

**MECHANIKA**

W Y D A W N I C T W O



**CZASOPISMO  
TECHNICZNE**

**TECHNICAL  
TRANSACTIONS**

6-M/2012

ZESZYT 11

ROK 109

ISSUE 11

YEAR 109

P O L I T E C H N I K I K R A K O W S K I E J

**MECHANICS**

Przewodniczący Kolegium Redakcyjnego Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej Jan Kazior *Chairman of the Cracow University of Technology Press Editorial Board*

Przewodniczący Kolegium Redakcyjnego Wydawnictw Naukowych Józef Nizioł *Chairman of the Editorial Board*

Architektura  
Budownictwo  
Chemia  
Elektrotechnika  
Informatyka

Dariusz Kozłowski  
Marek Piekarczyk  
Krzysztof Pielichowski  
Tadeusz J. Sobczyk  
Krzysztof Sapięcha

Architecture  
Civil Engineering  
Chemistry  
Electrical Engineering  
Computer Science and  
Information Systems

Mechanika  
Nauki Podstawowe  
Środowisko

Rafał Palej  
Antoni Ostoja-Gajewski  
Stanisław Kandefer

Mechanics  
Fundamental Sciences  
Environmental Engineering

Sekretarz Sekcji Dorota Sapek *Section Editor*

©Copyright by Politechnika Krakowska  
Kraków 2012

# CZASOPISMO TECHNICAL TECHNICZNE TRANSACTIONS

Wersją pierwotną Czasopisma Technicznego jest wersja on-line

ISSN 0011-4561

ISSN 1897-6328

Wydawnictwo jest rejestrowane w bazie danych  
BazTech <http://baztech.icm.edu.pl>

The CUT Press is registered in the database  
BazTech <http://baztech.icm.edu.pl>

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków  
tel.: 12 628 37 25; fax: 12 628 37 60  
e-mail: [wydawnictwo@pk.edu.pl](mailto:wydawnictwo@pk.edu.pl)  
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24  
31-155 Kraków

Projekt okładki: Jerzy Stefan

Druk i oprawę wykonano  
w Dziale Poligrafii Politechniki Krakowskiej  
Ark. wyd. 7. Ark. druk. 9  
Podpisano do druku: 07.11.2012  
Zam. 228/12 Nakład 80 egz.

6-M/2012

ZESZYT 11  
ROK 109

ISSUE 11  
YEAR 109

MICHAŁ DYLAĞ\*, JERZY ROSIŃSKI\*\*

## ANWENDUNG DER MOMENTENMETHODE ZUR SCHNELLEN ABSCHÄTZUNG DER SICH EINSTELLENDEN FLOCKENGRÖSSENVERTEILUNG

---

### ZASTOSOWANIE METODY MOMENTÓW DO SZYBKIEGO OSZACOWANIA ROZKŁADÓW WIELKOŚCI POWSTAJĄCYCH FLOKUŁ

#### Zusammenfassung

In der Arbeit ist das Ergebnis der Vergleichsrechnungen zu der Anwendung der Momentenmethode und Überprüfung von zwei verschiedenen Verteilungen zur Rekonstruktion der Partikelgrößenverteilungen unter Zugrundelegung der Normalverteilung und der Gaudin-Melloy-Verteilung.

*Schlüsselworte: Flockengrößenverteilung, Rekonstruktion der Partikelgrößenverteilungen, Normalverteilung, Gaudin-Melloy-Verteilung*

#### Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki analizy porównawczej dotyczącej zastosowania metody momentów w dwóch wariantach opartych o wykorzystanie rozkładu normalnego oraz Gaudina-Melloya do rekonstrukcji tworzonych rozkładów wielkości cząstek.

*Słowa kluczowe: rozkłady wielkości fokuł, rekonstrukcja rozkładów wielkości cząstek, rozkład normalny, rozkład Gaudina-Melloya*

---

\* Prof. dr hab. inż. Michał Dylağ, Instytut Zaawansowanych Technologii Wytwarzania – ISO.

\*\* Dr inż. Jerzy Rosiński, Instytut Inżynierii Ciepłej i Procesowej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## Formelzeichen

$c_p$	– Primärpartikelkonzentration [g/l]
$m_{50}$	– mittlere Masse [kg]
$\sigma$	– Standardabweichung [kg]
$L_m$	– Parameter der Gaudin-Melloy – Verteilung [kg]
$m^*$	– Parameter der Gaudin-Melloy – Verteilung
$q_o$	– Anzahldichteverteilung [kg <sup>-1</sup> ]
$\mu$	– Moment

## 1. Einleitung

Im Rahmen der schon publizierten Arbeiten [1, 2] wurde ein Simulationsmodell entwickelt und validiert, das es ermöglicht, Flockulationsreaktionen bei suspendierten Feststoffpartikeln in einem Strömungsfeld mit bekannten Zustandgrößen zu berechnen, um die sich einstellende Flockengrößenverteilung vorherzusagen.

Neben der Erstellung des populationsdynamischen Modells soll die so genannte Momentenmethode hinsichtlich ihrer Anwendung zum Zweck der Modellreduktion getestet werden. Zusätzliche Argumentation bringt eine Feststellung mit sich, dass eine geschlossene Transformation der Populationsbilanzen zur Momentengleichungen nicht möglich ist. Auch die vorgeschlagene und angewandte Art des Hybrid-Verfahrens erzwingt, dass während des Simulationsabläufe die ständige Rekonstruktion der Partikelgrößenverteilungen aus den Momenten gewährleistet werden soll [3].

## 2. Formulierung des problems

Der Erstellung des populationsdynamischen Modells zur Beschreibung der Flockung bietet die Möglichkeit, die so genannte Momentenmethode hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit zum Zweck der Modellreduktion zu testen. Momente sind Kenngrößen einer Verteilungsfunktion; so stellt z. B. der Mittelwert einer Verteilung deren erstes Moment dar. Formal wurden die Populationsbilanzen über eine Integraltransformation in die Momentengleichungen überführt.

Aufgrund der Komplexität der Modellgleichungen hat sich gezeigt, dass in diesen Fall eine geschlossene Transformation der Populationsgleichungen zu Momentengleichungen nicht möglich ist. Stattdessen wurde eine Art des Hybrid-Verfahrens angewandt, bei welchem ebenfalls nur noch die Momente der Partikelgrößenverteilungen von Primärpartikeln und Flocken als Unbekannte bestimmt werden, jedoch die kinetischen Ansätze der Partikelwechselwirkungen übernommen werden können ohne die explizite Durchführung der Integraltransformation. Damit ist diese Methode für die verschiedensten dispersen Stoffsysteme bei beliebigen Partikelwechselwirkungen anwendbar.

Wie bei den Populationsbilanzen handelt es sich jedoch bei diesen Gleichungen um Integro-Differenzialgleichungen. Der Vorteil im Vergleich zur Anwendung der eigentlichen Populationsgleichungen liegt in der wesentlich geringeren Anzahl der Unbekannten. Diese

Vorgehensweise erfordert während des Simulationsablaufes die ständige Rekonstruktion der Partikelgrößenverteilungen aus den Momenten.

Hierzu hat sich die Methode der Rücktransformation [4] über vorgegebene Verteilungsfunktionen als praktikabel erwiesen [4]. Dabei werden beispielweise für eine Normalverteilung die relevanten Parameter der Verteilungsfunktion (Mittelwert, Standardabweichung, ...) aus den berechneten Momenten bestimmt, so dass die Verteilungsfunktion eindeutig definiert ist.

### 3. Einführende untersuchungen

Betrachtet man eine Funktion mit bekannter mittlerer Partikelmasse  $m_{50}$  und Standardabweichung  $\sigma$ , so ist die über die Gamma-Verteilung rekonstruierte Partikelgrößenverteilung mehr zu kleineren Partikeln hin verschoben als die über eine Normalverteilung berechnete Funktion. Für die Simulation des Flockungsvorgangs bedeutet dies Folgendes: führt man während der Simulation die Rücktransformation über eine Gamma-Verteilung durch, so laufen die Bruch- und Erosionsvorgänge scheinbar schneller ab als bei Zugrundelegung einer Normalverteilung [5].

Bei einer unvollständigen Darstellung der tatsächlichen Verteilungsdichtefunktion zwischen  $m_{f,\max}$  und  $m_{f,\min}$  erfolgt ein Anstieg der Partikelanzahlen an den Grenzen des betreffenden Partikelgrößenbereichs. Wird die Verteilung bei  $m_{f,\max}$  abgeschnitten, so wird durch die fehlerbehaftete Rücktransformation eine größere Anzahl kleinerer Partikel dargestellt als tatsächlich vorhanden ist. Dieser Effekt führt zu einer formalen Erhöhung der Agglomerationskinetik, während die Bruch- und Erosionskinetiken gebremst werden.

Wird dagegen die Verteilungsfunktion im Bereich  $m_{f,\max}$  unvollständig dargestellt, so wird eine geringere Anzahl kleiner Partikel berechnet als in der Realität vorliegt. In diesem Fall werden Erosions- und Bruchvorgänge scheinbar beschleunigt, während die Agglomeration an Geschwindigkeit verliert.

Als Folge der Diskussion, wurde festgelegt, dass die Rekonstruktion der Partikelgrößenverteilung unter Zugrundelegung der Normalverteilung nach Gl. (1) erfolgt.

$$q_o(m) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp \left[ -\frac{(m - m_{50})^2}{2 \cdot \sigma^2} \right] \quad (1)$$

mit dem Mittelwert  $m_{50}$  und der Standardabweichung  $\sigma$  als Funktionsparameter.

Als zweite gewählte Möglichkeit wird die Gaudin-Melloy-Verteilung untersucht gemäß der Funktionsgleichung Gl. (2)

$$q_o(m) = \frac{m^*}{L_m} \cdot \left( 1 - \frac{m}{L_m} \right)^{m^* - 1} \quad (2)$$

mit den Parametern

$$m^* = \frac{2 \cdot \sigma^2}{m_{50}^2 - \sigma^2} \quad (3)$$

$$L_m = m_{50} \cdot \frac{m_{50}^2 + \sigma^2}{m_{50}^2 - \sigma^2} \quad (4)$$

Der Mittelwert  $m_{50}$  und die Standardabweichung  $\sigma$  einer beliebigen Verteilungsdichtefunktion hängen direkt von den Momenten ab [5].

$$m_{50} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \quad (5)$$

$$\sigma = \left[ \frac{\mu_2}{\mu_0} - \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} \right)^2 \right]^{0,5} \quad (6)$$

Damit sind zur Rekonstruktion der Partikelgrößenverteilung nur die drei Momente  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  erforderlich.

Zu beachten ist der Definitionsbereich der zugrunde liegenden Verteilungsfunktionen. Da die Normalverteilung im Bereich von  $-\infty$  bis  $+\infty$  definiert ist, können bei der Rekonstruktion theoretisch Partikel mit negativen Dispersitätsgrößen, z. B. mit negativen Massen berechnet werden. Die Normalverteilung kann also immer nur in Verbindung mit einer Kontrollfunktion zur Überprüfung der Lage der Verteilungsfunktion angewandt werden. Eine solche Kontrolle ist beispielsweise die Normierungsbedingung

$$\int_{m_{\min}}^{m_{\max}} q_o(m) dm = 1 \quad (7)$$

für die Verteilung der Partikel und der Flocken. Wird diese Bedingung erfüllt, so liegt die Verteilungsfunktion vollständig im positiven Bereich der Dispersitätsgröße. Dieses Problem tritt bei der Gaudin-Melloy-Verteilung nicht auf, bei der sich der Definitionsbereich von 0 bis  $+\infty$  erstreckt.

#### 4. Zielsetzung

Da bei der Rücktransformation über vorgegebene Verteilungsfunktionen die Wahl der Verteilungsfunktion zunächst willkürlich erfolgt, muss deren Einfluss auf das Ergebnis der rekonstruierten Verteilung ermittelt werden. Dazu wurden in einer Untersuchung verschiedene Partikelgrößenverteilungen vorgegeben, deren Momente berechnet und dann über vorgegebene Verteilungsfunktionen wieder rekonstruiert werden.

Nach der Durchführung der einführenden Untersuchungen wurde angenommen, dass die Rekonstruktion der Partikelgrößenverteilungen unter Zugrundelegung der Normalverteilung nach Gl. (1) und der Gaudin-Melloy-Verteilung nach Gl. (2) erfolgt.

## 5. Numerische Formulierung und Lösung

Die numerische Lösung der Populationsbilanzen und Momentengleichungen erfolgte mit Hilfe der Methode der Finiten Volumen. Zur vollständigen Diskretisierung von Populationsgleichungen wurde neben der Ortsdiskretisierung die Diskretisierung der Eigenschaftskordinaten notwendig [6, 12].

### 5.1. Diskretisierung des Rührkesselreaktors

Betrachtet wurde ein Rührkesselreaktor mit 6-Blatt-Turbinenrührer mit vier Strombrechern. Dazu wird die Hälfte des Reaktorquerschnittes mit einem Rechengitter diskretisiert, welches sieben Bilanzelemente in axialer Richtung und fünf in radialer Richtung aufweist und damit wesentlich gröber ist, als das Rechengitter für die Strömungsberechnungen. Abb. 1 zeigt in der linken Hälfte den diskretisierten Reaktor, in den Abb. 2 und 3 das auf dem feinen Gitter berechnete [9] und gemessene [8] Strömungsfeld. Zusätzlich wurden die Ergebnisse der Strömungssimulationen [9] und LDE-Messungen [8] quantitativ verglichen.

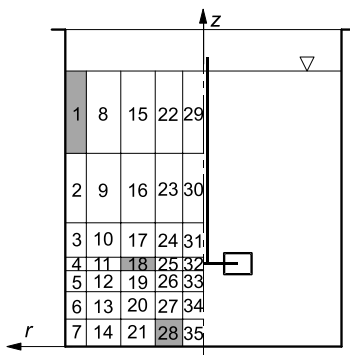


Abb. 1. Rührkesselreaktor mit diskreten Bilanzelementen zur Lösung der Populationsgleichungen

Rys. 1. Zbiornik reaktora z zaznaczeniem elementów bilansowych

Die Ergebnisse der detaillierten Strömungssimulationen wurden unter Berücksichtigung der turbulenten Dispersionsströme für die neu generierten Bilanzelemente interpoliert und zusammengefasst und in Form eines minimal notwendigen Datensatzes dargestellt, auf welchen das Simulationsprogramm mit den Populationsbilanzen zugreift. Dieser enthält:

- die Elementkoordinaten in radialer und axialer Richtung,
- die in ein Element tatsächlich eintretenden Volumenströme über die Grenzflächen in beiden Richtungen,
- die über das Element gemittelten Werte der turbulenten kinetischen Energie  $\kappa$  und der turbulenten Energiedissipation  $\epsilon$  sowie,
- den Druck in jedem Bilanzelement.

Für ein Bilanzelement, wie es in Abb. 1 dargestellt ist, werden in radialer und axialer Richtung Ein- und Austrittsseiten definiert. Als Eintrittsseite wird bezüglich jeder Koordinate die Seite bezeichnet, die in positiver Koordinatenrichtung als erste durchstoßen wird.

Die konvektiven Terme in den Bilanzgleichungen werden mit Hilfe der über die Elementgrenzen fließenden Volumenströme formuliert. Für jedes Element wird aus der Summe der eintretenden Volumenströme, unter der Voraussetzung einer inkompressiblen Strömung, der aus Kontinuitätsgründen insgesamt austretende Volumenstrom berechnet. Die austretenden Flocken und Primärpartikeln entsprechen in ihrer Konzentration und Größenverteilung den Partikeln im Bilanzelement selbst. Diese Vorstellung entstammt dem sogenannten UPWIND-Schema vom Patankar, bei welchem jedes Bilanzelement als ein ideal durchmischter kleiner Rührkessel angenommen wird [10].

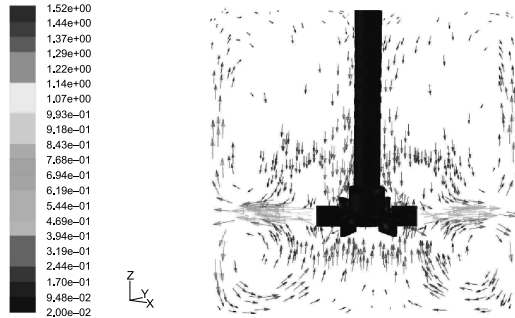


Abb. 2. Rührkessel – berechnetes Geschwindigkeitsfeld für  $Re = 10^4$ ; der farbige Teil des Bildes beschreibt die berechnete Geschwindigkeitswerte (auch nach der Farbe erkennbar)

Rys. 2. Wyniki obliczeń symulacyjnych pola prędkości dla  $Re = 10^4$

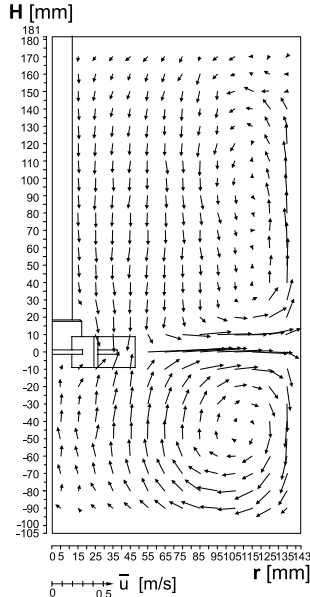


Abb. 3. Rührkessel – gemessenes Strömungsfeld für  $Re = 10^4$

Rys. 3. Wyniki pomiarów pola przepływu dla  $Re = 10^4$



## 5.2. Eigenschaftsdiskretisierung

Die Diskretisierung der Eigenschaftskordinate (Masse  $m$ ) kann äquidistant oder nicht äquidistant erfolgen. Bei der Diskretisierung wird aber der Bereich kleiner Partikeln nur durch wenige Intervalle beschrieben. Gerade in diesem Größenbereich liegen jedoch zumindest zu Beginn des Flockungsprozesses die meisten Partikeln vor. Diese Tatsache erzwingt eine weitgehende Umformung der Populationsgleichungen von Primärpartikeln und Flocken sowie Voraussetzung, dass die Eigenschaftsintervalle (Größenklassen) bei beiden Partikelarten im gemeinsamen Größenbereich jeweils identisch sind. Zusätzlich, da es sich aufgrund der Struktur der Quell- und Senkenterme um Integro-Differentialgleichungen handelt, müssen weiterhin die Integrationen durch entsprechende algebraische Formulierungen ersetzt werden. Leitgedanke und Problemlösung sind in der Arbeit [9] ausführlich dargestellt.

## 6. Experimentelle untersuchungen

Zur Validierung der Simulationsergebnisse wurden experimentelle Untersuchungen zur Flockulation von Quarzpartikeln in einem Rührkesselreaktor durchgeführt. Die Untersuchung der entstehenden Flocken hinsichtlich ihrer Größenverteilung erfolgte mit einem rechnergestützten Bildanalysesystem.

### 6.1. Versuchsaufbau

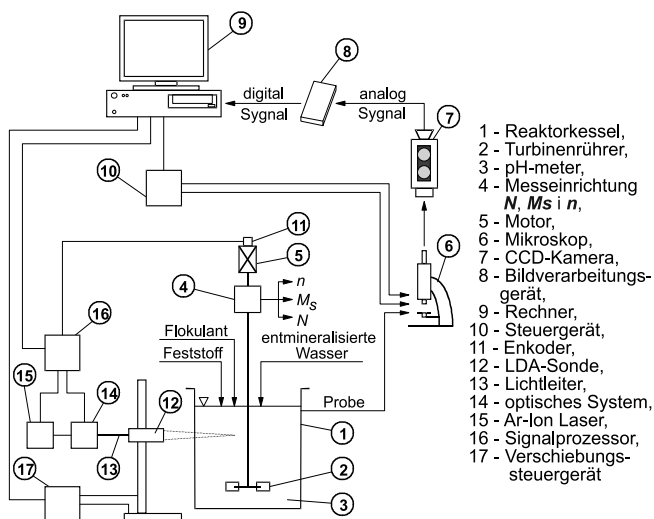


Abb. 4. Aufbau des Labor-Prüfstandes-Schema der Versuchsanlage

Rys. 4. Stanowisko badawcze

Dieses Verfahren ist bezüglich der Flockenbeanspruchung wesentlich schonender als beispielsweise eine Laserspektroskopische Untersuchung mit zusätzlichen Pump- und

Röhreinrichtungen zur Aufwirbelung der Flocken in der Suspension. Der Versuchsaufbau, die Versuchsdurchführung und die Auswertung sind nachfolgend beschrieben.

Die Koagulation der Quarzpartikeln wurde in einem Rührkesselreaktor aus Plexiglas mit dem Durchmesser  $\varnothing 300 \times 6$  und mit vier Strombrechern, welche jeweils um 90 Grad zueinander versetzt an der Reaktorwand angeordnet waren, untersucht. Die Strömung im Reaktor wurde durch einen 6-Blatt-Turbinenrührer mit einem Rührerdurchmesser  $d_R = 1/3 D_R$ . Die angebrachte Messeinrichtung erlaubt sowohl die Drehzahl des Rührers als auch die eingebrachte Leistung online zu messen.

Die Anordnung ist mit der Rührkesselkonfiguration identisch, für welche die Simulationen des Strömungsfeldes durchgeführt wurden, die den populationsdynamischen Rechnungen zugrunde liegen. Damit ist eine direkte Vergleichbarkeit (Ähnlichkeit) von Rechen- und Messergebnissen gewährleistet.

## 6.2. Versuchsdurchführung

Zur Durchführung der Flockung wurde ein handelsüblicher Quarzstaub verwendet. Dessen Größenverteilung wurde mit einem Laserbeugungsspektroskop (Fa. Fritsch) bestimmt und bei den Simulationsrechnungen entsprechend als vorgegebene Primärpartikelverteilung angenommen. Zur Durchführung der Koagulation wurde dieser Quarz zunächst dem Reaktor zugegeben, der mit vollentsalztem Wasser gefüllt war. Mit Hilfe des Rührers wurden die Quarzpartikeln ca. fünf Minuten dispergiert, sodass zu Beginn der Koagulation keine undefinierten Agglomerate vorlagen und eine gleichmäßige Verteilung der Quarzpartikeln in der Suspension sichergestellt war.

Anschließend wurden 40 g Calciumchlorid  $\text{CaCl}_2$  und 40 g Natriumhydroxid  $\text{NaOH}$  in jeweils 2 l voll entsalztem Wasser gelöst, und die Lösungen wurden an zwei gegenüberliegenden Stellen an der Flüssigkeitsoberfläche nacheinander zugegeben. Danach wurde das entsalzte Wasser dem Behälter zugegeben, bis die Einfüllhöhe den Wert 288 mm erreicht hatte. Die notwendige Zeit bis zur vollständigen Vermischung der Salze mit der Suspension ließ sich aus Ähnlichkeitsgesetzen abschätzen und betrug einige Sekunden. Zusätzlich wurde die Grenze der Löslichkeit bestimmt und festgestellt, dass der Grenzwert nicht überschritten ist, sodass keine Fällungsflockung auftritt. Durch Chemikaliengabe stellt sich ein pH-Wert 12,1 ein. Durch hohe Dosierung des Koagulationsmittels ist die vorher getroffene Modellannahme einer Agglomerationseffektivität  $\alpha' = 1$  gerechtfertigt. Sonst müsste zusätzlich ein Modell zur Bestimmung der Agglomerationseffektivität in das Simulationsprogramm implementiert werden. Dem Flockungsreaktor wurde bei laufendem Rührer eine Suspensionsprobe von ca. 7  $\mu\text{l}$  entnommen.

## 6.3. Versuchsauswertung

Das Funktionsschema der Bildanalyse zur Bestimmung von Partikelgrößenverteilungen ist aus Abb. 4 abzulesen. Das im Mikroskop Olympus sichtbare Probenbild wird von einer am Phototubus des Mikroskops angebrachten CCD Kamera (Sony) mit 256 Graustufen aufgenommen und in entsprechende Analogsignale umgesetzt. Diese werden von einer Bildverarbeitungskarte im angeschlossenen PC in digitale Signale umgewandelt und von einem Bildverarbeitungsprogramm eingelesen. Zur Vereinfachung des Analyseablaufs und

zur besseren Reproduzierbarkeit der Messungen wurden ausgefeilte Bildauslesesysteme angewandt.

Um die teilweise porösen Flocken als jeweils einzelne Partikeln erfassen zu können, wird noch der Vorgang des „Schließens“ auf das binarisierte Bild angewandt. Dabei werden die Hohlräume innerhalb einer Flocke ausgefüllt, sodass einzelne Flocken eindeutig erkennbar sind und ausgewertet werden können. In Abb. 5 sind die unbearbeiteten Photos einer Flockenprobe zu sehen. Schließlich wird die Größenverteilung der Partikeln und Bezug in einem charakteristischer Durchmesser ermittelt.

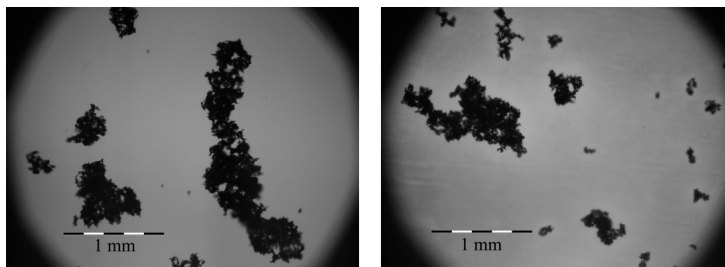


Abb. 5. Unbearbeitete Photographien einer Flockenprobe  
Rys. 5. Nieprzetworzone zdjęcia próbek pobranych do analizy

## 7. Auswertung und diskussion der Ergebnisse

Nachfolgend werden Ergebnisse berechneter Flockengrößenverteilungen im Rührkesselreaktor für beide betrachteten Reynoldszahlen  $Re = 10^4$  und  $Re = 2,2 \cdot 10^4$  im Vergleich mit Ergebnissen der Finite-Volumen-Methode besprochen und diskutiert.

Die Partikelgrößenverteilungen werden als massenbezogene Durchgangssummenwerte in Abhängigkeit eines kugeläquivalenten Partikeldurchmesser aufgefangen, wobei die Nummerierung der Bilanzelemente sich auf die in Abb. 1 dargestellte Reaktordiskretisierung bezieht.

In Abb. 6 sind die berechneten gemittelten Flockengrößenverteilungen bei einer Primärpartikelkonzentration  $c_p = 1,0 \text{ g/l}$  bei der Reynoldszahl  $Re = 10^4$  dargestellt. Die durchgezogene Linie zeigt das mit dem Finite-Volumen-Verfahren ermittelte Ergebnis, die strichpunktierte Linie das Ergebnis bei Anwendung der Momentenmethode mit einer Rücktransformation über die Normalverteilung. Der Rührreaktor wurde als ortsdiskret angenommen.

Zuerkennen ist die deutliche Abweichung in den ermittelten Flockengrößenverteilungen. Auch die mit dem Finiten-Volumen-Verfahren bestimmten unterschiedlichen Flockengrößenverteilungen in den einzelnen Bilanzelementen können mit der Momentenmethode nicht wiedergegeben werden. Lediglich die auf beide Arten berechneten mittleren Flockendurchmesser  $d_{50}$  zur Charakterisierung der mittleren Flockengröße werden in guter Übereinstimmung wiedergegeben.

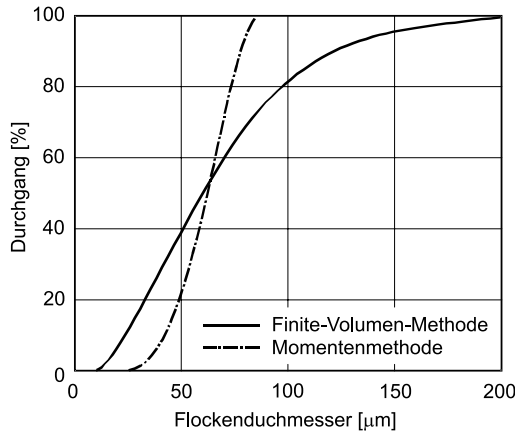


Abb. 6. Vergleich der über den Reaktor gemittelten stationären Flockengrößenverteilung bei Rechnung mit der Finite-Volumen-Methode und mit der Momentenmethode. Primärpartikelkonzentration  $c_p = 1 \text{ g/l}$ , Reynoldszahl  $Re = 10^4$ , Rücktransformation über Normalverteilung

Rys. 6. Porównanie uśrednionych po objętości reaktora stacjonarnych rozkładów wielkości flokuł obliczonych metodą skończonych objętości oraz metodą momentów

Wird für diesen Berechnungsfall dagegen die Rücktransformation über die Gaudin-Melloy-Verteilung durchgeführt, ergibt sich ein anderes Ergebnis, welches in Abb. 7 dargestellt ist.

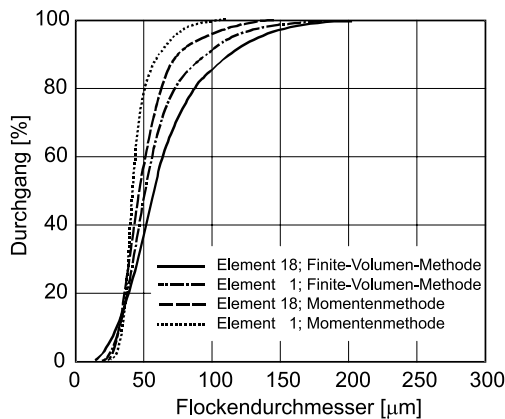


Abb. 7. Vergleich der stationären Flockengrößenverteilungen in den Elementen 1 und 18 bei Rechnung mit der Finite-Volumen-Methode und mit Momentenmethode. Primärpartikelkonzentration  $c_p = 1 \text{ g/l}$ , Reynoldszahl  $Re = 10^4$ , Rücktransformation über die Gaudin-Melloy-Verteilung

Rys. 7. Porównanie stacjonarnych rozkładów wielkości flokuł w elementach bilansowych 1 i 18 uzyskanych za pomocą metody skończonych objętości i metody momentów

Offensichtlich kann mit der Momentenmethode in Verbindung mit Gaudin-Melloy-Verteilung ein breiter Verlauf einer Verteilungsfunktion berechnet werden. Hier wird nicht nur der Mittelwert, sondern der gesamte Verlauf der Partikelgrößenverteilung im Vergleich zur Rechnung mit der Finite-Volumen-Methode wiedergegeben. Auch die sich einstellenden lokalen Unterschiede in der Flockenverteilung werden bei der Anwendung der Gaudin-Melloy-Verteilung noch erfasst.

Der hier erwähnte Vorteil der Wiedergabe einer breiteren Verteilungsfunktion wirkt sich jedoch nachteilig auf Untersuchungen bei geringeren Primärpartikelkonzentrationen aus. Wird bei den untersuchten Primärpartikelkonzentrationen von 0,25 g/l und 0,5 g/l Feststoff die Rücktransformation ebenfalls über die Gaudin-Melloy-Verteilung durchgeführt, so werden weder der Medianwert der Verteilung noch die Verteilung selbst zufriedenstellend rekonstruiert. In diesem Fall geringerer Primärpartikelkonzentrationen kann über die Rücktransformation mit Hilfe der Normalverteilung zwar nicht die Verteilung in ihrer Breite, aber wenigstens der sich einstellende mittlere Flockendurchmesser näherungsweise wiedergegeben werden.

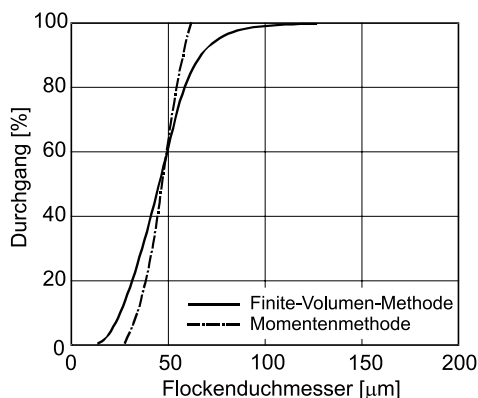


Abb. 8. Vergleich der über den Reaktor gemittelten stationären Flockengrößenverteilung bei Rechnung mit der Finite-Volumen-Methode und mit der Momentenmethode. Primärpartikelkonzentration  $c_p = 0,5$  g/l, Reynoldszahl  $Re = 104$ , Rücktransformation über Normalverteilung

Rys. 8. Porównanie uśrednionych po objętości reaktora stacjonarnych rozkładów wielkości flokul obliczonych metodą skończonych objętości oraz metodą momentów

Das Ergebnis für eine Primärpartikelkonzentration von 0,5 g/l bei der Verwendung der Normalverteilung zur Rücktransformation ist in Abb. 8 gezeigt.

Eine weitere Untersuchung gilt wieder der Annahme eines ideal durchmischten Flockungsreaktors bei der Anwendung der Momentenmethode.

In Abb. 9 ist der Vergleich der auf Basis einer Normalverteilung rekonstruierten Verteilungsfunktion zwischen dem diskret berechneten und dem als ideal durchmischten angenommenen Reaktor dargestellt.

Dieses Ergebnis zeigt dieselben großen Abweichungen bei der berechneten Flockungsgrößenverteilung wie die Rechnung bei der Methode der Finite-Volumen. Die

Annahme eines ideal durchmischten Reaktors führt zu einer Flockengrößenverteilung, welche bei viel zu hohen Werten der Flockengröße liegt, so dass auch der mittlere Flockendurchmesser  $d_{50}$  falsch wiedergegeben wird.

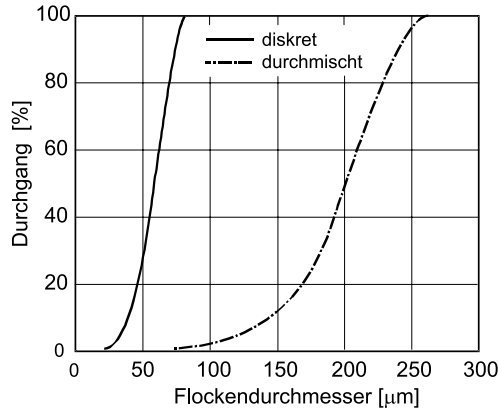


Abb. 9. Vergleich der über den Reaktor gemittelten stationären Flockengrößenverteilung bei einem als ortsdiskret und einem als ideal durchmischt betrachteten Reaktor für eine Berechnung mit der Momentenmethode. Primärpartikelkonzentration  $c_p = 1 \text{ g/l}$ , Reynoldszahl  $Re = 10^4$ , Rücktransformation über Normalverteilung

Rys. 9. Porównanie uśrednionych stacjonarnych rozkładów wielkości flokuł obliczonych dla elementów bilansowych oraz warunków idealnego przemieszania metodą momentów

Die bei Reynoldszahl von  $Re = 2,2 \cdot 10^4$  berechnete Verläufe der Durchgangssummen der Flocken wurden mit der Momentenmethode alle um den Faktor zwei bezüglich der mittleren Partikelgröße  $d_{50}$  zu groß bestimmt. Eine Ursache sind die tatsächlich vorliegenden, sehr engen Partikelgrößenverteilungen, welche durch die Momentendarstellung auf Basis der vorgegebenen Verteilungsfunktionen nicht mehr korrekt wiedergegeben werden können.

## 8. Schlussbemerkungen

Die Simulationsrechnungen unter Anwendung der Momentenmethode zeigten, dass mit diesem Verfahren die tatsächlichen Flockengrößenverteilungen näherungsweise bestimmt werden können. Für die Genauigkeit des Rechenmodells auf Basis der Momentenmethode spielt von allem die Wahl der Verteilungsfunktion, die der Rekonstruktion der Flockengrößenverteilung zugrunde liegt, eine wichtige Rolle.

Bei der Anwendung einer Normalverteilung erfolgt die Bestimmung des mittleren Flockendurchmessers mit guter Genauigkeit. Dagegen kann unter Verwendung der Gaudin-Melloy-Verteilung auch der tatsächliche Verlauf der Flockengrößenverteilung rekonstruiert werden, wobei die lokalen Unterschiede in der Flockengrößenverteilung aufgelöst werden.

Prinzipiell ist festzuhalten, dass die Anwendung der Momentenmethode eine schnelle Abschätzung der sich einstellenden Flockengrößenverteilung erlaubt, die Rechenzeit liegt

um etwa einen Faktor fünf niedriger als bei der Finite-Volumen-Methode für die expliziten Populationsbilanzen.

Die Momentenmethode versagt jedoch bei niedrigen Feststoffkonzentrationen und/oder hohen Reynoldszahlen.

Zusammenfassend ist als Fazit der Anwendung der Momentenmethode festzuhalten, dass die Gaudin-Melloy-Verteilung dann eingesetzt werden kann, wenn eine relativ breite Partikelgrößenverteilung vorliegt, auch die lokalen Unterschiede in der Flockengrößenverteilung lassen sich hiermit beschreiben.

Bei engeren Verteilungen liefert die Rücktransformation über die Gaudin-Melloy-Verteilung schlechtere Ergebnisse. Somit ist zu erwarten, dass bei der Untersuchung von Flockulationsprozessen und den sich dabei bildenden breiteren Flockengrößenverteilungen das Rechenmodell der Momentenmethode gute Resultate liefert.

*This study was conducted within the research grant No 0264/B/H03/2011/40 funded by the National Science Centre.*

## Literatur

- [1] Dylağ M., Rosiński J., Kamiński J., *Modellbildung von Partikelwechselwirkungen bei Dispersen Stoffsystem – Grundlagen der Flockung*, Czasopismo Techniczne, 5-M/2008, Wydawnictwo PK, Kraków 2008, 89-96.
- [2] Dylağ M., Rosiński J., Kamiński J., *Erstellung von Modellgleichungen zur Beschreibung von Partikelwechselwirkungen bei Flockungsprozessen*, Czasopismo Techniczne, 9-M/2008, Wydawnictwo PK, Kraków 2008, 3-18.
- [3] Dylağ M., Rosiński J., Kamiński J., *Anwendung des mittleren geschwindigkeitsgradienten auf die modellierung von flockungsprozessen*, in Wozny G., Hady Ł.: *Process Engineering and Chemical Plant Design 2011*, Universitätverlag der TU Berlin, Berlin 2011.
- [4] Szatko W., Rosiński J., Kamiński J., Dylağ M., Wozny G., *Über die sogenannte Momentenmethode hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit zum zweck der Modellreduktion von erstellten Populationsbilanzen*, Materiały konferencyjne IX Międzynarodowej Konferencji Naukowej „Teoretyczne i Eksperymentalne Podstawy Budowy Aparatury”, Iwanowo, Federacja Rosyjska 2010, 204-214.
- [5] Randolph A.D., Larsen M.A., *Theory of Particulate Processes*, Academic Press Inc., San Diego 1988.
- [6] Jaworski Z., *Numeryczna mechanika płynów w inżynierii chemicznej i procesowej*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2005.
- [7] Wójtowicz R., *Inż. i Ap. Chem.*, **4**, (2010), 92-93.
- [8] Talaga J., Wójtowicz R., *Inż. i Ap. Chem.*, **4**, (2010), 80-81.
- [9] Patankar S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemispheres Publishing Corporation, New York 1980.





MICHAŁ DYŁĄG\*, JERZY ROSIŃSKI, WIESŁAW SZATKO\*\*

## ZUR MODELLIERUNG DES FLOCKUNGSPROZESSES IM ROHRREAKTOR MIT QUERSCHNITTSÄNDERUNGEN

---

## MODELOWANIE PROCESU FLOKULACJI W REAKTORZE RUROWYM O ZMIENNEJ GEOMETRII PRZEPLÝWU

### Zusammenfassung

In der Arbeit wurden die Grundlagen der Modellierung des Flockulationsprozesses formuliert und ausführlich diskutiert, wobei die hydrodynamischen Aspekte der Strömung im Rohrreaktor mit Querschnittsänderungen berücksichtigt worden sind.

*Schlüsselworte: Modellbildung des Flockulationsprozesses, Rohrreaktor, Hydrodynamik der Strömung, Rohrquerschnittsänderung*

### Streszczenie

W artykule przedstawiono podstawy uproszczonego modelowania procesu flokulacji ze szczególnym uwzględnieniem założeń do badań eksperymentalnych uwzględniających zagadnienia hydrodynamiki przepływu zawiesiny w reaktorze rurowym z zabudowanymi przegrodami.

*Słowa kluczowe: modelowanie procesu flokulacji, reaktor rurowy, hydrodynamika przepływu zawiesiny w reaktorze rurowym z przegrodami*

---

\* Prof. dr hab. inż. Michał Dyląg, Instytut Zaawansowanych Technologii Wytwarzania – ISO.

\*\* Dr inż. Jerzy Rosiński, dr inż. Wiesław Szatko, Instytut Inżynierii Ciepłej i Procesowej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## Symbolverzeichnis

$Bo = \frac{\bar{w} \cdot L}{D_a}$	– Bodenstein-Zahl [-]
$c$	– Konzentration, allgemein [g/m <sup>3</sup> ]
$c_{1,0}, c_{1,a}$	– Konzentration der Mikroflocken am Eingang (0) bzw. am Ausgang (a) des Rohrreaktors [g/m <sup>3</sup> ]
$c_{K,e}, c_{K,a}$	– Konzentration der Kolloide am Eingang (e) bzw. am Ausgang (a) des Rohrreaktors [g/m <sup>3</sup> ]
$c_{KP,e}, c_{KP,a}$	– Konzentration der Koagulationsprodukte am Eingang (e) bzw. am Ausgang (a) des Rohrreaktors [g/m <sup>3</sup> ]
$c_2$	– Konzentration der Makroflocken [g/m <sup>3</sup> ]
$Ca = \left( \frac{P}{\eta \cdot V} \right)^{\frac{1}{2} t_r}$	– Camp-Zahl [-]
$D$	– Diffusionskoeffizient [m <sup>2</sup> /s]
$D_a$	– Dispersionskoeffizient [m <sup>2</sup> /s]
$\bar{G}$	– mittlerer Geschwindigkeitsgradient [s <sup>-1</sup> ]
$i, j, k, l, m$	– Laufvariable [-]
$K$	– Boltzman-Konstante [N·m/K]
$K_B$	– Koeffizient der Flockenbildung [-]
$K_Z$	– Koeffizient der Flockenzerstörung [s]
$k$	– Proportionalitätsfaktor [-]
$k$	– kinetische Turbulenzenergie [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
$L$	– Reaktorlänge [m]
$n$	– Partikelkonzentration [1/m <sup>3</sup> ]
$P$	– eingebrachte Leistung [N·m/s]
$p$	– Druck [Pa]
$p'$	– Druckschwankungen [Pa]
$r$	– summarische Reaktionsgeschwindigkeit [g/m <sup>3</sup> ·s]
$T$	– Temperatur [K]
$t_v$	– mittlere Verweilzeit [s]
$V$	– nutzbares Reaktorvolumen [m <sup>3</sup> ]
$v$	– aktuelle Geschwindigkeit [m/s]
$\bar{v}$	– Mittelwert der Geschwindigkeit [m/s]
$v'$	– turbulente Schwankung der Geschwindigkeit [m/s]
$\alpha$	– Faktor [m <sup>2</sup> /s]
$\beta$	– Agglomerationsfaktor [-]
$\delta$	– Größenverteilungsfunktion [-]
$\lambda$	– Eigenwert der Differenzialgleichung [-]
$\nu$	– Kinematische Viskosität [m <sup>2</sup> /s]
$\rho$	– Dichte [kg/m <sup>3</sup> ]
$\phi$	– Volumenbruch [m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]

## 1. Einleitung

Unter Flockung sollen Vorgänge wie Koagulation, Flockulation und Mitfällung verstanden werden, mit denen man eine Agglomeration kolloidal gelöster oder suspensierter Partikeln, mechanisch abcheidbarer Feststoffteilchen herbeiführen kann.

Flockungsverfahren werden seit vielen Jahren in der Aufbereitung von Erzen und Kohle angewandt. Eine zunehmende Bedeutung erlangen sie bei der Triuk – und Brauchwasseraufbereitung und in der Abwasserreinigung, wo sie häufig auch in Kombination mit Fällungsreaktionen eingesetzt werden (Fällung – Flockung).

Die Flockung erfolgt in besonderen Flockungsreaktoren, die auch als Flocker bezeichnet werden. Grundsätzlich, lassen sich 4 Reaktortypen unterscheiden:

- Wirbelschichtflocker,
- Rührflocker,
- Festbettflocker,
- Strömungsflocker.

In der vorliegenden Arbeit wird besondere Bedeutung den Strömungsflockern gewidmet. Sie werden von Strömungskanälen, Rohren oder Becken mit mehrmaliger Umlenkung gebildet. Obwohl vor allen die Rohrflocker in letzter Zeit häufiger eingesetzt werden, findet man in der Fachliteratur kaum Hinweise [1].

## 2. Formulierung des Problems

Die chemisch-physikalischen Vorgänge der Flockung sind bis heute nicht eindeutig geklärt. Dies mag auch Ursache dafür sein, dass einheitliche Begriffsbestimmungen für verschiedene Teilprozesse wie „Koagulation“ oder „Entstabilisierung“ bis jetzt nicht existieren und je nach vorliegendem Fall anders abgegrenzt sind [1].

Wird unter dem Begriff der Flockung der Gesamtprozess verstanden, der zur Ausbildung gut abcheidbarer Flocken führt, so hat man, ohne Betrachtung von Fällungsvorgängen – grundsätzlich zwischen zwei gleichzeitig ablaufenden Mechanismen zu unterscheiden.

Zum einen ist es die Entstabilisierung eines stabilen Kolloides, mit deren Hilfe molekular oder kolloidal gelöste Stoffe in einen agglomerationsfähigen Zustand überführt werden können. Zum anderen handelt es sich um Transportmechanismen wie Diffusion und Konvektion, durch welche sich die flockungsfähigen Partikeln einander nähern und anschließend miteinander reagieren können (siehe Tabelle 1).

Um befriedigende Ergebnisse des Flockungsprozesses erreichen zu können, müssen entsprechende Informationen über die Hydrodynamik der Rohrreaktoren vorliegen; besonders betrifft das die Modellierung der Rohrströmung von Suspensionen, wobei die Umlenkung der Strömung durch die Querschnittsänderungen oder Blenden gewährleistet wird.

## 3. Ziel der Arbeit

Da Flockungsreaktoren immer Strömungsapparate sind, muss ein Prozessmodell die Flockulationodynamik und die Hydrodynamik gleichermaßen berücksichtigen werden. Eine

Querschnittsänderung im Rohr führt zu einer Turbulenzerhöhung in der Rohrströmung und zum Auftreten radialer und tangentialer Komponenten der mittleren Strömungsgeschwindigkeit. Dies vergrößert sowohl den Stoff- und Wärmetransport in der Strömung als auch den konvektiven Transport der Partikeln. Es wurden die wichtigsten Ergebnisse über die Flockungsmechanismen und der Strömung im Rohr diskutiert und ein vereinfachtes Modell der Flockulation in Reaktoren mit endlicher Längsvermischung beschrieben.

Tabelle 1

### Zum Mechanismus der Flockung

Flockung				
Koagulation			Flockulation	
Entstaub. durch: – Kompression der diffusen Doppelsicht – Adsorption von Gegenionen	Mikroflockenbildung		Adsorption von Flockungshilfsmitteln	Makroflocken- bildung
Mikrokinetik (chemische Kinetik)	perikin. Transport (Diffusion)	orthokin. Transport (Konvektion)	Adsorptionskinetik (physikalische und/oder chemische Adsorption)	orthokin. Transport (Konvektion)

Es wurde vorgenommen, ein neues Modell der Flockulation im waagrecht gebauten Rohrreaktor mit Umlenkungsanbauten aufzubauen, wobei als Voraussetzung eine endliche Längsvermischung angenommen wurde. Um ein methodisches Vorgehen sicher zu stellen, werden zwei Modellvorstellungen getrennt für Flockenwachstum und Flockenzerstörung vorgestellt und ausführlich analysiert.

#### 4. Modellvorstellungen für das Flockenwachstum

Der erste Versuch, das Agglomerationsverhalten einer Kolloidsuspension mit einem mathematischen Ansatz zu beschreiben, stammt von Smoluchowski [2]. Er setzte voraus, dass alle Partikeln in einem Anfangszustand gleich groß und vollständig entstabilisiert sind, dass eine örtlich konstante Konzentration vorliegt und dass sich die Partikeln alleine durch Brownsche Molekularbewegung einander nähern können. Unter der Annahme, dass die Bewegung zweier Partikeln innerhalb eines sogenannten Wirkungsradius  $R$  zur Agglomeration derselben führt, formulierte er Stoffbilanzen für Partikeln aller entstehenden Größen im abgeschlossenen System unter Berücksichtigung der Flockenbildungs- und Zerfallgeschwindigkeit:

$$\left. \frac{\partial n_k}{\partial t} \right|_{Br} = \alpha \cdot \sum_{i=1}^k n_i \cdot n_{k-1} - 2 \cdot \alpha \cdot n_k \cdot \sum_{j=1}^{\infty} n_j \quad (1)$$

wobei:

$$k = 1, \dots, \infty$$

$$\alpha = 2 \cdot \pi \cdot (D_i + D_{k-i}) \cdot (R_i + R_{k-i}) \quad (2)$$

- $D$  – Diffusionskoeffizient,
- $R$  – Wirkungsradius der Einzelpartikel,
- $n$  – Partikelkonzentration als Anzahl je Volumen.

Wird nun ganz speziell das Verschwinden einer Partikelgröße  $l$  durch Zusammenstöße mit Partikeln der Größe  $m$  betrachtet, so lässt sich aus Gl. (1) durch Wegstreichen aller überflüssigen Glieder die Gleichung hierfür ableiten:

$$\left. \frac{\partial n_l}{\partial t} \right|_{Br} = -4 \cdot \pi \cdot (D_l + D_m) \cdot (R_l + R_m) \cdot n_l \cdot n_m \quad (3)$$

Die Anzahl der durch reine Diffusion verursachten Kollisionen pro Zeiteinheit hängt demnach von den Konzentrationen der kleinen und den großen Partikeln, dem resultierenden Wirkungsradius  $R_{l,m} = R_l + R_m$  und dem resultierenden Diffusionskoeffizienten  $D_{Br} = D_l + D_m$  ab.

Für die orthokinetische Agglomerationsgeschwindigkeit der Partikeln im laminaren Bereich, also ohne Diffusion – gab Smoluchowski [2] ebenfalls eine Gleichung an, die später jedoch von Camp und Stein [3] für den Fall, dass nur zwei Partikelgrößen  $m$  und  $l$  betrachtet werden, folgendermaßen modifiziert wurde:

$$\left. \frac{\partial n_l}{\partial t} \right|_{lam} = -\frac{4}{3} \cdot (R_l + R_m)^3 \cdot n_l \cdot n_m \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4)$$

Im laminaren Strömungsfeld hängt demnach die Agglomerationsgeschwindigkeit einer Partikelgröße  $l$ , durch Zusammenstöße mit Partikeln der Größe  $m$ , von den Konzentrationen  $n_l$  und  $n_m$  der betrachteten Partikelgrößen, der dritten Potenz des resultierenden Wirkungsradius und dem örtlichen Geschwindigkeitsgradienten ab.

Camp und Stein [3] erweiterten diese Gleichung für den Fall turbulenter Strömung unter der Annahme, dass der örtliche Geschwindigkeitsgradient  $\frac{\partial w}{\partial z}$  in turbulenter Strömung durch einen von ihnen definierten mittleren Geschwindigkeitsgradienten  $\bar{G}$  ersetzt werden kann:

$$\left. \frac{\partial n_l}{\partial t} \right|_{turb} = -\frac{4}{3} \cdot (R_l + R_m)^3 \cdot n_l \cdot n_m \cdot \bar{G} \quad (5)$$

Eine Division der Gl. (5) durch Gl. (3) ergibt das Verhältnis von turbulenter zu diffusiver Agglomerationsgeschwindigkeit:

$$\frac{\left. \frac{\partial n_l}{\partial t} \right|_{turb}}{\left. \frac{\partial n_l}{\partial t} \right|_{Br}} = \frac{(R_l + R_m)^2 \cdot \bar{G}}{3 \cdot \pi \cdot (D_l + D_m)} \quad (6)$$

Eine Abschätzung dieses Verhältnisses wird möglich, wenn für den Diffusionskoeffizienten von Flüssigkeit die Stokes-Einsteinsche Gleichung:

$$D = \frac{K \cdot T}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R} \quad (7)$$

in Gl. (6) eingesetzt und eine einheitliche Größe der Partikeln angenommen wird [4]:

$$\left. \frac{\partial n_l}{\partial t} \right|_{nurb} = \frac{8 \cdot R^3 \cdot \bar{G} \cdot \eta}{K \cdot T} \quad (8)$$

wobei:

- $\eta$  – die dynamische Viskosität,
- $K$  – die Boltzmann-Konstante,
- $T$  – Temperatur.

Dieses Ergebnis findet insoweit Beachtung, als von den meisten Autoren zur Aufstellung kinetischer Ansätze für die Flockenbildung, nur der orthokinetische Bereich berücksichtigt wird.

Reaktionskinetische Ansätze, welche in mathematischen Flockungsmodellen Verwendung finden, werden in der Regel aus Gl. (5) unter Hinzunahme weiterer Vereinfachungen hergeleitet. Die wichtigsten hierbei entwickelten Vorstellungen über das Agglomerationsverhalten vereinfachter Partikelsysteme sind nachfolgend aufgeführt.

#### 4.1. Orthokinetische Agglomeration eines Einpartikelsystems

Es wird angenommen, dass zu einem gegebenen Zeitpunkt alle Partikeln kugelförmig sind, gleich groß und gleich verteilt sind. Die Begegnung zweier Partikeln innerhalb ihres resultierenden Wirkungsradius führt zur Agglomeration und zur schnellen Entstehung eines Partikelsystems mit zeitlich sich ändernder Partikelgrößenverteilung. Alle Partikeln des Systems haben gleiche Dichte und bleiben kugelförmig, so dass Anzahl und Durchmesser über

$$r_k^3 = k \cdot r_1^3 \quad (9)$$

miteinander verknüpft sind. Für das Gesamtsystem ergibt sich ein konstant bleibender Volumenanteil.

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot r_k^3 \cdot n_k = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_1^3 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot n_k = \text{konst.} \quad (10)$$

Zwischen Wirkungsradius  $R$  und Partikelradius  $r$  soll eine Beziehung der Form:

$$R_k = a \cdot r_k \quad (11)$$

bestehen. Weiterhin sollen zu einem Zeitpunkt, an einem Ort nur jeweils zwei Partikeln zusammenstoßen und ein Felder  $\beta$  soll berücksichtigen, wie viele der tatsächlichen Begegnungen zur Agglomeration geführt haben.

Betrachtet man alleine die zeitliche Abnahme der Primärpartikeln, so lässt sich diese, in Anlehnung an Gl. (5), durch die Gleichung

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\beta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot n_1 \cdot n_k \cdot (a \cdot r_1 + a \cdot r_k)^3 \cdot \bar{G} \quad (12)$$

beschreiben. Werden die Gl. (9) und (10) in die Gl. (12) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\beta \cdot \frac{4}{3} \cdot n_1 \cdot \bar{G} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot \left( a \cdot r_1 + a \cdot k^{\frac{1}{3}} \cdot r_1 \right)^3 = \quad (12a)$$

$$= -\beta \cdot a^3 \cdot n_1 \cdot \bar{G} \cdot \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot \left( 1 + k^{\frac{1}{3}} \right)^3 = \quad (12b)$$

$$= -\beta \cdot \frac{a^3}{\pi} \cdot n_1 \cdot \bar{G} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_1^3 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot \left( 1 + k^{\frac{1}{3}} \right)^3}{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot n_k} \quad (12c)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\beta \cdot \frac{a^3}{\pi} \cdot \pi \cdot r_1^3 \cdot \bar{G} \cdot \phi \cdot \delta \quad (13)$$

Die hierhin enthaltene Größenverteilungsfunktion

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot \left( 1 + k^{\frac{1}{3}} \right)^3}{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot n_k} \quad (14)$$

ist ein Maß für den Grad des Partikelwachstums. Sie kann sich, ausgehend von dem Wert  $\delta = 8$  (Einkornsuspension der Primärpartikeln) dem Wert  $\delta = 1$  (unendlich viele Partikeln zu einer einziger agglomeriert) annähern.

Harris, Kaufman und Krone [4] betrachteten den Agglomerationsfaktor  $\beta$  und der Volumenbruch  $\phi$  als Konstante und geben die Gleichung:

$$r_B = K_B \cdot \delta \cdot n_1 \cdot \bar{G} = -\frac{\partial n_1}{\partial t} \quad (15)$$

für die zeitliche Abnahme der Primärpartikeln  $n_1$ , dem mittleren Geschwindigkeitsgradienten  $\bar{G}$  und der Größenverteilungsfunktion  $\delta$  an. Die Konstante  $K_B$  wird als Flockenbildungskoeffizient bezeichnet. In den meisten anderen Arbeiten, wie z. B. bei Kavanaugh [5] werden jedoch die ersten vier Faktoren in Gl. (13) zu einer gemeinsamen Konstanten zusammengefasst, so dass Gl. (13) übergeht in:

$$r_B = K_B \cdot n_1 \cdot \bar{G} = -\frac{\partial n_1}{\partial t} \quad (16)$$

Die Flockenbildungsgeschwindigkeit der primären Partikeln ist, nach diesen sehr vereinfachenden Vorstellungen, allein eine Funktion der ersten Potenz ihrer Konzentration und

des mittleren Geschwindigkeitsgradienten. Die Konzentrationen der Reaktionspartner sind in der Konstanten summarisch als Volumenbruch  $\phi$  mit einer gegebenen Größenverteilung  $\delta$  enthalten.

#### 4.2. Orthokinetische Agglomeration eines Zweipartikelsystems

Ein Zweipartikelsystem liegt näherungsweise vor, wenn die Flockenkonzentration z. B. durch Rücklauf sehr hoch gehalten wird, oder wenn die Flockung im Flockenschwebbett erfolgt. Es wird angenommen, dass nur sehr kleine Partikeln der Größe 1 (Primärpartikeln) und im Vergleich hierzu sehr große Partikeln der Größe 2 (Flocken) existieren. Die zeitliche Abnahme der Primärpartikeln kann dann beschreiben werden (vgl. Gl. (5))

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\frac{4}{3} \cdot (R_1 + R_2)^3 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \bar{G} \quad (17)$$

Kollisionen zwischen gleich großen Partikeln werden hier vernachlässigt bzw. ihr Agglomerationsfaktor  $\beta$  wird gleich Null gesetzt. Der Volumenbruch  $\phi$  soll konstant sein und sich genügend genau aus den großen Partikeln berechnen lassen:

$$\phi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_2^3 \cdot n_2 = \text{konst.} \quad (18)$$

Wird der Radius  $R_1$  gegenüber  $R_2$  in Gl. (17) vernachlässigt und Gl. (18) in Gl. (17) eingesetzt, so kann diese zu folgender Gleichung vereinfacht werden:

$$r_B = K_B \cdot n_1 \cdot \bar{G} = -\frac{\partial n_1}{\partial t} \quad (19)$$

Die getroffenen Annahmen führen zum gleichen reaktionskinetischen Ansatz, wie in der vorangegangenen Überlegung. Die Reaktionsgeschwindigkeit der Primärpartikeln wird als eine Funktion der ersten Potenz ihrer Konzentration  $n_1$  und des mittleren Geschwindigkeitsgradienten  $\bar{G}$  betrachtet.

#### 4.3. Orthokinetische Agglomeration eines Mehrpartikelsystems

Wird zu Beginn der Agglomeration eine Partikelgrößenverteilung vorausgesetzt, so entspricht dies im Wesentlichen der gleichen Problemstellung wie im Falle eines Einpartikelsystems zu einem fortgeschrittenen Zeitpunkt. Auch hier muss ein Zusammenstoßen der Partikeln aufgestellt werden. Für  $m$  vorhandene Partikelgrößen ergeben sich  $m$  Gleichungen der Form:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \sum_{\substack{i=0 \\ j=k-i}}^{i=k} \frac{4}{3} \cdot n_i \cdot n_j \cdot (R_i + R_j)^3 \cdot \bar{G} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot n_i \cdot n_k \cdot (R_i + R_k)^3 \cdot \bar{G}, \quad k = 1, \dots, m \quad (20)$$

Die Lösung so eines Gleichungssystems gelingt nur, wenn angenommen wird, dass die Partikelgrößenverteilungsfunktion  $\delta$  sehr schnell einem Endwert zustrebt. Als Hinweis hierfür können die Untersuchungen von Swift und Friedlander [6] gewertet werden, welche die Agglomeration von Öl/Wasser- und Latex/Wasser-Gemischen in einem Zylinderrührer



untersuchen. Sie fanden heraus, dass sich kurz nach Versuchsbeginn eine bestimmte Partikelgrößenverteilung herausbildet und diese sich im Laufe des weiteren Partikelwachstums nicht wesentlich ändert.

Die hier bekannten, aus Gl. (20) entwickelten Ansätze für die zeitliche Abnahme der Primärpartikel- oder Gesamtpartikelanzahl führen jedoch alle auf eine Form, wie sie in Gl. (15) bzw. Gl. (16) bereits vorgestellt wurde.

## 5. Modellvorstellung für die Flockenzerstörung

In technischen Flockungsanlagen sind dem Wachstum der Flocken, durch die in der Flüssigkeit auftretenden Scher- und Druckkräfte, Grenzen gesetzt. Um dieses zu berücksichtigen, werden am Anfang stark vereinfachende Ansätze für die Geschwindigkeit der Flockenzerstörung formuliert.

### 5.1. Flockenzerstörung durch Geschwindigkeitsgradienten

In turbulenter Strömung variieren die Geschwindigkeitsgradienten als Folge der Wirbel sehr stark. Geraten die Flocken, die in Bereichen niedriger Geschwindigkeitsgradienten gebildet wurden, in Bereiche höherer  $\bar{G}$ -Werte, so können sie durch die größer gewordenen Schubspannungen zerstört werden. Hierbei zerfallen die Flocken in zwei oder mehrere kleine Teilstücke. In allgemeinen wird das Ausmaß dieser Flockenzerstörung als abhängig von der Konzentration  $n_2$  der großen Partikeln und einer  $m$ -ten Potenz des mittleren Geschwindigkeitsgradienten  $\bar{G}$  angesehen, wobei der Exponent  $m$  durch Versuche bestimmt werden muss

$$r_z = K_z \cdot n_2 \cdot \bar{G}^m \quad (21)$$

### 5.2. Flockenzerstörung durch Druckunterschiede

Thomas [7] berichtet, dass die Flockenzerstörung in turbulenter Strömung durch Druckunterschiede an der vorderen und hinteren Seite der Flocken, die durch Wirbel erzeugt werden, wesentlich größer ist, als die Flockenzerstörung durch die auftretenden Scherkräfte. Die Flocken werden zuerst deformiert und zerreißen dann, wenn die lokalen Druckunterschiede zu groß werden. Der Autor formulierte eine Geschwindigkeit der Flockenzerstörung in der Form:

$$r_z = K_z \cdot n_2 \quad (22)$$

### 5.3. Begrenztes Flockenwachstum durch Oberflächenerosion

Argmann und Kaufmann [8] vertreten die Ansicht, dass Schubspannungen an der Oberfläche gebildeter Flocken zu einer Erosion von Primärpartikeln führen. Für ein Zweipartikelsystem geben sie als möglichen Ansatz folgende Gleichung an:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = a \cdot r_2^2 \cdot \frac{n_2}{r_1^2} \cdot \bar{G} \quad (23)$$

wobei:

- $r_1$  – Partikelradius der Primärpartikeln,
- $r_2$  – Partikelradius der Flocken,
- $n_2$  – Anzahl der Flocken pro Volumeneinhalt (Konzentration),
- $a$  – Konstante.

Die Flockengröße wird als umgekehrt proportional zum mittleren Geschwindigkeitsgradienten angenommen:

$$r_2 \sim \frac{1}{\bar{G}} \quad (24)$$

Weiterhin soll auch hier die Gl. (18) gelten und der Volumenbruch  $\phi$  sich näherungsweise aus den großen Partikeln berechnen lassen.

Werden die Gleichungen:

$$\phi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_2^3 \cdot n_2 \quad \text{und} \quad r_2 \sim \frac{1}{\bar{G}} \quad (25)$$

in Gl. (23) eingesetzt, so ergibt sich:

$$r_z = K_z \cdot \bar{G}^2 \quad (26)$$

Man könnte annehmen, dass der Abtrieb von Primärpartikeln als unabhängig von der Flockenkonzentration angesehen wird. Diese ist jedoch wiederum in der Konstanten  $K_z$  als Volumenbruch erhalten.

Es ist nicht eindeutig geklärt, welcher dieser drei Mechanismen den stärkeren Einfluss auf die Flockenzerstörung bzw. auf ihr begrenztes Wachstum hat. Die Geschwindigkeitsansätze hierfür sind experimentell kann abgesichert und die Flockenzerstörung findet bei der kinetischen Beschreibung der meisten Flockungsuntersuchungen keine Berücksichtigung.

## 6. Klassifizierung der Rohrströmung von Suspensionen

Die Klassifizierung der Strömung von Suspensionen erfolgt nach den Bewegungsverhältnissen bei der Förderung, insbesondere bei der horizontalen Förderung.

Die Klassifizierung ist in Literatur jedoch nicht einheitlich. Generell wird unter einer homogenen Suspension eine Suspension mit nahezu konstanter Konzentrationsverteilung des Feststoffs über dem Rohrquerschnitt gemeint. Während bei einer heterogenen Suspension die Konzentration über den Rohrquerschnitt variiert oder (da unterscheiden sich die Definitionen) ist in gewissen Fördersituationen variiert.

Eine gut fundierte Klassifizierung wurde von Burke, Kecke und Richter [17] vorgeschlagen (Bild 1). Hier wird die Gliederung mit Hilfe einer abgrenzenden Partikel-Reynolds-Zahl  $Re^*$  vorgenommen:

$$Re^* = \frac{v_s \cdot d_p}{\nu} \cdot \frac{\rho_p - \rho_F}{\rho_F} = Re_F \cdot \frac{\rho_p - \rho_F}{\rho_F} \quad (27)$$

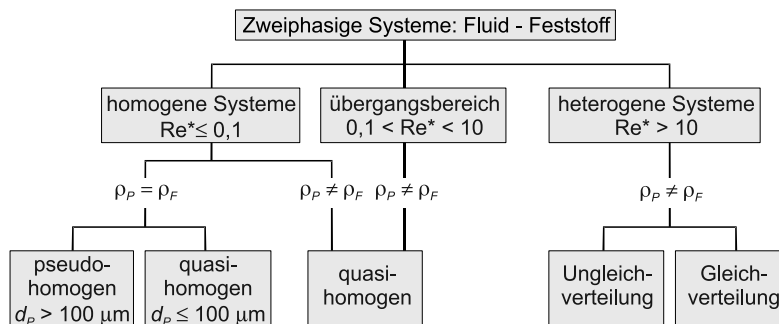


Bild. 1. Klassifizierung des Feststofftransports in horizontalen Röhren

Rys. 1. Klasyfikacja przepływu układów ciało stałe – płyn w ruchach poziomych

## 7. Strömungsverlauf im Röhren mit Querschnittsänderungen

Querschnittsänderungen in Röhren bewirken eine Abhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes von der axialen Koordinate  $x$ . Ebenfalls tritt die radiale Komponente der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{v}$  auf. Bei Durchmesseränderungen im Rohr kann sich die Strömung von der Wand ablösen, wobei ein Rezirkulationsgebiet mit Wirbelbildung entsteht. Von den möglichen Querschnittsänderungen sollen hier nur Rohrerweiterungen und Blenden oder Strömstörer betrachtet werden.

Das Bild 2 zeigt eine schematische Darstellung des Versuchsanlageteils mit der betrachteten Rohrreaktor. Dem vorne zugeführten Suspension nach Kolloidaufbereitung, Mischung und Entstabilisierung wird auch das Flockungsmittel eingegeben. Die Einbauten dienen zur Vermischung und Bildung von ersten kleinere Flocken, die in einem sich an den Reaktor anschließenden Rohrstück weiterwachsen. Die Geometrie des Rohrreaktors gibt damit die bei Flockungsvorgängen häufig realisierte Art der Prozessführung wieder. Einen Abschnitt hohen spezifischen Energieeintrags, in welchem sich kleine, stabile Flocken ausbilden, folgt ein weiterer Bereich des Flockenwachstums („Reifestrecke“) mit geringer mechanischer Beanspruchung der Flocken.

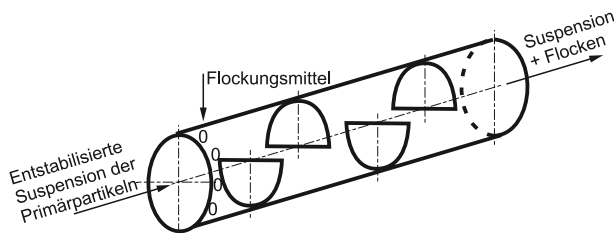


Bild. 2. Rohrreaktor mit Strömstörer zur Bildung von Mikro- und Makroflocken

Rys. 2. Reaktor rurowy z poprzecznymi przegrodami, przeznaczony do testowania procesu flokulacji

In einen Rührkesselreaktor ist diese Betriebsweise durch hohe Rührerdrehzahlen zu so Prozessbeginn und nachfolgend geringeren Drehzahlen zu realisieren.

Der Druckverlust durch diese Änderungen berechnet sich nach der Definitionsgleichung für den Druckverlustbeiwert  $\xi$ :

$$\Delta p = \xi \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_{R,2}^2 \quad (28)$$

mit  $v_{R,2}$  als mittlere Strömungsgeschwindigkeit nach der Änderung. Für  $\xi$  gilt bei einer plötzlichen Rohrerweiterung von  $d_{R,1}$  auf  $d_{R,2}$  [9]

$$\xi = \left( \frac{d_{R,2}}{d_{R,1}} \right)^2 - 1 \quad (29)$$

Bei einer Blende mit dem Öffnungsdurchmesser  $d_B$  erhält man nach [9]

$$\xi = \frac{d_{R,2}^2}{\mu \cdot d_{R,1}^2} - 1 \quad (30)$$

mit der Kontraktionsziffer

$$\mu = 0,63 + 0,37 \cdot \left( \frac{d_B}{d_{R,2}} \right)^6 \quad (31)$$

Der Strömungsverlauf hinter der Blende unterscheidet sich kaum von dem hinter einer plötzlichen Rohrerweiterung. Nach Wilson und Teyssander [10] kann die Strömung durch eine Blende in drei Bereiche aufgeteilt werden:

- Verengung auf die Blendenöffnung  $A_B = (\pi \cdot d_B^2)/4$ ,
- Ausbildung eines Freistrahles bis zum engsten Strömungsquerschnitt  $A_1 = \mu \cdot A_B$ ,
- Plötzliche Erweiterung auf den Rohrdurchmesser  $d_{R,2}$ .

Für den Fall einer sprunghaften Rohrerweiterung wurden von verschiedenen Autoren Untersuchungen durchgeführt. In der Tabelle sind einige Ergebnisse wiedergegeben [9]. Eine wichtige Größe zur Beschreibung von abgelösten Strömungen ist die Wiederanlagelänge  $x_w$ , die die Ausdehnung der Ablösegebietes in axialer Richtung kennzeichnet. In Strömungsaufnahmen, die bei Khezzar u. a [16] wiedergegeben sind, ist zu erkennen, dass sich das Rezirkulationsgebiet aus vielen Wirbeln zusammensetzt. Diese wirken auf die Kernströmung, die sich an der Erweiterungsstelle bildet, ein und lösen sich dadurch auf.

Das Profil der mittleren axialen Geschwindigkeit  $\bar{u}$  wurde von fast allen Autoren in der Literatur [11] angegeben. Bei den Schwankungsgrößen  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  und der Reynoldsschen Schubspannung  $\overline{u' \cdot v'}$  liegen die Daten von Dietzman [11] vor.

In einer turbulenten Strömung interessieren neben den mittleren Geschwindigkeiten auch die Geschwindigkeitsschwankungen, mit den auf den Verlauf des Energiehaushaltes in der Strömung geschlossen werden kann [13].

Die Gleichung für die kinetische Energie der Geschwindigkeitsschwankungen lautet nach Rotta [14] im Bereich großer Reynoldszahlen (molekulare Diffusion vernachlässigt):

$$\overline{u' \cdot v'} \cdot \frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} r \cdot v' \cdot \left( K + \frac{p'}{\rho} \right) + \varepsilon = 0 \quad (32)$$

mit der kinetischen Turbulenzenergie:

$$k = \frac{1}{2} \cdot (u'^2 + v'^2 + w'^2) \quad (33)$$

und  $p'$  als Druckschwankungen.

In der Gleichung für die kinetische Energie der Geschwindigkeitsschwankungen Gl. (32) müssen bei Querschnittsänderungen wegen  $\bar{v} \neq 0$  und  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \neq 0$  und  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \neq 0$  einige Glieder ergänzt werden.

Die Gleichung lautet somit:

$$\underbrace{\bar{u} \cdot \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial k}{\partial r}}_{\text{Konvektion } K} + \underbrace{\overline{u' \cdot v'} \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{\text{Produktion } P} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} u' \cdot \left( k + \frac{p'}{\rho} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} v' \cdot \left( k + \frac{p'}{\rho} \right)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{Dissipation}} = 0 \quad (34)$$

Der Überblick der Messergebnisse von HaMinh und Chassaing [15], die u. a. den Verlust der Einzelbeiträge für die kinetische Energie der Geschwindigkeitsschwankungen für die horizontalen Rohre ohne Einbauten und mit einem mit Rohrsquerschnittsprung verglichen haben – haben auf größere Gerinn der Einzelnebeiträge des Gl. (34) hinter der Einbauten hingewiesen.

Dies bestätigt, dass Rohrquerschnittsänderungen eine umso bessere Einmischung bewirken, je größer die Querschnittsänderung ist. Die Folgen in der Form einer Erhöhung des Turbulenzgrades, übt einen wesentlichen Einfluss auf die Flockenbildung aus.

## 8. Schlussbemerkungen

Die Geschwindigkeit der Koagulation hängt von der Geschwindigkeit der Entstabilisierung, Adsorption und Fällung, sowie von der Geschwindigkeit des Partikeltransports ab. Die drei erstgenannten Prozesse erfolgen jedoch außerordentlich schnell, so dass hier der Transportvorgang der geschwindigkeitsbestimmende Schritt ist.

Sind die Partikeln und damit ihr Wirkungsradius noch sehr klein, so erfolgt ihre Annäherung in der Hauptsache durch Diffusion, verursacht durch die Brownsche Molekularbewegung. Wird die Vermischung des Koagulationsmittels durch turbulente Strömung unterstützt, so ist nach sehr kurzer Zeit bereits eine Partikelgröße erreicht, bei der die Diffusion in den Hintergrund tritt und konvektiver Transport entscheidend wird (orthokinetischer Bereich).

Die Flockulationsgeschwindigkeit wird nun durch die örtlichen bzw. mittleren Geschwindigkeitsymliensten beeinflusst. Für eine schnelle Koagulation werden deshalb hohe Geschwindigkeitsgradienten bevorzugt, die jedoch im praktischen Fall nur in

turbulenter Strömung erzeugt werden können, ohne die entstandenen Turbulenzstrukturen des Strömungsfeldes zu berücksichtigen.

Die Geschwindigkeit der Flockulation wird bestimmt durch die Geschwindigkeit der Adsorption einerseits und die Geschwindigkeit des konvektiven Partikeltransports andererseits. Soll der Flockungsprozess insgesamt optimal durchgeführt werden, so ist der Gestaltung des Flockulationsreaktors und der Reaktionsführung besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

*This study was conducted within the research grant No 0264/B/H03/2011/40 funded by the National Science Centre.*

### Literatur

- [1] Nic M., Jirat J., Kosata B., *Compendium of Chemical Technology. Gold Book*, version 2.3.1, 2012.
- [2] Von Smoluchowski M., *Versucheiner mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloidaler Lösungen*, Zeitschrift für Physikalischen Chemie, 92, 1918, 129-155.
- [3] Camp T.R., Stein P.C., *Velocity gradients and internal work in fluid motion*, J. Boston Soc. Civ. Eng., 30, 1943, 219-237.
- [4] Harris H.S., Kaufmann W.S., Krone R.B., *Orthokinetic flocculation in water purification*, J. Son. Eng. Div. ASCE, 92, 1966, 95-111.
- [5] Kavanaugh M.C., Krejei V., Weber T., Eugster J., Roberts T.V., *Phosphorus removal by post-precipitation with Fe(II)*, J. WPCF, 2, 1978, 215-233.
- [6] Swift D.L., Fridlander S.K., *The coagulation of hydrosols by Brownian motion and laminar shear flow*, J. Coll. Sci., 19, 1964, 621-647.
- [7] Thomas D.G., *Turbulent disruption of flocs in small particle size suspensions*, J. AICHE, 10, 1964, 517-523.
- [8] Argmon Y., Kaufman W.S., *Turbulence and flocculation*, J. Son. Eng. Div. ASCE, 96, 1970, 223-239.
- [9] Schade H., Konz E., *Strömungslehre*, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, New York 1980.
- [10] Wilson jr M.P., Teyssandier R.G., *The paradox of the vena contracta*, J. Fluids Eng., 99, 1975, 366-371.
- [11] Chaturvedi M.C., *Flow characteristics of asymmetric expansions*, J. Hydraulic Div., 1963, 61-89.
- [12] Dittman W., *Vergleich unterschiedlicher Mischeinrichtungen zur Dosierung von Flockungsmitteln bei Wasseraufbereitung in Rohrreaktoren*, Fortschritt-Berichte VDI, Nr 221, Verlag des VDI, Düsseldorf 1990.
- [13] Laufer J., *The structure of turbulence in fully developed pipe flows*, NACA – Report 1174, 1994.
- [14] Rotta J.C., *Turbulente Strömungen*, B. G. Taubner Verlag, Stuttgart, 1972.
- [15] Ha Minh H., Chassng P., *Perturbation of turbulent pipe flow in Turbulent Shear Flows*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1979.
- [16] Khezzar L., Whitelaw J.W., Yianneskis M., *An experimental study of round nudden-expansion flows*, Fifth Symposium on Turbulent Shear Flow, Cornell University Ithaca, New York 1985.
- [17] Buhrke H., Kecke H.J., Richter H., *Strömungsförderer*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1989.

WŁADYSŁAW EGNER\*

## OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE IDEALNIE PLASTYCZNEJ ZGINANEJ I ŚCINANEJ BELKI W PŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCEŃ

### OPTIMAL PLASTIC DESIGN OF BEAMS UNDER BENDING AND SHEAR IN PLANE STRAIN

#### Streszczenie

W artykule zastosowano metodę zakłócania kształtu konturu do rozwiązania problemu optymalnego kształtowania w stanie uplastycznienia przy zginaniu i ścinaniu. W metodzie stosuje się rozwinięcia w szereg potęgowy pewnego małego parametru wszystkich składowych naprężeń oraz nieznanego kształtu konturu. W niniejszym artykule mały parametr  $\alpha$  oznacza efekt ścinania. Kształt konturu jest opisany za pomocą szeregu potęgowego, którego postać wynika z warunków brzegowych. Obciążenie belki wspornikowej stanowi moment skupiony oraz obciążenie ciągłe będące czynnikiem zaburzającym. Materiał wykazuje idealną plastyczność i podlega warunkowi plastyczności Hubera–Misesa–Hencky’ego. Belka pracuje w płaskim stanie odkształceń.

*Słowa kluczowe: optymalizacja, idealna plastyczność, metoda zakłócania kształtu konturu, zginanie ze ścinaniem*

#### Abstract

The paper applies the boundary perturbation method (BPM) to optimal plastic design under bending with considerable shear effects. This method uses expansion of stress components and of the unknown boundary into power series of a small parameter. In the present paper the small parameter  $\alpha$  represents the effects of shear. The shape is described by a power series resulting from boundary conditions. The loading of the cantilever beam consists of a concentrated moment and distributed loading regarded as a perturbing factor. The material of the beam is perfectly plastic, subject to the Huber–Mises–Hencky yield condition. The beam is in the plane strain state.

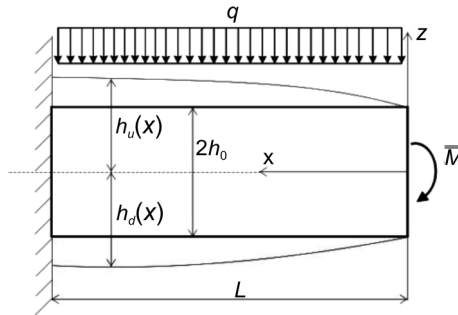
*Keywords: optimization, perfect plasticity, boundary perturbation method, bending with shearing*

\* Dr inż. Władysław Egner, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Metoda zaburzania kształtu konturu może być efektywnie stosowana dla różnych problemów optymalnego kształtowania konstrukcji pracujących w stanie pełnego uplastycznienia [3]. Przegląd nowszych prac z tej tematyki znajduje się w pracy [4]. W zagadnieniach plastycznych po raz pierwszy zastosowano tę metodę w pracy [5], gdzie wyznaczono kształt analizowanej konstrukcji w stadium pełnego uplastycznienia. Metoda zakłócania kształtu brzegu za pomocą małego parametru była stosowana w pracy [1], w której analizowano płaskie zakotwienie ze skośnymi powierzchniami oporowymi oraz w opracowaniu [2], gdzie znaleziono optymalny kształt obrotowo symetrycznego zakotwienia. Problem optymalnego kształtowania belek poddanych zginaniu i ścinaniu był analizowany w pracach [6, 7].

W niniejszym artykule metoda zakłócania kształtu konturu została zastosowana w celu określenia optymalnej wysokości belki podlegającej zginaniu i ścinaniu, którego wielkość opisuje mały parametr. Rozważania dotyczą belki wspornikowej z przyłożonym w przekroju swobodnym momentem skupionym oraz obciążeniem ciągłym działającym wzdłuż całej długości belki.



Rys. 1. Schemat ogólny belki

Fig. 1. Scheme of the beam

Obecna praca bazuje na następujących założeniach:

1. Sposób obciążenia belki przedstawiono na rys. 1. Obciążeniem podstawowym jest moment skupiony przyłożony w przekroju swobodnym. Jako zaburzenie wprowadzono dodatkowe obciążenie ciągle działające wzdłuż całej długości belki.
2. Materiał jest idealnie plastyczny (bez wzmocnienia). Podlega hipotezie Hubera–Misesa–Hencky'ego.
3. Przyjęto kartezjański układ współrzędnych z początkiem w środku ciężkości przekroju swobodnego belki (rys. 1).
4. Belka w przekroju jest prostokątem o stałej szerokości  $b$  i zmiennej wysokości  $2h = 2h(x)$ . Dla czystego zginania  $h = h_0 = \text{const}$  jest rozwiązaniem optymalnym.
5. Belka pracuje w płaskim stanie odkształceń.
6. Nie rozważano możliwości utraty stateczności.



## 2. Równania podstawowe

W analizowanym zagadnieniu muszą być spełnione dwa równania równowagi wewnętrznej:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}\end{aligned}\quad (1)$$

W przypadku płaskiego stanu odkształceń dodatkowo mamy:

$$\sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \quad (2)$$

Warunek plastyczności Hubera–Misesa–Hencky’ego przyjmie następującą postać:

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = \frac{4}{3}\sigma_0^2 \quad (3)$$

gdzie  $\sigma_0$  oznacza granicę plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu.

W dalszej części pracy dolny wskaźnik  $u$  oznacza górną część belki ( $z \geq 0$ ), a dolny wskaźnik  $d$  – dolną część belki ( $z \leq 0$ ).

Warunki brzegowe dla brzegów górnego i dolnego belki można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\sigma_{xu} \cos(n, x) + \tau_{xzu} \cos(n, z) &= 0 \\ \tau_{zxu} \cos(n, x) + \sigma_{zu} \cos(n, z) &= -\frac{q}{b} \\ \sigma_{xd} \cos(n, x) + \tau_{xzd} \cos(n, z) &= 0 \\ \tau_{zxd} \cos(n, x) + \sigma_{zd} \cos(n, z) &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

Kosinusy kierunkowe dla górnego brzegu belki można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}\cos(n, x) &= \frac{-h'(x)}{\sqrt{1+(h'(x))^2}} \\ \cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1+(h'(x))^2}}\end{aligned}\quad (5)$$

Kosinusy kierunkowe dla dolnego brzegu belki mogą być przedstawione następująco:

$$\begin{aligned}\cos(n, x) &= \frac{h'(x)}{\sqrt{1+(h'(x))^2}} \\ \cos(n, z) &= 1 \frac{-1}{\sqrt{1+(h'(x))^2}}\end{aligned}\quad (6)$$

W powyższych formułach  $n$  oznacza jednostkowy wektor normalny do brzegu belki, a  $h'(x) = dh/dx$ .

Biorąc pod uwagę wyrażenia na kosinusy kierunkowe, warunki brzegowe można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xu} h'_u - \tau_{xzu}) \Big|_{z=h_u(x)} &= 0 \\ (\tau_{xzu} h'_u - \sigma_{zu}) \Big|_{z=h_u(x)} &= \frac{q}{b} (1 + (h'_u)^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

oraz na brzegu dolnym  $z = h_d(x)$  ( $h_d$  – dolna część belki):

$$\begin{aligned} (\sigma_{xd} h'_d - \tau_{xzd}) \Big|_{z=h_d(x)} &= 0 \\ (\tau_{xzd} h'_d - \sigma_{zd}) \Big|_{z=h_d(x)} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

W zakresie plastycznym analizowany problem jest wewnątrznie statycznie wyznaczalny, ponieważ przyjmujemy, że warunek plastyczności (3) powinien być spełniony w każdym punkcie, więc trzy równania (1) i (3) określają trzy nieznanne naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  oraz  $\tau_{xz}$ .

Optymalną wysokość belki  $h_u = h_u(x)$  i  $h_d = h_d(x)$  znajdziemy z warunków brzegowych danych równaniami (7) i (8). Rozważany problem (całkowite uplastycznienie) jest zagadnieniem nad-określonym, więc może nie mieć rozwiązania w ogóle lub mieć rozwiązanie w szczególnych przypadkach albo tylko w przypadkach szczególnych. W rozważanym przypadku otrzymamy wprost rozwiązanie optymalne bez wolnych parametrów umożliwiających dalszą optymalizację.

Dodatkowo żądamy spełnienia równań równowagi w przekroju (całkowe równania równowagi):

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_x z dA &= M = \overline{\overline{M}} + \frac{1}{2} q x^2 \\ \int_A \tau_{xz} dA &= T = qx \\ \int_A \sigma_x dA &= N = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie  $\overline{\overline{M}}$  jest momentem nośności granicznej w przypadku czystego zginania dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia:

$$\overline{\overline{M}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 b h_0^2 \quad (10)$$

Rozkład obciążenia ciągłego stanowiącego dodatkowe obciążenie belki oznaczono jako  $q = q(x)$ . Stanowi ono dodatkowe obciążenie belki (w rozważanym przypadku  $q = \alpha q_0 = \text{const}$ ),  $\alpha$  jest małym parametrem,  $A = A(x)$  jest polem powierzchni przekroju poprzecznego belki.

### 3. Równania stanu dla kolejnych korekt

W metodzie zakłócania kształtu konturu wszystkie nieznanne wielkości (łącznie z kształtem brzegu) są rozwijane w szereg małego parametru  $\alpha$ :

$$\bar{X} = \sum_{i=0}^{\infty} X_i \alpha^i \quad (11)$$

gdzie:

$$\bar{X} = [\sigma_x(x, z), \sigma_z(x, z), \tau_{xz}(x, z), h(x)]^T \quad (12)$$

Analiza jest przeprowadzana dla górnej części belki ( $0 \leq z \leq h_u(x)$ ) oraz niezależnie dla części dolnej ( $h_d(x) \leq z \leq 0$ ).

Warunki równowagi wewnętrznej są liniowe, więc ich rozwinięcie w szereg małego parametru ma dokładnie taką samą formę dla każdej korekty  $i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , którą można uzyskać wprost z (1). Warunek plastyczności HMH jest nieliniowy, lecz po rozwinięciu go w szereg oraz po uwzględnieniu przybliżenia zerowego  $\sigma_{x0u} = \sigma_0$ ,  $\sigma_{x0d} = -\sigma_0$ ,  $\sigma_{z0} = \tau_{xz0} = 0$ , otrzymujemy liniowe zależności pomiędzy poszczególnymi wyrazami rozwinięcia:

$$\sigma_{xi} - \sigma_{zi} = f_i [\sigma_{x(i-1)}, \sigma_{z(i-1)}, \tau_{xz(i-1)}, \dots] \quad (13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ f_{2u} &= -\frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} \tau_{xz1u}^2 \quad \text{dla górnej połowy belki} \\ f_{2d} &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} \tau_{xz1u}^2 \quad \text{dla dolnej połowy belki} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (14)$$

Z układu liniowych równań równowagi (1) oraz warunku plastyczności (13) możemy wyeliminować dwie składowe stanu naprężenia, otrzymując równanie na trzecią składową:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xi}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2} \quad (15)$$

W rozważanym przypadku siła poprzeczna zmienia się liniowo, a moment kwadratowo, więc będziemy szukać rozwiązania powyższego równania w dziedzinie wielomianów.

Rozwijając w szereg małego parametru  $\alpha$  warunki brzegowe dane (7) oraz (8), trzeba pamiętać, że naprężenia oraz  $h$  zależą od  $\alpha$ . Nieznana wysokość belki  $h(x)$  jest przedmiotem rozwinięcia w szereg Taylora wokół punktu  $z = h_0$ . Otrzymujemy, podobnie jak w pracy [3]:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^i \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \tau_{xzi}}{\partial z^k} \Big|_{z=h_0} [\alpha^m h_m(x)]^k &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^i \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \sigma_{xi}}{\partial z^k} \Big|_{z=h_0} [\alpha^m h_m(x)]^k \alpha^l h'_l(x) \\
\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^i \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \sigma_{zi}}{\partial z^k} \Big|_{z=h_0} [\alpha^m h_m(x)]^k &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^i \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \tau_{xzi}}{\partial z^k} \Big|_{z=h_0} [\alpha^m h_m(x)]^k \alpha^l h'_l(x)
\end{aligned} \tag{16}$$

Podnoszenie do potęgi  $k$  szeregów może być zrealizowane wg formuły zaproponowanej w [8]. Ostatecznie po obu stronach równości danej (16) otrzymamy zwykłe szeregi małego parametru  $\alpha$ . W związku z tym współczynniki przy  $\alpha^i$  po obu stronach równości muszą być sobie równe.

#### 4. Korekty kształtu oraz naprężeń

Podstawiając  $h_0 = \text{const}$ ,  $\sigma_{x0} = 2/\sqrt{3} \sigma_0 = \text{const}$  oraz  $\tau_{xz0} = \sigma_{z0} = 0$  do warunków brzegowych danych równaniem (16), otrzymamy postać warunków brzegowych dla pierwszej poprawki:

$$\tau_{xz1u}(x, h_0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 h'_{1u}(x) \quad \text{dla górnego brzegu belki} \tag{17}$$

$$\sigma_{z1u}(x, h_0) = -\frac{q_0}{b}$$

$$\tau_{xz1d}(x, -h_0) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 h'_{1d}(x) \quad \text{dla dolnego brzegu belki} \tag{18}$$

$$\sigma_{z1d}(x, -h_0) = 0$$

Dla pierwszej poprawki rozwiązanie równania (15) można przyjąć w następującej formie:

$$\sigma_{x1u} = \sigma_{x1d} = a_0 + a_1 z \tag{19}$$

Drugie równania w związkach (17) i (18) muszą być spełnione dla dowolnego  $x$ . Dlatego ze względu na postać (19) współczynniki  $a_0$  i  $a_1$  muszą być równe:

$$a_1 = -\frac{1}{2} \frac{q_0}{bh_0} \quad a_0 = -\frac{1}{2} \frac{q_0}{b} \tag{20}$$

Biorąc pod uwagę powyższe, pierwsza poprawka naprężenia  $\sigma_{x1}$  przyjmie następującą postać:

$$\sigma_{x1} = -\frac{1}{2} \frac{q_0}{bh_0} (z + h_0) \tag{21}$$

Następnie z pierwszego równania (1) można obliczyć pierwszą poprawkę  $\tau_{xz1}$ :

$$\frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \tau_{xz1} = a_2(x) \quad (22)$$

Wykorzystując drugie równanie (1) oraz biorąc pod uwagę równanie (13), otrzymamy:

$$\frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial z} = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \frac{q_0}{bh_0} x + a_3 \quad (23)$$

Z pierwszych równań (17) i (18) można wyliczyć pierwszą poprawkę kształtu dla brzo-  
gów górnego i dolnego belki.

$$\begin{aligned} h_{1u} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sigma_0} \left[ \frac{1}{4} \frac{q_0}{bh_0} x^2 + a_3 x + a_4 \right] \\ h_{1d} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sigma_0} \left[ \frac{1}{4} \frac{q_0}{bh_0} x^2 + a_3 x + a_3 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Z warunku równowagi sił przekrojowych dla siły poprzecznej otrzymamy:

$$\int_{h_d}^{h_u} (\alpha \tau_{xz1} + \dots) dz = \alpha \frac{q_0}{b} x \quad (25)$$

Spełnienie powyższego równania na szczelbu pierwszej poprawki wymaga, aby  $a_3 = 0$ .

Z warunku równowagi sił przekrojowych dla siły normalnej otrzymamy:

$$\int_{h_d}^0 \left( -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 + \alpha \sigma_{x1} + \dots \right) dz + \int_0^{h_u} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 + \alpha \sigma_{x1} + \dots \right) dz = 0 \quad (26)$$

Spełnienie powyższego równania wymaga, by:

$$a_3 = a_4 - \frac{q_0 h_0}{b} \quad (27)$$

Z warunku równowagi sił przekrojowych dla momentu zginającego otrzymamy:

$$\int_{h_d}^0 (-\sigma_0 + \alpha \sigma_{x1} + \dots) z dz + \int_0^{h_u} (\sigma_0 + \alpha \sigma_{x1} + \dots) z dz = \sigma_0 h_0^2 + \frac{1}{2} \frac{q_0}{b} \alpha x^2 \quad (28)$$

Spełnienie warunku wymaga, aby:

$$a_4 = \frac{2}{3} \frac{q_0 h_0}{b} \quad (29)$$

Ostatecznie otrzymamy następujące formuły określające wyrazy szeregu stanowiące pierwszą poprawkę:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x1} = \sigma_{z1} &= -\frac{1}{2} \frac{q_0}{bh_0} (z + h_0) \\
\tau_{xz1} &= \frac{1}{2} \frac{q_0}{bh_0} x \\
h_{1u} &= \frac{\sqrt{3}q_0}{\sigma_0 bh_0} \left[ \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{3} h_0^2 \right] \\
h_{1d} &= -\frac{\sqrt{3}q_0}{\sigma_0 bh_0} \left[ \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{6} h_0^2 \right]
\end{aligned} \tag{30}$$

Warunki brzegowe na szczelbu drugiej poprawki, wynikające z (16), są następujące:

$$\begin{aligned}
\tau_{xz2u} \Big|_{z=h_0} + \tau'_{xz1u} \Big|_{z=h_0} h_{1u} - \sigma_{x1u} \Big|_{z=h_0} h'_{1u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 h'_{2u} &= 0 \\
\tau_{xz2d} \Big|_{z=-h_0} + \tau'_{xz1d} \Big|_{z=-h_0} h_{1d} - \sigma_{x1d} \Big|_{z=-h_0} h'_{1d} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 h'_{2d} &= 0 \\
\tau_{xz1u} \Big|_{z=h_0} h'_{1u} - \sigma'_{z1u} \Big|_{z=h_0} h_{1u} - \sigma_{z2u} \Big|_{z=h_0} &= 0 \\
\tau_{xz1d} \Big|_{z=-h_0} h'_{1d} - \sigma'_{z1d} \Big|_{z=-h_0} h_{1d} - \sigma_{z2d} \Big|_{z=-h_0} &= 0
\end{aligned} \tag{31}$$

Równanie równowagi (15) przybierze następującą postać:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma_{x2u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{x2u}}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{dla górnej połowy belki} \\
\frac{\partial^2 \sigma_{x2d}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{x2d}}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{dla dolnej połowy belki}
\end{aligned} \tag{32}$$

Dla drugiej poprawki rozwiązanie równania (32) może być zapisane następująco:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x2u} &= a_0 + a_1 z + a_2 x^2 + a_3 z^2 + a_4 x^2 z + a_5 z^3 \\
\sigma_{x2d} &= b_0 + b_1 z + b_2 x^2 + b_3 z^2 + b_4 x^2 z + b_5 z^3
\end{aligned} \tag{33}$$

Spełnienie równania wymaga:

$$\begin{aligned}
a_4 &= 3a_5 \\
a_2 &= a_3 \\
b_4 &= 3b_5 \\
b_2 &= b_3
\end{aligned} \tag{34}$$

Z równań równowagi (1) oraz uwzględniając (13), możemy obliczyć drugą korektę naprężenia stycznego  $\tau_{xz2}$ :

$$\begin{aligned}
\tau_{xz2u} &= -2a_3 xz - 3a_5 xz^2 - a_1 x - a_5 x^3 + a_6 \\
\tau_{xz2d} &= -2b_3 xz - 3b_5 xz^2 - b_1 x - b_5 x^3 + b_6
\end{aligned} \tag{35}$$

Z trzeciego i czwartego równania (31), które powinny być spełnione dla dowolnego  $x$ , oraz uwzględniając (33), otrzymamy następujące równania:

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{16} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^2} - 3h_0 a_5 \\ a_0 &= -h_0 a_1 + \frac{11\sqrt{3}}{48} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2} + 2h_0^3 a_5 \\ b_3 &= \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^2} + 3h_0 b_5 \\ b_0 &= h_0 b_1 + \frac{\sqrt{3}}{48} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2} - 2h_0^3 b_5 \end{aligned} \quad (36)$$

Spełniając pierwsze i drugie równanie (31), otrzymamy drugie korekty konturu belki:

$$\begin{aligned} h_{2u} &= \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \left[ \left( \frac{3\sqrt{3}}{16} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0} + \frac{3}{2} h_0^2 a_5 - \frac{1}{2} a_1 \right) x^2 - \frac{1}{4} a_5 x^4 + a_6 x \right] + a_7 \\ h_{2d} &= -\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0} + \frac{3}{2} h_0^2 b_5 - \frac{1}{2} b_1 \right) x^2 - \frac{1}{4} b_5 x^4 + b_6 x \right] + b_7 \end{aligned} \quad (37)$$

W dalszej kolejności powinno się spełnić równanie równowagi siły normalnej w przekroju belki (9):

$$\int_{h_d}^0 (-\sigma_0 + \alpha \sigma_{x1d} + \alpha^2 \sigma_{x2d} + \dots) dz + \int_0^{h_u} (\sigma_0 + \alpha \sigma_{x1u} + \alpha^2 \sigma_{x2u} + \dots) dz = 0 \quad (38)$$

otrzymując jako rezultat następujące zależności:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_5 &= b_5 \\ a_6 &= b_6 \\ b_7 &= \frac{1}{8} \frac{q_0^2 h_0}{\sigma_0^2 b^2} - a_7 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a_5 h_0^4}{\sigma_0} \end{aligned} \quad (39)$$

Warunek równowagi siły poprzecznej w przekroju belki stosownie do (9) przyjmie postać:

$$\int_{h_d}^0 (\alpha \tau_{xz1d} + \alpha^2 \tau_{xz2d} + \dots) dz + \int_0^{h_u} (\alpha \tau_{xz1u} + \alpha^2 \tau_{xz2u} + \dots) dz = 0 \quad (40)$$

W wyniku spełnienia tego równania otrzymamy następujące zależności:

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^3} \\ a_1 &= \frac{11\sqrt{3}}{48} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0} \\ a_6 &= b_6 = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Ostatecznie spełniając warunek równowagi momentu zginającego w przekroju belki (9):

$$\int_{h_d}^0 (-\sigma_0 + \alpha\sigma_{x1d} + \alpha^2\sigma_{x2d} + \dots) z dz + \int_0^{h_u} (\sigma_0 + \alpha\sigma_{x1u} + \alpha^2\sigma_{x2u} + \dots) z dz = 0 \quad (42)$$

otrzymamy:

$$a_7 = \frac{221}{480} \frac{q_0^2 h_0}{\sigma_0 b^2} \quad (43)$$

Otrzymaliśmy następujący zestaw wyrażeń na drugie korekty:

$$\begin{aligned} \sigma_{x2u} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^3} \left[ \frac{1}{2} h_0^3 + \frac{11}{12} h_0^2 z - h_0 x^2 - h_0 z^2 + \frac{3}{4} x^2 z + \frac{1}{4} z^3 \right] \\ \sigma_{x2d} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^3} \left[ \frac{1}{2} h_0^3 + \frac{11}{12} h_0^2 z + h_0 x^2 + h_0 z^2 + \frac{3}{4} x^2 z + \frac{1}{4} z^3 \right] \\ h_{2u} &= \frac{3}{64} \frac{q_0^2}{\sigma_0^2 b^2 h_0^3} \left[ -\frac{1}{2} x^4 + \frac{16}{3} h_0^2 x^2 + \frac{442}{45} h_0^4 \right] \\ h_{2d} &= \frac{3}{64} \frac{q_0^2}{\sigma_0^2 b^2 h_0^3} \left[ \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} h_0^2 x^2 + \frac{158}{45} h_0^4 \right] \\ \tau_{xz2u} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^3} \left[ 2h_0 xz - \frac{3}{4} xz^2 - \frac{11}{12} h_0^2 x - \frac{1}{4} x^3 \right] \\ \tau_{xz2d} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^3} \left[ -2h_0 xz - \frac{3}{4} xz^2 - \frac{11}{12} h_0^2 x - \frac{1}{4} x^3 \right] \end{aligned} \quad (44)$$

Wprowadzając nowy bezwymiarowy mały parametr:

$$\bar{\alpha} = \alpha \frac{q_0}{\sigma_0 b} \quad (45)$$

do równania (11), otrzymamy ostateczne rozwiązanie w następującej formie:



$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{xu}}{\sigma_0} &= 1 - \bar{\alpha} \frac{1}{2} \left( \frac{z}{h_0} + 1 \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \bar{\alpha}^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{11}{12} \frac{z}{h_0} - \left( \frac{x}{h_0} \right)^2 - \left( \frac{z}{h_0} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{x^2 z}{h_0^3} + \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h_0} \right)^3 \right] \\
\frac{\sigma_{xd}}{\sigma_0} &= -1 - \bar{\alpha} \frac{1}{2} \left( \frac{z}{h_0} + 1 \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \bar{\alpha}^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{11}{12} \frac{z}{h_0} + \left( \frac{x}{h_0} \right)^2 + \left( \frac{z}{h_0} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{x^2 z}{h_0^3} + \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h_0} \right)^3 \right] \\
\frac{h_u}{h_0} &= 1 + \bar{\alpha} \sqrt{3} \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{x}{h_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \right] + \frac{3}{64} \bar{\alpha} \left[ \frac{16}{3} \left( \frac{x}{h_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{h_0} \right)^4 + \frac{442}{45} \right] \\
\frac{h_d}{h_0} &= -1 + \bar{\alpha} \sqrt{3} \left[ -\frac{1}{8} \left( \frac{x}{h_0} \right)^2 + \frac{1}{6} \right] + \frac{3}{64} \bar{\alpha}^2 \left[ -\frac{4}{3} \left( \frac{x}{h_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{h_0} \right)^4 + \frac{158}{45} \right] \\
\frac{\tau_{xzu}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2} \bar{\alpha} \frac{x}{h_0} + \frac{\sqrt{3}}{4} \bar{\alpha}^2 \left[ 2 \frac{xz}{h_0^2} - \frac{3}{4} \frac{xz^2}{h_0^3} - \frac{11}{12} \frac{x}{h_0} - \frac{1}{4} \left( \frac{x}{h_0} \right)^3 \right] \\
\frac{\tau_{xzd}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2} \bar{\alpha} \frac{x}{h_0} + \frac{\sqrt{3}}{4} \bar{\alpha}^2 \left[ -2 \frac{xz}{h_0^2} - \frac{3}{4} \frac{xz^2}{h_0^3} - \frac{11}{12} \frac{x}{h_0} - \frac{1}{4} \left( \frac{x}{h_0} \right)^3 \right] \\
\frac{\sigma_{zredu}}{\sigma_0} &= \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \bar{\alpha}^2 \left( \frac{x}{h_0} \right)^2 \right)^2 + 3 \left\{ \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 \frac{x}{h_0} + \frac{\sqrt{3}}{4} \bar{\alpha}^2 \left[ 2 \frac{xz}{h_0^2} - \frac{3}{4} \frac{xz^2}{h_0^3} - \frac{11}{12} \frac{x}{h_0} - \frac{1}{4} \left( \frac{x}{h_0} \right)^3 \right] \right\}^2 \\
\frac{\sigma_{zredd}}{\sigma_0} &= \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \bar{\alpha}^2 \left( \frac{x}{h_0} \right)^2 \right)^2 + 3 \left\{ \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 \frac{x}{h_0} + \frac{\sqrt{3}}{4} \bar{\alpha}^2 \left[ -2 \frac{xz}{h_0^2} - \frac{3}{4} \frac{xz^2}{h_0^3} - \frac{11}{12} \frac{x}{h_0} - \frac{1}{4} \left( \frac{x}{h_0} \right)^3 \right] \right\}^2
\end{aligned} \tag{46}$$

## 5. Przykład

Jako przykład przeanalizowano belkę wspornikową obciążoną skupionym momentem zginającym oraz stałym obciążeniem ciągłym (rys. 1). Przyjęto, że długość belki jest równa  $L = 5h_0$ . Wartość bezwymiarowego parametru  $\bar{\alpha}$  określa proporcję ścinania w stosunku do zginania. Bezwymiarowy moment zginający oraz siła ścinająca w dowolnym przekroju belki może być zdefiniowana jako:

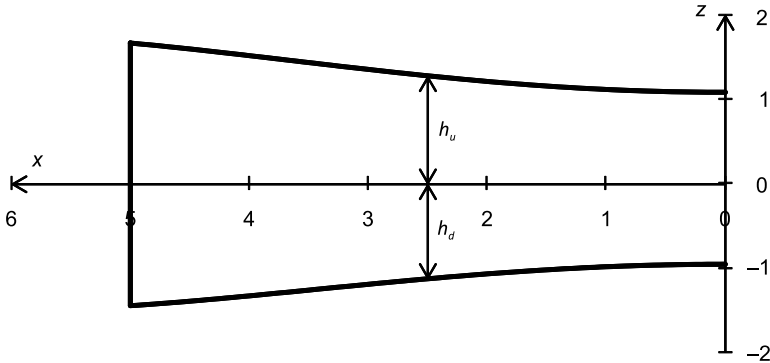
$$\begin{aligned}
M &= \bar{M} + \frac{1}{2} \alpha q_0 x^2 \quad | : \sigma_0 b h_0^2 \\
\frac{M}{2/\sqrt{3} \sigma_0 b h_0^2} &= \bar{M} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \bar{\alpha} \left( \frac{x}{h_0} \right)^2 \\
T &= \alpha q_0 x \\
\frac{T}{2/\sqrt{3} \sigma_0 b h_0} &= \bar{T} = \bar{\alpha} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x}{h_0}
\end{aligned} \tag{47}$$

Dla przekroju w utwierdzeniu:

$$\frac{\bar{T}}{\bar{M}} = \frac{10\sqrt{3}\bar{\alpha}}{4 + 25\sqrt{3}\bar{\alpha}} \quad (48)$$

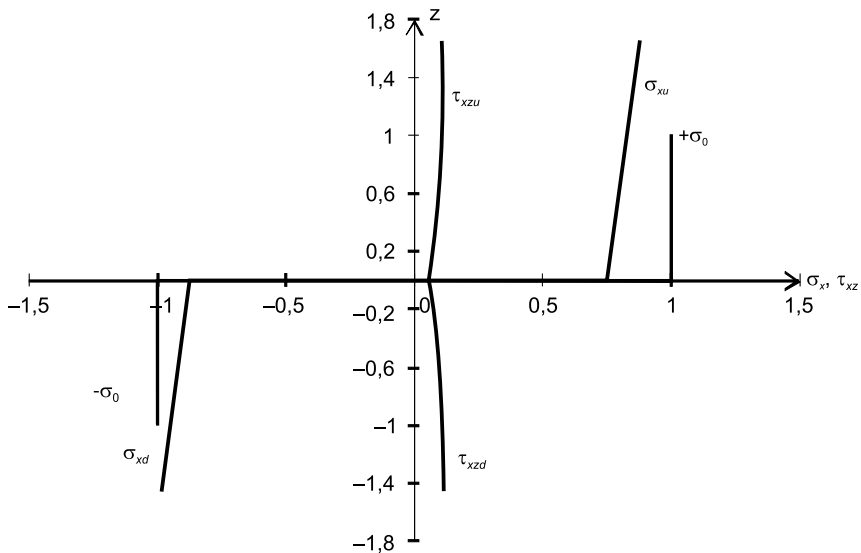
Przyjmując, że proporcja ścinania do zginania może wynieść maksymalnie do 25%, otrzymamy  $\bar{\alpha} = 4\sqrt{3}/45$ .

Dla powyższych danych optymalny kształt belki przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Kształt optymalny belki

Fig. 2. Optimal shape of beam



Rys. 3. Rozkład naprężeń normalnych ( $\sigma_x$ ) i stycznych ( $\tau_{xz}$ ) w przekroju utwierdzonym:  $x = L$

Fig. 3. Distribution of normal stress ( $\sigma_x$ ) and shear stress ( $\tau_{xz}$ ) in the clamped section:  $x = L$

## 6. Oszacowanie zbieżności

Zbieżność szeregu oszacowano dla  $\bar{\alpha} = 4\sqrt{3}/45$ , badając szybkość zbieżności dla przekroju utwierdzonego w przypadku konturu  $h_u$ .

Podstawiając  $x = 5h_0$  do wzoru (46), otrzymamy:

$$h_u = 1 + 5,99\bar{\alpha} - 7,94\bar{\alpha}^2 \quad (49)$$

Dla  $\bar{\alpha} = 4\sqrt{3}/45$  otrzymamy kolejne wyrazy szeregu: 1; 0,92; -0,19, które pozwolą oszacować błąd wynikający z pominięcia pozostałych wyrazów szeregu.

Dość dokładne ilościowe oszacowanie błędu można uzyskać, stosując formułę Aitkena lub formułę zaproponowaną przez Życzkowskiego [8] bazującą na dwumianowym szeregu potęgowym. Oznaczmy kolejne wyrazy szeregu jako  $b_n x^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , a częściowe sumy szeregu przez  $a_n = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ . Szukamy aproksymacji elementu  $a_\infty$ . Korzystając z formuły

Życzkowskiego, otrzymamy następujący wynik:

$$a_\infty = b_0 \left[ 1 + \frac{b_1 x}{m b_0} \right]^m, \quad m = \frac{b_1^2}{b_1^2 - 2b_0 b_2} \quad (50)$$

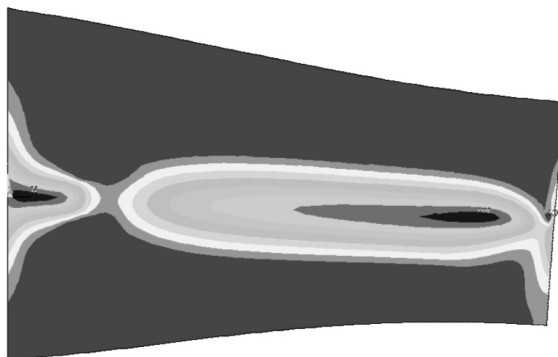
Dla wzoru na  $h_u$  danego formułą (49) z użyciem metody zakłócania kształtu konturu, dla przekroju utwierdzonego otrzymaliśmy  $h_u = 1 + 0,92 - 0,19 = 1,73$ . Wykorzystując formułę (50), otrzymujemy wynik 1,80. Zatem błąd wynosi ok. 4%.

## 7. Weryfikacja otrzymanego rozwiązania za pomocą MES

Analizowany przykład, dla danych:  $L = 5h_0$ ,  $\bar{\alpha} = 4\sqrt{3}/45$ ,  $\sigma_0 = 750$  MPa,  $q = \bar{\alpha}\sigma_0$ , został zweryfikowany metodą elementów skończonych za pomocą programu Ansys. Zastosowano model dwuliniowy, bez wzmocnienia (idealna plastyczność) oraz ośmiowzłowy dwuwymiarowy element skończony pracujący w płaskim stanie odkształceń. Belkę zamodelowano jak wspornik obciążony momentem skupionym powodującym całkowite uplastycznienie przekroju prostokątnego o wysokości  $2h_0$ . Następnie belkę optymalną obciążono dodatkowo obciążeniem ciągłym o stałej intensywności.

Na rysunku 4 przedstawiono rozkład naprężenia zredukowanego wg hipotezy HMH dla analizowanego przypadku. Wynika z niego, że grubość stref wykazujących całkowite uplastycznienie jest dość równomierna. Niecałkowite uplastycznienie wynika z zastosowania przybliżonego rozwiązania (szereg potęgowy).

Na rysunku 5 przedstawiono rozkład naprężenia zredukowanego wg hipotezy HMH dla przypadku, w którym proporcja ścinania do zginania wynosi 10% ( $\bar{\alpha} = 4\sqrt{3}/225$ ). Upłastycznienie jest znacznie większe, co świadczy o lepszej zbieżności rozwiązania.



Rys. 4. Rozkład naprężenia zredukowanego wg hipotezy HMH

Fig. 4. Distribution of reduces stress – HMH hipotesis



Rys. 5. Rozkład naprężenia zredukowanego wg hipotezy HMH

Fig. 5. Distribution of reduces stress – HMH hipotesis

## 8. Wnioski

1. Metoda zakłócania kształtu konturu jest dość efektywna w przypadku poszukiwania rozwiązań konstrukcji wykazujących całkowite uplastycznienie w fazie zniszczenia.
2. W niniejszym artykule przedstawiono przypadek czystego zginania zaburzonego wprowadzeniem ścinania od dodatkowego obciążenia, lecz inne rodzaje obciążeń też mogą być przedmiotem rozważań.
3. Istotną zaletą metody zaburzenia kształtu konturu jest uzyskanie rozwiązania analitycznego mogącego służyć jako podstawa do dalszych analiz.
4. Ważną zaletą przedstawionej metody jest zamiana nieliniowego zagadnienia w zadanie liniowe.
5. Metoda nie ma ograniczeń co do rodzaju prawa konstytutywnego. Można rozważać różne prawa fizyczne, jak również inne warunki plastyczności.
6. Rozwiązania elementów konstrukcyjnych z użyciem metody zaburzenia kształtu konturu przedstawiono w pracach [1, 2].

## Literatura

- [1] Egner W., *Optimal plastic shape design of heads of plane tension members with skew bearing surfaces*, Eng. Opt., 32, 2000, 463-483.
- [2] Egner W., *Optimal plastic shape design of rotationally symmetric elements with conical bearing surfaces*, J. Theor. Appl. Mech., 4, 38, 2000, 747-765.
- [3] Egner W., Kordas Z., Życzkowski M., *Optimal plastic shape design via the boundary perturbation method*, Struct. Optim., 8, 1994, 145-155.
- [4] Egner W., Życzkowski M., *Optimal plastic design of a bar under combined torsion, bending and shear*, Struct. Optim., 22, 2001, 394-406.
- [5] Kordas Z., Życzkowski M., *Investigation of the shape of non-circular thick-walled cylinders subject to full yielding at the stage of plastic collapse*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Techn., 18, 1970, 839-847.
- [6] Egner W., Życzkowski M., *Boundary perturbation method applied to optimal plastic design of beams under bending with shear*, Struct. Multidisc. Optim., 25, 2003, 117-127.
- [7] Egner W., *Boundary perturbation method applied to optimal plastic design of beams under concentrated moment and distributed loadings*, Struct. Multidisc. Optim., 42, 2010, 103-110.
- [8] Życzkowski M., *Operations on generalized power series*, Z. Angew. Math. Mech., 45, 1965, 235-244.



MAREK HEBDA\*

## SPARK PLASMA SINTERING – NOWA TECHNOLOGIA KONSOLIDACJI MATERIAŁÓW PROSZKOWYCH

---

## SPARK PLASMA SINTERING – A NEW TECHNOLOGY OF CONSOLIDATION OF POWDER MATERIALS

### Streszczenie

Dynamiczny postęp, jaki nastąpił w ostatnich latach, widoczny jest praktycznie w każdym obszarze działalności człowieka. Przyczynił się on również do opracowania nowych technik wykorzystywanych w inżynierii materiałowej. Przykładowo w technologii metalurgii proszków opracowano wiele nowych metod formowania i konsolidacji materiałów sypkich. Jedną z takich technik jest proces SPS (*Spark Plasma Sintering*) zwany również jako PECS (*Pulsed Electric Current Sintering*) lub FAST (*Field Assisted Sintering Technique*). W niniejszym artykule opisano metodę SPS, podano zakres i możliwość jej stosowania oraz zaprezentowano przykładowe wyniki konsolidacji materiału tą technologią.

*Słowa kluczowe: metoda SPS, spiekanie, ciepło Joule'a*

### Abstract

In recent years dynamic progress has been seen in practically all areas of human activity. It has contributed to the development of new techniques used in engineering materials. For example, in powder metallurgy many new methods of powder forming and consolidation were developed. The SPS (*Spark Plasma Sintering*) process, also known as PECS (*Pulsed Electric Current Sintering*) or FAST (*Field Assisted Sintering Technique*), is one of them. This paper describes the SPS method and its possible applications, and presents examples of powder consolidation by means of this technology.

*Keywords: SPS (Spark Plasma Sintering) method, sintering, Joule heat*

---

\* Dr inż. Marek Hebda, Instytut Inżynierii Materiałowej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Obecnie coraz częściej wytwarzane są nowe materiały o coraz lepszych właściwościach (zazwyczaj mechanicznych, termicznych lub odporności korozyjnej), niejednokrotnie wręcz inteligentne. W celu ich wytworzenia niezbędna jest znajomość nowoczesnych metod produkcji. W technologii metalurgii proszków w ostatnich latach nastąpił rozwój różnych nowych metod konsolidacji i spiekania. Można tu wspomnieć m.in. o procesie izostatycznego prasowania na gorąco (*Hot Isostatic Pressing* – HIP), selektywnego spiekania laserowego (*Selective Laser Sintering* – SLS), spiekania mikrofalowego czy też formowania wtryskowego (*Powder Injection Moulding* – PIM). Jedną z najnowocześniejszych metod konsolidacji proszków jest proces SPS (*Spark Plasma Sintering*). Technika ta bazuje na równoczesnym zastosowaniu ciśnienia oraz impulsów prądowych [1, 2].

## 2. Początki metody

Pierwsze laboratoryjne próby wykonania urządzenia do spiekania wykorzystującego impulsy energii elektrycznej odbyły się w 1933 r. w Stanach Zjednoczonych [3–5]. W 1950 r. prace nad metodą o nazwie Spark Sintering (co w luźnym tłumaczeniu można rozumieć jako spiekanie za pomocą wyładowań prądowych) rozpoczął Lenel [6]. Następnie w latach 1960–1970 wiodące osiągnięcia dotyczące rozwoju tej technologii uzyskali naukowcy z Lockheed Missile and Space Company w Kalifornii [7, 8] oraz Inoue z Japonii [9, 10]. Jednak ze względu na kosztowne oprzyrządowanie oraz znikome w tamtym czasie zastosowanie metoda ta nie znalazła szerszego zastosowania. Aparatura drugiej generacji powstała pod koniec lat 80. i na początku lat 90. W tamtym czasie metoda nazywana była Plasma Activated Sintering (PAS) i umożliwiała stosowanie maksymalnej siły nacisku prasowania 50 kN i generatora prądu stałego dającego natężenie prądu 800 A.

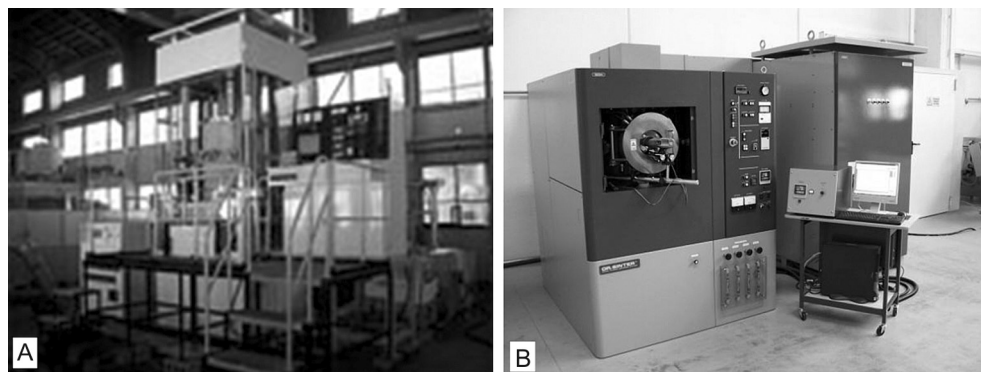
## 3. Najnowsze rozwiązania

Obecnie mamy do czynienia z trzecią generacją urządzeń do SPS oferujących generatory prądu stałego o natężeniu do 60 000 A i sile nacisku prasowania do 3 000 kN (rys. 1). W Europie największy system SPS (o natężeniu prądu 30 000 A i sile nacisku prasowania do 2 000 kN) został zainstalowany w kwietniu 2009 r. we Francji i wykorzystywany jest do badań nad rozwojem nanomateriałów. Po 2000 roku wytwarzaniem nanokompozytów proszkowych metodą SPS zajmowano się już na Uniwersytecie Technicznym w Dreźnie (Niemcy). W Polsce do 2010 r. jedynie dwa instytuty badawcze dysponowały taką aparaturą. Techniczne rozwiązania zastosowane w urządzeniach SPS dają możliwość wykorzystania tej metody praktycznie do każdego rodzaju materiału (tzn. metalowego, ceramicznego, kompozytowego, polimerowego, a nawet materiału gradientowego – *ang. Functionally Graded Materials* – rys. 2) niezależnie od wielkości cząstek (zarówno mikro, jak i nano).

Kolejną zaletą tej technologii jest możliwość jej zastosowania nie tylko do konsolidacji materiałów proszkowych, lecz również ich obróbki. Proces SPS z sukcesem stosowany jest

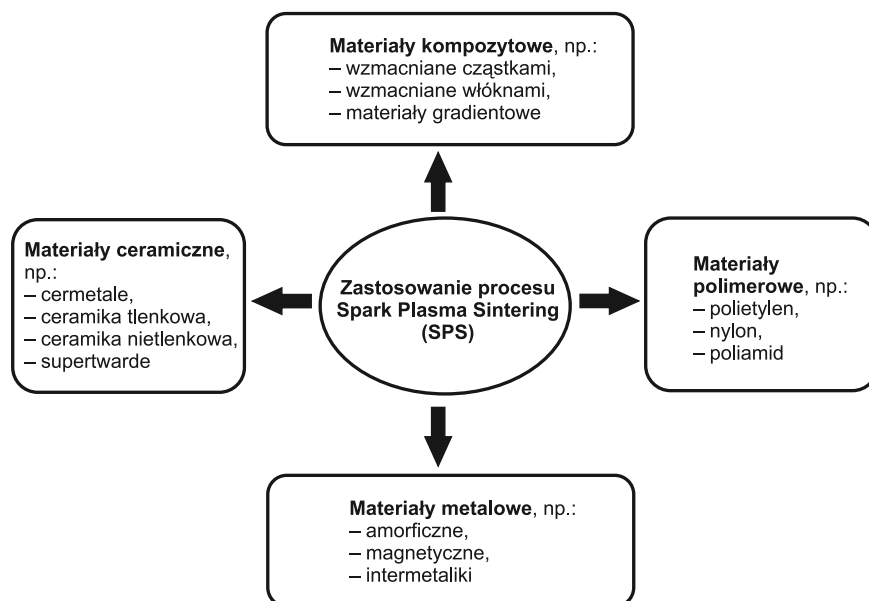


m.in. do przeprowadzenia obróbki powierzchniowej, spajania czy też syntezy materiałów. Ponadto w porównaniu np. z metodą izostatycznego prasowania na gorąco zapotrzebowanie na energię elektryczną dla procesu SPS jest około od 20 do 30% mniejsze, co ze względów ekonomicznych jest bardzo istotnym czynnikiem.



Rys. 1. Przykładowe urządzenia SPS: a) system zamontowany we Francji w kwietniu 2009 r. wg [11], b) znajdujące się na uniwersytecie w Trento we Włoszech wg [12]

Fig. 1. Examples of SPS equipments: a) system installed in France in April 2009 [11], b) located at the University of Trento in Italy [12]



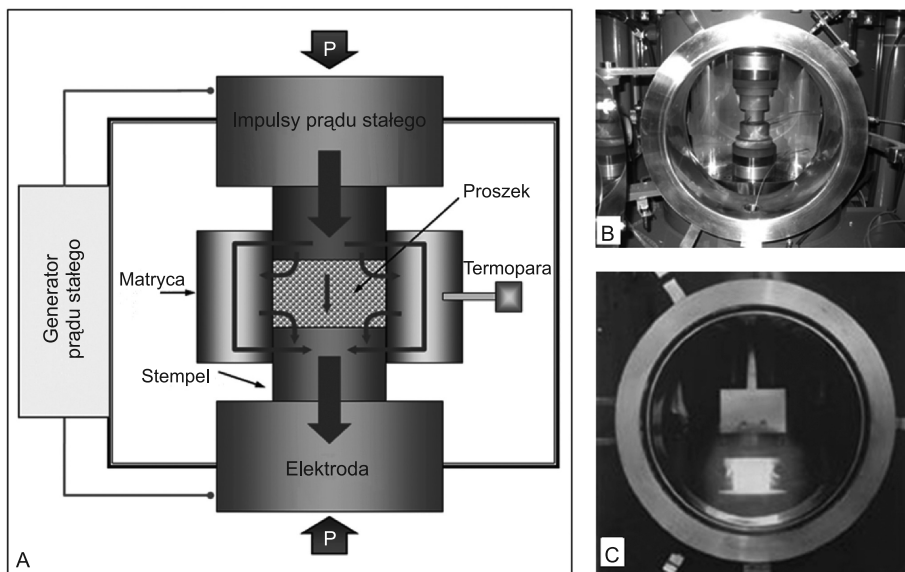
Rys. 2. Przykładowy zakres możliwości zastosowania metody SPS wg [11, 13], modyfikacja własna

Fig. 2. Typical examples of materials manufactured by SPS [11, 13], with modification

#### 4. Podstawy metody SPS

Na czym polega więc fenomen tego rozwiązania? Metoda bazuje na prawie Joule'a, które mówi, że ilość ciepła wydzielanego w czasie przepływu prądu elektrycznego przez przewodnik elektryczny (czyli również naszą konsolidowaną próbkę znajdującą się w aparaturze SPS, rys. 3) jest wprost proporcjonalna do iloczynu oporu elektrycznego przewodnika, kwadratu natężenia prądu i czasu jego przepływu. Prawo to wyraża zasadę zachowania energii dla przypadku, gdy energia elektryczna jest zamieniana na energię cieplną. W metodzie SPS efekt ten jest wykorzystywany do zamiany energii elektrycznej w energię wewnętrzną. Temperatura punktowo pomiędzy cząstkami proszku może sięgać wartości nawet 10 000°C [14] (efekt ten dotyczy jedynie przypowierzchniowej warstwy cząstek i jest analogiczny do tzw. efektu naskórkowości występującego w obwodach prądu przemiennego), powodując miejscowe ich nadtapianie i intensyfikację międzycząsteczkowego łączenia [15]. Jeden z proponowanych opisów mechanizmów procesu spiekania zachodzących pomiędzy cząstkami w trakcie stosowania metody SPS wg [16] dzieli proces na następujące etapy:

- 1) aktywacja i oczyszczenie powierzchni cząstek proszków;
- 2) formowanie „szyjek” pomiędzy cząstkami;
- 3) wzrost powstałych „szyjek”;
- 4) zagęszczenie materiału w wyniku jego plastycznej deformacji.

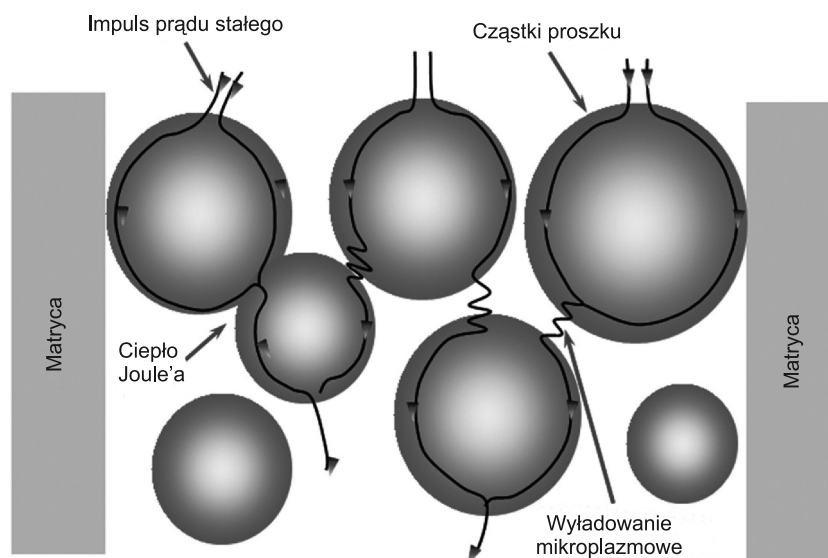


Rys. 3. a) Schemat urządzenia SPS wraz z najważniejszymi podzespołami, b) widok komory, w której przeprowadza się proces, c) rozgrzana matryca w trakcie procesu SPS wg [17]

Fig. 3. a) Schematic view of SPS equipment, b) chamber in which the process is carried out, c) hot mould during the SPS process [17]

Pierwsze dwa etapy są efektem zachodzących wyładowań mikroplazmowych pomiędzy luźnymi cząstkami. Następnie ciepło Joule'a jest dominującym zjawiskiem mającym wpływ na zachodzące procesy dyfuzyjne, tworzenie się szyjek pomiędzy proszkiem i jego zagęszczaniem. Proces SPS odbywa się z wykorzystaniem wyładowań elektrycznych o dużym natężeniu jednak małym napięciu (rzędu kilku Voltów). Generator prądu stałego wytwarza impulsy trwające kilka milisekund (w zależności od nastawień użytkownika) a następnie wywołwana jest przerwa (również o sterowanym przez operatora czasie, rzędu milisekund), po której powtarzana jest seria impulsów.

W teorii każdy nowo wytworzony impuls powinien płynąć inną drogą (pomiędzy cząstkami proszków) i wytwarzać nowe połączenia pomiędzy spiekającym materiałem znajdującym się w grafitowej matrycy oraz pomiędzy grafitowymi stemplami, które stykają się z elektrodami (rys. 4). Efekt plastycznego płynięcia materiału zachodzi dzięki wywieranemu ciśnieniu przykładanemu pomiędzy stemple. Połączenie tego zjawiska z procesami dyfuzji (wywoływanymi przez ciepło Joule'a) umożliwia uzyskanie materiału o porowatości mniejszej niż 1%. Bardzo często pomiędzy spiekaną próbkę a matrycę i stemple wkładany jest grafitowy papier. Zapewnia to dobrą elektryczną przewodność pomiędzy wszystkimi częściami układu. Rozwiązanie takie powoduje jednak czasem niepożądane nawęglenie warstwy wierzchniej spiekanych elementów.



Rys. 4. Schemat powstawania wyładowań mikroplazmowych pomiędzy cząstkami proszku oraz miejsca wydzielania się ciepła Joule'a wg [13, 17, 18]

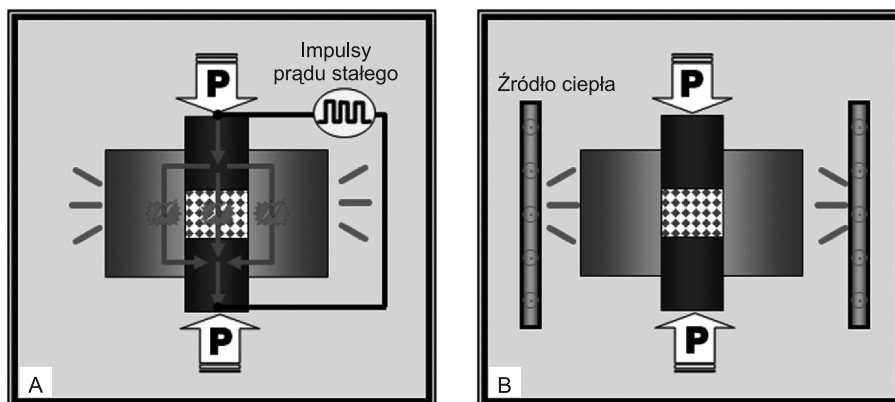
Fig. 4. Formation of micro-plasma discharges between the powder particles and regions where Joule heat is released [13, 17, 18]

W metodzie SPS tlenkowe powierzchnie cząstek proszków są znacznie łatwiej redukowane (głównie przez występującą punktowo wysoką temperaturę, która powoduje ich odparowanie). Również szybciej (tzn. w niższych temperaturach) następuje zjawisko ak-

tywacji spiekania w porównaniu z tradycyjnymi procesami spiekania. Pozwala to m.in. na przeprowadzanie procesu w temperaturze niższej o 200 do 500°C niż dla klasycznych metod. Te wszystkie wyżej wymienione efekty pozwalają ponadto na bardzo szybkie przeprowadzenie całego procesu. Nagrzewanie materiału wraz z jego izotermicznym spiekaniem dla tej metody zawiera się zwykle w zakresie od 5 do 20 minut. Na dodatek w procesie SPS można stosować znaczne szybkości nagrzewania materiału sięgające nawet 1000°C/min. Pozwala to na spiekanie nanokrystalicznych proszków bez efektu rozrostu ziarna.

## 5. Porównanie metody SPS i HP

Proces SPS w literaturze najczęściej porównywany jest z technologią prasowania na gorąco (HP – *Hot Press*). Na rys. 5 widać podstawową różnicę pomiędzy tymi metodami – wynika ona ze sposobu dostarczania ciepła do spiekanego materiału. W przypadku techniki SPS ciepło wytworzone w wyniku przepływu prądu „rozchodzi się” od próbki na zewnątrz układu, natomiast pierwsze rozwiązania stosowane w urządzeniach HP polegały na podgrzewaniu całego układu zewnętrznym źródłem ciepła. Proces ten był więc znacznie wolniejszy niż SPS. Rozwój techniki HP sprawił, że rozwiązania takie są już rzadko stosowane. Obecnie klasyczne urządzenia przeznaczone do prasowania na gorąco działają na podobnej zasadzie, jak urządzenia do SPS. Różnica polega tylko na tym, że zamiast grzania „impulsowego” przez grafitową matrycę płynie prąd stały (rzadziej zmienny) o kontrolowanym natężeniu. Maksymalna szybkość nagrzewania zależy od konstrukcji urządzenia i wielkości matrycy. Z reguły znacznie przekracza 100°C/min, a całkowita długość cyklu jest podobna, jak w metodzie SPS.

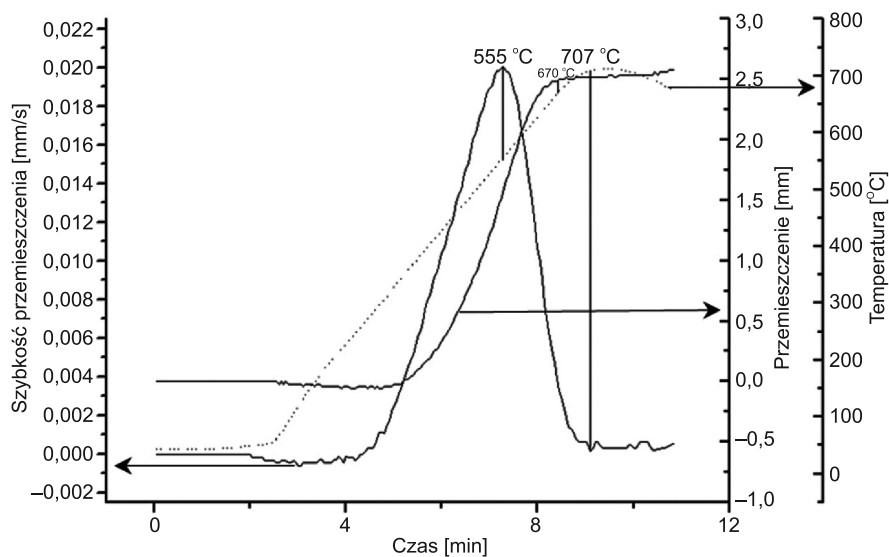


Rys. 5. Schematyczne przedstawienie metody SPS i pierwszych rozwiązań HP umożliwiające ich wzajemne porównanie oraz zaobserwowanie podstawowej różnicy polegającej na sposobie dostarczania ciepła potrzebnego do przeprowadzenia procesu spiekania, wg [17]

Fig. 5. Schematic representation of methods of SPS and first model of HP for their mutual comparison, and observe the basic difference consisting in the way the heat required to carry out the sintering process [17]

## 6. Wyniki badań własnych

W prezentowanym artykule metoda SPS została wykorzystana do spiekania niskostopowego proszku żelaza (zawierając dodatek 3% chromu oraz 0,5% molibdenu, o handlowej nazwie AstaloyCrM i dostarczonego przez firmę Höganäs) modyfikowanego 1% dodatkiem krzemu wprowadzanego na drodze mielenia (MA – Mechanical Alloying, proces prowadzono w urządzeniu firmy Fritsch, model Pulverisette 6, w naczyniu o pojemności 500 ml, w próżni, używano kul o średnicy 10 mm, stosunek masy kul do masy proszku wynosił 10:1, prędkość obrotowa 500 obr/min, czas mielenia 10 h). Proces ten oprócz homogenizacji materiału powoduje również rozdrobnienie cząstek proszku oraz ich umocnienie (niekiedy nawet bardzo znaczne). Efekty te praktycznie wykluczają możliwość zastosowania klasycznych metod formowania wyrobów w procesie prasowania matrycowego (cząstki nie odkształcają się plastycznie, efektem tego jest brak możliwości ich punktowego zgrzewania i konsolidacji), a następnie spiekania. Silnie odkształcone/umocnione proszki można formować metodą prasowania na zimno w sztywnej matrycy jedynie pod warunkiem dodania do proszku odpowiedniego lepiszcza (który jednak w początkowym etapie spiekania musi zostać w całości usunięty z materiału, aby zapewnić uzyskanie odpowiedniej gęstości wyrobu). Na rys. 6 przedstawiono przykładowy zapis, jaki otrzymywany jest w trakcie wykonywania pomiarów na urządzeniu SPS. Zarejestrowano informacje

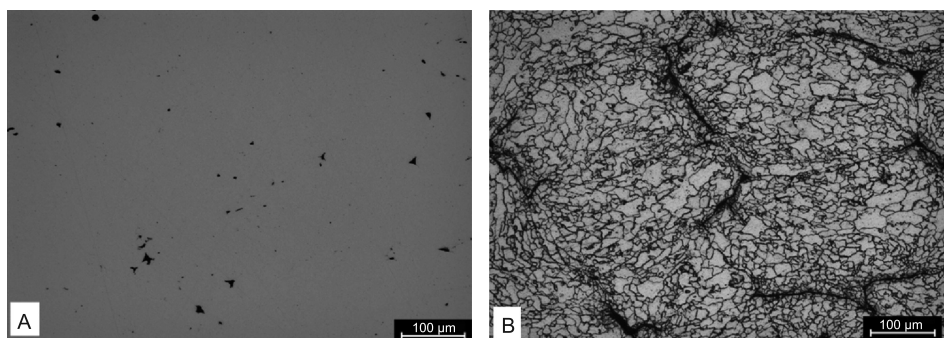


Rys. 6. Przesunięcie stempli w trakcie procesu SPS, kinetyka tego efektu oraz profil temperaturowy zarejestrowane dla mieszanki proszku AstaloyCrM z 1% dodatkiem krzemu po procesie stapiania mechanicznego

Fig. 6. Stamps displacement during SPS process, the kinetics of this effect and the temperature profile recorded for AstaloyCrM powder with the addition of 1% of silicon after mechanical alloying process

o przemieszczeniu się stempli w trakcie spiekania, kinetyce tego efektu oraz profil temperatury. Jak widać przemieszczenie stempli (zadane ciśnienie prasowania w trakcie procesu wynosiło 60 MPa) ustąpiło w temperaturze około 707°C, co świadczy o zakończeniu efektu zagęszczania materiału. Cały proces nagrzewania trwał niespełna 8 minut, a następnie rozpoczął się etap chłodzenia. Na podstawie uzyskanych wyników jednoznacznie widać, że proces spiekania przy zastosowaniu tej metody odbywa się w znacznie niższej temperaturze (o około 400–500°C) niż w konwencjonalnych rozwiązaniach (np. podczas spiekania z użyciem pieców z kontrolowaną atmosferą, gdzie należałoby proces spiekania dla tego rodzaju materiału przeprowadzić w temperaturze pomiędzy 1100–1200°C).

Na rysunku 7 przedstawiono mikrostrukturę spieku Astaloy CrM z 1% dodatkiem Si po konsolidacji metodą SPS. Można zaobserwować, że materiał charakteryzuje się znikomą porowatością, a tym samym potwierdzono, że metoda SPS pozwala na uzyskanie porowatości mniejszej niż 1% (rys. 7a). Ponadto po wytrawieniu zglądu uwidocznione zostały granice cząstek proszków oraz wielkości ziaren spieku (rys. 7b).



Rys. 7. Mikrostruktura spieku AstaloyCrM + 1% Si: a) zgląd nietrawiony b) trawiony nitalem  
Fig. 7. As-sintered microstructure of AstaloyCrM + 1% Si: a) un-etched, b) etched with natal

## 7. Podsumowanie

Metoda SPS jest jednym z najnowszych procesów umożliwiających konsolidację materiałów sypkich. Znalazła ona zastosowanie praktycznie do każdego rodzaju materiału (np. metalowego, ceramicznego, kompozytowego, polimerowego, a nawet materiałów gradientowych) niezależnie od wielkości cząstek. Poprzez unikalne parametry, takiej jak np. duża szybkość nagrzewania i krótki czas procesu rozwiązanie to pozwala to na spiekanie nanokrystalicznych proszków bez efektu rozrostu ziarna. Na przykładzie zaprezentowanych wyników badań (mikrostruktur oraz krzywych zarejestrowanych w trakcie procesu) udowodniono, że metoda SPS umożliwia spiekanie materiałów po procesie stopowania mechanicznego (o drobnych i utwardzonych cząstkach), kiedy klasyczne metody formatowania, np. prasowania matrycowego, niejednokrotnie okazują się nieskuteczne. Co więcej proces SPS umożliwia przeprowadzenie zabiegu spiekania w temperaturach znacznie niższych (nawet o 500°C) w porównaniu z konwencjonalnymi rozwiązaniami (np. spiekaniem w piecach). Dodatkowo metoda SPS pozwala na uzyskanie materiału o porowatości < 1%.

Badania były realizowane dzięki wsparciu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w ramach realizowanego projektu badawczego nr N N508393237.

## Literatura

- [1] Munir Z.A., Anselmi-Tamburini U., Ohyanagi M., *The effect of electric field and pressure on the synthesis and consolidation of materials: a review of the spark plasma method*, Journal of Material Science, 41, 2006, 763-777.
- [2] Pellizzari M., Fedrizzi A., Zadra M., *Spark plasma co-sintering of hot work and high speed steel powders for fabrication of a novel tool steel with composite microstructure*, Powder Technology, 3, 213, 2011, 292-299.
- [3] Taylor G.F., US Patent No. 1,896,854, 1933.
- [4] Taylor G.F., US Patent No. 1,896,853, 1933.
- [5] Cremer G.D., US Patent No. 2,355,954, 1944.
- [6] Lenel V.F., Trans. AIME 203, 1955, 158.
- [7] Boesel R.W., Jacobson M.I., Yoshioka I.S., Proc. Fall Powder Met. Conf. Metal Powder Industries Federation, New York 1970, 75-99.
- [8] Goetzel C.G., Demarchi V.S., Powder Met. Int. 3, 1971, 80.
- [9] Inoue K., US Patent 3,340,052, 1967.
- [10] Inoue K., US Patent 3,656,946, 1972.
- [11] [www.scm-sps.com](http://www.scm-sps.com).
- [12] [http://www.ing.unitn.it/~ltm/equipment\\_eng.php](http://www.ing.unitn.it/~ltm/equipment_eng.php).
- [13] Tokita M., *Mechanism of spark plasma sintering*, Sumitomo Coal Mining Company, 1-11, <http://xa.yimg.com/kq/groups/3862917/2054596553/name/sumitomo+review-Spark-Plasma-Sintering.pdf>.
- [14] [http://www.thermaltechnologyinc.com/index.php?option=com\\_content&view=article&id=84](http://www.thermaltechnologyinc.com/index.php?option=com_content&view=article&id=84).
- [15] Song X., Liu X., Zhang J., *Neck formation and self-adjusting mechanism of neck growth of conducting powders in spark plasma sintering*, Journal of the American Ceramic Society, 2, 89, 2006, 494-500.
- [16] Zhaohui Z., Fuchi W., Lin W., Shukui L., Osamu S., *Sintering mechanism of large-scale ultrafine-grained cooper prepared by SPS method*, Materials Letters, 62, 2008, 3987-3990.
- [17] [imt.cbucc.com/pds\\_file/2005061364022.ppt](http://imt.cbucc.com/pds_file/2005061364022.ppt).
- [18] Tokita M., *Industrial applications for functionally graded materials fabricated by spark plasma sintering (SPS) systems*, Science and Technology, 2000, 251-256.





MACIEJ KRASIŃSKI\*, MAREK STODULSKI\*\*, ANDRZEJ TROJNACKI\*

## PRZEGLĄD TECHNICZNYCH MOŻLIWOŚCI WYRÓWNYWANIA NAPRĘŻEŃ W ŚCIANKACH NACZYŃ CIŚNIENIOWYCH

### MODIFICATION OF STRESS DISTRIBUTION IN WALLS OF PRESSURE VESSELS

#### Streszczenie

W artykule przedstawiono problem wyrównywania naprężeń w grubościennych ściankach walcowych naczyń ciśnieniowych przez wprowadzenie podczas ich formowania kontrolowanych naprężeń wstępnych. Dla kilku typowych procesów technologicznych podano efektywne wzory na wciski międzywarstwowe, siły naciągu warstw lub ciśnienie przepięzania. Realizacja tak określonych parametrów zapewnia korzystniejszy, bardziej wyrównany na grubości ścianki rozkład naprężeń zastępczych pod obciążeniem niż w przypadku ścianki warstwowej lub litej bez dodatkowych zabiegów. W rezultacie obniżeniu ulega maksymalne wyężenie ścianki, co umożliwia wykonanie jej z tańszego materiału o niższych własnościach wytrzymałościowych. Rozwiązanie analityczne zilustrowano przykładem numerycznym.

*Słowa kluczowe: wielowarstwowe naczynia ciśnieniowe, wyrównywanie naprężeń, symulacja MES*

#### Abstract

The paper deals with stress modification in thick-walled pressure vessels realized by means of specific initial stresses introduced into the structure during the manufacturing process. Several technologies were investigated with the aim to determine the initial interlayer interferences, tension forces of layers or autofrettage pressure. Realization of such determined technological parameters leads to better, more equalized stress distribution in the vessel wall under operating pressure with respect to solid or multi-layer wall without additional treatment. As a result the maximum equivalent stress of the wall decreases and cheaper material of lower strength properties may be applied. Analytical solution is illustrated with a numerical example.

*Keywords: multi-layer pressure vessels, modification of equivalent stress, FEM simulation*

\* Dr inż. Maciej Krasiniski, dr inż. Andrzej Trojnacki, Instytut Konstrukcji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

\*\* Dr inż. Marek Stodulski, Instytut Fizyki Jądrowej, Polska Akademia Nauk, Kraków.

## 1. Wstęp

Rozwój przemysłu, przede wszystkim chemicznego, spowodował zapotrzebowanie na duże, grubościennie naczynia, mogące przenieść ciśnienie kilkuset MPa. Przy ich budowie tradycyjne technologie, odkuwanie lub zwijanie płaszczu z grubej blachy, stały się kosztowne i nastroczały trudności techniczne. Skłoniło to konstruktorów do poszukiwania nowych rozwiązań, które poszły w kierunku wykonywania walcowej części zbiornika jako warstwowej. Stosowane są przy tym różne metody formowania warstwowego płaszczu.

Jedną z zalet tych naczyń jest możliwość wprowadzenia do ścianki sprężystych naprężeń wstępnych już podczas procesu technologicznego. Pochodzą one od nacisków międzywarstwowych, wywołanych przez zastosowanie odpowiednich wcisków lub naciągów przy zakładaniu kolejnych warstw. Przez manewrowanie tymi naciskami można w pewnym stopniu wpływać na rozkład naprężeń zastępczych pod obciążeniem, który powstaje w wyniku superponowania się naprężeń wstępnych z roboczymi (od ciśnienia i temperatury).

Omawiane zagadnienie jest znane od dawna, gdyż pierwsze opracowania i patenty na temat zbiorników wielowarstwowych pojawiły się 70 lat temu [15]. Wielowarstwowe powłoki skurczowe były rozpatrywane np. w pracach [3, 8, 10, 11]. Optymalizację zbiornika przepięzanego i trójwarstwowego skurczowego ze względu na obciążenia cykliczne przeprowadzono w [4]. Metodykę obliczania powłok zwijanych podano w [9], gdzie dodatkowo przedstawiono niektóre technologiczne i ekonomiczne problemy związane z wykonawstwem powłok warstwowych. Niniejszy artykuł zawiera zbiorczą analizę technicznych możliwości wyrównywania naprężeń w walcowych ściankach wysokociśnieniowych powłok wielowarstwowych. Została ona wykonana dla typowych procesów technologicznych, ze szczególnym uwzględnieniem oryginalnej polskiej metody rozłaczania [14].

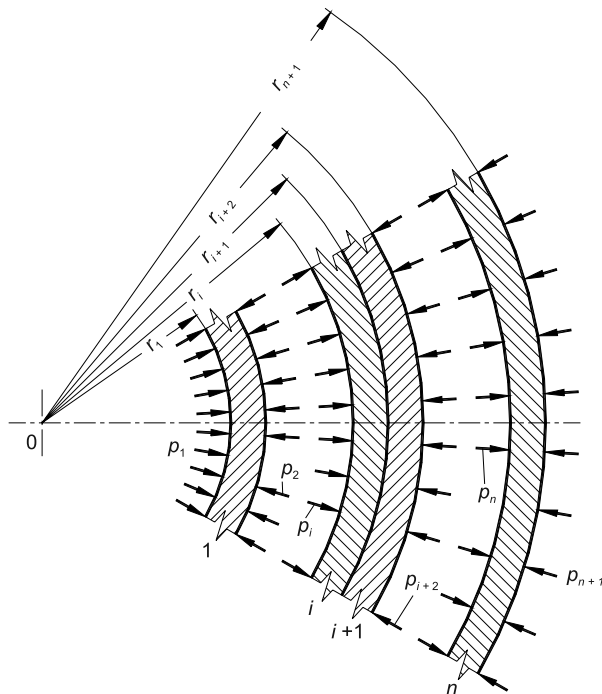
Na podstawie znanych rozwiązań dla cylindrów grubościennych w zakresie sprężystym określono naciski zapewniające rozkład naprężeń zastępczych korzystny z punktu widzenia pracy konstrukcji. Ponadto w celu porównania przedstawiono możliwość polepszenia rozkładu naprężeń zastępczych w ściance litej przez zastosowanie procesu przepięzania (autofretażu). Rozwiązanie analityczne uzupełniono przykładem obliczeniowym, ilustrującym korzyści wynikające z prowadzenia procesu technologicznego zgodnie z podanymi zaleceniami. W przypadku zbiornika rozłaczanego wykonano numeryczną weryfikację rozwiązania analitycznego z uwzględnieniem rzeczywistych własności materiału warstw, tarcia na powierzchni styku i efektów kontaktowych.

## 2. Parametry modyfikacji naprężeń na grubości ścianki

Teoretyczne rozkłady naprężeń w zbiorniku podają dla zakresu sprężystego wzory Lamego [12], zgodnie z którymi sprowadzenie naprężeń zastępczych  $\sigma_0$  w wielowarstwowej ściance do dowolnej, ciągłej wzdłuż promienia funkcji  $k(r)$  jest niemożliwe. Odpowiednie warunki mogą być postawione jedynie dla pewnych punktów na grubości ścianki, na przykład dla punktów leżących na wewnętrznych promieniach  $r_i$  warstw (rys. 1):

$$\sigma_0(r_i) = k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę warstw, a  $k_i$  zadane wartości naprężeń zastępczych.



Rys. 1. Wielowarstwowa ścianka naczyń ciśnieniowego – numeracja warstw

Fig. 1. Multi-layer wall of pressure vessel – numbering of layers

W wielu przypadkach ścianki zbiorników, zastosowanych jako osłony wysokociśnieniowych aparatów chemicznych, poddane są działaniu nierównomiernego rozkładu temperatury  $t(r)$ . Sposób uwzględnienia dodatkowego obciążenia termicznego we wzorach na naprężenia można znaleźć np. w [7]. Dla najczęściej stosowanego logarytmicznego opisu zależności temperatury od promienia:

$$t(r) = t_z + \frac{\ln \frac{r_{n+1}}{r}}{\ln \frac{r_{n+1}}{r_1}} (t_w - t_z) \quad (2)$$

naprężenia promieniowe  $\sigma_{r,i}$  i obwodowe  $\sigma_{\theta,i}$  na wewnętrznych promieniach warstw  $r_i$  wynoszą:

$$\sigma_{r,i} = \frac{r_1^2 p_1 - r_{n+1}^2 p_{n+1}}{r_{n+1}^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_{n+1}^2 (p_1 - p_{n+1})}{r_{n+1}^2 - r_1^2} \frac{1}{r_i^2} - \frac{E\alpha(t_w - t_z)}{2(1-\nu) \ln \frac{r_{n+1}}{r_1}} \left[ \ln \frac{r_{n+1}}{r_i} + \frac{r_1^2}{r_{n+1}^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_{n+1}^2}{r_i^2} \right) \ln \frac{r_{n+1}}{r_1} \right] \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta,i} = \frac{r_1^2 p_1 - r_{n+1}^2 p_{n+1}}{r_{n+1}^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_{n+1}^2 (p_1 - p_{n+1})}{r_{n+1}^2 - r_1^2} \frac{1}{r_i^2} + \frac{E\alpha(t_w - t_z)}{2(1-\nu) \ln \frac{r_{n+1}}{r_1}} \left[ 1 - \ln \frac{r_{n+1}}{r_i} - \frac{r_1^2}{r_{n+1}^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_{n+1}^2}{r_i^2} \right) \ln \frac{r_{n+1}}{r_1} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

gdzie  $E$ ,  $\nu$  i  $\alpha$  oznaczają odpowiednio moduł Younga, stałą Poissona i współczynnik rozszerzalności liniowej (wartości średnie), natomiast  $t_w$ ,  $p_1$ , i  $t_z$ ,  $p_{n+1}$  temperatury i ciśnienia na promieniach skrajnych  $r_1$  i  $r_{n+1}$ . Powyższe wzory są zapisane dla płaskiego stanu odkształcenia ( $\varepsilon_z = 0$ ), co jest uzasadnione warunkami procesu technologicznego.

Po zastosowaniu do (1) hipotezy wyteźeniowej największych naprężeń stycznych (Tresca-Guesta) otrzymuje się rekurencyjny wzór na międzywarstwowe naciski (dodatnie) w obciążonym zbiorniku:

$$p_{i+1} = p_i + \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2r_{i+1}^2} \left\{ \frac{E\alpha(t_w - t_z)}{2(1-\nu) \ln \frac{r_{n+1}}{r_1}} \left[ 1 - \frac{2r_{n+1}^2 r_1^2}{(r_{n+1}^2 - r_1^2) r_i^2} \ln \frac{r_{n+1}}{r_1} \right] - k_i \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Równania (5) mogą być wykorzystane do korygowania rozkładu naprężeń zastępczych w ściance. Gdy są znane takie parametry pracy zbiornika, jak: ciśnienia wewnętrzne i zewnętrzne, stałe materiałowe, różnica temperatur  $t_w - t_z$  oraz ustalone promienie skrajne i grubości warstw, ostatni z wyliczonych nacisków  $p_{n+1}$  jest równocześnie nowym ciśnieniem zewnętrznym dla zbiornika ze zmodyfikowanym rozkładem naprężeń. Ciśnienie to przeważnie różni się od wyjściowego, co oznacza, że aby spełnić założony rozkład  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), naczynie musi pracować przy nieco innej różnicy ciśnień niż zadana. Międzywarstwowe naciski wstępne  $q_i$  w zbiorniku nieobciążonym można obliczyć, odciążając go sprężyscie od stanu (5) o naprężenia promieniowe (3):

$$q_i = p_i - |\sigma_{r,i}|, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (6)$$

Z technicznego punktu widzenia największe znaczenie ma wyrównanie naprężeń zastępczych wzdłuż promienia lub ich ograniczenie w warstwach skrajnych, narażonych dodatkowo na działanie czynnika chemicznie aktywnego. W zakresie sprężystym maksymalna wartość  $\sigma_0$  jest osiągana w warstwie wewnętrznej, podczas gdy pozostałe fragmenty ścianki są niedociążone. Znaczną poprawę rozkładu naprężeń można osiągnąć, przyjmując warunek równych wyteżeń na wewnętrznych promieniach warstw (rys. 2):

$$\sigma_0(r_i) = k = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Dla  $n$ -warstwowego zbiornika o znanych wartościach  $r_1$ ,  $p_1$ ,  $r_{n+1}$ ,  $p_{n+1}$  oraz grubościach warstw otrzymuje się wtedy z (5) (po pominięciu wpływu temperatury)  $n - 1$  równań:

$$r_{i+1}^2 (r_{i+2}^2 - r_{i+1}^2) p_i - [r_{i+2}^2 (2r_{i+1}^2 - r_i^2) - r_{i+1}^4] p_{i+1} + r_{i+2}^2 (r_{i+1}^2 - r_i^2) p_{i+2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (8)$$

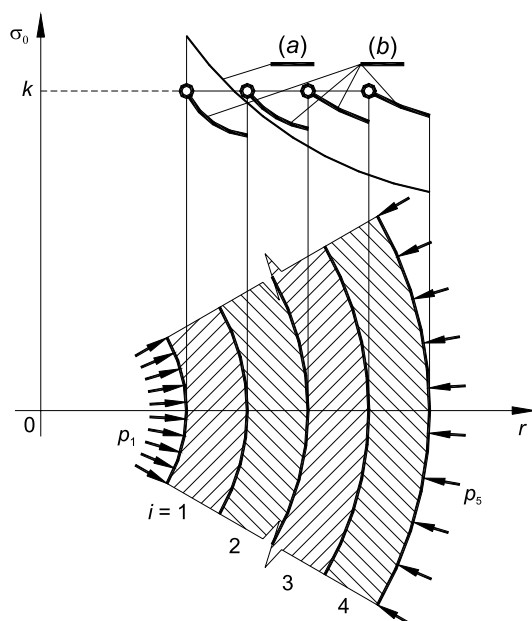
które służą do wyznaczenia  $n - 1$  niewiadomych nacisków  $p_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ). Naciski  $q_i$  w zbiorniku nieobciążonym są następnie określane ze wzoru (6).

Naprężenia zastępcze na wewnętrznych powierzchniach warstw są sobie równe i wynoszą:

$$\sigma_0(r_i) = \frac{2(p_i - p_{i+1})r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

gdzie zgodnie z (6) zachodzi związek:

$$p_i - p_{i+1} = |\sigma_{r,i}| - |\sigma_{r,i+1}| + q_i - q_{i+1} \quad (10)$$



Rys. 2. Ilustracja warunku równych wyężeń na wewnętrznych promieniach warstw. Rozkład naprężenia zastępczego  $\sigma_0$ : (a) – dla zbiornika bez naprężeń wstępnych, (b) – wyrównanego punktowo na grubości ścianki

Fig. 2. Condition of equal equivalent stress at the inner radii of layers. Distribution of equivalent stress  $\sigma_0$ : (a) – for the vessel without initial stress, (b) – modified pointwise along the thickness of the wall

Osobny problem stanowi dobór grubości warstw. Przy ustalonych promieniach skrajnych istnieje pewien optymalny podział grubości ścianki, który zapewnia równe i najmniejsze wyężenie na wewnętrznych promieniach warstw. Postępując jak w [7], można go otrzymać dla najprostszego przypadku, jakim jest zbiornik dwuwarstwowy, obciążony tylko ciśnieniem wewnętrznym  $p_1$ . Warunek (7) jest spełniony na promieniach  $r_1$  i  $r_2$ , gdy zostanie wprowadzony nacisk międzywarstwowy:

$$p_2 = \frac{r_2^2(r_3^2 - r_2^2)p_1}{r_3^2(r_2^2 - r_1^2) + r_2^2(r_3^2 - r_2^2)} \quad (11)$$

Naprężenia zastępcze w tych punktach są równe:

$$\sigma_0(r_1) = \sigma_0(r_2) = \frac{2r_2^2 r_3^2 p_1}{r_3^2 (r_2^2 - r_1^2) + r_2^2 (r_3^2 - r_2^2)} \quad (12)$$

i osiągają minimum ze względu na  $r_2$ , gdy  $d\sigma_0(r_2)/dr_2 = 0$ , czyli:

$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3} \quad (13)$$

Wyteżenie dla pierwszej warstwy zależy jedynie od różnicy nacisków na jej powierzchniach. A zatem wzór (13) zachowuje ważność dla dowolnie wybranych dwóch sąsiednich warstw. Przechodząc na zbiornik  $n$ -warstwowy, otrzymuje się zależności na promienie optymalnego podziału, wyrażone przez promienie skrajne:

$$r_{i\text{opt}} = \sqrt[n]{r_1^{n-i+1} r_{n+1}^{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (14)$$

Jeżeli wyteżenia dwóch sąsiednich warstw mają pozostawać w określonym stosunku

$$\frac{\sigma_0(r_i)}{\sigma_0(r_{i+1})} = \omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (15)$$

to podobny sposób postępowania doprowadzi do rekurencyjnego wzoru na promienie optymalnego podziału:

$$r_{i\text{opt}} = \sqrt[2p]{\omega_{i-1}^{p-1} \omega_i^{p-2} \dots \omega_{n-1}} \sqrt[r_{i-1}^{p-1} r_{n+1}], \quad p = n+2-i, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (16)$$

Aby poprawić rozkład naprężeń w litych ściankach naczyń grubościennych, przeprowadza się niekiedy tzw. autofretaż. Zabieg ten polega na jednorazowym przepięciu zbiornika ciśnieniem powodującym częściowe uplastycznienie jego ścianki. Wprowadzone w ten sposób odkształcenia trwale wywołują pewien rozkład naprężeń wstępnych, który nakłada się na naprężenia od ciśnienia roboczego. Dobór ciśnienia przepięcia  $p_p$  w ten sposób, aby wyrównać wyteżenia w kilku punktach na grubości ścianki (np. na promieniach skrajnych i granicznym, do którego sięgnęło uplastycznienie), jest niemożliwy. Przy założeniu idealnie sprężysto-plastycznej charakterystyki materiału udaje się natomiast tak dobrać  $p_p$ , aby zminimalizować różnicę wyteżeń na promieniach skrajnych. Jeżeli zbiornik częściowo uplastyczniony do promienia  $r_g$  ma pracować tylko na ciśnienie wewnętrzne  $p_1$ , różnica wyteżeń na promieniach skrajnych jest równa:

$$\mathfrak{R}(p_p, r_g) = p_1 - p_p + 0,5R_e - \frac{r_g^2}{r_{n+1}^2 - r_1^2} \left( p_p - R_e \ln \frac{r_g}{r_1} \right) \quad (17)$$

Ponieważ wielkości  $r_g$  i  $p_p$  są związane zależnością:

$$p_p = R_e \left( \ln \frac{r_g}{r_1} + \frac{r_{n+1}^2 - r_g^2}{2r_{n+1}^2} \right), \quad (18)$$

można z (17) wyrugować  $p_p$ :

$$\mathfrak{R}(r_g) = R_e \left[ \frac{r_g^4}{r_{n+1}^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_g^2}{r_{n+1}^2 - r_1^2} - 2r_{n+1}^2 \ln \frac{r_g}{r_1} \right] + 2r_{n+1}^2 p_1 \quad (19)$$

Funkcja  $\mathfrak{R}(r_g)$  osiąga swoje minimum ze względu na  $r_g$ , gdy  $d\mathfrak{R}(r_g)/dr_g = 0$ , skąd otrzymuje się:

$$r_{gopt} = \frac{\sqrt{r_1^2 + \sqrt{r_1^4 + 8(r_{n+1}^2 - r_1^2)r_{n+1}^2}}}{2} \quad (20)$$

Wzór (20) na optymalną wartość promienia granicznego pozwala wyznaczyć z (18) takie ciśnienie przepiężania, które zapewnia minimalną różnicę wyteżeń na promieniach skrajnych.

### 3. Rozwiązania analityczne dla typowych procesów technologicznych

Techniczne możliwości wprowadzenia kontrolowanych naprężeń wstępnych do walcowych ścianek warstwowych naczyń ciśnieniowych przeanalizowane zostaną dla kilku najbardziej rozpowszechnionych w przemyśle procesów technologicznych.

#### 3.1. Metoda skurczu termicznego

W przypadku formowania płaszczu z wykorzystaniem skurczu termicznego, warstwy spawa się w samodzielne powłoki, a następnie po przetoczeniu na odpowiedni wymiar nakładają na gorąco na siebie. Naprężenia wstępne pochodzą od wcisków międzywarstwowych, które zostaną określone ze wzorów Lamego w oparciu o analizę przemieszczeń pod wpływem nacisków  $q_i$ . Wcisk promieniowy (dodatni)  $\delta_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) jest różnicą zewnętrznego promienia warstwy  $i$ -tej oraz wewnętrznego ( $i+1$ ) przed połączeniem. Przechodząc z warstwą  $i$ -tą do stanu swobodnego, tzn. odciążając ją sprężycie od nacisków  $q_i$  i  $q_{i+1}$ , powoduje się przemieszczenie punktów na promieniu  $r_{i+1}$  o wartość:

$$u_i(r_{i+1}) = \frac{(1-\nu)(r_i^2 q_i - r_{i+1}^2 q_{i+1}) + (1+\nu)(q_i - q_{i+1})r_i^2}{E(r_{i+1}^2 - r_i^2)} r_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (21)$$

Podobnie odciążając warstwę ( $i+1$ ) do stanu  $q_{i+1} = q_{i+2} = 0$ , wywołuje się przemieszczenia punktów na jej wewnętrznym promieniu równym  $r_{i+1}$ :

$$u_{i+1}(r_{i+1}) = \frac{(1-\nu)(r_{i+1}^2 q_{i+1} - r_{i+2}^2 q_{i+2}) + (1+\nu)(q_{i+1} - q_{i+2})r_{i+2}^2}{E(r_{i+2}^2 - r_{i+1}^2)} r_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (22)$$

Wobec tego dodatnia wartość wcisku promieniowego wynosi:

$$\delta_{i+1} = u_{i+1}(r_{i+1}) - u_i(r_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (23)$$

a jej zastosowanie pozwala osiągnąć warunek równych wyteżeń na wewnętrznych promieniach warstw.

#### 3.2. Metoda nawijania po linii spiralnej i śrubowej

Metoda formowania zbiornika, polegająca na zwiżaniu jego płaszczu z cienkiej blachy po linii spiralnej lub śrubowej, wymaga znajomości siły naciągu taśmy nakładanej na wewnętrzną rurę rdzeniową. Położenie każdego nowego zwoju zmienia istniejący już rozkład

nacisków międzywarstwowych. Należy więc określić naciski wstępne przy zakładaniu każdej z warstw, które po nałożeniu się na siebie doprowadzą w gotowym płaszczu do stanu docelowego, zgodnie z założonym. Przy operacji nawijania ( $i + 1$ ) warstwy nacisk na jej zewnętrznej powierzchni  $q_{i+2} = 0$ , co ujawnia się między innymi spadkiem naprężeń promieniowych w wykonanej już części płaszczu ( $r_1 \leq r \leq r_{i+2}$ ) w stosunku do rozkładu (6). W szczególności na jej wewnętrznym promieniu  $r_{i+1}$  spadek ten wynosi:

$$\Delta\sigma_{r,i+1}^* = \frac{r_{i+2}^2}{r_{i+2}^2 - r_1^2} \left( \frac{r_1^2}{r_{i+1}^2} - 1 \right) q_{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (24)$$

Na tym etapie procesu technologicznego, na styku warstw  $i$ -tej oraz  $(i + 1)$ , należy więc wywołać nacisk:

$$q_{i+1}^* = q_{i+1} - |\Delta\sigma_{r,i+1}^*|, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (25)$$

Odpowiada mu naprężenie obwodowe:

$$\sigma_{\theta,i+1}^* = \frac{r_{i+2}^2 + r_{i+1}^2}{r_{i+2}^2 - r_{i+1}^2} q_{i+1}^*, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (26)$$

za pomocą którego można obliczyć siłę naciągu dla nawijania po linii spiralnej, przypadającą na jednostkę szerokości taśmy:

$$N_{i+1}^{sp} = \sigma_{\theta,i+1}^* g, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (27)$$

gdzie  $g$  oznacza grubość blachy. Przy nawijaniu blachy po linii śrubowej naprężenie obwodowe (26) należy transformować na kierunek osi taśmy jako główny i ostatecznie otrzymuje się:

$$N_{i+1}^{sr} = \frac{\sigma_{\theta,i+1}^*}{\cos^2 \alpha} g, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (28)$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem między osią taśmy i normalną do osi zbiornika.

### 3.3. Metoda Smitha

W metodzie Smitha warstwy dobudowuje się, nakładając je kolejno na wewnętrzną rurę rdzeniową i spawając szwami wzdłużnymi. Do obliczenia siły naciągu mają więc zastosowanie wzory (27). Różnica długości obwodów warstw, której likwidacja zapewni żądany nacisk  $q_{i+1}^*$ , wynosi:

$$\Delta l_{i+1opt} = \frac{\pi N_{i+1}^{sp} (r_{i+1} + r_{i+2})}{Eg}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (29)$$

przy czym wzór (29) jest zapisany dla promienia średniego nakładanej ( $i + 1$ ) warstwy.

W sprawdzonej praktycznie technologii dla tych zbiorników przyjmuje się równą szczylinę spoin wszystkich warstw, wynoszącą ok. 1,6 mm. Wielkość skurczu termicznego jednej spoiny można oszacować za pomocą przybliżonej zależności [2]:



$$\Delta l = \lambda S_{sr} \quad (30)$$

gdzie współczynnik  $\lambda = 0,10 - 0,17$  a  $S_{sr}$  oznacza średnią szerokość spoiny.

Dla geometrii rozpatrywanego złącza, przygotowanego do spawania zgodnie z zaleceniami normatywnymi,  $S_{sr} = 3,91$  mm, a przyjmując w (30) średnią wartość  $\lambda = 0,135$ , otrzymuje się  $\Delta l = 0,53$  mm. Każdą warstwę łączy się za pomocą 2 spoin wzdłużnych, stąd całkowity skurcz termiczny wszystkich warstw wynosi  $\Delta l_{i+1} = 2\Delta l = 1,06$  mm ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ).

### 3.4. Metoda rozłaczania

Plaszcz zbiornika jest formowany przez rozłaczanie kolejnych warstw ciśnieniem powodującym ich uplastycznienie, likwidację wstępnych luzów technologicznych i w związku z tym ostateczne scalenie ścianki [6, 13]. Proces rozpoczyna się od rozłoczenia przedostatniej warstwy (licząc od wnętrza – rys. 1) po umieszczeniu jej w zewnętrznej, ostatniej rurze szkieletowej i zwiększając następnie grubość ścianki przez dokładanie kolejnych warstw. W każdej warstwie pozostają więc po procesie technologicznym pewne naprężenia resztkowe [1], które należy uwzględnić w warunku jednakowego wyteżenia (7). Analiza procesu rozłaczania zostanie przeprowadzona przy założeniu idealnie sprężysto-plastycznego modelu dla materiału warstw oraz pominięciu tarcia na powierzchniach styku.

Po rozłoczeniu  $i$ -tej warstwy na jej wewnętrznej powierzchni o promieniu  $r_i$  resztkowe naprężenia promieniowe  $\sigma_{r_{i\text{reszt}}}$  są równe zero, a resztkowe naprężenia obwodowe w oparciu o warunek plastyczności Tresca-Guesta wynoszą:

$$\sigma_{\theta_{i\text{reszt}}} = R_{ei} \left( 1 - \frac{2\beta_i \ln \beta_i}{\beta_i^2 - 1} \right) \quad (31)$$

gdzie  $R_{ei}$  jest granicą plastyczności materiału tej warstwy, a dla uproszczenia zapisu wprowadzono oznaczenie:

$$\beta_i = \frac{r_{i+1}}{r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Warunek (8), zapewniający równe wyteżenie na wewnętrznych promieniach warstw, będzie obecnie miał postać:

$$\begin{aligned} & \beta_i^2 (\beta_{i+1}^2 - 1) p_i - [\beta_{i+1}^2 (2\beta_i^2 - 1) - \beta_i^2] p_{i+1} + \beta_{i+1}^2 (\beta_i^2 - 1) p_{i+2} + \\ & + 0,5(\beta_i^2 - 1)(\beta_{i+1}^2 - 1) [\sigma_{\theta_{i\text{reszt}}} - \sigma_{\theta_{i+1\text{reszt}}}] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (32)$$

Wstępne naciski promieniowe  $q_i$  można (po określeniu nacisków  $p_i$ ) obliczyć analogicznie do przypadku zbiornika z warstwami zakładanymi z wykorzystaniem skurczu termicznego, tzn. ze wzorów (6). Do wyznaczenia pośrednich (technologicznych) nacisków  $\tilde{q}_{i+1}$ , które należy wywołać przy rozłaczaniu  $i$ -tej warstwy na jej zewnętrznej powierzchni, posłuży równanie:

$$\tilde{q}_{i+1} = q_{i+1} - \Delta \sigma_{r_{i+1}}(\Delta q_i, r_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (33)$$

W równaniu (33) człon:

$$\Delta\sigma_{r_{i+1}}(\Delta q_i, r_{i+1}) = \frac{\prod_{j=i+1}^n \beta_j^2 - 1}{\prod_{j=i}^n \beta_j^2 - 1} q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (34)$$

uwzględniający zmianę nacisku  $q_{i+1}$  na promieniu  $r_{i+1}$  został wprowadzony w wyniku sprężystego odciążenia scalonej już części płaszcza (od  $r_i$  do  $r_{n+1}$ ) o ciśnienie  $\Delta q_i = -q_i$  na promieniu  $r_i$ .

Naciski  $\tilde{q}_{i+1}$  są uzyskiwane w procesie technologicznym przez stosowanie odpowiednich ciśnień rozłaczania  $P_i$ . W pierwszej kolejności zostaną podane zależności na graniczne ciśnienia rozłaczania, które zapewniają minimalny nacisk  $\tilde{q}_{i+1\min} = 0$  i nacisk  $\tilde{q}_{i+1\max}$ , największy możliwy do uzyskania. Aby przy zakładaniu  $i$ -tej warstwy otrzymać na jej zewnętrznym promieniu  $r_{i+1}$  zerowy nacisk  $\tilde{q}_{i+1} = 0$ , należy zastosować ciśnienie rozłaczania:

$$P_{i\min} = \frac{\left( \prod_{j=i}^n \beta_j^2 - 1 \right) \ln \beta_i}{(\beta_i^2 - 1) \prod_{j=i+1}^n \beta_j^2} R_{ei}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (35)$$

Ciśnienie to uplastycznia warstwę rozłaczaną na wskroś, a na jej styku z zewnętrzną powłoką wywołuje takie naciski, które po odciążeniu zespołu warstw od  $P_{i\min}$  wywołują na promieniu  $r_{i+1}$  wartość nacisku  $\tilde{q}_{i+1} = 0$ .

Największy nacisk, możliwy do uzyskania bez wprowadzania zmian nacisków już zrealizowanych na poprzednich etapach procesu technologicznego:

$$\tilde{q}_{i+1\max} = \frac{\prod_{j=i+1}^n \beta_j^2 - 1}{\prod_{j=i}^n \beta_j^2 - 1} \left[ (\beta_i^2 - 1) \frac{R_{ei+1}}{2} - R_{ei} \ln \beta_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (36)$$

wywoła ciśnienie liczone w oparciu o warunek plastyczności Tresci-Guesta:

$$P_{i\max} = \bar{p}_i + \bar{p}_{i+1} = R_{ei} \ln \beta_i + \frac{\prod_{j=i+1}^n \beta_j^2 - 1}{2 \prod_{j=i+1}^n \beta_j^2} R_{ei+1} \quad (37)$$

gdzie  $\bar{p}_i$  oraz  $\bar{p}_{i+1}$  oznaczają odpowiednio nośność graniczną rozłaczanej warstwy  $i$ -tej oraz nośność sprężystą pakietu warstw już scalonych ( $r_{i+1} \leq r \leq r_{n+1}$ ) dla  $R_{ei+1}$ . Warstwa  $i$ -ta jest uplastyczniona na wskroś, a powłoka zewnętrzna napięta ciśnieniem wywołującym na jej wewnętrznej powierzchni sprężysty stan graniczny. Odpowiada to przypadkowi cylindra

grubościennego, częściowo uplastycznionego do promienia  $r_g = r_{i+1}$ . Wiadomo, że po odciążeniu takiego zbiornika największe resztkowe naprężenia promieniowe (ściskające) – w rozważanym przypadku naciski  $\tilde{q}_{i+1}$  – występują na granicy stref sprężystej i plastycznej, a więc na promieniu  $r_g$ .

Znając żądany rozkład (33) nacisków pośrednich  $\tilde{q}_{i+1}$ , można określić ciśnienia rozciągania  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), które je wywołają:

$$P_i = \frac{\prod_{j=i}^n \beta_j^2 - 1}{(\beta_i^2 - 1) \prod_{j=i+1}^n \beta_j^2} (R_{ei} \ln \beta_i + \tilde{q}_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (38)$$

W opisany wyżej sposób można oczywiście realizować naciski  $\tilde{q}_{i+1}$  tylko z przedziału  $0 \leq \tilde{q}_{i+1} \leq \tilde{q}_{i+1\max}$ . Jeśli jest wymagany nacisk większy, należy przyjąć wyższą granicę plastyczności  $R_{ei+1}$  warstwy ( $i+1$ ). Jest ona do wyliczenia z zależności:

$$R_{ei+1} = \frac{2}{\beta_i^2 - 1} \left[ R_{ei} \ln \beta_i + \frac{\prod_{j=i}^n \beta_j^2 - 1}{\prod_{j=i+1}^n \beta_j^2 - 1} \tilde{q}_{i+1} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (39)$$

Stosując podaną metodę, uzyskuje się teoretycznie dowolnie duże naciski, jednak praktycznie są one ograniczone własnościami wytrzymałościowymi dostępnych materiałów. Z postaci wzoru (39) wynika, że granice plastyczności  $R_{ei}$  materiału warstw będą narastać ze wzrostem wskaźnika  $i$ , przesuwając się w kierunku warstw położonych bardziej na zewnątrz.

### 3.5. Metoda przepięzania

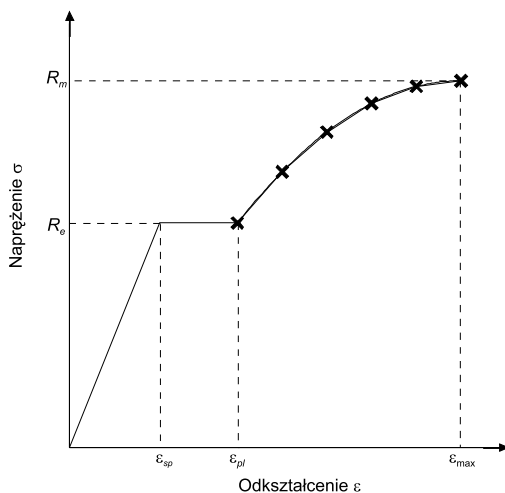
Ciśnienie przepięzania jest do określenia z równania (18). Wyteżenia na kolejnych charakterystycznych promieniach tak zmodyfikowanego zbiornika podają zależności:

$$\begin{aligned} \sigma_0(r_1) &= \frac{2r_{n+1}^2}{r_{n+1}^2 - r_1^2} (p_1 - p_p) + R_e, & \sigma_0(r_g) &= \frac{2r_1^2 r_{n+1}^2}{(r_{n+1}^2 - r_1^2) r_g^2} (p_1 - p_p) + R_e, \\ \sigma_0(r_{n+1}) &= \frac{2r_1^2}{r_{n+1}^2 - r_1^2} (p_1 - p_p) + \frac{2r_g^2}{r_{n+1}^2 - r_g^2} \left( p_p - R_e \ln \frac{r_g}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

Należy zwrócić uwagę, że parametry procesu technologicznego dla metody przepięzania zostały wyprowadzone przy założeniu idealnie sprężysto-plastycznego schematu dla materiału zbiornika. Rzeczywiste własności wytrzymałościowe materiału (wzmocnienie) spowodują odstępstwa od przyjętego warunku minimalizacji różnicy wyteżeń na promieniach skrajnych.

#### 4. Numeryczne modelowanie procesów rozłaczania i przepięcia

Na płaszcz zbiornika przyjęto stal stopową specjalną 16Mo3 do pracy w podwyższonej temperaturze, często stosowaną w budowie wysokociśnieniowej aparatury chemicznej. Właściwości wytrzymałościowe tej stali zostały ustalone w próbach jednoosiowego rozciągania. Z odcinka rury  $\varnothing 406 \times 20$  mm przygotowano po 7 cylindrycznych próbek, wyciętych w kierunku obwodowym i osiowym. Stałe materiałowe:  $R_m = 518,43$  MPa,  $R_e = 317,29$  MPa,  $\varepsilon_{\max} = 0,1750$  i  $\varepsilon_{pl} = 0,0127$ , obliczono jako średnie arytmetyczne z wszystkich testów dla próbek obwodowych, uznanych jako bardziej odpowiednie dla rozważanych w pracy zagadnień. Dla zakresu sprężystego przyjęto moduł Younga  $E = 2,1 \times 10^5$  MPa. Kształt otrzymanych doświadczalnie zależności  $\sigma = f(\varepsilon)$  sugeruje dokonanie aproksymacji wykresu rozciągania powyżej granicy plastyczności za pomocą paraboli, przechodzącej przez punkt o współrzędnych  $\varepsilon_{pl}$ ,  $R_e$  i posiadającej maksimum w punkcie  $\varepsilon_{\max}$ ,  $R_m$  (rys. 3). Do obliczeń numerycznych parabolę zastąpiono pięcioma odcinkami o jednakowej długości w rzucie na oś  $\varepsilon$ . Taka aproksymacja daje możliwość bezpośredniego wprowadzenia do modelowania numerycznego nieliniowych własności materiału w pakiecie metody elementów skończonych ANSYS, który wykorzystano w obliczeniach. Przyjęto, że materiał charakteryzuje się tzw. multiliniowym wzmocnieniem kinematycznym z włączonym efektem Bauschingera.



Rys. 3. Aproksymacja rzeczywistej krzywej rozciągania  $\sigma = f(\varepsilon)$  materiału płaszczca (w skali skażonej)

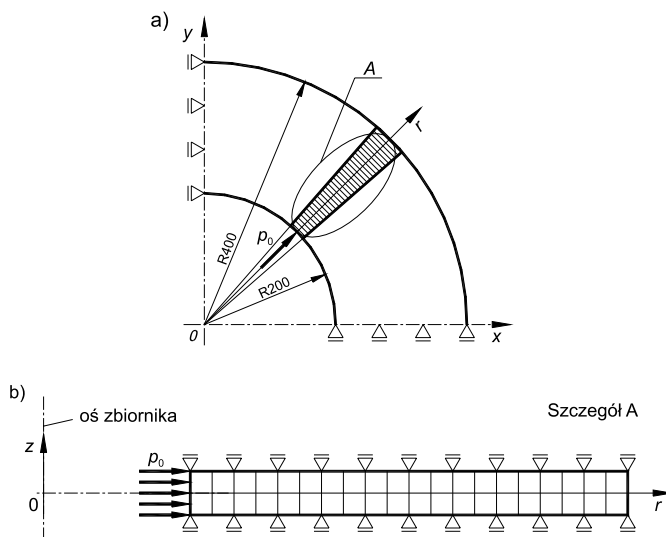
Fig. 3. Approximation of the nominal stress-strain curve  $\sigma = f(\varepsilon)$  for the vessel wall material (not to scale)

Dzięki osiowej symetrii zbiornika modelowanie geometrii w MES jest niezwykle proste, zwłaszcza dotyczy to płaszczca jednolitego (przepięzanego). Do rozważań przyjęto plaster płaszczca wycięty dwoma płaszczyznami równoległymi i jednocześnie prostopadłymi do jego osi. Obliczenia numeryczne zostały wykonane przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia, co jest uzasadnione, gdyż cylindryczna część zbiorników ma zazwyczaj znaczną dłu-

gość, wynoszącą niekiedy kilkanaście metrów. Skażony skalą model MES wraz z warunkami brzegowymi i obciążeniem przedstawiono na rys. 4.

Wycinek płaszcza (rys. 4b) podzielono na kwadratowe elementy skończone 8-węzłowe PLANE183 o wymiarach boku 0,4 mm z opcją osiowej symetrii. Dla ścianki cylindra o grubości  $g = 200$  mm siatka o tej gęstości jest w zupełności wystarczająca. Przy pięciokrotnym zwiększeniu gęstości siatki różnica w naprężeniach zastępczych spada poniżej 0,4%. Dodatkowo należy nadmienić, że zbyt małe wymiary elementów skończonych prowadzą do powstawania różnych błędów włącznie z utratą zbieżności zadania, co uniemożliwia jego rozwiązanie. Dotyczy to zwłaszcza modelu zbiornika warstwowego i jest spowodowane bardzo dużymi odkształceniami, niezbędnymi do przeprowadzenia procesu rozłaczania.

Geometrię zbiornika rozłaczanego analizowanego za pomocą MES przyjęto taką samą, jak w przypadku obliczeń analitycznych z jednym zastrzeżeniem. Ustalono, że przed rozłoczeniem pierwsza zakładana warstwa (przedostatnia, licząc od środka) ma średnicę zewnętrzną mniejszą o 2 mm od średnicy wewnętrznej ostatniej warstwy szkieletowej (luz technologiczny). Natomiast dla pozostałych warstw tak dobierano wymiary, aby zewnętrzne średnice warstw aktualnie rozłaczanych pokrywały się z wewnętrznymi średnicami przed rozłoczeniem warstw względem nich zewnętrznych. Wobec powyższego wymagane luzy technologiczne na tych etapach formowania płaszcza powstawały w wyniku odkształceń plastycznych kolejno rozłaczanych warstw.



Rys. 4. Model MES płaszcza zbiornika przepiężonego (szczegół A) z ilustracją wprowadzonych warunków brzegowych i obciążenia: a) widok w kierunku osi zbiornika, b) przekrój płaszczyzną  $zOr$  z widoczną siatką elementów skończonych

Fig. 4. FEM model of the wall of the prestressed vessel (detail A) and specification of introduced boundary conditions and loading: a) view towards the axis of the vessel, b) cross-section in  $zOr$  plane and mesh of the finite elements

Model MES zbiornika warstwowego rozłaczanego składał się z warstw (prostokątnych wycinków) podzielonych, tak jak w przypadku płaszcza jednolitego na elementy skończone 8-węzłowe PLANE183 z opcją osiowej symetrii. Pomiedzy warstwy wprowadzono elementy kontaktowe CONTA172 i TARGE169, w których uwzględniono tarcie coulombowskie o współczynniku  $\mu = 0,4$ . Zastosowano analogiczne warunki brzegowe do pokazanych na rys. 4. Pojawiające się problemy ze zbieżnością rozwiązywanych zadań zostały wyeliminowane przez wprowadzenie stosownych opcji dla elementów CONTA172 i zastosowanie parametrów typu *real*, takich jak sztywność normalna *FKN* i wielkość obszaru poszukiwania elementów kontaktowych *PINB*. Wykorzystano ponadto możliwość prowadzenia obliczeń z opcją dużych odkształceń (*NLGEOM,on*).

## 5. Przykład obliczeniowy

Szczegółowe obliczenia wykonano dla naczynia o średnicy zewnętrznej  $D_z = 800$  mm, przeznaczonego do pracy przy zerowej różnicy temperatur. Grubość ścianki została obliczona według przepisów Urzędu Dozoru Technicznego, obowiązujących zarówno dla zbiorników litych, jak również warstwowych. Na materiał wszystkich warstw zastosowano stal 16Mo3 (1,5415) w stanie surowym wg PN-EN 10028-2: 1996 o potwierdzonej doświadczalnie granicy plastyczności  $R_e = 317,29$  MPa. Współczynnik bezpieczeństwa dla wybranej stali przyjęto  $x = 1,65$  oraz obliczeniowy współczynnik wytrzymałościowy  $z = 1,00$ , zakładając wysoką jakość spoiny wzdłużnej oraz brak otworów. Ciśnienie obliczeniowe (wewnętrzne) zostało tak dobrane, aby uzyskać maksymalną grubość ścianki, możliwą do akceptacji przez wymagania UDT. Graniczną wartością współczynnika grubościenności  $\beta = D_z/D_w$  jest 2,00, co daje przy  $\alpha = 1,15$  grubość ścianki  $g_o = 200$  mm i ciśnienie obliczeniowe  $p_o = 118,98$  MPa. Na wewnętrznym promieniu takiego porównywalnego naczynia o litej ściance bez naprężeń wstępnych panuje naprężenie zastępcze  $\sigma_0(r_1) = R_e = 317,29$  MPa.

Ścianki zbiorników wykonywanych z wykorzystaniem skurczu termicznego dzieli się przeważnie na 2, 3 lub 4 warstwy. Obliczenia przeprowadzono dla płaszcza 2- i 4-warstwowego, w każdym przypadku z podziałem na warstwy o równej grubości i o optymalnej grubości. Wyniki obliczeń przedstawiające spadek maksymalnego wyężenia w stosunku do zbiornika z litą ścianką (bez naprężeń wstępnych) pod ciśnieniem obliczeniowym  $p_o = 118,98$  MPa, zestawiono w tab. 1. Dodatkowo podano przyrost nośności zbiornika, gdy wyężenie na wewnętrznych powierzchniach wszystkich warstw osiąga wartość maksymalną  $\sigma_0(r_i) = R_e = 317,29$  MPa ( $i = 1, 2$  oraz  $i = 1, 2, \dots, 4$ ). Rozkład wyężenia na grubości ścianki w każdym z tych czterech przypadków jest przedstawiony na rys. 5, łącznie z wyężeniem porównywalnego zbiornika o litej ściance.

Grubość ścianki zbiorników nawijanych oraz typu Smitha została obliczona również dla  $z = 1,00$ . Wprawdzie w tym drugim przypadku płaszcz składa się z wielu cienkich warstw połączonych spoinami wzdłużnymi, jednak przy ich zakładaniu spoiny przesuwają się względem siebie na obwodzie, w związku z czym powodują one nieznaczne osłabienie ścianki wzdłuż jednej tworzącej. Poza tym przy spawaniu cienkich blach łatwiej jest uzyskać wysoką jakość spoin.

Tabela 1

**Porównanie spadku wyężenia ( $p_o = 118,98$  MPa) i przyrostu nośności dla różnych rodzajów zbiorników**

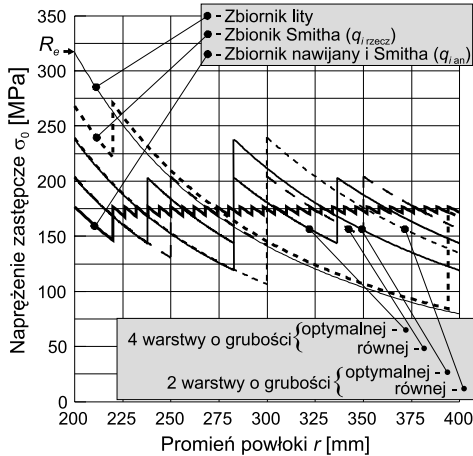
Rodzaj ścianki	Liczba warstw	Grubość warstw $g$ [mm]	Obliczenia	Maksymalne wyężenie $\sigma_0$ [MPa]	Spadek wyężenia $\Delta\sigma_0$ [%]	Przyrost nośności $\Delta p_o$ [%]	
Lita	1	200	analityczne	317,29	–	–	
Warstwowa skurczowa	2 równe	$g_i = 100$	analityczne – $q_{i\text{an}}$	239,62	24,48	32,42	
	2 optymalne	$g_1 = 82,84$ $g_2 = 117,16$		237,96	25,00	33,34	
	4 równe	$g_i = 50$		204,22	35,64	55,37	
	4 optymalne	$g_1 = 37,84$ $g_2 = 45,00$ $g_3 = 53,52$ $g_4 = 63,64$		203,11	35,99	56,22	
Warstwowa zwijana po linii spiralnej oraz spawana Smitha	Rdzeniowa + 30 równe	$g_1 = 20$ $g_2 = 6$ ..... $g_{31} = 6$		176,92	44,24	79,34	
		analityczne – $q_{i\text{rzecz}}$	270,65	14,70	15,53		
Warstwowa rozłączana	23 równe + szkieletowa	$g_1 = 8$ ..... $g_{23} = 8$ $g_{24} = 16$	analityczne – $q_{i\text{max}}$	305,33	3,77	3,92	
			MES (H-M-H)	$q_{i\text{min}}$	294,90	7,06	7,58
				$q_{i\text{hip}}$	177,24	44,14	52,66
				$q_{i\text{max}}$	232,68	26,67	100,86
			analityczne – $q_{i\text{hip}}^*)$	176,86	44,26	79,38	
Lita przepiężona do $r_{g\text{opt}}$	1	$r_{g\text{opt}} = 329,38$	analityczne	228,42	28,01	75,76	
			MES	212,26	33,10	<b>101,42</b>	

\*) Rozwiązanie hipoteczne (porównawcze), praktycznie nieosiągalne

W przypadku zbiorników nawijanych grubość pierwszej warstwy (rury rdzeniowej) ustalono na 20 mm oraz przyjęto 30 warstw o grubości 6 mm, wobec czego  $n = 31$ . Siły naciągu  $N_{i+1}^{sp}$  taśmy przy nawijaniu po linii spiralnej warstwy ( $i + 1$ ), które powodują równe wyężenie na wewnętrznych powierzchniach wszystkich warstw, pokazano na rys. 6. Rozkład wyężenia  $\sigma_0$  na grubości ścianki przedstawiono na rys. 5.

Wymiary wszystkich warstw dla zbiornika typu Smitha przyjęto takie same jak dla zbiornika nawijanego, wobec czego analityczny rozkład wyężenia  $\sigma_0$  jest identyczny jak w tym przypadku, podobnie jak spadek wyężenia i przyrost nośności (tab. 1). Przy zakładaniu warstw niezbędna różnica ich obwodów narasta w przybliżeniu liniowo od 0,29 mm dla drugiej do 2,00 mm dla ostatniej. Zostały również przeprowadzone obliczenia dla zbiornika wykonywanego z zastosowaniem praktycznej technologii, gdzie skurcz termiczny  $\Delta l_{i\text{rzecz}} = 1,06$  mm, jednakowy dla wszystkich warstw, określono na podstawie wzoru (30). Powstaje wówczas rozkład sił naciągu warstw  $N_{i+1}^{sp}$  o innym charakterze niż w przypadku optymalnej (obliczonej analitycznie) różnicy obwodów  $\Delta l_{i\text{an}}$  (rys. 6). W związku z tym rozkład

wstępnych nacisków międzywarstwowych  $q_{i\text{rozcz}}$  jest daleki od optymalnego, zapewniającego równe wyteżenia na wewnętrznych promieniach warstw. Niemniej, również taka technologia gwarantuje obniżenie maksymalnego wyteżenia i pewien przyrost nośności zbiornika (tab. 1).

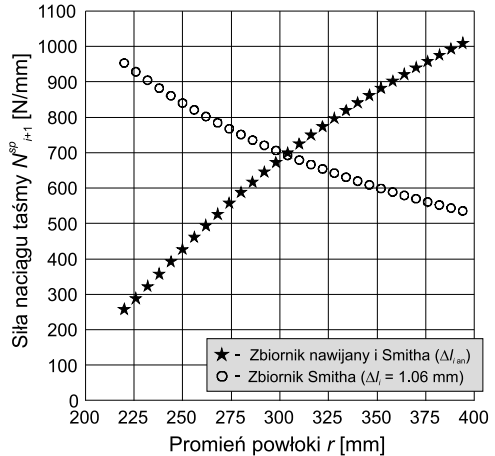


Rys. 5. Wyteżenie  $\sigma_0$  ścianki w funkcji promienia  $r$  dla różnych rodzajów zbiorników pod ciśnieniem wewnętrznym  $p_0 = 118,98$  MPa

Fig. 5. Equivalent stress  $\sigma_0$  of the wall versus radius  $r$  for different types of vessels under pressure  $p_0 = 118.98$  MPa

Płaszcz zbiornika rozciągany jest wykonywany przez napinanie kolejnych warstw, poczynając od zewnętrznej przylegającej do szkieletowej, ciśnieniami powodującymi ich uplastycznienie na wskroś, likwidację wstępnych luzów technologicznych i ostatecznie scalenie ścianki. Ciśnienia rozciągania powinny również uwzględniać nadwyżkę na napiecie wcześniej uformowanej powłoki zewnętrznej, aby po odprężeniu nadażyła za kurczącą się warstwą rozciąganą. Analiza sytuacji na powierzchniach styku warstw, przedstawiona w pracach [1, 6], pozwala określić minimalne ciśnienia rozciągania, dające zerowy nacisk wstępny. Ciśnienia wyższe wprowadzają pewne naciski międzywarstwowe, co sugeruje, że odpowiednio dobrane mogą służyć do realizacji zadanego rozkładu naprężeń wstępnych.

Szczegółowe rozważania wykazały jednak, że przy założeniu idealnie sprężysto-plastycznej charakterystyki materiału warstw nie można przeprowadzić takiej operacji w zamierzony sposób. Maksymalne ciśnienia rozciągania  $P_{i\text{max}}$  (37), niepowodujące zmian nacisków już zrealizowanych na poprzednich etapach procesu technologicznego, są niewiele większe od minimalnych ciśnień  $P_{i\text{min}}$  (35), powodujących jedynie scalenie ścianki bez wstępnych nacisków międzywarstwowych, co jest widoczne na rys. 7. Wstępne  $q_i$  i technologiczne  $\tilde{q}_i$  naciski międzywarstwowe dla zbiornika rozciąganego, obliczone analitycznie i za pomocą MES, przedstawia rys. 8. Można zauważyć, że ciśnienia  $P_{i\text{max}}$  wywołują w ściance naciski  $\tilde{q}_{i\text{max}}$

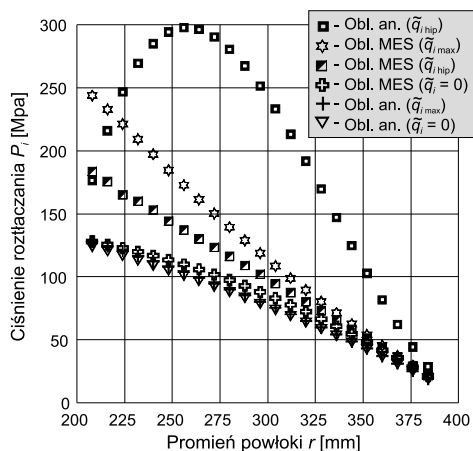


Rys. 6. Siły naciągu taśmy dla zbiornika 31-warstwowego nawijanego po linii spiralnej i Smitha w funkcji promienia  $r$

Fig. 6. Tension forces of the strip for 31-layer reel-spiral vessel and Smith vessel versus radius  $r$

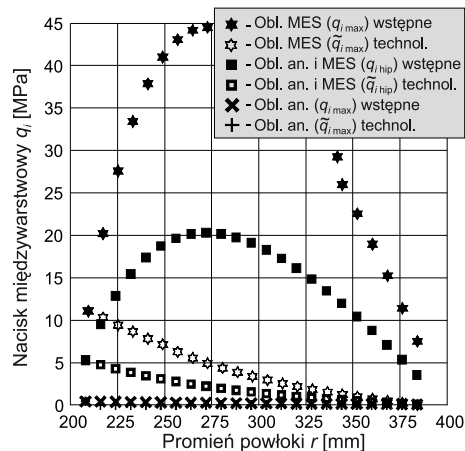


(36) znacznie mniejsze od hipotetycznych nacisków optymalnych  $\tilde{q}_{ihip}$  rozumianych w ten sposób, że ich zastosowanie spowodowałoby wyrównanie rozkładu naprężeń zastępczych na wewnętrznych promieniach warstw pod ciśnieniem roboczym  $p_o = 118,98$  MPa. Rozkład hipotetyczny  $\tilde{q}_{ihip}$ , wprowadzony w podejściu analitycznym, jest praktycznie niemożliwy do uzyskania i ma jedynie znaczenie teoretyczne (porównawcze). Należałoby go bowiem zrealizować ciśnieniami rozłtaczania  $P_{ihip}$  wyliczonymi ze wzoru (38) dużo większymi od  $P_{imax}$ , a więc zaburzającymi naciski już istniejące.



Rys. 7. Porównanie ciśnień rozłtaczania  $P_i$  warstw obliczonych analitycznie i za pomocą MES

Fig. 7. Comparison of analytical and numerical (FEM) expanding pressures  $P_i$  of layers



Rys. 8. Porównanie wstępnych  $q_i$  i technologicznych  $\tilde{q}_i$  nacisków międzywarstwowych dla zbiornika rozłtaczanego obliczonych analitycznie i za pomocą MES

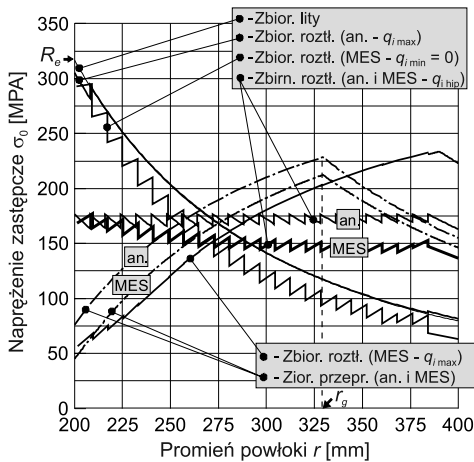
Fig. 8. Comparison of analytical and numerical (FEM) initial  $q_i$  and technological  $\tilde{q}_i$  interlayer stresses for the expanding vessel

Maksymalne naciski międzywarstwowe  $\tilde{q}_{imax}$  polepszają nieco rozkład wyężenia  $\sigma_0$  na grubości ścianki (rys. 9), również nieznaczny jest przyrost nośności (tab. 1). Dodatkowo dla porównania jest zamieszczony na rys. 9 rozkład wyężenia na grubości ścianki zbiornika z wprowadzonymi hipotetycznymi naciskami optymalnymi  $q_{ihip}$ .

Rozkład wyężenia na grubości ścianki można również poprawić przez odpowiedni dobór własności wytrzymałościowych materiału warstw. Okazuje się jednak, że doprowadzenie do stanu optymalnego (bez objęcia strefą plastyczną następczej warstwy) wymaga manewrowania granicami plastyczności warstw  $R_{e,i}$  w zbyt szerokim zakresie. W oparciu o obliczenia przeprowadzone dla przyjętej geometrii zbiornika i ciśnienia  $p_o = 118,98$  MPa można stwierdzić, że zakładając granicę plastyczności pierwszej warstwy  $R_{e1} = 317,29$  MPa, należałoby stosować  $R_{e24} = 10163,26$  MPa, co jest praktycznie niewykonalne.

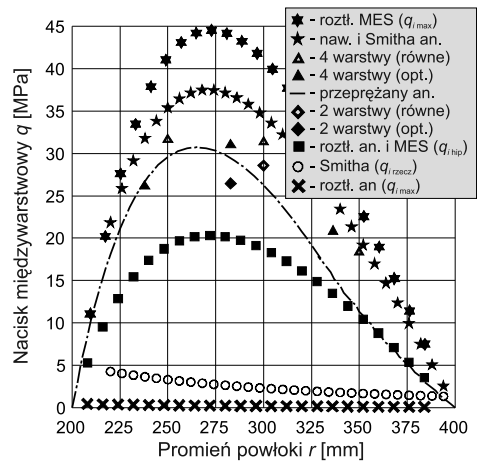
W przypadku autofretażu do uzyskania promienia granicznego  $r_{gopt} = 329,38$  mm, zapewniającego minimalną różnicę wyteżeń na promieniach skrajnych, jest wymagane ciśnienie przepiężania  $p_p = 209,37$  MPa. Rozkład promieniowych naprężeń resztkowych  $\sigma_{rreszt}$  jest zbliżony do rozkładu wstępnych nacisków międzywarstwowych  $q_i$  jak dla zbiornika nawijanego (rys. 10), podobnie jak spadek maksymalnego wyteżenia pod ciśnieniem obliczeniowym  $p_o = 118,98$  MPa (tab. 1). Rozkłady wstępnych nacisków międzywarstwowych  $q$  dla wszystkich analizowanych rodzajów ścianek przedstawia rys. 10.

Obliczenia wykonane na podstawie modelu numerycznego MES wykazały, że poszczególne warstwy mogą być rozciągane bez naruszenia rozkładu nacisków istniejących w uformowanej już części płaszcza ciśnieniami znacznie wyższymi od obliczonych analityczne (rys. 7). Pojawia się więc możliwość wprowadzenia do ścianki nacisków wstępnych  $q_i$  o dużej wartości. Widoczny na rys. 8 rozkład maksymalnych nacisków wstępnych MES  $q_{imax}$  w funkcji promienia  $r$  przebiega znacznie powyżej rozkładu  $q_{ihip}$ , który zapewnia w obliczeniach analitycznych wyrównanie wyteżenia analizowanego zbiornika. Okazuje się ponadto, że przyjęcie rzeczywistej charakterystyki materiału warstw i uwzględnienie efektów kontaktowych ujawnia inny sposób pracy ścianki zbiornika wytwarzanego z zastosowaniem ciśnień rozciągania zapewniającymi tylko scalenie ( $q_{imin} = 0$ ) niż ścianki litej. Pojawiający się w tym przypadku spadek wyteżenia zbiornika wynosi 7%, podobny jest przyrost nośności – 8% (tab. 1). W analitycznym modelu natomiast nie ma różnicy w rozkładach wyteżeń na grubości ścianki między powyższymi dwoma zbiornikami.



Rys. 9. Wyteżenie  $\sigma_0$  ścianki w funkcji promienia  $r$  dla różnych rodzajów zbiorników pod ciśnieniem wewnętrznym  $p_o = 118,98$  MPa

Fig. 9. Equivalent stress  $\sigma_0$  of the wall versus radius  $r$  for different types of vessels under pressure  $p_o = 118,98$  MPa



Rys. 10. Rozkład wstępnych nacisków międzywarstwowych  $q$  w funkcji promienia  $r$   
Fig. 10. Distribution of initial interlayer stress  $q$  versus radius  $r$

W nawiązaniu do powyższych przypadków przeprowadzono dla modelu zbiornika warstwowego rozciągane kilka numerycznych cykli obliczeniowych, odpowiadających:

- 1a. Procesowi technologicznemu, w którym uzyskuje się jedynie scalenie warstw bez wstępnych nacisków międzywarstwowych ( $q_{i\min} = 0$ ).
- 1b. Obciążeniu tak uformowanego zbiornika ciśnieniem  $p_o = 118,98$  MPa i dodatkowo ciśnieniem  $p = 128,00$  MPa powodującym w ścianie zbiornika pierwsze pojawienie się naprężenia zastępczego  $\sigma_0$  na poziomie  $R_e = 317,29$  MPa.
- 2a. Rozłaczaniu w procesie technologicznym kolejno warstw tak, aby wywołać w warstwach do nich zewnętrznych pierwsze pojawienie się naprężenia zastępczego  $\sigma_0$  na poziomie  $R_e$ , uzyskując tym samym naciski wstępne o wartości maksymalnej  $q_{i\max}$ .
- 2b. Obciążeniu tego zbiornika ciśnieniem  $p_o = 118,98$  MPa i ponadto ciśnieniem  $238,98$  MPa powodującym w ścianie zbiornika pierwsze pojawienie się naprężenia zastępczego  $\sigma_0$  równego  $R_e = 317,29$  MPa.
- 3a. Rozłaczaniu kolejno warstw tak, aby po zakończeniu całego procesu technologicznego uzyskać hipotetyczne wstępne naciski międzywarstwowe  $q_{i\text{ hip}}$ , wprowadzone w rozwiązaniu analitycznym.
- 3b. Obciążeniu zbiornika po scaleniu ciśnieniem  $p_o = 118,98$  MPa i również ciśnieniem  $181,64$  MPa powodującym osiągnięcie w ścianie zbiornika pierwszego naprężenia zastępczego  $\sigma_0$  o wartości  $R_e$ .

Zależność wyteżenia  $\sigma_0$  ścianki od promienia  $r$  przy ciśnieniu  $p_o = 118,98$  MPa dla zbiornika rozłaczanego, w którym wprowadzono wstępne naciski międzywarstwowe odpowiednio  $q_{i\min} = 0$ ,  $q_{i\text{ hip}}$  i  $q_{i\max}$  przedstawiono na rys. 9. W każdym z tych przypadków wyteżenie liczone według hipotezy największych odkształceń postaciowych Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H). Wyteżenie określone za pomocą MES dla ścianki z wprowadzonym rozkładem naprężeń wstępnych nacisków  $q_{i\text{ hip}}$  przyjmuje (poza warstwą wewnętrzną) niższe wartości od wyteżenia obliczonego analitycznie dla tego samego rozkładu  $q_{i\text{ hip}}$ . Należy więc sądzić, że odpowiednio sformułowana procedura numeryczna pozwoli określić taki rozkład naprężeń wstępnych  $q_{i\text{ opt}}$ , który spowoduje spadek wyteżenia większy niż do  $177,24$  MPa.

Obliczenia MES, wykonane dla zbiornika rozłaczanego i różnych wartości współczynnika tarcia  $\mu$  na powierzchni styku warstw, prowadzą do wniosku, że wpływ  $\mu$  na wyniki jest znikomy. Przykładowo, ciśnienia prowadzące do pierwszego wystąpienia maksymalnego naprężenia zastępczego  $\sigma_0$  równego  $R_e = 317,29$  MPa na wewnętrznej powierzchni zbiornika przy zmianie  $\mu$  od 0 do 0,8 różnią się mniej niż o 0,1%. Jest to spowodowane niewielkimi względnymi przesunięciami warstw na powierzchniach styku (poślizgami międzywarstwowymi) pod obciążeniem ciśnieniem roboczym. Nieco większe różnice (ale poniżej 1%) występują w przypadku ciśnień rozłaczania warstw, co może wynikać z większych przemieszczeń (i odkształceń) oraz związanych z tym ewentualnych poślizgów międzywarstwowych.

W przypadku zbiornika przepięzanego numeryczna procedura obliczeniowa polegała na obciążeniu modelu ciśnieniem  $p_p$  takim, aby uzyskać z góry założoną wartość promienia granicznego  $r_g$ , rozdzielającego strefę plastyczną od sprężystej. Po uzyskaniu (metodą kolejnych przybliżeń) wartości tego promienia model odciążono, a następnie obciążono ciśnieniem roboczym. Możliwość przeprowadzenia takiego procesu obliczeniowego daje polecenie *sfcum,pres,add*. Ciśnienie, przy którym w metodzie MES uzyskano promień graniczny optymalny  $r_{r\text{ opt}}$ , wyliczony analitycznie, wyniosło  $p_p = 239,65$  MPa. Naprężenie zastępcze  $\sigma_0$  wg hipotezy H-M-H dla ciśnienia roboczego  $p_o = 118,98$  MPa przedstawiono w funkcji promienia  $r$  na rys. 9.

## 6. Uwagi końcowe

W podsumowaniu należy zwrócić uwagę na pewne technologiczne i ekonomiczne aspekty odnoszące się do warstwowych walcowych zbiorników ciśnieniowych. Zastosowanie powłok skurczowych jest ograniczone do małych średnic i małych długości powłoki. Zapewnienie precyzyjnych wcisków rzędu kilkuset  $\mu\text{m}$  wymaga ostrego reżimu technologicznego, który nie zawsze może być dotrzymany. Niezbędne są również odpowiednie piece do nagrzewania płaszcza skurczowego.

Powłoki nawijane wykonuje się według technologii opracowanej przez J. Schrierenbecka, którą wprowadziła firma BASF. Rura rdzeniowa może być cienkościenna i powinna zapewnić szczelność powłoki. Na podstawie praktycznych wniosków ocenia się, że jej grubość powinna mieć 10% docelowej grubości powłoki. Tolerancja grubości nawijanej taśmy nie może przekraczać 0,2%. Dla średnicy wewnętrznej, jak w przykładzie obliczeniowym, stosuje się taśmy o szerokości 80 mm i o grubości 6 mm. Długość taśmy powinna wystarczyć na co najmniej jedną warstwę; w przeciwnym razie należy taśmy zespawać, a spoinę obrobić. W zależności od materiału taśmę nagrzewa się do temperatury 575–750°C. Zwykle stosuje się grzanie elektryczne prądem o natężeniu ok. 6000 A i napięciu 30–40 V. Szybkość nawijania wynosi ok. 5 m/min. Po nawinięciu taśma jest chłodzona natryskiem wodnym.

Powłoki warstwowe spawane są produkowane przez firmy A.O. Smith Co. Milwaukee (USA), oraz Krupp Maschinenfabrik i Rhein Stahl Hüttenwerke (Niemcy). Używa się blach o grubości 6–8 mm, zwijanych w półcylindryczne płyty. W praktyce nie stosuje się naciągu warstw przy spawaniu, który jest kłopotliwy w realizacji. Dwie spoiny każdej warstwy wykonuje się równocześnie automatycznie metodą TIG z kontrolą przetopu, stosując wstępne podgrzanie do ok. 150°C (schładzanie ok. 3°C/s) i odpowiednie elektrody. Dla wszystkich spoin przyjmuje się jednakowy odstęp  $\Delta l_{i+1} = 1,6$  mm. Najlepsze efekty można uzyskać dla 4 ściegów, w tym 2 licowych. Po wykonaniu spoin lica podlegają obróbce. W ten sposób technologia zostaje uproszczona, lecz wprowadzone do ścianki naciski wstępne odbiegają od analitycznego rozkładu optymalnego (6). Okazuje się jednak, że również taka metoda powoduje obniżenie wyężenia zbiornika o 15% w warunkach pracy. Zaletą metody jest możliwość wykonania tego rodzaju powłoki o znacznej długości i średnicy, o czym decyduje prosta technologia oraz fakt, że nie jest wymagana obróbka cieplna.

Technologia roztlaczania, oparta na polskim patencie [14], nie została rozwinięta w skali przemysłowej. Jako jeden z bardziej istotnych powodów można wymienić trudność z zapewnieniem szczelności w kolejnych etapach procesu roztlaczania, przy zmieniającej się grubości ścianki. Podczas sukcesywnego dokładania warstw należy każdorazowo wprowadzić nową warstwę do wnętrza wykonywanej części płaszcza, uszczelnić płaszcz i wywołać odpowiednie ciśnienie do jej roztlóczenia. W dalszej kolejności instalacja podlega rozszczelnieniu i po założeniu następnej warstwy – ponownemu uszczelnieniu. Liczba tych operacji rośnie z liczbą warstw. Metoda wymaga również pomp o wysokiej wydajności, która jest niezbędna do wytwarzania bardzo wysokich ciśnień w przypadku obiektów o dużych wymiarach.

## 7. Wnioski

Porównanie maksymalnych wartości naprężeń zastępczych  $\sigma_0$  dla warstwowych ścianek zbiorników z wprowadzonymi wstępnymi naciskami z grubościennym zbiornikiem litym bez dodatkowych zabiegów technologicznych prowadzi do wniosku, że tą drogą można osiągnąć znaczne zmniejszenie obciążenia ścianki naczynia podczas pracy. Pojawia się więc możliwość zastosowania tańszego materiału o odpowiednio niższych własnościach wytrzymałościowych.

Dla dwuwarstwowej ścianki z warstwami o równej grubości maksymalne wyężenie zmniejsza się o 24%, a w przypadku 4 warstw o 36%. Okazuje się, że przyjęcie optymalnego podziału ścianki nie wpływa w znaczący sposób na spadek wyężenia, co uzasadnia stosowanie prostszej technologii przy produkcji zbiorników skurczowych. Podział ścianki na cieńsze warstwy i wprowadzenie wstępnych nacisków międzywarstwowych gęściej poprawia wyraźnie wytrzymałość ścianki. Z obliczeń wykonanych dla zbiorników nawijanych wynika, że maksymalne wyężenie zostało obniżone o 44%. W procesie nawijania siły naciągu warstw uzyskuje się w wyniku grzania taśmy i wykorzystania skurczu termicznego. W metodzie Smitha wstępne naciski międzywarstwowe są wprowadzone również dzięki skurczowi termicznemu, powstałemu wskutek stygnięcia spoin wzdłużnych. W obu przypadkach efektywność metody zależy od dokładności oszacowania wielkości tego skurczu.

Przy założeniu idealnie sprężysto-plastycznego schematu materiału oraz korzystając z analitycznego podejścia, można przypuszczać, że technologia roztlaczania nie umożliwia wprowadzenia wstępnych nacisków, dających zauważalny efekt wytrzymałościowy. W wyniku obliczeń stwierdzono, że tą metodą można osiągnąć spadek wyężenia co najwyżej o 4%. W metodzie numerycznej, wykorzystującej modelowanie MES, zostały uwzględnione: rzeczywista charakterystyka materiału, tarcie na powierzchniach styku warstw, zjawiska kontaktowe i efekt Bauschingera, a naprężenia zastępcze obliczono według hipotezy H-M-H. Przyjęcie realnych założeń w obliczeniach wykazało, że jest możliwość wprowadzenia do ścianki płaszcza zbiornika roztlaczanego nacisków wstępnych o znacznej wartości. Maksymalne naciski wstępne  $q_{i \max}$  obliczone za pomocą MES są ponad dwukrotnie większe od nacisków hipotetycznych  $q_{i \text{ hip}}$ , określonych dla rozwiązania analitycznego bez uwzględnienia wzmocnienia materiału (rys. 10). Okazuje się więc, że ścianka rzeczywistego naczynia roztlaczanego ma duży zapas nośności, który można uruchomić przez wprowadzenie nacisków wstępnych MES  $q_{i \max}$  (rys. 9), aplikując ciśnienia roztlaczania MES  $P_{i \max}$ . Jak widać na rys. 7, są one dużo mniejsze od analitycznie obliczonych ciśnień roztlaczania warstw  $P_{i \text{ hip}}$ , przy upraszczającym założeniu idealnie sprężysto-plastycznej charakterystyki materiału. Numeryczne rozwiązanie pokazało, że w realnym zbiorniku roztlaczanym z wprowadzonymi do ścianki hipotetycznymi naciskami wstępnymi  $q_{i \text{ hip}}$  maksymalne wyężenie można obniżyć o 44%, a przyrost nośności wynosi 53%. Natomiast wykazany numerycznie maksymalny możliwy do uzyskania przyrost nośności rozpatrywanego zbiornika roztlaczanego z naciskami wstępnymi  $q_{i \max}$  jest równy 101% (tab. 1).

Obliczenia analityczne, przeprowadzone przy tych samych założeniach jak dla zbiornika roztlaczanego, wykazały w odniesieniu do litej ścianki, przepiężonej i wstępnie uplastycznionej do promienia  $r_{g \text{ opt}}$ , że maksymalne wyężenie można zmniejszyć o 28%. Z obli-

czeń MES przy realnych założeniach wynika natomiast, że spadek wyężenia wynosi 33%, a przyrost nośności jest równy 101%, podobnie jak dla zbiornika roztlaczanego.

Powłoki wielowarstwowe dzięki wprowadzeniu naprężeń wstępnych i wyrównanemu na grubości ścianki rozkładowi naprężeń zastępczych charakteryzują się lepszym wykorzystaniem materiału w porównaniu z powłokami jednowarstwowymi. Wykazują również wiele zalet technologicznych w stosunku do powłok jednowarstwowych. W przypadku dużych średnic i grubości ścianki ich produkcja jest łatwiejsza, nie wymaga bowiem stosowania kosztownych urządzeń kuźniczych i walcarek. Ocenia się, że ubytek materiału w czasie obróbki powłok warstwowych zostaje obniżony nawet o 80% w stosunku do ubytku notowanego w przypadku powłok litych, podlegających kuciu i obróbce skrawaniem.

Porównawcza ocena kosztów poszczególnych rozwiązań konstrukcyjnych jest trudna, gdyż produkcją zajmują się różne zakłady o zróżnicowanej organizacji, wyposażeniu technicznym i potencjale ludzkim. Orientacyjną ocenę kosztów można znaleźć w [5] dla aparatu o średnicy wewnętrznej  $D_w = 1200$  mm, długości  $L = 18$  m, na ciśnienie wewnętrzne  $p_o = 32,5$  MPa. Zakładając, że koszt wykonania powłoki jednowarstwowej kutej wynosi 100 %, koszt wykonania powłoki nawijanej dla materiału o  $R_e = 350$  MPa jest równy 82%, a dla materiału o  $R_e = 600$  MPa obniży się do 59% (przy temperaturze grzania 350°C).

Ogólnie uważa się, że dla średnic  $D_w < 400$  mm dobrym rozwiązaniem jest powłoka jednowarstwowa, gdyż zarówno koszty, jak i wyposażenie techniczne nie wybiegają poza normalne, a wykonawstwo nie wymaga szczególnie wysokich kwalifikacji. Dla średnic większych różnice są jednak duże, zwiększając się ze wzrostem wymiarów powłoki i ciśnienia.

## Literatura

- [1] Galos M., Życzkowski M., *Analiza rozkładu naprężeń resztkowych w wielowarstwowych roztlaczanych zbiornikach ciśnieniowych*, Czas. Tech., z. 8-M (110), 1967, 5-11.
- [2] Gourd L.M., *Podstawy technologii spawalniczych*, WNT, Warszawa 1997.
- [3] Грибанов А.В., *Исследование напряженного состояния в гильзованных многослойных сосудах*, Хим. и нефт. машиностр, № 11, 1972, 4-6.
- [4] Jahed H., Farshi B., Karimi M., *Optimum autofrettage and shrink-fit combination in multi-layer cylinders*, Trans. of the ASME, J. of Pressure Vessel Technology, Vol. 128, May 2006, 196-200.
- [5] Korndorf B.A., *Hochdrucktechnik in der Chemie*, VEB Verlag Technik, Berlin 1956.
- [6] Krzyś W., Stodulski M., Trojnecki A., *Analiza procesu formowania doświadczalnego wielowarstwowego zbiornika roztlaczanego*, Arch. Bud. Masz., t. XXIII, z. 4, 1976, 515-528.
- [7] Krzyś W., Życzkowski M., *Sprężystość i plastyczność*, PWN, Warszawa 1962.
- [8] Pikoń J., Hehlmann J., *Wysokociśnieniowe powłoki wielowarstwowe. Część I*, Inż. i Ap. Chem., Nr 3/1977, 1977, 26-30.
- [9] Pikoń J., Hehlmann J., *Wysokociśnieniowe powłoki wielowarstwowe. Część II*, Inż. i Ap. Chem., Nr 4/1977, 1977, 18-22.
- [10] Пимштейн П.Г., *Прочность многослойных сосудов высокого давления*, Хим. и нефт. машиностр, № 7, 1968, 20-22.
- [11] Тарабасов Н.Д., Грибанов А.В., *Расчет на прочность многослойной цилиндрической части корпуса аппарата высокого давления*, Хим. и нефт. машиностр, № 7, 1972, 7-9.
- [12] Timoshenko S., Goodier J.N., *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.

- [13] Życzowski M., *Odształcenia plastyczne i wytrzymałość wielowarstwowych rozlaczanych walcowych zbiorników ciśnieniowych*, Arch. Bud. Masz., t. XI, z. 1, 1964, 83-96.
- [14] Patent Nr 42879 *Sposób wytwarzania wielowarstwowych zbiorników wysokociśnieniowych*. H. Kamocki (OBR PBUChem CEBEA, Polska), 1958.
- [15] US patent 2,337,247 *Method of making multilayer vessels*. W.R. Kepler (A.O. Smith Co. Milwaukee, USA), 1943.





JAN ŁUCZKO, URSZULA FERDEK\*

## PORÓWNANIE RÓŻNYCH STRATEGII STEROWANIA W SEMIAKTYWNYCH UKŁADACH ZAWIESZENIA SAMOCHODU

---

### COMPARISON OF DIFFERENT CONTROL STRATEGY IN SEMI-ACTIVE VEHICLE SUSPENSION SYSTEM

---

#### Streszczenie

W artykule rozpatrzono model ćwiartkowy zawieszenia pojazdu z tłumikami, opisanymi modelami histerezowymi typu Spencera. Porównano efektywność tłumienia drgań przez układy semiaktywne oraz pasywne o niesymetrycznych charakterystykach siły tłumienia. W przypadku tłumików semiaktywnych zaproponowano różne algorytmy sterowania typu *on-off*. Zbadano wpływ tych algorytmów na wskaźniki odpowiedzialne za komfort oraz bezpieczeństwo jazdy. Rezultaty symulacji numerycznych przedstawiono w formie wykresów częstotliwościowych wprowadzonych wskaźników jakości

*Słowa kluczowe: tłumik semiaktywny, sterowanie drganiami, model zawieszenia, histereza*

#### Abstract

This paper examined the quarter model of the vehicle suspension with dampers, represented by the hystereses models of Spencer type. The effectiveness of vibration reduction through the use of semi-active and passive systems with asymmetric damping force characteristics was compared. In case of semi-active dampers several different control algorithms of on-off type were considered. The impact of these algorithms on parameters associated with comfort and safety of the drive was analyzed. The results of the numerical simulations were presented in the form of graphs showing the values of performance indicators in the frequency domain.

*Keywords: semi-active damper, vibration control, suspension system, hysteresis*

---

\* Dr hab. inż. Jan Łuczko, prof. PK, dr inż. Urszula Ferdek, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

W celu wytłumienia drgań wykorzystuje się wiele rodzajów tłumików, przy czym ich budowa oraz zasada działania są ściśle związane z ich przeznaczeniem. W odróżnieniu od amortyzatorów hydraulicznych, stosowanych powszechnie w motoryzacji, tłumiki magneto-reologiczne (MR) i elektoreologiczne (ER) dają możliwość sterowania siłą tłumienia, są więc tłumikami semiaktywnymi. W przypadku stosowania cieczy elektro- i magneto-reologicznych można, sterując natężeniem pola elektrycznego lub magnetycznego za pośrednictwem prądu płynącego w uzwojeniu sterującym tłumika, zmieniać siłę oporu wytwarzaną przez tłumik. Rezultatem zmiany napięcia jest zmiana wartości niektórych parametrów przyjętego do badań modelu.

Do opisu właściwości dynamicznych zarówno tłumików MR oraz ER, jak i tłumików hydraulicznych, są wykorzystywane modele o charakterystykach histerezy. Najczęściej są to modele Bingham [17], Bouc-Wena [3, 10, 17, 19] lub Spencera [4, 10, 12, 14, 17]. Wymienione modele semiaktywnych tłumików nie uwzględniają niesymetrii charakterystyki amortyzatora. W pracy [4] zaproponowano uproszczony opis amortyzatora pasywnego, wykorzystując w tym celu zmodyfikowany odpowiednio model Spencera [17]. Porównując otrzymane charakterystyki z charakterystykami uzyskanymi dla amortyzatora hydraulicznego [5], wyselekcjonowano parametry odpowiedzialne za efekty nieliniowe oraz niesymetrię charakterystyki.

W celu zapewnienia komfortu jazdy oraz odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa dokonywane są analizy tzw. ćwiartkowych [1, 2, 4, 6, 9, 19] lub połówkowych [7, 12, 14–16] modeli samochodu. Do oceny jakości działania amortyzatorów zastosowanych w układzie zawieszenia pojazdu wprowadza się zwykle dwa kryteria, uwzględniające minimalizację drgań nadwozia samochodu, wywołanych pokonywaniem nierówności nawierzchni drogi oraz utratę przyczepności kół do podłoża. Pierwsze kryterium odpowiada za komfort jazdy, natomiast drugie związane jest z bezpieczeństwem, ponieważ okresowe odrywanie się kół pojazdu zmniejsza skuteczność przenoszenia sił napędu, hamowania oraz pogarsza jego sterowność.

Stosuje się różne strategie sterowania, z których niektóre zostały opisane w pracach [1, 2, 6, 9, 11, 15, 18]. Przykładowo, Liu, Waters i Brennan [9], a także Wu i Griffin [18], analizując sterowanie typu *on-off*, zakładają, że siła tłumienia powinna być zwiększona w przypadku, gdy iloczyn prędkości względnej i bezwzględnej jest większy od zera lub alternatywnie, gdy iloczyn względnego przemieszczenia i względnej prędkości jest mniejszy od zera.

Fischer i Isermann [6] badają wpływ parametrów charakteryzujących układ zawieszenia na wskaźniki komfortu i bezpieczeństwa jazdy. Za wskaźnik komfortu przyjmują wartość skuteczną przyspieszenia (odniesionego do przyspieszenia grawitacyjnego), natomiast wskaźnik bezpieczeństwa definiują jako wartość skuteczną stosunku reakcji dynamicznej do statycznej.

Sapiński i Martynowicz [14] na przykładzie połówkowego modelu zawieszenia samochodu porównują efektywność sterowania tłumikiem MR w układzie zamkniętym z regulatorem LQ z efektywnością tłumików pasywnych. W pracy zamieszczono również rezultaty badań doświadczalnych.

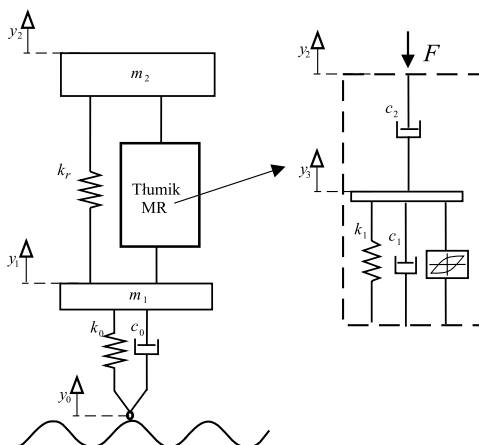
Interesująca jest też praca [11], w której autorzy Potter, Neild i Wagg badają metodami analitycznymi wpływ czasu włączania i wyłączania napięcia sterującego na przyjęty wskaźnik jakości. Rezultaty analiz, dla różnych częstości wymuszeń, porównują z wynikami uzyskanymi dla sterowania typu *on-off*.

Ciekawe propozycje sterowania semiaktywnym zawieszeniem samochodu są opisane w pracach Ahmadiana i jego współpracowników [1, 2, 7, 8]. Najczęściej analizowany jest model ćwiartkowy samochodu. W stanach ustalonych badana jest odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne, a w procesach przejściowych [2] na jednostkowy skok. Do zapewnienia kompromisu pomiędzy wymaganiami dotyczącymi komfortu i bezpieczeństwa stosuje się sterowanie hybrydowe [1, 2] tłumikiem MR, będące kombinacją liniową sterowania *sky-hook* i *ground-hook*. Warunek stabilności w czasie jazdy wymaga, aby siła tłumienia była duża w chwilach, gdy iloczyn prędkości bezwzględnej masy nieresorowanej oraz prędkości względnej jest mniejszy od zera.

W niniejszym artykule poddano analizie ćwiartkowy model pojazdu, badając efektywność tłumienia drgań przy zastosowaniu różnych strategii sterowania. W kryterium jakości uwzględniono wskaźniki odpowiedzialne za komfort oraz bezpieczeństwo jazdy.

## 2. Model układu

Do badań przyjęto ćwiartkowy model pojazdu przedstawiony na rys. 1. Ruch mas: nieresorowanej  $m_1$  i resorowanej  $m_2$  określają odpowiednio współrzędne  $y_1$  i  $y_2$ , natomiast współrzędna  $y_0 = a \cos \omega t$  jest zadaniem wymuszeniem kinematycznym. Wprowadzono również pomocnicze zmienne  $y_3$  i  $z$ , opisujące zachowanie się modelu tłumika semiaktywnego. W modelu parametr  $k_r$  jest sztywnością zawieszenia, parametry  $k_0$  i  $c_0$  określają własności sprężyste i tłumiące opony, a parametry:  $k_1$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $A_0$  i  $\varepsilon$  charakteryzują badany tłumik.



Rys. 1. Ćwiartkowy model zawieszenia samochodu

Fig. 1. The quarter-car suspensions model

Ruch układu opisują równania różniczkowe:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -c_0(\dot{y}_1 - \dot{y}_0) - k_0(y_1 - y_0) + k_r(y_2 - y_1) + F - m_1 g \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -k_r(y_2 - y_1) - F - m_2 g \end{aligned} \quad (1)$$

przy czym przyjęto [4], że oddziaływanie tłumika  $F$  opisuje zależność:

$$F = c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_3)[1 + \varepsilon \operatorname{sgn}(\dot{y}_2 - \dot{y}_3)] \quad (2)$$

Zgodnie ze wzorem (2) siła tłumienia ma większą wartość w procesie odbicia (dla  $F > 0$ ) w porównaniu z procesem sprężania, co jest pożądane ze względów praktycznych. Występującą we wzorze (2) zmienną  $y_3$  określającą ruch bezmasowego elementu modelu tłumika MR, można wyznaczyć z warunku równowagi sił:

$$k_1(y_3 - y_1) + c_1(\dot{y}_3 - \dot{y}_1) + \alpha_0 z_0 = c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) \quad (3)$$

skąd wynika zależność:

$$\dot{y}_3 = [c_1 \dot{y}_1 + c_2 \dot{y}_2 - k_1(y_3 - y_1) - \alpha_0 z_0] / (c_1 + c_2) \quad (4)$$

Zmienna  $z$  decydująca o tworzeniu się pętli histerezy jest [3, 17, 19] rozwiązaniem równania różniczkowego pierwszego rzędu o postaci:

$$\dot{z}_0 = A_0 \dot{y} - \gamma_0 \dot{y} |z_0|^n - \beta_0 |y| z_0 |z_0|^{n-1} \quad (5)$$

gdzie  $y = y_3 - y_1$ . Parametry  $A_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\beta_0$  oraz  $n$  wpływają na kształt pętli histerezy.

We wprowadzonym dalej kryterium istotną rolę odgrywa reakcja wywierana na podłoże, którą można wyznaczyć z następującego wzoru:

$$R = k_0(y_0 - y_1) + c_0(\dot{y}_0 - \dot{y}_1) \quad (6)$$

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych, zdefiniowanych następująco:

$$\tau = \omega_0 t \quad x_j = y_j / a \quad z = z_0 / z_{\max} \quad (7)$$

gdzie:

$$z_{\max} = \sqrt[n]{\frac{A_0}{\beta_0 + \gamma_0}} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_r}{m_2}} \quad (8)$$

drgania układu opisuje układ równań różniczkowych o postaci:

$$\begin{aligned} \mu x_1'' + \zeta_0 x_1' - \zeta_1 x_3' + (1 + \kappa_0)x_1 - \kappa_2 x_2 + f &= \zeta_0 x_0' + \kappa_0 x_0 - \mu \lambda \\ x_2'' + x_2 - x_1 - f &= -\lambda \\ x_3' &= [\zeta_1 x_1' + \zeta_2 x_2' - \kappa_1(x_3 - x_1) - \alpha z] / (\zeta_1 + \zeta_2) \\ z' &= A \{1 - [\gamma + \beta \operatorname{sgn}(z(x_3' - x_1'))] |z|^n\} (x_3' - x_1') \end{aligned} \quad (9)$$

przy czym  $x_0(\tau) = \sin \tau$ . Bezwymiarowa siła tłumienia jest wyznaczana ze związku:

$$f = \zeta_2(x_2' - x_3')[1 + \varepsilon \operatorname{sgn}(x_2' - x_3')] \quad (10)$$

gdzie  $x_j'$  i  $z'$  są pochodnymi względem zmiennej  $\tau$ .

W równaniach (9, 10) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \eta &= \omega / \omega_0 & \mu &= m_1 / m_2 & A &= A_0 / z_{\max} \\ \alpha &= \alpha_0 z_{\max} / k_r & \beta &= \beta_0 (\beta_0 + \gamma_0) & \gamma &= \gamma_0 / (\beta_0 + \gamma_0) \\ \kappa_j &= k_j / k_r & \zeta &= c_j / m_2 \omega_0 & \lambda &= g / \omega_0^2 a \end{aligned} \quad (11)$$

Wprowadźmy jeszcze wskaźnik EUSAMA, będący miarą przyczepności kół do podłoża, a zdefiniowany jako stosunek minimalnej siły nacisku koła na podłoże do nacisku statycznego. W zmiennych bezwymiarowych określa go wzór:

$$\rho = \frac{\min[\kappa_0(x_0 - x_1) + \zeta_0(x'_0 - x'_1)]}{\lambda(1 + \mu)} \quad (12)$$

przy czym w procesach przejściowych minimum powinno być wyznaczane od początku ruchu do aktualnej chwili, natomiast w procesach ustalonych można ograniczyć poszukiwanie minimum do przedziału czasu obejmującego co najmniej jeden okres wymuszenia.

W przypadku tłumików MR wartości współczynników tłumienia  $c_1$  i  $c_2$  oraz parametru  $\alpha_0$  (lub bezwymiarowych parametrów  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  oraz  $\alpha$ ) zależą od napięcia  $U$ , uzyskanego w rezultacie przepuszczenia napięcia sterującego  $u$  przez filtr I rzędu:

$$U' = -\sigma(U - u) \quad (13)$$

gdzie  $\sigma = \sigma_0 / \omega_0$  jest bezwymiarową odwrotnością stałej czasowej obwodu RL. Założono dalej, że pomiędzy napięciem  $U$  i parametrami  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  oraz  $\alpha$  zachodzą liniowe związki:

$$\alpha = \alpha_{\min} + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) U \quad \zeta_j = \zeta_{j\min} + (\zeta_{j\max} - \zeta_{j\min}) U \quad (14)$$

Występujące we wzorach (13, 14) zmienne  $U$  i  $u$  są bezwymiarowymi napięciami odniesionymi do wartości maksymalnej  $U_0$ .

### 3. Algorytm sterowania

W celu przetestowania różnych metod sterowania tłumikiem MR wprowadźmy najpierw algorytmy sterowania poprawiające niezależnie komfort i bezpieczeństwo jazdy. Przyjmujemy dla tych sterowań oznaczenia:  $u_i^{\text{Comfort}}$  oraz  $u_j^{\text{Safety}}$ , przy czym dolne indeksy będą zarezerwowane dla różnych wersji tych sterowań.

Poprawę komfortu jazdy można często uzyskać, stosując tzw. sterowanie *sky-hook* [1, 2, 9–11, 13–16, 19], w którym współczynniki tłumienia są dobierane w ten sposób, aby naśladować efekt tłumika połączonego ze stałym poziomem odniesienia. W uproszczonej formie sterowanie *sky-hook* realizuje układ sterowania włączający i wyłączający w odpowiednich chwilach tłumienie w elemencie semiaktywnym (sterowanie *on-off*) lub bardziej praktycznie przełączający wartość tego tłumienia z wartości minimalnej do maksymalnej. Pożądaną zmianę własności tłumiących można uzyskać, przyjmując za sygnał sterujący napięcie na sterowniku, zmieniające się skokowo od wartości zerowej do maksymalnej. Zwykle przyjmuje się, że o zmianie napięcia decyduje znak iloczynu siły i prędkości (dostarczana do układu moc) lub w uproszczeniu znak iloczynu prędkości bezwzględnej  $x_2'$  i względnej

$x_2' - x_1'$ . Dla wprowadzonych zmiennych bezwymiarowych powyższy warunek można zapisać następująco:

$$u_1^{Comfort} = \begin{cases} 1 & x_2'(x_2' - x_1') > 0 \\ 0 & x_2'(x_2' - x_1') \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

Nieco lepsze rezultaty, zwłaszcza w zakresie wyższych częstotliwości wymuszenia uzyskuje się, modyfikując sterowanie (15) w następujący sposób [10]:

$$u_1^{Comfort} = \begin{cases} 1 & x_2'(x_2' - x_1') > 0 \quad \wedge \quad \delta|x_1'| > 1 \\ \delta|x_2'| & x_2'(x_2' - x_1') > 0 \quad \wedge \quad \delta|x_2'| \leq 1 \\ 0 & x_2'(x_2' - x_1') \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

W przypadku prowadzenia obliczeń na wielkościach bezwymiarowych przyjęto  $\delta = 1$ .

Jako wskaźnik komfortu można przyjąć wartość skuteczną prędkości lub przyspieszenia masy resorowanej, natomiast wskaźnikiem odpowiedzialnym za bezpieczeństwo jazdy będzie dalej wskaźnik EUSAMA.

Rozważmy teraz problem poprawy bezpieczeństwa jazdy. Powszechnie wiadomo, że dobrą przyczepność kół oraz stabilność na zakrętach zapewniają tzw. amortyzatory twarde. W związku z tym przyjmujemy hipotezę, że sterowanie w przypadku pogorszenia się wskaźnika charakteryzującego tą przyczepność ma usztywnić układ, czyli dla tłumika MR wartości parametrów (14) muszą ulec zwiększeniu. Można to zrealizować, stosując skokowo zmienne sterowanie:

$$u_1^{Safety} = \begin{cases} 0 & \rho \geq \rho_{max} \quad \vee \quad (\rho_{min} < \rho < \rho_{max} \quad \wedge \quad u_1^{Safety} \leq 0) \\ 1 & \rho \leq \rho_{min} \quad \vee \quad (\rho_{min} < \rho < \rho_{max} \quad \wedge \quad u_1^{Safety} > 0) \end{cases} \quad (17)$$

gdzie  $\rho$  jest wskaźnikiem EUSAMA. Wprowadzenie wartości  $\rho_{min}$  i  $\rho_{max}$  w warunkach logicznych, występujących we wzorze (17), zabezpiecza układ sterowania przed zbyt częstym włączaniem i wyłączaniem napięcia sterującego (sterowanie histerezy). Pewną alternatywą jest sterowanie sygnałem ciągłym:

$$u_2^{Safety} = \begin{cases} 0 & \rho \geq \rho_{max} \\ \psi(\rho) & \rho_{min} < \rho < \rho_{max} \\ 1 & \rho \leq \rho_{min} \end{cases} \quad (18)$$

przy czym  $\psi(\rho)$  jest monotonicznie malejącą funkcją (np. liniową lub arcus cotangens), dla której są spełnione warunki:  $\psi(\rho_{min}) = 1$  i  $\psi(\rho_{max}) = 0$ . Sterowania (17) i (18) wymagają zastosowania w układzie pomiarowym czujnika siły, co stanowi pewien problem techniczny. Z tego powodu rezultaty otrzymane dla tych sterowań będą stanowić tylko podstawę do porównania efektywności działania innych algorytmów sterowania. Zamiast wskaźnika  $\rho$  wykorzystamy używany w poprzednich algorytmach (ze względu na komfort jazdy) sygnał prędkości względnej  $x_2' - x_1'$ . Z obserwacji rezultatów symulacji numerycznych wynika, że przebiegi czasowe reakcji są w sensie jakościowym zbliżone do przebiegów czasowych tego sygnału, przy czym minimum wskaźnika  $\rho$  odpowiadają maksima sygnału  $x_2' - x_1'$ .

Dodatkowo, ze zmniejszaniem wartości minimalnej  $\rho$  rosną wartości maksymalne  $x_2' - x_1'$ . Można więc zaproponować podobny do (18) algorytm:

$$u_3^{Safety} = \begin{cases} 1 & x_2' - x_1' \geq v_{max} \\ \varphi(x_2' - x_1') & v_{min} < x_2' - x_1' < v_{max} \\ 0 & x_2' - x_1' \leq v_{min} \end{cases} \quad (19)$$

Występująca we wzorze (19) funkcja  $\varphi$  jest teraz funkcją rosnącą (np. liniową lub arcus tangens) ze względu na fakt, że omówione wyżej analogie zachodzą dla przeciwnych sygnałów. Sprawdzimy również zachowanie się układu wibroizolacji w przypadku zastosowania sterowania, zależnego od sygnału  $|x_2' - x_1'|$  w oparciu o algorytm:

$$u_4^{Safety} = \begin{cases} 1 & |x_2' - x_1'| \geq v_{max} \\ \varphi(|x_2' - x_1'|) & v_{min} < |x_2' - x_1'| < v_{max} \\ 0 & |x_2' - x_1'| \leq v_{min} \end{cases} \quad (20)$$

W celu znalezienia kompromisu między kryteriami komfortu i bezpieczeństwa jazdy można zaproponować następujący przepis dla sterowania:

$$u = \max(u^{Comfort}, u^{Safety}) \quad (21)$$

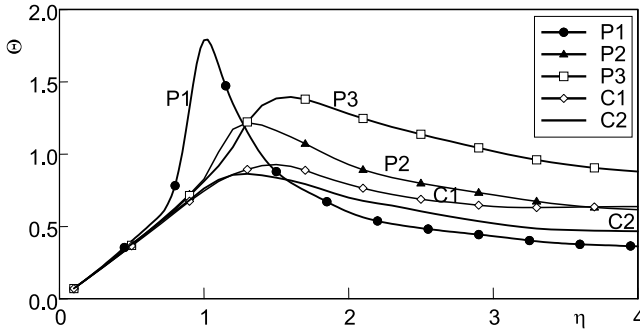
który w przypadku zagrożenia bezpieczeństwa jazdy powoduje włączenie się sterowania popawiającego przyczepność kół do podłoża.

#### 4. Rezultaty symulacji numerycznych

W obliczeniach numerycznych skupiono się na zbadaniu wpływu różnych algorytmów sterowania, ustalając wartości parametrów występujących w równaniach różniczkowych ruchu (9). W oparciu o dane:  $m_1 = 28$  kg,  $m_2 = 255$  kg,  $k_r = 20000$  N/m,  $k_0 = 180000$  N/m,  $c_0 \approx 0$  Ns/m,  $a = 0,005$  m, przyjęto wartości bezwymiarowych parametrów:  $\lambda = 25$ ,  $\mu = 0,11$ ,  $\kappa_0 = 9$ ,  $\zeta_0 = 0$ , charakteryzujących model ćwiartkowy samochodu. Na podstawie pracy [17] ( $k_1 = 1400$  Nm<sup>-1</sup>,  $c_1 = 5300$  Nsm<sup>-1</sup>,  $c_2 = 93000$  Nsm<sup>-1</sup>,  $\alpha_0 = 96300$  N/m,  $\beta_0 = \gamma_0 = 2 \cdot 10^6$  m<sup>-2</sup>,  $A_0 = 207$ ,  $\sigma_0 = 190$  s<sup>-1</sup>) oraz rezultatów symulacji numerycznych [4], oszacowano wartości parametrów modelu tłumika:  $A = 400$ ,  $\kappa_1 = 0,02$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \gamma = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,5$ ,  $\sigma = 21,5$ ,  $\zeta_1 = 0,55$  i  $\zeta_2 = 5,5$ . Dla przyjętych średnich wartości współczynników  $\zeta_1$  i  $\zeta_2$  zastępczy współczynnik tłumienia  $\zeta_z = \zeta_1 \zeta_2 / (\zeta_1 + \zeta_2)$ , określający średnie nachylenie charakterystyki siły tłumienia w zakresie wyższych prędkości, ma zalecaną wartość  $\zeta_z = 0,25$ .

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy wartości skutecznych prędkości  $x_2'$  masy resorowanej odniesione do odpowiednich wartości skutecznych wymuszenia  $x_0'$  (wskaźnik  $\Theta$ ). Ograniczono się do pokazania charakterystyk trzech układów pasywnych P1, P2 i P3 oraz dwóch układów semiaktywnych C1 i C2, uwzględniających tylko kryterium komfortu, odpowiednio o algorytmach sterowania (15) i (16). Dla układów pasywnych parametry (14) mają stałe wartości, równe odpowiednio dla układu P1 wartościom minimalnym ( $\zeta_1 = 0,275$ ,  $\zeta_2 = 2,75$ ,  $\alpha = 0,5$ ), dla P2 średnim ( $\zeta_1 = 0,55$ ,  $\zeta_2 = 5,5$ ,  $\alpha = 1$ ), a dla P3 wartościom maksymalnym ( $\zeta_1 = 0,825$ ,  $\zeta_2 = 8,25$ ,  $\alpha = 1,5$ ) układu semiaktywnego. Częstość wymuszenia  $\eta$

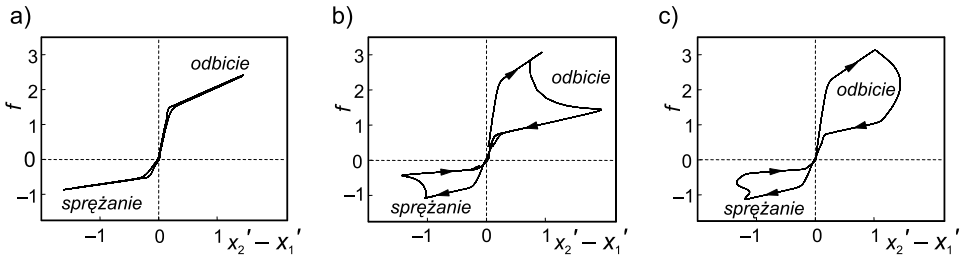
zmieniano w zakresie obejmującym tylko pierwszy rezonans, w którym to istotną rolę odgrywa kryterium komfortu jazdy.



Rys. 2. Wskaźnik komfortu  $\Theta$  – wartość skuteczna prędkości  $x_2'$ : P1, P2, P3 – układy pasywne, C1, C2 – układy semiaktywne ( $\zeta_{1\min} = 0,275$ ,  $\zeta_{1\max} = 0,825$ ,  $\zeta_{2\min} = 2,75$ ,  $\zeta_{2\max} = 8,25$ ,  $\alpha_{\min} = 0,5$ ,  $\alpha_{\max} = 1,5$ )

Fig. 2. Comfort index  $\Theta$  – rms value of velocity  $x_2'$ : P1, P2, P3 – passive systems, C1, C2 – semi-active systems ( $\zeta_{1\min} = 0.275$ ,  $\zeta_{1\max} = 0.825$ ,  $\zeta_{2\min} = 2.75$ ,  $\zeta_{2\max} = 8.25$ ,  $\alpha_{\min} = 0.5$ ,  $\alpha_{\max} = 1.5$ )

Z analizy rezultatów wynika wyraźna przewaga układów semiaktywnych nad pasywnymi, przy czym nieznacznie efektywniejszym dla wyższych częstotliwości okazuje się być układ C2, czyli układ, w którym sygnał sterujący zależy w sposób ciągły od prędkości  $x_2'$ . W przypadku układów pasywnych duży wpływ na charakterystyki częstotliwościowe układu ma parametr  $\alpha$ . W pracy [4] wykazano, że dla  $\alpha$  bliskiego jedności tłumiki pasywne działają najlepiej w zakresie pierwszego rezonansu. Fakt ten potwierdza rys. 2, na którym charakterystyka uzyskana dla  $\alpha = 1$  (układ P2) ma spośród układów pasywnych najmniejszą wartość maksymalną, jednak dla wyższych częstotliwości wymuszeń tłumienie drgań nie jest już tak efektywne.



Rys. 3. Zależność siły tłumienia od prędkości ( $\eta = 1,3$ ): a) model P2, b) model C1, c) model C2

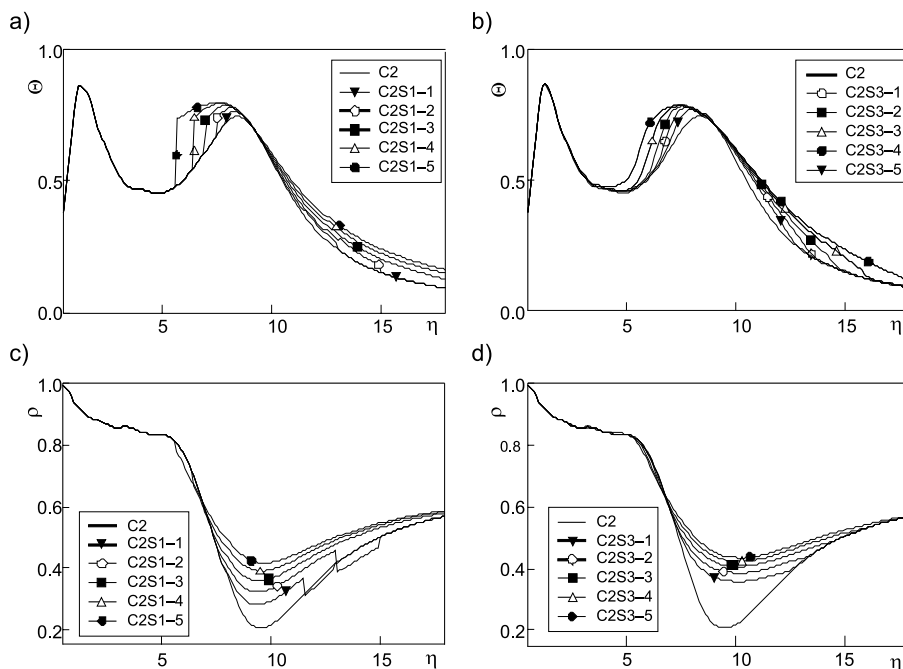
Fig. 3. Force-velocity diagram ( $\eta = 1.3$ ): a) model P2, b) model C1, c) model C2

Na rysunku 3 przedstawiono charakterystyki siły tłumienia układu pasywnego P2 (rys. 3a) oraz układów semiaktywnych C1 (rys. 3b) i C2 (rys. 3c). Ograniczono się do pokazania zależności siły od prędkości względnej  $x_2' - x_1'$ . Zależność ta dla układu pasywnego jest typową niesymetryczną charakterystyką z wąską pętlą histerezy. Dla większych prędkości nachylenie charakterystyki maleje, co w układach pasywnych (np. tłumikach



hydraulicznych [5]) jest efektem otwarcia dodatkowych zaworów. Na wykresie otrzymanym dla układu C1 są wyraźnie widoczne przeskokki z gałęzi bardziej sztywnej na miękką i odwrotne, co jest skutkiem wyłączania i włączania napięcia sterującego tłumikiem MR. W przypadku charakterystyki układu C2 przejście z jednej gałęzi na drugą odbywa się w sposób bardziej ciągły.

Wpływ sterowań (17)–(20), uwzględniających w kryterium wskaźnik bezpieczeństwa jazdy, uwidacznia się w zakresie drugiego rezonansu, w którym to zakresie dość gwałtownemu zmniejszeniu ulega wartość wskaźnika EUSAMA  $\rho$ , czyli zmniejsza się przyczepność kół do podłoża.



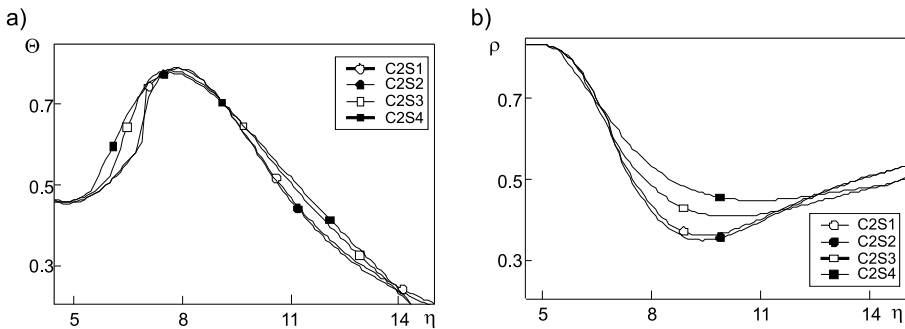
Rys. 4. Wpływ algorytmów sterowania na wskaźniki  $\Theta$  i  $\rho$ : a) model C2S1, b) model C2S3  
 Fig. 4. The influence of control algorithms on the index  $\Theta$  and  $\rho$ : a) model C2S1, b) model C2S3

Na rysunkach 4a i 4b przedstawiono wykresy wskaźników  $\Theta$  i  $\rho$ , otrzymane dla sterowań: według algorytmu (17) – rys. 4a (krzywe C2S1) oraz według (19) – rys. 4b (krzywe C2S3). Przyjęte opisy charakterystyk typu CiSj ( $i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$ ) dotyczą krzywych otrzymanych w wyniku zastosowania sterowania będącego kombinacją różnych strategii sterowań  $u_i^{\text{Comfort}}$  oraz  $u_j^{\text{Safety}}$ . Na rys. 4a krzywe C2S1-1 ( $\rho_{\min} = 0,4, \rho_{\max} = 0,5$ ), C2S1-2 ( $\rho_{\min} = 0,5, \rho_{\max} = 0,6$ ), C2S1-3 ( $\rho_{\min} = 0,6, \rho_{\max} = 0,7$ ), C2S1-4 ( $\rho_{\min} = 0,7, \rho_{\max} = 0,8$ ), C2S1-5 ( $\rho_{\min} = 0,8, \rho_{\max} = 0,9$ ) zostały wyznaczone dla różnych wartości prametrów występujących w warunkach logicznych algorytmu (17). Podobnie wyznaczono krzywe C2S3-1 ( $v_{\min} = 8, v_{\max} = 16$ ), C2S3-2 ( $v_{\min} = 7, v_{\max} = 14$ ), C2S3-3 ( $v_{\min} = 6, v_{\max} = 12$ ), C2S3-4 ( $v_{\min} = 5, v_{\max} = 10$ ) oraz C2S3-5 ( $v_{\min} = 4, v_{\max} = 8$ ) na rys. 4b. W celach porównawczych

na obu rysunkach naniesiono również charakterystykę uzyskaną dla sterowania (16), czyli bez uwzględnienia kryterium bezpieczeństwa (krzywa C2).

W zakresie pierwszego rezonansu wszystkie krzywe pokrywają się. W obszarze drugiego rezonansu, uwidaczniają się już duże różnice. W zakresie tym ze wzrostem wartości  $\rho_{\min}$  i  $\rho_{\max}$  w algorytmie (17) lub ze zmniejszaniem wartości  $v_{\min}$  i  $v_{\max}$  w algorytmie (19) wyraźnie zwiększają się wartości wskaźnika Eusama, czyli zwiększa się przyczepność kół do podłoża. Jednocześnie poszerza się zakres drugiego rezonansu, w kierunku niższych częstotliwości (wskaźnik  $\Theta$ ), a więc wraz z poprawą bezpieczeństwa pogarsza się niestety komfort jazdy.

Dobierając odpowiednio wartości parametrów  $\rho_{\min}$  i  $\rho_{\max}$  dla sterowania (17) lub  $v_{\min}$  i  $v_{\max}$  dla sterowania (19) można znaleźć kompromis między sprzecznymi wymaganiami dotyczącymi komfortu i bezpieczeństwa. Należy również zauważyć, że sterując prędkością względną (rys. 4b), uzyskuje się nawet nieznacznie większe wartości współczynnika  $\rho$  (lepszą przyczepność) niż w przypadku sterowania trudniejszą do zmierzenia siłą nacisku koła na podłoże (rys. 4a).

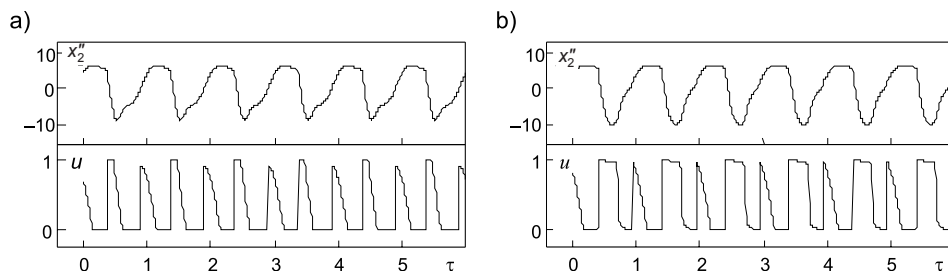


Rys. 5. Wpływ algorytmów sterowania na wskaźniki jakości: a) wskaźnik  $\theta$ , b) wskaźnik  $\rho$   
 Fig. 5. The influence of control algorithms on the efficiency index: a) index  $\theta$ , b) index  $\rho$

Wpływ pozostałych algorytmów sterowania na oba wskaźniki w nieco węższym zakresie częstotliwości, obejmującym tylko drugi rezonans, ilustruje rys. 5. Dla układów C2S1 i C2S2 przyjęto:  $\rho_{\min} = 0,6$ ,  $\rho_{\max} = 0,7$ , natomiast dla układów C2S3 i C2S4 założono:  $v_{\min} = 6$ ,  $v_{\max} = 12$ .

Efektywność działania tłumików semiaktywnych, z wszystkimi rozważanymi algorytmami sterowania, jest zbliżona w sensie kryterium komfortu – wskaźnik  $\Theta$ . Nieco większe różnice można zauważyć, analizując wykresy wskaźnika  $\rho$  – w sensie kryterium bezpieczeństwa najlepsze rezultaty uzyskuje się dla układu C2S4, czyli sterowania (20).

Na rysunku 6 przedstawiono przebiegi czasowe napięcia sterującego oraz odpowiadające im przebiegi przyspieszeń masy resorowanej. Na przebiegach przyspieszeń można najłatwiej zaobserwować wpływ sterowania. Rozważono zakres drugiego rezonansu (częstość wymuszenia  $\eta = 7,5$ ) w celu uchwycenia wpływu kryteriów uwzględniających bezpieczeństwo jazdy. W przypadku sterowania (19) na wykresach napięcia (rys. 6b) są widoczne dodatkowe, w porównaniu do algorytmu (16), punkty włączania się napięcia sterującego. Efektem jest nieznaczne zwiększenie wartości ekstremalnych przyspieszeń, czyli pogorszenie komfortu. Uzyskuje się jednak znaczne zwiększenie wskaźnika EUSAMA (rys. 5b – układ C2S3).



Rys. 6. Przebiegi czasowe napięcia sterującego  $u$  oraz przyspieszenia  $x_2''$  ( $\eta = 7,5$ ):

a) algorytm (16), b) algorytm (19)

Fig. 6. Time histories of control voltage  $u$  and acceleration  $x_2''$  ( $\eta = 7.5$ ):

a) algorithm (16), b) algorithm (19)

## 5. Wnioski

Z analizy przedstawionych wyników oraz z obserwacji rezultatów obliczeń przeprowadzonych dla innych danych można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Zastosowanie układów semiaktywnych w sposób zdecydowany obniża wartości amplitud, prędkości oraz przyspieszeń w zakresie pierwszego rezonansu, co powoduje znaczne zwiększenie komfortu pasażera w trakcie jazdy.
2. Układy semiaktywne, w których nie uwzględniono kryterium bezpieczeństwa, dają niekorzystne rezultaty głównie w zakresie drugiego rezonansu, gdyż zmniejsza się wartość wskaźnika EUSAMA, odpowiedzialnego za przyczepność kół do podłoża. Wszystkie proponowane algorytmy sterowania, uwzględniające w kryterium problem bezpieczeństwa, w sposób wyraźny zapewniają zwiększenie wskaźnika EUSAMA.
3. Pogodzenie obu rozważanych kryteriów wymaga doboru, np. w drodze symulacji numerycznych, wartości parametrów występujących w algorytmach (17)–(20).
4. Rezultaty analiz numerycznych powinny zostać potwierdzone przez przewidywane w dalszych badaniach doświadczenia.

## Literatura

- [1] Ahmadian M., *Active Control of Vehicle Vibrations*, Encyclopedia of Vibration, Academic Press, London, 2001, 37-48.
- [2] Ahmadian M., Vahdati N., *Transient dynamics of semiactive suspensions with hybrid control*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 17(2), 2006, 145-153.
- [3] Dominguez A., Sedaghati R., Stiharu I., *Modeling and application of MR dampers in semi-adaptive structures*, Computers & Structures, 86, 2008, 407-415.
- [4] Ferdek U., Łuczko J., *Analiza ćwiartkowego modelu zawieszenia pojazdu z tłumikiem hydraulicznym*, XVIII Warsztaty Naukowe PTSK, Zakopane 2011.
- [5] Ferdek U., Łuczko J., *Modeling and analysis of a twin-tube hydraulic shock absorber*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 5.02.2012, 627-638.

- [6] Fischer D., Isermann R., *Mechatronic semi-active and active vehicle suspensions*, Control Engineering Practice, 12, 2004, 1353-1367.
- [7] Ihsan S., Ahmadian M., Faris W., Blanchard E.D., *Ride performance analysis of half-car model for semi-active system using RMS as performance criteria*, Shock and Vibration, 16 (6), 2009, 593-605.
- [8] Goncalves F.D., Ahmadian M., *A hybrid control policy for semi-active vehicle suspensions*, Shock and Vibration, 10 (1), 2003, 59-69.
- [9] Liu Y., Waters T.P., Brennan M.J., *A comparison of semi-active damping control strategies for vibration isolation of harmonic disturbances*, Journal of Sound and Vibration, 280, 2005, 21-39.
- [10] Łuczko J., *Porównanie dynamicznych odpowiedzi semiaktywnych tłumików opisanych modelami Bouc-Wena i Spencera*, Czasopismo Techniczne, 1-M/2011, Wydawnictwo PK, Kraków 2011, 127-136.
- [11] Potter J.N., Neild S.A., Wagg D.J., *Generalisation and optimization of semi-active, on-off switching controllers for single degree-of-freedom systems*, Journal of Sound and Vibration, 329, 2010, 2450-2462.
- [12] Prabakar R.S., Sujatha C., Narayanan S., *Optimal semi-active preview control response of a half car vehicle model with magnetorheological damper*, Journal of Sound and Vibration, 326, 2009, 400-420.
- [13] Sapiński B., *Real-time control for a magnetorheological shock absorber in a driver seat*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 43, 3, 2005, 631-653.
- [14] Sapiński B., Martynowicz P., *Vibration control in a pitch-plane suspension model with MR shock absorbers*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 43, 3, 2005, 655-674.
- [15] Sapiński B., Rosół M., *Autonomous control system for a 3 DOF pitch-plane suspension model with MR shock absorbers*, Computers and Structures, 86, 2008, 379-385.
- [16] Shamsi A., Choupani N., *Continuous and Discontinuous Shock Absorber, Control through Skyhook Strategy in Semi-Active Suspension System (4DOF Model)*, International Journal of Mechanical, Industrial and Aerospace Engineering, 2008, 254-258.
- [17] Spencer Jr B.F., Dyke S.J., Sain M.K., Carlson J.D., *Phenomenological Model for Magnetorheological Dampers*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, 123, 3, 1996, 230-238.
- [18] Wu X., Griffin M.J., *A semi-active control policy to reduce the occurrence and severity of end-stop impacts in a suspension seat with an electrorheological fluid damper*, Journal of Sound and Vibration, 203(5), 1997, 781-793.
- [19] Yao G.Z., Yap F.F., Chen G., Li W.H., Yeo S.H., *MR damper and its application for semi-active control of vehicle suspension system*, Mechatronics, 12, 2002, 963-973.

JAN RYŚ, MARCIN AUGUSTYN\*

BADANIA EKSPERYMENTALNE ŁOPATY  
O PRZEKROJU DWUSPÓJNYM TURBINY WIATROWEJ  
O PIONOWEJ OSI OBROTU – KINETYKA I MOMENT  
NAPĘDOWY TURBINY

EXPERIMENTAL STUDIES OF A TWO-COHERENT  
CROSS-SECTION BLADE OF WIND ROTOR  
WITH VERTICAL AXIS – MOTION AND A PROPELLING  
MOMENT OF WIND TURBINE

Streszczenie

W niniejszym artykule przedstawiono badania eksperymentalne łopaty o przekroju dwuspójnym wirnika karuzelowego silnika wiatrowego, z mechanizmem naprowadzania na kierunku wiatru i planetarnym ruchem łopat. Pokazano budowę łopaty oraz wyniki pomiarów sił aerodynamicznych i momentu aerodynamicznego działających na model łopaty. Na podstawie otrzymanych wyników przeanalizowano kinematykę i moment napędowy wirnika turbiny oraz moc jednostkową. Rezultaty obliczeń przedstawiono na rysunkach.

*Słowa kluczowe: turbina wiatrowa, łopata o przekroju dwuspójnym, moment napędowy, moc jednostkowa*

Abstract

This paper presents experimental studies in a wind tunnel of a two – coherent cross – section blade of wind rotor with vertical axis, mechanism of locating the direction of the wind and planetary rotation of blades. A structure of the blade and results of measurements of aerodynamic forces and aerodynamic torque were shown. Based on received results under some assumptions the propelling moment and unit power were obtained. The results are presented in figures.

*Keywords: wind turbine, two-coherent cross-section blade, directing unit, propelling moment, unite power*

\* Prof. dr hab. inż. Jan Ryś, mgr inż. Marcin Augustyn, Instytut Konstrukcji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

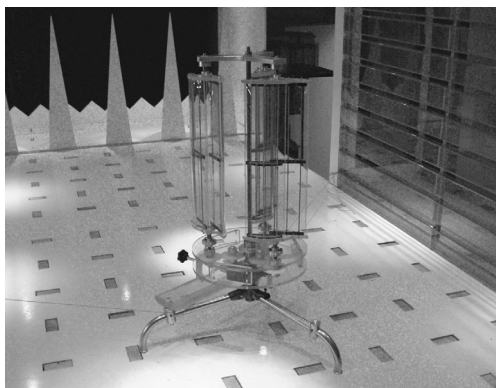
Siłownie o pionowej osi obrotu to rozwiązania konstrukcyjne bazujące głównie na trzech podstawowych wirnikach wiatrowych Savoniusa, Darrieusa oraz wirnika typu H, o wiele prostsze w budowie i tańsze w eksploatacji od siłowni o osi poziomej, jednak mało popularne m.in. ze względu na wolnobieżność i niską sprawność [6, 7]. W poszukiwaniu korzystniejszych rozwiązań konstrukcyjnych wirników turbin o pionowej osi obrotu istotny jest kształt łopaty oraz charakter ruchu łopaty względem osi obrotu wirnika.

W niniejszym artykule zaprezentowano analizę nowego rozwiązania dla wirnika o planetarnym ruchu łopat, których kształt w przekroju poprzecznym jest dwuspójny. Sposobem na ocenę efektywności nowego typu wirnika będzie analiza oparta na wynikach badań eksperymentalnych oraz obliczeniach.

Celem badań eksperymentalnych, przeprowadzonych w tunelu aerodynamicznym Laboratorium Inżynierii Wiatrowej Politechniki Krakowskiej [5], była analiza wpływów wiatrowych na powierzchnie łopaty o przekroju dwuspójnym, turbiny wiatrowej o pionowej osi obrotu [1, 2], podczas obciążenia wiatrem. Wynikiem badań było wyznaczenie współczynników aerodynamicznych niezbędnych do obliczeń momentu napędowego wirnika z jedną, z dwoma lub trzema łopatomy, a następnie wyznaczenie mocy jednostkowej łopaty w funkcji prędkości wiatru.

## 2. Obiekt badań

Obiektem badań aerodynamicznych była łopata o przekroju dwuspójnym silnika wiatrowego o pionowej osi obrotu i planetarnym ruchu łopat wirnika z mechanizmem naprowadzania na kierunek wiatru. Na rysunku 1 pokazano tego typu turbinę z trzema łopatomy, zaprojektowaną i zbudowaną w Instytucie Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej [4].

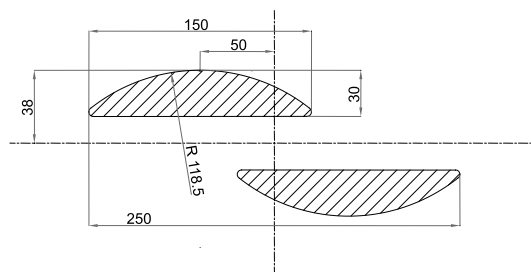


Rys. 1. Model turbiny karuzelowej z planetarnym ruchem łopat w tunelu aerodynamicznym Laboratorium Inżynierii Wiatrowej Politechniki Krakowskiej

Fig. 1. Model of a merry-go-round type wind rotor with a planetary blade motion in the Wind Engineering Laboratory, Cracow University of Technology

Wykorzystany do badań model łopaty to konstrukcja przestrzenna składająca się z dwóch przeciwległych płatów z możliwością regulacji położenia względem siebie (rys. 2). Wymiary gabarytowe modelu:

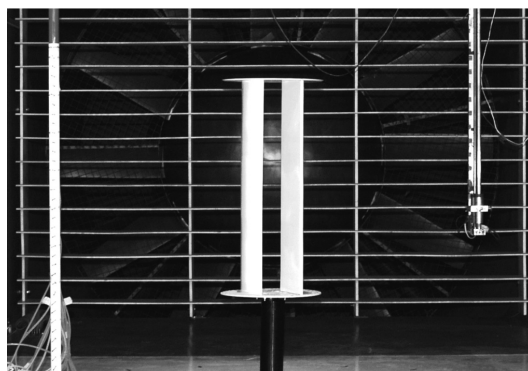
- wysokość 625 mm,
- szerokość podstawy 250 mm, natomiast szerokość pojedynczego płata 150 mm,
- powierzchnia nominalna łopaty  $S_o = 0,625 \text{ m} \times 0,25 \text{ m} = 0,156 \text{ m}^2$ .



Rys. 2. Przekrój poprzeczny łopaty o kształcie dwuspójnym

Fig. 2. Intersection of the two-coherent cross-section blade

Kształt przekroju poprzecznego pojedynczego płata modelu łopaty turbiny wiatrowej ukształtowano tak, aby na jednej połowie płata była powierzchnia płaska, równoległa do powierzchni głównej, a na drugiej połowie przechodziła w powierzchnię wypukłą. Przestrzeń w środkowej strefie łopaty znacznie zwiększa moment aerodynamiczny, a także wytrzymałość i sztywność rozwiązania konstrukcyjnego [3]. Usytuowanie modelu w czasie badań zilustrowano na rys. 3.

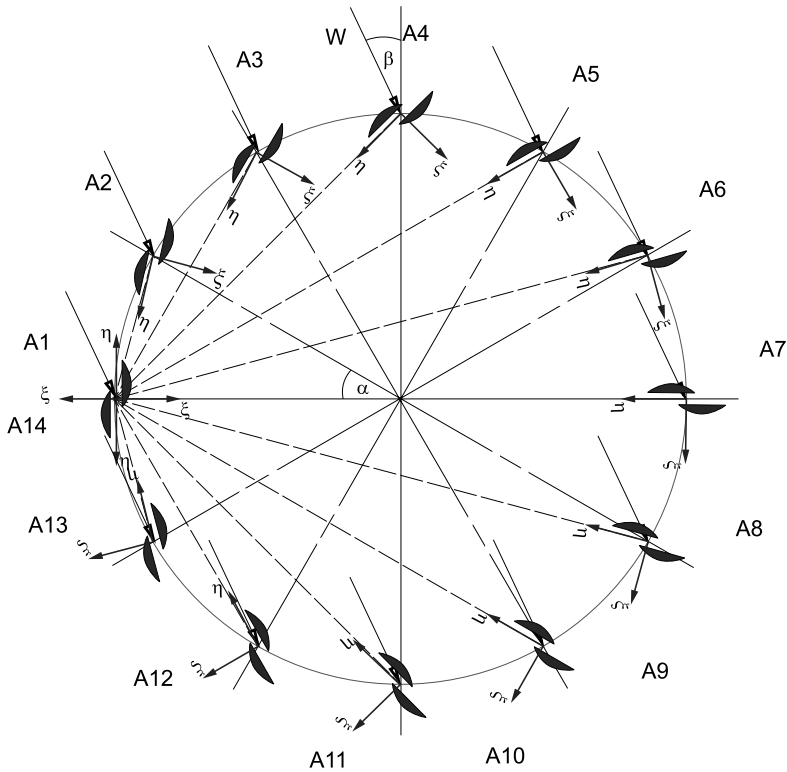


Rys. 3. Model łopaty w przestrzeni pomiarowej tunelu aerodynamicznego PK

Fig. 3. A model of the blade in the measurement space of the wind tunnel of Cracow University of Technology

Na rysunku 4 pokazano, kolejno od punktu A1 do A14, ustawienia łopat w czasie pracy wirnika wraz z układem współrzędnych  $(\xi, \eta)$ . Łopaty wirnika obracają się względem własnej osi w kierunku przeciwnym i z prędkością dwukrotnie mniejszą niż prędkość obro-

tu względem wirnika. Jest to możliwe dzięki zastosowaniu w tym rozwiązaniu konstrukcyjnym przekładni planetarnej.



Rys. 4. Schemat przekroju poprzecznego wirnika,  $\beta$  – kąt działania wiatru na wirnik, prędkość wirnika  $V_o = 0$

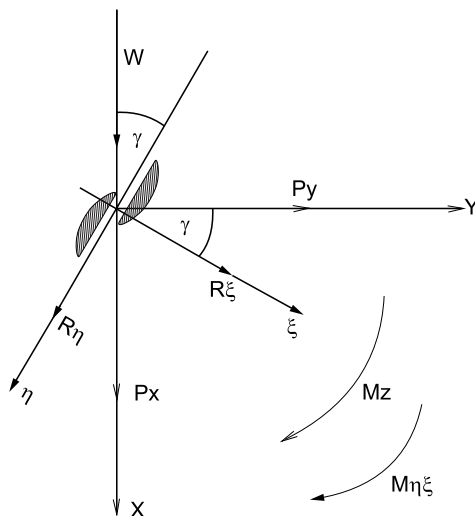
Fig. 4. A scheme of the intersection of the rotor,  $\beta$  – the angle of diverting the wind on the rotor, rotations speed of rotor  $V_o = 0$

### 3. Przebieg badań i wyniki pomiarów

Badania przeprowadzono dla ustalonej prędkości wiatru  $W_{sr} = 16$  m/s. Uśredniona wartość ciśnienia dynamicznego wynosiła  $P_{d\overline{sr}} = 163$  N/m<sup>2</sup>. Model łopaty zamontowano na pionowej pięcioskładnikowej wadze aerodynamicznej w przestrzeni pomiarowej tunelu, pomiar prędkości wiatru wykonano za pomocą zespołu skanerów ciśnień. Czujniki ciśnieniowe umieszczono w płaszczyźnie pionowej, co pokazano na rys. 3.

Działające na badany model łopaty, siły i moment aerodynamiczny, jak również zorientowanie modelu w układzie współrzędnych, przedstawiono na rysunku poniżej.

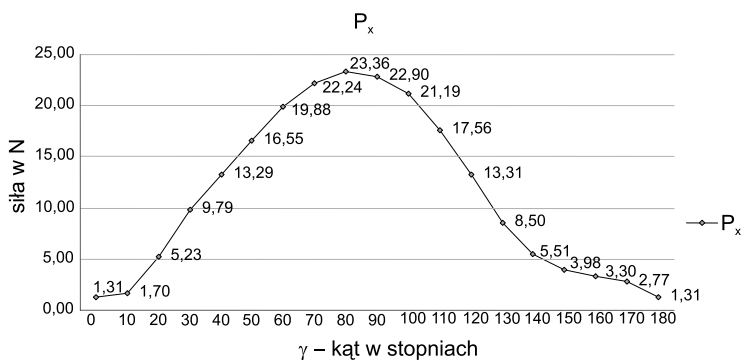




Rys. 5. Zorientowanie modelu w układzie współrzędnych  $X, Y, Z$ , oraz  $\eta, \xi$ . Siły i momenty działające na model łopaty ( $P_x$  – opór aerodynamiczny,  $P_y$  – siła boczna,  $M_z$  – moment skracający względem osi  $Z$ ,  $W$  – kierunek wiatru,  $\gamma$  – kąt pochylenia wektora prędkości względnej  $V$  do osi przekroju łopaty)

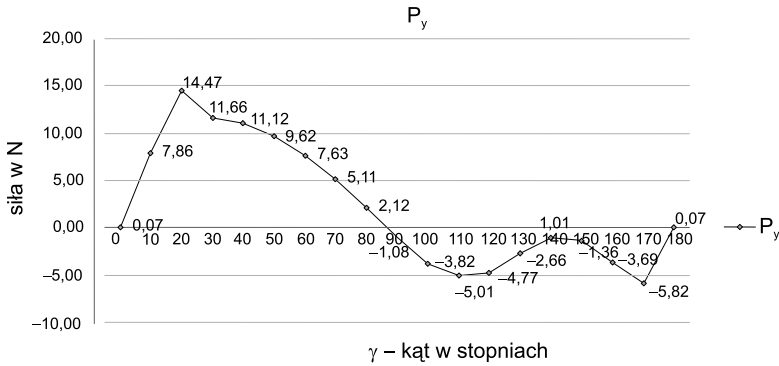
Fig. 5. Configuration of the model's in the system of coordinates bearings  $X, Y, Z$ , and also aerodynamic forces and aerodynamic torque active on model ( $P_x$  – aerodynamic drag,  $P_y$  – lateral aerodynamic force,  $M_z$  – torque,  $W$  – the wind direction)

Otrzymane wyniki pomiarów oporu aerodynamicznego  $P_x$ , siły bocznej  $P_y$  i momentu skracającego  $M_z$  w zależności od kąta natarcia wiatru, przedstawiono w postaci graficznej na rys. 6–8.



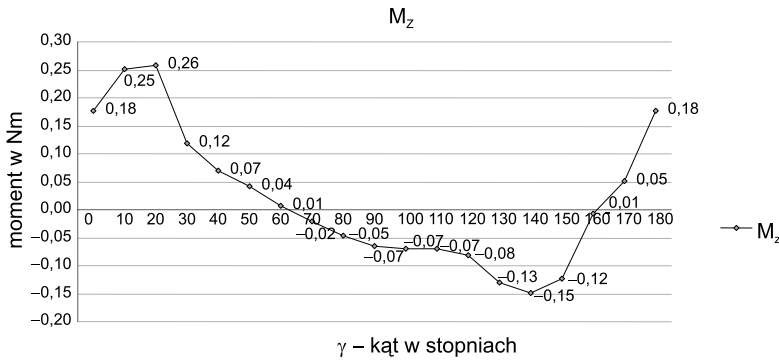
Rys. 6. Opór aerodynamiczny  $P_x$  w funkcji kąta natarcia wiatru  $\gamma$  obracającej się łopaty względem osi wirnika

Fig. 6. Aerodynamic drag  $P_x$  as function of the angle of wind attack  $\gamma$  of the blade in the axis of the rotor rotates



Rys. 7. Siła boczna  $P_y$  w funkcji kąta natarcia wiatru  $\gamma$  obracającej się łopaty względem osi wirnika

Fig. 7. Lateral aerodynamic force  $P_y$  as function of the angle of wind attack  $\gamma$  of the blade in the axis of the rotor rotates



Rys. 8. Moment skręcający  $M_z$  względem osi  $z$  w funkcji kąta natarcia wiatru  $\gamma$  obracającej się łopaty względem osi wirnika

Fig. 8. Torque  $M_z$  as function of the angle of wind attack  $\gamma$  of the blade in the axis of the rotor rotates

#### 4. Współczynniki areodynamiczne łopaty dwuspójnej

Otrzymane z pomiaru wartości sił  $P_x$ ,  $P_y$  i momentu  $M_z$  dla łopaty o przekroju dwuspójnym w układzie współrzędnych  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , posłużyły do obliczenia wartości sił  $R_\eta$ ,  $R_\xi$  i momentu  $M_{\eta\xi}$  w układzie  $\eta$ ,  $\xi$  według rysunku 5. Do obliczeń przyjęto  $\gamma = \alpha/2$  dla prędkości obwodowej  $V_o = 0$  i  $\beta = 0$ :

$$R_\eta = P_x \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - P_y \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (1)$$

$$R_{\xi} = P_x \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + P_y \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (2)$$

$$M_{\eta\xi} = M_z \quad (3)$$

oraz współczynników aerodynamicznych  $k_{\eta}$ ,  $k_{\xi}$ ,  $k_{\eta\xi}$  w układzie  $\eta$ ,  $\xi$ :

$$k_{\eta} = \frac{R_{\eta}}{P_{d'sr} \cdot S_{\eta\xi}} \quad (4)$$

$$k_{\xi} = \frac{R_{\xi}}{P_{d'sr} \cdot S_{\eta\xi}} \quad (5)$$

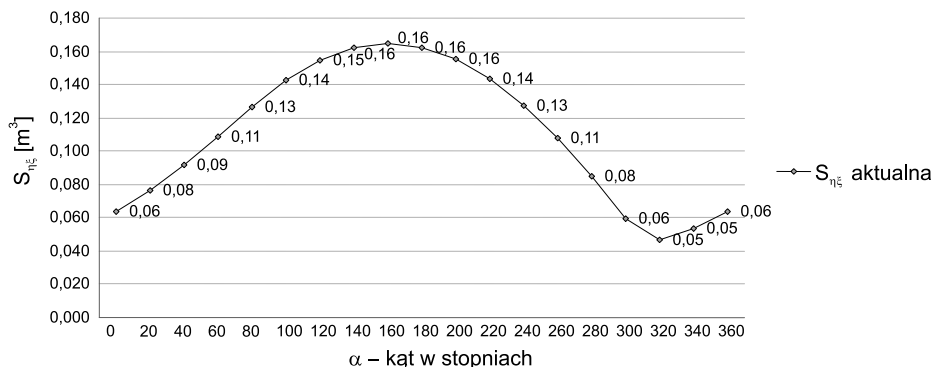
$$k_{\eta\xi} = \frac{M_{\eta\xi}}{P_{d'sr} \cdot S_{\eta\xi} \cdot a} \quad (6)$$

gdzie:

$P_{d'sr}$  – to średnie ciśnienie dynamiczne, którego wartość obliczeniowa wynosi  $0,5 \cdot W_{sr}^2 \cdot \rho = 160,3 \text{ N/m}^2$  ( $W_{sr}$  – to średnia prędkość wiatru o wartości  $W_{sr} = 16,28 \text{ m/s}$ ,  $\rho$  – gęstość powietrza  $\rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$ ), a otrzymana wartość średnia ciśnienia dynamicznego z pomiaru to  $P_{d'sr} = 163 \text{ N/m}^2$ ,

$a = 250 \text{ mm}$  – szerokość modelu,

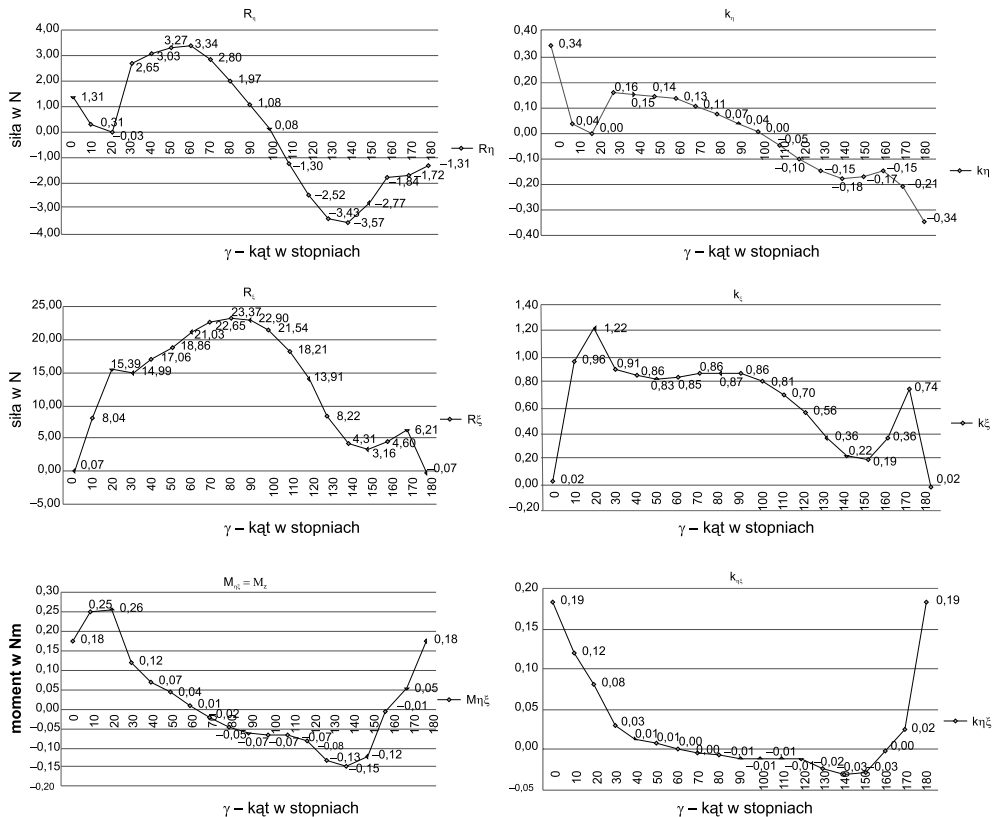
$S_{\eta\xi}$  – aktualna powierzchnia obrysu [ $\text{m}^2$ ] modelu łopaty (rys. 9) obliczona z iloczynu wysokości łopaty  $h = 0,65 \text{ m}$  do rzutu prostopadłego jej obrysu zależnego od ustawienia łopaty w układzie  $X$ ,  $Y$  według rys. 4.



Rys. 9. Aktualna, chwilowa powierzchnia obrysu [ $\text{m}^2$ ] modelu łopaty w funkcji kąta natarcia wiatru  $\alpha$  łopaty względem osi wirnika w układzie  $\eta$ ,  $\xi$

Fig. 9. Current area of the contour [ $\text{m}^2$ ] of the blade as function of the angle of wind attack  $\alpha$  of the turning blade the account of the axis of the rotor in  $\xi$  and  $\eta$  system of coordinates

Poniżej w formie graficznej przedstawiono, na podstawie otrzymanych z badań eksperymentalnych wartości sił  $P_x$ ,  $P_y$  i momentu  $M_z$  dla badanej łopaty o przekroju dwuspójnym w układzie współrzędnych  $X, Y, Z$ , wyliczone wartości sił  $R_\eta$ ,  $R_\xi$  i momentu  $M_{\eta\xi}$  w układzie  $\eta, \xi$  oraz ich współczynniki aerodynamiczne  $k_\eta$ ,  $k_\xi$ ,  $k_{\eta\xi}$ .



Rys. 10. Wartości sił i momentu skręcającego w układzie  $\eta, \xi$  oraz wyliczone na podstawie tych wartości współczynniki aerodynamiczne w funkcji kąta natarcia wiatru  $\gamma$  obracającej się łopaty względem osi wirnika

Fig. 10. Values of aerodynamic forces and torque in  $\xi$  and  $\eta$  system of coordinates, and the aerodynamic coefficients enumerated based on these values as function of the angle of wind attack  $\gamma$  of the turning blade the account of the axis of the rotor

W celu wyliczenia momentu całkowitego siłowni w układzie  $\eta, \xi$ , w postaci funkcji (7) zapisano aktualną, chwilową powierzchnię odrysu  $S_{\eta\xi}$ , otrzymując teoretyczną powierzchnię obrysu  $S(\alpha)$  stanowiącą parametr bezwymiarowy modelu łopaty:

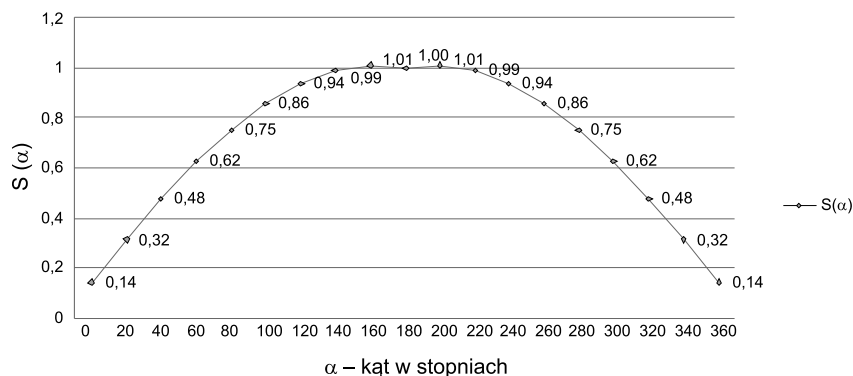
$$S(\alpha) = \frac{S_{\eta\xi}}{h \cdot a} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + k \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \text{sign}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \quad (7)$$

gdzie:

$$\kappa = \frac{b}{a} \quad (8)$$

$a$  – szerokość modelu łopaty równa 0,25 m,

$b$  – odległość między elementami składającymi się na przekrój dwuspójny równa 0,036 m.



Rys. 11. Bezwymiarowa, teoretyczna powierzchnia obrysu łopaty turbiny w funkcji kąta natarcia wiatru  $\alpha$  łopaty względem osi wirnika w układzie  $\eta, \xi$

Fig. 11. Dimensionless, computational area of the contour [m<sup>2</sup>] of the blade as function of the angle of wind attack  $\alpha$  of the turning blade the account of the axis of the rotor in  $\xi$  and  $\eta$  system of coordinates

### 5. Moment rozruchowy turbiny wiatrowej o pionowej osi obrotu z jedną łopata przy prędkości wirnika $V_o = 0, \beta = 0$

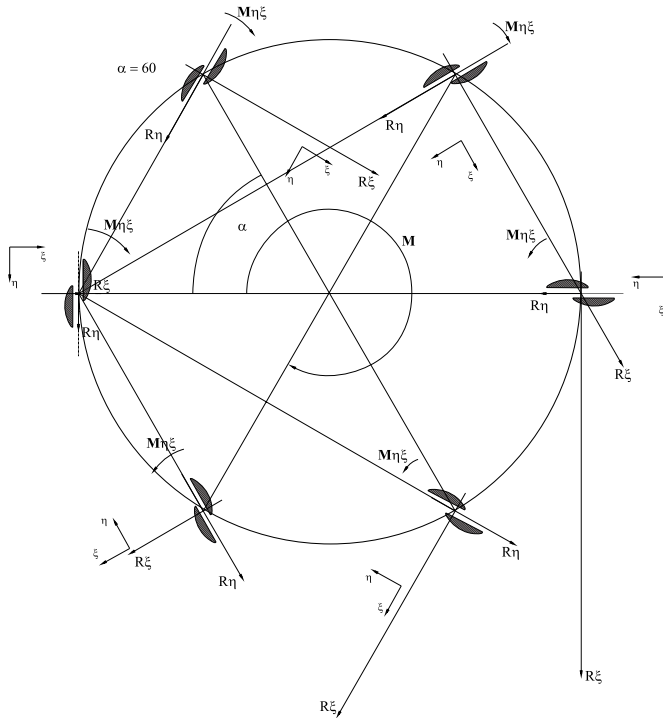
Zgodnie z rysunkiem 12 na łopatę turbiny działają siły:  $R_\xi; R_\eta$  i moment  $M_{\eta\xi}$ . Można zatem zapisać ogólny wzór na całkowity moment napędowy wirnika generowany przez jedną łopatę  $M_1(\alpha_s)$  jako średnią arytmetyczną momentów dla jednej łopaty w funkcji kąta natarcia wiatru  $\alpha(\alpha_s)$  obracającej się łopaty względem osi wirnika:

$$M_1(\alpha_s) = \left[ -R_\eta \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + R_\xi \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \cdot R + M_{\eta\xi} \quad (9)$$

gdzie:

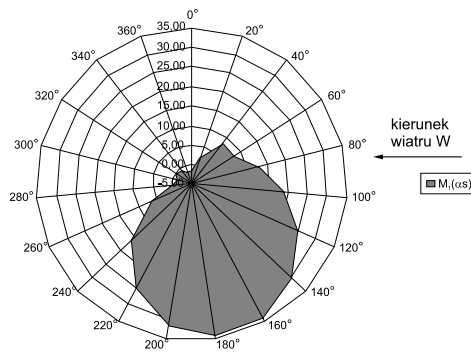
$R$  – promień od osi wirnika do osi łopaty równy 1,5 m.

Otrzymane wartości momentu całkowitego wirnika dla jednej łopaty  $M_1(\alpha_s)$  w funkcji kąta natarcia wiatru  $\alpha(\alpha_s)$  przedstawiono na rys. 13.



Rys. 12. Schemat sił działających na łopate turbin dla wybranych położenia względem osi wirnika – prędkość obrotowa wirnika  $V = 0$

Fig. 12. A scheme of forces executing on blades of turbine for chosen location by rotor – revs of the rotor  $V = 0$



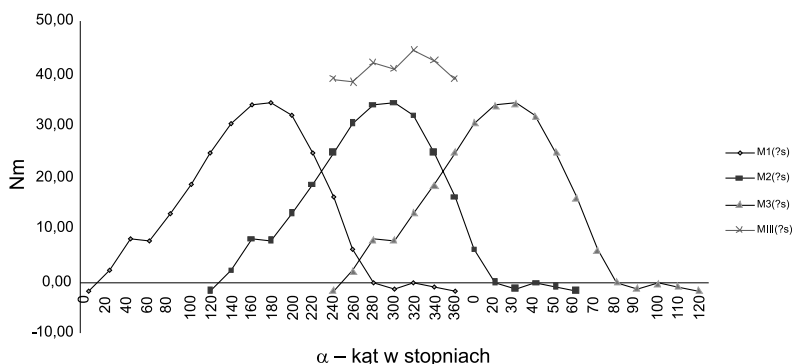
Rys. 13. Wartości momentu całkowitego  $M_1(\alpha_s)$  [Nm] dla jednej łopaty w funkcji kąta obrotu  $\alpha$  obracającej się łopaty względem osi wirnika w układzie  $\eta, \xi$  – prędkość obrotowa wirnika  $V_o = 0$

Fig. 13. Values of total torque [Nm] for one blade as function of the angle  $\alpha$  of the turning blade the account of the axis of the rotor in  $\eta, \xi$  system of coordinates – revs of the rotor  $V_o = 0$

Moment całkowity dla trzech łopatek  $M_{III}(\alpha_s)$  względem układu  $\eta, \xi$  przy  $V = 0$  to suma momentów całkowitych dla jednej  $M_1(\alpha_s)$ , dwóch  $M_2(\alpha_s)$  i trzech  $M_3(\alpha_s)$  łopatek w funkcji kąta natarcia wiatru  $\alpha(\alpha_s)$ .

$$M_{III}(\alpha_s) = M_1(\alpha_s) + M_2(\alpha_s) + M_3(\alpha_s) \quad (10)$$

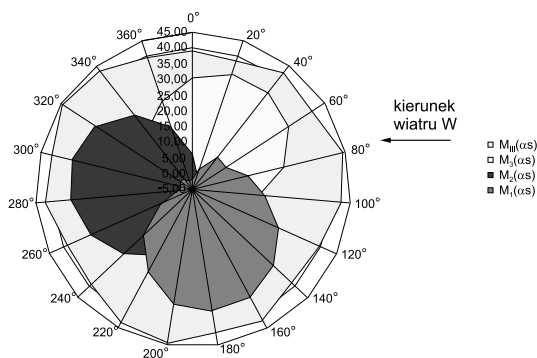
Na rysunku 14 pokazano wartości momentu dla wszystkich trzech łopatek z osobna  $M_1(\alpha_s)$ ,  $M_2(\alpha_s)$ ,  $M_3(\alpha_s)$ . Zaznaczono również cykl, w którym generowany jest moment całkowity  $M_{III}(\alpha_s)$  przez wszystkie trzy łopaty jednocześnie.



Rys. 14. Wartości momentu całkowitego  $M_1(\alpha_s)$ ,  $M_2(\alpha_s)$ ,  $M_3(\alpha_s)$  [Nm] dla trzech łopatek w funkcji kąta obrotu  $\alpha$

Fig. 14. Values of total torque [Nm] for three blades as function of the angle  $\alpha$

Wartości momentu całkowitego dla trzech łopatek  $M_{III}(\alpha_s)$  względem układu  $\eta, \xi$  przy  $V_o = 0$  zilustrowano na rys. 15.



Rys. 15. Wartości momentu całkowitego  $M_{III}(\alpha_s)$  [Nm] dla trzech łopatek w funkcji kąta obrotu  $\alpha$  obracających się łopatek względem osi wirnika w układzie  $\eta, \xi$  – prędkość obrotowa wirnika  $V_o = 0$ ,  $\beta = 0$

Fig. 15. Values of total torque [Nm] for three blades as function of the angle  $\alpha$  of the turning blades the account of the axis of the rotor in  $\eta, \xi$  system of coordinates – revs of the rotor  $V_o = 0$ ,  $\beta = 0$

## 6. Orientacja prędkości względnej na płaszczyznę łopaty turbiny

W trakcie ruchu obrotowego pojedynczej łopaty turbiny z prędkością obrotową  $V_o$ , wartość prędkości względnej  $V$  i jej orientacja względem osi symetrii łopaty ulega zmianie. W przedstawionym poniżej toku obliczeń wyznaczono kierunek wektora oraz składowe prędkości względnej wiatru  $V$  dla układu ruchomego związanego z pojedynczą łopatą turbiny  $\xi$  i  $\eta$ , dla prędkości wiatru  $W$ , prędkości wirnika  $V_o$  i kąta natarcia wiatru względem osi łopaty  $\beta$ . Kąt  $\alpha = 0 - 2\pi$  jest kątem natarcia wiatru dla obracającej się łopaty względem osi obrotu wirnika ( $\beta = \alpha/2$ ) [3].

Zgodnie z rysunkiem 16 prędkość względną wiatru otrzymano ze wzoru:

$$\vec{V} = \vec{W} - \vec{V}_o \quad (11)$$

Wyznaczono składowe  $x$ - $y$  prędkość bezwzględnej wiatru  $W$ :

$$W_x = W \sin\beta \quad (12)$$

$$W_y = W \cos\beta \quad (13)$$

Podobnie dla prędkości wirnika  $V_o$ :

$$V_{ox} = V_o \sin\alpha \quad (14)$$

$$V_{oy} = -V_o \cos\alpha \quad (15)$$

Korzystając z wyżej zapisanych wzorów, składowe prędkości względnej otrzymają postać:

$$V_x = W \sin\beta - V_o \sin\alpha \quad (16)$$

$$V_y = W \cos\beta + V_o \cos\alpha \quad (17)$$

$$V^2 = W^2 + V_o^2 - 2WV_o \sin\alpha \sin\beta + 2WV_o \cos\alpha \cos\beta \quad (18)$$

Ostateczny wzór na wartość prędkości względnej  $V$  wiatru wygląda następująco:

$$V = \sqrt{W^2 + V_o^2 + 2WV_o \cos(\alpha + \beta)} \quad (19)$$

Składowe prędkości względnej względem układu ruchomego związanego z łopatą turbiny  $\xi$  i  $\eta$  można wyznaczyć z zależności:

$$V_\xi = V_x \cos \frac{\alpha}{2} + V_y \sin \frac{\alpha}{2} \quad (20)$$

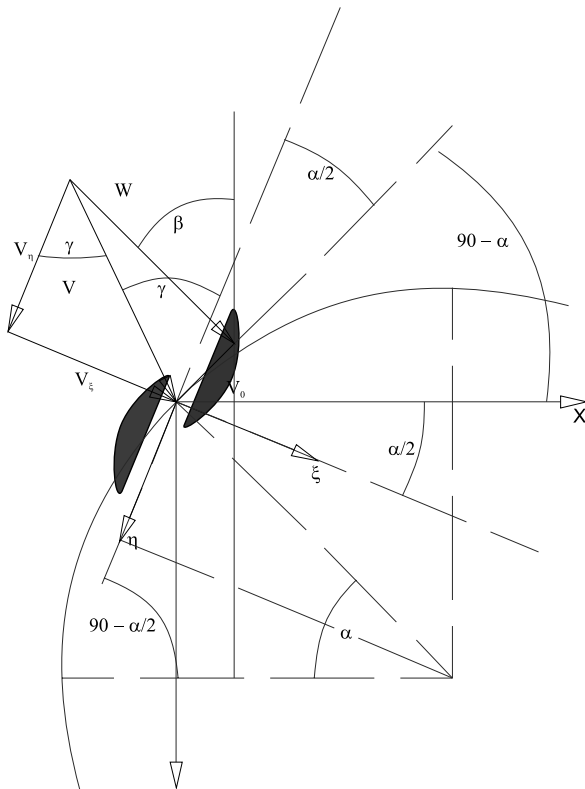
$$V_\eta = -V_x \sin \frac{\alpha}{2} + V_y \cos \frac{\alpha}{2} \quad (21)$$

Po podstawieniu wzorów (16) i (17), wykonaniu uproszczeń otrzymano następujące wzory na składowe prędkości względnej  $V$  dla układu ruchomego związanego z łopatą turbiny  $\xi$  i  $\eta$ :

$$V_\xi = W \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right) - V_o \sin \frac{\alpha}{2} \quad (22)$$



$$V_{\eta} = W \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) + V_o \cos \frac{\alpha}{2} \quad (23)$$



Rys. 16. Schemat łopaty wirnika turbiny w ruchu dla kąta  $\alpha$

Fig. 16. A scheme of the rotor blades in motion under angle of a blade  $\alpha$

Kierunek wektora prędkości względnej  $V$  określa kąt  $\gamma$  pokazany na rysunku 16. Kąt ten określa zależność na składowe prędkości względnej  $V$  dla układu ruchomego  $\xi$  i  $\eta$  związanego z łopata turbiny  $\xi$  i  $\eta$ :

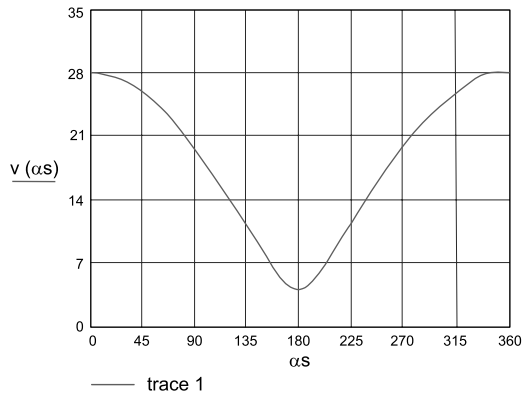
$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{V_{\xi}}{V_{\eta}} \quad (24)$$

lub

$$\gamma = \operatorname{arcsin} \frac{V_{\xi}}{V} \quad (25)$$

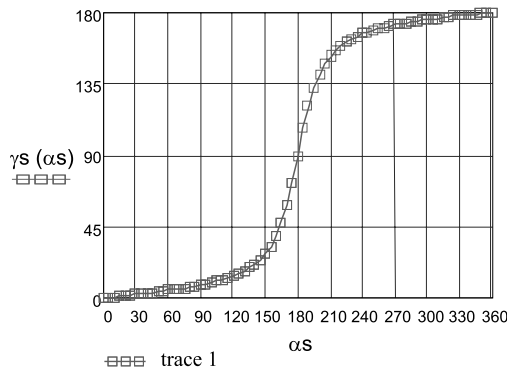
Poniżej w formie graficznej przedstawiono przykład funkcji prędkości względnej  $V(\alpha_s)$ , dla danej prędkości bezwzględnej powietrza  $W = 16$  m/s, kąta natarcia wiatru względem osi

łopaty  $\gamma_s$  [°],  $\gamma_s = \gamma \times 180/\pi$ , dla  $\beta = 0$  i prędkości wirnika  $V_o = 10$  m/s oraz kąta obrotu wirnika  $\alpha$  [rad] lub  $\alpha_s$  [°],  $\alpha_s = \alpha \times 180/\pi$  i obliczonej ze wzoru (18).



Rys. 17. Wykres wartości prędkości względnej  $V(\alpha_s)$  w funkcji kąta obrotu wirnika  $\alpha_s$ ; prędkość powietrza  $W=16$  m/s;  $\beta = 0$ ; prędkość wirnika  $V_o = 10$  m/s

Fig. 17. Graph of the value of the relative speed  $V(\alpha_s)$  in the function of the angle  $\alpha_s$ ; air velocity  $W = 16$  m/sec;  $\beta = 0$ ; impeller speed  $V_o = 10$  m/sec



Rys. 18. Wykres wartości kąta natarcia  $\gamma = \gamma_s$  w funkcji kąta obrotu wirnika  $\alpha = \alpha_s$ ;  $W=16$  m/s;  $\beta = 0$ ;  $V_o = 10$  m/s

Fig. 18. Graph of the value of the angle of attack  $\gamma = \gamma_s$  in the function of the angle  $\alpha = \alpha_s$ ; air velocity  $W=16$  m/sec;  $\beta = 0$ ;  $V_o = 10$  m/sec

Korzystając ze wzorów (26) i (27) otrzymano wzór na wyliczenie kąta natarcia  $\gamma_s$  w funkcji kąta obrotu wirnika  $\alpha_s$  (28):

$$V_{\xi}(\alpha_s) = W \sin\left(\frac{\alpha(\alpha_s)}{2} + \beta\right) - V_o \sin\left(\frac{\alpha(\alpha_s)}{2}\right) \quad (26)$$

$$V_{\eta}(\alpha_s) = W \cos\left(\frac{\alpha(\alpha_s)}{2} + \beta\right) + V_o \cos\left(\frac{\alpha(\alpha_s)}{2}\right) \quad (27)$$

$$\gamma_s(\alpha_s) = \left( \arcsin \left( \frac{V_\xi(\alpha_s)}{V(\alpha)} \right) \right) \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \text{sign} \left( \cos \left( \frac{\alpha(\alpha_s)}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \right) + \Phi \left( \alpha - 181 + \beta \cdot \frac{180}{\pi} \right) \cdot 180 - \beta \frac{180}{\pi} \quad (28)$$

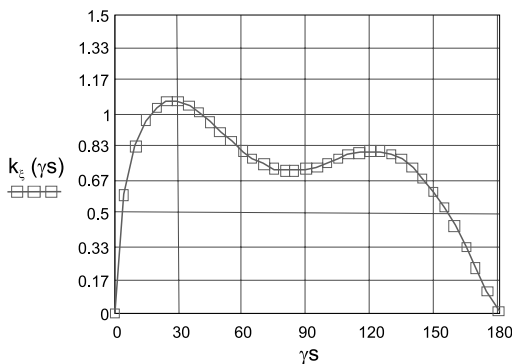
Kąt  $\gamma$  zgodnie z rys. 16 zmienia się w zakresie  $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ , co oznacza konieczność interpolacji współczynników aerodynamicznych do obliczeń numerycznych, które zostały wyznaczone na podstawie badań eksperymentalnych. Metodę obliczeń tych współczynników podano w kolejnym rozdziale.

## 7. Interpolacja współczynników aerodynamicznych

W obliczeniach momentu napędowego w trakcie ruchu obrotowego wirnika turbiny można założyć uśrednioną wartość współczynników aerodynamicznych  $k_\xi$ ,  $k_\eta$ ,  $k_{\eta\xi}$ , jak to zastosowano w pracy [3]. Obecnie w wyniku badań eksperymentalnych można zaproponować interpolację funkcyjną  $k_\xi(\gamma)$ ,  $k_\eta(\gamma)$ ,  $k_{\eta\xi}(\gamma)$  względem kąta  $\gamma(s)$  pochylenia wektora prędkości względnej  $V$  do osi przekroju poprzecznego łopaty.

Jedną z możliwości interpolacyjnych przedstawiają zapisane niżej funkcje i wykresy. Interpolacja wartości współczynnika aerodynamicznego  $k_\xi$  względem kąta  $\gamma(s)$ :

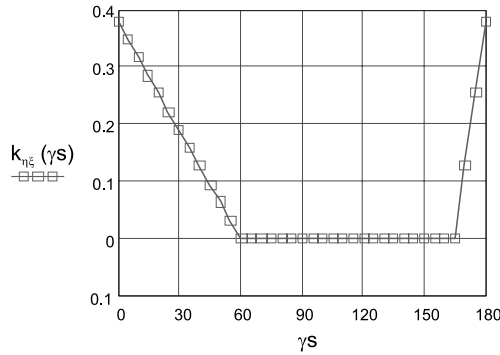
$$k_\xi(\gamma_s) = 0,94 \cdot \sin(\gamma(\gamma_s)) + \frac{0,37}{\gamma(\gamma_s) + 0,1} \cdot \sin(3 \cdot \gamma(\gamma_s)) \quad (29)$$



Rys. 19. Wartości współczynnika aerodynamicznego  $k_\xi(\gamma_s)$  w funkcji kąta natarcia  $\gamma(s)$   
Fig. 19. Values of aerodynamic coefficients  $k_\xi(\gamma_s)$  in function of the angle of wind attack  $\gamma(s)$

Interpolacja wartości współczynnika aerodynamicznego  $k_{\eta\xi}$  względem kąta  $\gamma(s)$ :

$$k_{\eta\xi}(\gamma_s) = -1,9 + \frac{1,71}{\pi} \cdot \gamma(\gamma_s) + \left| 0,19 - \frac{0,57}{\pi} \cdot \gamma(\gamma_s) \right| + \left| -2,09 + \frac{2,28}{\pi} \cdot \gamma(\gamma_s) \right| \quad (30)$$



Rys. 20. Wartości współczynnika aerodynamicznego  $k_{\eta}(\gamma_s)$  w funkcji kąta natarcia  $\gamma(s)$   
 Fig. 20. Values of aerodynamic coefficients  $k_{\eta\xi}(\gamma_s)$  in function of the angle of wind attack  $\gamma(s)$

Interpolacja wartości współczynnika aerodynamicznego  $k_{\eta}$  względem kąta  $\gamma(s)$ :

$$k_{\eta}(\gamma_s) = 0,15 - \frac{0,30}{\pi} \cdot \gamma(\gamma_s) \quad (31)$$

## 8. Obliczenie momentu napędowego turbiny z wirnikiem o trzech łopatkach

Znając funkcje współczynników  $k_{\xi}(\gamma)$ ,  $k_{\eta}(\gamma)$ ,  $k_{\eta\xi}(\gamma)$  oraz kąta  $\gamma(\alpha)$ , można zapisać zależności na momenty napędowe dla jednej łopaty turbiny, zakładając, że prędkość powietrza  $W = \text{const}$  i prędkość wirnika  $V_o = \text{const}$ .

$$\begin{aligned}
 M_{\xi} &= P_d \cdot S_{\eta\xi}(\gamma) \cdot k_{\xi}(\gamma) \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
 \gamma &= \gamma(\alpha), \\
 M_{\eta} &= -P_d \cdot S_{\eta\xi}(\gamma) \cdot k_{\eta}(\gamma) \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
 M_{\eta\xi} &= P_d \cdot S_{\eta\xi}(\gamma) \cdot k_{\eta\xi}(\gamma) \cdot a \\
 a &\approx \frac{2}{3} R
 \end{aligned} \quad (32)$$

Wprowadzając bezwymiarową powierzchnię obrysu łopaty  $S(\gamma)$  w kierunku aktualnego zwrotu wektora prędkości względnej  $V$ , możemy momenty zapisać w formie bezwymiarowej.

$$\begin{aligned}\frac{M_{\xi}}{P_d \cdot S_o \cdot R} &= m_{\xi} = S(\gamma) \cdot k_{\xi}(\gamma) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \frac{M_{\eta}}{P_d \cdot S_o \cdot R} &= m_{\eta} = -S(\gamma) \cdot k_{\eta}(\gamma) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \frac{M_{\eta\xi}}{P_d \cdot S_o \cdot R} &= m_{\eta\xi} = \frac{2}{3} \cdot S(\gamma) \cdot k_{\eta\xi}(\gamma) \\ S_o &= b \cdot h, \\ m &= m_{\xi} + m_{\eta} + m_{\eta\xi}\end{aligned}\quad (33)$$

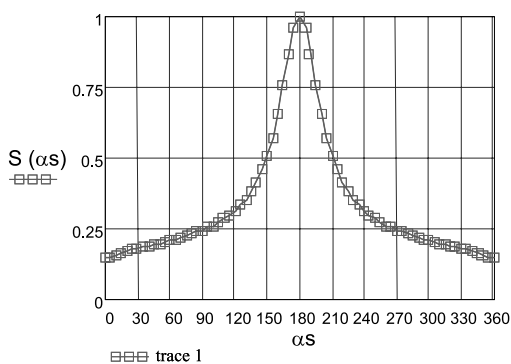
gdzie:

$S_o$  [m<sup>2</sup>] – nominalna powierzchnia łopaty,  $m$  – bezwymiarowy moment napędowy dla jednej łopaty turbiny,

$R$  [m] – promień wirnika turbiny.

Obliczenia nawiązujące do danych w przykładzie (33) zamieszczono poniżej.

$$\begin{aligned}S(\alpha_s) &= \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot \arcsin\left(\frac{V_{\xi}(\alpha_s)}{V(\alpha_s)}\right)\right) \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \text{sign}\left(\cos\left(\frac{\alpha(\alpha_s)}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\right) + \\ &+ \Phi\left(\alpha_s - 181 + \beta \cdot \frac{180}{\pi}\right) \cdot \pi - \frac{\beta}{\pi} + \kappa\left(\cos\left(\frac{\alpha_s}{2} \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \text{sign}\left(\cos\left(\frac{\alpha_s}{2} \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)\right)\end{aligned}\quad (34)$$

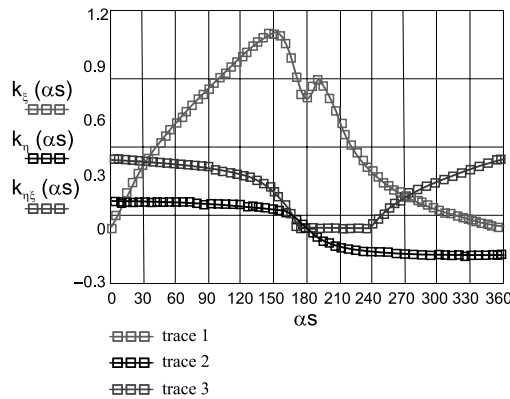


Rys. 21. Zmienność powierzchni  $S(\alpha_s)$  w funkcji kąta obrotu wirnika  $\alpha_s$ ;  $W = 16$  m/s;  $\beta = 0$ ;  $V_o = 10$  m/s

Fig. 21. Changeability of the area  $S(\alpha_s)$  in the function of the angle  $\alpha_s$ ;  $W = 16$  m/sec;  $\beta = 0$ ;  $V_o = 10$  m/sec

Poniżej pokazano wartości współczynników aerodynamicznych  $k_{\xi}(\gamma)$ ,  $k_{\eta}(\gamma)$ ,  $k_{\eta\xi}(\gamma)$  w zależności od kąta natarcia wiatru  $\alpha_s$  obracającej się łopaty względem osi wirnika.

$$\begin{aligned}
 k_{\eta}(\alpha_s) &= 0,15 - \frac{0,30}{\pi} \cdot \gamma(\alpha_s) \cdot \frac{\pi}{180} \\
 k_{\xi}(\alpha_s) &= 0,94 \cdot \sin\left(\gamma(\alpha_s) \cdot \frac{\pi}{180}\right) + \frac{0,37}{\gamma(\alpha_s) \cdot \frac{\pi}{180} + 0,1} \cdot \sin\left(3 \cdot \gamma(\alpha_s) \cdot \frac{\pi}{180}\right) \\
 k_{\eta\xi} &= -1,9 + \frac{1,71}{\pi} \cdot \gamma(\alpha_s) \cdot \frac{\pi}{180} + \left|0,19 - \frac{0,57}{\pi} \cdot \gamma(\alpha_s) \cdot \frac{\pi}{180}\right| + \left|-2,09 + \frac{2,28}{\pi} \cdot \gamma(\alpha_s) \cdot \frac{\pi}{180}\right|
 \end{aligned} \tag{35}$$

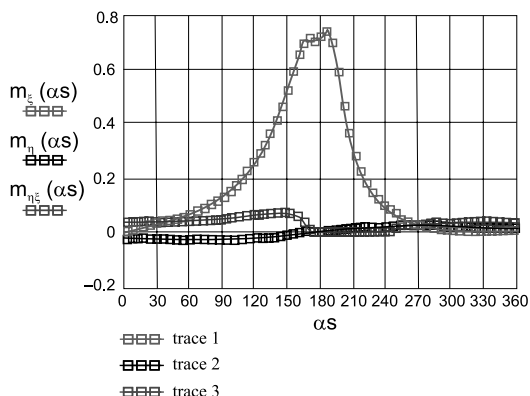


Rys. 22. Zmienność współczynników aerodynamicznych  $k_{\xi}(\gamma)$ ,  $k_{\eta}(\gamma)$ ,  $k_{\eta\xi}(\gamma)$  w funkcji kąta obrotu wirnika  $\alpha_s$ ;  $W=16$  m/s;  $\beta=0$ ;  $V_o=10$  m/s

Fig. 22. Changeability of the aerodynamic coefficients  $k_{\xi}(\gamma)$ ,  $k_{\eta}(\gamma)$ ,  $k_{\eta\xi}(\gamma)$  in the function of the angle  $\alpha_s$ ;  $W=16$  m/sec;  $\beta=0$ ;  $V_o=10$  m/sec

Wartości składowe momentu działającego na wirnik turbiny  $m_{\eta\xi}(\alpha_s)$ ,  $m_{\xi}(\alpha_s)$ ,  $m_{\eta}(\alpha_s)$  dla jednej łopaty w funkcji kąta obrotu względem osi wirnika  $\alpha_s$ .

$$\begin{aligned}
 m_{\eta\xi}(\alpha_s) &= S(\alpha_s) \cdot \frac{2}{3} \cdot k_{\eta\xi}(\alpha_s) \\
 m_{\xi}(\alpha_s) &= S(\alpha_s) \cdot k_{\xi}(\alpha_s) \cdot \sin\left(\frac{\alpha_s}{2} \cdot \frac{\pi}{180}\right) \\
 m_{\eta}(\alpha_s) &= -S(\alpha_s) \cdot k_{\eta}(\alpha_s) \cdot \cos\left(\frac{\alpha_s}{2} \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \text{sign}\left(\cos\left(\frac{\alpha_s}{2} \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{36}$$

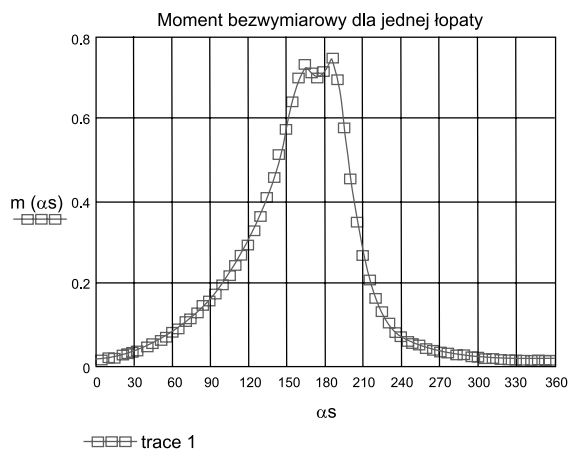


Rys. 23. Zmienność składowych  $m_{\eta_s}(\alpha_s)$ ,  $m_{\zeta_s}(\alpha_s)$ ,  $m_{\xi_s}(\alpha_s)$  dla jednej łopaty w funkcji kąta obrotu względem osi wirnika  $\alpha_s$

Fig. 23. Changeability of the moment components  $m_{\eta_s}(\alpha_s)$ ,  $m_{\zeta_s}(\alpha_s)$ ,  $m_{\xi_s}(\alpha_s)$  for one blade in the function of the angle  $\alpha_s$

Dodając wszystkie składowe momentu działającego na wirnik turbiny  $m_{\eta_s}(\alpha_s)$ ,  $m_{\zeta_s}(\alpha_s)$ ,  $m_{\xi_s}(\alpha_s)$ , otrzymujemy całkowity moment napędowy  $m(\alpha_s)$  dla jednej łopaty w funkcji kąta obrotu względem osi wirnika  $\alpha_s$ .

$$m(\alpha_s) = m_{\eta_s}(\alpha_s) + m_{\zeta_s}(\alpha_s) + m_{\xi_s}(\alpha_s) \quad (37)$$



Rys. 24. Wartości momentu napędowego  $m(\alpha_s)$  dla jednej łopaty w funkcji kąta obrotu względem osi wirnika  $\alpha_s$

Fig. 24. Values of the moment  $m(\alpha_s)$  for one blade in the function of the angle  $\alpha_s$

Moment i moc dla turbiny o trzech łopatach przedstawiono poniżej.

Wykonując obliczenia wg wzorów (33), możemy wyznaczyć bezwymiarowy moment napędowy  $m(\alpha_s)$ , a następnie całkując, wyznaczyć moment średni  $I$  dla turbiny z trzema łopatom oraz moc przypadającą na  $1 \text{ m}^2$  powierzchni nominalnej łopaty.

$$I = \frac{1}{120} \cdot \left( \int_0^{120} m(\alpha_s) d\alpha_s + \int_{120}^{240} m(\alpha_s) d\alpha_s + \int_{240}^{360} m(\alpha_s) d\alpha_s \right)$$

$$S_o = 1$$

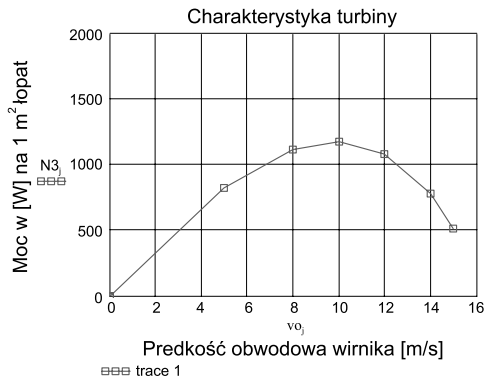
$$R = 1,5$$

$$M3 = P_d \cdot S_o \cdot R \cdot I$$

$$M3 = 135,394648$$

$$N3 = M3 \cdot \frac{V_o}{R}$$

$$N3 = 1,083157 \times 10^3$$
(38)



Rys. 25. Charakterystyka mocy turbiny N3 [W] w funkcji prędkości obrotowej wirnika  $V_o$  [m/s]

Fig. 25. Characteristic of the power of the turbine N3 [W] in the function of the rotation speed of the rotor  $V_o$  [m/s]

Opierając się na przygotowanym sposobie obliczeniowym, można wyznaczyć charakterystykę mocy turbiny, czyli zależność mocy  $N$  [W] na  $1 \text{ m}^2$  powierzchni łopaty w funkcji prędkości obwodowej wirnika  $V_o$  [m/s].

Przyjmując średnie wartości współczynników aerodynamicznych  $k_\xi = 0,8$ ,  $k_\eta = -0,5$ ,  $k_{\eta_\xi} = 0,15$ , możemy wg [3] obliczyć prostszymi wzorami moment oraz moc turbiny na  $1 \text{ m}^2$  powierzchni łopaty, otrzymując podobny wynik z niewielkim błędem.

## 9. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych badań eksperymentalnych wyznaczono współczynniki aerodynamiczne modelu łopaty dwuspójnej wirnika turbiny przy dowolnym jej zorientowaniu względem wektora prędkości strugi powietrza. Współczynniki te posłużyły do napisania programu obliczeniowego momentu napędowego i mocy na jednostkę powierzchni łopaty w trakcie pracy wirnika turbiny z prędkością  $V_o$ , oraz wyznaczenia charakterystyki



mocy, która wskazuje, że turbina tego typu jest turbiną wolnobieżną, maksimum mocy osiąga przy prędkości wirnika  $V_o = (0,5 - 0,8) \times W$ , gdzie  $W$  – prędkość wiatru. Efekt aerodynamiczny związany z kształtem łopaty (moment  $M_{\eta_o}$ ) ujawnia się przy większej prędkości  $V_o$ . Można więc poszukiwać innego prowadzenia łopat wirnika, tak aby efekt aerodynamiczny był znaczący, co pozwoli na realizację projektu turbiny szybkiebieżnej z wykorzystaniem łopat dwuspójnych zastosowanych w obecnym rozwiązaniu konstrukcyjnym wirnika turbiny.

### L i t e r a t u r a

- [1] R y ś J., Projekt wynalazczy zarejestrowany pod numerem P-298964, *Zespół samonaprowadzania głowicy silnika wiatrowego na kierunek wiatru*, 1993.
- [2] R y ś J., Projekt wynalazczy zarejestrowany pod numerem P-302549, *Wirnik karuzelowego silnika wiatrowego*, 1997.
- [3] A u g u s t y n M., R y ś J., *Kinematyka i moment napędowy turbiny wiatrowej o pionowej osi wirnika*, Czasopismo Techniczne, z. 11, 1-M/2007, Kraków 2007.
- [4] A u g u s t y n M., *Budowa modelu i prezentacja działania turbiny wiatrowej nowego typu oraz perspektywy zastosowań*, Konf. „Czysta energia – czyste środowisko 2008”, AGH, Kraków 2008.
- [5] F l a g a A., M a t y s P., A u g u s t y n M., *Współczynniki aerodynamiczne czterech typów łopat wirników karuzelowych*, Raport z badań, Laboratorium Inżynierii Wiatrowej, Politechnika Krakowska, Kraków 2010.
- [6] F l a g a A., *Wind turbines* (in Polish, in printing), Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2011.
- [7] L e w a n d o w s k i W.M., *Proekologiczne odnawialne źródła energii*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2007.



ANETA SZEWCZYK-NYKIEL, MAREK NYKIEL, JAN KAZIOR\*

## SPIEKANE BIOMATERIAŁY KOMPOZYTOWE AISI 316L-HYDROKSYAPATYT

---

### AISI 316L-HYDROXYAPATITE SINTERED COMPOSITE BIOMATERIALS

#### Streszczenie

Połączenie dobrej biotolerancji hydroksyapatytu z dobrymi własnościami mechanicznymi stali 316L powinno doprowadzić do uzyskania lepszego biomateriału. Kompozyty 316L-hydroksyapatyt zostały wytworzone technologią metalurgii proszków. Mikrostruktura i własności badanych materiałów zależą od składu chemicznego mieszanki proszków oraz zastosowanej temperatury spiekania. Mianowicie temperatura spiekania 1240°C i dodatek hydroksyapatytu w ilości 3% wag. pozwalają uzyskać najlepszą gęstość i twardość spiekom 316L-hydroksyapatyt.

*Słowa kluczowe: hydroksyapatyt, 316L, kompozyty, mikrostruktura*

#### Abstract

The combinations of good biocompatibility of hydroxyapatite and good mechanical properties of 316L steel should lead to obtain better biomaterial. 316L-hydroxyapatite composites were produced by the PM technology. Microstructure and properties of these materials were affected by chemical composition of powders mixture and sintering temperature. Sintering temperature of 1240°C and hydroxyapatite addition of 3 wt. % provide to obtain the best density and hardness sintered 316L-hydroxyapatite compositions.

*Keywords: hydroxyapatite, 316L, composites, microstructure*

---

\* Dr inż. Aneta Szewczyk-Nykiel, dr inż. Marek Nykiel, prof. dr hab. inż. Jan Kazior, Instytut Inżynierii Materiałowej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

W następstwie przyspieszonego rozwoju cywilizacyjnego, wiążącego się z rozwojem automatyzacji, motoryzacji, rolnictwa i innych dziedzin współczesnej gospodarki, organizm ludzki narażony jest na wiele niebezpieczeństw, które z czasem prowadzą do jego wyniszczenia, uszkodzenia i wymagają ingerencji medycyny. Stąd też ciągły wzrost zapotrzebowania na materiały, z których można wytwarzać elementy na stałe lub czasowo zastępujące chore tkanki, narządy lub ich części w organizmach żywych. Wzrostowi popytu na wszystkie rodzaje implantów sprzyjają także ciągle przedłużenie życia pacjentów i duży wzrost liczby wypadków. W szczególności liczba stosowanych implantów zastępujących twarde tkanki, takich jak sztuczne stawy biodrowe, implanty stomatologiczne itp., wzrasta wśród osób w podeszłym wieku [1].

W ostatnich latach dokonał się ogromny postęp w dziedzinie materiałów stosowanych w medycynie. Obecnie inżynieria materiałowa pozwala na otrzymanie biomateriałów dobrze spełniających niezbędne wymagania i sprawdzających się w praktyce.

W medycynie zastosowanie znalazły materiały metalowe, ceramiczne, węglowe, polimerowe oraz kompozytowe [2].

Większość implantów chirurgicznych i stomatologicznych wykonuje się z biomateriałów metalicznych, a mianowicie: austenitycznych stali nierdzewnych, stopów kobalt-chrom oraz tytanu i jego stopów. Austenityczne stale nierdzewne są grupą tworzyw metalicznych, które jako pierwsze zostały przystosowane do implantowania w organizmie ludzkim. Charakteryzują się one dobrą odpornością korozyjną oraz wysokimi własnościami mechanicznymi, a jednocześnie niskim kosztem wytwarzania i łatwością produkcji. Jednak ze względu na najniższą odporność na korozję elektrochemiczną w środowisku płynów ustrojowych (w porównaniu z innymi biomateriałami metalicznymi stosowanymi w medycynie) oraz niezbyt wysoką skłonność do samopasywacji są one szczególnie narażone na zniszczenie [1–9].

Od dłuższego czasu szczególne zainteresowanie wśród badaczy wzbudzają natomiast biomateriały ceramiczne. Wysoka biotolerancja w środowisku tkankowym, wysoka odporność na zużycie ściernie, a także porowatość, która umożliwia wrastanie tkanek i zapewnia trwalsze połączenia pomiędzy tkankami a implantem – to tylko niektóre z zalet biomateriałów ceramicznych, predysponujących je do zastosowania w medycynie [2, 8–10]. Największy postęp spośród wszystkich biomateriałów ceramicznych został osiągnięty dla ceramiki resorbowalnej w tkankach, a zwłaszcza dla hydroksyapatytu.

Hydroksyapatyt  $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$ , ze względu na podobieństwo składu chemicznego i fazowego do faz nieorganicznych występujących w kościach, zębach, ma najlepszą biogodność i aktywność biologiczną spośród wszystkich ortofosforanów wapnia [10–15]. Biorąc pod uwagę fakt, że kości, a także zęby człowieka składają się w około 70–97% z hydroksyapatytu, tworzywa te mogą się okazać efektywniejsze niż metale stosowane na implanty do tej pory [2, 9].

Hydroksyapatyt dzięki swoim wyjątkowym właściwościom użytkowym znalazł szerokie zastosowanie jako materiał implantacyjny w medycynie i stomatologii. Biomateriały hydroksyapatytowe w chirurgii kostnej stosowane są w postaci materiałów porowatych, powłokowych czy też jako jeden ze składników materiału kompozytowego (drugim mogą być metale, ceramika, materiały węglowe czy też biodegradowalne, jak i biostabilne polimery) [6–8,

10–12, 15]. Natomiast lity materiał hydroksyapatytowy znajduje ograniczone zastosowanie z powodu niskich właściwości wytrzymałościowych, głównie ze względu na kruche pękanie (odporność na kruche pękanie hydroksyapatytu  $K_{IC} = 1,1 - 1,2 \text{ MNm}^{-1.5}$  w porównaniu z wartością odporności na pękanie kości  $K_{IC} = 2 - 12 \text{ MNm}^{-1.5}$ ), dlatego można go stosować jedynie na implanty, które nie przenoszą zbyt wysokich naprężeń [5, 9].

Nie tylko materiały hydroksyapatytowe mają niekorzystne cechy, które w pewien sposób ograniczają zakres ich zastosowań. Metale, mimo odpowiednich własności mechanicznych, nie są wystarczająco biogodne i bioaktywne z organizmem żywym, a ponadto są zbyt sztywne w stosunku do kości (moduł sprężystości metali jest około dziesięciokrotnie większy niż dla kości), jak również ulegają korozji w agresywnym środowisku biologicznym [9–10].

Wprowadzenie fazy hydroksyapatytowej bezpośrednio do fazy metalicznej, a co z tym związane – połączenie bardzo dobrej biogodności i odporności na korozję hydroksyapatytu z bardzo dobrą wytrzymałością i podatnością na odkształcenia metali – wydaje się bardzo dobrym rozwiązaniem, umożliwiającym wytworzenie nowych biomateriałów do zastosowania na obciążone implanty długotrwałe (np. endoprotezy stawu, stabilizatory, implanty stomatologiczne).

Biomateriały kompozytowe tego typu można wytwarzać, stosując:

- napylenie plazmowe (warstwa hydroksyapatytu na powierzchni implantów długotrwałych z biomateriałów metalicznych), metody CVD i PVD [1, 8–11],
- technologię metalurgii proszków [3, 8–11].

Obserwowane w ciągu ostatnich lat tendencje w rozwoju biomateriałów wskazują właśnie na coraz większe znaczenie w implantologii materiałów kompozytowych. Kompozyty typu metal-ceramika, których przykładem są materiały: stal nierdzewna-hydroksyapatyt oraz tytan-hydroksyapatyt, wydają się obiecującymi biomateriałami do stosowania w medycynie na obciążone implanty długotrwałe (np. endoprotezy stawowe, wszczepy stomatologiczne) [8, 9, 11].

Szczególne uwagę zwrócono na kompozyty hydroksyapatytowe wzmocnione włóknami, wytwarzane różnymi technikami [3–5, 17–18]. Włókna odgrywają ważną rolę w poprawie właściwości mechanicznych ceramiki. Przykładowo poprzez dodanie włókien ze stali nierdzewnej do osnowy hydroksyapatytu i zastosowanie techniki prasowania izostatycznego na gorąco, odporność na pękanie została zwiększona do  $K_{IC} = 11 \text{ MNm}^{-1.5}$  [18]. Jednak w kompozytach hydroksyapatyt-włókna pojawił się problem mikropęknięć, który niestety ograniczał poprawę własności mechanicznych [4, 17].

Za obiecujące i spełniające oczekiwania stawiane materiałom w implantologii można uznać wytwarzane technologią metalurgii proszków kompozyty stal nierdzewna-hydroksyapatyt (dobór odpowiedniego składu chemicznego mieszanki proszków) [8–9, 16]. Kompozyty 316LHD-HA modyfikowane hydroksyapatetem w ilości 20 i 30% wag. wytworzone metodą HP-HT (4,0 GPa, 1250°C) posiadają mikrostrukturę składającą się z austenitu i fazy hydroksyapatytowej. Rentgenowska analiza jakościowa potwierdziła obecność fazy o wzorze  $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$  krystalizującej w układzie heksagonalnym. Gęstość tych kompozytów maleje od 6,81 g/cm<sup>3</sup> do 6,25 g/cm<sup>3</sup> wraz ze wzrastającą zawartością fazy HA [9]. Kompozyty 316L-hydroksyapatyt można wytwarzać również konwencjonalnie poprzez mieszanie proszków stali 316L i hydroksyapatytu, prasowanie, a następnie spiekanie (1240°C).

Jeżeli ilość wprowadzonego do mieszanki proszków HAp wzrasta od 5 do 15% wag., gęstość spieków i gęstość względna, a także twardość kompozytów 316-HAp maleje, a porowatość otwarta i całkowita wzrasta [8, 16].

## 2. Materiał do badań

Do badań wykorzystano następujące materiały:

- rozpylany wodą proszek austenitycznej stali nierdzewnej gatunku AISI 316L firmy Höganäs o składzie chemicznym: 17–18% Cr, 12–13,5% Ni, 2–2,5% Mo, 0,8% Si, 0,1%Mn, 0,03%C oraz Fe – do 100%,
- proszek hydroksyapatytu pochodzenia naturalnego.

Zastosowany w badaniach proszek hydroksyapatytu otrzymano z części korowej wieprzowej kości długiej. Procedura przygotowania obejmuje następujące etapy: gotowanie kości w destylowanej wodzie, mechaniczne usuwanie tkanki i pozostałości części gąbczastej, wylugowywanie substancji organicznej 4-molowym roztworem wodorotlenku sodu, płukanie w wodzie destylowanej aż do momentu uzyskania stałej wartości pH, suszenie w temperaturze 120°C do uzyskania stałej masy, mielenie [13–15].

Proszki stali AISI 316L i HAp wykorzystano do przygotowania następujących mieszanek:

- 316L – 1% wag. Hap,
- 316L – 3% wag. Hap,
- 316L – 5% wag. Hap.

Ponadto do celów porównawczych w artykule zastosowano również proszek stali 316L.

Proces mieszania przeprowadzono w obrotowym mieszalniku przez 30 minut. Z przygotowanych mieszanek oraz czystego proszku 316L wykonano do badań próbki walcowe o wymiarach 20 × 5 mm przeznaczone do badań gęstości i porowatości, twardości, a także badań strukturalnych. Proces prasowania przeprowadzono metodą jednostronnego prasowania w sztywnej matrycy przy ciśnieniu 600 MPa. Proces spiekania odbył się w laboratoryjnym piecu rurowym sylitowym. Spiekanie zostało przeprowadzone w dwóch temperaturach: 1180°C i 1240°C w atmosferze osuszonego i oczyszczonego wodoru. Czas spiekania próbek wynosił 60 minut. W trakcie spiekania zastosowano wolne nagrzewanie do temperatury izotermicznego spiekania z szybkością 10°C/min, a po izotermicznym spiekaniu próbki chłodzono razem z piecem.

## 3. Metodyka badań

Badanie gęstości oraz porowatości spieczonych próbek walcowych przeprowadzono metodą ważenia w powietrzu i w wodzie, zgodnie z wymaganiami normy PN-EN ISO 2738:2001.

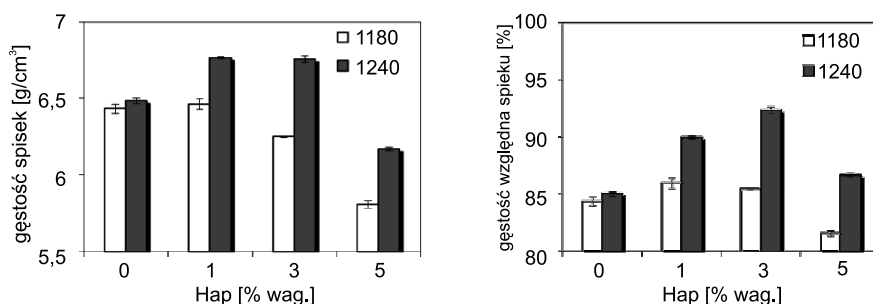
Badania mikrostruktury spieków wykonano na mikroskopie optycznym firmy Nikon Eclipse ME 600P z cyfrowym zapisem obrazu. Do badań tych zostały przygotowane zglądy poprzeczne, wykonane w płaszczyźnie przechodzącej przez środek próbki i równoległej

do kierunku działania siły w czasie prasowania. Badania strukturalne przeprowadzono na zglądach w stanie nietrawionym, a następnie po wytrawieniu odczynnikiem Villela. Badania mikrostruktury spieków zostały przeprowadzone również na skaningowym mikroskopie elektronowym JSM550LV.

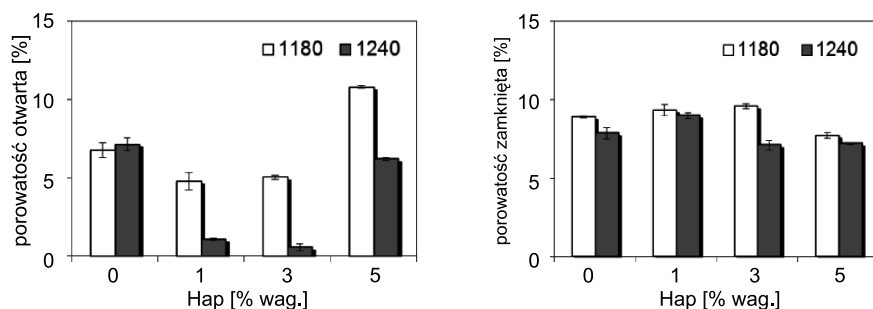
Badania twardości spieków wykonane zostały metodą Rockwella (skala B) wg normy EN 24498-1:1993. Pomiarы mikrotwardości HV0,01(10s) przeprowadzono na twardościomierzu FM 700 E.

#### 4. Wyniki badań

Wyniki przeprowadzonych pomiarów gęstości spiekanych próbek 316L-Hap i stali 316L, a także ich gęstości względnej przedstawiono na rys. 1, w zależności od zastosowanej temperatury spiekania oraz ilości wprowadzonego do mieszanki proszków hydroksyapatytu. Natomiast na rys. 2 zamieszczono wyniki pomiarów porowatości otwartej i zamkniętej dla tych samych spiekanych materiałów. Zamieszczone na rys. 1 i 2 wyniki pomiarów odpowiednich właściwości spiekanych materiałów występują w postaci średniej arytmetycznej, dodatkowo w celu statystycznego oszacowania uzyskanych wyników podano odchylenie standardowe.



Rys. 1. Wpływ temperatury spiekania i dodatku hydroksyapatytu na gęstość badanych spieków  
Fig. 1. The influence of sintering temperature and hydroxyapatite addition on sintered density

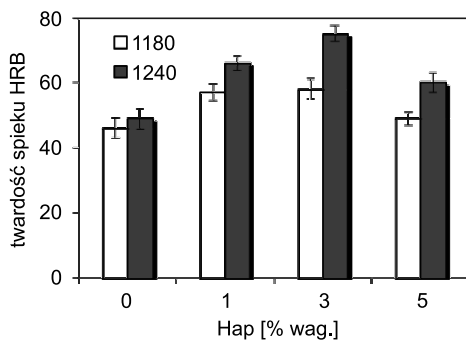


Rys. 2. Wpływ temperatury spiekania i dodatku hydroksyapatytu na porowatość badanych spieków  
Fig. 2. The influence of sintering temperature and hydroxyapatite addition on sintered porosity

Na podstawie analizy wyników przeprowadzonych badań można stwierdzić, że zarówno temperatura spiekania, jak i skład chemiczny mieszanki proszków wywarły wpływ na własności fizyczne spiekanych materiałów. Dla wszystkich badanych spieków wzrost temperatury spiekania z 1180°C do 1240°C przyczynił się do wzrostu zarówno gęstości spiekanych materiałów, jak i gęstości względnej, przy czym najmniejszy wzrost gęstości został odnotowany dla spiekanej stali austenitycznej. Wraz ze wzrostem gęstości względnej następuje spadek porowatości całkowitej spieków, w której udział ma porowatość otwarta i porowatość zamknięta. Zastosowanie w procesie spiekania wyższej temperatury prowadzi do uzyskania mniejszych wartości porowatości, szczególnie jest to widoczne w przypadku porowatości otwartej. Wprowadzenie dodatku hydroksyapatytu do mieszanki proszków w ilości 1% wag. przyczyniło się do uzyskania nieznacznie wyższych wartości gęstości spieków w porównaniu ze spiekaną stałą 316L. Ale już wzrost ilości hydroksyapatytu od 3 do 5% wag. przyczynia się do spadku gęstości spiekanych materiałów, osiągając najniższe wartości dla spieku 316L – 5% wag. Hap. Spiek ten wykazuje największą wartość porowatości otwartej i najmniejszą porowatości zamkniętej spośród wszystkich spiekanych materiałów 316L-Hap.

Na rysunku 3 przedstawiono wyniki pomiarów twardości (HRB) spiekanej stali 316L oraz spieków 316L-Hap (w postaci średniej arytmetycznej z 10 pomiarów i odchylenia standardowego) w zależności od zastosowanej temperatury spiekania.

Twardość spiekanej stali 316L ulega nieznacznemu wzrostowi z 46 HRB do 49 HRB przy wzroście temperatury spiekania z 1180°C do 1240°C. W spiekach 316L-Hap po spiekaniu w obydwu temperaturach nastąpił wzrost twardości w stosunku do spiekanej niemodyfikowanej stali 316L. Po spiekaniu w temp. 1240°C spieki 316L-Hap uzyskały wyższe wartości twardości niż po spiekaniu w temperaturze 1180°C. Ponadto można zaobserwować wyraźny wzrost twardości spieków wraz ze wzrostem zawartości hydroksyapatytu od 0 do 3% wag., natomiast przy większym dodatku (5% wag.) hydroksyapatytu następuje spadek twardości. Podobną zależność można zauważyć również dla tych materiałów po spiekaniu w niższej temperaturze.

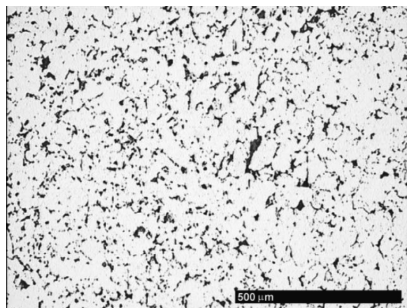


Rys. 3. Wpływ temperatury spiekania i dodatku hydroksyapatytu na twardość spieków  
Fig. 3. The influence of sintering temperature and hydroxyapatite addition on sintered hardness

Wyniki przeprowadzonych pomiarów twardości spieków dobrze korelują z wynikami gęstości względnej.

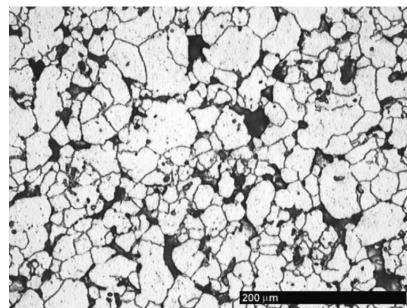


Przykładowe mikrostruktury badanych spieków przedstawiono na rys. 4–9.



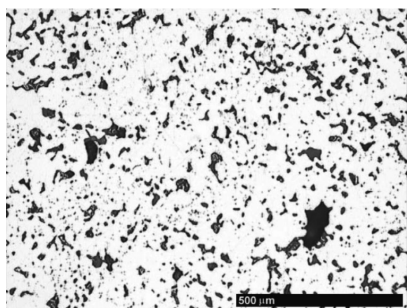
Rys. 4. Mikrostruktura spiekanej stali 316L (temperatura spiekania 1180°C)

Fig. 4. Microstructure of sintered 316L steel (sintering temperature of 1180°C)



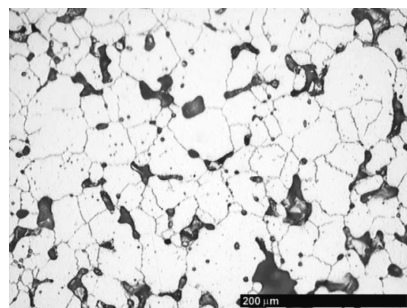
Rys. 5. Mikrostruktura spiekanej stali 316L (temperatura spiekania 1240°C)

Fig. 5. Microstructure of sintered 316L steel (sintering temperature of 1240°C)



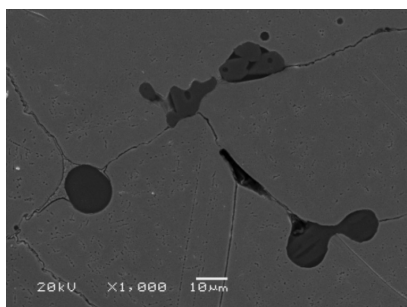
Rys. 6. Mikrostruktura spieku 316L – 1% Hap (temperatura spiekania 1180°C)

Fig. 6. Microstructure of sintered 316L – 1% Hap (sintering temperature 1180°C)



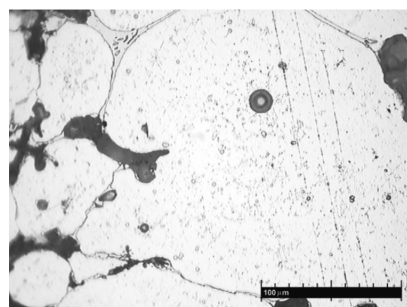
Rys. 7. Mikrostruktura spieku 316L – 1% Hap (temperatura spiekania 1240°C)

Fig. 7. Microstructure of sintered 316L – 1% Hap (sintering temperature 1240°C)



Rys. 8. Mikrostruktura SEM spieku 316L – 3% Hap (temperatura spiekania 1240°C)

Fig. 8. SEM microstructure of sintered 316L – 3% Hap (sintering temperature 1240°C)



Rys. 9. Mikrostruktura spieku 316L – 5% Hap (temperatura spiekania 1240°C)

Fig. 9. Microstructure of sintered 316L – 1% Hap (sintering temperature 1240°C)

Mikrostruktura spiekanej stali 316L w stanie nietrawionym oraz po wytrawieniu odczynnikiem Vilella została zamieszczona odpowiednio na rys. 4 i 5. Spiekana stal 316L posiada mikrostrukturę austenityczną. Mikrotwardość austenitu wynosi około 220 HV0,01 i 280 HV0,01 dla materiałów uzyskanych po spiekaniu w temperaturze odpowiednio 1180°C i 1240°C. Na fotografii widoczne są ponadto pory.

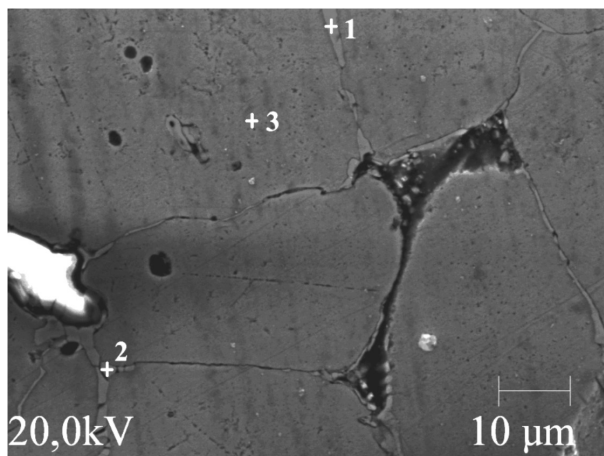
Wprowadzenie dodatku hydroksyapatytu do stali 316L spowodowało wyraźną zmianę mikrostruktury badanych spieków. Na rysunkach 6–9 zamieszczono wybrane mikrostruktury spiekanych materiałów 316L-Hap otrzymane w stanie nietrawionym, a następnie po wytrawieniu. Mikrostruktura spieku 316L – 1% Hap jest wyraźnie dwufazowa: obok austenitu pojawiła się faza hydroksyapatytowa, widoczne są także pory rozmieszczone po granicach ziaren.

Na kształtowanie mikrostruktury badanych spieków wpływ miała również zastosowana temperatura spiekania. Mianowicie w mikrostrukturze spieków 316L-Hap zawierających 3 i 5% wag. hydroksyapatytu, otrzymanych po spiekaniu w temperaturze 1240°C na granicach ziaren osnowy austenitycznej pojawiła się niejednorodna eutektyka, oczywiście obecna jest również faza hydroksyapatytowa. Natomiast te same spieki, ale uzyskane po spiekaniu w niższej temperaturze, mają mikrostrukturę dwufazową, taką samą jak spieki 316L – 1% Hap. Mikrotwardość austenitu w spiekach 316L-Hap jest wyższa niż w spiekanej stali 316L, a ponadto ulega tendencji wzrostowej wraz ze wzrostem dodatku hydroksyapatytu (np. w przypadku temperatury spiekania wynoszącej 1240°C z 280 HV0,01 do 370HV0,01). Ponadto wraz ze wzrostem zawartości hydroksyapatytu w badanych spiekach zwiększa się udział niejednorodnej eutektyki, jak również fazy hydroksyapatytowej.

Mikrostruktura SEM spieku 316 – 5% Hap otrzymanego po spiekaniu w temperaturze 1240°C oraz wyniki analizy EDAX wykonanej w punktach 1 i 3 zostały zamieszczone na rys. 10. Punkt 3 wyznaczony został w środku ziarna austenitu, natomiast punkt 1 na granicy ziaren, gdzie już wcześniej zaobserwowano obecność eutektyki.

Przeprowadzona mikroanaliza składu chemicznego wykazała, że głównymi pierwiastkami w punkcie 3 są Fe, Cr, Ni, śladowo pojawia się również P. Oznacza to, że fosfor dyfunduje do austenitycznej osnowy. Głównymi pierwiastkami w punkcie 1 także są Fe, Cr, Ni i P. Eutektyka na granicach ziaren austenitu jest prawdopodobnie związana z układem Fe (austenit) – P. Natomiast wyniki mikroanalizy składu chemicznego, prezentowane w pracy [16], pozwalają stwierdzić, że w fazie hydroksyapatytowej występują takie pierwiastki, jak O, Ca i Cr, nie ma natomiast fosforu. Spowodowane to jest rozkładem hydroksyapatytu podczas procesu spiekania. Rezultaty te znajdują potwierdzenie w pracy Kneppera [5], według której osnowa hydroksyapatytowa nie jest stabilna termicznie podczas spiekania. W materiałach kompozytowych zawierających hydroksyapatyt ma miejsce dehydroksylacja hydroksyapatytu i nieodwracalne przemiany fazowe.

Wyniki analizy EDAX wskazują na fakt, że podczas procesu spiekania w kompozytach 316 – hydroksyapatyt następuje rozkład hydroksyapatytu, który prowadzi do powstania fazy CaO.



Elt.	Line	Intensity (c/s)	Error 2-sig	Conc.	Units
<b>Punkt 1</b>					
P	Ka	247,14	5,740	23,308	wt. %
Cr	Ka	305,65	6,383	33,561	wt. %
Fe	Ka	240,18	5,659	38,399	wt. %
Ni	Ka	21,57	1,696	4,733	wt. %
<b>Punkt 3</b>					
P	Ka	14,08	1,370	1,909	wt. %
Cr	Ka	168,71	4,743	16,359	wt. %
Fe	Ka	453,80	7,778	69,707	wt. %
Ni	Ka	49,81	2,577	11,640	wt. %

Rys. 10. Mikrostruktura SEM i mikroanaliza składu chemicznego spieku 316L – 5% Hap (temperatura spiekania 1240°C)

Fig. 10. SEM microstructure and microanalysis of chemical composition of sintered 316L – 5% Hap (sintering temperature 1240°C)

## 5. Wnioski

Materiały kompozytowe 316L-hydroksyapatyt można otrzymać technologią metalurgii proszków, poprzez mieszanie proszków stali 316L i hydroksyapatytu pochodzenia naturalnego, prasowanie i następujące po nim spiekanie. Na podstawie wyników przeprowadzonych badań można stwierdzić, że właściwości i mikrostrukturę spiekanych materiałów kompozytowych można zmieniać poprzez dobór odpowiedniego składu mieszanki proszków, a także parametrów procesu spiekania.

Prowadzenie procesu spiekania w temperaturze 1240°C prowadzi do uzyskania materiałów charakteryzujących się dobrą gęstością i twardością. Wprowadzenie dodatku hydroksyapatytu w ilości do 3% wag. prowadzi do wzrostu gęstości spieków, gęstości względnej i twardości, maleje natomiast porowatość otwarta 316L-hydroksyapatyt.

W związku z wprowadzeniem hydroksyapatytu do stali 316L nastąpiły zmiany w mikrostrukturze spieków. Mianowicie, w mikrostrukturze spiekanych kompozytów otrzymanych po spiekaniu w temperaturze 1240°C można zaobserwować osnowę austenit, a na granicach ziaren eutektykę i wydzielenia pochodzenia hydroksyapatytowego. Wyniki analizy EDAX wskazują na fakt, że podczas procesu spiekania w kompozytach 316-hydroksyapatyt następuje rozkład hydroksyapatytu, który prowadzi do powstania fazy CaO. Natomiast fosfor dyfunduje do osnowy austenitycznej, a następnie bierze udział w przemianie eutektycznej.

Aby materiał został uznany za obiecujący i sprostał oczekiwaniom stawianym biomateriałom do implantowania, musi posiadać określony zespół właściwości użytkowych (biologiczne, fizyczne, mechaniczne). Aby zdecydować o przydatności otrzymanego kompozytu, należy poddać go jeszcze badaniom, np. biokompatybilność – badania hodowli komórkowych *in vitro*, odporności na korozję.

## Literatura

- [1] Niinomi M., *Recent research and development in titanium alloys for biomedical applications and healthcare goods*, Science and Technology of Advanced Materials, 4, 2003, 445-454.
- [2] Marciniak J., *Biomateriały*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2002.
- [3] Ruan J.M., Zou J.P., Zhou Z.C., *Hydroxyapatite-316L stainless steel fibre composite biomaterials fabricated by hot pressing*, Powder Metallurgy, vol. 49, no 1, 2006, 62-65.
- [4] Miao X., *Observation of microcracks formed in HA-316L composites*, Materials Letters, 57 2003, 1848-1853.
- [5] Knepper M., Milthorpe B.K., Moricca S., *Interdiffusion in short-fibre reinforced hydroxyapatite ceramics*, Journals of Materials Science: Materials in Medicine, 9, 1998, 589-596.
- [6] Sridhar T.M., Kamachi Mudali U., Subbaiyan M., *Sintering atmosphere and temperature effects on hydroxyapatite coated type 316L stainless steel*, Corrosion science, 45, 2003, 2337-2359.
- [7] Lin J.H., Lou Ch.W., Chang Ch.H., Chen Y.S., Lin G.T., Lee Ch.H., *In vitro study of bone-like apatite coatings on metallic fiber braids*, Journal of Materials Processing Technology, 192-193, 2007, 97-100.
- [8] Szewczyk-Nykiel A., Kazior J., Nykiel M., *Charakterystyka biomateriałów kompozytowych typu AISI 316L-hydroksyapatyt*, Czasopismo Techniczne, Mechanika, z. 9, 2009, 39-44.
- [9] Dudek A., Przerada I., *Kompozyty metalowo-ceramiczne do zastosowań w medycynie*, Materiały Ceramiczne, 62, 1, 2010, 20-23.
- [10] Sobczak A., Kowalski Z., *Materiały hydroksyapatytowe stosowane w implantologii*, Czasopismo Techniczne, Chemia, z. 8, 2007, 149-158.
- [11] Niespodziana K., Jurczyk K., Jurczyk M., *Synteza bio nanomateriałów kompozytowych typu tytan-hydroksyapatyt*, Inżynieria Materiałowa, nr 3, 2006, 636-639.
- [12] Sobczak-Kupiec A., Wzorek Z., *Właściwości fizykochemiczne ortofosforanów wapnia istotnych dla medycyny – TCP i Hap*, Czasopismo Techniczne, Chemia, z. 10, 2010, 309-321.

- [13] Janus A.M., Wojnar L., Brzezińska-Miecznik J., *Environmental Scanning Electron Microscopy and image analysis techniques in biocompatibility investigations of hydroxyapatite of pig origin*, Inżynieria Materiałowa, nr 4, 2008, 451-453.
- [14] Janus A.M., Faryna M., Haberko K., Rakowska A., Panz T., *Chemical and microstructural characterization of natural hydroxyapatite derived from pig bones*, Microchim Acta, vol. 161, no 3-4, June 2008, 349-353.
- [15] Haberko K., *Natural hydroxyapatite – its behaviour during heat treatment*, Journal of the European Ceramic Society, vol. 26, 2006, 537-542.
- [16] Szewczyk - Nykiel A., Nykiel M., *Study of hydroxyapatite behaviour during sintering of 316L*, Archives of Foundry Engineering, vol. 10, 3, 2010, 235-240.
- [17] Guo H.B., Miao X., Chen Y., Chean P., Khor K.A., *Characterization of hydroxyapatite- and bioglass-3216L fibre composites prepared by spark plasma sintering*, Materials Letters, 58, 2004, 304-307.
- [18] Knepper M., Milthorpe B.K., Moricca S., *Stability of hydroxyapatite while processing short-fibre reinforced in short-fibre reinforced hydroxyapatite ceramics*, Biomaterials, vol. 18, no 23, 1997, 1523-1529.



DAWID TALER\*, JAROSŁAW TOKARCZYK\*\*

## MODELING OF PIPELINE HEATING

### MODELOWANIE NAGRZEWANIA RUROCIĄGÓW

#### Abstract

Heating of the pipeline with thermally insulated outer surface was modelled using the explicit finite difference method. The time variation of the fluid temperature at the pipeline inlet has the ramp form. An exact analytical solution was found using the method of superposition. The differences between the analytically and numerically predicted fluid and tube wall temperatures are small. The same method will be used in future for modeling, a heat storage unit, that is used in a combined electric-water heating system.

*Keywords: pipeline heating, finite difference method, analytical solution*

#### Streszczenie

Nagrzewanie rurociągu z izolowaną cieplnie powierzchnią zewnętrzną zostało zamodelowane z zastosowaniem metody różnic skończonych. Czasowy przebieg temperatury czynnika na wlocie do rurociągu ma kształt rampy. Ścisłe rozwiązanie analityczne zostało wyznaczone za pomocą metody superpozycji. Różnice między temperaturą cieczy wyznaczoną analitycznie i numerycznie są nieznaczne. Ta sama metoda różnic skończonych zastosowana zostanie w przyszłości do modelowania akumulatora ciepła w hybrydowym elektryczno-wodnym układzie ogrzewania.

*Słowa kluczowe: nagrzewanie rurociągu, metoda różnic skończonych, rozwiązanie analityczne*

\* Dr hab. inż. Dawid Taler, prof. PK, Instytut Inżynierii Ciepłej i Ochrony Powietrza, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

\*\* Mgr inż. Jarosław Tokarczyk, Katedra Maszyn i Urządzeń Energetycznych, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Introduction

Power units start-ups involve heating processes of steam pipelines. Steam temperature variation rate is of great importance not only because of pipe wall thermal stresses, but also because of stresses in fittings installed on the pipeline, often very expensive [1, 2]. Optimum transient fluid temperature changes at the inlet of the pipeline were determined from the solution of the Volterra integral equation of the first kind. The Duhamel's integral was solved numerically using the rectangle method. A review of existing literature suggests, however, that there is no paper devoted to the modeling of pipelines with varying in time medium temperature at the inlet to the pipeline.

Usually, the temperature and pressure of the flowing steam do not change considerably, so the steam can be assumed to be incompressible. A pipeline heating will be modeled using an explicit finite difference method. The accuracy of finite difference method, will be assessed by comparing the results with those obtained from the exact analytical solutions. The flow of an incompressible fluid in the thin walled pipeline will be analyzed. The fluid temperature at the inlet varies first linearly, then remains constant (Fig. 1). For such a case, frequently occurring in practice, the exact analytical solution can be found. It should be noted that the pipeline is a special case of the heat exchanger in which the heat transfer coefficient on the outer tube surface is equal to zero. Temperature changes of the fluid inside the pipeline are described by the energy conservation equation

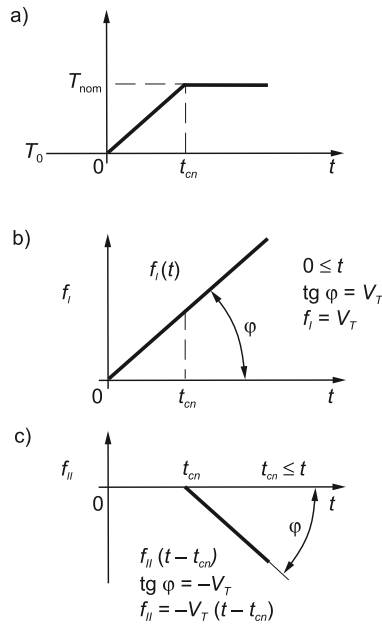


Fig. 1. Decomposition of fluid temperature changes at the inlet of the pipeline (a) prescribed in the boundary condition (6) into two parts:  $f^I(t)$  (b) and  $f^{II}(t - t_{cn})$  (c)

Rys. 1. Dekompozycja zmian temperatury czynnika na wlocie do rurociagu (a) zadanej w warunkach brzegowych (6) na dwie składowe:  $f^I(t)$  (b) i  $f^{II}(t - t_{cn})$  (c)



$$\tau_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{1}{N_1} \frac{\partial T_1}{\partial x^+} = -(T_1 - T_w) \quad (1)$$

where:

- $T_1$  = fluid temperature,
- $t$  – time,
- $x^+ = x/L_x$  – dimensionless coordinate,
- $L_x$  – pipeline length,
- $T_w$  – tube wall temperature.

The number of transfer units  $N_1$  and the time constant  $\tau_1$  are defined as:

$$N_1 = \frac{\alpha_1 A_w}{\dot{m}_1 c_{p1}} = \frac{\alpha_1 A_w}{\rho_1 w_1 A_1 c_{p1}}, \quad \tau_1 = \frac{m_1 c_{p1}}{\alpha_1 A_w} = \frac{\rho_1 A_1 L_x c_{p1}}{\alpha_1 A_w} = \frac{\rho_1 d_w c_{p1}}{4\alpha_1} \quad (2)$$

where:

- $\alpha_1$  – heat transfer coefficient at the inner pipeline surface,
- $A_w = \pi d_w L_x$  – area of the pipeline inner surface,
- $\dot{m}_1$  – fluid mass flow rate,
- $c_{p1}$  – fluid specific heat at constant pressure,
- $\rho_1$  – fluid density,
- $w_1$  – fluid velocity,
- $A_1 = \pi d_w^2 / 4$  – cross-section area of the pipeline,
- $d_w$  – tube inner diameter.

The energy balance equation for the pipeline wall is:

$$\tau_w \frac{\partial T_w}{\partial t} = T_1 - T_w \quad (3)$$

where the symbol  $\tau_w$  denotes the time constant of the tube wall, defined as:

$$\tau_w = \frac{m_w c_w}{\alpha_1 A_w} = \frac{(d_z^2 - d_w^2) \rho_w c_w}{4d_w \alpha_1} \quad (4)$$

where:

- $m_w = \pi(d_z^2 - d_w^2) L_x \rho_w / 4$  – pipeline mass,
- $c_w$  – specific heat of the pipeline material,
- $\rho_w$  – density of the pipeline material.

Equation (1) is subject to the boundary condition at the pipeline inlet:

$$T_1|_{x=0} = T_0 + f(t) \quad (5)$$

where  $f(t)$  is the known function of time, describing the changes in the excess fluid temperature at the inlet to the pipeline. The excess temperature over the initial temperature  $T_0$  is defined as the difference between the real and the initial fluid temperature. The initial temperature  $T_0$  of the fluid and pipeline is assumed to be constant, i.e. the initial conditions have the form:

$$T_1|_{t=0} = T_0 \quad (6)$$

$$T_w|_{t=0} = T_0 \quad (7)$$

The initial-boundary value problem (1)–(7) is solved using the finite difference method and analytically for a time variation in the inlet temperature of the fluid in the form of a ramp (Fig. 1). The function  $f(t)$  in the boundary condition (5) is given by the following expressions:

$$f(t) = v_T t, \quad 0 \leq t \leq t_{cn} \quad (8)$$

$$f(t) = T_{nom}, \quad t_{cn} \leq t.$$

where the fluid temperature rate is given by:  $v_T = (T_{nom} - T_0)/t_{cn}$ .

## 2. Finite difference method

The explicit finite difference method was used to solve the problem (1)–(8). The arrangement of nodes in the finite difference grid is depicted in Figure 2. Equations (1) and (3) are approximated by the finite difference equations:

$$\tau_1 \frac{T_{1,i+1}^{n+1} - T_{1,i+1}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{N_1} \frac{T_{1,i+1}^n - T_{1,i}^n}{\Delta x^+} - \left( \frac{T_{1,i}^n + T_{1,i+1}^n}{2} - T_{w,i}^n \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

$$\tau_w \frac{T_{w,i}^{n+1} - T_{w,i}^n}{\Delta t} = \frac{T_{1,i}^n + T_{1,i+1}^n}{2} - T_{w,i}^n \quad (10)$$

The coordinates of the difference grid are:

$$x_i = (i-1) \cdot \Delta x, \quad i = 1, \dots, N+1 \quad \text{for fluid,}$$

$$x_i = (i-1) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x, \quad i = 1, \dots, N+1 \quad \text{for pipeline wall,}$$

$$t_n = n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{for fluid and pipeline wall.}$$

The dimensionless grid size is:

$$\Delta x^+ = \Delta x / L_x = 1 / N.$$

Solving Equation (9) for  $T_{1,i+1}^{n+1}$  and Equation (10) for  $T_{w,i}^{n+1}$  gives, respectively:

$$T_{1,i+1}^{n+1} = T_{1,i+1}^n - \frac{\Delta t}{\tau_1} \left[ \frac{1}{N_1} \frac{T_{1,i+1}^n - T_{1,i}^n}{\Delta x^+} + \left( \frac{T_{1,i}^n + T_{1,i+1}^n}{2} - T_{w,i}^n \right) \right], \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

$$T_{w,i}^{n+1} = T_{w,i}^n + \frac{\Delta t}{\tau_w} \left( \frac{T_{1,i}^n + T_{1,i+1}^n}{2} - T_{w,i}^n \right) \quad (12)$$

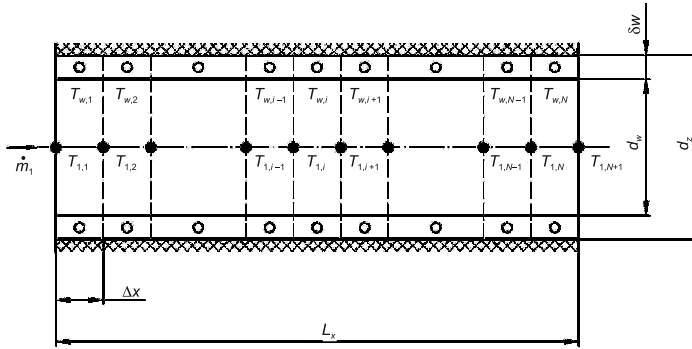


Fig. 2. Finite difference grid for fluid and pipe wall; • – fluid, o – pipeline wall  
Rys. 2. Siatka różnicowa w obszarze cieczy i ścianki rury; • – płyn, o – ścianka rury

The boundary condition (8) can be written as:

$$\begin{aligned} T_{1,1}^n &= T_0 + v_T t_n, \quad t \leq t_{cn}, \quad n = 0, 1, \dots \\ T_{1,1}^n &= T_{nom}, \quad t \geq t_{cn} \end{aligned} \quad (13)$$

The initial conditions (6) and (7) take the following form:

$$T_{1,i}^0 = T_0, \quad i = 1, \dots, N+1 \quad (14)$$

$$T_{w,i}^0 = T_0, \quad i = 1, \dots, N \quad (15)$$

Formulas (11) and (12), after taking into account the boundary condition (11) and the initial conditions (14) and (15), allow to determine the temperature of the fluid and the wall as a function of position and time.

### 3. Exact analytical solution

To determine the temperature distribution in the fluid and the wall of the pipeline the method of superposition [4] will be used. Applying the principle of superposition, the boundary condition (8) will be decomposed into the form (Fig. 2):

$$\begin{aligned} T_1|_{x=0} &= T_0 + f^I(t), \quad 0 \leq t \leq t_{cn} \\ T_1|_{x=0} &= T_0 + f^I(t) + f^{II}(t - t_{cn}), \quad t \geq t_{cn} \end{aligned} \quad (16)$$

where:

$$\begin{aligned} f^I(t) &= v_T t, \quad 0 \leq t \leq t_{cn} \\ f^{II}(t - t_{cn}) &= -v_T(t - t_{cn}), \quad t \geq t_{cn} \end{aligned} \quad (17)$$

The fluid and the wall temperature are determined from:

$$T_1 = T_0 + T_1^I(x, t), \quad 0 \leq t \leq t_{cn} \quad (18)$$

$$T_w = T_0 + T_w^I(x, t), \quad 0 \leq t \leq t_{cn} \quad (19)$$

and:

$$T_1 = T_0 + T_1^I(x, t) + T_1^{II}(x, t - t_{cn}), \quad t \geq t_{cn} \quad (20)$$

$$T_w = T_0 + T_w^I(x, t) + T_w^{II}(x, t - t_{cn}), \quad t \geq t_{cn} \quad (21)$$

The temperature  $T_1^I(x, t)$  and  $T_w^I(x, t)$  are the solutions of the following initial-boundary value problem:

$$\tau_1 \frac{\partial T_1^I}{\partial t} + \frac{1}{N_1} \frac{\partial T_1^I}{\partial x^+} = -(T_1^I - T_w^I) \quad (22)$$

$$\tau_w \frac{\partial T_w^I}{\partial t} = T_1^I - T_w^I \quad (23)$$

$$T_1^I|_{x=0} = f^I(t) = v_T t, \quad 0 \leq t \leq t_{cn} \quad (24)$$

$$T_1^I|_{t=0} = 0 \quad (25)$$

$$T_w^I|_{t=0} = 0 \quad (26)$$

The temperature  $T_1^{II}(x, t)$  and  $T_w^{II}(x, t)$  are the solutions of the following initial-boundary value problem:

$$\tau_1 \frac{\partial T_1^{II}}{\partial t} + \frac{1}{N_1} \frac{\partial T_1^{II}}{\partial x^+} = -(T_1^{II} - T_w^{II}) \quad (27)$$

$$\tau_w \frac{\partial T_w^{II}}{\partial t} = T_1^{II} - T_w^{II} \quad (28)$$

$$T_1^{II}|_{x=0} = f^{II}(t - t_{cn}) = -v_T (t - t_{cn}), \quad t \geq t_{cn} \quad (29)$$

$$T_1^{II}|_{t=0} = 0 \quad (30)$$

$$T_w^{II}|_{t=0} = 0 \quad (31)$$

The solution of the problem (27)–(31) has the form [3]:

$$T_1^I = v_T \tau_w \left\{ e^{-(\xi+\eta)} \left[ (\eta - \xi)U + \xi I_0(2\sqrt{\xi\eta}) + \sqrt{\xi\eta} I_1(2\sqrt{\xi\eta}) \right] \right\}, \quad 0 \leq t \leq t_{cn} \quad (32)$$

$$T_w^I = T_1^I - v_T \tau_w e^{-(\xi+\eta)} \left[ U - I_0(2\sqrt{\xi\eta}) \right], \quad 0 \leq t \leq t_{cn} \quad (33)$$

where the function  $U$  is defined as:

$$U = U(\xi, \eta) = e^{\xi+\eta} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\xi}{\eta} \right)^{\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{\xi\eta}) \quad (34)$$

The symbols  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$  and  $I_n(x)$  denote the modified Bessel functions of the first kind, of order zero, one, and  $n$ , respectively. The temperature  $T_1^{\text{II}}(x, t)$  and  $T_w^{\text{II}}(x, t)$  are the solutions of the initial-boundary value problem (27)–(31):

$$T_1^{\text{II}} = -v_T \tau_w \left\{ e^{-(\xi+\eta_1)} \left[ (\eta_1 - \xi)U + \xi I_0(2\sqrt{\xi\eta_1}) + \sqrt{\xi\eta_1} I_1(2\sqrt{\xi\eta_1}) \right] \right\} \quad t \geq t_{cn} \quad (35)$$

$$T_w^{\text{II}} = T_1^{\text{II}} + v_T \tau_w e^{-(\xi+\eta_1)} \left[ U - I_0(2\sqrt{\xi\eta_1}) \right], \quad t \geq t_{cn} \quad (36)$$

where:

$$\xi = \frac{x N_1}{L_x}, \quad \eta = \frac{t - t_{pr}}{\tau_w}, \quad \eta_1 = \frac{t - t_{cn} - t_{pr}}{\tau_w}, \quad t_{pr} = x^+ N_1 \tau_1$$

The symbol  $t_{pr}$  denotes transit time of the fluid particle from the inlet ( $x = 0$ ) to the  $x$  coordinate given by:  $t_{pr} = x/w_1$ .

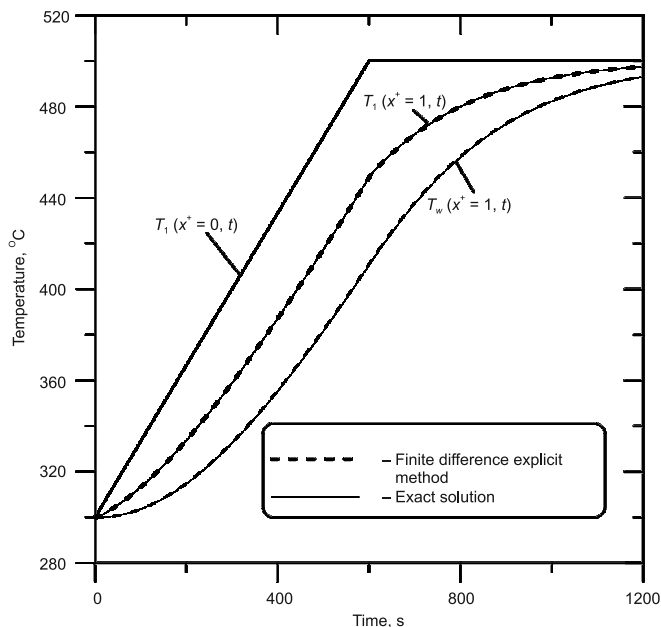


Fig. 3. Comparison of fluid and pipeline wall temperature at the pipeline outlet ( $x^+ = 1$ );  
 - - - - - finite difference explicit method, — exact solution

Rys. 3. Porównanie temperatury płynu i ścianki na wylocie z rurociągu ( $x^+ = 1$ );  
 - - - - - metoda różnic skończonych, — rozwiązanie ścisłe

where transit time  $t_{pr}$  is given by:  $t_{pr} = x / w_1$ .

The comparison of results obtained using the finite difference method (11)–(12) and the analytical exact is presented in Fig. 3. The coincidence between the approximate and exact

solution is very satisfactory. The differences between the exact analytical solution and the finite difference solution are almost invisible.

Calculations were performed for the following data:  $N_1 = 1.22$ ,  $\tau_1 = 3.94$  s,  $\tau_w = 128.89$  s,  $T_0 = 300^\circ\text{C}$ ,  $T_{\text{nom}} = 500^\circ\text{C}$ ,  $v_T = 1/3$  K/s,  $t_{\text{cn}} = 600$  s. The dimensionless spatial and time steps in the finite difference method were:  $\Delta x^+ = 1/48$  and  $\Delta t = 0.03$  s. The adopted time step satisfies the Courant condition, as the quotient:

$$\frac{\Delta t}{N_1 \tau_1 \Delta x^+} = \frac{0.03 \cdot 48}{1.22 \cdot 3.94} = 0.3$$

is less than unity.

#### 4. Conclusion

Consistency of the results obtained using the exact analytical method and finite difference method is very good.

It was demonstrated that the accuracy of the explicit finite difference method is very good. The finite difference method can therefore be used to model the pipeline or heat regenerator with time dependent inlet fluid velocity or temperature.

#### Literatura

- [1] Lubecki S., Taler D., Sobota T., *Numerical optimization of steam pipeline heating with respect to thermal stresses*, Archives of Thermodynamics, Vol. 29, No. 4, 2008, 87-96.
- [2] Taler J., Lubecki S., *Numerical optimization of steam pipeline heating*, EngOpt2010, 2<sup>nd</sup> International Conference on Engineering Optimization, 6–9 September 2010 Lisboa, Portugal, Book of Abstracts (p. 308) and CD-ROM Proceedings.
- [3] Серов Е.П., Корольков Б.П., *Динамика парогенераторов*, Энергоиздат, Москва 1981.
- [4] Taler J., Duda P., *Solving Direct and Inverse Heat Conduction Problems*, Springer, Berlin 2006.

JANUSZ TARNOWSKI\*, STANISŁAW RUMIAN\*\*

## BADANIA DOŚWIADCZALNE PROTOTYPU BIOPOMPY WSPOMAGAJĄCEJ PRACĘ SERCA

---

### EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF THE PROTOTYPE BOOSTER BIO-PUMP FUNCTION OF THE HEART

---

#### Streszczenie

Przedmiotowe badania zostały przeprowadzone na jednym z prototypów pompy wspomagającej pracę serca z wykorzystaniem mięśnia szkieletowego. Głównym celem badań było znalezienie optymalnych zakresów pracy sterownika pompy oraz oszacowanie jej efektywnej sprawności. Badania były wykonane z wykorzystaniem szybkiej kamery wideo i komputerowej analizy obrazu.

*Słowa kluczowe: biopompa, wspomaganie pracy serca*

#### Abstract

These studies were carried out on one of the prototype booster pump function of the heart with skeletal muscle. The main objective of this study was to find the optimum operating range of the pump and driver and to estimate of its effective performance. Tests were performed using fast video cameras and computer image analysis.

*Keywords: bio-pump, power of heart*

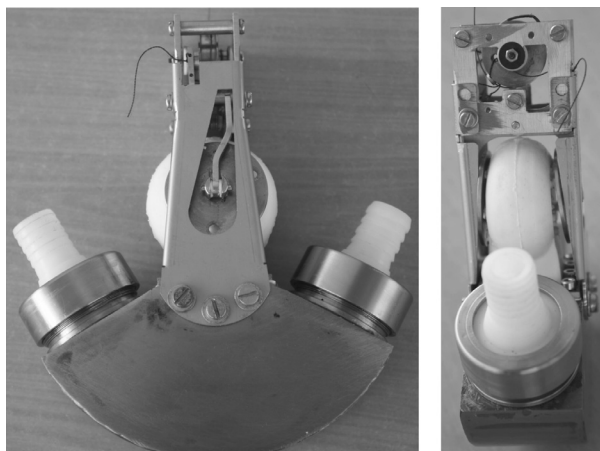
---

\* Dr inż. Janusz Tarnowski, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

\*\* Dr Stanisław Rumian, Międzyuczelniane Centrum Nowych Techniki i Technologii Medycznych.

## 1. Wstęp

Człowiek z niewydolnym układem krążenia potrzebuje w przypadkach kryzysowych wspomaganie pracy tego układu. Zastosowanie rozrusznika serca może być w wielu sytuacjach niewystarczające. Pomocne może okazać się włączenie do pracy dodatkowej małej pompy wszczepionej na stałe pacjentowi. Dużym problemem może być napęd takiej pompy. Koncepcja wykorzystania mięśnia szkieletowego do wspomaganie pracy serca jest znana od dawna [1] i ma wiele zalet [2–4]. Główną zaletą jest brak konieczności dostarczania energii z zewnątrz do napędu pompy – potrzebna jest tylko energia do zewnętrznej stymulacji mięśnia napędzającego. Badania nad prototypami takich rozwiązań były już prowadzone, również z udziałem autorów [5]. Opisane w artykule badania eksperymentalne stanowią część prac prowadzonych w Międzyuczelnianym Centrum Nowych Techniki i Technologii Medycznych w Krakowie mających na celu dobór optymalnej konstrukcji i sterowania biopompy wspomagającej pracę serca z wykorzystaniem mięśni szkieletowych. Podstawą dotychczasowych konstrukcji biopomp jest worek krwisty, na którym w różny sposób modelowano mięsień szkieletowy. Większość dotychczasowych konstrukcji była oparta na zasadzie owinięcia worka krwistego, wyposażonego w zastawki kierunkowe, mięśniem szkieletowym, do którego podłączano system rozrusznikowy. Konstrukcje te mają jednak wady praktycznie eliminujące zastosowania kliniczne. Chcąc ograniczyć te wady przyjęto oryginalne założenie w stosunku do istniejących rozwiązań konstrukcyjnych – zmieniono sposób napędu biokomory przez mięsień szkieletowy. Postanowiono wykorzystać siłę skracania mięśnia, rezygnując tym samym z koncepcji uciskania komory przez masę mięśniową.



Rys. 1. Badany model biopompy  
Fig. 1. The tested model of bio-pump

Obecnie prowadzone są badania nad kilkoma konstrukcjami. Jedną z takich konstrukcji jest pompa bloczkowo-nożycowa, która jest przedmiotem opisanych w artykule badań eksperymentalnych. Na rys. 1 pokazano badany model prototypu pompy. Praca biopom-



py dzieli się na dwie fazy: tłoczenia oraz ssania. W fazie tłoczenia napinający się mięsień poprzez przekładnię bloczkową napędza mechanizm nożycowy. Powoduje to ściskanie worka roboczego. Pod wpływem napływu i wzrostu ciśnienia medium roboczego dochodzi do ściskania worka krwistego i tłoczenia krwi do przewodu tłocznego. Kierunek przepływu krwi znajdującej się wewnątrz worka krwistego regulowany jest przez zastawki mechaniczne. Faza ssania rozpoczyna się w chwili, gdy mięsień przestaje oddziaływać na układ. Sprężyna umieszczona w mechanizmie nożycowym rozwiera ramiona z talerzykami, na których rozpięty jest worek roboczy, powodując przepływ medium do worka roboczego, jednocześnie generując podciśnienie w przestrzeni roboczej. W efekcie worek krwisty zaczyna się rozkurczać i zasysać krew wpływającą przez konektor wlotowy.

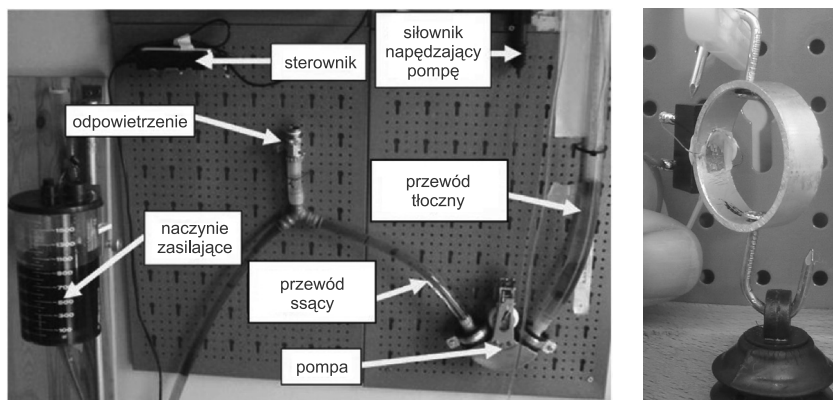
## 2. Opis badań eksperymentalnych

Opisana powyżej konstrukcja bloczkowo-nożycowa została zastosowana po wstępnej optymalizacji do budowy prototypu, który został poddany opisanym dalej badaniom eksperymentalnym. Ten etap badań miał dwa cele:

- optymalizację sterowania pompą,
- estymację sprawności pompy.

Badania zostały wykonane w Laboratorium Międzyuczelnianego Centrum Nowych Techniki i Technologii Medycznych w Krakowie.

Stanowisko pomiarowe (rys. 2, lewa strona) zostało wykonane na podwieszanej tablicy montażowej. W jego skład wchodziły: siłownik elektryczny symulujący pracę mięśnia szkieletowego (sterowany regulowanym sygnałem ze sterownika PWM), prototyp biopompy wraz z wykonanymi z elastycznych przezroczystych przewodów, ssącego i tłocznego z przybiorem liniowym oraz zbiornika roztworu gliceryny. Sterownik umożliwiał podawanie impulsów o zadanej częstotliwości i czasie trwania. Pomiędzy siłownikiem a napędem biopompy umieszczono linkę łączącą (niewidoczna na rysunku), a w niektórych próbach również wykonany na podstawie układu mostka tensometrycznego czujnik siły. Układ został napełniony cieczą (zabarwiony roztwór gliceryny w wodzie, parametry zbliżone do krwi). Ciśnienie po stronie ssącej zostało ustalone w przybliżeniu na stałym poziomie poprzez umieszczenie na zadanej wysokości naczynia o średnicy dużo większej niż przewód ssący i tłoczny. Po włączeniu układu sterowania siłownik wykonywał okresowo ruchy symulujące skracanie się mięśnia szkieletowego, napędzając badaną biopompę. Częstotliwość i czas trwania impulsów sterujących były regulowane. Praca pompy powodowała podnoszenie poziomu słupa cieczy w przewodzie tłocznym aż do granic możliwości pompy przy danym sterowaniu. Ruch cieczy w przewodzie tłocznym był rejestrowany szybką kamerą cyfrową CASIO. Pomiary takie zostały wykonane trzykrotnie dla każdej z badanych częstotliwości i czasu trwania impulsów sterujących. Wybrane próby były wykonywane z zamontowanym pomiędzy napędem pompy a siłownikiem elementem metalowym z naklejonymi czujnikami tensometrycznymi (rys. 2, prawa strona), z których sygnał pozwalał na pomiar i rejestrację siły rozciągania z wykorzystaniem wzmacniacza tensometrycznego Hottinger (Niemcy). Dane rejestrowano z użyciem oprogramowania DMClab.



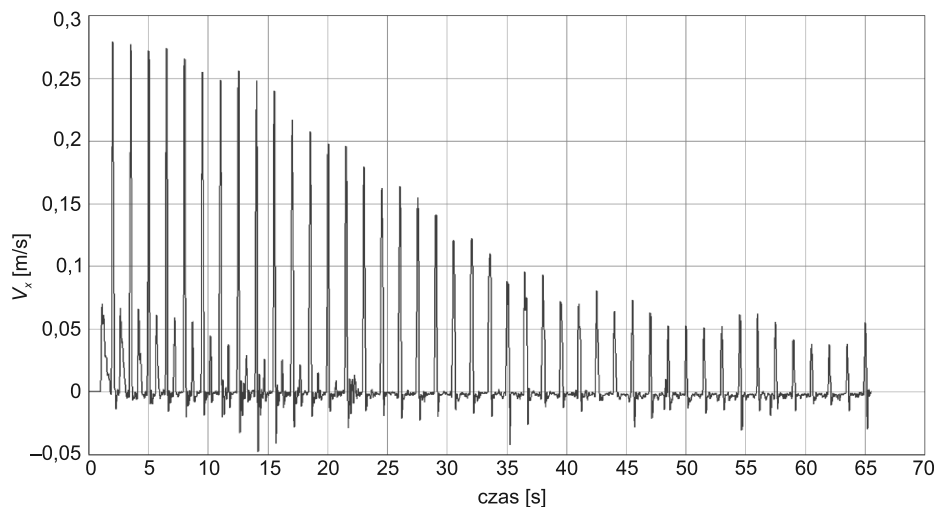
Rys. 2. Widok stanowiska pomiarowego (lewa strona) i czujnika siły (prawa strona)

Fig. 2. View of measurement stand (left side) and of force sensor (right side)

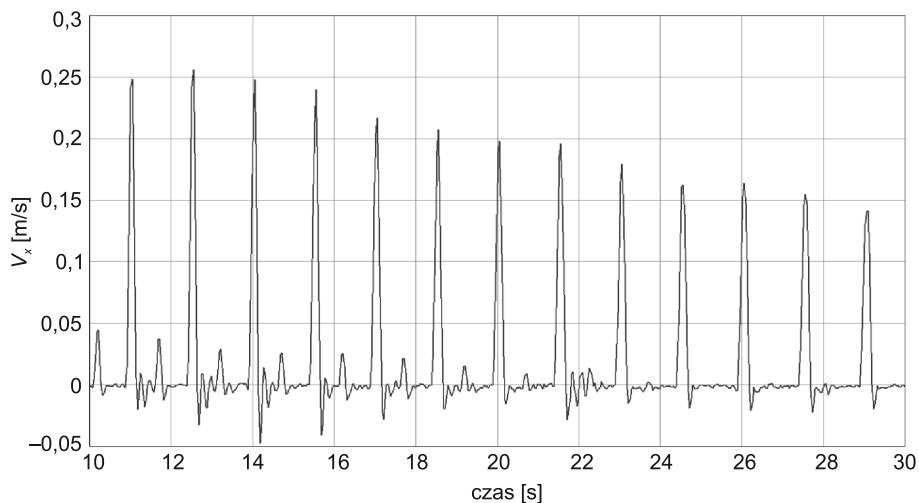
Po wykonaniu prób uzyskano sekwencje położenia analizowanych punktów obrazu przemieszczenia lustra cieczy w przewodzie tłocznym odpowiadające każdej próbie. Posłużyły one jako materiał źródłowy do analizy komputerowej z wykorzystaniem pakietu programowego WINalyze (Mikromak Niemcy). Zarejestrowane sekwencje obrazów zostały rozkompresowane i zapisane na dysku w postaci filmów \*.avi. Następnie każdorazowo została wykonana kalibracja obrazu w dziedzinie czasu i wymiarów liniowych oraz filtracja obrazu filtrem dolnoprzepustowym. Kolejnym krokiem analizy był wybór śledzonych punktów obrazu i dobór zakresu i metody śledzenia. Wybierany był głównie punkt związany z górnym poziomem podnoszonej cieczy i metoda korelacji wzajemnej (*Cross Correlation*). Wykorzystywano metodę automatycznego śledzenia położenia z zastosowaniem rozdzielczości subpikselowej (*Subpixel Accuracy*). Po wykonaniu operacji śledzenia wybranych punktów obrazu uzyskano przebiegi czasowe położenia lustra cieczy w przewodzie wylotowym podczas każdej próby. Wykonano również różniczkowanie numeryczne uzyskanych przebiegów metodą Savitzky'ego–Goley'a, otrzymując przebiegi czasowe prędkości lustra cieczy. Wyniki zapisano w postaci pliku tekstowego. Przykładowy przebieg czasowy prędkości zarejestrowany dla jednej z prób pokazano na rys. 3, a fragment tego przebiegu pokazujący charakter zmian podczas trwania impulsów napędzających biopompę na rys. 4. Maksymalne prędkości lustra cieczy w przewodzie tłocznym uzyskiwane podczas pracy pompy zmieniają się w czasie każdej próby i są różne dla różnych czasów trwania i częstotliwości impulsów sterujących. Chcąc zilustrować przebiegi tych zmian w czasie, poddano odpowiadające wszystkim próbom przebiegi czasowe prędkości obróbce z wykorzystaniem pakietu programowego DPlot (HydeSoft USA).

Obliczono obwiednie otrzymanych przebiegów czasowych prędkości. Mogą one stanowić miarę efektywności biopompy. Obwiednie te zostały następnie wygładzone, uśrednione z trzech prób dla każdej nastawy i zestawione na wykresach zbiorczych (rys. 5–7). Wykresy te pozwalają ocenić zachowanie badanej biopompy i wybrać najbardziej efektywne nastawy sterownika. Na rys. 5 pokazano wykresy zmian w czasie prędkości lustra podnoszonej cieczy dla wszystkich nastaw sterownika. Na rys. 6 zilustrowano te zmiany dla prób z najbardziej

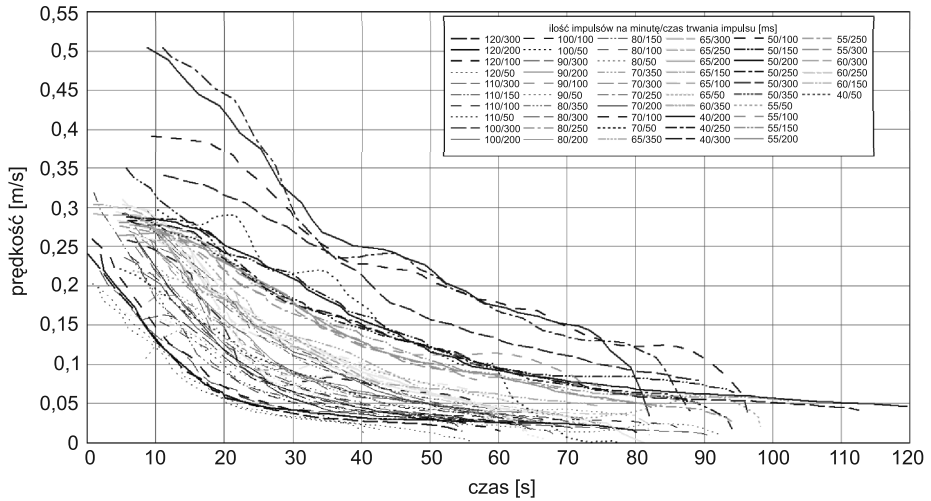
efektywnym czasem trwania impulsów sterujących 200 ms. Na rys. 7 pokazano wykresy zmian dla wybranych, najbardziej efektywnych nastaw sterownika. Wykonano również analizę wysokości tłoczenia cieczy przez biopompę dla różnych częstotliwości i czasu trwania impulsów sterujących. Wyniki zilustrowano na rys. 8.



Rys. 3. Przykładowy przebieg czasowy prędkości poziomoj cieczy  
Fig. 3. Exemplary time history of liquid level

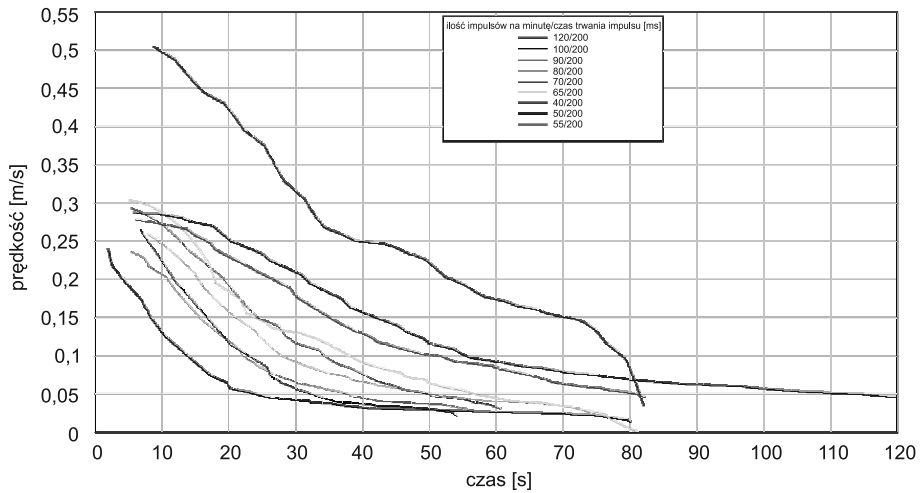


Rys. 4. Fragment przebiegu czasowego z rys. 3  
Fig. 4. Part of the time course of Fig. 3



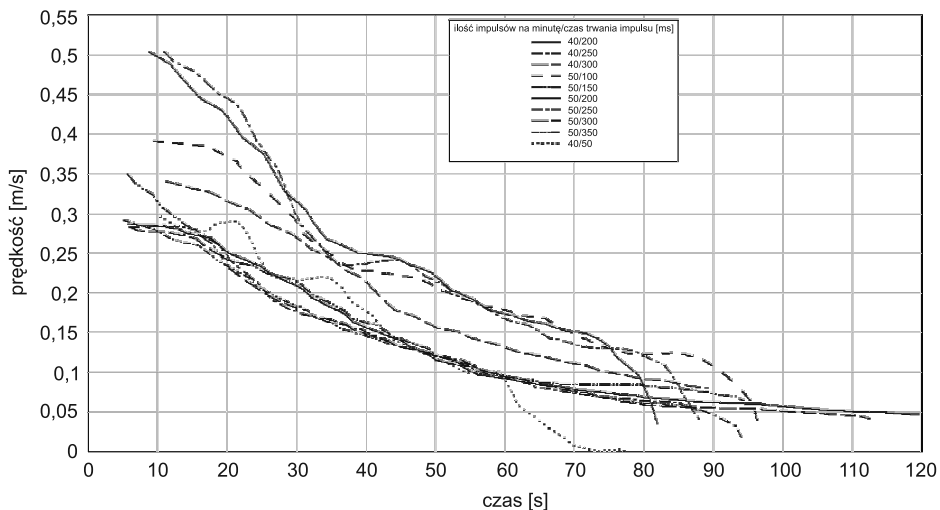
Rys. 5. Zmiany prędkości narastania poziomu cieczy dla różnych czasów trwania i częstotliwości impulsów sterujących

Fig. 5. Change the speed of the liquid level to rise various durations and the frequency of control pulses



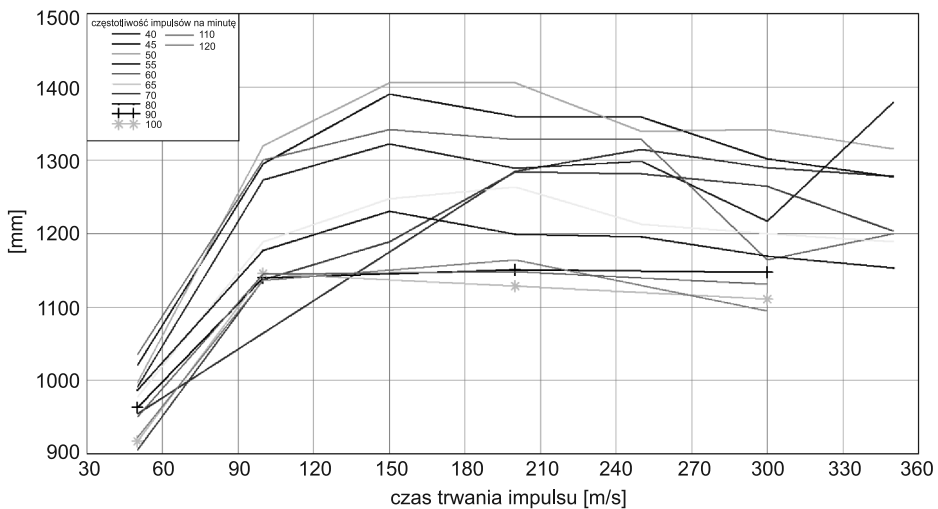
Rys. 6. Zmiany prędkości narastania poziomu cieczy dla różnej częstotliwości impulsów sterujących i czasu trwania 200 ms

Fig. 6. Change the speed of the liquid level to rise control pulses of different frequency and duration of 200 ms



Rys. 7. Zmiany prędkości narastania poziomu cieczy dla różnych czasów trwania i częstotliwości impulsów sterujących (najbardziej efektywne próby)

Fig. 7. Change the speed of the liquid level to rise various durations and the frequency of control pulses (the most efficient of the sample)



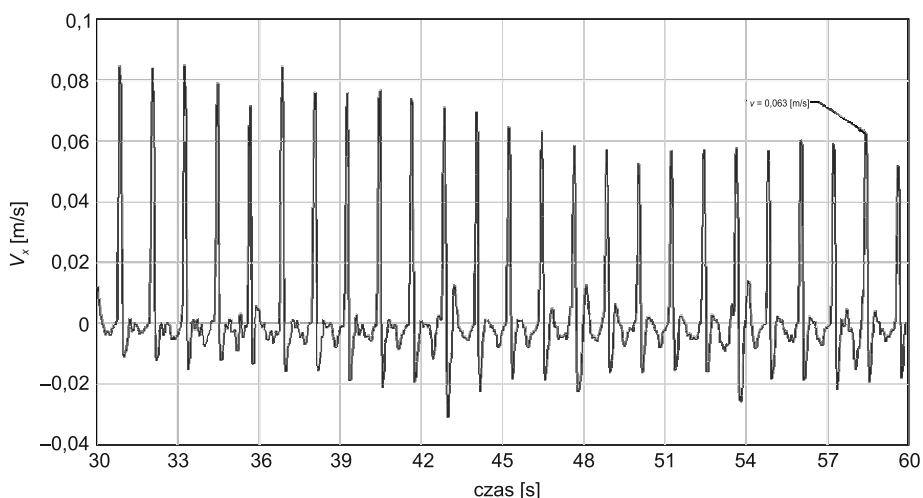
Rys. 8. Wysokość tłoczenia w zależności od sterowania

Fig. 8. The amount of discharge, depending on the control

### 3. Estymacja sprawności badanej pompy

Kolejnym krokiem przeprowadzonych analiz była estymacja efektywnej (całkowitej) sprawności badanej pompy. Sprawność wyznaczono jako stosunek mocy na wyjściu i wejściu badanego układu. Moc na wyjściu estymowano przez obliczenie iloczynu siły związanej z ciężarem podnoszonej cieczy w jednym skoku pompy i prędkości narastania poziomu cieczy w tym skoku. Analogicznie moc na wejściu estymowano poprzez obliczenie iloczynu siły zmierzonej czujnikiem tensometrycznym, wywieranej przez siłownik na ramię napędowe pompy i prędkości tego ramienia w czasie odpowiedniego skoku pompy. Przyjęto gęstość podnoszonego roztworu wody i gliceryny  $1,1165 \text{ g/cm}^3$ , a więc przy średnicy rury wyjściowej  $2,54 \text{ cm}$   $1 \text{ cm}$  podnoszonej cieczy ma masę  $5,07 \text{ g}$ . Stąd znając wysokość podnoszonej cieczy obliczono ciężar, a co za tym idzie – siłę ciężkości słupa cieczy. Prędkości na wejściu i wyjściu obliczono, wykorzystując zarejestrowane kamerą cyfrową filmy poprzez analizę komputerową z użyciem oprogramowania WINAnalyze.

Przy kalibracji dla pompy nożycowej ciecz jest podnoszona maksymalnie na wysokość  $100,7 \text{ cm}$ , czyli w końcowym etapie próby jej masa to  $100,7 \cdot 5,07 = 0,511 \text{ kg}$ , ciężar  $0,511 \cdot 9,81 = 5,01 \text{ N}$ . Prędkość narastania słupa cieczy dla tej części próby wynosi:  $0,063 \text{ m/s}$  (rys. 9).



Rys. 9. Przebieg czasowy prędkości narastania poziomu cieczy podczas próby sprawności

Fig. 9. The time chart slew rate of the liquid level while trying the efficiency

Stąd moc otrzymana  $P_2 = 5,01 \cdot 0,063 = 0,316 \text{ W}$ .

Tymczasem siła pomiędzy siłownikiem a pompą wynosi  $14,75 \text{ N}$ .

Prędkość ruchu siłownika wynosi  $0,094 \text{ m/s}$ .

Stąd moc wydatkowana  $P_1 = 14,75 \cdot 0,094 = 1,386 \text{ W}$ .

Sprawność pompy nożycowej wynosi zatem  $P_2/P_1 \cdot 100\% = 23\%$ .

#### 4. Wnioski i kierunki dalszych badań

Przeprowadzone badania eksperymentalne pozwoliły na wyszczególnienie tych zakresów sterowania, dla których badana pompa pracuje najefektywniej. Są to częstotliwości 40–55 impulsów na minutę (rys. 6–8). Ponieważ jest to zakres częstotliwości w części pokrywający się z zakresem, w jakim pracuje serce człowieka, można więc sądzić, że jest możliwe zastosowanie kliniczne podobnej pompy. Najbardziej efektywne czasy trwania impulsów sterujących mieszczą się w zakresie 150–250 ms.

Wyliczona sprawność badanego modelu wydaje się wartością zbyt niską, aby opracowany model zastosować w dalszych badaniach eksperymentalnych na zwierzętach. Prawdopodobnie badana konstrukcja z przekładnią bloczkową ma za duże opory własne. Konieczna wydaje się optymalizacja konstrukcji mechanizmu napędowego, wykonanie badań hydrodynamicznych z poprawionym mechanizmem napędowym dostosowanym dodatkowo do kształtu i wymiarów biopompy oraz warunków anatomicznych zwierząt doświadczalnych. Wstępne badania biopomp ze zmodyfikowanym napędem dały lepsze rezultaty, pozwalając patrzeć z optymizmem na rozwój badanej koncepcji.

#### Literatura

- [1] Ray C.J., *Biomechanical Cardiac Assist: Cardiomyoplasty and Muscle – Powered Devices*, Futura Publishing Company, New York 1986.
- [2] Nose J.Y., *Development of Rotary Blood Pump Technology: Past, Present and Future*, The International Journal of Artificial Organs, Vol. 24, No. 6, 2000.
- [3] Sterkowicz S., *Pięćdziesiąt lat później. Sztuczne serce – wczoraj, dziś, jutro*, Kardiologia i Torakochirurgia Polska, 5(2), 2008.
- [4] Verkerke G.J., *Numerical simulation of the influence of the left ventricular assist device on the cardiovascular system*, The International Journal of Artificial Organs, Vol. 23, No. 11, 2000.
- [5] Rumian S., Mazurkiewicz S., Kopacz M., Tarnowski J., Kustos R., Szydek M., Sosnowska K., *Badania modelowe nad zastosowaniem pompy do bio-wspomagania niewydolnego serca*, Dydaktyka Nauk Stosowanych, Methods of Applied Sciences, t. 4, Szczecin 2008.





## TREŚĆ

Dyląg M., Rosiński J.: Zastosowanie metody momentów do szybkiego oszacowania rozkładów wielkości powstających flokuł.....	3
Dyląg M., Rosiński J., Szatkó W.: Modelowanie procesu flokulacji w reaktorze rurowym o zmiennej geometrii przepływu.....	17
Egner W.: Optymalne kształtowanie idealnie plastycznej zginanej i ścinanej belki w płaskim stanie odkształceń.....	31
Hebda M.: <i>Spark Plasma Sintering</i> – nowa technologia konsolidacji materiałów proszkowych.....	47
Krasiński M., Stodulski M., Trojnacki A.: Przegląd technicznych możliwości wyrównywania naprężeń w ściankach naczyń ciśnieniowych.....	57
Łuczko J., Ferdek U.: Porównanie różnych strategii sterowania w semiaktywnych układach zawieszenia samochodu.....	81
Ryś J., Augustyn M.: Badania eksperymentalne łopaty o przekroju dwuspójnym turbiny wiatrowej o pionowej osi obrotu – kinetyka i moment napędowy turbiny.....	93
Szewczyk-Nykiel A., Nykiel M., Kazior J.: Spiekane biomateriały kompozytowe AISI 316L-hydroksyapatyt.....	115
Taler D., Tokarczyk J.: Modelowanie nagrzewania rurociągów.....	127
Tarnowski J., Rumian S.: Badania doświadczalne prototypu biopompy wspomagającej pracę serca.....	135

## CONTENTS

Dyląg M., Rosiński J.: Anwendung der Momentenmethode zur schnellen Abschätzung der sich einstellenden Flockengrößenverteilung.....	3
Dyląg M., Rosiński J., Szatkó W.: Zur Modellierung des Flockungsprozesses im Rohrreaktor mit Querschnittsänderungen.....	17
Egner W.: Optimal plastic design of beams under bending and shear in plane strain.....	31
Hebda M.: <i>Spark Plasma Sintering</i> – a new technology of consolidation of powder materials ..	47
Krasiński M., Stodulski M., Trojnacki A.: Modification of stress distribution in walls of pressure vessels.....	57
Łuczko J., Ferdek U.: Comparison of different control strategy in semi-active vehicle suspension system.....	81
Ryś J., Augustyn M.: Experimental studies of a two-coherent cross-section blade of wind rotor with vertical axis – motion and a propelling moment of wind turbine.....	93
Szewczyk-Nykiel A., Nykiel M., Kazior J.: AISI 316L-hydroxyapatite sintered composite biomaterials.....	115
Taler D., Tokarczyk J.: Modeling of pipeline heating.....	127
Tarnowski J., Rumian S.: Experimental investigations of the prototype booster bio-pump function of the heart.....	135