

**Szymon SOBCZYK**, Leszek Mikulski  
POLITECHNIKA KRAKOWSKA, INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI  
31-155 Kraków, ul. Warszawska 24

### **Optymalizacja belek sprężonych**

W pracy przedstawiono problem optymalizacji dwuprzęsłowych belek sprężonych. Przedstawiono model fizyczny optymalizowanego elementu, a następnie sformułowano problem brzegowy o ściśle określonej strukturze formalnej, umożliwiającej zastosowanie zasady maksimum. Przeprowadzono przykładowe obliczenia mające na celu wyznaczenie optymalnej trasy kabla sprężającego, dla którego ugięcie elementu będzie minimalne.

**Słowa kluczowe:** optymalizacja konstrukcji, metody optymalnego sterowania, belki strunobetonowe, belki kablobetonowe

### **Optimization for pretensioned beams**

The paper presents an optimization problem for double-span pre-stressed beams. The article presents physical model of the optimized element (fig. 1, fig. 2). The problem analysis examined five phases of load (fig. 2). Then formulated boundary problem with strictly defined formal structure, allowing use of maximum principle (chapter 3). Attention was paid to way of formulating of optimization constraints. An example calculation was made to determine optimal route for the compressing cable, for which element deflection will be minimal, combined with fulfillment of constraints resulting from the ultimate and serviceability limit state. Obtained solution shows the effectiveness of the presented method of calculation.

**Keywords:** structure optimization, optimal control method, pre-tensioned beams, post-tensioned beams

## **1. Wstęp**

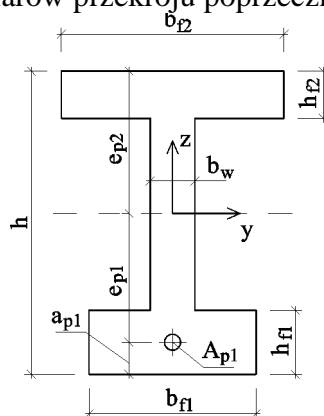
Zastosowanie technologii sprężenia umożliwia projektowanie elementów o dużych rozpiętościach przenoszących znaczne obciążenia. Ze względu na znaczne koszty sprężania, projektując element sprężony należy poszukiwać rozwiązań optymalnych pod względem ekonomicznym. W większości przypadków minimalny koszt wykonania danego elementu uzyskujemy poprzez minimalizację zużycia materiałów. Dodatkowym aspektem optymalnego projektowania jest właściwe wyznaczenie trasy sprężenia.

W pracy zastosowano metodę optymalizacji opierającą się na zasadzie maksimum. Ze względu na wybrane kryterium metoda umożliwia wyznaczenie rozwiązań optymalnych w sensie matematycznym. Analizując uzyskane rozwiązanie można sformułować możliwe do realizacji praktyczne zalecenia.

W artykule skupiono się na analizie belek dwuprzęsłowych o przekroju dwuteowym. Prezentowana metodyka obliczeń może być jednak stosowana do belek zarówno kablo-, jak i strunobetonowych o dowolnym przekroju poprzecznym.

## 2. Ogólny opis problemu

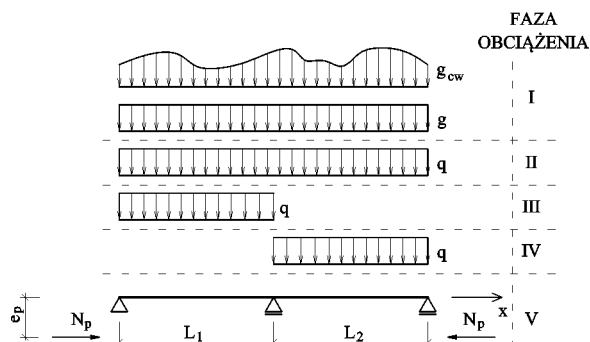
Zadanie dotyczy optymalnego kształtowania dwuprzęsłowej belki sprężonej o przekroju dwuteowym. W obliczeniach pominięto wpływ zjawisk reologicznych. Poniżej na rysunku (rys. 1) pokazano oznaczenia wymiarów przekroju poprzecznego belki.



Rys. 1. Przekrój poprzeczny belki  
Fig. 1. Beam cross-section

Poniżej na rysunku (rys. 2) pokazano układ sił działający na analizowaną belkę dwuprzęsłową o długości  $L_1 + L_2$ .

Założono równomierne obciążenie użytkowe  $q$  oraz stałe  $g$ . W ogólnym przypadku optymalizacyjnym obciążenie ciężarem własnym  $g_{cw}$  nie będzie jednorodne, gdyż przekrój jest zmienny na długości elementu. Siła sprężająca  $N_p$  działa na mimośrodkie  $e_p$  względem środka ciężkości przekroju. W analizowanym problemie rozpatrzono 5 faz obciążenia.



Rys. 2. Schemat statyczny oraz układ sił zewnętrznych  
Fig. 2. Static scheme and the system of external forces

## 3. Optymalne kształtowanie

Za funkcję celu w zadaniu optymalizacyjnym najczęściej przyjmuje się objętość betonu.

$$f = \int_0^L A_c(x) dx \quad (1)$$

gdzie:

$A_c(x)$  - pole przekroju betonowego w funkcji długości elementu

Jednakże ze względu na znaczne rozpiętości belek sprężonych istotną rolę odgrywa minimalizacja ugięcia danego elementu. W bieżących rozważaniach skupiono się na wyznaczeniu optymalnej trasy kabla sprężającego, która przy zadanym przekroju poprzecznym będzie minimalizowała ugięcie elementu. Wyznaczając optymalną trajektorię kabla wypadkowego, która równocześnie będzie spełniać zadane ograniczenia, dążymy do minimalizacji kosztów poprzez optymalizację sprężenia.

Obciążenie podzielono na pięć faz:

- ciężar własny i obciążenia stałe
- 3 kombinacje obciążeń eksploatacyjnych
- siła sprężająca

### Równania stanu:

Sformułowano układ równań stanu złożony z czterech równań różniczkowych pierwszego rzędu o postaci (2÷5). Poniższymi równaniami można opisać belkę w pierwszych czterech fazach obciążenia.

$$w' = \varphi \quad (2)$$

$$\varphi' = \frac{M}{EI} \quad (3)$$

$$M' = Q \quad (4)$$

$$Q' = -q \quad (5)$$

gdzie:

w - przemieszczenie liniowe w kierunku osi z

$\varphi$  - kąt ugięcia

M - moment zginający

Q - siła poprzeczna

q - obciążenie ciągłe

E - moduł Younga

I - moment bezwładności względem osi y

W celu zmniejszenia ilości przedziałów charakterystycznych wprowadzono funkcję skokową

$$u = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin \langle a, b \rangle \\ 1 & \text{gdy } x \in \langle a, b \rangle \end{cases} \quad (6)$$

Dla fazy sprężania (faza V) wprowadzono układ złożony z dwóch równań o postaci (6÷7)

$$w' = \varphi \quad (7)$$

$$\varphi' = \frac{M_p}{EI} \quad (8)$$

gdzie:

$M_p$  - moment zginający wywołany siłą sprężającą  $N_p$  wyrażający się wzorem:

$$M_p = P_1 x + u_2 P_2 (x - L_1) + N_p e_p \quad (9)$$

gdzie:

$P_i$  - reakcje podpór wywołane siłą sprężającą w ustroju statycznie niewyznaczalnym

$u_2$  – indykatorowa funkcja (6) dla przedziału  $\langle L_1 ; L_1 + L_2 \rangle$

W fazie V sformułowano dodatkowo dwa nadliczbowe warunki punktowe, które wraz z warunkami równowagi globalnej (9) umożliwiają wyznaczenie reakcji podpór występujących w równaniu (8).

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0 \quad P_2 L_1 + P_3 (L_1 + L_2) = 0 \quad (10)$$

Powyższy układ równań (7÷8) bardzo dobrze opisuje sprężenie belek, w których trasa sprężenia jest prostoliniowa i równoległa do osi ciężkości elementu. W przypadku krzywoliniowego przebiegu, jak ma to miejsce w belkach kablobetonowych, sformułowanie staje się przybliżeniem. Należałoby rozważyć nie tylko składową poziomą siły sprężającej, ale również składową pionową. Jednak ze względu na bardzo małe krzywizny w przekrojach krytycznych uproszczenie powyższe nie powoduje istotnych błędów w uzyskanym rozwiązaniu.

Oprócz powyższych wprowadzono równanie opisujące objętość belki.

$$V = bh \quad (11)$$

Aby układ równań (2÷5, 7÷8) miał jednoznaczne rozwiązanie zmienne stanu muszą spełniać warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe w granicach przedziałów charakterystycznych. Poniżej w tabelach 1 i 2 pokazano warunki brzegowe i punktowe dla rozważanego zagadnienia.

Tab. 1. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazach I÷IV  
Tab. 1. Boundary conditions and internal conditions of state variables in phases I÷IV

	Granice przedziałów charakterystycznych			
	0	$L_1^-$	$L_1^+$	$L_1+L_2$
y	0	0	0	0
$\varphi$	-	c	c	-
M	0	c	c	0
Q	-	-	-	-

Oznaczenia: 0 - ustalona wartość z lewej lub prawej strony punktu, c - warunek ciągłości

Tab. 2. Warunki brzegowe i wewnętrzne warunki punktowe zmiennych stanu w fazie V  
Tab. 2. Boundary conditions and internal conditions of state variables in phase V

	Granice przedziałów charakterystycznych			
	0	$L_1^-$	$L_1^+$	$L_1+L_2$
y	0	0	0	0
$\varphi$	-	c	c	-

### Ograniczenia:

Wprowadzono ograniczenia wynikające ze stanów granicznych nośności oraz użytkowania:

$G_1$  - ograniczenie maksymalnego ugięcia belki

$G_2$  - ograniczenie maksymalnego naprężenia ściskającego na górnej krawędzi przekroju

$G_3$  - ograniczenie maksymalnego naprężenia rozciągającego na górnej krawędzi przekroju

$G_4$  - ograniczenie maksymalnego naprężenia ściskającego na dolnej krawędzi przekroju

$G_5$  - ograniczenie maksymalnego naprężenia rozciągającego na dolnej krawędzi przekroju

Ogólna postać ograniczeń  $G$  jest następująca:

$$G_s = C_s^{dop} - \max(C_s), \quad s = 1 \div 5 \quad (13)$$

gdzie:

$C_s^{dop}$  - w  $G_1$  graniczne przemieszczenie liniowe

- w  $G_2 \div G_5$  dopuszczalne naprężenie

$C_s$  - w  $G_1$  przemieszczenie pionowe

- w  $G_2 \div G_5$  zbiór wartości naprężeń (odpowiednio do rodzaju ograniczenia)

Powyższy zapis ograniczenia  $G_1$  dotyczy ogólnego zagadnienia optymalizacji belek. W ograniczeniu określamy stałą wartość, która nie może zostać przekroczona. W rozważanym zadaniu optymalizacyjnym ograniczenie przybiera następującą formę:

$$G_1 = P(u) - \max(C_s) \quad (13)$$

gdzie:

$P(u)$  - funkcja celu

Stosując powyższe ograniczenie dążymy do minimalizacji ugięcia danego elementu. Należy jednak zauważyć, że ograniczenie (13) nie zapewnia nam spełnienia stanu granicznego ugięcia ustalonego w normach projektowych. Tak sformułowane zadanie dąży do zminimalizowania ugięcia, nie zapewniając jednak nieprzekroczenia ustalonej odgórnie wartości. W celu zapewnienia spełnienia stanu granicznego ugięcia należy wprowadzić dodatkowe ograniczenie:

$$G_6 = a_{dop} - \max(a) \quad (14)$$

gdzie:

$a_{dop}$  - dopuszczalne ugięcie

$a$  - obliczone ugięcie

Ograniczenia  $G_3$  i  $G_5$  zabezpieczają przed przekroczeniem wytrzymałości betonu na rozciąganie. W praktyce projektowej elementy sprężone najczęściej projektuje się przyjmując za stan graniczny pojawienie się zarysowania. Występują jednak kategorie elementów, dla których ze względu na korzystne warunki środowiskowe dopuszcza się przekroczenie wytrzymałości betonu na rozciąganie. Optymalizując belki, dla których dopuszcza się zarysowanie należy pamiętać o poprawnym przyjęciu moduły Younga dla betonu zarysowanego.

Dodatkowo wprowadzono ograniczenia dopuszczalnego obszaru zmiennych decyzyjnych.

#### 4. Rozwiązanie numeryczne

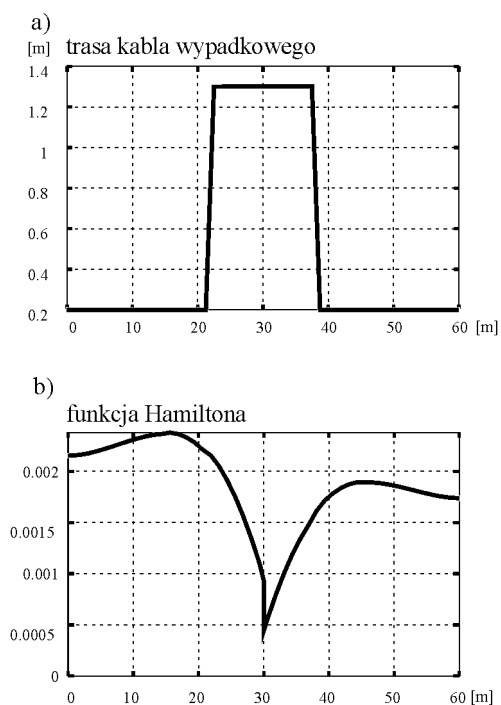
Rozwiązanie sformułowanego problemu optymalnego kształtowania możliwe jest tylko za pomocą algorytmów numerycznych. Jednym z programów bazujących na teorii optymalnego sterowania jest program Dircol-2.1 (A Direct Method for the Numerical Solution of Optimal Problems). Program ten jest skutecznym narzędziem do rozwiązywania zadań sformułowanych w sposób opisany powyżej.

Za pomocą programu Dircol-2.1 wyznaczono rozwiązanie teoretyczne zapewniające minimum ugięcia elementu poprzez optymalizację trasy kabla wypadkowego, przy równoczesnym spełnieniu stanów granicznych nośności i użytkowania.

## 5. Wyniki obliczeń

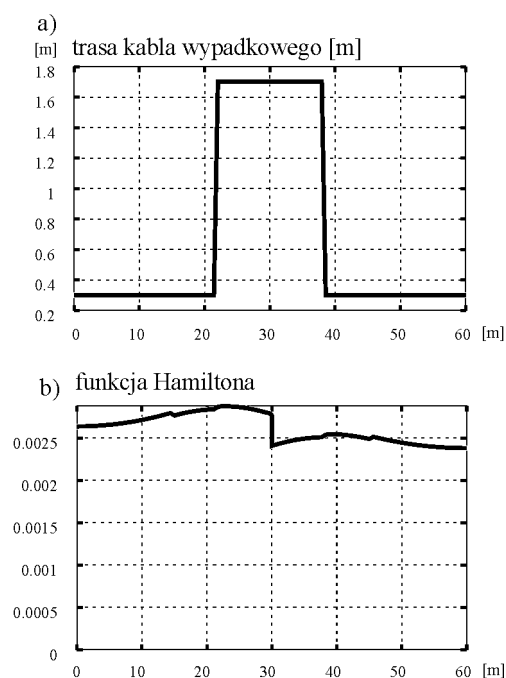
Obliczenia wykonano dla następujących danych:

- klasa betonu: C45/55 ( $f_{ck} = 45\text{MPa}$ ,  $E = 36\text{GPa}$ )
- ciężar właściwy żelbetu:  $25\text{kN/m}^3$
- minimalna odległość siły sprężającej od dolnej krawędzi przekroju:  $a_{p1} = 0,2\text{m}$
- maksymalna odległość siły sprężającej od górnej krawędzi przekroju:  $h - 0,2\text{m}$
- długość:  $L_1 = 30\text{m}$
- długość:  $L_2 = 30\text{m}$
- obciążenie stałe zewnętrzne:  $g = 30\text{kN/m}$
- obciążenie eksploatacyjne:  $q = 75\text{kN/m}$
- siła sprężająca po uwzględnieniu wszystkich strat:  $N_p = 4000\text{kN}$
- wymiary przekroju:  $b_{f1} = b_{f2} = 0,6\text{m}$ ,  $h_{f1} = h_{f2} = 0,3\text{m}$ ,  $b_w = 0,25\text{m}$ ,  $h = 1,5\text{m}$



Rys. 3. a) Rozwiązanie optymalne, b) funkcja Hamiltona  
Fig. 3. a) Optimal solution, b) Hamilton function

Dodatkowo dla sprawdzenia poprawności rozwiązania przeprowadzono powtórne obliczenia przyjmując wysokość przekroju  $h = 2,0\text{m}$ .



Rys. 4. a) Rozwiązanie optymalne, b) funkcja Hamiltona  
 Fig. 4. a) Optimal solution, b) Hamilton function

Przebieg trasy wypadkowego kabla sprężającego dla różnych wysokości przekroju jest analogiczny. Z powyższego można wnioskować, że ukształtowanie trasy kabla zgodnie z rys. 3 i 4 pozwala zaprojektować element o minimalnym ugięciu.

## 6. Wnioski

Rozwiązanie zamieszczone powyżej jest tylko przykładem mającym na celu zobrazowanie skuteczności zaprezentowanego podejścia obliczeniowego. Opracowany w pracy problem optymalnego kształtowania można w dowolny sposób przekształcić przyjmując za zmienne decyzyjne dowolne gabaryty przekroju poprzecznego, a za funkcję celu między innymi: objętość betonu, ugięcie, naprężenia ściskające, naprężenia rozciągające.

Metoda optymalizacji oparta na zasadzie maksimum, dzięki zastosowaniu skutecznych algorytmów numerycznych może być doskonałym narzędziem w rękach projektanta elementów sprężonych.

## 7. Literatura

- [1] Ajdukiewicz A., Mames J.: Konstrukcje z betonu sprężonego. Polski Cement, Kraków 2004.
- [2] Laskowski H.: Optymalne kształtowanie stalowo-betonowych dźwigarów zespolonych w kategoriach teorii sterowania. Praca doktorska, Kraków 2006
- [3] Laskowski H., Mikulski L., Ostaficzuk J.: Rozwiązania teoretyczne i ich praktyczne zastosowania w optymalizacji konstrukcji. PAK vol. 53, nr 8/2007
- [4] Mikulski L.: Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, ISBN 978-93-7242-440-2, Kraków 2007.
- [5] Oskar von Stryk: User's guide for Dircol, A direct collocation method for the numerical solution of optimal control problems. Technische Universität Darmstadt, 1999.

- [6] Philip E. Gill, Walter Murray, Michael A. Saunders: User's guide for SNOPT 5.3: A fortran package for large-scale nonlinear programming. DRAFT, 1998