

JÓZEF STRUSKI, MAREK S. KOWALSKI*

ANALIZA KINEMATYKI CZTEROWAHACZOWEGO
ZAWIESZENIA KÓŁ KIEROWANYCH ZA POMOCĄ
UKŁADÓW RÓWNAŃ WIĘZÓW GEOMETRYCZNYCH
O RÓŻNEJ STRUKTURZE

ANALYSIS OF KINEMATICS' MULTI-LINK SUSPENSION
OF STEERED WHEELS BY MEANS OF SET EQUATION
OF GEOMETRICAL CONSTRAINS WITH DIFFERENT
STRUCTURE

Streszczenie

W badaniach właściwości kinematycznych i dynamicznych złożonych układów mechanicznych wykorzystywane są wyniki eksperymentów numerycznych. Wymagana jest minimalizacja czasu rozwiązywania różnych zagadnień z tego zakresu. W opracowaniu wykazano, że spełnienie tego warunku jest możliwe przez zmianę struktury więzów geometrycznych mechanizmu wielowahaczowego zawieszenia kół.

Słowa kluczowe: zawieszenie wielowahaczowe, kinematyka, metoda perturbacji

Abstract

In research of the kinematic and dynamic properties of compound mechanical set-ups, results of numerical experiments are used. It is required to minimize the calculation time of various problems in the domain. In the current paper it is demonstrated, that fulfilling of this demand is possible by the change of the geometrical constraint's structure of the multi-link wheel suspension system.

Keywords: multi-link suspension, kinematics, perturbation method

* Dr hab. inż. Józef Struski, dr inż. Marek S. Kowalski, Instytut Pojazdów Samochodowych i Silników Spalinowych, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

W teoretycznych zagadnieniach z zakresu kinematyki układy prowadzenia kół kierowanych względem nadwozia reprezentowane są przez mechanizmy przestrzenne o dwóch stopniach ruchliwości. Struktura tych mechanizmów jest różnorodna. Różne metody stosowane są do rozwiązywania ich kinematyki [3]. W przypadku analizy zawieszonych kół McPhersona i na dwóch wahaczach poprzecznych stosowana jest najczęściej metoda macierzowa [8].

Układy nieliniowych równań więzów geometrycznych, nakładających ograniczenia na ruch względny poszczególnych członów mechanizmów zawieszonych wielowahaczowych, zapisywane są w postaci skalarnej [4] lub wektorowej [7]. Układy tych równań najczęściej rozwiązywane są za pomocą metod numerycznych. Mogą być również rozwiązywane z wykorzystaniem metody perturbacji [1]. Metoda perturbacji umożliwia wyznaczenie rozwiązań nieliniowych równań więzów geometrycznych w postaci szeregu liczbowych.

W opracowaniach [2, 5, 6] z zakresu zawieszonych kół kierowanych analizowane są najczęściej charakterystyki kinematyczne, stanowiące przekroje charakterystyk przestrzennych. Są to przeważnie zależności pomiędzy względną zmianą rozstawu oraz kątami pochylenia i skrętu koła a stopniami ruchliwości, z których jeden ma wartość ustaloną. Taka analiza jest niemiarodajna, ponieważ w przestrzeni ruchów resorowania koła może wystąpić osobliwość mechanizmu.

W zagadnieniach z zakresu syntezy zawieszonych kół, modelowania dynamiki samochodu, pożądana jest minimalizacja czasu przeprowadzanych eksperymentów numerycznych. W związku z tym bardzo ważny jest dobór metody rozwiązywania kinematyki wymienionych mechanizmów.

Synteza zawieszonych kół składa się z kilku etapów. W pierwszej kolejności należy opracować strukturę mechanizmu zawieszenia, następnie wyznacza się jego parametry geometryczne – współrzędne przegubów łączących wahacze z nadwoziem i ze zwrotnicą lub wspornikiem koła, których położenie w przestrzeni ruchów resorowania przyporządkowane jest konstrukcyjnej konfiguracji zawieszenia. Proces syntezy mechanizmów zawieszonych kół kierowanych jest realizowany przy jednoczesnej zmianie dwóch parametrów. Tymi parametrami najczęściej są pionowe przemieszczenie środka koła i przesunięcie listwy zębatej przekładni kierowniczej [7].

Badanie właściwości dynamicznych projektowanych samochodów możliwe jest za pomocą ich modeli matematycznych o wielu stopniach swobody. W modelach tych uwzględnione są mechanizmy zawieszonych kół o różnej strukturze.

2. Zakres i cel pracy

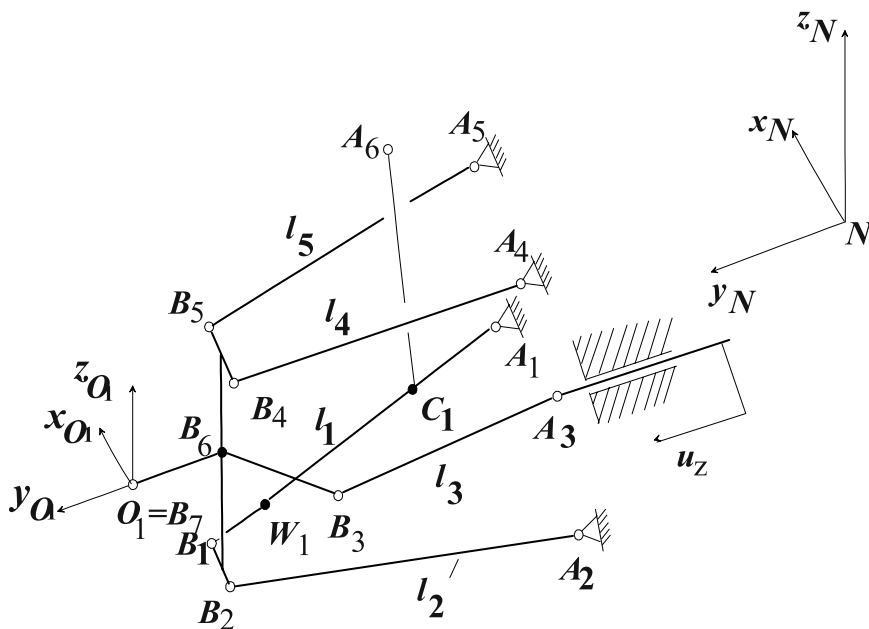
W opracowaniu zostaną przedstawione dwa sposoby rozwiązywania kinematyki mechanizmu wielowahaczowego zawieszenia kół kierowanych o dwóch stopniach ruchliwości za pomocą metody perturbacji [1]. W pierwszym sposobie układ 17 równań więzów geometrycznych, nakładających ograniczenia na względne przemieszczenia poszczególnych członów mechanizmów zawieszenia, zapisany zostanie w postaci skalarnej. W drugim sposobie układ 5 równań – w formie wektorowej.

Zasadniczym celem opracowania będzie wyznaczenie przestrzennych charakterystyk kinematycznych czterowahaczowego mechanizmu zawieszenia kół kierowanych. W opra-

cowaniu zostanie podana ilościowa zależność pomiędzy efektywnym czasem obliczeń numerycznych a strukturą więzów geometrycznych przedmiotowego mechanizmu.

3. Struktura mechanizmu wielowahaczowego zawieszenia kół kierowanych

Na rysunku pokazany jest schemat mechanizmu czterowahaczowego zawieszenia kół kierowanych. Punkty B_1, B_2, B_4, B_5 są środkami przegubów kulowych, łączących wahacz ze zwrotnicą koła. Punkt B_3 jest środkiem przegubu kulowego, łączącego skrajny drążek mechanizmu zwrotniczego z ramieniem zwrotnicy.



Rys. 1. Schemat mechanizmu czterowahaczowego zawieszenia kół kierowanych

Fig. 1. Schematics of the four-link steered wheel suspension system

Punkty A_1, A_2, A_4, A_5 są środkami przegubów kulowych, którymi zastąpiono przeguby metalowo-gumowe, łączące wahacze z nadwoziem. Punkt A_3 jest środkiem przegubu kulowego, łączącego drążek skrajny mechanizmu zwrotniczego z listwą zębatą przekładni kierowniczej. Dolny wahacz przedni, reprezentowany na rysunku przez łącznik A_1B_1 , połączony jest ze stabilizatorem w punkcie W_1 . Z wahaczem tym w punkcie C_1 połączona jest kolumna teleskopowa, podpierająca nadwozie w punkcie A_6 . Punktami B_6 i B_7 zaznaczono oś obrotu koła.

Układy współrzędnych $\{N\}$, $\{O_1\}$ są układami sztywno związanymi odpowiednio z nadwoziem i zwrotnicą koła.

4. Równania więzów geometrycznych rozważanego mechanizmu

Równania więzów geometrycznych mechanizmu zawieszenia, pokazanego na rysunku, można zapisać w postaci układów 17 lub 5 nieliniowych równań algebraicznych. W pierwszym sposobie równania wyrażają kwadraty odległości charakterystycznych punktów mechanizmu:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_{A_j B_j}^T \mathbf{r}_{A_j B_j} = l_j^2, \quad \text{dla } j = (1)5 \\ \mathbf{r}_{B_j B_k}^T \mathbf{r}_{B_j B_k} = l_{jk}^2 \quad \text{dla } \begin{cases} j = 1 \text{ i } k = (2)5 \\ j = 2 \text{ i } k = (3)5 \\ j = (1)5 \text{ i } k = 7 \end{cases} \end{array} \right. \quad (1)$$

W powyższym układzie równań parametrami zadawanymi są współrzędne q_3 punktu $O_1(q_1, q_2, q_3)$ i przesunięcie listwy zębatej u_z , dodawane do współrzędnej y_{A_3} punktu $A_3(x_{A_3}, y_{A_3} + u_z, z_{A_3})$. Przy danych parametrach q_3 i u_z z układu (1) wyznaczone są współrzędne punktów $B_j(x_{B_j}, y_{B_j}, z_{B_j})$, dla $j = (1)5$ oraz q_1 i q_2 punktu O_1 .

W drugim sposobie równania wyrażają kwadraty długości wektorów o początkach i końcach, odpowiednio, w punktach A_j, B_j , dla $j = (1)5$ zapisane w formie:

$$\left(\mathbf{r}_{NO_1.N} + \mathbf{A}_{NO_1} \mathbf{r}_{O_1 B_j.O_1} - \mathbf{r}_{NA_j.N} \right)^T \left(\mathbf{r}_{NO_1.N} + \mathbf{A}_{NO_1} \mathbf{r}_{O_1 B_j.O_1} - \mathbf{r}_{NA_j.N} \right) = l_j^2 \quad \text{dla } j = 1(5) \quad (2)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_{NO_1} = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \quad (3)$$

jest macierzą obrotu $\{O_1\}$ względem $\{N\}$.

Natomiast:

$$l_j^2 = \mathbf{r}_{A_j B_j.N}^T \mathbf{r}_{A_j B_j.N}$$

Przy wymienionych już zadawanych parametrach q_3 i u_z z układu (1) obliczane są współrzędne q_1 i q_2 środka koła $O_1(q_1, q_2, q_3)$ oraz kąty rotacji $\{O_1\}$ względem $\{N\}$: α, β, γ .

W celu zapewnienia równoważności zakresu obliczeń algorytmów opracowanych na podstawie układów równań (1) i (2) konieczne jest wyznaczenie kątów rotacji $\{O_1\}$: α, β, γ względem $\{N\}$. Zatem układ równań (1) musi być uzupełniony o obliczenia wymienionych kątów.

Po obliczeniu współrzędnych punktów O_1 , i $B_j(j = (1)5)$ można utworzyć trzy wektory $\mathbf{r}_{O_1 B_j}$ dla $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dla każdego z tych wektorów spełnione jest równanie macierzowe

$$\mathbf{r}_{O_1 B_j.O_1} = \mathbf{A}_{O_1 N} \mathbf{r}_{O_1 B_j.N} \quad (4)$$

gdzie:

$\mathbf{r}_{O_1B_j.O_1}$ – wektor w $\{O_1\}$,

$\mathbf{r}_{O_1B_j.N}$ – wektor w $\{N\}$,

$$\mathbf{A}_{O_1.N} = \mathbf{A}_{NO_1}^T = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & c\beta s\gamma & -s\beta \\ s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha c\beta \\ c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

Oznaczając współrzędne wektorów:

$$\mathbf{r}_{O_1B_j.O_1} = [x_{bj} \quad y_{bj} \quad z_{bj}]^T$$

$$\mathbf{r}_{O_1B_j.N} = [x_{jb} \quad y_{jb} \quad z_{jb}]^T$$

i przyjmując $j = n, m, v$, na podstawie (4), otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} x_{bn} &= (x_{nb}c\gamma + y_{nb}s\gamma)c\beta - z_{nb}s\beta \\ x_{bm} &= (x_{mb}c\gamma + y_{mb}s\gamma)c\beta - z_{mb}s\beta \\ x_{bv} &= (x_{vb}c\gamma + y_{vb}s\gamma)c\beta - z_{vb}s\beta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Z układu równań (5) obliczane są kąty rotacji β i γ . W celu obliczenia kąta rotacji a wykorzystano równanie:

$$y_{bv} = (x_{vb}s\beta c\gamma)s\alpha - (x_{vb}s\gamma)c\alpha + (y_{vb}s\beta s\gamma)s\alpha + (y_{vb}c\gamma)c\alpha + (z_{vb}c\beta)s\alpha \quad (6)$$

Następnie, mając kąty rotacji $\{N\}$ względem $\{O_1\}$, obliczono współrzędne wektora $\mathbf{r}_{B_6B_7.N}$:

$$\mathbf{r}_{B_6B_7.N} = \mathbf{A}_{NO_1}\mathbf{r}_{B_6B_7.O_1} \quad (7)$$

wektor jednostkowy $\mathbf{e}_k = [e_{kx} \quad e_{ky} \quad e_{kz}]$ na osi obrotu koła oraz kąty skreću i pochylenia koła:

$$\delta_k = -\arctg\left(\frac{e_{kx}}{e_{ky}}\right) \quad (8)$$

$$\gamma_k = -\arcsin(e_{kz}) \quad (9)$$

Obliczenie kątów δ_k i γ_k w obu algorytmach jest analogiczne.

5. Rozwiązywanie układów równań więzów geometrycznych mechanizmu zawieszenia

Rozwiązanie układów równań (1) i (2) uzyskano za pomocą metody perturbacji [1]. W odniesieniu do układu równań przestępnych (2) funkcje trygonometryczne rozwinięto w szeregi trygonometryczne:

$$\sin(x_0 + x) = \sin x_0 + x \cos x_0 - \frac{x^2 \sin x_0}{2} \quad (10)$$

$$f_{jN}(q_1, q_2, \alpha, \beta, \gamma) + f_{jL}(q_1, q_2, \alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad (11)$$

i otrzymano układ równań, który można zapisać w ogólnej formie:

$$f_j(q_1, q_2, \alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad j = (1)5 \quad (12)$$

Równania układu (12) rozdzielono na części nieliniowe i liniowe:

$$f_{jN}(q_1, q_2, \alpha, \beta, \gamma) + f_{jL}(q_1, q_2, \alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad j = (1)5. \quad (13)$$

Części nieliniowe tych równań pomnożono przez parametr perturbacyjny ε i otrzymano układ równań pomocniczych:

$$g_j(\varepsilon, q_1, q_2, \alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon f_{jN} + f_{jL}, \quad j = (1)5 \quad (14)$$

Dla $\varepsilon = 1$ układy równań (13) i (14) są identyczne, natomiast dla $\varepsilon = 0$ układ (13) utworzony jest tylko z równań liniowych.

Założono, że rozwiązaniami układu (14) są szeregi liczbowe:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i q_{1i}, & q_2 &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i q_{2i} \\ \alpha &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \alpha_i, & \beta &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \beta_i, & \gamma &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \gamma_i \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Po podstawieniu (15) do (14) otrzymuje się:

$$g_j(\varepsilon, q_1(\varepsilon), q_2(\varepsilon), \alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)) = 0, \quad j = (1)5. \quad (16)$$

Układ równań (16) rozwinięto w szeregi względem potęg ε :

$$\sum_{i=0}^2 \varepsilon^i g_{ji} = 0, \quad j = (1)5 \quad (17)$$

Następnie rozwiązano liniowe układy równań $g_{ji} = 0$, najpierw dla $i = 0$, potem dla $i = 1, 2$. Otrzymano rozwiązania, które można zapisać w ogólnej postaci:

$$q_1 = \sum_{i=0}^2 q_{1i}, \quad q_2 = \sum_{i=0}^2 q_{2i},$$

$$\alpha = \sum_{i=0}^2 \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=0}^2 \beta_i, \quad \gamma = \sum_{i=0}^2 \gamma_i. \quad (18)$$

Układ równań (1) rozwiązano w analogiczny sposób.

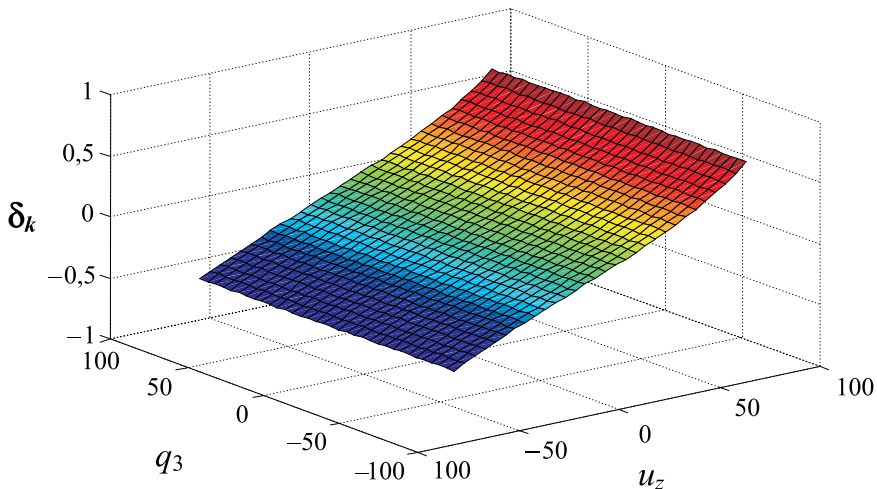
6. Przykład liczbowy

Położeniu konstrukcyjnemu mechanizmu zawieszenia pokazanego na rysunku 1 przyporządkowano charakterystyczne punkty, których wartości współrzędnych w mm podano poniżej:

$$\begin{array}{ll} A_1(132,1, 347,4, -93,8), & A_2(-245,3, 379,0, -114,3) \\ A_3(-88,05, 385,61, 280,92), & A_4(138,74, 431,18, 389,65) \\ A_5(6,47, 400,47, 381,42), & \\ B_1(29,0, 697,0, -98,2), & B_2(-23,7, 693,3, -132,5) \\ B_3(-140,3, 619,7, 284,0), & B_4(9,3, 675,3, 389,0) \\ B_5(-24,0, 642,0, 387,0), & \\ B_6(-0,2, 650,0, 0,5), & B_7(0,0, 750,0, 0,0). \end{array}$$

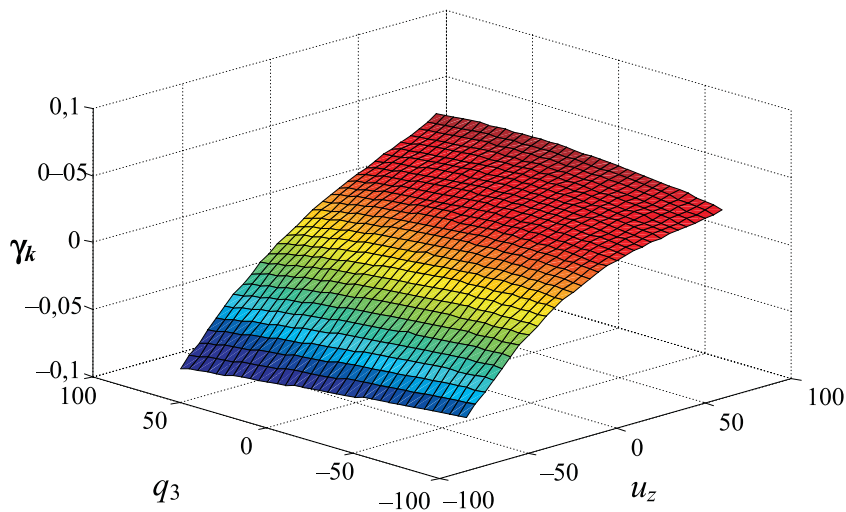
Rozwiązania układów równań (1) i (2) wyznaczano dla zadawanych parametrów wejściowych q_3 i u_z z tym samym krokiem równym 0,5 mm. Porównywalne rozwiązania wymienionych układów przy tym kroku uzyskano prawie takie same.

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono podstawowe charakterystyki kinematyczne kątów skrętu i pochylenia koła oraz podano czas obliczeń numerycznych.



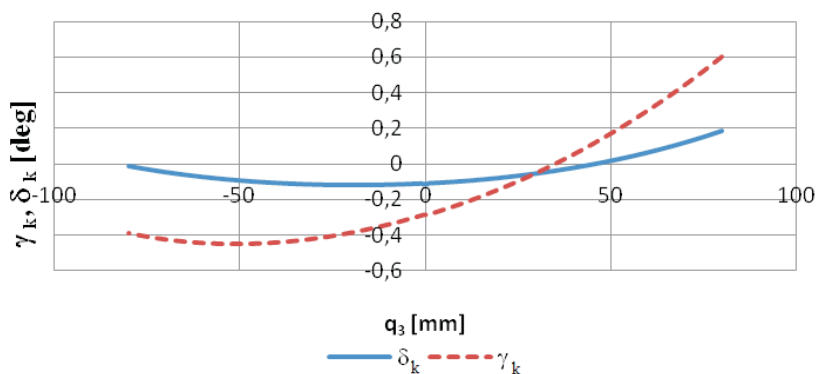
Rys. 2. Zależność kąta skrętu koła – δ_k od pionowego przemieszczenia jego środka – q_3 i przesunięcia listwy zębatej – u_z . Czas obliczeń dla układu równań (1) = 516,02 s, czas obliczeń dla układu równań (2) = 15132,94 s

Fig. 2. Dependence of steering angle – δ_k on the vertical displacement of the wheel centre – q_3 and on the displacement of the rack – u_z . Computation time for set of equation (1) = 516.02 s; computation time for set of equation (2) = 15132.94 s



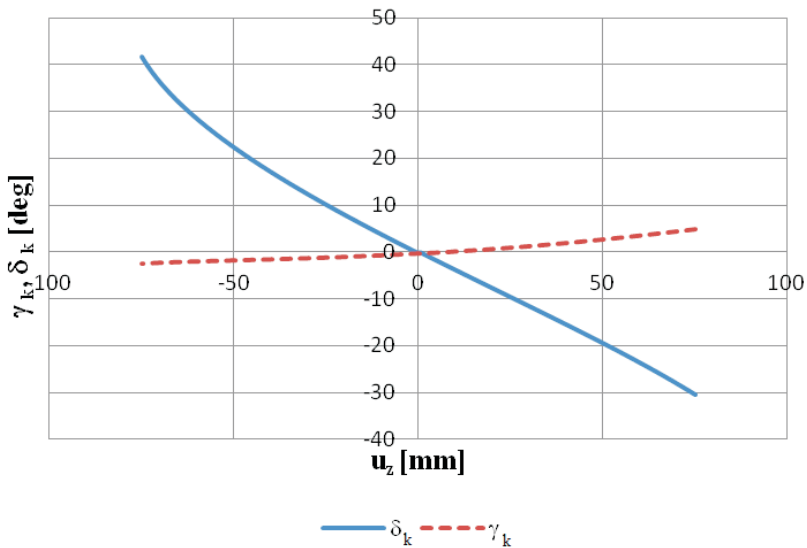
Rys. 3. Zależność kąta pochylenia koła – δ_k od pionowego przemieszczenia jego środka – q_3 i przesunięcia listwy zębatej – u_z . Czas obliczeń dla układu równań (1) = 516,02 s, czas obliczeń dla układu równań (2) = 15132,94 s

Fig. 3. Dependence of camber angle – δ_k on the vertical displacement of the wheel centre – q_3 and on the displacement of the rack – u_z . Computation time for set of equation (1) = 516.02 s; computation time for set of equation (2) = 15132.94 s



Rys. 4. Charakterystyka kątów skrętu i pochylenia koła przy $u_z = 0$. Czas obliczeń dla układu równań (1) = 2,276 s, czas obliczeń dla układu równań (2) = 45,216 s

Fig. 4. Steering angle and wheel camber characteristics, $u_z = 0$. Computation time for set of equation (1) = 2.276 s; computation time for set of equation (2) = 45.216 s



Rys. 5. Charakterystyka kątów skrętu i pochylenia koła przy $q_3 = 0$. Czas obliczeń dla układu równań (1) = 2,184 s, czas obliczeń dla układu równań (2) = 46,334 s

Fig. 5. Steering angle and wheel camber characteristics, $q_3 = 0$. Computation time for set of equation (1) = 2.184 s; Computation time for set of equation (2) = 46.334 s

7. Zakończenie

Dla mechanizmu wielowahaczowego zawieszenia kół kierowanych układy równań więzów geometrycznych podano w dwóch strukturalnie różnych postaciach – skalarnej i wektorowej. Układ równań wektorowych utworzony jest z równań przestępnych. Rozwiązanie ich możliwe było po uprzednim rozwinięciu funkcji trygonometrycznych w szeregi potęgowe (10) i (11).

Z uwagi na wymaganą pamięć operacyjną komputera dla algorytmu programu obliczeniowego z równaniami wektorowymi możliwe było uzyskanie rozwiązań w postaci szeregów liczbowych, zawierających po trzy wyrazy (18). Liczba wyrazów w szeregach potęgowych, stanowiących rozwiązania równań, determinuje wielkości przyrostów parametrów wejściowych (stopni ruchliwości).

Rozwiązaniami układu (1) są szeregi liczbowe, zawierające po 10 wyrazów.

Do obliczeń wykorzystano komputer z dwurdzeniowym procesorem Intel Core i5 M430 2,27 GHz i pamięcią operacyjną 4 MB. Czasy obliczeń numerycznych przeprowadzonych za pomocą programów własnych w środowisku Matlab, zawierających 5 i 17 równań, dla takich samych zagadnień z zakresu kinematyki zawieszenia znacznie się różnią. Czas obliczeń dla algorytmu z 5 równaniami jest wielokrotnie większy.

Prezentowane wyniki badań, zrealizowane w ramach tematu nr M-4/370/DS/2012, zostały sfinansowane z dotacji na naukę przyznanej przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Literatura

- [1] Grzyb A., *On a Perturbation Method for the Analysis of the Kinetostatics of Mechanisms*, Akademie Verlag ZAMM, 2 angew, Math. Mech., 72,6 T615-T618, 1992.
- [2] Góra M., *Analiza kinematyczna wielowahaczowych mechanizmów zawieszonych samochodów*, rozprawa doktorska, Wydział Mechaniczny Politechniki Krakowskiej, Kraków 2008.
- [3] Knapczyk J., *Metody analizy wielowahaczowych zawieszonych kół samochodu*, Interkonmot 98, „TeKa Komisji Naukowo Problemowej Motoryzacji Krakowskiego Oddziału PAN”, z. 16, Kraków 1998, 19-29.
- [4] Kowalski M.S., *Optymalizacja wymiarowa wybranych mechanizmów wielowahaczowych zawieszonych samochodów*, rozprawa doktorska, Wydział Mechaniczny Politechniki Krakowskiej, Kraków 2005.
- [5] Matschinsky W., *Die Radführungen die Straßenfahrzeuge*, Verlag TUV Rheinland, Koln 1987.
- [6] Reimpell J., *Podwozia samochodów. Podstawy konstrukcji*, WKŁ, Warszawa 1997.
- [7] Struski J., Wach W., *Multidimensional Optimization of the Steered Wheel Multi-link Suspension System*, SAE-Paper 2007-01-0849.2007, World Congress Detroit, Michigan 2007.
- [8] Struski J., *Quasi-statyczne modelowanie sterowności samochodów*, Monografia 144, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1993.