MECHANIKA
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
MECHANICS
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
2-M/2012
ZESZYT 6
ROK 109
ISSUE 6
YEAR 109

PIOTR DUDA, GRZEGORZ MAZURKIEWICZ[1]

# WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA WNIKANIA CIEPŁA W PRZEWODACH O PRZEKROJU KOŁOWYM

# DETERMINATION OF HEAT TRANSFER COEFFICIENT IN DUCTS WITH CIRCULAR CROSS SECTION

Streszczenie

W pracy przedstawiono numeryczne symulacje turbulentnego przepływu wody i pary przez przewód cylindryczny. Wyznaczone zostały turbulentne profile prędkości płynu oraz wartości współczynnika wnikania ciepła na powierzchniach wewnętrznych przewodów dla szerokich zakresów liczby Reynoldsa. Wyznaczone numerycznie profile prędkości porównano z profilami prędkości uzyskanymi z równań opisanych w literaturze, a numerycznie wyznaczone wartości współczynnika wnikania ciepła z wartościami tego współczynnika z równań kryterialnych. W obydwóch przypadkach uzyskano wysoką zgodność wyników numerycznych z wynikami uzyskanymi na podstawie równań empirycznych, co potwierdza dokładność zastosowanej metody.

*Słowa kluczowe: konwekcyjna wymiana ciepła, współczynnik wnikania ciepła, CFD*

Abstract

In this paper the numerical simulations of the turbulent flow of water and steam through the pipe with circular cross section were presented. Based on the performed calculations, turbulent velocity profiles were determined in the flowing fluid and the heat transfer coefficient on the inner surfaces of pipes for a wide range of Reynolds number. In order to estimate the accuracy of the results, which were determined turbulent velocity profiles were compared with the profiles, which were obtained from the power-law velocity profiles. Then heat transfer coefficient values were compared with the values of this coefficient, which was then set on the basis of the empirical equations. For both the water flow and steam flow high accuracy was achieved, which confirms the accuracy of the method.

*Keywords: convection, heat transfer coefficient, CFD*

[1] Dr hab. inż. Piotr Duda, prof. PK, dr inż. Grzegorz Mazurkiewicz, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Wymiana ciepła na drodze konwekcji pomiędzy przepływającym czynnikiem a omywanymi przez niego powierzchniami ciała stałego jest zagadnieniem bardzo złożonym. Wartości współczynnika wnikania ciepła zależą od wielu czynników takich jak: własności przepływającego płynu (jego gęstość, lepkość, ciepło właściwe i przewodność cieplna), siły napędowej wywołującej przepływ (konwekcja swobodna lub wymuszona), kształtu elementu przez który przepływa płyn, charakteru przepływu (laminarny, przejściowy lub burzliwy) czy też występowania przemian fazowych w przepływającym medium. Ze względu na skomplikowany charakter zjawiska do tej pory nie została stworzona jednolita teoria pozwalająca wyznaczyć wartości współczynnika wnikania ciepła dla dowolnego przypadku [4].

## 2. Przepływ masy i ciepła – podstawy teoretyczne

### 2.1. Wyznaczanie współczynnika wnikania ciepła na podstawie równań empirycznych

Ze względu na niezwykle istotny charakter wymiany ciepła przez konwekcje dla zastosowań inżynierskich prowadzone były liczne badania mające na celu stworzenie empirycznych zależności pozwalających na wyznaczenie współczynnika wnikania ciepła dla konkretnych przypadków konwekcji: takich jak konwekcja swobodna czy konwekcja wymuszona.

Na podstawie analizy wymiarowej oraz rozlicznych doświadczeń stwierdzono, że dla przepływu wymuszonego o charakterze turbulentnym przez rurociąg o przekroju kołowym słuszna jest korelacja:

$$Nu = A \cdot Re^{B} \cdot Pr^{C} \cdot Kg^{D} \tag{1}$$

gdzie: $Nu$ – liczba Nusselta, $Re$ – liczba Reynoldsa, $Pr$ – liczba Prandtla, $Kg$ – kryterium podobieństwa, a $A$, $B$, $C$ są stałymi.

Dalsze analizy pozwoliły dojść badaczom do wniosku, że w przypadku wyznaczania współczynnika wnikania ciepła dla rur o długości większej niż 50 średnic kryterium podobieństwa może zostać zaniedbane [4]. Stałe równania (1) wyznaczano empirycznie na podstawie licznych eksperymentów przy różnych wartościach liczb Reynoldsa charakteryzujących przepływ i dla różnych czynników.

Do dnia dzisiejszego powstało wiele korelacji pozwalających na wyznaczenie współczynnika wnikania ciepła dla konwekcji wymuszonej przy przepływie turbulentnym. Do najczęściej stosowanych należą:

Kryterium Sieder-Tate'a:

$$Nu = 0{,}027 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{0.33} \cdot \left(\frac{\eta_S}{\eta_P}\right) \tag{2}$$

Słuszne dla: $10^4 < Re < 10^6$; $0{,}7 < Pr < 160$; $L/D > 60$. Gdzie $\eta_S/\eta_P$ to stosunek lepkości w temperaturze w pobliżu ścianki do lepkości płynu w temperaturze średniej płynu [4].

Czy też kryterium Gnielińskiego:

$$Nu = \frac{(f/8)\cdot(Re-1000)\cdot Pr}{1+12{,}7\cdot\sqrt{f/8}\cdot\left(Pr^{\frac{2}{3}}-1\right)}\cdot\left(1+\left(\frac{D}{L}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \tag{3}$$

gdzie:

$$f = \left(0{,}782\cdot\ln Re - 1{,}51\right)^{-2} \tag{4}$$

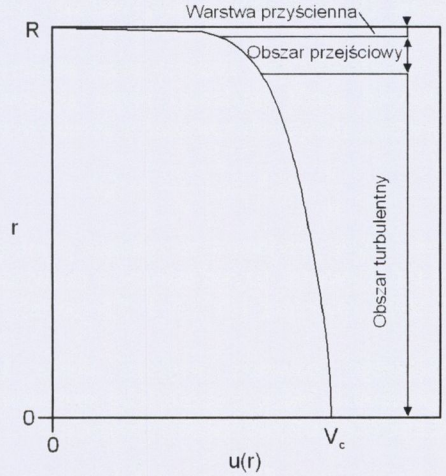
$D$ – średnica, a $L$ – długość rurociągu.

Kryterium Gnielińskiego zachowuje ważność dla $2100 < Re < 10^6$ i $0{,}6 < Pr < 2000$ przy czym jego dokładność jest oceniana na ±20%.

## 2.2. Profil prędkości dla przepływu turbulentnego

W trakcie rozważań dotyczących transportu ciepła w przepływających płynach niezwykle istotne znaczenie ma wiedza na temat zachowania się czynnika roboczego. Podstawowe zagadnienia stanowią tu wyznaczenie profilu prędkości czy rozkładu naprężeń w przepływającym płynie.

Dla przepływu płynów newtonowskich o charakterze laminarnym wyznaczenie profilu prędkości jest zagadnieniem stosunkowo prostym. Na podstawie obliczeń analitycznych można udowodnić, że profil prędkości płynu stanowi paraboloidę obrotową [2]. Dla przepływu o charakterze turbulentnym prawidłowe wyznaczenie profilu prędkości płynu jest zadaniem znacznie bardziej skomplikowanym i zostało wykonane na podstawie analizy wymiarowej, badań eksperymentalnych oraz modeli quasi empirycznych.




Rys. 1. Profil prędkości płynu dla przepływu turbulentnego

Fig. 1. Turbulent velocity profile

Jak pokazano na rys. 1 dla w pełni hydrodynamicznie rozwiniętego przepływu turbulentnego w przewodzie o przekroju kołowym profil prędkości może być podzielony na trzy obszary w zależności od odległości od ścianki przewodu. Pierwszy z obszarów stanowi laminarna warstwa przyścienna znajdująca się w najbliższym sąsiedztwie ściany przewodu, drugi z obszarów to obszar przejściowy a trzeci to obszar turbulentny znajdujący się w centralnej części przewodu.

W warstwie przyściennej dominujące znaczenie mają lepkościowe naprężenia ścinające a przepływ jest w swej naturze laminarny. W obszarze turbulentnym decydujące znaczenie mają naprężenia turbulentne Reynoldsa. W tym obszarze przepływ jest chaotyczny i dochodzi do intensywnego mieszanie się płynu.

Charakterystyka przepływu w obu powyższych obszarach jest zasadniczo różna. Na przykład w warstwie przyściennej bardzo ważnym parametrem jest lepkość płynu a gęstość jest mniej istotna podczas gdy w obszarze turbulentnym jest na odwrót.

Na podstawie analizy wymiarowej dla przepływu w obu tych warstwach oraz poprzez ekstrapolacje wyników z obu warstw dla obszaru przejściowego wyznaczono zależności pozwalające na wyznaczenie profilu prędkości dla przepływu turbulentnego w rurze hydraulicznie gładkiej.

Dla warstwy przyściennej zależność opisująca profil prędkości przedstawiona została w formie bezwymiarowej jako równanie (5).

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{y \cdot u_\tau}{\nu} \tag{5}$$

Gdzie $y = R - r$ jest odległością mierzoną od ścianki przewodu, $\bar{u}$ jest uśrednioną w czasie składową prędkości w kierunku osi przewodu, $\nu$ jest współczynnikiem lepkości kinematycznej a $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ jest nazywana prędkością tarcia. Należy przy tym zaznaczyć, że $u_\tau$ nie jest prędkością płynu a jedynie wielkością mającą wymiar prędkości. Ponadto należy dodać, że równanie (5) zachowuje swoją ważność jedynie w pobliżu ścianki przewodu dla $0 \le y\, u_\tau/\nu \le 5$.

Na podstawie analizy wymiarowej oraz licznych badań eksperymentalnych stwierdzono, że w obszarze przejściowym profil prędkości płynu stanowi funkcję logarytmiczną odległości od ścianki przewodu, którą można zapisać w formie równania:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}\right) + 5{,}0 \tag{6}$$

Zastosowanie zależności (6) w przejściowym zakresie płynu pozwala uzyskać wysoką zgodność wyników obliczeń z danymi uzyskiwanymi z doświadczeń przy czym należy podkreślić, że współczynniki równania (6) 2,5 i 5,0 zostały wyznaczone na drodze eksperymentalnej.

Dla obszaru turbulentnego powstała większa liczba korelacji pozwalających na wyznaczenie profilu prędkości. Jedną z najczęściej stosowanych zależności dających wysoką zgodność z wynikami doświadczeń stanowi równanie:

$$\left(V_c - \bar{u}\right) = 2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{R}{y}\right) \tag{7}$$

gdzie $V_c$ jest maksymalną prędkość w przekroju poprzecznym przewodu.

Ponadto do opisu profilu prędkości dla całego przekroju poprzecznego przewodu stosowana jest często empiryczna zależność (8) (power-law velocity profil).

$$\frac{\bar{u}}{V_c} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{8}$$

Zależność ta jest chętnie stosowana, ponieważ pozwala stosunkowo dobrze aproksymować wartości prędkości płynu w prawie całym przekroju poprzecznym przewodu zapewniając jednocześnie prostotę obliczeń [2].

Współczynnik $n$ występujący w równaniu (8) wyznaczany jest na drodze eksperymentalnej a jego wartość najczęściej przyjmuje się jako $n = 7$. W rzeczywistości współczynnik $n$ zależny jest od liczby Reynoldsa opisującej dany przepływ i tak np. dla liczby $Re = 10^5$ wynosi $n = 8$.

### 2.3. Wyznaczanie współczynnika wnikania w trakcie obliczeń numerycznych

W trakcie symulacji numerycznych przeprowadzanych bilansową metodą elementów skończonych w programie Ansys CFX dla przepływu o charakterze turbulentnym wartości współczynnika wnikania ciepła wyznaczane są z zależności (9).

$$\alpha = \frac{q_w}{(T_w - T_{nw})} \tag{9}$$

gdzie: $\alpha$ jest współczynnikiem wnikania ciepła, $q_w$ gęstością strumienia ciepła na ściance, $T_w$ temperaturą ścianki a $T_{nw}$ temperaturą płynu przy ścianie (wall adjacent temperature).

Temperatura $T_{nw}$ wyznaczana jest jako średnia temperatura płynu w elemencie skończonym bezpośrednio przyległym do ścianki przewodu według równania:

$$T_{nw} = T_f + \frac{Pr_t \cdot U^2}{2 \cdot c_p} \tag{10}$$

gdzie: $T_f$ jest temperaturą płynu, $Pr_t$ jest turbulentną liczbą Prandtla, $U$ jest prędkością płynu w kierunku równoległym do ścianki, a $c_p$ oznacza ciepło właściwe [1].

## 3. Numeryczne modelowanie przepływu masy i ciepła

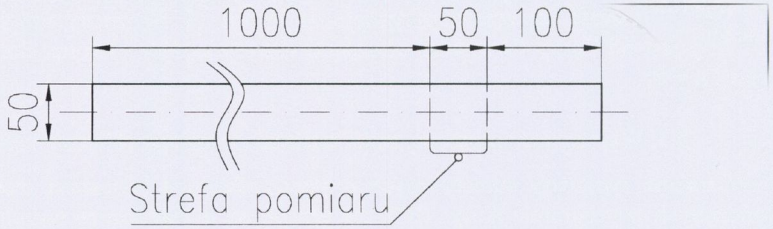
### 3.1. Numeryczne modelowanie przepływu wody

W pierwszej z przeprowadzonych analiz zamodelowano przepływ wody o temperaturze 25°C pod ciśnieniem 0,1 MPa przez rurociąg o średnicy wewnętrznej 0,05 m (rys. 2).

W trakcie symulacji zwiększano prędkość przepływu wody na wlocie do rurociągu od wartości 0,2 do 10 m/s, tak aby osiągnąć szeroki zakres liczby Reynoldsa $Re$ charakteryzującej przepływ (w przybliżeniu od $10^4$ do $10^6$). Powierzchnie wewnętrzną rury potraktowano jako hydraulicznie gładką a ponadto zadano na niej stałą gęstość strumienia ciepła $q_w = 10$ kW/m$^2$. Do opisu turbulencji użyto modelu $k$-ε. Przyjęte własności wody wynosiły odpowiednio: gęstość $\rho = 997$ kg/m$^3$, współczynnik lepkości dynamicznej $\eta = 8{,}899 \cdot 10^{-4}$ Pa·s, ciepło właściwe $c = 4181{,}7$ J/kg·K i współczynnik przewodzenia ciepła

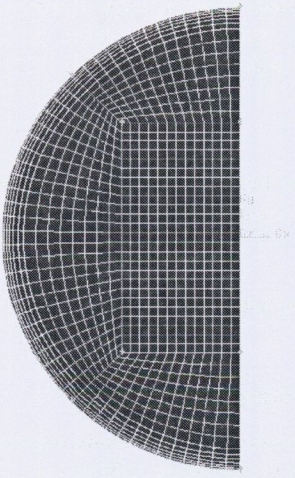
$\lambda = 0{,}6069$ W/m·K. Obliczenia numeryczne przeprowadzono bilansową metodą elementów skończonych przy użyciu programu Ansys CFX wykorzystując siatkę elementów skończonych pokazaną na rys. 3 [1, 3, 5].

W celu sprawdzenia poprawności obliczeń numerycznych wyznaczono profil prędkości w przepływającej wodzie i porównano go z profilem prędkości wyznaczonym na podstawie zależności (8) (rys. 4). Obliczenia przeprowadzono dla przepływu charakteryzującego się liczbą Reynoldsa $Re = 10^4$. Maksymalny błąd pojawia się w pobliżu ściany rurociągu i wynosi niecałe 8% podczas gdy średni błąd względny dla całego profilu jest znacznie mniejszy i wynosi 1,3%.



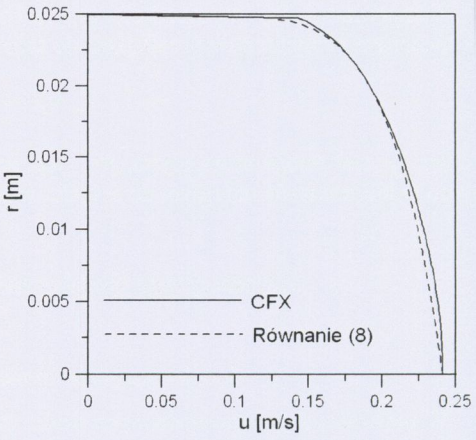

Rys. 2. Wymiary rurociągu użytego w symulacji

Fig. 2. Dimensions of the pipe used in simulation



Rys. 3. Siatka elementów skończonych dla przepływu wody

Fig. 3. Mesh for water flow




Rys. 4. Porównanie profili prędkości dla przepływu wody

Fig. 4. Comparison of velocity profiles for water flow

Następnie wyznaczono numerycznie wartości współczynnika wnikania ciepła dla przepływu wody i porównano je z wartościami współczynnika wnikania ciepła wyznaczonymi na podstawie kryterium Gnielińskiego. Numeryczne wartości współczynnika obliczano jako ich średnią wartość powierzchniową na powierzchni wewnętrznej przewodu znajdującej się w odległości od 1 do 1,05 m od jego wlotu.

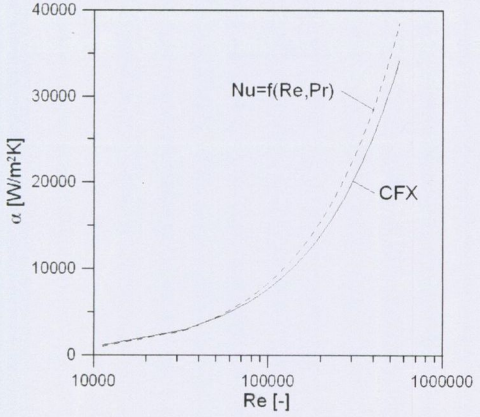
Na podstawie zależności (11) wyznaczono błąd względny pomiędzy uzyskiwanymi wartościami współczynników wnikania ciepła.

$$Er = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_0} \cdot 100\% \tag{11}$$

gdzie: $\alpha_0$ – współczynnik wnikania ciepła wyznaczony numeryczne,
$\alpha_1$ – współczynnik wnikania ciepła wyznaczony wg równań kryterialnych.

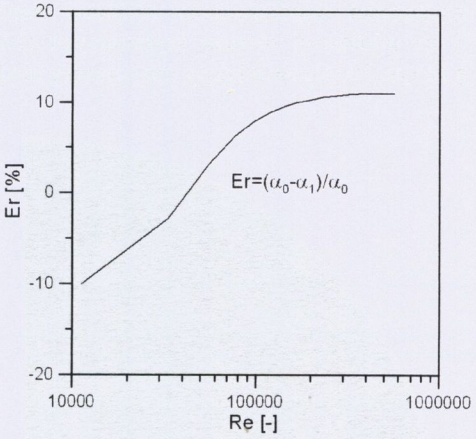
Na rysunku 5 pokazano przebieg zmienności współczynnika wnikania ciepła wyznaczonego numerycznie (linia ciągła) i na podstawie równań kryterialnych (linia przerywana) w funkcji liczby Reynoldsa. Rysunek 6 przedstawia przebieg błędu względnego pomiędzy wartościami współczynnika wyznaczonymi za pomocą obu metod również w funkcji liczby Reynoldsa.

Błąd względny dla całego zakresu zmienności liczb Reynoldsa nie przekracza 10%, co świadczy o wysokiej zgodności uzyskanych wyników.




Rys. 5. Porównanie wartości współczynnika wnikania ciepła dla przepływu wody

Fig. 5. Comparison of heat flow coefficients for water flow




Rys. 6. Błąd względny dla przepływu wody

Fig. 6. Error for water flow

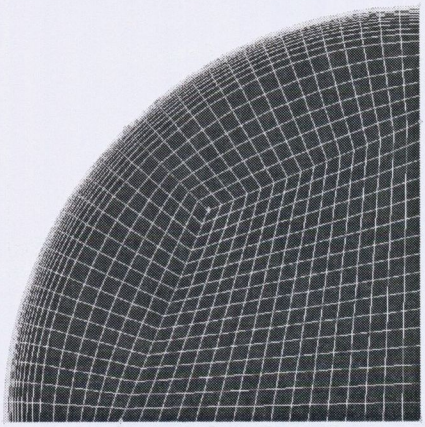
### 3.2. Numeryczne modelowanie przepływu pary

W drugiej z przeprowadzonych analiz zamodelowano przepływ pary o temperaturze 200°C pod ciśnieniem 1 MPa przez rurociąg o średnicy wewnętrznej 0,05 m (rys. 2). W trakcie symulacji zwiększano wydatek masowy pary na wlocie do rurociągu od wartości $1{,}8765\ 10^{-3}$ do $1{,}8765\ 10^{-2}$ kg/s tak aby w przybliżeniu osiągnąć zakres liczby Reynoldsa *Re* charakteryzującej przepływ od $10^4$ do $10^5$. Powierzchnię wewnątrz rury potraktowano jako hydraulicznie gładką, a ponadto zadano na niej gęstość strumienia ciepła zmieniającą się liniowo w zakresie od $q_w = 500$ do 25000 W/m$^2$. Do opisu turbulencji użyto modelu $k$-ε. Parę wodną potraktowano jako gaz rzeczywisty korzystając z tablic IAPWS-IF97 zawartych w pakiecie Ansys CFX [1].

Obliczenia numeryczne przeprowadzono bilansową metodą elementów skończonych przy użyciu programu Ansys CFX wykorzystując siatkę elementów skończonych pokazaną na rys. 7 [1, 3, 5].

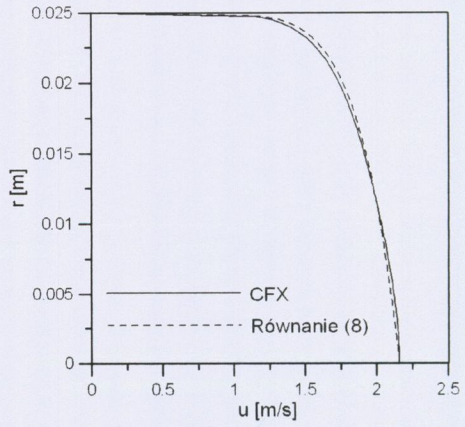
W celu sprawdzenia poprawności obliczeń numerycznych wyznaczono profil prędkości w przepływającej parze i porównano go z profilem prędkości wyznaczonym na podstawie zależności (8) (rys. 8). Maksymalny błąd pojawia się w pobliżu ściany rurociągu i wynosi niecałe 6% podczas gdy średni błąd względny dla całego profilu jest znacznie mniejszy i wynosi 0,6%.

Następnie wyznaczono numerycznie wartości współczynnika wnikania ciepła dla przepływu pary i porównano je z wartościami współczynnika wnikania ciepła wyznaczonymi na podstawie kryterium Sieder-Tate'a [4]. Z zależności (11) wyznaczono błąd względny pomiędzy uzyskiwanymi wartościami współczynników. Na rys. 9 pokazano przebieg zmienności współczynnika wnikania ciepła wyznaczonego numerycznie (linia ciągła) i na podstawie równań kryterialnych (linia przerywana) w funkcji liczby Reynoldsa, a na rys. 10 odpowiadający mu przebieg błędu względnego.



Rys. 7. Siatka elementów skończonych dla przepływu pary

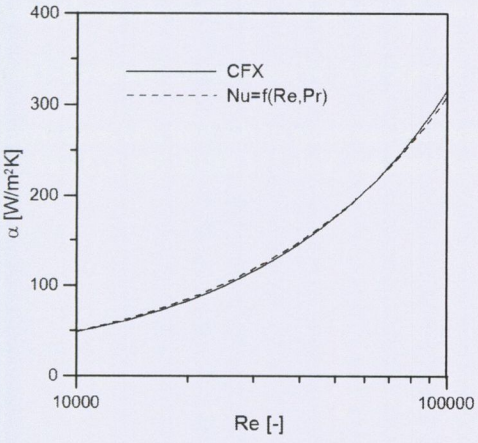
Fig. 7. Mesh for steam flow




Rys. 8. Porównanie profili prędkości dla przepływu pary

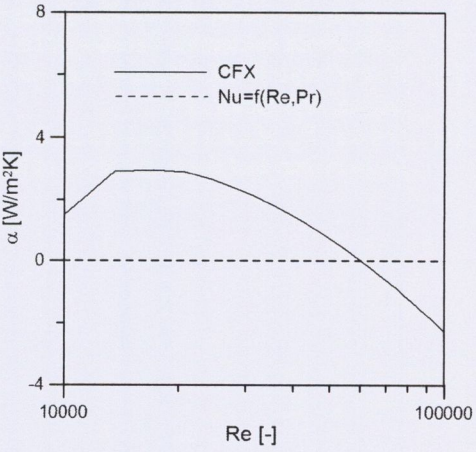
Fig. 8. Error for water flow

W przypadku pary wodnej różnice pomiędzy wartościami współczynnika wnikania ciepła wyznaczonymi numerycznie i na podstawie równania kryterialnego są niższe niż w przypadku wody. Maksymalny błąd względny nie przekracza 3% natomiast średnia wartość błędu wynosi 1,5%.




Rys. 9. Porównanie wartości współczynnika wnikania ciepła dla przepływu pary

Fig. 9. Comparison of heat flow coefficients for steam flow




Rys. 10. Błąd względny dla przepływu pary

Fig. 10. Comparison of velocity profiles for water flow

## 4. Wnioski

W pracy przedstawiono numeryczne symulacje turbulentnego przepływu wody i pary w przewodzie cylindrycznym. Wyznaczone numerycznie profile prędkości czynników roboczych porównano z profilami wyznaczonymi na podstawie zależności empirycznych.

W trakcie symulacji wyznaczono wartości współczynnika wnikania ciepła na powierzchni wewnętrznej przewodu a następnie porównano je z wartościami tego współczynnika wyznaczonymi na podstawie równań kryterialnych. W obu porównaniach zarówno dla wody jak i dla pary uzyskano wysoką zgodność wyników, co potwierdza dokładność zastosowanej metody.

## Literatura

[1] *ANSYS User's Manual,* Release 14.0.

[2] Incropera P., De Witt D.: *Fundamentals of Heat and Mass Transfer,* John Wiley & Sons, Inc. New York 2002.

[3] Mazurkiewicz G.: *Rozwiązywanie zagadnień przepływowo-cieplno-wytrzymałościowych w celu optymalizacji nagrzewania i ochładzania elementów grubościennych*, Praca doktorska, Kraków 2012.

[4] Serwiński M.: *Zasady inżynierii chemicznej,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1976.

[5] Duda P., Mazurkiewicz G.: *Numerical modeling of the heat and mass transfer in cylindrical ducts,* Archives of thermodynamics, Vol. 31 (2010), No. 1, 33-44.