

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

mgr inż. Aleksander Urbański

ANALIZA NAPRĘZEŃ I PRZEMIESZCZEŃ
W POŁĄCZENIU KOŁNIERZOWYM
WALCOWYCH PRĘTÓW POWŁOKOWYCH

(praca doktorska)

promotor :

prof. dr hab. inż.
Zbigniew Kordecki

KRAKÓW 1988



Spis treści

1.	Część wstępna.....	1
1.1.	Przedmiot pracy.....	1
1.1.1.	Charakterystyka konstrukcyjna połączeń kołnierzowych..	2
1.1.2.	Zakres zastosowania.....	5
1.2.	Cel i zakres pracy.....	6
1.3.	Podstawowe założenia.....	9
1.4.	Omówienie stosowanych metod i ogólnego toku postępowania.....	12
1.5.	Przegląd literatury.....	15
2.	Analiza deformacji i rozkładu sił w układzie śruba-kołnierz-żebro w strefie rozciąganej.....	17
2.1.	Sformułowanie zagadnienia i podstawowe założenia.....	17
2.2.	Model obliczeniowy pojedynczego sektora połączenia....	22
2.2.1.	Elementy modelu.....	22
2.2.2.	Podstawowe relacje między siłami i parametrami deformacji połączenia.....	24
2.3.	Analiza deformacji układu żebro usztywniające-powłoka.	29
2.3.1.	Schemat obliczeniowy i sformułowanie problemu.....	29
2.3.2.	Rozwiązanie równania całkowego.....	34
2.3.2.1.	Uwagi wprowadzające.....	34
2.3.2.2.	Opis procedury rozwiązującej równanie całkowe.....	37
2.3.3.	Wyniki obliczeń.....	38
2.4.	Deformacja układu kołnierz-śruba w świetle teorii płyt średniej grubości z więzami jednostronnymi.....	46
2.4.1.	Sformułowanie zagadnienia.....	46
2.4.1.1.	Podstawowe związki teorii płyt średniej grubości.....	46
2.4.1.2.	Sformułowanie zadania wariacyjnego.....	48
2.4.2.	Zastosowanie metody funkcjonału kary.....	50
2.4.3.	Numeryczne rozwiązanie zadania metodą elementów skończonych.....	53
2.4.3.1.	Aproksymacja pola przemieszczeń.....	53

2.4.3.2	Podstawowe związki sformułowania MES.....	55
2.4.3.3	Algorytm obliczeń MES.....	57
2.4.3.4	Opis programu PENAL.....	61
2.4.4.	Numeryczna analiza stanu deformacji i naprężenia dla wycinka płyty kołnierza.....	66
2.4.4.1	Przyjęcie schematu obliczeniowego.....	66
2.4.4.2	Opis programu PENSEC.....	69
2.4.4.3	Zakres obliczeń.....	70
2.4.5.	Rezultaty obliczeń.....	72
2.4.5.1	Podatność układu śruba-kołnierz.....	76
2.4.5.2	Mimośród wypadkowej obciążenia.....	80
2.4.5.3	Siła rozciągająca śrubę.....	84
2.4.5.4	Współczynnik spiętrzenia naprężeń na obwodzie powłoki.....	88
2.4.5.5	Współczynnik rozdziału obciążenia na żebro i powłokę.....	91
2.4.5.6	Maksymalny moment zginający w płycie.....	93
2.5.	Obliczanie sił wewnętrznych i podatności w układzie śruba-kołnierz-żebro w strefie rozciąganej.....	97
2.5.1.	Określenie parametru postaci deformacji θ	97
2.5.2.	Obliczanie podatności połączenia.....	99
2.5.3.	Obliczanie siły rozciągającej śrubę.....	100
2.5.4.	Obliczanie mimośrodu działania obciążenia.....	101
2.5.5.	Obliczanie maksymalnych naprężeń wokół obwodu powłoki.....	101
2.5.6.	Obliczanie sił działających na żebro.....	102
2.5.7.	Algorytm wymiarowania elementów połączenia.....	103
3.	Model obliczeniowy połączenia kołnierzowego uwzględniający odkształcalność strefy rozciąganej....	105
3.1.	Podstawowe założenia i sformułowanie modelu.....	105
3.2.	Podstawowe równania modelu obliczeniowego.....	113
3.3.	Rozwiązanie równań opisujących zagadnienie.....	117
3.3.1.	Przedstawienie ogólnej metody postępowania.....	117
3.3.2.	Rozwiązanie zadania podstawowego ($C_e' = 0$).....	119
3.3.2.1	Rozwiązanie przy aproksymacji rozkładu obciążenia wielomianami trygonometrycznymi.....	120
3.3.2.2	Rozwiązanie przy aproksymacji rozkładu obciążenia funkcjami odcinkowo liniowymi.....	124
3.3.3.	Uogólnienie rozwiązania na przypadek mimośrodowego obciążenia w strefie rozciąganej.....	131
3.3.3.1	Przypadek połączenia doskonale sztywnego.....	131

3.3.3.2	Przypadek połączenia podatnego.....	133
3.4.	Wyniki obliczeń.....	135
3.4.1.	Określenie zakresu obliczeń.....	135
3.4.2.	Przebieg obliczeń.....	136
3.4.3.	Rozkład obciążenia w połączeniu.....	138
3.4.4.	Parametry deformacji połączenia.....	144
3.5.	Obliczanie parametrów rozkładu obciążenia i deformacji połączenia.....	148
3.5.1.	Obliczenie parametrów geometrii połączenia.....	148
3.5.2.	Obliczanie parametrów obciążenia.....	148
3.5.3.	Obliczanie wielkości charakteryzujących rozkład obciążenia w połączeniu.....	150
3.5.4.	Deformacja połączenia.....	152
3.5.4.1	Kąt wzajemnego obrotu łączonych elementów.....	152
3.5.4.2	Osiowe przemieszczenie elementów.....	153
3.5.5.	Ocena wpływu obecności połączeń na sztywność ogólną konstrukcji.....	154
4.	Przykłady liczbowe i wnioski praktyczne.....	156
4.1	Przykłady obliczeń nośności i podatności układu śruba - kołnierz - żebro.....	156
4.2	Przykład obliczenia sił wewnętrznych i naprężeń w elementach połączenia.....	164
4.3	Charakterystyki odkształcalności połączenia kołnierzowego.....	165
4.4	Zalecenia konstrukcyjne.....	169
5.	Kierunki dalszych badań.....	170
5.1.	Badania teoretyczne i analizy numeryczne.....	170
5.2.	Propozycja doświadczalnej weryfikacji modelu obliczeniowego.....	173
5.2.1.	Badania laboratoryjne.....	173
5.2.2.	Badania na obiekcie rzeczywistym.....	175
5.3.	Związane problemy badawcze.....	176
5.3.1.	Wpływ odkształcalności połączeń na wielkości statyczne.....	176
5.3.2.	Badania wpływu odkształcalności połączeń na dynamikę obiektów.....	177

6.	Podsumowanie.....	178
----	-------------------	-----

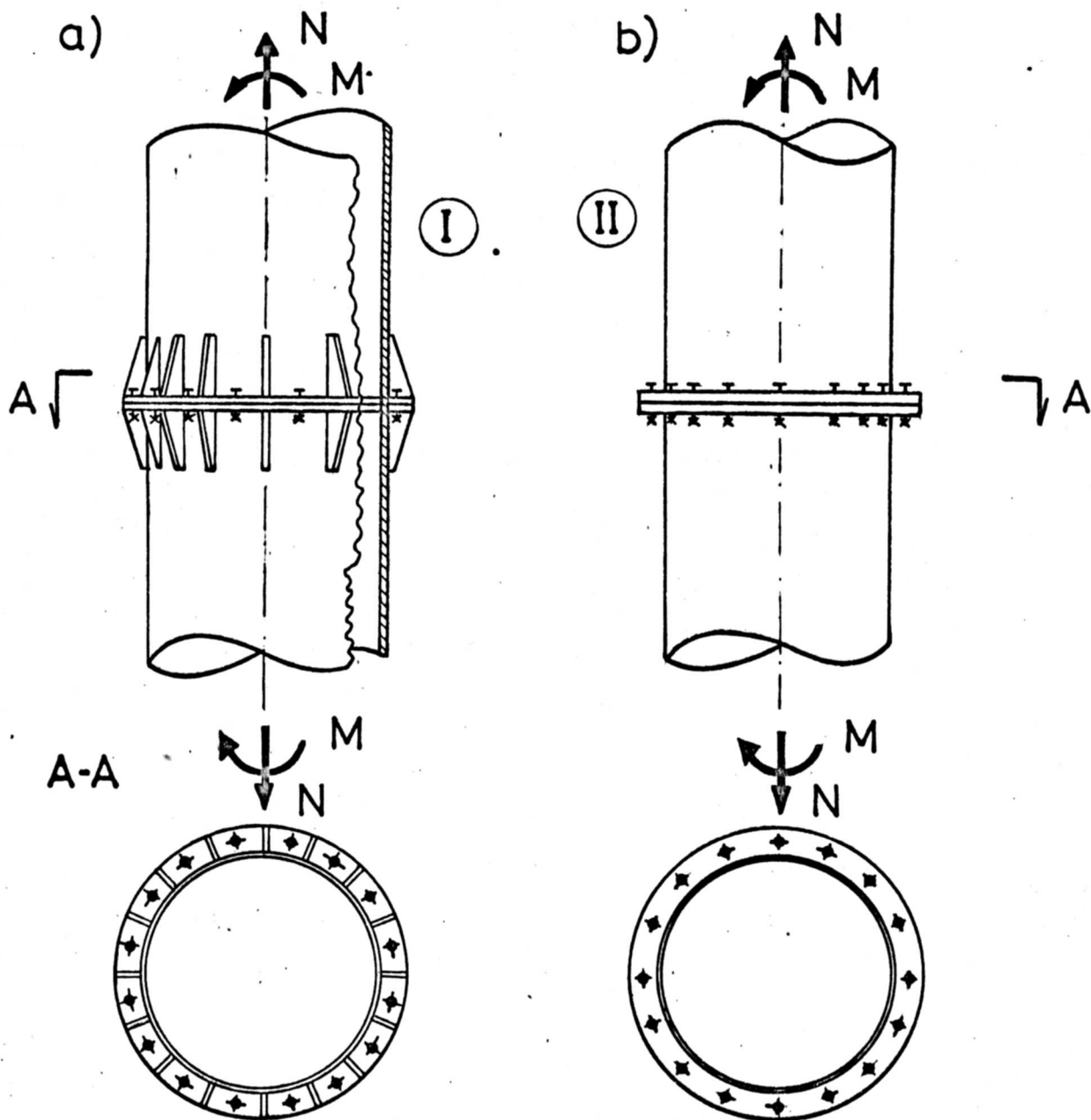
Załączniki

Z 1.	Wykaz literatury.....	180
Z 2.	Funkcja wpływu przemieszczeń normalnych wycinka powłoki walcowej obciążonego wzdłuż tworzących.....	184
Z 2.1	Sformułowanie zagadnienia.....	184
Z 2.2	Rozwiązanie równań przemieszczeniowych.....	186
Z 2.3	Numeryczne wyznaczenie jądra.....	192
Z 3.	Algorytm rozwiązania równania całkowego.....	195
Z 4.	Związek pomiędzy przemieszczeniem osiowym wokół brzegu zamkniętej powłoki walcowej a jego obciążeniem w kierunku tworzącej.....	199
Z 4.1	Sformułowanie zadania.....	199
Z 4.2	Związek pomiędzy składowymi rozwinięć fourierowskich obciążenia i przemieszczenia.....	200
Z 4.3	Funkcja wpływu przemieszczeń osiowych wokół brzegu zamkniętej powłoki walcowej obciążonej w kierunku tworzącej.....	203
Z 4.4	Całkowanie osobliwości funkcji wpływu.....	205
Z 5.	Metoda automatycznej generacji dyskretyzacji MES....	209

1. Część wstępna

1.1. Przedmiot pracy

Praca poświęcona jest analizie statyczno-wytrzymałościowej śrubowych połączeń doczołowych rur cienkościennych o dużych średnicach, zwanych dalej połączeniami kołnierzowymi, poddanych działaniu siły osiowej (ściskającej lub rozciągającej) i momentu zginającego.



Rys. 1.1.1

1.1.1. Charakterystyka konstrukcyjna połączeń kołnierzowych

Rysunki 1.1.1.a i b przedstawiają dwa najpowszechniej stosowane rozwiązania konstrukcyjne połączeń kołnierzowych:

I - połączenie nieuźebrowane (rys.1.1.1.a)

II - połączenie uźebrowane (rys.1.1.1.b)

Składają się one z następujących pozycji:

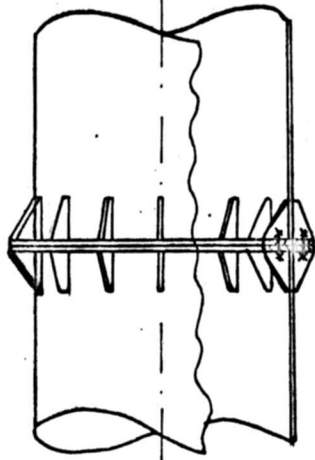
1/ kołnierz z blach w formie pierścienia kołowego z otworami na śruby, przyspawany ciągłymi spoinami pachwinowymi lub czołowymi do odpowiednio przygotowanej (sfazowanej) krawędzi rury.

2/ komplet śrub wraz z nakrętkami i podkładkami (w liczbie od kilkunastu do kilkudziesięciu).

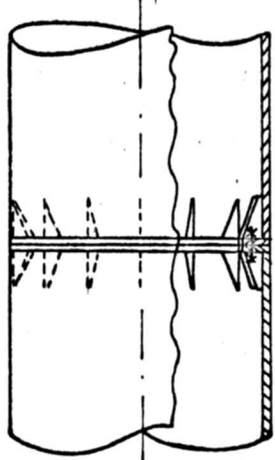
3/(dla połączenia uźebrowanego) żebra usztywniające o kształcie trójkąta ze ściętymi narożami przyspawane do płaszcza rury i kołnierza.

Zasadniczo rozważa się połączenia niesprężone (efekt niewielkiego, częściowego sprężenia jaki występuje w każdym prawidłowo zmontowanym połączeniu doczołowym jest pomijany), skręcane śrubami zwykłymi lub średnio dokładnymi o klasach własności mechanicznych 4.6 - 6.8. Połączenia takie, pomimo iż ustępują pod pewnymi względami (wytrzymałość zmęczeniowa, szczelność, odkształcalność) połączeniom sprężonym, są jednak w warunkach krajowych stosowane znacznie częściej, głównie z uwagi na dostępność materiałów i prostotę wykonawstwa.

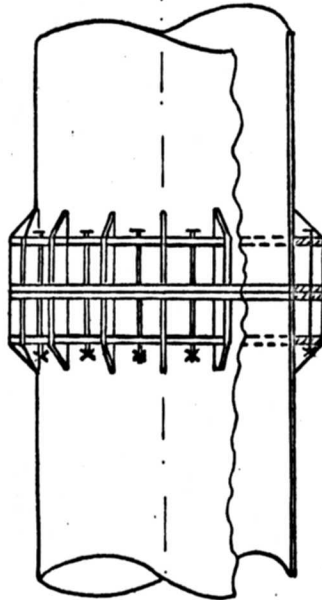
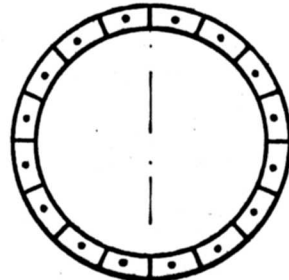
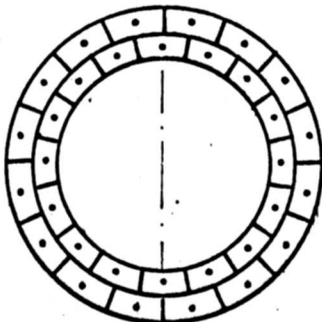
Oprócz dwóch opisanych rozwiązań, które można uznać za typowe, w budownictwie stosowane bywają, choć już znacznie rzadziej, także i inne rozwiązania połączeń, pokazane na rys.1.1.2.a-d.



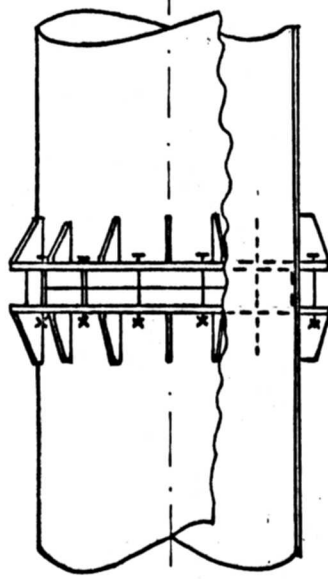
III



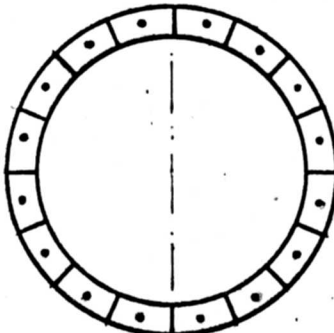
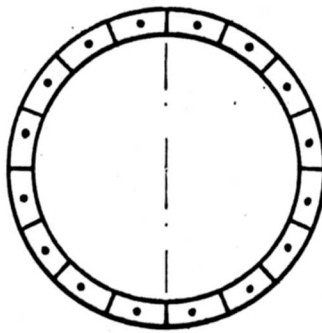
IV



V



VI

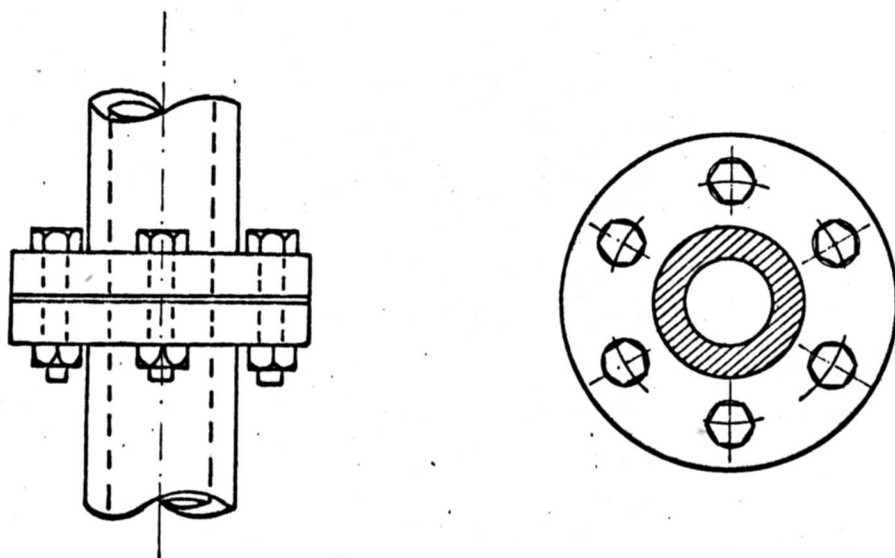


Rys. 1.1.2

Rozwiązania III i IV są stosowane często w kominach stalowych z wymurówką wewnętrzną. Wewnętrzny kołnierz pełni wówczas rolę wspornika przenoszącego ciężar wymurówki na trzon. Rozwiązania V i VI bywają niekiedy stosowane w celu uniknięcia występującego w połączeniach r. I i II zjawiska efektu dźwigni (canalizowanego w niniejszej pracy). Odznaczają się one jednak w przypadku V znacznie wyższym kosztem wykonania (podwójny kołnierz, długie śruby), a w przypadku VI - niekorzystnymi cechami technologicznymi i montażowymi (trudność zapewnienia szczelności, duża wrażliwość na niedokładność wykonania), co sprawia że celowość ich stosowania jest zdaniem autora problematyczna.

Praca dotyczy w głównej mierze połączeń typu I i II, ale pewne jej wyniki będą dotyczyły również połączeń typu III - VI.

Poza zakresem niniejszej pracy znajdują się natomiast połączenia kołnierzowe rur o niewielkich średnicach, zakończonych grubymi kołnierzami z niewielką ilością śrub, często z uszczelnieniami, pracujące pod ciśnieniem, powszechnie stosowane w różnego rodzaju armaturze przemysłowej (rys. 1.1.3).



Rys. 1.1.3

1.1.2. Zakres zastosowania

Połączenia kołnierzowe pokazane na rys. 1.1.1. stosowane są wszędzie tam, gdzie zachodzi potrzeba przeniesienia znacznych sił i momentów zginających przy jednoczesnym zapewnieniu odpowiedniej sztywności połączenia, zaś względy technologiczno-montażowe uniemożliwiają zastosowanie połączenia spawanego.

Połączenia takie są najbardziej rozpowszechnionym (obok połączeń spawanych) sposobem łączenia segmentów kominów stalowych o różnych wysokościach i o różnorodnej konstrukcji: wolnostojących, z odciągami, obudowanych wieżami kratowymi czy dodatkowymi konstrukcjami wsporczymi, por. [7, 48, 60, 61].

Drugim ważnym obszarem zastosowania połączeń są rurociągi.

Poza tym połączenia kołnierzowe bywają stosowane w różnego rodzaju masztach i słupach wsporczych o przekroju rurowym (np. kolumny wsporcze wieżowych zbiorników na wodę, maszty radiowo-telewizyjne, słupy wsporcze kolei linowych).

Połączenia kołnierzowe występują również w różnorodnych konstrukcjach o charakterze niebudowlanym jak np. kolumny żurawi wieżowych, maszty i dźwigi okrętowe.

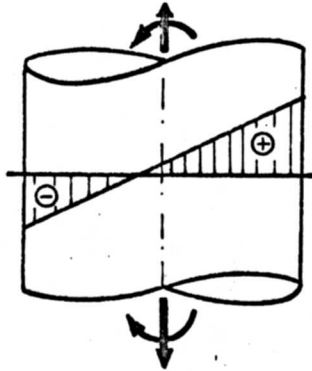
Do zalet omawianego rozwiązania konstrukcyjnego należą:

- technologiczność montażowa, rozumiana tu jako łatwość i niewielka pracochłonność montażu w warunkach budowy, brak konieczności uciążliwej rektyfikacji położenia elementów, niewrażliwość na niedokładności wykonawstwa warsztatowego (za wyjątkiem konieczności ścisłego pasowania otworów śruby w stykających się kołnierzach),
- łatwość dokonania demontażu konstrukcji, która to cecha nabiera szczególnego znaczenia w warunkach szybkiego zużycia się obiektów pracujących w środowiskach agresywnych lub wobec konieczności szybkiej modernizacji obiektów.

Do wad zaliczyć należy możliwość wystąpienia nieszczelności (przy braku wstępnego sprężenia śrub), co w przypadku kominów odprowadzających gazy lub spaliny agresywne powodować może, por. [6], narastanie procesów korozji w obrębie połączenia.

1.2. Cel i zakres pracy

Celem pracy jest zbudowanie modelu obliczeniowego połączenia kołnierzewego poddanego działaniu sił osiowych i momentu zginającego, tj. tych sił wewnętrznych których wpływ na wyężenie i deformację elementów połączenia jest dominujący.



Rys. 1.2.1

Powszechnie stosowany w praktyce projektowej sposób obliczania naprężeń w elementach połączenia (rys.1.2.1.) zakłada ich liniowy rozkład w płaszczyźnie działania momentu, zgodnie z hipotezą Bernoulliego. Tkwi w tym pewna sprzeczność, bowiem w rzeczywistości na skutek odkształcalności układu śruba - kołnierz (- ew.żebro) w strefie rozciąganej połączenia, występuje pewna deplanacja przekroju poprzecznego. Proponowany w pracy model obliczeniowy powinien zatem umożliwiać:

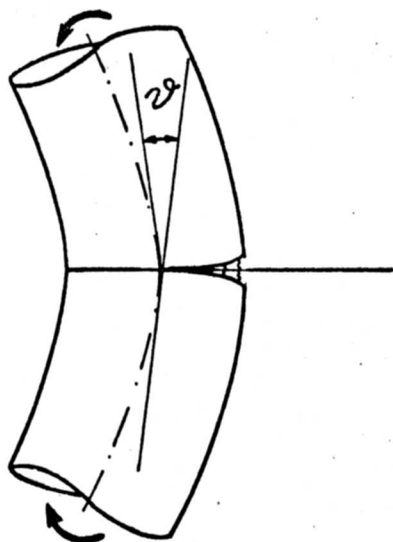
1/ badanie wpływu odkształcalności strefy rozciąganej na rozkład naprężeń w połączeniu.

Zgodnie z ogólną logiką statyki, należy spodziewać się, iż strefa rozciągana, jako mniej sztywna zostanie odciążona, kosztem zwiększenia się naprężeń w strefie ściskanej.

Z praktycznego punktu widzenia ważna będzie ilościowa ocena tego zjawiska.

2/ podanie charakterystyki odkształcalności połączenia.

Oczywistym jest fakt, że pręt rurowy składający się z segmentów łączonych połączeniami kołnierzewymi będzie miał mniejszą sztywność niż ten sam pręt wykonany jako jeden element lub łączony za pomocą połączeń spawanych. Jednym z celów jest więc podanie formuł obliczeniowych zezwalających na określenie deformacji połączenia pod wpływem działających na połączenie sił. Szczególne znaczenie ma tutaj wielkość kąta wzajemnego obrotu łączonych elementów mająca bezpośredni wpływ na ugięcia.



Rys.1.2.2

Rozwiązanie wymienionych w pkt. 1 i 2 problemów wymaga analizy deformacji i rozkładu obciążenia wokół całego obwodu połączenia. Musi być ono jednak poprzedzone ustaleniem relacji "lokalnych" wiążących obciążenie p działające na układ śruba - kołnierz - żebro w strefie rozciąganej, z wielkością parametrów deformacji tego układu, za jaki uznać można rozwarcie styku w strefie rozciąganej.

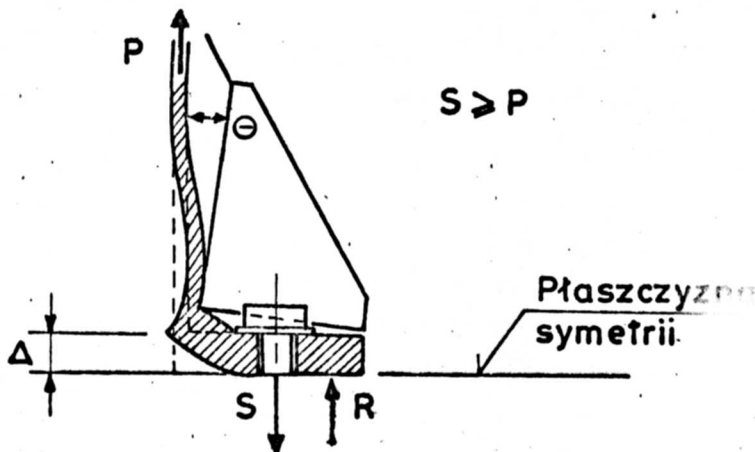
Można więc sformułować trzeci z zasadniczych celów pracy:

3/ Podanie zależności pomiędzy działającym na sektor strefy rozciąganej obciążeniem a parametrami deformacji układu śruba - kołnierz - żebro.

W naturalny sposób pojawia się problem:

4/ Określenie wielkości sił i naprężeń działających w elementach strefy rozciąganej połączenia.

W szczególności istotnym jest określenie wielkości siły rozciągającej śrubę.



Rys.1.2.3

Przy pewnych proporcjach wymiarów kołnierza zająć bowiem może wysoce niekorzystne zjawisko, zwane efektem dźwigni, polegające na niejednokrotnie znacznym zwiększeniu siły w śrubie w stosunku do wielkości sumy sił obciążenia przypadającego na pojedynczy sektor strefy rozciąganej połączenia.

Innymi poszukiwanymi wielkościami będą

- siły obciążające żebro
- lokalne spiętrzenie naprężeń wokół krawędzi powłoki.

Z punktu widzenia mechaniki, wymienione w pkt. 1+4 problemy prowadzą do zadań z tzw. więzami jednostronnymi czyli nierównościami. Ich obecność wynika ze specyfiki pracy elementów połączenia.

Przykładowo:

rozwartość styku wyniesie:

$$\Delta = 0 \text{ gdy } p \leq 0 \text{ (strefa ściskana)}$$

$$\Delta = f(p) \text{ gdy } p > 0 \text{ (strefa rozciągana)}$$

gdzie p - jest gęstością obciążenia brzegu powłoki, $f(p)$ - poszukiwana w p.3 relacja między przemieszczeniem a obciążeniem.

Przemieszczenia w obrębie płyty kołnierza muszą spełniać z kolei warunek

$$w > 0$$

wynikający z niemożności przeniknięcia powierzchni ugięcia przez płaszczyznę symetrii.

Zadania takie, nawet w przypadku założenia liniowości geometrycznej i fizycznej są zadaniami nieliniowymi. Pomimo to, dążyć się będzie do tego, aby ostateczna postać wynikających z modelu algorytmów obliczania wymienionych w pkt. 1+4 wielkości była tego rodzaju, że obliczenia te będą mogły być przeprowadzane "ręcznie" - w oparciu o elementarne wzory uzupełnione pewnymi współczynnikami korekcyjnymi podanymi tabelarycznie lub za pomocą wykresów, oraz by stopień ich skomplikowania nie był większy niż w innych tego rodzaju rachunkach, zalecanych przez obowiązujące normy projektowania różnych rodzajów konstrukcji.

Elementarny sposób obliczeń polegający na obliczeniu maksymalnej gęstości obciążenia brzegu połączenia w strefie rozciąganej wg wzoru

$$p = \frac{M}{\pi r^2} + \frac{N}{2\pi r}$$

1.2.1

a następnie obliczenia potrzebnej sumarycznej powierzchni śrub jako:

$$\sum F_s = \frac{p \cdot 2\pi r}{R'}$$

1.2.2

nie umożliwia dokonania oceny wpływu takich czynników jak:

- obecność (i ewentualnie wymiary) zeber,
- ilość i wielkość śrub przy zachowaniu tej samej powierzchni sumarycznej (np. 16M24 i 36M16),
- grubość kołnierza

na wyężenie śruby.

Model obliczeniowy uwzględniający wyżej wymienione efekty, może stać się cennym narzędziem umożliwiającym wybór optymalnego rozwiązania konstrukcyjnego i obliczenie właściwych wymiarów elementów połączenia, w miejsce postępowania opartego o tzw. "wyczucie konstrukcyjne". W układzie o pewnym stopniu złożoności jakim niewątpliwie jest połączenie kołnierzowe, postępowanie takie może bowiem prowadzić zarówno do przewymiarowania jednych elementów, jak i do niedowymiarowania innych, a w konsekwencji może prowadzić bądź do niepotrzebnego zwiększenia kosztu konstrukcji lub do obniżenia jej niezawodności.

1.3. Podstawowe założenia

Przedstawiony model obliczeniowy połączenia oparty jest na niżej wymienionych, podstawowych założeniach

Założenie 1

Zakłada się, że przemieszczenia i ich gradienty pozostają na tyle małe, iż słuszne są liniowe związki geometryczne pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami oraz zasada zeszywnienia, a wielkości katowe związane z deformacją można utożsamić z ich tangensem lub sinusem.

Założenie 2

Naprężenia w elementach połączenia pozostają mniejsze od granicy proporcjonalności i tym samym związki fizyczne mają charakter liniowy.

Powyższe założenie nie powinno budzić zastrzeżeń w odniesieniu do płaszcza rury i śrub, których wymiary powinny być tak dobrane, by uplastycznienia (nie licząc lokalnych wywołanych koncentracją naprężeń) nie następowały. Jego słuszność może być ograniczona jedynie w odniesieniu do obszaru kołnierza, gdzie już przy stosunkowo niewielkich obciążeniach mogą wystąpić lokalne uplastycznienia, tak że w szerokim zakresie obciążeń kołnierz może pracować jak płyta sprężysto-plastyczna.

Model oparty o założenie liniowo sprężystej pracy kołnierza da jednak zawsze bezpieczne oszacowanie dla tak podstawowej wielkości jaką jest siła rozciągająca śrubę. Potwierdzają to wyniki badań innych połączeń doczołowych, gdzie zawsze obserwowano spadek efektu dźwigni w miarę uplastyczniania się blach czołowych, por. [1,2].

Założenie 3

Deformacja płaszcza rury może być opisana związkami zgięciowej teorii powłok walcowych, w wersji uproszczonej przez Własowa, por. [20,42], które przy braku obciążeń powierzchniowych przyjmują postać

$$u'' + \frac{1-\nu}{2} u'' + \frac{1+\nu}{2} v' + \nu w' = 0 \quad 1.3.1$$

$$\frac{1+\nu}{2} u'' + v'' + \frac{1-\nu}{2} v'' + w'' = 0 \quad 1.3.2$$

$$\nu u' + v' + w + k (w^{IV} + 2w'''' + w''''') = 0 \quad 1.3.3$$

Zgodnie z danymi z literatury [37,39], ich przyjęcie jest dopuszczalne przy dużych wartościach stosunku $\lambda = r/g$, tak jak to ma miejsce w rozważanym przypadku.

Główna korzyść z przyjęcia tych uproszczonych równań (zamiast pełnego kompletu równań teorii zgięciowej) polega na możliwości dokładnego rozwiązania otrzymywanych równań charakterystycznych co pozwala na uzyskiwanie zamkniętych formuł dla poszukiwanych wielkości.

Założenie 4

Deformacja kołnierza może być opisana na podstawie równań teorii płyt średniej grubości Mindlina-Reissnera.

Założenie 5

Podział połączenia na sektory jest dostatecznie gęsty, na to by można było rozpatrywać wielkości przemieszczeń i naprężeń w strefie rozciąganej uśrednione i rozmyte w sposób ciągły.

Szczegółowo, założenie to jest rozwinięte i uzasadnione w punktach 2.1 (Zał.1-2) i w p. 3.1 (Zał.4).

Założenie 6

Rozważa się połączenia symetryczne, tj. takie w których oba łączone elementy, ich kołnierze, żebra mają identyczne wymiary (założenie to jest w istotny sposób wykorzystane przy wyprowadzaniu równań modelu).

Założenie 7

Rozważa się konstrukcję idealną, tj. bez imperfekcji geometrycznych i materiałowych.

Pozostałe założenia są podane przy formułowaniu poszczególnych problemów obliczeniowych w rozdziałach 2.1 i 3.1.

1.4. Omówienie stosowanych metod i ogólnego toku postępowania

W drugiej części pracy badane jest zagadnienie odkształcalności i rozkładu sił w układzie śruba-kołnierz-zebro. Na wstępie, w pkt. 2.2 wyprowadza się podstawowe relacje wiążące przemieszczenia i siły w elementach układu. Wykazuje się, że w połączeniu uźebrowanym sztywność utwierdzenia zebra w powłoce ma wpływ na podatność układu jak i na wielkość siły w śrubie.

Punkt 2.3. poświęcony jest obliczeniu współczynnika C_θ wiążącego działający na zebro moment z kątem jego obrotu. W tym celu formułuje się zadanie o powłoce walcowej obciążonej momentem za pośrednictwem sztywnego nieskończonego cienkiego stempla o skończonej długości.

Wprowadzona w załączniku Z 2 funkcja wpływu przemieszczeń radialnych wzdłuż tworzącej powłoki pozwala sprowadzić to zadanie do równania całkowitego Fredholma I rodzaju, dla rozwiązania którego opracowano specjalny algorytm.

Wyniki obliczeń przedstawia się podając współczynnik sztywności jako funkcję wysokości zebra ze współczynnikami zależnymi od pozostałych parametrów.

Punkt 2.4. poświęcony jest analizie deformacji i sił działających w układzie kołnierz - śruba.

Modelem obliczeniowym jest tu płyta średniej grubości poddana więzom jednostronnym (ograniczeniom nierównościowym dla ugięć). Zagadnienie to rozwiązuje się wychodząc ze sformułowania wariacyjnego, na drodze minimalizacji z ograniczeniami funkcjonału energii potencjalnej, przy użyciu metody zewnętrznego funkcjonału kary i dyskretyzacji MES. Podaje się algorytm i opis własnego programu (o nazwie PENAL), służącego analizie płyt sprężystych dowolnego kształtu w warunkach ograniczeń nierównościowych dla ugięć, oraz opis programu PENSEC, bazującego na programie PENAL, ale ukierunkowanego na analizę sektora kołnierza.

Przedstawia się usystematyzowane wyniki obliczeń z ponad 700 przypadków obliczeniowych różniących się geometrią i zadawaną wielkością pewnego parametru deformacji związanego z kątem obrotu zebra. Poszukiwana podatność i siły są przedstawione jako funkcja tego parametru, co pozwala na sformułowanie odpowiedniego równania zgodności umożliwiającego określenie wartości tego parametru w powiązaniu z wyliczoną sztywnością

utwierdzenia żebra w powłoce. Praktyczny sposób postępowania pozwalający na obliczenie, w oparciu o uzyskane wyniki poszukiwanych wielkości takich jak:

- podatności układu
- siły w śrubie
- sił działających na zebro,

i innych, przy użyciu elementarnych wzorów i stabelaryzowanych współczynników jest treścią p.2.5.

Wyniki rozdziału 2 poświęconego "lokalnej" analizie deformacji strefy rozciąganej połączenia będą wykorzystane w rozdziale 3 gdzie formułuje się model obliczeniowy "globalny" (tj. obejmujący całość połączenia), spełniający postulaty 1-2 z p.1.2. Znalaziona w załączniku funkcja wpływu przemieszczeń podłużnych krawędzi powłoki wokół obwodu pozwala na sformułowanie układu nieliniowych (z uwagi na jednostronny charakter więzów) równań całkowo-algebraicznych na poszukiwaną funkcję rozkładu obciążenia wokół obwodu połączenia, oraz na parametry określające deformację połączenia jako przegubu sprężystego o nieliniowej charakterystyce.

Równania te rozwiązywane są dwoma niezależnymi od siebie metodami wykorzystującymi dwa różne sposoby aproksymacji funkcji rozkładu obciążenia. Wyniki obejmują uzyskane postacie rozkładu obciążenia oraz formułę analityczną (częściowo uzasadnioną teoretycznie) na wzajemny kąt obrotu łączonych elementów w zależności od sił (M, N) działających na połączenie.

W pkt.3.5. podaje się algorytmy określania parametrów rozkładu obciążenia i deformacji połączenia, oparte podobnie jak w p.2.5. o elementarne wzory i tabele współczynników.

W rozdziale 4 pokazuje się przykładowe obliczenia praktyczne wykonane wg proponowanego modelu. Obejmują one obliczanie naprężeń w elementach, obliczanie potrzebnych wymiarów elementów (np. wysokości żebra usztywniającego), analizy porównawcze różnych rozwiązań, a także na zakończenie, podaje się pewne wynikające z modelu zasady prawidłowego kształtowania połączeń.

W zakończeniu, oprócz podsumowania, podaje się możliwości uściślenia modelu i kierunki dalszych badań, oraz propozycje jego weryfikacji doświadczalnej.

Załączniki zawierają wprowadzenia używanych funkcji wpływu dla powłoki walcowej, oraz problemy o charakterze

numerycznym których rozwiązanie było niezbędne dla efektywnego rozwiązania równań opisujących model.

Stosowane w pracy metody obliczeniowe częściowo mają charakter półanalityczny, częściowo zaś czysto numeryczny, przy czym starano się ograniczyć zakres tych ostatnich do niezbędnego minimum. Stany deformacji poszczególnych elementów układu są najpierw analizowane odrębnie co prowadzi do zadań średniej wielkości a dopiero później następuje synteza całego modelu obliczeniowego.

Podejście takie, choć w pewien sposób przybliżone, umożliwia jednak wniknięcie w związki przyczynowo-skutkowe pomiędzy poszczególnymi parametrami geometrycznymi połączenia, a występującymi siłami i deformacją. Zdaniem autora, próba przeprowadzania podobnych analiz przy użyciu czystych metod komputerowych byłaby skazana na niepowodzenie, nawet w przypadku zastosowania dużego systemu z biblioteką elementów i możliwością formułowania zadań z więzami jednostronnymi (np. ADINA).

Główną przyczyną byłyby tu wymiary zadania. Przykładowo - dla połączenia uźebrowanego chcąc uwzględnić jednocześnie efekt podatności utwierdzenia żeber w powłoce, deformację kołnierza we wszystkich sektorach oraz deplamację przekroju z porównywalną jak w zastosowanych metodach dokładnością należałoby wprowadzić dyskretyzację układu o liczbie (szacunkowo) co najmniej kilku tysięcy stopni swobody na jeden sektor. Już przy liczbie kilkunastu sektorów w połączeniu prowadziłyby to do zadania o wymiarach przekraczających możliwości największych komputerów (nie mówiąc już o kosztach takiego przedsięwzięcia). Nawet jeśli następne generacje EMC umożliwiłyby podjęcie tego typu zadania, to już analiza wpływu poszczególnych czynników geometrycznych wymagająca wielokrotnego ich różnicowania wydaje się być niewykonalna.

Główną korzyść jaką dają zastosowane w pracy metody półanalityczne polega na tym, iż znajdując funkcje wpływowe przemieszczeń, dla poszczególnych przypadków obciążenia dokonuje się przejścia z zadań dwuwymiarowych do jednowymiarowych (opisanych równaniami całkowitymi). Niezależnie od pewnych komplikacji, liczby stopni swobody w rozpatrywanych zadaniach jednowymiarowych są o conajmniej 2 rzędy mniejsze niż by to było konieczne przy numerycznym rozwiązywaniu zadań

dwuwymiarowych (z porównywalną dokładnością).

Pomimo, iż rozważany model obliczeniowy połączenia wymaga przeprowadzenia stosunkowo dużych obliczeń komputerowych, o tyle jego stosowanie jest w pełni możliwe przy użyciu podręcznych środków rachunkowych (kalkulator, suwak).

Osiągnięto to stosując konsekwentnie systematyzację uzyskiwanych wyników w formie zależności funkcyjnych, których postacię określono na drodze aproksymacji wyników analiz numerycznych, podobnie jak się to robi z wynikami doświadczeń.

1.5. Omówienie literatury

Na podstawie dokonanego przeglądu dostępnych prac z zakresu konstrukcji metalowych, budowy maszyn i teorii konstrukcji, należy na wstępie stwierdzić, iż zadanie sprecyzowane w p.1.2 nie zostało dotychczas podjęte.

Istnieje jednak pewna liczba publikacji dotycząca zagadnień pokrewnych, takich jak:

- 1" analiza pracy śruby w rozciągającym połączeniu doczołowym, z uwzględnieniem wstępnego jej napięcia
- 2" analiza odkształcalności i wyężenia połączeń doczołowych w belkach zginanych
- 3" analiza wpływu podatności więzów na rozkłady sił wewnętrznych w konstrukcjach, oraz bogata literatura dotycząca zadań z więzami jednostronnymi w mechanice.

Pierwsze z wymienionych zagadnień jest przedmiotem badań już od ok. 60 lat tj. od czasu ukazania się pracy [50]. W dalszych pracach podejmowane są próby coraz dokładniejszego modelowania układu śruba-łączone blachy, poczynając od prostych modeli mechanicznych [4,5,21,30], poprzez rozwiązania oparte na analizie osiowo-symetrycznych zadań liniowej teorii sprężystości, [17,51,52] aż po prace najnowsze wykorzystujące MES [11, 23,43,55,58,59], oraz prace doświadczalne i analityczno-doświadczalne, [13,14,29,54].

Centralnym problemem we wszystkich wymienionych pracach było ustalenie:

- sztywności pojedynczego złącza
- zależności między obciążeniem a siłą w śrubie.

Uzyskiwane wyniki są jednak w zasadzie nieprzydatne w niniejszej

pracy, gdyż dotyczyły

1' stanu osiowo symetrycznego (za wyj. pracy [55])

2' znacznej sztywności łączonych blach

3' wstępnego napięcia śruby, tak jak jest to praktykowane w połączeniach części maszyn, w naczyniach ciśnieniowych i innych konstrukcjach o charakterze mechanicznym. Pomijano zaś w nich aspekt płytowej odkształcalności blach czołowych w dalszej odległości od śruby, charakterystyczny dla mniejszych sztywności blach czołowych (kołnierzy) stosowanych w konstrukcjach budowlanych. Jedynie w pracy [55], odstępując od założeń osiowej symetrii podejmuje się próbę modelowania za pomocą MES rozciąganego połączenia kołnierzowego (ale o geometrii jak na rys.1.2.3, wykraczającej poza zakres niniejszej pracy). Zastosowano dyskretyzację elementami przestrzennymi i analizę w zakresie sprężysto plastycznym. Przedstawione wyniki mają jednak charakter wyłącznie ilustracyjny.

Połączenia doczołowe belek stalowych lub belek ze słupami sprężone lub niesprężone były terenem intensywnych badań, głównie o charakterze doświadczalnym [1,2]. Obszerne zestawienie uzyskanych wyników prac różnych autorów oraz bogatą bibliografię podaje praca [36].

Tam też przytacza się pewne zalecenia odnośnie sposobów wymiarowania i konstruowania takich połączeń. Zwraca się uwagę na duże znaczenie zjawisk takich jak efekt dźwigni, nierównomierność rozkładu sił na poszczególne śruby, odkształcalność połączenia.

Pomimo tego, iż w wielu krajach ukazały się normy i przepisy odnośnie konstruowania połączeń doczołowych, por [63], wobec dużej złożoności zjawisk mechanicznych zachodzących w połączeniu, często niemożliwych do ujęcia nawet współczesnymi środkami obliczeniowymi wykorzystującymi MES, można stwierdzić że zagadnienia takie jak określanie nośności i charakterystyk odkształcalności połączeń, nie mają jeszcze ostatecznych rozwiązań dobrze udokumentowanych teoretycznie jak i doświadczalnie.

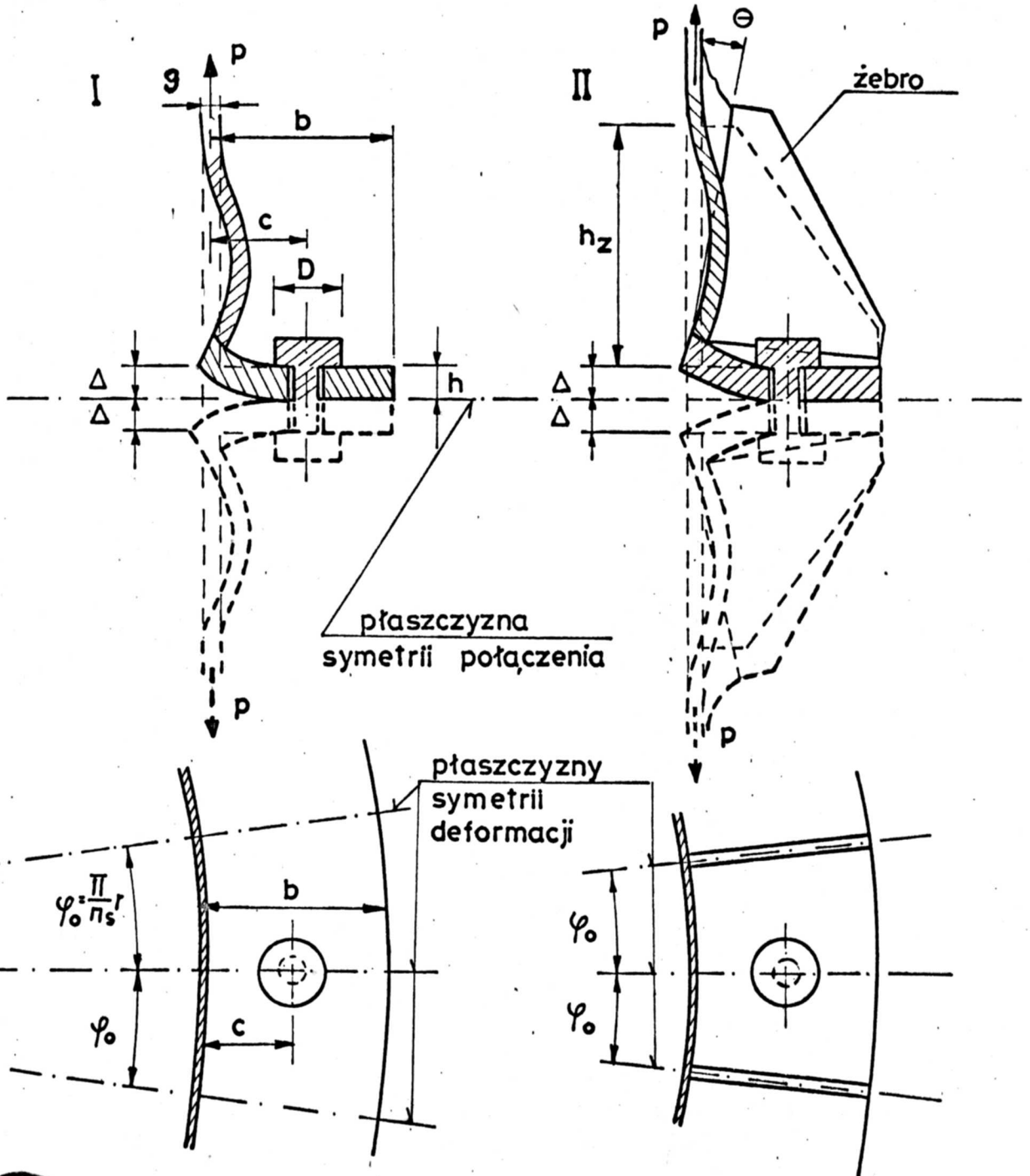
Niezależnie od powyższej sytuacji pojawiają się prace dokonujące oceny wpływu odkształcalności połączeń śrubowych (doczołowych i innych) na siły wewnętrzne i stateczność konstrukcji wymienić tu można pozycje [10,53].

Odniesienia do pozostałych pozycji literatury wymienionych w załączonym wykazie dokonuje się w toku ich wykorzystywania.

2. Analiza deformacji i rozkładu sił w układzie śruba-kołnierz-żebro w strefie rozciąganej

2.1 Sformułowanie zagadnienia i podstawowe założenia

Rozważa się fragment strefy rozciąganej symetrycznego połączenia kołnierzowego, nieuzębowanego (typ I) lub uzębowanego (typ II), obciążony w pewnej odległości od połączenia obciążeniem o intensywności p na jednostkę długości obwodu powłoki

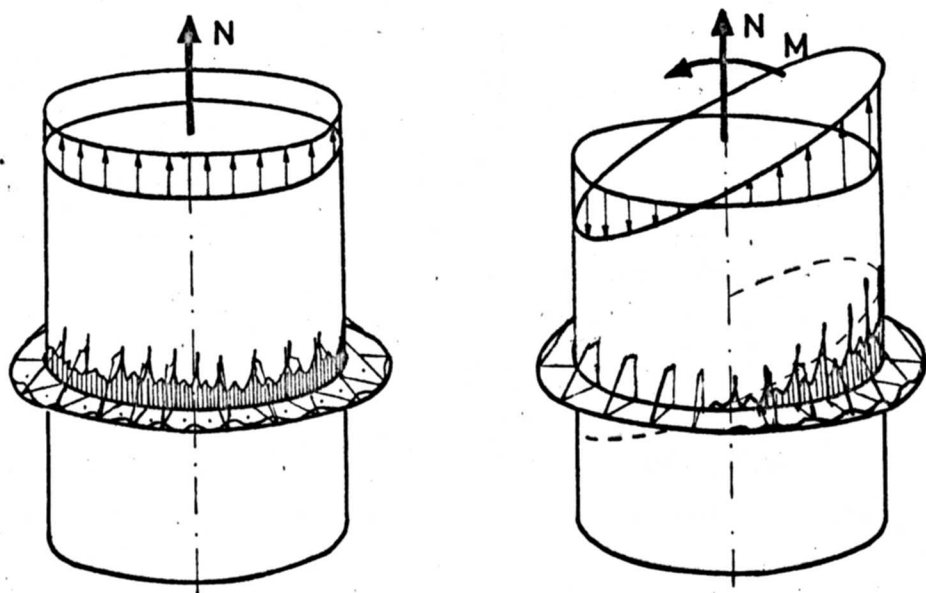


Rys. 2.1.1

Przyjmuje się następujące założenia:

Założenie 1

Stany deformacji i naprężenia w sąsiadujących ze sobą sektorach połączenia różnią się na tyle mało, że różnice te można zaniedbać. Jest to równoważne z przyjęciem schematu obliczeniowego pojedynczego sektora połączenia obciążonego mimośrodowo tak samo jak dla przypadku osiowego rozciągania połączenia. Charakteryzuje się on symetrią względem płaszczyzn pionowych przechodzących przez śruby, jak i względem płaszczyzn wyznaczonych przez żebra. To upraszczające założenie (bez którego jednak analiza numeryczna byłaby praktycznie niemożliwa) będzie tym lepiej spełnione przez rzeczywisty stan deformacji i naprężenia w połączeniu obciążonym mimośrodowo, im gęstszy jest podział połączenia na sektory, oraz im łagodniejszy jest przebieg funkcji rozkładu uśrednionego obciążenia wokół brzegu powłoki.



Rys. 2.1.2

Będzie ono najlepiej spełnione w punktach maksymalnie odległych od osi obojętnej czyli tam, gdzie występujące przemieszczenia i naprężenia osiągają maksymalne wartości.

Założenie 2

Pomija się wpływ lokalnych zaburzeń w rozkładzie obciążenia brzegu powłoki wywołanych obecnością żeber i nierównomiernym rozkładem reakcji z kołnierza na stan jej przemieszczeń w kierunku tworzącej, por. założenie 4 z p. 3.1

Założenie 3

Ugięcia kołnierza mogą być z dostateczną dokładnością opisane za pomocą teorii płyt średniej grubości Mindlina - Reissnera. Wymiary kołnierzy stosowane w praktyce charakteryzują się stosunkami h/b (h -grubość, b -mniejszy wymiar poprzeczny) będącymi liczbami z przedziału 0.1+0.3. Przedział ten w zasadzie odpowiada zakresowi ważności wspomnianej teorii, por. [31,37,56], wykracza natomiast poza obszar stosowalności klasycznej teorii płyt cienkich.

Założenie 4

Dla połączenia typu II (uźebrowanego), na skutek pojawienia się momentu od reakcji działających na zebro, może ono doznać obrotu wokół punktu O. Sztywność utwierdzenia zebra w powłoce może być określona w oparciu o uproszczoną wersję zgięciowej teorii powłok walcowych.

Zasadniczymi wielkościami poszukiwanymi są:

- 1) przemieszczenie Δ (rozwarcie brzegów powłoki) towarzyszące zadanemu obciążeniu,
- 2) siła S rozciągająca śrubę,
- 3) rozkład naprężeń wokół brzegu powłoki i rozkład sił wewnętrznych w kołnierzu.

ad 1)

Wobec przyjętych ogólnych założeń o liniowo sprężystej pracy materiału, liniowości związków geometrycznych, oraz wobec założenia o braku wstępnego luzu w połączeniu, związek $p-\Delta$ może być jedynie związkiem liniowym postaci:

$$\Delta = k p, \quad 2.1.1$$

gdzie k jest pewnym współczynnikiem proporcjonalności, zwanym dalej podatnością połączenia, o wymiarze $[m^2 N^{-1}]$, lub pochodnym.

Poszukiwanie przemieszczeń Δ odpowiadających zadanemu obciążeniu jest więc równoważne poszukiwaniu wielkości podatności połączenia k . Wygodny sposób postępowania będzie polegał na zadaniu kinematycznego wymuszenia w postaci jednostkowego przemieszczenia Δ wokół obwodu powłoki a następnie na obliczeniu sumy P reakcji z kołnierza i ewentualnie z zebra działających na powłokę odpowiadających

temu stanowi. Średnie obciążenie wyniesie wówczas :

$$p = \frac{P}{\alpha} \quad , \quad 2.1.2$$

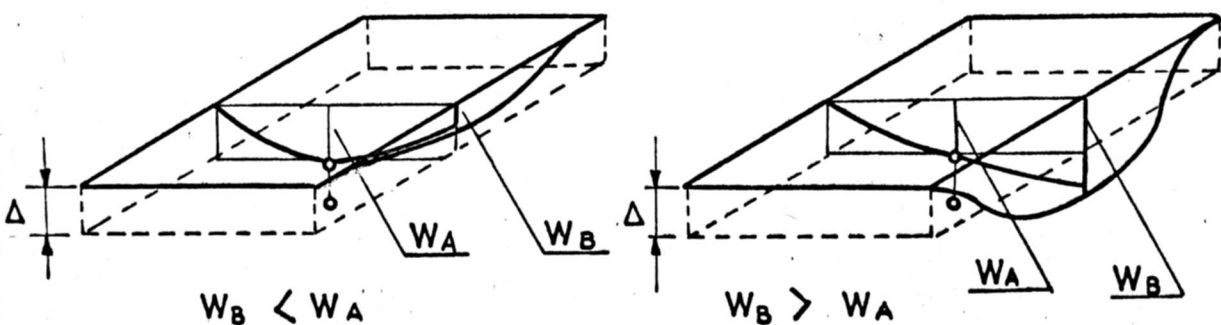
a poszukiwana podatność:

$$k = \frac{1}{p} \quad . \quad 2.1.3$$

ad 2)

Siła S rozciągająca śrubę jest na ogół istotnie większa niż suma obciążenia $P = p \alpha$, przypadająca na dany sektor połączenia. To wysoce niekorzystne zjawisko, zwane dalej efektem dźwigni, wynika z opisanej poniżej przyczyny.

Powierzchnia ugięcia płyty, będącej modelem obliczeniowym pojedynczego sektora kołnierza, przy zadanym przemieszczeniu Δ wokół brzegu i działającej w p . A więzi sprężystej symulującej śrubę, może przyjmować postać jak na rys. 2.1.3a lub 2.1.3b, w zależności od proporcji wymiarów a/b .

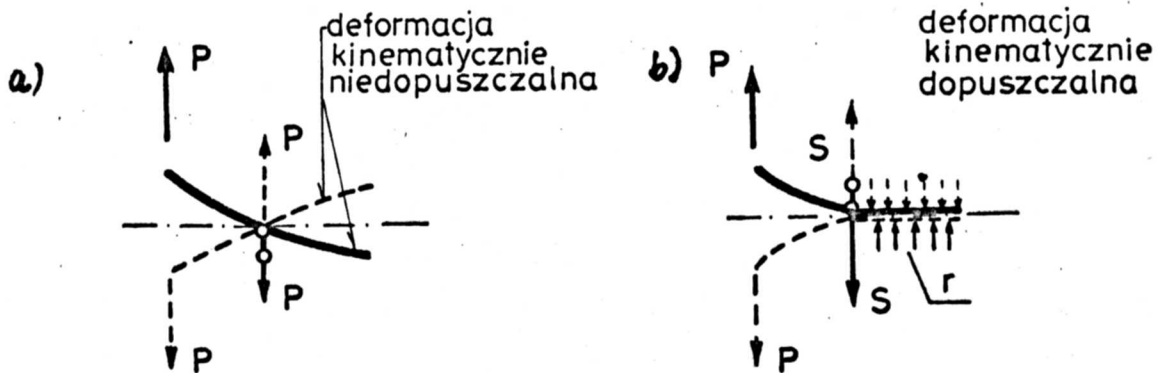


Rys. 2.1.3

W przypadku a/ efekt dźwigni nie wystąpi i wówczas wprost $S = P$. Sytuacja taka zajdzie wtedy gdy podział na sektory jest dostatecznie gęsty.

Przypadek b/ prowadzi do wystąpienia efektu dźwigni. W rzeczywistości bowiem deformacja jak na rysunku 2.1.3b jest kinematycznie niedopuszczalna gdyż narusza warunek wzajemnego nieprzenikania się stykających się ze sobą kołnierzy łączonych elementów.

Powierzchnia ugięcia płyty przyjmie kinematycznie dopuszczalną postać, pokazaną schematycznie na rys. 2.1.4b, dopiero pod wpływem dodatkowego układu sił oznaczonych r , będących w istocie reakcjami na dodatkowej więzi o charakterze nierówności $w \geq 0$, narzuconej na przemieszczenia.



Rys. 2.1.4

Reakcje te mogą być skierowane jedynie do góry z uwagi na jednostronny charakter więzu i tym samym zawsze $S > P$. Istotne, z praktycznego punktu widzenia będzie więc dokładne określenie relacji pomiędzy P i S dla zadanej geometrii połączenia.

ad 3)

Znajomość rozkładu reakcji z płyty kołnierza działających na powłokę i na żebro pozwoli na właściwą ocenę stopnia wyteżenia spoin łączących te elementy. Dla właściwego doboru grubości kołnierza potrzebna jest również znajomość wielkości występujących w nim sił wewnętrznych, tj. momentów zginających i sił poprzecznych.

Model połączenia zbudowany w celu uzyskania możliwości obliczania wymienionych w punktach 1) + 3) wielkości statycznych i kinematycznych, musi uwzględniać fakt, że dla większości praktycznie ważnych przypadków, wydłużenie śruby, przemieszczenie żebra wywołane ograniczoną sztywnością jego utwierdzenia w powłoce, ugięcie płyty kołnierza są wielkościami tego samego rzędu. Koniecznym jest więc łączne rozpatrywanie tych trzech wymienionych czynników.

2.2 Model obliczeniowy pojedynczego sektora połączenia .

2.2.1 Elementy modelu.

Elementami proponowanego modelu obliczeniowego pojedynczego sektora połączenia są :

a) Sprężyste wydłużająca się śruba, traktowana jak więz sprężysty działający na kołnierz w obszarze zajmowanym przez nakrętkę lub łeb śruby. Wobec proporcji wymiarów nakrętki i kołnierza uznano że modelowanie śruby jako więzu działającego na kołnierz punktowo byłoby uproszczeniem zbyt daleko idącym.

Analizę stanu naprężenia w śrubie i otaczającym ją obszarze kołnierza ,uwzględniającą lokalnie występujące zjawiska kontaktowe, uplastycznienia, siły tarcia przeprowadzono w pracy [34],ale przy istotnym upraszczającym założeniu osiowej symetrii .Proba sformułowania analogicznego problemu dla stanu deformacji w pełni trójwymiarowego, sprzężonego ze stanem deformacji w całym obszarze wycinka kołnierza prowadziłaby do zadania, którego rozmiary, z uwagi na konieczność uwzględnienia dużej liczby stopni swobody, oraz silną nieliniowość, wykraczałyby poza możliwości aktualnie dostępnych w Polsce środków obliczeniowych.

Proponowany poniżej model obliczeniowy układu śruba-kołnierz polega na wprowadzeniu sprężystego podłoża typu Winklera w obszarze kołnierza odpowiadającym obrysowi nakrętki lub łba śruby, o powierzchni F_n .Stałą podatności podłoża c_o dobiera się tak by zachodził warunek 2.2.1 zgodności siły w śrubie ,liczonej jako całka z sił reakcji tego podłoża

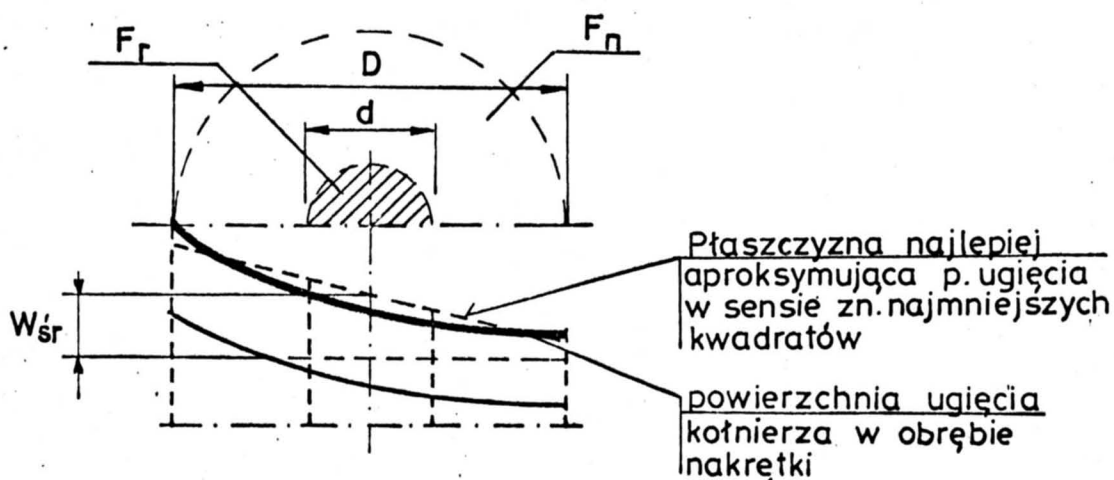
$$S = \int_{F_n} c_o w(x,y) dF_n = \frac{EF_r}{h} w_{sr} , \quad 2.2.1$$

z siłą ,która w śrubie o długości h i powierzchni rdzenia F_r , wywołuje wydłużenie w_{sr} równe średniej wartości funkcji przemieszczeń $w(x,y)$ w obszarze nakrętki

$$w_{sr} = \frac{1}{F_n} \int_{F_n} w(x,y) dF_n . \quad 2.2.2$$

Stąd:

$$c_o = \frac{EF_r}{hF_n} . \quad 2.2.3$$



Rys. 2.2.1

Warunek zgodności deformacji śruby i kołnierza spełniony jest więc w sensie wartości średniej

b) Płyta kołnierza, której deformacja opisana równaniami płyt średniej grubości poddana jest więzom typu podłoża Winklera (w obszarze nakrętki), jednostronnemu (nierównościo-wemu) ograniczeniu dla ugięcia $w \geq 0$ w całym obszarze wynikają-cemu z warunku niemożliwości przeniknięcia powierzchni ugięcia kołnierza przez płaszczyznę symetrii połączenia, oraz wymuszonym przemieszczeniom na brzegu.

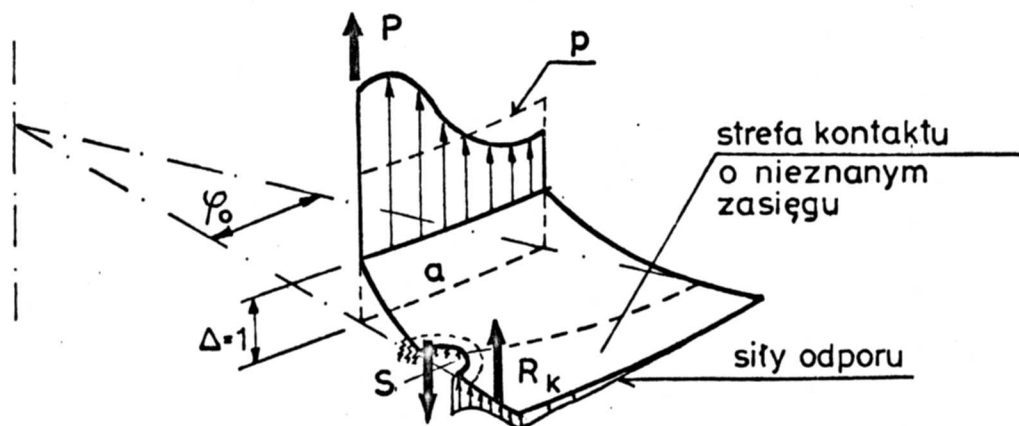
c) Zebro, doskonale sztywne w swojej płaszczyźnie, sprężystie zamocowane w powłoce. Kąt o jaki zebro obróci się pod wpływem przyłożonego doń momentu określa się rozwiązując odpowiednie zagadnienie kontaktowe dla powłoki walcowej.

W płaszczyznach żeber (lub w płaszczyznach dwusiecznych ką-tów wyznaczonych przez płaszczyzny śrub dla połączeń typu I), jak i w płaszczyznach śrub panują statyczne i kinematyczne warunki wynikające z symetrii względem tych płaszczyzn.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania powyżej sformułowanych zadań należy określić podstawowe relacje zachodzące między wielkościami statycznymi i kinematycznymi w połączeniu, tak by na ich podstawie można było sprecyzować oczekiwania i wymagania w stosunku do sposobu interpretacji otrzymanych wyników.

2.2.2 Podstawowe relacje między siłami i parametrami deformacji połączenia.

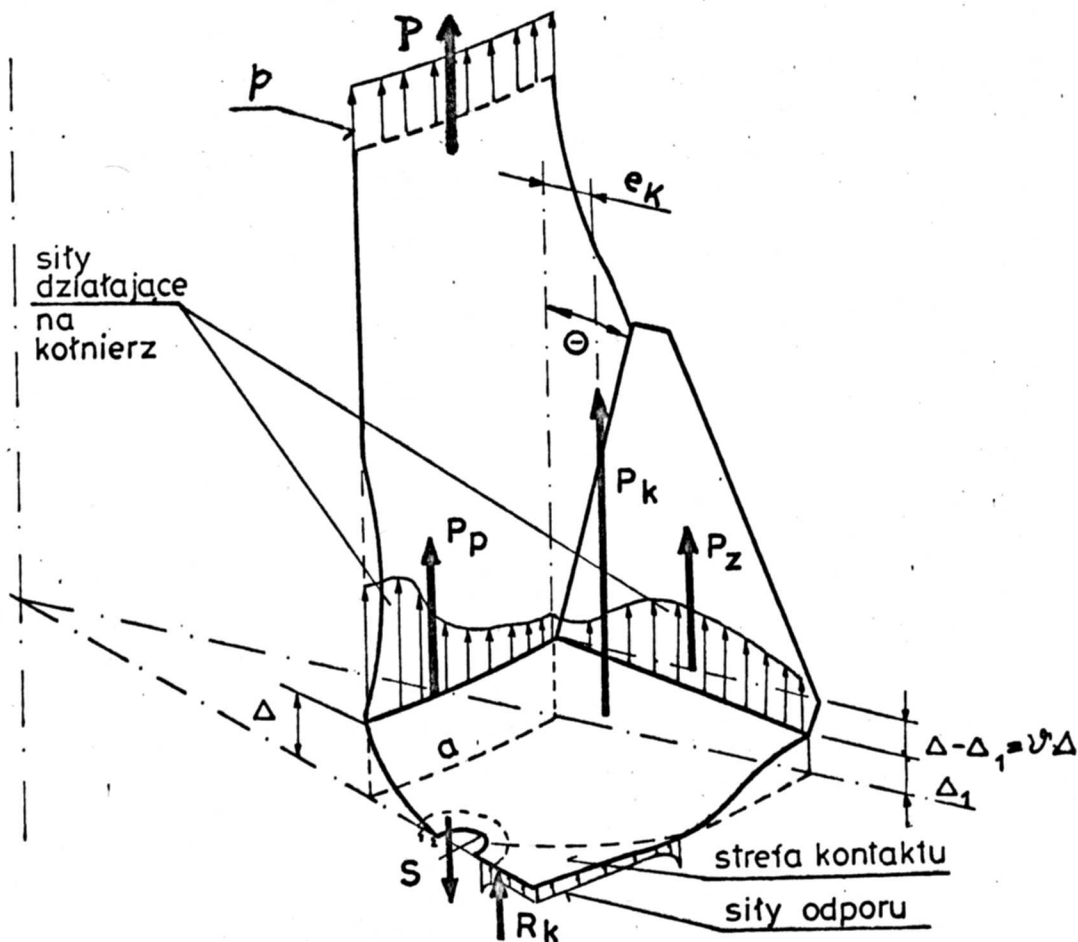
Możliwą postać deformacji i siły działające na połowę sektora kołnierza w połączeniu nieuzębrowanym pokazano na rysunku 2.2.2.



Rys. 2.2.2

Dla połączenia typu I (nieuzębrowanego) podstawowe wielkości wg p 10-30 z rozdz. 2.1, tj. k, S, p_{\max} będzie można znaleźć wprost z rozwiązania zagadnienia wycinka płyty poddanego wymuszonym przemieszczeniom na brzegu, na drodze odpowiedniego scałkowania sił reakcji.

Sytuacja komplikuje się dla połączenia uzębrowanego (typ II). Tu bowiem wszystkie wielkości statyczne w płycie kołnierza zależą będą od kąta θ określającego przebieg wymuszonych przemieszczeń wzdłuż linii połączenia zębca z kołnierzem. W szczególności od θ zależą będzie moment M_z sił działających na zebro. Z kolei rozważania przedstawione w p. 2.3 pozwalają zapisać związek pomiędzy działającym na zebro momentem, a towarzyszącym mu kątem obrotu. Tak więc kąt θ jest pewną wielkością nadliczbową, którą wyznaczyć można dopiero po rozwiązaniu serii zadań dla płyty kołnierza przy różnych wielkościach kąta θ , zapisaniu uzyskanych z tych zadań wielkości M_z, R i innych jako jego funkcji, a następnie po sformułowaniu i rozwiązaniu wynikającego stąd równania zgodności.



Rys. 2.2.3

Przyjmuje się następujące oznaczenia :

-bezwymiarowy parametr postaci deformacji

$$\vartheta = \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta} = \frac{b}{\Delta} \theta \quad 2.2.4$$

(wymienione poniżej wielkości ,za wyjątkiem C_θ ,są traktowane jako jego funkcje)

$P_k = P_k(\vartheta)$ - wypadkowa reakcji z kołnierza działających na zebro i na powłokę

$$P_k = P_p + P_z = S - R_k \quad 2.2.5$$

$P = P(\vartheta)$ - suma obciążenia powłoki przypadająca na połowę jednego sektora

$k_o = k_o(\vartheta)$ - podatność kołnierza uwzględniająca również wydłużalność śruby

$S = S(\vartheta)$ - siła rozciągająca śrubę

$R_k = R_k(\vartheta)$ - wypadkowa sił odporu w strefie kontaktu w obrębie kołnierza

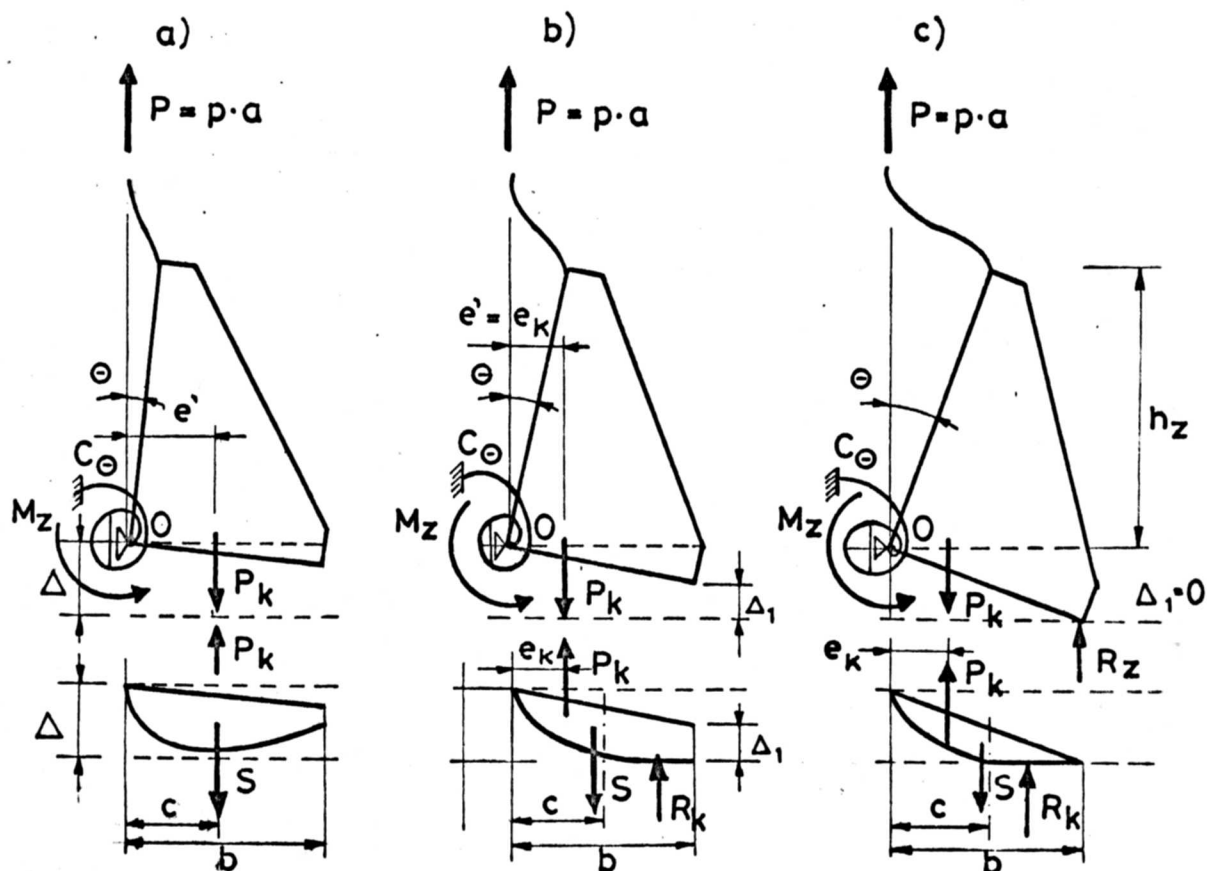
$e_k = e_k(\vartheta)$ - odległość prostej działania wypadkowej P_k od p.O

$M_z = M_z(\vartheta)$ - moment sił działających na zebro względem p.O

$$M_z(\vartheta) = e'(\vartheta) P(\vartheta) \quad 2.2.6$$

C_θ - współczynnik sztywności utwierdzenia zebra w powłoce

W zależności od sztywności poszczególnych elementów układu mogą zajść następujące trzy sytuacje :



Rys 2.2.4

ad a) Efekt dźwigni nie zachodzi , wówczas wprost :

$$P = P_k = S ; R_k = 0 ; e = e_k \cong c$$

ad b) $0 < \Delta_1 < \Delta ; 0 < \vartheta < 1$

Nastąpił obrót żebra o kąt $\vartheta < \frac{\Delta}{B}$.Efekt dźwigni wywołany jest obecnością sił reakcji R_k działających jedynie w obszarze kołnierza ,zmniejszeniu ulega mimośród e_k .

$$e = e_k < c ; S > P_k$$

ad c) $\vartheta = \frac{\Delta}{B} , \Delta_1 = 0 , \vartheta = 1$

Kąt obrotu przyjmuje największą z możliwych przy zadanym Δ wartość , pojawia się dodatkowa siła reakcji R_z , której punkt przyłożenia, wobec założenia o nieodkształcalności żebra znajduje się w jego narożu .Na skutek jej działania dalszemu zmniejszeniu ulegnie moment sił działających na żebro, a suma obciążenia działająca na płytę kołnierza P_k będzie większa niż przypadające na nią obciążenie z powłoki.

Dla rozróżnienia przypadków b) i c) wprowadza się określenia :

dla przypadku b) - kołnierzowy efekt dźwigni

dla przypadku c) - żebrowy efekt dźwigni.

W przypadku c) komplet równań równowagi sił działających na żebro i zgodności geometrycznej przyjmie postać :

$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow C_\theta \theta - P_k e_k + b R_z = 0 \quad 2.2.7$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow P - P_k + R_z = 0 \quad 2.2.8$$

$$\Delta = \theta b = k_o \frac{P_k}{a} = k \frac{P}{a} \quad 2.2.9$$

Warunek zachodzenia żebrowego efektu dźwigni $R_z > 0$ prowadzi, po uwzględnieniu równań 2.2.7-2.2.9, do nierówności 2.2.10 charakteryzującej geometrię i sztywność elementów połączenia, niezależnej od obciążenia.

$$\kappa = \frac{k_o (1) C_\theta}{e_k (1) a b} < 1 \quad 2.2.10$$

Występujące tu wielkości e_k, k_o należy obliczać przyjmując $\theta=1$ ($\Delta_1=0$) przy zadawaniu warunków brzegowych dla płyty. Jeśli nierówność 2.2.10 jest spełniona, wówczas zachodzą związki 2.2.11-2.2.14, pozwalające obliczyć występujące w przypadku żebrowego efektu dźwigni wielkości sił wewnętrznych i współczynnik podatności połączenia.

$$P_k = \frac{P}{1 - \frac{e}{b} k (1-\kappa)} \quad 2.2.11$$

$$k = \frac{k_o a}{1 - \frac{e}{b} k (1-\kappa)} \quad 2.2.12$$

$$e' = \frac{\kappa}{1 - \frac{e}{b} k (1-\kappa)} e_k \quad 2.2.13$$

$$M_z = P e' = \kappa e_k P_k \quad 2.2.14$$

Wzory powyższe zachowują swoją ważność również w przypadku b) Przyjąć wówczas należy $\kappa = 1$, co jest równoważne warunkowi $R_z = 0$.

Dla płyty kołnierza obciążonej siłami o sumie P_k zachodzą następujące związki:

$$\Delta = k_o(\vartheta) P_k(\vartheta) \frac{1}{a} \quad 2.2.15$$

$$\vartheta = \frac{\Delta}{b} \vartheta \quad 2.2.16$$

$$M_z(\vartheta) = e_k(\vartheta) P_k(\vartheta) = C_\vartheta \vartheta . \quad 2.2.17$$

Po ich przekształceniu można otrzymać warunek zgodności 2.2.18 pozwalający wyliczyć rzeczywistą wartość współczynnika ϑ określającego kąt obrotu zębra występujący w połączeniu.

$$\vartheta = \frac{ab}{C_\vartheta} \frac{e_k(\vartheta)}{k_o(\vartheta)} \quad 2.2.18$$

Wyliczenie wielkości ϑ^* spełniającej to równanie pozwoli na obliczenie wszystkich wielkości statycznych i podatności k_o będących jego funkcjami. W przypadku uzyskania $\vartheta^* > 1$ co jest równoważne z wystąpieniem zębrowego efektu dźwigni należy przyjąć $\vartheta^* = 1$, obliczyć wsp. κ według wzoru 2.2.10, a potrzebne wielkości obliczać wg. 2.2.11+2.2.14.

Sformułowanie, a następnie rozwiązanie częściowych zadań wynikających z zaproponowanego modelu będzie treścią następnych rozdziałów pracy. I tak, rozdział 2.3 poświęcony będzie zagadnieniu oddziaływania sztywnej tarczy na powłokę walcową. W rozdziale 2.4 formułuje się i rozwiązuje numerycznie z wykorzystaniem MES odpowiednie nieklasyczne zagadnienie wariacyjne płyty średniej grubości z więzami jednostronnymi.

2.3 Analiza deformacji układu żebro usztywniające-powłoka.

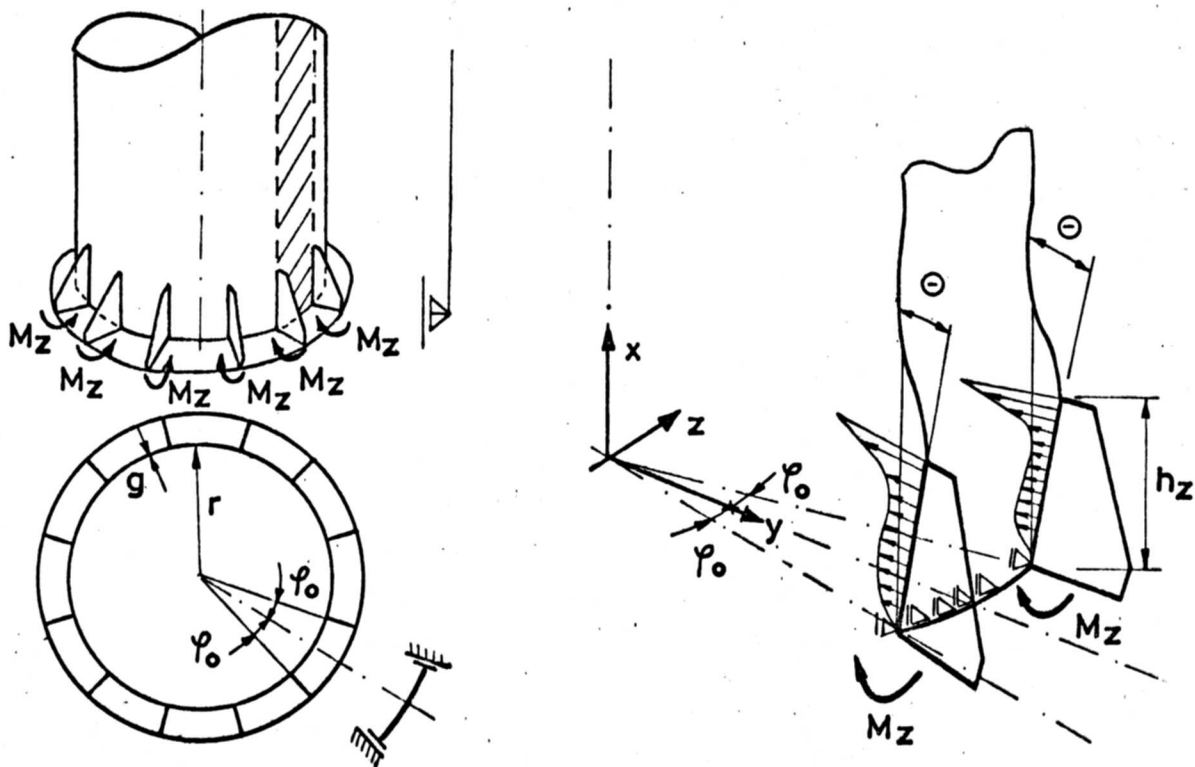
Jak wykazano w poprzednich rozdziałach pracy, dla ustalenia związku pomiędzy działającym obciążeniem, a przemieszczeniami elementów połączenia uźebrowanego, oraz dla właściwej oceny występujących efektów dźwigni niezbędne jest określenie kąta, o jaki obróci się żebro usztywniające pod wpływem przyłożonego doń momentu, lub formułując to inaczej, współczynnika proporcjonalności C_θ wiążącego działający moment M_z z wywołanym przezeń kątem θ według związku :

$$M_z = C_\theta \theta \quad 2.3.1$$

Podobnie jak przy analizie deformacji kołnierza, tak i tu w mocy pozostaje założenie o identyczności deformacji w poszczególnych sektorach połączenia .

2.3.1 Schemat obliczeniowy i sformułowanie problemu .

Rozważa się nieskończenie długi wycinek powłoki walcowej, o promieniu powierzchni środkowej r i grubości g , o kącie rozwarcia $2\varphi_0 = 2\pi / n_s$ (n_s - liczba sektorów), którego deformacja opisana jest równaniami zgięciowej teorii powłok w wersji uproszczonej 1.3.1+3.



Rys2.3.1

Zakłada się że sztywność kołnierza w jego płaszczyźnie jest na tyle duża, że możliwe jest przyjęcie braku przemieszczeń radialnych na krawędzi powłoki. Jednocześnie pomija się wpływ częściowego utwierdzenia powłoki w kołnierzu, i przyjmuje $N_x = 0$, $M_x = 0$ na krawędzi $x = 0$. Warunki wzdłuż tworzących wynikają z założenia symetrii stanu deformacji względem płaszczyzn wyznaczonych przez żebra. Ponadto przyjmuje się zerowe warunki dla przemieszczeń i sił wewnętrznych w nieskończoności.

Momenty M_z przyłożone są do powłoki za pośrednictwem żeber, tu traktowanych jako doskonale sztywne tarcze. W sytuacji takiej wygodnym staje się potraktowanie momentu jako wielkości niewiadomej, przy zadanym kącie obrotu żebra woź p. 0.

Zastosowane równania powłoki walcowej wymagają sprecyzowania 4 warunków w każdym punkcie brzegu.

Komplet warunków brzegowych przyjmie postać:

a) krawędź $x=0$:

$$w(x, \varphi) \Big|_{x=0} = 0 \quad 2.3.2$$

$$M_x(x, \varphi) \Big|_{x=0} = 0 \quad 2.3.3$$

$$N_x(x, \varphi) \Big|_{x=0} = 0 \quad 2.3.4$$

$$v(x, \varphi) \Big|_{x=0} = 0 \quad 2.3.5$$

b) wzdłuż tworzących $\varphi = \pm \varphi_0$:

$$w(x, \varphi) \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0} = \theta x \quad , \quad x \in (0, h_z) \quad 2.3.6$$

$$S(x, \varphi) \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0} = 0 \quad , \quad x \in (h_z, \infty) \quad 2.3.7$$

$$\frac{\partial w(x, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0} = 0 \quad 2.3.8$$

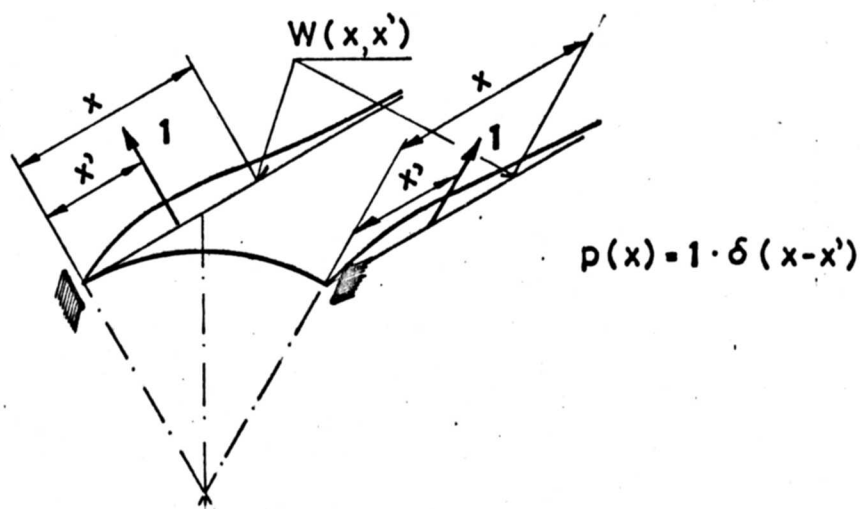
$$v(x, \varphi) \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0} = 0 \quad 2.3.9$$

$$N_{\varphi x}(x, \varphi) \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0} = 0 \quad 2.3.10$$

Poszukuje się rozkładu obciążenia $p(x)$ dla $x \in (0, h_z)$, oraz momentu M_z tych sił względem p. 0 danego całką:

$$M_z = \int_0^{h_z} x p(x) dx \quad 2.3.11$$

Z uwagi na mieszany i nieciągły charakter warunku brzegowego 2.3.6 bezpośrednie rozwiązanie układu równań 1.3.1+3 z warunkami 2.3.2-2.3.10 nie jest możliwe. Konieczne jest uprzednie rozwiązanie zadania pomocniczego.



Rys. 2.3.2

W zadaniu tym poszukuje się rozkładu przemieszczeń $w=W(x, x')$ w punktach leżących na tworzących $\varphi=\pm\varphi_0$ o współrzędnych x , przy obciążeniu jednostkową siłą skupioną w punkcie x' . Obciążenie to można zapisać przy użyciu dystrybucji δ Diraca jako :

$$\left. \begin{aligned} S_{\varphi}(x, \varphi_0) &= \\ -S_{\varphi}(x, -\varphi_0) &= \end{aligned} \right\} p(x) = 1 \delta(x-x') \quad 2.3.12$$

Reszta warunków brzegowych pozostaje bez zmian. Rozwiązanie powyższego zadania, z wykorzystaniem przekształcenia całkowego Fouriera jest przedstawione w załączniku Z2. Uzyskano tam funkcję wpływu przemieszczeń daną wzorem:

$$W(x, x') = \frac{\psi^5}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \operatorname{Er}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega(\tau) \sin \frac{x}{r} \tau \sin \frac{x'}{r} \tau \, d\tau \quad 2.3.13$$

gdzie

$$\omega(\tau) = \frac{1}{\tau^2} \operatorname{Re} \left[\frac{1+i}{\alpha_2(\tau)} \operatorname{ctgh} \tau \alpha_2(\tau) - \frac{1-i}{\alpha_1(\tau)} \operatorname{ctgh} \tau \alpha_1(\tau) \right],$$

$$\alpha_{1,2}^2 = 1 \pm (1 \pm i) \frac{\psi}{\tau}, \quad \psi = \sqrt{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{r}{g}} \quad 2.3.14$$

Funkcja $W(x, x')$ jest ciągła wraz z pochodnymi w obszarze ćwierćpłaszczyzny $x \geq 0, x' \geq 0$.

Znajomość funkcji wpływu przemieszczeń wzdłuż tworzącej pozwala obliczyć przemieszczenia $w(x)$, wywołane dowolnym obciążeniem $p(x')$ działającym na odcinku $[a, b]$, jako całkę:

$$w(x) = \int_a^b W(x, x') p(x') dx \quad 2.3.15$$

Tym samym rozwiązaniem problemu deformacji powłoki przy warunkach brzegowych 2.3.2 - 2.3.10 sprowadza się do rozwiązania równania całkowego 2.3.16 na nieznaną funkcję rozkładu obciążenia powłoki $p(x')$ na odcinku $[0, h_x]$.

$$\int_0^h W(x, x') p(x') dx' = \theta x \quad 2.3.16$$

Jest to równanie całkowe Fredholma, pierwszego rodzaju z jądrem gładkim i symetrycznym. Omówienie zastosowanej metody jego rozwiązania jest treścią punktu 2.3.2.

W równaniu 2.3.16 wprowadza się wielkości bezwymiarowe

$$\xi = \frac{x}{r}, \quad \eta = \frac{x'}{r}, \quad \lambda = \frac{r}{g}, \quad \chi = \frac{h}{r} \quad 2.3.17$$

$$\hat{W}(\xi, \eta) = \frac{1}{A} W(x, x'), \quad \hat{p}(\eta) = \frac{A}{\theta} p(\eta r), \quad 2.3.18$$

gdzie:

$$A = \frac{\psi^5}{E_r \sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad 2.3.19$$

tak, że przybierze ono postać 2.3.20.

$$\int_0^\chi \hat{W}(\xi, \eta) \hat{p}(\eta) d\eta = \xi \quad 2.3.20$$

Po znalezieniu funkcji \hat{p} spełniającej to równanie można obliczyć moment sił działających na powłokę, odpowiadający zadanemu kątowi obrotu żebra θ , jako:

$$M_x = \int_0^h x p(x) dx = r^2 \frac{\theta}{A} \int_0^\chi \xi \hat{p}(\xi) d\xi \quad 2.3.21$$

skąd poszukiwany współczynnik proporcjonalności C_θ wyniesie:

$$C_\theta = \frac{M_x}{\theta} = \frac{r^2}{A} \int_0^\chi \xi \hat{p}(\xi) d\xi = E g^3 \sqrt{\lambda} \Phi_1(\chi, \lambda, \varphi_0) \quad 2.3.22$$

Bezwymiarowy współczynnik Φ_1 jest funkcją stosunku wysokości żebra do promienia χ , smukłości powłoki λ i kąta zasięgu sektora φ_0 .

$$\Phi_1 = \Phi_1(\chi, \lambda, \varphi_0) = [3(1-\nu^2)]^{-\frac{3}{4}} \int_0^\chi \xi \hat{p}(\xi) d\xi \quad 2.3.23$$

Inną interesującą z praktycznego punktu wielkością jest suma H obciążenia $p(x)$

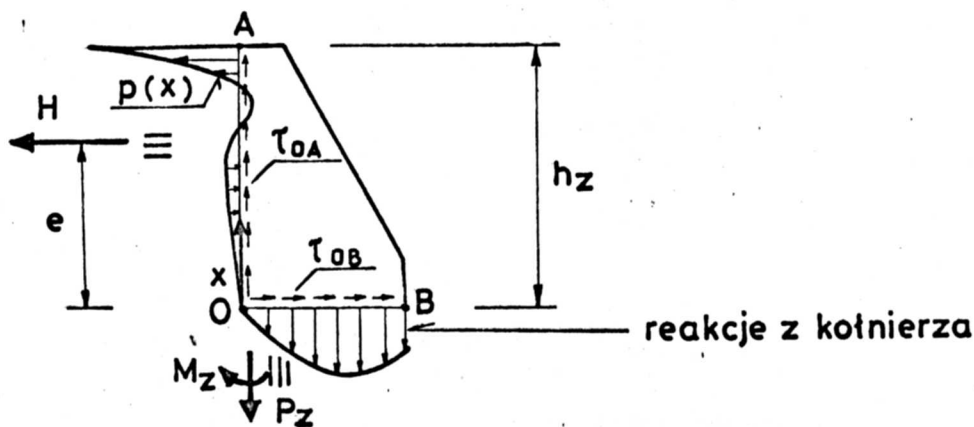
$$H = \int_0^{h_z} p(x) dx = r \frac{\theta}{A} \int_0^{\chi} \hat{p}(\xi) d\xi = \frac{r\theta}{A} \Phi_2(\chi, \lambda, \varphi_0) = 2.3.24$$

$$= \frac{M_z}{r} \frac{\Phi_2(\chi, \lambda, \varphi_0)}{\Phi_1(\chi, \lambda, \varphi_0)}$$

gdzie

$$\Phi_2 = \Phi_2(\chi, \lambda, \varphi_0) = [3(1-\nu^2)]^{-\frac{3}{4}} \int_0^{\chi} \hat{p}(\xi) d\xi. \quad 2.3.25$$

Jej znajomość może być konieczna dla właściwej oceny wyteżenia spoiny łączącej żebro z kołnierzem na odcinku OB . Z warunków równowagi sił działających na żebro wynika bowiem, że jest ona równa całkowitej sile ścinającej tą spoinę.



Rys2. 3. 3

2.3.2 Rozwiązanie równania całkowego

2.3.2.1 Uwagi wprowadzające

Rozwiązanie równania 2.3.20, pomimo jego formalnej prostoty jest zagadnieniem złożonym i wymaga zastosowania niestandardowych metod obliczeniowych. Dla równania o jądrze danym funkcją 2.3.13 nie udaje się znaleźć rozwiązania w postaci zamkniętej. W szczególności nie udało się zastosować żadnej analitycznej lub półanalitycznej metody z pośród opisanych w [3,44,47]. Metoda opisana w [45] wymaga z kolei znajomości układu funkcji i wartości własnych operatora całkowego. Znalezienie ich jest w istocie zadaniem równie złożonym co samo rozwiązanie równania. W niniejszej pracy podjęto próbę numerycznego rozwiązania równania.

Trudności jakie występują przy numerycznym rozwiązywaniu równań typu równania 2.3.20, tj. równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju o jądrach gładkich i symetrycznych, wynikają z faktu iż stanowią one przykład tkzw. zagadnienia niepoprawnie sformułowanego w sensie Hadamarda, por. [38,34].

Niech A oznacza operator określony na elementach pewnej przestrzeni funkcyjnej dany wzorem :

$$w = A p = \int_0^x W(x,x') p(x) dx ; \quad p = A^{-1} w \quad . \quad 2.3.26$$

W przypadku zagadnienia niepoprawnie sformułowanego nie musi istnieć ograniczony operator A^{-1} , odwrotny do wyjściowego, ograniczonego operatora A . Fizyczna interpretacja tego faktu w rozważanym zagadnieniu może być następująca : o ile dla dowolnej, całkownej funkcji $p(x)$ opisującej rozkład obciążenia na domkniętym odcinku tworzącej powłoki istnieje ciągła funkcja opisująca rozkład ugięcia powłoki wzdłuż tworzącej $w(x)$ (wynika to z ciągłości i całkowności funkcji $W(x,x')$), o tyle można by wskazać przykład funkcji ciągłej opisującej przemieszczenie $w^*(x)$, takiej, że rozkład obciążenia $p^*(x)$, który należałoby w tym celu przyłożyć do powłoki, nie będzie funkcją ciągłą, ani nawet całkowną. Jednocześnie dwóm niewiele się od siebie różniącym stanom przemieszczeń w_1 i $w_1 + \delta w$ (w sensie pewnej przyjętej normy), odpowiadać będą stany obciążenia p_1 i p_2 różniące się znacznie. Fakty te stanowią o przyczynach trudności przy konstruowaniu stabilnych i efektywnych dyskretnych metod

rozwiązywania równań omawianego typu.

W szczególności nieskuteczne okazały się metody w których rozwiązanie równania 2.3.20 w nieskończonej wymiarowej przestrzeni funkcyjnej sprowadza się do rozwiązania pewnego układu równań liniowych na współczynniki $p_i, i = 1, n$, przedstawienia poszukiwanej funkcji p w wybranej bazie $\{\varphi_i\}, i=1, n$, podprzestrzeni aproksymacyjnej o skończonym wymiarze n .

$$\sum_{i,j} A_{ij} p_i = w_j \quad 2.3.27$$

W metodzie kolokacji macierze A_{ij}, w_j przyjmą postać :

$$A_{ij} = W(x_i, x'_j) \omega_i, \quad w_j = W(x_j) \quad 2.3.28$$

gdzie ω_j są współczynnikami kwadratury (np. Gaussa, Newtona-Cotesa). W metodzie najmniejszych kwadratów :

$$A_{ij} = \int_0^x \int_0^x W(x_i, x'_j) \varphi_i(x) \varphi_j(x') dx dx', \quad f_i = \int_0^x \varphi_i(x) W(x) dx, \quad 2.3.29$$

gdzie φ_j są funkcjami bazowymi (tu stosowane były funkcje kawałkami liniowe, funkcje sklepane, wielomiany Czebyszewa).

Numerycznym przejawem "niepoprawności sformułowania" zadania jest fakt że we wszystkich badanych przypadkach, macierze A aproksymujące jądro okazywały się macierzami źle uwarunkowanymi, przy czym uwarunkowanie pogarszało się gwałtownie wraz ze wzrostem wymiaru podprzestrzeni aproksymacyjnej. Przykładowo, w metodzie kolokacji wiersze macierzy będą odpowiadały ciągom wartości funkcji dwóch zmiennych $W(x, x')$ w punktach $x = x_i$, leżących na równoległych prostych $x' = x'_j$. W miarę zmniejszania się odległości pomiędzy prostymi, wobec gładkości funkcji $W(x, x')$ wiersze macierzy A stają się w coraz większym stopniu liniowo zależnymi.

Do obliczania odwrotności macierzy A stosowano procedurę LINSYS (CERN) opartą o metodę Crouta. W przypadkach gdy okazywała się ona zawodna, obliczano pseudo-odwrotność A^+ w sensie Penrose-Moora, [9,12,33]. Dokonywano tego poprzez rozkład macierzy na wartości osobliwe (ang. singular value decomposition), wykorzystując procedurę SVD (CERN), [35].

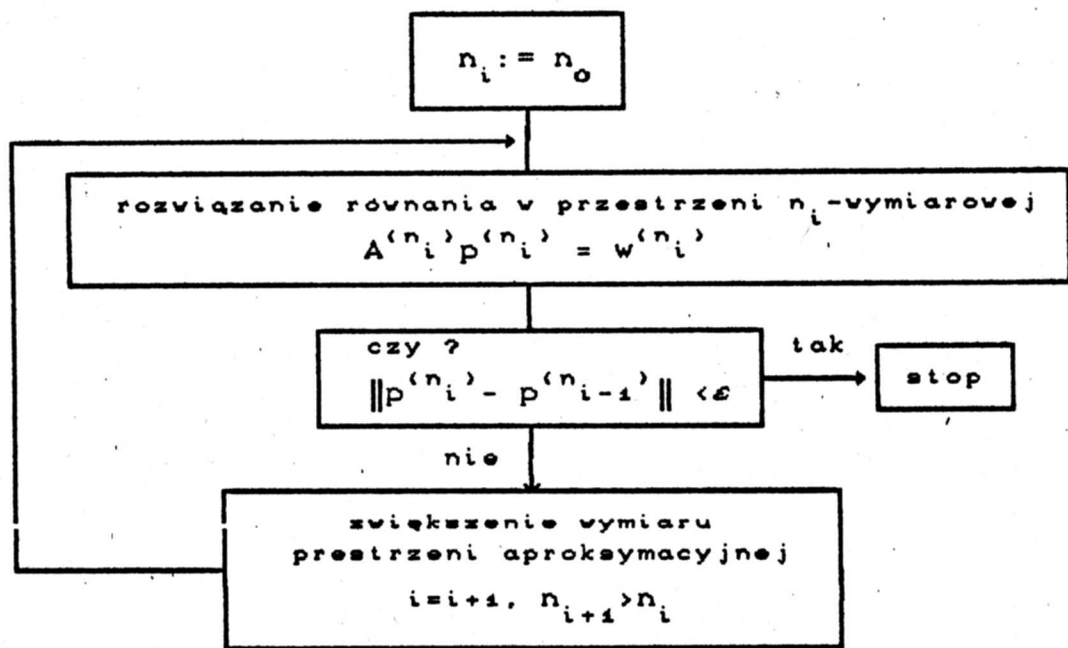
W omawianych metodach nawet jednak dokładne rozwiązanie prawie-osobliwego układu równań 2.3.27 nie gwarantowało uzyskania zadawalających rezultatów odnośnie rozwiązania równania 2.3.20. Rozpatrując bowiem ciąg rozwiązań $p^{(n)}$ otrzymywanych w miarę zwiększania wymiaru przestrzeni aproksymacyjnej n , aż do kresu możliwości obliczeniowych (na

ogół $n_{\max} = 100$, stwierdzano brak zbieżności, oscylacje lub zbieżność bardzo wolną . Zachowanie się ciągów wielkości będących całkami z funkcji p , takich jak $M_z^{(n)}$, $H^{(n)}$ było na ogół znacznie mniej niestabilne.

Błąd całkowania, wynikający z dyskretnego przedstawienia zarówno jądra jak i funkcji p , można bowiem traktować jako pewne zaburzenie prawej strony równania 2.3.20 . Na skutek wspomnianej na wstępie właściwości zadań niepoprawnie sformułowanych, to na ogół niewielkie zaburzenie jest w stanie wywołać dużą różnicę pomiędzy uzyskanym rozwiązaniem zadania dyskretnego $p^{(n)}$, a nieznanym rozwiązaniem ścisłym i jest powodem wspomnianej niestabilności numerycznej.

Stosunkowo najlepsze rezultaty osiągnięto stosując metodę kollokacji i 3-punktową kwadraturę Gaussa-Legendre'a w podprzedziałach. Rezultaty w pełni zadowalające osiągnięto stosując odmienną , opisaną poniżej metodę postępowania.

Opisane powyżej, na ogół nie skuteczne metody można było przedstawić za pomocą poniższego schematu:



2.3.2.2 Opis procedury rozwiązującej równanie całkowe.

Metoda skutecznie zastosowana do rozwiązania równania

2.3.20 jest oparta na następującej zależności rekurencyjnej :

$$p_{(0)} = 0 \quad 2.3.30$$

$$p_{(j+1)} = p_{(j)} - \tau (A p_{(j)} - w) ,$$

pozwalającej na wyznaczenie ciągu rozwiązań $p_{(j)}$ zbieżnego do rozwiązania p^* równania operatorowego $Ap = w$, dla dowolnego operatora A w przestrzeni Hilberta dodatnio określonego i symetrycznego. Czynniki τ musi spełniać relację :

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad 2.3.31$$

gdzie λ_{\max} jest największą wartością własną operatora A , por. [38,40].

Przeciwnie niż w metodach opisanych poprzednio, tu wymiar przestrzeni aproksymacyjnej n był dobierany automatycznie, niezależnie na każdym kroku iteracyjnym tak, by każdorazowo operacja Ap (całkowanie) była wykonywana z kontrolowaną dokładnością. Posłużono się w tym celu ekstrapolacją iterowaną Richardsona. Wobec trudności w oszacowaniu λ_{\max} zastosowano automatyczny dobór czynnika τ . Szczegółowo, algorytm ten przedstawia się w załączniku Z 3.

W obliczeniach żądano by błąd całkowania $\epsilon_c < 10^{-4}$ (poprawnych pięć cyfr znaczących), oraz by lewa strona równania równała się prawej w punktach węzłowych z dopuszczalnym błędem względnym $\epsilon_w < 0.01$. Warto tu zaznaczyć, iż tolerancje te były z praktycznego punktu widzenia minimalnymi, i dalsze ich zaostrzenie spowodowałoby nieproporcjonalnie duży wzrost czasu obliczeń.

2.3.3 Wyniki obliczeń

Opisany powyżej sposób postępowania został wykorzystany do numerycznego rozwiązania równania 2.3.20 dla parametrów $\lambda = \frac{g}{r}$, n_s , $\chi = \frac{h_z}{r}$ przyjmujących wartości ze zbiorów:

- smukłość λ

$$\lambda \in \langle 30.0, 60.0, 90.0, 120.0, 150.0, 180.0 \rangle$$

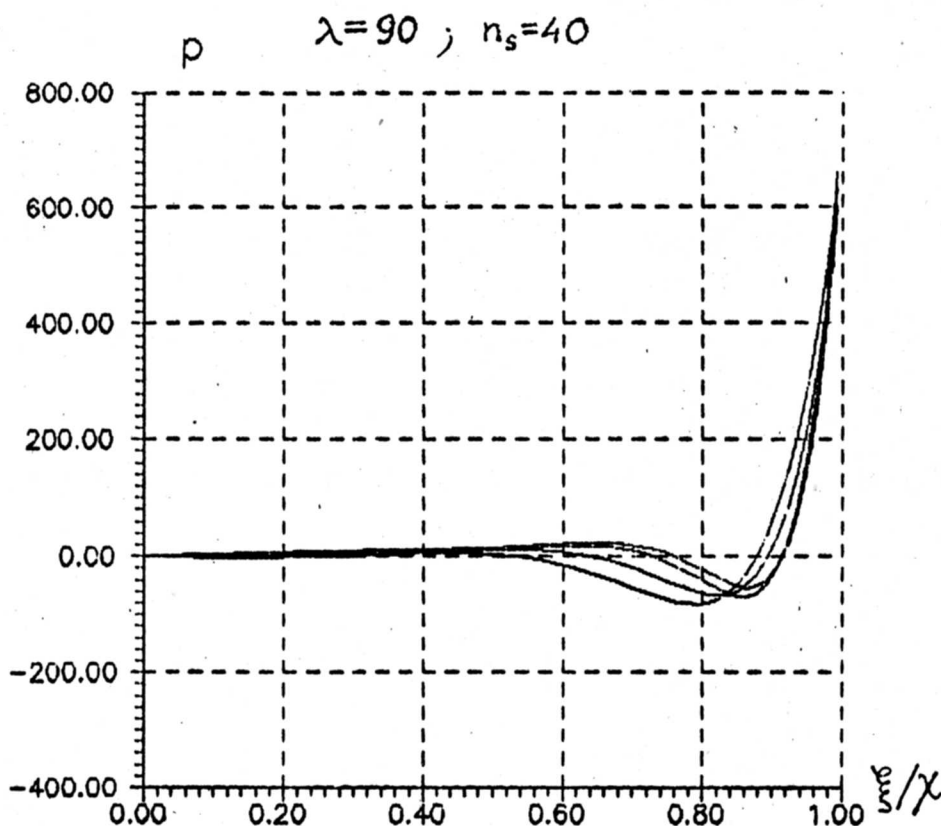
- liczba sektorów n_s

$$n_s \in \langle 12, 16, 20, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72 \rangle$$

- względna wysokość zębra χ

$$\chi \in \langle 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30 \rangle.$$

Dla zadanej smukłości λ parametry n_s i χ dobierano w zakresie odpowiadającym praktycznie stosowanym rozwiązaniom konstrukcyjnym.



Rys. 2.3.4

Typowe przebiegi funkcji $\hat{p}(\xi)$ opisującej rozkład sił kontaktowych między zębem i powłoką pokazano na rys 2.3.4. charakterystyczną ich cechą jest występowanie oscylacji (lokalnej zmiany znaku) na wysokości około $0.8h_z$, oraz gwałtowny wzrost na końcu wysokości zębra.

Charakter tego wzrostu, a także zaobserwowane wyraźne zwiększenie się stopnia niestabilności numerycznej tych spośród procedur opisanych w p 2.3.2.2, które jako węzeł kwadratury przyjmowały także i punkt $\xi = \chi$ (nie zachodzi to dla tu użytej procedury) świadczyć może, iż w teorii, siły te mogą osiągnąć wartość nieskończoną. Jest to oczywiście tylko hipoteza, nie poparta ścisłym dowodem. Zbadanie asymptotycznego charakteru zachowania się funkcji obciążenia przy końcu żebra (określenie rodzaju ewentualnej osobliwości) jest interesującym problemem matematycznym, ale nawet jego ściśle rozwiązanie na gruncie liniowej sprężystości i przyjętej teorii powłok nie dałoby podstaw do pełnej oceny rzeczywistego stopnia wyężenia w realnej konstrukcji. Dla oceny takiej uwzględnić należało by, tu pominięte, następujące czynniki:

- fizyczna nieliniowość materiału (np. cechy sprężysto-plastyczne), z uwzględnieniem ogólnego stanu naprężenia panującego w powłoce
 - lokalnie trojwymiarowy stan naprężenia w otoczeniu połączenia żebra z powłoką
 - odkształcalność żebra,
- co prowadziłyby do zadania o bardzo znacznej złożoności obliczeniowej.

Tym niemniej przyjmuje się, że zastosowany model obliczeniowy dostarcza wiarygodnej informacji na temat wielkości sumy sił kontaktowych H i ich momentu M_z towarzyszących wymuszonemu obrotowi żebra.

Tabele 2.3.1+2.3.3 podają obliczone wielkości następujących współczynników:

$$\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_1(\chi, \lambda, \varphi_0) = [3(1-\nu^2)]^{-\frac{3}{4}} \int_0^{\chi} \xi \hat{p}(\xi) d\xi \quad (\text{Tab. 2.3.1}) \quad 2.3.32$$

$$\bar{\Phi}_2 = \bar{\Phi}_2(\chi, \lambda, \varphi_0) = [3(1-\nu^2)]^{-\frac{3}{4}} \int_0^{\chi} \hat{p}(\xi) d\xi \quad (\text{Tab. 2.3.2}) \quad 2.3.33$$

oraz

$$\bar{\Phi}_3 = \bar{\Phi}_3(\chi, \lambda, n_s) = \frac{1}{\chi} \frac{\bar{\Phi}_1}{\bar{\Phi}_2} = \frac{e}{h_z} p \quad (\text{Tab. 2.3.3}) \quad 2.3.34$$

Ostatni z wymienionych podaje względną odległość środka sił od p.O i pozwala wyliczyć sumę sił poziomych przy zadanym ich momencie jako

$$H = \frac{M}{e_p} = \frac{M}{\bar{\Phi}_s h_z} = \frac{1}{\bar{\Phi}_s \chi} \frac{M}{r} \quad 2.3.35$$

Dla celów praktycznych ważna jest możliwość określania sztywności utwierdzenia żebra w zależności od jego wysokości.

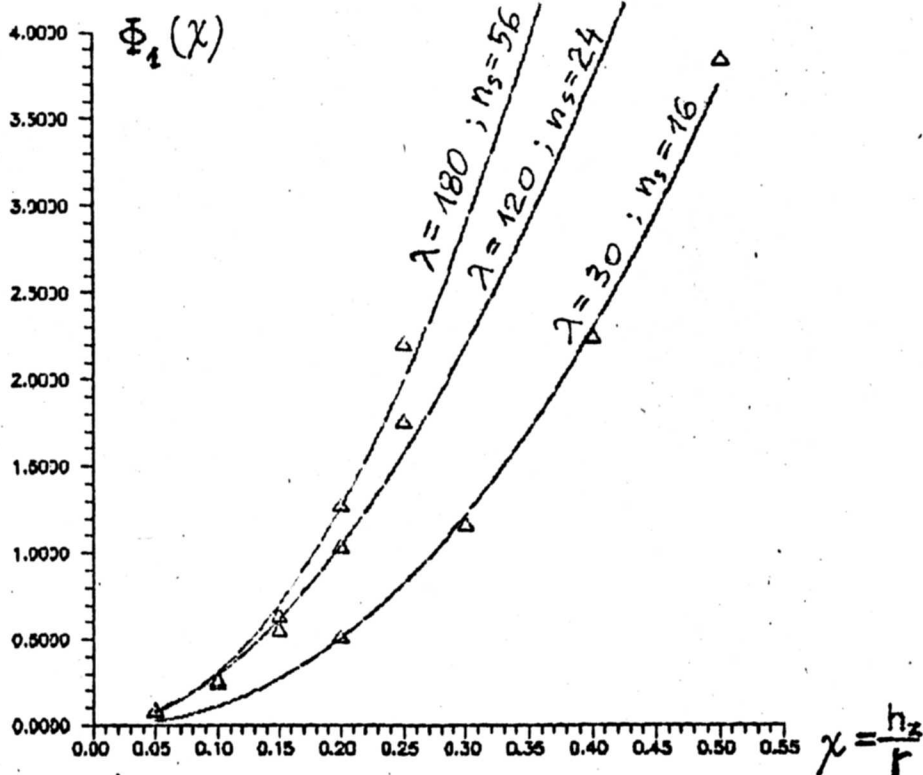
Typowe przebiegi zależności $\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_1(\chi)$ przedstawione są na rys. 2.3.5. Zależności te można z wystarczającą dokładnością aproksymować funkcją potęgową zmiennej χ o postaci:

$$\bar{\Phi}_1(\chi, \lambda, n_s) = A_h(\lambda, n_s) \chi^{\beta_h(\lambda, n_s)} \quad 2.3.36$$

Współczynniki A_h i β_h określa się na drodze minimalizacji sumy kwadratów błędu względnego.

$$A_h, \beta_h : \delta(A_h, \beta_h) = \min_{A_h, \beta_h} \left[\sum_i \left(\frac{\bar{\Phi}_1(\chi_i) - A_h \chi_i^{\beta_h}}{\bar{\Phi}_1(\chi_i)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad 2.3.37$$

Obliczone wielkości współczynników A_h i β_h przedstawiają tabele 2.3.4+5.



Rys. 2.3.5

Postępując analogicznie określa się zależność $\bar{\Phi}_s = \bar{\Phi}_s(\chi, \lambda, n_s)$ jako funkcję zmiennej χ o postaci:

$$\bar{\Phi}_s(\chi, \lambda, n_s) = 0.75 + \frac{A_s(\lambda, n_s)}{\chi^{\beta_s(\lambda, n_s)}} \quad 2.3.38$$

ze współczynnikami A_s i β_s danymi w tab. 2.3.6+7.

Tab. 2.3.1 Współczynnik Φ_1

$\lambda = \frac{r}{g}$	$\gamma = \frac{h_2}{r}$	12	16	20	24	n_s 32	40	48	56	64	72
30.00	0.20	0.2460	0.2447	0.2273	0.2049	0.1669					
30.00	0.30	0.5371	0.5488	0.5094	0.4568	0.3685					
30.00	0.40	1.0174	1.0578	0.9627	0.8638	0.6904					
30.00	0.50	1.6810	1.8062	1.6524	1.4811	1.1788					
60.00	0.10		0.0929	0.0985	0.0961	0.0830	0.0719	0.0624			
60.00	0.15		0.1851	0.1947	0.1903	0.1674	0.1439	0.1243			
60.00	0.20		0.3213	0.3452	0.3389	0.2969	0.2540	0.2179			
60.00	0.25		0.5149	0.5597	0.5579	0.4798	0.4085	0.3534			
60.00	0.30		0.7702	0.8522	0.8340	0.7303	0.6170	0.5293			
90.00	0.05			0.0418	0.0424	0.0406	0.0366	0.0328	0.0293		
90.00	0.10			0.1071	0.1108	0.1055	0.0948	0.0841	0.0749		
90.00	0.15			0.2232	0.2351	0.2254	0.2002	0.1760	0.1567		
90.00	0.20			0.4052	0.4355	0.4199	0.3745	0.3243	0.2870		
90.00	0.25			0.6708	0.7285	0.6982	0.6202	0.5409	0.4727		
120.00	0.05				0.0426	0.0427	0.0400	0.0365	0.0336	0.0296	0.0276
120.00	0.10				0.1206	0.1227	0.1140	0.1028	0.0929	0.0830	0.0749
120.00	0.15				0.2641	0.2742	0.2543	0.2283	0.2060	0.1835	0.1652
120.00	0.20				0.4914	0.5295	0.4810	0.4321	0.3871	0.3458	0.3122
120.00	0.25				0.8297	0.8977	0.8270	0.7357	0.6563	0.5885	0.5258
150.00	0.05				0.0421	0.0437	0.0421	0.0391	0.0368	0.0334	0.0307
150.00	0.10				0.1262	0.1362	0.1315	0.1208	0.1097	0.0994	0.0905
150.00	0.15				0.2812	0.3173	0.3053	0.2797	0.2533	0.2291	0.2077
150.00	0.20				0.5320	0.6070	0.5894	0.5406	0.4876	0.4398	0.3972
150.00	0.25				0.8978	1.0600	1.0287	0.9392	0.8467	0.7564	0.6927
180.00	0.05				0.0452	0.0447	0.0420	0.0389	0.0358	0.0328	0.0308
180.00	0.10				0.1476	0.1474	0.1382	0.1271	0.1161	0.1059	0.1059
180.00	0.15				0.3492	0.3534	0.3310	0.3031	0.2766	0.2509	0.2509
180.00	0.20				0.6835	0.6921	0.6584	0.6021	0.5470	0.4948	0.4948
180.00	0.25				1.1695	1.2007	1.1302	1.0406	0.9398	0.8568	0.8568

Tab. 2.3.2 Współczynniki Φ_2

$\lambda = \frac{r}{g}$	$\gamma = \frac{h_2}{r}$	12	16	20	24	h_s 32	40	48	56	64	72
30.00	0.20	1.1666	1.1870	1.0884	0.9675	0.7736					
30.00	0.30	1.9241	2.0067	1.8501	1.6490	1.3160					
30.00	0.40	2.9000	3.1304	2.8559	2.5505	2.0227					
30.00	0.50	4.1387	4.4776	4.1121	3.6714	2.9028					
60.00	0.10		0.8365	0.8749	0.8503	0.7139	0.5881	0.4842			
60.00	0.15		1.2144	1.2824	1.2494	1.0783	0.9125	0.7853			
60.00	0.20		1.7203	1.8607	1.8234	1.5786	1.3386	1.1460			
60.00	0.25		2.3466	2.5749	2.5596	2.1939	1.8559	1.5943			
60.00	0.30		3.0579	3.4111	3.3535	2.9209	2.4568	2.0980			
90.00	0.05			0.6766	0.6877	0.6494	0.5525	0.4658	0.3833		
90.00	0.10			1.0003	1.0354	0.9751	0.8554	0.7414	0.6484		
90.00	0.15			1.5565	1.6476	1.5681	1.3796	1.2056	1.0639		
90.00	0.20			2.3008	2.4886	2.3961	2.1207	1.8306	1.6146		
90.00	0.25			3.2117	3.5112	3.3786	2.9860	2.5944	3.0673		
120.00	0.05				0.7058	0.7049	0.6484	0.5715	0.5139	0.3942	0.3820
120.00	0.10				1.1668	1.1870	1.0883	0.9676	0.8561	0.7689	0.6971
120.00	0.15				1.9234	2.0063	1.8483	1.6480	1.4771	1.3135	1.1815
120.00	0.20				2.9016	3.1330	2.8543	2.5510	2.2751	2.0290	1.8238
120.00	0.25				4.1032	4.4603	4.1161	3.6540	3.2464	2.9014	2.5937
150.00	0.05				0.7049	0.7351	0.6991	0.6311	0.5900	0.5156	0.4570
150.00	0.10				1.2543	1.3655	1.3074	1.1889	1.0688	0.9640	0.8760
150.00	0.15				2.0976	2.3942	2.3041	2.1008	1.8924	1.7054	1.5411
150.00	0.20				3.1824	3.6964	3.5945	3.2875	2.9553	2.6570	2.3942
150.00	0.25				4.4763	5.3532	5.2176	4.7590	4.2682	3.8235	3.4683
180.00	0.05				0.7861	0.7728	0.7084	0.6373	0.5652	0.4929	
180.00	0.10				1.5175	1.5136	1.4126	1.2869	1.1683	1.0640	
180.00	0.15				2.6939	2.7342	2.5565	2.3322	2.1204	1.9189	
180.00	0.20				4.2046	4.2878	4.1535	3.7020	3.3539	3.0336	
180.00	0.25				5.9883	6.1951	5.8276	5.3422	4.8191	4.3821	

Tab. 2.3.3 Współczynniki Φ_3

$\lambda = \frac{r}{g}$	$\gamma = \frac{h_c}{r}$	12	16	20	24	n_s	40	48	56	64	72
						32					
30.00	0.20	1.0542	1.0306	1.0442	1.0592	1.0784					
30.00	0.30	0.9305	0.9116	0.9178	0.9235	0.9333					
30.00	0.40	0.8771	0.8448	0.8428	0.8467	0.8534					
30.00	0.50	0.8123	0.8068	0.8037	0.8068	0.8122					
60.00	0.10		1.1111	1.1257	1.1302	1.1625	1.2222	1.2887			
60.00	0.15		1.0160	1.0120	1.0155	1.0351	1.0516	1.0551			
60.00	0.20		0.9339	0.9275	0.9294	0.9403	0.9489	0.9507			
60.00	0.25		0.8778	0.8695	0.8718	0.8748	0.8804	0.8866			
60.00	0.30		0.8396	0.8328	0.8290	0.8334	0.8372	0.8410			
90.00	0.05			1.2354	1.2345	1.2505	1.3256	1.4079	1.5277		
90.00	0.10			1.0711	1.0706	1.0824	1.1083	1.1345	1.1555		
90.00	0.15			0.9561	0.9512	0.9584	0.9675	0.9731	0.9817		
90.00	0.20			0.8805	0.8750	0.8762	0.8829	0.8856	0.8889		
90.00	0.25			0.8355	0.8299	0.8265	0.8308	0.8340	0.8072		
120.00	0.05				1.2077	1.2114	1.2351	1.2786	1.3092	1.5036	1.4447
120.00	0.10				1.0334	1.0334	1.0476	1.0627	1.0854	1.0791	1.0748
120.00	0.15				0.9155	0.9112	0.9174	0.9236	0.9297	0.9315	0.9320
120.00	0.20				0.8468	0.8451	0.8425	0.8468	0.8509	0.8521	0.8558
120.00	0.25				0.8088	0.8051	0.8036	0.8054	0.8087	0.8113	0.8109
150.00	0.05				1.1943	1.1883	1.2050	1.2405	1.2477	1.2961	1.3431
150.00	0.10				1.0060	0.9976	1.0055	1.0163	1.0261	1.0316	1.0331
150.00	0.15				0.8938	0.8834	0.8833	0.8876	0.8922	0.8956	0.8985
150.00	0.20				0.8359	0.8211	0.8199	0.8223	0.8250	0.8277	0.8294
150.00	0.25				0.8022	0.7920	0.7886	0.7894	0.7935	0.7914	0.7988
180.00	0.05				1.1499	1.1565	1.1857	1.2213	1.2213	1.2673	1.3328
180.00	0.10				0.9726	0.9741	0.9783	0.9873	0.9873	0.9937	0.9953
180.00	0.15				0.8642	0.8617	0.8631	0.8664	0.8664	0.8698	0.8716
180.00	0.20				0.8128	0.8071	0.7926	0.8132	0.8132	0.8155	0.8155
180.00	0.25				0.7812	0.7753	0.7757	0.7791	0.7791	0.7801	0.7821

Tab. 2.3.4 Współczynnik A_h

NS\R	30.0	60.0	90.0	120.0	150.0	180.0
12	6.8586					
16	7.9056	7.8735				
20	7.0988	8.5518	7.2985			
24	6.3326	8.8220	7.9260	9.3945	11.0847	
32	4.9490	7.4766	7.5959	10.8940	14.7888	16.9910
40		6.3075	6.7478	9.7681	14.3521	17.1371
48		5.4108	5.8850	8.5774	13.4400	16.1298
56			5.2748	7.4341	12.0305	14.7979
64				6.7115	10.2051	13.4127
72				5.8436	9.3448	12.2287

Tab. 2.3.5 Współczynnik β_h

NS\R	30.0	60.0	90.0	120.0	150.0	180.0
12	2.0806					
16	2.1790	1.9574				
20	2.1564	1.9653	1.7864			
24	2.1505	1.9937	1.8034	1.8421	1.8975	
32	2.1249	1.9779	1.8040	1.8954	1.9869	2.0132
40		1.9689	1.8008	1.8801	1.9891	2.0152
48		1.9656	1.7958	1.8680	1.9977	2.0158
56			1.7962	1.8483	1.9892	2.0147
64				1.8546	1.9592	2.0113
72				1.8358	1.9620	2.0117

Tab. 2.3.6. Współczynnik A_e

NS\R	30.0	60.0	90.0	120.0	150.0	180.0
12	0.0194					
16	0.0182	0.0189				
20	0.0151	0.0162	0.0144			
24	0.0167	0.0141	0.0120	0.0068	0.0062	
32	0.0193	0.0145	0.0101	0.0057	0.0037	0.0020
40		0.0115	0.0107	0.0049	0.0028	0.0011
48		0.0137	0.0110	0.0050	0.0028	0.0012
56			0.0094	0.0052	0.0034	0.0016
64				0.0050	0.0030	0.0018
72				0.0072	0.0050	0.0022

Tab. 2.3.7 Współczynnik β_e

NS\R	30.0	60.0	90.0	120.0	150.0	180.0
12	1.7479					
16	1.7193	1.3181				
20	1.8739	1.3963	1.2132			
24	1.8352	1.4690	1.2734	1.4410	1.4568	
32	1.7785	1.4894	1.3461	1.5018	1.6256	1.8011
40		1.6471	1.3651	1.5707	1.7322	2.0003
48		1.6062	1.3948	1.5866	1.7521	2.0013
56			1.4980	1.5975	1.6932	1.9225
64				1.6874	1.7585	1.9186
72				1.5354	1.6108	1.8639

2.4 Deformacja układu kołnierz-śruba w świetle teorii płyt średniej grubości z wiązami jednostronnymi

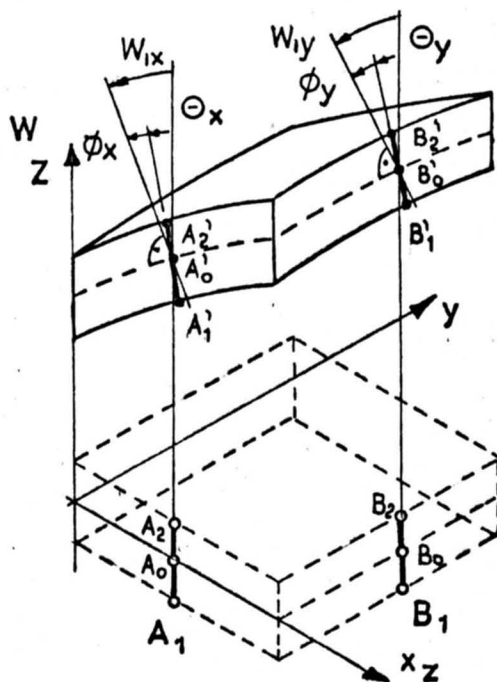
2.4.1 Sformułowanie zagadnienia

Poniższe sformułowanie wariacyjne dla płyt średniej grubości Mindlina - Reissnera oparto na pracach [24,25,26,57]

2.4.1.1 Podstawowe związki teorii płyt średniej grubości.

Teoria płyt średniej grubości Mindlina-Reissnera opiera się na następującej hipotezie kinematycznej odnośnie postaci pola przemieszczeń wewnątrz płyty:

- włókno pierwotnie prostopadłe do powierzchni środkowej pozostaje proste, choć niekoniecznie prostopadłe do odkształconej powierzchni śr. i nie doznaje wydłużenia ani skrócenia.



rys2.4.1

Odształcenia $\underline{\epsilon}$ i odpowiadające im odkształcenia uogólnione, tj. krzywizny i średnie odkształcenia postaciowe $\underline{\epsilon} = \langle \underline{\kappa}, \underline{\phi} \rangle = \langle \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \phi_x, \phi_y \rangle^T$, dane są związkami 2.4.1, poprzez uogólnione przemieszczenia $\underline{\delta} = \langle \underline{w}, \underline{\theta} \rangle = \langle w, \theta_x, \theta_y \rangle^T$.

Uogólnione naprężenia $\underline{\sigma} = \langle \underline{M}, \underline{Q} \rangle = \langle M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y \rangle^T$, dla materiału jednorodnego, izotropowego i liniowo sprężystego dane są związkami 2.4.2 i 2.4.3.

$$\epsilon_x = -z\theta_{x,x} \quad ; \quad \alpha_x = -\theta_{x,x} \quad 2.4.1.a$$

$$\epsilon_y = -z\theta_{y,y} \quad ; \quad \alpha_y = -\theta_{y,y} \quad 2.4.1.b$$

$$\epsilon_{xy} = -z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \quad ; \quad \alpha_{xy} = -(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \quad 2.4.1.c$$

$$\gamma_{xz} = W_{,x} - \theta_x \quad ; \quad \phi_x = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_{xz} dz \quad 2.4.1.d$$

$$\gamma_{yz} = W_{,y} - \theta_y \quad ; \quad \phi_y = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_{yz} dz \quad 2.4.1.e$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_x' z dz = D(\alpha_x + \nu\alpha_y) \quad ; \quad Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = Gkh \phi_x \quad 2.4.2.a,b$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_y' z dz = D(\alpha_y + \nu\alpha_x) \quad ; \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz = Gkh \phi_y \quad 2.4.2.c,d$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_{xy}' z dz = \frac{1}{2} D(1-\nu) \alpha_{xy} \quad 2.4.2.e$$

gdzie: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad ; \quad G = (1-2\nu)E \quad 2.4.3$

k jest współczynnikiem zależnym od założonego rozkładu naprężeń stycznych $\tau_{,z}$ na grubości płyty, tu przyjętym za [24,25,26]

$$k = 5/6 \quad 2.4.4$$

2.4.1.2 Sformułowanie zadania wariacyjnego

Poszukiwanie pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń spełniającego związku 2.4.1-2.4.3, równania równowagi oraz statyczne i kinematyczne warunki brzegowe można prowadzić bądź na drodze budowy a następnie rozwiązania odpowiedniego układu równań różniczkowych cząstkowych (sformułowanie lokalne), por. [31,37,42], bądź poprzez minimalizację odpowiedniego funkcjonału (sformułowanie globalne, wariacyjne). I właśnie to drugie podejście, stanowiące naturalną podstawę dla MES, jest również wygodne w przypadku występowania więzów jednostronnych (ograniczeń nierównościowych) dla przemieszczeń. W niniejszej pracy, podobnie jak w [43], za punkt wyjścia przyjęto zasadę minimum energii potencjalnej układu. Funkcjonał energii potencjalnej układu Π , dla płyty zajmującej obszar Ω , której część Ω' spoczywa na sprężystym podłożu Winklera przyjmuje postać:

2.4.5

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{M}^T \underline{\varepsilon} + \underline{Q}^T \underline{\phi}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega'} c w^2 d\Omega' - \int_{\Omega} q w d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ D [\theta_{x,x}^2 + \theta_{y,y}^2 - 2\nu \theta_{x,x} \theta_{y,y} + (1-\nu)(\theta_{x,y}^2 + \theta_{y,x}^2)] + \\ &+ G h k [(c w_{,x} - \theta_x)^2 + (c w_{,y} - \theta_y)^2] \} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega'} c w^2 d\Omega' - \int_{\Omega} q w d\Omega. \end{aligned}$$

Minimalizację funkcjonału Π przeprowadza się na zbiorze funkcji dopuszczalnych K . W przypadku braku więzów jednostronnych zbiór ten jest identyczny z podprzestrzenią liniową W funkcji spełniających zadane kinematyczne warunki brzegowe. Problem sprowadza się do następującego zadania wariacyjnego:

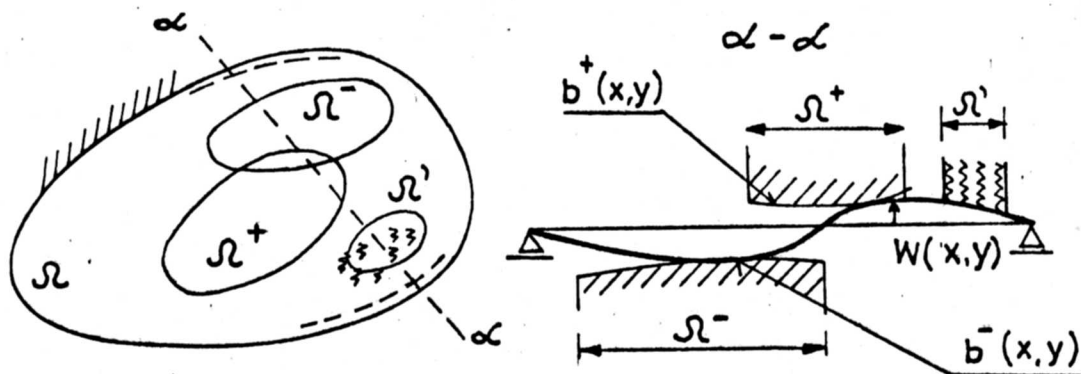
$$(P1) : \text{znaleźć } \underline{\delta}^* : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ t.że } \Pi(\underline{\delta}^*) = \min_{\underline{\delta} \in W} \Pi(\underline{\delta}).$$

W przypadku wystąpienia ograniczeń dla ugięć powierzchni środkowej jak na rys 2.4.2 zbiór funkcji dopuszczalnych K traci strukturę przestrzeni liniowej, a problem przybiera postać:

(P2) : znaleźć $\underline{\delta}^* : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.że $\Pi(\underline{\delta}^*) = \min_{\underline{\delta} \in K} \Pi(\underline{\delta})$,

gdzie:

$$W \supset K = \left\{ \delta \left| \begin{array}{l} 1^\circ \quad w(x,y) \leq b^+(x,y) , \quad \forall (x,y) \in \Omega^+ \\ 2^\circ \quad w(x,y) \geq b^-(x,y) , \quad \forall (x,y) \in \Omega^- \end{array} \right. \right\} \quad 2.4.6$$



rys. 2.4.2

Zbiór K pozostaje jednak zbiorem wypukłym. Istotnie, jeśli dwie funkcje w_1 i w_2 spełniają warunki 2.4.6 (należą do zb. K), wówczas :

$$\forall \alpha \in [0,1] , \quad w(x,y) = \alpha w_1(x,y) + (1-\alpha)w_2(x,y),$$

zachodzi:

$$w(x,y) \leq \alpha b^+(x,y) + (1-\alpha)b^+(x,y) = b^+(x,y) , \quad \forall (x,y) \in \Omega^+$$

$$w(x,y) \geq \alpha b^-(x,y) + (1-\alpha)b^-(x,y) = b^-(x,y) , \quad \forall (x,y) \in \Omega^- ,$$

czyli $w(x,y) \in K$.

Funkcjonał energii potencjalnej Π posiada własności 1+4 :

1. $\Pi(\underline{\delta})$ jest ograniczony od dołu , tzn $\exists m : \Pi(\underline{\delta}) \geq m , \forall \underline{\delta} \in K$
2. $\Pi(\underline{\delta}) \rightarrow \infty$, gdy $\|\underline{\delta}\| \rightarrow \infty$
3. $\Pi(\underline{\delta})$ posiada gradient ograniczony
4. $\Pi(\underline{\delta})$ jest funkcjonałem wypukłym .

Właściwości te, których dowody można znaleźć między innymi w [41], wraz z wypukłością zbioru funkcji dopuszczalnych K , na mocy odpowiednich twierdzeń ogólnej teorii zadań ekstremalnych, gwarantują istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania (P2), por. [19].

2.4.2 Zastosowanie metody funkcjonału kary

Kontaktowe zadania mechaniki ciała odkształcalnego, z więzami jednostronnymi prowadzące na ogół do zadań minimalizacji z ograniczeniami, o postaci analogicznej do (P2), są w ostatnich latach terenem intensywnych badań. Zadania tego typu określa się czasami jako nieklasyczne zadania rachunku wariacyjnego. Niektóre z nich można formułować w nieco odmiennej postaci, jako tkzw. nierówności wariacyjne. Nawet w przypadku gdy funkcjonał jest formą kwadratową (jak to ma miejsce w rozważanym zadaniu), narzucenie ograniczeń nierównościowych na przemieszczenia powoduje, że zadania takie stają się zadaniami często silnie nieliniowymi.

Ich szczególny rozwój datuje się mniej więcej od połowy lat siedemdziesiątych, tj. od czasu ukazania się fundamentalnych prac [16], gdzie sprecyzowane i usystematyzowane zostały podstawy matematyczne tego rodzaju zadań (twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności, równoważność sformułowań).

Choć poszukiwania na tym polu ciągle jeszcze trwają, również wtedy określone zostały metody sprowadzania zadań do skończone-wymiarowych, najwłaściwsze dla poszczególnych klas zagadnień. Dla zadania płyty średniej grubości, w kontekście MES, wymienić tu należy prace Huygesa [27], Owena i Hintona [28].

Oba te czynniki zezwoliły na podjęcie i rozwiązanie różnorodnych zadań. Należy jednak stwierdzić iż większość opublikowanych rezultatów ma charakter akademicki, a zadania praktyczne podejmowane bywają rzadko.

Stosowane przez różnych badaczy metody rozwiązywania zadań typu (P2) są, najogólniej mówiąc, adaptacjami metod znanych i rozwijanych na gruncie ogólnej teorii optymalizacji. Istotą większości z nich jest sprowadzanie zadania minimalizacji z ograniczeniami do zadania minimalizacji bez ograniczeń. Można tego dokonać poprzez:

- a) transformację zmiennych niezależnych
- b) wprowadzenie mnożników Lagrange'a
- c) wprowadzenie funkcjonału kary.

I właśnie ta ostatnia metoda została wykorzystana do rozwiązania zadania (P2).

Polega ona na sprowadzeniu zadania (P2) do ciągu zadań minimalizacji bez ograniczeń (ozn. P3) dla zmodyfikowanych funkcjonałów

$$\Pi_{\varepsilon_i^-}(\underline{\delta}) = \Pi(\underline{\delta}) + \frac{1}{\varepsilon_i} \Pi_p(\underline{\delta}), \quad 2.4.7$$

gdzie człon Π_p zwany funkcjonalem kary, musi spełniać warunki:

$$1) \quad \forall \underline{\delta}, \quad \Pi_p(\underline{\delta}) \geq 0, \quad 2.4.8$$

$$2) \quad \Pi_p = 0 \Leftrightarrow \underline{\delta} \in K. \quad 2.4.9$$

Dowodzi się, że przy pewnych dodatkowych założeniach co do struktury topologicznej rozważanych przestrzeni funkcyjnych ciąg $\underline{\delta}_{\varepsilon_i}^*$, takich, że $\Pi_{\varepsilon_i^-}(\underline{\delta}_{\varepsilon_i}^*) = \min_{\underline{\delta} \in W} \Pi_{\varepsilon_i^-}(\underline{\delta})$, dąży do $\underline{\delta}^*$ gdy $\varepsilon_i \rightarrow 0$.

Jako funkcjonal kary przyjmuje się wyrażenie :

2.4.10

$$\Pi_p(\underline{\delta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} H(w-b^+) (w-b^+)^2 d\Omega^+ + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} H(-(w-b^-)) (w-b^-)^2 d\Omega^-$$

gdzie $H(x)$ jest funkcją Heaviside'a, w oczywisty sposób spełniające warunki 2.4.8+2.4.9.

W odniesieniu do zadania płyty średniej grubości metoda ta ma przejrzystą interpretację fizyczną. Mnożniki $1/\varepsilon_i$ można traktować jako stałe sztywności c_i pewnego fikcyjnego podłoża sprężystego, wprowadzonego w tych obszarach płyty gdzie naruszone są ograniczenia. Ponieważ $c_i \rightarrow \infty$ w miarę kolejnych iteracji (podłoże usztywnia się), stąd w granicy otrzymuje się postać deformacji jak dla płyty na jednostronnym doskonale sztywnym podłożu.

W przypadku płyt cienkich (o umiarkowanie dużych ugięciach) analogiczne podejście przedstawiono w [43].

W [41] stwierdzono, że rozkład sił odporu od nieskończone sztywnego, jednostronnego podłoża działającego na powłokę opisaną równaniami Sandersa (a więc w szczególności na płytę średniej grubości) wokół brzegu obszaru kontaktu ma charakter dystrybucyjny (nie daje się przedstawić jako funkcja w zwykłym sensie).

Informacja o rozkładzie odporu podłoża uzyskana z metody funkcjonału kary, operująca wielkością odporu całkowaną po obszarze elementu skończonego nie będzie co prawda dawała możliwości zbadania osobliwości tego rozkładu, pozwala jednak na dostatecznie dokładne określenie postaci deformacji i

rozkładu uogólnionych napreżeń w płycie. Warto w tym miejscu stwierdzić, że występowanie sił oporu o charakterze dystrybucji jest cechą wyidealizowanego modelu matematycznego płyty, a nie realnego ciała fizycznego, gdzie występowanie tego rodzaju oddziaływań jest wykluczone, chociażby z uwagi na istniejącą, a pomijaną w tym modelu odkształcalność poprzeczną płyty, oraz ograniczony zakres ważności liniowego prawa fizycznego.

2.4.3 Numeryczne rozwiązanie zadania metodą elementów skończonych .

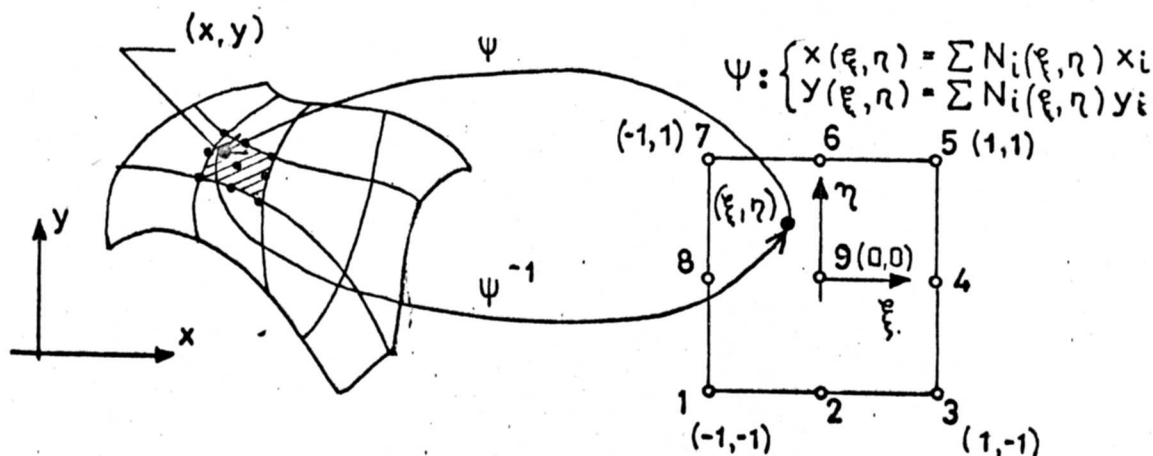
Efektywne rozwiązanie numeryczne problemów minimalizacji P1 P2 i P3 wymaga przyjęcia pewnego schematu aproksymacji dla funkcji opisujących poszukiwane rozkłady uogólnionych przemieszczeń w obszarze płyty, który pozwoliłby sprowadzić zagadnienie do zadania minimalizacji w przestrzeni skończonego wymiaru.

Najważniejszymi metodami , które można w tym celu wykorzystać są metoda różnic skończonych (MRS) i zastosowana w niniejszej pracy metoda elementów skończonych (MES).

Dla zagadnienia płyty średniej grubości istnieje szczegółowo opisany w literaturze [24 + 28], i wszechstronnie przetestowany schemat aproksymacji oparty o dostosowany, izoparametryczny, czworoboczny element skończony drugiego rzędu. Ten właśnie schemat aproksymacji został zastosowany w niniejszej pracy.

2.4.3.1 Aproksymacja pola przemieszczeń.

Obszar płyty dzieli się na pewną liczbę elementów czworobocznych, o brzegach w ogólności krzywoliniowych (parabolicznych), z wyodrębnionymi 9-ciomą punktami węzłowymi. Rys.2.4.3 przedstawia przykładowy podział obszaru płyty na elementy skończone, oraz sposób konstrukcji odwzorowania ψ z elementu macierzystego (wzorcowego) na bieżący znany w literaturze jako odwzorowanie izoparametryczne.



Rys. 2.4.3

Przemieszczenia wewnątrz elementu wyrażają się poprzez wartości węzłowe $\hat{\underline{\delta}}_i$:

$$\underline{\delta}^e(x, y) = \sum_{j=1}^{N^e} N_j(\xi(x, y), \eta(x, y)) \hat{\underline{\delta}}_j \quad 2.4.11$$

$$\underline{\delta}^e(x, y) = \langle w(x, y), \theta_x(x, y), \theta_y(x, y) \rangle^T \quad 2.4.12$$

gdzie N_i są funkcjami kształtu rodziny Lagrangea (L) i serendipowskiej (S), danymi poniższymi wzorami dla elementu wzorcowego:

(S):

-węzły narożne:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) ; \quad i=1,3,5,7 \quad 2.4.13$$

-węzły środkowo-boczne:

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2} (1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \eta_i \eta)(1 - \xi^2) ; i=2,4,6,8 \quad 2.4.14$$

(L):

-węzły narożne:

$$N_i = \frac{1}{4} (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i)\xi\eta \quad ; \quad i=1,3,5,7 \quad 2.4.15$$

-węzły środkowo-boczne:

$$N_i = \frac{1}{2} \eta_i^2 \eta(\eta - \eta_i)(1 - \xi^2) + \frac{1}{2} \xi_i^2 \xi(\xi - \xi_i)(1 - \eta^2) ; i=2,4,6,8 \quad 2.4.16$$

-węzeł środkowy:

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad ; \quad i=9 \quad 2.4.17$$

Za [24,25,27] przyjmuje się aproksymację pola przemieszczeń pionowych w za pomocą funkcji kształtu rodziny (S) w oparciu o 8 węzłów zewnętrznych, a dla kątów obrotu θ_x, θ_y , za pomocą rodziny (L) w oparciu o wszystkie 9 węzłów. Dla problemu płyty średniej grubości, takie właśnie mieszane podejście (ang. 'heterozis'), wraz z selektywnym całkowaniem jest zalecane, jako zapewniające największą dokładność, por. [28,57].

Omówiony schemat aproksymacji zadania płyty średniej grubości znany jest w literaturze jako tkzw. element Huyeghes'a.

Korzystając z przedstawienia pola przemieszczeń $\underline{\hat{\delta}}$ wewnątrz elementu 2.4.11, uogólnione odkształcenia $\underline{\alpha}$ można zapisać jako

$$\underline{\alpha}^*(x,y) = \begin{bmatrix} -\theta_{x,x} \\ -\theta_{y,y} \\ -(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \underline{B}_{\alpha i}^*(x,y) \hat{\delta}_i \quad 2.4.18$$

$$\underline{\psi}^*(x,y) = \begin{bmatrix} w_{,x} - \theta_x \\ w_{,y} - \theta_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \underline{B}_{\psi i}^*(x,y) \hat{\delta}_i \quad 2.4.19$$

Wprowadzając oznaczenia 2.4.20

$$\underline{I}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{I}_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{P}_i = \begin{bmatrix} P \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix}, \quad \underline{p}_i = \begin{bmatrix} p \\ m_x \\ m_y \end{bmatrix} \quad 2.4.20$$

$$\underline{D}_\alpha = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}, \quad \underline{D}_\psi = \frac{Eh}{2.4(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

na macierze jednostkowe, macierze związków fizycznych D oraz na wektory obciążeń węzłowych \underline{P} i krawędziowych \underline{p} , całkowita energia potencjalna nagromadzona w pojedynczym elemencie płyty, uzupełniona o funkcjonal kary z mnożnikiem $1/\epsilon$, można przedstawić jako następującą funkcję wektora przemieszczeń węzłowych elementu:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_\epsilon^* &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\delta}_i^T \underline{B}_i^T \underline{D}_\alpha \underline{B}_j \hat{\delta}_j + \hat{\delta}_i^T \underline{B}_i^T \underline{D}_\psi \underline{B}_j \hat{\delta}_j \right\} d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\delta}_i^T \underline{N}_i \underline{I}_w \underline{N}_j \hat{\delta}_j d\Omega + \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\delta}_i^T \underline{N}_i \underline{I}_F \underline{N}_j \hat{\delta}_j HC(w-b^+) d\Omega + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\delta}_i^T \underline{N}_i \underline{I}_F \underline{N}_j \hat{\delta}_j HC-(w-b^-) d\Omega \right] - \sum_{i=1}^N \left[\int_{\Omega} p N_i \hat{\delta}_i^T \underline{I}_F d\Omega + \right. \\ &+ \int_{\partial\Omega} N_i \hat{\delta}_i^T \underline{p} d\partial\Omega + \hat{\delta}_i^T \underline{P}_i + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} b^+ N_i \hat{\delta}_i^T \underline{I}_F HC(w-b^+) d\Omega + \\ &+ \left. \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} b^- N_i \hat{\delta}_i^T \underline{I}_F HC-(w-b^-) d\Omega \right] + \text{const.} \quad 2.4.21 \end{aligned}$$

Wszystkie występujące we wzorze 2.4.21 całki oblicza się numerycznie za pomocą kwadratury Gaussa, stosując ogólną formułę

$$\int_{\Omega^e} F(x, y) d\Omega = \sum_{q=1}^{N_g} \sum_{p=1}^{N_g} F(\xi_q, \eta_p) W_q W_p J_{\psi}(\xi_q, \eta_p), \quad 2.4.22$$

przy czym rząd N_g tej kwadratury jest różny dla poszczególnych czynników wchodzących w skład macierzy sztywności (ang. selective integration). W szczególności przyjęto za [28,29]:

-dla k_{-x} $N_g = 3$ (sztywność zginania),

$k_{-\psi}$ $N_g = 2$ (sztywność ścinania),

co pozwala na osiągnięcie zgodności rozwiązań numerycznych wg teorii M-R, z rozwiązaniami wg klasycznej teorii płyt cienkich w przypadku niewielkiej grubości płyty. Dla pozostałych czynników, z uwagi na stopień występujących wielomianów przyjęto:

k_{-w} $N_g = 4$ (wpływ podłoża sprężystego),

k_{-p} $N_g = 4$ (funkcjonał kary).

Przedstawiona powyżej aproksymacja pola przemieszczeń uogólnionych za pomocą wartości węzłowych $\hat{\delta}_i, i=1, n_v$ pozwala zastąpić problem (P3) zadaniem minimalizacji w przestrzeni skończonej wymiarowej (P4), dla funkcji będącej sumą energii potencjalnej po wszystkich elementach

$$\hat{\Pi}_e(\hat{\delta}) = \sum_{e=1}^{n_e} \hat{\Pi}_e^e(\hat{\delta}) \quad 2.4.23$$

(P4): znaleźć $\hat{\delta}_{e_i}^*$: t. że $\hat{\Pi}_e(\hat{\delta}_{e_i}^*) = \min_{\hat{\delta}_{e_i} \in \mathbb{R}^{(2 \times N_v)} e_i} \hat{\Pi}_e(\hat{\delta}_{e_i})$.

Warunek konieczny stacjonarności funkcjonału $\hat{\Pi}_{e_i}$, $\delta \hat{\Pi}_{e_i} = 0$, zastępuje się warunkiem koniecznym na minimum funkcji $\hat{\Pi}_{e_i}$

$$\frac{\partial \hat{\Pi}_{e_i}}{\partial \hat{\delta}_{e_i}} = \underline{0}, \quad 2.4.24$$

który prowadzi do standardowego układu równań MES o postaci:

$$\left(\underline{K}_0 + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{K}_{-p}(\hat{\delta}_{e_i}) \right) \hat{\delta}_{e_i} = \underline{f}_0 + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{f}_{-p}(\hat{\delta}_{e_i}) \quad 2.4.25$$

gdzie \underline{K}_0 jest globalną macierzą sztywności układu, \underline{f}_0 globalnym wektorem sił węzłowych, a \underline{K}_{-p} i \underline{f}_{-p} są członami modyfikującymi odpowiednio macierz sztywności oraz wektor prawej strony przy naruszeniu ograniczeń:

2.4.26

$$\underline{K}_0 = \sum_e \underline{k}_{-i,j}^e = \sum_e \left(\int_{\Omega} \frac{B_{-x}^T D_{-x,-x} B_{-x,-x}}{k_{-x}} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{B_{-\psi}^T D_{-\psi,-\psi} B_{-\psi,-\psi}}{k_{-\psi}} d\Omega + \int_{\Omega \cap \Omega'} c N_{i-w} I_{i-w} N_j d\Omega \right) \quad k_w$$

$$\underline{f}_0 = \sum_e \underline{f}_i^e = \sum_e \left(\int_{\partial\Omega} N_i \underline{p} \, d\partial\Omega + \int_{\Omega} q N_i \underline{I}_F \, d\Omega \right)$$

$$\underline{K}_{-p} = \sum_e \underline{k}_{-pij}^e = \sum_e \left(\int_{\Omega \cap \Omega^-} N_i \underline{I}_v N_j \, HC(-w-b^-) \, d\Omega + \int_{\Omega \cap \Omega^+} N_i \underline{I}_v N_j \, HC(w-b^+) \, d\Omega \right)$$

$$\underline{f}_{-p} = \sum_e \underline{f}_{-pi}^e = \sum_e \left(\int_{\Omega \cap \Omega^-} N_i \underline{I}_F b^- \, HC(-w-b^-) \, d\Omega + \int_{\Omega \cap \Omega^+} N_i \underline{I}_F b^+ \, HC(w-b^+) \, d\Omega \right)$$

2.4.2.3 Algorytm obliczeń MES

Nieliniowy układ równań 2.2.25 dla ustalonego ε_i rozwiązuje się za pomocą zmodyfikowanej metody iteracji bezpośrednich wg formuły :

$$\underline{\delta}_{-e_i}^{(k)} := \underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)} \quad 2.4.30$$

$$\underline{\delta}_{-e_i}^{(k)} = \left[\underline{K}_{-0} + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{K}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) \right]^{-1} \left[\underline{f}_{-0} + \underline{f}_{-p} + \frac{1}{\varepsilon_i} \left[\underline{K}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) - \underline{K}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-2)}) \right] \underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)} \right]$$

Jest ona zmodyfikowaną wersją formuły iteracji bezpośrednich, która w rozważanym zadaniu przyjmowałaby postać:

$$\left[\underline{K}_{-0} + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{K}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) \right] \underline{\delta}_{-e_i}^{(k)} = \underline{f}_{-0} + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{f}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) \quad 2.4.31$$

Wyprowadzenie zmodyfikowanej formuły przebiega następująco: do obu stron 2.4.31 dodaje się człon skrajny

2.4.32

$$\left[\underline{K}_{-0} + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{K}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) \right] \underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)} + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{K}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) \underline{\delta}_{-e_i}^{(k)} = \underline{f}_{-0} + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{f}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{K}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) \underline{\delta}_{-e_i}^{(k)}$$

skąd:

2.4.33

$$\left[\underline{K}_{-0} + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{K}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) \right] \underline{\delta}_{-e_i}^{(k)} = \underline{f}_{-0} + \frac{1}{\varepsilon_i} \underline{f}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) + \frac{1}{\varepsilon_i} \left[\underline{K}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}) - \underline{K}_{-p}(\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-2)}) \right] \underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}$$

Jeśli $\|\underline{\delta}_{-e_i}^{(k)} - \underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}\| \rightarrow 0$ wówczas zastępując przemieszczenia $\underline{\delta}_{-e_i}^{(k)}$ przemieszczeniami $\underline{\delta}_{-e_i}^{(k-1)}$ po prawej stronie 2.4.33 dochodzi się do 2.4.30. Korzyści zastosowania formuły 2.4.30 zamiast 2.4.31 polegają na tym, że formuła 2.4.30 nie wymaga wielokrotnego odwracania globalnej macierzy sztywności dla $k > 1$.

a jedynie ponownego rozwiązania układu równań liniowych z nową prawą stroną, co stanowi o jej numerycznej efektywności.

Po spełnieniu warunku :

$$\left\| \delta_{\varepsilon_i}^{(k)} - \delta_{\varepsilon_i}^{(k-1)} \right\| < \text{EQTOL} \quad 2.4.34$$

co odpowiada zakończeniu procesu minimalizacji dla ustalonego ε_i , następuje modyfikacja mnożnika $1/\varepsilon_i$ i podstawienie:

$$\delta_{\varepsilon_{i+1}}^{(1)} := \delta_{\varepsilon_i}^{(k)} \quad 2.4.35$$

Obliczenia prowadzi się dopóki :

$$\max \{ |w-b^-|, |w-b^+| \} < \text{WTOL} , \quad 2.4.36$$

który to warunek sprawdzany jest zarówno w węzłach jak i w punktach całkowania, oraz dopóki:

$$\frac{\left\| R_{z_i} - R_{z_{i-1}} \right\|}{\left\| R_{z_i} \right\|} < \text{RTOL} , \quad 2.4.37$$

gdzie R_{z_i} oznacza wektor reakcji w zamocowanych węzłach. Spełnienie tego warunku świadczy o ustabilizowaniu się wielkości sumy sił odporu w strefie kontaktu (równiej sumie sił reakcji i sił czynnych).

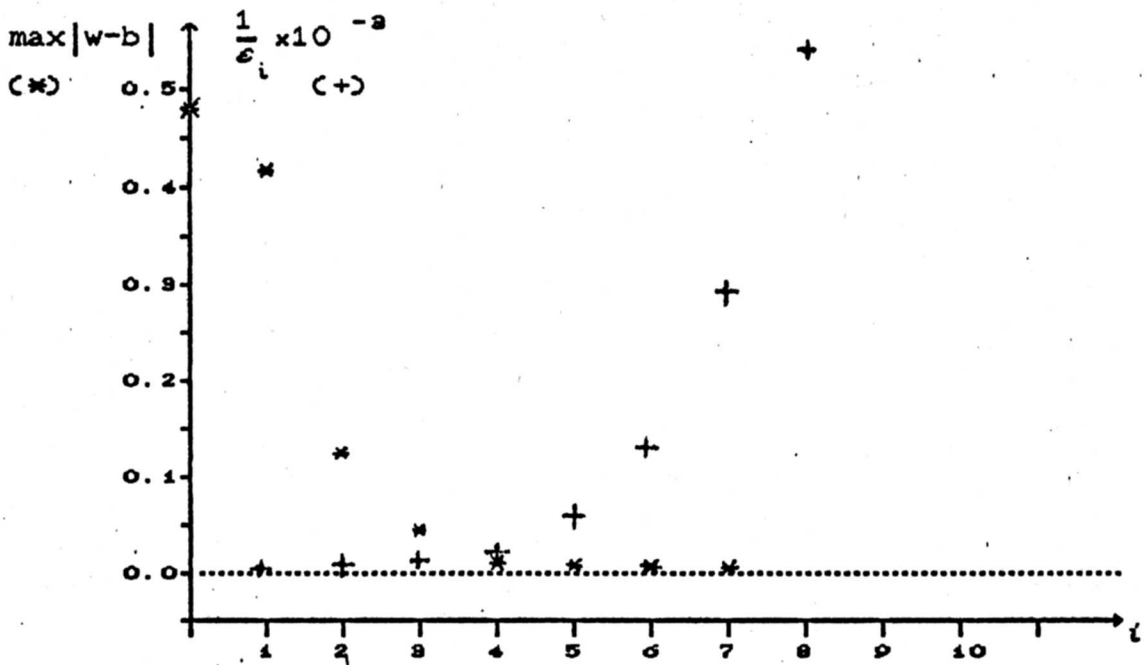
Sprawą istotną jest właściwy dobór ciągu $\{\varepsilon_i\}$. Gdy jego wyrazy maleją zbyt wolno proces minimalizacji nadmiernie wydłuża się, w przypadku przeciwnym może wystąpić zle uwarunkowanie macierzy sztywności lub opisana poniżej niestabilność numeryczna polegająca na wejściu wektora $\hat{\delta}_{\varepsilon_i}$ do wnętrza zbioru K .

W przeprowadzonych testach, a także obliczeniach praktycznych optymalnymi okazywały się formuły (i - numer iteracji)

$$\varepsilon_i = \left[\varepsilon_0 \alpha^{\ln i} \right]^{-1} \quad \text{lub} \quad \varepsilon_i = \left[\varepsilon_0 \alpha^{\ln i} i \right]^{-1} \quad 2.4.38$$

gdzie : $\alpha \in (10,50)$, $\varepsilon_0 = \alpha \min (K_{jj})$, $\alpha \in (5,50)$.
 $j=1,4,7 \dots$

Rys. 2.4.4 przedstawia przykład zależności maksymalnego naruszenia ograniczeń od liczby iteracji "i" oraz aktualnej wielkości mnożnika $1/\varepsilon_i$.

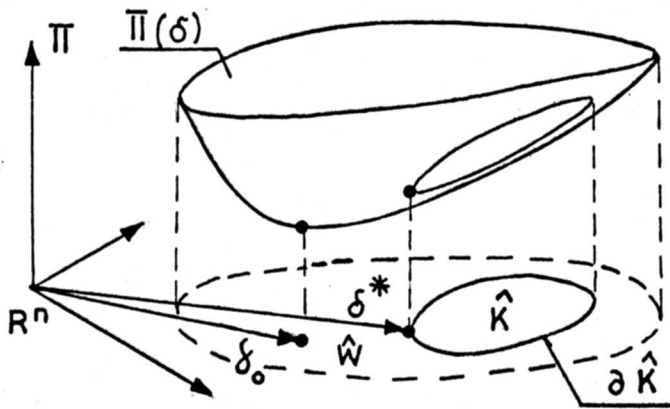


Rys. 2.4.4

Na wykresie widoczna jest pewna charakterystyczna cecha przebiegu procesu obliczeniowego. W jego początkowej fazie wielkość naruszenia ograniczeń bardzo szybko maleje, by po kilku lub kilkunastu iteracjach ustabilizować się na pewnym, na ogół niewielkim (rzędu 1% w stosunku do przemieszczeń maksymalnych) poziomie. Dalsza kontynuacja obliczeń nie przynosi już wówczas zasadniczej poprawy dokładności uzyskanego rozwiązania.

W toku obliczeń zdarzały się sytuacje, iż obliczony wektor przemieszczeń, po pewnej liczbie iteracji, spełniał wszystkie ograniczenia, tj. wchodził do wnętrza zbioru dopuszczalnych wartości \hat{K} . Sytuacja taka jest jednak nie do przyjęcia, z teoretycznego punktu widzenia, i świadczy o wystąpieniu niestabilności numerycznej.

Jeśli bowiem punkt w którym realizuje się minimum globalne funkcji wypukłej $\hat{\Pi}(\hat{\delta})$ znajduje się poza wypukłym zbiorem wartości dopuszczalnych \hat{K} , wówczas minimum $\hat{\delta}^*$ na zbiorze \hat{K} musi znajdować się na jego brzegu.

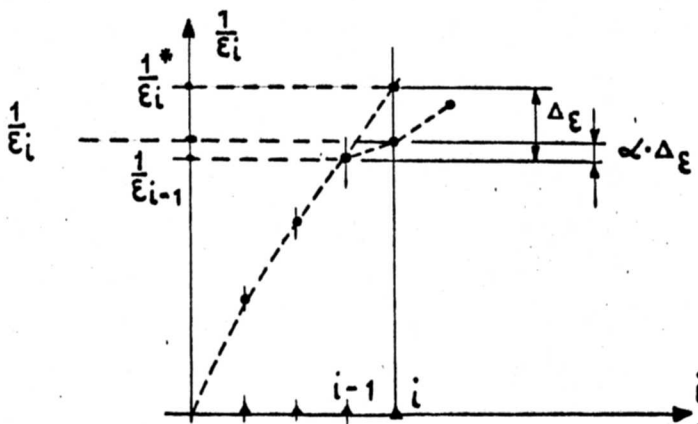


Rys. 2.4.5

Wyrazy ciągu $\{\varepsilon_i\}$ powinny więc być dobrane tak, by gwarantowały zbliżanie się kolejnych $\hat{\delta}_{\varepsilon_i}^*$ do $\hat{\delta}^*$, z zachowaniem warunku:

$$\hat{\delta}_{\varepsilon_i}^* \in \hat{K}.$$

W przypadku wystąpienia wspomnianej niestabilności, w programie następowała automatyczna korekcja przyrostu czynnika $1/\varepsilon_i$ wg formuły 2.4.39 oraz kontynuacja obliczeń w oparciu o ostatnie obliczone poprawnie $\hat{\delta}_{\varepsilon_{i-1}}^*$ (uprzednio zapisane w pamięci stałej).



Rys. 2.4.6 .

$$\frac{1}{\varepsilon_i} = \frac{1}{\varepsilon_{i-1}} + c \left(\frac{1}{\varepsilon_i^*} - \frac{1}{\varepsilon_{i-1}} \right) \alpha ; \quad 0 < \alpha < 1 \quad 2.4.39$$

gdzie:

$\frac{1}{\varepsilon_{i-1}}$ - ostatnia wielkość mnożnika, której odpowiadało poprawne rozwiązanie $\hat{\delta}_{\varepsilon_{i-1}}^*$

$\frac{1}{\varepsilon_i^*}$ - wynikająca z formuł 2.4.38 wielkość mnożnika, przy której wystąpiła niestabilność.

$\frac{1}{\varepsilon_i}$ - wielkość przyjęta do dalszych obliczeń .

α - czynnik korygujący (przyjmowano $\alpha = 0.10$)

Opisane postępowanie stosuje się w razie potrzeby kilkakrotnie, podstawiając każdorazowo:

$$\frac{1}{\varepsilon_i^*} := \frac{1}{\varepsilon_i} \quad 2.4.40$$

Powodowało to niekiedy pewne zwolnienie tempa zbieżności procesu, ale gwarantowało uzyskanie prawidłowych rezultatów.

2.4.2.4 Opis programu PENAL

Przedstawiony w poprzednim punkcie algorytm, jest podstawą dla napisanego⁽¹⁾ w języku FORTRAN programu o nazwie PENAL.

Program ten służy do obliczania przemieszczeń i sił wewnętrznych w liniowo sprężystych, ortotropowych płytach cienkich lub średniej grubości dowolnego kształtu, dowolnie obciążonych i dowolnie podpartych, przy występowaniu jednostronnych ograniczeń dla ugięć powierzchni środkowej.

Istnieją dwie wersje omawianego programu :

- dla mikrokomputera klasy IBM-PC XT/AT (FORTRAN 77)
- dla komputera CDC CYBER 70 (FORTRAN STANDARD)

Pewne elementy struktury informatycznej programu (np. nazewnictwo zmiennych i procedur) oparto na programach opublikowanych w [24,25,26]. Także i niektóre procedury są zoptymalizowanymi wersjami procedur zamieszczonych w powyższych pracach.

Program PENAL jest wyposażony w procedury do w pełni automatycznej generacji dyskretyzacji (współrzędnych węzłów i macierzy przylegania) we wnętrzach wyodrębnionych podobszarów, jedynie na podstawie zadanych niektórych punktów brzegowych. Opis zastosowanej, oryginalnej metody generacji siatki jest przedstawiony w załączniku Z5. Kinematyczne warunki brzegowe można zadawać w dowolnie zorientowanych lokalnych układach współrzędnych. Na końcu rozdziału przedstawia się schemat blokowy omawianego programu.

⁽¹⁾ Współautorem programu jest mgr inż. Andrzej Truty

Inżynierska interpretacja wyników obliczeń MES wymaga znajomości rozkładu sił reakcji na podpartych odcinkach brzegów. Tymczasem standardowa wersja MES dostarcza informacji jedynie o wartościach zastępczych sił węzłowych f_i w zamocowanych węzłach.

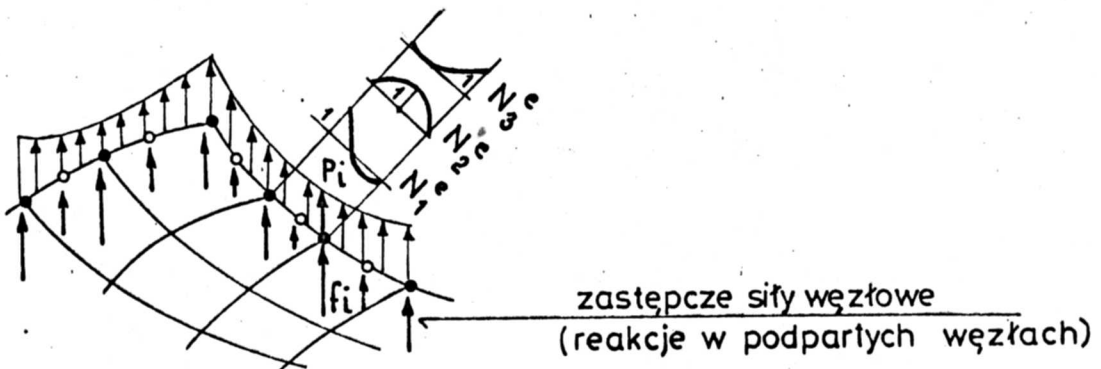
$$f_i = \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \underline{B}_i^T \underline{D} \hat{\underline{\delta}} d\Omega_e \quad 2.4.41$$

gdzie sumowanie obejmuje wszystkie elementy do których dany węzeł należy, bez wnikania w przyczynę (rozkład sił reakcji na zamocowanym odcinku brzegu) jaka mogła by ten stan wywołać. W przypadku brzegu podpartego w sposób ciągły na pewnym odcinku wyniki będą identyczne jak dla brzegu podpartego punktowo w węzłach. Odtworzenie rozkładu obciążenia brzegowego $p(s)$ na podstawie znanych sił węzłowych jest jednak możliwe, wymaga jedynie sprecyzowania funkcji bazowych służących przedstawieniu $p(s)$ jako:

$$p(s) = \sum_k p_k \psi_k(s) \quad 2.4.42$$

Naturane podejście będzie polegało na przyjęciu za funkcje bazowe lokalnych funkcji kształtu wzdłuż brzegów poszczególnych elementów.

$$\psi_i \equiv N_i(\xi(s), 1) \quad 2.4.43$$



Rys. 2.4.7

Współczynniki p_k będą wówczas wprost równe poszukiwanym wartościom funkcji rozkładu obciążenia.

W przypadku odcinka brzegu bez rozgałęzień, składającego się z k_e krawędzi elementów, przy uwzględnieniu związku 2.4.44 między obciążeniem brzegu a zastępczą siłą węzłową

$$f_i = \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} p(s) N_i(\xi(s), 1) ds \quad 2.4.44$$

uzyskuje się równość:

$$\sum_{\sigma} \int_{\Omega_{\sigma}} \sum_{i=1}^3 p_j N_j N_i ds = f_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad 2.4.45$$

która prowadzi do następującego pięcio-diagonalnego układu równań liniowych:

2.4.46

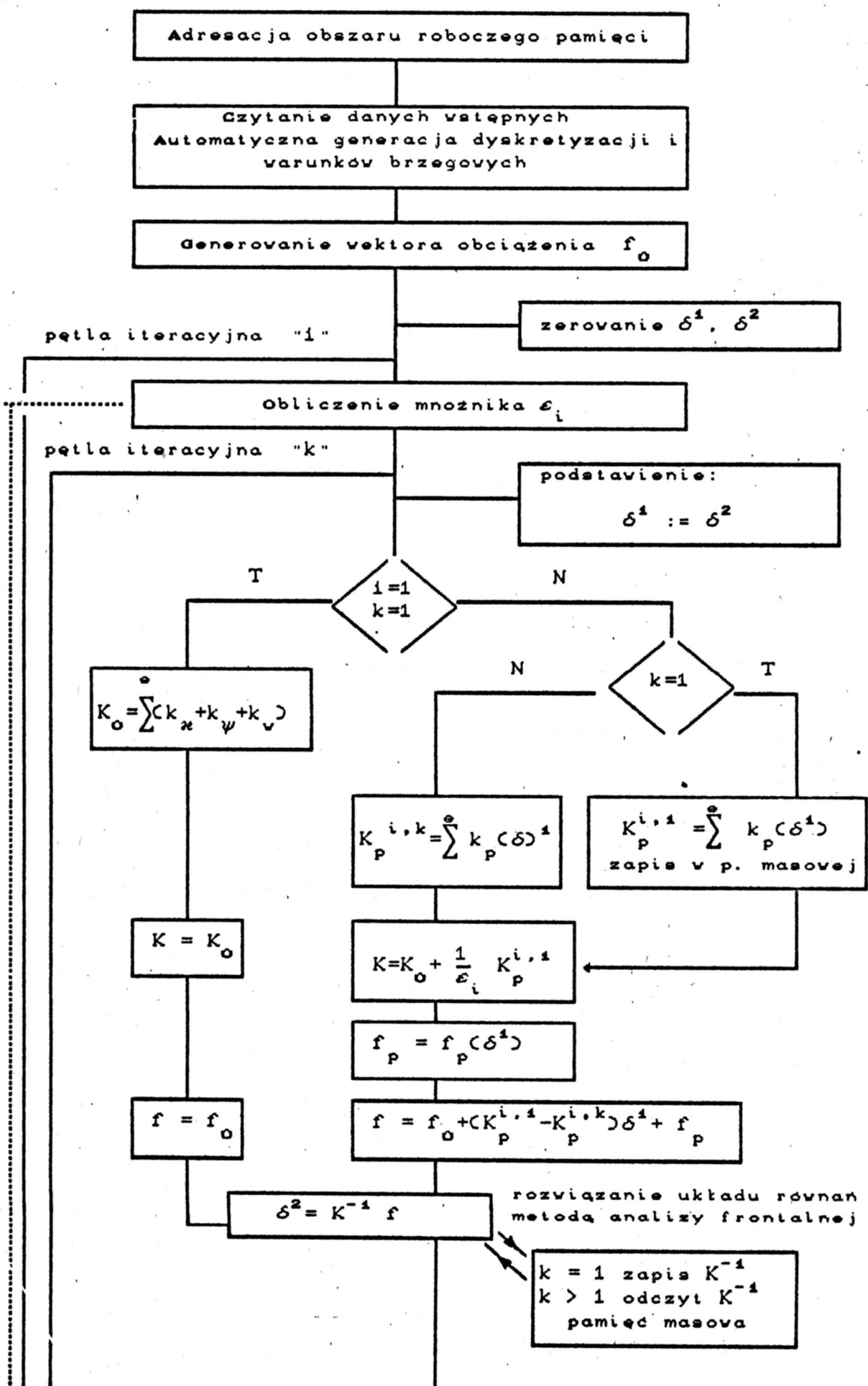
$$\begin{aligned} & \overset{(1)}{A_{11}} p_1 + \overset{(1)}{A_{12}} p_2 + \overset{(1)}{A_{13}} p_3 & = f_1 \\ & \overset{(1)}{A_{21}} p_1 + \overset{(1)}{A_{22}} p_2 + \overset{(1)}{A_{23}} p_3 & = f_2 \\ & \overset{(1)}{A_{31}} p_1 + \overset{(1)}{A_{32}} p_2 + \overset{(1)}{A_{33}} p_3 + \overset{(2)}{A_{11}} p_3 + \overset{(2)}{A_{12}} p_4 + \overset{(2)}{A_{13}} p_5 & = f_3 \\ & & \overset{(2)}{A_{21}} p_3 + \overset{(2)}{A_{22}} p_4 + \overset{(2)}{A_{23}} p_5 & = f_4 \\ & & \overset{(2)}{A_{31}} p_3 + \overset{(2)}{A_{32}} p_4 + \overset{(2)}{A_{33}} p_5 + \overset{(3)}{A_{11}} p_5 + \overset{(3)}{A_{12}} p_6 + \overset{(3)}{A_{13}} p_7 & = f_5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \overset{(k_e)}{A_{31}} p_{n-2} + \overset{(k_e)}{A_{32}} p_{n-1} + \overset{(k_e)}{A_{33}} p_n & = f_n \end{aligned}$$

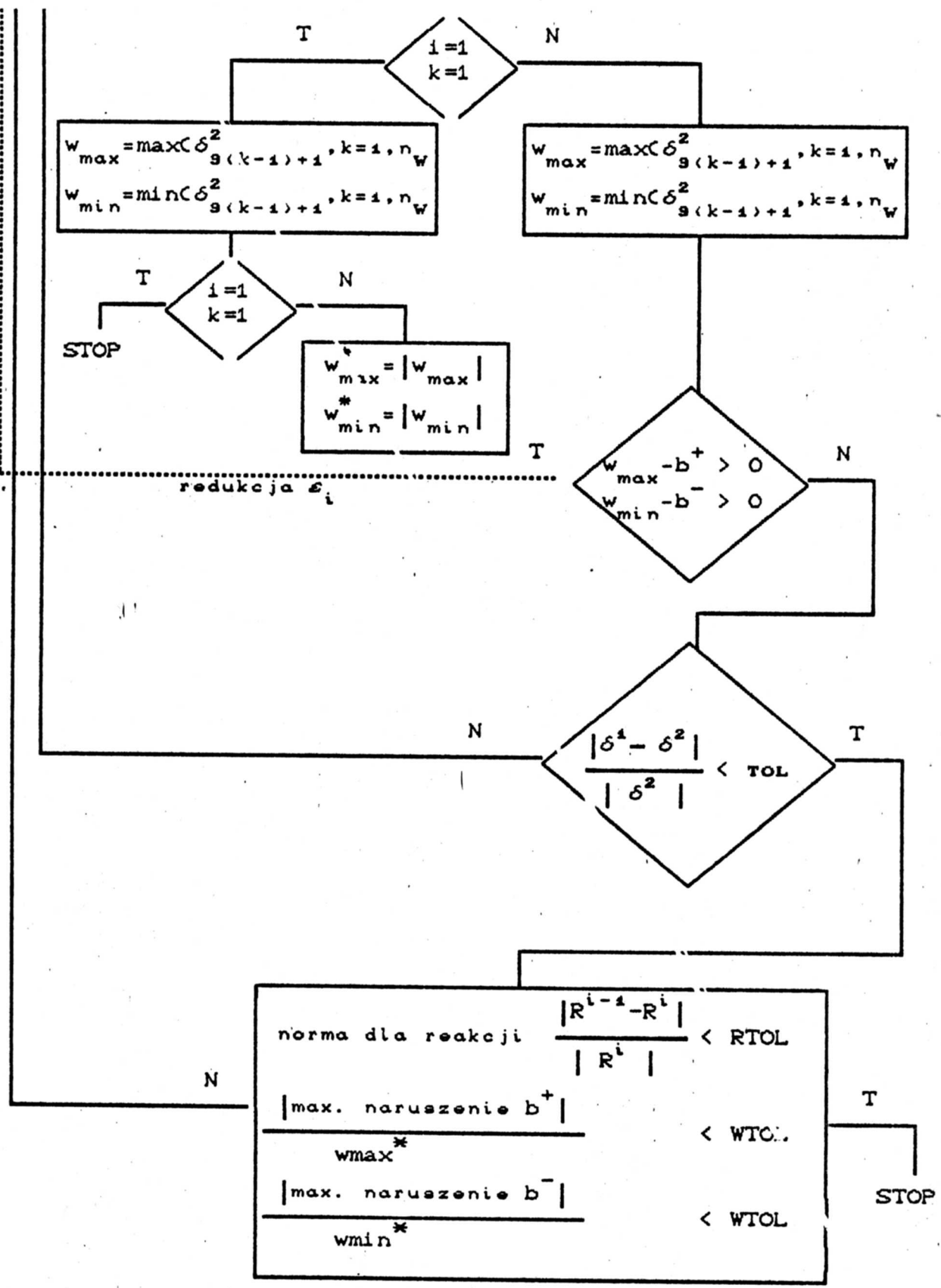
gdzie:

$$\overset{(k_e)}{A_{ij}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 N_i(\xi) N_j(\xi) d\xi = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad 2.4.47$$

Rozwiązanie układu 2.4.47 prowadzi do poszukiwanych wartości funkcji rozkładu obciążenia w węzłach.

Schemat blokowy programu PENAL



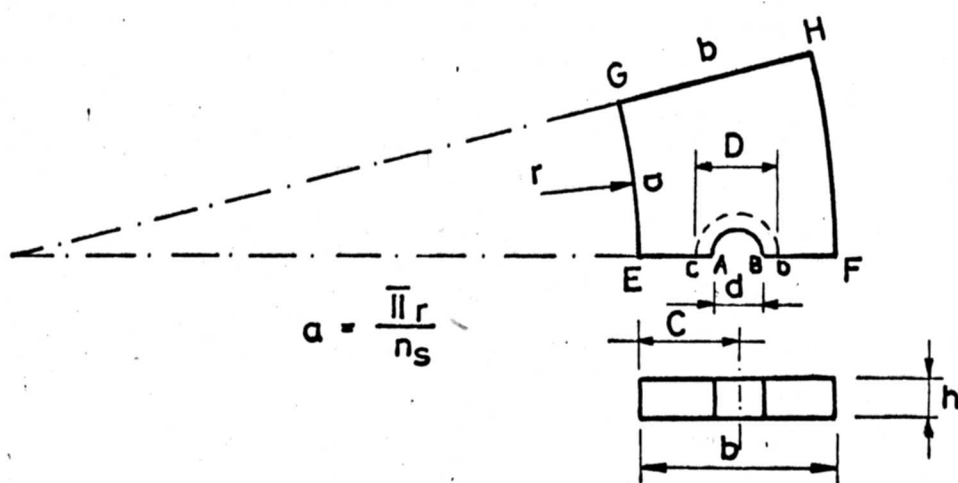


2.4.4 Numeryczna analiza stanu deformacji i naprężenia dla wycinka płyty kołnierza

Przedstawiony w p 2.4.2 algorytm i oparty o niego program PENAL zostały wykorzystane do przeprowadzenia analizy numerycznej wycinka płyty kołnierza mającej na celu określenie związków pomiędzy parametrami deformacji a wielkościami statycznymi, tak jak to zostało sprecyzowane w p. 2.2.

2.4.4.1 Przyjęcie schematu obliczeniowego

Z uwagi na założoną symetrię deformacji rozważa się schemat połówkowy o geometrii jak na rysunku.



Rys. 2.4.8

Obszar ABDC, o średnicy D odpowiada obszarowi zajmowanemu przez nakrętkę lub łeb śruby. Stosunek D/d (d -średnica trzpienia śruby) dla śrub M12+36 wg PN-85/M-82101 przyjmuje wartości od 1.56 do 1.68. Do obliczeń przyjęto stałą wartość równą wartości średniej tego stosunku $D/d=1.636$. Wewnątrz tego obszaru wprowadza się podłoże sprężyste ze stałą (wzór 2.2.3).

$$c = \frac{ED^2}{hd^2} \quad 2.4.48$$

Kinematyczne warunki brzegowe są następujące:

- a) wzdłuż krawędzi EG
- ugięcie $w = \Delta = 1$
 - kąt $\theta_s = 0$

Nie ogranicza się kąta obrotu θ_n w kierunku normalnym. Odpowiada to założeniu przegubowego połączenia powłoki z kołnierzem, i jest równoznaczne z pominięciem wpływu częściowego utwierdzenia

plyty kołnierza w powłoce. Jest to uzasadnione występującymi w praktyce proporcjami grubości tych elementów .

b) wzdłuż krawędzi EC i DF

- ugięcie w i kąt θ_s dowolne

- $\theta_n = 0$

c) wzdłuż krawędzi CH

- $\theta_n = 0$

połączenie uźebrowane :

- w, θ_s - dowolne

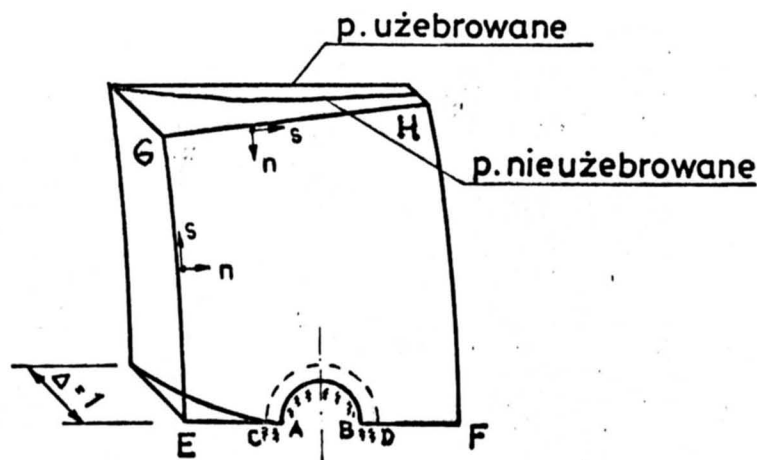
połączenie nieuźebrowane:

$$w(\xi) = \Delta \left(1 - \vartheta \frac{\xi}{b} \right) = 1 - \vartheta \frac{\xi}{b} \quad 2.4.49$$

$$\theta_s = -\theta = -\Delta \frac{\vartheta}{b} = -\frac{\vartheta}{b} \quad 2.4.50$$

gdzie ϑ jest bezwymiarowym parametrem charakteryzującym deformację

$$\vartheta = \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta} \quad 2.4.51$$



Rys. 2.4.9

Na pozostałych odcinkach obwodu :

- brzeg swobodny i nie obciążony .

W całym obszarze , na ugięcia powierzchni środkowej w nałożone jest ograniczenie $w \geq 0$, co odpowiada przyjęciu

$$b^- = 0; \quad \Omega^- = \Omega; \quad \Omega^+ = \vartheta \quad 2.4.51$$

wg oznaczeń z p.2.4.2 .

Przyjmuje się następujące wartości stałych materiałowych :

- współczynnik Poissona $\nu = 0.30$

- moduł Younga $E = 1.0$

To ostatnie przyjęcie jest dopuszczalne wobec założonej liniowości fizycznej materiału.

Jednostkową wartość nadaje się również wybranemu z wymiarów geometrycznych (tu przyjęto $b=1.0$). Dzięki temu wszystkie

uzyskane z obliczeń wielkości statyczne mogą pełnić rolę bezwymiarowych współczynników będących funkcjami proporcji wymiarów geometrycznych. Rzeczywiste wartości naprężeń lub sił wewnętrznych towarzyszących zadanej deformacji Δ_{rz} w rzeczywistej konstrukcji można obliczać wg formuły:

$$f_{rz} = f_{obl} \left(\theta, \frac{c}{B}, \frac{a}{B}, \frac{h}{B}, \frac{d}{H} \right) E_{rz} b_{rz}^n \Delta_{rz} \quad 2.4.52$$

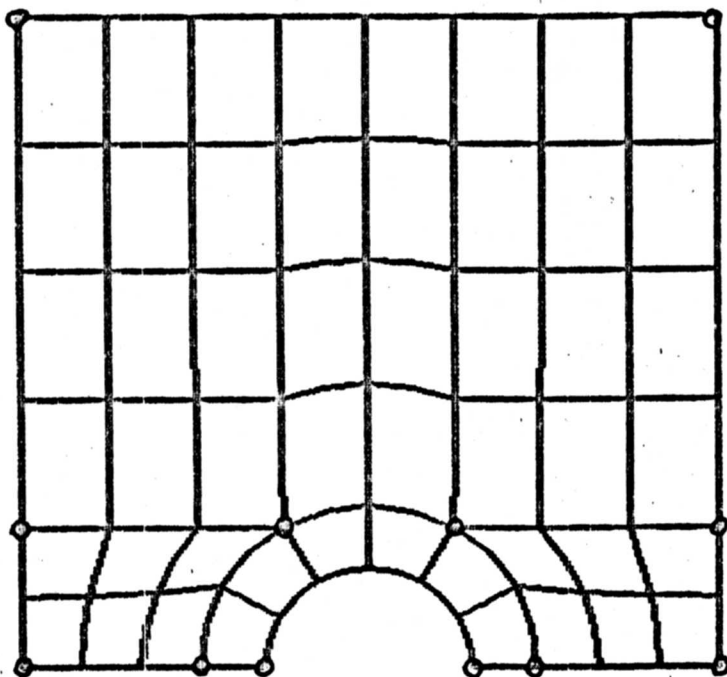
gdzie wykładnik n będzie wynosił:

$n = -1$ dla naprężeń

$n = 0$ dla sił poprzecznych i sił brzegowych

$n = 1$ dla momentów zginających i sił skupionych.

W obszarze wycinka wprowadza się dyskretyzację wg przedstawionego poniżej schematu:



Rys. 2.4.10

Obszar segmentu kołnierza dzieli się na cztery podobszary. Po określeniu współrzędnych punktów narożnych i liczby elementów w podobszarach dyskretyzacja wewnątrz nich jest generowana w pełni automatycznie. Zastosowany sposób podziału wyklucza pojawienie się elementów o kształcie zdegenerowanym, odbiegającym zbyt daleko od prostokątnego, co jak wiadomo mogłoby wpłynąć niekorzystnie na dokładność uzyskanych wyników.

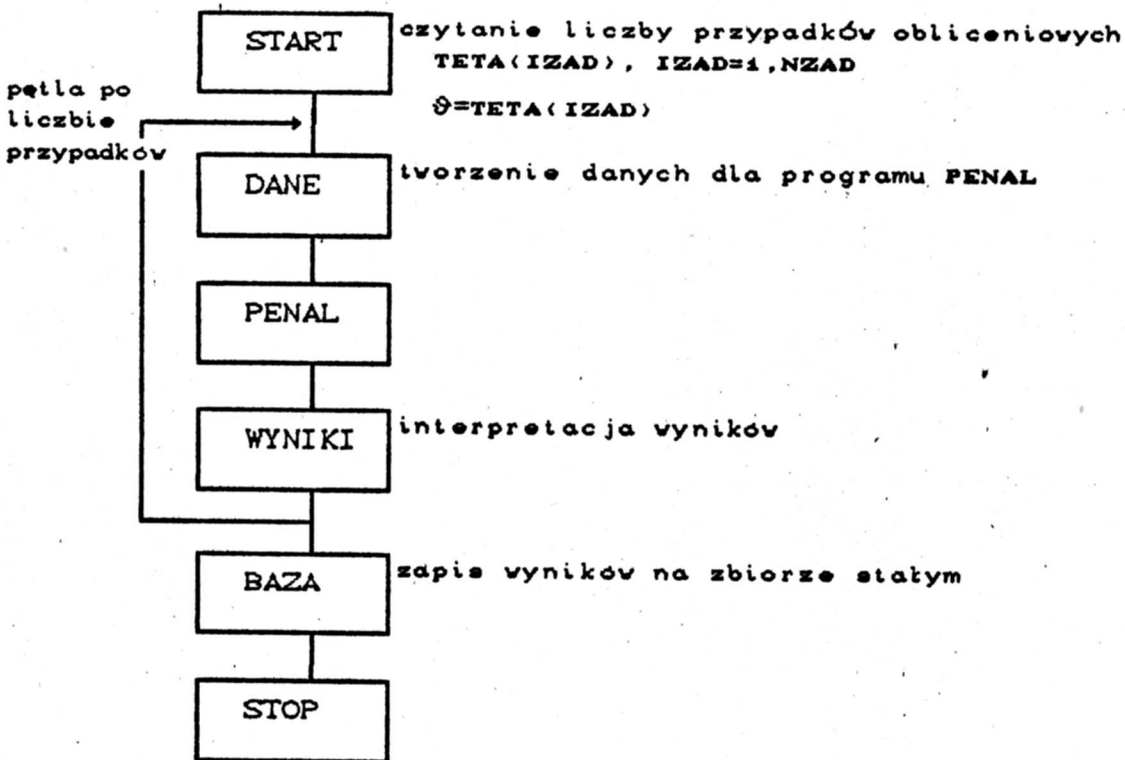
Również automatycznie generowane są macierze kodów zamocowania punktów brzegowych.

2.4.4.2 Opis programu PENSEC

Z uwagi na zamierzone przeprowadzenie obliczeń dla znacznej liczby przypadków (ok.1000) niezbędnym było opracowanie procedur zezwalających na w pełni automatyczne tworzenie zbiorów danych wejściowych do programu PENAL, dla przedstawio- w poprzednim punkcie schematu obliczeniowego, na podstawie minimalnej ilości wejściowych parametrów określających:

- 1) typ zadania
- 2) dyskretyzację obszaru
- 3) proporcje wymiarów
- 4) dokładność obliczeń.

Równie niezbędnymi są procedury do w pełni automatycznej interpretacji otrzymanych wyników (odpowiednie sumowanie reakcji, itp). Czynności te wykonuje program o nazwie PENSEC. Struktura jego jest następująca:



Zbiór danych do programu PENSEC ma postać:

NZAD

NTYP, NALGO, NWRI T

NECJ, NEJK, NEEC, NEDF, NEI G

NS, $\begin{cases} \text{ADOB} \\ \text{RDOB} \end{cases}$, CDOB, HDOB, DDOH, TETA1, TETA2

EPSIL, PIV, WTOL, EQTOL, RTOL

W pierwszej linii precyzuje się ilość przypadków obliczeniowych różniących się zadaniem parametrem deformacji θ .
 NTYP=1,2 odpowiednio dla połączenia uźebrowanego i nie uźebr.
 NALGO -parametr określający typ funkcji tworzącej ciąg $\{\epsilon_i\}$
 NExy -liczba elementów na odcinku xy
 NS -liczba sektorów w połączeniu (jeśli NS=0 kształt prostokątny)

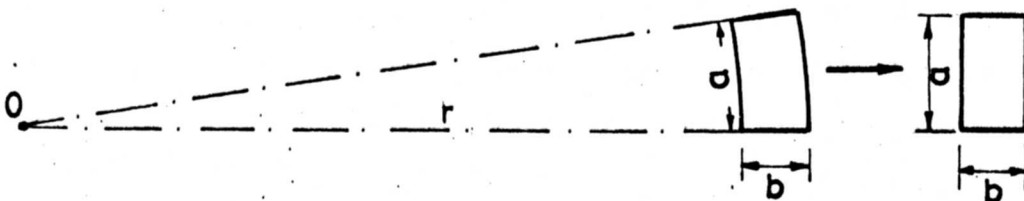
EPSIL, PIV- parametry określające ciąg $\{\epsilon_i\}$

WTOL, EQTOL, RTOL-tolerancje odpowiednio dla: maksymalnej wielkości przemieszczeń naruszających ograniczenia, zgodności norm wektora przemieszczeń w kolejnych iteracjach dla ustalonego oraz dla zgodności sumy sił odporu w kolejnych iteracjach.

Procedura DANE tworzy zbiór danych dla programu PENAL. Po jego każdorazowym wykonaniu, za pomocą procedury WYNIKI dokonuje się interpretacji wyników zgodnie z zasadami sprecyzowanymi w p.2.2. Szczegółowe omówienie zakresu tych działań podaje się w punkcie 2.4.4.4 wraz z omówieniem uzyskanych rezultatów.

2.4.4.3 Zakres obliczeń

Obszar segmentu kołnierza o kształcie wycinka pierścienia zastępuje się obszarem prostokątnym o wymiarach $a \times b$, gdzie a jest długością połowy segmentu mierzona po łuku o promieniu r . Przeprowadzone testy wykazały, że przy stosunku $b/r < 0.15$ oraz liczbie sektorów $n > 16$, popełniane z tego tytułu błędy nie przekraczają 5%, i szybko maleją w miarę wzrostu liczby sektorów i zmniejszania się stosunku b/r .



Rys. 2.4.11

Obliczenia przeprowadzono dla najczęściej stosowanego w praktyce usytuowania śruby w odległości $c=0.5b$, jednakowej od obu, zewnętrznej i wewnętrznej, krawędzi kołnierza.

Zakres pozostałych danych określających geometrię segmentu kołnierza dobrano tak, by obejmował on proporcje wymiarów jakie mogą wystąpić w prawidłowo skonstruowanych połączeniach.

W szczególności przyjęto:

- stosunek długości boków

$$a/b \in \{0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 2.00\}$$

- stosunek grubości kołnierza do szerokości wraz z odpowiadającymi mu stosunkami średnicy trzpienia śruby do grubości

$$h/b \in \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30\}$$

$$d/h \in \left\{ \begin{array}{l} 0.60, 0.70, 0.80, 0.80, 0.50 \\ 1.20, 1.10, 0.90, 0.80, 0.70 \\ 1.60, 1.50, 1.30, 1.10, 0.90 \\ 2.40, 2.00, 1.60, 1.40, 1.10 \end{array} \right\}$$

co daje razem $6 \times 5 \times 4 = 120$ przypadków obliczeniowych. dla każdego z nich rozważa się dwa typy połączeń

a) połączenie uźebrowane

b) połączenie nieuźebrowane

W przypadku a) obliczenia przeprowadza się zakładając zmienną wielkość parametru postaci deformacji ϑ , (określającego kinematyczne warunki brzegowe), przybierającą wartości:

$$\vartheta \in \{0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00\}$$

Ogółem rozpatrzono $(1+5) \times 120 = 720$ zadań.

Przyjęto następujące kryteria dokładności :

- dla warunku nienaruszania ograniczeń przez ugięcia w

$$WTOL = 0.01 \text{ (1\%)}$$

- dla warunku ustabilizowania się sumy sił odporu

$$RTOL = 0.005 \text{ (0.5\%)}$$

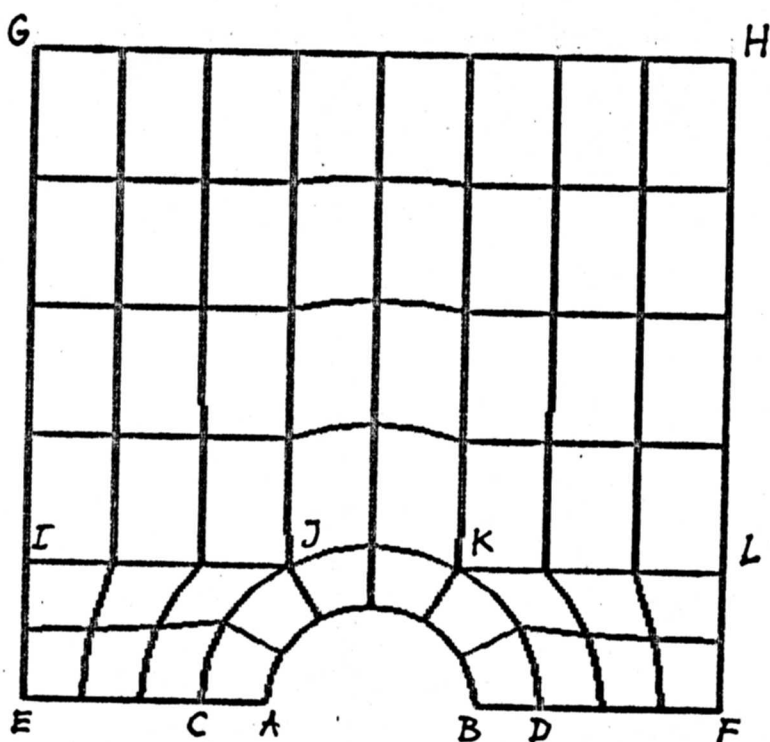
Wobec stwierdzonej cechy charakterystycznej procesu obliczeniowego polegającej na znacznym zwolnieniu tempa zbieżności przy zbliżaniu się do rozwiązania problemu , dalsze zaostrzenie wymienionych tolerancji powodowało by nieproporcjonalnie wielki wzrost wymaganego czasu obliczeniowego EMC, któremu jednak nie towarzyszyłyby jakiegokolwiek istotne zmiany uzyskanych rezultatów.

Przyjęto następujące dane określające dyskretyzację obszaru:

- ilość elementów na odcinku

$$IE = CJ = 2, JK = 2, LF = DK = 2, EC = 3, DF = 3, IG = 3+5,$$

liczba węzłów osiągała wartość $201+269$, a liczba stopni swobody układu $603+807$.



Rys. 2.4.12

2.4.5 Rezultaty obliczeń

Obliczenia wykazały na ogół duży i zarazem zróżnicowany w zależności od geometrii sektora, wpływ beczności ograniczenia $w \geq 0$ na obliczane wielkości statyczne i kinematyczne.

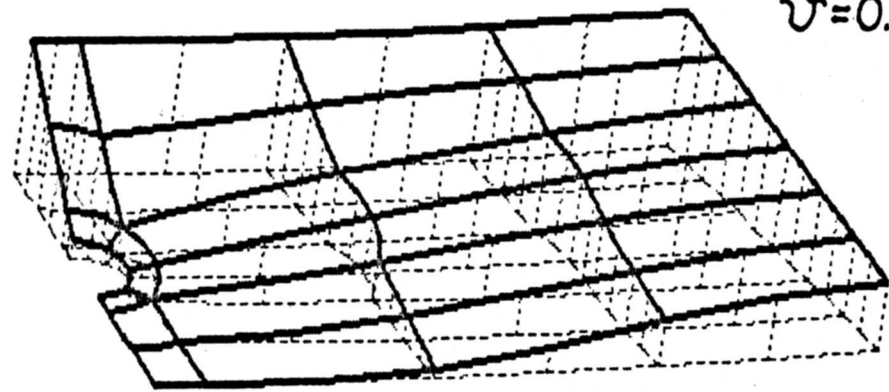
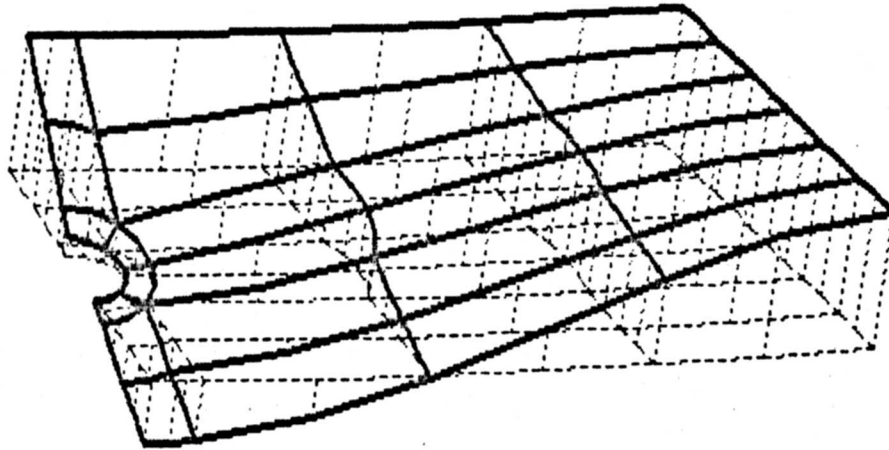
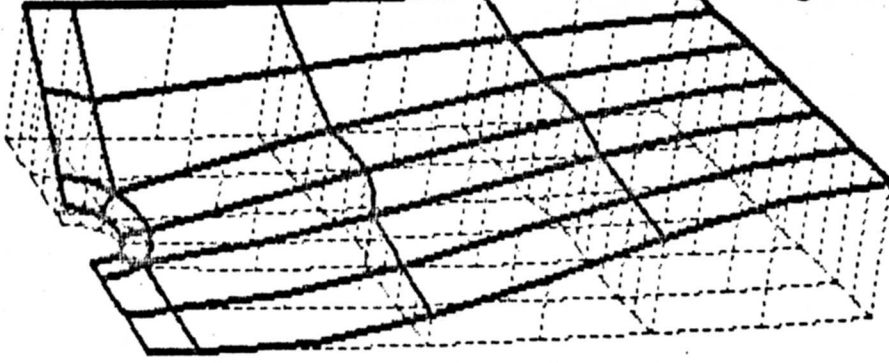
Na rys. 2.4.13 przedstawia się przykładowe postacie powierzchni ugięcia segmentu kołnierza o geometrii :

$$a/b = 1.5 ; h/b = 0.2 ; d/h = 1.0,$$

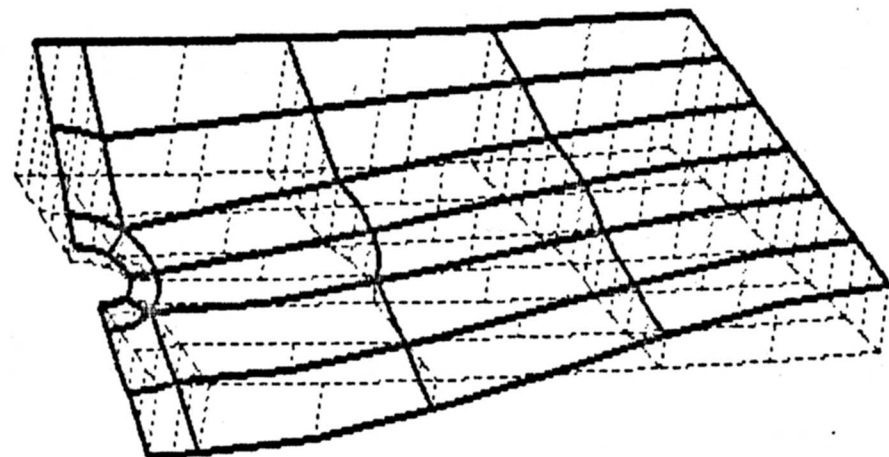
dla połączenia uźebrowanego , kolejno przy $\vartheta = 0.0, 0.50, 1.0$, oraz dla połączenia nieuźebrowanego , przyczym dla porównania przytacza się wyniki uzyskane w analogicznym zadaniu, ale bez nałożonego ograniczenia na ugięcia $w \geq 0$. Widoczne jest narastanie wpływu obecności ograniczeń na postać deformacji w miarę wzrostu parametru ϑ , oraz ich szczególnie duże znaczenie dla połączenia nieuźebrowanego.

Działanie sił reakcji w strefie kontaktu wywołuje szereg zjawisk określonych mianem efektu dźwigni. Polegają one przede wszystkim na:

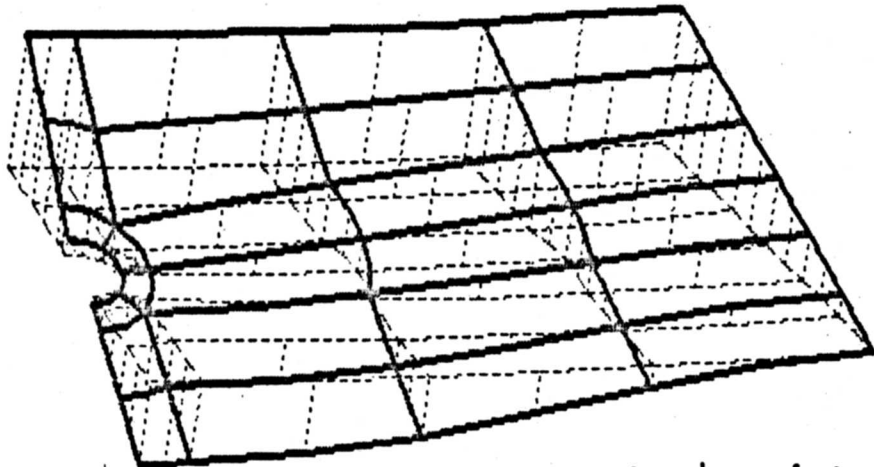
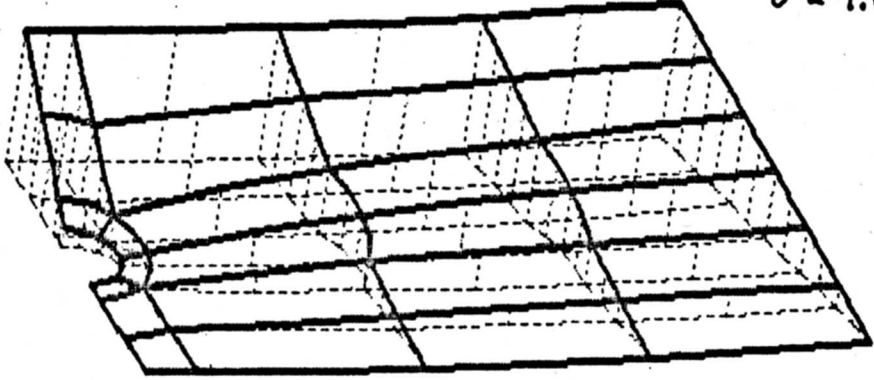
- zwiększeniu się siły rozciągającej śrubę w stosunku do sumy działającego na brzegu segmentu obciążenia,
- zmniejszeniu się mimośrodowo działania wypadkowej
- zwiększeniu się podatności połączenia
- zmniejszeniu się udziału sił przenoszonych przez zębra.



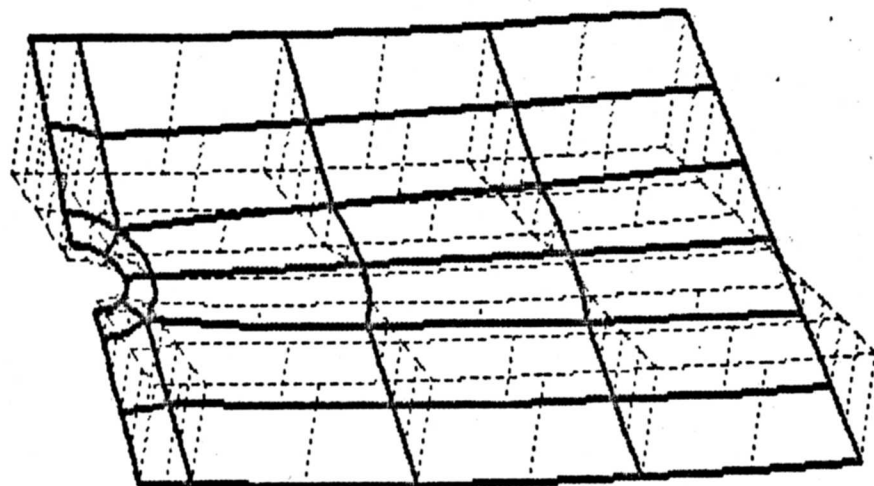
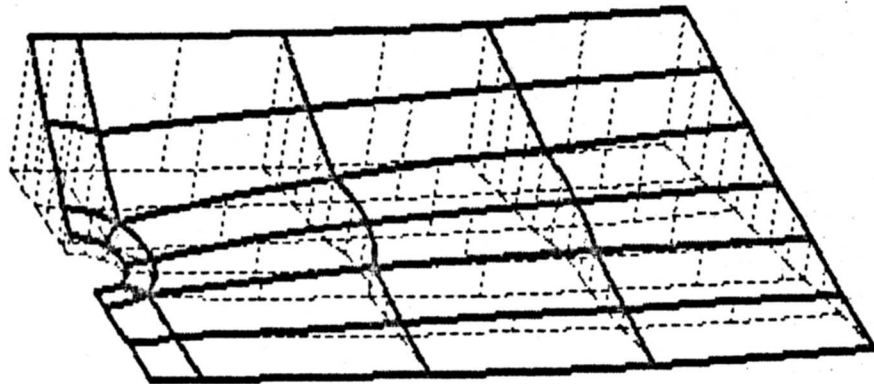
$\nu = 0.5$



Rys. 2.4.13

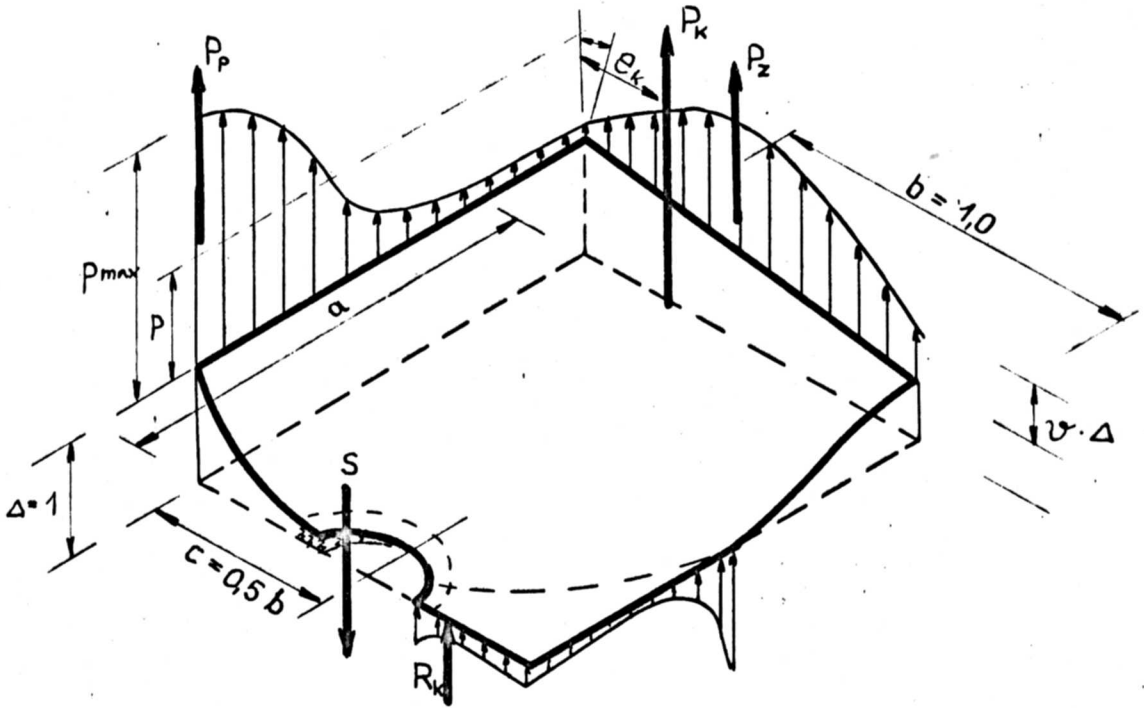


k. bez żeber



Rvs. 2.4.13 (cd)

Wszystkie te efekty nasilają się w miarę wzrostu parametru postaci deformacji ϑ oraz w miarę zwiększania się długości sektora (ϑ wzrostu stosunku a/b). Przedstawione dalej rezultaty pozwalają na ilościowe ujęcie tych zjawisk. Poniższy rysunek przedstawia schematycznie zdeformowany sektor kołnierza połączenia uźebrowanego, działające na niego siły i parametry deformacji.



Rys. 2.4.14

Zgodnie z ustaleniami p. 2.2 obliczane są wymienione w p. 2.4.5.1 + 6 wielkości statyczne i kinematyczne w połączeniu (oznaczone * tylko dla połączenia uźebrowanego). W połączeniu uźebrowanym, każdą z nich przedstawia się jako funkcję parametru ϑ . Postacie tych funkcji zostały dobrane tak, by dobrze oddawały charakter występujących zależności, a jednocześnie odznaczały się prostotą. Wielkości o podstawowym znaczeniu jak współczynnik efektu dźwigni f_{dk} oraz współczynnik f_0 (o roli wyjaśnionej w innym miejscu) aproksymuje się funkcjami z rodzin trójparametrowych $f = f(\vartheta, A, B, C)$, a pozostałe funkcjami dwuparametrowymi $f = f(\vartheta, A, B)$. Parametry określające poszczególne funkcje, dla każdego przypadku obliczeniowego dobiera się minimalizując sumę kwadratów błędów wg formuły:

$$\delta(A, B, C) = \min_{A, B, C} \left\{ \sum_{i=1}^5 \left[f_i - f(\vartheta_i, A, B, C) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad 2.4.53$$

za pomocą własnego pakietu procedur minimalizujących APROX.

2.4.5.1 Podatność układu śruba - kołnierz.

Oblicza się sumę sił reakcji wokół brzegu segmentu kołnierza. W oparciu o nią wylicza się średnią gęstość obciążenia

$$p = \frac{P}{a}^k, \quad 2.4.54$$

a następnie podatność:

$$k_o = \frac{\Delta}{p} = \frac{1}{p}. \quad 2.4.55$$

Wielkość tę przedstawia się jako iloczyn bezwymiarowego współczynnika kształtu

$$\alpha_k = \alpha_k(\vartheta, \frac{a}{b}, \frac{h}{b}, \frac{d}{h}) \quad 2.4.56$$

i trzeciej potęgi charakterystycznego wymiaru liniowego l podzielonego przez sztywność giętną płyty.

$$k_o = \alpha_k \frac{l^3}{D_k} \quad ; \quad D_k = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad 2.4.57$$

Jako wymiar l przyjęto całkowitą długość segmentu

$$l = \frac{2\pi r}{n} = 2a \quad 2.4.58$$

skąd :

$$\alpha_k = k_o \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)8a^3} \quad 2.4.59$$

Zależność $\alpha_k = \alpha_k(\vartheta)$ jest aproksymowana dwuparametrową funkcją homograficzną :

$$\alpha_k(\vartheta) = \frac{A_k}{1 - B_k \vartheta} \quad 2.4.60$$

Rysunek 2.4.15 przedstawia przykładowe przebiegi tej zależności oraz obliczone wartości $\alpha_k(\vartheta_i)$

Wielkości współczynników A_k, B_k w zależności od parametrów geometrycznych segmentu podają Tab. 2.4.1 i 2.4.2. Tabela 2.4.3 podaje wielkości współczynnika α_k dla połączenia nieuźebrowanego.

Przy ustalonym stosunku h/b i d/h podatność maleje w miarę zwiększania się liczby segmentów. Zależność tę (dla $\vartheta = 0$) ilustruje wykres pokazany na rys 2.4.16

Tab. 2.4.1 Współczynnik Akf100.00

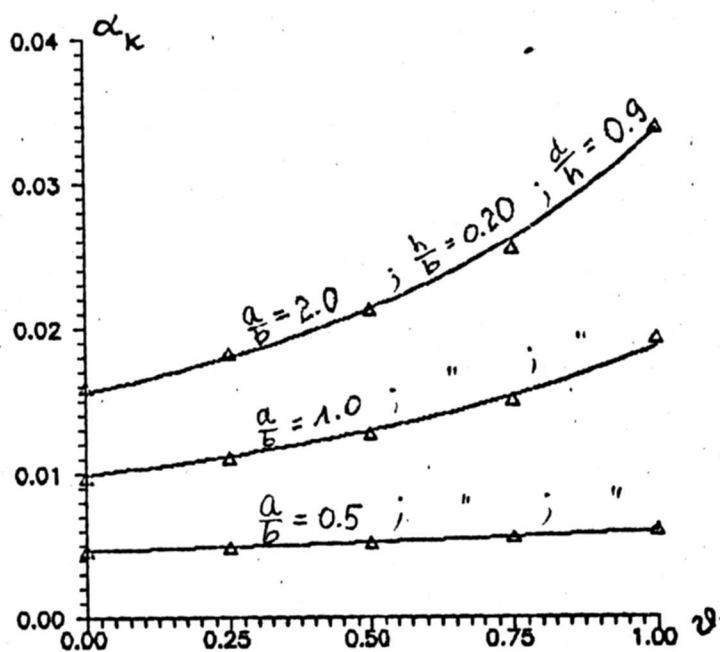
h / d		a/b					
b	h	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	1.1988	0.9793	0.8639	0.7397	0.6140	0.4133
0.10	1.2	0.9042	0.8400	0.7490	0.6311	0.5132	0.3354
0.10	1.6	0.8419	0.7840	0.6883	0.5708	0.4534	0.2967
0.10	2.4	0.5977	0.6213	0.5473	0.4410	0.3426	0.2180
0.15	0.7	1.5077	1.0896	0.9244	0.7980	0.6682	0.4631
0.15	1.1	1.0905	0.9499	0.8261	0.6786	0.5585	0.3755
0.15	1.5	0.9029	0.8258	0.7177	0.5806	0.4747	0.3073
0.15	2.0	0.6513	0.6725	0.5698	0.4668	0.3705	0.2282
0.20	0.6	2.4030	1.4549	1.1647	0.9934	0.8391	0.5959
0.20	0.9	1.5594	1.1399	0.9908	0.8103	0.6722	0.4627
0.20	1.3	1.1149	0.9427	0.8048	0.6512	0.5280	0.3508
0.20	1.6	0.8515	0.7920	0.6798	0.5428	0.4325	0.2811
0.25	0.6	3.2454	1.7723	1.4073	1.1573	0.9812	0.7074
0.25	0.8	2.2320	1.4809	1.1455	0.9682	0.8052	0.5635
0.25	1.1	1.5576	1.1717	0.9617	0.7750	0.6333	0.4290
0.25	1.4	1.0930	0.9218	0.7757	0.6176	0.4953	0.3252
0.30	0.5	5.5857	2.8205	1.9657	1.5656	1.2933	0.9717
0.30	0.7	3.3834	1.8450	1.4705	1.1972	1.0037	0.7178
0.30	0.9	2.3426	1.5496	1.1911	0.9873	0.8138	0.5649
0.30	1.1	1.8092	1.2408	1.0371	0.8238	0.6702	0.4527

Tab. 2.4.2 Współczynnik Bk

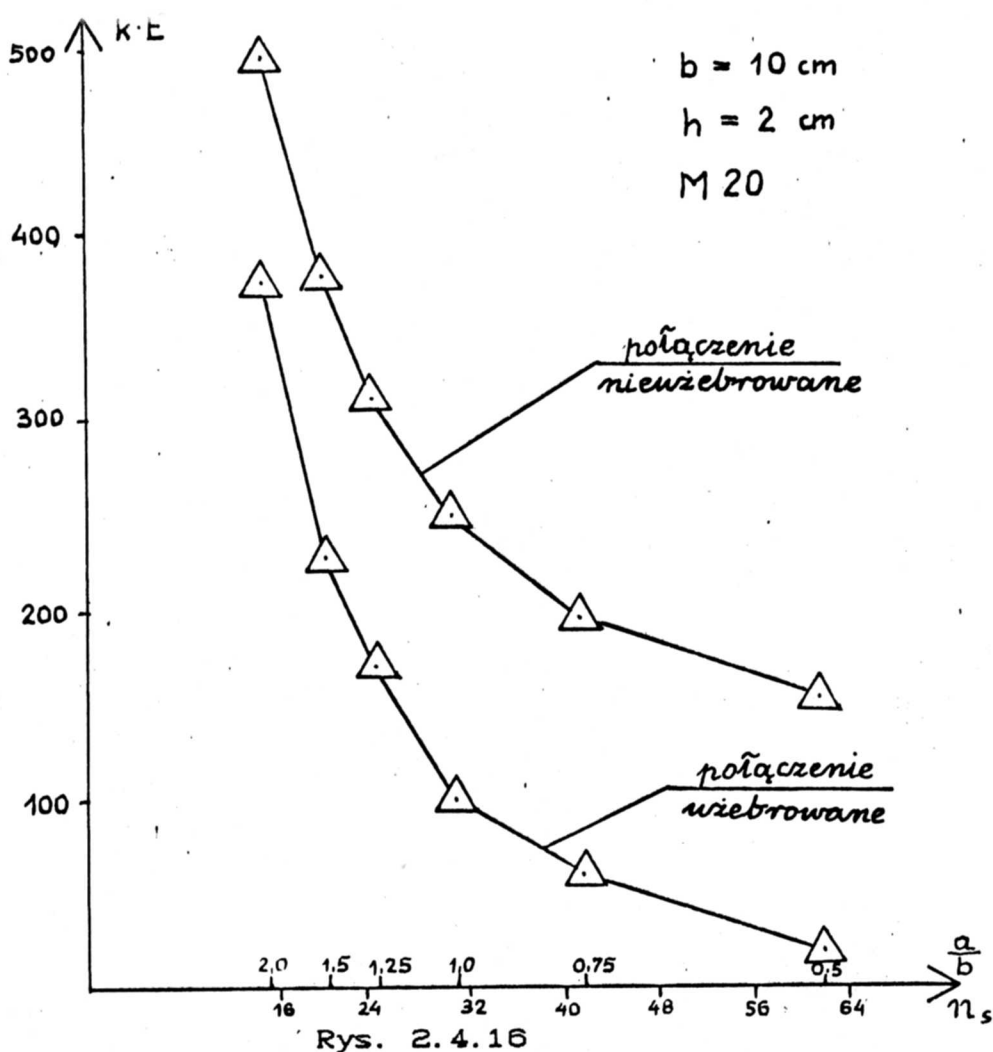
h / d		a/b					
b	h	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	0.5395	0.5281	0.4702	0.3928	0.3215	0.2201
0.10	1.2	0.5360	0.4970	0.4232	0.3383	0.2707	0.1790
0.10	1.6	0.4928	0.4691	0.3938	0.3102	0.2606	0.1579
0.10	2.4	0.4844	0.4158	0.2968	0.2454	0.2044	0.1206
0.15	0.7	0.5390	0.5646	0.5217	0.4382	0.3635	0.2341
0.15	1.1	0.5362	0.4989	0.4374	0.3836	0.3086	0.1942
0.15	1.5	0.4918	0.4648	0.3905	0.3337	0.2477	0.1604
0.15	2.0	0.4841	0.4086	0.3375	0.2525	0.1995	0.1247
0.20	0.6	0.5392	0.5974	0.5641	0.4913	0.4163	0.2846
0.20	0.9	0.5376	0.5500	0.4712	0.4240	0.3502	0.2276
0.20	1.3	0.4927	0.4740	0.4079	0.3538	0.2848	0.1783
0.20	1.6	0.4868	0.4419	0.3621	0.3055	0.2440	0.1465
0.25	0.6	0.5389	0.6209	0.5733	0.5239	0.4507	0.3146
0.25	0.8	0.5382	0.5492	0.5368	0.4600	0.3918	0.2632
0.25	1.1	0.4945	0.4872	0.4383	0.3909	0.3241	0.2058
0.25	1.4	0.4878	0.4523	0.3795	0.3285	0.2646	0.1637
0.30	0.5	0.5403	0.6171	0.6167	0.5808	0.5371	0.3946
0.30	0.7	0.5378	0.6178	0.5601	0.5119	0.4427	0.3097
0.30	0.9	0.5362	0.5376	0.5171	0.4470	0.3805	0.2543
0.30	1.1	0.4928	0.5181	0.4337	0.3926	0.3268	0.2112

Tab. 2.4.3 Współczynnik α_k (d. nieuźebrowane)

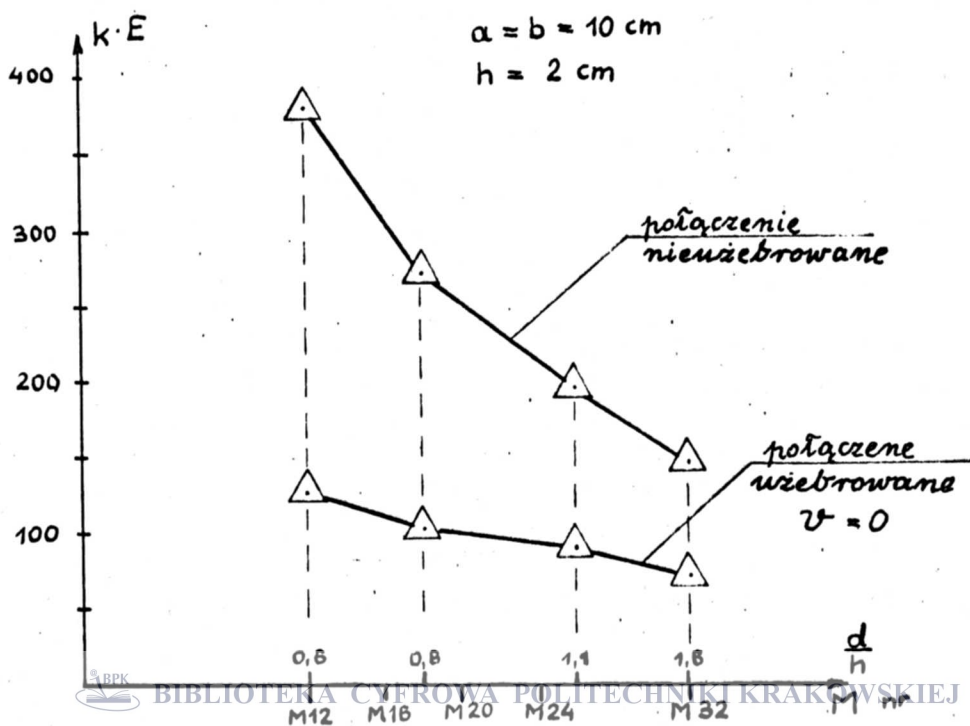
h	d	a/b					
		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	10.9023	4.1207	2.2075	1.3950	0.9645	0.5465
0.10	1.2	8.4230	3.1849	1.7022	1.0766	0.7426	0.4151
0.10	1.6	7.2346	2.7245	1.4589	0.9201	0.6369	0.3572
0.10	2.4	4.6422	1.7740	0.9556	0.6096	0.4465	0.2505
0.15	0.7	12.2877	4.6790	2.5146	1.5926	1.1074	0.6172
0.15	1.1	9.5151	3.6257	1.9295	1.2281	0.8464	0.4726
0.15	1.5	7.4238	2.8214	1.5129	0.9615	0.6698	0.3713
0.15	2.0	5.1203	1.9789	1.0646	0.6736	0.4663	0.2618
0.20	0.6	16.3609	6.3504	3.4510	2.1936	1.5199	0.8674
0.20	0.9	12.1869	4.5986	2.4761	1.5684	1.0936	0.6090
0.20	1.3	8.6629	3.2761	1.7575	1.1126	0.7705	0.4321
0.20	1.6	6.6272	2.5355	1.3523	0.8602	0.5940	0.3327
0.25	0.6	19.6495	7.8781	4.2904	2.7404	1.9213	1.0668
0.25	0.8	15.0045	5.8692	3.1570	2.0066	1.3896	0.7920
0.25	1.1	10.9126	4.1343	2.2288	1.4210	0.9768	0.5486
0.25	1.4	7.9039	2.9868	1.5965	1.0109	0.7008	0.3935
0.30	0.5	29.6445	12.1671	6.7585	4.3089	2.9935	1.6700
0.30	0.7	19.7982	7.9286	4.3132	2.7506	1.9294	1.0739
0.30	0.9	14.8799	5.7919	3.1265	1.9878	1.3782	0.7833
0.30	1.1	11.5483	4.3836	2.3756	1.5069	1.0398	0.5845



Rys. 2.4.15



Widoczna jest również silna zależność podatności od wielkości śruby przy zachowanych pozostałych wymiarach segmentu. Spadek podatności przy wzroście średnicy śrub można tłumaczyć nie tylko wzrastającą sztywnością samej śruby ale przede wszystkim zmniejszeniem się obszaru swobodnej deformacji płyty wobec wzrostu obszaru działania więzów (odpowiadającego obszarowi zajmowanemu przez nakrętkę lub łeb śruby).

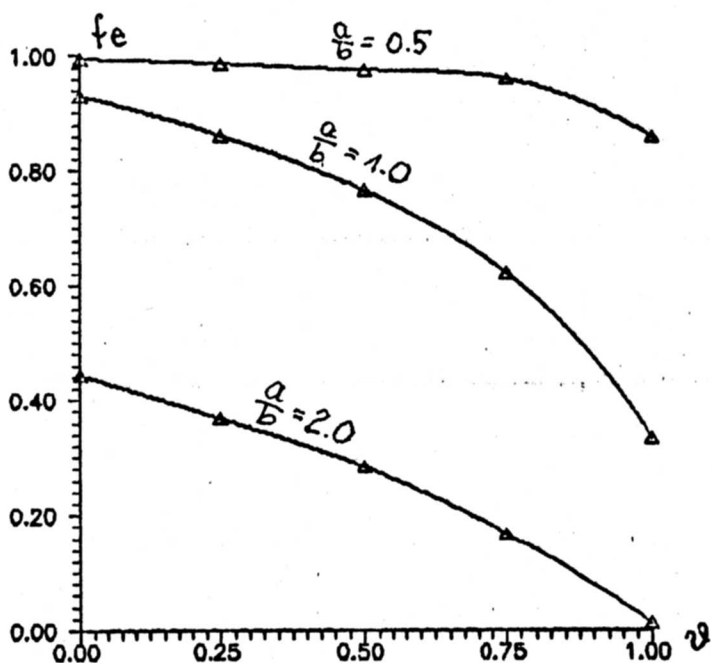


2.4.5.2* Mimośród wypadkowej obciążenia

Oblicza się moment M_z sił reakcji działających na żebro względem p.O. Mimośród wypadkowej sił P_k wyniesie :

$$e_k = \frac{M_z}{P_k} = f_{\bullet} c \quad 2.4.61$$

gdzie f_{\bullet} jest bezwymiarowym współczynnikiem $0 < f_{\bullet} < 1$. W miarę narastania efektu dźwigni, tj. przy $\vartheta \rightarrow 1$, oraz przy wzroście a/b jego wielkość maleje.



Rys. 2.4.18

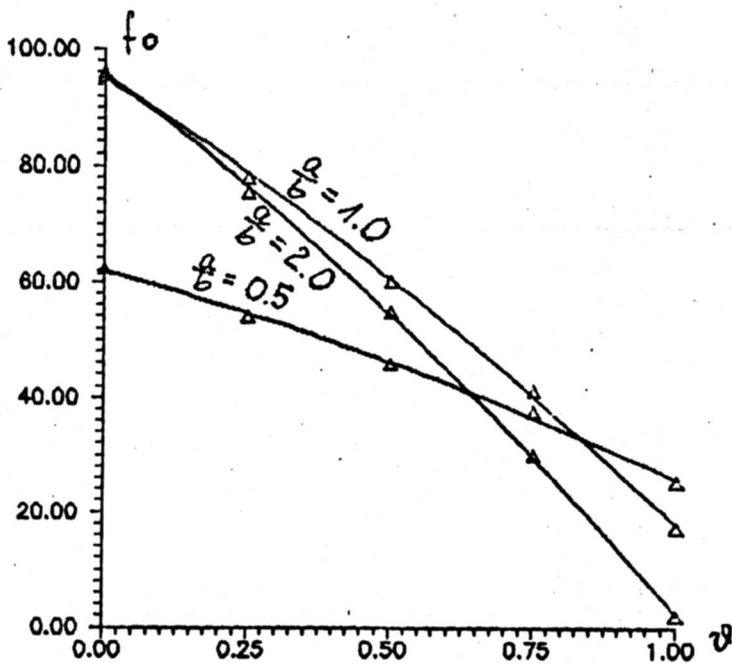
W podstawowym dla analizy statycznej równaniu zgodności 2.2.18, istotną rolę odgrywa czynnik $\frac{e_k(\vartheta)}{k_o(\vartheta)}$. Jego dokładne określenie jest ważniejsze, niż określenie samego mimośrododu e_k

$$\frac{e_k(\vartheta)}{k_o(\vartheta)} = \frac{f_{\bullet}(\vartheta) c}{\alpha_k(\vartheta) \frac{(2a)}{D_k}} = f_{\bullet}(\vartheta) \frac{D_k c}{8 a^3} \quad 2.4.62$$

to też zależność tego właśnie czynnika od parameru ϑ jest aproksymowana funkcjami kwadratowymi postaci:

$$\frac{f_{\bullet}(\vartheta)}{\alpha_k(\vartheta)} = f_{\bullet}(\vartheta) = A_o \vartheta^2 + B_o \vartheta + C_o \quad 2.4.63$$

Przykładowe przebiegi tej zależności pokazano na rys. 2.4.19.



Rys. 2.4.19

Wielkość mimośrodowa można będzie uzyskać jako :

$$e_k = f_0(\theta) \alpha_k(\theta) c \quad 2.4.64$$

Zależność współczynników A_0 , B_0 , C_0 od wymiarów segmentu przedstawiają tabele 2.4.4 + 6. Tabela 2.4.7 podaje dodatkowo wielkość

$$f_0(1) = A_0 + B_0 + C_0 \quad 2.4.65$$

celem ułatwienia posługiwania się kryterium klasyfikacji rodzaju występującego efektu dźwigni wg wzoru 2.2.10.

Tab. 2.4.4 Współczynnik A₀

h	d	a/b					
		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	-16.0663	-36.7720	-18.1278	-22.9674	-27.4428	-25.1934
0.10	1.2	-15.6117	-29.5972	-15.3531	-23.3251	-27.8598	-29.0631
0.10	1.6	-12.3519	-25.9843	-14.6838	-23.4753	-30.2788	-26.0369
0.10	2.4	-1.5723	-10.3703	-17.7088	-19.8496	-28.0605	-31.1248
0.15	0.7	-11.4994	-34.7940	-17.3936	-21.2984	-24.2441	-24.4826
0.15	1.1	-12.2090	-29.8141	-16.1787	-22.7641	-24.9397	-24.3899
0.15	1.5	-10.3046	-23.1077	-14.9358	-24.2917	-28.5648	-25.1977
0.15	2.0	-7.0941	-14.2285	-19.3968	-20.3415	-18.0521	-26.7374
0.20	0.6	-6.9214	-29.2615	-28.9280	-18.8015	-20.4350	-19.0677
0.20	0.9	-9.2632	-29.2341	-16.2638	-21.2483	-23.1034	-21.5793
0.20	1.3	-9.2111	-23.1856	-15.5029	-23.5736	-26.4464	-23.9268
0.20	1.6	-7.8822	-17.0502	-15.1843	-25.9203	-29.8795	-27.0051
0.25	0.6	-4.9052	-24.6656	-31.8925	-17.3381	-19.0573	-16.2062
0.25	0.8	-6.7578	-25.6070	-23.6820	-20.0888	-21.2902	-18.4855
0.25	1.1	-7.7682	-22.8072	-16.1596	-22.8317	-24.3709	-22.6556
0.25	1.4	-7.4564	-17.7999	-15.3685	-24.2553	-28.1356	-26.3252
0.30	0.5	-2.5894	-16.4182	-30.8287	-31.3267	-16.5795	-15.2903
0.30	0.7	-4.6099	-21.6696	-29.0232	-17.8973	-19.2693	-16.8300
0.30	0.9	-5.8072	-21.5380	-22.4884	-19.4638	-21.8318	-17.3973
0.30	1.1	-6.3622	-19.4807	-17.3849	-21.5581	-24.3909	-20.4545

Tab. 2.4.5 Współczynnik B₀

h	d	a/b					
		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	-30.8600	-38.0807	-70.4868	-67.3359	-65.8550	-74.7148
0.10	1.2	-46.8475	-52.0803	-74.1106	-66.9892	-65.9429	-71.3176
0.10	1.6	-58.2627	-55.9972	-74.1160	-66.4545	-63.8435	-75.4918
0.10	2.4	-93.9243	-77.3338	-70.0201	-71.1529	-66.4085	-73.7094
0.15	0.7	-25.6624	-28.2580	-64.8233	-64.1669	-64.7896	-70.8439
0.15	1.1	-39.3550	-42.3957	-68.0549	-63.9406	-65.8170	-73.4180
0.15	1.5	-55.2934	-53.6864	-69.3753	-62.4738	-62.9668	-74.1993
0.15	2.0	-83.1068	-70.0901	-65.7722	-66.9172	-68.3022	-76.4446
0.20	0.6	-16.2689	-15.9324	-39.6786	-59.2738	-61.8568	-70.6446
0.20	0.9	-26.7803	-29.5389	-60.9362	-60.2468	-62.6874	-71.7953
0.20	1.3	-43.9785	-45.3362	-63.5163	-59.3560	-61.3756	-72.6783
0.20	1.6	-61.4102	-58.0465	-65.1813	-58.1159	-60.0253	-72.5260
0.25	0.6	-12.2880	-10.5122	-24.6656	-54.5552	-57.6107	-69.1186
0.25	0.8	-18.5584	-20.3501	-42.7105	-54.8095	-58.9450	-69.9764
0.25	1.1	-30.5682	-34.3322	-56.0691	-54.7431	-58.9828	-69.3431
0.25	1.4	-46.9925	-48.5213	-59.2800	-55.5443	-57.7598	-69.5494
0.30	0.5	-7.2538	-6.0464	-7.8744	-24.2951	-52.0085	-62.8932
0.30	0.7	-12.1635	-11.7917	-23.9879	-49.8988	-54.0220	-65.8049
0.30	0.9	-18.6364	-21.4752	-38.8575	-51.2629	-54.6507	-68.9731
0.30	1.1	-26.9836	-31.4780	-48.3925	-51.3727	-54.7180	-68.5742

Tab. 2.4.6 Wso&ogonekczynnik Co

h	d	a/b					
		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	81.1894	103.1699	109.5058	104.0837	101.5292	102.5602
0.10	1.2	106.1893	114.1472	112.7573	105.5338	102.6867	102.6076
0.10	1.6	118.3001	116.5341	113.4305	106.0407	103.3330	103.5506
0.10	2.4	160.4633	131.6385	118.6018	111.6017	107.1040	107.3090
0.15	0.7	64.3963	87.5468	100.6886	97.8646	96.5542	98.0560
0.15	1.1	88.0152	101.4978	105.6008	100.7785	99.1034	99.9549
0.15	1.5	109.9659	109.8922	108.3807	102.5556	100.6227	101.6642
0.15	2.0	149.2114	124.7855	113.9204	107.4577	108.6083	105.5564
0.20	0.6	40.4260	63.2872	81.9673	87.8797	88.7406	92.3279
0.20	0.9	61.8110	82.2715	94.9436	93.4873	93.2171	95.5761
0.20	1.3	89.3088	98.0820	100.9530	97.4013	96.5096	98.5461
0.20	1.6	115.0991	109.7500	105.8517	100.8480	99.5476	101.3853
0.25	0.6	29.9097	49.7847	67.6571	80.0869	82.2719	87.9797
0.25	0.8	43.2705	64.4101	80.3935	84.9427	86.4851	90.7776
0.25	1.1	64.2878	81.1148	90.6139	90.0510	90.7427	94.0101
0.25	1.4	89.9564	96.3660	97.4692	94.9893	94.8380	97.8104
0.30	0.5	17.3372	31.9489	46.8548	61.1687	72.8879	80.7124
0.30	0.7	28.6350	47.2148	63.7096	75.7008	78.5632	85.0560
0.30	0.9	41.0051	60.5066	74.9947	80.4443	82.6197	88.6810
0.30	1.1	55.1118	72.5221	82.7714	84.6671	86.2657	91.2131

Tab. 2.4.7 Wartosci fo(1)

h	d	a/b					
		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	34.2631	28.3172	20.8912	13.7804	8.2313	2.6520
0.10	1.2	43.7301	32.4697	23.2937	15.2195	8.8840	2.2269
0.10	1.6	47.6854	34.5526	24.6307	16.1108	9.2107	2.0219
0.10	2.4	64.9667	43.9345	30.8728	20.5992	12.6350	2.4749
0.15	0.7	27.2346	24.4948	18.4716	12.3993	7.5205	2.7295
0.15	1.1	36.4512	29.2880	21.3672	14.0738	8.3467	2.1469
0.15	1.5	44.3679	33.0981	24.0697	15.7901	9.0910	2.2672
0.15	2.0	59.0104	40.4669	28.7515	20.1990	22.2540	2.3744
0.20	0.6	17.2357	18.0932	13.3608	9.8044	6.4488	2.6156
0.20	0.9	25.7675	23.4985	17.7437	11.9923	7.4264	2.2015
0.20	1.3	36.1191	29.5602	21.9338	14.4717	8.6876	1.9410
0.20	1.6	45.8068	34.6533	25.4862	16.8117	9.6428	1.8542
0.25	0.6	12.7165	14.6069	11.0990	8.1936	5.6039	2.6549
0.25	0.8	17.9543	18.4530	14.0010	10.0444	6.2498	2.3157
0.25	1.1	25.9513	23.9754	18.3851	12.4762	7.3890	2.0114
0.25	1.4	35.5075	30.0448	22.8208	15.1897	8.9425	1.9358
0.30	0.5	7.4940	9.4842	8.1518	5.5469	4.2999	2.5289
0.30	0.7	11.8616	13.7535	10.6986	7.9047	5.2719	2.4210
0.30	0.9	16.5615	17.4934	13.6488	9.7176	6.1371	2.3106
0.30	1.1	21.7660	21.5635	16.9940	11.7363	7.1567	2.1844

2.4.5.3 Siła rozciągająca śrubę

Zgodnie z przyjętym modelem obliczeniowym śruby, działająca na nią siła rozciągająca S oblicza się jako

$$S = \int_{F_n} c_o H(w(x,y)) w(x,y) dF_n ; c_o = \frac{E d^2}{h D^2} \quad 2.4.66$$

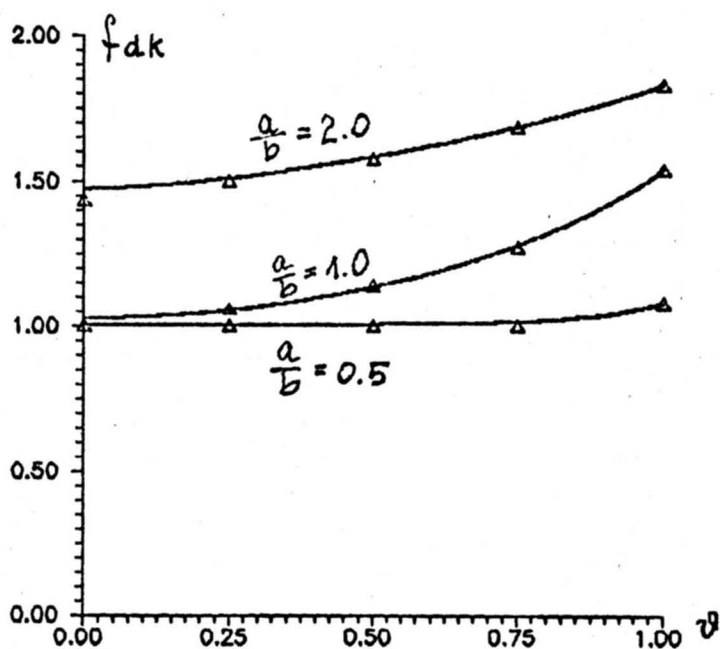
Zależność współczynnika kołnierzowego efektu dźwigni

$$f_{dk} = \frac{S}{P_k} \quad 2.4.67$$

gdzie P_k jest sumą sił działających na kołnierz z powłoki i z zębra, od parametru deformacji ϑ aproksymuje się trójparametrowymi funkcjami:

$$f_{dk} = \frac{A_d}{1 - B_d \vartheta^{C_d}} \quad 2.4.68$$

Typowe przebiegi obliczonych wartości $f_{dk}(\vartheta)$ i funkcji je aproksymującej pokazano na rys. 2.4.20



Rys. 2.4.20

Tabele 2.4.8+ 2.4.10 podają wartości współczynników A_d, B_d, C_d , tabela 2.4.11 podaje wartości współczynnika efektu dźwigni dla połączenia nieuzębowanego.

Tab. 2.4.8 Współczynnik Ad

h	d	a/b					
b	h	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	1.0000	1.0000	1.0810	1.2577	1.4211	1.6533
0.10	1.2	1.0000	1.0000	1.1617	1.4162	1.5962	1.8820
0.10	1.6	1.0079	1.1013	1.3567	1.5531	1.7033	1.9299
0.10	2.4	1.3464	1.6447	1.8696	2.0710	2.2243	2.3554
0.15	0.7	1.0000	1.0000	1.0380	1.2078	1.3405	1.5425
0.15	1.1	1.0000	1.0000	1.0570	1.2245	1.3812	1.5855
0.15	1.5	1.0000	1.0242	1.1635	1.3291	1.4594	1.6488
0.15	2.0	1.0329	1.2025	1.3450	1.4847	1.5930	1.9054
0.20	0.6	1.0000	1.0000	1.0264	1.1052	1.2434	1.4569
0.20	0.9	1.0000	1.0000	1.0264	1.1622	1.2850	1.4740
0.20	1.3	1.0000	1.0000	1.0535	1.1985	1.3182	1.4645
0.20	1.6	1.0000	1.0237	1.1319	1.2528	1.3466	1.4519
0.25	0.6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0384	1.1675	1.3720
0.25	0.8	1.0000	1.0000	1.0264	1.1098	1.2417	1.4173
0.25	1.1	1.0000	1.0000	1.0264	1.1347	1.2378	1.3907
0.25	1.4	1.0000	1.0000	1.0488	1.1622	1.2479	1.3579
0.30	0.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0264	1.0264	1.2228
0.30	0.7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0338	1.1517	1.3396
0.30	0.9	1.0000	1.0000	1.0264	1.0927	1.1990	1.3587
0.30	1.1	1.0000	1.0000	1.0264	1.1113	1.2012	1.3338

Tab. 2.4.9 Współczynnik Bd

h	d	a/b					
b	h	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	0.0940	0.2812	0.3583	0.3294	0.2816	0.1955
0.10	1.2	0.0694	0.3128	0.3550	0.2909	0.2436	0.1550
0.10	1.6	0.1060	0.2767	0.2611	0.2347	0.2018	0.1297
0.10	2.4	0.3184	0.4126	0.4079	0.1510	0.1226	0.0926
0.15	0.7	0.0803	0.2629	0.3577	0.3244	0.2862	0.2051
0.15	1.1	0.0640	0.2400	0.3337	0.2982	0.2506	0.1698
0.15	1.5	0.0455	0.2340	0.2607	0.2285	0.1952	0.1247
0.15	2.0	0.1000	0.2952	0.3356	0.1581	0.1349	0.0981
0.20	0.6	0.0744	0.2612	0.3642	0.3830	0.3374	0.2538
0.20	0.9	0.0674	0.2368	0.3320	0.3121	0.2740	0.1935
0.20	1.3	0.0469	0.1960	0.2698	0.2451	0.2065	0.1425
0.20	1.6	0.0314	0.1612	0.1948	0.1798	0.1547	0.1141
0.25	0.6	0.0701	0.2492	0.3737	0.4134	0.3711	0.2877
0.25	0.8	0.0688	0.2385	0.3364	0.3506	0.3071	0.2333
0.25	1.1	0.0550	0.1978	0.2846	0.2730	0.2422	0.1714
0.25	1.4	0.0380	0.1562	0.2141	0.1976	0.1721	0.1243
0.30	0.5	0.0615	0.2467	0.3683	0.4178	0.4474	0.3689
0.30	0.7	0.0696	0.2359	0.3532	0.3953	0.3582	0.2799
0.30	0.9	0.0628	0.2166	0.3084	0.3274	0.2938	0.2274
0.30	1.1	0.0526	0.1846	0.2646	0.2710	0.2411	0.1823

Tab. 2.4.10 Wkładnik Cd

h	d	a/b					
		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	7.9235	3.0655	1.8389	1.4158	1.3458	1.5106
0.10	1.2	7.3109	2.3935	1.4257	1.3640	1.4618	1.5373
0.10	1.6	6.5993	2.6008	1.6842	1.6245	1.5311	1.7105
0.10	2.4	11.0184	7.2144	1.4684	1.8432	2.0896	1.7324
0.15	0.7	8.0239	3.6752	1.8387	1.6976	1.5398	1.5363
0.15	1.1	6.9304	3.5262	1.7958	1.3721	1.4611	1.5796
0.15	1.5	5.4374	2.5368	1.6786	1.6099	1.8509	1.8261
0.15	2.0	8.2149	2.0866	0.9620	1.8638	1.7622	1.3082
0.20	0.6	7.6501	6.0741	2.4952	1.6685	1.4284	1.4605
0.20	0.9	7.1704	3.8961	1.7984	1.5887	1.5214	1.5090
0.20	1.3	5.5676	3.9096	1.5177	1.6347	1.7047	1.6396
0.20	1.6	2.8506	2.9924	2.1118	2.0574	2.1756	1.8606
0.25	0.6	7.3599	12.0613	2.8175	1.7067	1.4710	1.3534
0.25	0.8	7.2708	5.0745	2.4321	1.8260	1.6667	1.4361
0.25	1.1	6.2420	3.9649	2.0873	1.7071	1.6251	1.6007
0.25	1.4	4.7379	3.7982	1.7470	1.8743	1.8389	1.9185
0.30	0.5	6.7486	15.3357	4.8234	2.7602	1.5354	1.4415
0.30	0.7	7.3206	10.8156	3.0171	1.6898	1.4562	1.3428
0.30	0.9	6.8474	5.2486	2.6995	1.7897	1.5604	1.4240
0.30	1.1	6.0535	4.5118	2.2490	2.0519	1.6377	1.4787

Tab. 2.4.11 Współczynnik fdk (p. nieuzebrowane)

h	d	a/b					
		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	2.2203	2.0977	2.0689	2.0635	2.0642	2.0818
0.10	1.2	2.3393	2.2041	2.1881	2.1664	2.1869	2.2112
0.10	1.6	2.3843	2.2302	2.2194	2.2329	2.2138	2.2015
0.10	2.4	3.4888	3.6903	3.6719	3.4916	2.6031	2.6015
0.15	0.7	2.0132	1.9638	1.9557	1.9562	1.9723	1.9545
0.15	1.1	2.0086	1.9138	1.9088	1.8970	1.9008	1.9179
0.15	1.5	1.9679	1.8745	1.8695	1.8446	1.8435	1.8719
0.15	2.0	2.3486	2.2509	2.2585	2.2532	2.2545	2.2425
0.20	0.6	1.9701	1.9662	1.9687	1.9693	1.9696	1.9743
0.20	0.9	1.9013	1.8431	1.8427	1.8435	1.8621	1.8410
0.20	1.3	1.7696	1.7104	1.7108	1.7109	1.7117	1.7156
0.20	1.6	1.7128	1.6254	1.6409	1.6241	1.6271	1.6431
0.25	0.6	1.9396	1.9335	1.9514	1.9513	1.9511	1.9519
0.25	0.8	1.8278	1.8610	1.8622	1.8629	1.8636	1.8694
0.25	1.1	1.6879	1.6814	1.6902	1.7085	1.6892	1.6881
0.25	1.4	1.5799	1.5488	1.5490	1.5525	1.5535	1.5541
0.30	0.5	1.9526	1.9668	1.9675	1.9679	1.9666	1.9687
0.30	0.7	1.8601	1.8777	1.8857	1.8857	1.8853	1.8855
0.30	0.9	1.7186	1.7627	1.7711	1.7706	1.7709	1.7740
0.30	1.1	1.5946	1.6250	1.6446	1.6470	1.6412	1.6411

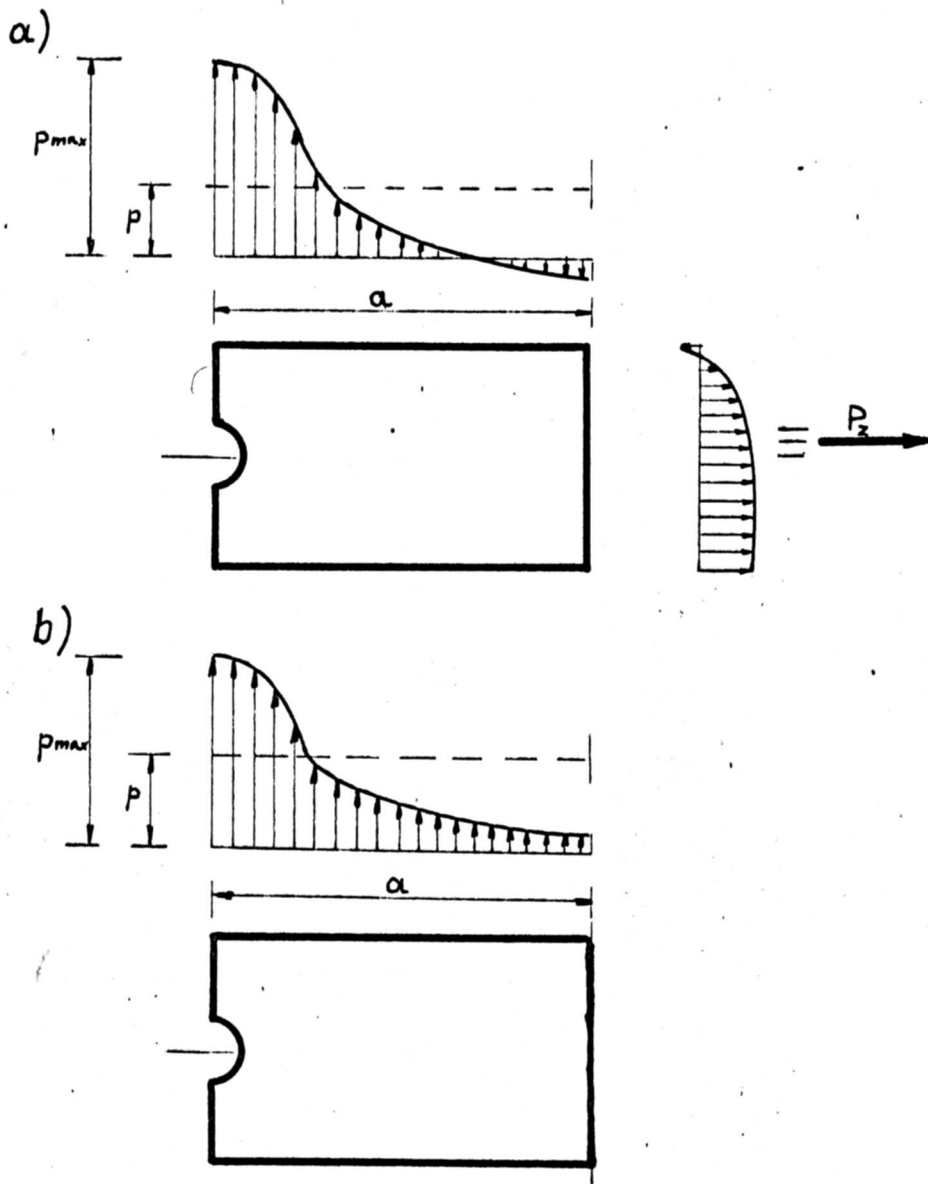
Analizując powyższe wyniki można stwierdzić pewne prawidłowości. Zgodnie z przewidywaniami współczynnik f_{dk} rośnie w miarę wzrostu parametru deformacji ϑ i w miarę zwiększania się długości sektora pomiędzy zębami. Dla stosunku boków $a/b < 0.75$ i wystarczająco dużej sztywności zębra ($\vartheta \approx 0$) efekt dźwigni nie występuje ($f_{dk} = 1.0$). Współczynnik ten narasta gdy :

- zwiększa się stosunek d/h średnicy śruby do grubości kołnierza
- maleje stosunek h/b grubości do szerokości kołnierza .

W przypadku połączenia nieuźebrowanego współczynnik ten osiąga znaczne wartości przekraczające 1.60 . Inaczej niż w połączeniu uźebrowanym jego wielkość jest praktycznie niezależna od ilości śrub , silną rolę odgrywa natomiast grubość kołnierza (im cieńszy, tym większy efekt dźwigni) i wielkość śruby.

2.4.5.4 Współczynnik spiętrzenia naprężeń na obwodzie powłoki

Rozkłady sił reakcji na tej części brzegu segmentu kołnierza na której zakładano wymuszone przemieszczenia przybierają charakterystyczną postać pokazaną na rys 2.4.21a dla połączenia uźebrowanego i na rys 2.4.21b dla nieuźebrowanego (strzałki na wykresie skierowane na zewnątrz oznaczają oddziaływanie do góry)



Rys. 2.4.18

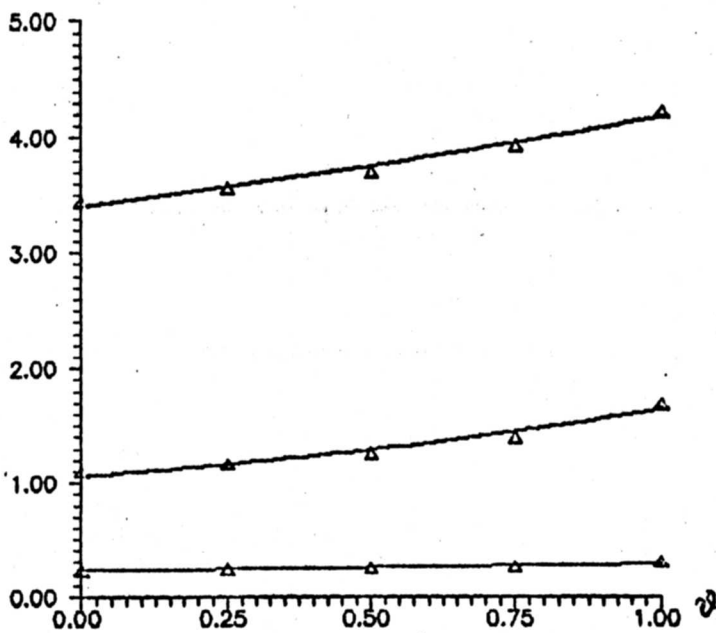
Zależność współczynnika spiętrzenia naprężeń wokół brzegu powłoki $f_p = f_p(\vartheta)$

$$f_p = \frac{P_{max}}{p} = \frac{P_{max} a}{P_k} \quad 2.4.69$$

jest aproksymowana funkcją :

$$f_p(\vartheta) = \frac{A_p}{1 - B_p \vartheta} \quad 2.4.70$$

której przykładowe przebiegi pokazano na rys.2.4.22



Rys. 2.4.22

Tabele 2.4.12+13 podają wartości współczynników A_p , B_p , a tab.2.4.14 podaje wartość f_p dla połączenia nieuzębrowanego.

Tab. 2.4.12 Współczynnik A_p

h / d		a/b					
b	h	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	0.2984	0.7519	1.4300	2.3080	3.2737	5.2259
0.10	1.2	0.2321	0.6670	1.3024	2.0386	2.7882	4.2937
0.10	1.6	0.2270	0.7249	1.3594	2.0881	2.8213	4.2887
0.10	2.4	0.2307	0.7933	1.5381	2.3293	3.1180	4.6294
0.15	0.7	0.2388	0.6258	1.0507	1.6335	2.2498	3.4876
0.15	1.1	0.2299	0.6277	1.1682	1.7838	2.4247	3.7005
0.15	1.5	0.2305	0.7092	1.3034	1.9794	2.6578	3.9888
0.15	2.0	0.2367	0.7778	1.4883	2.2469	3.0067	4.3584
0.20	0.6	0.2415	0.6405	0.9459	1.4512	2.0083	3.1523
0.20	0.9	0.2328	0.6283	1.0622	1.6269	2.2169	3.4094
0.20	1.3	0.2381	0.6603	1.2392	1.8720	2.5107	3.7703
0.20	1.6	0.2458	0.7381	1.3743	2.0587	2.7370	4.0467
0.25	0.6	0.2445	0.6525	0.9822	1.3556	1.8979	2.9928
0.25	0.8	0.2398	0.6305	1.0059	1.5315	2.0878	3.2348
0.25	1.1	0.2452	0.6565	1.1528	1.7366	2.3427	3.5397
0.25	1.4	0.2549	0.7215	1.3094	1.9560	2.6002	3.8525
0.30	0.5	0.2527	0.6577	1.0161	1.3245	1.6765	2.7027
0.30	0.7	0.2476	0.6482	1.0043	1.4113	1.9457	3.0380
0.30	0.9	0.2494	0.6350	1.0556	1.5862	2.1485	3.2799
0.30	1.1	0.2546	0.6739	1.1642	1.7398	2.3348	3.5061

Tab. 2.4.13 Współczynnik Bp

h	d	a/b					
b	h	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	0.1926	0.3994	0.4096	0.3577	0.2959	0.2034
0.10	1.2	0.2766	0.4014	0.3557	0.2916	0.2382	0.1604
0.10	1.6	0.3393	0.3417	0.3207	0.2593	0.2108	0.1411
0.10	2.4	0.4176	0.3573	0.2804	0.2170	0.1678	0.1104
0.15	0.7	0.1253	0.2836	0.3847	0.3367	0.2825	0.1967
0.15	1.1	0.2273	0.3526	0.3313	0.2862	0.2359	0.1624
0.15	1.5	0.3253	0.3215	0.3044	0.2482	0.2025	0.1368
0.15	2.0	0.3910	0.3474	0.2741	0.2120	0.1637	0.1107
0.20	0.6	0.0979	0.1740	0.4102	0.3722	0.3182	0.2298
0.20	0.9	0.2012	0.2821	0.3571	0.3103	0.2610	0.1847
0.20	1.3	0.2971	0.3596	0.3068	0.2566	0.2120	0.1473
0.20	1.6	0.3451	0.3318	0.2819	0.2283	0.1857	0.1252
0.25	0.6	0.1116	0.1189	0.3356	0.4025	0.3394	0.2532
0.25	0.8	0.1902	0.2487	0.3755	0.3327	0.2891	0.2097
0.25	1.1	0.2660	0.3136	0.3256	0.2811	0.2351	0.1665
0.25	1.4	0.3290	0.3186	0.2879	0.2377	0.1965	0.1362
0.30	0.5	0.0966	0.0827	0.2349	0.3661	0.4075	0.3141
0.30	0.7	0.1780	0.1765	0.3334	0.3750	0.3240	0.2447
0.30	0.9	0.2424	0.2944	0.3544	0.3169	0.2724	0.2023
0.30	1.1	0.3007	0.3038	0.3205	0.2786	0.2345	0.1697

Tab. 2.4.14 Współczynnik fp (p. nieuzebrowane)

h	d	a/b					
b	h	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	2.0104	2.5297	3.2379	4.0444	4.8997	6.6998
0.10	1.2	1.5410	2.0099	2.5766	3.1916	3.8319	5.1793
0.10	1.6	1.4128	1.9303	2.4929	3.0961	3.7257	5.0432
0.10	2.4	1.4607	1.9776	2.5697	3.2010	3.8869	5.2427
0.15	0.7	1.3436	1.7518	2.2505	2.7787	3.3255	4.4223
0.15	1.1	1.2987	1.7272	2.2340	2.7810	3.3328	4.4748
0.15	1.5	1.3198	1.7768	2.3162	2.8932	3.4889	4.6712
0.15	2.0	1.3981	1.9001	2.4741	3.0799	3.6953	4.9345
0.20	0.6	1.2466	1.6438	2.1261	2.6323	3.1430	4.2016
0.20	0.9	1.2175	1.6309	2.1239	2.6421	3.1802	4.2471
0.20	1.3	1.2584	1.6995	2.2239	2.7753	3.3356	4.4691
0.20	1.6	1.3168	1.7915	2.3345	2.9187	3.4966	4.6654
0.25	0.6	1.1960	1.5925	2.0723	2.5771	3.0947	4.1146
0.25	0.8	1.1831	1.5876	2.0801	2.5938	3.1129	4.1919
0.25	1.1	1.2051	1.6329	2.1452	2.6815	3.2166	4.3060
0.25	1.4	1.2671	1.7232	2.2531	2.8118	3.3768	4.5061
0.30	0.5	1.1832	1.5775	2.0608	2.5628	3.0805	4.0873
0.30	0.7	1.1637	1.5696	2.0552	2.5669	3.0954	4.1292
0.30	0.9	1.1646	1.5859	2.0829	2.6044	3.1297	4.2089
0.30	1.1	1.1905	1.6224	2.1411	2.6767	3.2078	4.2866

2.4.5.5* Współczynnik rozdziału obciążenia na żebro i powłokę

Oblicza się sumę P_z reakcji pionowych działających na żebro

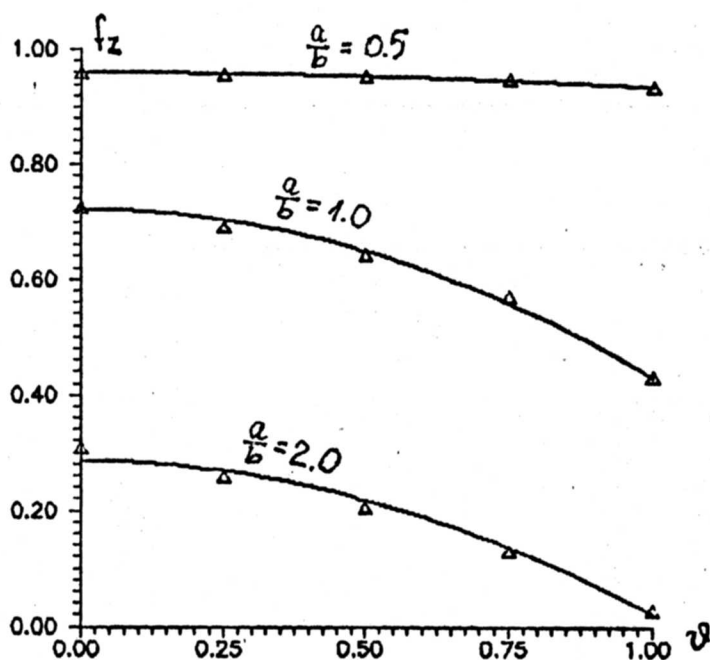
Zależność współczynnika rozdziału f_z

$$f_z = \frac{P_z}{P_k} \quad 2.4.71$$

od parametru ϑ aproksymuje się funkcją

$$f_z = A_z - B_z \vartheta^2 \quad 2.4.72$$

Jej przykładowe przebiegi pokazano na rys. 2.4.23



Rys.. 2.4.23

Tabele 2.4.15+16 podają współczynniki A_z i B_z . Widoczny jest spadek udziału żebra w przenoszeniu obciążeń w miarę narastania efektu dźwigni.

Tab. 2.4.15 Współczynnik Az

h	d	a/b					
		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	0.9973	0.8915	0.7602	0.5987	0.4731	0.2967
0.10	1.2	0.9993	0.8665	0.6977	0.5309	0.3939	0.2392
0.10	1.6	0.9980	0.8436	0.6585	0.4896	0.3577	0.2105
0.10	2.4	0.9855	0.7916	0.5715	0.3899	0.2781	0.1571
0.15	0.7	0.9802	0.8719	0.7533	0.6028	0.4802	0.3042
0.15	1.1	0.9805	0.8509	0.6965	0.5382	0.4035	0.2494
0.15	1.5	0.9754	0.8206	0.6408	0.4776	0.3484	0.2071
0.15	2.0	0.9624	0.7785	0.5623	0.3880	0.2878	0.1609
0.20	0.6	0.9600	0.8410	0.7663	0.6504	0.5282	0.3558
0.20	0.9	0.9605	0.8435	0.7223	0.5725	0.4385	0.2855
0.20	1.3	0.9538	0.8095	0.6446	0.4911	0.3634	0.2236
0.20	1.6	0.9428	0.7771	0.5898	0.4321	0.3116	0.1854
0.25	0.6	0.9406	0.8137	0.7568	0.6720	0.5678	0.3891
0.25	0.8	0.9404	0.8246	0.7299	0.6052	0.4881	0.3216
0.25	1.1	0.9341	0.8029	0.6677	0.5186	0.3963	0.2545
0.25	1.4	0.9211	0.7666	0.5955	0.4474	0.3292	0.2021
0.30	0.5	0.9217	0.7926	0.7227	0.7067	0.6479	0.4888
0.30	0.7	0.9219	0.7973	0.7338	0.6464	0.5468	0.3745
0.30	0.9	0.9179	0.8015	0.6926	0.5764	0.4626	0.3082
0.30	1.1	0.9101	0.7778	0.6453	0.5081	0.4029	0.2548

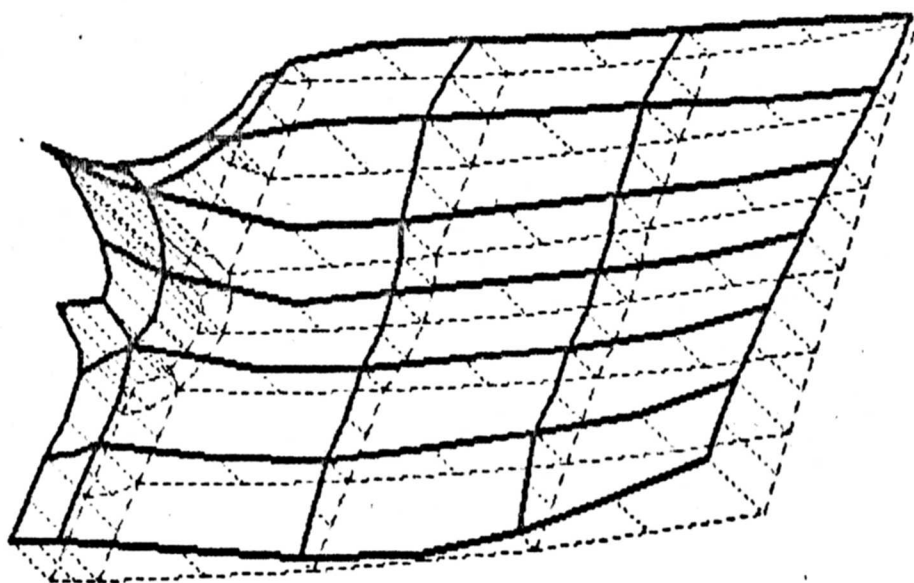
Tab. 2.4.16 Współczynnik Bz

h	d	a/b					
		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	0.0075	0.1123	0.2693	0.3247	0.3417	0.2567
0.10	1.2	0.0210	0.1328	0.2538	0.2968	0.2663	0.2118
0.10	1.6	0.0342	0.1452	0.2504	0.2786	0.2451	0.1902
0.10	2.4	0.0630	0.1723	0.2307	0.2001	0.1886	0.1424
0.15	0.7	0.0129	0.1191	0.2789	0.3436	0.3600	0.2726
0.15	1.1	0.0252	0.1334	0.2598	0.3093	0.2816	0.2274
0.15	1.5	0.0395	0.1518	0.2516	0.2786	0.2438	0.1904
0.15	2.0	0.0581	0.1813	0.2258	0.2001	0.1734	0.1497
0.20	0.6	0.0148	0.0786	0.2922	0.3978	0.3997	0.3266
0.20	0.9	0.0253	0.1354	0.2922	0.3397	0.3088	0.2649
0.20	1.3	0.0433	0.1507	0.2549	0.2927	0.2580	0.2099
0.20	1.6	0.0547	0.1651	0.2428	0.2579	0.2218	0.1750
0.25	0.6	0.0194	0.0568	0.2895	0.4237	0.4557	0.3564
0.25	0.8	0.0286	0.1253	0.3051	0.3808	0.3822	0.3006
0.25	1.1	0.0436	0.1499	0.2825	0.3106	0.2880	0.2403
0.25	1.4	0.0597	0.1630	0.2466	0.2728	0.2384	0.1918
0.30	0.5	0.0193	0.0410	0.1836	0.4234	0.5082	0.4504
0.30	0.7	0.0304	0.0858	0.3014	0.4156	0.4485	0.3462
0.30	0.9	0.0421	0.1520	0.2936	0.3760	0.3666	0.2924
0.30	1.1	0.0555	0.1591	0.2799	0.3170	0.3220	0.2426

2.4.5.6 Maksymalny moment zginający w płycie kołnierza

Rysunek 2.4.24 przedstawia przykładowy rozkład momentu zredukowanego wg hipotezy Hubera-Misesa w obszarze segmentu

$$M_{red}(x,y) = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2} \quad . \quad 2.4.73$$



Rys2.4.24

Cechą charakterystyczną tego rozkładu, stwierdzona we wszystkich przypadkach obliczeniowych, jest występowanie kilkakrotnie większych wartości M_{red} w najbliższym otoczeniu śruby, niż w pozostałym obszarze kołnierza. W konsekwencji, obciążenie przy którym lokalnie pojawiają się naprężenia równe granicy plastyczności będzie znacznie mniejsze niż obciążenie graniczne. Tak więc wymiarowanie oparte o przyrównanie uzyskanych wartości maksymalnego momentu zginającego do sprężystego wskaźnika wytrzymałości przemnożonego przez wytrzymałość obliczeniową prowadziłoby do niedoceny rzeczywistej nośności tego elementu konstrukcyjnego i jako takie było by nieekonomiczne.

Przedstawione wyniki mają więc charakter raczej informacyjny i poglądowy, i nie stanowią, w odróżnieniu od wyników prezentowanych w poprzednich punktach, istotnej części

rozważanego modelu obliczeniowego połączenia

Maksymalny moment zredukowany wg hipotezy Hubera-Misesa,

$$M_{\max} = \max_{x,y \in \Omega} M_{\text{red}}(x,y), \quad 2.4.73$$

przy czym uwzględniano zarówno punkty węzłowe jak i całkowania, przedstawiony jest jako iloczyn bezwymiarowego współczynnika f_m i porównawczego momentu $p c$

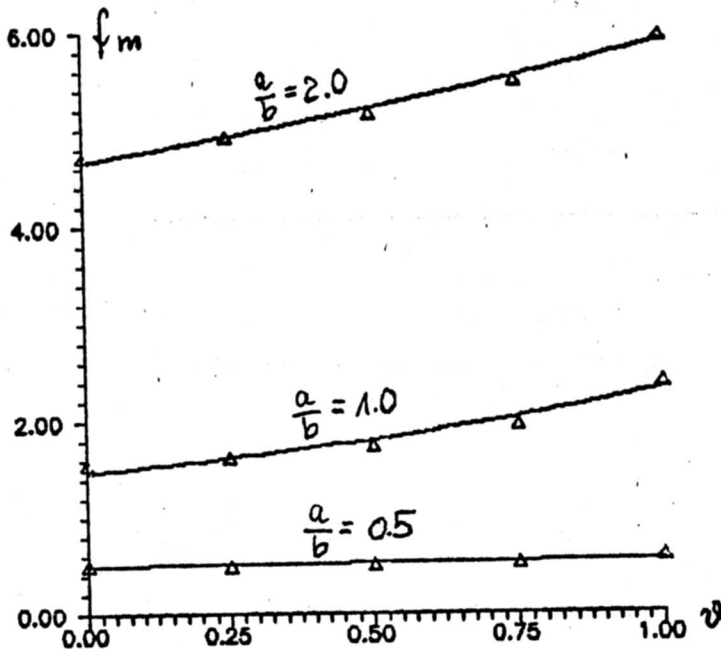
$$M_{\max} = f_m p c \quad 2.4.74$$

Zależność współczynnika f_m od parametru postaci deformacji ϑ jest aproksymowana funkcją :

$$f_m = \frac{A_m}{1 - B_m \vartheta} \quad 2.4.75$$

ze współczynnikami A_m i B_m danymi w tabeli 2.4.17+18 .

Tab. 2.4.19 podaje wartości f_m w kołnierzu nieuzębrowanym.



Rys. 2.4.25

Tab. 2.4.17 Współczynnik Am

h / d		a/b					
b	h	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	0.9348	1.5770	2.3249	3.4493	4.7356	7.2971
0.10	1.2	0.6411	1.2547	2.0475	2.9890	3.9833	6.0126
0.10	1.6	0.4992	1.0591	1.7932	2.6121	3.4204	4.9587
0.10	2.4	0.2840	0.6738	1.2450	1.7365	2.2841	3.3161
0.15	0.7	0.7302	1.3160	1.8791	2.7903	3.8431	5.9736
0.15	1.1	0.5230	1.0249	1.6563	2.4339	3.3044	5.0174
0.15	1.5	0.3740	0.8383	1.4238	2.0528	2.6982	3.9857
0.15	2.0	0.2729	0.6278	1.0872	1.6119	2.1025	2.7482
0.20	0.6	0.6828	1.3283	1.8275	2.4191	3.3457	5.3460
0.20	0.9	0.5045	0.9914	1.4770	2.2069	3.0237	4.6737
0.20	1.3	0.3367	0.7520	1.2556	1.8597	2.4808	3.7002
0.20	1.6	0.2634	0.6291	1.0833	1.5759	2.0605	2.9988
0.25	0.6	0.5925	1.2227	1.7768	2.1773	2.8582	4.6199
0.25	0.8	0.4698	0.9978	1.4239	1.9688	2.7110	4.2614
0.25	1.1	0.3317	0.7245	1.1881	1.7590	2.3682	3.5838
0.25	1.4	0.2529	0.5885	1.0233	1.5034	1.9764	2.8942
0.30	0.5	0.5902	1.2394	1.9748	2.4931	2.8876	4.0619
0.30	0.7	0.4543	1.0143	1.5241	1.9345	2.4438	3.9111
0.30	0.9	0.3495	0.8157	1.2071	1.6847	2.2892	3.5379
0.30	1.1	0.2688	0.6458	1.0552	1.5489	2.0729	3.1184

Tab. 2.4.18 Współczynnik Bm

h/d		a/b					
b	h	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	0.0565	0.2363	0.3775	0.3553	0.3009	0.2091
0.10	1.2	0.1995	0.2802	0.3079	0.2834	0.2461	0.1658
0.10	1.6	0.2532	0.2959	0.2744	0.2290	0.1898	0.1320
0.10	2.4	0.1378	0.1741	0.1975	0.2060	0.1606	0.1071
0.15	0.7	0.0617	0.1889	0.3836	0.3642	0.3117	0.2205
0.15	1.1	0.1647	0.2595	0.3216	0.3047	0.2557	0.1776
0.15	1.5	0.2446	0.2688	0.2554	0.2337	0.2041	0.1417
0.15	2.0	0.1171	0.1978	0.1398	0.1740	0.1328	0.1012
0.20	0.6	0.0316	0.0517	0.3216	0.4195	0.3706	0.2681
0.20	0.9	0.0908	0.1966	0.3671	0.3420	0.2922	0.2087
0.20	1.3	0.1837	0.2434	0.2894	0.2579	0.2188	0.1557
0.20	1.6	0.1526	0.2312	0.2283	0.1989	0.1707	0.1221
0.25	0.6	0.0171	0.0532	0.2136	0.4116	0.4108	0.3089
0.25	0.8	0.0432	0.0701	0.3229	0.3853	0.3385	0.2475
0.25	1.1	0.0976	0.2264	0.3103	0.2910	0.2515	0.1818
0.25	1.4	0.0767	0.2189	0.2453	0.2155	0.1859	0.1370
0.30	0.5	0.0037	0.0154	0.0177	0.2173	0.3631	0.3977
0.30	0.7	0.0094	0.0455	0.1860	0.3526	0.3970	0.3034
0.30	0.9	0.0446	0.0672	0.2965	0.3518	0.3136	0.2357
0.30	1.1	0.0876	0.1839	0.2886	0.2790	0.2435	0.1801

Tab. 2.4.19 Współczynnik fm (o. nieuźebrowane)

h/d		a/b					
b	h	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
0.10	0.6	3.0422	3.8628	4.8752	6.0057	7.1382	9.3984
0.10	1.2	2.1329	2.8824	3.7391	4.6290	5.5293	7.2939
0.10	1.6	1.6645	2.2666	2.9685	3.6820	4.3934	5.7811
0.10	2.4	0.9255	1.2054	1.5409	1.9078	2.8183	3.7421
0.15	0.7	2.5096	3.1895	4.0290	4.9439	5.9191	7.7868
0.15	1.1	1.8712	2.4258	3.1395	3.8989	4.6620	6.1738
0.15	1.5	1.3789	1.8356	2.3809	2.9615	3.5446	4.6994
0.15	2.0	0.8379	1.1533	1.5214	1.8994	2.2756	3.0265
0.20	0.6	2.4595	3.1025	3.9152	4.7869	5.6705	7.4509
0.20	0.9	1.9347	2.4188	3.0721	3.7830	4.5226	5.9914
0.20	1.3	1.3602	1.7327	2.2400	2.7819	3.3327	4.4321
0.20	1.6	1.0303	1.3467	1.7407	2.1834	2.5945	3.4496
0.25	0.6	2.2877	2.8331	3.5864	4.3853	5.1807	6.8271
0.25	0.8	1.9230	2.3680	2.9750	3.6615	4.3662	5.7512
0.25	1.1	1.4507	1.7790	2.2437	2.7535	3.3341	4.4401
0.25	1.4	1.0735	1.3276	1.7105	2.1238	2.5452	3.3912
0.30	0.5	2.3462	2.9097	3.6455	4.4654	5.3108	6.9548
0.30	0.7	1.9602	2.3655	2.9779	3.6516	4.3304	5.7371
0.30	0.9	1.6226	1.9228	2.4207	2.9793	3.5576	4.6971
0.30	1.1	1.3197	1.5653	1.9529	2.4144	2.8957	3.8598

2.5 Obliczanie sił wewnętrznych i podatności w układzie śruba - kołnierz - żebro w strefie rozciąganej

Wyniki uzyskane w rozdziałach 2.3 i 2.4 pozwalają na przedstawienie algorytmu obliczania sił wewnętrznych w elementach połączenia, oraz jego podatności, zgodnie z wyprowadzonymi w p 2.2.2 podstawowymi relacjami.

2.5.1 Określenie wartości parametru postaci deformacji θ^* i badanie rodzaju efektu dźwigni.

Równanie zgodności 2.2.18, po wykorzystaniu wzorów 2.3.22 i 2.4.64 przyjmie postać:

$$\frac{a b e_k(\theta)}{C_\theta k_o(\theta)} = \frac{a b D_k c}{E g^3 \sqrt{\lambda} \bar{\Phi}_1\left(\frac{hz}{r}, n_o, \lambda\right) 8a^3} f_o(\theta) = \theta \quad 2.5.1$$

lub

$$f_o(\theta) = F \theta \quad 2.5.2$$

Występującą w nim bezwymiarową stałą, zależną zarówno od geometrii segmentu kołnierza, jak i od wymiarów żebra i smukłości powłoki, po wykorzystaniu aproksymacji zależności $\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_1\left(\frac{hz}{r}\right)$ funkcją potęgową o współczynnikach A_h, β_h danych w tab. 2.3.4+5, można zapisać jako:

$$F = \frac{E g^3 \sqrt{\lambda} \bar{\Phi}_1 8a^2 12(1-\nu^2)}{E h^3 b c} = \quad 2.5.3$$

$$= 96 \pi^2 (1-\nu^2) \left[\frac{r}{g}\right] A_h(n_o, \lambda) \left[\frac{hz}{r}\right]^{\beta_h(n_o, \lambda)} \left[\frac{g}{h}\right]^3 \left[\frac{r}{b}\right]^2 \frac{b}{c} \frac{1}{n_o^2}$$

Wykorzystując aproksymację zależności $f_o(\theta)$ funkcją kwadratową o współczynnikach A_o, B_o, C_o danych w tab. 2.4.4+6, uzyskuje się równanie kwadratowe 2.5.4, którego większy, dodatni pierwiastek jest poszukiwanym parametrem deformacji θ^*

$$A_o \theta^2 + (B_o - F) \theta + C_o = 0 \quad 2.5.4$$

skąd:

$$\theta^* = \frac{F - B_o + \sqrt{(F - B_o)^2 - 4A_o C_o}}{2A_o} \quad 2.5.5$$

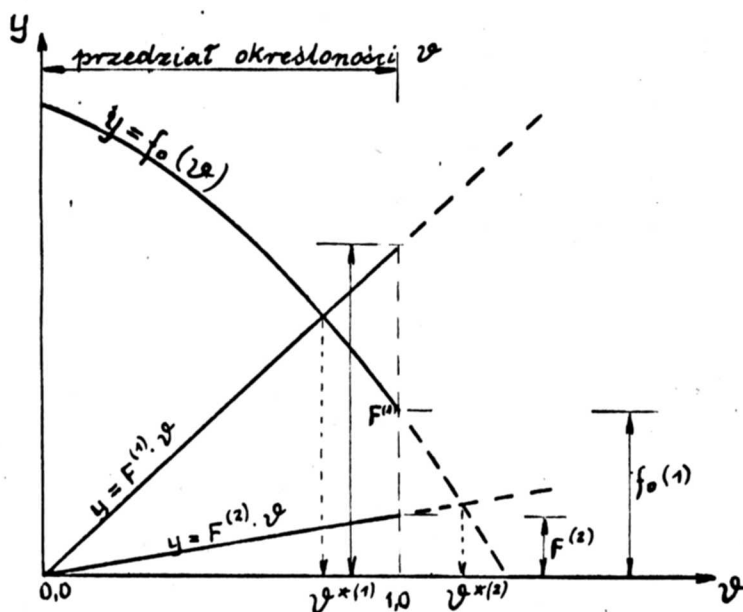
Charakter przebiegu zależności $f_o(\theta)$ gwarantuje istnienie i

jednoznaczność rozwiązania równania 2.5.4 w przedziale (0,1), o ile tylko spełniona jest nierówność:

$$F > f_0(1) \quad , \quad 2.5.6$$

będąca w istocie inną formą zapisu nierówności 2.2.10, rozstrzygającej o występowaniu żebrowego efektu dźwigni, który zachodzi gdy:

$$\kappa = \frac{k_0(1) C_\theta}{e_k(1) ab} = \frac{F}{f_0(1)} < 1 \quad 2.5.7$$



Rys. 2.5.1

Rys.2.5.1 ilustruje obie możliwości:

1. $F^{(1)} > f_0(1)$; $\kappa^{(1)} > 1$; $\vartheta^{*(1)} < 1$

- występuje jedynie kołnierzowy efekt dźwigni, którego wpływ można ocenić obliczając odpowiednie współczynniki z tablic podanych w p.2.4.5 dla $\vartheta^{*(1)} \in (0,1)$.

$$f_d = f_{dk}(\vartheta^*) \quad , \quad f_{xx} = f_{xx}(\vartheta^*)$$

2. $F^{(2)} < f_0(1)$; $\kappa^{(2)} < 1$; $\vartheta^{*(2)} \geq 1$

- oprócz kołnierzowego efektu dźwigni określonego dla największej z możliwych wartości $\vartheta = 1.0$, pojawia się dodatkowo żebrowy efekt dźwigni, powodujący f_{dz} -krotne zwiększenie obciążenia P_k przypadającego na segment płyty kołnierza. Zgodnie ze wzorami 2.2.11+14, efekt ten można ująć

jako:

$$P_k = f_{dz} P \quad , \quad 2.5.8$$

gdzie współczynnik żebrowego efektu dźwigni f_{dz} jest dany wzorem:

$$f_{dz} = \frac{1}{1 - \frac{e_k(1)}{b} (1 - \kappa)} \quad , \quad 2.5.9$$

skąd po uwzględnieniu 2.4.64 i 2.5.7 uzyskuje się :

$$f_{dz} = \frac{1}{1 - \frac{c}{b} f_o(1) \alpha_k(1) \left[1 - \frac{F}{f_o(1)} \right]} \quad 2.5.10$$

Tak więc tok postępowania przy obliczaniu jakiegokolwiek wielkości statycznej lub podatności przy zadanej geometrii i sumie P obciążenia przypadającego na segment kołnierza, w swojej początkowej fazie musi obejmować następujące kroki:

- (A) Obliczenie stałej F wg 2.5.3
- (B) Obliczenie $f_o(1)$ wg tab 2.4.7
- (C) Obliczenie $\kappa = \frac{F}{f_o(1)}$
- (D) Jeśli: $\kappa > 1 \Rightarrow$ przyjąć $\kappa = 1$; iść do p.(E)
 $\kappa < 1 \Rightarrow$ iść do p.(F)
- (E) Obliczenie ϑ^* wg 2.5.5. ; $f_{dz} = 1.0$
- (F) Przyjęcie $\vartheta^* = 1$; obliczenie f_{dz} wg 2.5.10

2.5.2 Obliczanie podatności połączenia

a) Połączenie uźebrowane

W oparciu o p. 2.2.12 i 2.4.4.1

1. Obliczenia wg p. (A)+(F)
2. Bezwymiarowy współczynnik kształtu

$$\alpha = f_{dz} \alpha_k(\vartheta^*) = f_{dz} \frac{A_k}{1 - B_k \vartheta^*} \quad , \quad 2.5.11$$

A_k, B_k wg tab 2.4.1+2

3. Wskaźnik podatności

$$f = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{n_s h}{g} \quad 2.5.12$$

4. Podatność

$$k = \alpha \frac{96 \pi^3 (1-\nu^2) \lambda^3 g^3}{E n_s^3 h^3} = 96 \pi^3 (1-\nu^2) \frac{1}{E} \frac{\lambda^3}{f^3} \quad 2.5.13$$

b) Połączenie nieuźebrowane

1. $\alpha = \alpha_k$ wg tab. 2.4.1.3, dalej f i k wg 2.5.12+13

2.5.3 Obliczenie siły rozciągającej śrubę

a) Połączenie uźebrowane

1. Obliczenia wg p. (A)+(F)

$$2. S = f_d P = f_{dz} f_{dk} \frac{2\pi r p}{n_s} ; \quad 2.5.14$$

gdzie zgodnie z 2.4.4.4

$$f_{dk} = f_{dk}(\vartheta^*) = \frac{A_d}{1 - B_d(\vartheta^*) C_d} , \quad 2.5.15$$

a współczynniki A_d , B_d , C_d wg tab 2.4.8+10

b) Połączenie nieuźebrowane

$$1. S = f_{dk} \frac{2\pi r p}{n_s} ; \quad 2.5.16$$

f_{dk} wg tab. 2.4.11

2.5.4 Mimośród działania obciążenia e'
 (tylko połączenie uzębrowane)

1. Obliczenia wg p. (A)+(F)

2.5.17

$$2. e' = \kappa f_{dz} e_k = \kappa f_{dz} f_{o_k} c = \kappa f_{dz} (A_o \theta^{*2} + B_o \theta^* + C_o) \frac{A_k}{1 - B_k \theta^*}$$

gdzie : A_o, B_o, C_o wg tab 2.4.4+6
 A_k, B_k wg tab 2.4.1+2

2.5.5 Maksymalne naprężenie na obwodzie powłoki

a) Połączenie uzębrowane

1. Obliczenia wg p. (A)+(F)

$$2. p_{max} = f_p \frac{P}{d^k} = f_p(\theta^*) f_{dz} p ; \quad 2.5.18$$

$$f_p = \frac{A_p}{1 - B_p(\theta^*)} ; A_p, B_p \text{ wg tab. 2.4.12+13}$$

b) Połączenie nieuźbrowane

$$1. p_{max} = f_p p \quad 2.5.19$$

f_p wg tab 2.4.14

2.5.6 Siły działające na zebro

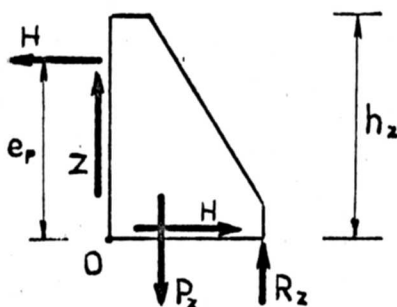
Po wykonaniu obliczeń wg p. (A)+(F), oraz po ustaleniu wielkości :

- sumy sił $P = \frac{2\pi r}{n}$ p przypadającej na 1 segment ,
- współczynnika rozdziału obciążenia na zebro i powłokę f_z

$$f_z = A_z - B_z (\vartheta^*)^2 \quad 2.5.20$$

gdzie A_z, B_z wg tab 2.4.15+16

można ustalić wielkości następujących sił działających na zebro (rys . 2.5.2):



Rys. 2.5.2

P_z - suma reakcji pionowych z płyty kołnierza

$$P_z = f_z P_k = f_z f_{dz} P \quad 2.5.21$$

R_z - reakcja występująca w przypadku zebrowego efektu dźwigni

$$R_z = (f_{dz} - 1) P_k = (f_{dz} - 1) f_{dz} P \quad 2.5.22$$

Z - całkowita siła pionowa

$$\begin{aligned} Z &= P_z - R_z = f_z f_{dz} P - (f_{dz} - 1) f_{dz} P = \\ &= f_{dz} (f_z - f_{dz} + 1) P \end{aligned} \quad 2.5.23$$

M_z - moment sił względem p. O

$$M_z = e_p P = \alpha f_{dz} f_o \alpha_k c P \quad 2.5.24$$

H - wypadkowa poziomych sił kontaktowych na styku zebro - powłoka, wg 2.3.

$$H = \frac{M_z}{e_p} = \frac{M_z}{h_z \Phi_2(\chi, n, \lambda)} \quad 2.5.25$$

Wykorzystując 2.5.33 oraz formułę 2.3. aproksymującą zależność $\bar{\Phi}_g(\chi)$ uzyskuje się ostatecznie :

$$H = \frac{\alpha f_{dz} f_o \alpha_k}{(0.75 + A_{\bullet} (\frac{h_z}{r})^{\beta_{\bullet}})} \frac{c}{h_z} P \quad 2.5.26$$

gdzie współczynniki $A_{\bullet} = A_{\bullet}(\lambda, n_{\bullet})$, $\beta_{\bullet} = \beta_{\bullet}(\lambda, n_{\bullet})$ są dane w tab. 2.3.6+7

Obliczone powyżej wielkości sił mogą być przydatne do określenia stopnia wyteżenia spoin łączących zebro z pozostałymi elementami połączenia.

2.5.7 Algorytm wymiarowania elementów połączenia

Przedstawiony w p.2.5.1+6 algorytm obliczeń sił wewnętrznych i podatności w elementach strefy rozciąganej połączenia może być z powodzeniem wykorzystany do określania ich właściwych wymiarów . Poniżej podaje się tok postępowania przy określaniu potrzebnej wysokości zebra usztywniającego

1. Przyjęcie ilości i średnicy śrub w oparciu o założoną wielkość współczynnika efektu dźwigni , określenie wymiarów kołnierza

$$f_d^* = \frac{n_{\bullet} R' F_r}{2\pi r p} \quad 2.5.27$$

2. Dobór wysokości zebra usztywniającego tak, by rzeczywiste

$$f_d < f_d^*$$

- 2.1. Sprawdzenie czy dla określonych wymiarów segmentu :

$$f_d^* > f_{dk}^* \quad (1)$$

jeśli : nie \Rightarrow idź do 2.2

tak \Rightarrow idź do 2.3

- 2.2 Założony współczynnik f_d^* może wynikać jedynie z kołnierzowego efektu dźwigni $f_d^* = f_{dk}^*$. Odpowiadająca mu wartość :

$$\vartheta^* = \left(\frac{f_{dk}^* - A_d}{B_d} \right)^{\frac{1}{C_d}} \quad 2.5.28$$

potrzebna wielkość stałej F^* (ze wzoru 2.5.2):

$$F^* = \frac{f_o(\vartheta^*)}{\vartheta^*} = A_o \vartheta^* + B_o + \frac{C_o}{\vartheta^*} \quad 2.5.29$$

idź do p. 2.4

2.3 Dopuszcza się wystąpienie zębowego efektu dźwigni ze współczynnikiem :

$$f_{dz}^* = \frac{f_d^*}{f_{dk}(1)} \quad 2.5.30$$

potrzebna wielkość stałej F^* (ze wzoru 2.5.10)

$$F^* = \frac{\frac{c}{B} f_o(1) \alpha_k(1) + \frac{1}{f_{dz}^*} - 1}{\frac{c}{B} \alpha_k(1)} \quad 2.5.31$$

2.4 Określenie potrzebnej wysokości zębra h_z

$$h_z \geq r \left[\frac{F^* n_s^2 \frac{c}{B} \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left(\frac{h}{g}\right)^3}{98 \pi^2 (1-\nu^2) \sqrt{\lambda} A_h(n_s, \lambda)} \right]^{\frac{1}{\beta_h(n_s, \lambda)}} \quad 2.5.32$$

(A_h, β_h wg tab 2.3.4+5)

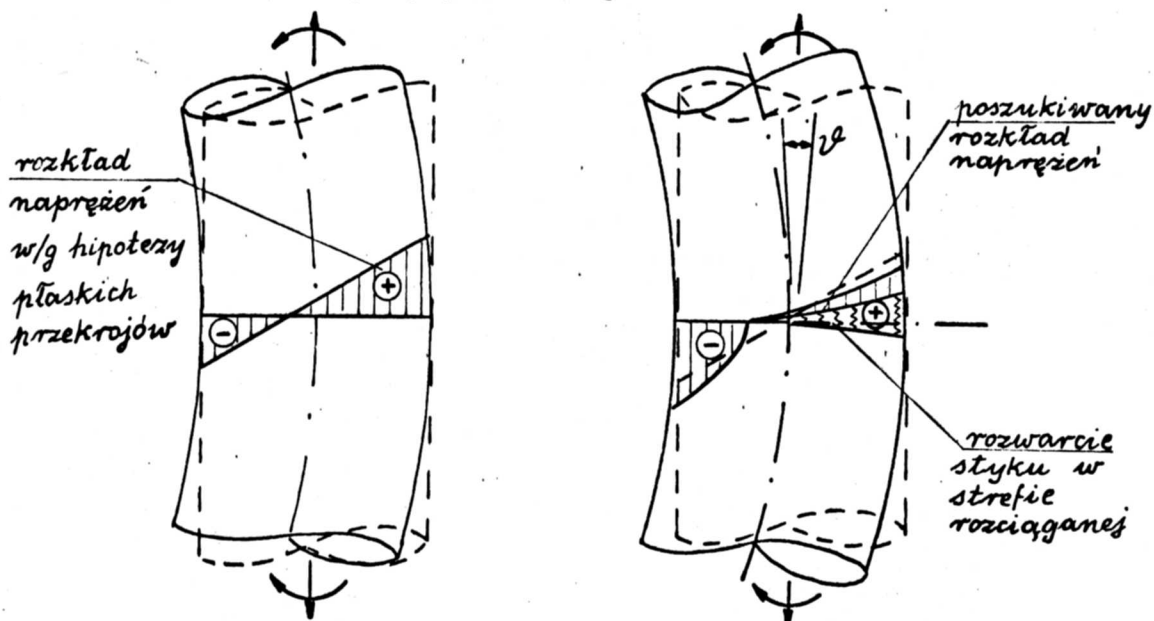
Postępując analogicznie można dobierać wysokość zębra także i na podstawie innych przesłanek, np tak by uzyskać żadaną sztywność połączenia.

3. Model obliczeniowy połączenia kołnierzowego uwzględniający odkształcalność kołnierza w strefie rozciąganej

3.1. Podstawowe założenia i sformułowanie modelu

Rozważa się połączenie kołnierzowe (uźebrowane lub nie) prętów rurowych obciążone siłą osiową i momentem zginającym.

Rozpowszechniony sposób obliczania naprężeń w elementach połączenia zakłada ich liniowy rozkład w płaszczyźnie działania momentu, tak jak to wynika z elementarnych wzorów wytrzymałości materiałów opartych o hipotezę płaskich przekrojów Naviera-Bernoullięgo. W przypadku gdy w części obwodu połączenia panują naprężenia ściskające a w części rozciągające, na skutek odkształcalności układu śruba-kołnierz-żebro w strefie rozciąganej pojawi się szczelina między krawędziami łączonych elementów, a punkty leżące na tych krawędziach oddalą się od płaszczyzny symetrii połączenia. Na płaszczyźnie symetrii pozostaną natomiast punkty krawędzi łączonych elementów w strefie ściskanej. Nieuniknione jest więc wystąpienie pewnej deplanacji przekroju poprzecznego.



Rys. 3.1.1

Model wprowadza się w celu uściślenia powszechnie stosowanej metody obliczeń oraz w celu umożliwienia oceny wielkości wzajemnego przemieszczenia i obrotu łączonych elementów co nie jest możliwe w ramach elementarnej teorii.

Prezentowany model oparty jest na poniżej wymienionych i uzasadnionych założeniach.

Założenie 1

- 1a) Materiał powłoki jest liniowo sprężysty, naprężenia nie przekraczają granicy proporcjonalności.
- 1b) Związki geometryczne pozostają liniowe (małe odkształcenia i przemieszczenia).

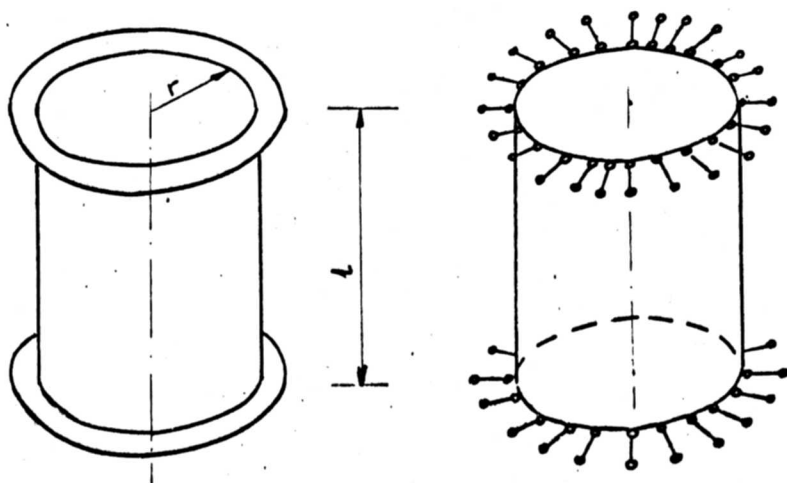
Założenie 2

Rozważania ogranicza się do przypadku połączenia symetrycznego to jest takiego, w którym zarówno łączone elementy rurowe jak i ich kołnierze i żebra mają identyczne wymiary geometryczne.

Założenie to jest w istotny sposób wykorzystane przy wyprowadzeniu równań opisujących stan deformacji i naprężenia w połączeniu.

Założenie 3

Stan deformacji rury w otoczeniu połączenia może być opisany za pomocą równań przemieszczeniowych w uproszczonej wersji zgięciowej teorii powłoki walcowej (1.3.1+3). Pomimo iż dominujące obciążenia wprowadzane są stycznie do powłoki, analiza stanu deformacji w oparciu o równania stanu bionowego nie jest w tym przypadku możliwa (prowadzi do absurdalnych wyników). Zakłada się ponadto, że sztywność kołnierza w jego płaszczyźnie jest na tyle duża iż można założyć brak przemieszczeń radialnych na krawędzi powłoki. Prowadzi to do schematu podparcia wyodrębnionego odcinka rury jak na rys. 3.1.2.

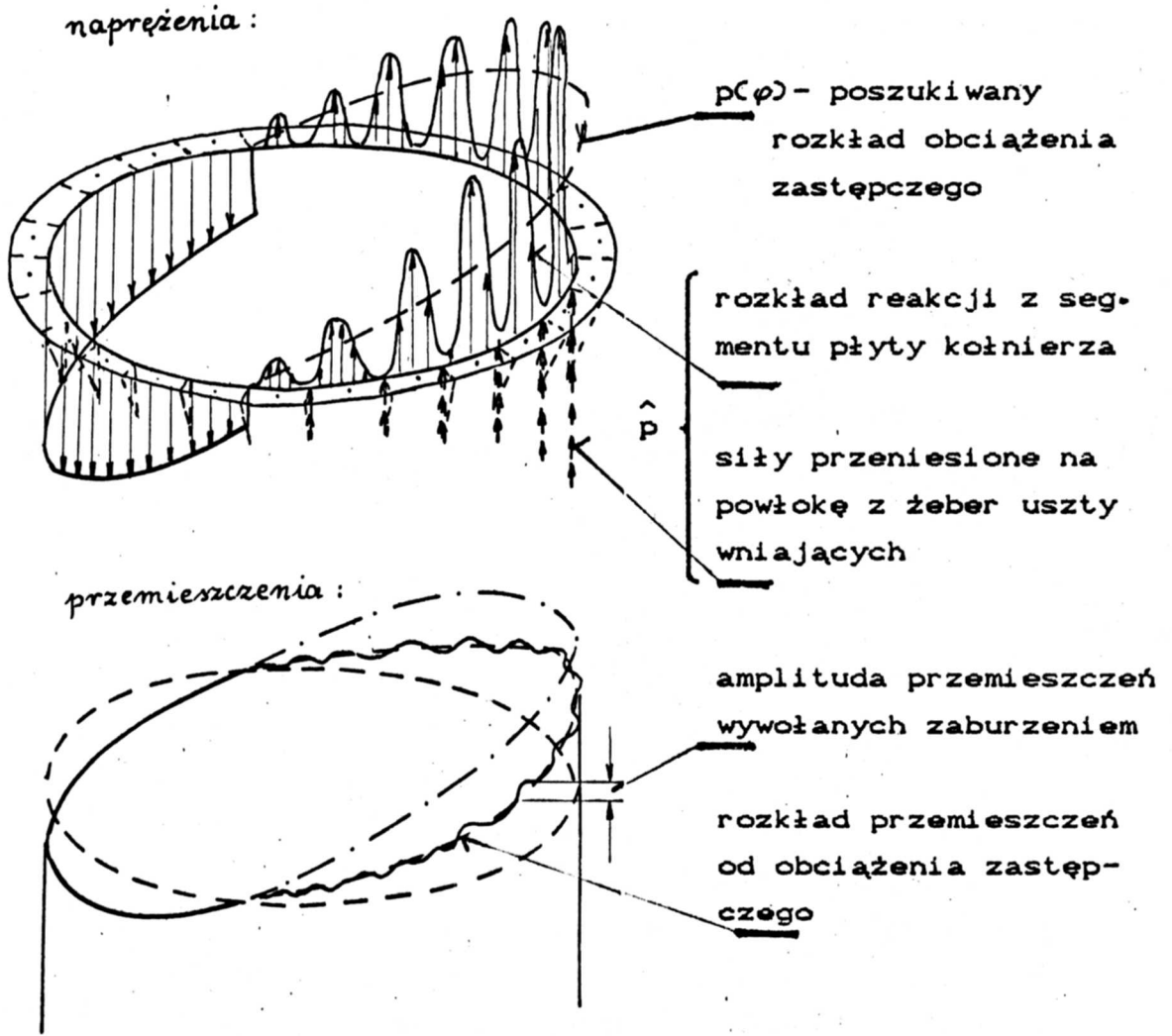


Rys. 3.1.2

Założenie 4

Przymuje się, że podział połączenia na sektory jest na tyle gęsty, iż uzasadnione jest pominięcie wpływu lokalnych zaburzeń rozkładu obciążenia brzegu powłoki w strefie rozciąganej, wywołanych nierównomiernością rozkładu reakcji z płyty kołnierza, obecnością żeber itp. na wielkość przemieszczeń u krawędzi powłoki w kierunku tworzącej (lub inaczej na wielkość rozwarcia szczeliny w strefie rozciąganej).

Tak więc zakłada się, że rozkład przemieszczenia powłoki w kierunku tworzącej wokół obwodu połączenia można wyznaczyć w oparciu o znajomość rozkładu obciążenia zastępczego, statycznie równoważnego rzeczywistemu obciążeniu spełniającego warunek 3.1.1



Rys. 3.1.3

$$p(\varphi) = \frac{n}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{+\frac{\pi}{n}} \hat{p}(\varphi) d\varphi$$

3.1.1

Znajomość obciążenia zastępczego pozwala odtworzyć rzeczywiste obciążenie powłoki w strefie rozciąganej, a to dzięki wynikom uzyskanym w rozdziale 2. Podaje się tam między innymi: współczynnik spiętrzenia naprężeń, współczynnik rozdziału obciążenia całkowitego na obciążenie przekazywane bezpośrednio z kołnierza i obciążenie przekazywane za pośrednictwem żebra. Wszystkie wielkości statyczne w połączeniu można znaleźć przemnażając wyznaczone w rozdziale 2 współczynniki przez wartość przypadającej na połowę danego sektora sumy obciążenia P.

$$P = p(\varphi) \frac{\pi}{N} r \quad 3.1.2$$

Jako uzasadnienie dopuszczalności powyższego założenia oprócz zasady de Saint-Venanta może służyć poniższy wywód.

W załączniku Z4.2 wyprowadza się związek pomiędzy współczynnikami rozwinięć fourierowskich funkcji opisujących obciążenie $\{p_n\}$ i przemieszczenie $\{u_n\}$, dla $n \geq 2$.

$$u_n = \frac{1}{D} \hat{U}_n p_n, \quad D = \frac{E g}{1 - \nu^2}, \quad 3.1.3$$

gdzie :

$$\hat{U}_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \left[\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\psi/n)^4}}}{1 - \nu^2} - \frac{1 - \nu}{4(1 + \nu)} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\psi/n)^4}}}{\sqrt{1 + (\psi/n)^4}} \right]. \quad 3.1.4$$

$$\psi = \left(\frac{3}{4}(1 - \nu^2)\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\lambda}; \quad \lambda = \frac{r}{g} \quad 3.1.5$$

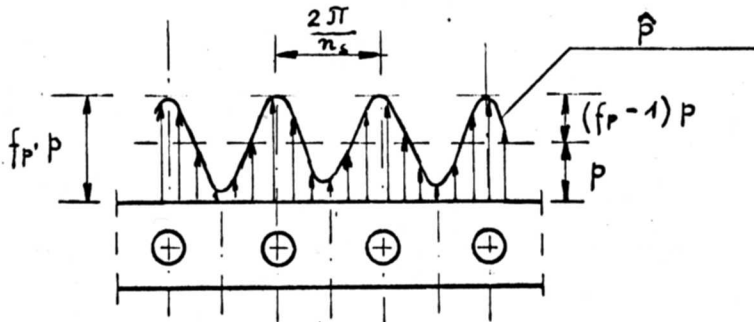
są współczynnikami proporcjonalności wiążącymi kolejne harmoniczne u_n i p_n funkcji rozkładu przemieszczeń i obciążenia wokół obwodu powłoki.

Wyrazy ciągu $\{U_n\}$ maleją wraz ze wzrostem n w tempie takim jak wyrazy ciągu $\{1/n\}$. Oznacza to, iż wpływ oscylacji rozkładu obciążenia wokół brzegu na przemieszczenia będzie stopniowo zanikał w miarę zmniejszania się ich okresu (czyli wraz ze wzrostem gęstości podziału połączenia na sektory). Dla połączenia osiowo rozciąganego siłą $N = 2\pi r p$ związek 3.1.6 pozwala oszacować stosunek κ wielkości amplitudy przemieszczeń wywołanych obciążeniem oscylującym o amplitudzie \hat{p}_{\max} przy podziale na n sektorów do wielkości rozwarcia Δ wywołanego uśrednionym obciążeniem zastępczym p .

$$\alpha = \frac{\hat{U}_n}{\Delta} \approx \frac{r \hat{U}_n \hat{p}_{\max}}{k p} \quad 3.1.6$$

Dla połączenia nieuzębowanego można przyjąć, co nie odbiega zbyt daleko od rzeczywistości, że rozkład obciążenia zaburzającego jest zgodny z przebiegiem cosinusoidy o długości półfali π/n_s i amplitudzie

$$\hat{p}_{\max} = (f_p - 1) p \quad 3.1.7$$

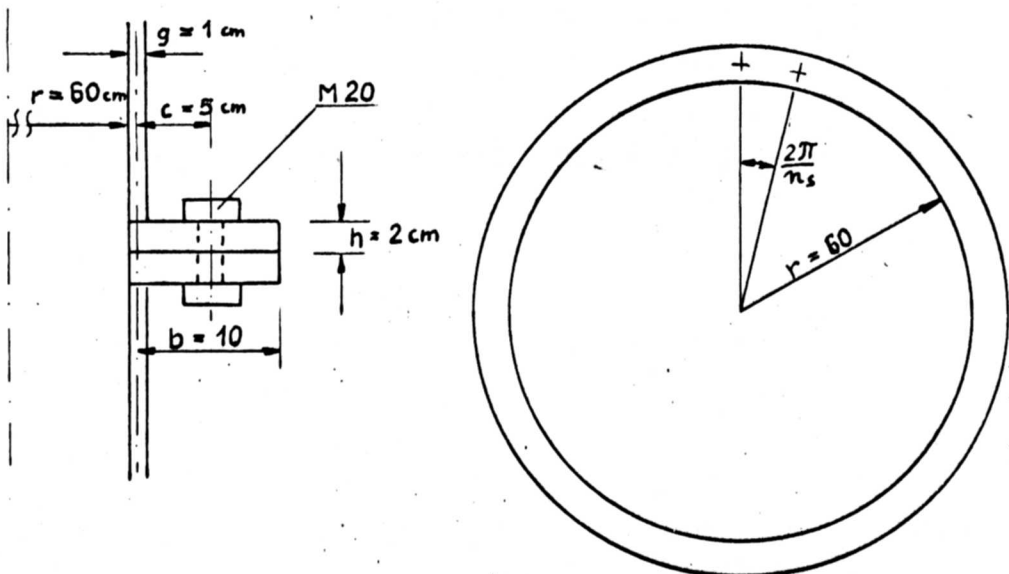


Rys. 3.1.4

gdzie f_p jest współczynnikiem spiętrzenia naprężeń wg tabl. 2.4.14.

Celem ilustracji, w oparciu o wyniki r.2 przedstawia się przykładową zależność współczynnika błędu α od liczby sektorów n_s dla nieuzębowanego połączenia o wymiarach:

$r = 60 \text{ cm}$, $g = 1 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$.



Rys. 3.1.5

Tab. 3.1.1

n_s	k	f_p	\hat{U}_{ns}	α (%)
16	359.4	4.00	0.0173	1.1827
24	218.8	2.40	0.0082	0.4293
36	151.6	1.72	0.0055	0.2140
54	118.7	1.20	0.0035	0.0627

Jak widać, zgodne z oczekiwaniami zmniejszanie się błędów przemieszczeń określonych za pomocą obciążenia uśrednionego w miarę zagęszczania się podziału na sektory, wynika nie tylko z własności ciągu $\langle \hat{U}_n \rangle$, ale jest również skutkiem stopniowego "wygładzania się" rozkładu obciążenia.

Założenie 5

Zachodzi liniowa zależność pomiędzy rozwarciem szczeliny $\Delta(\varphi)$ w danym punkcie strefy rozciąganej a przypadającą na ten punkt gęstością zastępczego obciążenia brzegu $p(\varphi)$.

$$\Delta(\varphi) = k p(\varphi) \quad ; \quad p(\varphi) > 0 \quad 3.1.8$$

Wyniki uzyskane w rozdziale 2 niniejszej pracy pozwalają na wyznaczenie współczynnika proporcjonalności k , określanego mianem podatności połączenia dla połączeń kołnierzowych uźebrowanych i nieuźebrowanych w szerokim zakresie parametrów charakteryzujących geometrię połączenia. Zakłada się ponadto, że podatność k ma wartość stałą we wszystkich punktach strefy rozciąganej.

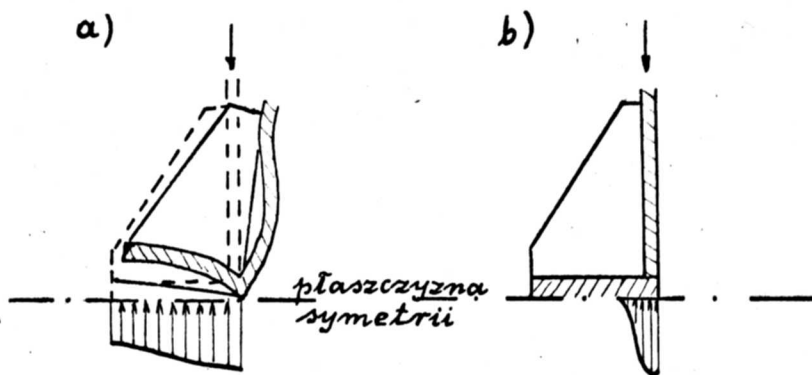
Założenie 6

Obciążenie podłużne brzegu powłoki może być przyłożone mimośrodowo względem jej powierzchni środkowej. Wielkość e' tego mimośrodu (w przypadku zachodzenia efektu dźwigni będzie ona mniejsza niż odległość osi śrub od powierzchni środkowej powłoki) można wyznaczyć metodami przedstawionymi w rozdz. 2. Wpływ mimośradowości obciążenia uwzględnia się przy tworzeniu równań równowagi, pomija się go natomiast przy określaniu przemieszczeń powłoki.

Założenie 7

W strefie ściskanej następuje bezpośrednio przenoszenie się naprężeń pomiędzy łączonymi elementami bez udziału kołnierza.

Słuszność przyjęcia tego założenia można uzasadnić następującym rozumowaniem:



Rys. 3.1.6

Przypuśćmy, że założenie 7 nie jest spełnione, a więc że naprężenia kontaktowe działają w całym obszarze kołnierza, tak jak na rys. 3.1.6a). Nieuniknionym tego skutkiem byłaby deformacja pokazana na rys. 3.1.6a), polegająca na ugięciu się płyty kołnierza do góry, oraz na obrocie żebra do wewnątrz. Obrót ten byłby wywołany momentem od naprężeń kontaktowych względem punktu O. Deformacji takiej odpowiadałaby utrata kontaktu pomiędzy kołnierzami łączonych elementów co prowadzi do sprzeczności z założoną chwilowo postacią rozkładu naprężeń. Rzeczywisty stan naprężenia może więc przybierać postać jedynie jak na rysunku 3.1.6b), a wielkość pojawiającego się mimośrodowo obciążenia jest na tyle mała, że można ją pominąć.

Jest to sytuacja jakościowo inna od tej jaką zakłada się przy obliczaniu zakotwień kominów stalowych w fundamentach betonowych, por. [8]. Tam bowiem, na skutek ograniczonej wytrzymałości betonu na docisk pojawia się redystrybucja naprężeń kontaktowych na całą powierzchnię kołnierza w strefie ściskanej.

Założenie 8

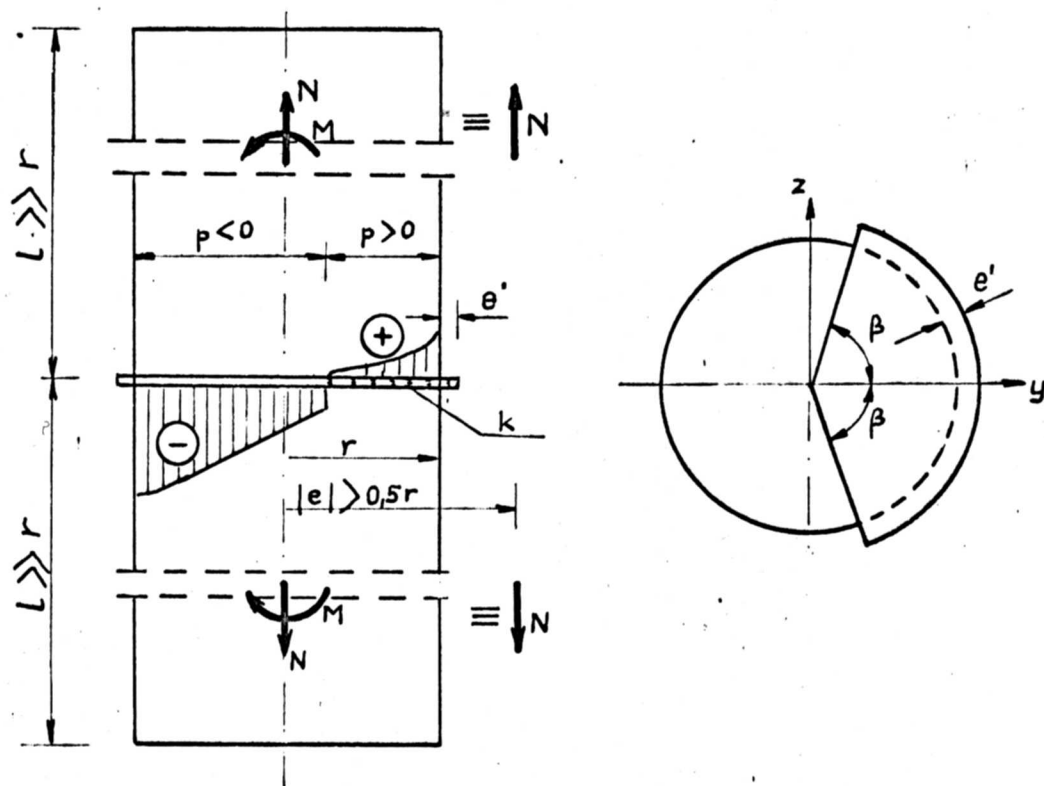
Przyjmuje się, że odległość l między sąsiednimi połączeniami jest na tyle duża, iż jej wpływ na parametry modelu obliczeniowego jest pomijalny.

Zasadniczo, rozważania ogranicza się do przypadku występowania naprężeń o różnych znakach w połączeniu. Przypadki gdy strefa ściskana lub rozciągana obejmuje cały obwód połączenia, a więc nie występuje deplanacja przekroju poprzecznego, można analizować w oparciu o elementarne wzory wytrzymałości materiałów. Tak więc przyjmuje się, że mimośród działania siły osiowej e spełnia warunek:

$$|e| > \frac{r}{2} \quad 3.1.9$$

gdzie $r/2$ jest promieniem rdzenia dla cienkiego przekroju pierścieniowego.

Wymienione powyżej założenia prowadzą do schematu obliczeniowego połączenia jak na rys. 3.1.7



rys. 3.1.7

Wielkościami danymi są:

- wymiary geometryczne łączonych elementów
- działające na połączenie siły wewnętrzne (siła osiowa N i moment M lub mimośród e przyłożenia siły N)
- mimośród przyłożenia obciążenia w strefie rozciąganej e'
- podatność k ciągłego układu sprężyn zastępującego odkształcalny układ śruba - kołnierz - żebro.

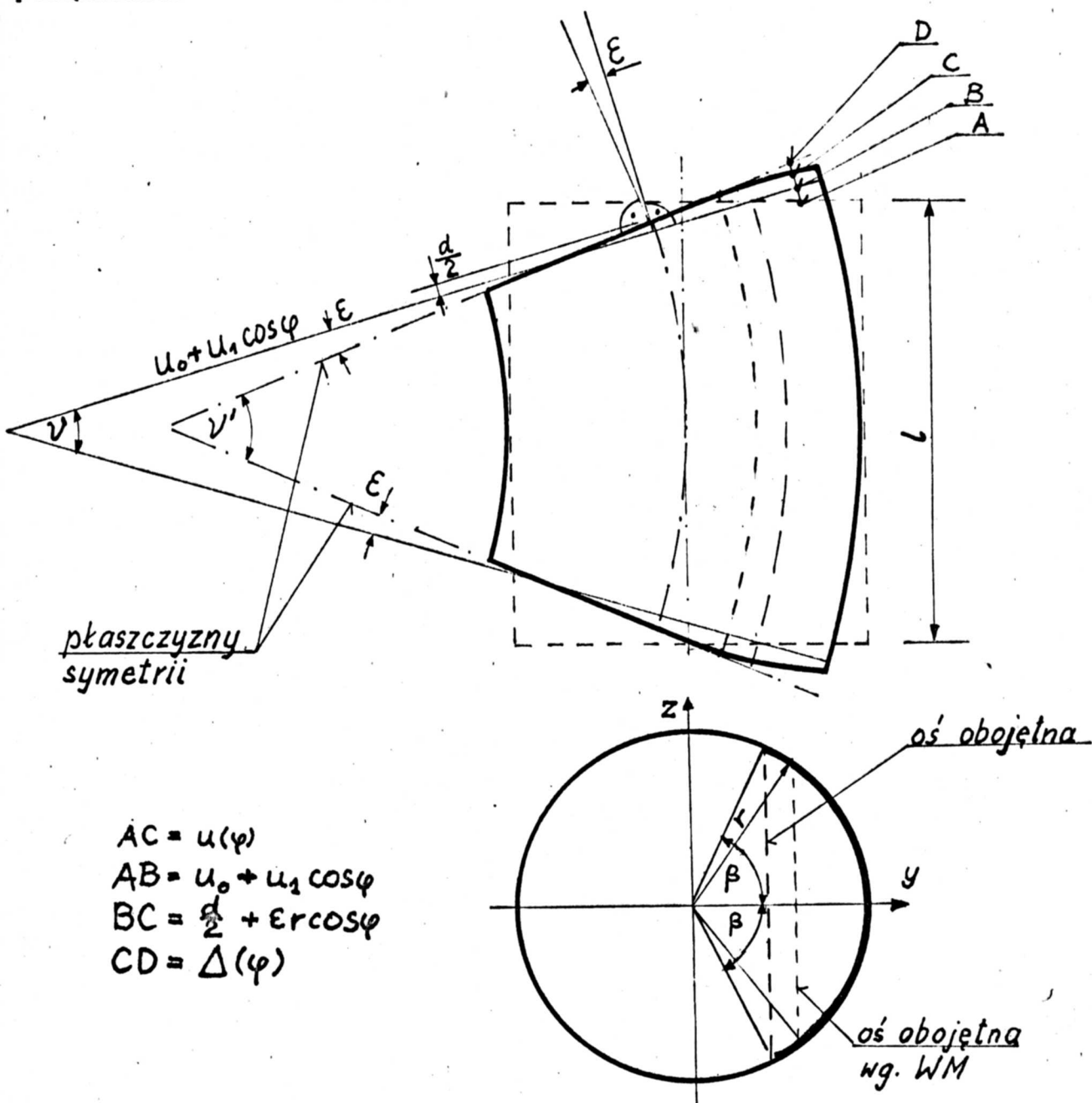
Wielkościami poszukiwanymi są:

- rozkład obciążenia zastępczego $p(\varphi)$ wokół obwodu połączenia, a w szczególności charakteryzujące go parametry takie jak: p_{\max} , p_{\min} , zasięg strefy rozciąganej określony kątem β
- przemieszczenie osiowe d i wzajemny obrót $\vartheta = 2\epsilon$ łączonych elementów (rys. 3.2.1)
- charakterystyki podatności połączenia, t.j. relacje typu

$$\vartheta = f_{\vartheta}(M, N), \quad d = f_d(M, N) \quad 3.1.10$$

3.2 Podstawowe równania modelu obliczeniowego

Rozważając geometrię odkształconego segmentu powłoki pomiędzy dwoma połączeniami, w płaszczyźnie działania momentu, dochodzi się do podstawowego związku 3.2.1 opisującego rozkład przemieszczeń podłużnych $u(\varphi)$ w dowolnym punkcie obwołu połączenia.



rys. 3.2.1

$$AB + BD = AC + CD \Leftrightarrow u(\varphi) = u_0 + u_1 \cos \varphi + \frac{d}{2} + \epsilon r \cos \varphi - \Delta(\varphi) \quad 3.2.1$$

Pierwsze cztery składniki po prawej stronie wzoru 3.2.1, opisują położenie płaszczyzny symetrii połączenia po odkształceniu, przyczym wyodrębnia się przemieszczenia wywołane liniowo zmiennym obciążeniem, statycznie równoważnym działającym siłom

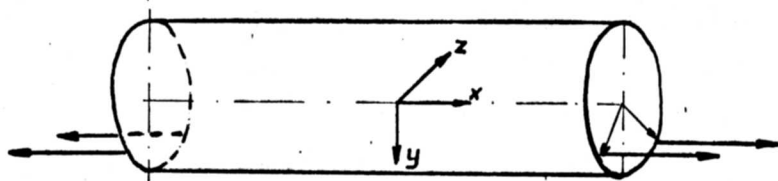
wewnętrzny M i N (pierwsze dwa składniki). Składniki te, (u_0, u_1) , można również interpretować jako pierwsze dwie składowe rozwinięcia funkcji $u(\varphi)$ w cosinusowy szereg Fouriera.

Nieznane parametry ε i $d/2$ określają dodatkową zmianę położenia płaszczyzny symetrii, ponad to, które wynika z odkształcenia się powłoki na odcinku między połączeniami na skutek działania momentu i siły osiowej, i tym samym charakteryzują odkształcalność połączenia.

Wielkość $\vartheta = 2\varepsilon$ jest kątem wzajemnego obrotu osi łączonych elementów, a $d = 2\delta r$ jest dodatkowym przemieszczeniem podłużnym w osi elementu. Rozwarcie szczeliny pomiędzy łączonymi elementami $\Delta(\varphi)$ pojawia się jedynie w strefie rozciąganej, (gdzie $p(\varphi) > 0$), co można zapisać wzorem 3.2.2 w którym $H(\cdot)$ oznacza funkcję Heaviside'a.

$$\Delta(\varphi) = k H(p(\varphi)) p(\varphi) \quad 3.2.2$$

W załączniku Z1.2 rozważa się zadanie o zamkniętej powłoce walcowej, na przeciwległych brzegach swobodnie podpartej i obciążonej siłami skupionymi w kierunku tworzącej (rys 3.2.2), symetrycznie względem płaszczyzny $\varphi = 0$.



rys. 3.2.2

Uzyskana tam funkcja wpływu przemieszczeń $U(\alpha, \varphi)$ pozwala zapisać zależność pomiędzy przemieszczeniem brzegu powłoki w kierunku tworzącej $u(\varphi)$ a działającym wokół brzegu obciążeniem $p(\alpha)$, symetrycznym względem płaszczyzny $\varphi = 0$, w formie całkowej:

$$u(\varphi) = \int_0^{\pi} U(\alpha, \varphi) p(\alpha) r d\alpha \quad 3.2.3$$

gdzie:

$$U(\alpha, \varphi) = \frac{2}{\pi D} \left[\frac{\hat{U}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n \cos n\alpha \cos n\varphi \right] \quad 3.2.4$$

$$\psi = \left(\frac{3}{4}(1-\nu^2) \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\lambda} \quad ; \quad \lambda = \frac{r}{g} \quad 3.2.5$$

$$a \quad 3.2.6$$

$$\hat{U}_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \left[\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\psi/n)^4}}}{1 - \nu^2} - \frac{1 - \nu}{4(1 + \nu)} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\psi/n)^4}}}{\sqrt{1 + (\psi/n)^2}} \right]$$

Postać funkcji wpływu $U(\alpha, \varphi)$ tworzącej jądro równania będzie przeanalizowana szczegółowo przed przystąpieniem do rozwiązania równań problemu. W tym miejscu warto jedynie stwierdzić, że charakteryzuje się ona osobliwością typu logarytmicznego dla $\alpha = \varphi$.

Przedstawiając $u(\varphi)$ zgodnie z 3.2.1 otrzymujemy równanie całkowe 3.2.7, (nieliniowe ze względu na występowanie funkcji $H(p)$), opisujące rozkład obciążenia wokół obwodu połączenia:

$$\int_0^{\pi} U(\alpha, \varphi) p(\alpha) r d\alpha = u_0 + u_1 \cos \varphi + r\delta + r \epsilon \cos \varphi - kH(p(\varphi))p(\varphi). \quad 3.2.7$$

Zakładając, że przebieg funkcji obciążenia $p(\varphi)$ jest tego rodzaju, że przejście z naprężeń rozciągających na ściskające odbywa się jedynie w punkcie $\varphi = \beta$ (tj. strefa rozciągana obejmuje przedział $(0, \beta)$ a ściskana przedział (β, π)) równanie 3.2.7 można przepisać jako:

$$\int_0^{\pi} U(\alpha, \varphi) p(\alpha) r d\alpha = u_0 + u_1 \cos \varphi + r\delta + r \epsilon \cos \varphi - kH(\beta - \varphi)p(\varphi). \quad 3.2.8$$

Oczywiście, konieczne będzie późniejsze sprawdzenie czy wyniki uzyskane przy przyjęciu tego założenia same założenie to spełniają. Jeśli tak, obie formuły zapisu obciążenia stają się sobie równoważne, i postępowanie powyższe będzie w pełni uzasadnione.

Komplet nieliniowych, całkowo algebraicznych równań opisujących zagadnienie otrzymuje się dołączając warunki równowagi momentów 3.2.9 i sił osiowych 3.2.10, uwzględniające mimośrodowość działania obciążenia w strefie rozciąganej, oraz warunek zerowania się obciążenia na osi obojętnej 3.2.11

$$\int_0^{\beta} p^*(\varphi) \cos \varphi r^{*2} d\varphi + \int_{\beta}^{\pi} p(\varphi) \cos \varphi r^2 d\varphi = \frac{M}{N} \quad 3.2.9$$

$$\int_0^{\beta} p^*(\varphi) r^* d\varphi + \int_{\beta}^{\pi} p(\varphi) r d\varphi = \int_0^{\pi} p(\varphi) r d\varphi = \frac{N}{N} \quad 3.2.10$$

$$p(\beta) = 0. \quad 3.2.11$$

p^* jest gęstością obciążenia brzegowego odniesioną do promienia $r^* = r + e' = (1 + \gamma)r$ określoną tak, by w każdym punkcie spełniony

był warunek statycznej równoważności 3.2.12

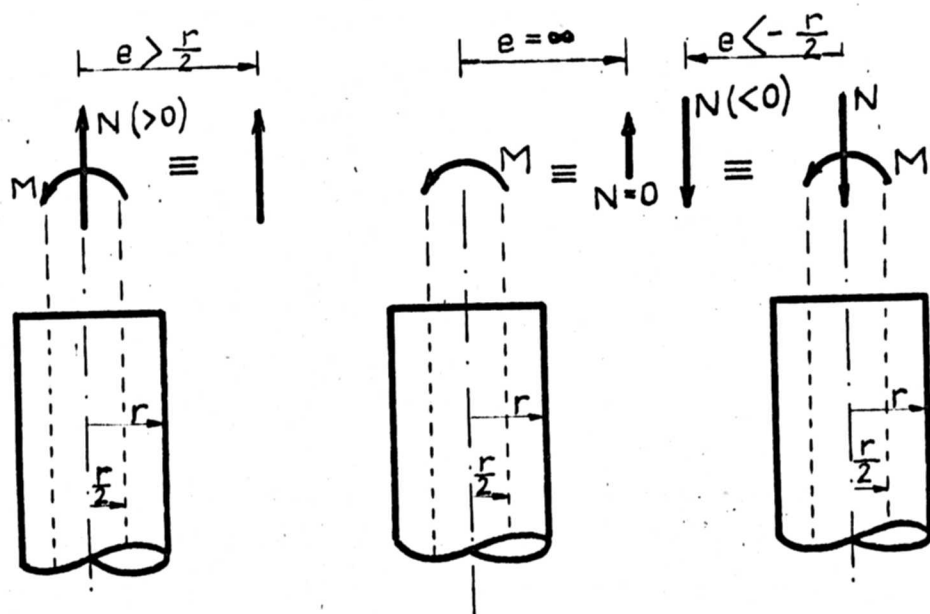
$$p^*(\varphi)r^*d\varphi = p(\varphi)r d\varphi \quad 3.2.12$$

W układzie równań 3.2.8 + 3.2.11, przy zadanych wielkościach momentu M i siły osiowej N , niewiadomymi są: rozkład obciążenia $p(\varphi)$, kąt zakresu strefy rozciąganej, oraz wielkości charakteryzujące deformację połączenia ϵ, d .

3.3 Rozwiązanie równań opisujących zagadnienie

3.3.1 Przedstawienie metody postępowania

Przed przystąpieniem do rozwiązania układu równań algebraiczno-całkowych 3.2.8+11 wprowadza się pewną parametryzację działającego na połączenie układu obciążenia (M, N) .



Rys. 3.3.1

Jako parametr taki wygodnie jest przyjąć liczbę ξ będącą odwrotnością stosunku mimośrodowi e siły podłużnej do promienia rdzenia,

$$\frac{1}{\xi} = \frac{e}{0.5r} \quad ; \quad \xi = \frac{r}{2e} = \frac{rN}{2M} \quad , \quad 3.3.1$$

zwaną dalej mimośrodem względnym. Przy zadanym momencie działającym na połączenie, siłę podłużną można zapisać jako :

$$N = M \frac{2}{r} \xi \quad 3.3.2$$

Parametr ten można również interpretować jako stosunek naprężeń wywołanych siłą podłużną p_N , do maksymalnych naprężeń rozciągających od zginania p_M , obliczonych przy założeniu zasady płaskich przekrojów, w dostatecznie dużej odległości od połączenia.

$$\xi = \frac{p_N}{p_M} = \frac{\frac{N}{2\pi r}}{\frac{M}{\pi r^2}} = \frac{Nr}{2M} \quad 3.3.3$$

Poszczególne stany obciążenia wg rys. 3.3.1 będą charakteryzowane następującymi wartościami mimośrodowego ξ

$\xi \in (-1, 0)$ mimośrodowe ściskanie (duży mimośród),

$\xi = 0$ czyste zginanie,

$\xi \in (0, 1)$ mimośrodowe rozciąganie (duży mimośród).

Przypadki małego mimośrodowego

$\xi \in (-\infty, -1)$ mimośrodowe ściskanie,

$\xi \in (1, \infty)$ mimośrodowe rozciąganie,

zgodnie z ustaleniami z poprzedniego rozdziału, jako nie wywołujące deplanacji nie będą dalej rozpatrywane.

Podobną rolę pełni parametr ξ_0 zdefiniowany jako :

$$\xi_0 = \frac{p_0}{p_1} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(\varphi) d\varphi}{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(\varphi) \cos \varphi d\varphi} \quad , \quad 3.3.4$$

tj jako stosunek zerowej i pierwszej składowej harmonicznej w rozwinięciu obciążenia w cosinusowy szereg Fouriera. Oczywiście, gdy mimośród przyłożenia obciążenia w strefie rozciąganej $e' = 0$, oba te parametry utożsamiają się $\xi = \xi_0$.

W pierwszej kolejności zostanie przedstawione rozwiązanie przy założeniu braku mimośrodowego obciążenia powłoki w strefie rozciąganej $e' = 0$ ($\gamma = 0$). Przypadek ten, określany dalej mianem podstawowego, zostanie następnie wykorzystany do konstrukcji rozwiązania w przypadku ogólnym, tj. gdy $e' \neq 0$.

Dla układów całkowo algebraicznych równań o rozważanej postaci, w których niewiadomymi są zarówno funkcje jak i wielkości liczbowe, w zasadzie nie istnieje teoria pozwalająca wnioskować o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań, brak również możliwości dokonania oceny błędu uzyskanego numerycznie rozwiązania. Z tych też względów rozwiązanie równań zostanie przeprowadzone dwoma metodami.

Pierwsza z nich jest oparta na aproksymacji poszukiwanej funkcji rozkładu obciążenia za pomocą wielomianów trygonometrycznych (z uwagi na symetrię tylko człony cosinusowe)

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^N p_n \cos n\varphi \quad 3.3.5$$

w metodzie drugiej $p(\varphi)$ aproksymuje się za pomocą funkcji kawałkami liniowymi

$$p(\varphi) = \sum_{n=1}^N p_n \psi_n(\varphi) \quad 3.3.6$$

gdzie $p_n = p(\varphi_n)$ są wartościami funkcji w wybranych punktach węzłowych, a ψ_n są funkcjami bazowymi pokazanymi dalej, na rys. 3.3.2.

Przy zadanej wielkości ξ rozwiązanie równań 3.2.8+11, którekolwiek z wymienionych metod, wymagało by iteracyjnego doboru kąta zasięgu strefy rozciąganej β . Celem uniknięcia tej niedogodności zakłada się że pomiędzy parametrem obciążenia ξ , a kątem β zachodzi relacja wzajemnie jednoznaczna. Możliwe jest wówczas potraktowanie kąta β jako wielkości zadanej, a względnego mimośrod ξ jako niewiadomej. Rozwiązanie całej rodziny układów 3.2.8+3.2.11 (tym razem układ równań będzie już liniowy), dla różnych $\beta \in (0, \pi)$, pozwoli na zbudowanie relacji typu

$$f = f(\beta), \quad 3.3.7$$

gdzie f oznacza dowolną wielkość statyczną lub kinematyczną w połączeniu, oraz relacji

$$\beta = \beta(\xi) \quad 3.3.8$$

skąd natychmiast można będzie otrzymać poszukiwane relacje o postaci:

$$f = f(\xi) \quad 3.3.9$$

3.3.2 Rozwiązanie zadania podstawowego ($e' = 0$)

W przypadku tym układ równań 3.2.8+3.2.11, po uwzględnieniu parametryzacji 3.3.1+4 przyjmie postać:

$$\int_0^{\pi} U(\alpha, \varphi) p(\alpha) r d\alpha = u_0 + u_1 \cos \varphi + \delta r + \epsilon r \cos \varphi - kH(\beta - \varphi) p(\varphi). \quad 3.3.10$$

$$r^2 \int_0^{\pi} p(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{M}{2\gamma} \quad 3.3.11$$

$$r \int_0^{\pi} p(\varphi) d\varphi = \frac{N}{2\gamma} = \frac{M}{r} \xi_0 \quad 3.3.12$$

$$p(\beta) = 0 \quad 3.3.13$$

3.3.2.1 Rozwiązanie przy użyciu aproksymacji rozkładu obciążenia wielomianami trygonometrycznymi

Poszukiwaną funkcję rozkładu obciążenia zastępczego wokół obwodu połączenia $p(\varphi)$ przedstawia się jako sumę szeregu Fouriera, przy czym, z uwagi na symetrię względem płaszczyzny działania momentu $\varphi=0$ (parzystość funkcji $p(\varphi)$), uwzględnia się jedynie człony rozwinięcia w szereg cosinusowy w przedziale $[0, \pi]$

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n\varphi \quad 3.3.14$$

o współczynnikach :

$$p_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(\varphi) d\varphi \quad 3.3.15$$

$$p_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(\varphi) \cos n\varphi d\varphi ; n=1,2,\dots \quad 3.3.16$$

Lewą stronę 3.3.10 można wówczas przedstawić jako:

$$L = \int_0^{\pi} U(\alpha, \varphi) p(\alpha) r d\alpha = \quad 3.3.17$$

$$= \frac{1}{D} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\hat{U}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n \cos n\alpha \cos n\varphi \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} p_m \cos m\alpha \right] r d\alpha =$$

$$= \frac{2r}{\pi D} \left[\frac{\hat{U}_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} p_m \int_0^{\pi} \cos m\alpha d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n \cos n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} p_m \int_0^{\pi} \cos m\alpha \cos n\alpha d\alpha \right].$$

Dzięki ortogonalności układu funkcji $\langle \cos n\varphi \rangle$ w przedziale $[0, \pi]$ (wzór 3.3.18), w wyrażeniu tym znika podwójne sumowanie.

$$\int_0^{\pi} \cos m\alpha \cos n\alpha d\alpha = \begin{cases} \pi & \text{gdy } m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{" } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{" } m \neq n \end{cases} \quad 3.3.18$$

Ostatecznie równanie 3.3.10 przybierze postać : 3.3.19

$$\frac{r}{D} \left[\hat{U}_0 p_0 + \hat{U}_1 p_1 \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} \hat{U}_n p_n \cos n\varphi \right] = u_0 + u_1 \cos \varphi + r\delta + \epsilon r \cos \varphi - k p(\varphi) H(\beta - \varphi)$$

Zgodnie z 3.1.3 ulegają w nim uproszczeniu wyrazy u_0 i $u_1 \cos \varphi$, tj. przemieszczenia wywołane obciążeniem o rozkładzie liniowym, zależne od długości l segmentu, i tym samym zanika wpływ tej

wielkości na postać rozwiązania (współczynniki \hat{U}_n dla $n \geq 2$ zostały obliczone przy założeniu $1 \rightarrow \infty$).

Do identycznej ostatecznej postaci równania 3.3.21 można również dojść bezpośrednio ze wzoru 3.2.1 wyrażając jego lewą stronę jako

$$u(\varphi) = \frac{r}{D} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos n\varphi = \frac{r}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{U}_n p_n \cos n\varphi \quad 3.3.20$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \hat{U}_n p_n \cos n\varphi = \delta r + \varepsilon r \cos\varphi - k p(\varphi) H(\beta - \varphi) \quad 3.3.21$$

Ostatni składnik równania 3.3.21 wyraża się również jako sumę pewnego szeregu Fouriera o współczynnikach \tilde{p}_n

$$p(\varphi) H(\beta - \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n \cos n\varphi \quad 3.3.22$$

$$\tilde{p}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(\varphi) H(\beta - \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta} p(\varphi) d\varphi \quad 3.3.23$$

$$\tilde{p}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(\varphi) H(\beta - \varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta} p(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad 3.3.24$$

Korzystając z przedstawienia 3.3.14 współczynniki \tilde{p}_n można wyrazić poprzez p_n jako sumy pewnych szeregów nieskończonych:

$$\tilde{p}_0 = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} p_m I_{0m}(\beta) \quad 3.3.25$$

$$\tilde{p}_n = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} p_m I_{nm}(\beta) \quad 3.3.26$$

gdzie:

$$I_{nm}(\beta) = \int_0^{\beta} \cos m\alpha \cos n\alpha d\alpha = \quad 3.3.27$$

$$= \begin{cases} \beta ; & m = n = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{2} \frac{\sin 2n\beta}{n} \right) ; & m = n \neq 0 \\ \frac{\sin n\beta}{n} ; & m = 0, n < 1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (m-n)\beta}{m-n} + \frac{\sin (n+m)\beta}{m+n} \right) ; & m \neq n \neq 0 \end{cases}$$

Podstawiając 3.3.25+6 do 3.3.22 , a to z kolei do 3.3.21 uzyskuje się:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \hat{U}_n p_n \cos n\varphi = \delta r + \varepsilon r \cos \varphi - \frac{k}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} p_m I_{0m}(\beta) - \frac{2k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p_m I_{nm}(\beta) \right) \cos n\varphi \quad 3.3.28$$

Traktując obie strony tej równości jako przedstawienie pewnej funkcji w postaci sumy szeregu Fouriera , na mocy twierdzenia o jednoznaczności takiego przedstawienia dochodzi się do nieskończonego ciągu równości 3.3.29 + 3.3.31

$$0 = \delta r - \frac{k}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} p_m I_{0m}(\beta) \quad 3.3.29$$

$$0 = \varepsilon r - \frac{2k}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} p_m I_{1m}(\beta) \quad 3.3.30$$

$$\frac{r}{\beta} \hat{U}_n p_n = - \frac{2k}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} p_m I_{nm}(\beta) ; n = 1, 2, 3, \dots \quad 3.3.31$$

Do powyższych równań dołącza się warunek zerowania się obciążenia na osi obojętnej 3.3.32, również wyrażony poprzez rozwinięcie w szereg Fouriera ,

$$p(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \cos m\beta = 0 , \quad 3.3.32$$

oraz warunki równowagi sumy sił i momentów 3.3.33

$$r^2 \int_0^{\pi} p(\varphi) \cos \varphi d\varphi = r^2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int_0^{\pi} \cos n\varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} r^2 p_1 = \frac{M}{2} \quad 3.3.34$$

$$r \int_0^{\pi} p(\varphi) d\varphi = r \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int_0^{\pi} \cos n\varphi d\varphi = \pi r p_0 = \frac{N}{2} = \frac{M}{r} \xi_0$$

Przy zadanych M i N (lub M i ξ_0) równania 3.3.29 + 3.3.32 stanowią nieskończony układ równań z niewiadomymi $p_n, \delta, \varepsilon, \beta$, nieliniowy z uwagi β . Opisane w p.3.3.1 podejście odwrotne, polegające na potraktowaniu kąta zakresu strefy rozciąganej β jako wielkości zadanej, po ograniczeniu się do skończonej liczby N składowych harmonicznnych w rozwinięciu obciążenia w szereg, pozwala na sprowadzenie zadania do rozwiązania układu $N+2$ równań liniowych 3.3.36+39 o $N+2$ niewiadomych.

Jako niewiadome wygodnie jest przyjąć zmienne bezwymiarowe :

$$x_m = \frac{k}{\pi r \varepsilon} p_m ; m = 0, 1, \dots, N , \text{ oraz } \delta_t = \frac{\delta}{\varepsilon} . \quad 3.3.35$$

Wówczas:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m I_{0m}(\beta) - \delta_t = 0 \quad , \quad 3.3.36$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m I_{1m}(\beta) = \frac{1}{2k} \quad , \quad 3.3.37$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m I_{nm}(\beta) + S \hat{U}_n x_n = 0 ; n = 2, 3, \dots, N \quad , \quad 3.3.38$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m \cos m\beta = 0 \quad , \quad 3.3.39$$

gdzie

$$S = \frac{\pi r}{2k D} \quad , \quad 3.3.40$$

jest pewnym bezwymiarowym współczynnikiem charakteryzującym stosunek sztywności kołnierza i powłoki.

Rozwiązanie układu równań 3.3.36+39 pozwala na znalezienie odpowiadających założonemu β poszukiwanych wielkości :

- parametru obciążenia ξ_0

$$\xi_0 = \frac{x_0}{x_1} \quad (= \xi \text{ gdy } e' = 0) \quad 3.3.41$$

- rozkładu obciążenia :

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^k p_n \cos n\varphi = \frac{M}{\pi r^2} \sum_{n=0}^k \frac{p_n}{p_1} \cos n\varphi = \frac{M}{\pi r^2} \frac{1}{x_1} \sum_{n=0}^k x_n \cos n\varphi \quad 3.3.42$$

- kąta obrotu płaszczyzny symetrii :

$$\varepsilon = \frac{k}{\pi r} \frac{p_1}{x_1} = \frac{M}{\pi r^2} \frac{k}{\pi r} \frac{1}{x_1} \quad 3.3.43$$

- parametru określającego jej osiowe przemieszczenie:

$$\delta = \varepsilon \delta_t = \frac{M}{\pi r^2} \frac{2k}{\pi r} \frac{1}{x_1} \delta_t \quad 3.3.44$$

Jak widać we wzorach powyższych istotną rolę pełni czynnik $1/x_1$. Wprowadza się dla niego oznaczenie :

$$\xi_0 \rightarrow \eta(\xi_0) = \frac{1}{x_1} \quad , \quad 3.3.45$$

i uzależnia od obliczonego ξ_0 . Znajomość relacji 3.3.45 pozwala na zbudowanie poszukiwanych charakterystyk odkształcalności połączenia :

$$\theta(M, N) = 2\epsilon = M \frac{2k}{\pi^2 r^3} \eta \left(\frac{Nr}{2M} \right) \quad 3.3.46$$

$$d(M, N) = 2\delta r = M \frac{2k}{\pi^2 r^2} \eta \left(\frac{Nr}{2M} \right) \delta_t \left(\frac{Nr}{2M} \right) \quad 3.3.47$$

3.3.3.2 Rozwiązanie przy aproksymacji rozkładu obciążenia funkcjami odcinkowo liniowymi

W funkcji $U(\varphi, \alpha)$ tworzącej jądro równania całkowego 3.2.9, danej wzorem 3.2.4 po przekształceniach przedstawionych w załączniku Z 4.3 można wydzielić część osobliwą $K(\alpha, \varphi)$, tak że przybierze ona postać :

$$U(\varphi, \alpha) = \frac{2}{\pi D} \left[\hat{U}_0 + \hat{U}_1 \cos \alpha \cos \varphi + \tilde{U}(\alpha, \varphi) \right]; \quad 3.3.48$$

$$\tilde{U}(\alpha, \varphi) = R(\alpha, \varphi) + K(\alpha, \varphi) \quad 3.3.49$$

gdzie ciągła funkcja $R(\alpha, \varphi)$ jest dana poprzez szybko zbieżne szeregi trygonometryczne 3.3.53+54

$$R(\alpha, \varphi) = S(\alpha - \varphi) + S(\alpha + \varphi), \quad 3.3.50$$

$$S(\gamma) = C_1 S_1(\gamma) + C_2 S_2(\gamma) \quad 3.3.51$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2(1-\nu^2)}; \quad C_2 = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{1-\nu}{1+\nu} \quad 3.3.52$$

$$S_1(\gamma) = -\sqrt{2} \cos \gamma + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\psi/n)^4}} - \sqrt{2}}{n} \cos n\gamma \quad 3.3.53$$

$$S_2(\gamma) = -\sqrt{2} \cos \gamma + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\psi/n)^4}} - \sqrt{2} \sqrt{1 + (\psi/n)^4}}{n \sqrt{1 + (\psi/n)^4}} \cos n\gamma \quad 3.3.54$$

a część osobliwa :

$$K(\alpha, \varphi) = C \ln(2|\cos \alpha - \cos \varphi|); \quad 3.3.55$$

$$C = -\sqrt{2} (C_1 + C_2), \quad 3.3.56$$

Funkcje wpływu z tego typu osobliwościami dla przemieszczeń pod siłami skupionymi występują także i w innych zadaniach

teorii sprężystości . Na przykład w zadaniu Flamanta dla półpłaszczyzny C którego odpowiednikiem na zakrzywionej powierzchni walca jest rozważane w załączniku Z 4.3 zadanie pomocnicze δ występuje analogiczna osobliwość logarytmiczna. Choć może się to wydać paradoksem, ale obecność tego typu osobliwości znakomicie ułatwia numeryczne rozwiązywanie równań całkowych. Nie występują bowiem wówczas trudności , opisane w p. 2.3.2.1 , charakterystyczne dla równań całkowych o jądrach gładkich . Pewną trudność może sprawić jedynie konieczność obliczania całek niewłaściwych z funkcji będących iloczynami części osobliwej jądra i funkcji bazowych dla rozwiązania numerycznego.

Poszukiwaną funkcję rozkładu obciążenia zastępczego wokół obwodu połączenia $p(\varphi)$ przedstawia się jako:

$$p(\varphi) = \frac{M}{\pi r^2} (\xi_0 + \cos \varphi + x(\varphi)) , \quad 3.3.57$$

gdzie ξ_0 jest wprowadzonym poprzednio parametrem rozkładu obciążenia , a $x(\varphi)$ jest bezwymiarową funkcją opisującą różnicę między rzeczywistym rozkładem $p(\varphi)$ a rozkładem liniowym

$$p_0 + p_1 \cos \varphi = \frac{M}{\pi r^2} (\xi_0 + \cos \varphi) , \quad 3.3.58$$

jaki odpowiadałby zadanemu stanowi obciążenia $\langle M, N \rangle$ (lub $\langle M, \xi_0 \rangle$) przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów . Różnica ta stanowić musi układ samo-zrównoważony. Warunki równowagi 3.3.11 i 3.3.12 prowadzą bowiem do warunków 3.3.60 i 3.3.62

$$\begin{aligned} r^2 \int_0^{\pi} p(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi &= r^2 \frac{M}{\pi r^2} \int_0^{\pi} (\xi_0 + \cos \varphi + x(\varphi)) \cos \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{M}{\pi} \left(\xi_0 \int_0^{\pi} \cos \varphi \, d\varphi + \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi + \int_0^{\pi} x(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi \right) = \\ &= \frac{M}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} x(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi \right) = \frac{M}{2} , \end{aligned} \quad 3.3.59$$

skąd :

$$\int_0^{\pi} x(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi = 0 , \quad 3.3.60$$

oraz :

$$r \int_0^{\pi} p(\varphi) \, d\varphi = \frac{M}{\pi r} \int_0^{\pi} (\xi_0 + \cos \varphi + x(\varphi)) \, d\varphi = \frac{M}{\pi r} (\xi_0 \pi + \int_0^{\pi} x(\varphi) \, d\varphi) = \frac{M}{r} \xi_0 \quad 3.3.61$$

skąd

$$\int_0^{\pi} x(\varphi) d\varphi = 0 \quad 3.3.62$$

Warunek zerowania się obciążenia $p(\varphi)$ w punkcie $\varphi = \beta$ można zapisać jako :

$$p(\varphi) \Big|_{\varphi=\beta} = \frac{M}{\pi r^2} (\xi_0 + \cos\beta + x(\beta)) = 0 \quad 3.3.63$$

skąd :

$$x(\beta) + \xi_0 = -\cos\beta \quad 3.3.64$$

Podstawowe równanie zgodności przemieszczeń 3.3.10 przekształca się w sposób następujący :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi} U(\alpha, \varphi) p(\alpha) r d\alpha = \frac{M}{\pi r^2} \int_0^{\pi} U(\alpha, \varphi) (\xi_0 + \cos\alpha + x(\alpha)) d\alpha = \\ &= \frac{2r}{\pi D} \frac{M}{\pi r^2} \left[\frac{\hat{U}_0}{2} \int_0^{\pi} \xi_0 d\alpha + \int_0^{\pi} \cos\alpha d\alpha + \int_0^{\pi} x(\alpha) d\alpha \right] + \\ &+ U_1 \left[\int_0^{\pi} \xi_0 \cos\varphi \cos\alpha d\alpha + \int_0^{\pi} \cos\varphi \cos^2\alpha d\alpha + \int_0^{\pi} \cos\varphi \cos\alpha x(\alpha) d\alpha \right] \\ &+ \left[\int_0^{\pi} \check{U}(\alpha, \varphi) \xi_0 d\alpha + \int_0^{\pi} \check{U}(\alpha, \varphi) \cos\alpha d\alpha + \int_0^{\pi} \check{U}(\alpha, \varphi) x(\alpha) d\alpha \right] \end{aligned} \quad 3.3.65$$

Człony przekreślone zerują się dzięki ortogonalności układu $\langle \cos n\varphi \rangle$, bądź dzięki właściwościom 3.3.59 i 3.3.61. Przekształcając dalej uzyskuje się :

$$\begin{aligned} L &= \frac{M}{\pi r^2} \xi_0 \frac{r}{D} \hat{U}_0 + \frac{M}{\pi r^2} \frac{r}{D} \hat{U}_1 \cos\varphi + \frac{2r}{\pi D} \frac{M}{\pi r^2} \int_0^{\pi} \check{U}(\alpha, \varphi) x(\alpha) d\alpha = \\ &= u_0 + u_1 \cos\varphi + \delta r + \varepsilon r \cos\varphi - k H(\beta - \varphi) (\xi_0 + \cos\varphi + x(\varphi)) \frac{M}{\pi r^2} \end{aligned} \quad 3.3.66$$

I tu również , tak jak w metodzie trygonometrycznej skróceniu ulegają człony zależne od długości segmentu, opisujące liniowo zmienne przemieszczenie wywołane liniowym obciążeniem. Ostatecznie , po podzieleniu stronami przez czynnik $kM/\pi r^2$ uzyskuje się następujący układ równań całkowo algebraicznych:

3.3.67

$$\mu \int_0^{\pi} \tilde{U}(\alpha, \varphi) x(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \delta_l + \frac{1}{\pi} \eta \cos \varphi - H(\beta - \varphi) (\xi_0 + \cos \varphi + x(\varphi))$$

$$\int_0^{\pi} x(\varphi) d\varphi = 0 \quad 3.3.68$$

$$\int_0^{\pi} x(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0 \quad 3.3.69$$

$$x(\beta) + \xi_0 = -\cos \beta \quad 3.3.70$$

Niewiadomymi, przy zadanym kącie zasięgu strefy rozciąganej β , są :

- funkcja modyfikująca obciążenie $x(\varphi)$
- parametr obciążenia ξ_0
- współczynniki związane z deformacją połączenia η i δ_l o znaczeniu jak w metodzie trygonometrycznej

$$\eta = \frac{\epsilon \pi^2 r^3}{k M} \quad \text{skąd} \quad \epsilon = M \frac{k}{\pi^2 r^3} \eta \quad 3.3.71$$

oraz:

$$\delta_l = \frac{d}{\Sigma} \frac{\pi^2 r^2}{k M} \quad \text{skąd} \quad d = M \frac{2k}{\pi^2 r^2} \delta_l \quad 3.3.72$$

Pomiędzy współczynnikami δ_l i δ_i z metody trygonometrycznej zachodzi związek:

$$\delta_l = \delta_i \eta \quad 3.3.73$$

Bezwymiarowe współczynniki μ wyrażają się wzorem :

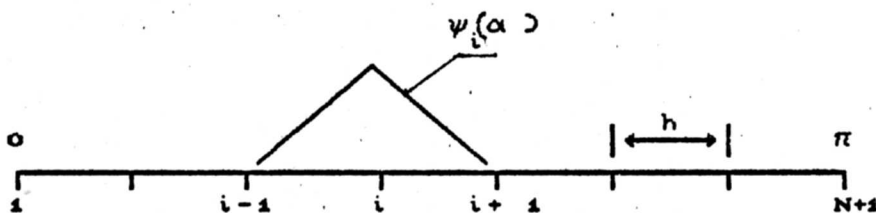
$$\mu = \frac{4}{\pi} \epsilon S \quad 3.3.74$$

W celu rozwiązania układu 3.3.67+70 przyjmuje się aproksymację poszukiwanej funkcji $x(\varphi)$ funkcjami odcinkowo liniowymi $\psi_i(\alpha)$

$$x(\alpha) = \sum_{i=1}^{N+1} x_i \psi_i(\alpha) \quad 3.3.75$$

gdzie:

$$\psi_i(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{h} (\alpha - \alpha_{i-1}) & \alpha \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i) \\ \frac{1}{h} (\alpha_{i+1} - \alpha) & \alpha \in (\alpha_i, \alpha_{i+1}) \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases} \quad 3.3.76$$



Rys. 3.3.2

a x_i są wartościami poszukiwanej funkcji w punktach węzłowych.

Gładką część jądra $R(\alpha, \varphi)$ dla ustalonego $\varphi = \varphi_i$ aproksymuje się w identyczny sposób:

$$R(\varphi_i, \omega) = \sum_{k=1}^{N+1} R(\varphi_i, \alpha_k) \psi_k(\alpha) = \sum_{k=1}^{N+1} R_{ik} \psi_k(\alpha) \quad 3.3.77$$

$$R_{ik} = S(\varphi_i - \alpha_k) + S(\varphi_i + \alpha_k) \quad 3.3.78$$

Występującą w równaniu 3.3.66 całkę, dla ustalonego φ_i można zapisać jako:

$$\begin{aligned} I(\varphi_i) &= \int_0^{\pi} R(\varphi_i, \omega) x(\omega) d\alpha + \int_0^{\pi} K(\varphi_i, \omega) x(\omega) d\alpha = \\ &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{N+1} R_{ik} \psi_k(\omega) \right) \left(\sum_{j=1}^{N+1} x_j \psi_j(\omega) \right) d\alpha + \int_0^{\pi} K(\varphi_i, \omega) \left(\sum_{j=1}^{N+1} x_j \psi_j(\omega) \right) d\alpha = \\ &= I_i^R + I_i^K = \sum_{j=1}^{N+1} \hat{U}_{ij} x_j \end{aligned} \quad 3.3.79$$

Pierwsza z całek przekształca się następująco:

$$I_i^R = \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} (R_{ik} x_j \int_0^{\pi} \psi_j \psi_k d\omega) = \sum_{j=1}^{N+1} \left(\sum_{k=1}^{N+1} R_{ik} \phi_{jk} \right) x_j = \sum_{j=1}^{N+1} \hat{R}_{ij} x_j \quad 3.3.80$$

gdzie:

$$\phi_{jk} = \int_0^{\pi} \psi_j(\omega) \psi_k(\omega) d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{gdy } |k-j| \geq 2 \\ \frac{\pi}{2} & \text{" } |k-j| = 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{" } k=j=1 \neq N+1 \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{" } k=j=1 \vee N+1 \end{cases}$$

skąd:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{i,1} &= \frac{\pi}{2} (2R_{i,1} + R_{i,2}) \\ \hat{R}_{i,j} &= \frac{\pi}{2} (2R_{i,j-1} + 4R_{i,j} + R_{i,j+1}) \\ \hat{R}_{i,N+1} &= \frac{\pi}{2} (R_{i,N} + 2R_{i,N+1}) \end{aligned} \quad 3.3.82$$

Postępowanie takie jest równoważne z zastosowaniem wzoru całkowania Simpsona.

Druga z całek, I_i^K oblicza się następującym wzorem :

$$I_i^K = \sum_{j=1}^{N+1} \hat{K}_{ij} x_j \quad 3.3.83$$

gdzie:

$$\hat{K}_{ij} = C \int_0^{\pi} \psi_j(\alpha) \ln(2|\cos\varphi_i - \cos\alpha|) d\alpha \quad 3.3.84$$

Sposób postępowania, zezwalający na efektywne wyliczenie powyższej całki przedstawiony jest w załączniku Z 4.4. Tam też, podaje się wzory końcowe, których z uwagi na ich złożoną i obszerną postać, w tym miejscu ponownie nie przytacza się. Warto jedynie wspomnieć, że niezbędnym było tam obliczanie nieelementarnych całek postaci :

$$q(x) = \int_0^x t^n \ln|\sin t| dt, \quad 3.3.85$$

dla których opracowano dokładny i szybki algorytm oparty na rozwinięciach w szeregi potęgowe i wydzieleniu osobliwości.

Zastępując poszukiwaną funkcję $x(\alpha)$ jej przybliżeniem 3.3.75 także i w pozostałych równaniach układu 3.3.67+70 uzyskuje się:

$$3.3.68 \Rightarrow \int_0^{\pi} \sum_{i=1}^{N+1} x_i \psi_i(\alpha) d\alpha = \sum_{i=1}^{N+1} x_i C_i = 0 \quad 3.3.86$$

gdzie :

$$C_i = \begin{cases} 1 & i \neq 1 \neq N+1 \\ \frac{1}{2} & i = 1 \vee i = N+1 \end{cases}$$

$$3.3.69 \Rightarrow \int_0^{\pi} \sum_{i=1}^{N+1} x_i \psi_i(\alpha) \cos \alpha d\alpha = \sum_{i=1}^{N+1} x_i D_i = 0 \quad 3.3.87$$

gdzie :

$$D_i = \int_0^{\pi} \psi_i(\alpha) \cos \alpha d\alpha = \begin{cases} \frac{(2+\cosh)h}{6} & i=1 \\ \frac{\cos \alpha_i (2+\cosh)h}{6} & i \neq 1 \neq N+1 \\ \frac{(2-\cosh)h}{6} & i=N+1 \end{cases} \quad 3.3.88$$

$$3.3.71 \Rightarrow x_{i\beta} + \xi_{i\beta} = -\cos\beta \quad 3.3.89$$

Ostatecznie, dla zadanego kąta zasięgu strefy rozciąganej $\beta = i_{\beta} \frac{\pi}{N} = i_{\beta} h$ (a więc będącego wielokrotnością kąta zawartego pomiędzy węzłami całkowania) dochodzi się do układu równań liniowych 3.3.90 :

$$\underline{U} \underline{x} = \underline{b} \quad 3.3.90$$

występujące w nim macierze przyjmują postać:

3.3.91

niewiadome:

$$x_{-N+4 \times 1} = [x_1, \dots, x_{i_\beta}, \dots, x_{N+1}, -\frac{1}{\pi} \delta_l, -\frac{1}{\pi} \eta, \xi_0]^T$$

< N+1 >, < s >

macierz układu:

$$U_{-N+4 \times N+4} = \begin{bmatrix} \hat{U}_{-N+1 \times N+1} + I_{-N+1 \times N+1}^{\beta} & \begin{matrix} 1, \cosh & & , 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1, \cosh & & & , 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1, \cosh & & & , 1 \\ 1, \cosh(i_\beta + 1) & & & , 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1, \cosh(N+1) & & & , 0 \end{matrix} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \begin{matrix} 0 & 0 & , 0 \\ 0 & 0 & , 0 \\ 0 & 0 & , 1 \end{matrix} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \begin{matrix} 0 & 0 & , 0 \\ 0 & 0 & , 0 \\ -\cos i_\beta h \end{matrix} \end{bmatrix}$$

< i_\beta >

wyrazy wolne: $b_{-N+4 \times 1} = \begin{bmatrix} -\cosh \\ \vdots \\ -\cosh \\ \vdots \\ -\cosh i_\beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\cos i_\beta h \end{bmatrix}$

gdzie:

$$\hat{U}_{-N+1 \times N+1} = [\mu \hat{U}_{ij}] = [\mu \hat{R}_{ij} + \hat{K}_{ij}] ; 1, j = 1, N+1 \quad 3.3.92$$

< i_\beta >

$$I_{-N+1 \times N+1}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & 1 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

3.3.93

Rozwiązanie układu 3.3.90 pozwoli na wyznaczenie poszukiwanych wielkości

- parametru obciążenia ξ_0 ,
- gęstości zastępczego obciążenia w punktach węzłowych

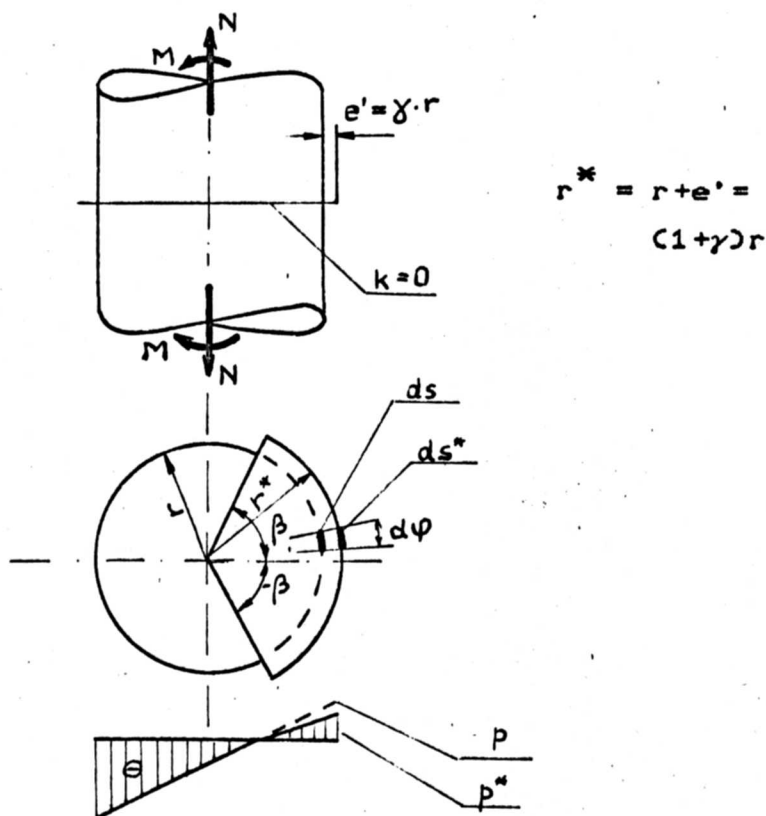
$$p(\varphi_i) = \frac{M}{\pi r^2} (\xi_0 + \cos \varphi_i + x_i), \quad 3.3.94$$

oraz wielkości charakteryzujące deformację połączenia η i δ_l zgodnie 3.3.71+3.3.72.

3.3.3 Uogólnienie rozwiązania na przypadek mimośrodowego obciążenia w strefie rozciąganej ($e' \neq 0$)

3.3.3.1 Przypadek połączenia doskonale sztywnego ($k=0$)

Rozważany przypadek ma charakter zadania pomocniczego, którego wyniki zostaną później wykorzystane przy konstrukcji pewnych użytecznych formuł obliczeniowych dla ogólnego przypadku połączenia podatnego.



Rys. 3.3.3

Zakłada się liniowy rozkład obciążenia zgodny z hipotezą płaskich przekrojów.

$$p(\varphi) = A + B \cos \varphi \quad 3.3.95$$

Obciążenie w strefie rozciąganej p^* przyłożone jest na mimośrodku e' względem powierzchni środkowej powłoki. Pomiedzy gęstością obciążenia p^* odniesioną do powiększonego o mimośrodek e' promienia r^* , a gęstością p odniesioną do promienia r zachodzi relacja statycznej równoważności

$$p^* ds^* = p ds, \quad 3.3.96$$

gdzie:

$$ds^* = r^* d\varphi = (r + e') d\varphi = (1 + \gamma) r d\varphi \quad 3.3.97$$

skąd

$$p^* = \frac{r}{r^*} p \quad 3.3.98$$

Poszukuje się związku pomiędzy parametrem

$$\xi = \frac{rN}{2M}$$

charakteryzującym działający na połączenie układ sił, a parametrem $\xi_0 = \frac{A}{B}$ charakteryzującym rozkład obciążenia w połączeniu.

Z równań 3.2.9+11 wynika w tym przypadku, że:

$$\int_0^{\beta} \frac{r}{r^*} (A + B \cos\varphi) r^* \cos\varphi r^* d\varphi + \int_{\beta}^{\pi} (A + B \cos\varphi) \cos\varphi r^2 d\varphi = \frac{M}{2} \quad 3.3.99$$

$$\int_0^{\beta} \frac{r}{r^*} (A + B \cos\varphi) r^* d\varphi + \int_{\beta}^{\pi} (A + B \cos\varphi) r d\varphi = \frac{N}{2} \quad 3.3.100$$

$$A + B \cos\beta = 0 \quad 3.3.101$$

Po przekształceniu, równania te można przepisać jako:

$$\gamma \left(A \int_0^{\beta} \cos\varphi d\varphi + B \int_0^{\beta} \cos^2\varphi d\varphi \right) + B \int_0^{\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{M}{2r^2} \quad 3.3.102$$

$$A = \frac{N}{2\pi r} \quad 3.3.103$$

$$\xi_0 = -\cos\beta. \quad 3.3.104$$

Stąd, po wyliczeniu występujących całek i skorzystaniu z 3.3.101 otrzymuje się:

$$B \left[\gamma \left(-\cos\beta \sin\beta + \frac{\beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{M}{2r^2} \quad 3.3.105$$

Przekształcając dalej można zapisać:

$$\frac{1}{\xi_0} \left[\frac{\gamma}{\pi} \left(\beta - \frac{\sin 2\beta}{2} \right) + 1 \right] = \frac{\frac{M}{\pi r^2}}{A} = \frac{1}{\xi}, \quad 3.3.106$$

co prowadzi do ostatecznej postaci poszukiwanego związku:

$$\xi = \frac{\xi_0}{1 + \frac{\gamma}{\pi} \left[\arccos(-\xi_0) - \frac{1}{2} \sin(2 \arccos(-\xi_0)) \right]}. \quad 3.3.107$$

Przy zadanym mimośrodzie względnym ξ , parametr rozkładu obciążenia ξ_0 można wyznaczyć rozwiązując przestępne równanie algebraiczne 3.3.107. Dla skrócenia zapisu wprowadza się oznaczenie:

$$\eta_0(\xi_0) = \arccos(-\xi_0) - \frac{1}{2} \sin(2 \arccos(-\xi_0)), \quad 3.3.108$$

przy którym 3.3.105 przybierze postać:

$$\xi = \frac{\xi_0}{1 + \frac{\gamma}{\pi} \eta_0(\xi_0)} \quad 3.3.109$$

3.3.3.2 Przypadek połączenia podatnego

Rozwiązanie dla tego najogólniejszego przypadku ($e' \neq 0, k \neq 0$), zostanie przeprowadzone w oparciu o metodę szeregów trygonometrycznych wg p.3.3.2.1.

Wyjściowy układ równań 3.2.8+11 przekształca się w analogiczny sposób jak układ 3.3.10+13 obowiązujący w przypadku $e' = 0$. Jediną różnicą wystąpi przy przekształcaniu równania równowagi momentów 3.2.9. Równanie to można zapisać w równoważnej postaci:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi + \gamma \int_0^{\beta} p(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi = \frac{M}{\pi r^2} \quad 3.3.110$$

skąd dzięki związkom 3.3.15, 3.3.23, 3.3.25 oraz związkowi 3.3.29, który tu zapisuje się w skróconej postaci 3.3.111,

$$\epsilon r = k \tilde{p}_1 \quad 3.3.111$$

uzyskuje się:

$$p_1 + \gamma \tilde{p}_1 = p_1 + \gamma \frac{\epsilon r}{k} = \frac{M}{\pi r^2} \quad 3.3.112$$

Oprócz zmiennych bezwymiarowych $x_n, n = 0, 1, 2, \dots$, danych wzorem 3.3.34 wprowadza się analogiczną zmienną

$$x_M = \frac{k}{\pi r \epsilon} \frac{M}{\pi r^2} \quad 3.3.113$$

Mnożąc obie strony 3.3.112 przez czynnik $k/\pi r \epsilon$ dochodzi się do 3.3.114.

$$x_M = x_1 + \frac{\gamma}{\pi} \quad 3.3.114$$

Dalsze rozważania pokazują sposób, który sprawia, że wyniki uzyskane w oparciu o metody z p. 3.3.2.1 i 3.3.2.2, dla przypadku $\gamma = 0$, można wykorzystać dla konstrukcji rozwiązania w przypadku ogólnym, tj. $\gamma \neq 0$, bez konieczności ponownego rozpatrywania całej, w tym wypadku już 4-ro parametrowej rodziny zadań. Podstawową rolę odgrywa tu zależność pomiędzy mimośrodem względnym ξ a parametrem rozkładu obciążenia ξ_0 za pomocą którego (razem z kątem β) parametryzowano rozwiązanie.

$$\xi = \frac{rN}{2M} = \frac{x_0}{x_M} = \frac{x_0}{x_1 + \frac{\gamma}{\pi}} = \frac{\frac{x_0}{x_1}}{1 + \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{x_1}} = \frac{\xi_0}{1 + \frac{\gamma}{\pi} \eta(\xi_0)}$$

Warto w tym miejscu zauważyć, że postać tej zależności jest analogiczna do 3.3.109, z tym, że tam w miejscu zależności $\eta = \eta(\xi_0)$ uzyskanej z numerycznego rozwiązania całej rodziny zadań, występowała funkcja $\eta_0 = \eta_0(\xi_0)$ dana w zamkniętej postaci 3.3.108.

Mając dane ξ , rozwiązując równanie 3.3.115, określa się odpowiadające mu $\xi_0 = \xi_0(\xi)$. W oparciu o nie można znaleźć:

- charakterystyki odkształcalności połączenia:

$$\begin{aligned} \vartheta &= 2\varepsilon = \frac{M}{\pi r^2} \frac{2k}{\pi r} \frac{1}{x_M} = \frac{M}{\pi r^2} \frac{2k}{\pi r} \frac{1}{x_1 + \frac{\gamma}{\pi}} = \frac{M}{\pi r^2} \frac{2k}{\pi r} \frac{\xi}{\xi_0} \eta(\xi_0) = \\ &= M \frac{2k}{\pi^2 r^3} \bar{\eta}_\gamma(\xi) \end{aligned} \quad 3.3.116$$

$$d = M \frac{2k}{\pi^2 r^3} \bar{\eta}_\gamma(\xi) \delta_t(\xi_0(\xi)) \quad 3.3.117$$

rozkład obciążenia zastępczego:

$$\begin{aligned} p(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\omega(N)} p_n \cos n\varphi = \frac{\pi r \varepsilon}{k} \sum_{n=0}^{\omega(N)} x_n(\xi_0(\xi)) \cos n\varphi \\ &= \frac{\pi r \varepsilon}{k} \frac{\pi r^2}{M} x_1 \frac{M}{\pi r^2} \sum_{n=0}^{\omega(N)} \frac{x_n}{x_1} \cos n\varphi = \frac{x_M}{x_1} p_{\xi_0}(\varphi) = \frac{\xi}{\xi_0} p_{\xi_0}(\varphi) = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\pi} \eta(\xi_0)} p_{\xi_0}(\varphi). \end{aligned} \quad 3.3.118$$

Wprowadzono tu oznaczenia (ξ_0 spełnia 3.3.115 przy danym ξ)
 $p_{\xi_0}(\varphi)$ - rozkład obciążenia zastępczego, wyznaczony przy założeniu $e' = 0$, oraz

$$\bar{\eta}_\gamma(\xi) = \frac{\xi}{\xi_0(\xi)} \eta_0(\xi_0). \quad 3.3.119$$

3.4 Wyniki obliczeń

3.4.1 Określenie zakresu obliczeń

Parametrami określającymi geometrię połączenia w przedstawianym modelu są :

- smukłość powłoki

$$\lambda = \frac{r}{g} \quad 3.4.1$$

oraz wielkości związane z podatnością połączenia k

- w metodzie trygonometrycznej

$$S = \frac{\pi E r (1 - \nu^2)}{2k g} \quad 3.4.2$$

- w metodzie aproksymacji liniowej

$$\mu = \frac{4}{\pi^2} S \quad 3.4.3$$

Zadna z tych dwóch wielkości nie posiada przejrzystej interpretacji konstrukcyjnej, Co bie zależą zarówno od smukłości jak i od podatności k), stąd też celem ułatwienia identyfikacji i klasyfikacji połączeń, w oparciu o wyniki z rozdz. 2 niniejszej pracy wprowadza się zdefiniowany poniżej, bezwymiarowy wskaźnik sztywności połączenia, oznaczony symbolem f .

$$f := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{n_s h}{g} \quad 3.4.4$$

gdzie:

n_s - liczba sektorów w połączeniu

h - grubość kołnierza

g - grubość powłoki

α - bezwymiarowy współczynnik kształtu, wg p. 2.5, zależny od geometrii sektora, średnicy śrub, wysokości żeber usztywniających , przyjmujący wartości w zakresie $\alpha = 0.001 + 0.05$

Parametry k, S, μ można przedstawić jako:

$$k = \alpha \frac{\left(\frac{2\pi r}{n_s}\right)^3}{D_k} = \alpha \frac{12(2\pi r)^3 (1 - \nu^2)}{E h^3 n_s^3} = 96 \pi^3 \frac{r^3 (1 - \nu^2)}{\lambda^3 E} \quad 3.4.5$$

skąd:

$$S = \frac{\pi r}{2k D} = \frac{f^3}{192 \pi^2 \lambda^2} \quad 3.4.6$$

$$\mu = \frac{4}{\pi^2} S = \frac{f^3}{48 \pi \lambda^2} \quad 3.4.7$$

Wskaźnik sztywności f dla prawidłowo skonstruowanych połączeń zawiera się w przedziale $f \in (100, 500)$. W obliczeniach f przyjmowało wartości ze zbioru :

$$f \in \{ 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 400 \} ,$$

a smukłość λ podobnie jak w p.2.3 ze zbioru:

$$\lambda \in \{ 30, 60, 90, 120, 150, 180 \} ,$$

co ogółem daje $8 \times 6 = 48$ przypadków obliczeniowych.

Dla każdego z nich parametr sterujący obciążeniem, którym zgodnie z ustaleniami p. 3.3.1 jest kąt zasięgu strefy rozciąganej β , przybiera wartości ze zbioru 9-cio elementowego:

$$\beta \in \{ 18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ, 90^\circ, 108^\circ, 126^\circ, 144^\circ, 162^\circ \} .$$

Obliczenia przeprowadza się zakładając brak mimośrodowość przyłożenia obciążenia w strefie rozciąganej $e' = 0$, ($\gamma = 0$).

3.4.2. Przebieg obliczeń

Numeryczna efektywność obydwu metod aproksymacji układu równań 3.2.9+12

- metody szeregów trygonometrycznych z p 3.3.2.1

- metody aproksymacji liniowej z p. 3.3.2.2

jest w zasadzie jednakowa.

Inaczej niż przy rozwiązywaniu równania 2.3.20, tu obydwie metody zachowują się stabilnie w miarę zwiększania wymiaru przestrzeni aproksymacyjnej n (tj. zwiększania liczby składowych harmonicznych, lub ilości punktów węzłowych), a także wyniki uzyskane oboma metodami w pełni pokrywają się.

Zbieżność ciągów rozwiązań w miarę zwiększania n jest jednak dość powolna. Jako miarę dokładności obliczeń przyjmowano maksymalny błąd względny dwóch kolejnych rozwiązań, określony na wybranych wielkościach tj. η , P_{\min} , P_{\max} .

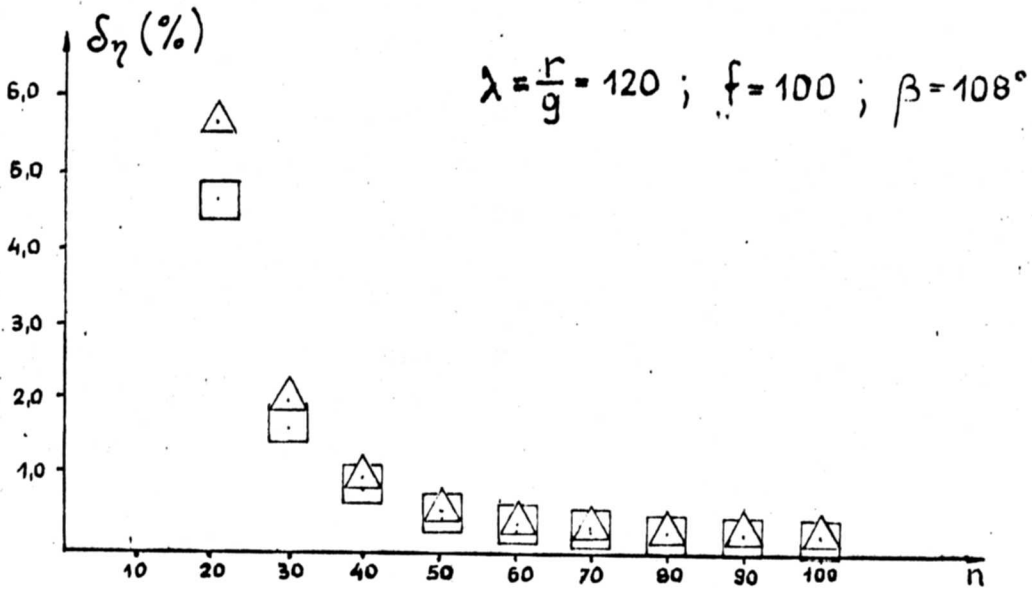
3.4.8

$$\delta_{n_k} = \max \left\{ \frac{|\eta^{(n_k)} - \eta^{(n_{k-1})}|}{\eta^{(n_k)}}, \frac{|P_{\max}^{(n_k)} - P_{\max}^{(n_{k-1})}|}{P_{\max}^{(n_k)}}, \frac{|P_{\min}^{(n_k)} - P_{\min}^{(n_{k-1})}|}{P_{\min}^{(n_k)}} \right\}$$

gdzie: n_k - k -ty wymiar przestrzeni apr. przyjmowany jako element ciągu arytmetycznego :

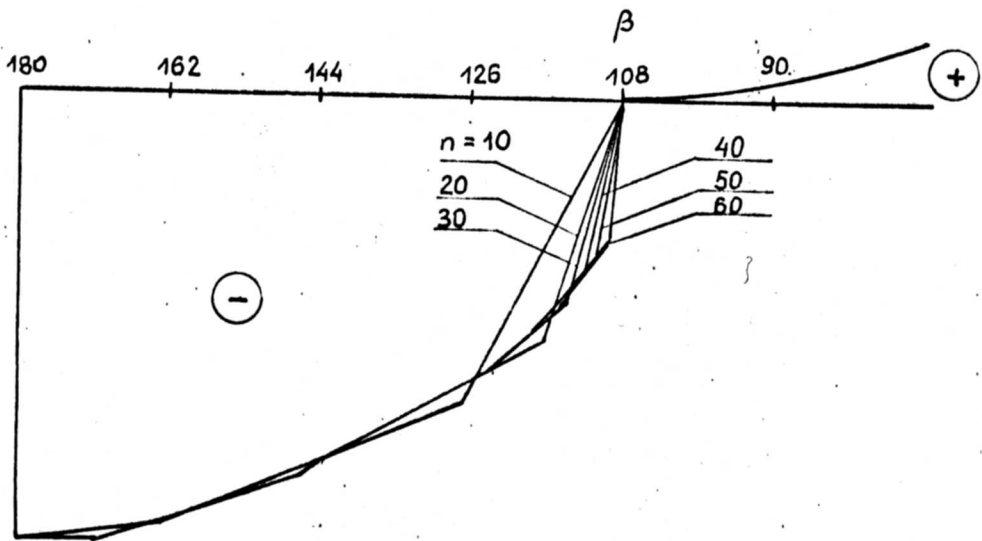
$$n_k = n_0 + \Delta n (k-1), \quad n_0 = 10, \quad \Delta n = 10. \quad 3.4.9$$

Wielkości δ_n osiągały założoną tolerancję 0.5% dopiero przy n od około 60 do 100. Rysunek pokazuje przykładową zależność δ_n od n przy obliczeniach wg metody trygonometrycznej (Δ) i aproksymacji liniowej (\square).



Rys. 3.4.1

Przyczyną tego stosunkowo wolnego tempa zbieżności jest stwierdzone występowanie nieciągłości (skokowej zmiany wartości) funkcji $p(\varphi)$ dla $\varphi = \beta$, tj. przy przejściu z naprężeń rozciągających na ściskające. Nieciągłość taka jest charakterystyczna dla zadań teorii sprężystości z mieszanymi i nieciągłymi warunkami brzegowymi, do jakich niewątpliwie można zaliczyć rozpatrywany problem. Rysunek 3.4.2 przedstawia rozkłady obciążenia $p(\varphi)$ w otoczeniu punktu $\varphi = \beta$ w miarę zwiększającego się n przy aproksymacji funkcjami liniowymi. Widoczna jest zbieżność do funkcji skokowej.



Rys. 3.4.2

3.4.3 Rozkład obciążenia w połączeniu.

Wykresy na rys. 3.4.4+9 przedstawiają przykładowe rozkłady obciążenia zastępczego $p(y)$ (w płaszczyźnie zginania) dla zakładanych wartości kąta zasięgu strefy rozciąganej (linia ciągła)

$$\beta \in \{18^\circ, 54^\circ, 90^\circ, 126^\circ, 162^\circ\} .$$

Celem umożliwienia porównania tych wyników z teorią elementarną, linią przerywaną naznaczono rozkłady obciążenia wyliczone wg zwykłych wzorów wytrzymałości materiałów (czyli przy założeniu $k = 0$), odpowiadające tym samym wartościom parametru obciążenia $\xi_0 = p_0/p_1$, co obliczone z układu równań 3.3.10+13. Tak więc wykresy te obrazują wpływ odkształcalności układu śruba-kołnierz-żebro w strefie rozciąganej na rozkład naprężeń w połączeniu.

Zgodnie z intuicyjnymi przewidywaniami wpływ ten polega na :

- zwiększeniu się zasięgu strefy rozciąganej

$$\beta > \beta_{WM} = \arccos(-\xi_0) \quad 3.4.10$$

- zmniejszeniu się maksymalnych naprężeń rozciągających

$$p(\varphi = 0) < p_{WM}(\varphi = 0) = \frac{M}{\pi r^2} (\xi_0 + 1) \quad 3.4.11$$

lub:

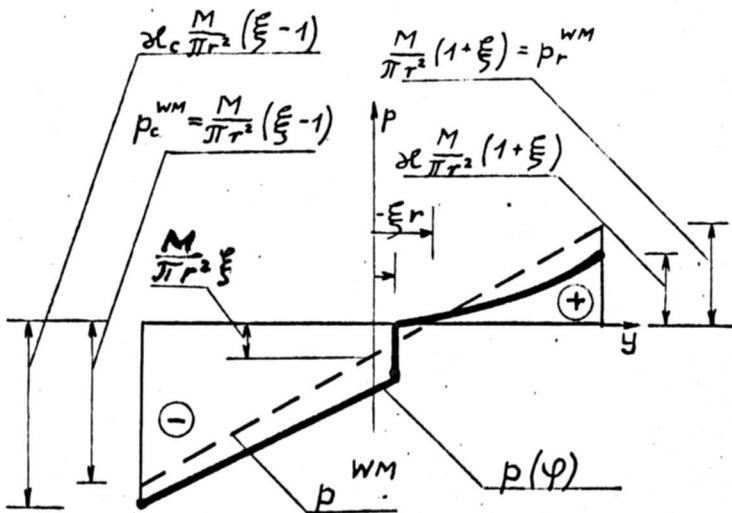
$$\alpha_r = \frac{p(0)}{\frac{M}{\pi r^2} (\xi_0 + 1)} < 1 \quad 3.4.12$$

- zwiększeniu się maksymalnych naprężeń ściskających

$$-p(\varphi = \pi) > -p_{WM}(\varphi = \pi) = -\frac{M}{\pi r^2} (\xi_0 - 1) \quad 3.4.13$$

lub:

$$\alpha_c = \frac{p(\pi)}{-\frac{M}{\pi r^2} (\xi_0 - 1)} > 1 \quad 3.4.14$$



Rys. 3.4.3

Jak widać wpływy te narastają w miarę zwiększania się podatności połączenia (malenia wskaźnika f), oraz w miarę zwiększania się smukłości powłoki.

Dokładniej, zmiany te można prześledzić na poniższych tabulogramach wyników. Pierwszy z nich (Tab. 3.4.1) przedstawia pomocniczą zależność

$$\xi_0 = \xi_0(\beta).$$

3.3.15

Korzystając z niej można, przy zadanej charakterystyce połączenia, wyznaczyć następujące wielkości:

-współczynnik zmniejszający naprężenia w strefie rozciąganej α (Tab. 3.4.2)

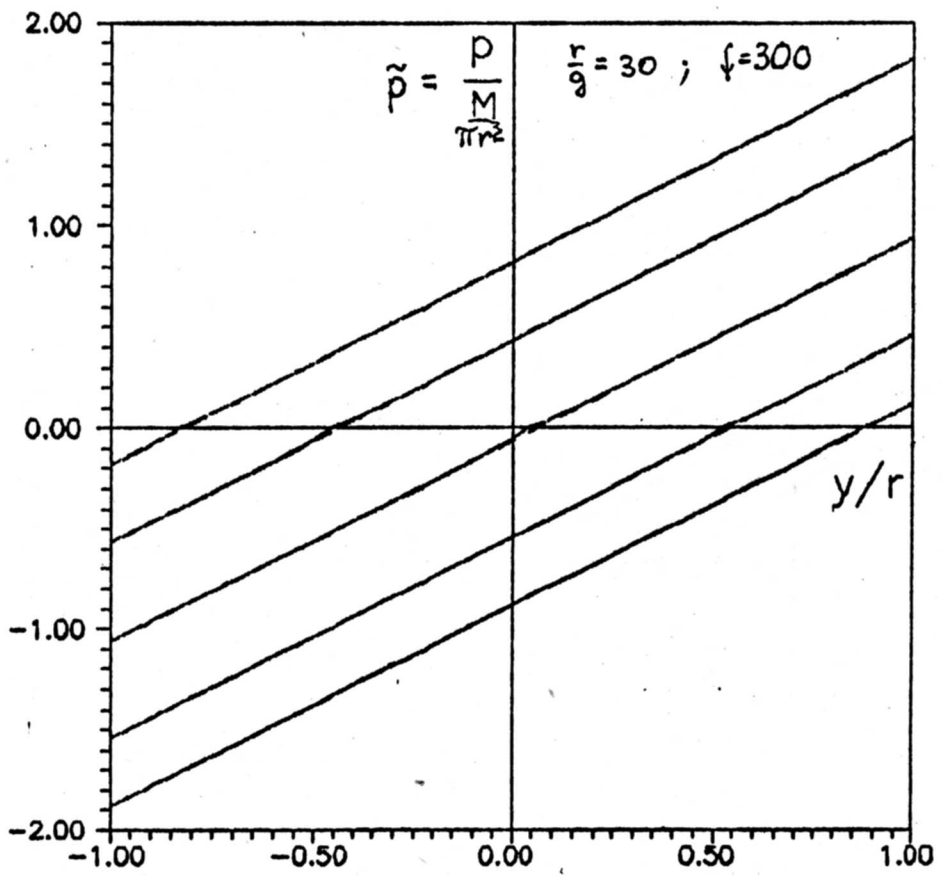
-współczynnik zwiększający naprężenia w strefie ściskanej α_0 (Tab. 3.4.3)

Tab. 3.4.1 Parametr obciążenia ξ_0

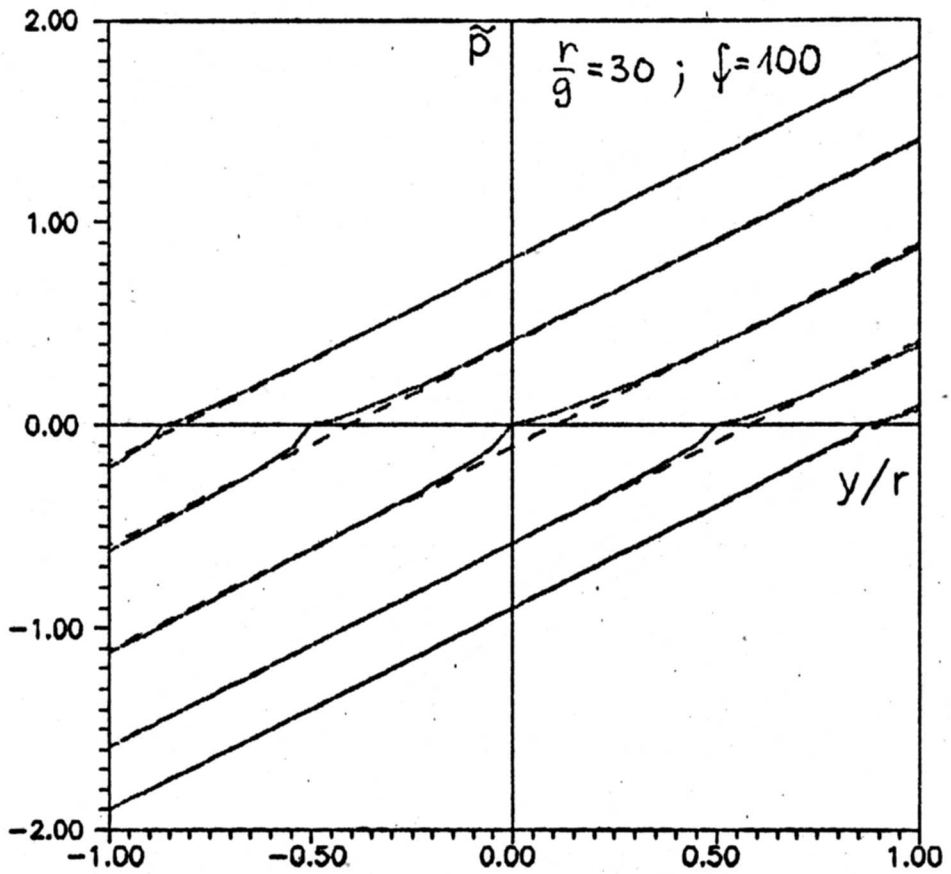
r/g	β°	f							
		100.00	125.00	150.00	175.00	200.00	250.00	300.00	400.00
30.00	18.0	-0.9660	-0.9620	-0.9590	-0.9568	-0.9553	-0.9535	-0.9525	-0.9517
30.00	54.0	-0.6629	-0.6357	-0.6196	-0.6097	-0.6034	-0.5964	-0.5929	-0.5900
30.00	90.0	-0.1078	-0.0660	-0.0429	-0.0291	-0.0206	-0.0112	-0.0067	-0.0029
30.00	126.0	0.5020	0.5361	0.5544	0.5652	0.5719	0.5791	0.5826	0.5855
30.00	162.0	0.9272	0.9365	0.9416	0.9446	0.9465	0.9485	0.9495	0.9504
60.00	18.0	-0.9732	-0.9704	-0.9673	-0.9645	-0.9620	-0.9582	-0.9559	-0.9534
60.00	54.0	-0.7312	-0.6927	-0.6648	-0.6452	-0.6313	-0.6140	-0.6045	-0.5956
60.00	90.0	-0.2300	-0.1551	-0.1087	-0.0787	-0.0586	-0.0346	-0.0218	-0.0101
60.00	126.0	0.3913	0.4607	0.5005	0.5252	0.5415	0.5606	0.5707	0.5799
60.00	162.0	0.8915	0.9127	0.9246	0.9320	0.9369	0.9427	0.9458	0.9486
90.00	18.0	-0.9758	-0.9741	-0.9719	-0.9695	-0.9671	-0.9628	-0.9596	-0.9556
90.00	54.0	-0.7709	-0.7335	-0.7019	-0.6772	-0.6584	-0.6333	-0.6183	-0.6030
90.00	90.0	-0.3236	-0.2316	-0.1696	-0.1274	-0.0978	-0.0610	-0.0402	-0.0197
90.00	126.0	0.2912	0.3895	0.4475	0.4843	0.5092	0.5393	0.5560	0.5723
90.00	162.0	0.8553	0.8884	0.9069	0.9185	0.9263	0.9357	0.9410	0.9461
120.00	18.0	-0.9771	-0.9759	-0.9744	-0.9725	-0.9705	-0.9664	-0.9629	-0.9580
120.00	54.0	-0.7947	-0.7616	-0.7304	-0.7038	-0.6823	-0.6517	-0.6323	-0.6112
120.00	90.0	-0.3938	-0.2951	-0.2231	-0.1718	-0.1348	-0.0872	-0.0593	-0.0305
120.00	126.0	0.2019	0.3235	0.3975	0.4452	0.4777	0.5178	0.5406	0.5637
120.00	162.0	0.8191	0.8646	0.8896	0.9052	0.9156	0.9285	0.9358	0.9432
150.00	18.0	-0.9779	-0.9770	-0.9759	-0.9744	-0.9728	-0.9692	-0.9657	-0.9602
150.00	54.0	-0.8098	-0.7814	-0.7523	-0.7256	-0.7027	-0.6684	-0.6456	-0.6197
150.00	90.0	-0.4467	-0.3478	-0.2700	-0.2120	-0.1690	-0.1122	-0.0781	-0.0418
150.00	126.0	0.1227	0.2624	0.3504	0.4080	0.4475	0.4968	0.5252	0.5546
150.00	162.0	0.7825	0.8410	0.8726	0.8921	0.9052	0.9213	0.9305	0.9401
180.00	18.0	-0.9784	-0.9777	-0.9768	-0.9757	-0.9743	-0.9712	-0.9680	-0.9623
180.00	54.0	-0.8200	-0.7957	-0.7691	-0.7434	-0.7202	-0.6836	-0.6582	-0.6280
180.00	90.0	-0.4871	-0.3914	-0.3110	-0.2493	-0.2005	-0.1359	-0.0963	-0.0531
180.00	126.0	0.0531	0.2058	0.3059	0.3725	0.4186	0.4764	0.5100	0.5454
180.00	162.0	0.7457	0.8174	0.8559	0.8794	0.8950	0.9142	0.9253	0.9370

r/g	β	100.00	115.00	125.00	130.00	140.00	150.00	175.00	200.00	250.00	300.00	400.00
30.00	18.0	0.5664	0.7833	0.8651	0.9121	0.9403	0.9591	0.9821	0.9924			
30.00	54.0	0.9243	0.9595	0.9771	0.9859	0.9907	0.9953	0.9973	0.9989			
30.00	90.0	0.9900	0.9999	0.9944	0.9956	0.9977	0.9989	0.9994	0.9997			
30.00	126.0	0.9958	0.9980	0.9989	0.9993	0.9996	0.9998	0.9999	0.9999			
30.00	162.0	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000			
60.00	18.0	0.3339	0.4873	0.5261	0.7309	0.8055	0.8936	0.9371	0.9733			
60.00	54.0	0.7678	0.8743	0.9280	0.9559	0.9713	0.9859	0.9921	0.9967			
60.00	90.0	0.9276	0.9660	0.9818	0.9892	0.9930	0.9956	0.9981	0.9992			
60.00	126.0	0.9826	0.9926	0.9962	0.9978	0.9986	0.9993	0.9996	0.9999			
60.00	162.0	0.9986	0.9995	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000			
90.00	18.0	0.1862	0.3108	0.4410	0.5599	0.6590	0.7966	0.8751	0.9459			
90.00	54.0	0.6221	0.7729	0.8625	0.9139	0.9437	0.9727	0.9848	0.9939			
90.00	90.0	0.8595	0.9306	0.9626	0.9780	0.9861	0.9934	0.9963	0.9985			
90.00	126.0	0.9415	0.9834	0.9917	0.9954	0.9971	0.9987	0.9993	0.9997			
90.00	162.0	0.9962	0.9987	0.9994	0.9997	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000			
120.00	18.0	0.1208	0.2126	0.3200	0.4304	0.5333	0.674	0.8048	0.9122			
120.00	54.0	0.5047	0.6750	0.7909	0.8642	0.9095	0.9558	0.9756	0.9903			
120.00	90.0	0.7864	0.8880	0.9381	0.9634	0.9770	0.9892	0.9941	0.9977			
120.00	126.0	0.9343	0.9708	0.9854	0.9919	0.9951	0.9978	0.9988	0.9995			
120.00	162.0	0.9924	0.9972	0.9988	0.9994	0.9997	0.9999	0.9999	1.0000			
150.00	18.0	0.0853	0.1547	0.2413	0.3375	0.4344	0.6063	0.7330	0.8740			
150.00	54.0	0.4144	0.5882	0.7203	0.8113	0.8712	0.9359	0.9646	0.9861			
150.00	90.0	0.7152	0.8417	0.9095	0.9459	0.9658	0.9842	0.9914	0.9957			
150.00	126.0	0.9033	0.9552	0.9774	0.9875	0.9925	0.9967	0.9983	0.9993			
150.00	162.0	0.9873	0.9952	0.9980	0.9990	0.9995	0.9998	0.9999	1.0000			
180.00	18.0	0.0659	0.1180	0.1885	0.2707	0.3584	0.5272	0.6644	0.8332			
180.00	54.0	0.3452	0.5140	0.6543	0.7582	0.8307	0.9151	0.9520	0.9813			
180.00	90.0	0.5492	0.7944	0.9786	0.9759	0.9728	0.9782	0.9883	0.9955			
180.00	126.0	0.8701	0.9374	0.9671	0.9820	0.9892	0.9954	0.9976	0.9991			
180.00	162.0	0.9813	0.9925	0.9968	0.9984	0.9992	0.9997	0.9999	1.0000			

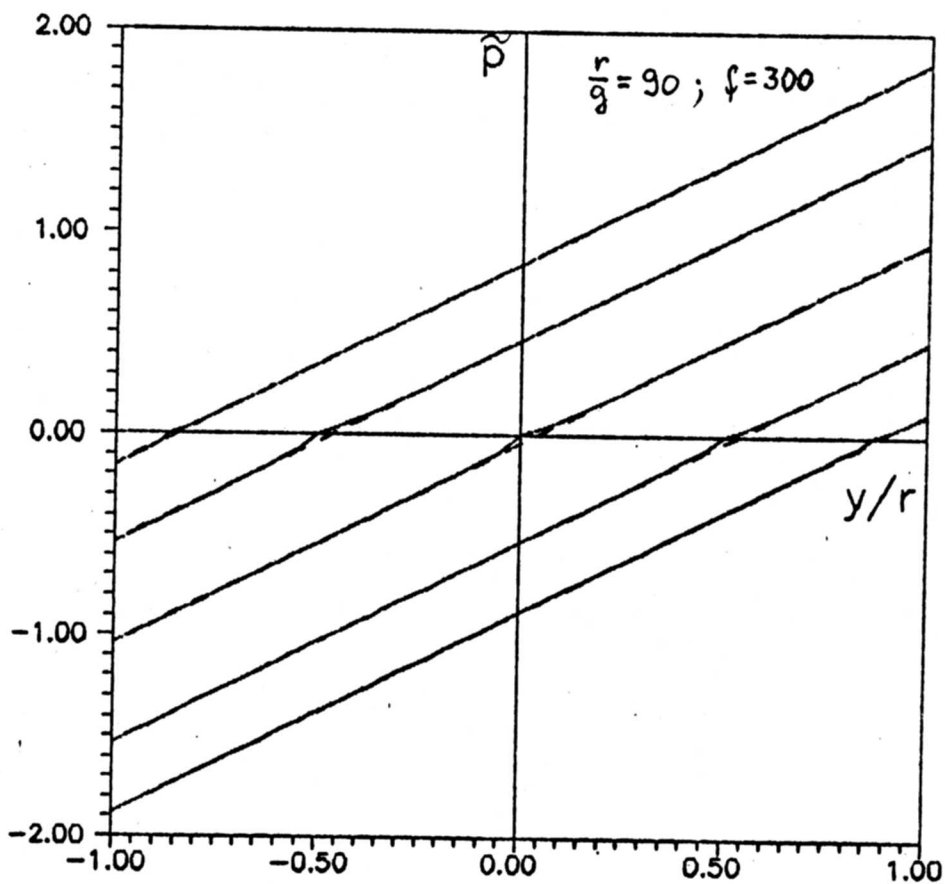
r/g	β	100.00	125.00	150.00	175.00	200.00	250.00	300.00	400.00
30.00	18.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
30.00	54.0	1.0022	1.0013	1.0008	1.0005	1.0004	1.0002	1.0001	1.0001
30.00	90.0	1.0133	1.0075	1.0046	1.0030	1.0021	1.0011	1.0006	1.0003
30.00	126.0	1.0559	1.0315	1.0193	1.0125	1.0086	1.0045	1.0026	1.0011
30.00	162.0	1.3475	1.2007	1.1246	1.0820	1.0555	1.0299	1.0176	1.0075
60.00	18.0	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
60.00	54.0	1.0038	1.0027	1.0018	1.0013	1.0009	1.0005	1.0003	1.0001
60.00	90.0	1.0271	1.0171	1.0112	1.0076	1.0054	1.0029	1.0017	1.0008
60.00	126.0	1.1176	1.0724	1.0468	1.0316	1.0222	1.0120	1.0072	1.0031
60.00	162.0	1.8006	1.5094	1.3400	1.2363	1.1677	1.0949	1.0577	1.0255
90.00	18.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
90.00	54.0	1.0047	1.0036	1.0027	1.0020	1.0015	1.0009	1.0005	1.0002
90.00	90.0	1.0371	1.0255	1.0176	1.0124	1.0089	1.0050	1.0031	1.0014
90.00	126.0	1.1677	1.1104	1.0744	1.0518	1.0372	1.0208	1.0126	1.0056
90.00	162.0	2.1556	1.7787	1.5450	1.3909	1.2893	1.1694	1.1054	1.0489
120.00	18.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
120.00	54.0	1.0051	1.0042	1.0033	1.0026	1.0020	1.0012	1.0008	1.0004
120.00	90.0	1.0440	1.0323	1.0233	1.0170	1.0125	1.0073	1.0045	1.0020
120.00	126.0	1.2067	1.1438	1.1006	1.0719	1.0526	1.0301	1.0186	1.0084
120.00	162.0	2.4277	2.0037	1.7212	1.5319	1.4017	1.2431	1.1567	1.0746
150.00	18.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
150.00	54.0	1.0054	1.0046	1.0038	1.0031	1.0024	1.0016	1.0010	1.0005
150.00	90.0	1.0489	1.0377	1.0284	1.0212	1.0150	1.0095	1.0060	1.0028
150.00	126.0	1.2368	1.1725	1.1247	1.0912	1.0678	1.0397	1.0249	1.0114
150.00	162.0	2.6376	2.1924	1.8777	1.6591	1.5053	1.3134	1.2059	1.1010
180.00	18.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
180.00	54.0	1.0055	1.0049	1.0041	1.0034	1.0028	1.0019	1.0013	1.0006
180.00	90.0	1.0524	1.0420	1.0327	1.0251	1.0192	1.0118	1.0076	1.0035
180.00	126.0	1.2600	1.1969	1.1466	1.1094	1.0825	1.0494	1.0314	1.0146
180.00	162.0	2.8012	2.3521	2.0152	1.7748	1.6011	1.3800	1.2536	1.1273



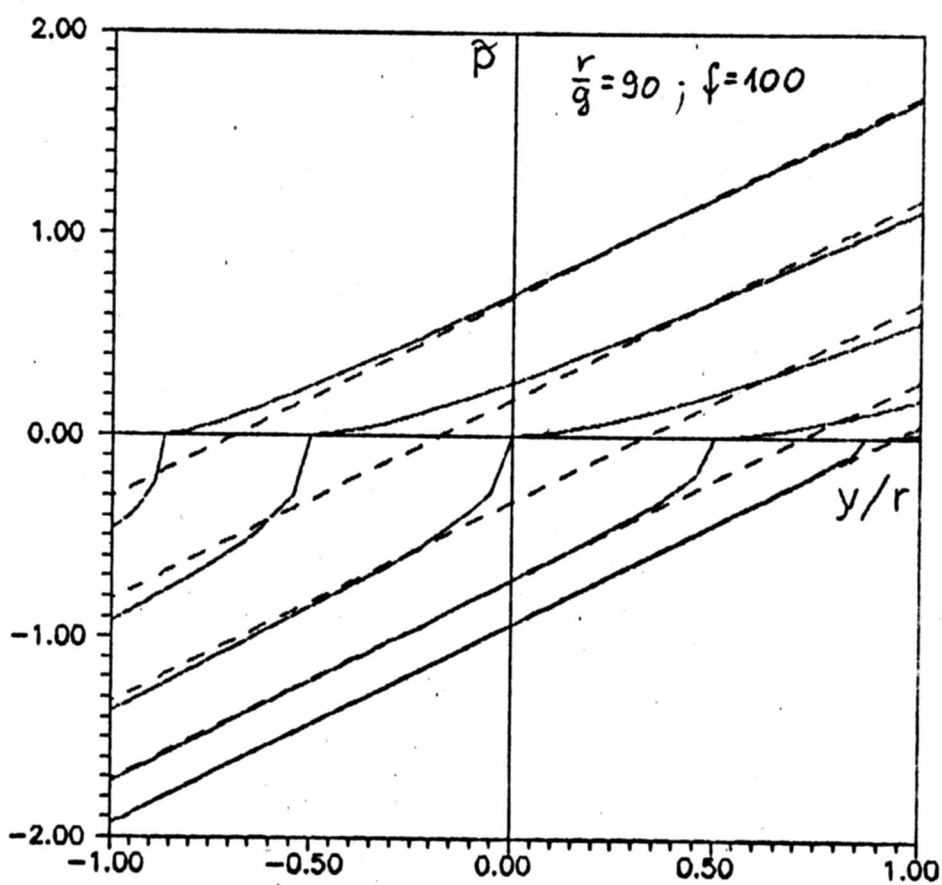
Rys. 3.4.4



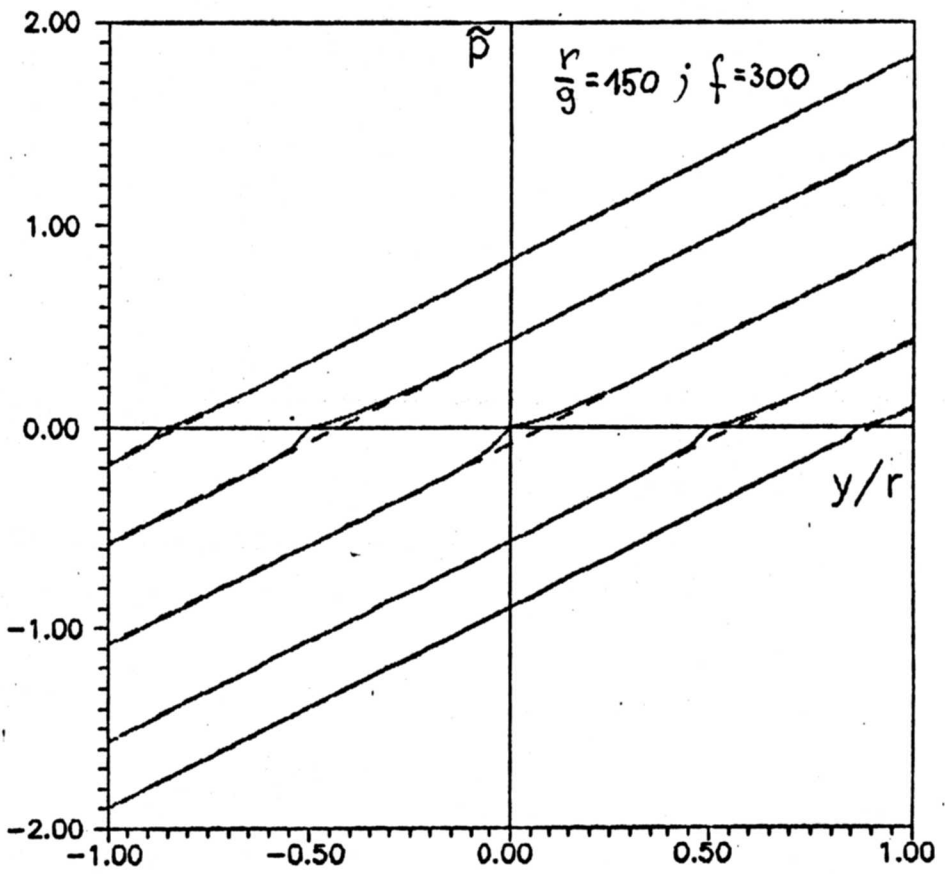
Rys. 3.4.5



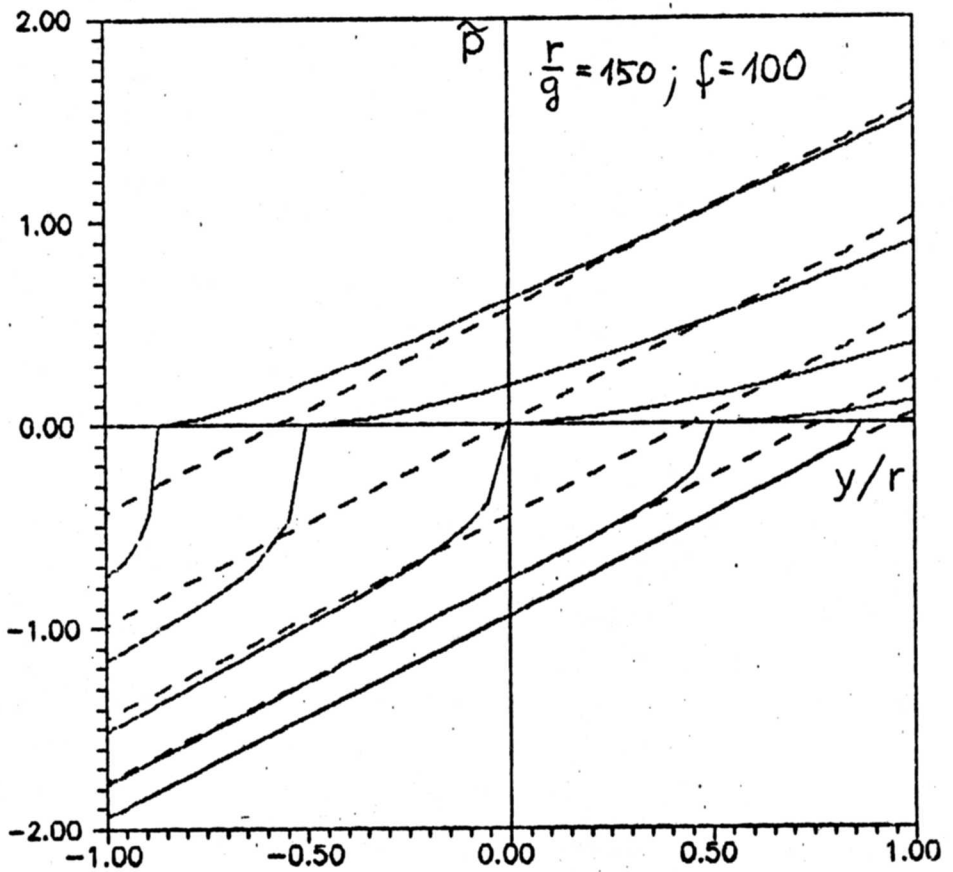
Rys. 3.4.6



Rys. 3.4.7



Rys. 3.4.8



Rys. 3.4.9

Różnice pomiędzy naprężeniami zmodyfikowanymi a liczonymi wg wzorów elementarnych, w punktach maksymalnie oddalonych od osi obojętnej, dla parametru $\xi_0 = 0$ (czyste zginanie) przekraczają 10% jedynie dla podatnych połączeń $f < 150$ i dla dużych smukłości powłoki $\lambda > 120$.

Znaczna redukcja naprężeń rozciągających występuje w przypadku mimośrodowego ściskania z mimośrodem niewiele większym od granicznego ($e_{gr} = r/2$). Z kolei dla mimośrodowego rozciągania (przy niedużych mimośrodkach) pojawia się zwiększenie naprężeń ściskających. Efekt ten nie ma jednak większego znaczenia praktycznego, gdyż pojawia się dopiero wówczas, gdy nawet te zwiększone naprężenia ściskające są mniejsze (co do wartości bezwzględnej) od naprężeń rozciągających, panujących po drugiej stronie przekroju.

3.4.4 Parametry deformacji połączenia

Tabela 3.4.4. podaje wielkość współczynnika δ_l określającego dodatkowe przemieszczenie osiowe łączonych elementów, zgodnie z zależnością:

$$d = 2\delta_l r = M \frac{2k}{\pi^2 r^2} \delta_l(\xi_0) \quad 3.4.16$$

Tabela 3.4.5. podaje wielkość współczynnika η określającego wzajemny obrót elementów

$$\theta = 2\epsilon = M \frac{2k}{\pi^2 r^2} \eta(\xi_0) \quad 3.4.17$$

Tę ostatnią zależność pokazano także na rys. 3.4.10, dla różnych wartości λ i f . Jak widać przebiegi tej funkcji różnią się od siebie nieznacznie i w miarę wzrostu wskaźnika sztywności f , oraz zmniejszania się smukłości zbliżają się do pewnej funkcji granicznej. Funkcja ta pokrywa się z funkcją daną wyprowadzonym w p 3.3 wzorem 3.4.18.

$$\eta_0(\xi_0) = \arccos(-\xi_0) - \frac{1}{2} \sin(2 \arccos(-\xi_0)) \quad 3.4.18$$

Wynik ten staje się w pełni zrozumiały, gdy weźmie się pod uwagę, że funkcja $\eta(\xi_0)$ występuje nie tylko we wzorze 3.4.17 na kąt obrotu, ale również we wzorze 3.3.114, analogicznym do 3.3.109 wiążącym parametr obciążenia ξ_0 z mimośrodem względnym ξ

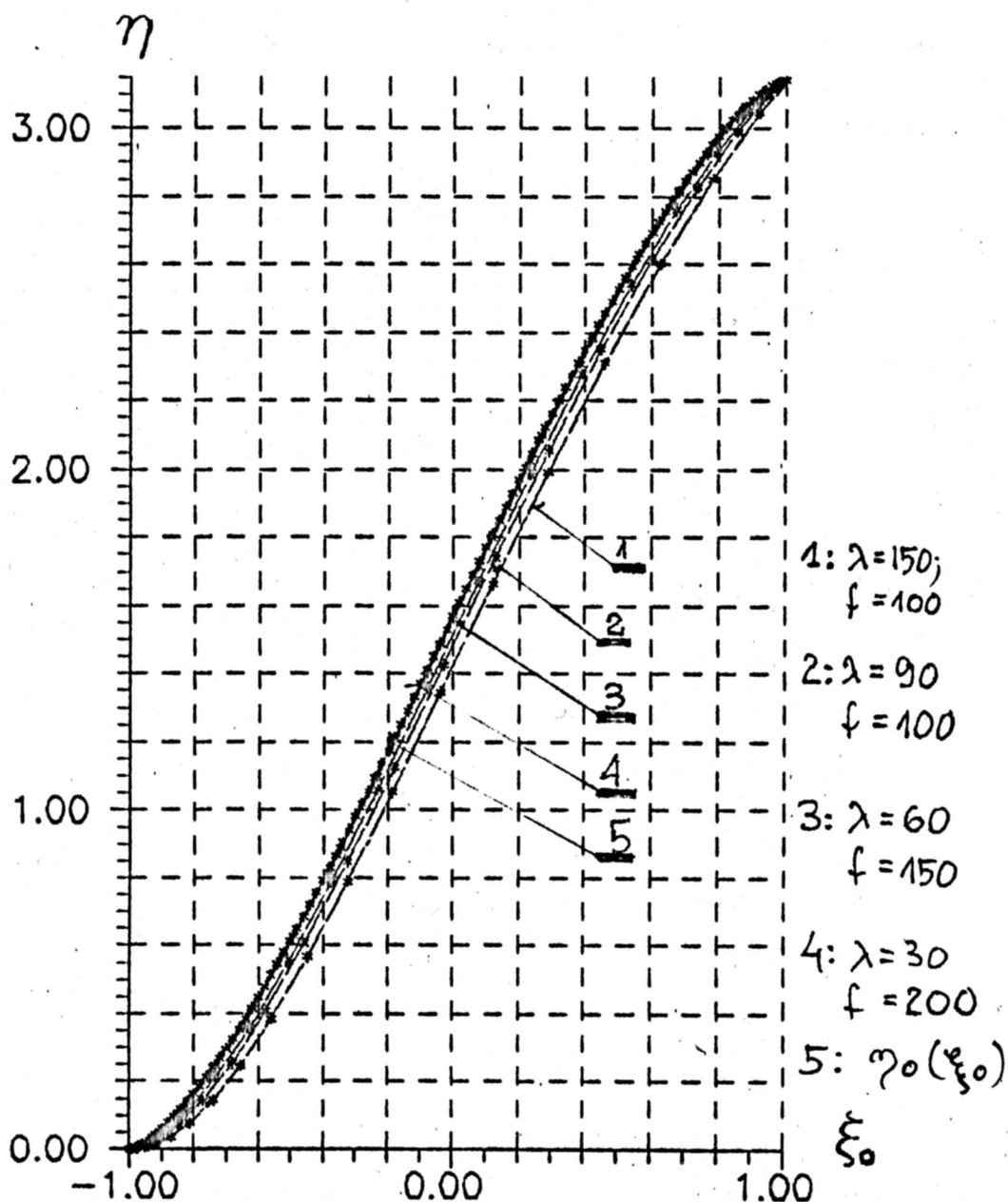
w przypadku występowania mimośrodów w strefie rozciąganej.

Funkcja 3.4.18 może być wykorzystana do budowy przybliżonych wzorów opisujących ważną z praktycznego punktu widzenia zależność $\eta = \eta(\xi_0)$. Dobre wyniki daje formuła :

$$\eta(\xi_0) = \eta_0(\xi_0) \mu(\xi_0) \quad 3.3.19$$

W toku prób uznano, iż najlepszą zgodność z wynikami obliczeń uzyskuje się przyjmując czynnik korygujący w postaci funkcji

$$\mu(\xi_0) = 1 - \left[1 - \left(\frac{1 + \xi}{2} \right)^{A_\eta} \right]^{B_\eta} \quad 3.3.20$$



Rys. 3.4.10

Współczynniki A_η, B_η dla różnych wartości f i λ obliczono minimalizując sumę kwadratów błędów za pomocą własnego pakietu procedur minimalizacyjnych o nazwie APROX

3.3.21

$$A_\eta, B_\eta \text{ t.że: } \delta(A_\eta, B_\eta) = \min_{A_\eta, B_\eta \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{i=1}^9 [\eta_i - (\eta_0(\xi_{0i}) + \mu(\xi_{0i}))]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

gdzie ξ_{0i} i η_{0i} są wartościami obliczonymi dla $\beta_i = 18^\circ + 18^\circ(i-1)$ $i = 1+9$. Uzyskane wartości podaje się w Tab. 3.4.6+7.

Tab. 3.4.4 Współczynnik δ_λ

r/g	β°	f							
		100.00	125.00	150.00	175.00	200.00	250.00	300.00	400.00
30.00	18.0	0.0077	0.0108	0.0128	0.0142	0.0151	0.0161	0.0167	0.0171
30.00	54.0	0.1875	0.2158	0.2320	0.2420	0.2483	0.2554	0.2588	0.2617
30.00	90.0	0.8395	0.9032	0.9386	0.9597	0.9730	0.9875	0.9945	1.0005
30.00	126.0	1.9266	1.9952	2.0329	2.0552	2.0692	2.0845	2.0919	2.0982
30.00	162.0	2.9351	2.9590	2.9724	2.9804	2.9855	2.9912	2.9939	2.9962
60.00	18.0	0.0030	0.0050	0.0071	0.0090	0.0105	0.0128	0.0141	0.0154
60.00	54.0	0.1190	0.1575	0.1853	0.2047	0.2184	0.2354	0.2448	0.2536
60.00	90.0	0.8579	0.7681	0.8373	0.8824	0.9130	0.9498	0.9695	0.9877
60.00	126.0	1.7103	1.8434	1.9220	1.9719	2.0052	2.0449	2.0661	2.0856
60.00	162.0	2.8473	2.8981	2.9280	2.9471	2.9599	2.9753	2.9836	2.9913
90.00	18.0	0.0015	0.0027	0.0042	0.0057	0.0072	0.0098	0.0116	0.0137
90.00	54.0	0.0801	0.1173	0.1484	0.1727	0.1910	0.2156	0.2302	0.2452
90.00	90.0	0.5222	0.6555	0.7464	0.8088	0.8529	0.9085	0.9404	0.9721
90.00	126.0	1.5226	1.7055	1.8166	1.8890	1.9386	2.0002	2.0348	2.0691
90.00	162.0	2.7634	2.8390	2.8833	2.9121	2.9319	2.9565	2.9705	2.9844
120.00	18.0	0.0009	0.0017	0.0027	0.0038	0.0051	0.0075	0.0096	0.0122
120.00	54.0	0.0574	0.0899	0.1206	0.1466	0.1675	0.1973	0.2161	0.2365
120.00	90.0	0.4218	0.5635	0.6678	0.7428	0.7974	0.8686	0.9108	0.9549
120.00	126.0	1.3591	1.5814	1.7200	1.8116	1.8752	1.9557	2.0024	2.0506
120.00	162.0	2.6830	2.7832	2.8410	2.8785	2.9045	2.9373	2.9565	2.9765
150.00	18.0	0.0006	0.0011	0.0018	0.0027	0.0037	0.0059	0.0079	0.0108
150.00	54.0	0.0432	0.0710	0.0995	0.1254	0.1476	0.1808	0.2028	0.2279
150.00	90.0	0.3467	0.4880	0.5999	0.6839	0.7468	0.8308	0.8820	0.9373
150.00	126.0	1.2163	1.4686	1.6308	1.7394	1.8156	1.9129	1.9704	2.0314
150.00	162.0	2.6043	2.7298	2.8010	2.8466	2.8783	2.9186	2.9425	2.9681
180.00	18.0	0.0004	0.0008	0.0014	0.0020	0.0028	0.0047	0.0065	0.0095
180.00	54.0	0.0338	0.0574	0.0833	0.1083	0.1308	0.1661	0.1906	0.2196
180.00	90.0	0.2897	0.4259	0.5410	0.6312	0.7005	0.7954	0.8545	0.9198
180.00	126.0	1.0918	1.3654	1.5478	1.6718	1.7594	1.8721	1.9394	2.0121
180.00	162.0	2.5264	2.6778	2.7625	2.8162	2.8533	2.9006	2.9289	2.9596

Tab. 3.4.6 Wsoolczynniki A_p

$\frac{r}{g}$	100.0	125.0	150.0	175.0	200.0	250.0	300.0	400.0
30.0	0.2792	0.2070	0.1639	0.1349	0.1179	0.0953	0.0902	0.0890
60.0	0.4489	0.3690	0.3038	0.2541	0.2028	0.1598	0.1340	0.1062
90.0	0.5373	0.4682	0.4029	0.3453	0.2994	0.2206	0.1813	0.1329
120.0	0.5919	0.5268	0.4713	0.4160	0.3641	0.2864	0.2279	0.1580
150.0	0.6402	0.5659	0.5158	0.4750	0.4192	0.3343	0.2715	0.1860
180.0	0.6761	0.5964	0.5470	0.5112	0.4687	0.3745	0.3094	0.2156

Tab. 3.4.7 Wsoolczynniki B_p

$\frac{r}{g}$	100.0	125.0	150.0	175.0	200.0	250.0	300.0	400.0
30.0	3.1753	3.0622	2.9778	2.9266	2.9138	2.8902	3.0666	3.3276
60.0	3.4144	3.6009	3.5914	3.5384	3.2311	3.2188	3.2323	3.2465
90.0	3.1806	3.6710	3.8649	3.8635	3.8325	3.5041	3.4840	3.3524
120.0	2.9005	3.4694	3.8882	4.0547	4.0363	3.9487	3.7482	3.4288
150.0	2.7003	3.2230	3.7324	4.1749	4.1953	4.1285	3.9951	3.5849
180.0	2.5555	3.0081	3.5255	4.0492	4.3334	4.2504	4.1652	3.7885

$\frac{r}{g}$	100.0	125.0	150.0	175.0	200.0	250.0	300.0	400.0
30.0	0.0083	0.0115	0.0139	0.0156	0.0168	0.0182	0.0189	0.0196
30.0	0.3317	0.3810	0.4100	0.4278	0.4390	0.4515	0.4576	0.4627
30.0	1.3346	1.4277	1.4785	1.5083	1.5288	1.5469	1.5565	1.5646
30.0	2.5112	2.5789	2.6140	2.6341	2.6484	2.6595	2.6658	2.6710
30.0	3.0777	3.1082	3.1133	3.1161	3.1178	3.1195	3.1203	3.1210
60.0	0.0032	0.0054	0.0078	0.0099	0.0118	0.0147	0.0165	0.0183
60.0	0.2120	0.2810	0.3308	0.3657	0.3904	0.4208	0.4375	0.4531
60.0	1.0613	1.2314	1.3553	1.4014	1.4454	1.4973	1.5246	1.5496
60.0	2.2801	2.4292	2.5108	2.5596	2.5908	2.6265	2.6447	2.6612
60.0	3.0499	3.0809	3.0959	3.1042	3.1092	3.1147	3.1173	3.1196
90.0	0.0017	0.0030	0.0046	0.0064	0.0082	0.0114	0.0138	0.0167
90.0	0.1435	0.2103	0.2664	0.3101	0.3433	0.3875	0.4137	0.4404
90.0	0.8493	1.0603	1.2008	1.2952	1.3605	1.4409	1.4857	1.5294
90.0	2.0576	2.2786	2.4034	2.4796	2.5293	2.5874	2.6184	2.6478
90.0	2.9911	3.0472	3.0744	3.0894	3.0985	3.1084	3.1133	3.1177
120.0	0.0010	0.0019	0.0030	0.0044	0.0059	0.0089	0.0115	0.0150
120.0	0.1032	0.1619	0.2172	0.2642	0.3021	0.3559	0.3897	0.4263
120.0	0.6892	0.9167	1.0811	1.1970	1.2796	1.3846	1.4451	1.5067
120.0	1.8525	2.1333	2.2978	2.3999	2.4671	2.5469	2.5902	2.6326
120.0	2.9250	3.0094	3.0503	3.0728	3.0864	3.1012	3.1086	3.1154
150.0	0.0007	0.0013	0.0021	0.0032	0.0044	0.0070	0.0095	0.0135
150.0	0.0779	0.1281	0.1797	0.2267	0.2669	0.3270	0.3668	0.4119
150.0	0.5683	0.7971	0.9756	1.1074	1.2041	1.3303	1.4048	1.4829
150.0	1.6674	1.9949	2.1950	2.3216	2.4057	2.5062	2.5614	2.6164
150.0	2.8539	2.9685	3.0243	3.0550	3.0735	3.0936	3.1036	3.1128
180.0	0.0005	0.0010	0.0016	0.0024	0.0034	0.0056	0.0080	0.0120
180.0	0.0612	0.1040	0.1508	0.1921	0.2359	0.3010	0.3454	0.3976
180.0	0.4760	0.6975	0.8827	1.0259	1.1340	1.2781	1.3656	1.4590
180.0	1.5027	1.8644	2.0956	2.2450	2.3452	2.4659	2.5326	2.5998
180.0	2.7792	2.9251	2.9967	3.0362	3.0599	3.0858	3.0993	3.1100

3.5 Obliczanie rozkładu sił i parametrów deformacji połączenia

Uzyskane wyniki pozwalają na przedstawienie poniższych algorytmów obliczeń dotyczących rozkładu sił i deformacji połączenia kołnierzewego

3.5.1 Obliczenie parametrów charakteryzujących geometrię połączenia

1.1 Smukłość powłoki $\lambda = \frac{r}{g}$

1.2 Wskaźnik sztywności f

$$f = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{n h}{g} \quad 3.5.1$$

współczynnik kształtu α wg p. 2.5.2

1.3 Podatność k

$$k = \frac{1}{E} 98\pi^2(1-\nu^2) \frac{\lambda^2}{f^3} \quad 3.5.2$$

1.4 Mimośród e' przyłożenia obciążenia w strefie rozciąganej

$$\gamma = \frac{e'}{r} \quad 3.5.3$$

3.5.2 Obliczenie parametrów obciążenia

Mając dane działające w połączeniu siły wewnętrzne M i N , należy ustalić wielkość odpowiadającego im parametru ξ_0 , którego znajomość jest konieczna, by można było skorzystać z wyników p. 3.4.3 i 3.4.4

2.1 Obliczenie mimośrodu względnego ξ

$$\xi = \frac{rN}{2M} \quad 3.5.4$$

2.2 Obliczenie parametru obciążenia ξ_0

Ponieważ krzywe $\eta(\xi_0)$ dla dowolnych λ i f oraz krzywa graniczna $\eta_0(\xi_0)$ dla $f \rightarrow \infty$ są sobie bliskie, ustalenie ξ_0 odpowiadającego zadanemu ξ , można przeprowadzić z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością w oparciu o związek 3.3.107 (zamiast 3.3.112). Poniższy nomogram podaje zależność współczynnika $\psi = \psi(\xi)$ dla różnych wartości γ ,

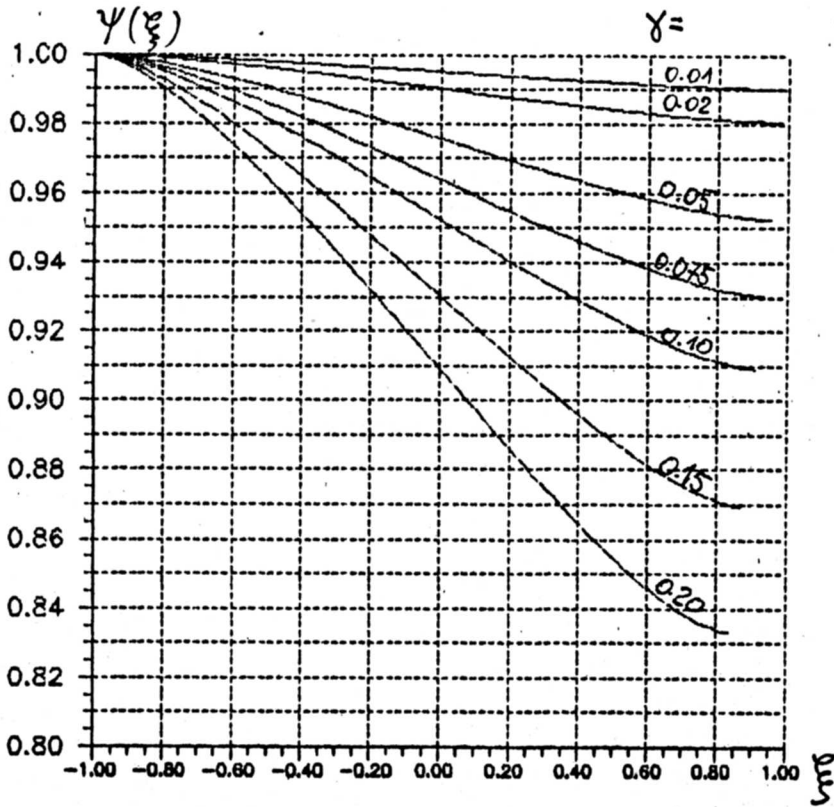
$$\psi(\xi) = \frac{\xi}{\xi_0(\xi)} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\pi} \eta_0(\xi_0)} \quad 3.5.5$$

gdzie ξ_0 spełnia równanie :

$$\xi = \frac{\xi_0}{1 + \frac{\gamma}{\pi} \eta_0(\xi_0)} \quad 3.5.6$$

skąd

$$\xi_0 = \frac{1}{\psi(\xi)} \xi \quad 3.5.7$$



Rys. 3.5.1

3.5.3 Rozkład obciążenia w połączeniu

W oparciu o obliczone ξ_0 można znaleźć :

1. Maksymalne obciążenie zastępcze w strefie rozciąganej

$$p_{\max}^r = \frac{M}{\pi r^2} \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} + 1 \right) \kappa_r \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right) \psi(\xi) , \quad 3.5.8$$

co można zapisać inaczej, jako:

$$p_{\max}^r = p_{\max}^{rWM} \kappa_r \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right) \rho_{er}(\xi) \quad 3.5.9$$

gdzie:

$$p_{\max}^{rWM} = \frac{M}{\pi r^2} (1 + \xi) \quad 3.5.10$$

-maksymalne obciążenie brzegu połączenia wg zwykłych wzorów WM

$\kappa_r \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right)$ -współczynnik redukujący naprężenia w strefie rozciąganej na wskutek jej odkształcalności wg tab.3.4.2

$$\rho_{er}(\xi) = \frac{\xi + \psi(\xi)}{\xi + 1} \quad 3.5.11$$

-współczynnik wpływu mimośrodowego przyłożenia obciążenia w strefie rozciąganej na max. napr. rozciągające

2. Maksymalne obciążenie w strefie ściskanej

$$p_{\max}^c = \frac{M}{\pi r^2} \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} - 1 \right) \kappa_c \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right) \psi(\xi) , \quad 3.5.12$$

$$= p_{\max}^{cWM} \kappa_c \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right) \rho_{ec}(\xi)$$

gdzie:

$$p_{\max}^{cWM} = \frac{M}{\pi r^2} (1 - \xi) \quad 3.5.13$$

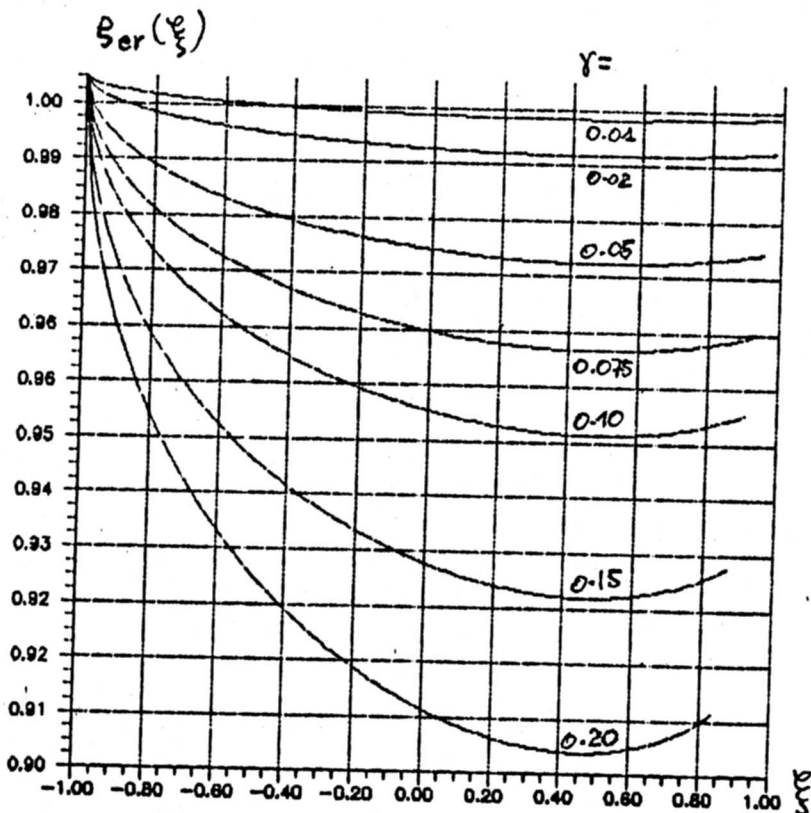
-maksymalne obciążenie brzegu połączenia wg zwykłych wzorów WM

$\kappa_c \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right)$ -współczynnik zwiększający naprężenia w strefie ściskanej, na wskutek odkształcalności kołnierza wg tab.3.4.3

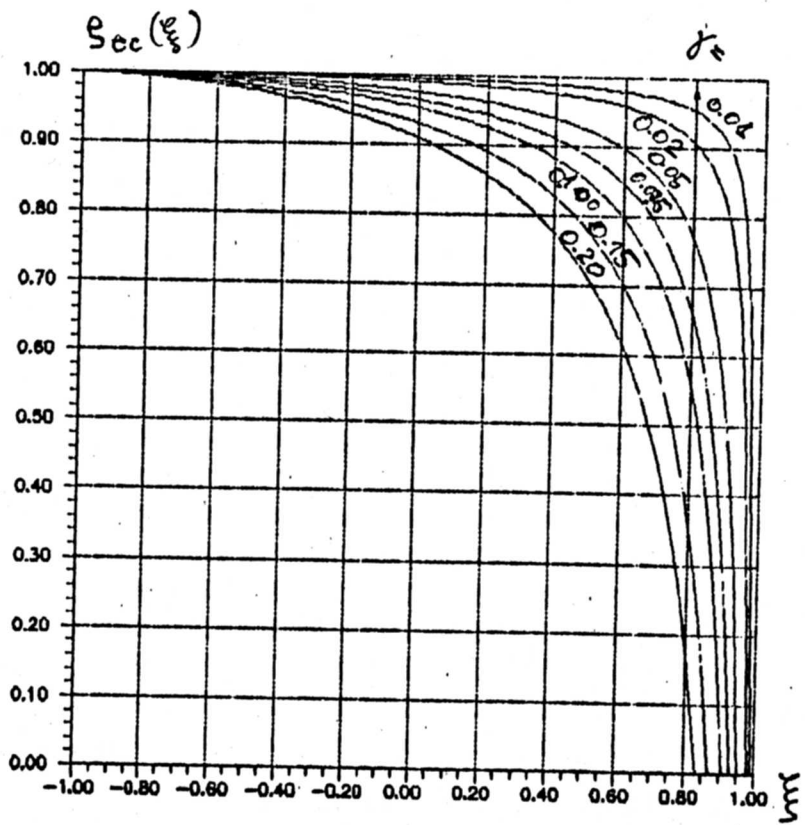
$$\rho_{ec}(\xi) = \frac{\xi - \psi(\xi)}{\xi - 1} \quad 3.5.14$$

-współczynnik wpływu mimośrodowego przyłożenia obciążenia w strefie rozciąganej na max. napr. ściskające

Poniższe wykresy przedstawiają zależności $\rho_{er}(\xi)$ i $\rho_{ec}(\xi)$ przy różnych wartościach mimośrodu $e' = \gamma r$



Rys. 3.5.2



Rys. 3.5.3

3.5.4 Deformacja połączenia

3.5.4.1 Kąt wzajemnego obrotu łączonych elementów

Zgodnie z 3.3.113 kąt wzajemnego obrotu łączonych elementów wyniesie

$$\vartheta = M \frac{2k}{\pi r^2} \psi(\xi) \eta \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right) = M \frac{2k}{\pi r^2} \bar{\eta}_\gamma(\xi) \quad 3.5.15$$

Poniższe przekształcenia pozwolą nadać wzorowi 3.5.15 postać bardziej dogodną do obliczeń.

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_\gamma(\xi) &= \psi(\xi) \eta \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right) = \psi(\xi) \eta_0 \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right) \mu \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right) = \\ &= \psi(\xi) \frac{\eta_0 \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right)}{\eta_0(\xi)} \eta_0(\xi) \frac{\mu \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right)}{\mu(\xi)} \mu(\xi) \\ &\cong \rho_{\bullet\eta}(\xi) \eta_0(\xi) \mu(\xi) \end{aligned} \quad 3.5.16$$

Błąd popełniony z tytułu przyjęcia :

$$\frac{\mu \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right)}{\mu(\xi)} = \frac{1 - \left(1 - \left(\frac{1 + \frac{\xi}{\psi(\xi)}}{2} \right)^{A_\eta} \right)^{B_\eta}}{1 - \left(1 - \left(\frac{1 + \xi}{2} \right)^{A_\eta} \right)^{B_\eta}} \cong 1 \quad 3.5.17$$

nie przekracza 2%.

Ostatecznie można zapisać poszukiwaną postać charakterystyki odkształcalności ϑ - M jako :

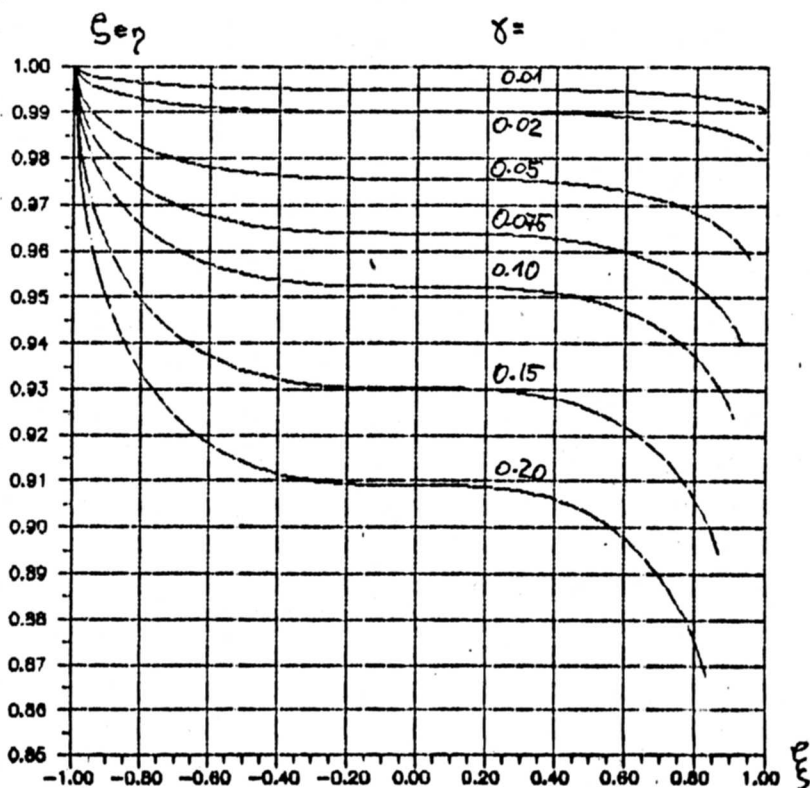
$$\begin{aligned} \vartheta &= 0 && ; && \xi < -1 \\ \vartheta &= M \frac{2k}{\pi r^2} \rho_{\bullet\eta}(\xi) \mu(\xi) \eta_0(\xi) && ; && -1 < \xi = \frac{rN}{2M} < \frac{1}{1+\gamma} \\ \vartheta &= M \frac{2k}{\pi r^2} \frac{1}{1+\gamma} && ; && \frac{1}{1+\gamma} < \xi \end{aligned} \quad 3.5.18$$

gdzie:

$$\rho_{\bullet r}(\xi) = \psi(\xi) \frac{\eta_0 \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)} \right)}{\eta_0(\xi)} \quad 3.5.19$$

jest współczynnikiem uwzględniającym mimośród przyłożenia obciążenia w strefie rozciąganej niezależnym od podatności elementów połączenia.

Rysunek 3.5.4 podaje zależność $\rho_{\bullet r} = \rho_{\bullet r}(\xi)$ przy różnych wartościach $\gamma = e'/r$. Jak widać wpływ ten nie jest duży, i w zasadzie nie przekracza kilku procent.



Rys. 3.5.4

Z kolei $\mu(\xi)$ jest współczynnikiem korekcyjnym uwzględniającym podatność połączenia niezależnym od mimośrodów e' , danym wzorem :

$$\mu(\xi) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1 + \xi}{2}\right)^{A_\eta}\right)^{B_\eta} \quad , \quad 3.5.20$$

wykładniki $A_\eta = A_\eta(f, \lambda)$, $B_\eta = B_\eta(f, \lambda)$ podane są w tab. 3.4.6+7.

3.4.5.2 Osiowe przemieszczenie elementów

Zgodnie z 3.4.16 wzajemne przemieszczenie osiowe łączonych elementów , przy uwzględnieniu mimośrodów e' wyniesie:

$$d = 0 \quad ; \quad \xi < -1$$

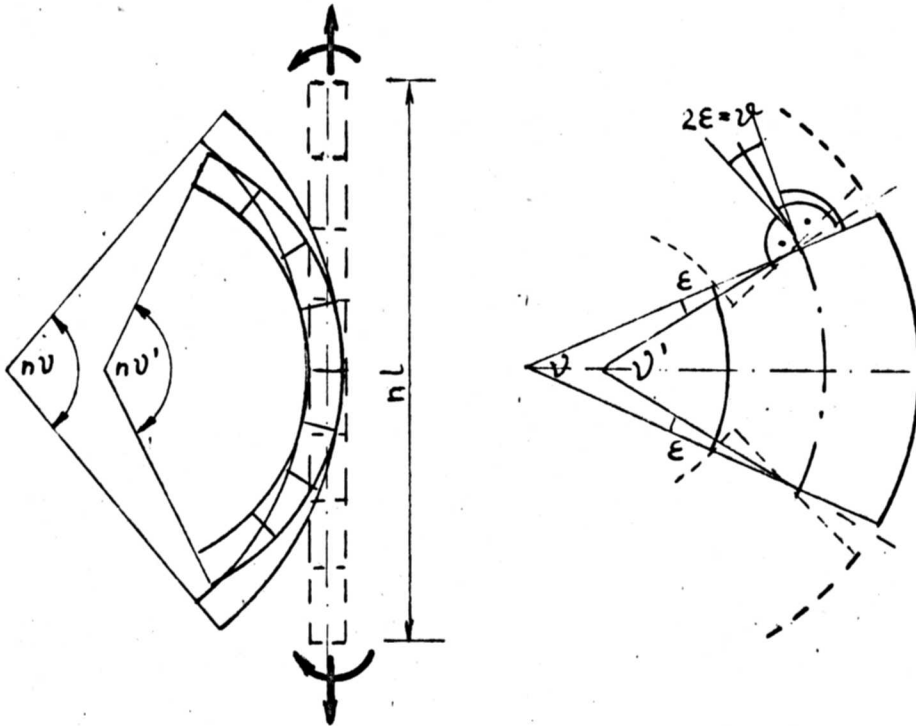
$$d = M \frac{2k}{\pi r^2} \psi(\xi) \delta_1 \left(\frac{\xi}{\psi(\xi)}\right) \quad ; \quad -1 < \xi = \frac{rN}{2M} < \frac{1}{1+\gamma} \quad , \quad 3.5.21$$

$$d = N \frac{k}{\pi r} \quad ; \quad \frac{1}{1+\gamma} < \xi$$

gdzie współczynnik δ_1 jest dany w tabeli 3.4.4

3.5.5 Ocena wpływu obecności połączeń na sztywność ogólną konstrukcji ?

Rozważa się pręt rurowy złożony z wielu segmentów o długości l łączonych połączeniami kołnierzowymi, obciążony stałym momentem zginającym i siłą osiową.



Rys. 3.5.5

Obliczony zgodnie z p. 3.3.5.4. parametr $\epsilon = 0.59$, określający obrót płaszczyzny symetrii połączenia pozwala obliczyć przyrost krzywizny $\Delta\kappa$ pręta złożonego wynikający z odkształcalności połączenia, zgodnie z relacjami:

$$v = l \kappa \quad 3.5.22$$

gdzie κ oznacza krzywiznę pręta bez uwzględnienia odkształcalności połączeń.

$$\kappa = \frac{M}{EI} = \frac{M}{E\pi r^3 g} \quad 3.5.23$$

$$v' = l \kappa' \quad 3.5.24$$

κ' - krzywizna zastępcza uwzględniająca odkształcalność połączenia

$$v' = v + 2\epsilon = v + \delta \quad 3.5.25$$

stąd :

$$\Delta\kappa = \kappa' - \kappa = \frac{1}{l} (v' - v) = \frac{\delta}{l} \quad 3.5.26$$

Względny przyrost krzywizny wyniesie :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{x} &= \frac{\frac{1}{l} M \frac{2k}{\pi r^3} \bar{\eta}_\gamma(\xi)}{\frac{M}{E\pi r^3 g}} = \frac{2kE}{\pi} \frac{g}{l} \bar{\eta}_\gamma\left(\frac{rN}{2M}\right) = & 3.5.27 \\ &= 192 \pi^2 (1-\nu^2) \frac{r}{l} \frac{\lambda^2}{r^3} \bar{\eta}_\gamma\left(\frac{rN}{2M}\right) \end{aligned}$$

Powyższy wzór można wykorzystać do podania formuły na zastępczą sztywność giętą EI^* pręta złożonego z segmentów o długości l łączonych połączeniami kołnierzowymi o wskaźniku sztywności f

$$EI^* = EI \left[\frac{1}{1 + 1724.4 \frac{r}{l} \frac{\lambda^2}{r^3} \bar{\eta}_\gamma\left(\frac{rN}{2M}\right)} \right] \quad 3.5.28$$

4. Przykłady obliczeń i wnioski praktyczne

Podaje się przykłady obliczeń praktycznych przeprowadzonych w oparciu o przedstawiony model połączenia. Przyjmuje się, za [36], że warunki projektowania połączenia wobec braku wymogu szczelności będą wynikały ze stanu granicznego nośności elementów połączenia, oraz z warunków II stanu granicznego (ugięć) dla całej konstrukcji.

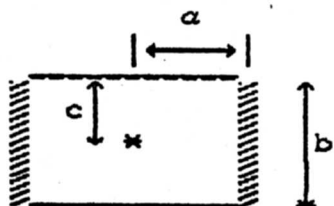
4.1 Przykłady obliczeń podatności i nośności układu śruba - kołnierz - żebro

Rozważa się rurę o wymiarach $\emptyset 1200 \times 7$ łączoną połączeniami kołnierzowymi na śruby o klasie własności mechanicznych 5.8. Nośność dla obu przypadków połączeń, $36 \times M16$ i $16 \times M24$ (o prawie identycznej powierzchni śrub), obliczana wg elementarnych wzorów, bez uwzględniania efektu dźwigni, przy odpowiednim doborze grubości kołnierza będzie niemal identyczna i wyniesie:

$$p = \frac{n F \cdot R'}{2\pi r} = \begin{cases} \frac{36 \times 1.61 \times 10^{-4} \times 330000}{2 \times 3.14 \times 0.60} = 507 \text{ kN/m} \\ \frac{16 \times 3.53 \times 10^{-4} \times 330000}{2 \times 3.14 \times 0.60} = 494 \text{ kN/m} \end{cases}$$

na 1 mb obwodu połączenia.

Kołnierz w obu przypadkach ma szerokość $b=10$ cm, jego grubość jest dobierana w oparciu o zamieszczone w [15], wyniki analizy nośności granicznej płyty prostokątnej, o schemacie jak poniżej obciążonej siłą skupioną.



$$P_{gr} = \frac{h^2}{4} R \propto \left(\frac{a}{b}, \frac{a}{c} \right)$$

Rys. 4.1.1

Choć schemat taki nie w pełni odpowiada rozważanemu w niniejszej pracy (nie jest uwzględnione pochylenie żebrow), przyjmuje się że może on dać dobre oszacowanie potrzebnej grubości. Wychodząc z warunku, by nośność pojedynczego segmentu kołnierza była co najmniej równa nośności śruby na rozciąganie $F \cdot R'$ otrzymuje się (dla stali St3S, $R = 210$ MPa):

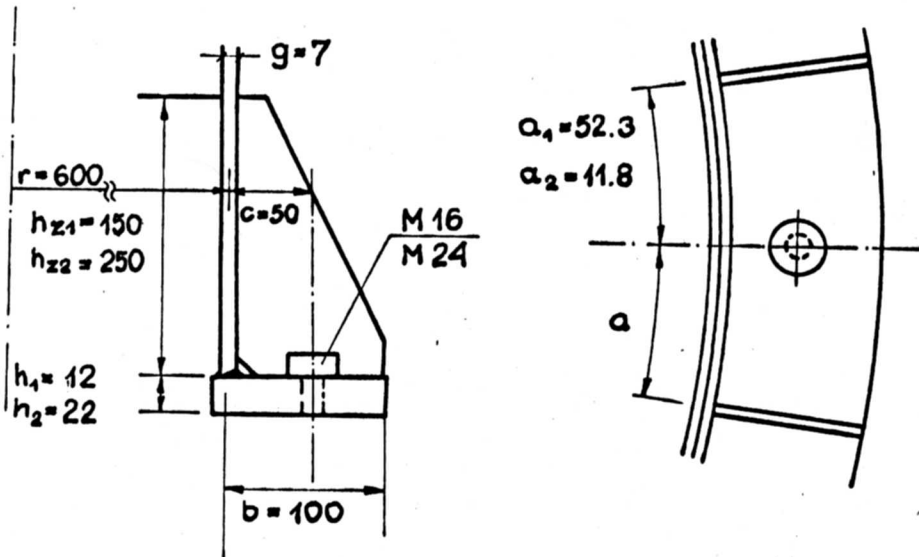
dla $36 M16$: $a = 3.14 \times 60 / 36 = 5.23$ cm; $a/b = 0.523$

$h = 2.2 \sqrt{1.61 \times 330 / (9.80 \times 210)} = 1.11$ cm, przyjęto $h_1 = 1.2$ cm

dla 16 M24 : $a = 3.14 \times 60 / 16 = 10.47 \text{ cm}$; $a/b = 1.178$

$h = 2.27 \sqrt{3.53 \times 330 / (6.95 \times 210)} = 1.96 \text{ cm}$, przyjęto $h_2 = 2.2 \text{ cm}$

Przedstawione poniżej obliczenia pozwolą prześledzić wpływ poszczególnych wymiarów na nośność i podatność połączenia .



Rys. 4.1.2

Przypadek 1

36 M16 ; $a = 5.23 \text{ cm}$; $a/b = 0.523$; $c/b = 0.5$, $\lambda = 60 / 0.7 = 85.7$

grubość kołnierza $h = h_1 = 1.2$; $h/b = 0.12$; $d/h = 1.333$

wysokość żebra $h_z = 15 \text{ cm} \Rightarrow A_h = 6.52$; $\beta_h = 1.96$ (tab 2.3.4+5)

wg p. 2.5.1 :

$$F = 96\pi^2 \times 0.91 \times \sqrt{85.7} \times 6.52 \times 0.25^{1.96} \times 0.7^3 \times 60^2 \times 2 / (1.2^3 \times 10^2 \times 36^2) = 37.915$$

$$f_o(1) = 41.29 \quad (\text{wg tab 2.4.7})$$

$\kappa = 37.915 / 41.29 = 0.9182 < 1 \Rightarrow$ wystąpi żebrowy efekt dźwigni

współczynnik kształtu do obliczenia podatności :

$$A_k = 0.0098 ; B_k = 0.53 \quad (\text{wg tab. 2.4.1+2})$$

$$\alpha_k = \frac{0.00980}{1 - 0.53} = 0.02085$$

współczynnik żebrowego efektu dźwigni :

$$f_{dz} = \frac{1}{1 - 0.5 \times 41.29 \times 0.02805 \times (1 - 0.9182)} = 1.0364$$

podatność połączenia:

$$\alpha = 1.0364 \times 0.02085 = 0.02161$$

$$\text{wskaźnik sztywności } f = \sqrt[3]{\frac{1}{0.02161} \frac{36 \times 1.2}{0.7}} = 221.5$$

$$\text{podatność } k = 96 \times \pi^2 \times 0.91 \times 85.7^3 / 221.5^3 \frac{1}{E} = 156.8 \frac{1}{E}$$

mimośród działania wypadkowej w strefie rozciąganej :

$$e' = 0.981 \times 1.0364 \times 0.2085 \times 41.29 \times 5 = 0.875 \times 5 = 4.376 \text{ cm}$$

$$\gamma = 4.376 / 60 = 0.0729$$

współczynnik efektu dźwigni :

$$A_d = 1.0062 \quad ; \quad B_d = 0.052$$

$$\text{kołnierzowy efekt dźwigni } f_{dk} = 1.0062 + 0.052 = 1.058$$

$$\text{całkowity " " } f_d = 1.058 \times 1.0364 = 1.0965$$

jednostkowa nośność strefy rozciąganej :

$$p_{gr} = 507 / 1.0965 = 462 \text{ kN/m}$$

Przypadek 2 (zwiększenie grubości kołnierza)

36M16 ; $a = 5.23 \text{ cm}$; $a/b = 0.523$; $c/b = 0.5$, $\lambda = 60 / 0.7 = 85.7$

grubość kołnierza $h = h_2 = 2.2$; $h/b = 0.22$; $d/h = 0.727$

wysokość zebra $h_z = 15 \text{ cm} \Rightarrow A_h = 6.52$; $\beta_h = 1.96$ (tab 2.3.4+5)

wg p.2.5.1 :

$$F = 96 \pi^2 \times 0.91 \times \sqrt{85.7} \times 6.52 \times 0.25^{1.96} \times 0.7^3 \times 60^2 \times 2 / (2.2^3 \times 10^2 \times 36^2) = 6.15$$

$$f_o(1) = 19.22 \quad (\text{wg tab 2.4.7})$$

$$\ast = 6.15 / 19.22 = 0.3201 < 1 \Rightarrow \text{wystąpi żebrowy efekt dźwigni}$$

współczynnik kształtu do obliczenia podatności :

$$A_k = 0.0231 \quad ; \quad B_k = 0.53 \quad (\text{wg tab. 2.4.1+2})$$

$$\alpha_k = \frac{0.0231}{1 - 0.53} = 0.0491$$

współczynnik żebrowego efektu dźwigni :

$$f_{dz} = \frac{1}{1 - 0.5 \times 19.22 \times 0.0491 \times (1 - 0.3201)} = 1.473$$

podatność połączenia:

$$\alpha = 1.473 \times 0.04915 = 0.07232$$

$$\text{wskaźnik sztywności } f = \sqrt[3]{\frac{1}{0.07232} \frac{36 \times 2.2}{0.7}} = 271.5$$

$$\text{podatność } k = 96 \times \pi^2 \times 0.91 \times 85.7^3 / 271.5^3 \frac{1}{E} = 85.14 \frac{1}{E}$$

mimośród działania wypadkowej w strefie rozciąganej :

$$e' = 0.3201 \times 1.473 \times 0.0491 \times 19.22 \times 5 = 0.444 \times 5 = 2.22 \text{ cm}$$

$$\gamma = 2.22/60 = 0.037$$

współczynnik efektu dźwigni :

$$A_d = 1.00 \quad ; \quad B_d = 0.076$$

$$\text{końnicowy efekt dźwigni} \quad f_{dk} = 1.0062 + 0.052 = 1.076$$

$$\text{całkowity} \quad " \quad " \quad f_d = 1.076 \times 1.473 = 1.585$$

jednostkowa nośność strefy rozciąganej :

$$p_{gr} = 507/1.585 = 319.9 \text{ kN/m}$$

Przypadek 3

zwiększona wysokość żebra, pozostałe wymiary jak w przypadku 2

$$h_z = 25$$

$$F = 96\pi^2 \times 0.91 \times \sqrt{85.7} \times 6.52 \times \left(\frac{25}{60}\right)^{1.96} \times 0.7^3 \times 60^2 \times 2 / (2.2^3 \times 10^2 \times 36^2) = 16.44$$

$$f_o(1) = 19.22 \quad (\text{wg tab 2.4.7})$$

$$\alpha = 16.74/19.22 = 0.8713 < 1 \rightarrow \text{wystąpi żebrowy efekt dźwigni}$$

współczynnik kształtu do obliczenia podatności :

$$A_k = 0.0231 \quad ; \quad B_k = 0.53 \quad (\text{wg tab. 2.4.1+2})$$

$$\alpha_k = \frac{0.0231}{1 - 0.53} = 0.0491$$

współczynnik żebrowego efektu dźwigni :

$$f_{dz} = \frac{1}{1 - 0.5 \times 19.22 \times 0.0491 \times (1 - 0.8713)} = 1.064$$

podatność połączenia:

$$\alpha = 1.064 \times 0.04915 = 0.0521$$

$$\text{wskaźnik sztywności} \quad f = 9 \sqrt{0.0521} \frac{36 \times 2.2}{0.7} = 302.9$$

$$\text{podatność} \quad k = 96 \times \pi^2 \times 0.91 \times 85.7^3 / 302.9^3 \frac{1}{E} = 61.32 \frac{1}{E}$$

mimośród działania wypadkowej w strefie rozciąganej :

$$e' = 0.8713 \times 1.064 \times 0.0491 \times 19.22 \times 5 = 0.8744 \times 5 = 4.374 \text{ cm}$$

$$\gamma = 4.374/60 = 0.0729$$

współczynnik efektu dźwigni :

$$A_d = 1.00 \quad ; \quad B_d = 0.076$$

$$\text{końnicowy efekt dźwigni} \quad f_{dk} = 1.000 + 0.076 = 1.076$$

$$\text{całkowity} \quad " \quad " \quad f_d = 1.076 \times 1.064 = 1.1457$$

jednostkowa nośność strefy rozciąganej :

$$p_{gr} = 507/1.1457 = 442.9 \text{ kN/m}$$

Przypadek 4

16M24; $a = 11.78 \text{ cm}$; $a/b = 1.178$; $c/b = 0.5$, $\lambda = 60/0.7 = 85.7$
grubość kołnierza $h = h_2 = 2.2$; $h/b = 0.22$; $d/h = 1.09$
wysokość zebra $h_z = 15 \text{ cm} \Rightarrow A_h = 7.41$; $\beta_h = 1.92$ (tab 2.3.4+5)
wg p.2.5.1 :

$$F = 96\pi^2 \times 0.91 \times \sqrt{85.7} \times 7.41 \times 0.25^{1.92} \times 0.7^3 \times 60^2 \times 2 / (2.2^3 \times 10^2 \times 16^2) =$$
$$= 37.42$$

$$f_o(1) = 14.12 \quad (\text{wg tab 2.4.7})$$

$x = 37.42/14.12 = 2.651 > 1 \Rightarrow$ nie wystąpi żebrowy efekt dźwigni

$$f_{dz} = 1.0 ;$$

obliczenie parametru postaci deformacji ϑ^* wg 2.5.5

$$A_o = -21.40 ; B_o = -57.557 ; C_o = 93.002 \quad (\text{wg tab. 2.4.4+6})$$

$$\vartheta^* = \frac{37.42 + 57.55 - \sqrt{(37.42 + 57.55)^2 + 4 \times 21.40 \times 93.00}}{-21.404} = 0.862$$

podatność

współczynnik kształtu do obliczenia podatności :

$$A_k = 0.00811 ; B_k = 0.4097 \quad (\text{wg tab. 2.4.1+2})$$

$$\alpha = \alpha_k = \frac{0.00811}{1 - 0.4097 \times 0.862} = 0.01262$$

$$\text{wskaźnik sztywności} \quad f = s \sqrt{\frac{1}{0.01262} \frac{16 \times 2.2}{0.7}} = 218.0$$

$$\text{podatność} \quad k = 96 \times \pi^2 \times 0.91 \times 85.7^3 / 218.0^3 \frac{1}{E} = 164.5 \frac{1}{E}$$

mimośród działania wypadkowej w strefie rozciąganej :

$$e' = (93.00 - 57.55 \times 0.862 - 21.404 \times 0.862^2) \times 0.01262 \times 5 =$$
$$= 30.92 \times 0.01262 \times 5 = 0.379 \times 5 = 1.89 \text{ cm}$$

$$\gamma = 1.89/60 = 0.0315$$

współczynnik efektu dźwigni :

$$A_d = 1.1265 ; B_d = 0.285 ; C_d = 1.728 \quad (\text{wg tab. 2.4.8+10})$$

$$\text{kołnierzowy efekt dźwigni} \quad f_{dk} = 1.126 + 0.285 \times 0.862^{1.728} = 1.3314$$

$$\text{całkowity} \quad " \quad " \quad f_d = 1.000 \times 1.3314 = 1.3314$$

Jednostkowa nośność strefy rozciąganej :

$$p_{gr} = 493/1.331 = 370.0 \text{ kN/m}$$

Przypadek 5 (zwiększona wysokość zebra, pozostałe wym. jak w p. 4)

16M24; $a = 11.78\text{cm}$; $a/b = 1.178$; $c/b = 0.5$, $\lambda = 60/0.7 = 85.7$
 grubość kołnierza $h = h_2 = 2.2$; $h/b = 0.22$; $d/h = 1.09$
 wysokość zebra $h_z = 25\text{ cm} \Rightarrow A_h = 7.41$; $\beta_h = 1.92$ (tab 2.3.4+5)
 wg p.2.5.1 :

$$F = 96\pi^2 \times 0.91 \times \sqrt{85.7} \times 7.41 \times \left(\frac{25}{60}\right)^{1.92} \times 0.7^3 \times 60^2 \times 2 / (2.2^3 \times 10^2 \times 16^2) =$$

$$= 99.78$$

$$f_o(1) = 14.12 \quad (\text{wg tab 2.4.7})$$

$x = 99.78/14.12 = 7.066 > 1 \Rightarrow$ nie wystąpi zebrowy efekt dźwigni

$$f_{dz} = 1.0 ;$$

obliczenie parametru postaci deformacji ϑ^* wg 2.5.5

$$A_o = -21.40 ; B_o = -57.557 ; C_o = 93.002 \quad (\text{wg tab. 2.4.4+6})$$

$$\vartheta^* = \frac{99.78 + 57.55 - \sqrt{(99.78 + 57.55)^2 + 4 \times 21.40 \times 93.00}}{-21.404} = 0.6187$$

podatność

współczynnik kształtu do obliczenia podatności :

$$A_k = 0.00811 ; B_k = 0.4097 \quad (\text{wg tab. 2.4.1+2})$$

$$\alpha = \alpha_k = \frac{0.00811}{1 - 0.4097 \times 0.6187} = 0.01086$$

$$\text{wskaźnik sztywności } f = s \sqrt{\frac{1}{0.01086}} \frac{16 \times 2.2}{0.7} = 227.1$$

$$\text{podatność } k = 96 \times \pi^3 \times 0.91 \times 85.7^3 / 227.1^3 \frac{1}{E} = 145.6 \frac{1}{E}$$

mimośród działania wypadkowej w strefie rozciąganej :

$$e' = (93.00 - 57.55 \times 0.6187 - 21.404 \times 0.6187^2) \times 0.01086 \times 5 =$$

$$= 0.551 \times 5 = 2.75 \text{ cm}$$

$$\gamma = 2.75/60 = 0.0459$$

współczynnik efektu dźwigni :

$$A_d = 1.1265 ; B_d = 0.285 ; C_d = 1.728 \quad (\text{wg tab. 2.4.8+10})$$

$$\text{kołnierzowy efekt dźwigni } f_{dk} = 1.1265 + 285 \times 0.862^{1.728} = 1.3314$$

$$\text{całkowity " " } f_d = 1.000 \times 1.2508 = 1.2508$$

jednostkowa nośność strefy rozciąganej :

$$p_{gr} = 493/1.251 = 392.0 \text{ kN/m}$$

Przypadek 6

połączenie nieuzębrowane

36M16 ; $a = 5.23$; $a/b = 0.523$; $c/b = 0.5$, $\lambda = 60/0.7 = 85.7$
grubość kołnierza $h = h_2 = 2.2$; $h/b = 0.22$; $d/h = 0.727$

sprawdzenie, czy przyjęta grubość kołnierza jest wystarczająca
(wg [36])

$$h = 2 \sqrt{\frac{1.61 \times 2.6 \times 330}{10.47 \times 210}} = 1.58 < 2.2 \text{ cm}$$

efekt dźwigni : $f_d = 1.91$;

jednostkowa nośność strefy rozciąganej :

$$p_{gr} = 507/1.91 = 265 \text{ kN/m}$$

podatność

współczynnik kształtu $\alpha_k = 0.156$

wskaźnik sztywności $f = s \sqrt{\frac{1}{0.156}} \frac{36 \times 2.2}{0.7} = 209.9$

podatność $k = 96 \times \pi^2 \times 0.91 \times 85.7^2 / 209.9^2 \frac{1}{E} = 184.1 \frac{1}{E}$

Przypadek 7

połączenie nieuzębrowane

16M24 ; $a = 10.47$; $a/b = 1.178$; $c/b = 0.5$, $\lambda = 60/0.7 = 85.7$
grubość kołnierza $h = h_2 = 2.2$; $h/b = 0.22$; $d/h = 0.727$

efekt dźwigni : $f_d = 1.896$;

jednostkowa nośność strefy rozciąganej :

$$p_{gr} = 494/1.896 = 261 \text{ kN/m}$$

podatność

współczynnik kształtu $\alpha_k = 0.0268$

wskaźnik sztywności $f = s \sqrt{\frac{1}{0.0268}} \frac{16 \times 2.2}{0.7} = 168.3$

podatność $k = 96 \times \pi^2 \times 0.91 \times 85.7^2 / 168.3^2 \frac{1}{E} = 359.3 \frac{1}{E}$

Poniżej przedstawia się tabelaryczne zestawienie uzyskanych wyników.

przypadek	f_{dz}	f_{dk}	$\frac{f_d}{\rho \cdot kN/m^2 \cdot g}$	α	f	kE	$e' [cm]$ γ
1 36 M16 $h = 1.2cm$ $h_z = 15 cm$	1.036	1.058	1.096 492.0	0.0216	221.5	156.8	4.37 0.0729
2 36 M16 $h = 2.2cm$ $h_z = 15 cm$	1.473	1.076	1.585 319.9	0.0723	271.5	85.1	2.22 0.037
3 36 M16 $h = 2.2cm$ $h_z = 25 cm$	1.064	1.076	1.146 442.0	0.0521	302.9	61.3	4.37 0.0729
4 16 M24 $h = 2.2cm$ $h_z = 15 cm$	1.0	1.331	1.331 370.0	0.0126	218.0	164.5	1.89 0.0315
5 16 M24 $h = 2.2cm$ $h_z = 25 cm$	1.0	1.251	1.251 392.0	0.0109	227.0	145.6	2.75 0.0459
6 36 M16 $h = 2.2cm$ bez zeber	-	1.910	1.910 265.0	0.0156	209.9	184.1	-
7 16 M24 $h = 2.2cm$ bez zeber	-	1.890	1.890 261.0	0.0268	168.3	359.3	-

4.2 Przykład obliczenia sił wewnętrznych i naprężeń w elementach połączenia

Rozważa się połączenie z przykładu 1 z p. 4.1

$$kE = 156.8 ; \gamma = 0.0729 ; \lambda = 85.3 ; f = 221 ;$$

obciążone siłami :

- siła osiowa (ściskająca) $N = -400 \text{ kN}$

- moment zginający $M = 600 \text{ kNm}$

$$\xi = \frac{-0.60 \times 400}{2 \times 600} = -0.200 \rightarrow \psi(-0.200) = 0.973 \text{ (wg rys. 3.5.1)}$$

$$\xi_0 = -0.200 / 0.973 = -0.2055$$

Maksymalne obciążenie strefy rozciąganej :

wg wzorów wytrzymałości materiałów :

$$p^{WM} = \frac{600}{3.14 \times 0.60^2} (1 - 0.200) = 424 \text{ kN/m}$$

redukcja z uwagi na mimośrodowe przyłożenie obciążenia w strefie rozciąganej ($e' = 4.37 \text{ cm}$)

$$\rho_{er} = 0.962$$

redukcja z uwagi na odkształcalność strefy rozciąganej wg tab. 3.4.1+3.4.2

$$\kappa_{er} = 0.9834$$

$$p_r = 0.962 \times 0.9834 \times 424 = 0.9460 \times 424 = 401.1 \text{ kN/m}$$

Maksymalne naprężenie rozciągające w spoinie czołowej na krawędzi powłoki i kołnierza

$$f_p = \frac{0.2732}{1 - 0.30} = 0.390 ; f_{dz} = 1.036$$

$$\sigma = 1.036 \times 0.39 \frac{401.1}{0.007} = 1.036 \times 0.36 \times 57.3 \times 10^3 = 21.37 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

Siły działające na zebro (wg p.2.5.4.)

$$2\alpha = \frac{2\pi \times 0.60}{36} = 0.1047 \text{ m}$$

całkowita siła przypadająca na 1 segment

$$P = 0.1047 \times 401.1 = 42.00 \text{ kN}$$

moment sił działających na zebro

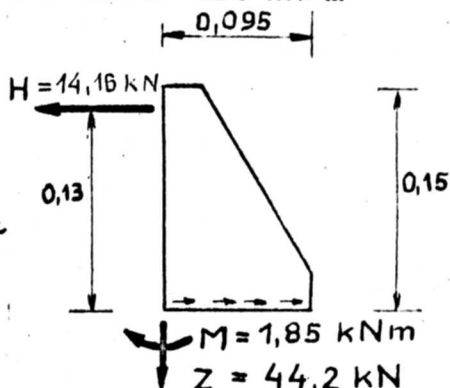
$$M_z = 0.0437 \times 42 = 1.85 \text{ kNm}$$

całkowita siła pionowa $f_z = 0.96$ (wg tab 2.4.15+16)

$$Z = 1.036 \times (0.96 + 1.036 - 1) \times 42.0 = 44.21 \text{ kN}$$

siła pozioma

$$H = \frac{1.85}{0.15 \times (0.75 + 0.0282 \times 4^{1.05})} = \frac{1.85}{0.15 \times 0.87} = 14.61 \text{ kN}$$



Naprężenia w spoinie łączącej zebro z kołnierzem
(spoina pachwinowa 2x4x95)

$$\tau_H = \frac{14.16}{0.095 \times 0.008} = 18.6 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_M = \frac{(44.21 \times 0.5 - 1.85) \times 6}{0.008 \times 0.095^2} = 29.9 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_z = \frac{44.21}{0.008 \times 0.095} = 58.2 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau = \sqrt{(29.9 + 58.2)^2 + 18.6^2} = 90.04 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

4.3 Charakterystyki odkształcalności połączenia kołnierzowego

Przedstawia się przykładową charakterystykę odkształcalności $\vartheta = \vartheta(M, N)$, obliczoną wg wzorów 3.5.18+20, dla połączenia z przypadku 1 poprzedniego punktu, o wymiarach :

36 M16 ; $\alpha = 5.23$; $a/b = 0.523$; $c/b = 0.5$, $\lambda = 60/0.7 = 85.7$
grubość kołnierza $h = h_1 = 1.2$; $h/b = 0.12$; $d/h = 1.333$
wysokość zebra $h_z = 15 \text{ cm}$;

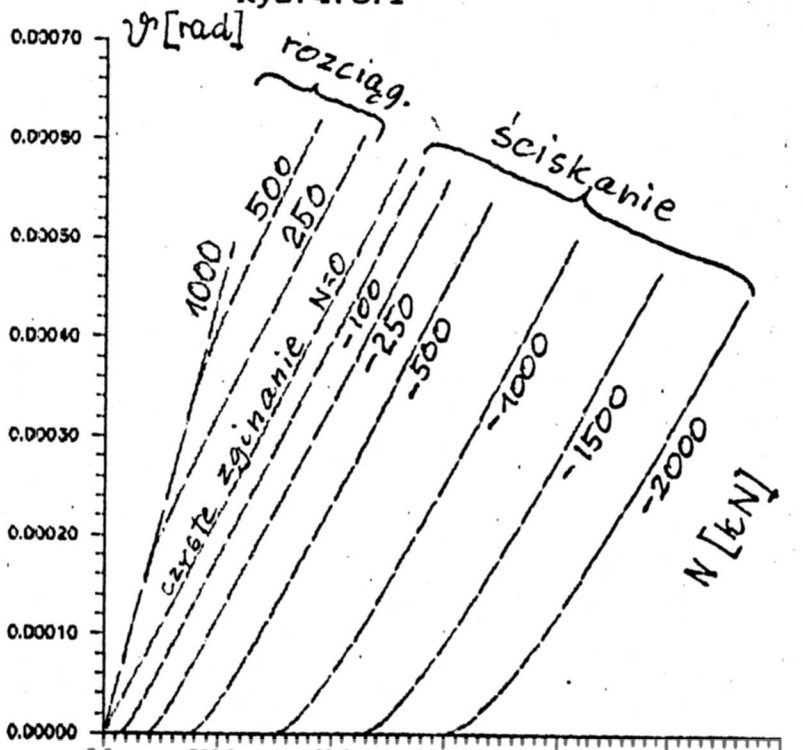
skąd :

obciążenie graniczne stępy rozciąganej $p_{gr} = 492 \text{ kN/m}$,

podatność $k = 156.8/E = 156.8/2.1 \times 10^8 = 7.467 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{kN}$.

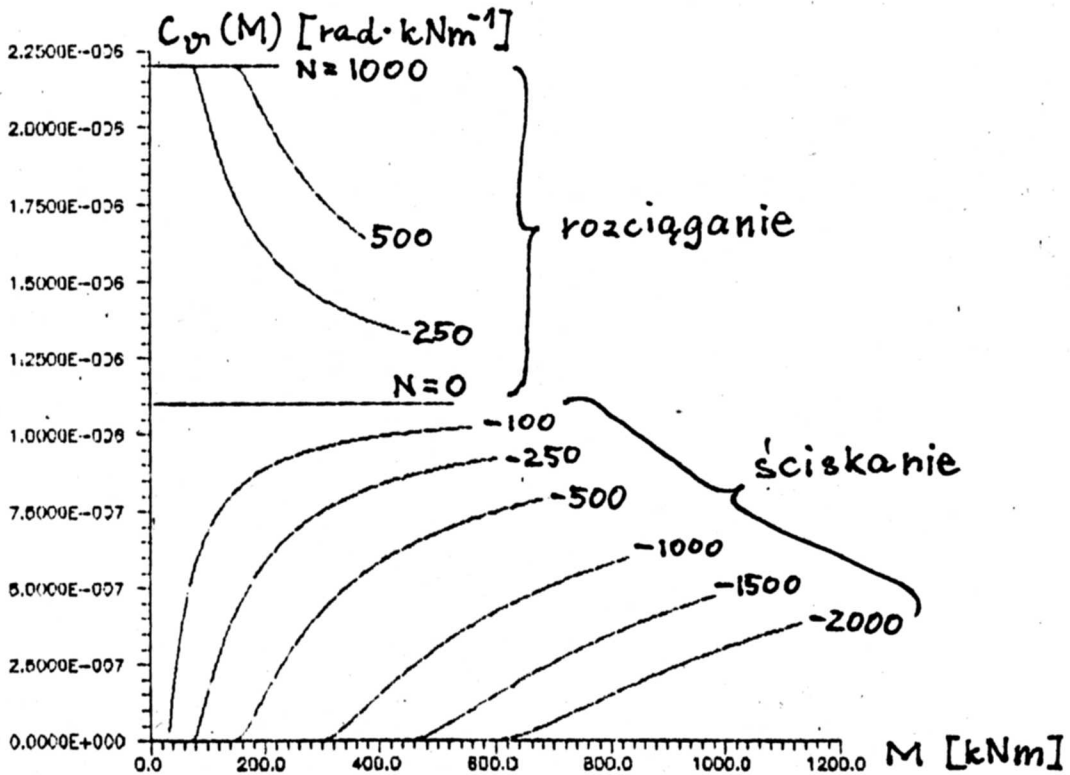
Rysunek 4.3.1 przedstawia zależność kąta wzajemnego obrotu łączonych elementów $\vartheta = \vartheta(M, N)$, dla różnych wartości siły osiowej (rozciągającej i ściskającej), przy czym wielkość maksymalnego momentu dobierana jest każdorazowo tak, by $p_{max} < p_{gr}$.

Rys. 4.3.1



Rysunek 4.3.2 przedstawia zależność czynnika C_{θ} , tj. siecznego modułu podatności połączenia, od momentu zginającego.

$$C_{\theta}^{CMD} = \frac{2k}{\pi r^3} \bar{\eta}_{\gamma} \left(\frac{rN}{2M} \right)$$



Rys. 4.3.2

4.4. Wpływ odkształcalności połączenia na sztywność konstrukcji

Przedstawia się przybliżoną ocenę tego wpływu w oparciu o formuły uproszczone 3.5.27+28. Rozważa się pręt rurowy (np. trzon komina) $\emptyset 1200 \times 7$ zestawiony z segmentów o długości $l = 4.00$ m, łączony połączeniami kołnierзовymi o wymiarach jak w przypadkach 1+7 z p. 4.1, poddany czystemu zginaniu ($N = 0$). Tabela podaje przyrost krzywizny $\Delta\kappa/\kappa$, oraz odpowiadający mu współczynnik redukujący dla zastępczego modułu sztywności EI^* pręta złożonego, obliczone wg formuły wynikającej z 3.5.27+28:

$$\frac{\Delta\kappa}{\kappa} = 1724,4 \times 85,7^2 \times 0,60 / 4,0 \times \frac{\bar{\eta}(0)}{f^3} = 1,899 \times 10^6 \frac{\bar{\eta}(0)}{f^3}$$

$$\frac{EI^*}{EI} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta\kappa}{\kappa}}$$

przypadek i	f_i	$\bar{\eta}_{ik}(0)$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{EI^*}{EI}$
1 36 M16 h = 1.2cm h _z = 15 cm	221.5	1.568	0.274	0.784
2 36 M16 h = 2.2cm h _z = 15 cm	271.5	1.569	0.148	0.873
3 36 M16 h = 2.2cm h _z = 25 cm	302.9	1.570	0.107	0.903
4 16 M24 h = 2.2cm h _z = 15 cm	218.0	1.568	0.287	0.776
5 16 M24 h = 2.2cm h _z = 25 cm	227.0	1.568	0.254	0.797
6 36 M16 h = 2.2cm bez zeber	209.9	1.568	0.322	0.756
7 16 M24 h = 2.2cm bez zeber	168.3	1.566	0.624	0.615

4.4 Zalecenia konstrukcyjne

Powyższe przykłady, a także analiza wyników z p.2.4.5 i 3.4 pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków i wynikających z nich zaleceń konstrukcyjnych

1) Występujący w połączeniu efekt dźwigni (zwiększenie siły rozciągającej śrubę w stosunku do przypadającej na nią sumy obciążenia z powłoki) nie powinien być pomijany w obliczeniach. Szczególnie duże wartości (ponad 50%) osiąga w połączeniu nieuźebrowanym, co sprawia iż połączenia takie mogą być stosowane w przypadku niewielkich momentów zginających połączenie. W tym przypadku efekt dźwigni będzie całkowicie niezależny od ilości sektorów, będzie za to zależał od grubości kołnierza i wielkości śruby.

Wielkość efektu dźwigni w połączeniu uźebrowanym można minimalizować poprzez:

- zagęszczanie podziału kołnierza na sektory (zwiększenie liczby śrub, zmniejszanie ich średnicy)
- stosowanie żeber usztywniających o odpowiedniej wysokości.

Zebra o zbyt małej wysokości, szczególnie przy ich znacznym zagęszczeniu i grubym kołnierzu mogą spowodować wystąpienie zjawiska określanego mianem żeberowego efektu dźwigni (por.p.2.2) znacznie zwiększającego siłę w śrubie.

Nie należy zwiększać grubości kołnierza ponad tę, jaka jest niezbędna z uwagi na jego nośność i sztywność.

Optymalny rozstaw żeber odpowiada stosunkowi a/b z przedziału (0.75 - 1.25). Zebra rozmieszczone gęściej, o ile nie są bardzo wysokie, narażone są na żeberowy efekt dźwigni, który niweluje zmniejszenie kołnierzowego efektu dźwigni uzyskane dzięki gęstemu ich rozmieszczeniu.

Z kolei zbyt rzadki rozstaw żeber powoduje, iż ich rola statyczna jest znikoma i efekt dźwigni (kołnierzowy) będzie podobny jak w połączeniu nieuźebrowanym.

2) Sztywność układu śruba-kołnierz-zebro rośnie przede wszystkim w miarę :

- zwiększania się grubości kołnierza
- zwiększania się gęstości podziału na sektory.

Wpływ ten nie jest jednak proporcjonalny do 3-ciej potęgi wymienionych wielkości (jak by to wynikało ze wzoru 3.4.5), gdyż bezwymiarowy współczynnik kształtu α rośnie (zwiększając podatność) zarówno przy wzroście grubości kołnierza jak i

gęstości jego podziału na sektory.

Wpływ wysokości żeber usztywniających na podatność uwidacznia się jedynie przy bardzo gęstym podziale, ale i w tym przypadku nie jest dominujący. Połączenia nieuźebrowane odznaczają się na ogół znacznie mniejszą sztywnością niż połączenia uźebrowane o tych samych wymiarach kołnierza i śrub, z tym że różnica ta zmienia się od blisko 10-krotnej przy gęstym podziale ($a/b = 0,5$), do praktycznie żadnej przy podziale rzadkim ($a/b = 2,0$). Mówiąc inaczej, obecność żeber rozmieszczonych rzadko nie ma dużego wpływu na podatność, wpływ taki można uzyskać dopiero przy odpowiednio gęstym ich rozstawieniu.

Odształcalność połączeń kołnierzowych wywołana podatnością strefy rozciąganej połączenia może spowodować istotne zmniejszenie się sztywności ogólnej konstrukcji, ze wszystkimi tego konsekwencjami dla jej bezpieczeństwa i warunków eksploatacji. Wpływ ten będzie szczególnie znaczący w przypadku gdy stosuje się dużą liczbę połączeń, a smukłość powłoki jest znaczna. Wówczas konieczne okazać może się wymiarowanie elementów połączenia (grubość kołnierza, rozstaw i wysokość żeber) z warunku osiągnięcia dostatecznej sztywności.

Z sytuacją taką można się spotkać w wysokich kominach wolnostojących, gdzie smukłość powłoki $\lambda = r/g$ sięgnie 150 lub nawet więcej, przy promieniu $r = 1,25 + 2,0$ m, a podyktowany względami technologii montażu rozstaw połączeń (długość segmentu) będzie rzędu $2,5 + 4,0$ m, por. [7]. Jeśli połączenia w tego typu konstrukcji będą zwymiarowane jedynie na nośność, przy niekorzystnym (z uwagi na sztywność połączenia) doborze wymiarów elementów połączenia, może wystąpić nawet 30+40 procentowy ubytek sztywności konstrukcji w stosunku do sztywności konstrukcji o połączeniach niepodatnych.

5. Kierunki dalszych badań

Przedstawiony model obliczeniowy połączenia oparty jest na pewnej liczbie założeń upraszczających, których słuszność może być ograniczona, i tym samym nie stanowi ostatecznego rozwiązania problemu.

Model ten stwarza jednak ramy formalne pozwalające na postawienie pewnej liczby zadań, których rozwiązanie pozwoliłoby na bardziej zbliżoną do rzeczywistości ocenę zachodzących zjawisk.

Przedstawia się propozycje badań o charakterze teoretycznym, analiz numerycznych jak i weryfikację doświadczalną. Oprócz tego formułuje się problemy związane z wpływem obecności połączeń na statykę i dynamikę obiektów, wykorzystujące możliwości stworzone przez przedstawiony model (lub jego ewentualne udoskonalone wersje).

5.1. Badania teoretyczne i analizy numeryczne

Poniżej podaje się kierunki dalszych prac, których celem byłoby uściślenie i rozszerzenie zakresu ważności przedstawionego modelu obliczeniowego połączenia kołnierzego. Do najważniejszych zdaniem autora zaliczyć należy działania wymienione poniżej:

1. Uwzględnienie nieliniowości fizycznej (cechy sprężysto-plastyczne) w opisie pracy kołnierza. Prowadziłoby to do kontaktowego zadania sprężysto-plastycznego dla płyty średniej grubości. Celem obliczeń byłoby przede wszystkim:
 - określenie nośności granicznej segmentu kołnierza w warunkach więzów jednostronnych dla ugięć,
 - określenie wpływu redystrybucji naprężeń w kołnierzu na wielkość efektu dźwigni,
 - budowanie nieliniowych charakterystyk $p - \Delta$ dla strefy rozciąganej.

Wydaje się iż ustalone w wyniku takiej analizy wielkości współczynników efektu dźwigni byłoby mniejsze niż uzyskane w zakresie sprężystym. Główną trudnością byłby niezbędny nakład pracy obliczeniowej. Przeprowadzenie eksperymentu numerycznego o podobnym zakresie jak w niniejszej pracy, byłoby bardzo trudne w obecnych warunkach krajowych.

2. Uściślenie modelu obliczeniowego śruby

Dążenie do osiągnięcia jak najlepszej zgodności modelu obliczeniowego połączenia z rzeczywistością wymagałoby podjęcia próby opisu stanu naprężenia i deformacji w elementach śruby i otaczającym ją obszarze kołnierza z uwzględnieniem:

- a/ pracy przestrzennej
- b/ nieliniowości fizycznej
- c/ zjawisk kontaktowych

Inaczej niż w pracach [34], gdzie ograniczono się do zadania osiowo symetrycznego, niezbędne byłoby jednak powiązanie tego zadania z analizą całości segmentu kołnierza, co jawi się jako zadanie o ogromnej złożoności obliczeniowej.

Wyniki dałyby możliwości realistycznej oceny skutków wstępnego sprężenia połączenia, co nie było dotychczas możliwe, a także pozwoliłyby na określenie znaczenia zginania śrub.

3. Wpływ nieliniowości związków $p-\Delta$ w strefie rozciąganej na pracę połączenia

Badania określone w p.1 i 2 prowadziłyby do ustalenia nieliniowych charakterystyk odkształcalności strefy rozciąganej $\Delta = f(p)$. Przykładowo mając ustalone :

początkową podatność k_0

graniczne obciążenie p_{gr}

można postulować postać takiej zależności jako:

$$\Delta(p) = H(p) \frac{k_0 p}{1 - \left(\frac{p}{p_{gr}}\right)^\alpha} \quad 5.1.1$$

gdzie wykładnik α należałoby określić na drodze eksperymentu numerycznego (wg pkt.1 lub 1 i 2) najlepiej zweryfikowanego doświadczalnie.

Badanie wpływu nieliniowej odkształcalności strefy rozciąganej na odkształcalność połączenia jako całości i na redystrybucję naprężeń w połączeniu możnaby przeprowadzić w oparciu o formalizm wyprowadzony w rozdziale 3. Komplet równań obejmowałby równanie zgodności przemieszczeń, które przybrałoby postać nieliniowego równania całkowego i równania równowagi:

$$\frac{M}{\pi r^2} \int_0^{\pi} \tilde{U}(\alpha, \varphi) x(\alpha) d\alpha = \operatorname{erccos} \varphi + \frac{p}{2kN} - \frac{k_0 H C \left(\frac{rN}{2M} + \cos \varphi + x(\varphi) \right)}{1 - \left[\frac{\frac{M}{\pi r^2} \left(\frac{rN}{2M} + \cos \varphi + x(\varphi) \right)}{P_{gr}} \right]^\alpha} \times$$

$$\times \frac{M}{\pi r^2} \left(\frac{rN}{2M} + \cos \varphi + x(\varphi) \right)$$

$$\int_0^{\pi} x(\alpha) d\alpha = 0 \quad 5.1.3$$

$$\int_0^{\pi} x(\alpha) \cos \alpha d\alpha = 0 \quad 5.1.4$$

Do rozwiązania powyższego należałoby zastosować odpowiednie procedury przyrostowo-iteracyjne, niemożliwe byłoby zastosowanie metody odwrotnej jak dla zadania z liniową zależnością $p - \Delta$. Wyniki dałyby możliwość określenia charakterystyk odkształcalności połączenia $\vartheta = \vartheta(M, N)$ i oceny nośności połączenia jako całości.

4. Badanie wpływu wprowadzenia uszczelnień

W pracy [6] postuluje się wprowadzenie warstwy uszczelniającej (w postaci np. sznura azbestowego) pomiędzy kołnierze jako środka zapobiegającego nadmiernej korozji połączeń kominów stalowych odprowadzających gazy lub spaliny agresywne. Zdaniem autora rozwiązanie takie jest dopuszczalne jedynie gdy trzon komina nie jest samonośny, lecz na przykład obudowany wieżą kratową lub o konstrukcji żelbetowej.

W przypadku przeciwnym mogłoby ono prowadzić do nadmiernej odkształcalności połączeń. Wyrowadzony model obliczeniowy można, po odpowiedniej modyfikacji zastosować do teoretycznego zbadania także i tego zjawiska, pod warunkiem wcześniejszego ustalenia (jedyną drogą postępowania byłoby tu badanie doświadczalne) charakterystyki odkształcalności warstwy materiału izolacyjnego w zależności od ściskającej ją siły.

5.2. Propozycje doświadczalnej weryfikacji modelu obliczeniowego

Szersze zastosowanie przedstawionego w niniejszej pracy teoretycznego modelu obliczeniowego połączenia w praktyce projektowej musiałyby być, jak zwykle w takich przypadkach, poprzedzone jego weryfikacją doświadczalną. Poniżej przedstawia się propozycje badań zarówno laboratoryjnych jak i na obiektach rzeczywistych, służących temu celowi.

5.2.1. Badania laboratoryjne

Badania laboratoryjne na modelach połączeń o skali zbliżonej do naturalnej należałoby przeprowadzić, celem zweryfikowania uzyskanych w pracy rezultatów teoretycznych dotyczących:

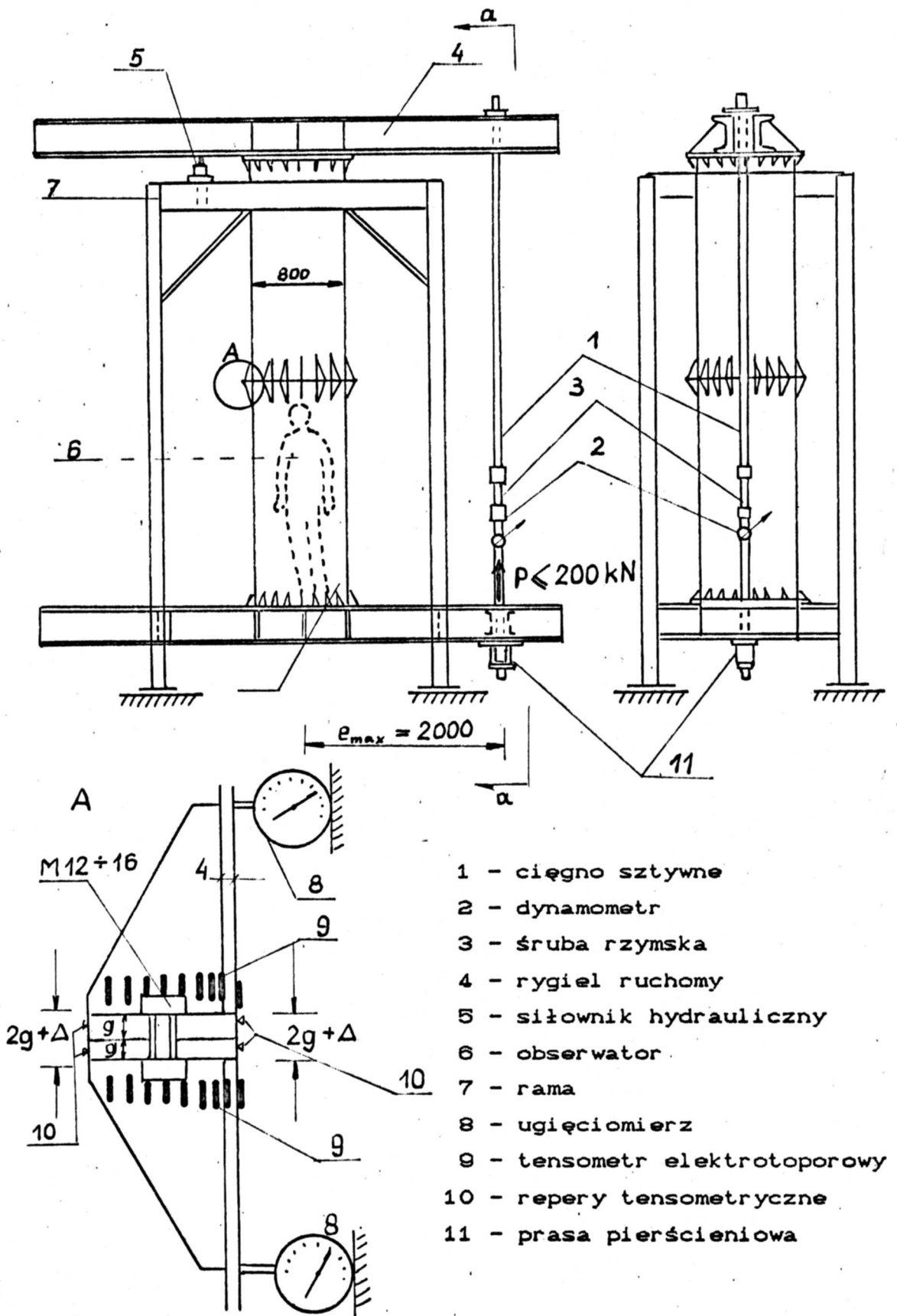
- 1' wielkości i rodzaju efektu dźwigni
- 2' odkształcalności połączenia z uwzględnieniem obrotu żebra
- 3' rozkładu obciążeń w połączeniu przy zginaniu (zasięg strefy rozciąganej p , p_{max} , p_{min})
- 4' koncentracji naprężeń

Proponowany model i schemat stanowiska badawczego wraz z wymaganym oprzyrządowaniem pokazano na rysunku.

Średnica modelu wynika z konieczności zapewnienia dostępu (możliwość obsługi czujników przemieszczeń) do wnętrza rury.

Przy zachowaniu proporcji wymiarów jak dla połączeń stosowanych w praktyce, chcąc mierzyć wielkości takie jak rozwarcia styku i przemieszczenia poziome żebra za pomocą standardowych czujników o dokładności odczytu 0,01mm model musiałby być obciążony znacznymi siłami rzędu 200 kN.

Wielkości wymienione w pkt.1-4 należałoby mierzyć zmieniając mimośrodowo i zwroty przykładanych sił, co umożliwiłoby weryfikację założeń modelu w szerokim zakresie parametrów obciążenia.



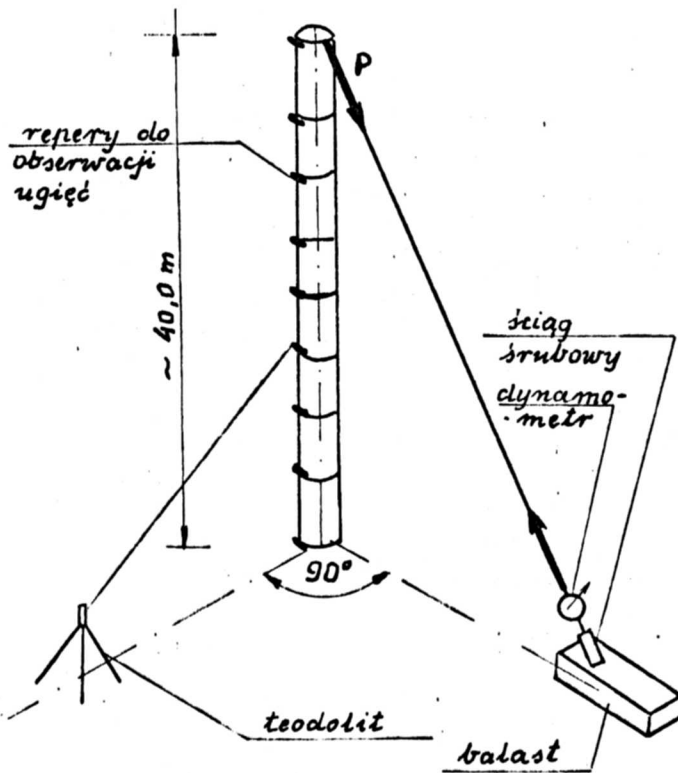
Rys. 5.2.1

5.2.2. Badania na obiekcie rzeczywistym

Proponowane badanie rzeczywistego obiektu o charakterze wieżowym - najlepiej nowo wznoszonego komina wolnostojącego o znacznej liczbie połączeń, średniej wysokości, pozwoliłoby zweryfikować rezultaty dotyczące charakterystyk kształcalności połączenia jako całości (wg pkt 3.5.4.).

Badanie polegałoby na obciążeniu komina siłą ukośną o zmiennej wartości, a w miarę możliwości także i kierunku, realizowanym za pomocą kontrolowanego naciągu przymocowanego do wierzchołka komina odciągu.

Geodezyjny pomiar ugięć poziomych wzdłuż wysokości komina w płaszczyźnie działania momentu, przeprowadzony przy bezwietrznej pogodzie i ich porównanie z wielkościami obliczonymi wg rozważanego w pracy modelu mogłyby udzielić cennej informacji o trafności proponowanego modelu.



Rys. 5.2.2

5. Związane problemy badawcze

Prezentowany w pracy model obliczeniowy połączenia kołnierzowego, zezwalający na tworzenie charakterystyk odkształcalności połączenia, stwarza możliwość sformułowania wymienionych poniżej problemów dotyczących wpływu obecności połączeń na statykę i dynamikę konstrukcji.

Ich postawienie jest uzasadnione tym, iż w skrajnym przypadku (duża liczba niedostatecznie sztywnych połączeń) ubytek sztywności konstrukcji wywołany odkształcalnością może sięgać (a nawet przekraczać) 50% sztywności konstrukcji o połączeniach niepodatnych.

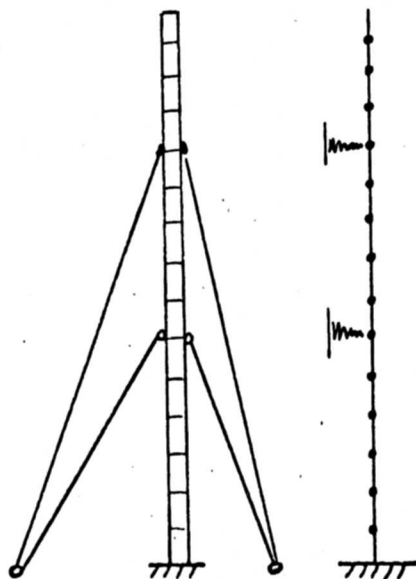
5.3.1. Wpływ odkształcalności połączeń na wielkości statyczne

a/ konstrukcje statycznie wyznaczalne

Podatność połączeń może mieć pewien wpływ na statykę (oraz stateczność ogólną) obiektów o charakterze wieżowym o schemacie obliczeniowym pionowego wspornika (kominy wolnostojące, maszty rurowe), o ile ich smukłość jest na tyle duża iż uwzględnić należy efekty drugiego rzędu.

b/ konstrukcje statycznie niewyznaczalne

Typowymi przykładami konstrukcji, w których odkształcalność połączeń może wpłynąć na rozkład sił wewnętrznych będą kominy (lub wieże rurowe) z odciągami lub dodatkowymi konstrukcjami wsporczymi, o ile, jako całość stanowią ustrój statycznie niewyznaczalny.



Rys. 5.3.1

Dokładnym schematem obliczeniowym będzie w tym przypadku pręt na nieliniowo sprężystych podporach z przegubami sprężystymi o nieliniowej (określonej w pracy) charakterystyce. Źródłem dodatkowej nieliniowości w tym układzie może być również fakt, iż siła ściskająca (pionowa składowa sił w odciągach zmienia się wraz z przemieszczeniami).

5.3.2. Wpływ odkształcalności połączeń na dynamikę obiektów

W obiektach wieżowych narażonych na dynamiczne działanie wiatru (lub wpływy sejsmiczne na terenach sejsmicznie aktywnych), ich sztywność jest wielkością wpływającą w sposób istotny na charakter odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Wydaje się, że przybliżonej oceny wpływu podatności połączeń możnaby dokonać przyjmując zlinearyzowane formy charakterystyki $\vartheta = \vartheta(CM)$.

Stosunek okresu drgań własnych konstrukcji o połączeniach podatnych T_{pod} do okresu drgań własnych konstrukcji i połączeń sztywnych możnaby wówczas oszacować jako pierwiastek stosunku ugięć statycznych (lub sztywności) w obu tych przypadkach, ze wszystkimi tego konsekwencjami dla konstrukcji:

$$T_{pod} = T_{\infty} \sqrt{\frac{w_{pod}}{w_{\infty}}} \quad 5.3.1$$

Dokładna analiza tych zagadnień wymagałaby całkowania nieliniowych równań ruchu konstrukcji (pręt z przegubami nieliniowymi) pod wpływem impulsów modelujących np. działanie porywu wiatru. Uwzględniając nieliniową i nieodwracalną zależność $p - \Delta$ w strefie rozciąganej (sprężysto-plastyczna praca przy obciążaniu, powrót sprężysty) możnaby podjąć próbę zamodelowania tłumienia wywołanego obecnością połączeń.

Interesującym problemem było by również zbadanie wpływu podatności połączeń na drgania wywołane odrywaniem się wirów Bernarda- Karmana, por [22].

6. Podsumowanie

Zgodnie ze sprecyzowanym w pkt.1.2. zakresie pracy, przedstawiony teoretyczny model obliczeniowy połączenia kołnierzowego umożliwia :

- 1' ocenę wpływu odkształcalności układu śruba-kołnierz-żebro na rozkład naprężeń w połączeniu,
- 2' podanie zależności pomiędzy działającymi na połączenie siłami wewnętrznymi M i N , a wzajemnym obrotem i przemieszczeniem osiowym łączonych elementów,
- 3' określenie deformacji strefy rozciąganej,
- 4' określenie wielkości sił i naprężeń w poszczególnych elementach strefy rozciąganej połączenia.

W analizie uwzględniono więzy o charakterze jednostronnym nałożone na niektóre wielkości statyczne i kinematyczne, wynikające ze specyfiki pracy elementów połączenia (nieliniowość strukturalna), przy jednoczesnym założeniu liniowości fizycznej i geometrycznej układu.

Wyniki obliczeń komputerowych zostały usystematyzowane i są przedstawione w formie elementarnych wzorów, nomogramów i tablic, tak że możliwe jest odręczne przeprowadzenie rachunków mających na celu nie tylko określanie sił, naprężeń i parametrów deformacji połączenia, ale również ustalanie niezbędnych wymiarów niektórych jego elementów konstrukcyjnych (p.2.5 i p.3.5)

Generalne wnioski wynikające z przeprowadzonych analiz i obliczeń są następujące:

- 1" Wpływ odkształcalności strefy rozciąganej połączenia na rozkład naprężeń w połączeniu nie jest na ogół duży i jako taki może być zaniewany w obliczeniach praktycznych, tym bardziej iż jego pominięcie daje zawyżoną (w stosunku do uściślonej) ocenę wielkości sił działających na strefę rozciąganą. Tym niemniej w pewnym zakresie obciążeń, sprecyzowanym w pkt.3.4.3. (dla połączeń o stosunkowo dużej podatności) uwzględnienie redukcji naprężeń w strefie rozciąganej, mogłoby dać zauważalne efekty.
- 2" Obecność połączeń kołnierzowych może mieć znaczny wpływ na sztywność konstrukcji i związane z nią wielkości statyczne lub dynamiczne. Wpływ ten będzie bardzo silnie zróżnicowany w zależności od geometrii połączeń, ich ilości, działającego na nie obciążenia.

Podaje się formuły analityczne pozwalające uzależnić deformację połączenia jako całości od działającego na nie obciążenia (p. 3.4 i p. 3.5)

3" Bezpieczne projektowanie połączeń kołnierzowych wymaga uwzględniania efektu dźwigni (tj. często występującego zwiększenia się siły w śrubie ponad wielkość sumy obciążenia z przypadającego na nią sektora strefy rozciąganej). Zjawisko to nasila się szczególnie dla połączeń nieuźebrowanych. W połączeniu uźebrowanym jego występowanie i nasilenie będzie silnie zróżnicowane w zależności od wymiarów kołnierza, ilości i wielkości śrub, wysokości żeber usztywniających. Przedstawiony w p. 2.5 algorytm wraz z wynikami zawartymi w pkt. 2.4.5. pozwala na ilościowe zbadanie tego efektu.

Uzyskane wyniki zezwalają na określenie także i innych wielkości statycznych w połączeniu, oraz na określenie pewnych zasad konstruowania (p. 4.)

W zakończeniu podaje się propozycje dalszych badań teoretycznych mających na celu zarówno uściślenie modelu jak i jego wykorzystanie oraz propozycje weryfikacji doświadczalnej.

Z 1 Wykaz literatury

- [1] Augustyn J., Łaguna J., Śliwka W.: Badania sprężonych połączeń doczołowych stalowych elementów rozciąganych. Inżynieria i Budownictwo , nr 7/1982.
- [2] Augustyn J., Łaguna J., Śliwka W.: Badania sprężonych połączeń doczołowych stalowych belek dwuteowych. Inżynieria i Budownictwo , nr 11/1982.
- [3] Babeško V.A.: Obobščionnyj metod faktorizacii v prostranstviennych cmsanych zadačah teoriii uprugosti , Moskwa, 1984.
- [4] Birger I.A.: Opriedielienie podatliwosti promieżutocznych detalej riezbowowo sojedinienia. Vestnik Masinostrojenija nr 5/1965.
- [5] Birger I.A.: Razčiot rezbowych sojedinienij. Moskwa 1959
- [6] Bobkiewicz J., Wichtowski B.: Korozja przewodów stalowych i ich połączeń w kominach przemysłowych odprowadzających gazy agresywne. Mat. XXXI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB Krynica'85.
- [7] Bogucki W., (red. pr. zb.): Poradnik projektanta konstrukcji metalowych, t II. Arkady, W-wa, 1980.
- [8] Bourier, Lefeuvre : Ancrage de cheminees. Construction Metallique, nr 3/1976.
- [9] Campbell S.L., Meyer C.D.: Generalized Inverses of Linear Transformations. Pitchmans Publishing, 1978.
- [10] Colloson A.: Modelization du conprtement non lineaire des assemblages. Construction Metallique, nr 2/1981.
- [11] Cullimore M.S.G, Eckhard J.B.: The distribution of the clamping pressure in friction-grip bolted joints. The Structural Engineer ,nr 4/1974 , vol 52.
- [12] Dalquist G., Björck A.: Metody Numeryczne. PWN, W-wa, 1983
- [13] Daniłow W.K.: Eksperymentalnoje opredelenije flancew na szatie. Vestnik Mašinostrojenija, nr 6/1959.
- [14] Daniłow W.K.: Opriedelenije koeficenta nagruzki i razpredelenija napraženij w stykie pri projektirowanii zatianutyh bołtowych sojedinienij. Inz. fiz žurnal AN BSSR, nr 8/1958.

- [15] Delesques R.: Resistance a une charge concentrée d'une plaque rectangulaire ayant un bord libre, Construction Metallique, nr 2/1976.
- [16] Duvant G., Lions J.L.: Inequalities in Mechanics and Physic . Berlin, Springer-Verlag, 1976.
- [17] Fernlund I.: A method to calculate the pressure between bolted or riveted plates. Trans. G.U.T., Gothenburg 1961.
- [18] Fichtenholz G.,M.: Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, W-wa, 1985.
- [19] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. PWN, W-wa, 1977.
- [20] Flüge W.: Powłoki. Obliczenia statyczne. Arkady, W-wa, 1972
- [21] Fritsche G.: Grundlagen einer genaueren Berechnung statisch und dynamisch beanspruchter Schraubenverbindungen. Disertation T.U. Berlin ,1962.
- [22] Gaczek M.: Wolnostojące kominy stalowe z turbulizatorami spiralnymi. Inżynieria i budownictwo, nr 9/1979.
- [23] Grudziński K., Kawiak R.: Zagadnienie modelowania połączeń śrubowych metodą elementów skończonych. Sympozjum "Modelowanie w mechanice", Beskid Śląski 1981, Zbiór referatów.
- [24] Hinton E., Owen D.,R.: Finite Elements Software for Plates and Shells. Pineridge Press, Swansea, 1984.
- [25] Hinton E., Owen D.,R.: Finite Elements in Plasticity. Pineridge Press, Swansea, 1981.
- [26] Hinton E., Owen D.,R.: Finite Element Programing. Academic Press, 1977.
- [27] Huyeghes T.J.R., Cohen M.: The 'heterozis' finite element for plate bending. Computer and Structures, nr 9/1981.
- [28] Huyeghes T.J.R., Cohen M., Haroun M.: Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. Nucl. Engng. and Design, 46, 1978.
- [29] Josielewicz G.B., Ryś J.G.: Issledowanije usilij w bołtach sojedinienij s kolcowymi kontakturitujuščimi fłancamni pri diejstwi raztiagiwajuščich i izgibojuščich nagruzok. Razčety na pročnost w. 14 ,1969.
- [30] Junker G., Blume D.: Neue Wege einer systematischen Schraubenberechnung. Teil I "Schrauben, Muttern, Formteile " Heft 4, August 1964 als Beilage der "Dracht-Welt" 50 (1964) Heft 8

- [31] Kączkowski Z.: Płyty. Obliczenia statyczne, Arkady, W-wa, 1980.
- [32] Kłapoc M., Krzeszewski W.: Propozycje nowych rozwiązań kominów przemysłowych. Mat. XXXI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica'85.
- [33] Korn G.A., Korn T.M., Matematyka, PWN, W-wa, 1982.
- [34] Krzyśpiak A., Kwiatkowski J., Winnicki L.A.: Analiza statyczna rozciąganego połączenia doczołowego sprężonego śrubami. V Konferencja. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji. Wyd. Polit. Wrocławskiej, Wrocław, 1981.
- [35] Lindelof T. (ed): CERN Program Library. CERN Computer Center, 1986.
- [36] Łaguna J., Łypacewicz K.: Połączenia śrubowe i nitowe. Arkady, W-wa, 1986.
- [37] Łukasiewicz S.: Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach, PWN, W-wa, 1976.
- [38] Marczuk G., I.: Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej. PWN, W-wa, 1983.
- [39] Mazurkiewicz Z.E., Nagórski R., T.: Powłoki obrotowe sprężyste. PWN, W-wa, 1987.
- [40] Michlin S.G., Smolicki C.K.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych. PWN, W-wa, 1970.
- [41] Muc A.: Theoretical and numerical aspects of contact problems for shells. Journal of Applied Math. and Physic, CZAPM, vol 35, 1984.
- [42] Nowacki W.: Dźwigary powierzchniowe. PWN, W-wa, 1979.
- [43] Othake K., Oden J.T., Kikuchi N.: Analysis of certain unilateral problems in von Karman plate theory by a penalty method. The University of Texas, Austin, 1979.
- [44] Parton V., Perline P.: Methodes de la theorie mathematique de l'elasticite. Moskwa, 1983.
- [45] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, W-wa, 1971.
- [46] Pivlin P., Modele de comportement statique des liaisons de structure a barres. Construction Metallique, nr 2/1984.
- [47] Popov G.J.: Koncentracija uprugich napriazhenij vozle štampov, razrezov i tonkich vklucenij. Moskwa, 1982.
- [48] Przychodzki J.: Nowe konstrukcje stalowych kominów przemysłowych. Prace centralnego ośrodka BISTYP, nr 4/78.
- [49] Rońda J.: Niestacjonarne zagadnienia kontaktowe, (rozpr. hab.). Politechnika Warszawska (w druku).

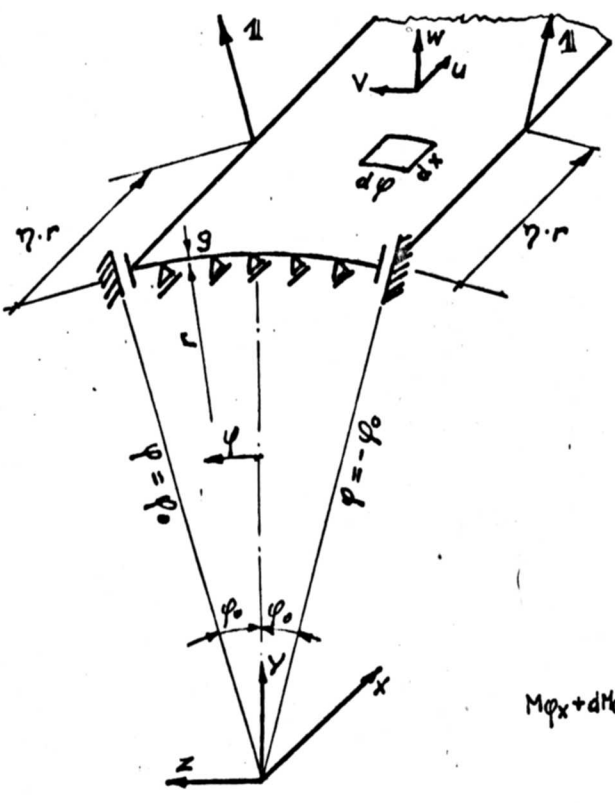
- [50] Rötsher F.: Die Maschinenelemente. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1927.
- [51] Shibahara M., Oda J.: On clamping stiffnesses of abutments in bolted joints. Bulletin of the JSME, vol.15, nr 79, 1972.
- [52] Shibahara M., Oda J.: Problem of the hollow cylinders under the axially symmetrical deformation. Bulletin of the JSME, vol.15, nr 79, 1968.
- [53] Szlendak J.: Wykorzystanie podatności węzłów przy racjonalnym kształtowaniu ram. Mat. XXXI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica'85.
- [54] Sztandera A.: Nośność połączeń na śruby sprężające. (Crozpr. dokt.) Polit. Warszawska, 1979.
- [55] Tanaka M., Hongo K., Asaba E.: Finite element analysis of the threaded connections subjected to external loads. Bulletin of the JSME, vol.25, nr 200, 1982.
- [56] Timoszenko S., Wojnowsky-Krieger S. Teoria płyt i powłok. Arkady, W-wa, 1962.
- [57] Washizu K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, 1984.
- [58] Witkowski J.: Optymalne kształtowanie elementów złącza śrubowego, (Crozpr. dokt.) Polit. Warszawska, 1973.
- [59] Witkowski J.: Charakterystyka eksploatacyjnych zmian obciążeń elementów złącza śrubowego. Archiwum budowy maszyn, Tom XXI, 1974, zeszyt 3.

Normy i przepisy krajowe

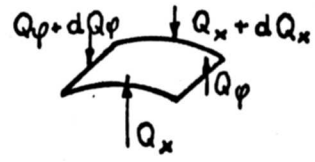
- [60] PN-68/M-52021 Kominy stalowe wolnostojące.
- [61] BN 76/2378-01 Instalacje odpylające. Kominy stalowe wolnostojące.
- [62] PN-85/M-82101 Śruby zwykłe z łbem sześciokątnym.
- [63] Wytyczne projektowania, wykonania i odbioru doczołowych połączeń elementów konstrukcji stalowych sprężonych śrubami o wysokiej wytrzymałości. COBPKM "Mostostal" W-Wa, 1978.

Z2. Funkcja wpływu przemieszczeń normalnych wycinka powłoki walcowej obciążonej wzdłuż tworzących

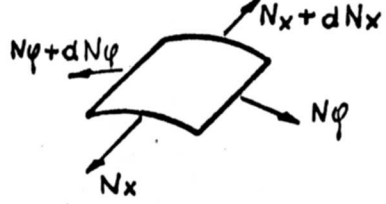
Z2.1 Sformułowanie zadania



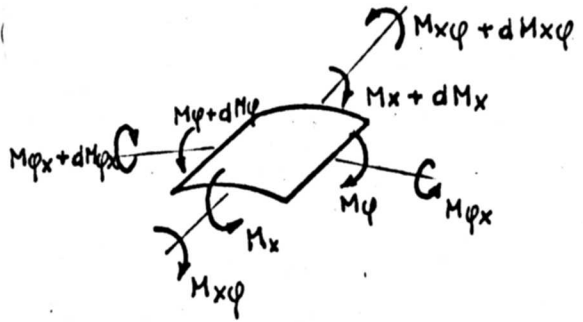
siły poprzeczne



siły podłużne



momenty zginające



rys Z2.1 Warunki brzegowe, znakowanie sił wewnętrznych

Oznaczenia :

Z 2.1

$$\xi = \frac{x}{r}, \quad f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad \nabla^{2n} = \nabla^2 (\nabla^{2(n-1)})$$

$$K = \frac{Eg^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Eg}{1-\nu^2} \quad \text{Z 2.2}$$

Rozważa się jednostronnie nieograniczony wycinek powłoki walcowej o promieniu r i grubości g , wykonany z materiału liniowo sprężystego o module sprężystości E i współczynniku Poissona ν , którego deformacja jest opisana równaniami przemieszczeniowymi uproszczonej teorii powłok walcowych Z2.3

$$\nabla^4 w + \frac{1-\nu^2}{k} w^{IV} = 0, \quad \text{Z 2.3a}$$

$$\nabla^4 v = -(2-\nu)w'''' - w''''', \quad \text{Z 2.3b}$$

$$\nabla^4 u = -\nu w'''' + w''''', \quad \text{Z 2.3c}$$

gdzie:

$$k = \frac{g}{12 r^2}$$

Z 2.3d

Obciążenie stanowi układ dwóch jednostkowych sił skupionych działających prostopadle do powłoki w punktach leżących na tworzących $\varphi = \pm\varphi_0$, w dowolnej odległości $x' = \eta r$ od krawędzi $x = 0$.

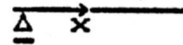
$$p(x) = 1 \delta(x-x') = \frac{1}{r} \delta(\xi - \eta)$$

Z 2.4

gdzie $\delta(\cdot)$ jest dystrybucją δ -Diraca.

Statyczne i kinematyczne warunki brzegowe zadania są następujące:

-swobodne podparcie na krawędzi $x=0$



$$w(0, \varphi) = 0,$$

Z 2.6a

$$v(0, \varphi) = 0,$$

Z 2.6b

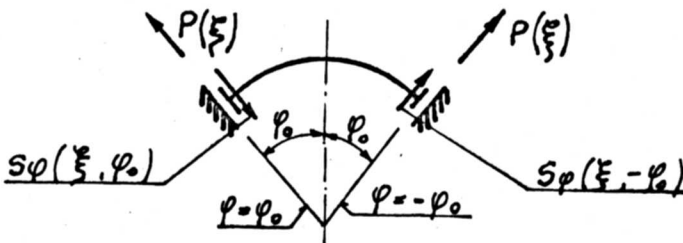
$$M_x(0, \varphi) = \frac{K}{r^2} (\nu \ddot{w} + \dot{w}') \Big|_{\xi=0} = 0.$$

Z 2.6c

$$N_x(0, \varphi) = \frac{D}{r^2} (u' + \nu v' + \nu w') \Big|_{\xi=0} = 0.$$

Z 2.6d

-warunki symetrii względem płaszczyzn $\varphi = \pm\varphi_0$ wzdłuż tworzących



rys. 2.2

$$v(\xi, \pm\varphi_0) = 0,$$

Z 2.7a

$$\dot{w}(\xi, \pm\varphi_0) = 0,$$

Z 2.7b

$$N_{x\varphi}(\xi, \pm\varphi_0) = \frac{D(1-\nu)}{2r} (u' + v') \Big|_{\varphi = \pm\varphi_0} = 0,$$

Z 2.7c

oraz warunki statyczne na zastępczą siłę poprzeczną S_φ

$$S_\varphi = Q_\varphi + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x}$$

dla $\varphi = \varphi_0$

$$S_\varphi(\xi, \varphi_0) = -p(\xi)$$

dla $\varphi = -\varphi_0$

$$S_\varphi(\xi, -\varphi_0) = p(\xi)$$

Z 2.7d

Korzystając ze związków Z2.8 pomiędzy siłami wewnętrznymi a przemieszczeniami, warunki statyczne Z2.7d można wyrazić przez przemieszczenia :

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{r} (M_{\varphi} + M_{x\varphi})', \quad \text{Z 2.8a}$$

$$M_{\varphi} = \frac{K}{r^2} (w'' + \nu w'''), \quad \text{Z 2.8b}$$

$$M_{x\varphi} = \frac{K(1-\nu)}{r^2} w''', \quad \text{Z 2.8c}$$

$$S_{\varphi} = \frac{1}{r} (M_{\varphi} + M_{x\varphi})' = \frac{K}{r^3} (w'''' + (2-\nu)w'''''), \quad \text{Z 2.9}$$

i stąd

$$(w'''' + (2-\nu)w''''') \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0} = \mp \frac{r^3}{K} p(\xi). \quad \text{Z 2.10}$$

Ponadto zakłada się że dla $x \rightarrow \infty$ wszystkie składowe przemieszczeń, oraz ich pochodne dowolnego rzędu dążą do 0.

Wprowadza się pomocniczą stałą ψ daną wzorem:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-\nu}{k}} = \sqrt{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{r}{g}} \quad \text{Z 2.11}$$

Równanie Z 2.3a przybierze wówczas postać:

$$\nabla^4 w + 4\psi^4 w^{IV} = 0, \quad \text{Z 2.12}$$

a warunek Z 2.10 :

$$(w'''' + (2-\nu)w''''') \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0} = \mp \frac{4\psi^6}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} p(\xi). \quad \text{Z 2.13}$$

Z 2.2 Rozwiązanie równań przemieszczeniowych

Zastosowanie przekształcenia całkowego Fouriera w przedziale $[0, \infty)$ (tzw \mathcal{F} -transformaty)

-sinusowego danego wzorem Z 2.14a

$$\mathcal{F}_s(f) = \underline{f}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \xi \tau d\xi \quad \text{Z 2.14a}$$

do równań Z 2.3a, Z 2.3b i warunków Z 2.7a, Z 2.10 ,
oraz κ sinusowego

$$\mathcal{F}_0(f) = \underline{f}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \xi \tau \, d\xi \quad \text{Z 2.14b}$$

do pozostałych, pozwala sprowadzić układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych Z 2.6, określony w obszarze półpasma $(-\varphi_0, \varphi_0) \times (0, \infty)$ do układu równań różniczkowych zwyczajnych Z 2.15-Z 2.17 z warunkami Z 2.18 - Z 2.19 dla transformat $\underline{w}(\tau, \varphi)$, $\underline{v}(\tau, \varphi)$, $\underline{u}(\tau, \varphi)$ określony na odcinku $(-\varphi_0, \varphi_0)$.

$$\underline{w}^{(8)} - 4\tau^2 \underline{w}^{(6)} + 6\tau^4 \underline{w}^{(4)} - 4\tau^6 \underline{w}^{(2)} + \tau^8 \underline{w} + 4\psi^4 \tau^4 \underline{w} = 0 \quad \text{Z 2.15}$$

$$\underline{v}^{(4)} - 2\tau^2 \underline{v}^{(2)} + \tau^4 \underline{v} = \tau^2(2+\nu) \underline{w} - \underline{w} \quad \text{Z 2.16}$$

$$\underline{u}^{(4)} - 2\tau^2 \underline{u}^{(2)} + \tau^4 \underline{u} = i\nu\tau^3 \underline{w} + i\tau \underline{w} \quad \text{Z 2.17}$$

$$\underline{v}|_{\varphi=\pm\varphi_0} = 0 \quad \text{Z 2.18}$$

$$\underline{w}|_{\varphi=\pm\varphi_0} = 0 \quad \text{Z 2.19}$$

$$(\underline{u} + i\tau \underline{v})|_{\varphi=\pm\varphi_0} = 0 \quad \text{Z 2.20}$$

$$(\underline{w} - (2-\nu)\tau^2 \underline{w})|_{\varphi=\pm\varphi_0} = \mp P \quad \text{Z 2.21}$$

gdzie:

$$P = \frac{4\psi^6}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{1}{\text{Er}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \eta \tau. \quad \text{Z 2.22}$$

Korzysta się przy tym ze związków Z 2.23 pomiędzy \mathcal{F} -transformatami funkcji i jej pochodnych oraz ze wzoru Z 2.24 na sinusową \mathcal{F} -transformatę dystrybucji δ .

$$\mathcal{F}(f') = (i\tau) \mathcal{F}(f) \quad \text{Z 2.23}$$

$$\mathcal{F}_0(f') = i\tau \mathcal{F}_0(f)$$

$$\underline{p}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} p(\xi) \sin \xi \tau \, d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \delta(\xi - \eta) \sin \xi \tau \, d\xi = \quad \text{Z 2.24}$$

$$= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \eta \tau$$

Poszukiwane funkcje przemieszeń w, v, u znajdzie się jako retransformaty:

$$w(\xi, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \underline{w}(\tau, \varphi) \sin \xi \tau \, d\tau \quad \text{Z 2.25}$$

$$v(\xi, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \underline{v}(\tau, \varphi) \sin \xi \tau \, d\tau \quad \text{Z 2.26}$$

$$u(\xi, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \underline{u}(\tau, \varphi) \cos \xi \tau \, d\tau \quad \text{Z 2.27}$$

spełniające automatycznie zadane warunki na brzegu $\xi=0$.

Całkę ogólną równania Z 2.15 zakłada się w postaci Z 2.28

$$\underline{w} = \sum_{k=1}^B D_k^* e^{\mu_k \varphi} \quad \text{Z 2.28}$$

gdzie μ_k są pierwiastkami równania charakterystycznego Z 2.29, a D_k^* są zespolonymi stałymi całkowania.

$$(\mu^2 - \tau^2)^4 + 4\psi^4 \tau^4 = 0 \quad \text{Z 2.29}$$

Równanie Z 2.29 można zapisać w równoważnej postaci Z 2.30

$$[(\mu^2 - \tau^2)^2 + 2i(\psi\tau)^2][(\mu^2 - \tau^2)^2 - 2i(\psi\tau)^2] = \quad \text{Z 2.30}$$

$$[\mu^2 - \tau^2 - (i+1)\psi\tau][\mu^2 - \tau^2 + (i+1)\psi\tau][\mu^2 - \tau^2 - (i-1)\psi\tau][\mu^2 - \tau^2 + (i-1)\psi\tau] = 0$$

Wykorzystano tu związki Z 2.31 dla jednostki urojonej i

$$\frac{(1+i)^2}{2} = i, \quad \frac{(1-i)^2}{2} = -i \quad \text{Z 2.31}$$

Z Z 2.30 wynikają następujące wzory na parami sprzężone sprzężone pierwiastki równania charakterystycznego $\mu_{k,k'}$, $\bar{\mu}_{k,k'}$

$$\mu_{1,1'} = \pm \tau \alpha_1, \quad \alpha_1^2 = 1 + (1+i) \frac{\psi}{\tau}$$

$$\bar{\mu}_{1,1'} = \pm \tau \bar{\alpha}_1, \quad \bar{\alpha}_1^2 = 1 + (1-i) \frac{\psi}{\tau}$$

Z 2.32

$$\mu_{2,2'} = \pm \tau \alpha_2, \quad \alpha_2^2 = 1 - (1-i) \frac{\psi}{\tau}$$

$$\bar{\mu}_{2,2'} = \pm \tau \bar{\alpha}_2, \quad \bar{\alpha}_2^2 = 1 - (1+i) \frac{\psi}{\tau}$$

Można więc zapisać:

Z 2.33

$$\begin{aligned} \underline{w}(\tau, \varphi) &= \sum_{k=1,2} (D_k e^{\mu_k \varphi} + D_k e^{-\mu_k \varphi} + \hat{D}_k e^{\bar{\mu}_k \varphi} + \hat{D}_k e^{-\bar{\mu}_k \varphi}) = \\ &= \sum_{k=1,2} (C_k \cosh \mu_k \varphi + C_k \sinh \mu_k \varphi + \hat{C}_k \cosh \bar{\mu}_k \varphi + \hat{C}_k \sinh \bar{\mu}_k \varphi) \end{aligned}$$

Z symetrii przemieszczenia w względem płaszczyzny $\varphi=0$ wynika

że: $C_k = \hat{C}_k = 0$, a ponadto: $\hat{C}_k = \bar{C}_k$.

Ostatecznie uzyskuje się:

$$\underline{w}(\tau, \varphi) = \sum_{k=1,2} (C_k \cosh \mu_k \varphi + \bar{C}_k \cosh \bar{\mu}_k \varphi) \quad \text{Z 2.34}$$

gdzie:

$$\mu_k = \tau \alpha_k(\tau) \quad , \quad \alpha_{1,2}^2 = 1 \pm (1 \pm i) \frac{\nu}{\tau}$$

\mathcal{F} -transformaty pozostałych składowych wektora przemieszczeń można otrzymać znajdując całki szczególne równań Z2.16 i Z2.17 przy założeniu występującego po ich prawej stronie \underline{w} w postaci Z 2.34.

$$\underline{u}(\tau, \varphi) = \sum_{k=1,2} (A_k \cosh \mu_k \varphi + \bar{A}_k \cosh \bar{\mu}_k \varphi) \quad \text{Z 2.35}$$

$$\underline{v}(\tau, \varphi) = \sum_{k=1,2} (B_k \sinh \mu_k \varphi + \bar{B}_k \sinh \bar{\mu}_k \varphi) \quad \text{Z 2.36}$$

Występujące tu stałe całkowania A_k, B_k będące funkcjami τ należy wyrazić poprzez stałe C_k . Dla każdej z nich musi zachodzić:

-z równania Z 2.16

$$A_k (\mu_k^2 - \tau^2)^2 \cosh \mu_k \varphi = (\nu i \tau^2 + i \tau \mu_k^2) C_k \cosh \mu_k \varphi \quad , \quad \text{Z 2.37}$$

-z równania Z 2.17

$$B_k (\mu_k^2 - \tau^2)^2 \sinh \mu_k \varphi = (\tau^2 (2 + \nu) \mu_k - \mu_k^3) C_k \sinh \mu_k \varphi \quad , \quad \text{Z 2.38}$$

Podstawiając

$$\Delta_k = (1 - \alpha_k^2)^2 \quad \text{Z 2.39}$$

otrzymujemy:

$$A_k = \frac{i}{\tau} \frac{(\nu + \alpha_k^2)}{\Delta_k} C_k \quad \text{Z 2.40}$$

$$B_k = \frac{1}{\tau} \frac{((2 + \nu) - \alpha_k^2) \alpha_k}{\Delta_k} C_k \quad \text{Z 2.41}$$

Warunki brzegowe Z 2.18 + Z 2.21 prowadzą do następujących związków:

$$\text{Z 2.18} \Rightarrow \underline{v} \Big|_{\varphi = \pm \varphi_0} = 0 \quad \text{Z 2.42}$$

$$= \frac{1}{\tau} \sum_{k=1,2} \left(\frac{((2 + \nu) - \alpha_k^2) \alpha_k}{\Delta_k} C_k \sinh \mu_k \varphi_0 + \frac{((2 + \nu) - \alpha_k^2) \bar{\alpha}_k}{\bar{\Delta}_k} \bar{C}_k \sinh \bar{\mu}_k \varphi_0 \right) = 0$$

$$\text{Z 2.19} \Rightarrow \underline{w} \Big|_{\varphi = \pm \varphi_0} = 0$$

$$= i \tau \sum_{k=1,2} (\alpha_k C_k \sinh \mu_k \varphi_0 + \bar{\alpha}_k \bar{C}_k \sinh \bar{\mu}_k \varphi_0) = 0 \quad \text{Z 2.43}$$

$$\underline{u} = \tau \sum_{k=1,2} (\alpha_k A_k \sinh \mu_k \varphi + \bar{\alpha}_k \bar{A}_k \sinh \bar{\mu}_k \varphi) \quad \text{Z 2.44}$$

$$\underline{v}' = 4\tau \sum_{k=1,2} (B_k \sinh \mu_k \varphi + \bar{B}_k \sinh \bar{\mu}_k \varphi) \quad \text{Z 2.45}$$

$$\text{Z 2.20} \Rightarrow (\underline{u} + \underline{v}') \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0} =$$

$$= \pm 4 \sum_{k=1,2} \frac{[(\nu + \alpha_k^2) + (2 + \nu) - \alpha_k^2] \alpha_k}{\Delta_k} C_k \sinh \mu_k \varphi_0 = \quad \text{Z 2.46}$$

$$= \pm 4 \sum_{k=1,2} \left(\frac{2(1 + \nu) \alpha_k}{\Delta_k} C_k \sinh \mu_k \varphi_0 + \frac{2(1 + \nu) \bar{\alpha}_k}{\bar{\Delta}_k} \bar{C}_k \sinh \bar{\mu}_k \varphi_0 \right) = 0$$

$$\text{Z 2.21} \Rightarrow (\underline{w} - (2 - \nu) \tau^2 \underline{w}') \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0} = \quad \text{Z 2.47}$$

$$= \pm \tau^3 \sum_{k=1,2} \left([\alpha_k^3 - (2 - \nu) \alpha_k] C_k \sinh \mu_k \varphi_0 + [\bar{\alpha}_k^3 - (2 - \nu) \bar{\alpha}_k] \bar{C}_k \sinh \bar{\mu}_k \varphi_0 \right) = \mp P.$$

Stanowią one układ 4 równań liniowych na stałe całkowania C_k, \bar{C}_k , $k=1,2$. Po przekształceniach równania te przyjmują prostą postać Z 2.51 + Z 2.54. Wykorzystuje się przy tym zależności Z 2.48 i Z 2.49 wynikające bezpośrednio z równania charakterystycznego

$$(1 - \alpha_{1,2}^2)^2 + 2i \frac{\psi^2}{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta_{1,2}} = \frac{\tau^2}{2\psi^2 i} = -\frac{i\tau^2}{2\psi^2} \quad \text{Z 2.48}$$

$$(1 - \alpha_{1,2}^2)^2 - 2i \frac{\psi^2}{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{\Delta}_{1,2}} = -\frac{\tau^2}{2\psi^2 i} = \frac{i\tau^2}{2\psi^2} \quad \text{Z 2.49}$$

Wprowadza się ponadto tymczasowe oznaczenia

$$s_k = \sinh \mu_k \varphi_0; \quad \bar{s}_k = \sinh \bar{\mu}_k \varphi_0 \quad \text{Z 2.50}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} s_1 C_1 + \alpha_{11} \bar{s}_1 \bar{C}_1 + \alpha_{22} s_2 C_2 + \alpha_{22} \bar{s}_2 \bar{C}_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{Z 2.51}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} s_1 C_1 - \alpha_{11} \bar{s}_1 \bar{C}_1 - \alpha_{22} s_2 C_2 + \alpha_{22} \bar{s}_2 \bar{C}_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{Z 2.52}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}^3 s_1 C_1 - \alpha_{11}^3 \bar{s}_1 \bar{C}_1 - \alpha_{22}^3 s_2 C_2 + \alpha_{22}^3 \bar{s}_2 \bar{C}_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{Z 2.53}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}^3 s_1 C_1 + \alpha_{11}^3 \bar{s}_1 \bar{C}_1 + \alpha_{22}^3 s_2 C_2 + \alpha_{22}^3 \bar{s}_2 \bar{C}_2 = -\frac{P}{\tau^3} \end{array} \right. \quad \text{Z 2.54}$$

Elementarne przekształcenia prowadzą do następujących wzorów na stałe C_i :

$$C_1 = \frac{1}{2\alpha_1(\bar{\alpha}_2^2 - \alpha_1^2) s_1 \tau^3} P; \quad \bar{C}_1 = \frac{1}{2\bar{\alpha}_1(\alpha_2^2 - \bar{\alpha}_1^2) \bar{s}_1 \tau^3} P \quad Z 2.55$$

$$C_2 = \frac{1}{2\alpha_2(\bar{\alpha}_1^2 - \alpha_2^2) s_2 \tau^3} P; \quad \bar{C}_2 = \frac{1}{2\bar{\alpha}_2(\alpha_1^2 - \bar{\alpha}_2^2) \bar{s}_2 \tau^3} P \quad Z 2.56$$

Ze wzorów Z 2.32 wynika ponadto że:

$$(\bar{\alpha}_2^2 - \alpha_1^2)^{-1} = (-2(1+i) \frac{\psi}{\tau})^{-1} = -\frac{\tau}{4\psi} (1-D) \quad Z 2.57$$

$$(\bar{\alpha}_1^2 - \alpha_2^2)^{-1} = (2(1-i) \frac{\psi}{\tau})^{-1} = \frac{\tau}{4\psi} (1+D) \quad Z 2.58$$

Ostatecznie :

$$C_1 = -\frac{(1-i) P}{\alpha_1 s_1 8\psi\tau^2}; \quad \bar{C}_1 = -\frac{(1+i) P}{\bar{\alpha}_1 \bar{s}_1 8\psi\tau^2} \quad Z 2.59$$

$$C_2 = \frac{(1+i) P}{\alpha_2 s_2 8\psi\tau^2}; \quad \bar{C}_2 = \frac{(1-i) P}{\bar{\alpha}_2 \bar{s}_2 8\psi\tau^2} \quad Z 2.60$$

\mathcal{F} -transformata przemieszczeń $\underline{w}(\tau, \varphi)$ będzie dana wzorem Z 2.61,

$$\underline{w}(\tau, \varphi) = \frac{\psi^5}{\sqrt{3(1-\nu^2)} Er} \frac{1}{2\tau^2} \left\{ \frac{(1+i) \cosh \mu_2 \varphi}{\alpha_2 \sinh \mu_2 \varphi_0} + \frac{(1-i) \cosh \bar{\mu}_2 \varphi}{\bar{\alpha}_2 \sinh \bar{\mu}_2 \varphi} - \frac{(1-i) \cosh \mu_1 \varphi}{\alpha_1 \sinh \mu_1 \varphi_0} - \frac{(1+i) \cosh \bar{\mu}_1 \varphi}{\bar{\alpha}_1 \sinh \bar{\mu}_1 \varphi_0} \right\} \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \eta \tau \quad Z 2.61$$

a przemieszczeń $\underline{w}(\tau, \varphi_0)$ wzdłuż tworzących $\varphi = i\varphi_0$ wzorem Z 2.62

$$\underline{w}(\tau, \varphi_0) = \frac{\psi^5}{\sqrt{3(1-\nu^2)} Er} \frac{1}{2\tau^2} \left\{ \frac{(1+i) \operatorname{ctgh} \mu_2 \varphi_0}{\alpha_2} + \frac{(1-i) \operatorname{ctgh} \bar{\mu}_2 \varphi_0}{\bar{\alpha}_2} - \frac{(1-i) \operatorname{ctgh} \mu_1 \varphi_0}{\alpha_1} - \frac{(1+i) \operatorname{ctgh} \bar{\mu}_1 \varphi_0}{\bar{\alpha}_1} \right\} \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \eta \tau \quad Z 2.62$$

Wprowadzając oznaczenie Z 2.63,

$$\omega(\tau) = \frac{1}{\tau^2} \operatorname{Re} \left[\frac{1+i}{\alpha_2(\tau)} \operatorname{ctgh} \tau \alpha_2(\tau) - \frac{1-i}{\alpha_1(\tau)} \operatorname{ctgh} \tau \alpha_1(\tau) \right] \quad Z 2.63$$

wzór Z 2.62 można przepisać w postaci Z 2.64

$$\underline{w}(\tau, \varphi_0) = \frac{\psi^5}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \text{Er}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega(\tau) \sin \eta \tau \quad \text{Z 2.64}$$

Po wykonaniu odwrotnego przekształcenia dochodzi się do ostatecznej postaci Z 2.65 dla poszukiwanej funkcji wpływu przemieszczeń normalnych wycinka powłoki walcowej obciążonej wzduż tworzącej.

$$W(\xi, \eta) = \frac{\psi^5}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \text{Er}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega(\tau) \sin \eta \tau \sin \xi \tau \, d\tau \quad \text{Z 2.65}$$

Z2.3 Numeryczne wyznaczenie jądra $W(x, y)$

Przedstawiony w załączniku Z3 algorytm rozwiązania równania całkowego wymaga wielokrotnego obliczania wartości funkcji $W(\xi, \eta)$ w obszarze kwadratu $[0, \chi) \times [0, \chi)$. Punkt ten poświęcony jest przedstawieniu metody pozwalającej na efektywne wykonanie tych czynności. Korzystając z tożsamości trygonometrycznej całkę Z2.65 można zapisać jako:

$$W(\xi, \eta) = A \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} [K(\xi - \eta) - K(\xi + \eta)], \quad \text{Z 2.66}$$

gdzie:

$$K(\zeta) = \int_0^{\infty} \omega(\tau) \cos \zeta \tau \, d\tau, \quad \text{Z 2.67}$$

$$A = \frac{\psi^5}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \text{Er}}, \quad \text{Z 2.68}$$

co pozwala zastąpić obliczanie wartości funkcji dwóch zmiennych w obszarze kwadratu $[0, \chi) \times [0, \chi)$ poszukiwaniem wartości funkcji jednej zmiennej $K(\zeta)$ na odcinku $(0, 2\chi)$.

Numeryczne wyznaczenie wartości funkcji $K(\zeta)$ wymaga uprzedniego zbadania asymptotycznego zachowania się funkcji $\omega(\tau)$ na obu końcach przedziału całkowania, tj. dla $\tau \rightarrow 0$ i dla $\tau \rightarrow \infty$. Dla $\tau \rightarrow 0$ wychodząc z postaci Z2.62 oraz korzystając z rozwinięcia funkcji zespolonej ctgh z w szereg w otoczeniu punktu $z = 0$ (Z2.69) można zapisać :

$$\operatorname{ctgh} z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 + \dots$$

Z 2.69

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \omega(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\tau\varphi_0} \left[\frac{1+i}{(\tau\alpha_2)^2} + \frac{1-i}{(\tau\bar{\alpha}_2)^2} - \frac{1-i}{(\tau\alpha_1)^2} - \frac{1+i}{(\tau\bar{\alpha}_1)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi_0}{8\tau} \left[1+i+1-i-(1-i)-(1+i) \right] - \frac{\varphi_0}{90\tau} \left[(\tau\alpha_2)^2(1+i) + (\tau\bar{\alpha}_2)^2(1-i) - (\tau\alpha_2)^2(1-i) - (\tau\bar{\alpha}_2)^2(1+i) \right] + o(\tau) \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau\varphi_0} \operatorname{Re} \left[\frac{1+i}{\tau^2 - \psi\tau + i\psi\tau} - \frac{1-i}{\tau^2 + \psi\tau + i\psi\tau} \right] - \frac{\varphi_0^3}{90} \left[(1+i)\tau + (1-i)\tau - (1-i)\tau - (1-i)\tau - 4(1+i)(1-i)\psi \right] + o(\tau) \right\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau\varphi_0} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\tau^2 - 2\psi\tau + 2\psi^2} - \frac{1}{\tau^2 + 2\psi\tau + 2\psi^2} \right] + \frac{\varphi_0^3}{90} 4(1-i)(1+i) + o(\tau) \right\} \\ &= \frac{1}{\varphi_0^3} \psi^3 + \frac{4}{45} \varphi_0^3 \psi \end{aligned}$$

Z 2.70

W celu zbadania asymptotycznego zachowania się funkcji $\omega(t)$ dla $\tau \rightarrow \infty$ oblicza się granicę wyrażenia Z 2.71

$$x = \frac{1}{\tau}$$

Z 2.71

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^3 \omega(\tau) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \operatorname{Re} \left[\frac{1+i}{\sqrt{1-(1-i)\psi x}} - \frac{1-i}{\sqrt{1+(1+i)\psi x}} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \operatorname{Re} \left[\frac{1+i}{1 - \frac{1}{2}(1-i)\psi x} - \frac{1-i}{1 + \frac{1}{2}(1+i)\psi x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} \left[\frac{1}{(2-\psi x)^2 + \psi^2 x^2} - \frac{1}{(2+\psi x)^2 + \psi^2 x^2} \right] = 2\psi. \end{aligned}$$

Obliczenia potwierdzają, że dla $\tau > 100$

$$\omega(\tau) \approx \frac{2\psi}{\tau}$$

Z 2.72

z dokładnością co najmniej 5-ciu cyfr znaczących. Tym samym przyjmując $\alpha > 100$ można zapisać:

$$K(\zeta) = \int_0^a \omega(\tau) \cos \tau \zeta \, d\zeta + \int_a^\infty \frac{\cos \tau \zeta}{\tau^s} \, d\tau = \quad \text{Z 2.73}$$

$$= I_a(\zeta) + \psi \zeta^2 \left[\frac{\cos a\zeta}{(a\zeta)^2} - \frac{\sin a\zeta}{a\zeta} + Ci(a\zeta) \right], \quad \zeta \neq 0$$

$$K(0) = \int_0^a \omega(\tau) \, d\tau + 2\psi \int_a^\infty \frac{d\tau}{\tau^s} = I_a(0) + \frac{\psi}{a^2}. \quad \text{Z 2.74}$$

Obliczenie całek $I_a(\zeta)$ poprzedzono interpolacją funkcji $\omega(\tau)$ dla $\tau \in (0, a)$ za pomocą funkcji sklepanych trzeciego stopnia, rozpiętych na siatce N punktów τ_i (procedura SPLINE)

$$\tau_0 = 0; \quad \tau_i = \tau_{i-1} + h_i; \quad h_i = h_{i-1} + \Delta h. \quad \text{Z 2.75}$$

Przybliżoną wartość całki $I_a^{(N)}$ oblicza się ze wzoru Z 2.76, gdzie α_{ik} jest k -tym współczynnikiem wielomianu interpolacyjnego w i -tym podprzedziale całkowania, dobierając ich ilość N , tak by zachodził warunek Z 2.77

$$I_a^{(N)} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^s \alpha_{ik} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \tau^k \cos \zeta \tau \, d\tau \quad \text{Z 2.76}$$

$$\epsilon = \left| \frac{I_a^{(N)} - I_a^{(2N)}}{I_a^{(2N)}} \right| < 10^{-5}. \quad \text{Z 2.77}$$

Zastosowany sposób doboru punktów τ_i umożliwia zastosowanie formuł rekurencyjnych, bez konieczności wielokrotnego obliczania wartości funkcji trygonometrycznych (procedura FCALK), co powoduje dużą efektywność numeryczną metody.

Według przedstawionego powyżej algorytmu oblicza się wartości całek $K(\zeta)$ w punktach $\zeta_i \in [0, 2\lambda]$, których ilość i i rozmieszczenie jest dobierane automatycznie przez program, tak by rozpięta na tych punktach interpolacyjna funkcja sklejana trzeciego stopnia \hat{K} spełniała w każdym podprzedziale (ζ_i, ζ_{i-1}) warunek Z 2.78 (procedury CHOOSE i SPLINE)

$$\left| \frac{\hat{K}(\zeta_i) - K(\zeta_i)}{K(\zeta_i)} \right| < \epsilon_k; \quad \zeta_i = \frac{\zeta_{i-1} + \zeta_i}{2}. \quad \text{Z 2.78}$$

Z 3 Algorytm numerycznego rozwiązania równania całkowego.

0. Generowanie zbioru funkcji sklejanych 3-go stopnia interpolujących funkcje $K(\zeta)$ tworzące jądro

$$W(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(K(\xi - \eta) - K(\xi + \eta))$$

wg metody opisanej w załączniku Z 2.3.

1. Część wstępna

- 1.1 Ustalenie liczby głównych węzłów całkowania N_1 , liczby iteracji w procesie ekstrapolacji Richardsona KMAX.

$$h_1 = \frac{\chi}{N_1}, \quad k = 1$$

- 1.2 Obliczenie długości kroku i współrzędnych węzłów dla k-tego wymiaru przestrzeni aproksymacyjnej N_k .

$$h_k = \frac{h_1}{2k-1}, \quad N_k = N_1(2k-1)$$

$$x_j^{(k)} = 0.5 h_k + h_k(j-1), \quad j = 1, N_k$$

- 1.3 Obliczenie wyrazów k-tego ciągu współczynników $\mu_r^{(k)}$, $r=1, k$ do ekstrapolacji Richardsona.

$$\mu_r^{(k)} = \prod_{\substack{1 \leq \nu \leq k \\ \nu \neq r}} \frac{1}{1 - \left(\frac{h_\nu}{h_r}\right)^2}$$

- 1.4 Obliczenie elementów k-tej macierzy aproksymującej jądro, k-tych wektów prawej strony i pierwszego przybliżenia

$$A_{ij}^{(k)} = W(x_i^{(k)}, x_j^{(k)}) h_k$$

$$w_i^{(k)} = w(x_i^{(k)})$$

$$p_i^{(k)} = \frac{1}{\max_{j=1, N_k} A_{jj}^{(k)}} w_i^{(k)}$$

- 1.5 $k := k+1$, jeśli $k < KMAX - 1$ powrót do p.1.2
Koniec części wstępnej

2. Proces iteracyjny wg wzoru 2.3.29

- 2.0 Przyjęcie :

$$\tau_0 = \max_{ij} A_{ij}^{(k)}$$

ϵ_c - dopuszczalny błąd całkowania

ϵ_w - dopuszczalny błąd spełnienia równania w węzłach

LMAX - maksymalna liczba iteracji

l=0

2.1 k=1

2.1.1 Obliczenie momentu i sumy obciążenia

$$M^{l(k)} = \sum_{i=1, N_k} x_i^{(k)} p_i^{l(k)} h_k$$

$$H^{l(k)} = \sum_{i=1, N_k} p_i^{l(k)} h_k$$

2.1.2 Obliczenie wielkości momentu $\hat{M}^{l(k)}$ i sumy $\hat{H}^{l(k)}$ poprawionych ekstrapolacją Richardsona

$$\hat{M}^{l(k)} = \sum_{r=1}^k \mu_r^{(k)} M^{l(r)}$$

$$\hat{H}^{l(k)} = \sum_{r=1}^k \mu_r^{(k)} H^{l(r)}$$

2.2 Jeśli l=1 idź do p. 2.3

$$N_k^l = N_1(2k-1)$$

2.2.1 Jeśli $N_k^l > N_k^{l-1}$: $p_i^{l-1(k)} = S_{N_{k-1}^{l-1}}(p^{l-1(k)})$, $i=1, N_k^l$

symbol $S_N(.)$ oznacza operację interpolacji wartości funkcji danej na siatce N punktów za pomocą funkcji sklejaney 3-go stopnia (procedura SPLINE)

$$p_i^{l(k)} = p_i^{l-1(k)} + \frac{1}{\tau} \delta p_i^{l-1(k)}, i=1, N_k^l$$

2.3 Obliczenie wektora przemieszczenia

$$v_i^{l(k)} = \sum_{j=1}^{N_k^l} A_{i,j}^{l(k)} p_j^{l(k)} \quad i, j = 1, N_k^l$$

2.4 Ekstrapolacja Richardsona dla wektora v w głównych węzłach całkowania $x_i^{(1)}$, $i=1, N_0$

$$\hat{v}_i^{l(k)} = \sum_{r=1}^k \mu_r^{(k)} v_i^{l(r)} ; \quad i=1, N_0$$

2.4.1 Sprawdzenie dokładności całkowania dla k > 1

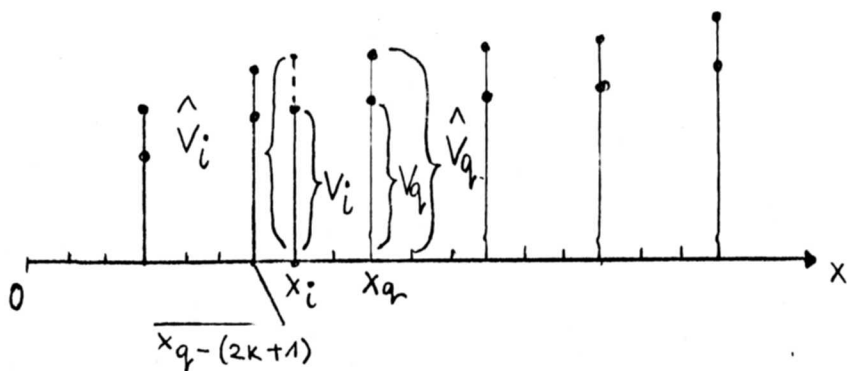
czy:

$$\max_{i=1, N_0} |(v_i^{l(k)} - v_i^{l(k-1)}) / v_i^{l(k)}| < \epsilon_c \xrightarrow{\text{tak}} \text{idź do 2.5}$$

nie

k:=k+1 ; idź do 2.1.1

2.5 Ekstrapolacja wartości \hat{v} z węzłów głównych x_q do pośrednich x_i .



Rys Z 3.1

$$\hat{v}_i^{(k)} = v_i^{(k)} + (v_q^{(k)} - v_{q-(2k+1)}^{(k)}) \frac{x_i - x_{q-(2k+1)}}{x_q - x_{q-(2k+1)}}$$

2.6 Obliczenie wektora błędów przemieszczeń

$$\delta w_i^{(k)} = \hat{v}_i^{(k)} - w_i^{(k)} ; \quad i = 1, N_k$$

2.6.1 Czy :

$$\delta^{(l)} = \max_i \left| \frac{\delta w_i^{(k)}}{w_i^{(k)}} \right| < \epsilon_v \longrightarrow \text{STOP zapis wyników}$$

nie

$$\text{jeśli: } \delta^{(l)} \leq \delta^{(l-1)} \quad \tau^{(l)} = 1.05 \tau^{(l-1)}$$

$$\text{jeśli: } \delta^{(l)} > \delta^{(l-1)} \quad \tau^{(l)} = 0.90 \tau^{(l-1)}$$

2.6.2 Wektor residuum

$$\delta p_i^{(k)} = \frac{1}{\tau^{(k)}} \delta w_i^{(k)}$$

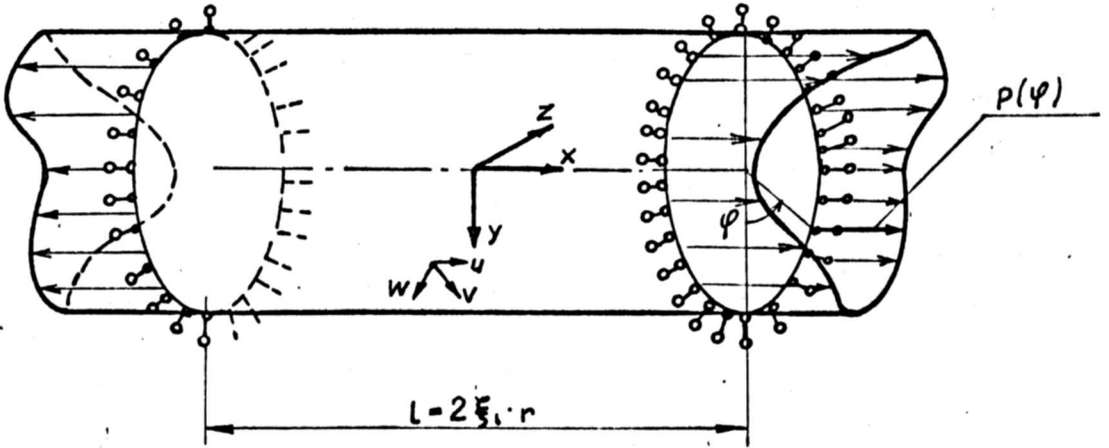
2.6.3 Ekstrapolacja wektora residuum w punktach poza węzłami siatki $x_i^{(k)}$

$$\delta p_i^{(k)} = S_{N_k}^{(k)} (\delta p_i^{(k)})$$

2.6.4 $l=l+1$, powrót do 2.1

Z 4 Związek pomiędzy przemieszczeniami osiowymi wokół brzegu zamkniętej powłoki walcowej a jego obciążeniem w kierunku tworzącej

Z 4.1 Sformułowanie zadania



Rys Z4.1

Poszukuje się związku pomiędzy przemieszczeniami $u(\varphi)$ a obciążeniem brzegu $p(\varphi)$ symetrycznym względem płaszczyzn xy i yz dla sprężystej powłoki walcowej o grubości g , promieniu r i długości l . Zakłada się że deformacja tej powłoki, może być opisana równaniami teorii zgięciowej, w wersji uproszczonej przez Własowa (1.3.1+3), które tu podaje się w równoważnej postaci Z4.2+4, z oznaczeniami wg Z4.1

$$\xi = \frac{x}{r}, \quad f' = r \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad \nabla^{2n} = \nabla^2 (\nabla^{2(n-1)}), \quad \text{Z 4.1}$$

$$K = \frac{Eg^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Eg}{1-\nu^2}, \quad k = \frac{g^2}{12r^2};$$

$$\nabla^4 w + \frac{1-\nu^2}{k} w^{IV} = 0, \quad \text{Z 4.2}$$

$$\nabla^4 v = -(2-\nu)w'''' - w''''', \quad \text{Z 4.3}$$

$$\nabla^4 u = -\nu w'''' + w''''', \quad \text{Z 4.4}$$

Kinematyczne i statyczne warunki brzegowe, wyrażone poprzez przemieszczenia, dla powłoki swobodnie podpartej na końcach są następujące:

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \\ v &= 0, \\ M_x &= \frac{K}{r^2} (w'' + \nu w''') = 0, \\ N_x &= \frac{D}{r} (u' + \nu v' + \nu w) = p(\varphi). \end{aligned} \right\} \text{ dla } x = \pm \xi_1 r$$

Z 4.5

Z 4.2 Związek pomiędzy składowymi rozwinięć fourierowskich obciążenia i przemieszczenia

Wszystkie funkcje występujące w równaniach Z4.2+4, oraz w warunkach brzegowych wyraża się poprzez ich rozwinięcia w szeregi Fouriera względem zmiennej φ w przedziale $(0, \pi)$.

$$u(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\xi) \cos n\varphi \quad \text{Z 4.6}$$

$$v(\xi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\xi) \sin n\varphi \quad \text{Z 4.7}$$

$$w(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\xi) \cos n\varphi \quad \text{Z 4.8}$$

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n\varphi \quad \text{Z 4.9}$$

Przedstawienie to zamienia układ równań różniczkowych cząstkowych Z4.2+4, z warunkami brzegowymi Z4.5, na ciąg układów równań różniczkowych zwyczajnych Z 4.10+12 z warunkami 4.13+16, dla kolejnych składowych harmonicznych funkcji przemieszczeń $n = 1, 2, \dots$. Rozwiązanie układu dla $n = 0$ wymagałoby osobnego rozpatrzenia, ale z uwagi na to iż jego znajomość nie jest konieczna przy rozpatrywaniu równań 3.2.8+11, zostanie ono pominięte.

$$u_n^{IV} - 2n^2 u_n'' + n^4 u_n = -\nu w_n'' - n^2 w_n' \quad \text{Z 4.10}$$

$$v_n^{IV} - 2n^2 v_n'' + n^4 v_n = (2+\nu)n w_n'' - n^3 w_n' \quad \text{Z 4.11}$$

$$w_n^{VIII} - 4n^2 w_n^{VI} + 6n^4 w_n^{IV} - 4n^6 w_n'' + n^8 w_n + \frac{1-\nu^2}{k} w_n^{VI} = 0 \quad \text{Z 4.12}$$

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 && \text{Z 4.13} \\ v &= 0 && \text{Z 4.14} \\ w_n' - \nu n^2 w_n &= 0 && \text{Z 4.15} \\ u_n' - \nu n v_n + \nu w_n &= \frac{r}{D} P_n && \text{Z 4.16} \end{aligned} \right\} \text{ dla } x = \pm \xi_l r$$

Dzięki symetrii względem płaszczyzny $\xi=0$ rozwiązanie równania Z 4.12 przyjmuje postać Z 4.17

$$w_n = \sum_{j=1,2} (C_{jn} \cosh(\lambda_{jn} n \xi) + \bar{C}_{jn} \cosh(\bar{\lambda}_{jn} n \xi)) \quad \text{Z 4.17}$$

C_{jn} są zespolonymi stałymi wyznaczanymi z warunków brzegowych, a λ_{jn} są zespolonymi pierwiastkami równania charakterystycznego

$$(\lambda_n^2 - 1)^4 + (2\nu \lambda_n)^4 = 0 \quad \text{Z 4.18}$$

gdzie:

$$\psi_n = \frac{\psi}{n} ; \quad \psi = \sqrt[4]{\frac{3}{4} (1-\nu^2)} \sqrt{\frac{r}{g}} \quad \text{Z 4.19}$$

Wówczas:

$$\lambda_{jn} = \alpha_{jn} + i \mu_{jn} ; \quad \bar{\lambda}_{jn} = \alpha_{jn} - i \mu_{jn} \quad \text{Z 4.20}$$

$$\alpha_{1,2n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\psi_n \mp \sqrt{1 + \sqrt{1 + \psi_n^4}}) \quad \text{Z 4.21}$$

$$\mu_{1,2n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\psi_n \mp \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \psi_n^4}}) \quad \text{Z 4.22}$$

Wzory Z4.23+4 dla pozostałych przemieszczeń u i v uzyskujemy rozwiązując równania Z4.10+11 metodą przewidywania, przy czym stałe A_{jn} i B_{jn} wyraża się poprzez stałe C_{jn} za pomocą wzorów Z4.25+26

$$u_n(\xi) = \sum_{j=1,2} [A_{jn} \sinh(\lambda_{jn} n \xi) + \bar{A}_{jn} \sinh(\bar{\lambda}_{jn} n \xi)] \quad \text{Z 4.23}$$

$$v_n(\xi) = \sum_{j=1,2} [B_{jn} \cosh(\lambda_{jn} n \xi) + \bar{B}_{jn} \cosh(\bar{\lambda}_{jn} n \xi)] \quad \text{Z 4.24}$$

$$A_{jn} = \frac{1}{n} \frac{AC(\lambda_{jn})}{\Delta(\lambda_{jn})} C_{jn} ; \quad \bar{A}_{jn} = \frac{1}{n} \frac{AC(\bar{\lambda}_{jn})}{\Delta(\bar{\lambda}_{jn})} \bar{C}_{jn} \quad \text{Z 4.25}$$

$$B_{jn} = \frac{1}{n} \frac{BC(\lambda_{jn})}{\Delta(\lambda_{jn})} C_{jn} ; \quad \bar{B}_{jn} = \frac{1}{n} \frac{BC(\bar{\lambda}_{jn})}{\Delta(\bar{\lambda}_{jn})} \bar{C}_{jn} \quad \text{Z 4.26}$$

gdzie :

$$A(\lambda_{jn}) = -\lambda_{jn} (\nu \lambda_{jn}^2 + 1) \quad ; \quad B(\lambda_{jn}) = (2 + \nu) \lambda_{jn}^2 - 1 \quad ,$$

Z 4.28

$$\Delta(\lambda_{jn}) = (\lambda_{jn}^2 - 1)^2 = i4\psi_n^2 \lambda_{jn}^2 \quad ; \quad \bar{\Delta}(\bar{\lambda}_{jn}) = (\bar{\lambda}_{jn}^2 - 1)^2 = -i4\psi_n^2 \bar{\lambda}_{jn}^2 \quad .$$

Występujące w warunkach brzegowych siły wewnętrzne wyraża się jako:

$$\frac{r}{D} N_x = \frac{r}{D} \sum_{n=0}^{\infty} N_{xn} \cos n\varphi \quad , \quad Z 4.29$$

$$\frac{r^2}{K} M_x = \frac{r^2}{K} \sum_{n=0}^{\infty} M_{xn} \cos n\varphi \quad . \quad Z 4.30$$

przy czym :

Z 4.31

$$\frac{r}{D} N_{xn} = u'_n + n\nu v_n + w_n = -\frac{1-\nu^2}{4\psi_n^2 i} \sum_{j=1,2} [C_{jn} \cosh(\lambda_{jn} n\xi) - \bar{C}_{jn} \cosh(\bar{\lambda}_{jn} n\xi)]$$

Z 4.32

$$\frac{r^2}{K} M_{xn} = n^2 \sum_{j=1,2} [(\lambda_{jn}^2 - \nu) C_{jn} \cosh(\lambda_{jn} n\xi) + (\bar{\lambda}_{jn}^2 - \nu) \bar{C}_{jn} \cosh(\bar{\lambda}_{jn} n\xi)]$$

Rozpisując warunki brzegowe Z 4.13+16 uzyskuje się układ równań liniowych Z 4.33+36 na stałe C_{jn} :

$$\sum_{j=1,2} [C_{jn} \cosh(\lambda_{jn} n\xi) + \bar{C}_{jn} \cosh(\bar{\lambda}_{jn} n\xi)] = 0 \quad , \quad Z 4.33$$

$$\sum_{j=1,2} [C_{jn} \frac{B_{jn}}{\lambda_{jn}^2} \cosh(\lambda_{jn} n\xi) - \bar{C}_{jn} \frac{\bar{B}_{jn}}{\bar{\lambda}_{jn}^2} \cosh(\bar{\lambda}_{jn} n\xi)] = 0 \quad , \quad Z 4.34$$

$$\sum_{j=1,2} [C_{jn} \lambda_{jn}^2 \cosh(\lambda_{jn} n\xi) + \bar{C}_{jn} \bar{\lambda}_{jn}^2 \cosh(\bar{\lambda}_{jn} n\xi)] = 0 \quad , \quad Z 4.35$$

$$\sum_{j=1,2} [C_{jn} \cosh(\lambda_{jn} n\xi) - \bar{C}_{jn} \cosh(\bar{\lambda}_{jn} n\xi)] = -\frac{4i\psi_n^2}{1-\nu^2} \frac{r}{D} P_n \quad ; \quad Z 4.36$$

skąd dla $k, j=1,2, k \neq j$:

$$C_{jn} = \frac{2i\psi_n^2}{1-\nu^2} \frac{\nu + \lambda_{kn}^2}{\lambda_{jn}^2 - \lambda_{kn}^2} \frac{1}{\cosh(\lambda_{jn} n\xi)} \frac{r}{D} P_n = \frac{C(\lambda_{jn})}{\cosh(\lambda_{jn} n\xi)} \frac{r}{D} P_n \quad , \quad Z 4.37$$

$$\bar{C}_{jn} = -\frac{2i\psi_n^2}{1-\nu^2} \frac{\nu + \bar{\lambda}_{kn}^2}{\bar{\lambda}_{jn}^2 - \bar{\lambda}_{kn}^2} \frac{1}{\cosh(\bar{\lambda}_{jn} n\xi)} \frac{r}{D} P_n = \frac{\bar{C}(\bar{\lambda}_{jn})}{\cosh(\bar{\lambda}_{jn} n\xi)} \frac{r}{D} P_n \quad . \quad Z 4.38$$

Ostatecznie dla n-tej harmonicznej przemieszczenia u_n na krawędzi $x = \pm l/2 = \pm \xi_l r$.

Z 4.39

$$u_n = \frac{r}{D} p_n \frac{1}{n} \sum_{j=1,2} \left[\frac{AC\lambda_{jn} \text{CC}\lambda_{jn}}{\Delta(\lambda_{jn})} \text{th}(\lambda_{jn} n \xi_l) + \frac{AC\bar{\lambda}_{jn} \text{CC}\bar{\lambda}_{jn}}{\Delta(\bar{\lambda}_{jn})} \text{th}(\bar{\lambda}_{jn} n \xi_l) \right]$$

$$= \frac{r}{D} p_n \frac{1}{n} 2\text{Re} \sum_{j=1,2} \frac{AC\lambda_{jn} \text{CC}\lambda_{jn}}{\Delta(\lambda_{jn})} \text{th}(\lambda_{jn} n \xi_l)$$

Dalsze rozważania prowadzone będą przy założeniu nieskończonej długości powłoki tj. przy $\xi_l \rightarrow \infty$. W tym celu oblicza się granice wyrażeń $\text{th}(\lambda_{jn} n \xi_l)$ przy $\xi_l \rightarrow \infty$, otrzymując:

$$\lim_{\xi_l \rightarrow \infty} \text{th}(\lambda_{1n} n \xi_l) = (-1, 0) ; \quad \lim_{\xi_l \rightarrow \infty} \text{th}(\lambda_{2n} n \xi_l) = (1, 0) . \quad \text{Z 4.40}$$

Wówczas :

$$u_n = \frac{r}{D} p_n \frac{1}{n} \text{Re} \left[\frac{(\nu-1)^2}{\lambda_{1n} - \lambda_{2n}} - (\lambda_{1n} - \lambda_{2n}) \right] , \quad \text{Z 4.41}$$

co po skorzystaniu ze wzorów Z 4.20+22 daje :

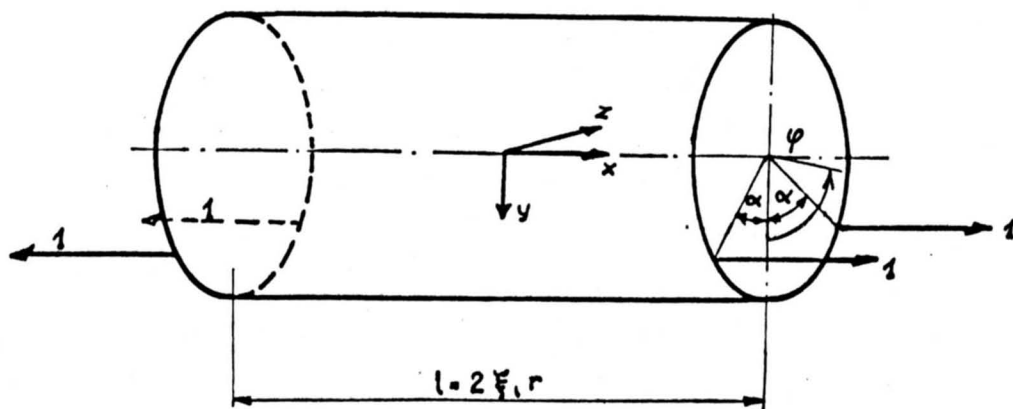
$$u_n = \frac{r}{D} p_n \hat{U}_n , \quad \text{Z 4.42}$$

gdzie dla $n \geq 2$:

$$\hat{U}_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \left[\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \psi_n^4}}}{1 - \nu^2} - \frac{1 - \nu}{4(1 + \nu)} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \psi_n^4}}}{\sqrt{1 + \psi_n^4}} \right] . \quad \text{Z 4.43}$$

Z 4.3 Funkcja wpływu przemieszczeń osiowych wokół brzeg zamkniętej powłoki walcowej obciążonej w kierunku tworzącej.

Rozważa się powłokę jak w p.Z 4.1, obciążoną samozrównoważonym układem jednostkowych sił skupionych działających symetrycznie względem pł. xy i yz .



Rys. Z 4.2

Obciążenie takie można zapisać przy użyciu dystrybucji δ jako:

$$\bar{p}(\varphi) = \frac{1}{r} [\delta(\varphi - \alpha) + \delta(\varphi + \alpha)] . \quad \text{Z 4.44}$$

Składowe jego rozwinięcia w szereg cosinusowy Fouriera wyniosą:

$$\bar{p}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi r} \int_0^{\pi} \delta(\varphi - \alpha) d\varphi = \frac{1}{\pi r} \quad \text{Z 4.45}$$

$$\bar{p}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi} \delta(\varphi - \alpha) \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi r} \cos n\alpha \quad \text{Z 4.46}$$

Funkcja opisująca rozkład przemieszczeń wokół obwodu stanowiąca poszukiwaną funkcję wpływu będzie, zgodnie z Z 4.6 i Z 4.40, dana wzorem :

$$U(\alpha, \varphi) = \frac{r}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{U}_n \bar{p}_n \cos n\varphi = \frac{r^2}{\pi D} \left[\frac{\hat{U}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n \cos n\alpha \cos n\varphi \right] . \quad \text{Z 4.47}$$

$$= \frac{r^2}{\pi D} \left[\frac{\hat{U}_0}{2} + \hat{U}_1 \cos \alpha \cos \varphi + \tilde{U}(\alpha, \varphi) \right]$$

Dalsza analiza teoretyczna, a także względy numeryczne wymagają zbadania własności tej funkcji. Z faktu że $\{\hat{U}_n\}$ jest ciągiem malejącym monotonicznie, oraz z tożsamości trygonometrycznej Z 4.46

$$\cos \alpha \cos \varphi = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha + \varphi)] \quad \text{Z 4.46}$$

wynika ciągłość funkcji $U(\alpha, \varphi)$ w obszarze kwadratu $[0, \pi]^2$, poza przekątną $\alpha = \varphi$, por [18], na której wartości funkcji $U(\alpha, \varphi)$ dążą do nieskończoności. Jest to konsekwencją rozbieżności

szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n$, którą można łatwo wykazać np. przy użyciu

kryterium porównawczego. Poniższe przekształcenia służą wydzieleniu i zbadaniu charakteru tej osobliwości.

$$\tilde{U}(\alpha, \varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \hat{U}_n \cos \alpha \cos \varphi = \quad \text{Z 4.49}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\nu^2} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\psi_n^4}} - \sqrt{2}}{n} - \frac{\sqrt{2}(1-\nu)}{4(1+\nu)} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\psi_n^4}} - \sqrt{2}\sqrt{1+\psi_n^4}}{n\sqrt{1+\psi_n^4}} \right] \times$$

$$\times \cos \alpha \cos \varphi + \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\nu^2} - \frac{\sqrt{2}(1-\nu)}{4(1+\nu)} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha \cos \varphi}{n} - \cos \alpha \cos \varphi \right] =$$

$$= \underbrace{S(\alpha - \varphi) + S(\alpha + \varphi)}_{R(\alpha, \varphi)} + K(\alpha, \varphi)$$

Część ciągła:

$$S(\gamma) = C_1 S_1(\gamma) + C_2 S_2(\gamma) \quad \text{Z 4.50}$$

$$S_1(\gamma) = -\sqrt{2} \cos \gamma + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+(\psi/n)^4}} - \sqrt{2}}{n} \cos n\gamma \quad \text{Z 4.51}$$

$$S_2(\gamma) = -\sqrt{2} \cos \gamma + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+(\psi/n)^4}} - \sqrt{2}\sqrt{1+(\psi/n)^4}}{n\sqrt{1+(\psi/n)^4}} \cos n\gamma \quad \text{Z 4.52}$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2(1-\nu^2)} \quad ; \quad C_2 = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{1-\nu}{1+\nu} \quad \text{Z 4.53}$$

Ciągi występujące w funkcjach S_1 i S_2 przy $n \rightarrow \infty$, zmiierają do zera w tym samym tempie co ciągi:

$$a_n^{(1)} = \frac{\psi^4}{4\sqrt{2}} \frac{1}{n^5} \quad ; \quad a_n^{(2)} = \frac{3\psi^4}{4\sqrt{2}} \frac{1}{n^5} \quad \text{Z 4.54}$$

co sprawia że szeregi S_1 i S_2 są szybkozbieżne.

Część osobliwa $K(\alpha, \varphi)$ przekształca się korzystając z rozwinięcia Z 4.53, por [18] :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln 2 \left| \sin \frac{1}{2}x \right| ; \quad \text{Z 4.55}$$

Z 4.56

$$K(\alpha, \varphi) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{1-\nu} - \frac{\sqrt{2}(1-\nu)}{4(1+\nu)} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n(\alpha-\varphi)}{n} + \frac{\cos n(\alpha+\varphi)}{n} \right)$$

$$= -\sqrt{2} (C_1 + C_2) \left(\ln \left| 2 \sin \frac{\alpha-\varphi}{2} \right| + \ln \left| 2 \sin \frac{\alpha+\varphi}{2} \right| \right) = \quad \text{Z 4.57}$$

$$= C \ln 2 |\cos \alpha - \cos \varphi| ;$$

$$C = -\sqrt{2}(C_1 + C_2) . \quad \text{Z 4.58}$$

Ostateczna postać poszukiwanej funkcji wpływu będzie następująca :

Z 4.59

$$U(\alpha, \varphi) = \frac{2}{\pi D} \left(\hat{U}_0 + \hat{U}_1 \cos \alpha \cos \varphi + \sqrt{\hat{R}(\alpha, \varphi) + C \ln 2 |\cos \alpha - \cos \varphi|} \right) .$$

Z 4.4 Całkowanie osobliwości funkcji wpływu

Poszukuje się całek postaci :

Z 4.60

$$\hat{K}_{ij} = C \int_{\alpha_j-h}^{\alpha_j+h} \psi_j(\alpha) \left[\ln \left| 2 \sin \frac{\alpha - \varphi_i}{2} \right| + \ln \left| 2 \sin \frac{\alpha + \varphi_i}{2} \right| \right] d\alpha ,$$

gdzie:

Z 4.61

$$\psi_j(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{h} (\alpha - (\alpha_j - h)) ; & j = 1, N+1 \\ \frac{1}{h} (\alpha_j + h - \alpha) ; & \end{cases}$$

$$h = \frac{\pi}{N} ; \quad \alpha_j = (j-1) h .$$

Po rozpisaniu i zamianie zmiennych uzyskuje się :

$$\hat{K}_{ij} = 2h \ln 2 +$$

Z 4.62

$$\frac{1}{h} \left\{ 4 \left[\begin{array}{cccc} \frac{\alpha_j - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j + \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j+1} - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j+1} + \varphi_i}{2} \\ \int \eta \ln |\sin \eta| d\eta + \int \eta \ln |\sin \eta| d\eta - \int \eta \ln |\sin \eta| d\eta - \int \eta \ln |\sin \eta| d\eta \\ \frac{\alpha_{j-1} - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j-1} + \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j + \varphi_i}{2} \end{array} \right] + \right.$$

$$2\varphi_i \left[\begin{array}{cccc} \frac{\alpha_j - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j + \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j+1} - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j+1} + \varphi_i}{2} \\ \int \ln |\sin \eta| d\eta - \int \ln |\sin \eta| d\eta - \int \ln |\sin \eta| d\eta + \int \ln |\sin \eta| d\eta \\ \frac{\alpha_{j-1} - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j-1} + \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j + \varphi_i}{2} \end{array} \right] +$$

$$2\alpha_i \left[\begin{array}{cccc} \frac{\alpha_j - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j + \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j+1} - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j+1} + \varphi_i}{2} \\ - \int \ln |\sin \eta| d\eta - \int \ln |\sin \eta| d\eta + \int \ln |\sin \eta| d\eta + \int \ln |\sin \eta| d\eta \\ \frac{\alpha_{j-1} - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j-1} + \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j + \varphi_i}{2} \end{array} \right] +$$

$$2\Delta \left[\begin{array}{cccc} \frac{\alpha_j - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j + \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j+1} - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j+1} + \varphi_i}{2} \\ \int \ln |\sin \eta| d\eta + \int \ln |\sin \eta| d\eta + \int \ln |\sin \eta| d\eta + \int \ln |\sin \eta| d\eta \\ \frac{\alpha_{j-1} - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_{j-1} + \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j - \varphi_i}{2} & \frac{\alpha_j + \varphi_i}{2} \end{array} \right] \left. \right\}$$

Dla $j=1$ zerują się całki, których dolna granica zawiera α_{j-1} ,
 a dla $j=N+1$, te w których górna granica zawiera α_{j+1} .

Występujące we wzorze 4.62 całki postaci :

$$I_0(x) = \int_0^x \ln |\sin \eta| d\eta, \quad \text{Z 4.63}$$

$$I_1(x) = \int_0^x \eta \ln |\sin \eta| d\eta, \quad \text{Z 4.64}$$

dla $x \in (0, \pi)$ oblicza się całkując rozwinięcia funkcji podcałkowych w szeregi potęgowe wyraz po wyrazie

$$I_0(x) = \int_0^x \ln \eta d\eta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n}{n(2n)!} \int_0^x \eta^{2n} d\eta = \quad \text{Z 4.65}$$

$$= x \left[\ln x - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n}{(2n+1)n(2n)!} x^{2n} \right]$$

$$I_1(x) = \int_0^x \eta \ln \eta \, d\eta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n}{n (2n)!} \int_0^x \eta^{2n+1} \, d\eta = \quad Z 4.66$$

$$= \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n}{(n+1)n(2n)!} x^{2n} \right]$$

B_n są liczbami Bernoulliego, por. [33], danymi następującym wzorem rekurencyjnym :

$$B_0 = 1$$

$$1 + \binom{k}{1} B_1 + \binom{k}{2} B_2 + \dots + \binom{k}{k-1} B_{k-1} = 0 \quad Z 4.67$$

Oba szeregi występujące we wzorach Z 4.65+66 są jednak wolno zbieżne, w szczególności dla $x \rightarrow \pi$, tak, że konieczne jest przyśpieszenie ich zbieżności. Korzysta się przy tym ze związku:

$$\frac{B_n 2^{2n-1}}{(2n)!} = \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}, \quad Z 4.68$$

gdzie $\zeta(\cdot)$ oznacza funkcję ζ -Riemana

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad Z 4.69$$

Można wówczas zapisać Z 4.70

$$I_0(x) = x \left[\ln x - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)-1}{(2n+1)n} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n} \right]$$

Z 4.71

$$I_1(x) = \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)-1}{(n+1)n} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n} \right]$$

Obydwa szeregi występujące na ostatnich pozycjach we wzorach Z 4.70+71 można zesumować w postaci zamkniętej korzystając ze wzoru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+\nu)n} = z^{-\nu} \int_0^z \xi^{1-\nu} \left(\int_0^{\xi} \frac{\eta^{\nu-1}}{1-\eta} \, d\eta \right) d\xi, \quad 0 < z < 1 \quad Z 4.72$$

Ostatecznie dochodzi się do wzorów Z 4.72+73. Występujące w nich szeregi są już bardzo szybko zbieżne

Z 4.73

$$I_0(x) = x \left[\ln x - 3 + \ln \left(1 - \left(\frac{x}{\pi} \right)^2 \right) \right] + \frac{\pi}{x} \ln \frac{1 + \frac{x}{\pi}}{1 - \frac{x}{\pi}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n) - 1}{(2n+1)n} \left(\frac{x}{\pi} \right)^{2n}]$$

Z 4.74

$$I_1(x) = \frac{\pi^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} - \left(\frac{x}{\pi} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{x}{\pi} \right)^2 \right) \left[\ln \left(1 - \left(\frac{x}{\pi} \right)^2 \right) + \left(\frac{x}{\pi} \right)^2 \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n) - 1}{(n+1)n} \left(\frac{x}{\pi} \right)^{2n} \right]$$

$$I_0(\pi) = -\pi \ln 2$$

Z 4.75

$$I_1(\pi) = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2$$

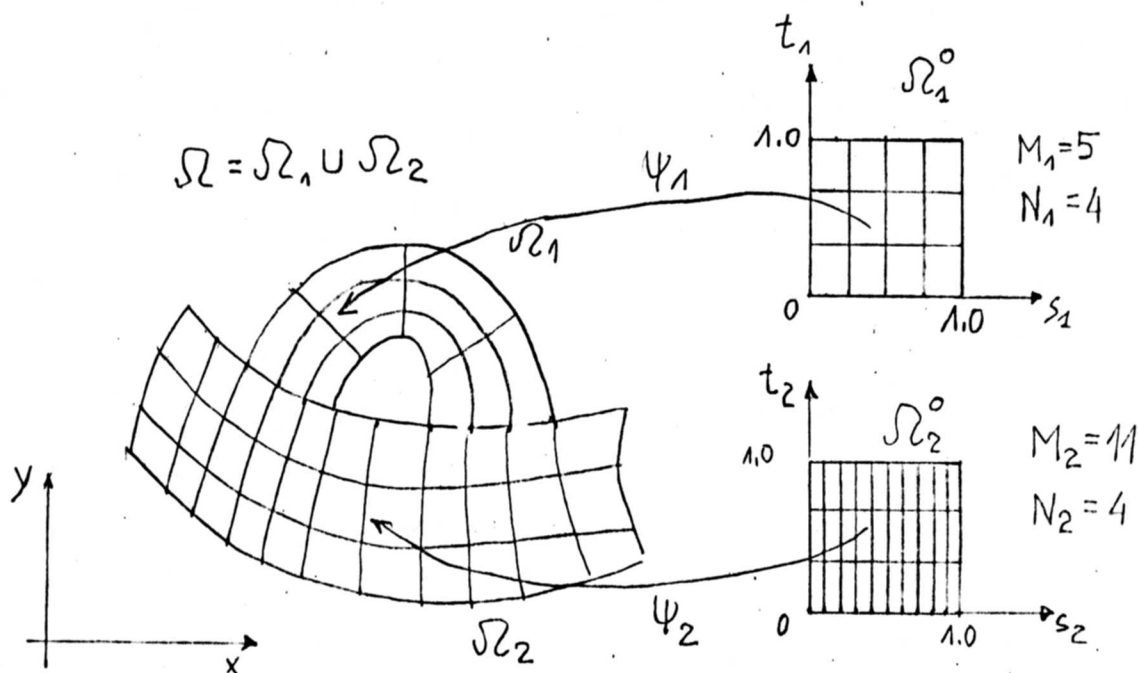
Z 4.76

Poniżej przedstawia się uniwersalny algorytm automatycznej generacji dyskretyzacji, wykorzystany w programie PENAL. Może on być zastosowany w dowolnym zadaniu dwuwymiarowym rozwiązywanym metodą elementów skończonych

1. Podział obszaru obliczeniowego na podobszary

Dowolny obszar płaski, także i wielospójny, dzieli się na podobszary (superelementy) o kształcie krzywoliniowych czworoboków. Topologia siatki wewnątrz każdego z nich będzie identyczna jak w superelemencie wzorcowym (kwadracie jednostkowym) i jest określona jednoznacznie przez podanie ilości punktów węzłowych na każdym z boków krzywoliniowego czworoboku (muszą być one identyczne na przeciwległych bokach).

Dane wejściowe obejmują wspomnianą już specyfikację wymiaru topologicznego siatki dla każdego podobszaru, oraz współrzędne punktów węzłowych na brzegu (tu również jest możliwość generowania współrzędnych o ile są one równomiernie rozłożone wzdłuż prostej lub łuku kołowego).



Rys. Z5.1

2. Konstrukcja odwzorowania kwadratu jednostkowego na czworobok krzywoliniowy.

Poniżej podaje się pewien sposób określania współrzędnych punktów węzłowych krzywoliniowej siatki wewnątrz podobszaru na podstawie znanych punktów węzłowych na jego brzegu. Ideą przewodnią tej konstrukcji jest, by linie siatki zmieniały stopniowo swój kształt od pokrywającego się z linią brzegu 1 do pokrywającego się z linią brzegu 2. Odpowiada to dobrze intuicyjnemu sposobowi konstrukcji siatki w obszarach takich jak czworokąt, wycinek pierścienia, trapez.

Dany obszar o krzywoliniowych brzegach (ozn. Ω) traktuje się jako obraz kwadratu jednostkowego Ω^0 poprzez pewne odwzorowanie:

$$\psi : \Omega^0 = (0,1)^2 \ni (s,t) \rightarrow (x,y) \in \Omega.$$

Jego wartości dla punktów

$$(s_m, t_n), \quad s_m = m/M, \quad t_n = n/N, \quad m=2, M-1, \quad n=2, N-1$$

wyznaczają poszukiwane współrzędne punktów węzłowych siatki wewnątrz podobszaru Ω

Dane są krzywe określające brzeg obszaru Ω :

$$f_i^\xi(s) = (x_i^\xi(s), y_i^\xi(s)) \quad i=1,2$$

$$f_j^\eta(t) = (x_j^\eta(t), y_j^\eta(t)) \quad j=1,2$$

Ich długości wynoszą:

długości całkowite

$$l_{0i}^\xi = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx_i^\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_i^\xi}{ds}\right)^2} ds; \quad l_{0i}^\eta = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx_i^\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i^\eta}{dt}\right)^2} dt \quad Z 5.1$$

długości bieżące

$$l_i^\xi(s) = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{dx_i^\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_i^\xi}{ds}\right)^2} ds; \quad l_i^\eta(t) = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx_i^\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i^\eta}{dt}\right)^2} dt \quad Z 5.2$$

Długości krzywych będących ψ -obrazami linii stałych wartości s i t

długości całkowite

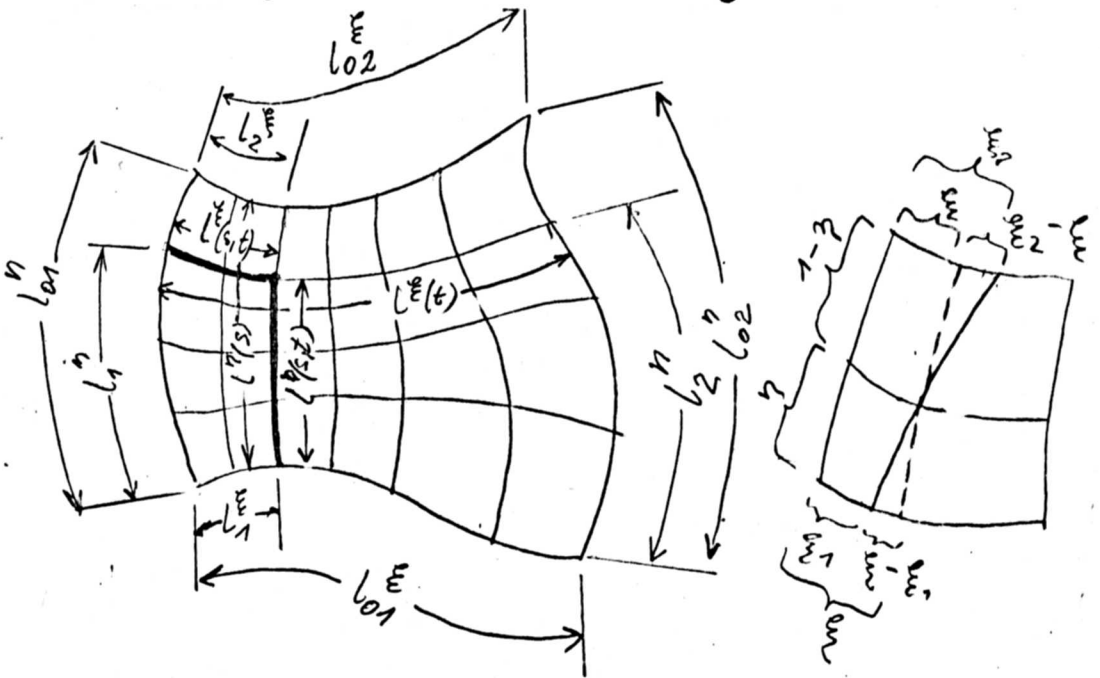
$$l_0^\xi(t) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial x(s,t)}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}\right)^2} ds; \quad l_0^\eta(s) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial x(s,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(s,t)}{\partial t}\right)^2} dt \quad Z 5.3$$

długości bieżące

$$l^\xi(s,t) = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{\partial x(s,t)}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}\right)^2} ds; \quad l^\eta(s,t) = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{\partial x(s,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(s,t)}{\partial t}\right)^2} dt \quad Z 5.4$$

W oparciu o nie wprowadza się współrzędne krzywoliniowe (ξ, η)

$$\xi(s, t) = \frac{l^\xi(s, t)}{l_0^\xi(t)} ; \quad \eta(s, t) = \frac{l^\eta(s, t)}{l_0^\eta(s)} \quad \text{Z 5.5}$$



Rys. Z 5.2

Warunki Z 5.6 lub wynikające z niego Z 5.7 definiują poszukiwane odwzorowanie ψ

$$\frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi} = \frac{1 - \eta}{\eta} ; \quad \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta} = \frac{1 - \xi}{\xi} \quad \text{Z 5.6}$$

$$(\xi - \xi_1)\eta = (1 - \eta)(\xi_2 - \xi) ; \quad (\eta - \eta_1)\xi = (1 - \xi)(\eta_2 - \eta) \quad \text{Z 5.7}$$

gdzie:

$$\xi_i = \frac{l_i^\xi}{l_{oi}^\xi} ; \quad \eta_i = \frac{l_i^\eta}{l_{oi}^\eta} ; \quad i = 1, 2 \quad \text{Z 5.8}$$

3. Numeryczne wyznaczenie odwzorowania ψ

Problem sprowadza się do zadania dyskretnego poprzez zastąpienie krzywych będących obrazami linii stałych wartości s_m i t_n łamanymi o wierzchołkach w punktach odpowiednio : $x_i = x(s_m, t_i)$, $y_i = y(s_m, t_i)$ lub $x_j = x(s_j, t_n)$, $y_j = y(s_j, t_n)$.

Warunki Z5.6+7 stanowią w istocie nieliniowy układ równań

różniczkowo całkowych, który dzięki wprowadzeniu dyskretyzacji staje się nieliniowym układem równań algebraicznych. Jego rozwiązanie (tj. określenie poszukiwanych współrzędnych punktów węzłowych) dokonuje się za pomocą następującego postępowania iteracyjnego.

3.1 Wyznaczenie początkowego (startowego) przybliżenia $\psi^{(0)}$ dla punktów wewnętrznych jako odwzorowania izoparametrycznego określonego przez współrzędne punktów narożnych i środkobocznych oraz przez paraboliczne funkcje kształtu.

$$\psi^{(0)}: \quad x^{(0)}(s,t) = \sum_{i=1}^8 N_i(s,t) x_i$$

$$y^{(0)}(s,t) = \sum_{i=1}^8 N_i(s,t) y_i \quad \text{Z 5.9}$$

3.2 $\psi^{(k-1)} \rightarrow \psi^{(k)}$

Mając dane $k-1$ przybliżenie odwzorowania ψ dla którego krzywoliniowe współrzędne $\xi^{(k-1)}$ i $\eta^{(k-1)}$ nie spełniają warunku Z 5.6+7 zadaną dokładnością, w każdym punkcie węzłowym żąda się, by współrzędne $\xi^{(k)}$ i $\eta^{(k)}$ warunki te spełniały. Prowadzi to do układu dwóch równań liniowych Z 5.11+12 dla przyrostów $\delta\xi$ i $\delta\eta$:

$$\xi^{(k)} = \xi^{(k-1)} + \delta\xi \quad ; \quad \eta^{(k)} = \eta^{(k-1)} + \delta\eta \quad , \quad \text{Z 5.10}$$

$$-\delta\xi + (\xi_2 - \xi_1) \delta\eta = -\eta^{(k-1)}(\xi_2 - \xi_1) + \xi^{(k-1)} - \xi_1 \quad , \quad \text{Z 5.11}$$

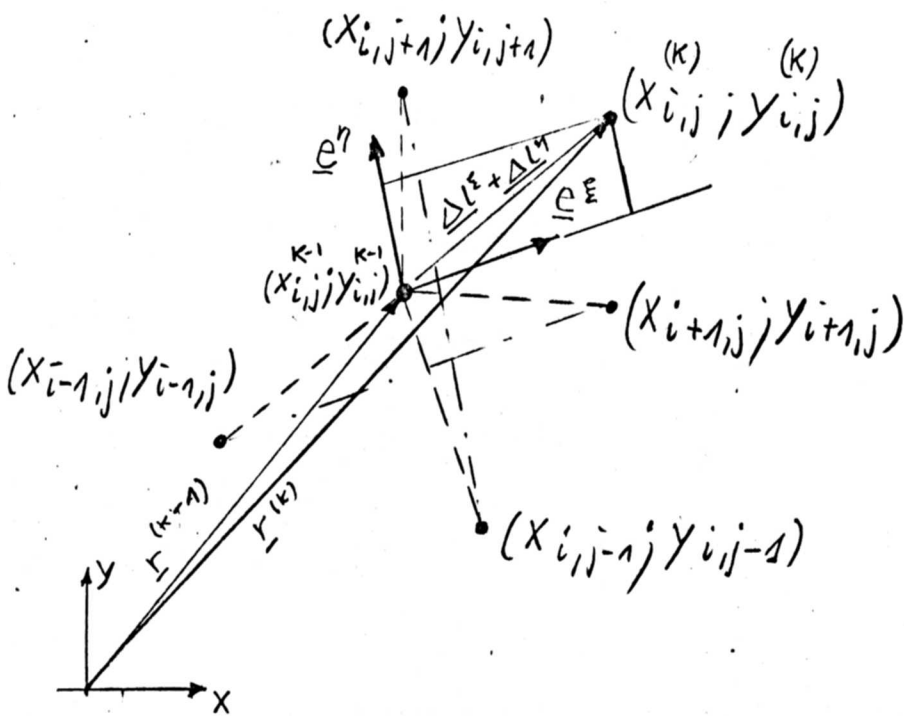
$$(\eta_2 - \eta_1) \delta\xi - \delta\eta = -\xi^{(k-1)}(\eta_2 - \eta_1) + \eta^{(k-1)} - \eta_1 \quad , \quad \text{Z 5.12}$$

skąd:

$$\delta\xi = \frac{\xi_1 + \eta_1(\xi_2 - \xi_1)}{1 - (\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1)} - \xi^{(k-1)} \quad \text{Z 5.13}$$

$$\delta\eta = \frac{\eta_1 + \xi_1(\eta_2 - \eta_1)}{1 - (\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1)} - \eta^{(k-1)} \quad \text{Z 5.14}$$

W oparciu o wyliczone wartości przyrostów $\delta\xi$ i $\delta\eta$ i wersory kierunków "stycznych" do linii $(k-1)$ przybliżenia siatki \underline{e}^ξ , \underline{e}^η oblicza się poprawione położenie węzła $r_{i,j}^{(k)} = (x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ zgodnie z zasadą pokazaną na rys. Z 5.3.



Rys. Z5.3

$$e^\eta = \frac{r_{i,j+1} - r_{i,j+1}}{|r_{i,j+1} - r_{i,j+1}|} ; e^\xi = \frac{r_{i-1,j} - r_{i+1,j}}{|r_{i-1,j} - r_{i+1,j}|} \quad \text{Z 5.15}$$

$$\underline{\Delta l}^\xi = e^\xi l^\xi \delta\xi ; \underline{\Delta l}^\eta = e^\eta l^\eta \delta\eta \quad \text{Z 5.16}$$

$$r_{i,j}^{(k)} = r_{i,j}^{(k-1)} + \underline{\Delta l}^\xi + \underline{\Delta l}^\eta \quad \text{Z 5.17}$$

Obliczenia prowadzi się aż do spełnienia warunków Z 5.6+7 z zadawalającą dokładnością .



ANALIZA NAPREZEŃ I PRZEMIESZCZEŃ

W POŁĄCZENIU KOŁNIERZOWYM

WALCOWYCH PRĘTÓW POWŁOKOWYCH

STRESZCZENIE

Tematem pracy jest analiza statyczna doczołowego połączenia śrubowego, niesprężonego cienkościennych rur o przekroju kołowym, poddanego działaniu siły osiowej i momentu zginającego. Głównym obszarem zastosowania rozważanych połączeń są kominy stalowe.

Analizę przeprowadza się przy założeniu liniowości materiałowej i geometrycznej układu, ale z uwzględnieniem nieliniowych efektów wynikających ze specyfiki pracy elementów połączenia (więzy jednostronne) .

Na wstępie analizuje się stan naprężenia i deformacji w układzie śruba - kołnierz - żebro w strefie rozciąganej. Analiza ta wymaga rozwiązania :

- 1) zadania o powłoce walcowej obciążonej momentem za pośrednictwem sztywnego, cienkiego stempla ,
- 2) zadania o deformacji płyty średniej grubości z ograniczeniami dla ugięcia powierzchni środkowej .

Pierwsze z wymienionych zadań sprowadzone zostało do równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju. Rozwiązania drugiego dokonano formułując odpowiednie nieklasyczne zadanie wariacyjne (minimalizacja z ograniczeniami dla funkcjonału energii potencjalnej), a następnie rozwiązując je przy użyciu algorytmu funkcjonału kary i dyskretyzacji MES.

Wyniki obliczeń komputerowych przeprowadzonych dla znacznej liczby przypadków przedstawiono w usystematyzowanej postaci , tak , że możliwe było podanie prostych formuł obliczeniowych

dla :

- współczynnika sztywności utwierdzenia żebra w powłoce,
- podatności strefy rozciąganej połączenia,
- współczynnika efektu dźwigni (zwiększającego nieraz znacznie siły rozciągające w śrubach),

oraz dla innych wielkości statycznych w połączeniu.

W dalszej części formułuje się model obliczeniowy całego połączenia uwzględniający deplanację wywołaną odkształcalnością strefy rozciąganej. Sprowadza się on do układu równań algebraicznie - całkowych na poszukiwaną funkcję rozkładu obciążenia w połączeniu, oraz na wielkości charakteryzujące deformację połączenia jako całości tj. na wzajemny obrót i przemieszczenie osiowe łączonych elementów. Podaje się formuły analityczne dla wyznaczania tych wielkości.

Wykazano iż nieuwzględnianie podatności połączeń kołnierzo-
wych może, w pewnych przypadkach, prowadzić do znacznych błędów w ocenie sztywności konstrukcji.

W zakończeniu podaje się przykłady obliczeń praktycznych wykonanych w oparciu o omawiany model, a także kierunki dalszych badań tytułowego zagadnienia.



ANALYSIS OF STRESSES AND DIPLACEMENTS

IN A FLANGE COUPLING

OF CYLINDRICAL THIN-WALLED SHELLS

SUMMARY

The topic of this work is statical analyzis of butt-ended, bolted, unprestressed joint of thin-walled tubes subjected to an axial force and bending moment . The main area of employment of this structural element are steel chimneys.

Material end geometrical linearity is assumed, but nonlinear effects caused by specyfic structural behaviour of coupling (unilateral constrains) are considered.

The work begins with analysis of deformation of the bolt - flange - stiffener system in the tensile zone. It requires the solution of the following :

- 1) problem of a cylindrical shell loaded with a couple acting through a stiff, thin body ;
- 2) problem of a moderately thick plate with imposed constrains on deflections ;

The first one has been reduced to an integral equation of Fredholm (of the 1-st kind). The second one has been formulated as a constrained minimization problem for a potential energy functional . The penalty method and FEM discretization has been used.

Computational results for a great number of cases are presented in systematized form, which makes it possible to create simple formulas for :

- factor of elastic fixing of the stiffener in the shell ;
- compliance factor of the tensile zone ;
- factor enlarging forces acting on the bolt ;

and other static values.

Subsequently, computational model of a flange coupling considering deformability of tensile zone is presented. It consists of a set of integral and algebraic equations for a distribution of boundary load and kinematic variables such as mutual rotation and displacement of joined members. For these practically important parameters some analytical formulas are also given.

There has been shown, that negligence of joint deformability could, in certain cases, lead to significant errors in determination of structural rigidity.

At the end some practical examples are given, as well as directions of further investigations of the considered problem.

