1, P2, P3, P4, P5, P6$ .	83
4.11	Przykład 2 - Rozkład skalaru zniszczenia mechanicznego $\omega^+$ (kolor granatowy) aproksymowany krzywą Gauss'a (kolor fioletowy), dla obciążenia $P1$ . . . . .	83
4.12	Przykład 2 - Przekrój poprzeczny zdyskretyzowany czworokątnymi elementami skończonymi. . . . .	84
4.13	Przykład 2 - Obraz koncentracji jonów chloru w płynie po upływie 50-ciu lat [ $kg/m^3$ ]. . . . .	86
4.14	Przykład 2 - Obraz ubytku koncentracji jonów wapnia w płynie po upływie 50-ciu lat [ $kg/m^3$ ]. . . . .	86
4.15	Przykład 2 - Koncentracja jonów chloru w płynie wypełniającym pory w punktach $A, B, C$ . . . . .	87

4.16	Przykład 2 - Koncentracja jonów wapnia w płynie wypełniającym pory w punktach <i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> . . . . .	87
4.17	Przykład 2 - Warunki inicjacji korozji w punktach <i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> . . . . .	88
4.18	Przykład 2 - Porównanie warunków korozji w punkcie <i>A</i> uszkodzonej (kolor brązowy) i nieuszkodzonej mechanicznie (kolor szary) konstrukcji. . . . .	89
4.19	Przykład 2 - Porównanie warunków inicjacji korozji w punkcie <i>A</i> wyznaczone przy użyciu proponowanego modelu (kolor granatowy) oraz przy użyciu modelu, w którym wymywanie jonów wapnia, powiększająca się porowatość i konwekcja nie są uwzględnione (kolor szary). . . . .	89
4.20	Przykład 3 - Wycinek płyty . . . . .	91
4.21	Przykład 3 - Obraz koncentracji jonów chloru w płynie po upływie 50 lat. . . . .	92
4.22	Przykład 3 - Obraz spadku koncentracji jonów wapnia w płynie po upływie 50 lat. . . . .	92
4.23	Przykład 3 - Przemieszczenia punktu <i>A</i> w czasie. . . . .	93
4.24	Przykład 3 - Koncentracja jonów chloru (kolor fioletowy) i wapnia (kolor granatowy) w płynie wypełniającym pory, na głębokości 6,8 cm, przy utwierdzeniu. . . . .	93
4.25	Przykład 3 - Warunki inicjacji korozji zbrojenia na głębokości 6,8 cm, przy utwierdzeniu. . . . .	94
4.26	Przykład 4 - Przemieszczenia punktu <i>A</i> w czasie - porównanie modeli pełnego (kolor granatowy) i uproszczonego (kolor fioletowy). . . . .	95
4.27	Przykład 4 - Różnice przemieszczeń punktu <i>A</i> wyznaczonych przy użyciu modeli pełnego (kolor granatowy) i uproszczonego (kolor fioletowy). . . . .	96
4.28	Przykład 4 - Koncentracja jonów wapnia w płynie wypełniającym pory na głębokości 6,8 cm - porównanie modeli pełnego (kolor granatowy) i uproszczonego (kolor fioletowy). . . . .	96



4.29	Przykład 4 - Koncentracja jonów chloru w płynie wypełniającym pory na głębokości 6,8 cm - porównanie modeli pełnego (kolor granatowy) i uproszczonego (kolor fioletowy). . . . .	97
4.30	Przykład 4 - Warunki inicjacji korozji zbrojenia - porównanie modeli pełnego (kolor granatowy) i uproszczonego (kolor fioletowy). . . . .	97
4.31	Przykład 4 - Różnice w wynikach modeli pełnego i uproszczonego, kolejno: w ubytku koncentracji jonów wapnia, w koncentracji jonów chloru i w stosunku $[Cl^-]/[OH^-]$ czyli warunku korozji (punkt A). . .	98

# Spis tabel

		<b>9</b>
1	Spis oznaczeń - symbole łacińskie . . . . .	10
2	Spis oznaczeń - symbole łacińskie - c.d. . . . .	11
3	Spis oznaczeń - symbole greckie i inne. . . . .	12
4	Spis oznaczeń - symbole greckie i inne - c.d. . . . .	13
2.1	Zakresy wartości progowych inicjacji korozji. . . . .	25
4.1	Parametry betonu wykorzystane w obliczonych przykładach. . . . .	74
4.2	Parametry stali zbrojeniowej wykorzystane w obliczonych przykładach. . . . .	75

## Spis ważniejszych oznaczeń

Poniżej zestawiono ważniejsze oznaczenia stosowane w pracy.

OZNACZENIE	ZNACZENIE	JEDNOSTKI
$\mathbf{a}$	wektor parametrów węzłowych	[ - ]
$C_{CaKruszywa}$	koncentracja jonów wapnia w kruszywie	[ $kg/m^3$ ]
$C_{Ca}^b$	koncentracja jonów wapnia w szkielecie	[ $kg/m^3$ ]
$C_{Ca}^f$	koncentracja jonów wapnia w płynie	[ $kg/m^3$ ]
$C_{Ca}^t$	całkowita koncentracja jonów wapnia	[ $kg/m^3$ ]
$C_{Ca}^{f*}$	warunek brzegowy w postaci koncentracji jonów wapnia w płynie	[ $kg/m^3$ ]
$C_{Ca0}^b$	początkowa koncentracja jonów wapnia w szkielecie	[ $kg/m^3$ ]
$C_{Ca0}^b$	początkowa koncentracja jonów wapnia w szkielecie	[ $kmol/m^3$ ]
$C_{CaP}^f$	stała materiałowa w modelu rozpuszczania szkieletu	[ $mol/m^3$ ]
$C_{CaSH}^f$	stała materiałowa w modelu rozpuszczania szkieletu	[ $mol/m^3$ ]
$C_{CaH}^b$	stała materiałowa w modelu rozpuszczania szkieletu	[ $kmol/m^3$ ]
$C_{Ca}^b$	koncentracja chloru wapnia w szkielecie	[ $kg/m^3$ ]
$C_{Ca0}^f$	początkowa koncentracja jonów chloru w płynie	[ $kg/m^3$ ]
$C_{Ca}^t$	całkowita koncentracja jonów chloru w	[ $kg/m^3$ ]
$C_{Cl}^{f*}$	warunek brzegowy w postaci koncentracji jonów chloru w płynie	[ $kg/m^3$ ]
$Ca^{++}$	jony wapnia	[ - ]
$Cl^-$	jony chloru	[ - ]
$D_{c,ref}$	dyfuzyjność wyznaczona w standardowych warunkach	[ $m^2/s$ ]
$D$	dyfuzyjność aktualna	[ $m^2/s$ ]
$D_{c,ref}$	dyfuzyjność wyznaczona w standardowych warunkach	[ $m^2/s$ ]
$D_0$	dyfuzyjność początkowa	[ $m^2/s$ ]
$D_{Ca0}$	dyfuzyjność początkowa w transporcie jonów wapnia	[ $m^2/s$ ]

Tabela 1: Spis oznaczeń - symbole łącińskie

OZNACZENIE	ZNACZENIE	JEDNOSTKI
$D_{Cl0}$	dyfuzyjność początkowa w transporcie jonów chloru	$[m^2/s]$
$D_p$	przepuszczalność materiału	$[s]$
$D_{p0}$	przepuszczalność początkowa	$[s]$
$\mathbf{D}$	macierz sztywności materiału	$[N/m^2]$
$E$	moduł sprężystości Younga	$[N/m^2]$
$G_f$	energia pęknięcia	$[N/m]$
$G_{f0}^{\pm}$	energia pęknięcia niezniszczonego chemicznie betonu	
$h(\cdot)$	funkcja Heavisida	$[-]$
$h$	grubość materiału	$[m]$
$h$	wilgotność	$[\%]$
$\mathbf{K}_T$	macierz styczna	
$\mathbf{L}$	macierz operatorów różniczkowych	$[-]$
$\dot{m}$	ubytek cieczy na skutek parowania na jednostkę czasu i objętości	$[kg/(sm^3)]$
$p_l$	ciśnienie płynu	$[N/m^2]$
$p_l^*$	warunek brzegowy w postaci ciśnienia płynu	$[N/m^2]$
$q_{pl}^*$	warunek brzegowy w postaci strumienia płynu	$[kg/(m^2s)]$
$q_{Ca}$	strumień jonów wapnia	$[kg/(m^2s)]$
$q_{Ca}^*$	warunek brzegowy w postaci strumienia jonów wapnia	$[kg/(m^2s)]$
$q_{Cl}$	strumień jonów chloru	$[kg/m^2s]$
$q_{Cl}^*$	warunek brzegowy w postaci strumienia jonów chloru	$[kg/(m^2s)]$
$R$	stała gazowa	$[kJ/mol^{\circ}K]$
$R$	stopień zaawansowania migracji jonów chloru	$[-]$
$S$	saturation	$[-]$
$T$	temperatura	$[^{\circ}K]$
$t$	czas	$[s]$
$\mathbf{t}^*$	wektor intensywności sił powierzchniowych, na powierzchni $\Gamma_{\sigma}$ o wektorze normalnym $\mathbf{n}$	$[N/m^2]$
$U$	energia aktywacji wiązania jonów chloru	$[kJ/mol]$
$\mathbf{u}$	$=[u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ wektor przemieszczeń	$[m \ m \ m]$
$\mathbf{u}^*$	przemieszczenia na powierzchni $\Gamma_u$	$[m]$
$V$	objętość materiału	$[m^3]$
$v_c$	objętość zajmowana przez ciecz	$[m^3]$
$v_g$	objętość zajmowana przez gaz	$[m^3]$
$\mathbf{v}$	uśredniona prędkość cieczy w betonie	$[m/s]$
$\mathbf{x}$	wektor współrzędnych punktu	$[m \ m \ m]$

Tabela 2: Spis oznaczeń - symbole łańciskowe - c.d.

OZNACZENIE	ZNACZENIE	JEDNOSTKI
$\Delta$	przyrost	
$\nabla$	gradient	[1/m]
$\alpha$	kąt pomiędzy osią $x_1$ układu współrzędnych i kierunkiem odkształceń głównych $\varepsilon_1$	[rad]
$\alpha_{OH}$	stała materiałowa w modelu sorbcji jonów chloru	[ - ]
$\alpha_{Ca}$	stała materiałowa w modelu rozpuszczania szkieletu	[ - ]
$\alpha_{Cl}$	stała materiałowa w modelu sorbcji jonów chloru	[ - ]
$\beta_{Cl}$	stała materiałowa w modelu sorbcji jonów chloru	[ - ]
$\Gamma$	powierzchnia ograniczająca objętość materiału	[ - ]
$\Gamma_{p_l}$	powierzchnia ograniczająca objętość materiału $V$ z warunkami brzegowymi $p_l^*$ ,	[ - ]
$\Gamma_{q_{p_l}}$	powierzchnia ograniczająca objętość materiału $V$ z warunkami brzegowymi $q_{p_l}^*$	[ - ]
$\Gamma_{C_{Ca}}$	powierzchnia ograniczająca objętość materiału $V$ z warunkami brzegowymi $C_{Ca}^{f*}$ ,	[ - ]
$\Gamma_{q_{Ca}}$	powierzchnia ograniczająca objętość materiału $V$ z warunkami brzegowymi $q_{Ca}^*$	[ - ]
$\Gamma_{C_{Cl}}$	powierzchnia ograniczająca objętość materiału $V$ z warunkami brzegowymi $C_{Cl}^{f*}$ ,	[ - ]
$\Gamma_{q_{Cl}}$	powierzchnia ograniczająca objętość materiału $V$ z warunkami brzegowymi $q_{Cl}^*$	[ - ]
$\delta$	wariacja	[ - ]
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$= \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{23} \ \varepsilon_{31}\}^T$ - wektor odkształcenia	[ - ]
$\eta^\pm$	odkształcenie ekwiwalentne	[ - ]
$\kappa^\pm$	próg zniszczenia to jest największe odkształcenie ekwiwalentne $\eta^\pm$ osiągnięte wcześniej przez dany punkt materialny	[ - ]
$\kappa_0^+$	$= f^t/E$ - graniczne odkształcenia sprężyste dla rozciągania	[ - ]
$\kappa_0^-$	$= f^c/E$ - graniczne odkształcenia sprężyste dla ściskania	[ - ]

Tabela 3: Spis oznaczeń - symbole greckie i inne.

OZNACZENIE	ZNACZENIE	JEDNOSTKI
$\kappa_{00}^{\pm}$	wartość granicznych odkształceń sprężystych niezniszczonego chemicznie betonu	[ - ]
$\rho_c$	gęstość cieczy	[ $kg/m^3$ ]
$\rho_p$	gęstość płynu	[ $kg/m^3$ ]
$\nu$	współczynnik Poissona	[ - ]
$\boldsymbol{\sigma}$	$= [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31}]^T$ - wektor naprężenia	[ $N/m^2$ ]
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	wektor naprężeń efektywnych	[ $N/m^2$ ]
$\phi$	porowatość aktualna	[ - ]
$\phi_0$	porowatość początkowa	[ - ]
$\phi_{Ca}$	składnik porowatości związany z wymywaniem jonów wapnia	[ - ]
$\phi_m$	składnik porowatości związany ze skalarami zniszczenia mechanicznego i odkształceniem	[ - ]
$\phi_{Cl}^{ref}$	proporcją wytrzymałości materiału w pełni chemicznie zniszczonego do niezniszczonego	[ - ]
$\omega_c$	skalarny parametr zniszczenia chemicznego	[ - ]
$\omega_{Ca}$	skalarny parametr zniszczenia chemicznego związany z wypłukiwaniem jonów wapnia	[ - ]
$\omega_{Cl}$	skalarny parametr zniszczenia chemicznego związany z migracją jonów chloru	[ - ]
$\omega^+$	skalarny parametr zniszczenia mechanicznego związany rozciąganiem	[ - ]
$\omega^-$	skalarny parametr zniszczenia mechanicznego związany ze ścisaniem	[ - ]

Tabela 4: Spis oznaczeń - symbole greckie i inne - c.d.

# Rozdział 1

## WSTĘP

### 1.1 Cel i zakres pracy

Od chwili wynalezienia cementu portlandzkiego w XIX wieku, beton jest coraz popularniejszym materiałem budowlanym. Wprowadzenie zbrojenia, znacznie rozszerzyło zakres jego zastosowania. Powszechność stosowania konstrukcji żelbetowych wynika z ich wysokiej wytrzymałości i trwałości oraz stosunkowo niskich kosztów wytwarzania i konserwacji. Konstrukcja żelbetowa, mimo że trwała, po pewnym czasie też ulega zniszczeniu, nawet przy obciążeniu mechanicznym nie przekraczającym jej początkowej nośności. Powodem tego są dodatkowe obciążenia natury chemicznej, fizycznej i termodynamicznej. Często pojawiają się pytania: czy istniejąca konstrukcja nadaje się do eksploatacji, remontu czy konieczne jest jej wyburzenie oraz jak ekonomicznie projektować konstrukcje, możliwie najbardziej odporne na agresywne środowisko? W wielu takich przypadkach konieczne są badania laboratoryjne materiału, a nawet części konstrukcji betonowych. Odpowiedzi na tego typu pytania mogą być jednakże otrzymane również na drodze rozważań teoretycznych, poprzez zbudowanie modeli matematycznych zjawisk zachodzących w betonie oraz analizę uzyskanych na tej drodze rozwiązań.

Beton jest materiałem porowatym składającym się ze sprężystej matrycy oraz systemu wielu rodzajów porów wypełnionych płynem, to jest cieczą i gazem. Płyn wypełniający pory przemieszcza się w nich pod wpływem gradientu ciśnienia, sił masowych, kapilarnych i innych. W cieczy zachodzą procesy transportu rozpuszczo-

nych w niej jonów. Ponadto, między płynem i matrycą zachodzi nieustanny proces wymiany jonów, na który składają się rozpuszczanie matrycy przez płyn i sorbcja składników płynu przez matrycę. Dla uproszczenia analizy zachowania się takiego materiału, dokonuje się tak zwanej homogenizacji, polegającej na traktowaniu każdego punktu materiału równocześnie jako materiału na przykład sprężystego, mogącego przenosić obciążenia mechaniczne i płynu, w którym możliwa jest dyfuzja i inne zjawiska charakterystyczne dla cieczy i gazów, Coussy [10].

Już na etapie powstawania konstrukcji żelbetowej mogą powstawać wady znacznie zmniejszające jej nośność czy żywotność. Najczęściej wynikają one z niewłaściwych materiałów lub technologii. Zwłaszcza dla masywnych konstrukcji żelbetowych w trakcie ich wytwarzania możliwe jest pojawianie się pęknięć związanych z odkształceniami termicznymi, spowodowanymi ciepłem wytwarzanym w procesie hydratacji, Gawin i wsp. [18] oraz odkształceniami skurczowymi, związanymi z nierównomiernym wysychaniem (dojrzwaniem) betonu, Meschke i wsp. [40]. Obciążenia występujące we wszystkich konstrukcjach to obciążenia mechaniczne: statyczne, dynamiczne i geometryczne, spowodowane siłami zewnętrznymi i objętościowymi i to one są najczęściej bezpośrednią przyczyną zniszczenia. Wykorzystując w obliczeniach metodę elementów skończonych (MES), zasadniczym zagadnieniem jest uniezależnienie wyników obliczeń od gęstości i orientacji siatki dyskretyzującej konstrukcję. Jest to szczególnie istotne przy obciążeniach konstrukcji betonowych powyżej zakresu odkształceń sprężystych, kiedy występuje zjawisko lokalizacji koncentracji odkształceń. Jednym z rozwiązań są modele nielocalne - uśredniające zmienne stanu, Pijaudier-Cabot i wsp. [45], innym rozwiązaniem są modele wprowadzające do równań opisujących zniszczenie materiału gradienty zmiennych stanu - modele gradientowe, Pamin [43]. Coraz popularniejszym rozwiązaniem jest stosowanie założenia nieciągłości pola odkształceń lub przemieszczeń, wewnątrz lub na brzegach elementów, Melnik i wsp. [38], Belytschko i wsp. [7]. Często spotykanym, praktycznym sposobem zapobiegawczym jest uzależnienie parametrów zniszczenia od energii pęknięcia i wymiaru charakterystycznego elementu, Saetta i wsp. [54], Rodriguez-Ferran i wsp. [49]. Zaletą takiego rozwiązania jest jego prostota, nie zapewnia on jednak w pełni właściwego opisu lokalizacji odkształcenia.



Obciążenie fizyczne, powodujące często zniszczenie konstrukcji związane jest z przemianami fazowymi płynu wypełniającego pory. Cykliczne zamrażanie-rozmrażanie płynu związane jest ze zmianą jego objętości i powstawaniem znacznych ciśnień powodujących łuszczenie się czy wręcz pęknięcia konstrukcji. Problematyka tego rodzaju wraz z metodami zapobiegania tego typu zniszczeniom, poruszana jest między innymi w pracy Bażanta i wsp. [6]. Transport materii, w tym płynu szeroko opisuje monografia Lewisa i Schreflera [30]. Problematyka ta jest rozwijana w Polsce w pracach Kubik i wsp. [27], Kubik [28].

Zagadnienia związane z zamrażaniem-rozmrażaniem płynu dotyczą głównie konstrukcji w klimacie gdzie temperatura wielokrotnie przekracza temperaturę zamrażania, natomiast praktycznie wszystkie konstrukcje narażone są na obciążenia chemiczne. Agresywne środowisko działa dwójako. Powoduje zmiany własności otuliny, tu głównym czynnikiem jest miękka woda (np. deszczowa) powodująca wypłukiwanie jonów wapnia, przez co zwiększa się porowatość betonu i następuje utrata jego własności pasywacyjnych, Meschke i wsp. [39]. Autor nie znalazł w literaturze zagadnień związanych ze zmianą własności mechanicznych otuliny pod wpływem dwutlenku węgla czy kwasów (tlenków siarki czy azotu). Oddziaływanie chlorków na własności mechaniczne otuliny jest dyskusyjne, Neville [41], Saetta i wsp. [54]. Drugim, groźniejszym efektem działania agresywnego środowiska jest korozja zbrojenia.

Pręty zbrojenia zanurzone w masie betonowej, początkowo zabezpieczone są przed korozją warstwą pasywowanej stali ( $Fe_2O_3$ ), która powstaje na powierzchni prętów w zasadowym-pasywacyjnym środowisku masy betonowej. Utrata własności pasywacyjnych może być powodowana wieloma przyczynami. Najczęstsze z nich to sorbcja dwutlenku węgla z atmosfery, miękka woda wymywająca jony wapnia oraz agresywne sole i kwasy, nie tylko obniżające zasadowość, ale także reagujące z prętami zbrojenia. Okres stopniowej utraty własności ochronnych betonu, gdy korozja zbrojenia jeszcze nie występuje, to inicjacja korozji. Okres inicjacji kończy się gdy w rejonie zbrojenia osiągnięte zostaną warunki umożliwiające korozję stali zbrojenia. Wtedy rozpoczyna się okres propagacji, czyli korozji stali zbrojeniowej, gromadzenie się produktów korozji, związany z tym wzrost naprężeń i wreszcie inicjacja i

propagacja rys w betonie.

Działanie dwutlenku węgla (karbonatyzacja) dominuje w procesach utraty własności pasywacyjnych w konstrukcjach o małej wilgotności, rzędu 50-70%, Neville [41]. Gdy pory w dużym stopniu wypełnione są cieczą, transport dwutlenku węgla jest utrudniony, natomiast zwiększa się dyfuzyjność betonu w transporcie jonów soli i kwasów.

Ze względu na powszechność stosowania chlorków jako środka odladzającego i ich występowaniu w wodzie morskiej, są one jednym z najgroźniejszych czynników agresywnego środowiska. Zagadnieniom związanym z transportem i działaniem chlorków poświęcona jest praca doktorska Hansena [22]. Między innymi omawiane są tam zależności dyfuzyjności betonu od temperatury, wilgotności i stopnia hydratacji betonu.

Po osiągnięciu w rejonie zbrojenia warunków korozji, na powierzchni stali zbrojeniowej zniszczeniu ulega warstwa pasywowanej stali i rozpoczyna się proces utleniania stali. W procesie inicjacji decydujące znaczenie miały czynniki obniżające własności pasywacyjne. Po przekroczeniu progu korozyjności, istotnego znaczenia nabierają warunki działania ogniw korozji, to jest transportu tlenu i ładunku elektrycznego, Zybura [63]. Opis transportu płynu, jonów chloru, tlenu i ładunku elektrycznego został omówiony w pracy doktorskiej Martin-Perezy [35], natomiast numeryczne modelowanie elektrochemicznej korozji zbrojenia proponowane jest w pracy Balabanića i wsp. [4]. Wytwarzane w procesie korozji tlenki żelaza mają objętość kilkakrotnie większą od objętości utlenionej stali. W rezultacie na powierzchni zbrojenie-beton powstają i narastają naprężenia prowadzące do powstawania i propagacji rys. Metody numerycznego opisu procesu propagacji rys są przedstawione w pracach Jaśkowca [24] i Wellsa i wsp.[62]. Wartości naprężeń na powierzchni zbrojenie-beton są zależne nie tylko od stopnia zaawansowania korozji lecz także od geometrii (średnicy) zbrojenia. Zmniejszanie się początkowej powierzchni przekroju zbrojenia i koncentracja naprężeń na wżerach wynikające z korozji to oczywiście dodatkowe zagrożenie dla konstrukcji.

Proponowane w literaturze modele obliczeniowe konstrukcji żelbetowych najczęściej opisują bądź odpowiedź konstrukcji na obciążenie mechaniczne z uwzględnieniem zakresu pozasprężystego, bądź konstrukcje pod kątem rozwoju procesów korozji. Nie spotkano w literaturze wystarczająco pełnego modelu opisującego interakcję procesów mechanicznych z wieloskładnikowym obciążeniem chemicznym.

Podstawowym celem pracy jest budowa modelu matematycznego umożliwiającego przewidywanie zachowania się konstrukcji żelbetowych obciążonych mechanicznie w długim okresie eksploatacji, w środowisku chemicznie agresywnym. Dalszymi celami pracy są: opracowanie modelu numerycznego (obliczeniowego) wykorzystując metodę elementów skończonych oraz wykonanie przykładowych obliczeń statycznych konstrukcji, za pomocą systemu FEAP (Finite Elements Analysis Program [59]) z dołączonymi własnymi procedurami, stanowiącymi realizację komputerową modelu matematycznego.

Zdaniem autora, oprócz efektów naukowych, użytecznym rezultatem pracy jest możliwość wykorzystania rozbudowanego systemu FEAP do prac eksperckich dotyczących istniejących konstrukcji żelbetowych.

W dalszym ciągu zostaną wymienione zmienne, najczęściej występujące w literaturze, istotne dla zjawisk występujących w żelbecie:

1. trzy-składnikowe pole przemieszczeń,
2. ciśnienie płynu w porach,
3. temperatura,
4. koncentracja jonów chloru,
5. koncentracja jonów wapnia,
6. koncentracja dwutlenku węgla,
7. koncentracja tlenków siarki,

8. koncentracja tlenków azotu,
9. koncentracja tlenu,
10. koncentracja ładunku elektrycznego.

Wymienione powyżej parametry opisujące stan konstrukcji, stają się w analizie numerycznej metodą elementów skończonych, stopniami swobody każdego z węzłów siatki dyskretyzacyjnej. Ilość wymienionych zmiennych wynosi dwanaście. Dla struktury dyskretyzowanej siatką o 100-tys. węzłów, powstaje zadanie rozwiązania układu 1,2 miliona równań w każdym kroku iteracyjnym. Pesymistyczna złożoność obliczeniowa tego typu zadania jest proporcjonalna do sześciangu ilości równań. Ponadto niektóre ze zjawisk, jak na przykład przemiany fazowe płynu w porach, czy nawilżanie-suszenie odbywają się w ciągu minut. Zastosowanie kroku czasowego 1 godz. przy opisie zachowania się konstrukcji w przeciągu 150 lat to  $24 \cdot 365 \cdot 150 = 1314000$  kroków czasowych. W rezultacie powstaje zadanie obliczeniowe dużego rozmiaru.

W celu zmniejszenia rozmiaru zadania, przyjęte zostały, opisane w następnym punkcie założenia.

## 1.2 Podstawowe założenia

W pracy przyjęto, że zhomogenizowany beton jest traktowany jako materiał jednorodny i odpowiedź konstrukcji na działanie czynników zewnętrznych może być analizowana metodami mechaniki ośrodka ciągłego.

Przyjęto, że beton jest dojrzały, o wysokim i stałym stopniu nasycenia (ok. 97%), stałej temperaturze i ustalonymi już procesami reologicznymi. Założenie wysokiego stopnia nasycenia betonu pozwala na zaniechanie opisu procesu karbonatyzacji, Neville [41], i procesów nawilżania-suszenia. Założona stała temperatura pozwala na zaniechanie uwzględnienia procesów zamrażania-rozmrażania, mających istotne znaczenie dla wielu konstrukcji, ale w analizie numerycznej wymagające krótkich kroków czasowych. Model matematyczny budowano ograniczając się do okresu "inicjacji korozji", to jest do czasu przed wystąpieniem korozji stali zbrojenia, co z

kolei umożliwiło zrezygnowanie z opisu transportu tlenu, ładunku elektrycznego i naprężeń związanych z gromadzeniem się produktów korozji.

W rozważaniach założono, że konstrukcja spełnia warunki płaskiego stanu odkształcenia i doznaje nieskończenie małych odkształceń. Również przemieszczenia i gradienty przemieszczeń są małe. Czynnikiem zewnętrznymi są obciążenia trojakiemu rodzaju. *Obciążeniem mechanicznym* są siły zewnętrzne przyłożone do konstrukcji w sposób statyczny i pominięto siły masowe. *Obciążeniem fizycznym* jest ciśnienie płynu w porach. *Chemicznym obciążeniem* jest roztwór o zadanej koncentracji jonów chloru, co powoduje ich transport do wewnątrz konstrukcji oraz o zerowej koncentracji jonów wapnia, co powoduje ich wymywanie na zewnątrz.

Następstwem założeń jest przyjęcie następujących zmiennych stanu:

1. dwu-składnikowe pole przemieszczeń,
2. ciśnienie płynu w porach,
3. koncentracja jonów wapnia w płynie,
4. koncentracja jonów chloru w płynie.

Model fizyczny betonu opisano wykorzystując, wspomnianą w punkcie 1.1, uproszczoną, nielokalną teorię mechaniki zniszczenia. I w końcu, model numeryczny sformułowano wykorzystując półdyskretny model skończenie elementowy, dokonując dyskretyzacji MES względem zmiennych przestrzennych, a następnie rozwiązując metodą różnic skończonych, odpowiednie równania różniczkowe zwyczajne, ze względu na zmienną czasową.

### 1.3 Układ pracy

Pracę podzielono na pięć rozdziałów i dodatek. Numeracja wzorów, rysunków i tablic jest niezależna dla każdego rozdziału i składa się z numeru rozdziału i numeru wzoru (rysunku, tablicy). Oznaczenia wektorów i macierzy zostały zaakcentowane czcionką pogrubioną.

W rozdziale 2 omówiono zagadnienia związane ze strukturą betonu i jego degradacją, równania opisujące transport materii w konstrukcji i równania równowagi związane z mechaniką oraz formuły opisujące porowatość, dyfuzyjność, parametry zniszczenia oraz propozycje bardziej rozbudowanego opisu degradacji chemicznej materiału, parametru porowatości mechanicznej i oddziaływania ciśnienia płynu w porach na składowe wektora naprężeń. W efekcie, sformułowany został model matematyczny problemu w formie układu równań różniczkowo-algebraicznych z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi.

Rozdział 3 poświęcony jest opisowi dyskretyzacji i sformułowaniu równań przyrostowych MES. Tu także znajduje się propozycja modelu uproszczonego MES, w którym pominięte są niektóre wzajemne oddziaływania zmiennych.

Cztery przykładowe analizy konstrukcji betonowych opisane zostały w rozdziale 4.

Zakończenie, umieszczone w rozdziale 5, obejmuje wnioski, oryginalne elementy pracy i kierunki rozwoju tematu.

W dodatku zamieszczono wyprowadzenie wzorów na macierze i wektory, występujące w podstawowym układzie równań przyrostowych MES.

## Rozdział 2

# SFORMUŁOWANIE MODELU MATEMATYCZNEGO

### 2.1 Elektro – chemiczna korozja zbrojenia

#### 2.1.1 Struktura betonu

Powszechnie beton traktowany jest jako struktura na którą składają się szkielet oraz system połączonych porów wypełnionych cieczą i gazem. Na szkielet składają się matryca i pory zamknięte. Stosunek objętości porów do objętości materiału to porowatość, rzutuje ona na własności mechaniczne, zmniejszając ”przekrój czynny” przenoszący obciążenia mechaniczne. Dodatkowo, pory powodują koncentrację naprężeń co powoduje, że wytrzymałość rzeczywista betonu jest znacznie niższa od wytrzymałości teoretycznej, wyznaczonej na podstawie określenia sił adhezji między cząsteczkami, Neville [41]. Porowatość wpływa na procesy transportu zachodzące w betonie, bo praktycznie transport zachodzi tylko w porach. W porach wypełnionych cieczą, ułatwiony jest transport ciepła, elektronów i rozpuszczonych w cieczy jonów. Jeśli w porach dominuje gaz, to z kolei ułatwiony jest transport dwutlenku węgla i tlenu. Decydujące znaczenie w procesach transportu odgrywa system porów połączonych, tak więc znaczenie ma porowatość nie tylko w sensie ilościowym, ale także jej rodzaj. Pory mogą być klasyfikowane ze względu na ich wymiary, połączenie ze środowiskiem zewnętrznym oraz pochodzenie. Ta ostatnia klasyfikacja, prezentowana w pracy habilitacyjnej Fiertak [15], rozróżnia:

1. Porowatość ziarnowa - spowodowana jest porowatością użytego kruszywa,
2. Porowatość międzyziarnowa - stanowią ją pustki między ziarnami kruszywa i spoiwem, wynika najczęściej z niewłaściwego zagęszczenia, kształtu i wielkości kruszywa,
3. Porowatość zaczynu (spoiwa) - wynika ona z budowy żelu C-S-H (związki wapnia, krzemu i wody) przybierającego strukturę włókien (fiszbin) oraz ze stosunku wodno-cementowego masy zarobowej.

Ze względu na trwałość betonu decydujące znaczenie ma rozróżnienie porowatości ze względu na połączenie ze środowiskiem zewnętrznym. Tu rozróżniana jest:

1. Porowatość całkowita - będąca sumą wszystkich porów oraz
2. Porowatość efektywna - będąca sumą porów połączonych ze środowiskiem zewnętrznym.

Ponieważ w transporcie materii decydującą rolę odgrywa porowatość efektywna, rzutuje ona w dużej mierze na trwałość konstrukcji. W dalszym ciągu pracy, pod pojęciem porowatości będziemy rozumieć porowatość efektywną.

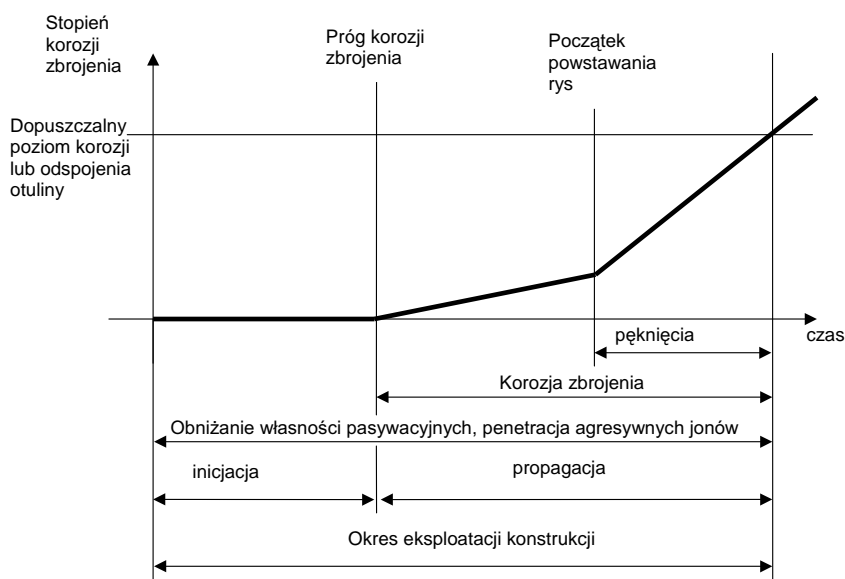
### **2.1.2 Etapy korozji**

Powszechnie stosowany jest podział procesu degradacji żelbetu w agresywnym środowisku na dwa etapy. Pierwszy z nich - "inicjacja" to proces, w którym obniżeniu ulegają pasywacyjne własności betonu, chroniące go pierwotnie przed korozją i ma miejsce penetracja jonów sprzyjających korozji. Za koniec etapu inicjacji uważa się osiągnięcie tak zwanego progu korozji, czyli stanu, w którym możliwe staje się uszkodzenie warstwy tlenku żelaza ( $Fe_2O_3$ ), chroniącej wewnętrzne warstwy zbrojenia przed utlenieniem.

Etap drugi - "propagacja", trwa do momentu, gdy stopień korozji wyklucza konstrukcję z dalszej eksploatacji. Okres propagacji dzielony jest na okres gromadzenia się na powierzchni zbrojenia produktów korozji i narastania związanych z tym naprężeń mechanicznych i okres powstawania i propagacji rys. Korozja zbrojenia wymaga



stałego dostępu tlenu oraz obecności wody, która bierze udział w chemicznej reakcji a także umożliwia tworzenie się tak zwanych ogniw korozji. Etapy degradacji ilustruje rys. 2.1.



Rys. 2.1: Etapy degradacji konstrukcji żelbetowej.

### 2.1.3 Próg korozji

W przypadku jeśli w środowisku agresywnym występują jony chloru, czynnikami determinującymi osiągnięcie progu korozji są kwasowość płynu w porach (pH) i koncentracja jonów chloru. W niektórych pozycjach literatury, za decydującą wartość uważa się proporcję ilości jonów chloru do ilości jonów wodorotlenowych  $[Cl^-]/[OH^-]$ . Prezentowane w literaturze poglądy są bardzo zróżnicowane, zarówno gdy chodzi o wartości pH, koncentrację jonów chloru, proporcję  $[Cl^-]/[OH^-]$ , jak i znaczenie jonów chloru zaabsorbowanych przez matrycę, Perez i wsp. [35]. Tabela 2.1 ilustruje zakresy poszczególnych wartości proponowanych w literaturze.

W pracy Glass i wsp. [20], cytowana jest formuła na zależność  $pH = pH(Cl^-)$

parametr	zakres	
Całkowita koncentracja chlorków w betonie	0,32-2,5	[ % ]
Koncentracja wolnych chlorków w paście cementowej	0,11-1,8	[ mol/l ]
dolny próg pasywacji pH	7,0-9,0	(gdy nieobecne jony chloru)
górnny próg pasywacji pH	13,5-14,0	(gdy nieobecne jony chloru)
$[Cl^-]/[OH^-]$	0,22-1,08	

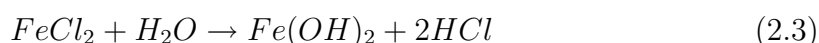
Tabela 2.1: Zakresy wartości progowych inicjacji korozji.

w postaci:

$$pH = n \log(Cl^-) + K \quad (2.1)$$

gdzie  $n$ ,  $K$  są parametrami materiału.

Negatywne znaczenie jonów chloru nie polega jedynie na obniżeniu zasadowości betonu. Jony chloru niszczą ochronną warstwę pasywowanej stali i reagują z warstwami wewnętrznymi, zachowując się jak katalizator stosownie do reakcji:



Końcowym produktem korozji są między innymi, związki  $Fe(OH)_3$ ,  $Fe(OH)_3 \cdot 3H_2O$ , o objętościach odpowiednio cztero i sześć-krotnie większych niż objętościowy ubytek stali, Perez [34].

Nie tylko jony chloru stanowią zagrożenie konstrukcji żelbetowych. Dwutlenek węgla, kwasy, wiele soli to również zagrożenie konstrukcji, Czarnecki [13], lecz zgodnie z przyjętymi założeniami, nie będą one w pracy analizowane.

## 2.2 Mechanizmy transportu materii w betonie

W tym punkcie sformułujemy model matematyczny opisujący transport materii w betonie. Prawo zachowania masy, determinujące transport materii w betonie, w ogólnie

ny sposób opisane jest równaniem, Levis, Schrefler [30]:

$$\frac{dC}{dt} + \text{div}(\mathbf{q}_c) - Z_c = 0 \quad (2.4)$$

gdzie:  $C$  - koncentracja materii,  
 $\mathbf{q}_c$  - strumień materii,  
 $Z_c$  - wydajność źródła materii.

Pod pojęciem źródła materii  $Z_c$  może występować opis wielu rodzajów zjawisk, jak na przykład produkcja jonów w płynie związana z rozpuszczaniem matrycy, ubytek jonów w płynie związany z ich sorbcją przez matrycę czy opis przemian fazowych i reakcji chemicznych.

W wielu konstrukcjach poddanych cyklicznemu nawilżaniu i suszeniu ruch płynu zachodzi głównie w zewnętrznej powierzchni otuliny i tu też ma miejsce konwekcja jonów chloru i wapnia. Wewnętrzne warstwy zachowują prawie stały stopień nasycenia cieczą i tu podstawowym mechanizmem transportu jonów jest dyfuzja, rys. 2.2.

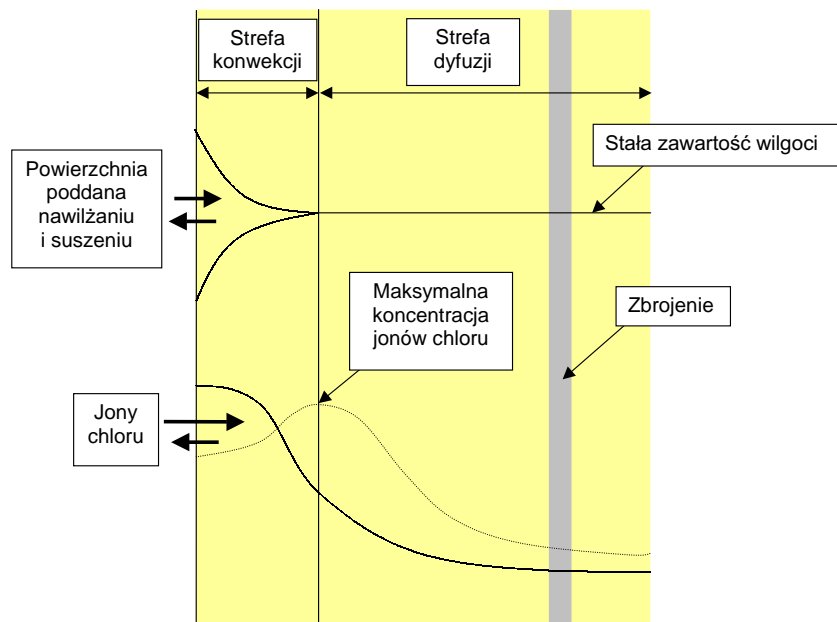
Przy założeniu stałego stopnia nasycenia, zaniedbaniu sił masowych i kapilarnych oraz zakładając kontakt konstrukcji z cieczą o określonym ciśnieniu, mechanizmami powodującymi transport materii w betonie, są dyfuzja i konwekcja.

### 2.2.1 Dyfuzyjność

Dyfuzyjność betonu  $D_c$  w ogólnym przypadku jest zależna od temperatury  $T$ , czasu dojrzewania betonu  $t$ , wilgotności względnej  $h$ , odległości rozpatrywanego punktu materii od powierzchni konstrukcji  $x$  i porowatości (efektywnej)  $\phi$ , co wyraża związek, Martin-Perez i wsp. [35]:

$$D_c = D_{c,ref} \cdot f_1(T) \cdot f_2(t) \cdot f_3(h) \cdot f_4(x) \cdot f_5(\phi) \quad (2.5)$$

gdzie:  $D_{c,ref}$  jest dyfuzyjnością wyznaczoną w standardowych warunkach ( $T = 23^\circ C$ ,  $t = 28 \text{ dni}$ ,  $h = 100\%$ ). Zależności  $f_1(T)$ , ..,  $f_5(\phi)$  są zależne od rodzaju dyfundującej materii. Przy poczynionych w sekcji 1.2 założeniach stałej temperatury, wilgotności, rozpatrując beton dojrzały, w miejsce zależności (2.5) w pracy przyjęto, że



Rys. 2.2: Zmiany wilgotności i koncentracji jonów chloru otuliny betonowej konstrukcji poddanej cyklicznemu nawilżaniu i suszeniu, Martin-Perez [34].

dyfuzyjność jest zależna od zmieniającej się w czasie porowatości:

$$D = D(\phi) = D_0 \frac{\phi}{\phi_0} \quad (2.6)$$

gdzie:  $D$  - dyfuzyjność aktualna,  
 $D_0$  - dyfuzyjność początkowa,  
 $\phi$  - porowatość aktualna,  
 $\phi_0$  - porowatość początkowa.

Porowatość aktualna  $\phi$ , nazywana dalej porowatością, jest zależna od koncentracji jonów, parametrów zniszczenia mechanicznego i wektora odkształcenia, co zostanie dokładniej opisane w kolejnych punktach pracy.

## 2.2.2 Transport płynu

Dla opisu mechanizmu transportu płynu zdefiniowana zostanie porowatość betonu  $\phi$  oraz saturacja betonu  $S$ . Definicja saturacji służy tylko doprecyzowaniu założenia jej stałej wartości. Porowatość  $\phi$ , będąca stosunkiem objętości połączonych porów

do objętości materiału  $\phi$  wyraża się wzorem:

$$\phi = \frac{v_c + v_g}{v} \quad (2.7)$$

gdzie:  $v$  - objętość materiału,  
 $v_c$  - objętość zajmowana przez ciecz,  
 $v_g$  - objętość zajmowana przez gaz.

Saturacją  $S$ , czyli stopniem nasycenia cieczą materiału, określa się proporcją:

$$S = \frac{v_c}{v_c + v_g} \quad (2.8)$$

Prawo zachowania masy cieczy prezentowane między innymi w pracy Schreflera [55] przybiera postać:

$$\frac{d(\phi S \rho_c)}{dt} + \phi S \rho_c \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \dot{m}^1 = 0 \quad (2.9)$$

gdzie:  $\rho_c$  - gęstość cieczy,  
 $\mathbf{v}$  - uśredniona prędkość cieczy w betonie,  
 $\dot{m}$  - wyraża ubytek cieczy na skutek parowania na jednostkę czasu i objętości.

Zakładając stały stopień nasycenia ( $S = 97\%$ ), mieszanina cieczy i gazu wypełniająca pory będzie nazywana płynem. Zakładając ponadto stałą temperaturę, zanedbując siły masowe i lepkości, strumień płynu  $\mathbf{q}_p$  może być wyrażony wzorem:

$$\mathbf{q}_p = -D_p \nabla p \quad (2.10)$$

gdzie:  $\nabla p$  - wektor gradientu ciśnienia płynu,  
 $D_p$  - przepuszczalność materiału (zakładając izotropię materiału,  $D_p$  jest skalarem).

W dalszym ciągu przyjęto, że zmiany przepuszczalności betonu  $D_p$  są związane tylko ze zmianami jego porowatości  $\phi$ :

$$D_p = D_{p0} \frac{\phi}{\phi_0} \quad (2.11)$$

gdzie:  $D_{p0}$  jest przepuszczalnością początkową betonu.

---

<sup>1)</sup>Symbolem  $(\dot{\phantom{o}})$  oznaczają będziemy pochodną po czasie  $\frac{d(\phantom{o})}{dt}$ .

Uśredniona prędkość płynu  $\mathbf{v}$  i jej strumień  $\mathbf{q}_p$  związane są zależnością wektorową:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{q}_p}{\rho_p} \quad (2.12)$$

gdzie:  $\rho_p$  jest gęstością płynu. Prędkość płynu występuje w opisie transportu jonów w materiale wchodząc w skład wyrażenia opisującego konwekcję.

Pomijając zmiany ilości płynu związane ze zmianą porowatości  $\phi$ , model matematyczny transportu płynu przyjęto w postaci równania różniczkowego:

$$\text{div} (-D_p \nabla p_l) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.13)$$

z warunkiem początkowym:

$$p_l(\mathbf{x}, t_0) = p_l(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.14)$$

oraz z warunkami brzegowymi:

podstawowym

$$p_l(\mathbf{x}, t) = p_l^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{p_l} \quad (2.15)$$

i naturalnym

$$\mathbf{q}_{p_l}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = q_{p_l}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{q_{p_l}} \quad (2.16)$$

gdzie:  $V$  - objętość materiału,  
 $p_l^*$  - warunek brzegowy w postaci ciśnienia płynu,  
 $q_{p_l}^*$  - warunek brzegowy w postaci strumienia płynu,  
 $\Gamma_{p_l}$  - powierzchnia ograniczająca objętość materiału  $V$   
z warunkami brzegowymi  $p_l^*$ ,  
 $\Gamma_{q_{p_l}}$  - powierzchnia ograniczająca objętość materiału  $V$   
z warunkami brzegowymi  $q_{p_l}^*$ ,  
oraz  $\Gamma_{p_l} \cap \Gamma_{q_{p_l}} = 0$

### 2.2.3 Transport jonów wapnia

Większość konstrukcji betonowych jest narażona na stały bądź okresowy kontakt z wodą wnikałą do, i wypływającą z, systemu połączonych porów. Sama obecność wody, zwłaszcza miękkiej (jak woda deszczowa), umożliwia emigrację jonów wapnia

( $Ca^{++}$ ) na drodze dyfuzji. Ruch wody w porach powoduje dodatkowy mechanizm, wmywania porów przez konwekcję. Ruch wody może być powodowany gradientem jej ciśnienia, siłami kapilarnymi związanymi z cyklami nawilżania - suszenia. Skutkiem ubytku jonów  $Ca^{++}$ , początkowa porowatość  $\phi_0$  zostaje powiększona o dodatkowy składnik  $\phi_{Ca}$ , Meschke i wsp. [39]:

$$\phi_{Ca} = \frac{M}{\rho_{Ca}} (C_{Ca0}^b - C_{Ca}^b) \quad (2.17)$$

$M/\rho_{Ca}$ , to uśredniona objętość molowa szkieletu,  $C_{Ca0}^b$ ,  $C_{Ca}^b$  to początkowa i aktualna koncentracja jonów  $Ca^{++}$  w szkielecie [ $\text{mol}/\text{m}^3$ ].

Na szkielet składają się kruszywo i łączące je spoiwo. W pracy zakłada się, że rozpuszczeniu ulegają tylko jony  $Ca^{++}$  pochodzące ze spoiwa. Z uwagi na brak danych, w pracy przyjęto, że porowatość związana z rozpuszczaniem szkieletu  $\phi_{Ca}$  zostaje określona jako proporcja ubytku koncentracji jonów  $Ca^{++}$  w szkielecie do sumy koncentracji jonów  $Ca^{++}$  w kruszywie  $C_{CaKruszywa}$  i początkowej koncentracji jonów  $Ca^{++}$  w szkielecie pochodzących ze spoiwa,  $C_{Ca0}^b$ :

$$\phi_{Ca} = \frac{C_{Ca0}^b - C_{Ca}^b}{C_{Ca0}^b + C_{CaKruszywa}} \quad (2.18)$$

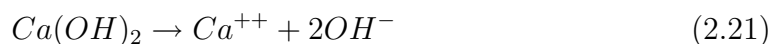
Dodatkowym składnikiem powiększającej się porowatości są mikropęknięcia spowodowane obciążeniem mechanicznym  $\phi_m$ , związane ze skalarem zniszczenia mechanicznego  $\omega_m$ , Kuhl i wsp. [29]:

$$\phi_m = (1 - \phi_0 - \phi_{Ca})\omega_m \quad (2.19)$$

tak więc porowatość materiału  $\phi$  wyraża się sumą:

$$\phi = \phi_0 + \phi_{Ca} + \phi_m \quad (2.20)$$

Proces rozpuszczania obrazuje wzór:



co jest jednak znacznym uproszczeniem zjawiska ze względu na różnorodność związków wapnia występujących w matrycy, o różnej łatwości rozpuszczania, będącej

powodem występowania charakterystycznych "frontów degradacji", Mainguy i wsp. [31].

Na całkowitą koncentrację jonów  $Ca^{++}$  w materiale  $C_{Ca}^t$  składają się koncentracja w kruszywie  $C_{CaKruszywa}$ , w spoiwie  $C_{Ca}^b$  i w płynie  $C_{Ca}^f$ . Zgodnie z założeniami, koncentracja jonów wapnia kruszywa jest niezmienna i traktowana jako parametr materiału. Nie będzie dalej uwzględniana w bilansie jonów wapnia. Gdy koncentracja w szkielecie odnosi się do całej objętości materiału, a  $C_{Ca}^f$  jest koncentracją odniesioną do jednostki objętości płynu wypełniającego pory, zachodzi zależność:

$$C_{Ca}^t = C_{Ca}^b + \phi C_{Ca}^f \quad (2.22)$$

Wyznaczenie funkcyjnej zależności  $C_{Ca}^b = C_{Ca}^b(C_{Ca}^f)$  opisującej proces rozpuszczania szkieletu jest złożone. W modelu zastosowano formułę cytowaną w Kuhl i wsp. [29], Gerard i wsp. [19]:

$$C_{Ca}^b = C_{Ca0}^b - (1 - \alpha_{Ca})C_{CaH}^b \left[ 1 - \frac{1}{10}C_{Ca}^f + \frac{1}{400}(C_{Ca}^f)^2 \right] - \frac{C_{Ca0}^b - C_{CaH}^b}{1 + \left( \frac{C_{Ca}^f}{C_{CaP}^f} \right)^n} - \frac{\alpha_{Ca}C_{CaH}^b}{1 + \left( \frac{C_{Ca}^f}{C_{CaSH}^f} \right)^m} \quad (2.23)$$

gdzie:  $C_{Ca0}^b$  [ $kmol/m^3$ ] - początkowa koncentracja jonów wapnia w szkielecie  
 $\alpha_{Ca}$ ,  $n$ ,  $m$ , - stałe materiałowe  
 $C_{CaP}^f$ ,  $C_{CaSH}^f$ ,  $C_{CaH}^b$  - stałe materiałowe

Przyjętą zależność  $C_{Ca}^b = C_{Ca}^b(C_{Ca}^f)$  (2.23) ilustruje rys. 2.3.

Strumień jonów wapnia  $q_{Ca}$  jest powodowany mechanizmami dyfuzji i konwekcji, co opisuje wzór:

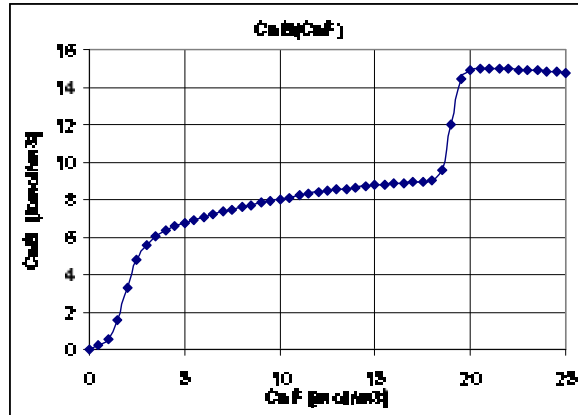
$$q_{Ca} = -D_{Ca}\nabla C_{Ca}^f + vC_{Ca}^f \quad (2.24)$$

gdzie wartość prędkości unoszenia  $v$  wynika z zależności (2.12). Analogicznie jak w opisie transportu płynu przyjęto, że dyfuzyjność betonu jest zależna tylko od porowatości:

$$D_{Ca} = D_{Ca0} \frac{\phi}{\phi_0} \quad (2.25)$$

gdzie:  $D_{Ca0}$  dyfuzyjność początkowa betonu.





Rys. 2.3:  $C_{Ca}^b(C_{Ca}^f)$  - ilustracja formuły (2.23).

### Prawo zachowania masy

Model matematyczny transportu wapnia ma formę równania różniczkowego, analogiczną do równania opisującego transport płynu (2.13), przy uwzględnieniu składnika konwekcji:

$$\dot{C}_{Ca}^t + \text{div}(-D_{Ca} \nabla C_{Ca}^f + \mathbf{v} C_{Ca}^f) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.26)$$

z warunkiem początkowym:

$$C_{Ca}^f(\mathbf{x}, t_0) = C_{Ca}^f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.27)$$

oraz z warunkami brzegowymi:

podstawowym

$$C_{Ca}^f(\mathbf{x}, t) = C_{Ca}^{f*}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{C_{Ca}} \quad (2.28)$$

i naturalnym

$$\mathbf{q}_{Ca}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = q_{Ca}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{q_{Ca}} \quad (2.29)$$

gdzie:  $C_{Ca}^{f*}$  - warunek brzegowy w postaci koncentracji jonów wapnia w płynie,  
 $q_{Ca}^*$  - warunek brzegowy w postaci strumienia jonów wapnia,  
 $\Gamma_{C_{Ca}}$  - powierzchnia ograniczająca objętość materiału  $V$  z warunkami brzegowymi  $C_{Ca}^{f*}$ ,  
 $\Gamma_{q_{Ca}}$  - powierzchnia ograniczająca objętość materiału  $V$  z warunkami brzegowymi  $q_{Ca}^*$ ,  
 oraz  $\Gamma_{C_{Ca}} \cap \Gamma_{q_{Ca}} = 0$

## 2.2.4 Transport jonów chloru

System połączonych porów betonu wypełnionych płynem (kapilar, porów żelowych i innych), umożliwia transport jonów chloru z agresywnego środowiska do wewnątrz konstrukcji. W opisie transportu istotną rolę odgrywają zjawiska konwekcji oraz dyfuzji i sorbcji, co opiszemy w stopniu koniecznym dla pracy.

### Sorbpcja

Podczas swej drogi systemem porów, część jonów zostaje absorbowana przez ściany porów. Łącząc się z cząstkami szkieletu tworzą wiele rodzajów nowych związków. Podstawowe z nich to chloroglinian wapnia,  $3CaO \cdot Al_2O_3 \cdot CaCl_2 \cdot 10H_2O$  (sól Friedela) oraz chlorożelazian wapnia,  $3CaO \cdot Fe_2O_3 \cdot CaCl_2 \cdot 10H_2O$ , Neville [41]. Zjawisko sorbcji jest korzystne dla żywotności konstrukcji, bo znacząco opóźnia czas w którym koncentracja jonów chloru w rejonie zbrojenia spowoduje przekroczenie progu korozji. Z drugiej strony, jony chloru łącząc się z cząsteczkami szkieletu powodują powstawanie nowych związków przyłączających dalej cząstki wody i zwiększających swoją objętość 1,5 - 4 krotnie, co prawdopodobnie powoduje mikropęknięcia obniżające własności mechaniczne szkieletu. Następnym negatywnym następstwem sorbcji jest tworzenie się łatwo rozpuszczalnych związków wapnia, wypłukiwanych w następstwie z materiału.

Do opisu zjawiska sorbcji używane są funkcyjne zależności koncentracji jonów w szkielecie  $C_{Cl}^b$  od koncentracji jonów w płynie  $C_{Cl}^f$  w formie izoterm lub izobar. Między wielu innymi używane są modele-izoterm: liniowy, Langmuira, i Freundlicha

zdefiniowane zależnościami:

$$C_{Cl}^b = \alpha C_{Cl}^f \quad C_{Cl}^b = \frac{\alpha C_{Cl}^f}{1 + \beta C_{Cl}^f} \quad C_{Cl}^b = \alpha (C_{Cl}^f)^\beta \quad (2.30)$$

izoterma liniowa    izoterma Langmuira    izoterma Freundlicha

gdzie:  $\alpha$ ,  $\beta$  - parametry materiału.

Stosowane są także bardziej złożone modele uwzględniające temperaturę, pH, oraz ilość zhydratyzowanego żeluz  $W(gel)$ , Martin-Perezy i wsp. [35], jak na przykład model opisany wzorem:

$$C_{Cl}^b = \exp \left[ \alpha_{OH} \left( 1 - \frac{[OH^-]}{[OH^-]_i} \right) \right] \cdot \exp \left[ \frac{U}{R} \cdot \left( \frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right) \right] \cdot f(C_{Cl}^f) \quad (2.31)$$

gdzie:  $\alpha_{OH}$  - parametr materiału,  
 $[OH^-]$ ,  $[OH^-]_i$  - koncentracje jonów wodorotlenowych, aktualna i początkowa,  
 $U$  - energia aktywacji wiązania jonów chloru [kJ/mol],  
 $R$  - stała gazowa [kJ/K·mol],  
 $T$ ,  $T_{ref}$  - temperatury aktualna i referencyjna [ $K^o$ ],  
 $f(C_{Cl}^f)$  - izoterma wiązania jonów chloru.

W pracy, do opisu sorbcji jonów chloru przez szkielet zastosowano izotermę Freundlicha.

## Dyfuzyjność

Zależność dyfuzyjności od temperatury opisuje prawo Arrheniusa:

$$f_1(T) = \exp \left[ \frac{U}{R} \cdot \left( \frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right) \right] \quad (2.32)$$

gdzie:  $U$  - energia aktywacji wiązania jonów chloru [kJ/mol],  
 $T$ ,  $T_{ref}$  - temperatury aktualna i odniesienia [K].

Dyfuzyjność betonu jest także zależna od czasu (wpływającego na sopleń hydratacji), co ilustruje wzór prezentowany między innymi w pracy Mangata i wsp. [33]:

$$f_2(t) = \left( \frac{t_{ref}}{t} \right)^m \quad (2.33)$$

gdzie  $m$  jest parametrem materiału. W tej samej pracy, zaproponowana została także zależność parametru  $m$  od stosunku wodno-cementowego  $w/c$ :

$$m = 2,5w/c - 0,6 \quad (2.34)$$

Opis zależności dyfuzyjności betonu od jego wilgotności został zaproponowany w pracy Saetty i wsp. [52]:

$$f_3(h) = \left[ 1 + \frac{(1-h)^4}{(1-h_c)^4} \right]^{-1} \quad (2.35)$$

Szybkość dojrzewania betonu zależy od ilości dostępnej w porach wody, która nie jest jednakowa dla różnych odległości od powierzchni materiału  $x$ . Opis wpływu tego zjawiska na dyfuzyjność wyraża formuła, Martin-Perez i wsp. [35]:

$$f_4(x) = \begin{cases} \varphi + (1 - \varphi) \left( \frac{x}{x_s} \right)^{\beta_x} & \text{if } x < x_s, \\ 1 & \text{if } x \geq x_s \end{cases} \quad (2.36)$$

gdzie:  $x_s$  - odległości od powierzchni materiału,  
 $\beta_x$  - parametr materiału,  
 $\varphi$  - stosunek dyfuzyjności na powierzchni do dyfuzyjności w warstwie wewnętrznej  $\varphi = D_c^s/D_c$ .

Ze względu na założoną stałą temperaturę, stopień nasycenia i dojrzałość betonu, w pracy przyjęto, że dyfuzyjność betonu jest zależna tylko od jego porowatości, według formuły:

$$D_{Cl} = D_{Cl0} \frac{\phi}{\phi_0} \quad (2.37)$$

Strumień jonów chloru  $\mathbf{q}_{Cl}$ , podobnie jak strumień  $\mathbf{q}_{Ca}$ , również jest powodowany mechanizmami dyfuzji i konwekcji:

$$\mathbf{q}_{Cl} = -D_{Cl} \nabla C_{Cl}^f + \mathbf{v} C_{Cl}^f \quad (2.38)$$

gdzie:  $D_{Cl}$  - dyfuzyjność betonu,  
 $\mathbf{v}$  - uśredniona prędkość płynu w materiale.

## Prawo zachowania masy

Model matematyczny dla opisu transportu jonów chloru przyjęto w postaci:

$$\dot{C}_{Cl}^t + \text{div}(-D_{Cl} \nabla C_{Cl}^f + \mathbf{v} C_{Cl}^f) = 0 \quad (2.39)$$

z warunkiem początkowym

$$C_{Cl}^f(\mathbf{x}, t_0) = C_{Cl}^f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.40)$$

oraz z warunkami brzegowymi:

podstawowym

$$C_{Cl}^f(\mathbf{x}, t) = C_{Cl}^{f*}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{C_{Cl}} \quad (2.41)$$

i naturalnym

$$\mathbf{q}_{Cl}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = q_{Cl}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{q_{Cl}} \quad (2.42)$$

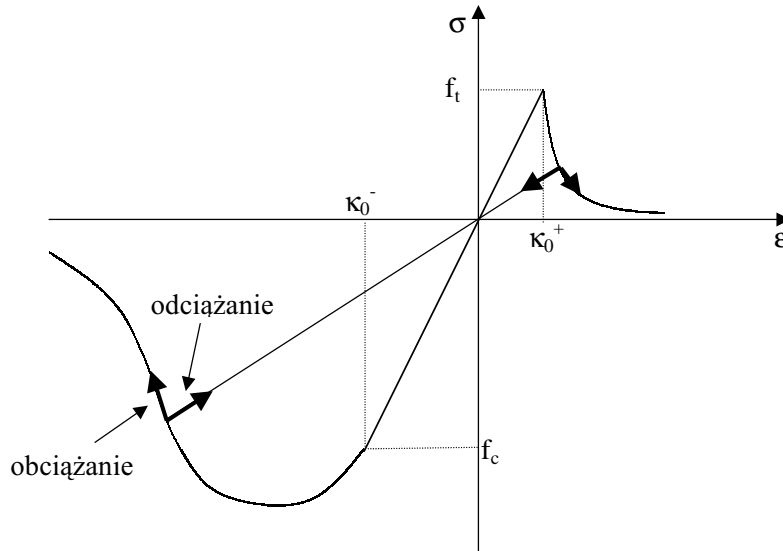
Na całkowitą koncentrację jonów chloru w materiale  $C_{Cl}^t$  składają się koncentracja w szkielecie  $C_{Cl}^b$  i płynie  $C_{Cl}^f$ :

$$C_{Cl}^t = C_{Cl}^b + \phi C_{Cl}^f \quad (2.43)$$

## 2.3 Podstawowe równania mechaniki dla betonu

### 2.3.1 Lokalizacja zniszczenia

Beton jest materiałem kruchym. W trakcie ściskania, po przekroczeniu granicznych wartości odkształceń sprężystych, występuje krótki obszar nieliniowego wzmocnienia, a po przekroczeniu maksymalnej wytrzymałości, osłabienie - spadek wytrzymałości z narastającym odkształceniem. W procesie rozciągania, osłabienie występuje najczęściej zaraz po przekroczeniu granicznych wartości odkształceń sprężystych, Mang i wsp. [32], Szarliński i wsp. [58]. Takie charakterystyczne dla materiału kruchego zachowanie zostało zilustrowane na rys. 2.4. W modelowaniu skończenie elementowym fizycznych własności betonu, pojawia się zależność uzyskanych wyników od rozmiaru, a nawet orientacji użytych elementów. Środkiem zaradczym są modele zakładające nieciągłości pola przemieszczeń i/lub odkształceń. Nieciągłości są modelowane wewnątrz elementów lub na ich granicach. Innym rozwiązaniem są modele nielokalne, wprowadzające wygładzanie niektórych zmiennych stanu, przez ich uśrednianie oraz modele gradientowe, Pamin [43]. W pracy zastosowane zostało rozwiązanie uproszczone polegające na tym, że rozmiar "charakterystyczny" elementu wpływa na parametry prawa opisującego zakresy wzmocnienia i osłabienia materiału, Oliver i wsp. [42], Rodriguez-Ferran i wsp. [49].



Rys. 2.4: Jednoosiowe ściskanie-rozciąganie materiału kruchego  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ .

### 2.3.2 Równania równowagi i równania geometryczne

W pracy przyjęto, że rozważany problem jest quasi-statyczny i geometrycznie liniowy. Pomijając siły masowe, równania równowagi Naviera w zapisie macierzowym mają postać:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.44)$$

z naturalnymi warunkami brzegowymi

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,j}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_i^*(\mathbf{x}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \quad (2.45)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31}]^T$  - wektor naprężenia,  
 $\mathbf{t}^*$  - wektor intensywności sił powierzchniowych,  
na powierzchni  $\Gamma_\sigma$  o wektorze normalnym  $\mathbf{n}$ ,  
 $T$  - oznaczenie transpozycji.

Macierz operatorów różniczkowych  $\mathbf{L}$  ma formę:

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Wektor odkształceń reprezentowany jest przez symetryczną część gradientu wektora przemieszczeń:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.47)$$

z podstawowymi warunkami brzegowymi:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (2.48)$$

gdzie:  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  - wektor przemieszczeń,  
 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{23} \ \varepsilon_{31}]^T$  - wektor odkształceń,  
 $\Gamma$  - powierzchnia ograniczająca ciało o objętości  $V$ ,  
 $\mathbf{u}^*$  - przemieszczenia na powierzchni  $\Gamma_u$ ,  
 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$  oraz  $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$

Charakterystyczną cechą betonu jest odmienność zachowania się pod obciążeniem rozciągającym i ściskającym. Ta odmienność dotyczy przede wszystkim różnic w wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie betonu i jest powodem jego zbrojenia, którego główną rolą jest przenoszenie naprężeń rozciągających w konstrukcji. Ze względu na znacznie większą wytrzymałość na ściskanie (8-10 razy), część modeli skalarnej mechaniki zniszczenia wiąże parametr zniszczenia  $\omega$  tylko z rozciągającą częścią wektora odkształceń lub naprężeń, Saetta i wsp. [54]:

$$\omega = \omega(\boldsymbol{\varepsilon}^+) \text{ lub } \omega = \omega(\boldsymbol{\sigma}^+) \quad (2.49)$$

co wiąże się z koniecznością podziału wektora odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$  na część dodatnią (rozciągającą)  $\boldsymbol{\varepsilon}^+$  i ujemną (ściskającą)  $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ .

### 2.3.3 Dwuwymiarowy stan naprężenia/odkształcenia

Stan dwuwymiarowy na płaszczyźnie  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  jest zdefiniowany przez funkcje przemieszczeń  $u_i(x_1, x_2)$ ,  $i = 1, 2$ , funkcje naprężeń  $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$ , funkcje odkształceń  $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2)$  oraz warunki

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (2.50)$$

co redukuje wektory odkształceń i naprężeń do postaci:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{12}\}^T \quad (2.51)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12}\}^T \quad (2.52)$$

Macierz operatorów różniczkowych  $\mathbf{L}$  ma postać:

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Równanie fizyczne (konstrytutywne) Hooke'a dla materiału sprężystego ma postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.54)$$

gdzie macierz sztywności materiału  $\mathbf{D}$  ma postać:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

gdzie:  $E$  - moduł sprężystości Younga  
 $\nu$  - współczynnik Poissona

Mając na uwadze definicje wektorów odkształcenia (2.51) i naprężenia (2.52) oraz korzystając z równania fizycznego (2.54) należy:

1. dla płaskiego stanu odkształcenia - przyjąć  $\varepsilon_{33} = 0$  w wektorze odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , a następnie obliczyć elementy wektora  $\boldsymbol{\sigma}$ .
2. dla płaskiego stanu naprężenia - przyjąć  $\sigma_{33} = 0$ , obliczyć  $\varepsilon_{33}$  ze wzoru  $\varepsilon_{33} = -\nu/(1-\nu)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$ , a następnie obliczyć pozostałe elementy wektora  $\boldsymbol{\sigma}$  (dwa pierwsze i czwarte równania (2.54)).

Wprowadzimy teraz operator transformacji  $\mathbf{P}$ , pozwalający wyznaczyć część rozciągającą wektora odkształceń według wzoru:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+ = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.56)$$



Operator ten został zaproponowany przez Simo i Ju [57], a następnie uproszczony przez Hansena [22] i stąd bywa nazywany operatorem SJH. Obliczamy go ze wzoru:

$$\mathbf{P}^+ = h(\varepsilon_1)\mathbf{N} + h(\varepsilon_2)\mathbf{M} + h(\varepsilon_3)\mathbf{K} + h(\varepsilon_1)\mathbf{N}h(\varepsilon_2)\mathbf{S} \quad (2.57)$$

gdzie:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - odkształcenia główne,  
 $h()$  - funkcja Heavisidea

oraz

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} c^4 & c^2s^2 & 0 & c^3s \\ c^2s^2 & s^4 & 0 & c^3s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2c^3s & 2cs^3 & 0 & 2c^2s^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} s^4 & c^2s^2 & 0 & -cs^3 \\ c^2s^2 & c^4 & 0 & -c^3s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2cs^3 & -2c^3s & 0 & 2c^2s^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2c^2s^2 & -2c^2s^2 & 0 & -cs(c^2 - s^2) \\ -2c^2s^2 & 2c^2s^2 & 0 & cs(c^2 - s^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2cs(c^2 - s^2) & 2cs(c^2 - s^2) & 0 & (c^2 - s^2)^2 \end{bmatrix}$$

oraz gdzie:  $s = \sin(\alpha)$  ,  
 $c = \cos(\alpha)$  ,  
 $\alpha$  - kąt pomiędzy osią  $x_1$  układu współrzędnych i kierunkiem odkształceń głównych  $\varepsilon_1$ .

W pracy przyjęto dokładniejszy opis zniszczenia betonu wprowadzając dwa skalarnie parametry zniszczenia mechanicznego, Rodriguez i wsp. [49], związane ze ścisaniem i rozciąganiem, a mianowicie:

$$\omega^+ = \omega^+(\boldsymbol{\varepsilon}^+) \quad (2.58)$$

$$\omega^- = \omega^-(\boldsymbol{\varepsilon}^-) \quad (2.59)$$

gdzie  $\boldsymbol{\varepsilon}^- = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^+ = \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ .

Równanie fizyczne dla materiału ze zniszczeniem ma formę:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega^+)\hat{\boldsymbol{\sigma}}^+ + (1 - \omega^-)\hat{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (2.60)$$

gdzie zdefiniowano dodatnią (rozciągającą) część wektora naprężeń  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^+$  bez uwzględnienia zniszczenia:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (2.61)$$

oraz ujemną (ściskającą) część wektora naprężeń bez uwzględnienia zniszczenia:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^- = (\mathbf{I} - \mathbf{P})^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.62)$$

Symbolem  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  oznaczono wektor naprężeń wywołany odkształceniami  $\boldsymbol{\varepsilon}$  w niezniszczonym, izotropowym materiale sprężystym.

Wykorzystując następnie prawo Hooke'a i operator  $\mathbf{P}$  w równaniu (2.60) otrzymamy równanie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ (1 - \omega^+) \mathbf{D} \mathbf{P}^+ + (1 - \omega^-) \mathbf{D} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^+) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.63)$$

W pracy równanie to rozszerzono uwzględniając możliwość zniszczenia chemicznego wyrażonego przez skalarny parametr zniszczenia chemicznego  $\omega_c$  oraz ciśnienie płynu w kapilarach  $p_l$ , Meschke i wsp. [39], otrzymując:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega_c) \left[ (1 - \omega^+) \mathbf{D} \mathbf{P}^+ + (1 - \omega^-) \mathbf{D} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^+) \right] \boldsymbol{\varepsilon} - b p_l \mathbf{I}_p \quad (2.64)$$

gdzie  $b$  jest parametrem materiału, a  $\mathbf{I}_p = \{ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \}^T$ .

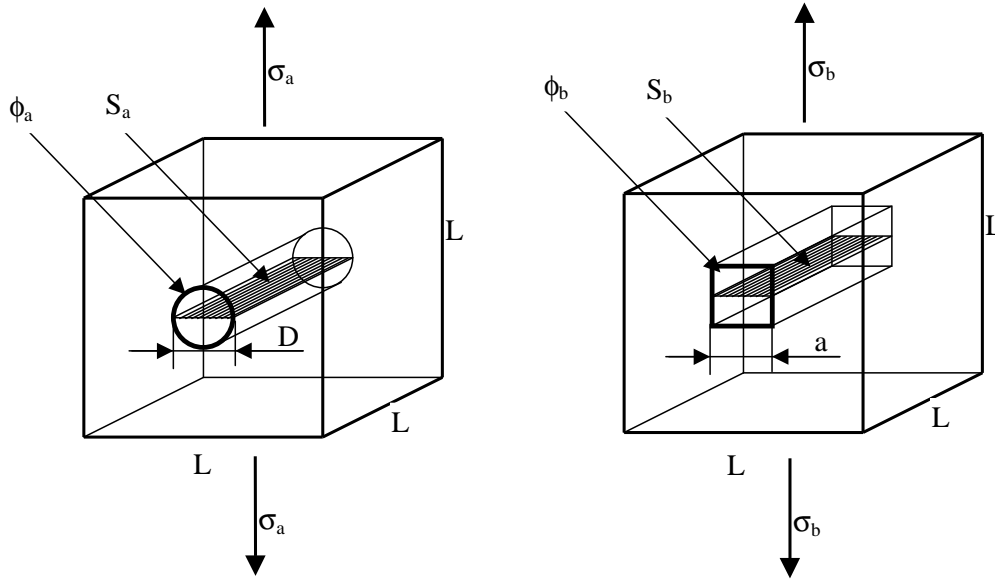
### 2.3.4 Wpływ porowatości na naprężenia spowodowane ciśnieniem płynu

Obecnie przeanalizujemy wpływ porowatości na naprężenia spowodowane ciśnieniem płynu. W tym celu rozważymy rys. 2.5 ilustrujący dwa "małe" sześciany betonu zawierające fragmenty porów różnego kształtu. Przyjmując, że pory wypełnione są płynem o ciśnieniu  $p_l$  obliczone zostaną naprężenia związane z tym ciśnieniem. W pierwszym przypadku, wymiarem charakterystycznym poru w kształcie walca jest jego średnica  $D$ , por drugi w kształcie prostopadłościanu, wymiarem charakterystycznym jest bok kwadratowej podstawy  $a$ . Porowatości wyrażone jako stosunek objętości poru do objętości sześcianu, wyrażą się wzorami:

$$\phi_a = \frac{\pi D^2 L / 4}{L^3} = \frac{\pi D^2}{4L^2} \quad \phi_b = \frac{a^2 L}{L^3} = \frac{a^2}{L^2}$$

Wymiary charakterystyczne w funkcji porowatości

$$D = L \sqrt{\frac{4\phi_a}{\pi}} \quad a = L \sqrt{\phi_b}$$



Rys. 2.5: Geometria poru w elementarnej objętości.

posłużą do wyznaczenia powierzchni, na których ciśnienie płynu  $p_l$  powoduje powstawanie dodatkowych naprężeń w obu przypadkach:

$$S_a = DL = L^2 \sqrt{\frac{4\phi_a}{\pi}} \qquad S_b = aL = L^2 \sqrt{\phi_b}$$

”Hydrauliczne” siły w sześciangach to iloczyny powierzchni i ciśnień:

$$P_a = S_a \cdot p_l = L^2 \sqrt{\frac{4\phi_a}{\pi}} p_l \qquad P_b = S_b \cdot p_l = L^2 \sqrt{\phi_b} p_l$$

”Hydrauliczne” składniki naprężeń:

$$\sigma_a = \frac{p_l S_a}{L^2} = \sqrt{\frac{4\phi_a}{\pi}} p_l \qquad \sigma_b = \frac{p_l S_b}{L^2} = \sqrt{\phi_b} p_l$$

Dla obu kształtów porów, naprężenia spowodowane ciśnieniem płynu są proporcjonalne do pierwiastka porowatości, wydaje się to być regułą. Mimo, że udział naprężeń spowodowanych ciśnieniem płynu jest niewielki, to przy zmiennej porowatości wydaje się słuszną modyfikacją równania fizycznego betonu (2.64) do postaci końcowej, uwzględniającej porowatość materiału:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega_c) \left[ (1 - \omega^+) \mathbf{D} \mathbf{P}^+ + (1 - \omega^-) \mathbf{D} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^+) \right] \boldsymbol{\varepsilon} - b p_l \mathbf{I}_p \sqrt{\frac{\phi}{\phi_0}} \quad (2.65)$$

gdzie parametr  $b$  jest wyznaczany dla porowatości początkowej  $\phi_0$ .

W dalszym ciągu opiszemy bliżej przyjęte w pracy metody wyznaczenia skalarnych parametrów zniszczenia.

## 2.4 Mechanika zniszczenia chemiczno – mechanicznego betonu

### 2.4.1 Parametr skalarny zniszczenia chemicznego

Parametr skalarny zniszczenia chemicznego  $\omega_c$  wpływający na obniżenie własności mechanicznych betonu, nazywany parametrem zniszczenia środowiskowego został wprowadzony, między innymi w pracach Creazzy i wsp. [11], Majorany i wsp. [37], Pijaudier-Cabota i wsp. [45] oraz Gerarda i wsp. [19]. Jeżeli na  $\omega_c$  składają się dwa komponenty,  $\omega_{Ca}$  spowodowany wypłukiwaniem jonów wapnia i  $\omega_{Cl}$  wynikający z migracji jonów chloru, zakłada się, że  $\omega_c$  spełnia warunek:  $(1 - \omega_c) = (1 - \omega_{Cl}) \cdot (1 - \omega_{Ca})$ , z którego wynika zależność:

$$\omega_c = \omega_{Cl} + \omega_{Ca} - \omega_{Cl} \cdot \omega_{Ca} \quad (2.66)$$

Często zakłada się, między innymi Kuhl i wsp. [29], że  $\omega_{Ca}$  jest równa objętościowemu ubytkowi szkieletu, czyli wzrostowi porowatości  $\phi_{Ca}$ :

$$\omega_{Ca} = \phi_{Ca} \quad \dot{\omega}_{Ca} \geq 0 \quad (2.67)$$

Warunek  $\dot{\omega}_{Ca} \geq 0$  nie zawsze jest akceptowany, niektóre pozycje literatury opisują zjawisko "samogojenia się betonu".

W pracy zaakceptowano hipotezę, że beton degraduje się pod wpływem działania jonów chloru, co uzasadnia się powiększaniem objętości cząsteczek po ich przyłączeniu. Należy jednak podkreślić, że w tym zakresie badacze nie są zgodni, Neville [41]. W pracy Saetty i wsp. [53] został jednakże opisany eksperyment potwierdzający przyjętą hipotezę oraz zaproponowana została formuła na skalar zniszczenia chemicznego  $\omega_{Cl}$  w formie:

$$\omega_{Cl} = (1 - \phi_{Cl}^{ref}) \left( 1 - \frac{1}{1 + (2R)^4} \right) \quad \dot{\omega}_{Cl} \geq 0 \quad (2.68)$$

gdzie  $\phi_{Cl}^{ref}$  jest proporcją wytrzymałości materiału w pełni chemicznie zniszczonego do niezniszczonego, a  $R$  jest stopniem zaawansowania reakcji

$$R = \frac{C_{Cl}^t}{C_{Cl}^{ref}} \quad (2.69)$$

gdzie  $C_{Cl}^{ref}$  jest koncentracją jonów chloru, dla której zniszczenie osiąga maksymalny efekt.

## 2.4.2 Parametry skalarne zniszczenia mechanicznego betonu

Ewolucja parametrów zniszczenia  $\omega^+$ ,  $\omega^-$  podlega kryterium:

$$g(\varepsilon^\pm, \kappa^\pm) = \eta^\pm(\varepsilon^\pm) - \kappa^\pm \leq 0 \quad (2.70)$$

gdzie:  $\eta^\pm$  - odkształcenie ekwiwalentne,  
 $\kappa^\pm$  - próg zniszczenia, to jest granica odkształceń sprężystych lub gdy została przekroczona, największe odkształcenie ekwiwalentne  $\eta^\pm$  osiągnięte wcześniej przez dany punkt materialny.

Zniszczenie może się propagować po osiągnięciu zakresu sprężystego,  $g = 0$  i spełnieniu warunków Kuhna-Tuckera:

$$g \leq 0 \quad \dot{\kappa}^\pm \geq 0 \quad \dot{\kappa}^\pm g = 0 \quad (2.71)$$

Jedną z wielu proponowanych w literaturze praw ewolucji zniszczenia, R. Faria i wsp. [14], de Vree i wsp. [60]), jest zależność proponowana w pracy Rodriguez-Ferrany i wsp. [49]

$$\omega^\pm(\kappa^\pm) = 1 - \frac{\kappa_0^\pm}{\kappa^\pm} (1 - A^\pm) - A^\pm \exp(-B^\pm(\kappa^\pm - \kappa_0^\pm)) \quad (2.72)$$

gdzie:  $\kappa_0^+ = f_t/E$  - graniczne odkształcenia sprężyste dla jednowymiarowego rozciągania,  
 $\kappa_0^- = f_c/E$  - graniczne odkształcenia sprężyste dla jednowymiarowego ściskania,  
 $f_t$  - wytrzymałość na rozciąganie,  
 $f_c$  - wytrzymałość na ściskanie,  
 $E$  - moduł sprężystości Younga,  
 $A, B$  - parametry materiału wyznaczone doświadczalnie.

Parametry  $A, B$  mogą być wyznaczone jako pochodna energii pęknięcia  $G_f$  i wymiaru

charakterystycznego elementu siatki dyskretyzacyjnej. Taka zależność cytowana jest w pracy Saetta i wsp. [54]:

$$A^+ = 1, \quad B^+ = \left( \frac{G_f E}{l^e (f_t)^2} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{(\boldsymbol{\varepsilon}^\pm)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^\pm} \quad (2.74)$$

W pracy wykorzystane są wzory (2.72), (2.74). Parametry  $A$ ,  $B$  dobierano w taki sposób, by energia pęknięcia materiału  $G_f$ , rozumiana jako pole pod wykresem  $\sigma = \sigma(\boldsymbol{\varepsilon})$  w jednoosiowym rozciąganiu/ściskaniu uzyskiwała założoną z góry wartość.

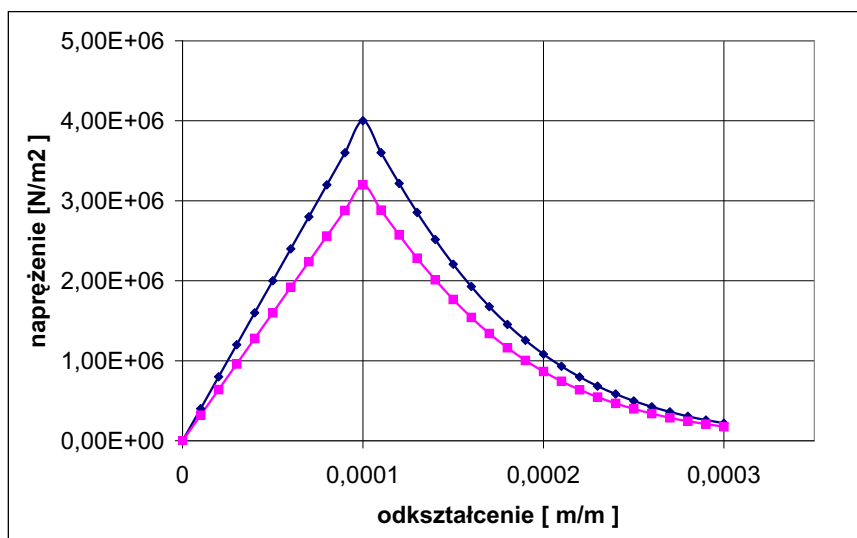
### 2.4.3 Wpływ degradacji chemicznej na własności mechaniczne materiału

Równanie fizyczne (2.65) uwzględnia degradację chemiczną materiału w sposób, który sprowadza się do obniżenia wartości modułu sprężystości  $E$  i (przy stałych wartościach granicznych odkształceń sprężystych) związanych z nim wartości wytrzymałości na rozciąganie  $f_t$  i ściskanie  $f_c$ . Porównanie zachowania się materiału chemicznie zniszczonego i niezniszczonego, przy zastosowaniu równania (2.65) ilustruje rys. 2.6. Kolorem granatowym oznaczono zależność  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$  materiału chemicznie niezniszczonego, kolorem fioletowym oznaczono materiał, w którym degradacja chemiczna obniżyła wartość modułu sprężystości  $E$ . Degradacja modułu sprężystości  $E$  pociąga za sobą obniżenie wytrzymałości  $f_t$  oraz energii pęknięcia  $G_f$ . W obliczeniach przyjęto wartość parametru degradacji chemicznej  $\omega_c = 0, 2$ .

Zdaniem autora pracy prawdopodobnym wydaje się, że degradacja chemiczna materiału wpływa także na wartości innych parametrów, jak graniczne odkształcenia sprężyste  $\kappa_0$ , energia pęknięcia  $G_f$  czy współczynnik Poissona  $\nu$ , Romanowski i wsp. [50], Romanowski [51]. Ogólnie zależności takie można przedstawić w formie:

$$\kappa_0^\pm = f_{\kappa^\pm}(\omega_c) \cdot \kappa_{00}^\pm \quad (2.75)$$

$$G_f^\pm = f_{G_f^\pm}(\omega_c) \cdot G_{f_0}^\pm \quad (2.76)$$



Rys. 2.6: Wpływ parametru zniszczenia chemicznego na zależność  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  w klasycznym zastosowaniu.

$$\nu = f_{\nu}(\omega_c) \cdot \nu_0 \quad (2.77)$$

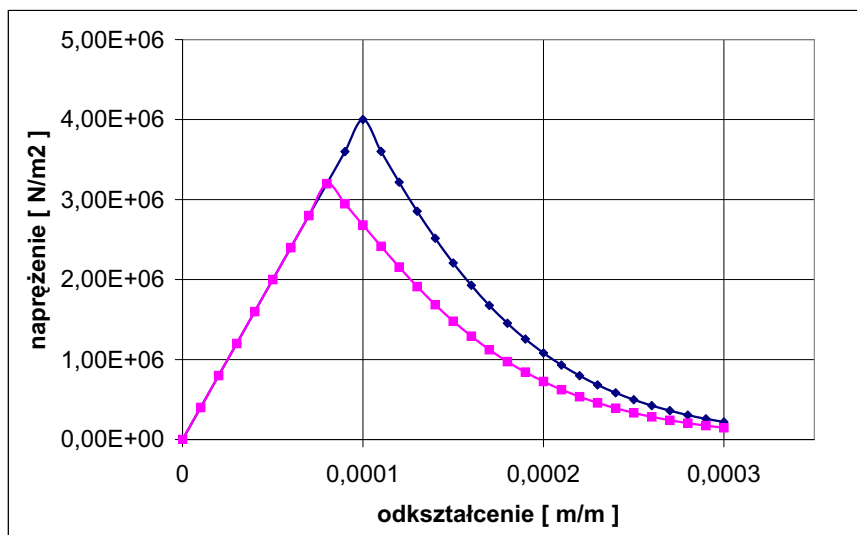
gdzie:  $\kappa_{00}^{\pm}$  - wartość granicznych odkształceń sprężystych niezniszczonego chemicznie betonu,  
 $G_{f_0}^{\pm}$  - energia pęknięcia niezniszczonego chemicznie betonu,  
 $\nu_0$  - współczynnik Poissona niezniszczonego chemicznie betonu.

Funkcje  $f_{\kappa}(\omega_c)$ ,  $f_{G^{\pm}}(\omega_c)$ ,  $f_{\nu}(\omega_c)$  powinny być wyznaczone na drodze doświadczalnej. W pracy, prócz chemicznej degradacji modułu sprężystości, przyjęto też zależność liniową granicznych odkształceń sprężystych od parametru zniszczenia środowiskowego:

$$\kappa_0^{\pm} = (1 - \alpha \cdot \omega_c) \cdot \kappa_{00}^{\pm} \quad (2.78)$$

Zależność tą ilustruje rys. 2.7. Kolorem granatowym oznaczono materiał chemicznie niezniszczony, kolorem fioletowym oznaczono materiał, w którym degradacja chemiczna obniżyła wartość granicznych odkształceń sprężystych  $\kappa_0^{\pm}$  według wzoru (2.78), przyjęto  $\alpha = 1, 0$ . Założone tu obniżenie wartości granicznych odkształceń sprężystych  $\kappa_0^{\pm}$  również pociąga za sobą obniżenie wartości wytrzymałości  $f_t$  oraz

energii pęknięcia  $G_f$ . Najbliższym rzeczywistości wydaje się być model uwzględnia-



Rys. 2.7: Wpływ parametru zniszczenia chemicznego na relację  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  przy zastosowaniu równania (2.78).

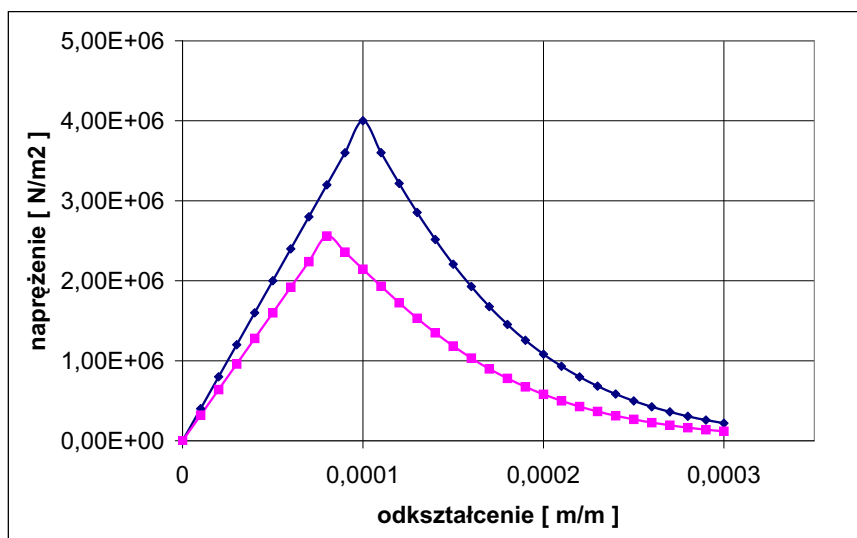
jący wielowymiarowe działanie zniszczenia chemicznego na wszystkie mechaniczne własności betonu. Równoczesną degradację modułu sprężystości i granicznych odkształceń sprężystych w relacji  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  ilustruje rys. 2.8. Kolorem granatowym oznaczono materiał chemicznie niezniszczony, kolorem fioletowym oznaczono materiał, w którym degradacja chemiczna obniżyła zarówno współczynnik sprężystości  $E$ , jak i wartość granicznych odkształceń sprężystych  $\kappa_0^\pm$ . Przy założeniu takiego dwuwymiarowego działania degradacji chemicznej, obniżenie wartości wytrzymałości  $f_t$  oraz energii pęknięcia  $G_f$  zostało tu zwielokrotnione.

#### 2.4.4 Wpływ degradacji mechanicznej i stanu odkształcenia na porowatość materiału

W formule (2.19) opisującej wzrost porowatości związany ze zniszczeniem mechanicznym

$$\phi_m = (1 - \phi_0 - \phi_{Ca})\omega_m$$





Rys. 2.8: Wpływ parametru zniszczenia chemicznego na relację  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  przy uwzględnieniu degradacji modułu sprężystości i zastosowaniu równania (2.78).

występuje parametr zniszczenia mechanicznego  $\omega_m = \omega_m(\omega^+, \omega^-)$ . Przez analogię do opisu parametru zniszczenia chemicznego (2.66), przyjęto związek:

$$\omega_m = \omega^+ + \omega^- - \omega^+ \omega^- \quad (2.79)$$

Stan odkształcenia, związany z rozwieraniem/zamykaniem się rys, prawdopodobnie również wpływa na porowatość materiału. Ponadto odkształcenia rozciągające zwiększają porowatość na kierunku do nich prostopadłym, ściskające na kierunku prostopadłym ją zmniejszają. Opis tego typu zjawisk wymaga wprowadzenia anizotropowego pola porowatości, a co za tym idzie anizotropowych pól przepuszczalności i dyfuzyjności, więc spowodowałyby wzrost złożoności obliczeniowej modelu. W pracy proponuje się uwzględnienie skalarów zniszczenia mechanicznego i stanu odkształcenia w formie uproszczonej:

$$\phi_m = (1 - \phi_0 - \phi_{Ca})(\omega^+ + \omega^- - \omega^+ \omega^-) \frac{\eta^+(\varepsilon^+)}{\kappa_{00}^+} \quad (2.80)$$

## 2.5 Model matematyczny opisu zniszczenia chemiczno - mechanicznego betonu

### 2.5.1 Zestawienie równań problemu brzegowego

W tym punkcie, dla przejrzystości pracy zestawione zostaną równania problemów brzegowych betonu, wyprowadzone w punktach 2.2.4, 2.2.4, 2.2.4 i 2.3.

Model matematyczny opisujący zachowanie się konstrukcji żelbetowej obciążonej mechanicznie i eksploatowanej w środowisku agresywnym chemicznie wyraża się następującym kompletem równań:

1. Równanie równowagi mechanicznej (2.64):

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.81a)$$

z podstawowymi warunkami brzegowymi (2.48):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (2.81b)$$

oraz naturalnymi warunkami brzegowymi (2.45):

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,j}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_i^*(\mathbf{x}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \quad (2.81c)$$

2. Równanie prawa zachowania masy płynu (2.13):

$$\text{div } \mathbf{q}_p = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.81d)$$

z warunkiem początkowym (2.14):

$$p_l(\mathbf{x}, t_0) = p_l(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.81e)$$

oraz z warunkami brzegowymi:

podstawowym (2.15)

$$p_l(\mathbf{x}, t) = p_l^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{p_l} \quad (2.81f)$$

i naturalnym (2.16):

$$\mathbf{q}_{p_l}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = q_{p_l}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{q_{p_l}} \quad (2.81g)$$

3. Równanie prawa zachowania masy jonów wapnia (2.26):

$$\dot{C}_{Ca}^t + \operatorname{div} \mathbf{q}_{Ca} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.81h)$$

z warunkiem początkowym (2.27):

$$C_{Ca}^f(\mathbf{x}, t_0) = C_{Ca}^f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.81i)$$

oraz z warunkami brzegowymi:

podstawowym (2.28)

$$C_{Ca}^f(\mathbf{x}, t) = C_{Ca}^{f*}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{Ca} \quad (2.81j)$$

i naturalnym (2.29)

$$\mathbf{q}_{Ca}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = q_{Ca}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{qCa} \quad (2.81k)$$

4. Równanie prawa zachowania masy jonów chloru (2.39):

$$\dot{C}_{Cl}^t + \operatorname{div} \mathbf{q}_{Cl} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.81l)$$

z warunkiem początkowym (2.40):

$$C_{Cl}^f(\mathbf{x}, t_0) = C_{Cl}^f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.81m)$$

oraz z warunkami brzegowymi:

podstawowym (2.41)

$$C_{Cl}^f(\mathbf{x}, t) = C_{Cl}^{f*}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{Cl} \quad (2.81n)$$

i naturalnym (2.42)

$$\mathbf{q}_{Cl}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = q_{Cl}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{qCl} \quad (2.81o)$$

## 2.5.2 Słabe sformułowanie wariacyjne

Problem brzegowy zdefiniowany równaniami (2.81) będzie rozwiązywany numerycznie. W tym celu sformułujemy najpierw tzw. słabe sformułowanie wariacyjne problemu, będące bazą dla różnych rozwiązań aproksymacyjnych, Cichoń i wsp. [8].

W konstruowaniu słabej formy wariacyjnej, jako funkcje wagowe (nazywane też funkcjami testowymi) przyjęte zostały: wektor przemieszczeń wirtualnych  $\delta \mathbf{u}$  w równaniu równowagi mechanicznej, ciśnienie wirtualne  $\delta p_l$  w równaniu prawa zachowania masy płynu oraz koncentracje wirtualne  $\delta C_{Ca}^f$ ,  $\delta C_{Cl}^f$  w równaniach prawa zachowania masy jonów wapnia i chloru.

Stosownie do metody residuów ważonych, warunki ortogonalności dla równań (2.81) mają formę:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} h d\Omega &= \mathbf{0} \\
\int_{\Omega} \delta p_l \operatorname{div} \mathbf{q}_p h d\Omega &= 0 \\
\int_{\Omega} \delta C_{Ca}^f \dot{C}_{Ca}^t h d\Omega + \int_{\Omega} \delta C_{Ca}^f \operatorname{div} \mathbf{q}_{Ca} h d\Omega &= 0 \\
\int_{\Omega} \delta C_{Cl}^f \dot{C}_{Cl}^t h d\Omega + \int_{\Omega} \delta C_{Cl}^f \operatorname{div} \mathbf{q}_{Cl} h d\Omega &= 0
\end{aligned} \tag{2.82}$$

gdzie:  $\Omega$  - dwuwymiarowy obszar całkowania,  
 $h$  - grubość.

Dalsze postępowanie jest standardowe i wymaga skorzystania z uogólnionego całkowania przez części. Wykorzystując następnie, że funkcje wagowe spełniają jednorodne podstawowe warunki brzegowe dla brzegów  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_{p_l}$ ,  $\Gamma_{Ca}$  i  $\Gamma_{Cl}$ , końcowe równania słabego sformułowanie wariacyjnego mają postać:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} h d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma &= 0 \\
- \int_{\Omega} \delta (\nabla p_l)^T \cdot \mathbf{q}_l h d\Omega + \int_{\Gamma_{q_{p_l}}} \delta p_l q_l^* d\Gamma &= 0 \\
\int_{\Omega} \delta C_{Ca}^f \cdot \dot{C}_{Ca}^t h d\Omega - \int_{\Omega} \delta (\nabla C_{Ca}^f)^T \cdot \mathbf{q}_{Ca} h d\Omega + \int_{\Gamma_{q_{Ca}}} \delta C_{Ca}^f \cdot q_{Ca}^* d\Gamma &= 0 \\
\int_{\Omega} \delta C_{Cl}^f \cdot \dot{C}_{Cl}^t h d\Omega - \int_{\Omega} \delta (\nabla C_{Cl}^f)^T \cdot \mathbf{q}_{Cl} h d\Omega + \int_{\Gamma_{q_{Cl}}} \delta C_{Cl}^f \cdot q_{Cl}^* d\Gamma &= 0
\end{aligned} \tag{2.83}$$

z odpowiednimi podstawowymi warunkami brzegowymi i początkowymi. W powyższych równaniach obciążenie jest zdefiniowane na jednostkę długości brzegu obszaru.

## Rozdział 3

# SFORMUŁOWANIE MODELU SKOŃCZENIE ELEMENTOWEGO

### 3.1 Przyrostowy układ równań słabego sformułowania wariacyjnego

Model obliczeniowy otrzymamy wykorzystując metodę elementów skończonych (MES), dla dyskretyzacji problemu w przestrzeni konfiguracyjnej  $\boldsymbol{x}$  oraz metodę różnic skończonych, dla rozwiązania w czasie  $t$  wynikającego z dyskretyzacji MES układu równań różniczkowych zwyczajnych. Zastosowany zostanie typowy sposób postępowania przy rozwiązywaniu problemów nieliniowych, który polega na sformułowaniu i rozwiązaniu liniowych układów równań przyrostowych, a następnie iteracyjnym poprawianiu dokładności rozwiązania metodą Newtona-Raphsona, omówioną w punkcie 3.6.

W tym celu musimy najpierw wyprowadzić przyrostowy układ równań słabego sformułowania wariacyjnego. Równania te otrzymamy formalnie odejmując od siebie równania (2.83) napisane dla chwil czasowych  $t$  i  $t + \Delta t$ , co prowadzi do końcowego wyniku:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma} h \, d\Omega = - \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} h \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \Delta \boldsymbol{u}^T \cdot (\boldsymbol{t}^* + \Delta \boldsymbol{t}^*) d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta p_l))^T \cdot \Delta \boldsymbol{q}_l h \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta p_l))^T \cdot \boldsymbol{q}_l h \, d\Omega - \int_{\Gamma_{q_{p_l}}} \delta \Delta p_l \cdot (q_l^* + \Delta q_l^*) d\Gamma \\
& \int_{\Omega} \delta \Delta C_{C_a}^f \cdot \Delta \dot{C}_{C_a}^t h \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{C_a}^f))^T \cdot \Delta \boldsymbol{q}_{C_a} h \, d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \delta \Delta C_{C_a}^f \cdot \dot{C}_{C_a}^t h \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{C_a}^f))^T \cdot \boldsymbol{q}_{C_a} h \, d\Omega - \int_{\Gamma_{q_{C_a}}} \delta \Delta C_{C_a}^f \cdot (q_{C_a}^* + \Delta q_{C_a}^*) d\Gamma \\
& \int_{\Omega} \delta \Delta C_{C_l}^f \cdot \Delta \dot{C}_{C_l}^t h \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{C_l}^f))^T \cdot \Delta \boldsymbol{q}_{C_l} h \, d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \delta \Delta C_{C_l}^f \cdot \dot{C}_{C_l}^t h \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{C_l}^f))^T \cdot \boldsymbol{q}_{C_l} h \, d\Omega - \int_{\Gamma_{q_{C_l}}} \delta \Delta C_{C_l}^f \cdot (q_{C_l}^* + \Delta q_{C_l}^*) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie oznaczono przyrosty:  $\Delta(\bullet) = (\bullet)^{t+\Delta t} - (\bullet)^t$  oraz pominięto górny indeks  $t$  dla wartości całkowitych w chwili  $t$ .

Jak widać w powyższych równaniach występują wielkości przyrostowe nieznanymi funkcji i wektorów, które obecnie wyprowadzimy odpowiednie formuły.

## 3.2 Przyrosty wektora naprężeń i strumieni

### 3.2.1 Przyrost wektora naprężeń

Przyrost wektora naprężeń  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  jest zależny od przyrostów i wartości wszystkich zmiennych (2.65), ma formę:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p_l} \Delta p_l + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{C_a}^f} \Delta C_{C_a}^f + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{C_l}^f} \Delta C_{C_l}^f \tag{3.2}$$

w której

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= (1 - \omega_c) [(1 - \omega^+) \boldsymbol{D} \boldsymbol{P} + (1 - \omega^-) \boldsymbol{D} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}) - \\
& - \frac{\partial \omega^+}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + (1 - \omega^+) \boldsymbol{D} \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \\
& - \frac{\partial \omega^-}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{D} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - (1 - \omega^-) \boldsymbol{D} \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}] - b \boldsymbol{I}_p p_l \frac{1}{2\sqrt{\phi \phi_0}} \frac{\partial \phi}{\partial \omega_m} \frac{\partial \omega_m}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

W dalszym ciągu pominięto ostatni składnik we wzorze (3.3). Z zależności  $\omega^\pm = \omega^\pm(\eta^\pm(\varepsilon))$  wynika zależność:

$$\frac{\partial \omega^\pm}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \omega^\pm}{\partial \eta^\pm} \frac{\partial \eta^\pm}{\partial \varepsilon} \quad (3.4)$$

Na podstawie równania (2.72) otrzymamy:

$$\frac{\partial \omega^\pm}{\partial \eta^\pm} = \frac{A^\pm B^\pm}{e^{B^\pm(\eta^\pm - \kappa_0^\pm)}} + \frac{(1 - A^\pm) \kappa_0^\pm}{(\eta^\pm)^2} \quad (3.5)$$

a z równania (2.74) mamy:

$$\frac{\partial \eta^\pm}{\partial \varepsilon} = \begin{cases} \frac{\sigma^\pm}{\eta^\pm E} & \text{gdy } \eta^\pm > \kappa^\pm \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases} \quad (3.6)$$

Operator transformacji  $\mathbf{P}$  jest zależny od kąta  $\alpha$  pomiędzy osią  $x_1$  układu współrzędnych i kierunkiem odkształceń głównych  $\varepsilon_1$ , więc:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon} \quad (3.7)$$

Postać  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \alpha}$  wynika z równania (2.57) i wyraża się wzorami:

$$\frac{\partial \mathbf{P}^+}{\partial \alpha} = h(\varepsilon_1) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \alpha} + h(\varepsilon_2) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} + h(\varepsilon_3) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha} + h(\varepsilon_1) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \alpha} h(\varepsilon_2) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \alpha} \quad (3.8)$$

gdzie, przypomnijmy:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - odkształcenia główne,  
 $h()$  - funkcja Heavisidea.

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -4 \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) & \frac{\sin(4\alpha)}{2} & 0 & \frac{\cos(2\alpha)}{2} + \frac{\cos(4\alpha)}{2} \\ \frac{\sin(4\alpha)}{2} & 4 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 & 0 & \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{\cos(4\alpha)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) & \cos(2\alpha) - \cos(4\alpha) & 0 & \sin(4\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -4 \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) & \frac{\sin(4\alpha)}{2} & 0 & \frac{\cos(2\alpha)}{2} + \frac{\cos(4\alpha)}{2} \\ \frac{\sin(4\alpha)}{2} & 4 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 & 0 & \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{\cos(4\alpha)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) & \cos(2\alpha) - \cos(4\alpha) & 0 & \sin(4\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha} = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} \sin(4\alpha) & -\sin(4\alpha) & 0 & -\cos(4\alpha) \\ -\sin(4\alpha) & \sin(4\alpha) & 0 & \cos(4\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\cos(4\alpha) & 2\cos(4\alpha) & 0 & -2\sin(4\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}} \quad (3.13)$$

Pochodną cząstkową kąta  $\alpha$  po wektorze odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$  jest wektor, którego kolejnymi elementami są pochodne wyrażenia (3.13) po kolejnych składowych wektora odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \left( \frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_4^2} \cdot \{-\varepsilon_4, \varepsilon_4, 0, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\} \right)^T \quad (3.14)$$

Z omówionej w 2.3.4 modyfikacji udziału ciśnienia płynu na wartość naprężeń, ze względu na porowatość, wynika wzór:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p_l} = -b \mathbf{I}_p \sqrt{\frac{\phi}{\phi_0}} \quad (3.15)$$

Wprowadzenie skalaru zniszczenia chemicznego w równaniu (2.65) w formie (2.66) oraz (2.78) uzależnia przyrost naprężeń od koncentracji jonów wapnia i chloru

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Ca}^f} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \omega_c} \cdot \frac{\partial \omega_c}{\partial C_{Ca}^f} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \omega^+} \cdot \frac{\partial \omega^+}{\partial \kappa_0^+} \cdot \frac{\partial \kappa_0^+}{\partial \omega_c} \cdot \frac{\partial \omega_c}{\partial C_{Ca}^f} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \omega^-} \cdot \frac{\partial \omega^-}{\partial \kappa_0^-} \cdot \frac{\partial \kappa_0^-}{\partial \omega_c} \cdot \frac{\partial \omega_c}{\partial C_{Ca}^f} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Cl}^f} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \omega_c} \cdot \frac{\partial \omega_c}{\partial C_{Cl}^f} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \omega^+} \cdot \frac{\partial \omega^+}{\partial \kappa_0} \cdot \frac{\partial \kappa_0}{\partial \omega_c} \cdot \frac{\partial \omega_c}{\partial C_{Cl}^f} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \omega^-} \cdot \frac{\partial \omega^-}{\partial \kappa_0} \cdot \frac{\partial \kappa_0}{\partial \omega_c} \cdot \frac{\partial \omega_c}{\partial C_{Cl}^f}$$

Wektor naprężeń  $\boldsymbol{\sigma}$  jest zależny od trzech skalarów zniszczenia, więc na podstawie wzoru (2.64) wyznaczyć należy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \omega_c} &= - \left[ (1 - \omega^+) \mathbf{D} \mathbf{P}^+ + (1 - \omega^-) \mathbf{D} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^+) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \omega^+} &= (1 - \omega_c) \left[ -\mathbf{D} \mathbf{P}^+ \right] \boldsymbol{\varepsilon} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \omega^-} &= (1 - \omega_c) \left[ -\mathbf{D} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^+) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.17)$$



Przyjęcie hipotezy o zależności granicznych odkształceń sprężystych od wartości skalaru zniszczenia chemicznego jest uwzględnione zgodnie z wzorami (2.72) i (2.78) w postaci:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \omega^+}{\partial \kappa_0^+} &= \frac{-(1-A^+)}{\kappa^\pm} - A^+ B^+ \exp(-B^+(\kappa^+ - \kappa_0^+)) \\
 \frac{\partial \omega^-}{\partial \kappa_0^-} &= \frac{-(1-A^-)}{\kappa^\pm} - A^- B^- \exp(-B^-(\kappa^- - \kappa_0^-)) \\
 \frac{\partial \kappa_0^+}{\omega_c} &= -\alpha \cdot \kappa_{00}^+ \\
 \frac{\partial \kappa_0^-}{\omega_c} &= -\alpha \cdot \kappa_{00}^-
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Skalar zniszczenia chemicznego  $\omega_c$  jest zależny od skalaru zniszczenia chemicznego  $\omega_{Ca}$  wynikającego z ubytku jonów wapnia (2.66), równemu porowatości (2.67), która z kolei jest zależna od koncentracji jonów wapnia w szkielecie (2.18). Koncentracje jonów wapnia w szkielecie i płynie powiązane są przez wzór (2.23). Z tej łańcuchowej zależności wynika:

$$\frac{\partial \omega_c}{\partial C_{Ca}^f} = \frac{\partial \omega_c}{\partial \omega_{Ca}} \frac{\partial \omega_{Ca}}{\partial \phi_{Ca}} \frac{\partial \phi_{Ca}}{\partial C_{Ca}^b} \frac{\partial C_{Ca}^b}{\partial C_{Ca}^f} \tag{3.19}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \omega_c}{\partial \omega_{Ca}} &= 1 - \omega_{Cl} \\
 \frac{\partial \omega_{Ca}}{\partial \phi_{Ca}} &= 1 \\
 \frac{\partial \phi_{Ca}}{\partial C_{Ca}^b} &= \frac{-1}{C_{Ca0}^b + C_{CaKruszywa}} \\
 \frac{\partial C_{Ca}^b}{\partial C_{Ca}^f} &= (1 - \alpha_{Ca}) C_{CaH}^b \left[ \frac{1}{10} - \frac{1}{200} (C_{Ca}^f) \right] + \\
 &+ \frac{n(C_{Ca0}^b - C_{CaH}^b)(C_{Ca}^f)^{(n-1)}}{(C_{CaP}^f)^n \left( 1 + \left( \frac{C_{Ca}^f}{C_{CaP}^f} \right)^n \right)^2} + \\
 &+ \frac{m\alpha_{Ca} C_{CaH}^b (C_{Ca}^f)^{(m-1)}}{(C_{CaSH}^f)^m \left( 1 + \left( \frac{C_{Ca}^f}{C_{CaSH}^f} \right)^m \right)^2}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Skalar zniszczenia chemicznego  $\omega_c$  jest zależny od koncentracji jonów chloru w płynie także "łańcuchowo" przez skalar zniszczenia chemicznego  $\omega_{Cl}$  (2.66), jego zależność od koncentracji jonów  $Cl^-$  w szkielecie (2.68) i zastosowany model sorbcji (2.30-Freundlicha), co prowadzi do zależności:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_c}{\partial C_{Cl}^f} &= \frac{\partial \omega_c}{\partial \omega_{Cl}} \frac{\partial \omega_{Cl}}{\partial C_{Cl}^b} \frac{\partial C_{Cl}^b}{\partial C_{Cl}^f} \\ \frac{\partial \omega_c}{\partial \omega_{Cl}} &= 1 - \omega_{Ca} \\ \frac{\partial \omega_{Cl}}{\partial C_{Cl}^b} &= \frac{64 C_{Cl}^b{}^3 (1 - \phi_{Cl}^{ref})}{\left(1 + \frac{16 (C_{Cl}^b)^4}{(C_{Cl}^{ref})^4}\right)^2 C_{Cl}^{ref^4}} \\ \frac{\partial C_{Cl}^b}{\partial C_{Cl}^f} &= \alpha \beta (C_{Cl}^f)^{(\beta-1)}\end{aligned}\tag{3.21}$$

### 3.2.2 Przyrost strumienia płynu

Przyrost strumienia płynu jest zależny od wektora odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , ciśnienia płynu  $p_l$ , koncentracji jonów wapnia  $C_{Ca}^f$  oraz ich przyrostów  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\Delta p_l$ ,  $\Delta C_{Ca}^f$ , z czego wynika wyrażenie na przyrost strumienia płynu:

$$\Delta \mathbf{q}_l = \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial p_l} \Delta p_l + \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f\tag{3.22}$$

Strumień płynu związany jest z wektorem odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$  przez wprowadzenie porowatości mechanicznej  $\phi_m$  jako składnika porowatości materiału  $\phi$  (2.20), skąd mamy:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{D_{0l}}{\phi_0} \nabla p_l \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\tag{3.23}$$

gdzie

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \phi_m}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\tag{3.24}$$

Z przyjęcia zależności porowatości mechanicznej  $\phi_m$  od skalarów zniszczenia mechanicznego  $\omega^+$ ,  $\omega^-$  i wartości rozciągających odkształceń ekwiwalentnych  $\eta^+$  (2.80)

wynika wzór:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_m}{\partial \varepsilon} &= (1 - \phi_0 - \phi_{Ca}) \cdot \\ &\cdot \left[ \left( \frac{\partial \omega^+}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \omega^-}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \omega^+}{\partial \varepsilon} \omega^- - \omega^+ \frac{\partial \omega^-}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\eta^+(\varepsilon^+)}{\kappa_{00}^+} + (\omega^+ + \omega^- - \omega^+ \omega^-) \frac{\partial \eta^+}{\partial \varepsilon} \frac{1}{\kappa_{00}^+} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Strumień płynu jest proporcjonalny do gradientu ciśnienia  $\nabla p_l$  zgodnie z równaniem (2.10) co prowadzi do wzoru:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial p_l} = \frac{-D_{0l}}{\phi_0} \phi \frac{\partial (\nabla p_l)}{\partial p_l} \quad (3.26)$$

Także przez porowatość  $\phi$ , której składnikiem jest porowatość  $\phi_{Ca}$  strumień płynu związany jest z koncentracją  $C_{Ca}^f$ , (2.20), wzorem:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial C_{Ca}^f} = -\frac{D_{0l}}{\phi_0} \frac{\partial \phi}{\partial C_{Ca}^f} \nabla p_l \quad (3.27)$$

Pochodną cząstkową  $\frac{\partial \phi}{\partial C_{Ca}^f}$  obliczymy na podstawie (2.20), (2.18) oraz (2.23), co prowadzi do wzoru:

$$\frac{\partial \phi}{\partial C_{Ca}^f} = \frac{\partial \phi}{\partial C_{Ca}^b} \frac{\partial C_{Ca}^b}{\partial C_{Ca}^f} \quad (3.28)$$

W obliczeniach pominięto wpływ zmian koncentracji jonów wapnia, przez porowatość  $\phi_{Ca}$ , na porowatość mechaniczną  $\phi_m$ , (2.80).

### 3.2.3 Przyrost strumienia jonów wapnia

Strumień jonów wapnia, kierowany mechanizmami dyfuzji i konwekcji, opisany został wzorem (2.38). Konsekwencją jest zależność przyrostu strumienia jonów wapnia od gradientu ciśnienia płynu  $\nabla p_l$  ze względu na konwekcję, a ze względu na dyfuzję, od gradientu koncentracji jonów wapnia  $\nabla C_{Ca}^f$ . Ponadto, na porowatość, wpływającą na współczynnik dyfuzji, oddziałują wektor odkształceń  $\varepsilon$  oraz koncentracja jonów wapnia  $C_{Ca}^f$ . W efekcie przyrost strumienia jonów wapnia opisuje wzór:

$$\Delta \mathbf{q}_{Ca} = \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon + \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial p_l} \Delta p_l + \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f \quad (3.29)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial \varepsilon} &= \frac{-D_{0Ca}}{\phi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \nabla C_{Ca}^f \\ \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial p_l} &= C_{Ca}^f \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial p_l} = -\frac{D_{0l} \phi}{\phi_0 \rho_l} C_{Ca}^f \frac{\partial (\nabla p_l)}{\partial p_l} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial C_{Ca}^f} &= -\frac{D_{0Ca} \phi}{\phi_0} \frac{\partial (\nabla C_{Ca}^f)}{\partial C_{Ca}^f} - \frac{D_{0Ca}}{\phi_0} \nabla C_{Ca}^f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial C_{Ca}^f} + \mathbf{v}_l \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.2.4 Przyrost strumienia jonów chloru

Przyrost strumienia jonów chloru jest zależny od wszystkich pól występujących w modelu, a mianowicie od przemieszczeń i koncentracji jonów wapnia przez porowatość, od pola ciśnień przez konwekcję i wreszcie od gradientu koncentracji jonów chloru:

$$\Delta \mathbf{q}_{Cl} = \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon + \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial C_{Cl}^f} \Delta C_{Cl}^f + \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f + \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial p_l} \Delta p_l \quad (3.31)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial \varepsilon} &= \frac{-D_{0Cl}}{\phi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \nabla C_{Cl}^f \\ \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial p_l} &= \frac{-D_{0l} \phi}{\phi_0 \rho_l} C_{Cl}^f \frac{\partial (\nabla p_l)}{\partial p_l} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial C_{Ca}^f} &= -\frac{D_{0Cl}}{\phi_0} \cdot \nabla C_{Cl}^f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial C_{Ca}^f} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial C_{Cl}^f} &= -\frac{D_{0Cl}}{\phi_0} \phi \frac{\partial (\nabla C_{Cl}^f)}{\partial C_{Cl}^f} + \mathbf{v}_l \end{aligned} \quad (3.32)$$

### 3.3 Dyskretyzacja MES po zmiennych przestrzennych

Zgodnie z procedurą metody elementów skończonych, nieznanne funkcje zostają interpolowane w elemencie skończonym przy użyciu wyrażeń:

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{N}_u \mathbf{a}_u, \quad p_l \cong \mathbf{N}_p \mathbf{a}_p, \quad C_{Ca}^t \cong \mathbf{N}_{Ca} \mathbf{a}_{Ca}, \quad C_{Cl}^f \cong \mathbf{N}_{Cl} \mathbf{a}_{Cl} \quad (3.33)$$

gdzie  $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_p, \mathbf{N}_{Ca}, \mathbf{N}_{Cl}$  są macierzami funkcji kształtu, natomiast  $\mathbf{a}_u, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{Ca}, \mathbf{a}_{Cl}$  są wektorami zawierającymi niewiadome węzłowe. Wykorzystując przyjęte interpolacje, możemy napisać wzory:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &\cong \mathbf{N}_u \Delta \mathbf{a}_u, & \boldsymbol{\varepsilon} &\cong \mathbf{B}_u \mathbf{a}_u, & \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &\cong \mathbf{B}_u \Delta \mathbf{a}_u, \\ \Delta p_l &\cong \mathbf{N}_p \Delta \mathbf{a}_p, & \Delta C_{Ca}^f &\cong \mathbf{N}_{Ca} \Delta \mathbf{a}_{Ca}, & \Delta C_{Cl}^f &\cong \mathbf{N}_{Cl} \Delta \mathbf{a}_{Cl}, \\ \nabla p_l &\cong \mathbf{B}_p \mathbf{a}_p, & \nabla C_{Ca}^f &\cong \mathbf{B}_{Ca} \mathbf{a}_{Ca}, & \nabla C_{Cl}^f &\cong \mathbf{B}_{Cl} \mathbf{a}_{Cl} \end{aligned} \quad (3.34)$$

gdzie  $\mathbf{B}_u, \mathbf{B}_p, \mathbf{B}_{Ca}, \mathbf{B}_{Cl}$  są macierzami zrózniczkowanych funkcji kształtu.

### 3.4 Układ równań przyrostowych MES

Wykorzystując w przyrostowym układzie równań słabego sformułowania wariacyjnego (3.1) obliczone przyrosty wektora naprężeń (3.2) oraz strumienia płynu (3.22) i strumieni jonów wapnia (3.29) i jonów chloru (3.31), otrzymamy końcową postać przyrostowego układu równań wariacyjnych w formie:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p_l} \Delta p_l + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Cl}^f} \Delta C_{Cl}^f \right] h \, d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} h \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \Delta \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{t}^* + \Delta \mathbf{t}^*) d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta p_l))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial p_l} \Delta p_l + \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f \right] h \, d\Omega = \\
& \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta p_l))^T \cdot \mathbf{q}_l h \, d\Omega - \int_{\Gamma_{q_{pl}}} \delta \Delta p_l \cdot (\mathbf{q}_l^* + \Delta \mathbf{q}_l^*) d\Gamma \\
& \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Ca}^f \cdot \Delta \dot{C}_{Ca}^t h \, d\Omega - \\
& \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Ca}^f))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial p_l} \Delta p_l + \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f \right] h \, d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Ca}^f \cdot \dot{C}_{Ca}^t h \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Ca}^f))^T \cdot \mathbf{q}_{Ca} h \, d\Omega - \\
& \int_{\Gamma_{q_{Ca}}} \delta \Delta C_{Ca}^f \cdot (\mathbf{q}_{Ca}^* + \Delta \mathbf{q}_{Ca}^*) d\Gamma \\
& \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Cl}^f \cdot \Delta \dot{C}_{Cl}^t h \, d\Omega - \\
& \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Cl}^f))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial C_{Cl}^f} \Delta C_{Cl}^f + \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f + \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial p_l} \Delta p_l \right] h \, d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Cl}^f \cdot \dot{C}_{Cl}^t h \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Cl}^f))^T \cdot \mathbf{q}_{Cl} h \, d\Omega - \\
& \int_{\Gamma_{q_{Cl}}} \delta \Delta C_{Cl}^f \cdot (\mathbf{q}_{Cl}^* + \Delta \mathbf{q}_{Cl}^*) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Układ równań przyrostowych MES otrzymamy przyjmując w (3.35) interpolacje wyrażone wzorami (3.33) i (3.34). Prowadzi to do układu równań różniczkowych zwyczajnych, który w rozwiniętym zapisie macierzowym ma formę:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{u-u} & \mathbf{K}_{u-p} & \mathbf{K}_{u-cl} & \mathbf{K}_{u-ca} \\ \mathbf{K}_{p-u} & \mathbf{K}_{p-p} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{p-ca} \\ \mathbf{K}_{cl-u} & \mathbf{K}_{cl-p} & \mathbf{K}_{cl-cl} & \mathbf{K}_{cl-ca} \\ \mathbf{K}_{ca-u} & \mathbf{K}_{ca-p} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ca-ca} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a}_u \\ \Delta \mathbf{a}_p \\ \Delta \mathbf{a}_{cl} \\ \Delta \mathbf{a}_{ca} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{p-p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{cl-cl} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{ca-ca} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a}_u \\ \Delta \mathbf{a}_p \\ \Delta \mathbf{a}_{cl} \\ \Delta \mathbf{a}_{ca} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}_u \\ \Delta \mathbf{r}_p \\ \Delta \mathbf{r}_{cl} \\ \Delta \mathbf{r}_{ca} \end{bmatrix} \quad (3.36a)
\end{aligned}$$

Natomiast w bardziej zwartej formie jest w postaci:

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{a} + \mathbf{P} \Delta \dot{\mathbf{a}} = \Delta \mathbf{r} \quad (3.36b)$$

Macierze i wektory występujące w układzie równań (3.36) zostały wyprowadzone w dodatku i mają one postać:

◆ elementy macierzy stycznej  $\mathbf{K}_T$

$$\mathbf{K}_{u-u} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}_u h d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{u-p} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \sigma}{\partial p_l} \mathbf{N}_p h d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{u-cl} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \sigma}{\partial C_{cl}^f} \mathbf{N}_{cl} h d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{u-ca} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \sigma}{\partial C_{ca}^f} \mathbf{N}_{ca} h d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{p-u} = - \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \frac{\partial q_l}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}_u h d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{p-p} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \frac{D_{0l}}{\phi_0} \phi \mathbf{B}_p h d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{p-ca} = - \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \frac{\partial q_l}{\partial C_{ca}^f} \mathbf{N}_{ca} h d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{Cl-u} = - \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}_u h d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{Cl-p} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \frac{D_{0l}}{\phi_0} \frac{\phi}{\rho_l} C_{Cl}^f \mathbf{B}_p h d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{Cl-cl} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \frac{D_{0Cl}\phi}{\phi_0} \mathbf{B}_{Cl} h d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \mathbf{v}_l \mathbf{N}_{Cl} h d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{Cl-Ca} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \frac{D_{0Cl}}{\phi_0} \nabla C_{Cl}^f \frac{\partial \phi}{\partial C_{Ca}^f} \mathbf{N}_{Ca} h d\Omega$$

• elementy macierzy  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}_{p-p} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T w \mathbf{N}_p h d\Omega = \mathbf{0} \quad (\text{zakłada się, że płyn nieściśliwy, } w = 0)$$

$$\mathbf{P}_{Ca-Ca} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_{Ca}^T \left[ \phi + \frac{C_{Ca}^t(C_{Ca}^f)}{C_{Ca}^f} \right] \mathbf{N}_{Ca} h d\Omega$$

$$\mathbf{P}_{Cl-cl} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_{Cl}^T \left[ \phi + \frac{C_{Cl}^t(C_{Cl}^f)}{C_{Cl}^f} \right] \mathbf{N}_{Cl} h d\Omega$$

• elementy wektora sił residualnych  $\Delta \mathbf{r}$

$$\Delta \mathbf{r}_u = \mathbf{F}_u^1 + \mathbf{F}_u^2 + \mathbf{F}_u^3 + \Delta \mathbf{F}_u^3$$

$$\mathbf{F}_u^1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}_u^2 = - \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \boldsymbol{\sigma} h d\Omega$$

$$\mathbf{F}_u^3 + \Delta \mathbf{F}_u^3 = \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{N}_u^T \Delta \mathbf{t}^* d\Gamma$$

$$\Delta \mathbf{r}_p = \mathbf{F}_p^1 + \mathbf{F}_p^2 + \mathbf{F}_p^3 + \Delta \mathbf{F}_p^3$$

$$\mathbf{F}_p^1 = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \dot{m} h d\Omega = \mathbf{0} \quad (\text{zakłada się stały stopień saturacji oraz } \dot{m} = 0)$$

$$\mathbf{F}_p^2 = \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \mathbf{q}_l h d\Omega$$



$$\mathbf{F}_p^3 + \Delta \mathbf{F}_p^3 = - \int_{\Gamma_{q_{pl}}} \mathbf{N}_p^T q_l^* d\Gamma - \int_{\Gamma_{q_{pl}}} \mathbf{N}_p^T \Delta q_l^* d\Gamma$$

$$\Delta \mathbf{r}_{Ca} = \mathbf{F}_{Ca}^1 + \mathbf{F}_{Ca}^2 + \mathbf{F}_{Ca}^3 + \Delta \mathbf{F}_{Ca}^3$$

$$\mathbf{F}_{Ca}^1 = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{Ca}^T \dot{C}_{Ca}^t h d\Omega$$

$$\mathbf{F}_{Ca}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Ca}^T \mathbf{q}_{Ca} h d\Omega$$

$$\mathbf{F}_{Ca}^3 + \Delta \mathbf{F}_{Ca}^3 = - \int_{\Gamma_{q_{Ca}}} \mathbf{N}_{Ca}^T q_{Ca}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_{q_{Ca}}} \mathbf{N}_{Ca}^T \Delta q_{Ca}^* d\Gamma$$

$$\Delta \mathbf{r}_{Cl} = \mathbf{F}_{Cl}^1 + \mathbf{F}_{Cl}^2 + \mathbf{F}_{Cl}^3 + \Delta \mathbf{F}_{Cl}^3$$

$$\mathbf{F}_{Cl}^1 = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{Cl}^T \dot{C}_{Cl}^t h d\Omega$$

$$\mathbf{F}_{Cl}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \mathbf{q}_{Cl} h d\Omega$$

$$\mathbf{F}_{Cl}^3 + \Delta \mathbf{F}_{Cl}^3 = - \int_{\Gamma_{q_{Cl}}} \mathbf{N}_{Cl}^T q_{Cl}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_{q_{Cl}}} \mathbf{N}_{Cl}^T \Delta q_{Cl}^* d\Gamma$$

### 3.5 Dyskretyzacja w czasie

Układ równań różniczkowych zwyczajnych (3.36) rozwiązywano metodą różnic skończonych, stosując wzór różnicowy postaci:

$$\frac{d}{dt}(\Delta a)_{n+1} \cong \frac{(\Delta a)_{n+1} - (\Delta a)_n}{\Delta t} \quad (3.37)$$

Wyrażenie (3.37) wynika z ogólniejszego równania:

$$f_{t+\Delta t} = f_t + ((1 - \gamma)\dot{f}_t + \gamma\dot{f}_{t+\Delta t})\Delta t \quad (3.38)$$

przy założeniu  $\gamma = 1$ . Z literatury wiadomo, że zastosowanie wyrażenia (3.37) zapobiega oscylacjom we wczesnych krokach obliczeniowych, aczkolwiek nie jest metodą o wysokiej dokładności, ABAQUS - podręcznik użytkownika [1].

Stosując wzór (3.37) w układzie równań (3.36), otrzymamy dla chwili  $t_{n+1}$  równania w postaci:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{u-u})_n & (\mathbf{K}_{u-p})_n & (\mathbf{K}_{u-cl})_n & (\mathbf{K}_{u-ca})_n \\ (\mathbf{K}_{p-u})_n & (\mathbf{K}_{p-p} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{p-p})_n & \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{p-ca})_n \\ (\mathbf{K}_{cl-u})_n & (\mathbf{K}_{cl-p})_n & (\mathbf{K}_{cl-cl} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{cl-cl})_n & (\mathbf{K}_{cl-ca})_n \\ (\mathbf{K}_{ca-u})_n & (\mathbf{K}_{ca-p})_n & \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{ca-ca} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{ca-ca})_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\Delta \mathbf{a}_u)_{n+1} \\ (\Delta \mathbf{a}_p)_{n+1} \\ (\Delta \mathbf{a}_{cl})_{n+1} \\ (\Delta \mathbf{a}_{ca})_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta \mathbf{r}_u)_n \\ (\Delta \mathbf{r}_p)_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{p-p})_n (\Delta \mathbf{a}_p)_n \\ (\Delta \mathbf{r}_{cl})_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{cl-cl})_n (\Delta \mathbf{a}_{cl})_n \\ (\Delta \mathbf{r}_{ca})_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{ca-ca})_n (\Delta \mathbf{a}_{ca})_n \end{bmatrix}, \quad (3.39a)$$

które można również zapisać w zwartej formie:

$$\overline{\mathbf{K}}_T \Delta \mathbf{a} = \Delta \overline{\mathbf{r}} \quad (3.39b)$$

gdzie:  $\overline{\mathbf{K}}_T$  - zmodyfikowana macierz styczna,  
 $\Delta \mathbf{a}$  - wektor przyrostów parametrów węzłowych,  
 $\Delta \overline{\mathbf{r}}$  - zmodyfikowany wektor sił residualnych.

Rozwiązaniem równania (3.39) jest wektor przyrostów zmiennych:

$$(\Delta \mathbf{a})_{n+1} = \{(\Delta \mathbf{a}_u)_{n+1}, (\Delta \mathbf{a}_p)_{n+1}, (\Delta \mathbf{a}_{cl})_{n+1}, (\Delta \mathbf{a}_{ca})_{n+1}\}$$

pozwalający na wyznaczenie wektora wartości zmiennych  $(\mathbf{a})_{n+1}$  w chwili  $t + \Delta t$

$$(\mathbf{a})_{n+1} = (\mathbf{a})_n + (\Delta \mathbf{a})_{n+1}.$$

Analizowany problem jest problemem nieliniowym i układ równań (3.39) jest rozwiązywany iteracyjnie. Zastosowaną metodę obliczeń opisano krótko w następnym punkcie pracy.

## 3.6 Metody iteracyjne rozwiązywania nieliniowych równań MES

W programie FEAP rozwiązując przykłady korzystano z metody Newtona-Raphsona oraz trzech możliwości sterowania procesem obliczeń, mianowicie przyjmując za niezależny parametr: parametr obciążenia, wybrane przemieszczenie lub tzw. parametr łuku, będący miarą długości ścieżki stanów równowagi w przestrzeni konfiguracyjno-obciążeniowej. W tym ostatnim przypadku formułuje się dodatkowo tzw. równanie więzów, wykorzystując kryteria typu geometrycznego, Riks [48], Crisfield [12], energetycznego i inne. Dla kompletności pracy, w dalszej części rozdziału, zostanie krótko opisana metoda Newtona-Raphsona dla klasycznego przypadku, kiedy niezależnym parametrem w analizie przyrostowej jest parametr obciążenia oraz przedstawiona zostanie idea budowy równania więzów na przykładzie równania więzów Crisfielda, Jirasek i wsp. [25]. Sterowanie parametrem obciążenia lub wybranym przemieszczeniem może być traktowane jako szczególny przypadek równania więzów, Waszczyszyn i wsp. [61].

### 3.6.1 Metoda Newtona-Raphsona dla sterowania obciążeniem

Proces iteracji Newtona-Raphsona wykonywany jest według wzorów, Jirasek i wsp. [25]:

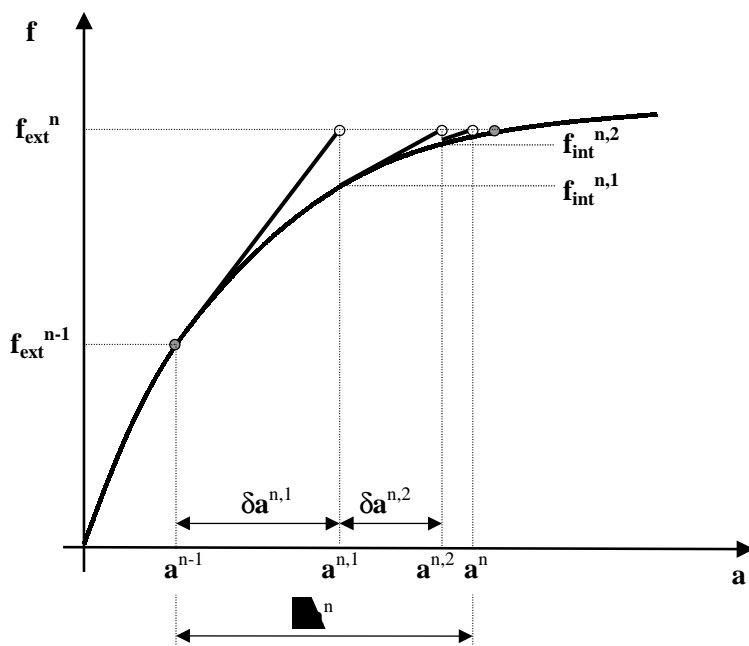
$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T^{n,i-1} \delta \mathbf{a}^{n,i} &= \mathbf{f}_{ext}^n - \mathbf{f}_{int}^{n,i-1} \\ \Delta \mathbf{a}^{n,i} &= \Delta \mathbf{a}^{n,i-1} + \delta \mathbf{a}^{n,i} \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.40)$$

gdzie:  $\Delta \mathbf{a}^{n,i}$  - przyrost wektora parametrów węzłowych w  $i$ -tej iteracji w  $n$ -tym kroku obliczeniowym,

$\delta \mathbf{a}^{n,i}$  - korekcja wektora parametrów węzłowych.

Zwykle różnicę pomiędzy wektorem obciążenia zewnętrznego i wektorem sił wewnętrznych oznacza się jako  $\Delta \mathbf{r}^{n,i-1} = \mathbf{f}_{ext}^n - \mathbf{f}_{int}^{n,i-1}$

W normalnych warunkach proces iteracyjny jest zbieżny, to znaczy  $\Delta \mathbf{a}^{n,i} \rightarrow \Delta \mathbf{a}^n$  gdy  $i \rightarrow \infty$ . Praktycznie proces iteracji jest zakończony jeśli odpowiednio zdefiniowany błąd obliczeń (na przykład norma wektora  $\delta \mathbf{a}$  lub różnicy wektora



Rys. 3.1: Schemat kroku obliczeniowego standardowej metody Newtona-Raphsona, Jirasek i wsp. [25]

obciążenia i sił wewnętrznych) jest mniejszy od zadanej tolerancji.

Na rysunku 3.1 proces iteracji Newtona-Raphsona został zilustrowany dla jednowymiarowego przypadku. W systemie FEAP istnieje możliwość wyboru pełnej lub modyfikowanej metody Newtona-Raphsona.

### 3.6.2 Równanie więzów

Równanie więzów to dodatkowe równanie wiążące nieznanne przemieszczenia  $\mathbf{a}$  (przyrosty) z parametrem obciążenia  $\lambda$ . Sens równania więzów, w przypadku jednowymiarowym, sprowadza się do narzucenia stałej odległości pomiędzy kolejnymi punktami ścieżki równowagi o współrzędnych przemieszczenie-obciążenie. Pomiar długości łuku rozumiany jako odległość pomiędzy kolejnymi, obliczonymi punktami ścieżki równowagi jest kontrowersyjny. Wystarczy tu wspomnieć o znaczeniu przyjętych jednostek rzutujących na miarę łuku. Rozwiązaniem jest przyjęcie współczynnika skalującego  $c$ , który ma umożliwić sprowadzenie miary parametru obciążenia do

miary wektora przemieszczeń. Wtedy długość łuku  $\Delta l$  może zostać zdefiniowana jako:

$$\Delta l = \sqrt{\Delta \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{a} + (c\Delta\lambda)^2} \quad (3.41)$$

gdzie:  $\Delta \mathbf{a}$  - zmiana wektora przemieszczeń,  
 $\Delta\lambda$  - zmiana parametru obciążenia.

Gdy na wektor  $\Delta \mathbf{a}$  składają się elementy o różnych miarach, na przykład prócz przesunięć, kąty obrotu, również konieczne jest ich skalowanie.

Punktem wyjściowym kolejnego kroku obliczeniowego są, wyznaczone w kroku poprzednim: przemieszczenia  $\mathbf{a}^{n,0} = \mathbf{a}^{n-1}$  i parametr obciążenia  $\lambda^{n,0} = \lambda^{n-1}$ . Wyznaczyć należy  $\mathbf{a}^n$ ,  $\lambda^n$ , tak by zachowana została równowaga pomiędzy siłami wewnętrznymi  $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{a}^n)$  i zewnętrznymi  $\mathbf{f}_{ext}(\lambda^n)$ .

Wektor obciążenia zewnętrznego  $\mathbf{f}_{ext}(\lambda^n)$  przyjmowany jest w formie iloczynu parametru obciążenia  $\lambda^n$  i zadanego z góry referencyjnego wektora obciążenia  $\bar{\mathbf{f}}$ .

$$\mathbf{f}_{ext}(\lambda^n) = \lambda^n \bar{\mathbf{f}} \quad (3.42)$$

Zlinearyzowane równania równowagi w  $i$ -tej iteracji,  $n$ -tego kroku obliczeń zostaną zapisane w postaci:

$$\mathbf{K}_T^{n,i-1} \delta \mathbf{a}^{n,i} = \mathbf{f}_0 + \lambda^{n,i-1} \bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_{int}^{n,i-1} + \delta \lambda^{n,i} \bar{\mathbf{f}} \quad (3.43)$$

gdzie  $\bar{\mathbf{f}}_0$  jest obciążeniem początkowym (na przykład siły grawitacyjne). Wielkości z indeksem  $i - 1$  zostały wyznaczone w poprzedniej iteracji, niewiadome do wyznaczenia to  $\delta \mathbf{a}^{n,i}$ ,  $\delta \lambda^{n,i}$ . Rozpisując korekcję przemieszczeń  $\delta \mathbf{a}^{n,i}$  na sumę:

$$\delta \mathbf{a}^{n,i} = \delta \mathbf{a}_0 + \delta \lambda^{n,i} \delta \mathbf{a}_f \quad (3.44)$$

gdzie:  $\delta \mathbf{a}_0$  - składnik związany z trzema pierwszymi, znanymi wyrażeniami prawej strony równania (3.43),  
 $\delta \lambda^{n,i} \delta \mathbf{a}_f$  - składnik związany z czwartym wyrażeniem prawej strony równania (3.43).

otrzymamy:

$$\mathbf{K}_T^{n,i-1} \delta \mathbf{a}_0 = \mathbf{f}_0 + \lambda^{n,i-1} \bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_{int}^{n,i-1} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{K}_T^{n,i-1} \delta \mathbf{a}_f = \bar{\mathbf{f}} \quad (3.46)$$

Teraz składniki wektora korekcji mogą zostać wyznaczone. Korekcja wektora przemieszczeń umieszczona w równaniu więzów (3.41) podniesionym do kwadratu:

$$(\Delta \mathbf{a}^{n,i-1} + \delta \mathbf{a}^{n,i})^T (\Delta \mathbf{a}^{n,i-1} + \delta \mathbf{a}^{n,i}) + c^2 (\Delta \lambda^{n,i-1} + \delta \lambda^{n,i})^2 = (\Delta l)^2 \quad (3.47)$$

to równanie kwadratowe z niewiadomą  $\delta \lambda^{n,i}$ . Jest to znane równanie więzów Crisfielda. Rozwiązaniem są zwykle dwa pierwiastki rzeczywiste. Wybór jednego z rozwiązań zależy od tego, w którą stronę zamierzamy się poruszać po ścieżce równowagi. Analogicznie jak w metodzie Newtona-Raphsona i innych, proces iteracji jest kontynuowany do osiągnięcia wymaganej zbieżności.

### 3.7 Uproszczony model obliczeniowy MES

Przyrostowy układ równań (3.39) ma złożoną strukturę wynikającą z uwzględnienia sprzężeń pomiędzy niewiadomymi przyrostami wektorów, opisującymi stany: mechaniczny, fizyczny i chemiczny konstrukcji. Mimo uwzględnienia przyjętych wcześniej założeń, w każdym węźle układu zdyskretyzowanego elementami skończonymi, podczas kolejnych iteracji należy wyznaczyć:

1.  $\Delta u_x, \Delta u_y$  - przyrosty przemieszczeń,
2.  $\Delta p_l$  - przyrosty ciśnienia płynu w porach,
3.  $\Delta C_{Cl}^f$  - przyrosty koncentracji jonów chloru w płynie wypełniającym pory,
4.  $\Delta C_{Ca}^f$  - przyrosty koncentracji jonów wapnia w płynie wypełniającym pory.

Rozwiązanie układu równań (3.39), to zadanie o (pesymistycznej) złożoności obliczeniowej proporcjonalnej do sześciangu ilości równań  $n$   $O(n^3)$  (równej iloczynowi ilości zmiennych  $n_z$  i ilości węzłów  $n_w$ ). Nawet dla tak niewielkiej konstrukcji jak konstrukcja analizowana w przykładzie 4.5 ilość węzłów  $n_w = 1036$  i ilość nieznanych funkcji  $n_z = 5$  to zadanie o złożoności  $O((1036 * 5)^3) \cong 1,39E11$ . Rzeczywiste konstrukcje, to znacznie większe ilości węzłów i znaczny rozmiar obliczeniowy zadania. Zmniejszenie rozmiarów zadania kosztem niewielkiego obniżenia dokładności obliczeń wydaje się być celowe. Rozwiązaniem może być, fizycznie uzasadnione,

zaniedbanie niektórych wzajemnych wpływów przyrostów zmiennych w kolejnych iteracjach, w taki sposób by macierz współczynników w równaniu (3.39) przybrała formę macierzy trójkątnej. Wówczas możliwe staje się rozwiązanie układu analogicznie jak w metodzie eliminacji Gaussa. Kolejne zmienne stanu, opisywane kolejnymi równaniami "od dołu w górę", wyznaczone będą przy uwzględnieniu wartości całkowitych i przyrostów zmiennych opisywanych równaniami "niższymi" i tylko wartościami całkowitymi zmiennych opisywanych równaniami "wyższymi". Utrata dokładności spowodowana jest wówczas zaniedbaniem uwzględnienia przyrostów wartości zmiennych stanu opisywanych równaniami "wyższymi". Zadanie rozwiązania układu  $n$  równań liniowych, gdzie  $n = n_w \times n_z$  zastąpione zostanie zadaniem rozwiązania trzech układów równań liniowych o rozmiarze  $n_w$ , związanych z wyznaczeniem przyrostów ciśnienia płynu i koncentracji jonów chloru i wapnia, oraz układu równań liniowych o rozmiarze  $2 \times n_w$ , związanych z wyznaczeniem przyrostów przemieszczeń węzłów na płaszczyźnie. Złożoność obliczeniowa takiego rozwiązania to  $O(n_w^3 + n_w^3 + n_w^3 + (2 \times n_w)^3)$ . Dla konstrukcji analizowanej w przykładzie (4.5) -  $O((1036)^3 + (1036)^3 + (1036)^3 + (2 \times 1036)^3) \cong 1,22E10$  czyli 11,36 razy mniejszy niż dla rozwiązania pełnego układu (3.36).

Przyjęcie wariantu modelu uproszczonego jest związane z kolejnością wyznaczania przyrostów poszczególnych zmiennych. W proponowanym modelu opisującym cztery zmienne, zastosować można teoretycznie aż  $4! = 24$  sposoby jego uproszczenia, przez dążenie do uzyskania trójkątnej macierzy stycznej.

Racjonalny taki wybór wymaga jednakże ustalenia hierarchii wpływów przyrostów zmiennych stanu na pozostałe zmienne tak, by pominięte zostały najmniej istotne zależności. Hierarchia wpływów jest zależna od obciążenia, wymiarów i parametrów materiałów konstrukcji.

W pracy zdecydowano się na przyjęcie uproszczonego modelu obliczeniowego wyrażającego się układem równań przyrostowych:

$$\begin{bmatrix}
 (\mathbf{K}_{u-u})_n & (\mathbf{K}_{u-p})_n & (\mathbf{K}_{u-cl})_n & (\mathbf{K}_{u-ca})_n \\
 \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{cl-cl} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{cl-cl})_n & (\mathbf{K}_{cl-ca})_n & (\mathbf{K}_{cl-p})_n \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{ca-ca} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{ca-ca})_n & (\mathbf{K}_{ca-p})_n \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{p-p} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{p-p})_n
 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix}
 (\Delta \mathbf{a}_u)_{n+1} \\
 (\Delta \mathbf{a}_{cl})_{n+1} \\
 (\Delta \mathbf{a}_{ca})_{n+1} \\
 (\Delta \mathbf{a}_p)_{n+1}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 (\Delta \mathbf{r}_u)_n \\
 (\Delta \mathbf{r}_{cl})_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{cl-cl})_n (\Delta \mathbf{a}_{cl})_n \\
 (\Delta \mathbf{r}_{ca})_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{ca-ca})_n (\Delta \mathbf{a}_{ca})_n \\
 (\Delta \mathbf{r}_p)_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{p-p})_n (\Delta \mathbf{a}_p)_n
 \end{bmatrix}$$

(3.48)

Jak widać w powyższym układzie równań pominięty został wpływ przyrostów porowatości mechanicznej na transport płynu i jonów, oraz wpływ przyrostów porowatości związanej z ubytkiem jonów wapnia na transport płynu.

Efekty takiego uproszczenia modelu przedyskutowano w przykładzie 4.6.



# Rozdział 4

## PRZYKŁADY

### 4.1 Uwagi wstępne

Efektywność opracowanych modeli obliczeniowych została szeroko zweryfikowana na przykładach analizy statycznej tarcz betonowych i żelbetowych obciążonych mechanicznie i chemicznie. Obliczone przykłady mają charakter oryginalny, ponieważ w literaturze nie znaleziono podobnych rozwiązań analizujących zmianę sztywności i nośności konstrukcji żelbetowych pod wpływem wieloskładnikowego środowiska agresywnego.

Wszystkie dane materiałowe dla betonu i stali zbrojeniowej, wykorzystane w obliczonych przykładach, zestawiono w tab. 4.1, 4.2. W dalszym ciągu opisano szczegółowo cztery obszerne przykłady, które tak dobrano, aby zilustrować możliwie wszystkie cechy opracowanego modelu matematycznego.

Celem przykładu 1 jest ilustracja mechanizmu konwekcji i wprowadzenia parametru porowatości mechanicznej  $\phi_m$  oraz ich znaczenia w procesach transportu jonów i co za tym idzie dla żywotności konstrukcji.

Na przykład 2 składają się dwie fazy. W pierwszej, żelbetowa konstrukcja poddana jest obciążeniu mechanicznemu powodującemu jej częściowe zniszczenie w postaci niezerowego pola skalaru zniszczenia mechanicznego. Zgodnie z przyjętym modelem, skalar zniszczenia mechanicznego wyznaczony w pierwszej fazie, spowoduje zwiększenie porowatości materiału o dodatkowy składnik porowatości mechanicznej  $\phi_m$ , co w konsekwencji ułatwia transport jonów w fazie drugiej eksperymentu, gdzie

rozpatrywany jest czas do osiągnięcia progu korozji w rejonie zbrojenia.

W przykładzie 3 wykonane zostały obliczenia konstrukcji pod mechanicznym obciążeniem statycznym i poddanej równoczesnemu działaniu agresywnego środowiska. Żywotność żelbetowego wycinka płyty została tu określona ze względu na zmieniające się parametry mechaniczne betonu, oraz ze względu na warunki inicjacji korozji przy zbrojeniu.

Przykład 4 jest sprawdzianem konsekwencji zastosowania do analizy uproszczonego modelu zaproponowanego w punkcie 3.7.

## 4.2 Opis modyfikacji systemu FEAP

Do dyskretyzacji skończenie elementowej konstrukcji zastosowano czterowęzłowe, czworokątne elementy skończone z biblioteki systemu FEAP. Wymagało to jednak modyfikacji procedur istniejących w systemie oraz dodatkowo, opracowania własnych procedur. Między innymi wykonano:

1. Wprowadzenie do węzła siatki skończenie elementowej dodatkowych stopni swobody dla interpolacji koncentracji jonów chloru, koncentracji jonów wapnia i ciśnienia płynu w porach. (5 stopnie swobody w miejsce 3 stopni swobody - 2 przemieszczenia i temperatura).
2. Wprowadzenie do systemu nowych procedur wyznaczających parametry skalarne zniszczenia mechanicznego i chemicznego.
3. Oprogramowanie historii procesu narastania zniszczenia mechanicznego i chemicznego materiału.
4. Opracowanie nowych procedur opisujących transport materii, a w nich opis zależności dyfuzyjności i przepuszczalności od porowatości oraz opis konwekcji.
5. Oprogramowanie zależności funkcyjnych porowatości od koncentracji jonów wapnia, skalnych parametrów zniszczenia mechanicznego i aktualnego stanu odkształcenia oraz progu granicznego odkształcenia sprężystego od skalarnego parametru zniszczenia chemicznego.

Własność	Wartość	Jednostki	
$E$	3,77e10	$N/m^2$	
$\nu$	0,18		
$\kappa_{00}^+$	1,0e-4		
$\kappa_{00}^-$	1,0e-3		
$\alpha_c$	0,5		
$f_t$	$E \cdot \kappa_{00}^+$	$N/m^2$	
$f_c$	$E \cdot \kappa_{00}^-$	$N/m^2$	
$G_f^+$	50	$N/m$	
$G_f^-$	3500	$N/m$	
$A^+$	0,95		
$B^+$	2200		
$A^-$	0,8		
$B^-$	300,0		
$C_{Ca0}^f$	25,0	$mol/m^3$	
$C_{Ca0}^b$	15,0	$kmol/m^3$	
$C_{CaP}^f$	20,0	$mol/m^3$	
$C_{CaSH}^f$	1,5	$mol/m^3$	
$C_{CaH}^b$	9,0	$kmol/m^3$	
$C_{CaKruszywa}$	1,0	$kg/m^3$	
$\alpha_{Ca}$	0,565		(formuła (2.23))
$m$	5		(formuła (2.23))
$n$	85		(formuła (2.23))
$\phi_0$	0.05		
$D_{0l}$	2,3e-12	$s$	
$D_{0Ca}$	2,3e-13	$m^2/s$	
$\alpha_{Ca}$	29		
$D_{0Cl}$	2,3e-12	$m^2/s$	
$\alpha_{Cl}$	1,03		
$\beta_{Cl}$	0,36		
$\phi_{Cl}^{ref}$	0,8		
$C_{Cl}^{ref}$	10,0	$kg/m^3$	
$b$	$\sqrt{0,05}$		

Tabela 4.1: Parametry betonu wykorzystane w obliczonych przykładach.

Własność	Wartość	Jednostki
E	2.2e11	$N/m^2$
$\phi$	14	$mm$

Tabela 4.2: Parametry stali zbrojeniowej wykorzystane w obliczonych przykładach.

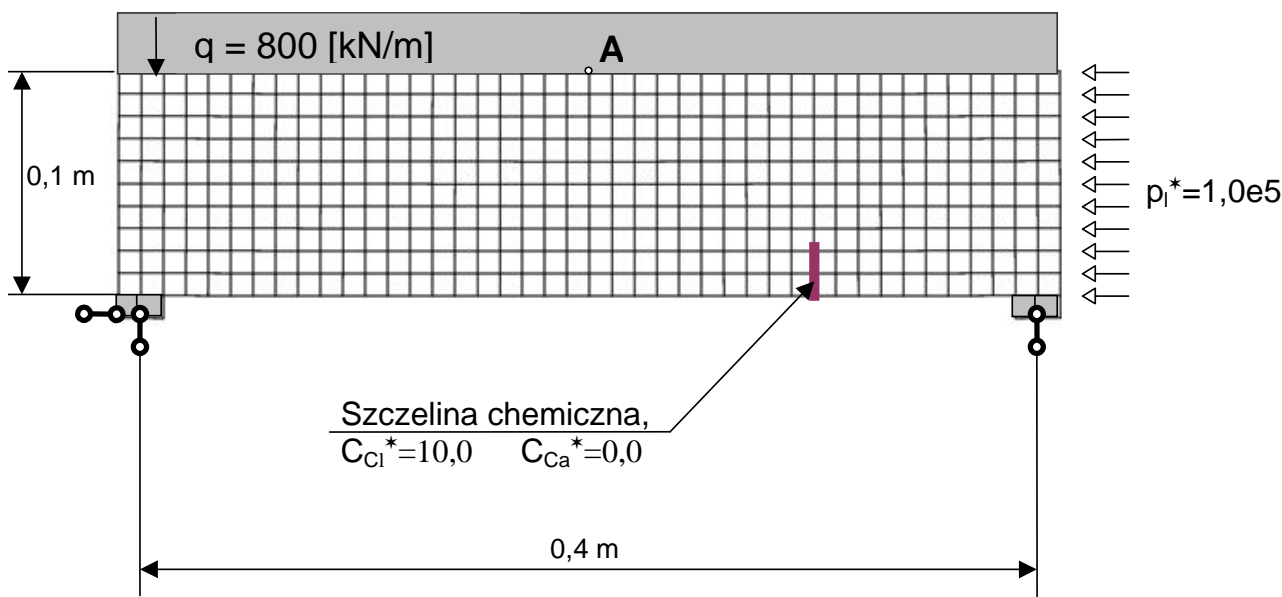
- Opracowanie nowych procedur wyznaczających aktualne macierze sztywności materiału, wektory naprężeń oraz macierze sztywności stycznej elementu skończonego.

### 4.3 Przykład 1 - teoretyczny

Celem przykładu jest pokazanie działania proponowanego modelu w jak najbardziej obrazowy sposób, w tym zwłaszcza mechanizmu konwekcji, jej znaczenia w transporcie jonów i co za tym idzie, znaczenia dla żywotności konstrukcji. Z założenia, wymiary i sposób obciążenia nie stanowią modelu fragmentu rzeczywistej konstrukcji.

Analizowana jest prostokątna tarcza betonowa jednostkowej grubości, spełniająca warunki płaskiego stanu odkształcenia, podparta w dwu dolnych narożach, pokazana na rys. 4.1 wraz z dyskretyzacją. W miejscach podparcia tarczy zastosowano podkładki o dziesięciokrotnie większej sztywności materiału. Obciążeniem mechanicznym tarczy, jest ciągle obciążenie statyczne górnej krawędzi o wartości  $800 [kN/m]$ , nie przekraczające nośności konstrukcji. Obciążenie chemiczne jest realizowane w postaci rysy na dolnej krawędzi, przez którą do wewnątrz migrują jony chloru, a na zewnątrz wymywane są jony wapnia. Rysa nie ma charakteru mechanicznego, a tylko chemiczny. W obliczeniach została ona zamodelowana przez zadanie w trzech węzłach koncentracji jonów chloru  $C_{Cl}^* = 10.0 [kg/m^3]$  oraz zerowej koncentracji jonów wapnia  $C_{Ca}^* = 0.0 [kg/m^3]$  to jest o  $1,0 [kg/m^3]$  mniejszej niż początkowa koncentracja jonów wapnia w płynie wypełniającym pory.

Początkowo nie zostało zadane obciążenie w postaci ciśnienia płynu - zjawisko



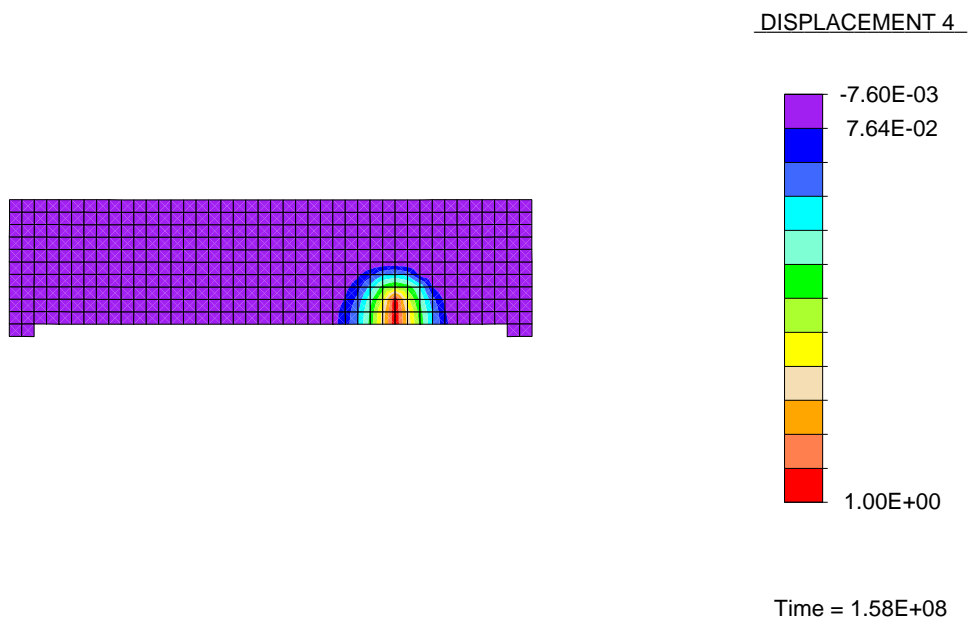
Rys. 4.1: Przykład 1 - Tarcza betonowa, wymiary, obciążenie i dyskretyzacja.

konwekcji nie występuje. Transport jonów oparty jest tylko na mechanizmie dyfuzji.

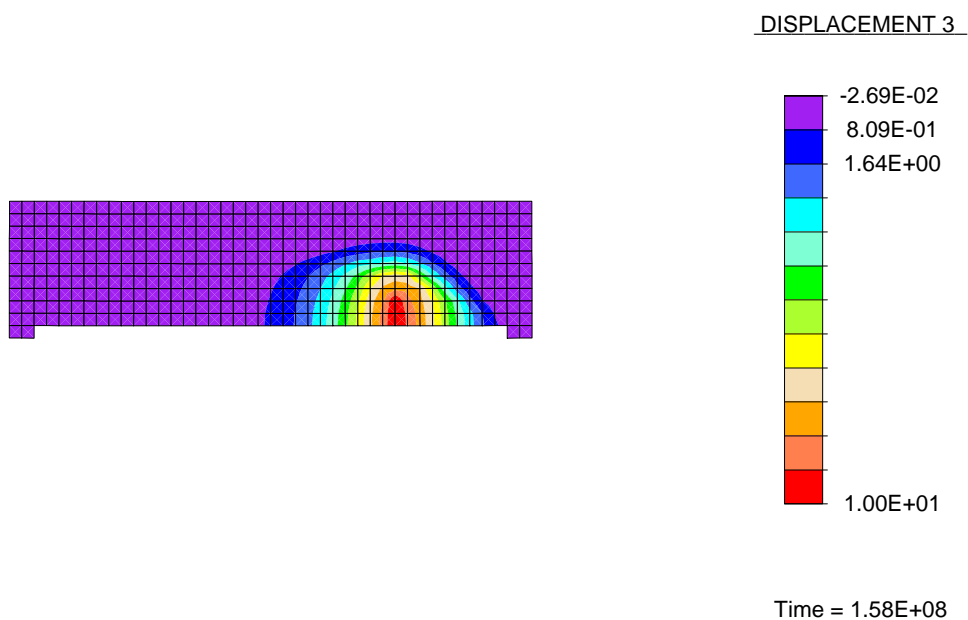
Na rys. 4.2, 4.3 pokazane zostały spadek koncentracji jonów wapnia w płynie wypełniającym pory oraz koncentracja jonów chloru w płynie wypełniającym pory po upływie pięciu lat od obciążenia konstrukcji. Jak widać zwłaszcza na rys. 4.3 widoczny jest przyspieszony transport jonów w środkowej, dolnej części tarczy, gdzie porowatość mechaniczna  $\phi_m$  opisana formułą (2.80) jest największa.

W drugim wariancie eksperymentu numerycznego, dodatkowo prawa krawędź obciążona jest ciśnieniem płynu  $p_l^* = 1,0e5 [N/m^2]$ , a na lewej krawędzi zostało zadane zerowe ciśnienie płynu  $p_l^* = 0,0 [N/m^2]$ . Różnica ciśnień na bocznych krawędziach powoduje przepływ płynu w porach betonu. Rozkład ciśnienia płynu wypełniającego pory został pokazany na rys. 4.4. Tu również widoczne są efekty zwiększonej porowatości mechanicznej w środkowym, dolnym rejonie tarczy.

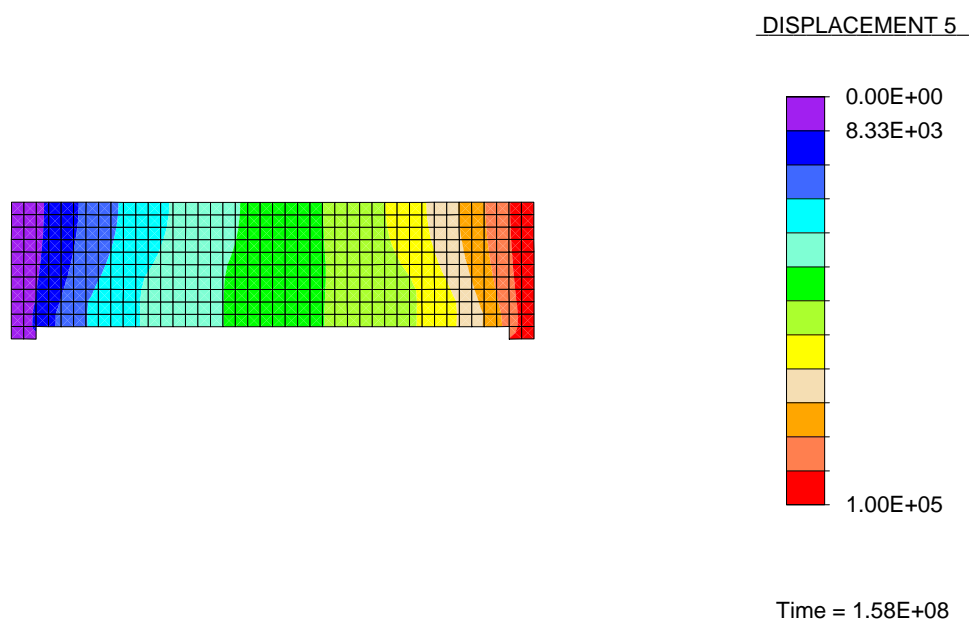
Przepływ płynu w porach betonu spowodowany obciążeniem przez zadane na



Rys. 4.2: Przykład 1 - Obraz ubytku koncentracji jonów wapnia po upływie pięciu lat [ $kg/m^3$ ].



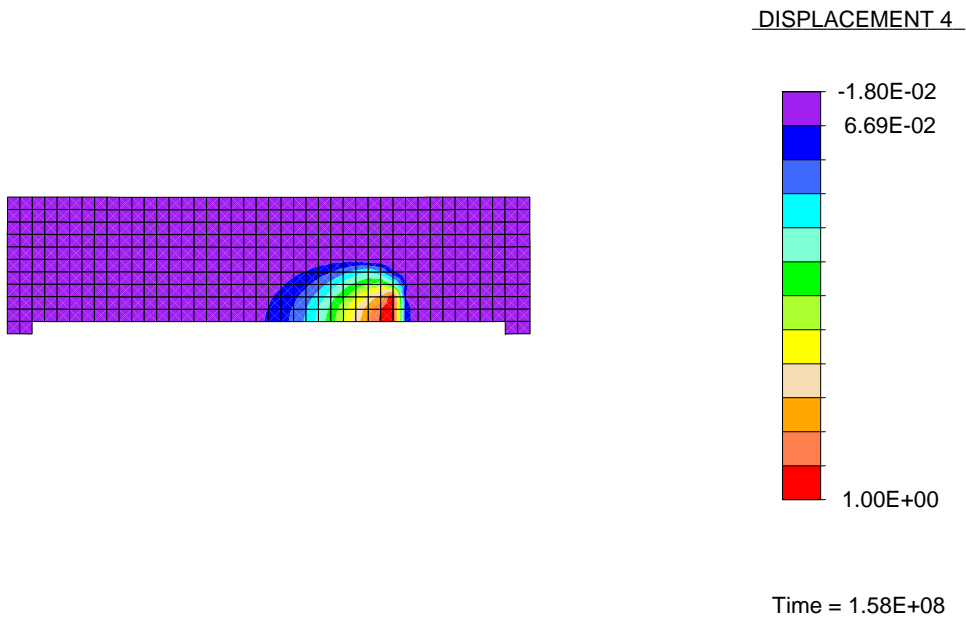
Rys. 4.3: Przykład 1 - Obraz koncentracji jonów chloru po upływie pięciu lat [ $kg/m^3$ ].



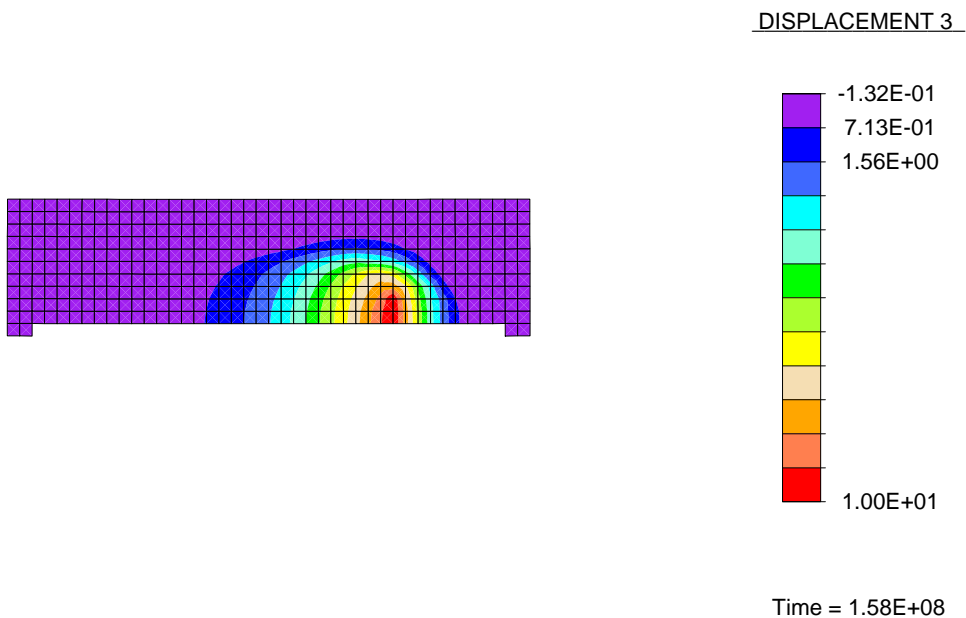
Rys. 4.4: Przykład 1 - Rozkład ciśnienia płynu wypełniającego pory po upływie pięciu lat [ $N/m^2$ ].

bocznych krawędziach ciśnienie płynu, powoduje zjawisko konwekcji w transporcie jonów chloru i wapnia w materiale. Prócz ruchu spowodowanego gradientami koncentracji jonów, pojawia się zjawisko ich unoszenia przez przepływający systemem porów płyn.

Na rys. 4.5, 4.6 pokazane zostały spadek koncentracji jonów wapnia w płynie wypełniającym pory oraz koncentracja jonów chloru w płynie wypełniającym pory przy występującej konwekcji. W obydwu wariantach, w efekcie migracji jonów chloru i wypłukiwania jonów wapnia postępuje degradacja materiału tarczy, to jest obniżanie wartości parametrów mechanicznych. Przy stałej wartości mechanicznego obciążenia lecz obniżającej się sztywności tarczy zwiększają się ugięcia. W rozważanym przykładzie, taka tendencja jest pokazana na rys. 4.7. Wreszcie obniżająca się nośność konstrukcji nie jest wystarczająca do przeniesienia zadanego obciążenia. W wariantcie doświadczenia z konwekcją, transport jonów chloru do rejonu maksymalnych naprężeń rozciągających jest znacznie przyspieszony. Przyspieszone jest także wypłukiwanie jonów wapnia w niebezpiecznym rejonie. W rezultacie konwekcja znacznie zmniejsza żywotność analizowanej tarczy.

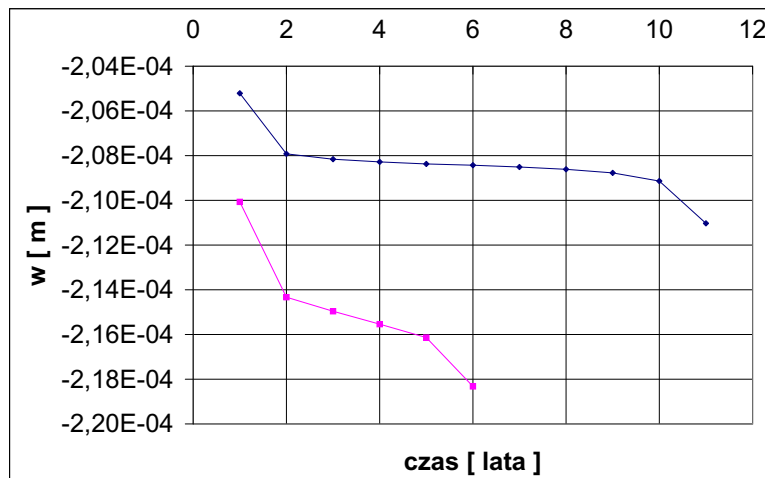


Rys. 4.5: Przykład 1 - Obraz ubytku koncentracji jonów wapnia po upływie pięciu lat przy występującej konwekcji [ $kg/m^3$ ].



Rys. 4.6: Przykład 1 - Obraz koncentracji jonów chloru po upływie pięciu lat przy występującej konwekcji [ $kg/m^3$ ].



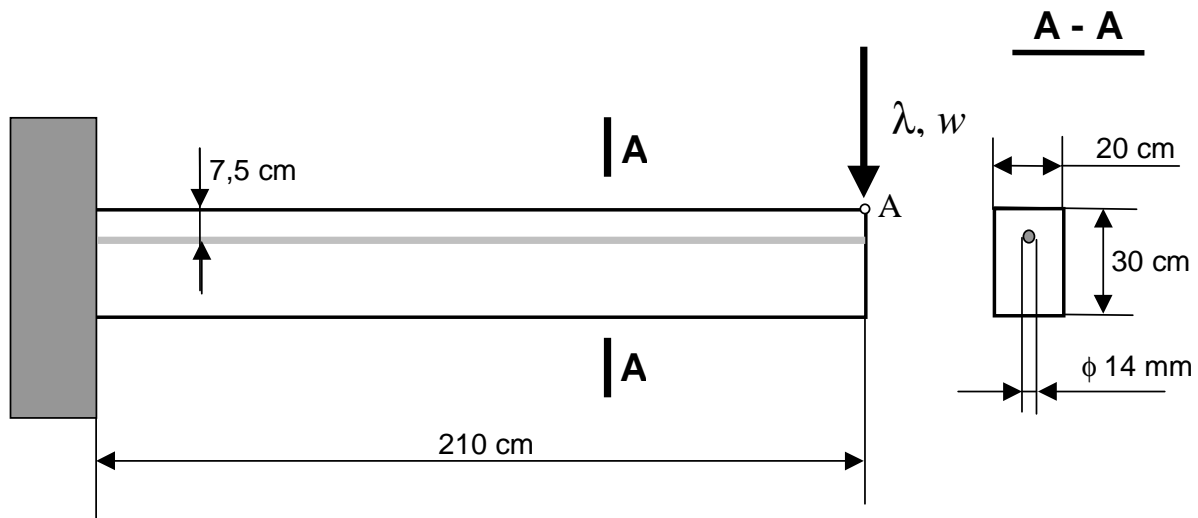


Rys. 4.7: Przykład 1 - Ugięcia punktu *A* - porównanie wariantów z występowaniem (kolor granatowy) i bez występowania (kolor fioletowy) konwekcji.

#### 4.4 Przykład 2 - wyznaczenie czasu inicjacji korozji zbrojenia w płycie uszkodzonej mechanicznie

W tym przykładzie rozważany jest wycinek płyty (parkingu lub jezdni) grubości 30 cm i zbrojonej prętami  $\phi$  14 mm umieszczonymi co 20 cm na wysokości 7,5 cm poniżej górnej powierzchni płyty. Płyta jest utwierdzona wzdłuż jednej krawędzi i obciążona obciążeniem ciągłym wzdłuż brzegu swobodnego. Przyjęto, że analizowany wycinek płyty o szerokości 20 cm spełnia warunki płaskiego stanu odkształcenia. Wymiary i obciążenie tak zdefiniowanej konstrukcji zostały pokazane na rys. 4.8.

Wycinek płyty został dyskretyzowany  $84 \times 12 = 1008$  elementami skończonymi o wymiarach  $2,5 \times 2,5$  cm. Analizę wykonano w dwóch etapach. W etapie pierwszym obciążono konstrukcję obciążeniem statycznym do poziomu, w którym wystąpi jej uszkodzenie w strefie przypodporowej, a następnie, w drugim etapie, obciążono ją chemicznie, w sposób symulujący działanie agresywnego środowiska. Celem przykładu jest porównanie, zmieniających się w czasie, warunków korozji zbrojenia w tarczy nieuszkodzonej i uszkodzonej mechanicznie.



Rys. 4.8: Przykład 2 - Wycinek płyty.

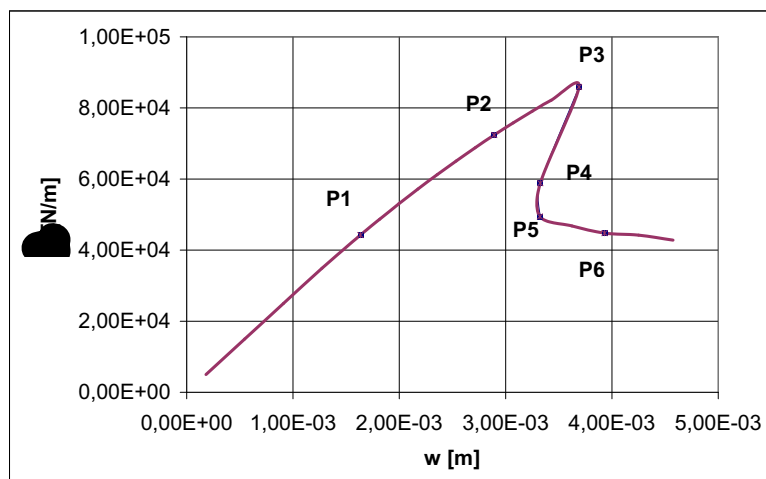
#### 4.4.1 Uszkodzenie mechaniczne

W części mechanicznej analizy, wycinek płyty jest obciążony na swobodnym końcu pionową siłą skupioną, proporcjonalną do parametru obciążenia  $\lambda$ . Analiza uszkodzenia nie jest sprzężona z późniejszą analizą wpływu środowiska agresywnego. Oznacza to, że analizę mechaniczną zrealizowano, rozwiązując układ równań MES w postaci:

$$\mathbf{K}_{u-u} \Delta \mathbf{a}_u = \Delta \mathbf{r}_u \quad (4.1)$$

Przyrostowy układ równań MES rozwiązywano metodą parametru łuku, przyjmując liniowe równanie więzów. W efekcie przekroczenia w konstrukcji granicznych odkształceń sprężystych, pojawia się pole niezerowych skalarów zniszczenia mechanicznego. Przekrojem występowania maksymalnych odkształceń jest krawędź utwierdzenia i tu zniszczenie mechaniczne też jest największe. Wykres pokazany na rys. 4.9 ilustruje zależność obciążenie  $\lambda$  - ugięcie  $w$  punktu  $A$  rys. 4.8. Na rys. 4.9 oznaczono punkty  $P1$  do  $P6$ , które odpowiadają różnym stanom wyężenia konstrukcji. Odpowiadające im rozkłady zniszczenia, w węzłach numerycznego całkowania, przy utwierdzeniu pokazano na rys. 4.10. Do dalszych obliczeń przyjęto stan uszkodzenia tarczy dla obciążenia  $P1$ . Skalarny parametr zniszczenia związany ze ściskaniem  $\omega^-$

jest zerowy w całej konstrukcji.

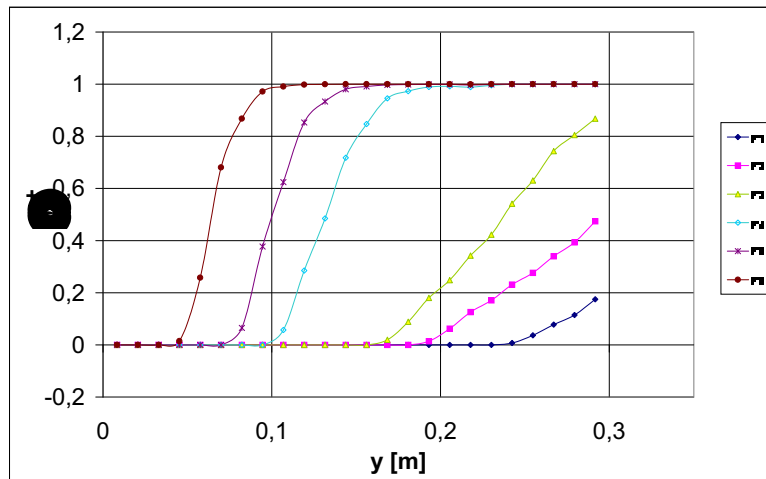


Rys. 4.9: Przykład 2 - Zależność obciążenie/ugięcie  $w$  punktu  $A$ .

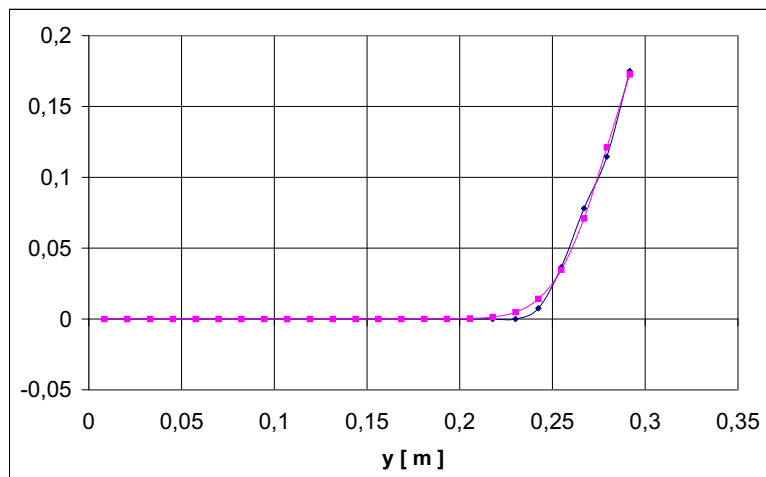
Rozkład skalarne go parametru zniszczenia mechanicznego  $\omega^+$  dla obciążenia  $P1$  został aproksymowany krzywą Gaussa postaci:

$$\omega^+(y) = A \exp\left(-\left(\frac{y-B}{C}\right)^2\right) \quad (4.2)$$

Wartości parametrów zostały wyznaczone metodą najmniejszej sumy kwadratów:  $A = 0,21$ ,  $B = 0,31$ ,  $C = 0,04$ . Aproksymację funkcji  $\omega^+(y)$ ,  $0 \leq y \leq 0,3m$  ilustruje wykres pokazany na rys. 4.11. Funkcję aproksymującą zniszczenie w utwierdzeniu wykorzystano do wyznaczenia porowatości mechanicznej  $\phi_m$  w drugiej części przykładu.



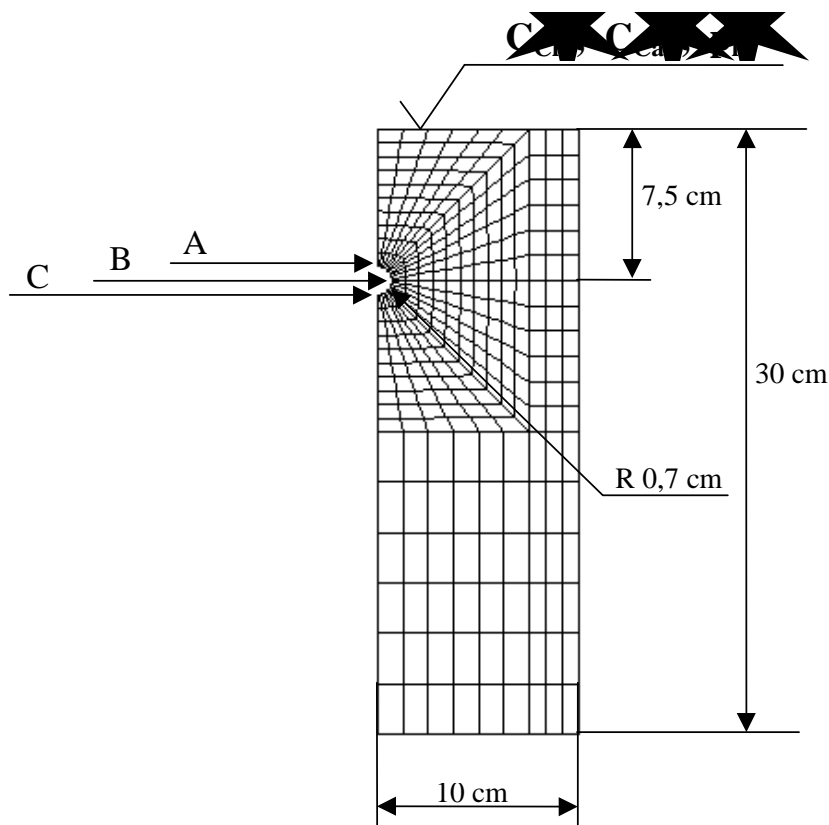
Rys. 4.10: Przykład 2 - Rozkład skalaru zniszczenia mechanicznego  $\omega^+$  przy utwierdzonej krawędzi, dla poziomów obciążenia  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$ ,  $P4$ ,  $P5$ ,  $P6$ .



Rys. 4.11: Przykład 2 - Rozkład skalaru zniszczenia mechanicznego  $\omega^+$  (kolor granatowy) aproksymowany krzywą Gauss'a (kolor fioletowy), dla obciążenia  $P1$ .

#### 4.4.2 Działanie agresywnego środowiska

W tym etapie analizy uwzględniono symetrię, rozważając połowę przekroju poprzecznego, rys. 4.12. Przekrój zdyskretyzowano 330-oma czworokątnymi elementami skończonymi. W obliczeniach wykorzystano jego symetrię. Górna powierzchnia



Rys. 4.12: Przykład 2 - Przekrój poprzeczny zdyskretyzowany czworokątnymi elementami skończonymi.

wycinka płyty została obciążona przez zadanie wartości brzegowych:

1. Koncentracja jonów chloru w płynie  $C_{Cl}^* = 1,0 [kg/m^3]$ ,
2. Koncentracja jonów wapnia  $C_{Ca}^* = 0,0 [kg/m^3]$ , to jest o  $1,0 [kg/m^3]$  mniejsza niż początkowa koncentracja jonów wapnia w płynie,
3. Ciśnienie płynu  $p_l^* = 1e4 [N/m^2] \cong 0,1 [atm]$ .

Na dolnej krawędzi zostało zadane ciśnienie płynu równe zero. Jak to stwierdzono wcześniej, niszczący wpływ działania jonów chloru na szkielet jest dyskusyjny i w analizowanym przykładzie tak dobrano parametry i obciążenie  $C_{Cl}^* = 1,0 [kg/m^3]$ , że wartość parametru zniszczenia  $\omega_{Cl}$  nie przekracza wartości 0,05.

W tym etapie rozwiązywano pozostałą część równań MES (3.39) w formie:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{p-p} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{p-p})_n & \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{p-Ca})_n \\ (\mathbf{K}_{Cl-p})_n & (\mathbf{K}_{Cl-Cl} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{Cl-Cl})_n & (\mathbf{K}_{Cl-Ca})_n \\ (\mathbf{K}_{Ca-p})_n & \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{Ca-Ca} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{Ca-Ca})_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ((\Delta \mathbf{a}_p)_{n+1}) \\ (\Delta \mathbf{a}_{Cl})_{n+1} \\ (\Delta \mathbf{a}_{Ca})_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta \mathbf{r}_p)_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{p-p})_n (\Delta \mathbf{a}_p)_n \\ (\Delta \mathbf{r}_{Cl})_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{Cl-Cl})_n (\Delta \mathbf{a}_{Cl})_n \\ (\Delta \mathbf{r}_{Ca})_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{Ca-Ca})_n (\Delta \mathbf{a}_{Ca})_n \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Na obwodzie pręta zbrojeniowego, wybrane zostały (wskazane na rys. 4.12) punkty  $A, B, C$ , w których dalej będą badane warunki wystąpienia korozji.

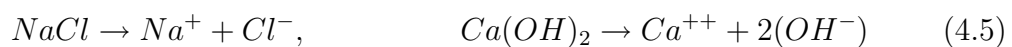
Do obliczenia porowatości mechanicznej  $\phi_m$  w węzłach numerycznego całkowania wykorzystano rozkład parametru zniszczenia  $\omega(y)$  według funkcji aproksymacyjnej (4.2), wyznaczonej w etapie mechanicznym. Na rys. 4.13 i 4.14 prezentowane są obrazy koncentracji jonów chloru i ubytku koncentracji jonów wapnia w płynie po upływie 50-ciu lat. Rys. 4.15 i 4.16 ilustrują zmiany koncentracji jonów chloru i spadku koncentracji jonów wapnia rozpuszczonych w płynie wypełniającym pory betonu w punktach  $A, B, C$ .

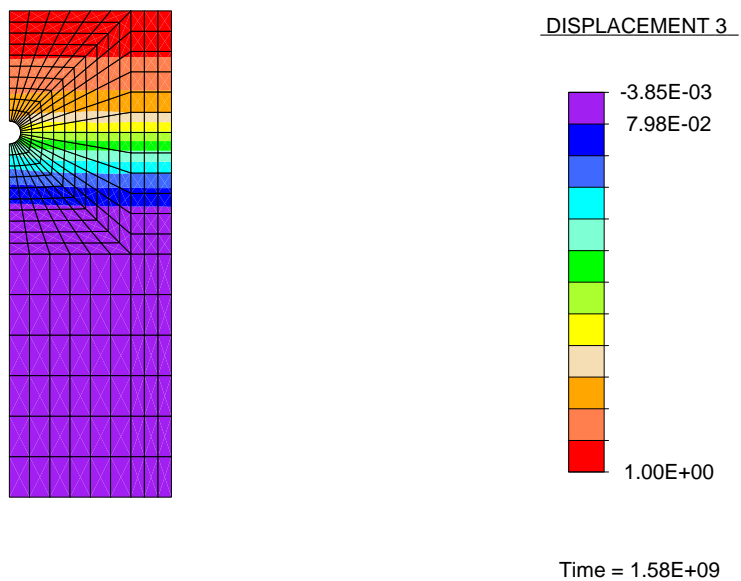
Zdaniem autora kształty wykresów na rys. 4.15, 4.16 związane są z zastosowaniem formuły (2.23) zilustrowanej na rys. 2.3.

Zakłada się, że o warunkach korozyjności decyduje proporcja stężeń molowych:

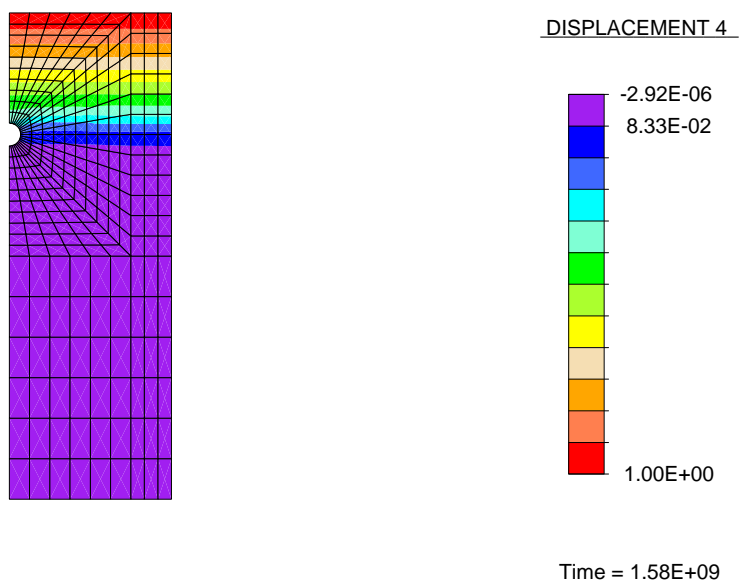
$$\frac{C_{Cl-}}{C_{OH-}} \quad (4.4)$$

Uwzględniając postać reakcji:

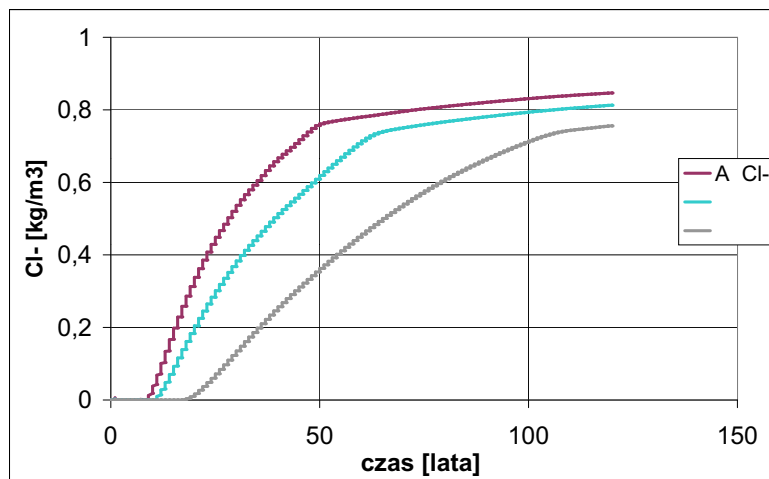




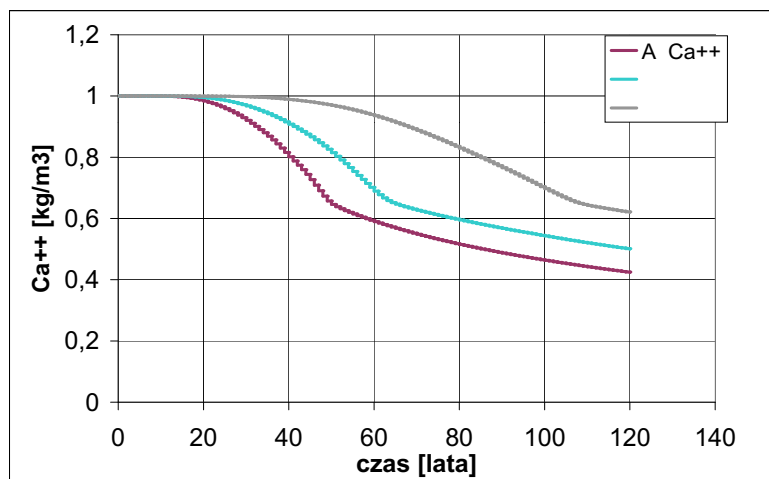
Rys. 4.13: Przykład 2 - Obraz koncentracji jonów chloru w płynie po upływie 50-ciu lat [ $kg/m^3$ ].



Rys. 4.14: Przykład 2 - Obraz ubytku koncentracji jonów wapnia w płynie po upływie 50-ciu lat [ $kg/m^3$ ].



Rys. 4.15: Przykład 2 - Koncentracja jonów chloru w płynie wypełniającym pory w punktach *A*, *B*, *C*.

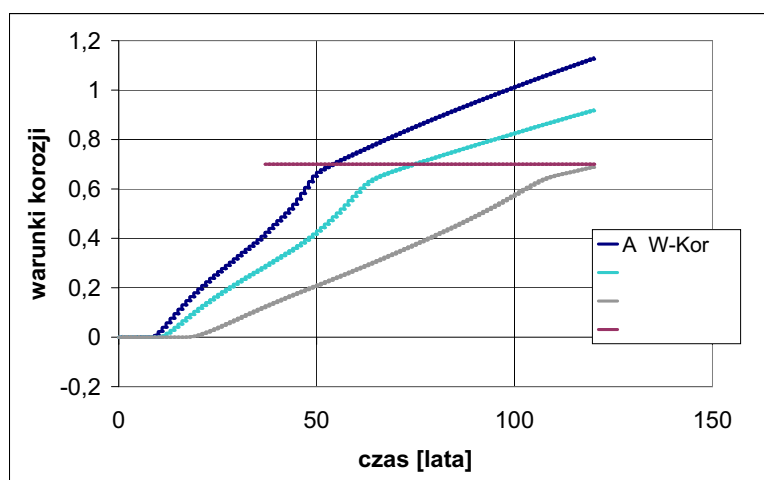


Rys. 4.16: Przykład 2 - Koncentracja jonów wapnia w płynie wypełniającym pory w punktach *A*, *B*, *C*.



oraz masy molowe chloru  $M_{mol}Cl = 35,45 [g]$  i wapnia  $M_{mol}Ca = 40,078 [g]$ , proporcja (4.4) może zostać zapisana w postaci:

$$\frac{C_{Cl-} [mol/m^3]}{C_{OH-} [mol/m^3]} \rightarrow \frac{(C_{Cl-}) \frac{1}{M_{mol}Cl} [\frac{kg}{m^3}]}{(C_{OH-}) \frac{2}{M_{mol}Ca} [\frac{kg}{m^3}]}$$

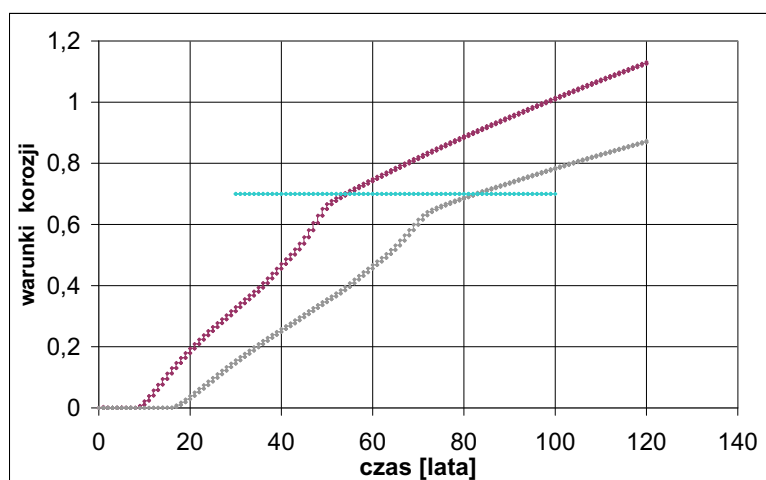


Rys. 4.17: Przykład 2 - Warunki inicjacji korozji w punktach  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

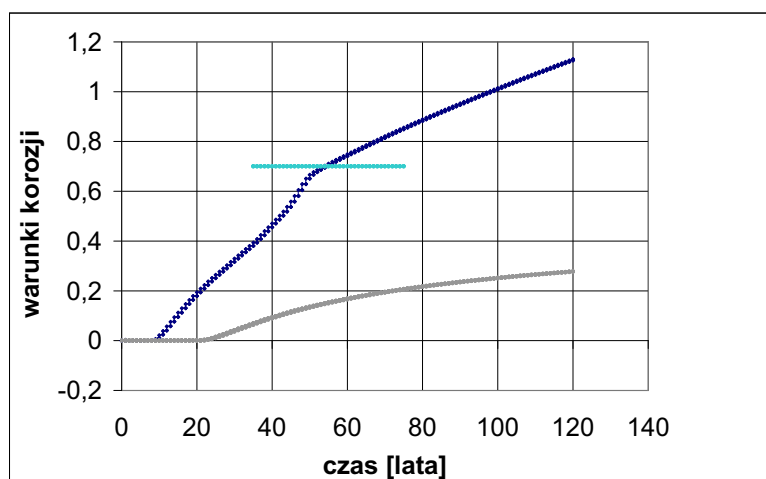
czątek korozji zbrojenia po upływie około 55 lat od powstania konstrukcji. Wykres na rys. 4.18 ilustruje zmiany warunków korozji w punkcie  $A$  uszkodzonej i nieuszkodzonej mechanicznie tarczy. Przekroczenie progu warunków korozji nieuszkodzonej tarczy następuje po upływie 84 lat działania agresywnego środowiska.

Na wykresie rys. 4.19 porównano warunki inicjacji korozji w punkcie  $A$  wyznaczonych przy użyciu proponowanego modelu oraz przy użyciu modelu w którym wymywanie jonów wapnia, powiększająca się porowatość i konwekcja nie są uwzględnione.

Jak widać z przedstawionego przykładu, pominięcie wymienionych zjawisk, może prowadzić do całkowicie różnych wyników w ocenie czasu osiągnięcia warunków wystąpienia korozji zbrojenia.



Rys. 4.18: Przykład 2 - Porównanie warunków korozji w punkcie A uszkodzonej (kolor brązowy) i nieuszkodzonej mechanicznie (kolor szary) konstrukcji.



Rys. 4.19: Przykład 2 - Porównanie warunków inicjacji korozji w punkcie A wyznaczone przy użyciu proponowanego modelu (kolor granatowy) oraz przy użyciu modelu, w którym wmywanie jonów wapnia, powiększająca się porowatość i konwekcja nie są uwzględnione (kolor szary).

## 4.5 Przykład 3 - analiza trwałości płyty przy sprzężonym obciążeniu mechaniczno-chemicznym

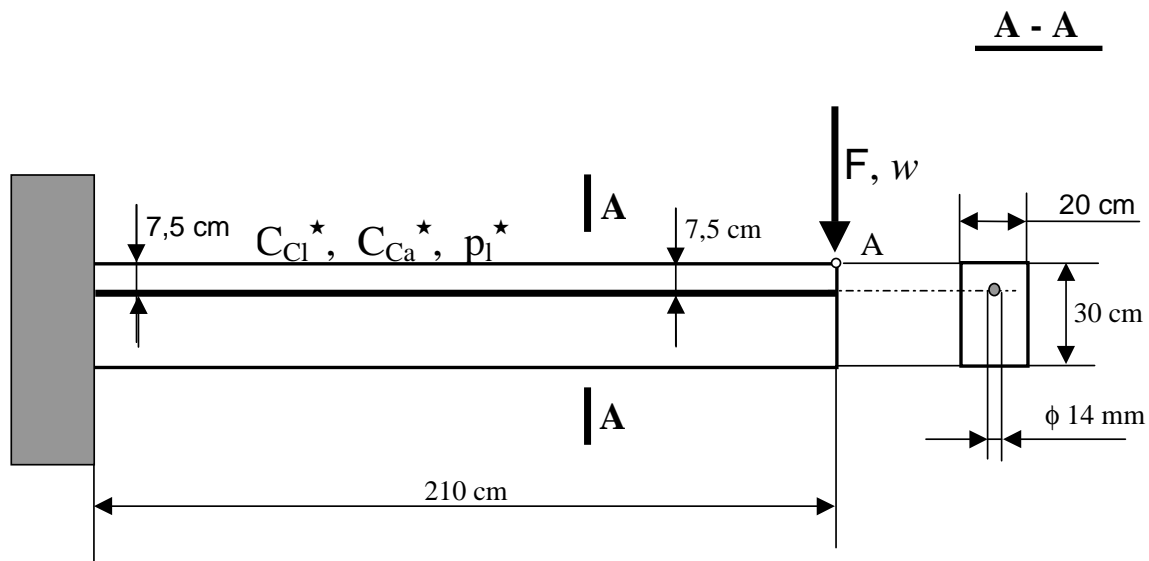
W tym przykładzie przeprowadzona została analiza wycinka płyty obciążonego jednocześnie mechanicznie i chemicznie. Oznacza to pełne sprzężenie pola przemieszczeń z polami koncentracji jonów chloru i wapnia w płynie i ciśnienia płynu. W efekcie koniecznym było rozwiązanie pełnego układu równań (3.39).

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{u-u})_n & (\mathbf{K}_{u-p})_n & (\mathbf{K}_{u-cl})_n & (\mathbf{K}_{u-ca})_n \\ \mathbf{K}_{p-u})_n & (\mathbf{K}_{p-p} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{p-p})_n & \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{p-ca})_n \\ \mathbf{K}_{cl-u})_n & (\mathbf{K}_{cl-p})_n & (\mathbf{K}_{cl-cl} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{cl-cl})_n & (\mathbf{K}_{cl-ca})_n \\ \mathbf{K}_{ca-u})_n & (\mathbf{K}_{ca-p})_n & \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{ca-ca} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{ca-ca})_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\Delta \mathbf{a}_u)_{n+1} \\ (\Delta \mathbf{a}_p)_{n+1} \\ (\Delta \mathbf{a}_{cl})_{n+1} \\ (\Delta \mathbf{a}_{ca})_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta \mathbf{r}_u)_n \\ (\Delta \mathbf{r}_p)_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{p-p})_n (\Delta \mathbf{a}_p)_n \\ (\Delta \mathbf{r}_{cl})_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{cl-cl})_n (\Delta \mathbf{a}_{cl})_n \\ (\Delta \mathbf{r}_{ca})_n + (\frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_{ca-ca})_n (\Delta \mathbf{a}_{ca})_n \end{bmatrix}$$

W wyniku obliczeń możliwym będzie ustalenie czasu zniszczenia konstrukcji przy stałym obciążeniu mechanicznym i wzrastającej degradacji betonu, pod wpływem agresywnego środowiska chemicznego. Zniszczenie konstrukcji może być wynikiem korozji zbrojenia lub degradacji parametrów mechanicznych betonu.

Konstrukcja o wymiarach i własnościach jak w przykładzie 2, wraz z obciążeniem została pokazana na rys. 4.20. Obciążeniem mechanicznym jest przyłożona do punktu *A* stała siła, o wartości  $F = 7,24e4$  [N], nie przekraczającej nośności konstrukcji (punkt P2 na rys. 4.9 w przykładzie 2). Górna powierzchnia tarczy została obciążona przez zadanie wartości brzegowych takich samych jak w przykładzie 2:

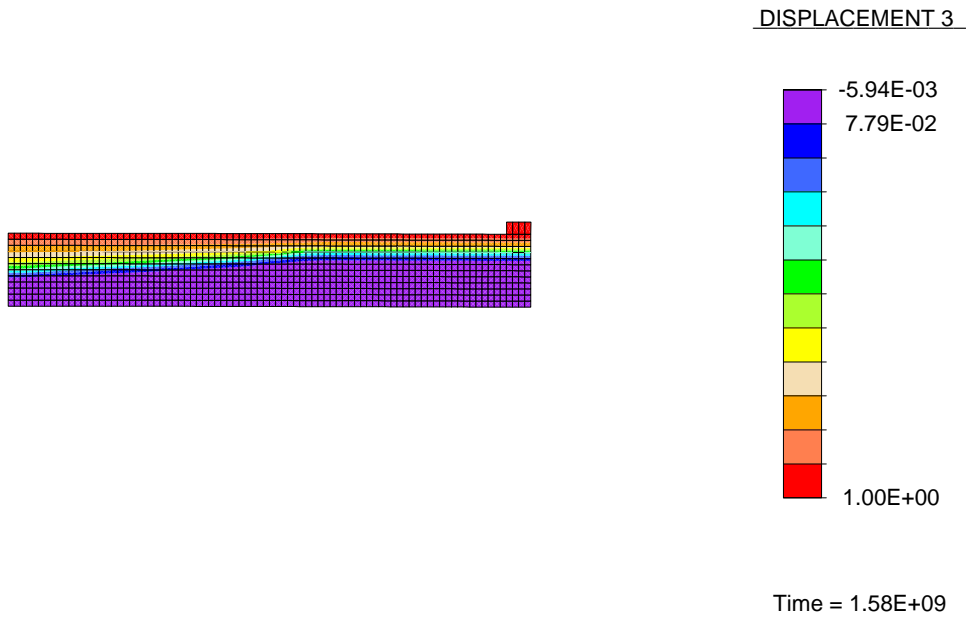
1. koncentracją jonów chloru w płynie  $C_{Cl}^* = 1,0$  [kg/m<sup>3</sup>],
2. zerową, to jest 1,0 [kg/m<sup>3</sup>] mniejszą od początkowej koncentracją jonów wapnia w płynie  $C_{Ca}^* = 0,0$  [kg/m<sup>3</sup>],
3. ciśnieniem płynu  $p_t^* = 1e4$  [N/m<sup>2</sup>]  $\cong 0,1$  [atm].



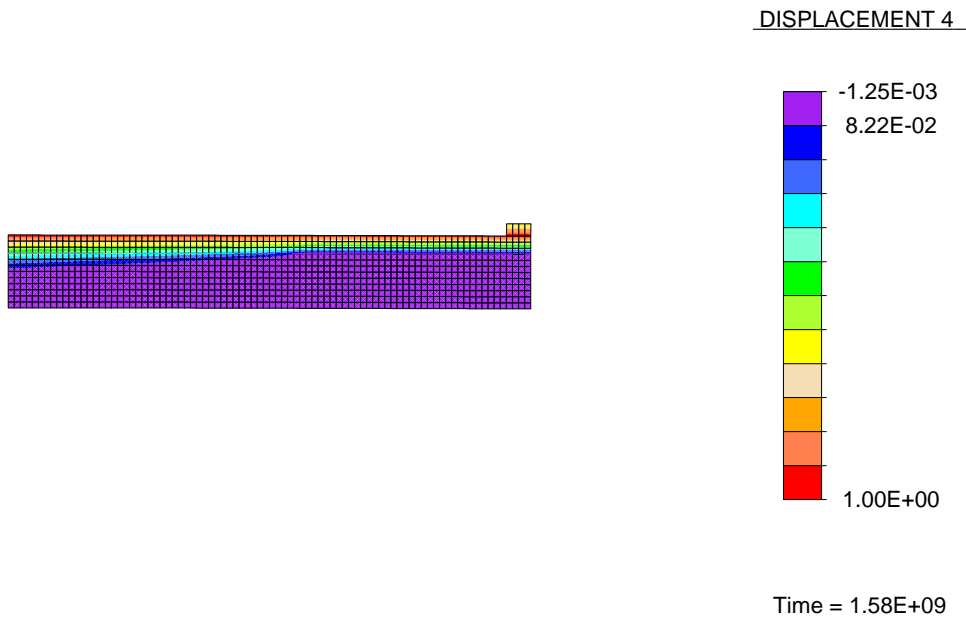
Rys. 4.20: Przykład 3 - Wycinek płyty

Na rys. 4.21, 4.22 obrazy koncentracji jonów w płynie po upływie 50 lat. Wzrost porowatości i naprężenia rozciągające powodują przyśpieszenie transportu jonów, efekty są widoczne na obrazach koncentracji.

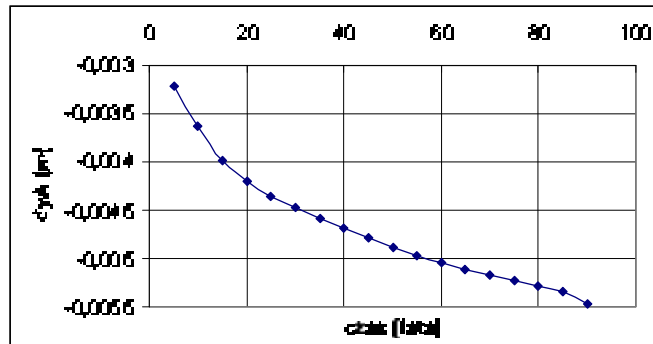
W miarę upływu czasu postępująca degradacja chemiczna konstrukcji powoduje spadek jej sztywności i nośności, która wreszcie nie jest wystarczająca do przeniesienia zadanego obciążenia. Wykres na rys. 4.23 ilustruje przemieszczanie się punktu  $A$  w czasie. Koniec wykresu dla czasu  $t_{beton} \cong 86$  lat oznacza utratę nośności konstrukcji. Wykres na rys. 4.24 ilustruje koncentrację jonów chloru (kolor fioletowy) i wapnia (kolor granatowy) rozpuszczonych w płynie wypełniającym pory betonu w najbardziej wyężonym przekroju konstrukcji, to jest przy utwierdzeniu, na głębokości  $6,8$  cm, odpowiadającej najmniejszej głębokości zanurzenia zbrojenia rys. 4.12 - punkt  $A$ . Analogicznie jak w przykładzie 2, na rys 4.25 pokazano wykres, na podstawie którego można ocenić warunki inicjacji korozji zbrojenia. Z przyjętej, progowej wartości proporcji  $C_{Cl-}/C_{OH-} = 0,7$  wynika czas inicjacji korozji zbrojenia  $t_{zbrojenie} \cong 24$  lata. Znacznie krótszy czas potrzebny do osiągnięcia warunków korozji niż w przykładzie 2 wynika z obciążenia konstrukcji bliskiej jej nośności, powodującej znaczną porowatość mechaniczną  $\phi_m$ .



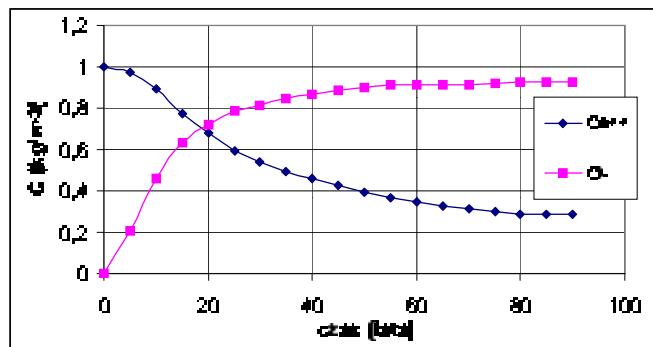
Rys. 4.21: Przykład 3 - Obraz koncentracji jonów chloru w płynie po upływie 50 lat.



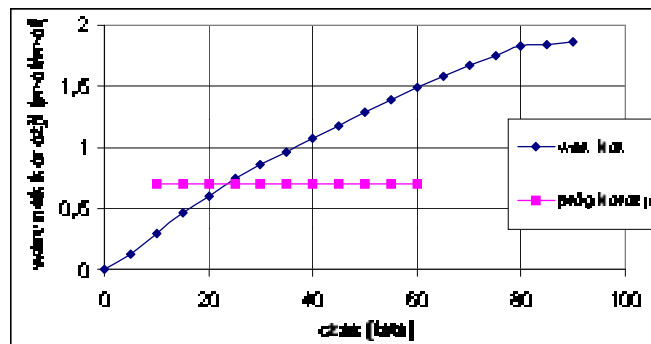
Rys. 4.22: Przykład 3 - Obraz spadku koncentracji jonów wapnia w płynie po upływie 50 lat.



Rys. 4.23: Przykład 3 - Przemieszczenia punktu A w czasie.



Rys. 4.24: Przykład 3 - Koncentracja jonów chloru (kolor fioletowy) i wapnia (kolor granatowy) w płynie wypełniającym pory, na głębokości 6,8 cm, przy utwierdzeniu.



Rys. 4.25: Przykład 3 - Warunki inicjacji korozji zbrojenia na głębokości 6,8 cm, przy utwardzeniu.

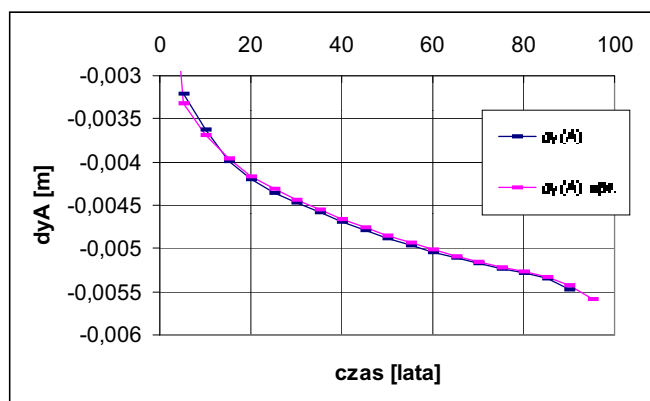
Ponieważ  $t_{zbrojenie} \ll t_{beton}$ , to w tym przypadku korozja zbrojenia decyduje o żywotności konstrukcji.

## 4.6 Przykład 4 - porównanie pełnego i uproszczonego modelu obliczeniowego

Niniejszy przykład ilustruje efekt zastosowania uproszczonego modelu, omówionego w punkcie 3.7. Analizowana jest konstrukcja jak w przykładzie 3, pod takim samym obciążeniem. Z przykładów 2 i 3 wynika, że o granicy żywotności konstrukcji decyduje w pierwszym rzędzie korozja zbrojenia, a nie obniżenie własności mechanicznych betonu. Oznacza to, że możliwym jest rozważenie modelu uproszczonego, w którym były by uwzględnione zależności przyrostu ciśnienia płynu, koncentracji jonów chloru i jonów wapnia od przyrostów przemieszczeń.

Rys. 4.26 stanowi porównanie wyników zastosowania pełnego i uproszczonego modelu dla wyznaczenia przemieszczeń punktu A, w miejscu przyłożenia obciążenia. Tu i dalej kolorem granatowym oznaczono wyniki uzyskane przy użyciu modelu pełnego, kolorem fioletowym oznaczono wyniki uzyskane przy użyciu modelu

uproszczonego. W iteracjach obu wariantów rozwiązywane są układy równań odpowiednio (3.39) i (3.48). Uzyskane wyniki są bardzo podobne. Różnice ilustruje rys.



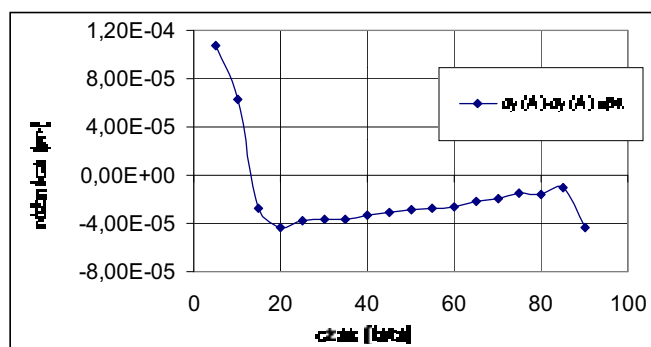
Rys. 4.26: Przykład 4 - Przemieszczenia punktu  $A$  w czasie - porównanie modeli pełnego (kolor granatowy) i uproszczonego (kolor fioletowy).

4.27. Wpływ przyrostów ciśnienia płynu i koncentracji jonów jest uwzględniony, ale pominięte jest między innymi "sprężenie zwrotne":

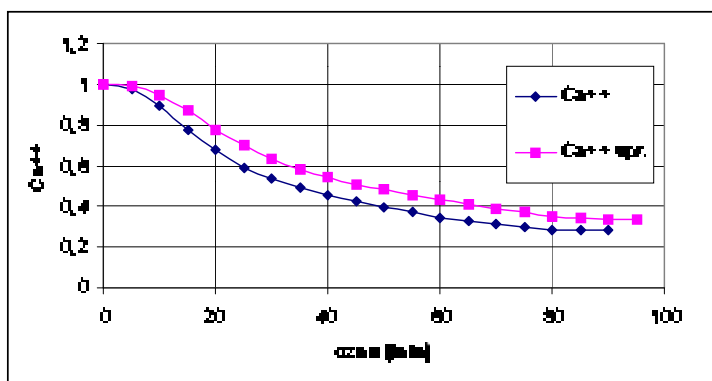
$$\Delta\varepsilon \rightarrow \Delta\omega_m \rightarrow \Delta\phi \rightarrow \{\Delta p_l, \Delta C_{Ca}^f, \Delta C_{Cl}^f\} \rightarrow \Delta\omega_{ch} \rightarrow \Delta\varepsilon \quad (4.7)$$

Wyraźne różnice są widoczne na wykresach ilustrujących koncentracje jonów wapnia i chloru w płynie wypełniającym pory, na głębokości zbrojenia, przy utwierdzonej krawędzi wycinka płyty, rys. 4.28, 4.29, ale wartości są porównywalne. W tym przykładzie również, na podstawie koncentracji jonów wapnia i chloru, stosując wzór (4.6) zbudowany został dla obu wariantów wykres warunków inicjacji korozji zbrojenia, rys. 4.30. Dla przyjętej wartości stosunku molowych koncentracji jonów  $[Cl^-]/[OH^-]$  równej 0,7, różnica w czasie do osiągnięcia progu korozji stanowi około 20%, jest więc znaczna.

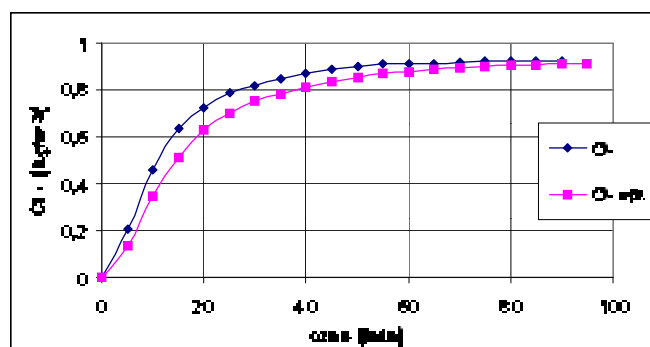




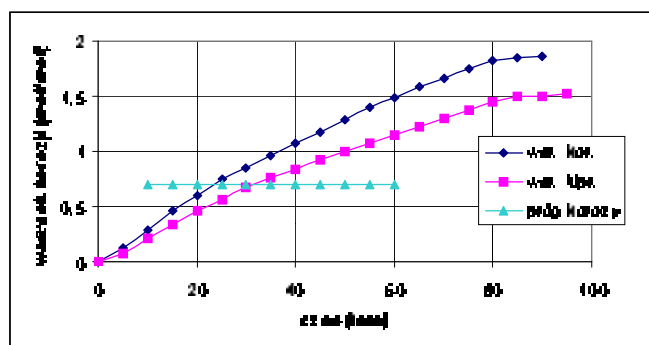
Rys. 4.27: Przykład 4 - Różnice przemieszczeń punktu A wyznaczonych przy użyciu modeli pełnego (kolor granatowy) i uproszczonego (kolor fioletowy).



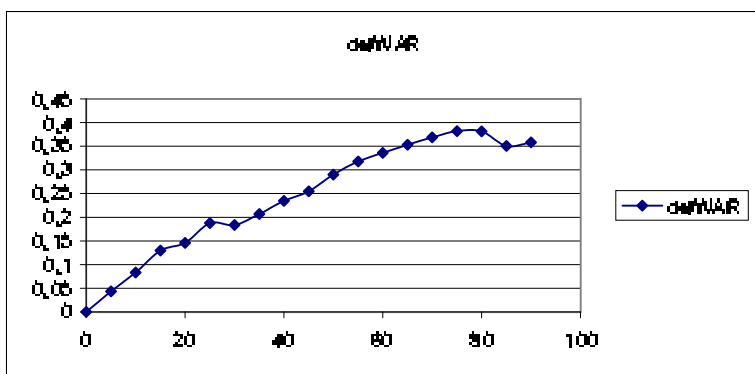
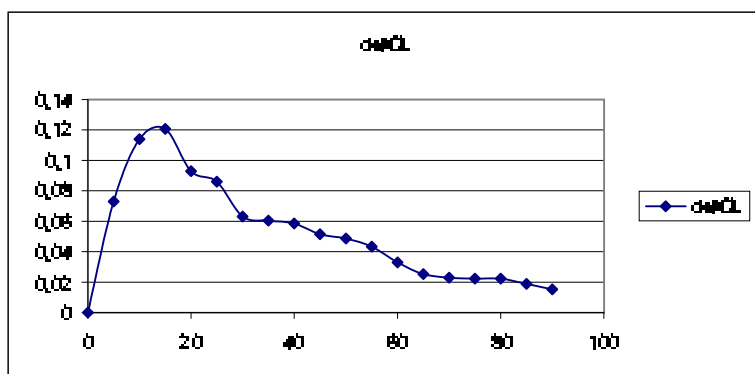
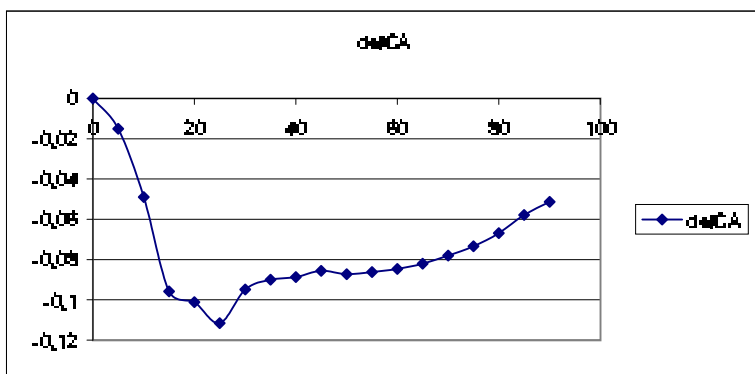
Rys. 4.28: Przykład 4 - Koncentracja jonów wapnia w płynie wypełniającym pory na głębokości 6,8 cm - porównanie modeli pełnego (kolor granatowy) i uproszczonego (kolor fioletowy).



Rys. 4.29: Przykład 4 - Koncentracja jonów chloru w płynie wypełniającym pory na głębokości 6,8 cm - porównanie modeli pełnego (kolor granatowy) i uproszczonego (kolor fioletowy).



Rys. 4.30: Przykład 4 - Warunki inicjacji korozji zbrojenia - porównanie modeli pełnego (kolor granatowy) i uproszczonego (kolor fioletowy).



Rys. 4.31: Przykład 4 - Różnice w wynikach modeli pełnego i uproszczonego, kolejno: w ubytku koncentracji jonów wapnia, w koncentracji jonów chloru i w stosunku  $[Cl^-]/[OH^-]$  czyli warunku korozji (punkt A).

## **Wnioski z przykładu**

1. Wyniki uzyskane przy zastosowaniu modelu uproszczonego są zbliżone do wyników pełnego modelu.
2. Dla dużych obliczeniowo analiz, użycie modelu uproszczonego może być uzasadnione.

# Rozdział 5

## ZAKOŃCZENIE

### 5.1 Podsumowanie

Stosownie do głównych celów pracy, sformułowano model matematyczny opisujący degradację konstrukcji żelbetowej w dwuwymiarowym stanie naprężenia/odkształcenia, w długim okresie eksploatacji. W modelu zniszczenia materiału wykorzystano skalarne parametry zniszczenia mechanicznego, oddzielnie dla rozciągania i ściskania oraz skalarny parametr zniszczenia chemicznego. Przyjęto, że degradacja konstrukcji jest w pełni określona przez stan przemieszczeń oraz koncentrację jonów chloru i wapnia w płynie wypełniającym pory. Dla opisu konwekcji wprowadzono dodatkowy parametr w postaci ciśnienia płynu. Rozważono degradację własności mechanicznych betonu pod wpływem agresywnego środowiska. Przedstawione wyżej zagadnienia stanowią treść rozdziału 2.

W rozdziale 3 zastosowano metodę elementów skończonych do opracowania dwóch modeli obliczeniowych: modelu pełnego i uproszczonego. Cztery przykłady są treścią rozdziału 4. W przykładach, między innymi, wyznaczano czasy inicjacji korozji zbrojenia w tarczy uszkodzonej mechanicznie oraz analizowano trwałość tarczy przy sprzężonym obciążeniu mechaniczno-chemicznym. Porównane zostały także wyniki analizy w przypadku zastosowania modeli pełnego i uproszczonego.

Obliczenia wykonane zmodyfikowanym systemem FEAP, wykazały fizyczną i numeryczną poprawność proponowanych modeli.

Przytoczone przykłady nie mają niestety odpowiedników w literaturze, do któ-

rych mogły by być porównane uzyskane wyniki. Należy jednakże podkreślić, że opracowując model numeryczny wykonano wiele analiz cząstkowych, których wyniki były wiarygodne, i zgodne z wynikami dostępnymi na przykład w pracach Hansena [22], Martin-Perezy [34] czy Saetty i wsp. [54].

## 5.2 Elementy oryginalne pracy

Zdaniem autora do elementów oryginalnych można zaliczyć:

1. Opracowanie modeli matematycznego i numerycznego do opisu interakcji obciążenia mechanicznego z obciążeniem chemicznym w analizie statycznej dwuwymiarowych konstrukcji żelbetowych, w długim okresie eksploatacji.
2. W szczególności w pracy zaproponowano:
  - (a) formułę uzależniającą wartość granicznych odkształceń sprężystych od zniszczenia skutkiem działania agresywnego środowiska,
  - (b) formułę uwzględniającą wpływ ciśnienia płynu na naprężenia mechaniczne,
  - (c) skalarny parametr zniszczenia chemicznego związany z wymywaniem jonów wapnia,
  - (d) formułę określającą porowatość wynikającą z wymywania jonów wapnia,
  - (e) formułę opisującą porowatość związaną ze zniszczeniem mechanicznym.
3. Opracowanie uproszczonego modelu obliczeniowego, w którym pominięto wpływ niektórych zależności. Obliczenia testowe wykazały przydatność modelu w rozwiązywaniu dużych zadań, z akceptowalnym obniżeniem dokładności obliczeń. Wskazano możliwość budowy innych modeli uproszczonych, zależnie od parametrów determinujących żywotność konstrukcji.
4. Oszacowanie warunków rozwoju korozji zbrojenia w zależności od porowatości mechanicznej betonu.

5. Wprowadzenie modeli matematycznych do systemu FEAP, co wymagało jego znacznej modyfikacji.
6. Wykonanie oryginalnych przykładów, w których analizowana jest zmiana własności mechanicznych konstrukcji pod wpływem agresywnego środowiska.

### 5.3 Kierunki rozwoju tematu

Praca ma charakter teoretyczny i zawiera formuły wymagające eksperymentalnej weryfikacji, w szczególności takiej weryfikacji wymagają:

1. Zależność granicznych odkształceń sprężystych od parametru degradacji chemicznej, (wzór (2.78)).
2. Wyrażenie na porowatość mechaniczną w funkcji skalarów zniszczenia mechanicznego i odkształceń ekwiwalentnych, (wzór (2.80)).
3. Formuła składnika porowatości związanego z wymywaniem jonów wapnia, (wzór (2.18)).
4. Weryfikacji wymaga również, przyjęty w pracy wpływ chlorków na własności mechaniczne betonu, bowiem, jak to wcześniej wspomniano, zdania na ten temat w literaturze są podzielone.

Do opisu zniszczenia betonu przyjęto uproszczony model nielokalny, uzależniający parametry występujące we wzorach na skalarne parametry zniszczenia od wymiaru charakterystycznego elementu skończonego. Jak wykazały obliczenia testowe, nie uzyskano w ten sposób w pełni obiektywnego uniezależnienia wyników obliczeń od gęstości siatki skończenie-elementowej. Nielokalność zniszczenia wymaga więc bardziej precyzyjnego opisu, Askes [3], Podleś [47].

W pracy zaproponowano uproszczony model obliczeniowy, w którym uznano, że w analizie najistotniejszym jest dokładne określenie przemieszczeń konstrukcji. Możliwe są inne modele uproszczone, gdzie parametrami wiodącymi byłyby parametry determinujące warunki korozji, to znaczy koncentracje jonów chloru i wapnia.

Tematyka pracy może dalej być rozszerzana przez wprowadzenie do modelu teoretycznego karbonatyzacji, zjawisk zamrażanie/rozmróżanie płynu w porach oraz wpływu wysokich temperatur, co również jest jest aktualnym przedmiotem badań, Gawin i wsp. [18].

Opisany w pracy model obejmuje etap inicjacji (patrz rys. 2.1), to jest okres od wytworzenia konstrukcji do osiągnięcia w rejonie jej zbrojenia progu korozyjności. Zdaniem autora, opracowany model obliczeniowy może stać się częścią systemu analizy komputerowej degradacji konstrukcji żelbetowej w całym okresie eksploatacji, przez połączenie go z modelami opisującymi korozję zbrojenia, Zybura [63] i powstawanie i rozwój rys, Jaśkowiec [24].



# Literatura

- [1] ABAQUS-Theory manual, ABAQUS Inc. Rising Sun Mills 166 Valley Street Providence, RI 02909-2499, 2004.
- [2] Allen, L. W. *Fire Endurance of Selected Non-loadbearing Concrete Masonry Units*, National Research Council of Canada, Division of Building Research, NRC 11275, 1970.
- [3] Askes H., *Advanced Spatial Discretization Strategies for Localized Failure, Mesh Adaptivity and Meshless Methods*, Delft, May, 2000.
- [4] Balabanič, G., Bicanič, N., Durekovic, A., *Mathematical modeling of electrochemical steel corrosion in concrete*, J. Engng. Mechanics, December 1996, pp. 1113 - 1122, 1996.
- [5] Bangert, F., Kuhl, D., Meschke, G., *Finite element simulation of chemo-mechanical damage under cyclic loading condition*, Fourth Intern. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, Framcos IV 2001, Cachan, France, 28 May-1 June, 2001.
- [6] Bazant Z. P., J. C. Chern, A. M. Rosenberg and J. M. Gaidis, *Mathematical Model for Freeze-Thaw Durability of Concrete*, Journal of the American Ceramic Society, V. 71 I. 9. p. 776, 1988.
- [7] Belytschko, T., T. Black, *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*, Int. J. Numer. Meth. in Engng, 45, pp. 601-620, 1999.

- [8] Cichoń Cz., W. Cecot, J. Krok, P. Pluciński, *Metody Komputerowe w Liniowej Mechanice Konstrukcji - Wybrane Zagadnienia*, Politechnika Krakowska, Kraków, 2002.
- [9] Cichoń C., P. Romanowski, *Analiza skończenie-elementowa wpływu penetracji chlorków na własności mechaniczne betonu*, Pięćdziesiąta Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Warszawa - Krynica 4004, mater. konf. Tom IV, pp. 125-132, 2004.
- [10] Coussy , O., *Mechanics of Porous Continua*, John Wiley and Sons Ltd., 1995.
- [11] Creazza, G., Saetta, A., R. Scotta, R. Vitaliani, and Oñate, *Mechanical Simulation of Structural Damage in Historical Buildings*. Architectural Studies, Material and Analysis, Brebbia and Leftheris, eds., Vol.1, Comput. Mechanics Inc., Southampton, Boston, pp. 111-118, 1995.
- [12] Crisfield, M.A., *A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through*, Computers and Structures, Vol. 13, pp. 55-62, 1981.
- [13] Czarnecki L., *Materiały Do Ochrony Powierzchniowej Konstrukcji z Betonu*, XVII Ogólnopolska Konferencja, Warsztat Pracy Projektanta Konstrukcji, Ustroń, 20 - 23 lutego 2002.
- [14] Faria, R., Olivier, J., *A strain-based plasticity viscous-plastic-damage model for massive concrete structures*. Int. J. Solids and Struct., 35(14), pp. 1533-1558, 1998.
- [15] Fiertak M. *Strukturalne uszczelnianie przegród budowlanych z betonu*, Politechnika Krakowska im. Tadeusza Pościuszki, Seria Inżynieria Łądowa. Kraków 2000.
- [16] Furtak K., J. Śliwiński *Materiały budowlane w mostownictwie*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 2005.

- [17] Furtak K., B. Wrana *Mosty zintegrowane*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności Sp. z o.o., 2005.
- [18] Gawin D., C. E. Majorana and B. A. Schrefler, *Numerical Analysis of Hygro-thermal Behaviour and Damage of Concrete at High Temperature*, Mech. Cohes.-Frict. Mater. vol. 4. No. 1. January 1999 pp. 17-36, 1999.
- [19] Gerard, B., Pijaudier-Cabot, G., and Laborderil, C., *Coupled Diffusion-damage Modelling and the Implementations*, Int. J. Solids and Struct., 35(31/32), pp. 4107-4120, 1998.
- [20] Glass K. K., Buenfeld N. R. *The presentation of the chloride threshold level for corrosion of steel in concrete* Corrosion Science, vol. 39, No. 5, pp 1001-1013, 1997.
- [21] Hansen, E., *Rate deterioration investigation of bridge decks based on diffusion/fracture mechanical study*. - A thesis submitted to the Faculty of the Graduate School of the University of Colorado. Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, 1997.
- [22] Hansen, E., *Theories of Elastoplasticity Coupled with Continuum Damage Mechanics*. Ph. D. Thesis, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, USA, SAND92-1436, 1993.
- [23] Huang, M., S. Pietruszczak, *Modelling of thermodynamical effects of alkali-silica reaction*, J. Engng. Mech. April 1999 pp. 476-485, 1999.
- [24] Jaśkowiec, J., *Integracja MES z BMG w dwuwymiarowej analizie propagacji pęknięcia quasi-kruchego*, Praca doktorska, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska, Kraków, 2003.
- [25] Jirásek, M., and Z. P. Bažant: *Localization analysis of nonlocal model based on crack interactions*, J. Engng. Mech. ASCE, 120, (1994), pp. 1521-1542, 1994.

- [26] Jirásek, M., *Modeling of Fracture and Damage in Quasibrittle Materials*, Ph.D. Thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1993.
- [27] Kubik J., *Przepływ wilgoci w materiałach budowlanych*, O. W. Politechniki Opolskiej, Opole, 2000.
- [28] Kubik J., Świrski J., Wyrwal J., *Popowodziowe zawilgocenie budowli*, O. W. Politechniki Opolskiej, Opole, 1999.
- [29] Kuhl D., F. Bangert, G. Meschke, *An extension of damage theory to coupled chemo-mechanical processes*. ECCM-2000, Barcelona, Spain, September 11-14, 2000.
- [30] Lewis, S., Schrefler, B. A., *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley and Sons, 1998.
- [31] Mainguy M., O. Coussy, *Propagation fronts during calcium leaching and chloride penetration*. J. Engng Mech., ASCE, pp. 250-257, March, 2000.
- [32] Mang, H.A., Hofstetter, G., *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*, Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1995.
- [33] Mangat, P. and Molloy, B., *Prediction of long term chloride concentration in concrete*. Materials and Structures, 27, pp. 338-346, 1994.
- [34] Martin-Perez, B., *Service Life Modelling of R.C. Highway Structures Exposed to Chlorides*, Ph. D. Thesis, University of Toronto, 1999.
- [35] Martin-Perez B., S. J. Pantazopoulou, M.D.A. Thomas *Numerical Solution of Mass Transport Equations in Concrete Structures*, Comp. and Struct. 79/2001 pp. 1251-1264, 2001.
- [36] Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G., *Continuum damage theory: Application to concrete*. J. Engng. Mech., ASCE, 115(2), pp. 629-635, 1989.

- [37] Majorana, C., Sietta, A., Scotta, R. and Vitaliani R., *Mechanical and Durability Models for Lifespan Analysis of Bridges*. Proc. IABSE, Zürich, Switzerland, pp. 1235-1258, 1995.
- [38] Melenk J., I. Babuška , *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 39, pp. 289-314, 1996.
- [39] Meschke, G., S. Grasberger, P. Dumstorff, A. Flatten, F. Bangert, D. Kuhl, *Life-time oriented multifield FE-analysis of concrete structures*. ECCM-2001, Cracow, Poland, June 26-29, Proc., pp. 4-7, 2001.
- [40] Meschke, G., S. Grasberger *Numerical modeling of coupled hygro-mechanical degradation of cementitious materials*. J. Engng. Mech. ASCE, Vol. 129, No. 4, April 2003, pp. 383-392, 2003.
- [41] Neville A. M. *Właściwości betonu*, Polski Cement, Warszawa, 2000.
- [42] Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. and Lubliner, J., *Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete*, 2nd Int. Conf. on Comp.-Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Zell am See, Austria, 1990.
- [43] Pamin, J. K. *Gradient-enhanced continuum models: formulation, discretization and application* Politechnika krakowska, seria Inżynieria Lądowa, Kraków 2004.
- [44] Patzak, B., M. Jirásek, *Consistent Tangent Stiffness for Nonlocal Material Models*. ECCM-2001, European Conf. Comput. Mech, June 26-29, 2001. Cracow, Poland, CD pp.1-16, 2001.
- [45] Pijaudier-Cabot, G., B. Gerard, L. Molez, *Damage mechanics of concrete structures subjected to mechanical and environmental actions*. In: Euro-Comp. Modelling of Concrete Structures, R., deBorst, N., Bicanic, H., Mang, and G., Meschke, eds.,Balkema, Rotterdam, The Netherlands, pp. 567-576, 1998.

- [46] Pijaudier-Cabot, G., Bažant, Z. P. *Nonlocal Damage Theory*. J. Engng. Mech., ASCE, 113, pp. 1512-1533, 1987.
- [47] Podleś, K., *Nielokalny, sprężysto-plastyczny model konstytutywny betonu do analizy stanu nośności i zarysowania masywnych konstrukcji hydrotechnicznych*, Praca doktorska, Insytut Geotecniki, Wydział Ochrony Środowiska, Politechnika Krakowska, 2004.
- [48] Riks, E., *An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems*, Int. J. of Solids and Struct., Vol. 15, pp. 524-551, 1979.
- [49] Rodriguez-Ferran, A., Huerta, A., *Failure and Post-failure Modeling of the Brazilian Test*. Departament de Matemàtica Aplicada III, E.T.S. E-08034 Barcelona, Spain 2001.
- [50] Romanowski P., Cz. Cichoń, *Chemo-Mechanical Finite Element Model of Deterioration of Plain Concrete Structures*, Arch. Inż. Łądowej, LI, 1, pp. 85-106, 2005.
- [51] Romanowski P., *Zmiana własności mechanicznych betonu pod wpływem chemicznie agresywnego środowiska*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo z. 102, pp. 409-416, 2004.
- [52] Saetta, A. V., R. V., Scotta, R. V. Vitalini, *Analysis of chloride diffusion into partially saturated concrete*, ACI Materials J., 90(5), pp. 441-451, 1993.
- [53] Saetta, A., R., Scotta, R., Vitalini, *Mechanical behavior of concrete under physical-chemical attacks*, J. Engng. Mech., ASCE, 124(10), pp. 1100 - 1109, 1998.
- [54] Saetta, A., R. Scotta, R. Vitaliani, *Coupled environmental-mechanical damage model of RC structures*. J. Engng. Mech., ASCE, 125(8), pp. 930-940, 1999.

- [55] Schrefler B. A. *Thermodynamics of saturated-unsaturated porous materials and quantitative solutions: the isothermal case*. European Conf. Comp. Mechanics, June 26-29, 2001 Cracow, Poland, CD, pp. 1-24, 2001.
- [56] Silivija, I., S., Vitina, I., Setina, J., E., Lagzdins, *Degradation of reinforced concrete structures by polluted environmental attack*, 4th Intern. Conf. Analytical Models and New Concepts in Concrete and Masonry Structures, Cracow, June 5-7, 2002, Proc. pp. 44- 49, 2002.
- [57] Simo, J., J., Ju, *Stress and strain based continuum damage models: Parts I and II*. Int. J. Solids and Struct., 23(7), pp. 821-869, 1987.
- [58] Szarliński J., A. Truty, *Non-linear rheological models for cracked R.C. structures*, In: Analytical Models and New Concepts in Mechanics of Concrete Structures, Białystok, pp. 443–450, 1993.
- [59] Taylor R. L. *A Finite Element Analysis Program - Theory Manual, Version 7.4* Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley, 2002.
- [60] de Vree, J. H. P., W., A., M., Brekelmans, and M., A., J., Gils, *Comparison of Nonlocal Approaches in Continuum Damage Mechanics*, Comp. and Struct., 55, pp. 581-588, 1996.
- [61] Waszczyszyn Z., Cz. Cichoń, M. Radwańska, *Stability of Structures by Finite Element Methods*, Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [62] Wells G. N., L. J. Sluys. *A new method for modelling cohesive cracks using finite elements*, Int. J. Num. Meth. in Engng, 50, pp. 2667–2682, 2001.
- [63] Zybura A.: *Modelowanie wpływu procesów korozyjnych na trwałość konstrukcji żelbetowych*, Rozprawa habilitacyjna, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, 1992.

# DODATEK

Wyprowadzenie macierzy i wektorów  
występujących w układzie równań przyrostowych  
MES (3.39)



Układ równań przyrostowych MES został wyprowadzony z przyrostowego układu równań słabego sformułowania wariacyjnego (3.35), które przytoczymy dla ułatwienia śledzenia wyprowadzeń:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p_l} \Delta p_l + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Cl}^f} \Delta C_{Cl}^f \right] h \, d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} h \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \Delta \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{t}^* + \Delta \mathbf{t}^*) d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta p_l))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial p_l} \Delta p_l + \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f \right] h \, d\Omega = \\
& \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta p_l))^T \cdot \mathbf{q}_l h \, d\Omega - \int_{\Gamma_{q_{p_l}}} \delta \Delta p_l \cdot (\mathbf{q}_l^* + \Delta \mathbf{q}_l^*) d\Gamma \\
& \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Ca}^f \cdot \Delta \dot{C}_{Ca}^t h \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Ca}^f))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial p_l} \Delta p_l + \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f \right] h \, d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Ca}^f \cdot \dot{C}_{Ca}^t h \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Ca}^f))^T \cdot \mathbf{q}_{Ca} h \, d\Omega - \int_{\Gamma_{q_{Ca}}} \delta \Delta C_{Ca}^f \cdot (\mathbf{q}_{Ca}^* + \Delta \mathbf{q}_{Ca}^*) d\Gamma \\
& \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Cl}^f \cdot \Delta \dot{C}_{Cl}^t h \, d\Omega - \\
& \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Cl}^f))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial C_{Cl}^f} \Delta C_{Cl}^f + \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f + \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial p_l} \Delta p_l \right] h \, d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Cl}^f \cdot \dot{C}_{Cl}^t h \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Cl}^f))^T \cdot \mathbf{q}_{Cl} h \, d\Omega - \int_{\Gamma_{q_{Cl}}} \delta \Delta C_{Cl}^f \cdot (\mathbf{q}_{Cl}^* + \Delta \mathbf{q}_{Cl}^*) d\Gamma
\end{aligned}$$

## 1. Interpolacja składników równania mechanicznego

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} h \, d\Omega \cong \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B}_u \Delta \mathbf{a}_u h \, d\Omega = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B}_u h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_u = \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \mathbf{K}_{u-u} \Delta \mathbf{a}_u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p_l} \Delta p_l h \, d\Omega \cong \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p_l} \mathbf{N}_p \Delta \mathbf{a}_p h \, d\Omega = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p_l} \mathbf{N}_p h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_p = \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \mathbf{K}_{u-p} \Delta \mathbf{a}_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f h \, d\Omega &\cong \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Ca}^f} \mathbf{N}_{Ca} \Delta \mathbf{a}_{Ca} h \, d\Omega = \\ &= \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Ca}^f} \mathbf{N}_{Ca} h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_{Ca} = \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \mathbf{K}_{u-Ca} \Delta \mathbf{a}_{Ca} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Cl}^f} \Delta C_{Cl}^f h \, d\Omega &\cong \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Cl}^f} \mathbf{N}_{Cl} \Delta \mathbf{a}_{Cl} h \, d\Omega = \\ &= \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial C_{Cl}^f} \mathbf{N}_{Cl} h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_{Cl} = \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \mathbf{K}_{u-Cl} \Delta \mathbf{a}_{Cl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} h \, d\Omega &\cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \mathbf{B}_u^T \boldsymbol{\sigma} h \, d\Omega = \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \int_{\Omega} -\mathbf{B}_u^T \boldsymbol{\sigma} h \, d\Omega = \\ &= \delta \Delta \mathbf{a}_u^T F_u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \Delta \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{t}^* + \Delta \mathbf{t}^*) d\Gamma &\cong \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \mathbf{N}_u^T \cdot (\mathbf{t}^* + \Delta \mathbf{t}^*) d\Gamma = \\ &= \delta \Delta \mathbf{a}_u^T \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{N}_u^T (\mathbf{t}^* + \Delta \mathbf{t}^*) d\Gamma = \delta \Delta \mathbf{a}_u^T (\mathbf{F}_u^3 + \Delta \mathbf{F}_u^3) \end{aligned}$$

## 2. Interpolacja składników równania zachowania masy płynu

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \delta(\nabla(\Delta p_l))^T \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon h \, d\Omega \cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \mathbf{B}_p^T \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}_u \Delta \mathbf{a}_u h \, d\Omega = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \int_{\Omega} -\mathbf{B}_p^T \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}_u h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_u = \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \mathbf{K}_{p-u} \Delta \mathbf{a}_u \\
& - \int_{\Omega} \delta(\nabla(\Delta p_l))^T \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial p_l} \Delta p_l h \, d\Omega \cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \mathbf{B}_p^T \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial p_l} \mathbf{N}_p \Delta \mathbf{a}_p h \, d\Omega = \\
& = - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \mathbf{B}_p^T \frac{-D_{0l}}{\phi_0} \phi \frac{\partial(\nabla p_l)}{\partial p_l} \mathbf{N}_p \Delta \mathbf{a}_p h \, d\Omega = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \frac{D_{0l}}{\phi_0} \phi \mathbf{B}_p h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_p = \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \mathbf{K}_{p-p} \Delta \mathbf{a}_p \\
& - \int_{\Omega} \delta(\nabla(\Delta p_l))^T \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial C_{Ca}^f} \Delta C_{Ca}^f h \, d\Omega \cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \mathbf{B}_p^T \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial C_{Ca}^f} \mathbf{N}_{Ca} \Delta \mathbf{a}_{Ca} h \, d\Omega = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \int_{\Omega} -\mathbf{B}_p^T \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_l}{\partial C_{Ca}^f} \right] \mathbf{N}_{Ca} h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_{Ca} = \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \mathbf{K}_{p-Ca} \Delta \mathbf{a}_{Ca} \\
& \int_{\Omega} \delta(\nabla(\Delta p_l))^T \cdot \mathbf{q}_l h \, d\Omega \cong \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \mathbf{B}_p^T \mathbf{q}_l h \, d\Omega = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \mathbf{q}_l h \, d\Omega = \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \mathbf{F}_p^2 \\
& - \int_{\Gamma_{q_{p_l}}} \delta \Delta p_l \cdot (q_l^* + \Delta q_l^*) d\Gamma \cong - \int_{\Gamma_{q_{p_l}}} \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \mathbf{N}_p \cdot (q_l^* + \Delta q_l^*) d\Gamma = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_p^T \int_{\Gamma_{q_{p_l}}} -\mathbf{N}_p \cdot (q_l^* + \Delta q_l^*) d\Gamma = \delta \Delta \mathbf{a}_p^T (\mathbf{F}_p^3 + \Delta \mathbf{F}_p^3)
\end{aligned}$$

### 3. Interpolacja składników równania zachowania masy jonów wapnia

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Ca}^f \cdot \Delta \dot{C}_{Ca}^t h \, d\Omega \cong \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{N}_{Ca}^T \left[ \phi + \frac{\partial C_{Ca}^b(C_{Ca}^f)}{\partial C_{Ca}^f} \right] \mathbf{N}_{Ca} \Delta \dot{\mathbf{a}}_{Ca} h \, d\Omega = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}_{Ca}^T \left[ \phi + \frac{\partial C_{Ca}^b(C_{Ca}^f)}{\partial C_{Ca}^f} \right] \mathbf{N}_{Ca} h \, d\Omega \Delta \dot{\mathbf{a}}_{Ca} = \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{P}_{Ca-Ca} \Delta \dot{\mathbf{a}}_{Ca} \\
& - \int_{\Omega} \delta (\nabla (\Delta C_{Ca}^f))^T \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon h \, d\Omega \cong \\
& \cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{B}_{Ca}^T \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}_u \Delta \mathbf{a}_u h \, d\Omega = \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \int_{\Omega} -\mathbf{B}_{Ca}^T \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}_u h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_u = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{K}_{Ca-u} \Delta \mathbf{a}_u \\
& - \int_{\Omega} \delta (\nabla (\Delta C_{Ca}^f))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial p_l} \right] \Delta p_l h \, d\Omega \cong \\
& \cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{B}_{Ca}^T \left[ -\frac{D_{0l}\phi}{\phi_0 \rho_l} C_{Ca}^f \frac{\partial (\nabla p_l)}{\partial p_l} \right] \mathbf{N}_p \Delta \mathbf{a}_p h \, d\Omega = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Ca}^T \left[ \frac{D_{0l}\phi}{\phi_0 \rho_l} C_{Ca}^f \right] \mathbf{B}_p h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_p = \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{K}_{Ca-p} \Delta \mathbf{a}_p \\
& - \int_{\Omega} \delta (\nabla (\Delta C_{Ca}^f))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{Ca}}{\partial C_{Ca}^f} \right] \Delta C_{Ca}^f h \, d\Omega \cong \\
& \cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{B}_{Ca}^T \cdot \left[ -\frac{D_{0Ca}\phi}{\phi_0} \frac{\partial (\nabla C_{Ca}^f)}{\partial C_{Ca}^f} - \frac{D_{0Ca}}{\phi_0} \nabla C_{Ca}^f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial C_{Ca}^f} + \mathbf{v}_l \right] \cdot \mathbf{N}_{Ca} \Delta \mathbf{a}_{Ca} h \, d\Omega = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Ca}^T \cdot \left[ \frac{D_{0Ca}\phi}{\phi_0} \mathbf{B}_{Ca} + \frac{D_{0Ca}}{\phi_0} \nabla C_{Ca}^f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial C_{Ca}^f} \mathbf{N}_{Ca} - \mathbf{v}_l \mathbf{N}_{Ca} \right] \cdot h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_{Ca} = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{K}_{Ca-Ca} \Delta \mathbf{a}_{Ca} \\
& - \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Ca}^f \cdot \dot{C}_{Ca}^t h \, d\Omega \cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{N}_{Ca}^T \dot{C}_{Ca}^t h \, d\Omega = \\
& = \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \int_{\Omega} -\mathbf{N}_{Ca}^T \dot{C}_{Ca}^t h \, d\Omega = \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{F}_{Ca}^1 \\
& \int_{\Omega} \delta (\nabla (\Delta C_{Ca}^f))^T \cdot \mathbf{q}_{Ca} h \, d\Omega \cong \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Ca}^T \mathbf{B}_{Ca}^T \mathbf{q}_{Ca} h \, d\Omega =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{C_a}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_{C_a}^T \mathbf{q}_{C_a} h \, d\Omega = \delta \Delta \mathbf{a}_{C_a}^T \mathbf{F}_{C_a}^2 \\
&- \int_{\Gamma_{q_{C_a}}} \delta \Delta C_{C_a}^f \cdot (q_{C_a}^* + \Delta q_{C_a}^*) d\Gamma \cong - \int_{\Gamma_{q_{C_a}}} \delta \Delta a_{C_a} \mathbf{N}_{C_a}^T (q_{C_a}^* + \Delta q_{C_a}^*) d\Gamma = \\
&= \delta \Delta a_{C_a} \int_{\Gamma_{q_{C_a}}} -\mathbf{N}_{C_a}^T (q_{C_a}^* + \Delta q_{C_a}^*) d\Gamma = \delta \Delta a_{C_a} (\mathbf{F}_{C_a}^3 + \Delta \mathbf{F}_{C_a}^3)
\end{aligned}$$

#### 4. Interpolacja składników równania zachowania masy jonów chloru

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \delta \Delta C_{Cl}^f \cdot \Delta \dot{C}_{Cl}^t h \, d\Omega \cong \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{N}_{Cl}^T \left[ \phi + \frac{\partial C_{Cl}^b(C_{Cl}^f)}{\partial C_{Cl}^f} \right] \mathbf{N}_{Cl} \Delta \dot{\mathbf{a}}_{Cl} h \, d\Omega = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}_{Cl}^T \left[ \phi + \frac{\partial C_{Cl}^b(C_{Cl}^f)}{\partial C_{Cl}^f} \right] \mathbf{N}_{Cl} h \, d\Omega \Delta \dot{\mathbf{a}}_{Cl} = \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{P}_{Cl-Cl} \Delta \dot{\mathbf{a}}_{Cl} \\
&- \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Cl}^f))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon \right] h \, d\Omega \cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{B}_{Cl}^T \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}_u \Delta \mathbf{a}_u h \, d\Omega = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Omega} -\mathbf{B}_{Cl}^T \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial \varepsilon} \mathbf{B}_u h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_u = \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{K}_{Cl-u} \Delta \mathbf{a}_u \\
&- \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Cl}^f))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial C_{Cl}^f} \Delta C_{Cl}^f \right] h \, d\Omega \cong \\
&\cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{B}_{Cl}^T \left[ -\frac{D_{0Cl}}{\phi_0} \phi \frac{\partial (\nabla C_{Cl}^f)}{\partial C_{Cl}^f} + \mathbf{v}_l \right] \Delta C_{Cl}^f h \, d\Omega = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \left[ \frac{D_{0Cl}}{\phi_0} \phi \frac{\partial (\nabla C_{Cl}^f)}{\partial C_{Cl}^f} - \mathbf{v}_l \right] \mathbf{N}_{Cl} h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_{Cl} = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \left[ \frac{D_{0Cl}}{\phi_0} \phi \mathbf{B}_{Cl} - \mathbf{v}_l \mathbf{N}_{Cl} \right] h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_{Cl} = \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{K}_{Cl-Cl} \Delta \mathbf{a}_{Cl} \\
&- \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Cl}^f))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial C_{C_a}^f} \Delta C_{C_a}^f \right] h \, d\Omega \cong \\
&\cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{B}_{Cl}^T \left[ -\frac{D_{0Cl}}{\phi_0} \cdot \nabla C_{Cl}^f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial C_{C_a}^f} \right] \cdot \mathbf{N}_{C_a} \Delta \mathbf{a}_{Cl} h \, d\Omega = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \left[ \frac{D_{0Cl}}{\phi_0} \cdot \nabla C_{Cl}^f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial C_{C_a}^f} \right] \mathbf{N}_{C_a} h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_{Cl} = \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{K}_{Cl-C_a} \Delta \mathbf{a}_{Cl} \\
&- \int_{\Omega} \delta (\nabla(\Delta C_{Cl}^f))^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{Cl}}{\partial p_l} \Delta p_l \right] h \, d\Omega \cong
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{B}_{Cl}^T \left[ \frac{-D_{0l}}{\phi_0} \frac{\phi}{\rho_l} C_{Cl}^f \frac{\partial(\nabla p_l)}{\partial p_l} \Delta p_l \right] h \, d\Omega = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \left[ \frac{D_{0l}}{\phi_0} \frac{\phi}{\rho_l} C_{Cl}^f \frac{\partial(\nabla p_l)}{\partial p_l} \mathbf{N}_p \Delta \mathbf{a}_p \right] h \, d\Omega = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \left[ \frac{D_{0l}}{\phi_0} \frac{\phi}{\rho_l} C_{Cl}^f \mathbf{B}_p \right] h \, d\Omega \Delta \mathbf{a}_p = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{K}_{Cl-p} \Delta \mathbf{a}_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \int_{\Omega} \delta \Delta C_{Cl}^f \cdot \dot{C}_{Cl}^t \, h \, d\Omega \cong - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{N}_{Cl}^T \dot{C}_{Cl}^t \, h \, d\Omega = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Omega} -\mathbf{N}_{Cl}^T \dot{C}_{Cl}^t \, h \, d\Omega = \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Omega} \mathbf{F}_{Cl}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \delta(\nabla(\Delta C_{Cl}^f))^T \cdot \mathbf{q}_{Cl} \, h \, d\Omega \cong \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{B}_{Cl}^T \cdot \mathbf{q}_{Cl} \, h \, d\Omega = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_{Cl}^T \cdot \mathbf{q}_{Cl} \, h \, d\Omega = \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{F}_{Cl}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \int_{\Gamma_{q_{Cl}}} \delta \Delta C_{Cl}^f \cdot (q_{Cl}^* + \Delta q_{Cl}^*) \, d\Gamma \cong - \int_{\Gamma_{q_{Cl}}} \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \mathbf{N}_{Cl}^T \cdot (q_{Cl}^* + \Delta q_{Cl}^*) \, d\Gamma = \\
&= \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T \int_{\Gamma_{q_{Cl}}} -\mathbf{N}_{Cl}^T \cdot (q_{Cl}^* + \Delta q_{Cl}^*) \, d\Gamma = \delta \Delta \mathbf{a}_{Cl}^T (\mathbf{F}_{Cl}^3 + \Delta \mathbf{F}_{Cl}^3)
\end{aligned}$$