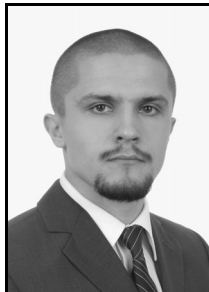


**Szymon SOBCZYK, Leszek MIKULSKI**  
POLITECHNIKA KRAKOWSKA, INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI  
ul. Warszawska 24, 30-962 Kraków

## Zastosowanie gradientowo-iteracyjnej metody optymalizacji na przykładzie belki wspornikowej

Mgr inż. Szymon SOBCZYK

Projektant konstrukcji budowlanych. Absolwent Akademii Górniczo-Hutniczej (kierunek: Geodezja i Kartografia) oraz Politechniki Krakowskiej (kierunek: budownictwo). Zainteresowania badawcze i naukowe dotyczą problemów optymalnego kształtowania konstrukcji.



e-mail: [szymek.sobczyk@gmail.com](mailto:szymek.sobczyk@gmail.com)

Prof. dr hab. inż. Leszek MIKULSKI

Prorektor ds. studenckich oraz Kierownik Zakładu Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego Wydziału Inżynierii Lądowej PK. Zainteresowania badawcze i naukowe dotyczą problemów optymalnego kształtowania konstrukcji i systemów, autor 50 publikacji z tego zakresu.



e-mail: [ps@pk.edu.pl](mailto:ps@pk.edu.pl)

### Streszczenie

W pracy przedstawiono gradientowo-iteracyjną metodę optymalizacji konstrukcji. Zostały opisane podstawowe założenia metody. Dodatkowo na przykładzie belki wspornikowej pokazano jej zastosowanie. Dokonano porównania z metodą opartą na teorii optymalnego sterowania. Przeprowadzona analiza porównawcza dowodzi skuteczności metody gradientowo-iteracyjnej w zadaniach optymalizacji konstrukcji.

**Słowa kluczowe:** optymalizacja konstrukcji, metoda gradientowo-iteracyjna.

### Application of gradient-iterative optimization method on the example of a cantilever beam

#### Abstract

The paper describes the gradient-iterative optimization method, outlines the basic assumptions of the method and illustrates its general use. The method implementation was illustrated based on a cantilever beam of rectangular cross-section. The described calculation example pertains to the optimization of the width of a beam with fixed height and at fixed maximum deflection of the free end of the beam. A comparison with optimal control method was made. The comparative analysis demonstrates the effectiveness of the gradient-iterative method for optimization of calculations. The method makes it possible to quickly obtain the optimal example using universally available programming. In addition, the method enables finding the optimal solution without the use of complicated mathematical formulas. The gradient-iterative method in conjunction with the MES algorithm offers designers vast possibilities. As the method takes relatively little time it can be used in construction design offices to optimize various construction elements.

**Keywords:** structure optimization, gradient-iterative method.

### 1. Wstęp

W licznych pracach z zakresu optymalizacji konstrukcji rozwiązano już szereg problemów z zastosowaniem matematycznych metod optymalnego sterowania. Opracowane metody oparte na wysublimowanej teorii sterowania umożliwiają znalezienie rozwiązań optymalnych dla zadanych warunków brzegowych oraz ustalonych ograniczeń. Optymalizacja oparta na zasadzie maksimum daje bardzo dobre rezultaty, ale posiada dwie istotne, z punktu widzenia projektanta, wady:

- konieczność sformułowania matematycznie skomplikowanego problemu optymalizacyjnego, którego opis nie koreluje z przyjętym w praktyce projektowej sposobie weryfikacji nośności elementów,
- brak skutecznego oraz intuicyjnego oprogramowania, dzięki któremu możliwe jest znalezienie rozwiązania skomplikowanych problemów sformułowanych w kategoriach optymalnego sterowania.

Przedstawiona w pracy metoda optymalizacji konstrukcji umożliwia szybkie znalezienie rozwiązania optymalnego bez konieczności wykorzystania trudno dostępnych programów numerycznych znajdujących rozwiązanie wielopunktowych problemów brzegowych.

### 2. Opis metody optymalizacji gradientowo-iteracyjnej

Metoda stanowi połączenie metody gradientu prostego oraz iteracyjnego rozwiązania sformułowanego problemu optymalizacyjnego. W ogólności zastosowanie metody można opisać w 6 krokach:

1. Matematyczny zapis funkcji opisujących rozważane zadanie optymalizacyjne.
2. Ustalenie funkcji celu oraz zmiennych decyzyjnych.
3. Określenie ograniczeń optymalizacyjnych.
4. Ustalenie punktu startowego optymalizacji oraz kierunku poszukiwań rozwiązania.
5. Opis funkcji przyrostowej.
6. Iteracyjne znalezienie rozwiązania spełniającego zadane kryteria optymalizacyjne.

Opisaną metodę można zastosować w rozwiązaniu zróżnicowanych problemów optymalizacyjnych. Wykorzystując ogólnodostępne oprogramowanie możliwe jest znalezienie rozwiązania optymalnego w czasie nieporównywalnie krótszym niż w przypadku optymalizacji z zastosowaniem innych metod.

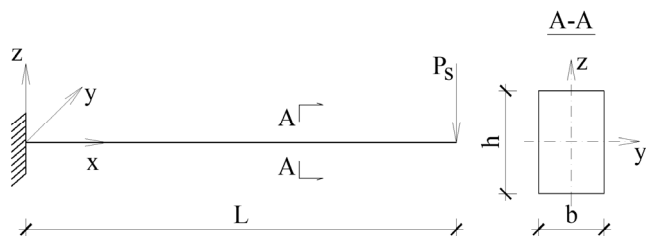
W połączeniu z metodą elementów skończonych metoda umożliwia bardzo szybkie rozwiązanie problemów optymalizacyjnych konstrukcji statycznie niewyznaczalnych.

Formułując zadanie dla metody gradientowo-iteracyjnej wykorzystuje się proste funkcje umożliwiające opis rozważanego problemu optymalizacyjnego. Ustalone funkcje wprowadza się w pętle obliczeniowe. Dzięki nieskomplikowanemu zapisu matematycznemu obliczenia numeryczne przeprowadzane są w bardzo krótkim czasie.

Opisując dane zagadnienie należy zwrócić szczególną uwagę na właściwe określenie funkcji przyrostowej. Niewłaściwe określenie może w znaczący sposób wydłużyć obliczenia, a w najgorszym przypadku nawet uniemożliwić uzyskanie wiarygodnego wyniku.

### 3. Przykład: belka wspornikowa

Zadanie dotyczy optymalnego kształtowania belki wspornikowej o przekroju prostokątnym obciążonej stałą siłą skupioną na końcu wspornika (rys. 1).



Rys. 1. Schemat statyczny oraz przekrój poprzeczny belki  
Fig. 1. Static scheme and beam cross-section

W przykładzie założono, że w obliczeniach zostanie pominięty wpływ ciężaru własnego belki.

Za funkcję celu w zadaniu optymalizacyjnym przyjęto objętość elementu.

$$f = \int_0^L A_c(x) dx \quad (1)$$

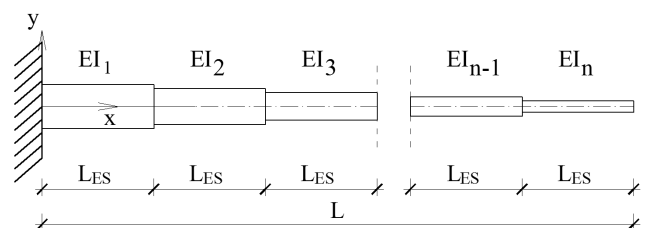
gdzie:

$A_c(x)$  - pole przekroju poprzecznego w funkcji długości elementu.

Optymalizacja polega na doborze szerokość  $b$ , zmiennej wzdłuż osi belki, która minimalizuje ustaloną funkcję celu (1) oraz spełnia wszystkie przyjęte ograniczenia.

#### 4. Metoda gradientowo-iteracyjna: opis zagadnienia

Rozważaną belkę opisano stosując metodę elementów skończonych. Belkę zdyskretyzowano na elementy skończone o stałej (w obrębie jednego elementu) sztywności  $EI(b)$  oraz stałej długości  $L_{ES}$  (rys. 2). Dyskretyzując belkę przy pomocy wielu elementów skończonych założenie stałego momentu bezwładności w obrębie jednego elementu nie prowadzi do znaczących błędów obliczeniowych.



Rys. 2. Dyskretyzacja belki  
Fig. 2. Beam discretization

Zdefiniowano macierz sztywności (2) oraz zbudowano macierz Boole'a dla  $n$  elementów skończonych (3).

$$k(EI, L) = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$B_i = \begin{cases} B_{(1,2,(top^{n-1})+1)} = I \\ B_{(2,2,(top^{n-1})+2)} = I \\ B_{(3,2,(top^{n-1})+3)} = I \\ B_{(4,2,(top^{n-1})+4)} = I \end{cases} \quad (3)$$

gdzie:

$top^n$  - fragment macierzy topologii odpowiadający  $n$ -temu elementowi skończonemu.

Oczywiste jest, że dla elementu skończonego o zmiennej bezwładności macierz sztywności (2) przyjmuje inną postać.

Zapis macierzowy (3) definiuje macierz Boole'a dla dowolnego  $i$ -tego elementu skończonego, co umożliwiła późniejszą automatyzację obliczeń dla dowolnej liczby elementów.

Dla  $n$  elementów skończonych układ składa się z  $n+1$  węzłów. W każdym węźle występują dwa lokalne stopnie swobody: przemieszczenie pionowe i obrót.

Agregacja macierzy sztywności:

$$K = \sum_{i=1}^n B_i^T K_e^i B_i \quad (4)$$

gdzie:  $K_e^i$  - macierz sztywności dla  $i$ -tego elementu skończonego.

Dla każdego węzła określono dwie siły węzłowe: siłę pionową oraz moment zginający. Wektor sił węzłowych dla  $n$  elementów skończonych ma wymiar  $2(n+1)$ . W analizowanym przykładzie w wektorze sił węzłowych niezerową wartość przyjmuje tylko wiersz odpowiadający sile pionowej przypisanej do ostatniego węzła (wiersz  $2n+1$ ).

Określenie wektora sił węzłowych:

$$\begin{cases} P_i = 0 \text{ dla } i \in \{1; 2n\} \\ P_{2n+1} = P_s \\ P_{2n+2} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

W przypadku wystąpienia obciążeń liniowych należałoby dodatkowo zdefiniować równoważniki węzłowe obciążenia. W rozważanym zadaniu ten etap ze względu na sposób obciążenia został pominięty.

Warunki brzegowe opisujące zablokowanie obydwu stopni swobody przy końcu utwierdzonym belki:

$$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = 1 \\ w_i = 0 \text{ dla } i \in \{3; (2n+2)\} \end{cases} \quad (6)$$

Rozwiązanie układu równań oraz obliczenie wektorów przemieszczeń dla elementów skończonych wynika z równania równowagi:

$$K_{wb} Q = S_{wb} \quad (7)$$

gdzie:

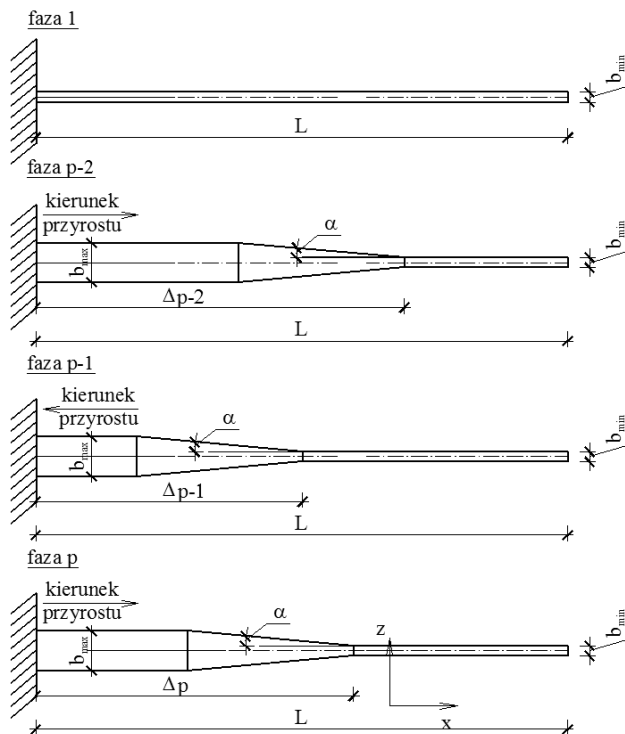
$Q$  - wektor przemieszczeń węzłowych

$K_{wb}$  - macierz sztywności uwzględniająca warunki brzegowe

$S_{wb}$  - wektor obciążeń węzłowych uwzględniający warunki brzegowe

Za punkt startowy optymalizacji przyjęto koniec utwierdzony pręta. Funkcję przyrostową zmiennej decyzyjnej  $b$  zdefiniowano, jako funkcję przyrostu długości  $\Delta$  oraz kąta nachylenia  $\alpha$ .

Dysponując funkcjami umożliwiającymi wyznaczenie przemieszczenia dla określonych warunków brzegowych przeprowadzono iteracyjne obliczenia dla ustalonej w obrębie danej iteracji wartości kąta  $\alpha$  oraz skokowo zmiennej wartości przyrostu  $\Delta$ . Dla jednej iteracji następuje szereg obliczeń mających na celu znalezienie rozwiązania optymalnego dla danego kąta  $\alpha$ . Kierunek przyrostu  $\Delta$  zależy od wartości maksymalnego przemieszczenia i jest określany w kolejnych krokach obliczeniowych. Dodatkowo wartość przyrostu  $\Delta$  maleje wraz z kolejnymi fazami obliczeń. Przyjęte zmienne oraz sposób przyrostu zmiennej decyzyjnej pokazano na rysunku nr 3.



Rys. 3. Przyrost zmiennej decyzyjnej  
Fig. 3. Increment of the decision variable

Poniżej podano jawnie postać funkcji przyrostowej zmiennej decyzyjnej  $b$  (8).

$$b_i = \min[b_{\max}; (b_{\min} + \max(0; 2(\Delta_p - i L_{ES}) \tan \alpha))] \quad (8)$$

gdzie:

- $i$  – liczba porządkowa elementu skończonego,  $i \in \{1; n\}$ ,
- $b_{\max}$  – maksymalna dopuszczalna wartość zmiennej decyzyjnej,
- $b_{\min}$  – minimalna wartość zmiennej decyzyjnej,
- $\Delta_p$  – przyrost dla  $p$ -tej fazy obliczeniowej (rys. 3),
- $L_{ES}$  – długość elementu skończonego.

Dla określonych dla wszystkich elementów skończonych wartości zmiennej decyzyjnej  $b$  wyznaczane jest przemieszczenie  $w$  końca swobodnego belki wspornikowej. Obliczona wartość zostaje porównana do określonej wartości granicznej  $w_0$ . Następnie przeprowadzane są kolejne fazy obliczeniowe mające na celu ustalenie wartości  $\Delta$ , dla której zostanie spełnione założone kryterium zbieżności. Poniżej przedstawiono w sposób uproszczony wzory na zastosowaną gradientową zmianę funkcji przyrostowej.

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \text{while } |w - w_0| > \lambda \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 = 0,5L \\ \dots \\ \Delta_{p+1} = \Delta_p + \begin{cases} |A_p - \Delta_{p-1}| / 2 \text{ if } w > w_0 \\ -|A_p - \Delta_{p-1}| / 2 \text{ if } w \leq w_0 \end{cases} \\ \text{break if } p > p_{\max} \end{array} \right. \end{cases} \quad (9)$$

gdzie:

- $\lambda$  – ustalone kryterium zbieżności,
- $p_{\max}$  – maksymalna ustalona ilość faz obliczeniowych.

Procedura obliczeniowa jest powtarzana iteracyjnie dla kolejnych wartości kąta  $\alpha$ , którego zmienność jest liniowa. Ze zbioru rozwiązań optymalnych (dla konkretnych wartości kąta  $\alpha$ ) wybierane jest rozwiązanie minimalizujące funkcję celu (1).

Na podstawie powyższych założeń został napisany program komputerowy, który umożliwia znalezienie rozwiązania optymalnego dla rozważanego zagadnienia. Algorytm został zapisany w środowisku programu Mathcad. Wymieniony program do obliczeń matematycznych umożliwia czytelny zapis procedury obliczeniowej oraz szybkie rozwiązywanie równań macierzowych.

## 5. Metoda optymalnego sterowania: uproszczony opis zagadnienia

Dokładny opis zadania optymalizacji belki wspornikowej znajduje się w pracy [1]. Poniżej przybliżono tylko podstawowe założenia do rozważanego problemu optymalizacyjnego.

Zadanie można opisać układem pięciu równań różniczkowych:

$$\begin{cases} w' = 0 \\ \varphi' = \frac{M}{EI} \\ M' = Q \\ Q' = q \\ V' = bh \end{cases} \quad (10)$$

gdzie:

- $w$  – przemieszczenia w kierunku osi  $z$ ,
- $\varphi$  – kąt ugięcia,
- $E$  – moduł Younga,
- $Q$  – obciążenie ciągłe,
- $I$  – moment bezwładności względem osi  $y$ .

Układowi równań (10) towarzyszą warunki brzegowe, które dla przyjętego schematu statycznego przybierają postać:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \\ w(L) = w_0 \\ M(L) = 0 \\ Q(L) = P \end{cases} \quad (11)$$

Sformułowane zadanie zostało rozwiązane numerycznie w programie Dircol-2.1 [1].

## 6. Porównanie wyników

Obliczenia wykonano dla następujących danych:

- długość belki  $L = 2,0$  m,
- siła skupiona  $P = 2000$  N,

- moduł Younga  $E = 205 \cdot 10^9$  Pa,
- stała wysokość  $h = 0,1$  m przekroju poprzecznego,
- zakres zmienności szerokości  $b$ :  $<0,05$  m ;  $0,20$  m),
- maksymalne przemieszczenie pionowe swobodnego końca belki  $w_0 = 0,002$  m.

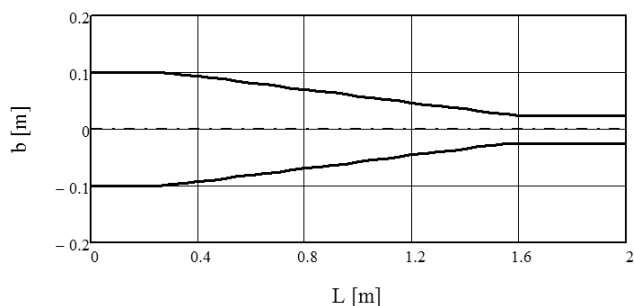
Dodatkowo dla metody gradientowo-iteracyjnej wprowadzono ograniczenia:

- zakres zmienności kąta nachylenia:  $\alpha \in (0^\circ ; 90^\circ)$ ,
- przyrost kąta nachylenia:  $\Delta\alpha = 1^\circ$ ,
- długość elementu skończonego:  $L_{ES} = 0,05$  m,

Struktura rozwiązania optymalnego uzyskanego metodą gradientowo-iteracyjną przedstawia się następująco:

$$b(x) = \begin{cases} 0,20 \text{ m} & x \in (0,00 \text{ m}; 0,35 \text{ m}) \\ b_{opt} & x \in (0,35 \text{ m}; 1,55 \text{ m}) \\ 0,05 \text{ m} & x \in (1,55 \text{ m}; 2,00 \text{ m}) \end{cases} \quad (12)$$

Poniżej przedstawiono graficznie rozwiązanie optymalne (rys. 4). Wartość ugięcia swobodnego końca wspornika wynosi 1,995 mm.

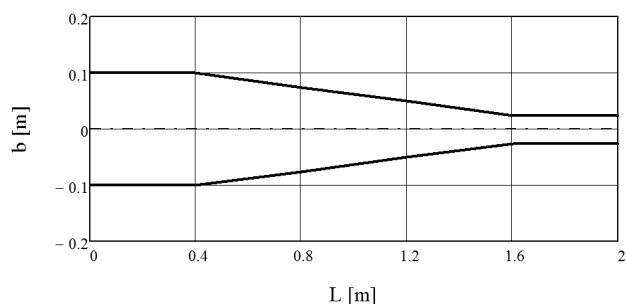


Rys. 4. Optymalna szerokość belki (metoda gradientowo-iteracyjna)  
Fig. 4. Optimal beam width (gradient-iteration method)

Struktura rozwiązania optymalnego uzyskanego metodą optymalnego sterowania przedstawia się następująco [1]:

$$b(x) = \begin{cases} 0,20 \text{ m} & x \in (0,00 \text{ m}; 0,40 \text{ m}) \\ b_{opt} & x \in (0,40 \text{ m}; 1,60 \text{ m}) \\ 0,05 \text{ m} & x \in (1,60 \text{ m}; 2,00 \text{ m}) \end{cases} \quad (13)$$

Na rysunku nr 5 pokazano rozwiązanie optymalne. Wartość ugięcia swobodnego końca wspornika wynosi 1,936 mm.



Rys. 5. Optymalna szerokość belki (metoda optymalnego sterowania)  
Fig. 5. Optimal beam width (optimal control method)

Wynik uzyskany metodą gradientowo-iteracyjną jest bardziej precyzyjny, natomiast rozwiązanie optymalne cechuje się nie-

znacznie mniejszą wartością funkcji celu. Wynika to z założonej wielkości elementu obliczeniowego. W pracy [1] założono rozmiar elementu obliczeniowego 0,1 m, natomiast w rozwiązaniu metodą gradientowo-iteracyjną założono element skończony o długości 0,05 m.

Struktura rozwiązania dla obydwu metod jest bardzo zbliżona. Wynik ten dowodzi skuteczności metody gradientowo-iteracyjnej.

## 7. Wnioski

Dla skomplikowanych układów konstrukcyjnych znalezienie rozwiązania optymalnego przy zastosowaniu zasady maksimum prowadzi do konieczności rozwiązania bardzo skomplikowanych wielopunktowych problemów brzegowych. Dodatkowo stosując metodę optymalnego sterowania należy się liczyć z koniecznością wykorzystania trudnodostępnych programów numerycznych umożliwiających znalezienie rozwiązania sformułowanego problemu brzegowego.

Korzystając z metody gradientowo-iteracyjnej, nawet dla skomplikowanego zagadnienia, rozwiązanie znajdowane jest bardzo szybko. Formułując zagadnienie za pomocą prostych funkcji oraz przeprowadzając pętle obliczeniowe, ze zbiorów rozwiązań znajdowany jest wynik optymalny spełniający wszystkie ustalone kryteria optymalizacyjne.

Metoda gradientowo-iteracyjna może być wykorzystywana w codziennej praktyce projektowej. Wykorzystanie metody elementów skończonych umożliwia znalezienie optymalnego rozwiązania dla konstrukcji wielokrotnie statycznie niewyznaczalnych.

Zadanie optymalizacyjne można sformułować w dowolnym języku programowania lub w popularnych programach matematycznych (np. Mathcad, Matlab).

Przed przystąpieniem do optymalizacji należy starannie sformułować funkcję przyrostową, gdyż jej niewłaściwa definicja może prowadzić do znacznego wydłużenia obliczeń.

Metoda optymalizacji gradientowo-iteracyjnej pomimo swej prostoty pozwala na znalezienie w bardzo krótkim czasie rozwiązania optymalnego. Ze względu na relatywnie niewielkie wymagane nakłady czasu pracy metoda może zostać wykorzystana w biurach projektowania konstrukcji budowlanych do optymalizacji elementów budowlanych.

Opisaną metodę można oczywiście zastosować w rozwiązaniu dowolnego problemu optymalizacyjnego nie dotyczącego optymalnego kształtowania konstrukcji budowlanych.

## 8. Literatura

- [1] Mikulski L.: Optymalizacja belki wspornikowej. w Optymalizacja i polioptymalizacja w technice ISBN 978-83-7365-273-6 - Wojciech Tarnowski, str. 350-360, Politechnika Koszalińska.
- [2] Sobczyk Sz.: Optymalne kształtowanie pólki dźwigarów strunobetonowych. Badania doświadczalne i teoretyczne w budownictwie. monografia. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.
- [3] Mikulski L.: Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, ISBN 978-93-7242-440-2, Kraków 2007.
- [4] Łodygowski T., Kąkol W.: Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji inżynierskich. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1994.
- [5] Oskar von Stryk: User's guide for Dircol, A direct collocation method for the numerical solution of optimal control problems. Technische Universität Darmstadt, 1999.

otrzymano / received: 24.07.2013

przyjęto do druku / accepted: 01.10.2013

artykuł recenzowany / revised paper