

## Nowy wskaźnik Parsevala mocy nieczynnej dwójnika elektrycznego

**Streszczenie.** Niniejszy artykuł jest kontynuacją badań nad nową definicją współczynnika mocy biernej dwójnika, który nie zależy od częstotliwości. W artykule przedstawiono nowe sformalizowane podejście do obliczania takiej miary mocy biernej w dziedzinie dyskretnej, za pomocą transformaty Z. Współczynnik mocy biernej nazwano wskaźnikiem Parsevala przez analogię do podobnego współczynnika stosowanego w analizie harmonicznnej.

**Abstract.** This article is a continuation of the study on a new definition of reactive power factor of a two-terminal, which does not depend on frequency. The article presents a new formalized approach to calculate such a reactive-power measure in discrete time domain, with the use of Z-transform. The reactive power factor has been called Parseval's factor by analogy to a similar coefficient used in harmonic analysis. (New Parseval's reactive power factor of a two-terminal circuit).

**Słowa kluczowe:** operatory, filtry cyfrowe, moce bierna.

**Keywords:** operators, digital filters, reactive power.

### Definicje podstawowe

Splot: działanie filtru cyfrowego (FC) zachodzi wg algorytmu splotowego:

$$(1) \quad (Ax)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m x_{n-m} = \left( \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m z^m \right) x \right)_n$$

gdzie:  $\{A_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$  - próbki odpowiedzi impulsowej filtru,

$z$  - operator opóźnienia jednostkowego

$$(zx)_n = x_{n-1} \Rightarrow (z^m x)_n = x_{n-m}$$

Transformacja równania FC od "n" i jako formy od "z" jest następująca

$$(2) \quad A(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m z^m, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} A(z) z^{-n} d(\ln z)$$

Iloczyn skalarny sygnałów lub filtrów definiowany jest następująco:

$$(3) \quad (A, B) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_n$$

Filtrem sprzężonym do filtru A nazywa się filtr  $A^*$ , który dla dowolnych sygnałów x, y spełnia warunek:

$$(4) \quad (Ax, y) = (x, A^*y)$$

Zachodzi:  $A_{-n} = A_n$  w dziedzinie 'n', oraz  $A^*(z) = A(z^{-1})$  w dziedzinie 'z'. W obu dziedzinach działają:

- twierdzenie Borela o splocie:

$$(5) \quad \left( \sum_m A_{n-m} B_m \right) (z) = A(z) B(z)$$

$$(6) \quad (A_n B_n)(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|w|=1} A(z w^{-1}) B(w) d(\ln w)$$

- wzór Parsevala dla iloczynu skalarnego:

$$(7) \quad (A, B) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_n = (A_n B_n)(1) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} A(z^{-1}) B(z) d(\ln z)$$

Filtr przyczynowy A:

$$(8) \quad A_n = 0 \text{ for } n < 0$$

Filtr stabilny:

$$(9) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n| < \infty \iff \forall_{z: |z| \leq 1} |A(z)| < \infty$$

Rozkład biegunowy przyczynowego filtru Y definiowany jest następująco [4,5,6]:

$$Y = H U$$

gdzie: H -filtr samosprężony (hermitowski):  $H = H^*$

U - filtr unitarny:

$$U^{-1} = U^* \Rightarrow \|U\|^2 = (U, U) = 1$$

Filtr unitarny ma reprezentację wykładniczą:

$$(10) \quad U = e^{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!}$$

gdzie  $\phi^* = -\phi$  filtr antyhermitowski

Rozkład ortogonalny operatora unitarnego:

$$(11) \quad U = \frac{1}{2}(U + U^*) + \frac{1}{2}(U - U^*) = \cosh(\phi) + \sinh(\phi)$$

zachodzi:

$$(\cosh(\phi), \sinh(\phi)) = 0$$

$$\|\cosh(\phi)\|^2 + \|\sinh(\phi)\|^2 = 1$$

$$[\cosh(\phi)]^2 - [\sinh(\phi)]^2 = \delta$$

gdzie  $\delta$  -sygnał jednostkowy Kroneckera tj.

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{for } n=0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$$

Dla rozkładu biegunowego operatora przyczynowego  $Y$  zachodzi:

$$(12) \quad (Y, Y^{-1}) = (HU, H^{-1}U^*) = (U^2, 1)$$

a także

$$(13) \quad \begin{aligned} \|\cosh(\phi)\|^2 &= \frac{1}{4}(U + U^*, U + U^*) = \\ &= \frac{1}{2}[1 + (U^2, 1)] = \frac{1}{2}[1 + (Y, Y^{-1})] \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \|\sinh(\phi)\|^2 &= \frac{1}{4}(U - U^*, U - U^*) = \\ &= \frac{1}{2}[1 - (U^2, 1)] = \frac{1}{2}[1 - (Y, Y^{-1})] \end{aligned}$$

skąd wynika że:

$$-1 \leq (Y, Y^{-1}) \leq 1$$

a także, biorąc pod uwagę, że:

$$(Y, Y^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(Y^{-1})_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(Y^{-1})_n$$

otrzymuje się w ten sposób użyteczny wskaźnik mocy nieczynnej:

$$(15) \quad \|\sinh(\phi)\|^2 = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(Y^{-1})_n$$

Iloczyn skalarnym  $(Y, Y^{-1})$  jest pośrednim wskaźnikiem mocy nieczynnej. Przyjmuje on optymalną wartość  $(Y, Y^{-1}) = 1$  i wówczas  $\|\sinh(\phi)\|^2 = 0$ .

Dla  $(Y, Y^{-1}) = -1$  dwójnik ma najgorsze wskaźniki energetyczne  $\|\cosh(\phi)\|^2 = 0$  and  $\|\sinh(\phi)\|^2 = 1$ .

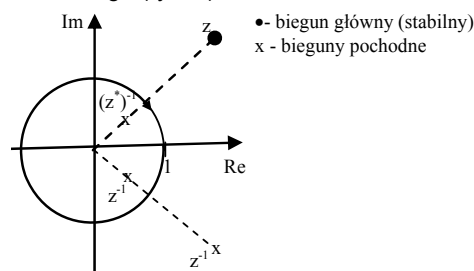
Iloczyn skalarny  $(Y, Y^{-1})$  może być też wyznaczony w dziedzinie 'z', z użyciem wzoru Parsevala:

$$(16) \quad \begin{aligned} (Y, Y^{-1}) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} Y(z)Y^{-1}(z^{-1})d(\ln z) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} Y(z^{-1})Y^{-1}(z)d(\ln z) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2} \left[ \frac{Y(z)}{Y(z^{-1})} + \frac{Y(z^{-1})}{Y(z)} \right] d(\ln z) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2} \left[ \frac{Y^2 + (Y^*)^2}{YY^*} \right] d(\ln z) \end{aligned}$$

gdzie:  $Y^*(z) = Y(z^{-1})$ .

W przypadku wymiernej, stabilnej zwarciowo i otwarciowo funkcji immitancji dwójnika  $Y(z)$ , bieguny

funkcji podcałkowej cechuje symetria względem okręgu jednostkowego (rys. 1).



Rys.1. symetria biegunów względem okręgu jednostkowego

Kładąc pod całkę  $Y = L/M$  gdzie  $L(z)$  i  $M(z)$ - wielomiany od 'z', otrzymuje się też:

$$(17) \quad (Y, Y^{-1}) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2} \left[ \frac{(LM^*)^2 + (L^*M)^2}{LL^*MM^*} \right] d(\ln z)$$

Wewnątrz koła jednostkowego znajdują się bieguny funkcji  $Y^*(z)$ . Całkę okrężną zmiennej zespolonej można zastąpić całką oznaczoną zmiennej rzeczywistej biorąc pod uwagę że

$$\frac{1}{2} \frac{Y^2 + (Y^*)^2}{YY^*} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \cos[2\angle Y(z)] \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Wówczas:

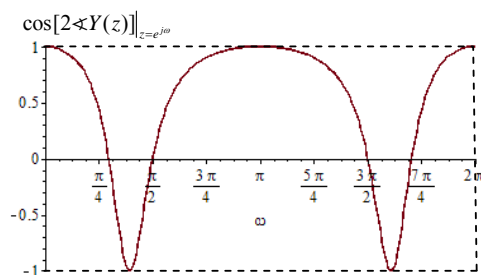
$$(18) \quad (Y, Y^{-1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[2\angle Y(z)] \Big|_{z=e^{j\omega}} d\omega$$

**Przykład1**

Nierówność  $-1 \leq (Y, Y^{-1}) \leq 1$  gdzie

$$(Y, Y^{-1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[2\angle Y(z)] \Big|_{z=e^{j\omega}} d\omega$$

potwierdza wykres na rysunku



Rys. 2. Zakres zmienności  $\cos[2\angle Y(z)] \Big|_{z=e^{j\omega}}$  dla  $Y(z) = \frac{az^2 + bz + c}{z^2 + dz + e}$

Wykres funkcji zawiera się wewnątrz prostokąta -1..1,0..2pi dlatego pole powierzchni pod wykresem funkcji/2pi zawiera się pomiędzy polami prostokątów o powierzchniach +1 i -1

**Przykład2**

Warto w szczególności rozpatrzyć dwa dwójniki elektryczne scharakteryzowane operatorem czystej konduktancji  $Y_1(z) = a$  i reaktancji  $Y_2(z) = a \ln(z)$ , gdzie  $a = \text{const}$  wówczas:

$$(Y_1, Y_1^{-1}) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} d(\ln z) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} d[\ln(e^{j\omega})] = 1 \quad (23)$$

$$(Y_2, Y_2^{-1}) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2} \left[ \frac{\ln(z)}{\ln(z^{-1})} + \frac{\ln(z^{-1})}{\ln(z)} \right] d(\ln z) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} (-1) d[\ln(e^{j\omega})] = -1 \quad (24)$$

### Analiza w zbiorze liczb zespolonych

Dla sygnałów harmoniczných prądu i napięcie sygnały i filtry scharakteryzowane są zwykłymi liczbami zespolonymi. Iloczyn skalarny liczb zespolonych A i B określa wyrażenie

$$(A, B) = \operatorname{Re}(AB^*)$$

Rozkład biegunowy liczby zespolonej który naśladuje rozkład biegunowy filtru cyfrowego (lub na odwrót) ma postać:

$$Y = HU, H^* = H$$

$$(19) \quad \begin{aligned} U &= e^{j\phi} = \cosh(j\phi) + \sinh(j\phi) \\ U^* &= e^{-j\phi} = \cosh(j\phi) - \sinh(j\phi) \end{aligned}, |U|^2 = 1.$$

Tym razem

$$\cosh(j\phi) = \frac{1}{2}(U + U^*) = \cos(\phi)$$

$$\sinh(j\phi) = \frac{1}{2}(U - U^*) = j \sin(\phi)$$

Rozkład  $\cosh(j\phi) + \sinh(j\phi)$  jest ortogonalny, bo

$$(\cosh(j\phi), \sinh(j\phi)) = \operatorname{Re}\{\cos(\phi)[-j \sin(\phi)]\} = 0$$

a więc

$$|\cosh(j\phi)|^2 + |\sinh(j\phi)|^2 = 1$$

Warto też zauważyć, że rolę normy  $\|\bullet\|$  w dziedzinie filtrów w zbiorze liczb zespolonych przejmują zwykły moduł.

Dalej otrzymuje się analogiczne relacje:

$$(20) \quad (Y, Y^*) = (HU, H^{-1}U^*) = \operatorname{Re}(U^2) = \cos(2\phi)$$

$$(21) \quad \begin{aligned} |\cosh(j\phi)|^2 &= \frac{1}{4}(U + U^*)(U + U^*) = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{Re}[(U + U^*)(U + U^*)] = \\ &= \frac{1}{2}[1 + \operatorname{Re}(U^2)] = \frac{1}{2}[1 + (Y, Y^{-1})] \end{aligned}$$

$$(22) \quad |\cosh(j\phi)|^2 = \frac{1}{2}[1 - (Y, Y^{-1})]$$

Zatem :

$$(Y, Y^{-1}) = \operatorname{Re}\left(\frac{Y}{Y^*}\right) = \cos(2\phi)$$

Tym samym

$$\begin{aligned} |\cosh(j\phi)|^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{Re}\left(\frac{Y}{Y^*}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2\phi)] = [\cos(\phi)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\sinh(j\phi)|^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{Re}\left(\frac{Y}{Y^*}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2\phi)] = [\sin(\phi)]^2 \end{aligned}$$

Wyniki te szczególnie potwierdzają relację nierównościową  $-1 \leq (Y, Y^{-1}) \leq 1$  otrzymaną w uogólnieniu na filtry cyfrowe.

### Niebezpieczeństwo całek iloczynu skalarnego w dziedzinie układów analogowych - w czasie ciągłym

Otrzymany wskaźnik mocy nieczynnej w postaci iloczynu skalarnego  $(Y, Y^{-1})$  nie funkcjonuje w dziedzinie czasu ciągłego. Formuła Parsewala dawałaby w wyniku następującą postać

$$(25) \quad \begin{aligned} (Y, Y^{-1}) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Y(s)[Y(-s)]^{-1} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{Y}{Y^*} + \frac{Y^*}{Y} \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1}{2} \left[ \frac{Y^2 + (Y^*)^2}{Y^*Y} \right] ds \end{aligned}$$

gdzie:  $\hat{Y}(s) = Y(-s)$

Nie należy się spodziewać zbieżności całki osobliwej

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos[2\angle Y(s)] \Big|_{s=j\omega} d\omega$$

o czym łatwo się przekonać przyjmując model dwójnika elektrycznego scharakteryzowany operatorem czystej konduktancji  $Y(s) = a = \text{const}$ :

$$(Y, Y^{-1}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rightarrow \infty$$

### Rozkład biegunowy filtrów periodycznych

Operator periodyczny filtru SLS  $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  ma postać następującą

$$(26) \quad \tilde{A}_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{n+pN}, n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \equiv \mathbf{N}$$

operator sprzężony

$$(27) \quad \begin{aligned} \tilde{A}_n^* &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{-n+pN} \xrightarrow{p \rightarrow p+1} \\ &\longrightarrow \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{N-n+pN} = \tilde{A}_{N-n} \end{aligned}$$

Operacją mnożenia w zbiorze filtrów periodycznych jest splot cykliczny

$$(28) \quad (AB)_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} A_{n \ominus m} B_m$$

gdzie:  $n \ominus m$  - odejmowanie modulo  $N$   
a iloczynem skalarnym jest

$$(29) \quad (A, B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n B_n$$

Operator przejścia filtru

$$(30) \quad (Ax)_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} A_m x_{n \ominus m} = \left( \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} A_m z^m \right) x \right)_n$$

gdzie  $z$  - operator opóźnienia .

Wynika stąd, że  $z^N = 1$ , bo  $n \ominus N = n - N + N = n$

Jeżeli więc  $z \in \mathbb{C}$  to:

$$\{z : z^N = 1\} \doteq \sqrt[N]{1} = \{w^n : n \in \mathbb{N}, w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}\}$$

W operatorze przejścia filtru pojawia się tak zwana forma 'z' definiowana wielomianem:

$$A(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}} A_m z^m, \quad z \in \sqrt[N]{1}$$

Aby wprowadzić transmitancję odwrotną  $A(z) \rightarrow A_m$  trzeba wyznaczyć

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} A(z) z^{-n} &= \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} A_m z^m \right) z^{-n} = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} A_m \left( \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} z^{m-n} \right) \end{aligned}$$

Ponieważ dla wielomianu geometrycznego:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} z^{m-n} &= \frac{1}{N} \sum_{p \in \mathbb{N}} w^{p(m-n)} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{for } n-m=0 \\ \frac{1-w^{(m-n)N}}{1-w} = 0 & \text{for } n-m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

stąd

$$(31) \quad A_n = \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} A(z) z^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Nietrudno otrzymać:

- twierdzenie Borela o splocie:

$$(32) \quad \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} A_{n \ominus m} B_m \right) (z) = A(z) B(z), \quad z \in \sqrt[N]{1}$$

$$(33) \quad (A_n B_n)(z) = \frac{1}{N} \sum_{w \in \sqrt[N]{1}} A(z w^{-1}) B(w)$$

-wzór Parsewala

$$(34) \quad \begin{aligned} (A, B) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n B_n = \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} A(z^{-1}) B(z) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} A(z) B(z^{-1}) \end{aligned}$$

Zatem pośredni wskaźnik mocy nieczynnej może być obliczony za pomocą wzoru:

$$\begin{aligned} (Y, Y^{-1}) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{Y}_n (\tilde{Y}^{-1})_n = \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} \frac{Y(z)}{Y^*(z)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} \frac{1}{2} \left[ \frac{Y(z)}{Y^*(z)} + \frac{Y^*(z)}{Y(z)} \right] = \\ (35) \quad &= \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} \frac{1}{2} \left[ \frac{Y^2 + (Y^*)^2}{Y Y^*} \right] (z) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{z \in \sqrt[N]{1}} \cos[2 \angle Y(z)] \end{aligned}$$

### Wyznaczenie współczynnika mocy w dziedzinie częstotliwości

Otrzymaną formułę (15) dla bezpośrednich wskaźników mocy czynnej i nieczynnej można rozszerzyć na dziedzinę widmową. Z wyrażen:

$$\begin{aligned} \|\sinh(\phi)\|^2 &= \frac{1}{2} [1 - (Y, Y^{-1})], \\ \|\cosh(\phi)\|^2 &= \frac{1}{2} [1 + (Y, Y^{-1})], \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} (Y, Y^{-1}) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n (Y^{-1})_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n (Y^{-1})_n = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2} \left( \frac{Y}{Y^*} + \frac{Y^*}{Y} \right) (z) d(\ln z) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2 \angle Y) d\omega \end{aligned}$$

wynikają następujące formuły:

$$(36) \quad \begin{aligned} \|\sinh(\phi)\|^2 &= \frac{-1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{1}{4} \frac{(Y - Y^*)^2}{Y Y^*} d(\ln z) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(\angle Y)]^2 d\omega \end{aligned}$$

$$(37) \quad \begin{aligned} \|\cosh(\phi)\|^2 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{1}{4} \frac{(Y + Y^*)^2}{Y Y^*} d(\ln z) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\angle Y)]^2 d\omega \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (Y, Y^{-1}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Y_1^2 - Y_2^2}{Y_1^2 + Y_2^2} d\omega, \\ \|\sinh(\phi)\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Y_2^2}{Y_1^2 + Y_2^2} d\omega, \\ \|\cosh(\phi)\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Y_1^2}{Y_1^2 + Y_2^2} d\omega \end{aligned}$$

gdzie (używając transformaty biliniowej):

$$Y(s) \rightarrow Y\left(j\frac{2}{\tau} \tan \frac{\omega}{2}\right) = Y_1(\omega) + jY_2(\omega),$$

$$\angle Y(s) \rightarrow \angle Y\left(j\frac{2}{\tau} \tan \frac{\omega}{2}\right) = \arctan \frac{Y_2(\omega)}{Y_1(\omega)}$$

$\tau$  - odstęp próbkowania

Współczynnik mocy  $(Y, Y^{-1})$  jest również uniwersalny w ten sposób, że operator admittancji może zostać zastąpiony przez operatora impedancji ( $ZY = 1$ ).

#### Przykład

Przyjmując postać admittancji

$$Y(s) = a + s \rightarrow Y = a + \left(j\frac{2}{\tau} \tan \frac{\omega}{2}\right)$$

otrzymujemy:

$$\angle Y = \arctg\left(\frac{2}{a\tau} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0 \xrightarrow{a \rightarrow 0} \pi/2$$

Z kolei przyjmując np. dwójnik RL, lub RC o admittancji

$$Y(s) = \frac{\prod(b+s)}{\prod(a+s)} = \frac{L(s)}{M(s)}, |\deg L - \deg M| = \{0, 1\}$$

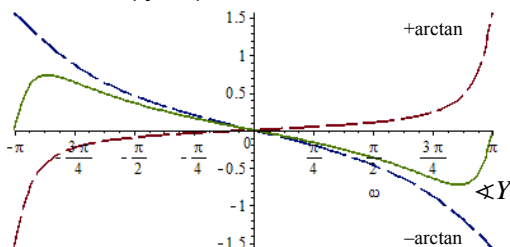
gdzie a, b - rzeczywiste,

otrzymujemy

$$\angle Y = \sum_b \arctg\left(\frac{2}{b\tau} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right) - \sum_a \arctg\left(\frac{2}{a\tau} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right)$$

$$\pm \arctg\left(\frac{2}{c\tau} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right) \xrightarrow{\omega \rightarrow -\pi} \mp \pi/2; \xrightarrow{\omega \rightarrow \pi} \pm \pi/2;$$

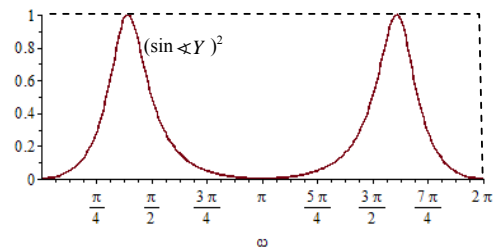
dla a, b, c > 0 (rys. 3)



Rys. 3. Zmiany  $\angle Y$  od  $\omega$

oraz

$$\|\sinh(\phi)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sin(\angle Y)]^2 d\omega \in [0, 1]$$



Rys. 4. Zakres zmienności  $(\sin \angle Y)^2$  dla  $Y(z) = \frac{az^2 + bz + c}{z^2 + dz + e}$

#### Wnioski

Proponowany tu wskaźnik mocy nieczynnej dwójnika elektrycznego ma charakter obiektywny, to znaczy że nie zależy od rodzaju wymuszenia tylko od parametrów dwójnika. Jedynym parametrem subiektywnym może tu być odstęp próbkowania ale ma on niewielki wpływ na wartość wskaźnika mocy. Natomiast używane powszechnie wskaźniki (współczynniki) mocy to jest  $\sin(\phi)$ ,  $\cos(\phi)$ ,

czy  $\tan(\phi)$  są subiektywne bo funkcjonują jedynie dla wymuszeń sinusoidalnych o zadanej częstotliwości. Porównanie obiektywnych i subiektywnych wskaźników mocy przeprowadzono punkcie 'Analiza w zbiorze liczb zespolonych'.

**Autorzy:** prof. dr hab. inż. Maciej Siwczyński, E-mail: [e-3@pk.edu.pl](mailto:e-3@pk.edu.pl); dr inż. Marcin Jaraczewski, E-mail: [jaracz@pk.edu.pl](mailto:jaracz@pk.edu.pl), Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Katedra Elektrotechniki i Elektroniki teoretycznej i Informatyki ul. Warszawska 24.

#### LITERATURA

- [1] F. M. Atici, "A transform method in discrete fractional calculus", *International Journal of Difference Equations* 2, No. 2, pp. 165–176 (2007).
- [2] Y. Lia, H. Shengb, Y. Q. Chen, "Analytical impulse response of a fractional second order filter and its impulse response invariant discretization", *ELSEVIER Signal Processing* 91, No. 3, pp. 498–507 (2011).
- [3] T. Kaczorek, "Selected problems of fractional systems theory", *Springer-Verlag*, Berlin, 2012.
- [4] M. Siwczyński, "The exponential and hyperbolic form of the periodical-convolution operator of signals in time domain and it's applications in power theory", *Przegląd Elektrotechniczny* 88, No. 6, pp. 194–197 (2012) [in Polish].
- [5] M. Siwczyński, A. Drwal, S. Żaba, "The digital function filters – algorithms and applications", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences* 61, No. 2, pp. 371–377 (2013).
- [6] M. Siwczyński, M. Jaraczewski, "New discrete reactive power factor definition of the two-terminal network", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences* 65, No. 3, pp. 369–373 (2017).