

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
Wydział Inżynierii Lądowej
Instytut Materiałów i Konstrukcji Budowlanych

Andrzej Winnicki

MODEL BETONU PRZY OBCIĄŻENIACH DORAŻNYCH.
TEORIA I WERYFIKACJA NUMERYCZNA DLA PŁASKIEGO STANU
NAPRĘŻENIA

Praca doktorska

Promotor:

Prof. PK, dr hab. inż. Czesław Cichoń

Kraków, maj 1994



666.94.017:539.3/.6 :519.6-74:624.04] (043)



D-6943

Podziękowania:

Autor wyraża gorące podziękowania dla prof. PK Cz.Cichonia. Jego pomoc i opieka okazana podczas powstawania i redakcji pracy jest nie do przecenienia. Pomoc kolegi, mgr inż. A.Trutego, była bardzo cenna przy implementacji modelu materiału do programu ATFEM i opracowaniu otrzymanych wyników. Autor dziękuje również p. A.Bańdor za cierpliwość i wytrwałość okazaną przy przepisywaniu kolejnych wersji rękopisu i p. J.Gzyl za szybkie i sprawne wykreślenie części rysunków w tuszu. Osobne podziękowania należą się prof. Z.Waszczyżynowi, który w połowie lat osiemdziesiątych skłonił autora do zainteresowania się mechaniką betonu.

Spis ważniejszych oznaczeń

1. Naprężenia

$\underline{\sigma}$ – wektor naprężenia,

\underline{s} – wektor dewiatora naprężenia,

\underline{B} – macierz liczbowa transformująca wektor $\underline{\sigma}$ w wektor $\underline{s} : \underline{s} = \underline{B} \underline{\sigma}$,

\underline{J} – wektor transformujący wektor $\underline{\sigma}$ w naprężenie średnie $\sigma_0 : \sigma_0 = \underline{J}^T \underline{\sigma}$,

$\underline{\bar{s}}$ – wektor otrzymany z wektora $\underline{s} : \underline{\bar{s}} = \underline{D}_e \underline{s}$,

σ_{ij} – tensor naprężenia,

$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ – dewiator tensora naprężenia,

$I_1 = \sigma_{ii} = 3\sigma_0$ – pierwszy niezmiennik tensora naprężenia,

$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$ – drugi niezmiennik dewiatora naprężenia,

$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$ – trzeci niezmiennik dewiatora naprężenia,

Θ – kąt *Lodego*: $\cos 3\Theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(\sqrt{J_2})^3}$,

$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ – naprężenie średnie,

$\tau_0 = \sqrt{\frac{1}{3} s_{ij} s_{ij}}$ – naprężenie ścinające oktaedryczne,

$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ – intensywność naprężenia,

σ_0^{MAX} – największa, osiągnięta w procesie obciążenia, wartość σ_0 ,

τ_0^{MAX} – największa, osiągnięta w procesie obciążenia, wartość τ_0 ,

τ_{0u} – wartość τ_0 na powierzchni granicznej,

τ_{0u}^* – wartość τ_0 na powierzchni granicznej po stronie przeciwnej niż τ_{0u} ,

τ_{0c} – wartość τ_0 w tzw. punkcie wspólnym,

σ_1, σ_2 – naprężenia główne w płaskim stanie naprężenia,

σ_{1u}, σ_{2u} – wartości σ_1, σ_2 na powierzchni granicznej,

σ_{MIN} – najmniejsze (rozciągające) naprężenie główne,

2. Odształcenia

$\underline{\varepsilon}$ – wektor odkształcenia,

\underline{e} – wektor dewiatora odkształcenia,

$\underline{\varepsilon}_p$ – wektor odkształcenia plastycznego,

\underline{e}_p – wektor dewiatora odkształcenia plastycznego,

ε_{ij} – tensor odkształcenia,

$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{vol}\delta_{ij}$ – dewiator tensora odkształcenia,

ε_{ij}^e – tensor odkształcenia sprężystego,

ε_{ij}^p – tensor odkształcenia plastycznego,

e_{ij}^e – dewiator tensora odkształcenia sprężystego,

e_{ij}^p – dewiator tensora odkształcenia plastycznego,

$\varepsilon_{vol} = \varepsilon_{ii}$ – odkształcenie objętościowe,

ε_{vol}^e – odkształcenie objętościowe sprężyste,

ε_{vol}^p – odkształcenie objętościowe plastyczne,

ε_{vol}^{pI} – część odkształcenia objętościowego plastycznego, powiązana z σ_0 ,

ε_{vol}^{pII} – część odkształcenia objętościowego plastycznego, powiązana z τ_0 ,

γ_0^e – odkształcenie ścinające oktaedryczne sprężyste,

$\gamma_0^e = \int_0^{t_1} \dot{\gamma}_0^e dt$, gdzie $\dot{\gamma}_0^e = \sqrt{\frac{1}{3}\dot{e}_{ij}^e\dot{e}_{ij}^e}$,

γ_0^p – odkształcenie ścinające oktaedryczne plastyczne,

$\gamma_0^p = \int_0^{t_1} \dot{\gamma}_0^p dt$, gdzie $\dot{\gamma}_0^p = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\dot{e}_{ij}^p\dot{e}_{ij}^p}$,

γ_{0u}^p – wartość odkształcenia γ_0^p na powierzchni granicznej dla monotonicznego obciążenia proporcjonalnego,

γ_0^{MAX} – największa, osiągnięta w procesie obciążenia, wartość γ_0^p ,

γ_0^{pRES} – wartość resztkowa (po odciążeniu do poziomu $\tau_0 = 0$) odkształcenia γ_0^p ,

$\Delta_1\gamma_0^p$ – przyrost wartości γ_0^p podczas odciążenia (ujemny),

$\Delta_2 \gamma_0^p$ – przyrost wartości γ_0^p podczas obciążenia wtórnego,

γ_0^c – wartość γ_0^p w tzw. punkcie wspólnym,

$\bar{\gamma}_0^p$ – odkształcenie plastyczne γ_0^p unormowane,

$$\bar{\gamma}_0^p = \int_0^{t_1} \dot{\bar{\gamma}}_0^p dt, \text{ gdzie } \dot{\bar{\gamma}}_0^p = \pm \frac{1}{\gamma_{0u}^p} \sqrt{\frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p},$$

$\bar{\gamma}_0^{MAX}$ – największa, osiągnięta w procesie obciążenia wartość $\bar{\gamma}_0^p$,

ϵ_e^p – intensywność odkształcenia plastycznego,

$$\epsilon_e^p = \int_0^{t_1} \dot{\epsilon}_e^p dt, \text{ gdzie } \dot{\epsilon}_e^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p},$$

ϵ_1 – odkształcenie podłużne przy jednoosiowym ściskaniu lub rozciąganiu,

ϵ_0 – wartość ϵ_1 dla $\sigma_1 = f_c$,

ϵ_t – wartość ϵ_1 dla $\sigma_1 = f_t$,

ϵ_1^{MAX} – największa, osiągnięta w procesie obciążenia wartość ϵ_1 ,

ϵ_1^{pRES} – wartość reszkowa (po odciążeniu do poziomu $\sigma_1 = 0$) odkształcenia ϵ_1 ,

ϵ_1^c – wartość ϵ_1 w tzw. punkcie wspólnym,

3. Macierze w związkach konstytutywnych

\underline{D}_{ep} – macierz sztywności sprężysto – plastycznej,

\underline{C}_{ep} – macierz podatności sprężysto – plastycznej,

\underline{D}_e – macierz sztywności sprężystej,

\underline{C}_e – macierz podatności sprężystej,

\underline{D}_p – macierz sztywności plastycznej,

\underline{C}_p – macierz podatności plastycznej,

\underline{D}_e^{N1} – zmodyfikowana macierz \underline{D}_e w układzie odniesienia współosiowym z kierunkami naprężeń głównych,

\underline{C}_e^{N1} – zmodyfikowana macierz \underline{C}_e w układzie odniesienia współosiowym z kierunkami naprężeń głównych,

\underline{D}_e^N – zmodyfikowana macierz \underline{D}_e w dowolnym układzie odniesienia,

\underline{C}_e^N – zmodyfikowana macierz \underline{C}_e w dowolnym układzie odniesienia,

\underline{T} – macierz transformacji wektora odkształceń,

4. Moduły sprężyste i plastyczne; odległości w przestrzeni naprężeń

E – moduł *Younga*,

E_0 – początkowy moduł *Younga* dla betonu,

E_s – moduł *Younga* dla stali,

ν – współczynnik *Poissona*,

K_e – sprężysty moduł objętościowy,

H_e – sprężysty moduł postaciowy,

H – moduł wzmocnienia,

K_p – plastyczny moduł objętościowy,

H_p – plastyczny moduł postaciowy,

β – współczynnik ścisnienia / dylatacji,

β_u – wartość β na powierzchni granicznej,

K_{p_0} – początkowy moduł K_p dla obciążenia pierwotnego,

H_{p_0} – początkowy moduł H_p dla obciążenia pierwotnego,

H_{p_1} – początkowy moduł H_p dla odciążenia,

H_{p_2} – początkowy moduł H_p dla obciążenia wtórnego,

$H_s = \tau_{0u} / \gamma_0^{MAX}$ – moduł H_p sieczny,

d – odległość pomiędzy aktualnym stanem naprężenia, a powierzchnią graniczną,

d^* – odległość pomiędzy aktualnym stanem naprężenia, a powierzchnią

graniczną mierzona w kierunku przeciwnym niż d ,

d_{max} – największa, możliwa do osiągnięcia, wartość d ,

d_{max}^* – największa, możliwa do osiągnięcia, wartość d^* ,

$\delta = d / d_{max}$ – odległość sprawdzona,

δ_{min} – najmniejsza, osiągnięta w procesie obciążenia, wartość δ ,

$\delta^* = d^*/d_{max}^*$ – odległość sprowadzona, mierzona w kierunku przeciwnym niż δ ,

δ_{max}^* – największa, osiągnięta w procesie obciążenia, wartość δ^* ,

δ_{min}^* – najmniejsza, możliwa do osiągnięci (dla $\tau_0 = 0$), wartość δ^* ,

δ_c – wartość δ dla tzw. punktu wspólnego,

5. Inne oznaczenia

f_c – wytrzymałość betonu na jednoosiowe ściskanie,

f_c^* – zredukowana wytrzymałość f_c ,

f_t – wytrzymałość betonu na jednoosiowe rozciąganie,

f_t^* – zredukowana wytrzymałość f_t ,

f_s – wytrzymałość stali na rozciąganie,

f_y – granica plastyczności stali,

g_1, g_2, g_3, g_4 – funkcje wiążące wartość γ_0^{MAX} , γ_0^{pRES} , γ_0^c , oraz wartości ε_1^{MAX} , ε_1^{pRES} ,

$$\left. \begin{array}{l} \chi = \tau_{0c}/\tau_0^{MAX} \\ \eta = \gamma_0^{pRES}/\gamma_0^{MAX} \\ \eta_1 = \varepsilon_1^{pRES}/\varepsilon_1^{MAX} \\ \xi = \gamma_0^c/\gamma_0^{MAX} \\ \xi_1 = \varepsilon_1^c/\varepsilon_1^{MAX} \end{array} \right\} \text{funkcje materiałowe,}$$

a, b, c – stałe materiałowe opisujące współczynnik β ,

b_1, b_2, b_3 – parametry materiałowe powierzchni granicznej *Fardisa – Chena*,

c_1, c_2, c_3, c_4 – parametry materiałowe powierzchni granicznej *Hsieha– Tinga– Chena*,

n, m – stałe materiałowe opisujące współczynnik ω ,

ω – współczynnik, ustalający kształt krzywej $\tau_0 - \gamma_0^p$,

$k = \sigma_2/\sigma_1$ – stosunek naprężeń głównych w płaskim stanie naprężenia,

f_{1t}, f_{1c} – funkcje opisujące redukcję wytrzymałości f_t odpowiednio – podczas procesu rozciągania i podczas procesu ściskania,

f_{2t}, f_{2c} – funkcje opisujące redukcję wytrzymałości f_c odpowiednio – podczas procesu rozciągania i podczas procesu ściskania,

p_1, p_2 – stałe materiałowe występujące w funkcji f_{1t} ,

p_3 – stała materiałowa występująca w funkcji f_{2c} ,

G_f – jednostkowa energia pęknięcia,

u – wydłużenie strefy lokalizacji (ujemne),

u_t – wartość u dla $\sigma_1 = f_t$,

h – długość strefy lokalizacji, lub charakterystyczny wymiar elementu,

δ_{ij} – delta *Kroneckera*,

Spis treści

I	Wstęp	12
I.1	Uwagi wstępne	12
I.2	Przedmiot i cele pracy	14
I.3	Zakres pracy	18
II	Teoretyczny opis modelu betonu	20
II.1	Podstawowe założenia fizyczne	20
II.2	Doświadczalne przesłanki przyjętych założeń	23
II.3	Prędkościowe związki fizyczne	33
II.3.1	Przestrzenny stan naprężenia	33
II.3.2	Płaski stan naprężenia	38
II.3.3	Pominięcie odkształceń sprężystych	41
II.3.4	Podejście M.N.Fardisa i E.S.Chena [42]	43
II.3.5	Zmodyfikowane związki fizyczne	46
II.4	Kryteria obciążenia i odciążenia, odległość od powierzchni granicznej	50
II.5	Wzory dla modułów plastycznych H_p, K_p, β	57
II.5.1	Obciążenie pierwotne	58
II.5.1.1	Moduł plastyczny H_p	58
II.5.1.2	Moduły plastyczne K_p i β	64
II.5.2	Odciążenie oraz obciążenie wtórne	75
II.5.2.1	Moduł plastyczny H_p przy odciążeniu	75
II.5.2.2	Moduł plastyczny H_p przy obciążeniu wtórnym	80
II.5.2.3	Funkcje materiałowe η, ξ i χ	83

II.5.2.4	Moduły plastyczne K_p i β przy odciążeniu i obciążeniu wtórnym	85
II.5.3	Zestawienie przyjętych wzorów dla H_p , K_p i β oraz pomocniczych funkcji i stałych materiałowych	85
II.6	Powierzchnia graniczna	91
II.7	Stan pokrytyczny	100
II.7.1	Powierzchnia graniczna w stanie pokrytycznym	100
II.7.2	Określenie postaci funkcji $f_{1t}(\gamma_0^p)$	103
II.7.3	Określenie postaci funkcji $f_{2c}(\gamma_0^p)$	105
II.7.4	Określenie postaci funkcji $f_{2t}(\gamma_0^p)$	107
II.7.5	Określenie postaci funkcji $f_{1c}(\gamma_0^p)$	112
II.7.6	Moduły plastyczne H_p , K_p i β	114
II.8	Obciążenia nieproporcjonalne i cykliczne	115
II.9	Podstawowe cechy modelu	121
III	Weryfikacja numeryczna	124
III.1	Zależności naprężenie – odkształcenie	125
III.1.1	Własne programy komputerowe	125
III.1.2	Monotoniczne obciążenia proporcjonalne	126
III.1.2.1	Porównanie z wynikami doświadczeń <i>H.Kupfera</i>	126
III.1.2.2	Porównanie z wynikami doświadczeń innych autorów	135
III.1.3	Niemonotoniczne obciążenia proporcjonalne	145
III.2	Przykłady obliczeń konstrukcji za pomocą MES	159
III.2.1	Implementacja modelu betonu do programu ATFEM	159
III.2.2	Analiza statyczna tarcz WT3 i WT4	167
III.2.2.1	Tarcza WT3	168
III.2.2.2	Tarcza WT4	184
III.2.3	Analiza statyczna tarcz W2 i W4	190
III.2.3.1	Tarcza W2	190
III.2.3.2	Tarcza W4	203
III.2.4	Podsumowanie wyników obliczeń	210

	11
IV Zakończenie	212
IV.1 Podsumowanie	212
IV.2 Możliwości rozwoju tematu	212
V Literatura	214
Z1 Jawne postaci macierzy sprężystej podatności \underline{C}_e i sztywności \underline{D}_e.	226
Z2 Wyprowadzenie wzoru na macierz sztywności sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} dla przypadku trójwymiarowego	229
Z3 Wyprowadzenie wzoru na macierz \underline{D}_{ep} dla płaskiego stanu naprężenia	233
Z4 Macierz \underline{D}_{ep} w przypadku istnienia wyłącznie plastycznego mechanizmu dewiatorowego	238
Z5 Macierz transformacji \underline{T} oraz zmodyfikowana macierz sztywności sprężystej \underline{D}_e^N	241
Z6 Wyznaczenie stanu odkształceń $\underline{\varepsilon}$ dla danego stanu naprężenia $\underline{\sigma}$ w przypadku monotonicznego obciążenia proporcjonalnego – podejście analityczne	243
Z7 Zestawienie badań doświadczalnych wykorzystanych w punkcie III.1	249
Z8 Dane materiałowe przyjęte w obliczeniach w punkcie III.2	257
Summary	267

Rozdział I

Wstęp

I.1 Uwagi wstępne

Rozwój złożonych żelbetowych konstrukcji inżynierskich (takich jak obudowy bezpieczeństwa reaktorów, chłodnie kominowe, platformy wydobywcze na morzu) spowodował konieczność uwzględnienia w projektowaniu w większym stopniu rzeczywistych właściwości betonu i stali. Z uwagi na nieliniowe zachowanie się obu tych materiałów w zaawansowanych stanach obciążenia możliwość otrzymania rozwiązań analitycznych jest bardzo ograniczona. Z tego powodu od końca lat sześćdziesiątych obserwuje się wzrastające zastosowanie metod numerycznych do analizy konstrukcji żelbetowych, w szczególności metody elementów skończonych (MES). Ukazujące się prace szczegółowe na ten temat były początkowo omawiane w artykułach przeglądowych, co pozwalało śledzić bieżące kierunki badań [16], [3]. Później, od początku lat osiemdziesiątych, kiedy ilość i rozległość tematyczna publikacji przyczynkowych stała się bardzo duża, szczególnego znaczenia nabrały organizowane systematycznie konferencje, poświęcone analizie numerycznej konstrukcji żelbetowych [59], [32], [31].

Z prac prezentowanych na tych konferencjach wynika, że obecnie dużego znaczenia nabiera opracowanie wiarygodnych modeli fizycznych, odzwierciedlających złożone i nieliniowe zachowanie się betonu przy obciążeniach doraźnych i długotrwałych. Proste modele fizyczne (np. [84]), stosowane od dłuższego czasu do obliczeń konstrukcji przy obciążeniach monotonicznych nie są wystarczające w przypadku obciążeń nieproporcjonalnych lub cyklicznych. Dodatkowo, postęp w rozwoju mocy obliczeniowej komputerów sprawia, że nawet złożone modele wymagające pamiętania kilkudziesięciu zmiennych w procesie

obliczeń mogą być użyte praktycznie [86].

Przegląd modeli konstytutywnych prezentowany na konferencji EURO-C 1994 [31] pozwala na sformułowanie następujących cech, którymi powinien wyróżniać się dobry model betonu dla dwu- lub trójosiowego stanu naprężenia przy obciążeniach doraźnych:

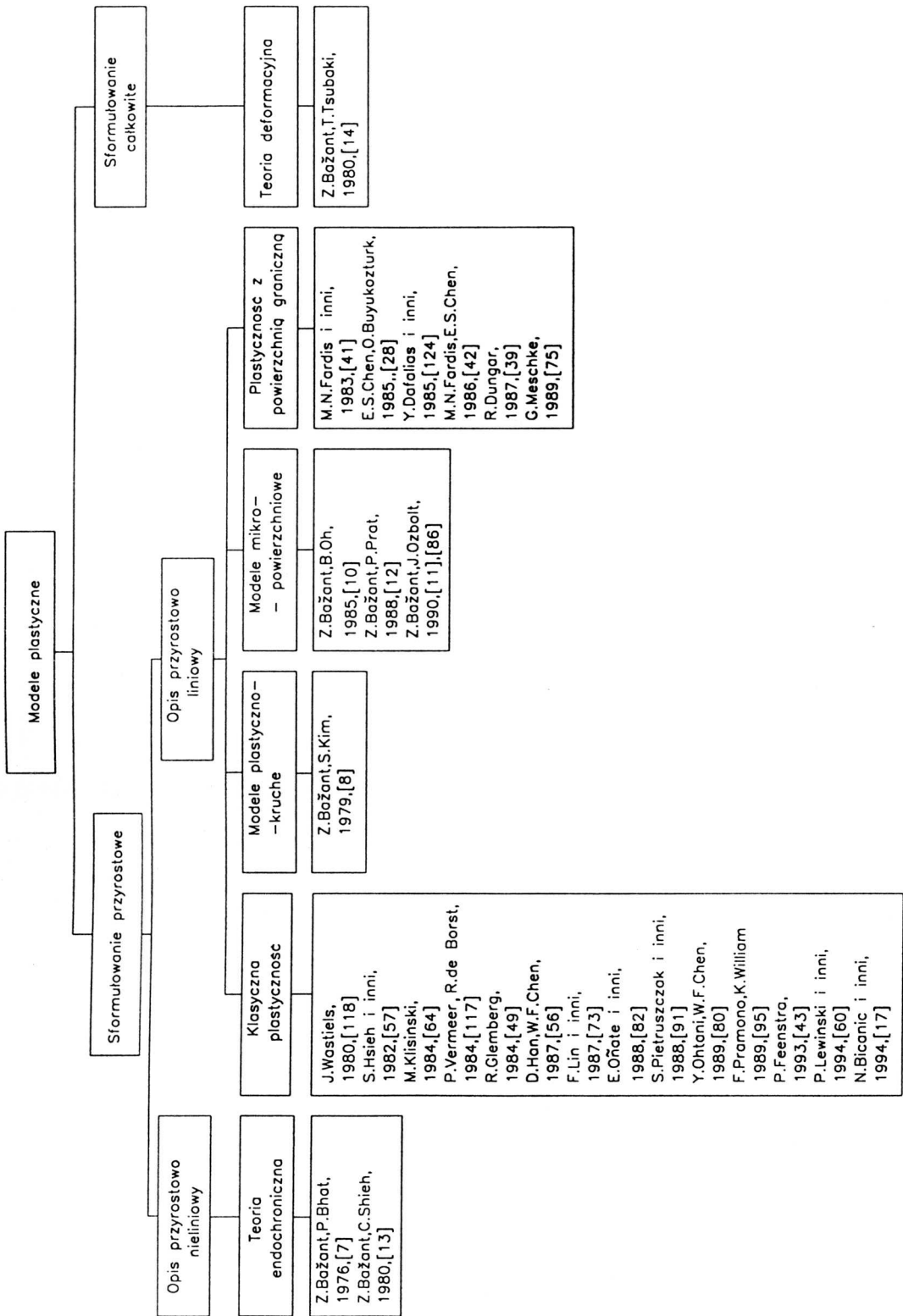
- 1° Opis właściwości materiału w całym zakresie możliwych do osiągnięcia stanów naprężenia i odkształcenia. Oznacza to uwzględnienie również stanów pokrytycznych (mięknienie materiału) zarówno przy rozciąganiu, jak i przy ściskaniu.
- 2° Uwzględnienie wszystkich składowych stanu naprężenia i odkształcenia. Oznacza to, że modele sformułowane specjalnie dla płaskiego stanu naprężenia powinny opisywać również odkształcenie poprzeczne oraz zjawisko ściśnienia i dylatacji.
- 3° Opis właściwości materiału przy rozciąganiu i ściskaniu w jednolity sposób. Połączenie modelu rys rozmytych dla rozciągania z modelem plastycznym dla ściskania zwykle prowadzi do nieciągłości opisu w regionie przejściowym, co w efekcie może sprawiać kłopoty numeryczne.
- 4° Uwzględnienie degradacji sztywności przy odciążeniach i obciążeniach cyklicznych. Pożądane jest również zamodelowanie pętli histerezy oraz wtórnego wzrostu sztywności przy obciążeniach znakovymiennych.
- 5° Możliwość obiektywnego opisu lokalizacji pojawiającej się przy mięknieniu. W przypadku opisu zjawiska mięknienia na szczyblu punktu materialnego poprzez wprowadzenie gałęzi opadającej krzywej naprężenie – odkształcenie otrzymuje się przy analizie konstrukcji czysto betonowych lokalizację mięknienia w strefach o zerowej objętości. Z uwagi na zerową objętość stref mięknienia nie może następować w nich dysypacja energii i konstrukcja w stanie pokrytycznym ulega sprężystemu odciążeniu. Dla poprawnego fizycznie opisu lokalizacji mięknienie musi następować w strefach o skończonej objętości. Efekt ten można uzyskać poprzez wprowadzenie do opisu materiału czynników nielokalnych [104].
- 6° Uwzględnienie kierunkowego charakteru zniszczenia betonu przy rozciąganiu, co powoduje powstanie materialnej anizotropii po zarysowaniu i izotropowego charakteru zniszczenia betonu przy ściskaniu.

Spełnienie wszystkich powyższych wymagań jest trudne. Z uwagi na niemożność opisanie stanów pokrytycznych (1°) i degradacji sztywności (4°) muszą zostać odrzucone modele sprężyste. Współcześnie przy opisie nieliniowych właściwości betonu konkurują ze sobą teoria plastyczności i kontynuualna mechanika uszkodzeń. Liczby prac poświęconych modelowaniu betonu na gruncie obu tych teorii są obecnie porównywalne. Należy zauważyć, że uwzględnienie kierunkowego charakteru zniszczenia (6°) jest możliwe przy sformułowaniu z zakresu kontynuualnej mechaniki pęknięcia, natomiast teoria plastyczności opisuje zawsze zniszczenie w sposób przestrzennie izotropowy (anizotropia wyłącznie naprężeniowa). Jednakże z uwagi na złożoność zagadnienia, również większość prac z kontynuualnej mechaniki pęknięcia opisuje zniszczenie przy pomocy parametrów skalarnych (np. [18]). Opracowanie modelu betonu spełniającego postulat 6° przy zachowaniu pozostałych cech $1^\circ - 5^\circ$ wydaje się być kwestią przyszłości.

Przegląd prac z zakresu kontynuualnej mechaniki pęknięcia można znaleźć w [92]. Prace wykorzystujące teorię plastyczności do opisu betonu można podzielić w sposób przedstawiony w tabl. I.1 (przyjęto klasyfikację zaproponowaną w [75]). Dorobek krajowy w zakresie nieliniowej analizy żelbetu nie jest zbyt bogaty. W większości prac ([88], [72], [65], [51]) ograniczono się do adaptacji istniejących modeli betonu, nie spełniających większości przedstawionych powyżej wymagań. Prace [87] i [52] wykorzystują kontynuualną mechanikę pęknięcia do sformułowania własnych, oryginalnych modeli materiału. Niestety modele te nie zostały doprowadzone do stadium, w którym możliwe byłoby ich praktyczne wykorzystanie. W pracach [60] i [64] użyto teorii plastyczności do opisu betonu. Praca [64] zajmuje się wyłącznie dwu- lub trójosiowym ściskaniem, uwzględnia przy tym obciążenia cykliczne. Model przedstawiony w [60] nie opisuje stanu pokrytycznego przy rozciąganiu i jest ograniczony wyłącznie do przypadku obciążenia pierwotnego.

I.2 Przedmiot i cele pracy

Przedmiotem pracy jest analiza właściwości betonu w płaskim stanie naprężenia (na podstawie dostępnych danych doświadczalnych) i opis tych właściwości metodami teorii plastyczności.



Tablica I.1. Podział prac z zakresu teorii plastyczności dotyczących betonu

Jak wynika z literatury cytowanej w poprzednim punkcie teoria plastyczności jest z powodzeniem stosowanym narzędziem, które umożliwia poprawny opis nieliniowego zachowania się betonu. Zastosowanie teorii plastyczności oznacza, że beton jest traktowany jako materiał homogeniczny i nie jest możliwe bezpośrednie opisanie fizycznych mechanizmów uszkodzeń występujących w tym materiale na poziomie mikro. Do zajęcia zachowaniem się betonu w płaskim stanie naprężenia, przy szczególnym uwzględnieniu obciążeń cyklicznych, skłoniły autora wcześniejsze doświadczenia uzyskane przy analizie numerycznej żelbetowych konstrukcji prętowych [122], [119]. Uznano, że posiadanie dobrego modelu dla płaskiego stanu naprężenia pozwala na analizę szeregu praktycznie ważnych konstrukcji takich jak belki, ustroje ramowe i tarcze, a przy wykorzystaniu modelu warstwowego w MES również płyt i powłok.

Ograniczono się przy tym do przypadku obciążeń doraźnych o charakterze statycznym. Zaproponowane związki $\underline{\dot{\sigma}}(\underline{\dot{\epsilon}})$ mają charakter prędkościowy, a kropka oznacza różniczkowanie po czasie. Zgodnie z zasadami teorii plastyczności, czas ma charakter umowny i jest dodatnim parametrem, stale rosnącym w procesie obciążenia. Posługiwanie się czasem ma więc charakter konwencjonalny i nie oznacza uwzględnienia właściwości reologicznych materiału.

Próba opisu właściwości betonu doprowadziła do sformułowania kompletnego i spójnego modelu konstytutywnego. Dla wykazania zgodności proponowanego modelu z doświadczeniem, a także dla potwierdzenia jego przydatności do obliczeń konstrukcji konieczna była weryfikacja numeryczna. Tak więc cele pracy można sformułować następująco:

- 1° Budowa modelu konstytutywnego betonu na podstawie teorii plastyczności, spełniającego postulaty 1° ÷ 5° z punktu I.1.
- 2° Weryfikacja numeryczna modelu na szczeblu punktu materialnego przy użyciu własnych programów.
- 3° Implementacja modelu do programu MES i wykonanie obliczeń testowych dla kilku wybranych konstrukcji, oraz porównanie ich z wynikami doświadczalnymi i rezultatami innych autorów.

Należy zauważyć, że budowa modelu fizycznego materiału obejmuje zwykle dwa etapy:

sformułowanie podstawowych praw opisujących zachowanie się materiału, co w efekcie prowadzi do budowy związków konstytutywnych oraz zaproponowanie szczegółowych postaci funkcji występujących w tych związkach i kalibrację przyjętych stałych materiałowych i współczynników. Praca obejmuje oba te etapy; w efekcie otrzymano gotowy model, którego użycie wymaga znajomości zaledwie czterech stałych materiałowych. Jednakże w opisie modelu starano się oba etapy, w miarę możliwości rozdzielić. W związku z tym bazując na podstawowych mechanizmach plastycznych i kryteriach obciążenia czytelnik może sam, dysponując innymi badaniami doświadczalnymi, sformułować własne postacie poszczególnych funkcji materiałowych. W tym sensie proponowany model ma charakter otwarty.

W pracy posłużono się teorią plastyczności z powierzchnią graniczną. Podstawy tego sformułowania opisane są w pracach [36], [37], [67]. Prace wykorzystujące teorię plastyczności z powierzchnią graniczną do opisu betonu są przedstawione w tabl. I.1. Do wyboru tej teorii skłoniły autora następujące przesłanki:

- możliwość uwzględnienia w prosty sposób ścisnienia i dylatacji poprzez wprowadzenie niezależnych mechanizmów plastycznych (w podejściu klasycznym poprawne opisanie dylatacji dla betonu wymaga zróżnicowania równań powierzchni: plastyczności i potencjału plastycznego, co prowadzi do niestowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego),
- prostota opisu stanu pokrytycznego poprzez odkształceniowe kurczenie się powierzchni granicznej,
- uwzględnienie w naturalny sposób nieliniowego zachowania się betonu przy odciążeniu i powtórny obciążeniu (zjawisko to może być również opisane poprzez tzw. wielopowierzchniową teorię plastyczności [79]),
- możliwość rozszerzenia opisu w celu uwzględnienia zachowania się betonu przy rozciąganiu.

Początkowo, zamiarem autora było oparcie się na modelu zaproponowanym przez *M.N.Fardisa* i *E.S.Chena* [42]. Model ten jest rozwinięciem wcześniejszych prac [41] i



[28]. Jednakże w toku studiów okazało się, że model ten jest całkowicie nieprzydatny dla praktycznego zastosowania. W efekcie konieczne stało się opracowanie nowego, w pełni oryginalnego modelu materiału. Wersja ostateczna tego modelu jest prezentowana po raz pierwszy w tej pracy. Rezultaty cząstkowe były prezentowane wcześniej na konferencjach [120], [121].

I.3 Zakres pracy

Część II pracy poświęcono opisowi prezentowanego modelu betonu. Punkt II.1 przedstawia podstawowe założenia fizyczne przyjęte przy budowie modelu, a w szczególności zaproponowane mechanizmy plastyczne. W punkcie II.2 omówiono doświadczalne przesłanki przyjętych założeń. Prędkościowe związki fizyczne są wyprowadzone w punkcie II.3. Punkt II.4 prezentuje przyjęte, oryginalne kryteria stanu obciążenia i odciążenia. Wzory opisujące moduły plastyczne H_p , K_p i β są przedstawione w punkcie II.5. Równanie powierzchni granicznej podane jest w punkcie II.6. Punkt II.7 poświęcony jest stanowi pokrytycznemu, a w szczególności kurczeniu się powierzchni granicznej. Opis procesów obciążenia nieproporcjonalnego i cyklicznego w ramach prezentowanego modelu przedstawia punkt II.8. Podsumowania podstawowych cech modelu dokonano w punkcie II.9.

Część III pracy przedstawia weryfikację numeryczną modelu. Punkt III.1 opisuje ścieżki równowagi: naprężenia – odkształcenia otrzymane dla proporcjonalnych obciążeń monotonicznych i cyklicznych wraz z porównaniem z wynikami doświadczalnymi. W punkcie III.2 przedstawiono obliczenia za pomocą MES czterech przebadanych doświadczalnie elementów tarczowych. Do obliczeń wybrano tarcze WT3 i WT4 zbadane przez *F. Leonhardta* i *R. Walthera* oraz tarcze W2 i W4 testowane przez *V. Červenkę*. Trzy pierwsze przykłady dotyczą obciążenia monotonicznego, ostatni, czwarty prezentuje obciążenie cykliczne.

Część IV stanowi zakończenie. Są tam przedstawione możliwości dalszego rozwoju tematu. Kierując się dążeniem do przejrzystości i zwięzłości tekstu, część szczegółowych wyprowadzeń przesunięto z części II do Załączników Z1 ÷ Z6. Z kolei Załączniki Z7 i Z8 przedstawiają dane materiałowe użyte w przykładach w części III.

Należy zwrócić uwagę, że w pracy konsekwentnie stosowano regułę, że naprężenia i odkształcenia ściskające są przyjmowane jako dodatnie. Stąd np. wytrzymałość na roz-

ciąganie f_t zawsze ma wartość ujemną. W tekście starano się opisywać wszystkie używane zmienne i stałe przy ich pierwszym pojawieniu się. Niezależnie jednak od tego, dla ułatwienia posługiwania się pracą, sporządzono spis przyjętych oznaczeń.

Praca była w części finansowana z działalności statutowej i badań własnych Instytutu Materiałów i Konstrukcji Budowlanych oraz Samodzielnej Wydziałowej Dydaktycznej Pracowni Komputerowej, jak też przez Komitet Badań Naukowych w ramach Grantu nr 3 0401 91 01.

Rozdział II

Teoretyczny opis modelu betonu

II.1 Podstawowe założenia fizyczne

Dla opisu modelu betonu przyjęto pięć podstawowych założeń.

1. Bieżąca powierzchnia plastyczności redukuje się w przestrzeni naprężeń do punktu odpowiadającego aktualnemu stanowi naprężenia. Stosując nazewnictwo zaproponowane w pracy [128] oznacza to brak procesów biernych i neutralnych czyli, że każda zmiana stanu naprężenia powoduje zmianę odkształceń plastycznych.
2. Definiuje się powierzchnię graniczną w przestrzeni naprężeń, która zależna jest od całkowitych osiągniętych odkształceń plastycznych. Możliwymi stanami naprężenia są punkty w obszarze ograniczonym powierzchnią graniczną lub na tej powierzchni. W pierwszym przypadku równanie powierzchni granicznej pozostaje niezmienione, natomiast w drugim przypadku możliwe jest kurczenie się powierzchni granicznej.
3. Prędkość odkształcenia jest sumą części plastycznej i sprężystej. Wobec założenia 1 nie można jednakże w proponowanym opisie betonu w sposób jednoznaczny wydzielić z krzywych doświadczalnych naprężenie – odkształcenie części sprężystej odkształcenia. Oznacza to, że wartości stałych sprężystych materiału mogą być przyjęte arbitralnie. Przyjęcie dostatecznie dużych wartości sprężystych stałych materiałowych powoduje, że całkowite wartości odkształcenia otrzymane z doświadczeń mogą być interpretowane jako odkształcenia plastyczne. Ułatwia to znacznie identyfikację funkcji opisujących moduły plastyczne. W punkcie II.3 przeanalizowano dwa przypadki szczególne: (1) całkowity brak odkształceń sprężystych, (2) pomijalnie

małe odkształcenia sprężyste dla przypadku ścieżek obciążenia o niezmiennych w przestrzeni kierunkach naprężeń głównych.

4. Prędkość odkształcenia plastycznego opisują trzy różne mechanizmy plastyczne. Funkcje materiałowe określające te mechanizmy są niezależne i wynikają z obserwacji doświadczalnych. Podejście to lokuje prezentowany model w klasie związków fizycznych hipoplastycznych [36].

Zakłada się, że prędkość odkształcenia ścinającego oktaedrycznego plastycznego $\dot{\gamma}_0^p$ jest proporcjonalna do prędkości naprężenia ścinającego oktaedrycznego $\dot{\tau}_0$ według wzoru:

$$\dot{\gamma}_0^p = \frac{1}{H_p} \dot{\tau}_0, \quad (II.1)$$

gdzie H_p - moduł plastyczny postaciowy.

Składowa objętościowa prędkości odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}_{vol}^p$ składa się z dwóch części:

$$\dot{\epsilon}_{vol}^p = \dot{\epsilon}_{vol}^{pI} + \dot{\epsilon}_{vol}^{pII}. \quad (II.2)$$

Pierwszy składnik jest wprost proporcjonalny do prędkości naprężenia średniego $\dot{\sigma}_0$:

$$\dot{\epsilon}_{vol}^{pI} = \frac{1}{K_p} \dot{\sigma}_0, \quad (II.3)$$

gdzie K_p - moduł plastyczny objętościowy,

zaś drugi składnik uzależniony jest od wartości prędkości odkształcenia plastycznego ścinającego w płaszczyźnie dewiatorowej $\dot{\gamma}_0^p$:

$$\dot{\epsilon}_{vol}^{pII} = \beta \dot{\gamma}_0^p = \frac{\beta}{H_p} \dot{\tau}_0, \quad (II.4)$$

gdzie β - współczynnik ściśnienia / dylatacji dla ścinania.

Wzór (II.1) opisuje narastanie odkształceń plastycznych w płaszczyźnie dewiatorowej (mechanizm plastyczny dewiatorowy), zaś wzory (II.3) i (II.4) opisują dwa odrębne mechanizmy plastyczne objętościowe. Mechanizm plastyczny (II.4) umożliwia opis ściśnienia i dylatacji pojawiających się w betonie dla czysto dewiatorowych ścieżek obciążenia ($\dot{\sigma}_0 \equiv 0$).

Powyższy opis prędkości odkształceń plastycznych różni się od opisu stosowanego w klasycznej teorii plastyczności, gdzie kierunek prędkości odkształcenia plastycznego jest jednoznacznie określony poprzez wektor normalny do powierzchni potencjału plastycznego (tzn. występuje tylko jeden mechanizm plastyczny opisywany przez moduł wzmocnienia H). Proponowany opis różni się także od założenia, przyjętego w pracach, które wprowadziły do teorii plastyczności koncepcję powierzchni granicznej [37], [67], że kierunek prędkości odkształcenia plastycznego jest określony poprzez wektor normalny do powierzchni granicznej w punkcie zrzutowania na nią aktualnego stanu naprężenia. Należy zauważyć, że brak równania bieżącej powierzchni plastyczności uniemożliwia wyprowadzenie tzw. warunku konsystentności *Pragera* [19], który w klasycznych modelach plastycznych ze wzmocnieniem pozwala na wyznaczenie funkcji opisującej zmianę modułu wzmocnienia H .

5. Przyjmuje się, że kierunek prędkości odkształcenia plastycznego w płaszczyźnie dewiatorowej $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ jest równoległy do kierunku całkowitych naprężeń dewiatorowych s_{ij} :

$$\boxed{\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}}, \quad (\text{II.5})$$

lub też do kierunku prędkości naprężeń dewiatorowych \dot{s}_{ij} :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \dot{s}_{ij}, \quad (\text{II.6})$$

gdzie λ - współczynnik proporcjonalności.

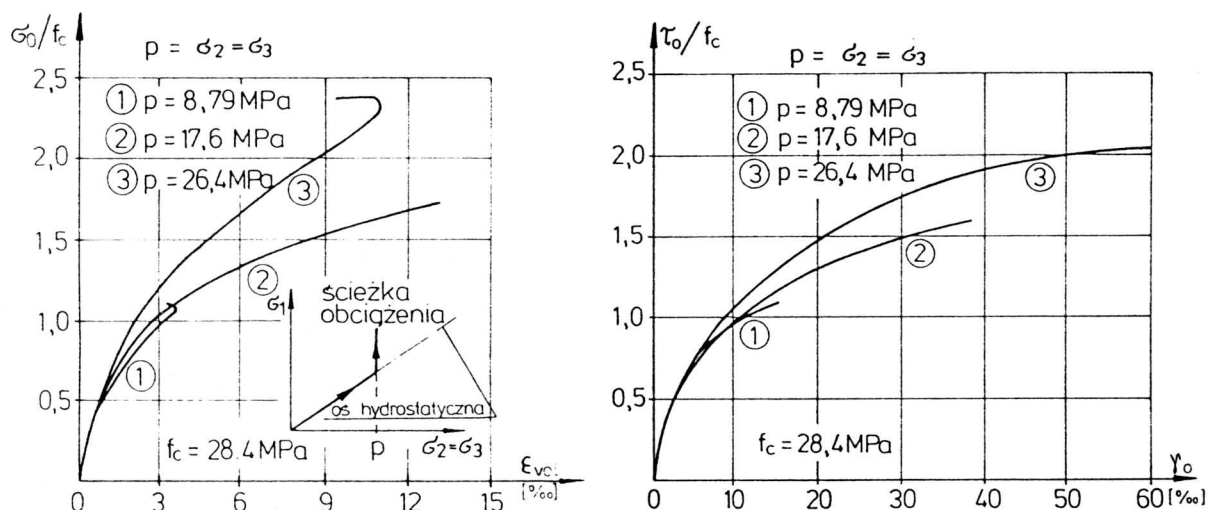
Wybór związku (II.5) lub (II.6) albo sformułowanie innej zależności powinno być zgodne z wynikami badań doświadczalnych. Warto zauważyć, że przyjęcie dla mechanizmu plastycznego dewiatorowego powierzchni potencjału plastycznego *Hubera - v. Misesa - Hencky'ego* ($H - M - H$) o równaniu:

$$\sqrt{2J_2} = const, \quad (\text{II.7})$$

gdzie $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$ - drugi niezmiennik tensora dewiatora naprężeń, prowadzi wprost do zależności (II.5).

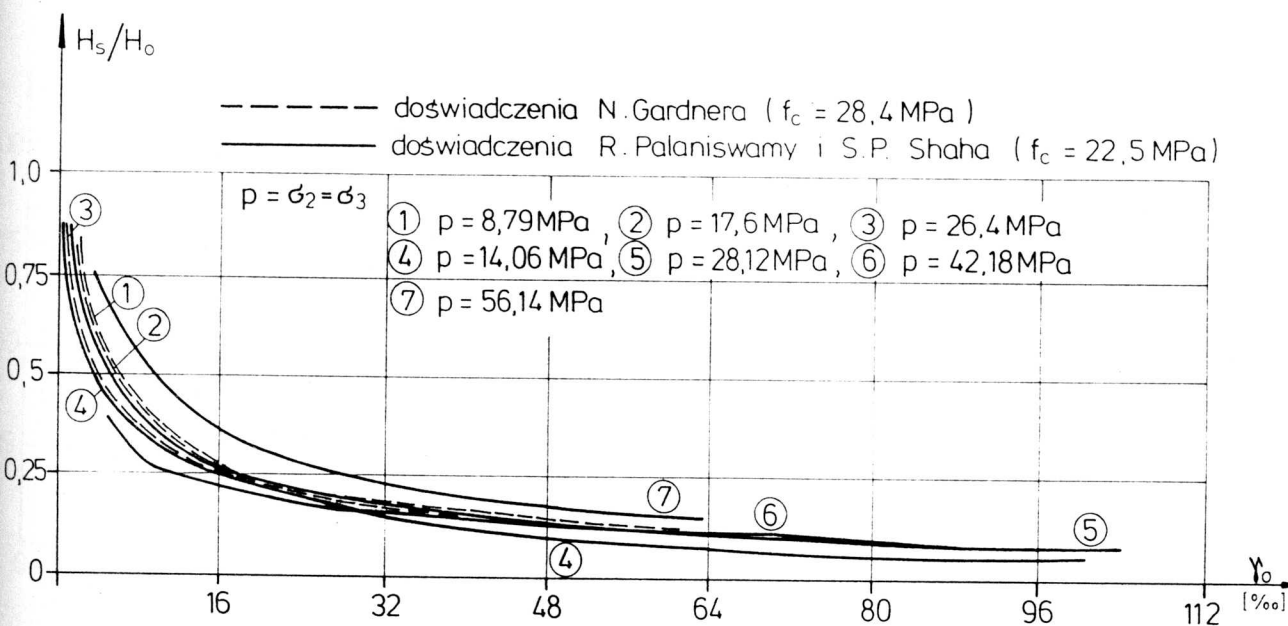
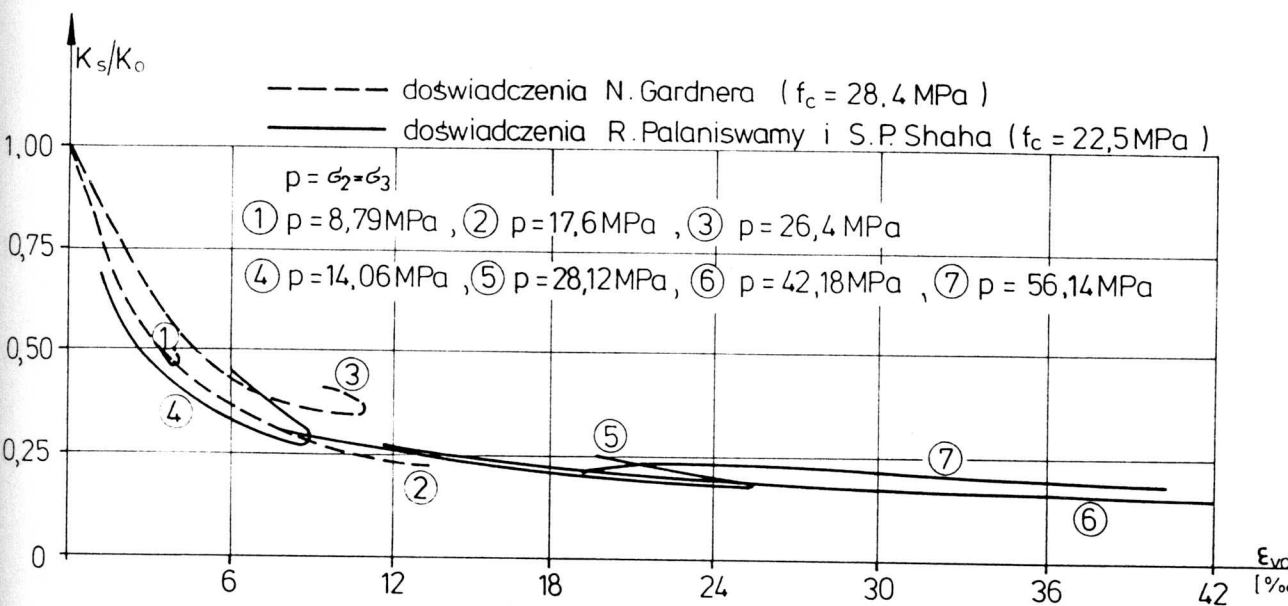
II.2 Doświadczalne przesłanki przyjętych założeń

Hipoteza o możliwości niezależnego opisu części dewiatorowej i objętościowej deformacji betonu pojawiła się w wyniku analizy badań doświadczalnych. Początkowo hipoteza ta została wykorzystana przy formułowaniu nieliniowo – sprężystych modeli izotropowych ze zmiennym siecznym modułem objętościowym K_s i postaciowym H_s , będącymi funkcjami naprężenia lub odkształcenia [23], [24], [66]. *L.Cedolin* ze współpracownikami w pracach [23], [24] przeprowadził analizę wyników eksperymentalnych *N.Gardnera*, *R.Palaniswamy* i *S.P.Shaha*, *L.L.Millsa* i *R.M.Zimmermanna* oraz *D.Linsego* z lat 1969 – 74. Analizowane badania dotyczyły trójosiowego ściskania dla ścieżki obciążenia pokazanej na rys. II.1.

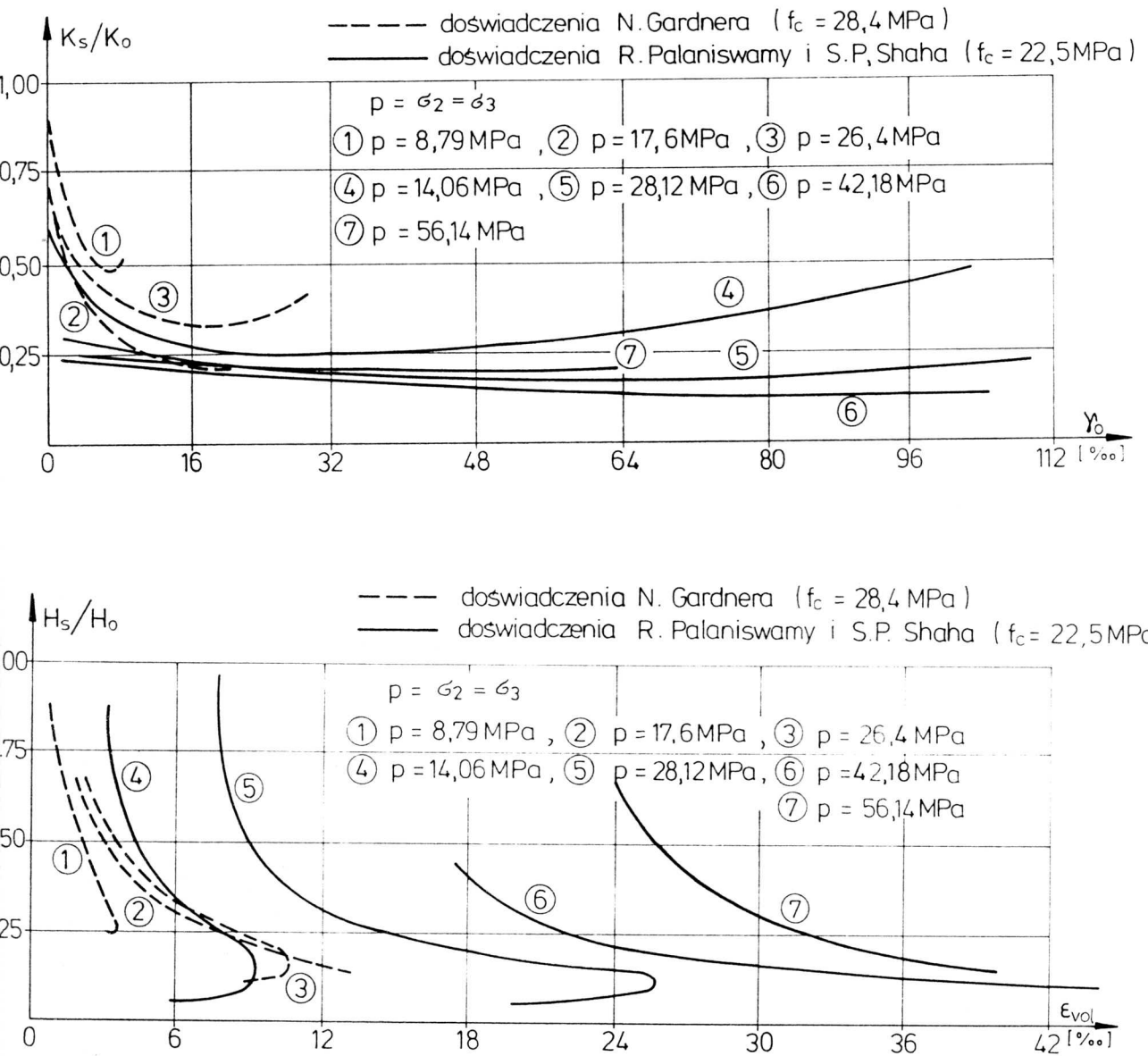


Rys. II.1 Zależności doświadczalne $\sigma_0 - \varepsilon_{vol}$ i $\tau_0 - \gamma_0$ (*N.Gardner*)

Rezultaty eksperymentów *N.Gardnera* oraz *R.Palaniswamy* i *S.P.Shaha* dla fragmentu ścieżki obciążenia, odchodzącego od osi hydrostatycznej (σ_1 rosnące, $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = const$) przedstawione są na rys. II.1 – II.3. Widoczne jest podobieństwo zależności $\sigma_0 - \varepsilon_{vol}$ dla różnych poziomów przyłożonego wcześniej ciśnienia hydrostatycznego; to samo dotyczy krzywych $\tau_0 - \gamma_0$. Wykresy doświadczalnych zależności $K_s - \varepsilon_{vol}$ i $H_s - \gamma_0$ wskazują na możliwość opisanie ich poprzez jednoznaczne funkcje, niezależnie od wartości przyłożonego ciśnienia hydrostatycznego. Natomiast krzywe $K_s - \gamma_0$ i $H_s - \varepsilon_{vol}$ nie mogą być opisane poprzez pojedyncze, jednoznaczne funkcje. Analiza wyników doświadczalnych pozostałych badaczy prowadzi do tych samych wniosków. Skłoniło to *L.Cedolina* do zaproponowania związków analitycznych w formie:



Rys. II.2 Zależności doświadczalne $K_s - \epsilon_{vol}$ i $H_s - \gamma_0$



Rys. II.3 Zależności doświadczalne $K_s - \gamma_0$ i $H_s - \epsilon_{vol}$

$$K_s/K_0 = g(\varepsilon_{vol}), \quad (II.8)$$

$$H_s/H_0 = f(\gamma_0),$$

gdzie

$$g(\varepsilon_{vol}) = 0,85 \left(2,5^{-\frac{\varepsilon_{vol}}{0,0042}} \right) + 0,15, \quad (II.9)$$

$$f(\gamma_0) = 0,81 \left(2^{-\frac{\gamma_0}{0,001}} \right) - \gamma_0 + 0,19,$$

K_0 - początkowy moduł objętościowy,

H_0 - początkowy moduł postaciowy.

Podobne związki zostały zaproponowane w roku 1979 przez *J.B.Newmana* i *M.D.Kotsovosa* [66]. Dla opisu modułów przyjęli oni jednak za zmienne niezależne naprężenie średnie σ_0 i oktaedryczne τ_0 :

$$K_s/K_0 = h(\sigma_0), \quad (II.10)$$

$$H_s/H_0 = k(\tau_0),$$

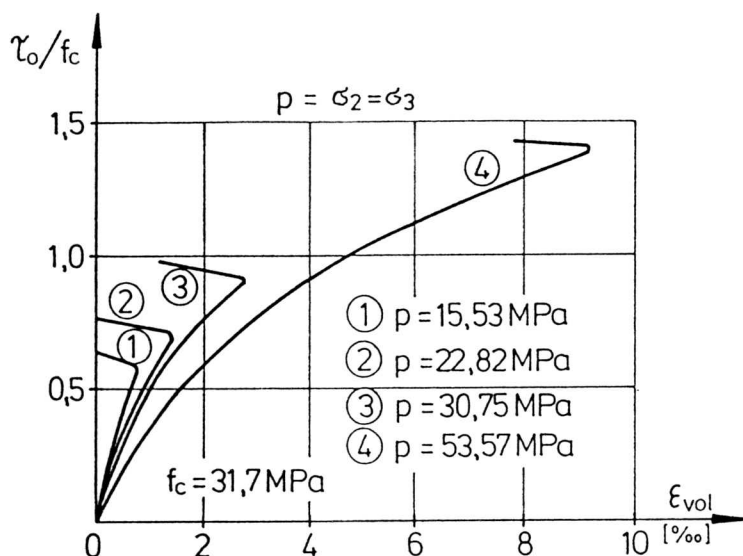
gdzie

$$h(\sigma_0) = \frac{1}{1 + A \left(\frac{\sigma_0}{f_c} \right)^{b-1}}, \quad (II.11)$$

$$k(\tau_0) = \frac{1}{1 + C \left(\frac{\tau_0}{f_c} \right)^{d-1}}.$$

Wartości współczynników A, C, b, d są uzależnione od wytrzymałości betonu na ściskanie – szczegółowe wzory podane zostały w [66]. Również w pracy *K.Gerstlego* z 13 współpracownikami [48], będącej podsumowaniem wspólnego programu badawczego siedmiu laboratoriów z różnych krajów nad zachowaniem się betonu przy dwu- i trójosiowym ścisaniu, stwierdzono istnienie jednoznacznych zależności $\sigma_0 - \varepsilon_{vol}$ oraz $\tau_0 - \gamma_0$ (jednak nie podano tam związków analitycznych).

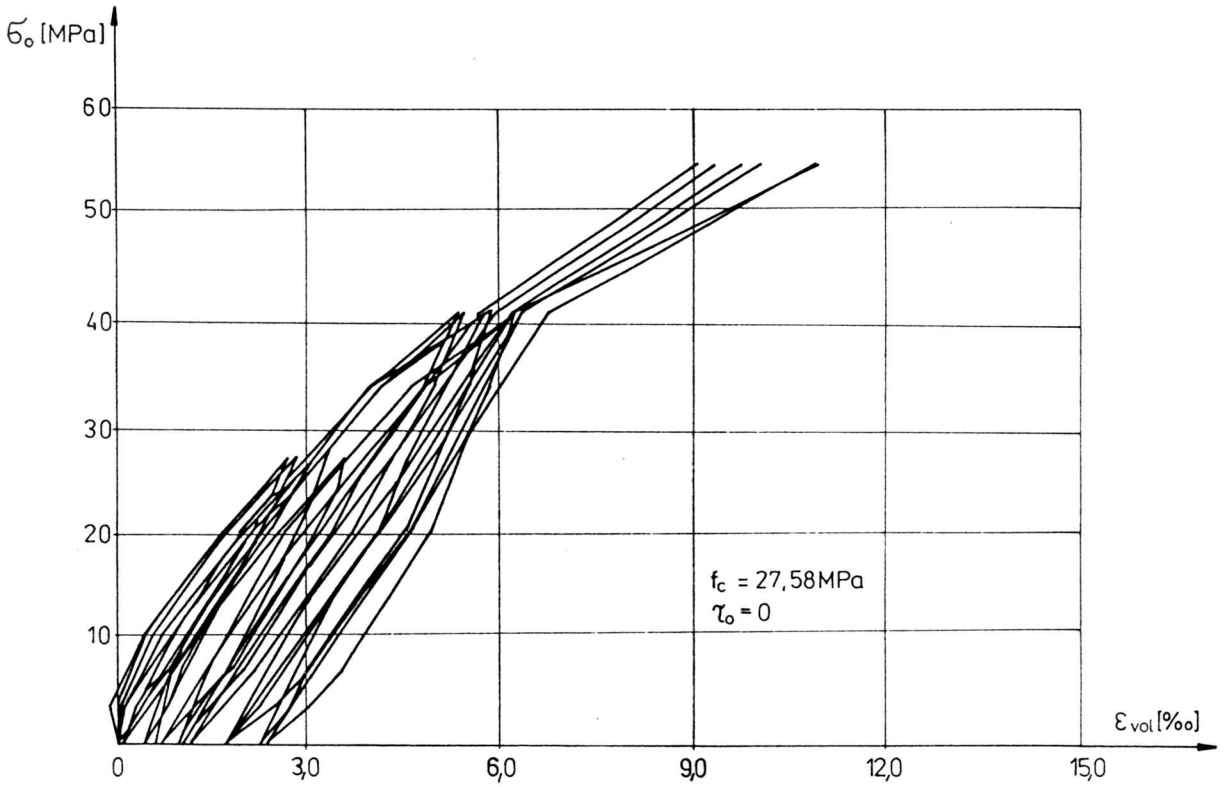
Związki (II.8) lub (II.10) nie opisują dylatacji (przyrost odkształceń objętościowych) pojawiającej się dla stanów naprężenia bliskich powierzchni granicznej. Występowanie dylatacji można zaobserwować na rys. II.1 i II.4 (widoczne jako zmniejszanie się odkształcenia ε_{vol} przy przyjętej konwencji znakowania). Przedstawione wyniki doświadczeń wskazują jednoznacznie na fizyczną poprawność założenia o możliwości niezależnego opisu części dewiatorowej i objętościowej odkształcenia betonu (związki (II.1 - II.4)).



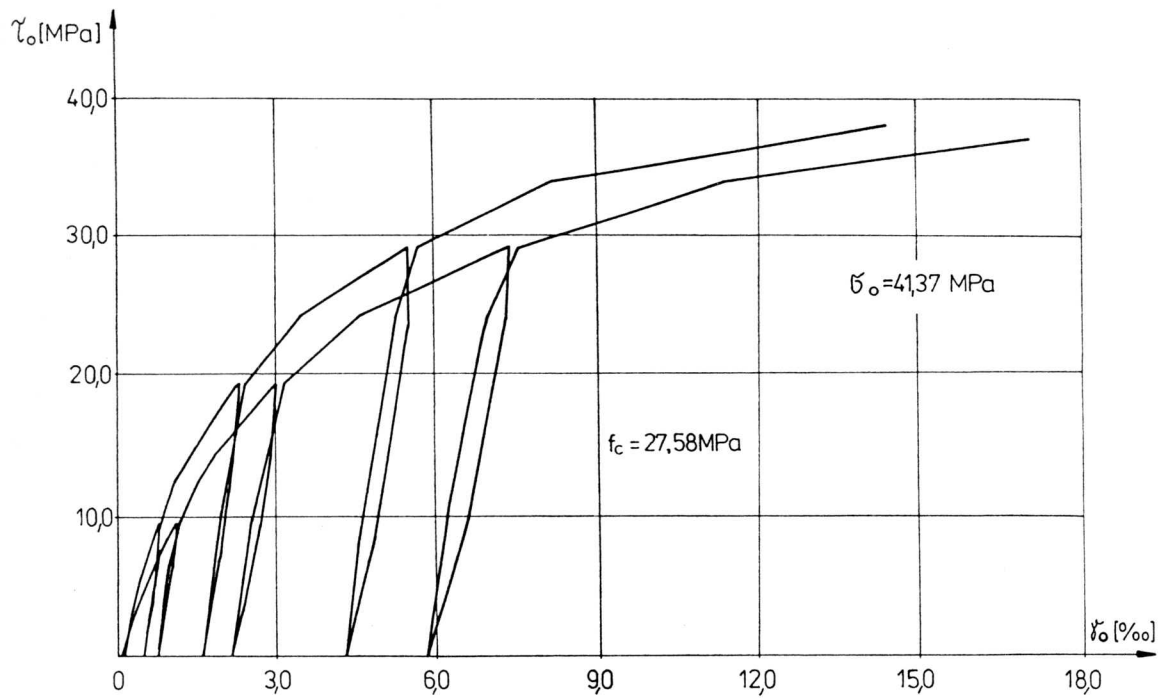
Rys. II.4 Zależności doświadczalne $\tau_0 - \epsilon_{vol}$ (J.B.Newman i M.D.Kotsovos)

Zrealizowane ścieżki obciążenia (wg rys. II.1 lub obciążenie w pełni proporcjonalne), dla których następuje jednoczesny wzrost σ_0 i τ_0 nie pozwalają jednakże na jednoznaczne wyznaczenie trzech funkcji materiałowych H_p, K_p, β . Dodatkowo, wyniki doświadczeń z prac [23], [24], [48], [66] ograniczają się wyłącznie do obciążenia pierwotnego nie obejmując odciążenia i obciążenia wtórnych. Spowodowane było to zastosowaną techniką badawczą.

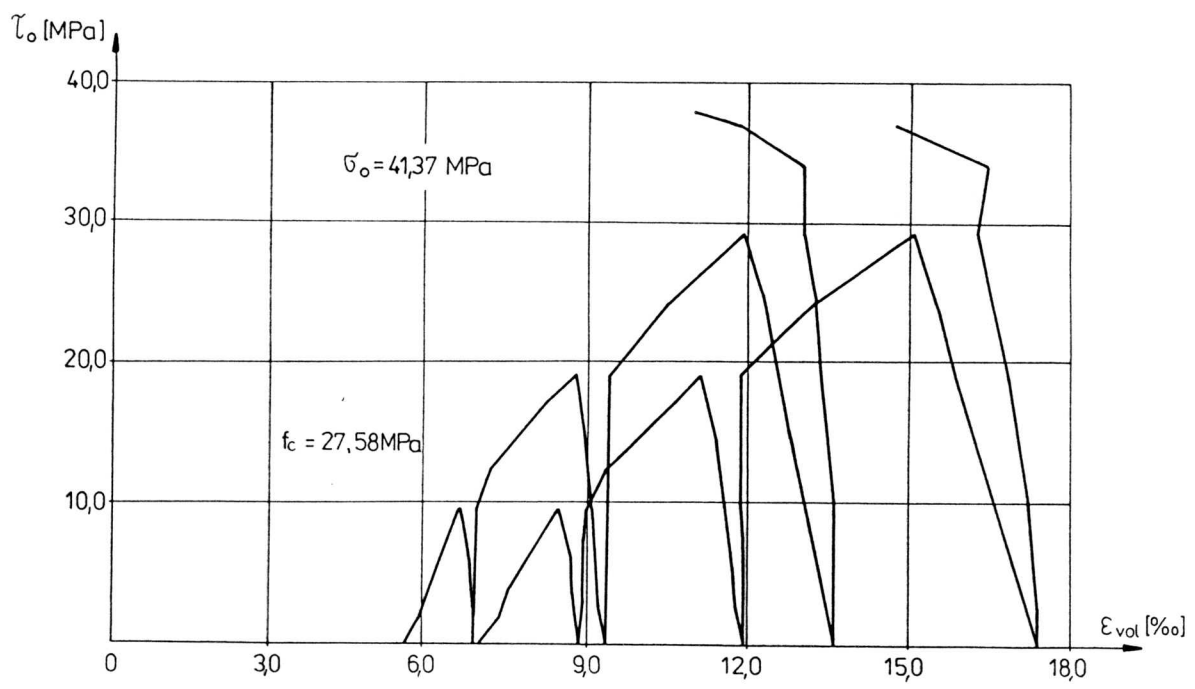
W 1973 roku skonstruowano na Uniwersytecie Colorado w Boulder specjalne stanowisko badawcze umożliwiające realizację dowolnej ścieżki obciążenia w przestrzeni naprężeń głównych na betonowych próbkach kostkowych [109]. Pozwoliło to zespołowi K.Gerstlego w początkach lat osiemdziesiątych przeprowadzić serię badań nad zachowaniem się betonu przy obciążeniach cyklicznych i nieproporcjonalnych [100], [106], [99]. Czyste obciążenie hydrostatyczne (rys. II.5) pozwala określić funkcję opisującą moduł K_p dla obciążenia pierwotnego, odciążenia i powtórnego obciążenia. Fragmenty ścieżki obciążenia z rys. II.6 leżące w płaszczyźnie dewiatorowej pozwalają z kolei na wyznaczenie funkcji opisujących moduł H_p . Jednocześnie, dla obciążeń realizowanych w płaszczyźnie dewiatorowej (tzn. dla $\dot{\sigma}_0 = 0, \dot{\tau}_0 \neq 0$) obserwuje się zmianę odkształceń objętościowych (rys. II.7). Początkowo (dla małych wartości τ_0) jest to ściśnienie, później (dla wartości τ_0 bliskich obciążeniu granicznemu) zaczyna się dylatacja. Ponieważ krzywa $\epsilon_{vol} - \tau_0$ z rys. II.7 została otrzymana dla $\dot{\sigma}_0 \equiv 0$, opisuje ona wyłącznie ϵ_{vol}^{pII} i może służyć do ustalenia przebiegu funkcji β .



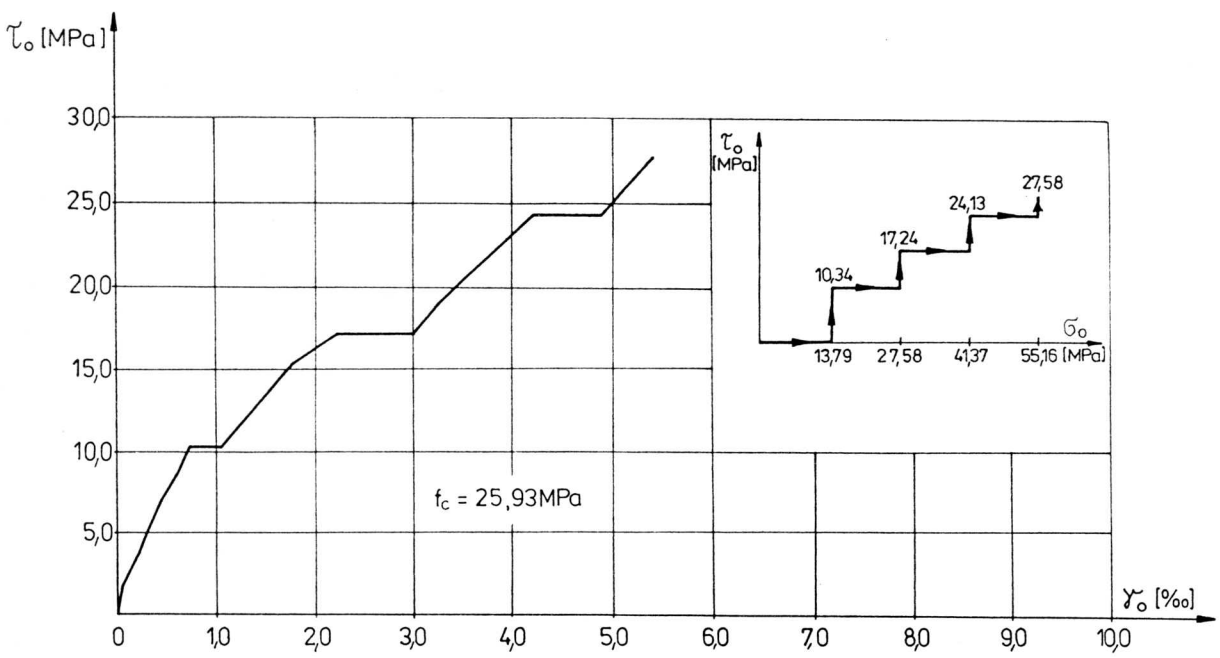
Rys. II.5 Zależności doświadczalne $\sigma_0 - \epsilon_{vol}$ (R. Scavuzzo)



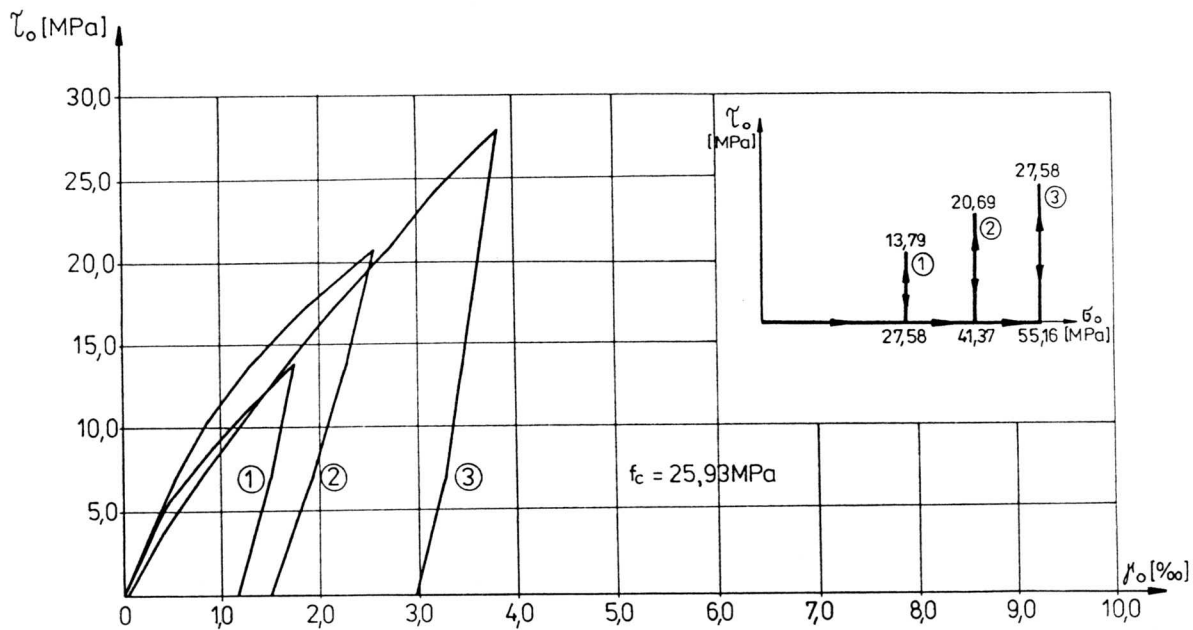
Rys. II.6 Zależności doświadczalne $\tau_0 - \gamma_0$ (R. Scavuzzo)



Rys. II.7 Zależności doświadczalne $\tau_0 - \epsilon_{vol}$ (R.Scavuzzo)



Rys. II.8 Zależności doświadczalne $\tau_0 - \gamma_0$ - obciążenie schodkowe (T.Stankowski)



Rys. II.9 Zależności doświadczalne $\tau_0 - \gamma_0$ dla $\sigma_0 = const$ (T.Stankowski)

Przy zastosowaniu schodkowego (odcinkowo liniowego) programu obciążenia (rys. II.8) obserwuje się zmianę odkształcenia γ_0 dla odcinków ścieżki obciążenia równoległych do osi hydrostatycznej. Świadczy to o istnieniu zależności $\gamma_0 - \sigma_0$ dla warunków $\tau_0 \neq 0$, $\dot{\tau}_0 \equiv 0$ (dla przypadku $\tau_0 = 0$, $\dot{\tau}_0 \equiv 0$, tzn. obciążenia wzdłuż osi hydrostatycznej nie obserwuje się zmiany odkształcenia γ_0). Jeśli końcowy stan naprężenia (σ_0, τ_0) z rys. II.8 zostanie osiągnięty przy zastosowaniu innej ścieżki obciążenia (rys. II.9) inna będzie końcowa wartość γ_0 . Oznacza to, że istnieje wyraźna zależność stanu deformacji od historii obciążenia.

Uwzględniając wyniki doświadczeń, zespół K.Gerstlego zaproponował związki fizyczne w postaci [106], [107]:

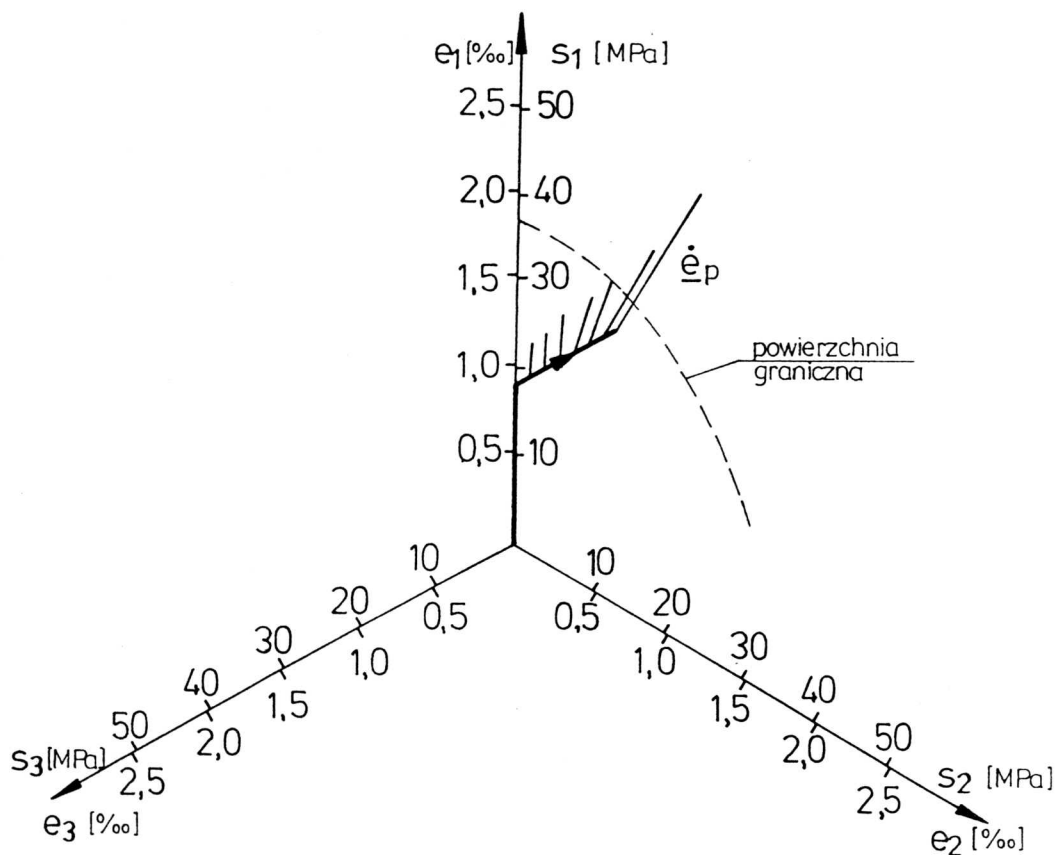
$$\dot{\epsilon}_{vol} = \frac{1}{K_T} \dot{\sigma}_0 + \frac{1}{Z_T} \dot{\tau}_0, \quad (II.12)$$

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{1}{Y_T} \dot{\sigma}_0 + \frac{1}{H_T} \dot{\tau}_0,$$

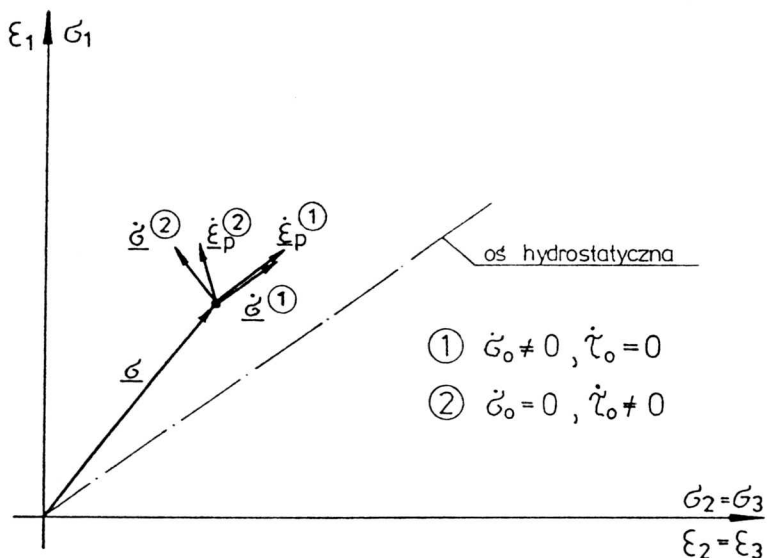
gdzie K_T - styczny moduł objętościowy,
 H_T - styczny moduł postaciowy,

- Z_T – styczny moduł ściśnienia / dylatacji dla ścinania,
 Y_T – styczny moduł postaciowy dla naprężenia średniego (dla czystego obciążenia hydrostatycznego tzn. $\tau_0 = 0, \dot{\tau}_0 \equiv 0$ przyjmuje się $\frac{1}{Y_T} = 0$).

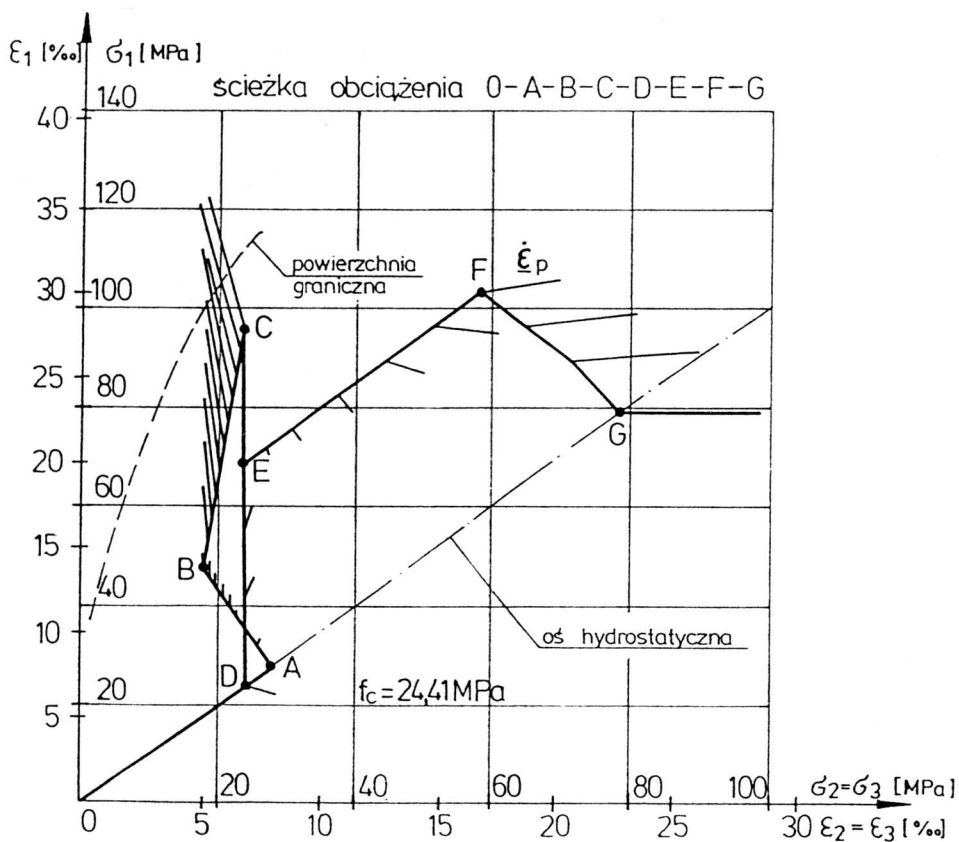
Jak widać, przyjęte w pracy związki (II.1 – II.4) mieszczą się w klasie związków (II.12) pod warunkiem pominięcia odkształceń sprężystych oraz nie uwzględnienia relacji $\gamma_0 - \sigma_0$, tzn. przyjęcia $\frac{1}{Y_T} \equiv 0$. Badania zespołu *K.Gerstlego* dostarczają wyłącznie wstępnych wskazówek co do wartości modułu Y_T i jego zależności od τ_0 i nie pozwalają na ogólne sformułowanie funkcji opisujących Y_T (w zależności od wytrzymałości betonu i stopnia wyężenia). Ogólnie można stwierdzić, że wyniki przedstawione w pracach [99], [100], [106], [107] potwierdzają poprawność niezależnego opisu części dewiatorowej i objętościowej odkształcenia betonu również dla obciążeń cyklicznych i nieproporcjonalnych. Dodatkowo prace te dostarczają przesłanek dla sformułowania fizycznie poprawnych kryteriów występowania obciążenia pierwotnego, wtórnego i odciążenia, co zostanie wykorzystane w punkcie II.5.



Rys. II.10 Prędkość odkształcenia plastycznego \dot{e}_p - wyniki doświadczalne
 (T.Stankowski)



Rys. II.11 Prędkość odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}_p$ wg przyjętych założeń



Rys. II.12 Prędkość odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}_p$ - wyniki doświadczalne
(T. Stankowski)

Problemem wymagającym dalszych badań jest natomiast kierunek wektora prędkości odkształcenia plastycznego na płaszczyźnie dewiatorowej $\underline{\dot{\epsilon}}_p$. Istniejące obserwacje doświadczalne (rys. II.10) nie potwierdzają jednoznacznie ani związku (II.5) ani (II.6). Ze spół *K.Gerstlego* w proponowanych związkach fizycznych [106], [107] przyjął hipotezę równoległości wektorów prędkości odkształcenia i prędkości naprężenia na płaszczyźnie dewiatorowej (równanie (II.6)), stwierdzając jednocześnie, że nie ma ona podstaw doświadczalnych. Podjęte zostały próby opisu zakładające, że kierunek wektora prędkości odkształcenia plastycznego jest funkcją zarówno kierunku prędkości naprężenia w danej chwili czasu, jak i kierunku prędkości naprężenia w bliskiej przeszłości [75].

Niezależnie od przyjętej hipotezy o kierunku wektora prędkości odkształcenia na płaszczyźnie dewiatorowej, założenie o istnieniu trzech niezależnych mechanizmów plastycznych (opisanych wzorami (II.1 – II.4)) powoduje, że kierunek wektora prędkości odkształceń plastycznych zależy w przestrzeni naprężeń głównych od kierunku prędkości naprężeń (nie zaś tylko od wartości całkowitych naprężeń jak to jest w klasycznej plastyczności). W przypadku zmiany wyłącznie naprężenia średniego ($\dot{\sigma}_0 \neq 0, \dot{\tau}_0 = 0$) następuje zmiana wyłącznie odkształcenia objętościowego plastycznego ($\dot{\epsilon}_{vol}^p \neq 0, \dot{\gamma}_0^p = 0$), natomiast zmiana naprężenia wyłącznie w płaszczyźnie dewiatorowej ($\dot{\sigma}_0 = 0, \dot{\tau}_0 \neq 0$) powoduje zmianę odkształcenia plastycznego dewiatorowego ($\dot{\gamma}_0^p \neq 0$) jak i objętościowego ($\dot{\epsilon}_{vol}^p \neq 0$) (rys. II.11).

Istniejące dane doświadczalne (rys. II.12) nie pozwalają na sformułowanie prostego prawa opisującego ogólnie kierunek prędkości odkształceń plastycznych.

II.3 Prędkościowe związki fizyczne

II.3.1 Przestrzenny stan naprężenia

Dla zachowania ogólności wywodów wyprowadzone zostaną najpierw prędkościowe związki fizyczne w formie $\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}(\underline{\dot{\sigma}})$ i relacje odwrotne $\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}}(\underline{\dot{\epsilon}})$ dla ogólnego przypadku 3 – wymiarowego, przy założeniu prawdziwości hipotezy określonej wzorem (II.5) oraz istnieniu części sprężystej odkształceń. Dla takiego przypadku odpowiednie zależności zostały podane w pracy [42].

Dla części dewiatorowej prędkości odkształceń plastycznych, ze związku (II.5) wynika

zależność skalarna:

$$\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p = \lambda^2 s_{ij} s_{ij}, \quad (\text{II.13})$$

czyli

$$\sqrt{\frac{1}{3} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p} = \lambda \sqrt{\frac{1}{3} s_{ij} s_{ij}}, \quad (\text{II.14})$$

lub

$$\dot{\gamma}_0^p = \lambda \tau_0.$$

Wykorzystując związek (II.1) można uzależnić wartość współczynnika λ wyłącznie od wartości naprężeń:

$$\lambda = \frac{\dot{\gamma}_0^p}{\tau_0} = \frac{\dot{\tau}_0}{H_p \tau_0}. \quad (\text{II.15})$$

Podstawiając uzyskany wynik do wzoru (II.5) otrzymuje się związek:

$$\dot{e}_{ij}^p = \lambda s_{ij} = \frac{\dot{\tau}_0}{H_p \tau_0} s_{ij}. \quad (\text{II.16})$$

Prędkość naprężenia ścinającego oktaedrycznego $\dot{\tau}_0$ może być wyrażona w funkcji prędkości tensora naprężenia $\dot{\sigma}_{ij}$:

$$\dot{\tau}_0 = \frac{d\tau_0}{d\sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{d\sqrt{\frac{1}{3} s_{kl} s_{kl}}}{d\sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3\tau_0} s_{ij} \dot{\sigma}_{ij}. \quad (\text{II.17})$$

Pozwala to zapisać wzór (II.16) w formie:

$$\dot{e}_{ij}^p = \frac{s_{kl}}{3\tau_0^2 H_p} \dot{\sigma}_{kl} s_{ij} = \frac{s_{kl} s_{ij}}{3\tau_0^2 H_p} \dot{\sigma}_{kl}. \quad (\text{II.18})$$

Dodatkowo, dla części sprężystej prędkości odkształcenia na płaszczyźnie dewiatorowej \dot{e}_{ij}^e obowiązuje uogólnione prawo *Hooke'a*:

$$\dot{e}_{ij}^e = \frac{1}{H_e} \dot{s}_{ij} = \frac{1}{H_e} (\dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \dot{\sigma}_0), \quad (\text{II.19})$$

gdzie H_e - sprężysty moduł postaciowy.

Łącznie prędkość odkształcenia dewiatorowego wyraża się wzorem:

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^p + \dot{e}_{ij}^e = \frac{s_{kl} s_{ij}}{3\tau_0^2 H_p} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{1}{H_e} (\dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \dot{\sigma}_0). \quad (\text{II.20})$$

Jak widać ze wzoru (II.20) \dot{e}_{ij} jest liniową funkcją prędkości naprężenia $\dot{\sigma}_{ij}$. Dodatkowo, ze związków (II.2 – II.4) wynika, że również część objętościowa prędkości odkształceń jest

liniowo zależna od $\dot{\sigma}_{ij}$. Zależność $\dot{\epsilon}_{ij}(\dot{\sigma}_{ij})$ jest więc liniowym związkiem dla prędkości i może być zapisana w postaci macierzowej:

$$\boxed{\dot{\underline{\epsilon}} = \underline{C}_{ep} \dot{\underline{\sigma}}}, \quad (\text{II.21})$$

gdzie \underline{C}_{ep} - macierz podatności zależna wyłącznie od bieżącego stanu naprężenia, nie zaś od prędkości $\dot{\sigma}_{ij}$.

W celu otrzymania relacji (II.21) związek (II.20) należy wyrazić w formie macierzowej:

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} (\underline{s} \underline{s}^T) \dot{\underline{\sigma}} + \frac{1}{H_e} \dot{\underline{s}}, \quad (\text{II.22})$$

gdzie

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ 2\dot{\epsilon}_{12} \\ 2\dot{\epsilon}_{13} \\ 2\dot{\epsilon}_{23} \end{bmatrix}, \quad \dot{\underline{s}} = \begin{bmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y \\ \dot{s}_z \\ 2\dot{\tau}_{xy} \\ 2\dot{\tau}_{xz} \\ 2\dot{\tau}_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s}_{11} \\ \dot{s}_{22} \\ \dot{s}_{33} \\ 2\dot{s}_{12} \\ 2\dot{s}_{13} \\ 2\dot{s}_{23} \end{bmatrix}, \quad \dot{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\sigma}_z \\ \dot{\tau}_{xy} \\ \dot{\tau}_{xz} \\ \dot{\tau}_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\sigma}_{13} \\ \dot{\sigma}_{23} \end{bmatrix}.$$

W związku (II.22) w wektorze prędkości odkształcenia dewiatorowego $\dot{\underline{\epsilon}}$ występują prędkości kątów odkształcenia postaciowego ($\dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{xz}, \dot{\gamma}_{yz}$) zamiast prędkości odkształceń postaciowych ($\dot{\epsilon}_{12}, \dot{\epsilon}_{13}, \dot{\epsilon}_{23}$). Powoduje to konieczność przyjęcia również w wektorach $\dot{\underline{s}}$ i \underline{s} podwojonych wartości naprężeń stycznych. Iloczyn zewnętrzny $\underline{s} \underline{s}^T$ tworzy macierz o wymiarach 6×6 . Wektor naprężeń dewiatorowych \underline{s} może być wyrażony poprzez wektor pełnych naprężeń:

$$\underline{s} = \underline{B} \underline{\sigma}, \quad \dot{\underline{s}} = \underline{B} \dot{\underline{\sigma}}, \quad (\text{II.23})$$

gdzie \underline{B} - symetryczna macierz liczbowa o postaci:

$$\underline{B} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając (II.23) do związku fizycznego (II.22) otrzymuje się wzór:

$$\boxed{\dot{\underline{\epsilon}} = \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} + \frac{1}{H_e} \underline{B} \right) \dot{\underline{\sigma}}}. \quad (\text{II.24})$$

Przy uwzględnieniu części sprężystej i wyrażeniu części plastycznej poprzez wzory (II.2 – II.4) prędkość odkształceń objętościowych wyraża się wzorem:

$$\dot{\epsilon}_{vol} = \dot{\epsilon}_{vol}^e + \dot{\epsilon}_{vol}^{pI} + \dot{\epsilon}_{vol}^{pII} = \frac{1}{K_e} \dot{\sigma}_0 + \frac{1}{K_p} \dot{\sigma}_0 + \frac{\beta}{H_p} \dot{\tau}_0 = \left(\frac{1}{K_e} + \frac{1}{K_p} \right) \dot{\sigma}_0 + \frac{\beta}{H_p} \cdot \frac{1}{3\tau_0} s_{ij} \dot{\sigma}_{ij}, \quad (\text{II.25})$$

gdzie K_e - sprężysty moduł objętościowy.

Prędkość naprężenia średniego $\dot{\sigma}_0$ w zapisie macierzowym ma postać:

$$\dot{\sigma}_0 = \frac{1}{3} \underline{J}^T \underline{\dot{\sigma}}, \quad (\text{II.26})$$

gdzie \underline{J} - wektor liczbowy o postaci:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Związek (II.25) może być zatem zapisany macierzowo:

$$\dot{\epsilon}_{vol} = \left(\frac{1}{K_e} + \frac{1}{K_p} \right) \frac{1}{3} \underline{J}^T \underline{\dot{\sigma}} + \frac{\beta}{3\tau_0 H_p} \underline{s}^T \underline{\dot{\sigma}}. \quad (\text{II.27})$$

Całkowita prędkość odkształcenia jest sumą części dewiatorowej i objętościowej:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{vol}, \quad (\text{II.28})$$

co w zapisie macierzowym przybiera formę:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}} + \frac{1}{3} \underline{J} \dot{\epsilon}_{vol}, \quad (\text{II.29})$$

gdzie $\underline{\dot{\epsilon}}$ - wektor prędkości małych odkształceń mający postać:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yz} \end{bmatrix}.$$

Podstawiając (II.24) i (II.27) do związku (II.29) otrzymuje się poszukiwaną zależność $\dot{\underline{\epsilon}} - \dot{\underline{\sigma}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\epsilon}} = & \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} + \frac{1}{H_e} \underline{B} \right) \dot{\underline{\sigma}} + \frac{1}{3} \underline{J} \left(\frac{1}{K_e} + \frac{1}{K_p} \right) \frac{1}{3} \underline{J}^T \dot{\underline{\sigma}} + \\ & + \frac{1}{3} \underline{J} \frac{\beta}{3\tau_0 H_p} \underline{\sigma}^T \underline{B} \dot{\underline{\sigma}} = \left\{ \left(\frac{1}{9K_e} \underline{J} \underline{J}^T + \frac{1}{H_e} \underline{B} \right) + \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{9K_p} \underline{J} \underline{J}^T + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \right\} \dot{\underline{\sigma}}. \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Składnik $\left(\frac{1}{9K_e} \underline{J} \underline{J}^T + \frac{1}{H_e} \underline{B} \right)$ jest macierzą podatności sprężystej \underline{C}_e o wymiarach 6×6 . Jej postać jawna jest przedstawiona w Załączniku Z1. Pełna macierz podatności sprężysto – plastycznej \underline{C}_{ep} (wzór (II.21)) wyraża się wzorem:

$$\boxed{\underline{C}_{ep} = \underline{C}_e + \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} + \frac{1}{9K_p} \underline{J} \underline{J}^T + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B}}. \quad (\text{II.31})$$

Jak wynika z wyprowadzenia, drugi składnik w (II.31) opisuje prędkość odkształceń dewiatorowych, trzeci prędkość odkształceń objętościowych wywołanych prędkością naprężenia średniego, czwarty zaś prędkość odkształceń objętościowych wywołanych prędkością naprężeń dewiatorowych (czyli ściśnienie lub dylatację materiału). Czwarty składnik jest macierzą niesymetryczną. Symetrię macierzy \underline{C}_{ep} otrzymać można poprzez przyjęcie $\beta \equiv 0$. Oznacza to jednak wyeliminowanie $\dot{\underline{\epsilon}}_{vol}^{pII}$ (wzór (II.4)) i w rezultacie niemożność opisu dylatacji.

Dla obliczeń metodą elementów skończonych (MES) w wersji przemieszczeniowej istotne jest znalezienie macierzy sztywności sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} będącej odwrotnością macierzy \underline{C}_{ep} . W przypadku trójwymiarowym postać macierzy \underline{D}_{ep} podana została w pracy [42]. Podane tam wyprowadzenie polega na przekształceniu wzoru (II.31) za pomocą operacji stosowanych w algebrze macierzy, przy wykorzystaniu pewnych pomocniczych tożsamości. Ten sam rezultat można uzyskać w sposób prostszy, przez zastosowanie wzoru *Shermana – Morrisona*. Szczegółowy tok postępowania został przedstawiony w Załączniku Z2. Ostatecznie, zależność $\dot{\underline{\sigma}}(\dot{\underline{\epsilon}})$ dla przypadku trójwymiarowego ma postać:

$$\boxed{\dot{\underline{\sigma}} = \underline{D}_{ep} \dot{\underline{\epsilon}}}, \quad (\text{II.32})$$

z macierzą sztywności sprężysto – plastycznej w formie:

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D}_e - \frac{K_e}{1+K_p/K_e} \underline{J} \underline{J}^T - (\underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta \tau_0 K_p}{1+K_p/K_e} \underline{J}) \frac{\underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e}{3\tau_0^2 H_p + \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma}}, \quad (\text{II.33})$$

gdzie \underline{D}_e - macierz sztywności sprężystej dana wzorami (Z1.5) lub (Z1.6).

II.3.2 Płaski stan naprężenia

Przyjmijmy płaski stan naprężenia na płaszczyźnie (x, y) , zdefiniowany tożsamościami:

$$\sigma_z \equiv \tau_{xz} \equiv \tau_{yz} \equiv 0, \quad (\text{II.34})$$

$$\dot{\sigma}_z \equiv \dot{\tau}_{xz} \equiv \dot{\tau}_{yz} \equiv 0.$$

Ponieważ w wektorze $\underline{\dot{\sigma}}$ trzy składniki są równe zero, można przy mnożeniu $\underline{C}_{ep} \underline{\dot{\sigma}}$ pominąć odpowiednie kolumny. Dodatkowo ograniczając się wyłącznie do wielkości $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}$ można pominąć pozostałe wiersze macierzy \underline{C}_{ep} . Tak więc macierz \underline{C}_{ep} dla płaskiego stanu naprężenia o wymiarach 3×3 otrzymuje się jako podmacierz macierzy \underline{C}_{ep} o wymiarach 6×6 poprzez usunięcie 3, 5 i 6 wiersza i kolumny. Dla płaskiego stanu naprężenia pozostaje w mocy wzór (II.31) przy zmienionych definicjach macierzy $\underline{B}, \underline{C}_e$ oraz wektorów $\underline{J}, \underline{\sigma}, \underline{\dot{\sigma}}, \underline{\dot{\epsilon}}, \underline{s}, \underline{\dot{s}}$:

$$\underline{B} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{\sigma}} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\tau}_{xy} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.35})$$

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix}, \quad \underline{s} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ 2s_{xy} \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{s}} = \begin{bmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y \\ 2\dot{s}_{xy} \end{bmatrix}.$$

Jawna postać macierzy podatności sprężystej \underline{C}_e o wymiarach 3×3 jest podana w Załączniku Z1 – wzór (Z1.7) lub (Z1.8).

Macierz sztywności \underline{D}_{ep} dla przypadku płaskiego stanu naprężenia musi być oddzielnie wyprowadzona. Jest to spowodowane faktem, że wartość $\dot{\epsilon}_z$ jest niezerowa i związana z warunkiem $\dot{\sigma}_z \equiv 0$. Ponieważ w płaskim stanie naprężenia brak jest deformacji postaciowych:

$$\gamma_{xz} \equiv \gamma_{yz} \equiv 0, \quad (\text{II.36})$$

$$\dot{\gamma}_{xz} \equiv \dot{\gamma}_{yz} \equiv 0,$$

można wyeliminować 5 i 6 wiersz i kolumnę macierzy \underline{D}_{ep} . Natomiast w wierszu 3 wartość zerowa (czyli $\dot{\sigma}_z$) występuje po lewej stronie równania macierzowego (II.32). Przekształcając ten wiersz można wyrazić $\dot{\epsilon}_z$ jako liniową funkcję $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}$ i następnie odpowiednio zmodyfikować wiersze 1, 2 i 4 macierzy \underline{D}_{ep} . Z uwagi na złożoność wzoru (II.33) na macierz \underline{D}_{ep} postępowanie takie jest kłopotliwe. Łatwiejszym sposobem jest zastosowanie powtórnie wzoru *Shermana – Morrisona* do odwrócenia macierzy \underline{C}_{ep} (wzór (II.31)) o wymiarach 3×3 . Szczegółowy tok postępowania podany jest w Załączniku Z3. Ostatecznie macierz \underline{D}_{ep} przybiera postać:

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D}_e - \left\{ a_1 \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e - a_2 [\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + (\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e)^T] + a_3 \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + a_4 \underline{J} \underline{J}^T \right\} \cdot \frac{1}{N}, \quad (\text{II.37})$$

gdzie współczynniki liczbowe a_1, a_2, a_3, a_4 i N wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3(3K_p + 2\alpha), \\ a_2 &= 3\alpha^2 I_1, \\ a_3 &= 9K_p \alpha \tau_0 \beta, \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

$$a_4 = 9\alpha^2 (\underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + 3\tau_0^2 H_p),$$

$$N = 3(3K_p + 2\alpha) \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + 9\tau_0^2 H_p (3K_p + 2\alpha) + I_1 \alpha (3K_p \beta \tau_0 - I_1 \alpha),$$

przy czym $I_1 = \sigma_x + \sigma_y$ (dla $\sigma_z \equiv 0$),

$$\alpha = \frac{E}{3(1-\nu)} = \frac{3H_e K_e}{3K_e + 2H_e}.$$

Jawna postać macierzy sztywności sprężystej \underline{D}_e o wymiarach 3×3 jest podana w Załączniku Z1 (wzór (Z1.9) lub (Z1.10)). Jak widać ze wzoru (II.37), postać macierzy \underline{D}_{ep} dla płaskiego stanu naprężenia jest istotnie różna od przypadku trójwymiarowego. Macierz \underline{D}_{ep} jest niesymetryczna z uwagi na istnienie składnika $\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e$ z mnożnikiem a_3 . Przyjmując $\beta \equiv 0$ (tzn. zaniedbując istnienie ścisnienia / dylatacji) otrzymuje się $a_3 = 0$ i macierz sztywności staje się symetryczna. Wzór (II.37) ma dość złożoną formę, niemniej wykonanie koniecznych operacji macierzowych nie jest trudne i prowadzi do prostych wzorów na poszczególne elementy macierzy \underline{D}_{ep} (zestawionych w tabl. II.1).

$$\underline{D}_{ep} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} - \frac{a_1}{N} \begin{bmatrix} \bar{s}_x^2 & \bar{s}_x \bar{s}_y & \bar{s}_x \bar{s}_{xy} \\ \bar{s}_x \bar{s}_y & \bar{s}_y^2 & \bar{s}_y \bar{s}_{xy} \\ \bar{s}_x \bar{s}_{xy} & \bar{s}_y \bar{s}_{xy} & \bar{s}_{xy}^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{a_2}{N} \begin{bmatrix} 2\bar{s}_x & \bar{s}_x + \bar{s}_y & \bar{s}_{xy} \\ \bar{s}_x + \bar{s}_y & 2\bar{s}_y & \bar{s}_{xy} \\ \bar{s}_{xy} & \bar{s}_{xy} & 0 \end{bmatrix} - \frac{a_3}{N} \begin{bmatrix} \bar{s}_x & \bar{s}_y & \bar{s}_{xy} \\ \bar{s}_x & \bar{s}_y & \bar{s}_{xy} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{a_4}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\underline{\bar{s}} = \begin{bmatrix} \bar{s}_x \\ \bar{s}_y \\ \bar{s}_{xy} \end{bmatrix}, \quad \underline{\bar{s}} = \underline{D}_e \underline{s} = \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma}.$$

Wektor $\underline{\bar{s}}$ może być zapisany w formie:

$$\underline{\bar{s}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} s_x + \nu s_y \\ s_y + \nu s_x \\ (1-\nu)s_{xy} \end{bmatrix}.$$

Postacie współczynników liczbowych $a_1 \div a_4$ i N są podane we wzorach (II.38). Występujący w tych wzorach czynnik skalarny $\underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma}$ może być zapisany jako iloczyn skalarny wektorów $\underline{\bar{s}}$ i \underline{s} : $\underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} = \underline{\bar{s}}^T \underline{s}$.

Tablica II.1 Jawna postać macierzy \underline{D}_{ep} dla płaskiego stanu naprężenia

Przedstawiona postać macierzy jest właściwa w przypadku istnienia trzech niezależnych mechanizmów plastycznych opisanych w punkcie II.1. W przypadku braku plastycznych odkształceń objętościowych ε_{vol}^{pI} należy przyjąć nieskończenie dużą wartość plastycznego modułu objętościowego: $K_p \rightarrow +\infty$. We wzorze (II.31) na macierz podatności \underline{C}_{ep} prowadzi to wprost do zerowania się trzeciego składnika $\left(\frac{1}{9K_p} \underline{J} \underline{J}^T\right)$. Dla macierzy sztywności \underline{D}_{ep} (wzór (II.37)) zerują się człony z mnożnikami a_1 i a_4 . Przyjęcie $\beta \equiv 0$ (tzn. pominięcie ε_{vol}^{pII}) prowadzi z kolei do pominięcia członu z mnożnikiem a_3 . Tak więc w przypadku istnienia wyłącznie czysto dewiatorowego mechanizmu plastycznego macierz \underline{D}_{ep} składa się tylko z części sprężystej i składnika ze zmodyfikowanym mnożnikiem a_1/N . Zgodnie z uwagami w punkcie II.1, dewiatorowy mechanizm plastyczny jest identyczny ze stowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego przy przyjęciu powierzchni plastyczności $H - M - H$ (tzw. teoria J_2). Potwierdza to również postać macierzy \underline{D}_{ep} - w tym szczególnym przypadku jest ona identyczna z postacią macierzy zaproponowaną przez *Y. Yamadę* dla teorii J_2 w płaskim stanie naprężenia [30]. Szczegółowe porównanie zostało

przeprowadzone w Załączniku Z4.

II.3.3 Pominięcie odkształceń sprężystych

Osobnej analizy wymaga przypadek szczególny, gdy pomija się całkowicie istnienie odkształceń sprężystych ε_{ij}^e i ich prędkości:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^e &= e_{ij}^e + \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{vol}^e \equiv 0, \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^e &= \dot{e}_{ij}^e + \frac{1}{3}\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{vol}^e \equiv 0.\end{aligned}\tag{II.39}$$

Wówczas dla zadanej prędkości naprężenia $\dot{\underline{\sigma}}$ otrzymuje się wyłącznie część plastyczną prędkości odkształceń $\dot{\underline{\varepsilon}}_p$ wg wzoru:

$$\dot{\underline{\varepsilon}} \equiv \dot{\underline{\varepsilon}}_p = \underline{C}_p \dot{\underline{\sigma}},\tag{II.40}$$

gdzie \underline{C}_p - macierz podatności plastycznej:

$$\underline{C}_p = \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} + \frac{1}{9K_p} \underline{J} \underline{J}^T + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B}.\tag{II.41}$$

Macierz \underline{C}_p różni się od macierzy podatności sprężysto – plastycznej \underline{C}_{ep} (wzór (II.31)) brakiem części sprężystej \underline{C}_e . Zerowanie się macierzy \underline{C}_e można formalnie uzyskać przez przyjęcie nieskończenie dużej wartości modułu Younga: $E \rightarrow +\infty$ (patrz wzór (Z1.8)).

Jawna postać macierzy \underline{C}_p jest podana w tabl. II.2.

$$\begin{aligned}\underline{C}_p &= \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y & 2s_x s_{xy} \\ s_y s_x & s_y^2 & 2s_y s_{xy} \\ 2s_x s_{xy} & 2s_y s_{xy} & 4s_{xy}^2 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{9K_p} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \begin{bmatrix} s_x & s_y & 2s_{xy} \\ s_x & s_y & 2s_{xy} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tablica II.2 Jawna postać macierzy podatności plastycznej \underline{C}_p dla płaskiego stanu naprężenia

Problemem jest znalezienie relacji odwrotnej:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{D}_p \dot{\underline{\varepsilon}} \quad \text{dla} \quad \dot{\underline{\varepsilon}} \equiv \dot{\underline{\varepsilon}}_p,\tag{II.42}$$

gdzie \underline{D}_p - macierz sztywności plastycznej.

Należy zauważyć, że w macierzy sztywności sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} (wzór (II.37)) moduł *Younga* występuje zarówno w części sprężystej \underline{D}_e , jak i we współczynnikach skalarnych $a_1 - a_4$, N części plastycznej (poprzez parametr α). Próba otrzymania macierzy \underline{D}_p z macierzy \underline{D}_{ep} przez przyjęcie: $E \rightarrow +\infty$ prowadzi do otrzymania wyrażeń skalarnych typu: $\infty - \infty$. Z postaci macierzy \underline{C}_p w tabl. II.2 wynika, że jest ona osobliwa: drugi i trzeci składnik macierzy \underline{C}_p zawiera wiersz zerowy, pierwszy składnik \underline{C}_p może być przedstawiony jako iloczyn zewnętrzny wektora \underline{s} i jego transpozycji \underline{s}^T : $\underline{s}\underline{s}^T$ - oznacza to, że poszczególne wiersze są liniowo zależne.

Tak więc nie jest możliwe znalezienie związku (II.42). Osobliwość macierzy \underline{C}_p znajduje uzasadnienie fizyczne. W przypadku braku odkształceń sprężystych kierunek prędkości odkształcenia w płaszczyźnie dewiatorowej jest jednoznacznie określony przez istniejący stan naprężenia (wzór (II.5)). Oznacza to, że nie każdy kierunek prędkości odkształcenia jest dozwolony. W związku z tym (przy obowiązywaniu związku fizycznego (II.40)) nie można przyjąć za zmienną niezależną dowolnego wektora $\underline{\dot{\epsilon}}$ i poszukiwać odpowiadającego mu wektora $\underline{\dot{\sigma}}$. Wykorzystując zależność $\underline{s} = \underline{B}\underline{\sigma}$ związek (II.40) może być przekształcony do postaci:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{J} \left(\frac{\underline{J}^T \underline{\dot{\sigma}}}{9K_p} + \beta \frac{\underline{s}^T \underline{\dot{\sigma}}}{9\tau_0 H_p} \right) + \underline{s} \left(\frac{\underline{s}^T \underline{\dot{\sigma}}}{3\tau_0^2 H_p} \right) = \underline{J}a_5 + \underline{s}a_6, \quad (\text{II.43})$$

gdzie współczynniki liczbowe a_5 i a_6 :

$$a_5 = \frac{\underline{J}^T \underline{\dot{\sigma}}}{9K_p} + \beta \frac{\underline{s}^T \underline{\dot{\sigma}}}{9\tau_0 H_p},$$

$$a_6 = \frac{\underline{s}^T \underline{\dot{\sigma}}}{3\tau_0^2 H_p}.$$

Postać (II.43) prawa fizycznego wskazuje, że w przestrzeni naprężeń dla płaskiego stanu naprężenia $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ wektor prędkości odkształceń $\underline{\dot{\epsilon}}$ musi leżeć w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory \underline{J} i \underline{s} . Należy zauważyć, że w przestrzeni naprężeń głównych *Haigha - Westergaarda* dla 3 - osiowego stanu naprężenia wektor $\underline{\dot{\epsilon}}$ musi z kolei leżeć w płaszczyźnie zawierającej oś hydrostatyczną i wektor \underline{s} . Związek (II.43) nie tylko ogranicza dopuszczalny kierunek prędkości odkształceń $\underline{\dot{\epsilon}}$, ale jest również niejednoznaczny. Przyjmując prędkość naprężenia $\underline{\dot{\sigma}}$ tak by wyeliminować prędkość naprężenia średniego:

$$\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y = 0 \Rightarrow \underline{J}^T \underline{\dot{\sigma}} = 0, \quad (\text{II.44})$$

z zależności (II.43) można otrzymać:

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \left(\frac{J\beta}{9\tau_0 H_p} + s \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \right) \underline{s}^T \dot{\underline{\sigma}}. \quad (\text{II.45})$$

Wielkości w nawiasie we wzorze (II.45) zależą wyłącznie od aktualnego stanu naprężenia i nie zmieniają się dla różnych kierunków $\dot{\underline{\sigma}}$. Widać więc, że dla danego stanu naprężenia otrzymuje się jeden i ten sam wektor $\dot{\underline{\epsilon}}$ dla różnych wektorów $\dot{\underline{\sigma}}$ jeśli tylko zostanie zachowana stała wartość iloczynu skalarnego $\underline{s}^T \dot{\underline{\sigma}}$.

Przedstawione powyżej cechy związku konstytutywnego (II.40) wskazują wyraźnie, że z uwagi na jego niejednoznaczność oraz ograniczenie dopuszczalnych kierunków prędkości odkształceń $\dot{\underline{\epsilon}}$ nie nadaje się on do ogólnego opisu zachowania się materiału i dalszego wykorzystania w MES. Może on natomiast poprawnie opisać właściwości materiału przy proporcjonalnych ścieżkach obciążenia (tzn. dla $\dot{\underline{\sigma}} = \lambda \underline{\sigma}$), dla których ograniczenie dopuszczalnego kierunku wektora $\dot{\underline{\epsilon}}$ (przez równanie (II.43) lub równoważnie przez wzór (II.5)) jest fizycznie usprawiedliwione. W takim przypadku również przy uwzględnieniu części sprężystej prędkości odkształceń $\dot{\underline{\epsilon}}_e$: $\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}_e + \dot{\underline{\epsilon}}_p$, wektor wypadkowy $\dot{\underline{\epsilon}}$ leży w płaszczyźnie zawierającej oś hydrostatyczną i wektor \underline{s} .

II.3.4 Podejście M.N.Fardisa i E.S.Chena [42]

Z przedstawionych powyżej braków modelu betonu, nie uwzględniającego części sprężystej odkształceń nie zdawali sobie sprawy autorzy pracy [41]. W pracy tej wzór (II.40) dla przypadku trójwymiarowego został podany jako ogólny związek konstytutywny, dodatkowo podano tam, że macierz odwrotna do macierzy \underline{C}_p danej wzorem (II.41) może być otrzymana na drodze numerycznej. W późniejszej pracy [42] znalazło się jednak stwierdzenie, że w macierzy \underline{C}_{ep} niezbędne jest istnienie części sprężystej \underline{C}_e w celu zapewnienia nieosobliwości, nie zostało ono jednak poparte żadnymi argumentami. W pracy tej zaproponowano jako właściwe dla 3 – wymiarowego stanu naprężenia związki konstytutywne w formie (II.30) i (II.32). Przyjęto jednak bardzo dużą wartość modułu Younga E (przynajmniej 500 razy większą od początkowego modułu Younga E_0 dla betonu) występującego w macierzy \underline{C}_e i poszczególnych składnikach macierzy \underline{D}_{ep} (również poprzez moduł K_e). Jak już wspomniano, przy zadanej prędkości naprężenia $\dot{\underline{\sigma}}$ założenie to prowadzi do otrzy-

mania pomijalnie małej składowej sprężystej prędkości odkształceń $\dot{\underline{\epsilon}}_e$ ze wzoru (II.30).

Poprawność przyjęcia sztucznie wysokiej wartości modułu *Younga* E w macierzy sztywności sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} zostanie przedyskutowana dla płaskiego stanu naprężenia. W tym celu założono, że układ współrzędnych $0xy$ został dobrany zgodnie z kierunkami głównymi aktualnego tensora naprężenia σ_{ij} . Zachodzą wówczas związki:

$$\tau_{xy} = s_{xy} = \bar{s}_{xy} \equiv 0. \quad (\text{II.46})$$

Jawna postać macierzy \underline{D}_{ep} podana w tabl. II.2 degeneruje się obecnie do formy podanej w tabl. II.3.

$$\underline{D}_{ep} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} - \frac{a_1}{N} \begin{bmatrix} \bar{s}_x^2 & \bar{s}_x\bar{s}_y & 0 \\ \bar{s}_x\bar{s}_y & \bar{s}_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{a_2}{N} \begin{bmatrix} 2\bar{s}_x & \bar{s}_x + \bar{s}_y & 0 \\ \bar{s}_x + \bar{s}_y & 2\bar{s}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{a_3}{N} \begin{bmatrix} \bar{s}_x & \bar{s}_y & 0 \\ \bar{s}_x & \bar{s}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{a_4}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\bar{s}_x = \frac{E}{1-\nu^2}(s_x + \nu s_y),$$

$$\bar{s}_y = \frac{E}{1-\nu^2}(s_y + \nu s_x).$$

Postacie współczynników liczbowych $a_1 \div a_4$ i N są podane we wzorach (II.38)

Tablica II.3 Jawna postać macierzy \underline{D}_{ep} w układzie kierunków głównych naprężenia

Jak widać z tabl. II.3 jeśli w wektorze $\underline{\dot{\epsilon}}$ prędkość odkształcenia postaciowego jest równa zero ($\dot{\gamma}_{xy} = 0$), to również prędkość naprężenia stycznego musi być równa zero ($\dot{\tau}_{xy} = 0$), tzn. w tym przypadku kierunki główne prędkości odkształcenia i prędkości naprężenia pokrywają się. Nowe naprężenia $\underline{\sigma}^N$, po zrealizowaniu pewnego procesu obciążenia w czasie od t_1 do t_2 , można przedstawić jako:

$$\underline{\sigma}^N = \underline{\sigma} + \int_{t_1}^{t_2} \underline{\dot{\sigma}} dt. \quad (\text{II.47})$$

Jeśli podczas tego procesu obciążenia brak było odkształceń postaciowych ($\dot{\gamma}_{xy} = 0$), to również nowe pełne naprężenie styczne musi być równe zero ($\tau_{xy}^N = 0$). Oznacza to, że osie układu współrzędnych $0xy$ pokrywają się również z kierunkami głównymi nowego tensora naprężeń. Ogólnie można powiedzieć, że w procesie obciążenia dla przypadku niezmiennych w przestrzeni kierunków głównych odkształceń, związek fizyczny (II.32) z macierzą \underline{D}_{ep} daną wzorem (II.37) zapewnia współliniowość kierunków odkształceń i naprężeń głównych. W szczególności jest to prawdziwe dla proporcjonalnych ścieżek obciążenia. W takim przypadku, jak to przedstawiono powyżej, nawet zupełny brak części sprężystej prowadzi do poprawnych fizycznie wyników. Również zastosowanie związku konstytutywnego (II.32), ze sztucznie dużą wartością modułu *Younga*, do procesów obciążenia, w których kierunki głównych naprężeń i odkształceń pozostają niezmiennie prowadzi do właściwych rezultatów. Potwierdzają to wyniki pracy [42] oraz własne testy numeryczne.

Całkowicie odmienna sytuacja występuje w przypadku, gdy w dotychczasowym układzie odniesienia $0xy$, pokrywającym się z kierunkiem naprężeń głównych ($\tau_{xy} = \gamma_{xy} = 0$), wystąpi niezerowa prędkość odkształcenia postaciowego ($\dot{\gamma}_{xy} \neq 0$). Zgodnie z tabl. II.3 prędkość naprężenia stycznego $\dot{\tau}_{xy}$ wyraża się wtedy wzorem:

$$\dot{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \dot{\gamma}_{xy}. \quad (\text{II.48})$$

Sztucznie duża wartość modułu *Younga* powoduje, że nawet niewielka wartość prędkości odkształcenia postaciowego $\dot{\gamma}_{xy}$ prowadzi do niepoprawnie dużej wartości prędkości naprężenia $\dot{\tau}_{xy}$. W efekcie niewielkie zmiany kierunków odkształceń głównych wywołują nieproporcjonalnie dużą zmianę kierunków naprężeń głównych. Opisywane zjawisko zachodzi niezależnie od stopnia zaawansowania procesów plastycznych i wartości modułów plastycznych K_p, H_p i β ponieważ składowa d_{33}^{ep} macierzy sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} (z tabl. II.3) zależy wyłącznie od wartości modułu *Younga* E i ma charakter sprężystego modułu postaciowego. Natomiast przyjęcie zawyżonej wartości modułu *Younga* E nie wpływa w znaczący sposób na wartość pozostałych niezerowych składowych macierzy \underline{D}_{ep} (ponieważ moduł E występuje również w części plastycznej poprzez współczynniki $a_1 \div a_4, N$). Z uwagi na zerowe składowe macierzy \underline{D}_{ep} w 3 wierszu i kolumnie poza przekątną główną, w układzie kierunków głównych naprężenia, również macierz podat-

ności \underline{C}_{ep} ma postać:

$$\underline{C}_{ep} = \begin{bmatrix} c_{11}^{ep} & c_{12}^{ep} & 0 \\ c_{21}^{ep} & c_{22}^{ep} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{ep} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.49})$$

gdzie

$$c_{33}^{ep} = \frac{1}{d_{33}^{ep}} = \frac{2(1 + \nu)}{E}. \quad (\text{II.50})$$

Jak widać ze wzoru (II.50) przyjęcie sztucznie dużej wartości E powoduje, że wartość składowej c_{33} jest bliska zeru. Oznacza to, że nawet duża wartość prędkości naprężenia stycznego $\dot{\tau}_{xy}$ powoduje pomijalnie małe zmiany prędkości odkształcenia postaciowego $\dot{\gamma}_{xy}$. Zachowanie się więc modelu betonu dla prędkości odkształceń i naprężeń stycznych jest zbliżone do zachowania się ciała idealnie sztywnego. Przedstawione właściwości powodują, że przyjęcie związku konstytutywnego (II.32) ze sztucznie zawyżoną wartością E , dla procesów, w których kierunki odkształceń głównych zmieniają się, prowadzi do bardzo sztywnego zachowania się materiału, połączonego z niewłaściwą zmianą kierunków naprężeń głównych. Ilustruje to przykład numeryczny w części III. Podobne zachowanie jest charakterystyczne dla tzw. materiałów blokujących się [61], lecz nie dla betonu.

II.3.5 Zmodyfikowane związki fizyczne

Poprawny opis dowolnych ścieżek obciążenia uzyskano modyfikując macierze sztywności i podatności sprężystej przy obliczaniu ich w układzie współrzędnych $0xy$, współosiowym z kierunkami naprężeń głównych. Nowe wzory na macierze \underline{D}_e^{N1} i \underline{C}_e^{N1} podano w tabl. II.4. Macierze te transformują się przy zmianie układu współrzędnych:

$$\begin{aligned} \underline{D}_e^N &= \underline{T}^T \underline{D}_e^{N1} \underline{T}, \\ \underline{C}_e^N &= \underline{T}^{-1} \underline{C}_e^{N1} (\underline{T}^{-1})^T, \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

gdzie $\underline{D}_e^{N1}, \underline{C}_e^{N1}$ – zmodyfikowane macierze sztywności podatności sprężystej w układzie współrzędnych $0xy$, współosiowym z kierunkami naprężeń głównych,
 $\underline{D}_e^N, \underline{C}_e^N$ – zmodyfikowane macierze sztywności i podatności sprężystej w dowolnym układzie odniesienia $0\tilde{x}\tilde{y}$,
 \underline{T} – macierz transformacji wektora odkształceń $\underline{\varepsilon}$ z układu $0\tilde{x}\tilde{y}$ do układu $0xy$.

$$\underline{D}_e^{N1} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_0}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}, \underline{C}_e^{N1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E_0} \end{bmatrix},$$

gdzie E - moduł Younga (sztucznie zawyżony),
 E_0 - początkowy moduł Younga dla betonu.

$$\underline{D}_{ep} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_0}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} - \frac{a_1}{N} \begin{bmatrix} \bar{s}_x^2 & \bar{s}_x\bar{s}_y & 0 \\ \bar{s}_x\bar{s}_y & \bar{s}_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{a_2}{N} \begin{bmatrix} 2\bar{s}_x & \bar{s}_x + \bar{s}_y & 0 \\ \bar{s}_x + \bar{s}_y & 2\bar{s}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{a_3}{N} \begin{bmatrix} \bar{s}_x & \bar{s}_y & 0 \\ \bar{s}_x & \bar{s}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{a_4}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $\bar{s}_x = \frac{E}{1-\nu^2}(s_x + \nu s_y)$,

$\bar{s}_y = \frac{E}{1-\nu^2}(s_y + \nu s_x)$.

Postacie współczynników liczbowych $a_1 \div a_4, N$ są podane we wzorach (II.38)

Tablica II.4 Jawne postacie macierzy $\underline{D}_e^{N1}, \underline{C}_e^{N1}$ i zmodyfikowanej macierzy sztywności sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} w układzie kierunków głównych naprężenia

Jawne postacie macierzy \underline{T} oraz zmodyfikowanej macierzy sztywności sprężystej \underline{D}_e^N w dowolnym układzie współrzędnych podano w Załączniku Z5. Należy zauważyć, że anizotropia macierzy \underline{D}_e^N i \underline{C}_e^N jest indukowana naprężeniowo i nie ma charakteru anizotropii materiałowej o stałych kierunkach przestrzennych. Nowe związki fizyczne, zastępujące równania (II.31) i (II.37) mają postać:

$$\underline{C}_{ep} = \underline{C}_e^N + \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} + \frac{1}{9K_p} \underline{J} \underline{J}^T + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B}, \quad (\text{II.52})$$

oraz

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D}_e^N - \left\{ a_1 \underline{D}_e^N \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e^N - a_2 [\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e^N + (\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e^N)^T] + a_3 \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e^N + a_4 \underline{J} \underline{J}^T \right\} \frac{1}{N}. \quad (\text{II.53})$$

Współczynniki $a_1 \div a_4$, N wyrażają się wzorami (II.38). Współczynnik α , jak poprzednio zależy od modułu E , nie zaś od modułu E_0 :

$$\alpha = \frac{E}{3(1 - \nu)}, \quad (\text{II.54})$$

co wynika z faktu, że wzór (Z3.4) jest również poprawny przy użyciu macierzy \underline{D}_e^N :

$$\underline{D}_e \underline{J} = \underline{D}_e^N \underline{J} = 3\alpha \underline{J}. \quad (\text{II.55})$$

Jawną postacią macierzy \underline{D}_{ep} dla przypadku układu współrzędnych $0xy$ współosiowego z kierunkiem naprężeń głównych przedstawiono w tabl. II.4.

Znajomość postaci macierzy \underline{D}_{ep} (II.53) dla płaskiego stanu naprężenia pozwala na obliczenie składowych $\dot{\sigma}_x, \dot{\sigma}_y, \dot{\tau}_{xy}$ tensora prędkości naprężenia dla zadanych wartości $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y$ i $\dot{\gamma}_{xy}$. Natomiast prędkość odkształcenia $\dot{\epsilon}_z$ w kierunku prostopadłym może być wyliczona ze związku (II.21) dla znanych wartości prędkości naprężenia. Należy w tym celu wykorzystać 3 wiersz macierzy \underline{C}_{ep} dla stanu trójwymiarowego (wzór (II.31)). Prowadzi to do zależności:

$$\dot{\epsilon}_z = -\frac{\nu}{E}(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) + \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} s_z M + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} M + \frac{1}{9K_p}(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y), \quad (\text{II.56})$$

gdzie

$$M = s_x \dot{\sigma}_x + s_y \dot{\sigma}_y + 2\tau_{xy} \dot{\tau}_{xy},$$

$$s_z = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Zaproponowana modyfikacja związków fizycznych nie jest jedyna. Rozwiązaniem alternatywnym jest założenie, że kierunek prędkości odkształceń plastycznych $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ pokrywa się z kierunkiem prędkości naprężeń dewiatorowych \dot{s}_{ij} (wzór (II.6)). W tym przypadku dopuszczalne kierunki prędkości odkształcenia plastycznego nie są ograniczone przez istniejący stan naprężenia i nawet całkowite wyeliminowanie odkształceń sprężystych nie

proceeds to the phenomenon of material locking. Hypothesis (II.6) was applied in the works of the team *K.Gerstlego* [106], [107] with good results.

Adoption of formula (II.6) leads to obtaining instead of formula (II.14) the expression:

$$\dot{\gamma}_0^p = \lambda \sqrt{\frac{1}{3} \dot{s}_{ij} \dot{s}_{ij}}. \quad (\text{II.57})$$

The proportionality coefficient λ amounts to:

$$\lambda = \frac{\dot{\gamma}_0^p}{\sqrt{\frac{1}{3} \dot{s}_{ij} \dot{s}_{ij}}} = \frac{\dot{\tau}_0}{H_p \sqrt{\frac{1}{3} \dot{s}_{ij} \dot{s}_{ij}}}. \quad (\text{II.58})$$

In the place of formula (II.16) on the rate of distortion \dot{e}_{ij}^e one obtains, using the dependence (II.6) and (II.58), the relation:

$$\dot{e}_{ij}^p = \lambda \dot{s}_{ij} = \frac{\dot{\tau}_0}{H_p \sqrt{\frac{1}{3} \dot{s}_{mn} \dot{s}_{mn}}} \dot{s}_{ij}. \quad (\text{II.59})$$

The rate of stress $\dot{\tau}_0$ can be expressed as a function of the rate of stress $\dot{\sigma}_{ij}$ according to formula (II.17):

$$\dot{\tau}_0 = \frac{1}{3\tau_0} s_{kl} \dot{\sigma}_{kl}. \quad (\text{II.60})$$

Taking into account the dependence (II.60), formula (II.59) takes the form:

$$\dot{e}_{ij}^p = \frac{s_{kl} \dot{s}_{ij}}{3\tau_0 \sqrt{\frac{1}{3} \dot{s}_{mn} \dot{s}_{mn}} H_p} \dot{\sigma}_{kl}. \quad (\text{II.61})$$

Formula (II.61) is the counterpart of formula (II.18) derived from the assumption of the validity of the relationship (II.5). Together, however, the dependence of the rate of distortion deviatoric \dot{e}_{ij}^p on the rate of stress $\dot{\sigma}_{ij}$ is nonlinear due to the term on the right side of formula (II.61) the rate of stress deviatoric \dot{s}_{ij} . This leads to a nonlinear physical relationship for the rate $\dot{\underline{\sigma}}$ and $\dot{\underline{\epsilon}}$, which can be formally written in matrix form:

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \underline{C}_{ep} \dot{\underline{\sigma}}, \quad (\text{II.62})$$

where $\underline{C}_{ep}(\dot{\underline{\sigma}})$ - matrix of compliance, also dependent on the rate of stress $\dot{\underline{\sigma}}$.

The nonlinear character of the physical relationship for the rate causes difficulties with its use in MES, therefore the hypothesis expressed by formula (II.6) will not be further considered. We only mention that the team *K.Gerstlego* limited itself exclusively to the analysis of the phenomenon

na szczyblu punktu materialnego przy zadanym programie naprężeń, stąd w tym przypadku nie zachodziła konieczność odwracania związku (II.62) i nieliniowość nie stanowiła żadnego problemu.

II.4 Kryteria obciążenia i odciążenia, odległość od powierzchni granicznej

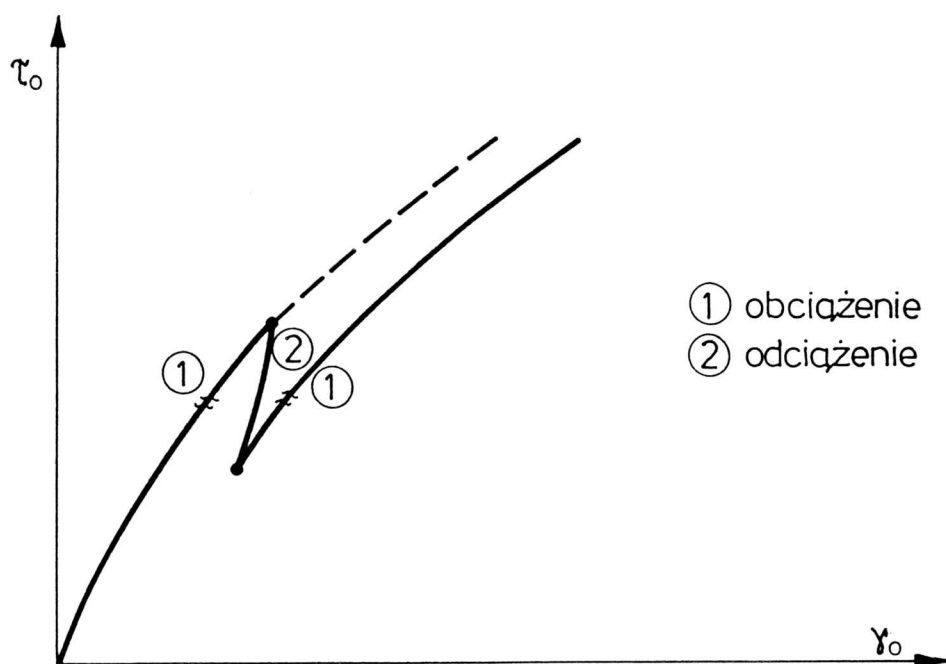
Przedstawione w punkcie II.1 podstawowe założenia nie precyzują w jaki sposób można rozróżnić procesy obciążenia i odciążenia. Rozróżnienie takie jest konieczne z uwagi na inne zachowanie się betonu przy obciążeniu i odciążeniu [29]. W pracy przyjęto że w zależności od rodzaju procesu zmieniają się funkcje opisujące moduły plastyczne H_p , K_p i β (punkt II.5). Należy przypomnieć, że zgodnie z założeniem 1 również odciążenie jest procesem plastycznie czynnym i obowiązują dla niego związki fizyczne (II.21) i (II.32) z macierzami \underline{C}_{ep} i \underline{D}_{ep} według (II.52) i (II.53).

Ponieważ moduły plastyczne H_p i β opisują zmianę odkształceń spowodowaną przez prędkość naprężenia ścinającego $\dot{\tau}_0$, zaś moduł K_p związany jest z prędkością naprężenia średniego $\dot{\sigma}_0$ właściwe jest odrębne sformułowanie kryteriów obciążenia / odciążenia dla każdego z tych modułów. W pracy przyjęto, że zmiana funkcji opisujących H_p i β jest rządzone przez kryterium obciążenia / odciążenia dewiatorowego, a zmiana funkcji dla K_p przez kryterium obciążenia / odciążenia aksjatorowego (hydrostatycznego).

Takie podejście zastosowano również w [42], [41], [28], [47]. Najprostsze kryteria obciążenia/ odciążenia można sformułować następująco (rys. II.13):

$$\begin{aligned}
 \dot{\tau}_0 \geq 0 & \quad - \text{dewiatorowe obciążenie,} \\
 \dot{\tau}_0 < 0 & \quad - \text{dewiatorowe odciążenie,} \\
 \dot{\sigma}_0 \geq 0 & \quad - \text{aksjatorowe obciążenie,} \\
 \dot{\sigma}_0 < 0 & \quad - \text{aksjatorowe odciążenie.}
 \end{aligned}
 \tag{II.63}$$

Kryteria (II.63) posiadają braki. Kryterium aksjatorowe jest poprawne wyłącznie dla przypadków, gdy $\sigma_0 \geq 0$. Dla procesów, w których $\sigma_0 < 0$ oddalanie się od początku układu współrzędnych jest traktowane jako odciążenie, zaś powrót do początku układu jest uważany za obciążenie. Znacznie poważniejszym brakiem jest nieuwzględnienie specyfiki obciążenia wtórnego po uprzednim odciążeniu. Zachowanie się materiału w takiej sytuacji ilustrują rys. II.5 i II.6.



Rys. II.13 Kryterium dewiatorowego obciążenia / odciążenia wg wzoru (II.63)

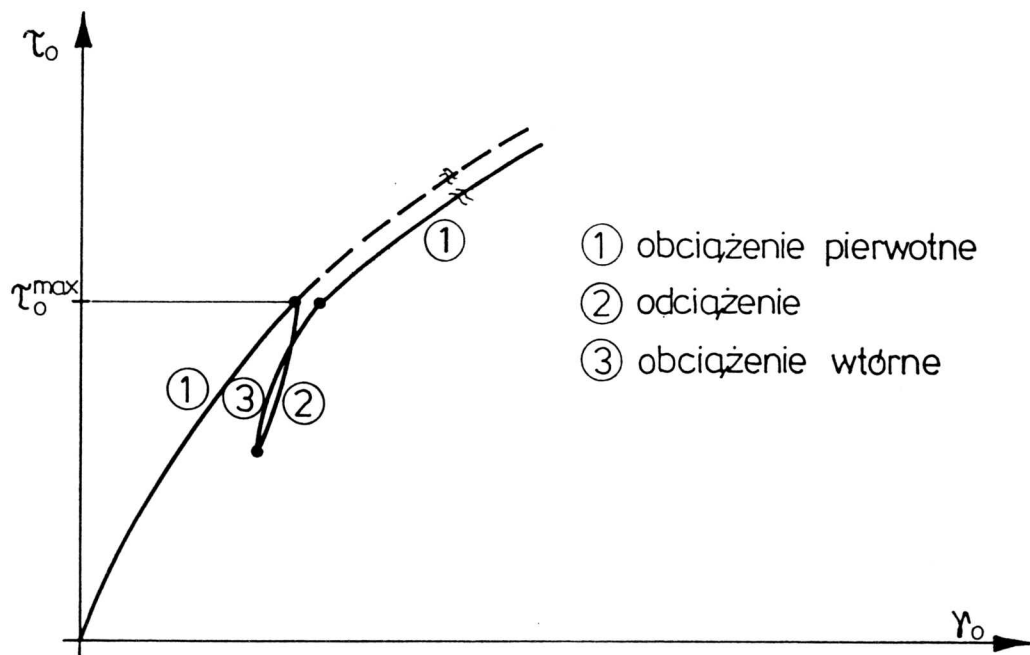
Charakterystyczna jest jakościowa różnica zachowania się materiału poniżej osiągniętego wcześniej poziomu naprężenia i powyżej tego poziomu. Fragment ścieżki naprężenie – odkształcenie procesu obciążenia wtórnego powyżej osiągniętego wcześniej poziomu naprężenia można traktować jako “wtórne obciążenie pierwotne” z uwagi na podobieństwo modułów stycznych. W celu opisanego tego zjawiska należy wprowadzić pojęcie największej osiągniętej wartości naprężenia ścinającego τ_0^{MAX} i analogiczne pojęcie σ_0^{MAX} . Zmodyfikowane wzory (II.63) mają postać:

$$\left. \begin{array}{l}
 \tau_0 \geq \tau_0^{MAX} \text{ i } \dot{\tau}_0 \geq 0 \text{ — obciążenie pierwotne} \\
 \tau_0 < \tau_0^{MAX} \text{ i } \dot{\tau}_0 \geq 0 \text{ — obciążenie wtórne} \\
 \dot{\tau}_0 < 0 \text{ — odciążenie}
 \end{array} \right\} \text{ dewiatorowe,} \quad (II.64)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \sigma_0 \geq \sigma_0^{MAX} \text{ i } \dot{\sigma}_0 \geq 0 \text{ — obciążenie pierwotne} \\
 \sigma_0 < \sigma_0^{MAX} \text{ i } \dot{\sigma}_0 \geq 0 \text{ — obciążenie wtórne} \\
 \dot{\sigma}_0 < 0 \text{ — odciążenie}
 \end{array} \right\} \text{ aksjatorowe.} \quad (II.65)$$

Rys. II.14 przedstawia opis zależności $\tau_0 - \gamma_0$ przy zastosowaniu kryterium (II.64). Jak widać otrzymane rezultaty są inne niż przy podejściu zakładającym, że krzywa naprężenie

– odkształcenie dla procesu obciążenia pierwotnego jest obwiednią dla procesów obciążeń wtórnych [63], [103], [123].



Rys. II.14 Kryterium dewiatorowego obciążenia / odciążenia wg wzoru (II.64)

Koncepcja obwiedni jest powszechnie stosowana w modelach opisujących cykliczne ściskanie lub rozciąganie betonu w jednoosiowym stanie naprężenia. Uogólnienie jej dla dowolnego stanu naprężenia jest trudne, gdyż niezbędny jest dla tego opis krzywej naprężenie – odkształcenie dla procesu pierwotnego w formie analitycznej.

Kryteria (II.64 – II.65) zostały zastosowane między innymi w [47]. Zmodyfikowane wzory (II.64 – II.65) również posiadają braki. W dalszym ciągu kryterium aksjatorowe jest niepoprawne dla $\sigma_0 < 0$. Poważniejszą wadą jest brak korelacji kryterium dewiatorowego (II.64) z przyjętym równaniem powierzchni granicznej i funkcjami modułów H_p i β . Jak to szerzej opisano w punkcie II.5 H_p i β są funkcjami odległości sprowadzonej δ do powierzchni granicznej

$$H_p = H_p(\delta),$$

$$\beta = \beta(\delta), \quad (II.66)$$

gdzie $\delta = d/d_{max}$ – odległość sprowadzona,
 d – odległość od aktualnego stanu naprężenia do powierzchni granicznej,
 d_{max} – największa możliwa wartość d .

Za proces obciążenia dewiatorowego należy więc uznać taki proces, w którym odległość δ nieprzerwanie maleje. Tak sformułowane kryterium byłoby zgodne z (II.64) tylko w przypadku, gdy rzut powierzchni granicznej na płaszczyznę dewiatorową byłby okręgiem. Stosowane dla betonu powierzchnie graniczne (punkt II.6) nie posiadają tej cechy.

W pracy przyjęto zatem kryterium dewiatorowego obciążenia / odciążenia w postaci:

$$\begin{array}{l} \delta \leq \delta_{min} \text{ i } \dot{\delta} \leq 0 \quad - \text{ obciążenie pierwotne,} \\ \delta > \delta_{min} \text{ i } \dot{\delta} \leq 0 \quad - \text{ obciążenie wtórne,} \\ \dot{\delta} > 0 \quad - \text{ odciążenie,} \end{array} \quad (\text{II.67})$$

gdzie δ_{min} - najmniejsza wartość δ osiągnięta w dotychczasowym procesie obciążenia.

Dodatkowo, dla kryterium aksjatorowego należy wprowadzić poprawny opis dla $\sigma_0 < 0$. Prosty rozwiązaniem jest założenie, że dla $\sigma_0 < 0$ wszystkie procesy mają charakter aksjatorowego odciążenia. Jest ono zgodne z wynikami badań doświadczalnych jeśli dodatkowo przyjmie się, że moduł K_p przy odciążeniu pozostaje stały (punkt II.5) – doświadczenia te wskazują wyraźnie na liniową zależność $\sigma_0 - \varepsilon_{vol}$ dla $\sigma_0 < 0$ [68].

W pracy przyjęto więc kryterium aksjatorowego obciążenia / odciążenia w postaci:

$$\begin{array}{l} \sigma_0 \geq \sigma_0^{MAX} \geq 0 \text{ i } \dot{\sigma}_0 \geq 0 \quad - \text{ obciążenie pierwotne,} \\ \sigma_0^{MAX} > \sigma_0 \geq 0 \text{ i } \dot{\sigma}_0 \geq 0 \quad - \text{ obciążenie wtórne,} \\ \sigma_0 < 0 \text{ lub } \dot{\sigma}_0 < 0 \quad - \text{ odciążenie,} \end{array} \quad (\text{II.68})$$

gdzie σ_0^{MAX} - największa wartość σ_0 osiągnięta w dotychczasowym procesie.

Przyjęta koncepcja odrębnego rozpatrywania obciążenia / odciążenia w płaszczyźnie dewiatorowej i wzdłuż osi hydrostatycznej nie jest jedyną możliwą. Późniejsze niż [47] prace zespołu *K.Gerstlego* [106], [99] operowały odrębnymi kryteriami obciążenie / odciążenie dla każdego z kierunków naprężeń głównych. Zdaniem autorów tych prac otrzymuje się wówczas daleko większą zgodność z doświadczeniem niż przy stosowaniu warunków (II.64 – II.65). Podejście to zostało rozwinięte i zaimplementowane do MES w [44]. Wydaje się ono jednak niekonsystentne z przyjętymi mechanizmami plastycznymi

(dewiatorowymi i objętościowym). Jak pokazano w [44] prowadzi to do niesymetrycznej macierzy \underline{D}_{ep} również w przypadku nieuwzględniania dylatacji.

Odrębnym zagadnieniem są kryteria odciążenia / obciążenia dla stanu pokrytycznego. Z chwilą osiągnięcia powierzchni granicznej przez stan naprężenia zostaje zainicjowany proces jej kurczenia. Wówczas naprężenie τ_0 ulega zmniejszeniu zarówno dla procesu odbywającego się na powierzchni granicznej przy narastającym odkształceniu γ_0^p (obciążenie) jak i dla procesu, w którym stan naprężenia przemieszcza się do wnętrza powierzchni granicznej (rys. II.15). W związku z tym, kryterium (II.67) w stanie pokrytycznym nie jest poprawne. Często dla materiałów miękających przyjmuje się odkształceniowe kryteria obciążenie / odciążenie [30].

W pracy idąc za [58], [127] zastosowano inne podejście. Dla zadanego wektora prędkości odkształceń $\underline{\dot{\epsilon}}$ można obliczyć wektor prędkości naprężenia tak jak dla stanu sprężystego:

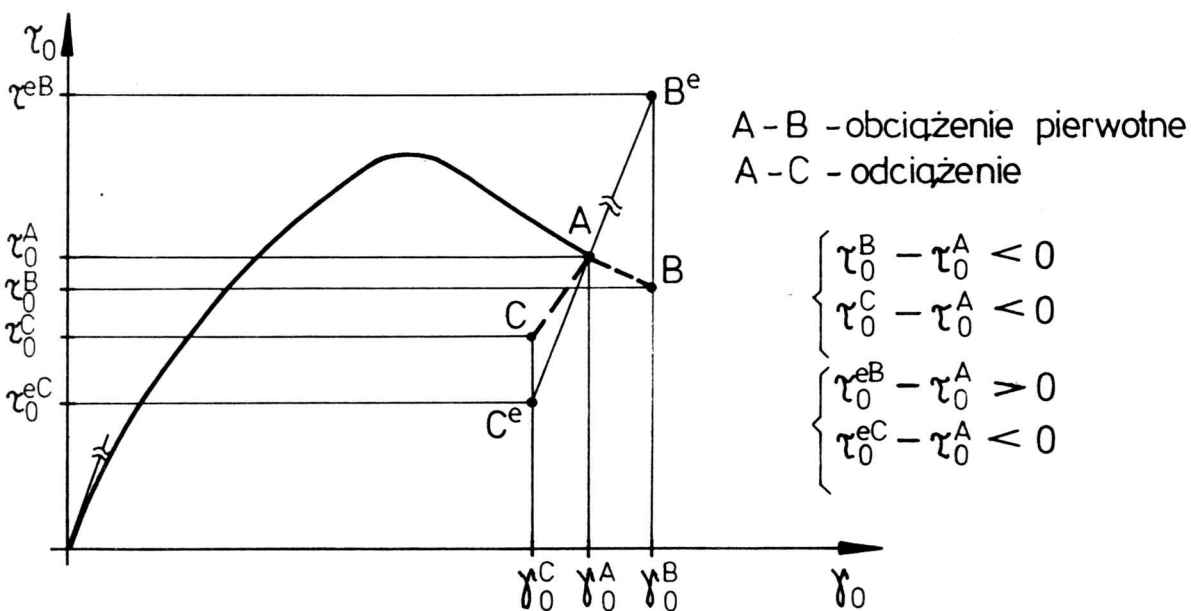
$$\underline{\dot{\sigma}}_e = \underline{D}_e \underline{\dot{\epsilon}} \quad (\text{II.69})$$

gdzie \underline{D}_e – macierz sztywności sprężystej (według wzoru (Z1.9)) przy przyjęciu początkowego modułu *Younga* E_0 ,
 $\underline{\dot{\sigma}}_e$ – wektor prędkości sprężystego (fikcyjnego) naprężenia.

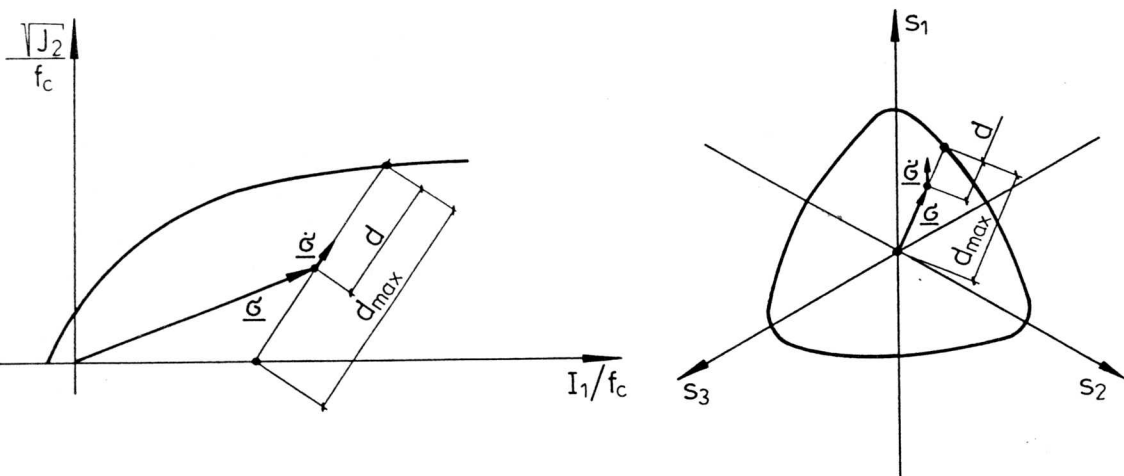
Na podstawie fikcyjnej prędkości naprężenia można policzyć fikcyjną prędkość odległości sprowadzonej $\dot{\delta}_e$. W przypadku obciążenia w stanie pokrytycznym wektor naprężenia $\underline{\dot{\sigma}}_e$ jest skierowany na zewnątrz powierzchni granicznej lub stycznie do niej, zaś dla przypadku odciążenia wektor $\underline{\dot{\sigma}}_e$ jest skierowany do wnętrza tej powierzchni. Zakładając, że na zewnątrz powierzchni granicznej odległość δ_e przyjmuje wartości ujemne, znak $\dot{\delta}_e$ w jednoznaczny sposób definiuje obciążenie lub odciążenie. Tak więc w stanie pokrytycznym dla obciążenia / odciążenia dewiatorowego zamiast (II.67) obowiązuje kryterium:

$\delta = \delta_{min} = 0$ i $\dot{\delta}_e \leq 0$ – obciążenie pierwotne, $\delta = \delta_{min} = 0$ i $\dot{\delta}_e > 0$ – odciążenie.	(II.70)
---	---------

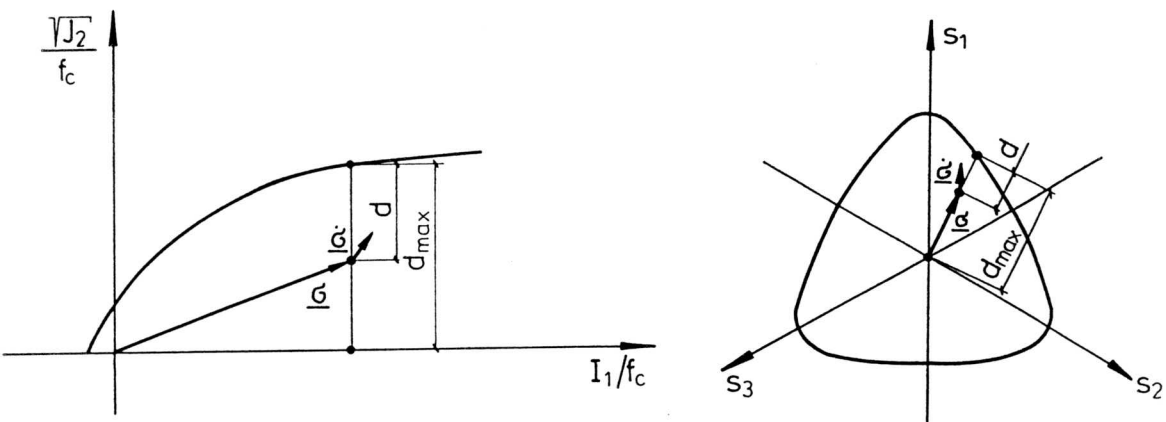
Dla obciążenia / odciążenia aksjatorowego w stanie pokrytycznym pozostaje w mocy kryterium (II.68). Wynika to z faktu, że przy istnieniu wyłącznie aksjatorowego mechanizmu plastycznego (dla hydrostatycznego ściskania) nie obserwuje się zjawiska mięknięcia materiału [29].



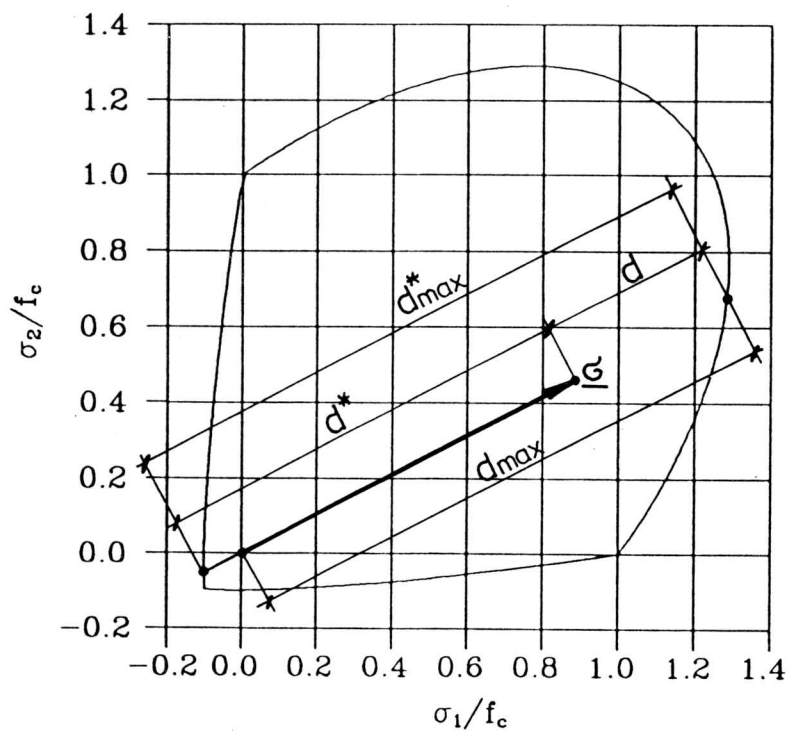
s. II.15 Kryterium dziewatorowego obciążenia / odciążenia w stanie pokrytycznym



Rys. II.16 Definicja odległości d wg *M.N.Fardisa* i *E.S.Chena*



Rys. II.17 Definicja odległości d wg wcześniejszej pracy *E.S.Chena*



Rys. II.18 Definicja odległości d przyjęta w pracy

Konsekwentnie, moduł K_p nie zależy od odległości δ i również na powierzchni granicznej pozostaje większy od zera. Odległość d od aktualnego stanu naprężenia do powierzchni granicznej może być definiowana w różny sposób. W pracy *M.N.Fardisa* i *E.S.Chena* [42] d jest mierzone wzdłuż kierunku wyznaczonego przez wektor prędkości naprężenia $\dot{\underline{\sigma}}$, pomijając jednak zmianę kierunku naprężenia na płaszczyźnie dewiatorowej (rys. II.16). Uzależnienie wartości H_p i β od prędkości naprężenia $\dot{\underline{\sigma}}$ (poprzez wartość d) powoduje, że w sposób niejawny macierz \underline{D}_{ep} jest funkcją $\dot{\underline{\sigma}}$. W efekcie związek fizyczny (II.32) staje się nieliniowy. We wcześniejszej pracy *E.S.Chena* [28] odległość d jest mierzona w płaszczyźnie dewiatorowej i zależy wyłącznie od aktualnego stanu naprężenia $\underline{\sigma}$ (rys. II.17).

Należy zauważyć, że niezależnie od wyboru kierunku, wzdłuż którego mierzy się d , odległość d_{max} powinna być mierzona na bieżąco wzdłuż tego samego kierunku. Przyjęcie raz ustalonej wartości d_{max} na początku procesu obciążenia, prowadzić może do wystąpienia sytuacji, że $d > d_{max}$ przy obciążeniu nieproporcjonalnym, co wynika z kształtu powierzchni granicznej.

W pracy przyjęto, że w płaskim stanie naprężenia odległość d jest mierzona wzdłuż prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i aktualny stan naprężenia. Odległość d_{max} jest mierzona wzdłuż tej samej prostej od początku układu współrzędnych do powierzchni granicznej. Również prosta ta wyznacza odległość d^* od aktualnego stanu naprężenia do punktu na powierzchni granicznej po przeciwnej stronie i odległość d_{max}^* pomiędzy dwoma punktami położonymi przeciwległe na powierzchni granicznej (rys. II.18). Odległość sprowadzona $\delta^* = d^*/d_{max}^*$ jest wykorzystywana dla opisu H_p przy obciążeniu (punkt II.5).

II.5 Wzory dla modułów plastycznych H_p, K_p, β

Wzory opisujące moduły plastyczne H_p, K_p, β zostały dobrane tak, aby zapewnić możliwie dobrą zgodność w wynikami doświadczalnymi dla płaskiego stanu naprężenia. Za miarodajne przyjęto rezultaty badań *H.Kupfera* [68], [69]. Są to, przypuszczalnie, najbardziej wyczerpujące i wiarygodne doświadczenia, jakie w ogóle przeprowadzono dla betonu w płaskim stanie naprężenia. Niestety ograniczają się one do proporcjonalnych, monotonicznych ścieżek obciążenia.

II.5.1 Obciążenie pierwotne

II.5.1.1 Moduł plastyczny H_p

Zgodnie ze wzorem (II.66) moduł plastyczny postaciowy H_p jest funkcją odległości sprówdzonej δ , przy czym powinny zachodzić warunki:

$$H_p(\delta = 1, 0) = H_{p_0}, \quad H_p(\delta = 0) = 0, \quad (\text{II.71})$$

gdzie H_{p_0} - początkowy plastyczny moduł postaciowy.

Pierwszy warunek postuluje, aby na początku obciążenia (tzn. dla $d = d_{max}$) moduł plastyczny przybierał wartość początkową (możliwą do eksperymentalnego ustalenia). Drugi warunek (II.71) jest warunkiem koniecznym, aby krzywa $\tau_0 - \gamma_0^p$ posiadała maksimum, gdy stan naprężenia osiąga powierzchnię graniczną. Wraz ze zmniejszaniem się wartości δ od 1 do 0 w procesie obciążenia moduł H_p również powinien monotonicznie maleć od wartości H_{p_0} do 0. Przy przyjętym sposobie mierzenia odległości d i d_{max} wg rys. II.18 zachodzą związki:

$$\sigma_1/\sigma_{1u} = \sigma_2/\sigma_{2u} = \frac{d_{max} - d}{d_{max}} = 1 - \delta, \quad (\text{II.72})$$

gdzie: σ_1, σ_2 - wartości naprężeń głównych dla bieżącego stanu naprężenia,
 σ_{1u}, σ_{2u} - wartości naprężeń głównych na powierzchni granicznej.

W płaskim stanie naprężenia, naprężenie ścinające τ_0 może być wyrażone poprzez naprężenia główne σ_1, σ_2 :

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}. \quad (\text{II.73})$$

Oznaczając przez τ_{0u} wartość naprężenia τ_0 na powierzchni granicznej oraz uwzględniając (II.72) możemy stosunek wartości naprężeń τ_0 i τ_{0u} wyrazić poprzez odległość δ :

$$\tau_0/\tau_{0u} = 1 - \delta, \quad (\text{II.74})$$

lub odwrotnie

$$\delta = 1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0u}}. \quad (\text{II.75})$$

W dalszych rozważaniach wygodnie będzie, korzystając z zależności (II.75), traktować H_p jako funkcję naprężenia ścinającego oktaedrycznego:

$$H = H_p(\tau_0) \quad \text{dla} \quad 0 \leq \tau_0 \leq \tau_{0u}. \quad (\text{II.76})$$

Przy przyjęciu τ_0 jako zmiennej niezależnej, warunki (II.71) przybierają postać:

$$H_p(\tau_0 = 0) = H_{p_0}, \quad H_p(\tau_0 = \tau_{0_u}) = 0, \quad (\text{II.77})$$

przy czym H_p powinno monotonicznie maleć od wartości H_{p_0} do 0 wraz ze wzrostem naprężenia τ_0 od 0 do wartości τ_{0_u} .

Wykorzystując fakt, że moduł plastyczny H_p jest funkcją τ_0 można w sposób efektywny wyciąkać związek prędkościowy (II.1) dla przypadku obciążenia monotonicznego i proporcjonalnego:

$$\gamma_0^p(\tau_0) = \int \frac{1}{H_p(\tau_0)} d\tau_0 + C. \quad (\text{II.78})$$

Stałą C wyznacza się z warunku początkowego:

$$\gamma_0^p(\tau_0 = 0) = 0. \quad (\text{II.79})$$

Wykorzystując twierdzenie *Newtona - Leibniza* [94] całkę nieoznaczoną ze wzoru (II.78) z warunkiem początkowym (II.79) można zastąpić całką oznaczoną:

$$\gamma_0^p(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \frac{1}{H_p(\tau)} d\tau. \quad (\text{II.80})$$

W szczególności wartość odkształcenia ścinającego γ_0^p dla naprężenia ścinającego τ_{0_u} (tzn. gdy stan naprężenia osiąga powierzchnię graniczną) wynosi:

$$\gamma_{0_u}^p = \int_0^{\tau_{0_u}} \frac{1}{H_p(\tau)} d\tau, \quad (\text{II.81})$$

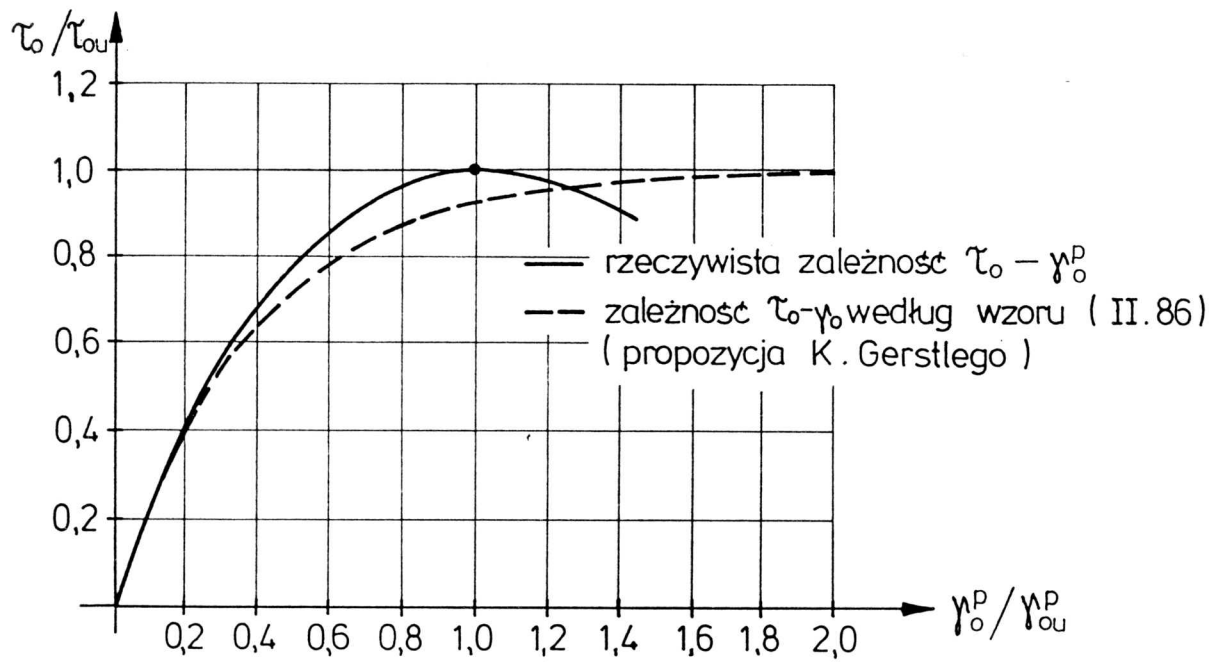
gdzie $\gamma_{0_u}^p = \gamma_0^p(\tau_0 = \tau_{0_u})$ - wartość odkształcenia γ_0^p dla naprężenia ścinającego τ_{0_u} .

Z uwagi na drugi z warunków (II.77) całka we wzorze (II.81) jest całką niewłaściwą II rodzaju. Funkcja opisująca moduł $H_p(\tau_0)$ powinna być tak dobrana, by całka ta miała skończoną wartość, a ogólna zależność $\tau_0 - \gamma_0^p$ miała kształt jak na rys. II.19.

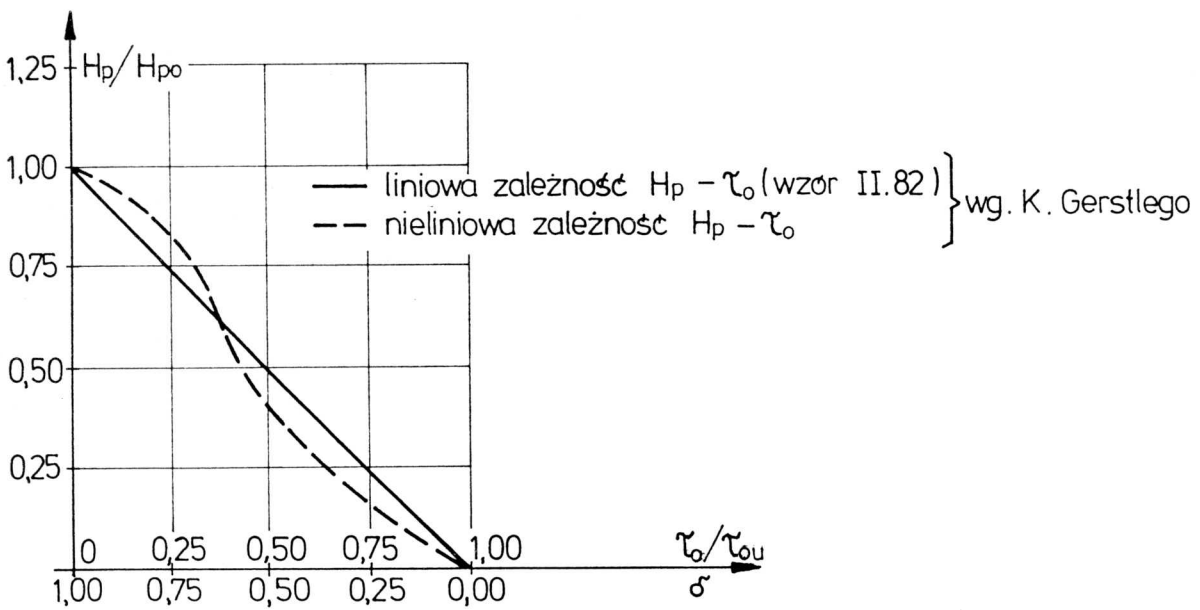
Dla opisanie modułu H_p [47], [46] *K. Gerstle* zaproponował funkcję liniową:

$$H_p(\tau_0) = H_{p_0} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0_u}} \right). \quad (\text{II.82})$$

Zdaniem *K. Gerstlego* bardziej zbliżona do wyników badań eksperymentalnych zależność $H_p - \tau_0$ powinna mieć przebieg jak na rys. II.20.



Rys. II.19 Jakościowy przebieg zależności $\tau_0 - \gamma_0^P$



Rys. II.20 Zależność $H_p - \tau_0$ wg teoretycznych propozycji K. Gerstlego

W pracy przyjęto uogólnienie funkcji (II.82) w postaci potęgowej:

$$H_p(\tau_0) = H_{p_0} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0u}}\right)^\omega = H_{p_0} \cdot \delta^\omega \quad (II.83)$$

W powyższym wzorze ω jest parametrem zależnym od kształtu krzywej $H_p - \tau_0$ i w dalszym ciągu zajmiemy się sposobem wyznaczania tego parametru. Zauważmy najpierw, że dla $\omega = 1, 0$ (tzn. przy zastosowaniu wzoru (II.82)) otrzymuje się całkę rozbieżną do $+\infty$:

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow \tau_{0u}} \int_0^{\tau_0} \frac{1}{H_p \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{0u}}\right)} d\tau = +\infty. \quad (II.84)$$

Dla wartości $\tau_0 < \tau_{0u}$ całka (II.84) może być wyrażona jawnie w postaci:

$$\gamma_0(\tau_0) = -\frac{\tau_{0u}}{H_{p_0}} \ln \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0u}}\right), \quad (II.85)$$

lub jako funkcja odwrotna:

$$\tau_0(\gamma_0^p) = \tau_{0u} \left[1 - e^{-\frac{H_{p_0}}{\tau_{0u}} \gamma_0^p} \right]. \quad (II.86)$$

Jak widać z postaci wzoru (II.86) wartość naprężenia ścinającego τ_0 rośnie asymptotycznie do wartości τ_{0u} wraz ze zmierzaniem γ_0^p do nieskończoności (rys. II.19). Tak więc przyjęcie funkcji opisującej moduł plastyczny według *K. Gerstlego* (wzór (II.82)) prowadzi do zależności $\tau_0 - \gamma_0^p$ niepoprawnej dla większych wartości τ_0 . Dodatkowo, z tzw. kryterium porównawczego [21] wynika, że skoro całka (II.81) jest rozbieżna dla funkcji podcałkowej danej wzorem (II.82) to jest ona również rozbieżna dla dowolnej funkcji $H_p(\tau_0)$, która w skończonym otoczeniu lewostronnym punktu τ_{0u} ($\tau_0 \in \langle \tau_{01}, \tau_{0u} \rangle$), jest mniejsza lub równa od (II.82):

$$H_p(\tau_0) \leq H_{p_0} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0u}}\right), \quad (II.87)$$

dla $\tau_{01} \leq \tau_0 \leq \tau_{0u}$.

Nierówność (II.87) wskazuje, że krzywoliniowa zależność $H_p - \tau_0$ z rys. II.20 również nie opisuje poprawnie przebiegu funkcji $\tau_0 - \gamma_0^p$, ponieważ w otoczeniu punktu τ_{0u} znajduje się poniżej prostej danej wzorem (II.82).

Przy przyjęciu funkcji opisującej moduł H_p według (II.83) warunkiem koniecznym i wystarczającym aby całka (II.81) miała skończoną wartość jest nierówność ostra [21]:

$$\omega < 1, 0. \quad (II.88)$$

Dla wartości ω spełniających warunek (II.88) całka (II.80) może być wyrażona w postaci jawnej:

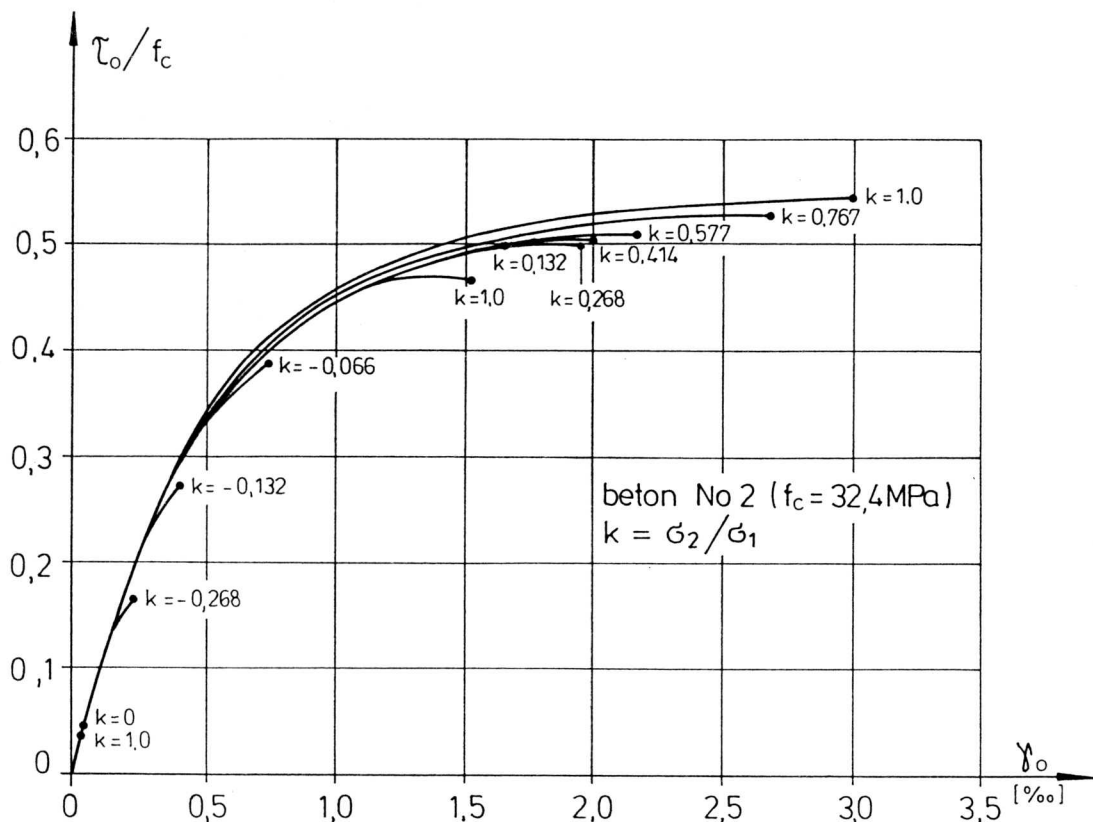
$$\gamma_0^p(\tau_0) = \frac{\tau_{0u}}{H_{p0}} \cdot \frac{-1}{1-\omega} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0u}}\right)^{1-\omega} + \frac{\tau_{0u}}{H_{p0}} \cdot \frac{1}{1-\omega}, \quad (\text{II.89})$$

dla $0 \leq \tau_0 \leq \tau_{0u}$.

Podstawiając $\tau_0 = \tau_{0u}$ otrzymuje się wartość końcową odkształcenia γ_0^p (wzór (II.81)):

$$\gamma_{0u}^p = \frac{\tau_{0u}}{H_{p0}} \cdot \frac{1}{1-\omega}. \quad (\text{II.90})$$

Zależność (II.90) zostanie użyta do wyznaczenia właściwych wartości ω . Przedstawione w punkcie II.2 badania eksperymentalne nie mogą być wykorzystane ponieważ dotyczą one trójosiowego stanu naprężenia, przy wartościach naprężenia średniego σ_0 większych niż występujące w płaskim stanie naprężenia. Zostaną natomiast wykorzystane krzywe doświadczalne $\tau_0 - \gamma_0$ w płaskim stanie naprężenia otrzymane przez *H.Kupfera* [68] (rys. II.21).



Rys. II.21 Zależności doświadczalne $\tau_0 - \gamma_0$ (*H.Kupfer*)

Przyjmując, że odkształcenia sprężyste są pomijalnie małe można utożsamić odkształcenia plastyczne γ_0^p z całkowitymi wartościami odkształceń γ_0 . Wówczas rys. II.21 przedstawia ilościowy przebieg zależności $\tau_0 - \gamma_0^p$ z rys. II.19 dla różnych stosunków naprężeń głównych $\sigma_1 : \sigma_2$ w płaskim stanie naprężenia. Dodatkowo, w takim przypadku początkowy moduł plastyczny H_{p0} może być utożsamiany z początkowym modułem postaciowym H_0 . Stała ω może więc być wyznaczona z zależności:

$$\omega = 1 - \frac{\tau_{0u}}{H_{p0} \gamma_{0u}^p}, \quad (\text{II.91})$$

gdzie γ_{0u}^p - wartość odkształcenia postaciowego γ_0^p dla naprężenia ścinającego τ_{0u} .

Wartości $H_{p0}, \tau_{0u}, \gamma_{0u}^p$ powinny być zgodne z doświadczeniem. Analiza danych przedstawionych na rys. II.21 wskazuje wyraźnie na zmienność wartości ω dla różnych stosunków $\sigma_1 : \sigma_2$. Zostało to pokazane w tabl. II.5.

$\sigma_1 : \sigma_2$	τ_{0u}	γ_{0u}^p	ω (wzór (II.91))
1 : 0	$0,47 f_c$	1,40‰	0,61
1 : 0,577	$0,51 f_c$	2,18‰	0,72
1 : 1	$0,54 f_c$	3,00‰	0,79

f_c - wytrzymałość betonu przy jednoosiowym ściskaniu

Tablica II.5 Wartości parametru ω

Wartości τ_{0u}, γ_{0u}^p wykorzystane w powyższej tablicy zostały odczytane wprost z rysunku (oryginalnie Bild 146 w [68]). Zostały one uzyskane dla betonu o parametrach:

$$f_c = 32,4 \text{ MPa}, \quad H_{p0} = 850 f_c.$$

Dla praktycznego wykorzystania związku (II.91) niezbędne jest podanie wzoru analitycznego na wartość γ_{0u}^p dla różnych stosunków $\sigma_1 : \sigma_2$. W tym celu posłużymy się związkami naprężenie – odkształcenie zaproponowanymi przez *H.Kupfera* [68], [69] dla przypadku monotonicznych obciążeń proporcjonalnych. W pracach tych wykorzystano zmienne moduły sieczne K_s i H_s (podejście analogiczne do wyrażonego wzorami (II.10 –

II.11). Zgodnie z tym podejściem wartość odkształcenia ścinającego wyraża się wzorem:

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{H_s(\tau_0)}, \quad (\text{II.92})$$

dla

$$H_s(\tau_0) = H_0 \left(1 - n \left(\frac{\tau_0}{f_c} \right)^m \right),$$

gdzie n, m - stałe materiałowe.

Jak wynika z analizy danych przedstawionych w [68], wzór (II.92) daje bardzo dobrą zgodność z wynikami doświadczalnymi. W szczególności może on być użyty do obliczenia wartości odkształcenia γ_{0_u} odpowiadającej naprężeniu oktaedrycznemu τ_{0_u} :

$$\gamma_{0_u} = \frac{\tau_{0_u}}{H_0 \left(1 - n \left(\frac{\tau_{0_u}}{f_c} \right)^m \right)}. \quad (\text{II.93})$$

Wartość γ_{0_u} otrzymana z (II.93) przy pominięciu odkształceń sprężystych ($\gamma_0 = \gamma_0^p, H_0 = H_{p_0}$) powinna być równa wartości $\gamma_{0_u}^p$ występującej we wzorze (II.91). Podstawiając (II.93) do wzoru (II.91) otrzymuje się końcową postać zależności na współczynnik ω :

$$\omega = n \left(\frac{\tau_{0_u}}{f_c} \right)^m. \quad (\text{II.94})$$

Ponieważ wartość τ_{0_u} zmienia się dla różnych stosunków $\sigma_1 : \sigma_2$ (co wynika z charakteru powierzchni granicznej), w prezentowanym podejściu ω nie jest stałą materiałową, lecz zmienną, zależną od stanu obciążenia. Tak więc moduł plastyczny H_p jest funkcją dwóch parametrów:

$$H_p = H_p(\delta, \tau_{0_u}), \quad (\text{II.95})$$

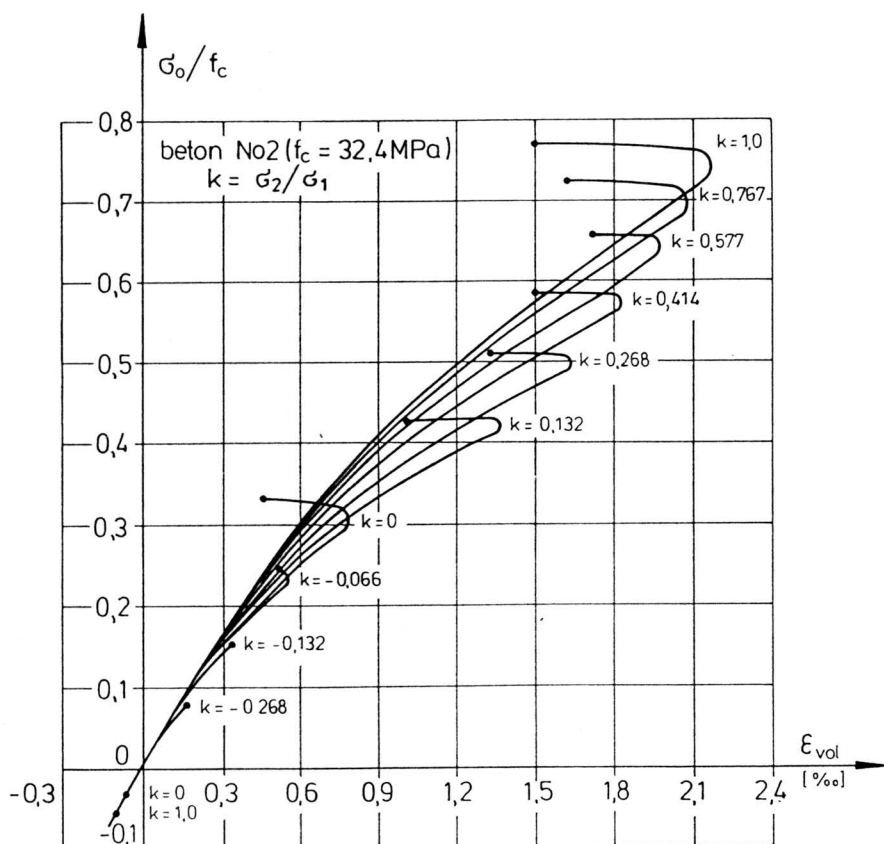
przy czym dla danego stanu naprężenia $\underline{\sigma}$ wartość naprężenia ścinającego τ_{0_u} na powierzchni granicznej jest liczona w punkcie, do którego odmierza się odległość d (rys. II.18).

II.5.1.2 Moduły plastyczne K_p i β

Funkcje opisujące moduły K_p i β wyznaczymy wykorzystując krzywe eksperymentalne $\sigma_0 - \varepsilon_{vol}$ przedstawione na rys. II.22 (oryginalnie Bild 145 w [68]) uzyskane dla tego samego betonu co krzywe na rys. II.21. Należy zauważyć, że w płaskim stanie naprężenia nie ma możliwości przeprowadzenia testów, w których zmieniałoby się jedynie naprężenie

średnie ($\dot{\sigma}_0 \neq 0, \dot{\tau}_0 \equiv 0$) lub jedynie naprężenie ścinające oktaedryczne ($\dot{\tau}_0 \neq 0, \dot{\sigma}_0 \equiv 0$)-nie ma więc możliwości oddzielnego wyznaczenia funkcji K_p i β . Analizując rys. II.22 należy pamiętać, że wraz ze wzrostem σ_0 proporcjonalnie rośnie τ_0 przy zastosowanych ścieżkach obciążenia. Sprawia to, że bazując wyłącznie na danych doświadczalnych dla płaskiego stanu naprężenia nie można jednoznacznie podzielić odkształcenia objętościowego ε_{vol}^p na części ε_{vol}^{pI} i ε_{vol}^{pII} (wzór (II.2)). *H.Kupfer* chcąc ominąć ten problem zrezygnował całkowicie ze współczynnika β opisując zmianę odkształceń objętościowych wyłącznie poprzez moduł objętościowy sieczny K_s . Uwzględnienie dylatacji doprowadziło przy tym podejściu do sytuacji, w której dla stanów naprężenia bliskich powierzchni granicznej wraz ze wzrostem σ_0 moduł K_s zaczyna rosnąć zamiast maleć. Moduł objętościowy styczny K_T zdefiniowany jako:

$$K_T = \dot{\sigma}_0 / \dot{\varepsilon}_{vol}, \quad (II.96)$$



Rys. II.22 Zależności doświadczalne $\sigma_0 - \varepsilon_{vol}$ (*H.Kupfer*)

przyjmuje wówczas wartości ujemne.

W pracy przyjęto odmienne rozwiązanie. Funkcja opisująca moduł plastyczny K_p została przyjęta w postaci:

$$K_p = \frac{K_{p0}}{1 + 1,860 \left(\frac{\sigma_0}{f_c} \right)^{1,5}}, \quad (\text{II.97})$$

gdzie K_{p0} - początkowy moduł plastyczny.

Wzór (II.97) został dla stanu trójwymiarowego zaproponowany przez *O.Buyukozturka* [28] i był m.in. wykorzystany z sukcesem w pracy *G.Meschkego* [75]. Dla obciążenia monotonicznego proporcjonalnego jeśli moduł K_p jest opisany zależnością (II.97) to poprzez całkowanie wzoru (II.3), przy warunku początkowym $\varepsilon_{vol}^{pI} = 0$ dla $\sigma_0 = 0$, można obliczyć wartość całkowitego odkształcenia objętościowego ε_{vol}^{pI} :

$$\varepsilon_{vol}^{pI} = \frac{\sigma_0}{K_{p0}} \left(1 + 0,744 \left(\frac{\sigma_0}{f_c} \right)^{1,5} \right). \quad (\text{II.98})$$

Zgodnie z (II.4) współczynnik ściśnienia / dylatacji wyraża się wzorem:

$$\beta = \frac{d\varepsilon_{vol}^{pII}}{d\gamma_0^p}. \quad (\text{II.99})$$

Przyjmując, że odkształcenie ε_{vol}^{pI} wyraża się przez (II.98), zaś wartości całkowitego odkształcenia objętościowego ε_{vol} mogą być odczytane z rys. II.22 można pomijając część sprężystą odkształceń objętościowych, wyznaczyć ε_{vol}^{pII} . Tok postępowania jest następujący:

- Dla ustalonego stosunku naprężeń głównych $\sigma_1 : \sigma_2$ oraz wybranych poziomów naprężenia średniego σ_0 z rys. II.22 należy odczytać wartości $\varepsilon_{vol}^p = \varepsilon_{vol}$.
- Następnie dla tych samych wartości σ_0 oblicza się ε_{vol}^{pI} według (II.98). Prowadzi to do znajomości dyskretnego zbioru wartości ε_{vol}^{pII} :

$$\varepsilon_{vol}^{pII} = \varepsilon_{vol}^p(\sigma_0) - \varepsilon_{vol}^{pI}(\sigma_0), \quad (\text{II.100})$$

gdzie $\varepsilon_{vol}^p(\sigma_0)$ – wartości uzyskane doświadczalnie,
 $\varepsilon_{vol}^{pI}(\sigma_0)$ – wartości obliczone wzorem (II.98).

Dla monotonicznego obciążenia proporcjonalnego o stałym stosunku naprężeń głównych:

$$\sigma_2 = k\sigma_1, \quad (\text{II.101})$$

gdzie $k = \text{const}$ - parametr proporcjonalności, wartości naprężeń τ_0 i σ_0 można wyrazić jako:

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} |\sigma_1| \sqrt{k^2 - k + 1}, \quad \sigma_0 = \sigma_1(1 + k). \quad (\text{II.102})$$

Wzory (II.102) świadczą o istnieniu liniowej zależności pomiędzy τ_0 a σ_0 wyrażonej wzorem:

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \left| \frac{\sigma_0}{1 + k} \right| \sqrt{k^2 - k + 1}. \quad (\text{II.103})$$

- Stosując wzór (II.103) można dla ustalonego stosunku $\sigma_1 : \sigma_2$ obliczyć wartość τ_0 odpowiadającą danej wartości σ_0 . Umożliwia to przekształcenie relacji empirycznej (II.100) dla dyskretnego zbioru wartości do postaci:

$$\varepsilon_{vol}^{pII} = \varepsilon_{vol}^p(\tau_0) - \varepsilon_{vol}^{pI}(\tau_0). \quad (\text{II.104})$$

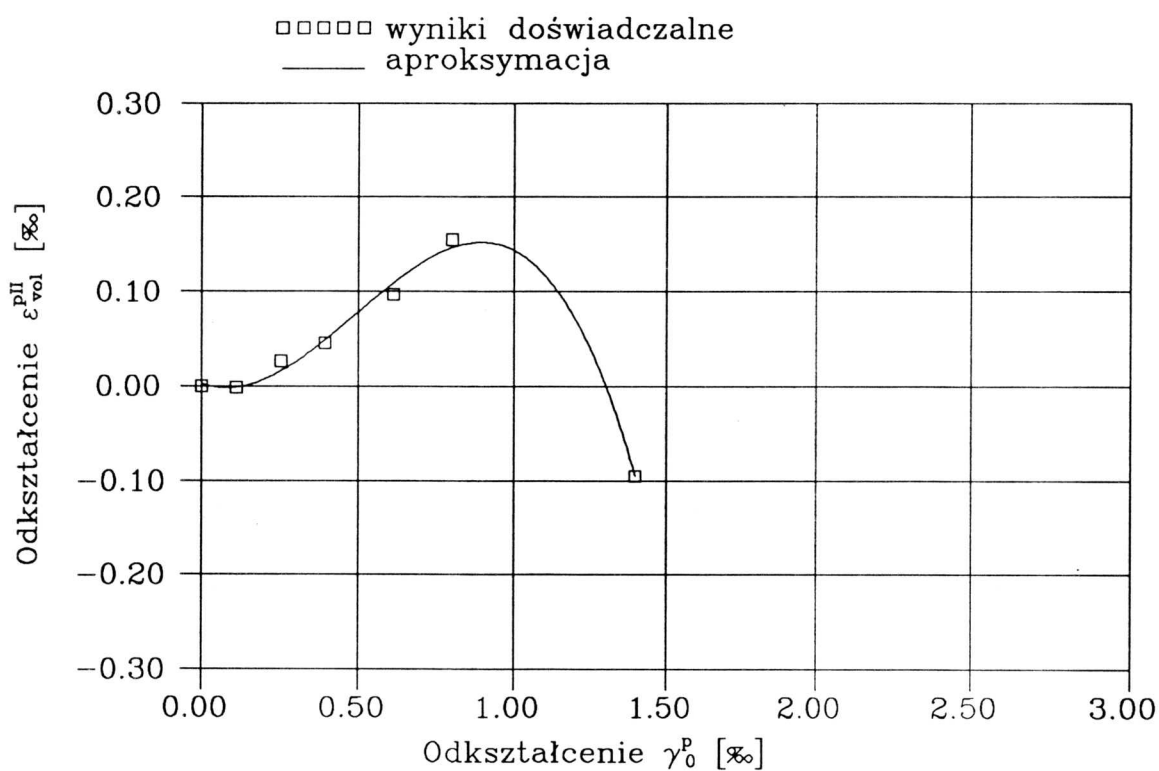
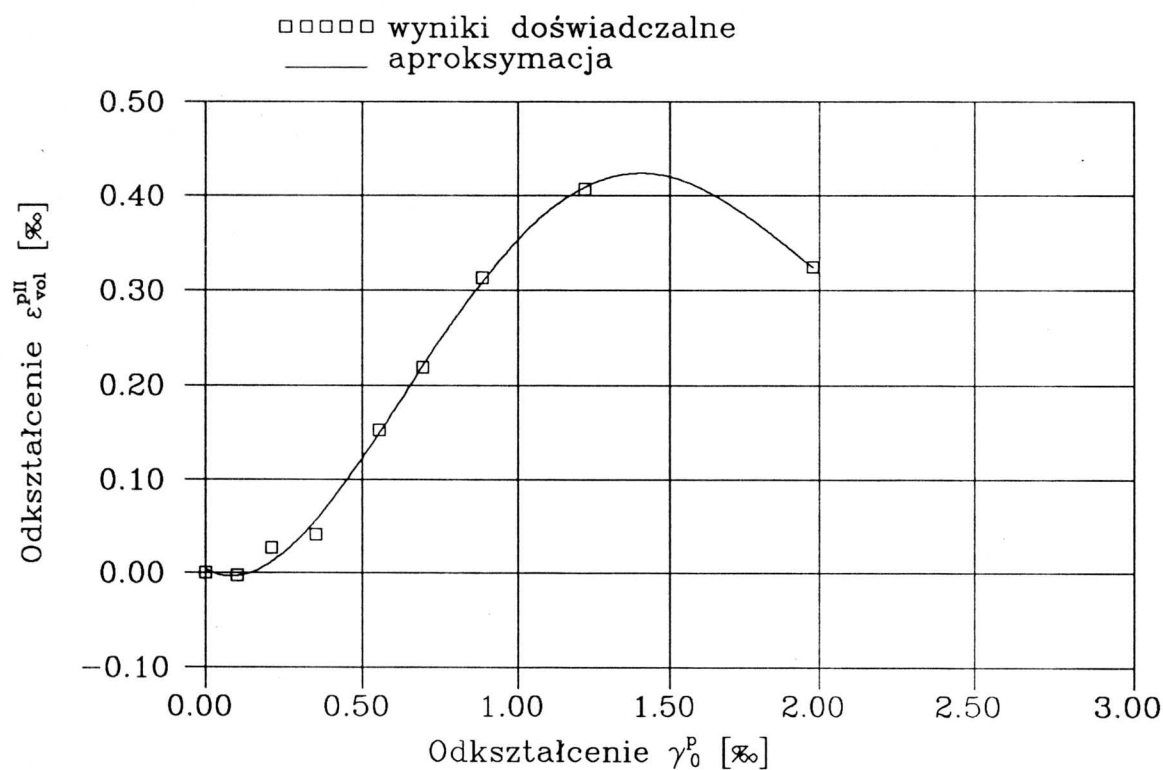
Dodatkowo, dla znanej wartości τ_0 przy monotonicznym obciążeniu proporcjonalnym ze wzoru (II.89) można obliczyć wartość γ_0^p . Prowadzi to ostatecznie do zależności pomiędzy ε_{vol}^{pII} i γ_0^p :

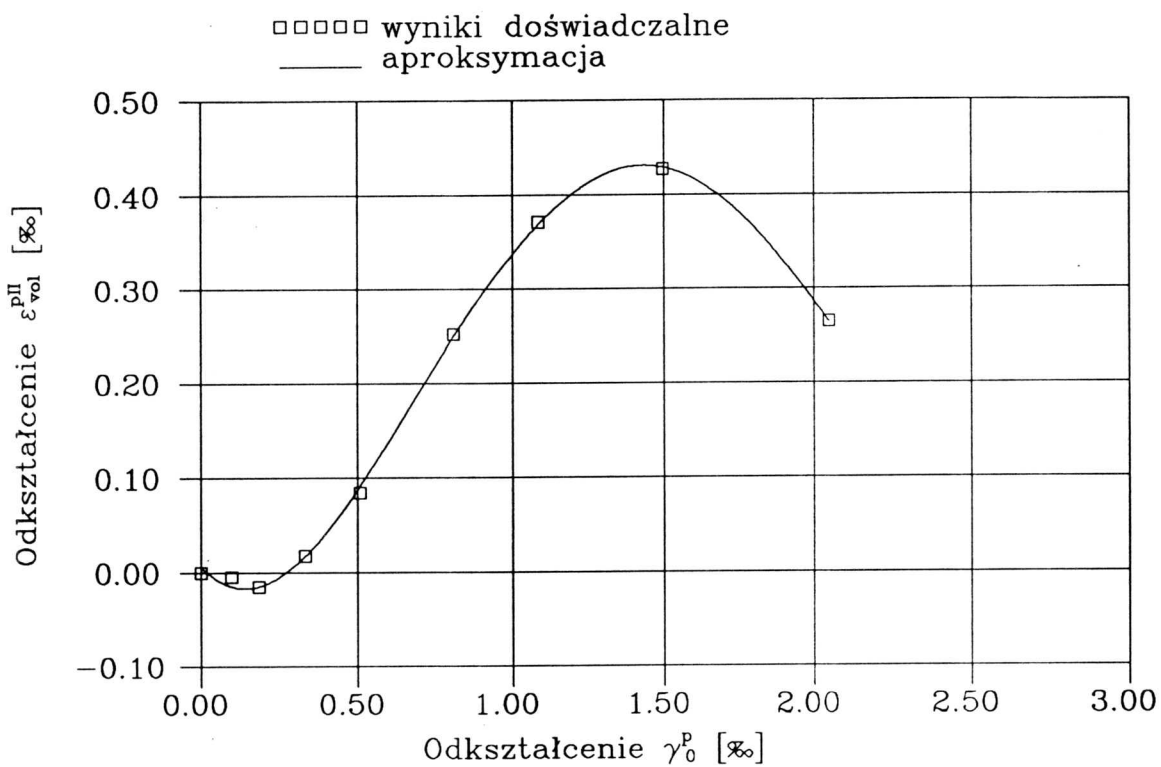
$$\varepsilon_{vol}^{pII} = \varepsilon_{vol}^p(\gamma_0^p) - \varepsilon_{vol}^{pI}(\gamma_0^p). \quad (\text{II.105})$$

Wykorzystując przedstawiony powyżej tok rozumowania uzyskano dyskretne wartości ε_{vol}^{pII} dla czterech różnych stosunków naprężeń głównych ($\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0, 1 : 0,268, 1 : 0,577, 1 : 1$) w zależności od γ_0^p . Otrzymane wykresy przedstawiają rys. II.23 – II.26. W celu uzyskania analitycznych zależności $\varepsilon_{vol}^{pII} - \gamma_0^p$, i w dalszej kolejności wyznaczenia funkcji β , zastosowano aproksymację wielomianami niezbyt wysokich stopni przy użyciu metody najmniejszych kwadratów. Wykorzystano w tym celu program “Grapher” [53]. Przyjęte zależności pokazano na rys. II.23 – II.26 linią ciągłą. Różniczkując otrzymane wyrażenia względem γ_0^p otrzymano związki typu:

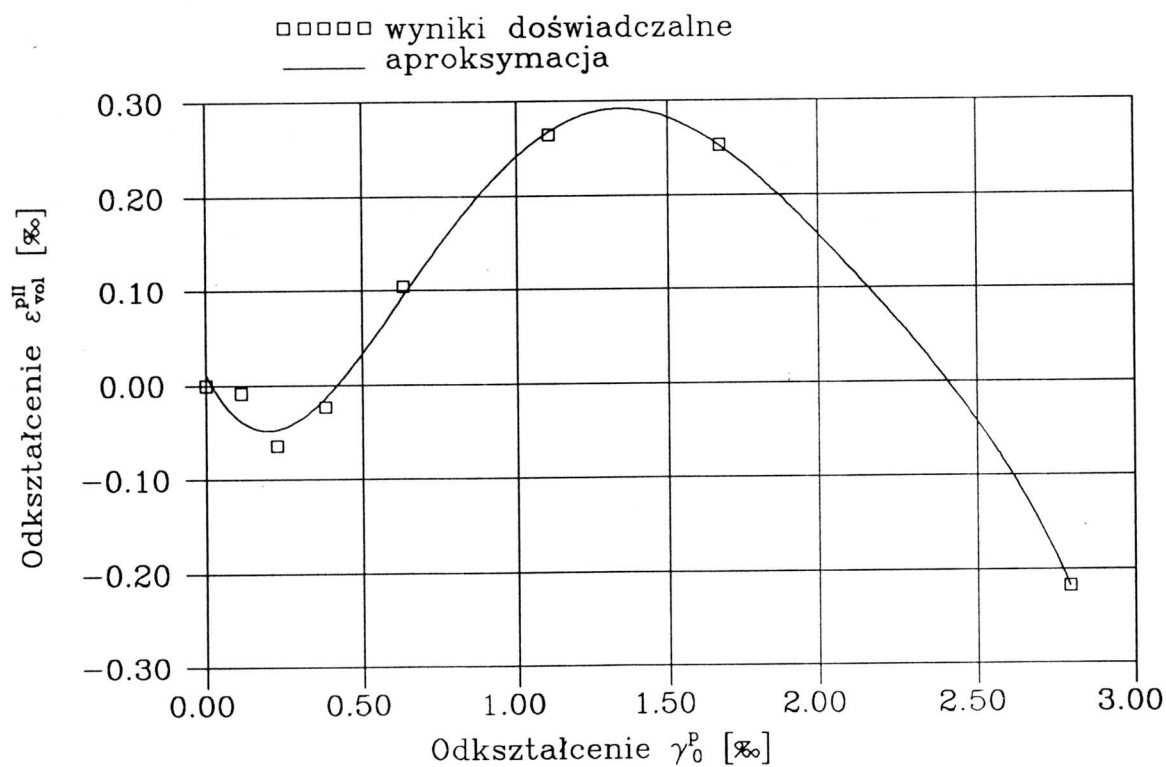
$$\boxed{\beta = \beta(\gamma_0^p)}, \quad (\text{II.106})$$

przedstawione w tabl. II.6.

Rys.II.23 Zależność $\varepsilon_{vol}^{pl} - \gamma_0^p$ dla $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0$ Rys.II.24 Zależność $\varepsilon_{vol}^{pl} - \gamma_0^p$ dla $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0,268$



Rys.II.25 Zależność $\varepsilon_{vol}^{pl} - \gamma_0^p$ dla $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0,577$



Rys.II.26 Zależność $\varepsilon_{vol}^{pl} - \gamma_0^p$ dla $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 1$

$\sigma_1 : \sigma_2$	$\varepsilon_{vol}^{pII}, \beta, \beta_u$
1 : 0	$\varepsilon_{vol}^{pII} = -0,568229(\gamma_0^p)^3 + 0,829527(\gamma_0^p)^2 - 0,120818\gamma_0^p + 0,00274409$ $\beta = -1,704687(\gamma_0^p)^2 + 1,659054\gamma_0^p - 0,120818$ $\beta_u = -1,125$
1 : 0,268	$\varepsilon_{vol}^{pII} = 0,180439(\gamma_0^p)^4 - 0,906256(\gamma_0^p)^3 + 1,2639(\gamma_0^p)^2 - 0,18849\gamma_0^p + 0,00374315$ $\beta = 0,721756(\gamma_0^p)^3 - 2,718768(\gamma_0^p)^2 + 2,52788\gamma_0^p - 0,18849$ $\beta_u = -0,240$
1 : 0,577	$\varepsilon_{vol}^{pII} = 0,168733(\gamma_0^p)^4 - 0,942921(\gamma_0^p)^3 + 1,45658(\gamma_0^p)^2 - 0,351264\gamma_0^p + 0,00648943$ $\beta = 0,674932(\gamma_0^p)^3 - 2,828763(\gamma_0^p)^2 + 2,91316\gamma_0^p - 0,351264$ $\beta_u = -0,452$
1 : 1	$\varepsilon_{vol}^{pII} = -0,0723174(\gamma_0^p)^5 + 0,599509(\gamma_0^p)^4 - 1,81828(\gamma_0^p)^3 + 2,1856(\gamma_0^p)^2 - 0,663662\gamma_0^p + 0,0110543$ $\beta = -0,361587(\gamma_0^p)^4 + 2,398036(\gamma_0^p)^3 - 5,45484(\gamma_0^p)^2 + 4,3712\gamma_0^p - 0,663662$ $\beta_u = -0,760$

Tablica II.6 Wzory na ε_{vol}^{pII} , β oraz wartości $\beta_u = \beta(\gamma_0^p = \gamma_{0_u}^p)$

Bezpośrednie wykorzystanie wzorów z tabl. II.6 jest kłopotliwe z uwagi na zmienny stopień wielomianów aproksymujących β i różne współczynniki tych wielomianów dla różnych stosunków $\sigma_1 : \sigma_2$. Dostarczają one jednak cennych informacji o zmienności współczynnika β wraz ze wzrostem γ_0^p . Niezależnie od stosunku $\sigma_1 : \sigma_2$ przebiegi funkcji $\beta(\gamma_0^p)$ posiadają te same cechy jakościowe: dla małych wartości γ_0^p współczynnik β jest większy od zera (zjawisko ściśnienia), wraz ze wzrostem γ_0^p do wartości $\gamma_{0_u}^p$ współczynnik β przybiera wartości ujemne. Przejście przez zero funkcji β następuje dla dużych wartości γ_0^p . W przybliżeniu punkt zerowy β osiągnany jest przy stosunku $\tau_0/\tau_{0_u} = 0,9$ czyli $\delta = 0,1$. Taką samą zmienność współczynnika β stwierdzono również w badaniach prowadzonych dla trójosiowego stanu naprężenia [105].

Opisany sposób wyznaczania $\beta(\gamma_0^p)$ chociaż prosty nie jest ogólny. Dlatego, w celu uzyskania prostych związków fizycznych możliwych do wycałkowania analitycznego, wygodniej jest opisać β jako funkcję δ :

$$\beta = \beta(\delta) = \beta \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0u}} \right). \quad (\text{II.107})$$

Dla opisu $\beta(\delta)$ przyjęto funkcję wielomianową w postaci:

$$\boxed{\beta(\delta) = a\delta + b\sqrt{\delta} + c}, \quad (\text{II.108})$$

gdzie a, b, c - stałe materiałowe.

Podobne propozycje opisu β zostały podane w [107], [113]. Zależność (II.108) zgodnie z podanymi wcześniej danymi doświadczalnymi powinna spełniać warunki:

$$\begin{aligned} \beta(\delta = 1, 0) &= 0, \\ \beta(\delta = 0, 1) &= 0, \\ \beta(\delta = 0, 0) &= \beta_u. \end{aligned} \quad (\text{II.109})$$

Problemem jest ustalenie wartości β_u . *K.Gerstle* [107] przyjmował, że wartość β_u można obliczyć zakładając, że na powierzchni granicznej F wektor prędkości odkształcenia plastycznego jest prostopadły do tej powierzchni. Dla obciążenia przebiegającego w płaszczyźnie dewiatorowej (tzn. $\dot{\sigma}_0 = 0$, $\dot{\epsilon}_{vol}^p \equiv 0$) prowadzi to do zależności:

$$\beta_u = \frac{d\epsilon_{vol}^{pII}}{d\gamma_0^p} = \frac{d\epsilon_{vol}^p}{d\gamma_0^p} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_0}}{\frac{\partial F}{\partial \tau_0}}, \quad (\text{II.110})$$

wynikającej z faktu, że prostopadłość wektora prędkości odkształcenia plastycznego do powierzchni granicznej F wyraża się wzorami:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{vol}^p &= \lambda \frac{\partial F}{\partial (3\sigma_0)}, \\ \dot{\gamma}_0^p &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_0}, \end{aligned} \quad (\text{II.111})$$

gdzie λ - parametr proporcjonalności.

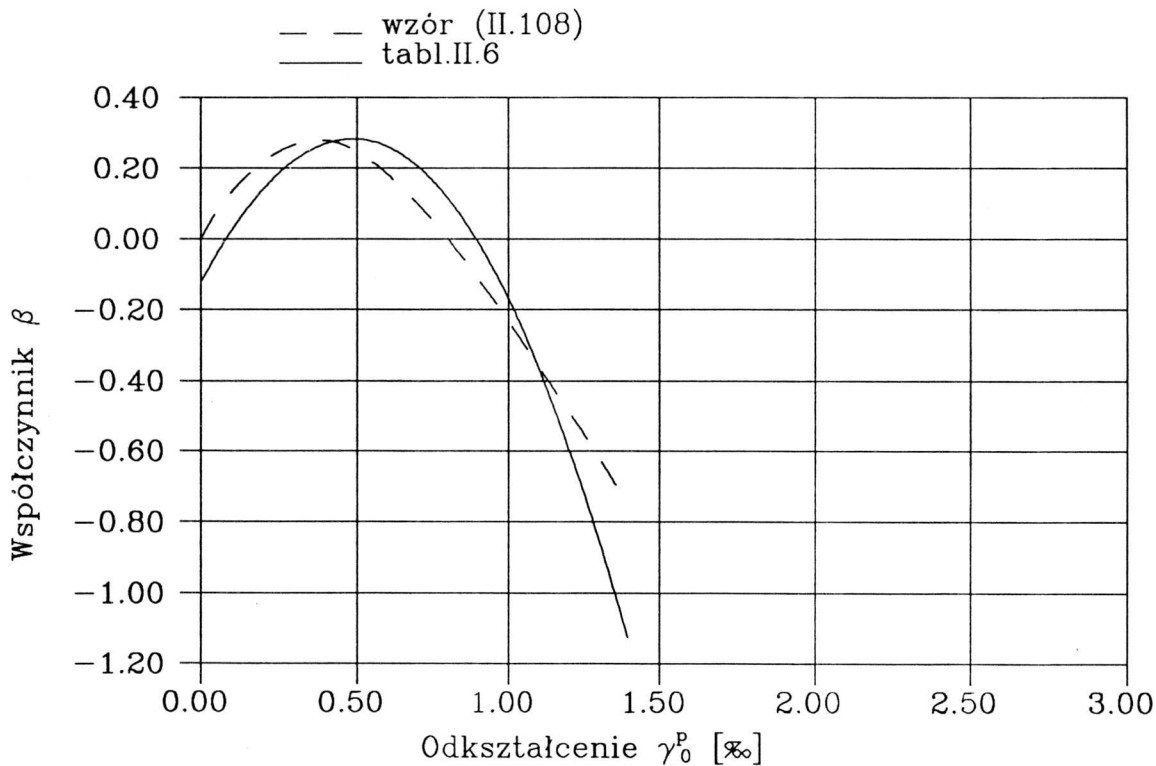
Wartości β_u otrzymane przy wykorzystaniu (II.110) i przyjęciu powierzchni granicznych według [107], [42] różnią się jednak znacznie od wartości uzyskanych w tabl. II.6. Jest to zgodne z obserwacjami doświadczalnymi [105], [1] stwierdzającymi, że kierunek prędkości odkształceń plastycznych nie jest prostopadły do powierzchni granicznej. Wnioskiem

z tego jest, że wzór na wartość β_u w zależności od stanu naprężenia powinien być sformułowany na podstawie wyczerpujących badań doświadczalnych w dwu- i trójosiowym stanie naprężenia.

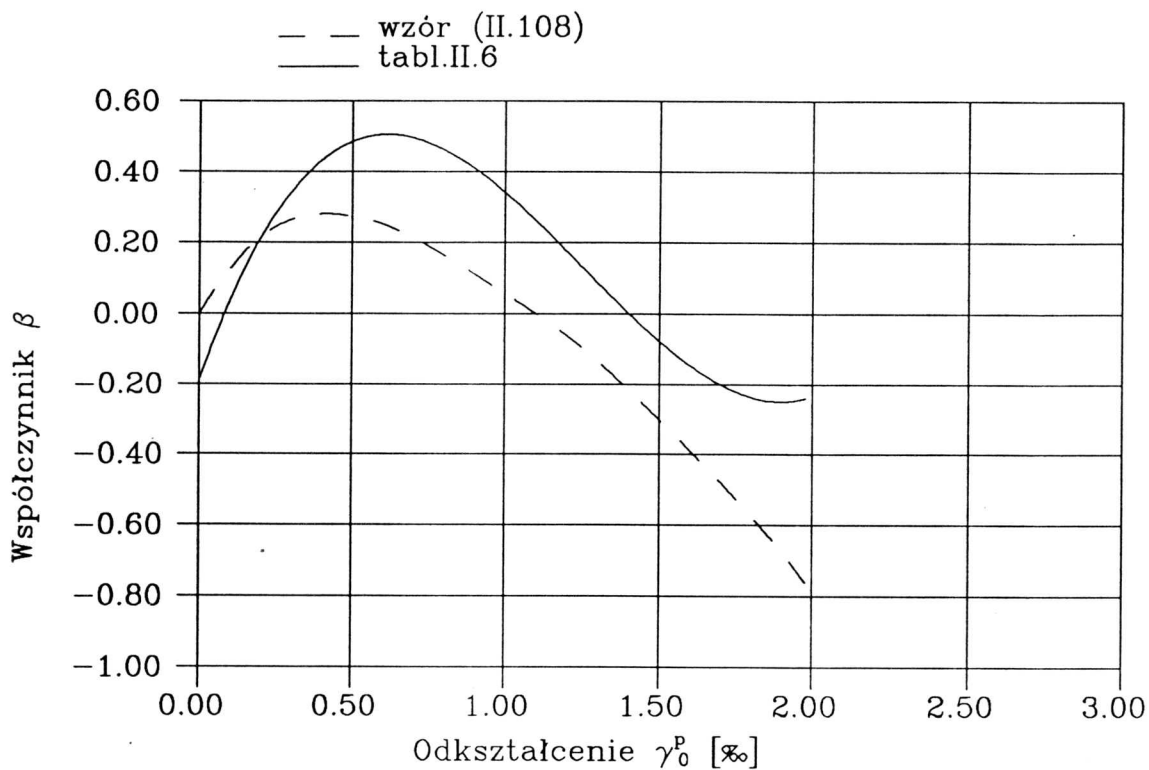
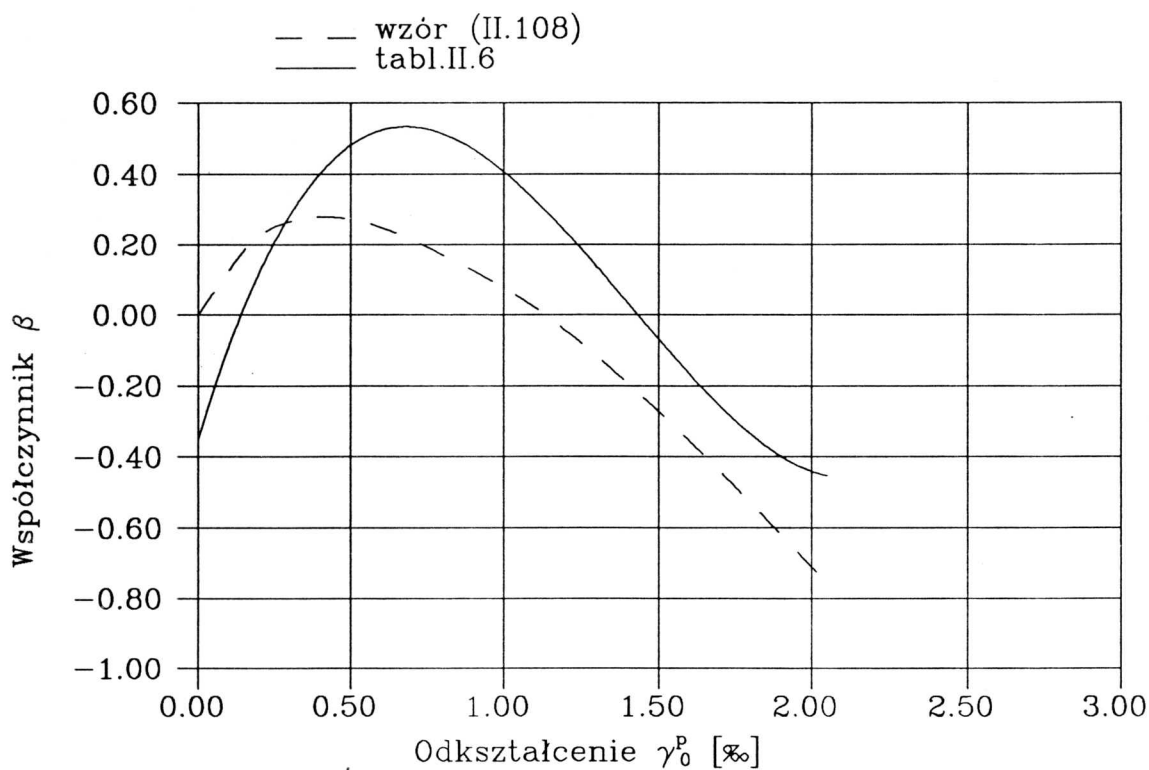
W pracy dla uproszczenia przyjęto stałą wartość $\beta_u \equiv -0,76$, taką jaką otrzymano doświadczalnie dla stosunku naprężeń $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 1$ - tabl. II.6 (wzór opisujący funkcję $\beta(\delta)$ podany w [42] również prowadzi do wartości $\beta_u = -0,76$). Podstawiając funkcję (II.108) do zależności (II.109) otrzymuje się układ 3 równań, z których można wyliczyć wartości stałych materiałowych a, b, c . Dla $\beta_u = -0,76$ prowadzi to do następujących wartości liczbowych:

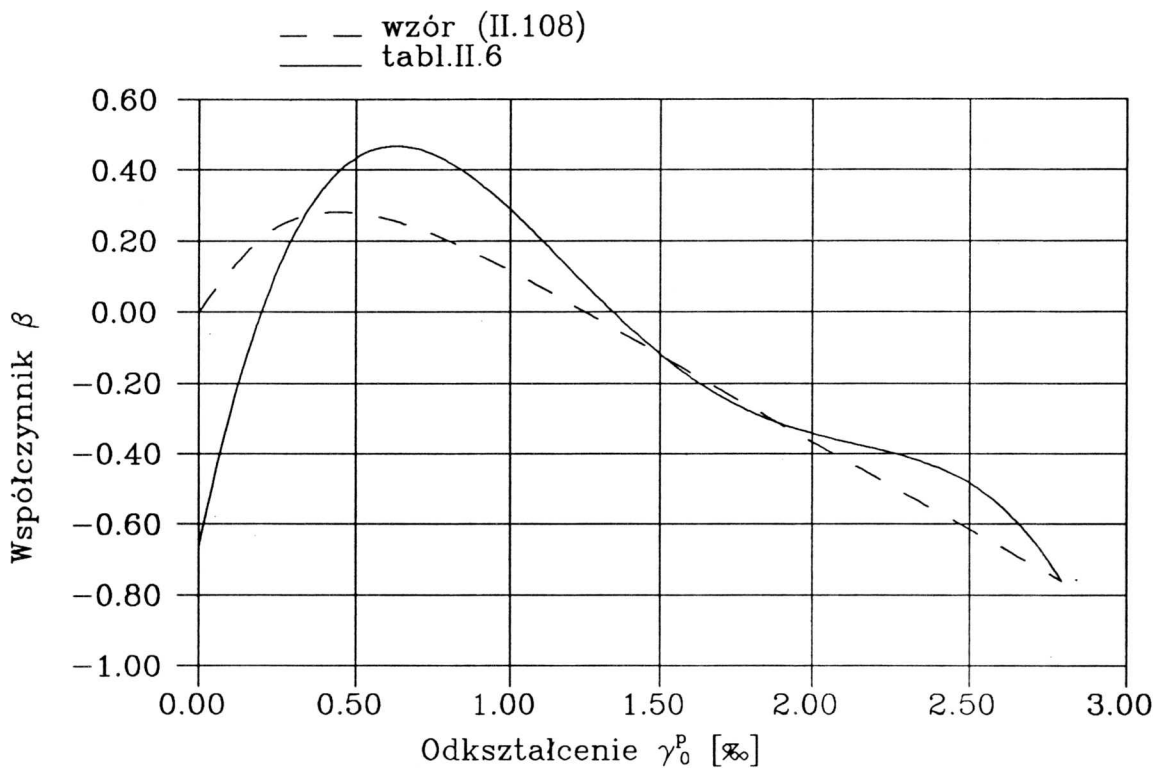
$$a = -2,4033, \quad b = 3,1633, \quad c = -0,7600$$

Porównanie wartości β obliczonych według (II.108) z wartościami β wyliczonymi według wzorów z tabl. II.6 przedstawiają rys. II.27 - II.30. Porównania tego dokonano zakładając, że istnieje jednoznaczna zależność $\gamma_0^p - \tau_0$ dana wzorem (II.89).



Rys.II.27 Zależność $\beta - \gamma_0^p$ dla $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0$

Rys.II.28 Zależność $\beta - \gamma_0^p$ dla $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0,268$ Rys.II.29 Zależność $\beta - \gamma_0^p$ dla $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0,577$



Rys.II.30 Zależność $\beta - \gamma_0^p$ dla $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 1$

W dalszym ciągu wykorzystując wzory (II.83) i (II.108) na $H_p(\tau_0)$ i $\beta(\delta) = \beta(1 - \tau_0/\tau_{0u})$ wyprowadzimy wzór analityczny na obliczanie odkształcenia $\epsilon_{vol}^{pII}(\tau_0)$ przy monotonicznym obciążeniu, proporcjonalnym. Całkując wzór (II.4) otrzymujemy:

$$\epsilon_{vol}^{pII}(\tau_0) = \int \frac{\beta(\tau_0)}{H_p(\tau_0)} d\tau_0 + C. \tag{II.112}$$

Stałą całkowania C wyznacza się z warunku początkowego

$$\epsilon_{vol}^{pII}(\tau_0 = 0) = 0, \tag{II.113}$$

co prowadzi do wyniku końcowego:

$$\begin{aligned} \epsilon_{vol}^{pII}(\tau_0) = & \frac{-a}{H_{p0}(2-\omega)} \tau_{0u} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0u}}\right)^{2-\omega} + \\ & + \frac{-b}{H_{p0}(1,5-\omega)} \tau_{0u} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0u}}\right)^{1,5-\omega} + \frac{-c}{H_{p0}(1-\omega)} \tau_{0u} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0u}}\right)^{1-\omega} + \\ & + \frac{\tau_{0u}}{H_{p0}} \left(\frac{a}{2-\omega} + \frac{b}{1,5-\omega} + \frac{c}{1-\omega}\right) \end{aligned} \tag{II.114}$$

W szczególności, wartość odkształcenia postaciowego ε_{vol}^{pII} na powierzchni granicznej wyraża się wzorem:

$$\varepsilon_{vol}^{pII}(\tau_0 = \tau_{0u}) = \frac{\tau_{0u}}{H_{p0}} \left(\frac{a}{2-\omega} + \frac{b}{1,5-\omega} + \frac{c}{1-\omega} \right). \quad (II.115)$$

Zaproponowane powyżej zależności opisujące moduły plastyczne H_p, K_p, β (wzory (II.83), (II.97) i (II.108)) dla przypadku obciążenia pierwotnego mają stosunkowo prostą postać i zależą wyłącznie od aktualnego stanu naprężenia (wielkości $\sigma_0, \tau_0, \tau_{0u}$). W przypadku monotonicznego obciążenia proporcjonalnego pozwala to na uzyskanie zamkniętych wyrażeń na całkowite odkształcenia $\gamma_{vol}^p, \varepsilon_{vol}^{pI}$ i ε_{vol}^{pII} (wzory (II.89), (II.98) i (II.114)) i w następstwie zależności całkowitych odkształceń od całkowitych naprężeń $\underline{\varepsilon}(\underline{\sigma})$. Szczegółowy tok postępowania przedstawiono w Załączniku Z6.

II.5.2 Odciążenie oraz obciążenie wtórne

Dla płaskiego stanu naprężenia brak jest pełnych danych doświadczalnych dotyczących przypadków odciążenia i obciążenia wtórnego. W znanych badaniach dla jednoosiowego ściskania [63], [103], [70], [125] i dwuosowego równomiernego ściskania [15] nie rejestrowano odkształceń poprzecznych, zatem nie można ustalić na ich podstawie wartości ε_{vol} i γ_0 . Należy przypuszczać, że jakościowe zachowanie się betonu w płaskim stanie naprężenia przy odciążeniu i obciążeniu jest takie samo jak w stanie trójosiowym, które zostały przedstawione w punkcie II.2.

II.5.2.1 Moduł plastyczny H_p przy odciążeniu

W celu ilościowego ustalenia zmian modułu H_p w płaskim stanie naprężenia przyjęto hipotezę, że zależność $\gamma_0^p - \tau_0$ jest jakościowo podobna do zależności $\varepsilon_1^p - \sigma_1$ przy jednoosiowym ściskaniu. Hipoteza ta jest, w sposób oczywisty, prawdziwa dla obciążenia monotonicznego i była przyjmowana również przez innych badaczy [14]. Jej przyjęcie pozwala na wykorzystanie danych z prac [63], [125].

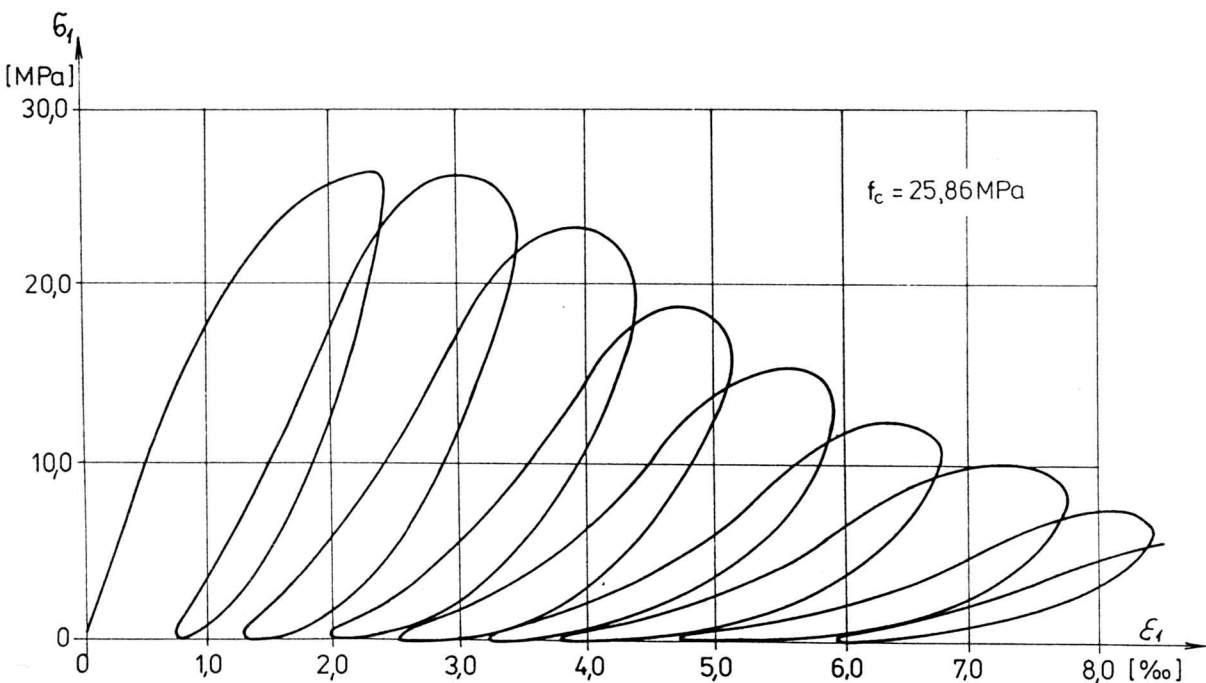
Analiza zarówno doświadczalnych krzywych $\varepsilon_1^p - \sigma_1$ w płaskim stanie naprężenia, jak i zależności $\gamma_0^p - \tau_0$ z prac [99], [100] wskazuje, że kształt tych krzywych jest przy odciążeniu

dość zbliżony do kształtu zależności obciążenia pierwotnego. Przyjęto więc, że moduł H_p może być dla odciążenia zapisany w postaci podobnej do (II.83):

$$H_p = H_{p1} \cdot (\delta^*)^\omega, \quad (\text{II.116})$$

gdzie $\delta^* = d^*/d_{max}^*$ - odległość sprowadzona, mierzona w przeciwnym kierunku niż δ .

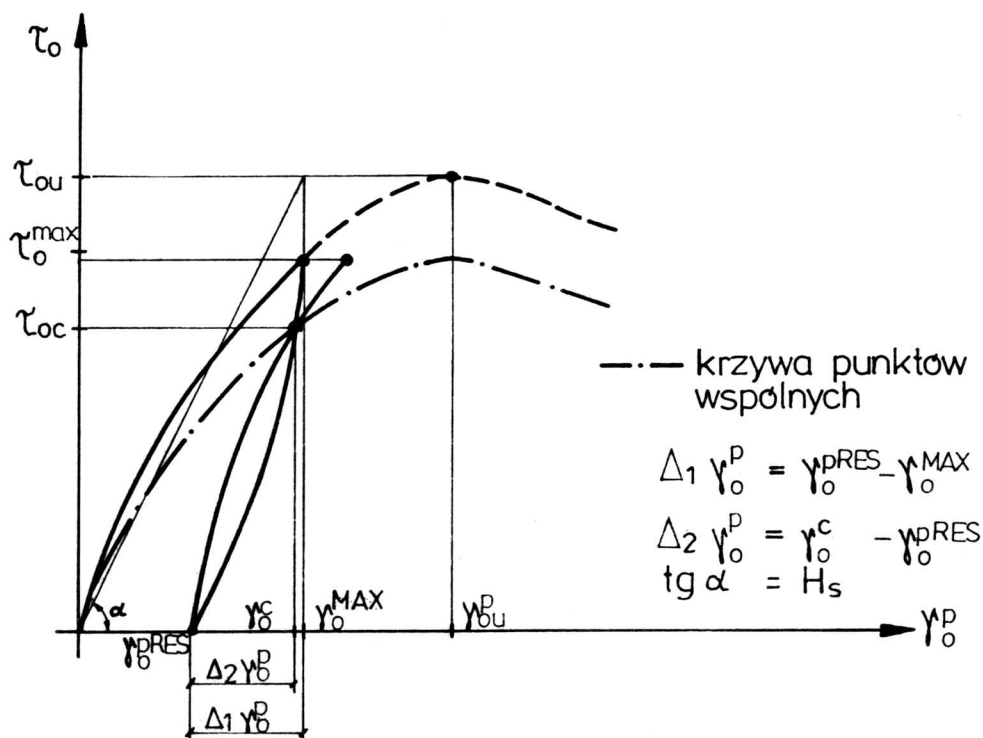
Parametr materiałowy ω pozostaje taki sam jak w punkcie II.5.1.1, natomiast wartość modułu plastycznego początkowego przy odciążeniu H_{p1} nie jest stała, lecz zależy od osiągniętych wcześniej w procesie obciążenia wartości γ_0^p i τ_0 . Uzależnienie wartości H_{p1} od zaawansowania stanu obciążenia umożliwia opisanie degradacji materiału, wyrażającej się przez malenie modułu ścieżnego i powiększanie się pętli histerezy (rys. II.31).



Rys. II.31 Jednoosiowe ściskanie, wyniki doświadczalne (B.Sinha i inni)

W celu uzyskania funkcji opisującej moduł H_{p1} przeanalizowany zostanie proces odciążenia rozpoczynający się po procesie obciążenia pierwotnego od wartości τ_0^{MAX} i γ_0^{MAX} i kończący się na zerowym poziomie obciążenia $\tau_0 = 0$ przy odkształceniach plastycznych resztkowych γ_0^{PRES} . Analogicznie do wzoru (II.75) można wyrazić odległość δ^* poprzez naprężenia:

$$\delta^* = \frac{\tau_0 + \tau_{0u}^*}{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*}, \quad (\text{II.117})$$



Rys. II.32 Zależność $\tau_0 - \gamma_0^p$ przy odciążeniu i obciążeniu cyklicznym

gdzie τ_{0u}^* - wartość τ_0 na powierzchni granicznej po stronie przeciwnej w stosunku do τ_{0u} .
 Jeśli proces odciążenia rozpoczyna się od wartości naprężenia $\tau_0 = \tau_0^{MAX}$ i kończy się dla $\tau_0 = 0$, to odległość δ^* maleje od wartości δ_{max}^* do wartości minimalnej δ_{min}^* :

$$\delta_{max}^* = \frac{\tau_0^{MAX} + \tau_{0u}^*}{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*}, \tag{II.118}$$

$$\delta_{min}^* = \frac{\tau_{0u}^*}{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*}.$$

Przyrost odkształceń plastycznych $\Delta_1 \gamma_0^p$ podczas takiego procesu odciążenia wynosi (rys. II.32):

$$\Delta_1 \gamma_0^p = \int \frac{1}{H_{p1} \left(\frac{\tau_0 + \tau_{0u}^*}{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*} \right)^\omega} d\tau_0 + C = \tag{II.119}$$

$$= \int \frac{1}{H_{p1}(\delta^*)^\omega} (\tau_{0u} + \tau_{0u}^*) d\delta^* + C.$$

Całkę (II.119) można przedstawić w postaci jawnej:

$$\Delta_1 \gamma_0^p = \frac{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*}{H_{p1}} \cdot \frac{(\delta^*)^{1-\omega}}{1-\omega} + C. \quad (\text{II.120})$$

Wartość stałej C wynika z warunku początkowego – na początku procesu odciążenia (dla $\delta^* = \delta_{max}^*$) przyrost $\Delta_1 \gamma_0^p$ jest równy zeru. Stąd stała C wynosi:

$$C = -\frac{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*}{H_{p1}} \cdot \frac{(\delta_{max}^*)^{1-\omega}}{1-\omega}. \quad (\text{II.121})$$

Ostatecznie przyrost $\Delta_1 \gamma_0^p$ (o wartości ujemnej) jest równy:

$$\Delta_1 \gamma_0^p = \frac{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*}{H_{p1}(1-\omega)} [(\delta^*)^{1-\omega} - (\delta_{max}^*)^{1-\omega}], \quad (\text{II.122})$$

w szczególności końcowa wartość (dla $\tau_0 = 0$) wynosi:

$$\Delta_1 \gamma_0^p = \frac{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*}{H_{p1}(1-\omega)} [(\delta_{min}^*)^{1-\omega} - (\delta_{max}^*)^{1-\omega}]. \quad (\text{II.123})$$

Pomijając występujące dla stanu naprężenia τ_0^{MAX} odkształcenia sprężyste, resztkowe odkształcenia plastyczne γ_0^{pRES} wynoszą zatem:

$$\gamma_0^{pRES} = \gamma_0^{MAX} + \Delta_1 \gamma_0^p, \quad (\text{II.124})$$

gdzie przyrost $\Delta_1 \gamma_0^p$ jest dany wzorem (II.123).

W dalszym ciągu analizy potrzebna będzie znajomość zależności pomiędzy odkształceniami maksymalnymi a resztkowymi:

$$\gamma_0^{pRES} = g_1(\gamma_0^{MAX}). \quad (\text{II.125})$$

Niestety, jak wspomniano, w dostępnej literaturze brak jest tego typu zależności, podawane są natomiast różne postacie analogicznej funkcji g_2 dla odkształcenia podłużnego przy jednoosiowym ścisaniu [63], [70], [125]:

$$\varepsilon_1^{pRES} = g_2(\varepsilon_1^{MAX}), \quad (\text{II.126})$$

gdzie ε_1^{pRES} – odkształcenie resztkowe podłużne,
 ε_1^{MAX} – największa osiągnięta wartość odkształcenia podłużnego ε_1 .

W pracy przyjęto, że funkcja g_1 ma taką samą budowę jak funkcja g_2 (wybór konkretnej postaci g_1 zostanie przedstawiony później). Przyjmując funkcję g_1 za znaną i wykorzystując (II.123) można związek (II.124) zapisać w postaci:

$$g_1(\gamma_0^{MAX}) = \gamma_0^{MAX} + \frac{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*}{H_{p1}(1-\omega)} [(\delta_{min}^*)^{1-\omega} - (\delta_{max}^*)^{1-\omega}]. \quad (II.127)$$

Z powyższego wzoru wynika w sposób jednoznaczny wartość modułu H_{p1} , zależna od wielkości δ_{max}^* i γ_0^{MAX} osiągniętych w poprzedzającym odciążeniu procesie obciążenia:

$$H_{p1} = \frac{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*}{(1-\omega)[\gamma_0^{MAX} - g_1(\gamma_0^{MAX})]} [(\delta_{max}^*)^{1-\omega} - (\delta_{min}^*)^{1-\omega}]. \quad (II.128)$$

Wzór (II.128) można przekształcić uwzględniając zależności (II.118) do postaci:

$$H_{p1} = \frac{\tau_{0u} + \tau_{0u}^*}{\tau_{0u}} \cdot \frac{1}{(1-\omega) \left(1 - \frac{g_1(\gamma_0^{MAX})}{\gamma_0^{MAX}} \right)} [(\delta_{max}^*)^{1-\omega} - (\delta_{min}^*)^{1-\omega}], \quad (II.129)$$

$$\cdot \frac{\tau_{0u}}{\gamma_0^{MAX}} = \frac{(\delta_{max}^*)^{1-\omega} - (\delta_{min}^*)^{1-\omega}}{1 - \delta_{min}^*} \cdot \frac{1}{(1-\omega)(1-\eta)} H_s$$

gdzie

$H_s = \frac{\tau_{0u}}{\gamma_0^{MAX}}$ – stosunek naprężenia τ_0 na powierzchni granicznej do największej osiągniętej w procesie obciążenia pierwotnego wartości odkształcenia γ_0^p ,

$\eta(\gamma_0^{MAX}) = \frac{\gamma_0^{pRES}}{\gamma_0^{MAX}} = \frac{g_1(\gamma_0^{MAX})}{\gamma_0^{MAX}}$ – stosunek odkształceń resztkowych γ_0^{pRES} do odkształceń maksymalnych γ_0^{MAX} .

W przypadku gdy proces odciążenia rozpoczyna się na powierzchni granicznej (pozostającej w stanie pierwotnym lub skurczonej w procesie obciążenia) współczynnik H_s może być interpretowany jako moduł sieczny postaciowy na początku odciążenia.

Przyjęcie wartości H_{p1} według (II.129) przy zastosowaniu dla odciążenia funkcji opisującej moduł H_p w postaci (II.116) zapewnia, że stosunek odkształceń resztkowych γ_0^{pRES} do odkształceń maksymalnych γ_0^{MAX} będzie dokładnie równy wartości $\eta(\gamma_0^{MAX})$. Funkcja $\eta(\gamma_0^{MAX})$ powinna zostać ustalona doświadczalnie. Wzór (II.129) został wyprowadzony dla procesu odciążenia następującego po nieprzerwanym procesie obciążenia pierwotnego, który rozpoczął się od poziomu naprężenia $\tau_0 = 0$. W celu jednoznacznego opisu dowolnego procesu odciążenia przyjęto, że wzór (II.129) jest ważny dla każdego odciążenia

następującego po procesie obciążenia pierwotnego, natomiast dla przypadku odciążenia następującego po procesie obciążenia wtórnego (tzn. odciążenia rozpoczynającego się dla wartości odległości sprowadzonej $\delta > \delta_{min}$) zachowuje się poprzednio przyjętą wartość H_{p1} .

II.5.2.2 Moduł plastyczny H_p przy obciążeniu wtórnym

Stosując podobne podejście jak przy odciążeniu założono, że funkcja opisująca H_p jest analogiczna do (II.83):

$$\boxed{H_p = H_{p2} \cdot \delta^\omega}. \quad (II.130)$$

Moduł plastyczny początkowy H_{p2} przy obciążeniu wtórnym jest zależny od osiągniętych wcześniej wartości γ_0^p i τ_0 . Dla procesu obciążenia wtórnego rozpoczynającego się od wartości $\tau_0 = 0$ i $\gamma_0 = \gamma_0^{pRES}$ krzywa $\tau_0 - \gamma_0$ przecina się z analogiczną krzywą wcześniejszego odciążenia w tzw. punkcie wspólnym (rys. II.32). Z badań doświadczalnych [63], [70] dla jednoosiowego ściskania wynika, że zbiór punktów wspólnych tworzy gładką krzywą podobną do krzywej $\sigma_1 - \epsilon_1$ dla procesu obciążenia pierwotnego, przy czym naprężenie główne σ_{1c} w punkcie wspólnym pozostaje w stałym stosunku do naprężenia σ_1 w procesie pierwotnym:

$$\sigma_{1c}/\sigma_1 = const. \quad (II.131)$$

Dodatkowo, można ustalić doświadczalnie [63], [125] zależność pomiędzy odkształceniami resztkowymi ϵ_1^{pRES} a odkształceniami podłużnymi ϵ_1^c w punkcie wspólnym:

$$\epsilon_1^c = g_3(\epsilon_1^{pRES}). \quad (II.132)$$

Uogólniając powyższe obserwacje dla zależności $\tau_0 - \gamma_0$ w wieloosiowym stanie naprężenia przyjęto, że krzywa punktów wspólnych charakteryzuje się stałym stosunkiem naprężeń ścinających oktaedrycznych:

$$\tau_{0c}/\tau_0^{MAX} = \chi = const, \quad (II.133)$$

gdzie τ_{0c} – naprężenie τ_0 dla punktu wspólnego,
 $\chi < 1, 0$ – stosunek naprężeń,

oraz, że istnieje możliwość do ustalenia zależności:

$$\gamma_0^c = g_4(\gamma_0^{pRES}), \quad (II.134)$$

gdzie γ_0^c - odkształcenie γ_0 dla punktu wspólnego.

Z uwagi na brak danych doświadczalnych przyjęto dalej, że można utożsamić funkcje g_3 i g_4 . Korzystając z zależności (II.75) pomiędzy odległością sprowadzoną δ a naprężeniem τ_0 można związek (II.133) zapisać:

$$\delta_c = (1 - \chi) + \chi\delta_{min}, \quad (II.135)$$

gdzie $\delta_c = 1 - \frac{\tau_{0c}}{\tau_{0u}}$ - odległość sprowadzona dla punktu wspólnego,

$\delta_{min} = 1 - \frac{\tau_0^{MAX}}{\tau_{0u}}$ - najmniejsza wartość odległości sprowadzonej (wg punktu II.4).

Z chwilą osiągnięcia powierzchni granicznej w procesie obciążenia pierwotnego zachodzi oczywiście $\delta_{min} = 0$ i dla dalszego procesu obciążenia (przy kurczącej się powierzchni granicznej) jest:

$$\delta_c = 1 - \chi. \quad (II.136)$$

Przyrost odkształceń plastycznych $\Delta_2\gamma_0^p$ podczas procesu obciążenia wtórnego od $\tau_0 = 0$ do $\tau_0 = \tau_{0c}$ (tzn. dla odległości δ zmiennej od $\delta = 1,0$ do $\delta = \delta_c$) wynosi:

$$\Delta_2\gamma_0^p = \int \frac{1}{H_{p2} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0u}}\right)^\omega} d\tau_0 + C = - \int \frac{1}{H_{p2} \delta^\omega} \tau_{0u} d\delta + C. \quad (II.137)$$

Całkę (II.137) można przedstawić w postaci jawnej:

$$\Delta_2\gamma_0^p = - \frac{\tau_{0u}}{H_{p2}} \cdot \frac{\delta^{1-\omega}}{1-\omega} + C. \quad (II.138)$$

Na początku procesu obciążenia wtórnego (dla $\delta = 1,0$) przyrost $\Delta_2\gamma_0^p$ jest równy zero, stąd stała C ma wartość:

$$C = \frac{\tau_{0u}}{H_{p2}(1-\omega)}. \quad (II.139)$$

Końcowa wartość przyrostu (w punkcie wspólnym dla $\delta = \delta_c$) wynosi:

$$\Delta_2\gamma_0^p = \frac{\tau_{0u}}{H_{p2}(1-\omega)} (1 - \delta_c^{1-\omega}). \quad (II.140)$$

Pomijając przyrost odkształceń sprężystych można zapisać:

$$\gamma_0^c = \gamma_0^{pRES} + \Delta_2 \gamma_0^p. \quad (II.141)$$

Podstawiając (II.134) i (II.140) do wzoru (II.141) otrzymuje się :

$$\frac{\tau_{0u}}{H_{p2}(1-\omega)}(1-\delta_c^{1-\omega}) = g_4(\gamma_0^{pRES}) - \gamma_0^{pRES}. \quad (II.142)$$

Zgodnie z (II.125) odkształcenie resztkowe γ_0^{pRES} jest funkcją odkształcenia maksymalnego γ_0^{MAX} . Można więc zapisać prawą stronę zależności (II.142) w innej postaci:

$$\frac{\tau_{0u}}{H_{p2}(1-\omega)}(1-\delta_c^{1-\omega}) = g_4(g_1(\gamma_0^{MAX})) - g_1(\gamma_0^{MAX}), \quad (II.143)$$

lub w formie:

$$\frac{\tau_{0u}}{H_{p2}(1-\omega)}(1-\delta_c^{1-\omega}) = \xi \gamma_0^{MAX} - \eta \gamma_0^{MAX}, \quad (II.144)$$

gdzie $\xi(\gamma_0^{MAX}) = \frac{\gamma_0^c}{\gamma_0^{MAX}} = \frac{g_4(g_1(\gamma_0^{MAX}))}{\gamma_0^{MAX}}$ – stosunek odkształceń w punkcie wspólnym γ_0^c do odkształceń maksymalnych γ_0^{MAX} ,

$\eta(\gamma_0^{MAX})$ – jak we wzorze (II.129).

Ze wzoru (II.144) otrzymuje się wartość modułu plastycznego początkowego H_{p2} przy obciążeniu wtórnym:

$$H_{p2} = (1-\delta_c^{1-\omega}) \frac{1}{(1-\omega)(\xi-\eta)} H_s, \quad (II.145)$$

gdzie H_s - jak w (II.129).

Przyjęto, że wartość początkowego modułu plastycznego H_{p2} przy obciążeniu wtórnym wyraża się wzorem (II.145) dla dowolnego procesu obciążenia wtórnego – niezależnie od poziomu naprężenia, od którego rozpoczyna się ten proces. Zmiana wartości H_{p2} może więc być spowodowana jedynie zaistnieniem nowego procesu obciążenia pierwotnego (w rozumieniu punktu II.4). Należy zauważyć, że dla modułu H_{p2} według wzoru (II.145) krzywa obciążenia wtórnego będzie przechodziła przez punkt o współrzędnych (τ_{0c}, γ_0^c) . Wartości τ_{0c} i γ_0^c są zdefiniowane poprzez empiryczne funkcje χ i ξ . Nie oznacza więc to, że krzywa obciążenia wtórnego musi się przecinać z krzywą odciążenia opisaną wzorem (II.116) dokładnie w punkcie (τ_{0c}, γ_0^c) .

II.5.2.3 Funkcje materiałowe η, ξ i χ

Dla wykorzystania wzorów (II.129) i (II.145) potrzebna jest znajomość funkcji η i ξ . Ich odpowiedniki dla jednoosiowego stanu naprężenia wynoszą:

$$\eta_1(\varepsilon_1^{MAX}) = \frac{g_2(\varepsilon_1^{MAX})}{\varepsilon_1^{MAX}} = 0,145 \left(\frac{\varepsilon_1^{MAX}}{\varepsilon_0} \right) + 0,127, \quad (\text{II.146})$$

$$\xi_1(\varepsilon_1^{MAX}) = \frac{g_3\left(g_2\left(\frac{\varepsilon_1^{MAX}}{\varepsilon_0}\right)\right)}{\varepsilon_1^{MAX}} = -0,415 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1^{MAX}} + \quad (\text{II.147})$$

$$+ \sqrt{\left(0,415 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1^{MAX}}\right)^2 + 0,794 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1^{MAX}} + 0,906}.$$

Zależności powyższe wynikają z przekształcenia wzorów na funkcję g_2 i odwrotność funkcji g_3 , zaproponowanych przez *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsę* w roku 1969 na podstawie badań własnych [63]. Funkcje te mają postać:

$$\varepsilon_1^{pRES} = g_2(\varepsilon_1^{MAX}) = \varepsilon_0 \left(0,145 \left(\frac{\varepsilon_1^{MAX}}{\varepsilon_0} \right)^2 + 0,127 \left(\frac{\varepsilon_1^{MAX}}{\varepsilon_0} \right) \right), \quad (\text{II.148})$$

$$\varepsilon_1^{pRES} = g_3^{-1}(\varepsilon_1^c) = \varepsilon_0 \left(0,160 \left(\frac{\varepsilon_1^c}{\varepsilon_0} \right)^2 + 0,133 \left(\frac{\varepsilon_1^c}{\varepsilon_0} \right) \right),$$

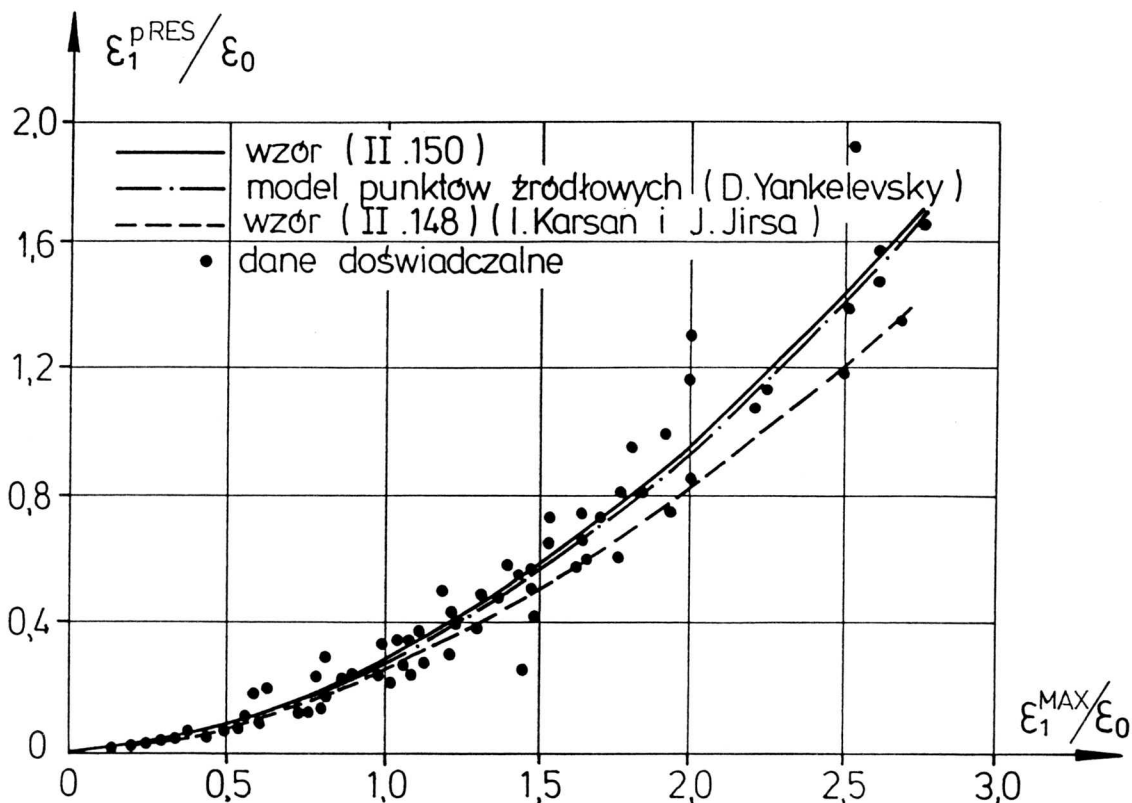
gdzie ε_0 - wartość odkształcenia ε_1 przy jednoosiowym ściskaniu dla $\sigma_1 = f_c$.

Analiza wzoru (II.147) wskazuje na prawie stałą wartość funkcji ξ_1 co wynika z przejść granicznych:

$$\lim_{\varepsilon_1^{MAX} \rightarrow 0} \xi_1(\varepsilon_1^{MAX}) = 0,9563, \quad (\text{II.149})$$

$$\lim_{\varepsilon_1^{MAX} \rightarrow +\infty} \xi_1(\varepsilon_1^{MAX}) = 0,9518.$$

Znacznie późniejsza praca [125] bazuje również na innych, nowszych badaniach doświadczalnych. Niestety przyjęty w tej pracy tzw. model punktów źródłowych dla opisu odciążenia i obciążenia wtórnego nie wprowadza w jawny sposób funkcji g_2 i g_3 . Natomiast z założeń modelu wynika stała wartość $\xi_1 = 1,0$, co dobrze koresponduje z (II.149). Model punktów źródłowych daje nieco większe wartości odkształceń resztkowych ε_1^{pRES} niż [63] – co lepiej zgadza się z wynikami badań doświadczalnych (rys. II.33). W pracy w celu uzyskania wartości ε_1^{pRES} zbliżonych do modelu [125] zmieniono współczynniki liczbowe funkcji g_2 przyjmując:



Rys. II.33 Zależność $\varepsilon_1^{pRES} - \varepsilon_1^{MAX}$ (dane doświadczalne wg [125])

$$\varepsilon_1^{pRES} = g_2(\varepsilon_1^{MAX}) = \varepsilon_0 \left(0,199 \left(\frac{\varepsilon_1^{MAX}}{\varepsilon_0} \right)^2 + 0,089 \left(\frac{\varepsilon_1^{MAX}}{\varepsilon_0} \right) \right). \quad (II.150)$$

Wzory (II.148) i (II.150) są prawdziwe dla $\varepsilon_1^{MAX} \leq 3\varepsilon_0$ - dla takiego zakresu ε_1^{MAX} istnieją badania doświadczalne.

Uogólniając powyżej przedstawione wyniki, dla opisu odkształcenia γ_0^p w wieloosiowym stanie naprężenia przyjęto funkcje η i ξ w postaci:

$$\begin{aligned} \eta(\gamma_0^{MAX}) &= 0,199 \left(\frac{\gamma_0^{MAX}}{\gamma_{0u}^p} \right) + 0,089 && \text{dla } \gamma_0^{MAX} \leq 3\gamma_{0u}^p, \\ \eta(\gamma_0^{MAX}) &= 0,686 && \text{dla } \gamma_0^{MAX} > 3\gamma_{0u}^p, \\ \xi(\gamma_0^{MAX}) &= 0,950, \end{aligned} \quad (II.151)$$

gdzie γ_{0u}^p - wyraża się wzorem (II.90).

Stosunek naprężeń dla punktu wspólnego do naprężeń w procesie obciążenia pierwotnego

χ według [63] równa się:

$$\chi = 0,894 \quad (\text{II.152})$$

i taką wartość χ przyjęto w pracy.

II.5.2.4 Moduły plastyczne K_p i β przy odciążeniu i obciążeniu wtórnym

Z rys. II.5 wynika, że pętle histerezy pojawiające się dla części objętościowej odkształcenia są małe, a zależność $\varepsilon_{vol} - \sigma_0$ przy odciążeniu i obciążeniu wtórnym jest bliska liniowej o nachyleniu podobnym jak styczna do krzywej pierwotnego obciążenia w początku układu współrzędnych. Można więc z dobrym przybliżeniem przyjąć, że [107]:

$$K_p = K_{p_0}, \quad (\text{II.153})$$

dla odciążenia i obciążenia wtórnego.

Analiza danych doświadczalnych (rys. II.7) prowadzi do wniosku, że zmiany naprężenia ścinającego τ_0 podczas odciążenia i obciążenia wtórnego nie powodują zmian odkształcenia objętościowego ε_{vol} . Oznacza to, że dla odciążenia i obciążenia wtórnego:

$$\beta = 0. \quad (\text{II.154})$$

II.5.3 Zestawienie przyjętych wzorów dla H_p, K_p i β oraz pomocniczych funkcji i stałych materiałowych

Zaproponowane w punktach II.5.1 i II.5.2 postaci funkcji opisujących moduły plastyczne H_p, K_p i β zestawiono w tabl. II.7. Tabl. II.8 przedstawia użyte przy wyznaczaniu H_p, K_p i β zmienne stanu, funkcje pomocnicze (w tym odległości sprowadzone) oraz funkcje i stałe materiałowe. Bieżące wartości naprężeń σ_0 i τ_0 z tabl. II.8 są obliczane w oparciu o aktualny stan naprężenia $\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$. Wartości naprężeń τ_{0u} i τ_{0u}^* na powierzchni granicznej są obliczane przy wykorzystaniu równania powierzchni granicznej w przekształconej postaci (II.167) i wzoru (II.73). Wartości odległości sprowadzonych δ i δ^* wynikają bezpośrednio z wartości τ_0, τ_{0u} i τ_{0u}^* , z kolei zmienne stanu δ_{min} i δ_{max}^* są odpowiednio najmniejszą i największą wartością δ i δ^* osiągniętą w procesie obciążenia pierwotnego (po osiągnięciu powierzchni granicznej jest $\delta_{min} = 0, \delta_{max}^* = 1, 0$). Zmienne stanu σ_0^{MAX} i δ_{min} służą również do rozróżnienia typu procesu.

	dewiatorowe kryterium obciążenia		aksjatorowe kryterium obciążenia
rodzaj obciążenia	H_p	β	K_p
pierwotne	$H_{p_0} \cdot \delta^\omega$	$-2,4033\delta + 3,1633\sqrt{\delta} - 0,7600$	$\frac{K_{p_0}}{1+1,860\left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^{1,5}}$
odciążenie	$H_{p_1} \cdot (\delta^*)^\omega$	0	K_{p_0}
wtórne	$H_{p_2} \cdot \delta^\omega$	0	K_{p_0}

Tablica II.7 Wzory dla modułów plastycznych H_p, β i K_p

Jak widać z tabl. II.8 wartości wszystkich funkcji pomocniczych zależą od zmiennych stanu, równania powierzchni granicznej (poprzez τ_{0u} i τ_{0u}^*) oraz 5 stałych materiałowych. Wartości stałych n i m zostały podane przez *H.Kupfera* dla trzech różnych wytrzymałości betonu na ściskanie f_c [68] – tabl. II.9. W tabl. II.9 w nawiasach podano wartości przyjęte oryginalnie przez *H.Kupfera* dla betonu o $f_c = 32,4$ MPa. W pracy zmodyfikowano te wartości (patrz Załącznik Z6) w celu uzyskania lepszej zgodności z wynikami doświadczalnymi. Dla innych wartości f_c niż podane w tabl. II.9 można stosować aproksymację, wg wzorów:

$$\begin{aligned} n &= 0,004248(f_c)^2 - 0,288f_c + 6,852, \\ m &= 0,002680(f_c)^2 - 0,1704f_c + 4,276, \end{aligned} \quad (\text{II.155})$$

gdzie f_c należy podstawić w MPa.

Wartości m i n otrzymane z (II.155) pokrywają się dokładnie z wartościami z tabl. II.9 i dają wyniki poprawne fizycznie dla f_c zmiennego w zakresie 15,0-65,0MPa.

Dla przypadków pomijalnie małych odkształceń sprężystych, wielkości K_{p_0} i H_{p_0} mogą być utożsamiane z początkowym modułem objętościowym i postaciowym. Wartości początkowego modułu objętościowego i postaciowego przyjęte przez *H.Kupfera* w formie wielokrotności wytrzymałości f_c podaje tabl. II.10.

Należy jednak zauważyć, że przyjmując konkretne wartości stałych $K_{p_0}, H_{p_0}, m, n, f_c$ narzuca się w ten sposób wartość odkształcenia ε_0 odpowiadającego osiągnięciu powierzchni granicznej przy jednoosiowym ścisaniu.

Zmienne stanu
$\sigma_0^{MAX}, \delta_{min}, \delta_{max}^*, \gamma_0^{MAX}$
Niezmienniki aktualnego stanu naprężenia
σ_0, τ_0
Odległości sprowadzone
$\tau_{0u}, \tau_{0u}^*, \delta = \frac{\tau_{0u} - \tau_0}{\tau_{0u}}, \delta^* = \frac{\tau_{0u}^* + \tau_0}{\tau_{0u}^* + \tau_{0u}}$ $\delta_c = (1 - \chi) + \chi \delta_{min}, \delta_{min}^* = \frac{\tau_{0u}^*}{\tau_{0u}^* + \tau_{0u}}$
Funkcje pomocnicze i materiałowe
$\xi = 0,950, \chi = 0,894, \gamma_{0u}^p = \frac{\tau_{0u}}{H_{p0}(1-\omega)}, \omega = n \left(\frac{\tau_{0u}}{f_c} \right)^m$ $\eta = 0,199 \left(\frac{\gamma_0^{MAX}}{\gamma_{0u}^p} \right) + 0,89 \quad \text{dla } \gamma_0^{max} \leq 3\gamma_{0u}^p$ $\eta = 0,686 \quad \text{dla } \gamma_0^{MAX} > 3\gamma_{0u}^p, H_s = \frac{\tau_{0u}}{\gamma_0^{MAX}}$
Moduły H_{p1} i H_{p2} dla odciążenia i obciążenia wtórnego
$H_{p1} = \frac{(\delta_{max}^*)^{1-\omega} - (\delta_{min}^*)^{1-\omega}}{1 - \delta_{min}^*} \cdot \frac{H_s}{(1-\omega)(1-\eta)}$ $H_{p2} = (1 - \delta_c^{1-\omega}) \frac{H_s}{(1-\omega)(\xi - \eta)}$
Stałe materiałowe
$H_{p0}, K_{p0}, n, m, f_c$

Tablica II.8 Zmienne stanu, funkcje pomocnicze i stałe materiałowe używane przy wyznaczaniu modułów H_p, K_p i β

f_c [MPa]	n	m
19,1	2,90	2,00
32,4	1,98(3,40)	1,57(2,40)
61,9	5,30	4,00

Tablica II.9 Wartości stałych materiałowych m i n

f_c [MPa]	ε_0 [‰]	K_{p_0}	H_{p_0}
19,1	1,87	$830 f_c$	$1300 f_c$
32,4	2,17	$556 f_c$	$850 f_c$
61,9	2,14	$415 f_c$	$552 f_c$

Tablica II.10 Wartości K_{p_0} i H_{p_0} wg *H.Kupfera*

Zgodnie z Załącznikiem Z6 przy pominięciu odkształceń sprężystych ε_0 może być obliczone jako:

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{\sqrt{2}} \gamma_{0u}^p + \frac{1}{3} \varepsilon_{vol}^p, \quad (\text{II.156})$$

gdzie: $\gamma_{0u}^p = \frac{\tau_{0u}}{H_{p_0}(1-\omega)}$,

$$\varepsilon_{vol}^p = \frac{\sigma_0}{K_{p_0}} \left(1 + 0,744 \left(\frac{\sigma_0}{f_c} \right)^{1,5} \right) + \frac{\tau_{0u}}{H_{p_0}} \left(\frac{-2,4033}{2-\omega} + \frac{3,1633}{1,5-\omega} + \frac{-0,7600}{1-\omega} \right),$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{0u} = \frac{\sqrt{2}}{3} f_c, \\ \sigma_0 = \frac{1}{3} f_c, \end{array} \right\} \text{ -- na powierzchni granicznej dla jednoosiowego ściskania,}$$

$\omega = \omega(m, n)$ -- wg tabl. II.8.

Podstawiając do wzoru (II.156) wartości K_{p_0} i H_{p_0} z tabl. II.10 otrzymuje się wartości ε_0 nieco różne (do 16%) od przedstawionych w tej samej tablicy eksperymentalnych wartości ε_0 . Dla uzyskania wartości odkształcenia ε_0 dokładnie zgodnych z wartościami eksperymentalnymi w pracy zmodyfikowano wartości K_{p_0} i H_{p_0} w sposób przedstawiony w tabl. II.11:

f_c [MPa]	K_{p_0}	H_{p_0}
19,1	$696f_c, 1,302f_c/\varepsilon_0$	$1093f_c, 2,044f_c/\varepsilon_0$
32,4	$556f_c, 1,207f_c/\varepsilon_0$	$868f_c, 1,884f_c/\varepsilon_0$
61,9	$403f_c, 0,863f_c/\varepsilon_0$	$507f_c, 1,085f_c/\varepsilon_0$

Tablica II.11 Zmodyfikowane wartości K_{p_0} i H_{p_0}

W tabl. II.11 przedstawiono moduły K_{p_0} i H_{p_0} w sposób dwójaki: jako wielokrotność wytrzymałości f_c oraz jako wielokrotność stosunku f_c/ε_0 . Ten drugi sposób pozwala na przyjęcie odkształcenia ε_0 jako niezależnej stałej materiałowej o wartościach różnych od tych z tabl. II.10. Przy przyjęciu wartości K_{p_0} i H_{p_0} wg tabl. II.11 jako wielokrotności stosunku f_c/ε_0 i stałych m i n wg tabl. II.9 zależność (II.156) zamienia się w równanie, które jest spełnione tożsamościowo.

Dla otrzymania wzorów analitycznych wartości modułu K_{p_0} z tabl. II.11 aproksymowano funkcją paraboliczną:

$$\begin{aligned} K_{p_0} &= -2,803f_c^2 + 499f_c + 4780, \\ \text{lub} \\ K_{p_0} &= (-0,01368f_c^2 + 1,78f_c - 4,04)/\varepsilon_0, \end{aligned} \quad (\text{II.157})$$

gdzie f_c należy podstawić w MPa.

Z kolei moduł H_{p_0} opisano w postaci:

$$\begin{aligned} H_{p_0} &= (61212f_c - 600900)f_c^{-1,12}, \\ \text{lub} \\ H_{p_0} &= (217,55f_c - 2680)f_c^{-1,23}/\varepsilon_0, \end{aligned} \quad (\text{II.158})$$

gdzie f_c również w MPa.

Wzory (II.157 – II.158) dają wyniki poprawne fizycznie dla betonów o wytrzymałości f_c w zakresie $17,0 \div 65,0$ MPa, przy czym różnica w stosunku do wartości z tabl. II.11 jest mniejsza niż 1,0%.

Dodatkowo w macierzy \underline{D}_{cp} (tabl. II.4) występują wielkości E_0, ν i E . E_0 i ν powinny być traktowane jako początkowe stałe materiałowe. Wyrażają się one przez odwrotność wzorów (Z1.2):

$$E_0 = \frac{9K_{p_0}H_{p_0}}{6K_{p_0} + H_{p_0}}, \quad \nu = \frac{3K_{p_0} - H_{p_0}}{6K_{p_0} + H_{p_0}}. \quad (\text{II.159})$$

W celu uzyskania pomijalnie małych wartości odkształceń sprężystych wystarczy przyjąć $E = 500E_0$. Dla wartości K_{p_0} i H_{p_0} z tabl. II.11 korespondujące wartości E_0 i ν zawiera tabl. II.12

f_c [MPa]	E_0 [MPa]	ν
19,1	24819	0,189
32,4	33475	0,190
61,9	38935	0,240

Tablica II.12 Wartości E_0 i ν odpowiadające zmodyfikowanym wartościom K_{p_0} i H_{p_0}

Należy podkreślić, że zależnie od zastosowanych wzorów (II.155) i (II.157 – II.158) dla wykorzystania prezentowanego modelu konieczna jest znajomość wyłącznie wytrzymałości betonu f_c lub alternatywnie f_c i odkształcenia ε_0 .

Możliwe jest również inne podejście. Jako znane z eksperymentu można przyjąć wartości f_c, E_0 i ν . Wówczas moduły K_{p_0} i H_{p_0} wyrażają się analogicznie do wzorów (Z1.2):

$$K_{p_0} = \frac{E_0}{3(1 - 2\nu)}, \quad H_{p_0} = \frac{E_0}{1 + \nu}. \quad (\text{II.160})$$

W tym przypadku jednak wartość ε_0 jest z góry narzucona poprzez związek (II.156).

II.6 Powierzchnia graniczna

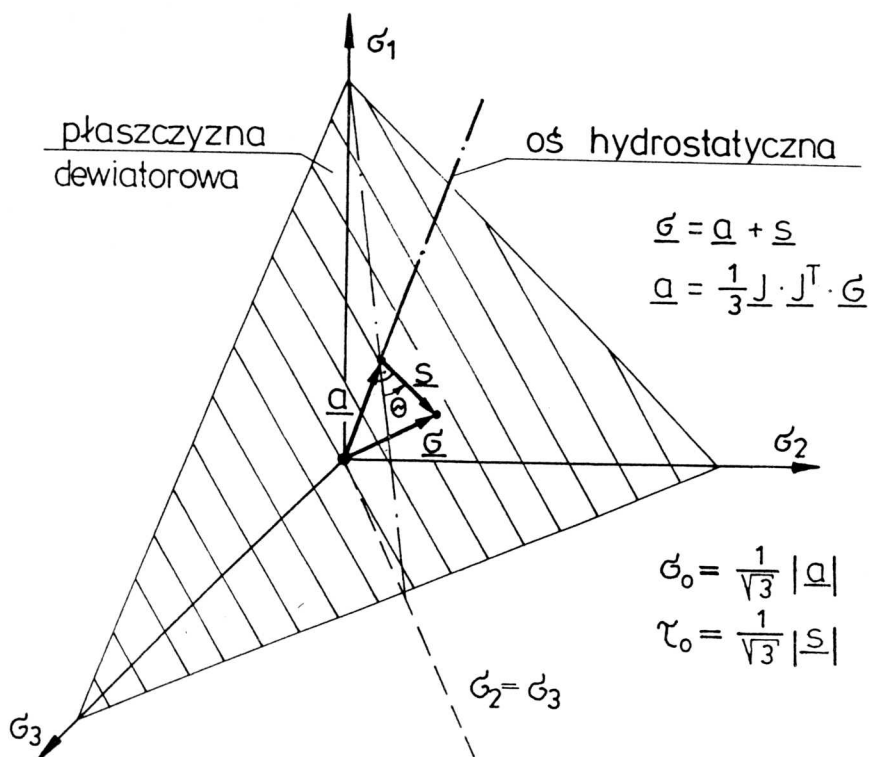
Powierzchnia graniczna w stanie nieskurczonym może być utożsamiana z powierzchnią wytrzymałości betonu. Literatura poświęcona hipotezom wytrzymałościowym dla betonu jest bardzo bogata. Przegląd najczęściej stosowanych hipotez zawiera praca [29]. W literaturze polskiej podobne omówienie (jakkolwiek niepełne) znajduje się w [35]. Przegląd badań doświadczalnych związanych z wytrzymałością betonu w dwu- i trójosiowym stanie można znaleźć w [89].

Hipotezy wytrzymałościowe dla betonu zwykle formułowane są w stanie trójosiowym – w przestrzeni naprężeń głównych *Haigha – Westergaarda*. W takim przypadku wygodne jest formułowanie równania powierzchni granicznej przy użyciu trzech niezmienników tensora naprężeń: I_1 , J_2 i Θ (lub równoważnie σ_0 , τ_0 , Θ). Kąt *Lodego* Θ zależy od wartości J_2 i J_3 :

$$\cos 3\Theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{2/3}}, \quad (\text{II.161})$$

gdzie $J_3 = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki}$ - trzeci niezmiennik tensora dewiatora naprężeń,

i ma prostą interpretację geometryczną w przestrzeni naprężeń głównych (rys. II.34).

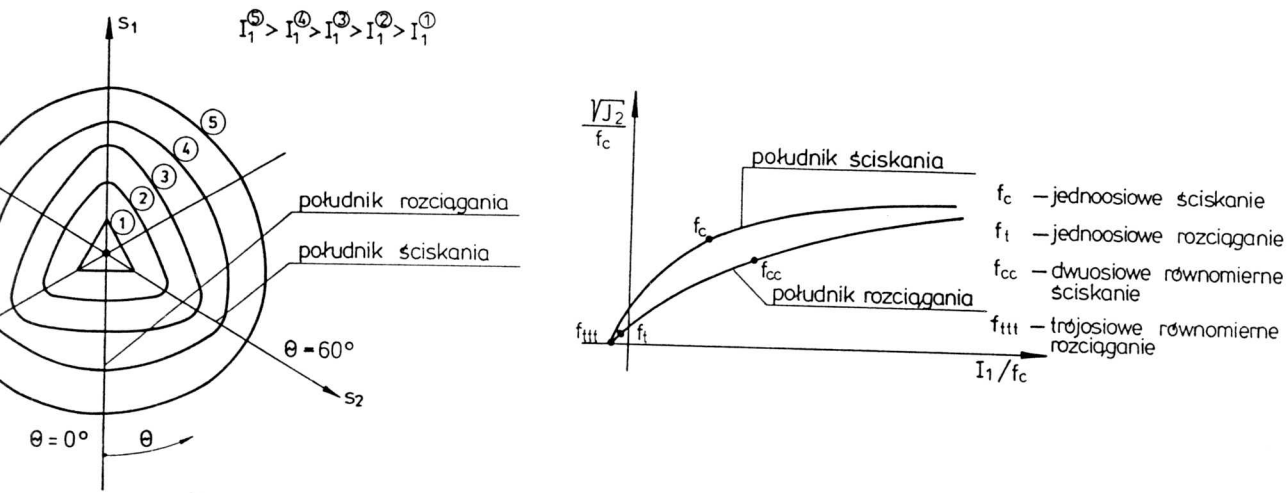


Rys. II.34 Interpretacja geometryczna kąta *Lodego* Θ

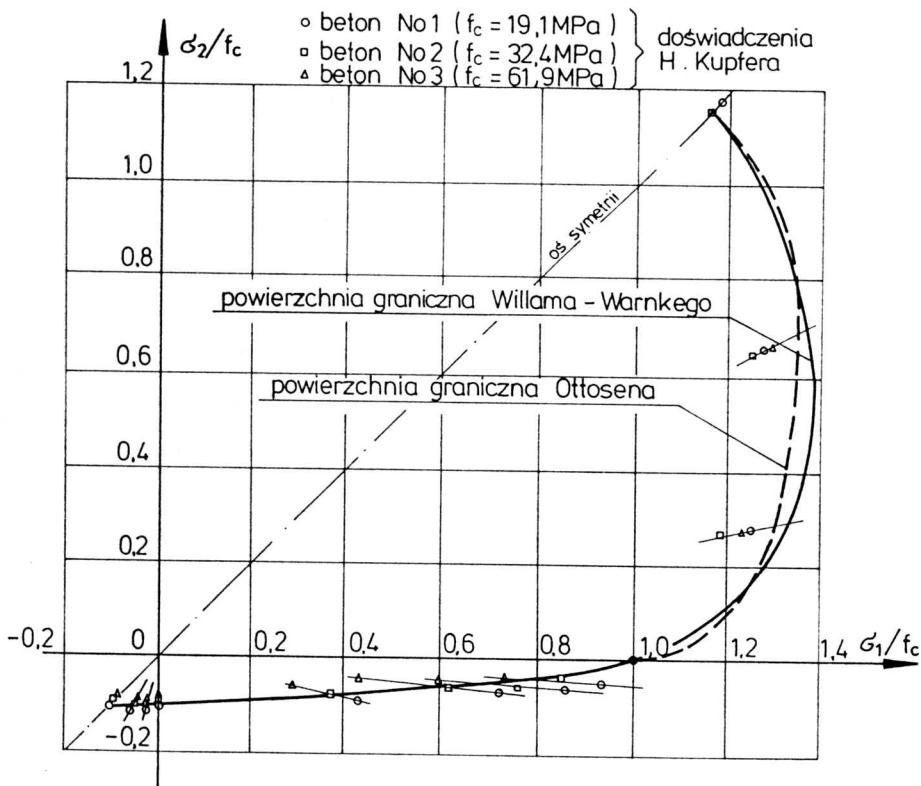
Zgodnie z wynikami badań doświadczalnych [29], powierzchnia graniczna dla betonu powinna być wypukła i ciągła, zamknięta na osi hydrostatycznej w kierunku rozciągania. Z uwagi na różną wytrzymałość betonu na ściskanie i rozciąganie, ślady powierzchni granicznej na płaszczyznach dewiatorowych nie są okręgami, tylko zamkniętymi krzywymi wypukłymi o trzech osiach symetrii (rys. II.35). Dla małych wartości I_1 (lub σ_0) kształt tych krzywych zbliżony jest do trójkąta, dla dużych wartości I_1 dąży on do okręgu. Podobnie południk ściskania (ślad powierzchni granicznej na płaszczyźnie zawierającej oś hydrostatyczną przy kącie $\Theta = 60^\circ$) ma większe wartości niż południk rozciągania (przecięcie powierzchni granicznej z płaszczyzną o kącie $\Theta = 0^\circ$) – rys. II.35. Sprawą nierozstrzygniętą jest zachowanie się powierzchni granicznej przy bardzo dużej wartości naprężenia średniego σ_0 . Brak jest wiarygodnych badań wytrzymałości betonu przy czystym trójosiowym ścisaniu, zaś badania do wartości $\sigma_0 = 10f_c$ wskazują na odchodzenie południków od osi hydrostatycznej [83]. W związku z tym większość stosowanych powierzchni granicznych jest otwarta od strony trójosiowego ściskania. Jeśli jednak w modelu betonu właściwości nieliniowe są funkcją wyłącznie odległości od powierzchni granicznej, to zastosowanie otwartej powierzchni granicznej powoduje sprężyste zachowanie się betonu dla ścieżek obciążenia bliskich obciążeniu hydrostatycznemu, co jest wyraźnie sprzeczne z eksperymentami (patrz punkt II.2). W takim przypadku można zastosować sztuczne zamknięcie powierzchni granicznej od strony trójosiowego ściskania, co powoduje nieliniowość związku $\sigma_0 - \varepsilon_{vol}$ [75].

Jak widać z powyższych obserwacji, z uwagi na silną zmienność wytrzymałości betonu wraz ze zmianą kąta *Lodego* Θ i naprężenia średniego σ_0 klasyczne hipotezy wyężeniowe *Mohra – Coulomba* lub *Pragera – Druckera* nie nadają się dla betonu. Mogą one jednak znaleźć zastosowanie dla przypadku płaskiego stanu naprężenia, jeśli zostaną uzupełnione hipotezą *Galileusza – Rankine’a* maksymalnego naprężenia w zakresie rozciągań [84], [117].

Obecnie do najczęściej stosowanych hipotez wyężeniowych dla betonu należą kryteria *Willama – Warnkego* [29] i *Ottosena* [83]. Są one pokazane dla przypadku płaskiego stanu naprężenia na rys. II.36 (wg [30]).



Rys. II.35 Jakościowy kształt powierzchni granicznej



Rys. II.36 Powierzchnie graniczne w płaskim stanie naprężenia

Dobłą zgodność z wynikami eksperymentalnymi można również uzyskać używając uogólnionej hipotezy wyężeniowej *Podgórskiego* [93], [76].

Istnieje również możliwość zdefiniowania krzywej granicznej wprost dla płaskiego stanu naprężenia. Formuluje się wówczas równanie wiążące naprężenia σ_1 i σ_2 [68], [57]. W ten sposób można uzyskać dobrą zgodność z wynikami doświadczalnymi, nie istnieją jednak możliwości jednoznacznego uogólnienia przyjętego równania na stan trójosiowy.

M.N.Fardis i *E.S.Chen* zaproponowali własne równanie powierzchni granicznej, po raz pierwszy podane w [41]. Równanie południka ściskania ($\Theta = 60^\circ$) ma postać:

$$\frac{I_1}{f_c} + b_1 \left(\frac{\sqrt{J_2}}{f_c} \right)^2 + b_2 \left(\frac{\sqrt{J_2}}{f_c} \right) + b_3 = 0, \quad (\text{II.162})$$

gdzie b_1, b_2, b_3 - parametry materiałowe równe:

$$b_1 = -0,70, \quad b_2 = -1,85, \quad b_3 = 0,30.$$

W celu uzyskania niekolistego kształtu powierzchni w przekrojach dewiatorowych wprowadzono funkcję deformującą g :

$$g(\Theta) = (12,0 + 11,0 \cos 3\Theta)^{1/6}, \quad (\text{II.163})$$

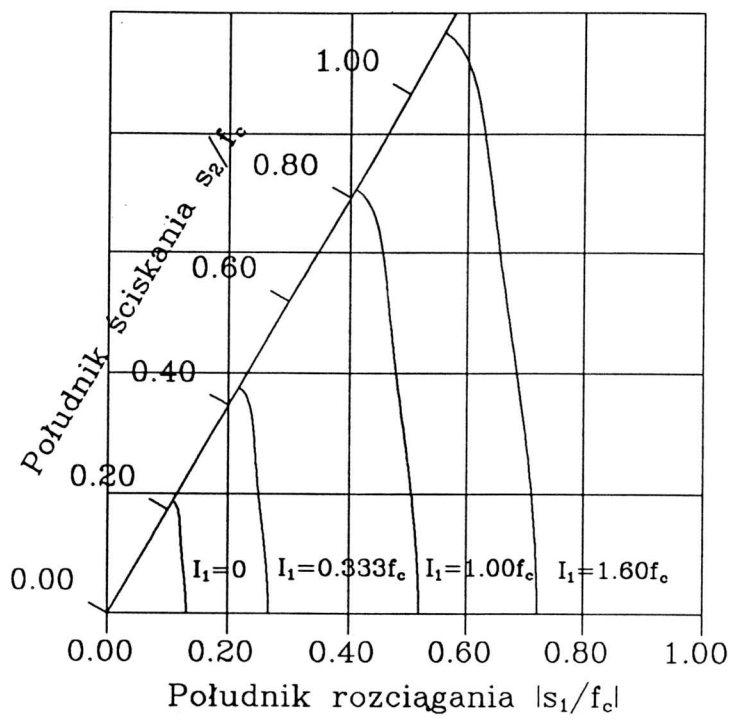
przy czym jest: $g(\Theta = 0^\circ) = 1,686$,
 $g(\Theta = 60^\circ) = 1,000$.

Ogólne równanie powierzchni granicznej wyraża się wzorem:

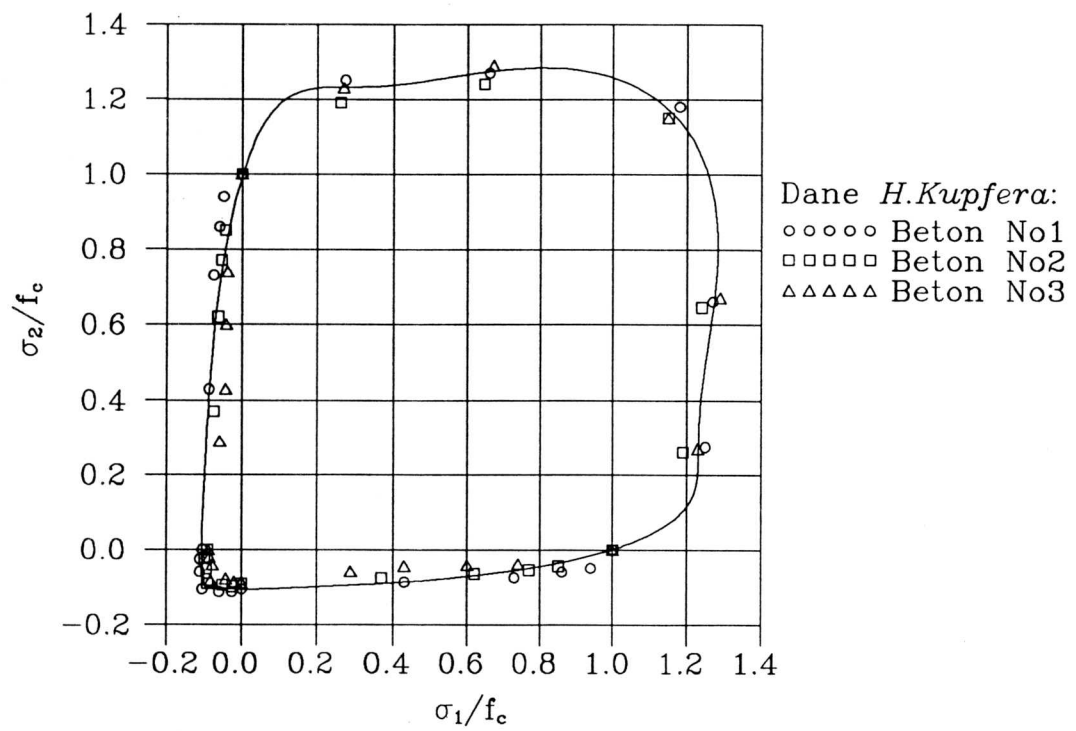
$$\frac{I_1}{f_c} + g(\Theta) \left[b_1 \left(\frac{\sqrt{J_2}}{f_c} \right)^2 + b_2 \left(\frac{\sqrt{J_2}}{f_c} \right) \right] + b_3 = 0. \quad (\text{II.164})$$

Na rys. II.37 pokazano ślady powierzchni granicznej *Fardisa – Chena* na płaszczyznach dewiatorowych. Rys. II.38 przedstawia tę powierzchnię w płaskim stanie naprężenia. Należy zauważyć, że na płaszczyznach dewiatorowych zmienia ona kształt od bliskiego trójkątowi do bardziej kolistej dla większych wartości I_1 , zaś w płaskim stanie naprężenia dobrze koresponduje z danymi doświadczalnymi. Niestety jest ona niewypukła, co wyraźnie widać na rys. II.37 – II.38. Istnieje możliwość zmiany tego stanu poprzez odpowiednią modyfikację funkcji $g(\Theta)$, np:

$$g(\Theta) = (8,271 + 7,211) \frac{1}{5,25}, \quad (\text{II.165})$$



Rys.II.37 Powierzchnia *Fardisa-Chena* (płaszczyzny dewiatorowe)



Rys.II.38 Powierzchnia *Fardisa-Chena* (płaski stan naprężenia)

lecz wówczas wypukłość powierzchni granicznej jest uzyskiwana kosztem pogorszenia zgodności z danymi doświadczalnymi.

Rezultatem przedstawionej analizy było przyjęcie w pracy równania powierzchni granicznej *Hsieha - Tinga - Chena* [57]:

$$c_1 \left(\frac{\sqrt{J_2}}{f_c} \right)^2 + c_2 \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} - c_3 \frac{\sigma_{MIN}}{f_c} - c_4 \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0, \quad (II.166)$$

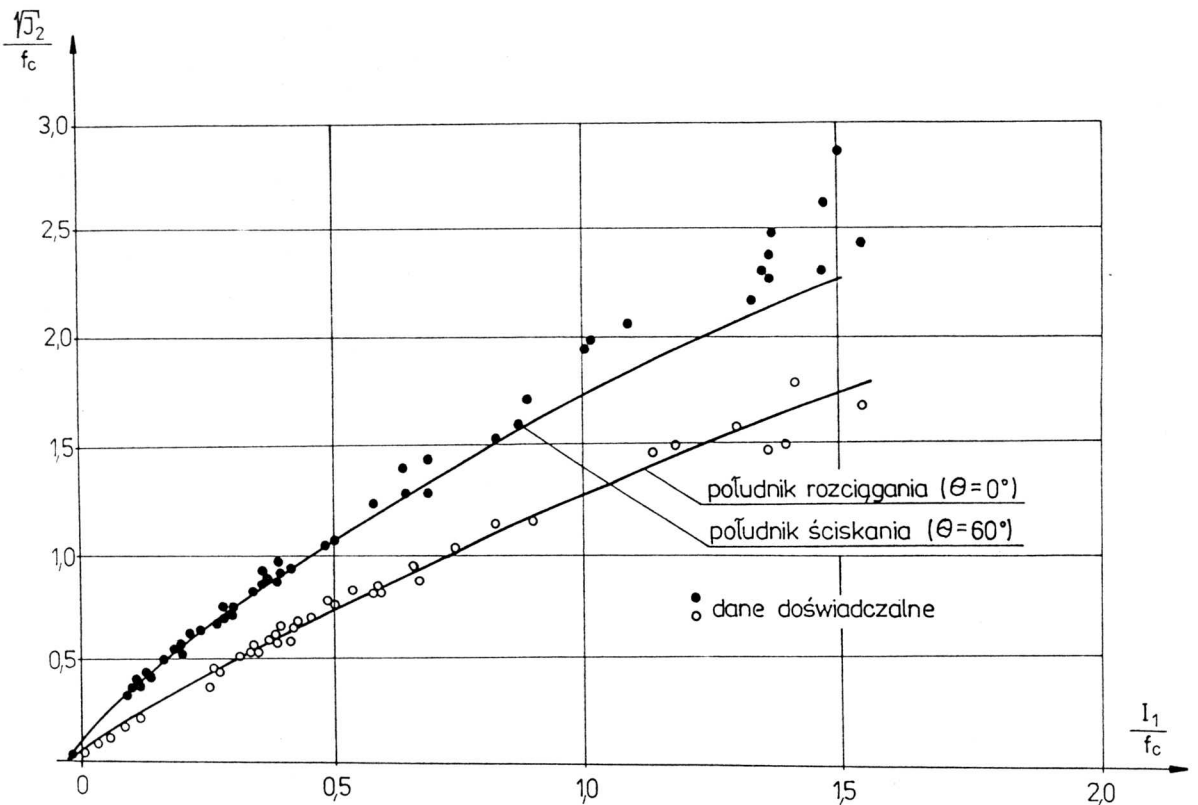
gdzie $c_1 - c_4$ - parametry materiałowe,

σ_{MIN} - minimalne naprężenie główne.

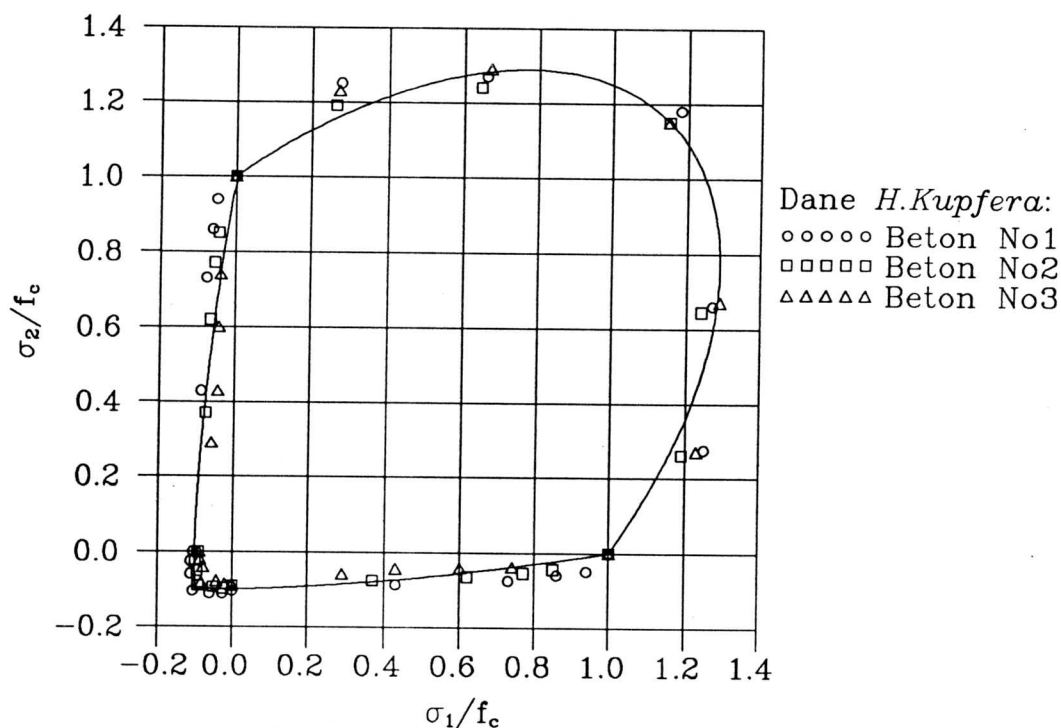
W [57] podano następujące wartości parametrów materiałowych

$$c_1 = 2,0108, \quad c_2 = 0,9714, \quad c_3 = 9,1412, \quad c_4 = 0,2312.$$

Powierzchnia ta wykazuje bardzo dobrą zgodność zarówno z danymi doświadczalnymi dla południków ściskania i rozciągania (rys. II.39 według [57]) jak i wynikami *H. Kupfera* dla płaskiego stanu naprężenia (rys. II.40).



Rys. II.39 Powierzchnia graniczna *Hsieha - Tinga - Chena*



Rys.II.40 Powierzchnia Hsieha-Tinga-Chena (płaski stan naprężenia)

Dodatkowo, poprzez odpowiedni dobór stałych $c_1 - c_4$ równanie (II.166) można przekształcić w hipotezy: $H - M - H$, $Druckera - Pragera$ lub $Coulomba - Mohra$. W przypadku gdy $c_3 \neq 0$ powierzchnia graniczna jest nieładka dla $\Theta = 60^\circ$ (posiada naroże dla południka ściskania). Dla płaskiego stanu naprężenia widoczne jest to dla jednoosiowego ściskania. Istnienie niezerowego współczynnika przy σ_{MIN} komplikuje również zapis równania (II.166) dla płaskiego stanu naprężenia: dla zakresu ściskanie - ściskanie (gdy $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$) jest $\sigma_{MIN} = \sigma_3 = 0$; natomiast dla zakresu ściskanie - rozciąganie (gdy $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$) i zakresu rozciąganie - rozciąganie (gdy $0 > \sigma_1 > \sigma_2$) jest $\sigma_{MIN} = \sigma_2$. Jeśli z kolei w zakresie rozciąganie - rozciąganie jest $0 > \sigma_2 > \sigma_1$ lub naprężenie znajduje się w zakresie rozciąganie - ściskanie ($\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$), to należy przyjąć $\sigma_{MIN} = \sigma_1$.

Dla danej wartości σ_1 i $\sigma_2 = k\sigma_1$ (wzór (II.101)) można przekształcić równanie (II.166) w celu uzyskania wartości σ_{1u} i $\sigma_{2u} = k\sigma_{1u}$. Uwzględniając możliwość występowania trzech przypadków ($\sigma_{MIN} = 0$, $\sigma_{MIN} = \sigma_2$, $\sigma_{MIN} = \sigma_1$) prowadzi to do wzorów:

dla $\sigma_1 \geq 0, k \geq 0$

$$\sigma_{1_u} = \frac{c_4 k_2 - c_2 \sqrt{\frac{k_1}{3}} + \sqrt{\Delta}}{\frac{2}{3} c_1 k_1} f_c,$$

$$\text{gdzie } \Delta = \left(c_2 \sqrt{\frac{k_1}{3}} - c_4 k_2 \right)^2 + \frac{4}{3} c_1 k_1,$$

dla $\sigma_1 \geq 0, k < 0$

$$\sigma_{1_u} = \frac{c_3 k + c_4 k_2 - c_2 \sqrt{\frac{k_1}{3}} + \sqrt{\Delta}}{\frac{2}{3} c_1 k_1} f_c,$$

$$\text{gdzie } \Delta = \left(c_2 \sqrt{\frac{k_1}{3}} - c_4 k_2 - c_3 k \right)^2 + \frac{4}{3} c_1 k_1,$$

dla $\sigma_1 < 0, k \geq 1, 0$

(II.167)

$$\sigma_{1_u} = \frac{c_3 k + c_4 k_2 + c_2 \sqrt{\frac{k_1}{3}} - \sqrt{\Delta}}{\frac{2}{3} c_1 k_1} f_c,$$

$$\text{gdzie } \Delta = \left(-c_2 \sqrt{\frac{k_1}{3}} - c_4 k_2 - c_3 k \right)^2 + \frac{4}{3} c_1 k_1,$$

dla $\sigma_1 < 0, k < 1, 0$

$$\sigma_{1_u} = \frac{c_3 + c_4 k_2 + c_2 \sqrt{\frac{k_1}{3}} - \sqrt{\Delta}}{\frac{2}{3} c_1 k_1} f_c,$$

$$\text{gdzie } \Delta = \left(-c_2 \sqrt{\frac{k_1}{3}} - c_4 k_2 - c_3 \right)^2 + \frac{4}{3} c_1 k_1,$$

przy czym jest: $k_1 = k^2 - k + 1,$
 $k_2 = k + 1.$

Przyjmując $\sigma_1 \geq 0$ i $k = 0$ otrzymuje się przypadek jednoosiowego ściskania, wówczas ze wzoru (II.167/1) wynika $\sigma_{1_u} = f_c$, analogicznie dla równomiernego dwuosowego ściskania ($\sigma_1 \geq 0, k = 1, 0$) jest $\sigma_{1_u} = 1,150 f_c$. Dla jednoosiowego rozciągania ($\sigma_1 < 0, k = 0$) otrzymać można $\sigma_{1_u} = -0,100 f_c$, zaś dla dwuosowego równomiernego rozciągania ($\sigma_1 < 0, k = 1, 0$) $\sigma_{1_u} = -0,098 f_c$.

Jak widać z przedstawionych powyżej wartości, równanie powierzchni granicznej (II.166) jednoznacznie ustala wytrzymałość na jednoosiowe rozciąganie jako $f_t = -0,100 f_c$, pod-

czas gdy w rzeczywistości stosunek f_t/f_c może zmieniać się w pewnych granicach. Inną wartość stosunku f_t/f_c można uzyskać poprzez zmianę wartości współczynników $c_1 \div c_4$. Ze wzorów (II.167) wynika, że współczynnik c_3 nie występuje dla zakresu ściskania ($\sigma_1 \geq 0, k \geq 0$). Oznacza to, że zmieniając wartość c_3 nie wpływa się na kształt powierzchni granicznej dla $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0$, w którym to zakresie istnieje dość dobra zgodność z wynikami doświadczalnymi. Wykorzystując wzór (II.167/4) dla przypadku jednoosiowego rozciągania ($\sigma_1 < 0, k = 0$) można dojść do zależności:

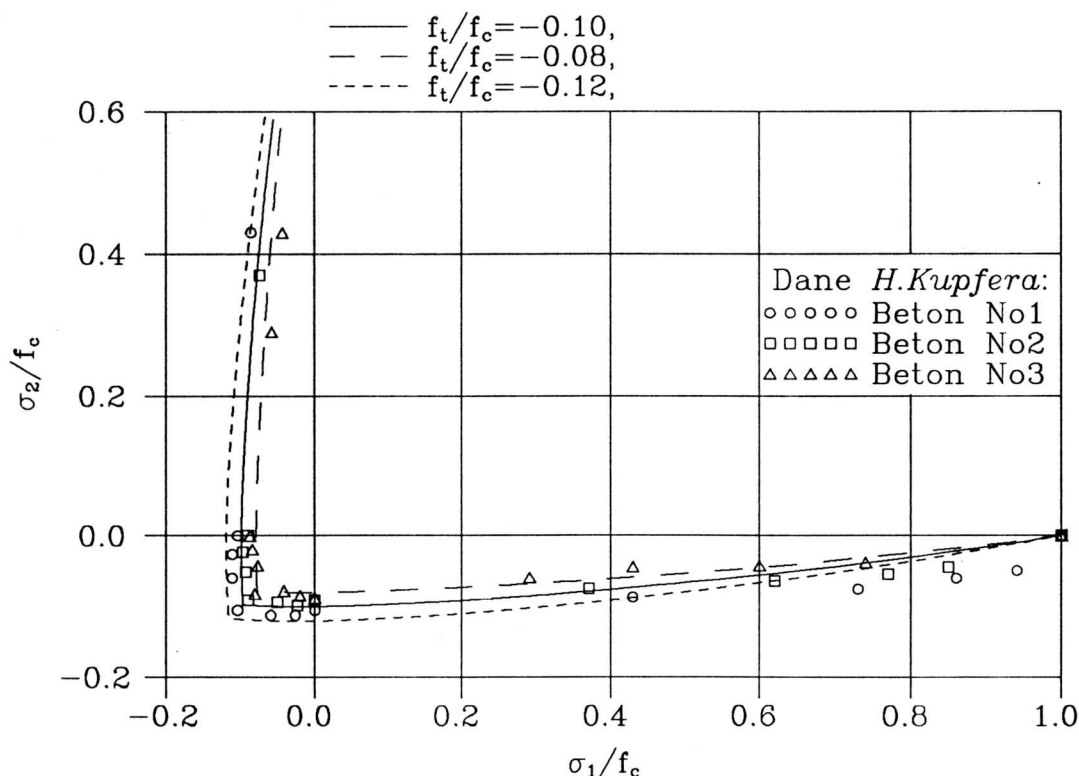
$$\sigma_{1_u} = f_t = \frac{c_3 + c_4 + c_2\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\left(-c_2\sqrt{\frac{1}{3}} - c_4 - c_3\right)^2 + \frac{4}{3}c_1}}{\frac{2}{3}c_1} f_c. \quad (\text{II.168})$$

Rozwiązując równanie (II.168) otrzymuje się wzór na wartość parametru c_3 :

$$c_3 = \frac{1}{3}c_1 \frac{f_t}{f_c} - c_2 \frac{1}{\sqrt{3}} - c_4 - \frac{f_c}{f_t}. \quad (\text{II.169})$$

Wartości pozostałych parametrów ze wzoru (II.166) przyjęto zgodnie z [57]:

$$c_1 = 2,0108, \quad c_2 = 0,9714, \quad c_4 = 0,2312.$$



Rys.II.41 Powierzchnia Hsieh-Ting-Chena dla trzech stosunków f_t/f_c

Rys. II.41 przedstawia powierzchnię graniczną w zakresach ściskanie – rozciąganie i rozciąganie – rozciąganie dla trzech różnych stosunków f_t/f_c podanych w tabl. II.13

f_t/f_c	c_3
-0,08	11,6543
-0,10	9,1412
-0,12	7,4609

Tablica II.13 Wartość stałej c_3 w zależności od stosunku naprężeń f_t/f_c

II.7 Stan pokrytyczny

Zachowanie się betonu po osiągnięciu wytrzymałości charakteryzuje się zmniejszeniem naprężeń przy rosnących odkształceniach. Jest to charakterystyczne zarówno dla ściskania, jak i rozciągania [105], [97]. Praktycznie dla żadnego stanu naprężenia nie następuje zniszczenie typu kruchego, lecz jest obserwowana ciągłość materiału (mięknienie) w stanie pokrytycznym. W pracy zjawisko to opisano przez kurczenie się powierzchni granicznej.

II.7.1 Powierzchnia graniczna w stanie pokrytycznym

W stanie pokrytycznym obowiązuje w dalszym ciągu równanie powierzchni granicznej (II.166) przy przyjęciu aktualnych, zredukowanych wartości wytrzymałości na ściskanie f_c^* i na rozciąganie f_t^* :

$$F = c_1 \left(\frac{\sqrt{J_2}}{f_c^*} \right)^2 + c_2 \frac{\sqrt{J_2}}{f_c^*} - c_3 \frac{\sigma_{MIN}}{f_c^*} - c_4 \frac{I_1}{f_c^*} - 1 = 0, \quad (\text{II.170})$$

gdzie

$$c_3^* = \frac{1}{3} c_1 \frac{f_t^*}{f_c^*} - c_2 \frac{1}{\sqrt{3}} - c_4 - \frac{f_c^*}{f_t^*}. \quad (\text{II.171})$$

Przyjęto, że redukcja wytrzymałości f_c i f_t zależy wyłącznie od wartości odkształcenia plastycznego γ_0^p , co można zapisać:

$$\begin{aligned} f_t^* &= f_t \cdot f_1(\gamma_0^p), \\ f_c^* &= f_c \cdot f_2(\gamma_0^p), \end{aligned} \quad (\text{II.172})$$

gdzie $f_1(\gamma_0^p)$ – funkcja redukująca wytrzymałość na rozciąganie,
 $f_2(\gamma_0^p)$ – funkcja redukująca wytrzymałość na ściskanie.

Redukcja wytrzymałości następuje wyłącznie w stanie pokrytycznym – dla $\gamma_0^p \geq \gamma_{0_u}^p$, gdzie $\gamma_{0_u}^p$ określone jest wzorem (II.90). Dodatkowo zakłada się, w celu uniknięcia osobliwości we wzorach (II.170 – II.171), że dla dowolnie dużych wartości γ_0^p wytrzymałości f_t^* i f_c^* są różne od zera ($f_t^* \neq 0$, $f_c^* \neq 0$). W związku z tym funkcje $f_1(\gamma_0^p)$ i $f_2(\gamma_0^p)$ muszą spełniać warunki:

$$\begin{aligned} \text{dla } \gamma_0^p &\leq \gamma_{0_u}^p \\ f_1(\gamma_0^p) &\equiv 1, 0, \\ f_2(\gamma_0^p) &\equiv 1, 0, \\ \text{dla } \gamma_0^p &> \gamma_{0_u}^p \\ 0 &< f_1(\gamma_0^p) < 1, 0, \\ 0 &< f_2(\gamma_0^p) < 1, 0. \end{aligned} \quad (\text{II.173})$$

W pracy, z uwagi na różny charakter zachowania się pokrytycznego betonu przy ścisaniu (stosunkowo łagodny spadek wytrzymałości przy rosnących odkształceniach) i rozciąganiu (początkowy gwałtowny spadek wytrzymałości) przyjęto różne postacie funkcji $f_1(\gamma_0^p)$ i $f_2(\gamma_0^p)$ w tych regionach. Zgodnie z badaniami *H.Kupfera* [68], za strefę przejściową pomiędzy regionem, w którym beton ulega zniszczeniu przy ścisaniu, a regionem zniszczenia przy rozciąganiu uznano obszar w którym stosunek naprężeń $k = \sigma_2/\sigma_1$ zawiera się w granicach: $k \in (-\frac{1}{10}, -\frac{1}{15})$ i $k \in (-15, -10)$. W strefie przejściowej zastosowano kombinację liniową postaci funkcji, właściwych dla regionów ściskania i rozciągania. Prowadzi to do wzorów:

$$\begin{aligned} \text{dla } \sigma_1 &\geq 0, \quad k \geq -\frac{1}{15} \\ f_1(\gamma_0^p) &= f_{1c}(\gamma_0^p), \\ f_2(\gamma_0^p) &= f_{2c}(\gamma_0^p), \end{aligned}$$

$$\text{dla } \sigma_1 \geq 0, -\frac{1}{15} > k \geq -\frac{1}{10}$$

$$f_1(\gamma_0^p) = 30k(f_{1c}(\gamma_0^p) - f_{1t}(\gamma_0^p)) + 3f_{1c}(\gamma_0^p) - 2f_{1t}(\gamma_0^p),$$

$$f_2(\gamma_0^p) = 30k(f_{2c}(\gamma_0^p) - f_{2t}(\gamma_0^p)) + 3f_{2c}(\gamma_0^p) - 2f_{2t}(\gamma_0^p),$$

$$\text{dla } \sigma_1 \geq 0, k < -\frac{1}{10}$$

$$f_1(\gamma_0^p) = f_{1t}(\gamma_0^p),$$

$$f_2(\gamma_0^p) = f_{2t}(\gamma_0^p),$$

$$\text{dla } \sigma_1 < 0, k \geq -10$$

$$f_1(\gamma_0^p) = f_{1t}(\gamma_0^p),$$

(II.174)

$$f_2(\gamma_0^p) = f_{2t}(\gamma_0^p),$$

$$\text{dla } \sigma_1 < 0, -10 > k \geq -15$$

$$f_1(\gamma_0^p) = \frac{1}{5}k(f_{1t}(\gamma_0^p) - f_{1c}(\gamma_0^p)) + 3f_{1t}(\gamma_0^p) - 2f_{1c}(\gamma_0^p),$$

$$f_2(\gamma_0^p) = \frac{1}{5}k(f_{2t}(\gamma_0^p) - f_{2c}(\gamma_0^p)) + 3f_{2t}(\gamma_0^p) - 2f_{2c}(\gamma_0^p),$$

$$\text{dla } \sigma_1 < 0, k < -15$$

$$f_1(\gamma_0^p) = f_{1c}(\gamma_0^p),$$

$$f_2(\gamma_0^p) = f_{2c}(\gamma_0^p),$$

- gdzie $f_{1c}(\gamma_0^p)$ – funkcja opisująca spadek wytrzymałości na rozciąganie f_t w procesie ściskania,
 $f_{1t}(\gamma_0^p)$ – funkcja opisująca spadek wytrzymałości na rozciąganie f_t w procesie rozciągania,
 $f_{2c}(\gamma_0^p)$ – funkcja opisująca spadek wytrzymałości na ściskanie f_c w procesie ściskania,
 $f_{2t}(\gamma_0^p)$ – funkcja opisująca spadek wytrzymałości na ściskanie f_c w procesie rozciągania.

Postacie funkcji $f_{1t}(\gamma_0^p)$ i $f_{2c}(\gamma_0^p)$ mogą zostać ustalone na podstawie doświadczalnych zależności $\sigma_1 - \varepsilon_1$ w stanie pokrytycznym, odpowiednio przy rozciąganiu lub ściskaniu. Znacznie trudniejsze jest ustalenie właściwych postaci funkcji $f_{1c}(\gamma_0^p)$ i $f_{2t}(\gamma_0^p)$. Wymaga

to znajomości zachowania się betonu przy obciążeniach przeciwwrotnych w stanie pokrytycznym. W chwili obecnej liczba prac doświadczalnych poświęconych temu tematowi jest mała; mają one charakter cząstkowy i prowadzą do rozbieżnych wniosków [101].

II.7.2 Określenie postaci funkcji $f_{1t}(\gamma_0^p)$

Jako pierwsza zostanie omówiona funkcja $f_{1t}(\gamma_0^p)$. Mięknienie materiału przy rozciąganiu jest możliwe do uzyskania w eksperymencie przy użyciu wymuszenia kinematycznego. Zniszczenie betonu ma charakter rozdzielczy i następuje na kierunku działania głównego naprężenia rozciągającego. W kierunkach prostopadłych beton zachowuje stosunkowo wysoką wytrzymałość [101]. Przy osiowym rozciąganiu próbki betonowej mimo istnienia jednorodnego stanu naprężenia, w zakresie pokrytycznym następuje lokalizacja uszkodzeń i odkształceń niesprężystych w strefie o niewielkiej długości, zaś cała reszta próbki ulega sprężystemu odciążeniu [97], [126], [9].

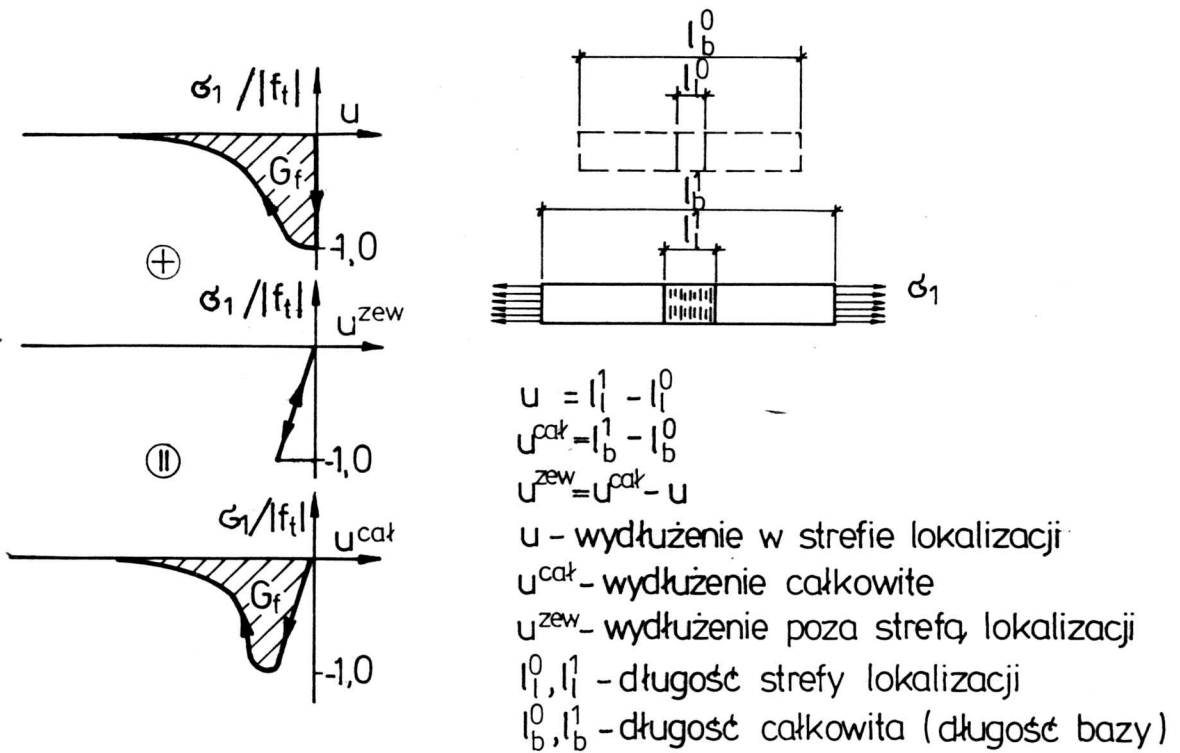
Długość strefy lokalizacji jest związana ściśle z cechami materiałowymi betonu i pozostaje stała. Zjawisko lokalizacji odkształceń powoduje, że wykresy doświadczalne $\sigma_1 - \varepsilon_1$, w których przez ε_1 rozumie się średnie odkształcenie podłużne próbki na całej jej długości, zmieniają się wraz ze wzrostem długości próbki. Za obiektywną można uznać natomiast zależność $\sigma_1 - u$, gdzie u jest wartością wydłużenia strefy lokalizacji (interpretowaną też jako szerokość rozwarcia rysy). Za stałą materiałową uważa się wartość jednostkowej energii pęknięcia G_f , definiowaną jako (rys. II.42):

$$G_f = - \int_{-\infty}^0 \sigma_1(u) du \quad (\text{II.175})$$

(zgodnie z przyjętą konwencją znakowania wydłużenie przy rozciąganiu ma wartość ujemną). Wartość G_f zależna jest od wytrzymałości betonu na rozciąganie i waha się w granicach 50 – 150 J/m² [123], [9]. Prostą i dającą dużą zgodność z wynikami doświadczalnymi postać funkcji $\sigma_1(u)$ podaje Sz. Woliński [123]:

$$\sigma_1 = f_t e^{p_1(u)^{p_2}}. \quad (\text{II.176})$$

Dla betonów o maksymalnych ziarnach kruszywa nie przekraczających 16 mm można przyjmować wartości stałych materiałowych $p_2 = 0,744$, $p_1 = 2465 \left[\frac{1}{m^{0,744}} \right]$.

Rys. II.42 Energia pęknięcia G_f dla jednoosiowego rozciągania

Wartość energii pęknięcia dla $\sigma_1(u)$ w postaci (II.176) wynosi:

$$G_f = |f_t| \frac{\Gamma(1/p_2)}{p_2 p_1^{1/p_2}}, \quad (\text{II.177})$$

gdzie $\Gamma(1/p_2)$ - funkcja gamma *Eulera* parametru $1/p_2$.

Przy użyciu opisu kontynualnego nie ma możliwości wprost uwzględnienia efektu lokalizacji. Rezultaty obiektywne można uzyskać stosując tzw. kontinuum nielokalne [6], [20], [85]. Stosując MES do obliczeń konstrukcji z betonu niezbrojonego otrzymuje się zwykle lokalizację zarysowań w jednym rzędzie elementów. Elementy sąsiednie ulegają przy tym sprężystemu odciążeniu. Prowadzi to do wniosku [98], że przy wykorzystaniu aproksymacji MES długość strefy lokalizacji nie jest stałą materiałową, lecz jest związana z wymiarami elementu. Chcąc uzyskać stałą wartość energii pęknięcia G_f należy więc utożsamić strefę lokalizacji z elementem, co prowadzi do wzoru:

$$u = (\varepsilon_1 - \varepsilon_t)h, \quad (\text{II.178})$$

gdzie ε_1 – odkształcenie główne rozciągające (minimalne),
 ε_t – wartość odkształcenia ε_1 dla $\sigma_1 = f_t$,
 h – charakterystyczny wymiar elementu.

Bliższe informacje na temat oszacowania h w zależności od typu elementu i stanu naprężenia w nim panującego podaje *J.G.Rots* [98]. Zastosowanie wzoru (II.176) dla u zdefiniowanego przez (II.178) prowadzi do uzyskania wyników niezmiennych się wraz z zagęszczaniem siatki elementów skończonych.

W pracy przyjęto dla opisu funkcji $f_{1t}(\gamma_0^p)$ wzór analogiczny do (II.176) i (II.178) przyjmując jednak za zmienną odkształceniową γ_0^p a nie ε_1 :

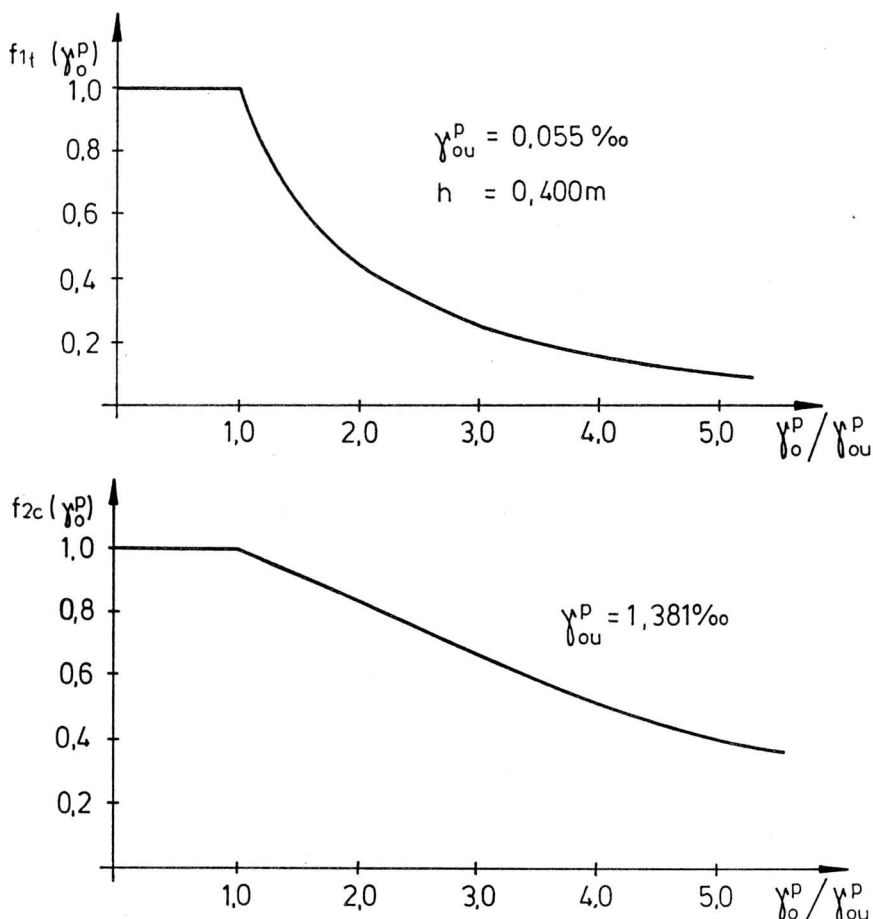
$$\begin{array}{ll} f_{1t}(\gamma_0^p) \equiv 1, 0 & \text{dla } \gamma_0^p \leq \gamma_{0u}^p, \\ f_{1t}(\gamma_0^p) = e^{-p_1[(\gamma_0^p - \gamma_{0u}^p)h]^{p_2}} & \text{dla } \gamma_0^p > \gamma_{0u}^p, \end{array} \quad (\text{II.179})$$

gdzie p_1, p_2 - stałe materiałowe o wartościach jak w (II.176).

Należy zauważyć, że przedstawiony powyżej sposób uzależnienia wykresu $\sigma_1 - \varepsilon_1$ od wymiarów elementu skończonego jest właściwy wyłącznie dla betonu niezbrojonego. W przypadku żelbetu obecność zbrojenia (dodatkowy lokalny stan naprężeń i odkształceń spowodowany przyczepnością i poślizgiem stali do betonu) wpływa również na kształt krzywej $\sigma_1 - \varepsilon_1$ uzyskiwanej przy założeniu pełnej przyczepności betonu do stali. Oznacza to, że wartość parametru h we wzorze (II.179) musi być przyjmowana indywidualnie w zależności od rozpatrywanego problemu i podziału na elementy skończone. W przykładach (część III) używano wartości $h = 0,028 \div 0,400\text{m}$.

II.7.3 Określenie postaci funkcji $f_{2c}(\gamma_0^p)$

Postać funkcji $f_{2c}(\gamma_0^p)$ może być zidentyfikowana na podstawie doświadczeń dotyczących stanu pokrytycznego przy ściskaniu. W tym przypadku zniszczenie betonu polega na jego zmiażdżeniu i ma charakter izotropowy. Obecnie zaczyna przeważać pogląd, że zniszczenie to ma charakter zlokalizowany podobnie jak przy rozciąganiu [76], [4], [43]. Problem ten jest jednak znacznie słabiej zbadany i brak jest wzorów opisujących zależność $\sigma_1 - u$ dla ściskania w sposób obiektywny. Konieczne jest więc oparcie się na któryś z licznych związków $\sigma_1 - \varepsilon_1$ proponowanych dla jednoosiowego ściskania w stanie pokrytycznym.

Rys. II.43 Funkcje $f_{1t}(\gamma_0^p)$ i $f_{2c}(\gamma_0^p)$

W pracy przyjęto dla funkcji $f_{2c}(\gamma_0^p)$ postać analogiczną do zaproponowanej przez *M.N.Fardisa* i *E.S.Chena* [42]:

$$\begin{aligned}
 f_{2c}(\gamma_0^p) &\equiv 1,0 && \text{dla } \gamma_0^p \leq \gamma_{0u}^p, \\
 f_{2c}(\gamma_0^p) &= \frac{p_3}{(p_3-1) + \left(\frac{\gamma_0^p}{\gamma_{0u}^p}\right)^2} && \text{dla } \gamma_0^p > \gamma_{0u}^p,
 \end{aligned}
 \tag{II.180}$$

gdzie $p_3 = 16$ - stała materiałowa.

Zmieniając wartość parametru p_3 można otrzymywać różne nachylenia gałęzi opadającej krzywej $\tau_0 - \gamma_0^p$ (i co za tym idzie gałęzi opadającej krzywej $\sigma_1 - \varepsilon_1$ przy jednoosiowym ściskaniu). Wartość $p_3 = 16,0$ została przyjęta przez autora na drodze eksperymentu numerycznego. Zapewnia ona dobrą zgodność z wynikami doświadczalnymi *H.Kupfera* oraz *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy* (patrz punkt III.1.2.1 i III.1.2.2). Oryginalnie, w pracy [42], przyjęto $p_3 = 24,0$ przy czym jako zmienna niezależna we wzorze analogicznym do (II.180)

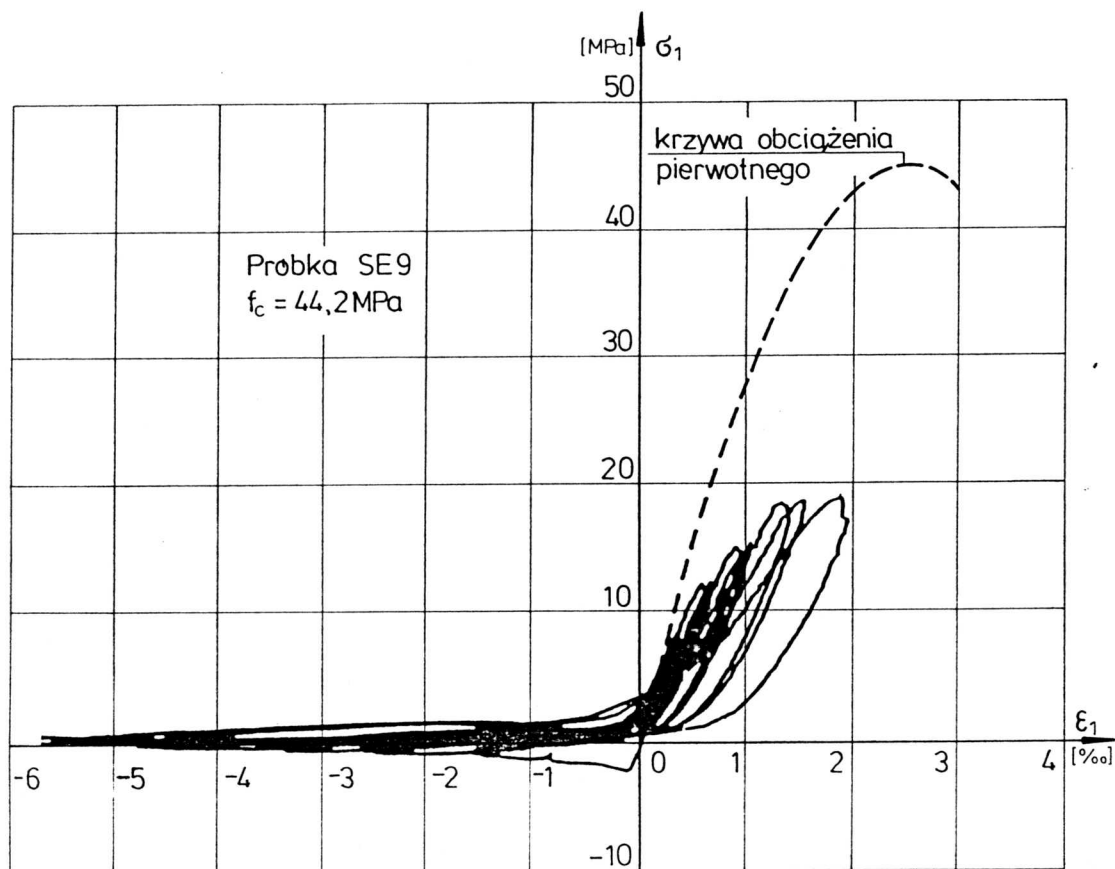
występował stosunek odkształceń $\varepsilon_1/\varepsilon_0$, a nie γ_0^p/γ_{0u}^p .

Rys. II.43 przedstawia przebieg funkcji $f_{1t}(\gamma_0^p)$ i $f_{2c}(\gamma_0^p)$ w zależności od wartości γ_0^p .

II.7.4 Określenie postaci funkcji $f_{2t}(\gamma_0^p)$

Funkcja $f_{2t}(\gamma_0^p)$ nie ma jednoznacznej interpretacji fizycznej. Jak wspomniano wyżej zniszczenie betonu przy rozciąganiu ma charakter kierunkowy. Stąd inne może być osłabienie materiału przy powtórny ścisaniu w kierunku poprzedniego zarysowania, a inne przy ścisaniu prostopadłym do kierunku istniejącego zarysowania. Istniejące badania doświadczalne dotyczą przeważnie tego drugiego przypadku [101], obciążenia przeciwwrotne badane były tylko w [108]. Należy przy tym dodać, że wszystkie znane autorowi prace w tym zakresie dotyczyły badań na elementach zbrojonych, a odpowiednie krzywe $\sigma_1 - \varepsilon_1$ dla betonu zostały uzyskane drogą pośrednią poprzez odjęcie sił przenoszonych przez zbrojenie od całkowitych sił w elemencie. Przykładowa, eksperymentalna zależność $\sigma_1 - \varepsilon_1$ przy obciążeniu przeciwwrotnym jest pokazana na rys. II.44 (za pracą [108]).

Przegląd badań doświadczalnych na temat wytrzymałości na ścisanie f_c^* w kierunku prostopadłym do kierunku zarysowania przeprowadzony w [101] ujawnia rozbieżne rezultaty według których wartości f_c^* zawiera się w granicach $(1,0 \div 0,6)f_c$. Również w pracach teoretycznych problem redukcji wytrzymałości f_c w procesie rozciągania potraktowany jest niejednolicie. Starsze prace z teorii plastyczności [84], [57], [49] zwykle opisywały zarysowania w sposób odrębny używając do tego modeli rys rozmytych o stałym lub zmiennym kierunku. W takim opisie zmniejszenie wytrzymałości f_t w procesie rozciągania nie powodowało zmiany wytrzymałości f_c . Również prace [118], [62], które opisują za pomocą teorii plastyczności także proces rozciągania, nie uwzględniają zmiany wytrzymałości f_c podczas tego procesu. Z kolei *E.Oñate* ze współpracownikami [82] założył, że redukcja wytrzymałości na ścisanie f_c jest wprost proporcjonalna do redukcji wytrzymałości f_t na rozciąganie w procesie rozciągania. Według tego podejścia kurczenie się powierzchni granicznej ma charakter izotropowy i może być opisane jednym parametrem (zachodzi $f_t^*/f_c^* = const$). W pracy *M.N.Fardisa* i *E.S.Chena* [42] przyjęto, że podczas kurczenia się powierzchni granicznej wytrzymałość na trójosiowe równomierne rozciąganie pozostaje stała.



Rys. II.44 Jednoosiowe cykliczne rozciąganie – ściskanie (zależność doświadczalna, *M.P. Collins i inni*)

Jeśli uznać, że koncepcja ta obowiązuje również dla procesu rozciągania to redukcja wytrzymałości f_t powoduje znacznie większą redukcję wytrzymałości f_c (stosunek f_t^*/f_c^* powiększa się w trakcie procesu rozciągania). Takie podejście wydaje się być pozbawione przesłanek fizycznych i całkowicie nieracjonalne. Większość prac, które nie bazują na teorii plastyczności korzysta z jednego z dwóch przeciwstawnych podejść. W jednym z nich zakłada się (*G.Mehlhorn, J.Kolleger* [74]), że proces rozciągania nie wpływa na redukcję wytrzymałości f_c . Drugie (*F.J. Vecchio, M.P. Collins* [116]) opisuje redukcję wytrzymałości f_c w kierunku prostopadłym do rysy jako funkcję maksymalnego odkształcenia rozciągającego poprzecznego (tzn. na kierunku zarysowań). Należy wspomnieć, że prace [74] i [116] opierają się na tych samych danych doświadczalnych – jednakże różnie je interpretują.

W pracy przyjęto, że spadek wytrzymałości na ściskanie f_c podczas procesu rozciągania powinien być skorelowany ze spadkiem wytrzymałości na rozciąganie f_t . Można to zapisać

w postaci:

$$f_c^* = f(f_t^*), \quad (\text{II.181})$$

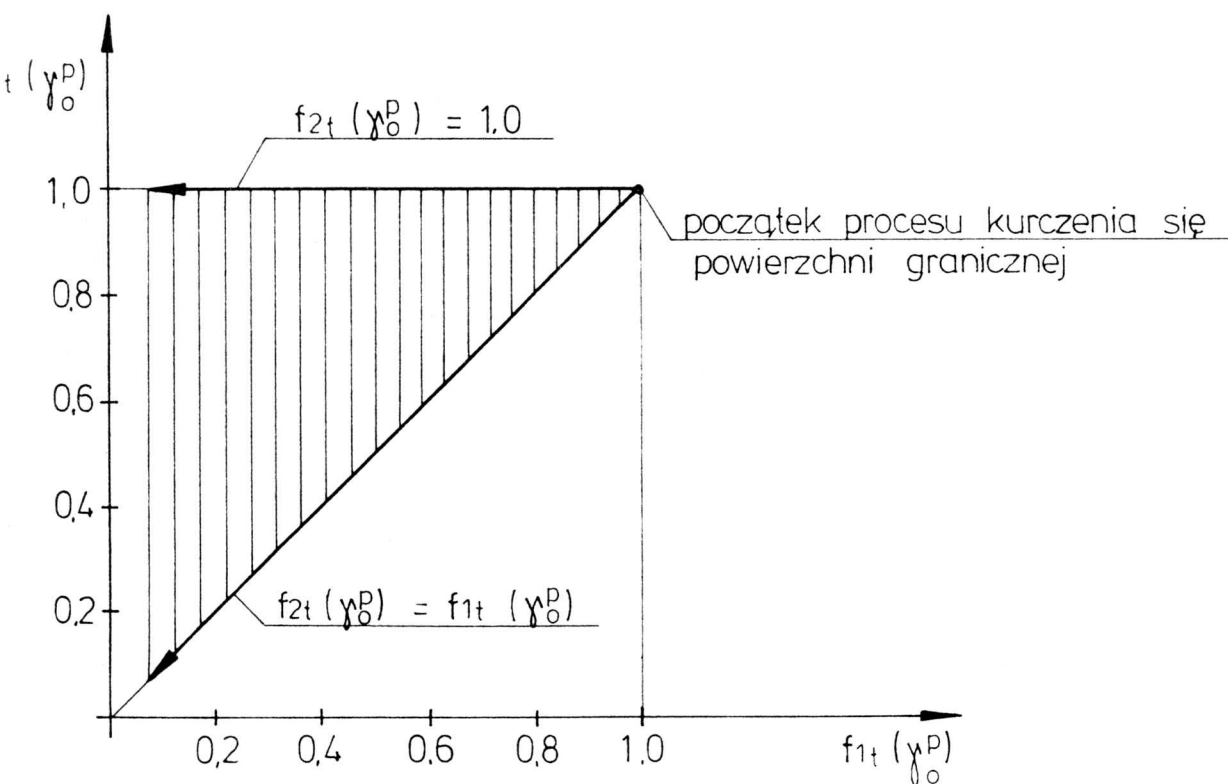
lub używając funkcji $f_{2t}(\gamma_0^p)$ i $f_{1t}(\gamma_0^p)$ w formie:

$$f_{2t}(\gamma_0^p) = f(f_{1t}(\gamma_0^p)). \quad (\text{II.182})$$

Problemem jest znalezienie właściwej postaci funkcji f . Najprostsze są dwie możliwości:

$$\begin{aligned} & f_{2t}(\gamma_0^p) \equiv 1, 0 \\ \text{lub} & f_{2t}(\gamma_0^p) = f_{1t}(\gamma_0^p). \end{aligned} \quad (\text{II.183})$$

Przyjęcie zależności (II.183/1) odpowiada założeniu, że podczas procesu rozciągania wytrzymałość f_c nie ulega redukcji (hipoteza z prac [84], [118], [74]). Z kolei funkcja w formie (II.183/2) opisuje izotropowe kurczenie się powierzchni granicznej (tak jak w [82]). Prawdopodobnie rzeczywista zależność $f_{2t}(\gamma_0^p) = f(f_{1t}(\gamma_0^p))$ zawiera się w przedziale pomiędzy tymi dwoma skrajnymi hipotezami (rys. II.45).



Rys. II.45 Funkcja $f_{2t}(\gamma_0^p)$ - dopuszczalny zakres

Z uwagi na brak jednoznacznych przesłanek doświadczalnych w pracy przyjęto jako równorzędne trzy propozycje funkcji (II.182) opisującej sprzężenie redukcji wytrzymałości na ściskanie z redukcją wytrzymałości na rozciąganie podczas procesu rozciągania. W dalszym ciągu funkcja ta będzie nazywana krócej funkcją sprzężenia kurczenia się powierzchni granicznej. W części III zostało przeprowadzone porównanie wyników, otrzymanych przy zastosowaniu każdej z trzech propozycji.

Propozycja 1° – sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej nieizotropowe.

Tę propozycję oparto na pracach [116], [108]. Według [108] wytrzymałość f_c^* jest funkcją odkształcenia poprzecznego rozciągającego ε_1 ($\varepsilon_1 \leq 0$):

$$f_c^* = \left(1 - 0,12310 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \quad \text{dla} \quad 0 \geq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} > -1,03857, \quad (\text{II.184})$$

$$f_c^* = \frac{1}{0,8+0,34\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} f_c \quad \text{dla} \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \leq -1,03857.$$

Jednocześnie podczas poprzecznego rozciągania beton ulega mięknięciu przy rozciąganiu według wzoru:

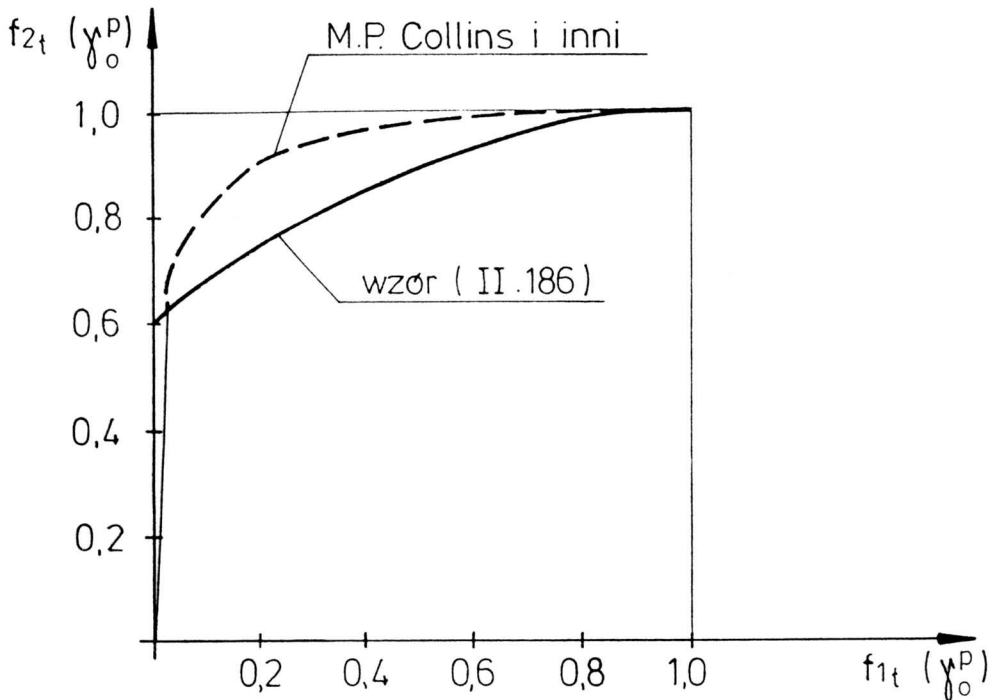
$$f_t^* = f_t e^{\lambda(\varepsilon_1 - \varepsilon_t)} \quad (\text{II.185})$$

gdzie λ – stała materiałowa, dla betonu niezbrojonego $\lambda = 1000$,
 ε_t – odkształcenie ε_1 odpowiadające osiągnięciu wytrzymałości na rozciąganie f_t .

Przyjmując $\varepsilon_0 = 2,00\%$, $\varepsilon_t = -0,10\%$ obliczono ze wzorów (II.184) i (II.185) stosunki naprężeń f_c^*/f_c i f_t^*/f_t dla zakresu $\varepsilon_1 \in \langle -4,0\%, -0,10\% \rangle$. Wyniki w postaci zależności $f_c^*/f_c = f_{2t}(\gamma_0^p) - f_t^*/f_t = f_{1t}(\gamma_0^p)$ zostały przedstawione na rys. II.46 (linia przerywana).

Jak widać, wraz ze zmniejszaniem się funkcji $f_{1t}(\gamma_0^p)$ do zera wartość funkcji $f_{2t}(\gamma_0^p)$ ulega stosunkowo niewielkiemu spadkowi. Oznacza to, przedstawiony opis bliższy jest nieistnieniu redukcji wytrzymałości na ściskanie (II.183/1) niż kurczeniu izotropowemu (II.183/2). Z uwagi na postać wzorów (II.184) i (II.185) ich rozwikłanie w celu znalezienia jawnej relacji $f_{2t}(\gamma_0^p) = f(f_{1t}(\gamma_0^p))$ sprawia trudności. W związku z tym postanowiono zastosować aproksymację w formie prostej funkcji kwadratowej (na rys. II.46 pokazanej linią ciągłą):

$$f_{2t}(\gamma_0^p) = -0,40(f_{1t}(\gamma_0^p) - 1,0)^2 + 1,0 \quad (\text{II.186})$$



Rys. II.46 Funkcja $f_{2t}(\gamma_0^p)$ - propozycja 1

Jak widać z (II.186) granicznemu przypadkowi redukcji wytrzymałości na rozciąganie f_t do zera ($f_{1t}(\gamma_0^p) = 0$ zgodnie ze wzorem (II.179) zachodziłoby dla $\gamma_0^p \rightarrow +\infty$) odpowiada redukcja wytrzymałości na ściskanie f_c do wartości 60% ($f_{2t}(\gamma_0^p) = 0,60$).

Propozycja 2° – sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej izotropowe

Przyjęto funkcję sprzężenia według (II.183/2):

$$f_{2t}(\gamma_0^p) = f_{1t}(\gamma_0^p) \quad (II.187)$$

Propozycja 3° – kurczenie się powierzchni granicznej niezależne (brak sprzężenia)

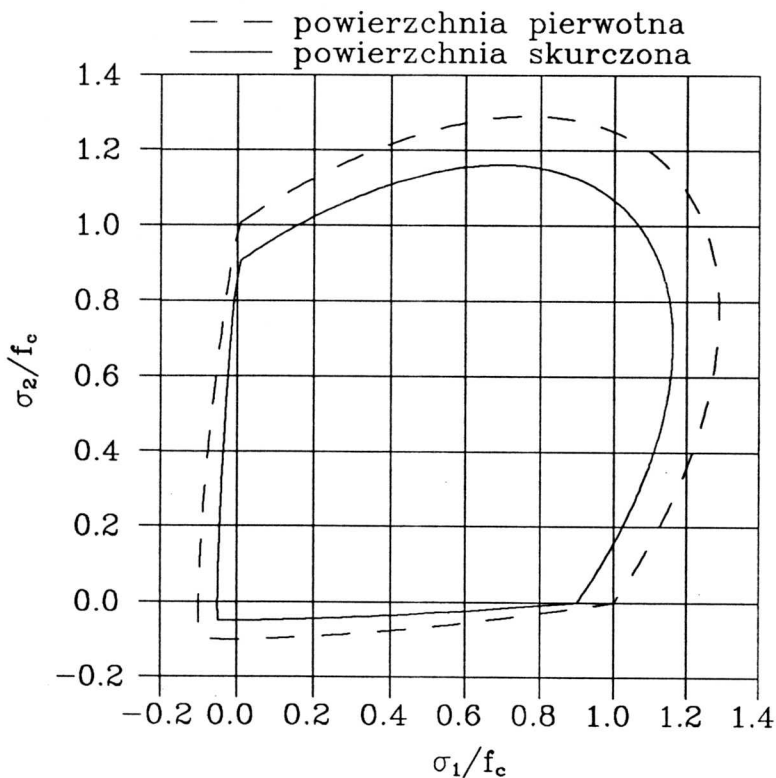
Funkcja $f_{2t}(\gamma_0^p)$ ma postać (II.1983/1)

$$f_{2t}(\gamma_0^p) \equiv 1,0 \quad (II.188)$$

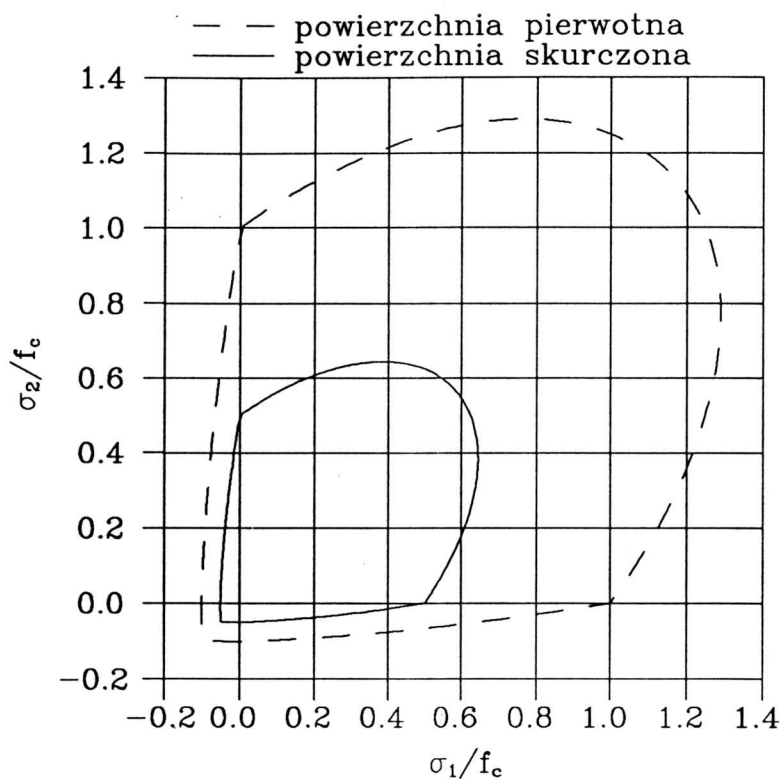
II.7.5 Określenie postaci funkcji $f_{1c}(\gamma_0^p)$

Postać funkcji $f_{1c}(\gamma_0^p)$ również powinna być ustalona na drodze doświadczalnej. W chwili obecnej takich badań brakuje. Ponieważ uszkodzenia betonu przy ściskaniu mają charakter zmiążdżenia i prowadzą do destrukcji struktury wewnętrznej materiału można domniemywać, że redukcja wytrzymałości na rozciąganie w procesie ściskania jest bardzo znaczna – większa niż przy kurczeniu się izotropowym. Przyjęcie wzorów podanych w [108] opisujących zmianę f_t^*/f_t podczas ściskania prowadzi do redukcji wytrzymałości większej niż przy kurczeniu się izotropowym – nie jest jednak jasne czy wzory te mają oparcie w badaniach eksperymentalnych. W pracy przyjęto dla uproszczenia izotropowe sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej w procesie ściskania:

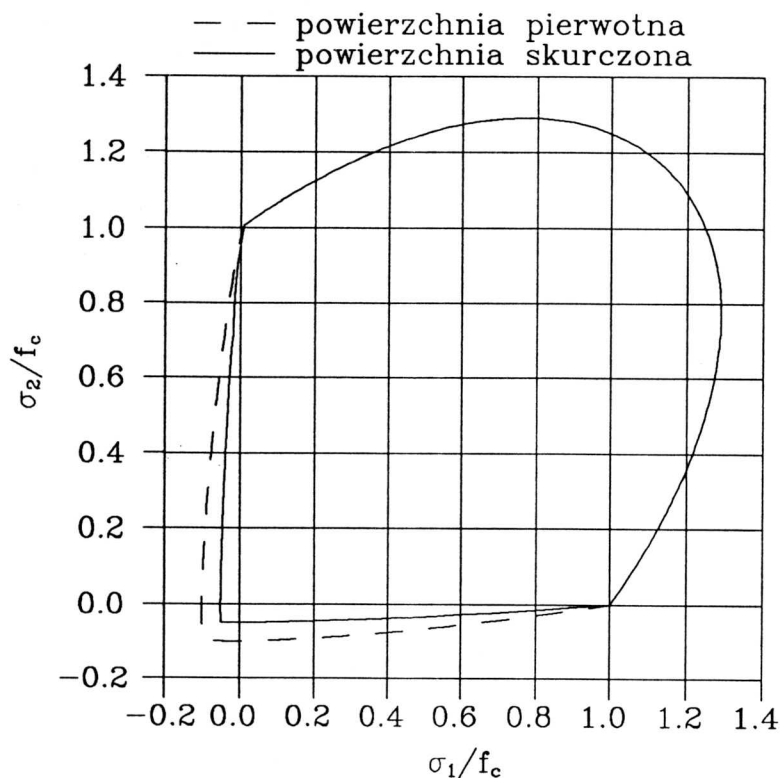
$$f_{1c}(\gamma_0^p) = f_{2c}(\gamma_0^p) \quad (\text{II.189})$$



Rys.II.47a Kurczenie się powierzchni granicznej wg propozycji 1



Rys.II.47b Kurczenie się powierzchni granicznej wg propozycji 2



Rys.II.47c Kurczenie się powierzchni granicznej wg propozycji 3

Należy zauważyć, że zastosowanie propozycji 1° lub 3° do opisu sprzężenia prowadzi do zmiany stosunku f_c^*/f_t^* w procesie obciążenia. W rezultacie zmienia się parametr c_3^* (wzór (II.171) i kształt powierzchni granicznej. Zmianę kształtu powierzchni granicznej w procesie rozciągania dla 3 przedstawionych propozycji sprzężenia kurczenia się przedstawia rys. II.47.

II.7.6 Moduły plastyczne H_p , K_p i β

Odrębnym problemem jest wyznaczenie postaci funkcji H_p , K_p i β w stanie pokrytycznym dla przypadku obciążenia pierwotnego. Wzór na moduł plastyczny H_p można uzyskać stosując warunek konsystencji:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \cdot (\sqrt{J_2})' + \frac{\partial F}{\partial I_1} (I_1)' + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{MIN}} \dot{\sigma}_{MIN} + \frac{\partial F}{\partial c_3^*} \cdot \frac{\partial c_3^*}{\partial f_t^*} \cdot \frac{df_t^*}{d\gamma_0^p} \cdot \dot{\gamma}_0^p + \\ + \frac{\partial F}{\partial c_3} \cdot \frac{\partial c_3^*}{\partial f_c^*} \cdot \frac{df_c^*}{d\gamma_0^p} \cdot \dot{\gamma}_0^p + \frac{\partial F}{\partial f_c^*} \cdot \frac{df_c^*}{d\gamma_0^p} \cdot \dot{\gamma}_0^p = 0, \end{aligned} \quad (II.190)$$

Spełnienie warunku konsystencji gwarantuje, że podczas procesu obciążenia pierwotnego w stanie pokrytycznym nie nastąpi “oderwanie się” aktualnego stanu naprężenia od powierzchni granicznej. Formalnie wyrażając $(I_1)'$ i $\dot{\sigma}_{MIN}$ poprzez prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{vol}^p$ i $\dot{\gamma}_0^p$ można ze wzoru (II.190) uzyskać wzór na H_p jako funkcję wartości modułów K_p i β oraz aktualnego kierunku prędkości odkształceń plastycznych. Wyprowadzenie jest jednak bardzo złożone i prowadzi oczywiście do otrzymania ujemnej wartości modułu H_p i w konsekwencji do ujemnie określonej macierzy sztywności sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} (wzór (II.53)). Należy zauważyć również, że stosując wzór (II.83) na moduł H_p w stanie przedkrytycznym dla przypadku wejścia na powierzchnię graniczną otrzymuje się $H_p = 0$ (dla $\delta = 0$). Powoduje to osobliwości macierzy \underline{D}_{ep} . Osobliwość lub ujemne uwarunkowanie macierzy sztywności może być przyczyną poważnych kłopotów numerycznych. W związku z tym przyjęto w pracy, że dla przypadku obciążenia pierwotnego H_p jest obliczane zawsze według wzoru (II.83) przy ograniczeniu $H_p \geq 0,01H_{p0}$. Dla stanu pokrytycznego prowadzi to do wzoru:

$$\boxed{H_p = 0,01H_{p0}} \quad (II.191)$$

Wzór powyższy jest używany przy budowaniu macierzy sztywności sprężysto – plastycznej. W celu obliczenia aktualnej wartości naprężenia w stanie pokrytycznym, dla znanego od-

kształcenia γ_0^p i co z tym idzie znanej aktualnej, skurczonej powierzchni granicznej, używa się promieniowej korekty stanu naprężenia [58] (promieniowego powrotu na powierzchnię graniczną).

Jak to przedstawiono w punkcie II.4 dla modułu objętościowego K_p obowiązuje w stanie pokrytycznym w dalszym ciągu kryterium naprężeniowe (II.68) aksjatorowego obciążenia / odciążenia. Zgodnie z tym kryterium w przypadku kurczenia się powierzchni granicznej w płaskim stanie naprężenia występuje proces aksjatorowego odciążenia, co prowadzi do wzoru:

$$\boxed{K_p = K_{p_0}}, \quad (\text{II.192})$$

dla stanu pokrytycznego.

Moduł plastyczny β wyraża się wzorem (II.108) jak dla procesu obciążenia pierwotnego. Podstawiając do tego wzoru $\delta \equiv 0$ otrzymuje się stałą wartości β w stanie pokrytycznym:

$$\boxed{\beta = \beta_u = -0,76}. \quad (\text{II.193})$$

W przypadku odciążenia w stanie pokrytycznym następuje powrót stanu naprężenia do wnętrza powierzchni granicznej i moduły plastyczne H_p , K_p i β wyrażają się wzorami z punktu II.5.2.

II.8 Obciążenia nieproporcjonalne i cykliczne

W przypadku obciążeń nieproporcjonalnych i cyklicznych problemem jest zdefiniowanie we właściwy sposób odkształcenia ścinającego oktaedrycznego plastycznego γ_0^p . Zwykle definiuje się prędkość $\dot{\gamma}_0^p$ [128]:

$$\dot{\gamma}_0^p = \sqrt{\frac{1}{3} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p}, \quad (\text{II.194})$$

a całkowita wartość γ_0^p w chwili t_1 musi być obliczona drogą całkowania:

$$\gamma_0^p = \int_0^{t_1} \dot{\gamma}_0^p dt. \quad (\text{II.195})$$

Jedynie w przypadku obciążenia proporcjonalnego i monotonicznego możliwe jest wycałkowanie tej zależności, co prowadzi do wzoru:

$$\gamma_0^p = \sqrt{\frac{1}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p}. \quad (\text{II.196})$$

Czasami przyjmuje się wzór (II.196) jako definicję odkształcenia γ_0^p [41]. Jest to oczywiście błędne, ponieważ w ogólnym przypadku obciążenia niemonotonicznego postać pochodnej $\left(\sqrt{\frac{1}{3}e_{ij}^p e_{ij}^p}\right)'$ nie pokrywa się ze wzorem (II.194), zaś wyprowadzenie związków fizycznych dane wzorami (II.13 – II.24) wymaga zdefiniowania prędkości $\dot{\gamma}_0^p$ właśnie w postaci (II.194).

Należy zauważyć, że zgodnie ze wzorem (II.194) wartość prędkości $\dot{\gamma}_0^p$ musi być nieujemna. Założenie o nieujemności $\dot{\gamma}_0^p$ stoi w sprzeczności z traktowaniem odciążenia jako procesu plastycznego. Podczas procesu odciążenia dewiatorowego zachodzi $\dot{\tau}_0 < 0$ (gdzie $\dot{\tau} = \left(\sqrt{\frac{1}{3}s_{ij}s_{ij}}\right)'$). Ponieważ moduł plastyczny H_p przy odciążeniu pozostaje dodatni, ze wzoru (II.1) wynika, że w procesie odciążenia prędkość $\dot{\gamma}_0^p$ musi być ujemna. W związku z tym poprawna definicja prędkości $\dot{\gamma}_0^p$ (dla modelu, który nie dopuszcza istnienia procesów biernych lub neutralnych) ma postać:

$$\dot{\gamma}_0^p = \pm \sqrt{\frac{1}{3}\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p}. \quad (\text{II.197})$$

Dla przypadku obciążenia pierwotnego i obciążenia wtórnego dewiatorowego we wzorze (II.197) należy przyjmować znak plus, zaś dla odciążenia znak minus. Tak przyjęta definicja $\dot{\gamma}_0^p$ jest zgodna z wynikami otrzymywanymi ze wzoru (II.1), np. podczas obciążenia pierwotnego w stanie pokrytycznym $\dot{\tau}_0 < 0$ i również $H_p < 0$, co prowadzi do wartości $\dot{\gamma}_0^p > 0$.

Należy podkreślić, że w punktach II.5.2.1 i II.5.2.2 przy wyprowadzaniu wzorów na moduły plastyczne H_{p_1} i H_{p_2} odkształcenie plastyczne γ_0^p było zdefiniowane wzorami (II.195) i (II.197). Rozpatrzono w tych punktach szczególny przypadek obciążenia niemonotonicznego lecz proporcjonalnego. Dla takiego obciążenia, zgodnie z punktem II.3 odkształcenia sprężyste są pomijalnie małe i odkształcenie plastyczne γ_0^p (dane wzorami (II.195) i (II.197)) jest równe całkowitemu odkształceniu ścinającemu oktaedrycznemu γ_0 :

$$\gamma_0^p = \gamma_0 = \sqrt{\frac{1}{3}e_{ij}e_{ij}}. \quad (\text{II.198})$$

Jak to przedstawia rys. II.32 odkształcenie γ_0^p ze wzoru (II.198) maleje w procesie odciążenia dewiatorowego; jego równoważność z całkowitym odkształceniem γ_0 ułatwia znacznie identyfikację funkcji opisujących moduły plastyczne H_{p_1} i H_{p_2} .

W ogólnym przypadku wartość odkształcenia plastycznego γ_0^p (wzór (II.195)) zależy od historii obciążenia i ma charakter zmiennej stanu. Należy zwrócić uwagę, że wartości γ_0^p , jak również wartość $\gamma_{0_u}^p$ (wzór (II.90)) są znacznie większe przy ściskaniu, niż przy rozciąganiu (rys. II.48). Oznacza to, że wyprowadzone wcześniej wzory na moduły H_{p_1} , H_{p_2} i funkcje $f_1(\gamma_0^p)$, $f_2(\gamma_0^p)$ są niepoprawne w przypadku obciążeń znakozmiennych. Możliwa jest np. sytuacja, w której podczas jednoosiowego ściskania w stanie przedkrytycznym zostanie osiągnięta wartość $\gamma_0^p \leq \gamma_{0_u}^p$, następnie po przeprowadzeniu odciążenia do zera i rozpoczęciu procesu rozciągania końcowa wartość $\gamma_0^{p RES}$ będzie znacznie większa od $\gamma_{0_u}^p$ obliczonego jak dla jednoosiowego rozciągania (pomimo stanu naprężenia pozostającego wewnątrz powierzchni granicznej). W celu uniknięcia podobnych sytuacji wygodnie jest posługiwać się odkształceniem plastycznym $\bar{\gamma}_0^p$, unormowanym tak, aby jego wartość zmieniała się zawsze od zera do 1 w procesie obciążenia pierwotnego, przebiegającego monotonicznie i proporcjonalnie od zera do powierzchni granicznej:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\gamma}}_0^p &= \pm \frac{1}{\gamma_{0_u}^p} \sqrt{\frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}, \\ \bar{\gamma}_0^p &= \int_0^t \dot{\bar{\gamma}}_0^p d\tau, \end{aligned} \quad (II.199)$$

gdzie $\dot{\bar{\gamma}}_0^p$ – prędkość unormowanego odkształcenia ścinającego oktaedrycznego plastycznego,
 $\bar{\gamma}_0^p$ – unormowane odkształcenie ścinające oktaedryczne plastyczne.

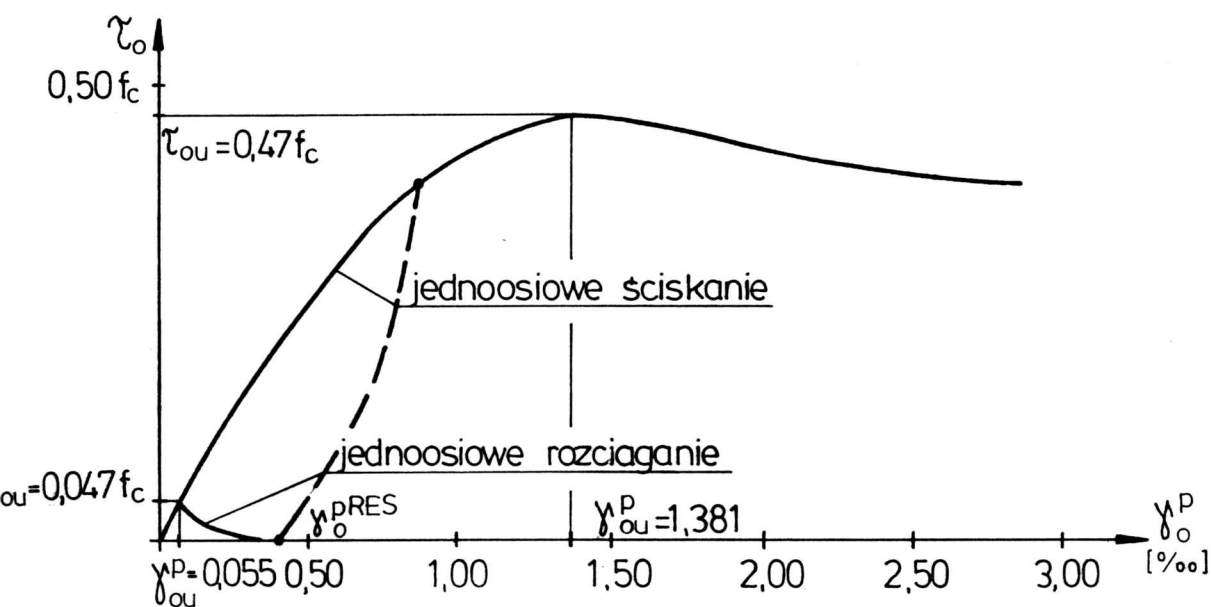
Znak plus lub minus we wzorze (II.199/1) należy przyjmować zgodnie z regułą podaną dla (II.197). Dodatkowo wprowadza się wartość maksymalną odkształcenia unormowanego $\bar{\gamma}_0^{MAX}$:

$$\bar{\gamma}_0^{MAX} = \max(\bar{\gamma}_0^p). \quad (II.200)$$

Wartości $\bar{\gamma}_0^p$ i $\bar{\gamma}_0^{MAX}$ traktowane są jako zmienne stanu i zapamiętywane, natomiast wartości γ_0^p i γ_0^{MAX} są dla każdej chwili procesu obliczane według wzorów:

$$\begin{aligned} \gamma_0^p &= \gamma_{0_u}^p \cdot \bar{\gamma}_0^p, \\ \gamma_0^{MAX} &= \gamma_{0_u}^p \cdot \bar{\gamma}_0^{MAX}. \end{aligned} \quad (II.201)$$

Jeśli obciążenie jest proporcjonalne i nie zmienia znaku, to odkształcenie $\gamma_{0_u}^p$ pozostaje stałe podczas tego obciążenia.



Rys. II.48 Zależność $\tau_0 - \gamma_0^p$ (jednoosiowe ściskanie i rozciąganie)

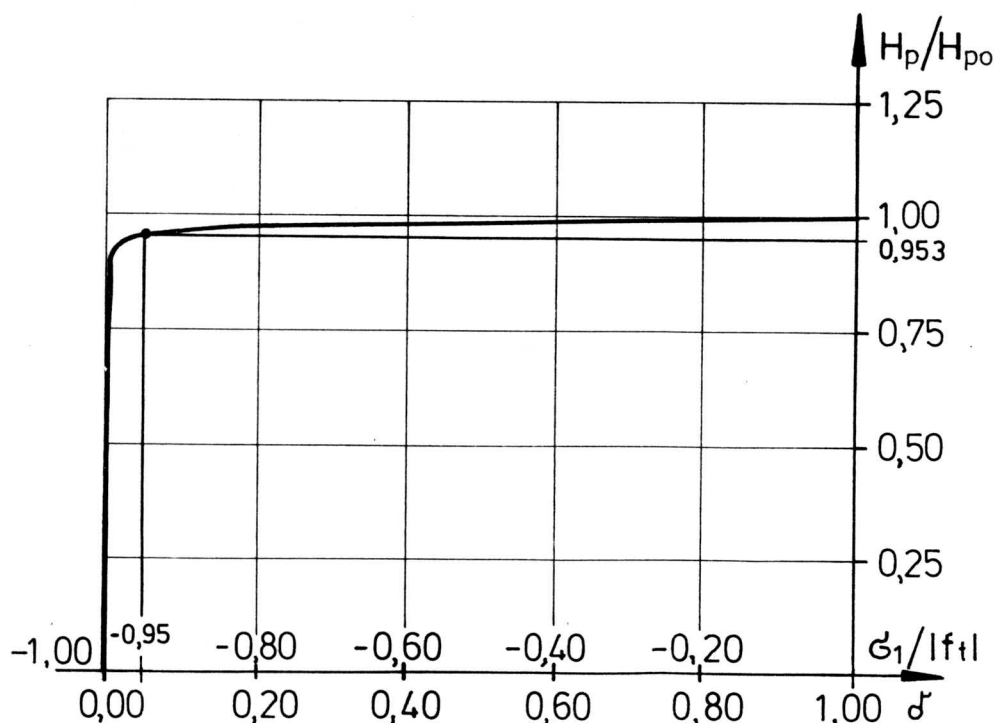
Wówczas wartość γ_0^p wyrażona zależnościami (II.199) i (II.201) pozostaje taka sama jak obliczona przy pomocy “klasycznego” podejścia (wzory (II.195) i (II.197)).

W proponowanym opisie odkształcenie $\bar{\gamma}_0^p$ ma charakter parametru skalarnego opisującego zaawansowanie odkształceń plastycznych w historii obciążenia, podobnie jak parametr *Odqvista*. Osobliwością podejścia jest unormowanie tego parametru, uzasadnione faktem, że dla materiałów kruchych zniszczenie przy rozciąganiu następuje przy znacznie mniejszych wartościach naprężeń i odkształceń niż przy ściskaniu. Podobnie zdefiniowane parametry skalarne można znaleźć w [82], [5].

Dodatkowo przy obciążeniach cyklicznych może dojść do sytuacji w której odkształcenie $\gamma_0^p > \gamma_{ou}^p$ przy aktualnym stanie naprężenia pozostającym we wnętrzu powierzchni granicznej. W pracy przyjęto, że wówczas powierzchnia graniczna ulega skurczeniu według wzorów (II.172) (mimo, że $\delta > 0$ i $H_p > 0$). Takie podejście dość dobrze odpowiada rzeczywistemu zachowaniu się betonu przy obciążeniach cyklicznych [63].

Zdaniem autora proponowany model betonu po wprowadzeniu zmodyfikowanej definicji odkształcenia γ_0^p (wzór (II.201)) nadaje się do opisu dowolnych ścieżek obciążenia w płaskim stanie naprężenia. Stanowią o tym: dobór dwóch różnych funkcji opisujących kurczenie się powierzchni granicznej w zakresie dominujących ściskania lub rozciągania, przyjęcie właściwych funkcji opisujących moduły plastyczne. Należy zauważyć, że zgodnie z punktem II.4 w strefie rozciągania (dokładnie dla $\sigma_0 \leq 0$) każdy proces jest traktowany jako hydrostatyczne odciążenie i przyjmowana jest stała wartości modułu $K_p = K_{p0}$. Z kolei przy opisie modułu H_p (wzór (II.83)) współczynnik ω silnie zależy od stanu naprężenia. Przykładowo dla wartości stałych materiałowych $n = 1,98$, $m = 1,57$ (zgodnie z tabl. II.9 dla $f_c = 32,4 \text{ MPa}$) ze wzoru (II.94) otrzymuje się dla jednoosiowego ściskania $\omega = 0,608$, zaś dla jednoosiowego rozciągania (dla $f_t = -0,10f_c$) jest $\omega = 0,016$. Tak niska wartość wykładnika potęgowego we wzorze (II.83) powoduje, że wartość H_p jest prawie stała w zakresie naprężeń $\sigma_1 \in \langle 0,95f_t, 0 \rangle$ (rys. II.49).

Przyjęcie praktycznie stałych wartości modułów plastycznych przy rozciąganiu dobrze koresponduje z obserwacjami, że zachowanie się materiału jest w takim przypadku sprężyste, prawie aż do osiągnięcia wytrzymałości.



Rys. II.49 Moduł H_p przy jednoosiowym rozciąganiu

Badania doświadczalne nie wskazują jasno, jak zmienia się współczynnik β przy rozciąganiu. Do osiągnięcia wytrzymałości zmiana objętości jest praktycznie liniowa (badania *H.Kupfera* [68]), zaś w zakresie pokrytycznym brak jest pomiarów odkształceń poprzecznych. Fizyczny mechanizm zniszczenia przy rozciąganiu (poprzez pęknięcie) sugeruje, że dylatacja w takim przypadku nie ma miejsca. Wydaje się więc, że uzasadnione byłoby przyjęcie $\beta \equiv 0$ dla stanów naprężenia, w których dominuje rozciąganie. W pracy przyjęto, dla uproszczenia modelu, że β wyraża się wzorem (II.108) niezależnie od stanu naprężenia. Z testów numerycznych wynika, że wpływ β na zachowanie się przy rozciąganiu jest niewielki.

Wzory na moduły plastyczne H_p, K_p i β przyjęte w punkcie II.5 zapewniają także dobrą zgodność z wynikami doświadczalnymi dla obciążenia cyklicznego przy ściskaniu i rozciąganiu. Degradacja sztywności jest opisywana poprzez zmianę wartości początkowych modułów H_{p_1} i H_{p_2} przy odciążeniu i powtórny obciążeniu w zależności od wartości odkształcenia γ_0^{MAX} . Koncepcja opisu degradacji poprzez zmianę początkowych cech materiałowych jest zbliżona do podejścia stosowanego w kontynualnej mechanice uszkodzeń [18]. Zmniejszenie wartości modułu postaciowego H_p podczas odciążenia i obciążenia wtórnego przy utrzymaniu stałej wartości modułu $K_p = K_{p_0}$ powoduje znacznie większe przyrosty odkształceń poprzecznych przy jednoosiowym ściskaniu w stosunku do obciążenia pierwotnego. Brak jest eksperymentalnej weryfikacji tego faktu. Przyjęty model nie odwzorowuje w sposób dokładny zjawisk obserwowanych przy przechodzeniu z odciążenia przy rozciąganiu do wtórnego obciążenia przy ściskaniu (rys. II.44). Wówczas po zmianie znaku naprężenia σ_1 (przejściu z rozciągania do ściskania) początkowo utrzymuje się mała sztywność – jak przy odciążeniu. Dopiero dla poziomego naprężenia $\sigma_1 \approx -f_t$ następuje wzrost sztywności. Jest to związane prawdopodobnie z zamykaniem się rys. W przyjętym modelu zmiana sztywności jest związana z przejściem od odciążenia do wtórnego obciążenia, co ma miejsce dla $\sigma_1 = 0$. Dokładniejsze odwzorowanie zmian sztywności w tym przypadku musiałoby się łączyć ze znacznymi zmianami kryteriów obciążenie – odciążenie.

Osobnym problemem, wymagającym testów numerycznych i odpowiedniej weryfikacji doświadczalnej, jest poprawny opis uszkodzeń materiału podczas zmiany kierunków głów-

nych naprężenia w przestrzeni. Uwzględnienie kierunkowego charakteru uszkodzeń dla rozciągania wymagałoby wprowadzenia tensorowej miary uszkodzeń. Jest to możliwe w modelach opartych na kontynualnej mechanice uszkodzeń [52], natomiast teoria plastyczności nie daje takich możliwości [14]. Obliczenia przedstawione w części III potwierdzają, że dla celów praktycznych wystarczającym jest izotropowy opis uszkodzeń materiału przy rozciąganiu. Podobne postępowanie jest szeroko stosowane w modelach betonu z tzw. rysami obracającymi się [98], [34], [78].

II.9 Podstawowe cechy modelu

Opracowany model betonu charakteryzuje się następującymi cechami:

1. Model jest zbudowany w oparciu o teorię plastyczności z powierzchnią graniczną przy zredukowaniu do zerowych wymiarów bieżącej powierzchni plastyczności. Nie posługiwano się koncepcją powierzchni potencjału plastycznego, lecz wprowadzono trzy niezależne mechanizmy plastyczne. W punkcie II.2 wykazano, że koncepcja opisu zachowania się betonu przy użyciu kilku niezależnych mechanizmów plastycznych jest dobrze uzasadniona doświadczalnie i była stosowana w licznych pracach.
2. Przyjmując założenia przedstawione w punkcie II.1 wyprowadzono prędkościowe związki fizyczne w przypadku ogólnym oraz dla płaskiego stanu naprężenia. Przedstawiono oryginalne wzory dla macierzy \underline{D}_{ep} w płaskim stanie naprężenia. Wykorzystując te wzory dla przypadku procesu obciążenia o niezmiennych w przestrzeni kierunkach naprężeń głównych otrzymuje się pomijalnie małe wartości części sprężystej prędkości odkształceń $\dot{\underline{\epsilon}}_e$, natomiast w przypadku zmiany kierunków naprężeń głównych $\dot{\underline{\epsilon}}_e$ ma wartości skończone. Takie podejście prowadzi do poprawnych fizycznie wyników dla dowolnych ścieżek obciążenia.
3. W punkcie II.4 wprowadzono własne, konsystentne z przyjętymi mechanizmami plastycznymi, kryteria obciążenia pierwotnego, wtórnego i odciążenia. Są one sformułowane oddzielnie dla części dewiatorowej i aksjatorowej naprężenia.

4. Wykorzystując badania doświadczalne *H.Kupfera* dla płaskiego stanu naprężenia [68] sformułowano w punkcie II.5 oryginalne wzory na moduły plastyczne H_p , K_p i β dla obciążenia pierwotnego i szczegółowo przeanalizowano wartości stałych i funkcji materiałowych, zastosowanych w tych wzorach. Następnie, bazując na wynikach doświadczalnych dla jednoosiowego cyklicznego ściskania wyprowadzono własne wzory dla modułów H_p , K_p i β dla przypadków odciążenia i obciążenia wtórnego.
5. Przyjęte w pracy wzory dla funkcji modułów plastycznych H_p , K_p i β dla obciążenia pierwotnego charakteryzują się prostotą i zależą wyłącznie od parametrów naprężeniowych. Umożliwia to wyciągnięcie fizycznych związków prędkościowych i otrzymanie zamkniętych wzorów na składowe odkształcenia, dla zadanych wartości naprężenia. Szczegółowy tok postępowania przedstawiono w Załączniku Z6.
6. Wykorzystując badania *H.Kupfera* i własne analizy numeryczne wprowadzono w punkcie II.5 wzory aproksymujące wartości parametrów materiałowych H_{p0} , K_{p0} , m , n jako funkcje f_c i ε_0 . Ostatecznie dla wykorzystania modelu do celów obliczeniowych potrzebna jest znajomość 4 stałych materiałowych: f_c , f_t , ε_0 i h .
7. Dla opisu powierzchni granicznej przyjęto równanie *Hsieha – Tinga – Chena* [57]. W punkcie II.6 przedstawiono własną modyfikację tego równania w celu uwzględnienia dowolnego stosunku f_t/f_c .
8. Wprowadzono własny opis kurczenia się powierzchni granicznej, poprzez oddzielne zdefiniowanie w punkcie II.7 dwóch funkcji $f_1(\gamma_0^p)$ i $f_2(\gamma_0^p)$ opisujących redukcję wytrzymałości, odpowiednio na rozciąganie i ściskanie. Występujący we wzorze na $f_1(\gamma_0^p)$ parametr materiałowy h umożliwia uzyskanie obiektywnych wyników dla mięknienia materiału przy rozciąganiu niezależnie od wymiarów elementów skończonych. Przedstawiono trzy propozycje sprzężenia redukcji wytrzymałości na ściskanie z redukcją wytrzymałości na rozciąganie podczas procesu rozciągania, a mianowicie: kurczenie się powierzchni granicznej izotropowe, kurczenie nieizotropowe, kurczenie niezależne (brak sprzężenia).

9. Zdefiniowano unormowane odkształcenia plastyczne $\bar{\gamma}_0^p$ i $\bar{\gamma}_0^{MAX}$, które mają charakter zmiennych stanu i opisują degradację materiału w sposób obiektywny (punkt II.8). Przy ich wykorzystaniu do opisu modułu H_p oraz funkcji $f_1(\gamma_0^p)$ i $f_2(\gamma_0^p)$ możliwe jest poprawne odwzorowanie dowolnych procesów obciążenia dla płaskiego stanu naprężenia (włączając w to obciążenie cykliczne i znakozmienne).

Na zakończenie w tabl. II.14 zestawiono stałe materiałowe i zmienne konieczne do pamiętania w procesie obliczeń. Część ze stałych materiałowych $K_{p_0}, H_{p_0}, \dots, p_3$ jest niezmienna i nie zależy od właściwości betonu, zaś pozostałe są obliczane odpowiednimi wzorami jako funkcje podstawowych stałych materiałowych f_c, f_t, ε_0 i h .

Związek fizyczny
$\dot{\sigma} = \underline{D}_{ep} \dot{\varepsilon}$
Podstawowe stałe materiałowe (zadawane przez użytkownika)
$f_c, f_t, \varepsilon_0, h$
Pozostałe stałe materiałowe
$K_{p_0}, H_{p_0}, E_0, E, \nu, m, n, a, b, c, c_1, c_2, c_4, p_1, p_2, p_3$
Zmienne pamiętane w procesie obliczeń
$\underline{\sigma}, \sigma_0^{MAX}, \delta_{min}, \delta_{max}, \bar{\gamma}_0^p, \bar{\gamma}_0^{MAX}, f_c^*, f_t^*$

Tablica II.14 Stałe materiałowe i pamiętane zmienne

Rozdział III

Weryfikacja numeryczna

Przedstawione w części III testy numeryczne modelu mają dwa zasadnicze cele:

1. weryfikację modelu, tzn. wykazanie, że prezentowany model betonu daje wyniki zgodne z dostępnymi danymi doświadczalnymi,
2. zastosowanie modelu do obliczeń realnych konstrukcji, co z kolei powinno dowieść praktycznej przydatności modelu.

Dla zrealizowania celu 1. przeprowadzono szereg testów na szczelbu punktu materialnego wykorzystując własne programy (napisane w języku FORTRAN). Za ich pomocą otrzymano ścieżki naprężenie – odkształcenie dla proporcjonalnych obciążeń monotonicznych i cyklicznych oraz obciążeń nieproporcjonalnych. Przeprowadzone obliczenia zostały przedstawione w punkcie III.1.

Cel 2. zrealizowano przez zaimplementowanie modelu betonu do programu MES o nazwie ATFEM, autorstwa *A. Trutego* [115]. Używając tego programu wykonano obliczenia dla kilku konstrukcji żelbetowych, znajdujących się w płaskim stanie naprężenia. Przy wyborze przykładów starano się dobierać konstrukcje dobrze opisane w literaturze, dla których znana jest pełna ścieżka obciążenie – przemieszczenie. Opis przeprowadzonych obliczeń zawiera punkt III.2.

Zasadniczym celem pracy było opracowanie modelu betonu dla opisu złożonych przypadków płaskiego stanu naprężenia. Z tego powodu nie rozważono szczegółowo takich problemów jak np. dobór właściwych technik numerycznych (między innymi, numerycznego całkowania) czy też dyskretyzacji skończenie – elementowej konstrukcji.

Dobór odpowiednich metod numerycznych nie jest sprawą zupełnie oczywistą, nawet już dla prostych modeli plastyczności ze stowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego [58].

Opracowanie dyskretnego modelu MES dla konstrukcji żelbetowych wymaga między innymi uwzględnienia stali zbrojeniowej. W pracy wykorzystano do tego celu istniejący w programie ATFEM element kratowy, dwuwęzłowy idealnie sprężysto – plastyczny. Przyjęto również istnienie pełnej przyczepności pomiędzy betonem i stalą. Beton dyskretyzowano za pomocą czterowęzłowych czworokątnych elementów izoparametrycznych.

III.1 Zależności naprężenie – odkształcenie

III.1.1 Własne programy komputerowe

Dla otrzymania pełnych ścieżek naprężenie – odkształcenie opracowano trzy różne programy. Różnią się one danymi przyjmowanymi za zmienne wejściowe do obliczeń, natomiast większość podprogramów opisujących związki fizyczne przedstawione w części drugiej pracy jest wspólna dla wszystkich programów.

Program STRAIN – na każdym kroku obliczeniowym zadawany jest wektor przyrostu odkształcenia $\Delta \underline{\varepsilon} = (\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \gamma_{xy})^T$. Na jego podstawie oblicza się wektor przyrostu naprężenia $\Delta \underline{\sigma} = (\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \tau_{xy})^T$ oraz przyrost odkształcenia poprzecznego $\Delta \varepsilon_z$. Sumując przyrosty naprężenia z kolejnych kroków obliczeniowych otrzymuje się całkowity stan naprężenia dla zadanej historii odkształcenia. Program ten umożliwia opisanie stanu pokrytycznego, natomiast nie można otrzymać z jego pomocą proporcjonalnych ścieżek obciążenia w przestrzeni naprężeń.

Program STRESS – na każdym kroku obliczeniowym zadawany jest wektor przyrostu naprężenia $\Delta \underline{\sigma}$. W wyniku obliczeń otrzymuje się wektor przyrostu odkształcenia $\Delta \underline{\varepsilon}$ oraz przyrost odkształcenia poprzecznego $\Delta \varepsilon_z$. Program ten umożliwia otrzymanie wielkości całkowitych odkształceń dla zadanego programu naprężeń – co jest przydatne, między innymi, przy analizie obciążeń cyklicznych. Nie można jednak za jego pomocą analizować stanu pokrytycznego.

Program MIXED – na każdym kroku obliczeniowym zadawany jest wektor przyrostu naprężenia $\Delta \underline{\sigma}$. Służy on jednak wyłącznie dla ustalenia wzajemnych stosunków składo-

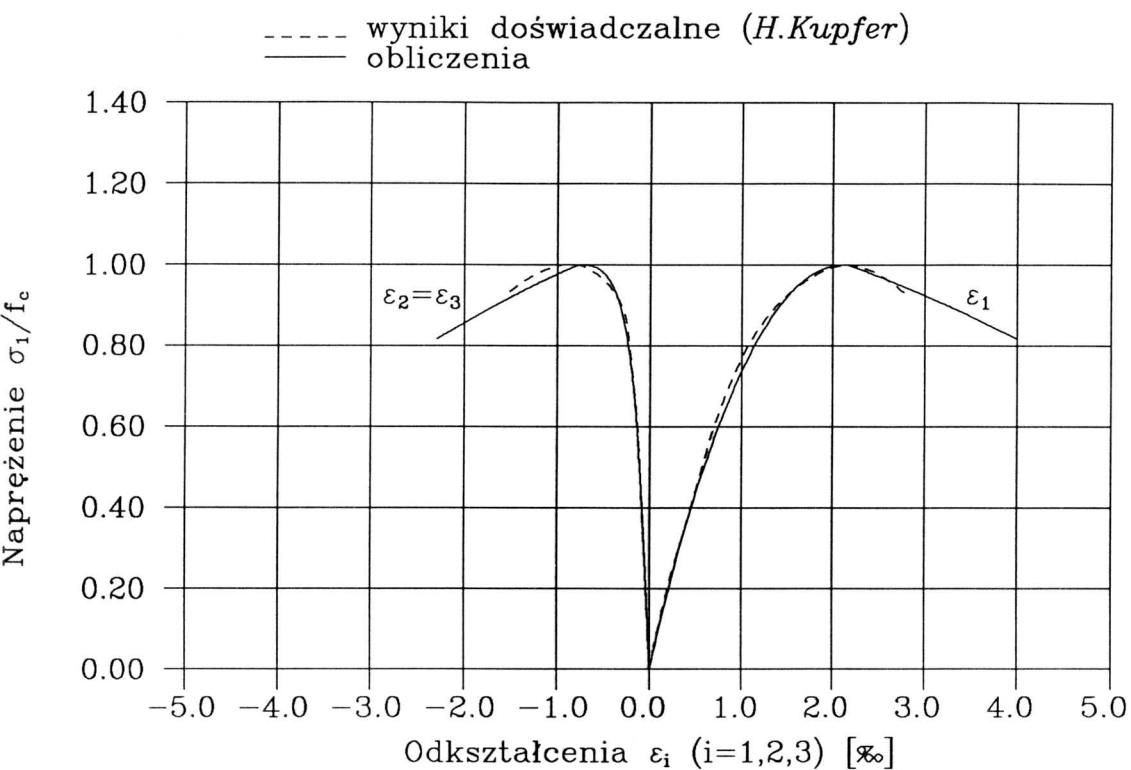
wych stanu naprężenia na danym kroku (czyli kierunku ścieżki obciążenia w przestrzeni naprężeń). Rzeczywisty przyrost naprężeń wynosi $\lambda \cdot \Delta\sigma$. W celu jednoznacznego ustalenia wartości mnożnika λ (dodatniej lub ujemnej) podaje się na każdym kroku przyrostowym założoną z góry wartość przyrostu odkształcenia $\Delta\varepsilon_x$. Na wyjściu otrzymuje się rzeczywisty wektor przyrostu naprężenia $\lambda \cdot \Delta\sigma$, wektor przyrostu odkształcenia $\Delta\varepsilon$ (gdzie wartość $\Delta\varepsilon_x$ jest znana z góry) oraz przyrost odkształcenia poprzecznego $\Delta\varepsilon_z$. Program ten umożliwia osiągnięcie stanu pokrytycznego przy zadanej proporcjonalnej ścieżce obciążenia w przestrzeni naprężeń.

We wszystkich trzech programach prędkościowe związki fizyczne całkowano metodą *Eulera*. W przypadku stanu pokrytycznego, na końcu kroku przyrostowego stosowano promieniową korektę stanu naprężenia zapewniającą pozostawanie na powierzchni granicznej. Z uwagi na wykorzystanie jawnych wzorów z części II pracy na macierz sprężysto – plastyczną D_{ep} i macierz odwrotną C_{ep} niesymetria macierzy D_{ep} nie stanowiła problemu. W celu uzyskania zadowalającego poziomu dokładności obliczeń stosowano możliwie małe wielkości kroków przyrostowych. Zwykle ścieżki naprężenie – odkształcenie prezentowane w punktach III.1.2 i III.1.3 były obliczane przy użyciu $300 \div 400$ kroków przyrostowych.

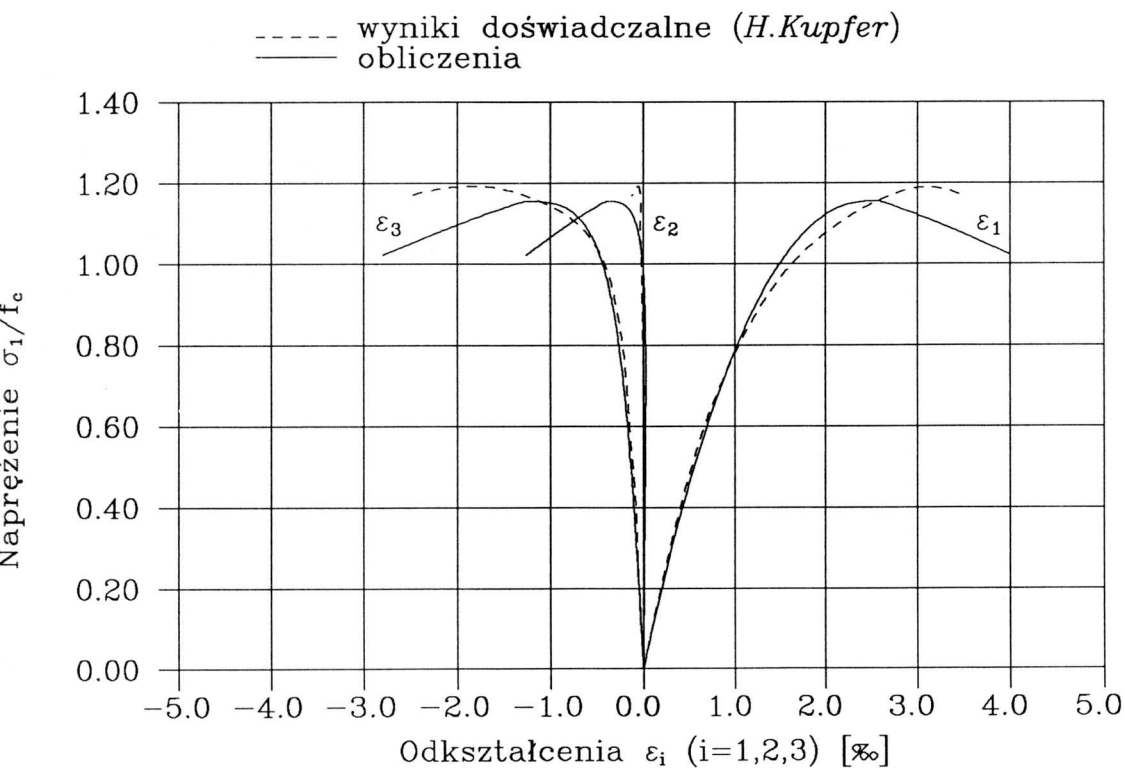
III.1.2 Monotoniczne obciążenia proporcjonalne

III.1.2.1 Porównanie z wynikami doświadczeń *H.Kupfera*

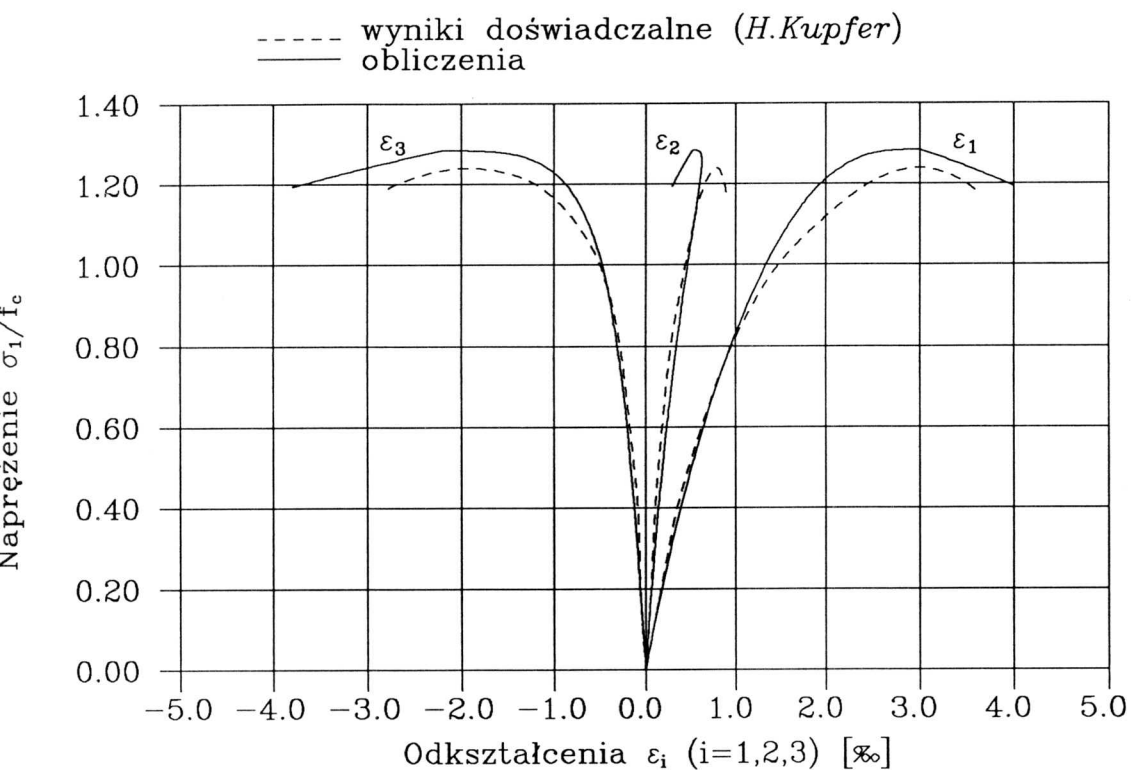
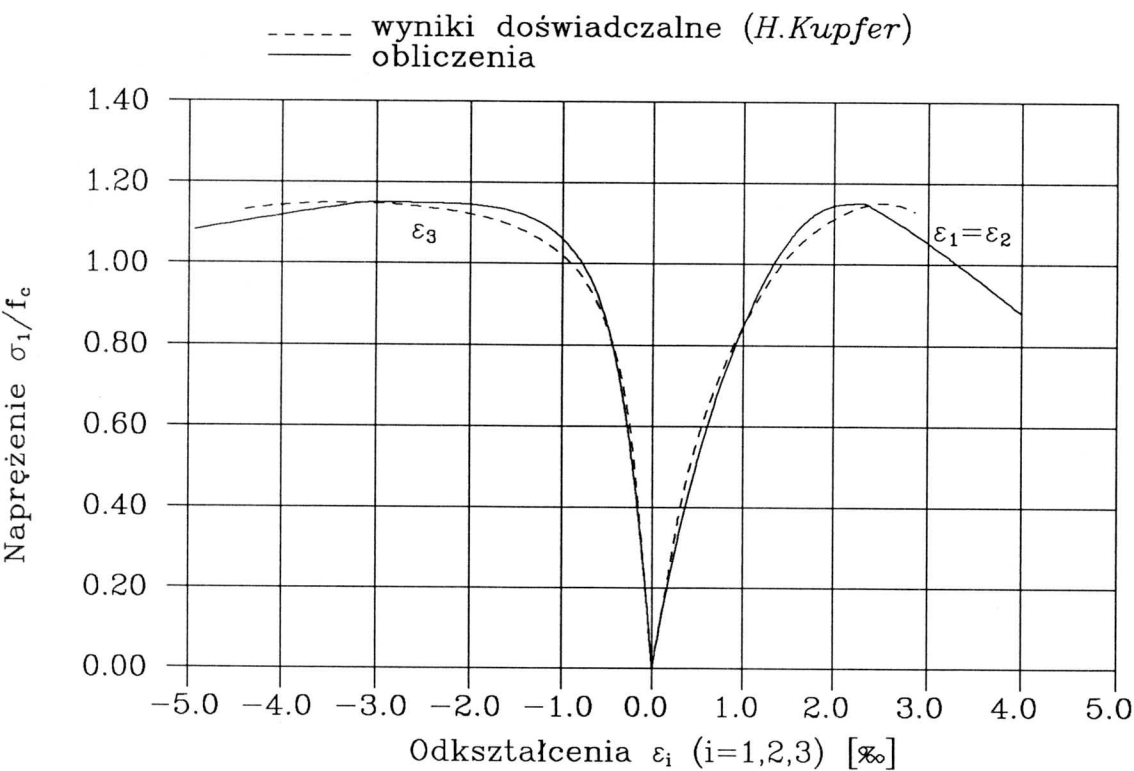
Do porównań wybrano wyniki badań doświadczalnych *H.Kupfera* [68], wspomniane już w punkcie II.5, kierując się ich wszechstronnością. Program tych badań obejmował monotoniczne proporcjonalne ścieżki obciążenia w płaskim stanie naprężenia dla wszystkich zakresów: ściskanie – ściskanie, ściskanie – rozciąganie, rozciąganie – rozciąganie. Przeprowadzenie obliczeń numerycznych dla tych samych ścieżek obciążenia umożliwia więc całościową weryfikację modelu. Poważnym brakiem badań *H.Kupfera* było jednakże nieosiągnięcie stanu pokrytycznego dla zakresów: ściskanie – rozciąganie i rozciąganie – rozciąganie. Związane to było z zastosowaniem sterowania przyrostami sił (poprzez siłowniki hydrauliczne) a nie przemieszczeń.



Rys.III.1 Zależności $\sigma_1 - \varepsilon_i$ dla zakresu ściskanie-ściskanie, $k = 0,0$



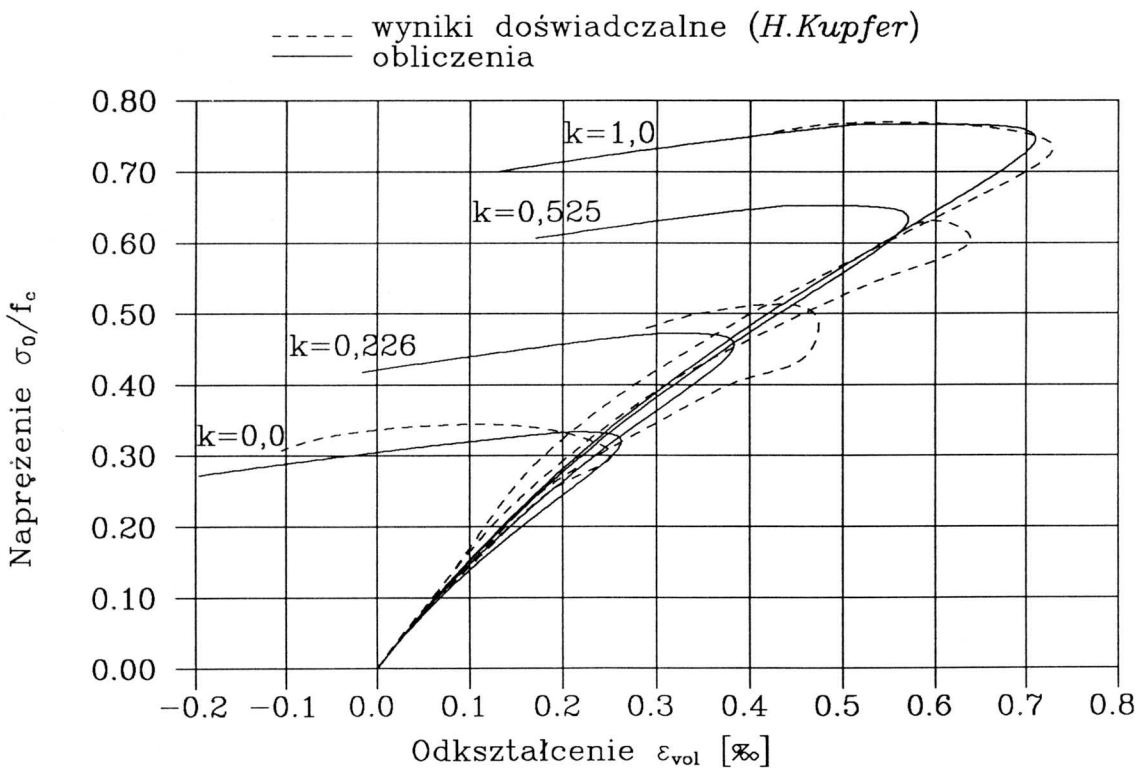
Rys.III.2 Zależności $\sigma_1 - \varepsilon_i$ dla zakresu ściskanie-ściskanie, $k = 0,226$

Rys.III.3 Zależności $\sigma_1 - \varepsilon_i$ dla zakresu ściskanie-ściskanie, $k = 0,525$ Rys.III.4 Zależności $\sigma_1 - \varepsilon_i$ dla zakresu ściskanie-ściskanie, $k = 1,0$

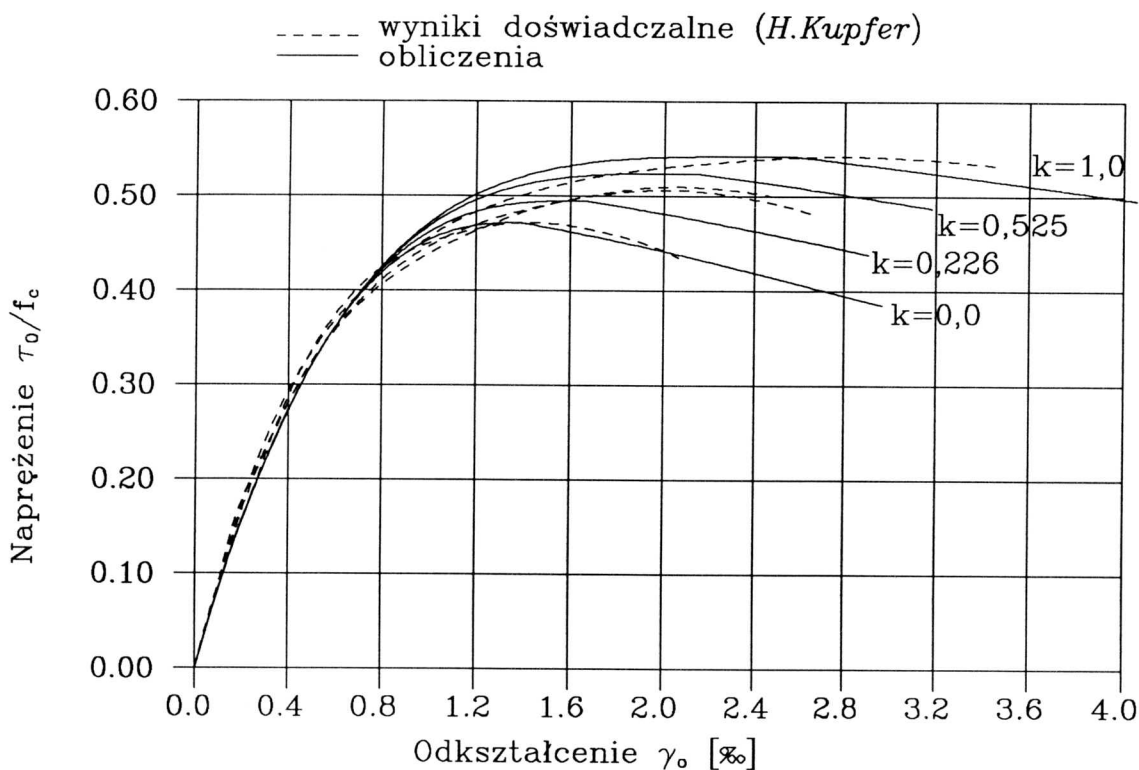
Tak więc badania *H.Kupfera* należy uznać za miarodajne przede wszystkim dla stanu przedkrytycznego.

Stałe materiałowe uzyskane z badań i przyjęte dla modelu podane są w Załączniku Z7. Na rysunkach ilustrujących obliczenia wyniki doświadczalne oznaczone są linią przerywaną, natomiast wyniki obliczeń numerycznych linią ciągłą.

Rys. III.1÷4 przedstawiają zależności $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$) dla zakresu ściskanie – ściskanie przy czterech różnych stosunkach naprężeń głównych $k = \sigma_2/\sigma_1$. Istnieje bardzo dobra zgodność obliczeń i wyników doświadczalnych dla $k = 0,0$ i $k = 1,0$. Dotyczy ona zarówno odkształceń w płaszczyźnie przyłożonych naprężeń, jak i odkształcenia poprzecznego. Nieco gorszą zgodność otrzymuje się dla $k = 0,226$ i $k = 0,525$. Rozbieżności pomiędzy obliczeniami i doświadczeniem uwidaczniają się dopiero dla wysokich poziomów obciążenia. Są one spowodowane przede wszystkim różnicą pomiędzy rzeczywistymi wartościami naprężeń granicznych a wartościami otrzymanymi z równania powierzchni granicznej dla tych wartości k (patrz rys. II.40).



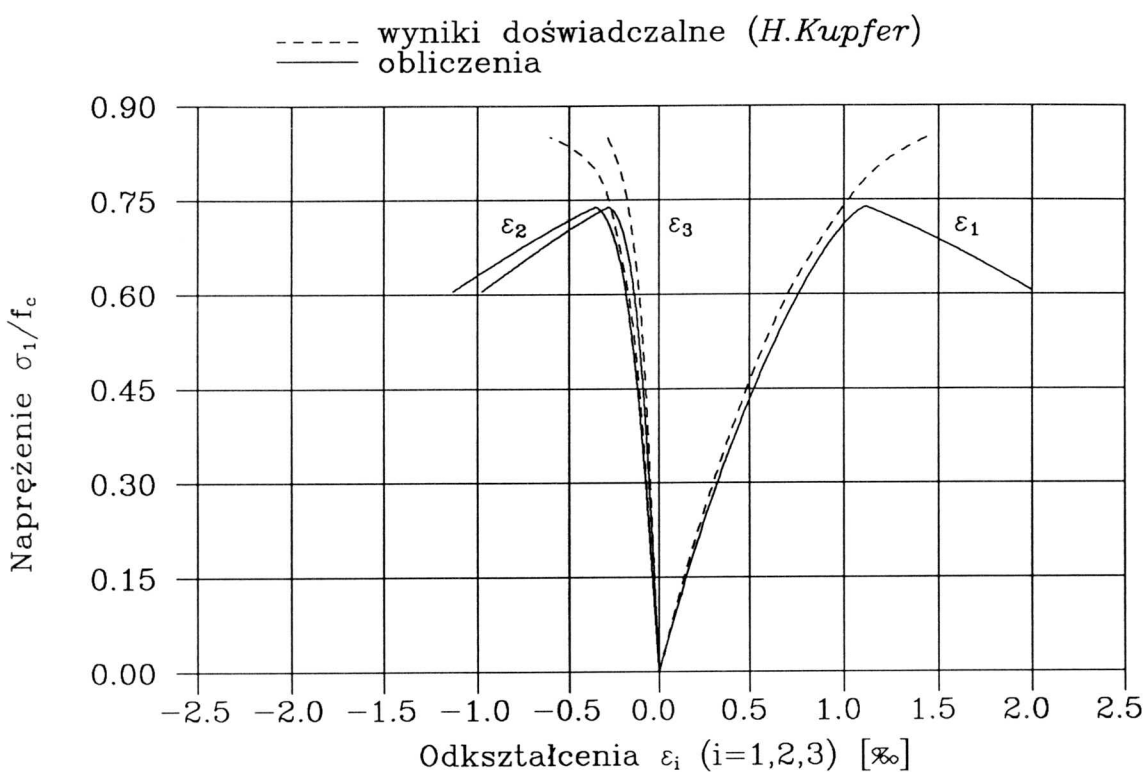
Rys.III.5 Zależności $\sigma_0 - \varepsilon_{vol}$ dla zakresu ściskanie – ściskanie



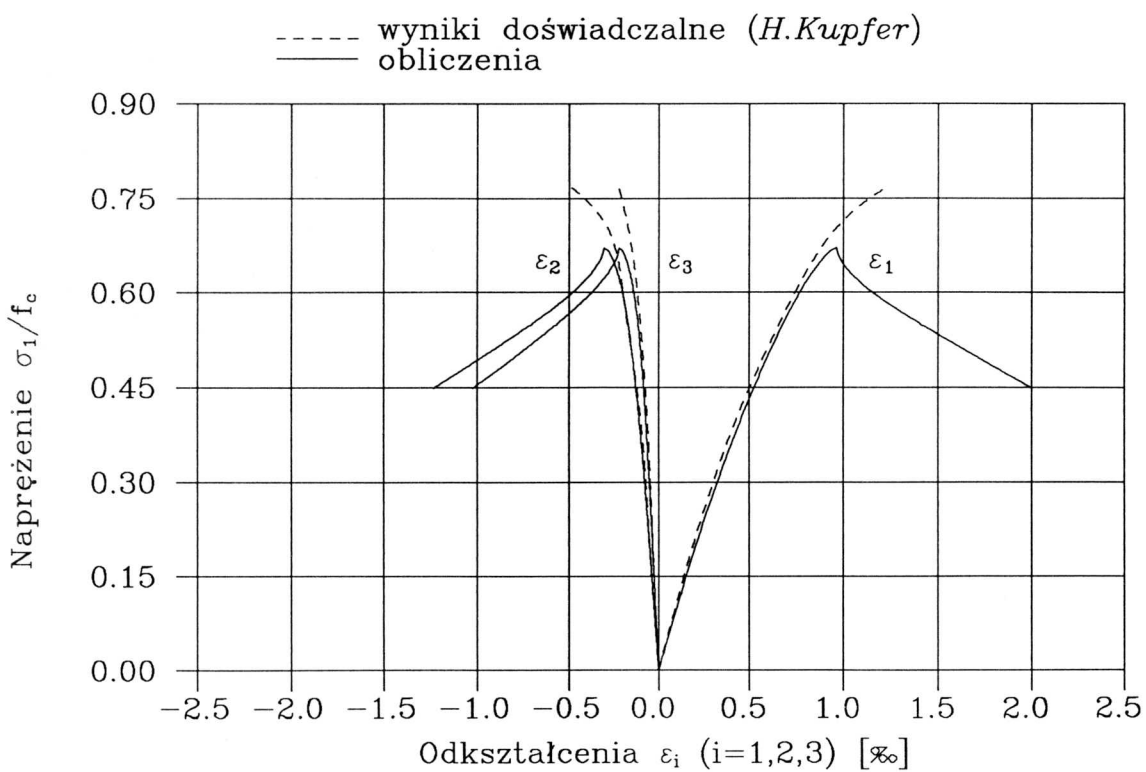
Rys.III.6 Zależności $\tau_0 - \gamma_0$ dla zakresu ściskanie–ściskanie

Dla $k = 0,525$ obserwuje się niezgodny z doświadczeniem przebieg odkształceń ε_2 w stanie pokrytycznym. Podobną niezgodność wykazują także niektóre inne modele betonu [55], [80].

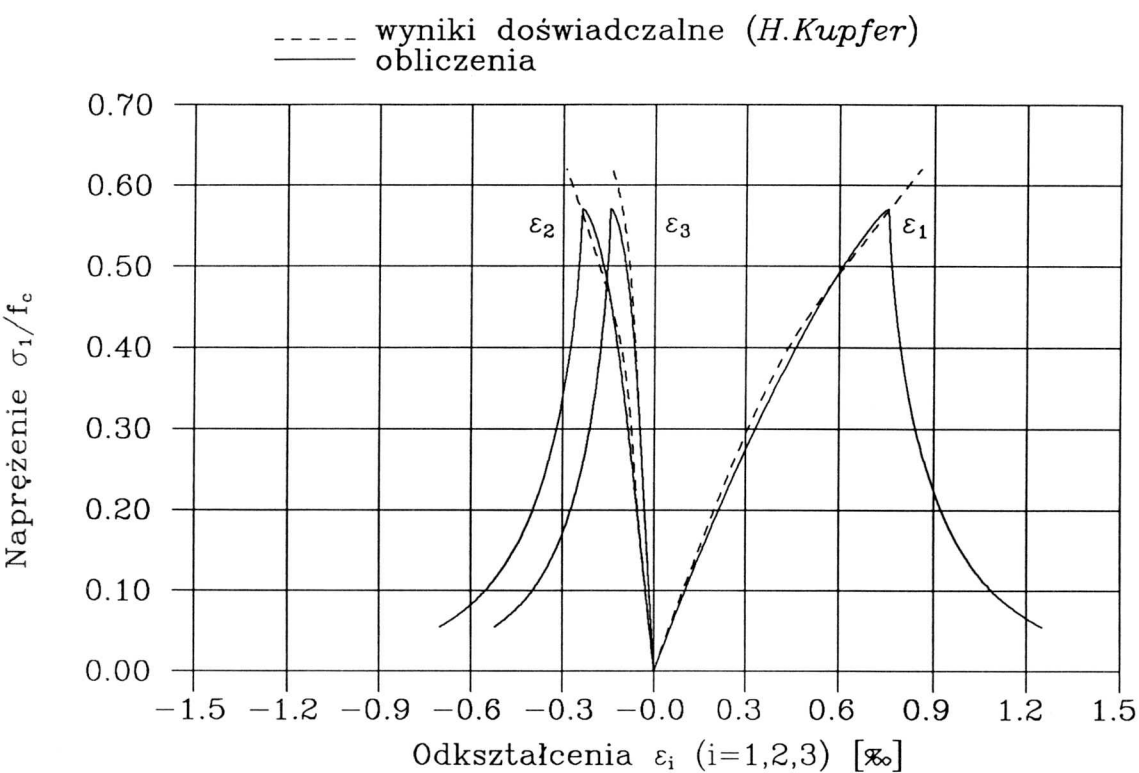
Rys. III.5 przedstawia przebieg odkształceń objętościowych ε_{vol} w zależności od wartości odkształcenia średniego σ_0/f_c dla zakresu ściskanie – ściskanie. Tak samo jak dla zależności $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ najlepszą zgodność z doświadczeniem otrzymano dla $k = 0,0$ i $k = 1,0$. Dla wszystkich wartości k obliczenia w poprawny sposób odwzorowują charakterystyczne zachowanie się betonu – przy niskich poziomach obciążenia nieliniowe zmniejszenie objętości (ściśnienie), przy poziomach obciążenia zbliżonych do wartości granicznej oraz w stanie pokrytycznym nagły przyrost objętości (dylatacja). Rys. III.6 prezentuje zależność naprężenie ścinające oktaedryczne τ_0/f_c - odkształcenie ścinające oktaedryczne γ_0 . Dobra zgodność z doświadczeniem świadczy, że zaproponowana prosta postać funkcji dla modułu H_p przy obciążeniu pierwotnym jest wystarczająca. Największe rozbieżności pomiędzy obliczeniami i doświadczeniem występują dla wartości τ_0/f_c bliskich naprężeniu granicznemu, dla których krzywe doświadczenia są bardziej płaskie.



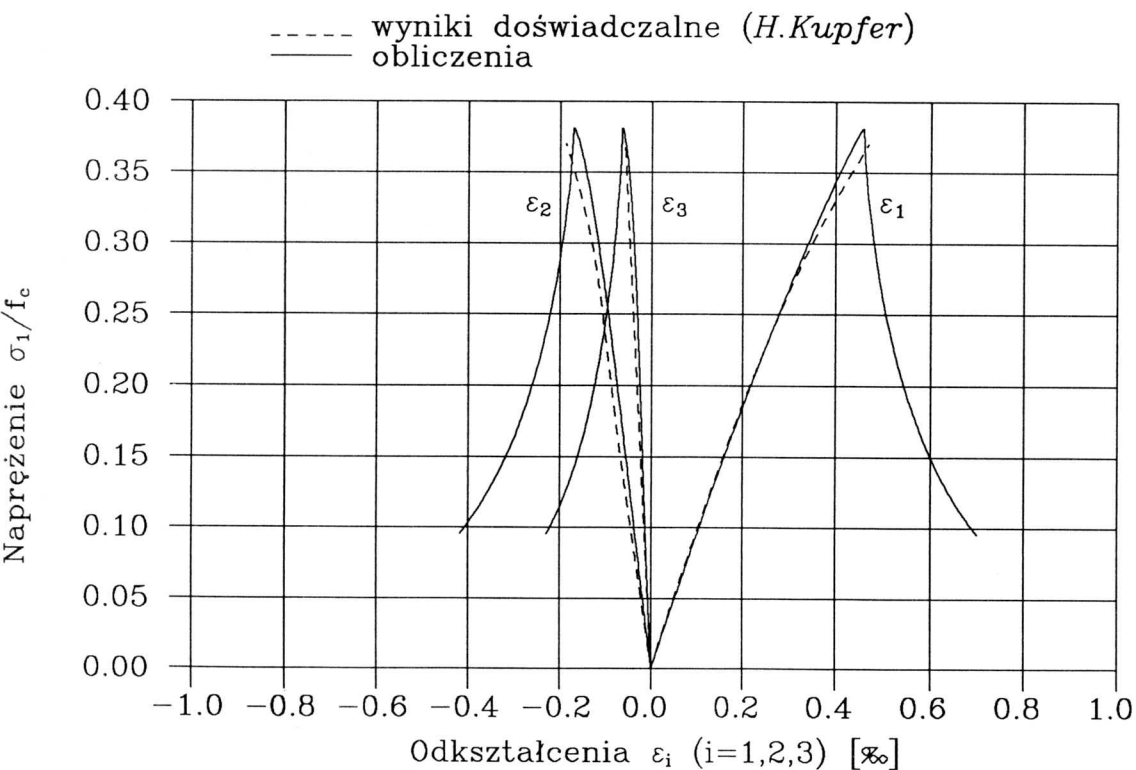
s.III.7 Zależności $\sigma_1 - \epsilon_i$ dla zakresu ściskanie-rozciąganie, $k = -0,052$



s.III.8 Zależności $\sigma_1 - \epsilon_i$ dla zakresu ściskanie-rozciąganie, $k = -0,070$

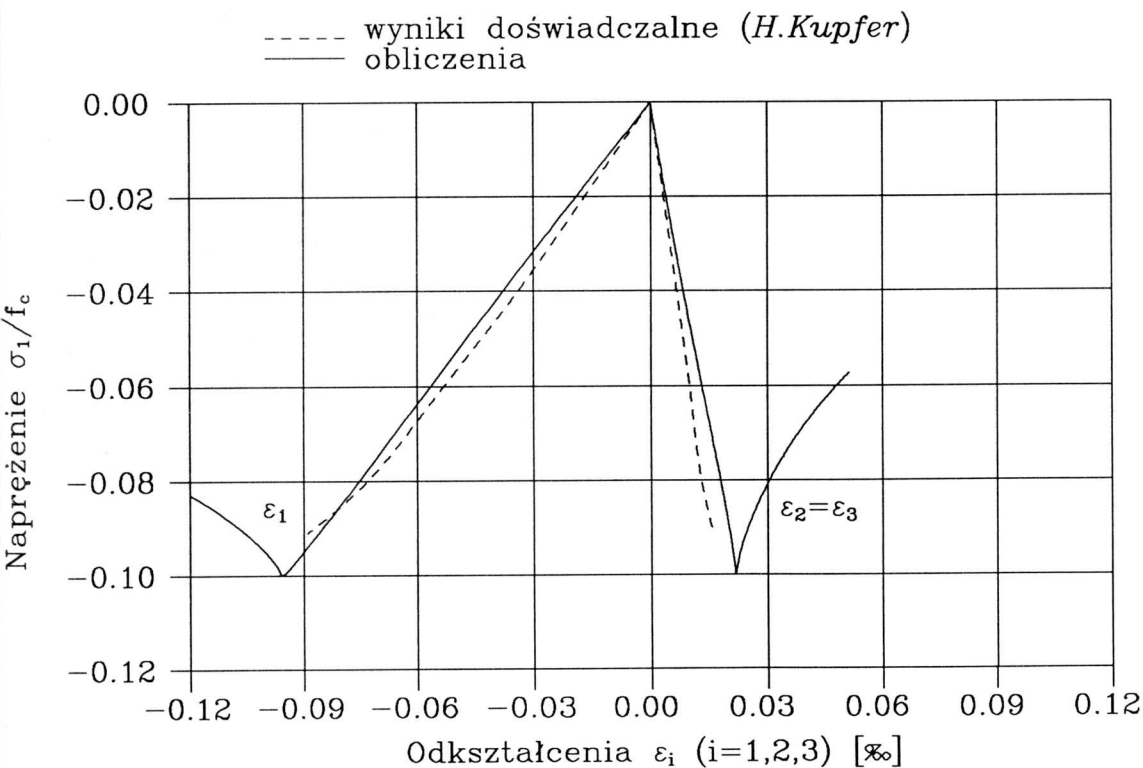


III.9 Zależności $\sigma_1 - \epsilon_i$ dla zakresu ściskanie-rozciąganie, $k = -0,103$

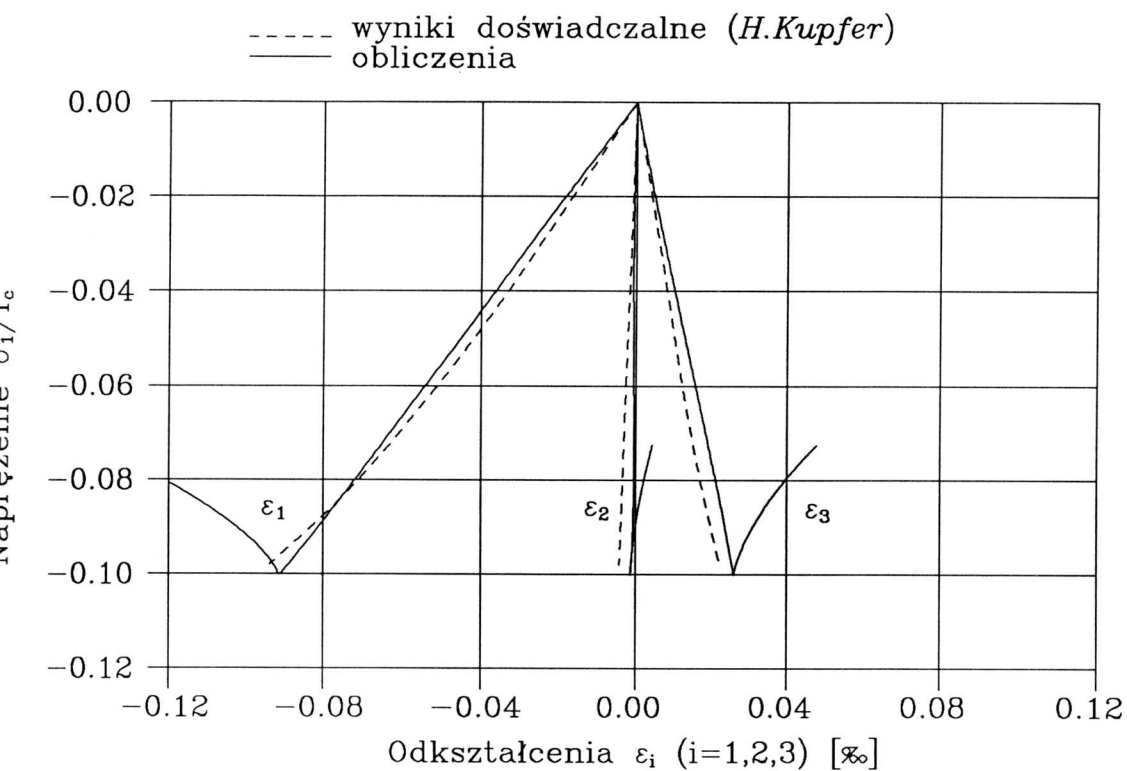
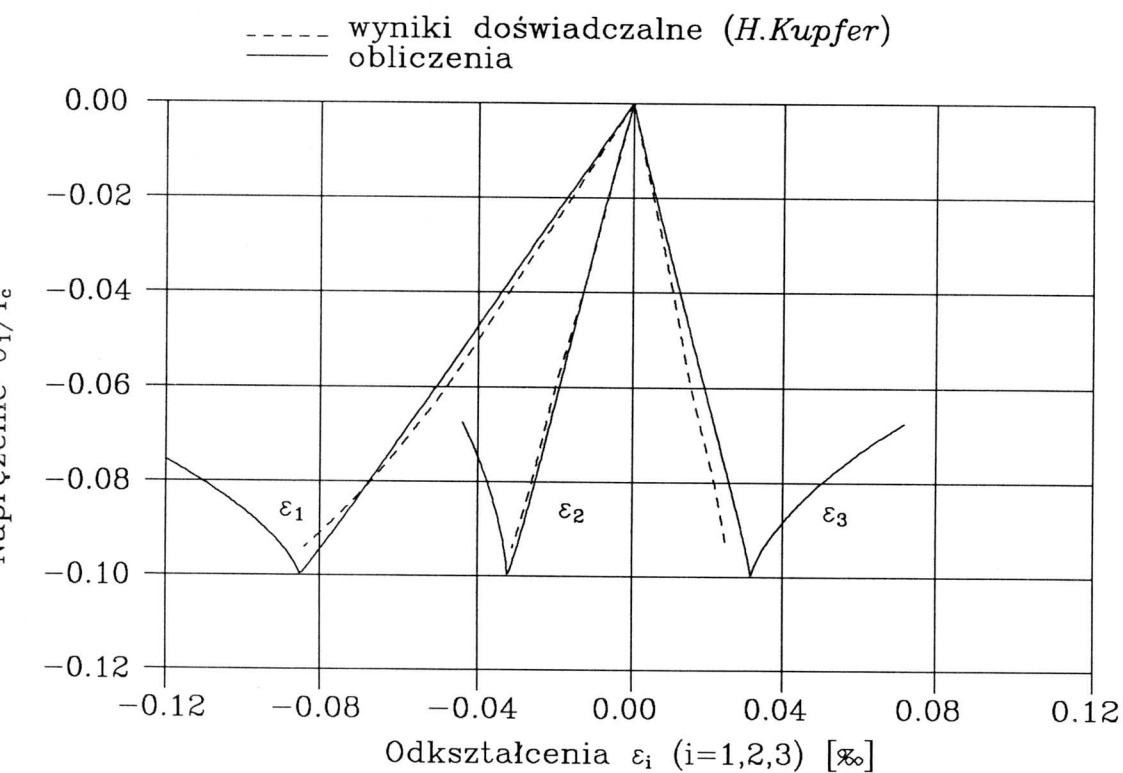


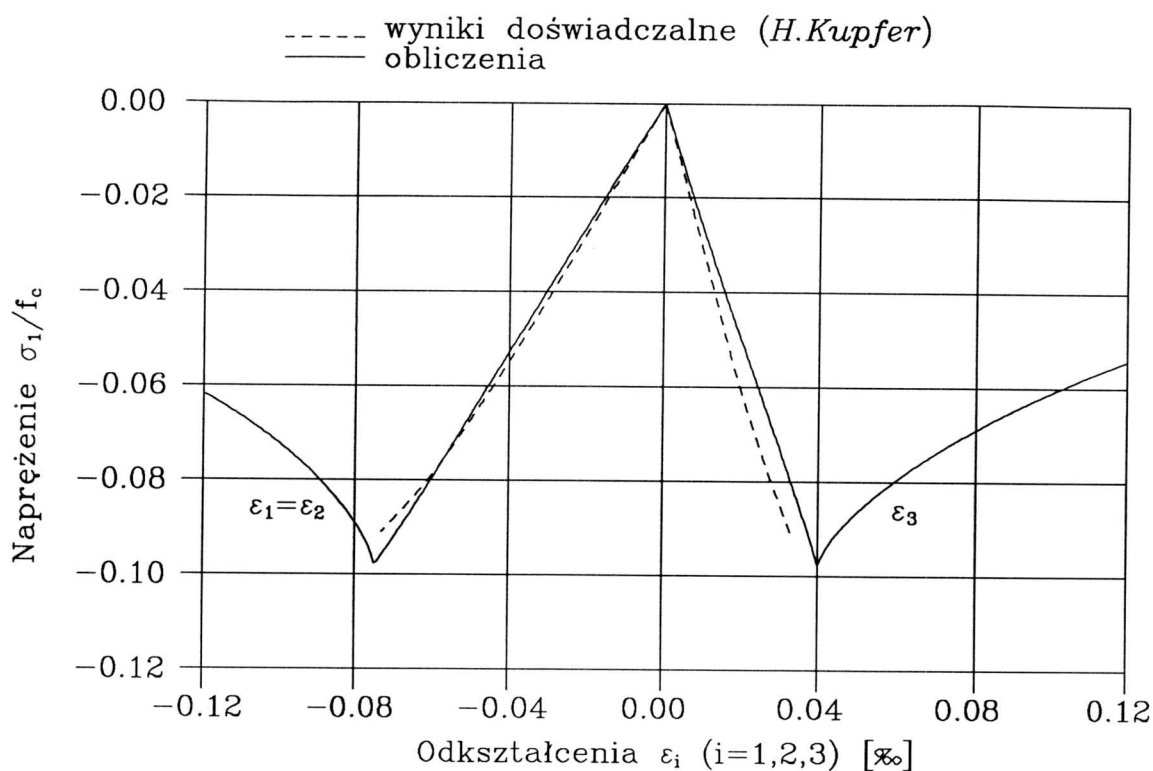
III.10 Zależności $\sigma_1 - \epsilon_i$ dla zakresu ściskanie-rozciąganie, $k = -0,204$

Na rys. III.7÷10 przedstawione są zależności $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ dla zakresu ściskanie – rozciąganie przy czterech różnych wartościach k . Krzywe otrzymane z obliczeń w dobry sposób odwzorowują słabą nieliniowość betonu w zakresie przedkrytycznym. Istnieją natomiast dość duże różnice pomiędzy doświadczalnymi a obliczonymi wartościami naprężeń granicznych. Różnice te są największe dla wartości $k = -0,052$ i $k = -0,070$ i maleją znacznie dla $k = -0,103$ i $k = -0,204$. Niezgodność ta jest spowodowana tym, że dla niewielkich wartości ujemnych k (ściskanie połączone z niedużą wartością poprzecznego naprężenia rozciągającego) przyjęta powierzchnia graniczna niedokładnie odwzorowuje dane doświadczalne *H.Kupfera* (patrz rys. II.41). Ponieważ obliczone wartości naprężeń granicznych są mniejsze od wartości doświadczalnych jest to jednakże odwzorowanie po bezpiecznej stronie. Na rys. III.7÷10 pokazano również gałęzie opadające obliczonych krzywych. Jak wspomniano wyżej w doświadczeniach nie osiągnęto stanu pokrytycznego i w tym zakresie porównanie nie jest możliwe.



s.III.11 Zależności $\sigma_1 - \varepsilon_i$ dla zakresu rozciąganie–rozciąganie, $k = 0,0$

III.12 Zależności $\sigma_1 - \varepsilon_i$ dla zakresu rozciąganie-rozciąganie, $k = 0,232$ III.13 Zależności $\sigma_1 - \varepsilon_i$ dla zakresu rozciąganie-rozciąganie, $k = 0,546$

Rys.III.14 Zależności $\sigma_1 - \varepsilon_i$ dla zakresu rozciąganie-rozciąganie, $k = 1,0$

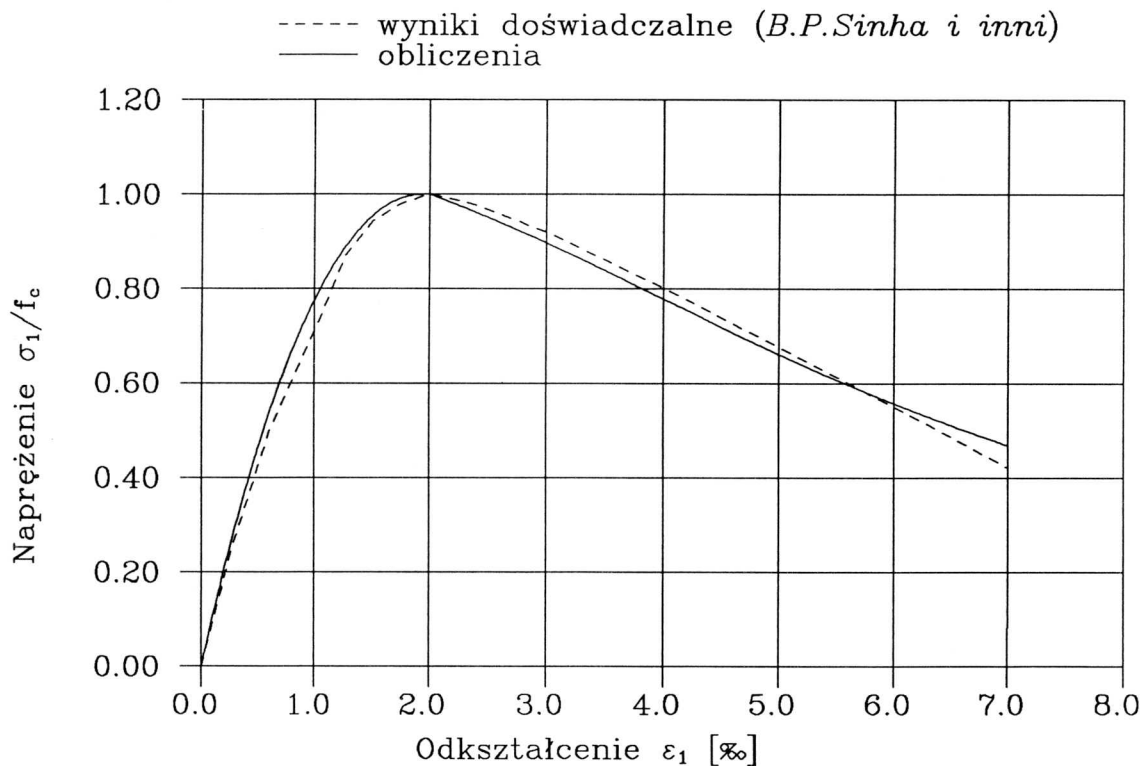
Rys. III.11÷14 przedstawiają z kolei krzywe $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ dla zakresu rozciąganie – rozciąganie i dla czterech różnych wartości k . W tym zakresie obciążeń obserwuje się bardzo dobrą zgodność w stanie przedkrytycznym obliczonych krzywych z krzywymi doświadczalnymi oraz wartości naprężeń granicznych – obliczonych i z doświadczeń. We właściwy sposób odwzorowane jest praktycznie liniowe zachowanie się betonu przy rozciąganiu w stanie przedkrytycznym. Tak samo jak dla zakresu ściskanie – rozciąganie obliczone krzywe dla stanu pokrytycznego nie mają potwierdzenia w badaniach doświadczalnych.

III.1.2.2 Porównanie z wynikami doświadczeń innych autorów

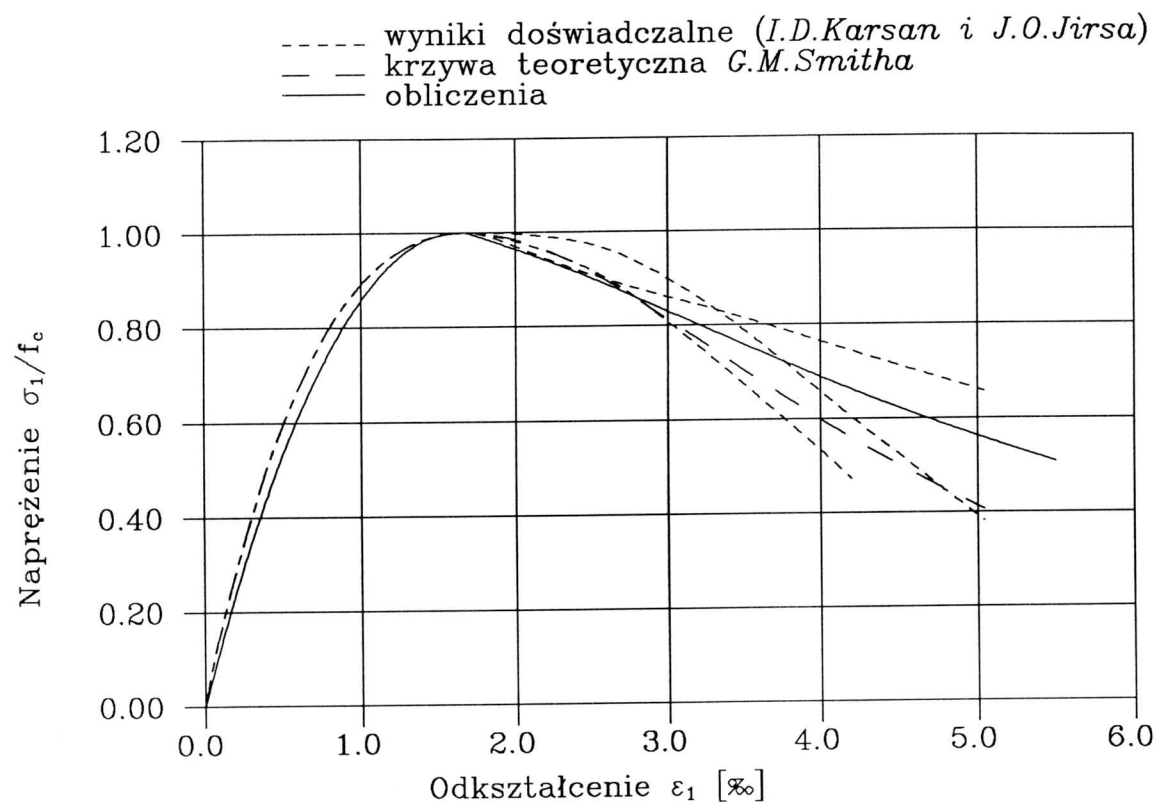
Przedstawione obliczenia mają na celu przede wszystkim weryfikację modelu w stanie pokrytycznym. Jak wspomniano w punkcie poprzednim, doświadczenia *H.Kupfera* stwarzają takie możliwości wyłącznie dla zakresu ściskanie – ściskanie i to tylko dla niewielkiego fragmentu ścieżki opadającej.

Z tego powodu sięgnięto po wyniki doświadczalne szeregu innych autorów. Niestety, w chwili obecnej brak jest całościowych badań betonu w stanie pokrytycznym, dla wszystkich zakresów w płaskim stanie naprężenia. Częstkowe rezultaty podawane są zwykle dla jednoosiowego ściskania lub rozciągania. Stosunkowo obszerne wyniki doświadczalne *J.van Miera* [76] dotyczą głównie stanów trójosiowych, przy zachowaniu stałego stosunku składowych stanu odkształcenia a nie naprężenia. Dodatkowo, w badaniach tych obserwuje się znaczny rozrzut wyników w stanie pokrytycznym i nie posiadają one opracowania statystycznego.

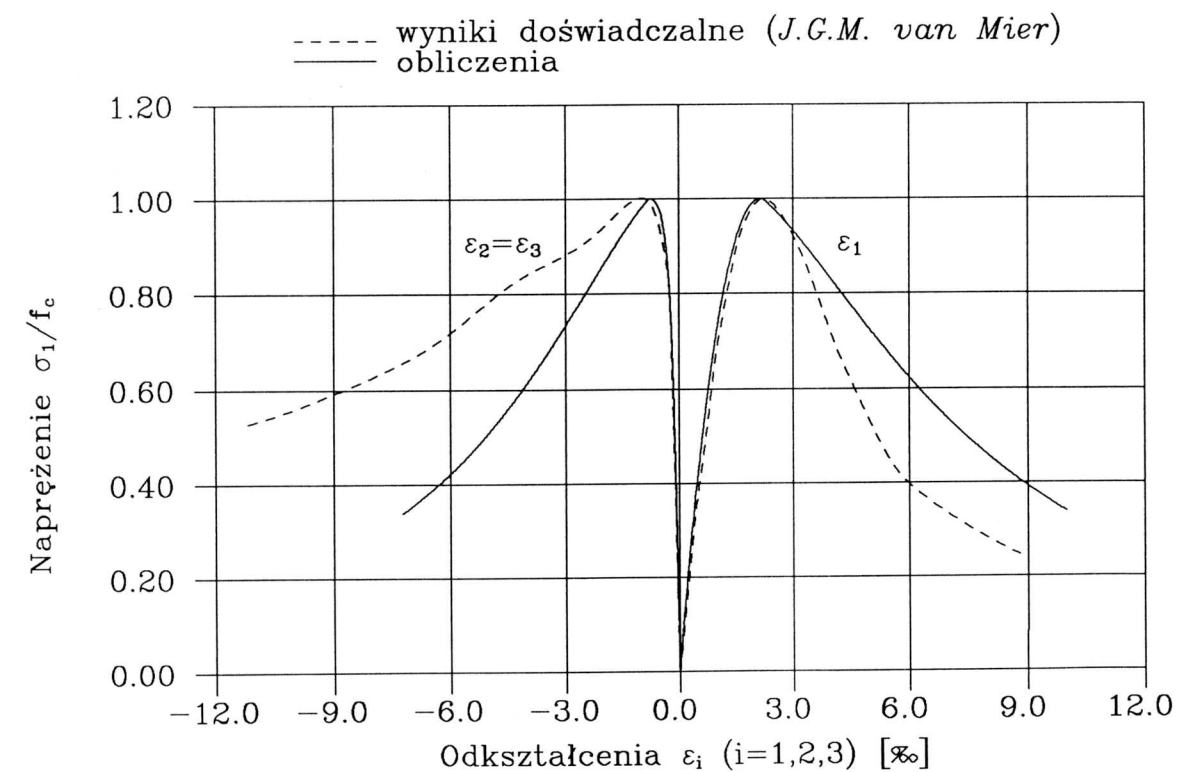
Z uwagi na niekompletność dostępnych wyników doświadczalnych ograniczono się do przypadków jednoosiowego ściskania i rozciągania. Podobnie jak w punkcie poprzednim uzyskane w badaniach i przyjęte do obliczeń wartości stałych materiałowych podano w Załączniku Z7. Na rysunkach linią przerywaną oznaczono wyniki doświadczalne, zaś linią ciągłą wyniki obliczeń.



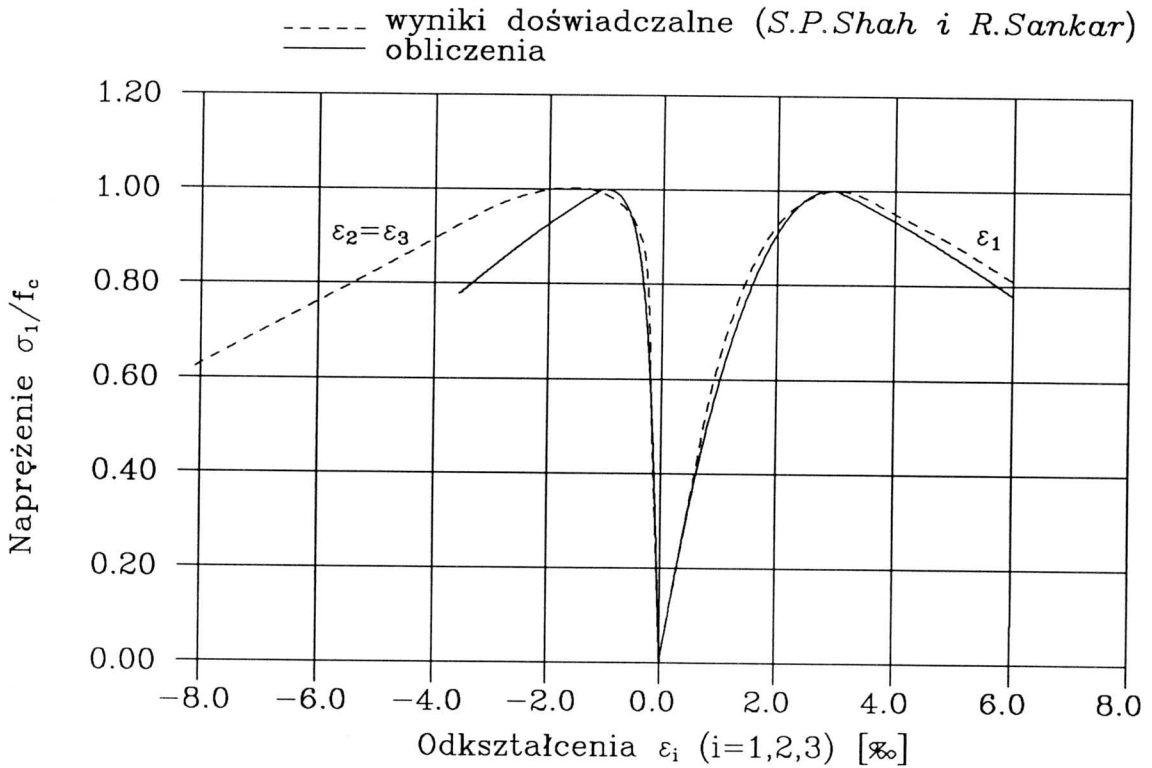
Rys.III.15 Jednoosiowe ściskanie



Rys.III.16 Jednoosiowe ściskanie



Rys.III.17 Jednoosiowe ściskanie.

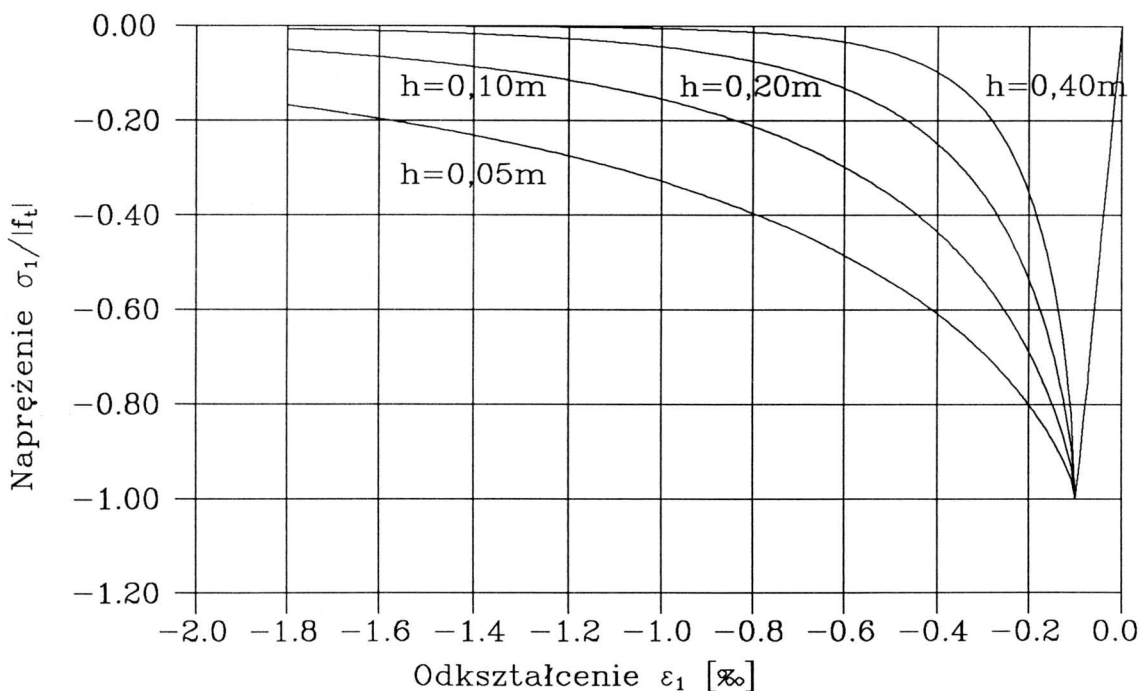


Rys.III.18 Jednoosiowe ściskanie

Rys. III.15 – 18 przedstawiają porównania z wynikami doświadczalnymi dla jednoosiowego ściskania, uzyskanymi przez różnych badaczy. Na rys. III.15 widać bardzo dobrą zgodność odkształceń podłużnych z badaniami *B.Sinhy*, *K.Gerstlego* i *L.Tulina* [103]. Rys. III.16 pokazuje porównanie z trzema różnymi krzywymi doświadczalnymi uzyskanymi przez *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsę* [63]. Dodatkowo na rysunku przedstawiono krzywą teoretyczną *G.Smitha*, która w opinii autorów pracy [63], dobrze odzwierciedla zachowanie się betonu przy jednoosiowym ścisaniu. W tym przypadku, badania eksperymentalne cechuje znaczny rozrzut wyników w stanie pokrytycznym. Krzywa obliczona dobrze mieści się w paśmie utworzonym przez wyniki doświadczalne. W pracach [63], [103] nie rejestrowano odkształceń poprzecznych i nie jest możliwe porównanie w tym zakresie. W pracach *J.van Miera* [76] oraz *S.P.Shaha* i *R.Sankara* [102] rejestrowane były również odkształcenia poprzeczne przy jednoosiowym ścisaniu. Na rys. III.17 widać, że w dobry sposób został odwzorowany stan przedkrytyczny, w porównaniu do doświadczeń

J.van Miera. Natomiast w stanie pokrytycznym doświadczalnie otrzymuje się mniejsze wartości odkształcenia podłużnego, przy jednoczesnym szybkim wzroście odkształceń poprzecznych. Świadczy to o występowaniu doświadczalnie większej dylatacji niż przewidywana przez prezentowany model. W porównaniu z wynikami *S.P.Shaha* i *R.Sankara* (rys. III.18) dobrze odwzorowane jest odkształcenie podłużne w stanie pokrytycznym, natomiast zaniżone są wartości odkształcenia poprzecznego, co świadczy, że również w tym przypadku rzeczywista dylatacja jest większa od obliczonej.

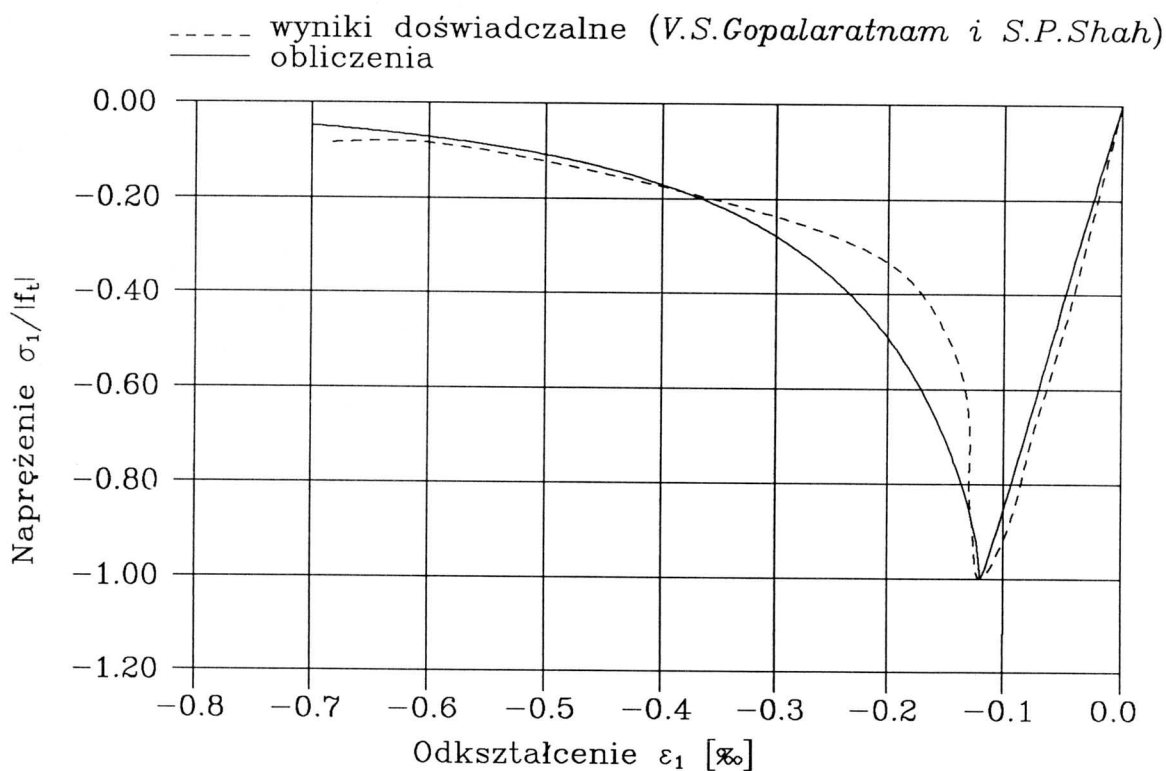
Rys. III.19 – 23 prezentują wyniki dla jednoosiowego rozciągania. Z uwagi na lokalizację odkształceń przy rozciąganiu w stanie pokrytycznym w bardzo wąskim paśmie, dotychczas nie opracowano metod pomiaru odkształceń poprzecznych, stąd porównanie z doświadczeniem możliwe jest tylko dla odkształceń podłużnych. W nowszych pracach doświadczalnych z reguły podaje się wykresy $\sigma_1/|f_t| - u$, gdzie u jest wydłużeniem w strefie lokalizacji.



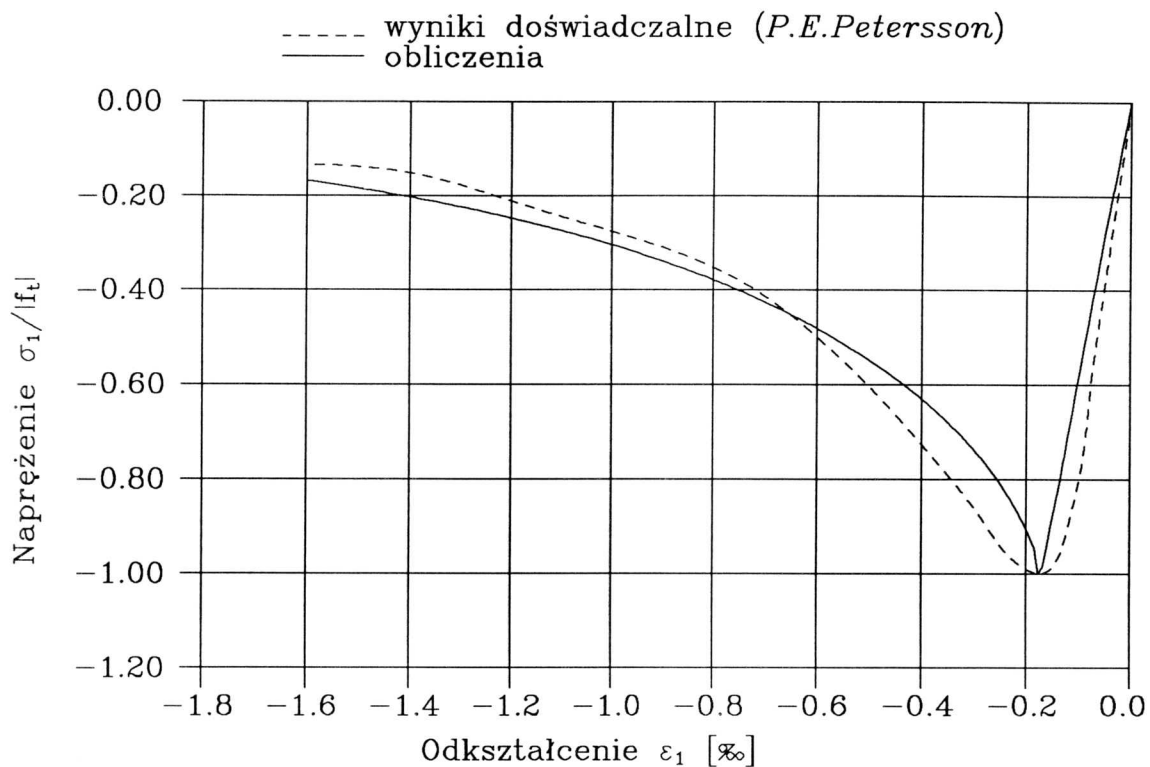
Rys.III.19 Jednoosiowe rozciąganie, różne wartości parametru h

Jak to przedstawiono w części II pracy uważa się, że tego typu wykresy przedstawiają obiektywne zachowanie się materiału. Ponieważ w prezentowanym modelu rozważa się związki fizyczne typu naprężenie – odkształcenie dla umożliwienia porównania wszystkie wyniki doświadczalne przedstawiono również używając odkształceń. Wartości tych odkształceń otrzymano dzieląc wartości całkowite wydłużenia (otrzymane z doświadczeń) przez długość bazy pomiarowej. Nie starano się natomiast wydzielić części odkształceń powiązanej ze strefą lokalizacji i części odkształceń przyporządkowanej betonowi nie uszkodzonemu poza strefą lokalizacji. Wartości stałych materiałowych uzyskane doświadczalnie i przyjęte do obliczeń podano jak poprzednio w Załączniku Z7.

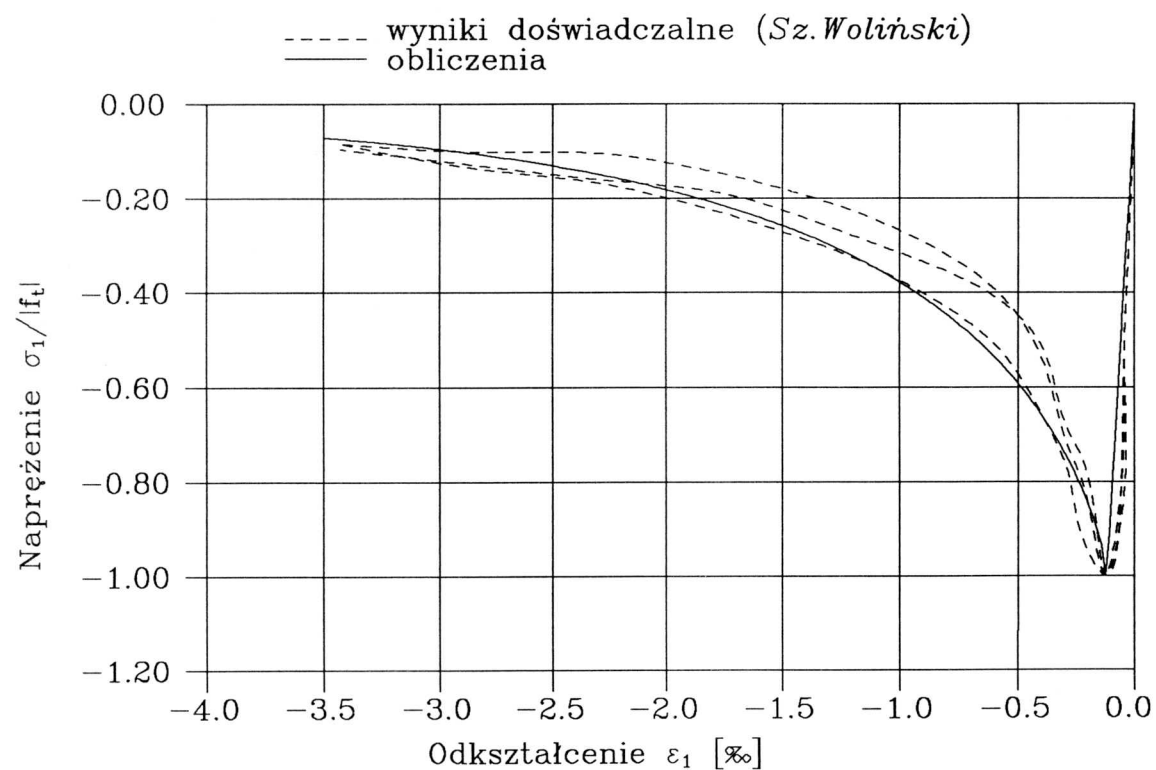
Rys. III.19 ilustruje zmienność przebiegu ścieżki opadającej w prezentowanym modelu w zależności od parametru materiałowego h . Dobierając we właściwy sposób wartość h możliwe jest dość dobre odwzorowanie wyników *V.Gopalaratnama* i *S.P.Shaha* [50] (rys. III.20), jak i doświadczeń *P.E.Peterssona* [90] (rys. III.21).



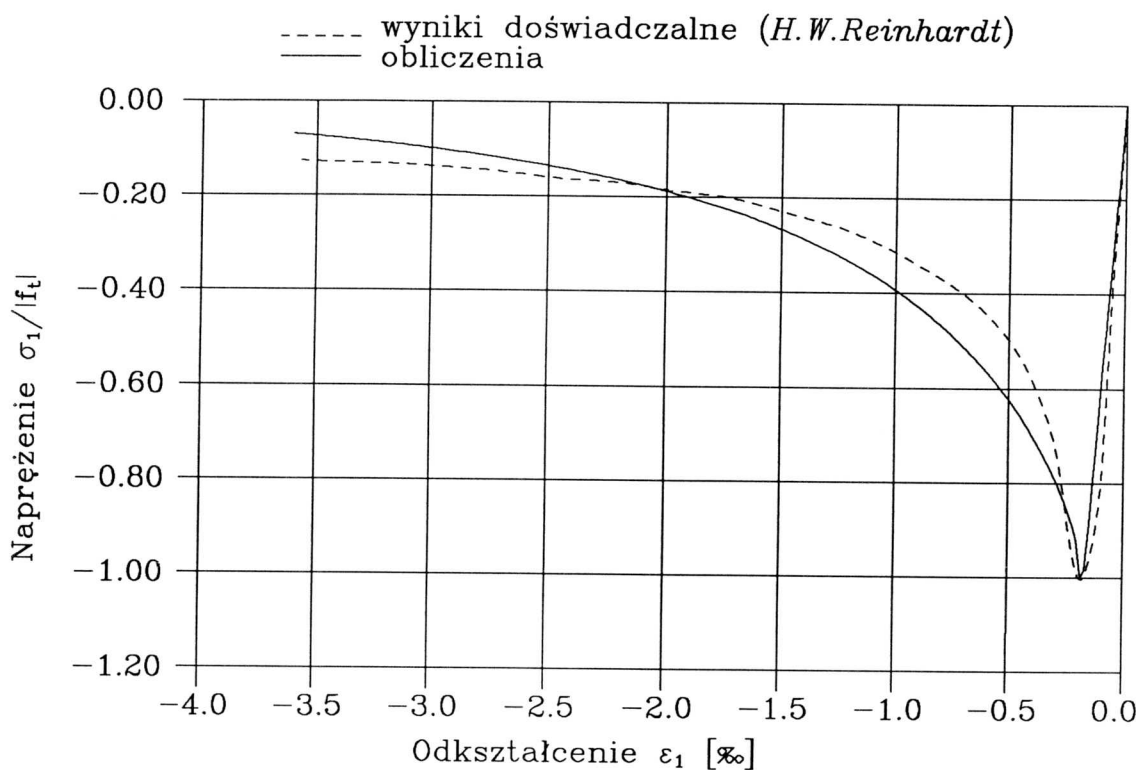
Rys.III.20 Jednoosiowe rozciąganie



Rys.III.21 Jednoosiowe rozciąganie

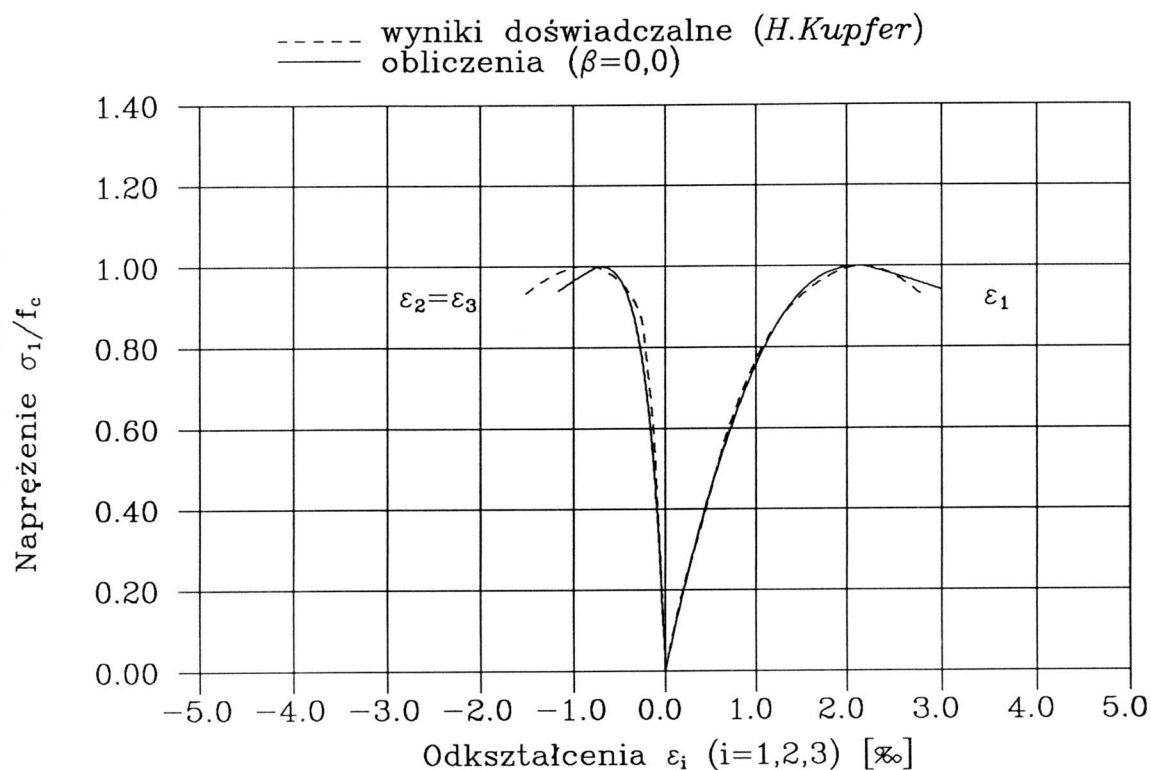


Rys.III.22 Jednoosiowe rozciąganie

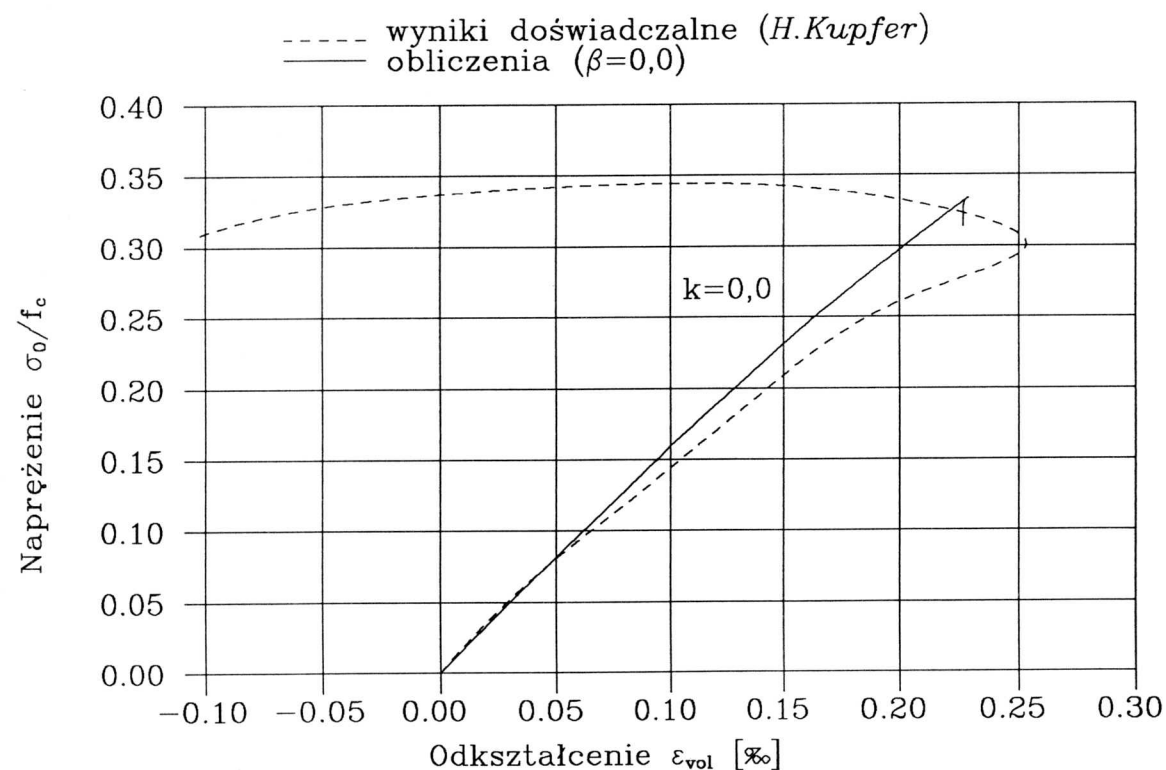


Rys.III.23 Jednoosiowe rozciąganie

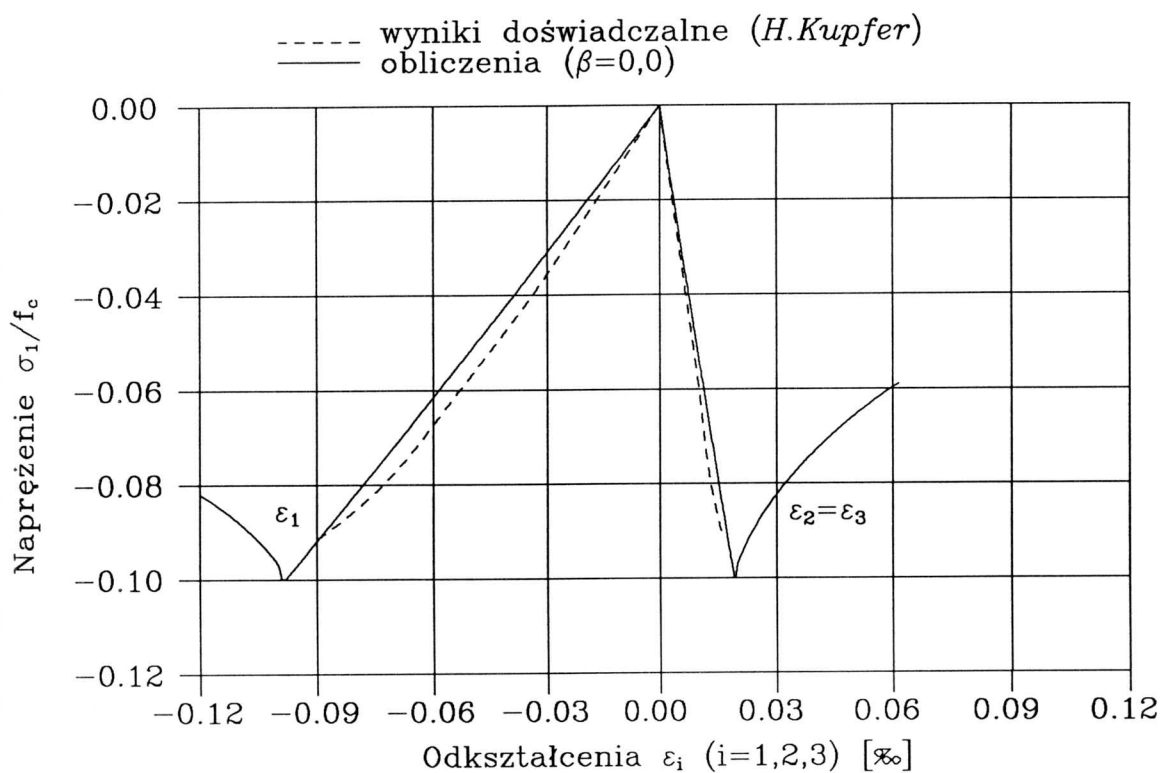
W obu tych przypadkach beton wykazuje nieco bardziej nieliniowe zachowanie się w stanie przedkrytycznym w badaniach niż w obliczeniach, natomiast zachowanie w stanie pokrytycznym jest bardzo zbliżone. Również porównania z wynikami doświadczalnymi Sz.Wolińskiego [123], przeprowadzonymi dla trzech różnych betonów (rys. III.22) oraz H.Reinhardta [97] (rys. III.23) wskazują na bardzo dobrą zgodność obliczeń z eksperymentem. Należy jednak zwrócić uwagę, że wartości odkształceń na ścieżce opadającej w poszczególnych doświadczeniach różnią się wzajemnie w bardzo wyraźny sposób (porównaj rys. III.20 i rys. III.23). Jest to przypuszczalnie spowodowane różnicami zastosowanych technik badawczych oraz przede wszystkim różnymi długościami baz pomiarowych. Dostosowanie za każdym razem wyników obliczeń do konkretnej krzywej doświadczalnej jest możliwe metodą prób i błędów poprzez zmianę parametru h . W prezentowanych przykładach zmienia się on w przedziale $h = 0,028 - 0,400\text{m}$ (patrz Załącznik Z7). Nie można natomiast podać a priori właściwej wartości h dla danego betonu i danego rodzaju techniki badawczej.



Rys.III.24 Zależności $\sigma_1 - \epsilon_i$ dla zakresu ściskanie-ściskanie, $k = 0,0$ (przy $\beta = 0,0$)



Rys.III.25 Zależność $\sigma_0 - \epsilon_{vol}$ dla jednoosiowego ściskania (przy $\beta = 0,0$)



rys.III.26 Zależności $\sigma_1 - \varepsilon_i$ dla zakresu rozciąganie–rozciąganie, $k = 0,0$ (przy $\beta = 0,0$)

Jak to przedstawiono w rozdziale II wprowadzenie współczynnika ścisnienia / dylatacji β jest niezbędne w celu zbliżonego do rzeczywistości opisu zjawisk zachodzących w betonie. Prowadzi to jednak do niesymetrycznej macierzy sztywności, co może być bardzo kłopotliwe przy implementacji modelu do programu MES. Możliwość przyjęcia $\beta \equiv 0$ przeanalizowano na przykładach jednoosiowego ściskania i rozciągania porównując z doświadczeniami *H.Kupfera*. Rys. III.24 przedstawia krzywe $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$) dla jednoosiowego ściskania przy $\beta \equiv 0$. Jak widać zgodność z wynikami doświadczalnymi jest nieco gorsza niż na rys. III.1 – wydawałaby się jednak zadawalająca. Dopiero analiza odkształceń objętościowych dla tego samego przypadku (rys. III.25) wyraźnie wskazuje na niepoprawność przyjęcia $\beta \equiv 0$. Natomiast z rys. III.26, w porównaniu z rys. III.11, wynika nieistotność wartości β dla przypadku jednoosiowego rozciągania.

Przedstawione w punktach III.1.2.1 i III.1.2.2 wyniki obliczeń wykorzystujące prezentowany model betonu wykazują bardzo dobrą zgodność z wynikami badań doświadczalnych. Przy obecnym stanie badań doświadczalnych sprawą otwartą pozostaje weryfikacja

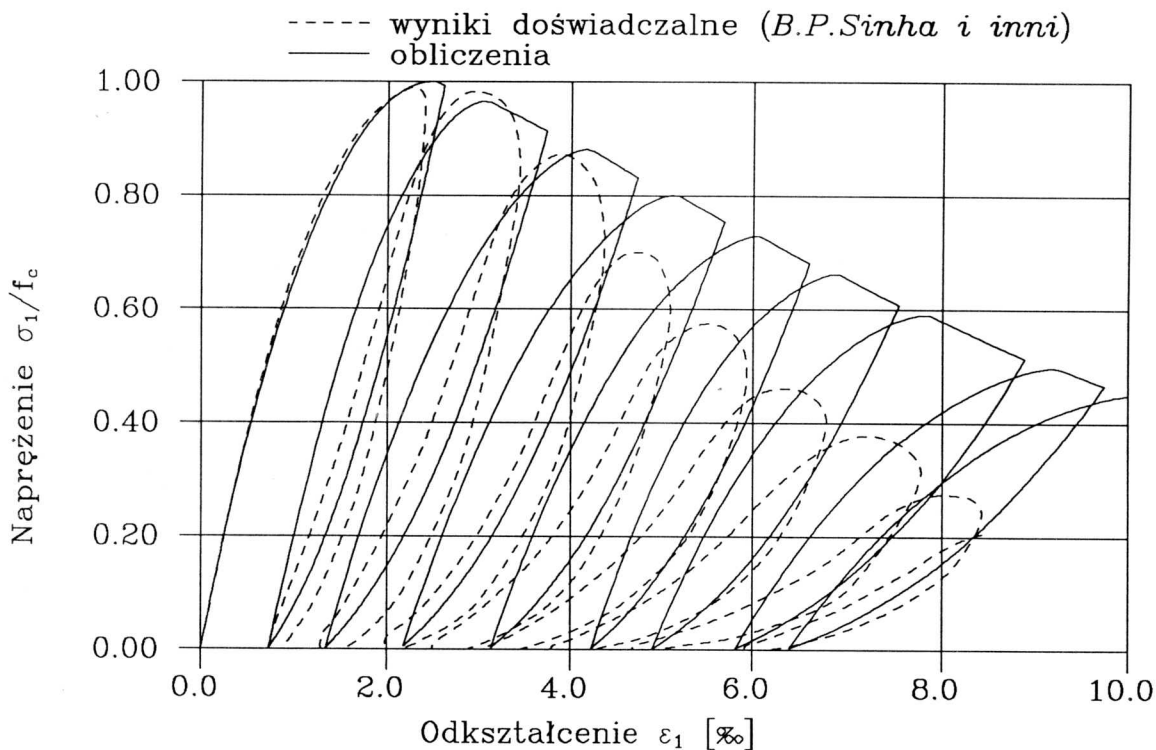
stanów pokrywicznych dla różnych ścieżek obciążenia w zakresie ściskanie – rozciąganie i rozciąganie – rozciąganie, a zwłaszcza pomiar odkształceń poprzecznych przy rozciąganiu. Wyniki przedstawione na rys. III.17 i rys. III.18 mogą wskazywać na zbyt małą ujemną wartość współczynnika β w zakresie pokrywicznym przy ściskaniu (czego nie potwierdza jednak rys. III.5). Należy zauważyć, że krzywe doświadczalne z rys. III.17 – 18 są wynikami pojedynczych eksperymentów (bez weryfikacji statystycznej). Zdaniem autora obecnie jest zbyt mało danych doświadczalnych dla stanu pokrywicznego przy ściskaniu aby można było w sposób ogólny sformułować postać funkcji dla współczynnika β w zakresie pokrywicznym. Również otwartym problemem pozostaje właściwy dobór wartości współczynnika h , w zależności od rozpatrywanego problemu.

III.1.3 Niemonotoniczne obciążenia proporcjonalne

W punkcie tym przedstawiono zachowanie się modelu betonu przy obciążeniach cyklicznych, dla proporcjonalnych ścieżek obciążenia w przestrzeni naprężeń. Przeanalizowano przede wszystkim przypadki jednoosiowego ściskania i rozciągania. Dla tych przypadków możliwe było porównanie z danymi doświadczalnymi dla odkształceń podłużnych. Jak to przedstawiono w punkcie II.5.2 brak jest danych doświadczalnych dla odkształceń poprzecznych przy jednoosiowych obciążeniach cyklicznych, jak również brak jest badań dla przypadków obciążeń wieloosiowych. Wyjątek stanowi praca [15], do której jednak autor nie miał dostępu. Wykonano również obliczenia dla przypadków jednoosiowego obciążenia znakozmiennego. Dla tych przypadków również brak jest danych doświadczalnych. Wyjątkiem jest praca [108], w której zależność $\sigma_1 - \varepsilon_1$ dla jednoosiowego rozciągania – ściskania uzyskano pośrednio z analizy pracy elementu zbrojonego. Uzyskane rezultaty miały charakter cząstkowy i nie stanowią dobrego materiału dla porównań ilościowych. Podobnie jak w punkcie III.1.2 uzyskane w badaniach i przyjęte do obliczeń stałe materiałowe podano w Załączniku Z7. Na rysunkach wyniki doświadczalne oznaczono linią przerywaną, a wyniki obliczeń linią ciągłą.

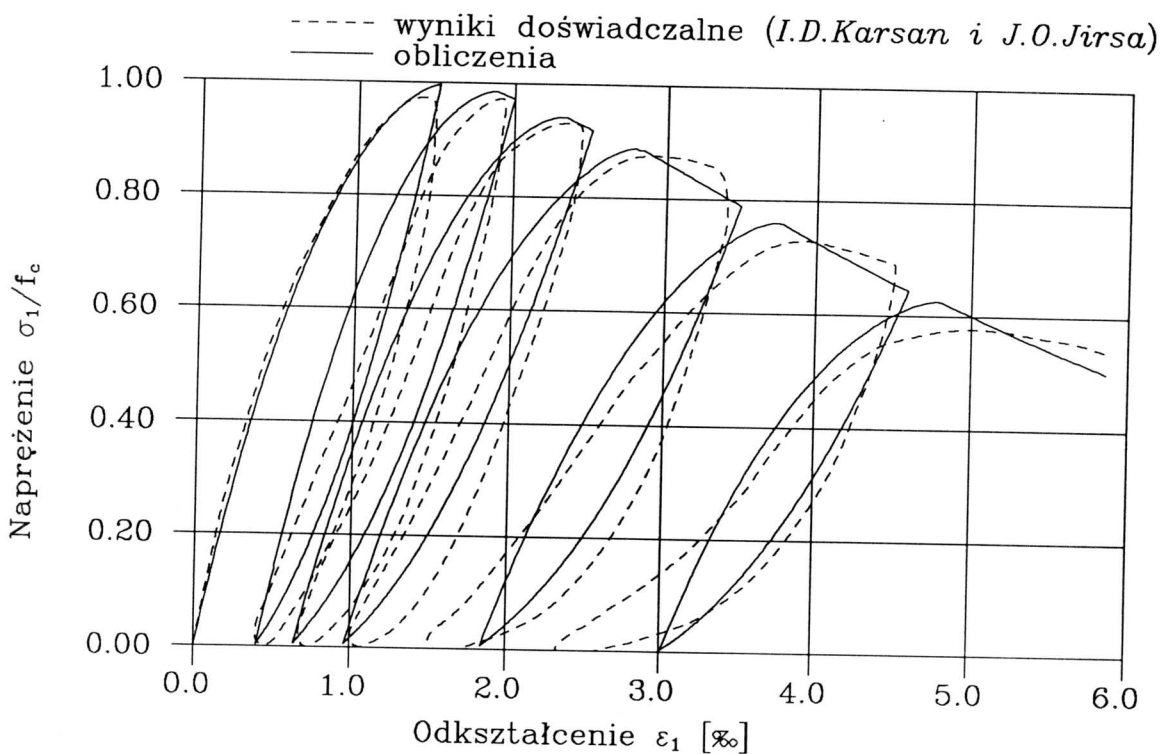
Rys. III.27 – 30 przedstawiają jednoosiowe cykliczne ściskanie od zera do maksymalnej możliwej do osiągnięcia wartości naprężenia σ_1 (tzn. do powierzchni granicznej). Po osiągnięciu powierzchni granicznej następuje spadek naprężenia przy rosnących od-

kształceniach. Rys. III.27 przedstawia porównanie z wynikami doświadczalnymi *B.Sinhy* i współpracowników [103]. W tym przypadku obciążenie cykliczne jest realizowane dla stanu pokrytycznego – pierwsze osiągnięcie powierzchni granicznej następuje przy obciążeniu monotonicznie rosnącym. Widać dobrą zgodność krzywych odciążenia i obciążenia wtórnego z wynikami doświadczalnymi. Dobrze odwzorowana jest degradacja sztywności w kolejnych cyklach obciążenia. Również wartości odkształcenia resztkowego ε_1^{pRES} są zbliżone w doświadczeniu i w obliczeniach. Natomiast w doświadczeniu uzyskano wyraźnie mniejsze wartości maksymalnego naprężenia σ_1 w stanie pokrytycznym niż w obliczeniach. Lepsze dostosowanie wyników obliczeń do doświadczeń można uzyskać poprzez zmianę parametrów funkcji f_{2c} opisującej kurczenie się powierzchni granicznej (wzór (II.180)).



Rys.III.27 Jednoosiowe cykliczne ściskanie do powierzchni granicznej

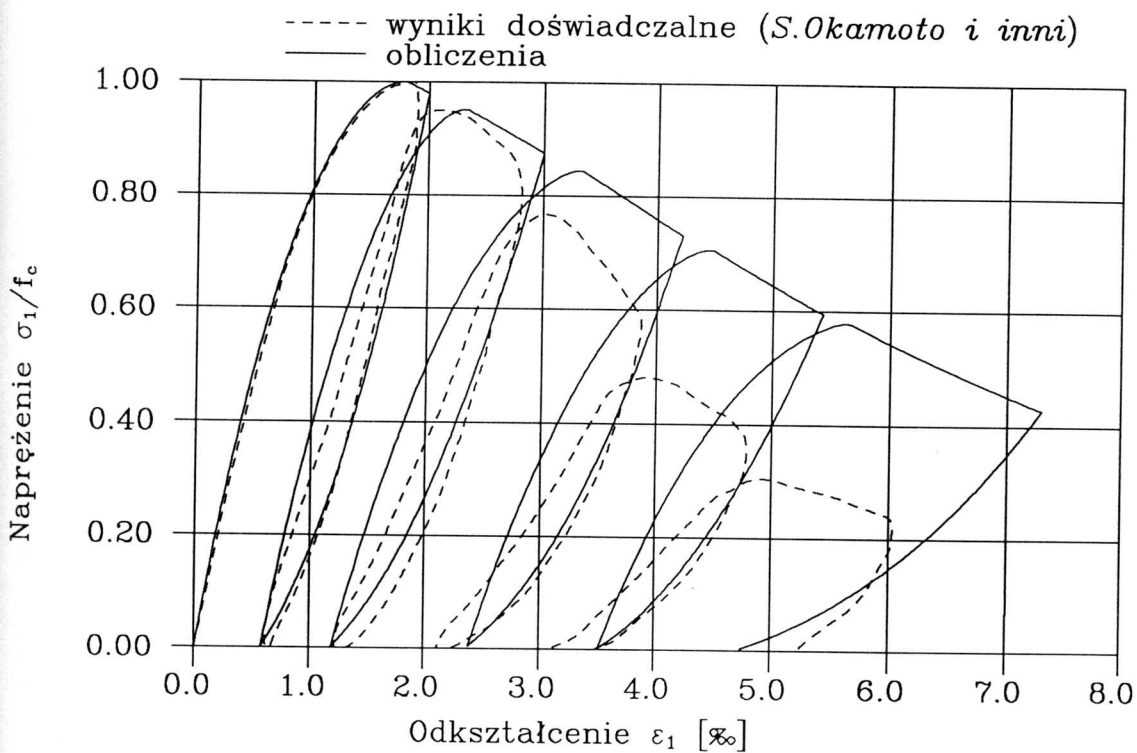
Na rys. III.28 pokazano porównanie z wynikami doświadczalnymi *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy* [63]. w tym przypadku również obserwuje się dobre odwzorowanie krzywych odciążenia i obciążenia wtórnego. Dodatkowo wartości maksymalnego naprężenia σ_1 w stanie pokrytycznym są prawie identyczne w doświadczeniu i w obliczeniach.



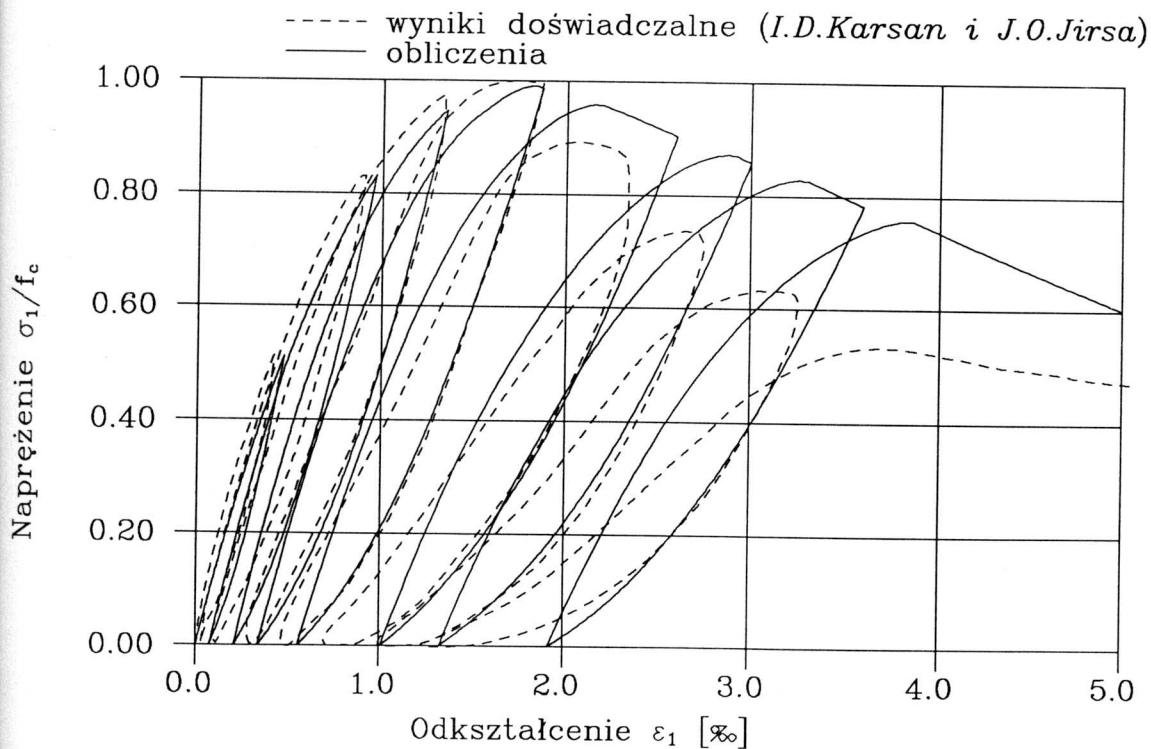
Rys.III.28 Jednoosiowe cykliczne ściskanie do powierzchni granicznej

Rys. III.29 przedstawia cykliczne ściskanie w porównaniu z doświadczeniami *S.Okamoto* i współpracowników [81]. Podobnie jak w dwóch poprzednich przykładach występuje dobra zgodność w doświadczeniu i w obliczeniach krzywych odciążenia i obciążenia wtórnego. W stanie pokrytycznym spadek wartości maksymalnego naprężenia jest znacznie gwałtowniejszy w doświadczeniu. W tym przypadku niezgodność wartości σ_1 z obliczeniami jest większa niż na rys. III.27.

Na rys. III.30 dokonano porównania z wynikami innego doświadczenia *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy*. W odróżnieniu od rys. III.27 – 29 pierwsze cykle obciążenia przeprowadzone są w stanie przedkrytycznym. Z kolei cykle obciążenia realizowane w doświadczeniu w stanie pokrytycznym nie osiągają powierzchni granicznej. Zgodnie z opisem z pracy [63] obciążenie w tym przypadku było prowadzone nie do osiągnięcia maksymalnej możliwej wartości naprężenia σ_1 , lecz tak aby w każdym cyklu osiągnąć stały przyrost maksymalnych odkształceń podłużnych ε_1^{MAX} .

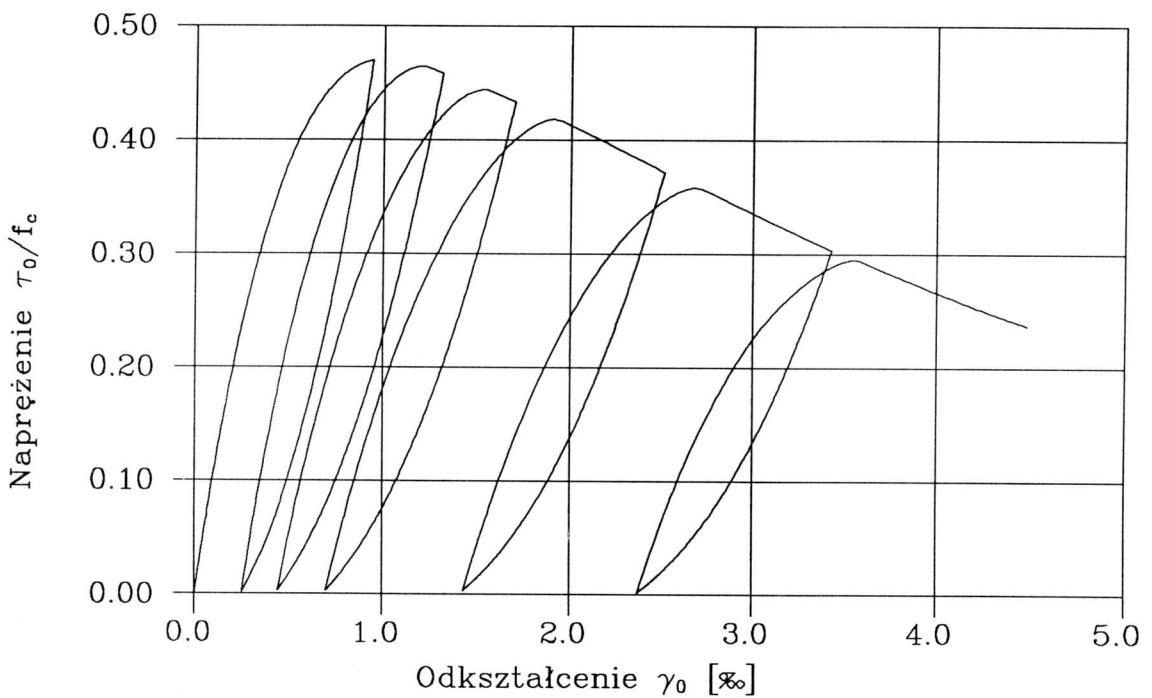


Rys.III.29 Jednoosiowe cykliczne ściskanie do powierzchni granicznej



Rys.III.30 Jednoosiowe cykliczne ściskanie do powierzchni granicznej

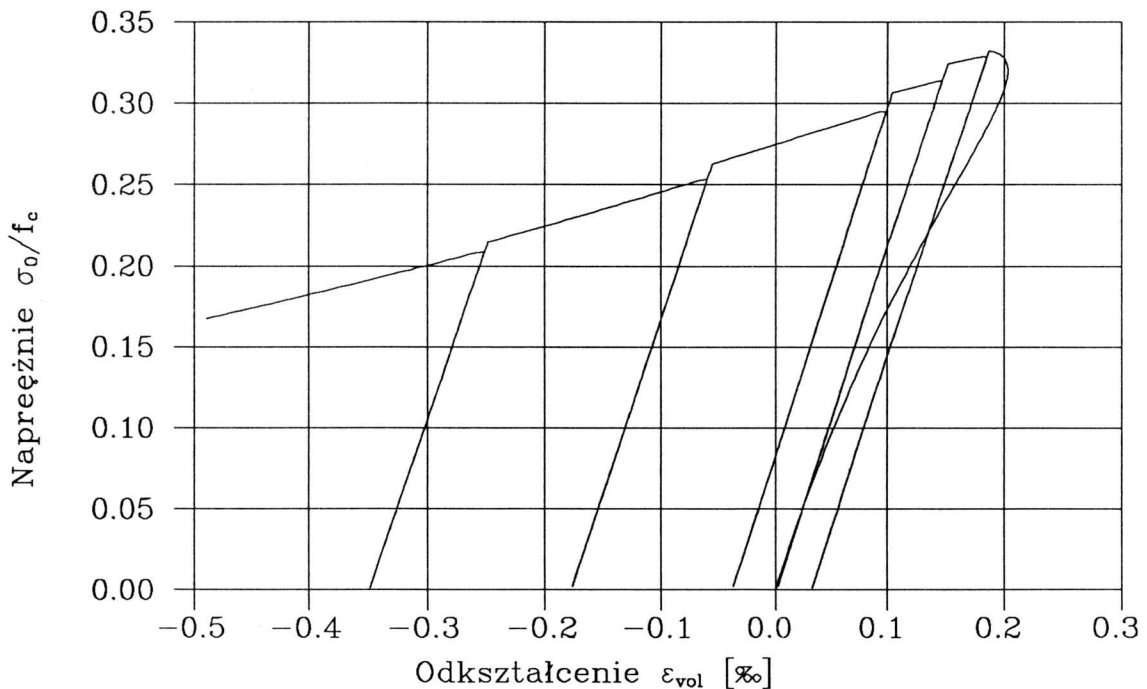
W obliczeniach starano się przyjąć taki program obciążenia przy którym osiągnie się zgodność odkształceń ε_1^{pRES} z doświadczeniem. Tak jak poprzednio otrzymano dobrą zgodność wyników dla odciążenia i obciążenia wtórnego. Natomiast wartości maksymalnego naprężenia σ_1 w obliczeniach są zdecydowanie większe od wartości doświadczalnych. W związku z tym dla osiągnięcia żądanych wartości ε_1^{pRES} w obliczeniach stosowano większe wartości ε_1^{MAX} , które były osiągane przy pozostawianiu na kurczącej się powierzchni granicznej.



Rys.III.31 Zależność $\tau_0/f_c - \gamma_0$ dla procesu ściskania z rys.III.30

Rys. III.31 przedstawia zależność naprężenie oktaedryczne τ_0/f_c - odkształcenie ścinające oktaedryczne γ_0 dla procesu jednoosiowego ściskania z rys. III.30. Z uwagi na brak pomiaru odkształceń poprzecznych w pracy [63] porównanie z wynikami doświadczalnymi nie jest możliwe. Należy zauważyć, że zależność $\tau_0 - \gamma_0$ ma kształt bardzo zbliżony do zależności $\sigma_1 - \varepsilon_1$ (rys. III.30). Jest to zgodne z hipotezą przyjętą w punkcie II.5.2.1. Na rys. III.31 można wyraźnie zaobserwować degradację modułów plastycznych H_{p1} i H_{p2} opisanych wzorami (II.129) i (II.145) oraz rozszerzanie się pętli histerezy wraz ze wzrostem odkształcenia γ_0 .

Zależność naprężenie średnie σ_0/f_c - odkształcenie objętościowe ε_{vol} dla procesu jednoosiowego ściskania z rys. III.30 przedstawia rys. III.32. Dla procesu obciążenia pierwotnego w stanie przedkrytycznym widać istnienie wpierrw ściśnienia a potem dylatacji (podobnie jak na rys. III.5). Zgodnie ze wzorami (II.153) i (II.154) krzywe odciążenia i obciążenia wtórnego są liniami prostymi o stałym kącie nachylenia, stąd brak jest pętli histerezy. Należy zauważyć, że w stanie pokrytycznym, dla ujemnych wartości ε_{vol} proces odciążenia do zera powoduje dalsze zmniejszanie się ε_{vol} (co, przy przyjętej konwencji znakowania odkształceń, oznacza dalszy wzrost objętości). Zjawisko to wynika również z liniowego charakteru odciążenia. Brak jest weryfikacji doświadczalnej tego efektu, występuje on jednak również w innych modelach betonu [80]. Ponieważ w trakcie obciążenia wtórnego powierzchnia graniczna w stanie pokrytycznym ulega skurczeniu, kontynuacja procesu obciążenia pierwotnego po osiągnięciu powierzchni granicznej zaczyna się przy niższej wartości naprężenia σ_0 od wartości osiągniętej na początku procesu odciążenia. Widoczne jest to na rysunku w postaci schodków (krzywa obciążenia pierwotnego w stanie pokrytycznym nie jest ciągła).

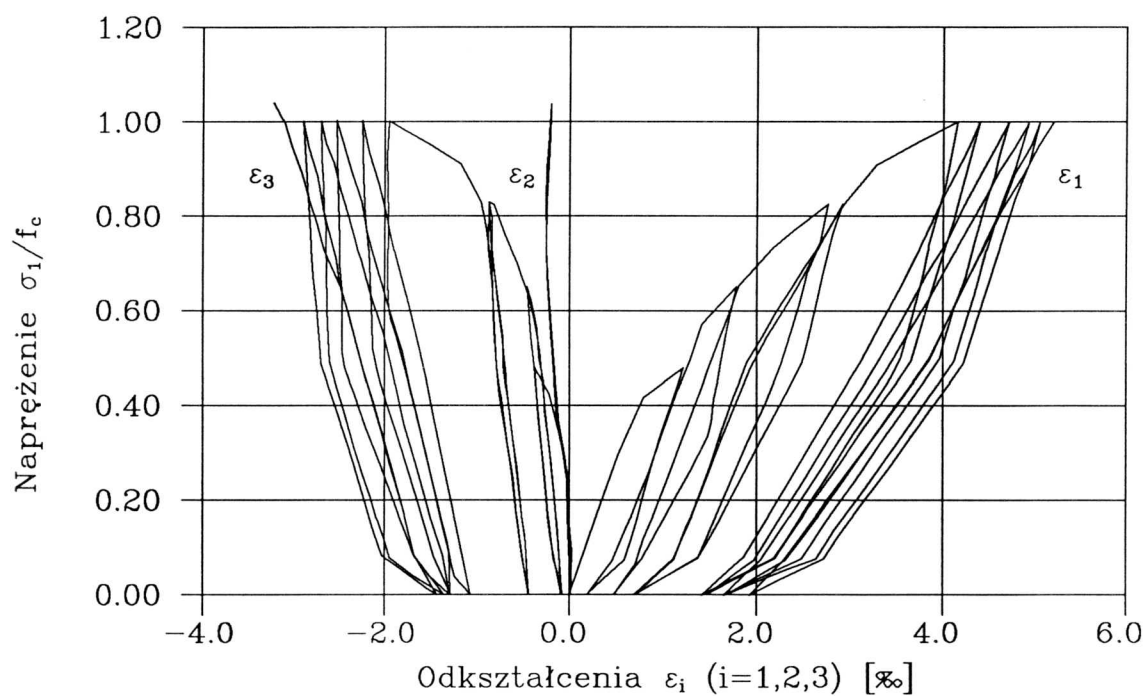
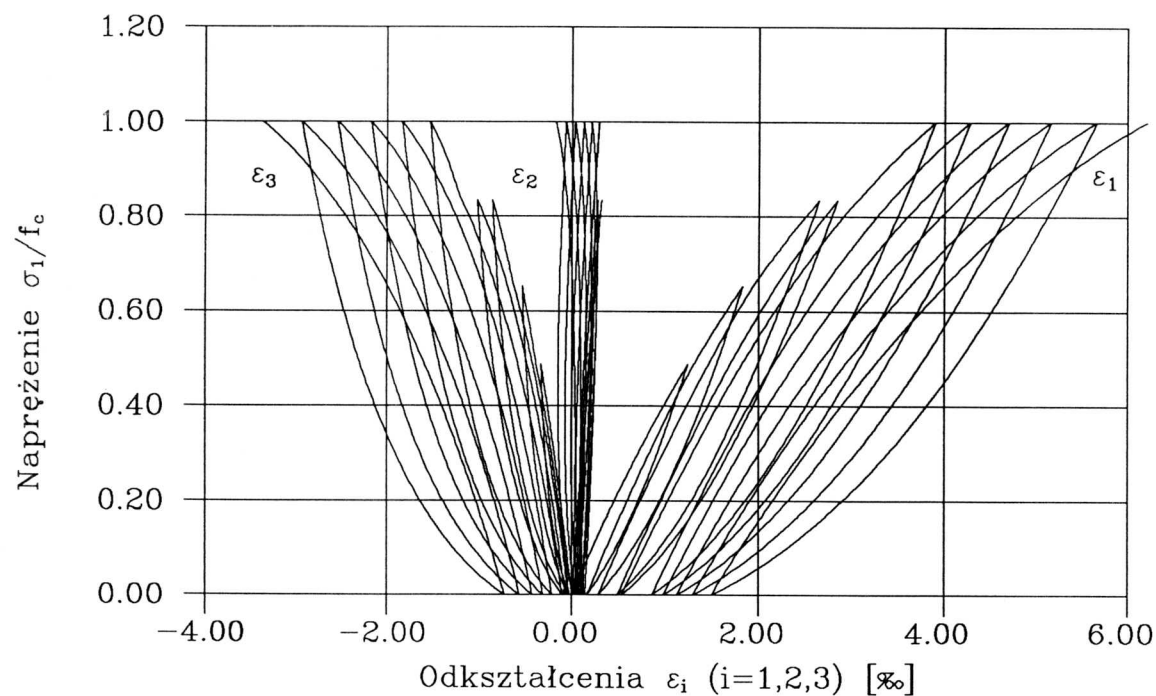


Rys.III.32 Zależność σ_0/f_c - ε_{vol} dla procesu ściskania z rys.III.30

Mimo braku bezpośredniego dostępu do źródłowej pracy [15] bazując na rysunkach zawartych w [28] i [40] odtworzono wyniki doświadczalne dla dwuosowego cyklicznego ściskania przy stałym stosunku naprężeń $k = \sigma_2/\sigma_1 = 0,333$. Zależności doświadczalne $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$) przedstawia rys. III.33. Zrealizowany doświadczalnie program obciążenia obejmuje cykle od zera do zadanego maksymalnego poziomu naprężenia, który zwiększa się w kolejnych cyklach. Program obciążenia ogranicza się do stanu przedkrytycznego. Należy zauważyć, że przedstawione na rys. III.33 krzywe doświadczalne budzą pewne wątpliwości. Wartości odkształceń ε_1 i ε_3 są wyjątkowo duże, zarówno w porównaniu z monotonicznymi doświadczeniami *H.Kupfera* (patrz punkt III.1.2.1) jak i z przedstawionymi powyżej rezultatami dla jednoosiowego cyklicznego ściskania. Dodatkowo krzywe $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ i $\sigma_1/f_c - \varepsilon_3$ dla przypadku obciążenia pierwotnego wykazują znaczną krzywiznę już dla niskich poziomów naprężenia. Jest to również niezgodne z pozostałymi badaniami doświadczalnymi.

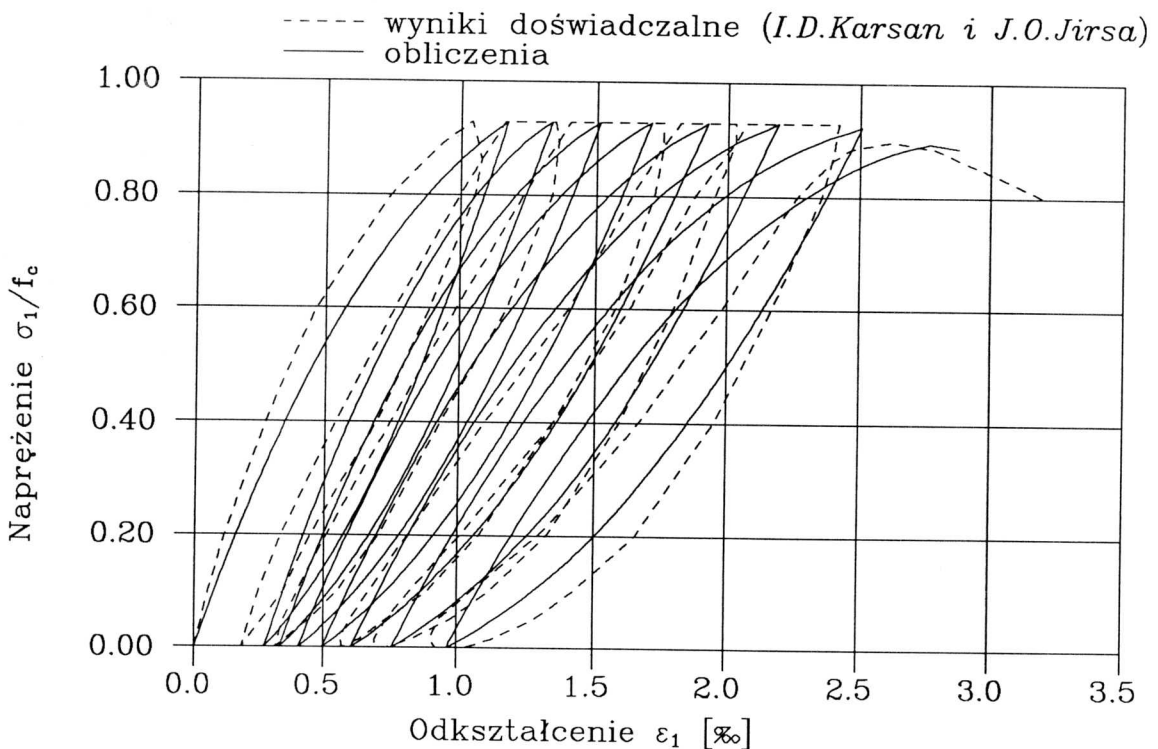
Wyniki obliczeń w postaci zależności $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ prezentuje rys. III.34. Można zaobserwować dość dobrą zgodność obliczonej i doświadczalnej krzywej $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ w zakresie obciążenia pierwotnego, jakkolwiek krzywa doświadczalna ma większą krzywiznę. Znacznie mniejsze są natomiast wartości obliczonych odkształceń resztkowych ε_1^{pRES} . Dodatkowo obliczone pętle histerezy są znacznie szersze od doświadczalnych, co powoduje, że końcowa obliczona wartość odkształcenia ε_1 jest większa od uzyskanej doświadczalnie. Podobne uwagi można sformułować dla krzywej $\sigma_1/f_c - \varepsilon_3$. Obliczone i pomierzone wartości ε_2 są bliskie zera, co zgadza się z wynikami doświadczalnymi *J.van Miera* [76] dla obciążenia monotonicznego przy tej samej wartości k .

Oprócz prezentowanych powyżej programów obciążenia duże znaczenie praktyczne posiada program cyklicznych zmian naprężenia od ustalonej minimalnej wartości do ustalonej maksymalnej wartości. Wyniki dla tego typu obciążenia prezentują rys. III.35 – 38 dla przypadku jednoosiowego ściskania w porównaniu z wynikami doświadczalnymi *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy*. Na rys. III.35 przedstawiono wyniki dla naprężenia zmniejszającego się w granicach $\sigma_1 = 0 \div 0,929f_c$. Obliczenia w poprawny sposób odzwierciedlają degradację sztywności przy odciążeniu i obciążeniu wtórnym, wartości odkształcenia resztkowego ε_1^{pRES} oraz odkształcenie maksymalne ε_1 , przy którym następuje osiągnięcie skurczonej powierzchni granicznej.

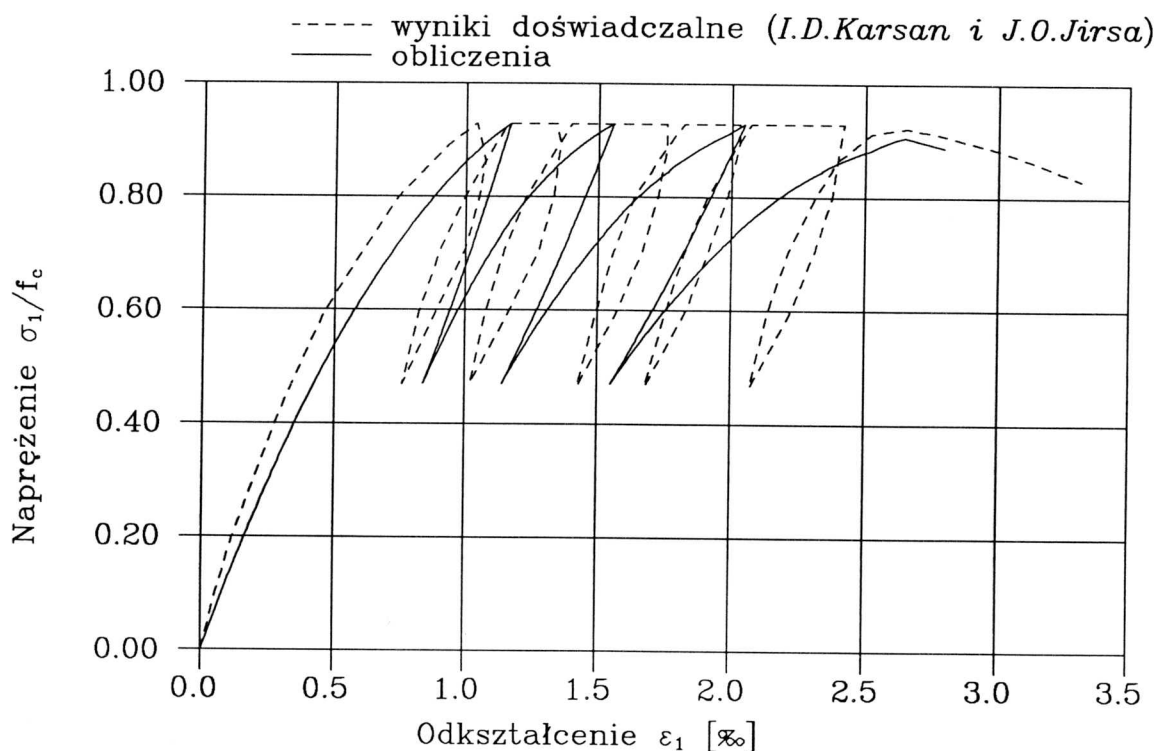
Rys.III.33 Cykliczne ściskanie – doświadczenie *W.G.Beamsa i innych*

Rys.III.34 Cykliczne ściskanie – obliczenia dla procesu z rys.III.33

Z chwilą osiągnięcia powierzchni granicznej kontynuacja zadanego programu obciążenia (czyli wzrost naprężenia do zadanej wartości maksymalnej) jest niemożliwa i przy sterowaniu siłowym próbka ulega zniszczeniu. Zjawisko to zostało dobrze odzwierciedlone w obliczeniach. Natomiast obliczone pętle histerezy są znacznie szersze od doświadczalnych co powoduje, że w obliczeniach zniszczenie następuje w 8 cyklu, zaś doświadczalnie w 17 cyklu. Rys. III.36 przedstawia wyniki dla cyklicznej zmiany naprężenia σ_1 w zakresie $\sigma_1 = 0,471f_c \div 0,929f_c$. W tym przypadku dobrze odwzorowane jest odciążenie, natomiast obliczone krzywe powtórnego obciążenia są zbyt nachylone. W efekcie w obliczeniach nie tworzą się pętle histerezy i zniszczenie następuje w 4 cyklu, gdy zaś doświadczalnie w 28 cyklu. Nieprawidłowy kształt pętli histerezy spowodowany jest tym, że zgodnie ze wzorem (II.145) moduł H_{p_2} nie zależy od poziomu naprężenia od którego rozpoczyna się proces obciążenia wtórnego. Oznacza to, że w rozpatrywanym przypadku krzywe obciążenia wtórnego są takie same jak dla rys. III.35 gdzie obciążenie wtórne rozpoczynało się od zera. Ta wada nie może być usunięta bez istotnych zmian w modelu betonu i wymaga wprowadzenia dodatkowych zmiennych stanu.



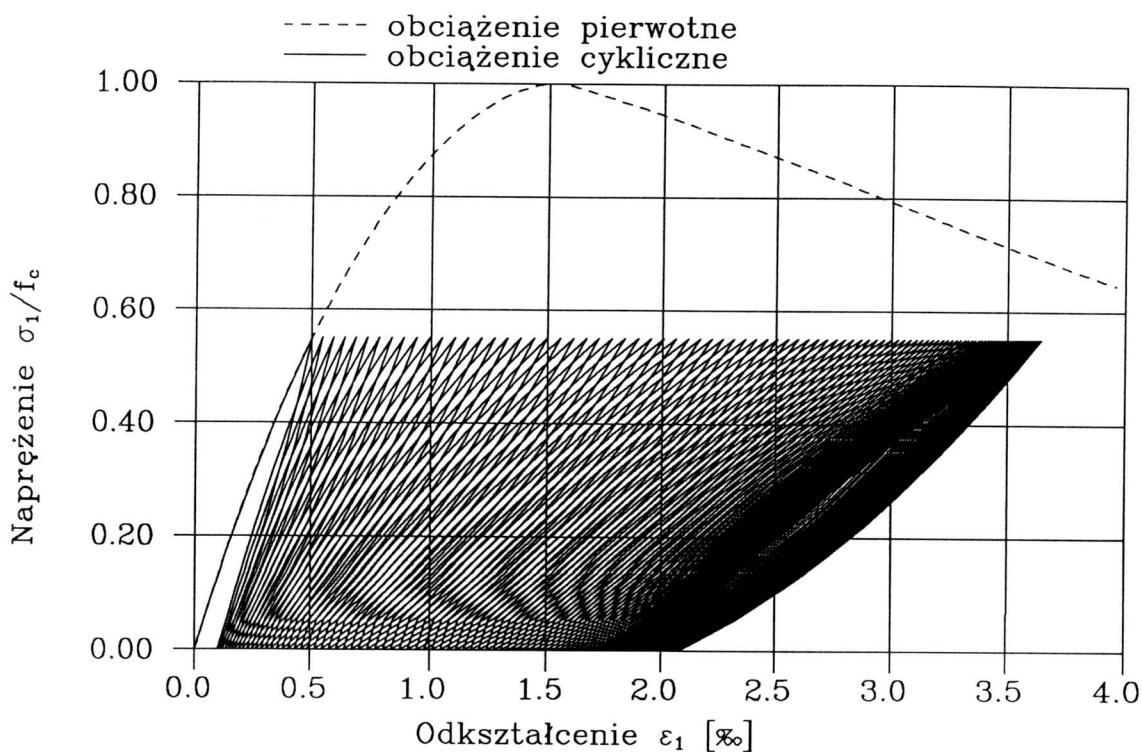
Rys.III.35 Jednoosiowe cykliczne ściskanie ($\sigma_1 = 0 \div 0,929f_c$)



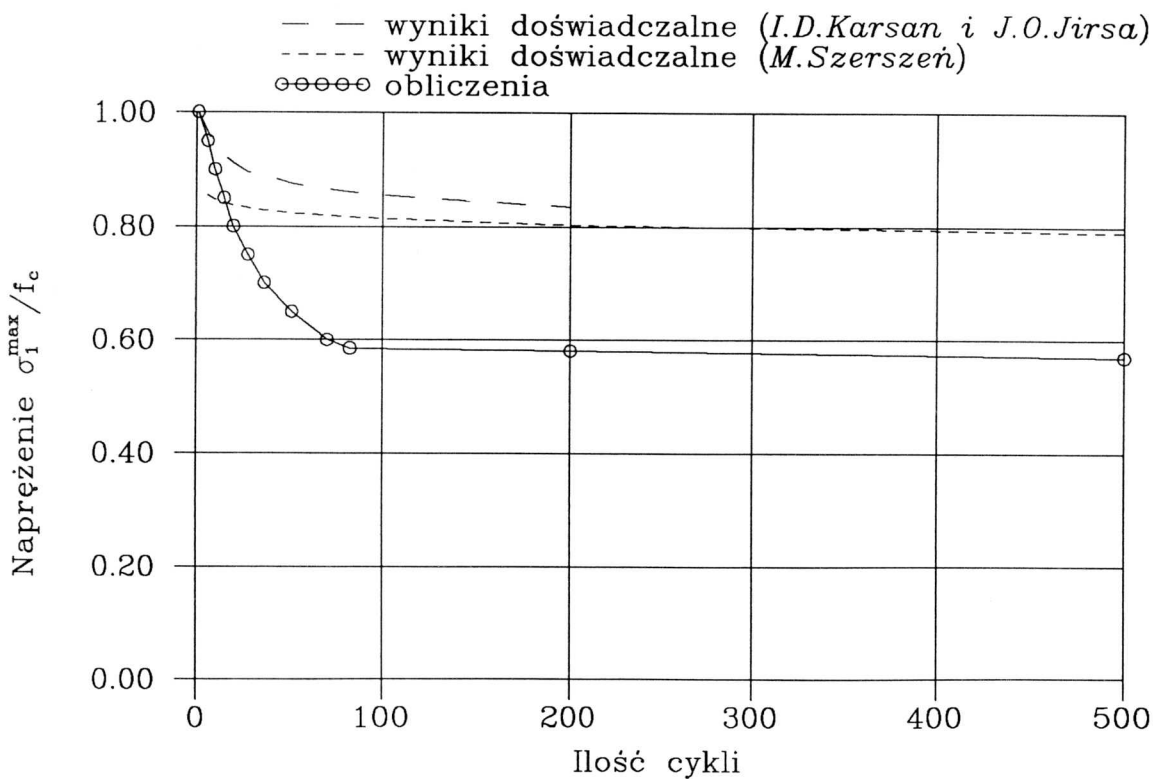
Rys.III.36 Jednoosiowe cykliczne ściskanie ($\sigma_1 = 0,471f_c \div 0,929f_c$)

Na rys. III.37 przedstawiono zależność $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ dla przypadku naprężenia zmieniającego się w granicach $\sigma_1 = 0 \div 0,550f_c$. W pracy [63] nie zamieszczono wyników dla tego zakresu obciążenia, jednak z tekstu pracy wynika, że już dla naprężenia zmieniającego się w granicach $\sigma_1 = 0 \div 0,741f_c$ następuje stabilizacja odkształceń i nie obserwuje się zniszczenia. Rys. III.37 przedstawia 500 cykli podczas których następuje stabilizacja odkształceń. Podobnie jak dla wyższych poziomów naprężenia obserwuje się degradację sztywności i powiększenie się szerokości pętli histerezy dla kolejnych cykli obciążenia.

Dla ustalenia ilości cykli obciążenia do zniszczenia dla naprężenia σ_1 zmieniającego się od zera do ustalonej maksymalnej wartości wykonano szereg obliczeń. Ich wyniki w porównaniu z wynikami doświadczalnymi *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy* przedstawia rys. III.38. Dodatkowo na rysunku tym przedstawiono krzywą doświadczalną z nowszej pracy [112], opracowaną dla maksymalnej wartości naprężenia zmieniającej się w granicach $0,70 - 0,90f_c$. Krzywa ta układa się nieco poniżej wyników doświadczalnych *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy*.



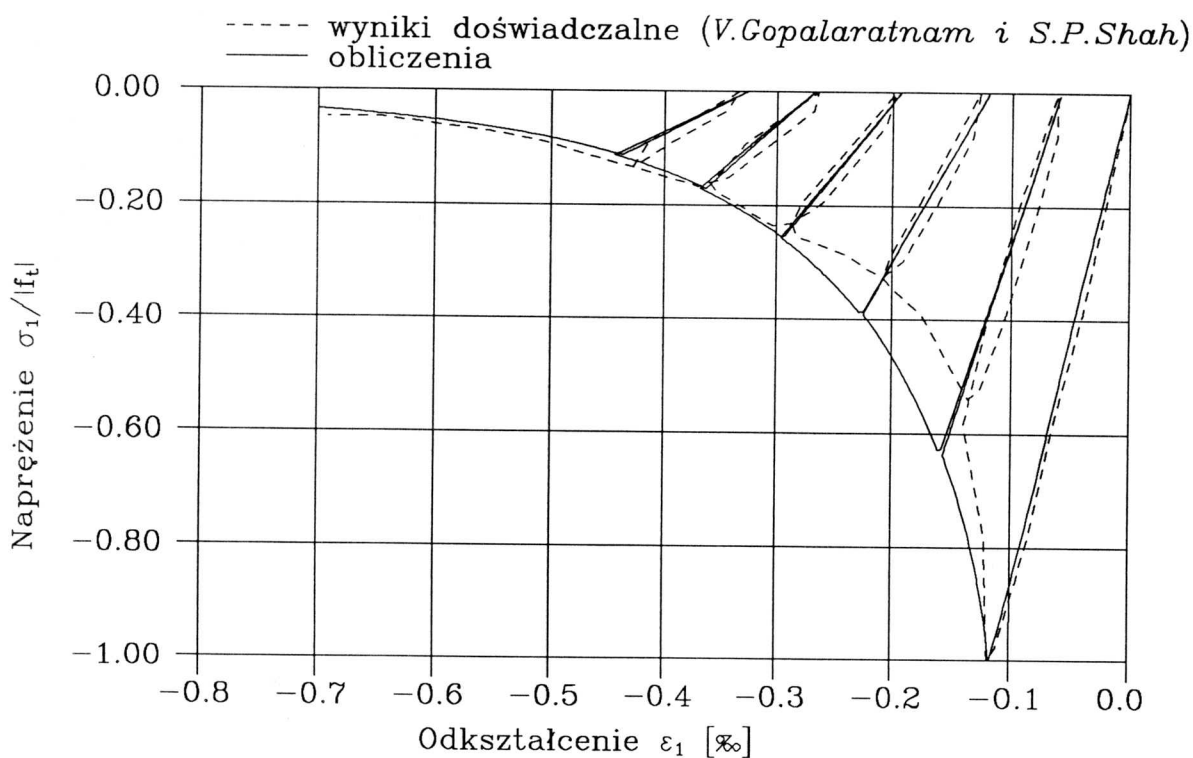
Rys.III.37 Jednoosiowe cykliczne ściskanie ($\sigma_1 = 0 \div 0,550f_c$)



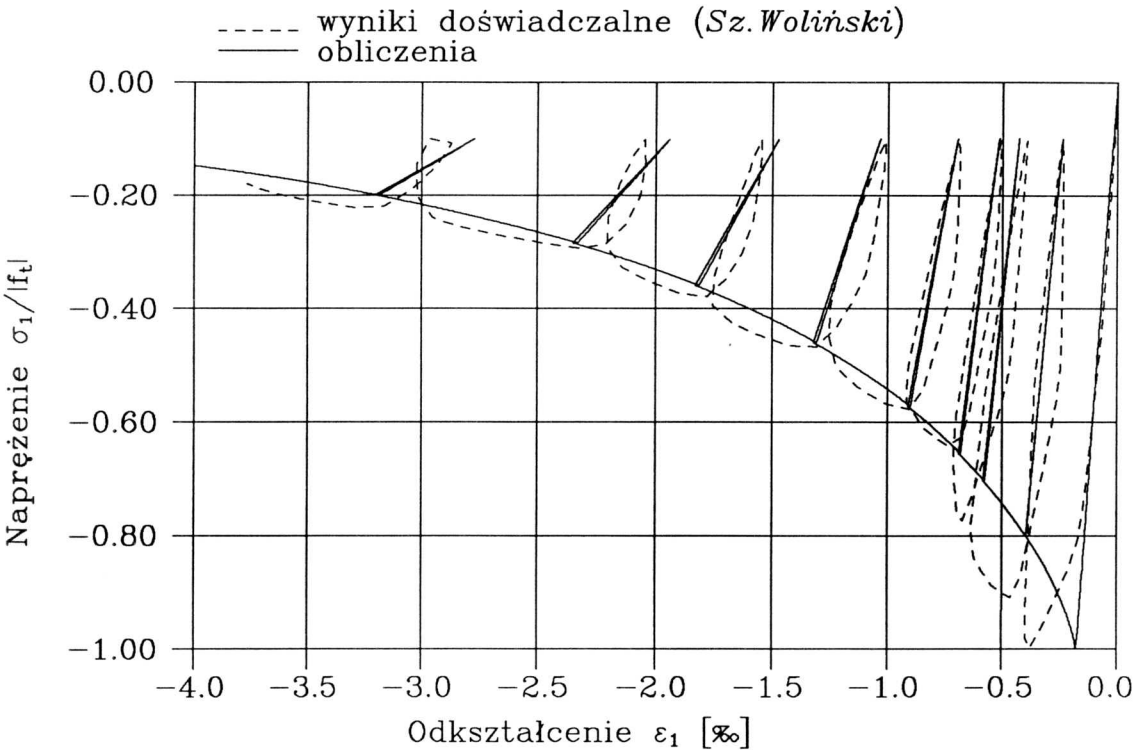
Rys.III.38 Wytrzymałość zmęczeniowa ($\sigma_1 = 0 \div \sigma_1^{\max}$)

Widać, że z obliczeń dla danego poziomu maksymalnej wartości naprężenia otrzymuje się mniejszą liczbę cykli do zniszczenia niż doświadczalnie. Jest to zgodne z wynikami przedstawionymi na rys. III.35 i stanowi oszacowanie po stronie bezpiecznej.

Rys. III.39 i rys. III.40 przedstawiają wyniki dla cyklicznego jednoosiowego rozciągania. Na rys. III.39 pokazane jest obciążenie od zera do minimalnej wartości naprężenia σ_1 na powierzchni granicznej w stanie pokrytycznym w porównaniu z doświadczeniami *V.Gopalaratnama* i *S.P.Shaha* [50]. Widać bardzo dobrą zgodność obliczonych i doświadczalnych krzywych odciążenia i obciążenia wtórnego, a także wartości naprężenia σ_1 na powierzchni granicznej. Natomiast doświadczalne pętle histerezy mają nieco większą szerokość niż obliczone. Takie same wnioski można sformułować w odniesieniu do rys. III.40. W tym przypadku cykle naprężeniowe zaczynają się nie od zera, ale od wartości $\sigma_1 = 0,10f_t$; wyniki doświadczalne pochodzą z pracy *Sz.Wolińskiego* [123]. Rys. III.41 i rys. III.42 przedstawiają proste przykłady obciążeń znakozmiennych bez porównania z danymi doświadczalnymi przy wykorzystaniu trzech różnych funkcji sprzężenia kurczenia się powierzchni granicznej (patrz punkt II.7).

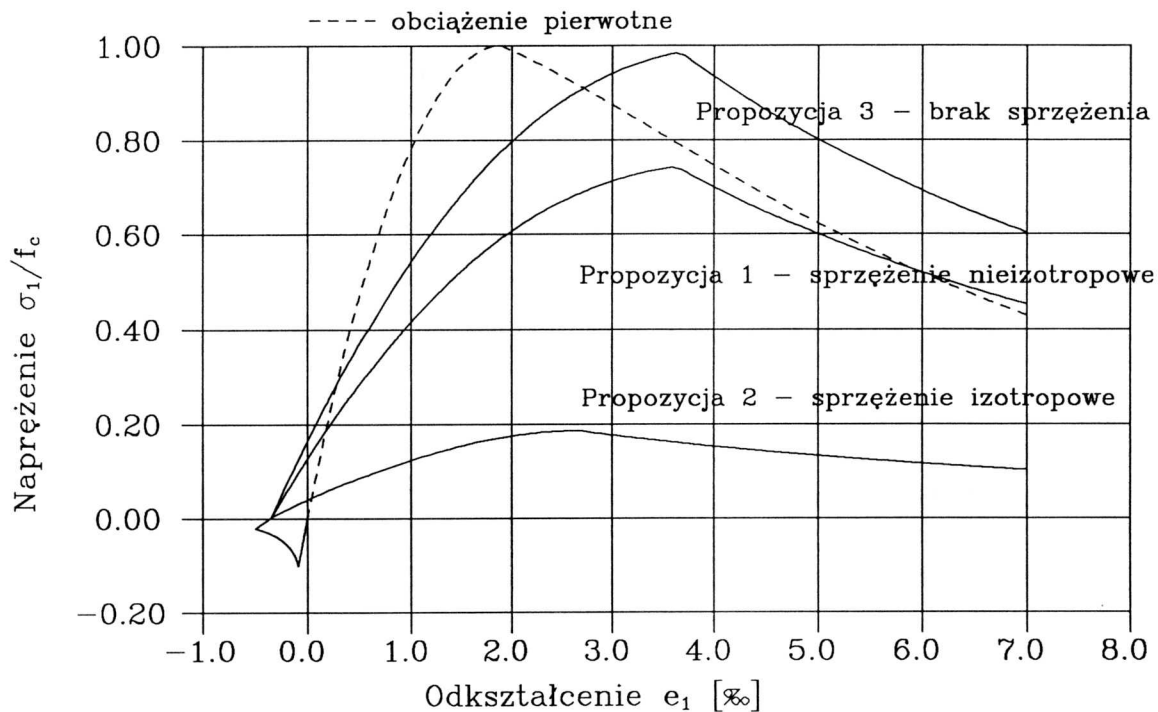


Rys.III.39 Jednoosiowe cykliczne rozciąganie do powierzchni granicznej

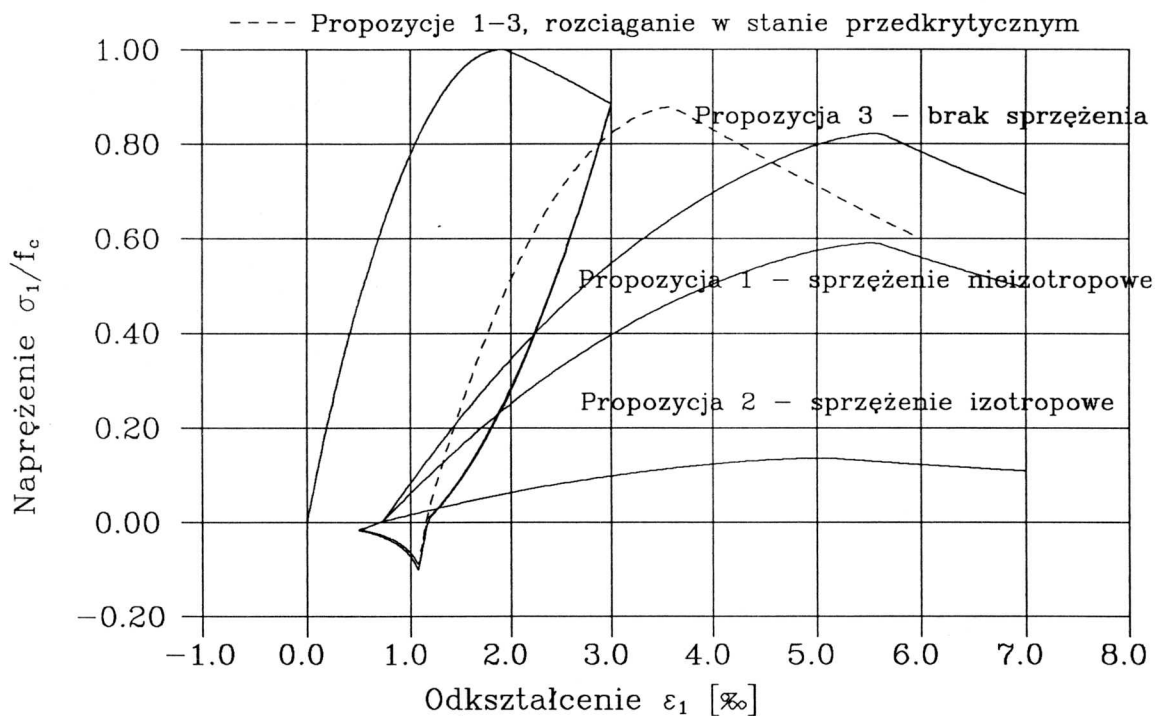


Rys.III.40 Jednoosiowe cykliczne rozciąganie do powierzchni granicznej

Na rys. III.41 przedstawione jest jednoosiowe ściskanie następujące po rozciąganiu w porównaniu z obciążeniem pierwotnym przy ścisaniu (linia przerywana). Podczas rozciągania zostaje osiągnięty stan pokrytyczny, co prowadzi do zmniejszenia się wytrzymałości na ściskanie. Redukcja wytrzymałości na ściskanie f_c jest zróżnicowana w zależności od funkcji sprężenia. W szczególności dla propozycji 3° (brak sprężenia) redukcja wytrzymałości f_c nie występuje. Dla wszystkich trzech funkcji obserwuje się mniejszą sztywność przy ścisaniu w porównaniu z przypadkiem obciążenia pierwotnego. Wynika to z faktu, że ściskanie następujące po rozciąganiu ma charakter obciążenia wtórnego. Rys. III.42 prezentuje proces: ściskanie – rozciąganie – ściskanie dla trzech funkcji sprężenia kurczenia się powierzchni granicznej. Dla przypadku, gdy podczas rozciągania nie zostaje osiągnięty stan pokrytyczny zachowanie się materiału jest takie samo dla wszystkich funkcji (linia przerywana). Natomiast osiągnięcie stanu pokrytycznego podczas rozciągania prowadzi do zróżnicowanego zachowania się podczas powtórnego ściskania, w szczególności do znacznego obniżenia sztywności.



Rys.III.41 Jednoosiowe ściskanie poprzedzone rozciąganiem



Rys.III.42 Jednoosiowe ściskanie - rozciąganie - ściskanie

Jak już wspomniano w punkcie II.7 brak jest wyników doświadczalnych, z którymi można porównać rezultaty przedstawione na rys. III.41 – 42.

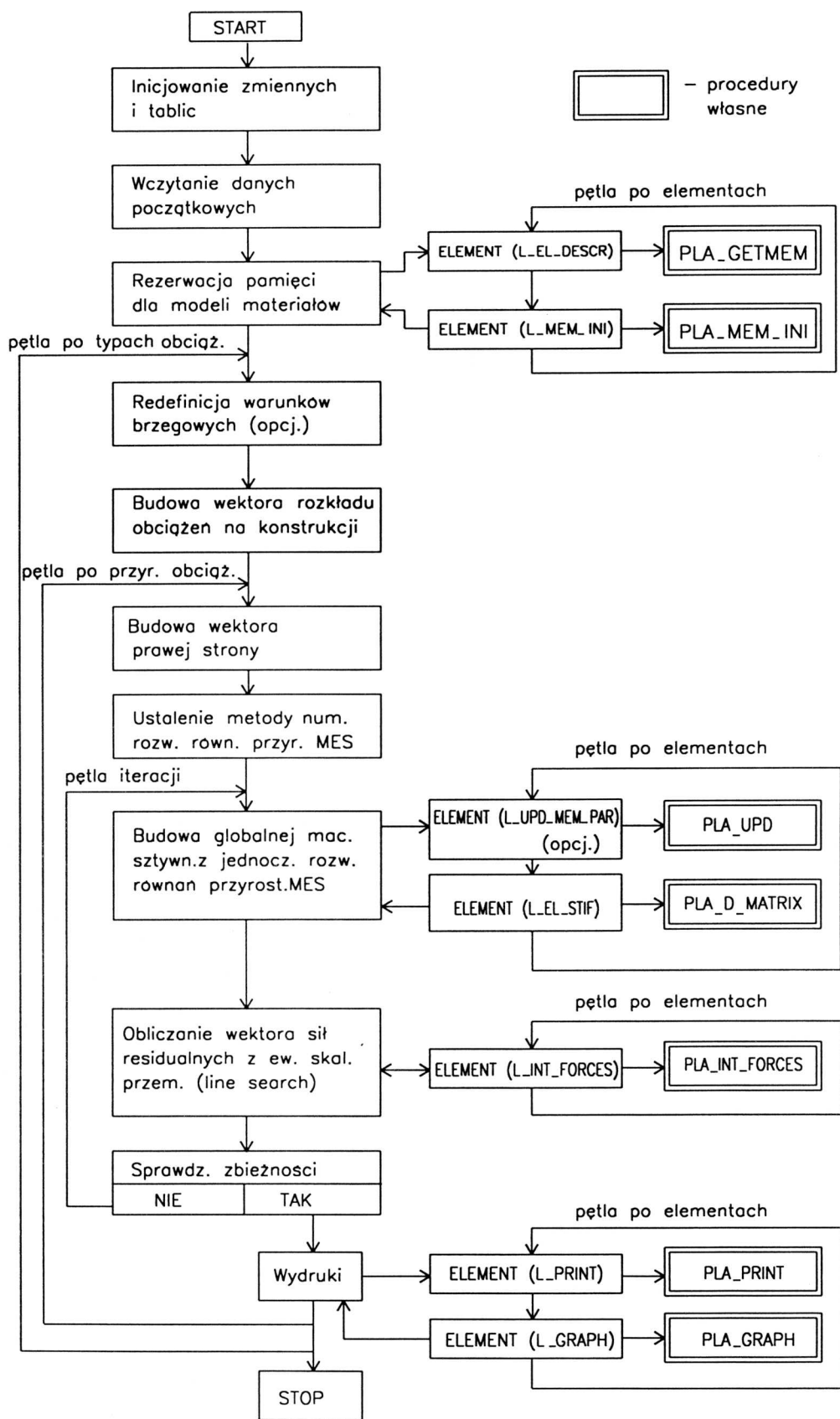
Przedstawione przykłady świadczą, że model w większości przypadków poprawnie odwzorowuje zachowanie się materiału przy obciążeniach niemonotonicznych. Porównanie z doświadczeniami *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy* dla jednoosiowego ściskania wskazuje na nieco zbyt małą liczbę cykli do zniszczenia dla obciążeń o ustalonej maksymalnej wartości naprężenia. Również w przypadku, gdy ustalona minimalna wartość naprężenia jest różna od zera zachowanie się modelu nie jest w pełni poprawne.

III.2 Przykłady obliczeń konstrukcji za pomocą MES

III.2.1 Implementacja modelu betonu do programu ATFEM

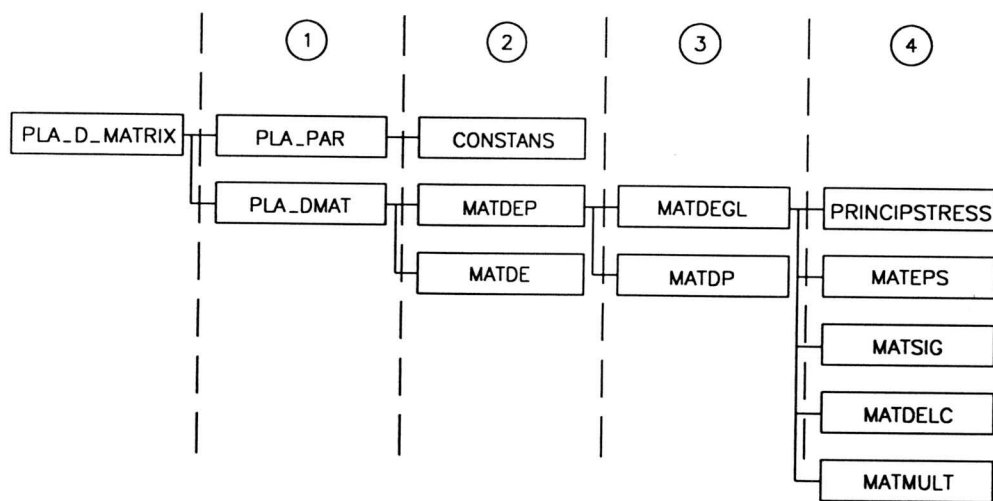
Szczegółowe informacje o programie ATFEM, preprocesorze ATGEN i postprocesorze ATGRAPH, przy pomocy których uzyskano przedstawione w tym punkcie wyniki, można znaleźć w [115]. Program, autorstwa *A.Trutego*, służy do obliczeń konstrukcji znajdujących się w płaskim stanie naprężenia lub odkształcenia. Struktura programu jest taka, że umożliwia zaimplementowanie różnych modeli materiału w prosty sposób. W szczególności rozdzielone są procedury opisujące model materiału od procedur obliczających macierze i wektory dla elementu skończonego. Zwalnia to osobę opracowującą model materiału od szczegółowej znajomości zasad budowania elementu. Do tej pory w programie dostępne są: model sprężysto – plastyczny opisujący ośrodek gruntowy (tzw. *cam – clay model*) [114], model sprężysto – kruchy opisujący beton [111], jednoosiowy model idealnie sprężysto – plastyczny dla elementu kratowego idealizującego zbrojenie, oraz model autora.

Uproszczony schemat blokowy programu przedstawia rys. III.43. W schemacie tym podwójnymi ramkami zaznaczono procedury własne autora. W większości przypadków procedury te wywołują następne procedury. Sposób zagnieżdżenia poszczególnych procedur pokazano na rys. III.44 – 46. Dodatkowo, w tabl. III.1 opisano krótko funkcje poszczególnych procedur i podano ich długość. Całkowita długość procedur własnych autora wynosi 1949 linii.



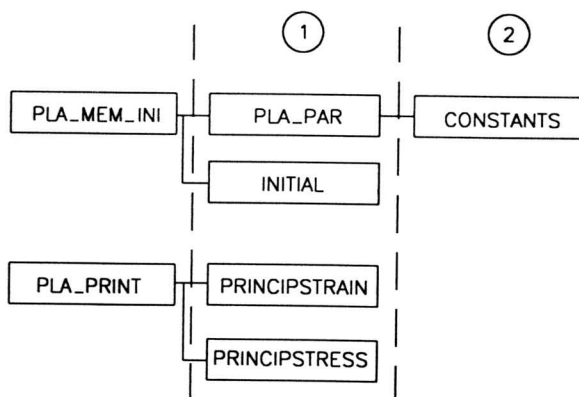
Rys. III.43. Uproszczony schemat blokowy programu ATFEM

Poziomy zagnieżdżenia



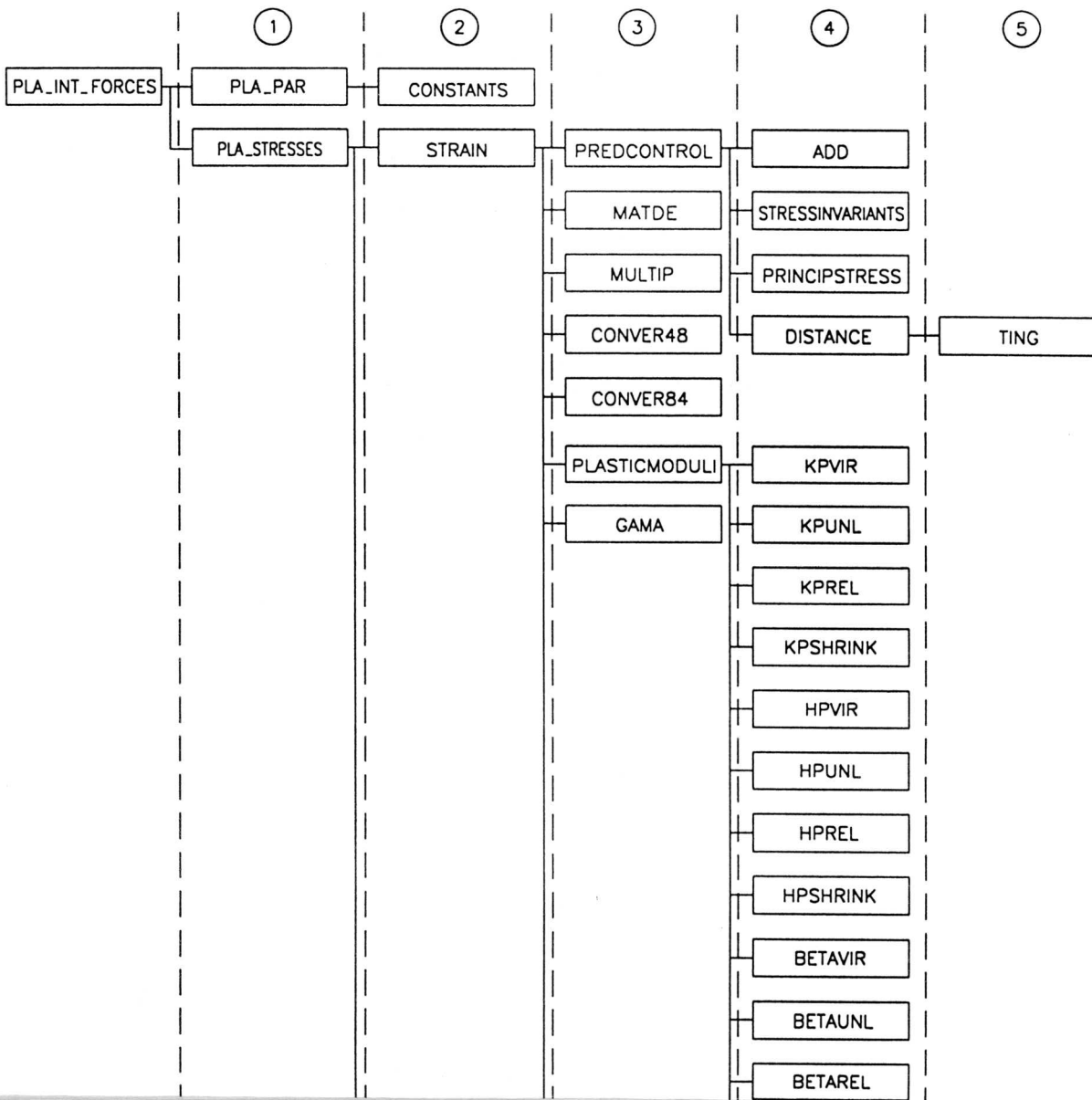
Rys. III.44. Schemat zagnieżdżenia podprocedur w procedurze PLA_D_MATRIX

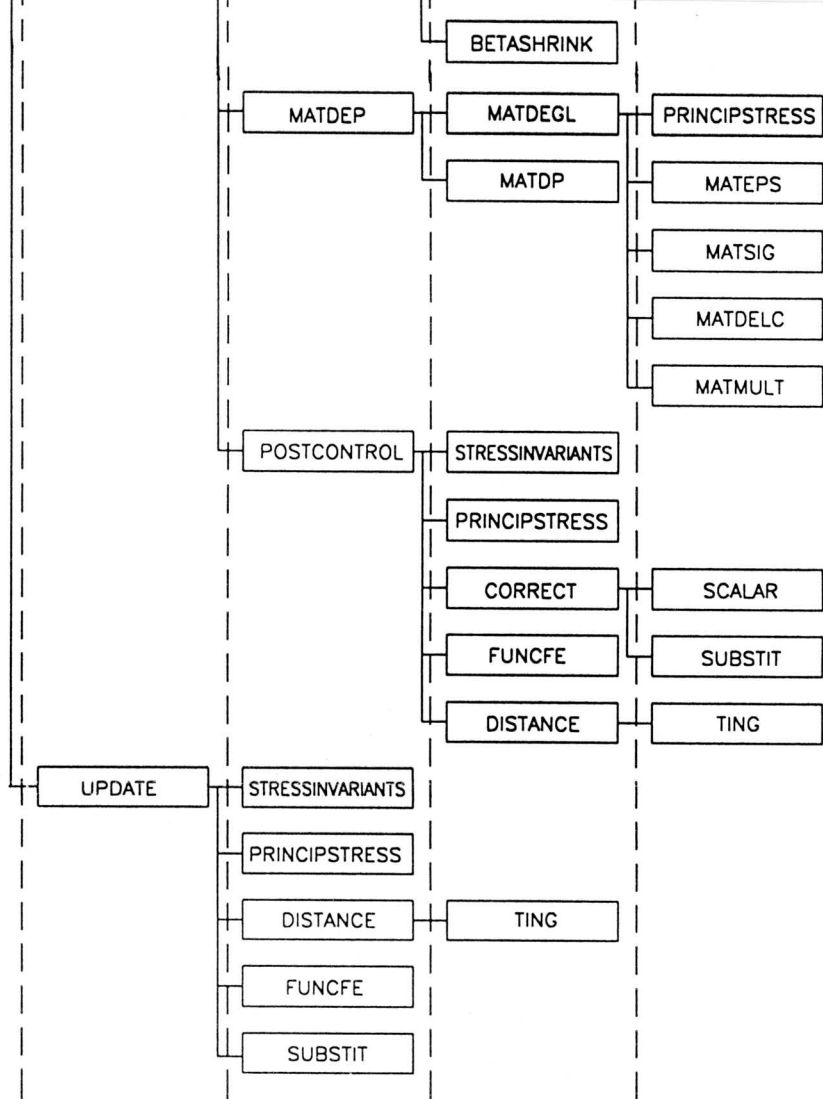
Poziomy zagnieżdżenia



Rys. III.45. Schematy zagnieżdżenia podprocedur w procedurach PLA_MEM_INI i PLA_PRINT

Poziomy zagnieżdżenia





Rys. III.46. Schemat zagnieżdżenia podprocedur w procedurze PLA_INT_FORCES

Lp	Nazwa procedury	Funkcja	Długość* (liczba linii)
1	ADD	Obliczanie sumy dwóch wektorów,	13
2	BETAREL	Obliczanie wartości współczynnika β dla przypadku obciążenia wtórnego,	10
3	BETASHRINK	Obliczanie wartości współczynnika β dla przypadku obciążenia pierwotnego w stanie pokrytycznym,	10
4	BETAUNL	Obliczanie wartości współczynnika β dla przypadku odciążenia,	10
5	BETAVIR	Obliczanie wartości współczynnika β dla przypadku obciążenia pierwotnego,	14
6	CONSTANTS	Nadanie wartości stałym materiałowym $K_{p0}, H_{p0}, E_0, E, \nu, m, n, c_1, c_2, c_4, p_1, p_2, p_3,$	28
7	CONVER 48	Zamiana wektora real*4 na wektor real*8,	14
8	CONVER 84	Zamiana wektora real*8 na wektor real*4,	14
9	CORRECT	Korekta stanu naprężenia w stanie pokrytycznym (sprowadzenie na powierzchnię graniczną),	21
10	DISTANCE	Obliczanie wartości odległości sprowadzonych $\delta, \delta^*, \delta_{min}^*$ i τ_{0u} dla aktualnego stanu naprężenia,	85
11	FUNCFE	Obliczanie wartości funkcji f_1 i f_2 dla znanych wartości γ_{0u}^p i γ_0^p ,	72
12	GAMA	Obliczanie wartości przyrostów $\Delta\varepsilon_z^p$ i $\Delta\gamma_0^p$, a następnie wartości całkowitych ε_z^p i γ_0^p ,	82
13	HPREL	Obliczanie wartości modułu H_p dla przypadku obciążenia wtórnego,	34
14	HPSHRINK	Obliczanie wartości modułu H_p dla przypadku obciążenia pierwotnego w stanie pokrytycznym,	18
15	HPUNL	Obliczanie wartości modułu H_p dla przypadku odciążenia,	33
16	HPVIR	Obliczanie wartości modułu H_p dla przypadku obciążenia pierwotnego,	12
17	INITIAL	Inicjalizacja wartości zmiennych stanu $\sigma_0^{MAX}, \delta_{min}, \delta_{max}^*, \bar{\gamma}_0^{MAX}, \bar{\gamma}_0^p, f_c^*, f_t^*$,	25
18	KPREL	Obliczanie wartości modułu K_p dla przypadku obciążenia wtórnego,	13

19	KPSHRINK	Obliczanie wartości modułu K_p dla przypadku obciążenia pierwotnego w stanie pokrytycznym,	13
20	KPUNL	Obliczanie wartości modułu K_p dla przypadku odciążenia,	13
21	KPVIR	Obliczanie wartości modułu K_p dla przypadku obciążenia pierwotnego,	17
22	MATDE	Obliczanie macierzy sztywności sprężystej \underline{D}_e (przy użyciu modułu E_0),	28
23	MATDEGL	Obliczanie zmodyfikowanej macierzy sztywności sprężystej \underline{D}_e^N w układzie globalnym (poprzez transformację z układu lokalnego),	42
24	MATDELC	Obliczanie zmodyfikowanej macierzy sztywności sprężystej \underline{D}_e^{N1} w układzie lokalnym, współosiowym z kierunkami naprężeń głównych,	28
25	MATDEP	Obliczanie zmodyfikowanej macierzy sztywności sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} jako sumy macierzy $\underline{D}_e^N + \underline{D}_p$,	21
26	MATDP	Obliczanie macierzy plastycznej \underline{D}_p przy użyciu aktualnych wartości $K_p, H_p, \beta, \tau_0, \sigma_0$,	90
27	MATEPS	Obliczanie macierzy transformacji odkształceń \underline{T} z układu globalnego do lokalnego,	21
28	MATMULT	Obliczanie iloczynu dwóch macierzy,	19
29	MATSIG	Obliczanie macierzy odwrotnej transponowanej $(\underline{T}^{-1})^T$,	21
30	MULTIP	Obliczanie iloczynu macierzy i wektora,	15
31	PLASTICMODULI	Obliczanie wartości modułów K_p, H_p i współczynnika β dla danego przypadku obciążenia,	49
32	PLA_DMAT	Obliczanie macierzy sztywności sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} dla danego punktu Gaussa i jej symetryzacja,	32
33	PLA_D_MATRIX	Obliczanie macierzy sztywności sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} na poziomie elementu (dla wszystkich punktów Gaussa w elemencie),	52
34	PLA_GETMEM	Ustalenie wskaźników dla identyfikacji położenia poszczególnych zmiennych (dla danego punktu Gaussa w określonym elemencie) w globalnej pamięci (w buforze i zbiorze zewnętrznym),	56
35	PLA_GRAPH	Przesłanie wyników dla danego elementów po zakończeniu kroku przyrostowego do zbioru, wykorzystywanego przez postprocesor ATGRAPH,	53

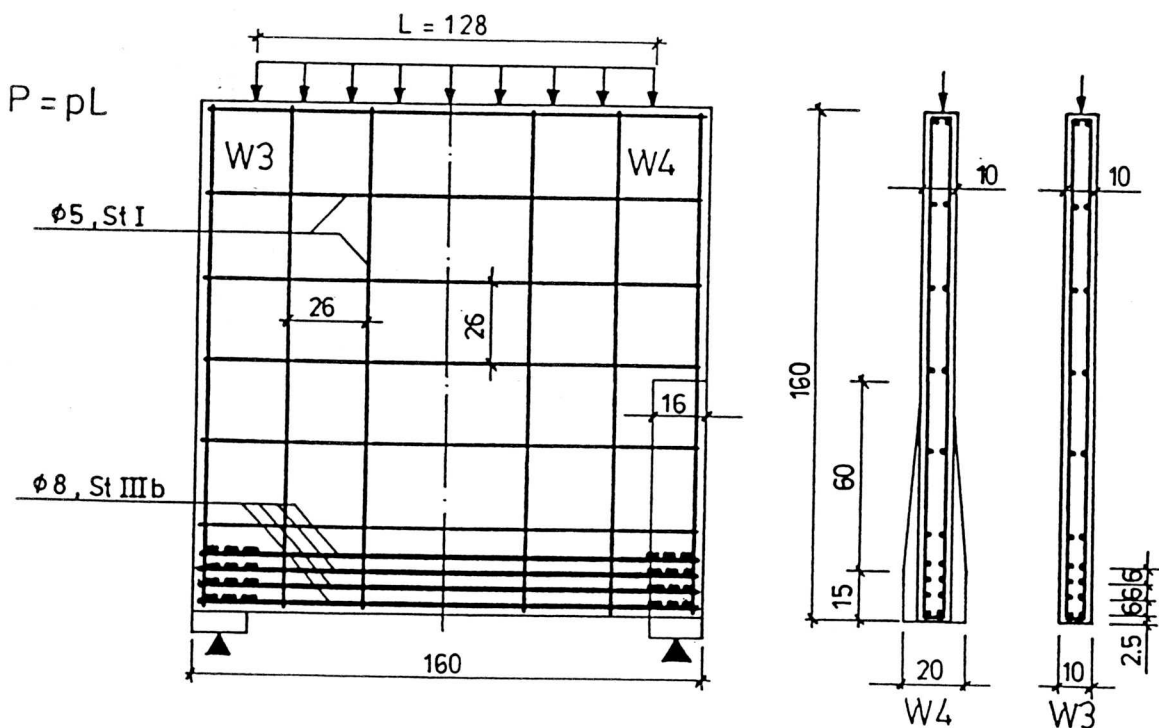
36	PLA_INT_FORCES	Obliczenie wektora całkowitych naprężeń wewnętrznych $\underline{\sigma}$ na poziomie elementu (dla wszystkich punktów Gaussa w elemencie),	101
37	PLA_MEM_INI	Przepisywanie wartości początkowych zmiennych dla danego elementu do pamięci globalnej,	62
38	PLA_PAR	Nadanie wartości podstawowym stałym materiałowym $f_c, f_t, \varepsilon_0, h$ dla danego punktu Gaussa,	18
39	PLA_PRINT	Drukowanie wyników dla danego elementu po zakończeniu kroku przyrostowego,	41
40	PLA_STRESSES	Obliczenie wektora całkowitych naprężeń $\underline{\sigma}$ dla danego punktu Gaussa, przy podziale kroku przyrostowego na podprzyrosty,	38
41	PLA_UPD	Przepisanie bieżących wartości zmiennych dla danego elementu do pamięci globalnej po zakończeniu kroku przyrostowego (aktualizacja pamięci),	33
42	POSTCONTROL	Ustalenie przypadku obciążenia, obliczenie odległości spowodowanych i ewentualna korekta stanu naprężenia na końcu podprzyrostu,	100
43	PREDCONTROL	Ustalenie przypadku obciążenia, obliczenie odległości spowodowanych na początku podprzyrostu,	107
44	PRINCIPSTRAIN	Obliczanie całkowitych wartości odkształceń w układzie lokalnym współosiowym z kierunkiem naprężeń głównych,	26
45	PRINCIPSTRESS	Obliczanie całkowitych wartości naprężeń głównych,	23
46	SCALAR	Obliczanie iloczynu wektora przez skalar,	13
47	STRAIN	Obliczanie wartości przyrostu naprężenia $\Delta \underline{\sigma}$ dla zadanego przyrostu odkształcenia $\Delta \underline{\varepsilon}$ (w trakcie danego podprzyrostu),	100
48	STRESS-INVARIANTS	Obliczanie wartości σ_0 i τ_0 ,	13
49	SUBSTIT	Przepisanie wartości danego wektora do innego wektora,	13
50	TING	Obliczanie wartości naprężeń σ_{1_u} i σ_{2_u} na powierzchni granicznej (dla zadanych wartości f_c^* i f_t^*),	66
51	UPDATE	Aktualizacja wartości zmiennych stanu na końcu podprzyrostu,	117

*) wraz z komentarzami i pustymi liniami wprowadzonymi dla przejrzystości procedur

Tablica III.1 Procedury własne dołączone do programu ATFEM

III.2.2 Analiza statyczna tarcz WT3 i WT4

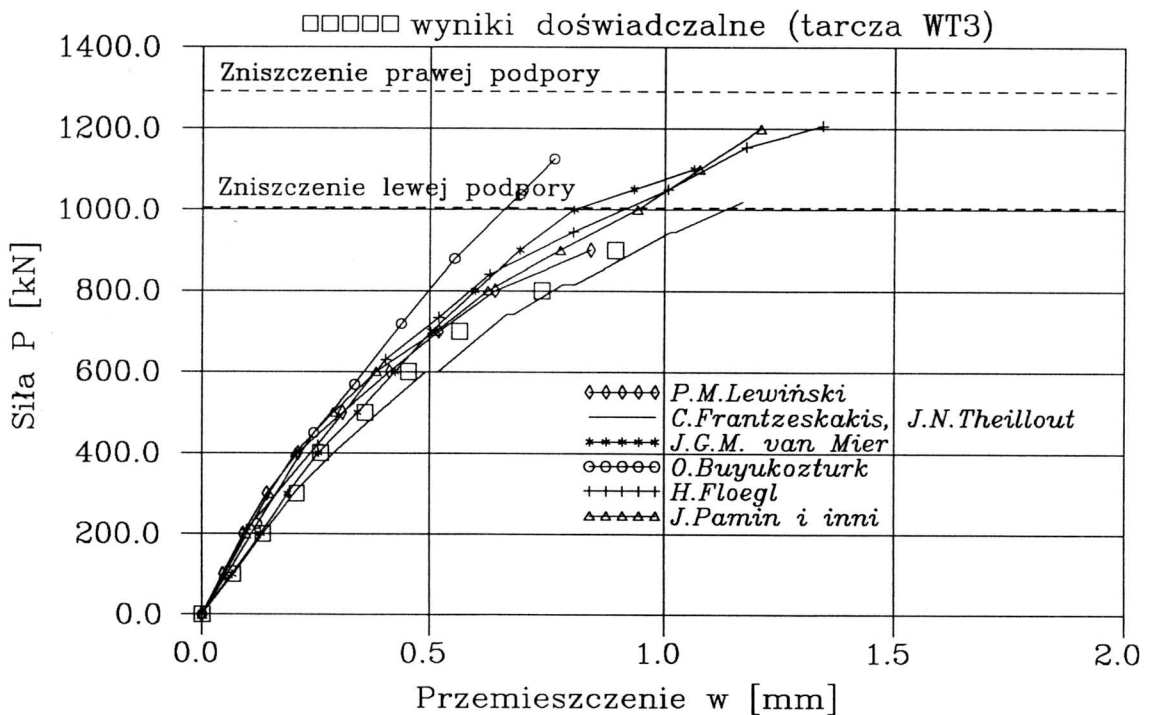
Z szeregu jedno- i dwuprzęsłowych tarcz żelbetowych przebadanych przez *F. Leonhardta* i *R. Walthera* [71], wybrano do obliczeń tarcze WT3 i WT4. Są to jednoprzęsłowe, swobodnie podparte tarcze z obciążeniem równomiernie rozłożonym na górnej krawędzi. Geometria, zbrojenie, sposób obciążenia i warunki brzegowe są jednakowe dla obu tarcz (rys. III.47). Tarcza WT4 odróżnia się od tarczy WT3 jedynie poprzez występowanie żebra podporowego o zmiennej szerokości, kończącego się w połowie wysokości tarczy. Obciążenie tarcz było prowadzone w sposób monotoniczny i proporcjonalny aż do zniszczenia za pomocą hydraulicznej maszyny wytrzymałościowej (wymuszenie siłowe). Dla tarczy WT3 stosowano stałe przyrosty siły $\Delta P = 100\text{kN}$ podczas całego procesu obciążenia, zaś dla tarczy WT4 przyjmowano początkowo $\Delta P = 100\text{kN}$, a dla wyższych poziomów obciążenia $\Delta P = 200\text{kN}$ (gdzie P jest sumaryczną wartością obciążenia rozłożonego na górnej krawędzi). Wyczerpujący i szczegółowy opis zastosowanej techniki badawczej i wyników doświadczeń można znaleźć w [71].



Rys. III.47 Tarcze WT3 i WT4

III.2.2.1 Tarcza WT3

Tarcza WT3 była analizowana przy użyciu MES przez wielu badaczy, między innymi [44], [77], [22], [88], [72], [45]. W większości prac udało się uzyskać dość dobrą zgodność zależności: całkowite obciążenie P – przemieszczenie pionowe środka dolnej krawędzi tarczy w z wynikami doświadczalnymi (rys. III.48). Większe rozbieżności występowały natomiast w uzyskanych numerycznie wartościach obciążenia maksymalnego P_{max} i przyczynach zakończenia procesu obliczeniowego. Podczas doświadczenia przy poziomie obciążenia $P = 1000\text{kN}$ nastąpiło zmiążdżenie betonu nad lewą podporą. Według *F. Leonhardta* i *R. Walthera* w miejscu tym beton został źle wykonany i musiał mieć mniejszą wytrzymałość (o czym świadczyło istnienie dużych porów w betonie). Po wzmocnieniu uszkodzonej strefy przez doklejenie na bocznych powierzchniach tarczy płyt stalowych doświadczenie było kontynuowane dalej. Przy poziomie obciążenia $P = 1290\text{kN}$ nastąpiło z kolei zmiążdżenie betonu nad prawą podporą. Z powodu wcześniejszego uszkodzenia lewej podpory pomiary przemieszczenia w doprowadzono tylko do poziomu obciążenia $P = 900\text{kN}$.

Rys.III.48 Zależność obliczeniowa P – w wg różnych autorów

Nie jest więc znana eksperymentalna zależność $P - w$ w zakresie bliskim obciążenia niszczonego.

Praca [72] nie podaje w ogóle maksymalnej obliczonej wartości obciążenia P_{max} ani przyczyny zakończenia obliczeń. W [88] uzyskano dość dobrą zgodność P_{max} z wynikami doświadczalnymi, nie przeanalizowano jednak fizycznych przyczyn niezbieżności procesu iteracyjnego po przekroczeniu obciążenia maksymalnego. Z kolei w [22] mechanizm zniszczenia tarczy został opisany w sposób niejasny. Jedynie w [44], [77] i [45] wskazano w sposób jasny, że przyczyną zakończenia procesu obliczeniowego była niemożność wyiterowania stanu równowagi na skutek zmiężdżenia betonu w strefie podporowej. Osiągnięte przez różnych badaczy wartości P_{max} i uzyskane mechanizmy zniszczenia tarczy przedstawia tabl. III.2

Autorzy, praca	P_{max} [kN]	Mechanizm zniszczenia
<i>O.Buyukozturk</i> , [22]	1200	“niestabilność materiałowa spowodowana przez uplastycznienie i zarysowanie w strefie podporowej”
<i>J.Pamin</i> , <i>A.Młodzianowski</i> , <i>Z.Waszczyszyn</i> , [88]	1200	nie podano
<i>P.M.Lewiński</i> , [72]	nie podano	nie podano
<i>C.Frantzeskakis</i> , <i>J.N.Theillout</i> , [45]	1001	“zmiężdżenie elementu nad podporą”
<i>H.Floegl</i> , [44]	1207,5	“przekroczenie nośności na ściskanie w jednym punkcie całkowania w strefie podporowej”
<i>J.G.M.van Mier</i> , [77]	1100	“uplastycznienie betonu nad podporą”

Tablica III.2 Wartości obciążenia P_{max} i mechanizmy zniszczenia w obliczeniach różnych autorów dla tarczy WT3

W pracy przyjęto dyskretyzację połowy tarczy WT3 pokazaną na rys. III.49. Dyskretyzacja została tak dobrana, by ściśle odtworzyć układ prętów zbrojenia. W związku z tym

czy z podkładką panuje jednorodny jednoosiowy stan naprężenia). Możliwość osiągnięcia podwyższonej wytrzymałości w strefie przypodporowej jest tłumaczona w [71] sposobem zakotwienia zbrojenia w tej strefie za pomocą poziomych haków i owijanego wzdłuż zbrojenia głównego drutu. To dodatkowe zbrojenie zmniejsza możliwość odkształcenia poprzecznego betonu i powoduje istnienie w rzeczywistości trójosiowego stanu naprężenia. W celu uwzględnienia tego efektu przyjęto w obliczeniach w strefie D zwiększone o 33% wartości wytrzymałości f_c i f_t (tak samo jak w [44]).

Dla przeanalizowania wpływu różnych czynników (w tym wpływu wartości stałych materiałowych) wykonano obliczenia w kilku wariantach. Wartości przyjętych stałych materiałowych dla wszystkich wariantów podano w Załączniku 8.

Wariant 1 – podstawowy, w strefie A przyjęto $h = 0,035\text{m}$, w strefie D zwiększone wartości f_c i f_t , uwzględniono sprężenie kurczenia się powierzchni granicznej przy ściskaniu i rozciąganiu wg propozycji 1° z punktu II.7 (kurczenie nieizotropowe).

Wariant 2 – dane jak w wariacie 1, z wyjątkiem dwukrotnego zwiększenia wartości parametru h w całej tarczy (co oznacza przyjęcie w strefie A wartości $h = 0,070\text{m}$).

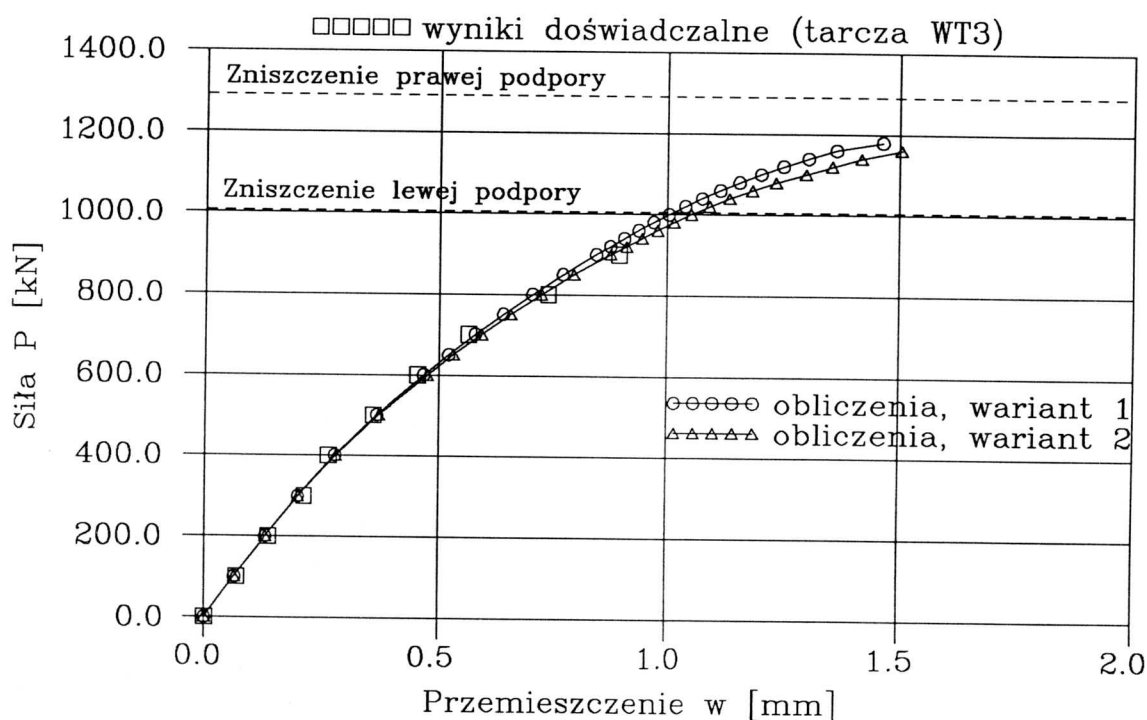
Wariant 3 – dane jak w wariacie 1, sprężenie kurczenia się powierzchni granicznej przy ściskaniu i rozciąganiu przyjęto wg propozycji 2° z punktu II.7 (kurczenie izotropowe).

Wariant 4 – dane jak w wariacie 1, sprężenie kurczenia się powierzchni granicznej przyjęto wg propozycji 3° z punktu II.7 (kurczenie niezależne).

Wariant 5 – dane jak w wariacie 1, kurczenie się powierzchni granicznej wg propozycji 1° (kurczenie nieizotropowe), w strefie D wartości f_c i f_t takie same jak w pozostałych strefach.

Dla wszystkich wariantów przyjęto sterowanie siłowe i prowadzono proces obciążenia aż do wystąpienia niebezpieczności procesu iteracyjnego. Zachowanie się konstrukcji i mechanizmy zniszczenia były bardzo zbliżone do siebie we wszystkich wariantach. Wystąpiły natomiast różnice w wartościach obciążenia P_{max} i otrzymywanych wartościach przemieszczenia w . Rys. III.50 przedstawia zależność $P - w$ dla dwóch różnych wartości parametru h (wariant 1 i 2) w porównaniu z danymi doświadczalnymi. Należy podkreślić bardzo dobrą zgodność z wynikami doświadczalnymi i niewielkie różnice krzywej $P - w$ w zależności od wartości parametru h . Na rys. III.51 pokazano zależność $P - w$ dla trzech

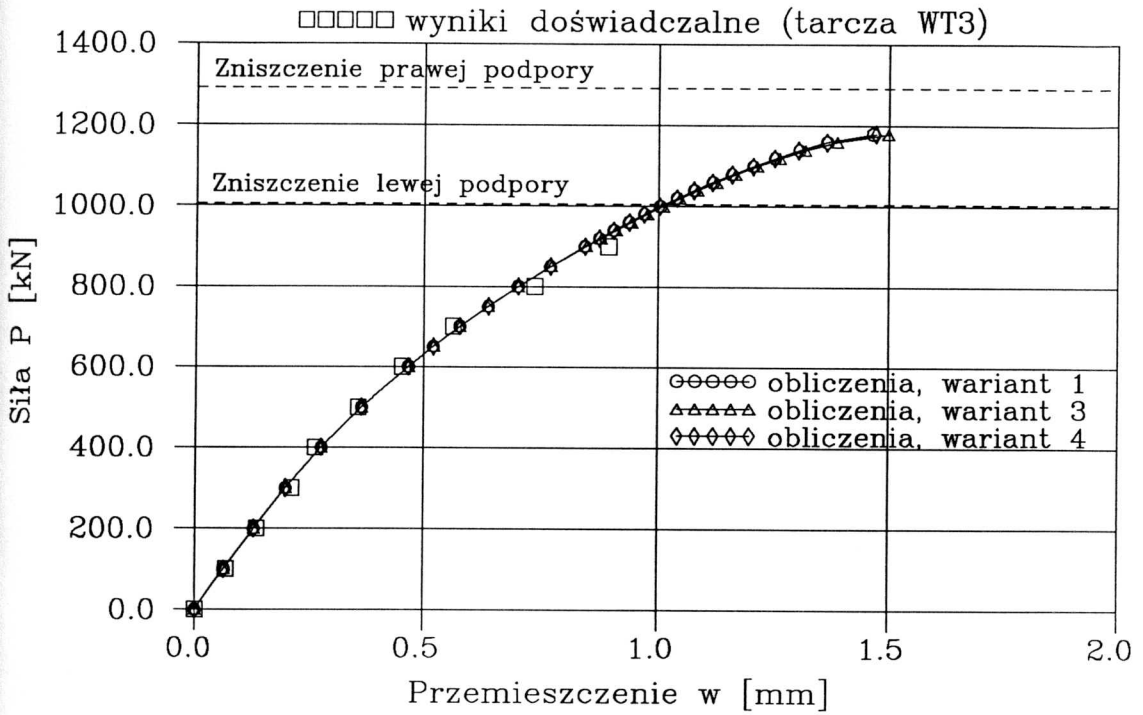
różnych opisów sprzężenia kurczenia się powierzchni granicznej (warianty 1, 3 i 4). W tym przypadku wszystkie trzy opisy prowadzą do praktycznie identycznych rezultatów. Natomiast rys. III.52 przedstawia krzywe $P - w$ dla różnych wartości wytrzymałości betonu w strefie podporowej D (warianty 1 i 5). Przyjęcie mniejszych wartości f_c i f_t w strefie D prowadzi do bardzo znacznej redukcji wartości P_{max} ($P_{max} = 1180\text{kN}$ dla wariantu 1, $P_{max} = 900\text{kN}$ dla wariantu 5).



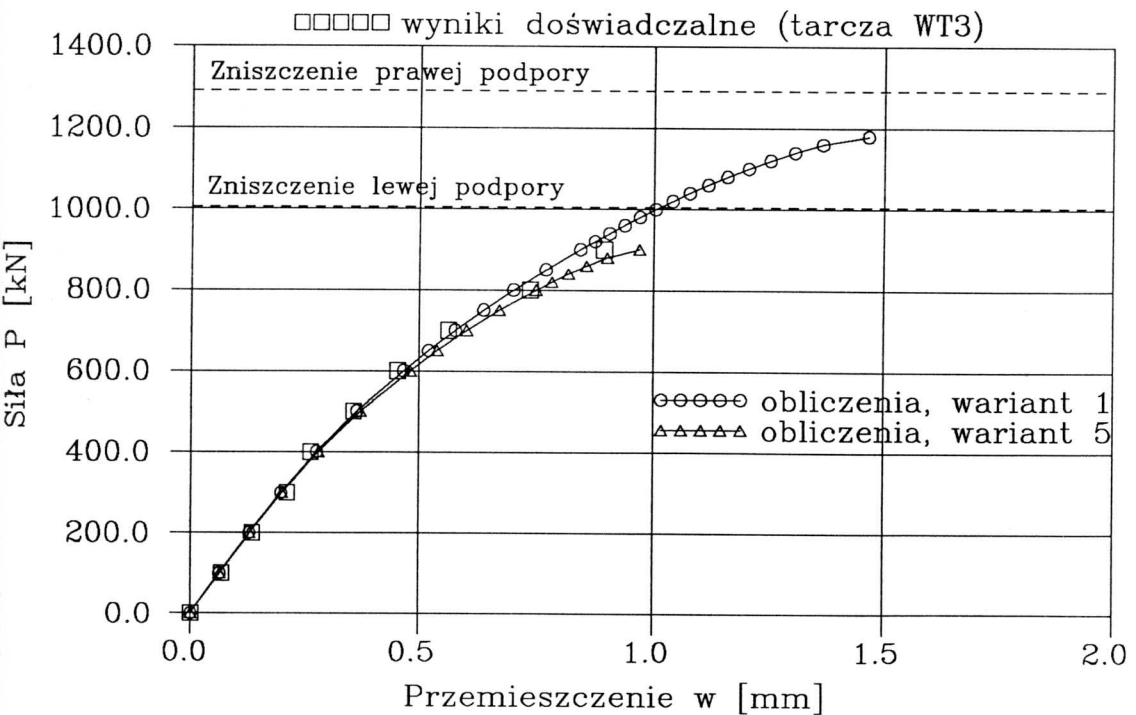
Rys.III.50 Zależność $P-w$ dla dwóch wartości parametru h

Wyniki przedstawione na rys. III.50 – 52 można podsumować w następujący sposób: dla tarczy WT3 zarówno wartość parametru h , jak i sposób opisu sprzężenia kurczenia się powierzchni granicznej nie mają praktycznego wpływu na wyniki obliczeń. Decydujący wpływ na zachowanie się konstrukcji ma natomiast wytrzymałość betonu w strefie podporowej. Wartości obciążenia P_{max} i odpowiadającego mu przemieszczenia w dla wariantów 1 – 5 przedstawia tabl. III.3.

Z przeprowadzonych powyżej analiz wynika, że najbardziej zbliżone do eksperymentu rezultaty otrzymano dla wariantu 1. Zdaniem autora wyniki otrzymane dla wariantu 1 są lepsze niż pokazane na rys. III.48 wyniki innych badaczy.



Rys.III.51 Zależność P-w dla trzech opisów sprzężenia kurczenia się powierzchni granicznej



Rys.III.52 Zależność P-w dla różnych wartości f_c w strefie podporowej

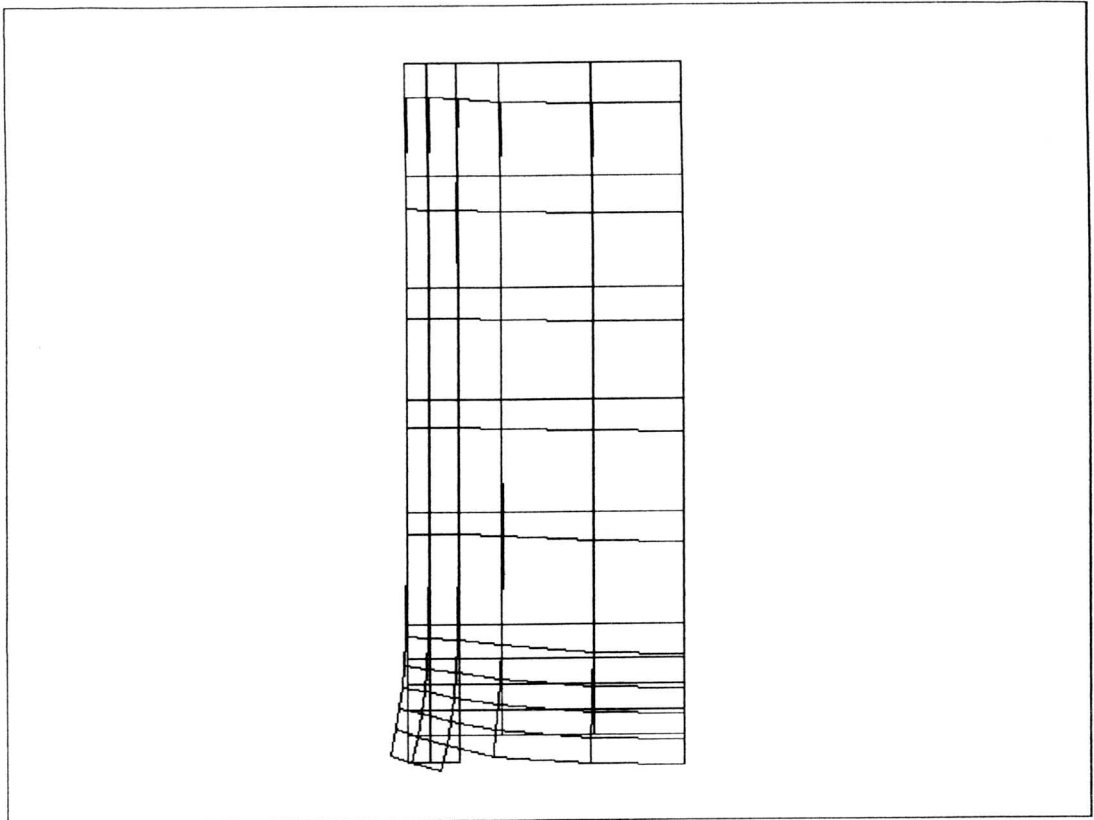
Wariant	P_{max} [kN]*	w [mm]
1	1180	1,4646
2	1160	1,5041
3	1180	1,4979
4	1180	1,4714
5	900	0,9691

* Uwaga: P_{max} jest największą wartością obciążenia P przy której proces iteracyjny był jeszcze zbieżny.

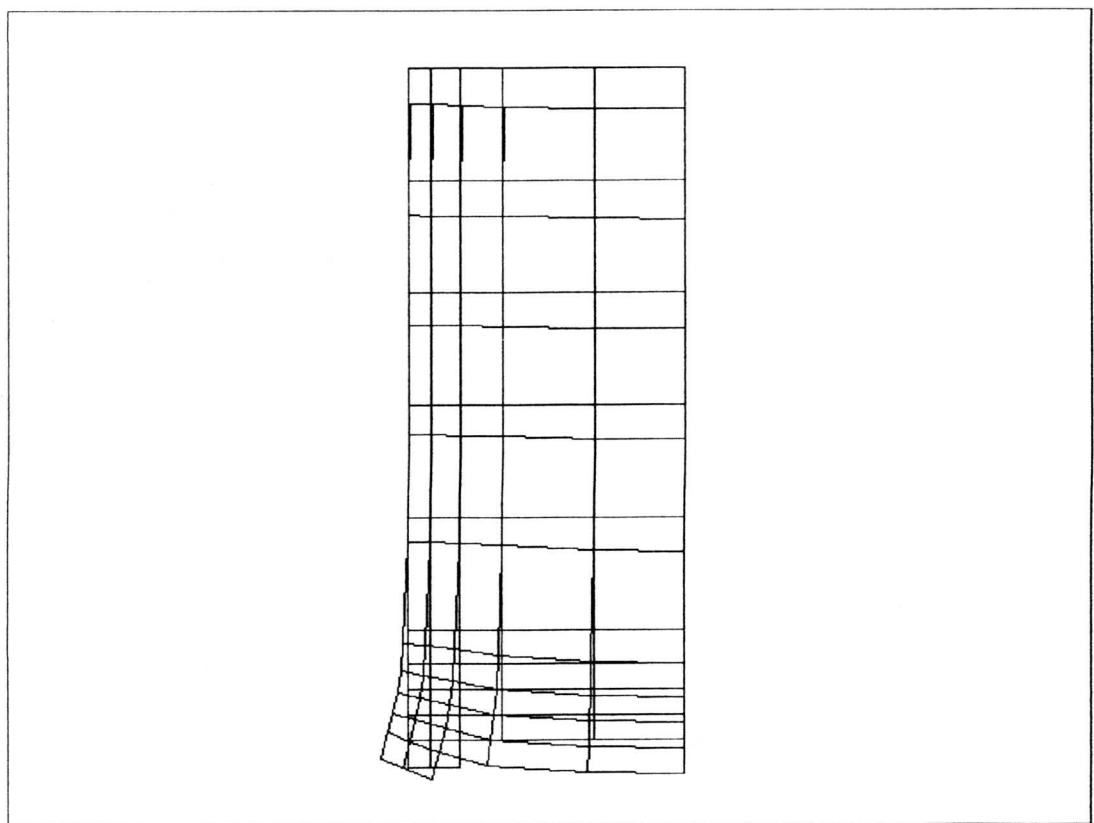
Tablica III.3 Obciążenie P_{max} i przemieszczenie w dla różnych wariantów obliczeń tarczy WT3

W dalszym ciągu skupiono uwagę na wariancie 1 dla którego przedstawiono bardziej szczegółowo zachowanie się konstrukcji w procesie obciążenia. Rys. III.53 prezentuje deformacje tarczy dla trzech wybranych poziomów obciążenia ($P = 100\text{kN}$, $P = 1000\text{kN}$, $P = 1200\text{kN}$). Przy tym ostatnim poziomie obciążenia nie osiągnięto już zbieżności procesu iteracyjnego. Charakter deformacji jest podobny dla $P = 100\text{kN}$ i $P = 1000\text{kN}$, jakkolwiek w pierwszym przypadku nie występuje jeszcze nigdzie w materiale stan pokrywycy, zaś w drugim przypadku występują już zaawansowane procesy mięknięcia materiału. Natomiast dla $P = 1200\text{kN}$ widoczna jest silna deformacja strefy podporowej, świadcząca o zainicjowaniu procesu mięknięcia materiału przy ścisaniu w strefie podporowej.

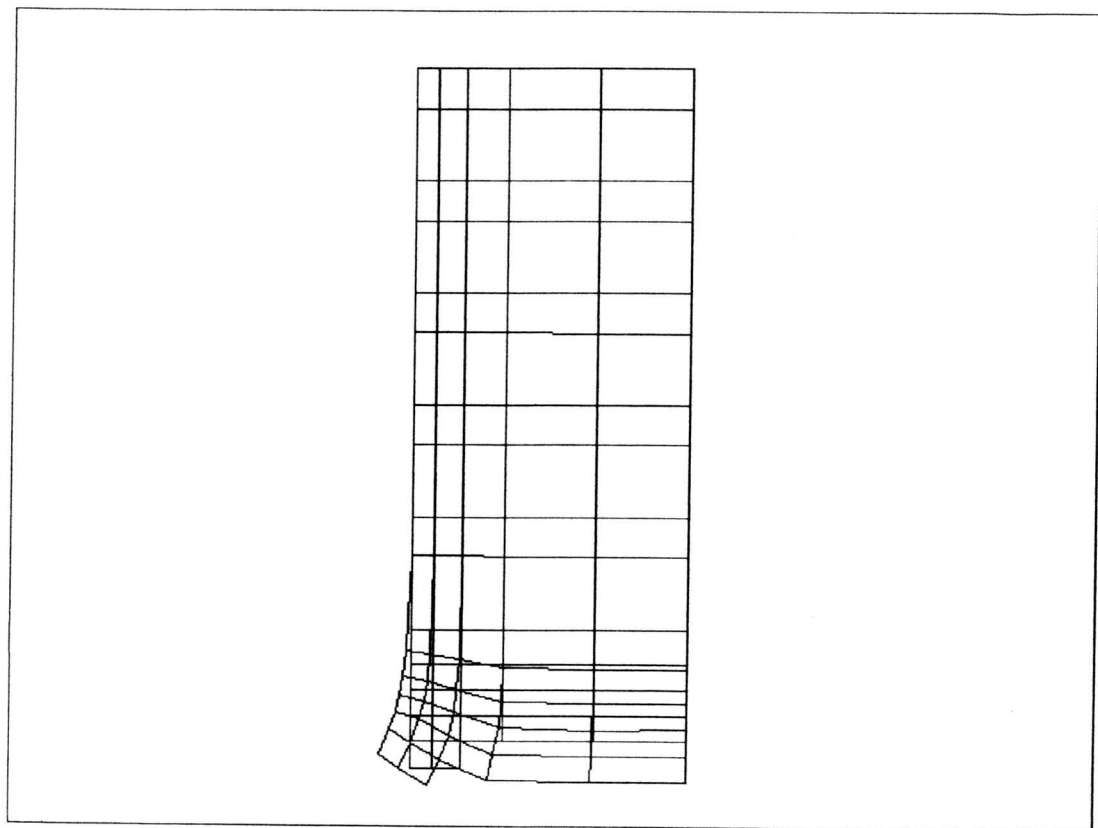
Na rys. III.54 przedstawiono zaawansowanie procesu mięknięcia materiału dla trzech wybranych poziomów obciążenia ($P = 300\text{kN}$, $P = 1000\text{kN}$, $P = 1180\text{kN}$). Na rysunku tym za pomocą różnych kolorów przedstawiono mniejszą z wartości funkcji f_1 i f_2 opisanych w punkcie II.7, dla każdego punktu Gaussa (dokładnie dla powierzchni odpowiadającej danemu punktowi Gaussa). Ponieważ w programie ATGRAPH istnieje możliwość wizualizacji w ten sposób tylko jednej zmiennej, wybrano więc do przedstawienia $\min(f_1, f_2)$.



Rys. III.53a Deformacja tarczy WT3 dla $P = 100\text{kN}$



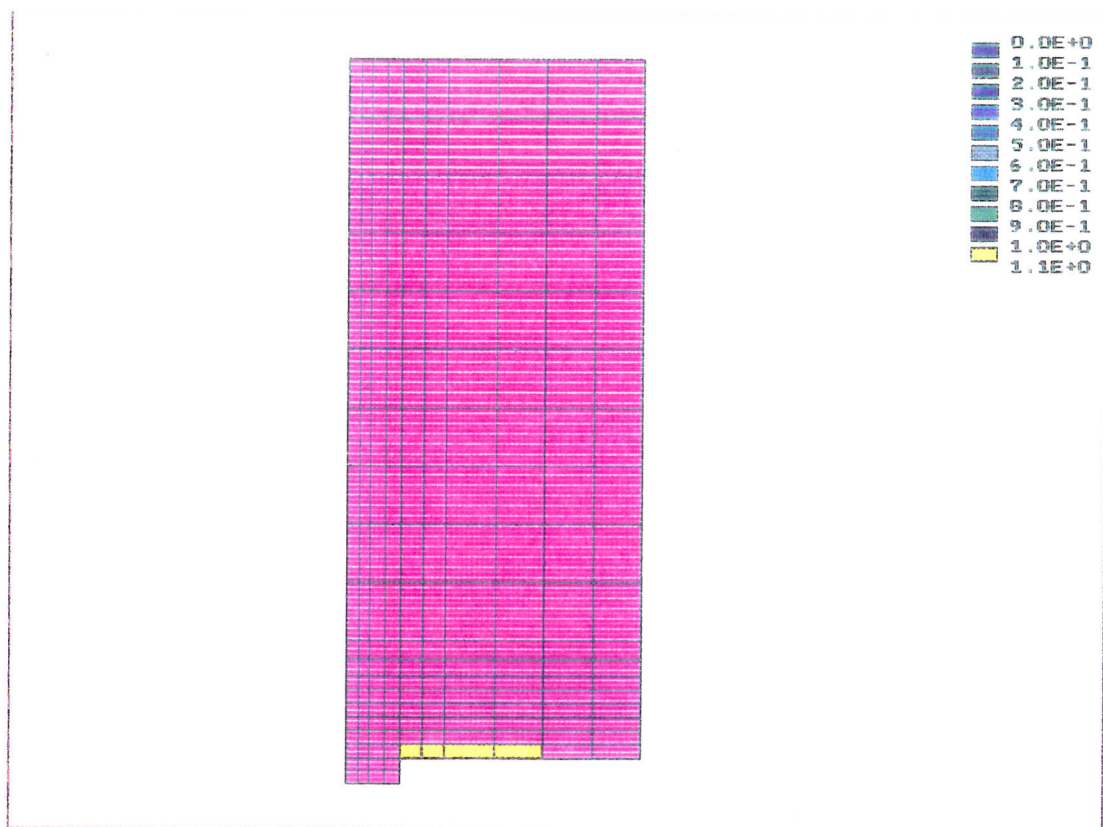
Rys. III.53b Deformacja tarczy WT3 dla $P = 1000\text{kN}$



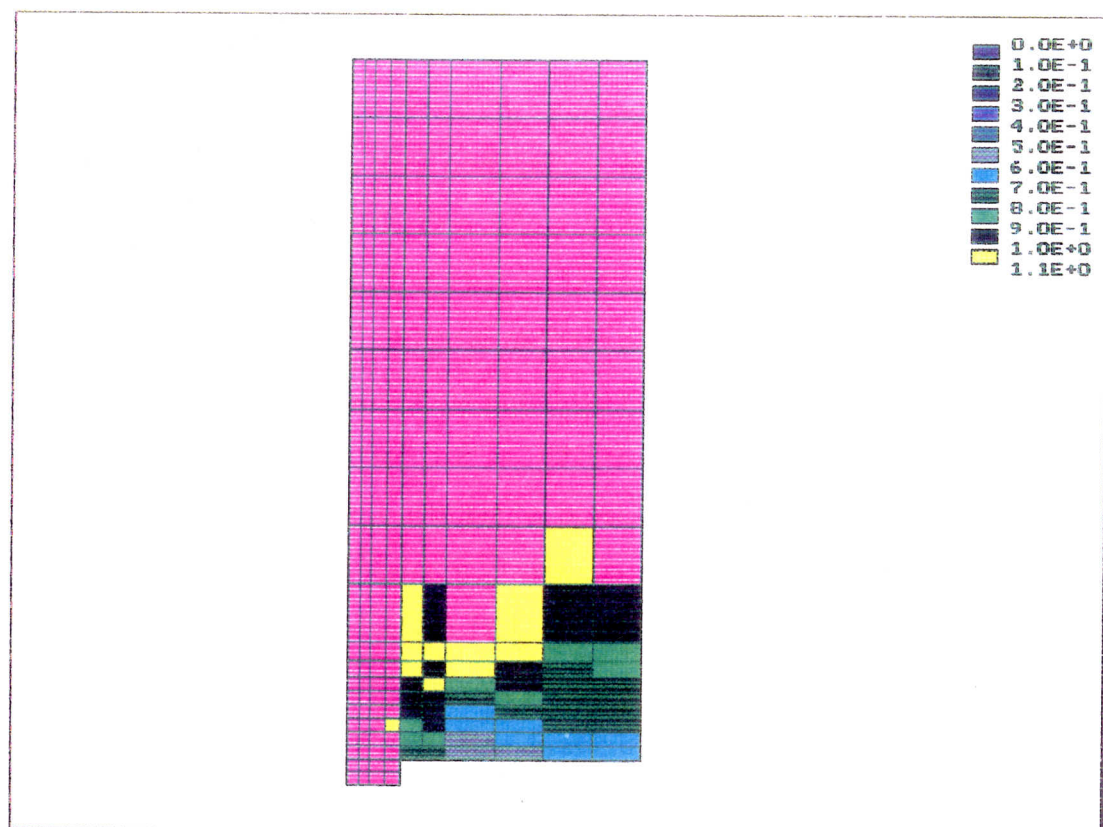
Rys. III.53c Deformacja tarczy WT3 dla $P = 1200\text{kN}$

Na rysunku nie ma więc informacji czy degradacja dotyczy bieżącej wytrzymałości na rozciąganie f_t^* (funkcja f_1) czy też ściskanie f_c^* (funkcja f_2). Jest to jednak możliwe do ustalenia na podstawie wydruku wyników obliczeń.

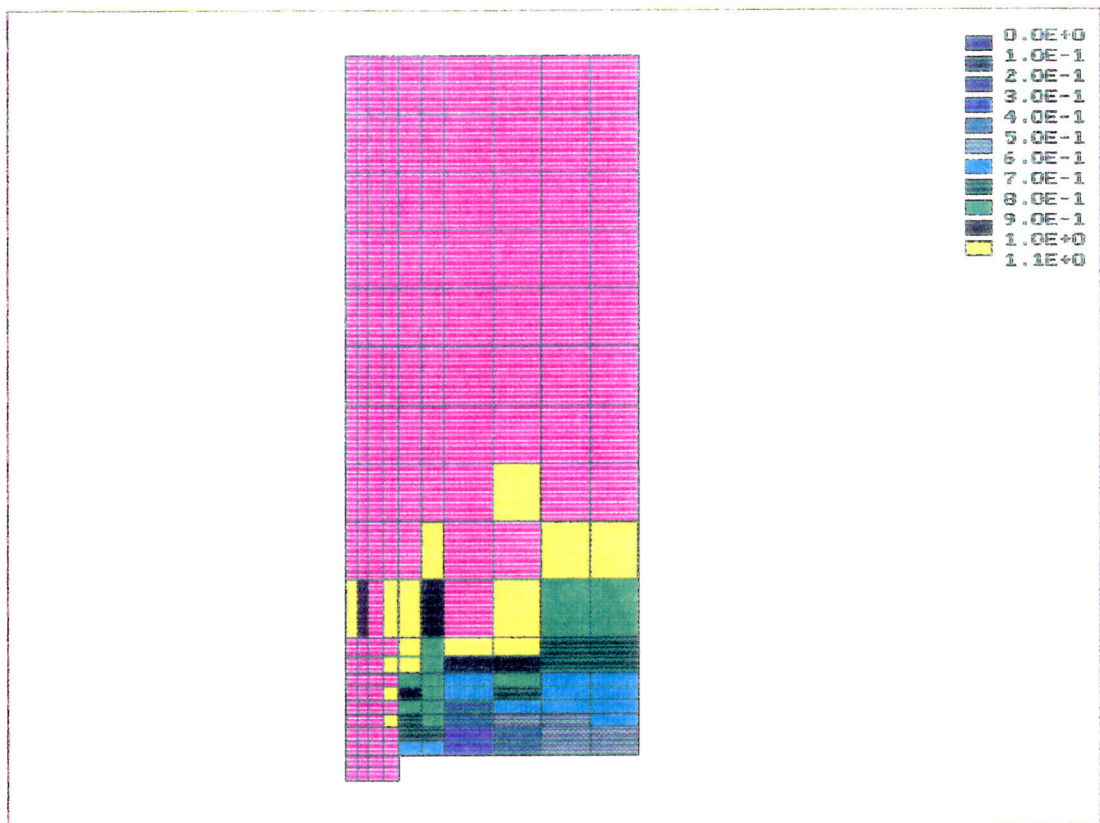
Pierwsze mięknięcie materiału pojawia się dla wartości $P = 300\text{kN}$ przy dolnej krawędzi tarczy na prawo od podpory i ma charakter mięknięcia przy rozciąganiu, czyli symuluje rozwój zarysowań w materiale. Pojawienie się pierwszych rys w tym miejscu stwierdzono również w pracach [77] i [45]. *J. van Mier* [77] zauważył, że w tym miejscu przy obliczeniu konstrukcji w stanie sprężystym istnieją największe wartości głównego naprężenia rozciągającego. Tę obserwację potwierdzają również obliczenia autora. Natomiast w badaniach eksperymentalnych (Bild 62 w [71]) pierwsza widoczna rysa utworzyła się w środku rozpiętości dla $P = 500\text{kN}$. Przy poziomie obciążenia $P = 1000\text{kN}$ na rys. III.54 jest widoczna strefa mięknięcia materiału dość dobrze odpowiadająca strefie zarysowań z doświadczenia.



Rys. III.54a Mięknienie materiału dla $P = 300\text{kN}$



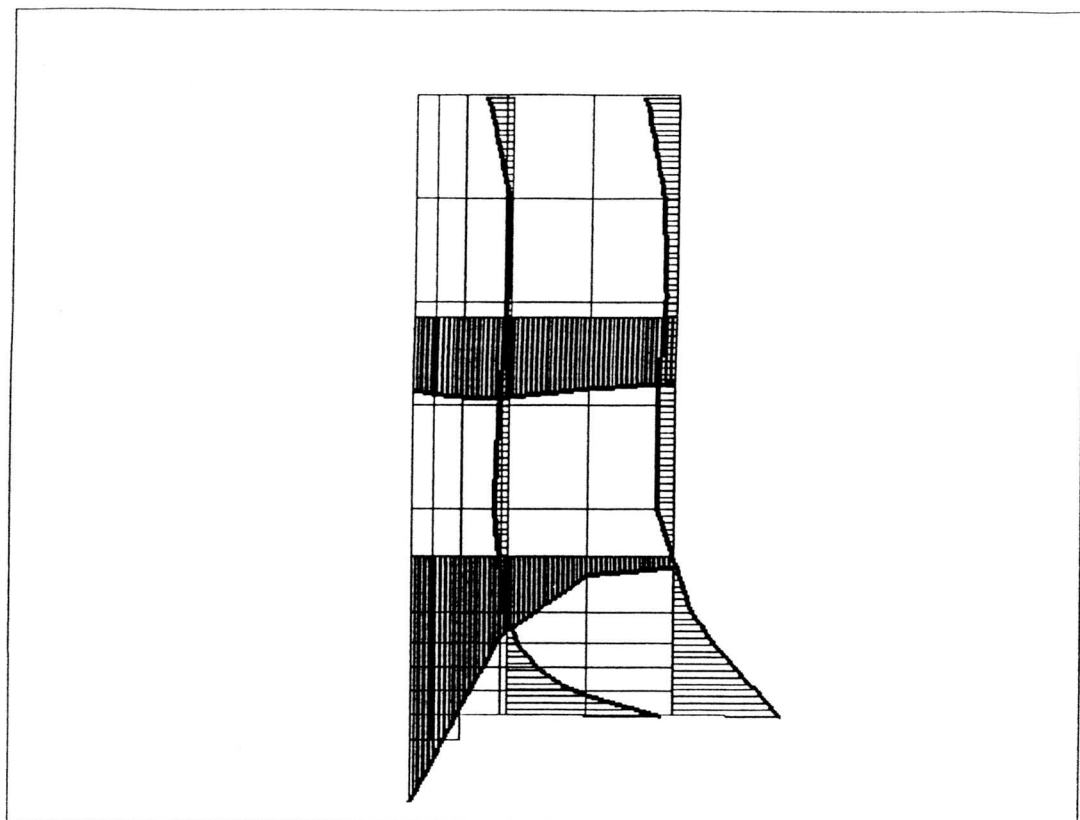
Rys. III.54b Mięknienie materiału dla $P = 1000\text{kN}$



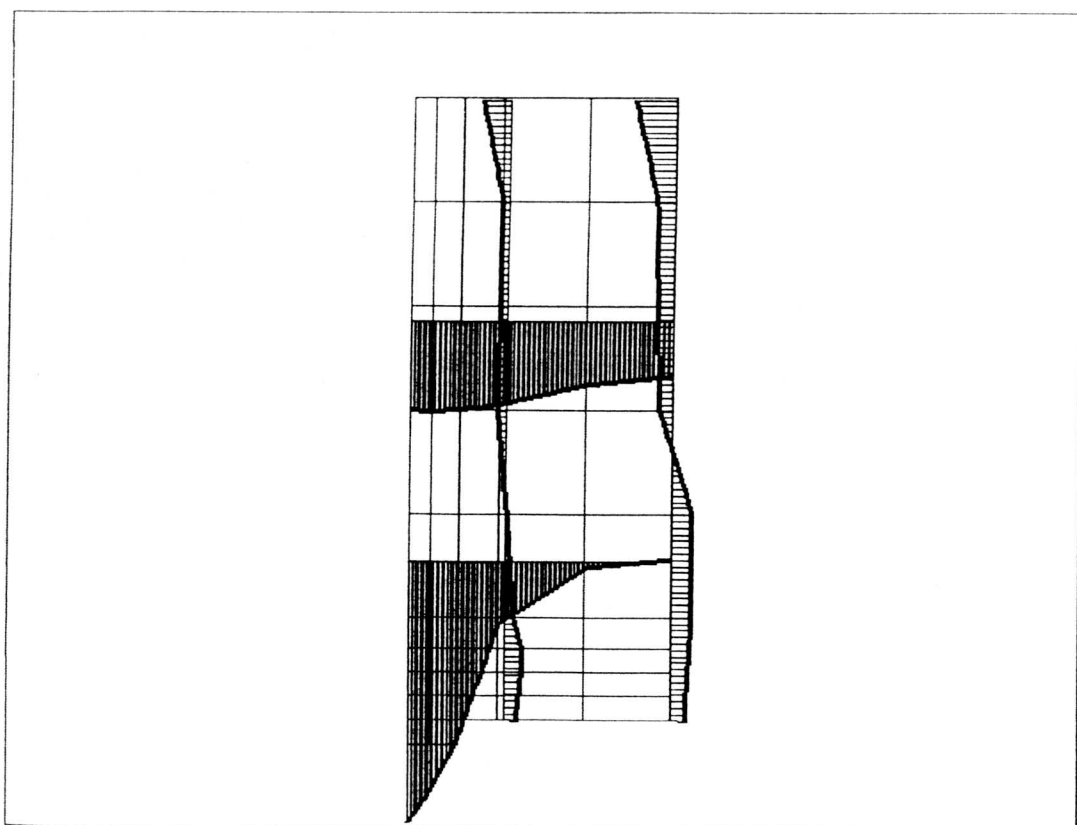
Rys. III.54c Mięknienie materiału dla $P = 1200\text{kN}$

Większe różnice można zaobserwować przy krawędzi podpory, gdzie strefa mięknienia materiału formuje dość wysokie, wąskie, pionowe pasmo – w badaniach eksperymentalnych w rzeczywistości w tym miejscu rysy były słabo zaawansowane. Natomiast podobne skoncentrowane pasmo zarysowań przy podporze, o dość dużej wysokości, zaobserwowano w obliczeniach w pracach [77] i [45]. Przy tym poziomie obciążenia nie występuje mięknienie przy ścisaniu materiału. Dla $P = P_{max} = 1180\text{kN}$ pojawiają się nad podporą pierwsze pojedyncze punkty, w których materiał mięknie przy ścisaniu.

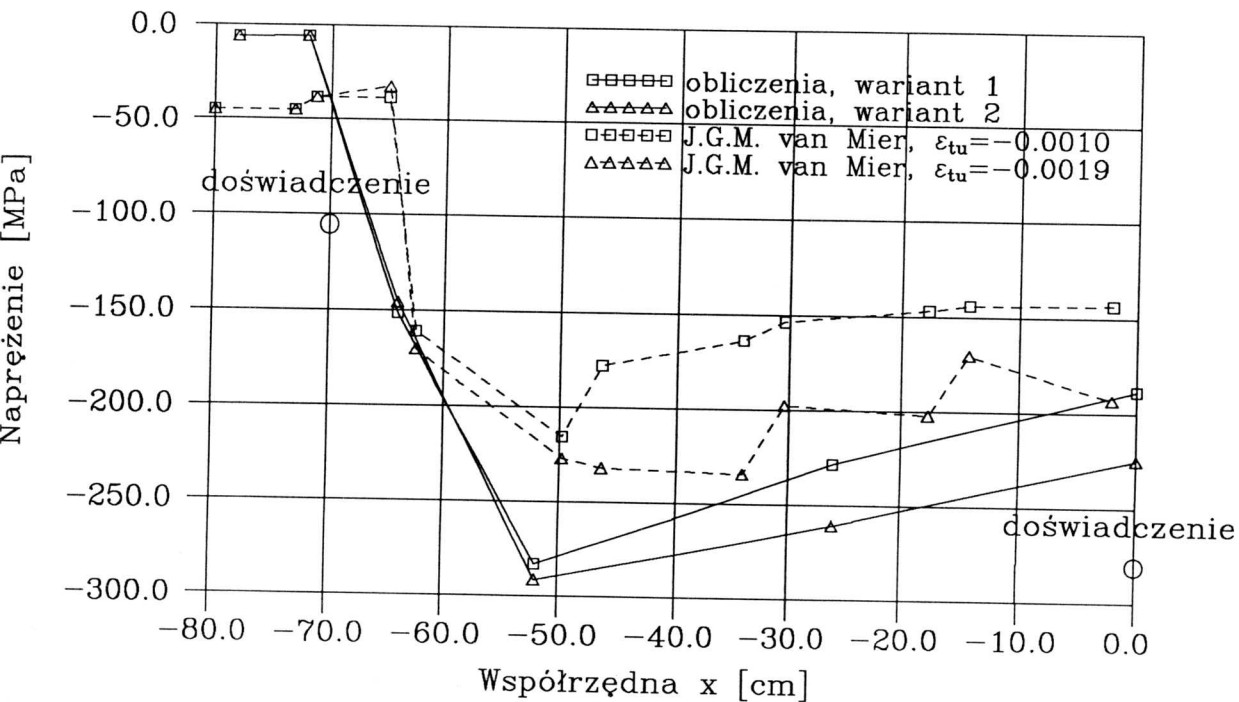
Rys. III.55 przedstawia naprężenia normalne poziome σ_x i pionowe σ_y w kilku wybranych przekrojach, dla $P = 100\text{kN}$ i $P = 1000\text{kN}$. Przy poziomym obciążeniu $P = 100\text{kN}$ strefa mięknienia materiału nie istnieje, a procesy plastyczne są słabo zaawansowane. Przebiegi naprężeń dla tego poziomu obciążenia są praktycznie identyczne ze znanymi rozwiązaniami dla tarcz sprężystych [71]. Dla poziomu $P = 1000\text{kN}$ obserwuje się już znaczną redystrybucję sił wewnętrznych, przede wszystkim zmniejszenie się naprężeń σ_x w strefie mięknienia materiału przy dolnej krawędzi tarczy, oraz koncentrację naprężeń σ_y w pionowym paśmie nad podporą.



Rys. III.55a Naprężenia normalne dla $P = 100\text{kN}$



Rys. III.55b Naprężenia normalne dla $P = 1000\text{kN}$

Rys.III.56 Naprężenia rozciągające w stali dla $P = 1000\text{kN}$

Na rys. III.56 pokazano rozkład naprężeń rozciągających w pierwszym (licząc od dołu) przęciu zbrojonym dla poziomego obciążenia $P = 1000\text{kN}$. Zwraca uwagę fakt, że największa wartość naprężenia występuje w pobliżu podpory, a nie w środku rozpiętości przęsła. Dla wariantu 2 (zwiększona wartość parametru h) otrzymuje się praktycznie taką samą wartość maksymalną naprężenia, natomiast zmienia się rozkład naprężenia wzdłuż długości pręta. Występowanie maksymalnej wartości naprężenia w stali w pobliżu podpory może być wytłumaczone istnieniem w tym miejscu wysokiego, wąskiego pasma zarysowań (rys. III.54). Podobny rozkład naprężeń otrzymał *J. van Mier* [77]. Również w jego obliczeniach zmiana nachylenia opadającej gałęzi krzywej $\sigma - \epsilon$ dla betonu przy rozciąganiu spowodowała zmianę rozkładu naprężeń rozciągających wzdłuż długości pręta. Ponieważ w badaniach eksperymentalnych pomiar naprężeń w stali ograniczono do punktów położonych nad podporami i w środku rozpiętości przęsła (Bild 70 w [71]), nie można ustalić jednoznacznie doświadczalnego rozkładu naprężenia wzdłuż długości pręta.

Przedstawione powyżej obserwacje dotyczące deformacji, stref mięknięcia materiału, rozkładu naprężeń w betonie i stali prowadzą do wniosku, że obliczenia przeprowadzone dla wariantu 1 dobrze odwzorowują rzeczywiste zachowanie się konstrukcji. Poprawnie zostały uchwycone przyczyny nieliniowego zachowania się konstrukcji: zarysowanie się betonu i tworzenie się strefy osłabienia materiału w dolnej części tarczy przy sprężystej pracy stali zbrojeniowej i przy braku uszkodzeń w pozostałych częściach tarczy, oraz nagłe zniszczenie tarczy poprzez wyczerpanie wytrzymałości na ściskanie nad podporą. To ostatnie zjawisko jest sygnalizowane w obliczeniach poprzez nagły przyrost deformacji strefy podporowej (rys. III.53) i nieco wcześniejsze pojawienie się izolowanych obszarów mięknięcia przy ścisaniu (rys. III.54).

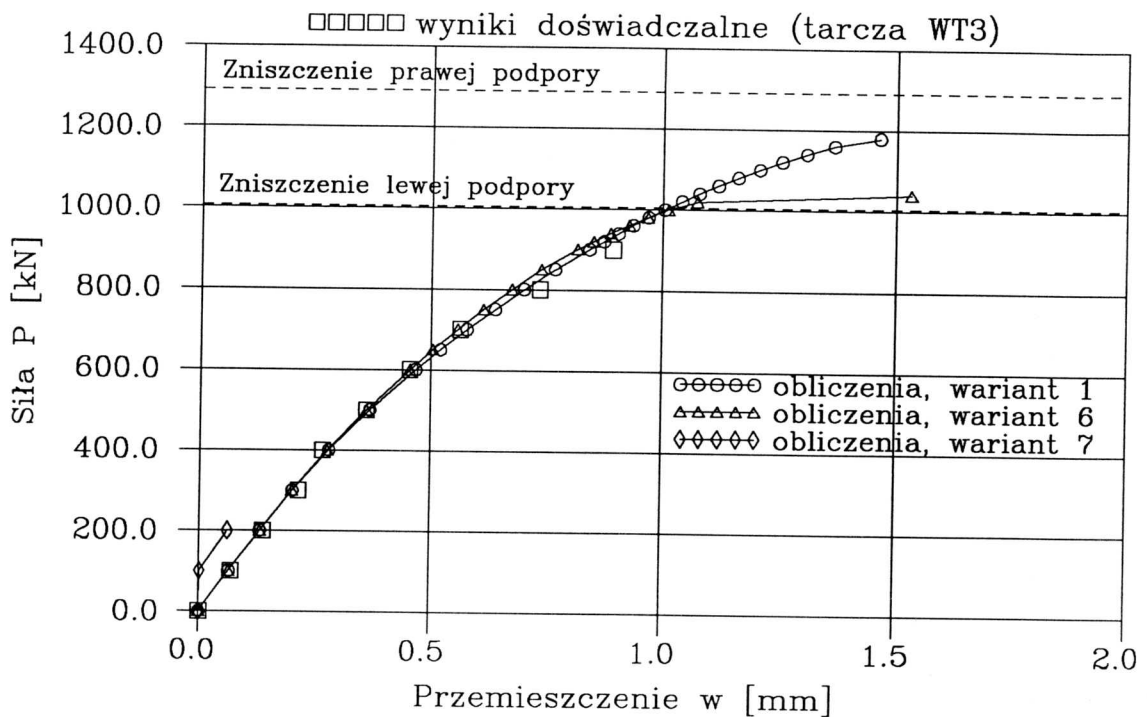
Dodatkowo postanowiono na przykładzie tarczy WT3 przeanalizować przedstawione w rozdziale II możliwe odmiany modelu betonu. W tym celu wykonano obliczenia dla dwóch dodatkowych wariantów.

Wariant 6 – dane jak w wariancie 1, kurczenie się powierzchni granicznej wg propozycji 1° z punktu II.7, współczynnik ściskania /dylatacji $\beta \equiv 0$ (w tym wariancie macierz sztywności \underline{D}_{ep} wg wzoru (II.53) jest symetryczna).

Wariant 7 – dane jak w wariancie 1, kurczenie się powierzchni granicznej wg propozycji 1° z punktu II.7, sformułowanie macierzy sztywności \underline{D}_{ep} wg oryginalnej propozycji *M.N.Fardisa* i *E.S.Chena* (wzór (II.37)).

Otrzymane zależności $P - w$ dla powyższych wariantów przedstawia rys. III.57. Dla wariantu 6 uzyskano wartość $P_{max} = 1020\text{kN}$. Przyjęcie $\beta \equiv 0$ powoduje więc obniżenie nośności o 13,6% w stosunku do wariantu 1.

Dodatkowo, wariant 6 charakteryzuje się odmiennym mechanizmem zniszczenia niż w pozostałych obliczeniach, niezgodnym z wynikami doświadczalnymi. Zniszczenie następuje bowiem poprzez ścięcie konstrukcji w wąskiej strefie przypodporowej, gdzie wcześniej doszło do znacznego osłabienia materiału na skutek rozciągania. Oznacza to, że nie istniejąca w doświadczeniu rysa pionowa, która pojawia się jednak we wszystkich wariantach obliczeń, ma tym razem decydujące znaczenie dla nośności. Nie obserwuje się natomiast zniszczenia materiału przy ścisaniu nad podporą.

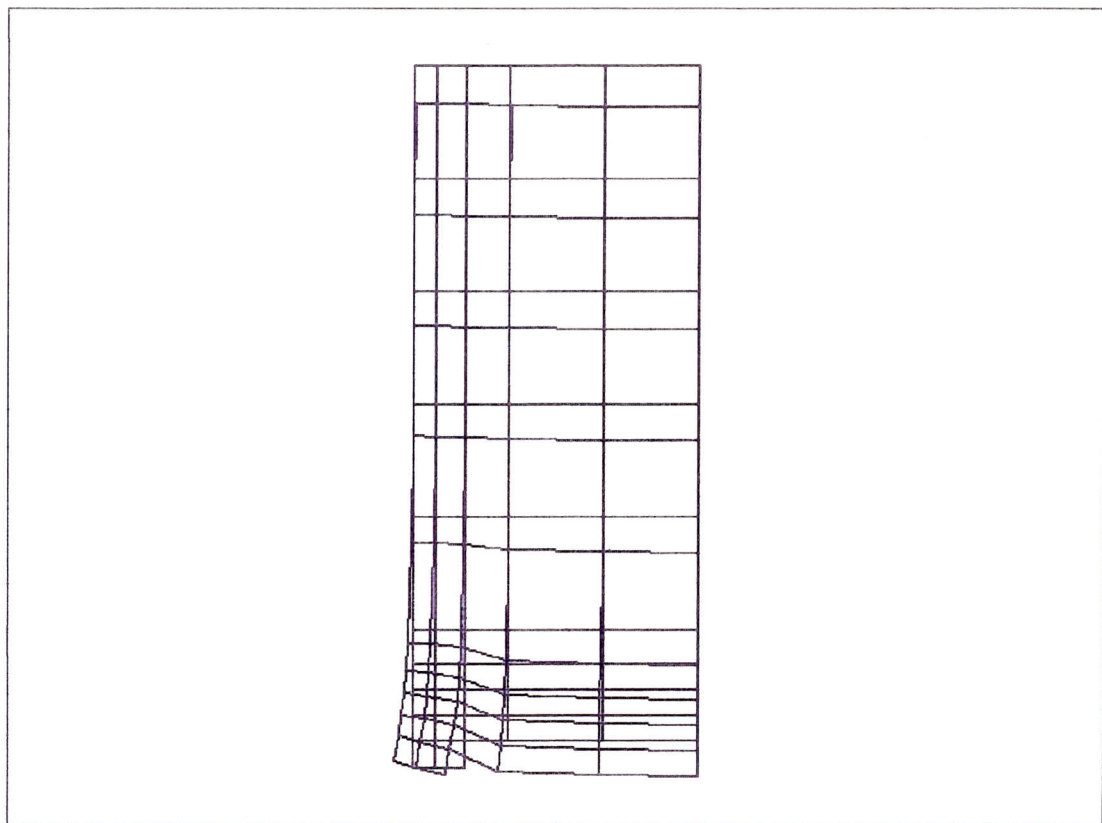


Rys.III.57 Zależność P-w dla możliwych odmian modelu betonu

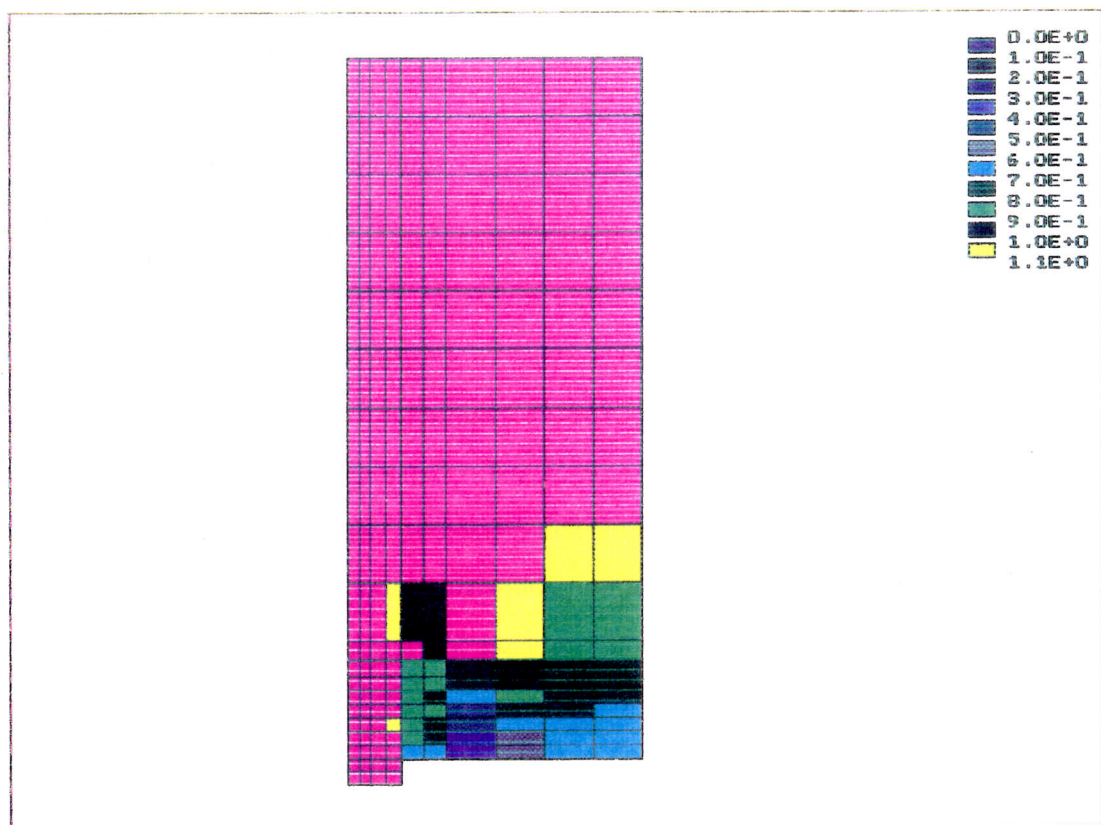
Deformacje dla wariantu 6 przy $P = 1040\text{kN}$ (poziom obciążenia przy którym nie osiągnięto już zbieżności procesu iteracyjnego) przedstawia rys. III.58. Rys. III.59 pokazuje strefę osłabionego materiału dla $P = P_{max} = 1020\text{kN}$.

W przypadku wariantu 7, jak to widać z rys. III.57, osiągnięto zbieżność procesu iteracyjnego wyłącznie dla pierwszego kroku przyrostowego ($P_{max} = 100\text{kN}$) przy przemieszczeniach zdecydowanie mniejszych niż w rzeczywistości. Dla poziomu obciążenia $P = 200\text{kN}$ nastąpiło przypuszczalnie zmiążdżenie betonu na podporze, o czym świadczy obraz deformacji (rys. III.60). Dodatkowo, stan naprężeń dla tego poziomu obciążenia (bez osiągnięcia zbieżności) jest całkowicie odmienny od tego co otrzymano w innych wariantach, zarówno dla niskich jak i wysokich poziomów obciążenia.

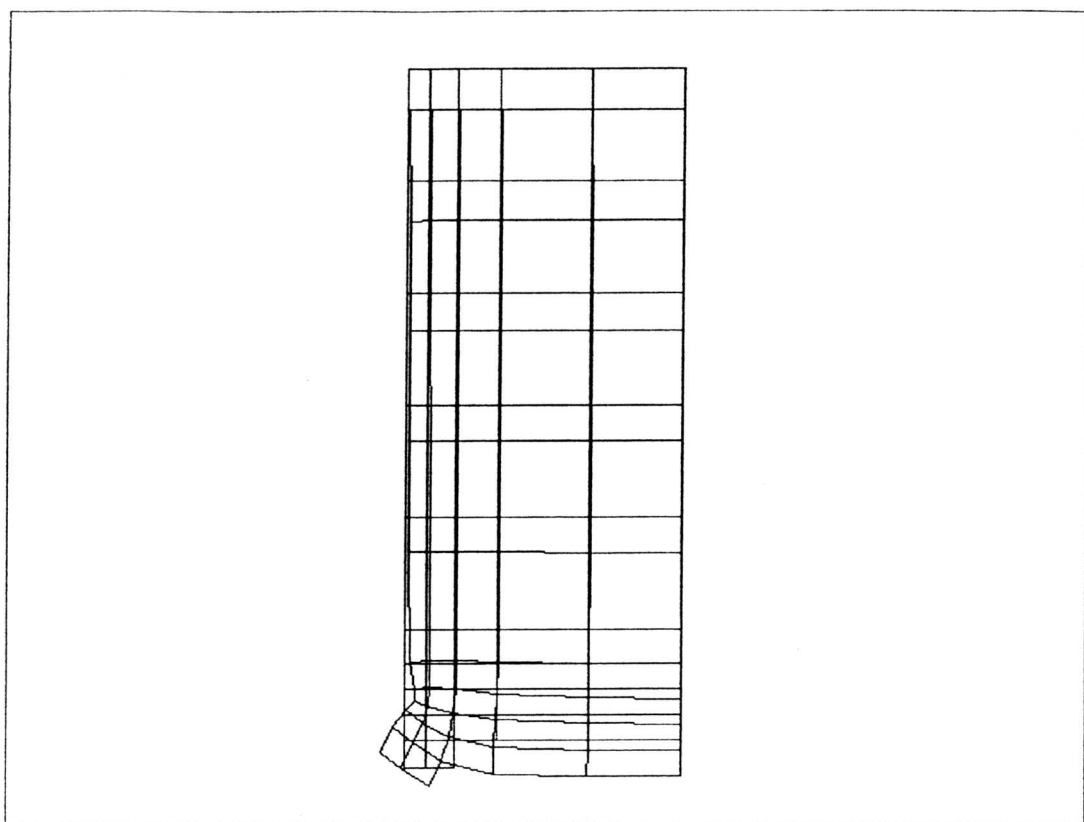
Obliczenia wariantu 7 potwierdzają uwagi z rozdziału II, że wzór (II.37) na macierz sztywności \underline{D}_{ep} wg pierwotnej propozycji *M.N.Fardisa* i *E.S.Chena* nie może być stosowany do obliczeń konstrukcji znajdujących się w złożonym stanie naprężeń.



Rys. III.58 Deformacja tarczy WT3 dla wariantu 6 ($P = 1040\text{kN}$)



Rys. III.59 Mięknienie materiału dla wariantu 6 ($P = 1020\text{kN}$)



Rys. III.60 Deformacja tarczy WT3 dla wariantu 7 ($P = 200\text{kN}$)

III.2.2.2 Tarcza WT4

W odróżnieniu od tarczy WT3 tarcza WT4 była analizowana za pomocą MES tylko w trzech pracach [108], [45], [111]. Zdaniem autora poprawna analiza tarczy WT4 jest problemem skomplikowanym. Pomimo, że różnica pomiędzy tarczami WT3 i WT4 polega wyłącznie na istnieniu żebra podporowego całkowicie różne było zachowanie się obu tarcz w eksperymencie. Zależność doświadczalna $P - w$ dla tarczy WT4 wykazuje mniejsze przemieszczenia przy tym samym poziomie obciążenia niż dla tarczy WT3. Również mechanizm zniszczenia był inny. Istnienie żebra podporowego powodowało, że strefa podporowa pozostała nieuszkodzona. Przy poziomie obciążenia $P = 1600\text{kN}$ nastąpiło uplastycznienie stali w czterech dolnych warstwach zbrojenia. Ponieważ stal zbrojeniowa wykazywała właściwości sprężysto - plastyczne ze wzmocnieniem możliwe było kontynuowanie doświadczenia. Przy poziomie obciążenia $P = 1700\text{kN}$ nastąpiło zniszczenie poprzez

odspojenie żebra podporowego od reszty tarczy. Ten sposób zniszczenia nie został należyście odwzorowany w żadnej z wyżej wymienionych prac. W [108] i [111] nośność graniczna została osiągnięta na skutek uplastycznienia w przęśle stali rozciąganej, z kolei w [45] przyczyną zniszczenia było zmiżdżenie betonu w strefie podporowej (podobnie jak w tarczy WT3). Należy jednak podkreślić dobrą zgodność wartości obciążenia P_{max} z wartością doświadczalną we wszystkich trzech pracach (patrz tabl. III.4). Należyte odwzorowanie mechanizmu zniszczenia dla tarczy WT4 wydaje się być trudne z uwagi na złożony stan naprężenia panujący w miejscu połączenia żebra podporowego z resztą tarczy. Pożądane byłoby zamodelowanie tego fragmentu za pomocą elementów przestrzennych.

Autorzy, praca	P_{max} [kN]	Mechanizm zniszczenia
<i>C.Frantzeskakis, J.N.Theillout</i> , [45]	1915	“zmiżdżenie elementu nad podporą”
<i>N.J.Stevens, S.M.Uzumeri, M.P.Collins</i> , [108]	1740	“uplastycznienie stali zbrojeniowej w przęśle”
<i>J.Szarliński, A.Truty</i> , [111]	1700	“uplastycznienie stali zbrojeniowej w przęśle”

Tablica III.4 Wartości obciążenia P_{max} i mechanizmy zniszczenia w obliczeniach różnych autorów dla tarczy WT4

Zdaniem autora w obliczeniach własnych udało się osiągnąć mechanizm zniszczenia dość wiernie naśladujący doświadczenie, jednakże przy znacznie niższej wartości obciążenia niszczącego. Skłoniło to autora do krótkiego opisu otrzymanych wyników.

Dla tarczy WT4 przyjęto identyczną dyskretyzację, jak dla tarczy WT3 (rys. III.49). Pogrubieniu uległy jedynie elementy leżące w pasie pionowym nad podporą – co ma modelować istnienie żebra podporowego. Wartości stałych materiałowych przyjęto również identycznie jak dla tarczy WT3 -patrz Załącznik Z8. Obliczenia wykonano w kilku wariantach, analogicznych do wariantów analizowanych dla tarczy WT3.

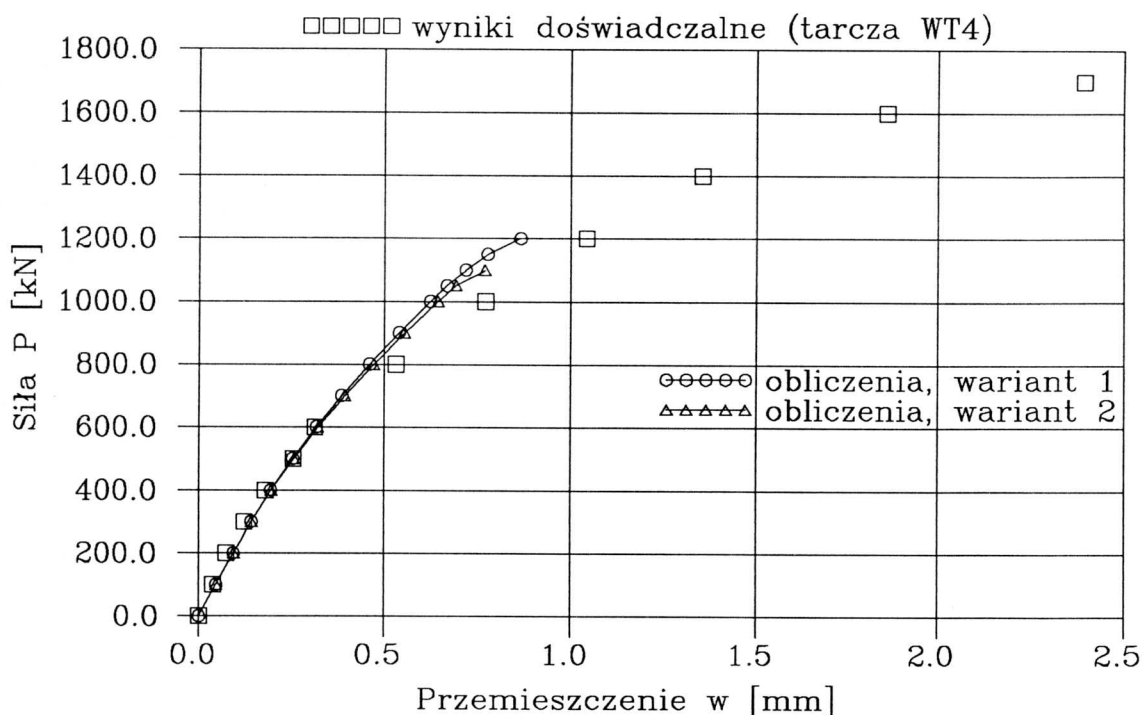
Wariant 1 – podstawowy, w strefie A przyjęto $h = 0,035\text{m}$, w strefie D zwiększone wartości f_c i f_t , uwzględniono sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej przy ściskaniu i rozciąganiu wg propozycji 1° z punktu II.7 (kurczenie nieizotropowe).

Wariant 2 – dane jak w wariantie 1, z wyjątkiem dwukrotnego zwiększenia wartości parametru h w całej tarczy (co oznacza przyjęcie w strefie A wartości $h = 0,070\text{m}$).

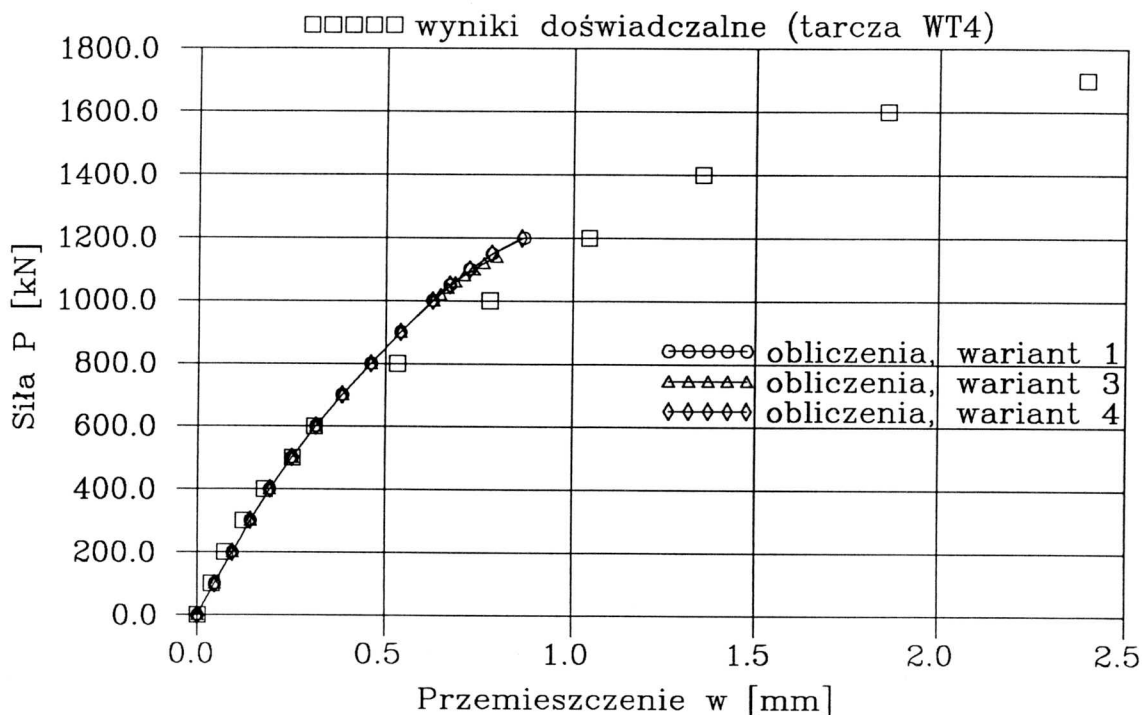
Wariant 3 – dane jak w wariantie 1, sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej przy ściskaniu i rozciąganiu przyjęto wg propozycji 2° z punktu II.7 (kurczenie izotropowe).

Wariant 4 – dane jak w wariantie 1, sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej przyjęto wg propozycji 3° z punktu II.7 (kurczenie niezależne).

Różnice w zachowaniu się konstrukcji dla poszczególnych wariantów były stosunkowo niewielkie. Rys. III.61 przedstawia zależność $P-w$ dla dwóch różnych wartości parametru h (wariant 1 i 2). W przypadku tarczy WT4 wrażliwość konstrukcji na zmianę parametru h jest większa niż dla tarczy WT3. Obie krzywe obliczeniowe wykazują dobrą zgodność z wynikami eksperymentalnymi dla małych wartości obciążenia P .



Rys.III.61 Zależność $P-w$ dla dwóch wartości parametru h



Rys.III.62 Zależność $P-w$ dla trzech opisów sprężenia kurczenia się powierzchni granicznej

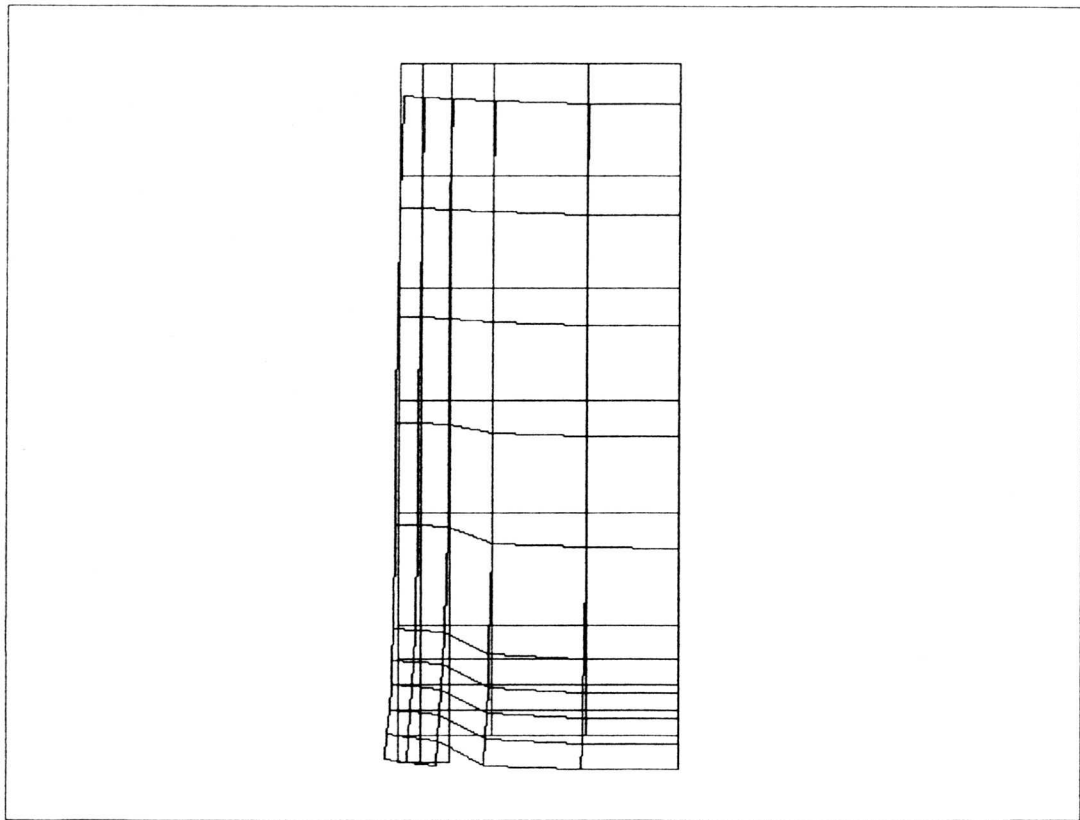
Dla większych wartości P obliczone zachowanie się tarczy jest zbyt sztywne. Wartości P_{max} uzyskane w obliczeniach są znacznie niższe od wartości eksperymentalnej. Na rys. III.62 pokazano zależność $P-w$ dla trzech różnych funkcji sprężenia kurczenia się powierzchni granicznej (wariant 1, 3 i 4). W odróżnieniu od przypadku tarczy WT3, różnice pomiędzy poszczególnymi wariantami są zauważalne, a przyjęcie izotropowego sprężenia (wariant 3) prowadzi do nieznacznego zmniejszenia się P_{max} .

Mechanizmy zniszczenia dla wszystkich wariantów są takie same i przypominają mechanizm zniszczenia dla wariantu 6 tarczy WT3. Przy poziomym obciążeniu $P = 300\text{kN}$ pojawia się pierwsze zarysowanie na prawo od podpory. Dla wyższych poziomów obciążenia rozwija się obszar osłabienia materiału w strefie środkowej, jednak równocześnie formuje się wysokie, wąskie, pionowe pasmo zarysowań bezpośrednio przy podporze. Dla $P = P_{max} = 1200\text{kN}$ (wariant 1) następuje odspojenie żebra podporowego od reszty tarczy poprzez niestabilny rozwój pasma zarysowań przy podporze. W całym procesie

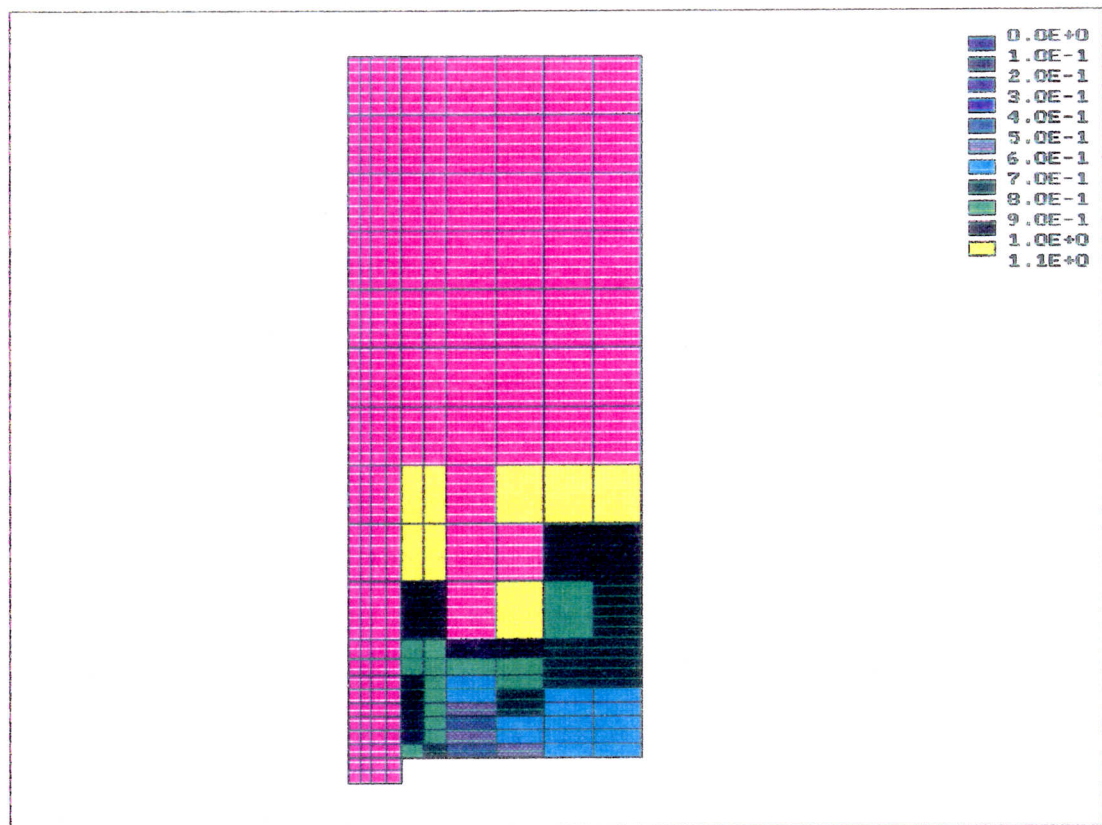
obciążenia stal zbrojeniowa pracuje w zakresie sprężystym. Rys. III.63 przedstawia deformację konstrukcji dla $P = 1250\text{kN}$ (przy tym poziomie obciążenia nie osiągnięto już zbieżności procesu iteracyjnego w wariancie 1). Widoczne jest wyraźne oddzielenie się żebra podporowego od reszty tarczy. Na rys. III.64 pokazano strefy mięknięcia materiału dla $P = P_{max} = 1200\text{kN}$ (wariant 1). Można zaobserwować strefy osłabienia materiału przy rozciąganiu w środku rozpiętości oraz przy krawędzi żebra podporowego. Brak jest natomiast stref osłabienia materiału przy ściskaniu w żebrze podporowym.

Podsumowując przedstawione wyniki można stwierdzić, że uzyskany w obliczeniach mechanizm zniszczenia odpowiada jakościowo mechanizmowi doświadczalnemu. Pojawia się jednak przy znacznie niższym poziomie obciążenia, bez uprzedniego uplastycznienia stali zbrojeniowej w przęśle.

Wpływ wartości parametru h i funkcji sprzężenia kurczenia się powierzchni granicznej na zachowanie się konstrukcji i osiągnięty poziom P_{max} jest niewielki, jakkolwiek zdecydowanie większy niż w przypadku tarczy WT3, co pokazuje tabl. III.5.



Rys. III.63 Deformacja tarczy WT4 dla $P = 1250\text{kN}$

Rys. III.64 Mięknienie materiału dla $P = 1200\text{kN}$

Wariant	P_{max} [kN]*	w [mm]
1	1200	0,8669
2	1100	0,7719
3	1140	0,7923
4	1200	0,8595

* Uwaga: P_{max} jest największą wartością obciążenia P , przy której proces iteracyjny był jeszcze zbieżny.

Tablica III.5 Obciążenie P_{max} i przemieszczenie w dla różnych wariantów obliczeń tarczy WT4

III.2.3 Analiza statyczna tarcz W2 i W4

Do następnych obliczeń wybrano tarcze W2 i W4 z badań prowadzonych przez *V. Červenkę* i *K. Gerstlego*. Ponieważ autor nie miał dostępu do pracy doktorskiej *V. Červenki* [25], która szczegółowo opisuje przeprowadzone badania, wykorzystano informacje zawarte w [26] i [27]. Z uwagi na brak danych o właściwościach betonu i stali w [26] i [27] stałe materiałowe przyjęto wg danych z prac [38] i [54].

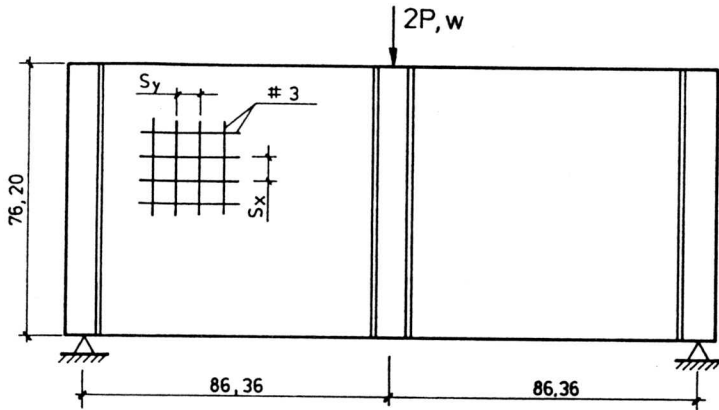
Tarcze W2 i W4 są jednoprzęsłowe, swobodnie podparte, obciążone siłą skupioną w połowie rozpiętości przesła (rys. III.65). W miejscach podparcia i obciążenia tarcz występują żebra o znacznej szerokości. Geometria i warunki brzegowe są jednakowe dla obu tarcz. Różnią się one natomiast zbrojeniem oraz sposobem obciążenia. Tarcza W2 była obciążona w sposób monotoniczny aż do zniszczenia. Dla tarczy W4 zastosowano obciążenie cykliczne przeciwzrotne, przy ustalonym poziomie obciążenia w cyklu. Według [38] tarcza W4 została poddana 4 półcyklom przy niskim poziomie obciążenia, a następnie była obciążana cyklicznie aż do zniszczenia przy poziomie obciążenia bliskim P_{max} .

Przy wyborze do obliczeń tarcz W2 i W4 kierowano się tym, że ich zachowanie w badaniach eksperymentalnych było zdecydowanie odmienne od tarcz WT3 i WT4. Dodatkowo, w przypadku tarczy W4, możliwe było porównanie z wynikami doświadczalnymi dla obciążenia cyklicznego.

III.2.3.1 Tarcza W2

W badaniach eksperymentalnych tarcza W2 charakteryzowała się zachowaniem podobnym do zwykłych belek żelbetowych. Dla niższych poziomów obserwowano tworzenie się zarysowań w przęśle (rysy pionowe i ukośne). Strefa zarysowań stopniowo rozszerzała się na większą część tarczy, sięgając w części środkowej do wysokości około $0,9h$. Przy poziomie obciążenia $P = 108,9\text{kN}$ nastąpiło uplastycznienie stali w dolnych prętach zbrojenia. W następstwie uplastycznienia stali małym przyrostom obciążenia towarzyszyły duże wartości ugięć pionowych (półka plastyczna). Wyczerpanie nośności konstrukcji nastąpiło poprzez zmiążdżenie betonu w strefie ściskanej w przekroju przy żebrze środkowym, przy stosunkowo dużej wartości przemieszczenia $w = 11,43\text{mm}$ dla $P = 117,9\text{kN}$ (zgodnie z rys. III.65 w jest przemieszczeniem pionowym górnej krawędzi żebra środ-

kowego, zaś P połową wartości siły skupionej przyłożonej w tym miejscu).



W2 :

$$S_x = 5,08 \text{ cm (15,24 cm od dołu)}$$

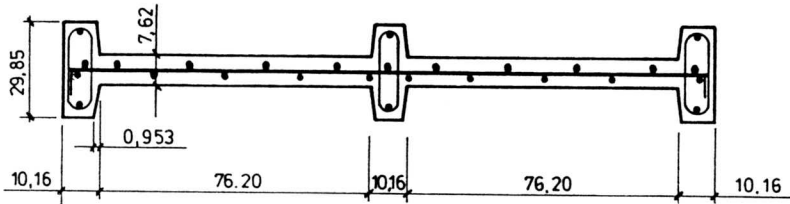
$$S_x = 10,16 \text{ cm (60,96 cm od góry)}$$

$$S_y = 10,16 \text{ cm}$$

W4 :

$$S_x = 7,62 \text{ cm}$$

$$S_y = 7,62 \text{ cm}$$



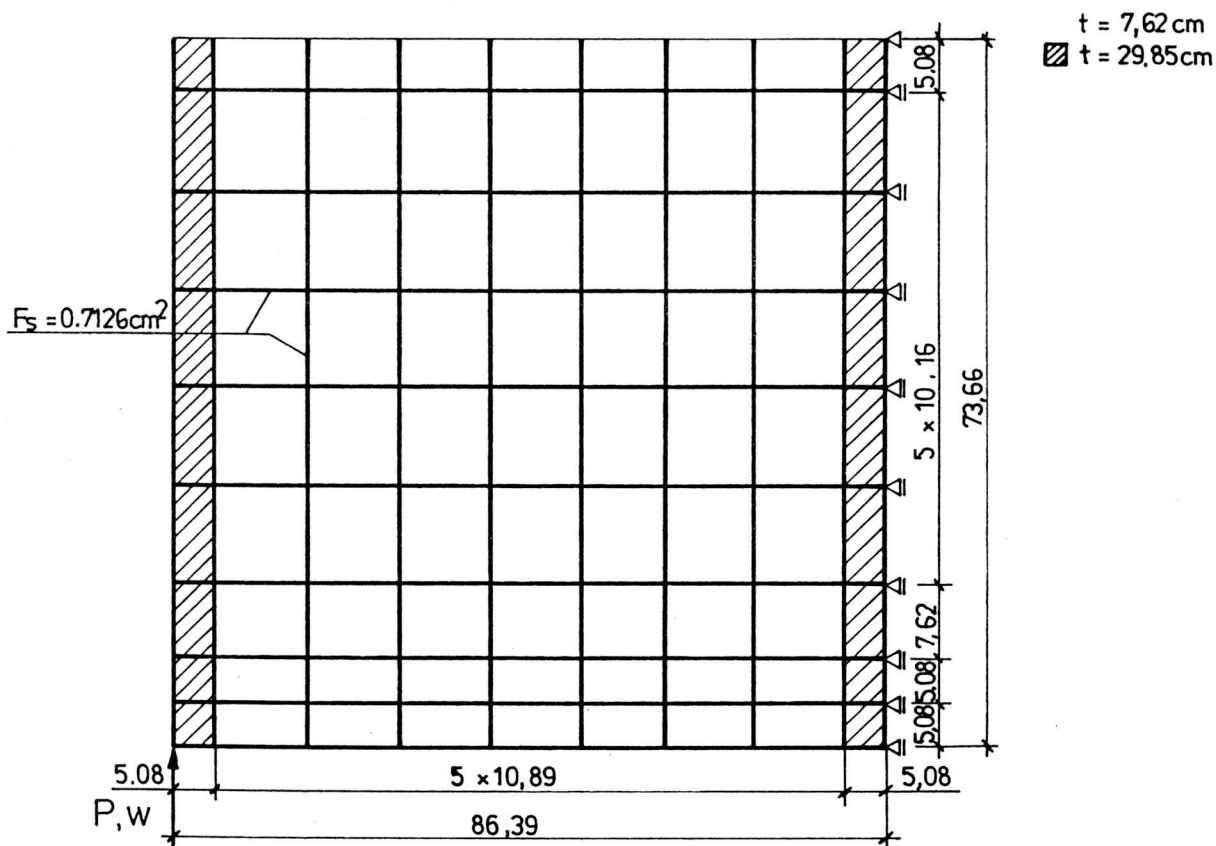
Rys. III.65 Tarcze W2 i W2

Obciążenie maksymalne $P_{max} = 119,7 \text{ kN}$ zostało osiągnięte na półce plastycznej dla wartości $w = 7,01 \text{ mm}$. W trakcie badań eksperymentalnych nie zaobserwowano zarysowania lub zmiżdżenia betonu w żebrach. W dostępnych pracach [26], [27] brak jest informacji o sposobie przekazywania obciążenia na konstrukcję i sposobie podparcia (rodzaju stosowanych podkładek), a także o przyjętym sposobie przykładania obciążenia (wymuszenie siłowe lub kinematyczne).

Tarcza W2 była analizowana przy użyciu MES w pracach [25], [38], [54], [88]. Szczególnie dobrą zgodność obliczeń z wynikami eksperymentalnymi w całym zakresie obciążenia uzyskał sam V. Červenka [25] (rezultaty tych obliczeń przedstawiono w skróconej formie w [26] i [27]).

W pracy, analogicznie jak dla tarcz WT3 i WT4, zdyskretyzowano tylko połowę tarczy (rys. III.66). Przyjęta dyskretyzacja odtwarza ściśle układ zbrojenia – w związku z tym po-

minięto istnienie zewnętrznej otuliny betonowej. Podobnie jak w [25], przyjęto brak przesuwu pionowego dla górnej krawędzi żebra środkowego. Obciążenie P jest przyłożone do dolnej krawędzi żebra skrajnego (w miejscu podparcia w doświadczeniu). Przemieszczenie pionowe w miejscu przyłożenia siły utożsamiono z przemieszczeniem w . Ponieważ zarówno obciążenie, jak i podparcie ma charakter punktowy, zwiększono sztucznie wytrzymałości f_c i f_t w żebrach, tak by nie dopuścić do tworzenia się stref osłabienia materiału w pobliżu miejsca przyłożenia siły i podpory w żebrach. Nie zamodelowano natomiast stosunkowo silnego zbrojenia pionowego i poziomego, które w rzeczywistości znajdowało się w żebrach. Dodatkowo założono, że rola żebra skrajnego ogranicza się wyłącznie do przenoszenia obciążenia na krawędzi pionowej pomiędzy żebrzem a resztą tarczy, zaś stan naprężenia w samym żebrze ma niewielkie znaczenie. W związku z tym zamodelowano tylko połowę żebra skrajnego (pominięto fragment żebra na zewnątrz od punktu przyłożenia siły). Z uwagi na jednakowe wymiary elementów skończonych przyjęto stałą wartość parametru h dla całej tarczy.



Rys. III.66 Dyskretyzacja tarczy W2

Podobnie jak dla tarcz WT3 i WT4 obliczenia wykonano w kilku wariantach. Wartości stałych materiałowych dla poszczególnych wariantów podano w Załączniku Z8.

Wariant 1 – podstawowy, przyjęto $h = 0,040\text{m}$, uwzględniono sprzężenie się kurczenia powierzchni granicznej przy ściskaniu i rozciąganiu wg propozycji 1° z punktu II.7 (kurczenie nieizotropowe).

Wariant 2 – dane jak w wariacie 1, z wyjątkiem powiększonej wartości $h = 0,060\text{m}$.

Wariant 3 – dane jak w wariacie 1, z wyjątkiem powiększonej wartości $h = 0,080\text{m}$.

Wariant 4 – dane jak w wariacie 1, sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej przyjęto wg propozycji 2° z punktu II.7 (kurczenie izotropowe).

Wariant 5 – dane jak w wariacie 1, sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej przyjęto wg propozycji 3° z punktu II.7 (kurczenie niezależne).

Wariant 6 – dane jak w wariacie 1, z wyjątkiem wytrzymałości na ściskanie f_c powiększonej o 50% w całej tarczy.

Dla wszystkich wariantów zastosowano sterowanie siłowe i prowadzono obliczenia aż do momentu wystąpienia niezbieżności w procesie iteracyjnym. Otrzymane w ten sposób krzywe $P - w$ dość dobrze odpowiadają krzywej doświadczalnej na początkowym odcinku aż do osiągnięcia półki plastycznej. Niestety, stosując sterowanie siłowe nie udało się w obliczeniach odtworzyć półki plastycznej mimo stosowania bardzo małych przyrostów siły. Obliczenia przeprowadzone przy użyciu sterowania przemieszczeniowego wykazały, że przyjęcie modelu betonu z gałęzią opadającą krzywej $\sigma - \varepsilon$ przy ściskaniu prowadzi dla tarczy W2 do otrzymania opadającej gałęzi krzywej $P - w$ zamiast półki plastycznej. Zjawisko to zostanie szczegółowo opisane w dalszej części, po przeanalizowaniu wyników uzyskanych dla sterowania siłowego.

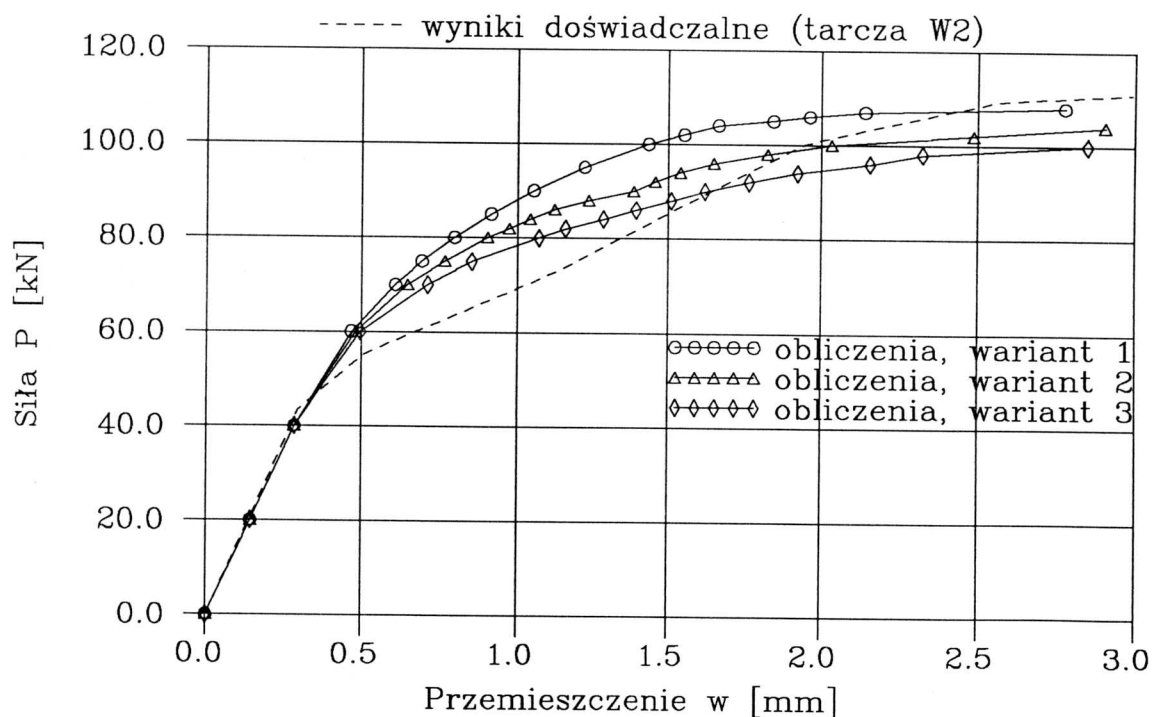
Rys. III.67 przedstawia zależności $P - w$ dla trzech różnych wartości parametru h (warianty 1, 2 i 3). Zachowanie się konstrukcji jest identyczne dla wszystkich tych wariantów aż do momentu pojawienia się strefy osłabienia materiału (do momentu pierwszego zarysowania). Dla wyższych wartości obciążenia, mniejsze wartości h powodują bardziej sztywne zachowanie się tarczy. Również obciążenie P_{max} zależy w sposób istotny od wartości h .

Świadczy to o tym, że udział betonu w przenoszeniu naprężeń rozciągających w strefie osłabienia materiału jest znaczny również po uplastycznieniu się zbrojenia rozciąganego.

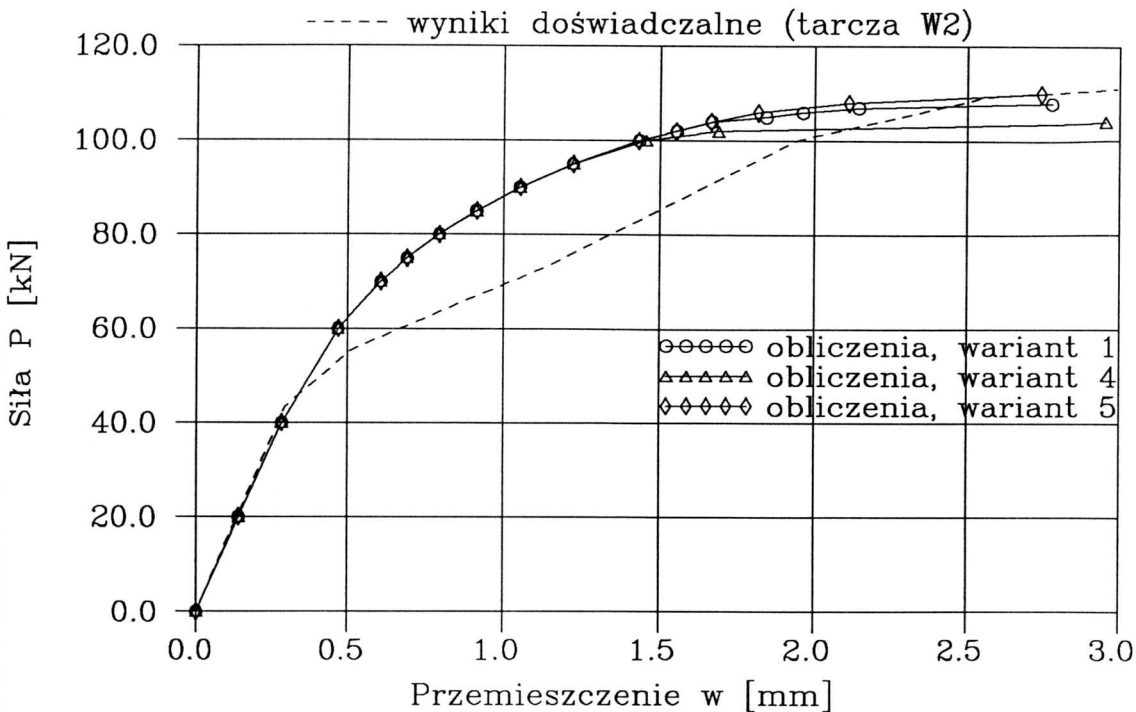
Obliczone krzywe $P - w$ są w dobrej zgodności z krzywą eksperymentalną na początkowym odcinku, później, dla średnich wartości obciążenia, zachowanie się tarczy jest za sztywne i w końcu wartości P_{max} są nieco niższe od wartości eksperymentalnej.

Wpływ różnych funkcji sprężenia kurczenia się powierzchni granicznej (warianty 1, 4, 5) na zachowanie się konstrukcji jest niewielki. Podobnie jest w przypadku tarczy WT4 przyjęcie jednakże izotropowego sprężenia kurczenia się powoduje zauważalny spadek wartości P_{max} (rys. III.68).

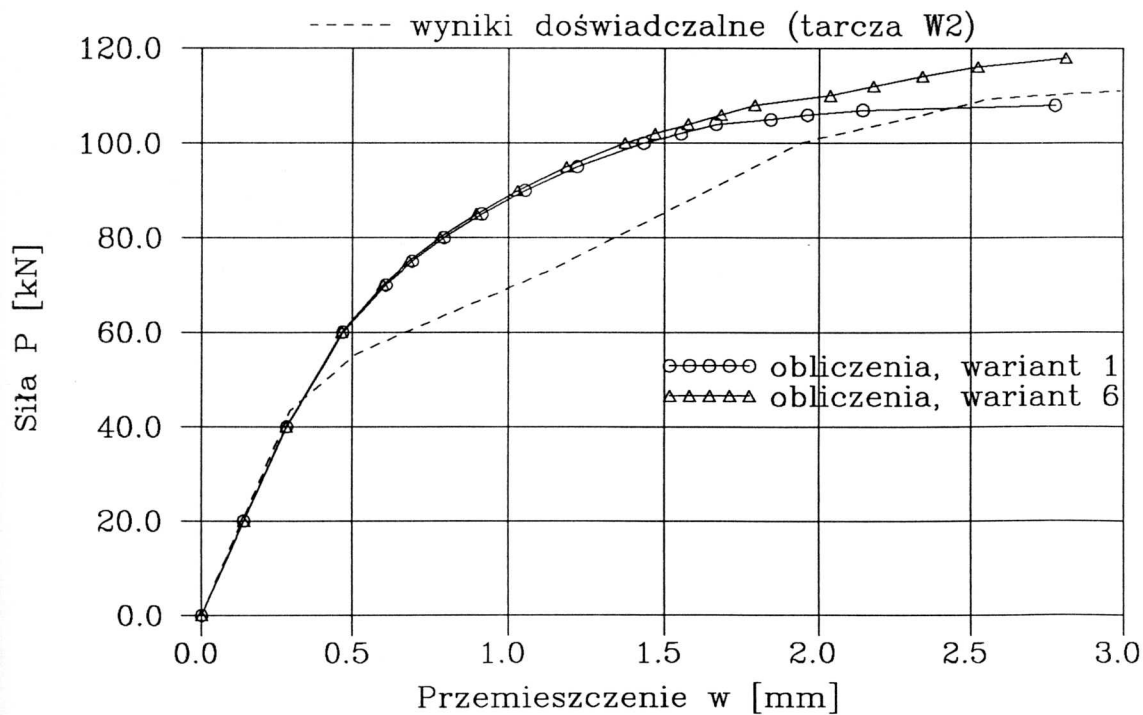
Z kolei zwiększenie wytrzymałości na ściskanie f_c o 50% (wariant 6) przy niezmiennych pozostałych parametrach modelu prowadzi do wzrostu wartości P_{max} tylko o 9,3% w stosunku do wariantu 1 (rys. III.69).



Rys.III.67 Zależność $P-w$ dla trzech wartości parametru h



Rys.III.68 Zależność P-w dla trzech opisów sprzężenia kurczenia się powierzchni granicznej



Rys.III.69 Zależność P-w dla dwóch wartości f_c

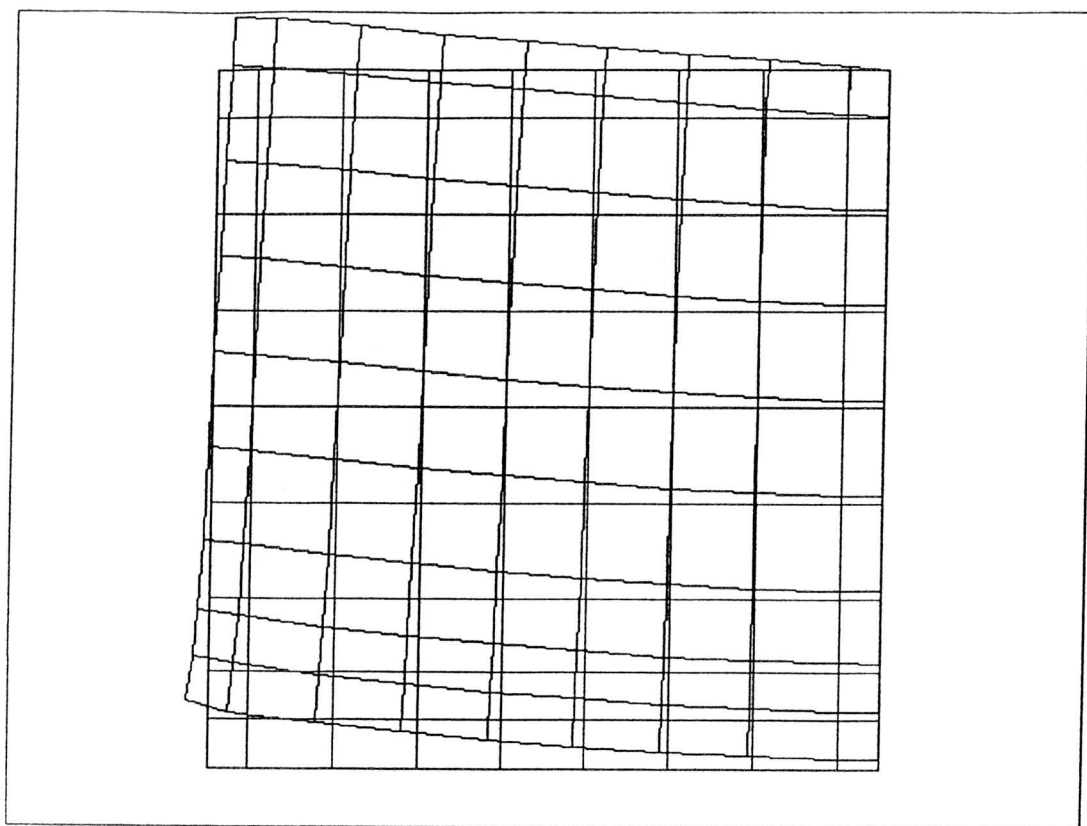
Przedstawione powyżej obserwacje prowadzą do wniosku, że w przypadku tarczy W2 podstawowe znaczenie dla zachowania się konstrukcji mają właściwości betonu przy rozciąganiu (parametr h), natomiast wytrzymałość na ściskanie nie odgrywa istotnej roli. Również wpływ różnych funkcji sprzężenia kurczenia się powierzchni granicznej jest mało istotny. Wrażliwość tarczy W2 na zmiany parametrów modelu betonu jest więc zbliżona do wrażliwości zwykłych elementów belkowych o umiarkowanym stopniu zbrojenia.

Osiągnięte wartości P_{max} i odpowiadające im wartości w dla poszczególnych wariantów przedstawia tabl. III.6. W dalszym ciągu przedstawiono bardziej szczegółowo zachowanie się tarczy w procesie obciążenia dla wariantu 5. Dla poziomego obciążenia $P = 20\text{kN}$ przy którym nie występują jeszcze strefy osłabienia materiału deformacja konstrukcji przypomina deformację belki zginanej. Taki obraz deformacji jest charakterystyczny również dla wyższych poziomów obciążenia. Natomiast dla poziomów obciążenia bliskich wartości P_{max} obserwuje się duże przemieszczenia w pionowym pasie elementów przyległych do żebra środkowego.

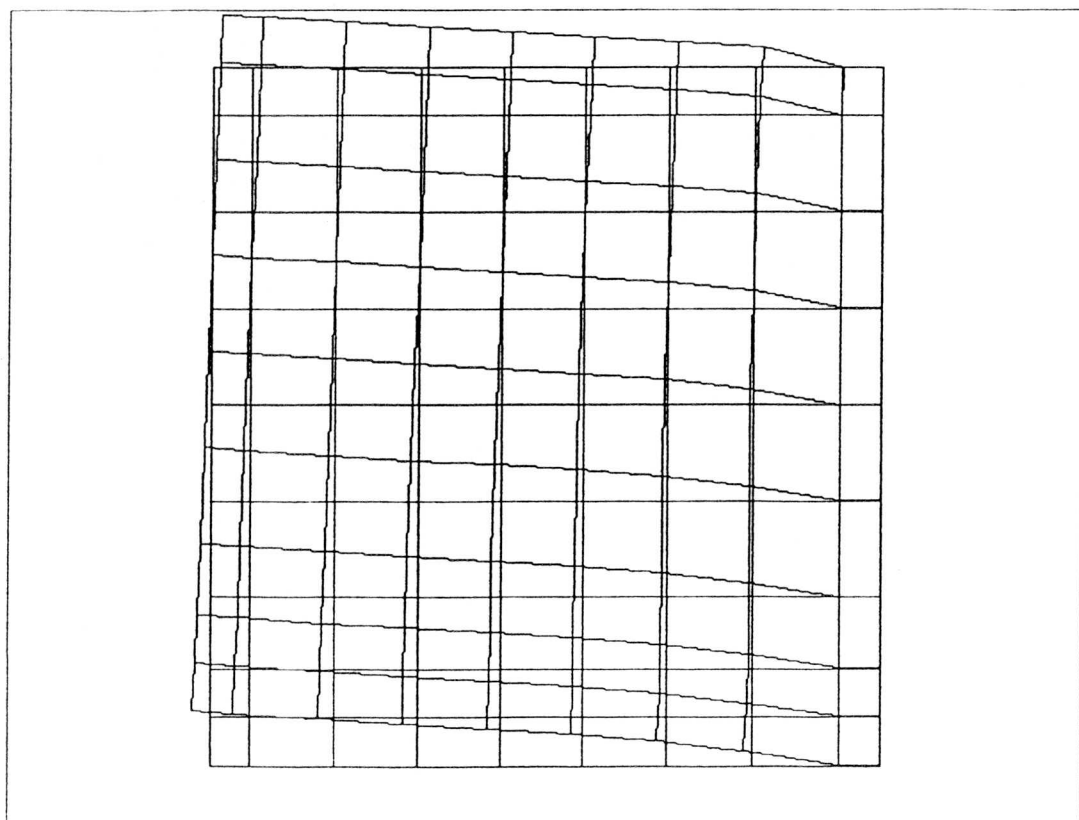
Wariant	P_{max} [kN]*	w [mm]
1	108	2,7781
2	104	2,9060
3	100	2,8502
4	104	2,9548
5	110	2,7435
6	118	2,8126

* Uwaga: P_{max} jest największą wartością obciążenia P , przy której proces iteracyjny był jeszcze zbieżny.

Tablica III.6 Obciążenie P_{max} i przemieszczenie w dla różnych wariantów obliczeń tarczy W2



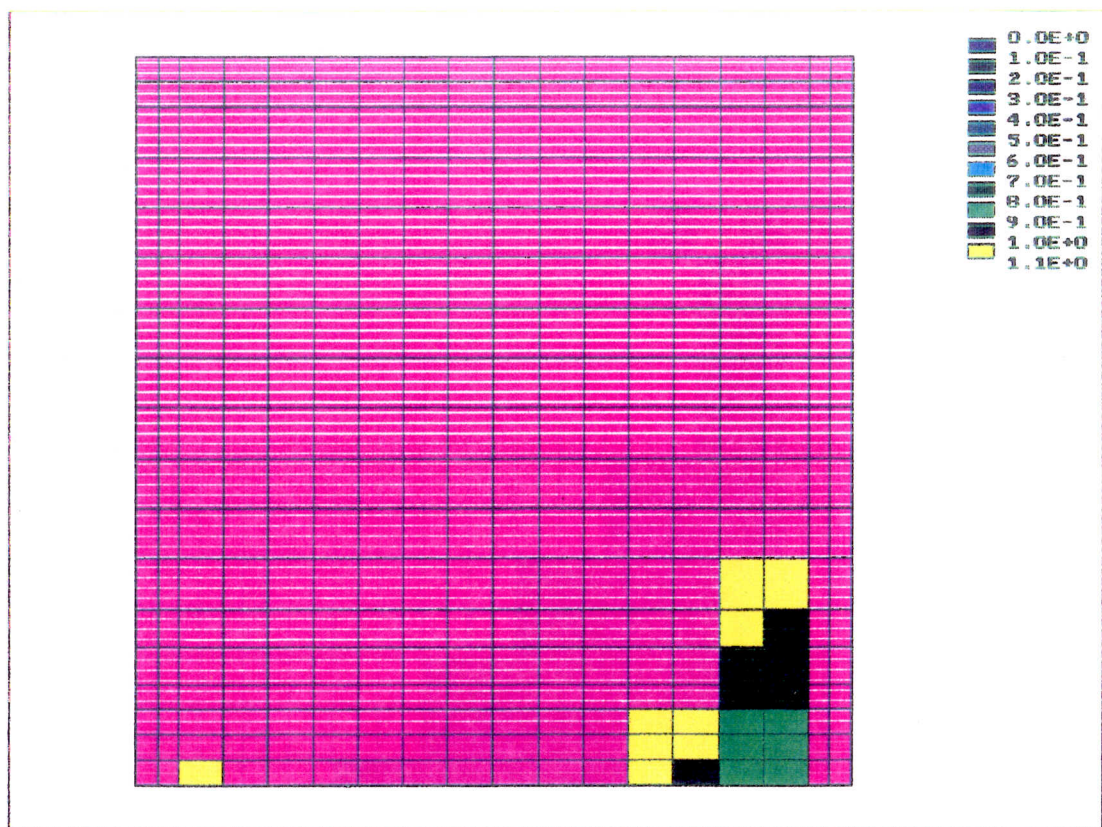
Rys. III.70a Deformacja tarczy W2 dla $P = 20\text{kN}$



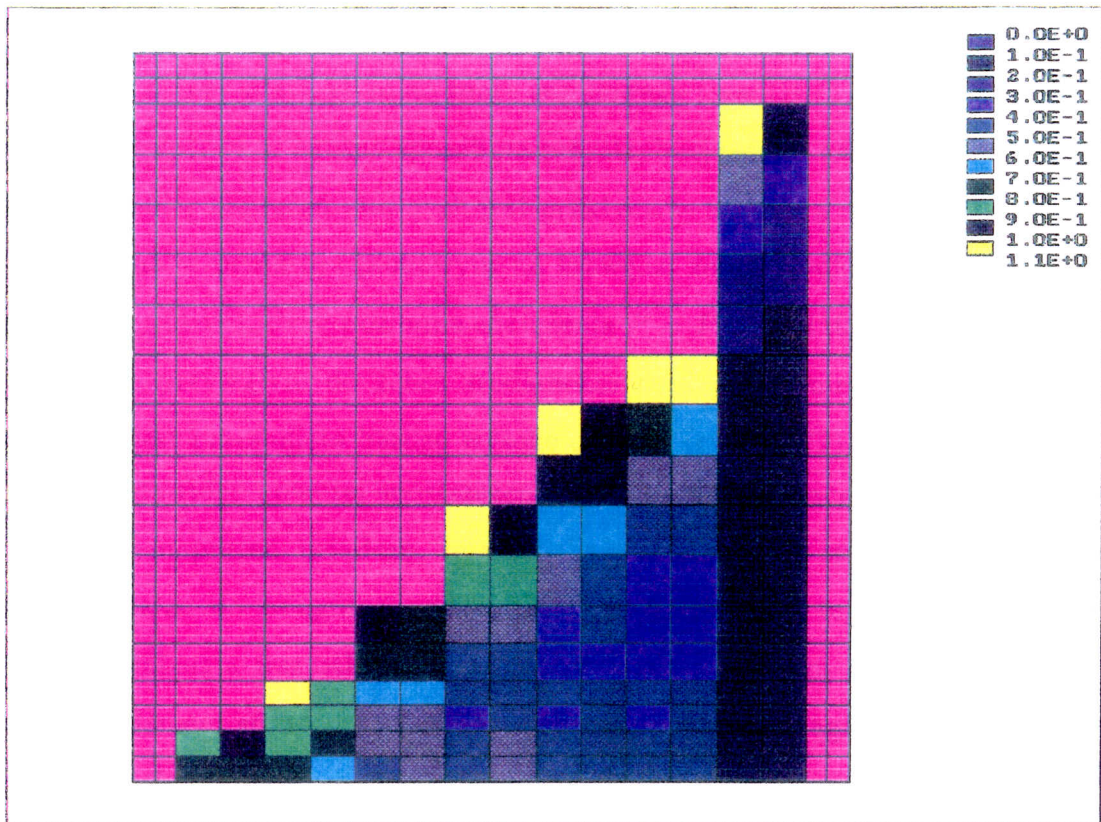
Rys. III.70b Deformacja tarczy W2 dla $P = 112\text{kN}$

Widać to wyraźnie dla $P = 112\text{kN}$ (poziome obciążenia przy którym nie osiągnięto już zbieżności procesu iteracyjnego). Charakter tych przemieszczeń wskazuje, że ten pas elementów utracił zdolność przenoszenia sił ścinających (rys. III.70).

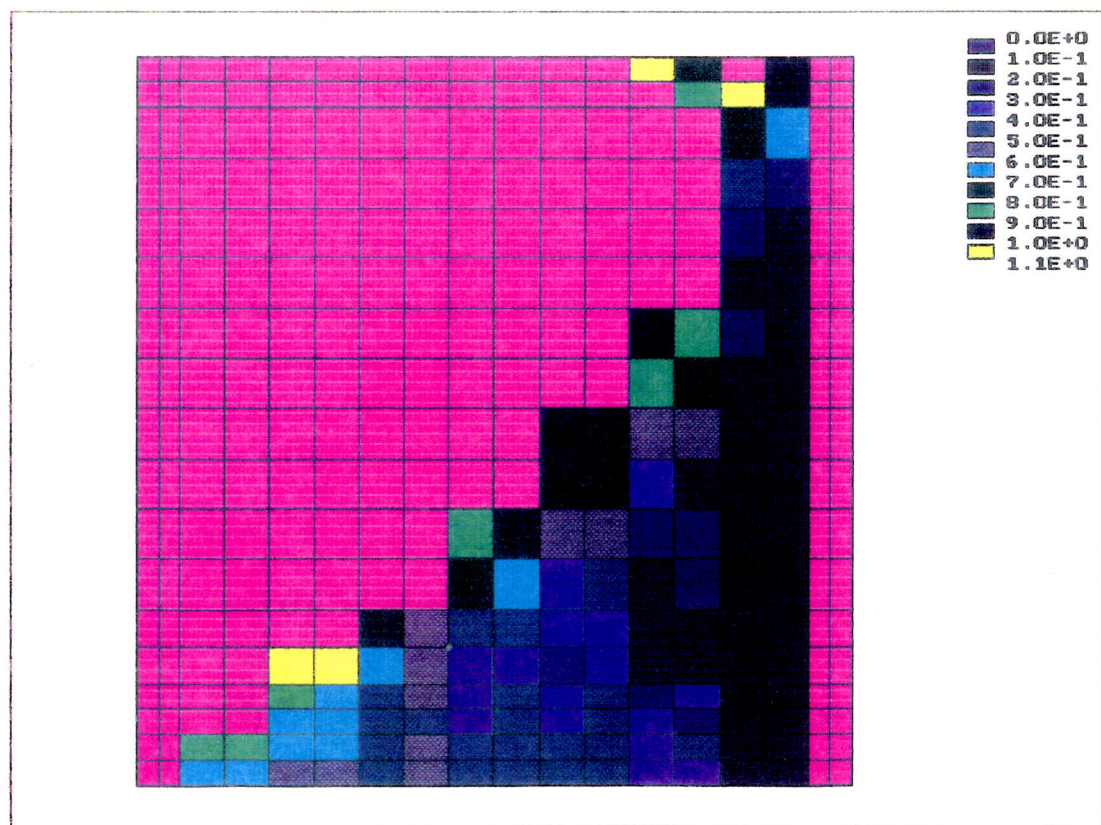
Pierwsze osłabienia materiału pojawiają się dla wartości $P = 60\text{kN}$ w elementach u zbiegu dolnej krawędzi tarczy i żebra środkowego (co pozostaje w zgodzie z wynikami eksperymentalnymi) oraz w jednym punkcie Gaussa przy styku dolnej krawędzi z żebrami podporowymi (w tym miejscu nie zaobserwowano rys w doświadczeniu). Strefy te mają charakter osłabienia materiału przy rozciąganiu. Wraz ze wzrostem poziomu obciążenia strefa osłabienia materiału przy rozciąganiu zajmuje coraz większą powierzchnię. Dla poziomego obciążenia $P = 108\text{kN}$ strefa osłabienia materiału w paśmie pionowym przyległym do żebra środkowego obejmuje już wszystkie elementy z wyjątkiem ostatniego u góry. Zgodność z eksperymentalnym obrazem zarysowań (Fig. 46 w [26]) jest bardzo dobra.



Rys. III.71a Mięknienie materiału dla $P = 60\text{kN}$



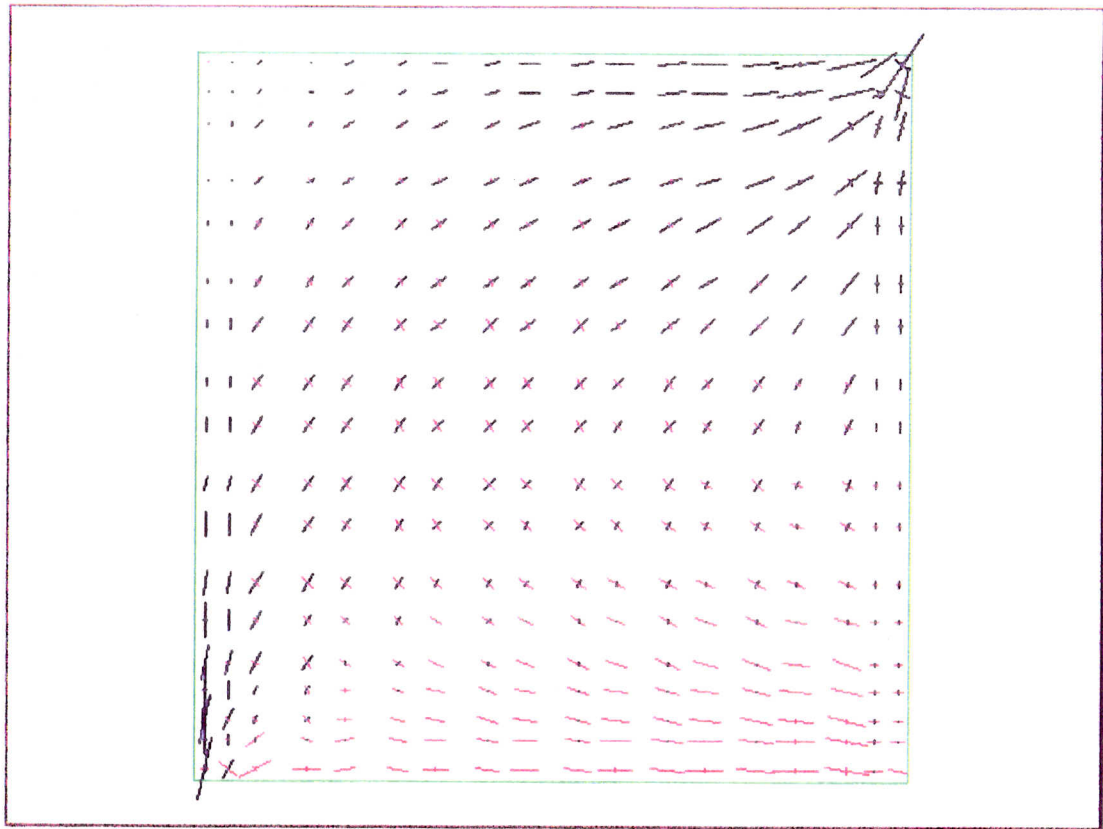
Rys. III.71b Mięknienie materiału dla $P = 108\text{kN}$



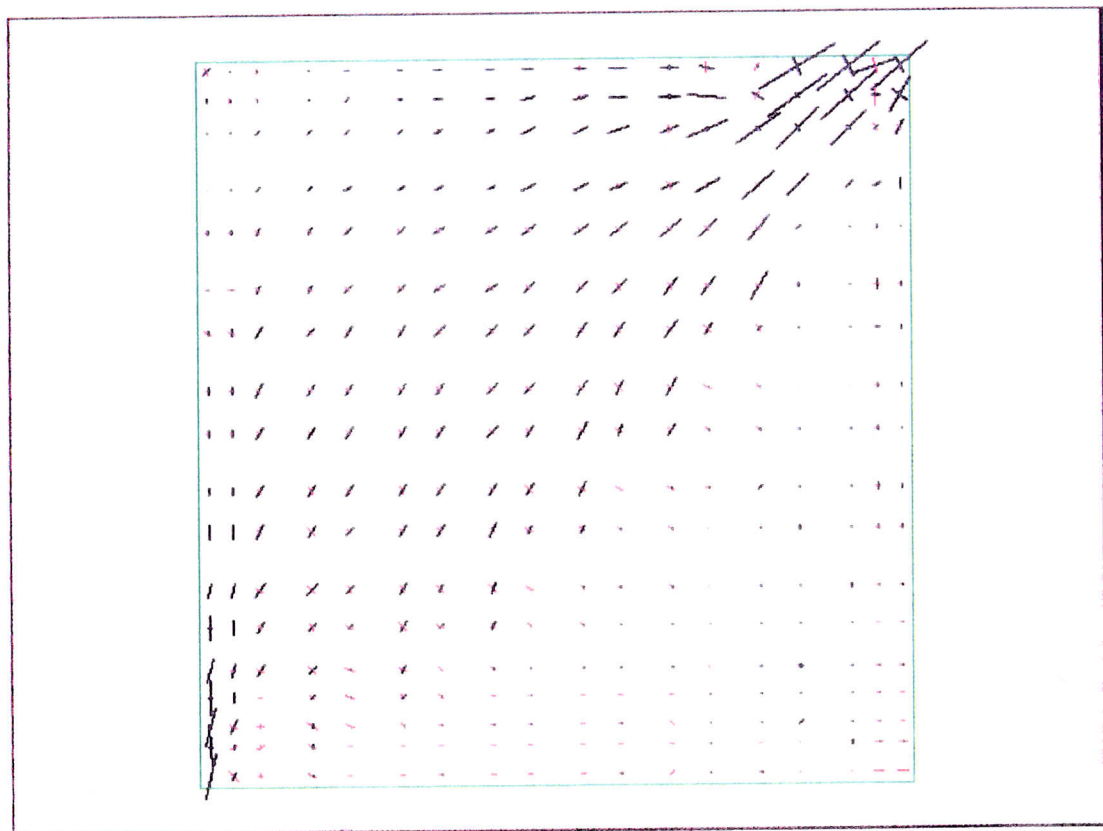
Rys. III.71c Mięknienie materiału dla $P = 110\text{kN}$

Dla $P = P_{max} = 110\text{kN}$ pojawia się osłabienie materiału przy ścisaniu w ostatnim elemencie u góry przyległym do żebra środkowego (rys. III.71). Istnienie strefy osłabienia materiału wpływa w istotny sposób na redystrybucję stanu naprężenia w tarczy. Dla $P = 20\text{kN}$ przebieg naprężeń głównych jest praktycznie zgodny z rozwiązaniem sprężystym, a oś obojętna w przekroju pionowym na krawędzi żebra środkowego jest położona blisko połowy wysokości. Przy poziomie obciążenia $P = P_{max} = 110\text{kN}$ dolne elementy w pasie pionowym przyległym do żebra środkowego praktycznie nie przenoszą naprężeń, a oś obojętna jest przesunięta bardzo wysoko do góry (rys. III.72).

Przedstawione powyżej spostrzeżenia dotyczące deformacji stref osłabienia materiału i rozkładu naprężeń świadczą, że w analizie w poprawny sposób odwzorowano wyniki doświadczalne do osiągnięcia półki plastycznej. Powyżej tego poziomu obciążenia na skutek osłabienia wszystkich elementów w pasie pionowym przyległym do żebra środkowego (element górny przy ścisaniu, pozostałe przy rozciąganiu) w obliczeniach tarcza nie jest zdolna do dalszego przenoszenia obciążeń.



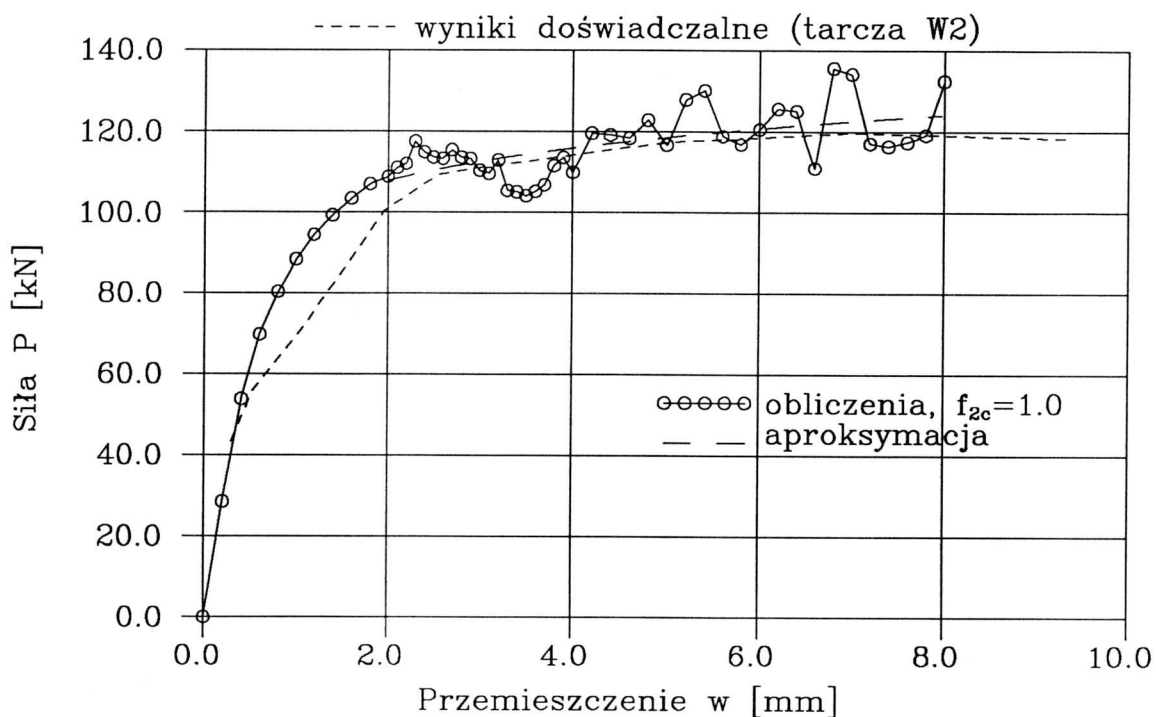
Rys. III.72a Naprężenia główne dla $P = 20\text{kN}$



Rys. III.72b Naprężenia główne dla $P = 110\text{kN}$

Tę obserwację potwierdzają obliczenia wykonane przy sterowaniu przemieszczeniowym dla wariantu 5. Po osiągnięciu wartości $P = P_{max}$ następuje bowiem spadek wartości obciążenia i krzywa $P - w$ zaczyna mieć charakter opadający. Zwiększenie wytrzymałości betonu na ściskanie f_c (wariant 6) nie zmienia tej sytuacji.

W celu zbliżenia wyników do rezultatów doświadczalnych zmodyfikowano doraźnie model betonu przyjmując funkcję $f_{2c} \equiv 1,0$ i zakładając brak sprzężenia przy kurczeniu się powierzchni granicznej. Przyjęcie $f_{2c} \equiv 1,0$ oznacza, że przy ściskaniu zamiast opadającej gałęzi wykresu $\sigma - \epsilon$ otrzymuje się prostą poziomą (jak dla materiału idealnieplastycznego). Niestety, przy zastosowaniu sterowania przemieszczeniowego, otrzymano brak zbieżności rozwiązania dla wartości $w \geq 3,0\text{mm}$. Krzywa $P - w$ w obszarze braku zbieżności ma charakter wyraźnie oscylacyjny, przy czym poszczególne jej punkty znajdują się powyżej lub poniżej krzywej doświadczalnej (rys. III.73).

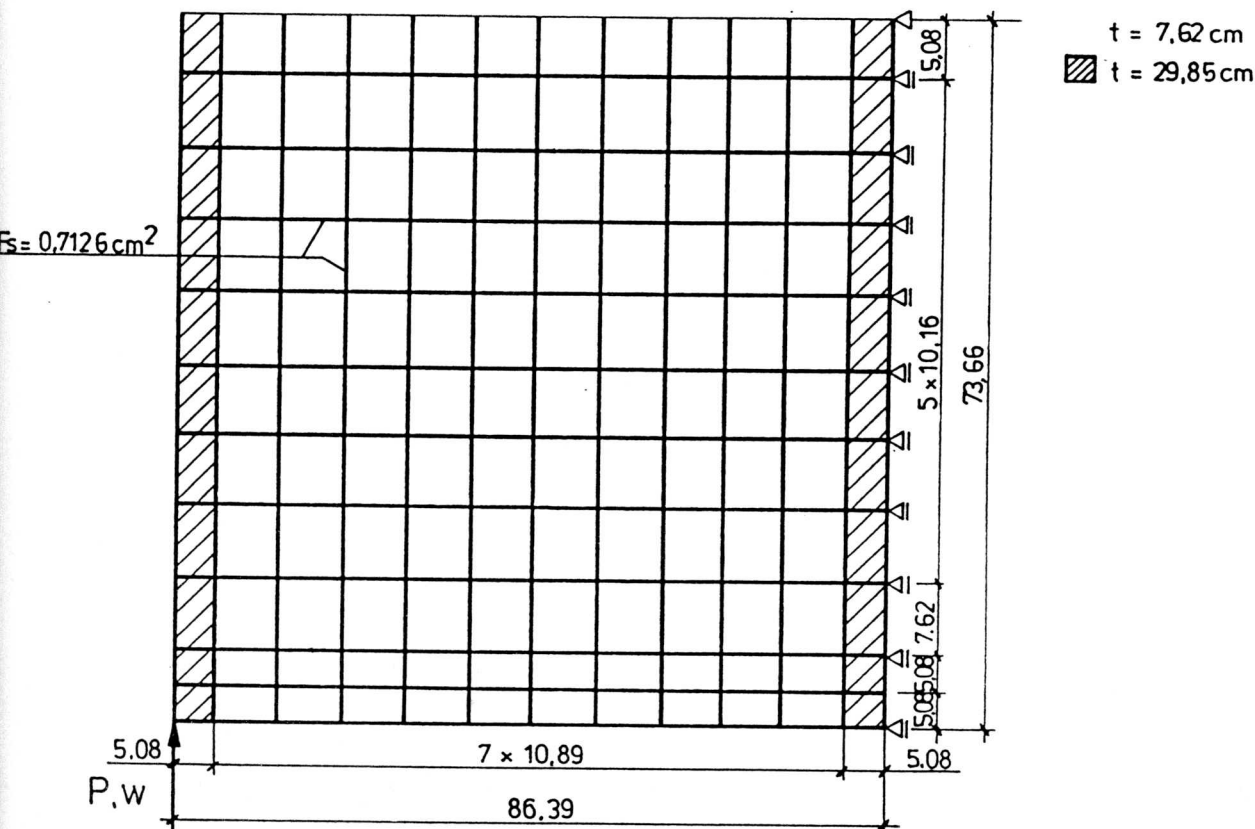
Rys.III.73 Zależność $P-w$ dla zmodyfikowanego modelu betonu

Jeśli jednak przeprowadzić aproksymację niezbieżnego fragmentu krzywej $P-w$, to okaże się, że krzywa aproksymująca bardzo dobrze zgadza się z wynikami doświadczalnymi (zastosowano aproksymację funkcją logarytmiczną używając metody najmniejszych kwadratów, przy wykorzystaniu programu “Grapher” [53]).

Zdaniem autora, brak zbieżności w zakresie półki plastycznej spowodowany jest znacznym osłabieniem materiału w dużej części tarczy. Prowadzi to do zaburzeń stanu równowagi w pewnych obszarach, przy dość poprawnym zachowaniu się konstrukcji w sensie globalnym. Brak równowagi i zaburzony stan przemieszczeń niektórych węzłów powoduje powstanie fałszywych odciążeń w pewnych punktach Gaussa w strefie osłabionej. Przepuszczalnie stan równowagi na półce plastycznej mógłby zostać osiągnięty przy zastosowaniu bardziej zaawansowanych technik numerycznych (np. metody parametru łuku [33]). Również zamodelowanie zbrojenia w sposób rozmyty i użycie prostszych elementów trójkątnych przypuszczalnie poprawiłoby sytuację.

Autor uważa więc, że przy zastosowaniu zmodyfikowanego modelu betonu możliwe jest odwzorowanie w obliczeniach istnienia półki plastycznej. Problemem wymagającym

dalszych badań jest natomiast, czy możliwe jest otrzymanie półki plastycznej dla modelu betonu z gałęzią opadającą krzywej $\sigma - \varepsilon$ przy ściskaniu.



Rys. III.74 Dyskretyzacja tarczy W4

III.2.3.2 Tarcza W4

Dyskretyzację tarczy W4 przyjęto w sposób bardzo zbliżony do tarczy W2 (rys. III.74). Zmieniono jedynie podział na elementy skończone w pionie tak by ściśle zamodelować przebieg poziomych prętów zbrojenia (inny niż w tarczy W2). Obliczenia wykonano w 5 wariantach analizując wpływ wartości parametru h oraz przyjętych funkcji sprężenia kurczenia się powierzchni granicznej na zachowanie się konstrukcji. Pozostałe stałe materiałowe przyjęto tak samo jak dla tarczy W2 (Załącznik Z8)

Wariant 1 – przyjęto wartość parametru $h = 0,050\text{m}$, sprężenie kurczenia się wg propozycji 3° z punktu II.7 (kurczenie niezależne).

Wariant 2 – przyjęto wartość parametru $h = 0,050\text{m}$, sprężenie kurczenia się wg propozycji

cji 1° z punktu II.7 (kurczenie nieizotropowe).

Wariant 3 – przyjęto wartość parametru $h = 0,050\text{m}$, sprzężenie kurczenia się wg propozycji 2° z punktu II.7 (kurczenie izotropowe).

Wariant 4 – przyjęto wartość parametru $h = 0,100\text{m}$, sprzężenie kurczenia się wg propozycji 1° z punktu II.7 (kurczenie nieizotropowe).

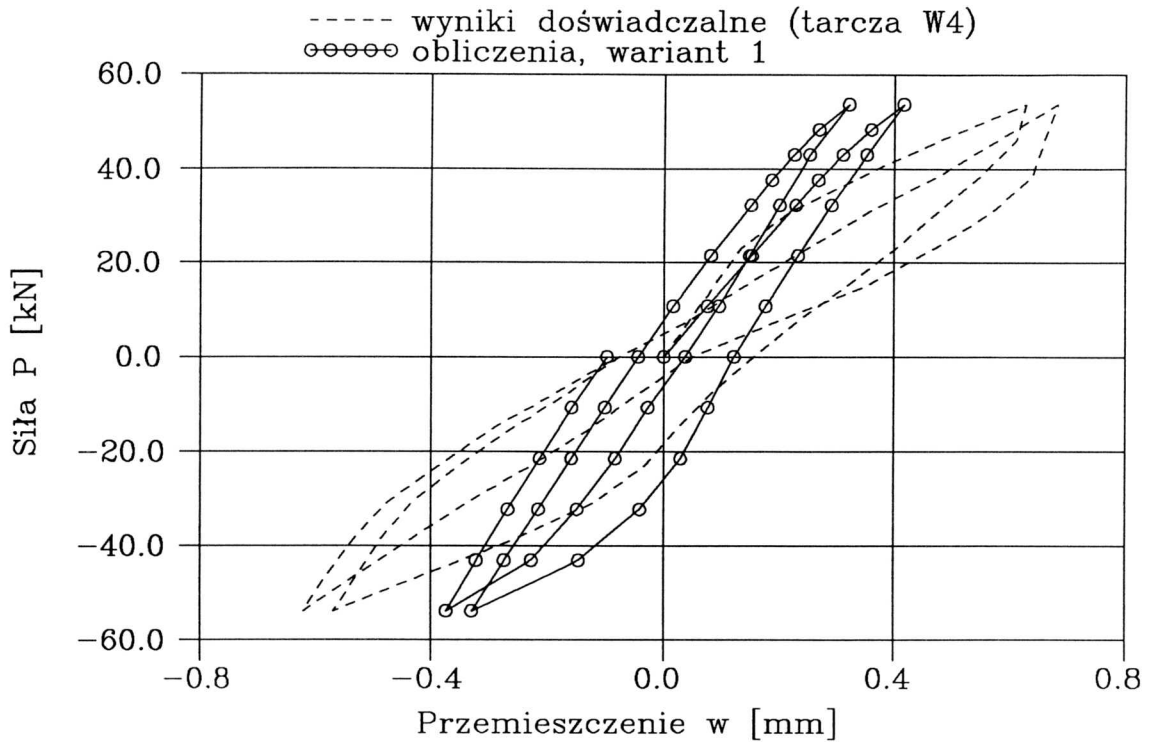
Wariant 5 – przyjęto wartość parametru $h = 0,100\text{m}$, sprzężenie kurczenia się wg propozycji 2° z punktu II.7 (kurczenie izotropowe).

Dla wszystkich wariantów zrealizowano taki sam program obciążenia cyklicznego. Program ten składa się z 4 półcykli, przy największej wartości obciążenia w każdym półcyklu $P = \pm 53,8\text{kN}$ (półcykl oznacza w tym przypadku przebieg obciążenia od zera do ustalonej, dodatniej lub ujemnej wartości, a następnie powrotne odciążenie do zera).

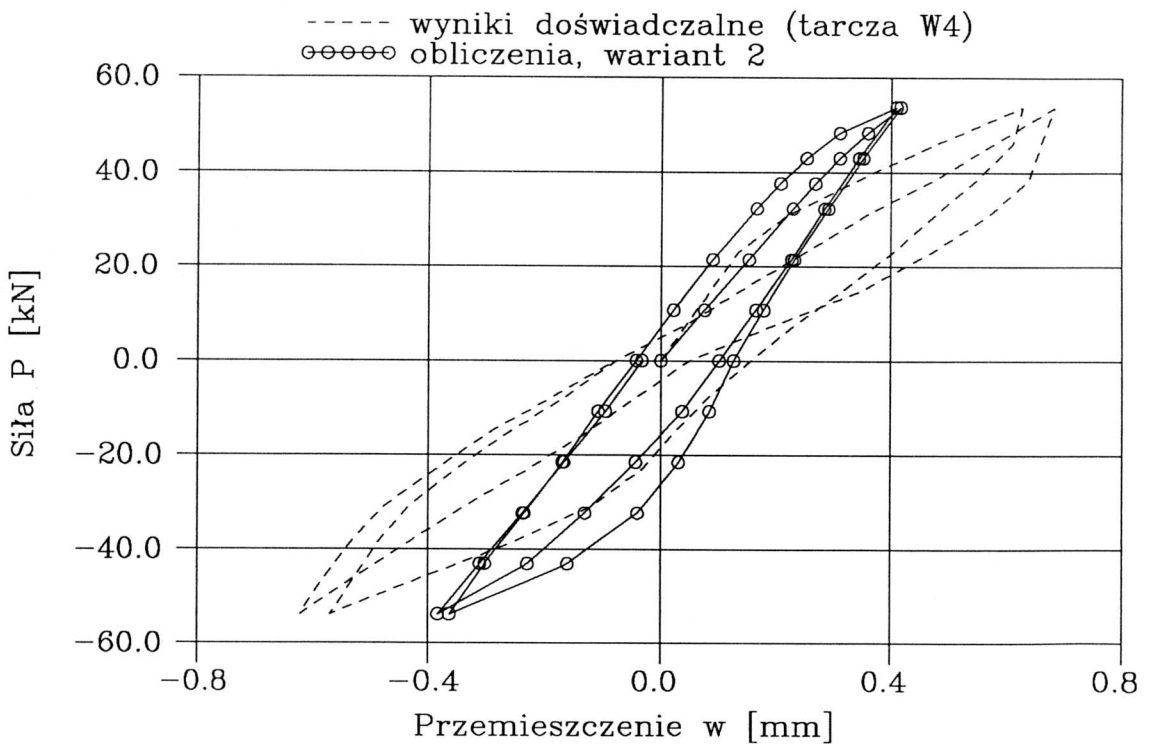
Zgodnie z [26] wartość $P = 53,8\text{kN}$ odpowiada $0,45 P_{max}$ osiągniętej przy obciążeniu monotonicznym.

Zastosowano sterowanie siłowe. Program badań doświadczalnych obejmował po przeprowadzeniu opisanych 4 półcykli obciążenia dalsze obciążenie cykliczne przy poziomie obciążenia bliskim P_{max} . Zniszczenie nastąpiło podczas szóstego półcyklu. Niestety, w pracy [26] podano przebieg krzywej doświadczalnej $P - w$ wyłącznie dla 4 pierwszych półcykli obciążenia.

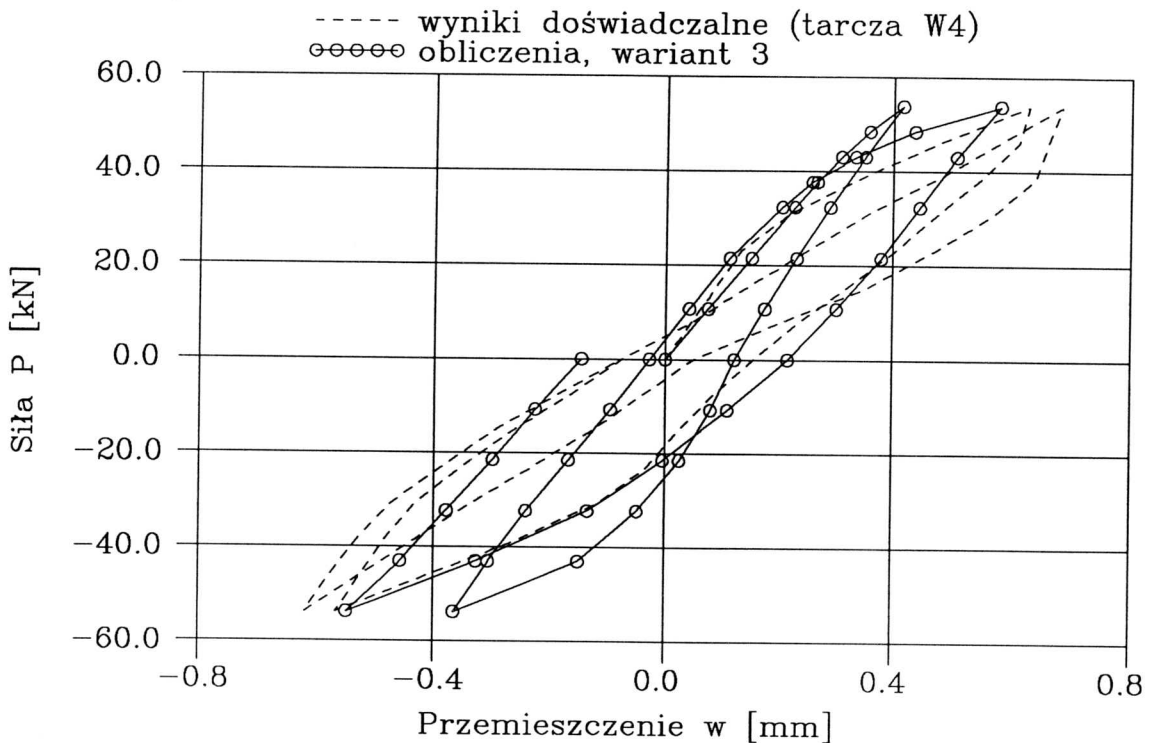
Rys. III.75 – 77 przedstawiają zależność $P - w$ dla trzech różnych funkcji opisujących sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej przy ustalonej wartości parametru $h = 0,050\text{m}$ (warianty 1, 2 i 3). We wszystkich tych wariantach zachowanie się konstrukcji jest identyczne podczas pierwszego półcyklu. Natomiast już w drugim półcyklu (obciążenie do poziomu $P = -53,8\text{kN}$) pojawiają się pewne różnice pomiędzy kurczeniem izotropowym, a pozostałymi dwoma wariantami. Pełne zróżnicowanie zachowania się konstrukcji dla wszystkich trzech wariantów uwidacznia się w 3 i 4 półcyklu. Dla wariantu 1 (kurczenie niezależne) obserwujemy, że pętle histerezy są wąskie, przy czym pętla histerezy dla 3 i 4 półcyklu jest przesunięta na lewo w stosunku do 1 i 2 półcyklu.



Rys.III.75 Zależność P-w dla wariantu 1



Rys.III.76 Zależność P-w dla wariantu 2



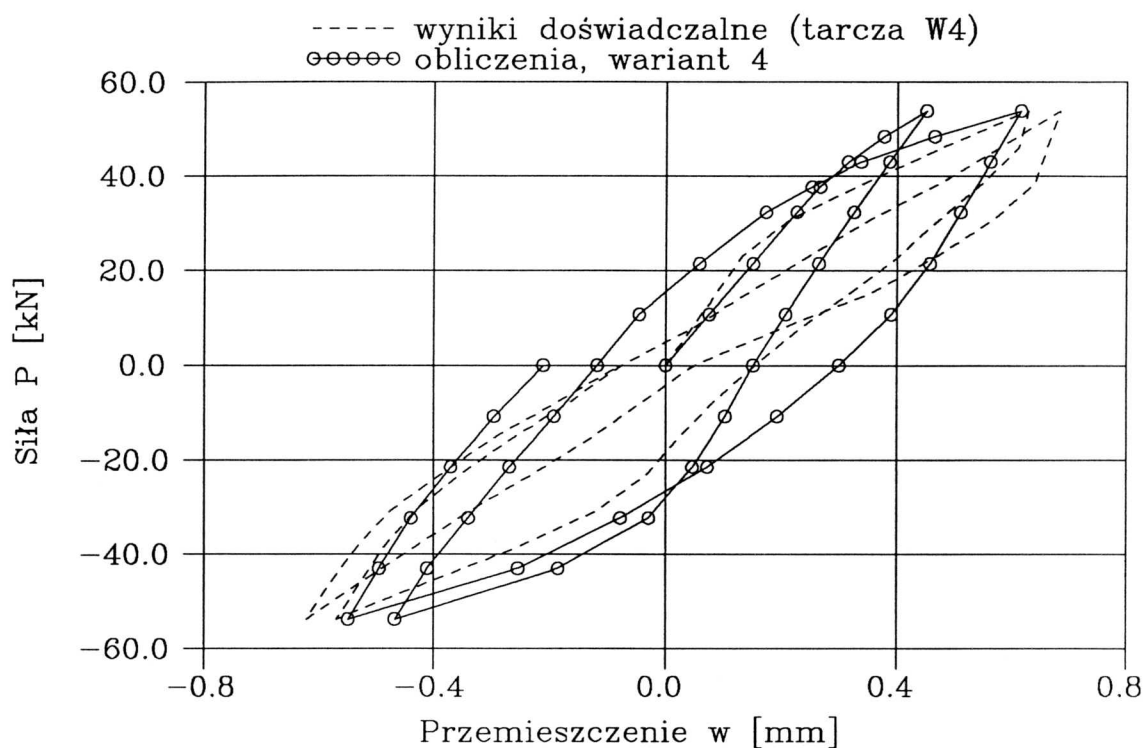
Rys.III.77 Zależność P–w dla wariantu 3

Z kolei dla wariantu 2 (kurczenie nieizotropowe) pętla histerezy dla 3 i 4 półcyklu jest nieco szersza, a przebiegi odciążenia do zera podczas 2 i 4 półcyklu praktycznie pokrywają się. Dla wariantu 3 (kurczenie izotropowe) pętla histerezy dla 3 i 4 półcyklu jest bardzo szeroka, przy czym krzywa odciążenia do zera podczas czwartego półcyklu jest wyraźnie przesunięta na lewo w stosunku do drugiego półcyklu.

Przedstawione powyżej obserwacje prowadzą do wyników, że w sensie jakościowym najbardziej zbliżone do doświadczenia są wyniki dla wariantu 2. Dla tego wariantu, tak samo jak w doświadczeniu, obserwuje się stabilizację przemieszczeń trwałych (dla $P = 0$) po czwartym półcyklu. Możliwe, że stabilizacja przemieszczeń trwałych nastąpiłaby również dla wariantu 1 w dalszych cyklach (po przesunięciu pętli histerezy na lewo). Natomiast wyniki dla wariantu 3 sugerują, że w tym przypadku należy spodziewać się narastania odkształceń trwałych. Jednoznaczne określenie sposobu zachowania się konstrukcji dla wariantów 1 i 3 wymagałoby jednakże przeprowadzania obliczeń dla większej ilości cykli.

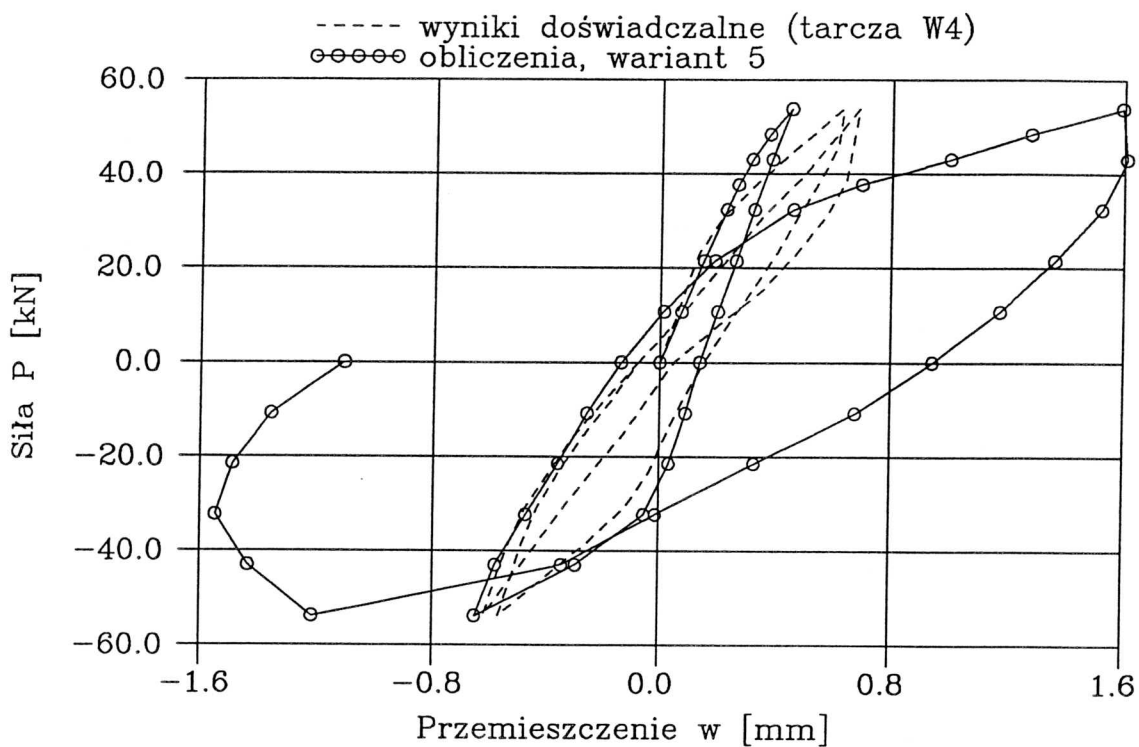
Mimo jakościowego podobieństwa krzywej $P-w$ obliczonej dla wariantu 2 z wynikami doświadczalnymi występują dość duże różnice w wartościach przemieszczeń. Obliczone zachowanie się konstrukcji jest zbyt sztywne i znacznie mniejsze od eksperymentalnych są wartości przemieszczeń dla maksymalnych wartości obciążeń P . Również podczas odciążenia do zera w obliczeniach konstrukcja zachowuje się zbyt sztywnie (nachylenie krzywej $P-w$ na tych odcinkach zbliżone jest do nachylenia gałęzi krzywej $P-w$ przy obciążeniu pierwotnym – w pierwszym półcyklu do momentu zarysowania). Natomiast bardzo zbliżone do wartości doświadczalnych są przemieszczenia trwałe w . Również początkowa sztywność konstrukcji (przed wystąpieniem stref osłabienia materiału) jest dobrze odwzorowana w obliczeniach. Lepszą zgodność przemieszczeń w dla maksymalnych wartości obciążenia P , w porównaniu z doświadczeniem, otrzymano dla wariantu 3. Zgodność ta jest jednak pozorna (rys. III.77). Została ona bowiem uzyskana przy istnieniu nadmiernie szerokich pętli histerezy oraz przy narastaniu przemieszczeń trwałych, co jest wyraźnie niezgodne z doświadczeniem.

Zwiększenie parametru h do wartości 0,100m (warianty 4 i 5) prowadzi do osłabienia sztywności tarczy W4 przy obciążeniu cyklicznym co widać na rys. III.78 – 79. Podobnie, jak dla $h = 0,050m$, zachowanie się konstrukcji podczas pierwszego półcyklu nie jest zależne od funkcji opisującej sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej (kurczenie nieizotropowe lub izotropowe). Zwiększenie wartości parametru h powoduje wzrost przemieszczeń w pierwszym półcyklu. W następnych półcyklach następuje drastyczne zróżnicowanie zachowania się konstrukcji dla wariantu 4 (kurczenie nieizotropowe) i wariantu 5 (kurczenie izotropowe). Dla wariantu 4 obserwuje się istnienie szerokich pętli histerezy, przy dobrej zgodności przemieszczeń w dla maksymalnych wartości obciążenia P z doświadczeniem. Natomiast wartości przemieszczeń trwałych są wyraźnie zbyt duże i narastają w procesie obciążenia. Zastosowanie wariantu 5 prowadzi do bardzo silnej degradacji sztywności tarczy podczas 3 i 4 półcyklu. W tym przypadku wartości przemieszczenia w są bardzo duże i praktycznie konstrukcja przestaje być zdolna do przenoszenia obciążeń podczas następnych cykli.

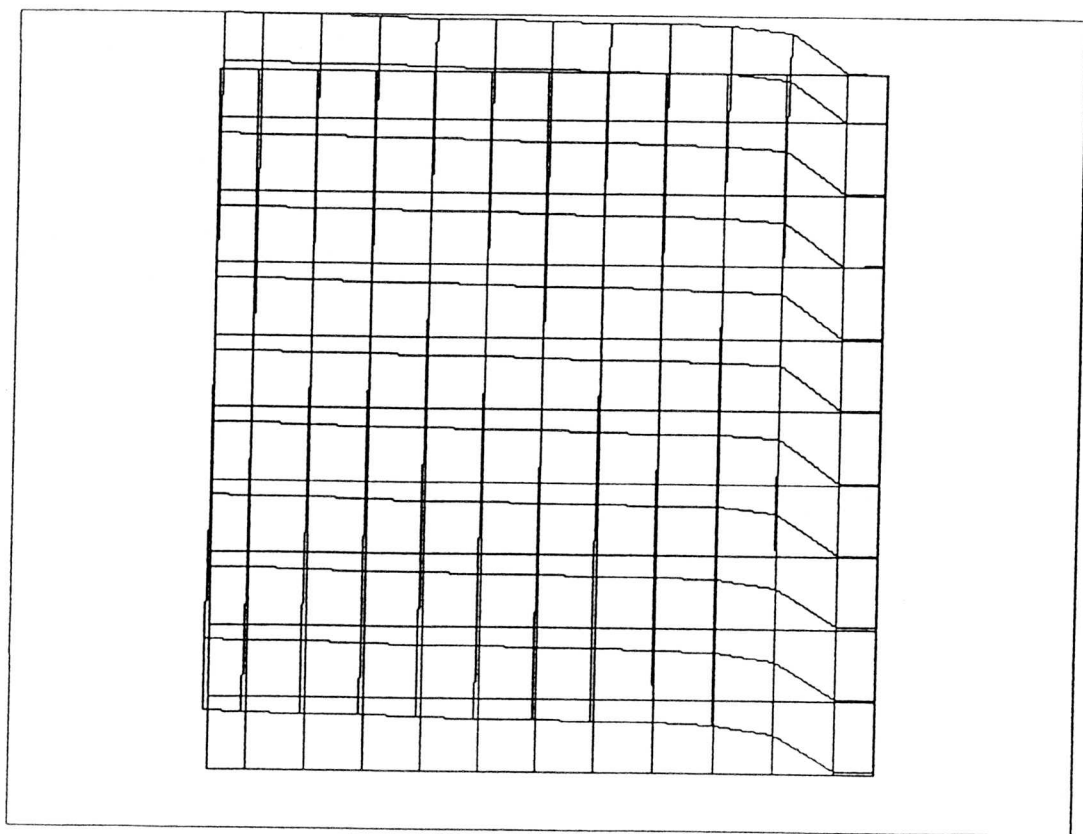
Rys.III.78 Zależność $P-w$ dla wariantu 4

Z powyższych spostrzeżeń wynika, że przyjęcie większej wartości h prowadzi do gorszego odwzorowania zachowania się konstrukcji przy obciążeniu cyklicznym, pomimo lepszej zgodności krzywej $P-w$ z eksperymentem dla pierwszego półcyklu.

Charakter uszkodzeń konstrukcji podczas procesu obciążenia jest podobny dla wszystkich wariantów. Podczas pierwszego półcyklu tworzy się strefa osłabienia materiału u zbiegu dolnej krawędzi tarczy i żebra środkowego (mięknienie materiału przy rozciąganiu symulujące zarysowanie). W drugim półcyklu (obciążenie przeciwnego znaku) formuje się analogiczna strefa osłabienia u przeciwległej, górnej krawędzi tarczy. Następne półcykle prowadzą do połączenia się obu tych stref w jedną, obejmującą całą wysokość tarczy przy krawędzi żebra środkowego. Zasięg tej strefy w kierunku poziomym zależy od wartości parametru h i przyjętej funkcji sprężenia kurczenia się powierzchni granicznej. Dla wariantu 2 strefa osłabienia obejmuje wzdłuż dolnej krawędzi 3 elementy, zaś dla wariantu 5 sięga poza połowę tarczy w kierunku żebra podporowego. Należy zauważyć, że w strefie osłabienia zachodzą procesy przeciwnoobrotne i dla wariantu 5 prowadzą one do wystąpienia mięknienia materiału przy ściskaniu.



Rys.III.79 Zależność P-w dla wariantu 5



Rys. III.80 Deformacja tarczy W4 dla 3 półcyklu (wariant 5)

W efekcie, podobnie jak dla tarczy W2, w wariancie 5 pionowy pas elementów przyległych do żebra środkowego jest bardzo silnie osłabiony, a jego deformacja jest charakterystyczna dla zniszczenia przy ścinaniu (rys. III.80). Dla innych wariantów charakter deformacji jest bardziej zbliżony do deformacji belki zginanej. Zbrojenie podczas całego procesu obciążenia pracuje w zakresie sprężystym (dla wszystkich wariantów).

Zdaniem autora przedstawione powyżej obliczenia tarczy W4 dla wariantu 2 odwzorowują zachowanie się rzeczywistej konstrukcji nieco lepiej niż obliczenia z prac [26], [88]. W pracach tych otrzymano nieco lepszą zgodność maksymalnych wartości przemieszczenia w z doświadczeniem (konstrukcja była mniej sztywna po zarysowaniu niż w obliczeniach autora), ale wartości przemieszczeń trwałych były praktycznie równe zero. Również pętla histerezy pojawiła się wyłącznie dla 1 i 2 półcyklu. Dla 3 i 4 półcyklu w pracach tych obciążenie i odciążenie przebiegało wzdłuż tej samej prostej (sprężyste zachowanie się konstrukcji przy zredukowanej sztywności). Porównanie z doświadczeniem jasno wskazuje, że taki opis nie w pełni odwzorowuje eksperymentalne zachowanie się konstrukcji (na co zresztą zwracał uwagę sam *V. Červenka* [26]).

III.2.4 Podsumowanie wyników obliczeń

Wykonane obliczenia wskazują, że proponowany model betonu jest przydatny do analizy płaskich konstrukcji betonowych znajdujących się w złożonym stanie naprężenia. Dotyczy to zarówno przypadków obciążenia monotonicznego, jak i cyklicznego.

Analiza tarczy WT3 dowiodła, że przy użyciu proponowanego modelu można dobrze opisać zachowanie się konstrukcji, w przypadku gdy decydujące znaczenie mają nieliniowe właściwości betonu przy ściskaniu (co nie byłoby możliwe przy użyciu prostych modeli sprężysto – kruchych [88], [111]). Obliczenia dla tarcz WT4 i W2 wskazują, że w sposób zadawalający odwzorowane jest również zachowanie się konstrukcji, dla których decydujące znaczenie ma zarysownie betonu i uplastycznienie stali przy rozciąganiu. Przykład tarczy W4 prezentuje możliwości modelu dla przypadku obciążenia cyklicznego.

Z uwagi na niewielką liczbę przeanalizowanych przykładów (jednakże przy prowadzeniu obliczeń w kilku wariantach dla każdego z nich) trudno w sposób jednoznaczny sformułować szczegółowe wnioski dotyczące wpływu poszczególnych parametrów modelu na

globalne zachowanie się konstrukcji. Można jednak sformułować przynajmniej następujące uwagi:

1. Prawidłowe opisanie zachowania się konstrukcji przy dominującym wpływie naprężeń ściskających wymaga przyjmowania $\beta \neq 0$ i posługiwania się pełną, niesymetryczną macierzą \underline{D}_{ep} .
2. Zmieniając wartość parametru h można w sposób efektywny wpływać na sztywność konstrukcji w obliczeniach i zasięg stref osłabienia materiału po przekroczeniu poziomu obciążenia rysującego. W poszczególnych przypadkach (tarcza W2) wartość parametru h wpływa także na nośność konstrukcji. Niestety przy obecnym stanie wiedzy nie można a priori określić dla danej konstrukcji żelbetowej właściwej wartości parametru h – musi to być ustalone metodą prób i błędów.
3. Wybór właściwej funkcji opisującej sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej przy rozciąganiu i ściskaniu ma istotne znaczenie dla konstrukcji poddanych obciążeniom cyklicznym (tarcza W4) lub przy dominującym wpływie mięknięcia przy rozciąganiu na zachowanie się globalne konstrukcji (tarcza W2). Jak to przedstawiono w punkcie II.7 obecnie brak jest wystarczających danych doświadczalnych na szczeblu punktu materialnego dla jednoznacznego sformułowania postaci takiej funkcji. Wyniki obliczeń dla tarczy W4 sugerują, że najlepsze rezultaty dla konstrukcji można otrzymać stosując propozycję 3° z punktu II.7 (kurczenie nieizotropowe). Sformułowanie na drodze numerycznej jednoznacznych wniosków co do postaci tej funkcji wymagałoby przeprowadzenia dalszych obliczeń dla różnych typów konstrukcji, co wykracza już poza zakres pracy.

Rozdział IV

Zakończenie

IV.1 Podsumowanie

Celem pracy była budowa modelu betonu dla płaskiego stanu naprężenia i jego weryfikacja na szczeblu punktu materialnego oraz na szczeblu konstrukcji. Opracowany model jest kompletny i opisuje dowolne procesy obciążenia w płaskim stanie naprężenia. W części III pracy wykazano, że model może być efektywnie zaimplementowany do programu MES. Wykonane obliczenia wykazują dobrą zgodność modelu z doświadczeniem, zarówno na szczeblu punktu materialnego, jak i przy analizie konstrukcji. Podstawowe cechy modelu zostały zrekapitulowane w punkcie II.9. Podsumowanie i szczegółowe wnioski wynikające z testów na szczeblu punktu materialnego są przedstawione na końcu punktów III.1.2.2 i III.1.3. W punkcie III.2.4 podano wnioski dotyczące analizy konstrukcji. W tym miejscu nie powtórzono już tych wniosków – czytelnik może je znaleźć w wymienionych punktach. Na zakończenie należy stwierdzić, że postawione w punkcie I.2 cele zostały w pracy w pełni wypełnione.

IV.2 Możliwości rozwoju tematu

Wydaje się, że można wskazać trzy drogi rozwoju przedstawionego modelu:

- 1° Implementacja modelu do programu MES dysponującego bardziej rozwiniętymi technikami numerycznymi (np. metoda parametru łuku, metoda BFGS) i dającego możliwości rozwiązywania dużych konstrukcji (np. ABAQUS). Jednocześnie należy rozważyć zastosowanie bardziej dokładnych i efektywnych algorytmów całkowania

numerycznego prędkościowych związków fizycznych niż obecnie stosowana metoda *Eulera* z podziałem na podprzyrosty.

2° Uogólnienie modelu dla trójwymiarowego stanu naprężenia. Zadanie to jest trudne. Podstawowe mechanizmy plastyczne, kryteria obciążenia / odciążenia i równanie powierzchni granicznej zostały zdefiniowane w sposób ogólny, ale wszystkie szczegółowe funkcje materiałowe przyjęto biorąc pod uwagę wyłącznie płaski stan naprężenia.

3° Prace [43], [95] wskazują na fakt, że również zniszczenie betonu przy ścisaniu ma charakter zlokalizowany. Sugeruje to, że także dla ścisania konieczne jest wprowadzenie mechanizmu, który powodowałby ograniczenie lokalizacji do strefy o skończonej objętości. Wydaje się, że najprostsze jest wprowadzenie nielokalnej definicji odkształcenia $\bar{\gamma}_0^p$:

$$\bar{\gamma}_0^{pNL} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \bar{\gamma}_0^p \psi(V) dV, \quad (IV.1)$$

gdzie $\bar{\gamma}_0^{pNL}$ – nielocalne odkształcenie $\bar{\gamma}_0^p$,
 V_0 – reprezentatywna objętość,
 $\psi(V)$ – funkcja wagowa.

Takie podejście całkowe jest z powodzeniem stosowane w modelach kontynualnej mechaniki uszkodzeń [92]. Zdefiniowanie odkształcenia $\bar{\gamma}_0^{pNL}$ w sposób nielokalny umożliwiłoby ograniczenie lokalizacji zarówno przy ścisaniu, jak i rozciąganiu. Przy takim podejściu parametr h należy traktować jako obiektywną stałą materiałową, niezależną od wymiarów elementów skończonych. Jej wartość musiałaby być ustalona na drodze testów numerycznych dla zadanej wartości V_0 i przyjętej postaci funkcji $\psi(V)$.

Literatura

- [1] E.Andenaes, K.H.Gerstle, H.Y.Ko *Response of Mortar and Concrete to Biaxial Compression*, J. of Eng. Mech. Div., Vol.103, EM4, Aug. 1977
- [2] H.Aoyama, H.Noguchi, *Mechanical Properties of Concrete under Load Cycles Idealizing Seismic Actions*, State of the Art Report, IABSE – CEB Symposium on Structural Concrete under Seismic Actions, Rome, Italy, 1979
- [3] ASCE, *State – of – the – Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete*, Prepared by Task Comittee chaired by A.Nilson, New York, USA 1982
- [4] Z.P.Bażant, *Instability, Ductility and Size Effect in Strain – Softening Concrete*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.102, EM2, April 1976
- [5] Z.P.Bażant, *Endochronic Inelasticity and Incremental Plasticity*, Int. J. Solids and Struct., Vol.14, 1978
- [6] Z.P.Bażant, T.B.Belytschko, T.P.Chang, *Continuum Theory for Strain –Softening*, J. of Eng. Mech. Div, ASCE, Vol.110, EM12, Decem.1984
- [7] Z.P.Bażant, P.D.Bhat, *Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.102, EM4, April 1976
- [8] Z.P.Bażant, S.S.Kim, *Plastic – Fracturing Theory of Concrete*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.105, EM3, March 1979
- [9] Z.P.Bażant, B.H.Oh, *Crack Band Theory for Fracture of Concrete*, Materials and Structures, RILEM, Vol.16(93), 1983

- [10] Z.P.Bažant, B.H.Oh, *Microplane Model for Progressive Fracture of Concrete and Rock*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.111, No 4, April 1985
- [11] Z.P.Bažant, J.Ožbolt, *Nonlocal Microplane Model for Fracture, Damage, and Size Effect in Structures*, J. of Eng. Mech., ASCE, Vol.116, No 11, Novem. 1990
- [12] Z.P.Bažant, P.C.Pratt, *Microplane Model for Brittle – Plastic Material – Parts I and II*, J. of Eng. Mech., ASCE, Vol.114, No 10, Oct. 1988
- [13] Z.P.Bažant, C.Shieh, *Hysteretic Fracturing Endochronic Theory for Concrete*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.106, EM6, June 1980
- [14] Z.P.Bažant, T.Tsubaki, *Total Strain Theory and Path – Dependence of Concrete*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.106, EM6, Dec. 1980
- [15] * G.W.Beams, K.H.Gerstle, H.Y.Ko, *Response of Concrete to Cyclic Biaxial Compressive Loads*, ASCE National Convention, Las Vegas, USA, April 1982
- [16] P.G.Bergan, L.Holland, *Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Structures*, Comp. Math. Apl. Mech. Eng., Vol.17-18, 1979
- [17] N.Bicanič, C.J.Pearce, D.R.J.Owen, *Failure Predictions of Concrete Like Materials Using Softening Hoffman Plasticity Model*, w [31]
- [18] Ch.La Borderie, *Phenomenes unilateraux dans un materiau endommageable: Modelisation et application a l'analyse de structure en beton*, These de doctorat de l'Univ. Paris 6, Univ. P. et M.Curie – Paris 6, France, Mai 1991
- [19] R.de Borst, *Computational Methods in Non – Linear Solid Mechanics, Part 2: Physical Non – Linearity*, report 25-291-2-06, TU Delft, the Netherlands, 1991
- [20] R.de Borst, H.B.Mühlhaus, *Continuum Models for Discontinuous Media*, RILEM Symposium on Fracture Mechanics of Brittle Disordered Materials, Noordwijk, the Netherlands, June 1991
- [21] I.N.Bronsztejn, K.A.Siemiendajew, *Matematyka – poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1986

- [22] O.Buyukozturk, *Nonlinear Analysis of RC Structures*, Comp. Struct., Vol.7, No 1, 1977
- [23] L.Cedolin, Y.R.J.Crutzen, S.Dei Poli, *Stress – Strain Relationship and Ultimate Strength of Concrete under Triaxial Loading Conditions*, Construzioni in Cem. Armato, Studi e Rediconti, No 13 (1976), Milano, Italy, 1976
- [24] L.Cedolin, Y.R.J.Crutzen, S.Dei Poli, *Triaxial Stress – Strain Relationship for Concrete*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.103, EM6, June 1977
- [25] * V.Červenka, *Inelastic FE Analysis of RC Panels under In – Plane Loads*, Ph. D. Thesis, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Colorado, Boulder, USA, 1970
- [26] V.Červenka, K.H.Gerstle *Inelastic FE Analysis of RC Panels: Experimental Verification and Application*, IABSE Publ, Vol.32–II, 1972
- [27] V.Červenka, K.H.Gerstle *Inelastic FE Analysis of RC Panels under In – Plane Loads*, Inelasticity and Non – Linearity in Structural Concrete, SM Study No 8, Paper 13, Univ. of Waterloo, Waterloo, Canada 1972
- [28] E.S.Chen, O.Buyukozturk, *Constitutive Model for Concrete in Cyclic Compression*, J. of Eng. Mech., ASCE, Vol.111 No 6, June 1985
- [29] E.S.Chen, *Plasticity in Reinforced Concrete*, Mc Graw – Hill, 1982
- [30] E.S.Chen, D.J.Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer – Verlag, 1988
- [31] *Computational Modelling of Concrete Structures*, Proc. of Int. Conf. EURO – C 1994, Editors: H.Mang, N.Bicanič, R.de Borst, Innsbruck, Austria, March 1994
- [32] *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Proc. of Second Int. Conf., Editors: N.Bicanič, H.Mang, Zell am See, Austria, April 1990
- [33] M.A.Crisfield, *An Arc – Length Method Including Line Searches and Accelerations*, Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol.19, 1983

- [34] M.A.Crisfield, J.Wills, *Analysis of RC Panels Using Different Concrete Models*, J. of Eng. Mech., ASCE, Vol.115, No 3, March 1989
- [35] T.Ćwirko – Godycki, *Mechanika betonu*, Arkady, Warszawa, 1982
- [36] Y.F.Dafalias, *Bounding Surface Plasticity I: Mathematical Foundation and Hypoelasticity*, J. of Eng. Mech., ASCE, Vol.112, No 9, Sept. 1986
- [37] Y.F.Dafalias, E.P.Popov, *A Model of Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loading*, Acta Mechanica 21, 1975
- [38] D.Darvin, D.A.Pecknold, *Analysis of RC Shear Panels under Cyclic Loading*, J. of Struct. Div., ASCE, Vol.102, ST2, Febr. 1976
- [39] R.Dungar, *A Viscoplastic Bounding Surface for Concrete under Compressive and Tensile Conditions and Its Application to Arch Dam Analysis*, Const. Laws for Eng. Materials. Theory and Applications, Ed. C.S.Desai, 1987
- [40] A.Fafitis, S.P.Shah, *Constitutive Model for Biaxial Cyclic Loading of Concrete*, J. of Eng. Mech., ASCE, Vol.112, No 8, August 1986
- [41] M.N.Fardis, B.Alibe, J.L.Tassoulas, *Monotonic and Cyclic Constitutive Law for Concrete*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.108, EM2, Febr. 1983
- [42] M.N.Fardis, E.S.Chen, *A Cyclic Multiaxial Model for Concrete*, Comp. Mech. Vol.1, No 4, 1986
- [43] P.H.Feenstra, *Computational Aspects of Biaxial Stresses in Plain and Reinforced Concrete*, Ph.D.Thesis, TU Delft, Delft, the Netherlands, Novem. 1993
- [44] H.Floegl, *Traglastermittlung dünner Stahlbetonschalen mittels der Methode der FE unter Berücksichtigung wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens sowie geometrischer Nichtlinearität*, Dissertationen der TU Wien, 41, Wien, Austria, 1983
- [45] C.Frantzeskakis, J.N.Theillout, *Nonlinear FE Analysis of RC Structures with a Particular Strategy Following Cracking Process*, Comp. Struct., Vol.31, No 3, 1989

- [46] K.H.Gerstle, *Simple Formulation of Biaxial Concrete Behaviour*, J. of ACI, Vol.78, No 1, 1981
- [47] K.H.Gerstle, *Simple Formulation of Triaxial Concrete Behaviour*, J. of ACI, Vol.78, No 5, 1981
- [48] K.H.Gerstle, H.Aschl, R.Bellotti, P.Bertacchi, M.D.Kotsovos, H.Y.Ko, D.Linse, J.B.Newman, P.Rossi, G.Schickert, M.A.Taylor, L.A.Taylor, L.A.Traina, H.Winkler, R.M.Zimmerman, *Behavior of Concrete under Multiaxial Stress States*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.106, EM6, Decem. 1980
- [49] R.Glemberg, *Dynamic Analysis of Concrete Structures*, Chalmers Univ. of Technol., Dep. of Struct. Mechanics, Publ. 84:1, Göteborg, Sweden 1984
- [50] V.S. Gopalaratnam, S.P.Shah, *Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension*, J. of ACI, Vol.82, No 3, 1985
- [51] J.Górski, *Zastosowanie terii endochronicznej oraz MES w statyce konstrukcji betonowych*, Praca doktorska, Politechnika Gdańska, Gdańsk, 1988
- [52] J.Grabacki, *Mechanika materiałów ze strukturą wewnętrzną*, Politechnika Krakowska, Monografia 131, Kraków, 1992
- [53] *Grapher – Reference Manual*, Golden Software Inc., Golden, Colorado, 1988
- [54] A.K.Gupta, H.Akbar, *Analysis of RC Membrane Shells*, Int. Conf. Finite Elements in Comput. Mechanics, Bombay, India, Decem. 1985
- [55] D.J.Han, W.F.Chen, *On Constitutive Modeling of Concrete Materials*, RILEM – CEB – CNRS Int. Conf. on Concrete under Multiaxial Conditions, Toulouse, France, mai 1984
- [56] D.J.Han, W.F.Chen, *On Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures*, J. of Eng. Mech., ASCE, Vol.113, No 4, 1987
- [57] S.S.Hsieh, E.C.Ting, W.F.Chen, *A Plastic – Fracture Model for Concrete*, Int. J. Solids and Struct., Vol.18, No 3. 1982

- [58] T.J.R.Hughes, T.B.Belytschko, *Nonlinear FE Analysis. Volume 3 – Numerical Implementation*, Short Course in Munich, Germany, Decem. 1992
- [59] *IABSE Colloquium – Computational Mechanics of Concrete Structures – Advances and Applications*, IABSE reports, Vol.54, Delft, the Netherlands, 1987
- [60] S.Jemioło, P.Lewiński, A.Szwed, *Elasto – Plastic Work –Hardening/Softening Constitutive Model for Concrete*, w [31]
- [61] S.Jemioło, J.J.Telega, *Some Aspects of Invariant Theory in Plasticity – Part II*, Prace IPPT 19/1992
- [62] W.Jonas, *Material Equations for the Calculations of Steel Fiber RC Members*, Trans. of 12th Conf. on SMiRT, Vol.H, Stuttgart, Germany, August 1993
- [63] I.D.Karsan, J.O.Jirsa, *Behavior of Concrete under Compressive Loading*, J. of Struct. Div., ASCE, Vol.95, ST12, Decem. 1969
- [64] M.Klisiński, *Degradacja i odkształcenia plastyczne betonu*, Prace IPPT, 38/1984
- [65] R.Korzeniowski, *Naprężenia w płytach i powłokach z betonu wywołane niestacjonarnym polem naprężenia*, Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków, 1994
- [66] M.D.Kotsovos, J.B.Newman, *A Mathematical Description of the Deformational Behaviour of Concrete under Complex Loading*, Mag. Concr. Res., Vol.31, No 107, June 1979
- [67] R.D.Krieg, *A Practical Two Surface Plasticity Theory*, J. of App. Mech., Trans. of ASME, Vol.42, Sept. 1975
- [68] H.Kupfer, *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der Zweiachsigen Beanspruchung*, DA f StB, Heft 229, Berlin, Germany, 1973
- [69] H.Kupfer, K.H.Gerstle, *Behavior of Concrete under Biaxial Stresses*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.99, EM4, Aug. 1973

- [70] J.Lamirault, B.Al Sulayfani, *Comportement cyclique des poutres en béton armé*, Annales ITB et TP, No 453, Mars – Avril 1987
- [71] F.Leonhardt, R.Walther, *Wandartige Träger*, DA f StB, Heft 178, Berlin, Germany, 1966
- [72] P.M.Lewiński, *Nieliniowa analiza płyt i tarcz żelbetowych metodą elementów skończonych*, PAN, KILiW, Studia z zakresu inżynierii, Nr 29, Warszawa – Łódź, 1990
- [73] F.B.Lin, Z.P.Bazant, J.C.Chern, A.H.Marchetas, *Concrete Model with Normality and Sequential Identification*, Comp. Struct., Vol.26, No 6, 1987
- [74] G.Mehlhorn, J.Kolleger, *Material Model for Cracked Reinforced Concrete*, w [59]
- [75] G.Meschke, *Synthese aus Konstitutivem Modellieren von Beton mittels dreiaxialer, elasto – plastischer Werkstoffmodelle und FE – Analysen dickwandiger Stahlbetonkonstruktionen*, Dissertationen der TU Wien, 49, Wien, Austria, 1991
- [76] J.G.M. van Mier, *Fracture of Concrete under Complex Stress*, Heron, Vol.31, No 3, 1986
- [77] J.G.M. van Mier, *Examples of Non – Linear Analysis of RC Structures with DIANA*, Heron, Vol.32, No 3, 1987
- [78] R.V.Milford, W.C.Schnobrich, *Numerical Model for Cracked Reinforced Concrete*, Proc. of First Int. Conf. Comp. Aided Analysis and Design of Concr. Structures, Split, Yugoslavia, Sept. 1984
- [79] Z.Mróz, *On the Description of Anisotropic Workhardening*, J. Mech. Phys. Solids, Vol.15, 1967
- [80] Y.Ohtani, W.F.Chen, *A Plastic – Softening Model for Concrete Materials*, Comp. Struct., Vol.33, No 4, 1989
- [81] * S.Okamoto, S.Shiomi, K.Yamabe, *Earthquake Resistance of Prestressed Concrete Structures*, Proc. of Annual Convention, AIJ, Oct. 1976

- [82] E.Oñate, S.Oller, J.Olivier, J.Lubliner, *A Constitutive Model for Cracking of Concrete Based on the Incremental Theory of Plasticity*, Eng. Comp., Vol.5, Decem. 1988
- [83] N.S.Ottosen, *A Failure Criterion for Concrete*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.103, EM4, April 1977
- [84] D.R.J.Owen, J.A.Figueiras, F.Damjanič, *FE Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures Including Thermal Loading*, Comp. Math. in Applied Mech. and Eng., Vol.41, 1983
- [85] J.Ožbolt, *Smearred Crack Analysis – New Nonlocal Microcrack Interaction Approach*, Bericht Nr 4/14 – 92/19, Universität Stuttgart, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Stuttgart, Germany, Novem. 1992
- [86] J.Ožbolt, Z.Bažant, *Microplane Model for Cyclic Triaxial Behavior of Concrete*, J. of Eng. Mech., ASCE, Vol.118, No 7, July 1992
- [87] J.Pachla, *Zastosowanie kinematycznej teorii uszkodzeń do opisu betonu*, Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków, 1986
- [88] J.Pamin, A.Młodzianowski, Z.Waszczyzyn, *Zastosowanie MES do analizy numerycznej tarcz żelbetowych*, Arch. Inż. Łąd, Tom XXXV, Z.2, 1989
- [89] P.Patas, *Własności betonu w złożonych stanach naprężenia*, PAN, KILiW, Studia z zakresu inżynierii, Nr 20, Warszawa – Łódź, 1981
- [90] * P.E.Petersson, *Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials*, Report No TVBM – 1006, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, Decem. 1981
- [91] S.Pietruszczak, J.Jiang, F.A.Mirza, *An Elasto – Plastic Constitutive Model for Concrete*, Int. J. Sol. Struct., Vol.24, No 7, 1988

- [92] G.Pijaudier Cabot, C. La Borderie, S.Fischant, *Damage Mechanics for Concrete Modelling: Applications and Comparison with Plasticity and Fracture Mechanics*, w [31]
- [93] J.Podgórski, *General Failure Criterion for Isotropic Media*, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.111, EM2, Febr. 1985
- [94] *Poradnik inżyniera – Matematyka. Tom 1*, redaktorzy: T.Trajdos, P.Kucharczyk, WNT, Warszawa, 1986
- [95] E.Pramono, K.Willam, *Fracture Energy – Based Plasticity Formulation of Plain Concrete*, J. of Eng. Mech. ASCE, Vol.115, 1989
- [96] W.H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling, *Numerical Recipes in Pascal. The Art of Scientific Computing*, Cambridge Univ. Press, 1989
- [97] H.W.Reinhardt, *Fracture Mechanics of an Elastic Softening Material Like Concrete*, Heron, Vol.29, No 2, 1984
- [98] J.G.Rots, *Computational Modeling of Concrete Fracture*, Ph. D. Thesis, TU Delft, Delft, the Netherlands, 1988
- [99] R.Scavuzzo, *Constitutive Behavior of Concrete Response to Multiaxial Load Histories*, CEAE Dept., Univ. of Colorado, Boulder, USA, 1982
- [100] R.Scavuzzo, T.Stankowski, K.H.Gerstle, H.Y.Ko, *Stress – Strain Curves for Concrete under Multiaxial Load Histories*, CEAE Dept., Univ. of Colorado, Boulder, USA, 1983
- [101] K.Schäfer, G.Schelling, T.Kuchler, *Druck und Querkzug in bewehrten Betonelementen*, DA f StB, Heft 408, Berlin, Germany, 1990
- [102] S.P.Shah, R.Sankar, *Internal Cracking and Strain – Softening Response of Concrete under Uniaxial Compression*, ACI Materials J., Vol.84, May – June 1987
- [103] B.P.Sinha, K.H.Gerstle, L.G.Tulin, *Stress – Strain Relations for Concrete under Cyclic Loadings*, J. of ACI, Vol.61, Feb. 1964

- [104] L.J.Sluys, *Wave Propagation, Localization and Dispersion in Softening Solids*, Ph. D. Thesis, TU Delft, Delft, the Netherland, 1992
- [105] S.S.Smith, K.J.Willam, K.H.Gerstle, S.Sture, *Concrete over the Top, or: Is There Life after Peak?*, ACI Materials J., Vol.86, Sept. – Oct. 1989
- [106] T.Stankowski, *Concrete under Multiaxial Load Histories*, CEAE Dept., Univ. of Colorado, Boulder, USA, 1983
- [107] T.Stankowski, K.H.Gerstle, *Simple Formulation of Concrete Behavior under Multiaxial Load Histories*, J. of ACI, March – April 1985
- [108] N.J.Stevens, S.M.Uzumeri, M.P.Collins, *Analytical Modeling of Reinforced Concrete Subjected to Monotonic and Reversed Loadings*, Univ. of Toronto, Report, Toronto, Canada, Jan. 1987
- [109] * S.Sture, *An Improved Multiaxial Cubical Cell and Its Application to the Testing of Anisotropic Materials*, M.S. Thesis, CEAE Dept., Univ. of Colorado, Boulder, USA, 1973
- [110] J.Szarliński, *Stan naprężenia i obciążenia graniczne masywnych konstrukcji z betonu*, Politechnika Krakowska. Monografia 88, Kraków, 1989
- [111] J.Szarliński, A.Truty, *Non – Linear Rheological Models for Cracked RC Structures*, Int. Conf. Analytical Models and New Concepts in Mechanics of Structural Concrete, Białystok, May 1993
- [112] M.Szerszeń, *Zagadnienia zmęczeniowe w betonie poddanym cyklicznemu osiowemu ściskaniu*. Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków, 1993
- [113] J.L.Tassoulas, *Inelastic Behavior of Concrete in Compression*, M.S. Thesis, MIT, Dep. of Civil Eng., Massachusetts, USA, May 1979
- [114] A.Truty, *Numeryczna implementacja modelu “modified cam – clay”. Sformułowanie konsystentne*, IX Kraj. Konf. Mech. Gruntów i Fundam., Kraków, 1990

- [115] A.Truty, Z.Kordecki, J.Szarliński, A.Urbański, W.Biliński, *Odształcenia termiczno – wilgotnościowe w masywnych konstrukcjach z betonu. Konstrukcje Hydrotechniczne – Analiza numeryczna*, Sprawozd. z Grantu NR 70698.91.01, Politechnika Krakowska, WISiW, Sam. Zakł. Podst. Konstr. Bud. Wod., Kraków, 1993
- [116] F.J.Vecchio, M.P.Collins, *The Modified Compression – Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear*, J. of ACI, Vol.83, Febr. 1986
- [117] P.A.Vermeer, R.de Borst, *Non – Associated Plasticity for Soils, Concrete and Rock*, Heron, Vol.29, No 3, 1984
- [118] J.Wastiels, *A Softening Plasticity Model for Concrete*, Int. Conf. Num. Meth. in Non – Linear Problems, Pineridge Press, Swansea, UK, 1980
- [119] A.Winnicki, Cz.Cichoń, *Analysis of RC Bar Structures under Moving Loads*, w [32]
- [120] A.Winnicki, Cz.Cichoń, *New Plastic Plane Stress Model for Concrete*, Trans. of 12th Conf. on SMiRT, Vol.H, Stuttgart, Germany, August 1993
- [121] A.Winnicki, Cz.Cichoń, *Model of Concrete in Plane Stress State under Low Cyclic Loadings*, w [31]
- [122] A.Winnicki, Cz.Cichoń, Z.Waszczyzyn, *Nieliniowa analiza żelbetowych konstrukcji prętowych za pomocą MES*, Arch. Inż. Łąd., Tom XXXVI, Z.1-2, 1990
- [123] Sz.Woliński, *Właściwości betonu rozciąganego i ich zastosowania w nieliniowej mechanice pękania betonu*, Politechnika Rzeszowska, Zeszyty Naukowe, Bud. i Inż. Środ., Z.15, 1991
- [124] B.L.Yang, Y.F.Dafalias, L.R.Herrmann, *A Bounding Surface Plasticity Model for Concrete*, J. of Eng. Mech., ASCE, Vol.111, No 3, March 1985
- [125] D.Z.Yankelevsky, H.W.Reinhardt, *Model for Cyclic Compressive Behavior of Concrete*, J. of Struct. Eng., ASCE, Vol.113, No 2, Febr. 1987
- [126] D.Z.Yankelevsky, H.W.Reinhardt, *Response of Plain Concrete to Cyclic Tension*, ACI Materials J., Sept. – Oct. 1987

- [127] O.C.Zienkiewicz, Z.Mróz, *Generalized Plasticity Formulation and Applications to Geomechanics*, Chapter 33 in *Mechanics of Engineering Materials*, Editors: C.S.Desai, R.H.Gallagher, John Wiley and Sons Ltd, 1984
- [128] M.Życzkowski, *Combined Loadings in the Theory of Plasticity*, PWN, Warszawa, 1981

Uwaga:* oznaczono pozycje, do których autor nie miał dostępu podczas pisania pracy i znał je wyłącznie z omówień w innych źródłach.

Załącznik Z1

Jawne postacie macierzy sprężystej podatności \underline{C}_e i sztywności \underline{D}_e .

W przypadku trójwymiarowego stanu naprężenia jawna postać macierzy podatności \underline{C}_e , zapisana przy użyciu modułów K_e i H_e , wynika wprost ze wzoru (II.30):

$$\underline{C}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{9K_e} + \frac{2}{3H_e}, & \frac{1}{9K_e} - \frac{1}{3H_e}, & \frac{1}{9K_e} - \frac{1}{3H_e}, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{1}{9K_e} - \frac{1}{3H_e}, & \frac{1}{9K_e} + \frac{2}{3H_e}, & \frac{1}{9K_e} - \frac{1}{3H_e}, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{1}{9K_e} - \frac{1}{3H_e}, & \frac{1}{9K_e} - \frac{1}{3H_e}, & \frac{1}{9K_e} + \frac{2}{3H_e}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{2}{H_e}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{2}{H_e}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{2}{H_e} \end{bmatrix}. \quad (\text{Z1.1})$$

Moduły sprężyste: objętościowy K_e i postaciowy H_e można wyrazić za pomocą modułu Younga E i współczynnika Poissona ν :

$$K_e = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad H_e = \frac{E}{1+\nu}. \quad (\text{Z1.2})$$

Wykorzystując związki (Z1.2) macierz \underline{C}_e wyrażona za pomocą stałych E i ν ma postać:

$$\underline{C}_e = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1, & -\nu, & -\nu, & 0, & 0, & 0 \\ -\nu, & 1, & -\nu, & 0, & 0, & 0 \\ -\nu, & -\nu, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2(1+\nu), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 2(1+\nu), & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (\text{Z1.3})$$

Macierz sztywności sprężystej (zwana także macierzą modułów sprężystych) jest odwrotnością macierzy \underline{C}_e :

$$\underline{D}_e = \underline{C}_e^{-1}, \quad (\text{Z1.4})$$

i ma postać:

$$\underline{D}_e = \begin{bmatrix} K_e + \frac{2}{3}H_e, & K_e - \frac{1}{3}H_e, & K_e - \frac{1}{3}H_e, & 0, & 0, & 0 \\ K_e - \frac{1}{3}H_e, & K_e + \frac{2}{3}H_e, & K_e - \frac{1}{3}H_e, & 0, & 0, & 0 \\ K_e - \frac{1}{3}H_e, & K_e - \frac{1}{3}H_e, & K_e + \frac{2}{3}H_e, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}H_e, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}H_e, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}H_e \end{bmatrix}. \quad (\text{Z1.5})$$

Wykorzystując zależności (Z1.2) macierz \underline{D}_e może być zapisana w formie:

$$\underline{D}_e = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu, & \nu, & \nu, & 0, & 0, & 0 \\ \nu, & 1-\nu, & \nu, & 0, & 0, & 0 \\ \nu, & \nu, & 1-\nu, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1-2\nu}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1-2\nu}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{Z1.6})$$

Dla przypadku płaskiego stanu naprężenia macierz \underline{C}_e jest podmacierzą macierzy danej wzorem (Z1.1):

$$\underline{C}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{9K_e} + \frac{2}{3H_e}, & \frac{1}{9K_e} - \frac{1}{3H_e}, & 0 \\ \frac{1}{9K_e} - \frac{1}{3H_e}, & \frac{1}{9K_e} + \frac{2}{3H_e}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{2}{H_e} \end{bmatrix}, \quad (\text{Z1.7})$$

lub w zapisie wykorzystującym stałe E i ν :

$$\underline{C}_e = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1, & -\nu, & 0 \\ -\nu, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2(1 + \nu) \end{bmatrix}. \quad (\text{Z1.8})$$

Macierz \underline{D}_e dla płaskiego stanu naprężenia otrzymuje się odwracając macierze dane wzorami (Z1.7) i (Z1.8):

$$\underline{D}_e = H_e \begin{bmatrix} \frac{6K_e + H_e}{3K_e + 2H_e}, & \frac{3K_e - H_e}{3K_e + 2H_e}, & 0 \\ \frac{3K_e - H_e}{3K_e + 2H_e}, & \frac{6K_e + H_e}{3K_e + 2H_e}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (\text{Z1.9})$$

lub

$$\underline{D}_e = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1, & \nu, & 0 \\ \nu, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{Z1.10})$$

Załącznik Z2

Wyprowadzenie wzoru na macierz sztywności sprężysto – plastycznej \underline{D}_{ep} dla przypadku trójwymiarowego

Wzór *Shermana–Morrisona* [96] podaje jawną formę macierzy odwrotnej do macierzy będącej sumą kwadratowej nieosobliwej macierzy \underline{A} o wymiarach $n \times n$ i iloczynu zewnętrznego wektorów \underline{v} i \underline{u} o wymiarach $n \times 1$:

$$(\underline{A} + \underline{v} \underline{u}^T)^{-1} = \underline{A}^{-1} - \frac{\underline{A}^{-1} \underline{v} \underline{u}^T \underline{A}^{-1}}{1 + \underline{u}^T \underline{A}^{-1} \underline{v}}. \quad (Z2.1)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym dla obowiązywania tożsamości (Z2.1) jest nieosobliwość macierzy \underline{A} oraz niezerowanie się wyrażenia skalarnego w mianowniku:

$$\underline{u}^T \underline{A}^{-1} \underline{v} \neq -1. \quad (Z2.2)$$

Na wstępie obliczona zostanie odwrotność macierzy \underline{C}_{ep}^I o postaci:

$$\underline{C}_{ep}^I = \underline{C}_e + \frac{1}{9K_p} \underline{J} \underline{J}^T. \quad (Z2.3)$$

Podstawiając:

$$\underline{A} = \underline{C}_e,$$

$$\underline{v} = \frac{1}{9K_p} \underline{J}, \quad (Z2.4)$$

$$\underline{u}^T = \underline{J}^T,$$

otrzywać można wprost ze wzoru (Z2.1) zależność:

$$\left(\underline{C}_e + \frac{1}{9K_p} \underline{J} \underline{J}^T \right)^{-1} = \underline{C}_e^{-1} - \frac{\underline{C}_e^{-1} \underline{J} \underline{J}^T \frac{1}{9K_p} \underline{C}_e^{-1}}{1 + \underline{J}^T \underline{C}_e^{-1} \frac{1}{9K_p} \underline{J}}. \quad (Z2.5)$$

Dodatkowo należy uwzględnić następujące tożsamości, łatwe do uzasadnienia:

$$\begin{aligned}\underline{C}_e^{-1} &= \underline{D}_e, \\ \underline{C}_e^{-1} \underline{J} &= \underline{D}_e \underline{J} = 3K_e \underline{J}, \\ \underline{J}^T \underline{J} &= 3.\end{aligned}\tag{Z2.6}$$

Przy wykorzystaniu związków (Z2.6) można otrzymać końcową postać macierzy $(\underline{C}_{ep}^I)^{-1}$, która jest symetryczna:

$$\begin{aligned}(\underline{C}_e + \frac{1}{9K_p} \underline{J} \underline{J}^T)^{-1} &= \underline{D}_e - \frac{\frac{1}{9K_p} (\underline{D}_e \underline{J}) (\underline{D}_e \underline{J})^T}{1 + \frac{1}{9K_p} \underline{J}^T (\underline{D}_e \underline{J})} = \\ &= \underline{D}_e - \frac{\frac{1}{9K_p} 3K_e \underline{J} 3K_e \underline{J}^T}{1 + \frac{1}{9K_p} 3K_e \underline{J}^T \underline{J}} = \underline{D}_e - \frac{\frac{1}{9K_p} 9K_e^2}{1 + \frac{1}{9K_p} 9K_e} \underline{J} \underline{J}^T = \\ &= \boxed{\underline{D}_e - \frac{K_e}{1 + K_p/K_e} \underline{J} \underline{J}^T}.\end{aligned}\tag{Z2.7}$$

W następnej kolejności należy pełną macierz \underline{C}_{ep} zapisać w postaci:

$$\underline{C}_{ep} = \underline{C}_{ep}^I + \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) (\underline{B} \underline{\sigma})^T.\tag{Z2.8}$$

Dla ponownego wykorzystania wzoru *Shermana-Morrisona* (Z2.1) przeprowadza się podstawienie:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \underline{C}_{ep}^I, \\ \underline{v} &= \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J}, \\ \underline{u}^T &= (\underline{B} \underline{\sigma})^T.\end{aligned}\tag{Z2.9}$$

Otrzymuje się wówczas zależność:

$$\underline{C}_{ep}^{-1} = (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} - \frac{(\underline{C}_{ep}^I)^{-1} \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) (\underline{B} \underline{\sigma})^T (\underline{C}_{ep}^I)^{-1}}{1 + (\underline{B} \underline{\sigma})^T (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right)}.\tag{Z2.10}$$

Osobno należy przeanalizować składnik:

$$\begin{aligned}
 (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) &= \\
 = \left(\underline{D}_e - \frac{K_e}{1+K_p/K_e} \underline{J} \underline{J}^T \right) \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) &= \\
 = \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} - \frac{K_e}{1+K_p/K_e} \cdot \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{J} \underline{J}^T \underline{B} \underline{\sigma} + \\
 + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{D}_e \underline{J} - \frac{K_e}{1+K_p/K_e} \cdot \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} (\underline{J}^T \underline{J}). &
 \end{aligned} \tag{Z2.11}$$

We wzorze (Z2.11) drugi składnik jest tożsamościowo równy zero, ponieważ:

$$\underline{J}^T \underline{B} \underline{\sigma} = (\underline{B} \underline{\sigma})^T \underline{J} = \underline{s}^T \underline{J} = s_x + s_y + s_z \equiv 0. \tag{Z2.12}$$

Dodatkowo wykorzystując zależności (Z2.6) można przekształcić wzór (Z2.11) do postaci:

$$\begin{aligned}
 (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) &= \\
 = \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta K_e}{3\tau_0 H_p} \underline{J} - \frac{K_e}{1+K_p/K_e} \cdot \frac{\beta}{3\tau_0 H_p} \underline{J} &= \\
 = \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{K_p}{1+K_p/K_e} \cdot \frac{\beta}{3\tau_0 H_p} \underline{J}. &
 \end{aligned} \tag{Z2.13}$$

Analiza składnika $(\underline{B} \underline{\sigma})^T (\underline{C}_{ep}^I)^{-1}$ ze wzoru (Z2.10) prowadzi do zależności:

$$\begin{aligned}
 (\underline{B} \underline{\sigma})^T (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} &= (\underline{B} \underline{\sigma})^T \left(\underline{D}_e - \frac{K_e}{1+K_p/K_e} \underline{J} \underline{J}^T \right) = \\
 = (\underline{B} \underline{\sigma})^T \underline{D}_e - \frac{K_e}{1+K_p/K_e} (\underline{B} \underline{\sigma})^T \underline{J} \underline{J}^T &= \\
 = (\underline{B} \underline{\sigma})^T \underline{D}_e = \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e. &
 \end{aligned} \tag{Z2.14}$$

Wykorzystując wzory (Z2.13) i (Z2.14) można dojść do końcowej postaci wzoru (Z2.10):

$$\begin{aligned}
 \underline{C}_{ep}^{-1} &= (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} - \frac{\left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{K_p}{1+K_p/K_e} \cdot \frac{\beta}{3\tau_0 H_p} \underline{J} \right) \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e}{1 + (\underline{B} \underline{\sigma})^T \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{K_p}{1+K_p/K_e} \cdot \frac{\beta}{3\tau_0 H_p} \underline{J} \right)} = \underline{D}_e - \\
 &- \frac{K_e}{1+K_p/K_e} \underline{J} \underline{J}^T - \frac{\frac{1}{3\tau_0^2} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + \frac{K_p}{1+K_p/K_e} \cdot \frac{\beta}{3\tau_0 H_p} \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e}{1 + \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} \frac{1}{3\tau_0^2 H_p}} = \quad (Z2.15) \\
 &= \boxed{\underline{D}_e - \frac{K_e}{1+K_p/K_e} \underline{J} \underline{J}^T - \frac{\underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + \frac{\beta \tau_0 K_p}{1+K_p/K_e} \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e}{3\tau_0^2 H_p + \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma}}}
 \end{aligned}$$

Załącznik Z3

Wyprowadzenie wzoru na macierz \underline{D}_{ep} dla płaskiego stanu naprężenia

Podobnie jak w Załączniku Z2 na wstępie zostanie obliczona odwrotność macierzy \underline{C}_{ep}^I danej wzorem:

$$\underline{C}_{ep}^I = \underline{C}_e + \frac{1}{9K_p} \underline{J} \underline{J}^T. \quad (\text{Z3.1})$$

Podstawiając do wzoru *Shermana–Morrisona* (Załącznik Z2–wzór (Z2.1)) zależności:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{C}_e, \\ \underline{v} &= \frac{1}{9K_p} \underline{J}, \\ \underline{u}^T &= \underline{J}^T, \end{aligned} \quad (\text{Z3.2})$$

otrzymuje się:

$$(\underline{C}_{ep}^I)^{-1} = \underline{C}_e^{-1} - \frac{\underline{C}_e^{-1} \underline{J} \underline{J}^T \frac{1}{9K_p} \underline{C}_e^{-1}}{1 + \underline{J}^T \underline{C}_e^{-1} \frac{1}{9K_p} \underline{J}}. \quad (\text{Z3.3})$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia obowiązują inne tożsamości niż podane we wzorach (Z2.6), a mianowicie:

$$\begin{aligned} \underline{C}_e^{-1} &= \underline{D}_e, \\ \underline{C}_e^{-1} \underline{J} &= \underline{D}_e \underline{J} = 3\alpha \underline{J}, \\ \underline{J}^T \underline{J} &= 2, \end{aligned} \quad (\text{Z3.4})$$

gdzie
$$\alpha = \frac{E}{3(1-\nu)} = \frac{3H_e K_e}{3K_e + 2H_e}.$$

Wykorzystując związki (Z3.4) ze wzoru (Z3.3) można otrzymać wzór na $(\underline{C}_{ep}^I)^{-1}$:

$$\begin{aligned} (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} &= \underline{D}_e - \frac{\frac{1}{9K_p}(\underline{D}_e \underline{J})(\underline{D}_e \underline{J})^T}{1 + \frac{1}{9K_p} \underline{J}^T (\underline{D}_e \underline{J})} = \\ &= \underline{D}_e - \frac{\frac{1}{9K_p} 3\alpha \underline{J} 3\alpha \underline{J}^T}{1 + \frac{1}{9K_p} \underline{J}^T 3\alpha \underline{J}} = \\ &= \underline{D}_e - \frac{3\alpha^2}{3K_p + 2\alpha} \underline{J} \underline{J}^T. \end{aligned} \quad (\text{Z3.5})$$

W następnej kolejności przechodzi się do analizy pełnej macierzy \underline{C}_{ep} zapisanej w formie:

$$\underline{C}_{ep} = \underline{C}_{ep}^I + \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) (\underline{B} \underline{\sigma})^T. \quad (\text{Z3.6})$$

Podstawiając (analogicznie jak w Załączniku Z2 – wzory (Z2.8–Z2.10)):

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{C}_{ep}^I, \\ \underline{v} &= \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J}, \\ \underline{u}^T &= (\underline{B} \underline{\sigma})^T, \end{aligned} \quad (\text{Z3.7})$$

otrzymuje się wzór:

$$\underline{C}_{ep}^{-1} = (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} - \frac{(\underline{C}_{ep}^I)^{-1} \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) (\underline{B} \underline{\sigma})^T (\underline{C}_{ep}^I)^{-1}}{1 + (\underline{B} \underline{\sigma})^T (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right)}. \quad (\text{Z3.8})$$

Osobno należy przeanalizować składnik:

$$\begin{aligned} (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) &= \\ &= \left(\underline{D}_e - \frac{3\alpha^2}{3K_p + 2\alpha} \underline{J} \underline{J}^T \right) \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) = \\ &= \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} - \frac{3\alpha^2}{3K_p + 2\alpha} \cdot \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{J} \underline{J}^T \underline{B} \underline{\sigma} + \\ &+ \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{D}_e \underline{J} - \frac{3\alpha^2}{3K_p + 2\alpha} \cdot \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} (\underline{J}^T \underline{J}). \end{aligned} \quad (\text{Z3.9})$$

W płaskim stanie naprężenia zamiast wzoru (Z2.12) obowiązuje zależność:

$$\underline{J}^T(\underline{B}\underline{\sigma}) = (\underline{B}\underline{\sigma})^T \underline{J} = \underline{s}^T \underline{J} = s_x + s_y = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{3}I_1, \quad (\text{Z3.10})$$

gdzie $I_1 = \sigma_x + \sigma_y$ (dla $\sigma_z \equiv 0$).

Wykorzystując związek (Z3.10) oraz tożsamości (Z3.4) zależność (Z3.9) można sprowadzić do końcowej postaci:

$$\begin{aligned} (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B}\underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) &= \\ \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B}\underline{\sigma} - \frac{3\alpha^2 I_1}{3K_p + 2\alpha} \cdot \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{J} + & \\ + \frac{3\alpha\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} - \frac{3\alpha^2 2\beta}{(3K_p + 2\alpha)9\tau_0 H_p} \underline{J} &= \\ = \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B}\underline{\sigma} + \frac{3K_p \alpha \beta \tau_0 - \alpha^2 I_1}{(3K_p + 2\alpha)3\tau_0^2 H_p} \underline{J}. & \end{aligned} \quad (\text{Z3.11})$$

W podobny sposób można przeanalizować następujący składnik:

$$\begin{aligned} (\underline{B}\underline{\sigma})^T (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} &= (\underline{B}\underline{\sigma})^T \left(\underline{D}_e - \frac{3\alpha^2}{3K_p + 2\alpha} \underline{J} \underline{J}^T \right) = \\ &= (\underline{B}\underline{\sigma})^T \underline{D}_e - \frac{3\alpha^2}{3K_p + 2\alpha} (\underline{B}\underline{\sigma})^T \underline{J} \underline{J}^T = \\ &= \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e - \frac{\alpha^2 I_1}{3K_p + 2\alpha} \underline{J}^T. \end{aligned} \quad (\text{Z3.12})$$

Znając wyrażenia (Z3.11) i (Z3.12) licznik ułamka występującego we wzorze (Z3.8) przedstawia się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B}\underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) (\underline{B}\underline{\sigma})^T (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} &= \\ = \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B}\underline{\sigma} + \frac{3K_p \alpha \beta \tau_0 - \alpha^2 I_1}{(3K_p + 2\alpha)3\tau_0^2 H_p} \underline{J} \right) \left(\underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e - \frac{\alpha^2 I_1}{3K_p + 2\alpha} \underline{J}^T \right) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + \frac{3K_p \alpha \beta \tau_0}{(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p} \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e - \\
&- \frac{\alpha^2 I_1}{(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p} \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e - \frac{\alpha^2 I_1}{(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} \underline{J}^T - \\
&- \frac{(3K_p \alpha \beta \tau_0 - \alpha^2 I_1) \alpha^2 I_1}{(3K_p + 2\alpha)^2 3\tau_0^2 H_p} \underline{J} \underline{J}^T = \\
&= \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + \frac{3K_p \alpha \beta \tau_0}{(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p} \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e - \\
&- \frac{\alpha^2 I_1}{(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p} [\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + (\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e)^T] - \\
&- \frac{(3K_p \alpha \beta \tau_0 - \alpha^2 I_1)}{(3K_p + 2\alpha)^2 3\tau_0^2 H_p} \alpha^2 I_1 \underline{J} \underline{J}^T.
\end{aligned} \tag{Z3.13}$$

Z kolei mianownik tego ułamka ma postać:

$$\begin{aligned}
&1 + (\underline{B} \underline{\sigma})^T (\underline{C}_{ep}^I)^{-1} \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{\beta}{9\tau_0 H_p} \underline{J} \right) = \\
&= 1 + (\underline{B} \underline{\sigma})^T \left(\frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{3K_p \alpha \beta \tau_0 - \alpha^2 I_1}{(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p} \underline{J} \right) = \\
&= 1 + \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + \frac{3K_p \alpha \beta \tau_0 - \alpha^2 I_1}{(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p} \cdot \frac{1}{3} I_1 = \\
&= \frac{3(3K_p + 2\alpha) \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + 9\tau_0^2 H_p (3K_p + 2\alpha) + I_1 \alpha (3K_p \beta \tau_0 - I_1 \alpha)}{3(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p} = \\
&= \frac{N}{3(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p},
\end{aligned} \tag{Z3.14}$$

gdzie N wyraża się wzorem:

$$N = 3(3K_p + 2\alpha) \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + 9\tau_0^2 H_p (3K_p + 2\alpha) + I_1 \alpha (3K_p \beta \tau_0 - I_1 \alpha). \tag{Z3.15}$$

Posługując się wzorami (Z3.5), (Z3.13) i (Z3.14) macierz sztywności sprężysto – plastycznej można zapisać jako:

$$\underline{D}_{ep} = \underline{C}_{ep}^{-1} = \underline{D}_e - \frac{3\alpha^2}{3K_p + 2\alpha} \underline{J} \underline{J}^T -$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{1}{3\tau_0^2 H_p} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + \frac{3K_p \alpha \beta \tau_0}{(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p} \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e - \right. \\
& - \frac{\alpha^2 I_1}{(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p} [\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + (\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e)^T] - \\
& \left. - \frac{(3K_p \alpha \beta \tau_0 - \alpha^2 I_1)}{(3K_p + 2\alpha)^2 3\tau_0^2 H_p} \alpha^2 I_1 \underline{J} \underline{J}^T \right\} \frac{3(3K_p + 2\alpha) 3\tau_0^2 H_p}{N} = \\
& = \underline{D}_e - \left\{ 3(3K_p + 2\alpha) \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e - \right. \\
& - 3\alpha^2 I_1 [\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + (\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e)^T] + 9K_p \alpha \beta \tau_0 \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \left. \right\} \frac{1}{N} - \\
& - \frac{3\alpha^2 N - (3K_p \alpha \beta \tau_0 - \alpha^2 I_1) \alpha^2 I_1 3}{(3K_p + 2\alpha) N} \underline{J} \underline{J}^T.
\end{aligned} \tag{Z3.16}$$

Po uporządkowaniu i uproszczeniu ostatniego składnika wzoru (Z3.16) dochodzi się do ostatecznego wzoru na macierz \underline{D}_{ep} :

$$\begin{aligned}
\underline{D}_{ep} = & \underline{D}_e - \left\{ 3(3K_p + 2\alpha) \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e - \right. \\
& - 3\alpha^2 I_1 [\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + (\underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e)^T] + 9K_p \alpha \beta \tau_0 \underline{J} \underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e + \\
& \left. + 9\alpha^2 (\underline{\sigma}^T \underline{B} \underline{D}_e \underline{B} \underline{\sigma} + 3\tau_0^2 H_p) \underline{J} \underline{J}^T \right\} \frac{1}{N}.
\end{aligned} \tag{Z3.17}$$

Załącznik Z4

Macierz \underline{D}_{ep} w przypadku istnienia wyłącznie plastycznego mechanizmu dewiatorowego

W celu wyeliminowania odkształceń plastycznych objętościowych ε_{vol}^{pl} należy założyć, że $K_p \rightarrow +\infty$. Jak to wynika ze wzoru (II.37) moduł K_p występuje wyłącznie we współczynnikach skalarnych a_1, a_3, N . Obliczając granice skalarnych wyrażeń $\frac{a_1}{N} \div \frac{a_4}{N}$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{N} &= \lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{9K_p + 6\alpha}{9\tau_0^2 H_p (3K_p + 2\alpha) + 3(3K_p + 2\alpha) \underline{s}^T \underline{s} + I_1 \alpha (3K_p \beta \tau_0 - I_1 \alpha)} = \\ &= \lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{9 + \frac{6\alpha}{K_p}}{9 \cdot 3\tau_0^2 H_p + 9 \cdot 2\tau_0^2 H_p \frac{\alpha}{K_p} + 9 \underline{s}^T \underline{s} + \underline{s}^T \underline{s} \frac{2\alpha}{K_p} + I_1 \alpha 3\beta \tau_0 - I_1^2 \frac{\alpha^2}{K_p}} = \\ &= \frac{3}{9\tau_0^2 H_p + 3 \underline{s}^T \underline{s} + I_1 \alpha \beta \tau_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{a_2}{N} &= \lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{3\alpha^2 I_1}{9\tau_0^2 H_p (3K_p + 2\alpha) + 3(3K_p + 2\alpha) \underline{s}^T \underline{s} + I_1 \alpha (3K_p \beta \tau_0 - I_1 \alpha)} = \\ &= \lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3\alpha^2 I_1}{K_p}}{9 \cdot 3\tau_0^2 H_p + 9 \cdot 2\tau_0^2 H_p \frac{\alpha}{K_p} + 9 \underline{s}^T \underline{s} + \underline{s}^T \underline{s} \frac{2\alpha}{K_p} + I_1 \alpha 3\beta \tau_0 - I_1^2 \frac{\alpha^2}{K_p}} = \\ &= \frac{0}{9\tau_0^2 H_p + 3 \underline{s}^T \underline{s} + I_1 \alpha \beta \tau_0} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{a_3}{N} &= \lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{9\beta K_p \alpha \tau_0}{9\tau_0^2 H_p (3K_p + 2\alpha) + 3(3K_p + 2\alpha) \underline{\bar{s}}^T \underline{s} + I_1 \alpha (3K_p \beta \tau_0 - I_1 \alpha)} = \\
&= \lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{9\beta \alpha \tau_0}{9 \cdot 3\tau_0^2 H_p + 9 \cdot 2\tau_0^2 H_p \frac{\alpha}{K_p} + 9 \underline{\bar{s}}^T \underline{s} + \underline{\bar{s}}^T \underline{s} \frac{2\alpha}{K_p} + I_1 \alpha 3\beta \tau_0 - I_1^2 \frac{\alpha^2}{K_p}} = \\
&= \frac{3\beta \alpha \tau_0}{9\tau_0^2 H_p + 3 \underline{\bar{s}}^T \underline{s} + I_1 \alpha \beta \tau_0}, \\
\lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{a_4}{N} &= \lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{9\alpha^2 \underline{\bar{s}}^T \underline{s} + 3 \cdot 9\alpha^2 \tau_0^2 H_p}{9\tau_0^2 H_p (3K_p + 2\alpha) + 3(3K_p + 2\alpha) \underline{\bar{s}}^T \underline{s} + I_1 \alpha (3K_p \beta \tau_0 - I_1 \alpha)} = \\
&= \lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{\underline{\bar{s}}^T \underline{s} \frac{9\alpha^2}{K_p} + 3 \cdot 9\tau_0^2 H_p \frac{\alpha^2}{K_p}}{9 \cdot 3\tau_0^2 H_p + 9 \cdot 2\tau_0^2 H_p \frac{\alpha}{K_p} + 9 \underline{\bar{s}}^T \underline{s} + \underline{\bar{s}}^T \underline{s} \frac{2\alpha}{K_p} + I_1 \alpha 3\beta \tau_0 - I_1^2 \frac{\alpha^2}{K_p}} = \\
&= \frac{0}{9\tau_0^2 H_p + 3 \underline{\bar{s}}^T \underline{s} + I_1 \alpha \beta \tau_0} = 0.
\end{aligned} \tag{Z4.1}$$

Dodatkowo, należy przyjąć $\beta \equiv 0$ dla wyeliminowania odkształceń plastycznych objętościowych ε_{vol}^{pII} . Wówczas wzory (Z4.1) mają formę:

$$\begin{aligned}
\lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{N} &= \frac{3}{9\tau_0^2 H_p + 3 \underline{\bar{s}}^T \underline{s}} = \frac{1}{3\tau_0^2 H_p + \underline{\bar{s}}^T \underline{s}}, \\
\lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{a_2}{N} &= 0, \\
\lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{a_3}{N} &= 0, \\
\lim_{K_p \rightarrow +\infty} \frac{a_4}{N} &= 0.
\end{aligned} \tag{Z4.2}$$

Korzystając z zależności (Z4.2) jawna postać macierzy \underline{D}_{ep} podana w tabl. II.1 redukuje się w przypadku braku odkształceń plastycznych objętościowych do formy:

$$\underline{D}_{ep}^D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{S} \begin{bmatrix} \bar{s}_x^2 & \bar{s}_x \bar{s}_y & \bar{s}_x \bar{s}_{xy} \\ \bar{s}_x \bar{s}_y & \bar{s}_y^2 & \bar{s}_y \bar{s}_{xy} \\ \bar{s}_x \bar{s}_{xy} & \bar{s}_y \bar{s}_{xy} & \bar{s}_{xy}^2 \end{bmatrix}, \tag{Z4.3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\bar{s}_x &= \frac{E}{1-\nu}(s_x + \nu s_y), \\ \bar{s}_y &= \frac{E}{1-\nu}(s_y + \nu s_x), \\ \bar{s}_{xy} &= \frac{E}{1+\nu}s_{xy},\end{aligned}\tag{Z4.4}$$

$$S = 3\tau_0^2 H_p + \bar{\underline{s}}^T \underline{s} = 3\tau_0^2 H_p + (\bar{s}_x s_x + \bar{s}_y s_y + \bar{s}_{xy} 2s_{xy}).$$

Wzór na S można również przedstawić w innej postaci wyrażając H_p poprzez prędkość intensywności naprężeń $\dot{\sigma}_e$ i odkształceń plastycznych $\dot{\epsilon}_e^p$ [128]:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_e &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s_{ij} s_{ij}} \right), \\ \dot{\epsilon}_e^p &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}.\end{aligned}\tag{Z4.5}$$

Wykorzystując powyższe definicje, wzór (II.1) na H_p przyjmuje postać (dla $\dot{\epsilon}_{vol}^p \equiv 0$):

$$H_p = \frac{\dot{\tau}_0}{\dot{\gamma}_0^p} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{3}} s_{ij} s_{ij} \right)}{\sqrt{\frac{1}{3}} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} = \frac{2}{3} \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s_{ij} s_{ij}} \right)}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}} = \frac{2}{3} \frac{\dot{\sigma}_e}{\dot{\epsilon}_e^p} = \frac{2}{3} H,\tag{Z4.6}$$

gdzie $H = \dot{\sigma}_e / \dot{\epsilon}_e^p$ - moduł wzmocnienia dla teorii J_2 .

Końcowy wynik otrzymamy podstawiając do wyrażenia na S wzór (Z4.6) oraz $\tau_0^2 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{ij} = \frac{2}{9} \sigma_e^2$:

$$S = 3\tau_0^2 H_p + \bar{\underline{s}}^T \underline{s} = 3 \frac{2}{9} \sigma_e^2 \frac{2}{3} H + \bar{\underline{s}}^T \underline{s} = \frac{4}{9} \sigma_e^2 H + (\bar{s}_x s_x + \bar{s}_y s_y + 2\bar{s}_{xy} s_{xy}).\tag{Z4.7}$$

Macierz sztywności sprężysto-plastycznej \underline{D}_{ep}^D dana wzorem (Z4.3) z mianownikiem S w postaci (Z4.7) jest identyczna z macierzą otrzymaną przez *Y. Yamadę* dla teorii J_2 przy wzmocnieniu izotropowym (wzory (6.181-183) w pracy [30]).

Załącznik Z5

Macierz transformacji \underline{T} oraz zmodyfikowana macierz sztywności sprężystej \underline{D}_e^N

Wektory odkształceń $\underline{\varepsilon}$ i naprężeń $\underline{\sigma}$ w płaskim stanie naprężenia transformują się przy przejściu z układu współrzędnych $0\tilde{x}\tilde{y}$ do układu $0xy$ według wzorów [110]:

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}_{xy} &= \underline{T} \underline{\varepsilon}_{\tilde{x}\tilde{y}}, \\ \underline{\varepsilon}_{\tilde{x}\tilde{y}} &= \underline{T}^{-1} \underline{\varepsilon}_{xy}, \\ \underline{\sigma}_{xy} &= (\underline{T}^T)^{-1} \underline{\sigma}_{\tilde{x}\tilde{y}}, \\ \underline{\sigma}_{\tilde{x}\tilde{y}} &= \underline{T}^T \underline{\sigma}_{xy},\end{aligned}\tag{Z5.1}$$

gdzie $\underline{\varepsilon}_{xy}, \underline{\sigma}_{xy}$ - wektory odkształceń i naprężeń w układzie $0xy$,
 $\underline{\varepsilon}_{\tilde{x}\tilde{y}}, \underline{\sigma}_{\tilde{x}\tilde{y}}$ - wektory odkształceń i naprężeń w układzie $0\tilde{x}\tilde{y}$,
 \underline{T} - macierz transformacji odkształceń.

Macierz transformacji \underline{T} zależy od kąta α pomiędzy osiami $0\tilde{x}$ i $0x$ i ma postać:

$$\underline{T} = \underline{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix},\tag{Z5.2}$$

gdzie $c = \cos \alpha$,
 $s = \sin \alpha$.

Zachodzą przy tym związki:

$$\begin{aligned}\underline{T}^{-1}(\alpha) &= \underline{T}(-\alpha), \\ [\underline{T}^T(\alpha)]^{-1} &= \underline{T}^T(-\alpha).\end{aligned}\tag{Z5.3}$$

W przypadku gdy osie układu Oxy pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych, to zmodyfikowana macierz sztywności sprężystej \underline{D}_e^N w tym układzie ma formę:

$$\underline{D}_e^N = \underline{D}_e^{N1} = \underline{D}_e + \underline{D}_d, \quad (\text{Z5.4})$$

gdzie \underline{D}_e - zwykła, izotropowa macierz sztywności sprężystej (wzór (Z1.10)) ,

$$\underline{D}_d = G \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{- dodatkowa, anizotropowa macierz,}$$

$$\text{przy czym } G = \frac{E_0 - E}{2(1 + \nu)}.$$

Zgodnie ze wzorem (II.51) w układzie współrzędnych $0\tilde{x}\tilde{y}$ macierz \underline{D}_e^N przybiera formę:

$$\underline{D}_e^N = \underline{T}^T \underline{D}_e^{N1} \underline{T} = \underline{T}^T \underline{D}_e \underline{T} + \underline{T}^T \underline{D}_d \underline{T} = \underline{D}_e + \underline{T}^T \underline{D}_d \underline{T}, \quad (\text{Z5.5})$$

$$\text{gdzie } \underline{T}^T \underline{D}_d \underline{T} = G \begin{bmatrix} 4c^2s^2 & -4c^2s^2 & -2cs(c^2 - s^2) \\ -4c^2s^2 & 4c^2s^2 & 2cs(c^2 - s^2) \\ -2cs(c^2 - s^2) & 2cs(c^2 - s^2) & (c^2 - s^2)^2 \end{bmatrix}.$$

Załącznik Z6

Wyznaczenie stanu odkształceń $\underline{\varepsilon}$ dla danego stanu naprężenia $\underline{\sigma}$ w przypadku monotonicznego obciążenia proporcjonalnego – podejście analityczne

Przy stanie naprężenia zmieniającym się proporcjonalnie od $\underline{\sigma} = \underline{0}$ do wielkości $\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ oblicza się wartości niezmienniczych naprężeń σ_0 i τ_0 :

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y), \\ \tau_0 &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}.\end{aligned}\tag{Z6.1}$$

Dodatkowo potrzebna jest znajomość wartości naprężenia τ_{0u} na powierzchni granicznej:

$$\tau_{0u} = \tau_0 \frac{1}{1 - \delta}.\tag{Z6.2}$$

Odległość sprowadzona δ w przestrzeni naprężeń od punktu $\underline{\sigma}$ do powierzchni granicznej może być łatwo ustalona dla konkretnego równania tej powierzchni (punkt II.6). Współczynnik ω wyraża się za pomocą stałych materiałowych n, m i naprężenia τ_{0u} :

$$\omega = n \left(\frac{\tau_{0u}}{f_c} \right)^m.\tag{Z6.3}$$

Dla ustalonych wartości stałych materiałowych $H_{p_0}, K_{p_0}, \omega, a, b, c$ pełne odkształcenia plastyczne γ_0^p i ε_{vol}^p jako funkcje naprężeń wyrażają się wzorami:

$$\gamma_0^p = \frac{-\tau_0 u}{H_{p0}(1-\omega)} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_0 u}\right)^{1-\omega} + \frac{\tau_0 u}{H_{p0}(1-\omega)}, \quad (Z6.4)$$

$$\varepsilon_{vol}^p = \varepsilon_{vol}^{pI} + \varepsilon_{vol}^{pII},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{vol}^{pI} &= \frac{\sigma_0}{K_{p0}} \left(1 + 0,744 \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^{1,5}\right), \\ \varepsilon_{vol}^{pII} &= \frac{-a\tau_0 u}{H_{p0}(2-\omega)} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_0 u}\right)^{2-\omega} + \frac{-b\tau_0 u}{H_{p0}(1,5-\omega)} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_0 u}\right)^{1,5-\omega} + \\ &+ \frac{-c\tau_0 u}{H_{p0}(1-\omega)} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_0 u}\right)^{1-\omega} + \frac{\tau_0 u}{H_{p0}} \left(\frac{a}{2-\omega} + \frac{b}{1,5-\omega} + \frac{c}{1-\omega}\right). \end{aligned} \quad (Z6.5)$$

Dodatkowo pełne odkształcenia sprężyste γ_0^e i ε_{vol}^e wynoszą:

$$\gamma_0^e = \frac{1}{H_e} \tau_0, \quad (Z6.6)$$

$$\varepsilon_{vol}^e = \frac{1}{K_e} \sigma_0.$$

Dla obciążenia proporcjonalnego ze wzoru (II.16) otrzymuje się związek pomiędzy całkowitymi odkształceniami plastycznymi dewiatorowymi e_{ij}^p i naprężeniami dewiatorowymi:

$$e_{ij}^p = \frac{\gamma_0^p}{\tau_0} s_{ij}, \quad (Z6.7)$$

natomiast dla części sprężystej odkształceń e_{ij}^e ze wzoru (Z6.6) wynika zależność:

$$e_{ij}^e = \frac{\gamma_0^e}{\tau_0} s_{ij}. \quad (Z6.8)$$

Wzory (Z6.7) i (Z6.8) mogą być zapisane łącznie w notacji inżynierskiej:

$$\left\{ \begin{aligned} e_x &= \left(\frac{\gamma_0^p}{\tau_0} + \frac{\gamma_0^e}{\tau_0}\right) s_x, \\ e_y &= \left(\frac{\gamma_0^p}{\tau_0} + \frac{\gamma_0^e}{\tau_0}\right) s_y, \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\gamma_0^p}{\tau_0} + \frac{\gamma_0^e}{\tau_0}\right) 2s_{xy}, \\ e_z &= \left(\frac{\gamma_0^p}{\tau_0} + \frac{\gamma_0^e}{\tau_0}\right) s_z, \end{aligned} \right. \quad (Z6.9)$$

gdzie

$$\left\{ \begin{array}{l} s_x = \frac{2}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y, \\ s_y = \frac{2}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_x, \\ s_{xy} = \tau_{xy}, \\ s_z = -\frac{1}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y. \end{array} \right. \quad (\text{Z6.10})$$

Ostatecznie całkowitą wartość odkształcenia $\underline{\varepsilon}$ otrzymuje się sumując część dewiatorową i odkształcenia objętościowe:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = e_x + \frac{1}{3}\varepsilon_{vol}, \\ \varepsilon_y = e_y + \frac{1}{3}\varepsilon_{vol}, \\ \varepsilon_z = e_z + \frac{1}{3}\varepsilon_{vol}, \end{array} \right. \quad (\text{Z6.11})$$

gdzie

$$\varepsilon_{vol} = \varepsilon_{vol}^p + \varepsilon_{vol}^e. \quad (\text{Z6.12})$$

Podsumowując, można zapisać w sposób jawny wartości odkształceń $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \varepsilon_z$ znając stan naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ i obliczywszy uprzednio τ_0 (wzór (Z6.1)), γ_0^p i γ_0^e (wzory (Z6.4) i (Z6.6)) oraz ε_{vol}^p i ε_{vol}^e (wzory (Z6.4–Z6.5) i (Z6.6)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \left(\frac{\gamma_0^p}{\tau_0} + \frac{\gamma_0^e}{\tau_0} \right) \left(\frac{2}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y \right) + \frac{1}{3}(\varepsilon_{vol}^p + \varepsilon_{vol}^e), \\ \varepsilon_y = \left(\frac{\gamma_0^p}{\tau_0} + \frac{\gamma_0^e}{\tau_0} \right) \left(\frac{2}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_x \right) + \frac{1}{3}(\varepsilon_{vol}^p + \varepsilon_{vol}^e), \\ \gamma_{xy} = \left(\frac{\gamma_0^p}{\tau_0} + \frac{\gamma_0^e}{\tau_0} \right) 2\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z = \left(\frac{\gamma_0^p}{\tau_0} + \frac{\gamma_0^e}{\tau_0} \right) \left(-\frac{1}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y \right) + \frac{1}{3}(\varepsilon_{vol}^p + \varepsilon_{vol}^e). \end{array} \right. \quad (\text{Z6.13})$$

W powyższych zależnościach można oczywiście wydzielić część sprężystą odkształceń (człony zawierające γ_0^e i ε_{vol}^e) oraz część plastyczną (γ_0^p i ε_{vol}^p).

W celu zilustrowania przedstawionego powyżej toku postępowania zostaną obliczone wartości odkształceń dla dwóch stanów naprężeń położonych na powierzchni granicznej.

Przyjęto wartości stałych materiałowych jak dla betonu o wytrzymałości $f_c = 32,4\text{MPa}$ (Beton 2 u *H.Kupfera* [68]). Wartości stałych materiałowych przyjęto zgodnie z punktem II.5.3 (oryginalnie *H.Kupfer* przyjął nieco inne wartości n, m i H_{p_0}):

$$H_{p_0} = 868f_c, \quad K_{p_0} = 556f_c, \quad n = 1,98, \quad m = 1,570,$$

$$a = -2,4033, \quad b = 3,1633, \quad c = -0,7600.$$

Wartości sprężystych stałych materiałowych zostały celowo przyjęte bardzo duże:

$$H_e = 500H_{p_0}, \quad K_e = 500K_{p_0}.$$

1° Stan jednoosiowego ściskania

$$\sigma_x = f_c, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_0 = 0,3333f_c, \quad \tau_0 = \tau_{0u} = 0,4714f_c$$

$$\omega = 1,98 \left(\frac{0,4714f_c}{f_c} \right)^{1,570} = 0,608 \quad (\text{wzór (Z6.3)})$$

$$\gamma_0^p = 1,385\% \quad (\text{Z6.4})$$

$$\gamma_0^e = 1,086 \cdot 10^{-3}\% \quad (\text{Z6.6})$$

$$\varepsilon_{vol}^{pI} = 0,685\% \quad (\text{Z6.5})$$

$$\varepsilon_{vol}^{pII} = -0,065\% \quad (\text{Z6.5})$$

$$\varepsilon_{vol}^e = 1,198 \cdot 10^{-3}\% \quad (\text{Z6.6})$$

Jak widać odkształcenia sprężyste są o trzy rzędy mniejsze od odkształceń plastycznych i mogą być pominięte.

$$\varepsilon_x = 2,17\%$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -0,77\% \quad (\text{Z6.13})$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

H.Kupfer uzyskał doświadczalnie następujące wartości:

$$\varepsilon_x = 2,17\text{‰}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -0,79\text{‰}$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

Różnica pomiędzy wartościami obliczonymi a doświadczalnymi jest poniżej 3%.

2° Stan dwuosowego ściskania.

Zgodnie z danymi doświadczalnymi można przyjąć, że powierzchnia graniczna jest osiągnięta przy dwuosowym równomiernym ściskaniu dla naprężenia równego $1,16f_c$.

Przyjęto zatem:

$$\sigma_x = \sigma_y = 1,16f_c, \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_0 = 0,7733f_c, \quad \tau_0 = \tau_{0u} = 0,5468f_c$$

$$\omega = 1,98 \left(\frac{0,5468f_c}{f_c} \right)^{1,570} = 0,767 \quad (\text{wzór (Z6.3)})$$

$$\gamma_0^p = 2,704\text{‰} \quad (\text{Z6.4})$$

$$\gamma_0^e = 1,260 \times 10^{-3}\text{‰} \quad (\text{Z6.6})$$

$$\varepsilon_{vol}^{pI} = 2,094\text{‰} \quad (\text{Z6.5})$$

$$\varepsilon_{vol}^{pII} = -0,564\text{‰} \quad (\text{Z6.5})$$

$$\varepsilon_{vol}^e = 2,782 \times 10^{-3}\text{‰} \quad (\text{Z6.6})$$

Jak poprzednio odkształcenia sprężyste mogą być pominięte.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 2,42\text{‰}$$

$$\varepsilon_z = -3,31\text{‰} \quad (\text{Z6.13})$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

H.Kupfer uzyskał doświadczalnie:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 2,59\text{‰}$$

$$\varepsilon_z = -3,33\text{‰}$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

W tym przypadku różnica pomiędzy wartościami obliczonymi a doświadczalnymi nie przekracza 7%.

Załącznik Z7

Zestawienie badań doświadczalnych wykorzystanych w punkcie III.1

Z7.1 Rys. III.1 – 14 i Rys. III.24 – 26 – badania *H.Kupfera*

Dane źródłowe: praca [68], Beton No 2, krzywe $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$) wg Bild 46, 50 i 54, krzywa $\sigma_0/f_c - \varepsilon_{vol}$ wg Bild 65, krzywa $\tau_0/f_c - \gamma_0$ wg Bild 146, $f_c = 32,4\text{MPa}$, $f_t = -0,091f_c$, $\varepsilon_0 = 2,17\text{‰}$, $E_0 = 33,0\text{GPa}$, $\nu = 0,195$.

Uwagi: Dane doświadczalne są w pełni opracowane statystycznie, każda z krzywych $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ przedstawia wartości średnie dla serii 6 próbek.

Dane do obliczeń: $f_c = 32,4\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 2,17\text{‰}$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.2 Rys. III.15 – badania *B.Sinhy*, *K.Gerstlego* i *L.Tulina*

Dane źródłowe: praca [103], 4000 psi Concrete, krzywa $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ wg Fig.10, $f_c = 27,58\text{MPa}$, z Fig.10 można ustalić wartość $\varepsilon_0 = 2,0\text{‰}$, innych danych brak,

Uwagi: Fig.10 w [103] prezentuje obwiednie dla procesów cyklicznych, a nie bezpośrednie próby monotonicznego ściskania, przy czym przedstawiono zakres zmienności wyników doświadczalnych (seria 20 próbek) oraz krzywą teoretyczną mieszczącą się w środku pasma doświadczalnego, na rys. III.15 przedstawiono wyłącznie tę ostatnią krzywą.

Dane do obliczeń: $f_c = 27,58\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 2,00\text{‰}$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.3 Rys. III.16 – badania *I.D.Karsana* i *I.O.Jirsy*

Dane źródłowe: praca [63], próbki AM1 – 04, AM1 – 06, AM1 – 13, krzywe $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ wg Fig.3–5, $f_c = 23,24\text{MPa}$ (AM1 – 04), $f_c = 27,24\text{MPa}$ (AM1 – 06), $f_c = 25,03\text{MPa}$ (AM1 – 13), innych danych brak,

Uwagi: w pracy [63] nie podano wartości ε_0 dla poszczególnych próbek (wszystkie rysunki przedstawiają wyłącznie wartości względne $\varepsilon_1/\varepsilon_0$), natomiast dla całości badań wartość średnia wynosi $\varepsilon_0 = 1,71\%$, zaś mediana $\varepsilon_0 = 1,68\%$ przy odchyleniu standardowym $0,14\%$; do obliczeń przyjęto w związku z tym $\varepsilon_0 = 1,68\%$ dla wszystkich trzech próbek; podane powyżej wartości wytrzymałości f_c zostały otrzymane na standardowych amerykańskich próbkach walcowych $15,24 \times 30,48\text{cm}$, dla specjalnego kształtu próbek użytych w badaniach wytrzymałość była niższa i wyniosła jako wartość średnia $0,85f_c$, zaś jako mediana $0,86f_c$ przy odchyleniu standardowym $0,04f_c$, oryginalnie w pracy [63] na wszystkich rysunkach podawano wartości względne σ_1/f_c , stąd największa wartość naprężenia względnego wynosiła $0,85$, do obliczeń i na rysunkach w pracy przyjęto jako f_c wytrzymałość osiągniętą w badaniach (na próbkach specjalnego kształtu), stąd największa wartość naprężenia względnego jest równa $1,00$; z uwagi na użycie na rys. III.16 wartości względnych σ_1/f_c obliczenia dla wszystkich trzech próbek przedstawia jedna krzywa.

Dane do obliczeń: $f_c = 23,24 \times 0,85\text{MPa}$ (AM1 – 04), $f_c = 27,24 \times 0,85\text{MPa}$ (AM1 – 06), $f_c = 25,03 \times 0,85\text{MPa}$ (AM1 – 13), $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 1,68\%$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.4 Rys. III.17 – badania *J.van Miera*

Dane źródłowe: praca [76], seria próbek 8A/8B, krzywe $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$) wg Appendix, Fig.A1, z Fig.A1 można ustalić wartości $f_c = 45,34\text{MPa}$, $\varepsilon_0 = 2,24\%$, dla wybranej próbki, innych danych brak,

Uwagi: w pracy [76] podano jako wartości średnie dla serii 8A/8B (4 próbki) $f_c = 45,3\text{MPa}$, $f_t = -2,8\text{MPa}$, Fig.A1 prezentuje krzywe doświadczalne indywidualnie dla 4 próbek bez uśredniania, charakteryzują się one dość znacznym rozrzutem, zwłaszcza wartości odkształceń poprzecznych, Fig.A1 podaje wartości wydłużeń całkowitych u_i ($i = 1, 2, 3$) a nie odkształceń próbek; rys. III.17 przedstawia krzywe doświadczalne dla jednej wybranej próbki przy czym uśredniono wartości odkształ-

ceń poprzecznych z dwóch prostopadłych kierunków, wartości wydłużeń przeliczono na odkształcenia przyjmując jako długość bazy pomiarowej długość badanej próbki $l_b = 10,0\text{cm}$.

Dane do obliczeń: $f_c = 45,34\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 2,24\%$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.5 Rys. III.18 – badania *S.P.Shaha* i *R.Sankara*

Dane źródłowe: praca [102], krzywa $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ wg Fig.11, krzywe $\sigma_1/f_c - \varepsilon_2, \varepsilon_3$ wg Fig.12, $f_c = 28,96\text{MPa}$, z Fig.11 można ustalić wartość $\varepsilon_0 = 3,00\%$, innych danych brak,

Uwagi: Fig.11 prezentuje wartości odkształcenia podłużnego dla jednej próbki przy użyciu dwóch różnych długości baz pomiarowych ($l_b = 8,26\text{cm}$ i $l_b = 15,75\text{cm}$), przy czym obserwuje się znaczące różnice w przebiegu odkształceń w stanie pokrytycznym w zależności od długości bazy, rys. III.18 przedstawia wartości odkształceń dla $l_b = 8,26\text{cm}$ uśrednione z dwóch miejsc pomiarowych; Fig.12 prezentuje wartości odkształceń poprzecznych otrzymane przy użyciu dwóch różnych technik badawczych, różniące się znacznie w stanie pokrytycznym, rys. III.18 przedstawia wartości z “ciągłego pomiaru obwodowego” (wg określenia z [102]) uśrednione z dwóch miejsc pomiarowych.

Dane do obliczeń: $f_c = 28,96\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 3,00\%$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.6 Rys. III.20 – badania *V.Gopalaratnama* i *S.P.Shaha*

Dane źródłowe: praca [50], próbka 2MU, krzywa $\sigma_1/|f_t| - \varepsilon_1$ wg Fig.6(a), $f_t = -3,85\text{MPa}$, $\varepsilon_t = -0,120\%$, $E_0 = 34,475\text{GPa}$, innych danych brak,

Uwagi: Fig.6(a) przedstawia wyniki dla 4 różnych próbek, próbka 2MU została wykonana bez karbu i poddana monotonicznemu rozciąganiu, Fig.6(a) podaje wartości wydłużeń całkowitych u_1 pomierzonych przy długości bazy pomiarowej $l_b = 8,26\text{cm}$.

Dane do obliczeń: $f_c = 38,5\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 2,691\%$, $h = 0,350\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.7 Rys. III.21 – badania *P.E.Peterssona*

Dane źródłowe: praca [50], krzywa $\sigma_1/|f_t| - \varepsilon_1$ wg Fig.1, z Fig.1 można ustalić wartości $f_t = -4,72\text{MPa}$, $\varepsilon_t = -0,173\%$, innych danych brak,

Uwagi: z braku dostępu do źródłowej pracy [90] posłużono się Fig.1 z [50] przedstawiającym wyniki *R.Evansa* i *M.Maratha* oraz *P.E.Peterssona*; Fig.1 podaje wprost wartości odkształcenia podłużnego, oryginalnie *P.E.Petersson* mierzył wydłużenia przy długości bazy pomiarowej $l_b = 4,00\text{cm}$.

Dane do obliczeń: $f_c = 47,2\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 3,880\%$, $h = 0,070\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.8 Rys. III.22 – badania *Sz.Wolińskiego*

Dane źródłowe: praca [123], beton Nr 4, krzywe $\sigma_1/|f_t| - \varepsilon_1$ wg Rys.3.8d,

$f_t = -2,66\text{MPa}$, $\varepsilon_t = -0,118\%$, $E_0 = 32,008\text{GPa}$, innych danych brak,

Uwagi: Rys.3.8d przedstawia krzywe doświadczalne dla 3 próbek, charakteryzują się one niewielkim rozrzutem, podane wartości stałych materiałowych są wartościami średnimi dla tych 3 próbek; Rys.3.8d podaje wartości wydłużeń całkowitych u_1 pomierzonych przy długości bazy pomiarowej $l_b = 3,50\text{cm}$, oryginalnie w [123] podano wartość wydłużenia $u_t = -4,12\mu\text{m}$ co odpowiada odkształceniu $\varepsilon_t = u_t/l_b = -0,118\%$.

Dane do obliczeń: $f_c = 26,6\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 2,646\%$, $h = 0,050\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.9 Rys. III.23 – badania *H.Reinhardta*

Dane źródłowe: praca [97], krzywa $\sigma_1/|f_t| - \varepsilon_1$ wg Fig.12a, z Fig.12a można ustalić wartości $f_t = -3,47\text{MPa}$, $\varepsilon_t = -0,167\%$, innych danych brak,

Uwagi: Fig.12a przedstawia krzywą doświadczalną dla 1 próbki, wartości stałych materiałowych dla tego konkretnego przypadku nie podano, praca [97] podaje natomiast wartości średnie wytrzymałości na ściskanie dla próbek kostkowych $15,0\text{cm}$ $f_c = 47,1\text{MPa}$ oraz wytrzymałości na rozciąganie (próba rozłupywania na tych samych próbkach) $f_t = 3,20\text{MPa}$ uzyskane dla 33 próbek; Fig.12a podaje wartości wydłużeń całkowitych u_1 pomierzonych przy długości bazy pomiarowej $l_b = 3,50\text{cm}$ oryginalnie z Fig.12a można odczytać wartość wydłużenia $u_t = -5,845\mu\text{m}$ co od-

powiada odkształceniu $\varepsilon_t = u_t/l_b = -0,167\%$.

Dane do obliczeń: $f_c = 34,7\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 3,745\%$, $h = 0,050\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.10 Rys. III.27 – badania *B.Sinhy*, *K.Gerstlego* i *L.Tulina*

Dane źródłowe: praca [103], 3750 psi Concrete, krzywa $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ wg Fig.8, z Fig.8 można ustalić wartości $f_c = 26,77\text{MPa}$, $\varepsilon_0 = 2,60\%$, innych danych brak,

Uwagi: Fig.8 przedstawia krzywą doświadczalną dla obciążenia cyklicznego 1 próbki, ponieważ rysunek ten nie zawiera krzywej obciążenia monotonicznego identyfikacja wartości f_c i ε_0 nie jest pewna, z Fig.10 (patrz Z7.2) można ustalić, że dla 3750 psi Concrete wartość wytrzymałości na ściskanie zawarta jest w granicach $f_c = 24,70 \div 26,84\text{MPa}$, zaś $\varepsilon_0 = 2,652\%$.

Dane do obliczeń: $f_c = 26,77\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 2,60\%$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.11 Rys. III.28 – badania *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy*

Dane źródłowe: praca [63], próbka AC2-09, krzywa $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ wg Fig.3, $f_c = 23,24\text{MPa}$, innych danych brak,

Uwagi: Fig.3 przedstawia krzywą doświadczalną dla obciążenia cyklicznego próbki AC2-09 oraz krzywą obciążenia monotonicznego dla próbki AM1-04 o tej samej wytrzymałości, ta ostatnia została opisana w punkcie Z7.3, podane w tym punkcie uwagi o wartościach f_c i ε_0 otrzymanych w pracy [63] pozostają w mocy.

Dane do obliczeń: $f_c = 23,24 \times 0,85\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 1,68\%$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.12 Rys. III.29 – badania *S.Okamoto*, *S.Shiomi*, *K.Yamabe*

Dane źródłowe: praca [2], krzywa $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ wg Fig.9 (lewa strona), z Fig.9 można ustalić wartości $f_c = 30,00\text{MPa}$, $\varepsilon_0 = 1,88\%$, innych danych brak,

Uwagi: z braku dostępu do źródłowej pracy [81] posłużono się Fig.9 z [2], rysunek ten przedstawia wyłącznie krzywą obciążenia cyklicznego, przypuszczalnie dla pojedynczej próbki,

Dane do obliczeń: $f_c = 30,00\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 1,88\%$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.13 Rys. III.30 – badania *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy*

Dane źródłowe: praca [63], próbka AC3-10, krzywa $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ wg Fig.6, $f_c = 34,54\text{MPa}$, innych danych brak,

Uwagi: objaśnienia na temat wartości f_c i ε_0 otrzymanych w pracy [63] podano w punkcie Z7.3.

Dane do obliczeń: $f_c = 34,54 \times 0,85\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 1,68\%$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.14 Rys. III.33 – badania *G.W.Beamsa*, *K.Gerstlego*, *H.Ko*

Dane źródłowe: praca [28], krzywe $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$) wg Fig.7, z porównania Fig.7 w [28] i Fig.14 w [40] można ustalić wartości $f_c = 41,37\text{MPa}$, $\varepsilon_0 = 5,111\%$, innych danych brak,

Uwagi: z braku dostępu do źródłowej pracy [15] posłużono się Fig.7 z [28] oraz Fig.14 z [40], Fig.7 w [28] przedstawia krzywe $\sigma_1/f_c - \varepsilon_i$ przy użyciu wartości względnych σ_1/f_c i $\varepsilon_i/\varepsilon_0$, zaś Fig.14 w [40] prezentuje te same krzywe używając wartości mianowanych (σ_1 w ksi, ε_i wyrażone w $\%$), porównując oba rysunki można ustalić wartości f_c i ε_0 przyjęte w pracy [28], które podano wyżej, natomiast cytowane prace nie zawierają krzywej $\sigma_1 - \varepsilon_1$ dla jednoosiowego ściskania, z której możnaby ustalić bezpośrednio wartości f_c i ε_0 , Fig.14 w [40] nie pokazuje ostatnich cykli obciążenia przedstawionych na Fig.7 z [28], dodatkowo istnieją rozbieżności pomiędzy ilością cykli wykonanych dla danego poziomu obciążenia według tablicy zamieszczonej na Fig.14 z [40], a ilością cykli możliwych do odczytania wprost z rysunku.

Dane do obliczeń: $f_c = 41,37\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 5,111\%$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.15 Rys. III.35 – badania *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy*

Dane źródłowe: praca [63], próbka AC4-12, krzywa $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ wg Fig.11, $f_c = 25,93\text{MPa}$, innych danych brak,

Uwagi: Fig.11 w [63] prezentuje krzywe obciążenia cyklicznego dla dwóch próbek – AC4–12 i AC4–13 dla różnych programów obciążenia oraz krzywą obciążenia monotonicznego dla próbki AM1–13, objaśnienia na temat wartości f_c i ε_0 otrzymanych w pracy [63] podano w punkcie Z7.3.

Dane do obliczeń: $f_c = 25,93 \times 0,85\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 1,68\%$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.16 Rys. III.36 – badania *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy*

Dane źródłowe: praca [63], próbka AC4–13, krzywa $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ wg Fig.11, $f_c = 25,93\text{MPa}$, innych danych brak,

Uwagi: jak podano w punkcie Z7.15 Fig.11 przedstawia zależności $\sigma_1/f_c - \varepsilon_1$ dla trzech różnych programów obciążenia, objaśnienia na temat wartości f_c i ε_0 otrzymanych w pracy [63] podano w punkcie Z7.3.

Dane do obliczeń: $f_c = 25,93 \times 0,85\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 1,68\%$, $h = 0,200\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.17 Rys. III.38 – badania *I.D.Karsana* i *J.O.Jirsy*

Dane źródłowe: praca [63], σ_1/f_c -liczba cykli do zniszczenia wg Fig.22,

Uwagi: Jak to opisano szerzej w punkcie Z7.3 największa wartość naprężenia względnego σ_1/f_c była przyjmowana w [63] jako 0,85 (σ_1 odniesiono do wytrzymałości f_c próbek walcowych), w pracy na rys. III.38 przyjęto jako największą wartość naprężenia względnego 1,00 (σ_1 odniesione do wytrzymałości f_c próbek stosowanych w badaniach).

Z7.18 Rys. III.39 – badania *V.Gopalaratnama* i *S.P.Shaha*

Dane źródłowe: praca [50], próbka 4CN, krzywa $\sigma_1/|f_t| - \varepsilon_1$ wg Fig.6(a), $f_t = -3,53\text{MPa}$, $\varepsilon_t = -0,118\%$, $E_0 = 32,013\text{GPa}$, innych danych brak,

Uwagi: Jak to podano w punkcie Z7.6 Fig.6(a) przedstawia wyniki dla 4 różnych próbek, próbka 4CN została wykonana z karbem i poddana cyklicznemu rozciąganiu, Fig.6(a) podaje wartości wydłużeń całkowitych u_1 pomierzonych przy długości bazy pomiarowej $l_b = 8,26\text{cm}$.

Dane do obliczeń: $f_c = 35,3\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 2,646\%$, $h = 0,350\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Z7.19 Rys. III.40 – badania *Sz. Wolińskiego*

Dane źródłowe: praca [123], krzywa $\sigma_1/|f_t| - \varepsilon_1$ wg Rys.3.14, z Rys.3.14 można ustalić wartości $f_t = -2,43\text{MPa}$, $\varepsilon_t = -0,386\%$, innych danych brak,

Uwagi: Rys.3.14 przedstawia krzywą doświadczalną dla 1 próbki, wartości stałych materiałowych dla tego konkretnego przypadku nie podano, Rys.3.14 podaje wartości wydłużeń całkowitych u_1 pomierzonych przy długości bazy pomiarowej $l_b = 3,50\text{cm}$. Oryginalnie z rysunku można odczytać wartość wydłużenia $u_t = -13,51\mu\text{m}$ co odpowiada odkształceniu $\varepsilon_t = u_t/l_b = -0,386\%$.

Dane do obliczeń: $f_c = 24,30\text{MPa}$, $f_t = -0,10f_c$, $\varepsilon_0 = 4,00\%$, $h = 0,028\text{m}$, kurczenie nieizotropowe.

Załącznik Z8

Dane materiałowe przyjęte w obliczeniach w punkcie III.2

Z8.1 Tarcza WT3

Dane źródłowe: praca [71] podaje:

Beton (Tab.2, Bild 52)

$f_c=30,2\text{MPa}$, $f_t = -4,9\text{MPa}$, $\varepsilon_0 = 2,0\%$, $E_0 = 32,0\text{GPa}$

Stal $\phi 8$ St IIIb (Tab.1, Bild 50)

$f_y = -428,0\text{MPa}$, $f_s = -547,0\text{MPa}$, $E_s = 210,0\text{GPa}$

Uwagi: Wytrzymałość dla betonu f_c jest średnią z serii 3 próbek o wymiarach $53 \times 10 \times 10\text{cm}$. Wytrzymałość na rozciąganie f_t jest wytrzymałością na rozciąganie przy zginaniu (wartość średnia z serii 2 próbek o wymiarach takich samych jak dla pomiaru f_c). Wartość ε_0 można odczytać z Bild 52; z krzywej $\sigma_1 - \varepsilon_1$ na tym rysunku wynika wartość $E_0 = 32,0\text{GPa}$. Jednakże w pracach [77], [88], [45] wyraźnie stwierdzono, że przyjęcie takiej wartości E_0 do obliczeń prowadzi do zawyższenia początkowej sztywności konstrukcji; do poprawnych rezultatów prowadzi przyjęcie $E_0 \approx 25,0\text{GPa}$. W pracy postąpiono analogicznie, zwiększając wartość ε_0 w porównaniu do wartości z Bild 52.

Dla stali f_y oznacza umowną granicę plastyczności 0,2%, f_s - wytrzymałość na rozciąganie, E_s - moduł Younga. Zbrojenie tarczy WT3 składa się z dwóch rodzajów stali zbrojeniowej: $\phi 8$ St IIIb - główne zbrojenie poziome u dołu tarczy, oraz $\phi 5$ St I - konstrukcyjne zbrojenie siatkowe. Praca [71] podaje dane wyłącznie dla St IIIb. W [44] przyjęto w obliczeniach dla stali St I $f_y = -240,0\text{MPa}$, $E_s = 210,0\text{GPa}$.

Dane do obliczeń:

Wariant 1 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,035\text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,010\text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa E (podkładka pod tarczą)

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Funkcja sprzężenia kurczenia się powierzchni granicznej wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 2 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,070\text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,020\text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,032\text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,032\text{m}$$

Strefa E (podkładka pod tarczą)

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,032\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 3 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,035\text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,010\text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa E (podkładka pod tarczą)

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 2° z punktu II.7 – kurczenie izotropowe.

Wariant 4 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,035\text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,010\text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa E (podkładka pod tarczą)

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 3° z punktu II.7 – kurczenie niezależne.

Wariant 5 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,035\text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,010\text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa E (podkładka pod tarczą)

$$f_c = 4027\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 6 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,035\text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,010\text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa E (podkładka pod tarczą)

$$f_c = 4027\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 7 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,035\text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,010\text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa E (podkładka pod tarczą)

$$f_c = 4027\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Warianty 1÷7 – Stal

$$\text{Stal St IIIb} \quad f_y = -428,0\text{MPa}, \quad E_s = 210,0\text{GPa}$$

$$\text{Stal St I} \quad f_y = -240,0\text{MPa}, \quad E_s = 210,0\text{GPa}$$

Z8.2 Tarcza WT4

Dane źródłowe: Praca [71] podaje:

Beton (Tab.2, Bild 52)

$$f_c = 30,0 \text{MPa}, f_t = -4,4 \text{MPa}, \varepsilon_0 = 2,0\%, E_0 = 32,0 \text{GPa}$$

Stal $\phi 8$ St IIIb (Tab.1, Bild 50)

$$f_y = -428,0 \text{MPa}, f_s = -547,0 \text{MPa}, E_s = 210,0 \text{MPa}$$

Uwagi: Tak samo jak dla tarczy WT3 wytrzymałość na ściskanie f_c jest średnią z serii 3 próbek, a wytrzymałość na rozciąganie f_t jest średnią wytrzymałością na rozciąganie przy zginaniu z serii 2 próbek. Wymiary próbek takie jak dla tarczy WT3. Bild 52 przedstawia jedną (uśrednioną krzywą) $\sigma_1 - \varepsilon_1$ dla betonu użytego w tarczach WT1 – WT7 (z wyłączeniem tarczy WT 1b). Uwagi z punktu Z8.1 co do wartości E_0 i ε_0 przyjmowanych w obliczeniach są również aktualne dla tarczy WT4. Stal zbrojeniowa jest tych samych rodzajów i średnic jak w przypadku tarczy WT3 – pozostają w mocy uwagi z punktu Z8.1.

Dane do obliczeń:

Wariant 1 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2 \text{MPa}, f_t = -0,10 f_c, \varepsilon_0 = 2,60\%, h = 0,035 \text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2 \text{MPa}, f_t = -0,10 f_c, \varepsilon_0 = 2,60\%, h = 0,010 \text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2 \text{MPa}, f_t = -0,10 f_c, \varepsilon_0 = 2,60\%, h = 0,016 \text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 40,27 \text{MPa}, f_t = -0,10 f_c, \varepsilon_0 = 3,467\%, h = 0,016 \text{m}$$

Strefa E (podkładka pod tarczą)

$$f_c = 40,27 \text{MPa}, f_t = -0,10 f_c, \varepsilon_0 = 3,467\%, h = 0,016 \text{m}$$

Funkcja opisująca sprzężenie kurczenia się powierzchni granicznej wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 2 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,070\text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,020\text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,032\text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,032\text{m}$$

Strefa E (podkładka pod tarczą)

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,032\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 3 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,035\text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,010\text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa E (podkładka pod tarczą)

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 2° z punktu II.7 – kurczenie izotropowe.

Wariant 4 – Beton

Strefa A

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,035\text{m}$$

Strefa B

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,010\text{m}$$

Strefa C

$$f_c = 30,2\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 2,60\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Strefa D

$$f_c = 40,27\text{MPa}, f_t = -0,10f_c, \varepsilon_0 = 3,467\text{‰}, h = 0,016\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 3° z punkt II.7 – kurczenie niezależne.

Warianty 1÷4 – Stal

$$\text{Stal St IIIb} \quad f_y = -428,0\text{MPa}, \quad E_s = 210,0\text{GPa}$$

$$\text{Stal St I} \quad f_y = -240,0\text{MPa}, \quad E_s = 210,0\text{GPa}$$

Z8.3 Tarcza W2

Dane źródłowe: praca [88] podaje –

Beton

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -3,6\text{MPa}, E_0 = 20,0\text{GPa}$$

Stal

$$f_y = -353,0\text{MPa}, E_s = 200,0\text{GPa}$$

Z kolei praca [54] podaje –

Beton

$$f_c = 25,16\text{MPa}, f_t = -3,65\text{MPa}, E_0 = 20,0\text{GPa}$$

Stal

$$f_y = -353,0\text{MPa}, E_s = 188,230\text{GPa}$$

Uwagi: Jak wspomniano w punkcie III.2.3 autor nie miał dostępu do źródłowej pracy [25], zaś publikacje *V.Červenki* i *K.Gerstlego* [26], [27] nie podają żadnych danych materiałowych. Prace [88] i [54], z których wzięto dane do obliczeń, mają charakter numeryczny i nie podają żadnych bliższych szczegółów co do sposobów uzyskania danych materiałowych.

Dane do obliczeń:

Wariant 1 – Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 3,00\text{‰}, h = 0,040\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,040\text{m}$$

Funkcja sprzężenia kurczenia się powierzchni granicznej wg propozycji 1° z punktu

II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 2 – Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 3,00\text{‰}, h = 0,060\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,060\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 3 – Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 3,00\text{‰}, h = 0,080\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,080\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 4 – Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 3,00\text{‰}, h = 0,040\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,040\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 2° z punktu II.7 – kurczenie izotropowe.

Wariant 5 – Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 3,00\text{‰}, h = 0,040\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,040\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 3° z punktu II.7 – kurczenie niezależne.

Wariant 6 – Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 40,2\text{MPa}, f_t = -0,0895f_c, \varepsilon_0 = 4,50\text{‰}, h = 0,040\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,040\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Warianty 1÷6 - Stal

$$f_y = -353,0\text{MPa}, E_s = 190,0\text{GPa}$$

Z8.4 Tarcza W4

Dane źródłowe: praca [88] podaje

Beton

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -3,6\text{MPa}, E_0 = 20,0\text{GPa}$$

Stal

$$f_y = -353,0\text{MPa}, E_s = 200,0\text{GPa}$$

Uwagi: Praca [88] podaje takie same dane materiałowe dla tarcz W2 i W4; w pracy [54] nie analizowano tarczy W4. Pozostają w mocy uwagi z punktu Z8.3.

Dane do obliczeń:

Wariant 1 - Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 3,00\text{‰}, h = 0,050\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,050\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 3° z punktu II.7 – kurczenie niezależne.

Wariant 2 - Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 3,00\text{‰}, h = 0,050\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,050\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 3 - Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 3,00\text{‰}, h = 0,050\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,050\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 2° z punktu II.7 – kurczenie izotropowe.

Wariant 4 – Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 3,00\text{‰}, h = 0,100\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,100\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 1° z punktu II.7 – kurczenie nieizotropowe.

Wariant 5 – Beton

Obszar tarczy

$$f_c = 26,8\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 3,00\text{‰}, h = 0,100\text{m}$$

Żebra podporowe

$$f_c = 268,0\text{MPa}, f_t = -0,1343f_c, \varepsilon_0 = 30,00\text{‰}, h = 0,100\text{m}$$

Funkcja sprzężenia wg propozycji 2° z punktu II.7 – kurczenie izotropowe.

Warianty 1÷5 - Stal

$$f_y = -353,0\text{MPa}, E_s = 190,0\text{GPa}$$

MODEL FOR CONCRETE UNDER SHORT-TERM LOADS.
THEORY AND NUMERICAL VERIFICATION FOR PLANE STRESS STATE

SUMMARY

In the paper a model for concrete under short-term loads in plane stress case is presented. The model is based on the bounding surface plasticity theory and three independent plastic mechanisms are introduced. The current yield surface is reduced to a point in the stress space and the plastic potential surface does not exist. Instead, independent criteria for loading / unloading for deviatoric and hydrostatic parts of stress state are assumed. The bounding surface can shrink depending on internal state variables. Such an approach enables us to describe softening of concrete in post-critical state. The hysteretic loops during loading / unloading processes are properly rendered in the model through suitably chosen plastic mechanism functions. The model describes behaviour of concrete in compression and tension in the same way. Thus, there is no need for coupling this model with any smeared crack model.

The proposed model has been comprehensively tested in two ways: firstly, on the level of material point through comparison with experimentally derived $\sigma - \varepsilon$ curves; secondly through implementation into the existing FEM code and computation of a few real RC deep beams. These tests prove that the model is able to render the actual concrete behaviour under monotonic and cyclic loads in a satisfactory way.





Errata

Strona, wiersz	Jest	Powinno być
7 _{4g}	osiągnięci	osiągnięcia
7 _{13g}	wartość	wartości
13 _{2d}	materialnej anizotropii	anizotropii materiałowej
15 tabl. I.1	K. William	K. Willam
16 _{1d}	zauważyc	zauważyć
18 _{7g}	przedstwia	przedstawia
19 _{1d}	Grantu nr 3 0401 91 01.	Grantów nr 3 0401 91 01 i 3 P404 060 06.
37 _{2g}	$\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma} :$	$\dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{\sigma}) :$
49 _{7g}	\dot{e}_{ij}^e	\dot{e}_{ij}^p
54 _{6g}	γ_0^p	γ_0
55 rys. II.15	τ^{eB}	τ_0^{eB}
56 rys. II.18		połączyć wektor $\underline{\sigma}$ z powierzchnią graniczną
58 (II.76)	$H =$	$H_p =$
61 (II.84)	H_p	H_{p0}
67 (II.102)	$\sigma_0 = \sigma_1 (1 + k)$	$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_1 (1 + k)$
67 (II.103)	$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \left \frac{\sigma_0}{1+k} \right \sqrt{k^2 - k + 1}$	$\tau_0 = \sqrt{2} \left \frac{\sigma_0}{1+k} \right \sqrt{k^2 - k + 1}$
87 tabl. II.8	γ_0^{\max}	γ_0^{\max}
91 (II.161)	$\cos 3\theta = - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{2/3}}$	$\cos 3\theta = - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{(\sqrt{J_2})^3}$
111 _{2d}	(II.1983/1)	(II.183/1)
114 _{15g}	$\dot{\varepsilon}_{vol}^p$	$\dot{\varepsilon}_{vol}^p$
116 _{9g}	$\dot{\tau}$	$\dot{\tau}_0$
117 (II.199)	$\int_0^t \dot{\gamma}_0^p d\tau$	$\int_0^t \dot{\gamma}_0^p dt$
154 _{2d}	0,70 - 0,90f _c	0,70 ÷ 0,90f _c

167 rys. III.47	W3, W4	WT3, WT4
178 rys. III.54c	dla P = 1200kN	dla P = 1180kN
180 rys. III.56	$\varepsilon_{tu} = -0.0019$ $\varepsilon_{tu} = -0.0010$	$\varepsilon_{tu} = -0.0010$ $\varepsilon_{tu} = -0.0019$
190 _{2g}	badan	badan
190 _{13g}	obciżenia	obciżenia
191 rys. III.65	Tarcze W2 i W2	Tarcze W2 i W4
193 _{6d}	zależności	zależności
211 _{4d}	propozycje 3°	propozycje 1°
219 poz. [65]	<i>polem naprężenia,</i>	<i>polem temperatury,</i>
246 _{6g}	celowo	celowo
267 _{10g}	hysteretic	hysteresis
267 _{3d}	secondly	secondly,