

RYSZARDA IWANEJKO, JAROSŁAW BAJER*

ZASTOSOWANIE MATEMATYCZNYCH MODELI PROGNOZOWANIA USZKADZALNOŚCI SIECI WODOCIĄGOWEJ NA PRZYKŁADZIE KRAKOWA

APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELS FOR PROGNOZING THE FAILURES IN WATER SUPPLY SYSTEMS – THE KRAKOW CASE STUDY

Streszczenie

Optymalna strategia eksploatacji sieci wodociągowej wody powinna uwzględniać stan aktualny i prognozy. W artykule zaprezentowano zastosowanie wybranych modeli matematycznych, które mogą być wykorzystane do sporządzenia prognoz krótko- i średnioterminowych. Modele zastosowano do prognozowania uszkodzalności sieci wodociągowej miasta Krakowa.

Słowa kluczowe: sieć wodociągowa, sieć dystrybucji wody, uszkodzalność, prognoza

Abstract

The optimal strategy of the water supply system operation should consider the current conditions as well as the future prognosis. In the work some mathematical models have been presented, that may be applied for the both short-term and mid-term predictions. The models have been used for the analysis of failures in the City of Krakow water supply system.

Keywords: water supply system, water distribution system, failures, predictions

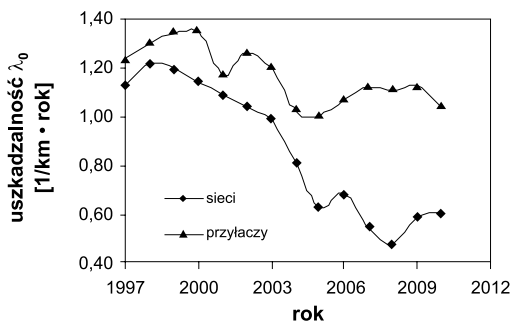
* Dr Ryszarda Iwanejko, dr inż. Jarosław Bajer, Instytut Zaopatrzenia w Wodę i Ochrony Środowiska, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Sieć wodociągowa (sieć dystrybucji wody) jest obiektem strategicznym, który swe zadanie dostarczania wody do odbiorców musi wypełnić w sposób ciągły przez praktycznie nieskończenie długi czas. Elementy sieci podlegają więc procesom starzeniowym, zużyciu, uszkodzeniom. Elementy charakteryzujące się długim czasem pracy tracą swe właściwości i uszkadzają się częściej. Uszkodzone elementy muszą być naprawiane lub wymieniane na nowe. Aby zapewnić optymalne działanie sieci, eksploatator powinien brać pod uwagę uszkadzalność sieci nie tylko w ostatnim okresie, lecz również prognozowaną. W artykule [3] przedstawiono podstawy teoretyczne praktycznych metod prognozowania uszkadzalności sieci. W dalszej części tego artykułu zaaplikowano te metody do prognozowania uszkadzalności przewodów wodociągowych w Krakowie, pomimo że tendencja zmian uszkadzalności nie jest tu rosnąca, jak w wielu miastach polskich. Kraków należy bowiem do tych miast, w których decyzję o rozpoczęciu remontów kapitalnych i prac renowacyjnych sieci wodociągowej podjęto stosunkowo wcześniej. Skutkiem tej polityki jest stopniowe zmniejszanie się uszkadzalności sieci wodociągowej. W tym przypadku wyniki prognoz ułatwią odpowiedź na pytania „czy intensyfikować remonty i zakończyć je wcześniej, aby później uwolnić środki na inne inwestycje?” oraz „jak długo należy prowadzić takie remonty przy stosowanej dotychczas polityce?”

2. Dane do analiz

Na podstawie informacji o długościach i liczbach uszkodzeń przewodów wodociągowych sieci dystrybucji wody w Krakowie [4] wyznaczono uszkadzalności przewodów λ_0 , które zestawiono w tabeli 1 i zilustrowano na rys. 1.



Rys. 1. Uszkadzalność przewodów wodociągowych w Krakowie

Fig. 1. Failure rates in water supply lines in Krakow

Można zauważyć (rys. 1), że uszkadzalność przewodów wykazuje wyraźną tendencję malejącą: w analizowanym okresie uszkadzalność sieci λ_0 (tj. przewodów magistralnych i rozdzielczych) zmalała o ok. 46%, natomiast λ_0 przyłączy zmalała o ok. 15,6%. Dla eksploatatora ważna jest prognoza uszkadzalności sieci na kolejny rok. W tym celu wykorzystano

opisane w [3] metody. W celu uproszczenia obliczeń dokonano rutynowego przekodowania danych i „uwolniono się” od konkretnych dat (liczbowa wartość roku nie ma znaczenia ilościowego).

Tabela 1

**Wyznaczenie uszkodzalności przewodów sieci dystrybucji wody w Krakowie
(na podstawie [4])**

Rok	Liczba awarii			Długość [km]			Uszkodzalność λ_0 [1/km · rok]		
	całkowita	sieci	przyłączy	całkowita	sieci	przyłączy	całkowita	sieci	przyłączy
1997	1823	1334	489	1577,2	1181,6	395,6	1,16	1,13	1,24
1998	2013	1479	534	1619,7	1210,1	409,6	1,24	1,22	1,30
1999	2095	1530	565	1700,4	1277,4	423,0	1,23	1,20	1,34
2000	2074	1484	590	1743,1	1304,9	438,2	1,19	1,14	1,35
2001	1988	1463	525	1785,0	1336,1	448,9	1,11	1,09	1,17
2002	1983	1407	576	1815,2	1358,6	456,6	1,09	1,04	1,26
2003	1917	1360	557	1849,3	1383,0	466,3	1,04	0,98	1,19
2004	1602	1119	483	1870,0	1397,0	473,0	0,86	0,80	1,02
2005	1370	885	485	1902,6	1418,2	484,4	0,72	0,62	1,00
2006	1516	995	521	1927,4	1439,6	487,8	0,79	0,69	1,07
2007	1343	790	553	1946,7	1454,5	492,2	0,69	0,54	1,12
2008	1243	695	548	1968,7	1472,9	495,8	0,63	0,47	1,11
2009	1444	883	561	1996,6	1499,1	497,5	0,72	0,59	1,13
2010	1462	923	539	2036,7	1520,0	516,7	0,72	0,61	1,04

3. Prognozowanie uszkodzalności sieci wodociągowej Krakowa

3.1. Analiza trendu

Wykorzystując dostępną w Excelu formułę REGLINP wyznaczono funkcję regresji i jej podstawowe statystyki (tab. 2).

Funkcja regresji liniowej ma postać $\hat{\lambda}_0 = -0,0613 \cdot i + 1,326$ (rys. 2a). Standardowe błędy oceny parametrów prostej, równe odpowiednio $S_a = 0,0066$ i $S_b = 0,0558$, można uznać za niezbyt duże. Współczynnik $r^2 = 0,879$, stąd współczynnik zbieżności $\varphi^2 = 1 - r^2$ wynosi $\varphi^2 = 1 - 0,879 = 0,121$, co oznacza, że zmienność uszkodzalności λ_0 , która wynika z czynników losowych nie jest wyjaśniona w ok. 12% (równoważnie: zmienność losowa jest wyjaśniona prawie w 88%). Wyniki testów na typ regresji (czy jest prostoliniowa, tj. na istotność parametru a) oraz na losowość reszt e_i dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$ dały wyniki pozytywne.

Tabela 2

Rezultat zastosowania tablicowej formuły REGLINP

Opis	Rezultat zastosowania REGLINP		Opis
a	-0,0613	1,326	b
S_a	0,0066	0,0558	S_b
r^2	0,8792	0,09889	S_y
F	87,32	12	df
SSR	0,8539	0,11735	SSE

Dla przypadku regresji liniowej podstawowy test weryfikujący typ regresji t i alternatywny test F są równoważne [1], więc do porównania wykorzystano wartość F wyznaczoną przez REGLINP (tab. 2). Dla stopni swobody równych odpowiednio 1 i $n - 2 = 12$ wartość krytyczna F , którą można odczytać z tablic [1] lub wyznaczyć w Excelu za pomocą wbudowanej funkcji ROZKŁAD.F.ODW, wynosi $F_{kryt} \approx 4,75$. Ponieważ wyznaczona wartość $F = 87,32 > F_{kryt}$ (tzn. F znajduje się daleko w obszarze krytycznym), więc istnieją podstawy do przyjęcia, że między zmiennymi zachodzi związek liniowy. Do oceny losowości reszt zastosowano medianowy test serii [2]. Dla badanej próby ($n = 14$) uzyskano liczbę serii $k = 4$. Dla przyjętego poziomu istotności $\alpha = 0,05$ z tablic [2] odczytano wartości krytyczne $k_1 = 4$ i $k_2 = 11$. Ponieważ $k_1 \leq k \leq k_2$, więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że próba reszt e_i jest losowa. Po weryfikacji modelu wyznaczono:

- wartości prognoz na kolejne lata i uzyskano: $\hat{\lambda}_0(2011) = 0,407$, $\hat{\lambda}_0(2012) = 0,345$,
- 95% przedział predykcji dla tej prognozy: dla roku 2011 uzyskano $(\lambda_{0d}; \lambda_{0g}) = (0,160; 0,654)$, a dla roku 2012 $(\lambda_{0d}; \lambda_{0g}) = (0,092; 0,6)$,
- 90% przedział predykcji dla tej prognozy dla roku 2011: $(\lambda_{0d}; \lambda_{0g}) = (0,204; 0,61)$ oraz dla 2012: $(\lambda_{0d}; \lambda_{0g}) = (0,138; 0,553)$.

Ze względu na znaczne szerokości tych przedziałów dla obu prognoz w praktyce są one nieprzydatne.

3.2. Model wygładzania wykładniczego

W celu porównania wyników zastosowano dwa modele. Dla prostego modelu Browna parametr wygładzania przyjęto $w = 0,95$, natomiast dla zmodyfikowanego modelu parametr wygładzania przyjęto $\alpha = 0,52$. Prognozy wygaście, uzyskane za pomocą obu modeli wygładzania, praktycznie się pokrywają. Z obu modeli uzyskano prognozy odpowiednio dla prostego modelu: $\hat{\lambda}_0(2011) = \hat{\lambda}_0(2012) = 0,606$ (rys. 2b) oraz dla modelu zmodyfikowanego $\hat{\lambda}_0(2011) = 0,609$ i $\hat{\lambda}_0 = 0,610$. Duża zbieżność wyników może zwiększyć zaufanie do modeli.

3.3. Model trendu pełzającego

Ze względu na znaczną zmienność wartości indeksów $i_{t-1/t}$ do prognozowania przyjęto stałą $k = 3$, co oznaczało konieczność wykonania 12 kroków „pełzania” (pierwszy dla $t = 1 \div 3$, następnie dla $t = 2 \div 4$, $t = 3 \div 5$ itd.). Dla każdego kroku wartości funkcji prognozy dla odpowiedniego zakresu t wyznaczono w Excelu za pomocą formuły REGLINW. Końcowe wartości funkcji prognozy dla okresu bazowego uzyskano, uśredniając wartości prognoz uzyskanych w kolejnych krokach pełzania. Jak widać (rys. 2c), model trendu pełzającego w porównaniu z modelem Browna zapewnił prawie idealną zgodność $\{y_i\}$ i $\{\hat{y}_i\}$ w okresie bazowym. Prognozując uszkodzalność poza okres bazowy uzyskano $\hat{\lambda}_0(2011) = 0,606$ oraz $\hat{\lambda}_0(2012) = 0,588$. Następnie dla porównania dokonano prognoz z innymi wartościami stałej k . Dla okresu bazowego, dla $k = 4$ oraz $k = 7$ uzyskano dobre dopasowanie prognoz wygasłych, lecz różne prognozy. Wyniki prognoz porównawczych zestawiono w tabeli 3 w dalszej części artykułu.

3.4. Model Holta

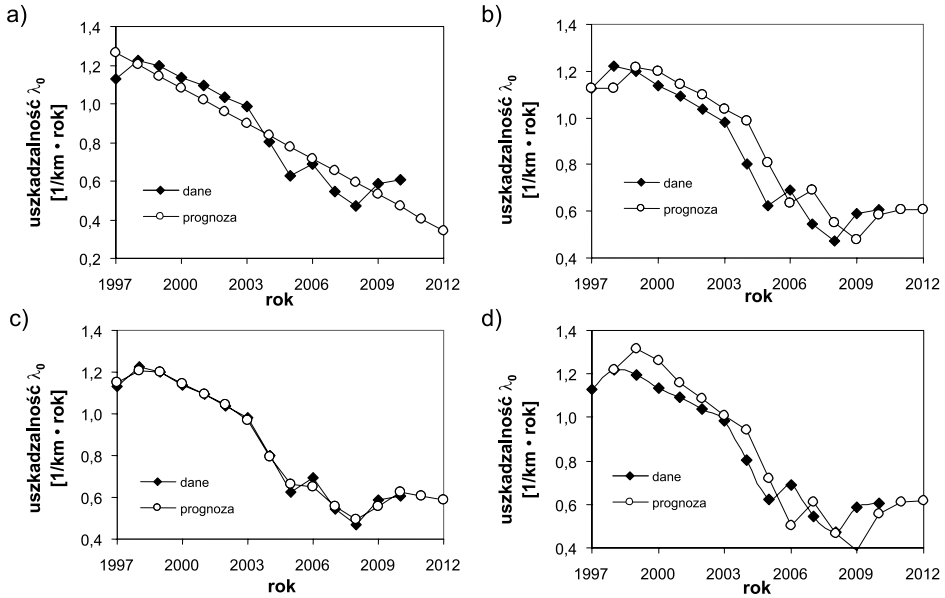
Prognozy $\{\hat{y}_i\}$ wyznaczono za pomocą wzorów (5) i (6) zamieszczonych w [3]. Kierując się stopniem ich „dopasowania” do danych oryginalnych z okresu bazowego $\{y_i\}$, do dalszej analizy przyjęto wartości parametrów $\alpha = 0,9$ oraz $\beta = 0,4$ (rys. 2d). Na podstawie wzoru (6) uzyskano prognozę $\hat{\lambda}_0(2011) = 0,609$ oraz $\hat{\lambda}_0(2012) = 0,616$. Praktyczne zastosowanie modelu Holta może sprawić więcej trudności niż modelu Browna, ale mniej niż zastosowanie modelu trendu pełzającego.

3.5. Analiza wyników prognoz uszkodzalności sieci wodociągowej

Poniżej, na rysunku 2, przedstawiono rezultaty prognozowania uzyskane za pomocą zastosowanych modeli, natomiast w tabeli 3 zestawiono wyniki prognoz uszkodzalności sieci uzyskane za pomocą różnych metod dla lat 2011 i 2012 wykraczających poza okres bazowy.

Najniższą wartość $\hat{\lambda}_0$, zarówno dla roku 2011 jak i dla 2012, uzyskano z ekstrapolacji funkcji regresji. Do wartości tej prognozy można mieć ograniczone zaufanie, zarówno ze względu na szerokość przedziału predykcji, jak i ze względu na zauważalny wzrost λ_0 dla ostatnich lat okresu bazowego. Natomiast wartości uzyskane za pomocą pozostałych metod są zbliżone, uzyskane dla nich błędy *ex post* są niewielkie. Dodatkowo stosunkowo niewielka liczba danych ($n = 14$) wpływa na znaczną niepewność wyników uzyskanych za pomocą modelu trendu. Modele adaptacyjne mogą być stosowane nawet dla krótkiego okresu bazowego, więc wyniki uzyskane z modeli adaptacyjnych są obciążone dużo mniejszą niepewnością. Z powyższego wynika, że uzyskane prognozy (krótko- i średnioterminowa) mogą być użyte do planowania.

Uzyskane wyniki można przełożyć na praktyczne prognozy. Przyjmując w kolejnych latach długość sieci, jak w ostatnim roku okresu bazowego (ok. 1520 km), uzyskuje się



Rys. 2. Prognoza uszkodzalności sieci wodociągowej Krakowa za pomocą modelu:

a) trendu, b) Browna, c) trendu pełzającego, d) Holta

Fig. 2. Failure rate in the Krakow water supply system – predictions according to: a) trend line model, b) Brown's model, c) creeping trend model, d) Holt's model

Tabela 3

Wyniki prognoz uszkodzalności sieci wodociągowej Krakowa

Model		Wynik prognozy $\hat{\lambda}_0(2011)$	Wynik prognozy $\hat{\lambda}_0(2012)$
Analiza trendu		0,407	0,345
Model wygładzania wykładniczego			
– prosty $w = 0,95$		0,606	0,606
– zmodyfikowany $\alpha = 0,52$		0,609	0,610
Trend pełzający			
– $k = 3$		0,606	0,588
– $k = 4$		0,575	0,551
– $k = 7$		0,566	0,525
Model Holta			
– $\alpha = 0,9$ $\beta = 0,1$		0,599	0,595
– $\alpha = 0,9$ $\beta = 0,3$		0,592	0,583
wszystkie modele	min	0,407	0,345
	max	0,609	0,610
modele adaptacyjne	min	0,566	0,525
	max	0,609	0,610
	średnia	0,593	0,580

przewidywaną liczbę uszkodzeń sieci dla roku 2011 w zakresie 921–926, a dla roku 2012 w zakresie 893–937. Jak widać, gdy okres prognozy się wydłuża, to zakresy przewidywanej uszkodzalności poszerzają się.

4. Prognozowanie uszkodzalności połączeń wodociagowych w Krakowie

4.1. Model trendu

Funkcja regresji liniowej dla uszkodzalności połączeń wodociagowych w Krakowie ma postać $\hat{\lambda}_0 = -0,0613 \cdot i + 1,326$ (rys. 3a). Standardowe błędy oceny parametrów prostej, równe odpowiednio $S_a = 0,0066$ i $S_b = 0,0558$, można uznać, że nie są zbyt duże. Współczynnik $r^2 = 0,879$, stąd współczynnik zbieżności $\varphi^2 = 1 - r^2$ wynosi $\varphi^2 = 1 - 0,879 = 0,121$, co oznacza, że zmienność uszkodzalności λ_0 , która wynika z czynników losowych nie jest wyjaśniona w ok. 12% (równoważnie: zmienność losowa jest wyjaśniona prawie w 88%).

Wyniki testów na typ regresji (czy jest prostoliniowa, tj. na istotność parametru a) oraz na losowość reszt e_i dały wynik pozytywny. W tym przypadku, podobnie jak dla uszkodzalności sieci, istnieją podstawy do przyjęcia, że między zmiennymi występuje zależność liniowa. Zachodzi bowiem relacja $F > F_{kryt}$, gdzie wyznaczona wartość $F = 16,02$. Wyznaczono zatem:

- wartości prognoz na kolejne lata i uzyskano: $\hat{\lambda}_0(2011) = 1,01$, $\hat{\lambda}_0(2012) = 0,989$,
- 95% przedział predykcji dla tej prognozy: dla roku 2011 uzyskano $(\lambda_{0d}; \lambda_{0g}) = (0,812; 1,207)$, a dla roku 2012 $(\lambda_{0d}; \lambda_{0g}) = (0,786; 1,192)$,
- 90% przedział predykcji dla tej prognozy dla roku 2011: $(\lambda_{0d}; \lambda_{0g}) = (0,848; 1,171)$ oraz dla 2012: $(\lambda_{0d}; \lambda_{0g}) = (0,823; 1,155)$.

Podobnie jak dla sieci, ze względu na znaczne szerokości tych przedziałów dla obu prognoz, w praktyce są one nieprzydatne.

4.2. Model wygładzania wykładniczego

Podobnie jak dla sieci (punkt 3.2), prognozy wygasłe, uzyskane za pomocą obu modeli wygładzania ($w = 0,86$; $\alpha = 0,41$), praktycznie się pokrywają. Z obu modeli uzyskano prognozy odpowiednio dla prostego modelu: $\hat{\lambda}_0(2011) = \hat{\lambda}_0(2012) = 1,055$ (rys. 3b). Podobnie jak dla sieci, modele Browna zapewniły znacznie lepsze dopasowanie $\{\hat{y}_t\}$ do dynamicznego szeregu empirycznego $\{y_t\}$.

4.3. Model trendu pełzającego

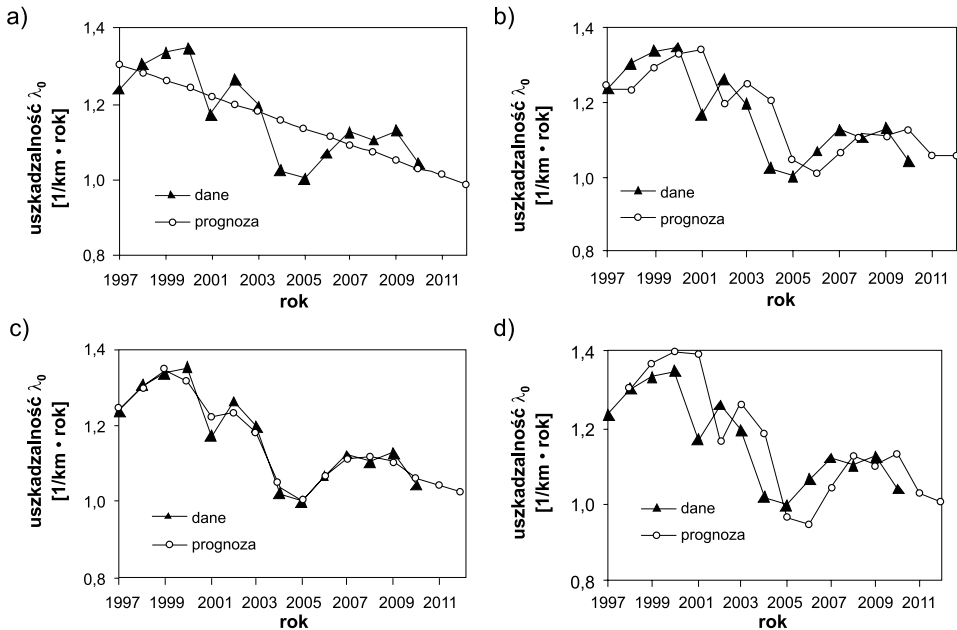
W tym przypadku jedynie model trendu pełzającego dla $k = 3$ zapewnił najlepsze dopasowanie $\{\hat{y}_t\}$ do $\{y_t\}$ w okresie bazowym (rys. 3c). Prognozując z parametrem $k = 3$ uszkodzalność poza okres bazowy uzyskano $\hat{\lambda}_0(2011) = 1,044$ oraz $\hat{\lambda}_0(2012) = 1,027$. Podobnie jak dla sieci, model trendu pełzającego bardzo dobrze opisał szereg empiryczny $\{y_t\}$.

4.4. Model Holta

Do analizy przyjęto wartości parametrów $\alpha = 0,95$ oraz $\beta = 0,3$. Na podstawie wzoru (6) z pracy [3] uzyskano prognozę $\hat{\lambda}_0(2011) = 1,028$ oraz $\hat{\lambda}_0(2012) = 1,009$ (rys. 3d). Podobnie jak dla sieci, model Holta dość dobrze opisał szereg empiryczny $\{y_t\}$.

4.5. Analiza wyników prognoz uszkodzalności podłączeń wodociągowych

Rezultaty prognozowania uszkodzalności podłączeń wodociągowych w Krakowie przedstawiono na rys. 3. Dodatkowo w tabeli 4 zestawiono wyniki prognoz uszkodzalności podłączeń wodociągowych w Krakowie uzyskane za pomocą różnych metod dla lat 2011 i 2012 wykraczających poza okres bazowy (1997–2010).



Rys. 3. Prognoza uszkodzalności podłączeń wodociągowych w Krakowie za pomocą modelu: a) trendu, b) Browna, c) trendu pełzającego, d) Holta

Fig. 3. Failure rate in the Krakow water supply connections – predictions according to: a) trend model, b) Brown's model, c) creeping trend model, d) Holt's model

Najniższą wartość $\hat{\lambda}_0$ dla podłączeń wodociągowych w Krakowie, zarówno dla roku 2011, jak i dla 2012, podobnie jak dla przewodów sieci (punkt 2.5) uzyskano z ekstrapolacji funkcji regresji i podobnie jak poprzednio, do wartości tej prognozy można mieć ograniczone zaufanie. Wartości uzyskane za pomocą pozostałych metod są zbliżone, uzyskane dla nich błędy *ex post* są niewielkie.

Uzyskane wyniki można przełożyć na praktyczne prognozy. Przyjmując w kolejnych latach długość podłączeń jak w ostatnim roku okresu bazowego (ok. 516,7 km), uzyskuje się

przewidywaną liczbę uszkodzeń sieci dla roku 2011 w zakresie 531–545, a dla roku 2012 w zakresie 521–545. Jak można było przypuszczać, różnice dla kolejnych lat (gdy okres prognozy się wydłuża) rosną.

Tabela 4

Wyniki prognoz uszkodzalności połączeń wodociągowych w Krakowie

Model		Wynik prognozy $\hat{\lambda}_0(2011)$	Wynik prognozy $\hat{\lambda}_0(2012)$
Analiza trendu		1,010	0,989
Model wygładzania wykładniczego			
– prosty $w = 0,86$		1,055	1,055
– zmodyfikowany $\alpha = 0,41$		1,056	1,061
Trend pełzający ($k = 3$)		1,044	1,027
Model Holta ($\alpha = 0,95; \beta = 0,3$)		1,028	1,009
wszystkie modele	min	1,010	0,989
	max	1,055	1,055
modele adaptacyjne	min	1,028	1,009
	max	1,055	1,055

5. Wnioski

- W artykule do prognozowania uszkodzalności sieci wodociągowej miasta Krakowa zastosowano klasyczny model trendu i modele adaptacyjne.
- Przeprowadzona analiza potwierdziła dobre dopasowania adaptacyjnych szeregów modelowych do szeregu empirycznego, a tym samym przydatność modeli adaptacyjnych do opisu przebiegu zjawiska uszkodzalności sieci wodociągowej.
- Wizualna ocena stopnia dopasowania adaptacyjnych szeregów modelowych $\{\hat{y}_t\}$ (tj. szeregów uzyskanych za pomocą modelu trendu, Browna, trendu pełzającego, Holta) do szeregu empirycznego $\{y_t\}$, zarówno dla sieci, jak i dla połączeń wodociągowych, wskazała na najlepsze, bo prawie idealne dopasowanie z wykorzystaniem modelu trendu pełzającego. W tym przypadku szereg modelowy odzwierciedla wszystkie nieregularności szeregu empirycznego. Dobre dopasowania, lecz z pewnym przesunięciem czasowym, uzyskano za pomocą modelu wygładzania wykładniczego Browna. Szereg modelowy Holta, w stosunku do szeregu empirycznego, oprócz przesunięcia czasowego wykazywał wzrost wartości $\{\hat{y}_t\}$ na początku okresu bazowego, lecz ten fakt zazwyczaj nie ma wpływu na prognozy docelowe (poza okresem bazowym). Najgorszym modelem, zgodnie z przypuszczeniem, okazał się klasyczny model trendu. Dlatego nie jest on zalecany do opisu szeregów dynamicznych.

- Wartości uzyskane za pomocą metod adaptacyjnych są zbliżone, uzyskane dla nich, a błędy *ex post* są niewielkie. Przyjmuje się, że jeśli średni błąd względny prognozy *ex post* nie przekracza 5%, to prognozę uznaje się za dopuszczalną.
- Dla analizowanych danych w modelach adaptacyjnych uzyskano niewielkie błędy, co oznacza, że uzyskane za pomocą tych modeli prognozy (krótko- i średnioterminowa) mogą być przydatne do planowania.
- Należy pamiętać, że niezależnie od modelu, wiarygodność prognozy maleje wraz z wydłużaniem się horyzontu prognozy.
- Uzyskane prognozy będą wiarygodne, jeśli istotnej zmiany nie ulegnie strategia eksploatacyjna ani nie wystąpią ekstremalne zjawiska pogodowe (np. ostre mrozy).
- Prowadzone w Krakowie, optymalna strategia eksploatacyjna i konsekwentna polityka remontów generalnych, powinny skutkować ciągłym zmniejszaniem się uszkodzalności przewodów. Jednak prognozowane wartości λ_0 nadal przekraczają zalecane wartości progowe (dla przewodów magistralnych 0,3 [1/km · rok], dla przewodów rozdzielczych 0,5 [1/km · rok] i dla połączeń 1,0 [1/km · rok] [5]), co oznacza, że należy kontynuować strategię eksploatacyjną, a w szczególności nie należy „zwalniać” tempa remontów generalnych.
- „Przełożenie” uszkodzalności przewodów na przewidywaną liczbę uszkodzeń daje możliwość wyznaczenia teoretycznie optymalnej liczby brygad remontowych.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w ramach projektu rozwojowego Nr N R14 0006 10 nt. „Opracowanie kompleksowej metody oceny niezawodności i bezpieczeństwa dostawy wody do odbiorców”.

Literatura

- [1] A c z e l A., *Statystyka w zarządzaniu*, PWN, Warszawa 2000, 486, 496-497, 966-967.
- [2] D o m a ń s k i C z., *Testy statystyczne*, PWE, Warszawa 1990, 34-42, 252-259.
- [3] I w a n e j k o R., B a j e r J., *Teoretyczne podstawy prognozowania uszkodzalności sieci wodociągowej*, Czasopismo Techniczne z. 2-Ś/2012, Kraków 2012.
- [4] S z y d ł o w s k i J., *Awaria sieci wodociągowej – organizacja i działanie*, Czasopismo MPWiK Kraków „Woda i My”, 9/2010, Kraków 2010.
- [5] R a k J., *Podstawy bezpieczeństwa systemów zaopatrzenia w wodę*, Monografie KiS PAN, vol. 28, Lublin 2005, 113-119.