

СЕРГЕЙ НАТАРЕЕВ, НАТАЛИЯ КОКИНА, ОЛЕГ НАТАРЕЕВ<sup>1</sup>

## МАССОПЕРЕНОС В ПЛАСТИНЧАТОМ ТЕЛЕ В АППАРАТЕ ПРОТОЧНОГО ТИПА

---

## MASS-TRANSFER IN A LAMELLAR FORM BODY IN FLOWING DEVICE

### Аннотация

С помощью метода интегральных преобразований Лапласа найдено аналитическое решение задачи о диффузионном извлечении вещества из твердого тела пластинчатой формы в аппарате проточного типа. Разработанная математическая модель применена для исследования процесса выщелачивания фибры.

*Ключевые слова: диффузия, твердое тело*

### Abstract

New mathematical models of diffusion process in a lamellar form body in flowing device. The recommendations of their use for engineering calculations have been given.

*Keywords: diffusion, solid body*

---

<sup>1</sup> Д.т.н., доцент Сергей Валентинович Натареев, к.т.н., доцент Наталия Роальдовна Кокина, Олег Сергеевич Натареев, Ивановский государственный химико-технологический университет.

## 1. Введение

Наиболее простая постановка задачи о переносе вещества в системе твердое тело – жидкость состоит в изучении пространственно–временного изменения содержания вещества внутри твердого тела. Для упрощения решения вышеуказанной задачи обычно принимают коэффициент диффузии постоянной величиной по всему объему тела. Аналитическое решение задачи диффузии, лимитируемой внутренним и внешним сопротивлениями массопереносу, для тела канонической формы, помещенного в раствор с постоянной концентрацией, может быть получено по аналогии с известной задачей о поглощении теплоты телом при граничных условиях третьего рода [1, 2]. В реальных условиях в процессе массообмена между фазами наблюдается изменение концентрации вещества не только в твердом теле, но и в окружающем растворе. В этом случае для решения уравнения диффузии может быть использован математический аппарат задачи о поглощении вещества твердым телом из ограниченного объема окружающей среды [3, 4].

Целью данной работы является дальнейшее развитие аналитической теории диффузии в области решения краевых задач нестационарного переноса вещества в телах канонической формы с учетом изменения концентрации раствора и характера движения фаз в аппарате проточного типа

## 2. Физическая картина процесса в аппарате

Рассмотрим процесс диффузионного извлечения вещества из твердого тела пластинчатой формы в аппарате проточного типа (рис. 1).

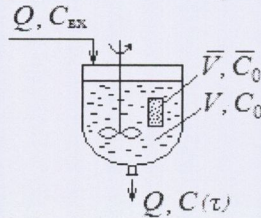


Рис. 1. Схема аппарата проточного типа

Fig. 1. Scheme of flowing device

Примем, что в аппарат помещены твердое тело объемом  $\bar{V}$  с равномерной начальной концентрацией извлекаемого вещества  $\bar{C}_0$  и раствор объемом  $V$  с концентрацией вещества  $C_0$ . Структура потока жидкой фазы в аппаратеписывается моделью идеального перемешивания. В аппарат поступает раствор с объемным расходом  $Q$  и концентрацией вещества  $C_{вх}$ . Одновременно из аппарата выводится равное количество раствора с концентрацией вещества  $C(\tau)$ . Скорость процесса массообмена между твердой и жидкой фазами лимитируется как внешней, так и внутренней диффузией. Требуется найти распределение целевого компонента и его среднюю концентрацию внутри твердого тела в любой момент времени.



### 3. Математическое описание процесса

С учетом принятых допущений математическое описание процесса включает следующие уравнения:

уравнение материального баланса аппарата идеального смешения проточного типа:

$$V \cdot \frac{\partial C(\tau)}{\partial \tau} + \bar{V} \cdot \frac{\partial \bar{C}_{cp}(\tau)}{\partial \tau} = Q \cdot [C_{ex} - C(\tau)] \quad (1)$$

уравнение кинетики диффузии для тела пластинчатой формы:

$$\frac{\partial \bar{C}(r, \tau)}{\partial \tau} = \bar{D}_{\text{эф}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{C}(r, \tau)}{\partial r^2}; \quad (\tau > 0; 0 \leq x \leq R) \quad (2)$$

уравнение для определения средней концентрации вещества в твердом теле:

$$\bar{C}_{cp}(\tau) = \frac{1}{R} \cdot \int_0^R \bar{C}(r, \tau) dr; \quad (3)$$

начальные и граничные условия:

$$\bar{C}(x, 0) = \bar{C}_{cp}(0) = \bar{C}_0; \quad C(0) = C_0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{C}(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad \bar{C}(0, \tau) \neq \infty \quad (5)$$

$$\bar{D}_{\text{эф}} \cdot \frac{\partial \bar{C}(R, \tau)}{\partial x} = \beta \cdot [C(\tau) - \bar{C}(R, \tau)] \quad (6)$$

Введем в рассмотрение новые переменные и безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{N}(\xi, Fo_m) &= C_{ex} - \bar{C}(x, \tau); \quad \bar{N}_{cp}(Fo_m) = C_{ex} - \bar{C}_{cp}(\tau); \quad N(Fo_m) = C_{ex} - \bar{C}(\tau); \\ \bar{N}(0) &= C_{ex} - \bar{C}_0; \quad N(0) = C_{ex} - C_0; \quad Bi_m = \frac{\beta \cdot R}{\bar{D}_{\text{эф}}}; \quad Fo_m = \frac{\bar{D}_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}; \quad \xi = \frac{x}{R}; \\ \sigma &= \frac{\bar{V}}{V}; \quad \chi = \frac{Q \cdot R^2}{V \cdot \bar{D}_{\text{эф}}} \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (1) – (6) в новых переменных будет иметь вид:

$$\frac{\partial N(Fo_m)}{\partial Fo_m} + \sigma \cdot \frac{\partial \bar{N}_{cp}(Fo_m)}{\partial Fo_m} = -\chi \cdot N(Fo_m) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{N}(\xi, Fo_m)}{\partial Fo_m} = \frac{\partial \bar{N}(\xi, Fo_m)}{\partial \xi^2}; \quad (Fo_m > 0; 0 \leq \xi \leq 1) \quad (9)$$

$$\bar{N}_{cp}(Fo_m) = \int_0^1 \bar{N}(\xi, Fo_m) d\xi \quad (10)$$

$$\bar{N}(\xi, 0) = \bar{N}_{cp}(0) = \bar{N}_0; \quad N(0) = N_0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{N}(0, Fo_m)}{\partial \xi} = 0; \quad \bar{N}(0, Fo_m) \neq \infty \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{N}(1, Fo_m)}{\partial \xi} = Bi_m \cdot [N(Fo_m) - \bar{N}(1, Fo_m)] \quad (13)$$

Для решения краевой задачи (8) ÷ (13) будем использовать метод интегральных преобразований Лапласа [5].

Запишем операторное уравнение, соответствующее уравнению (9):

$$\frac{d^2 \bar{N}_L(\xi, s)}{d\xi^2} - s \cdot \bar{N}_L(\xi, s) + \bar{N}_0 = 0, \quad (14)$$

где  $s$  – комплексный параметр.

Общее решение операторного уравнения (14) есть

$$\bar{N}_L(\xi, s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = A \cdot c \cdot h \cdot \sqrt{s} \cdot \xi + B \cdot s \cdot h \cdot \sqrt{s} \cdot \xi \quad (15)$$

Перейдем в уравнении (12) в область изображений и подставим в полученное выражение решение (15):

$$\frac{\partial \bar{N}_L(0, s)}{\partial \xi} = \left[ \sqrt{s} \cdot A \cdot s \cdot h \cdot \sqrt{s} \cdot \xi + \sqrt{s} \cdot B \cdot c \cdot h \cdot \sqrt{s} \cdot \xi \right] \Big|_{\xi=0} = \sqrt{s} \cdot B = 0, \quad (16)$$

откуда  $B = 0$ .

Операторное уравнение (15) примет вид:

$$\bar{N}_L(\xi, s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = A \cdot c \cdot h \cdot \sqrt{s} \cdot \xi \quad (17)$$

Среднее значение функции  $\bar{N}_L(\xi, s)$ :

$$\bar{N}_{cp,L}(s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = \frac{A}{s} \cdot s \cdot h \cdot \sqrt{s} \quad (18)$$

Запишем уравнение материального баланса (8) и граничное условие (13) в области изображений:

$$s \cdot N_L(s) - N(0) + \sigma \cdot [s \cdot \bar{N}_{cp,L}(s) - \bar{N}_0] = -\chi \cdot N_L(s) \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_L(1, s)}{\partial \xi} = Bi_m \cdot [N_L(s) - \bar{N}_L(1, s)] \quad (20)$$

Выразим из уравнения (19) функцию  $N_L(s)$  и подставим её величину в условие (20):

$$\frac{\partial \bar{N}_L(1, s)}{\partial \xi} = Bi_m \cdot \left\{ \frac{N_0}{s + \chi} - \frac{\sigma}{s + \chi} [s \cdot \bar{N}_{cp,L}(s) - \bar{N}_0] - \bar{N}_L(1, s) \right\} \quad (20)$$



Удовлетворим решения (17) и (18) условию (20), а затем из полученного соотношения найдем постоянную  $A$ :

$$A = \frac{Bi_m [s \cdot N_0 - (s + \chi) \cdot \bar{N}_0]}{s \cdot [(s + \chi + Bi_m \cdot \sigma) \sqrt{s} \cdot s \cdot h \cdot \sqrt{s} + Bi_m \cdot (s + \chi) \cdot c \cdot h \cdot \sqrt{s}]} \quad (21)$$

Решение в области изображений будет иметь вид:

$$\bar{N}_L(\xi, s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = \frac{Bi_m \cdot [s \cdot N_0 - (s + \chi) \cdot \bar{N}_0] \cdot c \cdot h \cdot (\sqrt{s} \cdot \xi) \cdot e^{s \cdot Fo_m}}{s \cdot [(s + \chi + Bi_m \cdot \sigma) \sqrt{s} \cdot s \cdot h \sqrt{s} + Bi_m \cdot (s + \chi) \cdot c \cdot h \cdot \sqrt{s}]} = \frac{\phi(s)}{\psi(s)} \quad (22)$$

Числитель и знаменатель решения (22) представляют собой обобщенные полиномы относительно  $s$ . В этом нетрудно убедиться, используя непосредственное разложение гиперболических функций в степенной ряд. Следовательно, для выполнения обратного преобразования Лапласа может быть применена вторая теорема разложения:

$$L^{-1} \left[ \frac{\phi(s)}{\psi(s)} \right] = \frac{\phi(0)}{\psi'(s_n)} \cdot \exp(s_n \cdot Fo_m) \quad (23)$$

Найдем корни  $s_n$ , для чего  $\psi(s)$  приравняем нулю, т. е.

$$\psi(s) = s \cdot [(s + \chi + Bi_m \cdot \sigma) \sqrt{s} \cdot s \cdot h \cdot \sqrt{s} + Bi_m \cdot (s + \chi) \cdot c \cdot h \cdot \sqrt{s}] = 0 \quad (24)$$

Отсюда будем иметь: 1)  $s = 0$  (нулевой корень), 2) бесконечное множество корней  $s_n$ , определяемых из уравнения:

$$(s + \chi + Bi_m \cdot \sigma) \sqrt{s} \cdot s \cdot h \cdot \sqrt{s} + Bi_m \cdot (s + \chi) \cdot c \cdot h \cdot \sqrt{s} = 0 \quad (25)$$

Осуществим переход от гиперболических функций к тригонометрическим и обозначим  $i \cdot \sqrt{s} = \mu$ . Получаем

$$tg \mu = \frac{Bi_m \cdot (\chi - \mu^2)}{\mu \cdot (\chi + Bi_m \cdot \sigma - \mu^2)} \quad (26)$$

В соответствии с соотношением (23) найдем вспомогательные величины

$$\frac{\phi(0)}{\psi'(0)} = \frac{Bi_m [sN_0 - (s + \chi)\bar{N}_0] \left( 1 + \frac{1}{2!} s^2 \xi^2 + \frac{1}{4!} s^4 \xi^4 + \dots \right)}{\left\{ s \left[ (s + \chi + Bi_m \sigma) \sqrt{s} \left( \sqrt{s} + \frac{s\sqrt{s}}{3!} + \dots \right) + sh\sqrt{s} + Bi_m (s + \chi) \left( 1 + \frac{1}{2!} s + \dots \right) \right] \right\}'} = -\bar{N}_0 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \psi'(s_n) &= \left\{ s \cdot \left[ (s + \chi + Bi_m \cdot \sigma) \cdot \sqrt{s} \cdot s \cdot h \cdot \sqrt{s} + Bi_m \cdot (s + \chi) \cdot c \cdot h \cdot \sqrt{s} \right] = \right. \\ &= -\mu_n \cdot \left. \left\{ (1 + Bi_m) \cdot (\chi - \mu_n^2) - 2 \cdot \mu_n^2 + Bi_m \cdot \sigma \right\} \cdot \sin \mu_n + \mu_n \cdot \left[ \chi - \mu_n^2 + Bi_m (\sigma + 2) \right] \cos \mu_n \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \varphi(s_n) &= Bi_m \cdot \left[ s \cdot N_0 - (s + \chi) \cdot \bar{N}_0 \right] \cdot c \cdot h \cdot \left( \sqrt{s} \cdot \xi \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo_m} = \\ &= -Bi_m \left[ \mu_n^2 \cdot N_0 + (\chi - \mu_n^2) \cdot \bar{N}_0 \right] \cdot \cos(\mu_n \cdot \xi) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo_m} \end{aligned} \quad (29)$$

Учитывая найденные значения  $\frac{\phi(0)}{\psi'(0)}$ ,  $\phi(s_n)$  и  $\psi'(s_n)$ , получим решение задачи

в виде:

$$F(x, \tau) = \frac{\bar{C}(x, \tau) - C_{\text{вх}}}{C_0 - C_{\text{вх}}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{R}\right) \cdot e^{-\frac{\mu_n^2 \cdot \bar{D}_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}}, \quad (30)$$

где

$$A_n = \frac{Bi_m \cdot \left[ \mu_n^2 \cdot \left( \frac{C_0 - C_{\text{вх}}}{C_0 - C_{\text{вх}}} \right) + \chi - \mu_n^2 \right]}{\mu_n \cdot \left\{ (1 + Bi_m) \cdot (\chi - \mu_n^2) - 2 \cdot \mu_n^2 + Bi_m \cdot \sigma \right\} \cdot \sin \mu_n + \mu_n \cdot \left[ \chi - \mu_n^2 + Bi_m \cdot (\sigma + 2) \right] \cdot \cos \mu_n}$$

Если подставить в соотношение (3) вместо  $\bar{C}(x, \tau)$  решение (30), то после интегрирования получим

$$F_{\text{cp}}(\tau) = \frac{\bar{C}_{\text{cp}}(\tau) - C_{\text{вх}}}{C_0 - C_{\text{вх}}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \cdot e^{-\frac{\mu_n^2 \cdot \bar{D}_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}} \quad (31)$$

Решение (30) позволяет проанализировать влияние объемного расхода раствора, поступающего в проточный аппарат, соотношения объемов твердой и жидкой фаз в аппарате, толщины пластины и других параметров процесса на распределение концентрации вещества по внутренней координате твердого тела. Уравнения (31) может быть использовано для определения средней концентрации вещества по объемы твердой фазы в любой момент времени.

#### 4. Вычислительный эксперимент на ЭВМ

Полученные решения (30) и (31) были применены для исследования процесса выщелачивания фибры толщиной  $2 \cdot R$  равной 0,0032 м и 0,002 м. Параметры процесса приняты из работ [3]:  $\bar{C}_0 = 1300$  кг/м<sup>3</sup>;  $C_0 = 910$  кг/м<sup>3</sup>;  $C_{\text{вх}} = 690$  кг/м<sup>3</sup>;  $\bar{V} = 4,97 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>;  $V = 6,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>;  $Q = 1,29 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с;  $\bar{D}_{\text{эф}} = 3,8 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с;  $\beta = 1 \cdot 10^{-5}$  м/с.

В качестве примера на рис. 2 изображены расчетные кривые распределения относительной концентрации хлористого цинка в неограниченной пластине толщиной 0,032 м по относительной координате для различных моментов времени процесса выщелачивания.



На рис. 3 показаны кинетические кривые процесса выщелачивания фибры, из которых видно, что с уменьшением толщины фибры время ее выщелачивания уменьшается.

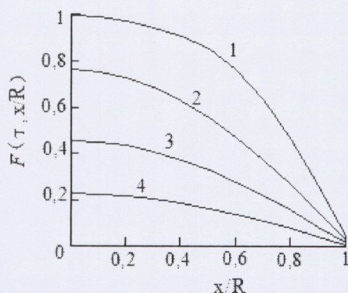


Рис. 2. Кривые распределения относительной концентрации вещества в неограниченной пластине по относительной координате:  $\tau \cdot 10^{-3}$ , с: 1 – 0,5; 2 – 1,5; 3 – 3; 4 – 5

Fig. 2. Distribution curves of the relative concentration of the substance in an infinite plate on a relative coordinate

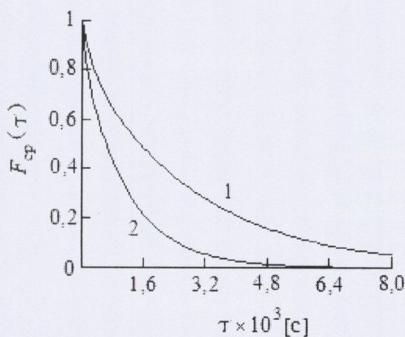


Рис. 3. Кривые выщелачивания фибры:  $R \cdot 10^3$ , м: 1 – 3,2; 2 – 2

Fig. 3. Leaching curves of fiber

## 5. Заключение

Получено аналитическое решение задачи нестационарной диффузии для неограниченной пластины при граничных условиях третьего рода, в которых концентрация раствора  $C$  задается в виде функции, зависящей от времени процесса  $\tau$ , а в качестве закона  $C = f(\tau)$  используется уравнение материального баланса аппарата идеального смешения проточного типа. Полученное решение апробировано на примере выщелачивания фибры.

## Обозначения

$C$	–	концентрация вещества в растворе,	$[\text{кг}/\text{м}^3]$
$\bar{C}$	–	концентрация вещества в твердой фазе,	$[\text{кг}/\text{м}^3]$
$\bar{D}_{\text{эф}}$	–	коэффициент диффузии в твердой фазе,	$[\text{м}^2/\text{с}]$
$F$	–	степень извлечения;	$[-]$
$R$	–	половина толщины пластины,	$[\text{м}]$
$Q$	–	расход раствора,	$[\text{м}^3/\text{с}]$
$V$	–	объем раствора,	$[\text{м}^3]$
$\bar{V}$	–	объем твердой фазы,	$[\text{м}^3]$
$x$	–	координата по толщине пластины,	$[\text{м}]$
$\beta$	–	коэффициент массоотдачи в растворе,	$[\text{м}/\text{с}]$
$\tau$	–	время,	$[\text{с}]$
$Bi_m = \frac{\beta \cdot R}{D_{\text{эф}}}$	–	число Био	$[-]$
$Fo_m = \frac{\bar{D}_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}$	–	число Фурье	$[-]$

## индексы:

0	–	начальный
вх	–	входящий
ср	–	средний
эф	–	эффективный

## Литература

- [1] Лыков А. В.: *Теория теплопроводности*, Высшая школа, Москва, 1967.
- [2] Рудобашта С. П., Карташов Э. М.: *Диффузия в химико-технологических процессах*: КолосС, Москва, 2010.
- [3] *Физико-химические основы процессов фибрования и выщелачивания в производстве фибры*: Государственное научно-техническое издательство химической литературы, Ленинград, 1958.
- [4] Аксельруд Г. А.: *Массообмен в системе твердое тело – жидкость*, Издательство Львовского университета, Львов, 1970.
- [5] Диткин В. А., Прудников А. П.: *Справочник по операционному исчислению*, Высшая школа, Москва, 1965.