MECHANIKA
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
MECHANICS
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
6-M/2012
ZESZYT 11
ROK 109
ISSUE 11
YEAR 109

WŁADYSŁAW EGNER*

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE IDEALNIE PLASTYCZNEJ ZGINANEJ I ŚCINANEJ BELKI W PŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCEŃ

OPTIMAL PLASTIC DESIGN OF BEAMS UNDER BENDING AND SHEAR IN PLANE STRAIN

Streszczenie

W artykule zastosowano metodę zakłócania kształtu konturu do rozwiązania problemu optymalnego kształtowania w stanie uplastycznienia przy zginaniu i ścinaniu. W metodzie stosuje się rozwinięcia w szereg potęgowy pewnego małego parametru wszystkich składowych naprężenia oraz nieznanego kształtu konturu. W niniejszym artykule mały parametr α oznacza efekt ścinania. Kształt konturu jest opisany za pomocą szeregu potęgowego, którego postać wynika z warunków brzegowych. Obciążenie belki wspornikowej stanowi moment skupiony oraz obciążenie ciągłe będące czynnikiem zaburzającym. Materiał wykazuje idealną plastyczność i podlega warunkowi plastyczności Hubera–Misesa–Hencky'ego. Belka pracuje w płaskim stanie odkształceń.

Słowa kluczowe: *optymalizacja, idealna plastyczność, metoda zakłócania kształtu konturu, zginanie ze ścinaniem*

Abstract

The paper applies the boundary perturbation method (BPM) to optimal plastic design under bending with considerable shear effects. This method uses expansion of stress components and of the unknown boundary into power series of a small parameter. In the present paper the small parameter α represents the effects of shear. The shape is described by a power series resulting from boundary conditions. The loading of the cantilever beam consists of a concentrated moment and distributed loading regarded as a perturbing factor. The material of the beam is perfectly plastic, subject to the Huber–Mises–Hencky yield condition. The beam is in the plane strain state.

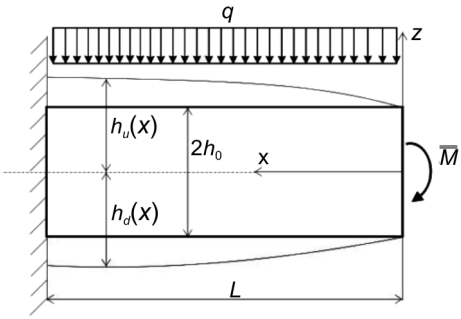
Keywords: optimization, perfect plasticity, boundary perturbation method, bending with shearing

* Dr inż. Władysław Egner, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Metoda zaburzania kształtu konturu może być efektywnie stosowana dla różnych problemów optymalnego kształtowania konstrukcji pracujących w stanie pełnego uplastycznienia [3]. Przegląd nowszych prac z tej tematyki znajduje się w pracy [4]. W zagadnieniach plastycznych po raz pierwszy zastosowano tę metodę w pracy [5], gdzie wyznaczono kształt analizowanej konstrukcji w stadium pełnego uplastycznienia. Metoda zakłócania kształtu brzegu za pomocą małego parametru była stosowana w pracy [1], w której analizowano płaskie zakotwienie ze skośnymi powierzchniami oporowymi oraz w opracowaniu [2], gdzie znaleziono optymalny kształt obrotowo symetrycznego zakotwienia. Problem optymalnego kształtowania belek poddanych zginaniu i ścinaniu był analizowany w pracach [6, 7].

W niniejszym artykule metoda zakłócania kształtu konturu została zastosowana w celu określenia optymalnej wysokości belki podlegającej zginaniu i ścinaniu, którego wielkość opisuje mały parametr. Rozważania dotyczą belki wspornikowej z przyłożonym w przekroju swobodnym momentem skupionym oraz obciążeniem ciągłym działającym wzdłuż całej długości belki.



Rys. 1. Schemat ogólny belki

Fig. 1. Scheme of the beam

Obecna praca bazuje na następujących założeniach:

1. Sposób obciążenia belki przedstawiono na rys. 1. Obciążeniem podstawowym jest moment skupiony przyłożony w przekroju swobodnym. Jako zaburzenie wprowadzono dodatkowe obciążenie ciągłe działające wzdłuż całej długości belki.
2. Materiał jest idealnie plastyczny (bez wzmocnienia). Podlega hipotezie Hubera–Misesa–Hencky'ego.
3. Przyjęto kartezjański układ współrzędnych z początkiem w środku ciężkości przekroju swobodnego belki (rys. 1).
4. Belka w przekroju jest prostokątem o stałej szerokości b i zmiennej wysokości $2h = 2h(x)$. Dla czystego zginania $h = h_0 = \text{const}$ jest rozwiązaniem optymalnym.
5. Belka pracuje w płaskim stanie odkształceń.
6. Nie rozważano możliwości utraty stateczności.

2. Równania podstawowe

W analizowanym zagadnieniu muszą być spełnione dwa równania równowagi wewnętrznej:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

W przypadku płaskiego stanu odkształceń dodatkowo mamy:

$$\sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \tag{2}$$

Warunek plastyczności Hubera–Misesa–Hencky'ego przyjmie następującą postać:

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = \frac{4}{3}\sigma_0^2 \tag{3}$$

gdzie σ_0 oznacza granicę plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu.

W dalszej części pracy dolny wskaźnik u oznacza górną część belki ($z \geq 0$), a dolny wskaźnik d – dolną część belki ($z \leq 0$).

Warunki brzegowe dla brzegów górnego i dolnego belki można zapisać w następującej postaci:

$$\sigma_{xu} \cos(n, x) + \tau_{xzu} \cos(n, z) = 0$$

$$\tau_{zxu} \cos(n, x) + \sigma_{zu} \cos(n, z) = -\frac{q}{b} \tag{4}$$

$$\sigma_{xd} \cos(n, x) + \tau_{xzd} \cos(n, z) = 0$$

$$\tau_{zxd} \cos(n, x) + \sigma_{zd} \cos(n, z) = 0$$

Kosinusy kierunkowe dla górnego brzegu belki można zapisać następująco:

$$\cos(n, x) = \frac{-h'(x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}$$

$$\cos(n, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}} \tag{5}$$

Kosinusy kierunkowe dla dolnego brzegu belki mogą być przedstawione następująco:

$$\cos(n, x) = \frac{h'(x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}$$

$$\cos(n, z) = 1\frac{-1}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}} \tag{6}$$

W powyższych formułach n oznacza jednostkowy wektor normalny do brzegu belki, a $h'(x) = dh/dx$.

Biorąc pod uwagę wyrażenia na kosinusy kierunkowe, warunki brzegowe można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} &(\sigma_{xu} h'_u - \tau_{xzu})\big|_{z=h_u(x)} = 0 \\ &(\tau_{zxu} h'_u - \sigma_{zu})\big|_{z=h_u(x)} = \frac{q}{b}(1+(h'_u)^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{7}$$

oraz na brzegu dolnym $z = h_d(x)$ (h_d – dolna część belki):

$$\begin{aligned} &(\sigma_{xd} h'_d - \tau_{xzd})\big|_{z=h_d(x)} = 0 \\ &(\tau_{zxd} h'_d - \sigma_{zd})\big|_{z=h_d(x)} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

W zakresie plastycznym analizowany problem jest wewnętrznie statycznie wyznaczalny, ponieważ przyjmujemy, że warunek plastyczności (3) powinien być spełniony w każdym punkcie, więc trzy równania (1) i (3) określają trzy nieznane naprężenia σ_x, σ_z oraz τ_{xz}.

Optymalną wysokość belki $h_u = h_u(x)$ i $h_d = h_d(x)$ znajdziemy z warunków brzegowych danych równaniami (7) i (8). Rozważany problem (całkowite uplastycznienie) jest zagadnieniem nad-określonym, więc może nie mieć rozwiązania w ogóle lub mieć rozwiązanie w szczególnych przypadkach albo tylko w przypadkach szczególnych. W rozważanym przypadku otrzymamy wprost rozwiązanie optymalne bez wolnych parametrów umożliwiających dalszą optymalizację.

Dodatkowo żądamy spełnienia równań równowagi w przekroju (całkowe równania równowagi):

$$\begin{aligned} &\int_A \sigma_x z dA = M = \overline{\overline{M}} + \frac{1}{2} q x^2 \\ &\int_A \tau_{xz} dA = T = qx \\ &\int_A \sigma_x dA = N = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie $\overline{\overline{M}}$ jest momentem nośności granicznej w przypadku czystego zginania dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia:

$$\overline{\overline{M}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 b h_0^2 \tag{10}$$

Rozkład obciążenia ciągłego stanowiącego dodatkowe obciążenie belki oznaczono jako $q = q(x)$. Stanowi ono dodatkowe obciążenie belki (w rozważanym przypadku $q = \alpha q_0 =$ $=$ const), α jest małym parametrem, $A = A(x)$ jest polem powierzchni przekroju poprzecznego belki.

3. Równania stanu dla kolejnych korekt

W metodzie zakłócania kształtu konturu wszystkie nieznane wielkości (łącznie z kształtem brzegu) są rozwijane w szereg małego parametru α:

$$\overline{X} = \sum_{i=0}^{\infty} X_i \alpha^i \tag{11}$$

gdzie:

$$\overline{X} = [\sigma_x(x,z), \sigma_z(x,z), \tau_{xz}(x,z), h(x)]^T \tag{12}$$

Analiza jest przeprowadzana dla górnej części belki ($0 \le z \le h_u(x)$) oraz niezależnie dla części dolnej ($h_d(x) \le z \le 0$).

Warunki równowagi wewnętrznej są liniowe, więc ich rozwinięcie w szereg małego parametru ma dokładnie taką samą formę dla każdej korekty i, $i = 1, 2, 3, ...$, którą można uzyskać wprost z (1). Warunek plastyczności HMH jest nieliniowy, lecz po rozwinięciu go w szereg oraz po uwzględnieniu przybliżenia zerowego $\sigma_{x0u} = \sigma_0$, $\sigma_{x0d} = -\sigma_0$, $\sigma_{z0} = \tau_{xz0} = 0$, otrzymujemy liniowe zależności pomiędzy poszczególnymi wyrazami rozwinięcia:

$$\sigma_{xi} - \sigma_{zi} = f_i \lfloor \sigma_{x(i-1)}, \sigma_{z(i-1)}, \tau_{xz(i-1)}, \ldots \rfloor \tag{13}$$

gdzie:

$$f_1 = 0$$

$$f_{2u} = -\frac{\sqrt{3}}{\sigma_0}\tau_{xz1u}^2 \quad \text{dla górnej połowy belki}$$

$$f_{2d} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0}\tau_{xz1u}^2 \quad \text{dla dolnej połowy belki} \tag{14}$$

.

.

.

Z układu liniowych równań równowagi (1) oraz warunku plastyczności (13) możemy wyeliminować dwie składowe stanu naprężenia, otrzymując równanie na trzecią składową:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xi}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2} \tag{15}$$

W rozważanym przypadku siła poprzeczna zmienia się liniowo, a moment kwadratowo, więc będziemy szukać rozwiązania powyższego równania w dziedzinie wielomianów.

Rozwijając w szereg małego parametru α warunki brzegowe dane (7) oraz (8), trzeba pamiętać, że naprężenia oraz h zależą od α. Nieznana wysokość belki $h(x)$ jest przedmiotem rozwinięcia w szereg Taylora wokół punktu $z = h_0$. Otrzymujemy, podobnie jak w pracy [3]:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^i\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\tau_{xzi}}{\partial z^k}\bigg|_{z=h_0}[\alpha^m h_m(x)]^k=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^i\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\sigma_{xi}}{\partial z^k}\bigg|_{z=h_0}[\alpha^m h_m(x)]^k\alpha^l h_l'(x)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^i\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\sigma_{zi}}{\partial z^k}\bigg|_{z=h_0}[\alpha^m h_m(x)]^k=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^i\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\tau_{xzi}}{\partial z^k}\bigg|_{z=h_0}[\alpha^m h_m(x)]^k\alpha^l h_l'(x) \tag{16}$$

Podnoszenie do potęgi k szeregów może być zrealizowane wg formuły zaproponowanej w [8]. Ostatecznie po obu stronach równości danej (16) otrzymamy zwykłe szeregi małego parametru α. W związku z tym współczynniki przy α^i po obu stronach równości muszą być sobie równe.

4. Korekty kształtu oraz naprężeń

Podstawiając h_0 = const, $\sigma_{x0} = 2/\sqrt{3}\,\sigma_0$ = const oraz $\tau_{xz0} = \sigma_{z0} = 0$ do warunków brzegowych danych równaniem (16), otrzymamy postać warunków brzegowych dla pierwszej poprawki:

$$\begin{aligned}\tau_{xz1u}(x,h_0)&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 h_{1u}'(x)\\ \sigma_{z1u}(x,h_0)&=-\frac{q_0}{b}\end{aligned}\qquad \text{dla górnego brzegu belki} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz1d}(x,-h_0)&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 h_{1d}'(x)\\ \sigma_{z1d}(x,-h_0)&=0\end{aligned}\qquad \text{dla dolnego brzegu belki} \tag{18}$$

Dla pierwszej poprawki rozwiązanie równania (15) można przyjąć w następującej formie:

$$\sigma_{x1u}=\sigma_{x1d}=a_0+a_1 z \tag{19}$$

Drugie równania w związkach (17) i (18) muszą być spełnione dla dowolnego x. Dlatego ze względu na postać (19) współczynniki a_0 i a_1 muszą być równe:

$$a_1=-\frac{1}{2}\frac{q_0}{bh_0}\qquad a_0=-\frac{1}{2}\frac{q_0}{b} \tag{20}$$

Biorąc pod uwagę powyższe, pierwsza poprawka naprężenia σ_{x1} przyjmie następującą postać:

$$\sigma_{x1}=-\frac{1}{2}\frac{q_0}{bh_0}(z+h_0) \tag{21}$$

Następnie z pierwszego równania (1) można obliczyć pierwszą poprawkę τ_{xz1}:

$$\frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \tau_{xz1} = a_2(x) \tag{22}$$

Wykorzystując drugie równanie (1) oraz biorąc pod uwagę równanie (13), otrzymamy:

$$\frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial z} = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}\frac{q_0}{bh_0}x + a_3 \tag{23}$$

Z pierwszych równań (17) i (18) można wyliczyć pierwszą poprawkę kształtu dla brzegów górnego i dolnego belki.

$$\begin{aligned} h_{1u} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sigma_0}\left[\frac{1}{4}\frac{q_0}{bh_0}x^2 + a_3 x + a_4\right] \\ h_{1d} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sigma_0}\left[\frac{1}{4}\frac{q_0}{bh_0}x^2 + a_3 x + a_3\right] \end{aligned} \tag{24}$$

Z warunku równowagi sił przekrojowych dla siły poprzecznej otrzymamy:

$$\int_{h_d}^{h_0} (\alpha\tau_{xz1} + ...)\, dz = \alpha\frac{q_0}{b}x \tag{25}$$

Spełnienie powyższego równania na szczeblu pierwszej poprawki wymaga, aby $a_3 = 0$.
Z warunku równowagi sił przekrojowych dla siły normalnej otrzymamy:

$$\int_{h_d}^{0}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 + \alpha\sigma_{x1} + ...\right)dz + \int_{0}^{h_u}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 + \alpha\sigma_{x1} + ...\right)dz = 0 \tag{26}$$

Spełnienie powyższego równania wymaga, by:

$$a_3 = a_4 - \frac{q_0 h_0}{b} \tag{27}$$

Z warunku równowagi sił przekrojowych dla momentu zginającego otrzymamy:

$$\int_{h_d}^{0} (-\sigma_0 + \alpha\sigma_{x1} + ...)\, zdz + \int_{0}^{h_u} (\sigma_0 + \alpha\sigma_{x1} + ...)\, zdz = \sigma_0 h_0^2 + \frac{1}{2}\frac{q_0}{b}\alpha x^2 \tag{28}$$

Spełnienie warunku wymaga, aby:

$$a_4 = \frac{2}{3}\frac{q_0 h_0}{b} \tag{29}$$

Ostatecznie otrzymamy następujące formuły określające wyrazy szeregu stanowiące pierwszą poprawkę:

$$\sigma_{x1} = \sigma_{z1} = -\frac{1}{2}\frac{q_0}{bh_0}(z + h_0)$$

$$\tau_{xz1} = \frac{1}{2}\frac{q_0}{bh_0}x \tag{30}$$

$$h_{1u} = \frac{\sqrt{3}q_0}{\sigma_0 bh_0}\left[\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{3}h_0^2\right]$$

$$h_{1d} = -\frac{\sqrt{3}q_0}{\sigma_0 bh_0}\left[\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{6}h_0^2\right]$$

Warunki brzegowe na szczeblu drugiej poprawki, wynikające z (16), są następujące:

$$\begin{gathered}
\tau_{xz2u}\big|_{z=h_0} + \tau'_{xz1u}\big|_{z=h_0} h_{1u} - \sigma_{x1u}\big|_{z=h_0} h'_{1u} - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 h'_{2u} = 0 \\
\tau_{xz2d}\big|_{z=-h_0} + \tau'_{xz1d}\big|_{z=-h_0} h_{1d} - \sigma_{x1d}\big|_{z=-h_0} h'_{1d} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 h'_{2d} = 0 \\
\tau_{xz1u}\big|_{z=h_0} h'_{1u} - \sigma'_{z1u}\big|_{z=h_0} h_{1u} - \sigma_{z2u}\big|_{z=h_0} = 0 \\
\tau_{xz1d}\big|_{z=-h_0} h'_{1d} - \sigma'_{z1d}\big|_{z=-h_0} h_{1d} - \sigma_{z2d}\big|_{z=-h_0} = 0
\end{gathered} \tag{31}$$

Równanie równowagi (15) przybierze następującą postać:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\sigma_{x2u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_{x2u}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dla górnej połowy belki} \\
&\frac{\partial^2\sigma_{x2d}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_{x2d}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dla dolnej połowy belki}
\end{aligned} \tag{32}$$

Dla drugiej poprawki rozwiązanie równania (32) może być zapisane następująco:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x2u} &= a_0 + a_1 z + a_2 x^2 + a_3 z^2 + a_4 x^2 z + a_5 z^3 \\
\sigma_{x2d} &= b_0 + b_1 z + b_2 x^2 + b_3 z^2 + b_4 x^2 z + b_5 z^3
\end{aligned} \tag{33}$$

Spełnienie równania wymaga:

$$\begin{aligned}
a_4 &= 3a_5 \\
a_2 &= a_3 \\
b_4 &= 3b_5 \\
b_2 &= b_3
\end{aligned} \tag{34}$$

Z równań równowagi (1) oraz uwzględniając (13), możemy obliczyć drugą korektę naprężenia stycznego τ_{xz2}:

$$\begin{aligned}
\tau_{xz2u} &= -2a_3 xz - 3a_5 xz^2 - a_1 x - a_5 x^3 + a_6 \\
\tau_{xz2d} &= -2b_3 xz - 3b_5 xz^2 - b_1 x - b_5 x^3 + b_6
\end{aligned} \tag{35}$$

Z trzeciego i czwartego równania (31), które powinny być spełnione dla dowolnego x, oraz uwzględniając (33), otrzymamy następujące równania:

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{16}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^2} - 3h_0 a_5 \\
a_0 &= -h_0 a_1 + \frac{11\sqrt{3}}{48}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2} + 2h_0^3 a_5 \\
b_3 &= \frac{\sqrt{3}}{16}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^2} + 3h_0 b_5 \\
b_0 &= h_0 b_1 + \frac{\sqrt{3}}{48}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2} - 2h_0^3 b_5
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Spełniając pierwsze i drugie równanie (31), otrzymamy drugie korekty konturu belki:

$$
\begin{aligned}
h_{2u} &= \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0}\left[\left(\frac{3\sqrt{3}}{16}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0} + \frac{3}{2}h_0^2 a_5 - \frac{1}{2}a_1\right)x^2 - \frac{1}{4}a_5 x^4 + a_6 x\right] + a_7 \\
h_{2d} &= -\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0} + \frac{3}{2}h_0^2 b_5 - \frac{1}{2}b_1\right)x^2 - \frac{1}{4}b_5 x^4 + b_6 x\right] + b_7
\end{aligned}
\tag{37}
$$

W dalszej kolejności powinno się spełnić równanie równowagi siły normalnej w przekroju belki (9):

$$
\int_{h_d}^{0}\left(-\sigma_0 + \alpha\sigma_{x1d} + \alpha^2\sigma_{x2d} + \ldots\right)dz + \int_{0}^{h_u}\left(\sigma_0 + \alpha\sigma_{x1u} + \alpha^2\sigma_{x2u} + \ldots\right)dz = 0 \tag{38}
$$

otrzymując jako rezultat następujące zależności:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= b_1 \\
a_5 &= b_5 \\
a_6 &= b_6 \\
b_7 &= \frac{1}{8}\frac{q_0^2 h_0}{\sigma_0^2 b^2} - a_7 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a_5 h_0^4}{\sigma_0}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Warunek równowagi siły poprzecznej w przekroju belki stosownie do (9) przyjmie postać:

$$
\int_{h_d}^{0}\left(\alpha\tau_{xz1d} + \alpha^2\tau_{xz2d} + \ldots\right)dz + \int_{0}^{h_u}\left(\alpha\tau_{xz1u} + \alpha^2\tau_{xz2u} + \ldots\right)dz = 0 \tag{40}
$$

W wyniku spełnienia tego równania otrzymamy następujące zależności:

$$a_5 = \frac{\sqrt{3}}{16}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^3}$$

$$a_1 = \frac{11\sqrt{3}}{48}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0} \tag{41}$$

$$a_6 = b_6 = 0$$

Ostatecznie spełniając warunek równowagi momentu zginającego w przekroju belki (9):

$$\int_{h_d}^{0}\left(-\sigma_0 + \alpha\sigma_{x1d} + \alpha^2\sigma_{x2d} + ...\right)zdz + \int_{0}^{h_u}\left(\sigma_0 + \alpha\sigma_{x1u} + \alpha^2\sigma_{x2u} + ...\right)zdz = 0 \tag{42}$$

otrzymamy:

$$a_7 = \frac{221}{480}\frac{q_0^2 h_0}{\sigma_0 b^2} \tag{43}$$

Otrzymaliśmy następujący zestaw wyrażeń na drugie korekty:

$$\sigma_{x2u} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^3}\left[\frac{1}{2}h_0^3 + \frac{11}{12}h_0^2 z - h_0 x^2 - h_0 z^2 + \frac{3}{4}x^2 z + \frac{1}{4}z^3\right]$$

$$\sigma_{x2d} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^3}\left[\frac{1}{2}h_0^3 + \frac{11}{12}h_0^2 z + h_0 x^2 + h_0 z^2 + \frac{3}{4}x^2 z + \frac{1}{4}z^3\right]$$

$$h_{2u} = \frac{3}{64}\frac{q_0^2}{\sigma_0^2 b^2 h_0^3}\left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{16}{3}h_0^2 x^2 + \frac{442}{45}h_0^4\right]$$

$$h_{2d} = \frac{3}{64}\frac{q_0^2}{\sigma_0^2 b^2 h_0^3}\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}h_0^2 x^2 + \frac{158}{45}h_0^4\right] \tag{44}$$

$$\tau_{xz2u} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^3}\left[2h_0 xz - \frac{3}{4}xz^2 - \frac{11}{12}h_0^2 x - \frac{1}{4}x^3\right]$$

$$\tau_{xz2d} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{q_0^2}{\sigma_0 b^2 h_0^3}\left[-2h_0 xz - \frac{3}{4}xz^2 - \frac{11}{12}h_0^2 x - \frac{1}{4}x^3\right]$$

Wprowadzając nowy bezwymiarowy mały parametr:

$$\bar{\alpha} = \alpha\frac{q_0}{\sigma_0 b} \tag{45}$$

do równania (11), otrzymamy ostateczne rozwiązanie w następującej formie:

$$\frac{\sigma_{xu}}{\sigma_0}=1-\bar{\alpha}\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h_0}+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}^2\left[\frac{1}{2}+\frac{11}{12}\frac{z}{h_0}-\left(\frac{x}{h_0}\right)^2-\left(\frac{z}{h_0}\right)^2+\frac{3}{4}\frac{x^2z}{h_0^3}+\frac{1}{4}\left(\frac{z}{h_0}\right)^3\right]$$

$$\frac{\sigma_{xd}}{\sigma_0}=-1-\bar{\alpha}\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h_0}+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}^2\left[\frac{1}{2}+\frac{11}{12}\frac{z}{h_0}+\left(\frac{x}{h_0}\right)^2+\left(\frac{z}{h_0}\right)^2+\frac{3}{4}\frac{x^2z}{h_0^3}+\frac{1}{4}\left(\frac{z}{h_0}\right)^3\right]$$

$$\frac{h_u}{h_0}=1+\bar{\alpha}\sqrt{3}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{x}{h_0}\right)^2+\frac{1}{3}\right]+\frac{3}{64}\bar{\alpha}\left[\frac{16}{3}\left(\frac{x}{h_0}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{h_0}\right)^4+\frac{442}{45}\right]$$

$$\frac{h_d}{h_0}=-1+\bar{\alpha}\sqrt{3}\left[-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{h_0}\right)^2+\frac{1}{6}\right]+\frac{3}{64}\bar{\alpha}^2\left[-\frac{4}{3}\left(\frac{x}{h_0}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{h_0}\right)^4+\frac{158}{45}\right]$$

$$\frac{\tau_{xzu}}{\sigma_0}=\frac{1}{2}\bar{\alpha}\frac{x}{h_0}+\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}^2\left[2\frac{xz}{h_0^2}-\frac{3}{4}\frac{xz^2}{h_0^3}-\frac{11}{12}\frac{x}{h_0}-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{h_0}\right)^3\right]$$

$$\frac{\tau_{xzd}}{\sigma_0}=\frac{1}{2}\bar{\alpha}\frac{x}{h_0}+\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}^2\left[-2\frac{xz}{h_0^2}-\frac{3}{4}\frac{xz^2}{h_0^3}-\frac{11}{12}\frac{x}{h_0}-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{h_0}\right)^3\right] \tag{46}$$

$$\frac{\sigma_{zredu}}{\sigma_0}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}^2\left(\frac{x}{h_0}\right)^2\right)^2+3\left\{\frac{1}{2}\bar{\alpha}^2\frac{x}{h_0}+\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}^2\left[2\frac{xz}{h_0^2}-\frac{3}{4}\frac{xz^2}{h_0^3}-\frac{11}{12}\frac{x}{h_0}-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{h_0}\right)^3\right]\right\}^2$$

$$\frac{\sigma_{zredd}}{\sigma_0}=\frac{3}{4}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}^2\left(\frac{x}{h_0}\right)^2\right)^2+3\left\{\frac{1}{2}\bar{\alpha}^2\frac{x}{h_0}+\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}^2\left[-2\frac{xz}{h_0^2}-\frac{3}{4}\frac{xz^2}{h_0^3}-\frac{11}{12}\frac{x}{h_0}-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{h_0}\right)^3\right]\right\}^2$$

5. Przykład

Jako przykład przeanalizowano belkę wspornikową obciążoną skupionym momentem zginającym oraz stałym obciążeniem ciągłym (rys. 1). Przyjęto, że długość belki jest równa $L = 5h_0$. Wartość bezwymiarowego parametru $\bar{\alpha}$ określa proporcję ścinania w stosunku do zginania. Bezwymiarowy moment zginający oraz siła ścinająca w dowolnym przekroju belki może być zdefiniowana jako:

$$M=\overline{\overline{M}}+\frac{1}{2}\alpha q_0x^2 \quad \Big|:\sigma_0bh_0^2$$

$$\frac{M}{2/\sqrt{3}\,\sigma_0bh_0^2}=\overline{M}=1+\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\alpha}\left(\frac{x}{h_0}\right)^2 \tag{47}$$

$$T=\alpha q_0x$$

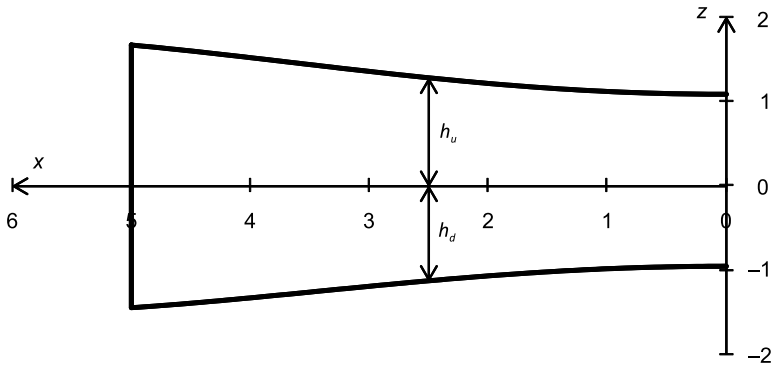
$$\frac{T}{2/\sqrt{3}\,\sigma_0bh_0}=\overline{T}=\bar{\alpha}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{h_0}$$

Dla przekroju w utwierdzeniu:

$$\frac{\overline{T}}{\overline{M}} = \frac{10\sqrt{3}\overline{\alpha}}{4 + 25\sqrt{3}\overline{\alpha}} \tag{48}$$

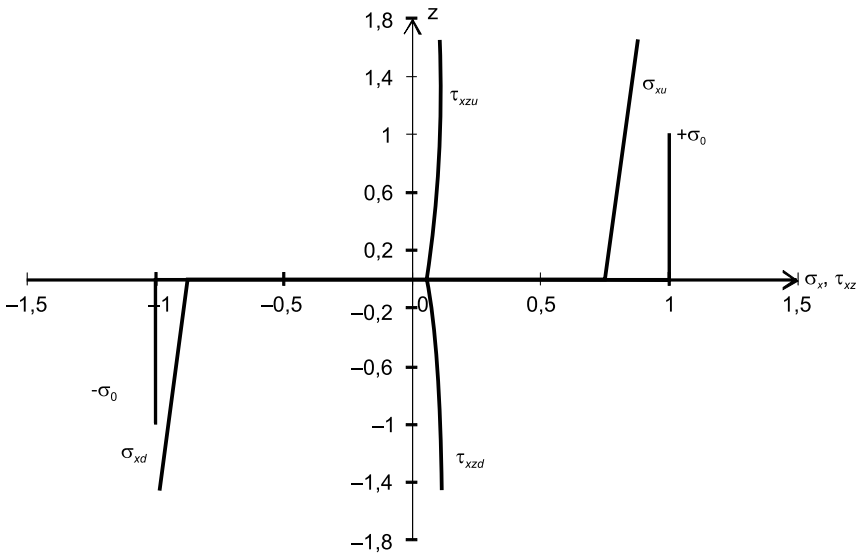
Przyjmując, że proporcja ścinania do zginania może wynieść maksymalnie do 25%, otrzymamy $\overline{\alpha} = 4\sqrt{3}/45$.

Dla powyższych danych optymalny kształt belki przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Kształt optymalny belki

Fig. 2. Optimal shape of beam



Rys. 3. Rozkład naprężeń normalnych (σ_x) i stycznych (τ_{xz}) w przekroju utwierdzonym: $x = L$

Fig. 3. Distribution of normal stress (σ_x) and shear stress (τ_{xz}) in the clamped section: $x = L$

6. Oszacowanie zbieżności

Zbieżność szeregu oszacowano dla $\bar{\alpha} = 4\sqrt{3}/45$, badając szybkość zbieżności dla przekroju utwierdzonego w przypadku konturu h_u.

Podstawiając $x = 5h_0$ do wzoru (46), otrzymamy:

$$h_u = 1 + 5{,}99\bar{\alpha} - 7{,}94\bar{\alpha}^2 \tag{49}$$

Dla $\bar{\alpha} = 4\sqrt{3}/45$ otrzymamy kolejne wyrazy szeregu: 1; 0,92; –0,19, które pozwolą oszacować błąd wynikający z pominięcia pozostałych wyrazów szeregu.

Dość dokładne ilościowe oszacowanie błędu można uzyskać, stosując formułę Aitkena lub formułę zaproponowaną przez Życzkowskiego [8] bazującą na dwumianowym szeregu potęgowym. Oznaczmy kolejne wyrazy szeregu jako $b_n x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, a częściowe sumy szeregu przez $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$. Szukamy aproksymacji elementu a_∞. Korzystając z formuły Życzkowskiego, otrzymamy następujący wynik:

$$a_\infty = b_0 \left[1 + \frac{b_1 x}{m b_0} \right]^m, \quad m = \frac{b_1^2}{b_1^2 - 2 b_0 b_2} \tag{50}$$

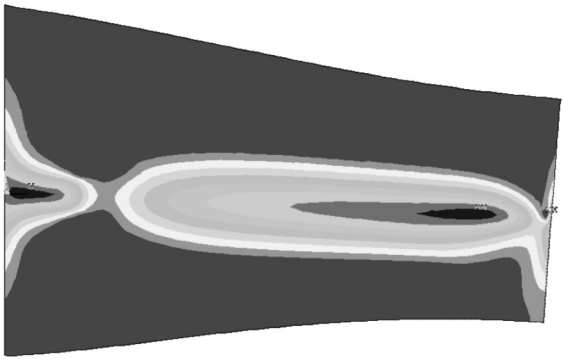
Dla wzoru na h_u danego formułą (49) z użyciem metody zakłócania kształtu konturu, dla przekroju utwierdzonego otrzymaliśmy $h_u = 1 + 0{,}92 - 0{,}19 = 1{,}73$. Wykorzystując formułę (50), otrzymujemy wynik 1,80. Zatem błąd wynosi ok. 4%.

7. Weryfikacja otrzymanego rozwiązania za pomocą MES

Analizowany przykład, dla danych: $L = 5h_0$, $\bar{\alpha} = 4\sqrt{3}/45$, $\sigma_0 = 750$ MPa, $q = \bar{\alpha}\sigma_0$, został zweryfikowany metodą elementów skończonych za pomocą programu Ansys. Zastosowano model dwuliniowy, bez wzmocnienia (idealna plastyczność) oraz ośmiowęzłowy dwuwymiarowy element skończony pracujący w płaskim stanie odkształceń. Belkę zamodelowano jak wspornik obciążony momentem skupionym powodującym całkowite uplastycznienie przekroju prostokątnego o wysokości $2h_0$. Następnie belkę optymalną obciążono dodatkowo obciążeniem ciągłym o stałej intensywności.

Na rysunku 4 przedstawiono rozkład naprężenia zredukowanego wg hipotezy HMH dla analizowanego przypadku. Wynika z niego, że grubość stref wykazujących całkowite uplastycznienie jest dość równomierna. Niecałkowite uplastycznienie wynika z zastosowania przybliżonego rozwiązania (szereg potęgowy).

Na rysunku 5 przedstawiono rozkład naprężenia zredukowanego wg hipotezy HMH dla przypadku, w którym proporcja ścinania do zginania wynosi 10% ($\bar{\alpha} = 4\sqrt{3}/225$). Uplastycznienie jest znacznie większe, co świadczy o lepszej zbieżności rozwiązania.



Rys. 4. Rozkład naprężenia zredukowanego wg hipotezy HMH
Fig. 4. Distribution of reduces stress – HMH hipotesis

Rys. 5. Rozkład naprężenia zredukowanego wg hipotezy HMH
Fig. 5. Distribution of reduces stress – HMH hipotesis

8. Wnioski

1. Metoda zakłócania kształtu konturu jest dość efektywna w przypadku poszukiwania rozwiązań konstrukcji wykazujących całkowite uplastycznienie w fazie zniszczenia.
2. W niniejszym artykule przedstawiono przypadek czystego zginania zaburzonego wprowadzeniem ścinania od dodatkowego obciążenia, lecz inne rodzaje obciążeń też mogą być przedmiotem rozważań.
3. Istotną zaletą metody zaburzania kształtu konturu jest uzyskanie rozwiązania analitycznego mogącego służyć jako podstawa do dalszych analiz.
4. Ważną zaletą przedstawionej metody jest zamiana nieliniowego zagadnienia w zadanie liniowe.
5. Metoda nie ma ograniczeń co do rodzaju prawa konstytutywnego. Można rozważać różne prawa fizyczne, jak również inne warunki plastyczności.
6. Rozwiązania elementów konstrukcyjnych z użyciem metody zaburzania kształtu konturu przedstawiono w pracach [1, 2].

Literatura

[1] Egner W., *Optimal plastic shape design of heads of plane tension members with skew bearing surfaces*, Eng. Opt., 32, 2000, 463-483.

[2] Egner W., *Optimal plastic shape design of rotationally symmetric elements with conical bearing surfaces*, J. Theor. Appl. Mech., 4, 38, 2000, 747-765.

[3] Egner W., Kordas Z., Życzkowski M., *Optimal plastic shape design via the boundary perturbation method*, Struct. Optim., 8, 1994, 145-155.

[4] Egner W., Życzkowski M., *Optimal plastic design of a bar under combined torsion, bending and shear*, Struct. Optim., 22, 2001, 394-406.

[5] Kordas Z., Życzkowski M., *Investigation of the shape of non-circular thick-walled cylinders subject to full yielding at the stage of plastic collapse*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Techn., 18, 1970, 839-847.

[6] Egner W., Życzkowski M., *Boundary perturbation method applied to optimal plastic design of beams under bending with shear*, Struct. Multidisc. Optim., 25, 2003, 117-127.

[7] Egner W., *Boundary perturbation method applied to optimal plastic design of beams under concentrated moment and distributed loadings*, Struct. Multidisc. Optim., 42, 2010, 103-110.

[8] Życzkowski M., *Operations on generalized power series*, Z. Angew. Math. Mech., 45, 1965, 235-244.