MECHANIKA
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
MECHANICS
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
2-M/2012
ZESZYT 6
ROK 109
ISSUE 6
YEAR 109

KAZIMIERZ RUP[1]

# NIESTACJONARNA KONWEKCJA NATURALNA W PŁYNIE MIKROPOLARNYM W SĄSIEDZTWIE PIONOWEJ PŁYTY

# UNSTEADY NATURAL CONVECTION IN MICROPOLAR FLUID ALONG A VERTICAL PLATE

Streszczenie

W pracy zaprezentowano rozwiązanie numeryczne problemu niestacjonarnej konwekcji naturalnej w płynie mikropolarnym umieszczonym w sąsiedztwie pionowej płyty nagrzewanej skokowym strumieniem ciepła. Z analizy uzyskanych rezultatów wynika, że intensywność wymiany ciepła w płynach mikropolarnych jest mniejsza jak w odpowiednim płynie newtonowskim.

*Słowa kluczowe: nieustalona konwekcja naturalna, teoria Eringena*

Abstract

The present paper contains the numerical solution to the problem of unsteady natural convection in micropolar fluid in vicinity of vertical plate, heat flux of which suddenly rises. Numerical results are obtained for the velocity, micro-rotation and temperature fields. The study showed that in comparison with Newtonian fluids the micropolar fluids display a reduction in heat transfer rate.

*Keywords: unsteady natural convection, Eringen's theory*

[1] Prof. dr hab. inż. Kazimierz Rup, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Płyny mikropolarne to takie płyny, których właściwości i zachowania są uwarunkowane przez lokalny ruch cząstek materialnych zawartych w każdym ich elemencie objętościowym. Takie płyny przenoszą lokalne siły bezwładności [3, 4]. W literaturze płyny mikropolarne noszą też nazwy: proste mikropłyny, płyny odkształcalne kierunkowo, płyny polarne i anizotropowe [9]. Fizycznie stanowią one substancje składające się z losowo zawieszonych cząstek w lepkim płynie. W praktyce występują jako płyny w generatorach magnetohydrodynamicznych, jako zawiesiny koloidalne, ciekłe kryształy, substancje smarne, krew zwierzęca itp. [2, 4, 5, 6].

Zagadnienia przepływów płynów mikropolarnych były prezentowane w wielu pracach [2, 3, 4, 5, 6]. El – Hakiem [6] analizował proces ustalonej wymiany pędu i ciepła w zakresie laminarnej konwekcji naturalnej w płynie mikropolarnym. W rozważaniach uwzględniono warunek brzegowy stałej temperatury pionowej ścianki oraz wewnętrzne źródło ciepła [6]. W pracy [5] analizowano nieustaloną konwekcję mieszaną w płynie mikropolarnym również w sąsiedztwie pionowej płyty. Założono warunek brzegowy w postaci skokowej zmiany temperatury pionowej płyty. Proces ustalonej konwekcji naturalnej w płynie mikropolarnym znajdującym się w sąsiedztwie pionowej płyty nagrzewanej stałym strumieniem ciepła był rozważany w pracy [2].

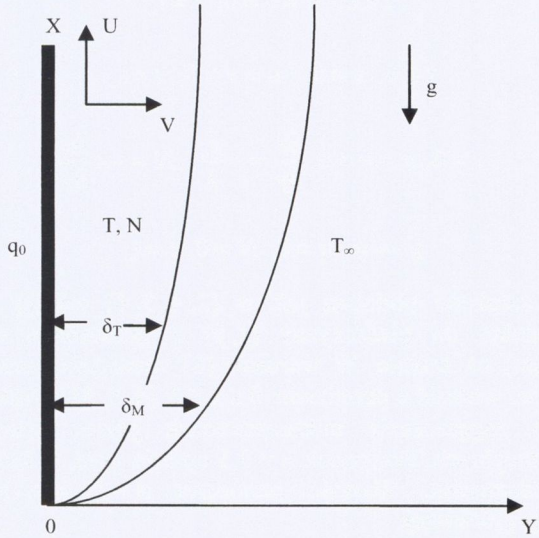
Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie nieustalonych pól prędkości i temperatury w cieczy mikropolarnej znajdującej się w sąsiedztwie pionowej ściany, która w pewnej chwili zostaje nagrzana w sposób skokowy strumieniem ciepła $q_0$.

## 2. Sformułowanie problemu

Rozważać będziemy zagadnienie niestacjonarnej laminarnej wymiany pędu i ciepła w zakresie konwekcji naturalnej w płynie mikropolarnym znajdującym się w otoczeniu pionowej, płaskiej powierzchni (rys. 1). Powierzchnia ta w pewnej chwili zostaje ogrzana w sposób skokowy stałym strumieniem ciepła $q_0$.

Powyższy problem rozwiązany zostanie w tej pracy przy następujących założeniach:

a. przyjmiemy słuszność przybliżenia Oberbeck – Boussinesqa,
b. rozważany przepływ wykazuje cechy charakterystyczne dla przepływu w warstwie przyściennej,
c. pomijamy efekty dyssypacji wiskotycznej i pracy ciśnienia,
d. uwzględniamy rozwiniętą przez Eringena teorię płynów termomikropolarnych.




Rys. 1. Schemat rozważanego przepływu

Fig. 1. Coordinate system and flow model

Biorąc pod uwagę uproszczenia wynikające z teorii warstwy przyściennej oraz wyrażając zgodnie z przybliżeniem Oberbeck – Boussinesqa zmiany gęstości cieczy tylko w równaniu bilansu pędu w członach reprezentujących siły masowe zewnętrzne otrzymamy dla rozważanego zagadnienia następujący układ równań:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\cdot(\mu+\kappa)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\kappa}{\rho}\frac{\partial N}{\partial y}+g\cdot\beta\cdot(t-t_\infty) \tag{2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \tau}+u\frac{\partial N}{\partial x}+v\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\gamma}{\rho\cdot j}\cdot\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}-\frac{\kappa}{\rho\cdot j}\cdot\left(2\cdot N+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}+u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \tag{4}$$

$$a=\frac{\lambda}{C_p\cdot\rho_\infty} \tag{5}$$

Układ nieliniowych równań różniczkowych (1) ÷ (5) rozwiązany zostanie przy następujących warunkach brzegowych i początkowych:

$$\tau < 0,\ u = v = 0,\ t = t_\infty \tag{6}$$

$$\tau \geq 0,\ x = 0,\ u = v = 0,\ t = t_\infty \tag{7}$$

$$y = 0,\ u = v = 0,\ \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{q_0}{\lambda},\ N = -n\frac{\partial u}{\partial y} \tag{8}$$

$$y \to \infty,\ u = 0,\ N = 0,\ t = t_\infty \tag{9}$$

W warunku (8) założono podobną jak w [2, 4, 5, 6] relację pomiędzy składową mikrorotacji $N$ normalną do płaszczyzny $(x, y)$ a gradientem składowej prędkości (naprężeniem stycznym) na ścianie. W warunku (8) występuje parametr mikrorotacji $n$, który może przyjmować wartość z przedziału $0 \leq n \leq 1$ [4, 5, 6]. Wartość $n = 0$ odpowiada przypadkowi dużego zagęszczenia mikrocząsteczek płynu, które uniemożliwia im wykonanie ruchów rotacyjnych. Przypadek $n = 0{,}5$ opisuje płyn, w którym występuje słabe zagęszczenie mikrocząsteczek. Wartość parametru $n = 1$ jest reprezentatywna dla turbulentnej warstwy przyściennej.

Występujące w równaniach (2) i (3) parametry fizyczne płynu oznaczają: $j$ – gęstość mikrorotacji, $\kappa$ – lepkość zawirowania oraz $\gamma$ – wirowy gradient lepkości. Wymienione parametry fizyczne płynu związane są następującym równaniem [4, 5, 6]:

$$\gamma = \left(\mu + \frac{\kappa}{2}\right) \cdot j \tag{10}$$

W celu uogólnienia dalszych rozważań wprowadzimy wyrażenia bezwymiarowe:

$$T = \frac{t - t_\infty}{\left[\nu_\infty^2 \cdot \left(\frac{q}{\lambda}\right)^3 \frac{1}{g \cdot \beta}\right]^{\frac{1}{4}}},\qquad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\left[\left(\frac{\lambda}{q_0}\right) \cdot \frac{1}{g \cdot \beta}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

$$U = \frac{u}{\left[\nu_\infty^2 \cdot \frac{q_0}{\lambda} \cdot g \cdot \beta\right]^{\frac{1}{4}}},\qquad V = \frac{v}{\left[\nu_\infty^2 \cdot \frac{q_0}{\lambda} \cdot g \cdot \beta\right]^{\frac{1}{4}}} \tag{12}$$

$$X = \frac{x}{\left[\nu_\infty^2 \cdot \frac{\lambda}{q_0} \cdot \frac{1}{g \cdot \beta}\right]^{\frac{1}{4}}},\qquad Y = \frac{y}{\left[\nu_\infty^2 \cdot \frac{\lambda}{q_0} \cdot \frac{1}{g \cdot \beta}\right]^{\frac{1}{4}}} = \frac{y}{x} \cdot (Gr_x)^{\frac{1}{4}} \tag{13}$$

$$Gr_x = \frac{g \cdot \beta}{\nu_\infty^2} \cdot \frac{q_0}{\lambda} \cdot x^4,\qquad \overline{N} = N \cdot \left[g \cdot \beta \cdot \frac{q_0}{\lambda}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{14}$$

$$\Delta = \frac{\kappa}{v_\infty \cdot \rho}, \quad P = \frac{v_\infty}{j} \cdot \frac{1}{\left(\frac{q_0}{\lambda} \cdot q \cdot \beta\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{j} \cdot (Gr_x)^{-\frac{1}{2}} \tag{15}$$

Zależności (15) stanowią bezwymiarowe parametry opisujące właściwości płynu mikropolarnego. Uwzględniając wyrażenia bezwymiarowe (11) ÷ (15), równania wynikające z bilansu masy, pędu, momentu pędu i energii otrzymują postać:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{\tau}} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} = (1+\Delta) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \Delta \cdot \frac{\partial \overline{N}}{\partial Y} + T \tag{17}$$

$$\frac{\partial \overline{N}}{\partial \bar{\tau}} + U \cdot \frac{\partial \overline{N}}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial \overline{N}}{\partial Y} = \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right) \cdot \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial Y^2} - \Delta \cdot \left(2 \cdot \overline{N} + \frac{\partial U}{\partial Y}\right) \cdot P \tag{18}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{\tau}} + U \cdot \frac{\partial T}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Pr_\infty} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \tag{19}$$

Warunki początkowe i brzegowe w postaci bezwymiarowej zapiszemy:

$$\bar{\tau} < 0, \quad U = V = T = 0 \tag{20}$$

$$\bar{\tau} \geq 0, \quad X = 0, \; U = V = T = 0 \tag{21}$$

$$Y = 0, \quad U = V = 0, \quad -\frac{\partial T}{\partial Y} = 1, \quad \overline{N} = -n \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} \tag{22}$$

$$Y \to \infty, \quad U = V = T = \overline{N} = 0 \tag{23}$$

Układ równań różniczkowych (16) ÷ (19) wraz z warunkami granicznymi (20) ÷ (23) rozwiązany zostanie w sposób numeryczny za pomocą metody różnic skończonych [1, 8].

## 3. Rozwiązanie problemu

Zgodnie z ideą zastosowanej metody, równania (16) ÷ (19) zapisano w formie różnic skończonych używając schematu jawnego. Przestrzenna siatka podziału w kierunku osi $X$, $Y$ zawiera odpowiednio $M \times N$ punktów, a krok czasowy wynosi $\Delta \bar{\tau}$. Z uwagi na fakt intensywnej wymiany ciepła, pędu, momentu pędu i masy tylko w bezpośredniej bliskości rozważanej pionowej powierzchni, założono w rozważaniach następujące, maksymalne wartości współrzędnych bezwymiarowych $X = 100$, $Y = 30$ [8]. Cechą charakterystyczną

równań różnicowych było wyznaczenie pola temperatury, składowych pola prędkości i składowej mikrorotacji $\overline{N}$ w czasie $\overline{\tau}_{n+1}$ w zależności od odpowiednich wielkości, ale wyznaczonych w czasie $\overline{\tau}_n$. Człony konwekcyjne równań bilansu zawierające pochodne po czasie $\overline{\tau}$ i po współrzędnej przestrzennej $Y$ aproksymowano formułami „w przód" natomiast pochodne po współrzędnej $X$ aproksymowano formułami „wstecz". Człony dyfuzyjne aproksymowano różnicami centralnymi. Pochodne występujące w zapisie warunków brzegowych (21) aproksymowano formułami różnicowymi wyższych rzędów w postaci [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial Y_{|ij}} = \frac{1}{2\Delta Y} \cdot \left(-3 \cdot T_{ij} + 4 \cdot T_{i,j+1} - T_{i,j+2}\right) + O \cdot \left[\Delta Y\right]^2 \tag{24}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} \cdot \overline{N_{|i,j}} &= \frac{\partial U}{\partial Y_{|ij}} = \\ &\frac{1}{12 \cdot \Delta Y} \cdot \left(-25 \cdot U_{i,j} + 48 \cdot U_{i,j+1} - 36 \cdot U_{i,j+2} + 16 \cdot U_{i,j+3} - 3 \cdot U_{i,j+4}\right) + O\left[\Delta Y\right]^4 \end{aligned} \tag{25}$$

Wymienione formuły różnicowe są statycznie stabilne i odznaczają się cechami konserwatywności [1]. Przed wykonaniem zasadniczych obliczeń dla założonych, niezerowych wartości parametrów $\Delta$ i $P$ opisujących właściwości mikropolarne płynu, wykonano odpowiednie testy obliczeniowe. W omawianych testach obliczeniowych badano wpływ długości kroków przestrzennych i kroku czasowego na dokładność uzyskiwanych rezultatów w przypadku płynu newtonowskiego. W przypadku procesu konwekcji naturalnej w płynie newtonowskim znane są odpowiednie rozwiązania analityczne ścisłe [7], z którymi porównywano rezultaty obliczeń własnych. Omawiane rezultaty obliczeń własnych i odpowiednie rezultaty rozwiązań ścisłych [7] zestawiono w tablicy 1.

Z porównania przedstawionych w tablicy 1 rezultatów wynika, że wartości ilorazu liczby Nusselta i Grashofa $Nu/Gr^{1/5}$ wyliczone dla stosunkowo rzadkiego podziału obszaru przestrzennego i znacznej długości kroku czasowego, cechuje wysoki stopień dokładności w odniesieniu do odpowiedniego rozwiązania ścisłego [7].

W przypadku rezultatów numerycznych dotyczących bezwymiarowego naprężenia stycznego $\overline{\tau}_w$ (bezwymiarowy gradient składowej $U$ prędkości) wymagane są znacznie krótsze długości kroków przestrzennych i kroku czasowego dla uzyskania zadowalającej dokładności z odpowiednimi wynikami rozwiązania ścisłego. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń testowych, dalsze obliczenia z uwzględnieniem niezerowych wartości parametrów $\Delta$ i $P$ wykonano przy następującym podziale obszaru przestrzennego: $M \times N = 250 \times 450$, długość kroku czasowego przyjęto $\Delta\overline{\tau} = 0{,}001$.

Tabela 1

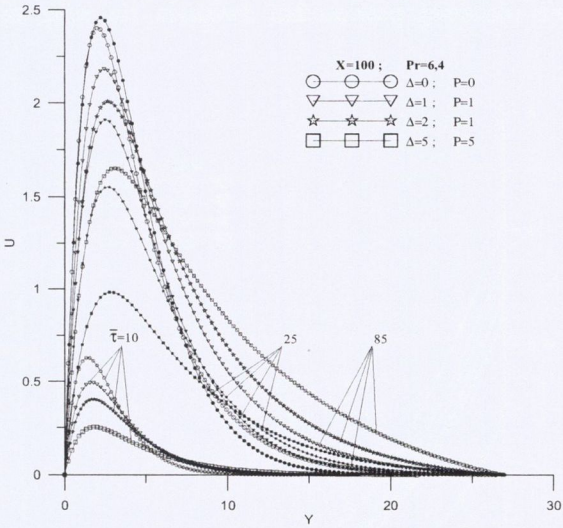
**Wpływ długości kroków przestrzennego i czasowego na dokładność wyników obliczeń**

| Pr | M | N | $\Delta\bar{\tau}$ | $Nu/Gr^{1/5}$ | $\bar{\tau}_w$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6,4 | 290 | 390 | 0,0025 | 0,85404 | 0,34867 |
| | 290 | 450 | 0,0016 | 0,85404 | 0,35284 |
| | 250 | 450 | 0,0010 | 0,85404 | 0,35425 |
| | | | | **0,839234 *** | **0,372208 *** |

* – rozwiązanie analityczne ścisłe wg [7]

## 4. Omówienie uzyskanych rezultatów

Układ równań (16) ÷ (19) wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi (20) ÷ (23) był całkowany dla wybranych wartości parametrów $Pr_\infty$, $P$, $\Delta$ i $n$. W celu realizacji numerycznego całkowania wspomnianego układu równań opracowano własny algorytm w języku FORTRAN.



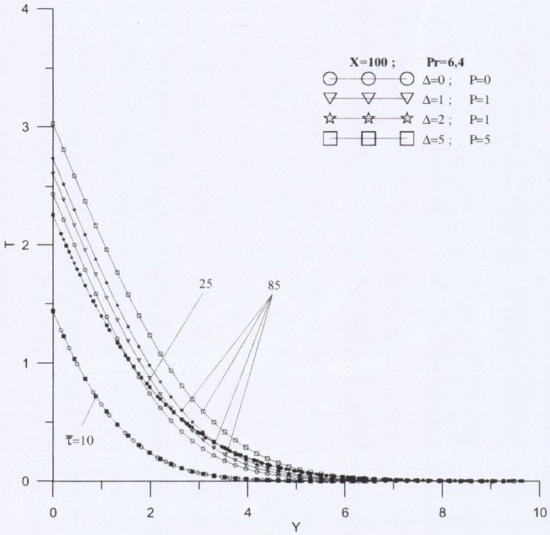

Rys. 2. Profile składowej prędkości dla różnych wartości parametrów $P$ i $\Delta$

Fig. 2. Velocity profiles for various values of $P$ and $\Delta$

Na rys. 2 przedstawiono składową $U$ prędkości w kierunku osi $x$ dla rozważanych płynów ($Pr_\infty = 6{,}4$) w wybranych chwilach procesu $\bar{\tau} = 10, 25, 85$. W celu ułatwienia analizy wpływu właściwości reologicznych rozważanego płynu mikropolarnego przytoczono na rys. 2 cztery, różne przypadki. Linią oznaczoną symbolami okręgu przedstawiono rezultaty uzyskane dla przypadku płynu newtonowskiego bez efektów mikropolarnych. Linie oznaczane symbolami trójkąta, gwiazdy i kwadratu obrazują profile

składowej $U$ prędkości w płynach mikropolarnych charakterystycznych tą samą wartością liczby Prandtla ($Pr_\infty = 6{,}4$) lecz różnymi wartościami parametrów $\Delta$ i $P$. Dodatkowo dla uzyskania jednoznaczności opisu zaczernionymi symbolami oznaczono profile składowej $U$ prędkości otrzymane w pośrednim czasie trwania procesu ( $\bar{\tau} = 25$). Z rys. 2 wynika, że w rozważanych płynach charakterystycznych wartością liczby Prandtla $Pr_\infty = 6{,}4$ profile składowej $U$ prędkości osiągają w czasie $\bar{\tau} = 85$ stan ustalony. Warto zaznaczyć, że na rys. 2 maksymalne wartości składowej $U$ prędkości są mniejsze w przypadku każdego, rozważanego płynu mikropolarnego w porównaniu z odpowiednią składową $U$ prędkości dla płynu newtonowskiego. Omawiane zachowanie się płynów mikropolarnych występuje w całym okresie nagrzewania.

Na rys. 3 przedstawiono profile temperatury dla rozważanych płynów ($Pr_\infty = 6{,}4$) w wybranych chwilach procesu $\bar{\tau} = 10$, 25 i 85. Podobnie jak dla składowej $U$ prędkości przyjęto odpowiednie wartości parametrów opisujących właściwości fizyczne płynu. W odróżnieniu od zmian składowej $U$ prędkości przedstawionych na rys. 2 profile temperatury w początkowym okresie procesu $\bar{\tau} \leq 25$, przytoczone na rys. 3, wykazują identyczny przebieg dla płynu newtonowskiego i płynu mikropolarnego opisanego odpowiednimi wartościami parametrów $\Delta$ i $P$. W końcowej fazie trwania procesu (stan ustalony) temperatura pionowej powierzchni zwiększa się wraz ze wzrostem wartości parametrów $\Delta$ i $P$.

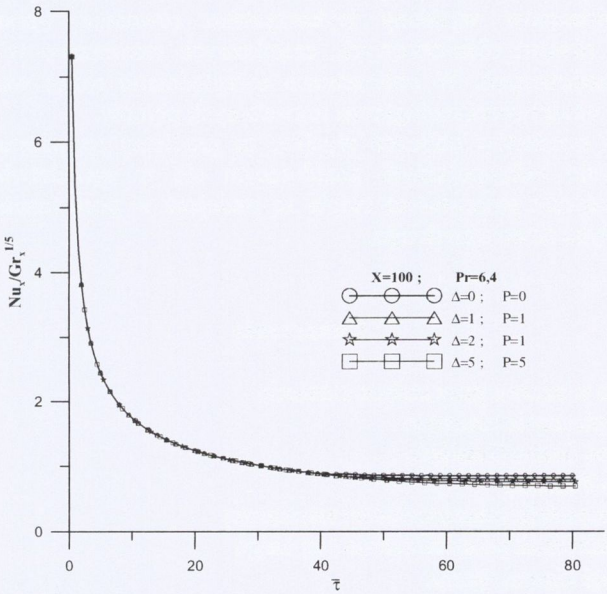



Rys. 3. Profile zmian temperatury dla różnych wartości parametrów $P$ i $\Delta$

Fig. 3. Temperature profiles for various values of $P$ and $\Delta$

Na podstawie wyznaczonego, nieustalonego pola temperatury w płynie określono zmiany w czasie lokalnej liczby Nusselta $Nu_x$ na nagrzanej skokowo pionowej powierzchni:

$$Nu_x = \frac{q_o}{t_w - t_\infty} \cdot \frac{x}{\lambda} \tag{26}$$




Rys. 4. Nieustalone przebiegi zmian lokalnej liczby Nusselta

Fig. 4. The time variations of the local Nusselt number

Podstawiając do wzoru (26) wyrażenia bezwymiarowe (11), (13) i (14) otrzymujemy:

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{\frac{1}{5}}} = X^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{T_w} \tag{27}$$

$$T_w = \frac{t_w - t_\infty}{\left[ \nu_\infty^2 \cdot \left( \frac{q_0}{\lambda} \right)^3 \cdot \frac{1}{g \cdot \beta} \right]^{\frac{1}{4}}} \tag{28}$$

Zależność (27) przedstawiono graficznie na rys. 4 dla rozważanych płynów. W celu dokonania porównania przytoczono na rys. 4 odpowiednią krzywą uzyskaną dla płynu newtonowskiego. Warto zaznaczyć, że przytoczona na rys. 4 wartość bezwymiarowej współrzędnej $X = 100$ odpowiada zgodnie z zależnościami (13) i (14) wartości liczby Grashofa $Gr_x = X^4 = 10^6$. Z analizy krzywych na rys. 4, reprezentujących zmiany liczby Nusselta $(Nu_x/(Gr_x)^{1/5})$ wynika, że intensywność wymiany ciepła w płynach mikropolarnych jest znacznie mniejsza od odpowiedniej w płynach newtonowskich.

## 5. Uwagi końcowe i wnioski

W pracy analizowano nieustalone procesy wymiany pędu, momentu pędu i ciepła w zakresie niestacjonarnej konwekcji naturalnej w płynie mikropolarnym. Do opisu wspomnianych procesów wymiany wykorzystano równania warstwy przyściennej. Sprzężony układ równań różniczkowych, cząstkowych rozwiązano w pracy za pomocą metody różnic skończonych. W obliczeniach uwzględniano różne wartości parametrów $\Delta$ i $P$ opisujących właściwości reologiczne rozważanych płynów.

Z uzyskanych rezultatów obliczeń wynika, że gradienty temperatury i składowej $U$ prędkości w płynie mikropolarnym znajdującym się w sąsiedztwie pionowej płyty nagrzewanej skokowym strumieniem ciepła są mniejsze w porównaniu z odpowiednimi gradientami dla płynu newtonowskiego.

## Oznaczenia

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_p$ | – | ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu | [J/kgK] |
| $g$ | – | przyśpieszenie ziemskie | [m/s$^2$] |
| $Gr_x$ | – | lokalna liczba Grashofa | [–] |
| $Pr$ | – | liczba Prandtla | [–] |
| $\beta$ | – | współczynnik rozszerzalności termicznej | [1/K] |
| $\lambda$ | – | współczynnik przewodnictwa cieplnego | [W/mK] |
| $\nu$ | – | lepkość kinematyczna | [m$^2$/s] |
| $\rho$ | – | gęstość płynu | [kg/m$^3$] |

## Literatura


[1] Anderson J.: *Computational Fluid Dynamics*, McGraw–Hill, New York, 1995.
[2] Chang Ch, Lee Z.: Mechanics Research Communications, 35, (2008) 421-427.
[3] Eringen A, C.: J. Math. Mech., 16, (1966), 1-18.
[4] Gorla R. S. R.: Acta Mechanica, 108, (1995), 101-109.
[5] Gorla R. S. R.: Fluid Dynamics Research, 15, (1995), 237-250.
[6] El-Hakiem M. A.: Int. Comm. Heat Mass Transfer, 31, (2004), 1177-1186.
[7] Martynenko O. G., Sokowiskyn J. A.: *Svobodnokonvektiwnyj teploobmen na vertikalnoj poverchnosti,* Nauka, Mińsk, 1977.
[8] Rup K.: J. of Theoretical and Applied Mechanics, 34, (1996), 129-142.
[9] Walicka A.: Inż. Chem. i Proc., 21, (2000), 57-74.