

АНТОН БЕЛЯКОВ, ВЛАДИМИР ЖУКОВ<sup>1</sup>, HENRYK OTWINOWSKI<sup>2</sup>

ОПИСАНИЕ И СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ  
СОВМЕЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В СЫПУЧИХ СРЕДАХ  
НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

DESCRIPTION AND IMPROVEMENT OF THE COMBINED  
PROCESSES WITH PARTICULATE SOLIDS ON THE BASIS  
OF BOLTZMANN EQUATION

Аннотация

Предложено обобщенное описание совмещенных процессов движения, классификации и измельчения сыпучих материалов на основе уравнения Больцмана. Разработан подход к его численному решению, приведены результаты решения ряда практических задач.

*Ключевые слова: уравнение Больцмана, транспорт, классификация, измельчение, сыпучие материалы, ячеечная модель*

Abstract

The generalized description of the combined processes of transportation, grinding and classification of granular materials on the basis of the Boltzmann equation is proposed. An approach to its numerical solution is developed and some results of the solution for several practical problems are shown.

*Keywords: granular matter, Boltzmann equation, transportation, classification, grinding, cell model*

<sup>1</sup> Д.х.н., профессор Антон Николаевич Беляков, д.т.н., профессор Владимир Павлович Жуков, Ивановский государственный энергетический университет.

<sup>2</sup> Dr hab. inż. Henryk Otwinowski, Politechnika Częstochowska.

Кинетическое уравнение Больцмана [1-4], описывающее статистическое распределение частиц в газе или жидкости, традиционно используется в теоретической физике для изучения переноса тепла и электрического заряда в жидкостях и газах. Например, из него выводятся транспортные свойства материалов, такие как электропроводность, вязкость и теплопроводность.

В работе [4] на основе уравнения Больцмана предложена концепция моделирования совмещенных технологических процессов в сыпучих средах. В качестве искомой функции  $f(\vec{r}, \vec{v}, d, t)$  рассматривается плотность распределения вещества по координатам  $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$ , скоростям  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  и размерам частиц  $\delta$ . Произведение функции  $f(\vec{r}, \vec{v}, \delta, t)$  на фазовый объем  $dV = dx_1 dx_2 dx_3 dv_1 dv_2 dv_3 d\delta$  показывает вероятность в момент времени  $(t, t + dt)$  частицы размером  $(\delta, \delta + d\delta)$ , находящейся в точке с координатами  $(x_1, x_1 + dx_1)$ ,  $(x_2, x_2 + dx_2)$ ,  $(x_3, x_3 + dx_3)$ , двигаться со скоростью  $(v_1, v_1 + dv_1)$ ,  $(v_2, v_2 + dv_2)$ ,  $(v_3, v_3 + dv_3)$ . В дифференциальной форме уравнение Больцмана для описания совмещенных процессов в сыпучих средах записывается в виде [4]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial v_k f}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k f}{\partial v_k} = \dot{f}_{\vec{n}}, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1)$$

где  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  – ускорение;  $\dot{f}_{\vec{n}}$  – источниковый член уравнения, описывающий внешние потоки, повторение индекса «к» вверху и внизу дроби показывает суммирование по этому индексу.

На основе уравнения Больцмана сформулированы и решены следующие задачи тепломассопереноса в сыпучих средах [4-8]:

1. Движение материала [4-5].
2. Классификация порошка в гравитационном аппарате [5, 6].
3. Классификация порошка в запыленном потоке [5, 7].
4. Классификация и измельчение порошка в струйной мельнице кипящего слоя [5, 8].
5. Разработка вычислительных алгоритмов и программных комплексов для расчета совмещенных процессов [5].

В предлагаемой обзорной статье основное внимание уделяется вопросам постановки задач и наиболее важным результатам, полученным в ходе их решения. Детальный анализ решения проводится в опубликованных работах, на которые даются соответствующие ссылки.

### Задача 1. Движение материала

Пригодность кинетического уравнения Больцмана для описания движения детерминированных объектов протестирована на примере равноускоренного движения материальной точки. Рассматривается одномерное движение частицы материала вдоль вертикальной оси. Пренебрегая силой аэродинамического сопротивления и силой, обусловленной столкновениями между частицами, движение частиц считается равноускоренным



$$a = -g$$

(2)

где  $a$  – ускорение частицы вдоль вертикальной оси  $z$ ;  $g$  – ускорение свободного падения. Аналитические выражения для закона движения и закона изменения скорости частиц в параметрическом виде (время  $t$  выступает в качестве параметра) имеют вид:  $v = v_0 + a \cdot t$ ,  $z = z_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2$ , где индекс «0» показывает начальные значения скорости и координаты. Численное решение кинетического уравнения Больцмана (1) в одномерной постановке задачи при постоянном ускорении выполняется в соответствии с разработанным подходом [5]. В результате решения уравнения находится функция распределения вещества по выделенным фазовым координатам для различных моментов времени. Численное решение и аналитическое решение имеют для наблюдаемого момента времени разный вид: аналитическое решение определяет координату и скорость частица, а численное решение кинетического уравнения показывает вероятность частицы находиться в данной точке фазового объема. Для сопоставления полученных результатов с помощью численного решения предварительно определяют математические ожидания координаты и скорости частиц в каждый момент времени. Полученные усредненные результаты численного решения сравниваются с результатами детерминированного аналитического решения. На рис. 1 показано сопоставление данных решений в виде зависимости координаты и скорости от времени. Практическое совпадение аналитических (штриховая линия) и численных решений (точки) показывает приемлемую точность предложенного численного метода решения уравнения Больцмана [5].

## Задача 2. Классификация порошка

Классификация порошка по крупности рассматривается на примере гравитационного аппарата [6], выполненного в виде вертикального вентилируемого канала. Классификация частиц по размерам обуславливается действием на частицу противоположно направленных сил: силы тяжести и силы сопротивления воздуха [9]. Мелкие частицы, для которых сила сопротивления существенно больше силы тяжести, уносятся из аппарата потоком воздуха. Более крупные частицы, для которых сила тяжести существенно больше силы сопротивления, покидают аппарат через нижний патрубок. Для построения модели классификации частиц в гравитационном аппарате на основе уравнения Больцмана необходимо задать вид поля ускорения или сил, действующих на частицу, в каждой точке рабочего объема. При определении ускорения частицы в гравитационном классификаторе приняты следующие допущения. Искомое распределение изменяется вдоль одной геометрической координаты – вертикальной оси аппарата  $z$ , а в поперечном сечении аппарата материал идеально перемешивается. Рассматривается процесс классификации при низкой концентрации твердой фазы в потоке, что позволяет не учитывать влияние взаимодействия частиц на процесс разделения. Ускорение частицы с учетом действия на частицу силы сопротивления ( $F_c$ ) и силы тяжести ( $m \cdot g$ ) находится из второго закона Ньютона

$$a = \frac{-m \cdot g + (F_c)_i}{m} = -g + \frac{k_f \cdot (w_0 - v) \cdot |(w_0 - v)|^{n-1}}{m} \quad (3)$$

где  $m$  – масса частицы;  $w_0$  – скорость воздуха в канале; коэффициент сопротивления  $k_f$  и параметр  $n$  определяются законом аэродинамического сопротивления [9]. Решение уравнения (1) с учетом (3) позволяет при известных начальных и граничных условиях определить искомую плотность распределения. Сравнение усредненных результатов численного и аналитического решений в виде фазовых траекторий или зависимостей скорости частицы от ее координаты представлено на рис. 2. Практическое совпадение аналитических (штриховая линия) и численных решений (точки) подтверждает приемлемую точность предложенного метода численного решения уравнения Больцмана [5].

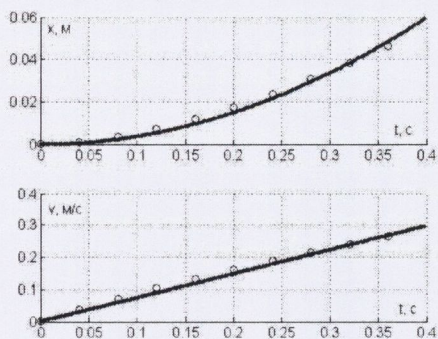


Рис. 1. Сопоставление зависимостей координаты  $x$  и скорости  $v$  от времени для детерминированного (линии) и стохастического (точки) описания равноускоренного движения материальной точки

Fig. 1. Comparison of coordinate  $x$  and speed  $v$  versus time for deterministic (lines) and stochastic (points) description of uniformly accelerated motion of material point

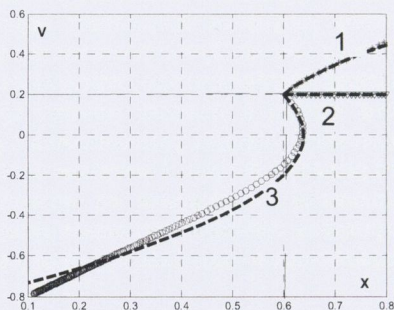


Рис. 2. Вид фазовых траекторий для мелких (1), крупных (3) и граничных (2) размеров частиц при их подаче в точку:  $x_0 = 0,6$ ;  $v_0 = 0,2$

Fig. 2. Phase trajectories for the fine (1), coarse (3) and cut size (2) of particles at their feed to the point  $x_0 = 0.6$  with  $v_0 = 0.2$

### Задача 3. Классификация порошка в запыленном потоке

В промышленных условиях при высокой концентрации твердой фазы в газовом потоке частицы сталкиваются друг с другом и с ограждающими стенками, что существенно влияет на показатели процесса классификации [9]. Для учета влияния концентрации частиц на процесс разделения в уравнение (3) вводится дополнительная сила взаимодействия (столкновения) частиц  $(F_m)_{ij}$  [8]. После этого выражение для ускорения записывается в виде:



$$a_i = -g + \frac{(F_c)_{ij}}{m_i} + \frac{(F_\mu)_{ij}}{m_i} =$$

$$= -g + \frac{k_j \cdot (w_0 - v) \cdot (w_0 - v)^{n-1}}{m} + \frac{3}{2} \cdot \frac{(1+k) \cdot (x_i + x_j)^2}{x_i^3 + x_j^3} \cdot (v_i - v_j) \cdot |v_i - v_j| \cdot \beta(x, v, x_j) \quad (4)$$

где  $\beta_j$  – объемная концентрация частиц  $j$ -го класса крупности в фазовом объеме,  $x$  – размер частиц,  $k$  – коэффициент восстановления скорости при ударе. Результаты решения уравнения (1) с учетом (4) приводятся на рис. 3 в виде зависимости граничного размера классификации от концентрации твердой фазы в аппарате при разной крупности зерен исходного порошка. Под граничным размером разделения [9] понимается размер частицы, вероятность попадания которой в тонкий продукт разделения равна 0,5. Анализ результатов показывает, что значение граничного размера с ростом концентрации может как повышаться так и понижаться, что соответствует известным результатам экспериментальных исследований [9].

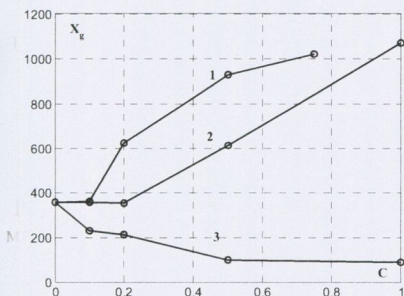


Рис. 3. Зависимость граничного размера ( $X_g$ , мкм) от концентрации твердой фазы ( $C$ , кг/м<sup>3</sup>) для исходных продуктов с различными средними размерами зерен:  
1 ÷ 157; 2 ÷ 455; 3 ÷ 758 мкм

Fig. 3. Dependence of cut size ( $X_g$ , mcm) on concentration of solid phase ( $C$ , kg/m<sup>3</sup>) for feed product with various mean particle size:  
1 – 157; 2 – 455; 3 – 758 mcm

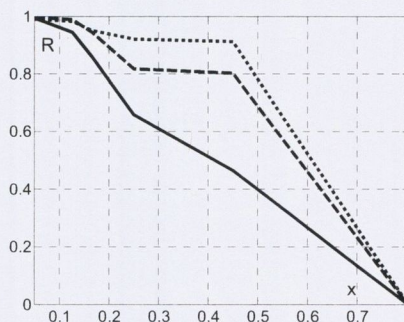


Рис. 4. Интегральное распределение материала по крупности в питании (пунктирная линия), в аппарате без учета разрушения (штриховая) и в аппарате с учетом разрушения материала (сплошная линия).  $R(x)$  – остаток материала на контрольном сите с размером ячеек  $x$

Fig. 4. Cumulative oversize distribution in the feed (dotted line), in the device without size reduction (dashed line) and in the device with size reduction (solid line)

#### Задача 4. Классификация и измельчение порошка в струйной мельнице кипящего слоя

В струйных мельницах кипящего слоя [4, 8] процессы измельчения и классификации протекают совместно. Для описания измельчения материала в аппарате

производится оценка энергии разрушения  $e_{ij}$  [10], которая в первом приближении принимается пропорциональной диссипации (потере) энергии при ударе частиц

$$e_{ij} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{(1-k) \cdot (x_i + x_j)^2}{x_i^3 + x_j^3} \cdot (v_i - v_j) \cdot |v_i - v_j| \cdot b(z, v, x_j) \cdot v \cdot \Delta t \quad (5)$$

Известная величина энергии разрушения позволяет в рамках селективной модели разрушения [10] описать измельчение, то есть вычислить распределение осколков по классам крупности. Расчетные распределения частиц по крупности после разрушения и классификации, определенные в рамках рассмотренной модели, показаны на рис. 4. Найденные распределения вещества и энергии по фазовому пространству в виде изолиний в координатах  $x, v$  при разной высоте сечения аппарата  $z$  представлены на рис. 5.

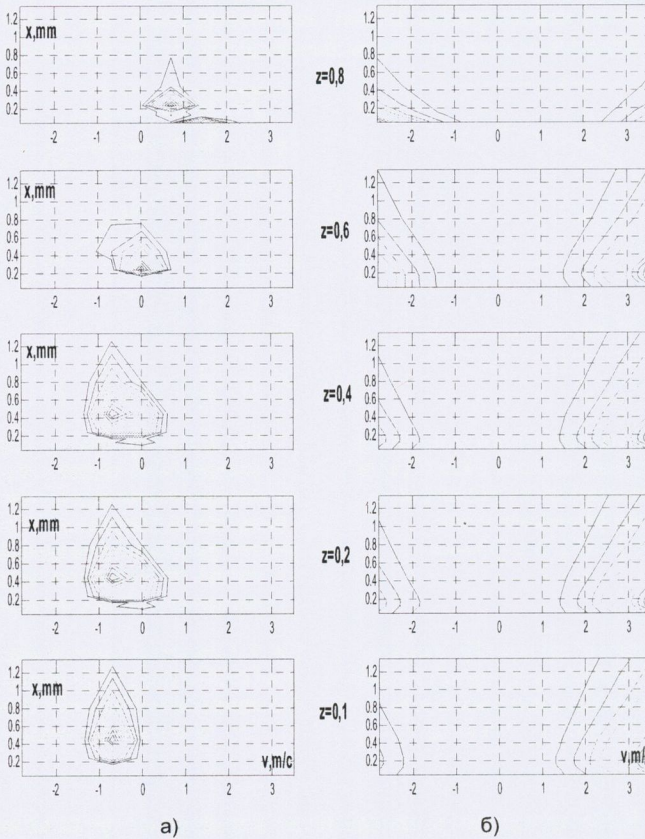


Рис. 5. Распределения вещества (а) и энергии (б) по фазовому пространству в виде изолиний в координатах  $x, v$  при разной высоте сечения аппарата  $z$

Fig. 5. Material (a) and energy (б) distribution over the phase space in the form of isolines in the coordinates  $x, v$  at different height of cross section  $z$



## Вычислительный метод решения уравнения Больцмана

Для численного решения уравнения Больцмана во всех задачах используется ячеечный подход, построенный на балансах энергии и массы в каждой ячейке фазового пространства. Искомая плотность распределения вещества по ячейкам представляется вектором  $\mathbf{f} = \{f_i\}$ , где индекс  $i$  соответствует номеру ячейки.

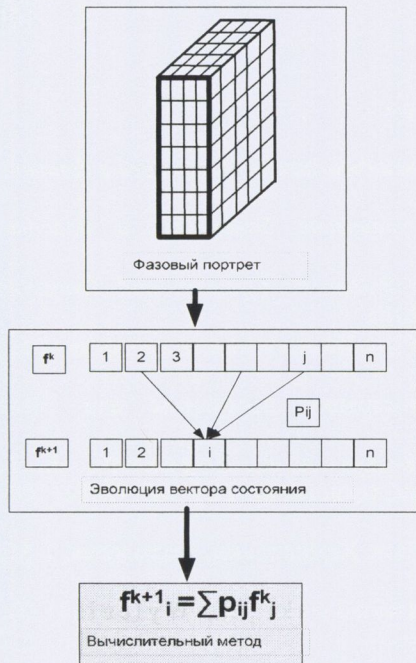


Рис. 6. Алгоритм построения модели эволюции состояния системы

Fig. 6. Algorithm of constructing the model of the system state evolution

Алгоритм расчета искомого распределения  $\mathbf{f}$  в произвольные моменты времени ( $k$ ), представленный на рис. 6. Сначала для каждой ячейки фазового пространства определяются номера ячеек, с которыми она может взаимодействовать. Затем составляются уравнения балансов вещества и энергии и определяются потоки энергии или вещества между этими ячейками. Известные потоки энергии и массы позволяют определить потоки вероятностей переходов ( $p_{ij}$ ) за рассматриваемый промежуток времени  $\Delta t$ . Указывая для каждой ячейки адреса ячеек, в которые возможен переход, и вероятности этих переходов, определяется состояние системы в следующий момент времени. Предложенное на рис. 6 расчетное выражение по сравнению традиционным матричным описанием процессов [10] позволяет существенно экономить машинные ресурсы за счет исключения операций с нулевыми элементами. На программу, реализующую предложенный алгоритм, поданы заявки и получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [5].

Постановка и решение ряда задач моделирования и расчета совмещенных процессов показали перспективность использования уравнения Больцмана для описания на единой методологической основе сложных технологических процессов.

### Обозначения

$\bar{a}$	– ускорение	[m <sup>2</sup> /s]
$f$	– плотность распределения	[–]
$k$	– коэффициент восстановления скорости при ударе	[–]

$k_f$	– коэффициент сопротивления	[–]
$m$	– масса частицы	[kg]
$\vec{r}$	– радиус-вектор	[m]
$t$	– время	[s]
$\vec{v}$	– вектор скорости	[m/s]
$w_o$	– скорость воздуха в канале	[m/s]
$\delta$	– размер частицы	[m]

### Л и т е р а т у р а

- [1] Вулис Л. А.: *Теория и расчет магнитогазодинамических течений в каналах*, Атомиздат, Москва 1971.
- [2] Веденяпин В. В.: *Кинетическое уравнение Больцмана и Власова*, Физматлит, Москва 2001.
- [3] Кремер G. M. *An Introduction to the Boltzmann Equation and Transport Processes in Gases*, Springer-Verlag, Berlin 2010.
- [4] Жуков В. П., Бемяков А. Н.: Изв. ВУЗов. Химия и хим. технология, Т.53, №11, (2010), 114-117.
- [5] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010612671 от 19 апреля 2010 года.
- [6] Бемяков А. Н., Жуков В. П., Власюк А. А., Барочкин А. Е. Бемяков А. Н.: Изв. ВУЗов. Химия и хим. технология, Т.55, №1, (2012) 108-111.
- [7] Бемяков А. Н., Жуков В. П.: Изв. ВУЗов. Химия и хим. технология, Т.55, №2, (2012), 89-92.
- [8] Бемяков А. Н., Жуков В. П., Otwinowski H., Wyleciał T.: Вестник ИГЭУ, №1, (2012), 52-56.
- [9] Мизонов В. Е. Ушаков С. Г.: *Аэродинамическая классификация порошков*, Химия, Москва 1989.
- [10] Mizonov V., Zhukov V., Bernotat S.: *Simulation of Grinding: New Approaches*. ISPEU Press, Ivanovo 1997.