

zał.1



POLITECHNIKA KRAKOWSKA im. T. Kościuszki
Wydział Mechaniczny
Instytut Mechaniki Stosowanej

INSTYT.
M-1
(logo)

Kierunek studiów: Mechanika i budowa maszyn
Specjalność : **Mechanika komputerowa**

STUDIA STACJONARNE

PRACA DYPLOMOWA
MAGISTERSKA

Szymon Hernik

ANALIZA STABILNOŚCI TARCZY HAMULCOWEJ W WARUNKACH
OBCIĄŻEŃ TERMOMECHANICZNYCH WEDŁUG KONCEPCJI
MATERIAŁÓW GRADIENTOWYCH (FGM)

Promotor:
Dr hab. inż. **Artur Ganczarski**

Kraków, rok akad. 2005/2006

Panu dr hab. inż. Arturowi Ganczarskiemu oraz
Panu prof. zw. dr hab. inż. Jackowi Skrzypkowi
składam serdeczne podziękowania za cenne wska-
zówki udzielone przy pisaniu niniejszej pracy

Spis treści

Spis treści	3
1 Wstęp	5
1.1. Wprowadzenie	5
1.2. Metody wytwarzania materiałów FGM	9
1.3. Przegląd literatury dotyczących optymalizacji tarcz hamulcowych. . .	13
2 Sformułowanie problemu	17
2.1. Cel pracy	17
2.2. Model termo-mechaniczny	18
2.3. Model matematyczny	21
2.3.1. Równanie termiczne Fouriera-Kirchhoffa	21
2.3.2. Równania płyto-tarczy Kirchhoffa-Love'a	24
2.3.3. Warunki brzegowe	28
3 Procedura numeryczna	30
3.1. Algorytm numeryczny dla równania parabolicznego (warunek stabilności)	30
3.1.1. Algorytm „fully explicit”	30
3.1.2. Schemat „fully implicit”	31
3.1.3. Stabilność rozwiązania zagadnienia dyfuzji	32
3.1.4. Schemat Crancka-Nicholsona	33
3.1.5. Warunek stabilności w przypadku pełnego równania Fouriera.	33
3.2. Całkowanie numeryczne („metoda strzału”)	35
3.3. Stagger algorithm	37
3.4. Wielkości bezwymiarowe	37

4 Wyniki	39
4.1. Stałe materiałowe przyjęte do obliczeń	39
4.2. Utrata stateczności jednorodnej tarczy hamulcowej	40
4.3. Stateczność tarczy hamulcowej funkcjonalnie gradowanej (FGM) . . .	45
5 Podsumowanie, wnioski oraz perspektywy dalszych badań	52
Bibliografia	55
Wykaz oznaczeń stosowanych w tekście	59
Spis rysunków	61
Spis tablic	63

1. Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Współczesne konstrukcje pracują w coraz bardziej ekstremalnych warunkach, bardzo wysokich temperatur lub ciśnień. Zmusza to naukowców do poszukiwania nowszych rozwiązań konstrukcyjnych, a co się z tym wiąże, także nowych materiałów. Na początku XX wieku pojawiła się koncepcja modelowania materiałów, jednakże dopiero rozwój metod komputerowych pozwolił na zastosowanie tego rodzaju rozwiązania w realnych konstrukcjach. Ze względu na sposób modelowania materiału można takie konstrukcje podzielić na trzy typy: kompozyty [3], intermetaliki, materiały funkcjonalnie zmienne (ang. FGM). Podział ten jest wynikiem różnic we własnościach fizyczno-mechanicznych oraz technologii wytwarzania poszczególnych materiałów [39].

Najwcześniej pojawiły się kompozyty. W 1950 roku wytworzono pierwsze komponenty z tych materiałów. W seryjnej produkcji po raz pierwszy zastosowała je firma Toyota w latach 70-tych XX wieku. Kompozyty są materiałami, w których własności materiałowe modeluje się wprowadzając anizotropię i sterując nią. Po raz pierwszy zostały użyte do zmodyfikowania właściwości materiałowych tarcz hamulcowych aby zmniejszyć ich ścieralność i odporność na temperaturę (rys. 1.1).

Głównymi zaletami kompozytów są [3]:

- bardzo dobre własności mechaniczne,
- niska przewodność cieplna,
- odporność chemiczna,
- odporność na działanie wysokich temperatur,



Rysunek 1.1: Przykład zastosowania materiałów kompozytowych w tarczach hamulcowych: szybkiej kolei (lewy) oraz samochodu (prawy) [3]

- anizotropia,
- mała masa,
- neutralność biologiczna.

Do najważniejszych wad materiałów kompozytowych należą:

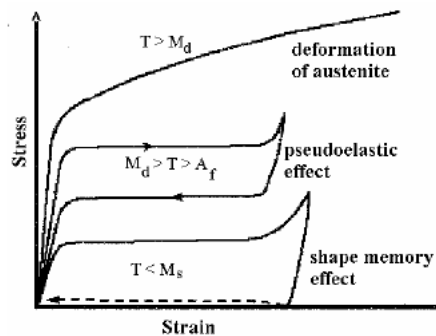
- kruchość,
- trudność w wytworzeniu (bariera technologiczna).

Kolejnym sposobem modelowania są intermetaliki, będące połączeniem dwóch lub więcej materiałów o bardzo różnych własnościach fizycznych. Główną cechą tych materiałów jest tzw. pamięć kształtu, czyli powrót do pierwotnej geometrii ciała po dostarczeniu mu pewnej ilości energii. W ten sposób intermetaliki dostosowują się do konkretnego pola naprężeń. Stąd wynika duże zainteresowanie takimi materiałami, szczególnie w biomechanice przy tworzenia implantów. Najczęściej występujące stopy to: Fe-Al, Ni-Al, Ti-Al, Ti-Ni.

Innymi zaletami intermetalików są [1]:

- wysoka wytrzymałość,
- odporność materiału na wysokie temperatury,
- dobra odporność ze względu na czynniki chemiczne,

- posiadają pożądane własności elektryczne i magnetyczne wykazywane przez niektóre intermetaliki,
- niska gęstość stopów opartych na aluminium,
- występowanie pętli histerezy na płaszczyźnie odkształceń-naprężeń (pamięć kształtu)(rys. 1.2).

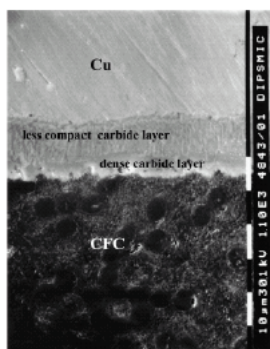


Rysunek 1.2: Pętla histerezy intermetalika Ti-Ni dla różnych temperatur [1]

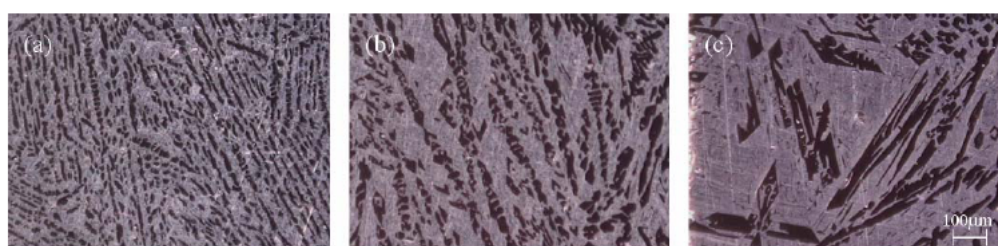
Natomiast do głównych wad możemy zaliczyć:

- niska przewodność termiczna w temperaturze pokojowej,
- niska wytrzymałość ze względu na mikropęknięcia w temperaturze pokojowej,
- problemy technologiczne przy wytwarzaniu,
- wysoki koszt,
- niestabilność struktury z uwagi na przemiany fazowe.

Pomysł stworzenia materiałów funkcjonalnie zmiennych powstał w Japonii w latach 1984-1989. Wtedy został uruchomiony pierwszy narodowy program naukowy dotyczący technologii FGM. W 1990 roku odbyła się pierwsza międzynarodowa konferencja poświęcona materiałom wytwarzanym w technologii FGM. Pierwszy narodowy program w Europie powstał zaś w 1995 roku w Niemczech, a już w 1997 roku ponad tysiąc laboratoriów na całym świecie prowadziło badania nad materiałami



Rysunek 1.3: Przykład zastosowania FGM jako materiału przejściowego pomiędzy kompozytem węgiel-węgiel (CFC) a miedzią [39]



Rysunek 1.4: Typowa mikrostruktura Al/Al₃Ni FGM wytwarzanego metodą odśrodkową

a. zewnętrzna warstwa, b. pośrednia warstwa, c. wewnętrzna warstwa [8]

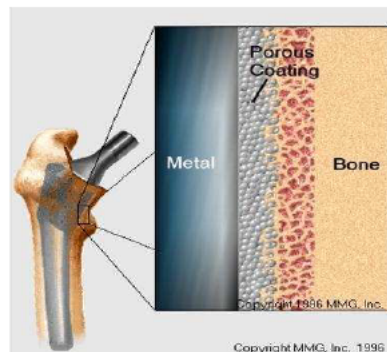
funkcjonalnie zmiennymi [27]. Przykładowy materiał FGM został zaprezentowany na rys. 1.3, 1.4.

W przeciwieństwie do kompozytów materiały funkcjonalnie zmienne charakteryzują się ciągłą zmianą własności na poziomie mikrostruktury. Zmiana własności materiału jest opisana za pomocą odpowiednich funkcji (2.1, 2.2).

Obecnie wiele ośrodków na całym świecie prowadzi badania dotyczące modelowania materiałów, a w szczególności technologii FGM, w tym trzy ośrodki w Polsce, tj. IPPT PAN, Politechnika Krakowska i Politechnika Częstochowska. Technologia FGM polega na celowym modyfikowaniu niejednorodności materiałowej w rozpatrywanej konstrukcji tak, aby uzyskać pożądane własności, na przykład, redukcję naprężeń [27].

Powyższe materiały charakteryzują się bardzo dobrą odpornością na wysokie temperatury, neutralnością chemiczną, oraz ciągłą zmianą własności materiałowych

wzdłuż przekroju lub długości próbki. Jednakże trudności technologiczne oraz bardzo wysoki koszt produkcji utrudniają wprowadzenie takich materiałów do masowej produkcji. Pomimo tych wszystkich przeciwności pojawiły się już pierwsze części maszyn, takie jak: części turbin, osłony termiczne w samolotach i wahadłowcach kosmicznych, części silników w samochodach i samolotach, medycynie oraz w wielu innych komponentach, gdzie występuje połączenie metalu z ceramiką (rys. 1.5, tab. 1.1) [39].



Rysunek 1.5: Zastosowanie materiałów FGM w medycynie do produkcji implantów [47]

1.2 Metody wytwarzania materiałów FGM

Metody wytwarzania materiałów gradowanych można podzielić na 4 kategorie:

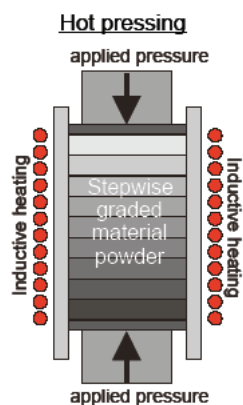
1. Technologia proszkowa W trakcie wytwarzania materiału metodą proszkową układa się w formie warstwowo kolejne partie materiałów, które mają być składowymi materiału wynikowego. Forma musi mieć identyczny kształt jak gotowy wyrób. Całość jest prasowana pod dużym ciśnieniem i jednocześnie nagrzewana od zewnątrz wysokimi temperaturami, która zmienia się funkcyjnie na kolejnych warstwach. Metoda ta służy głównie do produkcji części elektronicznych bazujących na krzemie. Grubość warstwy wynosi, średnio 25 μm , jednakże istnieje możliwość produkowania w przyszłości komponentów o grubości warstwy wynoszącej 5 μm . Do głównych wad tej metody należą:

- wymaganie różnych temperatur na kolejnych warstwach ściskanego proszku,

Typ materiału	Własności	Sposób wytwarzania	Zastosowanie
Połączenia ceramika z metalem	bariera termiczna; wysoka odporność na ścieranie; wysoka wytrzymałość mechaniczna	natrysk plazmą; metody proszkowe	wysoka sprawność części w przemyśle lotniczym
Tytan (stopy) z gradowaną gęstością lub porowatością	Kombinacja dobrych własności mechanicznych i małej masy	Metody przenikania	Części do samolotów, statki kosmiczne, implanty
Narzędzia oparte na stali węglowej lub niklowej połączonej z ceramiką	Kombinacja wytrzymałości, twardości oraz małej ścieralności	metody przenikania, drukowanie 3D	Narzędzia, instrumenty medyczne, implanty, przemysł lotniczy i kosmiczny
Kombinacja ferrytyczno-austenityczna, np. 316L i 17-4PH; połączenie stal-ceramik	dobre własności magnetyczne lub dobra odporność magnetyczna, ciągliwość, twardość	metody proszkowe lub metody <i>in-situ</i>	przemysł samochodowy, czujniki, instrumenty medyczne

Tablica 1.1: Zastosowanie materiałów FGM w przemyśle [47]

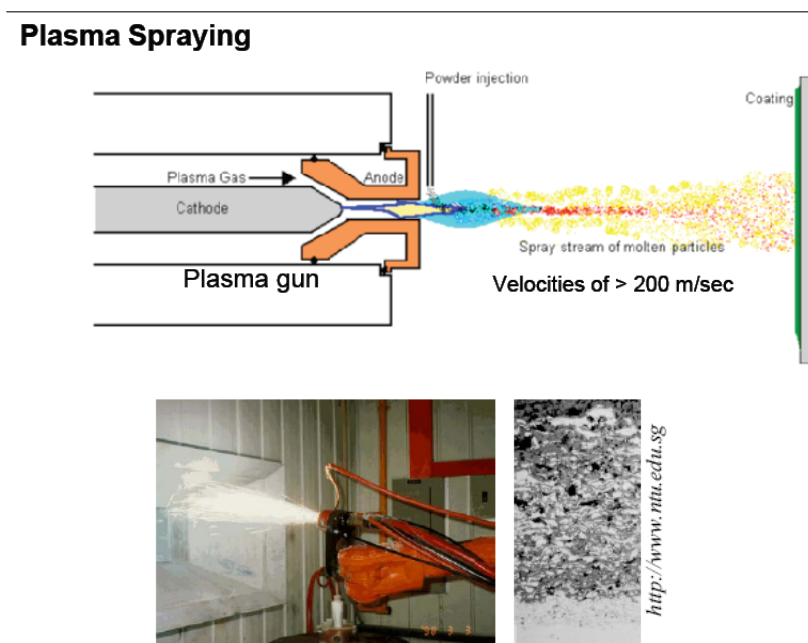
- konieczność wytworzenia od razu całego komponentu z zachowaniem kompletnej geometrii,



Rysunek 1.6: Metoda konsolidacji suchego proszku [39]

- wysoka temperatura, sięgająca niekiedy 3000, potrzebna do wytworzenia komponentu.

2. Metoda przenikania

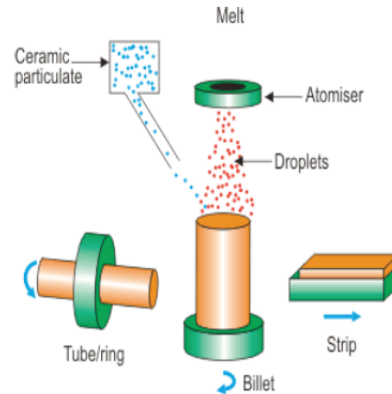


Rysunek 1.7: Metody wytwarzania materiałów FGM. Metoda nawarstwiania: natrysk plazmą [45, 39]

Metodą tą można wykonać nie tylko komponenty z materiału opartego na technologii FGM, ale także kompozyty i intermetaliki. Zamiennie zamiast plazmy może być wykorzystany natrysk tlenem z dużą prędkością lub powietrzem naładowanym ładunkami elektrycznymi [24]. Wnikanie w siebie struktury łą-

czących się materiałów po wpływem wysokiej temperatury powoduje ciągłe przejście pomiędzy kolejnymi warstwami materiału po jego grubości.

3. Metoda *in-situ*



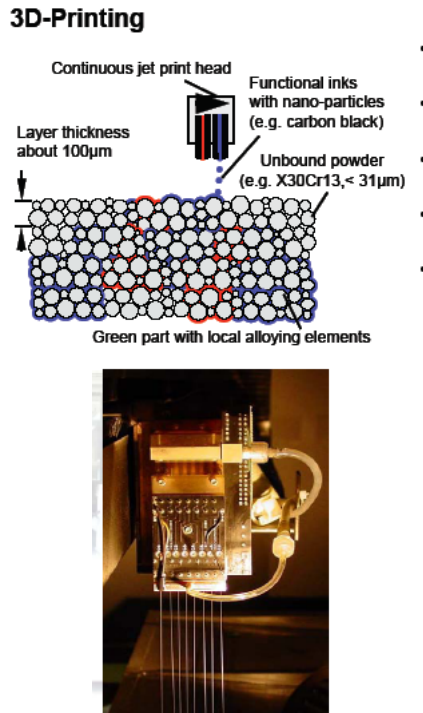
Rysunek 1.8: Metody wytwarzania materiałów FGM. Metoda *in-situ*: natryskowy process formowania [15]

Główne cechy tej metody wytwarzania to:

- gęstość $> 98\%$,
- brak makroskopowej segregacji,
- dobre modelowanie własności mechanicznych,
- większa elastyczność metalu/stopu,
- wysoki współczynnik mieszania (≤ 2 kg/s).

4. Metoda szybkich prototypów

Przedstawiona na rysunku 1.9 metoda wytwarzania FGM nazywana jest drukowaniem 3D. Sposób wytwarzania FGM przypomina zasadę działania domowych drukarek atramentowych, gdzie *atrament* zawiera cząstki różnych materiałów, z których składać się będzie gotowy wyrób. Głowice drukujące są zaprogramowane w taki sposób, aby własności materiału były funkcjonalnie zmienne. Grubość warstwy FGM przy zastosowaniu tej technologii wynosi $50 \div 200 \mu m$. Prędkość drukowania wynosi 2.5 m/s, co daje wydajność rzędu $200 \text{ cm}^3/\text{h}$ [36].



Rysunek 1.9: a. Metoda nadruku 3D – schemat [39], b. zdjęcie urządzenia służącego do drukowania 3D [47]

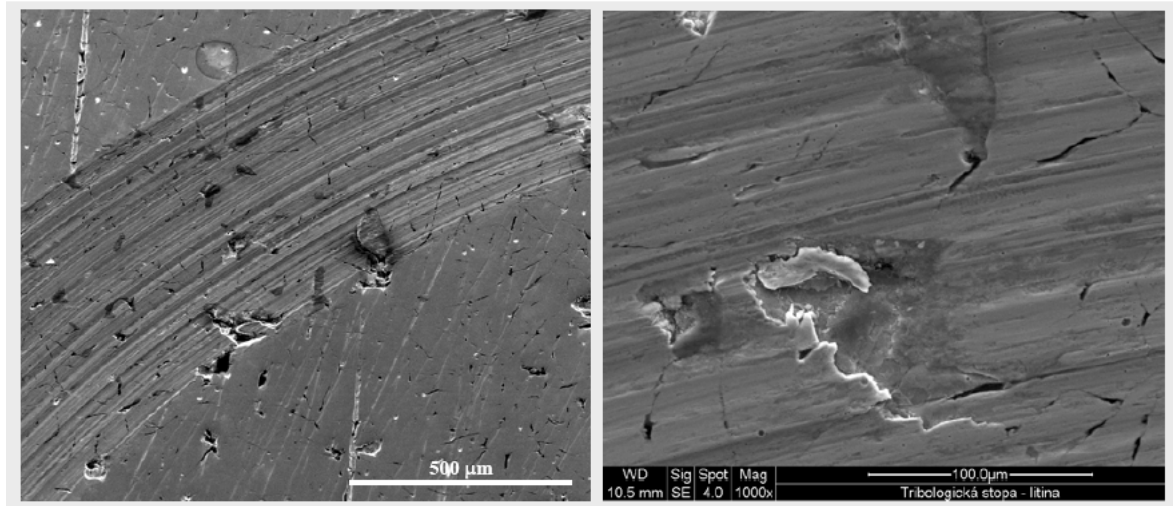
1.3 Przegląd literatury dotyczących optymalizacji tarcz hamulcowych.

Z uwagi na swoją konstrukcję, w celu uzyskania odpowiedniego momentu hamowania w hamulcach tarczowych wymagane jest, aby siła nacisku była większa niż w hamulcach szczękowych a ich wartości dochodzą do 8 MPa. Liniowe prędkości tarcia mogą przekraczać nawet 40 m/s, lecz w przeciętnych warunkach eksploatacyjnych nie przekraczają 20 m/s [16].

W procesie hamowania najbardziej nagrzewają się tarcze hamulcowe, które przejmują blisko 80÷90% ciepła [46]. Resztę przejmują klocki hamulcowe, piasty, łożyska kół, zaciski, obręcze oraz przewody hamulcowe. Uzyskiwane przez klocki temperatury wynoszą 200÷300°C [41, 38].

Do podstawowych parametrów wpływających na zwiększenie intensywności zużycia zaliczamy naciski jednostkowe, liniową prędkość tarcia oraz temperaturę współ-

pracy pary ciernej. Najbardziej niekorzystny wpływ ma temperatura. Jej wzrost powoduje pogorszenie właściwości mechanicznych materiałów, możliwość wystąpienia przemian fazowych, zmiany stanu skupienia oraz przyspieszenie przebiegu reakcji chemicznych (rys. 1.10) [16].



Rysunek 1.10: Powierzchnia zużytej tarczy hamulcowej obserwowana pod mikroskopem elektronowym, powiększenie: lewy 1:500, prawy 1:300 [22]

Próby konstrukcji tarcz były podejmowane wielokrotnie i ich wyniki są dostępne w literaturze [13, 4, 14]. Jednak próby te polegały na optymalizacji tarczy poprzez modyfikowanie własności geometrycznych. Wyniki uzyskane w ten sposób są niemożliwe do zastosowania w produkcji seryjnej ze względu na problemy technologiczne. Dlatego w przypadku tarcz hamulcowych, aby uniknąć niekorzystnego wpływu wysokiej temperatury, wprowadzono wentylowane tarcze hamulcowe. Są to tarcze wykonane z dwóch cienkich warstw połączonych ze sobą cienkimi żeberkami. W ten sposób powietrze, które znajduje się w środku tarczy, chłodzi je, podwyższając ochronę termiczną tarczy nawet o 40% [46].

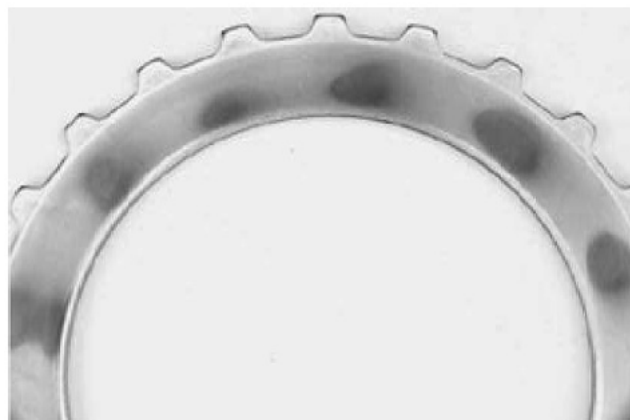
Inne rozwiązanie wprowadzono na przykład w samochodzie Mercedes SLR, gdzie tarcze wykonane z materiałów ceramicznych wzmocnionych włóknami węglowymi. Masa takich tarcz jest znacznie mniejsza od tarcz wykonanych ze stali lub żeliwa, nawet do 60% przy takiej samej średnicy. Ich żywotność sięga 300 tys. km. Są one niewrażliwe na korozję i odporne na zmęczenie cieplne (fading) nawet do tempera-

tury 1000°C [35, 31].



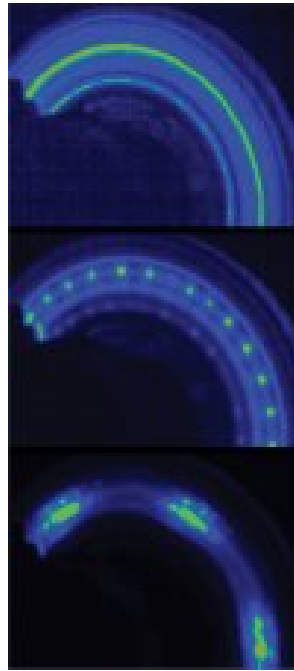
Rysunek 1.11: Zdjęcie tarczy powlekanej ceramiką firmy „Black Diamond” [46]

Opisane rozwiązania konstrukcyjne nie są doskonałe, ponieważ badania zużycia tarcz hamulcowych wentylowanych i zrobionych z materiałów kompozytowych wykazały, że nawet przy tak zaawansowanych konstrukcjach może wystąpić zjawisko globalnej utraty stateczności (ang. „Hot-Spot”), spowodowane nadmiernym przegrzaniem tarczy. Badania takie były prowadzone przez koncern „Škoda” [22] oraz [42, 32, 2, 43].



Rysunek 1.12: „Hot-Spots” na tarczy od sprzęgła [42]

Innym przykładem ekstremalnych warunków, w jakich pracują tarcze hamulcowe są warunki hamowania szybkiej kolei TGV, opublikowane w artykule [23]. W tym przypadku, proces hamowania rozpoczęty przy prędkości pociągu równej 300 km/h na odcinku 3,5 km trwał 80 s. W trakcie hamowania zaobserwowano zjawisko globalnej utraty stateczności w postaci *Hot-Spot* (rys. 1.13) wywołanych nagrzaniem tarcz hamulcowych do temperatury 1200°C.



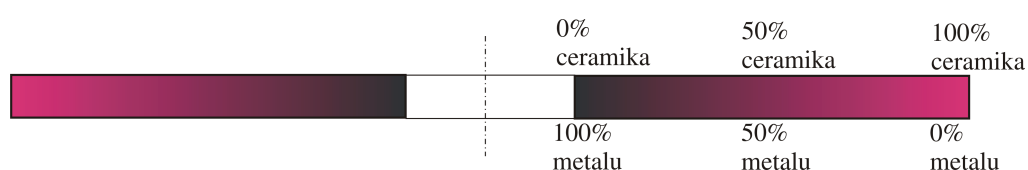
Rysunek 1.13: *Hot-spots* w tarczach hamulcowych zamontowanych w pociągu TGV uchwycone przy pomocy kamery na podczerwień [23].

2. Sformułowanie problemu

2.1 Cel pracy

W niniejszej pracy podejmuje się próbę modelowania tarczy hamulcowej, wykorzystując materiał funkcjonalnie zmienny o takich własnościach, aby pod wpływem ogółu zjawisk termomechanicznych, czyli pola naprężeń termicznych powstającego na skutek generowania ciepła poprzez tarcie klocków hamulcowych o tarczę i jednocześnie chłodzenia przez strumień opływającego powietrza oraz pola naprężeń mechanicznych, nie doszło do globalnej utraty stateczności (*Hot-Spot*) [32, 2].

Makroskopowe (efektywne) własności termo-mechaniczne dwu-fazowego (metal-ceramik) materiału typu FGM zależą od udziału procentowego obu faz i ich indywidualnych własności w określonej temperaturze. Udział procentowy obu faz zmienia się stosownie do zmiany określonej zmiennej przestrzennej, powodując ciągłą zmianę efektywnych własności termo-mechanicznych od pierwszej z faz (np. metalu) do drugiej (np. ceramika) (rys. 2.1). Najczęściej stosowanymi „regułami mieszania” są tzw.

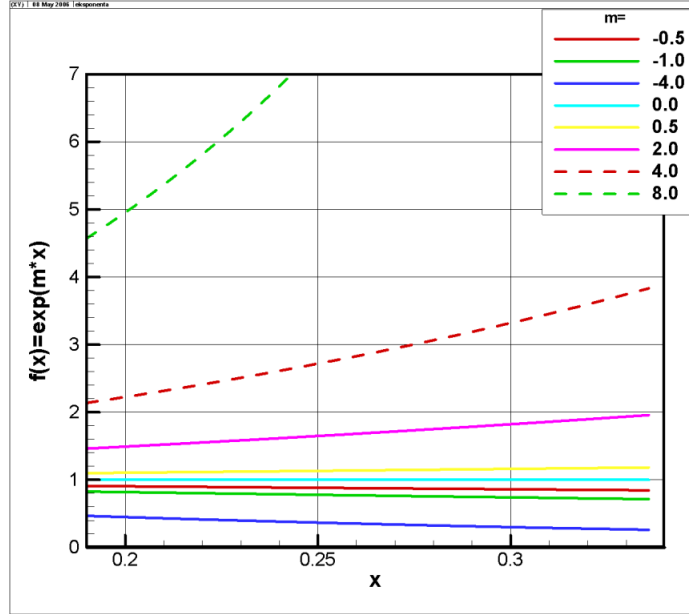


Rysunek 2.1: Tarcza wykonana z materiału funkcjonalnie gradowanego FGM.

„oszacowanie Voigta”, bazujące na regule średniej arytmetycznej, oraz „oszacowanie Reussa”, oparte na regule średniej harmonicznej. Stosownie do „reguł mieszania” proponowane są dwa sformułowania matematycznej aproksymacji podstawowych własności termo-mechanicznych dla materiałów funkcjonalnie zmiennych:

- propozycja opisu niejednorodności za pomocą funkcji eksponencjalnej [28] (2.1), (rys. 2.2)

$$\lambda(r) = \lambda_0 e^{k_1 r/r_2} \quad E(r) = E_0 e^{k_2 r/r_2} \quad (2.1)$$



Rysunek 2.2: Wykres zmian własności materiałowych aproksymowanych funkcją eksponencjalną.

- propozycja opisu niejednorodności za pomocą funkcji potęgowej, nawiązująca do „oszacowanie Voigta” [30, 5, 6] (2.2), (rys. 2.3)

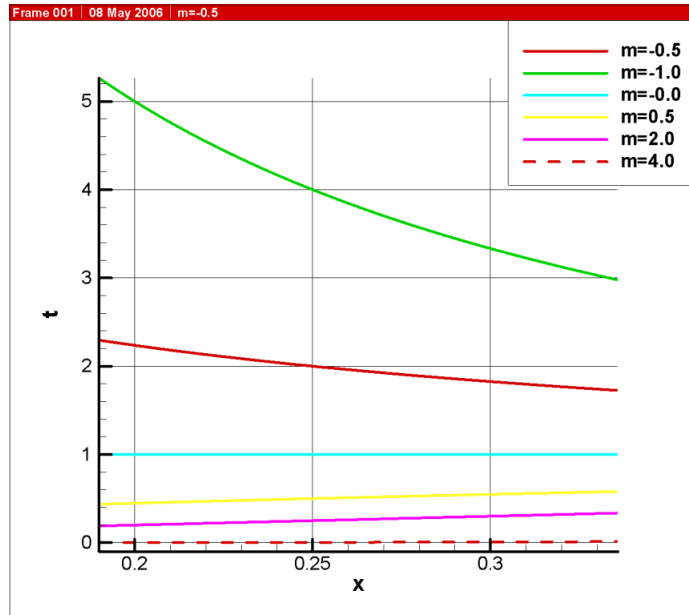
$$\lambda(r) = \lambda_0 \left(\frac{r}{r_2}\right)^{m_1} \quad E(r) = E_0 \left(\frac{r}{r_2}\right)^{m_2} \quad (2.2)$$

w których r_2 jest zewnętrznym promieniem tarczy.

Celem pracy jest taki dobór współczynników FGM (k_1, k_2 lub m_1, m_2), aby nie doszło do globalnej utraty stateczności (*Hot-Spot*) w rozpatrywanym zakresie prędkości.

2.2 Model termo-mechaniczny

Przyjęcie odpowiedniego modelu termo-mechanicznego zdolnego opisać ogół zjawisk zachodzących w tarczy hamulcowej podczas procesu hamowania, zależy głównie od możliwości oferowanych przez powszechnie stosowane metody numeryczne:



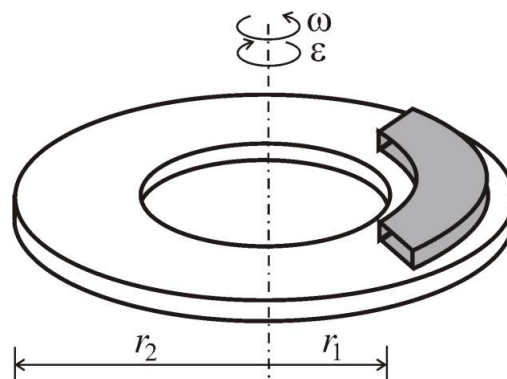
Rysunek 2.3: Wykres zmian własności materiałowych aproksymowanych funkcją potęgową.

bezpośredniego całkowania równań (DNI), różnic skończonych (FDM) i elementów skończonych (FEM). W przypadku rozwiązywania sprzężonych problemów termomechanicznych mogących wykazywać silną niejednorodność materiałową, typową dla zagadnień FGM, zarówno FDM jak i FEM w swoim klasycznym sformułowaniu prowadzą do wyników obarczonych zbyt dużym błędem [12]. Poprawa zbieżności rozwiązania wymaga zastosowania elementów skończonych specjalnego typu, w których niejednorodność na szczeblu elementu modelowana jest przy pomocy dodatkowej funkcji kształtu [18]. W związku z powyższym w pracy zdecydowano się na zastosowanie metody bezpośredniego całkowania równań (DNI) termo-sprężystości. Tarcza hamulcowa jako konstrukcja traktowana jest jako płyto-tarcza Kirchhoffa-Love'a [29, 37, 21, 34] (por. rys. 2.4) poddana obciążeniom termicznym oraz siłom masowym.

W stosunku do wszystkich obciążeń termo-mechanicznych przyjmowane jest założenie upraszczające dotyczące ich obrotowej symetrii. Jednostkowe siły masowe odpowiednio w kierunku promieniowym i obwodowym spełniają to założenie w sposób ścisły, natomiast pole sił tarcia oraz wywołane nim pole termiczne jedynie w sposób przybliżony, ponieważ para klocków hamulcowych działa na łuku o skończo-

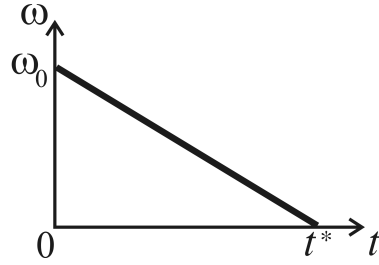
nej długości $< 2\pi$. Odnosnie tych ostatnich, mając na względzie unikanie zbytnej komplikacji modelu matematycznego, postuluje się również ich obrotową symetrię homogenizując wpływ działania pary klocków hamulcowych na pełnym obwodzie tarczy. Wprowadzając układ współrzędnych walcowych o początku w środku tarczy formułujemy zadanie przy następujących założeniach:

- obciążenia są zredukowane do powierzchni środkowej,
- przemieszczenia warstwy środkowej są małe w stosunku do grubości płyty ale odchodzi się od zasady zeszywnienia,
- odcinki proste i normalne do powierzchni środkowej przed deformacją pozostają proste i normalne do powierzchni środkowej po deformacji a ich długość nie ulega zmianie (hipoteza Kirchhoffa-Love'a),
- całkowite odkształcenie jest sumą odkształceń sprężystych, podlegających prawu Hooke'a, oraz odkształceń termicznych: $\varepsilon_{r/\varphi} = \varepsilon_{r/\varphi}^e + \alpha T$,
- w płycie panuje płaski stan naprężenia.



Rysunek 2.4: Model tarczy hamulcowej przyjęty do obliczeń.

- proces hamowania tarczy przebiega ze stałym opóźnieniem $\varepsilon = \text{const}$, czyli z liniowo-malejącą prędkością kątową $\omega = \omega_0 - \varepsilon\tau$ (rys. 2.5).



Rysunek 2.5: Przebieg procesu hamowania tarczy.

2.3 Model matematyczny

Model matematyczny tarczy hamulcowej stanowi układ czterech równań różniczkowych: równanie termiczne Fouriera-Kirchhoffa, dwa równania stanu tarczowego w sformułowaniu przemieszczeniowym oraz równanie stanu giętnego typu Bryena. Przy wyprowadzeniu ostatniego z równań, ze względu na analizę zagadnienia utraty stateczności, zrezygnowano z zasady zeszywnienia. Wszystkie równania są zdefiniowane w układzie cylindrycznym wynikającym z założenia kołowej symetrii.

2.3.1 Równanie termiczne Fouriera-Kirchhoffa

Temperatura jest funkcją zależną od dwóch zmiennych: współrzędnej promieniowej r oraz czasu τ . Dlatego w równaniu Fouriera (2.3) muszą zostać uwzględnione człony bezwładności termicznej.

Oprócz tego należy również uwzględnić intensywność wewnętrznych źródeł ciepła \dot{q}_v wynikających z generacji temperatury poprzez tarcie w obrębie klocka hamulcowego oraz chłodzenie w strefie, w której nie ma generacji ciepła, natomiast istnieje opływ powietrza.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \dot{q}_v = c_v \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.3)$$

Intensywność wewnętrznych źródeł ciepła w strefie grzania

Z definicji, intensywność wewnętrznych źródeł ciepła jest dana wzorem (2.4)

$$\dot{q}_v = \frac{d\dot{Q}}{dV} \quad (2.4)$$

gdzie $dV = 2\pi r h dr$ – objętość klocka hamulcowego.

Przyjmując, że klocek naciska na tarczę z pewnym ciśnieniem p , na promieniu r , tarcza obraca się z prędkością kątową ω oraz współczynnik tarcia jest równy μ , to wielkość \dot{Q} możemy zdefiniować wzorem (2.5)

$$\dot{Q} = 2p\mu r\omega(2\pi r dr)\eta \quad (2.5)$$

Wielkość $p\mu$, czyli iloczyn nacisku i współczynnika tarcia jest siłą tarcia, po wymnożeniu przez współrzędną promieniową r , czyli promień tarcia, otrzymujemy pracę sił tarcia. Uwzględniając dodatkowo fakt, że tarcza obraca się z chwilową prędkością ω oraz wykonując mnożenie przez jednostkowe pole powierzchni klocka otrzymujemy moc sił tarcia. Przed wyrażeniem występuje mnożnik dwa, ponieważ tarcza hamowana jest przez dwa klocki hamulcowe. Ze względu na ruch obrotowy tarczy wpływ klocków hamulcowych rozkładany jest na całym obwodzie.

Całkowita energia generowana w trakcie procesu hamowania zostaje zużyta dwójako: na sam proces hamowania oraz na generację ciepła. W niniejszym zadaniu brana jest pod uwagę tylko ta druga część energii. Parametr η jest mnożnikiem podającym procentowy udział energii zużytej w proces hamowania na generację ciepła. Fizycznie można go interpretować jako $1 - \eta_{max}$, gdzie η_{max} jest sprawnością.

Tak zdefiniowaną wielkość $d\dot{Q}$ wstawimy do równania (2.4) otrzymując:

$$\dot{q}_v = \frac{2p\mu r\omega(2\pi r dr)}{2\pi r h dr}\eta = 2\frac{pr\mu\omega}{h}\eta \quad (2.6)$$

Intensywność wewnętrznych źródeł ciepła w strefie chłodzenia

W strefie oddawania ciepła wielkość $d\dot{Q}$ definiujemy w równaniu (2.7)

$$d\dot{Q} = 2\beta(\omega)(T - T_\infty)2\pi r dr \quad (2.7)$$

Równanie (2.7) jest klasycznym równaniem klasycznym równaniem przekazywania ciepła za pomocą konwekcji swobodnej lub wymuszonej znanym z termodynamiki

[9, 40], gdzie β jest współczynnikiem swobodnej/wymuszonej konwekcji, T – aktualną temperaturą, natomiast T_∞ – temperaturą odniesienia w dostatecznie dużej odległości od źródła ciepła (poza warstwą przyścienną).

Wartość współczynnika β silnie zależy od prędkości strumienia płynu opływającego ciało. W początkowej fazie hamowania prędkość kątowna ω jest duża, a następnie maleje do zera, dlatego współczynnik swobodnej konwekcji przyjęty został jako funkcja tej prędkości.

Wstawiając (2.7) do równania (2.4) otrzymujemy

$$\dot{q}_v = \frac{2\beta(T - T_\infty)2\pi r dr}{2\pi h r dr} = 2\frac{\beta}{h}(T - T_\infty) \quad (2.8)$$

Po podstawieniu (2.8) oraz (2.6) do równania (2.3) mamy

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\lambda(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \left\{ \begin{array}{l} \text{strefa tarcia} \\ \overbrace{+2\frac{\mu p \omega r}{h} \eta} \\ -2\frac{\beta(\omega)}{h} (T - T_\infty) \\ \text{poza strefą tarcia} \end{array} \right\} = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.9)$$

gdzie współczynnika przewodności cieplnej $\lambda = \lambda(r)$ nie możemy wyciągnąć spod działania pochodnej, ponieważ jest funkcją promienia, co różni to równanie od klasycznych dostępnych w literaturze[40].

Ponieważ (2.9) jest równaniem różniczkowym cząstkowym zależnym od czasu i współrzędnej promieniowej wymaga podania warunków początkowo-brzegowych.

warunek początkowy :

$$T(0) = T_{\text{ref}} \quad (2.10)$$

warunki brzegowe typu von Neumana

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r_1} = -q_0 \quad (2.11)$$

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r_2} = 0 \quad (2.12)$$

gdzie r_1 jest wewnętrznym promieniem tarczy, a r_2 zewnętrznym promieniem.

Warunek brzegowy na wewnętrznym brzegu tarczy odpowiada w sensie fizycznym oddawaniu strumienia ciepła do wału, do którego tarcza jest przymocowana. Nato-

miast adiabaticzny warunek brzegowy postawiony na brzegu zewnętrznym oznacza brak oddawania ciepła do otoczenia.

2.3.2 Równania płyty-tarczy Kirchhoffa-Love'a

Układ równań stanu mechanicznego wyprowadzony na gruncie teorii sprężystości budują następujące zależności [10, 34, 21]:

— równania równowagi:

$$\frac{\partial(N_r r)}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial \varphi} - N_\varphi + q_r r = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial(N_{r\varphi} r)}{\partial r} + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + N_{r\varphi} + q_\varphi r = 0, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2(M_r r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2(M_{r\varphi} r)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (N_r r \vartheta_r) - \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \vartheta_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (N_{r\varphi} r \vartheta_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{r\varphi} \vartheta_r) + q_z = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

— równania geometryczne:

$$\vartheta_r = -\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \vartheta_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \quad (2.16)$$

$$\varkappa_r = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varkappa_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \quad \varkappa_{r\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad (2.17)$$

$$\lambda_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \lambda_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \lambda_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (2.18)$$

— więzy Kirchhoffa-Love'a:

$$\varepsilon_{r/\varphi} = \lambda_{r/\varphi} + \varkappa_{r/\varphi} z, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \lambda_{r\varphi} + \varkappa_{r\varphi} z \quad (2.19)$$

— równania fizyczne:

$$\sigma_{r/\varphi} = \frac{E(r)}{1-\nu^2} \left[(\varepsilon_{r/\varphi} + \nu \varepsilon_{\varphi/r}) - (1+\nu) \alpha T \right], \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{E(r)}{1+\nu} \varepsilon_{r\varphi}, \quad (2.20)$$

$$N_{r/\varphi} = \mathcal{B} \left[(\lambda_{r/\varphi} + \nu \lambda_{\varphi/r}) - (1+\nu) \alpha T \right], \quad N_{r\varphi} = \mathcal{B} (1-\nu) \lambda_{r\varphi}, \quad (2.21)$$

$$M_{r/\varphi} = \mathcal{D} (\varkappa_{r/\varphi} + \nu \varkappa_{\varphi/r}), \quad M_{r\varphi} = \mathcal{D} (1-\nu) \varkappa_{r\varphi} \quad (2.22)$$

gdzie wprowadzono następujące definicje sił przekrojowych (uogólnionych naprężeń):

$$N_{r/\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r/\varphi} dz, \quad N_{r\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\varphi} dz, \quad (2.23)$$

$$M_{r/\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r/\varphi} z dz, \quad M_{r\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\varphi} z dz, \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

oraz definicje sztywności giętej i tarczowej:

$$\mathcal{B} = \frac{E(r)h}{1 - \nu^2}, \quad \mathcal{D} = \frac{E(r)h^3}{1 - \nu^2} \quad (2.26)$$

Rugując odkształcenia (2.19), wyrażone przez przemieszczenia (2.16, 2.17, 2.18), w równaniach fizycznych (2.20, 2.21, 2.22), a następnie podstawiając te ostatnie do równań równowagi (2.13, 2.14, 2.15) oraz wykorzystując założenie kołowej symetrii ($\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$) otrzymujemy układ równań płyto-tarczy zapisany w przemieszczeniach:

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathcal{B}}{dr} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} - (1 - \nu) \alpha (T - T_{\text{ref}}) \right] + \\ & + \mathcal{B} \left[\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} - (1 - \nu) \alpha \frac{dT}{dr} \right] + q_r r h = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \nu}{2} \mathcal{B} \left[\frac{d^2v}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathcal{B}} \frac{d\mathcal{B}}{dr} \right) \frac{dv}{dr} - \left(1 + \frac{r}{\mathcal{B}} \frac{d\mathcal{B}}{dr} \right) \frac{v}{r^2} \right] + \text{poza} \\ & + q_\varphi r h = 0 \quad \text{strefą tarcia,} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\frac{1 - \nu}{2} \mathcal{B} \frac{d^2v}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathcal{B}} \frac{d\mathcal{B}}{dr} \right) N_0 + q_\varphi r h = 0 \quad \text{w strefie tarcia,}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D} \nabla^4 w + \frac{d\mathcal{D}}{dr} \left(2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2 + \nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \\ & \frac{d^2 \mathcal{D}}{dr^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{\Lambda} \left[N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \right. \\ & \left. - 2N_{r\varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + q_r \frac{\partial w}{\partial r} + q_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] - q_z = 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

W równaniu (2.27), czyli w pierwszym równaniu stanu tarczowego funkcja $u(r)$ jest przemieszczeniem w kierunku promieniowym, natomiast q_r wyraża się pierwszym ze wzorów (2.30). W drugim równaniu stanu tarczowego (2.28) funkcja $v(r)$ jest przemieszczeniem obwodowym, a q_φ opisane jest drugim ze wzorów (2.30)

$$q_r = \rho \omega^2, \quad q_\varphi = \rho \varepsilon \quad (2.30)$$

gdzie ρ jest gęstością materiału z jakiego wykonana jest tarcza, ω , chwilową prędkością kątową z jaką obraca się tarcza, natomiast ε opóźnieniem kątowym.

Równanie (2.28) zostało rozpisane w dwóch przedziałach, ponieważ w strefie gdzie nie ma klocków hamulcowych należy uwzględnić klasyczne równanie tarczowe na przemieszczenie obwodowe. Natomiast w strefie działania klocka pojawia się siła

tarcia, która w tej pracy została oznaczona symbolem N_0 i została wyliczona na podstawie wzoru (2.31).

$$N_0 = \int_{r_3}^{r_4} 2p\mu dr \quad (2.31)$$

gdzie $|r_4 - r_3|$ jest szerokością klocka hamulcowego.

Zamiana równania różniczkowego cząstkowego, opisującego stan giętny (2.29), na równoważny układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych następuje poprzez podstawienie typu Fedehofera-Eggera [7] $w(r, \varphi) = f_1(r) \sin(k\varphi) + f_2(r) \cos(k\varphi)$. Obecność członów zawierających pochodne nieparzystego rzędu z uwagi na współrzędną kątową

$$2N_{r\varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \quad q_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

uniemożliwia stosowanie klasycznego podstawienia wykorzystującego tylko jedną funkcję trygonometryczną.

Wykonując powyższe działanie i grupując człony równania przy wyrażeniach $\sin(k\varphi)$ oraz $\cos(k\varphi)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}\nabla^4 f_1 + \mathcal{D}' \left(2f_1''' + \frac{2+\nu}{r} f_1'' - \frac{1+2k^2}{r^2} f_1' + 3\frac{k^2}{r^3} f_1 \right) + \\ & \mathcal{D}'' \left(f_1'' + \frac{\nu}{r} f_1' - \nu \frac{k^2}{r^2} f_1 \right) - \frac{1}{\Lambda} \left[N_r f_1'' + N_\theta \left(\frac{f_1'}{r} - \frac{k^2}{r^2} f_1 \right) - \right. \\ & \left. 2N_{r\theta} \left(\frac{k}{r} f_1' - \frac{k}{r^2} f_1 \right) - q_r f_1' + q_\theta \frac{k}{r} f_1 \right] - q_z = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}\nabla^4 f_2 + \mathcal{D}' \left(2f_2''' + \frac{2+\nu}{r} f_2'' - \frac{1+2k^2}{r^2} f_2' + 3\frac{k^2}{r^3} f_2 \right) + \\ & \mathcal{D}'' \left(f_2'' + \frac{\nu}{r} f_2' - \nu \frac{k^2}{r^2} f_2 \right) - \frac{1}{\Lambda} \left[N_r f_2'' + N_\theta \left(\frac{f_2'}{r} - \frac{k^2}{r^2} f_2 \right) + \right. \\ & \left. 2N_{r\theta} \left(\frac{k}{r} f_1' - \frac{k}{r^2} f_1 \right) - q_r f_2' - q_\theta \frac{k}{r} f_1 \right] - q_z = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

w których operator bilaplasjanu $\nabla^4(\cdot)$ zapisany w układzie cylindrycznym dla zagadnień kołowo symetrycznych wyraża się następującym wzorem (por. [10]):

$$\nabla^4(\cdot) = \frac{d^4(\cdot)}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3(\cdot)}{dr^3} - \frac{1-2k^2}{r^2} \frac{d^2(\cdot)}{dr^2} + \frac{1+2k^2}{r^3} \frac{d(\cdot)}{dr} + \frac{k^2(k^2-4)}{r^4}(\cdot) \quad (2.34)$$

gdzie k oznacza numer kolejnego modu wyboczeniowego.

W trakcie procesu hamowania, przy dostatecznie wysokiej temperaturze, kiedy tarcza traci stateczność, zaciskające się klocki hamulcowe przeciwdziałają temu zja-

wisku, stąd w równaniu (2.29), a także w równaniach (2.32, 2.33) pojawia się dodatkowy człon q_z , który modeluje odpór podłoża, czyli zagadnienie kontaktu pomiędzy klockiem a tarczą.

W omawianym zagadnieniu do modelowania kontaktu zostało przyjęte sprężyste podłoże Winklera scharakteryzowane współczynnikiem odporu proporcjonalnym do wartości ugięcia w , w którym rolę współczynnika proporcjonalności pełni parametr γ znany w literaturze jako współczynnik sprężystości podłoża Winklera (por. [29, 34]). Został on wyliczony za pomocą empirycznego wzoru (2.35) zbudowanego na podstawie badań, w których wykazano zależność γ od rozszerzania się przewodów elastycznych w układzie hamulcowym samochodu (por. [20]).

$$\gamma = 2.7 * 10^4 \frac{\Delta V_N}{l_p^2} \quad (2.35)$$

gdzie ΔV określa zmianę objętości w przewodach elastycznych układu hamulcowego, a l_p oznacza długość tych przewodów.

Podsumowując, q_z opisane jest następującym wzorem:

$$q_z = \begin{cases} 0 & \text{poza strefą tarcia} \\ -\gamma f_{1,2} & \text{w strefie tarcia} \end{cases} \quad (2.36)$$

Układ równań (2.9, 2.27, 2.28, 2.32, 2.33) opisuje zagadnienie utraty stateczności, gdzie $1/\Lambda$ oznacza mnożnik Lagrange'a dla zespołu obciążeń.

W przypadku analizy stateczności konstrukcji poddanej działaniu zespołu n niezależnych obciążeń konserwatywnych, wystąpienie stanu krytycznego warunkowane jest spełnieniem przybliżonej zależności Schaefera-Papkowicza:

$$\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{P_{ikr}} = \Lambda = 1 \quad (2.37)$$

Należy nadmienić, że układ równań (2.9, 2.27, 2.28, 2.32, 2.33) jest jednostronnie rozprzęgnięty (temperatura występuje jako wymuszenie w układzie równań stanu mechanicznego ale siły stanu mechanicznego nie występują w równaniu Fouriera-Kirchhoffa), czyli na każdym kroku czasowym można stosować „stagger algorithm”, polegający na obliczaniu rozkładu temperatury przez rozwiązanie równania Fouriera-Kirchhoffa (2.9), który następnie jest podstawiany do równań tarczowych

(2.27, 2.28), stąd wyliczane są siły N_r , N_φ , $N_{r\varphi}$, podstawiane następnie do równań stanu giętnego (2.32, 2.33), w celu wyliczenia najniższej wartości własnej Λ . W bardziej ogólnym sformułowaniu von Kármána występuje sprzężenie zwrotne pomiędzy stanem giętnym a tarczowym (por. [9, 10]).

2.3.3 Warunki brzegowe

Jednoznaczność rozwiązania problemu opisanego równaniami różniczkowymi wymaga sformułowania odpowiednich warunków brzegowych, których liczba zależy od ilości i rzędu równań różniczkowych.

W przypadku równań stanu tarczowego równania różniczkowe są drugiego rzędu, konieczne jest więc uzupełnienie każdego z nich dwoma warunkami brzegowymi. Warunki brzegowe zostały postawione w następujący sposób: na brzegu wewnętrznym tarcza jest połączona z wałem dlatego postawione zostały jednorodne warunki typu Dirichleta (2.38, 2.40); na brzegu zewnętrznym tarczy nie działają żadne dodatkowe obciążenia typu mechanicznego, dlatego zostały postawione jednorodne warunki brzegowe trzeciego rodzaju, odpowiadające zerowaniu sił promieniowych i stycznych N_r i $N_{r\phi}$ (2.39, 2.41).

$$u|_{r=r_1} = 0 \quad (2.38)$$

$$N_r = \mathcal{B} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r_2} - (1 + \nu) \alpha (T - T_{\text{ref}}) \right] \Big|_{r=r_2} = 0 \quad (2.39)$$

$$v|_{r=r_1} = 0 \quad (2.40)$$

$$N_{r\phi} = \frac{1 - \nu}{2} \mathcal{B} \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right) \Big|_{r=r_2} = 0 \quad (2.41)$$

Inaczej wygląda sytuacja w przypadku równań stanu giętnego (2.32, 2.33), które są równaniami różniczkowymi 4-go rzędu, wymagającymi postawienia czterech warunków brzegowych dla każdego z równań. Ponieważ równania (2.32, 2.33) wynikają z równania (2.29), dlatego warunki brzegowe zostały sformułowane dla tego ostatniego.

Wewnętrzny brzeg tarczy, który jest połączony z wałem jest modelowany jako utwierdzenie wymagające zablokowania ugięcia w oraz kąta obrotu $\varphi = \partial w / \partial r$, co odpowiada jednorodnym warunkom brzegowym Dirichleta oraz von Neumanna (2.42, 2.43). Natomiast zewnętrzny brzeg tarczy jest swobodny, zatem moment ra-

dialny M_r oraz zastępcza radialna siła poprzeczna \bar{Q}_r muszą być równa zero, co odpowiada jednorodnym warunkom trzeciego rodzaju (2.44, 2.45) (por. [34, 29]).

$$w(r, \varphi)|_{r=r_1} = 0 \quad (2.42)$$

$$\left. \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = 0 \quad (2.43)$$

$$M_r = -\mathcal{D} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] \Big|_{r=r_2} = 0 \quad (2.44)$$

$$\bar{Q}_r = -\mathcal{D} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla_r^2 w) + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} \Big|_{r=r_2} = 0 \quad (2.45)$$

gdzie:

$$\nabla_r^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \quad (2.46)$$

$$M_{r\varphi} = -\mathcal{D} (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \quad (2.47)$$

Zastosowanie podstawienia Fedehofera-Eggera do warunków brzegowych pozwala sprowadzić je do następującej postaci:

$$\begin{aligned} f_i|_{r=r_1} &= 0 \\ \left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=r_1} &= 0 \\ \left[\frac{d^2 f_i}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{df_i}{dr} - k^2 \frac{f_i}{r} \right) \right] \Big|_{r=r_2} &= 0 \\ \left[\frac{d^3 f_i}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 f_i}{dr^2} - \frac{1 + k^2 (2 - \nu)}{r^2} \frac{df_i}{dr} + \frac{k^2 (3 - \nu)}{r^3} f_i \right] \Big|_{r=r_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

gdzie $i = 1, 2$.

3. Procedura numeryczna

3.1 Algorytm numeryczny dla równania parabolicznego (warunek stabilności)

Z punktu widzenia teorii równań różniczkowych równanie termiczne Fouriera-Kirchhoffa (2.9) należy do grupy równań liniowych parabolicznych o zmiennych współczynnikach [25]. Według klasyfikacji fizycznej termiczny problem brzegowy traktowany jest jako zagadnienie dyfuzji, które ma postać (3.1)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

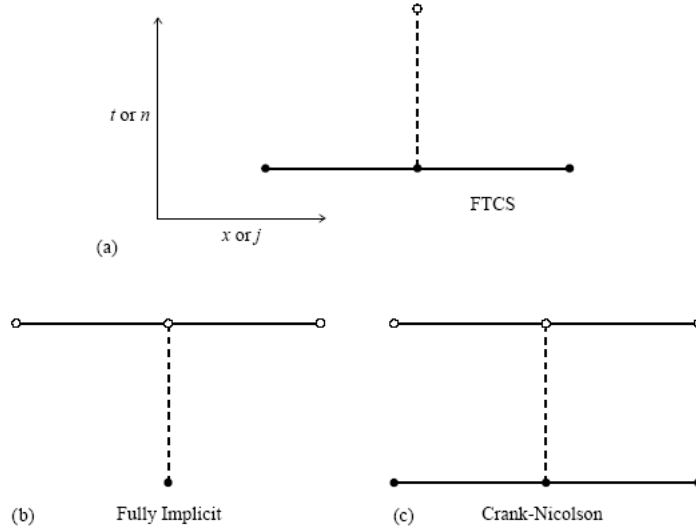
gdzie D jest współczynnikiem dyfuzji. Do rozwiązania równania (3.1) stosowany jest zazwyczaj jeden z trzech następujących algorytmów (rys. 3.1) [33]:

- „fully explicit for flux-conservative initial value problems”
- „fully implicit for flux-conservative initial value problems” zwany inaczej „backward time”
- schemat Crancka-Nicholsona

3.1.1 Algorytm „fully explicit”

Algorytm „fully explicit” zakłada, iż wartość funkcji w następnym kroku czasowym jest obliczana na podstawie trzech wartości funkcji z poprzedniego kroku czasowego (3.2). Rozpisując schemat różnicowy równania (3.1) otrzymujemy

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta \tau} = D \frac{T_{j-1}^k - 2T_j^k + T_{j+1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (3.2)$$



Rysunek 3.1: (a) schemat „fully explicit”, (b) schemat „fully implicit”, (c) schemat Crancka-Nicholsona [33]

gdzie $j = 1, 2, \dots, ndx$, $k = 1, 2, \dots, ndt$, a T_j^k oznacza wartość funkcji dla j -tego węzła na siatce współrzędnej przestrzennej w k -tej iteracji czasowej, natomiast ndx – ilość węzłów na siatce przestrzennej w danym kroku czasowym, ndt – ilość kroków czasowych, Δx – długość kroku przestrzennego, $\Delta \tau$ – długość kroku czasowego.

Porządkując człony w równaniu (3.2) mamy

$$aT_{j-1}^k + (1 - 2a)T_j^k + aT_{j+1}^k = T_j^{k+1} \quad (3.3)$$

gdzie

$$a = D \frac{\Delta \tau}{(\Delta x)^2}$$

Jest to wielkość charakterystyczna dla równania parabolicznego znana w literaturze pod nazwą liczby Fouriera[33].

3.1.2 Schemat „fully implicit”

W porównaniu do schematu „fully explicit”, niniejszy algorytm jest jego przeciwieństwem. Mianowicie, na podstawie wartości funkcji w węźle j -tym na k -tym kroku czasowym obliczane są wartości funkcji w węzłach $(j - 1)$, (j) i $(j + 1)$ dla $(k + 1)$ kroku czasowego (3.5). Jest to korzystniejsze z punktu widzenia stabilności oraz długości kroku czasowego w stosunku do poprzedniego algorytmu, jednakże da-

lej krok czasowy nie może być dowolny. Bardziej szczegółowa dyskusja na ten temat zostanie zaprezentowana w następnym podrozdziale (roz. 3.1.3).

Rozpisując schemat różnicowy dla algorytmu „fully implicit” otrzymujemy:

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta\tau} = D \frac{T_{j-1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.4)$$

Porządkując człony (3.4) podobnie jak w przypadku poprzedniego schematu mamy

$$-aT_{j-1}^{k+1} + (1 + 2a)T_j^{k+1} - aT_{j+1}^{k+1} = T_j^k \quad (3.5)$$

gdzie a jest zdefiniowane identycznie jak w poprzednim algorytmie.

Warto zauważyć, że znaczącą wadą tego schematu jest konieczność rozwiązywania liniowego układu równań algebraicznych, z którego wyliczamy nieznanne wartości funkcji dla $(k + 1)$ kroku czasowego.

3.1.3 Stabilność rozwiązania zagadnienia dyfuzji

Stabilność rozwiązania problemu dyfuzji jest związana z wielkością kroku czasowego $\Delta\tau$, który nie może być dowolnie duży. Definicja liczby Fouriera sugeruje od razu odpowiednie ograniczenie. Gdyby przyjąć, że krok czasowy może być nieskończenie duży, czyli $\Delta\tau \rightarrow \infty$, to wtedy $\alpha \rightarrow \infty$ a zatem $\Delta T \rightarrow 0$. Wynika stąd, że $\Delta\tau$ musi być ograniczone. Interpretacja fizyczna tego spostrzeżenia jest więc następująca: dyfuzja w ciele stałym musi zachodzić w miarę wolno, aby można było ten proces opisać równaniem różniczkowym liniowym.

Klasyczny warunek stabilności, który jest jednakowy dla obydwu schematów „fully explicit” oraz „fully implicit”, przy założeniu że współczynnik dyfuzji $D = \text{const}$ wygląda następująco

$$\alpha = D \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.6)$$

Rozwiązując równanie paraboliczne numerycznie kolejność postępowania jest następująca;

1. przyjęcie długości kroku przestrzennego Δx
2. określenie długości krok czasowego $\Delta\tau$ na podstawie warunku stabilności (3.6)
3. wybór algorytmu rozwiązania

4. wykonanie obliczeń dla przyjętego kroku przestrzennego Δx i oszacowanego długości kroku czasowego $\Delta \tau$.

3.1.4 Schemat Crancka-Nicholsona

Podczas rozwiązywania równań parabolicznych oprócz warunku stabilności pojawia się też inny problem. W omawianych do tej pory schematach (roz. 3.1.2, roz. 3.1.1) nie zwracaliśmy uwagi na dokładność. Wyprowadzając schemat różnicowy dla obliczania pierwszej pochodnej na podstawie szeregu Taylora można zauważyć, że największa dokładność takiego ilorazu istnieje w centralnym punkcie dla schematu rozłożonego na trzech węzłach. Natomiast w obu wcześniejszych przypadkach wykorzystywano iloraz w przód („fully explicit”) albo iloraz w tył („fully implicit”), które są oparte tylko na dwóch węzłach co znacznie obniża dokładność rozwiązania. Ponadto, odległość punktu, w którym jest obliczany schemat różnicowy przestrzenny od punktu, w którym jest rozpisany schemat różnicowy czasowy wynosi dokładnie $\Delta \tau/2$.

Powstaje zatem pytanie: czy nie można stworzyć takiego schematu, który stanowiłby rozwiązanie pośrednie pomiędzy wcześniej omawianymi schematami, tak aby centralny punkt gwiazdy różnicowej na kierunku osi czasowej i przestrzennej był ten sam? Takim algorytmem jest właśnie schemat Crancka-Nicholsona. Został on rozpisany w następujący sposób:

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta \tau} = \frac{D}{2} \left[\frac{T_{j-1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j+1}^{k+1} - T_{j-1}^k - T_j^k - T_{j+1}^k}{(\Delta x)^2} \right] \quad (3.7)$$

Poza dokładnością, największą zaletą tego schematu jest stabilność. Mianowicie, algorytm Crancka-Nicholsona jest stabilny dla dowolnie niedużego kroku czasowego $\Delta \tau$. Wadą tego algorytmu jest to, że na każdym kroku czasowym konieczne jest rozwiązywanie układu liniowych równań algebraicznych.

3.1.5 Warunek stabilności w przypadku pełnego równania Fouriera.

Jak można zaobserwować na podstawie poprzednich podrozdziałów oszacowanie warunku stabilności, czyli znalezienie odpowiedniego kroku wzdłuż zmiennej czas-

wej jest praktycznie kluczowym warunkiem dobrego algorytmu numerycznego dla zagadnienia początkowo-brzegowego. Porównując równania (2.3) oraz (3.1) można zauważyć znaczące różnice. Po pierwsze, w przypadku równania (2.3) istnieją wewnętrzne źródła ciepła, które są dwojakiego rodzaju. Z punktu widzenia matematyki w pierwszym przypadku są zależne od argumentu funkcji niewiadomej, w drugim przypadku, od samej funkcji. Po drugie, współczynnik dyfuzji, czyli współczynnik przewodności cieplnej λ nie jest stały, tylko jest funkcją położenia. Dlatego konieczne jest wyprowadzenie uogólnione warunku stabilności, który będzie uwzględniał zewnętrzne źródła ciepła oraz funkcyjną zależność współczynnika dyfuzji.

Aby wyprowadzić warunek stabilności rozpisujemy schemat różnicowy równania Fouriera dla schematu „fully implicit” pamiętając, że współczynnik przewodności cieplnej λ jest funkcją położenia (3.8)

$$\lambda \frac{T_{j-1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j+1}^{k+1}}{(\Delta r)^2} + \left(\frac{\lambda}{r_j} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \frac{T_{j+1}^{k+1} - T_{j-1}^{k+1}}{2\Delta r} + \left\{ \begin{array}{l} \text{strefa tarcia} \\ \overbrace{+ 2 \frac{\mu p \omega \eta}{h} r_j} \\ - 2 \frac{\beta(\omega)}{h} (T_j^{k+1} - T_\infty) \\ \text{poza strefą tarcia} \end{array} \right\} = \rho c_v \frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta \tau} \quad (3.8)$$

W pierwszej kolejności zajmiemy się tą częścią równania (3.8), która jest prawdziwa w strefie tarcia.

Po uszeregowaniu członów otrzymujemy

$$\frac{\Delta \tau}{c_v \rho} \left[\frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{\lambda}{r_j} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) - \frac{\lambda}{(\Delta r)^2} \right] T_{j-1}^{k+1} + \left(\frac{2\lambda\Delta\tau}{(\Delta r)^2 c_v \rho} + 1 \right) T_j^{k+1} + \frac{\Delta \tau}{c_v \rho} \left[\frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{\lambda}{r_j} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{(\Delta r)^2} \right] T_{j+1}^{k+1} - 2 \frac{\mu p \omega \eta}{h} r_j = T_j^k \quad (3.9)$$

Warunek stabilności jest określany na podstawie członów stojących przy wyrażeniu T_j^{k+1} (por. [17]) i wyraża się wzorem (3.10):

$$\frac{2\lambda\Delta\tau}{(\Delta r)^2 c_v \rho} + 1 \geq 0 \quad (3.10)$$

Przekształcając powyższą nierówność mamy

$$\Delta \tau \leq \frac{\rho c_v (\Delta r)^2}{2\lambda} \quad (3.11)$$

Jednakże takie oszacowanie jest niewystarczające, ponieważ $\lambda = \lambda(r)$. W takim przypadku warunek (3.11) przekształcamy do postaci (por. [33]):

$$\Delta\tau \leq \min_j \left[\frac{\rho c_v (\Delta r)^2}{2\lambda(r_j)} \right] \quad (3.12)$$

Jeżeli w równaniu (3.11) przyjmiemy $c_v \rho = 1$ oraz $\lambda = D = \text{const}$ otrzymujemy klasyczny warunek stabilności dla równania dyfuzji. Wynika stąd, że jeżeli zewnętrzne źródła ciepła zależą tylko od argumentu funkcji niewiadomej, to nie mają wpływu na warunek stabilności.

W przypadku, gdy w równaniu (3.8) uwzględnimy człon swobodnej konwekcji i uszeregujemy czony w schemacie różnicowym otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tau}{c_v \rho} \left[\frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{\lambda}{r_j} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} \right) - \frac{\lambda}{(\Delta r)^2} \right] T_{j-1}^{k+1} + \\ \left[\left(\frac{2\lambda}{(\Delta r)^2} + 2\frac{\beta(\omega)}{h} \right) \frac{\Delta\tau}{c_v \rho} + 1 \right] T_j^{k+1} - \\ \frac{\Delta\tau}{c_v \rho} \left[\frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{\lambda}{r_j} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{(\Delta r)^2} \right] T_{j+1}^{k+1} - 2\frac{\beta(\omega)}{h} T_\infty = T_j^k \end{aligned} \quad (3.13)$$

Przeprowadzając analogiczny tok rozumowania jak w poprzednim przypadku otrzymujemy następujący warunek na oszacowanie kroku czasowego:

$$\Delta\tau \leq \min_j \left[\frac{c_v \rho}{\frac{2\lambda(r_j)}{(\Delta r)^2} + 2\frac{\beta(\omega)}{h}} \right] \quad (3.14)$$

Można zauważyć, że przyjmując $\beta = 0$, czyli brak swobodnej konwekcji, równanie (3.14) sprowadza się do równania (3.12).

3.2 Całkowanie numeryczne („metoda strzału”)

Redukcja dwupunktowego problemu brzegowego dla układu równań (2.9, 2.27, 2.28, 2.32, 2.33) do standardowej postaci $N = 14$ sprzężonych równań różniczkowych pierwszego rzędu jest wykonywana w następujący sposób [33]

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = g_i(x, y_1, \dots, y_N, \Lambda) \quad (3.15)$$

w którym mnożnik Lagrange’a spełnia rolę dodatkowej 15-tej zmiennej

$$y_{N+1} \equiv \Lambda \quad (3.16)$$

spełniającej trywialne równanie różniczkowe

$$\frac{dy_{N+1}}{dx} = 0 \quad (3.17)$$

z $n_1 = 7$ warunkami brzegowymi (2.11, 2.38, 2.40, 2.48) w punkcie startowym x_1

$$B_{1j}(x, y_1, \dots, y_N) = 0 \quad (3.18)$$

oraz pozostałymi $n_2 = N - n_1 = 7$ warunkami brzegowymi (2.12, 2.39, 2.41, 2.48) w punkcie końcowym x_2

$$B_{2k}(x, y_1, \dots, y_N) = 0 \quad (3.19)$$

Numeryczna implementacja całkowania metodą strzału oparta jest na wielowymiarowej, globalnie zbieżnej metodzie Netwona-Raphsona, poszukiwania rozwiązania n_2 równań z n_2 niewiadomymi. W punkcie startowym x_1 danych jest N wartości startowych y_i ale tylko n_1 warunków brzegowych, zatem pozostaje $n_2 = N - n_1$ wartości „dowolnych”. Przyjmując, że te „dowolne” wartości są współrzędnymi wektora \mathbf{V} określonego w przestrzeni n_2 wymiarowej, użytkownik w procedurze `load.for` generuje kompletny wektor startowy \mathbf{y} , spełniający n_1 warunków brzegowych w punkcie x_1 uzupełniony wektorem \mathbf{V}

$$y_i(x, V_1, \dots, V_{n_2}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.20)$$

Wybierając pewien wektor \mathbf{V} definiujemy wektor startowy $\mathbf{y}(x_1)$, który następnie poprzez całkowanie układu równań (3.15), traktowanego jako problem początkowy prowadzi do rozwiązania $\mathbf{y}(x_2)$. Jeśli zdefiniować wektor „niedokładności” (discrepancy wektor) \mathbf{F} również określony w przestrzeni n_2 wymiarowej, w taki sposób, iż jego współrzędne są miarą oddalenia rozwiązania od warunków brzegowych w x_2

$$F_k = B_{2k}(x_2, \mathbf{y}) \quad k = 1, 2, \dots, n_2 \quad (3.21)$$

to użytkownik w procedurze `score.for` zamienia N wymiarowy wektor rozwiązań $\mathbf{y}(x_2)$ na n_2 wymiarowy wektor \mathbf{F} . W powyższy sposób, z punktu widzenia metody Newtona-Raphsona, problem został sprowadzony do zadania polegającego na poszukaniu wartości wektora \mathbf{V} zerującego wartości wektora \mathbf{F} . Stosując algorytm numeryczny `newt.for` rozwiązywany jest układ równań liniowych z n_2 niewiadomymi

$$\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{V} = -\mathbf{F} \quad (3.22)$$

a następnie dodawana poprawka

$$\mathbf{V}^{new} = \mathbf{V}^{old} + \delta\mathbf{V} \quad (3.23)$$

Formuła (3.23) zawiera macierz jacobianu \mathbf{J} posiadającą następującą reprezentację

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial V_j} \quad (3.24)$$

w ogólnym przypadku bardzo skomplikowaną jeśli chodzi o analityczne obliczenia odpowiednich pochodnych cząstkowych, zatem wykorzystuje się procedurę fdjac.for obliczającą przybliżoną wartość jacobianu w sposób numeryczny

$$\frac{\partial F_i}{\partial V_j} \simeq \frac{F_i(V_1, V_2, \dots, V_j + \Delta V_j, \dots)}{\Delta V_j} \quad (3.25)$$

3.3 Stagger algorithm

Generalnie rzecz ujmując, rozwiązanie problemu na każdym kroku czasowym wymaga równoczesnego rozwiązania układu 15-tu równań różniczkowych pierwszego rzędu, jednak z punktu widzenia termomechaniki równania te są rozwiązywane według pewnej sekwencji (stagger algorithm), w której daje się wyróżnić trzy podstawowe etapy:

1. rozwiązanie równania termicznego i otrzymanie temperatury jaka została wygenerowana,
2. rozwiązanie układu równań stanu tarczowego i obliczenie sił N_r , N_θ i $N_{r\theta}$ na podstawie pola temperatury traktowanego jako wymuszenie,
3. rozwiązanie problemu własnego dla równań stanu giętnego, w których najmniejsza wartość własna pochodząca od zespołu obciążeń termo-mechanicznych (temperatura + chwilowa prędkość obrotowa), powoduje utratę stateczności tarczy hamulcowej jeżeli w danym kroku czasowym odwrotność najmniejszej wartości własnej jest mniejsza od jedności.

3.4 Wielkości bezwymiarowe

W algorytmie numerycznym zostały użyte następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned}
\bar{r} &= \frac{r}{r_2} & d\bar{r} &= \frac{dr}{r_2} & \bar{T} &= \frac{T}{T_0} & \bar{u} &= \frac{u}{r_2} & \bar{v} &= \frac{v}{r_2} \\
\bar{f}_{1,2} &= \frac{f_{1,2}}{r_2} & \bar{h} &= \frac{h}{r_2} & \bar{T}_\infty &= \frac{T_\infty}{T_0} & \bar{T}_{\text{ref}} &= \frac{T_{\text{ref}}}{T_0} & \bar{\lambda} &= \frac{\lambda}{\lambda_0} \\
\bar{\alpha} &= \alpha T_0 & \bar{E} &= \frac{E}{\sigma_0} & \bar{N}_0 &= \frac{N_0}{\sigma_0 r_2} & \bar{N}_r &= \frac{N_r}{\sigma_0 r_2} & \bar{N}_\theta &= \frac{N_\theta}{\sigma_0 r_2} \\
\bar{N}_{r\theta} &= \frac{N_{r\theta}}{\sigma_0 r_2} & \bar{\mathcal{B}} &= \frac{\mathcal{B}}{\sigma_0 r_2} & \bar{\mathcal{D}} &= \frac{\mathcal{D}}{\sigma_0 r_2^3}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Po uwzględnieniu zmiennych bezwymiarowych (3.26) układ równań został przekształcony do następującej bezwymiarowej postaci:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{r}} \left[\bar{r} (\bar{\lambda} \bar{T}') \right]' + 2 \frac{\mu p r \omega R^2 \bar{r}}{\lambda_0 T_0 \bar{h}} \eta &= c_v \varrho \dot{\bar{T}} & \text{w strefie grzania} \\
\frac{1}{\bar{r}} \left[\bar{r} (\bar{\lambda} \bar{T}') \right]' - 2 \frac{\beta(\omega) R}{\lambda_0 \bar{h}} (\bar{T} - \bar{T}_\infty) &= c_v \varrho \dot{\bar{T}} & \text{w strefie chłodzenia}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{B}} \left[\bar{u}'' + \left(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{\mathcal{B}}'}{\bar{\mathcal{B}}} \right) \bar{u}' + \left(\nu \bar{r} \frac{\bar{\mathcal{B}}'}{\bar{\mathcal{B}}} - 1 \right) \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} \right] - \bar{\mathcal{B}} (1 + \nu) T_0 \alpha \bar{T}' \\
- \bar{\mathcal{B}}' (1 + \nu) T_0 \alpha (\bar{T} - \bar{T}_{\text{ref}}) + \frac{\varrho \omega^2 \bar{r} \bar{h} r_2^2}{\sigma_0} = 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \nu}{2} \bar{\mathcal{B}} \left[\bar{v}'' + \left(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{\mathcal{B}}'}{\bar{\mathcal{B}}} \right) \bar{v}' - \left(1 + \bar{r} \frac{\bar{\mathcal{B}}'}{\bar{\mathcal{B}}} \right) \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} \right] + \\
\frac{\varrho \varepsilon \bar{r} \bar{h} R^2}{\sigma_0} = 0 & \text{w strefie tarcia}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\frac{1 - \nu}{2} \bar{\mathcal{B}} \bar{v}'' + \left(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{\mathcal{B}}'}{\bar{\mathcal{B}}} \right) \bar{N}_0 + \frac{\varrho \varepsilon \bar{r} \bar{h} R^2}{\sigma_0} = 0 \quad \text{poza strefą tarcia}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{D}} \nabla^4 \bar{f}_1 + \bar{\mathcal{D}}' \left(2 \bar{f}_1''' + \frac{2 + \nu}{\bar{r}} \bar{f}_1'' - \frac{1 + 2k^2}{\bar{r}^2} \bar{f}_1' + 3 \frac{k^2}{\bar{r}^3} \bar{f}_1 \right) + \\
\bar{\mathcal{D}}'' \left(\bar{f}_1'' + \frac{\nu}{\bar{r}} \bar{f}_1' - \nu \frac{k^2}{\bar{r}^2} \bar{f}_1 \right) - \frac{1}{\Lambda} \left[\bar{N}_r \bar{f}_1'' + \bar{N}_\theta \left(\frac{\bar{f}_1'}{\bar{r}} - \frac{k^2}{\bar{r}^2} \bar{f}_1 \right) - \right. \\
\left. 2 \bar{N}_{r\theta} \left(\frac{k}{\bar{r}} \bar{f}_2' - \frac{k}{\bar{r}^2} \bar{f}_2 \right) - \frac{\varrho \omega^2 \bar{r} \bar{h} r_2^2}{\sigma_y} \bar{f}_1' + \frac{\varrho \varepsilon \bar{r} \bar{h} r_2^2 k}{\sigma_y \bar{r}} \bar{f}_2 \right] + \bar{\gamma} \bar{f}_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{D}} \nabla^4 \bar{f}_2 + \bar{\mathcal{D}}' \left(2 \bar{f}_2''' + \frac{2 + \nu}{\bar{r}} \bar{f}_2'' - \frac{1 + 2k^2}{\bar{r}^2} \bar{f}_2' + 3 \frac{k^2}{\bar{r}^3} \bar{f}_2 \right) + \\
\bar{\mathcal{D}}'' \left(\bar{f}_2'' + \frac{\nu}{\bar{r}} \bar{f}_2' - \nu \frac{k^2}{\bar{r}^2} \bar{f}_2 \right) - \frac{1}{\Lambda} \left[\bar{N}_r \bar{f}_2'' + \bar{N}_\theta \left(\frac{\bar{f}_2'}{\bar{r}} - \frac{k^2}{\bar{r}^2} \bar{f}_2 \right) + \right. \\
\left. 2 \bar{N}_{r\theta} \left(\frac{k}{\bar{r}} \bar{f}_1' - \frac{k}{\bar{r}^2} \bar{f}_1 \right) - \frac{\varrho \omega^2 \bar{r} \bar{h} r_2^2}{\sigma_y} \bar{f}_2' - \frac{\varrho \varepsilon \bar{r} \bar{h} r_2^2 k}{\sigma_y \bar{r}} \bar{f}_1 \right] + \bar{\gamma} \bar{f}_2 = 0 \\
\Lambda' = 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

4. Wyniki

4.1 Stałe materiałowe przyjęte do obliczeń

We wszystkich przedstawionych w niniejszej pracy przykładach numerycznych wykorzystano poniższy zestaw stałych materiałowych oraz wartości startowych.

Do analizy przyjęto stal nierdzewną ASTM-321 (walcowaną 18Cr, 8Ni, 0.45Si, 0.4Mn, 0.1C, Ti/Nb austenityczną, wytwarzaną w temperaturze 1070°C, chłodzoną powietrzem) [11, 44, 16, 20, 35] i wartości startowe zaczerpnięte z artykułów [32, 2], które przedstawiono w tabeli 4.1. Geometria tarczy hamulcowej (rys. 4.1, tab. 4.2):

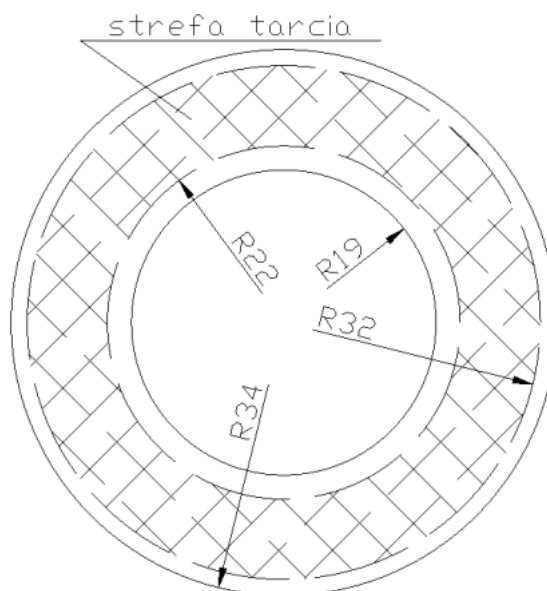
Tablica 4.1: Zestaw stałych materiałowych oraz wartości startowych użytych w zadaniu

E_0	σ_0	ν	ρ	α	λ_0
GPa	MPa	-	kg/m ³	1/K	W/mK
170	120	0.3	7850	1.85 x 10 ⁻⁵	20
β	q_0	η	T_∞	T_{ref}	T_0
W/m ² K	W/m ²	-	°C	°C	°C
7÷50	30	10 ⁻³	20	20	2×10 ³
c_v	ε	μ	ω_0	p	γ
J/kgK	1/s ²	-	1/s	MPa	MPa/m
478	7	0.4	81.71	0.4	870

Wymiary geometryczne tarczy, aby móc porównać otrzymane wyniki, zaczerpnięto z artykułów [32, 2]. Eksperyment w niniejszych artykułach został przeprowadzony sportowym samochodem, dla którego grubość tarczy wynosząca $h = 4.5$ cm jest bar-

Tablica 4.2: Wymiary geometryczne tarczy hamulcowej

r_1	r_2	r_3	r_4	h
m	m	m	m	m
0.19	0.34	0.22	0.32	0.045



Rysunek 4.1: Geometria tarczy hamulcowej

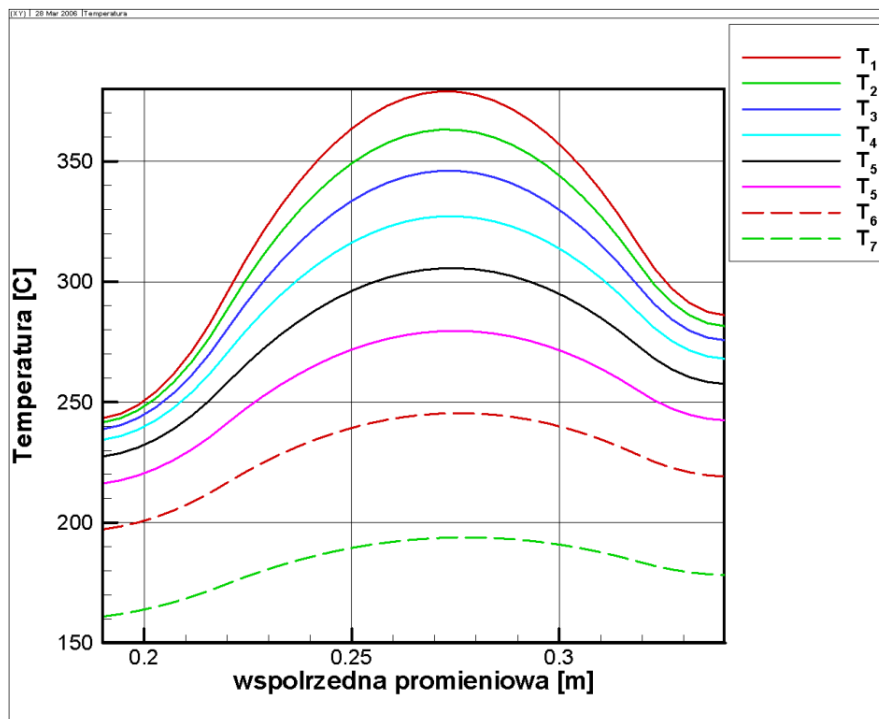
dzo duża. W przeciętnych samochodach produkowanych na rynku, tarcze hamulcowe raczej nie przekraczają 2.0 cm.

4.2 Utrata stateczności jednorodnej tarczy hamulcowej

W pierwszej kolejności autor pragnie zająć się klasycznym problemem, czyli analizą tarczy hamulcowej bez uwzględnienia funkcjonalnie zmiennych materiałów ($E=\text{const}$, $\lambda=\text{const}$). Stałe materiałowe zostały przyjęte dla stali ASTM-321, identycznie jak w eksperymencie opisanym w artykułach [32, 2]. Również z cytowanego artykułu zaczerpnięto wartości startowe do zadania.

Wykres (rys. 4.2) przedstawia rozkład temperatury w funkcji promienia tarczy. Wykres oznaczony symbolem T_1 jest rozkładem temperatury w chwili $\tau = \tau_0$, czyli w momencie rozpoczęcia procesu hamowania. Kolejne linie oznaczone symbolami od

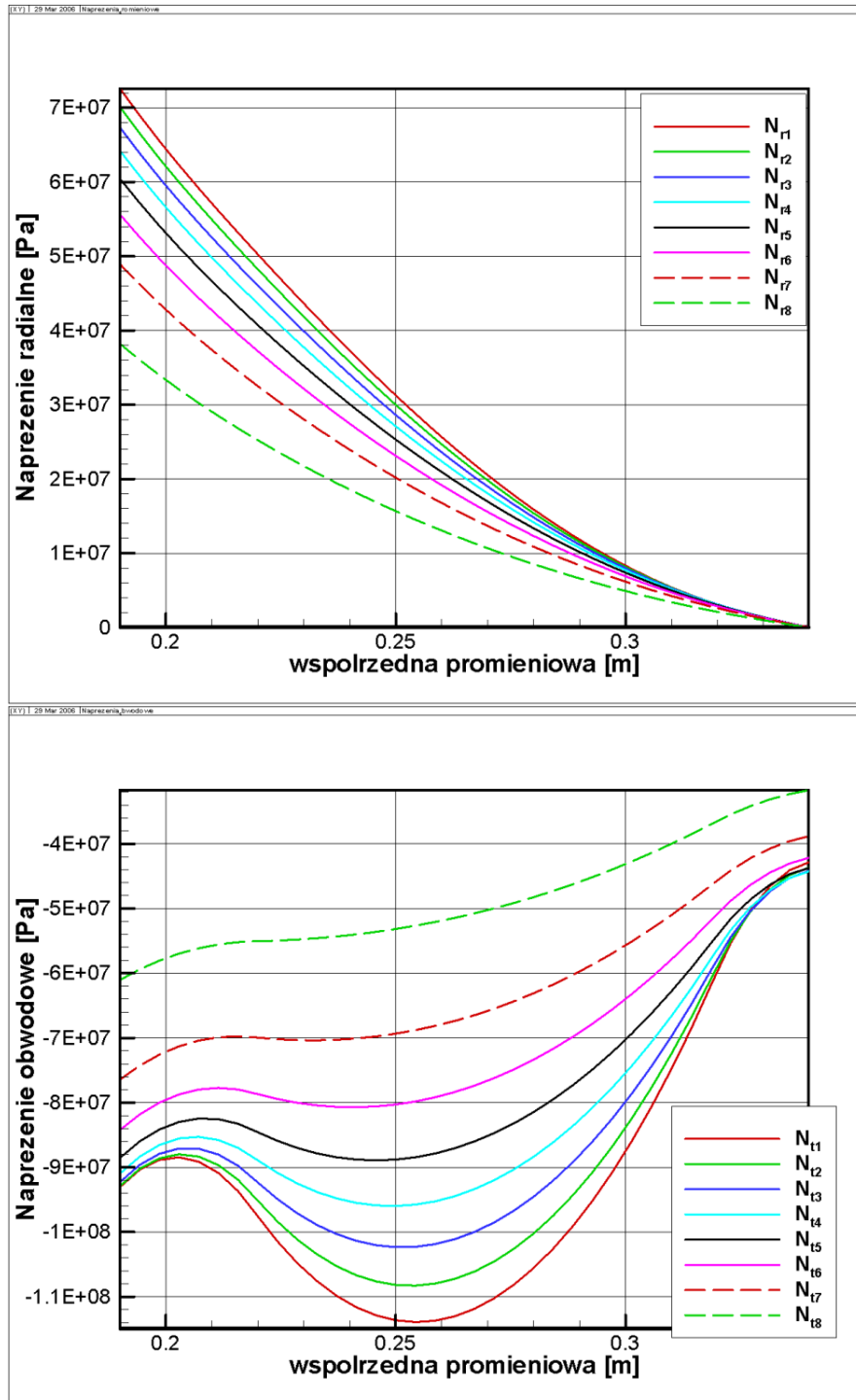
T_2 do T_7 zostały narysowane w kolejnych punktach czasowych, gdzie krok czasowy wynosi $d\tau = 0.15$ s.



Rysunek 4.2: Rozkład temperatury na kolejnych krokach czasowych dla tarczy wykonanej ze stali

Na wykresie wyraźnie można zaobserwować obszar generacji ciepła, gdzie następuje gwałtowny wzrost temperatury oraz obszar chłodzenia występujący na wewnętrznych i zewnętrznych krańcach tarczy, szczególnie w chwili $\tau = \tau_0$. Następnie wraz ze zmniejszaniem się prędkości obrotowej ω maleje ilość generowanej temperatury. Podobnie sytuacja przedstawia się w przypadku obszarów, które są chłodzone, ponieważ w pierwszej fazie występuje konwekcja wymuszona związana z dużą prędkością powietrza opływającego tarczę. W miarę trwania procesu hamowania konwekcja wymuszona zamienia się na konwekcję swobodną, ponieważ prędkość opływającego płynu jest nieduża, podobnie jak prędkość kątowna ω .

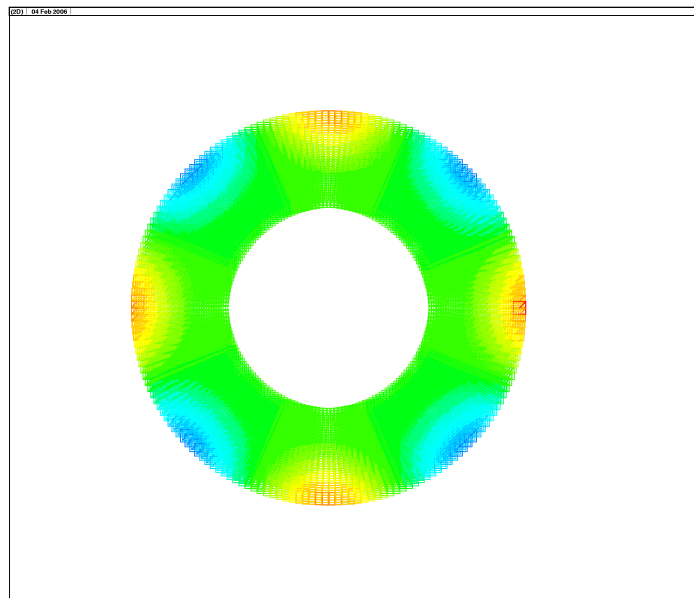
Kolejne wykresy (rys. 4.2) przedstawiają rozkład uogólnionych sił przekrojowych tarczy N_r i N_φ w funkcji promienia. Podobnie jak w przypadku wykresu temperatury linie oznaczone odpowiednio symbolami N_{r1} i N_{t1} oznaczają wartości naprężeń radialnych i obwodowych w chwili $\tau = \tau_0$.



Rysunek 4.3: Rozkład uogólnionych sił przekrojowych N_r (góra) i N_φ (dół) dla tarczy wykonanej ze stali

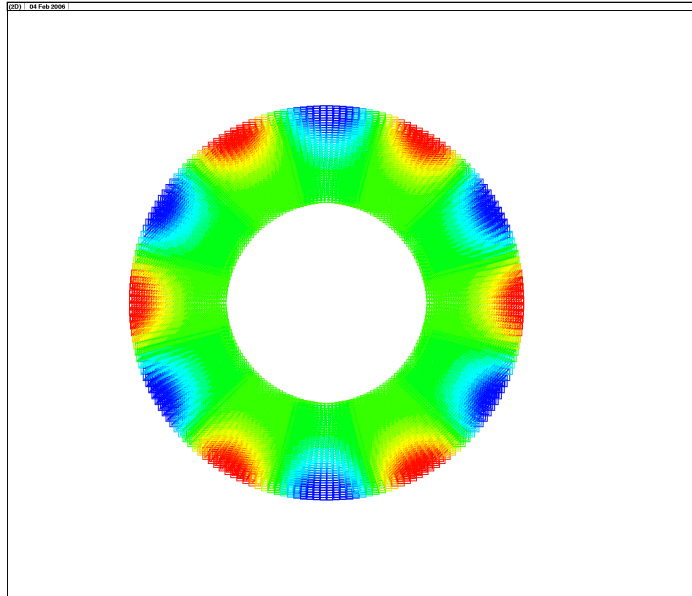
Warto zwrócić uwagę na wykres naprężeń radialnych (rys. 4.2a), szczególnie na wewnętrzny brzeg tarczy, gdzie widać duże naprężenia rozciągające. Jednakże autora najbardziej interesują naprężenia obwodowe (rys. 4.2b), ponieważ one są przyczyną

powstawania *Hot-Spot*. Globalną utratę stateczności mogą wywołać jedynie naprężenia ściskające, które w wypadku naprężeń obwodowych mają dużą wartość. Wynika stąd, że w przypadku zastosowania materiałów funkcjonalnie zmiennych, które mają zapobiec globalnej utracie stateczności należy tak dobrać funkcje modelujące własności materiałowe aby zmniejszyć wartość obwodowych naprężeń ściskających.



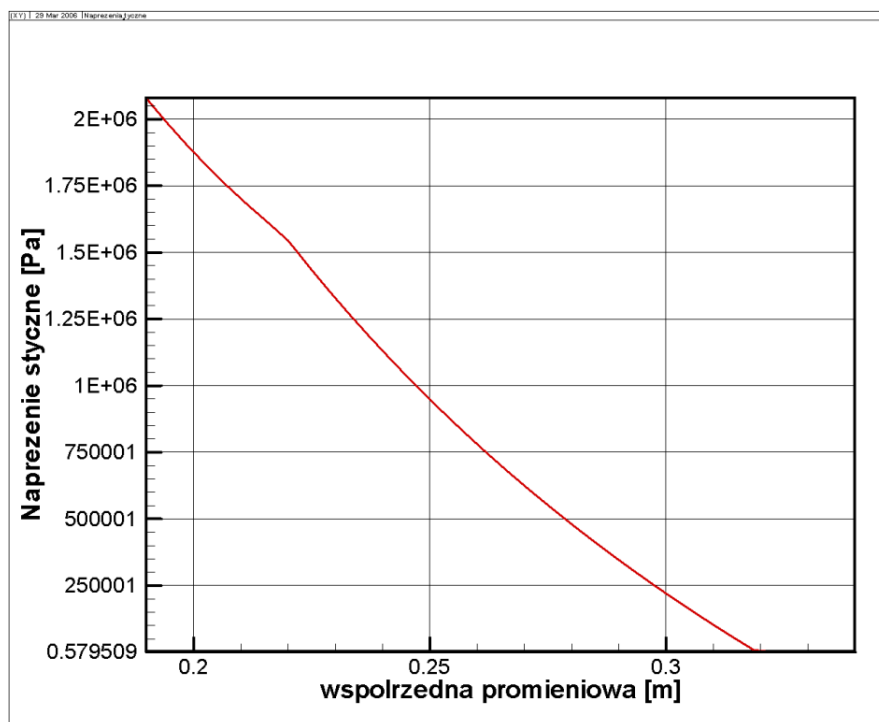
Rysunek 4.4: Deformacja tarczy; $k = 3$ mod wyboczeniowy

Na rysunkach 4.4, 4.5 zaprezentowano deformacje osiowe tarczy w dwóch chwilach czasowych. Czerwony kolor oznacza wypukłość, niebieski natomiast oznacza wgłębienie. Rysunek 4.4 przedstawia trzeci mod wyboczeniowy, natomiast rysunek 4.5 szósty mod.



Rysunek 4.5: Deformacja tarczy; $k = 6$ mod wyboczeniowy

Na ostatnim wykresie dotyczącym tarczy hamulcowej wykonanej ze stali (rys. 4.6) przedstawiono rozkład naprężeń stycznych, które są funkcją jedynie położenia, ponieważ równanie (2.28) nie zawiera członów temperaturowych. Na podstawie wzoru Schaefera-Papkowicza (2.37) wiemy, że konstrukcja znajduje się w obszarze bezpiecznym ze względu na utratę stateczności, gdy wartości własne wyliczone z układu (2.32, 2.33) $\Lambda \geq 1$. W przypadku tarczy jednorodnej wartości własne otrzymane przy pomocy programu numerycznego zawierają się w przedziale $[0,0378; 0,1169]$, gdzie dolny kres tego przedziału odpowiada dziewiątemu modu, natomiast górny kres, pierwszemu modu.

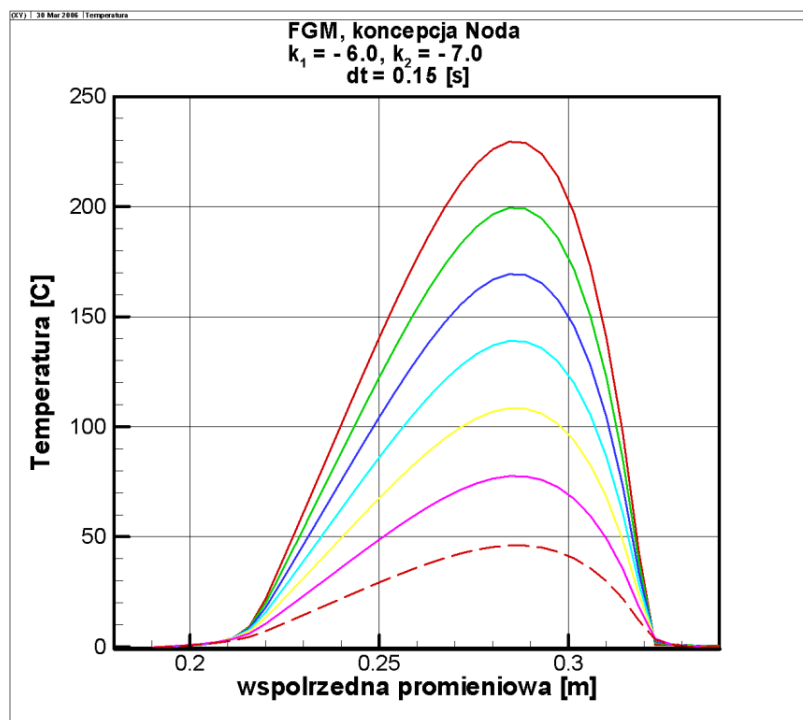


Rysunek 4.6: Rozkład naprężeń stycznych w tarczy stalowej

4.3 Stateczność tarczy hamulcowej funkcjonalnie gradowanej (FGM)

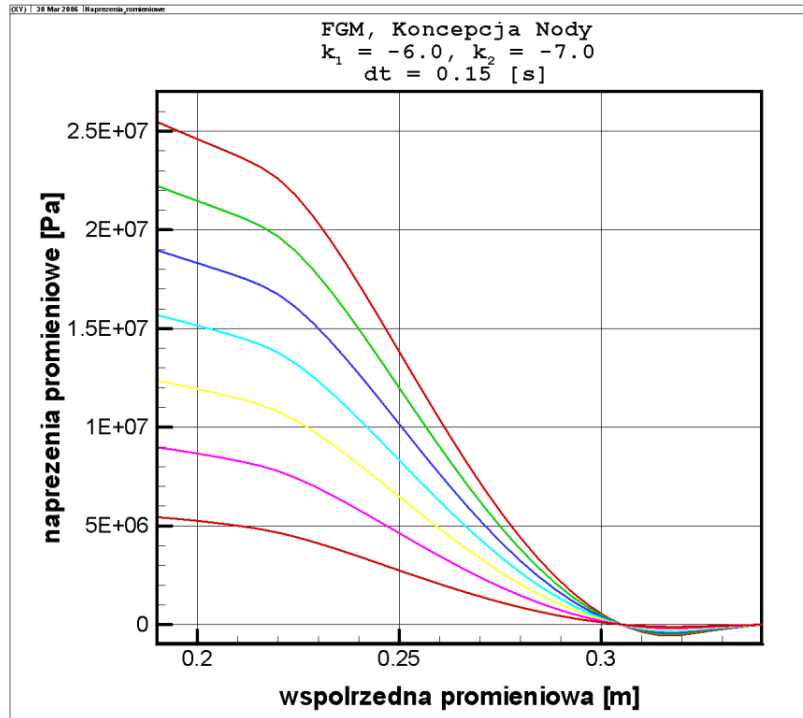
Analizując rozkład temperatury (rys. 4.7) można zauważyć, że maksymalna temperatura po zastosowaniu materiału funkcjonalnie zmiennego jest mniejsza niż w przypadku temperatury dla tarczy wykonanej ze stali. Oprócz tego ze względu na zmianę współczynnika przewodności cieplnej, tarcza jest lepiej chłodzona na obszarach, gdzie nie ma generacji ciepła.

W przypadku naprężeń radialnych (rys. 4.8) nastąpiło obniżenie wartości maksymalnej naprężenia oraz zmienił się charakter krzywych. W wypadku klasycznej stali były to krzywe silnie malejące, natomiast w wypadku zastosowania materiału FGM według koncepcji [28], funkcje są wolniej malejące, co jest korzystniejsze z uwagi na utratę stateczności. Jednakże z uwagi na utratę stateczności ważniejsze są naprężenia obwodowe (rys. 4.9). W klasycznej stali na całym przedziale naprężenia

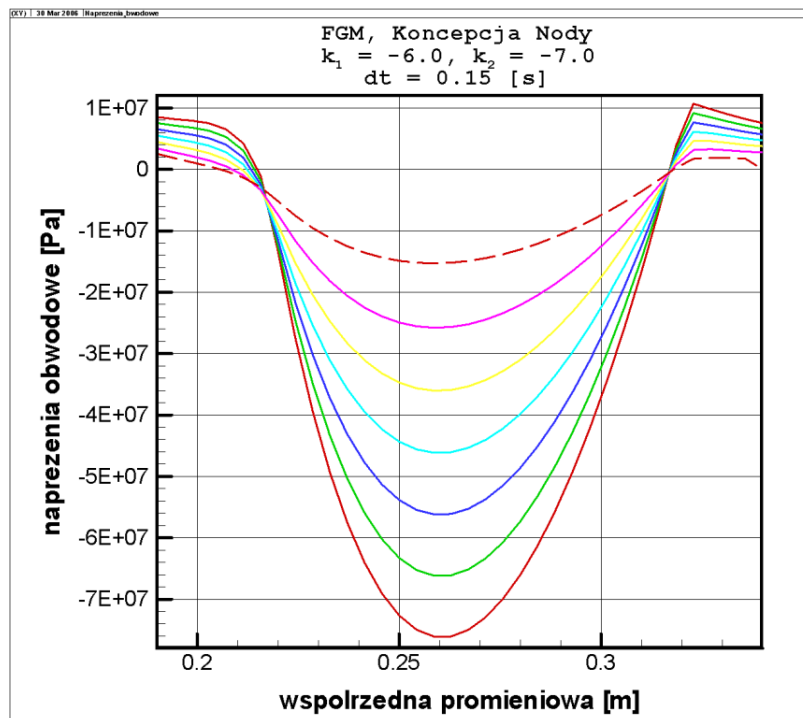


Rysunek 4.7: Rozkład temperatury w kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji eksponencjalnej

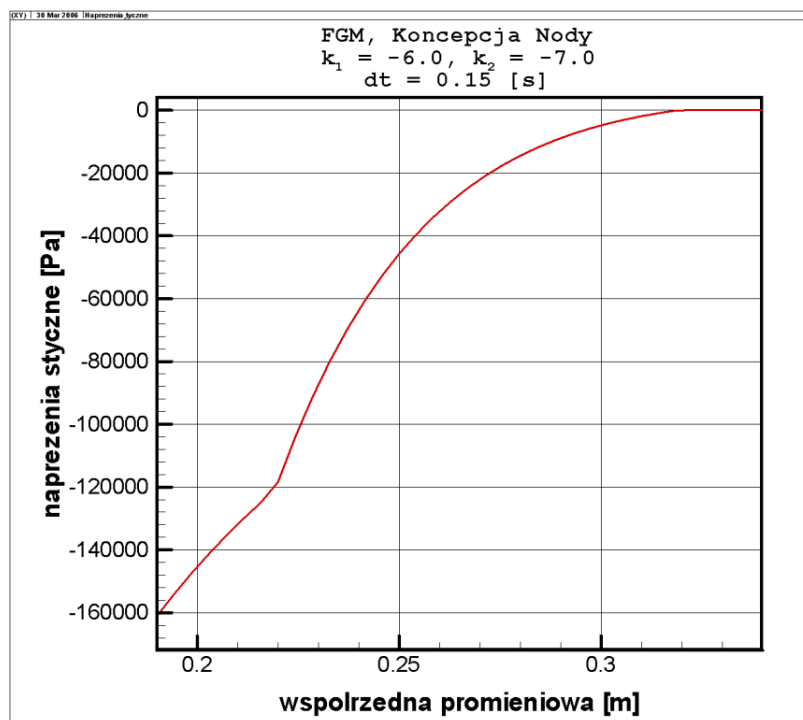
miały wartość ujemną, czyli były ściskające. W przypadku zastosowania materiałów funkcjonalnie zmiennych w obszarach, gdzie występuje chłodzenie mamy naprężenia rozciągające, na rzecz mniejszych naprężeń ściskających w miejscu, gdzie występują kłocki. Takie zachowanie konstrukcji (poprawienie własności w jednym miejscu na rzecz pogorszenia własności w drugim, mniej narażonym) gwarantuje stabilność.



Rysunek 4.8: Rozkład sił promieniowych w kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji eksponencjalnej



Rysunek 4.9: Rozkład sił obwodowych w kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji eksponencjalnej



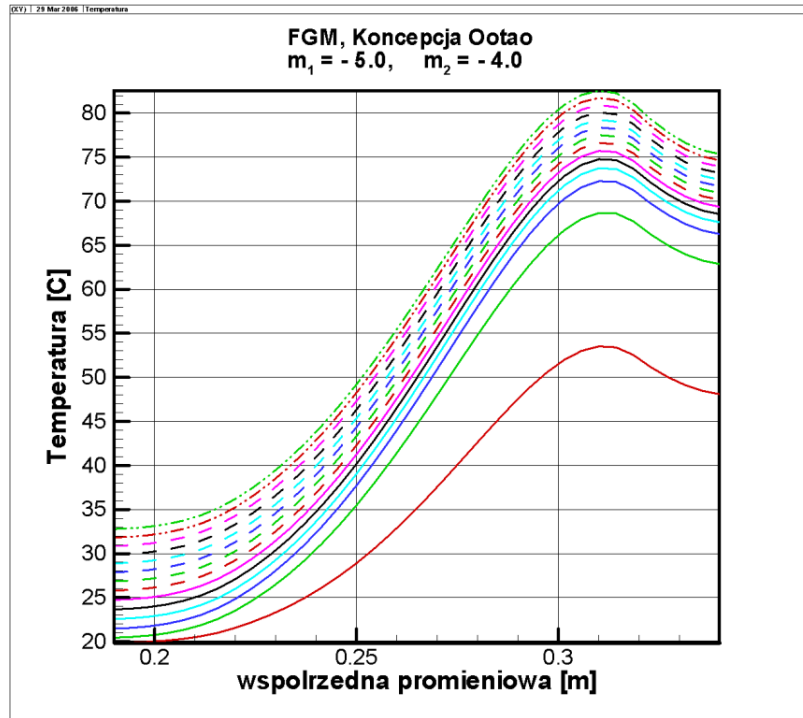
Rysunek 4.10: Rozkład sił stycznych w kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji eksponencjalnej

W przypadku koncepcji potęgowej (rys. 4.11) rozkład temperatury, w porównaniu z koncepcją eksponencjalną, posiada niższe wartości ekstremalne temperatury. Ponadto krzywe posiadają większy kąt nachylenia, czyli istnieje większy gradient temperatury, ale mniejsze przyrosty temperatur w kolejnych iteracjach.

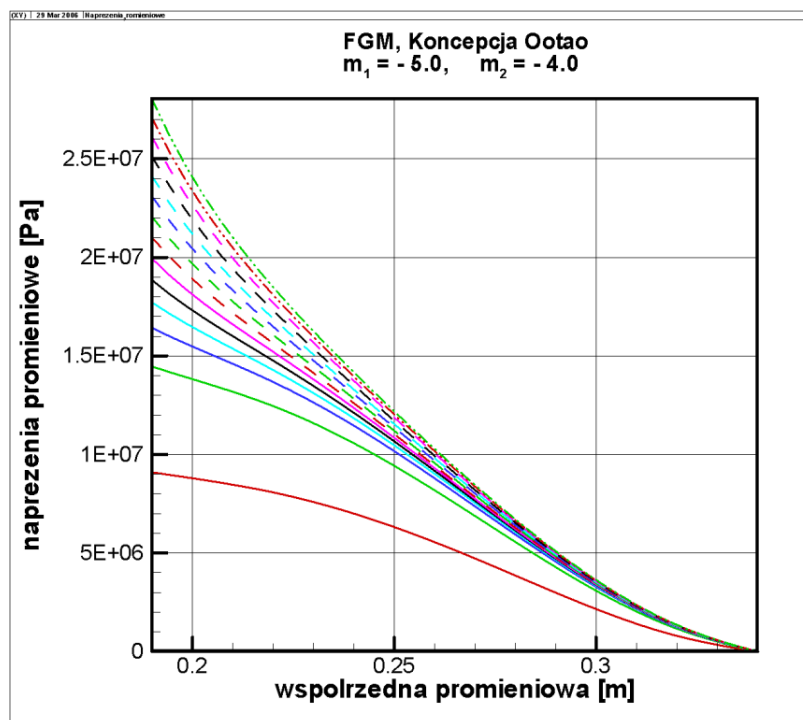
Równie korzystnie wygląda rozkład naprężeń radialnych (rys. 4.12), gdzie w prawej części wykresy kolejne linie zbiegają się do jednej krzywej, czyli następuje zrównanie naprężeń promieniowych. W wypadku naprężeń obwodowych (rys. 4.13), których rozkład jest kluczowy w tym zadaniu, maksymalne wartości są o kilka rzędów wielkości mniejsze niż w przypadku klasycznej stali. Wynika stąd, że wprowadzenie materiału gradientowego w znaczny sposób polepsza stabilność konstrukcji.

Wykres naprężeń stycznych (rys. 4.14). charakterem niewiele różni się od analogicznego wykresu dla koncepcji eksponencjalnej. Różnica występuje tylko w wartościach funkcji naprężeń, ale jest nieznaczna.

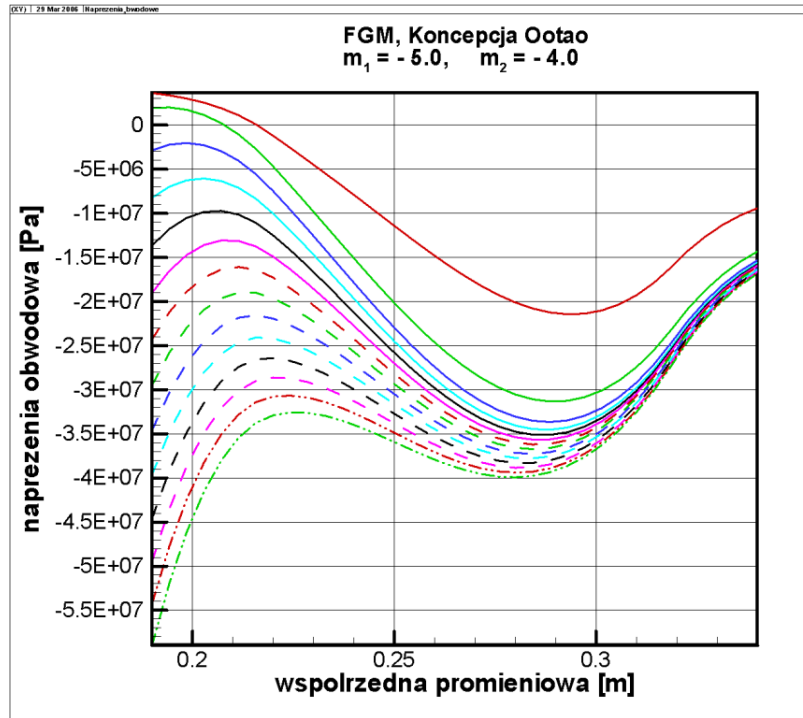
W przypadku zastosowania materiałów gradowanych o podanych wcześniej współczynnikach funkcji aproksymujących własności materiałowe, przy zastosowaniu iden-



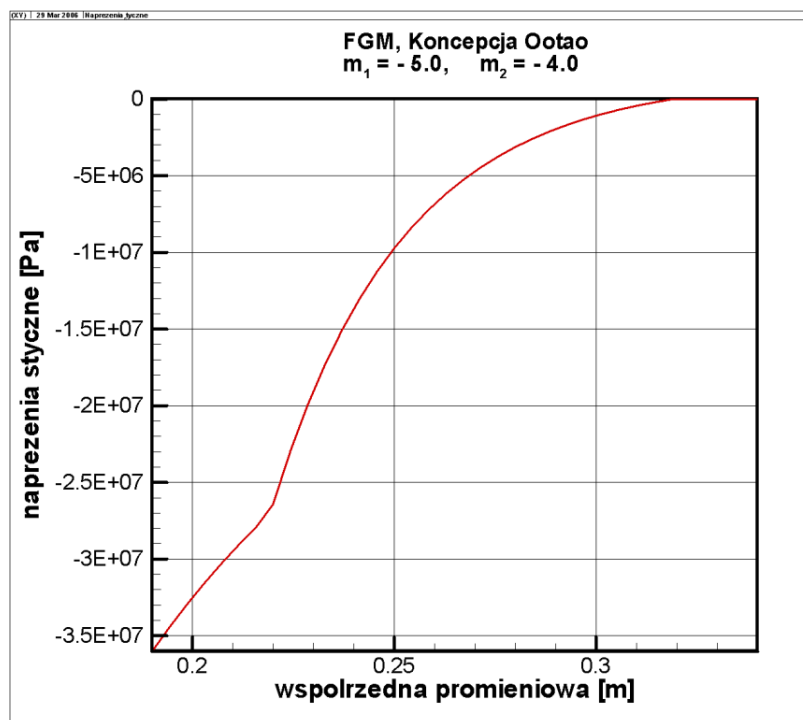
Rysunek 4.11: Rozkład temperatury na kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji potęgowej



Rysunek 4.12: Rozkład uogólnionej siły promieniowej na kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji potęgowej



Rysunek 4.13: Rozkład uogólnionej siły obwodowej na kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji potęgowej



Rysunek 4.14: Rozkład uogólnionej siły stycznnej na kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji potęgowej

tycznych warunków jak w przypadku tarczy jednorodnej odwrotność mnożnika Lagrange'a Λ zawiera się w przedziale $[35,426; 128,894]$. Widać wyraźnie, że znajdujemy się po stronie bezpiecznej, a w dodatku w stosunkowo dużej odległości od powierzchni granicznej stateczności.

5. Podsumowanie, wnioski oraz perspektywy dalszych badań

Celem niniejszej pracy było zaprojektowanie tarczy hamulcowej w taki sposób, aby nie nastąpiła globalna utrata stateczności (*Hot-Spot*). Zamiast optymalizować geometrię konstrukcji zastosowano optymalizację własnościami materiałowymi poprzez zastosowanie materiałów funkcjonalnie zmiennych. Modele mechaniczny oraz matematyczny zostały zbudowane w taki sposób, aby możliwe było uwzględnienie większości czynników mających korzystny lub niekorzystny wpływ na stabilność konstrukcji: kontakt klocka hamulcowego z tarczą modelowany został przy pomocy sprężystego podłoża Winklera, uwzględniono oddziaływanie siły hamującej na całość konstrukcji (uwzględnienie siły stycznej), uwzględniono wewnętrzne i zewnętrzne źródła ciepła. Wyprowadzono równania płyto-tarczy Kirchhoffa-Love'a w przypadku zmiennych własności materiałowych. W pracy wykazano, że możliwy jest taki dobór współczynników aproksymacji własności materiałowych, aby stabilność całej konstrukcji została zachowana, nawet w przypadku ekstremalnych warunków pracy.

Zastosowanie funkcjonalnie gradowanej tarczy hamulcowej w obecnych samochodach przynosi wiele korzyści. Po pierwsze, konstrukcja takiej tarczy pod względem geometrii jest mniej skomplikowana niż konstrukcja tarcz produkowanych obecnie (tarcze wentylowane) [46]. Po drugie, zastosowanie litego materiału o odpowiednio zmodyfikowanych własnościach gwarantuje stabilność, czyli lepszą skuteczność hamowania w każdych warunkach oraz dłuższą żywotność takich tarcz. Po trzecie, lepsze hamulce to większe bezpieczeństwo pasażerów. I po czwarte, bardzo istotnym jest aspekt ekonomiczny związany z dłuższym czasem eksploatacji takiej tarczy.

Analizę konstrukcji przeprowadzoną w tej pracy można zastosować z powodzeniem stosować także w innych przypadkach, w których konstrukcje pracują w wysokich temperaturach (tzw. *Thermal Barrier Coating* (TBC) [47]), dając duże możliwości ulepszenia znanych obecnie rozwiązań konstrukcyjnych. Dlatego zainteresowanie na całym świecie ośrodków badawczych oraz instytucji przemysłowych nowymi materiałami jest tak duże.

Autor zdaje sobie sprawę, że w pracy nie uwzględniono pewnych aspektów oraz przyjęto szereg założeń upraszczających. W pierwszej kolejności nie uwzględniono zależności modułu Younga i współczynnika przewodności cieplnej od temperatury, a mogło by to znacząco wpłynąć na wyniki otrzymane w zadaniu. Jednakże problematyczne może być ustalenie czy wprowadzenie takiej zależności przyczyniło by się do ustabilizowania tarczy hamulcowej, czy wręcz przeciwnie. W dużej mierze zależałoby to od charakteru funkcji $E(T)$ oraz $\lambda(T)$.

Następnie, autor w niniejszej pracy założył stały współczynnik rozszerzalności termicznej α , a mógłby być on również funkcją położenia oraz temperatury. Autor pracy przypuszcza, że wprowadzenie funkcyjnej zmiany współczynnika α mogło by znacząco wpłynąć na polepszenie stabilności tarczy. Zmienny funkcyjnie współczynnik rozszerzalności termicznej nie został uwzględniony w niniejszej pracy ze względu na zbyt duże skomplikowanie zadania.

Następnymi założeniami upraszczającymi jest zależność liniowa prędkości kątowej ω od czasu τ , chociaż w rzeczywistości prędkość ta jest najprawdopodobniej silnie nieliniowa. Jednakże największe naprężenia, które mogą powodować utratę stateczności są generowane na początku procesu hamowania, dlatego autor uważa, że wprowadzenie nieliniowej zmiany prędkości kątowej od czasu nie wprowadziło by zasadniczej zmiany.

Wprowadzenie kolejnego założenia upraszczającego, czyli sprowadzenie obszarów, w których występuje chłodzenia tarczy, do wewnętrznych źródeł ciepła działających tylko w warstwie środkowej, zamiast zastosowania struktury warstwowej z uwzględnieniem chłodzenia na powierzchni tarczy. Takie rozwiązanie modelu mechanicznego mogłoby również w znaczący sposób wpłynąć na wyniki otrzymane w zadaniu.

Autor planuje uwzględnić wszystkie powyższe uwagi oraz wprowadzić zmianę własności materiałowych po grubości tarczy w dalszym toku badań. Rozwiązanie to jest korzystniejsze z punktu widzenia technologicznego niż zmiana własności materiałowych wzdłuż promienia tarczy. Takie rozwiązanie daje możliwość wprowadzenia cienkiej warstwy ceramika na powierzchniach zewnętrznych tarczy, w miejscach styku z klockami, który posiada dobre własności z uwagi na ścieralność oraz niską przewodność i pojemność cieplną. Natomiast rdzeń tarczy jest wykonany ze stali z uwagi na jej własności wytrzymałościowe. Pomiedzy tymi dwoma składnikami można wprowadzić warstwę FGM dającą ciągłą zmianę własności od materiału ceramicznego do stali.

Oprócz zmiany modelu mechanicznego autor planuje zmienić też model numeryczny, wprowadzając zamiast numerycznego całkowania „metodą strzału” profesjonalny kod metody elementów skończonych z wbudowanymi elementami gradowanymi, dającymi możliwość ciągłej zmiany własności materiałowych na poziomie elementu skończonego oraz na granicach elementów. Ciągła aproksymacja „stałych” materiałowych jest możliwa poprzez wprowadzenie dodatkowej aproksymacji, innej niż aproksymacja funkcji niewiadomej i geometrii elementu [18, 19]. Obecnie wykorzystywane algorytmy elementów skończonych, tak w programach komercyjnych, jak i w dostępnych kodach źródłowych posiadają stałe własności materiałowe na poziomie elementu. W artykule [12] zostało wykazane, że w przypadku stałych własności materiałowych na poziomie elementu, po wprowadzeniu niejednorodności za pomocą funkcji potęgowej o wykładniku większym niż trzy, błędy w porównaniu z wynikiem analitycznym nie są pomijalnie małe.

Bibliografia

- [1] A. Chrysanthou, *Introduction, structure, properties and processing* w: KMM - First integration summer school, Udine 2005.
- [2] P. Dufrénoy, D. Weichert, *A thermomechanical model for the analysis of disk brakes fracture* w: Thermal Stresses'01, Osaka 2001, s. 463–466.
- [3] P. Egizabal, *Metal-ceramics composites in technology: needs and applications* w: KMM – First integration summer school, Udine 2005.
- [4] W. Egner, *Optymalne kształtowanie tarcz wirujących ze względu na kruche pękanie w warunkach nieustalonego pełzania*, praca magisterska, Politechnika Krakowska, Kraków 1991.
- [5] M.R. Eslami, A. Bagri, B.A. Samsam-Shariat, *Coupled thermoelasticity of functionally graded layer* w: Thermal stresses'05, Wiena 2005, t.II, s. 721–724.
- [6] M.R. Eslami, A. Bahtui, *Coupled thermoelasticity of thin cylindrical shells made of functionally graded materials* w: Thermal stresses'05, Wiena 2005, t.II, s. 729–732.
- [7] K. Fedehofer, H. Egger, *Knickung der auf scherung beanspruchten kreissingplatte mit veranderlicher dicke* w: Ingr. Arch.,1943, s. 155–166.
- [8] Y. Fukui, *ISME inst.* nr III-34, 1991, s. 144.
- [9] Y.C. Fung, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1969.
- [10] A. Ganczarski, *Analiza kruchego zniszczenia oraz kształtowanie obrotowo symetrycznych sprężonych elementów konstrukcyjnych w warunkach pełzania, pod działaniem obciążeń złożonych*, praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 1993.

- [11] A. Ganczarski, *Problemy nabytej anizotropii w ujęciu sprzężonej termodynamiki uszkodzeń*, Politechnika Krakowska, Kraków 2001.
- [12] A. Ganczarski, S. Hernik, *Influence of damage acquired nonhomogeneity on convergence of certain axially symmetric thermomechanical problem* w: Thermal Stresses'05, Wiena 2005, t.1, s. 245–248.
- [13] A. Ganczarski, J. Skrzypek, *On optimal design of disks with respect to creep rupture* w: Iutam creep in structures, 1980 s. 10-14.
- [14] A. Ganczarski, J. Skrzypek, *Optimal design of rotationally-symmetric disks in thermo-damage coupling conditions* w: Technische Mechanik, 1997, s. 365–377.
- [15] P. Grant, I. Palmer, I. Stone, *Spray formed aerospace alloys*, w: Materials World, nr 7(6), 1999, s. 331–33.
- [16] J. Grzybek, E. Kołodziej, *Zużycie mechanizmu hamulcowego pojazdów samochodowych a ekologia* w: Problemy eksploatacji, 1-2002, s. 51–66.
- [17] W. Kapturkiewicz, *Modelowanie komputerowe przemian fazowych w stanie stałym stopów ze szczególnym uwzględnieniem odlewów ADI*, IPPT PAN, 2006, s. 12–16. <http://fluid.ippt.gov.pl/metro/wyklady/METRO-pdf-pl/metro-ippt-lecture-wk3pl.pdf>.
- [18] J.-H. Kim, G. H. Paulino, *Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials* w: ASME J. Appl. Mech., Nr 69, 2002, s.502–514.
- [19] J.-H. Kim, G. H. Paulino, *Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and modified crack closure method* w: Engineering fracture mechanics, 2002, s. 1557–1586
- [20] A. Kleczkowski, *Przeptywy w układzie hydraulicznym hamulców samochodowych* w: Czasopismo Techniczne, Nr 7(33), Kraków 1960.
- [21] A.D. Kowalenko. *Izobrannyje trudy*. Naukova Dumka, Kijów 1976.
- [22] J. Kunes and M. Honner. Brake disk thermomechanical behavior in dynamic conditions. *New Technologies Research Center*, 2004.

- [23] IOP Publishing Limited. High speed infrared cameras may boost the stopping power of express trains traveling at speeds of up to 300 km/h. 2004. <http://optics.org/articles/news/10/9/11/1>.
- [24] R. Minev, N. Zlatov, E. Minev, S. Su, K. Dotchev, *Improving the performance of rapid investment casting* w: Manufacturing engineering centre, 2003, s. 9–11.
- [25] R. Müller, *Session L3, computational methods in materials science and mechanics* w: Experimental techniques and modelling of advanced materials KMM-NoE Integrated Post-Graduate School Doctoral Path First Intensive Session, Politechnika Krakowska, Kraków 2006, s. 28–30.
- [26] S. Myszkowski, *Hamulce tarczowe* w: Poradnik serwisowy, 2001.
- [27] J. Rödel, A. Neubrand, *Gradient materials: An overview of a novel concept* w: Z. Metallkd, 1997, s. 88, 358–371.
- [28] N. Noda, O. Manabu, I. Masayuki. *Steady thermal stresses in the functionally graded finite strip with the oblique boundary to the functionally gradation* w: Thermal stresses'05, Viena 2005, t.II, s. 741–744.
- [29] W. Nowacki, *Dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1980.
- [30] Y. Ootao, T. Akai, Y. Tanigawa, *Piezothermoelastic analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical panel due to nonuniform heat supply in the circumferential direction* w: Thermal stresses'05, Viena 2005, t.II, s. 709–712.
- [31] J. Osiński, M. Sadowski, Z. Wołęjsza, *Ocena nierównomierności nacisków pomiędzy tarczami hamulcowymi z kompozytu c/c* w: Napędy maszyn transportowych, Katowice 2002, s. 56–59.
- [32] S. Panier, P. Dufrénoy, D. Weichert, *Macroscopic hot-spots occurrence in fictional organs* w: Thermal Stresses'01, Osaka 2001, s. 621–624.
- [33] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran* Cambridge Univ. Press, 1983.
- [34] M. Radwańska, Z. Waszczyszyn, *Ustroje powierzchniowe*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1996.

- [35] A. Skrzyniowski, *Materiały kompozytowe i możliwości ich stosowania na elementach pojazdów samochodowych* w: Czasopismo techniczne, Kraków 2004, s. 519–527.
- [36] Swedish Ceramic Institute, Tape casting, <http://www.sci.se>.
- [37] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Teoria płyt i powłok*. Arkady, Warszawa 1962.
- [38] Transport Technika Motoryzacyjna. *Okładziny hamulcowe Beral*, 1997.
- [39] K. Trumble, *Technology and controlled tailoring of functional graded materials* w: KMM - First integration summer school, Udine 2005.
- [40] S. Wiśniewski, *Termodynamika techniczna*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.
- [41] L. Wójcik, *Ostre hamowanie* w: Auto Tuning Świat, maj 2002.
- [42] J.-B. Yi, J.R. Barber, D.L. Hartsock, *Thermoelastic instabilities in automotive disk brakes – finite element analysis and experimental verification* 2002.
- [43] Y.-B. Yi, J.R. Barber, P. Zagrodzki, *Eigenvalue solution of thermoelastic instability problems using fourier reduction* w: The Royal Society, 2000.
- [44] Tabele stałych fizycznych i materiałowych, <http://fizyk.ifpk.pk.edu.pl/dydaktyka/tab/Tabele.htm>.
- [45] <http://www.gordonengland.co.uk/ps.htm>.
- [46] *Materiały informacyjne firmy Ferodo i Brembo*. www.ferodo.getin.pl, www.brembo.pl.
- [47] Strona internetowa em Knowledge-based Multicomponent Materials for Durable and Safe Performance, Network of Excellence, <http://www.kmm-noe.org>.

Wykaz oznaczeń stosowanych w tekście

ΔV_N	– zmiana objętości w przewodach elastycznych w układzie hamulcowym
l_p	– łączna długość przewodów elastycznych w układzie hamulcowym
$\lambda(r)$	– współczynnik przewodności cieplnej zależny od zmiennej przestrzennej
λ_0	– współczynnik przewodności cieplnej dla stali
λ_1	– współczynnik przewodności cieplnej dla ceramika
r	– zmienna przestrzenna
r_1	– promień wewnętrzny tarczy
r_2	– zewnętrzny promień tarczy
r_3	– wewnętrzny promień klocka hamulcowego
r_4	– zewnętrzny promień klocka hamulcowego
N_0	– średnia siła tarcia
k_1	– współczynnik FGM w równaniu termicznym wg koncepcji Nody
k_2	– współczynnik FGM w równaniach mechanicznych wg koncepcji Nody
m_1	– współczynnik FGM w równaniu termicznym wg koncepcji Ootao
m_2	– współczynnik FGM w równaniach mechanicznych wg koncepcji Ootao
E_0	– modułu Younga dla stali
E_1	– moduł Younga dla ceramika
$E(r)$	– moduł Younga zależny od zmiennej przestrzennej
$T(r, \tau)$	– temperatura
c_v	– ciepło właściwe
ρ	– gęstość materiału z którego została wykonana tarcza
μ	– współczynnik tarcia klocków hamulcowych o tarczę
p	– nacisk klocków hamulcowych na tarczę

ω	– chwilowa prędkość kątowna
ω_0	– początkowa prędkość kątowna
ε	– opóźnienie
h	– grubość tarczy
η	– współczynnik określający jaka część pracy całkowitej jest zużywana na generację ciepła
$\beta(\omega)$	– funkcja współczynnika swobodnej konwekcji zależna od prędkości kątownej ω
T_∞	– temperatura powietrza chłodzącego poza warstwą przyścienną
T_{ref}	– temperatura odniesienia
T_0	– temperatura służąca do ubezwymiarowania równania termicznego
q_0	– ilość ciepła w jednostce czasu pochłaniana przez wał na którym jest zamocowana tarcza
$\mathcal{B}(r)$	– sztywność tarczowa
ν	– współczynnik Poissona
α	– współczynnik rozszerzalności termicznej
u, v	– składowe przemieszczenia w kierunku promieniowym i obwodowym
w	– przemieszczenie w kierunku osiowym (ugięcie płyty)
$\mathcal{D}(r)$	– sztywność giętna
k	– numer modu wyboczeniowego
$N_r(r, \tau)$	– naprężenia promieniowe zredukowane do płaszczyzny środkowej
$N_\theta(r, \tau)$	– naprężenia obwodowe zredukowane do płaszczyzny środkowej
$N_{r\theta}(r)$	– naprężenia styczne zredukowane do płaszczyzny środkowej
Λ	– odwrotność mnożnika Lagrange'a dla zespołu obciążeń
γ	– współczynnik Winklera sprężystego podłoża
σ_0	– granica plastyczności
Δt	– długość kroku czasowego
Δx	– długość kroku przestrzennego

()' symbol oznacza różniczkowanie względem zmiennej przestrzennej,
($\dot{\quad}$) symbol oznacza różniczkowanie względem zmiennej czasowej,
nadkreślenie $\overline{(\quad)}$ oznacza wielkość bezwymiarową.

Spis rysunków

1.1. Przykład zastosowania materiałów kompozytowych w tarczach hamulcowych: szybkiej kolei (lewy) oraz samochodu (prawy) [3]	6
1.2. Pętla histerezy intermetalika Ti-Ni dla różnych temperatur [1]	7
1.3. Przykład zastosowania FGM jako materiału przejściowego pomiędzy kompozytem węgiel-węgiel (CFC) a miedzią [39]	8
1.4. Typowa mikrostruktura Al/Al ₃ Ni FGM wytwarzanego metodą odśrodkową a. zewnętrzna warstwa, b. pośrednia warstwa, c. wewnętrzna warstwa [8]	8
1.5. Zastosowanie materiałów FGM w medycynie do produkcji implantów [47]	9
1.6. Metoda konsolidacji suchego proszku [39]	11
1.7. Metody wytwarzania materiałów FGM. Metoda nawarstwiania: natrysk plazmą [45, 39]	11
1.8. Metody wytwarzania materiałów FGM. Metoda <i>in-situ</i> : natryskowy process formowania [15]	12
1.9. a. Metoda nadruku 3D – schemat [39], b. zdjęcie urządzenia służącego do drukowania 3D [47]	13
1.10. Powierzchnia zużytej tarczy hamulcowej obserwowana pod mikroskopem elektronowym, powiększenie: lewy 1:500, prawy 1:300 [22]	14
1.11. Zdjęcie tarczy powlekaną ceramiką firmy „Black Diamond” [46]	15
1.12. „Hot-Spots” na tarczy od sprzęgła [42]	15
1.13. <i>Hot-spots</i> w tarczach hamulcowych zamontowanych w pociągu TGV uchwycone przy pomocy kamery na podczerwień [23].	16
2.1. Tarcza wykonana z materiału funkcjonalnie gradowanego FGM.	17
2.2. Wykres zmian własności materiałowych aproksymowanych funkcją eksponencjalną.	18

2.3.	Wykres zmian własności materiałowych aproksymowanych funkcją potęgową.	19
2.4.	Model tarczy hamulcowej przyjęty do obliczeń.	20
2.5.	Przebieg procesu hamowania tarczy.	21
3.1.	(a) schemat „fully explicit”, (b) schemat „fully implicit”, (c) schemat Crancka-Nicholsona [33]	31
4.1.	Geometria tarczy hamulcowej	40
4.2.	Rozkład temperatury na kolejnych krokach czasowych dla tarczy wykonanej ze stali	41
4.3.	Rozkład uogólnionych sił przekrojowych N_r (górze) i N_φ (dół) dla tarczy wykonanej ze stali	42
4.4.	Deformacja tarczy; $k = 3$ mod wyboczeniowy	43
4.5.	Deformacja tarczy; $k = 6$ mod wyboczeniowy	44
4.6.	Rozkład naprężeń stycznych w tarczy stalowej	45
4.7.	Rozkład temperatury w kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji eksponencjalnej	46
4.8.	Rozkład sił promieniowych w kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji eksponencjalnej	47
4.9.	Rozkład sił obwodowych w kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji eksponencjalnej	47
4.10.	Rozkład sił stycznych w kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji eksponencjalnej	48
4.11.	Rozkład temperatury na kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji potęgowej	49
4.12.	Rozkład uogólnionej siły promieniowej na kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji potęgowej	49
4.13.	Rozkład uogólnionej siły obwodowej na kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji potęgowej	50
4.14.	Rozkład uogólnionej siły stycznej na kolejnych krokach czasowych dla tarczy FGM według koncepcji potęgowej	50

Spis tablic

1.1. Zastosowanie materiałów FGM w przemyśle [47]	10
4.1. Zestaw stałych materiałowych oraz wartości startowych użytych w zadaniu . .	39
4.2. Wymiary geometryczne tarczy hamulcowej	40